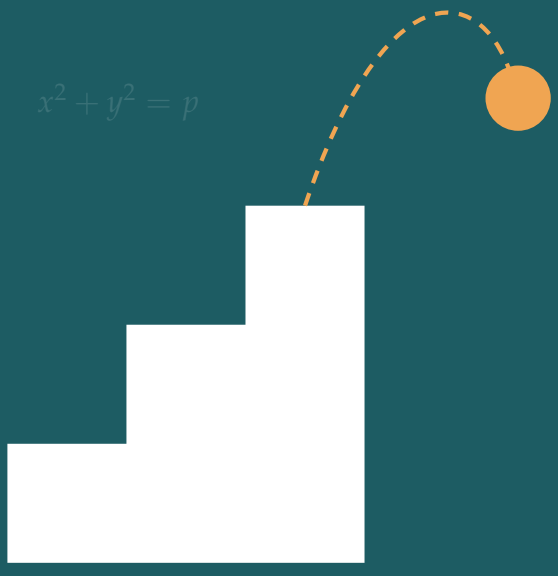
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

2019 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

2019 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

2019 年解答例

2019 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 35 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 三角関数の最適化 純粋数学 . . . 3
Q2 媒介変数表示された曲線の接線 純粋数学 . . . 7
Q3 積分 純粋数学 . . . 11
Q4 四次方程式の因数分解 純粋数学 . . . 14
Q5 空間ベクトル 純粋数学 . . . 18
Q6 不等式と評価 純粋数学 . . . 23
Q7 無理性と合同式 純粋数学 . . . 28
Q8 置換積分 純粋数学 . . . 32
Q9 転倒と摩擦 力学 . . . 35
Q10 放物運動 力学 . . . 39
Q11 幾何分布 確率・統計 . . . 43

STEP II

Q1 3次関数の接線 純粋数学 . . . 47
Q2 逆関数の積分 純粋数学 . . . 51
Q3 多項式の根の評価 純粋数学 . . . 55
Q4 望遠鏡型の三角関数の積 純粋数学 . . . 59
Q5 反復の不動点 純粋数学 . . . 62
Q6 一階微分方程式 純粋数学 . . . 67
Q7 ベクトルと内積 純粋数学 . . . 73
Q8 乗法的な行列関数 純粋数学 . . . 77
Q9 原点からの放物体の距離 力学 . . . 81
Q10 剛体のつり合い 力学 . . . 85
Q11 三角形の数え上げ 確率・統計 . . . 90

Q12 連続分布と分位数 確率・統計 95

STEP III

Q1 連立微分方程式 純粋数学 100
Q2 関数方程式 純粋数学 105
Q3 行列の不変直線 純粋数学 109
Q4 解と係数の関係 純粋数学 114
Q5 置換積分 純粋数学 118
Q6 複素数平面上の円 純粋数学 122
Q7 曲線の概形 純粋数学 126
Q8 ベクトルと空間図形 純粋数学 132
Q9 動く半球上の質点 力学 136
Q10 斜め衝突 力学 141
Q11 ポアソン間引き 確率・統計 145
Q12 ランダムな部分集合 確率・統計 149

解答例

STEP I 2019、第 1 問

純粋数学 ・ 三角関数の最適化

> **STEP I 2019、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP I の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべては直線が座標軸と交わる位置から導かれる。周の長さ（perimeter）については、定点 $P = (1, k)$ が斜辺（hypotenuse）XY を二つの部分に分け、そのそれぞれが一辺の長さのわかっている小さな直角三角形（right-angled triangle）の斜辺になっている。そのため、平方根を展開する必要はない。最小値については、面積は積が一定である二つの項の和（相加相乗平均（AM–GM）が使える状況）であり、周の長さの導関数（derivative）は $\cos^2\theta = (1 - \sin\theta)(1 + \sin\theta)$ を用いると見事に簡単になる。

解答

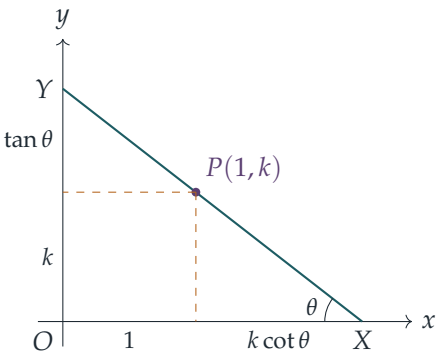
$(1, k)$ を通り傾き $-\tan\theta$ の直線は

$$y - k = -\tan\theta\,(x - 1).$$

である。$y = 0$ とおくと $x - 1 = k\cot\theta$ が得られ、$x = 0$ とおくと $y = k + \tan\theta$ が得られるので、

$$X = (1 + k\cot\theta,\ 0), \qquad Y = (0,\ k + \tan\theta).$$

となる。$k > 0$ かつ $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ であるから、二つの切片（intercept）はともに正であり、OXY は第 1 象限にあるまっとうな直角三角形で、$P = (1, k)$ はその斜辺上にある。



小問 (i)

この三角形は O で直角をなすので、

$$A = \tfrac{1}{2}(1 + k\cot\theta)(k + \tan\theta) = \tfrac{1}{2}\left(k + \tan\theta + k^2\cot\theta + k\right)$$
$$= k + \tfrac{1}{2}\left(\tan\theta + k^2\cot\theta\right),$$

となる。ここで $\cot\theta\tan\theta = 1$ を用いた。

最小値を求める。$\tan\theta$ と $k^2\cot\theta$ はともに正であり、その積は定数 k^2 である。相加相乗平均の不等式（AM–GM inequality）により、

$$\tan\theta + k^2\cot\theta \geq 2\sqrt{\tan\theta \cdot k^2\cot\theta} = 2k,$$

であり、等号が成り立つのは $\tan\theta = k^2\cot\theta$、すなわち $\tan\theta = k$ のときに限る（$k > 0$ であるから、これは範囲内のある θ で実現される）。したがって $A \geq k + k = 2k$ であり、

$$A_{\min} = 2k.$$

である。（微分しても同じ結果が得られる：$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{2}(\sec^2\theta - k^2\operatorname{cosec}^2\theta) = 0$ となるのは $\tan^2\theta = k^2$ のときである。）最小のとき $X = (2, 0)$、$Y = (0, 2k)$ であるから、P は XY の中点（midpoint）である。

小問 (ii)

直角をはさむ二辺は $OX = 1 + k\cot\theta$ と $OY = k + \tan\theta$ である。斜辺については、図のように P で二つに分ける。

- P から Y まで：水平方向の移動量は 1 であり、直線は水平方向と角 θ をなすので、$PY = 1/\cos\theta = \sec\theta$ である。
- P から X まで：鉛直方向の下がり幅は k であるので、$PX = k/\sin\theta = k\operatorname{cosec}\theta$ である。

四つの長さを足し合わせると、

$$L = 1 + \tan\theta + \sec\theta + k\big(1 + \cot\theta + \operatorname{cosec}\theta\big),$$

となり、示すべき式が得られた。

考えてみよう 導関数には $\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta$ が含まれる。これを 0 とおく前に、ずっと簡単な形にする方法はないだろうか？

ある。項ごとに微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta} = \sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta - k\big(\operatorname{cosec}^2\theta + \operatorname{cosec}\theta\cot\theta\big) = \frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta} - k\,\frac{1+\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

となる。ここで $\cos^2\theta = (1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$、$\sin^2\theta = (1-\cos\theta)(1+\cos\theta)$ であり、$1+\sin\theta$、$1+\cos\theta$ は 0 でないので、約分できる：

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{1-\sin\theta} - \frac{k}{1-\cos\theta}.$$

これが 0 になるのは、ちょうど $1-\cos\theta = k(1-\sin\theta)$ のときである。よって最小値は $\theta = \alpha$ でとられ、

$$\frac{1-\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = k,$$

が成り立つ。これが示すべきことであった。（実際、この停留点（stationary point）はただ一つであり、最小点である：θ が $(0, \frac{1}{2}\pi)$ で増加するにつれて、$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}$ の第 1 項は増加し、第 2 項は減少する。したがって $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}$ は増加関数であり、負から正へちょうど一度だけ符号を変える。）

考えてみよう 最小値から k を消去するにはどうすればよいだろうか？

L の項を通分してまとめる：

$$1 + \tan\alpha + \sec\alpha = \frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}, \qquad 1 + \cot\alpha + \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

$s = \sin\alpha$、$c = \cos\alpha$ とおき、$k = \dfrac{1-c}{1-s}$ とすると、第 2 の部分は

$$k\,\frac{1+s+c}{s} = \frac{(1+s+c)(1-c)}{s(1-s)} = \frac{1+s-sc-c^2}{s(1-s)} = \frac{s^2+s-sc}{s(1-s)} = \frac{1+s-c}{1-s},$$

となる。ここで $1-c^2 = s^2$ を用いた。したがって

$$\begin{aligned} L_{\min} = \frac{1+s+c}{c} + \frac{1+s-c}{1-s} &= \frac{(1+s+c)(1-s)+c(1+s-c)}{c(1-s)} \\ &= \frac{1-s^2+c-sc+c+sc-c^2}{c(1-s)} \\ &= \frac{2c}{c(1-s)}, \end{aligned}$$

である。$1 - s^2 - c^2 = 0$ だからである。よって

$$L_{\min} = \frac{2}{1 - \sin\alpha}.$$

である。

検算

$k = 1$ とする。このとき $\tan\theta = 1$ から $X = (2,0)$、$Y = (0,2)$、$A = 2 = 2k$ となり、予想どおりである。周の長さの条件 $(1 - \cos\alpha)/(1 - \sin\alpha) = 1$ からは $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ が得られ、$2/(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) = 4 + 2\sqrt{2} \approx 6.828$ となる。これは頂点が $(0,0)$、$(2,0)$、$(0,2)$ の三角形の周の長さ $2 + 2 + 2\sqrt{2}$ にちょうど等しい。ほかのさまざまな k の値についても、θ をコンピュータで探索することにより、二つの最小値と周の長さが最小となる位置の両方が確認された。

よくある間違い

- 斜辺を P で分けずに、$\sqrt{(1 + k\cot\theta)^2 + (k + \tan\theta)^2}$ を展開してしまう。
- 簡単にしていない導関数を 0 とおいて、計算の中で迷子になる。先に $1 + \sin\theta$ と $1 + \cos\theta$ を約分すること。
- 最終的な答えに k を残してしまう。問題が求めているのは α だけで表した最小値である。

STEP のその先へ

この簡潔な答えには幾何学的な説明がある。P を通り周の長さを最小にする直線は、両座標軸に接する円（OXY の傍接円（excircle））に P で接する直線であり、このとき周の長さは O からその円に引いた接線の長さの 2 倍になる。この円は P を通る半径 r の円で、$r = 1/(1 - \sin\alpha)$ である。「直線が P を通る」といった制約条件のついた最適化問題（optimisation problem）は、大学 1 年の微積分の講義で学ぶラグランジュの未定乗数法（Lagrange multipliers）の出発点である。このような趣旨の問題をさらに多く知りたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を参照するとよい。

解答例

STEP I 2019、第2問

純粋数学 • 媒介変数表示された曲線の接線

STEP I 2019、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP I の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

この媒介変数表示（parametrisation）は、媒介変数 t における傾き（gradient）がちょうど t になるように選ばれており、そのおかげでどの接線（tangent）の式も非常にすっきりした形になる。2 本の接線の交点を求める問題は、3 乗の差の因数分解に帰着する。さらに、垂直（perpendicular）条件 $pq = -1$ を使えば、すべてを和 $p+q$ で書き直すことができる。共有点については、一方の媒介変数表示を他方に代入すると重解（repeated root）をもつ多項式が得られ、その重解が図形について何かを語っているのである。

解答

接線

$x = 3t^2$、$y = 2t^3$ のとき、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{6t^2}{6t} = t \qquad (t \neq 0).$$

よって、点 $(3p^2, 2p^3)$ における接線の傾きは p であり、その方程式は

$$y - 2p^3 = p\,(x - 3p^2) \quad \Longrightarrow \quad y = px - 3p^3 + 2p^3 = px - p^3,$$

となり、示すべき式が得られた。（$p = 0$ のとき点は原点であり、尖点（cusp）である。そこでは曲線は $y = \pm 2(x/3)^{3/2}$ であり、x 軸 $y = 0$ に接するので、この式はやはり成り立つ。）

2本の接線の交点

$p \neq q$ のとき、接線 $y = px - p^3$ と $y = qx - q^3$ は

$$(p-q)\,x = p^3 - q^3 = (p-q)(p^2+pq+q^2).$$

を満たす点で交わる。$p \neq q$ より両辺を $p-q$ で割ることができ、$x = p^2+pq+q^2$ となる。すると

$$y = px - p^3 = p^3 + p^2q + pq^2 - p^3 = pq(p+q).$$

したがって、2本の接線は

$$\left(p^2+pq+q^2,\ pq(p+q)\right).$$

で交わる。

接線の傾きは p と q であるから、2本が垂直になるのはちょうど $pq = -1$ のときである。$u = p+q$ とおくと、$p^2+pq+q^2 = (p+q)^2 - pq = u^2+1$ かつ $pq(p+q) = -u$ である。よって、垂直な2本の接線は $(u^2+1,\ -u)$ で交わり、示すべきことが得られた。

考えてみよう $\widetilde{C}$ 上のすべての点は、実際に垂直な2本の接線の組から得られるだろうか？

得られる。任意の実数 u に対し、$p+q = u$ かつ $pq = -1$ であればよいので、p と q は $z^2 - uz - 1 = 0$ の解である。その判別式（discriminant）u^2+4 は正であるから、異なる2つの実数解がつねに存在する。したがって、$\widetilde{C}$ はちょうど、C に垂直な2本の接線を引くことのできる点全体の集合である。

両方の曲線上にある点

媒介変数を消去すると、$\widetilde{C}$ は放物線（parabola）$x = y^2+1$ である。C 上の点 $(3t^2, 2t^3)$ がこの上にあるのは、ちょうど

$$3t^2 = 4t^6 + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 4s^3 - 3s + 1 = 0, \quad \text{ただし} s = t^2.$$

のときである。$s = -1$ が解であるから、因数分解できる：

$$4s^3 - 3s + 1 = (s+1)(4s^2 - 4s + 1) = (s+1)(2s-1)^2.$$

$s = t^2 \geq 0$ であるから、可能なのは $s = \frac{1}{2}$ のみであり、$t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。このとき $x = 3t^2 = \frac{3}{2}$、$y = 2t^3 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。共有点は

$$\left(\tfrac{3}{2},\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{と} \quad \left(\tfrac{3}{2},\ -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

である。

考えてみよう 重複因数 $(2s-1)^2$ は何を教えてくれるのだろうか？

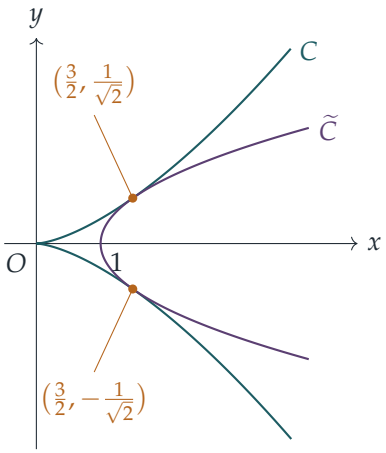
重解はふつう接することを示しており、ここでもまさにそうなっている。$t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ において C の傾きは $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。$\widetilde{C}$ 上では、$x=y^2+1$ から $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2/\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ となり、同じ値である。対称性から、下側の点でも同じことが成り立つ。よって、2 つの曲線は両方の点で接しており、交差はしない。

概形

C から t を消去すると $y^2=\frac{4}{27}x^3$（ただし $x\geq 0$）が得られる。これは半 3 次放物線（semicubical parabola）であり、x 軸に関して対称で、原点に左向きの尖点をもつ。$\widetilde{C}$ は頂点 $(1,0)$ をもち右に開いた放物線 $y^2=x-1$ である。どちらの曲線が外側にあるかを調べるため、$x\geq 1$ における 2 つの y^2 の値を比べる：

$$f(x)=\tfrac{4}{27}x^3-(x-1),\qquad f'(x)=\tfrac{4}{9}x^2-1,$$

よって、$x\geq 1$ において f は $x=\frac{3}{2}$ で最小となり、$f(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$ である。ゆえに $f(x)\geq 0$ であり、等号が成り立つのは $x=\frac{3}{2}$ のときに限る。したがって、$\widetilde{C}$ は C の内側（x 軸に近い側）にあり、2 つの共有点で C に接する。



検算

- $p=1$、$q=-1$ とする（このとき $pq=-1$、$u=0$）。接線は $y=x-1$ と $y=-x+1$ であり、これらは垂直で、$(u^2+1,-u)$ が予測するとおり $\widetilde{C}$ の頂点 $(1,0)$ で交わる。
- $p=2$、$q=-\frac{1}{2}$ とすると $u=\frac{3}{2}$ である。接線 $y=2x-8$ と $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}$ は $\frac{5}{2}x=\frac{65}{8}$ となる点で交わるので、$x=\frac{13}{4}=u^2+1$、$y=-\frac{3}{2}=-u$ である。

- 点 $(1.5, 0.7071)$ は $y^2 = \frac{4}{27}x^3$（$\frac{4}{27} \cdot \frac{27}{8} = \frac{1}{2}$ より）と $y^2 = x - 1$ の両方を満たす。また、コンピュータによる確認でも $3t^2 - 4t^6 - 1$ が決して正にならないことが確かめられたので、ほかに共有点はない。

よくある間違い

- $s = t^2$ が負になりえないことを忘れ、解 $s = -1$ を使おうとしてしまう。
- 共有点で放物線が C に接するのではなく、C と交差するように描いてしまう。

STEP のその先へ

曲線 $\widetilde{C}$ は C の**オルトプティック**（orthoptic）、すなわち C に垂直な 2 本の接線を引くことのできる点の軌跡（locus）である。放物線の場合、それは準線（directrix）になる。曲線をその接線族によって記述する考え方は、包絡線（envelope）や射影幾何学（projective geometry）における双対性（duality）へとつながっていく。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* には、この種の問題がさらに収められている。

解答例

STEP I 2019、第3問

純粋数学 • 積分

> **STEP I 2019、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP I の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

分母と分子に $1-\sin x$ を掛けると、$1+\sin x$ は $1-\sin^2 x=\cos^2 x$ に変わり、$\cos x$ の累乗を分母にもつ式はすべて標準的な部分に分解できる。すなわち $\sec^2 x$、$\sec x\tan x$、$\tan^2 x\sec^2 x$、$\sin x/\cos^4 x$ であり、いずれも見ただけで積分できる。残りの二つの積分も、姿を変えた同じ技法である。二つ目は $1+\cos x$ を含む積分になり、置換（substitution）$x=\frac{1}{2}\pi-u$ によって一つ目と同じ型に帰着する。三つ目では因子 $1-\sin x$ を 2 乗したものを掛ける。

解答

一つ目の積分

$(1+\sin x)(1-\sin x)=1-\sin^2 x=\cos^2 x$ であるから、

$$\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\sec^2 x-\sec x\tan x.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x=\sec^2 x$ および $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec x=\sec x\tan x$ であることを知っているので、

$$\int\frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x=\tan x-\sec x+C. \qquad (*)$$

$\tan\frac{1}{4}\pi=1$、$\sec\frac{1}{4}\pi=\sqrt{2}$、$\tan 0=0$、$\sec 0=1$ を用いると、

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x=\left(1-\sqrt{2}\right)-\left(0-1\right)=2-\sqrt{2}.$$

（$1-\sin x$ を掛けてよいのは、積分区間全体で $\sin x<1$ であり、0 を掛けることがないからである。）

二つ目の積分

分母と分子に $\cos x$（$[\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{3}\pi]$ 上で 0 でない）を掛けると、

$$\frac{1}{1+\sec x} = \frac{\cos x}{\cos x + 1} = 1 - \frac{1}{1+\cos x}. \tag{$*$}$$

考えてみよう $\dfrac{1}{1+\cos x}$ に $(*)$ を使うにはどうすればよいか。

$\cos x = \sin(\frac{1}{2}\pi - x)$ であるから、$u = \frac{1}{2}\pi - x$ と置換すると $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$ である。$x = \frac{1}{4}\pi$ のとき $u = \frac{1}{4}\pi$、$x = \frac{1}{3}\pi$ のとき $u = \frac{1}{6}\pi$ となる。よって

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{1+\sin u}\,\mathrm{d}u = \Big[\tan u - \sec u\Big]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \\ &= (1-\sqrt{2}) - \Big(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\Big) = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}},\end{aligned}$$

ここで $\tan\frac{1}{6}\pi = 1/\sqrt{3}$ と $\sec\frac{1}{6}\pi = 2/\sqrt{3}$ を用いた。区間の長さは $\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{12}\pi$ であるから、

$$\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{1+\sec x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{12} - \Big(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{\pi}{12} + \sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

（同様に、$\frac{1}{1+\cos x}$ に $\frac{1-\cos x}{1-\cos x}$ を掛けて $\operatorname{cosec}^2 x - \cot x \operatorname{cosec} x$ を得ることもできる。その原始関数（antiderivative）は $\operatorname{cosec} x - \cot x = \tan\frac{1}{2}x$ であり、$\tan\frac{1}{8}\pi = \sqrt{2}-1$ であるから同じ答えが得られる。）

三つ目の積分

今度は分母と分子に $(1-\sin x)^2$ を掛けて、分母を $\cos^4 x$ にする。

$$\frac{1}{(1+\sin x)^2} = \frac{(1-\sin x)^2}{\cos^4 x} = \frac{1+\sin^2 x}{\cos^4 x} - \frac{2\sin x}{\cos^4 x}.$$

一つ目の部分については、分子の 1 を $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ と書く。

$$\frac{1+\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^4 x} = \sec^2 x + 2\tan^2 x \sec^2 x.$$

考えてみよう $\tan^2 x \sec^2 x$ と $\sin x/\cos^4 x$ を積分すると何になるか。

どちらも $f(x)^n f'(x)$ の形をしている。$f = \tan x$ とすると $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^3 x = 3\tan^2 x \sec^2 x$、$f = \cos x$ とすると $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)^{-3} = 3\sin x\,(\cos x)^{-4}$ である。したがって

$$\int \frac{1}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \tan x + \tfrac{2}{3}\tan^3 x - \tfrac{2}{3}\sec^3 x + C.$$

$x = \frac{1}{4}\pi$ では $\tan = 1$、$\sec^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$ であり、値は $1 + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}$ となる。$x = 0$ では $0 + 0 - \frac{2}{3}$ である。ゆえに

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7-4\sqrt{2}}{3}.$$

検算

- 大きさ：$[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上で一つ目の被積分関数は 1 から $2-\sqrt{2} \approx 0.59$ まで減少するので、積分の値は 0.46 と 0.79 の間にある。$2-\sqrt{2} \approx 0.586$ はこれに合っている。同様に、三つ目の被積分関数は一つ目の 2 乗であるから、その積分はより小さいはずである。実際 $(7-4\sqrt{2})/3 \approx 0.448$ である。
- 求めた原始関数を微分してみる：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x - \sec x) = \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{1+\sin x}$。
- シンプソンの公式（Simpson's rule）によると、三つの積分の値は 0.585786、0.098663、0.447715 となり、$2-\sqrt{2}$、$\frac{\pi}{12} + \sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$、$\frac{1}{3}(7-4\sqrt{2})$ と小数第 10 位まで一致する。

よくある間違い

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec x$ や $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^3 x$ の符号の誤り：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)^{-n} = n\sin x(\cos x)^{-n-1}$ であるから、どちらも符号はプラスである。
- 一つ目と三つ目の積分で下端を忘れること：$\sec 0 = 1$ であり、0 ではない。
- $u = \frac{1}{2}\pi - x$ の置換の後で積分の上端と下端を誤って入れ替えること：$\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$ から生じるマイナス符号は、端点を小さい順に並べ直すために使われる。

STEP のその先へ

「共役」（conjugate）を掛けるという技法は、ある体系的な方法の特別な場合である。置換 $t = \tan\frac{1}{2}x$ によって、$\sin x$ と $\cos x$ の任意の有理関数（rational function）は t の有理関数に変わり、それは部分分数分解（partial fractions）によって積分できる。（$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$ に対する答え $\tan\frac{1}{2}x$ はその手がかりである。）大学 1 年の解析学では、このような積分がそもそも存在するのはいつか、ということも問題になる。たとえば $1+\sin x$ が 0 になる $x = -\frac{1}{2}\pi$ の近くなどである。これら二つの考え方については Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）を、この種の積分をさらに多く扱ったものとしては Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）を参照せよ。

解答例

STEP I 2019、第 4 問

純粋数学 • 四次方程式の因数分解

> **STEP I 2019、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP I の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

x^3 の項をもたない 4 次方程式（quartic）では、根の和は 0 である。したがって 4 つの根を 2 つずつの組に分けると、2 つの組の和は互いに符号が逆になる。2 つの 2 次因数の x の係数が s と $-s$ になるのは、まさにこのためである。係数を比較すると 3 つの方程式が得られ、p と q を消去すると s^2 についての 3 次方程式（cubic）が残る。小問 (i) は、最後に現れる根号（surd）の計算を助けるためにある。

解答

小問 (i)

$m+n\sqrt{2}$ を 2 乗すると $m^2+2n^2+2mn\sqrt{2}$ となるから、$m^2+2n^2=3$ かつ $mn=1$ となればよい。$m=n=1$ とするとこれを満たす：

$$(1+\sqrt{2})^2 = 1+2\sqrt{2}+2 = 3+2\sqrt{2},$$

さらに $1+\sqrt{2}>0$ であるから、これは正の平方根である。よって $m=1$、$n=1$ であり、

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}.$$

同様に $(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$ であるから、$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$ である。この両方を後で用いる。

小問 (ii)

因数分解が存在する理由。4 つの実数解を a、b、c、d とすると、$\mathrm{f}(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ である。f における x^3 の係数は $-(a+b+c+d)$ であり、これが 0 であるから $c+d = -(a+b)$ となる。根を 2 つずつ組にすると、

$$\mathrm{f}(x) = \big(x^2 - (a+b)x + ab\big)\big(x^2 - (c+d)x + cd\big) = \big(x^2 + sx + p\big)\big(x^2 - sx + q\big),$$

ここで $s = -(a+b)$、$p = ab$、$q = cd$ であり、根が実数であるからこれらはすべて実数である。

3 つの方程式。展開すると、

$$(x^2 + sx + p)(x^2 - sx + q) = x^4 + (p + q - s^2)x^2 + s(q-p)x + pq.$$

$x^4 - 10x^2 + 12x - 2$ と係数を比較して（comparing coefficients）、

$$\begin{aligned} p + q - s^2 &= -10, \\ s(q-p) &= 12, \\ pq &= -2. \end{aligned}$$

s についての方程式。第 2 式から $s \neq 0$ であるから、s で割ることができ、$q - p = 12/s$ を得る。第 1 式から $p + q = s^2 - 10$ である。ここで恒等式（identity）$(p+q)^2 - (q-p)^2 = 4pq = -8$ を用いると、

$$(s^2 - 10)^2 - \frac{144}{s^2} = -8.$$

両辺に s^2（0 でない）を掛けると

$$s^2(s^2 - 10)^2 + 8s^2 - 144 = 0,$$

となり、示すべき式が得られた。

s^2 の値。$u = s^2$ とおく。展開すると、

$$u(u-10)^2 + 8u - 144 = u^3 - 20u^2 + 108u - 144.$$

144 の小さな約数を順に試すと、$u = 2$ のとき $8 - 80 + 216 - 144 = 0$ となるから、$u - 2$ は因数であり、

$$u^3 - 20u^2 + 108u - 144 = (u-2)(u^2 - 18u + 72) = (u-2)(u-6)(u-12).$$

したがって、考えられる値は $s^2 = 2$、6、12 の 3 つである。

考えてみよう 因数分解は 1 つあれば十分なのに、なぜ s^2 の値が 3 つあるのだろうか？

4 つの根を 2 つずつの組に分ける方法は 3 通りあり、それぞれの組分けが $s^2=(a+b)^2$ をもつ 2 次因数の組を 1 つずつ与える。方程式を解くにはどれを用いてもよいが、最も小さい値を選ぶと根号が最もすっきりする。

$\mathrm{f}(x)=0$ を解く。 $s^2=2$、$s=\sqrt{2}$ とする（$s=-\sqrt{2}$ を選んでも 2 つの因数が入れ替わるだけである）。このとき

$$p+q=2-10=-8, \qquad q-p=\frac{12}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2},$$

であるから、$p=-4-3\sqrt{2}$、$q=-4+3\sqrt{2}$ である（確認：$pq=16-18=-2$）。よって

$$\mathrm{f}(x)=\left(x^2+\sqrt{2}\,x-4-3\sqrt{2}\right)\left(x^2-\sqrt{2}\,x-4+3\sqrt{2}\right).$$

1 つ目の因数について、判別式（discriminant）は、小問 (i) を用いると

$$2+4(4+3\sqrt{2})=18+12\sqrt{2}=6(3+2\sqrt{2})=6(1+\sqrt{2})^2,$$

となるから、その平方根は $\sqrt{6}(1+\sqrt{2})=\sqrt{6}+2\sqrt{3}$ である。根は

$$x=\frac{-\sqrt{2}\pm\left(\sqrt{6}+2\sqrt{3}\right)}{2}.$$

2 つ目の因数について、判別式は

$$2-4(-4+3\sqrt{2})=18-12\sqrt{2}=6(3-2\sqrt{2})=6(\sqrt{2}-1)^2,$$

であり、その平方根は $\sqrt{6}(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{3}-\sqrt{6}$ である（$2\sqrt{3}=\sqrt{12}>\sqrt{6}$ より正）。根は

$$x=\frac{\sqrt{2}\pm\left(2\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)}{2}.$$

したがって、$\mathrm{f}(x)=0$ の 4 つの解は

$$x=\tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{2}+\sqrt{6}+2\sqrt{3}\right), \qquad x=\tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{2}-\sqrt{6}-2\sqrt{3}\right),$$
$$x=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}\right), \qquad x=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right).$$

検算

- 数値的には、根はおよそ 2.2497、−3.6639、1.2144、0.1998 である。x^3 の項がないことから要請されるとおり、これらの和は 0 であり、積はおよそ −2 で定数項に一致する。

- $x \approx 0.1998$ を代入すると、$x^4 - 10x^2 + 12x - 2 \approx 0.0016 - 0.3992 + 2.3976 - 2 \approx 0$ である。
- f の符号の変化も整合する：$f(0) = -2$、$f(1) = 1$、$f(2) = -2$、$f(3) = 25$、$f(-4) = 46$ であるから、$(-4, 0)$、$(0, 1)$、$(1, 2)$、$(2, 3)$ のそれぞれに根が 1 つずつある。

よくある間違い

- x の係数が s と $-s$ になる理由を説明しないこと。これは x^3 の係数が 0 であること、すなわち根の和が 0 であることから来る。
- s で割る前に $s \neq 0$ であることを述べ忘れること。
- 根を $\sqrt{18 \pm 12\sqrt{2}}$ のまま残すこと。問題は完全に簡単にすることを求めており、小問 (i) はそのためにある。

STEP のその先へ

これは姿を変えた 4 次方程式のフェラーリ（Ferrari）の解法である。s^2 についての 3 次方程式は 3 **次分解方程式**（resolvent cubic）であり、その 3 つの根は 4 つの根を 2 つずつ組にする 3 通りの方法に対応している。4 次方程式が 3 次方程式に帰着できるのに、一般の 5 次方程式（quintic）がそもそもべき根（radicals）では解けないのはなぜか。これを扱うのがガロア理論（Galois theory）であり、方程式の可解性を根の対称性と結びつける理論である。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）は、そこへ向かう大学 1 年次向けの良い道筋である。

解答例

STEP I 2019、第 5 問

純粋数学 ・ 空間ベクトル

> **STEP I 2019、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP I の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

2 つのベクトル（vector）が等しいのは、成分（component）がすべて一致するときであり、かつそのときに限る。したがって、この問題に現れる幾何的な条件はどれも、p, q, r, s に関するいくつかの簡単な方程式に書き直せる。4 点が同一平面上にある（coplanar）という条件は、スカラー三重積（scalar triple product、3×3 の行列式）が 0 に等しいということである。条件を座標で書いてしまえば、各小問は短い代数計算で済む。

解答

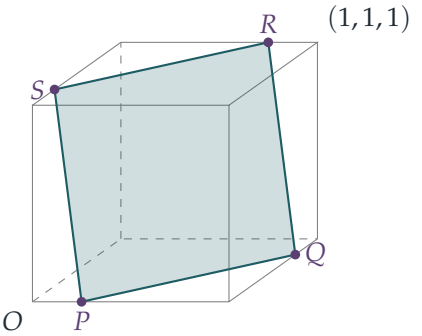
小問 (i)

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ ならば、向かい合う辺 PQ と SR は平行で長さが等しいので、$PQRS$ は**平行四辺形**（parallelogram）である。（このとき $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} - \overrightarrow{SR}$ から $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$ も得られる。）

さらに $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PS}|$ でもあれば、平行四辺形の隣り合う 2 辺が等しいので、4 辺すべてが等しい。すなわち $PQRS$ は**ひし形**（rhombus）である。

小問 (ii)：同一平面上にある条件

各点は単位立方体の辺上にあるので、$p, q, r, s \in [0, 1]$ である。ここで P と Q は面 $z = 0$ 上に、R と S は面 $z = 1$ 上にある。



4 点が同一平面上にあるのは、$\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PR}$ が一次従属（linearly dependent）であるとき、すなわちこれらのスカラー三重積が 0 であるときであり、かつそのときに限る。

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1-p \\ q \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} -p \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} r-p \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

とおき、行列式（determinant）を第 1 行に沿って展開すると

$$\begin{vmatrix} 1-p & q & 0 \\ -p & s & 1 \\ r-p & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-p)(s-1) - q\big(-p-(r-p)\big) + 0$$
$$= (1-p)(s-1) + qr.$$

これを 0 とおくと $rq = (1-s)(1-p)$ となり、示すべき式が得られる。

行列式を使いたくなければ、P, Q, R を通る平面を $\overrightarrow{OP} + \lambda\overrightarrow{PQ} + \mu\overrightarrow{PR}$ と表せばよい。その上の点は

$$\big(p + \lambda(1-p) + \mu(r-p),\ \lambda q + \mu,\ \mu\big).$$

である。$S = (0, s, 1)$ がこの平面上にあるためには、z 成分から $\mu = 1$、次に y 成分から $\lambda q = s - 1$、x 成分から $r + \lambda(1-p) = 0$ が必要である。最後の式に q を掛けて代入すると $rq + (s-1)(1-p) = 0$ となり、同じ条件が得られる。（ここでは P, Q, R が一直線上にない（not collinear）ことを用いている。R は上の面に、P, Q は下の面にあるので、これは正しい。）

小問 (ii)(a)

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1-p \\ q \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{SR} = \begin{pmatrix} r \\ 1-s \\ 0 \end{pmatrix}.$$

である。z 成分はすでに一致しているので

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} \iff r = 1-p \text{ かつ } q = 1-s \iff p+r = 1 \text{ かつ } q+s = 1.$$

重心（centroid）は

$$\tfrac{1}{4}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS}) = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} p+1+r \\ q+1+s \\ 2 \end{pmatrix},$$

であり、立方体の中心は $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ である。第3成分は常に一致するので、重心が中心と一致するのは $p+1+r=2$ かつ $q+1+s=2$ のときであり、かつそのときに限る。これは同じ2つの条件 $p+r=1, q+s=1$ である。よって2つの命題は同値である。

（$r = 1-p$ かつ $s = 1-q$ のとき、同一平面上にある条件 $rq = (1-s)(1-p)$ は $(1-p)q = q(1-p)$ となり、自動的に成り立つことに注意しよう。つまり、除外される配置はない。）

小問 (ii)(b)

(a) より、$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ から $r = 1-p$ かつ $s = 1-q$ が得られる。2つ目の条件については、$s = 1-q$ のもとで $\overrightarrow{PS} = (-p, s, 1)$ を用いて長さの2乗を比べる。

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}|^2 = |\overrightarrow{PS}|^2 &\iff (1-p)^2+q^2 = p^2+(1-q)^2+1 \\ &\iff 1-2p = 2-2q \\ &\iff q = p+\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

したがって

$$q = p+\tfrac{1}{2}, \qquad r = 1-p, \qquad s = \tfrac{1}{2}-p.$$

$q \le 1$ かつ $s \ge 0$ であるから、各点が辺上にあるのは $0 \le p \le \frac{1}{2}$ のときに限る。

考えてみよう 角 PQR を与えるのはどの2つのベクトルか？

Q における角は、$\overrightarrow{QP}$ と $\overrightarrow{QR}$（どちらも Q から出ていく向き）のなす角である。いま求めた値を用いると

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} p-1 \\ -p-\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} r-1 \\ 1-q \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p \\ \frac{1}{2}-p \\ 1 \end{pmatrix}.$$

すると

$$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR} = -p(p-1) - \left(p+\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}-p\right) = p - p^2 - \left(\tfrac{1}{4}-p^2\right) = p - \tfrac{1}{4},$$
$$|\overrightarrow{QP}|^2 = (1-p)^2 + \left(p+\tfrac{1}{2}\right)^2 = 2p^2 - p + \tfrac{5}{4},$$
$$|\overrightarrow{QR}|^2 = p^2 + \left(\tfrac{1}{2}-p\right)^2 + 1 = 2p^2 - p + \tfrac{5}{4}.$$

ひし形であるから当然だが、2 つの長さは等しい。よって

$$\cos PQR = \frac{p-\frac{1}{4}}{2p^2 - p + \frac{5}{4}} = \frac{4p-1}{5-4p+8p^2},$$

となる（分子と分母に 4 を掛けた）。これが求める結果である。

正方形。 ひし形が正方形（square）になるのは、その角が直角であるとき、すなわち $\cos PQR = 0$ のときであり、かつそのときに限る。分母 $8p^2 - 4p + 5 = 8(p-\frac{1}{4})^2 + \frac{9}{2}$ は常に正なので、これが起こるのは $4p - 1 = 0$ のときだけである。

$$p = \tfrac{1}{4}, \qquad q = \tfrac{3}{4}, \qquad r = \tfrac{3}{4}, \qquad s = \tfrac{1}{4}.$$

このとき 1 辺の長さの 2 乗は

$$2\cdot\tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{5}{4} = \tfrac{9}{8},$$

であるから、各辺の長さは $\sqrt{9/8} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ である。$\frac{21}{20}$ と比べるには、これらの正の数の 2 乗を比べればよい。

$$\left(\tfrac{21}{20}\right)^2 = \tfrac{441}{400} < \tfrac{450}{400} = \tfrac{9}{8}.$$

よって正方形の 1 辺は $\frac{21}{20}$ より大きい。（実際には約 1.0607 である。）

検算

- $p = \frac{1}{4}$ のとき、4 点は $(\frac{1}{4},0,0)$, $(1,\frac{3}{4},0)$, $(\frac{3}{4},1,1)$, $(0,\frac{1}{4},1)$ であり、その平均は (a) の予想どおり $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ である。また直接計算しても $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR} = \frac{3}{16} - \frac{3}{16} = 0$ となる。
- $p = 0$ のとき、公式は $\cos PQR = -\frac{1}{5}$ を与える。直接計算すると $\overrightarrow{QP} = (-1,-\frac{1}{2},0)$, $\overrightarrow{QR} = (0,\frac{1}{2},1)$ で、内積（dot product）は $-\frac{1}{4}$、長さの 2 乗はともに $\frac{5}{4}$ なので $\cos PQR = -\frac{1}{5}$ である。✓
- 同一平面上にある条件の恒等式、(a) の同値性、$\cos PQR$ の公式はいずれも、多数の無作為な値に対してコンピュータによる厳密な算術で確認した。

よくある間違い

- Q における角に $\overrightarrow{QP}$ と $\overrightarrow{RQ}$（一方は入ってくる向き、他方は出ていく向き）を使ってしまう。これでは余弦の符号が反転する。
- 文字の順序を取り違える。$\overrightarrow{SR}$ は $R-S$ であり、$S-R$ ではない。
- 厳密な比較をせずに、電卓の値から $\frac{3\sqrt{2}}{4} > \frac{21}{20}$ と主張してしまう。両辺とも正なので、両辺を 2 乗すれば厳密さが保たれる。

STEP のその先へ

同一平面上にあるかどうかの行列式による判定は、一般的な事実の 3 次元の場合である。すなわち、ベクトルが一次従属であるのは、それらを並べてできる行列の行列式が 0 になるときであり、かつそのときに限る。立方体の平面による切り口もまた、豊かな例の宝庫である（中心を通り、長い対角線に垂直な平面で切ると正六角形（regular hexagon）が現れる）。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、このような幾何的な観点から行列式、体積、一次従属を展開している。

解答例

STEP I 2019、第 6 問

純粋数学 ・ 不等式と評価

STEP I 2019、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP I の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

どちらの方程式も直接解こうとすると見通しが立たないが、「何か = 別の何か」の形に分けることができ、しかも左辺はある数より小さくなることがなく、右辺は同じ数より大きくなることがない。このとき方程式が成り立つのは、**両辺**がちょうどその数に一致するときに限られ、それぞれの条件は容易に解ける。各小問の前半は、この二つの評価（bound）を準備するためにある。

解答

小問 (i)

平方完成（completing the square）すると、

$$\begin{aligned} 9x^2 - 12x\cos\theta + 4 &= (3x - 2\cos\theta)^2 - 4\cos^2\theta + 4 \\ &= (3x - 2\cos\theta)^2 + 4\sin^2\theta. \end{aligned}$$

平方は負にならないので、最小値は $4\sin^2\theta$ であり、これをとるのはちょうど $x = \frac{2}{3}\cos\theta$ のときである。

この 4 次式（quartic）を x^2 の 2 次式とみなすと、

$$12x^2\sin\theta - 9x^4 = -\left(3x^2 - 2\sin\theta\right)^2 + 4\sin^2\theta.$$

よって $12x^2\sin\theta - 9x^4 \leq 4\sin^2\theta$ であり、等号が成り立つのはちょうど $x^2 = \frac{2}{3}\sin\theta$ のときである。$0 < \theta < \pi$ より $\sin\theta > 0$ なので、この x^2 の値は実際にとりうる。したがって最大値は $4\sin^2\theta$ である。

ここで、与えられた方程式の x^2 の項を $9x^2 - 12x^2\sin\theta$ と分けて整理すると、

$$\underbrace{9x^2 - 12x\cos\theta + 4}_{\geq 4\sin^2\theta} = \underbrace{12x^2\sin\theta - 9x^4}_{\leq 4\sin^2\theta}.$$

考えてみよう $4\sin^2\theta$ 以上の量と $4\sin^2\theta$ 以下の量が等しくなるのは、どのようなときか？

両方が $4\sin^2\theta$ に等しいときに限る。よって方程式が成り立つための必要十分条件は、**両方**

$$x = \tfrac{2}{3}\cos\theta \qquad \text{かつ} \qquad x^2 = \tfrac{2}{3}\sin\theta.$$

が成り立つことである。x を消去すると $\frac{4}{9}\cos^2\theta = \frac{2}{3}\sin\theta$、すなわち $2\cos^2\theta = 3\sin\theta$、つまり $2 - 2\sin^2\theta = 3\sin\theta$ である。したがって

$$2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 2) = 0.$$

$\sin\theta \neq -2$ なので $\sin\theta = \frac{1}{2}$ となり、$\theta = \frac{\pi}{6}$ または $\theta = \frac{5\pi}{6}$ である。このとき $x = \frac{2}{3}\cos\theta$ より、それぞれ $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$、$x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ となり、どちらの場合も $x^2 = \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\sin\theta$ が確かに成り立つ。解は

$$(x,\theta) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{\pi}{6}\right) \quad \text{と} \quad (x,\theta) = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{5\pi}{6}\right).$$

である。

小問 (ii)

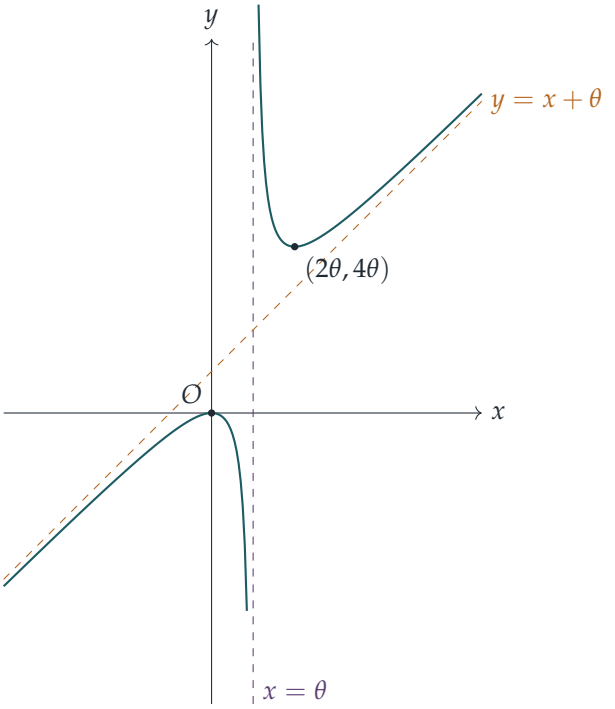
グラフの概形。ここでは $\theta > 0$ である。曲線 $y = \dfrac{x^2}{x-\theta}$ は原点を通り（それ以外では座標軸と交わらない）、垂直漸近線（vertical asymptote）$x = \theta$ をもつ。割り算を実行すると

$$\frac{x^2}{x-\theta} = x + \theta + \frac{\theta^2}{x-\theta},$$

となるので、$y = x + \theta$ は斜め漸近線（oblique asymptote）である。曲線は $x > \theta$ ではこの直線より上にあり、$x < \theta$ では下にある。商の微分法（quotient rule）で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x(x-\theta) - x^2}{(x-\theta)^2} = \frac{x(x-2\theta)}{(x-\theta)^2},$$

となるので、停留点（stationary point）は極大点（local maximum）$(0,0)$ と極小点（local minimum）$(2\theta, 4\theta)$ である（傾きの符号は $x = 0$ で $+$ から $-$ に、$x = 2\theta$ で $-$ から $+$ に変わる）。



そこから導かれること。$x<\theta$ のとき、分子は $x^2\geq 0$ で分母は負なので $y\leq 0$ である。$x>\theta$ のとき、この枝の最下点は $(2\theta,4\theta)$ なので $y\geq 4\theta$ である。代数的には、$x>\theta$ のとき

$$x^2-4\theta(x-\theta)=(x-2\theta)^2\geq 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{x^2}{x-\theta}\geq 4\theta,$$

となる（正の量 $x-\theta$ で割った）。よって曲線が 0 と 4θ の間の値（両端を除く）をとることはない。

三角関数の評価。分子は $\sin^2\theta\cos^2 x\leq 1\cdot 1=1$ を満たし、分母は $1+\cos^2\theta\sin^2 x\geq 1$ を満たす。1 以下の数を 1 以上の（正の）数で割れば 1 以下である：

$$\frac{\sin^2\theta\cos^2 x}{1+\cos^2\theta\sin^2 x}\leq 1.$$

等号成立には $\sin^2\theta\cos^2 x=1$ と $\cos^2\theta\sin^2 x=0$ の両方が必要である。また、この分数は平方を正の数で割ったものなので ≥ 0 であることにも注意する。

最後の方程式。$L=\dfrac{x^2}{4\theta(x-\theta)}$ とおき、右辺を R とする。先ほどの結果を $4\theta>0$ で割ると、$L\leq 0$ または $L\geq 1$ である。一方、$0\leq R\leq 1$ である。

考えてみよう ≤ 0 または ≥ 1 である数と、$[0,1]$ に属する数が一致しうるのはどこか？

0 か 1 に限る。よって $L = R = 0$ または $L = R = 1$ でなければならない。

- $L = 0$ ならば $x = 0$ となるが、このとき $0 < \theta < \pi$ より $R = \sin^2\theta > 0$ である。解はない。
- $L = 1$ は $x^2 = 4\theta(x - \theta)$、すなわち $(x - 2\theta)^2 = 0$ を意味するので、$x = 2\theta$ である。$R = 1$ には $\sin^2\theta\cos^2 x = 1$ が必要であり、これより $\sin^2\theta = 1$ かつ $\cos^2 x = 1$ となる。$0 < \theta < \pi$ のもとでは $\theta = \frac{\pi}{2}$ となり、$x = \pi$ である。実際、$\cos^2\pi = 1$ かつ $\cos^2\theta\sin^2 x = 0$ が成り立つ。

解は $x = \pi$、$\theta = \frac{\pi}{2}$ のみである。

検算

- $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$、$\theta = \frac{\pi}{6}$ を 4 次式に代入する：$9\cdot\frac{1}{9} + (9-6)\cdot\frac{1}{3} - 12\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 4 = 1 + 1 - 6 + 4 = 0$。
- 最後の方程式で $x = \pi$、$\theta = \frac{\pi}{2}$ とすると：$L = \pi^2/(2\pi\cdot\frac{\pi}{2}) = 1$、$R = 1\cdot 1/(1+0) = 1$。
- (x,θ) の細かい格子上でコンピュータ探索を行ったところ、どちらの方程式についても他に解に近いものは見つからなかった。ただし、除外された端点 $\theta \to 0$ と $\theta \to \pi$ の付近では見かけ上の解が紛れ込む（そこでは $\sin\theta \to 0$ となり、評価が崩れる）。

よくある間違い

- $\sin\theta = \frac{1}{2}$ を求めたところで止めてしまう。x は $x = \frac{2}{3}\cos\theta$ を満たさなければならず、これが各 θ に対して x の**符号**を決めるので、$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5\pi}{6})$ は解ではない。
- 最後の小問で $L = R = 0$ の場合を忘れる。この場合は除外しなければならず、除外できるのは $\sin\theta \neq 0$ だからにほかならない。
- 分母がそれを損なわない理由を述べずに、「$\sin^2$ と $\cos^2$ は 1 以下だから」分数は ≤ 1 であると主張する。

STEP のその先へ

方程式を、ただ一つの値で一致する下からの評価と上からの評価の間に挟み込むという技法は、解析学（analysis）の定番である。相加相乗平均の不等式（AM–GM）やコーシー・シュワルツの不等式（Cauchy–Schwarz）で等号が成り立つ条件を証明す

るのもこの方法であり、はさみうちの原理（squeeze theorem）で極限を確定させるのもこの方法である。「この不等式で等号が成り立つのはいつか？」と問う習慣を身につけることが、しばしば解への最短経路となる。この方向の話をさらに知りたければ、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）や、Siklos による問題集 *Advanced Problems in Mathematics*（発展的な数学の問題集）を参照するとよい。

解答例

STEP I 2019、第 7 問

純粋数学 ・ 無理性と合同式

> **STEP I 2019、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP I の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

$\sqrt{2}+\sqrt{3}=a/b$ が既約分数（lowest terms）で表されているとすると、2 回平方することで根号（surd）が消え、整数 a, b に関する多項式（polynomial）の方程式が残る。次に、その方程式を小さな素数（prime）を法（modulo）として考える。この方程式から、その素数は a と b の両方を割り切るか、どちらも割り切らないかのいずれかであることが従う。「両方」は既約であることに矛盾し、「どちらも割り切らない」は余りによって否定される。この解法の要は、余りが本当に食い違うような素数を選ぶことに尽きる。

解答

小問 (i)

ステップ 1. すべての整数は、ある整数 k を用いて $3k, 3k+1, 3k-1$ のいずれかの形に表せる。よって $3 \nmid a$ ならば $a = 3k \pm 1$ である。どちらの場合も

$$a^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1,$$

となり、これは 3 の倍数に 1 を加えたものである。

ステップ 3. $\dfrac{a}{b} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ の両辺を平方すると

$$\frac{a^2}{b^2} = 2 + 2\sqrt{6} + 3, \qquad \text{よって} \qquad a^2 - 5b^2 = 2\sqrt{6}\,b^2.$$

これで根号が一方の辺に孤立したので、もう一度平方すれば根号は消える：

$$a^4 - 10a^2b^2 + 25b^4 = 24b^4,$$
$$a^4 + b^4 = 10a^2b^2,$$

となり、示すべき式が得られた。（必要なのはこの向きの含意だけである。すなわち、ステップ 2 の a, b はどれもこの方程式を満たさなければならない。）

ステップ 4. $3 \mid a$ と仮定する。ステップ 3 の式を変形すると

$$b^4 = 10a^2b^2 - a^4 = a^2(10b^2 - a^2),$$

となり、右辺は 3 で（さらには 9 で）割り切れる。もし $3 \nmid b$ ならば、ステップ 1 より $b^2 = 3m + 1$ であるから、$b^4 = (b^2)^2 = 9m^2 + 6m + 1$ は 3 の倍数では**ない**。これは矛盾である。したがって $3 \mid b$ である。

> **考えてみよう** ステップ 4 は $3 \mid a$ の場合を扱っている。では、3 が a も b も割り切らない場合はどうか？

ステップ 5. ステップ 3 の方程式は a と b について対称（symmetric）であるから、ステップ 4 は役割を入れ替えても成り立つ。すなわち、$3 \mid b$ ならば $3 \mid a$ である。a と b は 1 より大きい公約数をもたないので、両方が 3 の倍数であることはなく、したがってステップ 4 よりどちらも 3 の倍数ではない。この場合はステップ 2–4 では扱われておらず、ここでステップ 1 が役に立つ。$a^2 = 3r + 1, b^2 = 3s + 1$ とおく。すると a^4, b^4, a^2b^2 はいずれも 3 の倍数に 1 を加えたものになる（そのような 2 数の積もまた同じ形である）。ステップ 3 の式を 3 を法として考えると、$10 \equiv 1$ であるから

$$a^4 + b^4 \equiv 1 + 1 = 2, \qquad 10a^2b^2 \equiv 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \pmod 3,$$

となる。ステップ 3 の両辺を 3 で割った余りが異なるが、これはありえない。よって、そのような a, b は存在しない。また $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 0$ であるから、もしこれが有理数ならば、互いに素（coprime）な正の整数 a, b を用いて表せるはずである。以上より、$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ は無理数（irrational）である。

小問 (ii)

$\sqrt{6} + \sqrt{7} = a/b$ で、a, b は 1 より大きい公約数をもたない正の整数であると仮定する。先ほどと同様に

$$\frac{a^2}{b^2} = 13 + 2\sqrt{42} \quad \Longrightarrow \quad (a^2 - 13b^2)^2 = 168\, b^4,$$

であり、展開すると $a^4 - 26a^2b^2 + 169b^4 = 168b^4$、すなわち

$$a^4 + b^4 = 26a^2b^2.$$

5 を法とする平方数. $5 \nmid a$ ならば $a = 5k \pm 1$ または $a = 5k \pm 2$ であり、

$$a^2 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1 \qquad \text{または} \qquad a^2 = 5(5k^2 \pm 4k) + 4.$$

となる。よって $a^2 \equiv \pm 1 \pmod 5$ であり、したがって $a^4 \equiv 1 \pmod 5$ である。

整除性. $5 \mid a$ ならば、$b^4 = a^2(26b^2 - a^2)$ は 5 の倍数である。しかし $5 \nmid b$ ならば $b^4 \equiv 1 \pmod 5$ であるから、$5 \mid b$ でなければならない。対称性より、$5 \mid b$ ならば $5 \mid a$ である。a と b は互いに素であるから、どちらも 5 で割り切れない。

矛盾. このとき $a^4 \equiv b^4 \equiv 1$ であり、$a^2b^2 \equiv (\pm 1)(\pm 1) = \pm 1 \pmod 5$ である。$26 \equiv 1$ であるから

$$a^4 + b^4 \equiv 2, \qquad 26a^2b^2 \equiv \pm 1 \pmod 5.$$

しかし $2 \not\equiv \pm 1 \pmod 5$ であるから、この方程式は成り立ちえない。したがって $\sqrt{6} + \sqrt{7}$ は無理数である。

考えてみよう ここで 5 の代わりに 3 を使おうとすると、どのステップが破綻するか？

3 がうまくいかない理由. 議論の前半は 3 を法としても成り立つ。すなわち、$3 \mid a$ ならば $3 \mid b^4$ なので $3 \mid b$ となり、よって a も b も 3 の倍数ではない。しかしこのとき $a^4 \equiv b^4 \equiv a^2b^2 \equiv 1 \pmod 3$ であり、$26 \equiv 2 \pmod 3$ であるから

$$a^4 + b^4 \equiv 2 \qquad \text{かつ} \qquad 26a^2b^2 \equiv 2 \pmod 3.$$

両辺が一致するので、矛盾は生じない。3 を法とすると、方程式 $a^4 + b^4 = 26a^2b^2$ は 3 の倍数でない**すべての**組で満たされるため、3 による整除性ではこれを否定できない。（小問 (i) では係数が $10 \equiv 1$ であり、$2 \neq 1$ から食い違いが生じた。ここでは係数が $26 \equiv 2$ なので、食い違いが消えてしまう。）

検算

- 数値的に、$x = \sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3.1463$ に対して $x^4 - 10x^2 + 1 \approx 0$（誤差はおよそ 10^{-14}）となる。同様に $y = \sqrt{6} + \sqrt{7} \approx 5.0952$ に対して $y^4 - 26y^2 + 1 \approx 0$ となる。よって 2 つの 4 次方程式（quartic equation）は正しい。
- 余りの組をすべて試してみると、$a^4 + b^4 \equiv 10a^2b^2 \pmod 3$ の解は $a \equiv b \equiv 0$ のみであり、$a^4 + b^4 \equiv 26a^2b^2 \pmod 5$ についても同じことが成り立つ。しかし $a^4 + b^4 \equiv 26a^2b^2 \pmod 3$ は $(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)$ でも満たされる。これこそが、小問 (ii) で 3 がうまくいかない理由である。
- コンピュータで探索したところ、どちらの方程式についても、それを満たす互いに素な正の整数 $a, b \leq 400$ は見つからなかった。

よくある間違い

- ステップ 4 で止めてしまうこと。ステップ 4 は a と b が 3 の倍数になりえないことを示すにすぎない。どちらも 3 の倍数でない場合を扱うには、さらにステップ 1 が必要である。
- $3 \mid b^4 \Rightarrow 3 \mid b$ を理由なしに主張すること。その理由はステップ 1 が与える。すなわち、$3 \nmid b$ ならば b^4 を 3 で割った余りは 1 である。
- 小問 (ii) で、平方数を 5 で割った余りが 4（すなわち -1）にもなりうることを忘れること。そのため a^2b^2 は 1 だけでなく $\equiv \pm 1$ となりうる。

STEP のその先へ

数 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は $x^4 - 10x^2 + 1$ の根であり、ここでの議論は実質的に、この多項式が有理数の根をもたないことの証明である。有理根定理（rational root theorem）を使えばより早く示せる。すなわち、有理数の根があるとすればそれは ± 1 でなければならないが、どちらも根ではない。多項式を素数を法として還元し、根や因数をもたないことを示すのは、大学 1 年の代数学における標準的な道具である（たとえば既約性（irreducibility）の判定法）。興味深いことに、$x^4 - 10x^2 + 1$ は有理数体上では既約であるにもかかわらず、すべての素数を法として**因数分解できる**。これは有名な例である。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）はこうした考え方を展開しており、ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（高等算術）は合同式（congruence）へのすばらしい入門書である。

解答例

STEP I 2019、第 8 問

純粋数学 ・ 置換積分

STEP I 2019、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP I の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

f を具体的に計算してはならないと指示されているので、どの小問も、積分を**変形して**ある上端 X に対して

$$\int_1^X \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,\mathrm{d}t = \mathrm{f}(X)$$

とちょうど同じ形にすることが目標である。ほとんどの作業は二つの操作でまかなえる。一つは**拡大**（stretch）$(u = kt)$ であり、これにより $\frac{u-k}{u+k}$ が $\frac{t-1}{t+1}$ に変わる。もう一つは**平行移動**（shift）$(u = t + c)$ であり、これにより分数の中の二つの数が 0 に関して対称になる。最後の小問では、商の平方根を適切な形の関数に変えるために、もう一つ置換が必要になる。

解答

以下では一貫して、置換（substitution）によって被積分関数（integrand）、微分および積分区間の端点がすべて変わるという事実を用いる。答えが現れるのは上端である。

小問 (i)

被積分関数 $\sqrt{\frac{u-2}{u+2}}$ は、$u = 2t$ とおけば $\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}$ になる。実際、このとき $\frac{2t-2}{2t+2} = \frac{t-1}{t+1}$ である。$\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}t$ であり、端点は $u = 2 \mapsto t = 1$、$u = x \mapsto t = \frac{1}{2}x$ となるから、

$$\int_2^x \sqrt{\frac{u-2}{u+2}}\,\mathrm{d}u = \int_1^{x/2} \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,2\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{f}\left(\tfrac{1}{2}x\right).$$

条件 $x > 2$ はまさに $\frac{1}{2}x > 1$ を保証するものであり、したがって $\mathrm{f}(\frac{1}{2}x)$ は定義される。これが求める結果である。

小問 (ii)

ここでは分数の中の数は 0 と -4 であり、0 に関して対称ではない。その中点は -2 なので、2 だけ平行移動する。すなわち $u=v-2$ とおく。すると $\frac{u}{u+4}=\frac{v-2}{v+2}$、$\mathrm{d}u=\mathrm{d}v$ であり、端点 $u=0,x$ は $v=2,x+2$ になる。あとは小問 (i) を x の代わりに $x+2$（これは 2 より大きい）として用いれば完了する：

$$\int_0^x \sqrt{\frac{u}{u+4}}\,\mathrm{d}u=\int_2^{x+2}\sqrt{\frac{v-2}{v+2}}\,\mathrm{d}v=2\,\mathrm{f}\left(\tfrac{1}{2}x+1\right).$$

小問 (iii)

分数の中の数は 5 と -1 であり、その中点は 2 である。そこで $u=v+2$ とおくと、

$$\frac{u-5}{u+1}=\frac{v-3}{v+3},$$

となり、端点 $u=5,x$ は $v=3,x-2$ になる。次に 3 倍の拡大を行い、$v=3t$ とおく。すると $\frac{v-3}{v+3}=\frac{t-1}{t+1}$、$\mathrm{d}v=3\,\mathrm{d}t$ であり、端点は $t=1,\frac{1}{3}(x-2)$ となる：

$$\begin{aligned}\int_5^x \sqrt{\frac{u-5}{u+1}}\,\mathrm{d}u&=\int_3^{x-2}\sqrt{\frac{v-3}{v+3}}\,\mathrm{d}v=\int_1^{(x-2)/3}\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,3\,\mathrm{d}t\\&=3\,\mathrm{f}\left(\frac{x-2}{3}\right).\end{aligned}$$

$x>5$ であるから、引数 $\frac{x-2}{3}$ は 1 より大きく、当然そうでなければならない。（二つの置換を合わせると、一つの置換 $u=3t+2$ になる。）

小問 (iv)

この被積分関数には商の平方根は見当たらず、しかも次数が合っていない。分子は u^2、根号の中は u^2+4 である。

考えてみよう どのような置換をすれば、u^2+4 を小問 (ii) の $u+4$ に変えられるだろうか？

$u^2=w$ とおく。すると $u=\sqrt{w}$（$[1,2]$ 上で $u>0$ である）であり、$\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}w}{2\sqrt{w}}$ となる。端点 $u=1,2$ は $w=1,4$ になり、

$$\frac{u^2}{\sqrt{u^2+4}}\,\mathrm{d}u=\frac{w}{\sqrt{w+4}}\cdot\frac{\mathrm{d}w}{2\sqrt{w}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{w+4}}\,\mathrm{d}w=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{w}{w+4}}\,\mathrm{d}w,$$

となる。これはちょうど小問 (ii) の被積分関数である。積分区間を 0 で分け、小問 (ii)

を二回（$x = 4$ と $x = 1$ として）用いると、

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{u^2}{\sqrt{u^2+4}}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\left(\int_0^4 \sqrt{\frac{w}{w+4}}\,\mathrm{d}w - \int_0^1 \sqrt{\frac{w}{w+4}}\,\mathrm{d}w\right)\\ &= \frac{1}{2}\Big(2\,\mathrm{f}(3) - 2\,\mathrm{f}\big(\tfrac{3}{2}\big)\Big) = \mathrm{f}(3) - \mathrm{f}\big(\tfrac{3}{2}\big).\end{aligned}$$

検算

- どの答えも下端で正しい振る舞いをする。(i) では $x = 2$ のとき $2\,\mathrm{f}(1) = 0$、(ii) では $x = 0$ のとき $2\,\mathrm{f}(1) = 0$、(iii) では $x = 5$ のとき $3\,\mathrm{f}(1) = 0$ となる。
- 微分してみるのが手早い確認法である。(iii) については $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,3\,\mathrm{f}\big(\frac{x-2}{3}\big) = \mathrm{f}'\big(\frac{x-2}{3}\big) = \sqrt{\frac{x-5}{x+1}}$ となり、確かにそうなるべき形である。
- 数値的には、(iv) の両辺はともに 0.91007 に等しく、(iii) で $x = 11$ とすると両辺はともに 3.19704 に等しい。いずれも直接の数値積分によって求めたものである。

よくある間違い

- $\mathrm{d}u = k\,\mathrm{d}t$ から出る係数を忘れ、$2\,\mathrm{f}(\frac{1}{2}x)$ ではなく $\mathrm{f}(\frac{1}{2}x)$ としてしまう。
- 被積分関数は変えたのに端点を変えない。特に上端は答えが現れる場所なので要注意である。
- (iv) で結果を $\frac{1}{2}\cdot 2\,\mathrm{f}(3)$ だけと書いてしまう。小問 (ii) が与えるのは 0 からの積分なので、0 から 1 までの部分を引かなければならない。

STEP のその先へ

ここでの考え方は、一群の積分が実は、異なるアフィン変数変換（affine change of variable）$u = at + b$ を通して見た一つの積分にすぎない、ということである。式の中に隠れた「標準形」を見抜く力は、大学の解析学においても、微分方程式を標準形に帰着させる際にも、絶えず使われる技能である。（実は関数 f は双曲線関数（hyperbolic functions）を用いて閉じた形で求めることができるが、この問題は、それなしでもかなりのところまで進めることを示している。）置換と積分の厳密な理論については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を、この種の問題をさらに多く解くには Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（発展的数学問題集）を参照せよ。

解答例

STEP I 2019、第 9 問

力学 ・ 転倒と摩擦

STEP I 2019、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP I の問題用紙にある：

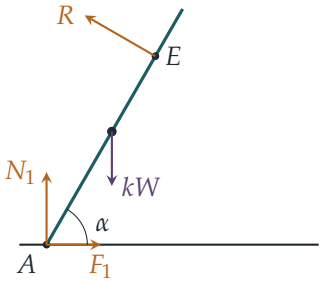
www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

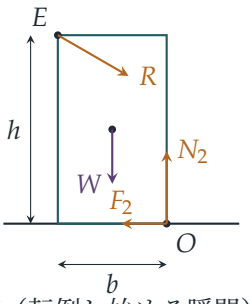
はしごと箱を、1 つの力で結ばれた 2 つの別々の物体として扱う。接触がなめらか（smooth）なので、その力ははしごに垂直であり、作用線は α によって決まり、未知なのは大きさだけである。はしごについてその下端のまわりのモーメント（moment）を考えると力の大きさが求まり、箱についてそれが傾くときの回転軸となる辺のまわりのモーメントを考えると転倒（toppling）の条件が得られる。関係式 $h = b\tan\alpha$ は、箱のモーメントを 2 倍角の式にまとめるために与えられている。

解答

箱を一様な剛体（rigid body）の直方体、はしごを軽い棒、塗装工を質点（particle）としてモデル化する。はしごと箱の接触はなめらかであり、地面との接触はどちらもあらい（rough）。はしごが触れている箱の辺を E、はしごの下端を A、箱の下側の辺のうちはしごから遠い方（箱が傾くときの回転軸となる辺）を O とする。



はしご



箱（転倒し始める瞬間）

小問 (i)

E には摩擦（friction）がないので、箱がはしごに及ぼす力 R ははしごに垂直である。E は高さ h にあるので、はしごに沿って $AE = h/\sin\alpha$ である。塗装工が高さ λh にいるとき、塗装工ははしごに沿って $\lambda h/\sin\alpha$ の位置にいるので、A からの水平距離は $\lambda h\cot\alpha$ である。

はしごは軽いので、A のまわりのモーメントを生じるのは R と塗装工の重さだけである（N_1 と F_1 は A に作用する）。R は AE に垂直なので、その腕の長さは AE そのものである：

$$R\cdot\frac{h}{\sin\alpha} = kW\cdot\lambda h\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad\Longrightarrow\quad R = k\lambda W\cos\alpha,$$

となり、示された。（厳密には、λh を塗装工のその時点の高さとすれば、この式は登っている途中のどの段階でも成り立つ。）

小問 (ii)

ニュートン（Newton）の第 3 法則（作用・反作用の法則）により、はしごは E において、はしごに垂直で箱の内側へ向かう大きさ R の力で箱を押す。その成分は、水平方向に $R\sin\alpha$（はしごから離れる向き、すなわち O の側へ）、鉛直下向きに $R\cos\alpha$ である。

箱が O のまわりに転倒し始める瞬間には、地面からの抗力はすべて O に作用するので、N_2 と F_2 は O のまわりのモーメントをもたない。O のまわりのモーメントを、時計回り（箱が傾く向き）を正として考える。E は O から水平距離 b、高さ h の位置にあるので、

- 高さ h に作用する水平成分 $R\sin\alpha$ のモーメントは $+Rh\sin\alpha$；
- O からはしご側へ距離 b の位置に作用する鉛直成分 $R\cos\alpha$ のモーメントは $-Rb\cos\alpha$（その側を下に押すことは傾きを妨げる）；
- O から距離 $\frac{1}{2}b$ の位置に作用する重さ W のモーメントは $-\frac{1}{2}Wb$

である。モーメントの合計が 0 に達したとき、箱は転倒し始める：

$$R(h\sin\alpha - b\cos\alpha) = \tfrac{1}{2}Wb.$$

考えてみよう ここで $h = b\tan\alpha$ はどのように役立つか？

これを代入すると、

$$h\sin\alpha - b\cos\alpha = b\,\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{b\cos 2\alpha}{\cos\alpha}.$$

小問 (i) の $R = k\lambda W\cos\alpha$ を用いると、条件は

$$-k\lambda W\cos\alpha\cdot\frac{b\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = \tfrac{1}{2}Wb \quad\Longrightarrow\quad 2k\lambda\cos 2\alpha + 1 = 0,$$

となり、示された。これには $\cos 2\alpha < 0$、すなわち $\alpha > 45^\circ$ が必要であることに注意しよう。これは $h > b$ と一致する。

小問 (iii)

箱について力を分解する（地面からの抗力は、はしご側へ向かう成分 F_2 と上向きの成分 N_2 をもつ）：

$$F_2 = R\sin\alpha, \qquad N_2 = W + R\cos\alpha.$$

箱はすべらないので $F_2 \le \mu N_2$、すなわち $\mu \ge \dfrac{R\sin\alpha}{W + R\cos\alpha}$ である。

考えてみよう 登っている途中のどの瞬間に、この条件を満たすのが最も難しくなるか？

比 $\dfrac{R\sin\alpha}{W + R\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{W/R + \cos\alpha}$ は R について増加し、R は塗装工が登るにつれて大きくなる。したがって、摩擦に対する要求が最も大きくなるのは転倒の瞬間であり、そこで不等式が成り立つ必要がある。(ii) より $k\lambda = -\dfrac{1}{2\cos 2\alpha}$ なので、

$$R = -\frac{W\cos\alpha}{2\cos 2\alpha}.$$

すると

$$R\sin\alpha = -\frac{W\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos 2\alpha} = -\frac{W\sin 2\alpha}{4\cos 2\alpha},$$

$$W + R\cos\alpha = W\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{2\cos 2\alpha}\right) = W\,\frac{4\cos 2\alpha - (1+\cos 2\alpha)}{4\cos 2\alpha} = W\,\frac{3\cos 2\alpha - 1}{4\cos 2\alpha},$$

となる。ここで $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$ を用いた。割り算をすると、

$$\mu \ge \frac{-\sin 2\alpha}{3\cos 2\alpha - 1} = \frac{\sin 2\alpha}{1 - 3\cos 2\alpha},$$

となり、示された。$45^\circ < \alpha < 90^\circ$ より $\sin 2\alpha > 0$ かつ $\cos 2\alpha < 0$ なので、分子も分母も正である。

検算

- $\alpha = 60^\circ$ とすると $\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$ である。小問 (ii) より $k\lambda = 1$ なので $R = \frac{1}{2}W$。すると $F_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}W$、$N_2 = \frac{5}{4}W$ となり、$\mu \ge \frac{\sqrt{3}}{5} \approx 0.346$ を得る。これは $\sin 120^\circ / (1 - 3\cos 120^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}\big/\frac{5}{2}$ と一致する。

- $\alpha \to 45°$（幅よりわずかに高いだけの、立方体に近い箱）のとき、$\cos 2\alpha \to 0$ となり、(ii) は $k\lambda \to \infty$ を要求する。E での押す力はほぼ直線 EO に沿っているので、回転させる効果をほとんどもたない。これは図形的な状況とも合っている。$h = b\tan\alpha$ のとき、α が $45°$ に近ければ、E を通る R の作用線はほぼ O を通る。
- モーメントの式、転倒する高さ、摩擦の下限は、α、b、k、W を無作為に多数選んで、コンピュータでも確認した。

よくある間違い

- E での力を（なめらかな壁の場合のように）水平とみなしてしまう。ここでの接触は辺との接触なので、力ははしごに垂直である。
- R の鉛直成分が箱の垂直抗力（normal reaction）に加わることを忘れてしまう。$N_2 = W + R\cos\alpha$ であり、W ではない。
- 箱の下側の辺のうち、間違った方のまわりでモーメントを考えてしまう。箱ははしごから遠い方の辺のまわりに傾く。

STEP のその先へ

これは 2 物体の静力学（statics）である。各物体を切り離して考え、接触点でニュートンの第 3 法則を用い、未知数が消えるようにモーメントの中心を選ぶ。物体がまずすべるのか転倒するのか、また荷重が増えるにつれてどの拘束が最初に破れるのか、という問いは、工学の力学や接触する剛体の研究全体に通じている。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の静力学と摩擦をこうした精神で扱っている。

解答例

STEP I 2019、第 10 問

力学 ・ 放物運動

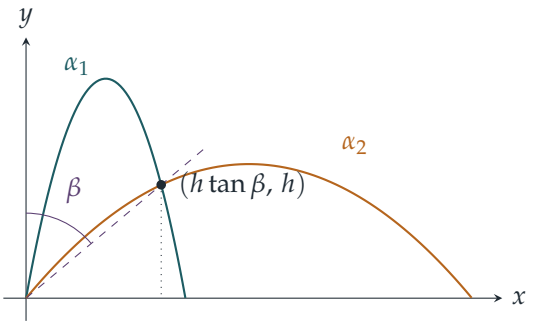
> **STEP I 2019、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP I の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

軌道の方程式を x を用いた y の式として書き下し、与えられた定点を代入する。そこで $1/\sin^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$ を用いると、これが $c = \cot\alpha$ についての 2 次方程式（quadratic）になることに気づく。その後、(i) はすべて 2 次方程式の代数で処理できる。解と係数の関係（sum and product of roots）から cot の加法定理（addition formula）を通じて $\alpha_1 + \alpha_2$ が得られ、「異なる 2 つの解をもつ」ことは判別式（discriminant）の条件となる。小問 (ii) は、エネルギー（あるいは $v^2 = u^2 + 2as$）を用いた 1 行の議論で済む。

解答

粒子は空気抵抗のない状態で重力のみを受けて自由に運動する質点（point mass）としてモデル化する。角 α は鉛直上向きから測るので、初速度の水平成分は $u\sin\alpha$、鉛直成分は $u\cos\alpha$ である。



図は、この点を通る 2 つの可能な軌道を示している（$\beta = 50°$、$k = 8$ の場合を描いた）。

この点は、O を通り鉛直方向と角 β をなす直線上にある。

小問 (i)

時刻 t において

$$x = ut\sin\alpha, \qquad y = ut\cos\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$0 < \beta < 90^\circ$ より、この点は $x > 0$ を満たすので $\sin\alpha \neq 0$ であり、$t = x/(u\sin\alpha)$ として t を消去できる：

$$y = x\cot\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\sin^2\alpha} = cx - \frac{gx^2}{2u^2}(1+c^2),$$

ここで $\csc^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$ を用いた。次に $x = h\tan\beta$、$y = h$ を代入し、$h > 0$ で割ると

$$1 = c\tan\beta - \frac{gh}{2u^2}\tan^2\beta\,(1+c^2) = c\tan\beta - \frac{\tan^2\beta}{k}(1+c^2).$$

両辺に $k\cot^2\beta$ を掛けると $k\cot^2\beta = ck\cot\beta - 1 - c^2$、すなわち

$$c^2 - ck\cot\beta + 1 + k\cot^2\beta = 0, \qquad (*)$$

となり、示すべき式が得られた。

(a) 2 つの値 $c_1 = \cot\alpha_1$ と $c_2 = \cot\alpha_2$ は、c についての 2 次方程式 $(*)$ の 2 つの解である（cot は $(0,\pi)$ 上で単射（one-to-one）なので、これらは相異なる）。したがって、解と係数の関係より

$$\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2 = k\cot\beta, \qquad \cot\alpha_1\cot\alpha_2 = 1 + k\cot^2\beta.$$

1 つ目の式が第 1 の結果である。第 2 の結果については、cot の加法定理を用いる：

$$\cot(\alpha_1+\alpha_2) = \frac{\cot\alpha_1\cot\alpha_2 - 1}{\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2} = \frac{k\cot^2\beta}{k\cot\beta} = \cot\beta.$$

考えてみよう $\cot(\alpha_1+\alpha_2) = \cot\beta$ から本当に $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$ が導かれるだろうか？

それだけでは導かれない。cot は周期 180° をもつので、$\alpha_1 + \alpha_2$ の範囲も確定させる必要がある。ここでは和 $k\cot\beta$ と積 $1 + k\cot^2\beta$ はともに正である（$k > 0$ かつ $\cot\beta > 0$ であるから）。よって 2 つの解 c_1, c_2 はともに正である。したがって両方の角は鋭角であり、$0 < \alpha_1 + \alpha_2 < 180^\circ$ となる。この区間で cot は単射である。β もこの区間に属するので、$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$ である。

(b) c が相異なる 2 つの実数値をとるためには、$(*)$ の判別式が正でなければならない：

$$k^2\cot^2\beta - 4(1 + k\cot^2\beta) > 0.$$

$\tan^2\beta > 0$ を掛けると

$$k^2 - 4k - 4\tan^2\beta > 0.$$

左辺の k についての 2 次式の解は $k = 2 \pm \sqrt{4 + 4\tan^2\beta} = 2 \pm 2\sec\beta$ である（$1 + \tan^2\beta = \sec^2\beta$ と $\sec\beta > 0$ を用いた）。よってこの不等式が成り立つのは、$k < 2 - 2\sec\beta$ または $k > 2 + 2\sec\beta$ のときであり、かつそのときに限る。しかし $\sec\beta > 1$ より $2 - 2\sec\beta < 0 < k$ であるから、前者は起こりえない。したがって

$$k > 2(1 + \sec\beta).$$

小問 (ii)

粒子は高さ $h > 0$ まで上昇しなければならないので、初速度の鉛直成分 $u\cos\alpha$ は正である。鉛直方向の運動は一定の加速度 $-g$ をもち、最高点で鉛直方向の速度は 0 となるので、$v^2 = u^2 + 2as$ より最高点の高さは

$$H = \frac{u^2\cos^2\alpha}{2g}.$$

粒子は高さ h の点を通過するので、$H \geq h$ である：

$$\frac{u^2\cos^2\alpha}{2g} \geq h \quad\Longrightarrow\quad \frac{2u^2}{gh}\cos^2\alpha \geq 4 \quad\Longrightarrow\quad k \geq 4\sec^2\alpha,$$

ここで $4/(gh) > 0$ を掛け、さらに $\cos^2\alpha > 0$ で割った。等号が成り立つのは、点 $(h\tan\beta, h)$ が軌道の最高点であるときであり、かつそのときに限る。

検算

- $\beta = 50°$、$k = 8$ とする。このとき $2(1 + \sec 50°) \approx 5.11 < 8$ なので、2 つの角が存在する。$(*)$ を解くと $\alpha_1 \approx 10.29°$、$\alpha_2 \approx 39.71°$ となり、和は $50°$ である。運動を数値的に時間発展させると、どちらの軌道も $x = h\tan\beta$ において高さ $1.0000\,h$ に達する。
- これらの角について $k\cos^2\alpha \approx 7.74$ および 4.73 であり、(ii) が要求するとおり、どちらも 4 以上である。
- 無作為に選んだ数千組の β、h、k についてコンピュータで確認したところ、$(*)$ が相異なる 2 つの解をもつのはちょうど $k > 2(1 + \sec\beta)$ のときであり、毎回 $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$ が成り立つことが確かめられた。
- 単位：$u^2/(gh)$ は無次元量（dimensionless）であり、k はそうでなければならない。

よくある間違い

- 習慣で α を水平方向から測ってしまうこと。ここでは水平成分は $u\sin\alpha$ であり、$u\cos\alpha$ ではない。
- 両方の角が鋭角であることを示さずに、$\cot(\alpha_1+\alpha_2)=\cot\beta$ から $\alpha_1+\alpha_2=\beta$ と結論づけること。
- (b) において、負である解 $k<2-2\sec\beta$ を残してしまうこと。

STEP のその先へ

$\alpha_1+\alpha_2=\beta$ という結果は、2 つの発射方向が、鉛直方向と目標点への直線とがなす角の二等分線に関して対称であることを意味している。これは「安全放物線（parabola of safety）」に関する古典的な事実である。安全放物線とは速さ u のすべての軌道の包絡線（envelope）のことであり、2 つの解が一致する境界の場合 $k=2(1+\sec\beta)$ にあたる。曲線族の包絡線は、微積分と幾何学を結びつける、大学 1 年次にふさわしい面白い題材である。この流れの力学をさらに学びたければ、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照されたい。

解答例

STEP I 2019、第 11 問

確率・統計　・　幾何分布

> **STEP I 2019、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP I の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.9 節「偏った硬貨から公平な判定を」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/von-neumann.html

鍵となる考え方

2 人で行う手順の各ラウンドは、そこで決着がつくかつかないかのどちらかである独立（independent）な試行である。したがって、決着がつくラウンドは幾何分布（geometric distribution）に従う。「p の値にかかわらず」成り立つ評価は、$p+q=1$ のとき pq がどこまで大きくなりうるかという問題に帰着し、それには相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）が答えてくれる。小問 (ii) では第 2 ラウンドはもはや新たな出発点ではないので、第 1 ラウンドで何が起きたかによって場合分けをし、同じ pq の評価で仕上げる。

解答

小問 (i)

どの 1 つのラウンドでも、2 枚の硬貨は独立である。決着がつくのは、両方が表（確率 p^2）または両方が裏（確率 q^2）のときであるから、

$$\mathrm{P}(\text{特定のラウンドで決着}) = p^2 + q^2, \qquad \mathrm{P}(\text{決着せず}) = pq + qp = 2pq.$$

確認として、$p^2+q^2+2pq = (p+q)^2 = 1$ である。

毎回新たに硬貨を投げるので、各ラウンドは独立である。第 n ラウンドで決着がつくとは、決着のつかないラウンドが $n-1$ 回続き、その後に決着のつくラウンドが 1 回

来ることであるから、

$$\mathrm{P}(\text{決着がラウンド}n) = (2qp)^{n-1}(q^2+p^2),$$

となり、求める結果が得られる。

2 つ目の結果については、余事象（complement）を使うのが最も簡単である。第 n ラウンドまでに決着がつかないとは、決着のつかないラウンドが n 回続くことであり、その確率は $(2pq)^n$ である。よって

$$\mathrm{P}(\text{決着がラウンド 1 〜}n) = 1-(2pq)^n.$$

（$p^2+q^2 = 1-2pq$ を用いて等比級数（geometric series）$\sum_{r=1}^{n}(p^2+q^2)(2pq)^{r-1}$ を計算しても同じ結果が得られる。）

次に、すべての p について成り立つ pq の上界（upper bound）が必要である。$p, q \geq 0$ であるから、相加平均・相乗平均の不等式により

$$\sqrt{pq} \leq \frac{p+q}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \text{よって} \qquad pq \leq \frac{1}{4},$$

であり、等号が成り立つのはちょうど $p = q = \frac{1}{2}$ のときである。（同値な言い方をすれば、$pq = p(1-p) = \frac{1}{4} - (p-\frac{1}{2})^2$ である。）したがって $0 \leq 2pq \leq \frac{1}{2}$ であるから $(2pq)^n \leq \frac{1}{2^n}$ となり、

$$\mathrm{P}(\text{決着がラウンド 1 〜}n) = 1-(2pq)^n \geq 1-\frac{1}{2^n}$$

がすべての p の値について成り立つ。これが示すべきことであった。公平な硬貨が最悪の場合である。

小問 (ii)

第 1 ラウンドで決着がつく事象を D_1、第 2 ラウンドで決着がつく事象を D_2 とする。これらの事象は互いに排反（mutually exclusive）であるから、求めるのは $\mathrm{P}(D_1)+\mathrm{P}(D_2)$ である。

第 1 ラウンド。 3 枚とも表か 3 枚とも裏であればよいので、$\mathrm{P}(D_1) = p^3+q^3$ である。

第 2 ラウンド。 第 1 ラウンドで決着がつかなかった場合、硬貨は表 2 枚と裏 1 枚、または裏 2 枚と表 1 枚であった。

- **表 2 枚、裏 1 枚**（3 人のうち誰が裏を出してもよいので、確率は $3p^2q$）。表を出した 2 人がもう一度投げ、3 人目は裏の硬貨をひっくり返して表にする。このとき 3 枚とも裏になることはありえず、3 枚とも表になるのは新たに投げた 2 枚がともに表になるときに限られ、その確率は p^2 である。この場合の寄与は $3p^2q \cdot p^2 = 3p^4q$ である。

- **裏 2 枚、表 1 枚**（確率 $3pq^2$）。同様の議論により、3 枚目の硬貨は裏になっており、新たに投げた 2 枚がともに裏になる必要がある。その確率は q^2 である。この場合の寄与は $3pq^2 \cdot q^2 = 3pq^4$ である。

第 2 ラウンドの硬貨投げは第 1 ラウンドと独立であり、だからこそ確率を掛け合わせることができる。よって

$$\mathrm{P}(D_2) = 3p^4q + 3pq^4 = 3pq\,(p^3 + q^3).$$

考えてみよう $p^3+q^3+3pq(p^3+q^3)$ をうまく整理する方法はないだろうか？

$p^3 + q^3$ をくくり出し、$p + q = 1$ のもとで 3 乗の和の公式を使う：

$$p^3 + q^3 = (p+q)(p^2 - pq + q^2) = (p+q)^2 - 3pq = 1 - 3pq.$$

よって

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{第 2 ラウンドまでに決着}) &= (p^3+q^3)(1+3pq)\\ &= (1-3pq)(1+3pq)\\ &= 1 - 9p^2q^2.\end{aligned}$$

小問 (i) より $0 \le pq \le \frac{1}{4}$ であるから $p^2q^2 \le \frac{1}{16}$ となり、

$$\mathrm{P}(\text{第 2 ラウンドまでに決着}) \ge 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

が p の値にかかわらず成り立ち、等号は $p = \frac{1}{2}$ のときに成り立つ。以上で証明が完了する。

検算

- $p = 1$（両面とも表の硬貨）のときは、ただちに決着がつく。小問 (i) では $1 - (2pq)^n = 1$、小問 (ii) では $1 - 9p^2q^2 = 1$ となり、当然そうなるべき値になっている。
- 小問 (ii) で $p = \frac{1}{2}$ のとき：第 1 ラウンドで決着がつく確率は $\frac{1}{4}$ である。そうでない場合（$\frac{3}{4}$）、第 2 ラウンドで決着がつく確率は $\frac{1}{4}$ であるから、$\frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}$ となり、評価の等号が実際に達成される。
- $p = 0.3$ のとき、公式は $1 - 9(0.21)^2 = 0.6031$ を与える。3 人で行う手順を 200 000 回コンピュータでシミュレーションしたところ、0.602 が得られた。

よくある間違い

- 小問 (ii) の第 1 ラウンドで、誰が 1 人だけ違う面を出すかに対応する因数 3 を忘れる。
- 小問 (ii) の第 2 ラウンドを、新たに 3 枚の硬貨を投げるラウンドのように扱う。ひっくり返した硬貨は固定されているので、「3 枚とも表」と「3 枚とも裏」のうち一方しか起こりえない。
- $p = \frac{1}{2}$ の場合だけで評価を証明する。**すべての** p について $pq \leq \frac{1}{4}$ が必要であり、それを与えてくれるのが相加平均・相乗平均の不等式のような不等式である。

STEP のその先へ

小問 (i) は、偏りのある硬貨から公平な決定を得るための古典的な技法であり、通常はフォン・ノイマン（von Neumann）によるものとされている。2 人で行う手順では、「ホテル」と「喫茶店」が同様に確からしくなるのは $p = \frac{1}{2}$ のときに限られるが、1 人が 2 回投げて HT と TH を結果として用いれば、すべての p について公平な結果が得られる。決着がつくまでのラウンド数は幾何分布に従う確率変数（random variable）であり、このような手順がどれだけ速く終わるかという問題は、停止時刻（stopping times）とマルコフ連鎖（Markov chains）の研究へとつながっていく。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）はその両方を扱っている。

解答例

STEP II 2019、第 1 問

純粋数学 • 3 次関数の接線

> **STEP II 2019、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

$x = a$ における接線(tangent)が $(p, 0)$ を通るための条件を書き下し、$f(x) = (x - p)g(x)$ を代入する。するとほとんどの項が打ち消し合い、$g'(a)$ の定数倍だけが残る。したがって三次関数（cubic）の場合、根 p から引いた接線は、もう一方の二次の因数が停留する（stationary）点で曲線に接する。その点は残り二つの根のちょうど中点である。小問 (ii) は結局、二つの傾き（gradient）の比較に帰着する。さらに、接線と三次曲線の交点を求める方程式の因数分解も必要になるが、この方程式は接点で必ず重解をもつ。

解答

最初の結果

$x = a$ における接線は $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ である。積の微分法（product rule）により $f'(x) = g(x) + (x - p)g'(x)$ である。接線が $(p, 0)$ を通るのは、ちょうど次が成り立つときである。

$$\begin{aligned} 0 &= f(a) + f'(a)(p - a) \\ &= (a - p)g(a) + \big[g(a) + (a - p)g'(a)\big](p - a) \\ &= (a - p)g(a) - (a - p)g(a) - (a - p)^2 g'(a) \\ &= -(a - p)^2 g'(a). \end{aligned}$$

$a \neq p$ より因数 $(a - p)^2$ は 0 でないから、これが成り立つのは $g'(a) = 0$ のとき、かつそのときに限る。これで両方向の主張が同時に証明された。

小問 (i)

ここでは $f(x) = (x-p)g(x)$、$g(x) = A(x-q)(x-r) = A\big(x^2 - (q+r)x + qr\big)$ であるから、$g'(x) = A\big(2x - (q+r)\big)$ である。最初の結果と $A \neq 0$ より

$$g'(a) = 0 \iff 2a = q + r.$$

($a = \frac{1}{2}(q+r) > q > p$ であるから、要求どおり $a \neq p$ となることに注意する。)

傾きについては、$g'(a) = 0$ であるから $f'(a) = g(a) + (a-p)g'(a) = g(a)$ である。$a - q = \frac{1}{2}(r-q)$、$a - r = -\frac{1}{2}(r-q)$ を用いると

$$f'(a) = A \cdot \tfrac{1}{2}(r-q) \cdot \big(-\tfrac{1}{2}(r-q)\big) = -\frac{A(r-q)^2}{4}.$$

小問 (ii)

今度は代わりに根 r をくくり出す。$f(x) = (x-r)h(x)$、$h(x) = A(x-p)(x-q)$ とする。最初の結果は p の代わりに r としても成り立つ(その証明では、どの根を選んだかを一切使っていない)。よって $x = c$ における接線が $(r, 0)$ を通るのは $h'(c) = 0$、すなわち $c = \frac{1}{2}(p+q)$ のとき、かつそのときに限る。小問 (i) とまったく同様に、その傾きは

$$f'(c) = h(c) = A \cdot \tfrac{1}{2}(q-p) \cdot \big(-\tfrac{1}{2}(q-p)\big) = -\frac{A(q-p)^2}{4}.$$

したがって $A \neq 0$ より

$$\text{接線が平行} \iff (r-q)^2 = (q-p)^2 \iff r - q = q - p \iff q = \tfrac{1}{2}(p+r),$$

ここで中央の段階では $r - q > 0$ かつ $q - p > 0$ を用いており、そのため正の平方根をとってよい。

考えてみよう 三次方程式を解かずに、接線が三次曲線と再び交わる点をどのように求めればよいか。

根の一つはすでにわかっており、しかもそれは二重に数えられる。接点(point of contact)である。$x = q$ における傾きは $f'(q) = A(q-p)(q-r)$ であり(積の微分法の残り二つの項は $x - q$ を含むので消える)、$f(q) = 0$ であるから、そこでの接線は $y = A(q-p)(q-r)(x-q)$ である。これが曲線と交わるのは

$$A(x-p)(x-q)(x-r) = A(q-p)(q-r)(x-q).$$

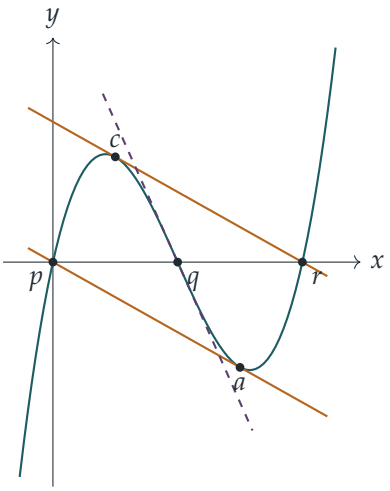
のときである。$A \neq 0$ で割り、因数 $x - q$ をくくり出すと

$$\begin{aligned} 0 &= (x-q)\big[(x-p)(x-r) - (q-p)(q-r)\big] \\ &= (x-q)\big[x^2 - q^2 - (p+r)(x-q)\big] \\ &= (x-q)^2\,(x+q-p-r). \end{aligned}$$

よって接線は $x = q$（接点であるから予想どおり重解（double root））と $x = p + r - q$ で曲線と交わり、それ以外では交わらない。接線が曲線と再び交わらないのは、この第三の根が q と一致するとき、かつそのときに限る。

$$p + r - q = q \iff q = \tfrac{1}{2}(p + r).$$

これは先ほどと同じ条件である。したがって、小問 (i) と (ii) の接線が平行であるのは、$x = q$ における接線が曲線と再び交わらないとき、かつそのときに限る。



この図は $q = \frac{1}{2}(p + r)$ の場合を示している。二本の接線（琥珀色）は平行であり、q における接線（破線）はそこで曲線を横切るが、ほかのどこでも曲線と交わらない。このとき q は変曲点（point of inflection）だからである。

検算

- $p = 0$、$q = 1$、$r = 2$、$A = 3$ とすると $f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 6x$ である。このとき $f'(x) = 9x^2 - 18x + 6$ より $f'(\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$、$f'(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$ となり、どちらも $-A(r-q)^2/4 = -A(q-p)^2/4 = -\frac{3}{4}$ に等しい。よって接線は平行であり、q が p と r の中点であることから予想されるとおりである。
- $x = \frac{3}{2}$ における接線は $y = -\frac{9}{8} - \frac{3}{4}(x - \frac{3}{2})$ であり、これは $x = 0$ で 0 となる。確かに $(p, 0)$ を通る。
- 上の恒等式はすべて、$p < q < r$ と A をランダムに約二千通り選び、コンピュータによる厳密な計算でも確認した。

よくある間違い

- $(a-p)^2$ で割れるのは $a \neq p$ だからであることを忘れる。この条件がなければ「限る」の方向は成り立たない。p そのものにおける接線は常に $(p,0)$ を通るからである。
- 負の根が除外される理由を述べずに $(r-q)^2 = (q-p)^2 \Rightarrow r-q = q-p$ と書く。
- 接点における既知の重解を利用せず、交点を求める三次方程式を一から解こうとする。

STEP のその先へ

$x = q$ における接線が特別なのは、このとき q が変曲点、すなわち三次曲線の対称の中心だからである。どの三次曲線もその変曲点のまわりの半回転について対称であり、二本の接線が平行になるのはそのためである。ここで扱った接線と弦の作図は、三次曲線の幾何学への第一歩である。そこでは、直線と三次曲線の第三の交点を用いて曲線上の点の間に加法を定義する（楕円曲線（elliptic curves））。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（大学入試レベルの発展問題集）には、この趣旨の問題がさらに収録されている。

解答例

STEP II 2019、第2問

純粋数学 • 逆関数の積分

STEP II 2019、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

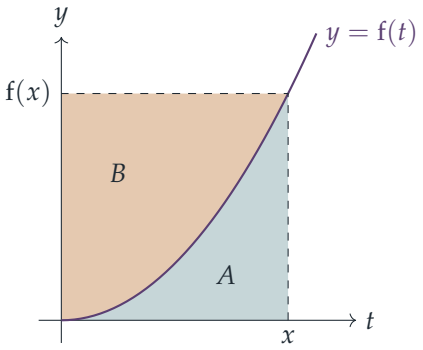
鍵となる考え方

$y = \mathrm{f}(t)$ のグラフは、$(0,0)$ と $(x, \mathrm{f}(x))$ を対角の頂点とする長方形を二つの部分に分ける。一方は曲線の下側の面積であり、もう一方は曲線と y 軸の間の面積で、これは逆関数（inverse function）の積分（integral）に等しい。したがって、二つの積分の和は長方形の面積になる。小問 (i) と (ii) では関数が陰的にしか定義されていないので、直接積分することはできないが、その**逆関数**は簡単な三次式である。この恒等式（identity）を使えば、難しい積分を易しい積分に置き換えることができる。

解答

冒頭の結果

$t > 0$ で $\mathrm{f}'(t) > 0$ かつ $\mathrm{f}(0) = 0$ であるから、f は $[0, x]$ で狭義単調増加（strictly increasing）である。よって $t > 0$ で $\mathrm{f}(t) > 0$ であり、f は $[0, \mathrm{f}(x)]$ から $[0, x]$ への逆関数 f^{-1} をもつ。同じ曲線が $y = \mathrm{f}(t)$ によっても $t = \mathrm{f}^{-1}(y)$ によっても表される。



$0 \le t \le x$ における曲線と t 軸の間の領域 A の面積は

$$A = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t.$$

である。$0 \le y \le \mathrm{f}(x)$ における曲線と y 軸の間の領域 B は、水平な細長い帯からなる。高さ y の帯は $t = 0$ から $t = \mathrm{f}^{-1}(y)$ まで延びているので、

$$B = \int_0^{\mathrm{f}(x)} \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y.$$

となる。曲線は増加していて $(0,0)$ から $(x, \mathrm{f}(x))$ まで進むので、A と B は重なりなくぴったり組み合わさり、長方形 $0 \le t \le x, 0 \le y \le \mathrm{f}(x)$ を埋め尽くす。この長方形の面積は $x\,\mathrm{f}(x)$ であるから、

$$\int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\mathrm{f}(x)} \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = x\,\mathrm{f}(x),$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (i)

$\phi(y) = y^3 + y$ とおく。$\phi'(y) = 3y^2 + 1 > 0$ であるから ϕ は狭義単調増加であり、$y \to \pm\infty$ のとき $\phi(y) \to \pm\infty$ である。よって各実数 t に対し、$\phi(y) = t$ を満たす実数 y がちょうど一つ存在し、それが $\mathrm{g}(t)$ である。言い換えれば、$\mathrm{g} = \phi^{-1}$ である。

$\mathrm{g}(0) = 0$ であること。 $t = 0$ を代入すると $\mathrm{g}(0)\big(\mathrm{g}(0)^2 + 1\big) = 0$ を得る。$\mathrm{g}(0)$ は実数なので $\mathrm{g}(0)^2 + 1 \ge 1$ であり、したがって $\mathrm{g}(0) = 0$ である。

$\mathrm{g}'(t) > 0$ であること。 $\mathrm{g}(t)^3 + \mathrm{g}(t) = t$ の両辺を t で陰関数微分（implicit differentiation）すると、

$$\big(3\,\mathrm{g}(t)^2 + 1\big)\,\mathrm{g}'(t) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{g}'(t) = \frac{1}{3\,\mathrm{g}(t)^2 + 1} > 0,$$

となる。分母は 1 以上だからである。

考えてみよう $g(t)$ を式で書き表せないのに、どうやって積分すればよいのだろうか？

その必要はない。g は冒頭の結果の条件を満たし、その逆関数は $\phi(y) = y^3 + y$ で、これは簡単に積分できる。$x = 2$ として結果を適用するには $g(2)$、すなわち $y^3 + y = 2$ の実数解が必要である。この解は $y = 1$ であり、ϕ が狭義単調増加なので解はこれ一つだけである。よって

$$\int_0^2 g(t)\,dt = 2g(2) - \int_0^1 (y^3 + y)\,dy = 2 - \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}.$$

小問 (ii)

二つの定義を比べると、$h(t)$ は $y^3 + y = t + 2$ の実数解であるから、$h(t) = g(t+2)$ である。$u = t + 2$ と置換すると、

$$\int_0^8 h(t)\,dt = \int_2^{10} g(u)\,du = \int_0^{10} g(u)\,du - \int_0^2 g(u)\,du.$$

第一の積分には、$x = 10$ として冒頭の結果を用いる。$2^3 + 2 = 10$ より $g(10) = 2$ であるから、

$$\int_0^{10} g(u)\,du = 10 \times 2 - \int_0^2 (y^3 + y)\,dy = 20 - (4 + 2) = 14.$$

第二の積分には小問 (i) を用いて、

$$\int_0^8 h(t)\,dt = 14 - \frac{5}{4} = \frac{51}{4}.$$

別解。図の考え方を h に直接適用することもできる。今度は $h(0) = 1$ であり、0 ではない。曲線は $(0,1)$ から $(8,2)$ まで延びており、$h^{-1}(y) = y^3 + y - 2$ である。曲線の下側の面積は、8×2 の長方形から 0×1 の長方形（ここでは空である）を引き、さらに $1 \le y \le 2$ における曲線の左側の面積を引いたものである：

$$16 - \int_1^2 (y^3 + y - 2)\,dy = 16 - \left(\tfrac{15}{4} + \tfrac{3}{2} - 2\right) = 16 - \tfrac{13}{4} = \tfrac{51}{4}.$$

検算

- $[0,2]$ で $0 \le g(t) \le 1$ であるから、(i) の積分は 0 と 2 の間になければならない。また、g はこの区間で凹（concave）である（増加する凸（convex）関数の逆関数だからである）ので、積分は三角形の面積 $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$ 以上である。答え $\frac{5}{4}$ はこれに合っている。
- (ii) では $[0,8]$ で $1 \le h(t) \le 2$ であるから、積分は 8 と 16 の間にあり、12.75 もその範囲にある。

- 多数の点で三次方程式を数値的に解き、シンプソンの公式（Simpson's rule）で積分すると 1.25000 と 12.75000 が得られ、厳密な答えと一致する。

よくある間違い

- 逆関数の積分の上端を誤る：上端は $g(2) = 1$ であり、2 ではない。
- $h(0) = 0$ であるかのように冒頭の結果を h に適用してしまう。$h(0) = 1$ なので図には余分な帯があり、恒等式を修正する必要がある（あるいは $h(t) = g(t+2)$ を用いる）。
- g がきちんと定義されていること、すなわち $y^3 + y = t$ がちょうど一つの実数解をもつことの説明を忘れる。

STEP のその先へ

冒頭の恒等式は**ヤング（*Young*）の不等式**（Young's inequality）の等号成立の場合である：$f(0) = 0$ を満たす増加関数 f と任意の $a, b \geq 0$ に対して $ab \leq \int_0^a f + \int_0^b f^{-1}$ が成り立つ。$f(t) = t^{p-1}$ とすると $ab \leq a^p/p + b^q/q$ が得られ、これは解析学におけるヘルダー（Hölder）の不等式（Hölder's inequality）の出発点となる。g が微分可能（differentiable）で $g' = 1/\phi'(g)$ を満たすという事実は**逆関数定理**（inverse function theorem）である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）はこれを丁寧に証明している。

解答例

STEP II 2019、第 3 問

純粋数学 • 多項式の根の評価

> **STEP II 2019、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

三角不等式（triangle inequality）を使うと、各項をその大きさで置き換えることで多項式（polynomial）を上から評価できる。さらに $|x| < 1$ のとき、それらの大きさは等比級数（geometric series）をなす。これにより、小さい根（root）に対する下界が得られる。大きい根については、$1/\omega$ を考えるのがこつである。f の係数（coefficient）の順序を逆にすると、まったく同じ形の多項式が得られるので、小さい根に関する結果をもう一度使うことができる。小問 (ii) では、この評価によって整数根の候補がわずか 4 つに絞られる。

解答

三角不等式

両辺とも非負であるから、それらの 2 乗を比較すれば十分である。$x_1x_2 \leq |x_1x_2| = |x_1||x_2|$ であるから、

$$|x_1 + x_2|^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \leq |x_1|^2 + 2|x_1||x_2| + |x_2|^2 = \big(|x_1| + |x_2|\big)^2,$$

となり、非負の平方根をとれば $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$ を得る。

n 個の数については、n に関する数学的帰納法（induction）を用いる。$n = 1$ の場合は等号が成り立ち、$n = 2$ の場合はすでに示した。$n - 1$ 個の数について結果が成り立つと仮定すると、$x_1 + \cdots + x_{n-1}$ と x_n に 2 個の場合を適用して

$$\begin{aligned} |x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n| &\leq |x_1 + \cdots + x_{n-1}| + |x_n| \\ &\leq |x_1| + \cdots + |x_{n-1}| + |x_n|, \end{aligned}$$

となり、これは n 個の数に対する結果である。

小問 (i)(a)

$f(x)-1 = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ である。三角不等式を用い、次に $|a_i| \le A$ を、さらに最後の項について $1 \le A$ を用いると、

$$\begin{aligned} |f(x)-1| &\le |a_1||x| + \cdots + |a_{n-1}||x|^{n-1} + |x|^n \\ &\le A\big(|x| + |x|^2 + \cdots + |x|^n\big). \end{aligned}$$

$0 \le |x| < 1$ であるから、有限の等比数列の和は、すべての項が非負である無限級数の和以下である：

$$|x| + |x|^2 + \cdots + |x|^n \le \sum_{k=1}^{\infty} |x|^k = \frac{|x|}{1-|x|}.$$

したがって、求める通り $|f(x)-1| \le \dfrac{A|x|}{1-|x|}$ が成り立つ。

小問 (i)(b)

$f(\omega) = 0$ であるから $|f(\omega)-1| = 1$ となり、小問 (a) より

$$1 \le \frac{A|\omega|}{1-|\omega|}.$$

$1-|\omega| > 0$ であるから、不等号の向きを変えずに両辺に掛けることができ、$1-|\omega| \le A|\omega|$、すなわち $1 \le (1+A)|\omega|$ となる。よって

$$|\omega| \ge \frac{1}{1+A}.$$

上界はすぐに得られる：$|\omega| < 1 \le 1 + A$。よって $(*)$ が成り立つ。

小問 (i)(c)

ここでは $|\omega| \ge 1$ とする。下界は易しい：$A \ge 1 > 0$ であるから $|\omega| \ge 1 > \frac{1}{1+A}$ である。本質的なのは上界のほうである。

$|\omega| = 1$ ならば直ちに $|\omega| \le 1 + A$ であるから、$|\omega| > 1$ と仮定する。$g(y) = y^n f(1/y)$ とおくと、

$$g(y) = 1 + a_{n-1}y + a_{n-2}y^2 + \cdots + a_1y^{n-1} + y^n.$$

考えてみよう なぜ g に小問 (a)、(b) の結果を使ってよいのだろうか。

これはちょうど f と同じ形をしている。定数項（constant term）は 1、最高次の係数（leading coefficient）も 1 であり、その他の係数は $a_{n-1}, \ldots, a_1$ を逆順に並べたもので、

どれも大きさは依然として A 以下である。したがって、同じ A を用いて小問 (b) を g に適用できる。

$\omega \neq 0$ であるから $g(1/\omega) = \omega^{-n} f(\omega) = 0$ となり、$1/\omega$ は $|1/\omega| < 1$ を満たす g の実根である。g に対して小問 (b) を用いると

$$\frac{1}{|\omega|} \geq \frac{1}{1+A}, \qquad \text{よって} \qquad |\omega| \leq 1 + A.$$

したがって、大きさによらず f のすべての実根について $(*)$ が成り立つ。($f(0) = 1$ であるから、0 は決して根にならないことに注意する。)

小問 (ii)

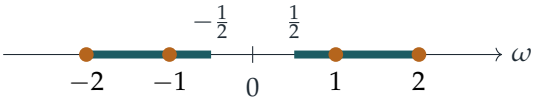
135 で割り、項を昇べきの順に並べると、方程式は $f(x) = 0$ となる。ただし

$$f(x) = 1 - \tfrac{126}{135}x - \tfrac{91}{135}x^2 - \tfrac{100}{135}x^3 - x^4 + x^5.$$

これは $n = 5$ とした小問 (i) の形をしている。定数項も最高次の係数も 1 であり、その他の係数の大きさは $\frac{126}{135}, \frac{91}{135}, \frac{100}{135}, 1$ で、いずれも $A = 1$ 以下である。よって、すべての実根は

$$\tfrac{1}{2} \leq |\omega| \leq 2.$$

を満たす。



許される範囲（色をつけた部分）にある整数は ± 1 と ± 2 だけである。もとの五次式（quintic）$p(x) = 135x^5 - 135x^4 - 100x^3 - 91x^2 - 126x + 135$ の値を計算すると：

$$\begin{aligned} p(1) &= 135 - 135 - 100 - 91 - 126 + 135 = -182, \\ p(-1) &= -135 - 135 + 100 - 91 + 126 + 135 = 0, \\ p(2) &= 4320 - 2160 - 800 - 364 - 252 + 135 = 879, \\ p(-2) &= -4320 - 2160 + 800 - 364 + 252 + 135 = -5657. \end{aligned}$$

よって、整数根は $x = -1$ のみである。実際、

$$p(x) = (x+1)\left(135x^4 - 270x^3 + 170x^2 - 261x + 135\right),$$

であり、四次の因数（quartic）は $x = -1$ で 971 となるから、-1 は単根（simple root）である。

検算

- $(x+1)(135x^4 - 270x^3 + 170x^2 - 261x + 135)$ を展開して、もとの五次式に戻ることを確かめる。
- この五次式にはほかに 2 つの実根があり、およそ 0.595 と 1.725 である。小問 (i) の予測通り、どちらも $[\frac{1}{2}, 2]$ に含まれる。
- $A = 2$ として $\mathrm{f}(x) = 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$ を試してみる。根 1 は $[\frac{1}{3}, 3]$ に含まれる。また、この評価は数百個のランダムな多項式についてコンピュータでも確認した。

よくある間違い

- 小問 (a) で x^n の項を忘れること。その係数は何らかの a_n ではなく 1 であり、$A \geq 1$ であることによってこの項を等比級数に組み込めるのである。
- 小問 (c) で、$|\omega| \geq 1$ のときに ω において小問 (a) をそのまま使おうとすること。このとき等比級数はもはや収束しない。代わりに $1/\omega$ を考えよ。
- 小問 (ii) で、135 の約数をすべて根の候補として調べること。これは正当な方法ではあるが、小問 (i) の評価を使えば調べるべき候補は 4 つだけになる。

STEP のその先へ

多項式の根を係数によって評価することは古典的なテーマである。ここで扱ったのはコーシー（Cauchy）の評価の一つの形であり、実数の絶対値（absolute value）の代わりに複素数の絶対値（modulus）を用いれば、同じ議論が複素根に対してもそのまま通用する。$y^n \mathrm{f}(1/y)$ という逆転操作は小さい根と大きい根を入れ替えるもので、代数学や複素解析（complex analysis）における標準的な道具である。このような評価や、複素根の幾何学についてさらに多くを知りたければ、Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）を読んでみるとよい。

解答例

STEP II 2019、第4問

純粋数学 • 望遠鏡型の三角関数の積

> **STEP II 2019、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

角が毎回 2 倍（または半分）になる余弦の積は、最も小さい角の正弦を掛けると次々に打ち消し合う（telescoping）。倍角の公式（double-angle formula）$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ によって、因子が一つずつ吸収されていくからである。積を閉じた形で表せれば、対数（logarithm）をとることで積は和に変わり、微分すると $\ln\cos$ は $\tan$ に変わる。正接の和はここから生じる。無限積・無限級数の場合は、二つの標準的な極限を用いて $n \to \infty$ とすれば得られる。

解答

小問 (i)

この積を P とおく。$\sin\frac{\pi}{9} \neq 0$ であるから、これを掛けて恒等式を 3 回用いることができる。

$$\begin{aligned} 8\sin\tfrac{\pi}{9}\,P &= 4\big(2\sin\tfrac{\pi}{9}\cos\tfrac{\pi}{9}\big)\cos\tfrac{2\pi}{9}\cos\tfrac{4\pi}{9} = 2\big(2\sin\tfrac{2\pi}{9}\cos\tfrac{2\pi}{9}\big)\cos\tfrac{4\pi}{9} \\ &= 2\sin\tfrac{4\pi}{9}\cos\tfrac{4\pi}{9} = \sin\tfrac{8\pi}{9} = \sin\big(\pi - \tfrac{\pi}{9}\big) = \sin\tfrac{\pi}{9}. \end{aligned}$$

両辺を $8\sin\frac{\pi}{9}$ で割って、

$$\cos\tfrac{\pi}{9}\cos\tfrac{2\pi}{9}\cos\tfrac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}.$$

小問 (ii)

ここでは角 $x, \frac{x}{2}, \ldots, \frac{x}{2^n}$ が半分ずつになっていくので、最も小さい角は $x/2^n$ である。$0 < x/2^n < \frac{1}{2}\pi$ であるから、その正弦は 0 でない。$\sin(x/2^n)$ を掛けると、因子

$\cos(x/2^n)$ がこれと組になって $\frac{1}{2}\sin(x/2^{n-1})$ を与え、それが $\cos(x/2^{n-1})$ と組になり、以下同様に $\cos x$ まで続く。$n+1$ 回の各段階でそれぞれ因子 $\frac{1}{2}$ が一つずつ出てくる。

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}\sin 2x, \qquad \text{よって} \qquad \prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin(x/2^n)}.$$

考えてみよう 微分によって、余弦の積を正接の和に変えるにはどうすればよいか。

対数をとればよい。各 k について $0<x/2^k<\frac{1}{2}\pi$ であるから、すべての因子は正であり、$\sin 2x>0$ でもある。よって

$$\sum_{k=0}^{n}\ln\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\ln\sin 2x-(n+1)\ln 2-\ln\sin\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

連鎖律（chain rule）により $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\cos(x/2^k)=-\frac{1}{2^k}\tan(x/2^k)$ であることを用いて、x で微分すると

$$-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)=2\cot 2x-\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

両辺に -1 を掛けると、求める結果がそのまま得られる。

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{x}{2^n}\right)-2\cot 2x.$$

小問 (iii)

積の公式を $\cos x\neq 0$ で割り、$\sin 2x=2\sin x\cos x$ を用いると、

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{2\sin x\cos x}{2^{n+1}\sin(x/2^n)\cos x}=\frac{\sin x}{2^n\sin(x/2^n)}.$$

考えてみよう $n\to\infty$ のとき、$2^n\sin(x/2^n)$ はどうなるか。

$\theta=x/2^n$ とおくと、$n\to\infty$ のとき $\theta\to 0$ である。このとき

$$2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)=x\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\longrightarrow x\cdot 1=x,$$

したがって

$$\prod_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin(x/2^n)}=\frac{\sin x}{x}.$$

級数については、$j=k+2$ と置き換える。すると $\frac{1}{2^{j-2}}=\frac{1}{2^k}$、$\frac{\pi}{2^j}=\frac{\pi/4}{2^k}$ となるので、この和は小問 (ii) の級数で $x=\frac{\pi}{4}$ としたものである。この x は $(0,\frac{1}{2}\pi)$ に属する。この x に対しては $2\cot 2x=2\cot\frac{\pi}{2}=0$ であるから、$k=n$ までの部分和（partial sum）は

$$\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{\pi}{4\cdot 2^n}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{\theta}{\tan\theta}\qquad\left(\theta=\frac{x}{2^n},\ x=\frac{\pi}{4}\right).$$

$n \to \infty$ のとき $\theta \to 0$ かつ $\theta/\tan\theta \to 1$ であるから、部分和は $1/x$ に収束（converge）する。

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{2^{j-2}} \tan\left(\frac{\pi}{2^j}\right) = \frac{4}{\pi}.$$

検算

- 小問 (i)：$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \approx 0.9397 \times 0.7660 \times 0.1736 \approx 0.1250$。
- 小問 (ii) で $n = 0$ のとき：積は $\cos x$ であり、公式は $\sin 2x/(2\sin x) = \cos x$ を与える。和の恒等式は $n = 0$ のとき $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$ となり、これは cot の倍角の公式を変形したものである。
- 小問 (iii)：級数の最初の項は $\tan\frac{\pi}{4} = 1$、$\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{8} \approx 0.2071$、$\frac{1}{4}\tan\frac{\pi}{16} \approx 0.0497$、...であり、コンピュータで確かめた総和は $1.27324\ldots = 4/\pi$ である。
- $\prod \cos(x/2^k) = \sin x/x$ で $x \to 0$ とすると $1 = 1$ となり、当然そうなるべき結果が得られる。

よくある間違い

- 因子 $\frac{1}{2}$ の個数を数え間違えること。$k = 0$ から n までの積には $n+1$ 個の因子があるので、分母は 2^n ではなく 2^{n+1} である。
- すべての因子が正であることを確認せずに対数をとること。範囲 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ が重要なのはこのためである。
- $x = \frac{\pi}{4}$ で $2\cot 2x$ が 0 になることを忘れること、あるいは $x = \frac{\pi}{2}$ を用いてしまうこと（その場合 $j = 1$ の項が $\tan\frac{\pi}{2}$ となり、定義されない）。

STEP のその先へ

$\prod \cos(x/2^k) = \sin x/x$ に $x = \frac{\pi}{2}$ を代入し、各余弦を入れ子になった平方根で表すと、ヴィエト（Viète）の公式 $\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdots$ が得られる。これは数学史上最初の無限積（infinite product）である。有限の積に対して行ったように、無限積の対数を項別に微分するには正当化が必要である。それが許されるのはどのような場合かは、解析学（analysis）の最初の講義で扱われる。オイラー（Euler）の積 $\sin x = x\prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ も同じ考え方から生まれる。厳密な背景については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を読んでみるとよい。

解答例

STEP II 2019、第 5 問

純粋数学 • 反復の不動点

> **STEP II 2019、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

定数列は**不動点**（fixed point）、すなわち $\mathrm{f}(x) = x$ の解から始まる。周期（period）2 の数列は、$\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$ の解のうち不動点でないものから始まる。どの不動点も $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$ を満たすので、$\mathrm{f}(x) - x$ は四次式（quartic）$\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) - x$ の因数（factor）でなければならない。もう一方の因数である二次式（quadratic）が求まれば、あとはすべて判別式（discriminant）の問題に帰着する。

解答

両方の小問に使う因数分解

どちらの小問でも、ある定数 c を用いて $\mathrm{f}(x) = x^2 - px + c$ と表せる（(i) では $c = p$、(ii) では $c = q$）。任意の x と y に対して

$$\mathrm{f}(y) - \mathrm{f}(x) = (y^2 - x^2) - p(y - x) = (y - x)(y + x - p).$$

$y = \mathrm{f}(x)$ とおき、両辺に $\mathrm{f}(x) - x$ を加えると

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) - x &= \big[\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) - \mathrm{f}(x)\big] + \big[\mathrm{f}(x) - x\big] \\ &= \big(\mathrm{f}(x) - x\big)\big(\mathrm{f}(x) + x - p + 1\big). \end{aligned}$$

ここから、以下で用いる二つの帰結が得られる。

- 数列が周期 2 をもつのは、a が $Q(x) = \mathrm{f}(x) + x - p + 1$ の根であって、$\mathrm{f}(x) - x$ の根では**ない**ときであり、そのときに限る。実際、$\mathrm{f}(\mathrm{f}(a)) = a$ ならば $u_2 = u_0$ であり、各項は直前の項によって定まるので、帰納法（induction）によりすべての n

について $u_{n+2} = u_n$ となる。このとき数列が定数列でないのは $u_1 \neq u_0$、すなわち $\mathrm{f}(a) \neq a$ のときであり、そのときに限る。

- x が不動点ならば $Q(x) = 2x - p + 1$ である。よって、不動点が Q の根にもなるのは $x = \frac{1}{2}(p-1)$ のときに限られる。

小問 (i)

ここでは $\mathrm{f}(x) = x^2 - px + p$ であるから

$$\mathrm{f}(a) - a = a^2 - (p+1)a + p = (a-1)(a-p).$$

数列が定数列となるのは $u_1 = u_0$ のとき（このときすべての項が a に等しい）であり、そのときに限るので、求める値は

$$a = 1 \quad \text{および} \quad a = p.$$

周期 2 については、もう一方の因数は

$$Q(x) = x^2 - px + p + x - p + 1 = x^2 + (1-p)x + 1,$$

であり、その判別式は

$$(1-p)^2 - 4 = (p-1-2)(p-1+2) = (p-3)(p+1).$$

- $-1 < p < 3$ のとき、判別式は負であり、Q は実数解をもたず、周期 2 を与える実数 a は存在しない。
- $p = 3$ または $p = -1$ のとき、Q はただ一つの根 $x = \frac{1}{2}(p-1)$ をもち、それはそれぞれ 1、-1 である。$p = 3$ のとき不動点は 1 と 3、$p = -1$ のとき不動点は 1 と -1 である。いずれの場合も Q の根は不動点であるから、そこから始まる数列は定数列であり、周期 2 ではない。
- $p > 3$ または $p < -1$ のとき、Q は相異なる二つの実数解をもつ。どちらも不動点ではない。上の二つ目の項目より、不動点であるならば $\frac{1}{2}(p-1)$ でなければならないが、

  $$Q\left(\tfrac{1}{2}(p-1)\right) = \tfrac{1}{4}(p-1)^2 - \tfrac{1}{2}(p-1)^2 + 1 = 1 - \tfrac{1}{4}(p-1)^2 \neq 0$$

  である。$(p-1)^2 > 4$ だからである。したがって、a をいずれかの根にとれば周期 2 の数列が得られる。

以上より、周期 2 を与える a の値が存在するための必要十分条件は、$p > 3$ または $p < -1$ である。

小問 (ii)

今度は $\mathrm{f}(x) = x^2 - px + q$ であるから

$$\mathrm{f}(x) - x = x^2 - (p+1)x + q.$$

定数列であるためには $\mathrm{f}(a) = a$ を満たす a、すなわちこの二次式の実数解が必要である。

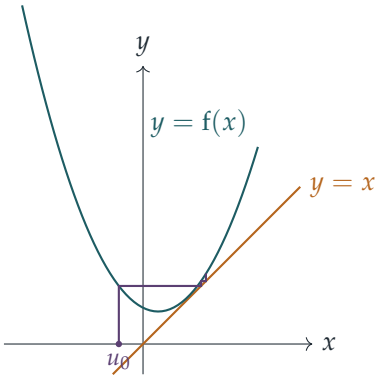
すべての x について $\mathrm{f}(x) > x$ ならば、すべての a について $\mathrm{f}(a) \neq a$ となるので、定数列は存在しない。

逆に、どの a も定数列を与えない、すなわち $g(x) = x^2 - (p+1)x + q$ が実数解をもたないと仮定する。このとき g は連続（continuous）で決して零にならないので符号を変えることはなく、$x \to \infty$ のとき $g(x) \to +\infty$ であるから、いたるところで正である。（同じことだが、判別式が負で最高次の係数（leading coefficient）が正である。）すなわち、すべての x について $\mathrm{f}(x) > x$ であり、これで「必要十分」であることが示された。

結論の導出。定数列が存在しないと仮定する。このときすべての x について $\mathrm{f}(x) > x$ であるから、任意の a に対して

$$u_{n+1} = \mathrm{f}(u_n) > u_n \quad \text{すべての} n.$$

数列は狭義単調増加（strictly increasing）であるから $u_2 > u_1 > u_0$ となる。特に $u_2 \neq u_0$ であり、数列は周期 2 をもちえない。



図はこの状況を表している。放物線は全体が $y = x$ より上にあるので、反復の「階段」は上るしかない。

最後の問い。逆（converse）は**偽**である。$p = q = 0$、すなわち $\mathrm{f}(x) = x^2$ をとる。$a = 0$ と $a = 1$ のとき数列は定数列である。周期 2 には $\mathrm{f}(\mathrm{f}(a)) = a^4 = a$、すなわち

$a(a-1)(a^2+a+1)=0$ が必要である。因数 a^2+a+1 の判別式は負であるから、実数解は $a=0$ と $a=1$ のみであり、どちらも不動点である。よって、定数列を与える値は存在するにもかかわらず、周期 2 を与える a の値は存在しない。

考えてみよう $\mathrm{f}(x)=x^2$ はたまたまうまくいっただけなのだろうか？

そうではない。一般に、不動点を与える二次式の判別式は $D=(p+1)^2-4q$ であり、$Q(x)=x^2+(1-p)x+q-p+1$ の判別式は

$$(1-p)^2-4(q-p+1)=(p+1)^2-4q-4=D-4.$$

である。(i) と同様に、Q の根が不動点となるのは Q の判別式が零のときに限る。よって、定数列は $D\geq 0$ のときに存在し、周期 2 の数列は $D>4$ のときに存在する。$0\leq D\leq 4$ を満たす任意の p、q が反例（counterexample）を与える。

検算

- (i) で $p=4$ とすると、$Q(x)=x^2-3x+1$ の根は $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})\approx 2.618,\ 0.382$ である。2.618 から始めると $\mathrm{f}(2.618)=4+(2.618-4)(2.618)\approx 0.382$、さらに $\mathrm{f}(0.382)\approx 2.618$ となり、予想どおり周期 2 である。
- $p=3$ のとき Q の根は $x=1$ であり、$\mathrm{f}(1)=3+(1-3)=1$ となる。これは不動点であり、境界の値が除外されることが確かめられる。
- $(x^2-(p+1)x+p)(x^2+(1-p)x+1)$ を展開すると $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))-x$ になる。数千個のランダムな (p,x) でのコンピュータによる確認でも、(ii) の「周期 2 $\iff$ $D>4$」という条件の確認でも、例外は見つからなかった。

よくある間違い

- $p=3$ と $p=-1$ を含めてしまう。このとき $\mathrm{f}(\mathrm{f}(a))=a$ は重解（repeated root）をもつが、それは不動点であり、数列は定数列になる。
- 周期 2 の点を探す前に、$\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))-x$ から因数 $\mathrm{f}(x)-x$ を取り除く必要があることを忘れる。
- 最後の問いで、不等式の向きだけから議論してしまう。「...は正しいか？」という問いに決着をつけるのは、具体的な反例一つである。

STEP のその先へ

これは**離散力学系**（discrete dynamical systems）への第一歩である。どの二次写像も、一次の変数変換によってロジスティック写像（logistic map）$x \mapsto rx(1-x)$ と同値になる。パラメータが大きくなるにつれて、不動点は 2 周期軌道に、次いで 4 周期軌道にと移り変わり、周期倍分岐（period-doubling cascade）を経てカオス（chaos）に至る。ここで求めた、Q の判別式が零になる境界値は、これらの分岐（bifurcation）の最初のものである。Strogatz の *Nonlinear Dynamics and Chaos*（非線形力学とカオス）は非常に読みやすい入門書である。

解答例

STEP II 2019、第 6 問

純粋数学 ・ 一階微分方程式

STEP II 2019、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

どちらの方程式でも、右辺（right-hand side）は x と y にただ一つの組合せを通してのみ依存している。小問 (i) では $y+x$、小問 (ii) では $y-x$ である。後者は、二次式が実は $(y-x)^2+4(y-x)+3$ だからである。この一つの観察によって、直線解が求まり、停留点（stationary point）の位置が直線上に限定され、さらに（小問 (i) では）方程式を変数分離（separation of variables）できる形に変形できる。あとは解曲線（solution curve）が交わらないという注意がすべてを片付けてくれる。二つの直線解の間から出発した曲線は、永遠にその間に閉じ込められるのである。

解答

小問 (i)

直線解。 $y=mx+c$ とすると $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=m$ であるから、

$$m=mx+c+x+1=(m+1)x+(c+1)\quad \text{任意の} x.$$

が成り立たなければならない。x の係数を比較すると $m=-1$ であり、定数項から $c+1=m=-1$、すなわち $c=-2$ を得る。よって解は $y=-x-2$ である。

停留点の位置。 $y=y_3(x)$ の停留点では $0=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+x+1$ であるから、その点は直線 $y=-x-1$ 上にある。

次に $k<-2$ とする。曲線 $y=y_3(x)$ と直線 $y=-x-2$ はともに解であり、$x=0$ において曲線は直線より下にある（$k<-2$）。両者は決して交わらないので、曲線はすべての x に対して直線より下にとどまる。すなわち $y_3(x)<-x-2<-x-1$ である。

したがって至るところで $y_3(x)+x+1<-1<0$ となる。傾きは決して 0 にならない（実際、常に -1 より小さい）ので、停留点は存在しない。

停留点はすべて極小点である。方程式を微分すると

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+1.$$

停留点では第 1 次導関数（first derivative）が 0 であるから、第 2 次導関数（second derivative）は $1>0$ となり、その点は極小点（local minimum）である。

解く。$Y=y+x$ とおくと $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+1=Y+2$ である。直線 $Y=-2$ 上ではこれはすでに得た解である。それ以外の場合は変数分離して

$$\int\frac{\mathrm{d}Y}{Y+2}=\int\mathrm{d}x\quad\Longrightarrow\quad\ln|Y+2|=x+\text{定数}\quad\Longrightarrow\quad Y+2=Ae^x,$$

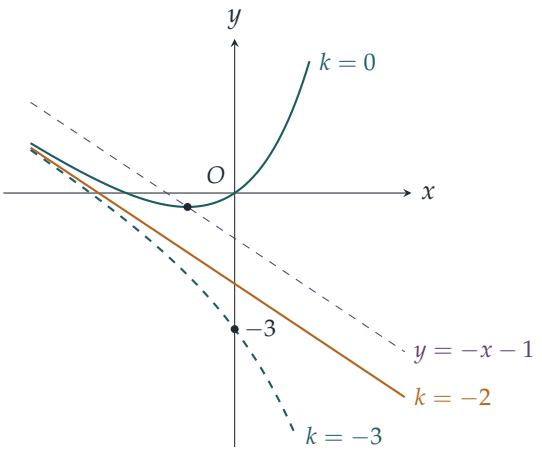
を得る。ここで A は定数である（$A=0$ の場合が直線解にあたる）。よって $y=Ae^x-x-2$ であり、$y(0)=k$ から $A=k+2$ となる：

$$y_3(x)=(k+2)e^x-x-2.$$

これは先に得た結果と整合する。$y_3'(x)=(k+2)e^x-1$ は、$k\le-2$ のときは決して 0 にならず、$k>-2$ のときは $e^x=1/(k+2)$ でただ一度だけ 0 になる。

三つの曲線。

- $k=0$：$y=2e^x-x-2$ で、原点を通る。極小点は $e^x=\frac{1}{2}$ となるところ、すなわち $\left(-\ln 2,\ \ln 2-1\right)\approx(-0.69,-0.31)$ であり、直線 $y=-x-1$ 上にある。$x\to-\infty$ のとき $2e^x\to0$ であり、曲線は $y=-x-2$ に上から近づく。$x\to\infty$ のときは指数関数が支配的になる。
- $k=-2$：直線 $y=-x-2$ そのものである。
- $k=-3$：$y=-e^x-x-2$ で、$(0,-3)$ を通り、常に減少する。$x\to-\infty$ のとき $y=-x-2$ に下から近づき、$x\to\infty$ のとき $-e^x$ のように急降下する。



小問 (ii)

右辺の書き換え。項をまとめると

$$x^2+y^2-2xy-4x+4y+3=(y-x)^2+4(y-x)+3=(y-x+1)(y-x+3).$$

$u=y-x$ とおいて $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(u+1)(u+3)$ と書いておくとよい。

直線解。$y=mx+c$ とすると $u=(m-1)x+c$ であり、

$$m=\big((m-1)x+c+1\big)\big((m-1)x+c+3\big)\quad \text{任意の}x.$$

が成り立たなければならない。$m\neq 1$ ならば右辺は x の正真正銘の二次式であり、定数に等しくなることはないので、$m=1$ である。このとき $1=(c+1)(c+3)$、すなわち $c^2+4c+2=0$ であり、$c=-2\pm\sqrt{2}$ を得る。二つの解は

$$y=x-2+\sqrt{2}\qquad \text{および}\qquad y=x-2-\sqrt{2}.$$

である。

y_4 の停留点。傾きが 0 になるのは $u=-1$ または $u=-3$ のときに限るので、停留点はどれも

$$y=x-1\qquad \text{または}\qquad y=x-3.$$

上にある。これらの直線の間では $-3<y-x<-1$ であるから $u+1<0<u+3$ となり、傾き $(u+1)(u+3)$ は**負**である。（その外側では正である。）

曲線の存在範囲。$x=0$ において $u=-2$ であり、これは $-2-\sqrt{2}\approx -3.41$ と $-2+\sqrt{2}\approx -0.59$ の間にある。よって $x=0$ において曲線は二つの直線解の間にあり、解曲線は交わらないので、

$$x-2-\sqrt{2}<y_4(x)<x-2+\sqrt{2}\quad \text{任意の}x.$$

が成り立つ。停留点の載る二直線に挟まれた帯（$-3 < u < -1$）は、この帯の内側に含まれている。

> **考えてみよう** 曲線は二本の平行線の間に閉じ込められている。では、帯の内部で曲線はどこへ向かうのだろうか。

$u = y_4 - x$ を追跡する。u は

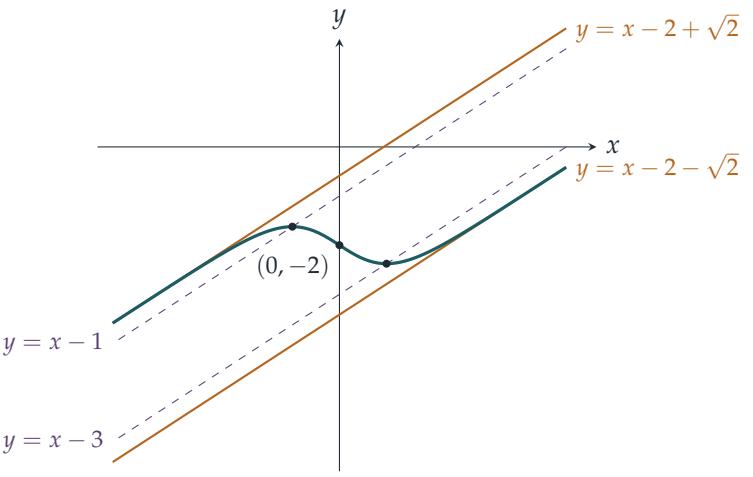
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = (u+1)(u+3) - 1 = u^2 + 4u + 2 = \left(u + 2 - \sqrt{2}\right)\left(u + 2 + \sqrt{2}\right),$$

を満たし、これは $-2 - \sqrt{2} < u < -2 + \sqrt{2}$ である限り負であり、それは常に成り立つ。よって u は狭義単調減少（strictly decreasing）かつ有界であり、したがって $x \to \pm\infty$ のときの極限をもつ。そのような極限においては $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ は 0 に近づかなければならない（そうでなければ u は限りなく変化してしまう）ので、極限値は根である。すなわち $x \to -\infty$ のとき $u \to -2 + \sqrt{2}$、$x \to +\infty$ のとき $u \to -2 - \sqrt{2}$ である。

したがって、左から右へ読んでいくと次のようになる。

- 左のはるか遠くでは、曲線は $y = x - 2 + \sqrt{2}$ に下から寄り添い、傾きは 1 に近い。
- u が -1 を下回るとき、曲線は $y = x - 1$ とただ一点で交わり、そこは**極大点**（local maximum）である（傾きが正から負に変わる）。
- 曲線は傾き $(-1)(1) = -1$ で $(0, -2)$ を通って下降する。
- u が -3 を下回るとき、曲線は $y = x - 3$ とただ一点で交わり、そこは**極小点**である。
- その後曲線は再び上昇し、$y = x - 2 - \sqrt{2}$ に上から寄り添い、傾きは 1 に近づく。

u は狭義単調減少であるから、$u = -1$ と $u = -3$ はそれぞれちょうど一度ずつ通過される。よって停留点はちょうど二つである。もう一つ美しい性質がある。(x, y) を $(-x, -4 - y)$ に置き換えても、方程式も出発点 $(0, -2)$ も変わらない。したがって曲線は $(0, -2)$ に関して点対称（half-turn symmetry）であり、極大点と極小点はその点に関して互いに対称な位置にある。



検算

- 小問 (i) では代入して確かめる。$y = (k+2)e^x - x - 2$ から $y' = (k+2)e^x - 1$ であり、また $y + x + 1 = (k+2)e^x - 1$ である。$k = -2$ とおくと直線解に戻る。
- $k = 0$ のとき、極小点 $(-\ln 2, \ln 2 - 1) \approx (-0.693, -0.307)$ は確かに $y = -x - 1$ 上にある。
- 小問 (ii) では、$(0, -2)$ から出発する逐次的な数値解（コンピュータで確認済み）は二直線の間にとどまり、$y = x - 1$ 上の $(-0.623, -1.623)$ 付近で極大、$y = x - 3$ 上の $(0.623, -2.377)$ 付近で極小に達し、$x = \pm 6$ までには漸近線（asymptote）との差がおよそ 10^{-7} 以内になる。これら二点は、対称性から予想されるとおり、$(0, -2)$ に関して互いに対称である。

よくある間違い

- 解曲線が交わらないという性質を使い忘れること。「$k < -2$ ならば停留点は存在しない」と言うには、$x = 0$ においてだけでなく、**すべての** x に対して曲線が $y = -x - 2$ より下にとどまることが必要である。
- y_4 が直線解のどちらかと交わるように描いたり、極大と極小を逆に描いたりすること。どちらがどちらであるかは、破線の間での $(u+1)(u+3)$ の符号によって決まる。
- 小問 (ii) で m と c を求める際に、$m = 1$ の場合を先に除外（あるいは確認）せずに $m - 1$ で割ってしまうこと。

STEP のその先へ

問題冒頭の注意は、ピカール＝リンデレーフの定理（Picard–Lindelöf theorem）のうち一意性（uniqueness）の部分である。すなわち、右辺が滑らかであれば、各点を通る解はちょうど一つであり、したがって解曲線は交わり得ない。小問 (ii) は、姿を変えた**自励的**（autonomous）な方程式 $u' = u^2 + 4u + 2$ である。そして、公式を一切使わずに、平衡点（equilibrium）とその間での u' の符号から曲線の行方を見出した方法は、微分方程式（differential equation）の定性的理論（qualitative theory）の出発点である。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（『初等微分方程式』）は、一意性とこの相直線（phase line）による描像の両方を扱っている。

解答例

STEP II 2019、第 7 問

純粋数学 ・ ベクトルと内積

> **STEP II 2019、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

単位ベクトル（unit vector）については、長さも角度もどちらも内積（scalar product）から得られる：$|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = 2 - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$。そこで、和が零になるという条件を、いくつかのベクトルを一方の辺に、残りを他方の辺に分けて書き、両辺の長さの 2 乗をとるのがうまい方法である。こうするとベクトルの等式が内積どうしの等式に変わり、そこから図形の形がわかる。

解答

以下では一貫して、単位ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ に対して

$$|\mathbf{u} \pm \mathbf{v}|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} \pm 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 2 \pm 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}.$$

が成り立つことを用いる。

小問 (i)

$\mathbf{a}+\mathbf{b} = -\mathbf{c}$ であるから、両辺の長さの 2 乗をとると

$$2 + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{c}|^2 = 1,$$

となり、求めるとおり $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -\frac{1}{2}$ である。

条件は $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ について対称であるから、同様に（$\mathbf{b}+\mathbf{c} = -\mathbf{a}$ および $\mathbf{c}+\mathbf{a} = -\mathbf{b}$ と書くことで）$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} = -\frac{1}{2}$ を得る。したがって

$$AB^2 = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 2 - 2\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 3,$$

であり、同様に $BC^2 = CA^2 = 3$ である。3 辺の長さはすべて $\sqrt{3}$ であるから、**三角形 ABC は正三角形（equilateral triangle）である**。（どの 2 つの位置ベクトル（position vector）のなす角も 120° であり、$\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{0}$ であるから、O はこの三角形の外心（circumcentre）であると同時に重心（centroid）でもある。）

小問 (ii)

条件を $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = -(\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4)$ と書き、両辺の長さの 2 乗をとると

$$2 + 2\,\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 2 + 2\,\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_4 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_4.$$

となる。ベクトルを残り 2 通りの方法で組に分けると、同様にして

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_4, \qquad \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3.$$

を得る。$A_iA_j^2 = 2 - 2\,\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$ であるから、これは向かい合う辺の長さが等しいことを意味する：$A_1A_2 = A_3A_4$、$A_1A_3 = A_2A_4$、$A_1A_4 = A_2A_3$。

(a) 4 点が同一平面上にある場合

考えてみよう 4 点を含む平面は原点を通らなければならないだろうか？

通らなければならない。4 点の重心は $\frac{1}{4}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4) = \mathbf{0}$ であり、平面上の点の重心はその平面上にある。よってこの平面は O を含み、どの A_i も O からの距離が 1 であるから、4 点はその平面上で O を中心とする半径 1 の円周上にある。以下ではこの平面上で考える。

$\mathbf{w} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ とおくと、$\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 = -\mathbf{w}$ である。

$\mathbf{w} = \mathbf{0}$ のとき、$\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1$ かつ $\mathbf{a}_4 = -\mathbf{a}_3$ である。

$\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ のとき、$\mathbf{a}_3$ と $\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 = -\mathbf{w}$ の内積をとり、(ii) を用いると

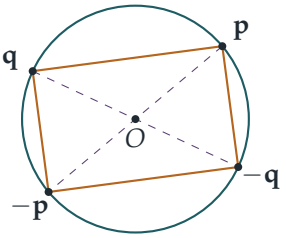
$$\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{w} = -(1 + \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_4) = -(1 + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) = -\tfrac{1}{2}|\mathbf{w}|^2.$$

となる。よって $\mathbf{a}_3$ は $\mathbf{w}$ 方向の成分が一定の単位ベクトルである。すなわち、その終点は $\mathbf{w}$ に垂直なある定直線上にあり、直線と円の共有点は高々 2 個である。ところで $-\mathbf{a}_1$ と $-\mathbf{a}_2$ はそのようなベクトルの 2 つである。実際、

$$(-\mathbf{a}_1) \cdot \mathbf{w} = -(1 + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) = -\tfrac{1}{2}|\mathbf{w}|^2,$$

であり、$-\mathbf{a}_2$ についても同様である。また $A_1 \neq A_2$ であるから、この 2 つは異なる。したがって $\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1$ または $\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_2$ であり、このとき $\mathbf{a}_4 = -\mathbf{w} - \mathbf{a}_3$ は残りの一方となる。

いずれの場合も、4 つの位置ベクトルは、$\mathbf{q} \neq \pm\mathbf{p}$ を満たすある単位ベクトルを用いて $\mathbf{p}, -\mathbf{p}, \mathbf{q}, -\mathbf{q}$ と表される。よって 4 点は円の 2 本の直径の両端である。これらがつくる四角形は対角線が（O で）互いに他を二等分するから平行四辺形（parallelogram）であり、さらに対角線の長さが等しい（どちらも長さ 2）から**長方形（rectangle）**である。これが正方形になるのは、2 本の直径が垂直であるときに限る。



（厳密には、頂点は円周に沿った順にとるべきである。たまたまラベルが $A_1 = \mathbf{p}$, $A_2 = \mathbf{q}$, $A_3 = -\mathbf{q}$, $A_4 = -\mathbf{p}$ となっていた場合、この順に結ぶと、この長方形の 2 辺と 2 本の対角線をなぞることになる。）

(b) 正四面体の場合 このとき 6 本の辺 A_iA_j はすべて等しいので、6 つの内積 $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$ $(i \neq j)$ はすべて同じ値をとる。これを k とする。$\mathbf{a}_1$ と零となる和との内積をとると

$$0 = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4) = 1 + 3k,$$

となるから、$k = -\frac{1}{3}$ である。すると各辺について

$$A_1A_2^2 = 2 - 2k = 2 + \tfrac{2}{3} = \tfrac{8}{3}, \qquad \text{よって辺の長さは} \qquad \sqrt{\tfrac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

である。

検算

- 頂点が $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1)$ である四面体は正四面体（regular tetrahedron）であり、位置ベクトルはどれも単位ベクトルでその和は $\mathbf{0}$、辺の長さは $\frac{1}{\sqrt{3}}|(0,2,2)| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \approx 1.633$ である。
- (i) と比べてみよう。120° をなす 3 つの単位ベクトルからは辺の長さ $\sqrt{3} \approx 1.732$ が得られ、こちらのほうがわずかに長い。正四面体の頂点のほうが球面上で「より混み合っている」のだから、これは納得できる。
- 和が零になる 4 つの単位ベクトルの組を無作為に数千通り生成してコンピュータで確かめたところ、(ii) の 3 つの内積の等式はすべて成り立ち、また平面の場合には点が必ず $\pm\mathbf{p}, \pm\mathbf{q}$ という向かい合う組になっていた。

よくある間違い

- (i) で $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -\frac{1}{2}$ を示したところで止めてしまう。三角形が正三角形であると結論するには、3 つの内積すべて（あるいは 3 辺の長さすべて）が必要である。
- (a) で、頂点の並び方を確かめずに、向かい合う辺が等しいことから「平行四辺形」と結論してしまう。あるいは、平面が O を通ることを示し忘れる。

STEP のその先へ

和が零で、どの 2 つの内積も等しい単位ベクトルの組は、**正単体**（regular simplex）の頂点になる。n 次元ではそのようなベクトルが $n+1$ 個あり、$\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_j = -\frac{1}{n}$ となる。これが上で得た $-\frac{1}{2}$ と $-\frac{1}{3}$ である。このような配置は化学（メタンの結合角 109.5° は $\cos^{-1}(-\frac{1}{3})$ である）や符号理論（coding theory）に現れる。すべての内積 $\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_j$ を並べた行列は**グラム行列**（Gram matrix）とよばれ、ベクトルの配置を回転の違いを除いて決定する。これがこの問題全体の背後にある考え方である。さらに学ぶには、ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）がよい。

解答例

STEP II 2019、第 8 問

純粋数学 ・ 乗法的な行列関数

> **STEP II 2019、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 7.3 節「行列式を行列式たらしめるもの」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch07/determinant-axioms.html

鍵となる考え方

すべては、ただ一つの規則 $\mathrm{f}(\mathbf{MN}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})\mathrm{f}(\mathbf{N})$ をうまく選んだ積に適用することから導かれる。毎回のコツは、同じ行列を二通りに表す方法、あるいは自分自身と別の何かとの積になっている行列を見つけ、f の値を比べることである。行列式（determinant）はそのような関数の一つなので、答えがどうなるべきかの手がかりとして役に立つ。しかし、f が行列式**そのもの**であると仮定してはならない。

解答

小問 (i)

$\mathbf{MI} = \mathbf{M}$ であるから、

$$\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \mathrm{f}(\mathbf{MI}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})\,\mathrm{f}(\mathbf{I}).$$

$\mathrm{f}(\mathbf{M}) \neq 0$ と与えられているので、これで割ることができ、$\mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$ を得る。

（この仮定がなければ、このように結論することはできない。恒等的に零である関数も乗法的（multiplicative）だからである。）

小問 (ii)

積を計算すると $\mathbf{J}^2 = \mathbf{I}$ となるので、

$$\mathrm{f}(\mathbf{J})^2 = \mathrm{f}(\mathbf{J}^2) = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1.$$

よって $\mathrm{f}(\mathbf{J}) = \pm 1$ であり、$\mathrm{f}(\mathbf{J}) \neq 1$ であるから $\mathrm{f}(\mathbf{J}) = -1$ を得る。

考えてみよう $\mathbf{J}$ を掛けると、行列はどう変わるか？

$\mathbf{J}$ を左から掛けると行が入れ替わり、右から掛けると列が入れ替わる：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}.$$

それぞれに f を適用し、$\mathrm{f}(\mathbf{J}) = -1$ を用いると、

$$\mathrm{f}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = -\mathrm{f}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{f}\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = -\mathrm{f}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}.$$

1 つ目の式から $\mathrm{f}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\mathrm{f}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$ が得られ、2 つ目の式の両辺に -1 を掛けると、これが $\mathrm{f}\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$ にも等しいことがわかる。これが示すべきことであった。

小問 (iii)

$\mathbf{A}$ の第 1 行を $(a \;\; b)$ とし、第 2 行をその λ 倍とする。$\mathbf{B}$ を 2 つの等しい行をもつ行列とし、$\mathbf{K}$ において $k = \lambda$ とする。$\mathbf{K}$ を左から掛けると第 2 行が k 倍されるので、

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = \mathbf{KB}.$$

ここで、$\mathbf{B}$ の行を入れ替えても行列は変わらないので、小問 (ii)（$c = a, d = b$ とする）より

$$\mathrm{f}(\mathbf{B}) = -\mathrm{f}(\mathbf{B}),$$

となり、$\mathrm{f}(\mathbf{B}) = 0$ でなければならない。したがって $\mathrm{f}(\mathbf{A}) = \mathrm{f}(\mathbf{K})\,\mathrm{f}(\mathbf{B}) = 0$ である。この議論はすべての実数 λ に対して成り立ち、$\lambda = 0$ の場合も含む。

小問 (iv)

まず 3 つの行列を計算する。$k \neq 0$ のとき $\mathbf{K}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}$ であり、

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

次に、$\mathbf{K}$ による共役 (conjugation) は f の値を変えない。実際、$\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1})\mathrm{f}(\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$ であるから、

$$\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1})\,\mathrm{f}(\mathbf{P})\,\mathrm{f}(\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{P}).$$

考えてみよう k をどの値にすると、$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K}$ が $\mathbf{P}^2$ や $\mathbf{P}^{-1}$ になるか？

$k = 2$ とすると $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K} = \mathbf{P}^2$ となるので、

$$\mathrm{f}(\mathbf{P}) = \mathrm{f}(\mathbf{P}^2) = \mathrm{f}(\mathbf{P})^2,$$

したがって $\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 0$ または 1 である。

$k = -1$ とすると $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K} = \mathbf{P}^{-1}$ となるので、$\mathrm{f}(\mathbf{P}^{-1}) = \mathrm{f}(\mathbf{P})$ である。ところが $\mathrm{f}(\mathbf{P})\,\mathrm{f}(\mathbf{P}^{-1}) = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$ であるから、

$$\mathrm{f}(\mathbf{P})^2 = 1,$$

となり、特に $\mathrm{f}(\mathbf{P}) \neq 0$ である。2 つの結果を合わせると、

$$\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 1.$$

検算

行列式はすべての仮定を満たす。乗法的であり、$\det \mathbf{I} = 1$ かつ $\det \mathbf{J} = -1$ である。また、行列式は得られた結論すべてと一致する。行や列を入れ替えると符号が変わり、比例する行をもつ行列の行列式は 0 であり、$\det \mathbf{P} = 1$ である。それほど自明でない例として $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \operatorname{sgn}(\det \mathbf{M})\,|\det \mathbf{M}|^{0.7}$ がある。数千個のランダムな行列を用いたコンピュータによる検証で、両方の関数について、乗法の規則、行と列の入れ替えに関する等式、比例する行に対する $\mathrm{f}(\mathbf{A}) = 0$、さらに $\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 1$ が確認された。

よくある間違い

- f = det と仮定してしまう。この問題は乗法性だけから性質を導くことを求めており、行列式は手がかりにすぎない。

- $\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1}) = 1/\mathrm{f}(\mathbf{K})$ を根拠なく用いる。これには小問 (i) で得た $\mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$ と、$\mathbf{K}$ が逆行列をもつ（invertible）ための条件 $k \neq 0$ が必要である。
- $\mathrm{f}(\mathbf{P})^2 = \mathrm{f}(\mathbf{P})$ で止まってしまい、$\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 0$ の可能性を排除し忘れる。

STEP のその先へ

f のように乗法を保つ写像は、逆行列をもつ 2×2 行列全体のなす群（group）から零でない実数全体への**準同型**（homomorphism）である。小問 (iv) は、ある古典的な議論の出発点である。$\mathbf{P}$ のようなせん断行列（shear matrix）は交換子（commutator）の積であるため、このような準同型はすべてそれらを 1 に写し、結局 f は行列式だけに依存することになる。また、各行について線形（linear）であり、交代的（alternating）で、$\mathbf{I}$ において 1 に等しい関数は行列式しかないことも示せる。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）はこのような性質から行列式を構成しており、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は準同型を扱っている。

解答例

STEP II 2019、第 9 問

力学 ・ 原点からの放物体の距離

> **STEP II 2019、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 11.10 節「こちらへ戻ってくるボール」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/coming-back.html

鍵となる考え方

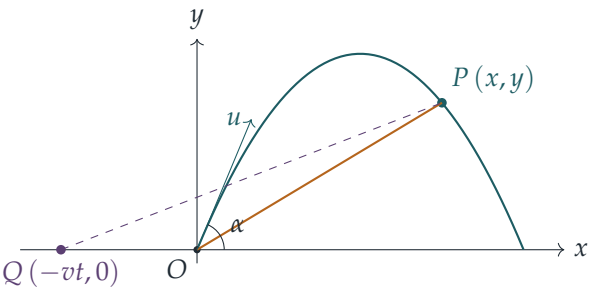
距離そのものは微分しにくいが、その 2 乗なら扱いやすい。OP が増加する（increasing）のは、ちょうど $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(OP^2) > 0$ となるときである。$x^2 + y^2$ を微分すると t と t の二次式（quadratic）の積が得られるので、問題全体は「この二次式はいつ正になるか？」という問いに帰着し、それには判別式（discriminant）が答えてくれる。小問 (ii) も同じ計算であり、水平方向の隔たりに Q の運動を加えるだけである。

解答

P と Q を質点（particle）とみなし、空気抵抗（air resistance）は無視する。O を原点とし、x 軸を水平方向（P の運動の向き）に、y 軸を鉛直上向きにとる。$s = \sin\alpha$、$c = \cos\alpha$ とおくと、$0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ よりどちらも正である。時刻 t において

$$x = uct, \qquad y = ust - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

であり、P は再び $y = 0$ となるとき、すなわち $T = \dfrac{2us}{g}$ において着地する。



小問 (i)

$r = OP$ とおくと $r^2 = x^2 + y^2$ であり、$\dot{x} = uc$、$\dot{y} = us - gt$ を用いて

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\right) = 2(x\dot{x} + y\dot{y}) &= 2\left[u^2c^2t + \left(ust - \tfrac{1}{2}gt^2\right)(us - gt)\right] \\ &= 2t\left[u^2c^2 + u^2s^2 - \tfrac{3}{2}usgt + \tfrac{1}{2}g^2t^2\right] \\ &= t\left(g^2t^2 - 3usg\,t + 2u^2\right),\end{aligned}$$

となる。ここで $c^2 + s^2 = 1$ を用いた。飛行中は $r > 0$ であるから、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2) = 2r\dot{r}$ の符号は $\dot{r}$ の符号と一致し、さらに $t > 0$ であるから、その符号は

$$f(t) = g^2t^2 - 3usg\,t + 2u^2.$$

の符号と一致する。この二次式の最高次の係数（leading coefficient）は正であり、判別式は

$$9u^2s^2g^2 - 8u^2g^2 = u^2g^2\left(9s^2 - 8\right).$$

である。

$s < \frac{2\sqrt{2}}{3}$ **のとき**、（$s > 0$ より）$9s^2 < 8$ であるから、判別式は負となり、すべての t に対して $f(t) > 0$ である。したがって飛行中つねに $\dot{r} > 0$ であり、OP は増加する。

$s > \frac{2\sqrt{2}}{3}$ **のとき**、判別式は正であり、f は相異なる 2 つの根

$$t_{1,2} = \frac{u\left(3s \mp \sqrt{9s^2 - 8}\right)}{2g},$$

をもち、$t_1 < t < t_2$ において $f(t) < 0$ となる。2 つの根はともに正である（和 $3us/g$ と積 $2u^2/g^2$ がともに正であるから）。この区間が実際に P が空中にある間に現れることを確かめなければならない。

? **考えてみよう** 二次式はどこかで負になるが、それが P の着地より前に起こるとどうしてわかるのか？

着地時刻における f の値を求めると

$$f(T) = g^2 \cdot \frac{4u^2s^2}{g^2} - 3usg \cdot \frac{2us}{g} + 2u^2 = 2u^2(1-s^2) = 2u^2c^2 > 0.$$

となる。よって T は 2 根の間にはない。一方、f の頂点（vertex）は $t = \frac{3us}{2g} < \frac{2us}{g} = T$ にあるので、T は頂点より右側にある。T は $[t_1, t_2]$ の外にあるから、$T > t_2$ でなければならない。したがって $0 < t_1 < t_2 < T$ であり、$t_1 < t < t_2$ において $\dot{r} < 0$ となる。すなわち、P が着地する前のある時刻に OP は減少しており、題意は示された。

小問 (ii)

Q はなめらかな（smooth）地面上を、P の側から遠ざかる向きに一定の速さ v で滑るので、時刻 t には $(-vt, 0)$ にある。P と Q の水平方向の隔たりは $x + vt = wt$ であり、ここで

$$w = uc + v > 0,$$

である。また鉛直方向の隔たりは y である。よって $QP^2 = w^2t^2 + y^2$ であり、先ほどとまったく同様に

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(QP^2\right) &= 2\left[w^2t + \left(ust - \tfrac{1}{2}gt^2\right)(us - gt)\right] \\ &= t\left(g^2t^2 - 3usg\,t + 2w^2 + 2u^2s^2\right).\end{aligned}$$

となる。飛行中の符号は $h(t) = g^2t^2 - 3usg\,t + 2(w^2 + u^2s^2)$ の符号と一致し、その判別式は

$$9u^2s^2g^2 - 8g^2\left(w^2 + u^2s^2\right) = g^2\left(u^2s^2 - 8w^2\right).$$

である。これが負になるのはちょうど $8w^2 > u^2s^2$ のとき、すなわち（w と us はともに正であるから）$2\sqrt{2}\,w > us$ のときである。$w = uc + v$ を代入すると

$$2\sqrt{2}\,(uc + v) > us \iff 2\sqrt{2}\,v > \left(\sin\alpha - 2\sqrt{2}\cos\alpha\right)u.$$

となる。よって与えられた条件のもとでは、すべての t に対して $h(t) > 0$ であり、したがって $t > 0$ において $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(QP^2) > 0$ となるから、P の飛行中つねに QP は増加する。以上で題意は示された。

小問 (i) と同じ議論（今度は $h(T) = 2w^2 > 0$）により、不等式の向きが厳密に逆になる場合には、P が着地する前のある間 QP が実際に減少することがわかる。したがって、等号が成り立つ境界の場合を除けば、この条件は実は必要条件（necessary condition）でもある。

検算

- 小問 (ii) で $v = 0$ とおくと $2\sqrt{2}\cos\alpha > \sin\alpha$、すなわち $\tan\alpha < 2\sqrt{2}$、すなわち $\sin\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{3}$ となり、小問 (i) の結果が再び得られる。このとき Q は O にとどまるのだから、これは当然である。
- 臨界角は $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 70.5^\circ$ であり、u や g によらない。これは次元解析（dimensional analysis）から要請されるとおりである（利用できる無次元量は α しかない）。
- $u = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$\sin\alpha = 0.97$ とすると、根は $t_1 \approx 1.14\,\mathrm{s}$ と $t_2 \approx 1.83\,\mathrm{s}$ であり、どちらも着地時刻 $T \approx 1.98\,\mathrm{s}$ より前である。コンピュータで飛行を時間刻みで追うと、これらの時刻の間で OP が減少すること、また多数のランダムな u、α、v について、距離 QP が増加するのはちょうど小問 (ii) の不等式が成り立つときであることが確かめられる。

よくある間違い

- 小問 (i) で「判別式が正である」で止めてしまうこと。OP の落ち込みが P の着地後ではなく着地前に起こることを示さなければならない。
- Q を $(vt, 0)$ に置いてしまうこと。Q は P の側から遠ざかるので、P との水平方向の隔たりは $uct + vt$ である。
- 因数 t を忘れること、あるいは $t > 0$ に言及せずに t で割ってしまうこと。

STEP のその先へ

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{r}|^2 = 2\,\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}$ の符号を調べることは、物体が近づいているのか遠ざかっているのかを問う標準的な方法であり、軌道力学（orbital mechanics）や 2 物体の相対運動（relative motion）においても再び現れる。小問 (ii) は実のところ、Q に対する P の相対位置についての問題なのである。約 70.5° より急な角度で投げ上げられた放物体（projectile）は、飛行の一部の間、投げた人のほうへ戻ってくるという鮮やかな事実は、力学の教科書で好んで取り上げられる題材である。さらに学ぶには、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

解答例

STEP II 2019、第 10 問

力学 ・ 剛体のつり合い

> **STEP II 2019、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

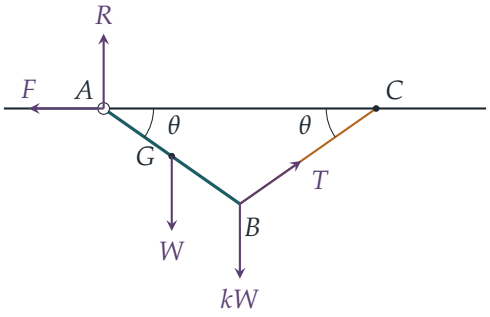
鍵となる考え方

$AB = BC = 2a$ であり、A と C はともにレール上にあるので、三角形 ABC は二等辺三角形（isosceles triangle）である。したがって、糸もレールと角 θ をなす。この幾何的な事実を押さえれば、あとは剛体（rigid body）のつりあい（equilibrium）の標準的な問題である。A のまわりの力のモーメント（moment）を考えれば、輪にはたらく未知の力を含めずに張力（tension）が求まり、続いて力を分解すれば垂直抗力（normal reaction）と摩擦力（friction）が求まる。最後の小問では k に関する二つのしきい値を比較する。k を大きくしていくとき、どちらに先に達するだろうか。

解答

モデルと力。 棒は一様な剛体であるから、その重さ W は中点 G にはたらき、$AG = a$ である。輪は軽いので、レールが輪に及ぼす力はそのまま A において棒に伝わる。すなわち、鉛直上向きの垂直抗力 R と、レールに沿った摩擦力 F である。糸は軽くて伸びず、その張力 T は B において BC に沿ってはたらく。追加の荷重 kW は B において鉛直下向きにはたらく。

三角形 ABC において辺 AB と BC はともに $2a$ であるから、A と C における底角は等しい。すなわち、糸はレールと角 θ をなす。水平方向に見ると、B は A から $2a\cos\theta$、C は A から $4a\cos\theta$ の距離にある。



F はレールに沿って C から遠ざかる向きにはたらくものとする。糸が棒を C の方へ引くので、実際にそうでなければならないことが後でわかる。

小問 (i)

A のまわりのモーメントを考えると、R と F が消える。重さと荷重の腕の長さはそれぞれ $a\cos\theta$ と $2a\cos\theta$ である。張力については、B において水平成分 $T\cos\theta$（C の向き）と鉛直上向きの成分 $T\sin\theta$ に分ける。鉛直成分の腕の長さは $2a\cos\theta$、水平成分の腕の長さは $2a\sin\theta$（レールから B までの深さ）であり、どちらも棒を同じ向き、すなわち図において反時計回りに回そうとする。よって

$$T\sin\theta\cdot 2a\cos\theta + T\cos\theta\cdot 2a\sin\theta = W\cdot a\cos\theta + kW\cdot 2a\cos\theta,$$
$$4aT\sin\theta\cos\theta = aW(1+2k)\cos\theta.$$

$0 < \theta < 90^\circ$ のとき $\cos\theta \neq 0$ であるから、$a\cos\theta$ で割ることができて

$$T = \frac{(2k+1)W}{4\sin\theta}.$$

これは、輪が滑らない限り、輪の状態によらず成り立つ。糸が切れるのは $T > W$ のとき、すなわち（$4\sin\theta > 0$ を掛けて）$(2k+1)W > 4W\sin\theta$ のときであり、これは

$$2k+1 > 4\sin\theta,$$

となる。以上で示された。

小問 (ii)

棒全体について力を分解する。鉛直方向には

$$R + T\sin\theta = W + kW \quad\Longrightarrow\quad R = (1+k)W - \frac{(2k+1)W}{4} = \frac{(2k+3)W}{4}.$$

水平方向にはたらく力は F と張力の水平成分だけであるから

$$F = T\cos\theta = \frac{(2k+1)W\cos\theta}{4\sin\theta}.$$

これは正であり、摩擦力が C から遠ざかる向きにはたらくことが確かめられた。また $R > 0$ であるから、輪は確かに上からレールに押しつけられている。

考えてみよう 粗いレール上の輪は、正確にはどのようなときに滑るのだろうか。

摩擦力は最大でも μR までしか生じない。つりあいに $F > \mu R$ が必要であれば、摩擦力は輪を支えきれず、輪は滑る。よって輪が滑るのは

$$\frac{(2k+1)W\cos\theta}{4\sin\theta} > \mu\,\frac{(2k+3)W}{4}.$$

のときである。$4\sin\theta/(W\cos\theta) > 0$ を掛けると

$$2k+1 > (2k+3)\mu\tan\theta,$$

となる。以上で示された。

小問 (iii)

$t = \tan\theta$、$s = \sin\theta$ とおく。どちらの条件も、k があるしきい値を超えたことを表している。

糸について。 小問 (i) より、糸は $2k+1 > 4s$ となったとき、すなわち

$$k > k_{\text{break}} = \frac{4s-1}{2}.$$

となったときに切れる。

輪について。 小問 (ii) の条件を変形すると

$$2k+1 > (2k+3)\mu t \iff 2k(1-\mu t) > 3\mu t - 1.$$

ここで $\mu t < 1$ を用いる。$2(1-\mu t) > 0$ で割っても不等号の向きは変わらないので、輪は

$$k > k_{\text{slip}} = \frac{3\mu t - 1}{2(1-\mu t)}.$$

となったときに滑る。（$\mu t < 1$ でなければ輪は決して滑らない。$\mu t \geq 1$ ならば、すべての k に対して $(2k+3)\mu t \geq 2k+3 > 2k+1$ となるからである。この条件が与えられているのはそのためである。）

k を 0 から増やしていくと、低い方のしきい値が先に超えられる。よって、糸が切れ

る前に輪が滑るのは、ちょうど $k_{\text{slip}} < k_{\text{break}}$ のときである。まず $1-\mu t > 0$ を掛けて

$$\begin{aligned}\frac{3\mu t-1}{1-\mu t} < 4s-1 &\iff 3\mu t-1 < (4s-1)(1-\mu t)\\ &\iff 3\mu t-1 < 4s-1-4s\mu t+\mu t\\ &\iff 2\mu t+4s\mu t < 4s\\ &\iff \mu t(1+2s) < 2s\\ &\iff \mu < \frac{2\sin\theta}{\tan\theta\,(1+2\sin\theta)} = \frac{2\cos\theta}{1+2\sin\theta},\end{aligned}$$

を得る。最後の段階では $t(1+2s) > 0$ で割った。これが求める条件である。

棒ははじめつりあっているので、$k = 0$ ではどちらのしきい値もまだ超えられていない。また、どちらの条件も「k がある値より大きい」という形であるから、各しきい値は一度しか超えられない。したがって、二つのしきい値を比較すれば、どちらが先に起こるかが確かに決まる。

検算

- 代わりに B のまわりのモーメントを考えても同じ答えが得られる。A にはたらく力の B のまわりのモーメントは $R\cdot 2a\cos\theta - F\cdot 2a\sin\theta$、重さのモーメントは $Wa\cos\theta$ である。R と F の値を代入すると $\frac{1}{2}(2k+3)Wa\cos\theta - \frac{1}{2}(2k+1)Wa\cos\theta = Wa\cos\theta$ となり、重さのモーメントとちょうどつりあう。
- $\theta = 30^\circ$ とする。このとき $k_{\text{break}} = \frac{1}{2}$ であり、臨界の摩擦係数（coefficient of friction）は $2\cos 30^\circ/(1+2\sin 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$ であるから、$\mu t = 0.866 \times 0.577 = \frac{1}{2}$ となる。この μ のもとでは $k_{\text{slip}} = \frac{3/2-1}{2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ でもあり、境界では当然そうなるべきとおり、二つのしきい値は一致する。
- 多数のランダムな θ と k について、すべての力とモーメントがつりあうことをコンピュータで確認した。また、ランダムな θ と μ について k を少しずつ増やしていったところ、輪が先に滑るのはちょうど $\mu < 2\cos\theta/(1+2\sin\theta)$ のときであった。

よくある間違い

- A のまわりのモーメントで張力の水平成分を忘れる。その腕の長さは $2a\sin\theta$ であり、張力のモーメントを 2 倍にする。$4\sin\theta$ の 4 はここから来ている。
- $R = (1+k)W$ としてしまう。糸が重さの一部を支えているので、垂直抗力は全荷重より小さい。

- $1-\mu\tan\theta$ が正であることを述べずに、それで割る。与えられた条件 $\mu\tan\theta<1$ はまさにそのためにある。

STEP のその先へ

これは静定（statically determinate）な問題である。未知数は三つ（T、R、F）であり、平面内の剛体に対するつりあいの式も三つある。小問 (iii) は、各拘束が破れる荷重を比較するという、このような構造物が壊れる典型的な仕方を示している。技術者も、構造物のどの部材が最初に壊れるかという同じ問いを立てる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の静力学とトルクを丁寧に扱い、さらに回転の力学へと進んでいる。

解答例

STEP II 2019、第 11 問

確率・統計 ・ 三角形の数え上げ

STEP II 2019、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

3 つの長さが面積 0 でない三角形をつくるのは、短い 2 つの和が最長のものより大きいとき、かつそのときに限る。したがって、すべては固定された最大値より小さい数の組を数える問題に帰着する。最もすっきりした数え方は、真ん中の数 n_2 を固定し、n_1 としてとりうる値がいくつあるかを考えることである。小問 (i) で数え上げを行い、小問 (ii) と (iii) では、同様に確からしい（equally likely）選び方の総数で割るだけである。

解答

小問 (i)

$m = n_3$ とおく。$k \leq m-1$ として $n_2 = k$ を固定する。このとき n_1 は

$$m-k < n_1 < k,$$

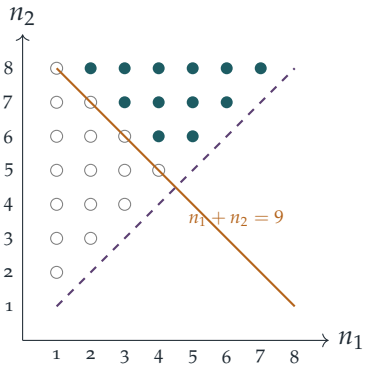
を満たさなければならないので、n_1 は $m-k+1, \ldots, k-1$ を動き、これが正である限り選び方は $2k-m-1$ 通りである。（$m-k \geq 1$ なので、条件 $n_1 > 0$ は自動的に満たされる。）

$m = 9$ のとき、個数は $2k-10$ であり、$k = 6,7,8$ で正となる：

$$2+4+6 = 12.$$

$m = 10$ のとき、個数は $2k-11$ であり、$k = 6,7,8,9$ で正となる：

$$1+3+5+7 = 16.$$



図は $n_3 = 9$ の場合を示している。塗りつぶされた点は直線 $n_1 + n_2 = 9$ の上側かつ対角線 $n_1 = n_2$ の上側にあり、その個数は $2 + 4 + 6 = 12$ である。三角形の各列が、それぞれの n_2 に対応している。

奇数の場合、 $n_3 = 2n + 1$。 $n_2 = k$ のときの個数は $2k - 2n - 2 = 2(k - n - 1)$ であり、$k = n + 2, \ldots, 2n$ で正となる。$j = k - n - 1$ とおくと、これは 1 から $n - 1$ まで動くので、

$$\sum_{j=1}^{n-1} 2j = (n-1)n = n(n-1).$$

偶数の場合、 $n_3 = 2n$。$n_2 = k$ のときの個数は $2k - 2n - 1$ であり、$k = n + 1, \ldots, 2n - 1$ で正となる。$j = k - n$ とおくと、これは 1 から $n - 1$ まで動くので、

$$\sum_{j=1}^{n-1} (2j - 1) = (n-1)^2,$$

これは最初の $n - 1$ 個の奇数の和である。どちらの公式も $12 = 4 \cdot 3$ および $16 = 4^2$ と一致する。

小問 (ii)

長さ N の棒が 3 本の中で最も長いので、選んだ 2 本の長さ $a < b$ が $a + b > N$ を満たすとき、かつそのときに限り、3 本の棒は面積 0 でない三角形をつくる。（$a + N > b$ のような残り 2 つの三角不等式（triangle inequality）は、$N > b$ なので自動的に成り立つ。）したがって、条件を満たす選び方は、ちょうど小問 (i) で $n_3 = N$ として数えた組である。

2 本の棒は残りの $N - 1$ 本から選ぶので、同様に確からしい選び方は $\binom{N-1}{2}$ 通りある。

$N = 2n + 1$ のとき：選び方は $\binom{2n}{2} = n(2n-1)$ 通りなので、

$$\mathrm{P}(\text{三角形}) = \frac{n(n-1)}{n(2n-1)} = \frac{n-1}{2n-1},$$

となり、示すべき結果が得られた。

$N = 2n$ のとき：選び方は $\binom{2n-1}{2} = (2n-1)(n-1)$ 通りである。これが 0 でないためには $n \geq 2$ が必要である（$N = 2$ のときは他の棒が 1 本しかないので、2 本を選ぶことはできない）。このとき

$$\mathrm{P}(\text{三角形}) = \frac{(n-1)^2}{(2n-1)(n-1)} = \frac{n-1}{2n-1}.$$

N が 1 小さいにもかかわらず、答えが奇数の場合と同じ式になるのはかなり意外である。

小問 (iii)

相異なる 3 本の棒には必ず最長のものがあり、その長さを m とすると $3 \leq m \leq 2M+1$ である。この選び方が三角形をつくるのは、残り 2 本の長さが小問 (i) で $n_3 = m$ として数えた組の 1 つになるとき、かつそのときに限る。条件を満たす選び方はそれぞれ最長の棒のもとでちょうど 1 回ずつ数えられるので、条件を満たす選び方の総数は

$$T = \sum_{m=2}^{2M+1} c(m),$$

である。ここで $c(m)$ は小問 (i) で求めた個数である。（$c(2) = 0$ なので、$m = 2$ を含めても差し支えない。）

> **考えてみよう** $c(m)$ は m が奇数か偶数かで式が異なるが、どうすれば和をとれるだろうか？

2 つずつ組にすればよい。各 $n = 1, \ldots, M$ について、偶数の値 $m = 2n$ と奇数の値 $m = 2n+1$ をまとめて扱う。これらを合わせると、$m = 2, 3, \ldots, 2M+1$ をちょうど 1 回ずつ尽くす。それらの寄与の合計は

$$(n-1)^2 + n(n-1) = (n-1)(2n-1) = 2n^2 - 3n + 1.$$

与えられた $\sum k^2$ の公式と $\sum k = \frac{1}{2}M(M+1)$ を用いると、

$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=1}^{M} \left(2n^2 - 3n + 1\right) \\ &= \tfrac{1}{3}M(M+1)(2M+1) - \tfrac{3}{2}M(M+1) + M \\ &= \tfrac{1}{6}M\left[2(2M^2+3M+1) - 9(M+1) + 6\right] \\ &= \tfrac{1}{6}M\left(4M^2 - 3M - 1\right) \\ &= \tfrac{1}{6}M(4M+1)(M-1). \end{aligned}$$

3 本の棒の同様に確からしい選び方の総数は

$$\binom{2M+1}{3} = \frac{(2M+1)(2M)(2M-1)}{6}.$$

割り算をして $M/6$ を約分すると、

$$\mathrm{P}(\text{三角形}) = \frac{M(4M+1)(M-1)}{2M(2M+1)(2M-1)} = \frac{(4M+1)(M-1)}{2(2M+1)(2M-1)},$$

となり、示すべき結果が得られた。

検算

- $M=1$：棒は $1,2,3$ であり、$1+2=3$ なので退化した三角形（degenerate triangle）になる。よって確率は 0 になるはずであり、公式も 0 を与える。
- $M=2$：棒は 1 から 5 まで。三角形になるのは $\{2,3,4\}$、$\{2,4,5\}$、$\{3,4,5\}$ なので、確率は $3/10$ である。公式は $\frac{9\cdot1}{2\cdot5\cdot3} = \frac{3}{10}$ を与える。
- $M \to \infty$ のとき、確率は $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ に収束（converge）する。これは連続版と一致する：$[0,1]$ 上の一様分布（uniform distribution）に従う独立な 3 つの長さについて、小さい 2 つの和が最大のものより大きくなる確率は $\frac{1}{2}$ である。
- 小問 (i) のすべての個数と小問 (ii)、(iii) の確率は、すべての組や 3 つ組を直接列挙するコンピュータによる検証で、n は 39 まで、M は 19 まで確認した（たとえば $M=3$ では $13/35$ となる）。

よくある間違い

- $n_1+n_2=n_3$ を許してしまうこと：長さ $2,3,5$ の 3 本の棒は一直線に重なって面積が 0 になるので、不等式は等号を含まないものでなければならない。
- 小問 (ii) で、$\binom{N-1}{2}$ の代わりに $\binom{N}{2}$ を用いてしまうこと：長さ N の棒はすでに取られている。
- 小問 (iii) で、m の奇数の値だけ（あるいは偶数の値だけ）について和をとってしまうこと：最長の棒の長さは 3 から $2M+1$ までのどの値もとりうる。

STEP のその先へ

最大の要素によって数え上げを場合分けし、それから和をとるというのは、組合せ論（combinatorics）における標準的な手法である。同じ考え方で、最大値の値について積

分すれば、連続版の答え $\frac{1}{2}$ が得られる。図のように領域内の格子点（lattice points）を数え、それをその領域の面積と比べることは、離散確率と連続確率をつなぐ架け橋である。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）には、古典的な「折れた棒（broken stick）」の三角形問題をはじめ、この種の問題が数多く収録されている。

解答例

STEP II 2019、第 12 問

確率・統計 ・ 連続分布と分位数

> **STEP II 2019、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

ここでの累積分布関数（cumulative distribution function）は $[0,1]$ 上で単に x^n であるから、どの分位数（quantile）も正確に書き下すことができる。分布のうち割合 p がそれ以下にあるような値は $p^{1/n}$ である。すると平均（mean）と分位数の比較はべき乗どうしの比較となり、両辺を n 乗すれば $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ に関する主張に帰着する。これはまさに二項展開（binomial expansion）が評価するのに適した量である。

解答

小問 (i)

確率密度関数（probability density function）をかけて積分すると、

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \int_0^1 x \cdot nx^{n-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 nx^n\,\mathrm{d}x = \frac{n}{n+1},$$
$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^1 nx^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{n}{n+2}.$$

したがって

$$\sigma^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2 = \frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n\left[(n+1)^2 - n(n+2)\right]}{(n+1)^2(n+2)}$$
$$= \frac{n\left[n^2+2n+1-n^2-2n\right]}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

$0 \le x \le 1$ に対して、分布関数（distribution function）は

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(X \le x) = \int_0^x nt^{n-1}\,\mathrm{d}t = x^n.$$

である。$n = 2$ のとき $\mathrm{F}(x) = x^2$ である。下側四分位数（lower quartile）q_1 は $q_1^2 = \frac{1}{4}$ を満たし、上側四分位数（upper quartile）q_3 は $q_3^2 = \frac{3}{4}$ を満たす。どちらも $[0,1]$ に含まれるので、正の平方根をとって

$$q_1 = \tfrac{1}{2}, \qquad q_3 = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \qquad q_3 - q_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

を得る。小問 (i) より $\sigma^2 = \dfrac{2}{9\cdot 4} = \dfrac{1}{18}$ であるから、$\sigma = \dfrac{1}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$ であり、$2\sigma = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ である。

示したいのは $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} < \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ である。両辺に 6 をかければ、これは

$$3\sqrt{3} - 3 < 2\sqrt{2} \iff 3\sqrt{3} < 3 + 2\sqrt{2}.$$

と同値である。最後の不等式の両辺はともに正であるから、これは両辺を 2 乗した不等式と同値である：

$$27 < 9 + 12\sqrt{2} + 8 = 17 + 12\sqrt{2} \iff 10 < 12\sqrt{2},$$

そしてこれは、$\sqrt{2} > 1$ より $12\sqrt{2} > 12 > 10$ となるので正しい。どの段階も同値変形であったから、この連鎖を逆にたどることで、四分位範囲（interquartile range）は 2σ より小さいことがわかる。

考えてみよう ここで両辺を 2 乗してよいのはなぜか。また、一般には 2 乗してはいけないのはなぜか。

2 乗によって不等式 $a < b$ が保たれるのは、a と b が非負のときに限られる（たとえば $-3 < 2$ であるが $9 > 4$ である）。そのため、引き算を含んだままの $3\sqrt{3} - 3 < 2\sqrt{2}$ を 2 乗するのではなく、まず両辺が明らかに正である $3\sqrt{3} < 3 + 2\sqrt{2}$ の形に変形したのである。

小問 (iii)

二項定理（binomial theorem）より

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}\,x^2 + \cdots,$$

であり、第 $(k+1)$ 項は

$$\binom{n}{k} x^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\,x^k.$$

である。

中央値と下側四分位数。 $\mathrm{F}(x) = x^n$ であるから、中央値（median）m は $m^n = \frac{1}{2}$ を満たし、下側四分位数 q は $q^n = \frac{1}{4}$ を満たす。よって

$$m = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1/n}, \qquad q = \left(\tfrac{1}{4}\right)^{1/n}.$$

である。μ、m、q はいずれも正であり、$t \mapsto t^n$ は $t > 0$ で狭義単調増加（strictly increasing）であるから、これらの大小は n 乗どうしを比べることで比較できる。また

$$\mu^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

である。$A = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ とおく。すると

$$\mu < m \iff \mu^n < \tfrac{1}{2} \iff A > 2, \qquad \mu > q \iff \mu^n > \tfrac{1}{4} \iff A < 4.$$

となる。

μ は中央値より小さい。 展開式に $x = \frac{1}{n}$ を代入する。どの項も非負であるから、A は最初の 3 項の和以上である：

$$A \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = 2 + \frac{n-1}{2n} > 2,$$

ここで最後の不等式が真の不等号になるのは $n > 1$ だからである。（$n \geq 2$ のとき、第 3 項は確かに展開式に現れる。）したがって $\mu < m$ である。

μ は下側四分位数より大きい。 $x = \frac{1}{n}$ のとき、第 $(k+1)$ 項は

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \leq \frac{1}{k!},$$

である。k 個の分数 $\frac{n-j}{n}$（$0 \leq j \leq k-1$）はどれも 0 と 1 の間にあるからである。（$k = 0$ のとき、この項は $1 = \frac{1}{0!}$ である。）$k = 0, 1, \ldots, n$ について和をとると、

$$A \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots < 4,$$

となる。中央の不等式は無限級数がさらに正の項を含むことから成り立ち、最後の不等式は仮定してよいとされた結果である。したがって $A < 4$ であり、$\mu > q$ である。

以上を合わせると、$n > 1$ を満たすすべての整数について、μ は下側四分位数より大きく、中央値より小さい。

考えてみよう n 乗どうしを比べることで、μ と m の大小が決まるのはなぜか。

正の数 a と b について、t^n は $t>0$ で狭義単調増加であるから、$a<b$ であることと $a^n<b^n$ であることは同値である。ここで扱う 3 つの数はすべて正であるから、n 乗しても何も失われず、しかもそうすることで m と q に含まれる扱いにくい n 乗根を取り除くことができる。

検算

- $n=2$ のとき：$\mu=\frac{2}{3}$ であり、$\sigma^2=\frac{2}{9\cdot4}=\frac{1}{18}$ は $\mathrm{E}(X^2)-\mu^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}$ と一致する。
- 数値的には、$n=2$ のとき四分位範囲は 0.366、$2\sigma=0.471$ である。
- $n=2$ のとき 3 つの値は $q=0.5$、$\mu\approx0.667$、$m\approx0.707$ であり、$n=10$ のときは $q\approx0.871$、$\mu\approx0.909$、$m\approx0.933$ である。大小関係 $q<\mu<m$ は、2 から 2000 までのすべての n についてコンピュータで確認した。
- $n\to\infty$ のとき $A=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to\mathrm{e}\approx2.718$ であり、これは 2 と 4 の間に余裕をもって収まっている。

よくある間違い

- 両辺が正であることを確かめずに、$3\sqrt{3}-3<2\sqrt{2}$ をそのまま 2 乗してしまう。
- 逆数（reciprocal）をとるときに不等号の向きを間違える：$\mu^n<\frac{1}{2}$ に対応するのは $A>2$ であって、$A<2$ ではない。
- 第 $(k+1)$ 項が $\frac{1}{k!}$ 以下であるのではなく、$\frac{1}{k!}$ に等しいと主張してしまう。

STEP のその先へ

量 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ は n とともに増加して極限 e に収束（converge）する。そして $\sum 1/k!$ と項ごとに比べて示した評価は、$\mathrm{e}=\sum_{k\ge0}1/k!$ を示すための第一歩であり、これは解析学（analysis）の最初の講義で扱われる標準的な結果である。この分布そのものはベータ分布（Beta distribution）$\mathrm{Beta}(n,1)$ である。また、$\mathrm{P}(\max\le x)=x^n$ であることから、これは $[0,1]$ 上の n 個の独立な一様確率変数（uniform random variables）の最大値の分布でもある。これら両方の話題についてさらに知るには、Blitzstein と Hwang による *Introduction to Probability*（確率論入門）、および Abbott による *Understanding*

Analysis（解析学の理解）を参照されたい。

解答例

STEP III 2019、第 1 問

純粋数学 ・ 連立微分方程式

> **STEP III 2019、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

$k = 1$ のとき、右辺はちょうど $x + \mathrm{i}y$ に複素定数を掛けて得られるものになっているので、2 つの方程式は $z = x + \mathrm{i}y$ についての 1 つの方程式 $\dot{z} = cz$ にまとまる。これにより、運動は回転と指数関数的減衰（exponential decay）の組み合わせ、すなわち螺旋（spiral）になる。$k = 0$ のときは、結合が一方向にしか働かない。x は y に依存しないので、まず x を求め、それを y の方程式に代入すればよい。

解答

小問 (i)

$k = 1$ のとき、$\dot{x} = -x - y$ かつ $\dot{y} = x - y$ である。$z = x + \mathrm{i}y$ とおく。すると

$$\begin{aligned}\dot{z} = \dot{x} + \mathrm{i}\dot{y} &= (-x - y) + \mathrm{i}(x - y) \\ &= (-1 + \mathrm{i})(x + \mathrm{i}y) = (-1 + \mathrm{i})z,\end{aligned}$$

となる。これは $(-1 + \mathrm{i})(x + \mathrm{i}y) = -x - \mathrm{i}y + \mathrm{i}x - y$ と展開すれば確かめられる。$z(0) = 1$ より、解は

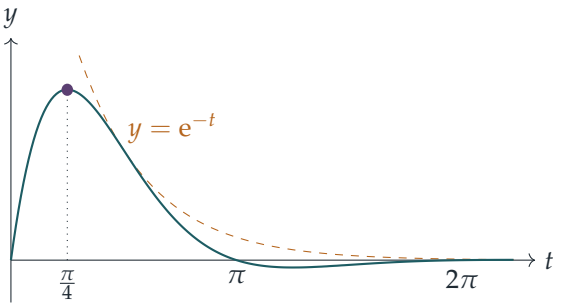
$$z = \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t} = \mathrm{e}^{-t}(\cos t + \mathrm{i}\sin t),$$

であるから、

$$x = \mathrm{e}^{-t}\cos t, \qquad y = \mathrm{e}^{-t}\sin t.$$

（複素数（complex numbers）を避けたい場合は、1 つ目の方程式を微分して y を消去すると $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$ が得られ、その特性方程式の根（auxiliary roots）は $-1 \pm \mathrm{i}$ である。あとは $x(0) = 1$、$\dot{x}(0) = -1$ を用いればよい。）

t に対する y のグラフ。これは包絡線（envelope）$\pm e^{-t}$ の内側にある正弦波であり、減衰振動（damped oscillation）である。$t = n\pi$ で 0 となり、停留点（turning points）は $\dot{y} = x - y = e^{-t}(\cos t - \sin t) = 0$ となるところ、すなわち $t = \frac{\pi}{4} + n\pi$ である。山が 1 つ進むごとに高さは $e^{-\pi} \approx 0.04$ 倍になるので、正しい縮尺では最初の山のあとの振動はほとんど見えない。



軌道。極形式（polar form）で書くと、$z = e^{-t}e^{it}$ の絶対値（modulus）は $r = e^{-t}$、偏角（argument）は $\theta = t$ である。したがって軌道は螺旋

$$r = e^{-\theta}, \qquad \theta \geq 0,$$

であり、$(1, 0)$ から出発して反時計回りに巻きながら原点に近づき、$t \to \infty$ の極限で初めて原点に到達する。出発時には $\dot{x} = -1$ かつ $\dot{y} = 1$ なので、$(1, 0)$ から左上に向かって動き出す。1 周するごとに原点からの距離は $e^{-2\pi} \approx 0.002$ 倍に縮むので、正しい縮尺では最初の 1 周しか見えない。

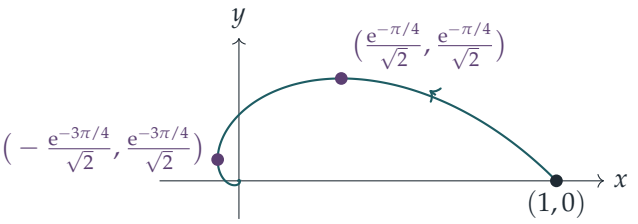
y の最大値。y の停留点は $t = \frac{\pi}{4} + n\pi$ である。$t = \frac{\pi}{4}$ では $y = e^{-\pi/4}/\sqrt{2} > 0$ となる。$t \geq \frac{\pi}{2}$ を満たすすべての t に対して $y \leq e^{-t} \leq e^{-\pi/2}$ であり、さらに $e^{-\pi/2} < e^{-\pi/4}/\sqrt{2}$ が成り立つ。これは $\sqrt{2} < e^{\pi/4} \approx 2.19$ と同値だからである。区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ における停留点は $t = \frac{\pi}{4}$ のみである。よって y が最大となる点は

$$\left(\frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}} \right) \approx (0.322,\ 0.322).$$

x の最小値。今度は $\dot{x} = -x - y = -e^{-t}(\cos t + \sin t)$ であり、これは $\tan t = -1$、すなわち $t = \frac{3\pi}{4} + n\pi$ のとき 0 になる。$x < 0$ となるには $\cos t < 0$ が必要で、これにより $t = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$ が選ばれ、そのとき $x = -e^{-t}/\sqrt{2}$ となる。e^{-t} は減少関数なので、これが最も小さくなるのはそのような t のうち最小のもの、すなわち $t = \frac{3\pi}{4}$ のときである。（$x(0) = 1 > 0$ であり、$t \to \infty$ のとき $x \to 0$ となるから、最小値はこれらの停留点のいずれかでとられる。）よって x が最小となる点は

$$\left(-\frac{e^{-3\pi/4}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-3\pi/4}}{\sqrt{2}} \right) \approx (-0.067,\ 0.067).$$

予想どおり、どちらの点も直線 $y = \pm x$ 上にある。螺旋上では、y が最大になるのは軌道が x 軸方向に進んでいるところであり、x が最小になるのは y 軸方向に進んでいるところである。



小問 (ii)

$k = 0$ のとき、1 つ目の方程式は単独で $\dot{x} = -x$ となるので、$x(0) = 1$ より

$$x = e^{-t}.$$

すると $\dot{y} + y = e^{-t}$ となる。積分因子（integrating factor）e^{t} を掛けると $\frac{d}{dt}(ye^{t}) = 1$ となるので $ye^{t} = t + c$ であり、$y(0) = 0$ より $c = 0$ である：

$$y = te^{-t}.$$

考えてみよう これをどのようにして軌道の方程式に直せばよいだろうか？

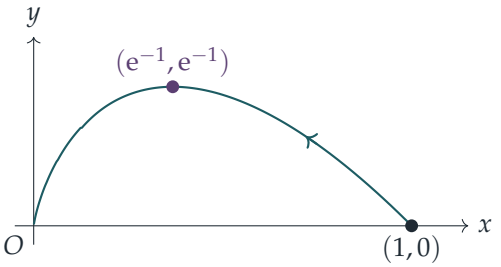
t を消去する。$x = e^{-t}$ より $t = -\ln x$ であるから、

$$y = -x \ln x, \qquad 0 < x \leq 1.$$

t が 0 から ∞ まで動くとき、x は 1 から 0 に向かって減少するので、粒子は $(1,0)$ を出発してこの曲線に沿って左へ進み、$t \to \infty$ のとき原点に近づく。

概形を描くための特徴は次のとおりである。

- $\frac{dy}{dx} = -\ln x - 1$ であり、これは $x = e^{-1}$ で 0 になる。よって最も高い点は (e^{-1}, e^{-1}) であり、$t = 1$ のときに到達する。
- $(1,0)$ における傾きは -1 であり、$t = 0$ における $\dot{x} = -1$、$\dot{y} = 1$ と一致する。
- $x \to 0^{+}$ のとき $x \ln x \to 0$ なので $y \to 0$ となる。しかし傾きは $-\ln x - 1 \to +\infty$ となるので、曲線は y 軸に接しながら原点に入っていく。
- $0 < x < 1$ において $y > 0$ であるから、軌道全体は x 軸より上にある。



小問 (i) との違いに注目しよう。$k = 0$ ではもはや回転がないので、粒子は一度も座標軸を横切らない。ただ曲がりながら原点に入っていくだけである。

検算

- 代入して確かめる：$x = \mathrm{e}^{-t}\cos t$ に対して $\dot{x} = -\mathrm{e}^{-t}\cos t - \mathrm{e}^{-t}\sin t = -x - y$ となり、確かに成り立つ。$\dot{y}$ も同様である。また、どちらの解も $x(0) = 1$、$y(0) = 0$ を満たす。
- 方程式を小さな時間刻みで数値的に進めていくと両方の解が再現され、小問 (i) における y の最大値が $t \approx 0.785$ でおよそ 0.3224、x の最小値が $t \approx 2.356$ でおよそ -0.0670 であること、また小問 (ii) では y が $t = 1$ で最大値 $1/\mathrm{e} \approx 0.3679$ をとることが確認できる。
- 小問 (ii) の妥当性の確認：$y = t\mathrm{e}^{-t}$ はおなじみの「重根」の形であり、この系の行列（matrix）が重複した固有値（eigenvalue）-1 をもつことから納得できる。

よくある間違い

- x の最小値を $t = -\frac{\pi}{4}$ や $\frac{7\pi}{4}$ でとるとしてしまう：そこでも $\dot{x} = 0$ となるが、そこでは $x > 0$ である（極大値（local maximum）である）。$\cos t$ の符号を確認すること。
- 螺旋が原点に到達するのは $t \to \infty$ の極限のみであることを忘れる、あるいは時計回りに巻くように描いてしまう：$\theta = t$ は増加するので、反時計回りに巻く。
- 小問 (ii) で、原点における鉛直な接線を見落とす：$y \to 0$ であるが $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \to \infty$ となる。

STEP のその先へ

線形系 $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ の振る舞いは、すべて A の固有値によって決まる。ここで $A = \begin{pmatrix} -1 & -k \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値は $-1 \pm \sqrt{-k}$ である。$k = 1$ のときは複素共役の組 $-1 \pm \mathrm{i}$ となり、**安定渦状点**（stable spiral）を与える。$k = 0$ のときは重複した固有値 -1 となり、**退化結節点**（degenerate node）を与える。そして $k < 0$ のときは 2 つの実固有値が得られる。このように不動点（fixed points）を分類すること（相平面解析（phase-plane analysis））は、大学 1 年次の中核的な話題である。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は、豊富な図を用いてこれを扱っている。

解答例

STEP III 2019、第2問

純粋数学 • 関数方程式

> **STEP III 2019、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 3.8 節「**加法定理から関数を決める**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch03/addition-laws.html

鍵となる考え方

関数方程式（functional equation）は、関数が 1 点の近くでどう振る舞うかさえわかれば、その関数のすべてを教えてくれる。$x = y = 0$ を代入すると 0 での値が定まる。次に、一般の x における差分商（difference quotient）を書き、関数方程式を用いると、それは0 **における**差分商に変わる。そこでの極限が k であることはわかっている。こうして微分方程式（differential equation）が得られ、先に求めた初期値のもとでそれを解けばよい。

解答

小問 (i)

0 における値。関数方程式に $x = y = 0$ を代入すると $\mathrm{f}(0) = \mathrm{f}(0)^2$ となるから、$\mathrm{f}(0) = 0$ または $\mathrm{f}(0) = 1$ である。

$\mathrm{f}(0) = 0$ と仮定する。このとき $y = 0$ を代入すると、すべての x に対して $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x)\mathrm{f}(0) = 0$ となるので、f は恒等的に零である関数となり、$\mathrm{f}'(0) = 0$ である。これは $\mathrm{f}'(0) = k \neq 0$ に矛盾する。よって $\mathrm{f}(0) = 1$ である。

導関数。 $(*)$ と、$y=h$ とした関数方程式から、

$$\mathrm{f}'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(h)-\mathrm{f}(x)}{h}=\mathrm{f}(x)\lim_{h\to0}\frac{\mathrm{f}(h)-1}{h}.$$

$\mathrm{f}(0)=1$ であるから、最後の極限は $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\mathrm{f}(0+h)-\mathrm{f}(0)}{h}$ であり、これは $x=0$ における $(*)$ により $\mathrm{f}'(0)=k$ に等しい。よって

$$\mathrm{f}'(x)=k\,\mathrm{f}(x),$$

となり、示すべきことが示された。($\mathrm{f}(x)$ は h に依存しないので、極限の外に出すことができた。)

解く。 f で割る（それには $\mathrm{f}\neq0$ が必要である）代わりに、$u(x)=\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{f}(x)$ を考える。すると

$$u'(x)=\mathrm{e}^{-kx}\big(\mathrm{f}'(x)-k\,\mathrm{f}(x)\big)=0,$$

となるから、u は定数であり、その値は $u(0)=\mathrm{f}(0)=1$ である。したがって

$$\mathrm{f}(x)=\mathrm{e}^{kx}.$$

これは確かにすべての条件を満たす。実際、$\mathrm{e}^{k(x+y)}=\mathrm{e}^{kx}\mathrm{e}^{ky}$ であり、0 における導関数は k である。

小問 (ii)

0 における値。 $x=y=0$ を代入すると

$$\mathrm{g}(0)=\frac{2\mathrm{g}(0)}{1+\mathrm{g}(0)^2}\quad\Longrightarrow\quad\mathrm{g}(0)\big(\mathrm{g}(0)^2-1\big)=0,$$

となるから、$\mathrm{g}(0)\in\{0,1,-1\}$ である。すべての x に対して $|\mathrm{g}(x)|<1$ であるから、$\mathrm{g}(0)=0$ でなければならない。また、$|\mathrm{g}|<1$ により $1+\mathrm{g}(x)\mathrm{g}(y)>0$ が保証されるので、関数方程式において零で割ることは決して起こらないことにも注意しておく。

差分商。 $y=h$ とした関数方程式を用い、全体を 1 つの分母にまとめると、

$$\mathrm{g}(x+h)-\mathrm{g}(x)=\frac{\mathrm{g}(x)+\mathrm{g}(h)-\mathrm{g}(x)-\mathrm{g}(x)^2\mathrm{g}(h)}{1+\mathrm{g}(x)\mathrm{g}(h)}=\frac{\mathrm{g}(h)\big(1-\mathrm{g}(x)^2\big)}{1+\mathrm{g}(x)\mathrm{g}(h)}.$$

h で割ると、

$$\frac{\mathrm{g}(x+h)-\mathrm{g}(x)}{h}=\big(1-\mathrm{g}(x)^2\big)\cdot\frac{\mathrm{g}(h)}{h}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{g}(x)\mathrm{g}(h)}.$$

考えてみよう $h\to0$ のとき、右辺の各因数はどうなるか？

第 1 の因数は h を含まない。$\mathrm{g}(0)=0$ であるから、真ん中の因数は $\dfrac{\mathrm{g}(0+h)-\mathrm{g}(0)}{h}$ であり、これは $\mathrm{g}'(0)=k$ に収束する。最後の因数については $\mathrm{g}(h)\to\mathrm{g}(0)=0$ が必要である。これは、g が 0 で微分可能であり、したがって連続であることから成り立つ。よって最後の因数は 1 に収束し、

$$\mathrm{g}'(x)=k\bigl(1-\mathrm{g}(x)^2\bigr).$$

解く。$|\mathrm{g}(x)|<1$ であるから、因数 $1-\mathrm{g}(x)^2$ は決して零にならず、変数分離（separation of variables）ができる：

$$\int\frac{\mathrm{d}g}{1-g^2}=\int k\,\mathrm{d}x.$$

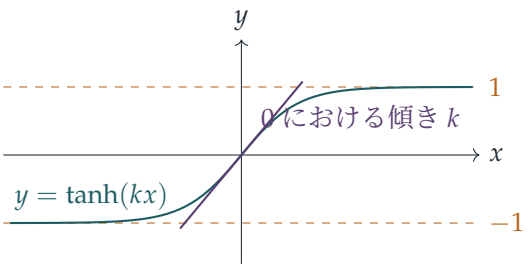
部分分数分解（partial fractions）により $\dfrac{1}{1-g^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+g}+\dfrac{1}{1-g}\right)$ であり、$1\pm g$ はどちらも正であるから、

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+\mathrm{g}(x)}{1-\mathrm{g}(x)}=kx+c.$$

$x=0$ において左辺は $\frac{1}{2}\ln 1=0$ であるから、$c=0$ である。よって $\dfrac{1+g}{1-g}=\mathrm{e}^{2kx}$ であり、これを g について解くと、

$$\mathrm{g}(x)=\frac{\mathrm{e}^{2kx}-1}{\mathrm{e}^{2kx}+1}=\tanh(kx).$$

これは確かに条件を満たす。$|\tanh(kx)|<1$ であり、加法定理 $\tanh(a+b)=\dfrac{\tanh a+\tanh b}{1+\tanh a\tanh b}$ はまさに関数方程式そのものであり、$\tanh(kx)$ の 0 における導関数は k である。



検算

- (i) において $\mathrm{f}(x)=\mathrm{e}^{kx}$ で $k=1$、$x=0.3$、$y=0.5$ とすると：$\mathrm{e}^{0.3}\mathrm{e}^{0.5}=1.3499\times 1.6487=2.2255=\mathrm{e}^{0.8}$。
- (ii) において $k=1$、$x=0.3$、$y=0.5$ とすると：$\tanh 0.3=0.29131$、$\tanh 0.5=0.46212$ であり、$(0.29131+0.46212)/(1+0.29131\times 0.46212)=0.66404=\tanh 0.8$ となる。

- どちらの答えも、導関数の関係式 $\mathrm{f}' = k\mathrm{f}$ と $\mathrm{g}' = k(1-\mathrm{g}^2)$ を含めて、多数のランダムな k、x、y についてコンピュータでも確認した。
- 2つの小問はつながっている：$\tanh(kx) = \dfrac{\mathrm{e}^{2kx}-1}{\mathrm{e}^{2kx}+1}$ は、小問 (i) の指数関数で k を $2k$ に置き換えたものから作られている。

よくある間違い

- 理由を示さずに $\mathrm{f}(0) = 0$ や $\mathrm{g}(0) = \pm 1$ を捨ててしまう。条件 $k \neq 0$ と $|\mathrm{g}| < 1$ は、まさにこれらを除外するために置かれている。
- 理由を述べずに分母の中で $\mathrm{g}(h) \to 0$ としてしまう。これには g の 0 における連続性が必要であり、それは微分可能性から従う。
- f や $1-\mathrm{g}^2$ が零でないことを確かめずに、それで割ってしまう。

STEP のその先へ

これらは**コーシー（*Cauchy*）型の関数方程式**（Cauchy-type functional equations）の例である。解析学の最初の講義では、指数型の方程式 $\mathrm{f}(x+y) = \mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y)$ が、微分可能性よりはるかに弱い仮定（たとえば1点での連続性）のもとで $\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{kx}$（または $\mathrm{f} \equiv 0$）を強制することを学ぶ。一方、正則性の仮定がまったくなければ、奇妙な解が存在する。tanh の方程式は特殊相対性理論（special relativity）における速度の加法則であり、そこでは速度の $\tanh^{-1}$（ラピディティ（rapidity））が単純に足し合わされる。この背後にある解析学については、Abbott の *Understanding Analysis* を参照されたい。

解答例

STEP III 2019、第 3 問

純粋数学 ・ 行列の不変直線

> **STEP III 2019、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

点 (x, y) が不変点（invariant point）であるのは、$(\mathbf{A} - \mathbf{I})$ によってそれが零に移されるとき、かつそのときに限る。ここから二つの一次方程式が得られる。小問 (i) と (ii) の内容はすべて、この二つの方程式がどのようなときに同じ直線を表すかを問うことから出てくる。その条件は $(a-1)(d-1) = bc$ であり、これは $\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 0$ を意味する。小問 (iii) では、直線上の一般の点を変換に代入し、係数を比較する（compare coefficients）。

解答

小問 (i)

点 (x, y) が不変であるのは $ax + by = x$ かつ $cx + dy = y$ のとき、すなわち

$$(a-1)x = -by, \tag{1}$$
$$(d-1)y = -cx. \tag{2}$$

のときである。(1) と (2) を辺々掛け合わせると $(a-1)(d-1)xy = bc\,xy$ となるので、

$$\big((a-1)(d-1) - bc\big)xy = 0$$

が成り立つ。ここで (x, y) は L_1 の任意の点であり、これで示すべきことが示された。

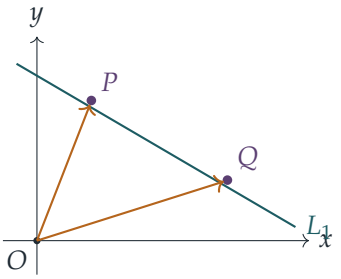
二つ目の結果を示す。L_1 上に $xy \neq 0$ となる点があれば、xy で割ることができる。そこでそのような点を探す。

考えてみよう L_1 のどの点も $x=0$ または $y=0$ を満たすとしたらどうなるか？

集合 $xy=0$ は二本の座標軸そのものである。両軸の和集合に含まれる直線はそのどちらかでなければならないので、L_1 が座標軸でない限り、それは $xy\neq 0$ となる点を含む。このとき xy で割れば $(a-1)(d-1)=bc$ が得られる。

残るは座標軸の場合である。L_1 が y 軸ならば、すべての $(0,y)$ が不変であり、(1) と (2) から、すべての y について $by=0$ かつ $(d-1)y=0$ となる。よって $b=0$ かつ $d=1$ であり、$(a-1)(d-1)=bc$ の両辺はともに 0 となる。L_1 が x 軸ならば、同様に $c=0$ かつ $a=1$ であり、やはり両辺は 0 である。したがって、いずれの場合も $(a-1)(d-1)=bc$ が成り立つ。

次に、L_1 が原点を通らないとする。相異なる 2 点 P, Q を L_1 上にとり、その位置ベクトル（position vector）をそれぞれ $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ とする。



O, P, Q は同一直線上にないので、$\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$ は平行でなく、任意のベクトルは $\mathbf{v}=\lambda\mathbf{p}+\mu\mathbf{q}$ と表せる。線形性（linearity）により

$$\mathbf{Av}=\lambda\mathbf{Ap}+\mu\mathbf{Aq}=\lambda\mathbf{p}+\mu\mathbf{q}=\mathbf{v},$$

となるので、平面上のすべての点が不変であり、$\mathbf{A}=\mathbf{I}$ である。（このとき $a=d=1$ かつ $b=c=0$ であり、これは $(a-1)(d-1)=bc$ と合致する。）

小問 (ii)

$(a-1)(d-1)=bc$ と仮定する。(1) と (2) がともに成り立つ直線を見つければよい。

$b\neq 0$ の場合。 直線 $(a-1)x+by=0$ をとる。$b\neq 0$ なので、これは原点を通るれっきとした直線である。その上のすべての点は (1) を満たす。この直線上では $y=-\frac{(a-1)x}{b}$ なので

$$cx+(d-1)y=cx-\frac{(a-1)(d-1)}{b}x=cx-\frac{bc}{b}x=0,$$

となり、(2) も成り立つ。よって $(a-1)x+by=0$ は不変点からなる直線である。

$b = 0$ **の場合**。このとき条件は $(a-1)(d-1) = 0$ となるので、$a = 1$ または $d = 1$ である。

- $a \neq 1$ ならば $d = 1$ である。方程式 (1) は $(a-1)x = 0$ となるので $x = 0$ であり、(2) は $cx = 0$ となるが、これは $x = 0$ のとき成り立つ。不変点からなる直線は y 軸 $x = 0$ である。
- $a = 1$ ならば (1) はすべての点で成り立つので、(2)：$cx + (d-1)y = 0$ だけを考えればよい。
  - c と $d-1$ がともに零ではないならば、これは原点を通る直線であり、不変点からなる直線である。
  - $c = 0$ かつ $d = 1$ ならば $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ であり、すべての点が不変で、すべての直線が不変点からなる直線となる。

したがって、$(a-1)(d-1) = bc$ のときは常に不変点からなる直線が存在する。

小問 (iii)

L_2 は原点を通らないので、L_2 を $y = mx + k$（ただし $k \neq 0$）と表す。L_2 上の一般の点は $(x, mx+k)$ であり、その像は

$$(X, Y) = \big((a+bm)x + bk,\ (c+dm)x + dk\big).$$

である。この直線が不変直線（invariant line）であるのは、すべての実数 x について $Y = mX + k$ となるとき、かつそのときに限る：

$$(c+dm)x + dk = m(a+bm)x + mbk + k.$$

両辺は x の一次式であり、すべての x で一致するので、係数が等しくなければならない：

$$\text{定数項：}\quad dk = mbk + k, \tag{3}$$

$$\text{変数の係数}x\text{：}\quad c + dm = am + bm^2. \tag{4}$$

考えてみよう L_2 が原点を通らないという事実はどこで使うか？

それは (3) で使う。$k \neq 0$ なので k で割ることができ、$d - 1 = mb$ が得られる。$d = 1 + mb$ を (4) に代入すると

$$c = am + bm^2 - dm = am + bm^2 - m - bm^2 = m(a-1).$$

となる。したがって

$$bc = bm(a-1) = (d-1)(a-1),$$

であり、これが示すべき結果である。（$k = 0$ のときは式 (3) から何も得られない。原点を通る直線がこの条件なしに不変となりうるのはこのためである。例として角 π の回転（rotation）がある。これは O を通るすべての直線をそれ自身に移すが、$(a-1)(d-1) = 4 \neq 0 = bc$ である。）

検算

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を試す。ここで $(a-1)(d-1) = -2 = bc$ である。小問 (ii) からは不変直線 $2x + 2y = 0$、すなわち $y = -x$ が予想され、実際 $\mathbf{A}(1,-1)^{\mathrm{T}} = (1,-1)^{\mathrm{T}}$ である。
- 小問 (iii) について、$m = 2, k = 1, a = 3, b = 1$ とする。すると $d = 1 + mb = 3$, $c = m(a-1) = 4$ である。点 $(1,3)$ は $y = 2x + 1$ 上にあり、$(6,13)$ に移る。そして $13 = 2 \times 6 + 1$ である。また $(a-1)(d-1) = 4 = bc$ である。
- 数千個のランダムな行列について計算機で確認した。見つかった不変直線 $y = mx + k$（$k \neq 0$）はすべて $d - 1 = mb$, $c = m(a-1)$, $(a-1)(d-1) = bc$ を満たし、原点を通らない不動点（fixed point）の直線はすべて $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ から生じていた。

よくある間違い

- 小問 (i) で、xy で割る際に L_1 が座標軸である場合を処理しない。
- 小問 (ii) の $b = 0$ の場合に場合分けの一部を見落とす。特に、すべての直線が条件を満たす $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ の場合を落としやすい。
- 小問 (iii) で、**不変直線**（点が直線上にとどまる）と**不変点からなる直線**（点が動かない）を混同し、$X = x$ とおいてしまう。

STEP のその先へ

条件 $(a-1)(d-1) = bc$ は $\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 0$ のことであり、これは 1 が $\mathbf{A}$ の固有値（eigenvalue）であることを意味する。このとき、原点を通る不変点からなる直線は、その固有値に対する固有空間（eigenspace）である。小問 (iii) は、原点を通らない不変直線もまた固有値 1 を強制することを示している。関係式 $c = m(a-1)$ と $d - 1 = mb$ は、$\mathbf{A} - \mathbf{I}$ の第 2 行が第 1 行の m 倍であることを表している。したがって $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ の階数（rank）は高々 1 であり、すべての点を L_2 に平行に動かす。固有値、固有ベクトル（eigenvector）、線形写像の幾何については Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形

代数入門）で扱われている。

解答例

STEP III 2019、第 4 問

純粋数学 ・ 解と係数の関係

STEP III 2019、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

交互に現れる符号は、まさにヴィエタの公式（Vieta's formulas）に現れる符号である。根 $r_1, \ldots, r_n$ をもつモニック多項式（monic polynomial）は $x^n - e_1 x^{n-1} + e_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n e_n$ であり、ここで e_k は根から k 個を選んだ積すべての和である。したがって「反射的（reflexive）」とは、すべての k について $e_k(a_1, \ldots, a_n) = a_k$ が成り立つということにほかならない。小さい場合はいくつかの連立方程式に帰着し、根の平方和 $e_1^2 - 2e_2$ から (ii) の等式が得られる。$a_n = 0$ が導かれれば x の因数をくくり出すことができ、多項式を次々にはがしていける。

解答

以下、$a_1, \ldots, a_n$ の k 次基本対称式（elementary symmetric function）を e_k と書く。ヴィエタの公式により、P が根 $a_1, \ldots, a_n$ をもつのは、ちょうど次が成り立つときである。

$$e_k(a_1, \ldots, a_n) = a_k \qquad \text{ただし} k = 1, 2, \ldots, n.$$

小問 (i)

1 次の場合。 $\mathrm{P}(x) = x - a_1$ は根 a_1 をもつので、このような多項式はすべて反射的である。すなわち、任意の実数 a に対して $\mathrm{P}(x) = x - a$ である。

2 次の場合。 $a_1 + a_2 = a_1$ かつ $a_1 a_2 = a_2$ が必要である。前者から $a_2 = 0$ が得られ、すると後者は自動的に成り立つ。よって任意の実数 a に対して $\mathrm{P}(x) = x^2 - ax = x(x - a)$ であり、その根 a と 0 は確かに a_1 と a_2 である。

3 次の場合。次が必要である。

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1,$$
$$a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 = a_2,$$
$$a_1a_2a_3 = a_3.$$

第 1 式から $a_3 = -a_2$ である。すると第 2 式は $a_1(a_2 + a_3) + a_2a_3 = a_2$、すなわち $-a_2^2 = a_2$ となるので、$a_2 = 0$ または $a_2 = -1$ である。

- $a_2 = 0$ ならば $a_3 = 0$ であり、第 3 式は $0 = 0$ となる。よって a_1 は任意であり、$\mathrm{P}(x) = x^3 - ax^2 = x^2(x - a)$ である。
- $a_2 = -1$ ならば $a_3 = 1$ であり、第 3 式から $-a_1 = 1$、すなわち $a_1 = -1$ である。これにより
$$\mathrm{P}(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = (x + 1)^2(x - 1),$$
が得られ、その根 $-1, -1, 1$ は確かに a_1, a_2, a_3 である。

よって、次数が 3 以下の反射的多項式は次のとおりである。

$$x - a, \qquad x^2 - ax, \qquad x^3 - ax^2 \quad (a \in \mathbb{R}), \qquad \text{および} \qquad x^3 + x^2 - x - 1.$$

小問 (ii)

根の平方和は

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = e_1^2 - 2e_2,$$

である。e_1 を 2 乗すると、各 a_i^2 が 1 回ずつ、各積 a_ia_j（$i < j$）が 2 回ずつ現れるからである。反射的多項式では $e_1 = a_1$ かつ $e_2 = a_2$ なので

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = a_1^2 - 2a_2, \qquad \text{すなわち} \qquad 2a_2 = -a_2^2 - a_3^2 - \cdots - a_n^2,$$

となり、示すべき式が得られた。（これはすべての $n \geq 2$ について成り立つ。）

次に、a_k がすべて整数で $a_n \neq 0$ であるとし、矛盾を導くために $n > 3$ と仮定する。a_2^2 を移項して平方完成すると

$$(a_2 + 1)^2 = 1 - \left(a_3^2 + a_4^2 + \cdots + a_n^2\right).$$

考えてみよう 整数であるという条件は、この等式をどのように締めつけるだろうか？

左辺は 0 以上なので、$a_3^2 + \cdots + a_n^2 \leq 1$ である。しかし a_n は 0 でない整数なので $a_n^2 \geq 1$ である。よってこの和はちょうど 1 であり、$a_n^2 = 1$ かつ他の項はすべて 0、すなわち

$a_3 = a_4 = \cdots = a_{n-1} = 0$ であり、さらに $a_2 = -1$ である。$n \geq 4$ なので列 $a_3, \ldots, a_{n-1}$ は空でなく、特に $a_3 = 0$ である。ここで最後のヴィエタの式は、根の積が a_n であることを述べている。

$$a_n = e_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = 0,$$

$a_3 = 0$ だからである。これは $a_n \neq 0$ に矛盾する。したがって $n \leq 3$ である。

小問 (iii)

x の因数を取り除く。 P が次数 $n \geq 2$ の反射的多項式で $a_n = 0$ であるとする。このとき $\mathrm{P}(x) = x\mathrm{Q}(x)$ と書ける。ただし

$$\mathrm{Q}(x) = x^{n-1} - a_1 x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1}.$$

P の根は $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$（ただし $a_n = 0$）であり、因数 x が根 0 を 1 つ担う。よって Q の根は残りの $a_1, \ldots, a_{n-1}$ であり、Q は同じ（整数）係数をもつ反射的多項式である。逆に、Q が係数 $a_1, \ldots, a_m$ をもつ次数 m の反射的多項式ならば、$x\mathrm{Q}(x)$ は係数 $a_1, \ldots, a_m, 0$ と根 $a_1, \ldots, a_m, 0$ をもつので、これも反射的である。

はがしていく。 整数係数の任意の反射的多項式 P から始める。次数が 2 以上で最後の係数が 0 である限り、x の因数を取り除いていく。この操作は $\mathrm{P}(x) = x^m \mathrm{R}(x)$ の形で止まる。ここで $m \geq 0$ であり、R は次数 k の整数係数反射的多項式で、$k = 1$ であるか、最後の係数 a_k が 0 でないかのいずれかである。

- $a_k \neq 0$ ならば、(ii) より $k \leq 3$ である（$k \leq 3$ のときは示すべきことはない）。(i) の一覧より、$k = 1$ のときは $a \neq 0$ である $x - a$ が得られ、$k = 2$ のときは最後の係数が常に 0 なので該当するものはなく、$k = 3$ のとき $a_3 \neq 0$ となるのは $x^3 + x^2 - x - 1$ のみである。
- $k = 1$ かつ $a_1 = 0$ ならば、$\mathrm{R}(x) = x$ である。

$\mathrm{R}(x) = x$ を $a = 0$ の場合の $x - a$ に含め、さらに上で示した逆の主張を用いて x^m を掛けたものがすべて反射的であることを確かめると、整数係数の反射的多項式はちょうど次のものである。

$$x^m(x - a) \quad (m \geq 0,\ a \in \mathbb{Z}),$$
$$x^m(x^3 + x^2 - x - 1) = x^m(x+1)^2(x-1) \quad (m \geq 0).$$

検算

- $x^2(x+1)^2(x-1) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$ は $a_1, \ldots, a_5 = -1, -1, 1, 0, 0$ と根 $-1, -1, 1, 0, 0$ をもつので、反射的である。(ii) の等式は $2(-1) = -(1 + 1 + 0 + 0)$ となり、確か

に成り立つ。

- $n \leq 7$ について、$\{-3, \ldots, 3\}$ に属する $a_1, \ldots, a_n$ のすべての整数の選び方をコンピュータで探索したところ、上に挙げたもの以外の反射的多項式は見つからなかった。また $n = 2, 3$ について小さな有理数の範囲で探索し、(i) の一覧が正しいことが確認された。

よくある間違い

- 自由なパラメータを含む族を見落とすこと。$x^2 - ax$ と $x^3 - ax^2$ は、特別な値に限らず、すべての実数 a について反射的である。
- (ii) で $a_n = \pm 1$、$a_2 = -1$ を求めたところで止まってしまうこと。矛盾は根の積から生じる。$n \geq 4$ のとき $a_3, \ldots, a_{n-1}$ のいずれかが 0 になるので、根の積は 0 になるのである。
- (iii) で「$a_n = 0$ なので x で割る」と述べるだけで、商が再び反射的であることを確かめないこと。0 である根の 1 つが因数 x に対応し、残りの根が残りの係数と一致するのである。

STEP のその先へ

方程式 $e_k(a_1, \ldots, a_n) = a_k$ は、解全体が代数多様体（algebraic variety）をなす多項式系の小さな例であり、ここでは解全体は直線と孤立点の和集合になっている。「平方和 $= e_1^2 - 2e_2$」という事実はニュートン（Newton）の恒等式（Newton's identities）の最初のものである。ニュートンの恒等式は根のべき和と係数を結びつけるもので、対称式の理論の基礎をなしている。「平方数である整数の和が 1 以下」という一歩は、ディオファントス的（Diophantine）な議論によく見られる典型的な手法である。Davenport の *The Higher Arithmetic*（高等算術）と Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は、これらの考え方をさらに探究するのに適した本である。

解答例

STEP III 2019、第 5 問

純粋数学 • 置換積分

> **STEP III 2019、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

小問 (i) の関数は $[0,\infty)$ を $[0,1)$ の上へ滑らかかつ単調増加に写す。そこで、これを定数倍すれば、$[0,c)$ の一部の上での y についての積分を、$[0,\infty)$ の一部の上での x についての積分に変換できる。さらにこの置換（substitution）によって c^2-y^2 は姿を変えた完全平方となり、厄介な平方根が消える。根号が消えれば被積分関数（integrand）は有理式となり、注に与えられた逆正接（arctangent）の積分で処理できる。逆数置換（reciprocal substitution）$y=1/u$ によって、後半の積分は最初の積分に帰着される。

解答

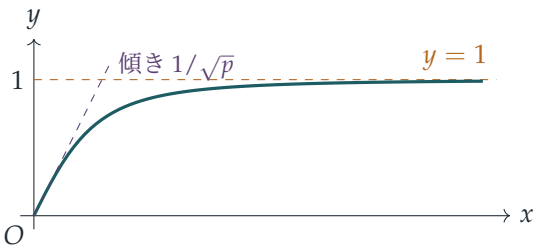
小問 (i)

$f(x)=x(x^2+p)^{-1/2}$、$p>0$ とすると、$f(0)=0$ であり、

$$f'(x)=(x^2+p)^{-1/2}-x^2(x^2+p)^{-3/2}=\frac{p}{(x^2+p)^{3/2}}>0,$$

$$f''(x)=-\frac{3px}{(x^2+p)^{5/2}}<0 \quad \text{ただし} x>0.$$

よって曲線は原点を傾き $1/\sqrt{p}$ で出発し、下に曲がりながら（すなわち上に凸、英語では凹（concave））単調に増加する。$x>0$ に対して $f(x)=1/\sqrt{1+p/x^2}$ であるから、$x\to\infty$ のとき $f(x)\to 1$ であり、その近づき方は下からである。したがって $y=1$ は曲線が決して到達しない漸近線（asymptote）である。



小問 (ii)

問題文に印刷された置換では分子が b になっている。これではうまくいかない。b^2-y^2 はきれいになるが、$c^2(x^2+p)-b^2x^2$ の平方根が残り、これは完全平方ではないからである。うまくいく置換（そして出題者が意図していたもの）は分子が c のものである：

$$y=\frac{cx}{\sqrt{x^2+p}},\qquad p>0.$$

小問 (i) より、これは $x\in[0,\infty)$ から $y\in[0,c)$ の上への増加写像であり、この範囲はちょうど $\sqrt{c^2-y^2}$ が定義される範囲である。このとき

$$\begin{aligned}c^2-y^2&=\frac{c^2(x^2+p)-c^2x^2}{x^2+p}=\frac{c^2p}{x^2+p},\\ b^2-y^2&=\frac{b^2p+(b^2-c^2)x^2}{x^2+p},\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{cp}{(x^2+p)^{3/2}}\quad\text{（小問 (i) より）}.\end{aligned}$$

$c>0$ かつ $p>0$ であるから、$\sqrt{c^2-y^2}=c\sqrt{p}/\sqrt{x^2+p}$ である。代入すると

$$I=\int\frac{x^2+p}{b^2p+(b^2-c^2)x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+p}}{c\sqrt{p}}\cdot\frac{cp}{(x^2+p)^{3/2}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{p}}{b^2p+(b^2-c^2)x^2}\,\mathrm{d}x.$$

$p=1$ と選べば

$$I=\int\frac{1}{b^2+(b^2-c^2)x^2}\,\mathrm{d}x,$$

となり、これが求める結果である。置換は $y=cx/\sqrt{x^2+1}$ であり、その逆は $x=y/\sqrt{c^2-y^2}$ である。

第 1 の積分。$b=\sqrt{3}$、$c=\sqrt{2}$ とする。すると $x=y/\sqrt{2-y^2}$ であるから、$y=1$ のとき $x=1$ であり、$y\to\sqrt{2}$ のとき $x\to\infty$ となる。もとの被積分関数は $y=\sqrt{2}$ で $(2-y^2)^{-1/2}$ のように発散するが、これは積分可能である。置換後の積分は $[1,\infty)$ 上

の収束する広義積分（improper integral）となる：

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}y}{(3-y^2)\sqrt{2-y^2}} = \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{3+x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\Big]_1^{\infty}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\Big) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

考えてみよう 新しい積分では、もとの積分の $3-y^2$ と $2-y^2$ の位置に $3y^2-1$ と $2y^2-1$ が現れている。y^2 と定数の役割を入れ替えるのはどのような置換だろうか。

第2の積分。 $u>0$ として $y=1/u$ とおくと、$\mathrm{d}y = -\mathrm{d}u/u^2$ である。このとき

$$3y^2-1 = \frac{3-u^2}{u^2}, \qquad \sqrt{2y^2-1} = \frac{\sqrt{2-u^2}}{u},$$

であり、積分の端点 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ と $y=1$ はそれぞれ $u=\sqrt{2}$ と $u=1$ になる。よって

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{y\,\mathrm{d}y}{(3y^2-1)\sqrt{2y^2-1}} = \int_{\sqrt{2}}^{1} \frac{1}{u}\cdot\frac{u^2}{3-u^2}\cdot\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\cdot\Big(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\Big) = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}u}{(3-u^2)\sqrt{2-u^2}}.$$

これはちょうど第1の積分であるから、その値も $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$ である。

小問 (iii)

同じ逆数置換 $y=1/u$ により、被積分関数は $u/\big((3-u^2)\sqrt{2-u^2}\big)$ に変わる。余分な因子 u があるので、今度は $w=\sqrt{2-u^2}$ とおきたくなる。そうすれば $3-u^2 = 1+w^2$ となるからである。この二つの段階をまとめると、一つの置換になる：

$$w = \frac{\sqrt{2y^2-1}}{y} = \sqrt{2-\frac{1}{y^2}}, \qquad \text{よって} \qquad w^2 = 2-\frac{1}{y^2}, \quad 2w\,\mathrm{d}w = \frac{2}{y^3}\,\mathrm{d}y.$$

$y\in[\frac{1}{\sqrt{2}},1]$ に対して、w は0から1まで増加する。また $\mathrm{d}y = wy^3\,\mathrm{d}w$、$\sqrt{2y^2-1} = wy$、$3y^2-1 = y^2\big(3-\frac{1}{y^2}\big) = y^2(1+w^2)$ である。したがって

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}y}{(3y^2-1)\sqrt{2y^2-1}} = \int_0^1 \frac{wy^3\,\mathrm{d}w}{y^2(1+w^2)\cdot wy} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}w}{1+w^2} = \frac{\pi}{4}.$$

（$y=1/\sqrt{2}$ における特異点（singularity）も、やはり積分可能な型 $(2y^2-1)^{-1/2}$ にすぎず、この置換によって取り除かれる。）

これは姿を変えた小問 (ii) の方法である。$x=1/w$ とおくと $y = x/\sqrt{2(x^2-1)}$ となり、これは $c^2=\frac{1}{2}$、$p=-1$ とした一般の置換にほかならない。小問 (i) で p が負であることも許されていたのはこのためである。

検算

- $\pi/(3\sqrt{3}) \approx 0.6046$、$\pi/4 \approx 0.7854$ である。どちらの値も、端点の特異性をならすために三角関数による置換を行ったうえで、もとの積分を数値積分して確認した。
- 第 1 の積分の大きさの大まかな確認：$[1, \sqrt{2}]$ 上では $1 \leq 3 - y^2 \leq 2$ であるから、積分は $\int_1^{\sqrt{2}} (2 - y^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}$ の $\frac{1}{2}$ 倍と 1 倍の間にある。よって範囲は 0.39 から 0.79 であり、0.6046 は十分その内側にある。
- 小問 (ii) の等式を 1 点で確かめる：$b = \sqrt{3}$、$c = \sqrt{2}$、$x = 1$ とすると $y = 1$ である。被積分関数の値は $\frac{1}{2}$、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \sqrt{2}/2^{3/2} = \frac{1}{2}$ であり、その積は $\frac{1}{4} = 1/(3+1)$ となって、予想どおりである。

よくある間違い

- 印刷された b を含む置換にこだわって行き詰まること。取り除くべき平方根は $\sqrt{c^2 - y^2}$ なので、倍率は c でなければならない。
- 積分の端点の変換を誤ること。ここでは $y = \sqrt{2} = c$ は有限の x の値ではなく、$x = \infty$ に対応する。
- $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}u/u^2$ の負号を落としたり、端点を入れ替えて戻すのを忘れたりすること。そうすると正の被積分関数に対して負の答えが出てしまう。

STEP のその先へ

ここで用いた置換は有理化置換（rationalising substitution）である。2 次式の平方根を含む被積分関数を有理関数（rational function）に変え、あとは部分分数（partial fractions）や $\tan^{-1}$ で仕上げる。大学 1 年の解析学では、ここで用いた広義積分の背後にある理論を学ぶ。すなわち、積分区間が無限であったり被積分関数が有界でなかったりする積分がどのようなときに収束するのか、そしてそのような積分に対してもなぜ置換積分が成り立つのか、という理論である。Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は、その両方を丁寧に扱っている。

解答例

STEP III 2019、第 6 問

純粋数学 ・ 複素数平面上の円

STEP III 2019、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

冒頭の式は $|z-a|^2-r^2$ を姿を変えて書いたものにすぎないので、軌跡（locus）は a からの距離が r である点全体の集合である。$\omega=1/z$ による像（image）を求めるには、$z=1/\omega$ を代入して分母を払い、その結果をもとの方程式と**同じ**形に整理し直す。その形になれば、係数を比較するだけで中心と半径をそのまま読み取れる。あとは中心と半径を比べれば、C' と C が同じ円になるのはどのようなときかが決まる。

解答

$(z-a)^*=z^*-a^*$ であるから、

$$|z-a|^2=(z-a)(z^*-a^*)=zz^*-a^*z-az^*+aa^*,$$

したがって与えられた方程式は、ちょうど $|z-a|^2=r^2$、すなわち $|z-a|=r$ であることを表している（$r>0$ であるから）。ゆえに C は**中心** a、**半径** r の円である。

より一般に、$s>0$ のとき方程式 $ww^*-bw^*-b^*w+bb^*-s^2=0$ は中心 b、半径 s の円を表す。これをひな形として用いる。

小問 (i)

まず、$z=0$ は C 上にない。もしあれば $|a|=r$、すなわち $a^*a=r^2$ が必要になるが、これは除外されている。したがって $\omega=1/z$ は C のすべての点に対して定義され、$\omega\neq0$ である。また $z=1/\omega$ であるから、Q が C' 上にあるのは、$\omega\neq0$ かつ

$$\left|\frac{1}{\omega}-a\right|=r \iff |1-a\omega|=r|\omega| \iff (1-a\omega)(1-a^*\omega^*)=r^2\omega\omega^*.$$

が成り立つとき、かつそのときに限る。展開して項を整理すると、

$$(a^*a - r^2)\,\omega\omega^* - a\omega - a^*\omega^* + 1 = 0.$$

$k = a^*a - r^2 = |a|^2 - r^2$ とおく。仮定より、これは 0 でない実数である。k で割ると、

$$\omega\omega^* - \frac{a^*}{k}\,\omega^* - \frac{a}{k}\,\omega + \frac{1}{k} = 0.$$

これはひな形において $b = a^*/k$（k は実数なので $b^* = a/k$）とした形に一致する。ただし $bb^* - s^2 = 1/k$、すなわち

$$s^2 = \frac{|a|^2}{k^2} - \frac{1}{k} = \frac{|a|^2 - k}{k^2} = \frac{r^2}{k^2}.$$

でなければならない。これは正であるから、C' は確かに円であり、

$$\text{中心}\frac{a^*}{|a|^2 - r^2}, \qquad \text{半径}\frac{r}{\left||a|^2 - r^2\right|}.$$

である。（$\omega = 0$ はこの方程式を満たさないことに注意する。満たすとすれば $1 = 0$ となってしまうからである。したがって、この円のすべての点は確かに C 上のある z に対する $1/z$ になっている。）

考えてみよう 2 つの円が同じになるのは、ちょうど…のときか？

それは中心が同じで、かつ半径が同じであるときである。したがって $C' = C$ となるためには

$$\frac{r}{|k|} = r \qquad \text{かつ} \qquad \frac{a^*}{k} = a.$$

が必要である。1 つ目の条件から $|k| = 1$、すなわち $k^2 = 1$ が得られる：

$$\left(|a|^2 - r^2\right)^2 = 1.$$

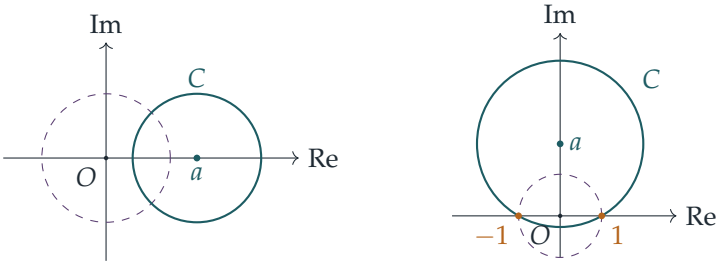
よって $k = 1$ または $k = -1$ であり、このとき 2 つ目の条件から次が得られる：

- $k = 1$ の場合：$a^* = a$ であるから、a は**実数**である。
- $k = -1$ の場合：$a^* = -a$ であるから、a は**虚数**（imaginary、すなわち純虚数）である。

（$a = 0$ ならば両方に当てはまり、このとき $r = 1$ である。）逆に、これらのいずれかと半径の条件がそろえば、中心と半径は確かに一致する。

概形。 a が実数ならば $|a|^2 = r^2 + 1 > r^2$ であるから、中心は実軸上で O から距離 $\sqrt{r^2+1}$ の位置にあり、原点は C の**外側**にある。この円は実軸と $a - r$ と $a + r$ で交わり、その積は $a^2 - r^2 = 1$ である。$1/z$ はこの 2 点を入れ替えるので、当然そうなる

はずである。a が虚数ならば $|a|^2 = r^2 - 1$ であるから、この場合は $r \geq 1$ が必要である。中心は虚軸上にあり、原点は C の**内側**にある。$a = \mathrm{i}c$ と書くと、実軸との交点は $x^2 + c^2 = r^2$ を満たすから、$x = \pm 1$ である。どちらの場合も $|a|^2 = r^2 \pm 1$ であるから、C は単位円（unit circle、破線）と直交する（左図は $a = \sqrt{2}$、$r = 1$、右図は $a = \mathrm{i}\sqrt{3}$、$r = 2$ の場合である）。



a が実数　　a が虚数

もちろん a が実数で負の場合もあり、そのときは左図を虚軸に関して折り返した図になる。同様に、虚数 a が実軸より下にあることもある。

小問 (ii)

今度は $z = 1/\omega^*$ であるから、Q が軌跡上にあるのは

$$\left|\frac{1}{\omega^*} - a\right| = r \iff |1 - a\omega^*| = r|\omega^*| \iff |1 - a^*\omega| = r|\omega|,$$

のとき、かつそのときに限る。ここで、1 つ目の絶対値（modulus）の中で共役（conjugate）をとった（複素数とその共役は絶対値が等しい）。これは小問 (i) の方程式で a を a^* に置き換えたものである。したがって小問 (i) より、軌跡は

$$\text{中心}\frac{a}{k}, \qquad \text{半径}\frac{r}{|k|}, \qquad k = |a|^2 - r^2.$$

の円である。これが C と一致するためには $|k| = 1$ かつ $a/k = a$ が必要である。$a \neq 0$ ならば、2 つ目の条件から $k = 1$ となり、条件はそれだけである。すなわち条件はちょうど

$$|a|^2 = r^2 + 1,$$

であり、これは a の偏角（argument）については何も述べていない。（$a = 0$ ならば、前と同様に $r = 1$ が必要である。）

考えてみよう 実数でも虚数でもない具体的な a を見つけられるか？

$a = 1 + \mathrm{i}$、$r = 1$ とする。すると $|a|^2 = 2 = r^2 + 1$ であるから、Q の軌跡は C であるが、a は実数でも純虚数でもない。したがって答えは**否**である。a が実数または虚数でなければならない、ということはない。

検算

- $a = \sqrt{5}$、$r = 2$（したがって $|a|^2 - r^2 = 1$）のとき、C 上の点 $z = \sqrt{5} \pm 2$ は $1/(\sqrt{5} \pm 2) = \sqrt{5} \mp 2$ に移り、これらもまた C 上にある。
- 小問 (ii) で $a = 1 + \mathrm{i}$、$r = 1$ の場合：点 $z = 1$ は C 上にあり、$1/z^* = 1$ もそうである。点 $z = 2 + \mathrm{i}$ からは $1/z^* = (2 + \mathrm{i})/5 = 0.4 + 0.2\mathrm{i}$ が得られ、$|(0.4 + 0.2\mathrm{i}) - (1 + \mathrm{i})|^2 = 0.36 + 0.64 = 1$ である。しかし $1/z = 0.4 - 0.2\mathrm{i}$ は C 上にないので、この円は小問 (i) の写像では固定されない。
- 両方の小問における像の円は、ランダムな円の多数の点を写像し、予測した中心からの距離を測ることで、コンピュータでも確認した。

よくある間違い

- C' の中心を $a^*/(|a|^2 - r^2)$ ではなく $a/(|a|^2 - r^2)$ と書いてしまう。中心を読み取るには、ω ではなく ω^* の係数を見る必要がある。
- 半径 $r/\left||a|^2 - r^2\right|$ の絶対値を書き忘れる。絶対値がないと、$|a| < r$ の場合に半径が負になってしまう。
- 小問 (ii) で、小問 (i) からの類推で「はい」と答えてしまい、共役によって条件 $a^* = \pm a$ が消えることに気づかない。

STEP のその先へ

写像 $z \mapsto 1/z^*$ は**単位円に関する反転**（inversion in the unit circle）であり、$z \mapsto 1/z$ はその反転のあとに実軸に関する折り返しを行ったものである。どちらもメビウス変換（Möbius transformation）の仲間であり、メビウス変換はつねに円と直線を円と直線に移す。小問 (ii) は、円が反転で固定されるのは、それが反転の円と直交するとき、すなわち $|a|^2 = r^2 + 1$ のとき（または単位円そのもののとき）に限る、という古典的な事実である。Needham の *Visual Complex Analysis*（複素解析を視覚的に解説した本）は、これらの考え方を図を交えて見事に展開している。

解答例

STEP III 2019、第 7 問

純粋数学 • 曲線の概形

> **STEP III 2019、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

この方程式には x^2 と y^2 しか現れないので、x^2（あるいは y^2）についての 2 次方程式とみなせる。これにより二つの道具が同時に手に入る。一つは判別式（discriminant）であり、曲線がどのような y の値をとりうるかを教えてくれる。もう一つは x^2 を y で表す明示的な公式である。原点の近くでの形を調べるには最も次数の低い項だけを残し、原点から遠く離れたところでは最も次数の高い項だけを残す。特別な場合 $a = b$ では、方程式は完全に因数分解できる。

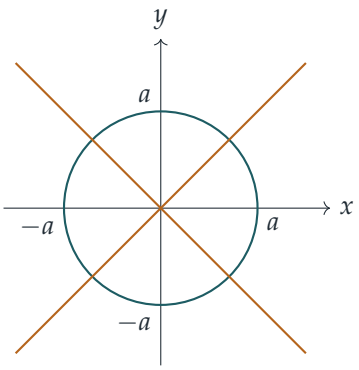
解答

小問 (i)

$a = b$ のとき、すべての項を一方の辺に移し、4 次の項（quartic terms）と 2 次の項をまとめると

$$\begin{aligned} 0 &= (y^4 - x^4) - a^2(y^2 - x^2) \\ &= (y^2 - x^2)(y^2 + x^2) - a^2(y^2 - x^2) \\ &= (y^2 - x^2)(x^2 + y^2 - a^2). \end{aligned}$$

したがって、点が曲線上にあるのは $y = \pm x$ または $x^2 + y^2 = a^2$ のときであり、かつそのときに限る。すなわち、悪魔の曲線（Devil's Curve）は 2 直線 $y = x$、$y = -x$ と、原点を中心とする半径 a の円とを合わせたものである。



小問 (ii)(a)

ここでは $a=2$、$b=\sqrt{5}$ であり、曲線は $y^4-5y^2=x^4-4x^2$ である。$y\geq 0$ を固定し、$X=x^2$ とおく。$x\geq 0$ である点 (x,y) が曲線上にあるのは、$X\geq 0$ が

$$X^2-4X-(y^4-5y^2)=0.$$

を満たすときであり、かつそのときに限る。これが実数解をもつためには、判別式が負でないことが必要である：

$$\begin{aligned}16+4(y^4-5y^2)&=4(y^4-5y^2+4)=4(y^2-1)(y^2-4)\\&=4(y+1)(y+2)(y-1)(y-2)\geq 0.\end{aligned}$$

$y\geq 0$ より因数 $y+1$ と $y+2$ は正であるから、$(y-1)(y-2)\geq 0$ が必要となる。すなわち

$$0\leq y\leq 1 \quad \text{または} \quad y\geq 2.$$

逆に、このような y はすべて実際に現れる。解は

$$X=2\pm\sqrt{D}, \qquad D=(y^2-1)(y^2-4),$$

であり、大きい方の解は 2 以上なので、x^2 として正当な値である。この x^2 の公式は以下で用いる。

小問 (ii)(b)

原点の近くでは、4 次の項 y^4 と x^4 は y^2 や x^2 に比べてごく小さい。したがって曲線はおよそ

$$-5y^2\approx -4x^2, \qquad \text{すなわち} \qquad y\approx \tfrac{2}{\sqrt{5}}\,x \quad (x,y\geq 0).$$

となる。曲線は傾き $2/\sqrt{5}\approx 0.89$ の直線に沿って原点から出ていき、これは直線 $y=x$ より少し下である。((a) の公式もこれと一致する。解 $X=2-\sqrt{D}$ において、二項展開（binomial expansion）により $x^2=\frac{5}{4}y^2+O(y^4)$ が得られる。)

原点から非常に遠いところでは、最高次の項が支配的になる。$y^4 \approx x^4$ より $y \approx x$ である。さらに精密に調べることができる。方程式を

$$(y^2 - x^2)(y^2 + x^2) = 5y^2 - 4x^2 \quad \Longrightarrow \quad y^2 - x^2 = \frac{5y^2 - 4x^2}{y^2 + x^2}.$$

と書き直す。$y/x \to 1$ であるから、右辺は $\frac{5-4}{2} = \frac{1}{2}$ に近づく。よって $y^2 \approx x^2 + \frac{1}{2}$ であり、これから

$$y \approx x + \frac{1}{4x}.$$

が得られる。曲線は直線 $y = x$ を漸近線（asymptote）にもち、**上側から**それに近づく。実際、原点以外ではこの直線と交わることはない。方程式に $y = x$ を代入すると $x^2 = 0$ となるからである。

小問 (ii)(c)

$y^4 - 5y^2 = x^4 - 4x^2$ を x について陰関数微分（implicit differentiation）すると

$$(4y^3 - 10y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x^3 - 8x \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x(x^2 - 2)}{y(2y^2 - 5)}.$$

接線（*tangent*）が x 軸に平行な場合：分子が 0 で分母が 0 でないことが必要である。よって $x = 0$ または $x = \sqrt{2}$ である。

- $x = 0$ のとき：$y^4 = 5y^2$ となるので、$y = 0$ または $y = \sqrt{5}$ である。$(0, \sqrt{5})$ では分母は $\sqrt{5}(10 - 5) \neq 0$ なので、この点は条件を満たす。
- $x = \sqrt{2}$ のとき：$y^4 - 5y^2 = 4 - 8$ より $y^4 - 5y^2 + 4 = 0$ となり、$y = 1$ または $y = 2$ を得る。これらの点での分母は -3 と 6 で、いずれも 0 でない。

? 考えてみよう 分子が同じく 0 になる原点を数えないのはなぜか？

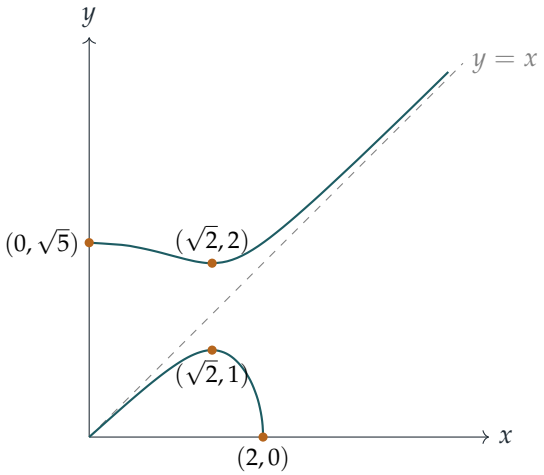
$(0,0)$ では分母も 0 になるので、公式は $0/0$ となり何の情報も与えない。この問題は (b) ですでに決着している。曲線は傾き 0 ではなく、傾き $2/\sqrt{5}$ で原点を通過する。

したがって、接線が水平になるのは $(0, \sqrt{5})$、$(\sqrt{2}, 1)$、$(\sqrt{2}, 2)$ である。

接線が y 軸に平行な場合：分母が 0 で分子が 0 でないことが必要であるから、$y = 0$ または $y^2 = \frac{5}{2}$ である。しかし $\sqrt{5/2} \approx 1.58$ は 1 と 2 の間に厳密に含まれるので、(a) により除外される。$y = 0$ のときは $x^4 = 4x^2$ となるので、$x = 0$（再び原点であり、上と同じ理由で除外される）または $x = 2$ である。$(2,0)$ での分子は $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \neq 0$ である。よって、そのような点は $(2,0)$ だけである。

$x \geq 0$、$y \geq 0$ における概形 $x^2 = 2 \pm \sqrt{D}$ を用いると、曲線は二つの部分からなる。

- $0 \le y \le 1$ **におけるループ**。解 $2 - \sqrt{D}$ は 0（$y = 0$ のとき）から 2（$y = 1$ のとき）まで増加し、$2 + \sqrt{D}$ は 4 から 2 まで減少する。したがって曲線は傾き $2/\sqrt{5}$ で原点を出発し、$(\sqrt{2}, 1)$ で極大となり、下降して $(2, 0)$ で x 軸と垂直に交わる。
- $y \ge 2$ **における翼**。$2 \le y \le \sqrt{5}$ のとき、解 $2 - \sqrt{D}$ は 2 から 0 まで減少する。$y = \sqrt{5}$ を超えるとこの解は負になるので、x^2 として正当な値ではない。解 $2 + \sqrt{D}$ は 2 から限りなく増加する。したがってこの枝は水平な接線をもつ $(0, \sqrt{5})$ から始まり、$(\sqrt{2}, 2)$ で極小まで下がり、その後上昇して上側から $y = x$ に近づく。

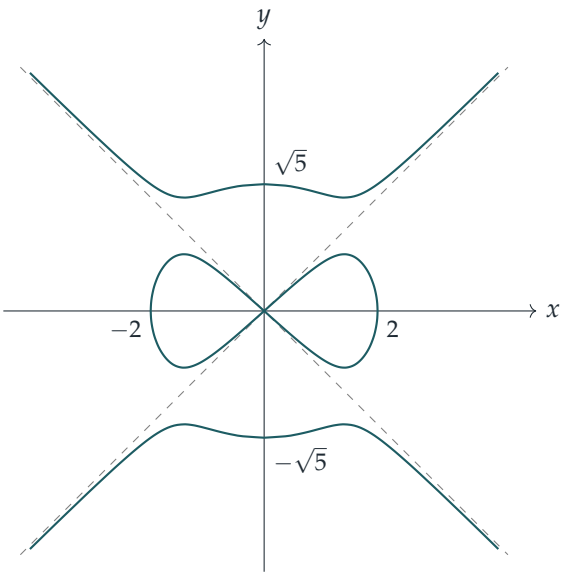


小問 (iii)

方程式には x^2 と y^2 しか含まれないので、曲線は y 軸に関して対称（x を $-x$ に置き換える）であり、x 軸に関しても対称（y を $-y$ に置き換える）である。第 1 象限の部分を両軸に関して折り返すと：

- ループは $x = -2$ と $x = 2$ の間にある、$|y| \le 1$ を満たす 8 の字（figure-of-eight）になる。その二つの輪は原点で直線 $y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}x$ に沿って交差し、$(\pm\sqrt{2}, \pm 1)$ に停留点（turning point）をもつ。
- 翼は $y \ge 2$ の枝と $y \le -2$ の枝の二つになる。それぞれ $(0, \pm\sqrt{5})$ で極大または極小となり、$(\pm\sqrt{2}, \pm 2)$ に停留点をもつ。どちらも外側から漸近線 $y = \pm x$ に近づく。

曲線のどの部分も帯状の領域 $1 < |y| < 2$ には含まれない。



検算

- 図に記した各点は方程式を満たす。たとえば $(\sqrt{2}, 2)$ では両辺とも -4 に等しく、$(0, \sqrt{5})$ では両辺とも 0 に等しい。
- 点 $(1, 1.5)$ は禁止された帯状領域にある。そこでは左辺は $2.25 \times (-2.75) \approx -6.19$ であるが、右辺 $x^2(x^2-4)$ は決して -4 より小さくならない（$x^2 = 2$ で最小値をとる）。これは判別式による議論を小さな規模で確かめたものである。
- 翼の上の $y = 100$ では、公式から $x^2 = 2 + \sqrt{(10^4-1)(10^4-4)}$ が得られる。このとき $4x(y-x) \approx 1.0002$ となり、$y - x \approx \frac{1}{4x}$ と一致する。原点の近くでは、ループ上の比 y/x は $0.8944 \approx 2/\sqrt{5}$ に近づく。

よくある間違い

- $(0,0)$ を接線が水平（あるいは垂直）になる点として挙げてしまう。そこでは $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ は $0/0$ であり、本当の傾きは (b) から得られる。
- ループが $y = x$ に沿って原点を出ていくように描いたり、翼が $y = x$ と交わるように描いたりする。ループは傾き $2/\sqrt{5} < 1$ で出発し、翼は常に $y = x$ より厳密に上側にある。
- 条件 $x^2 \geq 0$ を忘れる。この条件により、内側の解は $y = \sqrt{5}$ で打ち切られる。

STEP のその先へ

悪魔の曲線は**代数曲線**（algebraic curve）、すなわち多項式 $F(x,y)$ の零点集合である。原点は**特異点**（singular point）であり、そこでは二つの偏導関数（partial derivative）F_x と F_y がともに 0 になる。F の最低次の項はそこでの接線を与え、これはまさに (b) で行ったことである。また、最高次の項は漸近線の方向を与える。大学では、これらの考え方は陰関数定理（implicit function theorem）や代数幾何学（algebraic geometry）の中で再び現れる。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、STEP 形式の曲線の概形を描く問題が丁寧な解説とともにさらに収録されている。

解答例

STEP III 2019、第 8 問

純粋数学 ・ ベクトルと空間図形

STEP III 2019、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

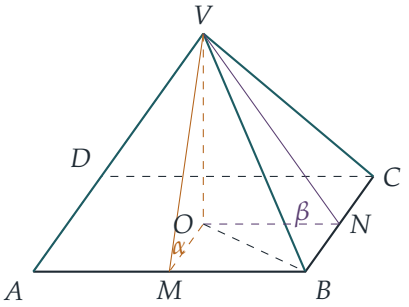
四角錐（pyramid）に座標を設定する。各斜面は水平な底面の辺を 1 本含むので、その法線（normal）はその辺に垂直である。このため法線は鉛直な平面内にあることになり、その平面上で斜面と底面のなす角を直接読み取ることができる。あとは 2 つの斜面のなす角を法線どうしの内積（dot product）から求め、注意深く三角関数の式変形を行い、相加・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）を一度使えばよい。

解答

底面の中心を原点 O とし、$\mathbf{i}$ を AB の向き、$\mathbf{j}$ を BC の向き、$\mathbf{k}$ を鉛直上向きにとる。

$$A=(-a,-b,0),\quad B=(a,-b,0),\quad C=(a,b,0),\quad D=(-a,b,0),\quad V=(0,0,h),$$

とおく。ただし $a,b,h>0$ である。



$M=(0,-b,0)$ を AB の中点、$N=(a,0,0)$ を BC の中点とする。$VA=VB$ であるから、直線 VM は面 AVB 上にあって AB に垂直であり、底面上の OM も AB に垂直で

ある。よって斜面と底面のなす角は角 VMO であり、

$$\tan\alpha = \frac{h}{b}, \qquad \text{同様に} \qquad \tan\beta = \frac{h}{a}.$$

小問 (i)

面 AVB は方向 $\overrightarrow{AB} \parallel \mathbf{i}$ と $\overrightarrow{MV} = b\,\mathbf{j} + h\,\mathbf{k}$ を含む。法線ベクトルの 1 つは

$$\mathbf{i} \times (b\,\mathbf{j} + h\,\mathbf{k}) = -h\,\mathbf{j} + b\,\mathbf{k}.$$

である。これをその長さ $\sqrt{h^2+b^2}$ で割り、$\tan\alpha = h/b$ を用いると、単位法線ベクトル（unit normal）

$$\mathbf{n}_1 = -\sin\alpha\,\mathbf{j} + \cos\alpha\,\mathbf{k}.$$

が得られる。その $\mathbf{j}$ 成分は負であるから、これは四角錐の外側を向いている（面 AVB は $y < 0$ の側にある）。

まったく同様に、面 BVC は $\mathbf{j}$ と $\overrightarrow{NV} = -a\,\mathbf{i} + h\,\mathbf{k}$ を含み、その外向き単位法線ベクトルは

$$\mathbf{n}_2 = \sin\beta\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{k}.$$

である。したがって

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \cos\alpha\cos\beta.$$

考えてみよう 法線どうしのなす角は、面どうしのなす角そのものだろうか、それともその補角（supplement）だろうか。

共通の辺 VB に垂直な断面を考える。2 つの面は内角 $\pi - \theta$ で交わる 2 本の直線として現れ、各外向き法線はそれぞれの直線に垂直で、立体から離れる向きを向いている。一方の面を内角だけ回転させて他方の面に重ねると、外向き法線も同じ角だけ回転するが、断面上では 2 本の法線はどちらも**外向き**であるから、両者のなす角は $\pi - (\pi - \theta) = \theta$ となる。（立方体を思い浮かべるとよい。面どうしは $\frac{\pi}{2}$ で交わり、法線どうしも $\frac{\pi}{2}$ をなす。四角錐を平たくつぶしていくと、面どうしのなす角は π に近づき、法線どうしのなす角は 0 に近づく。）したがって

$$\cos\theta = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \cos\alpha\cos\beta,$$

となり、示すべき式が得られた。$0 < \cos\alpha\cos\beta < 1$ であるから θ は鋭角であり、これは面どうしが鈍角で交わることと整合している。

小問 (ii)

V から下ろした垂線の足は O であるから、BV と底面のなす角は角 VBO であり、

$$\cot\phi = \frac{OB}{h} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{h}.$$

である。したがって

$$\cot^2\phi = \frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{h^2} = \cot^2\beta + \cot^2\alpha,$$

となる。ここで $\cot\beta = a/h$ と $\cot\alpha = b/h$ を用いた。これが 1 つ目の結果である。

2 つ目の結果を示すため、$p = \cos^2\alpha, q = \cos^2\beta$ とおくと、小問 (i) より $\cos^2\theta = pq$ である。このとき

$$\cot^2\phi = \frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q} = \frac{p+q-2pq}{(1-p)(1-q)}.$$

$\cos^2\phi = \dfrac{\cot^2\phi}{1+\cot^2\phi}$ であるから、

$$1+\cot^2\phi = \frac{(1-p)(1-q)+p+q-2pq}{(1-p)(1-q)} = \frac{1-pq}{(1-p)(1-q)},$$

が必要であり、割り算をすると

$$\cos^2\phi = \frac{p+q-2pq}{1-pq} = \frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}.$$

を得る。($\cos\theta < 1$ であるから分母は正である。)

さて、$\cos\alpha$ と $\cos\beta$ は正であるから、相加・相乗平均の不等式より

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta \ \geq\ 2\cos\alpha\cos\beta = 2\cos\theta,$$

であり、$1-\cos^2\theta > 0$ であるから

$$\cos^2\phi \ \geq\ \frac{2\cos\theta - 2\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}.$$

考えてみよう この下界から、ϕ と θ について何がわかるのだろうか。

これを簡単にして $\cos^2\theta$ と比べる。正の因数 $1-\cos\theta$ で約分すると

$$\frac{2\cos\theta(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} = \frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}.$$

$c = \cos\theta \in (0,1)$ とおくと

$$\frac{2c}{1+c} - c^2 = \frac{c\,(2-c-c^2)}{1+c} = \frac{c\,(1-c)(2+c)}{1+c} > 0.$$

よって $\cos^2\phi \geq \dfrac{2c}{1+c} > \cos^2\theta$ である。ϕ と θ はともに $(0, \frac{\pi}{2})$ にあり、この区間で余弦は正かつ減少するから、$\cos\phi > \cos\theta$ より $\phi < \theta$ が得られる。

検算

- 底面が正方形で、h が 1 辺の半分に等しい場合（$a = b = h$）：$\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$ であるから $\cos\theta = \frac{1}{2}$、$\theta = 60°$ である。直接計算すると $\cot\phi = \sqrt{2}$ であるから $\cot^2\phi = 2 = 1 + 1$ であり、$\phi \approx 35.26° < 60°$ となる。また $\cos^2\phi = \frac{2}{3}$ であり、$(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2})/(1 - \frac{1}{4}) = \frac{2}{3}$ と一致する。
- 10^5 個の無作為な四角錐について、VB を通る断面から面どうしのなす角を直接測るコンピュータによる検証を行ったところ、$\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta$ および ϕ に関する 2 つの式のいずれとも一致し、常に $\phi < \theta$ となった。

よくある間違い

- 一方の面には内向き法線を、他方の面には外向き法線をとってしまうこと。このとき内積の符号が逆になり、$\cos(\pi - \theta)$ が得られてしまう。
- α を斜高（slant height）VM に沿ってではなく、辺 VA に沿って測ってしまうこと。2 平面のなす角は、その交線（line of intersection）に垂直な方向で測らなければならない。
- $\cos^2\phi \geq \dfrac{2\cos\theta}{1 + \cos\theta}$ で止めてしまい、これが $\cos^2\theta$ より大きいことを示さないこと。

STEP のその先へ

2 平面のなす角は、その法線どうしのなす角に等しい（補角をとる違いを除いて）。これは、多変数微積分（multivariable calculus）や微分幾何学（differential geometry）において法線を用いて曲面を記述する考え方の出発点である。また、恒等式 $\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta$ は、球面上のピタゴラスの定理（spherical Pythagoras theorem）が姿を変えたものでもある。実際、3 本の法線 $\mathbf{k}$, $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ は直角球面三角形をなす。内積と外積（cross product）の感覚を深めるには、Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）がよい。

解答例

STEP III 2019、第 9 問

力学 ・ 動く半球上の質点

STEP III 2019、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

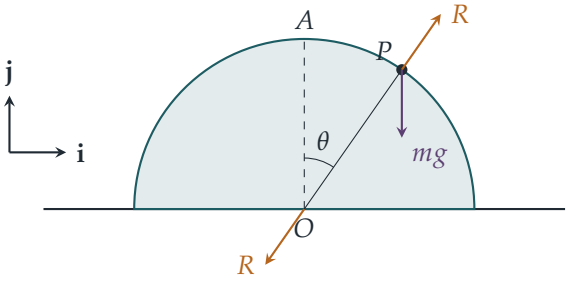
www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

二つの面はどちらもなめらか（smooth）なので、系（質点と半球）にはたらく外力はどれも水平成分をもたない。したがって水平方向の運動量は保存され（運動量保存（conservation of momentum））、これによって半球の速さと質点の角速度が結びつく。また重力以外に仕事をする力はないので、エネルギーも保存される。この二つの法則から小問 (ii) が得られる。質点が面から離れることについては、垂直抗力（normal reaction）が 0 になることを確かめるのが明快な判定法である。誘導で与えられたベクトルは、その方向の成分をとったときに未知の $\ddot{\theta}$ が消えるように選ばれている。

解答

モデル：P は質点（particle）、半球は剛体であり、接触はすべてなめらかであるとする。接している間、P と半球の間にはたらく力は OP に沿った垂直抗力 R のみであり、台は半球を鉛直方向に押す。



半球にはたらく抗力（見やすさのため O に描いてある）は、P にはたらく抗力と大き

さが等しく向きが反対である。

小問 (i)

時刻 t において中心 O は $-s\,\mathbf{i}$ の位置に移動しており、P はそこから距離 a だけ $\sin\theta\,\mathbf{i}+\cos\theta\,\mathbf{j}$ の方向にある。よって

$$\mathbf{r}=(a\sin\theta-s)\,\mathbf{i}+a\cos\theta\,\mathbf{j},$$

であり、t で微分すると（$\sin\theta$ と $\cos\theta$ に連鎖律（chain rule）を用いる）

$$\dot{\mathbf{r}}=(a\dot{\theta}\cos\theta-\dot{s})\,\mathbf{i}-a\dot{\theta}\sin\theta\,\mathbf{j},$$

となり、示すべき式が得られる。

系にはたらく外力は二つの重力と台からの抗力であり、いずれも鉛直方向である。したがって水平方向の運動量の総和は初期値のまま保たれ、その初期値は 0 である（初めのわずかなずれによって生じる速さは無視できるとする）。半球の速度は $-\dot{s}\,\mathbf{i}$ であるから

$$m(a\dot{\theta}\cos\theta-\dot{s})-M\dot{s}=0\quad\Longrightarrow\quad\dot{s}=\frac{m}{m+M}\,a\dot{\theta}\cos\theta=(1-k)\,a\dot{\theta}\cos\theta,$$

となる。ここで $1-k=\dfrac{m}{m+M}$ を用いた。これを $\dot{\mathbf{r}}$ の $\mathbf{i}$ 成分に代入すると

$$a\dot{\theta}\cos\theta-(1-k)a\dot{\theta}\cos\theta=k\,a\dot{\theta}\cos\theta,\qquad\text{よって}\qquad\dot{\mathbf{r}}=a\dot{\theta}\,(k\cos\theta\,\mathbf{i}-\sin\theta\,\mathbf{j}).$$

小問 (ii)

抗力は全体として仕事をしない。台からの抗力は半球の運動と垂直であり、P と半球の間にはたらく一対の力 $\pm R$ は、P が面上にとどまる限り仕事の総和が 0 になる（両者の相対速度は面に沿っており、R と垂直である）。よって運動エネルギー（kinetic energy）と位置エネルギー（potential energy）の和は保存される。P は $a(1-\cos\theta)$ だけ下がっており、初めはすべてが（実質的に）静止しているので

$$\tfrac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2\left(k^2\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)+\tfrac{1}{2}M\dot{s}^2=mga(1-\cos\theta).$$

小問 (i) より $M\dot{s}^2=M(1-k)^2a^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta$ である。すると $a^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta$ の係数の合計は

$$mk^2+M(1-k)^2=\frac{mM^2+Mm^2}{(m+M)^2}=\frac{mM}{m+M}=mk.$$

したがって $\tfrac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2\left(k\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=mga(1-\cos\theta)$ となり、両辺を $\tfrac{1}{2}ma$ で割ると

$$a\dot{\theta}^2\left(k\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=2g(1-\cos\theta).$$

小問 (iii)

$\mathbf{u} = \sin\theta\,\mathbf{i} + k\cos\theta\,\mathbf{j}$ とおく。小問 (i) の最後の結果を微分すると

$$\ddot{\mathbf{r}} = a\ddot{\theta}\,(k\cos\theta\,\mathbf{i} - \sin\theta\,\mathbf{j}) - a\dot{\theta}^2\,(k\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}).$$

$k\cos\theta\sin\theta - \sin\theta\, k\cos\theta = 0$ であるから、第 1 の括弧は $\mathbf{u}$ と垂直である。よって

$$\ddot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{u} = -a\dot{\theta}^2\big(k\sin^2\theta + k\cos^2\theta\big) = -k\,a\dot{\theta}^2.$$

考えてみよう なぜこの特定のベクトルが役に立つのだろうか。

このベクトルは、何もわかっていない $\ddot{\theta}$ の項を消し、小問 (ii) で求めた $\dot{\theta}^2$ だけを残してくれるのである。ここで P についてのニュートン（Newton）の運動の第二法則（Newton's second law）と比べる：

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\,\mathbf{j} + R(\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}).$$

$\mathbf{u}$ 方向の成分をとり、上の結果と等置すると

$$-mk\,a\dot{\theta}^2 = -mgk\cos\theta + R\big(\sin^2\theta + k\cos^2\theta\big),$$

よって

$$R\big(\sin^2\theta + k\cos^2\theta\big) = mk\big(g\cos\theta - a\dot{\theta}^2\big).$$

質点が半球から離れるのは R が 0 まで減少したときである。$k > 0$ であるから、$\theta = \alpha$ においてこれより

$$a\dot{\theta}^2 = g\cos\alpha.$$

3 次方程式。 $c = \cos\alpha$ とおき、$\sin^2\alpha = 1 - c^2$ を用いて $\theta = \alpha$ における小問 (ii) の式を使うと

$$gc\big(kc^2 + 1 - c^2\big) = 2g(1-c) \quad\Longrightarrow\quad (1-k)\,c^3 - 3c + 2 = 0.$$

$f(x) = (1-k)x^3 - 3x + 2$ とおく。m と M はともに正であるから $0 < 1-k < 1$ である。

- $-1 \le x \le 1$ において $f'(x) = 3\big((1-k)x^2 - 1\big) < 0$ であるから、f はそこで狭義単調減少（strictly decreasing）であり、$[-1,1]$ における根は高々一つである。
- $f\big(\frac{2}{3}\big) = \frac{8}{27}(1-k) - 2 + 2 = \frac{8}{27}(1-k) > 0$ かつ $f(1) = -k < 0$ である。

よって $[-1,1]$ における唯一の根は $\frac{2}{3}$ と 1 の間に（端点を含まずに）ある。$\cos\alpha$ は $[-1,1]$ に属さなければならないので、それはこの根であり

$$\cos\alpha > \tfrac{2}{3}.$$

（これは R の式とも整合している。小問 (ii) を代入すると、$g\cos\theta - a\dot{\theta}^2$ は $-f(\cos\theta)$ と同じ符号をもつことがわかる。これは $\theta = 0$ で正であり、この根で初めて 0 になるので、P は確かにそのときまで接触を保つ。）

検算

- $M \to \infty$ とすると $k \to 1$ となって半球は動かず、3 次方程式（cubic）は $-3c + 2 = 0$ となる。これは固定された球面から滑り落ちる質点についてのおなじみの結果 $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ である。半球が動くことで、質点はより早く、すなわちより大きい $\cos\alpha$ で離れる。
- 質量が等しい場合、$1 - k = \frac{1}{2}$ であり、3 次方程式 $c^3 - 6c + 4 = 0$ は $(c-2)(c^2 + 2c - 2) = 0$ と因数分解できる。これより $\cos\alpha = \sqrt{3} - 1 \approx 0.732$ となり、$\frac{2}{3}$ より大きい。
- いくつかの質量比について、運動全体をコンピュータで逐次的に数値シミュレーションしたところ、途中で小問 (i) と (ii) の関係式が成り立つことが確認され、$m = M$ のときには抗力が $\cos\theta \approx 0.732$ で 0 になることがわかった。これは 3 次方程式と一致する。

よくある間違い

- 固定された球面の場合の条件 $a\dot{\theta}^2 = g\cos\theta$ を根拠なしに用いること。この問題では半球が加速するので、質点の加速度は固定点のまわりの円運動の加速度だけではない。離れる瞬間にこの式がたまたま成り立つのは、$R = 0$ であればその瞬間に半球の水平方向の加速度が 0 になるからにすぎない。
- エネルギーの式で半球の運動エネルギー $\frac{1}{2}M\dot{s}^2$ を忘れること。
- 根が $\frac{2}{3}$ と 1 の間にあることだけを示し、$[-1, 1]$ に別の根がないことを確かめないこと。

STEP のその先へ

これは 2 自由度（two degrees of freedom）の系であり、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）を使えば系統的に扱うことができる。運動エネルギーと位置エネルギーを θ と s で表すと、s がラグランジアンに現れないことから、水平方向の運動量の保存が自動的に現れる（このような座標は「循環座標」（ignorable coordinate）と呼ばれ、ネーター（Noether）の定理によって対称性と結びつけられる）。R のような束縛

力（constraint force）は、ここで行ったのとまったく同じように、後から求められる。まずニュートン力学の直観を養うには、Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい出発点である。

解答例

STEP III 2019、第 10 問

力学 ・ 斜め衝突

STEP III 2019、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

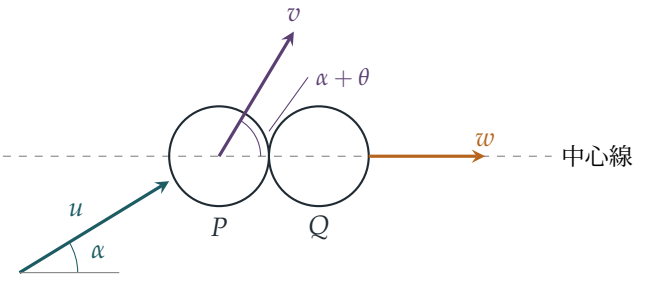
www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべての速度を、中心線（line of centres）に沿った成分と、それに垂直な成分とに分解する。球はなめらか（smooth）なので、撃力（impulse）は中心線に沿ってのみはたらく。したがって P の垂直成分は変化せず、Q はその線に沿って動き出す。そうすれば、運動量保存則（conservation of momentum）とニュートン（Newton）の反発法則（Newton's experimental law）を、1 次元の衝突とまったく同じように中心線に沿って適用できる。あとは三角関数の計算である。

解答

P と Q を、なめらかな水平面上にある等しい質量 m のなめらかな球としてモデル化する。衝突の瞬間の中心線を x 方向とし、P から Q へ向かう向きを正とする。y 方向は運動平面内でこれに垂直にとり、P の初速度がある側を正とする。



小問 (i)

衝突前、P の速度は中心線に沿った成分 $u\cos\alpha$ と、それに垂直な成分 $u\sin\alpha$ をもつ。

なめらかな球どうしの接触力は中心線に沿ってはたらく。よってその線に垂直な方向には P に撃力がはたらかず、P の垂直成分は変化しない。また、Q ははじめ静止しており、中心線に沿った撃力しか受けないので、速さ w でその線に沿って動き出す。

考えてみよう P の新しい向きが中心線となす角が $\alpha-\theta$ ではなく $\alpha+\theta$ になるのはなぜか。

P にはたらく撃力は中心線に沿って後ろ向きである。これは P の x 成分を $u\cos\alpha$ から後で求める値 v_x へと減らし、y 成分には影響しない。したがって速度は中心線から離れる向きに回転し、中心線となす角は α から $\alpha+\theta$ へと大きくなる。$e<1$ のとき $v_x>0$ であることを後で確かめるので、$0<\alpha+\theta<\frac{\pi}{2}$ である。

衝突後、P の速度は中心線に沿った成分 $v\cos(\alpha+\theta)$ と、それに垂直な成分 $v\sin(\alpha+\theta)$ をもつ。垂直成分を等しいとおくと

$$u\sin\alpha = v\sin(\alpha+\theta),$$

となり、題意が示された。

中心線に沿っては、運動量保存則（質量が等しいので m を約分する）により

$$u\cos\alpha = v\cos(\alpha+\theta)+w. \tag{1}$$

最初の結果から $u=v\sin(\alpha+\theta)/\sin\alpha$ を代入すると

$$\begin{aligned} w &= \frac{v\sin(\alpha+\theta)\cos\alpha}{\sin\alpha} - v\cos(\alpha+\theta) \\ &= \frac{v\left[\sin(\alpha+\theta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\theta)\sin\alpha\right]}{\sin\alpha} = \frac{v\sin\theta}{\sin\alpha}, \end{aligned}$$

となる。ここで $\sin\big((\alpha+\theta)-\alpha\big)$ の展開を用いた。よって

$$w=\frac{v\sin\theta}{\sin\alpha}.$$

これにはうまい解釈がある。ベクトルとしての運動量保存則は $\mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$ を意味し、これを $\mathbf{u}$ に垂直な方向に分解すると $0=v\sin\theta-w\sin\alpha$ が得られる。

小問 (ii)

中心線に沿ったニュートンの反発法則によれば、遠ざかる速さは近づく速さの e 倍である：

$$w-v\cos(\alpha+\theta)=e\,u\cos\alpha. \tag{2}$$

小問 (i) から $w = v\sin\theta/\sin\alpha$ と $u = v\sin(\alpha+\theta)/\sin\alpha$ を代入すると

$$\frac{v\sin\theta}{\sin\alpha} - v\cos(\alpha+\theta) = \frac{ev\sin(\alpha+\theta)\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

両辺に $\sin\alpha/v$ を掛け（$v>0$ かつ $\sin\alpha\neq 0$ なので許される）、整理すると

$$\sin\theta = \cos(\theta+\alpha)\sin\alpha + e\sin(\theta+\alpha)\cos\alpha,$$

となり、題意が示された。

$\tan\theta$ を求めるために、加法定理（compound angle formulae）で両方を展開する：

$$\sin\theta = (\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha)\sin\alpha + e(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)\cos\alpha.$$

$\sin\theta$ を含む項を左辺に集めると

$$\sin\theta\left(1+\sin^2\alpha - e\cos^2\alpha\right) = (1+e)\cos\theta\sin\alpha\cos\alpha.$$

$\cos\theta\cos^2\alpha$ で割り、$t=\tan\alpha$ とおいて $1/\cos^2\alpha = 1+t^2$ を用いると

$$\tan\theta\left(1+t^2+t^2-e\right) = (1+e)\,t, \qquad \text{よって} \qquad \tan\theta = \frac{(1+e)\tan\alpha}{1-e+2\tan^2\alpha}.$$

$e<1$ より分母は正なので $\tan\theta>0$ であり、θ は確かに鋭角の偏向である。

$\tan\theta$ の最大値

α が鋭角全体を動くとき、$t=\tan\alpha$ は $(0,\infty)$ のすべての値をとる。$t>0$ なので分子と分母を t で割ることができる：

$$\tan\theta = \frac{1+e}{\dfrac{1-e}{t}+2t}.$$

考えてみよう 微分を使わずにこれを最大にするにはどうすればよいか。

分母をできるだけ小さくすればよい。$(1-e)/t$ と $2t$ はともに正なので、相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）により

$$\frac{1-e}{t}+2t \geq 2\sqrt{\frac{1-e}{t}\cdot 2t} = 2\sqrt{2(1-e)},$$

であり、等号は $(1-e)/t = 2t$、すなわち $\tan\alpha = \sqrt{(1-e)/2}$ のときに限り成り立つ。これは実際に存在する鋭角なので、最小値は達成される。したがって $\tan\theta$ の最大値は

$$\tan\theta_{\max} = \frac{1+e}{2\sqrt{2(1-e)}}.$$

である。（t で微分しても同じ停留点（stationary point）$2t^2 = 1-e$ が得られる。）

検算

- 弾性衝突に近い極限 $e \to 1$：2 球は中心線に沿った成分を交換するので、P には $u\sin\alpha$ だけが残り、中心線に垂直に動く。このとき $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$ であり、$\tan\theta = \cot\alpha$ となる。公式からは $\tan\theta = 2t/(2t^2) = 1/t$ が得られ、一致する。$\alpha \to 0$ のとき $\theta \to \frac{\pi}{2}$ となるので、最大値が発散するのも当然である。
- $e = \frac{1}{2}$ のとき最大値は $\frac{3/2}{2\sqrt{1}} = \frac{3}{4}$ で、$\tan\alpha = \frac{1}{2}$（約 26.6°）で達成される。α を細かく変えて調べると、確かに 0.75 となる。多数のランダムな衝突をコンピュータでシミュレーションしても、問題の 4 つの結果がすべて再現された。
- α が小さい場合（ほぼ正面衝突）：$\tan\theta \approx \frac{1+e}{1-e}\alpha \to 0$ なので、正面衝突では予想どおり偏向が生じない。

よくある間違い

- ニュートンの反発法則を、中心線に沿った成分ではなく速さそのものに適用してしまう。反発は撃力の方向にのみはたらく。
- P の新しい角を $\alpha - \theta$ と書いてしまう。撃力は中心線に沿った成分の一部を取り去るので、P はその線から離れる向きに曲がる。
- $1 - e + 2\tan^2\alpha$ が正になるのは $e < 1$ のおかげであること、また $\tan\alpha$ が $(0, \infty)$ 全体を動くので相加相乗平均の等号成立の場合が実際に達成されることを見落とす。

STEP のその先へ

なめらかな球の斜め衝突（oblique collision）は、散乱（scattering）の最も単純な例である。この問題では同じ 2 つの保存則を、ある線に沿った方向とそれを横切る方向に適用したが、この考え方は素粒子物理学や気体分子運動論（kinetic theory of gases）にまで拡張される。等しい質量どうしの弾性衝突では、衝突後の速度どうしが有名な直角をなすという結果になる。重心系（centre-of-mass frame）では、どの衝突も相対速度を回転させる（この問題ではさらに縮める）だけであり、これらの結果をすべて見通すより鮮やかな方法となる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この視点から衝突を論じている。

解答例

STEP III 2019、第 11 問

確率・統計 ・ ポアソン間引き

STEP III 2019、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべては、やって来る客の人数、あるいは砂を取る客の人数で条件付け（conditioning）を行い、そのうえでポアソン型の級数（series）の和を求めることに帰着する。小問 (i) はポアソン分布（Poisson distribution）の古典的な「間引き」（thinning）である。二項分布（binomial distribution）の確率とポアソン分布の確率を掛け合わせると、観測されない総数についての和が指数関数にまとまる。砂を取る客の人数がポアソン分布に従うとわかれば、小問 (ii) と (iii) で必要なのは $(1-k)^Y$ の期待値（expectation）だけであり、これもまた指数関数の級数になる。

解答

1 日の客の人数を N とすると $N \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ であり、そのうち砂を取る客の人数を Y とする。各客は互いに独立に、また N とも独立に判断すると仮定する。したがって $N = n$ のもとで $Y \sim \mathrm{B}(n, p)$ である。

小問 (i)

$y = 0, 1, 2, \ldots$ に対して、N で条件付けると（寄与するのは $n \geq y$ のみである）、

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y = y) &= \sum_{n=y}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^y}{y!} \sum_{n=y}^{\infty} \frac{\big(\lambda(1-p)\big)^{n-y}}{(n-y)!} \qquad \text{なぜなら} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \frac{n!}{y!\,(n-y)!} = \frac{\lambda^y \lambda^{n-y}}{y!\,(n-y)!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^y}{y!} \mathrm{e}^{\lambda(1-p)} = \mathrm{e}^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^y}{y!}, \end{aligned}$$

となる。ここで $m = n - y$ とおき、$\sum_{m \geq 0} x^m / m! = \mathrm{e}^x$ を用いた。これは $\mathrm{Po}(p\lambda)$ の確率であるから、求めるとおり $Y \sim \mathrm{Po}(p\lambda)$ である。

小問 (ii)

砂を取る客は、それぞれその時点で残っている量の $1 - k$ の割合を残していく。よって Y 人が砂を取った後に残る質量は $S(1-k)^Y$ であり、取られた質量は

$$T = S\big(1 - (1-k)^Y\big).$$

である。小問 (i) より

$$\mathrm{E}\big[(1-k)^Y\big] = \sum_{y=0}^{\infty} (1-k)^y \, \mathrm{e}^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^y}{y!} = \mathrm{e}^{-p\lambda} \, \mathrm{e}^{p\lambda(1-k)} = \mathrm{e}^{-kp\lambda}.$$

したがって、期待値の線形性（linearity of expectation）により

$$\mathrm{E}(T) = S\big(1 - \mathrm{E}[(1-k)^Y]\big) = \big(1 - \mathrm{e}^{-kp\lambda}\big) S,$$

となり、これが求める結果である。

小問 (iii)

> **考えてみよう** 「砂の k の割合」を、特定の 1 粒についての確率にどう言い換えればよいだろうか？

砂粒は非常に多く、どの粒も特別扱いされないので、誰かが残りの砂の k の割合を取るたびに、まだ袋の中にある粒は、それ以前に起きたこととは独立に確率 k で取られる。（言い換えれば、金の粒がある取り分に含まれる確率は、その取り分が全質量に占める割合に等しい。）

助手が金の粒を取るという事象を G とする。$Y = y$ のもとで、金の粒が y 人の客すべてを生き残る確率は $(1-k)^y$ であり、その後に助手がそれを取る確率は k である。よ

って

$$\mathrm{P}(G \mid Y = y) = k(1-k)^y,$$

であり、小問 (ii) で求めた期待値を用いると

$$\mathrm{P}(G) = k\,\mathrm{E}\left[(1-k)^Y\right] = k\,\mathrm{e}^{-kp\lambda}.$$

となる。これは小問 (ii) と整合している。金の粒がその日を生き残る確率は $\mathrm{e}^{-kp\lambda}$ であり、これはちょうど残る砂の割合の期待値に等しい。

$k = 0$ の場合。 このとき $\mathrm{P}(G) = 0$ である。これは納得がいく。$k = 0$ ならば助手も含めて誰も砂を取らないので、金の粒は袋の中に残る。

極限 $k \to 1$。 このとき $\mathrm{P}(G) \to \mathrm{e}^{-p\lambda}$ であり、これは $\mathrm{P}(Y = 0)$ に等しい。k が 1 に近いとき、最初に砂を取る客がほぼすべての砂を取り、金の粒もほぼ確実にそこに含まれる。助手が金の粒を得るのは、実質的にどの客も砂を取らなかった場合に限られ、そのとき助手は（ほぼ）袋の砂すべてを取る。

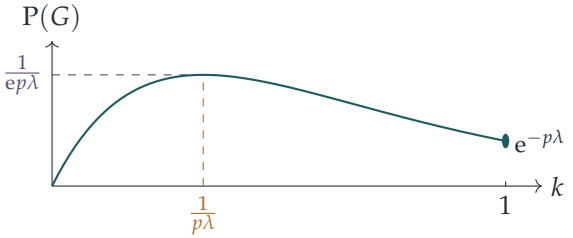
最大化。 $\mu = p\lambda$ とおき、$0 \le k < 1$ に対して $f(k) = k\,\mathrm{e}^{-\mu k}$ とする。すると

$$f'(k) = \mathrm{e}^{-\mu k}(1 - \mu k),$$

であり、これは $k < 1/\mu$ で正、$k > 1/\mu$ で負である。$\mu > 1$ であるから点 $k = 1/\mu$ は $(0,1)$ に含まれ、f はそこまで増加し、その後は減少する。よってこの点で $[0,1)$ 上の最大値をとる。したがって確率が最大となるのは

$$k = \frac{1}{p\lambda},$$

のときであり、最大の確率は $\dfrac{1}{\mathrm{e}\,p\lambda}$ である。（$p\lambda \le 1$ ならば f は $[0,1)$ 全体で増加し、最大値は存在せず、$k \to 1$ のときの上限（supremum）$\mathrm{e}^{-p\lambda}$ があるだけである。問題が $p\lambda > 1$ に限定しているのはこのためである。）



グラフは $p\lambda = 3$ の場合の $\mathrm{P}(G) = k\,\mathrm{e}^{-kp\lambda}$ を示している。

検算

- 小問 (i) は明らかな確認をすべて通る。$p = 1$ とすれば $\mathrm{Po}(\lambda)$ に戻り、$p = 0$ とすれば確実に $Y = 0$ となる。
- 小問 (ii) では、$k = 0$ とすれば取られる砂は 0 であり、$\lambda \to \infty$ のとき取られる質量の期待値は S に近づく。いずれも当然そうなるべき結果である。
- $\lambda = 3$、$p = 0.6$、$k = 0.4$ のとき、公式は $\mathrm{P}(G) = 0.4\,\mathrm{e}^{-0.72} \approx 0.1947$ を与える。200 000 日分のコンピュータシミュレーションでは 0.1953 となった。
- $p\lambda = 3$ のとき、細かい格子上で $k\,\mathrm{e}^{-3k}$ が最大となるのは $k \approx 0.3333$ であり、その値は $0.1226 \approx 1/(3\mathrm{e})$ である。

よくある間違い

- 各客が**もとの**砂の k の割合を取るかのように、取られた砂を kSY と書いてしまう。各客は**残っている**砂の一部を取るので、取られる量は等比数列（geometric sequence）をなす。
- $\mathrm{E}[(1-k)^Y]$ を $(1-k)^{\mathrm{E}(Y)} = (1-k)^{p\lambda}$ と計算してしまう。非線形な関数の期待値は、期待値の関数ではない。
- $1/(p\lambda)$ が許される範囲 $0 \le k < 1$ に実際に入っているかの確認を忘れる。条件 $p\lambda > 1$ が使われるのはまさにここである。

STEP のその先へ

小問 (i) はポアソン分布の間引きの性質である。小問 (ii) と (iii) に現れる期待値 $\mathrm{E}[s^Y] = \mathrm{e}^{\mu(s-1)}$ は、$\mathrm{Po}(\mu)$ の**確率母関数**（probability generating function）を $s = 1 - k$ で評価したものである。母関数を使えば、間引きはほぼ 1 行で示せる。$\mathrm{E}[s^N] = \mathrm{e}^{\lambda(s-1)}$ ならば $\mathrm{E}[s^Y] = \mathrm{E}[(1-p+ps)^N] = \mathrm{e}^{\lambda p(s-1)}$ である。ポアソン過程（Poisson process）の理論では、これはポアソン過程の点に独立に印を付けると再びポアソン過程が得られる、という主張になる。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、母関数とこれらの考え方をわかりやすく扱っている。

解答例

STEP III 2019、第 12 問

確率・統計 ・ ランダムな部分集合

> **STEP III 2019、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 9.12 節「ランダムな部分集合」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/random-subsets.html

鍵となる考え方

S の部分集合（subset）を一様に無作為に（uniformly at random）選ぶことは、整数 $1, 2, \ldots, n$ を一つずつ順に見ていき、それぞれについて公平なコイン（fair coin）を投げて、その整数を入れるかどうかを決めることと同じである。このことに気づけば、問題に現れるすべての事象（event）は各整数ごとの条件に言い換えられる。しかも各整数は独立（independent）にふるまうので、答えは一つの小さな確率を n 乗したものになる。

解答

部分集合を数える

S の部分集合は、n 個の整数それぞれについて、入れるか入れないかを決めることで完全に定まる。各整数について選び方は 2 通りあり、それらは独立に選べて、選び方のパターンが異なれば異なる部分集合が得られる。よって、$\varnothing$（すべて入れない）と S（すべて入れる）も含めて、部分集合の個数は

$$2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n.$$

である。

考えてみよう なぜ各整数を独立なコイン投げとして扱ってよいのだろうか。

A を T 上の一様分布に従うものとする。2^n 通りの入る・入らないのパターンはそれぞれ一つの部分集合に対応するので、各パターンの確率は $2^{-n} = (\frac{1}{2})^n$ である。これは、n 枚の独立な公平なコインを投げたときに特定のパターンが出る確率とちょうど一致する。したがって、事象「$1 \in A$」、「$2 \in A$」、...、「$n \in A$」は独立であり、それぞれの確率は $\frac{1}{2}$ である。さらに $A_1, \ldots, A_m$ も互いに独立に選ばれるので、mn 個の事象「$i \in A_k$」はすべて独立であり、それぞれの確率は $\frac{1}{2}$ である。

小問 (i)

2^n 個の部分集合のうち、ちょうど半分が 1 を含む（1 を含む各部分集合を、そこから 1 を取り除いた部分集合と対にすればよい）。よって

$$\mathrm{P}(1 \in A_1) = \tfrac{1}{2}.$$

である。

小問 (ii)

整数 i に対し、i が A_1 と A_2 の両方には**属さない**という事象を E_i とする。このとき $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ となるのは、すべての E_i が起こるとき、かつそのときに限る。独立性より

$$\mathrm{P}(i \in A_1 \text{ かつ} i \in A_2) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}, \qquad \text{よって} \qquad \mathrm{P}(E_i) = \tfrac{3}{4}.$$

である。事象 E_i は整数 i に対するコインだけで決まるので、$E_1, \ldots, E_n$ は独立であり、

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 = \varnothing) = \mathrm{P}(E_1) \cdots \mathrm{P}(E_n) = \left(\tfrac{3}{4}\right)^n,$$

となって、示すべきことが得られた。

同じ議論は集合がいくつあっても成り立つ。整数 i が共通部分（intersection）$A_1 \cap A_2 \cap A_3$ に属する確率は $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$ なので、共通部分に属さない確率は $\frac{7}{8}$ であり、

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing) = \left(\tfrac{7}{8}\right)^n.$$

となる。一般に、i が m 個の集合すべてに属する確率は 2^{-m} なので、

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m = \varnothing) = \left(1 - \frac{1}{2^m}\right)^n.$$

である。

小問 (iii)

ここで $A_1 \subseteq A_2$ とは、A_1 に属するが A_2 には属さない整数が一つもないということである。各整数 i について、(A_1 に属するか？、A_2 に属するか？) の組には等確率の四つの可能性があり、そのうち禁止されるのは「A_1 に属し、A_2 に属さない」の一つだけである。よって各整数は独立に確率 $\frac{3}{4}$ で条件を満たし、

$$\mathrm{P}(A_1 \subseteq A_2) = \left(\tfrac{3}{4}\right)^n.$$

となる。(これは小問 (ii) と整合する。$A_1 \subseteq A_2$ となるのは、A_1 と A_2 の補集合 (complement) が互いに素 (disjoint) であるとき、かつそのときに限り、さらに一様に無作為な部分集合の補集合もまた一様に分布するからである。)

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$ については、一つの整数 i の (A_1, A_2, A_3) への所属パターンを、「属する」を 1、「属さない」を 0 と書いて調べる。鎖 (chain) の条件は、i がある A_k に属したら、それ以降のすべての集合にも属するということなので、パターンは

$$000, \quad 001, \quad 011, \quad 111.$$

のいずれかでなければならない。これは等確率な 8 通りのパターンのうち 4 通りなので、各整数が条件を満たす確率は $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ であり、

$$\mathrm{P}(A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n.$$

となる。

m 個の集合からなる鎖については、許されるパターンは 0 の並びの後に 1 の並びが続くものである。これは 1 が始まる位置によって決まり、その位置は $1, 2, \ldots, m$ のいずれかか、または「始まらない」である。よって 2^m 通りのうち許されるパターンは $m+1$ 通りであり、

$$\mathrm{P}(A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_m) = \left(\frac{m+1}{2^m}\right)^n.$$

である。

検算

- $m = 2$ のとき一般の公式は $(1 - \frac{1}{4})^n$ と $(\frac{3}{4})^n$ を与え、$m = 3$ のときは $(\frac{7}{8})^n$ と $(\frac{4}{8})^n$ を与えるので、特別な場合と一致する。$m = 1$ のときは $(\frac{1}{2})^n$ ($A_1 = \varnothing$ の場合だけが条件を満たす) と 1 (集合が一つなら常に鎖である) を与え、これも当然の結果である。
- $n = 1$ のときはすべてを手で書き出せる。たとえば、四つの選び方のうち共通部分が空でないのは $A_1 = A_2 = \{1\}$ だけなので、確率は $\frac{3}{4}$ となる。

- 集合の選び方をすべて列挙するコンピュータによる検算で、小さな n と m についてすべての公式が正しいことを確認した。たとえば $n = 3$ のとき、$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 = \varnothing) = \frac{27}{64}$ であり、$\mathrm{P}(A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3) = \frac{1}{8}$ である。

よくある間違い

- A_1 の各要素が A_2 に属さなければならないという議論から、A_1 自身の大きさも無作為であることを考慮せずに、$\mathrm{P}(A_1 \subseteq A_2)$ を $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ と答えてしまう。
- 整数がどの集合にも属さないパターンを忘れて、鎖のパターンの数を $m+1$ ではなく m と数えてしまう。

STEP のその先へ

無作為な部分集合を独立なコイン投げの列（その**指示ベクトル**（indicator vector））として表すことは、組合せ論（combinatorics）の標準的な道具であり、ここでの鎖の数え上げは**半順序集合**（poset）とブール束（Boolean lattice）の理論の入り口である。同じ考え方を使えば、鎖の個数の期待値（expected number）や、無作為な集合たちが S を覆う確率も、わずかな追加の手間で求められる。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、このような精神で独立性と指示変数（indicator variables）を展開している。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

2019 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

