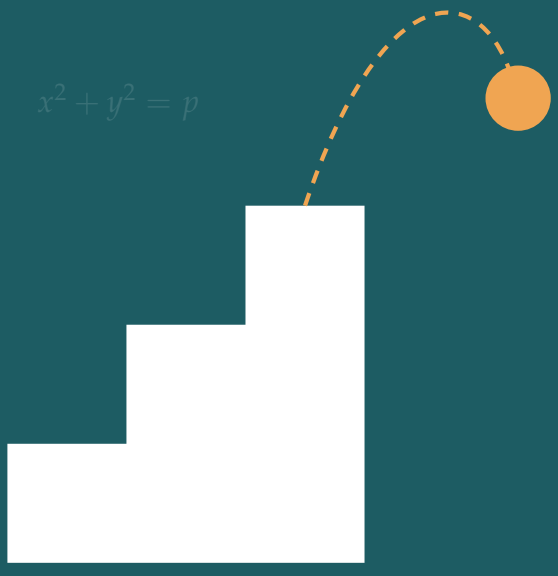
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

2018 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

2018 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

2018 年解答例

2018 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 39 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 曲線で囲まれた図形の面積 純粋数学 . . . 3
Q2 対数の不等式 純粋数学 . . . 7
Q3 角と双曲線 純粋数学 . . . 10
Q4 積分で定義された関数のグラフの概形 純粋数学 . . . 14
Q5 多項式と因数定理 純粋数学 . . . 19
Q6 中点公式と台形公式 純粋数学 . . . 23
Q7 3次方程式の解法 純粋数学 . . . 27
Q8 連立微分方程式 純粋数学 . . . 31
Q9 斜面上の運動 力学 . . . 35
Q10 連結された質点 力学 . . . 39
Q11 斜面上の摩擦 力学 . . . 43
Q12 復元抽出 確率・統計 . . . 48
Q13 二項分布とベイズの定理 確率・統計 . . . 52

STEP II

Q1 多項式の根 純粋数学 . . . 56
Q2 凹関数 純粋数学 . . . 61
Q3 回転対称性と積分 純粋数学 . . . 65
Q4 三角方程式 純粋数学 . . . 70
Q5 級数の積分 純粋数学 . . . 74
Q6 階乗と素数 純粋数学 . . . 78
Q7 幾何におけるベクトル 純粋数学 . . . 81
Q8 ベルヌーイ型微分方程式 純粋数学 . . . 85
Q9 重力下での衝突 力学 . . . 90

Q10 伸びる糸の上の運動学 力学 . . . 94
Q11 摩擦とモーメント 力学 . . . 98
Q12 最適停止と期待値 確率・統計 . . . 103
Q13 漸化式 確率・統計 . . . 107

STEP III

Q1 2次方程式の解と不等式 純粋数学 . . . 111
Q2 エルミート多項式 純粋数学 . . . 116
Q3 オイラー型微分方程式 純粋数学 . . . 120
Q4 双曲線の接線 純粋数学 . . . 124
Q5 相加相乗平均の不等式 純粋数学 . . . 129
Q6 複素数と図形 純粋数学 . . . 133
Q7 ド・モアブルの定理と級数 純粋数学 . . . 137
Q8 小数部分の積分 純粋数学 . . . 141
Q9 衝突と漸化式 力学 . . . 145
Q10 実体振り子 力学 . . . 149
Q11 たるんだ糸と放物運動 力学 . . . 153
Q12 順序統計量 確率・統計 . . . 158
Q13 ポアソン分布 確率・統計 . . . 162

解答例

STEP I 2018、第 1 問

純粋数学 • 曲線で囲まれた図形の面積

> **STEP I 2018、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q1

鍵となる考え方

三次関数（cubic）と直線の式を等しいとおくと、因数 x がくくり出され、残りは平方の差（difference of two squares）となるので、3 つの交点（intersection）はすべてきれいに求まる。その後はすべて定型的な微積分であり、置換（substitution）$c = b - a$（P の x 座標）を用いると式変形がすっきりする。最後の不等式は一見手ごわいが、2 つの面積をともに c で表せば、$b > a$ という条件に帰着してしまう。

解答

交点と概形

交点では $x(b-x)^2 = a^2 x$ であるから、$x = 0$（原点）であるか、または

$$(b-x)^2 = a^2 \quad \Longrightarrow \quad b - x = \pm a \quad \Longrightarrow \quad x = b - a \text{ または } x = b + a.$$

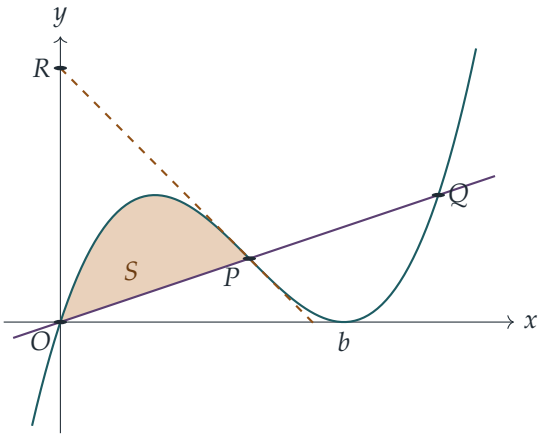
$a > 0$ より $b - a < b + a$ であるから、

$$P = (b-a,\ a^2(b-a)), \qquad Q = (b+a,\ a^2(b+a)).$$

$0 < a < b$ であるから、どちらの点も第 1 象限にある。

概形について：三次関数 $y = x(b-x)^2$ は O で単根をもち、$x = b$ で重根（repeated root）をもつ。そこで曲線は x 軸に接する。$x < 0$ では負、$x > 0$ では（$x = b$ を除いて）正であり、$x \to \infty$ のとき $+\infty$ に発散する。導関数（derivative）は（後で求めるように）$(b-x)(b-3x)$ であるから、$x = b/3$ で極大値（local maximum）をとり、$(b, 0)$ で極小値（local minimum）をとる。O を通る直線は O の近くで曲線の増加する部分と交わり、P で再び交わり（$a < \frac{2}{3}b$ のときは $b/3$ と b の間、そうでないときは $b/3$ よ

り手前)、さらに接点 $x = b$ より先の Q で 3 度目に曲線と交わる。図では $a = 1$、$b = 3$ としている。P における接線（tangent)、点 R、および面積 S の領域もあわせて示してある。



P における接線

積の微分法（product rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (b-x)^2 - 2x(b-x) = (b-x)(b-3x).$$

P では $x = b - a$ であるから、$b - x = a$、$b - 3x = 3a - 2b$ である。よってそこでの傾き（gradient）は $m = a(3a - 2b)$ である。

接線を $y = mx + k$ とし、直線が P を通るように k を定めると、

$$\begin{aligned} k &= a^2(b-a) - a(3a-2b)(b-a) \\ &= a(b-a)(a-3a+2b) \\ &= 2a(b-a)^2. \end{aligned}$$

したがって、P における接線は $y = a(3a - 2b)x + 2a(b - a)^2$ であり、題意が示された。特に $R = (0,\, 2a(b-a)^2)$ であり、これは y 軸の正の部分にある。

面積 S

P の x 座標を $c = b - a > 0$ とおく。$0 < x < c$ において

$$x(b-x)^2 - a^2x = x\,(b-x-a)(b-x+a) > 0,$$

である。この範囲では 3 つの因数がすべて正だからである。よって O と P の間では曲線は直線より上にあり、

$$S = \int_0^c \left(x(b-x)^2 - a^2x\right)\mathrm{d}x = \int_0^c \left((b^2-a^2)x - 2bx^2 + x^3\right)\mathrm{d}x = \frac{(b^2-a^2)c^2}{2} - \frac{2bc^3}{3} + \frac{c^4}{4}.$$

ここで $b^2-a^2=c(b+a)=c(c+2a)$ および $b=c+a$ を代入すると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{c^3(c+2a)}{2} - \frac{2c^3(c+a)}{3} + \frac{c^4}{4} \\ &= c^3\left[\, c(\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{4}) + a(1-\tfrac{2}{3})\right] \\ &= c^3\Big(\frac{c}{12}+\frac{a}{3}\Big) = \frac{c^3(c+4a)}{12}. \end{aligned}$$

$c+4a=b+3a$ であるから、これは

$$S=\frac{1}{12}(b-a)^3(3a+b),$$

となり、題意が示された。

考えてみよう なぜすべてを a と b で展開してしまわないのか？

そうすることもできるが、目標の式には因数 $(b-a)^3$ があり、a と b の 4 次式からこれをくくり出すのは骨が折れる。$c=b-a$ とおけば、積分のどの項もすでに c^2 以上を含んでいるので、この因数が自然に現れる。

三角形 T と不等式

三角形 OPR の底辺として OR をとる。これは y 軸上にあり、長さは $2ac^2$ である。高さは P から y 軸までの距離、すなわち c である。よって

$$T=\tfrac{1}{2}\cdot 2ac^2\cdot c=ac^3=a(b-a)^3.$$

したがって、$(b-a)^3>0$ より

$$S-\tfrac{1}{3}T=\frac{(b-a)^3}{12}(3a+b-4a)=\frac{(b-a)^4}{12}>0,$$

である。ここで $b\neq a$ を用いた。ゆえに $S>\frac{1}{3}T$ であり、題意が示された。

検算

- $a=1$、$b=3$（図の場合）のとき：$P=(2,2)$、$Q=(4,4)$ であり、曲線は $x=2$ で $y=2$、$x=4$ で $y=4$ を与える。接線の公式は $y=-3x+8$ を与え、傾きの式 $(3-x)(3-3x)$ は $x=2$ で -3 となる。直接積分すると $S=\int_0^2(x^3-6x^2+8x)\,\mathrm{d}x=4-16+16=4$ となり、$\frac{1}{12}\cdot 8\cdot 6=4$ と一致する。また $T=8$ であり、$4>\frac{8}{3}$ である。
- 比 $S/(\frac{1}{3}T)=(3a+b)/(4a)$ は $b\to a$ のとき 1 に収束（converge）するので、定数 $\frac{1}{3}$ は最良である。これは納得のいくことである。放物線（parabola）$y=px-qx^2$ に対して同じ構成を行うと $S=qc^3/6$、$T=qc^3/2$ となり、ちょうど $S=\frac{1}{3}T$ が成り立つ。そして P が O に非常に近いとき、その間の三次曲線はほとんど放物線である。

- ランダムに選んだ数千組の $0 < a < b$ について、交点、接線、面積（数値積分による）、不等式をコンピュータで確認したところ、いずれも公式と一致した。

よくある間違い

- $x(b-x)^2 = a^2x$ を x で割ってしまい、解 $x = 0$ に言及しない。あるいは $b - x = a$ のみを考えて Q を見落とす。
- 「直線 − 曲線」を積分して負の「面積」を得てしまう。積分する前に、どちらのグラフが上にあるかを確認すること。
- 概形を描く際に、三次曲線が $x = b$ で x 軸に接するのではなく、横切るように描いてしまう。

STEP のその先へ

最後の小問における極限の比 1 は、アルキメデス（Archimedes）による放物線の求積（quadrature）の精神に通じるものである。放物線の場合、その弓形の面積は三角形 OPR の面積のちょうど 3 分の 1 であり、O の近くでは三次曲線は局所的に放物線とみなせるので、極限において不等式は等式にまで鋭くなる。局所的な振る舞いがなぜテイラー（Taylor）展開の最初の数項によって決まるのかを理解し、「ほとんど放物線」という言葉を厳密にすることは、大学 1 年次の解析学（analysis）の仕事である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、テイラーの定理がきちんと扱われる様子を見るのに親しみやすい一冊である。

解答例

STEP I 2018、第 2 問

純粋数学 • 対数の不等式

> **STEP I 2018、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q2

鍵となる考え方

すべての土台は底の変換公式(change-of-base rule)である。任意の底の対数(logarithm)は共通の底による対数の比として表せ、さらに $\frac{1}{\log_b c} = \log_c b$ が成り立つ。すべての対数を ln で書き直してしまえば、各小問は不等式（inequality）を扱う短い代数計算になる。$e^2 < 8$ のような与えられた事実は、$\ln 2$ や $\ln 10$ の評価を姿を変えて述べたものにすぎない。その間ずっと、ln が増加関数（increasing function）であること、したがって正の数どうしの不等式は両辺の対数をとっても向きが変わらないことを用いる。

解答

最初の結果

対数の定義により、$x = \log_b c$ とは

$$c = b^x.$$

を意味する。両辺の底 a の対数をとり、$\log_a(b^x) = x \log_a b$ を用いると、

$$\log_a c = x \log_a b.$$

ここで $b \neq 1$（$\log_b$ が意味をもつため）であるから $\log_a b \neq 0$ であり、両辺を割ることができる：

$$\frac{\log_a c}{\log_a b} = x = \log_b c,$$

これが示すべきことであった。以下ではこの結果から得られる二つの帰結を用いる。$a = c$ とおくと $\log_b c = \dfrac{1}{\log_c b}$ が得られ、$a = \mathrm{e}$ とおくと $\log_b c = \dfrac{\ln c}{\ln b}$ が得られる。

小問 (i)

逆数の公式により、$\dfrac{1}{\log_2 \pi} = \log_\pi 2$ かつ $\dfrac{1}{\log_5 \pi} = \log_\pi 5$ である。よって

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} = \log_\pi 2 + \log_\pi 5 = \log_\pi 10.$$

$\pi > 1$ であるから関数 $\log_\pi$ は増加関数であり、$10 > \pi^2$ から

$$\log_\pi 10 > \log_\pi \pi^2 = 2,$$

が得られる。これが求める不等式である。

小問 (ii)

与えられた最初の事実を自然対数（natural logarithm）で書き直す：

$$\log_2 \frac{\pi}{e} = \frac{\ln \pi - 1}{\ln 2} > \frac{1}{5} \quad \Longrightarrow \quad \ln \pi > 1 + \frac{\ln 2}{5},$$

ここでは $\ln 2 > 0$ を掛けたので、不等式の向きは変わらない。

考えてみよう $e^2 < 8$ は何を伝えているのだろうか？

これは $\ln 2$ の下界（lower bound）である。両辺の ln をとると（ln は増加関数なので許される）$2 < \ln 8 = 3 \ln 2$ となり、$\ln 2 > \frac{2}{3}$ を得る。これを代入すると、

$$\ln \pi > 1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{15} = \frac{17}{15},$$

となり、示すべきことが得られた。

小問 (iii)

$\pi^2 < 10$ の対数をとると $2 \ln \pi < \ln 10$ となる。したがって $\ln 10 < \frac{30}{13}$ を示せば十分である。

残りの二つの事実を書き直す。$e^3 > 20$ であるから $3 > \ln 20 = \ln 2 + \ln 10$、すなわち

$$\ln 2 < 3 - \ln 10.$$

また $\log_{10} 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln 10} > \dfrac{3}{10}$ であり、$\ln 10 > 0$ であるから

$$\ln 10 < \frac{10}{3} \ln 2.$$

前者は $\ln 2$ の上界（upper bound）であり、後者では $\ln 2$ が正の係数で現れるので、代入してよい：

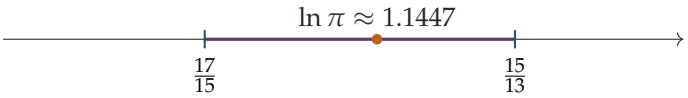
$$\ln 10 < \frac{10}{3} (3 - \ln 10) = 10 - \frac{10}{3} \ln 10.$$

$\ln 10$ の項をまとめると $\frac{13}{3}\ln 10 < 10$ となり、$\ln 10 < \frac{30}{13}$ を得る。したがって

$$\ln \pi < \tfrac{1}{2}\ln 10 < \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{30}{13} = \frac{15}{13},$$

となり、示すべきことが得られた。

小問 (ii) と (iii) を合わせると、$\ln \pi$ は狭い区間（interval）に閉じ込められる：



検算

数値的には $\ln \pi \approx 1.1447$ であり、確かに $\frac{17}{15} \approx 1.1333$ と $\frac{15}{13} \approx 1.1538$ の間にある。小問 (i) では $\log_\pi 10 \approx 2.0115$ で、2 をわずかに上回るだけである。これは $\pi^2 \approx 9.87$ が 10 にきわめて近いことと合っている。評価 $\ln 10 < \frac{30}{13} \approx 2.3077$ も $\ln 10 \approx 2.3026$ と照らして正しい。与えられた事実も確かめておくとよい：$\log_2(\pi/\mathrm{e}) \approx 0.209$、$\mathrm{e}^2 \approx 7.39$、$\mathrm{e}^3 \approx 20.09$、$\log_{10} 2 \approx 0.3010$ である。

よくある間違い

- $\dfrac{1}{\log_2 \pi}$ を $\log_2 \frac{1}{\pi}$ と書いてしまうこと。逆数をとると底と真数（argument）が入れ替わるのであって、真数が逆数になるのではない。
- 小問 (iii) で、上界が必要なところに $\ln 2$ の下界を使ってしまうこと。不等式をつなげられるのは、それぞれの評価が同じ向きを向いているときだけである。
- 不等式の両辺に掛けたり対数をとったりする前に、$\ln 2$、$\ln 10$、$\log_\pi$ が都合のよい性質（正である、あるいは増加関数である）をもつことを述べ忘れること。

STEP のその先へ

わずかな粗い事実から数値の評価を証明することは、解析学者が定数を見積もる方法の小さな味見である。解析学（analysis）の多くは、未知の量を自分で制御できる二つの評価の間に閉じ込めることからなる。$\ln 2$ や π のより精密な評価は、級数（series）や積分の不等式から得られる。たとえば $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ を長方形で見積もる方法がある。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、このような考え方への親しみやすい入門である。

解答例

STEP I 2018、第 3 問

純粋数学 ・ 角と双曲線

> **STEP I 2018、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q3

鍵となる考え方

2 つの角はどちらも、その正接（tangent）を通じて P の座標と結びついている。RP の傾きが $\tan\alpha$ を与え、SP の傾きが $\tan\beta$ を与える。すると条件 $\beta = 2\alpha$ は tan の倍角公式（double-angle formula）に帰着し、分母を払えば曲線の方程式が得られる。小問 (ii) では同じ計算を逆にたどる。ただし落とし穴がある。$\tan\beta = \tan 2\alpha$ がわかっても、β は π の整数倍の差を除いてしか定まらない。そのため、2α がどの象限（quadrant）にあるかを追跡しなければならない。

解答

角の設定

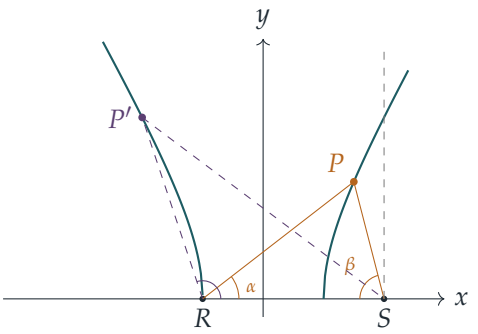
$y > 0$ であるから、R における角 α は x 軸の正の向き（RS に沿う向き）から RP まで測った角であり、$0 < \alpha < \pi$ である。そして

$$\tan\alpha = \frac{y}{x+a} \qquad (x \neq -a).$$

これは P が R の右側にある場合（α は鋭角で正接は正）でも、左側にある場合（α は鈍角で正接は負）でも成り立つ。S における角 β は、x 軸の負の向き（SR に沿う向き）から SP まで測った角である。$x < 2a$ より点 P は S の左側にあるので、β は鋭角であり、

$$\tan\beta = \frac{y}{2a-x} > 0, \qquad 0 < \beta < \tfrac{\pi}{2}.$$

$x \neq -a$ のとき $t = \tan\alpha$ とおく。



$y>0$、$x<2a$ の範囲にある曲線 $y^2=3(x^2-a^2)$（図は $a=1$ の場合）は 2 つの部分からなる。右側の枝のうち $a<x<2a$ の弧と、左側の枝の上半分 $x<-a$ 全体である。左側の枝上の点 P' では α は鈍角になる。

小問 (i)

$\beta=2\alpha$ と仮定する。$\beta<\frac{\pi}{2}$ より $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ であるから、$x>-a$、$0<t<1$ であり、$1-t^2\neq 0$ なので倍角公式が使える：

$$\frac{y}{2a-x}=\tan 2\alpha=\frac{2t}{1-t^2}=\frac{2y/(x+a)}{1-y^2/(x+a)^2}=\frac{2y(x+a)}{(x+a)^2-y^2}.$$

y で割り（$y>0$ なので許される）、分母を払うと

$$\begin{aligned}&(x+a)^2-y^2=2(x+a)(2a-x)\\ \iff\quad &y^2=(x+a)\big[(x+a)-2(2a-x)\big]=(x+a)(3x-3a)=3(x^2-a^2).\end{aligned}$$

よって、求めるとおり P は $y^2=3(x^2-a^2)$ 上にある。

小問 (ii)

今度は P が曲線上にあり、$y>0$ かつ $x<2a$ であると仮定する。このとき $x^2-a^2=\frac{1}{3}y^2>0$ であるから $|x|>a$、すなわち $a<x<2a$ または $x<-a$ である。特に $x\neq -a$ なので $t=\tan\alpha$ は定義され、さらに $t\neq 0$ である。

小問 (i) の手順は逆にたどれる。曲線の方程式は $(x+a)^2-y^2=2(x+a)(2a-x)$ と同値である。両辺を $(x+a)^2$ で割り、$2a-x=y/\tan\beta$ を用いると

$$1-t^2=\frac{2(2a-x)}{x+a}=\frac{2y}{(x+a)\tan\beta}=\frac{2t}{\tan\beta},\qquad \text{よって}\qquad (1-t^2)\tan\beta=2t.$$

もし $t^2=1$ ならば $t=0$ となり矛盾する。したがって $t^2\neq 1$ であり、

$$\tan\beta=\frac{2t}{1-t^2}=\tan 2\alpha.$$

考えてみよう $\tan\beta = \tan 2\alpha$ ならば $\beta = 2\alpha$ といえるだろうか？

必ずしもそうではない。いえるのは、β と 2α の差が π の整数倍であるということだけである。そこで角の大きさについてわかっていることを用い、曲線の2つの部分に分けて考える。

$a < x < 2a$ の場合。 このとき $x + a > 0$ なので $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$、したがって $0 < 2\alpha < \pi$ である。$\tan 2\alpha = \tan\beta > 0$ より、2α は β と同じ区間 $(0, \frac{\pi}{2})$ にある。tan は $(0, \frac{\pi}{2})$ 上で一対一（one-to-one）であるから、

$$\beta = 2\alpha.$$

$x < -a$ の場合。 このとき $x + a < 0$ なので $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$、したがって $\pi < 2\alpha < 2\pi$ である。$\tan 2\alpha > 0$ より $2\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ であるから、$2\alpha - \pi \in (0, \frac{\pi}{2})$ かつ $\tan(2\alpha - \pi) = \tan 2\alpha = \tan\beta$ である。先ほどと同様に tan は $(0, \frac{\pi}{2})$ 上で一対一であるから、

$$\beta = 2\alpha - \pi.$$

以上より、考えられる関係は $\beta = 2\alpha$（P が右側の枝にあるとき）と $\beta = 2\alpha - \pi$（P が左側の枝にあるとき）である。各部分のすべての点が条件を満たすので、どちらの関係も実際に起こる。

検算

- $a = 1$、$P = (-2, 3)$ とする。$3(4 - 1) = 9$ なので、この点は曲線上にある。このとき $\tan\alpha = 3/(-1) = -3$ より $\alpha \approx 108.43°$、$\tan\beta = \frac{3}{4}$ より $\beta \approx 36.87°$ である。確かに $2\alpha - 180° \approx 36.87°$ となる。
- 右側の枝上で $x \to 2a$ とすると $y \to 3a$ となるので、$\tan\alpha \to 1$、$\tan\beta \to \infty$ である。すなわち $\alpha \to \frac{\pi}{4}$、$\beta \to \frac{\pi}{2} = 2\alpha$ となる。
- 左側の枝の遠方では、P は漸近線（asymptote）$y = -\sqrt{3}\,x$ に近づくので、$\alpha \to \frac{2\pi}{3}$、$\beta \to \frac{\pi}{3} = 2\alpha - \pi$ となる。

ランダムな a に対し、各枝上の多数のランダムな点で両方の関係をコンピュータで確認したところ、これも一致した。

よくある間違い

- $\tan\alpha = y/|x + a|$ と書いてしまうこと、あるいは α が鋭角であると思い込むこと。左側の枝では α は鈍角であり、$\tan\alpha < 0$ である。

- 角の範囲を確かめずに、$\tan\beta = \tan 2\alpha$ から $\beta = 2\alpha$ と結論してしまうこと。これでは 2 つ目の関係を見落とす。
- $x < 2a$ と $y > 0$ によって曲線が 2 つの部分に限られること、また $x = -a$ を除外するのに $|x| > a$ が必要であることを忘れること。

STEP のその先へ

この曲線は、離心率（eccentricity）2、焦点（focus）S、準線（directrix）$x = \frac{a}{2}$ の双曲線（hyperbola）である。小問 (i) の性質は、双曲線を用いて角を三等分（trisect）する古典的な方法（パップス（Pappus）が知っていた）を与える。これは、定規とコンパスだけでは角の三等分が不可能であるという事実をうまく回避するものである。この不可能性の証明そのものは、体論（field theory）の最初の講義の見どころの一つである。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）がこれを扱っており、Needham の *Visual Complex Analysis*（ビジュアル複素解析）は、角と円錐曲線の幾何についてのすばらしい副読本である。

解答例

STEP I 2018、第 4 問

純粋数学 ・ 積分で定義された関数のグラフの概形

STEP I 2018、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/18-s1-q4

鍵となる考え方

f はすべて $\ln x$ から組み立てられており、扱いにくい因子 $\frac{1}{x}$ はちょうど $\ln x$ の導関数である。したがって置換（substitution）$u = \ln x$ によって、積分は u の簡単な有理関数（rational function）の積分に変わる。u で表すと、x を x^{-1} に置き換えることは u の符号を変えることにすぎないので、対称性は答えが u の偶関数（even function）であることに帰着する。

解答

以下を通して $u = \ln x$ と書く。$x \neq 1$ より $u \neq 0$ であり、$u > 0$ となるのはちょうど $x > 1$ のときである。

f と f′ の零点

次のようにおく。

$$g(u) = \frac{(1-u^2)^2}{u} = \frac{1}{u} - 2u + u^3, \qquad \text{このとき} \qquad \mathrm{f}(x) = \frac{g(\ln x)}{x}.$$

$(\ln x)^2 = 1$ のとき、因子 $(1-u^2)^2$ は 0 となるので、$\mathrm{f}(x) = 0$ である。商の微分法（quotient rule）と合成関数の微分法（chain rule）により、

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{g'(u) \cdot \frac{1}{x} \cdot x - g(u)}{x^2} = \frac{g'(u) - g(u)}{x^2}.$$

すでに $g(\pm 1) = 0$ がわかっている。さらに、$(1-u^2)^2 = (1-u)^2(1+u)^2$ は $u = \pm 1$ に**重複した**因数（repeated factor）をもつので、その導関数 $-4u(1-u^2)$ もそこで 0 とな

り、したがって

$$g'(u) = \frac{-4u(1-u^2)\cdot u - (1-u^2)^2}{u^2} = 0 \quad \text{ただし} u = \pm 1.$$

ゆえに、$(\ln x)^2 = 1$ のとき、すなわち $x = e$ および $x = e^{-1}$ において、$\mathrm{f}'(x) = 0$ も成り立つ。

小問 (i)

$u = \ln t$ と置換すると、$\mathrm{d}u = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ である。よって

$$\int \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{(1-u^2)^2}{u}\,\mathrm{d}u = \int \left(\frac{1}{u} - 2u + u^3\right)\mathrm{d}u = \ln|u| - u^2 + \tfrac{1}{4}u^4 + C.$$

$G(u) = \ln|u| - u^2 + \frac{1}{4}u^4$ と定める。F の二つの部分のいずれにおいても積分範囲が $t = 1$ をまたぐことはないので、それぞれの上で u は一定の符号を保ち、この原始関数（antiderivative）はそこで有効である。

$x > 1$ のとき、下端 $t = e$ は $u = 1$ を与え、$G(1) = 0 - 1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$ である。$0 < x < 1$ のとき、下端 $t = e^{-1}$ は $u = -1$ を与え、やはり $G(-1) = -\frac{3}{4}$ である。したがって、どちらの場合も同じ式が得られる。

$$\boxed{\mathrm{F}(x) = \ln|\ln x| - (\ln x)^2 + \tfrac{1}{4}(\ln x)^4 + \tfrac{3}{4} \qquad (x > 0,\ x \neq 1).}$$

ここで $\ln(x^{-1}) = -\ln x$ である。上の式に現れる $\ln x$ はすべて $|\cdot|$ の中にあるか偶数乗されているので、

$$\mathrm{F}(x^{-1}) = \ln|-\ln x| - (-\ln x)^2 + \tfrac{1}{4}(-\ln x)^4 + \tfrac{3}{4} = \mathrm{F}(x),$$

となり、示すべきことが示された。（定数 $\frac{3}{4}$ が両辺で一致するのは、二つの下端 e と e^{-1} 自体が互いに逆数の組になっているからにほかならない。）

小問 (ii)

考えてみよう F はどこで増加しているか。また、$x = 1$ の近くでは何が起こるか。

傾き。$\mathrm{F}'(x) = \mathrm{f}(x)$ である。因子 $(1-u^2)^2$ は決して負にならず、$x > 0$ であるから、$\mathrm{f}(x)$ の符号は $u = \ln x$ の符号と一致する。よって F は $(0,1)$ で減少し、$(1,\infty)$ で増加する。停留点（stationary point）は $x = e^{-1}$ と $x = e$ のみであり、そこでは定義により $\mathrm{F} = 0$ である。

これらは極値点（turning point）ではない。$x = e$ の近くでは傾きは両側とも正であり、$x = e^{-1}$ の近くでは両側とも負である。そこでは $\mathrm{f}' = \mathrm{F}''$ も 0 であるから、これら

は**停留変曲点**（stationary point of inflection）である。したがって次が成り立つ。

$\mathrm{F}(x) > 0$ となるのは$0 < x < e^{-1}$ および$x > e$, $\mathrm{F}(x) < 0$ となるのは$e^{-1} < x < 1$ および$1 < x < e$

端での振る舞い。

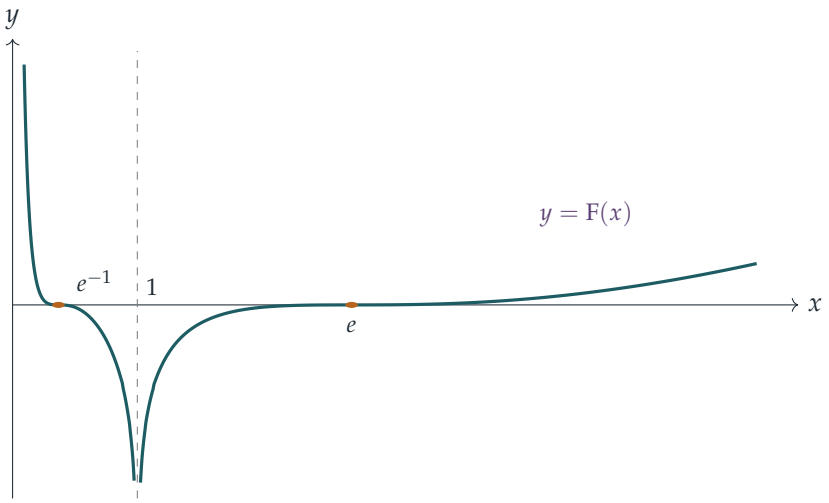
- $x \to 1$ のとき、$u \to 0$ であり $\ln|u| \to -\infty$ となる一方、他の項は $\frac{3}{4}$ に近づく。よって両側から $\mathrm{F}(x) \to -\infty$ となり、$x = 1$ は垂直漸近線（vertical asymptote）である。
- $x \to \infty$ のとき、$u \to \infty$ であり $\frac{1}{4}u^4$ の項が支配的になるので、$\mathrm{F}(x) \to \infty$ となる。ただしその増え方は非常にゆるやかである。実際、傾きは $\mathrm{f}(x) \approx u^3/x \to 0$ となる。
- $x \to 0^+$ のとき、$u \to -\infty$ であるから、対称性によりやはり $\mathrm{F}(x) \to \infty$ となる。こちらでは急激に増大する。実際、傾きは $\mathrm{f}(x) \approx u^3/x \to -\infty$ となる。曲線は y 軸とは交わらない。

凹凸（concavity）（より丁寧な概形のために）。 $\mathrm{F}'' = \mathrm{f}' = (g' - g)/x^2$ を用いて整理すると、

$$\mathrm{F}''(x) = -\frac{(u^2-1)(u^3-3u^2-u-1)}{u^2x^2}.$$

3 次式 $u^3 - 3u^2 - u - 1$ は実根を一つだけもち、それは $u \approx 3.38$ である（$u = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}$ における極大値が負であるため）。それより小さいすべての u に対してこの 3 次式は負である。よって曲線は $(0, e^{-1})$ で下に凸（concave up）、$(e^{-1}, 1)$ および $(1, e)$ で上に凸（concave down）である。e から $x \approx 29.5$ にあるもう一つの変曲点までは下に凸であり、その先は上に凸となる。この最後の変曲点ははるか右方にあるので、概形に描く必要はない。

対称性 $\mathrm{F}(x^{-1}) = \mathrm{F}(x)$ は、x における高さが $1/x$ における高さと一致することを意味する。たとえば $\mathrm{F}(2) = \mathrm{F}(\frac{1}{2}) \approx -0.04$、$\mathrm{F}(5) = \mathrm{F}(\frac{1}{5}) \approx 0.31$ である。したがって、曲線の $(1, \infty)$ 上の部分は、$(0, 1)$ 上の部分を漸近線に向かって水平方向に押しつぶしたものになっている。



曲線は y 軸の近くで $+\infty$ から急激に下りてくる。次第に平らになって $(e^{-1},0)$ の停留変曲点で x 軸に接し、その後、漸近線 $x=1$ で $-\infty$ へと急降下する。右側では $-\infty$ から再び上昇し、$(e,0)$ にある二つ目の停留変曲点で平らになり、その後ゆるやかに $+\infty$ へと増加していく。

検算

- 枠で囲んだ式を微分すると $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln|u| - u^2 + \frac{1}{4}u^4\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{u} - 2u + u^3\right) = \mathrm{f}(x)$ となり、またこの式は $x = e$ と $x = e^{-1}$ において 0 を与える。
- 数値的には $\int_e^5 \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.3130$、$\int_{1/e}^{1/5} \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.3130$ であり、式とも対称性とも合っている。
- 符号も整合している。$(1,e)$ 上で関数は 0 まで増加するので、そこでは負でなければならず、実際 $\mathrm{F}(2) \approx -0.039$ である。

よくある間違い

- $\ln x < 0$ となる $0 < x < 1$ に対して $\ln(\ln x)$ と書いてしまうこと。$\frac{1}{u}$ の原始関数は $\ln|u|$ であり、まさにこの絶対値が対称性を成り立たせている。
- $x = e^{\pm 1}$ に極値点を描いてしまうこと。f は 2 乗の因子をもつので、そこで符号を変えない。したがってこれらは停留変曲点である。
- $x = 1$ の垂直漸近線を見落とすこと、あるいはそれをまたいで二つの枝をつないでしまうこと。

STEP のその先へ

F は積分によって定義されており、微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）によれば、f が連続である各区間上で $F' = f$ が成り立つ。二つの部分に別々の基点が必要なのはこのためである。f は $x = 1$ で発散するので、そこをまたいで一つの積分をとることはできない。対称性 $x \mapsto x^{-1}$ は、$u = \ln x$ のもとで $u \mapsto -u$ となる。これは乗法的な対称性を加法的な対称性に変換する小さな例であり、この考え方は解析学全体を貫いている。微分積分学の基本定理と広義積分（improper integral）についての丁寧な解説としては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照するとよい。

解答例

STEP I 2018、第 5 問

純粋数学 ・ 多項式と因数定理

> **STEP I 2018、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q5

鍵となる考え方

「これらの点で値 1 をとる」というのは、実は根（root）についての主張である。$P(k)=1$ ならば k は $P(x)-1$ の根であり、したがって $x-k$ はその因数（factor）である。共通の値を引いて因数分解（factorise）してしまえば、この問題のどの小問も易しくなる。小問 (iii) では、この因数分解によって S に関する問いが、小さな数を 4 つの**相異なる**整数の積として表す問題に変わる。そして、相異なるという条件こそがすべての仕事をするのである。

解答

小問 (i)

剰余の定理（remainder theorem）により、$P(x)$ を $x-k$ で割った余りは $P(k)$ である。したがって $P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=1$、すなわち $1,2,3,4$ が $P(x)-1$ の根であることが必要である。$P(x)-1$ の次数（degree）は高々 4 で、これら 4 つの相異なる根をもつから、$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ の定数倍である。よって、このような多項式のうち最も一般的なものは

$$P(x)=1+k(x-1)(x-2)(x-3)(x-4), \qquad k\neq 0,$$

である。ここで、次数がちょうど 4 となるためには $k\neq 0$ が必要である。

小問 (ii)

小問 (i) とまったく同様に、$1, 2, \ldots, N$ は $P(x)-1$ の N 個の相異なる根であり、その次数は N である（$N \geq 1$ なので、1 を引いても次数は変わらない）。したがって、ある定数 k について

$$P(x)-1 = k(x-1)(x-2)\cdots(x-N)$$

が成り立ち、P の次数は $N \geq 1$ なので $k \neq 0$ である。すると

$$P(N+1)-1 = k \cdot N(N-1)\cdots 1 = k\,N! \neq 0,$$

となる。k と $N!$ はともに 0 でないからである。ゆえに $P(N+1) \neq 1$ である。

$P(N+1) = 2$ ならば $k\,N! = 1$ であるから、$k = \frac{1}{N!}$ である。正の整数 r に対して

$$\begin{aligned} P(N+r) &= 1 + \frac{(N+r-1)(N+r-2)\cdots r}{N!} \\ &= 1 + \frac{(N+r-1)!}{(r-1)!\,N!} = 1 + \binom{N+r-1}{N}. \end{aligned}$$

（この積は N 個の因数からなり、$N+r-1$ から r まで順に下がっていく。）

ここで、すべての N に対して $1 + \binom{N+r-1}{N} = N+r$ となるようにしたい。小さな r で試してみよう。$r=1$ とすると $P(N+1)=2$ となり、これが $N+1$ に等しいのは $N=1$ のときに限る。$r=2$ とすると

$$P(N+2) = 1 + \binom{N+1}{N} = 1 + (N+1) = N+2,$$

となるので、N が何であっても $r=2$ でうまくいく。

小問 (iii)

4 つの相異なる整数 a, b, c, d は $S(x) - 2001$ の根であり、これは次数 4、最高次の係数（leading coefficient）1 の多項式である。したがって

$$S(x) = 2001 + (x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

(a) ある整数 e に対して $S(e) = 2018$ であると仮定する。すると

$$(e-a)(e-b)(e-c)(e-d) = 17.$$

4 つの因数はいずれも整数であり、a, b, c, d が相異なるのでこれらも相異なる。また積が 0 でないから、どの因数も 0 ではない。

考えてみよう 相異なる 4 つの整数の積が素数にならないのは、どのような理由によるのか？

相異なる 0 でない整数のうち、絶対値（absolute value）が 1 であるものは高々 2 つ（すなわち 1 と -1）しかない。したがって 4 つの因数のうち少なくとも 2 つは絶対値が 2 以上であり、その 2 つの積の絶対値は 4 以上である。ところがその積は 17 を割り切るので、± 17 でなければならない。しかし 17 は素数（prime）なので、絶対値がそれぞれ 2 以上である 2 つの整数の積として表すことはできない。この矛盾により、$S(e) = 2018$ となる整数 e は存在しないことが示された。

(b) ここで $S(0) = 2001 + (-a)(-b)(-c)(-d) = 2001 + abcd$ であるから、$S(0) = 2017$ となるのは次の場合であり、かつその場合に限る：

$$abcd = 16.$$

逆に、$abcd = 16$ を満たす相異なる 4 つの整数はどれも条件を満たす S を与える（上の式はモニック（monic）で整数係数である）。したがって、積が 16 となる相異なる 4 つの整数の集合 $\{a, b, c, d\}$ の個数を数えればよい。各集合は、ちょうど 1 通りの仕方で小さい順に並べられる。

a, b, c, d はいずれも 16 を割り切るので、その絶対値は $1, 2, 4, 8, 16$ のいずれかであり、4 つの絶対値の積は 16 である。整数が相異なるので、同じ絶対値は高々 2 回（$\pm m$ として）しか現れない。絶対値を累乗 2^p の形に書き、4 つの指数の和が 4 で、同じ指数を 3 回以上使わないものとすると、可能性は

$$\{1, 1, 2, 8\}, \qquad \{1, 1, 4, 4\}, \qquad \{1, 2, 2, 4\}.$$

である（16 を使うと残りの 3 つは $1, 1, 1$ とならざるをえず、これは許されない。また $\{2, 2, 2, 2\}$ は 2 を 4 回使っている）。次に、積が $+16$ となるように符号を選ぶ：

- $\{1, 1, 2, 8\}$：対は $1, -1$ であり、これが -1 を寄与するので、$2, 8$ のうちちょうど一方が負である。これにより $\{-2, -1, 1, 8\}$ と $\{-8, -1, 1, 2\}$ を得る。
- $\{1, 1, 4, 4\}$：2 つの対はいずれも $\pm$ の組で、$(1)(-1)(4)(-4) = 16$ となる。これにより $\{-4, -1, 1, 4\}$ を得る。
- $\{1, 2, 2, 4\}$：対 $2, -2$ が -4 を寄与するので、$1, 4$ のうちちょうど一方が負である。これにより $\{-4, -2, 1, 2\}$ と $\{-2, -1, 2, 4\}$ を得る。

よって、$a < b < c < d$ の選び方は **5** 通りである。

検算

- 小問 (ii) で $N=1$ のとき $P(x)=x$ であるから、$P(N+r)=1+r$ は $1+\binom{r}{1}$ と一致し、$P(3)=3$ となる。$N=2$ のとき $P(x)=1+\frac{1}{2}(x-1)(x-2)$ から $P(4)=4$ が得られ、$r=2$ についての主張どおりである。
- (iii)(b) については、5つの集合それぞれの積を実際に計算してみるとよい。たとえば $(-2)(-1)(2)(4)=16$ である。$[-16,16]$ の範囲の相異なる整数の4つ組をすべてコンピュータで探索すると、ちょうどこの5つが見つかる。
- (iii)(a) については、$2018-2001=17$ が素数であることに注意せよ。2001 を別の値に置き換えて、差が $4=(-2)(-1)(1)(2)$ のようになる場合には、そのような e が存在しうる。したがって、素数であることが本当に効いているのである。

よくある間違い

- 小問 (i) で $k\neq 0$ を忘れる、あるいは $P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1$ だけを答えてしまう。これは最も一般的な多項式ではない。
- 小問 (iii)(b) で正の約数（divisor）だけを数えてしまう、あるいは1と -1 を両方使えることを見落とす。
- $S(0)=2001-abcd$ と書いてしまう。負号は4つあるので、積は $+abcd$ である。

STEP のその先へ

次数 N の多項式は $N+1$ 個の点での値によって決まるという考え方は、ラグランジュ（Lagrange）補間（Lagrange interpolation）や差分（finite differences）の基礎にある。小問 (ii) の多項式は、実は $1+\binom{x-1}{N}$ が姿を変えたものである。小問 (iii) は、整数論（number theory）における標準的な道具の小さな例である。すなわち、P が整数係数ならば $m-n$ は $P(m)-P(n)$ を割り切り、このことが多項式が整数点でとりうる値を強く制限するのである。この種の整除性の議論についてさらに学ぶには、Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）がよい。

解答例

STEP I 2018、第 6 問

純粋数学 ・ 中点公式と台形公式

> **STEP I 2018、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q6

鍵となる考え方

どちらの近似も等間隔の角の正弦の和であり、与えられた積和公式（product-to-sum identity）を使えば、うまく選んだ $2\sin\theta$ を掛けることでこのような和は打ち消し合う和（telescoping sum）になる。中点則（midpoint rule）は $\frac{\pi}{2n}$ の奇数倍で標本をとり、台形公式（trapezium rule）は偶数倍で標本をとるので、$\theta = \frac{\pi}{2n}$ とおけば各小問は打ち消し合う和になる。A_n と B_n を閉じた形で表してしまえば、小問 (iii) は半角の公式（half-angle formulae）を使うだけである。

解答

準備の恒等式

恒等式で $P = \theta$、$Q = (2k-1)\theta$ とおくと

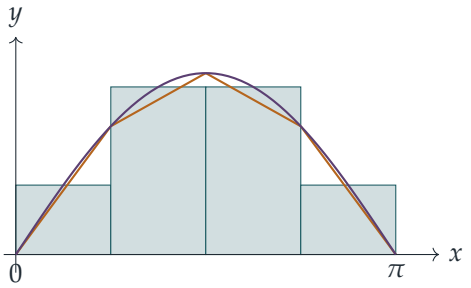
$$2\sin\theta\,\sin(2k-1)\theta = \cos(2k-2)\theta - \cos 2k\theta.$$

$k = 1$ から $k = n$ まで和をとると、ある項で引かれた $\cos 2k\theta$ が次の項で足し戻されるので、和は打ち消し合う：

$$\begin{aligned} 2\sin\theta\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)\theta &= (\cos 0 - \cos 2\theta) + (\cos 2\theta - \cos 4\theta) + \cdots \\ &\quad + \big(\cos(2n-2)\theta - \cos 2n\theta\big) \\ &= 1 - \cos 2n\theta, \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

以下では、帯の幅を $h = \frac{\pi}{n}$ とし、$\theta = \frac{\pi}{2n} = \frac{h}{2}$ とおく。



$n = 4$ の場合：$\sin x$ は $[0, \pi]$ で上に凸（concave）なので、中点則の長方形（網掛け）は面積を過大に見積もり、台形公式の弦（太線）は過小に見積もる。

小問 (i)

第 k 番目の帯は $(k-1)h$ から kh までであるから、その中点は $x = (k - \frac{1}{2})h = (2k-1)\theta$ にあり、高さは $\sin(2k-1)\theta$ である。したがって

$$A_n = h \sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)\theta.$$

$2\sin\theta$ を掛けて恒等式を用いると、$2n\theta = \pi$ より

$$2\sin\theta\, A_n = h\,(1 - \cos\pi) = 2h.$$

両辺を 2 で割ると $A_n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{n}$ となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

縦座標（ordinate）は $k = 0, 1, \ldots, n$ に対して $x = kh = 2k\theta$ でとられ、両端の縦座標は $\sin 0 = \sin\pi = 0$ である。よって台形公式により

$$B_n = \frac{h}{2}\left(\sin 0 + 2\sum_{k=1}^{n-1} \sin 2k\theta + \sin\pi\right) = h \sum_{k=1}^{n-1} \sin 2k\theta.$$

今度は θ の偶数倍なので、恒等式をもう一度、今回は $P = \theta$、$Q = 2k\theta$ として用いる：

$$2\sin\theta\, \sin 2k\theta = \cos(2k-1)\theta - \cos(2k+1)\theta.$$

$k = 1$ から $n-1$ まで和をとると、やはり打ち消し合う：

$$2\sin\theta \sum_{k=1}^{n-1} \sin 2k\theta = \cos\theta - \cos(2n-1)\theta.$$

考えてみよう $\cos(2n-1)\theta$ はどのように簡単にできるか？

$2n\theta = \pi$ より $(2n-1)\theta = \pi - \theta$ であり、$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$ である。よって右辺は $2\cos\theta$ となり、

$$2\sin\theta\, B_n = 2h\cos\theta, \qquad \text{すなわち} \qquad B_n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{n}\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

（$n=1$ のときは和が空で $B_1 = 0$ であるが、$\cos\frac{\pi}{2} = 0$ なのでこの式はやはり成り立つ。）

小問 (iii)

$0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$ より $\sin\theta \neq 0$ であるから、小問 (i) と (ii) より

$$A_n = \frac{h}{\sin\theta}, \qquad B_n = \frac{h\cos\theta}{\sin\theta}.$$

n を $2n$ に置き換えると、h と θ はどちらも半分になる：

$$A_{2n} = \frac{h/2}{\sin(\theta/2)}, \qquad B_{2n} = \frac{(h/2)\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

一つ目の結果については、$1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ と $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ を用いて

$$\tfrac{1}{2}(A_n + B_n) = \frac{h}{2}\cdot\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{h}{2}\cdot\frac{2\cos^2(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)} = \frac{(h/2)\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = B_{2n}.$$

二つ目については、$\sin\theta$ に対する同じ 2 倍角の公式を用いて（また $\cos\frac{\theta}{2} \neq 0$ に注意して）

$$A_n B_{2n} = \frac{h}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}\cdot\frac{(h/2)\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = \frac{h^2}{4\sin^2(\theta/2)} = \left(\frac{h/2}{\sin(\theta/2)}\right)^2 = A_{2n}^2.$$

以上で両方の結果が示された。

検算

- $n=1$：幅 π、高さ $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ の中点則の長方形が 1 つで $A_1 = \pi$ となり、$\pi/\sin\frac{\pi}{2}$ と一致する。また、前述のとおり $B_1 = 0$ である。
- $n=2$：$A_2 = \frac{\pi}{2}(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 2.2214$、$B_2 = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$ である。このとき $\frac{1}{2}(A_1+B_1) = \frac{\pi}{2} = B_2$ かつ $A_1 B_2 = \frac{\pi^2}{2} = A_2^2$ となる。
- $n=10$：直接和をとると $A_{10} \approx 2.00825$、$B_{10} \approx 1.98352$ となり、真の面積 2 を両側から挟んでいる。$n \to \infty$ のとき $\frac{\pi}{n}\big/\sin\frac{\pi}{2n} \to 2$ かつ $\cos\frac{\pi}{2n} \to 1$ であるから、どちらも当然 2 に収束（converge）する。また、4 つの結果すべてを 200 以下のすべての n についてコンピュータで確認した。

よくある間違い

- 中点を $(k-\frac{1}{2})h$ ではなく kh にとってしまう。こうすると中点則が台形公式の節点での和になってしまう。
- 台形公式では両端の縦座標を半分にすることを忘れる。ここではそれらが 0 になるので、B_n は単に内部の縦座標の和の h 倍になる。
- $(2n-1)\theta = \pi - \theta$ を使わず、$\cos(2n-1)\theta$ を簡単にしないまま放置する。

STEP のその先へ

小問 (iii) は、B_{2n} が A_n と B_n の相加平均（arithmetic mean）であり、A_{2n} が A_n と B_{2n} の相乗平均（geometric mean）であることを述べている。逆数をとると、これは円に外接する多角形と内接する多角形で π を挟み込むアルキメデス（Archimedes）の方法に現れる、調和平均（harmonic mean）をとってから相乗平均をとるという形になり、この反復は Borchardt のアルゴリズムとして知られている。より一般に、中点則と台形公式の誤差を比較すると（中点則の誤差はおよそ台形公式の誤差の半分で、符号が逆である）、シンプソン（Simpson）の公式やリチャードソン補外（Richardson extrapolation）が導かれる。これらは数値解析（numerical analysis）の中心的な考え方である。これらの公式の背後にある誤差解析については、Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）のリーマン積分（Riemann integral）の章を参照されたい。

解答例

STEP I 2018、第 7 問

純粋数学 • 3 次方程式の解法

STEP I 2018、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/18-s1-q7

鍵となる考え方

この置換はメビウス変換（Möbius transformation）であり、分母を払うと z^2 の項と z の項が打ち消し合い、z^3 と定数だけが残るように選ばれている。$az^3+b=0$ の形の三次方程式（cubic equation）は簡単に解けるので、仕事のすべては、一般の簡約された三次方程式 $x^3-3cx+d=0$ をこの特別な形に持ち込むことにある。そのためには和と積から 2 数を求めればよく、これは二次方程式の問題である。それが相異なる実数解をもつための条件こそが、$d^2>4c^3$ の由来である。

解答

小問 (i)

$x=\dfrac{pz+q}{z+1}$ とおき、方程式の両辺に $(z+1)^3$ を掛けると

$$(pz+q)^3-3pq(pz+q)(z+1)^2+pq(p+q)(z+1)^3=0.$$

$(pz+q)(z+1)^2=pz^3+(2p+q)z^2+(p+2q)z+q$ が必要になる。ここで z の累乗ごとに整理する。

$$\begin{aligned}
z^3:&\quad p^3-3p^2q+p^2q+pq^2=p(p^2-2pq+q^2)=p(p-q)^2,\\
z^2:&\quad 3p^2q-3pq(2p+q)+3pq(p+q)=3p^2q-6p^2q-3pq^2+3p^2q+3pq^2=0,\\
z^1:&\quad 3pq^2-3pq(p+2q)+3pq(p+q)=3pq^2-3p^2q-6pq^2+3p^2q+3pq^2=0,\\
z^0:&\quad q^3-3pq^2+p^2q+pq^2=q(q^2-2pq+p^2)=q(p-q)^2.
\end{aligned}$$

よって方程式は $az^3 + b = 0$ に帰着し、

$$a = p(p-q)^2, \qquad b = q(p-q)^2.$$

となる。$p \neq q$ なので $(p-q)^2$ で割ってよく、より簡単な形 $pz^3 + q = 0$ が得られる。この置換は、すべての $x \neq p$ に対して $z = \dfrac{x-q}{p-x}$ と逆に解くことができ、また $x = p$ が三次方程式の解となるのは $p(p-q)^2 = 0$ のときに限る。さらに、$z = -1$ が $pz^3 + q = 0$ を満たすことは決してない。そうなるには $p = q$ が必要だからである。したがって、三次方程式の解は $pz^3 + q = 0$ の解とちょうど対応する（$p = 0$ のときは、三次方程式は単に $x^3 = 0$ である）。

小問 (ii)

$x^3 - 3cx + d$ と $x^3 - 3pqx + pq(p+q)$ を比較すると、

$$pq = c, \qquad pq(p+q) = d, \qquad \text{すなわち} \qquad pq = c, \quad p+q = \frac{d}{c},$$

が必要である。ここで $c \neq 0$ なので c で割ってよい。和が $\frac{d}{c}$、積が c である 2 数は

$$t^2 - \frac{d}{c}\,t + c = 0.$$

の解である。この二次方程式が相異なる実数解をもつのは、判別式（discriminant）が正であるとき、かつそのときに限る：

$$\frac{d^2}{c^2} - 4c > 0 \iff d^2 > 4c^3,$$

ここで $c^2 > 0$ を掛けた。よって $d^2 > 4c^3$ のとき、p と q をこの二次方程式の 2 解にとれば、方程式は要求された形に書け、p, q は相異なる実数である。

小問 (iii)

ここでは $c = -2, d = -2$ なので $d^2 = 4 > -32 = 4c^3$ であり、小問 (ii) が適用できる。$p + q = \frac{d}{c} = 1$ かつ $pq = c = -2$ が必要なので、p, q は $t^2 - t - 2 = (t-2)(t+1) = 0$ の解である。$p = 2, q = -1$ ととる。小問 (i) より方程式は

$$2z^3 - 1 = 0, \qquad z^3 = \tfrac{1}{2},$$

となり、その実数解は $z = 2^{-1/3}$ のみである。$u = 2^{1/3}$ とおくと $z = \frac{1}{u}$ である。すると

$$x = \frac{2z-1}{z+1} = \frac{2-u}{1+u}.$$

考えてみよう 分母に立方根が含まれているが、これをもっと整理できないだろうか？

できる。$1+u^3=(1+u)(1-u+u^2)$ を用いて有理化する。$u^3=2$ なので、これは 3 に等しい：

$$x=\frac{(2-u)(1-u+u^2)}{3}=\frac{2-3u+3u^2-u^3}{3}=\frac{3u^2-3u}{3}=u^2-u.$$

よって実数解は

$$x=2^{2/3}-2^{1/3}=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}.$$

である。これが唯一の実数解である：x^3+6x-2 の導関数（derivative）は $3x^2+6>0$ なので、狭義単調増加である。z の残り 2 つの値は複素数であり、2 つの複素数解を与える。（代わりに $p=-1, q=2$ を選ぶと $z^3=2$ となり、同じ解が得られる。）

小問 (iv)

$x=p$ のとき $p^3-3p^3+2p^3=0$ となるので $x-p$ は因数であり、

$$x^3-3p^2x+2p^3=(x-p)(x^2+px-2p^2)=(x-p)^2(x+2p).$$

よって解は $x=p$（重解）と $x=-2p$ である。

これは小問 (i) の形で $q=p$ としたものであり、まさに小問 (ii) で除外された場合であることに注意しよう。さて、$c,d\neq 0$ として $d^2=4c^3$ とする。すると $c^3=\frac{1}{4}d^2>0$ なので $c>0$ である。$p^2=c$ かつ $2p^3=d$ となる p を探す。第 2 式を第 1 式で割ると

$$p=\frac{d}{2c},$$

が示唆され、実際これでうまくいく：$p^2=\dfrac{d^2}{4c^2}=\dfrac{4c^3}{4c^2}=c$ であり、さらに $2p^3=2p\cdot p^2=2\cdot\dfrac{d}{2c}\cdot c=d$ である。よって $x^3-3cx+d=x^3-3p^2x+2p^3$ であり、その解は

$$x=\frac{d}{2c}\text{（重解）}\qquad\text{および}\qquad x=-\frac{d}{c}.$$

である。

検算

- 小問 (iii)：$\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\approx 0.32748$ であり、この値における x^3+6x-2 の値は小数第 15 位まで 0 である。カルダノ（Cardano）の公式でも同じ解 $\sqrt[3]{1+3}+\sqrt[3]{1-3}$ が得られる。

- 小問 (iv)：$c = 1, d = 2$ のとき三次方程式は $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$ であり、重解 $\frac{d}{2c} = 1$ と単解 $-\frac{d}{c} = -2$ に一致する。
- 小問 (i)：$p = 1, q = 0$ のとき三次方程式は $x^3 = 0$ であり、置換は $x = \frac{z}{z+1}$ を与えるので $x^3(z+1)^3 = z^3$ となり、$a = 1, b = 0$ に一致する。

よくある間違い

- 小問 (ii) で c が負になりうることを忘れる。不等式に c^2 を掛けるのは安全だが、c を掛けるのは安全ではない。
- 小問 (iii) で、$\frac{1}{2}$ の 3 つの立方根をすべて実数解として挙げてしまう。実数なのは $z = 2^{-1/3}$ だけである。
- 小問 (iv) で $p = \sqrt{c}$ ととってしまう。これは $d < 0$ のとき符号が誤りとなる。$p = \frac{d}{2c}$ なら自動的に正しい符号になる。

STEP のその先へ

これは三次方程式に対するカルダノの公式への見事な道筋である。二次方程式 $t^2 - \frac{d}{c}t + c = 0$ が「分解方程式」(resolvent) の役割を果たし、$d^2 - 4c^3$ の符号は（定数倍を除いて）三次方程式の判別式であって、これが実数解が 1 つか 3 つかを決める。三次方程式や四次方程式は累乗根（radicals）で解けるのに、一般の五次方程式が解けないのはなぜか。それを扱うのがガロア理論（Galois theory）である。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は、これについて読み始めるのに良い一冊である。

解答例

STEP I 2018、第 8 問

純粋数学 ・ 連立微分方程式

STEP I 2018、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/18-s1-q8

鍵となる考え方

2 つの導関数（derivative）の規則は、互いに打ち消し合うように作られている。s' が現れるたびに c^2 がもたらされ、c' が現れるたびに $-\mathrm{s}^2$ がもたらされる。したがって、全体を通して自然な方針は、積や商を微分して項がまとまっていく様子を観察し、そのうえで (i) の恒等式（identity）を用いてすべてを 1 つの関数で表すことである。積分については、各被積分関数（integrand）を「何か $\times\, \mathrm{s}^2$」あるいは「何か $\times\, \mathrm{c}^2$」と読むとよい。これらこそ、導関数がわかっている形だからである。最後の 2 つの小問に出てくる u の積分は、同じ積分が姿を変えたものにすぎない。

解答

以下、紛れのないときは $\mathrm{s}(x)$ と $\mathrm{c}(x)$ をそれぞれ s、c と書く。

小問 (i)

合成関数の微分法（chain rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{s}^3+\mathrm{c}^3\right)=3\mathrm{s}^2\,\mathrm{s}'+3\mathrm{c}^2\,\mathrm{c}'=3\mathrm{s}^2\mathrm{c}^2-3\mathrm{c}^2\mathrm{s}^2=0,$$

であるから、$\mathrm{s}^3+\mathrm{c}^3$ は定数である。$x=0$ におけるその値は $0^3+1^3=1$ であるから、

$$\mathrm{s}(x)^3+\mathrm{c}(x)^3=1\quad（任意の x,$$

となり、示すべきことが得られた。この恒等式がこの問題の残りすべてを動かす原動力である。これにより、s^3 を $1-\mathrm{c}^3$ に置き換えたり、その逆を行ったりできる。

小問 (ii)

積の微分法（product rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{sc}) = \mathrm{s}'\mathrm{c} + \mathrm{sc}' = \mathrm{c}^2 \cdot \mathrm{c} + \mathrm{s} \cdot (-\mathrm{s}^2) = \mathrm{c}^3 - \mathrm{s}^3.$$

(i) より $\mathrm{s}^3 = 1 - \mathrm{c}^3$ であるから、これは $\mathrm{c}^3 - (1 - \mathrm{c}^3) = 2\mathrm{c}^3 - 1$ に等しく、求める結果である。

商については（$\mathrm{c}(x) \neq 0$ となる範囲で）、商の微分法（quotient rule）により

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{c}}\right) = \frac{\mathrm{s}'\mathrm{c} - \mathrm{sc}'}{\mathrm{c}^2} = \frac{\mathrm{c}^3 + \mathrm{s}^3}{\mathrm{c}^2} = \frac{1}{\mathrm{c}(x)^2},$$

となる。ここでも (i) を用いた。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$ との美しい類似に注目しよう。

小問 (iii)

$\mathrm{c}' = -\mathrm{s}^2$ であるから、1 つ目の積分はただちに求まる。

$$\int \mathrm{s}(x)^2 \,\mathrm{d}x = -\mathrm{c}(x) + C.$$

考えてみよう 既知の導関数 $\mathrm{c}' = -\mathrm{s}^2$ が現れるようにするには、s^5 をどう書けばよいか。

因数 s^2 を切り出し、残りに (i) を用いる。すなわち $\mathrm{s}^5 = \mathrm{s}^3 \cdot \mathrm{s}^2 = (1 - \mathrm{c}^3)\,\mathrm{s}^2 = -(1 - \mathrm{c}^3)\,\mathrm{c}'$ である。これは $g(\mathrm{c})\,\mathrm{c}'$ の形をしており、合成関数の微分法を逆にたどることで積分できる。

$$\int \mathrm{s}(x)^5 \,\mathrm{d}x = -\int (1 - \mathrm{c}^3)\,\mathrm{c}' \,\mathrm{d}x = -\mathrm{c}(x) + \tfrac{1}{4}\mathrm{c}(x)^4 + C.$$

（微分して確かめると、$-\mathrm{c}' + \mathrm{c}^3\mathrm{c}' = -\mathrm{c}'(1 - \mathrm{c}^3) = \mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{s}^3$ となり、確かに正しい。）

小問 (iv)

$u = \mathrm{s}(x)$ とおくと、$x = \mathrm{s}^{-1}(u)$ であり、$\mathrm{d}u = \mathrm{s}'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{c}(x)^2\,\mathrm{d}x$ である。(i) より $\mathrm{c}^3 = 1 - u^3$ であるから $\mathrm{c} = (1 - u^3)^{1/3}$（実数の立方根であり、c の符号によらず成り立つ）となり、したがって

$$(1 - u^3)^{2/3} = \mathrm{c}(x)^2.$$

ゆえに

$$\int \frac{1}{(1 - u^3)^{2/3}} \,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{\mathrm{c}^2}\,\mathrm{c}^2 \,\mathrm{d}x = \int 1 \,\mathrm{d}x = x + C = \mathrm{s}^{-1}(u) + C,$$

となり、これが示すべきことであった。

小問 (v)

同じ置換（substitution）を用い、$(1-u^3)^{1/3}=\mathrm{c}$、$\mathrm{d}u=\mathrm{c}^2\,\mathrm{d}x$ とする。

1 つ目の積分では $(1-u^3)^{4/3}=\mathrm{c}^4$ であるから、(ii) の商に関する結果により

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{(1-u^3)^{4/3}}=\int\frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{c}^4}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{c}^2}=\frac{\mathrm{s}(x)}{\mathrm{c}(x)}+C=\frac{u}{(1-u^3)^{1/3}}+C.$$

2 つ目については、

$$\int(1-u^3)^{1/3}\,\mathrm{d}u=\int\mathrm{c}\cdot\mathrm{c}^2\,\mathrm{d}x=\int\mathrm{c}^3\,\mathrm{d}x.$$

(ii) の積に関する結果は $\mathrm{c}^3=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{sc})\right)$ を意味するから、

$$\int\mathrm{c}^3\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}\big(x+\mathrm{s}(x)\mathrm{c}(x)\big)+C.$$

$x=\mathrm{s}^{-1}(u)$ および $\mathrm{sc}=u(1-u^3)^{1/3}$ を用いて u に戻すと、

$$\int(1-u^3)^{1/3}\,\mathrm{d}u=\tfrac{1}{2}\Big(\mathrm{s}^{-1}(u)+u(1-u^3)^{1/3}\Big)+C.$$

検算

- (v) の答えは u で微分することで確かめられる。たとえば、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\frac{u}{(1-u^3)^{1/3}}=\frac{1}{(1-u^3)^{1/3}}+\frac{u^3}{(1-u^3)^{4/3}}=\frac{1}{(1-u^3)^{4/3}}.$$

- 微分方程式（differential equation）を $x=1.2$ まで数値的に解くと $\mathrm{s}(1.2)\approx0.9411$、$\mathrm{c}(1.2)\approx0.5500$ となり、確かに $0.9411^3+0.5500^3\approx1$ である。$U=\mathrm{s}(1.2)$ とすると、数値積分により $\int_0^U(1-u^3)^{-2/3}\,\mathrm{d}u\approx1.2000$ となって (iv) の予測どおりであり、また $\int_0^U(1-u^3)^{1/3}\,\mathrm{d}u\approx0.8588=\frac{1}{2}(1.2+0.9411\times0.5500)$ となって (v) と一致する。
- 数値的に $\int_0^{1.2}\mathrm{s}^2\,\mathrm{d}x\approx0.4500=1-\mathrm{c}(1.2)$ であり、(iii) と合致する。

よくある間違い

- $\int\mathrm{s}^2\,\mathrm{d}x=+\mathrm{c}+C$ と書いてしまう。$\mathrm{c}'=-\mathrm{s}^2$ のマイナス符号は落としやすい。
- (iv) と (v) で、$\mathrm{d}u$ を $\mathrm{c}^2\,\mathrm{d}x$ に変換し忘れる、あるいは最終的な答えを u ではなく x で表したままにしてしまう。
- (v) で、(ii) がすでにそれを導関数と定数の和として表していることに気づかず、c^3 を直接積分しようとする。

STEP のその先へ

組 s, c は、円 $x^2+y^2=1$ の代わりに曲線 $x^3+y^3=1$ に対する sin と cos のようにふるまう。このような「一般化三角関数（generalised trigonometric functions）」は楕円関数（elliptic functions）の近い親戚である。楕円関数は、ちょうど $\sin^{-1}u=\int(1-u^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}u$ のように、(iv) のような積分の逆関数をとることで現れる。初期条件（initial conditions）つきの微分方程式によって関数を定義し、その性質をすべてそこから導くというのは大学 1 年次の標準的な手法であり、関数が「一意に定まる」という仮定は、常微分方程式（ODE）の解の存在と一意性の定理（existence and uniqueness theorem）にほかならない。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）は、その理論と連立系の多くの例の両方を扱っている。

解答例

STEP I 2018、第 9 問

力学 ・ 斜面上の運動

STEP I 2018、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

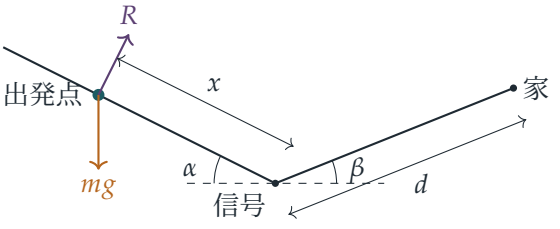
step.maths.org/questions/18-s1-q9

鍵となる考え方

抵抗がないので、ゴーカートは各直線区間で一定の加速度をもつ。最初の斜面を下るときは $g\sin\alpha$ の加速度、2 番目の斜面を上るときは $g\sin\beta$ の減速度である。したがって各区間は等加速度運動（constant acceleration）の問題であり、2 つの区間は信号での速さによってつながっている。そもそも家にたどり着けるかどうかはエネルギー（あるいは $v^2 = u^2 + 2as$）で決まる。所要時間は各区間で $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ を用いて求め、残りは k を用いた丁寧な式変形である。

解答

ゴーカートと乗り手を、摩擦も空気抵抗もなく各最大傾斜線に沿って運動する質点（particle）としてモデル化する。はたらく力は重力 mg と垂直抗力（normal reaction）R のみであり、垂直抗力は仕事をしない。



家に到達する条件

最初の斜面に沿って力を分解すると、重力の斜面下向きの成分は $mg\sin\alpha$ であるから、加速度は $g\sin\alpha$ である。静止状態から出発して距離 x だけ進むと、信号での速さ V は

$$V^2 = 2gx\sin\alpha.$$

を満たす。速さが急に変化することはないので、2 番目の区間には速さ V で上り始め、今度は重力によって斜面に沿って $g\sin\beta$ の減速度が生じる。信号から距離 s だけ先の地点での速さ v は $v^2 = V^2 - 2gs\sin\beta$ を満たす。家に到達するためには、$s = d$ に至るまでずっと v^2 が負にならなければよい。すなわち

$$2gx\sin\alpha - 2gd\sin\beta \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x\sin\alpha \geq d\sin\beta,$$

であり、これが示すべきことであった。（同じことであるが、エネルギー保存則（conservation of energy）により、出発点の高さより上に上がることはできない。出発点は信号より $x\sin\alpha$ だけ高く、家は信号より $d\sin\beta$ だけ高い。）

全所要時間

式変形を見通しよくするため、$c = \left(\frac{1}{2}g\sin\alpha\right)^{1/2}$ とおく。すると $g\sin\alpha = 2c^2$ であり、$\sin\beta = \sin\alpha/k$ であるから $g\sin\beta = 2c^2/k$ となる。

最初の区間。 $x = \frac{1}{2}(g\sin\alpha)t_1^2 = c^2t_1^2$ より、信号までの所要時間は $t_1 = \sqrt{x}/c$ であり、そこでの速さは $V = (g\sin\alpha)t_1 = 2c\sqrt{x}$ である。

2 番目の区間。 信号から s を測ると $s = Vt - \frac{1}{2}(g\sin\beta)t^2$ であるから、$s = d$ に達するまでの時間 t_2 は

$$\frac{c^2}{k}\,t_2^2 - 2c\sqrt{x}\,t_2 + d = 0.$$

を満たす。

> **考えてみよう** この 2 次方程式には解が 2 つある。家に到着する時刻はどちらだろうか。

大きい方の解は、限りなく長い斜面上の質点が、いったん止まってから下り戻る途中で再び $s = d$ を通過する時刻である。家に到着するのは初めて $s = d$ に達したときであるから、求めるのは小さい方の解である：

$$t_2 = \frac{2c\sqrt{x} - \sqrt{4c^2x - 4c^2d/k}}{2c^2/k} = \frac{k}{c}\left(\sqrt{x} - \sqrt{x - \tfrac{d}{k}}\right) = \frac{1}{c}\left(k\sqrt{x} - \sqrt{k^2x - kd}\right),$$

ここで $k > 0$ より $k\sqrt{x - d/k} = \sqrt{k^2x - kd}$ を用いた。平方根が実数になるのはまさに $x \geq d/k$ のときであり、これは前半で得た条件 $x\sin\alpha \geq d\sin\beta$ にほかならない。

足し合わせると、$T = t_1 + t_2$ について

$$\left(\frac{g\sin\alpha}{2}\right)^{1/2} T = cT = (1+k)\sqrt{x} - \sqrt{k^2x - kd},$$

が得られ、これが求める結果である。

T の最小化

c は正の定数であるから、$x \geq d/k$ の範囲で $f(x) = (1+k)\sqrt{x} - \sqrt{k^2x - kd}$ を最小化すればよい。微分すると

$$f'(x) = \frac{1+k}{2\sqrt{x}} - \frac{k^2}{2\sqrt{k^2x - kd}}.$$

である。$f'(x) = 0$ とおくと $(1+k)\sqrt{k^2x - kd} = k^2\sqrt{x}$ を得る。両辺とも正であるから、2 乗しても情報は失われない：

$$\begin{aligned}(1+k)^2(k^2x - kd) &= k^4x \\ x\left[(1+k)^2k^2 - k^4\right] &= (1+k)^2kd \\ xk^2(1+2k) &= (1+k)^2kd,\end{aligned}$$

ここで $(1+k)^2 - k^2 = 1 + 2k$ を用いた。$k^2(1+2k) > 0$ で割ると

$$x = \frac{(1+k)^2}{k(1+2k)}\, d.$$

となる。これは許される出発点である。実際、$(1+k)^2 = 1 + 2k + k^2 > 1 + 2k$ であるから、この x は d/k より真に大きく、家に到達できる。

最適な x が存在するのはもっともである。近すぎる地点から出発すると坂の最後の区間をのろのろと進むことになり、遠すぎる地点から出発すると最初の斜面に長い時間を費やすことになる。

検算

- 最適点では $\sqrt{k^2x - kd} = k^2\sqrt{x}/(1+k)$ であるから、$cT = \sqrt{x}\,\dfrac{1+2k}{1+k} = \sqrt{\dfrac{(1+2k)d}{k}}$ となり、最小時間は気持ちのよいほど簡潔な形になる。
- $\alpha = \beta$、すなわち $k = 1$ とする。このとき最適点は $x = \frac{4}{3}d$ であり、公式から $cT = 2\sqrt{4d/3} - \sqrt{d/3} = \sqrt{3d}$ が得られ、直前の検算と一致する。
- ちょうど境界の $x = d/k$ では家の戸口にかろうじてたどり着くだけであり、$f'(x) \to -\infty$ となるので、出発点を少し後ろにずらせば確実に時間が短縮される。

- いくつかの無作為な角度と距離について、短い時間間隔ごとに運動を数値的に進めて計算したところ、T の公式が有効数字 5 桁まで再現された。また、コンピュータで x を探索すると、最小値は上で求めた値のところにあった。

よくある間違い

- t_2 の 2 次方程式で大きい方の解をとってしまう。それは下り戻りながら家を通過する時刻である。
- 信号での速さは与えられておらず、最初の区間から引き継がなければならないことを忘れる。
- 条件 $x \geq d/k$ を落としてしまう。これこそが $\sqrt{k^2x - kd}$ を実数にする条件である。

STEP のその先へ

最小時間がすっきりした形になることは、より広いテーマを示唆している。移動時間を最小にするように経路や出発点を選ぶ問題は**変分法**（calculus of variations）の主題であり、その最も有名な問題である最速降下線（brachistochrone）の問題は、重力のもとで最も速く降下する曲線を求めるものである。大学 1 年の力学では、保存力（conservative force）については質点が到達できる場所はエネルギーだけでわかるが、時間を求めるには運動方程式（equation of motion）を積分する必要がある、という考え方にも出会うだろう。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この両方の考え方を丁寧に展開している。

解答例

STEP I 2018、第 10 問

力学 ・ 連結された質点

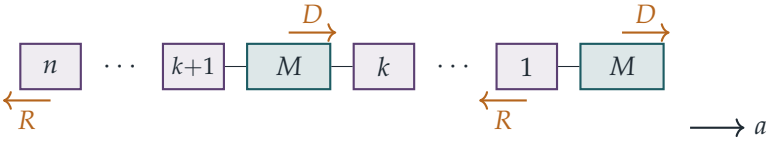
> **STEP I 2018、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q10

鍵となる考え方

どの車両も加速度（acceleration）は等しいので、まず列車全体からそれを一度だけ求め、次に列車のうち最も扱いやすい部分にニュートン（Newton）の第 2 法則（Newton's second law）を適用する。列車をある連結器（coupling）のところで切り離すと、その連結器の張力（tension）が外力（external force）として現れる。後半の小問を易しくする工夫は、先頭の張力 T を、先頭の機関車から求める方法と、その後ろにあるものの全体から求める方法の二通りで計算することである。こうすると T がただ一つの量 $R + ma$ と結びつき、この量が他のすべての連結器の張力も決めることになる。

解答

モデル化。 各機関車と各客車を水平な線路上を動く質点（particle）とみなし、連結器を、張力も圧縮（compression）も受けうる軽い棒（light rod）とみなす。機関車には抵抗（resistance）がはたらかず、各車両にはたらく鉛直方向の力はつり合っているので、考えるべきは水平方向の力だけである。加速度 a は進行方向を正にとる。客車に前から順に $1, 2, \ldots, n$ と番号をつけ、客車 $1, \ldots, k$ が二つの機関車の間に、客車 $k+1, \ldots, n$ が 2 両目の機関車の後ろにあるとする（ただし $1 \le k \le n-1$）。



（各客車には後ろ向きに抵抗 R がはたらくが、図には二つだけ描いてある。）

加速度。 列車全体の質量は $nm+2M$ であり、連結器の力は内力なので、

$$(nm+2M)a = 2D - nR, \qquad a = \frac{2D-nR}{nm+2M} > 0,$$

となる。$2D > nR$ であるから、これは正である。特に $R+ma>0$ であり、この事実を何度も用いる。

小問 (i)

先頭の機関車は D によって前向きに引かれ、その連結器の張力 T によって後ろ向きに引かれるので、

$$D - T = Ma.$$

したがって

$$\begin{aligned} T = D - \frac{M(2D-nR)}{nm+2M} &= \frac{D(nm+2M) - 2MD + nMR}{nm+2M} \\ &= \frac{n(mD+MR)}{nm+2M}, \end{aligned}$$

となり、題意は示された。

T のより簡潔な形。 今度は先頭の機関車より後ろにあるもの全体、すなわち機関車 1 両と客車 n 両に注目する。その全質量は $M+nm$ である。これは T と 2 両目の機関車の D によって前向きに引かれ、nR の抵抗を受ける：

$$T + D - nR = (M+nm)a.$$

ここから $D - T = Ma$ を引くと D が消去される：

$$2T - nR = nma, \qquad \text{よって} \qquad T = \tfrac{1}{2}n\,(R+ma).$$

小問 (ii)

先頭以外の連結器は、次の二種類のいずれかである。

2 両目の機関車より前にある連結器。 $1 \le j \le k$ に対し、客車 j のすぐ後ろの連結器の張力を T_j とする（したがって T_k は客車 k と 2 両目の機関車の間の連結器の張力である）。先頭の機関車と客車 $1,\dots,j$ の質量は $M+jm$ であり、これらは T_j によって後ろ向きに引かれる：

$$D - jR - T_j = (M+jm)a \quad \Longrightarrow \quad T_j = (D-Ma) - j(R+ma) = T - j(R+ma).$$

$R+ma>0$ かつ $j \ge 1$ であるから、k の値にかかわらず、このような連結器はすべて $T_j < T$ を満たす。

2 両目の機関車より後ろにある連結器。$k+1 \le j \le n$ に対し、客車 j のすぐ前の連結器の張力を S_j とする。その後ろにある車両、すなわち客車 $j, \dots, n$ の $n-j+1$ 両に注目するのが最も簡単である。これらを前向きに引くのは S_j だけである：

$$S_j - (n-j+1)R = (n-j+1)ma \quad \Longrightarrow \quad S_j = (n-j+1)(R+ma).$$

考えてみよう これら後方の連結器のうち、最大の張力を受けるのはどれか。また、それは T と比べてどうか。

張力 S_j は j が増えると減少するので、最大のものは 2 両目の機関車のすぐ後ろの連結器の $S_{k+1} = (n-k)(R+ma)$ である。これを $T = \frac{1}{2}n(R+ma)$ と比べ、$R+ma > 0$ で割ると、

$$S_{k+1} < T \iff n-k < \tfrac{1}{2}n \iff k > \tfrac{1}{2}n.$$

よって $k > \frac{1}{2}n$ ならば、後方の連結器の張力はすべて $S_{k+1} < T$ 以下であり、前方の連結器はすべて $T_j < T$ を満たす。したがって T は他のどの連結器の張力よりも大きく、題意は示された。（この条件は必要条件でもある。$k \le \frac{1}{2}n$ ならば $S_{k+1} \ge T$ となる。）

小問 (iii)

客車 k と 2 両目の機関車の間の連結器を考える。小問 (ii) と $T = \frac{1}{2}n(R+ma)$ より、

$$T_k = T - k(R+ma) = \left(\tfrac{1}{2}n - k\right)(R+ma).$$

$k > \frac{1}{2}n$ ならば、第 1 の因数は負、第 2 の因数は正なので $T_k < 0$ となる。つまり、この連結器は圧縮を受けている。物理的には、先頭の機関車が前の k 両の客車（列車の半分より多い）を引く一方で、2 両目の機関車がそれらを後ろから押しているのである。

検算

- $n=5$、$k=3$、$M=10$、$m=2$、$D=20$、$R=1$ とする。このとき $a = \frac{35}{30} = \frac{7}{6}$ であり、公式から $T = \frac{5(40+10)}{30} = \frac{25}{3}$ となって、$D - Ma = 20 - \frac{35}{3}$ と一致する。列車を前から後ろへたどると、張力は $\frac{25}{3}, 5, \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}$（客車 3 と機関車の間）、続いて $\frac{20}{3}, \frac{10}{3}$ となる。よって T が最大であり、予測どおり圧縮を受ける連結器はちょうど一つである。
- $M=0$ とすると機関車は単なる力となり、$T = D$ となる。質量のない先頭機関車ならば当然そうなるはずである。
- 各張力は力に無次元（dimensionless）の比を掛けたものなので、単位は正しい。

よくある間違い

- 機関車にも抵抗を与えてしまう。問題では抵抗は客車にのみはたらく。
- 2 両目の機関車の駆動力（driving force）が、その機関車を含む列車の部分にはたらくことを忘れる。
- すべての連結器が張力を受けていなければならないと思い込む。連結器は棒なので、負の張力は物理的にまったく自然な「押す力」である。

STEP のその先へ

系をいくつかの部分に分け、それぞれについて別々に自由体図（free-body diagram）を描き、内力（internal force）が大きさが等しく向きが反対の対として現れるようにすることは、連結された物体の力学の基礎である。大学 1 年次の講義では、これはトラス（truss）や骨組み（framework）の解析へと発展する。そこでは多くの部材の内力を一度に求め、部材の中には引張を受ける引張材（tie）ではなく、圧縮を受ける圧縮材（strut）となるものがあることがわかる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、自由体図とニュートンの第 3 法則（Newton's third law）を丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 2018、第 11 問

力学 ・ 斜面上の摩擦

STEP I 2018、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/18-s1-q11

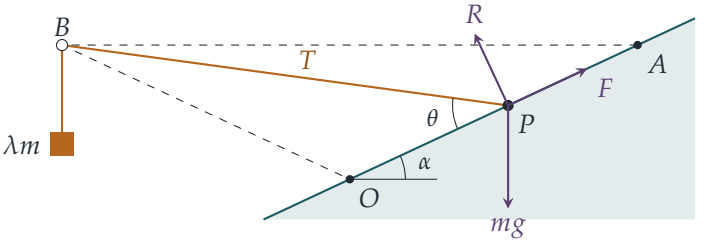
鍵となる考え方

まず幾何から始める。$OA = OB = d$ であるから三角形 OAB は二等辺三角形（isosceles triangle）であり、AB が水平であるからその 2 つの底角はともに α である。糸は P から O の側を越えて B の方へ戻っていくので、P を一部は斜面に沿って**下向き**に、一部は斜面から**離れる**向きに引く。したがって摩擦力（friction）が質点を支えなければならず、一方で垂直抗力（normal reaction）は張力（tension）によって小さくなる。釣り合い（equilibrium）の各条件は θ に関する不等式（inequality）であり、それが (i) で求めた範囲のすべての θ で成り立たなければならない。そこで最も厳しい位置を探すことになる。

解答

P とつり下げた物体を質点（particle）、糸を軽くて伸び縮みしない（inextensible）もの、滑車を滑らか（smooth）なものとしてモデル化する。すると張力は糸全体で等しい。つり下げた質点は釣り合っているので、

$$T = \lambda mg.$$



小問 (i)

O を原点とし、x 軸を水平にとる。すると $A = (d\cos\alpha,\ d\sin\alpha)$ である。点 B は A と同じ高さにあり、O からの距離が d であるから、$B = (\pm d\cos\alpha,\ d\sin\alpha)$ となる。プラスの符号は A 自身を与えるので、

$$B = (-d\cos\alpha,\ d\sin\alpha).$$

この点は斜面の直線より上にあり、O に関して A と反対側にある。三角形 OAB において $OA = OB = d$ であり、AB は水平で AO は水平と角 α をなすから $\angle OAB = \alpha$ である。よって $\angle OBA = \alpha$ でもあり、$\angle AOB = 180^\circ - 2\alpha$ となる。$\alpha < 45^\circ$ であるから、これは鈍角（obtuse angle）である。

P を OA 上の点とする。糸は PB に沿って張られ、それが L となす鋭角（acute angle）は $\theta = \angle BPO$ である。この角が鋭角であるのは、以下に示すとおり高々 $2\alpha < 90^\circ$ だからである。この角は三角形 PAB の外角（exterior angle）であるから、

$$\theta = \angle BPO = \angle PAB + \angle PBA = \alpha + \angle PBA.$$

P が O から A へ動くとき、半直線 BP は BO から BA の方へ回転するので、$\angle PBA$ は $\angle OBA = \alpha$ から 0 まで減少する。したがって

$$\alpha \le \theta \le 2\alpha,$$

であり、P が O にあるとき $\theta = 2\alpha$、P が A に近づくとき $\theta \to \alpha$ である。

これが力について何を意味するかに注意しよう。斜面を下る向き PO から測ると、糸は鋭角 θ をなし、斜面から離れる向きを指している。よって張力は、斜面に沿って下向きの成分 $T\cos\theta$ と、斜面に垂直で P を斜面から引き離す成分 $T\sin\theta$ をもつ。

小問 (ii)

斜面に垂直な方向に力を分解する（resolve）と、

$$R = mg\cos\alpha - T\sin\theta = mg(\cos\alpha - \lambda\sin\theta).$$

> **考えてみよう** μ がわからないこの小問では、摩擦力はどこに関わるのだろうか？

摩擦力は必要ない。μ がどんな値であっても、P は斜面に接したままでなければならないので、$R \ge 0$ が必要である。（実際には $R > 0$ である。もし $R = 0$ なら摩擦力は働かず、斜面に沿った $mg\sin\alpha + T\cos\theta > 0$ と釣り合うものが何もなくなる。）よって、すべての点で釣り合うためには

$$\lambda\sin\theta \le \cos\alpha \quad \text{現れるすべての} \theta \text{ について.}$$

が必要である。sin は $[\alpha, 2\alpha] \subset [0^\circ, 90^\circ)$ で増加するので、$\sin\theta$ の最大値は $\theta = 2\alpha$ で（あるいは P が O に近づくとき、いくらでもそれに近く）とられる。したがって $\lambda \sin 2\alpha \leq \cos\alpha$、すなわち $2\lambda \sin\alpha \cos\alpha \leq \cos\alpha$ である。$\cos\alpha > 0$ で割ると

$$2\lambda \sin\alpha \leq 1,$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (iii)

重力と張力はともに P を斜面に沿って下向きに引くので、摩擦力 F は斜面に沿って上向きに働く。斜面に沿った方向に分解すると、

$$F = mg\sin\alpha + T\cos\theta = mg(\sin\alpha + \lambda\cos\theta).$$

この位置での釣り合いが可能であるための必要十分条件は $F \leq \mu R$ である（$F > 0$ であるから、これから $R > 0$ も従う）。$\mu = \tan\beta$ とおくと、条件は

$$\sin\alpha + \lambda\cos\theta \leq \frac{\sin\beta}{\cos\beta}(\cos\alpha - \lambda\sin\theta).$$

となる。$\cos\beta > 0$ を掛けて λ を含む項をまとめると、

$$\lambda(\cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta) \leq \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha,$$
$$\lambda\cos(\beta - \theta) \leq \sin(\beta - \alpha).$$

ここで $0 < \beta < 90^\circ$ かつ $0 < \theta \leq 2\alpha < 90^\circ$ であるから、$-90^\circ < \beta - \theta < 90^\circ$ であり $\cos(\beta - \theta) > 0$ である。よって角 θ の位置で釣り合いが可能であるのは、ちょうど

$$\lambda \leq \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\beta - \theta)}.$$

のときである。これがすべての位置で成り立つためには、$\cos(\beta - \theta)$ が最大となるところ、すなわち範囲 $\alpha \leq \theta \leq 2\alpha$ の中で θ が β に最も近いところで成り立たなければならない。

$\beta \geq 2\alpha$ の場合。 範囲内のすべての θ は β 以下であるから、$0 \leq \beta - 2\alpha \leq \beta - \theta \leq \beta - \alpha < 90^\circ$ である。余弦は $[0^\circ, 90^\circ)$ で減少するので、$\cos(\beta - \theta)$ は $\theta = 2\alpha$、すなわち O の位置（またはそのすぐ隣）で最大となる。したがって必要条件（necessary condition）は

$$\lambda \leq \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\beta - 2\alpha)}.$$

である。ほかのすべての位置では λ に対する制約がこれより弱いので、これは十分条件（sufficient condition）でもある。

$\alpha \le \beta \le 2\alpha$ の場合。このとき $\theta = \beta$ は範囲内にある。小問 (i) により、L 上で O と A の間にある P のある位置が、ちょうどこの角を与える（$\beta = \alpha$ のときは $P \to A$ の極限として近づく）。そこでは $\cos(\beta - \theta) = 1$ でとりうる最大値となり、条件は

$$\lambda \le \sin(\beta - \alpha).$$

となる。その位置では、糸は全接触力（total contact force）に垂直である。全接触力は、摩擦力が限界に達しているとき法線と角 β をなす。$\beta = \alpha$ の場合はこれから $\lambda = 0$ が従う。このとき質点は自身の重さだけでちょうど限界釣り合い（limiting equilibrium）にあり、糸にわずかでも張力があれば滑り出してしまう。

検算

- $\beta = 2\alpha$ のとき、2 つの答えは一致する。このとき $\cos(\beta - 2\alpha) = 1$ であり、どちらも $\lambda \le \sin\alpha$ を与える。
- $\lambda = 0$ とすると、条件は $\sin(\beta - \alpha) \ge 0$、すなわち $\mu \ge \tan\alpha$ となる。これは粗い斜面上に物体が静止するためのおなじみの条件である。
- $\alpha = 20°$、$\beta = 50°$ のとき、上限は $\sin 30° / \cos 10° \approx 0.508$ である。コンピュータによる検証では、OA 上の多数の点に P を置いて力を直接分解し、すべての位置で釣り合いを与える最大の λ が、何千組ものランダムな α と β について両方の公式と一致することを確かめた。また、$\alpha \le \theta \le 2\alpha$ であることも確認した。

よくある間違い

- B を O に関して A と同じ側に置いてしまう。$OB = OA$ かつ $B \ne A$ であるから、B は O の反対側にあり、したがって張力は P を斜面に沿って上向きではなく**下向き**に引く。
- 張力が垂直抗力を小さくし、その結果、利用できる摩擦力も小さくなることを忘れる。
- (iii) の 2 つ目の場合で、両端の位置だけを調べる。最も厳しい位置は $\theta = \beta$ となるところであり、それは範囲の内部にある。

STEP のその先へ

組み合わせ $\lambda\cos(\beta - \theta) \le \sin(\beta - \alpha)$ は、**摩擦角**（angle of friction）を代数的に表したものである。全接触力は法線から角 β 以内になければならず、この領域はいわゆる

摩擦円錐（cone of friction）である。この円錐で考えるようにすると、多くの摩擦の問題は 1 行の幾何に帰着する。「すべての位置で」釣り合うことを求めるのは小さな最適化問題であり、技術者が最悪の場合（worst case）を想定して設計するときも同じように推論する。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、摩擦と自由物体図（free-body diagram）を丁寧に扱っており、挑戦しがいのある問題も数多く収録している。

解答例

STEP I 2018、第 12 問

確率・統計 ・ 復元抽出

> **STEP I 2018、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q12

鍵となる考え方

表の出た回数を、1 回ごとの投げに対応する 2 つの指示変数（indicator variable）の和として書く。和の期待値（expectation）は、各回の投げが独立（independent）であるかどうかにかかわらず期待値の和に等しいので、平均はたやすく求まる。分散（variance）はただ 1 つの数、すなわち 2 回の投げがともに表となる確率で決まり、復元抽出（drawing with replacement）と非復元抽出（drawing without replacement）が違ってくるのはまさにこの点である。

解答

以下を通して、$p = \frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3)$ および

$$q = p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1.$$

とおく。どの硬貨も等しい確率で選ばれ、硬貨が選ばれたあとの投げは互いに独立であると仮定する。

小問 (i)

硬貨 k が選ばれる事象を C_k とすると、$\mathrm{P}(C_k) = \frac{1}{3}$ である。全確率の法則（law of total probability）より、

$$\mathrm{P}(\text{表}) = \sum_{k=1}^{3} \mathrm{P}(C_k)\,\mathrm{P}(\text{表} \mid C_k) = \tfrac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3) = p.$$

小問 (ii)

1 回目と 2 回目の投げで表が出ることの指示変数をそれぞれ X_1、X_2 とすると、$N_1 = X_1 + X_2$ である。1 枚目の硬貨は戻されるので、2 回目の投げは 1 回目とまったく同じ状況で行われ、小問 (i) より $\mathrm{P}(X_1 = 1) = \mathrm{P}(X_2 = 1) = p$ である。したがって

$$\mathrm{E}(N_1) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) = 2p.$$

分散を求めるには $\mathrm{P}(X_1 = 1,\, X_2 = 1)$ が必要である。2 回の選択は独立であり、硬貨の順序対 (j,k) 9 通りはそれぞれ確率 $\frac{1}{9}$ をもち、その対が与えられたとき 2 回とも表となる確率は $p_j p_k$ である。よって

$$\mathrm{P}(X_1 = 1,\, X_2 = 1) = \frac{1}{9}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} p_j p_k = \left(\frac{p_1 + p_2 + p_3}{3}\right)^2 = p^2 = \mathrm{P}(X_1 = 1)\,\mathrm{P}(X_2 = 1).$$

他の結果についても同じように積に分解できるので、X_1 と X_2 は独立であり、$N_1 \sim \mathrm{B}(2, p)$ となる。直接計算することもできる。$X_i^2 = X_i$ であるから、

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N_1^2) &= \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + 2\,\mathrm{E}(X_1 X_2) = 2p + 2p^2,\\ \mathrm{Var}(N_1) &= 2p + 2p^2 - (2p)^2 = 2p(1-p),\end{aligned}$$

となり、求める結果が得られる。

小問 (iii)

今度は 2 枚の硬貨を戻さずに 1 枚ずつ順に選び、1 枚目と 2 枚目に選んだ硬貨で表が出ることの指示変数をそれぞれ Y_1、Y_2 とすると、$N_2 = Y_1 + Y_2$ である。どの硬貨も 1 枚目に選ばれる確率は等しく、対称性からどの硬貨も 2 枚目に選ばれる確率は等しいので、小問 (i) と同様に $\mathrm{P}(Y_1 = 1) = \mathrm{P}(Y_2 = 1) = p$ であり、

$$\mathrm{E}(N_2) = 2p.$$

考えてみよう 小問 (ii) での P(2 回とも表) の計算をそのまま使えるだろうか？

使えない。同じ硬貨を 2 回選ぶことはもはやできないからである。今度は $j \neq k$ を満たす順序対 (j,k) が 6 通りあって同様に確からしく、各非順序対 $\{j,k\}$ は 2 回ずつ現れるので、

$$\mathrm{P}(Y_1 = 1,\, Y_2 = 1) = \frac{1}{6}\sum_{j\neq k} p_j p_k = \frac{2q}{6} = \frac{q}{3}.$$

これは一般には p^2 に等しくないので、Y_1 と Y_2 は独立ではない。再び $Y_i^2 = Y_i$ を用い

て、

$$\mathrm{E}(N_2^2) = \mathrm{E}(Y_1) + \mathrm{E}(Y_2) + 2\,\mathrm{E}(Y_1Y_2) = 2p + \tfrac{2}{3}q,$$
$$\mathrm{Var}(N_2) = 2p + \tfrac{2}{3}(p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1) - 4p^2.$$

小問 (iv)

差をとると、

$$\mathrm{Var}(N_1) - \mathrm{Var}(N_2) = \left(2p - 2p^2\right) - \left(2p + \tfrac{2}{3}q - 4p^2\right) = 2p^2 - \tfrac{2}{3}q.$$

ここで $9p^2 = (p_1 + p_2 + p_3)^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + 2q$ であるから、

$$\begin{aligned} 2p^2 - \tfrac{2}{3}q &= \tfrac{2}{9}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + 2q\right) - \tfrac{6}{9}q = \tfrac{2}{9}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_1p_2 - p_2p_3 - p_3p_1\right) \\ &= \tfrac{1}{9}\Big[(p_1 - p_2)^2 + (p_2 - p_3)^2 + (p_3 - p_1)^2\Big], \end{aligned}$$

となる。最後の等号は、3 つの平方を展開すると $2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - 2q$ となることによる。

実数の平方の和は負にならないので、$\mathrm{Var}(N_2) \le \mathrm{Var}(N_1)$ である。等号が成り立つのは 3 つの平方がすべて 0 となるとき、すなわち $p_1 = p_2 = p_3$ のとき、かつそのときに限る。以上で証明が完了する。

副産物として、小問 (iii) の答えのすっきりした形が得られる：

$$\mathrm{Var}(N_2) = 2p(1-p) - \tfrac{1}{9}\Big[(p_1 - p_2)^2 + (p_2 - p_3)^2 + (p_3 - p_1)^2\Big].$$

検算

- $p_1 = p_2 = p_3 = p$ ならば、どの硬貨も同じなので、硬貨の選び方は関係ないはずである。実際、どちらの回数も $\mathrm{B}(2, p)$ に従い、分散は一致して、等号成立の場合と合っている。
- $p_1 = \frac{1}{2}$、$p_2 = \frac{1}{3}$、$p_3 = \frac{1}{6}$ とすると、$p = \frac{1}{3}$、$q = \frac{11}{36}$ である。このとき $\mathrm{Var}(N_1) = \frac{4}{9}$、$\mathrm{Var}(N_2) = \frac{2}{3} + \frac{11}{54} - \frac{4}{9} = \frac{23}{54}$ であり、差は $\frac{1}{54}$ で、$\frac{1}{9}\left(\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{54}$ と一致する。すべての結果を手で書き出しても同じ値が得られる。
- 極端な場合 $p_1 = p_2 = 1$、$p_3 = 0$：小問 (iii) では、硬貨 1 と 2 がともに選ばれる場合を除いて、選ばれた 2 枚のうちちょうど 1 枚が必ず表を出す硬貨である。よって N_2 は確率 $\frac{1}{3}$ で 2、それ以外では 1 となり、分散は $\frac{2}{9}$ である。公式からも $2p + \frac{2}{3}q - 4p^2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$ が得られる。

よくある間違い

- 小問 (iii) の 2 回の投げを独立とみなして、再び $2p(1-p)$ を得てしまう。小問 (iv) の要点はまさに、それらが独立でないことにある。
- $\mathrm{Var}(N_1)$ を各硬貨の分散 $2p_k(1-p_k)$ の平均として書いてしまう。これは硬貨を無作為に選ぶことから生じる余分なばらつきを無視しており、しかも小問 (ii) では投げるたびに異なる硬貨が使われうる。

STEP のその先へ

小問 (ii) と (iii) の違いは、復元抽出と非復元抽出の違いである。非復元抽出では各回の抽出が負の相関（negative correlation）をもち、それによって分散が小さくなる。同じ効果が標本調査における「有限母集団修正（finite population correction）」を生み、また超幾何分布（hypergeometric distribution）が同じ平均をもつ二項分布（binomial distribution）よりも分散が小さい理由にもなっている。小問 (iv) の代数計算は恒等式 $\sum p_k^2 - \sum_{j<k} p_j p_k = \frac{1}{2}\sum_{j<k}(p_j - p_k)^2$ であり、分散が決して負にならないという事実の近い親戚である。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）は、指示変数、共分散（covariance）、超幾何分布をまさにこの精神で扱っている。

解答例

STEP I 2018、第 13 問

確率・統計 ・ 二項分布とベイズの定理

STEP I 2018、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/18-s1-q13

鍵となる考え方

すべては一つの数え上げに帰着する。受験者が k 問に解答し、そのうち j 問に正解すれば、得点は $2j-(k-j)=3j-k$ である。したがって合格するとは少なくとも $(k+5)/3$ 問に正解することであり、これにより各 k について、どの二項分布の項を足し合わせればよいかが正確にわかる。小問 (iii) では、各問題に三つの結果（正解、不正解、未解答）があると考えるのがうまいやり方で、これにより問題はただ一つの多項的な数え上げ（multinomial count）に帰着する。

解答

以下を通して、無作為に選んだ解答が正しい確率（probability）を $p=\frac{1}{n}$ とし、$q=1-p$ とおく。$n\geq 2$ であるから、$0<p\leq\frac{1}{2}$ である。

小問 (i)

A がちょうど k 問に解答するときに合格する確率を P_k とする。各解答の選択は独立（independent）であるから、正解数 J は二項分布（binomial distribution）$\mathrm{B}(k,p)$ に従う。得点は $3J-k$ であるから、合格するのは

$$3J-k\geq 5 \iff J\geq\frac{k+5}{3}.$$

のときであり、かつそのときに限る。k の値を順に調べる。

- $k=0,1,2$：それぞれ $J\geq\frac{5}{3},2,\frac{7}{3}$、すなわち $J\geq 2$、$J\geq 2$、$J\geq 3$ が必要であるが、$J\leq k$ であるからこれらは不可能である（最高得点は $2k\leq 4$）。よって $P_0=P_1=P_2=0$ である。

- $k=3$：$J \geq \frac{8}{3}$、すなわち $J=3$ が必要であり、$P_3 = p^3$ である。
- $k=4$：$J \geq 3$ が必要であるから、

$$P_4 = \binom{4}{3} p^3 q + p^4 = 4p^3(1-p) + p^4 = p^3(4-3p).$$

- $k=5$：$J \geq \frac{10}{3}$、すなわち $J=4$ または 5 が必要であるから、

$$P_5 = \binom{5}{4} p^4 q + p^5 = 5p^4(1-p) + p^5 = p^4(5-4p).$$

次に P_4 を二つの対抗馬と比較する。$p<1$ より $4-3p>1$ であるから、$P_4 > p^3 = P_3$ である。また、

$$P_4 - P_5 = p^3\left[(4-3p) - p(5-4p)\right] = p^3\left(4p^2 - 8p + 4\right) = 4p^3(1-p)^2 > 0,$$

である。これは $0<p<1$ による。さらに $P_4 > 0$ は $P_0 = P_1 = P_2 = 0$ よりも大きいから、P_4 が真に最大であり、A は $k=4$ を選ぶべきである。これが示すべきことであった。

考えてみよう 5 問すべてに解答すれば、得点の機会は必ず増えるのではないか？

この場合はそうではない。5 問に解答すると 4 問の正解が必要になる。5 問目の解答は不正解のたびに 1 点を失い、しかも正解よりも不正解になることの方がはるかに多いからである。4 問に解答すれば、3 問正解で十分である。因数分解 $4p^3(1-p)^2$ は、大きな n に限らず、すべての $n \geq 2$ についてこの優位性を示している。

小問 (ii)

B が解答する問題数を K とすると、$k=0,\ldots,5$ に対して $\mathrm{P}(K=k) = \frac{1}{6}$ である。また B が合格するという事象を S とする。$K=k$ という条件のもとでは、B はまさに A と同じ立場にあるから、$\mathrm{P}(S \mid K=k) = P_k$ である。ベイズの定理（Bayes' theorem）により、

$$\mathrm{P}(K=4 \mid S) = \frac{\frac{1}{6}P_4}{\frac{1}{6}(P_0 + P_1 + \cdots + P_5)} = \frac{p^3(4-3p)}{p^3 + p^3(4-3p) + p^4(5-4p)}.$$

p^3（これは 0 でない）で約分すると、分母は $1+4-3p+5p-4p^2 = 5+2p-4p^2$ となるから、

$$\mathrm{P}(K=4 \mid S) = \frac{4-3p}{5+2p-4p^2}.$$

$p = \frac{1}{n}$ を代入し、分子と分母に n^2 を掛けると、

$$\mathrm{P}(K=4 \mid S) = \frac{4n^2-3n}{5n^2+2n-4} = \frac{n(4n-3)}{5n^2+2n-4}.$$

小問 (iii)

各問題について、C の硬貨投げと解答の選択は互いに独立であり、また他の問題で起こることとも独立である。したがって各問題は独立に、次の三つの結果のいずれかをとる。

$$\begin{aligned} \text{正解 } (+2): &\quad \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}, \\ \text{不正解 } (-1): &\quad \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{n-1}{n+1}, \\ \text{未解答 } (0): &\quad \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

C が c 問に正解し、w 問で不正解になったとする ($c+w\le 5$)。合格するのは $2c-w\ge 5$ のときである。このとき $c\ge 3$ でなければならず、さらに次のようになる。

- $c=3$：$w\le 1$ が必要である。
- $c=4$：$c+w\le 5$ であるから、$w\le 1$ は自動的に成り立つ。
- $c=5$：$w=0$ である。

c 問の正解、w 問の不正解、$5-c-w$ 問の未解答を割り当てる方法の数は、多項係数 (multinomial coefficient) $\frac{5!}{c!\,w!\,(5-c-w)!}$ である。正解と未解答は同じ確率 $\frac{1}{n+1}$ をもつから、各並べ方の確率は $\dfrac{(n-1)^w}{(n+1)^5}$ である。五つの場合を足し合わせる。

(c,w)	並べ方の数	確率 $\times(n+1)^5$
$(3,0)$	10	10
$(3,1)$	20	$20(n-1)$
$(4,0)$	5	5
$(4,1)$	5	$5(n-1)$
$(5,0)$	1	1

合計は $16+25(n-1)=25n-9$ であるから、

$$\mathrm{P}(\text{C が合格})=\frac{25n-9}{(n+1)^5}.$$

検算

- $n=2$ のとき：$P_3=\frac{1}{8}$、$P_4=\frac{5}{16}$、$P_5=\frac{3}{16}$ であるから、$k=4$ が最もよい。(ii) では公式から $\frac{2\cdot 5}{20}=\frac{1}{2}$ が得られ、直接計算した $\frac{5/16}{10/16}$ と一致する。

- (iii) で $n = 3$ のとき、答えは $\frac{66}{1024} \approx 0.0645$ であり、200 000 回の試験をコンピュータでシミュレーションしたところ 0.0644 となった。また三つの公式はいずれも、$n = 2, \ldots, 29$ についてコンピュータによる厳密な数え上げと一致する。
- $n \to \infty$ のとき、(ii) の答えは $\frac{4}{5}$ に近づく。当て推量がほとんど望みのないとき、合格はほぼ必ず 4 問解答（3 問正解が必要）から生じ、5 問解答（4 問正解が必要）や 3 問解答（3 問すべての正解が必要で、その確率 p^3 は $4p^3$ よりずっと小さい）からはほとんど生じないのである。

よくある間違い

- 5 問に解答した場合、3 問正解では $6 - 2 = 4$ となり不合格であることを忘れる。4 問の正解が必要である。
- (ii) で分母から P_3 を落とす。3 問に解答して 3 問すべてに正解することも、合格する方法の一つである。
- (iii) を「確率 $\binom{5}{k}h^k(1-h)^{5-k}$ で k 問に解答する」と扱ってから小問 (i) を用いる方法でも解けるが、項を落としやすい。三つの結果による数え上げの方がすっきりしている。

STEP のその先へ

小問 (iii) は**間引き**（thinning）の一例である。各問題はある確率で残され、結果は独立なままであるから、正解・不正解・未解答の個数は多項分布（multinomial distribution）に従う。小問 (ii) はベイズ更新（Bayesian updating）であり、これは現代統計学の多くを支える考え方である。どちらも Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）や、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）で展開されている。

解答例

STEP II 2018、第 1 問

純粋数学 • 多項式の根

> **STEP II 2018、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q1

鍵となる考え方

係数（coefficient）を前から読んでも後ろから読んでも同じなので、x^2 で割ると、この 4 次式（quartic）は $t = x + \frac{1}{x}$ の 2 次式（quadratic）になる。t の各値は 4 次方程式の根（root）の組 $k, \frac{1}{k}$ を与える。また実数 x からは $|t| \geq 2$ しか得られず、$t = \pm 2$ となるのはちょうど $x = \pm 1$ のときである。したがって、相異なる根の個数を数える問題は、t がどのような値をとるか、そしてそのいずれかが ± 2 であるかどうかを調べる問題に帰着する。

解答

根は逆数の組で現れる

$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$ とおく。$P(0) = 1 \neq 0$ であるから、任意の根 k は零ではなく、

$$k^4 P\left(\frac{1}{k}\right) = 1 + ak + bk^2 + ak^3 + k^4 = P(k) = 0.$$

$k^4 \neq 0$ であるから $P(\frac{1}{k}) = 0$ となり、k^{-1} も根である。すなわち、根は逆数（reciprocal）どうしの組で現れる。

置換 $t = x + \frac{1}{x}$

$P(x) = 0$ の両辺を x^2 で割り（$x \neq 0$ なので許される）、$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ を用いると、

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0 \iff t^2 + at + (b - 2) = 0.$$

この 2 次方程式の根を t_1, t_2 とすると、$t_1 + t_2 = -a$ かつ $t_1 t_2 = b - 2$ である。展開すると

$$P(x) = (x^2 - t_1 x + 1)(x^2 - t_2 x + 1),$$

が成り立つことがわかる。実際、右辺は $x^4 - (t_1 + t_2)x^3 + (2 + t_1 t_2)x^2 - (t_1 + t_2)x + 1$ となるからである。よって、P の根は、$x^2 - t_1 x + 1$ の根と $x^2 - t_2 x + 1$ の根を合わせたものである。

ここで、すべての根が実数であるという仮定を用いる。各因数（factor）$x^2 - t_i x + 1$ は 2 つの実数解 k と $\frac{1}{k}$ をもち（その積は 1 である）、$t_i = k + \frac{1}{k}$ は実数である。実数 $k \neq 0$ に対して、$k + \frac{1}{k}$ は k と同じ符号をもち、

$$\left|k + \tfrac{1}{k}\right| - 2 = \frac{(|k| - 1)^2}{|k|} \geq 0,$$

であって、等号は $k = \pm 1$ のときに限り成り立つ。よって次のようになる。

- $|t_i| > 2$ ならば、因数 $x^2 - t_i x + 1$ は相異なる 2 つの実数解をもち、そのいずれも ± 1 ではない。
- $t_i = 2$ ならば、この因数は $(x - 1)^2$ であり、$t_i = -2$ ならば $(x + 1)^2$ である。

また、x によって $t = x + \frac{1}{x}$ が定まるので、異なる t の値が共通の根 x をもつことはない。

小問 (i)

相異なる根が k ただ 1 つならば $\frac{1}{k} = k$ であるから、$k = \pm 1$ かつ $P(x) = (x \mp 1)^4$ である。展開すると

$$(x - 1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1, \qquad (x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1,$$

となり、どちらも求める形をしている。よって、求める値は $a = -4$, $b = 6$ と $a = 4$, $b = 6$ である。

小問 (ii)

t_1, t_2（いずれも $|t_i| \geq 2$ を満たす実数）について、起こりうる場合を順に調べる。

- $t_1 \neq t_2$ で、どちらも $|t_i| > 2$ のとき：相異なる根は 4 つ。
- $t_1 = t_2$ のとき：4 次式は完全平方（perfect square）$(x^2 - t_1 x + 1)^2$ であるから、相異なる根は $|t_1| > 2$ ならば 2 つ、$t_1 = \pm 2$ ならば 1 つである。
- $\{t_1, t_2\} = \{2, -2\}$ のとき：$P(x) = (x - 1)^2 (x + 1)^2$ であり、相異なる根は 2 つ。

- t_i の一方が ± 2 で、他方の絶対値が 2 より大きいとき：根は ± 1（重根（double root））と他の 2 つであり、相異なる根は 3 つ。

考えてみよう なぜ t の値の一方は ± 2 でなければならないのか？

4 つの根のうち相異なるものが 3 つということは、ある根が重複しているということであり、上の場合分けから、相異なる根が 3 つとなるのは最後の場合に限られる。より直接的にいえば、根は逆数どうしの組に分かれるので、相異なる根の個数が奇数ならば、ある根は自分自身の逆数、すなわち ± 1 でなければならない。

よって、$t = 2$ または $t = -2$ が $t^2 + at + b - 2 = 0$ の根である。

$$\begin{aligned} t = 2: &\quad 4 + 2a + b - 2 = 0 \iff b = -2a - 2, \\ t = -2: &\quad 4 - 2a + b - 2 = 0 \iff b = 2a - 2. \end{aligned}$$

したがって、題意のとおり $b = 2a - 2$ または $b = -2a - 2$ である。

小問 (iii)

$b = 2a - 2$ のとき、t の 2 次式は

$$t^2 + at + 2a - 4 = (t + 2)(t + a - 2),$$

となるので、$t_1 = -2$ かつ $t_2 = 2 - a$ である。前者からは $(x + 1)^2$ が得られ、後者からは $x^2 - (2 - a)x + 1 = 0$ が得られるので、

$$x = -1\text{（2 重）}, \qquad x = \frac{2 - a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2}.$$

すべての根が実数であると与えられているので、これらは実数である。これは $a^2 - 4a = a(a - 4) \geq 0$、すなわち $a \leq 0$ または $a \geq 4$ と同値である。

最後の小問

(ii) より、相異なる根が 3 つであるためには $b = 2a - 2$ または $b = -2a - 2$ が必要である。逆に、$b = 2a - 2$（かつすべての根が実数）と仮定する。(iii) より t の値は -2 と $2 - a$ であり、上の場合分けから、$2 - a = \pm 2$ でない限り相異なる根はちょうど 3 つである。

- $a = 0, b = -2$：$t = \pm 2$ であり、$P(x) = (x^2 - 1)^2$ となって、相異なる根は 2 つしかない。
- $a = 4, b = 6$：$t = -2$ が 2 重であり、$P(x) = (x + 1)^4$ となって、根は 1 つである。

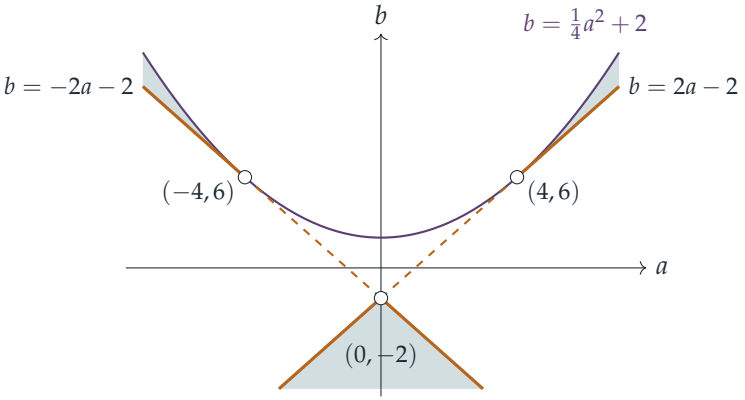
x を $-x$ に置き換えると、P は a を $-a$ に置き換えた同じ形の式になり、これにより 2 本の直線が入れ替わる。よって $b=-2a-2$ のとき、t の値は 2 と $-a-2$ であり、例外は $a=0, b=-2$ と $a=-4, b=6$ である。

したがって、すべての根が実数であるような実数 a, b に対して、$(*)$ が相異なる根をちょうど 3 つもつための必要十分条件は

$$b=2a-2 \text{ または } b=-2a-2, \qquad \text{ただし} (a,b)\neq(0,-2),\ (4,6),\ (-4,6).$$

である。なお、$(4,-10)$ と $(-4,-10)$ は除外されないことに注意する。たとえば $a=4$, $b=-10$ のとき $t=2$ と $t=-6$ となり、相異なる根は 3 つである。

下図は (a,b) 平面を表している。網掛けの領域は、すべての根が実数となる範囲である。すなわち、両方の直線の下側（t の一方の値が -2 以下で、他方が 2 以上）、または $|a|\geq 4$ における直線と放物線（parabola）$b=\frac{1}{4}a^2+2$ の間（t の 2 つの値が同じ側にある）である。放物線は $t_1=t_2$ となる点の集合であり、直線と $(\pm 4,6)$ で接する。答えは、網掛け領域の境界上にある 2 本の直線の実線部分から、3 つの白丸を除いたものである。



（直線の破線部分 $0<|a|<4$ は、すべての根が実数となる領域の外にある。(iii) で $a\leq 0$ または $a\geq 4$ が必要だったのはこのためである。）

検算

- $a=-4, b=-10$（$b=2a-2$ 上にあり、除外されない）をとる。このとき (iii) から $x=-1,-1,3\pm 2\sqrt{2}$ が得られ、実際 $(x+1)^2(x^2-6x+1)=x^4-4x^3-10x^2-4x+1$ である。根 $3\pm 2\sqrt{2}\approx 5.828,\ 0.172$ は、予想どおり互いに逆数になっている。
- 除外点 $a=0, b=-2$ では、4 次式は $x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2$ となり、相異なる根は 2 つしかない。

- $|a| \leq 10, |b| \leq 15$ の範囲で刻み幅 $\frac{1}{4}$ の格子上のすべての (a, b) について、コンピュータで根を数値的に求めた。すべての根が実数となる 1579 個の格子点のうち、相異なる根が 3 つとなったのは、上の条件から予測されるちょうど 88 個であった。

よくある間違い

- 例外点を忘れる：$(0, -2)$ と $(4, 6)$ がこの直線上にあるので、$b = 2a - 2$ だけでは必要条件であって十分条件ではない。
- 重複する根は ± 1 でなければならないと思い込む：組が重複した $k, k, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}$ もありうるが、その場合の相異なる根は 3 つではなく 2 つである。

STEP のその先へ

係数を前から読んでも後ろから読んでも同じ多項式は**回文多項式**（palindromic polynomial、あるいは相反多項式）とよばれ、置換 $t = x + \frac{1}{x}$ を用いると、偶数次のこうした多項式の次数を半分にできる。同じ置換で $x = e^{i\theta}$ とおくと $t = 2\cos\theta$ となる。これは $2\cos(2\pi/n)$ の最小多項式（minimal polynomial）を求める方法であり、ガウス（Gauss）が正 17 角形を扱った方法でもある。上の (a, b) 平面の曲線のように、多項式の根がどこで重なるかを記述するという考え方は、**判別式**（discriminant）へとつながる。多項式とその根についてさらに学ぶには、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）がよい。

解答例

STEP II 2018、第 2 問

純粋数学 • 凹関数

> **STEP II 2018、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q2

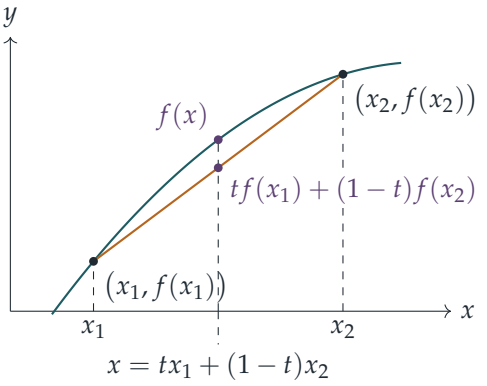
鍵となる考え方

t が 0 から 1 まで動くとき、点 $tx_1+(1-t)x_2$ は x_2 から x_1 まで動き、$tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$ はその点の真上にある弦の高さである。したがって凹性（concavity）とは、すべての弦が曲線の上または下側にある、ということを述べている。この 2 点の不等式が得られれば、それを 2 回用いることで 3 点版が得られ、$A+B+C=\pi$ のもとで適切な凹関数に適用することで、三角形に関する 2 つの不等式がともに導かれる。

解答

図示

$x=tx_1+(1-t)x_2$ とおく。このとき点 $\big(x,\ tf(x_1)+(1-t)f(x_2)\big)$ は $\big(x_2, f(x_2)\big)$ から $\big(x_1, f(x_1)\big)$ への弦（chord）を $(1-t):t$ の比に分ける点であり、したがって x の真上（または真下）で弦上にある。定義は、x における曲線の高さが弦の高さ以上であることを述べている。



$f'' < 0$ から凹性が従う理由

$x_1 = x_2$ のとき、または $t = 0$ あるいは $t = 1$ のときは、不等式は等号で成り立つ。そこで $0 < t < 1$ とし、一般性を失うことなく $x_1 < x_2$ とする（x_1, x_2 を入れ替えることは t と $1-t$ を入れ替えることにすぎない）。このとき $x = tx_1 + (1-t)x_2$ は $x_1 < x < x_2$ を満たし、

$$x - x_1 = (1-t)(x_2 - x_1), \qquad x_2 - x = t(x_2 - x_1).$$

平均値の定理（mean value theorem）により、

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), \qquad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2).$$

を満たす $c_1 \in (x_1, x)$ と $c_2 \in (x, x_2)$ が存在する。(a, b) 上で $f'' < 0$ であるから、f' はそこで狭義単調減少であり、$c_1 < c_2$ であるから $f'(c_1) > f'(c_2)$ となる。上の長さを代入し、正の因数 $x_2 - x_1$ を約すと、

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{1-t} > \frac{f(x_2) - f(x)}{t}.$$

$t(1-t) > 0$ を掛けると $tf(x) - tf(x_1) > (1-t)f(x_2) - (1-t)f(x)$、すなわち

$$f(x) > tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

を得る。よって f は (a, b) 上で凹である。言葉で言えば、曲線の傾きは減少し続けるので、x_1 から x への傾きは x から x_2 への傾きより大きく、曲線は弦より上に膨らむのである。

小問 (i)

考えてみよう どの 2 点を、どのような重みで平均すれば $\frac{1}{3}(u+v+w)$ になるか。

v と w をひとまとめにする。すなわち $x_1 = u$、$x_2 = \frac{1}{2}(v+w)$、$t = \frac{1}{3}$ とする。x_2 は v と w の間にあるので (a,b) に属し、

$$tx_1 + (1-t)x_2 = \tfrac{1}{3}u + \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2}(v+w) = \tfrac{1}{3}(u+v+w).$$

となる。定義より

$$f\Big(\frac{u+v+w}{3}\Big) \geq \tfrac{1}{3}f(u) + \tfrac{2}{3}f\Big(\frac{v+w}{2}\Big).$$

次に、$x_1 = v$、$x_2 = w$、$t = \frac{1}{2}$ として再び定義を用いると、$f\big(\frac{1}{2}(v+w)\big) \geq \frac{1}{2}f(v) + \frac{1}{2}f(w)$ である。この項の係数 $\frac{2}{3}$ は正であるから、代入しても不等号の向きは変わらない。

$$f\Big(\frac{u+v+w}{3}\Big) \geq \tfrac{1}{3}f(u) + \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\big(f(v)+f(w)\big) = \frac{f(u)+f(v)+f(w)}{3},$$

これが求める結果である。

小問 (ii)

$0 < x < \pi$ 上で $f(x) = \sin x$ とする。ここで $f''(x) = -\sin x < 0$ であるから、sin は $(0,\pi)$ 上で凹である。三角形の内角は $0 < A, B, C < \pi$ かつ $A+B+C = \pi$ を満たすので、$u = A$、$v = B$、$w = C$ として小問 (i) を用いると

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

となり、したがって $\sin A + \sin B + \sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ である。

小問 (iii)

$0 < x < \pi$ では $\sin x > 0$ であるから、$g(x) = \ln(\sin x)$ はそこで定義され、

$$g'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x, \qquad g''(x) = -\operatorname{cosec}^2 x < 0.$$

である。よって g は $(0,\pi)$ 上で凹であり、小問 (i) より

$$\frac{\ln\sin A + \ln\sin B + \ln\sin C}{3} \leq \ln\sin\frac{\pi}{3} = \ln\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

を得る。3 を掛けて対数をまとめると、$\ln(\sin A \sin B \sin C) \leq \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ となる。exp は増加関数であるから、

$$\sin A \times \sin B \times \sin C \leq \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

検算

どちらの上界も正三角形で達成される。実際、$3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.598$、$\sin^3\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0.6495$ である。直角二等辺三角形では和が $1+\sqrt{2} \approx 2.414$、積が $\frac{1}{2}$ となり、どちらも上界より小さい。200 000 個のランダムな三角形に対してコンピュータで確かめたところ、和が 2.598076 を超えるものも、積が 0.649519 を超えるものもなかった。非常に平たい三角形（$A, B \to 0$、$C \to \pi$）では、当然ながら和も積も 0 に近づく。

よくある間違い

- 小問 (i) で、$x_1 = u$、$x_2 = v$ として $t = \frac{1}{3}$ を用いると $\frac{1}{3}u + \frac{2}{3}v$ となり、3 つの数の平均にはならない。2 つ目の点は v と w の中点でなければならない。
- 小問 (iii) で、小問 (ii) の不等式を積に直接適用することはできない。積を和に変えるのは対数である。また、$\ln\sin x$ が定義されること、すなわち $\sin x > 0$ であることも確認すること。
- $f'' < 0$ が「曲線が下向きに曲がることを意味する」と述べるだけでは、それ自体で弦の不等式の証明にはならない。平均値の定理による議論が、それを厳密なものにするのである。

STEP のその先へ

小問 (i) はイェンセンの不等式（Jensen's inequality）の 3 点の場合である。すなわち、凹関数 f と和が 1 となる重み $t_i \geq 0$ に対して $f\left(\sum t_i x_i\right) \geq \sum t_i f(x_i)$ が成り立ち、これはここでの議論とまったく同様に数学的帰納法（induction）で証明される。$f = \ln$ とすると相加相乗平均の不等式（AM–GM inequality）が得られ、確率論では凹関数 f に対して $f(\mathrm{E}[X]) \geq \mathrm{E}[f(X)]$ が成り立つことを述べている。凸関数と凹関数、および第 2 段落の背後にある平均値の定理は、Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）で丁寧に扱われている。

解答例

STEP II 2018、第 3 問

純粋数学 • 回転対称性と積分

STEP II 2018、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/18-s2-q3

鍵となる考え方

点 (a,b) のまわりの半回転（half-turn）は (x,y) を $(2a-x,\,2b-y)$ に移す。したがって、この対称性をもつ曲線では、各 x の値がその鏡像 $2a-x$ と組になり、二つの高さの和は $2b$ となる。正接関数に対して自然な組み合わせは $x \leftrightarrow \frac{1}{2}\pi - x$ である。なぜなら $\tan(\frac{1}{2}\pi - x) = 1/\tan x$ だからである。この一つの恒等式から曲線の対称性が得られ、さらに中心に関して対称な区間上の積分は、実際に積分計算をすることなく求められる。

解答

小問 (i)

$f(x) = (1+\tan x)^{-1}$ とおき、連鎖律（chain rule）を用いると、

$$f'(x) = -\frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)^2} = -\frac{1}{\cos^2 x\,(1+\tan x)^2} = -\frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}$$
$$= -\frac{1}{\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \sin^2 x} = -\frac{1}{1+\sin 2x},$$

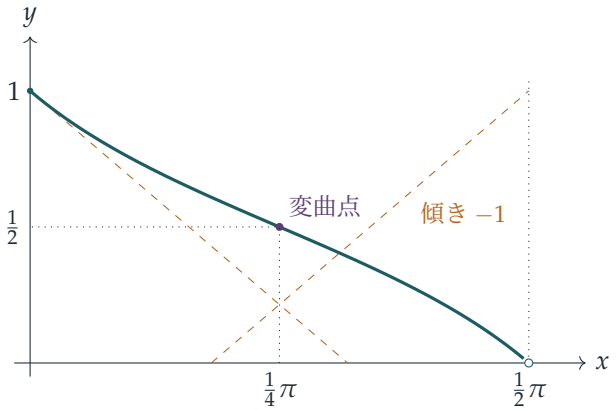
となり、示すべき式が得られる。（$1+\tan x$ に $\cos x$ を掛けることが、全体をすっきりさせる一歩である。）

値域（range）について。$0 \le x < \frac{1}{2}\pi$ より $0 \le 2x < \pi$ であるから、$\sin 2x$ は $[0,1]$ のすべての値をとる。$x = 0$ で値 0 を、$x = \frac{1}{4}\pi$ で値 1 をとる。よって $1 \le 1+\sin 2x \le 2$ であり、逆数をとり（すべて正なので不等号の向きが逆になる）、さらに符号を反転させると、

$$-1 \le f'(x) \le -\tfrac{1}{2}.$$

両端の値はともに実際にとられる。$f'(0) = -1$、$f'(\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}$ である。

グラフの概形について。$f(0) = 1$、$f(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}$ であり、$x \to \frac{1}{2}\pi$ のとき $\tan x \to \infty$ であるから $f(x) \to 0$ となる。曲線はつねに減少し、傾きは -1 と $-\frac{1}{2}$ の間にある。傾きが最も急なのは $x = 0$（傾き -1）、最も緩やかなのは $x = \frac{1}{4}\pi$ であり、$x \to \frac{1}{2}\pi$ のとき再び急になって傾き -1 に近づく。したがって f' は $\frac{1}{4}\pi$ で最大となり、そこは変曲点（point of inflection）である。曲線は $[0, \frac{1}{4}\pi)$ で下に凸（concave up）、$(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ で上に凸（concave down）である。（実際 $f''(x) = 2\cos 2x/(1 + \sin 2x)^2$ であり、これは $\frac{1}{4}\pi$ で符号を変える。）



破線はいずれも傾き -1 である。一方は $(0, 1)$ における接線であり、もう一方は $x \to \frac{1}{2}\pi$ のとき曲線が近づいていく方向である。曲線は $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$ のまわりの半回転について対称に見える。この問題の残りの部分は、まさにこのことを扱っている。

小問 (ii)

(a, b) のまわりの角 π の回転は (x, y) を $(2a - x, 2b - y)$ に移す。(a, b) が点とその像の中点となるからである。曲線が (a, b) のまわりに位数 2 の回転対称性（rotational symmetry）をもつとは、この回転が曲線をそれ自身の上に移すことにほかならない。（そのためには定義域が $x = a$ に関して対称で、x が定義域に属するときはつねに $2a - x$ も定義域に属していなければならない。）

$(\Rightarrow)$ 曲線がこの対称性をもつと仮定する。定義域内の任意の x に対し、$(x, g(x))$ は曲線上にあるから、その像 $(2a - x, 2b - g(x))$ も曲線上にある。曲線は関数のグラフであるから、x 座標が $2a - x$ である曲線上の点は $(2a - x, g(2a - x))$ ただ一つである。よって $g(2a - x) = 2b - g(x)$、すなわち

$$g(x) + g(2a - x) = 2b.$$

$(\Leftarrow)$ 定義域内のすべての x に対して $g(x) + g(2a - x) = 2b$ が成り立つと仮定する。曲

線上の一般の点 $(x, g(x))$ の像は

$$(2a - x,\, 2b - g(x)) = (2a - x,\, g(2a - x)),$$

であり、これは曲線上にある。よってこの回転は曲線を曲線の中に移す。さらに回転を 2 回行うと恒等変換になるから、曲線をそれ自身の上に移す。恒等式に $x = a$ を代入すると $g(a) = b$ となり、(a, b) が曲線上にあることと整合する。

積分について。原点に関する対称性とは $a = b = 0$ のことであるから、$g(-x) = -g(x)$、すなわち g は奇関数（odd function）である。左半分で $x = -u$ と置換（substitution）すると、

$$\int_{-1}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} g(-u)\,\mathrm{d}u = -\int_{0}^{1} g(u)\,\mathrm{d}u,$$

となるので、二つの半分は打ち消し合い、

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

小問 (iii)

$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ に対して $h(x) = \dfrac{1}{1 + \tan^k x}$ とおく。(i) のグラフを手がかりに、$a = \frac{1}{4}\pi$、$b = \frac{1}{2}$ を試す。定義域 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ は $\frac{1}{4}\pi$ に関して対称であり、$2a - x = \frac{1}{2}\pi - x$ である。

考えてみよう $h(\frac{1}{2}\pi - x)$ はどのように簡単にできるか。

$\tan x > 0$ となる $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ で成り立つ $\tan(\frac{1}{2}\pi - x) = \cot x = 1/\tan x$ を用いる。分母と分子に $\tan^k x$ を掛けると、

$$h(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \frac{1}{1 + \tan^{-k} x} = \frac{\tan^k x}{\tan^k x + 1},$$

したがって

$$h(x) + h(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \frac{1 + \tan^k x}{1 + \tan^k x} = 1 = 2 \cdot \tfrac{1}{2}.$$

$\tan \frac{1}{4}\pi = 1$ より $h(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}$ であるから、点 $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$ は曲線上にある。(ii) により、正の定数 k が何であっても、曲線は $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$ のまわりに位数 2 の回転対称性をもつ。

積分について、$I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} h(x)\,\mathrm{d}x$ とおく。区間 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi]$ は $\frac{1}{4}\pi$ に関して対称であるから、置換 $x = \frac{1}{2}\pi - u$ はこの区間をそれ自身に移す（両端が入れ替わり、それによって $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$ から生じる負号が吸収される）：

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} h(\tfrac{1}{2}\pi - u)\,\mathrm{d}u = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \big(1 - h(u)\big)\,\mathrm{d}u \\ &= \left(\tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\right) - I. \end{aligned}$$

よって $2I = \frac{1}{6}\pi$ であり、

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{1+\tan^k x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{12}.$$

幾何学的には、長方形 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi] \times [0,1]$ の内部で、半回転が曲線の下側の領域と上側の領域を入れ替えるので、面積は長方形の半分 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}\pi$ となる。これは (ii) の議論において g を $h - \frac{1}{2}$ に置き換えたものである。

検算

- $k = 1$、$x = \frac{1}{6}\pi$ のとき $h = 1/(1+\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{2}(3-\sqrt{3}) \approx 0.634$、$x = \frac{1}{3}\pi$ のとき $h = 1/(1+\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) \approx 0.366$ である。これらの和は対称性のとおり 1 となる。
- 答えは k によらない。$k \to \infty$ のとき、h は $x < \frac{1}{4}\pi$ では 1 に近く、$x > \frac{1}{4}\pi$ では 0 に近いので、積分は $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ の長さ $\frac{1}{12}\pi$ に近づき、結果と一致する。
- $k = 0.3$、1、2、3.7、10 について数値積分を行うと、いずれも 0.2617994 となり、$\pi/12 \approx 0.2617994$ と一致した。

よくある間違い

- (i) で値域を $-1 < f'(x) \le -\frac{1}{2}$ と書いてしまう。値 -1 は定義域に含まれる $x = 0$ でとられる。
- (ii) で一方向しか証明しない。「必要十分（if and only if）」を示すには、対称性 $\Rightarrow$ 恒等式と、恒等式 $\Rightarrow$ 対称性の両方が必要である。
- (iii) で $1/(1+\tan^k x)$ を直接積分しようとする。一般の k に対しては見つけられる初等的な原始関数（antiderivative）は存在せず、対称性こそがこの問題の要点である。

STEP のその先へ

(iii) の技法、すなわち置換 $x \mapsto a+b-x$ を行ったあとで積分をそれ自身に加えるという方法は、しばしば「キングの規則（King's rule）」と呼ばれる。これは定義域の対称性を用いて積分を簡単にするという考え方の特別な場合である。この考え方は群論（group theory）や物理学で中心的な役割を果たし、そこでは問題の対称性から、どの積分が消えるか（(ii) のように）、あるいはどの積分が簡単な値をとるかが予言される。同じ論法により、すべての $k > 0$ に対して $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^k x} = \frac{1}{4}\pi$ が求められる。Siklos の

Advanced Problems in Mathematics（STEP 対策の問題集）には、この種の対称性の議論で解ける積分がほかにも数多く収められている。

解答例

STEP II 2018、第 4 問

純粋数学 ・ 三角方程式

> **STEP II 2018、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q4

鍵となる考え方

与えられた恒等式（identity）は余弦の和を積（product）に変える。そして、ある式が 0 に等しいという方程式を解くときに欲しいのは、まさに積の形である。(i) では、外側の 2 項どうしと内側の 2 項どうしを組にすると、すぐに共通因数（common factor）が現れる。(ii) と (iii) では、すべてを角の半和（half-sum）と半差（half-difference）で表すのが有効な手であり、そうすると (ii) は因数分解でき、(iii) は 2 つの平方の和が 0 に等しいという式になる。

解答

小問 (i)

最初の項と最後の項、そして中央の 2 項をそれぞれ組にする。恒等式により、

$$\cos x + \cos 4x = 2\cos\tfrac{5x}{2}\cos\tfrac{3x}{2},$$
$$3(\cos 2x + \cos 3x) = 6\cos\tfrac{5x}{2}\cos\tfrac{x}{2}.$$

（余弦は偶関数（even function）なので、$\cos(-\frac{3x}{2}) = \cos\frac{3x}{2}$ と書いてよい。）したがって左辺は

$$2\cos\tfrac{5x}{2}\left(\cos\tfrac{3x}{2} + 3\cos\tfrac{x}{2}\right).$$

となる。$c = \cos\frac{x}{2}$ とおくと、3 倍角の公式（triple-angle formula）$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ より $\cos\frac{3x}{2} = 4c^3 - 3c$ であるから、括弧の中はちょうど $4c^3$ となる。よって方程式は

$$8\cos\tfrac{5x}{2}\,\cos^3\tfrac{x}{2} = 0.$$

となる。

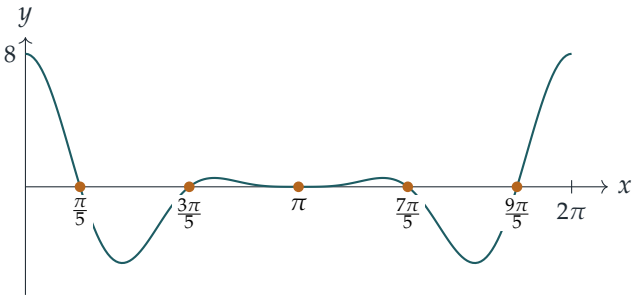
第 1 の因数。 $\cos\frac{5x}{2}=0$ は、整数 k を用いて $\frac{5x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$、すなわち $x=\frac{(2k+1)\pi}{5}$ と表されることを意味する。$0\le x\le 2\pi$ となるには $0\le 2k+1\le 10$ が必要なので、$k=0,1,2,3,4$ である。

第 2 の因数。 $0\le\frac{x}{2}\le\pi$ の範囲で $\cos\frac{x}{2}=0$ となるのは $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}$、すなわち $x=\pi$ のみであり、これはすでに上の一覧に含まれている。

したがって解は

$$x=\frac{\pi}{5},\ \frac{3\pi}{5},\ \pi,\ \frac{7\pi}{5},\ \frac{9\pi}{5}.$$

である。左辺のグラフにこれらの解が現れている。$x=\pi$ では $\cos\frac{5x}{2}$ と $\cos^3\frac{x}{2}$ がともに 0 になるので、曲線はそこで軸と交差せず、接するだけである。



小問 (ii)

最初の 2 項に恒等式を用い、さらに $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ を用いると、

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)-\cos 2x=2\cos x\cos y-2\cos^2 x+1.$$

となる。これを 1 に等しいとおくと

$$2\cos x\,(\cos y-\cos x)=0,$$

となるので、$\cos x=0$ または $\cos y=\cos x$ である。

- $0\le x\le\pi$ で $\cos x=0$ ならば、$x=\frac{\pi}{2}$ である（このとき y は任意でよい）。
- $\cos y=\cos x$ ならば、$x=y$ である。余弦は $[0,\pi]$ で狭義単調減少（strictly decreasing）であり、その区間では各値をただ一度しかとらないからである。

よって、求めるとおり $x=y$ または $x=\frac{\pi}{2}$ である。

小問 (iii)

$s = \frac{1}{2}(x+y)$、$d = \frac{1}{2}(x-y)$ とおく。恒等式より $\cos x + \cos y = 2\cos s \cos d$ であり、また $\cos(x+y) = \cos 2s = 2\cos^2 s - 1$ である。方程式は

$$2\cos s\cos d - 2\cos^2 s + 1 = \tfrac{3}{2} \iff 4\cos^2 s - 4\cos s\cos d + 1 = 0.$$

となる。

> **考えてみよう** 方程式は 1 つ、未知数は 2 つである。それなのに、どうして x と y の両方が決まりうるのだろうか？

$\cos s$ について平方完成（completing the square）する。$1 = \cos^2 d + \sin^2 d$ であるから、

$$4\cos^2 s - 4\cos s\cos d + \cos^2 d + \sin^2 d = (2\cos s - \cos d)^2 + \sin^2 d = 0.$$

2 つの実数の平方の和が 0 になるのは両方が 0 のときに限るので、次の 2 つの方程式が得られる。

$$\sin d = 0 \qquad \text{かつ} \qquad 2\cos s = \cos d.$$

$x, y \in [0, \pi]$ より $-\frac{\pi}{2} \le d \le \frac{\pi}{2}$ であり、この範囲で sin の零点は $d = 0$ のみである。よって $x = y$ であり、このとき $s = x$、$\cos d = 1$ となるので $\cos x = \frac{1}{2}$ を得る。$0 \le x \le \pi$ より、これは $x = \frac{\pi}{3}$ を意味する。

したがって、解はただ 1 つ

$$x = y = \frac{\pi}{3}.$$

である。実際、$\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ である。

同じ計算からさらに多くのことがわかる。すべての x, y に対して

$$\tfrac{3}{2} - \big(\cos x + \cos y - \cos(x+y)\big) = \tfrac{1}{2}\big[(2\cos s - \cos d)^2 + \sin^2 d\big] \ge 0,$$

が成り立つので、$\frac{3}{2}$ は左辺がとりうる最大値であり、この方程式はまさにその最大値がどこでとられるかを問うているのである。

検算

- (i) で $x = \frac{\pi}{5}$ のとき、$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ より $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = 0$ かつ $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = 0$ である。$x = 0$ のとき左辺は $1+3+3+1 = 8$ であり、$8\cos 0\cos^3 0$ と一致する。
- $[0, 2\pi]$ 上の細かい格子でコンピュータ探索を行うと、上の 5 つの零点がちょうど見つかった。また $[0, \pi]^2$ 上の格子では、$\cos x + \cos y - \cos(x+y)$ の最大値は 1.5 であり、それをとるのは $x = y \approx 1.0472 = \frac{\pi}{3}$ のみであった。

- (ii) で $x = \frac{\pi}{2}$ とすると、すべての y に対して $\cos(\frac{\pi}{2} + y) + \cos(\frac{\pi}{2} - y) - \cos\pi = -\sin y + \sin y + 1 = 1$ となる。

よくある間違い

- $x = \pi$ を 2 回数える、あるいは見落とす。これは (i) の両方の因数から出てくるが、解としては 1 つである。
- (ii) で $\cos x$ で割ってしまい、$x = \frac{\pi}{2}$ を失う。
- (iii) で $\cos s$ の 2 次方程式のところで止まってしまい、判別式（discriminant）（あるいは平方の和）を使って $\cos^2 d = 1$ を導かない。

STEP のその先へ

(i) の係数 1,3,3,1 は偶然ではない。左辺は $e^{ix}(1 + e^{ix})^3$ の実部（real part）であり、$1 + e^{ix} = 2\cos\frac{x}{2}\, e^{ix/2}$ であるから、これは 1 行で $8\cos^3\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$ となる。小問 (iii) は、三角形の内角に関する古典的な不等式 $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ が姿を変えたものであり（$A = x$、$B = y$、$C = \pi - x - y$ とおけばよい）、等号が成り立つのは正三角形（equilateral triangle）のときに限る。このような 2 変数関数の最大化は、多変数の微分積分学（multivariable calculus）において大学 1 年次に学ぶ標準的な題材である。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、複素指数関数（complex exponential）を用いると、このような三角関数の恒等式がほとんど自動的に得られることを示している。

解答例

STEP II 2018、第 5 問

純粋数学 • 級数の積分

> **STEP II 2018、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q5

鍵となる考え方

どの小問でも、関数をべき級数（power series）に展開し、1 項ずつ積分する。(i) では、等比級数（geometric series）を積分するだけである。(ii) では、指数関数を展開すると各項が $\int_0^\infty x^m \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ という形の積分になる。これは階乗（factorial）であり、階乗どうしが約分されて (i) の級数がそのまま残る。(iii) では、分母の $\ln x$ が手がかりになる。$x = \mathrm{e}^{-t}$ と置換（substitution）すると、$\ln x$ は $-t$ になり、積分は (ii) の積分 2 つに帰着する。

解答

小問 (i)

$|x| < 1$ のとき、二項展開（binomial expansion）（公比 $-x$ の等比級数）により

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

両辺を 0 から x まで積分する。左辺は $\ln 1 = 0$ であるから $\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \ln(1+x)$ となる。右辺は項別に積分して

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad (\text{置換：} n+1 \to n) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}, \end{aligned}$$

となり、これが $|x| < 1$ に対して求める結果である。

小問 (ii)

すべての x に対して

$$\mathrm{e}^{-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ax)^n}{n!} = 1 - ax + \frac{a^2x^2}{2!} - \frac{a^3x^3}{3!} + \cdots.$$

$n = 0$ の項は 1 であるから

$$\frac{1 - \mathrm{e}^{-ax}}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n x^{n-1}}{n!}.$$

ここで x で割っても問題はない。残った各項はどれも因数 x をもつので、被積分関数（integrand）は $x = 0$ でもまったく問題なく振る舞う（a に近づく）。e^{-x} を掛けて項別に積分すると（収束（convergence）は気にしなくてよいと問題文にある）、

$$\int_0^{\infty} \frac{(1 - \mathrm{e}^{-ax})\,\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} I_{n-1}, \qquad \text{ただし} I_m = \int_0^{\infty} x^m \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

考えてみよう I_m はいくつか。

$u = x^m$、$\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ として部分積分（integration by parts）を行う。$m \geq 1$ のとき

$$I_m = \Big[-x^m \mathrm{e}^{-x} \Big]_0^{\infty} + m \int_0^{\infty} x^{m-1} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = m I_{m-1},$$

である。$x \to \infty$ のとき $x^m \mathrm{e}^{-x} \to 0$ であり（指数関数が勝つ）、$x = 0$ では 0 だからである。$I_0 = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$ であるから、$I_m = m!$ が従う。

よって $I_{n-1} = (n-1)!$ であり、$\dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$ である。したがって

$$\int_0^{\infty} \frac{(1 - \mathrm{e}^{-ax})\,\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n} = \ln(1 + a),$$

となる。ここで小問 (i) を $x = a$ として用いた。$|a| < 1$ であるから、これは許される。以上で求める結果が得られた。

小問 (iii)

$x = \mathrm{e}^{-t}$ と置換すると、$\ln x = -t$、$\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ である。x が 0 から 1 まで動くとき、t は ∞ から 0 まで減少する。また $x^p = \mathrm{e}^{-pt}$、$x^q = \mathrm{e}^{-qt}$ である。よって

$$\int_0^1 \frac{x^p - x^q}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_{\infty}^0 \frac{\mathrm{e}^{-pt} - \mathrm{e}^{-qt}}{-t}\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{\left(\mathrm{e}^{-qt} - \mathrm{e}^{-pt}\right)\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t,$$

となる。ここで 2 つの負号は打ち消し合い、積分の上端と下端を入れ替えたことで p と q が入れ替わった。次に $\mathrm{e}^{-qt} - \mathrm{e}^{-pt} = \left(1 - \mathrm{e}^{-pt}\right) - \left(1 - \mathrm{e}^{-qt}\right)$ と書いて積分を分け

る。それぞれが (ii) の形であり、$a = p$ および $a = q$ に対応し、いずれも $|a| < 1$ を満たす。したがって

$$\int_0^1 \frac{x^p - x^q}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln(1+p) - \ln(1+q) = \ln\left(\frac{1+p}{1+q}\right).$$

積分を分けてよいのは、2つの積分がそれぞれ単独で収束するからである。実際、(ii) によりどちらも有限の値をもつ。

検算

- $p = q$ ならば被積分関数は 0 であり、実際 $\ln\frac{1+p}{1+p} = 0$ である。
- p と q を入れ替えると、被積分関数と答えの両方の符号が変わる。
- 符号の確認：$0 < x < 1$ では $\ln x < 0$ である。$p < q$ ならば $x^p > x^q$ であるから被積分関数は負であり、$\ln\frac{1+p}{1+q}$ も負である。
- $p = \frac{1}{2}$、$q = 0$ のとき、答えは $\ln\frac{3}{2} \approx 0.405465$ である。$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$ を数値積分すると同じ値が得られ、$(-1,1)$ から p と q を無作為に選んでも、小数第6位まで公式と一致する。

よくある間違い

- e^{-ax} の $n = 0$ の項が 1 と打ち消し合うことを忘れ、0 で発散する e^{-x}/x を積分しようとしてしまう。
- (iii) の置換で符号を1つ落とす。追うべき負号は3つあり（$\ln x$ から、$\mathrm{d}x$ から、そして積分の上端と下端の入れ替えから）、1つでも誤ると $\ln\frac{1+q}{1+p}$ になってしまう。
- $(n-1)!$ ではなく $I_{n-1} = n!$ と書いてしまう。そうすると階乗が約分されて $\frac{1}{n}$ にならない。

STEP のその先へ

積分 $I_m = \int_0^\infty x^m \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = m!$ はガンマ関数（gamma function）$\Gamma(m+1)$ であり、階乗を整数以外へ拡張するものである。(iii) の積分は「積分記号下の微分」（differentiating under the integral sign）の古典的な例である。p について微分すると厄介な $\ln x$ が消え、$\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}$ が残る。実はこの結果は $p, q > -1$ であれば常に成り立つ。和と積分の順序交換は、今回は気にしなくてよいとされていたが、解析学（analysis）の講義では一様収束（uniform convergence）や優収束（dominated convergence）によって

正当化される。これらの手順の背後にある解析学については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照せよ。

解答例

STEP II 2018、第 6 問

純粋数学 ・ 階乗と素数

> **STEP II 2018、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q6

鍵となる考え方

どちらの小問も、ひとつの事実にかかっている。それは、素数（prime）p が $k!$ を割り切るのは $p \leq k$ のとき、かつそのときに限る、ということである。(i) では、$n \geq 5$ となれば階乗（factorial）は 5 の倍数であり、したがって $n! + 5$ も 5 の倍数である。(ii) では、左辺は $2n - 1$ 以下の数だけからつくられているので、$2n - 1$ より大きい素数で割り切れることはない。$m!$ がそのような素数を含むほど大きければ、等式は成り立たない。二つの定理は、m を大きくし、その素数を供給するために与えられているのである。

解答

小問 (i)

$n \geq 5$ のとき、5 は $n!$ の因数の一つであるから $5 \mid n!$ であり、したがって $5 \mid n! + 5$ である。ところが $n! + 5 > 5$ であるから、$n! + 5$ は 1 より大きく自分自身より小さい約数 5 をもち、素数ではない。よって $n \leq 4$ だけを調べればよい：

$$1! + 5 = 6, \qquad 2! + 5 = 7, \qquad 3! + 5 = 11, \qquad 4! + 5 = 29.$$

6 は素数ではなく、残りの三つは素数である。解は

$$(n, p) = (2, 7),\ (3, 11),\ (4, 29).$$

である。

小問 (ii)

$P_n = 1! \times 3! \times \cdots \times (2n-1)!$ とおく。これらの階乗のどれをとっても、その因数はすべて 1 以上 $2n-1$ 以下の整数である。そこで、素数 q が P_n を割り切るならば、q は素数であるからそれらの整数のどれかを割り切り、よって $q \leq 2n-1$ となる。これにより鍵となる事実が得られる：

$$\text{どの素数} q > 2n-1 \text{ も割り切らない：} P_n. \qquad (*)$$

一方、$q \leq m$ を満たす素数 q はすべて $m!$ を割り切る。したがって $P_n = m!$ ならば、m は $2n-1$ より大きいどの素数よりも小さい。

n が大きい場合。 $n \geq 7$ かつ $P_n = m!$ と仮定する。定理 1 より $m! = P_n > (4n)!$ であるから、$m > 4n$ である（階乗は増加するから）。定理 2 より、$2n < q < 4n$ を満たす素数 q が存在する。すると $q < 4n < m$ であるから $q \mid m! = P_n$ となる。ところが $q > 2n > 2n-1$ であるから、これは $(*)$ に矛盾（contradiction）する。よって $n \geq 7$ の解は存在しない。

> **考えてみよう** なぜすべての n について単に定理を引用するだけで済ませられないのだろうか。

定理 1 は $n \geq 7$ に対してしか主張されておらず、実際 $n = 6$ では成り立たない。そのため $n = 1, \ldots, 6$ は手で調べる必要がある。計算を短くするために、ここでも $(*)$ を用いる。

n が小さい場合。

- $n = 1$：$P_1 = 1 = 1!$ であるから $m = 1$ である。
- $n = 2$：$P_2 = 1 \times 6 = 6 = 3!$ であるから $m = 3$ である。
- $n = 3$：$P_3 = 6 \times 120 = 720 = 6!$ であるから $m = 6$ である。
- $n = 4$：$P_4 = 720 \times 5040$ である。$720 = 6!$ かつ $5040 = 7 \times 8 \times 9 \times 10$ であるから、$P_4 = 6! \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 10!$ となり、$m = 10$ である。
- $n = 5$：$P_5 = P_4 \times 9! = 10! \times 9! > 10!$ であるから $m \geq 11$ である。すると素数 11 は $m!$ を割り切るが、$11 > 9 = 2n-1$ であり、$(*)$ に矛盾する。解はない。
- $n = 6$：$P_6 = 10! \times 9! \times 11! > 12!$（$10! \times 9! > 12$ であるから）であるから $m \geq 13$ である。すると素数 13 は $m!$ を割り切るが、$13 > 11 = 2n-1$ であり、$(*)$ に矛盾する。解はない。

解が存在する各場合において m は一意である。正の整数の階乗は 2! 以降で狭義単調増加であるからである（また $1! = 1 < 2!$ である）。よって解は

$$(n, m) = (1, 1),\ (2, 3),\ (3, 6),\ (4, 10).$$

である。

検算

恒等式 $1!\,3!\,5!\,7! = 10!$ は容易に確かめられる。両辺とも 3 628 800 に等しい。$n \leq 59$ かつ $m < 400$ の範囲でコンピュータによる探索を行ったところ、ちょうど上の四つの組が見つかり、また $n! + 5$ が素数となるのは $n = 2, 3, 4$ のときに限ることも確認された（$n \leq 30$ の範囲で探索）。さらに、定理 1 が $n = 6$ で成り立たないことも確認された。これこそ、$n = 5$ と $n = 6$ を手で調べることが本当に必要な理由である。

よくある間違い

- 小問 (ii) で $n = 1$ を忘れること。このとき積はただ一つの因数 1! からなるので、$(1, 1)$ は解である。
- $n = 5$ や $n = 6$ に定理 1 を用いること。定理 1 は $n \geq 7$ に対してしか述べられていないので、これらの場合には独自の議論が必要である。
- $q \leq m$ を確かめずに「$q \mid m!$」と述べること。まさにそのために、定理 1 から $m > 4n$ を得る必要があるのである。

STEP のその先へ

定理 2 はベルトランの仮説（Bertrand's postulate）である：すべての $n \geq 1$ に対して、$n < p \leq 2n$ を満たす素数 p が存在する。チェビシェフ（Chebyshev）が 1852 年にこれを証明し、のちにエルデシュ（Erdős）が中心二項係数（central binomial coefficient）$\binom{2n}{n}$ を用いた美しい初等的証明を与えた。$n! + 1 = m^2$ のような方程式（ブロカールの問題（Brocard's problem））は、いまなお未解決である。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、素数と階乗の算術へ進む次の一歩としてよい本である。

解答例

STEP II 2018、第 7 問

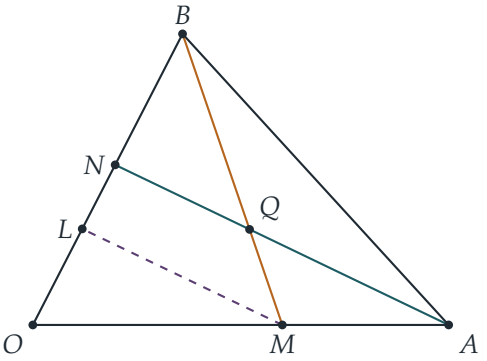
純粋数学 • 幾何におけるベクトル

> **STEP II 2018、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q7

鍵となる考え方

M は OA 上に、N は OB 上にあるので、$\mathbf{m}$ は $\mathbf{a}$ の実数倍、$\mathbf{n}$ は $\mathbf{b}$ の実数倍として書ける。点 Q には二通りの道筋でたどり着ける。一つは BM に沿う道筋、もう一つは AN に沿う道筋であり、どちらからも $\mathbf{q}$ が $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の一次結合（linear combination）として得られる。$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は平行（parallel）でないから係数を比較（comparing coefficients）してよく、それですべてが求まる。

解答



$\mathbf{m}$ を求める

$\mathbf{m} = m\,\mathbf{a}$、$\mathbf{n} = n\,\mathbf{b}$ とおく。M と N は辺上にあるので $0 < m < 1$ かつ $0 < n < 1$ である。

BM に沿って。Q は M と B の間にあって $MQ : QB = \mu : 1$ であるから、Q は M から B へ向かって全体の $\frac{\mu}{1+\mu}$ だけ進んだ点である：

$$\mathbf{q} = \mathbf{m} + \frac{\mu}{1+\mu}(\mathbf{b} - \mathbf{m}) = \frac{1}{1+\mu}\,\mathbf{m} + \frac{\mu}{1+\mu}\,\mathbf{b} = \frac{m}{1+\mu}\,\mathbf{a} + \frac{\mu}{1+\mu}\,\mathbf{b}.$$

AN に沿って。同様に $NQ : QA = \nu : 1$ であるから、

$$\mathbf{q} = \mathbf{n} + \frac{\nu}{1+\nu}(\mathbf{a} - \mathbf{n}) = \frac{\nu}{1+\nu}\,\mathbf{a} + \frac{1}{1+\nu}\,\mathbf{n} = \frac{\nu}{1+\nu}\,\mathbf{a} + \frac{n}{1+\nu}\,\mathbf{b}.$$

考えてみよう **a** の係数どうし、また **b** の係数どうしをそれぞれ等しいとおいてよいのはなぜか。

O、A、B は本当の三角形の頂点であるから、**a** と **b** は零ベクトルでなく、互いに平行でもない。もし $\beta \neq 0$ として $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$ が成り立つなら、**b** は **a** の実数倍になってしまう。よって $\beta = 0$ であり、すると $\alpha = 0$ となる。したがって、平面上の各ベクトルを **a** と **b** の一次結合として表す方法はただ一通りである。

q の二つの表示の差をとり、係数を比較すると

$$\frac{m}{1+\mu} = \frac{\nu}{1+\nu}, \qquad \frac{\mu}{1+\mu} = \frac{n}{1+\nu}.$$

一つ目の式から $m = \dfrac{(1+\mu)\nu}{1+\nu}$、すなわち

$$\mathbf{m} = \frac{(1+\mu)\nu}{1+\nu}\,\mathbf{a},$$

となり、示すべき式が得られた。二つ目の式からは、役割を入れ替えた同じ議論により

$$\mathbf{n} = \frac{\mu(1+\nu)}{1+\mu}\,\mathbf{b}.$$

が得られる。

λ を求める

ここで $\mathbf{l} = \lambda\mathbf{b}$ であるから、

$$\overrightarrow{ML} = \lambda\mathbf{b} - m\,\mathbf{a}, \qquad \overrightarrow{AN} = n\,\mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

これらが平行であるのは、あるスカラー（scalar）k に対して $\overrightarrow{ML} = k\,\overrightarrow{AN}$ となるとき、かつそのときに限る。**a** の係数を比較すると（先ほどと同じ理由で許される）$k = m$ となり、次に **b** の係数から $\lambda = kn = mn$ を得る。（幾何的に見れば、$ML \parallel AN$ より三角形 OML と OAN は相似（similar）であり、$OL/ON = OM/OA$ となる。）したがって

$$\lambda = mn = \frac{(1+\mu)\nu}{1+\nu} \cdot \frac{\mu(1+\nu)}{1+\mu} = \mu\nu.$$

条件 $\mu\nu < 1$

$$m < 1 \iff (1+\mu)\nu < 1+\nu \iff \mu\nu < 1,$$
$$n < 1 \iff \mu(1+\nu) < 1+\mu \iff \mu\nu < 1,$$

ここで分母を払うのに $1+\nu > 0$ と $1+\mu > 0$ を用いた。よって、μ と ν が正のとき、条件 $\mu\nu < 1$ は、M が O と A の間に（端点を除いて）あり、かつ N が O と B の間に（端点を除いて）あるためのちょうど必要十分条件である。言い換えれば、直線 AN と BM（Q がそれらをこの比に分けるもの）が三角形の内部で交わるということである。この条件はまた $\lambda < 1$ も意味する。すなわち、M を通り AN に平行な直線は OB と O と B の間で交わるが、M が辺 OA 上にある以上、これは当然そうならなければならない。$\mu\nu = 1$ ならば $M = A$ かつ $N = B$ となり、図形はつぶれてしまう。$\mu\nu > 1$ ならば、M と N は辺を延長した直線上で A と B の先にある。

検算

- **中線**（*median*）。M と N が中点ならば Q は重心（centroid）であり、重心は各中線を頂点の側から 2 : 1 に分ける。よって $\mu = \nu = \frac{1}{2}$ であり、公式から $m = \frac{(3/2)(1/2)}{3/2} = \frac{1}{2}$ となって、確かにそうなるべき値が得られる。このとき $\lambda = \frac{1}{4}$ である。実際、三角形 OAN における中点連結定理（midpoint theorem）により L は ON の中点であり、OB の四分の一の位置にある。
- **対称性。** $A \leftrightarrow B$ と入れ替えると $M \leftrightarrow N$、$\mu \leftrightarrow \nu$ と入れ替わり、m と n の公式も正しく入れ替わる。答え $\lambda = \mu\nu$ も対称である。
- 約 10^5 個のランダムな三角形について、辺上にランダムに M と N をとって μ と ν を測定し、m、n および $\lambda = \mu\nu$ が誤差 10^{-12} 以内で成り立つことをコンピュータで確認した。たとえば $m = 0.6$、$n = 0.55$（図の場合）のとき $\lambda = 0.33$ となる。

よくある間違い

- 分点の比（section ratio）を逆にしてしまうこと。Q は M から B へ向かって $\frac{\mu}{1+\mu}$ だけ進んだ点であり、B から M へ向かってではない。
- 理由を述べずに係数を等しいとおくこと。これは $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が平行でないことに依存している。
- 三角形が鋭角三角形（acute-angled triangle）であることが何らかの役割を果たすと考えること。実際には何の役割もない。この議論はどんな三角形に対しても成り立つ。

STEP のその先へ

係数比較がうまくいくのは、**a** と **b** が**線形独立**（linearly independent）であり、したがって平面の基底（basis）をなすからである。これは大学で最初に学ぶ線形代数（linear algebra）の中心的な考え方である。$\lambda = \mu\nu$ というきれいな答えは、チェバ（Ceva）の定理やメネラウス（Menelaus）の定理と同じ系統に属する比の結果であり、これらは重心座標（barycentric coordinates）を用いると最もすっきり扱える。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、基底と座標を丁寧に展開している。

解答例

STEP II 2018、第 8 問

純粋数学 ・ ベルヌーイ型微分方程式

STEP II 2018、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/18-s2-q8

鍵となる考え方

どちらの方程式もベルヌーイ型微分方程式（Bernoulli equation）である。右辺にある y のべきが線形性（linearity）を損なっているが、y の適切なべきを新しい変数にとれば方程式は線形になる。$y = v^2$（または $y = v^3$）とおくと共通因数 v（または v^2）が約分でき、残るのは定数係数の 1 階線形微分方程式である。これは積分因子（integrating factor）を用いるか、変数分離（separation of variables）によって解ける。概形を描く際に 2 つの曲線を比較するには、両方を 1 つの指数関数 $u = e^{-t/6}$ で表すのが最もすっきりしている。

解答

問題文では $y_1(x)$、$y_2(x)$ と書かれているが、独立変数は一貫して t なので、ここでは $y_1(t)$、$y_2(t)$ と書く。

小問 (i)

$v = \sqrt{y} \geq 0$ として $y = v^2$ とおく。すると $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ かつ $y^{1/2} = v$ であるから、方程式は

$$2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \alpha v - \beta v^2.$$

となる。解の 1 つは $v \equiv 0$、すなわち定数解 $y \equiv 0$ である。$v \neq 0$ となるところでは v で割ることができて、

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\beta}{2}v = \frac{\alpha}{2}.$$

これは線形であり、積分因子は $e^{\beta t/2}$ である：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(ve^{\beta t/2}\right) = \frac{\alpha}{2}e^{\beta t/2} \quad \Longrightarrow \quad ve^{\beta t/2} = \frac{\alpha}{\beta}e^{\beta t/2} + C.$$

したがって一般解（general solution）は

$$\sqrt{y} = \frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\beta t/2}, \qquad \text{すなわち} \qquad y = \left(\frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\beta t/2}\right)^2,$$

である。ここで C は定数であり（$v = \sqrt{y} \geq 0$ なので、括弧の中が非負となる範囲で考える）、これに定数解 $y \equiv 0$ が加わる。$C = 0$ とすると、もう 1 つの定数解 $y \equiv \alpha^2/\beta^2$ が得られる。

$y_1(0) = 0$ となるには $v(0) = 0$ が必要なので $C = -\alpha/\beta$ であり、

$$\boxed{y_1(t) = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(1 - e^{-\beta t/2}\right)^2}$$

これは定数ではなく、括弧 $1 - e^{-\beta t/2}$ は $t \geq 0$ で非負なので、確かに解である。（v で割る操作は、$v > 0$ となる $t > 0$ で正当であった。）

小問 (ii)

今度はべきが $\frac{2}{3}$ なので、$y^{2/3}$ と y が共通因数をもつようにしたい。$y = v^3$、すなわち $v = y^{1/3} \geq 0$ とおく。すると $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3v^2\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ かつ $y^{2/3} = v^2$ であるから、

$$3v^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \alpha v^2 - \beta v^3.$$

考えてみよう 置換 $v = y^{1/3}$ はどのようにして思いつけるだろうか。

小問 (i) では、$v = y^{1-\frac{1}{2}}$ とおくことで両辺が共通因数 v をもった。ベルヌーイ型方程式 $\dot{y} = \alpha y^n - \beta y$ に対しては、置換 $v = y^{1-n}$ が常に有効であり、ここでは $1 - n = \frac{1}{3}$ である。

$v \equiv 0$（定数解 $y \equiv 0$）を除けば、v^2 で割って

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\beta}{3}v = \frac{\alpha}{3}.$$

積分因子 $e^{\beta t/3}$ を用いて前とまったく同様にすると、

$$y^{1/3} = \frac{\alpha}{\beta} + De^{-\beta t/3}, \qquad \text{すなわち} \qquad y = \left(\frac{\alpha}{\beta} + De^{-\beta t/3}\right)^3,$$

となる。ここで D は定数である（括弧の中は非負とする）。条件 $y_2(0) = 0$ から $D = -\alpha/\beta$ が定まるので、

$$\boxed{y_2(t) = \frac{\alpha^3}{\beta^3}\left(1 - e^{-\beta t/3}\right)^3}$$

小問 (iii)

$\alpha = \beta$ のとき、

$$y_1(t) = \left(1 - e^{-t/2}\right)^2, \qquad y_2(t) = \left(1 - e^{-t/3}\right)^3.$$

各曲線の形。 $1 - e^{-t/2}$ と $1 - e^{-t/3}$ はともに 0 から 1 に向かって増加するので、どちらの曲線も 0 から始まって増加する。$t \to \infty$ のとき、どちらも 1 に近づく。これは (i) では定数解 $y = \alpha^2/\beta^2 = 1$、(ii) では $y = \alpha^3/\beta^3 = 1$ である。微分すると

$$y_1' = e^{-t/2}\left(1 - e^{-t/2}\right), \qquad y_2' = e^{-t/3}\left(1 - e^{-t/3}\right)^2,$$

となるので、どちらも原点での傾きは 0 である。$w = e^{-t/2}$ とすると傾き $y_1' = w(1-w)$ は $w = \frac{1}{2}$ で最大となるので、y_1 は $t = 2\ln 2$、$y_1 = \frac{1}{4}$ に変曲点（point of inflection）をもつ。同様に、$w = e^{-t/3}$ とすると $y_2' = w(1-w)^2$ は $w = \frac{1}{3}$ で最大となり、$t = 3\ln 3$、$y_2 = \frac{8}{27}$ に変曲点をもつ。それぞれの曲線は、原点から漸近線（asymptote）$y = 1$ へと立ち上がる S 字形である。

位置関係。 $u = e^{-t/6}$ とおくと、$t > 0$ で $0 < u < 1$ であり、$e^{-t/2} = u^3$、$e^{-t/3} = u^2$ である。すると

$$y_1 = (1-u^3)^2 = (1-u)^2(1+u+u^2)^2, \qquad y_2 = (1-u^2)^3 = (1-u)^3(1+u)^3,$$

であるから

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{(1+u+u^2)^2}{(1-u)(1+u)^3}.$$

展開すると、$(1+u+u^2)^2 = 1 + 2u + 3u^2 + 2u^3 + u^4$ および $(1-u)(1+u)^3 = (1-u^2)(1+u)^2 = 1 + 2u - 2u^3 - u^4$ である。分子から分母を引くと

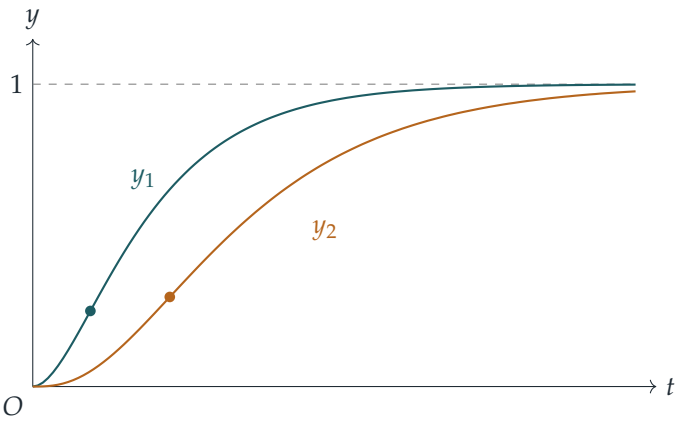
$$3u^2 + 4u^3 + 2u^4 > 0 \qquad (0 < u < 1),$$

であり、分母は正なので $y_1/y_2 > 1$ である。よって

$$y_1(t) > y_2(t) \quad \text{任意の} t > 0 :$$

すなわち、2 つの曲線は原点でのみ交わり、それ以外のすべての点で y_1 は y_2 より上にある。

これは両端での振る舞いとも一致する。$t = 0$ の近くでは $y_1 \approx \frac{t^2}{4}$ であるのに対し $y_2 \approx \frac{t^3}{27}$ であり、こちらのほうがはるかに小さい。t が大きいときは $1 - y_1 \approx 2e^{-t/2}$、$1 - y_2 \approx 3e^{-t/3}$ であり、$e^{-t/3}$ のほうが減衰が遅いので、y_2 のほうが漸近線から大きく下にある。



点は変曲点を表しており、y_1 上の $(2\ln 2, \frac{1}{4})$ と y_2 上の $(3\ln 3, \frac{8}{27})$ である。

検算

- 代入して確かめる：$\alpha = \beta = 1$ の y_1 について、$w = e^{-t/2}$ とすると $y_1^{1/2} - y_1 = (1-w) - (1-w)^2 = w(1-w)$ であり、これはちょうど y_1' に等しい。
- t が大きいとき：$y_1 \to \alpha^2/\beta^2$ であり、これは $\alpha y^{1/2} = \beta y$ となる o でない点である。同様に $y_2 \to \alpha^3/\beta^3$ であり、ここで $\alpha y^{2/3} = \beta y$ となる。
- $\alpha = \beta = 1$ での数値：$t = 2$ では $y_1 \approx 0.400$、$y_2 \approx 0.115$ であり、$t = 10$ では $y_1 \approx 0.987$、$y_2 \approx 0.897$ である。両方の式は、コンピュータによる微分方程式の逐次数値積分でも確認した。

よくある間違い

- $y \equiv 0$ も解であることに触れずに v（または v^2）で割ってしまうこと。だからこそ問題文は、原点を通る**定数でない**解を求めているのである。
- 指数を間違えること：置換 $y = v^3$ からは $e^{-\beta t/2}$ ではなく $e^{-\beta t/3}$ が得られる。
- 傾きだけから曲線の上下関係を論じること。2 つの曲線が同じ高さ $y \in (0,1)$ にあるところでは $y^{2/3} > y^{1/2}$ なので、そこでは y_2 のほうが速く増加することになる。しかしこれはどちらの曲線が上にあるかを示すものではないので、直接の比較が必要である。

STEP のその先へ

これらはベルヌーイ（Bernoulli）型方程式であり、大学 1 年で学ぶ標準的な方程式の族で、$v = y^{1-n}$ によって解かれる。これらは解の非一意性（non-uniqueness）の例にもなっている。$y^{1/2}$ と $y^{2/3}$ は $y = 0$ で傾きが無限大になるので、右辺はそこでリプシッツ連続（Lipschitz continuous）ではなく、$y \equiv 0$ と y_1 がともに原点を通る。実際、任意の時刻 t_0 まで 0 にとどまり、その後 $y_1(t - t_0)$ に従うことで、解の族全体が得られる。ピカール＝リンデレーフの定理（Picard–Lindelöf theorem）は、このようなことが起こりえないのはどのような場合かを正確に説明する。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）は、ベルヌーイ型方程式と解の存在・一意性の両方を扱っている。

解答例

STEP II 2018、第 9 問

力学 ・ 重力下での衝突

> **STEP II 2018、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q9

鍵となる考え方

2 つのビーズは常に下向きに同じ加速度（acceleration）g をもつので、互いに**相対的**には等速度で運動する。A が跳ね返った後は、ビーズ間の距離が一定の割合で縮まるので、衝突までの時間がすぐに求まる。最後の部分は純粋にエネルギーと運動量（momentum）の問題である。A が地面に当たるときの速さがわかれば、それが衝突後にどれだけの速さで離れたかがわかり、あとはニュートンの衝突の法則（Newton's experimental law）で片がつく。

解答

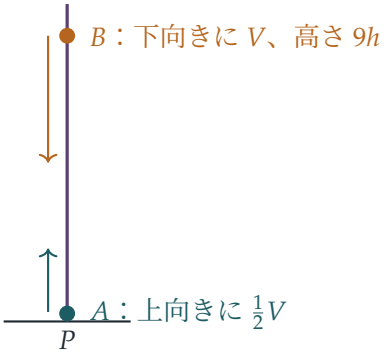
ビーズを、なめらかな鉛直の針金に通された等しい質量 m の質点（particle）とみなし、空気抵抗は無視する。したがって衝突と衝突の間、各ビーズは重力のみを受けて自由に運動する。上向きを正とし、高さは P から測る。

最初の跳ね返りまで

A は静止状態から $8h$ 落下するので、エネルギー保存則（conservation of energy）より

$$V^2 = 2g(8h) = 16gh, \qquad V = 4\sqrt{gh}.$$

同じ時間の間に B も静止状態から $8h$ 落下している（運動はまったく同じである）ので、この瞬間 B は高さ $17h - 8h = 9h$ にあり、速さ V で下向きに運動している。A は地面から上向きに速さ $\frac{1}{2}V$ で跳ね返る。



衝突

A が地面を離れた瞬間から、両方のビーズは加速度 $-g$ で運動するので、A に対する B の相対速度（relative velocity）は、次の初期値のまま変わらない。

$$(-V)-\tfrac{1}{2}V=-\tfrac{3}{2}V.$$

考えてみよう 2 つのビーズがいつ出会うかを求めるとき、なぜ重力を無視してよいのか？

重力は両方の速度を同じ量 $-gt$ だけ変化させるので、差をとると打ち消し合う。したがって $9h$ の間隔は一定の速さ $\frac{3}{2}V$ で縮まり、衝突は跳ね返りから時間

$$\tau=\frac{9h}{\frac{3}{2}V}=\frac{6h}{V}=\frac{6h}{4\sqrt{gh}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{h}{g}}$$

の後に起こる。（その時点で A がまだ空中にあることも必要だが、実際にそうであることがわかる。）そのときの A の高さは

$$H=\tfrac{1}{2}V\tau-\tfrac{1}{2}g\tau^2=2\sqrt{gh}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{h}{g}}-\frac{1}{2}g\cdot\frac{9h}{4g}=3h-\frac{9}{8}h=\frac{15}{8}h,$$

となり、題意のとおりである。衝突の直前には、

$$\text{速度}A=\tfrac{1}{2}V-g\tau=2\sqrt{gh}-\tfrac{3}{2}\sqrt{gh}=\tfrac{1}{2}\sqrt{gh},$$
$$\text{速度}B=-V-g\tau=-4\sqrt{gh}-\tfrac{3}{2}\sqrt{gh}=-\tfrac{11}{2}\sqrt{gh}.$$

したがって A はまだ上昇中であり、

$$u_A=\tfrac{1}{2}\sqrt{gh}\,(\text{上向き}),\qquad u_B=\tfrac{11}{2}\sqrt{gh}\,(\text{下向き}).$$

検算として、B の高さも $9h-V\tau-\frac{1}{2}g\tau^2=9h-6h-\frac{9}{8}h=\frac{15}{8}h$ となる。

反発係数

ビーズ間の反発係数（coefficient of restitution）を e とし、衝突直後の両者の速度（上向きを正）を v_A、v_B とする。しばらく $\sqrt{gh}$ を単位として考えると、$u_A = \frac{1}{2}$（上向き）、$u_B = \frac{11}{2}$（下向き）である。

運動量保存（質量は等しく、瞬間的な衝突の間に重力が与える力積（impulse）は無視できる）：

$$v_A + v_B = \tfrac{1}{2} - \tfrac{11}{2} = -5.$$

ニュートンの衝突の法則：ビーズは速さ $\frac{1}{2} + \frac{11}{2} = 6$ で近づき、衝突後は上にある B が、その e 倍の速さで A から遠ざかる。

$$v_B - v_A = 6e.$$

辺々引くと $v_A = -\frac{1}{2}(5 + 6e)$ となるので、A は速さ $w = \frac{1}{2}(5 + 6e)\sqrt{gh}$ で**下向き**に運動する。

さて、A は高さ $\frac{15}{8}h$ から初速 w で落下し、速さ V で地面に達する（$v_B = -5 - v_A = \frac{1}{2}(6e - 5) > v_A$ であるから、このビーズは B より下にあってより速く下向きに運動しており、着地より先に 2 つのビーズが再び出会うことはない）。エネルギー保存より、

$$V^2 = w^2 + 2g \cdot \tfrac{15}{8}h \quad \Longrightarrow \quad w^2 = 16gh - \tfrac{15}{4}gh = \tfrac{49}{4}gh,$$

よって $w = \frac{7}{2}\sqrt{gh}$ である。すると $\frac{1}{2}(5 + 6e) = \frac{7}{2}$ となり、次を得る。

$$e = \frac{1}{3}.$$

衝突後、A は速さ $\frac{7}{2}\sqrt{gh}$、B は速さ $\frac{3}{2}\sqrt{gh}$ で下向きに運動する。

検算

- 運動エネルギー（kinetic energy）：衝突前の総和は $\frac{1}{2}m\,gh\,(\frac{1}{4} + \frac{121}{4}) = \frac{61}{4}mgh$、衝突後は $\frac{1}{2}m\,gh\,(\frac{49}{4} + \frac{9}{4}) = \frac{29}{4}mgh$ である。$e < 1$ である以上当然のことながら、エネルギーは失われている。
- $e = 1$ なら（質量が等しいので）2 つのビーズは速度を単に入れ替えるだけであり、A は $\frac{11}{2}\sqrt{gh}$ で離れて V より速く着地する。$e = 0$ なら両者は一体となって $\frac{5}{2}\sqrt{gh}$ で動き、A はより遅く着地する。値 $\frac{1}{3}$ はその間に妥当に収まっている。
- 運動全体をコンピュータで逐次シミュレーションする（$g = h = 1$ とする）と、衝突は高さ 1.875 で速さ 0.5 と 5.5 のときに起こり、$e = \frac{1}{3}$ のとき 2 回目の着地の速さは $4 = V$ となる。

よくある間違い

- A が落下している間に B も落下していることを忘れる。跳ね返りの瞬間、B は $17h$ ではなく $9h$ にあり、すでに速さ V で動いている。
- ニュートンの法則での符号の誤り。速度は 1 つの正の向きを決めて書き、遠ざかる速さが正になることを確かめよ。

STEP のその先へ

落下するビーズの一方とともに動く座標系で考えるという工夫は、ガリレイの相対性原理（Galilean relativity）への最初の入り口である。一様な重力場の中では、自由落下する座標系からは重力がまったく見えない。これはアインシュタイン（Einstein）の等価原理（equivalence principle）の出発点である。大学 1 年の力学では、衝突の問題はしばしば重心系（centre-of-mass frame）で解かれる。重心系では、反発係数 e の衝突は両方の速度の向きを逆にし、大きさを e 倍するだけである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この 2 つの考え方を丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 2018、第 10 問

力学 ・ 伸びる糸の上の運動学

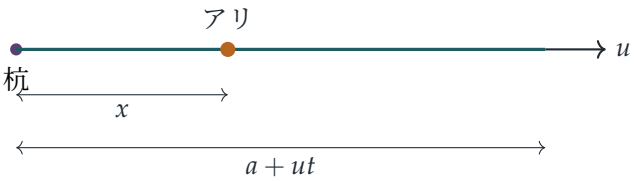
> **STEP II 2018、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q10

この問題は、*Beyond STEP* の第 11.12 節「ゴムひもの上のアリ」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/rubber-rope.html

鍵となる考え方

ひもは一様（uniform）なので、どこでも同じ倍率で伸びる。したがって、ひもの各点は端から端までのうちの割合としての位置を保ち続ける。このことから、ひもの点の速さは杭からの距離に比例する。するとアリの方程式は線形（linear）になり、追いかけるべき自然な量は x そのものではなく、ひも全体に対してアリが進んだ割合 $x/(a+ut)$ である。

解答



ひもの点の速さ

時刻 t において自由端は杭から距離 $a+ut$ のところにあるので、これがひもの長さである。ひもは一様なので、全長にわたって同じ倍率 $(a+ut)/a$ で伸びている。したがって、$t=0$ で杭から距離 x_0 にあったひもの点は、常にひも全体の同じ割合 x_0/a の位

置にある：

$$x = \frac{x_0}{a}(a + ut).$$

x_0 を固定して微分すると、この点の速さは $\dfrac{x_0 u}{a}$ であり、これを現在の位置 x を用いて表すと、

$$\text{杭からの距離で表した点の速さ：距離} x = \frac{ux}{a + ut}.$$

確認として、これは杭では 0、自由端では u となる。

アリの方程式

杭に対するアリの速さは、v に、その下にあるひもの速さを加えたものなので、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v + \frac{ux}{a + ut}.$$

商の微分法（quotient rule）を用い、続いてこの方程式を代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{a + ut}\right) &= \frac{1}{a + ut}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{ux}{(a + ut)^2} \\ &= \frac{1}{a + ut}\left(v + \frac{ux}{a + ut}\right) - \frac{ux}{(a + ut)^2} = \frac{v}{a + ut}\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られる。

端に到達するまでの時間

$t = 0$ で $x = 0$ であることを用いて、0 から t まで積分する：

$$\frac{x}{a + ut} = \int_0^t \frac{v}{a + us}\,\mathrm{d}s = \frac{v}{u}\ln\left(\frac{a + ut}{a}\right) = \frac{1}{k}\ln\left(1 + \frac{ut}{a}\right).$$

左辺はアリがひものうち進んだ割合であり、これが 1 に等しくなったときにアリは端に到達する。右辺は 0 から限りなく単調に増加するので、これはちょうど一度だけ起こり、その時刻 T は

$$\ln\left(1 + \frac{uT}{a}\right) = k \iff 1 + \frac{uT}{a} = \mathrm{e}^k \iff uT = a(\mathrm{e}^k - 1)$$

を満たす。これが与えられた結果である。

帰り道

今度はアリは杭に向かって歩くので、ひもに対するアリ自身の速さは $-v$ であり、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -v + \frac{ux}{a + ut}.$$

考えてみよう 商の微分法の計算をやり直す必要があるだろうか？

その必要はない。上の計算は v の符号が変わるだけなので、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{a+ut}\right) = -\frac{v}{a+ut}.$$

帰り道は時刻 $t = T$ に、アリがひもの端にいる状態、すなわち $x/(a+ut) = 1$ の状態から始まる。T から t まで積分すると、

$$\frac{x}{a+ut} = 1 - \frac{1}{k}\ln\left(\frac{a+ut}{a+uT}\right).$$

この割合が 0 になったときにアリは杭に到達し、それが初めて起こる時刻 t_1 は

$$\ln\left(\frac{a+ut_1}{a+uT}\right) = k \iff a+ut_1 = (a+uT)\,\mathrm{e}^k$$

を満たす。よって帰り道にかかる時間は

$$t_1 - T = \frac{(a+uT)(\mathrm{e}^k-1)}{u}.$$

行きの結果から $\mathrm{e}^k - 1 = uT/a$ かつ $a+uT = a\mathrm{e}^k$ なので、

$$t_1 - T = \frac{a\mathrm{e}^k}{u}\cdot\frac{uT}{a} = T\mathrm{e}^k.$$

帰り道にかかる時間は $T\mathrm{e}^k$ であり、行きよりも e^k 倍長い。

検算

- $u \to 0$ とするとひもは伸びない。このとき $k \to 0$ かつ $T = a(\mathrm{e}^k-1)/u \to a/v$ であり、帰りの時間 $T\mathrm{e}^k \to a/v$ も同様となる。これは当然そうあるべき結果である。
- 帰りの時間の方が長いのは理にかなっている。帰り道では、アリの下にあるひもがアリを杭から遠ざける向きに運ぶからである。
- a、u、v に無作為な値を与えて（たとえば $a=1$、$u=v$ とすると $k=1$、$T = \mathrm{e}-1 \approx 1.718$）両方の微分方程式（differential equation）を数値的に時間発展させると、アリは時刻 T に端に達し、さらに $T\mathrm{e} \approx 4.67$ の後に杭に戻る。これは公式と一致する。

よくある間違い

- ひものすべての点が速さ u で動くとしてしまうこと。速さ u で動くのは自由端だけである。

- 帰り道が $t = 0$ ではなく $t = T$ から始まることを忘れ、積分定数（constant of integration）が変わることを見落とすこと。
- T と k のみで表すよう求められているのに、答えを $(a + uT)(\mathrm{e}^k - 1)/u$ のままにしておくこと。

STEP のその先へ

ひもがどれほど速く伸びても、アリは必ず端に到達する。それは $\int \mathrm{d}t/(a + ut)$ が発散（diverge）するからである。ひもに対してアリが進んだ割合は時間の対数のように増加し、もし伸び方がもっと速ければ（たとえば指数関数的であれば）、積分は収束（converge）し、アリは決して到達しないかもしれない。それ自体が膨張している空間の中を一定の速さで進むという同じ考え方は宇宙論（cosmology）にも現れ、遠方の銀河からの光がいつか私たちに届くかどうかを決定する。ここで適切な量を見抜くことで解いた線形方程式は、積分因子法（integrating-factor method）の一例である。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）を参照のこと。

解答例

STEP II 2018、第 11 問

力学 ・ 摩擦とモーメント

STEP II 2018、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/18-s2-q11

鍵となる考え方

3 つの未知の接触力は、3 つの式で決まる。水平方向のニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）、鉛直方向に加速度がないこと、そして重心（centre of mass）のまわりのモーメント（moment）がつり合うという与えられた条件である。2 つの垂直抗力（normal reaction）をともに加速度（acceleration）a で表してしまえば、2 種類の破綻はそれぞれ a に対するしきい値となる。前輪は垂直抗力が 0 まで減ったときに浮き上がり、後輪は必要な摩擦力（friction）がその垂直抗力の μ 倍を超えたときに滑る。しきい値の低い方が先に起こる。

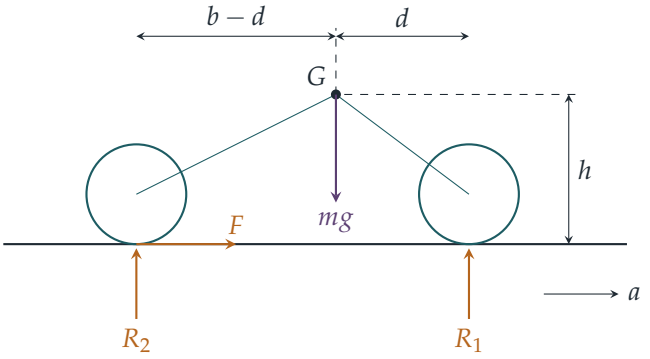
解答

モデルと力

オートバイを、右向きに加速度 $a \geq 0$ で一直線上を運動する剛体（rigid body）とみなす。道路は水平なので、重心 G には鉛直方向の加速度がなく、オートバイは回転しない。はたらく力は次のとおりである。

- G に下向きにはたらく重力 mg。
- 前輪における垂直抗力 R_1（前輪はなめらかなので、そこに摩擦力ははたらかない）。
- 後輪における垂直抗力 R_2 と摩擦力 F。エンジンが後輪を駆動するので、F は前向きにはたらき、これが唯一の水平方向の力である。

前輪の接地点は G より水平距離 d だけ前にあり、後輪の接地点は G より $b - d$ だけ後ろにある。どちらも G より距離 h だけ下にある。



垂直抗力を a で表す

水平方向と鉛直方向について、

$$F = ma, \qquad R_1 + R_2 = mg.$$

次に、反時計回りを正として（前輪を浮かせる向きである）G のまわりのモーメントを考える。重力は G のまわりにモーメントをもたない。G より距離 d だけ前で上向きにはたらく R_1 は、反時計回りのモーメント $R_1 d$ をもつ。G より距離 $b-d$ だけ後ろで上向きにはたらく R_2 は、時計回りのモーメント $R_2(b-d)$ をもつ。そして F は G より距離 h だけ下の直線に沿って前向きにはたらくので、反時計回りのモーメント Fh をもつ。合計を 0 とおくと

$$R_1 d + Fh = R_2(b-d).$$

$F = ma$ と $R_1 = mg - R_2$ を代入すると

$$mgd - R_2 d + mah = R_2(b-d) \quad \Longrightarrow \quad R_2 = \frac{m(gd+ah)}{b},$$

したがって

$$R_1 = mg - R_2 = \frac{m\big((b-d)g - ah\big)}{b}.$$

a が増加すると、荷重が前輪から後輪へ移る。すなわち R_1 は減少し、R_2 は増加する。

それぞれの破綻はいつ起こるか

前輪。前輪が道路に接したままであるのは $R_1 \geq 0$ のとき、すなわち

$$a \leq \frac{(b-d)g}{h} =: a_{\text{lift}}.$$

のときである。

後輪。後輪が滑らないのは $F \leq \mu R_2$ のとき、すなわち

$$ma \leq \frac{\mu m(gd+ah)}{b} \iff a(b-\mu h) \leq \mu dg.$$

のときである。

考えてみよう 不等号の向きを変えずに $b-\mu h$ で割ってよいのはなぜか。

与えられた条件 $\mu < b/h$ はまさにこのためにある。この条件は $b-\mu h > 0$ を意味する。よって後輪が路面をとらえているのは

$$a \leq \frac{\mu d g}{b-\mu h} =: a_{\text{slip}}.$$

のときである。（この条件がなければ、得られる摩擦力は必要な摩擦力と少なくとも同じ速さで増加し、後輪は決して滑らない。）

2 つのしきい値はともに正であり、a を 0 から増加させたとき後輪が先に滑るのは、ちょうど $a_{\text{slip}} < a_{\text{lift}}$ のときである。$b-\mu h > 0$ かつ $h > 0$ なので、分母を払うことができる。

$$\begin{aligned}
\frac{\mu d g}{b-\mu h} < \frac{(b-d)g}{h} &\iff \mu d h < (b-d)(b-\mu h) \\
&\iff \mu d h + \mu h(b-d) < b(b-d) \\
&\iff \mu h b < b(b-d) \\
&\iff \mu < \frac{b-d}{h},
\end{aligned}$$

最後の段階では $bh > 0$ で割った。よって $(*)$ が成り立てば、前輪が接地を失う前に後輪が滑る。これが示すべきことであった。（実際、この同値の連鎖は 2 つの主張が同値であることを示している。）

$(*)$ が成り立つときの最大加速度

$(*)$ が成り立てば $a_{\text{slip}} < a_{\text{lift}}$ である。a_{slip} 以下の加速度はどれも両方の条件を満たすので、前輪は接地したままで、後輪は路面をとらえている。それより大きな加速度では $F > \mu R_2$ が必要になる。よって滑らずに出せる最大加速度は

$$a_{\max} = \frac{\mu d g}{b-\mu h},$$

であり、これが示すべきことであった。

$(*)$ が成り立たないとき

このとき $\mu \geq \dfrac{b-d}{h}$ なので、同じ同値の連鎖（$<$ の代わりに $\geq$ としたもの）により $a_{\text{lift}} \leq a_{\text{slip}}$ が得られる。したがって a_{lift} 以下の加速度はどれも $R_1 \geq 0$ を保ち、しかも $a \leq a_{\text{slip}}$ を満たすので、後輪は滑らない。a_{lift} を超えると $R_1 < 0$ が必要になるが、前

輪が道路に接している限りそれは不可能である。よって前輪が接地したまま出せる最大加速度は

$$a_{\max} = \frac{(b-d)g}{h}.$$

である。この加速度では $R_1 = 0$ となる。オートバイはちょうどウィリー（wheelie）を起こす寸前であり、全荷重が後輪にかかっている。

検算

- $a = 0$ のとき、$R_2 = mgd/b$、$R_1 = mg(b-d)/b$ であり、これはてこの原理（lever rule）による通常の静的な荷重配分である。G に近い方の車輪がより大きな荷重を支える。
- 境界の場合 $\mu = (b-d)/h$ では $b - \mu h = d$ なので、$a_{\text{slip}} = \mu g = (b-d)g/h = a_{\text{lift}}$ となる。2 つの答えは、当然そうあるべきとおり一致する。
- 数値例：$b = 1.5\,\text{m}$、$d = 0.75\,\text{m}$、$h = 0.6\,\text{m}$、$\mu = 0.8$、$g = 9.8\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$ とする。このとき $(b-d)/h = 1.25 > \mu$ であり、$a_{\text{slip}} = 5.88/1.02 \approx 5.76\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$ は $a_{\text{lift}} = 12.25\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$ を大きく下回る。多数のランダムなオートバイについて a を段階的に増やし、どちらの条件が先に破れるかを記録するコンピュータによる検証も、両方の公式と一致した。

よくある間違い

- 摩擦力のモーメントの符号を間違える。G より下ではたらく前向きの摩擦力は前輪を浮かせる向きにはたらく。加速によって前輪の荷重が減るのはこのためである。
- $b - \mu h$ が正である理由を述べずにそれで割る。条件 $\mu < b/h$ の役割はそれだけである。
- 接地点のまわりのモーメントをとり、その合計を 0 とおく。オートバイは加速しているので、モーメントは G のまわりではつり合うが、他の点のまわりではつり合わない。

STEP のその先へ

モーメントについて与えられた条件は、重心のまわりの角運動量（angular momentum）の変化率がそのまわりの全トルク（torque）に等しいという剛体の法則の特別な場合である。ここではオートバイが回転しないので、角運動量は 0 である。それ以外の点のまわりでは、加速している物体には ma に由来する「見かけの」トルクが余分に加わ

る。これが最後のよくある間違いの理由である。同じ荷重移動の解析は、車両運動力学における制動やトラクションの限界の基礎となっている。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は剛体の力学を丁寧に展開している。

解答例

STEP II 2018、第 12 問

確率・統計 ・ 最適停止と期待値

STEP II 2018、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/18-s2-q12

鍵となる考え方

表（Heads）の目標回数を h に固定すると、ゲームが終わる前に目標に到達したときに限り £h を得て、そうでなければ何も得られない。したがって獲得額の期待値（expected value）は h と「表が h 回出るところまで到達する確率」の積であり、問題全体はこの確率を求めることに帰着する。整数 h について最大化するときは微分してはいけない。比（ratio）E_{h+1}/E_h を調べて、隣り合う項を比較するのである。

解答

以下では、裏（Tails）が出る確率を $q = 1 - p = \frac{1}{N+1}$ とし、目標を h（ただし $h \geq 1$）としたときの獲得額の期待値を E_h とする。表が h 回出るところまで到達すれば £h、そうでなければ £0 を得るので、

$$E_h = h \times \mathrm{P}(\text{ゲームが終わる前に表が}h\text{ 回に達する}).$$

小問 (i)

バージョン 1 では裏が 1 回出ただけでゲームが終わるので、表が h 回に達するのは、最初の h 回の投げがすべて表であるときに限る。各回の投げは独立（independent）であるから、この確率は p^h であり、

$$E_h = hp^h.$$

最良の h を求めるため、隣り合う値を比較する。$E_h > 0$ であるから、

$$\frac{E_{h+1}}{E_h} = \frac{(h+1)p^{h+1}}{hp^h} = \frac{(h+1)N}{h(N+1)},$$

であり、

$$\frac{E_{h+1}}{E_h} \geq 1 \iff (h+1)N \geq h(N+1) \iff N \geq h,$$

等号は $h = N$ のときに限り成り立つ。よって

$$E_1 < E_2 < \cdots < E_N = E_{N+1} > E_{N+2} > \cdots .$$

この数列は $h = N$ まで狭義に増加し、次の値はそれと等しく、その後は狭義に減少する。したがって E_h の最大値は E_N であり、$h = N$ を選べば獲得額の期待値が最大になる。これが示すべきことであった。（$h = N+1$ を選んでも同じくらい良い。）最大値は $N\left(\frac{N}{N+1}\right)^N$ である。

小問 (ii)

今度は、裏が 2 回続けて出たときにだけゲームが終わる。h 回目の表までの投げを、それぞれ表で終わる h 個のブロックに分けて考える。表が h 回に無事到達したならば、各ブロックは

$$\mathrm{H} \quad \text{または} \quad \mathrm{TH},$$

のいずれかである。裏が 2 回続けば、そこでゲームが終わっていたはずだからである。（最初の投げが裏であるのは構わない。その前には何もないからである。）逆に、このようなブロックを h 個並べた列は、裏が 2 回続くことを決して含まない。列の中の各裏は、表の直後か最初に現れ、かつ表の直前に現れるからである。したがって表が h 回に達するのは、投げの列がこれら 2 種類のブロック h 個に分割されるときに限る。

考えてみよう なぜブロックの確率を単純に掛け合わせてよいのだろうか？

表が出るたびに、ゲームは最初とまったく同じ状態に戻る。未解決の裏はなく、今後の投げは過去と独立である。よって各ブロックは、他のブロックとは独立に、確率

$$\mathrm{P(H)} + \mathrm{P(TH)} = p + qp = p(1+q) = \frac{N}{N+1} \cdot \frac{N+2}{N+1} = \frac{N(N+2)}{(N+1)^2}.$$

で無事に終わる。（この 2 つの事象は最初の投げの結果が異なるので、互いに排反である。）したがって表が h 回に達する確率は $\left(\frac{N(N+2)}{(N+1)^2}\right)^h$ であり、

$$E_h = \frac{hN^h(N+2)^h}{(N+1)^{2h}},$$

となる。これが示すべきことであった。

$N = 2$ の場合。 このとき

$$E_h = h\left(\frac{2 \cdot 4}{9}\right)^h = h\left(\frac{8}{9}\right)^h.$$

小問 (i) と同様に、

$$\frac{E_{h+1}}{E_h} = \frac{8(h+1)}{9h} \geq 1 \iff 8h+8 \geq 9h \iff h \leq 8,$$

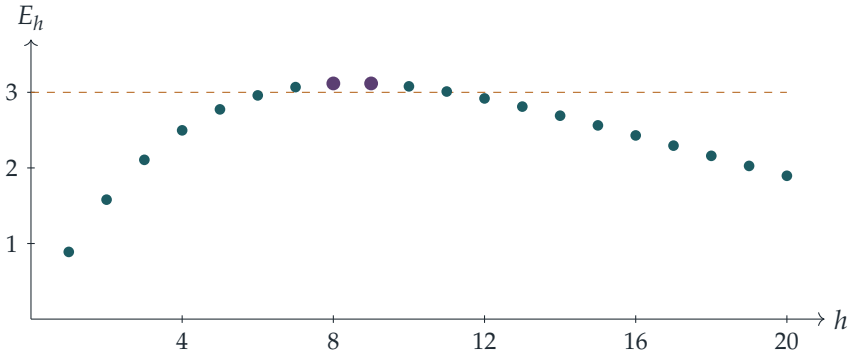
であり、等号は $h = 8$ のときに限り成り立つ。よって E_h は $h = 8$ まで狭義に増加し、$E_9 = E_8$ となり、その後は狭義に減少する。最大値は

$$E_8 = 8\left(\frac{8}{9}\right)^8 = \frac{2^3 \cdot 2^{24}}{3^{16}} = \frac{2^{27}}{3^{16}}.$$

である。これを見積もるために、3 を底とする対数をとり、$\log_3 2 \approx 0.63$ を用いると、

$$\log_3 E_8 = 27\log_3 2 - 16 \approx 27(0.63) - 16 = 17.01 - 16 = 1.01.$$

よって $E_8 \approx 3^{1.01}$ であり、これは $3^1 = 3$ にきわめて近い。獲得額の期待値の最大値はおよそ £3 である。



バージョン 2 で $N = 2$ のときの値 $E_h = h(8/9)^h$。$h = 8, 9$ における同率の最大値は、3 の破線のわずかに上にある。

検算

- バージョン 2 はバージョン 1 より有利になることはあっても不利になることはない。表だけが続く始まり方は、どちらでも無事だからである。実際、$\frac{N(N+2)}{(N+1)^2} = 1 - \frac{1}{(N+1)^2} > \frac{N}{N+1}$ である。
- $N = 1$ のとき、バージョン 1 では $E_1 = E_2 = \frac{1}{2}$ となる。表 1 回が確率 $\frac{1}{2}$、表 2 回が確率 $\frac{1}{4}$ である。
- 正確には $E_8 = 2^{27}/3^{16} = 134\,217\,728/43\,046\,721 \approx 3.118$ であるから、£3 という見積もりは良い。$N = 2$、$h = 8$ として 2×10^5 回のゲームをコンピュータでシミュレーションしたところ、平均獲得額は約 £3.11 であった。

よくある間違い

- バージョン 2 で、最初に裏が 1 回出るのは許されることを忘れたり、h 回目の表の後に裏が続いてもよいと誤解したりすること。h 回目の表が出た時点でただちにやめるのである。
- hp^h を微分して 0 とおくこと。これからは $h = -1/\ln p$ が得られるが、これは通常整数ではなく、最良の整数に直すには注意が必要である。比を調べる方法のほうがすっきりしていて、しかも厳密である。
- 同率を見落とすこと。$h = N$ と $h = N + 1$ は同じ期待値を与えるので、「show that（示せ）」が求めているのは、$h = N$ で最大値が達成されることだけである。

STEP のその先へ

これは単純な**最適停止**（optimal stopping）問題である。ここでは目標をあらかじめ固定しているが、そうしても何も失われないことが確かめられる。未解決の裏がない状態で表を H 回得ているとき、もう 1 回投げることによる利得が正になるのは、H が十分小さいときに限るのである。このように、「今やめる」と「もう 1 歩進む」を比較していつやめるかを決める問題は、マルチンゲール（martingale）や動的計画法（dynamic programming）へとつながる。小問 (ii) のブロックによる議論は、マルコフ連鎖（Markov chain）における再生（renewal）の考え方の最初の一端である。次の一歩としては、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）がよい。

解答例

STEP II 2018、第 13 問

確率・統計　・　漸化式

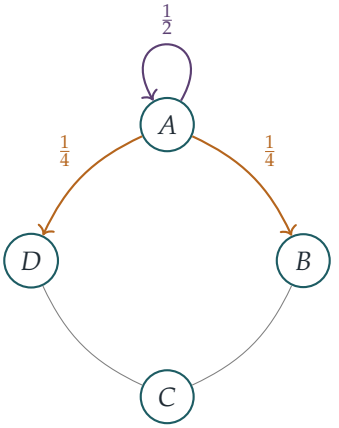
> **STEP II 2018、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q13

鍵となる考え方

小包がどこにあっても、次の笛でどう動くかは決まった規則に従う。したがって A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1} のそれぞれは A_n, B_n, C_n, D_n の決まった一次結合で表される。互いに絡み合った 4 本の漸化式（recurrence）は手ごわく見えるが、適切な**組合せ**（向かい合う子ども同士の和と差）をとると、それぞれが 1 行で書ける独自の漸化式を満たし、それらはすぐに解くことができる。

解答

円周上に並んだ子どもに名前をつける。笛が鳴るたびに、小包を持っている子は確率 $\frac{1}{2}$ でそのまま持ち続け、両隣の子それぞれに確率 $\frac{1}{4}$ で渡す。問題の設定により、時計回りに渡すことと反時計回りに渡すことは同様に確からしいことに注意する。



図は A からの動きを示している。どの子においても同じパターンが当てはまる。

小問 (i)

A から始めると、1 回目の笛の後は

$$A_1 = \tfrac{1}{2}, \qquad B_1 = \tfrac{1}{4}, \qquad C_1 = 0, \qquad D_1 = \tfrac{1}{4},$$

となる。C は A から 2 つ離れているので、1 回の移動では到達できないからである。

2 回目の笛の後にある子のところに小包があるためには、すでにそこにあってとどまった（確率 $\frac{1}{2}$）か、隣の子のところにあって正しい向きに渡された（それぞれの隣から確率 $\frac{1}{4}$）かのいずれかである。よって

$$\begin{aligned} A_2 &= \tfrac{1}{2}A_1 + \tfrac{1}{4}B_1 + \tfrac{1}{4}D_1 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{3}{8}, \\ B_2 &= \tfrac{1}{2}B_1 + \tfrac{1}{4}A_1 + \tfrac{1}{4}C_1 = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + 0 = \tfrac{1}{4}, \\ C_2 &= \tfrac{1}{2}C_1 + \tfrac{1}{4}B_1 + \tfrac{1}{4}D_1 = 0 + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{1}{8}, \\ D_2 &= \tfrac{1}{2}D_1 + \tfrac{1}{4}C_1 + \tfrac{1}{4}A_1 = \tfrac{1}{8} + 0 + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

確認として、$\frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = 1$ である。

小問 (ii)

$n = 2$ のときに用いた議論は、全確率の法則（law of total probability）により（n 回目の笛の後に誰が小包を持っているかで場合分けして）すべての $n \geq 0$ に対して成り立つ：

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \tfrac{1}{2}A_n + \tfrac{1}{4}(B_n + D_n), & B_{n+1} &= \tfrac{1}{2}B_n + \tfrac{1}{4}(A_n + C_n), \\ C_{n+1} &= \tfrac{1}{2}C_n + \tfrac{1}{4}(B_n + D_n), & D_{n+1} &= \tfrac{1}{2}D_n + \tfrac{1}{4}(A_n + C_n), \end{aligned}$$

ただし $A_0 = 1$ かつ $B_0 = C_0 = D_0 = 0$ である。

B_n と D_n を求める。 B_{n+1} と D_{n+1} の式を辺々加えると

$$B_{n+1} + D_{n+1} = \tfrac{1}{2}(B_n + D_n) + \tfrac{1}{2}(A_n + C_n) = \tfrac{1}{2}(A_n + B_n + C_n + D_n) = \tfrac{1}{2},$$

となる。常に誰かが小包を持っているので、4 つの確率の和は 1 だからである。

考えてみよう 和 $B + D$ はわかったが、これを B と D にどう分ければよいだろうか？

加える代わりに引いてみる。すると $A_n + C_n$ の項が打ち消し合い、

$$B_{n+1} - D_{n+1} = \tfrac{1}{2}(B_n - D_n).$$

が残る。$B_0 - D_0 = 0$ であるから、すべての n に対して $B_n - D_n = 0$ となる。（これはゲームの鏡映対称性である。時計回りと反時計回りに渡すことは同様に確からしく、B と D は A の両側に対称に位置している。）$B_n + D_n = \frac{1}{2}$ と合わせて

$$B_n = D_n = \tfrac{1}{4} \qquad \text{ただし} n \geq 1,$$

を得る。一方、もちろん $B_0 = D_0 = 0$ である。これは小問 (i) と一致する。

A_n と C_n を求める。 $n \geq 1$ に対しては、いまや $A_n + C_n = 1 - (B_n + D_n) = \frac{1}{2}$ がわかっている。A_{n+1} と C_{n+1} の式を辺々引くと、$B_n + D_n$ の項が打ち消し合う：

$$A_{n+1} - C_{n+1} = \tfrac{1}{2}(A_n - C_n),$$

そしてこれはすべての $n \geq 0$ に対して成り立つ。$A_0 - C_0 = 1$ であるから、すべての $n \geq 0$ に対して $A_n - C_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ を得る。これを $A_n + C_n = \frac{1}{2}$ と連立して解くと

$$\boxed{A_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{n+1}}, \qquad C_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}} \qquad (n \geq 1).}$$

これらの式は $n = 0$ では成り立たない（$A_0 = \frac{3}{4}$ を与えてしまう）。関係式 $A_n + C_n = \frac{1}{2}$ は 1 回目の笛の後からしか成り立たないからである。

検算

- $n = 1$：$A_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ かつ $C_1 = 0$。$n = 2$：$A_2 = \frac{3}{8}$ かつ $C_2 = \frac{1}{8}$。いずれも小問 (i) と一致する。
- $n = 3$：公式から $(A_3, B_3, C_3, D_3) = (\frac{5}{16}, \frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4})$ が得られ、その和は 1 であり、漸化式を直接 1 段ずつ計算した結果とも一致する。また、200 000 回のゲームのコンピュータシミュレーションでは $A_3 \approx 0.313$ および $C_3 \approx 0.188$ となった。
- $n \to \infty$ のとき、どの確率も $\frac{1}{4}$ に収束（converge）する。多くの笛が鳴った後には、対称性から予想されるとおり、小包はどの子のところにある確率も等しくなる。

よくある間違い

- B_{n+1} を、B へ入ってくる確率ではなく、B から渡される確率を用いて書いてしまう。「直前に小包はどこにあり得たか？」と自問するとよい。
- すべての $n \geq 0$ に対して $A_n = \frac{1}{4} + 2^{-(n+1)}$ と述べてしまう。これは $n = 0$ では誤りである。

- 理由を一言も述べずに「対称性により」$B_n = D_n$ と仮定してしまう。差についての漸化式を使えば、これを厳密に示せる。

STEP のその先へ

これは**マルコフ連鎖**（Markov chain）である。すなわち、推移行列（transition matrix）P をもつ、4 つの状態からなる閉路上のランダムウォーク（random walk）であり、$(A_n, B_n, C_n, D_n) = (1,0,0,0)P^n$ が成り立つ。組合せ $B_n - D_n$, $A_n - C_n$, $A_n + C_n - B_n - D_n$ は P の固有ベクトル（eigenvector）から得られるものであり（固有値（eigenvalue）はそれぞれ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$）、一様分布（uniform distribution）へ速さ 2^{-n} で収束することは、2 番目に大きい固有値によって支配されている。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、マルコフ連鎖とその長期的な振る舞いについてわかりやすく解説している。

解答例

STEP III 2018、第 1 問

純粋数学 ・ 2 次方程式の解と不等式

STEP III 2018、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/18-s3-q1

鍵となる考え方

解と係数の関係（Vieta's formulas）を使うと、u と v の二つの対称式（symmetric expression）はどちらも係数 α と β の簡単な関数に書き直せる。一方の式の値を固定すれば α を消去でき、もう一方の式は β だけの関数になる。それがちょうど小問 (i) でグラフを描いた二つの関数のいずれかである。さらに u と v が実数であるという条件（判別式（discriminant）≥ 0）から、曲線のどの範囲を使ってよいかがわかり、あとはグラフが答えを教えてくれる。

解答

小問 (i)

曲線 $y = \mathrm{f}(\beta)$　微分すると

$$\mathrm{f}'(\beta) = 1 + \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} = \frac{\beta^3 + \beta + 2}{\beta^3} = \frac{(\beta+1)(\beta^2 - \beta + 2)}{\beta^3},$$

となる。ここで、3 次式の解 $\beta = -1$ を見つけて因数分解した。2 次の因数の判別式は $1 - 8 < 0$ であるから、この因数はつねに正である。したがって停留点（stationary point）は $\beta = -1$ のみであり、そこでの値は

$$\mathrm{f}(-1) = -1 + 1 - 1 = -1.$$

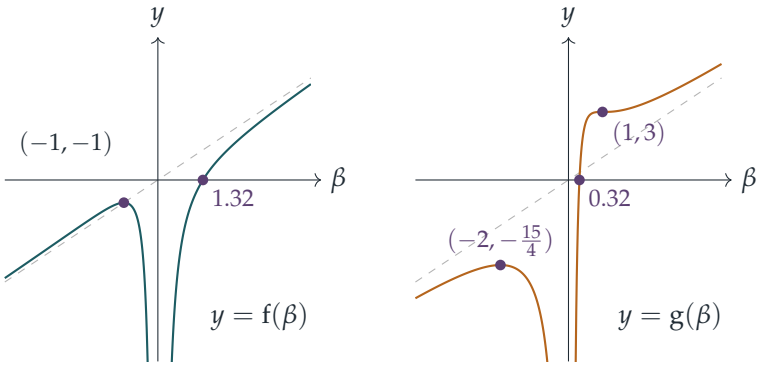
である。符号を調べる。$-1 < \beta < 0$ では分子が正で $\beta^3 < 0$ であるから $\mathrm{f}' < 0$ である。$\beta < -1$ では分子も分母も負であるから $\mathrm{f}' > 0$ である。よって $(-1, -1)$ は**極大点**であり、すべての $\beta < 0$ に対して $\mathrm{f}(\beta) \leq -1$ が成り立つ。$\beta > 0$ ではすべてが正であるから、f はそこで増加する。

端での振る舞い：$\beta \to 0$ のとき、どちら側から近づいても項 $-1/\beta^2$ が支配的となり、$f \to -\infty$ である。$\beta \to \pm\infty$ のとき $f(\beta) - \beta \to 0$ であるから、$y = \beta$ は斜めの漸近線（oblique asymptote）である。曲線は $\beta^3 - \beta - 1 = 0$ となる点、すなわち $\beta \approx 1.32$ で軸と 1 回だけ交わる。

曲線 $y = g(\beta)$　同様に

$$g'(\beta) = 1 - \frac{3}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} = \frac{\beta^3 - 3\beta + 2}{\beta^3} = \frac{(\beta-1)^2(\beta+2)}{\beta^3}.$$

停留点は $\beta = -2\,(g(-2) = -2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{15}{4})$ と $\beta = 1\,(g(1) = 3)$ である。$-2 < \beta < 0$ では $g' < 0$、$\beta < -2$ では $g' > 0$ であるから、$(-2, -\frac{15}{4})$ は極大点であり、すべての $\beta < 0$ に対して $g(\beta) \le -\frac{15}{4}$ である。$\beta > 0$ では $g' \ge 0$ であり、等号が成り立つのは $\beta = 1$ のときに限る。そこで導関数の符号は変わらないので、$(1, 3)$ は停留変曲点（stationary point of inflection）であり、g は $\beta > 0$ で増加する。やはり $\beta \to 0$ のとき $g \to -\infty$ であり、$y = \beta$ は漸近線で、零点は $\beta \approx 0.32$（$\beta^3 + 3\beta - 1 = 0$ の解）の一つだけである。



破線は漸近線 $y = \beta$ である。

小問 (ii)

解と係数の関係より $u + v = -\alpha$、$uv = \beta$ である（また $\beta \ne 0$ であるから $uv \ne 0$）。よって

$$u + v + \frac{1}{uv} = -\alpha + \frac{1}{\beta}, \qquad \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + uv = \frac{u+v}{uv} + uv = \beta - \frac{\alpha}{\beta}.$$

小問 (iii)

条件 $-\alpha+\frac{1}{\beta}=-1$ から $\alpha=1+\frac{1}{\beta}$ である。これを二つ目の式に代入すると

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+uv=\beta-\frac{1}{\beta}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)=\beta-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta^2}=\mathrm{f}(\beta).$$

したがって、許されるすべての β に対して $\mathrm{f}(\beta)\le -1$ を示せばよい。

考えてみよう 曲線 $y=\mathrm{f}(\beta)$ は $+\infty$ へ伸びていくので、この不等式がすべての β で成り立つことはありえない。では、何が β を大きくさせないのだろうか。

それは u と v が実数であるという条件である。解が実数となるのは $\alpha^2\ge 4\beta$ のとき、かつそのときに限る。すなわち

$$\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\ge 4\beta \iff (\beta+1)^2\ge 4\beta^3 \iff 4\beta^3-\beta^2-2\beta-1\le 0,$$

である。ここで両辺に $\beta^2>0$ を掛けた。$\beta=1$ はこの 3 次式の解であり、

$$4\beta^3-\beta^2-2\beta-1=(\beta-1)(4\beta^2+3\beta+1).$$

2 次の因数の判別式は $9-16<0$ であるから、この因数はつねに正である。したがって、解が実数となるのは $\beta\le 1$（ただし $\beta\ne 0$）のとき、かつそのときに限る。

- $\beta<0$ のとき：小問 (i) より $\mathrm{f}(\beta)\le \mathrm{f}(-1)=-1$。
- $0<\beta\le 1$ のとき：f は $\beta>0$ で増加するので、$\mathrm{f}(\beta)\le \mathrm{f}(1)=1-1-1=-1$。

いずれの場合も $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+uv\le -1$ となり、示すべきことが示された。等号は $\beta=-1$（$\alpha=0$、解は ± 1）と $\beta=1$（$\alpha=2$、重解（double root）-1）のときに成り立つ。

小問 (iv)

今度は $-\alpha+\frac{1}{\beta}=3$ であるから $\alpha=\frac{1}{\beta}-3$ であり、

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+uv=\beta-\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\beta}-3\right)=\beta+\frac{3}{\beta}-\frac{1}{\beta^2}=\mathrm{g}(\beta).$$

解が実数となるのは $\alpha^2\ge 4\beta$ のときである：

$$\left(\frac{1}{\beta}-3\right)^2\ge 4\beta \iff (1-3\beta)^2\ge 4\beta^3 \iff 4\beta^3-9\beta^2+6\beta-1\le 0.$$

ここでも $\beta=1$ は解であり、しかも今回は重解である：

$$4\beta^3-9\beta^2+6\beta-1=(\beta-1)(4\beta^2-5\beta+1)=(\beta-1)^2(4\beta-1).$$

$(\beta-1)^2 \geq 0$ であるから、この 3 次式が ≤ 0 となるのは $\beta \leq \frac{1}{4}$ **または** $\beta = 1$ のとき、かつそのときに限る。よって許される値は $\beta < 0$、$0 < \beta \leq \frac{1}{4}$、そして孤立した値 $\beta = 1$ である。

考えてみよう 最大値は単純に区間の右端での値 $g(\frac{1}{4})$ だろうか。

そうとは限らない。孤立点（isolated point）を見落としてはならない。三つの部分それぞれについて調べる：

- $\beta < 0$：小問 (i) より $g(\beta) \leq -\frac{15}{4}$。
- $0 < \beta \leq \frac{1}{4}$：g は増加するので、$g(\beta) \leq g(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} + 12 - 16 = -\frac{15}{4}$。
- $\beta = 1$：$g(1) = 3$。

したがって $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + uv$ の最大値は $\boxed{3}$ であり、これは $\beta = 1$、$\alpha = -2$、すなわち $u = v = 1$ のときにとる。（実際、どちらの式も $1+1+1 = 3$ となる。）この重解がなければ、$-\frac{15}{4}$ より大きい値はとりえない。

検算

- $u = v = 1$ を両方の式に代入すると、どちらも 3 となり、小問 (iv) と一致する。$u = v = -1$ を代入すると、どちらも -1 となり、これは小問 (iii) の等号成立の場合である。
- 小問 (iv) で $\beta = \frac{1}{4}$ としてみる。$\alpha = 1$ であり、$x^2 + x + \frac{1}{4} = (x + \frac{1}{2})^2$ であるから $u = v = -\frac{1}{2}$ である。このとき $u + v + \frac{1}{uv} = -1 + 4 = 3$、$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + uv = -4 + \frac{1}{4} = -\frac{15}{4}$ となり、主張どおりである。
- 実数解を与える β を無作為に数千個とってコンピュータで調べたところ、小問 (iii) では -1 を超える値は見つからず、小問 (iv) では $\beta = 1$ を除いて -3.75 を超える値は見つからなかった。

よくある間違い

- 判別式の条件を忘れ、小問 (iii) で上界は存在しないと結論してしまう。
- $(\beta-1)^2(4\beta-1) \leq 0$ を単に $\beta \leq \frac{1}{4}$ と解いて $\beta = 1$ を見落とし、答えを 3 ではなく $-\frac{15}{4}$ としてしまう。
- 不等式 $\alpha^2 \geq 4\beta$ に β^2 ではなく（負かもしれない）β を掛けてしまう。

STEP のその先へ

これは小さな制約つき最適化（constrained optimisation）の問題である。実数解を与える係数の集合の上で関数を最大化するのであり、その集合には区間だけでなく孤立点も含まれうる。集合上での関数の最大値は、停留点や区間の端でとるとは限らない。だからこそ、解析学や最適化では実行可能集合（feasible set）を注意深く記述することがきわめて重要なのである。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）では、一般の集合上の連続関数の最大値・最小値が丁寧に扱われている。

解答例

STEP III 2018、第 2 問

純粋数学 • エルミート多項式

STEP III 2018、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/18-s3-q2

鍵となる考え方

定義を逆向きに読むと、これは z の第 n 次導関数（nth derivative）が $(-1)^n y_n z$ であることを述べている。これをもう一度微分し、$n+1$ に対する同じ主張と比べれば、小問 (i) は一行で示せる。その後は、小問 (i) が漸化式（recurrence）を微分するための道具となり、これが (ii) の数学的帰納法（induction）を推し進める。最後の不等式は、(ii) の恒等式（identity）から、二度目のごく短い帰納法によって導かれる。

解答

以下を通じて $z = \mathrm{e}^{-x^2}$ とする。よって $z' = -2xz$ であり、すべての x に対して $z > 0$ である。定義を変形すると

$$\frac{\mathrm{d}^n z}{\mathrm{d}x^n} = (-1)^n y_n z \qquad (n \geq 0),$$

となる。$y_0 = 1$ であるから、これは $n = 0$ のときにも成り立つ。

小問 (i)

上に掲げた等式を、積の微分法（product rule）と $z' = -2xz$ を用いて微分すると

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1} z}{\mathrm{d}x^{n+1}} = (-1)^n \left(y_n' z + y_n z'\right) = (-1)^n \left(y_n' - 2x y_n\right) z.$$

一方、同じ等式で n を $n+1$ に置き換えると、左辺は $(-1)^{n+1} y_{n+1} z$ である。両者を等しいとおき、決して 0 にならない $(-1)^n z$ で割ると

$$y_n' - 2x y_n = -y_{n+1}, \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} = 2x y_n - y_{n+1},$$

となり、示すべきことが得られた。ここではどこにも $n \geq 1$ を必要としなかったので、この結果は $n = 0$ に対しても成り立つ。これを後で用いる。

後で使うために記しておく：$z' = -2xz$ および $z'' = (4x^2 - 2)z$ であるから、$y_1 = 2x$、$y_2 = 4x^2 - 2$ である。

小問 (ii)

初期段階（base case）。 $n = 1$ のときは $y_2 = 2xy_1 - 2y_0$ を示せばよいが、実際 $2x \cdot 2x - 2 = 4x^2 - 2 = y_2$ である。

帰納段階（inductive step）。 ある $k \geq 1$ に対して

$$y_{k+1} = 2xy_k - 2ky_{k-1}. \tag{$*$}$$

が成り立つと仮定する。同じ関係式を一段先で得たいので、$(*)$ を微分する：

$$y'_{k+1} = 2y_k + 2xy'_k - 2ky'_{k-1}.$$

> **考えてみよう** 導関数をどうやって消去すればよいか。また、$k = 1$ のとき、y_{k-1} に対して小問 (i) を用いてよいか。

すべての導関数を小問 (i) を用いて置き換える。$k = 1$ のときの y'_{k-1} については、これは $n = 0$ の場合であり、先に注意したとおりこれも成り立つ。こうして

$$2xy_{k+1} - y_{k+2} = 2y_k + 2x\big(2xy_k - y_{k+1}\big) - 2k\big(2xy_{k-1} - y_k\big),$$

を得るので

$$y_{k+2} = 4xy_{k+1} - 4x^2y_k - 2(k+1)y_k + 4kx\, y_{k-1}.$$

y_{k-1} を含む項は、仮定 $(*)$ をもう一度用いて消去する：$2ky_{k-1} = 2xy_k - y_{k+1}$ であるから $4kx\, y_{k-1} = 4x^2y_k - 2xy_{k+1}$ である。これを代入すると

$$\begin{aligned} y_{k+2} &= 4xy_{k+1} - 4x^2y_k - 2(k+1)y_k + 4x^2y_k - 2xy_{k+1} \\ &= 2xy_{k+1} - 2(k+1)y_k, \end{aligned}$$

となり、これは k を $k+1$ に置き換えた関係式である。数学的帰納法により、すべての $n \geq 1$ に対して $y_{n+1} = 2xy_n - 2ny_{n-1}$ が成り立つ。

結論の導出。 漸化式を二回、すなわち n のときと $n+1$ のときに用いて、両方の積に項 $2xy_ny_{n+1}$ が現れるようにする：

$$\begin{aligned} y_{n+1}^2 &= y_{n+1}\big(2xy_n - 2ny_{n-1}\big) = 2xy_ny_{n+1} - 2ny_{n-1}y_{n+1}, \\ y_ny_{n+2} &= y_n\big(2xy_{n+1} - 2(n+1)y_n\big) = 2xy_ny_{n+1} - 2(n+1)y_n^2. \end{aligned}$$

辺々引くと、x を含む項が打ち消し合う：

$$y_{n+1}^2 - y_n y_{n+2} = 2(n+1)y_n^2 - 2ny_{n-1}y_{n+1} = 2n\left(y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1}\right) + 2y_n^2,$$

これが求める恒等式である。

小問 (iii)

$D_n = y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1}$ とおく。(ii) の恒等式は

$$D_{n+1} = 2nD_n + 2y_n^2 \qquad (n \geq 1).$$

と書ける。すべての $n \geq 1$ に対して $D_n > 0$ であることを数学的帰納法で証明する。$n = 1$ のとき、すべての x に対して

$$D_1 = y_1^2 - y_0 y_2 = 4x^2 - (4x^2 - 2) = 2 > 0$$

である。ある $n \geq 1$ に対して $D_n > 0$ ならば、$n \geq 1$ であるから $2nD_n > 0$ であり、また $2y_n^2 \geq 0$ であるので、$D_{n+1} > 0$ となる。したがって、すべての $n \geq 1$ とすべての実数 x に対して $y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1} > 0$ が成り立ち、示すべきことが得られた。

狭義の不等式を得るためには D_n が正であることが必要だった点に注意しよう：y_n^2 だけでは、y_n の零点において 0 になりうる。

検算

- 漸化式から $y_3 = 2x(4x^2 - 2) - 4 \cdot 2x = 8x^3 - 12x$ である。$z'' = (4x^2 - 2)z$ を直接微分すると $z''' = (-8x^3 + 12x)z$ となり、$-y_3 z$ と一致する。
- $n = 1$ における小問 (i)：$y_1' = 2$ であり、$2x \cdot 2x - (4x^2 - 2) = 2$ である。✓
- $n = 2$ における小問 (iii)：$D_2 = (4x^2 - 2)^2 - 2x(8x^3 - 12x) = 8x^2 + 4$ であり、これは正で、恒等式が予言するとおり $2D_1 + 2y_1^2 = 4 + 8x^2$ に等しい。
- 漸化式と不等式を、x の多数の有理数値（各 y_n の零点の近くを含む）において $n = 14$ までコンピュータで確かめたところ、厳密に一致した。

よくある間違い

- 帰納段階で y_{k-1} に対して小問 (i) を用いており、$k = 1$ のときそれは y_0 を意味することを忘れる：小問 (i) は $n \geq 1$ についてしか問われていないので、$n = 0$ の場合を別に確かめること。
- 小問 (iii) で $D_{n+1} \geq 0$ しか結論しない：狭義の不等式は $D_n > 0$ から得られるのであって、y_n^2 からではない。

STEP のその先へ

関数 y_n はエルミート（Hermite）多項式（Hermite polynomials）$H_n(x)$ であり、関係式 $\mathrm{d}^n z/\mathrm{d}x^n = (-1)^n H_n z$ はそのロドリゲスの公式（Rodrigues formula）である。これらは実数直線全体の上で重み（weight）e^{-x^2} に関して直交（orthogonal）し、量子調和振動子（quantum harmonic oscillator）のエネルギー状態を与える。(iii) の不等式はトゥラン（Turán）型不等式（Turán-type inequality）であり、これは多くの古典的直交多項式について成り立つ一群の結果である。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『常微分方程式入門』）では、級数解（series solutions）を通してエルミートの微分方程式（Hermite's equation）に出会う。

解答例

STEP III 2018、第 3 問

純粋数学 ・ オイラー型微分方程式

STEP III 2018、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/18-s3-q3

鍵となる考え方

左辺はオイラー（Euler）の方程式（等次元方程式（equidimensional equation））である。すなわち、各導関数には対応する x のべきが掛かっている。入れ子になった形 $(*)$ を展開して係数を比較すれば、a、b、c が決まる。方程式をこの形に書き直してしまえば、導関数を一つずつはがしていく 2 回の素直な積分で解くことができる。場合分けが生じるのは、ちょうどその積分の一方が x^{-1} の積分となり、対数が現れるときである。

解答

以下では常に $x > 0$ で考える。こうすれば x のべきはすべて定義される。

a、b、c を求める

積の微分法則（product rule）により、

$$(x^c y)' = x^c y' + c x^{c-1} y, \qquad \text{よって} \qquad x^b (x^c y)' = x^{b+c} y' + c x^{b+c-1} y.$$

もう一度微分すると、

$$\left(x^b (x^c y)'\right)' = x^{b+c} y'' + (b+c) x^{b+c-1} y' + c x^{b+c-1} y' + c(b+c-1) x^{b+c-2} y.$$

x^a を掛け、$a + b + c = 2$ と選ぶと、

$$x^a \left(x^b (x^c y)'\right)' = x^2 y'' + (b + 2c)\, x y' + c(b + c - 1)\, y.$$

これが与えられた左辺と一致するための条件は

$$b + 2c = 1 - 2p, \qquad c(b + c - 1) = p^2 - q^2.$$

である。第 1 式から $b+c-1=-2p-c$ となるので、第 2 式は $-c^2-2pc=p^2-q^2$、すなわち $(c+p)^2=q^2$ となる。$c+p=q$ をとると、

$$c=q-p,\qquad b=1-2p-2c=1-2q,\qquad a=2-b-c=1+p+q.$$

したがって、方程式は

$$x^{1+p+q}\left(x^{1-2q}\left(x^{q-p}y\right)'\right)'=\mathrm{f}(x),$$

と書ける。これが示すべきことであった。（もう一方の根 $c+p=-q$ をとると、q を $-q$ に置き換えた同じものが得られる。方程式には q^2 しか現れないので、これは何も変わらない。）

小問 (i)

$\mathrm{f}=0$ のとき、$x^{1+p+q}\neq 0$ で割ることができる：

$$\left(x^{1-2q}\left(x^{q-p}y\right)'\right)'=0\quad\Longrightarrow\quad x^{1-2q}\left(x^{q-p}y\right)'=A\quad\Longrightarrow\quad\left(x^{q-p}y\right)'=Ax^{2q-1},$$

ここで A は定数である。次の積分は、べき $2q-1$ が -1 であるかどうかによって変わる。

考えてみよう なぜここでは p の値によって場合分けが生じないのだろうか？

積分する指数は $2q-1$ であり、これは p を含まない。p は因子 x^{q-p} を通じてのみ現れ、最後にこれで割るだけである。よって、場合分けは q のみによって決まる。

$q\neq 0$ の場合。積分すると $x^{q-p}y=\dfrac{A}{2q}x^{2q}+B$ となり、x^{p-q} を掛けて（定数 $\frac{A}{2q}$ を改めて A とおくと）、

$$y=Ax^{p+q}+Bx^{p-q}.$$

$q=0$ の場合。このとき $\left(x^{-p}y\right)'=Ax^{-1}$ であるから、$x^{-p}y=A\ln x+B$ となり、

$$y=x^p\left(A\ln x+B\right).$$

いずれの場合も任意定数は 2 個であり、2 階の方程式から予想されるとおりである。

小問 (ii)

これは $q=0$、$\mathrm{f}(x)=x^n$ の場合であるから、$a=1+p$、$b=1$、$c=-p$ であり、方程式は

$$x^{1+p}\left(x\left(x^{-p}y\right)'\right)'=x^n\quad\Longleftrightarrow\quad\left(x\left(x^{-p}y\right)'\right)'=x^{n-p-1}.$$

となる。1 回目の積分には x^{n-p-1} が現れ、これがちょうど x^{-1} となるのは $n=p$ のときである。

$n \neq p$ の場合。 1回積分すると、

$$x\left(x^{-p}y\right)' = \frac{x^{n-p}}{n-p} + A \quad \Longrightarrow \quad \left(x^{-p}y\right)' = \frac{x^{n-p-1}}{n-p} + \frac{A}{x}.$$

再び $n-p \neq 0$ であるから、積分して

$$x^{-p}y = \frac{x^{n-p}}{(n-p)^2} + A\ln x + B, \qquad \text{よって} \qquad y = \frac{x^n}{(n-p)^2} + x^p\left(A\ln x + B\right).$$

$n = p$ の場合。 このときは1回目の積分で対数が現れる：

$$x\left(x^{-p}y\right)' = \ln x + A \quad \Longrightarrow \quad \left(x^{-p}y\right)' = \frac{\ln x}{x} + \frac{A}{x}.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{2}(\ln x)^2 = \frac{\ln x}{x}$ であるから、

$$x^{-p}y = \tfrac{1}{2}(\ln x)^2 + A\ln x + B, \qquad \text{よって} \qquad y = x^p\left(\tfrac{1}{2}(\ln x)^2 + A\ln x + B\right).$$

どちらの場合も、A と B を含む部分は小問 (i) で $q = 0$ とした余関数（complementary function）であり、当然そうなるべきものである。

検算

- $p = q = 0$ とすると、方程式は $x^2y'' + xy' = 0$、すなわち $(xy')' = 0$ であるから $y = A\ln x + B$ となり、小問 (i) と一致する。
- 斉次方程式（homogeneous equation）に $y = x^m$ を代入してみる：$m(m-1) + (1-2p)m + p^2 - q^2 = (m-p)^2 - q^2$ であるから $m = p \pm q$ であり、$q = 0$ のとき重根となる。これは求めた結果のとおりである。
- 小問 (ii) で $n = p = 1$ のとき、$y = \frac{1}{2}x(\ln x)^2$ は $y' = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \ln x$、$y'' = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}$ を満たすので、$x^2y'' - xy' + y = x\ln x + x - \frac{1}{2}x(\ln x)^2 - x\ln x + \frac{1}{2}x(\ln x)^2 = x$ となり、求めるとおりである。
- すべての解について、p、q、n、x の多数のランダムな値でコンピュータにより方程式に代入し直すことも行った。残差は丸め誤差の範囲（10^{-6} 程度）で0であった。

よくある間違い

- (i) の $q = 0$ の場合や (ii) の $n = p$ の場合を忘れること。これらの場合には、べき関数の積分公式の代わりに $\int x^{-1}\,\mathrm{d}x = \ln x$ を用いる。
- 最初の段階で積分定数を落とすこと。2つ目の独立な解を生み出すのはこの定数である。

- 理由を述べずに $a+b+c=2$ を仮定すること。これは y'' に x^2 が掛かるようにするために必要なのである。

STEP のその先へ

2 階の作用素を 1 階の作用素の合成として書くことを、作用素の**因数分解**（factorising）という。これは階数低下法（reduction of order）の背後にある考え方であり、量子力学における昇降演算子（ladder operators）の背後にある考え方でもある。置換 $x=\mathrm{e}^t$ によって、任意のオイラーの方程式は定数係数の方程式に変換される。このことから、重根 $m=p$ と因子 $\ln x$（すなわち t）が現れる理由が説明できる。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）では、オイラーの方程式と階数低下法が扱われている。

解答例

STEP III 2018、第 4 問

純粋数学 • 双曲線の接線

> **STEP III 2018、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q4

鍵となる考え方

接線（tangent）は、$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線が $xx_1/a^2 - yy_1/b^2 = 1$ であるという標準的な結果を使うのが最も速い。あとはすべて 2 直線の交点の問題なので、連立一次方程式を解き、三角関数の式を整理するだけである。小問 (ii) では、直交条件が b を含む $\sin\theta$ と $\sin\phi$ の間のただ一つの関係式となり、まさにこれによって式から b を消去し、そのあと $a^2 - b^2$ の形で b を戻すことができる。和積公式（sum-to-product formulae）を使えば最後の計算は短くなる。

解答

P における接線

$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると $\dfrac{2x}{a^2} - \dfrac{2y}{b^2}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ となるので、(x_1, y_1) における傾き（gradient）は $\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$ であり、接線は

$$y - y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1) \iff \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

となる。ここで (x_1, y_1) が曲線上にあることを用いた。（この形は、$y_1 = 0$ で接線が垂直になる頂点（vertex）の場合も含んでいる。）$x_1 = a\sec\theta, y_1 = b\tan\theta$ とすると

$$\frac{x\sec\theta}{a} - \frac{y\tan\theta}{b} = 1.$$

両辺に $ab\cos\theta$ を掛けると（$\sec\theta$ が存在するので、これは 0 でない）

$$bx - ay\sin\theta = ab\cos\theta,$$

となり、示すべき式が得られる。

小問 (i)

与えられた 2 直線は漸近線（asymptote）$y = \pm\frac{b}{a}x$ である。

S において、$ay = bx$ である。$ay = bx$ を接線の式に代入すると $bx(1-\sin\theta) = ab\cos\theta$ となるので

$$S = \left(\frac{a\cos\theta}{1-\sin\theta}, \frac{b\cos\theta}{1-\sin\theta}\right).$$

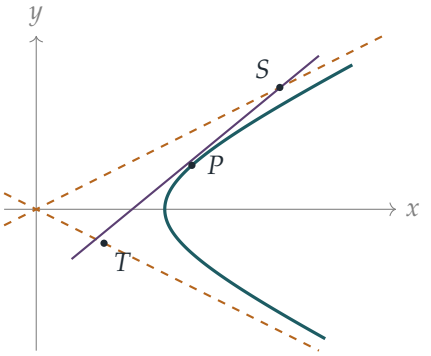
T において、$ay = -bx$ であり、これより $bx(1+\sin\theta) = ab\cos\theta$ となるので

$$T = \left(\frac{a\cos\theta}{1+\sin\theta}, -\frac{b\cos\theta}{1+\sin\theta}\right).$$

$\cos\theta \neq 0$ より $\sin\theta \neq \pm 1$ なので、どちらの分母も 0 でない。足し合わせ、$(1-\sin\theta)(1+\sin\theta) = \cos^2\theta$ を用いると：

$$x_S + x_T = a\cos\theta \cdot \frac{(1+\sin\theta)+(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{2a}{\cos\theta} = 2a\sec\theta,$$
$$y_S + y_T = b\cos\theta \cdot \frac{(1+\sin\theta)-(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{2b\sin\theta}{\cos\theta} = 2b\tan\theta.$$

よって ST の中点（mid-point）は $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ であり、**ST の中点は P そのものである**。任意の点における接線は、2 本の漸近線によって接点で二等分されるのである。



小問 (ii)

直交条件。 $ay\sin\theta = bx - ab\cos\theta$ と書けば、$\sin\theta \neq 0$ のとき P における接線の傾きは $\dfrac{b}{a\sin\theta}$ である。（$\sin\theta = 0$ ならば接線は垂直なので、Q における接線は水平でなければならない。しかし $b/(a\sin\phi) \neq 0$ なので、水平な接線は存在しない。したがって $\sin\theta \neq 0$ であり、同様に $\sin\phi \neq 0$ である。）接線が直交するためには、傾きの積が -1 であればよい：

$$\frac{b^2}{a^2\sin\theta\sin\phi} = -1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin\theta\sin\phi = -\frac{b^2}{a^2}. \tag{$*$}$$

特に $\sin\theta$ と $\sin\phi$ は異符号なので、$\sin\phi - \sin\theta \neq 0$ である。$(*)$ には $b^2/a^2 < 1$ が必要であり、ここで $a > b$ が使われることに注意する。

交点。 点 (x, y) は

$$bx - ay\sin\theta = ab\cos\theta, \qquad bx - ay\sin\phi = ab\cos\phi.$$

を満たす。第 1 式から第 2 式を引くと $ay(\sin\phi - \sin\theta) = ab(\cos\theta - \cos\phi)$ となる。第 1 式に $\sin\phi$ を、第 2 式に $\sin\theta$ を掛けて引くと $bx(\sin\phi - \sin\theta) = ab(\sin\phi\cos\theta - \cos\phi\sin\theta) = ab\sin(\phi - \theta)$ となる。よって

$$x = \frac{a\sin(\phi-\theta)}{\sin\phi - \sin\theta}, \qquad y = \frac{b(\cos\theta - \cos\phi)}{\sin\phi - \sin\theta}.$$

考えてみよう これらにはまだ b が含まれている。x^2 と y^2 を a, θ, ϕ だけで表すにはどうすればよいか。また、分数は簡単にできるだろうか。

条件 $(*)$ は $b^2 = -a^2\sin\theta\sin\phi$ を意味するので、2 乗すれば b を消去できる。簡単にするために、$\alpha = \frac{1}{2}(\phi + \theta), \beta = \frac{1}{2}(\phi - \theta)$ とおく。和積公式により

$$\sin\phi - \sin\theta = 2\cos\alpha\sin\beta, \qquad \cos\theta - \cos\phi = 2\sin\alpha\sin\beta, \qquad \sin(\phi-\theta) = 2\sin\beta\cos\beta,$$

であり、$\sin\phi - \sin\theta \neq 0$ なので $\cos\alpha\sin\beta \neq 0$ である。$2\sin\beta$ を約分して

$$x = \frac{a\cos\beta}{\cos\alpha}, \qquad y = b\tan\alpha,$$

したがって

$$x^2 = \frac{a^2\cos^2\left(\frac{1}{2}(\phi-\theta)\right)}{\cos^2\left(\frac{1}{2}(\phi+\theta)\right)},$$
$$y^2 = -a^2\sin\theta\sin\phi\,\tan^2\left(\tfrac{1}{2}(\phi+\theta)\right).$$

半角を用いずに書けば、同値な式として

$$x^2 = \frac{a^2\sin^2(\phi-\theta)}{(\sin\phi-\sin\theta)^2}, \qquad y^2 = -\frac{a^2\sin\theta\sin\phi\,(\cos\theta-\cos\phi)^2}{(\sin\phi-\sin\theta)^2}.$$

円。 $\sin\theta\sin\phi$ も α と β で表す必要がある。$\theta = \alpha - \beta, \phi = \alpha + \beta$ なので

$$\begin{aligned}\sin\theta\sin\phi &= \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta \\ &= (1-\cos^2\alpha)\cos^2\beta - \cos^2\alpha(1-\cos^2\beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha.\end{aligned}$$

$k = \sin\theta\sin\phi = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$ とおく。すると $\tan^2\alpha = (1-\cos^2\alpha)/\cos^2\alpha$ より

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= \frac{a^2}{\cos^2\alpha}\left[\cos^2\beta - k\,(1-\cos^2\alpha)\right] \\ &= \frac{a^2}{\cos^2\alpha}\left[(\cos^2\beta - k) + k\cos^2\alpha\right] \\ &= \frac{a^2}{\cos^2\alpha}\left[\cos^2\alpha + k\cos^2\alpha\right] \qquad \text{なぜなら } \cos^2\beta - k = \cos^2\alpha \\ &= a^2(1+k) = a^2 + a^2\sin\theta\sin\phi = a^2 - b^2, \end{aligned}$$

最後の段階で $(*)$ を用いた。よって、直交する任意の 2 接線の交点は円 $x^2+y^2 = a^2-b^2$ 上にあり、示すべきことが示された。

検算

- $a=2, b=1, \theta=\frac{\pi}{6}, \phi=-\frac{\pi}{6}$ とする。このとき $\sin\theta\sin\phi = -\frac{1}{4} = -b^2/a^2$ なので、2 接線は直交する（傾きは 1 と -1）。ここで $\alpha=0, \beta=-\frac{\pi}{6}$ なので、$x = 2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, $y=0$ であり、$x^2+y^2 = 3 = a^2-b^2$ となる。直接確かめても、接線 $x-y=\sqrt{3}$ と $x+y=\sqrt{3}$ は確かに $(\sqrt{3},0)$ で交わる。
- 小問 (i) において $\theta \to 0$ とすると、接線は垂直な直線 $x=a$ となり、漸近線と $(a, \pm b)$ で交わる。その中点は $(a,0) = P$ である。
- 小問 (i) の中点や $x^2+y^2 = a^2-b^2$ を含む上の式はすべて、$a>b>0$ と直交する組 θ, ϕ を無作為に何千通りも選び、2 本の接線の方程式を直接解くことで、コンピュータによって確認した。

よくある間違い

- x^2 と y^2 の式に b を残してしまうこと。問題は a, θ, ϕ だけで表すことを求めているので、$(*)$ を用いて b^2 を消去しなければならない。
- 式変形を誤って接線の傾きを $-b/(a\sin\theta)$ としてしまうこと。第 1 象限の点で傾きが正になることを確かめるとよい。
- $\sin\phi - \sin\theta$ が 0 でない理由を述べずに、これで割ってしまうこと。

STEP のその先へ

小問 (ii) の円は双曲線（hyperbola）の**準円**（director circle）、すなわち、そこから引いた 2 本の接線が直交するような点の軌跡（locus）である。楕円（ellipse）の準円は

$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ であり、$a < b$ の双曲線には実の準円がそもそも存在しない。問題が $a > b$ を課しているのはこのためである。小問 (i) の二等分の性質は、円錐曲線（conic）の射影幾何学（projective geometry）とアフィン幾何学（affine geometry）への最初の入り口であり、そこでは接線、漸近線、極と極線（poles and polars）が統一的に扱われる。まさにこうした趣の問題に取り組みたければ、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（上級数学問題集）に挑戦するとよい。

解答例

STEP III 2018、第 5 問

純粋数学 ・ 相加相乗平均の不等式

STEP III 2018、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/18-s3-q5

鍵となる考え方

これは数学的帰納法（induction）による相加・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）の証明であるが、ひとひねりがある。$A_n \geq G_n$ を直接示すのではなく、重みをつけた差 $n(A_n - G_n)$ が、新しい数を一つ加えたときに決して減少しないことを示すのである。この差は $n = 1$ のときゼロから始まるので、つねに非負のままである。量 λ_k は G_{k+1} が G_k の単純な定数倍になるように選ばれており、これによって比較全体が一変数の多項式不等式に帰着される。

解答

小問 (i)

第 k 段階と第 $k+1$ 段階を結びつける事実が二つある。和については

$$(k+1)A_{k+1} = a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1} = kA_k + a_{k+1}.$$

積については $G_k^k = a_1 a_2 \cdots a_k$ であり、λ_k の定義から $a_{k+1} = G_k \lambda_k^{k+1}$ が得られる。したがって

$$G_{k+1}^{k+1} = G_k^k \, a_{k+1} = G_k^k \cdot G_k \lambda_k^{k+1} = (G_k \lambda_k)^{k+1}, \qquad \text{よって} \qquad G_{k+1} = G_k \lambda_k,$$

となる。ここで $G_k > 0$ かつ $\lambda_k > 0$ であるから、正の $(k+1)$ 乗根をとった。λ_k があのように定義されたのは、まさにこのためである。

次に両辺を比較する。

$$\begin{aligned}(k+1)(A_{k+1}-G_{k+1})-k(A_k-G_k) &= kA_k+a_{k+1}-(k+1)G_{k+1}-kA_k+kG_k\\ &= G_k\lambda_k^{k+1}-(k+1)G_k\lambda_k+kG_k\\ &= G_k\left(\lambda_k^{k+1}-(k+1)\lambda_k+k\right).\end{aligned}$$

$G_k>0$ であるから、左辺が ≥ 0 であることと、括弧内が ≥ 0 であることは同値である。これが求める同値性（equivalence）である。

小問 (ii)

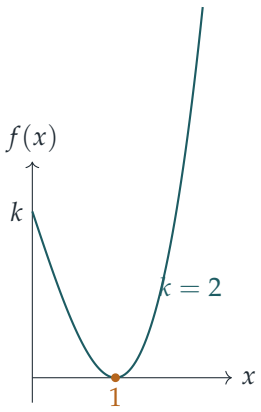
微分すると

$$f'(x)=(k+1)x^k-(k+1)=(k+1)(x^k-1).$$

$0<x<1$ のとき $x^k<1$ であるから $f'(x)<0$ であり、$x>1$ のとき $x^k>1$ であるから $f'(x)>0$ である。よって f は $(0,1]$ で狭義単調減少（strictly decreasing）、$[1,\infty)$ で狭義単調増加（strictly increasing）であり、$x>0$ における最小値は

$$f(1)=1-(k+1)+k=0.$$

である。したがって、すべての $x>0$ に対して $f(x)\geq 0$ が成り立つ。さらに、$x\neq 1$ ならば、1 の両側での狭義単調性により $f(x)>f(1)=0$ となる。よって $f(x)=0$ となるのは $x=1$ のときに限られ、逆は $f(1)=0$ から従う。



（$k=2$ のとき $f(x)=x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$ である。$x=1$ における重根（double root）は、グラフがちょうど軸に接する点に対応する。）

小問 (iii)

各正の整数 n に対して $d_n=n(A_n-G_n)$ とおく。

(a) 小問 (ii) を $x = \lambda_k > 0$ に適用すると $\lambda_k^{k+1} - (k+1)\lambda_k + k \geq 0$ が得られるので、小問 (i) より

$$d_{k+1} \geq d_k \qquad \text{すべての} k \geq 1.$$

が成り立つ。また $A_1 = a_1 = G_1$ であるから $d_1 = 0$ である。よって

$$0 = d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \cdots \leq d_n,$$

となり、$d_n \geq 0$ である。$n > 0$ で割れば、すべての n に対して $A_n \geq G_n$ が得られる。

(b)

考えてみよう $A_n = G_n$ ならば、不等式の連鎖の最後の段階だけでなく、それより前の段階について何がわかるだろうか。

$A_n = G_n$ ならば $d_n = 0$ であり、連鎖は $0 = d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n = 0$ となる。0 で始まり 0 で終わる非減少の連鎖は一定でなければならないので、各 $k = 1, \ldots, n-1$ に対して $d_{k+1} = d_k$ である。小問 (i) の恒等式（identity）より、これは $G_k f(\lambda_k) = 0$ を意味し、$G_k > 0$ であるから $f(\lambda_k) = 0$ である。小問 (ii) より $\lambda_k = 1$ であり、これは各 $k = 1, \ldots, n-1$ に対して $a_{k+1} = G_k$ であることを表す。

ここで k に関する帰納法を用いる。$k = 1$ のとき $a_2 = G_1 = a_1$ である。$a_1 = \cdots = a_k = a$ ならば $G_k = (a^k)^{1/k} = a$ であるから、$a_{k+1} = G_k = a$ となる。よって $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ であり、示すべきことが示された。

検算

$a_1, a_2, a_3 = 1, 4, 16$ とする。すると $A_2 = 2.5$、$G_2 = 2$、$A_3 = 7$、$G_3 = 4$ であるから、$d_1, d_2, d_3 = 0, 1, 9$ となり、約束どおり増加している。ここで $\lambda_2 = (16/2)^{1/3} = 2$ であり、$G_2 f(\lambda_2) = 2(8 - 6 + 2) = 8 = d_3 - d_2$ となるので、小問 (i) の恒等式が確かめられる。数千通りのランダムな正の数列についてこの恒等式と $d_{k+1} \geq d_k$ をコンピュータで確認したところ、例外は見つからなかった。

よくある間違い

- 小問 (i) で一方向しか証明しないこと。差を $G_k f(\lambda_k)$ と書けば、$G_k > 0$ であるから両方向が一度に得られる。
- (iii)(b) で $\lambda_{n-1} = 1$ だけを結論してしまうこと。連鎖のすべての段階が等号でなければならず、それは連鎖が $d_1 = 0$ から始まることから従う。

- 小問 (ii) を適用する前に、なぜ $\lambda_k > 0$ なのかを述べ忘れること。小問 (ii) は $x > 0$ の場合しか扱っていない。

STEP のその先へ

不等式 $x^{k+1} - (k+1)x + k \geq 0$ はベルヌーイ（Bernoulli）の不等式の特別な場合であり、相加・相乗平均の不等式そのものは、凹関数（concave function）$\ln x$ に対するイェンセン（Jensen）の不等式の特別な場合である。こうした凸性（convexity）に関する不等式は、大学1年の解析学（analysis）における基本的な道具である。コーシー（Cauchy）の「前進・後退」帰納法をはじめ、相加・相乗平均の不等式の他のいくつかの証明を調べてみるのはよい演習になる。解析学の背景については、Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）が扱っている。

解答例

STEP III 2018、第 6 問

純粋数学 • 複素数と図形

STEP III 2018、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/18-s3-q6

鍵となる考え方

複素数が実数であるのは、それが自分自身の複素共役（conjugate）と等しいときであり、かつそのときに限る。したがって、3 点が同一直線上にある（collinear）という条件は、z と z^* の間の方程式に書き換えられる。単位円（unit circle）上では $a^* = 1/a$ が成り立つので、円周上の点の共役を消去でき、弦（chord）上の任意の点 q に対する線形（linear）方程式が残る。以降の結果はいずれも、このような弦の方程式を 2 本書き下し、それらを足したり引いたりすることで得られる。

解答

小問 (i)

A, Q, C は同一直線上にあり $A \neq C$ であるから、点 Q は A に、A から C へのベクトルの実数倍を加えたものである。すなわち、ある実数 t について $q - a = t(c - a)$ が成り立つ。$c \neq a$ であるから割り算ができて、

$$\frac{q-a}{c-a} = t \quad \text{は実数である。}$$

実数はその共役に等しいので、

$$\frac{q-a}{c-a} = \frac{q^*-a^*}{c^*-a^*},$$

となる。ここで $c \neq a$ より $c^* - a^* \neq 0$ である。分母を払うと $(c-a)(q^*-a^*) = (c^*-a^*)(q-a)$ となり、示すべき式が得られた。

次に $aa^* = cc^* = 1$ と仮定する。すると $a^* = 1/a, c^* = 1/c$ である。このとき

$$c^* - a^* = \frac{1}{c} - \frac{1}{a} = \frac{a-c}{ac} = -\frac{c-a}{ac},$$

であり、先の方程式は

$$(c-a)\left(q^*-\frac{1}{a}\right)=-\frac{c-a}{ac}\,(q-a).$$

となる。$c-a\neq 0$ で割り、$-ac$ を掛けると、

$$-ac\,q^*+c=q-a,\qquad \text{すなわち、}\qquad q+ac\,q^*=a+c.$$

これが弦 AC の方程式である。A と C を通る直線上のすべての点 q がこれを満たす。

小問 (ii)

A, B, C, D は反時計回りの順に並んでいるので、AC と BD は円に内接する（inscribed）凸四角形（convex quadrilateral）の対角線（diagonal）であり、円の真に内部にある点 Q で交わる。特に Q は 4 点のいずれとも異なるので、直線 AC と BD に小問 (i) を適用できる：

$$q+ac\,q^*=a+c,$$
$$q+bd\,q^*=b+d.$$

第 1 式から第 2 式を引くと q が消える：

$$(ac-bd)\,q^*=(a+c)-(b+d). \tag{1}$$

考えてみよう q^* についての式は得られた。これに足し合わせるための q についての式は、どうすれば得られるだろうか？

(1) の共役をとり、再び $a^*=1/a$ などを用いる。左辺は

$$\left(\frac{1}{ac}-\frac{1}{bd}\right)q=\frac{bd-ac}{abcd}\,q,$$

となり、右辺は

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}-\frac{1}{d}=\frac{a+c}{ac}-\frac{b+d}{bd}=\frac{bd(a+c)-ac(b+d)}{abcd}.$$

となる。$-abcd$ を掛けると、

$$(ac-bd)\,q=ac(b+d)-bd(a+c). \tag{2}$$

(1) と (2) を足すと、

$$(ac-bd)(q+q^*)=a+c-b-d+abc+acd-abd-bcd.$$

右辺の項をまとめると、

$$(a-b)+(acd-bcd)+(c-d)+(abc-abd)=(a-b)(1+cd)+(c-d)(1+ab),$$

となり、求める結果が得られる。

小問 (iii)

直線 AB と CD は内接四角形の向かい合う辺であるから、それらの交点 P は円の外部にある。よって P は A, B とも、C, D とも異なる。同一直線上の 3 点 A, P, B に小問 (i) を適用すると $p + ab\,p^* = a + b$ を得る。p は実数なので $p^* = p$ であり、したがって

$$p(1 + ab) = a + b.$$

同様に、C, P, D から

$$p(1 + cd) = c + d.$$

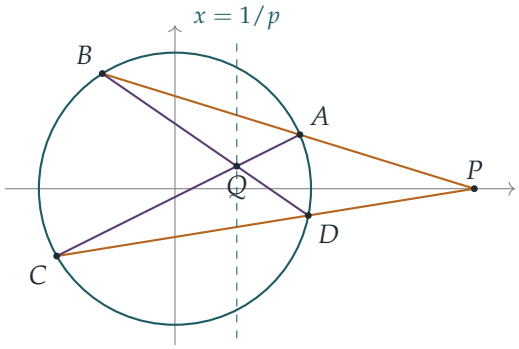
を得る。ここで小問 (ii) の最終結果に p を掛け、これら 2 つの式を代入すると：

$$\begin{aligned} p\,(ac - bd)(q + q^*) &= (a - b)\,p(1 + cd) + (c - d)\,p(1 + ab) \\ &= (a - b)(c + d) + (c - d)(a + b) \\ &= (ac + ad - bc - bd) + (ac + bc - ad - bd) \\ &= 2(ac - bd). \end{aligned}$$

$ac - bd \neq 0$ であるからこれで割ることができ、$p(q + q^*) = 2$ が得られて、示された。

実際、ここでは $ac - bd$ が 0 になることは決してない。もし $ac = bd$ ならば、(1) より $a + c = b + d$ も成り立つので、$z^2 - (a + c)z + ac$ と $z^2 - (b + d)z + bd$ は同じ 2 次式になる。すると $\{a, c\} = \{b, d\}$ となり、4 点が相異なることに矛盾する。

$q + q^* = 2\,\mathrm{Re}\,q$ であるから、この結果は $\mathrm{Re}\,q = 1/p$ を意味する。P を通る 2 本の直線をどのように選んでも、対角線の交点 Q は固定された垂直な直線 $x = 1/p$ 上にある。



検算

- 対称な場合：A, B を偏角 $20°, 70°$ の点、C, D を偏角 $-70°, -20°$ の点とする。実軸に関する対称性により P と Q はともに実数であり、結果は $pq = 1$ を意味する。

$a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$ とすると、公式 $p = (a+b)/(1+ab)$ から $p = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}/\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos 25^\circ / \cos 45^\circ \approx 1.2817$ を得る。AC が実軸と交わる点として q を直接求めると $q \approx 0.7802$ であり、$pq \approx 1.0000$ となる。

- 図では $p = 2.2$ を用いている。対角線は予測どおり $x \approx 0.4545 = 1/2.2$ で交わる。また、3 つの等式はいずれも、数千通りのランダムな配置についてコンピュータで確認した。

よくある間違い

- $ac - bd$ の共役をとると、再び $ac - bd$ になるのではなく $1/(ac) - 1/(bd)$ になることを忘れる。因数 $abcd$ は注意深く払わなければならない。
- $c - a$ や $ac - bd$ が 0 でない理由を述べずに、それらで割る。

STEP のその先へ

ここで Q は、円に関する P の**極線**（polar）上にある。単位円の外部にあり中心からの距離が p である点 P に対し、その極線は OP に垂直で O からの距離が $1/p$ の直線である。これは射影幾何学（projective geometry）におけるブロカールの定理（Brocard's theorem）の一部であり、その背後にある写像 $P \mapsto 1/p^*$ は円に関する**反転**（inversion）である。反転は複素解析（complex analysis）と幾何学における重要な道具である。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は、反転とアルガン図（Argand diagram、複素平面）の幾何学を見事に展開している。

解答例

STEP III 2018、第 7 問

純粋数学 ・ ド・モアブルの定理と級数

> **STEP III 2018、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q7

この問題は、*Beyond STEP* の第 2.4 節「$\pi^2/6$」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch02/basel.html

鍵となる考え方

式 $\cot\theta + \mathrm{i}$ は、姿を変えた $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)/\sin\theta$ にほかならない。したがってド・モアブルの定理（De Moivre's theorem）により、そのべき乗は倍角の式に変わる。同じべき乗を二項定理（binomial theorem）で展開すると $\cot^2\theta$ の多項式（polynomial）が得られ、その根は $\sin(2n+1)\theta$ が 0 になる点から読み取れる。あとは解と係数の関係（Vieta's formula）によって根の和がただちに求まり、$1/\theta^2$ を $\cot^2\theta$ と $1+\cot^2\theta$ ではさむことで、バーゼル問題の和（Basel sum）を、同じ極限に収束する二つの評価の間に閉じ込めることができる。

解答

小問 (i)

$\sin\theta \neq 0$ であるから、

$$\cot\theta \pm \mathrm{i} = \frac{\cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta}{\sin\theta}.$$

ド・モアブルの定理より $(\cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta)^{2n+1} = \cos(2n+1)\theta \pm \mathrm{i}\sin(2n+1)\theta$ であるから、

$$\frac{(\cot\theta+\mathrm{i})^{2n+1} - (\cot\theta-\mathrm{i})^{2n+1}}{2\mathrm{i}} = \frac{2\mathrm{i}\sin(2n+1)\theta}{2\mathrm{i}\,\sin^{2n+1}\theta} = \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta},$$

となり、これが求める恒等式である。

次に、左辺を今度は二項定理で展開する。$c=\cot\theta$、$N=2n+1$ とおくと、

$$(c+\mathrm{i})^N-(c-\mathrm{i})^N=\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}c^{N-k}\,\mathrm{i}^k\bigl(1-(-1)^k\bigr).$$

括弧の中は、k が偶数のとき 0、k が奇数のとき 2 である。$j=0,1,\dots,n$ として $k=2j+1$ とおくと、$\mathrm{i}^k=\mathrm{i}(-1)^j$、$c^{N-k}=c^{2(n-j)}$ となる。2i で割り、$x=\cot^2\theta$ とおくと、

$$\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta}=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{2n+1}{2j+1}x^{n-j}=\binom{2n+1}{1}x^n-\binom{2n+1}{3}x^{n-1}+\cdots+(-1)^n.$$

この多項式を $P(x)$ とよぶ。これは n 次式であり、最高次の係数は $2n+1\neq 0$ である。$m=1,\dots,n$ に対して $\theta_m=\dfrac{m\pi}{2n+1}$ とする。このとき $0<\theta_m<\frac{1}{2}\pi$ であるから $\sin\theta_m\neq 0$ であり、また $\sin(2n+1)\theta_m=\sin m\pi=0$ である。よって

$$P\bigl(\cot^2\theta_m\bigr)=0,\qquad m=1,2,\dots,n.$$

考えてみよう これらが解の一部にすぎないのではなく、すべての解であることは、どうすればわかるだろうか。

$(0,\frac{1}{2}\pi)$ において $\cot\theta$ は正で狭義単調減少であるから、$\cot^2\theta$ も狭義単調減少である。角 $\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_n$ はすべてこの区間にあるので、n 個の数 $\cot^2\theta_m$ は互いに異なる。n 次の多項式の根は高々 n 個であるから、これらがちょうど $P(x)=0$ の解のすべてである。

小問 (ii)

$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots$ の根の和は $-a_{n-1}/a_n$ である。ここでは $a_n=\binom{2n+1}{1}$、$a_{n-1}=-\binom{2n+1}{3}$ であるから、

$$\sum_{m=1}^{n}\cot^2\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right)=\frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}}=\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6\,(2n+1)}=\frac{n(2n-1)}{3},$$

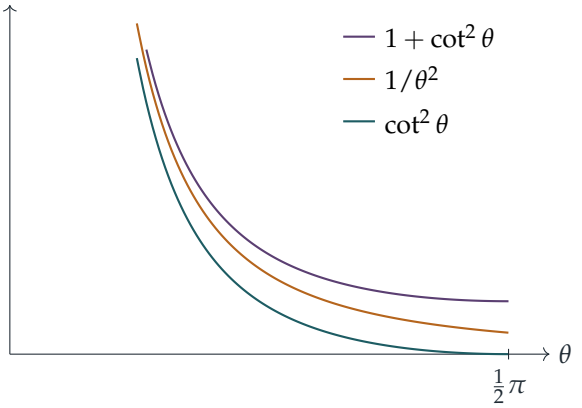
となり、示すべき式が得られた。

小問 (iii)

$0<\theta<\frac{1}{2}\pi$ に対して $0<\sin\theta<\theta<\tan\theta$ が与えられている。三つとも正であるから、2 乗しても大小関係は保たれ、逆数をとると大小関係は逆転する。よって

$$\frac{1}{\tan^2\theta}<\frac{1}{\theta^2}<\frac{1}{\sin^2\theta},\qquad \text{すなわち}\qquad \cot^2\theta<\frac{1}{\theta^2}<1+\cot^2\theta,$$

である。ここで $\operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta$ を用いた。



$\theta = \theta_m = \dfrac{m\pi}{2n+1}$ とおくと $\dfrac{1}{\theta_m^2} = \dfrac{(2n+1)^2}{\pi^2}\cdot\dfrac{1}{m^2}$ となる。この不等式を $m = 1, \ldots, n$ について足し合わせる。$S_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2}$ とおき、小問 (ii) を用いると、

$$\frac{n(2n-1)}{3} < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} S_n < n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

全体に $\pi^2/(2n+1)^2 > 0$ を掛けると、

$$\frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} < S_n < \frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}.$$

分子と分母を n^2 で割れば、$n \to \infty$ のときどちらの分数も $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ に収束（converge）するので、両側の評価はともに $\frac{\pi^2}{6}$ に収束する。はさみうちの原理（squeeze theorem、sandwich theorem）により $S_n \to \frac{\pi^2}{6}$ であり、これは

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

を意味する。

検算

- $n = 1$ のとき多項式は $3x - 1$ であり、その根は $\frac{1}{3} = \cot^2\frac{\pi}{3}$ である。(ii) の公式も $1 \times 1/3 = \frac{1}{3}$ を与える。$n = 2$ のとき、$\cot^2\frac{\pi}{5} + \cot^2\frac{2\pi}{5}$ は 2 になるはずであり、数値的にも $1.894 + 0.106 = 2.000$ である。
- $n = 50$ のとき、(iii) の評価は $1.5964 < S_{50} = 1.6251 < 1.6448$ であり、$\pi^2/6 \approx 1.6449$ である。両側の評価は互いに近づいていくが、それは当然であり、両者の差は $\pi^2 n/(2n+1)^2 \approx \pi^2/(4n)$ だからである。

よくある間違い

- 各 $\cot^2\theta_m$ が根であることは示したのに、それらが互いに異なることを論じ忘れる。これこそが、それらが**すべての**解であることを保証する点である。
- 解と係数の関係で符号を間違える。x^{n-1} の係数は $-\binom{2n+1}{3}$ であるから、根の和は $+\binom{2n+1}{3}/\binom{2n+1}{1}$ である。
- すべての量が正であることに触れずに不等式の向きを逆転させる。2 乗したり逆数をとったりできるのは、すべての量が正だからである。

STEP のその先へ

オイラー（Euler）は 1734 年、$\sin x/x$ を「無限次の多項式」とみなして係数を比較することにより、初めて $\sum 1/m^2 = \pi^2/6$ を見いだした。これはここで用いた解と係数の関係と同じ発想であるが、はさみうちの原理がもたらすような厳密さは欠いていた。大学では、この和にフーリエ級数（Fourier series）を通じて（パーセバルの等式（Parseval's identity））、またリーマンゼータ関数（Riemann zeta function）の最初の値 $\zeta(2)$ として再び出会うことになる。値 $\zeta(2k)$ はすべて π^{2k} の有理数倍であるのに対し、$\zeta(3)$ についてはほとんど何もわかっていない。極限とはさみうちの原理の背後にある解析学については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を読んでみるとよい。

解答例

STEP III 2018、第 8 問

純粋数学 ・ 小数部分の積分

STEP III 2018、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/18-s3-q8

鍵となる考え方

被積分関数（integrand）の中で扱いにくいのは x^{-1} であるから、$y = 1/x$ と置換（substitution）する。これにより $[0,1]$ は $[1,\infty)$ に移り、この区間は自然に長さ 1 の区間に分割できる。f が周期（period）1 をもてば、各単位区間は $[0,1]$ へ平行移動して戻すことができ、残った有理式の因子は望遠鏡和（telescoping sum）をなす。小問 (ii) は、$\{x\}$ と $\{2x\}$ がどちらも周期 1 をもつことに気づけばよい。

解答

小問 (i)

$x = 1/y$ とおくと $\mathrm{d}x = -\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y$ であり、x が 0 から 1 まで動くとき、y は ∞ から 1 まで減少する。また $1 + x = \frac{y+1}{y}$ であるから、

$$I = \int_{\infty}^{1} \frac{\mathrm{f}(y)}{(y+1)/y}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y = \int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{f}(y)}{y(1+y)}\,\mathrm{d}y.$$

$[1,\infty)$ を $n = 1,2,3,\ldots$ に対する区間 $[n,n+1]$ に分割すると

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{f}(y)}{y(1+y)}\,\mathrm{d}y,$$

となり、示すべき式が得られる。

次に、すべての x に対して $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x+1)$ が成り立つと仮定する。このとき任意の整数 n に対して $\mathrm{f}(x+n) = \mathrm{f}(x)$ である。n 番目の積分で $y = x + n$ とおくと、x は $[0,1]$

を動く：

$$\int_n^{n+1} \frac{f(y)}{y(1+y)}\,dy = \int_0^1 \frac{f(x)}{(x+n)(x+n+1)}\,dx.$$

考えてみよう このような積分を無限個足し合わせるにはどうすればよいか？

どの積分も同じ $f(x)$ と同じ積分区間をもつので、（問題文の指示どおり収束（convergence）の問題は無視して）和と積分の順序を交換し、先に有理式の因子を足し合わせることができる。部分分数分解（partial fractions）により

$$\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1},$$

であるから、和は望遠鏡和となる。すなわち、固定した $x \in [0,1]$ に対して

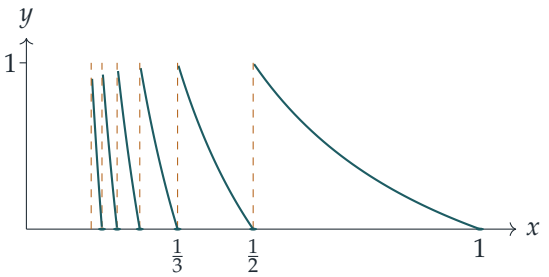
$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}\right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+N+1} \longrightarrow \frac{1}{1+x} \quad \text{極限} N \to \infty.$$

したがって

$$I = \int_0^1 f(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}\,dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}\,dx,$$

となり、求める結果が得られる。

小問 (ii)



上の $\{x^{-1}\}$ のグラフを見れば、直接計算しようとしても見込みがない理由がわかる。各区間 $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ 上でこの関数は $\frac{1}{x} - n$ に等しく、そのような区間が 0 に向かって無限個ひしめいている。小問 (i) を使えば、これらをすべて回避できる。

第一の積分。 $f(x) = \{x\}$ とする。x に 1 を加えると $\lfloor x \rfloor$ に 1 が加わるので $\{x+1\} = \{x\}$ であり、f は周期 1 をもつ。$[0,1)$ 上では $\{x\} = x$ である（1 点 $x = 1$ での値は積分に影響しない）。よって小問 (i) により

$$\int_0^1 \frac{\{x^{-1}\}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx = 1 - \ln 2.$$

第二の積分。 $f(x) = \{2x\}$ とすると、必要なとおり $f(x^{-1}) = \{2x^{-1}\}$ となる。

考えてみよう 関数 $\{2x\}$ の周期は $\frac{1}{2}$ である。それでも小問 (i) を使えるだろうか？

使える。$\{2(x+1)\} = \{2x+2\} = \{2x\}$ であるから、周期 $\frac{1}{2}$ をもつものは周期 1 ももつ。したがって小問 (i) が適用できる。$[0, \frac{1}{2})$ 上では $2x \in [0,1)$ であり $\{2x\} = 2x$、$[\frac{1}{2}, 1)$ 上では $2x \in [1,2)$ であり $\{2x\} = 2x - 1$ である。ゆえに

$$\int_0^1 \frac{\{2x^{-1}\}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{2x}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 \frac{2x-1}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

$\frac{2x}{1+x} = 2 - \frac{2}{1+x}$、$\frac{2x-1}{1+x} = 2 - \frac{3}{1+x}$ と書き直すと、

$$\int_0^{1/2} \frac{2x}{1+x}\,\mathrm{d}x = 1 - 2\ln\tfrac{3}{2},$$
$$\int_{1/2}^1 \frac{2x-1}{1+x}\,\mathrm{d}x = 1 - 3\ln\frac{2}{3/2} = 1 - 3\ln\tfrac{4}{3}.$$

これらを足し、対数をまとめると

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\{2x^{-1}\}}{1+x}\,\mathrm{d}x &= 2 - 2\ln 3 + 2\ln 2 - 6\ln 2 + 3\ln 3 \\ &= 2 + \ln 3 - 4\ln 2 = 2 + \ln\tfrac{3}{16}.\end{aligned}$$

検算

- $0 \le \{\cdot\} < 1$ であるから、どちらの答えも 0 と $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2 \approx 0.693$ の間にあるはずである。得られた値は $1 - \ln 2 \approx 0.3069$ と $2 + \ln\frac{3}{16} \approx 0.3260$ であり、妥当である。小数部分（fractional part）の平均はおよそ $\frac{1}{2}$ なので、答えは 0.693 のおよそ半分になるはずである。
- 区間 $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$（第二の積分ではそれぞれの半分）上の積分を、コンピュータで何千個もの区間について足し合わせると 0.306853 と 0.326024 が得られ、どちらの答えとも一致する。

よくある間違い

- $y = 1/x$ と置換した後、積分の上端と下端を逆にしたまま、マイナス符号を落としてしまう。$\mathrm{d}x$ から出るマイナスと上下端の入れ替えは打ち消し合う。
- $[0,1]$ 全体で $\{2x\} = 2x$ であると思い込む。実際には $x = \frac{1}{2}$ で値が 1 だけ下がる。
- 小問 (i) には周期がちょうど 1 であることが必要だと考える。周期 $\frac{1}{k}$（k は正の整数）をもつ関数はすべて周期 1 ももつ。

STEP のその先へ

ここでは断りなく無限和と積分の順序を交換したが、これはまさに大学で正当化が求められる種類の操作である。単調収束定理（monotone convergence theorem）や優収束定理（dominated convergence theorem）といった定理が、それが安全に行える条件を教えてくれる（ここでは $\mathrm{f} \geq 0$ のとき各項が非負であり、これは易しい場合にあたる）。同じ置換の考え方から、$\int_0^1 \{1/x\}\,\mathrm{d}x = 1 - \gamma$ のような小数部分に関する有名な積分が得られる。ここで γ はオイラー（Euler）定数である。極限、級数、積分の厳密な扱いについては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照するとよい。

解答例

STEP III 2018、第 9 問

力学 ・ 衝突と漸化式

> **STEP III 2018、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q9

鍵となる考え方

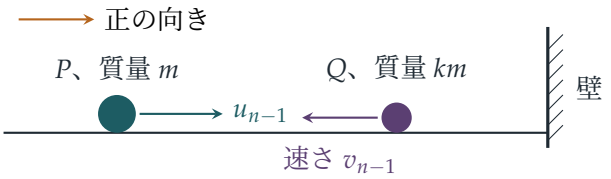
P と Q の各衝突からは、衝突前後の速度を結ぶ 2 つの一次方程式が得られる。1 つは運動量保存則（conservation of momentum）から、もう 1 つはニュートン（Newton）の反発の法則（law of restitution）から得られる。壁は Q の速度の向きを逆にするだけなので、ある衝突の直前の状態は、その 1 つ前の衝突の直後の状態で決まる。こうして u_n と v_n に関する 1 階の連立漸化式（recurrence relation）が得られ、v を消去すると u_n に関する 1 本の 2 階漸化式が残る。小問 (ii) は、線形漸化式の解を最初の 2 項に合わせるという、いつもの作業である。

解答

P と Q を、なめらかな床の上で一直線上を動く質点（particle）としてモデル化する。したがって衝突と衝突の間には水平方向の力ははたらかず、各質点は一定の速度を保つ。全体を通して、壁に向かう向きを正とする。

衝突と衝突の間に起こること。 n 回目の衝突の後、Q の速度は v_n である（次に壁と衝突するので、壁に向かう向きである）。壁との衝突は完全弾性衝突（perfectly elastic collision）なので、Q は速度 $-v_n$ で跳ね返り、一方 P の速度は u_n のままである。よって $n+1$ 回目の衝突の直前の速度は、u_n（P）と $-v_n$（Q）である。

v_0 を正しく解釈すれば、これは最初の衝突についても成り立つ。最初の衝突の前、Q は速さ v_0 で壁から遠ざかっているので、その速度は $-v_0$ であり、これはまさに上のパターンで $n=0$ としたものである。



小問 (i)

n 回目の衝突（$n \geq 1$）について、運動量保存則から（両辺を m で割って）次を得る。

$$u_{n-1} - kv_{n-1} = u_n + kv_n. \tag{1}$$

近づく速さは $u_{n-1} - (-v_{n-1}) = u_{n-1} + v_{n-1}$ である。衝突後、壁に近い側にある Q は P より速く壁に向かって動くので、遠ざかる速さは $v_n - u_n$ である。ニュートンの反発の法則より

$$v_n - u_n = e\,(u_{n-1} + v_{n-1}). \tag{2}$$

(2) から得られる v_n を (1) に代入すると

$$u_{n-1} - kv_{n-1} = (1+k)u_n + ke\,(u_{n-1} + v_{n-1}),$$

よって

$$k(1+e)\,v_{n-1} = (1-ke)\,u_{n-1} - (1+k)\,u_n \qquad (n \geq 1). \tag{3}$$

これは各 v を連続する 2 つの u で表しており、まさに v を消去するのに必要なものである。

考えてみよう 式 (3) で v_{n-1} は消せるが、(2) には v_n も含まれている。これはどう扱えばよいだろうか？

式 (3) はすべての $n \geq 1$ で成り立つので、n を $n+1$ に置き換えて使うこともできる。

$$k(1+e)\,v_n = (1-ke)\,u_n - (1+k)\,u_{n+1}.$$

そこで (2) に $k(1+e)$ を掛け、$k(1+e)v_n$ と $k(1+e)v_{n-1}$ の両方をこれらの式で置き換えると

$$(1-ke)u_n - (1+k)u_{n+1} - k(1+e)u_n = ke(1+e)\,u_{n-1} + e\big[(1-ke)u_{n-1} - (1+k)u_n\big].$$

項を整理する。右辺の u_{n-1} の係数は $ke + ke^2 + e - ke^2 = e(1+k)$ である。u_n の項を左辺に移すと、その係数は

$$1 - ke - k - ke + e + ke = 1 - k + e - ke = (1+e)(1-k).$$

したがって

$$(1+k)u_{n+1}-(1-k)(1+e)u_n+e(1+k)u_{n-1}=0 \qquad (n\geq 1),$$

となり、n を $n-1$ に置き換えると、$n\geq 2$ に対する $(*)$ が得られる。これが示すべきことであった。

小問 (ii)

$e=\frac{1}{2}$、$k=\frac{1}{34}$ のとき、$(*)$ に 68 を掛けると

$$70u_n-99u_{n-1}+35u_{n-2}=0,$$

となる。その特性方程式（auxiliary equation）$70t^2-99t+35=(10t-7)(7t-5)=0$ の解は $\frac{7}{10}$ と $\frac{5}{7}$ であり、与えられた形と一致する。

A と B を決めるには 2 つの条件、すなわち最初の 2 項が必要である。u_0 は既知である。u_1 については、(3) で $n=1$ とする。

$$(1+k)u_1=(1-ke)u_0-k(1+e)v_0,$$
$$\text{よって}\quad \tfrac{35}{34}u_1=\tfrac{67}{68}u_0-\tfrac{3}{68}v_0,\quad \text{したがって}\quad u_1=\frac{67u_0-3v_0}{70}.$$

与えられた形に $n=0$ と $n=1$ を代入すると

$$A+B=u_0,\qquad \tfrac{7}{10}A+\tfrac{5}{7}B=\frac{67u_0-3v_0}{70}.$$

2 番目の式に 70 を掛けると $49A+50B=67u_0-3v_0$ となる。ここから 1 番目の式の 49 倍を引くと

$$B=18u_0-3v_0,\qquad A=u_0-B=3v_0-17u_0.$$

n が大きいときの u_n の符号。 $\frac{5}{7}>\frac{7}{10}$（$50>49$ より）なので、B の項が支配的である。正確には

$$u_n=\left(\tfrac{5}{7}\right)^n\left[B+A\left(\tfrac{49}{50}\right)^n\right],$$

であり、$\left(\frac{49}{50}\right)^n\to 0$ なので、括弧内は B に収束（converge）する。$0<6u_0<v_0$ ならば $B=3(6u_0-v_0)<0$ なので、十分大きなすべての n に対して括弧内は負である。$\left(\frac{5}{7}\right)^n>0$ なので、n が大きいとき u_n は負となり、示すべきことが示された。（具体的には、$|A|(\frac{49}{50})^n<|B|$ となれば括弧内は負である。）

物理的には、P は最終的に壁から遠ざかる向きに跳ね返される。Q ははるかに軽いにもかかわらず、P に対して十分な初速をもつので、Q は相手を押し戻し続けるのである。

検算

- $e = 1$、$k = 1$（質量が等しく、完全弾性衝突）とすると、$(*)$ は $2u_n + 2u_{n-2} = 0$ となるので、$u_n = -u_{n-2}$ である。実際、等しい質量の物体が弾性衝突すると速度が入れ替わるので、$u_1 = -v_0$、$u_2 = -v_1$ である。そして Q は P のもとの速度 u_0 を壁まで運んで戻ってくるので、$u_2 = -u_0$ となる。
- $n = 0$ のとき公式は $A + B = u_0$ を与え、$n = 1$ のときは

$$\tfrac{7}{10}(3v_0 - 17u_0) + \tfrac{5}{7}(18u_0 - 3v_0) = \tfrac{1}{70}(67u_0 - 3v_0),$$

  を与え、期待どおりである。
- $u_0 = 1$、$v_0 = 7$ とすると $A = 4$、$B = -3$ である。衝突を 1 回ずつ順に計算すると公式が正確に成り立つことが確かめられ、u_n は $n = 15$ で初めて負になり、そのとき $u_{15} \approx -0.00029$ である。

よくある間違い

- 衝突直前の Q の速度は v_{n-1} ではなく $-v_{n-1}$ であることを忘れる。壁が向きを逆にするからである。
- 反発の式で遠ざかる速さの符号を間違える。衝突後、正の向きに見て Q は P より前にあるので、それは $v_n - u_n$ である。
- 衝突の式から u_1 を求めないまま $u_1 = \frac{7}{10}A + \frac{5}{7}B$ を使う。$(*)$ だけではそれは得られない。

STEP のその先へ

式 (1) と (2) の組は、状態 (u_{n-1}, v_{n-1}) を (u_n, v_n) に移す線形写像（linear map）であり、したがって運動全体は 2×2 行列（matrix）を繰り返し掛けることにほかならない。解 $\frac{7}{10}$ と $\frac{5}{7}$ はこの行列の固有値（eigenvalue）であり、長期的な振る舞いは最大の固有値によって支配される。これが線形力学系（linear dynamical system）と差分方程式（difference equation）の理論の出発点である。衝突の力学についてさらに知りたければ Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を、行列の観点についてはストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照するとよい。

解答例

STEP III 2018、第 10 問

力学 ・ 実体振り子

> **STEP III 2018、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q10

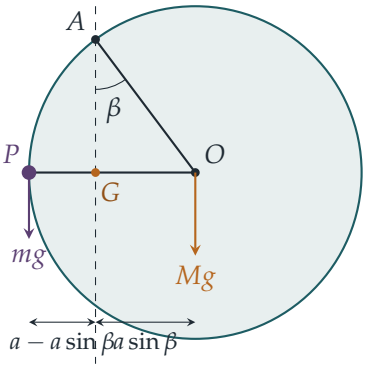
鍵となる考え方

円板と質点は一体となって、固定された軸 L のまわりを回転する一つの剛体（rigid body）をなすので、すべては一つの角で決まる。平衡（equilibrium）の状態では、全体の重心（centre of mass）が A の真下になければならない。これは A のまわりの力のモーメント（moment）のつりあいにほかならない。運動については、軸がなめらか（smooth）でそこにはたらく抗力（reaction）が仕事をしないので、エネルギーが保存される。エネルギーを θ と $\dot{\theta}$ の関数として書き表せば、それを微分（differentiate）することで運動方程式（equation of motion）が得られ、$\sin\theta$ を θ で置き換えれば微小振動（small oscillations）の様子がわかる。

解答

円板を一様な剛体の薄板（uniform lamina）、質点をその縁に固定された点質量（point mass）、軸 L をなめらかなものとしてモデル化する。

平衡。 A のまわりにモーメントをもつ力は、二つの重力、すなわち O にはたらく Mg と P にはたらく mg だけである。A における抗力は A を通る。AO は鉛直下向きと角 β をなすので、O は A から水平方向に距離 $a\sin\beta$ だけ一方の側、たとえば右側にある。このとき重力 Mg は円板を A のまわりに時計回りに回そうとし、これとつりあうことができるのは mg だけであるから、P は A を通る鉛直線の**左側**になければならない。OP は水平で長さが a なので、P が A より左にある水平距離は $a - a\sin\beta$ である。（ここで $a\sin\beta < a$ なので、P は確かに鉛直線の左側にある。）



A のまわりのモーメントを考えると、

$$Mg\,a\sin\beta = mg\,(a - a\sin\beta) \quad\Longrightarrow\quad \sin\beta = \frac{m}{M+m}.$$

O と P はともに A より鉛直方向に距離 $a\cos\beta$ だけ下にある。したがって、AP を斜辺（hypotenuse）とする直角三角形において、水平な辺は $a(1-\sin\beta)$、鉛直な辺は $a\cos\beta$ であり、

$$\begin{aligned} AP^2 &= a^2(1-\sin\beta)^2 + a^2\cos^2\beta = a^2\big(2-2\sin\beta\big) \\ &= 2a^2\Big(1-\frac{m}{M+m}\Big) = \frac{2Ma^2}{M+m}, \end{aligned}$$

となる。よって、求める通り $AP/a = \sqrt{2M/(M+m)}$ である。

全体の重心 G の位置に注目しておくとよい。G は O と P の重み付き平均なので線分 OP 上にあり、したがって A より深さ $a\cos\beta$ だけ下にある。平衡状態では G は A の真下にあるので、

$$AG = a\cos\beta.$$

エネルギー保存。 円板と質点は一つの剛体として運動する。平衡状態では OP は水平であり、OP は物体とともに回転するので、OP が水平と角 θ をなすとき、物体全体は平衡の位置から θ だけ回転している。したがって、その角速度（angular speed）の大きさは $|\dot\theta|$ である。

考えてみよう 質点はどれだけの速さで動いているか？

物体上のすべての点は、軸を中心とする円周上を動く。質点は A から一定の距離 AP を保つので、その速さは $AP\,|\dot\theta|$ であり、運動エネルギー（kinetic energy）は

$$\tfrac{1}{2}m\,AP^2\,\dot\theta^2 = \tfrac{1}{2}m\cdot 2a^2(1-\sin\beta)\,\dot\theta^2 = (1-\sin\beta)\,ma^2\dot\theta^2,$$

となる。ここで上で求めた $AP^2 = 2a^2(1-\sin\beta)$ を用いた。円板の運動エネルギーは $\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$ である。

位置エネルギー（potential energy）については、全質量 $M+m$ が G に集中しているとみなせばよい。直線 AG は平衡状態で鉛直であり、これも θ だけ回転しているので、G はいま A より深さ $a\cos\beta\cos\theta$ だけ下にある。平衡の位置を位置エネルギーの基準にとると、

$$\text{位置エネルギー} = (M+m)g\big(a\cos\beta - a\cos\beta\cos\theta\big) = (M+m)ga\cos\beta\,(1-\cos\theta).$$

軸はなめらかであり、A における抗力は動かない点にはたらくので、仕事をしない。ほかにはたらく力は重力だけであり、これは保存力（conservative force）である。よって、運動エネルギーと位置エネルギーの和は一定であり、

$$\tfrac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + (1-\sin\beta)\,ma^2\dot{\theta}^2 + (m+M)ga\cos\beta\,(1-\cos\theta) = \text{一定},$$

これが求める結果である。

微小振動。 t で微分すると、

$$\dot{\theta}\Big[\big(I + 2(1-\sin\beta)ma^2\big)\ddot{\theta} + (M+m)ga\cos\beta\,\sin\theta\Big] = 0.$$

$\dot{\theta}\neq 0$ のときは括弧内が 0 でなければならず、連続性によって括弧内はすべての時刻で 0 となる。θ が小さいとき $\sin\theta\approx\theta$ であるから、

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta, \qquad \omega^2 = \frac{(M+m)ga\cos\beta}{I + 2(1-\sin\beta)ma^2},$$

となり、これは周期（period）$2\pi/\omega$ の単振動（simple harmonic motion）である。

ここで $m = \frac{3}{2}M$ とおく。すると $\sin\beta = \dfrac{3/2}{5/2} = \frac{3}{5}$ であり、β は鋭角なので $\cos\beta = \frac{4}{5}$ である。分子は

$$\tfrac{5}{2}M\cdot ga\cdot\tfrac{4}{5} = 2Mga,$$

であり、$I = \frac{3}{2}Ma^2$ のとき分母は

$$\tfrac{3}{2}Ma^2 + 2\cdot\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{3}{2}Ma^2 = \tfrac{3}{2}Ma^2 + \tfrac{6}{5}Ma^2 = \tfrac{27}{10}Ma^2.$$

よって $\omega^2 = \dfrac{20g}{27a}$ であり、周期は

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{27a}{20g}} = 2\pi\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3a}{5g}} = 3\pi\sqrt{\frac{3a}{5g}},$$

となる。ここで $\sqrt{27/20} = \sqrt{9\cdot 3/(4\cdot 5)} = \frac{3}{2}\sqrt{3/5}$ を用いた。これが求める周期である。

検算

- $m = 0$ とすると $\sin\beta = 0$、$AP/a = \sqrt{2}$ となる。円板は O が A の真下にくるようにぶら下がり、O と同じ高さにある縁の点は確かに A から $\sqrt{2}a$ の距離にある。周期は $2\pi\sqrt{(3a/2)/g}$ となり、縁の一点を支点とする円板についてよく知られた結果と一致する。
- 運動エネルギーの項を足し合わせると $\frac{1}{2}(I + m\,AP^2)\dot{\theta}^2$ となり、L のまわりの物体全体の慣性モーメント（moment of inertia）が現れる。これは当然そうあるべきものである。
- $m = \frac{3}{2}M$、$a = 0.5\,\mathrm{m}$ としてこの剛体の運動を時間刻みで数値シミュレーションしたところ、微小振動の周期は $1.64815\,\mathrm{s}$ となった。公式からは $3\pi\sqrt{1.5/49.05} \approx 1.64815\,\mathrm{s}$ が得られる。また、このシミュレーションでは、大きく振れる場合にもエネルギーの式が一定に保たれることが確かめられた。

よくある間違い

- P を鉛直線に関して O と同じ側に置いてしまう。そうすると二つの重力が物体を同じ向きに回そうとするので、平衡はありえない。
- 質点の軸からの距離として AP ではなく a を使ってしまう。質点は O ではなく A を中心とする円周上を動く。
- O と P の位置エネルギーを別々に求めようとして、三角関数の計算で迷子になる。A から距離 $a\cos\beta$ の位置にある全体の重心 G を使うほうがはるかにすっきりする。

STEP のその先へ

これは**実体振り子**（compound pendulum）である。固定された軸のまわりを振れる剛体はどれも、長さ $I_{\text{全体}}/\big((M+m)h\big)$ の単振り子（simple pendulum）と同じように振動する。ここで h は軸から重心までの距離である。ここで用いたエネルギーによる方法は、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）の一変数の場合にあたる。ラグランジュ力学では、運動エネルギーと位置エネルギーを一つの一般化座標（generalised coordinate）で書き表し、そこから運動方程式を導く。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の回転と実体振り子を丁寧に扱っている。

解答例

STEP III 2018、第 11 問

力学 ・ たるんだ糸と放物運動

STEP III 2018、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

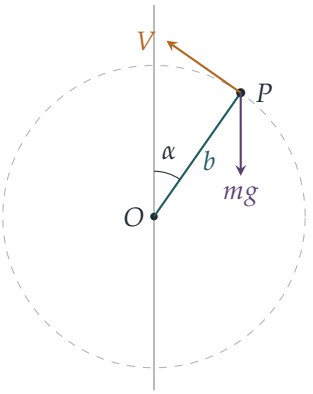
step.maths.org/questions/18-s3-q11

鍵となる考え方

糸がたるむのは張力（tension）がゼロになる瞬間であるから、その瞬間における半径方向の運動方程式（equation of motion）から V が求まる。その後、質点は通常の放物運動をする物体（projectile）となり、質点の O からの距離が再び b に戻ったときに糸は再びぴんと張る。O を原点とする座標で考えると、この条件は見事に簡単になる。放物運動が円周上から接線（tangent）方向の運動として始まるからである。最後の小問は、糸が急に張る瞬間（jerk）の速度がちょうど糸の方向を向いているかどうかという問題に帰着する。

解答

質点を、軽くて伸びない糸につながれた質量 m の点とみなし、空気抵抗は無視する。O を原点とし、x 軸を水平方向、y 軸を鉛直上向きにとる。質点は反時計回りに回り、鉛直上向きの右側にある点 P で糸がたるむとする。



P において糸は鉛直上向きと角 α をなすので、$P = (b\sin\alpha,\, b\cos\alpha)$ である。そこでの速度は糸に垂直で、上方へ、頂点を越える向きである：

$$\mathbf{v}_P = V(-\cos\alpha,\, \sin\alpha).$$

糸がたるむときの速さ

糸に沿って O の向きに力を分解する。張力 R は O の向きにはたらき、P は O より上にあるので、重力も O の向きに成分 $mg\cos\alpha$ をもつ。質点は半径 b の円運動をしているから

$$R + mg\cos\alpha = \frac{mV^2}{b}.$$

糸がたるむのは $R = 0$ のときであるから

$$V^2 = gb\cos\alpha, \qquad V = \sqrt{gb\cos\alpha}.$$

糸が再び張るとき

糸がたるむと、質点は放物運動をする。時刻 t における位置は

$$x = b\sin\alpha - Vt\cos\alpha, \qquad y = b\cos\alpha + Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

糸が再び張るのは $x^2 + y^2 = b^2$ となるときである。展開すると

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= b^2\sin^2\alpha - 2bVt\sin\alpha\cos\alpha + V^2t^2\cos^2\alpha \\ &\quad + b^2\cos^2\alpha + V^2t^2\sin^2\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4 + 2bVt\sin\alpha\cos\alpha - bgt^2\cos\alpha - gVt^3\sin\alpha \\ &= b^2 + \left(V^2 - gb\cos\alpha\right)t^2 - gVt^3\sin\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4. \end{aligned}$$

t の項が打ち消し合うのは質点が接線方向に動き始めるからであり、t^2 の項が打ち消し合うのは $V^2 = gb\cos\alpha$ だからである。したがって

$$x^2 + y^2 - b^2 = gt^3\left(\tfrac{1}{4}gt - V\sin\alpha\right).$$

$0 < t < 4V\sin\alpha/g$ ではこれは負であるから、質点は円の真に内側にあり、糸はたるんだままである。これが再びゼロになり（その後は正になる）のは、次を満たす時刻 T である：

$$gT = 4V\sin\alpha,$$

これが示すべきことであった。

直前の運動の向き

時刻 T における速度の成分は

$$\dot{x} = -V\cos\alpha, \qquad \dot{y} = V\sin\alpha - gT = V\sin\alpha - 4V\sin\alpha = -3V\sin\alpha.$$

よって質点は左下に向かって運動しており、その軌道が水平方向となす角 β は

$$\tan\beta = \frac{|\dot{y}|}{|\dot{x}|} = \frac{3V\sin\alpha}{V\cos\alpha} = 3\tan\alpha,$$

を満たす。これが示すべきことであった。

静止する条件

考えてみよう 質点がぴたりと止まるためには、速度について何が成り立たなければならないか。

糸が急に張ることで失われるのは、運動量（momentum）のうち糸に沿った成分だけである。糸に垂直な成分は変化しないので、質点が静止するための必要十分条件は、その垂直成分がもともとゼロであること、すなわち直前の速度が糸 $\overrightarrow{OQ}$ に平行であることである。ここで Q は時刻 T における質点の位置である。（$\dot{x} = -V\cos\alpha \neq 0$ であるから、速度そのものはゼロではない。）

$V^2 = gb\cos\alpha$ と $T = 4V\sin\alpha/g$ を用いると

$$x(T) = b\sin\alpha - \frac{4V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = b\sin\alpha\,(1 - 4\cos^2\alpha),$$
$$y(T) = b\cos\alpha + \frac{4V^2\sin^2\alpha}{g} - \frac{8V^2\sin^2\alpha}{g} = b\cos\alpha\,(1 - 4\sin^2\alpha).$$

ベクトル (x, y) と $(\dot{x}, \dot{y})$ が平行であるための必要十分条件は $x\dot{y} - y\dot{x} = 0$ である。$-bV$ で割ると

$$3\sin^2\alpha\,(1 - 4\cos^2\alpha) - \cos^2\alpha\,(1 - 4\sin^2\alpha) = 0.$$

$S = \sin^2\alpha$ とおくと、$\cos^2\alpha = 1 - S$ かつ $1 - 4\cos^2\alpha = 4S - 3$ であるから

$$\begin{aligned} 3S(4S-3) - (1-S)(1-4S) &= 0 \\ 12S^2 - 9S - (1 - 5S + 4S^2) &= 0 \\ 8S^2 - 4S - 1 &= 0, \end{aligned}$$

よって $S = \frac{1}{16}\left(4 \pm \sqrt{16+32}\right) = \frac{1}{4}\left(1 \pm \sqrt{3}\right)$ である。$S = \sin^2\alpha > 0$ であるから負の解はありえず、残る解は $(0,1)$ に含まれるので、実際に存在する鋭角に対応する。以上の各段階はすべて逆にたどれるので、糸が張った瞬間に質点が一瞬静止するための必要十分条件は

$$\sin^2\alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{4}.$$

検算

- 式 $V^2 = gb\cos\alpha$ からは、$\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ のとき $V \to 0$ となる。糸が O と同じ高さでたるむのは、質点がそこで止まった場合に限られるので、これは正しい。
- $\sin^2\alpha = \frac{1}{4}(1+\sqrt{3})$ のとき $\alpha \approx 55.7°$ かつ $\cos^2\alpha = \frac{1}{4}(3-\sqrt{3})$ であるから、$Q = \left(b\sin\alpha\,(\sqrt{3}-2),\ -\sqrt{3}\,b\cos\alpha\right)$ となり、これは O の左下にある。OQ の傾きは $\sqrt{3}\cot\alpha/(2-\sqrt{3})$、軌道の傾きは $3\tan\alpha$ である。次のとおり、両者は一致する：

  $$3(2-\sqrt{3})\tan^2\alpha = \frac{3(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{3-\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} = \sqrt{3}.$$

  運動のコンピュータシミュレーションによっても、3 つの結果すべてが確認された。

よくある間違い

- エネルギーだけを用いて V を求めようとすること。エネルギーは V を初速度と結びつけるが、V を b、g、α で定めるのは張力ゼロの条件である。
- P における速度の向きを誤ること。速度は OP に垂直なので、鉛直方向ではなく水平方向と角 α をなす。
- T が糸が張る**最初の**時刻であることの根拠を示し忘れること。因数分解（factorisation）$gt^3\left(\frac{1}{4}gt - V\sin\alpha\right)$ がそれを示している。

STEP のその先へ

糸は引くことはできても押すことはできない。したがって、たるむ糸の問題は、実のところ束縛（constraint）がはたらいたりはたらかなかったりする束縛系である。この

一方向の束縛という考え方は、接触力学（contact mechanics）や、不等式による束縛を伴うラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）にも現れる。糸が急に張るときの力は撃力的な束縛力（impulsive constraint force）であり、大学 1 年次の講義で衝突や反発係数（coefficient of restitution）とともに扱われる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、円運動と撃力の両方を丁寧に展開している。

解答例

STEP III 2018、第 12 問

確率・統計 ・ 順序統計量

> **STEP III 2018、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q12

鍵となる考え方

事象「k 番目に小さい数が y 以下である」は、事象「n 個の数のうち少なくとも k 個が y 以下である」と同じであり、y 以下である値の個数は二項分布（binomial distribution）に従う。これにより、分布関数（distribution function）がただちに得られる。これを微分すると二つの和が現れ、(ii) の二つの二項係数の恒等式こそが、それらを望遠鏡和（telescoping sum）として打ち消し合わせる鍵となる。確率密度関数が分かれば、それを積分すると 1 になるという事実から、ある積分の値がただで求まる。さらに、同じ積分（n と k をずらしたもの）から平均が得られる。

解答

n 個の数を $X_1, \ldots, X_n$ とする。これらは互いに独立（independent）で、それぞれ $[0,1]$ 上の一様分布（uniform distribution）に従う。

小問 (i)

$0 \le y \le 1$ を満たす y を固定し、$X_i \le y$ となる X_i の個数を N とする。各 X_i は他と独立に確率 y で $X_i \le y$ を満たすから、$N \sim \mathrm{B}(n, y)$ である。

さて、$Y_k \le y$ となるのは、ちょうど少なくとも k 個の数が y 以下であるときである。実際、$Y_k \le y$ ならば、Y_k とそれより小さい $k-1$ 個の数はすべて y 以下であるから、$N \ge k$ である。逆に $N \ge k$ ならば、小さい方から k 個の数はすべて y 以下であり、特

に $Y_k \leq y$ である。したがって

$$\mathrm{P}(Y_k \leq y) = \mathrm{P}(N \geq k) = \sum_{m=k}^{n} \binom{n}{m} y^m (1-y)^{n-m},$$

となり、これが $(*)$ である。

小問 (ii)

階乗を書き下すと、$1 \leq m \leq n$ に対して

$$m\binom{n}{m} = \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(m-1)!\,\big((n-1)-(m-1)\big)!} = n\binom{n-1}{m-1},$$

であり、同様に $0 \leq m \leq n-1$ に対して

$$(n-m)\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m-1)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{m!\,\big((n-1)-m\big)!} = n\binom{n-1}{m}.$$

である。（$m = n$ のとき左辺は 0 であり、$\binom{n-1}{n}$ を 0 と解釈すれば右辺も 0 である。）

確率密度関数。 Y_k の確率密度関数（probability density function）$f(y)$ は $(*)$ の導関数である。各項を積の微分法（product rule）で微分すると

$$f(y) = \sum_{m=k}^{n} \binom{n}{m} \Big[m\,y^{m-1}(1-y)^{n-m} - (n-m)\,y^m (1-y)^{n-m-1}\Big].$$

となる。後半の部分では、因数 $n-m$ があるため $m = n$ の項は消えるので、その和は実際には $m = n-1$ までである。二つの恒等式を用いると

$$f(y) = n\sum_{m=k}^{n} \binom{n-1}{m-1} y^{m-1}(1-y)^{n-m} \;-\; n\sum_{m=k}^{n-1} \binom{n-1}{m} y^m (1-y)^{n-1-m}.$$

? **考えてみよう** この二つの和はほとんど同じに見える。どうすれば両者をそろえられるだろうか？

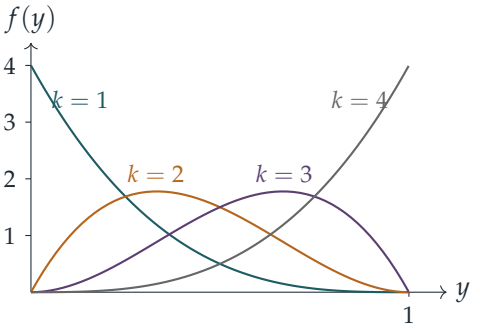
二つ目の和で $j = m+1$ とおくと、

$$n\sum_{j=k+1}^{n} \binom{n-1}{j-1} y^{j-1}(1-y)^{n-j},$$

となる。これは一つ目の和と項ごとに一致し、ただ k ではなく $k+1$ から始まる点だけが異なる。よって、一つ目の和の $m = k$ の項以外はすべて打ち消し合い、

$$f(y) = n\binom{n-1}{k-1} y^{k-1}(1-y)^{n-k},$$

を得る。これが示すべきことであった。（$k = n$ のときは、二つ目の和は空であり、一つ目の和は $m = n$ の項のみからなるので、この結果はやはり成り立つ。）



$n=4$ のときの確率密度関数。四つの数のうち k 番目に小さいものは $k/5$ の近くに集中する。

積分。 確率密度関数をその値域全体（ここでは $[0,1]$）で積分すると 1 になる。したがって

$$n\binom{n-1}{k-1}\int_0^1 y^{k-1}(1-y)^{n-k}\,\mathrm{d}y = 1,$$

であるから、

$$\int_0^1 y^{k-1}(1-y)^{n-k}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{n\binom{n-1}{k-1}} = \frac{(k-1)!\,(n-k)!}{n!}.$$

である。これは $1 \le k \le n$ を満たすすべての整数について成り立つ。

小問 (iii)

定義より

$$\mathrm{E}(Y_k) = \int_0^1 y\,f(y)\,\mathrm{d}y = n\binom{n-1}{k-1}\int_0^1 y^{k}(1-y)^{n-k}\,\mathrm{d}y.$$

である。

考えてみよう この積分は、先ほど求めた積分とは少し違う。n と k をどのような値にすれば、その形になるだろうか？

被積分関数（integrand）は、$K=k+1$、$N=n+1$ として $y^{K-1}(1-y)^{N-K}$ であり、$1 \le K \le N$ であるから、(ii) の公式が適用できて

$$\int_0^1 y^{k}(1-y)^{n-k}\,\mathrm{d}y = \frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!}.$$

となる。$n\binom{n-1}{k-1} = \dfrac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$ であるから、

$$\mathrm{E}(Y_k) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\cdot\frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{k}{n+1}.$$

である。

検算

- $n=1$、$k=1$ のときは一様分布に従う数が一つだけであり、$\mathrm{E}(Y_1)=\frac{1}{2}$ となって、当然そうあるべき値になっている。
- 対称性（symmetry）：各 X_i を $1-X_i$ に置き換えると、k 番目に小さい数は k 番目に大きい数になるから、$\mathrm{E}(Y_k)+\mathrm{E}(Y_{n+1-k})=1$ である。実際、$\frac{k}{n+1}+\frac{n+1-k}{n+1}=1$ である。
- n 個の数は $[0,1]$ を $n+1$ 個の区間に分け、この答えは各区間の長さの平均が $\frac{1}{n+1}$ であることを示している。これは対称性から見て非常にもっともらしい。
- $n=5$、$k=2$ のとき：$y=0.3$ での $(*)$ の値は 0.47178 であり、200 000 個の標本によるコンピュータシミュレーションでは 0.4726 が得られ、Y_2 の標本平均（sample mean）は $\frac{1}{3}$ に対して 0.33333 であった。

よくある間違い

- $\mathrm{P}(Y_k\le y)=\binom{n}{k}y^k(1-y)^{n-k}$ と書いてしまうこと。これは y 以下の値が**少なくとも** k 個ではなく、**ちょうど** k 個である確率である。
- 二つ目の和の $m=n$ の項が 0 であることを忘れ、望遠鏡和の打ち消し合いが一項ずれて成り立たないように見えてしまうこと。
- (iii) で積分を再利用するとき、k だけをずらして n をずらさないこと。

STEP のその先へ

Y_k は標本の**順序統計量**（order statistics）であり、Y_k はパラメータ k と $n-k+1$ のベータ分布（Beta distribution）に従う。(ii) の積分はベータ関数（Beta function）$B(a,b)=\int_0^1 y^{a-1}(1-y)^{b-1}\,\mathrm{d}y=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ であり、ガンマ関数（Gamma function）とともに再び出会うことになるだろう。順序統計量は、標本中央値（sample median）やノンパラメトリック統計（non-parametric statistics）の基礎となっている。Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）は、順序統計量とベータ分布を見事に扱っており、ここでの議論とよく似た、ベータ積分の「ストーリー」による証明も載せている。

解答例

STEP III 2018、第 13 問

確率・統計 ・ ポアソン分布

> **STEP III 2018、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q13

鍵となる考え方

確率母関数（probability generating function）に $t = -1$ を代入すると、各確率に符号 $(-1)^r$ が付く。したがって $G(1)$ と $G(-1)$ の平均をとれば奇数番目の項が打ち消し合い、偶数番目の項だけが残る。同じふるい分けを 1 の 4 乗根（fourth roots of unity）$1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}$ で行えば、4 の倍数の項が取り出せる。新しい母関数がそれぞれ閉じた形（closed form）で表せれば、平均（mean）は $t = 1$ における導関数の値にすぎず、問題は初等関数どうしの比較に帰着する。

解答

$p_r = \mathrm{P}(X = r)$ とおくと、$G(t) = \sum_{r \geq 0} p_r t^r$ である。

偶数の値。 $t = 1$ と $t = -1$ における級数を足し合わせると、

$$G(1) + G(-1) = \sum_{r \geq 0} p_r \left(1 + (-1)^r\right) = 2 \sum_{r \text{ は偶数}} p_r$$

となる。$1 + (-1)^r$ は偶数の r に対しては 2、奇数の r に対しては 0 だからである。両辺を 2 で割れば求める結果が得られる。（$\sum p_r = 1$ であるから、どちらの級数も絶対収束（converge absolutely）する。）

ポアソン分布の母関数。 $p_r = \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^r / r!$ のとき、

$$G(t) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{r \geq 0} \frac{(\lambda t)^r}{r!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{-\lambda(1-t)},$$

である。ここで、すべての t に対して収束する指数関数の級数展開（exponential series）を用いた。

小問 (i)

Y の確率の総和は 1 でなければならないから、k は $\mathrm{P}(X \text{ が偶数})$ の逆数である。最初の結果により、

$$\mathrm{P}(X \text{ が偶数}) = \tfrac{1}{2}\left(1+\mathrm{e}^{-2\lambda}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda}\cosh\lambda, \qquad \text{よって} \qquad k = \frac{\mathrm{e}^{\lambda}}{\cosh\lambda}.$$

Y の母関数は G の偶数番目の項だけを残したものである：

$$\begin{aligned} G_Y(t) = k \sum_{r \text{ は偶数}} p_r t^r &= k\cdot\tfrac{1}{2}\left(G(t)+G(-t)\right) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\lambda}}{\cosh\lambda}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\lambda t}+\mathrm{e}^{-\lambda t}\right) = \frac{\cosh\lambda t}{\cosh\lambda}, \end{aligned}$$

ここで $\frac{1}{2}\left(G(t)+G(-t)\right)$ は G の偶関数部分であり、最初の結果で 1 の代わりに t としたものにほかならない。これが求める形である。

平均は $G_Y'(1)$ である：

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{\lambda\sinh\lambda}{\cosh\lambda} = \lambda\tanh\lambda.$$

$\lambda > 0$ のとき $\mathrm{e}^{-\lambda} > 0$ であるから、$\sinh\lambda = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\lambda}-\mathrm{e}^{-\lambda}) < \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}) = \cosh\lambda$ となり、$0 < \tanh\lambda < 1$ が成り立つ。ゆえに $\mathrm{E}(Y) < \lambda$ であり、題意は示された。

小問 (ii)

今度は r が 4 の倍数である項だけを残す必要がある。

> **考えてみよう** 2 ではなく 4 の倍数でふるい分けたいとき、$t = -1$ の役割を果たすものは何か。

1 の 4 乗根をすべて用いる。整数 r に対して、

$$1+(-1)^r+\mathrm{i}^r+(-\mathrm{i})^r = \begin{cases} 4 & \text{条件} 4 \mid r, \\ 0 & \text{それ以外.} \end{cases}$$

$4 \mid r$ ならば、すべての項が 1 である。r が奇数ならば、$(-1)^r = -1$ かつ $(-\mathrm{i})^r = -\mathrm{i}^r$ であるから、項は 2 つずつ打ち消し合う。$r \equiv 2 \pmod 4$ ならば、各項は $1+1-1-1=0$ となる。よって

$$\sum_{4\mid r}\frac{x^r}{r!} = \tfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\cosh x+\cos x\right).$$

（これは直接確かめることもできる。$\cosh x = \sum_{r\text{ は偶数}} x^r/r!$ であり、$\cos x$ は同じ項に符号 $+,-,+,\ldots$ を付けたものであるから、両者を足すと $4 \mid r$ の項は 2 倍になり、残りは打ち消し合う。）

$x = \lambda t$ とおいて $\mathrm{e}^{-\lambda}$ を掛け、さらに $G_Z(1) = 1$ となるように c を定めると、

$$G_Z(t) = \frac{\cosh \lambda t + \cos \lambda t}{\cosh \lambda + \cos \lambda}.$$

を得る。$\cosh \lambda > 1 \geq -\cos \lambda$ であるから、$\lambda > 0$ のとき分母は正である。微分して $t = 1$ とおくと、

$$\mathrm{E}(Z) = G_Z'(1) = \frac{\lambda(\sinh \lambda - \sin \lambda)}{\cosh \lambda + \cos \lambda}.$$

$\lambda > 0$ であり分母は正であるから、

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Z) < \lambda &\iff \sinh \lambda - \sin \lambda < \cosh \lambda + \cos \lambda \\ &\iff \sin \lambda + \cos \lambda > \sinh \lambda - \cosh \lambda = -\mathrm{e}^{-\lambda} \\ &\iff \sin \lambda + \cos \lambda + \mathrm{e}^{-\lambda} > 0. \end{aligned}$$

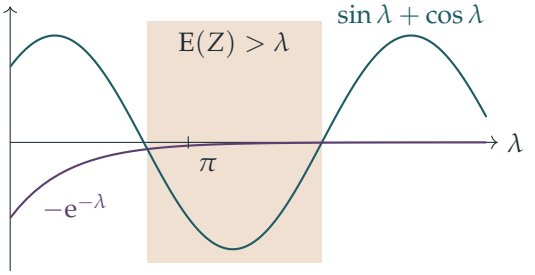
これは $\lambda = \pi$ で成り立たない。実際、$\mathrm{e}^{-\pi} < 1$ であるから $\sin \pi + \cos \pi + \mathrm{e}^{-\pi} = -1 + \mathrm{e}^{-\pi} < 0$ となる。具体的には

$$\mathrm{E}(Z)\big|_{\lambda=\pi} = \frac{\pi \sinh \pi}{\cosh \pi - 1} > \pi,$$

である。$\sinh \pi > \cosh \pi - 1$（これは $1 > \mathrm{e}^{-\pi}$ と同値）だからである。

したがって答えは**否**である。$\mathrm{E}(Z) < \lambda$ はすべての正の λ に対して成り立つわけではない。

全体像をつかむために、$\sin \lambda + \cos \lambda = \sqrt{2} \sin(\lambda + \frac{\pi}{4})$ と書き直す。この曲線が $-\mathrm{e}^{-\lambda}$ より下に来るとき、条件は成り立たない。そのような最初の区間はおよそ $\lambda \approx 2.42$ から $\lambda \approx 5.49$ までであり、それ以降の区間は $\mathrm{e}^{-\lambda} \to 0$ に伴って $\left(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi,\ \frac{7\pi}{4} + 2n\pi\right)$ にどんどん近づいていく。



検算

- $\lambda \to 0$ のとき、$\mathrm{E}(Y) = \lambda \tanh \lambda \approx \lambda^2$ である。これは理にかなっている。Y はほとんど常に 0 であり、$\mathrm{P}(Y = 2) \approx \lambda^2/2$ だからである。
- $\lambda \to \infty$ のとき $\tanh \lambda \to 1$ であるから、$\mathrm{E}(Y)$ は λ よりわずかに小さい値になる。λ が大きいとポアソン分布は広く散らばるので、奇数の値を捨てても平均はほとんど動かない。
- コンピュータでポアソン分布の級数を直接足し合わせ、すべての母関数と 2 つの平均を確認した。たとえば $\lambda = \pi$ のとき、$\mathrm{E}(Y) \approx 3.1299 < \pi$、$\mathrm{E}(Z) \approx 3.4254 > \pi$ となる。また、$\sin \lambda + \cos \lambda + \mathrm{e}^{-\lambda}$ の符号が変わる点が $\lambda \approx 2.419$ と 5.495 にあることも確かめた。

よくある間違い

- 正規化定数（normalising constant）を忘れること。$\cosh \lambda t$ だけでは母関数にならない。$t = 1$ での値が 1 にならないからである。
- (i) からの類推で、(ii) の答えも「成り立つ」に違いないと思い込むこと。4 の倍数だけを残すと、λ より下の確率の重みが上の重みより多く取り除かれることがある。たとえば $\lambda = \pi$ のとき、許される値のうち最も近い 4 は π より大きく、しかも 0 よりはるかに大きな確率をもつ。
- $\cosh \lambda + \cos \lambda$ が正であることを確かめずに、不等式をそれで割ること。

STEP のその先へ

1 つの剰余類（residue class）に属する項を取り出すために母関数を 1 の冪根にわたって平均する方法は、**1 の冪根フィルター**（roots-of-unity filter）（または級数の**多重分割**（multisection））と呼ばれる。これは組合せ論（combinatorics）の基本的な道具であり、離散フーリエ変換（discrete Fourier transform）の最も簡単な場合でもある。ここで行ったように、分布をある事象で条件付けてから平均を計算し直すという操作は、確率論のいたるところに現れる。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、母関数を詳しく扱っている。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

2018 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

