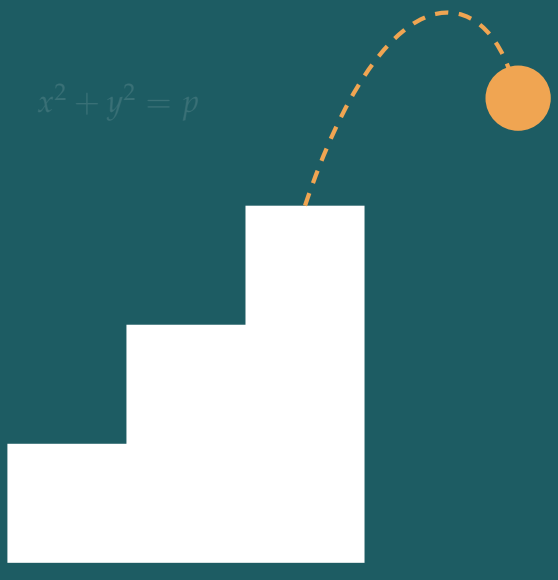
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

2017 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

2017 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

2017 年解答例

2017 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 39 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 置換積分 純粋数学 3

Q2 不等式の積分 純粋数学 6

Q3 放物線の接線 純粋数学 10

Q4 2次式と等比級数 純粋数学 14

Q5 微分による最適化 純粋数学 19

Q6 積分と符号の変化 純粋数学 23

Q7 ナポレオンの定理 純粋数学 27

Q8 漸化式と数学的帰納法 純粋数学 31

Q9 放物運動 力学 34

Q10 連鎖的な衝突 力学 38

Q11 摩擦のある剛体の静力学 力学 43

Q12 期待値と条件付け 確率・統計 47

Q13 確率の漸化式 確率・統計 51

STEP II

Q1 漸化式による積分 純粋数学 55

Q2 周期数列 純粋数学 59

Q3 曲線の概形 純粋数学 63

Q4 積分に関するコーシー・シュワルツの不等式 純粋数学 69

Q5 放物線の法線と円 純粋数学 73

Q6 不等式と数学的帰納法 純粋数学 77

Q7 対数微分法 純粋数学 81

Q8 ベクトルと垂心 純粋数学 86

Q9 摩擦と剛体 力学 89

Q10 抵抗に逆らってする仕事 力学 . . . 94
Q11 放物運動とエネルギー 力学 . . . 98
Q12 ポアソン過程 確率・統計 . . . 102
Q13 期待値と無限級数 確率・統計 . . . 106

STEP III

Q1 望遠鏡型級数による評価 純粋数学 . . . 110
Q2 複素平面上の回転 純粋数学 . . . 114
Q3 多項式の根 純粋数学 . . . 118
Q4 関数の幾何平均 純粋数学 . . . 122
Q5 極方程式で表された曲線 純粋数学 . . . 126
Q6 置換積分 純粋数学 . . . 130
Q7 楕円の接線 純粋数学 . . . 134
Q8 部分和分 純粋数学 . . . 139
Q9 連結された質点とエネルギー 力学 . . . 143
Q10 回転する剛体 力学 . . . 147
Q11 運動量保存則 力学 . . . 152
Q12 離散型同時分布 確率・統計 . . . 156
Q13 期待値と分散 確率・統計 . . . 159

解答例

STEP I 2017、第1問

純粋数学 • 置換積分

> **STEP I 2017、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q1

鍵となる考え方

三角関数の分数を払ってしまえば、これらの被積分関数（integrand）はどれも実は $f'(x)/f(x)$ の形（最後のものだけは $f'(x)/f(x)^2$ の形）をしている。$x\sin x+\cos x$ の導関数（derivative）は二つの $\sin x$ の項が打ち消し合うために際立って簡潔になり、ほかの置換もこれと同じ打ち消し合いの上に組み立てられている。したがって方針は次のとおりである。各被積分関数を sin と cos（あるいは sec と tan）で書き直し、導関数が分子と一致する分母を見つけ、それを置換する。

解答

小問 (i)

$u=x\sin x+\cos x$ とおくと、積の微分法（product rule）により

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x.$$

ここで被積分関数の分子と分母に $\cos x$ を掛けると

$$\frac{x}{x\tan x+1}=\frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}.$$

分子はちょうど $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ であるから、$x\cos x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$ となり

$$\int\frac{x}{x\tan x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\ln|u|+C=\ln|x\sin x+\cos x|+C.$$

二つ目の積分では、$\cos x$ の代わりに $\sin x$ を用いて同じことを行う。分子と分母に $\sin x$ を掛けると

$$\frac{x}{x\cot x-1}=\frac{x\sin x}{x\cos x-\sin x}.$$

$v = x\cos x - \sin x$ とおく。すると

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x,$$

であるから、分子は $-\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ となり

$$\int \frac{x}{x\cot x - 1}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = -\ln|x\cos x - \sin x| + C.$$

マイナス符号を落とさないこと。これは $\cos x$ を微分したことから生じるものである。

小問 (ii)

一つ目の被積分関数には、試してみる価値のある分母がすでにある。$w = x\sec^2 x - \tan x$ とおく。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^2 x = 2\sec^2 x\tan x$ を用いると

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \sec^2 x + 2x\sec^2 x\tan x - \sec^2 x = 2x\sec^2 x\tan x.$$

ここでも不要な項が打ち消し合い、分子は $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$ となる。よって

$$\int \frac{x\sec^2 x\,\tan x}{x\sec^2 x - \tan x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w = \tfrac{1}{2}\ln|x\sec^2 x - \tan x| + C.$$

考えてみよう 最後の積分には sec も tan も現れない。これを $w = x\sec^2 x - \tan x$ とどう結びつければよいだろうか？

分母の括弧の中から $\cos^2 x$ をくくり出す：

$$x - \sin x\cos x = \cos^2 x\left(x\sec^2 x - \frac{\sin x}{\cos x}\right) = \cos^2 x\,(x\sec^2 x - \tan x) = w\cos^2 x.$$

したがって $(x - \sin x\cos x)^2 = w^2\cos^4 x$ であり、

$$\frac{x\sin x\cos x}{(x-\sin x\cos x)^2} = \frac{x\sin x\cos x}{w^2\cos^4 x} = \frac{x\sec^2 x\tan x}{w^2},$$

となる。$\dfrac{\sin x\cos x}{\cos^4 x} = \dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$ だからである。分子は再び $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$ であるから、同じ置換により

$$\begin{aligned}\int \frac{x\sin x\cos x}{(x-\sin x\cos x)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{w^2}\,\mathrm{d}w = -\frac{1}{2w} + C\\ &= -\frac{1}{2(x\sec^2 x - \tan x)} + C = -\frac{\cos^2 x}{2(x-\sin x\cos x)} + C,\end{aligned}$$

ここで最後の変形では分子と分母に $\cos^2 x$ を掛けた。2 倍角の形を好むなら、これは $-\dfrac{\cos^2 x}{2x - \sin 2x} + C$ である。

検算

- それぞれの答えを微分し、被積分関数に戻ることを確かめよ。最後のものについては、$-\cos^2 x/\big(2(x-\sin x\cos x)\big)$ に商の微分法（quotient rule）を適用する際に $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-\sin x\cos x) = 1-\cos 2x = 2\sin^2 x$ を用いると、$\sin^2 x\cos^2 x$ の項がきれいにまとまる。
- 数値計算：区間 $[0.3, 1.2]$ において一つ目の積分の値は $0.34953\ldots$ であり、$\ln|x\sin x+\cos x|$ の変化量もこれと等しい。同じ区間での最後の積分の値は $25.7364\ldots$ であり、$-\cos^2 x/\big(2(x-\sin x\cos x)\big)$ と一致する。四つの答えはすべて、この方法によりコンピュータで確認済みである。

よくある間違い

- $\tan x$ や $\cot x$ を先に払わずに置換してしまうこと。分子が $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ と一致するのは、全体に $\cos x$ または $\sin x$ を掛けた後に限られる。
- 小問 (i) の二つ目の積分のマイナス符号や、小問 (ii) の係数 $\frac{1}{2}$ を落とすこと。
- 最後の積分で、習慣的に対数に手を伸ばしてしまうこと。$1/w^2$ を積分すると $-1/w$ になる。

STEP のその先へ

ここでの技法は逆算である。すなわち、打ち消し合いの後で分母の導関数がちょうど分子になるように置換を選ぶのである。その背後には $\int f'/f = \ln|f|$、すなわち対数微分（logarithmic derivative）という事実があり、これは複素解析（complex analysis）において（関数の零点を数える際に）、また微分方程式においては積分因子（integrating factor）として再び現れる。STEP の積分問題の多くは、注意深く選んだ関数を微分し、答えを隠すことで作られている。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）には、そうした構造を見抜く練習問題がさらに豊富に収められている。

解答例

STEP I 2017、第 2 問

純粋数学 • 不等式の積分

> **STEP I 2017、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q2

鍵となる考え方

積分（integration）は不等式（inequality）を保つ。すなわち、$a < b$ である区間 $[a, b]$ 上で $f(t) \le g(t)$ ならば、$\int_a^b f \le \int_a^b g$ である。注意すべきは積分の向きだけである。$x < 1$ のとき区間 $[1, x]$ は逆向きになり、不等式の向きが反転するからである。最後の小問でも同じ考え方を再び用いる。非負の関数を 1 から y まで積分すると $y - 1$ と同じ符号をもつ値が得られ、まさにその符号こそが、安全に両辺を割るために必要なものである。

解答

小問 (i)

$x \ge 1$ の場合。 $1 \le t \le x$ に対して $\frac{1}{t} \le 1$ であり、区間は正の向きであるから、

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \le \int_1^x 1\,\mathrm{d}t, \qquad \text{すなわち} \qquad \ln x \le x - 1.$$

$0 < x \le 1$ の場合。 今度は $x \le t \le 1$ の範囲で積分する。ここでは $t \le 1$ であるから $\frac{1}{t} \ge 1$ である。よって

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \ge \int_x^1 1\,\mathrm{d}t, \qquad \text{すなわち} \qquad -\ln x \ge 1 - x.$$

両辺に -1 を掛けると不等式の向きが反転し、再び $\ln x \le x - 1$ が得られる。したがって $(*)$ はすべての $x > 0$ で成り立つ。

小問 (ii)

$x \geq 1$ の場合。 $t \geq 1$ に対して $\frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{t}$ であるから、

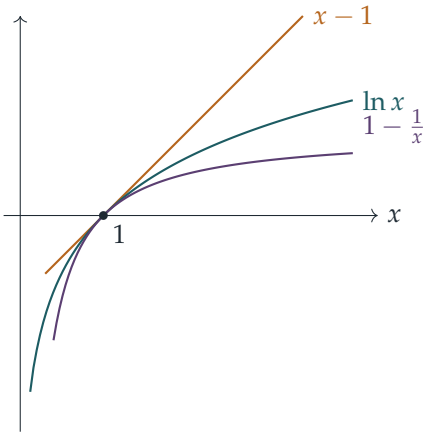
$$\int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{すなわち} \qquad 1 - \frac{1}{x} \leq \ln x.$$

$0 < x \leq 1$ の場合。 $x \leq t \leq 1$ では不等式が反転し、$\frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{t}$ となる（$t \leq 1$ に正の数 $\frac{1}{t^2}$ を掛ければよい）。$[x, 1]$ 上で積分すると

$$\frac{1}{x} - 1 \geq -\ln x,$$

となり、両辺に -1 を掛けると $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ が得られる。したがって $(**)$ はすべての $x > 0$ で成り立つ。

（別解として、$(**)$ は $(*)$ からただちに導かれる。$(*)$ の x に $1/x$ を代入すれば $-\ln x \leq \frac{1}{x} - 1$ が得られる。）



3 つの曲線はすべて $x = 1$ で接し、そこでの傾き（gradient）はいずれも 1 である。$\ln x$ は他の 2 つの曲線に挟まれている。

小問 (iii)

$(*)$ と $(**)$ はいずれも、ある関数が $x > 0$ で非負であることを述べている：

$$f(x) = x - 1 - \ln x \geq 0, \qquad g(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x} \geq 0.$$

このような関数の積分について、簡単な事実が必要になる。

考えてみよう すべての $x>0$ で $h(x)\geq 0$ であるとき、$y<1$ ならば $\int_1^y h(x)\,\mathrm{d}x$ の符号はどうなるか？

$y>1$ ならば積分は正の向きの区間上でとられるので ≥ 0 である。$0<y<1$ ならば $\int_1^y h = -\int_y^1 h \leq 0$ である。いずれの場合も

$$(y-1)\int_1^y h(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; 0.$$

これにより、$y>1$ と $0<y<1$ の両方の場合をまとめて扱うことができる。

$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x$ が必要である（$u=\ln x$ として部分積分（integration by parts）を行う）。よって

$$\int_1^y \ln x\,\mathrm{d}x = y\ln y - y + 1.$$

右側の不等式。 f を積分すると、

$$\begin{aligned}\int_1^y f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{(y-1)^2}{2} - \big(y\ln y - y + 1\big) = \frac{(y-1)^2}{2} + (y-1) - y\ln y \\ &= \frac{(y-1)(y+1)}{2} - y\ln y.\end{aligned}$$

上の事実より、

$$(y-1)\left[\frac{(y-1)(y+1)}{2} - y\ln y\right] \geq 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{(y-1)^2(y+1)}{2} \geq y(y-1)\ln y.$$

$y>0$ かつ $y\neq 1$ であるから $y(y-1)^2$ は正であり、これで割っても不等式の向きは変わらない：

$$\frac{y+1}{2y} \geq \frac{\ln y}{y-1}.$$

左側の不等式。 g を積分すると、

$$\int_1^y g(x)\,\mathrm{d}x = \big(y\ln y - y + 1\big) - (y-1) + \ln y = (y+1)\ln y - 2(y-1).$$

上の事実より、

$$(y-1)\big[(y+1)\ln y - 2(y-1)\big] \geq 0 \quad\Longrightarrow\quad (y+1)(y-1)\ln y \geq 2(y-1)^2.$$

ここで $(y+1)(y-1)^2>0$ で割ると、

$$\frac{\ln y}{y-1} \geq \frac{2}{y+1}.$$

2つを合わせると、

$$\frac{2}{y+1} \leq \frac{\ln y}{y-1} \leq \frac{y+1}{2y} \qquad \text{ただし} y>0,\ y\neq 1,$$

となり、示すべき不等式が得られた。

考えてみよう すぐに割るのではなく、割る前に $y-1$ を掛けるのはなぜか？

不等式を $y-1$ で割ると、$y<1$ のときには向きが反転するため、2 つの場合に分けざるを得なくなる。先に $y-1$ を掛ければ $(y-1)^2$ を含む式が得られ、これは y が 1 のどちら側にあっても正であるから、1 つの議論で両方の場合を扱える。

検算

- $y=2$ のとき：$\frac{2}{3}\approx 0.667 \le \ln 2 \approx 0.693 \le \frac{3}{4}=0.75$。
- $y=\frac{1}{2}$ のとき：$\frac{4}{3}\approx 1.333 \le 2\ln 2 \approx 1.386 \le \frac{3}{2}$。
- $y\to 1$ のとき、3 つの式はすべて 1 に収束する（中央の式は 1 における ln の傾きである）。これは図で曲線が接していることと整合する。
- y を $1/y$ で置き換え、両辺を y で割ると、まったく同じ 2 つの不等式が得られる。したがって $0<y<1$ に対する結果は $y>1$ に対する結果と同値である。

よくある間違い

- $x<1$ のときに $[1,x]$ 上で積分し、不等式の向きが反転することに気づかない。
- $y-1$ の符号を考えずにそれで割ってしまい、結果として小問 (iii) を $y>1$ の場合しか証明していない。

STEP のその先へ

中央の量 $\dfrac{\ln y}{y-1}$ は 1 と y の**対数平均**（logarithmic mean）の逆数（reciprocal）であり、左側の不等式は、対数平均が算術平均（arithmetic mean）$\frac{1+y}{2}$ 以下であることを述べている。実は対数平均は幾何平均（geometric mean）$\sqrt{y}$ 以上でもあり、そこから $\frac{\ln y}{y-1} \le \frac{1}{\sqrt{y}}$ が得られる。これは $\frac{y+1}{2y}$ よりも精密な上界である。不等式を積分するという手法と、それを正当化する積分の単調性（monotonicity）は、大学最初の解析学（analysis）の講義における基本的な道具である。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は積分を丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 2017、第 3 問

純粋数学 • 放物線の接線

STEP I 2017、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/17-s1-q3

鍵となる考え方

ここに現れる量はすべて媒介変数（parameter）p と q で表せる。そこで、R、S、T の座標を求め、二つの面積を直接計算する方針をとる。三角形 RST は辺 ST が y 軸上にあるので特に扱いやすい。高さは単に R からこの軸までの距離である。三角形 OPQ は頂点の一つが原点にあるので、公式 $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ を使えば一行で済む。

解答

P における接線

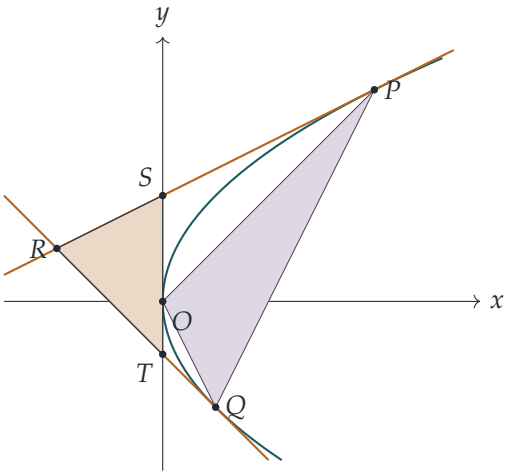
$y^2 = 4ax$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると $2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4a$ となるので、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2a}{y}$ である。P では $y = 2ap \neq 0$（$a, p > 0$ より）であるから、傾き（gradient）は

$$\frac{2a}{2ap} = \frac{1}{p}.$$

したがって、$P(ap^2, 2ap)$ を通る接線（tangent）は

$$y - 2ap = \frac{1}{p}\left(x - ap^2\right) \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{p}x - ap + 2ap = \frac{1}{p}x + ap,$$

となり、示すべき式が得られた。同様に、Q は p を q に置き換えた同じ形をしている（かつ $q \neq 0$）ので、Q における接線は $y = \dfrac{1}{q}x + aq$ である。



図は $a=1$、$p=2$、$q=-1$ の場合である。R は y 軸の左側にあり、高さは S と T の間にある。

点 R、S、T

それぞれの接線の式に $x=0$ を代入すると

$$S=(0,\ ap),\qquad T=(0,\ aq).$$

R では二本の接線が交わるので

$$\frac{x}{p}+ap=\frac{x}{q}+aq \quad\Longrightarrow\quad x\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)=a(q-p) \quad\Longrightarrow\quad x\cdot\frac{q-p}{pq}=a(q-p).$$

$p>0>q$ より $q-p\neq 0$ であるから、これで割ってよい（これは、二本の接線が平行でなく R が存在する理由でもある）。よって $x=apq$ であり、このとき $y=\dfrac{apq}{p}+ap=a(p+q)$ となる。

$$R=\big(apq,\ a(p+q)\big).$$

考えてみよう R は y 軸のどちら側にあるか。また、それが面積にとってなぜ重要なのか。

$p>0$ かつ $q<0$ であるから積 pq は負であり、R の x 座標 apq は負である。すなわち R は軸の左側にあり、軸からの距離は $a|pq|=-apq$ である。面積は正でなければならないので、apq をそのまま「高さ」と書かずに、符号に注意を払う。

三角形 RST の面積

ST を底辺とする。これは y 軸上にあり、長さは $ap - aq = a(p-q)$ で、$p > q$ より正である。R から y 軸に下ろした垂線の長さ、すなわち高さは $-apq$ である。よって

$$[RST] = \tfrac{1}{2} \cdot a(p-q) \cdot (-apq) = -\tfrac{1}{2}a^2pq(p-q).$$

三角形 OPQ の面積

頂点が O、(x_1, y_1)、(x_2, y_2) である三角形の面積は $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ である。$P(ap^2, 2ap)$、$Q(aq^2, 2aq)$ とすると

$$x_1y_2 - x_2y_1 = ap^2 \cdot 2aq - aq^2 \cdot 2ap = 2a^2pq(p-q).$$

ここで $a^2 > 0$、$pq < 0$、$p - q > 0$ であるから、これは負であり、

$$[OPQ] = \tfrac{1}{2} \cdot \left(-2a^2pq(p-q)\right) = -a^2pq(p-q).$$

結論

二つの結果を比べると

$$[OPQ] = -a^2pq(p-q) = 2\left(-\tfrac{1}{2}a^2pq(p-q)\right) = 2\,[RST],$$

となるので、三角形 OPQ の面積は三角形 RST の面積の 2 倍であり、示すべきことが示された。

検算

図の場合 $a = 1$、$p = 2$、$q = -1$ では、$P(4,4)$、$Q(1,-2)$、$R(-2,1)$、$S(0,2)$、$T(0,-1)$ となる。このとき $[RST] = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$、$[OPQ] = \frac{1}{2}|4 \cdot (-2) - 1 \cdot 4| = 6$ であり、確かに 2 倍である。R が両方の接線の式を満たすことも確かめられる。実際、$1 = \frac{-2}{2} + 2$ かつ $1 = \frac{-2}{-1} - 1$ である。さらに、この等式は a、p、q を無作為に選んだ 2000 通りの場合について、コンピュータによる厳密な計算でも確認した。

よくある間違い

- 三角形 RST の高さを apq と書いてしまう。R は y 軸に関して曲線と反対側にあるので、これは負である。
- $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ の絶対値を落とし、OPQ の面積が負になってしまう。
- $q - p$ が 0 でない理由を述べずに、$q - p$ で割ってしまう。

STEP のその先へ

媒介変数表示（parametrisation）$(at^2, 2at)$ により、放物線（parabola）上の各点は一つの数 t に対応する。そして $t = p$ と $t = q$ における接線は常に $(apq, a(p+q))$、つまり媒介変数の「積」と「和」で表される点で交わる。このような結果は、ここで見た 2 : 1 の面積比とともに、円錐曲線（conic）の古典的な射影幾何学（projective geometry）の一部である。そこでは接線や弦（chord）が媒介変数と行列式（determinant）を用いて研究される。三角形の面積を表す行列式の公式は、面積を符号付きの線形な量としてとらえる出発点であり、この考え方は Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）で展開されている。また Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には、媒介変数表示された曲線に関する STEP 形式の演習がさらに収められている。

解答例

STEP I 2017、第 4 問

純粋数学 • 2 次式と等比級数

> **STEP I 2017、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q4

鍵となる考え方

すべては、開区間（open interval）$(-1,1)$ に属する r の値のうち、ある特定の p（または q）の値を与えるものがいくつあるかにかかっている。これは $-1 < r < 1$ に制限した放物線（parabola）についての問題である。水平な直線はこの放物線と一度交わるか、二度交わるか、まったく交わらないかのいずれかであり、どれになるかはグラフを描けばわかる。r がわかれば和は定まる。さらに、和は r の単射（one-to-one）な関数なので、r の異なる二つの値は必ず異なる二つの和を与える。和が満たす方程式を求めるには、r を和で表して代入すればよい。

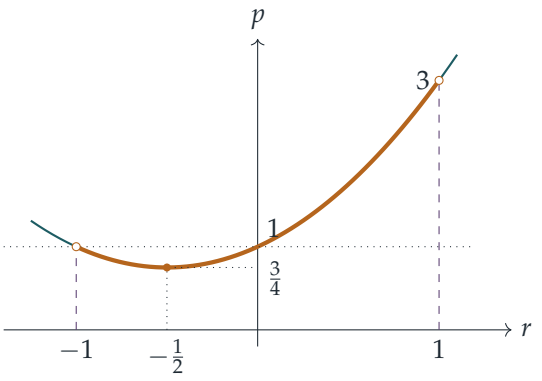
解答

小問 (i)

平方完成（completing the square）すると、

$$1 + r + r^2 = \left(r + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4},$$

となるので、グラフは $\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right)$ を最小点とする放物線である。このグラフは $(-1,1)$、$(0,1)$、$(1,3)$ を通る。



$-1 < r < 1$（太い弧）において、この関数は 1（$r = -1$ は除かれるので、この値はとらない）から減少して $r = -\frac{1}{2}$ で最小値 $\frac{3}{4}$ をとり、その後 3 に向かって増加する（ここでも $r = 1$ は除かれるので、この値はとらない）。したがって

$$\frac{3}{4} \leq p < 3.$$

$1 < p < 3$ のとき。この p を与える r の値は、次の方程式の解である。

$$r^2 + r + (1 - p) = 0.$$

2 解の積は $1 - p < 0$ なので、正の解と負の解が一つずつある。2 解の和は -1 なので、負の解は -1 から正の解を引いたものに等しく、これは -1 より小さいから許されない。正の解は

$$r = \frac{-1 + \sqrt{4p - 3}}{2},$$

であり、$1 < 4p - 3 < 9$ より $0 < r < 1$ となるので、これは許される。（グラフでいえば、高さ $p \in (1,3)$ の直線は、太い弧と増加部分 $0 < r < 1$ でのみ交わる。）よって p は r を一意に定め、したがって $S = 1/(1 - r)$ も一意に定まる。

$\frac{3}{4} < p < 1$ のとき。このとき判別式（discriminant）$1 - 4(1 - p) = 4p - 3$ は正なので、この 2 次方程式は異なる二つの実数解をもつ。2 解の積 $1 - p$ は正で、和は -1 なので、どちらも負である。各解は -1 から他方の解を引いたものに等しく、他方は負なので、各解は -1 より大きい。したがって、2 解はともに $(-1,0)$ に属し、どちらも許される。

考えてみよう r の値が二つあるのはよい。しかし、それらはなぜ**異なる** S の値を与えなければならないのだろうか？

$S = \dfrac{1}{1 - r}$ は逆に解くことができ、$r = 1 - \dfrac{1}{S}$ となるからである。したがって、異なる r の値は異なる S の値を与え、S のとりうる値はちょうど二つである。

これらが満たす方程式を求めるため、$u = 1/S$ として $r = 1 - u$ を $r^2 + r + 1 - p = 0$ に代入する。

$$(1-u)^2 + (1-u) + 1 - p = 0$$
$$u^2 - 3u + (3-p) = 0.$$

$u = 1/S$ とおき、S^2（これは零でない）を掛けると

$$(3-p)S^2 - 3S + 1 = 0,$$

となり、題意が示された。S の二つの値はどちらも許される解 r から得られるので、ともにこの方程式を満たす。

小問 (ii)

再び平方完成すると、

$$q = 1 + 2r + 3r^2 = 3\left(r + \tfrac{1}{3}\right)^2 + \tfrac{2}{3}.$$

最小値は $r = -\frac{1}{3}$ における $\frac{2}{3}$ であり、$r = -1$ での値は 2、$r = 1$ での値は 6 である。よって $-1 < r < 1$ において、

- 減少部分 $-1 < r \leq -\frac{1}{3}$ では、q は $\left[\frac{2}{3}, 2\right)$ の各値をちょうど一度ずつとる。
- 増加部分 $-\frac{1}{3} \leq r < 1$ では、q は $\left[\frac{2}{3}, 6\right)$ の各値をちょうど一度ずつとる。

二つの部分が共有するのは点 $r = -\frac{1}{3}$ のみである。したがって、q の値は次のようになる。

- $q = \frac{2}{3}$ のとき（すなわち $r = -\frac{1}{3}$）、または $2 \leq q < 6$ のとき（増加部分のみ）は、ちょうど一つの r から得られる。
- $\frac{2}{3} < q < 2$ のときは、ちょうど二つの r の値から得られる（各部分に一つずつ）。
- それ以外のときは、どの r からも得られない。

たとえば $q = 2$ のとき、方程式 $3r^2 + 2r - 1 = 0$ は $(3r-1)(r+1) = 0$ と因数分解され、解 $r = -1$ は除かれるので、$r = \frac{1}{3}$ だけが残る。

先ほどと同様に、T は r を定める。$1 - r > 0$ なので $1 - r = 1/\sqrt{T}$ である。よって異なる r は異なる T を与える。したがって

$$T \text{ は次のとき一意に定まる：} q = \tfrac{2}{3} \text{ または} 2 \leq q < 6,$$

であり、

$$T \text{ は次のとき二つの値をとりうる：} \tfrac{2}{3} < q < 2.$$

2次方程式。$u = 1 - r = 1/\sqrt{T} > 0$ として、$r = 1 - u$ と書く。すると

$$q = 1 + 2(1-u) + 3(1-u)^2 = 3u^2 - 8u + 6.$$

$u^2 = 1/T$ なので、これは $\dfrac{3}{T} + 6 - q = \dfrac{8}{\sqrt{T}}$ と書ける。両辺に T を掛けると、

$$(6-q)T + 3 = 8\sqrt{T}.$$

これはすでに $\sqrt{T}$ についての2次方程式である。T 自身についての2次方程式を得るため、両辺を2乗する。

$$(6-q)^2T^2 + 6(6-q)T + 9 = 64T,$$

すなわち

$$(6-q)^2\,T^2 - 2(3q+14)\,T + 9 = 0.$$

T のとりうる二つの値はどちらもこれを満たす。ここでは2乗によって余分な解が入り込むことはない。$q < 6$ かつ $T > 0$ のとき左辺 $(6-q)T + 3$ は正なので、もう一方の可能性 $(6-q)T + 3 = -8\sqrt{T}$ は $T > 0$ となる解をもたない。また、T についての2次方程式は2解の積 $9/(6-q)^2$ も和も正なので、2解はともに正である。よって、その2解はちょうど T の二つの値である。

検算

- $p = \frac{7}{8}$ とする。このとき $r^2 + r + \frac{1}{8} = 0$ より $r = \frac{-2\pm\sqrt{2}}{4}$ であり、どちらも $(-1, 0)$ に属する。対応する和 $S \approx 0.873$ と $S \approx 0.540$ は $\frac{17}{8}S^2 - 3S + 1 = 0$ を満たし、この方程式の2解の和は $\frac{24}{17} \approx 1.412$、積は $\frac{8}{17}$ である。
- $q = 1$ とする。このとき $3r^2 + 2r = 0$ より $r = 0$ または $r = -\frac{2}{3}$ なので、$T = 1$ または $T = \frac{9}{25}$ である。2次方程式は $25T^2 - 34T + 9 = (T-1)(25T-9)$ となり、期待どおりである。
- 境界 $q = \frac{2}{3}$ では、2次方程式は $\frac{256}{9}T^2 - 32T + 9 = 0$ となり、判別式は $1024 - 1024 = 0$ である。これは重解 $T = \frac{9}{16} = 1/(1+\frac{1}{3})^2$ をもち、ただ一つの値 $r = -\frac{1}{3}$ に対応している。
- 各範囲から p と q のランダムな値を数千個とり、コンピュータで確認した。解の個数も、二つの2次方程式も一致する。

よくある間違い

- $r = \pm 1$ が除かれることを忘れる。そうすると、誤って $p = 1$ を「二つの値」の場合に入れたり、$q = 2$ を「一意」の集合から外したりしてしまう。

- 孤立した値 $q = \frac{2}{3}$（頂点）を見落とす。ここでも T は一意である。
- 余分な解が入り込んでいないかを確かめずに 2 乗する。

STEP のその先へ

この問題の本質は、関数がどのようなときに逆関数をもつか（invertible）という点にある。写像 $r \mapsto p$ は定義域の一部では単射、残りの部分では 2 対 1 であり、答えは式だけでなく定義域にも依存する。級数 $\sum r^n$ と $\sum nr^{n-1}$ は、べき級数（power series）と、それを項別微分（term-by-term differentiation）したものである。収束半径（radius of convergence）の内側で項別微分が許される理由は、大学 1 年で学ぶ解析学の標準的な結果である。Abbott の *Understanding Analysis* は、べき級数と一様収束（uniform convergence）を丁寧かつ読みやすく扱っている。

解答例

STEP I 2017、第 5 問

純粋数学 ・ 微分による最適化

STEP I 2017、問 5

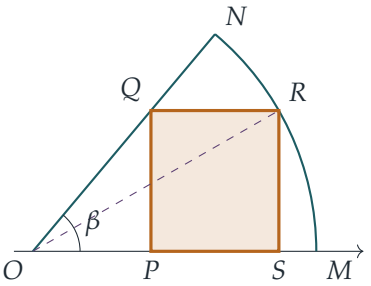
先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/17-s1-q5

鍵となる考え方

頂点の配置を決めてしまえば、すべては一つの変数 x で定まる。Q は直線 $y = x\tan\beta$ 上で P の真上にあり、R は Q と同じ高さで円周上にある。三平方の定理（Pythagoras' theorem）により s が x で表され、面積は微分すればよいだけの普通の一変数関数になる。最後の角に関する条件は、tan の半角の公式（half-angle formula）から自然に導かれる。

解答



面積

$PQRS$ は P と S が x 軸上にある長方形（rectangle）であるから、辺 PQ と SR は鉛直である。よって Q の x 座標は x である。Q は ON、すなわち直線 $y = x\tan\beta$ 上にあるので $Q = (x,\, x\tan\beta)$ であり、$R = (s,\, x\tan\beta)$ となる。長方形の横幅は $PS = s - x$（S

は P より O から遠いので正)、高さは $PQ = x\tan\beta$ であるから、

$$A = x(s-x)\tan\beta,$$

となり、示すべき式が得られた。

s と $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}$ を求める

R は円周上にあるので $OR = a$、したがって $s^2 + x^2\tan^2\beta = a^2$ である。$s > 0$ より

$$s = \sqrt{a^2 - x^2\tan^2\beta}.$$

$s^2 = a^2 - x^2\tan^2\beta$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると $2s\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = -2x\tan^2\beta$ となるので、$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x\tan^2\beta}{s}$ である。ここで $A = (xs - x^2)\tan\beta$ と書き、xs に積の微分法（product rule）を用いると

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} &= \left(s + x\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} - 2x\right)\tan\beta \\ &= (s-2x)\tan\beta - \frac{x^2}{s}\tan^3\beta,\end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。

面積の最大値

まず x の範囲を調べる。x が 0 から増加すると、Q は ON 上を上へ動き、R は弧に沿って N に向かって動く。R が N に達すると長方形は鉛直な線分につぶれ、それは $x = a\cos\beta$ のときである（このとき $s = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\beta} = a\cos\beta = x$）。よって $0 < x < a\cos\beta$ であり、A は $[0, a\cos\beta]$ 上の連続関数（continuous function）で、両端で $A = 0$、その間では $A > 0$ である。したがって最大値は区間の内部の停留点（stationary point）でとられる。

$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = 0$ とおき、$\tan\beta > 0$ で割って $s > 0$ を掛けると

$$\begin{aligned}s^2 - 2xs &= x^2\tan^2\beta \\ s^2 - 2xs + x^2 &= x^2(1+\tan^2\beta) = x^2\sec^2\beta \\ (s-x)^2 &= x^2\sec^2\beta.\end{aligned}$$

? **考えてみよう** どちらの平方根をとるべきか。また、これが最大であることはどうしてわかるか。

$s - x$ と $x\sec\beta$ はどちらも正である（$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ より）から、$s - x = x\sec\beta$ である。もう一方の根では $s - x$ が負になってしまう。よって $0 < x < a\cos\beta$ における停留点

はちょうど一つで、

$$s = x(1+\sec\beta),$$

で与えられ、前の段落の議論により、これが面積の最大値を与える。

その面積を求めるため、$s^2 + x^2\tan^2\beta = a^2$ に代入する。$\tan^2\beta = \sec^2\beta - 1$ を用いると

$$(1+\sec\beta)^2 + \tan^2\beta = 2\sec\beta + 2\sec^2\beta = 2\sec\beta\,(1+\sec\beta),$$

であるから

$$x^2 = \frac{a^2}{2\sec\beta\,(1+\sec\beta)} = \frac{a^2\cos^2\beta}{2(1+\cos\beta)}.$$

このとき $s - x = x\sec\beta$ であるから

$$A = x\cdot x\sec\beta\cdot\tan\beta = x^2\,\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta} = \frac{a^2\sin\beta}{2(1+\cos\beta)}$$
$$= \frac{a^2\cdot 2\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta}{2\cdot 2\cos^2\frac{1}{2}\beta} = \frac{1}{2}a^2\tan\frac{1}{2}\beta,$$

となる。ここで $\sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta$ と $1+\cos\beta = 2\cos^2\frac{1}{2}\beta$ を用いた。

角 ROS

直角三角形 ORS において $\tan\angle ROS = \dfrac{SR}{OS} = \dfrac{x\tan\beta}{s}$ である。最大となるとき、同じ二つの半角の恒等式により

$$\tan\angle ROS = \frac{\tan\beta}{1+\sec\beta} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta+1} = \tan\frac{1}{2}\beta,$$

となる。$\angle ROS$ と $\frac{1}{2}\beta$ はどちらも $(0, \frac{\pi}{2})$ に属し、そこで tan は単射（one-to-one）であるから、$\angle ROS = \frac{1}{2}\beta$ である。つまり、最適な長方形では OR が扇形（sector）を二等分する。

検算

- $a = 1$、$\beta = \frac{\pi}{3}$ とする。このとき $x^2 = \frac{1/4}{3} = \frac{1}{12}$、$s = 3x$ であり、$A = x\cdot 2x\cdot\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0.2887$ となって、これは $\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{6}$ に等しい。多数のランダムな a と β について、x の細かい格子上でコンピュータ探索を行ったところ、同じ最大値と同じ最適な x が得られた。
- $\beta \to 0$ のとき扇形はつぶれ、$\frac{1}{2}a^2\tan\frac{1}{2}\beta \to 0$ となり、当然そうあるべき結果である。
- 次元：A は a^2 に無次元の数を掛けたものなので、確かに面積である。

よくある間違い

- s が x に依存することを忘れ、s を定数であるかのように扱って $x(s-x)\tan\beta$ を微分してしまう。
- $s - x = -x\sec\beta$ も解として採用してしまう、あるいは停留点が最大であることの根拠を示さない。

STEP のその先へ

OR が扇形の二等分線（bisector）に沿うというすっきりした答えには、明快な説明がある。$R = (a\cos\theta, a\sin\theta)$ とおくと、短い計算で $A = \frac{1}{2}a^2\big(\cos(2\theta-\beta) - \cos\beta\big)/\sin\beta$ が得られ、これは明らかに $\theta = \frac{1}{2}\beta$ のとき最大になる。変数をうまく選べば、最適化はほとんど自明になりうるのである。大学では多変数の条件付き最適化（constrained optimisation）を学ぶ。そこでは s を消去する代わりに、ラグランジュの未定乗数法（Lagrange multipliers）を用いて、$s^2 + x^2\tan^2\beta = a^2$ という条件のもとで $x(s-x)$ を最大化することもできる。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この種の問題がさらに多く収められている。

解答例

STEP I 2017、第 6 問

純粋数学 ・ 積分と符号の変化

> **STEP I 2017、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q6

鍵となる考え方

符号を変えず、かつ恒等的に 0 ではない（not identically zero）連続関数（continuous function）の積分は 0 にならない。そのような関数はある小さな区間上で 0 から離れた値をとり続け、その区間だけで積分にある正の寄与が生じるからである。小問 (i) はこのことを厳密に述べるものであり、小問 (ii) と (iii) は巧みに選んだ関数にそれを適用する。(ii) では被積分関数（integrand）$(x-\alpha)^2 g(x)$ は g と同じ符号をもつ。(iii) では部分積分（integration by parts）によって、h についての条件が h' に対する (ii) の条件に書き換えられる。

解答

小問 (i)

背理法（proof by contradiction）で示す。f が $[0,1]$ 上で正の値と負の値の両方をとることはないと仮定する。すると、$[0,1]$ のすべての x に対して $f(x) \geq 0$ であるか、またはそのようなすべての x に対して $f(x) \leq 0$ である。必要ならば f を $-f$ に置き換えることにより（これによって仮定 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ も結論も変わらない）、区間全体で $f(x) \geq 0$ と仮定してよい。

ある $c \in [0,1]$ に対して $f(c) \neq 0$ であるから、$f(c) > 0$ である。f は c で連続であるから、ある $\delta > 0$ が存在して、$|x-c| < \delta$ を満たす $[0,1]$ のすべての x に対して $f(x) > \frac{1}{2} f(c)$ となる。この集合は、正の長さ $q-p$ をもつ区間 $[p,q] \subseteq [0,1]$ を含む（$0 < \eta < \delta$ かつ $\eta \leq \frac{1}{2}$ として、$c \leq \frac{1}{2}$ ならば $[c, c+\eta]$、$c > \frac{1}{2}$ ならば $[c-\eta, c]$ をとれ

ばよい)。至るところで $f \geq 0$ であるから、

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \tfrac{1}{2}f(c)\,(q-p) \;>\; 0,$$

となり、これは $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ に矛盾する。よって、f は $[0,1]$ 上で正の値と負の値の両方をとる。

考えてみよう 「$f \geq 0$ かつ $f(c) > 0$ だから積分は正である」というだけでは、なぜ不十分なのだろうか。

関数がただ一点で正であっても、積分はそれを感知しない。一点には幅がないからである。c における正の値を正の長さをもつ区間へと広げるのは連続性であり、それこそが積分を正にするのである。

小問 (ii)

平方を展開し、3 つの条件 $(*)$ を用いると、

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x-\alpha)^2 g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^2 g(x)\,\mathrm{d}x - 2\alpha\int_0^1 x g(x)\,\mathrm{d}x + \alpha^2\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \alpha^2 - 2\alpha\cdot\alpha + \alpha^2\cdot 1 = 0.\end{aligned}$$

次に、背理法により、すべての $x \in [0,1]$ に対して $g(x) \neq 0$ であると仮定する。すると g は $[0,1]$ 上で両方の符号をとることはできない（もしとるならば、問題冒頭の仮定により、どこかで 0 になってしまう)。したがって g は区間全体で狭義に正であるか、区間全体で狭義に負である。

$f(x) = (x-\alpha)^2 g(x)$ とおくと、これは連続である。$(x-\alpha)^2 \geq 0$ であるから、f は 0 でないところでは g と同じ符号をもち、したがって f は両方の符号をとらない。しかし f は $[0,1]$ のどこかで 0 でない。実際、$(x-\alpha)^2$ が 0 になるのは $x = \alpha$ のときに限るから、(場合によっては) α を除くすべての $x \in [0,1]$ に対して $f(x) \neq 0$ である。そして $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ である。小問 (i) により f は両方の符号をとらなければならず、これは矛盾である。よって、$[0,1]$ のある x に対して $g(x) = 0$ となる。

1 次関数の例。 $g(x) = a + bx$ とすると、条件 $(*)$ は

$$a + \tfrac{1}{2}b = 1, \qquad \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{3}b = \alpha, \qquad \tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{4}b = \alpha^2.$$

となる。第 1 式より $a = 1 - \frac{1}{2}b$ であり、これを第 2 式に代入すると $\frac{1}{2} + \frac{1}{12}b = \alpha$ を得るから、

$$b = 12\alpha - 6, \qquad a = 4 - 6\alpha.$$

このとき第 3 の条件は

$$\tfrac{1}{3}(4-6\alpha)+\tfrac{1}{4}(12\alpha-6)=\alpha-\tfrac{1}{6}=\alpha^2,$$

すなわち $6\alpha^2-6\alpha+1=0$ となるので、

$$\alpha=\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}.$$

α は自由に選べないことに注意しよう。1 次関数 g が条件を満たすのは、この 2 つの値に限られる。$\alpha=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ とすると $b=2\sqrt{3}$、$a=1-\sqrt{3}$ となるので、

$$g(x)=1-\sqrt{3}+2\sqrt{3}\,x,$$

であり、これは

$$x=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{6}\approx 0.211,$$

で 0 になる。この値は小問 (ii) の主張どおり $[0,1]$ に含まれる。（もう一方の選び方 $\alpha=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ では $g(x)=1+\sqrt{3}-2\sqrt{3}\,x$ となり、これは $x=\frac{3+\sqrt{3}}{6}\approx 0.789$ で 0 になる。この値もやはり $[0,1]$ に含まれる。）

小問 (iii)

$g=h'$ が $\alpha=1-\beta$ として $(*)$ を満たすことを示す。ここで h' は、小問 (ii) が要求するとおり連続である。まず、

$$\int_0^1 h'(x)\,\mathrm{d}x=h(1)-h(0)=1.$$

$u=x$、$\mathrm{d}v=h'(x)\,\mathrm{d}x$ として部分積分すると、

$$\int_0^1 xh'(x)\,\mathrm{d}x=\Big[xh(x)\Big]_0^1-\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x=1-\beta.$$

今度は $u=x^2$ として再び部分積分すると、

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2h'(x)\,\mathrm{d}x&=\Big[x^2h(x)\Big]_0^1-2\int_0^1 xh(x)\,\mathrm{d}x\\&=1-\beta(2-\beta)=1-2\beta+\beta^2=(1-\beta)^2.\end{aligned}$$

考えてみよう $\frac{1}{2}\beta(2-\beta)$ という奇妙な値はどこから来たのだろうか。

この値は、3 番目の積分がちょうど 2 番目の積分の平方になるように選ばれている。2 回の部分積分の後、2 番目の積分は $1-\beta$ であるから、3 番目の積分は $(1-\beta)^2$ でなければならない。それをまさに実現するのが $\frac{1}{2}\beta(2-\beta)$ なのである。

したがって h' は連続であり、$\alpha=1-\beta$ として $(*)$ を満たす。小問 (ii) により、$[0,1]$ のある x に対して $h'(x)=0$ となる。

検算

- $g(x) = 1 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}\,x$ について直接積分すると、$\int_0^1 g = 1$、$\int_0^1 xg = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \approx 0.7887$、$\int_0^1 x^2 g \approx 0.6220 = (0.7887)^2$ を得る。
- 小問 (iii) は、導関数が上の g である $h(x) = (1-\sqrt{3})x + \sqrt{3}\,x^2$ で確かめることができる。このとき $h(0) = 0$、$h(1) = 1$、$\beta = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \approx 0.2113$ であり、$\int_0^1 xh = \frac{1}{2}\beta(2-\beta) \approx 0.1890$ となる。その導関数は $x \approx 0.211$ で 0 になるので、予想どおり h は $[0,1]$ の内部に極値をとる点（turning point）をもつ。

よくある間違い

- (i) で、連続性を用いずに「$f \geq 0$ だから $\int f > 0$」と論じてしまう。非負の関数は、至るところで 0 でなくても積分が 0 になりうる（ただ一点でのみ 0 でない場合など）。したがって連続性は欠かせない。
- (ii) で、(i) を g そのものに適用してしまう。$\int g$ については 1 であること以外何もわかっていない。(i) は $(x-\alpha)^2 g$ に適用しなければならず、しかもこの関数がどこかで 0 でないことを確かめる必要がある。
- (iii) で、(ii) を適用するには h' が連続でなければならないことを忘れてしまう。問題文で h が**連続な**導関数をもつとされているのはそのためである。

STEP のその先へ

条件 $(*)$ は、もし g が確率密度（probability density）であったならば、その平均（mean）は α、分散（variance）は $\int (x-\alpha)^2 g = 0$ であることを意味している。分散が 0 となる本物の確率密度は存在しえない。g がどこかで 0 を下回らなければならないのはそのためである。小問 (i) は実解析（real analysis）の標準的な補題（lemma）であり、「連続で非負の関数の積分が 0 ならば、その関数は恒等的に 0 である」というものである。これは、たとえば変分法（calculus of variations）などで絶えず用いられる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、連続性とリーマン積分（Riemann integral）を丁寧に展開しており、この補題や、本問で仮定してよいとされている中間値の定理（intermediate value theorem）を証明できるところまで扱っている。

解答例

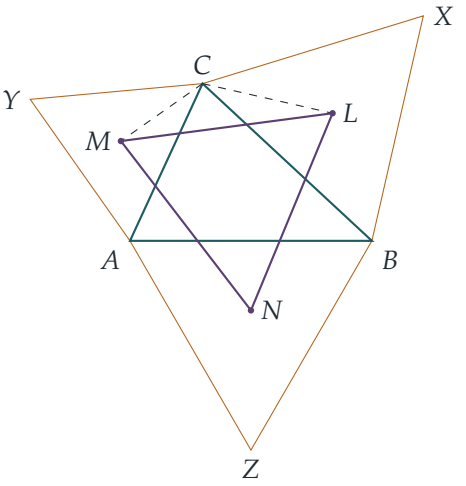
STEP I 2017、第 7 問

純粋数学 ・ ナポレオンの定理

> **STEP I 2017、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q7

鍵となる考え方

すべては ABC の頂点で起こる。正三角形（equilateral triangle）の中心（centre）は各内角の二等分線（angle bisector）上にあるので、C から L への直線と C から M への直線は、それぞれ ABC の一辺と $30°$ の角をなす。これにより、角 LCM が C を用いて表される。次に三角形 LCM において余弦定理（cosine rule）を用いると $|LM|$ が求まる。その結果は a, b, c について対称（symmetric）になり、この対称性こそが LMN を正三角形にしているのである。



解答

小問 (i)

一辺 b の正三角形 CYA において、中心 M は 3 本の中線（median）すべての上にあり、これらの中線は同時に高さの線でもあり、角の二等分線でもある。C からの中線の長さは $\frac{\sqrt{3}}{2}b$ であり、中心はその中線を頂点から 3 分の 2 進んだ位置にある。よって

$$|CM| = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2}\, b = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

同様に、三角形 BXC の一辺は a であるから

$$|CL| = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

小問 (ii)

CM は 60° の角 YCA を二等分するので、直線 CM は CA と 30° の角をなし、B と反対の側にある。同様に、CL は CB と 30° の角をなし、A と反対の側にある。C のまわりを L から M まで回ると、まず 30°、次に三角形の角 C、さらにもう一度 30° を通過する。よって

$$\angle LCM = C + 60^\circ.$$

考えてみよう $C > 120^\circ$ で、$C + 60^\circ$ が 180° を超える場合はどうなるか？

その場合、三角形 LCM の C における角は反対側の角 $360^\circ - (C + 60^\circ)$ となる。しかし $\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$ であるから、以下の余弦定理はどの場合にも同じ結果を与える。

小問 (i) の長さを用いて、三角形 LCM に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} |LM|^2 &= \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{2ab}{3}\cos(C + 60^\circ) \\ &= \frac{a^2 + b^2}{3} - \frac{2ab}{3}\left(\tfrac{1}{2}\cos C - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right) \\ &= \frac{a^2 + b^2}{3} - \frac{ab\cos C}{3} + \frac{\sqrt{3}\,ab\sin C}{3}. \end{aligned}$$

ここで三角形 ABC に関する 2 つの事実を用いる。余弦定理より $2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2$ であり、面積は $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C$ であるから $ab\sin C = 2\Delta$ である。両辺に 6 を掛けると

$$\begin{aligned} 6|LM|^2 &= 2(a^2 + b^2) - 2ab\cos C + 2\sqrt{3}\,ab\sin C \\ &= 2a^2 + 2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2) + 4\sqrt{3}\,\Delta \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\,\Delta, \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

右辺は a, b, c を入れ替えても変わらず、Δ も三角形の頂点の名前の付け方によらない。同じ議論を頂点 A で（$|MN|$ について）、頂点 B で（$|NL|$ について）繰り返すと、同じ式が得られる。よって

$$|LM| = |MN| = |NL|,$$

であり、LMN は正三角形である。

面積が等しい条件。一辺 s の正三角形の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$ である。$S = a^2 + b^2 + c^2$ とおく。すると

$$[LMN] = \frac{\sqrt{3}}{4}|LM|^2 = \frac{\sqrt{3}}{24}\left(S + 4\sqrt{3}\,\Delta\right) = \frac{\sqrt{3}}{24}S + \frac{\Delta}{2}.$$

したがって

$$[LMN] = \Delta \iff \frac{\sqrt{3}}{24}S = \frac{\Delta}{2} \iff S = \frac{12\Delta}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}\,\Delta.$$

どの段階も逆にたどれるので、これで求める「必要十分条件」が示された。

小問 (iii)

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ と $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C$ を用いて、すべてを a, b, C で表す。以下の各行は直前の行と同値である。

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{3}\,\Delta \\ \iff \quad & 2a^2 + 2b^2 - 2ab\cos C = 2\sqrt{3}\,ab\sin C \\ \iff \quad & a^2 + b^2 = ab\left(\cos C + \sqrt{3}\sin C\right) \\ \iff \quad & a^2 + b^2 = 2ab\cos(C - 60^\circ), \end{aligned}$$

ここで $\cos C + \sqrt{3}\sin C = 2\left(\cos C\cos 60^\circ + \sin C\sin 60^\circ\right) = 2\cos(C - 60^\circ)$ を用いた。両辺から $2ab$ を引くと

$$a^2 - 2ab + b^2 = 2ab\cos(C - 60^\circ) - 2ab \iff (a-b)^2 = -2ab\left(1 - \cos(C - 60^\circ)\right).$$

よって 2 つの条件は同値である。

> **考えてみよう** 平方が、前にマイナス符号のついた量と等しくなるのはどのようなときか？

両辺がともに 0 のときに限る。左辺 $(a-b)^2$ は 0 以上である。右辺では $ab > 0$ かつ $1 - \cos(C - 60^\circ) \geq 0$ であるから、右辺は 0 以下である。したがって等号が成り立つのは、ちょうど

$$a = b \quad \text{かつ} \quad \cos(C - 60^\circ) = 1.$$

のときである。$0^\circ < C < 180^\circ$ より $-60^\circ < C - 60^\circ < 120^\circ$ であり、この範囲で余弦が 1 となる角は 0° だけである。よって $C = 60^\circ$ である。$a = b$ で頂角が 60° の三角形

では、残りの 2 つの角は等しく、その和は 120° であるから、3 つの角はすべて 60° となり、三角形は正三角形である。逆に、正三角形は $a = b$ かつ $C = 60^\circ$ を満たすので、条件を満たす。

これを小問 (ii) と合わせると、$[LMN] = [ABC] \iff a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{3}\,\Delta \iff ABC$ は正三角形、となる。

検算

- 一辺 1 の正三角形 ABC の場合：$\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}$ であり、$6|LM|^2 = 3 + 3 = 6$ より $|LM| = 1$ となって、小問 (iii) の予測どおり面積は等しい。
- 辺が 3–4–5 の直角三角形の場合：$S = 50$, $\Delta = 6$ であるから $|LM|^2 = (50 + 24\sqrt{3})/6 \approx 15.26$ である。すると $[LMN] \approx 6.61$ となり、$[ABC] = 6$ より大きい。点 L, M, N の座標を用いたコンピュータによる検算でも同じ値が得られ、鈍角三角形を含む数千個のランダムな三角形で $6|LM|^2$ の公式が確かめられた。
- 小問 (iii) からは、任意の三角形について $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\,\Delta$ であること、したがって常に $[LMN] \geq [ABC]$ であることもわかる。

よくある間違い

- $|CM|$ を 3 分の 2 ではなく、中線全体 $\frac{\sqrt{3}}{2}b$ やその 3 分の 1 としてしまう。
- 両側の 30° を忘れて、$\angle LCM = C + 30^\circ$ や C としてしまう。
- 小問 (iii) で「$a = b$」で止まってしまう。$C = 60^\circ$ も必要であり、余弦が 1 となる他の角を除外するために C の範囲も必要である。

STEP のその先へ

これはナポレオン（Napoleon）の定理（Napoleon's theorem）である。すなわち、任意の三角形の各辺の外側に正三角形を作ると、それらの中心は正三角形をなす。小問 (iii) で得られた不等式 $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\,\Delta$ は Weitzenböck の不等式（Weitzenböck's inequality）である。複素数（complex numbers）を用いると、ナポレオンの定理を非常に鮮やかに証明できる。60° の回転は $e^{i\pi/3}$ を掛けることにほかならない。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析の入門書）は、このような幾何学の扱い方を見事に展開している。

解答例

STEP I 2017、第 8 問

純粋数学 ・ 漸化式と数学的帰納法

> **STEP I 2017、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q8

鍵となる考え方

式 $a_n^2 + 2a_nb_n - b_n^2$ は漸化式（recurrence relation）を 1 ステップ適用しても変わらないので、ずっと初期値のままである。これを b_n^2 で割ると、比 c_n についての厳密な等式が得られ、そこには小さな誤差項 $1/b_n^2$ が含まれる。この等式を平方完成（completing the square）すれば、ほとんどすべてが片づく。極限（limit）も、比が $\sqrt{2}-1$ のどちら側にあるかも、$\sqrt{2}$ の有理数による評価も、そこから得られるのである。

解答

数学的帰納法

$n = 1$ のとき $a_1^2 + 2a_1b_1 - b_1^2 = 1 + 4 - 4 = 1$ であるから、$(*)$ は成り立つ。

ある $n \geq 1$ について $(*)$ が成り立つと仮定する。$a = a_n$、$b = b_n$ とおくと、

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 &= a^2 + 4ab + 4b^2, \\ 2a_{n+1}b_{n+1} &= 2(a+2b)(2a+5b) = 4a^2 + 18ab + 20b^2, \\ b_{n+1}^2 &= 4a^2 + 20ab + 25b^2. \end{aligned}$$

はじめの 2 式を加え、3 番目の式を引くと、

$$a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}b_{n+1} - b_{n+1}^2 = a^2 + 2ab - b^2 = 1.$$

よって $(*)$ は $n+1$ についても成り立ち、数学的帰納法（induction）により、すべての $n \geq 1$ について成り立つ。

小問 (i)

まず、すべての a_n と b_n は正である。実際、$n=1$ のときは正しく、漸化式は a_n と b_n から正の係数で a_{n+1} と b_{n+1} を作るからである。したがって、$a_n>0$ より

$$b_{n+1}=2a_n+5b_n>5b_n$$

である。$b_1=2=2\times5^0$ から出発し、各ステップで少なくとも 5 倍されるので、すべての $n\geq1$ について $b_n\geq2\times5^{n-1}$ が成り立つ（1 行で済む帰納法である）。

次に、$(*)$ を 0 でない b_n^2 で割ると、

$$c_n^2+2c_n-1=\frac{1}{b_n^2},\qquad \text{すなわち}\qquad (c_n+1)^2=2+\frac{1}{b_n^2}. \tag{†}$$

考えてみよう どちらの平方根をとればよいか。

$c_n>0$ であるから c_n+1 は正であり、正の平方根をとる：

$$c_n+1=\sqrt{2+\frac{1}{b_n^2}}.$$

$n\to\infty$ のとき $0<1/b_n^2\leq\frac{1}{4}25^{-(n-1)}\to0$ であるから、$c_n+1\to\sqrt{2}$ となる（平方根関数は連続（continuous）である）。したがって、求める通り $c_n\to\sqrt{2}-1$ である。

小問 (ii)

(†) より $(c_n+1)^2=2+1/b_n^2>2$ である。$c_n+1>0$ かつ $\sqrt{2}>0$ であるから、$c_n+1>\sqrt{2}$、すなわち $c_n>\sqrt{2}-1$ が得られる。

もう一方の評価のために、$c_n+1>\sqrt{2}$ の両辺で 2 を割る。両辺は正なので、不等号の向きは逆になる：

$$\frac{2}{c_n+1}<\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

あわせて、

$$\frac{2}{c_n+1}<\sqrt{2}<c_n+1.$$

考えてみよう どの n の値で 99/70 が得られるか。

$c_n+1=(a_n+b_n)/b_n$ が 99/70 となる必要があるので、$b_n=70$ となるものを探す。漸化式を計算していくと、

$$(a_1,b_1)=(1,2),\quad (a_2,b_2)=(5,12),\quad (a_3,b_3)=(29,70).$$

よって $c_3 = \frac{29}{70}$、$c_3 + 1 = \frac{99}{70}$ であり、

$$\frac{2}{c_3 + 1} = \frac{140}{99}.$$

二重不等式に $n = 3$ を代入すると、

$$\frac{140}{99} < \sqrt{2} < \frac{99}{70}.$$

検算

- $(a_3, b_3) = (29, 70)$ は $(*)$ を満たす：$841 + 4060 - 4900 = 1$。
- $\frac{140}{99} \approx 1.414141$、$\frac{99}{70} \approx 1.414286$ であり、$\sqrt{2} \approx 1.414214$ はその間にある。区間の幅は $\frac{1}{6930}$ である。
- 次の項 $(a_4, b_4) = (169, 408)$ からは $c_4 \approx 0.4142157$ が得られ、すでに $\sqrt{2} - 1$ との差は 2.2×10^{-6} 以内である。これは誤差がおよそ $1/b_n^2$ のように減少することと合っている。
- 2 乗して確かめる：$140^2 = 19600 < 2 \times 99^2 = 19602$、$99^2 = 9801 > 2 \times 70^2 = 9800$。

よくある間違い

- $n + 1$ について $(*)$ を展開する際、項を丁寧にまとめないこと。ab と b^2 の係数はぎりぎりで打ち消し合うのである（$4 + 18 - 20 = 2$、$4 + 20 - 25 = -1$）。
- $a_n > 0$ に触れずに $b_{n+1} \geq 5b_n$ と主張すること。
- 正の平方根をとる理由を述べ忘れること、あるいは両辺が正であることを言わずに逆数をとって不等号を逆にすること。

STEP のその先へ

この漸化式は行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ を掛けることに当たる。この行列は行列式（determinant）が 1 であり、二次形式（quadratic form）$x^2 + 2xy - y^2$ を保つ。このような不変な形式を見つけることが、ペル方程式（Pell's equation）の理論の核心である。数 $c_n + 1$、すなわち $\frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{99}{70}, \ldots$ は、$\sqrt{2}$ の連分数（continued fraction）の近似分数（convergent）を 1 つおきに並べたものである。近似分数は、その分母の大きさに対して最良の有理数近似を与える。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、連分数とペル方程式を見事に解説している。

解答例

STEP I 2017、第 9 問

力学 ・ 放物運動

STEP I 2017、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

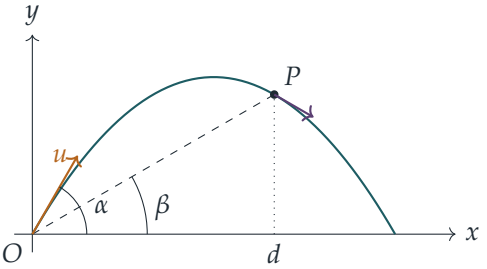
step.maths.org/questions/17-s1-q9

鍵となる考え方

軌道の方程式（trajectory equation）を書き下し、それが P を通るようにする。すると u^2 が投射角（angle of projection）だけの関数として得られる。扱いやすい変数は $T = \tan\alpha$ である。$\sec^2\alpha = 1 + T^2$ により、すべてが T の有理関数（rational function）になるからである。その関数の最小化はふつうの微分の計算で済み、停留点（stationary point）の方程式は、実は倍角公式（double-angle formula）が姿を変えたものであることがわかる。

解答

粒子は重力のみを受けて自由に運動する（空気抵抗（air resistance）はない）とモデル化し、O を原点、x を P に向かう水平方向、y を鉛直上向きにとる。$T = \tan\alpha$、$k = \tan\beta > 0$ とおく。



小問 (i)

水平方向の速度は $u\cos\alpha$ であるから、粒子は時刻 $t = x/(u\cos\alpha)$ に水平距離 x に達し、そのときの高さは

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha} = xT - \frac{gx^2(1+T^2)}{2u^2}.$$

である。$P = (d, dk)$ を通ることは

$$dk = dT - \frac{gd^2(1+T^2)}{2u^2} \quad \Longrightarrow \quad u^2 = \frac{gd}{2}\cdot\frac{1+T^2}{T-k}.$$

を意味する。右辺は正でなければならないので、可能なのは $T > k$、すなわち $\alpha > \beta$ を満たす角だけである。これは納得がいく。P より上を狙わなければならないのである。したがって、最小化すべきものは

$$f(T) = \frac{1+T^2}{T-k} \qquad (T > k).$$

である。商の微分法（quotient rule）により

$$f'(T) = \frac{2T(T-k) - (1+T^2)}{(T-k)^2} = \frac{T^2 - 2kT - 1}{(T-k)^2}.$$

分子は $T = k \pm \sqrt{k^2+1}$ で 0 となる。k より大きいのは $+$ の根だけである。$T \to k^+$ のときも $T \to \infty$ のときも $f(T) \to \infty$ であり、その間に停留点はただ一つしかないので、その点で最小となる。よって最適な α は

$$T^2 - 2kT - 1 = 0. \qquad (*)$$

を満たす。

> **考えてみよう** 根号を含む値を代入せずに、最小点における $f(T)$ をどう簡単にすればよいか。

$(*)$ を使って書き換える。$(*)$ から $k = \dfrac{T^2-1}{2T}$ が得られるので、

$$T - k = \frac{2T^2 - T^2 + 1}{2T} = \frac{1+T^2}{2T}, \qquad \text{したがって} \qquad f(T) = \frac{1+T^2}{(1+T^2)/(2T)} = 2T.$$

ゆえに

$$u^2 = \frac{gd}{2}\cdot 2T = gd\tan\alpha,$$

となり、示すべきことが示された。

角については、$(*)$ を $k = \dfrac{T^2-1}{2T}$ の形で読むと

$$\tan\beta = -\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha} = -\cot 2\alpha = \tan(2\alpha - 90^\circ),$$

となる。ここで $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ と $-\cot\theta = \tan(\theta - 90^\circ)$ を用いた。（$\alpha = 45^\circ$ ならば $(*)$ から $k = 0$ となるが、$\beta > 0$ よりこれは除外されるので、$\cot 2\alpha$ は定義されている。）$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ であるから、角 $2\alpha - 90^\circ$ は β と同じく $(-90^\circ, 90^\circ)$ に属し、tan はこの区間で一対一（one-to-one）である。よって $\beta = 2\alpha - 90^\circ$、すなわち

$$2\alpha = \beta + 90^\circ.$$

である。言葉で言えば、最良の投射方向は、直線 OP と鉛直上向きとのなす角を二等分（bisect）する。

小問 (ii)

P においても水平方向の速度は $u\cos\alpha$ のままである。かかる時間は $d/(u\cos\alpha)$ であるから、鉛直方向の速度は

$$v_y = u\sin\alpha - \frac{gd}{u\cos\alpha}.$$

である。P において粒子が水平より角 θ だけ上向きに運動しているとすると、

$$\tan\theta = \frac{v_y}{u\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{gd}{u^2\cos^2\alpha} = T - \frac{gd(1+T^2)}{gdT} = T - \frac{1+T^2}{T} = -\frac{1}{T} = -\cot\alpha,$$

となる。ここで小問 (i) の $u^2 = gdT$ を用いた。よって $\tan\theta = \tan(\alpha - 90^\circ)$ であり、θ は -90° と 90° の間にあるので $\theta = \alpha - 90^\circ$ である。

粒子は P を通過するとき**下向き**に、水平より $90^\circ - \alpha$ だけ下の角で運動している。P における運動の向きは、投射の向きに垂直である。

検算

- $\beta = 30^\circ$ とする。すると $\alpha = 60^\circ$、$u^2 = \sqrt{3}\,gd$ である。直接計算すると、$T = \sqrt{3}$ における $f(T)$ は $4/(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}) = 2\sqrt{3}$ であり、$2T$ と一致する。最後の向きは、図のとおり水平より 30° 下である。
- $\beta \to 0$ とすると $\alpha \to 45^\circ$、$u^2 \to gd$ となる。これは、水平な地面での最大到達距離 u^2/g が 45° の投射で得られるというよく知られた事実である。このとき粒子は水平より 45° 下の向きで着地し、やはり発射の向きに垂直である。
- d と β を無作為に 200 通り選び、α について数値的に探索したところ、最小を与える角は毎回 $\frac{1}{2}(\beta + 90^\circ)$ であり、最小値は $gd\tan\alpha$ であった。

よくある間違い

- 条件 $T > k$ を落とし、根 $k - \sqrt{k^2+1}$ を残してしまう。この根は負であり、下向きに投射することを意味してしまう。
- 両方の角が tan が一対一となる区間にある理由を述べずに、正接が等しいことから $\beta = 2\alpha - 90^\circ$ と結論してしまう。
- (ii) の角を、粒子が下降していることを述べずに $90^\circ - \alpha$ と答えてしまう。

STEP のその先へ

速さ u を固定すると、到達できる点はある放物線の内側にある。これは軌道の族の**包絡線**（envelope）、すなわち「安全放物線」（parabola of safety）である。P への最小速度の軌道は、P がその包絡線上にあるような軌道であり、(ii) の垂直性はこの曲線の幾何学的性質の一つである。曲線族の包絡線や制約条件付きの最適化（optimisation）は、大学 1 年次の講義で展開される。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物運動の問題がこのように丁寧に扱われる様子を見るのによい本である。

解答例

STEP I 2017、第 10 問

力学 ・ 連鎖的な衝突

STEP I 2017、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/17-s1-q10

鍵となる考え方

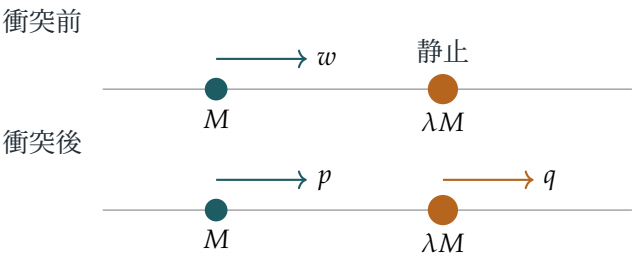
連鎖の中の衝突はどれも同じ形をしている。質量 M で速さ w で運動する粒子が、静止している質量 λM の粒子に衝突するのである。そこで、この一つの衝突を比 λ を用いて一度だけ解いておけば、連鎖全体はそれを繰り返すことで得られ、等比数列（geometric sequence）が現れる。その後の各小問では、衝突後に粒子に残る速度を比較して、前方の粒子に追いつく粒子があるかどうかを調べればよい。

解答

すべての粒子を x 軸上を運動する質点とみなし、速度は x 軸の正の向きを正として測る。

典型的な一つの衝突

質量 M で速さ w で運動する粒子 A が、静止している質量 λM の粒子 B に衝突する。衝突後の速度をそれぞれ p、q とする。



運動量保存則（conservation of momentum）とニュートン（Newton）の反発の法則（Newton's experimental law）より

$$Mw = Mp + \lambda Mq, \qquad q - p = ew.$$

$p = q - ew$ を第 1 式に代入すると $w = q - ew + \lambda q$ となるから、

$$q = \frac{1+e}{1+\lambda}\, w, \qquad p = q - ew = \frac{1-\lambda e}{1+\lambda}\, w.$$

$r = \dfrac{1+e}{1+\lambda}$、$s = \dfrac{1-\lambda e}{1+\lambda}$ とおく。

$$q - p = ew > 0$$

であるから、このような衝突の直後には二つの粒子は互いに離れていくことに注意する。

小問 (i)

最初の衝突は、P（質量 m、速さ u）が P_1（質量 λm）に衝突するものである。$w = u$、$M = m$ とすると

$$u_1 = \frac{1+e}{1+\lambda}\, u$$

となり、これが求める結果である。また P には速度 su が残る。

次に P_1 が動き出して、質量 $\lambda^2 m = \lambda \cdot (\lambda m)$ の P_2 に衝突する。質量比は再び λ であるから、これは $w = u_1$ とした同じ衝突である。一般に、P_n（質量 $\lambda^n m$）は速さ u_n で P_{n+1}（質量 $\lambda^{n+1} m$）に衝突するから、$u_{n+1} = r u_n$ であり、P_n には速度 $s u_n$ が残る。したがって

$$u_n = \left(\frac{1+e}{1+\lambda}\right)^n u.$$

ここで P_n の 1 回目の衝突は P_{n-1} に衝突されることであり、2 回目の衝突は P_{n+1} に衝突することである。（1 回目の衝突の直後、P_n は P_{n-1} から遠ざかっているので、後方の粒子が先に追いつかない限り、次に起こりうるのは P_{n+1} に到達することである。これが問題の意図する一連の事象であり、小問 (ii)–(iv) ではそれが実際に起こることを確かめる。）よって

$$v_n = s u_n = \frac{(1-\lambda e)(1+e)^n}{(1+\lambda)^{n+1}}\, u$$

であり、これは x 軸の正の向きの速度として表したものである。速さとしてはこの絶対値をとることになるが、それが問題になるのは $\lambda e > 1$ のとき、すなわち P_n がはね返されるときだけである。

小問 (ii)

$e > \lambda$ とする。このとき $\lambda < e < 1$ であるから $\lambda e < 1$ であり、$s > 0$ である。また $r > 1$ である。

衝突は順に起こる。まず P と P_1、次に P_1 と P_2、次に P_2 と P_3、以下同様である。P_n が P_{n+1} に衝突した後、列の後方から順に $P, P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}, P_{n+2}, \ldots$ の速度は

$$su,\ su_1,\ su_2,\ \ldots,\ su_n,\ u_{n+1},\ 0,\ 0,\ \ldots$$

である。$u_k = r^k u$ で $r > 1$、$s > 0$ であるから

$$0 < su < su_1 < su_2 < \cdots < su_n,$$

であり、さらに $u_{n+1} - su_n = (r - s)u_n = eu_n > 0$ より $u_{n+1} > su_n$ である。したがって $P, P_1, \ldots, P_{n+1}$ の中では、どの粒子もすぐ後ろの粒子より真に速く運動しており、これらのうちのどの二つも再び出会うことはない。残る衝突は P_{n+1} が静止している P_{n+2} に到達することだけであり、そのあとは n を $n+1$ に置き換えて同じ議論が成り立つ。

よって各 P_n（$n \geq 1$）は、P_{n-1} に一度衝突され、次に P_{n+1} に一度衝突し、それ以外の衝突には一切関わらない。すなわち、ちょうど 2 回ずつ衝突する。（これにより、(i) で仮定した事象の順序も確かめられた。）

小問 (iii)

$e = \lambda$ ならば $r = 1$ であり、$s = \dfrac{1 - e^2}{1 + e} = 1 - e$ である。よって

$$u_n = u \quad \text{かつ} \quad v_n = (1 - e)u \ \text{すべての} n,$$

が成り立ち、P にも速度 $(1 - e)u$ が残る。この運動は直線上を伝わるパルスである。先頭の粒子はつねに速さ u で運動し、次の粒子に衝突すると速さ u を受け渡して自らは $(1 - e)u$ に落ちる。後方の粒子はすべて $(1 - e)u$ で一緒に運動するので、それらの間ではもう衝突は起こらず、速さ u の先頭の粒子はそれらから離れていく。各 P_n はちょうど 2 回の衝突に関わる。

N 回の衝突の後、$P, P_1, \ldots, P_{N-1}$ は $(1 - e)u$ で運動し、P_N（質量 $\lambda^N m = e^N m$）は u で運動する。運動エネルギー（kinetic energy）は

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}m(1-e)^2u^2\left(1 + e + \cdots + e^{N-1}\right) + \tfrac{1}{2}e^N mu^2 &= \tfrac{1}{2}mu^2\left[(1-e)^2\,\frac{1 - e^N}{1 - e} + e^N\right] \\ &= \tfrac{1}{2}mu^2\left[(1-e)(1-e^N) + e^N\right] \\ &= \tfrac{1}{2}mu^2\left[1 - e + e^{N+1}\right].\end{aligned}$$

である。これを初めのエネルギー $\frac{1}{2}mu^2$ で割ると、N 回の衝突の後に失われた割合は

$$1 - \left(1 - e + e^{N+1}\right) = e\left(1 - e^N\right) \to e \quad \text{極限} N \to \infty,$$

となる。ここで $0 < e < 1$ を用いた。これが求める結果である。

小問 (iv)

$\lambda e = 1$ ならば $s = 0$ であり、

$$r = \frac{1+e}{1+1/e} = \frac{e(1+e)}{e+1} = e.$$

となる。よって衝突のたびに、運動していた粒子はぴたりと静止する。P が止まり、次に P_1 が eu で動き出して P_2 に衝突して止まり、以下同様であって、$u_n = e^n u$、$v_n = 0$ である。各 P_n はちょうど 2 回衝突し、粒子は互いに隣と接した状態で静止し、ただ一つの粒子だけが次第に遅くなりながら運動を前方へ運んでいく。P_n が P_{n+1} に到達するのにかかる時間は $1/(e^n u)$ であるから、衝突と衝突の間隔は限りなく大きくなる。

> **考えてみよう** 運動量は保存されるのに、どうしてエネルギーが失われうるのだろうか。

N 回の衝突の後に運動しているのは P_N だけであり、その質量は $\lambda^N m = e^{-N} m$、速さは $e^N u$ である。その運動量は当然 $e^{-N} m \cdot e^N u = mu$ であるが、運動エネルギーは

$$\tfrac{1}{2}\, e^{-N} m\, (e^N u)^2 = e^N \cdot \tfrac{1}{2} m u^2.$$

である。運動量はますます重く、ますます遅い粒子によって運ばれていき、運動量 p を固定すると運動エネルギー $p^2/(2M)$ は質量 M が大きくなるにつれてゼロに近づく。残る割合 e^N は 0 に収束するので、最終的には初めの運動エネルギーが**すべて**失われる。

検算

- $e = 1$、$\lambda = 1$（等しい質量、完全弾性衝突）とすると、$u_1 = u$ で P は止まる。これはおなじみのニュートンのゆりかご（Newton's cradle）での速度の入れ替わりである。
- (iii) で、1 回の衝突（$N = 1$）で失われる割合は $e(1-e)$ である。直接計算すると、P は最終的に $(1-e)u$、質量 em の P_1 は u となるから、残るエネルギーは元の $(1-e)^2 + e = 1 - e + e^2$ 倍であり、一致する。
- 衝突を厳密な分数で一つずつ計算するコンピュータ・シミュレーションにより、u_n と v_n の公式、$e > \lambda$ のときの「各粒子 2 回ずつ」の衝突パターン、失われる割合 $e(1-e^N)$（$e = \frac{1}{2}$ のとき、25 回の衝突の後で 0.49999998）、および $\lambda e = 1$ のときの残る割合 e^N が確かめられた。

よくある間違い

- ニュートンの法則を $q - p = -ew$ と書いたり、向きを逆にしたりすること。遠ざかる速さは近づく速さの e 倍であり、ここではどちらも正である。
- 質量比がどの衝突でも λ であることを忘れること。これこそが答えを等比的にしているのである。
- 事象の順序を確かめずに仮定してしまうこと。$e < \lambda$ かつ $\lambda e < 1$ のときは、取り残された粒子が、前方の粒子が次の粒子に到達する前にそれに追いつくことがあり、単純なパターンは崩れる。

STEP のその先へ

小問 (iv) は、運動量とエネルギーがまったく異なる振る舞いをすることを示している。運動量は厳密に保存されるのに、エネルギーはますます重い粒子によって運ばれるために完全に失われていく。衝突する粒子の連鎖は、密度が変化する媒質の中をパルスが伝わる様子の簡単なモデルであり、離散的な格子（lattice）における波の伝播へとつながっていく。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、衝突と重心系（centre-of-mass frame）をこのように丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 2017、第 11 問

力学 ・ 摩擦のある剛体の静力学

> **STEP I 2017、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q11

鍵となる考え方

すべては箱のある一つの鉛直断面の中で起こり、その断面は角 α だけ傾いた正方形である。したがって自然な座標軸は水平・鉛直ではなく、箱の底面に沿う方向と側面に沿って上がる方向である。こうすると二つの垂直抗力（normal reaction）はどちらも軸に沿い、分解が必要なのは重力だけになる。二方向への力の分解（resolving）から垂直抗力の間の関係式が一つ得られ、中点のまわりのモーメント（moment）のつり合いの式（重力の寄与が消える）からもう一つ得られる。これらを tan の加法定理（compound-angle formula）を用いて比較すると答えが得られる。

解答

モデルと力

棒を一様な剛体の棒とみなし、棒を含む鉛直面内で考える。この面内で、箱の底面は最大傾斜線（line of greatest slope）に沿っており、水平と角 α をなす。また O を通る側面は底面に垂直である。O を原点として次のように軸をとる。

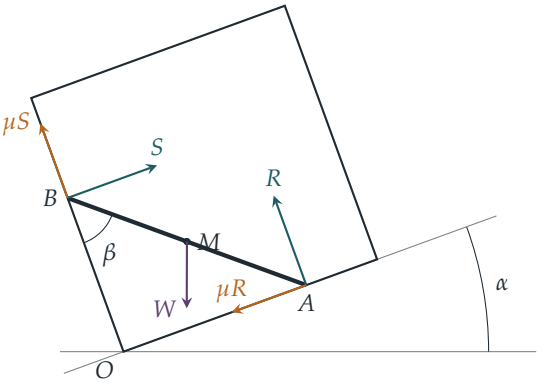
- x 軸：箱の底面に沿い、斜面を上る向き（A の向き）
- y 軸：箱の側面に沿い、斜面に垂直な向き（B の向き）

側面は底面に垂直であるから、三角形 OAB は O で直角であり、B における角は β である。よって

$$OA = 2L\sin\beta, \qquad OB = 2L\cos\beta.$$

$\mu = \tan\gamma$ とおく。棒にはたらく力は次のとおりである。

- A において：$+y$ 方向の垂直抗力 R、および O に向かう向き（$-x$ 方向）の摩擦力（friction）μR。A はまさに O から遠ざかる向きに滑り出そうとしており、摩擦力は最大摩擦力に達しているからである。
- B において：$+x$ 方向の垂直抗力 S、および O から遠ざかる向き（$+y$ 方向）の摩擦力 μS。B はまさに O に向かって滑り出そうとしているからである。
- 中点 M において鉛直下向きにはたらく重力 W。y 軸は鉛直上向きと角 α をなすので、重力の成分は x 方向に $-W\sin\alpha$、y 方向に $-W\cos\alpha$ である。



力の分解

箱の底面に沿う方向（x）と側面に沿う方向（y）に分解すると

$$S-\mu R-W\sin\alpha=0, \tag{1}$$

$$R+\mu S-W\cos\alpha=0. \tag{2}$$

$R+\mu S=W\cos\alpha\neq 0$ であるから、(1) を (2) で割って

$$\frac{S-\mu R}{R+\mu S}=\tan\alpha. \tag{3}$$

中点のまわりのモーメント

重力は M にはたらくので、M のまわりのモーメントをもたない。M から見ると、点 A は $(L\sin\beta,\,-L\cos\beta)$、点 B は $(-L\sin\beta,\,L\cos\beta)$ にある。図における反時計回りのモーメントをとると（相対位置 (p,q) にはたらく力 (F_x,F_y) のモーメントは pF_y-qF_x である）

$$\text{点}A:\quad L\sin\beta\cdot R-(-L\cos\beta)(-\mu R)=LR(\sin\beta-\mu\cos\beta),$$

$$\text{点}B:\quad -L\sin\beta\cdot\mu S-L\cos\beta\cdot S=-LS(\cos\beta+\mu\sin\beta).$$

これらの和は 0 でなければならないから

$$R(\sin\beta - \mu\cos\beta) = S(\cos\beta + \mu\sin\beta).$$

ここで $\mu = \tan\gamma$ とおき、両辺に $\cos\gamma$（正である）を掛けると

$$R(\sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma) = S(\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma),$$
$$\text{すなわち、} \quad R\sin(\beta-\gamma) = S\cos(\beta-\gamma).$$

考えてみよう R や $\cos(\beta-\gamma)$ で割ってよいだろうか？

二つの垂直抗力はどちらも押す力であるから、$R > 0$ かつ $S > 0$ である。すると $\sin(\beta-\gamma)$ と $\cos(\beta-\gamma)$ が同時に 0 になることはなく、$R, S > 0$ のもとで $S\cos(\beta-\gamma) = R\sin(\beta-\gamma)$ であるから両者は同符号である。したがってどちらも 0 ではなく、$\tan(\beta-\gamma) > 0$ となる。β と γ はともに $(0, \frac{1}{2}\pi)$ に属するので、$\beta-\gamma$ は $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ に属し、実際には

$$\frac{S}{R} = \tan(\beta-\gamma), \qquad 0 < \beta-\gamma < \tfrac{1}{2}\pi. \tag{4}$$

二つの結果を組み合わせる

(3) の左辺の分子と分母を R で割り、$k = S/R = \tan(\beta-\gamma)$、$\mu = \tan\gamma$ とおくと

$$\tan\alpha = \frac{k-\mu}{1+k\mu} = \frac{\tan(\beta-\gamma)-\tan\gamma}{1+\tan(\beta-\gamma)\tan\gamma} = \tan\big((\beta-\gamma)-\gamma\big) = \tan(\beta-2\gamma),$$

となる。ここで加法定理を用いた（分母 $1+k\mu$ は正なので、定義されない項は生じない）。(4) と $0 < \gamma < \frac{1}{2}\pi$ より

$$\beta - 2\gamma = (\beta-\gamma) - \gamma \in \left(-\tfrac{1}{2}\pi,\ \tfrac{1}{2}\pi\right),$$

であり、また $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ でもある。正接関数は $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 上で単射（one-to-one）であるから、$\tan\alpha = \tan(\beta-2\gamma)$ より

$$\beta = \alpha + 2\gamma,$$

が従い、示すべき式が得られた。これは問題文の条件 $\alpha < \beta$ と矛盾しない。またこの結果から、このような配置は $\alpha + 2\gamma < \frac{1}{2}\pi$ のときに限り可能であることもわかる。

検算

- **なめらかな箱：** $\gamma = 0$ のとき、結果は $\beta = \alpha$ となる。これを直接確かめよう。摩擦がなければ、二つの垂直抗力は点 P で交わる。P は、AB を対角線とし辺が箱の面

に沿う長方形の第四の頂点である。つり合っている三つの力は一点で交わらなければならないので、M を通る重力の作用線は P を通る。すなわち MP は鉛直である。対角線 MP は、OB を O から離れる側へ β だけ回転した向きに平行であり、一方 OB 自身は鉛直に対して O の側へ α だけ傾いている。よって MP は鉛直と角 $\beta - \alpha$ をなし、MP が鉛直になるのはちょうど $\beta = \alpha$ のときである。

- **数値例**：$\alpha = 20°$、$\gamma = 15°$ とすると $\beta = 50°$ である。このとき (1) と (2) から $R \approx 0.791W$、$S \approx 0.554W$（ともに正）が得られ、$S/R \approx 0.700 \approx \tan 35°$ となり、M のまわりのモーメントの総和は 0 になる。

よくある間違い

- 水平方向と鉛直方向に分解すること。これでも解けるが、四つの接触力すべてを分解する必要が生じ、計算がはるかに重くなる。
- 摩擦力の向きを誤ること。摩擦力は今にも起ころうとしている運動を妨げる向きにはたらく。A では O に向かう向き、B では O から遠ざかる向き（側面を上る向き）である。
- 二つの角が tan が単射となる区間に属する理由を述べずに、$\tan\alpha = \tan(\beta - 2\gamma)$ から結論を導くこと。

STEP のその先へ

$\mu = \tan\gamma$ として摩擦力を μR と書くことは、**摩擦角**（angle of friction）の考え方そのものである。限界平衡（limiting equilibrium）においては、接触力の合力は法線を軸とする半頂角 γ の「摩擦円錐」の縁の上にある。粗い面に接して静止する剛体に関する問題は、これらの円錐と、一点で交わる三つの力についての幾何の問題に帰着する。くさび、はしご、積み重ねた物体の安定性も、同じ描像に基づいている。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の静力学とトルクを基本原理から丁寧に展開している。

解答例

STEP I 2017、第 12 問

確率・統計 ・ 期待値と条件付け

> **STEP I 2017、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q12

鍵となる考え方

主催者が受け取る売上は常に同じ Nc であり、不確かなのは賞金を支払う必要があるかどうかだけである。したがって期待利益（expected profit）は、売上から、J と「誰かが当選番号を選んだ」確率との積を引いたものであり、すべては「誰も選ばなかった」という余事象（complementary event）に帰着する。その確率は累乗 $(1-p)^N$ であり、これはまさに近似式 $(*)$ が扱うために用意された形である。

解答

小問 (i)

当選番号を W とし、どの参加者も W を選ばないという事象を E とする。W が何であっても、各参加者は独立に（independently）確率 $1-\frac{1}{N}$ でそれを避けるので、

$$\mathrm{P}(E) = \left(1-\frac{1}{N}\right)^N.$$

主催者はどの場合でも Nc を受け取る。E が起これば当選者はおらず、利益は Nc である。そうでなければ賞金は当選者の間で分けられるが、当選者が何人であっても支払総額は J なので、利益は $Nc-J$ である。よって

$$\text{期待利益} = Nc - J\,\mathrm{P}(E^c) = Nc - J\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^N\right].$$

$a=1$ として $(*)$ を用いると $(1-\frac{1}{N})^N \approx \mathrm{e}^{-1}$ なので、期待利益はおよそ $Nc-J(1-\mathrm{e}^{-1})$

である。$J = 2Nc$ ならば、これは

$$Nc - 2Nc\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = Nc\left(\frac{2}{\mathrm{e}} - 1\right).$$

となる。$\mathrm{e} > 2$ より $2/\mathrm{e} < 1$ なので、これは負である。すなわち、主催者は損失を出すと期待される。

小問 (ii)

人気のある番号は γN 個、人気のない番号は $(1-\gamma)N$ 個ある。各参加者はちょうど 1 つの番号を選ぶので、N 個すべての番号にわたる確率の和は 1 である：

$$\gamma N \cdot \frac{a}{N} + (1-\gamma)N \cdot \frac{b}{N} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \gamma a + (1-\gamma)b = 1.$$

主催者は依然として W を一様に（uniformly）選ぶので、W は確率 γ で人気のある番号、確率 $1-\gamma$ で人気のない番号である。

考えてみよう 参加者はもはや一様には選んでいない。そのことは $\mathrm{P}(E)$ の求め方を変えるだろうか？

変わるのは W を避ける確率だけであり、それはいまや W がどちらの種類の番号であるかに依存する。そこで、その種類で条件付けをする。W が人気のある番号ならば、各参加者は独立に確率 $1 - \frac{a}{N}$ でそれを避け、人気のない番号ならば確率 $1 - \frac{b}{N}$ で避ける。全確率の公式（law of total probability）と $(*)$ により、

$$\mathrm{P}(E) = \gamma\left(1 - \frac{a}{N}\right)^N + (1-\gamma)\left(1 - \frac{b}{N}\right)^N \approx \gamma\,\mathrm{e}^{-a} + (1-\gamma)\,\mathrm{e}^{-b}.$$

小問 (i) と同様に期待利益は $Nc - J\big(1 - \mathrm{P}(E)\big)$ なので、

$$\text{期待利益} \approx \gamma J\,\mathrm{e}^{-a} + (1-\gamma)J\,\mathrm{e}^{-b} + (Nc - J),$$

となり、これは

$$A = \gamma J, \qquad B = (1-\gamma)J, \qquad C = Nc - J.$$

とした求める形である。

$\gamma = \frac{1}{8}$、$a = 9b$ の場合。 関係式から $\frac{1}{8} \cdot 9b + \frac{7}{8}b = 1$、すなわち $2b = 1$ となるので、

$$b = \tfrac{1}{2}, \qquad a = \tfrac{9}{2}.$$

$J = 2Nc$ のとき $A = \frac{1}{4}Nc$、$B = \frac{7}{4}Nc$、$C = -Nc$ なので、期待利益はおよそ

$$Nc\left(\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-9/2} + \tfrac{7}{4}\mathrm{e}^{-1/2} - 1\right).$$

である。括弧内の第1項は正なので、$\frac{7}{4}e^{-1/2} > 1$、すなわち $\sqrt{e} < \frac{7}{4}$ を示せば十分である。$e < 3$ より

$$\sqrt{e} < \sqrt{3} < \frac{7}{4},$$

であり、最後の不等式は両辺が正で $3 < \frac{49}{16}$（すなわち $48 < 49$）であることから成り立つ。よって括弧内は正であり、主催者は利益を出すと期待される。賞金は小問 (i) と同じだが、当選番号が人気のない番号であることが多いため、受け取り手のいないことがより多く起こるのである。

検算

- $J = 2Nc$ のとき、小問 (i) の期待利益はおよそ $(2/e - 1)Nc \approx -0.264\,Nc$ であり、最後の部分では $\left(\frac{1}{4}e^{-4.5} + \frac{7}{4}e^{-0.5} - 1\right)Nc \approx 0.064\,Nc$ となる。主張どおり、わずかな利益である。
- $N = 800$ のとき、正確な累乗 $(1 - a/N)^N$ を用いると $0.0640\,Nc$ となるので、ここでは近似 $(*)$ は非常によい。
- $\gamma = 1$（すべての番号が「人気」）ならば、関係式から $a = 1$ となり、小問 (ii) の式は小問 (i) の $Je^{-1} + Nc - J$ に帰着する。
- $N = 4$ の場合に（参加者の選び方 4^4 通りすべてを）コンピュータで正確に数え上げると、近似前の2つの式の両方と一致する。

よくある間違い

- 賞金の分け方を気にしてしまうこと。当選者が少なくとも1人いれば、その人数にかかわらず、主催者は合計 J を支払う。
- 当選番号が人気のある番号である確率が a や b に依存すると考えてしまうこと。主催者は一様に選ぶので、その確率は γ である。
- 各種類の番号がいくつあるかを数えるのを忘れて、関係式を $a + b = 1$ や $\gamma a + b = 1$ と書いてしまうこと。

STEP のその先へ

当選番号を選ぶ参加者の人数は、パラメータ N と p の二項分布（binomial distribution）に従う。そして $(*)$ は、N が大きく Np が一定のとき、それが近似的にポアソン分布（Poisson distribution）に従うことを理解するための第一歩である。$(1 - p)^N \to e^{-Np}$

は、ちょうどポアソン分布で値が 0 となる確率にほかならない。キャリーオーバーのある実際の宝くじもまさにこの方法で分析されており、人気のない番号を選ぶプレイヤーは実際に期待収益が高い。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、ポアソン極限や、ここで用いたような条件付けによる議論が展開されている。

解答例

STEP I 2017、第 13 問

確率・統計　・　確率の漸化式

> **STEP I 2017、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q13

鍵となる考え方

パンの各スライスについて、それがどう使われるかに注目する。トーストになるか、サンドイッチの 1 枚目になるか、サンドイッチの 2 枚目になるかである。このうちちょうど一つが起こり、どれが起こりうるかは直前のスライスによって決まる。スライス $r-1$ で軽食が一つ終われば、スライス r は新しい軽食を始める。終わらなければ、スライス r はサンドイッチの後半でなければならない。これにより一階の漸化式（first-order recurrence）が得られ、それを不動点（fixed point）を引き去るといういつもの方法で解く。

解答

設定

スライスを使う順に $1, 2, \ldots, n$ と番号をつける。各スライス r について、次のうちちょうど一つが起こる。

- T_r：スライス r がトーストに使われる。
- A_r：スライス r がサンドイッチの 2 枚のうちの 1 枚目である。
- S_r：スライス r がサンドイッチの 2 枚のうちの 2 枚目である。

したがって $t_r = \mathrm{P}(T_r)$、$s_r = \mathrm{P}(S_r)$、$\mathrm{P}(A_r) = 1 - s_r - t_r$ である。T_r または S_r が起こるとき、スライス r は**軽食を終える**ということにする。その確率（probability）は $s_r + t_r$ である。

最初のスライスは最初の軽食を始めるので、サンドイッチの 2 枚目にはなりえない。

$$s_1 = 0.$$

（また、$n \geq 2$ ならば $t_1 = p$、$n = 1$ ならば $t_1 = 1$ である。）

二つの方程式

t_r の方程式。スライス r が新しい軽食を始めるのは、スライス $r-1$ が軽食を終えるときであり、そのときに限る。その確率は $s_{r-1} + t_{r-1}$ である。スライス r が軽食を始めるという条件のもとでは、残りはスライス $r, r+1, \ldots, n$ であり、$r \leq n-1$ ならばそれは少なくとも 2 枚あるので、それ以前に何が起こったかによらず、確率 p でトーストを選ぶ。スライス $r-1$ が軽食を終えない場合は、スライス r はサンドイッチを完成させるのでトーストではない。よって

$$t_r = (s_{r-1} + t_{r-1})\, p \qquad (2 \leq r \leq n-1).$$

これは $r = n$ では成り立たない。最後のスライスで始まる軽食は確実にトーストになるからである。

s_r の方程式。スライス r がサンドイッチの 2 枚目になるのは、スライス $r-1$ がサンドイッチの 1 枚目であるとき、すなわちスライス $r-1$ が軽食を終えないときであり、そのときに限る。よって

$$s_r = 1 - (s_{r-1} + t_{r-1}) \qquad (2 \leq r \leq n).$$

ここでは残りのスライスの枚数に関する条件は必要ないので、これは $r = n$ まで成り立つ。

s_r の漸化式

二つ目の方程式で r を $r+1$ に置き換えると $s_r + t_r = 1 - s_{r+1}$ となるので、一つ目の方程式は

$$t_r = p\,(1 - s_r) \qquad (2 \leq r \leq n-1).$$

と書き直せる。$n \geq 2$ のとき、$t_1 = p$ かつ $s_1 = 0$ であるから、これは $r = 1$ でも成り立つ。$1 \leq r-1 \leq n-1$ のとき成り立つ $t_{r-1} = p(1 - s_{r-1})$ を s_r の方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} s_r &= 1 - s_{r-1} - p(1 - s_{r-1}) \\ &= (1-p)(1 - s_{r-1}) \\ &= q\,(1 - s_{r-1}), \end{aligned}$$

が $2 \leq r \leq n$ で成り立ち、特に要求どおり $2 \leq r \leq n-1$ で成り立つ。

漸化式を解く

考えてみよう $s_r = q - qs_{r-1}$ はどう解けばよいか。これを満たす定数列は何か。

定数解 $s_r = c$ であるためには $c = q - qc$ が必要なので、$c = \dfrac{q}{1+q}$ である。漸化式から $c = q - qc$ を引くと

$$s_r - \frac{q}{1+q} = -q\left(s_{r-1} - \frac{q}{1+q}\right),$$

となるので、$s_r - \frac{q}{1+q}$ は各段階で $-q$ 倍される。$s_1 - \frac{q}{1+q} = -\frac{q}{1+q}$ から始めると

$$s_r - \frac{q}{1+q} = (-q)^{r-1}\left(-\frac{q}{1+q}\right) = \frac{(-q)^r}{1+q},$$

となり、

$$s_r = \frac{q + (-q)^r}{1+q} \qquad (1 \le r \le n-1).$$

を得る。（漸化式は $r = n$ まで成り立つので、実は同じ式が $r = n$ でも成り立つ。）

t_r については $t_r = p(1 - s_r)$ と

$$1 - s_r = \frac{1 + q - q - (-q)^r}{1+q} = \frac{1 - (-q)^r}{1+q},$$

を用いて、

$$t_r = \frac{p\left(1 - (-q)^r\right)}{1+q} \qquad (1 \le r \le n-1).$$

となる。

最後のスライス

上で述べたように、s_r の方程式と漸化式 $s_r = q(1 - s_{r-1})$ は $r = n$ でも成り立つので、公式はそのまま続く。

$$s_n = \frac{q + (-q)^n}{1+q}.$$

最後のスライスの後には何もないので、それがサンドイッチの1枚目になることはない。したがってトーストかサンドイッチの2枚目のいずれかであり、$t_n = 1 - s_n$ である。

$$t_n = \frac{1 - (-q)^n}{1+q}.$$

$r < n$ の場合の t_r と比べると、因数 p が消えている。最後のスライスで軽食が始まれば、トーストになることは確実だからである。（これらは $n = 1$ のときにも成り立ち、$s_1 = 0$ と $t_1 = 1$ を与える。）

検算

- $n = 3$、$p = q = \frac{1}{2}$ とする。起こりうる順序は、トースト—トースト—トースト（確率 $\frac{1}{4}$）、トーストの後にサンドイッチ（確率 $\frac{1}{4}$）、サンドイッチの後にトースト（確率 $\frac{1}{2}$）である。よって $s_3 = \frac{1}{4}$、$t_3 = \frac{3}{4}$ である。公式からは $s_3 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}$ および $t_3 = \frac{1 + \frac{1}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}$ が得られる。
- $q = 0$（常にトースト）のとき、すべての r について $s_r = 0$、$t_r = 1$ となり、当然そうあるべき結果である。
- r が大きくなると $s_r \to \frac{q}{1+q}$ となる。これは納得のいく結果である。長い目で見れば軽食のうち割合 q がサンドイッチであり、それぞれに「2 枚目」が 1 枚ずつある。また軽食 1 回あたり平均 $1 + q$ 枚のスライスを使うので、スライスのうち割合 $\frac{q}{1+q}$ が 2 枚目となる。
- $n \leq 12$ といくつかの p の値について、すべての軽食の列を厳密に数え上げることにより、すべての公式をコンピュータで確認した。

よくある間違い

- $t_n = p(s_{n-1} + t_{n-1})$ を使ってしまうこと。最後のスライスで軽食が始まるとき、それがトーストになる確率は p ではなく 1 である。
- 事象「スライス $r - 1$ がトーストである」と「スライス r がトーストである」が独立であると考えてしまうこと。これらは独立ではない。重要なのはスライス r が軽食を始めるかどうかであり、それはそれまでの経過に依存する。
- 漸化式を解くときに符号を落とすこと。公比は $-q$ なので、答えは $\frac{q}{1+q}$ の上下を交互に振動する。

STEP のその先へ

スライス r が新しい軽食を始めるかどうかは、単純な**再生過程**（renewal process）をなす。軽食の長さは互いに独立で、それぞれ 1 か 2 であり、極限 $\frac{q}{1+q}$ は再生定理（renewal theorem）の一例である（長期的な再生の頻度は、間隔の平均の逆数に等しい）。同じことだが、各スライスの種類はマルコフ連鎖（Markov chain）をなし、$(-q)^r$ はそれが初期状態をどれだけ速く忘れるかを表している。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、マルコフ連鎖とこの種の漸化式の両方を扱っている。

解答例

STEP II 2017、第 1 問

純粋数学 • 漸化式による積分

STEP II 2017、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/17-s2-q1

鍵となる考え方

被積分関数（integrand）のうち扱いにくいのは $\arctan x$ の部分であるが、その導関数（derivative）は有理関数（rational function）なので、$u = \arctan x$ として部分積分（integration by parts）を行えば、これを $\frac{1}{1+x^2}$ に置き換えられる。次に (ii) での工夫は、2 つの積分を組にして、分子をまとめると $x^{n+1}(1+x^2)$ となり厄介な分母が約分されて消えるようにすることである。こうして n を 2 ずつ進める漸化式（reduction formula）が得られ、これを 2 回使えば n が 4 だけ進む。これこそが (iii) の数学的帰納法（induction）に必要なものである。

解答

小問 (i)

$u = \arctan x$、$\mathrm{d}v = x^n\,\mathrm{d}x$ として部分積分を行う。すると $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ である（$n \geq 0$ なので問題ない）：

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

ここで $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ を用い、また境界項が $x = 0$ で消えることを用いた。両辺に $n+1$ を掛ければ、求める結果が得られる：

$$(n+1)I_n = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

$n=0$ のとき、残った積分は $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$ であるから、

$$I_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

小問 (ii)

(i) に $n+2$ を n の代わりに代入した式を、(i) の式そのものに加えると：

$$\begin{aligned}(n+3)I_{n+2} + (n+1)I_n &= \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{x^{n+3}+x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n+2},\end{aligned}$$

ここで $x^{n+3}+x^{n+1} = x^{n+1}(1+x^2)$ であることを用いた。

考えてみよう この公式は I_4 と I_2 を、また I_2 と I_0 を結びつける。どの n の値が必要か？

必要なのは $n=0$ と $n=2$ である：

$$\begin{aligned}n=0: &\quad 3I_2 + I_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}, \\ n=2: &\quad 5I_4 + 3I_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

2 番目の式から 1 番目の式を引くと I_2 が消える：

$$5I_4 = I_0 + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln 2, \qquad \text{よって} \qquad I_4 = \frac{\pi + 1 - 2\ln 2}{20}.$$

小問 (iii)

簡単のため $S_n = \sum_{r=1}^{2n} \frac{(-1)^r}{r}$ と書く。

A を求める。 $n=1$ のとき $S_1 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ であるから、主張は $5I_4 = A + \frac{1}{4}$ となる。(ii) より $5I_4 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$ であるから、次のようにとらなければならない：

$$A = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 \,(= I_0),$$

この値のとき、主張は $n=1$ で成り立つ。

帰納法のステップ。 ある $k \geq 1$ に対して $(4k+1)I_{4k} = A - \frac{1}{2}S_k$ が成り立つと仮定する。目標は I_{4k+4} に到達することであり、これは (ii) の公式を 2 回適用した先にある。

$n = 4k+2$ と $n = 4k$ とすると、公式から

$$(4k+5)I_{4k+4} + (4k+3)I_{4k+2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4k+4},$$
$$(4k+3)I_{4k+2} + (4k+1)I_{4k} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4k+2}.$$

考えてみよう 不要な I_{4k+2} はどうすれば消せるか？

これは両方の式に同じ係数で現れるので、1 番目の式から 2 番目の式を引けば消える：

$$(4k+5)I_{4k+4} = (4k+1)I_{4k} + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4}.$$

一方、S_{k+1} は S_k より項が 2 つ多く、それは $r = 2k+1$（奇数なので負）と $r = 2k+2$（偶数なので正）の項である：

$$-\frac{1}{2}S_{k+1} = -\frac{1}{2}S_k - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}\right) = -\frac{1}{2}S_k + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4}.$$

帰納法の仮定（inductive hypothesis）を用いると、

$$(4k+5)I_{4k+4} = A - \frac{1}{2}S_k + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4} = A - \frac{1}{2}S_{k+1},$$

これは $n = k+1$ のときの主張である。$n = 1$ で成り立つから、数学的帰納法によりすべての $n \geq 1$ で成り立つ。ただし $A = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$ である。

検算

- 数値的には $I_0 \approx 0.438825$、$I_4 \approx 0.137765$ であり、元の積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用した値と小数第 10 位まで一致する。
- A は I_0 に等しいので、(iii) の公式は $n = 0$ でも成り立つ（このとき和は空である）。よい兆候である。
- $n \to \infty$ のとき、(i) の積分は 0 に収束（converge）する（被積分関数は x^{n+1} 以下である）ので、$(4n+1)I_{4n} \to \frac{\pi}{4}$ となる。一方 $S_n \to -\ln 2$ であるから、右辺は $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4}$ に収束する。極限において両辺は一致する。

よくある間違い

- $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ と書いたのに、2 番目の積分も $n+1$ で割るのを忘れる。
- 交代和の新しい 2 項の符号を間違える。$r = 2k+1$ は奇数なので $(-1)^r = -1$ である。

- 初期段階（base case）から先に A を決めないまま、帰納法のステップを証明しようとする。

STEP のその先へ

最後の検算では交代調和級数（alternating harmonic series）$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots=\ln 2$ を用いたが、実はこの問題は事実上これを証明している。(iii) の恒等式と $(4n+1)I_{4n}\to\frac{\pi}{4}$ という事実を合わせると、部分和（partial sums）は $\ln 2$ に収束せざるを得ないのである。$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ のようにゼロへと小さくなっていく積分を扱うことは、級数の誤差を制御する標準的な方法であり、解析学（analysis）の最初の講義で出会うことになる。Abbott の *Understanding Analysis* は、こうした極限がどのように厳密に扱われるかを知るのに親しみやすい本である。

解答例

STEP II 2017、第 2 問

純粋数学 ・ 周期数列

STEP II 2017、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/17-s2-q2

鍵となる考え方

写像を自分自身と合成して整理する。漸化式（recurrence）を 2 回適用すると、まったく同じ「一次分の一次」の形をした別の写像が得られるので、4 回の適用は 2 回の適用を 2 回行うことにほかならない。$x_{n+k} = x_n$ となるかどうかを調べるたびに、分母を払うと x_n についての二次式が現れ、しかもその二次式は因数分解（factorise）できる。その因数の一つは常に $x^2 + (b-a)x + 1$ であり、その根はちょうど漸化式の**不動点**（fixed point）、すなわち定数列を与える値である。この点に気づくことが、両方の小問を解く鍵になる。

解答

$f(x) = \dfrac{ax-1}{x+b}$ とおくと、$x_{n+1} = f(x_n)$ である。このとき

$$x_{n+2} = \frac{a\dfrac{ax_n - 1}{x_n + b} - 1}{\dfrac{ax_n - 1}{x_n + b} + b}.$$

分子と分母に $x_n + b$（仮定により 0 でない）を掛けると、

$$x_{n+2} = \frac{a(ax_n - 1) - (x_n + b)}{(ax_n - 1) + b(x_n + b)} = \boxed{\frac{(a^2-1)x_n - (a+b)}{(a+b)x_n + b^2 - 1}}$$

を得る。

ここでもう一つの事実を記録しておくとよい。値 x が不動点である（$f(x) = x$）のは、

$ax-1=x^2+bx$ のとき、すなわち

$$q(x)\equiv x^2+(b-a)x+1=0. \qquad (*)$$

のとき、かつそのときに限る。x_0 が q の根ならば $x_1=x_0$ となり、以下同様である。つまり数列は定数列であり、周期（period）は1である。

小問 (i)

数列が周期2をもつと仮定する。このとき特に $x_2=x_0$ である。x_{n+2} の式に $x=x_0$ を代入して分母を払うと、

$$\begin{aligned}0&=(a^2-1)x-(a+b)-x\big[(a+b)x+b^2-1\big]\\&=-(a+b)x^2+(a^2-b^2)x-(a+b)\\&=-(a+b)\big[x^2+(b-a)x+1\big],\end{aligned}$$

となる。ここで $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ を用いた。よって $(a+b)\,q(x_0)=0$ である。

考えてみよう なぜ「$q(x_0)=0$ となるのは x_0 の一つの値にすぎない」と言って議論を終えることはできないのだろうか。

x_0 はただ一つの数であり、それが q の根であることを妨げるものは何もないからである。それを排除するのは $(*)$ の意味である。$q(x_0)=0$ ならば x_0 は不動点であるから、$x_1=x_0$ となり、数列はすべての n について $x_{n+1}=x_n$ を満たす。これは周期1であり、周期2の定義によって禁じられている（$m=1$ とせよ）。したがって $q(x_0)\neq 0$ であり、ゆえに

$$a+b=0$$

は周期2であるための必要条件である。

（逆に、$b=-a$ ならば2ステップの式は $x_{n+2}=\dfrac{(a^2-1)x_n}{a^2-1}=x_n$ に帰着する。ここで $a^2=1$ の場合は起こりえない。実際そのときは、$a=1, b=-1$ ならば $x_1=1$、$a=-1, b=1$ ならば $x_1=-1$ となり、いずれにしても $x_1+b=0$ となって、これは除外されているからである。）

小問 (ii)

$A=a^2-1, B=b^2-1, c=a+b$ とおくと、$g(x)=\dfrac{Ax-c}{cx+B}$ として $x_{n+2}=g(x_n)$ である。g を2回適用し、再び分子と分母に $cx+B$ を掛けると、

$$x_{n+4}=\frac{A(Ax_n-c)-c(cx_n+B)}{c(Ax_n-c)+B(cx_n+B)}=\frac{(A^2-c^2)x_n-c(A+B)}{c(A+B)x_n+B^2-c^2}.$$

となる。さて、$x_{n+4} = x_n$ が成り立つのは

$$\begin{aligned} 0 &= (A^2 - c^2)x_n - c(A+B) - x_n\big[c(A+B)x_n + B^2 - c^2\big] \\ &= -c(A+B)x_n^2 + (A^2 - B^2)x_n - c(A+B) \\ &= -(A+B)\big[c\,x_n^2 + (B-A)x_n + c\big]. \end{aligned}$$

のとき、かつそのときに限る。$B - A = b^2 - a^2 = (b-a)(a+b) = (b-a)c$ であるから、括弧の中は $c\,q(x_n)$ に等しく、したがって

$$x_{n+4} = x_n \iff (a^2 + b^2 - 2)\,(a+b)\,q(x_n) = 0.$$

必要性（necessity）。周期が 4 であると仮定する。数列は定数列ではないので、x_0 は不動点ではなく、$q(x_0) \neq 0$ である。もし $a + b = 0$ ならば、小問 (i) の逆により $x_2 = x_0$ となり、実際すべての n について $x_{n+2} = x_n$ となって、周期 4 に矛盾する。よって $a + b \neq 0$ であり、$n = 0$ としたときの因数分解から

$$a^2 + b^2 = 2.$$

でなければならない。

十分性（sufficiency）。$a^2 + b^2 = 2$ と仮定する。このとき $A + B = 0$ であるから、すべての n について $x_{n+4} = x_n$ が成り立つ。これより小さい m では成り立たないことを確かめなければならない。

- $a + b \neq 0$ である。そうでなければ $a^2 = b^2 = 1$ となり、小問 (i) と同様に $x_1 + b = 0$ となって、これは除外されているからである。
- 実数の不動点は存在しない。q の判別式（discriminant）は $(b-a)^2 - 4 = (a^2 + b^2) - 2ab - 4 = -2(1 + ab)$ であり、$|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = 1$ である。ここで $ab = -1$ となるのは $(a, b) = \pm(1, -1)$ のときに限られるが、これはすぐ上で除外した。よって $ab > -1$ であり、判別式は負で、すべての実数 x_n について $q(x_n) \neq 0$ である。ゆえに $m = 1$ は成り立たない。
- $m = 2$ について：小問 (i) より、$x_2 = x_0$ となるには $(a+b)q(x_0) = 0$ が必要であるが、これは偽である。よって $m = 2$ は成り立たない。
- $m = 3$ について：すべての n について $x_{n+3} = x_n$ ならば、すべての n について $x_{n+1} = x_{(n+1)+3} = x_{n+4} = x_n$ となり、周期 1 となるが、これはすぐ上で否定した。

したがって、実数 a、b、x_0（問題文が認めるとおり、分母は 0 でないとする）について、数列が周期 4 をもつための必要十分条件は

$$\boxed{a^2 + b^2 = 2.}$$

である。初期値 x_0 はこの条件に何の役割も果たさない。

検算

$a=\sqrt{2}, b=0, x_0=1$ とする。数列は

$$1,\quad \sqrt{2}-1,\quad -1,\quad \sqrt{2}+1,\quad 1,\ \ldots$$

となり、周期はちょうど 4 である。たとえば $f(-1)=(-\sqrt{2}-1)/(-1)=\sqrt{2}+1$ である。コンピュータによる検算で、ランダムに選んだ数千組の有理数 a, b, x_0 について、2 ステップの式と 4 ステップの式が厳密に正しいことを確認した。また、円 $a^2+b^2=2$ 上のランダムな約 2000 点について周期が 4 であることを確かめ、この円上にないランダムな (a,b) については 4 ステップ後に元に戻らないことも確かめた。

よくある間違い

- $q(x_0)\neq 0$ である理由を説明せずに、$(a+b)q(x_0)=0$ から $a+b=0$ と結論してしまう。その理由は不動点としての解釈にある。
- 周期が実は 1 や 2 でないことを確かめずに、周期 4 の答えとして $a^2+b^2=2$ を挙げてしまう。
- 小問 (ii) の括弧の中の因数 $a+b$ を落としてしまい、周期 2 の場合である $a+b=0$ が誤って周期 4 を与えるように見えてしまう。

STEP のその先へ

写像 $x\mapsto \dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ は**メビウス変換**（Möbius transformation）と呼ばれる。このような写像を二つ合成することは、それぞれの 2×2 行列（ここでは $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$）を掛け合わせることに対応する。写像が周期 k をもつのは、行列の k 乗が単位行列（identity matrix）のスカラー倍になるときであり、それは比 $(\text{トレース})^2/\det=(a+b)^2/(ab+1)$ によって決まる。周期 4 はこの値が 2 の場合に対応し、姿を変えた「$\pi/4$ の回転」である。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ビジュアル複素解析』）にはメビウス変換についての見事な章があり、Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）はその背後にある固有値（eigenvalue）の考え方を扱っている。

解答例

STEP II 2017、第3問

純粋数学 • 曲線の概形

> **STEP II 2017、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q3

鍵となる考え方

方程式 $\sin y = k$ の解は決して一つだけではない。y_0 が解ならば $\pi - y_0$ も解であり、これらと 2π の整数倍だけ異なるものもすべて解である。したがって、ここで描く図はどれも、一つの基本曲線のいくつかのコピーを正弦関数の対称性（symmetry）に従って配置したものである。小問 (i) では直線を使ってこの様子を示す。(ii) では微分によって基本となる部分 $y = \arcsin(\frac{1}{2}\sin x)$ の形を決め、残りは対称性が片づけてくれる。小問 (iii) は、$\cos y$ を正弦で書き直せば (ii) と同じ問題になる。

解答

小問 (i)

$\sin y = \sin x$ となるのは、ちょうど

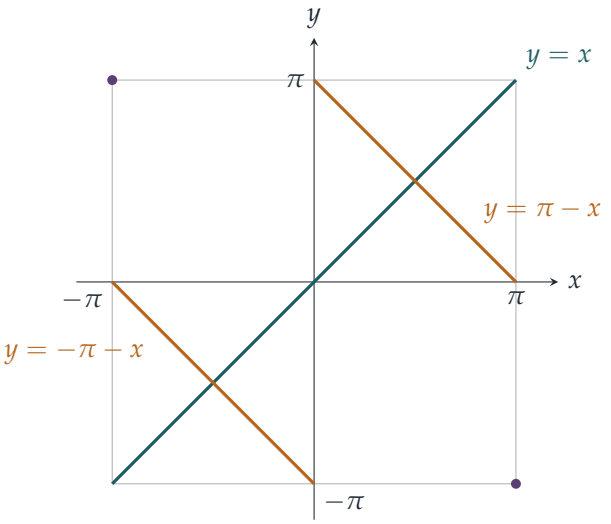
$$y = x + 2k\pi \qquad \text{または} \qquad y = \pi - x + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

のときである。次に、これらの直線のうち正方形 $-\pi \le x, y \le \pi$ と交わるものを調べる。

- $y = x$ は対角線全体を $(-\pi, -\pi)$ から (π, π) まで通る。
- $y = x \pm 2\pi$ となるには $y - x = \pm 2\pi$ が必要である。正方形内では $|y - x| \le 2\pi$ であり、等号は角でのみ成り立つので、これらからは孤立した 2 点 $(-\pi, \pi)$ と $(\pi, -\pi)$ だけが得られる。
- $x + y = \pi$ は $(0, \pi)$ から $(\pi, 0)$ への線分であり、$x + y = -\pi$（$k = -1$ の場合）は $(-\pi, 0)$ から $(0, -\pi)$ への線分である。

▶ $|x+y| \leq 2\pi$ であるから、$x+y = 3\pi$ または -3π となることはない。

したがって、求める集合は対角線 $y = x$、$x+y = \pm\pi$ の2本の線分、および2つの角の点 $(-\pi, \pi)$ と $(\pi, -\pi)$ からなる。



孤立した角の点は見落としやすい。$\sin(\pm\pi) = 0$ であるから、これらは正真正銘の解である。

小問 (ii)

$\sin y = \frac{1}{2}\sin x$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると $y' \cos y = \frac{1}{2}\cos x$ を得る。$0 \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$ では $\cos y \geq 0$ であるから

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}\sin^2 x} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4 - \sin^2 x}$$

であり、これは決して零にならない。よって

$$y' = \frac{\cos x}{\sqrt{4 - \sin^2 x}}.$$

$s = \sin x$ とおく。$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{4 - s^2} = \dfrac{-s\cos x}{\sqrt{4 - s^2}}$ を用いて商の微分法（quotient rule）を適用すると

$$y'' = \frac{-\sin x\sqrt{4 - s^2} - \cos x \cdot \dfrac{-s\cos x}{\sqrt{4 - s^2}}}{4 - s^2} = \frac{-s(4 - s^2) + s\cos^2 x}{(4 - s^2)^{3/2}}$$
$$= \frac{s\left(-4 + s^2 + 1 - s^2\right)}{(4 - s^2)^{3/2}} = -\frac{3\sin x}{(4 - \sin^2 x)^{3/2}}$$

となる。ここで $\cos^2 x = 1 - s^2$ を用いた。これが求める結果である。

基本となる部分。この 4 分の 1 の正方形において、曲線は $y = f(x)$ である。ただし $f(x) = \arcsin(\frac{1}{2}\sin x)$ とする。曲線は $(0,0)$ から始まり、$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi$ であるから $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi)$ で終わる。したがって、上の辺 $y = \frac{1}{2}\pi$ に近づくことはない。傾きは原点で $\frac{1}{2}$ であり、$x = \frac{1}{2}\pi$ で 0 まで減少する。また、$0 < x \leq \frac{1}{2}\pi$ で $y'' < 0$、$x = 0$ で $y'' = 0$ であるから、曲線は上に凸（concave）で増加し、原点が変曲点（point of inflection）となる。

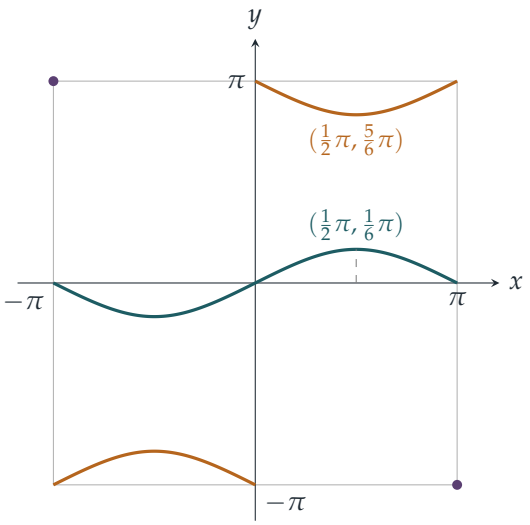
考えてみよう これ以上微積分の計算をせずに、この小さな弧から正方形全体の図を得るにはどうすればよいか。

対称性を用いる。$\sin(\pi - x) = \sin x$ であり、f は奇関数（odd function）であるから、$[-\pi, \pi]$ における $y = f(x)$ のグラフは $x = \frac{1}{2}\pi$ に関して対称であり、原点に関して点対称である。これは $(-\pi, 0)$、$(0,0)$、$(\pi, 0)$ を通る緩やかな波であり、極大点 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi)$ と極小点 $(-\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{6}\pi)$ をもつ。傾きは原点で $\frac{1}{2}$、$x = \pm\pi$ で $-\frac{1}{2}$ である。

(i) と同様に、解の集合全体は $y = f(x) + 2k\pi$ または $y = \pi - f(x) + 2k\pi$ で与えられる。正方形内に残るのは次のものである。

- すべての $-\pi \leq x \leq \pi$ に対する波 $y = f(x)$。
- $y = \pi - f(x)$。これが正方形内にあるのは $f(x) \geq 0$ となるところ、すなわち $0 \leq x \leq \pi$ のときだけである。これは $(0, \pi)$ から (π, π) へ垂れ下がるアーチであり、$(\frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi)$ で最も低くなる。
- $y = -\pi - f(x)$。これが正方形内にあるのは $f(x) \leq 0$ となるところ、すなわち $-\pi \leq x \leq 0$ のときだけである。これは $(-\pi, -\pi)$ から $(0, -\pi)$ へ盛り上がるアーチであり、$(-\frac{1}{2}\pi, -\frac{5}{6}\pi)$ で最も高くなる。
- 孤立した角の点 $(-\pi, \pi)$ と $(\pi, -\pi)$。これらは $x = -\pi$ における $y = \pi - f(x)$ と、$x = \pi$ における $y = -\pi - f(x)$ から得られる。

これ以外の k の値では $|y| > \pi$ となる。アーチは直線 $y = \pm\pi$ と傾き $\pm\frac{1}{2}$ で交わり、波を半回転させて上または下に平行移動したものになっている。(i) と比べてみよう。対角線は平らになって波となり、2 本の線分は曲がってアーチとなった。



小問 (iii)

考えてみよう $\cos y$ を、すでに描いたものに帰着させるにはどうすればよいか。

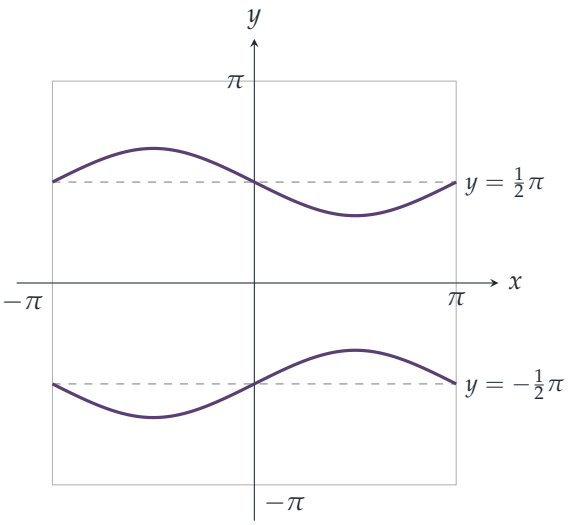
$\cos y = \sin(\frac{1}{2}\pi - y)$ と書く。すると $\cos y = \frac{1}{2}\sin x$ は、$u = \frac{1}{2}\pi - y$ が $\sin u = \frac{1}{2}\sin x$ を満たすことを意味するから、$u = f(x) + 2k\pi$ または $u = \pi - f(x) + 2k\pi$ である。すなわち

$$y = \tfrac{1}{2}\pi - f(x) - 2k\pi \qquad \text{または} \qquad y = f(x) - \tfrac{1}{2}\pi - 2k\pi.$$

$|f(x)| \leq \frac{1}{6}\pi$ であるから、$[-\pi, \pi]$ に値をとるのは $k = 0$ のときだけであり、そのときはすべての x に対してそうなる。したがって、求める集合はちょうど 2 つの完全な波からなる。

- $y = f(x) - \frac{1}{2}\pi$：(ii) の波を $\frac{1}{2}\pi$ だけ下に平行移動したもので、$-\frac{2}{3}\pi$ と $-\frac{1}{3}\pi$ の間を振動する。
- $y = \frac{1}{2}\pi - f(x)$：$x$ 軸に関するその鏡像である（$\cos y$ は y について偶関数であるから、こうなるはずである）。極小点 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi)$ と極大点 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi)$ をもつ。

今回は孤立点はない。



検算

- 試しの点：$(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi)$ では $\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\pi$ となり、$(\frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi)$ でも成り立つ。(iii) では、$(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi)$ で $\cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$ となる。
- $x = 0$ では公式から $y' = \frac{1}{2}$ が得られ、小角近似 (small-angle approximation) $y \approx \frac{1}{2}x$ と一致する。$x = \frac{1}{2}\pi$ では $y' = 0$ となり、極大点ではそうでなければならない。
- コンピュータによる検証で、y' と y'' の公式が正しいことを、$(0, \frac{1}{2}\pi)$ 内の無作為な点における有限差分（finite differences）によって確かめた。また、多数の無作為な x に対して $y \in [-\pi, \pi]$ となる解をすべて求めたところ、上で述べた分枝と一致した。(ii) では $x \neq 0, \pm\pi$ のとき 2 つ、(iii) では常に 2 つである。

よくある間違い

- (i) と (ii) で角の点 $(-\pi, \pi)$ と $(\pi, -\pi)$ を見落とす。
- (ii) のアーチを $[-\pi, \pi]$ 全体にわたって描いてしまう。$y = \pi - f(x)$ は $f(x) < 0$ となるとすぐに正方形から出てしまう。
- $\cos y = -\frac{1}{2}\sqrt{4 - \sin^2 x}$ としてしまう。符号は $0 \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$ によって決まる。

STEP のその先へ

$\{(x,y) : F(x,y) = 0\}$ のような集合を**等位集合**（level set）という。陰関数定理（implicit function theorem）によれば、$\partial F/\partial y \neq 0$ となるところでは、この集合は局所的に滑らかなグラフである。ここでそれが成り立たないのはちょうど $\cos y = 0$ となるところであり、$|\sin y| \leq \frac{1}{2}$ のときにはそれは決して起こらないので、(ii) の曲線は x の関数として滑らかなグラフである。(i) では、直線の交点は $\sin y - \sin x$ の 2 つの偏導関数（partial derivative）がともに零になる点であり、そこで等位集合は曲線でなくなる。Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は 1 変数の基礎を築く本であり、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学を理解する）は生き生きとした良き伴侶となる。

解答例

STEP II 2017、第 4 問

純粋数学 ・ 積分に関するコーシー・シュワルツの不等式

STEP II 2017、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/17-s2-q4

鍵となる考え方

シュワルツ（Schwarz）の不等式（Schwarz inequality）は、積の積分 $\int fg$ を、2 乗の積分 $\int f^2$ と $\int g^2$ によって上から評価するものである。したがって技術のすべては、評価したい積分ただ 1 つを除いて、現れる積分がすべて計算できるように f と g を選ぶことにある。求めたい積分が $\int fg$ であれば、**上界**（upper bound）が得られる。それが $\int f^2$ または $\int g^2$ であれば、両辺を割ることで**下界**（lower bound）が得られる。

解答

以下では一貫して、$(*)$ を $\left(\int fg\right)^2 \le \int f^2 \cdot \int g^2$ と書く。

小問 (i)

示すべき式には e^t が含まれているので、$f(x)=1$、$g(x)=\mathrm{e}^x$、$a=0$、$b=t$ とおく。すると

$$\int_0^t \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t-1, \qquad \int_0^t 1\,\mathrm{d}x = t, \qquad \int_0^t \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2t}-1\right),$$

であるから、$(*)$ は

$$(\mathrm{e}^t-1)^2 \le \frac{t}{2}\left(\mathrm{e}^{2t}-1\right) = \frac{t}{2}(\mathrm{e}^t-1)(\mathrm{e}^t+1).$$

を意味する。$t>0$ より $\mathrm{e}^t-1>0$ であり、また $\mathrm{e}^t+1>0$ である。正の量 $(\mathrm{e}^t-1)(\mathrm{e}^t+1)$ で割っても不等号の向きは変わらないので、

$$\frac{\mathrm{e}^t-1}{\mathrm{e}^t+1} \le \frac{t}{2},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x$ が $\int g^2$ として現れるようにしたいので、$[0,1]$ 上で $g(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$、$f(x)=x$ とおく。積 $x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$ はまさに積分できる形である（外側にある x のべきが、定数倍を除いて指数部分の導関数になっている）：

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}\,\mathrm{d}x=\left[-2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}\right]_0^1=2\bigl(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\bigr),\qquad \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$$

よって $(*)$ より

$$4\bigl(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\bigr)^2\le\frac{1}{3}\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x,$$

が得られ、両辺に 3 を掛けて

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x\ge 12\bigl(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\bigr)^2.$$

小問 (iii)

$J=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$ とおく。ここでの積分はすべて $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上で行う。この区間では $\sin x\ge 0$ かつ $\cos x\ge 0$ であるから、根号はすべて実数である。

上界。ここでは J を $\int fg$ とすべきである。$f(x)=1$、$g(x)=\sqrt{\sin x}$ とおけば、$g^2=\sin x$ は容易に積分できる：

$$J^2\le\int_0^{\frac{1}{2}\pi}1\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\cdot 1.$$

$J>0$ であるから、正の平方根をとって $J\le\sqrt{\pi/2}$ を得る。

下界。今度は J が 2 乗の積分の一方でなければならないので、$f(x)=(\sin x)^{1/4}$ とおく。すると $f^2=\sqrt{\sin x}$ である。

> ? **考えてみよう** $\int fg$ と $\int g^2$ の両方が計算できるようになる g はどれか。

g^2 が容易に積分でき、しかも $(\sin x)^{1/4}g(x)$ も容易に積分できる必要がある。$g(x)=\cos x$ という選び方はその両方を満たす：$(\sin x)^{1/4}\cos x$ は $\sin x$ のべきとその導関数の積である。答えの形も手がかりになる。分母に π があることから、$\int g^2=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$ が示唆されるのである。実際、

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{1/4}\cos x\,\mathrm{d}x=\left[\tfrac{4}{5}(\sin x)^{5/4}\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}=\frac{4}{5}$$

であり、

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

である。よって $(*)$ より

$$\frac{16}{25} \le J \cdot \frac{\pi}{4}, \qquad \text{すなわち} \qquad J \ge \frac{64}{25\pi}.$$

2 つの評価を合わせると、

$$\frac{64}{25\pi} \le \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

補足。 ほかの選び方でもうまくいき、中にはより良い評価を与えるものもある。$f = (\sin x)^{1/4}$、$g = (\sin x)^{3/4}$ とおくと $1 \le J\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{3/2}\,\mathrm{d}x$ が得られ、さらに $f = \sin x$、$g = \sqrt{\sin x}$ として $(*)$ をもう一度用いると $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{3/2}\,\mathrm{d}x \le \sqrt{\pi/4}$ が示される。これらを合わせると、より精密な評価 $J \ge 2/\sqrt{\pi} \approx 1.128$ が得られる。

検算

- (i)：$t \to 0$ のとき左辺は $\tanh(t/2) \approx t/2$ であるから、t が小さいときこの評価はほぼ等号に近い。t が大きいとき左辺は 1 に近づくが、$t/2$ は限りなく大きくなる。
- (ii)：$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x \approx 0.8556$ であり、一方 $12(1-\mathrm{e}^{-1/4})^2 \approx 0.5871$ である。
- (iii)：数値的には $J \approx 1.1981$ であり、これは $64/(25\pi) \approx 0.8149$ と $\sqrt{\pi/2} \approx 1.2533$ の間にある。上界がかなり近いのは、$\sqrt{\sin x}$ が区間の大部分でかなり平坦（1 に近い）であり、$f = 1$ としたシュワルツの不等式は g が定数のときにちょうど等号が成り立つからである。

よくある間違い

- 評価の向きを取り違える。未知の積分を $\int fg$ とした場合、シュワルツの不等式はそれを上からしか評価できない。したがって下界を得るには、未知の積分を $\int f^2$ または $\int g^2$ としなければならない。
- (i) で、$\mathrm{e}^t - 1$ が正であることを述べずにそれで割ってしまう。
- (iii) の上界で、$J > 0$ を用いて正の平方根をとることを忘れる。

STEP のその先へ

シュワルツ（コーシー–シュワルツ）の不等式は、内積（inner product）$\langle f, g\rangle = \int fg$ が $|\langle f, g\rangle| \le \|f\|\,\|g\|$ を満たし、等号が成り立つのは f と g が比例するときに限ることを述べている。コーシー（Cauchy）の名も冠されるこの不等式は、$\mathbb{R}^n$ のベクトルから

関数の空間に至るまで、あらゆる内積空間（inner product space）で成り立ち、「2 つの関数のなす角」に意味を与えるのもこの不等式である。この考え方はフーリエ級数（Fourier series）や最小二乗近似（least-squares approximation）の基礎となっている。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は内積と直交性（orthogonality）を詳しく展開しており、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学を理解する）は、このような不等式が積分を制御するのにどのように使われるかを示している。

解答例

STEP II 2017、第5問

純粋数学 • 放物線の法線と円

> **STEP II 2017、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q5

鍵となる考え方

すべては、放物線（parabola）$x = at^2, y = 2at$ に関するただ一つの事実に基づいている。すなわち、パラメータ t_1 と t_2 に対応する点を結ぶ弦（chord）の傾き（gradient）は $\dfrac{2}{t_1 + t_2}$ である。これを使えば、「法線（normal）が曲線と再び交わる」ことも、「半円に対する円周角は直角である（angle in a semicircle）」ことも、パラメータの間の簡単な方程式になり、幾何の問題が短い代数計算に変わる。

解答

有用な事実：弦の傾き

相異なるパラメータ $t_1 \neq t_2$ に対して、$(at_1^2, 2at_1)$ と $(at_2^2, 2at_2)$ を結ぶ弦の傾きは、$t_1 - t_2 \neq 0$ で約分して

$$\frac{2a(t_1 - t_2)}{a(t_1^2 - t_2^2)} = \frac{2}{t_1 + t_2},$$

となる。（$t_1 + t_2 = 0$ のとき弦は鉛直である。）$t_2 \to t_1$ とすれば、t における接線（tangent）の傾きは $\frac{1}{t}$ である。直接計算しても $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2a}{2at} = \dfrac{1}{t}$ である。

小問 (i)

P における接線の傾きは $\frac{1}{p}$ であるから、法線の傾きは $-p$ である（ここで $p \neq 0$ を用いた）。$n \neq p$ である点 N がこの法線上にあるのは、弦 PN の傾きが $-p$ であるとき、

かつそのときに限る：

$$\frac{2}{p+n} = -p \iff p+n = -\frac{2}{p} \iff n = -\left(p+\frac{2}{p}\right).$$

（P における法線の傾きは有限の値 $-p$ であるから、弦 PN が鉛直になることはない。）また、$n-p = -2\left(p+\frac{1}{p}\right)$ であり、実数 p に対して $p+\frac{1}{p} \neq 0$ であるから $n \neq p$ となり、これは確かに第二の点である。以上で求める結果が示された。

小問 (ii)

$p+n = -\frac{2}{p}$ および $p-n = 2p+\frac{2}{p} = \dfrac{2(p^2+1)}{p}$ を用いると、

$$\begin{aligned}
|PN|^2 &= a^2(p^2-n^2)^2 + 4a^2(p-n)^2 \\
&= a^2(p-n)^2\left[(p+n)^2+4\right] \\
&= a^2 \cdot \frac{4(p^2+1)^2}{p^2} \cdot \left(\frac{4}{p^2}+4\right) = a^2 \cdot \frac{4(p^2+1)^2}{p^2} \cdot \frac{4(p^2+1)}{p^2} \\
&= 16a^2\,\frac{(p^2+1)^3}{p^4},
\end{aligned}$$

となり、題意が示された。

最小化するために、$u = p^2 > 0$ とおき、$f(u) = \dfrac{(u+1)^3}{u^2}$ とする。商の微分法（quotient rule）により、

$$f'(u) = \frac{3(u+1)^2u^2 - 2u(u+1)^3}{u^4} = \frac{(u+1)^2(3u-2u-2)}{u^3} = \frac{(u+1)^2(u-2)}{u^3}.$$

$u > 0$ のとき因子 $\frac{(u+1)^2}{u^3}$ は正であるから、$0 < u < 2$ で $f'(u) < 0$、$u > 2$ で $f'(u) > 0$ である。よって f は減少したのち増加し、$u > 0$ における最小値は $u = 2$、すなわち $p^2 = 2$ でとる。$|PN|^2 = 16a^2 f(p^2)$ であるから、このとき $|PN|$ は最小となる。（最小値は $|PN|^2 = 16a^2 \cdot \frac{27}{4} = 108a^2$ であり、$|PN| = 6\sqrt{3}\,a$ である。）

小問 (iii)

PN は直径（diameter）であり、Q は P, N 以外の円周上の点であるから、角 PQN は直角である（半円に対する円周角）。よって $QP \perp QN$ である。

> **考えてみよう** QP や QN が鉛直になって、傾きの積を考えられなくなることはないだろうか？

もし QP が鉛直なら QN は水平となり、Q と N の y 座標が等しくなって $q = n$ となるが、$Q \neq N$ であるからこれは不可能である。同様に、QN が鉛直なら QP は水平と

なり $q=p$ となってしまう。したがって両方の傾きは有限かつ 0 でなく、その積は -1 である：

$$\frac{2}{q+p}\cdot\frac{2}{q+n}=-1 \iff (q+p)(q+n)=-4.$$

展開し、小問 (i) から得られる $p+n=-\frac{2}{p}$ と $pn=-p^2-2$ を用いると、

$$q^2+(p+n)q+pn=q^2-\frac{2q}{p}-p^2-2=-4,$$

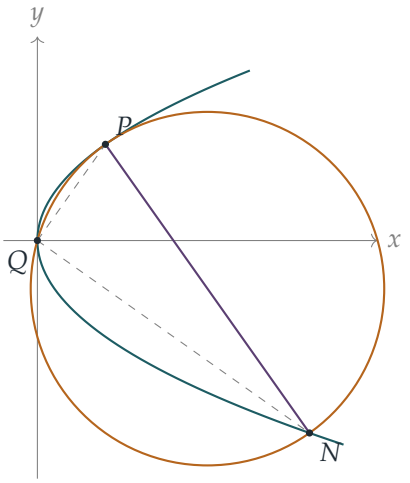
となり、これを整理すると

$$2=p^2-q^2+\frac{2q}{p},$$

となって、題意が示された。

結論の導出。 $q=0$ とおくと、関係式は $2=p^2$ となる。逆に $p^2=2$ ならば、関係式から $q^2-\frac{2q}{p}=0$、すなわち $q=0$ または $q=\frac{2}{p}$ を得る。しかし $\frac{2}{p}=\frac{p^2}{p}=p$ であり、これは点 P そのものであるから、Q は $q=0$ でなければならない。よって Q が原点にあるのは $p^2=2$ のとき、かつそのときに限り、これは小問 (ii) により、$|PN|$ が最小となるとき、かつそのときに限る。

一般に、この関係式は q の二次方程式 $q^2-\frac{2}{p}q+(2-p^2)=0$ であり、その解の和は $\frac{2}{p}$ である。一方の解は常に $q=p$ であるから、もう一方は $q=\dfrac{2-p^2}{p}$ であり、これが 0 となるのはちょうど $p^2=2$ のときである。



図は最小となる場合 $a=1, p=\sqrt{2}$ を示している：法線 PN（紫）、PN を直径とする円（琥珀色）、そして $Q=O$ における直角である。

検算

- $a=1, p=1$ のとき：$n=-3$ であるから $P=(1,2)$、$N=(9,-6)$ である。このとき $|PN|^2=64+64=128$ であり、公式からも $16\cdot 8/1=128$ が得られる。
- $p=\sqrt{2}, a=1$ のとき：$P=(2,2\sqrt{2})$、$N=(8,-4\sqrt{2})$ であり、$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{ON}=16-16=0$ であるから、原点は確かに PN を直径とする円の上にある。このとき $|PN|=6\sqrt{3}\approx 10.392$ である。
- いくつかの p の値について、円と放物線の交点を数値的に求めると、（P 以外では）ちょうどパラメータ n と $\frac{2-p^2}{p}$ が得られる。

よくある間違い

- $q=p$ も最後の関係式を満たすことを見落とし、$p^2=2$ のとき Q の位置が二通りあると誤って結論してしまう。
- 法線の傾きを $-\frac{1}{p}$ と書いてしまう：接線の傾きが $\frac{1}{p}$ なのだから、法線の傾きは $-p$ である。

STEP のその先へ

円と放物線は一般に四点で交わる。円の方程式に $x=at^2, y=2at$ を代入すると、t^3 の項をもたない t の四次方程式（quartic）が得られるので、四つのパラメータの和は 0 である。ここでは $n+q=-\frac{2}{p}-p+\frac{2}{p}=-p$ であるから、四つ目のパラメータは再び p となる。すなわち円は P において放物線に接している。そこでの半径は法線に沿っているのだから、そうなるのは当然である。このように交点を重複度（multiplicity）込みで数えることは、代数幾何学（algebraic geometry）の出発点である（ベズー（Bézout）の定理）。この種の問題をさらに解きたい場合は、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）を参照されたい。

解答例

STEP II 2017、第 6 問

純粋数学 ・ 不等式と数学的帰納法

STEP II 2017、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/17-s2-q6

鍵となる考え方

どちらの小問も、和 S_n を、おおよそ $\int_0^n x^{-1/2}\,\mathrm{d}x$ に等しい $2\sqrt{n}$ と比較するものである。(i) の帰納法（induction）では、n から $n+1$ への段階は $1/\sqrt{n+1}$ と $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ の比較に帰着し、この差を有理化（rationalising）すれば決着がつく。(ii) では、最小の C は、右辺（C を除いた部分）と S_n の差の最大値（maximum）である。そこで、n から $n+1$ へ移るときにこの差がどう変化するかを調べる。与えられた不等式こそが、この差が常に減少することを教えてくれるのである。

解答

小問 (i)

$P(n)$ を命題 $S_n \le 2\sqrt{n}-1$ とする。

初期段階（*base case*）。 $S_1 = 1$ かつ $2\sqrt{1}-1=1$ であるから、$P(1)$ は（等号で）成り立つ。

帰納段階（*inductive step*）。ある $k \ge 1$ について $P(k)$ が成り立つと仮定する。すると

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \le 2\sqrt{k} - 1 + \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

であるから、次を示せば十分である。

$$2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \le 2\sqrt{k+1}, \qquad \text{すなわち、} \qquad \frac{1}{\sqrt{k+1}} \le 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right).$$

有理化すると、

$$2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)=\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\geq\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

となる。ここで、$\sqrt{k}\leq\sqrt{k+1}$ より分母が $2\sqrt{k+1}$ を超えないことを用いた。よって $S_{k+1}\leq 2\sqrt{k+1}-1$ となり、これは $P(k+1)$ である。

$P(1)$ は真であり、すべての $k\geq 1$ について $P(k)\Rightarrow P(k+1)$ であるから、すべての正の整数 n に対して $S_n\leq 2\sqrt{n}-1$ が成り立つ。

小問 (ii)：不等式

$k\geq 0$ のとき、$(4k+1)\sqrt{k+1}>(4k+3)\sqrt{k}$ の両辺は非負（non-negative）であり、しかも左辺は正であるから、この不等式は両辺を平方した不等式と同値である。ここで

$$\begin{aligned}(4k+1)^2(k+1)-(4k+3)^2k&=(16k^2+8k+1)(k+1)-(16k^2+24k+9)k\\&=(16k^3+24k^2+9k+1)-(16k^3+24k^2+9k)\\&=1>0.\end{aligned}$$

したがって $(4k+1)^2(k+1)>(4k+3)^2k$ であり、正の平方根をとれば、すべての $k\geq 0$ に対して $(4k+1)\sqrt{k+1}>(4k+3)\sqrt{k}$ が得られる。これが示すべきことであった。

小問 (ii)：最小の C

次のように定義する。

$$T_n=2\sqrt{n}+\frac{1}{2\sqrt{n}}-S_n.$$

不等式 $S_n\geq 2\sqrt{n}+\frac{1}{2\sqrt{n}}-C$ は $C\geq T_n$ と同じである。よってこの不等式がすべての n で成り立つのは、C がすべての T_n 以上であるときであり、またそのときに限る。そのような C のうち最小のものは、T_n の最大値（存在すれば）である。

考えてみよう S_n を表す式を知らずに、どうすれば最大の T_n を見つけられるだろうか。

変化量 $T_{n+1}-T_n$ に注目する。この中では S_n が消える。$S_{n+1}-S_n=1/\sqrt{n+1}$ であるから、

$$\begin{aligned}T_{n+1}-T_n&=2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\frac{1}{2\sqrt{n+1}}-\frac{1}{2\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\\&=2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}-\frac{1}{2\sqrt{n+1}}-\frac{1}{2\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

両辺に正の量 $2\sqrt{n}\sqrt{n+1}$ を掛けると、

$$\begin{aligned}2\sqrt{n}\sqrt{n+1}\left(T_{n+1}-T_n\right) &= 4(n+1)\sqrt{n}-4n\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\\ &= (4n+3)\sqrt{n}-(4n+1)\sqrt{n+1}.\end{aligned}$$

いま証明した不等式（$k=n$ とする）により、これは負である。よってすべての $n\geq 1$ に対して $T_{n+1}<T_n$ である。すなわち数列（sequence）T_n は狭義単調減少（strictly decreasing）であり、その最大値は最初の値

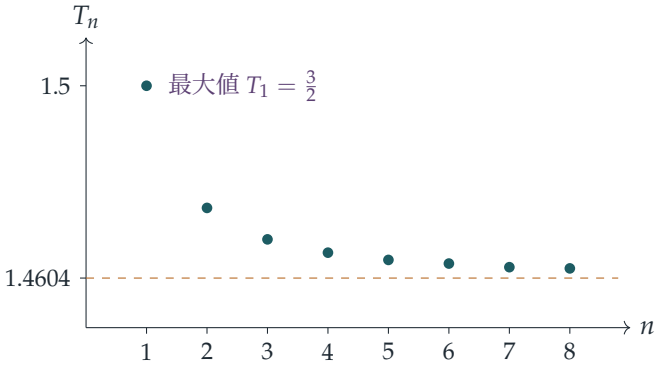
$$T_1 = 2+\tfrac{1}{2}-1 = \tfrac{3}{2}.$$

である。したがって、すべての $n\geq 1$ に対して $S_n \geq 2\sqrt{n}+\frac{1}{2\sqrt{n}}-\frac{3}{2}$ が成り立つ。これより小さい C では成り立たない。$n=1$ のとき不等式は $1\geq \frac{5}{2}-C$ となり、$C\geq\frac{3}{2}$ が必要だからである。求める最小の数は

$$C=\tfrac{3}{2}.$$

である。

T_n の最初のいくつかの値を見ると、どれほど速く落ち着いていくかがわかる。



（縦軸は引き伸ばされており、およそ 1.45 から 1.51 までの範囲を表している。）

検算

- $n=4$ のとき、$S_4 = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\approx 2.7845$ であり、これは $2\sqrt{4}+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}=2.75$ と $2\sqrt{4}-1=3$ の間にある。両方の結果が要求するとおりである。
- 最初の 200 000 個の値をコンピュータで調べたところ、両方の評価が成り立つことと、T_n が減少することが確認された。T_n は 1.5 からおよそ 1.46035 に向かって減少し、1.5 に戻ることはない。
- 恒等式 $(4k+1)^2(k+1)-(4k+3)^2k=1$ は $k=1$ で簡単に確かめられる。実際、$25\cdot 2-49=1$ である。

よくある間違い

- T_n の最大値ではなく極限（limit）（およそ 1.46）を答えてしまう。C が $\frac{3}{2}$ より小さいと $n = 1$ で成り立たない。
- 両辺が非負であることを先に確認せずに不等式を平方してしまう。
- 等号が成り立つ場合を示して、$C = \frac{3}{2}$ が実際に最小であることを示すのを忘れる。

STEP のその先へ

数列 T_n はある極限へ向かって減少し、その極限は $-\zeta(\frac{1}{2}) \approx 1.46035$ である。ここで ζ はリーマン（Riemann）ゼータ関数（zeta function）であり、それを定義する級数が収束する領域の外まで拡張したものである。和を積分と比較し、さらに $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ のような項で補正するという方法は、オイラー–マクローリンの公式（Euler–Maclaurin formula）の出発点である。その根底にある「有界な単調数列は収束する」という事実は、大学 1 年次の解析学で学ぶ単調収束定理（monotone convergence theorem）である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）がこれを丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 2017、第7問

純粋数学 • 対数微分法

STEP II 2017、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/17-s2-q7

鍵となる考え方

ここに現れる累乗はすべて対数（logarithm）を通して $a^b = \mathrm{e}^{b\ln a}$ と定義されている。したがって x の二つの累乗を比べることはそれらの対数を比べることであり、exp は単調増加（increasing）なので、この二つの比較は同値である。注意すべき点はただ一つ、$\ln x$ の符号である。$0 < x < 1$ では $\ln x$ は負であり、それで割ると不等号の向きが逆になる。また、対数をとれば導関数（derivative）の計算も型どおりに進む。

解答

以下を通して、$\ln \mathrm{f}(x) = x\ln x$、$\ln \mathrm{g}(x) = \mathrm{f}(x)\ln x$ である。

小問 (i)

$0 < x < 1$ とすると、$\ln x < 0$ かつ $x - 1 < 0$ である。このとき

$$\ln \mathrm{f}(x) - \ln x = x\ln x - \ln x = (x-1)\ln x > 0,$$

となる。これは二つの負の数の積だからである。exp は単調増加なので、$\mathrm{f}(x) > x$ である。

また $x\ln x < 0$ なので、$\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{x\ln x} < 1$ である。再び対数を比べる：

$$\ln \mathrm{g}(x) - \ln x = \big(\mathrm{f}(x) - 1\big)\ln x > 0, \qquad \text{なぜなら} \mathrm{f}(x) < 1 \text{ かつ } \ln x < 0,$$
$$\ln \mathrm{f}(x) - \ln \mathrm{g}(x) = \big(x - \mathrm{f}(x)\big)\ln x > 0, \qquad \text{なぜなら} \mathrm{f}(x) > x \text{ かつ } \ln x < 0.$$

よって $\ln x < \ln \mathrm{g}(x) < \ln \mathrm{f}(x)$ であり、$0 < x < 1$ に対して $x < \mathrm{g}(x) < \mathrm{f}(x)$ が得られる。これが示すべきことであった。

$x > 1$ のときも同じ差を考えるが、今度は $\ln x > 0$、$x - 1 > 0$、$x \ln x > 0$ なので $f(x) > 1$ である。すると $(x-1)\ln x > 0$ から $f(x) > x$ が、$(x - f(x))\ln x < 0$ から $g(x) > f(x)$ が得られる。よって

$$x < f(x) < g(x) \qquad \text{ただし} x > 1,$$

であり、$x = 1$ では三つとも 1 に等しい。

小問 (ii)

$\ln f(x) = x \ln x$ を微分すると $f'(x)/f(x) = \ln x + 1$ となるので、

$$f'(x) = x^x(\ln x + 1).$$

$x^x > 0$ なので、$f'(x) = 0$ となるのは $\ln x = -1$、すなわち $x = e^{-1}$ のときに限る。（そこで f' は負から正へ符号を変えるので、これは最小値（minimum）であり、その値は $e^{-1/e} \approx 0.692$ である。）

小問 (iii)

$x \to 0$ のとき $x \ln x \to 0$ であり、exp は連続（continuous）なので、

$$f(x) = e^{x \ln x} \to e^0 = 1.$$

次に $\ln g(x) = f(x) \ln x$ において $f(x) \to 1$、$\ln x \to -\infty$ なので、$\ln g(x) \to -\infty$ となり、

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0.$$

小問 (iv)

$x > 0$ に対して $h(x) = x^{-1} + \ln x$ とおく。すると

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2},$$

であり、これは $0 < x < 1$ で負、$x > 1$ で正である。よって h は減少したのち増加し、その最小値は $h(1) = 1$ である。したがって、すべての $x > 0$ に対して $x^{-1} + \ln x \geq 1$ が成り立つ。

次に、小問 (ii) を用いて $\ln g(x) = f(x) \ln x$ を積の微分法（product rule）で微分する：

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = f'(x) \ln x + \frac{f(x)}{x} = x^x \left[(\ln x + 1) \ln x + \frac{1}{x} \right] = x^x \left[(\ln x)^2 + \ln x + \frac{1}{x} \right].$$

考えてみよう いま証明した不等式は、この括弧の中身を扱うのにどう役立つだろうか？

括弧の中にはちょうど $\frac{1}{x}+\ln x$ が含まれており、これは 1 以上である。よって

$$(\ln x)^2+\ln x+\frac{1}{x}\ \geq\ (\ln x)^2+1\ >\ 0.$$

$g(x)>0$ かつ $x^x>0$ なので、

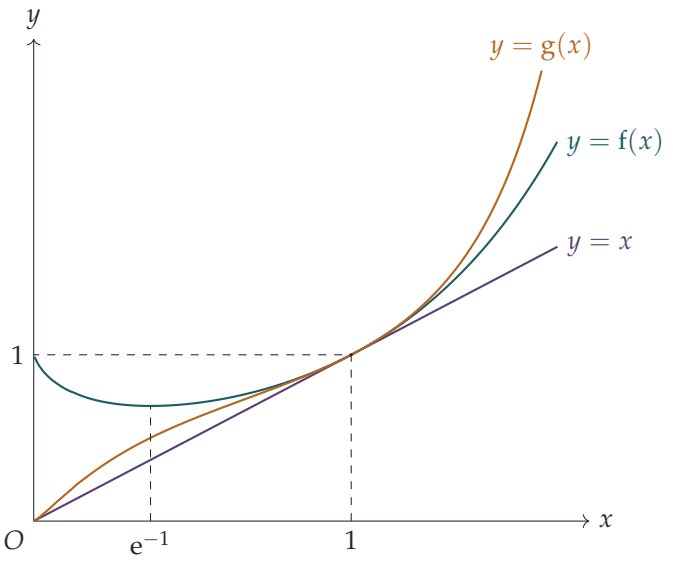
$$g'(x)=g(x)\,x^x\left[(\ln x)^2+\ln x+\frac{1}{x}\right]>0 \qquad \text{ただし} x>0,$$

が得られる。これが示すべきことであった。

グラフの概形

これまでの事実をまとめる：

- $y=f(x)$ は $x\to 0$ で 1 から出発し、$x=e^{-1}$ で最小値 $e^{-1/e}$ まで下がったのち、$(1,1)$ を通って上昇し、非常に速く増大する。$f'(x)=x^x(\ln x+1)\to-\infty$ なので、0 の近くでは傾きが非常に急である。
- $y=g(x)$ は原点から出発し、全域で増加し（小問 (iv)）、$(1,1)$ を通る。
- $0<x<1$ では大小関係は $x<g<f$ であり、$x>1$ では $x<f<g$ である。よって g と f は $(1,1)$ で交わり、三つの曲線はすべてそこで出会う。
- $x=1$ では $f'(1)=1$、$g'(1)=1\cdot1\cdot(0+0+1)=1$ なので、どちらの曲線も $(1,1)$ で $y=x$ に接する。
- 原点の近くでは $g(x)/x=e^{(f(x)-1)\ln x}\to 1$ である（$f(x)-1\approx x\ln x$ なので、指数部分は $x(\ln x)^2\to 0$ のように振る舞う）。したがって $y=g(x)$ は $y=x$ に沿って、そのすぐ上側を通って原点から離れていく。



検算

- $x = \frac{1}{2}$ のとき：$\mathrm{f} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$、$\mathrm{g} = (\frac{1}{2})^{0.707} \approx 0.613$ なので、$0.5 < 0.613 < 0.707$ である。$x = 2$ のとき：$\mathrm{f} = 4$、$\mathrm{g} = 2^4 = 16$ なので、$2 < 4 < 16$ である。
- $\mathrm{f}(0.3) \approx 0.697$、$\mathrm{f}(\mathrm{e}^{-1}) \approx 0.6922$、$\mathrm{f}(0.4) \approx 0.693$ であり、e^{-1} で最小となることと矛盾しない。
- g' の式から $\mathrm{g}'(\frac{1}{2}) \approx 0.774$ が得られ、これはその点での g の差分商（difference quotient）と一致する。また、コンピュータによる確認でも $(0,3)$ 上で $\mathrm{g}' > 0$ であることが確かめられた。

よくある間違い

- $(0,1)$ 上で $\ln x < 0$ であることを忘れ、それで割るときに不等号の向きを逆にしないこと。大小関係が $x = 1$ を境に入れ替わるのは、まさにこのためである。
- x^x を $x \cdot x^{x-1}$ と微分する（指数（index）を定数とみなしている）、あるいは $x^x \ln x$ と微分する（底（base）を定数とみなしている）こと。両方の部分が必要である。
- g の極限（limit）を $1^{-\infty}$ と書いて当て推量をすること。代わりに $\ln \mathrm{g} = \mathrm{f} \ln x$ を用いて考えるべきである。

STEP のその先へ

累乗の塔 $x^{x^{x^{\cdots}}}$ はこのパターンを引き継ぐ。$0 < x < 1$ では、奇数の高さの塔 x, g,... と偶数の高さの塔 f,... が交互に並び、無限の塔が収束するのは $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}} \leq x \leq \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$ のときに限る。これは単調数列（monotone sequence）と不動点（fixed point）のよい練習問題である。$x \ln x \to 0$ のような極限や、exp と ln による a^b の厳密な定義は、解析学（analysis）の最初の講義できちんと扱われる。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門の教科書）を参照せよ。

解答例

STEP II 2017、第 8 問

純粋数学 ・ ベクトルと垂心

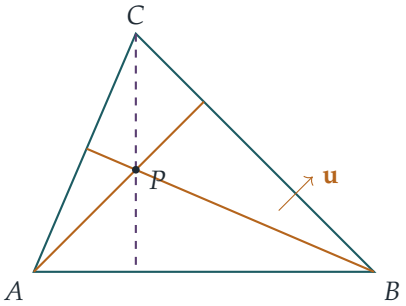
STEP II 2017、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/17-s2-q8

鍵となる考え方

これは、三角形の 3 本の垂線（altitude）が 1 点、すなわち**垂心**（orthocentre）で交わることのベクトルによる証明である。2 直線 $\mathbf{a}+\lambda\mathbf{u}$ と $\mathbf{b}+\mu\mathbf{v}$ の交点を求めるときのこつは、等式の両辺と $\mathbf{v}$ に垂直なベクトルとの内積（scalar product）をとることである。そうすれば μ が一気に消える。ここではそのようなベクトルがはじめから与えられている。$\mathbf{v}$ は CA に垂直なので、$\mathbf{c}-\mathbf{a}$ がその役目を果たすのである。



解答

1 本目の垂線

A を通り BC に垂直な直線は $\mathbf{a}$ を通り、方向ベクトルは $\mathbf{u}$ である（平面上で考えているので、BC に垂直なベクトルはすべて $\mathbf{u}$ の実数倍である）。その方程式は

$$\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda\mathbf{u}.$$

である。同様に、B を通り CA に垂直な直線は $\mathbf{r}=\mathbf{b}+\mu\mathbf{v}$ である。

P を求める

この2直線は平行ではない。もし $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ が平行ならば、同じ平面内でそれぞれに垂直な BC と CA も平行になるが、三角形ではそれはありえないからである。したがって2直線はちょうど1点 P で交わり、そこでは

$$\mathbf{a}+\lambda\mathbf{u}=\mathbf{b}+\mu\mathbf{v}.$$

が成り立つ。両辺と $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ との内積をとる。$\mathbf{v}$ は CA に垂直なので $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$ であり、μ が消える。

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})+\lambda\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a}),\qquad\text{したがって}\qquad\lambda\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a}).$$

考えてみよう $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ で割ってよいだろうか？

よい。もし $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$ ならば、$\mathbf{u}$ は BC だけでなく CA にも垂直になる。平面上ではこれは CA と BC が平行であることを意味するが、実際にはそうではない。よって

$$\mathbf{p}=\mathbf{a}+\frac{(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})}{\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})}\,\mathbf{u}.$$

CP は AB に垂直である

示すべきは $(\mathbf{p}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=0$ である。上で求めた係数を λ と書く。すると

$$(\mathbf{p}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})+\lambda\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}).$$

ここで役に立つのは、$\mathbf{u}$ が BC に垂直であることから $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{c})=0$ となり、

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{c})+\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a}).$$

が成り立つという観察である。したがって $\lambda\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\lambda\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ であり、

$$(\mathbf{p}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=-(\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})+(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0.$$

考えてみよう 内積が0であることから、本当に直線 CP が得られるのだろうか？

それは $P\neq C$ のときに限られ、ここで「直角三角形でない」という条件が使われる。もし $P=C$ ならば、C は A を通り BC に垂直な直線上にあるので $AC\perp BC$ となり、C における角が直角になるが、これは除外されている。よって $\mathbf{p}-\mathbf{c}\neq\mathbf{0}$ であり、$\mathbf{b}-\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ でもあるから、内積が0であることはまさに CP が AB に垂直であることを意味する。以上より、三角形の3本の垂線はすべて P を通る。

検算

$A = (0,0)$、$B = (5,0)$、$C = (1.5,3.5)$ とし、$\mathbf{c} - \mathbf{b} = (-3.5,3.5)$ に垂直な $\mathbf{u} = (1,1)$ をとる。すると $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 7.5$、$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 5$ なので $\lambda = 1.5$、$P = (1.5,1.5)$ である。これは C の真下にあるので CP は鉛直で AB に垂直であり、さらに $(\mathbf{p} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = (-3.5)(1.5) + (1.5)(3.5) = 0$ なので、P は B からの垂線上にもある。一般の結果も、多数のランダムな三角形についてコンピュータで確認した。また、$\mathbf{u}$ を $k\mathbf{u}$ に置き換えても $\mathbf{p}$ の式は変わらないことにも注意しよう。当然そうでなければならない。

よくある間違い

- $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ ではなく $\mathbf{v}$ や $\mathbf{u}$ との内積をとってしまう。これでは両方のパラメータが式に残ってしまう。
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a})$ が 0 でない理由を述べずに、それで割ってしまう。
- 最後の打ち消し合いを成り立たせる鍵である $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a})$ という段階を見落とす。

STEP のその先へ

任意の三角形の垂心 H、重心（centroid）G、外心（circumcentre）O は 1 本の直線、すなわちオイラー線（Euler line）上にあり、$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ が成り立つ。O を原点にとると、これは $\mathbf{h} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ というすっきりした主張になり、同じ内積の考え方で証明できる。この種の内積は、線形代数（linear algebra）の最初の講義で学ぶ内積空間（inner-product space）の出発点である。それが展開されていく様子を見るには、ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（『線形代数入門』）がよい。

解答例

STEP II 2017、第 9 問

力学 ・ 摩擦と剛体

> **STEP II 2017、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q9

鍵となる考え方

各円柱は剛体（rigid body）であり、力を受けるのは板と床の 2 か所だけである。したがって、中心まわりのモーメント（moment）をとるのが自然な第一歩である。2 つの垂直抗力（normal reaction）は中心を通るので、残るのは 2 つの摩擦力（frictional force）だけであり、それらは等しくなければならない。その後は、円柱と板それぞれについて力を分解し、接点での摩擦の法則 $G \leq \frac{1}{2}R$ と $F \leq \frac{1}{2}N$ を当てはめればよい。幾何学的な関係によって θ を a と r に結びつけるのは、最後の段階である。

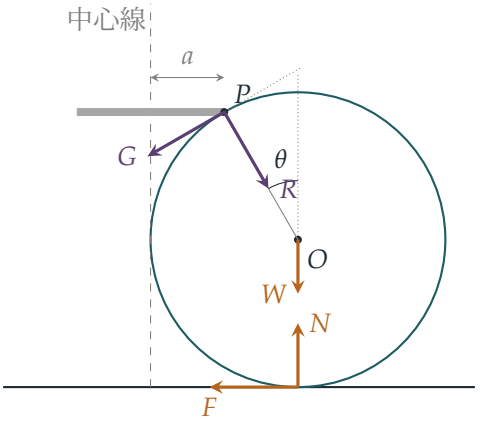
解答

モデルと設定。 断面を、半径 r の 2 枚の円板と 1 本の水平な棒とみなし、接触はすべて粗い（rough）とする。円柱どうしの間隔は無視できるので、それぞれの中心は対称軸である鉛直線の左右に、水平距離 r だけ離れた位置にある。板の幅は $2a < 2r$ なので、板はその 2 本の長い縁で円柱の内側上部に載っている。対称性より、右側の円柱だけを考えればよい。

板が円柱に接する点を P とする。P における接線は水平な板と角 θ をなすので、P への半径は鉛直方向と角 θ をなす。円柱にはたらく力は次のとおりである。

- 重さ W。中心 O にはたらく。
- 床では、上向きの垂直抗力 N と摩擦力 F（板が円柱を外向きに押すので、中心線に向かう向きにはたらく）。
- P では、PO 方向の垂直抗力 R と、接線方向で下向きかつ内向きの摩擦力 G。

ニュートン（Newton）の第 3 法則（third law）により、板は OP 方向（上向きで、中心線から離れる向き）に R を受け、接線方向で上向きかつ外向きに G を受ける。



P を通る点線が接線である。水平方向には、P は中心 O より $r\sin\theta$ だけ内側にあり、O は中心線から距離 r のところにある。

小問 (i)

円柱についての O まわりのモーメント。W、N、R はすべて O を通る。2 つの摩擦力はどちらも円に接する向きなので、それぞれのモーメントは（力）$\times r$ であり、互いに逆向きに回そうとする。F は下端で内向き、G は P で下向きかつ内向きである。したがって

$$Fr = Gr \quad \Longrightarrow \quad G = F.$$

円柱について水平方向に分解する（外向きを正とする）。R の水平成分は外向きに $R\sin\theta$、G の水平成分は内向きに $G\cos\theta$ であり、床の摩擦力 F は内向きにはたらくので

$$R\sin\theta - G\cos\theta - F = 0.$$

$G = F$ とすると、これは

$$R\sin\theta = F(1+\cos\theta),$$

となり、示すべき式が得られた。

導かれる不等式。板との接点では滑りが起こらないので、そこでの摩擦は $G \le \frac{1}{2}R$、すなわち $F \le \frac{1}{2}R$ を満たす。すると

$$R\sin\theta = F(1+\cos\theta) \le \tfrac{1}{2}R(1+\cos\theta),$$

となり、$\frac{1}{2}R > 0$（板は円柱を押している）で割ると $2\sin\theta \le 1+\cos\theta$ を得る。

小問 (ii)

板について鉛直方向に分解する。各縁は R を受け、その上向き成分は $R\cos\theta$ である。また接線方向上向きに $G = F$ を受け、その上向き成分は $F\sin\theta$ である。よって

$$2(R\cos\theta + F\sin\theta) = kW.$$

小問 (i) より $R = \dfrac{F(1+\cos\theta)}{\sin\theta}$ なので

$$R\cos\theta + F\sin\theta = \frac{F\left[(1+\cos\theta)\cos\theta + \sin^2\theta\right]}{\sin\theta} = \frac{F(1+\cos\theta)}{\sin\theta},$$

となる。ここで $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を用いた。したがって

$$\tfrac{1}{2}kW = \frac{(1+\cos\theta)}{\sin\theta}F.$$

（板にはたらく水平方向の力は対称性により打ち消し合い、モーメントも同様である。）

円柱について鉛直方向に分解する。板からの反力は $R\cos\theta + G\sin\theta = \frac{1}{2}kW$ だけ下向きに押すので

$$N = W + \tfrac{1}{2}kW = \left(\frac{2}{k} + 1\right)\tfrac{1}{2}kW = \left(1 + \frac{2}{k}\right)\left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)F.$$

これが求める式である。（これは、床が全体の重さ $2W + kW$ の半分を支えるという当然の事実にすぎない。）

床で滑らない条件。条件は

$$F \le \tfrac{1}{2}N.$$

である。N の式から

$$\frac{N}{F} = \left(1 + \frac{2}{k}\right)\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}.$$

小問 (i) より $\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \ge 2$ である。鋭角 θ に対して $\sin\theta > 0$ だからである。また $k > 0$ より $1 + \frac{2}{k} > 1$ である。よって $N/F > 2$、すなわち $F < \frac{1}{2}N$ である。したがって、板が滑らなければ床での条件は自動的に成り立ち、θ に新たな制約は課されない。

考えてみよう 2 つの接点はどちらも同じ摩擦力 F を受けているのに、なぜ床との接点の条件は自動的に満たされるのか？

床のほうが強く押しているからである。R と N の式を比べると、床は円柱自身の重さも支えているので $N = \left(1 + \frac{2}{k}\right)R > R$ となる。両方の接点で摩擦力が同じで、床での垂直抗力のほうが大きいので、先に滑るのは常に板との接点である。

小問 (iii)

小問 (i) の不等式を変形して 2 乗する。両辺とも正なので、2 乗しても不等号の向きは変わらない。

$$4\sin^2\theta \le (1+\cos\theta)^2 \iff 4(1-\cos\theta)(1+\cos\theta) \le (1+\cos\theta)^2.$$

$1+\cos\theta > 0$ で割ると $4-4\cos\theta \le 1+\cos\theta$、すなわち $\cos\theta \ge \frac{3}{5}$ を得る。θ は鋭角なので

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} \le \sqrt{1-\tfrac{9}{25}} = \tfrac{4}{5}.$$

（同じことだが、$t = \tan\frac{1}{2}\theta$ とおくと不等式は $2t \le 1$ となり、$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$ は高々 $\frac{4}{5}$ で、それをとるのは $t = \frac{1}{2}$ のときである。）

幾何学的関係。板の縁 P は中心線から水平距離 a のところにある。中心 O は中心線から距離 r にあり、P は O よりも $r\sin\theta$ だけ中心線に近い。よって

$$a = r - r\sin\theta = r(1-\sin\theta) \ge r\left(1-\tfrac{4}{5}\right) = \tfrac{1}{5}r,$$

となり、$r \le 5a$ を得る。

検算

- 極端な場合 $\sin\theta = \frac{4}{5}$、$\cos\theta = \frac{3}{5}$ において、$W = 1$、$k = 1$ とする。板の方程式から $F = \frac{1}{4}$、次いで $R = \frac{1}{2}$、$N = \frac{3}{2}$ を得る。よって $G/R = \frac{1}{2}$ がちょうど成り立ち（板は滑り出す直前である）、一方 $F/N = \frac{1}{6}$ は $\frac{1}{2}$ を十分に下回っており、小問 (ii) の予想どおりである。
- 4 つのつり合いの式（モーメントの式と、両方の物体についての分解）は、W、k、θ を 10^5 通りランダムに選んで計算機で確かめた。$G \le \frac{1}{2}R$ が成り立つのはちょうど $\sin\theta \le \frac{4}{5}$ のときであり、そのとき常に $F < \frac{1}{2}N$ が成り立つという主張も同様に確かめた。
- 極限での妥当性：幅の広い板（$a \to r$）は円柱の頂上近くに載るので、$\theta \to 0$ となり、摩擦はほとんど必要ない。幅の狭い板は円柱の間に深く食い込み、やがて円柱の間を滑り落ちる。

よくある間違い

- モーメントの式を省き、そのため $G = F$ に気づかないこと。これがないと未知数が多すぎる。

- 板の摩擦力の向きを誤ること。円柱は互いに離れるように転がろうとするので、円柱にはたらく摩擦力は下向きかつ内向きである。
- $a = r(1 - \sin\theta)$ ではなく $a = r\sin\theta$ と書くこと。a は円柱の中心からではなく、中心線から測る。

STEP のその先へ

これは小さな静定（statically determinate）系である。3 つの物体があり、すべての力を決定するのに十分な数の式があり、摩擦から得られる不等式が可能な配置の範囲を定める。大学 1 年の講義では、同じ考え方が剛体のつり合いの条件（合力が 0 かつ合モーメントが 0）として再び現れ、さらに後にはくさび効果（wedging）や詰まり（jamming）の研究にも現れる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の静力学と摩擦を丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 2017、第 10 問

力学 ・ 抵抗に逆らってする仕事

> **STEP II 2017、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q10

鍵となる考え方

ニュートン（Newton）の第二法則（second law）から各点での駆動力（driving force）が求まり、エンジンのする仕事（work）はその力を距離について積分（integral）したものである。加速度（acceleration）が一定のとき、$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = a$ を用いると x についての積分を v についての積分に書き換えられる。唯一の微妙な点は、エンジンは押すことはできても引くことはできないということである。必要な力が負になると、その役目はブレーキ（brakes）が担い、エンジンは何も寄与しない。したがって、駆動力が正である区間でのみ積分する。

解答

車を x 軸上を動く質点（particle）とみなし、エンジンによる駆動力を F とする。車が前進している間、抵抗（resistance）$Av^2 + R$ が後ろ向きにはたらく。

前半。 ニュートンの第二法則より $F - (Av^2 + R) = ma$ であるから、

$$F = ma + R + Av^2,$$

となり、これは全区間で正である。力 F がその作用点（point of application）を $\mathrm{d}x$ だけ動かすときにする仕事は $F\,\mathrm{d}x$ であるから、前半でエンジンのする仕事は

$$\int_0^d (ma + R + Av^2)\,\mathrm{d}x,$$

となり、題意が示された。変数変換（change of variable）については、加速度が $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = a$ であるから $\mathrm{d}x = \frac{v}{a}\,\mathrm{d}v$ である。$v^2 = 2ax$（静止状態からの等加速度運動）であるから、

v は $x=0$ における 0 から $x=d$ における $\sqrt{2ad}=w$ まで変化する。よって仕事は

$$\int_0^w \frac{(ma+R+Av^2)\,v}{a}\,\mathrm{d}v,$$

となり、題意が示された。これを計算し、$w^2=2ad$ を用いると、

$$W_1=\frac{1}{a}\left[\frac{(ma+R)v^2}{2}+\frac{Av^4}{4}\right]_0^w=\frac{(ma+R)w^2}{2a}+\frac{Aw^4}{4a}=(ma+R)d+Aad^2.$$

後半。 今度は加速度が $-a$ であるから $F-(Av^2+R)=-ma$ となり、

$$F=Av^2+R-ma.$$

を得る。車は速さ w から 0 まで減速し、$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-a$ であるから $\mathrm{d}x=-\frac{v}{a}\mathrm{d}v$ である。$F>0$ であり、速さが v_1 から v_2 まで（$v_1>v_2$）減少する任意の区間において、エンジンのする仕事は

$$\int_{v_1}^{v_2} F\left(-\frac{v}{a}\right)\mathrm{d}v=\int_{v_2}^{v_1}\frac{(Av^2+R-ma)\,v}{a}\,\mathrm{d}v. \qquad (*)$$

である。

小問 (i)

$R>ma$ ならば、すべての v に対して $F=Av^2+(R-ma)>0$ であるから、エンジンは後半の全区間で仕事をする。$(*)$ で $v_1=w$、$v_2=0$ とすると、

$$W_2=\frac{1}{a}\left[\frac{(R-ma)v^2}{2}+\frac{Av^4}{4}\right]_0^w=(R-ma)d+Aad^2.$$

これらを足すと $ma\,d$ の項が打ち消し合い、仕事の総和は

$$W_1+W_2=2Aad^2+2Rd,$$

となり、題意が示された。

小問 (ii)

今度は $R<ma$ であるから、$F=Av^2-(ma-R)$ が 0 になるのはちょうど

$$v=u,\qquad \text{ただし} u^2=\frac{ma-R}{A}>0.$$

のときである。この速さが後半で実際に達成されるのは $u<w$、すなわち $\frac{ma-R}{A}<2ad$ のときであり、これはまさに条件 $R>ma-2Aad$ にほかならない。したがって、車が w から 0 まで減速する間、F は $v>u$ では正、速さ u で 0 となり、$v<u$ では負（ブレーキをかけている状態）である。これで最初の主張が示された。

考えてみよう なぜ (i) の答えをそのまま使えないのだろうか。

(i) の積分は後半全体にわたって $F\,\mathrm{d}x$ を足し合わせている。ここでは $v < u$ で F が負になり、その区間は総和から**差し引かれて**しまう。しかし、エンジンはそこで負の仕事をしているわけではない。エンジンは何もしておらず、ブレーキが代わりに働いているのである。そこで積分を $v = u$ で打ち切る。$(*)$ で $v_1 = w$、$v_2 = u$ とすると、

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{1}{a}\left[\frac{(R-ma)v^2}{2} + \frac{Av^4}{4}\right]_u^w \\ &= (R-ma)d + Aad^2 - \frac{1}{a}\left(\frac{(R-ma)u^2}{2} + \frac{Au^4}{4}\right). \end{aligned}$$

$Au^2 = ma - R$ を代入すると、括弧内は

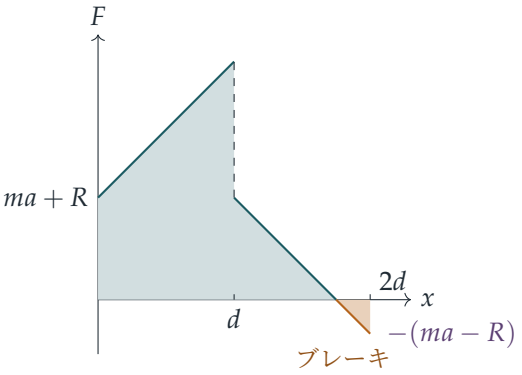
$$-\frac{(ma-R)^2}{2A} + \frac{(ma-R)^2}{4A} = -\frac{(ma-R)^2}{4A},$$

となるので、$W_2 = (R-ma)d + Aad^2 + \frac{(ma-R)^2}{4Aa}$ である。前半は変わらない（そこでは常に $F > 0$）から、総和は

$$W_1 + W_2 = 2Aad^2 + 2Rd + \frac{(ma-R)^2}{4Aa},$$

となり、題意が示された。

図で見る。 前半では $v^2 = 2ax$、後半では $v^2 = 2a(2d-x)$ であるから、F はそれぞれの区間で x の**一次**関数（linear function）であり、エンジンのする仕事はグラフの正の部分の下側の面積に等しい。(ii) の場合、グラフは終点近くで軸の下に沈み込む。取り除かれる三角形の高さは $ma - R$ であり、F は単位距離あたり $2Aa$ の割合で減少するから、底辺は $\frac{ma-R}{2Aa}$ である。その面積 $\frac{(ma-R)^2}{4Aa}$ がちょうど追加の項になっている。



検算

- 境界 $R = ma$ では追加の項が消えるので、(i) と (ii) の答えは一致する。このとき F は終点でちょうど 0 に達するだけなので、一致するのは当然である。
- もう一方の境界 $R = ma - 2Aad$ では $u = w$ となり、エンジンは後半で何もしないので、総和は $W_1 = (ma + R)d + Aad^2$ となるはずである。(ii) の答えに $ma - R = 2Aad$ を代入すると $2Aad^2 + 2Rd + Aad^2 = 2Rd + 3Aad^2$ となり、一方 $(ma + R)d + Aad^2 = 2Rd + 2Aad^2 + Aad^2$ でもあるから、両者は一致する。
- 数値的には、$m = a = 1$、$A = \frac{1}{2}$、$d = 2$、$R = \frac{1}{2}$（上の図の場合）とすると、(ii) の公式は $4 + 2 + \frac{1}{8} = 6.125$ を与え、全行程にわたって F の正の部分を直接数値積分しても同じ値が得られる。
- 単位：Aad^2、Rd、$(ma - R)^2/(Aa)$ はいずれも力と距離の積であるから、すべてエネルギーである。

よくある間違い

- 後半で $\mathrm{d}x = -\frac{v}{a}\,\mathrm{d}v$ となり、積分の上端と下端が入れ替わることを忘れる。ここで符号を誤ると、後半の仕事が負になってしまう。
- (ii) で F の負の部分まで積分してしまう。これでは (i) の答えがそのまま再現されるだけである。
- 車が止まる前に速さ u に実際に達するかどうかを確認しない。それを保証しているのが R の下限である。

STEP のその先へ

力のする仕事は線積分（line integral）$\int \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ であり、ここで用いた変数変換は仕事とエネルギーの定理（work–energy theorem）の一次元版である。Av^2 のような抵抗は保存力（conservative force）ではないので、仕事は出発点と到着点だけでなく、どのように運転したかによって決まる。エンジンの「一方向にしか働かない」性質は、与えられた距離を最も燃料効率よく走る方法を求めるといった最適制御（optimal control）問題に現れる制約の、ささやかな先取りである。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、仕事、エネルギー、速度に依存する力を丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 2017、第 11 問

力学 ・ 放物運動とエネルギー

STEP II 2017、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

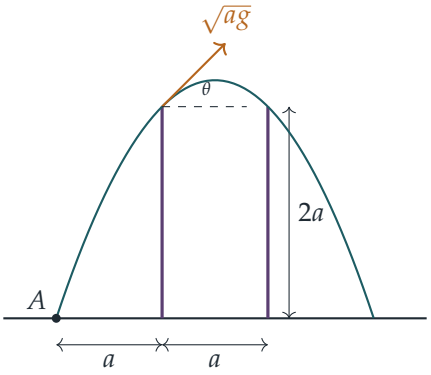
step.maths.org/questions/17-s2-q11

鍵となる考え方

粒子が第 1 の壁の上端と同じ高さに達した時点から、残りの飛行は新たな放物運動（projectile motion）の問題になる。すなわち、粒子は既知の速さで高さ $2a$ から出発し、水平距離 a だけ進んだ後もなお高さ $2a$ 以上になければならない。その速さは、投射角を知らなくてもエネルギーから求められる。軌道を $\tan\theta$ を用いて表すと、「第 2 の壁を越えられるか？」という問いは「$\tan\theta$ の二次式（quadratic）が実数解をもつか？」という問いに変わり、これで両方の小問を一度に扱える。

解答

各粒子を、空気抵抗（air resistance）のない状態で重力のみを受けて自由に運動する質点（point mass）とみなす。x を水平方向（壁に向かう向き）、y を鉛直上向きにとる。



小問 (i)

第 1 の壁の上での速さ。仕事をするのは重力だけなので、運動エネルギー（kinetic energy）と位置エネルギー（potential energy）の和は一定である。地面から高さ $2a$ まで上昇し、壁の上端での速さを v とすると、

$$\tfrac{1}{2}m(5ag) = \tfrac{1}{2}mv^2 + mg(2a) \quad \Longrightarrow \quad v^2 = 5ag - 4ag = ag,$$

となるので、粒子は速さ $\sqrt{ag}$ で第 1 の壁の上を通過する。

角度。粒子が第 1 の壁の上を通過するとき、速度が水平方向より上向きに角 θ をなすとする。粒子はその後（第 2 の壁の上で）再び高さ $2a$ にあるから、この時点ではまだ上昇中でなければならず、$\theta > 0$ である。第 1 の壁の上端を基準にとると、水平距離 X だけ進んだ後の、壁の上端の高さからの高さは

$$Y = X\tan\theta - \frac{gX^2}{2v^2\cos^2\theta} = X\tan\theta - \frac{X^2}{2a}\left(1+\tan^2\theta\right),$$

である。ここで $v^2 = ag$ と $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$ を用いた。第 2 の壁をぎりぎり越えるとは、$X = a$ で $Y = 0$ となることである：

$$a\tan\theta - \tfrac{a}{2}(1+\tan^2\theta) = 0 \iff \tan^2\theta - 2\tan\theta + 1 = 0 \iff (\tan\theta - 1)^2 = 0.$$

よって $\tan\theta = 1$、すなわち $\theta = 45^\circ$ であり、これが示すべきことであった。（同値な見方：高さ $2a$ から同じ高さ $2a$ に戻るまでの水平到達距離（range）は $v^2\sin 2\theta/g = a\sin 2\theta$ であり、これが a に等しくなるのは $\sin 2\theta = 1$ のときに限る。）

A までの距離。速度の水平成分は変化せず、第 1 の壁の上では $\sqrt{ag}\cos 45^\circ = \sqrt{ag/2}$ である。そこでの鉛直成分も上向きに $\sqrt{ag/2}$ である。A における鉛直成分 u は $u^2 = \frac{1}{2}ag + 2g(2a) = \frac{9}{2}ag$ を満たすので、$u = 3\sqrt{ag/2}$ である。（検算として、$\frac{1}{2}ag + \frac{9}{2}ag = 5ag$ となり、投射時の速さと一致する。）A から第 1 の壁までにかかる時間は

$$t = \frac{u - \sqrt{ag/2}}{g} = \frac{2\sqrt{ag/2}}{g},$$

であり、その間に進む水平距離は

$$\sqrt{\tfrac{ag}{2}}\cdot\frac{2\sqrt{ag/2}}{g} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}ag}{g} = a.$$

である。よって A は第 1 の壁の根元から距離 a の位置にある。

小問 (ii)

今度は粒子が第 1 の壁の上を高さ $2a+h$ で通過するとする。エネルギーより、そこでの速さ w は

$$w^2 = 5ag - 2g(2a+h) = g(a-2h).$$

を満たす。粒子は壁に向かって運動するので、水平方向の速度は 0 でなく、$w^2 > 0$ である。したがって $h < \frac{1}{2}a$ である。

そこでの運動方向が水平方向となす角を ϕ とし、$T = \tan\phi$ とおく。第 1 の壁の上での粒子の位置を基準にとると、水平距離 X だけ進んだ後の、その点からの高さは

$$Y = XT - \frac{gX^2}{2w^2}(1+T^2) = XT - kX^2(1+T^2)/a^2, \qquad \text{ただし} k = \frac{ga^2}{2w^2} = \frac{a^2}{2(a-2h)}.$$

である。第 2 の壁では $X = a$ なので、$Y = aT - k(1+T^2)$ となる。この壁を越えるには、粒子が高さ $2a$ 以上になければならない。すなわち $Y \geq -h$ である：

$$aT - k(1+T^2) + h \geq 0 \iff kT^2 - aT + (k-h) \leq 0.$$

考えてみよう ϕ はわからない。どの方向でもうまくいかないことは、どうすれば示せるだろうか？

$k > 0$ なので、二次式 $kT^2 - aT + (k-h)$ のグラフは下に凸である。ある実数 T に対してこの値が ≤ 0 となるのは、判別式（discriminant）が非負のときに限る。その判別式は

$$\Delta = a^2 - 4k(k-h) = a^2 - \frac{a^4}{(a-2h)^2} + \frac{2a^2h}{a-2h}.$$

である。正の量 $(a-2h)^2/a^2$ を掛けると、

$$\frac{(a-2h)^2}{a^2}\Delta = (a-2h)^2 - a^2 + 2h(a-2h) = -2ah.$$

となる。$a > 0$ かつ $h > 0$ なので、これは負であり、$\Delta < 0$ である。よってすべての実数 T に対して $kT^2 - aT + (k-h) > 0$ であるから、第 1 の壁の上で粒子がどの方向に進んでいても、第 2 の壁に達したとき粒子は高さ $2a$ より下にある。したがって粒子は第 2 の壁を越えない。

$h = 0$ とすると $\Delta = 0$ となり、重解（double root）$T = a/(2k) = 1$ が得られることに注意しよう。これはちょうど小問 (i) の 45° である。

検算

- 小問 (i) において、A での速度成分は $\sqrt{ag/2}$ と $3\sqrt{ag/2}$ であり、その 2 乗の和は $5ag$ となる。$a = 1.7\,\mathrm{m}$、$g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ として A から運動を時間刻みで追うと、両方の壁の位置で高さ $2.000a$ が得られる。
- 軌道は最高点に関して対称であり、小問 (i) ではその最高点は 2 つの壁のちょうど中間、A から水平距離 $1.5a$ の位置にある。よって粒子は A から $3a$ の地点、すなわち第 2 の壁から距離 a だけ先に着地する。図は対称になっている。

- 小問 (ii) については、速さ $\sqrt{5ag}$ で投射角と投射点を無作為に何千通りも選んでコンピュータで調べたところ、第 1 の壁の上を通過し、かつ第 2 の壁も越えるものは 1 つも見つからなかった。

よくある間違い

- 小問 (i) の θ が第 1 の壁の上での角度であって、A での投射角（こちらは $\tan\alpha = 3$ を満たす）ではないことを忘れる。
- 小問 (ii) で、ある特定の角度（たとえば 45°）だけを調べる。主張はあらゆる方向についてのものであり、だからこそ判別式が必要になる。

STEP のその先へ

小問 (ii) が述べているのは、第 1 の壁の上の点から、このエネルギーをもつ粒子は第 2 の壁の上端にぎりぎり届くのが精一杯だということである。つまり、その壁の上端は到達可能な領域の境界上にある。与えられた点から与えられた速さで到達できる点はすべて、**包絡線**（envelope）あるいは**安全放物線**（safety parabola）と呼ばれる放物線の内側にあり、その放物線上の点にはちょうど 1 本の軌道（trajectory）だけが到達する。これがここで見た重解である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物運動とエネルギーを用いる方法を大学 1 年次の水準で扱っている。

解答例

STEP II 2017、第 12 問

確率・統計 ・ ポアソン過程

> **STEP II 2017、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q12

鍵となる考え方

魚が釣れる様子を表す独立な 2 つのポアソン（Poisson）的な流れは合流して 1 つのポアソン的な流れになり、その率は 2 つの率の和になる。これが (i) の畳み込み（convolution）が示していることである。時刻に関する問いでは、最初の魚が**いつ**来るかについての命題を、魚が**何匹**釣れたかについての命題に言い換える。「Adam の最初の魚は時刻 t より後に来る」とは、まさに「Adam は $[0,t]$ で 1 匹も釣らない」ということであり、その確率はポアソン分布の公式からただちに得られる。

解答

以下を通して、X と Y は長さ T の区間において Adam と Eve が釣る魚の数とする。したがって $X \sim \mathrm{Po}(\lambda T)$、$Y \sim \mathrm{Po}(\mu T)$ であり、両者は独立（independent）である。

小問 (i)

整数 $r \geq 0$ に対して、事象 $X+Y=r$ は $j=0,1,\ldots,r$ についての互いに排反な事象 $\{X=j,\, Y=r-j\}$ に分割される。独立性を用いると、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X+Y=r) &= \sum_{j=0}^{r} \mathrm{P}(X=j)\,\mathrm{P}(Y=r-j) = \sum_{j=0}^{r} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^j}{j!} \cdot \frac{e^{-\mu T}(\mu T)^{r-j}}{(r-j)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)T}}{r!} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (\lambda T)^j (\mu T)^{r-j} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)T}\big((\lambda+\mu)T\big)^r}{r!},\end{aligned}$$

となる。ここでは $r!$ を掛けて割り、そのあと二項定理（binomial theorem）を用いた。これは $\mathrm{Po}\big((\lambda+\mu)T\big)$ の確率であるから、時間 T における釣果の合計はパラメー

タ $(\lambda+\mu)T$ のポアソン分布（Poisson distribution）に従う。

小問 (ii)

$0 \le r \le k$ に対して、

$$\mathrm{P}(X=r \mid X+Y=k) = \frac{\mathrm{P}(X=r,\, Y=k-r)}{\mathrm{P}(X+Y=k)} = \frac{\dfrac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^r}{r!} \cdot \dfrac{e^{-\mu T}(\mu T)^{k-r}}{(k-r)!}}{\dfrac{e^{-(\lambda+\mu)T}\big((\lambda+\mu)T\big)^k}{k!}},$$

である。分母には小問 (i) を用いた。指数関数は約分され、T のべきも約分される（分子に $r+(k-r)=k$ 個、分母に k 個ある）。残るのは

$$\mathrm{P}(X=r \mid X+Y=k) = \binom{k}{r}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^r\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{k-r}.$$

である。したがって、合計が k であるという条件のもとで、Adam の釣果は $\mathrm{B}\big(k,\, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\big)$ に従う。実質的には、k 匹の魚のそれぞれが独立に確率 $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ で Adam のものになるということである。T が消えていることに注意しよう。

小問 (iii)

A と E を、開始時点から測って Adam と Eve がそれぞれ最初の魚を釣る時刻とする。Adam の最初の魚が時刻 t より後に来るのは、ちょうど $[0,t]$ で何も釣らないときであるから、

$$\mathrm{P}(A>t) = \mathrm{P}\big(\mathrm{Po}(\lambda t)=0\big) = e^{-\lambda t}, \qquad \text{同様に} \qquad \mathrm{P}(E>t) = e^{-\mu t}.$$

となる。よって A は $t \ge 0$ において確率密度関数（probability density function）$\lambda e^{-\lambda t}$ をもち（$1-e^{-\lambda t}$ を微分すればよい）、2 人の釣果が独立であるから A と E も独立である。

> **考えてみよう** A の密度関数と E の確率を、どのように組み合わせればよいだろうか。

A の値で条件付ける。Adam の最初の魚が時刻 t に来たとすると、彼が先になるのはちょうど $E>t$ のときであり、独立性からその確率は $e^{-\mu t}$ である。すべての t について足し合わせると、

$$\mathrm{P}(A<E) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\, e^{-\mu t}\, \mathrm{d}t = \lambda\left[\frac{-e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu}\right]_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

となる（E は連続分布に従うので、同時になる確率は 0 である）。したがって、最初の魚が Adam のものである確率は $\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$ であり、これは (ii) の二項分布のパラメータと同じである。

小問 (iv)

求めたいのは $\mathrm{E}(M)$ である。ここで $M = \max(A, E)$ は 2 人とも魚を釣り終えている時刻である。$m = \min(A, E)$ を、2 人のどちらかが最初の魚を釣る時刻とする。任意の 2 数について max + min はそれらの和であるから、

$$M = A + E - m \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{E}(M) = \mathrm{E}(A) + \mathrm{E}(E) - \mathrm{E}(m).$$

$\mathrm{E}(A)$ と $\mathrm{E}(E)$。開始時点から見た Adam の釣果は、任意の 1 匹を釣った瞬間から見たものと同じ種類の過程をなす。したがって最初の魚までの待ち時間の期待値（expectation）は、与えられた間隔の期待値と同じで $\mathrm{E}(A) = \lambda^{-1}$ であり、同様に $\mathrm{E}(E) = \mu^{-1}$ である（直接計算すると、部分積分（integration by parts）により $\mathrm{E}(A) = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda^{-1}$ となる）。

> **考えてみよう** 「2 人のどちらかが釣る最初の魚」とは、どのような種類の過程だろうか。

小問 (i) より、長さ t の任意の区間における 2 人の釣果の合計は $\mathrm{Po}\big((\lambda+\mu)t\big)$ に従う。したがって合計の釣果は Adam の釣果とまったく同じ種類の過程であり、ただ λ の代わりに率が $\lambda + \mu$ になっている。よって最初の魚までの待ち時間の期待値は $\mathrm{E}(m) = (\lambda+\mu)^{-1}$ である（直接計算すると $\mathrm{P}(m > t) = \mathrm{P}(A > t)\,\mathrm{P}(E > t) = e^{-(\lambda+\mu)t}$ となる）。ゆえに

$$\mathrm{E}(M) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2}{\lambda\mu(\lambda+\mu)}.$$

検算

- $\lambda = \mu$ のとき、小問 (iii) は対称性から当然そうあるべきとおり $\frac{1}{2}$ を与え、小問 (iv) は $\frac{3}{2\lambda}$ を与える。これは、最初の魚まで $\frac{1}{2\lambda}$ 待ち、同じ「新たな出発」の考え方により、もう 1 人のためにさらに $\frac{1}{\lambda}$ 待つということである。
- $\mu \to \infty$（Eve が瞬時に魚を釣る）のとき、小問 (iv) の値は Adam が 1 人で要する時間 $\frac{1}{\lambda}$ に近づく。
- $\frac{1}{\mu} > \frac{1}{\lambda+\mu}$ であるから、(iv) の答えは当然そうあるべきとおり $\max(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\mu})$ 以上である。
- $\lambda = 1.3$、$\mu = 0.7$ のとき、公式は 0.65 と 1.6978 を与える。2×10^5 回の釣りをコンピュータでシミュレーションしたところ、0.651 と 1.700 が得られた。

よくある間違い

- (iv) で $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$ と足してしまったり、$\max\left(\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\mu}\right)$ をとってしまったりすること。最大値の期待値はそのどちらでもない。
- (ii) で $\mathrm{P}(X+Y=k)$ で割るのを忘れること。この割り算こそが、同時確率を条件付き確率（conditional probability）に変えるものである。

STEP のその先へ

ここで出会ったのは**ポアソン過程**（Poisson process）である。事象の間の待ち時間は指数分布（exponential distribution）に従い無記憶性（memoryless）をもつこと、独立なポアソン過程は重ね合わせると再びポアソン過程になること、そして各事象はその率に比例する確率で独立にラベル付けされること（逆の操作である「間引き」（thinning）も成り立つ）。これらの事実は、待ち行列理論（queueing theory）や連続時間マルコフ連鎖（continuous-time Markov chains）の基礎である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、この問題から自然につながる形でポアソン過程と指数分布を扱っている。

解答例

STEP II 2017、第 13 問

確率・統計 ・ 期待値と無限級数

> **STEP II 2017、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q13

鍵となる考え方

どの設定でも、扉が k 回目の試行で開くのは、最初の $k-1$ 回の試行がすべて失敗し、k 回目が成功するときであり、またそのときに限る。したがって、その確率（probability）は「失敗」の因子の積に「成功」の因子を一つ掛けたものになる。設定ごとに変わるのは、各回に鍵を取り出すとき袋の中に鍵が何本あるかである。確率を書き下してしまえば、期待値（expectation）は和として求まる。(i) では等比級数（geometric series）を微分したもの、(ii) では等差級数（arithmetic series）、そして (iii) では打ち消し合う和（telescoping sum）であり、最後のものは調和級数（harmonic series）の一部を残す。

解答

以下を通して、扉が開く試行の回数を X とし、$q = 1 - \frac{1}{n}$ とおく。

小問 (i)

鍵は毎回元に戻されるので、各回の取り出しは n 本の鍵がすべて入った袋から、それ以前の取り出しとは独立に行われる。よって各試行は確率 $\frac{1}{n}$ で成功し、

$$\mathrm{P}(X = k) = q^{k-1} \cdot \frac{1}{n}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

である。$0 < q < 1$ であるから二項展開（binomial expansion）が使えて、

$$(1-q)^{-2} = 1 + 2q + 3q^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1}.$$

したがって

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, q^{k-1} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(1-q)^{-2} = \frac{1}{n} \cdot n^2 = n.$$

試行回数の期待値は n である。

小問 (ii)

今度は失敗するたびに袋から間違った鍵が 1 本取り除かれるので、j 回目の試行のときには鍵は $n-j+1$ 本ある。扉が k 回目の試行で開くには、$k-1$ 回失敗した後に成功する必要がある：

$$\mathrm{P}(X=k) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{n-k+1}{n-k+2} \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n},$$

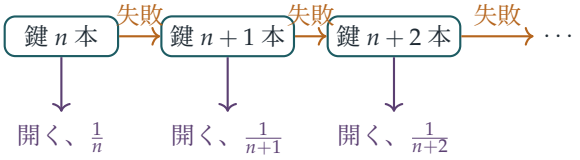
積が打ち消し合うからである。（これは直接考えても明らかである。鍵を元に戻さずに 1 本ずつ取り出すと、正しい鍵は n 個の位置のうち一様にランダムな位置に来る。）よって X は $\{1,2,\ldots,n\}$ 上の一様分布（uniform distribution）に従い、

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

小問 (iii)

確率。 袋には最初 n 本の鍵があり、失敗するたびに間違った鍵が 1 本加えられ、正しい鍵は常にちょうど 1 本含まれている。よって j 回目の試行のときには鍵は $n+j-1$ 本あり、条件付き確率（conditional probability）は

$$\mathrm{P}(\text{試行}j\text{回目が失敗} \mid \text{それ以前の試行がすべて失敗}) = \frac{n+j-2}{n+j-1}.$$



$k-1$ 回の失敗とその後の成功について条件付き確率を掛け合わせると、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=k) &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \cdots \frac{n+k-3}{n+k-2} \cdot \frac{1}{n+k-1} \\ &= \frac{n-1}{n+k-2} \cdot \frac{1}{n+k-1} = \frac{n-1}{(n+k-1)(n+k-2)},\end{aligned}$$

となる。各分子が一つ前の分母と約分され、最初の分子 $n-1$ と最後の失敗の因子の分母 $n+k-2$ だけが残るからである。$k=1$ のときは失敗の因子はなく、公式は $\frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}$ を与えるが、これは正しい値である。これが求める結果である。

扉は必ず開く。 平均を計算する前に、X が確率 1 で有限であることを確かめておく価値がある。$\dfrac{n-1}{(n+k-1)(n+k-2)} = (n-1)\left(\dfrac{1}{n+k-2} - \dfrac{1}{n+k-1}\right)$ であるから、和は打ち消し合う：

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{P}(X=k) = (n-1)\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+N-1}\right) \to 1 \quad \text{極限} N \to \infty.$$

期待値。 $\sum k\,\mathrm{P}(X=k)$ が必要なので、$\dfrac{k}{(n+k-1)(n+k-2)}$ を部分分数（partial fractions）に分解する。

$$k = A(n+k-2) + B(n+k-1)$$

とおき、$k = 1-n$ を代入すると $1-n = -A$ より $A = n-1$ を得る。$k = 2-n$ を代入すると $B = 2-n$ を得る。したがって

$$k\,\mathrm{P}(X=k) = (n-1)\left(\frac{n-1}{n+k-1} - \frac{n-2}{n+k-2}\right).$$

考えてみよう 係数 $n-1$ と $n-2$ が異なるので、これはきれいには打ち消し合わない。では、何が残るのだろうか？

最初の N 項の和を S_N とする。第 1 の分数では分母は $m = n, \ldots, n+N-1$ を動き、第 2 の分数では $m = n-1, \ldots, n+N-2$ を動く。共通の範囲 $m = n, \ldots, n+N-2$ では各 $\frac{1}{m}$ が係数 $(n-1)-(n-2) = 1$ で現れ、両端が残る：

$$S_N = (n-1)\left(\sum_{m=n}^{n+N-2} \frac{1}{m} + \frac{n-1}{n+N-1} - \frac{n-2}{n-1}\right).$$

最後の 2 項は有界である（中央の項は正で、最後の項は定数である）。一方、

$$\sum_{m=n}^{n+N-2} \frac{1}{m} = \sum_{m=1}^{n+N-2} \frac{1}{m} - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \to \infty$$

が $N \to \infty$ のとき成り立つ。調和級数は発散（diverge）し、引いているのは一定の有限な量にすぎないからである。$n-1 > 0$ であるから $S_N \to \infty$ となる。項 $k\,\mathrm{P}(X=k)$ はすべて正なので、$\mathrm{E}(X)$ を定める級数は無限大に発散する。すなわち、扉はいずれ必ず開くにもかかわらず、試行回数の期待値は無限大である。

検算

- $n = 2$ のとき、三つの答えは 2、$\frac{3}{2}$、∞ である。設定 2 は同じ鍵を二度試すことがないので、当然ながら最も効率がよい。設定 1 はその中間である。

- (iii) で $n = 3$ のとき、公式は $k = 1, 2, 3$ に対して $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}$ を与える。直接計算すると $\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$、$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$ である。2×10^5 回のゲームのコンピュータシミュレーションでは、相対度数は 0.334、0.168、0.099 であった。
- 同じく $n = 3$ のとき、$N = 10^4$ での部分和 S_N は約 15.6 であり、$2 \ln N$ のように増え続ける。極限は存在しない。

よくある間違い

- (iii) で、k 回目の試行のときの袋の中の鍵の本数を $n + k - 1$ ではなく $n + k$ としてしまう。k 回目の取り出しの前に加えられた鍵は $k - 1$ 本だけである。
- 平均が無限大なので扉は決して開かないかもしれない、と結論してしまう。確率の和は 1 である。$1/k^2$ のように減衰する裾が重すぎて、$\sum k \, \mathrm{P}(X = k)$ が収束しないというだけのことである。
- 二つの係数が等しいかのように部分分数を打ち消し合わせ、有限の答えを得てしまう。

STEP のその先へ

設定 3 では、$\mathrm{P}(X = k)$ が $1/k^2$ のように振る舞うため、確率 1 で有限であるにもかかわらず平均が無限大となる確率変数（random variable）が得られる。このような裾の重い分布（heavy-tailed distribution）や、有名なサンクトペテルブルクのパラドックス（St Petersburg paradox）は、大学 1 年の確率論の講義で $\mathrm{E}(X)$ は $\sum k \, \mathrm{P}(X = k)$ が収束するときに限り存在すると強調される理由を示している。失敗するたびに間違った鍵が加えられる袋は、「富める者はますます富む」過程の標準的なモデルであるポリア（Pólya）の壺の仲間である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、離散確率変数の期待値とこうした微妙な点を扱っている。

解答例

STEP III 2017、第 1 問

純粋数学 ・ 望遠鏡型級数による評価

STEP III 2017、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/17-s3-q1

鍵となる考え方

(i) の恒等式（identity）は、二項係数（binomial coefficient）の逆数それぞれを、定数と隣り合う項の**差**の積として表すものである。そのため和は隣り合う項が次々に打ち消し合い、両端だけが残る（telescoping）。(ii) では、$1/n^3$ の和を直接求めるのは難しいが、二項係数の逆数の和ならば求められる。$\binom{n+1}{3}$ と $\binom{n+2}{5}$ は n の多項式であり、それぞれ n^3 と n^5 の定数倍のようにふるまう。そこで、(i) を用いて正確に和を求められる式で $1/n^3$ を上下からはさみ込む。

解答

小問 (i)

$\binom{m}{k} = \dfrac{m!}{k!\,(m-k)!}$ と書く。すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{\binom{n+r-1}{r}} - \frac{1}{\binom{n+r}{r}} &= \frac{r!\,(n-1)!}{(n+r-1)!} - \frac{r!\,n!}{(n+r)!} \\ &= \frac{r!\,(n-1)!}{(n+r)!}\big[(n+r)-n\big] = \frac{r\cdot r!\,(n-1)!}{(n+r)!}\end{aligned}$$

となる。ここで $(n+r)! = (n+r)\,(n+r-1)!$ と $n! = n\,(n-1)!$ を用いて、共通因数 $r!\,(n-1)!/(n+r)!$ をくくり出した。両辺に $\frac{r+1}{r}$ を掛けると

$$\frac{r+1}{r}\left(\frac{1}{\binom{n+r-1}{r}} - \frac{1}{\binom{n+r}{r}}\right) = \frac{(r+1)!\,(n-1)!}{(n+r)!} = \frac{1}{\binom{n+r}{r+1}}$$

を得る。$(n+r)-(r+1) = n-1$ だからである。これが求める恒等式である。

和について。$a_n = 1/\binom{n+r-1}{r}$ とおくと、恒等式は $1/\binom{n+r}{r+1} = \frac{r+1}{r}(a_n - a_{n+1})$ と書ける。$n=1$ から N まで和をとると、最初と最後の項以外はすべて打ち消し合う：

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\binom{n+r}{r+1}} = \frac{r+1}{r}(a_1 - a_{N+1}) = \frac{r+1}{r}\left(1 - \frac{1}{\binom{N+r}{r}}\right),$$

ここで $a_1 = 1/\binom{r}{r} = 1$ を用いた。$N \to \infty$ のとき（$r \geq 1$ ならば）$\binom{N+r}{r} \geq N + r \to \infty$ であるから、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+r}{r+1}} = \frac{r+1}{r}$$

である。

導かれる結果。$r=2$ とすると、$n=1$ からの和は $\frac{3}{2}$ である。$n=1$ の項は $1/\binom{3}{3} = 1$ であるから、

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+2}{3}} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

小問 (ii)

第1の不等式。$n \geq 3$ のとき

$$\frac{1}{\binom{n+1}{3}} = \frac{3!}{(n+1)n(n-1)} = \frac{3!}{n^3 - n} > \frac{3!}{n^3}$$

である。$0 < n^3 - n < n^3$ だからである（左側の不等式は $n \geq 2$ から従う）。

第2の不等式。$\binom{n+1}{3} = \frac{1}{6}n(n^2-1)$ であり、$\binom{n+2}{5} = \frac{1}{120}(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2) = \frac{1}{120}n(n^2-1)(n^2-4)$ である。よって

$$\frac{20}{\binom{n+1}{3}} - \frac{1}{\binom{n+2}{5}} = \frac{120}{n(n^2-1)} - \frac{120}{n(n^2-1)(n^2-4)} = \frac{120\,(n^2-5)}{n(n^2-1)(n^2-4)}.$$

$n \geq 3$ のとき因数 n、n^2-1、n^2-4 はすべて正であるから、これが $120/n^3 = 5!/n^3$ より小さいことは

$$n^2(n^2-5) < (n^2-1)(n^2-4), \quad \text{すなわち} \quad n^4 - 5n^2 < n^4 - 5n^2 + 4$$

と同値であり、これは成り立つ。

考えてみよう (i) のどの和が必要で、それらはどこから始まるか？

必要なのは $\sum_{n\geq 3} 1/\binom{n+1}{3}$ と $\sum_{n\geq 3} 1/\binom{n+2}{5}$ である。前者では $m = n-1$ とおくと $\sum_{m\geq 2} 1/\binom{m+2}{3} = \frac{1}{2}$ となり、これはちょうど (i) で導いた結果である。後者では $m = n-2$ とおくと $\sum_{m\geq 1} 1/\binom{m+4}{5}$ となり、これは (i) で $r=4$ とした場合であるから、値は $\frac{5}{4}$ である。

ここに現れる級数（series）はすべて収束（converge）する（いずれも正項級数であり、不等式そのものが示すように収束する級数で上から抑えられている）。収束する級数どうしの狭義の不等式（strict inequality）を項ごとに足し合わせると、やはり狭義の不等式が得られる。正の差の和は少なくともその第 1 項以上であり、第 1 項は正だからである。$T = \sum_{n\geq 3} 1/n^3$ とおく。

上からの評価。第 1 の不等式を $n \geq 3$ について足し合わせると

$$6T < \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+1}{3}} = \frac{1}{2}, \qquad \text{よって} \qquad T < \frac{1}{12}.$$

下からの評価。第 2 の不等式を $n \geq 3$ について足し合わせると

$$120\,T > 20 \cdot \frac{1}{2} - \frac{5}{4} = \frac{35}{4}, \qquad \text{よって} \qquad T > \frac{35}{480} = \frac{7}{96}.$$

最後に、$\sum_{n\geq 1} 1/n^3 = 1 + \frac{1}{8} + T$ であり、$1 + \frac{1}{8} = \frac{108}{96}$ である。したがって

$$\frac{108+7}{96} = \frac{115}{96} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{108}{96} + \frac{8}{96} = \frac{116}{96}$$

となり、示すべきことが示された。

検算

- $n = r = 1$ で恒等式を確かめる：$1/\binom{2}{2} = 1$ であり、$2\,(1/\binom{1}{1} - 1/\binom{2}{1}) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ である。
- $r = 1$ のとき和は $\sum 1/\binom{n+1}{2} = \sum \frac{2}{n(n+1)} = 2$ となる。これはおなじみの打ち消し合う和であり、$\frac{r+1}{r} = 2$ と一致する。
- 数値的には $\sum 1/n^3 \approx 1.20206$ であり、$\frac{115}{96} \approx 1.19792$、$\frac{116}{96} \approx 1.20833$ であるから、評価は確かに成り立ち、値を約 0.01 の範囲に絞り込んでいる。

よくある間違い

- 添字をずらした後の開始位置を間違える：$\sum_{n\geq 3} 1/\binom{n+1}{3}$ は $\binom{4}{3}$ から始まり、これは (i) で導いた和の $n = 2$ の項であって、$n = 1$ の項ではない。
- 不等式でカバーされない $n = 1, 2$ の項 $1 + \frac{1}{8}$ を足し忘れる。

STEP のその先へ

数 $\sum 1/n^3$ は $\zeta(3)$ であり、アペリーの定数（Apéry's constant）と呼ばれる。$\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ とは異なり、閉じた形（closed form）の表示は知られていない。アペリー（Apéry）

が 1978 年にこれが無理数（irrational）であることを証明した際には、ここで扱ったものとよく似た、速く収束する級数が用いられた。級数を打ち消し合う和と比較することや、不等式を項ごとに足し合わせることは、大学最初の解析学（analysis）の講義における標準的な道具である。収束と比較判定法（comparison test）を丁寧に扱ったものとしては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照するとよい。

解答例

STEP III 2017、第 2 問

純粋数学 ・ 複素平面上の回転

STEP III 2017、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/17-s3-q2

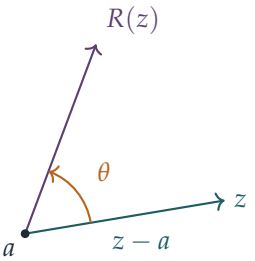
鍵となる考え方

a を中心とする回転（rotation）は、原点を a に移して考えると最も記述しやすい。すなわち、a を引き、$e^{i\theta}$ を掛け、再び a を足せばよい。したがって、どの回転も $z \mapsto e^{i\alpha}z + k$ の形をしており、逆にこのような写像は（$e^{i\alpha} \neq 1$ であれば）その不動点（fixed point）を中心とする角 α の回転である。そこで SR を特定するには、2 つの式を合成（composition）し、不動点を求めればよい。半角（half-angle）を用いた因数分解 $1 - e^{i\alpha} = -2i\, e^{i\alpha/2} \sin \frac{1}{2}\alpha$ によって、答えは求められている形になる。

解答

小問 (i)

中心 a から P へのベクトルは $z - a$ である。a を中心に反時計回りに θ だけ回転させると、このベクトルは θ だけ回転する。これは複素数では $e^{i\theta}$ を掛けることにあたり、$|e^{i\theta}| = 1$ であるから長さは変わらない。



よって P の像 w は $w-a=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-a)$ を満たす。すなわち

$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z+a\bigl(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\bigr),$$

となり、これが示すべきことであった。同様に $S(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}z+b\bigl(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\bigr)$ である。

小問 (ii)

まず R を、次に S を施す。

$$\begin{aligned}SR(z)&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\Bigl(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z+a\bigl(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\bigr)\Bigr)+b\bigl(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\bigr)\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}z+a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\bigl(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\bigr)+b\bigl(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\bigr).\end{aligned}$$

小問 (i) より、c を中心とする角 $\theta+\phi$ の回転は $z\mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}z+c\bigl(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}\bigr)$ である。z の係数はすでに一致しているので、SR がこの回転となるのは、ちょうど

$$c\bigl(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}\bigr)=a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\bigl(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\bigr)+b\bigl(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\bigr). \qquad (*)$$

が成り立つときである。

考えてみよう 括弧 $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ を半角の正弦に変えるにはどうすればよいか。

因数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}$ をくくり出して、括弧の中を対称な形にする。

$$1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\bigl(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\bigr)=-2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

これを $\alpha=\theta+\phi$、θ、ϕ に対して用いると、式 $(*)$ は

$$-2\mathrm{i}\,c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)/2}\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)=-2\mathrm{i}\,a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\sin\tfrac{1}{2}\theta-2\mathrm{i}\,b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}\sin\tfrac{1}{2}\phi.$$

となる。両辺を $-2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)/2}$（これは決して 0 にならない）で割ると

$$c\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)=a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}\sin\tfrac{1}{2}\theta+b\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\sin\tfrac{1}{2}\phi.$$

を得る。$\theta+\phi\neq 2n\pi$ ならば $\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)\neq 0$ であるから、これにより c がただ 1 つに定まり、その c に対して写像 SR は c を中心とする角 $\theta+\phi$ の回転となる。これが示すべき結果である。（この条件は重要である。$\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)=0$ のときは、一般に回転の中心となる不動点が存在しない。）

$\theta+\phi=2\pi$ の場合。 このとき $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}=1$ かつ $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ であるから

$$\begin{aligned}SR(z)&=z+a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\bigl(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\bigr)+b\bigl(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\bigr)\\&=z+a\bigl(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-1\bigr)+b\bigl(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\bigr)\\&=z+(b-a)\bigl(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\bigr).\end{aligned}$$

よって SR は $(b-a)\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)$ による**平行移動**（translation）であり、その移動距離は $2|b-a|\,|\sin\frac{1}{2}\theta|$ である。$a=b$ のとき（同じ点を中心に θ 回転させ、続けて $2\pi-\theta$ 回転させる場合）、または θ が 2π の倍数のときには、これは恒等写像（identity）となる。それ以外の場合は、不動点をもたない真の平行移動である。

小問 (iii)

SR の式において (a,θ) と (b,ϕ) の役割を入れ替えると

$$RS(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}z+b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right)+a\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right).$$

となる。どちらの写像も z に $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}$ を掛けるので、$RS=SR$ となるのはちょうど定数項が一致するときである。その差は

$$\begin{aligned}SR(z)-RS(z)&=a\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}-1\right)+b\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right)\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\\&=(b-a)\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right).\end{aligned}$$

である。積が 0 になるのはいずれかの因数が 0 のときに限るので、$RS=SR$ となるための必要十分条件は次のいずれかが成り立つことである。

- $a=b$（2 つの回転の中心が同じ）、または
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=1$、すなわち θ が 2π の倍数で、R が恒等写像である、または
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}=1$、すなわち ϕ が 2π の倍数で、S が恒等写像である。

言葉で言えば、2 つの真の回転が可換（commute）となるのは、中心を共有するときに限る。

検算

- $a=b$ のとき、(ii) の式は $c\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)=a\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}\sin\frac{1}{2}\theta+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\sin\frac{1}{2}\phi\right)$ を与える。括弧を展開すると $\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\phi+\cos\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\phi=\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)$ となる（虚部は打ち消し合う）ので、当然そうあるべきとおり $c=a$ である。
- $\phi=0$（S が恒等写像）のとき、$c\sin\frac{1}{2}\theta=a\sin\frac{1}{2}\theta$ であるから $c=a$ である。
- $a=0$、$b=1$、$\theta=\phi=\frac{1}{2}\pi$ とする。このとき $R(z)=\mathrm{i}z$、$S(z)=\mathrm{i}z+1-\mathrm{i}$ であるから $SR(z)=-z+1-\mathrm{i}$ となり、これは $\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})$ を中心とする半回転である。式からは $c\cdot1=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})$ が得られ、一致する。
- 3 つの結果はすべて、数千通りの無作為な中心・角・点について、式を使わずに幾何的に（絶対値と偏角によって）回転させる方法でコンピュータでも確認した。誤差は 10^{-12} 未満であった。

よくある間違い

- 合成の順序を間違える。SR は R を先に施すことを意味するので、$R(z)$ を S に代入する。
- $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}$ で割る際に、それが 0 でないのはまさに $\theta+\phi \neq 2n\pi$ だからであることを述べ忘れる。
- (iii) で、一方の回転が恒等写像であるという自明な場合を忘れる。

STEP のその先へ

$|\alpha| = 1$ を満たす写像 $z \mapsto \alpha z + \beta$ は、平面の向きを保つ等長変換（orientation-preserving isometry）とちょうど一致し、これらは群（group）をなす。すなわち、回転と平行移動を合わせたものは合成について閉じている。小問 (iii) は、この群が可換でないという事実の小さな一例であり、交換子（commutator）$RSR^{-1}S^{-1}$ は平行移動になることがわかる。Needham の *Visual Complex Analysis*（複素数の掛け算の幾何学的な見方）はこの視点を見事に展開しており、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は群論を扱っている。

解答例

STEP III 2017、第 3 問

純粋数学 ・ 多項式の根

> **STEP III 2017、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q3

この問題は、*Beyond STEP* の第 6.4 節「**四次方程式を解く**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch06/quartic.html

鍵となる考え方

任意の多項式の係数はその根（root）の対称式（symmetric function）であるから、三次方程式の係数 A はその 3 つの根の和に負号をつけたものであり、その和は α、β、γ、δ のよく知られた対称式である。具体的に与えられた四次式（quartic）については、三次方程式が整数の根をもつので、完全に因数分解できる。$\alpha\beta+\gamma\delta$ がわかれば、四次式を 2 つの二次因数、すなわち α、β を根とするものと γ、δ を根とするものに分けることができ、残りの係数によってそれらの因数が決まる。

解答

A を求める

以下では一貫して、四次式に対する解と係数の関係（Vieta's relations）を用いる：

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-p, \qquad \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=q,$$
$$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-r, \qquad \alpha\beta\gamma\delta=s.$$

三次方程式はモニック（monic、最高次の係数が 1）であり、根は $y_1=\alpha\beta+\gamma\delta$、$y_2=\alpha\gamma+\beta\delta$、$y_3=\alpha\delta+\beta\gamma$ であるから、

$$y^3+Ay^2+\cdots=(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3),$$

となり、y^2 の係数を比較すると $A=-(y_1+y_2+y_3)$ を得る。ところが $y_1+y_2+y_3$ は、異なる 2 つの根の積 6 個をそれぞれちょうど 1 回ずつ含むので、q に等しい。したがって

$$A=-q.$$

小問 (i)

$p=0$、$q=3$、$r=-6$、$s=10$ のとき、三次方程式の係数は

$$A=-3,\qquad pr-4s=-40,\qquad 4qs-p^2s-r^2=120-0-36=84,$$

であるから、三次方程式は

$$y^3-3y^2-40y+84=0.$$

である。整数の根はどれも 84 の約数である。小さい約数を試すと、$y=2$ のとき $8-12-80+84=0$ となるので、$y-2$ は因数である：

$$y^3-3y^2-40y+84=(y-2)(y^2-y-42)=(y-2)(y-7)(y+6).$$

根は 2、7、-6 であり、最大のものは 7 であるから、

$$\alpha\beta+\gamma\delta=7.$$

小問 (ii)

展開すると

$$(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta,$$

となり、これは 2 つずつの積 6 個の和から $\alpha\beta$ と $\gamma\delta$ を除いたものである。よって

$$(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=q-(\alpha\beta+\gamma\delta)=3-7=-4.$$

次に、$\alpha\beta$ と $\gamma\delta$ は和が 7、積が $\alpha\beta\gamma\delta=s=10$ である。したがってこれらは

$$t^2-7t+10=(t-5)(t-2)=0,$$

の根であり、$\alpha\beta>\gamma\delta$ であるから $\alpha\beta=5$、$\gamma\delta=2$ を得る。

小問 (iii)

$u=\alpha+\beta$ とおく。$p=0$ であるから 4 つの根の和は 0 であり、$\gamma+\delta=-u$ となる。小問 (ii) より $-u^2=-4$ であるから、$u=\pm2$ である。

考えてみよう u の符号はどちらが正しいか。また、それはどうすればわかるか。

まだ r を使っていない。3つずつの積4個を2組にまとめると、

$$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=\alpha\beta(\gamma+\delta)+\gamma\delta(\alpha+\beta)=5(-u)+2u=-3u.$$

これが $-r=6$ に等しいので、$u=-2$ である。（もう一方の符号だと $r=+6$ となり、別の四次式になってしまう。）よって

$$\alpha+\beta=-2,\quad \alpha\beta=5,\qquad \gamma+\delta=2,\quad \gamma\delta=2.$$

したがって α、β は $x^2+2x+5=0$ の根であり $x=-1\pm2\mathrm{i}$、γ、δ は $x^2-2x+2=0$ の根であり $x=1\pm\mathrm{i}$ である。ゆえに四次方程式

$$x^4+3x^2-6x+10=(x^2+2x+5)(x^2-2x+2)=0$$

の根は

$$x=-1+2\mathrm{i},\quad -1-2\mathrm{i},\quad 1+\mathrm{i},\quad 1-\mathrm{i}.$$

である。

検算

- $(x^2+2x+5)(x^2-2x+2)$ を展開すると、x^3 の項は打ち消し合い、$x^4+3x^2-6x+10$ となって、確かに与えられた四次式に一致する。
- これらの根について、$\alpha\gamma+\beta\delta$ と $\alpha\delta+\beta\gamma$ は（順序はともかく）三次方程式の残りの2つの根 2 と -6 になるはずである。その和は $q-7=-4=2+(-6)$ であり、確かにそうなっている。
- 公式 $A=-q$ は、根を無作為に選んだ複素数とする四次式1000個についても、コンピュータで確認した。

よくある間違い

- $A=q$ としてしまう：y^2 の係数は根の和に**負号をつけたもの**である。
- $u=\pm2$ で止めて、両方の可能性を答えてしまう：$r=-6$ と矛盾しない符号は一方だけである。
- 実数の根を期待してしまう：この四次式はすべての実数 x に対して正であるから、4つの根はすべて虚数である。

STEP のその先へ

ここでの三次方程式は四次式の**分解三次方程式**（resolvent cubic）であり、フェラーリ（Ferrari）の解法の核心をなす：任意の四次方程式を解くことは、三次方程式を解き、続いて二次方程式を解くことに帰着される。これがうまくいく理由はガロア理論（Galois theory）によって説明される。ガロア理論は、根の置換（permutation）が $\alpha\beta + \gamma\delta$ のような式にどのように作用するかを調べる理論である（3 つの式はそれぞれ、24 個の置換のうち 8 個からなる部分群（subgroup）によって固定される）。これらの考え方を学び始めるには、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）がよい。

解答例

STEP III 2017、第 4 問

純粋数学 ・ 関数の幾何平均

STEP III 2017、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/17-s3-q4

鍵となる考え方

相乗平均（geometric mean）とは、通常の平均を指数関数（exponential）の肩に乗せたものにすぎない。すなわち、$\ln F(y)$ は区間 $[0, y]$ における $\ln f$ の平均値である。したがって、F の性質はすべて、対数の性質（底の変換（change of base）や $\ln(fg) = \ln f + \ln g$）と積分の線形性（linearity）を組み合わせることで得られる。(iv) の逆（converse）については、条件が積分を含む等式となり、これを微分すれば簡単な微分方程式（differential equation）に帰着する。

解答

以下では常に

$$\ln F(y) = \frac{1}{y}\int_0^y \ln f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (y > 0),$$

と書く。これは定義の両辺の対数をとったものである。

小問 (i)

$a > 0$ かつ $a \neq 1$ であるから、$\log_a$ が定義でき、$\ln a \neq 0$ である。底の変換公式より $\log_a f(x) = \dfrac{\ln f(x)}{\ln a}$ である。また、任意の実数 t に対して $a^t = \mathrm{e}^{t\ln a}$ である。よって

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{y}\int_0^y \log_a f(x)\,\mathrm{d}x} &= \exp\left(\ln a \cdot \frac{1}{y}\int_0^y \frac{\ln f(x)}{\ln a}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{y}\int_0^y \ln f(x)\,\mathrm{d}x\right) = F(y), \end{aligned}$$

となる。ここで、定数 $\frac{1}{\ln a}$ を積分の外に出し、$\ln a$ と約分した。これが求める結果である。（$a \neq 1$ という条件は、まさに $\ln a$ で割ることを可能にするためのものである。）

小問 (ii)

$f(x) > 0$ かつ $g(x) > 0$ であるから $h(x) > 0$ であり、H は定義でき、$\ln h(x) = \ln f(x) + \ln g(x)$ である。積分の線形性より

$$\ln H(y) = \frac{1}{y}\int_0^y \big(\ln f(x) + \ln g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \ln F(y) + \ln G(y) = \ln\big(F(y)G(y)\big).$$

ln は単射（one-to-one）であるから、$H(y) = F(y)G(y)$ である。

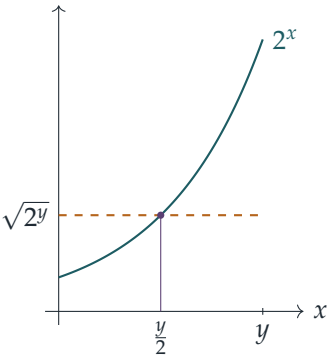
小問 (iii)

ここでは $f(x) = b^x > 0$ であり、$\ln f(x) = x\ln b$ であるから

$$\ln F(y) = \frac{1}{y}\int_0^y x\ln b\,\mathrm{d}x = \frac{1}{y}\cdot\frac{y^2}{2}\ln b = \frac{y}{2}\ln b.$$

したがって $F(y) = \mathrm{e}^{\frac{y}{2}\ln b} = b^{y/2} = \sqrt{b^y}$ となり、示された。

下の図は、$b = 2$ の場合にこの結果が何を意味するかを示している。$[0, y]$ における 2^x の相乗平均は、中点 $\frac{y}{2}$ における 2^x の値に等しい。これは $\ln 2^x$ が一次関数であり、一次関数の平均値は中点での値に等しいからである。



小問 (iv)

問題文が暗に仮定しているように、f は連続（continuous）であると仮定する。これにより積分が存在し、微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）が使える。$\phi(x) = \ln f(x)$ とおく。$f(x) > 0$ であるからこれは定義でき、しかも連続である。仮定 $F(y) = \sqrt{f(y)}$ は、対数をとると

$$\frac{1}{y}\int_0^y \phi(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\phi(y) \quad \text{すなわち} \quad \int_0^y \phi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{y}{2}\phi(y) \qquad \text{任意の} y > 0. \qquad (*)$$

を意味する。

考えてみよう どうすれば積分を消せるだろうか。また、それは許されるだろうか。

y で微分する。微分積分学の基本定理より、$(*)$ の左辺は微分可能であり、その導関数は $\phi(y)$ である。よって右辺も微分可能であり、したがって $y > 0$ において $\phi(y) = \frac{2}{y} \times$ (左辺) も微分可能である。右辺に積の微分法（product rule）を用いて $(*)$ を微分すると

$$\phi(y) = \tfrac{1}{2}\phi(y) + \tfrac{y}{2}\phi'(y) \quad \Longrightarrow \quad y\,\phi'(y) - \phi(y) = 0.$$

$y > 0$ であるから y^2 で割ることができ、商の微分法（quotient rule）による導関数の形が現れる。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\phi(y)}{y}\right) = \frac{y\phi'(y) - \phi(y)}{y^2} = 0.$$

よって $\phi(y)/y$ は区間 $y > 0$ 上で定数であり、これを k とおく（区間上で導関数が 0 である関数は、平均値の定理（mean value theorem）により定数である）。したがって $\ln f(x) = kx$ であり、

$$f(x) = \mathrm{e}^{kx} = b^x, \qquad \text{ただし} b = \mathrm{e}^k > 0.$$

これはすべての $x > 0$ で成り立つ。ただ一点 $x = 0$ での値はどの積分にも影響しないし、いずれにせよ連続性より $f(0) = 1 = b^0$ である。(iii) と合わせると、相乗平均が $\sqrt{f(y)}$ となる関数は、ちょうど b^x の形の関数であることがわかる。

検算

- (iii) で $b = 4$、$y = 2$ とすると、$\ln F(2) = \frac{1}{2}\int_0^2 x \ln 4\,\mathrm{d}x = \ln 4$ であるから $F(2) = 4 = \sqrt{4^2}$ となる。数値積分の結果とも一致する。
- (iv) で、b^x の形でない関数、たとえば $f(x) = 3 \cdot 2^x$ を試してみる。(ii) と (iii) より $F(y) = 3 \cdot 2^{y/2}$ である一方、$\sqrt{f(y)} = \sqrt{3} \cdot 2^{y/2}$ であるから、条件は当然成り立たない。実際、上の議論では $\phi(y)/y = \ln 2 + \frac{\ln 3}{y}$ となり、定数ではない。
- 小問 (i) と (ii) は、ランダムな正の関数、y の値、および 1 の両側の底 a について、コンピュータで確認した。

よくある間違い

- (iv) で $(*)$ を微分する際に $\frac{y}{2}\phi(y)$ に積の微分法を使い忘れ、ϕ' の項がまるごと抜け落ちてしまう。

- (iii) だけから $f(x) = b^x$ と結論してしまう。(iii) は b^x がその性質をもつことを示すだけで、ほかの関数がもたないことは示していない。小問 (iv) はその逆であり、独立した議論が必要である。
- (i) で、$a \neq 1$ がどこで必要になるかを述べない。この条件こそが $\log_a$ を意味あるものにし、$\ln a \neq 0$ を保証する。

STEP のその先へ

連続的な相乗平均は $(x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n}$ の積分版であり、凹関数（concave function）ln に対するイェンセンの不等式（Jensen's inequality）から、それが通常の平均 $\frac{1}{y}\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x$ を超えないことがわかる。これが連続版の相加・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）である。小問 (iv) は、関数方程式（functional equation）を微分方程式に変換して解く小さな例であり、微分可能性に注意を払う必要がある。解析学（analysis）の講義では、微分積分学の基本定理によってこうした変換が許されるのはどのような場合かを正確に学ぶ。厳密な背景については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照されたい。

解答例

STEP III 2017、第 5 問

純粋数学 • 極方程式で表された曲線

> **STEP III 2017、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q5

鍵となる考え方

曲線を θ を媒介変数として媒介変数表示（parametric form）する：$x = f(\theta)\cos\theta$, $y = f(\theta)\sin\theta$。すると傾きは連鎖律（chain rule）から求まり、「直交する」という条件は「傾きの積が -1 である」という条件になる。最後の小問では、曲線族 $r = a(1+\sin\theta)$ が C 上のすべての点を通るので、直交条件は C 全体にわたって成り立つ。これにより、条件は f に関する一階微分方程式（first-order differential equation）に帰着する。

解答

傾き

曲線上では $x = f(\theta)\cos\theta, y = f(\theta)\sin\theta$ である。積の微分法（product rule）により θ で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta.$$

連鎖律を用い、さらに（$\cos\theta \neq 0$ と仮定して）分子と分母を $\cos\theta$ で割ると

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta} = \frac{f'(\theta)\tan\theta + f(\theta)}{f'(\theta) - f(\theta)\tan\theta}.$$

直交する曲線

交点では、二つの曲線は同じ θ をとる。$t = \tan\theta$ とおき、その点での値を f, f', g, g' と書く。どちらの接線（tangent）も鉛直でなければ、二曲線が直交するのは傾きの積が

-1 となるとき、かつそのときに限る：

$$(f't+f)(g't+g) = -(f'-ft)(g'-gt).$$

両辺を展開すると $f'gt$ と $fg't$ の項が打ち消し合い、

$$f'g't^2+fg+f'g'+fgt^2 = 0 \iff (1+t^2)\left(f'g'+fg\right) = 0.$$

が残る。$1+t^2 = \sec^2\theta > 0$ であるから $f'(\theta)g'(\theta)+f(\theta)g(\theta) = 0$ が得られ、示すべきことが示された。

考えてみよう 一方の接線が鉛直である場合や $\cos\theta = 0$ の場合のように、傾きや $\tan\theta$ が存在しないときはどうなるか？

傾きの代わりに方向ベクトル（direction vector）を用いる。$r = f(\theta)$ の接線の方向は $\left(f'\cos\theta - f\sin\theta,\ f'\sin\theta + f\cos\theta\right)$ であり、g についても同様である。これらの内積（scalar product）は

$$(f'\cos\theta - f\sin\theta)(g'\cos\theta - g\sin\theta) + (f'\sin\theta + f\cos\theta)(g'\sin\theta + g\cos\theta) = f'g' + fg,$$

となる。交差項が打ち消し合い、$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ となるからである。したがって、どの場合でも直交条件は同じである。

$f(\theta)$ を求める

$r = a(1+\sin\theta)$ に対しては $g'(\theta) = a\cos\theta$ である。

考えてみよう この条件は曲線どうしが交わる点でしか成り立たない。なぜ C 上のすべての点でこれを使えるのか？

C 上の任意の点をとり、その偏角を θ（$f(\theta) > 0, \sin\theta \neq -1$）とする。$a = f(\theta)/(1+\sin\theta) > 0$ と選べば、曲線族のうち、その点を同じ θ で通るものが得られる。仮定よりこの曲線は C と直交するので

$$f'(\theta)\,a\cos\theta + f(\theta)\,a(1+\sin\theta) = 0.$$

$a > 0$ で割ると、このようなすべての θ が

$$f'(\theta)\cos\theta + f(\theta)(1+\sin\theta) = 0.$$

を満たす。$1-\sin\theta$ を掛け、$1-\sin^2\theta = \cos^2\theta$ を用いると

$$\cos\theta\left[f'(\theta)(1-\sin\theta) + f(\theta)\cos\theta\right] = 0.$$

$\cos\theta \neq 0$ のところでは括弧の中が 0 になる。商の微分法（quotient rule）により、括弧の中は $f(\theta)/(1-\sin\theta)$ の導関数の $(1-\sin\theta)^2$ 倍である：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{f(\theta)}{1-\sin\theta}\right) = \frac{f'(\theta)(1-\sin\theta)+f(\theta)\cos\theta}{(1-\sin\theta)^2} = 0.$$

よって区間 $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$ において、定数 k を用いて $f(\theta) = k(1-\sin\theta)$ となる。（同じことだが、$f'/f = -(1+\sin\theta)/\cos\theta = -\cos\theta/(1-\sin\theta)$ を変数分離（separation of variables）して解いてもよい。）曲線は $r = 4, \theta = -\frac{1}{2}\pi$ を通るので、連続性（continuity）より $k(1+1) = 4$、すなわち $k = 2$ である。$\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ でも同じ議論が成り立ち、$\theta = \frac{3}{2}\pi$ は $-\frac{1}{2}\pi$ と同じ方向であるから、やはり $k = 2$ となる。したがって

$$\boxed{f(\theta) = 2(1-\sin\theta)}$$

これもまたカージオイド（cardioid）であり、$r = 2(1+\sin\theta)$ を x 軸に関して折り返したものである。

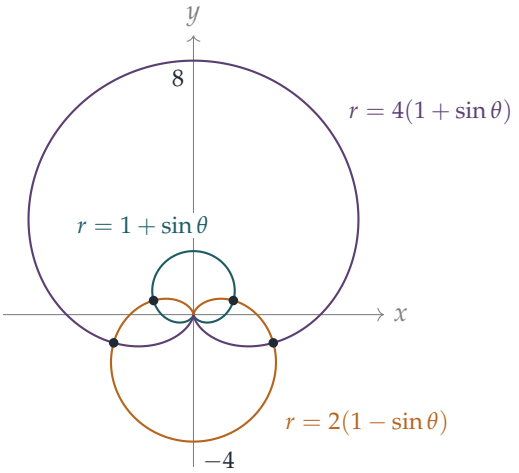
概形

曲線 $r = a(1+\sin\theta)$ は原点に尖点（cusp）をもち、y 軸に関して対称なカージオイドである。上は $(0, 2a)$ まで達し、x 軸とは $(\pm a, 0)$ で交わる。曲線 $r = 2(1-\sin\theta)$ は同じ形で下向きに開いたカージオイドである：尖点は原点にあり、x 軸とは $(\pm 2, 0)$ で交わり、下は $(0, -4)$ まで達する。

交点は $a(1+\sin\theta) = 2(1-\sin\theta)$ を解いて求まり、$\sin\theta = \frac{2-a}{2+a}$ となる：

- $a = 1$：$\sin\theta = \frac{1}{3}, r = \frac{4}{3}$ で、交点は $\left(\pm\frac{8\sqrt{2}}{9}, \frac{4}{9}\right)$；
- $a = 4$：$\sin\theta = -\frac{1}{3}, r = \frac{8}{3}$ で、交点は $\left(\pm\frac{16\sqrt{2}}{9}, -\frac{8}{9}\right)$。

三つの曲線はいずれも原点も通る。



検算

- $\theta = 0$ において曲線 $r = 2(1 - \sin\theta)$ は点 $(2, 0)$ にあり、$r = 2(1 + \sin\theta)$ も同じ点を通る。そこでは $f = 2, f' = -2, g = 2, g' = 2$ であるから $f'g' + fg = -4 + 4 = 0$ となり、確かに成り立っている。
- $\theta = -\frac{1}{2}\pi$ において $f = 2(1 + 1) = 4$ であり、条件どおりである。
- $\left(\frac{8\sqrt{2}}{9}, \frac{4}{9}\right) \approx (1.257, 0.444)$ における接線が直交することをコンピュータで確認した。多数のランダムな a の値についても同様に確認した。

よくある間違い

- 直交条件を一つの交点でしか使わないこと。「各正の数 a について」という仮定の要点は、それによって条件が C 上のすべての点で成り立つことにある。
- $f(\theta)/(1 - \sin\theta)$ が $\theta = \frac{1}{2}\pi$ で定義されないことを忘れ、定数をどこで決めるかについて注意を怠ること。
- $r = 2(1 - \sin\theta)$ を上向きに開いた形に描くこと：$\theta = -\frac{1}{2}\pi$ で $r = 4$ であるから、この曲線は主に x 軸より下側にある。

STEP のその先へ

ある曲線族と至るところで直交する曲線族を、互いの**直交截線**（orthogonal trajectories）という。ここでは、カージオイド $r = a(1 + \sin\theta)$ と $r = b(1 - \sin\theta)$ がそのような組をなしている。この考え方は大学 1 年次の微分方程式に登場し、物理学でも、電気力線が等電位面（equipotentials）と直交するという形で再び現れる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）では、直交截線の求め方が扱われている。Needham の *Visual Complex Analysis*（ビジュアル複素解析）では、等角写像（conformal maps）がこのような曲線族をどのように生み出すかが示されている。

解答例

STEP III 2017、第 6 問

純粋数学 ・ 置換積分

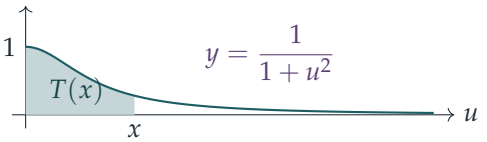
> **STEP III 2017、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q6

この問題は、*Beyond STEP* の第 4.2 節「**積分から三角関数を構成する**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch04/trig-from-integral.html

鍵となる考え方

ここでは逆正接関数（inverse tangent）を、その積分表示だけから組み立てていく。したがって、あらゆる事実は置換（substitution）から導かなければならない。置換 $u \mapsto 1/u$ は区間 $(0, x)$ と $(1/x, \infty)$ を入れ替える。また、メビウス（Möbius）型の置換 $v = \frac{u+a}{1-au}$ は、被積分関数と微分をひとまとめにした $\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ を変えないので、積分の上下端をずらすだけである。最後の小問では、ずらした端がすでに値のわかっている点に戻ってくるように数を選ぶ。そうすれば、解くことのできる方程式が得られる。

解答



$T(x)$ は網掛け部分の面積であり、T_∞ は $u \geq 0$ の範囲で曲線の下にある部分全体の面積である。

小問 (i)

$T(x)$ の積分で $u = 1/t$ と置換すると、$\mathrm{d}u = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$ である。u が 0 から x まで動くとき、t は ∞ から $1/x$ まで減少する。よって

$$\begin{aligned} T(x) &= \int_{\infty}^{1/x} \frac{1}{1+t^{-2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_{1/x}^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int_0^{1/x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = T_\infty - T(x^{-1}). \end{aligned}$$

（T_∞ は有限なので、0 から始まる積分はきちんと定まった積分であり、積分区間を分割してよい。）これが求める結果である。

小問 (ii)

導関数。商の微分法（quotient rule）により、$u \neq a^{-1}$ のとき

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{(1-au)+a(u+a)}{(1-au)^2} = \frac{1+a^2}{(1-au)^2}.$$

一方、

$$1+v^2 = \frac{(1-au)^2+(u+a)^2}{(1-au)^2} = \frac{1+a^2u^2+u^2+a^2}{(1-au)^2} = \frac{(1+a^2)(1+u^2)}{(1-au)^2}.$$

これを $1+u^2$ で割ると $\dfrac{1+v^2}{1+u^2} = \dfrac{1+a^2}{(1-au)^2} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$ となり、示すべき式が得られる。

加法定理。$a > 0$、$0 < x < \frac{1}{a}$ とする。$0 \le u \le x$ では $1-au \ge 1-ax > 0$ であるから、v は区間全体で定義されて連続であり、さらに $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} > 0$ である。したがって v は $v(0) = a$ から $v(x) = \frac{x+a}{1-ax}$ まで増加する。

> **考えてみよう** $x < \frac{1}{a}$ であることはなぜ重要なのか。

もし x が $\frac{1}{a}$ に達すると、積分区間の内部で v が発散してしまい、置換は意味をなさなくなる。$x < \frac{1}{a}$ であれば、これは $[0,x]$ 上の滑らかで増加する変数変換である。

導関数についての結果は、まさに $\dfrac{1}{1+u^2} = \dfrac{1}{1+v^2}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$ を意味している。よって

$$\begin{aligned} T(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} &= \int_a^{\frac{x+a}{1-ax}} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} \\ &= \int_0^{\frac{x+a}{1-ax}} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} - \int_0^a \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = T\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) - T(a). \end{aligned}$$

ここで T の引数はどちらも正なので、すべて定義されている。

1 つ目の帰結。$X = \frac{x+a}{1-ax}$ とおく。小問 (i) を x に、続いて a に適用すると

$$T(x^{-1}) = T_\infty - T(x) = T_\infty - T(X) + T(a) = T_\infty - T(X) + T_\infty - T(a^{-1}),$$

すなわち $T(x^{-1}) = 2T_\infty - T\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) - T(a^{-1})$ である。

2 つ目の帰結。$b > 0$、$y > \frac{1}{b}$ が与えられたとし、$x = \frac{1}{y}$、$a = \frac{1}{b}$ とおく。すると $x > 0$、$a > 0$ であり、$y > \frac{1}{b}$ は $x < b = \frac{1}{a}$ と同値なので、前の結果が適用できる。分母と分子に by を掛けると

$$\frac{x+a}{1-ax} = \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{b}}{1 - \frac{1}{by}} = \frac{b+y}{by-1},$$

であり、$x^{-1} = y$、$a^{-1} = b$ であるから

$$T(y) = 2T_\infty - T\left(\frac{y+b}{by-1}\right) - T(b).$$

小問 (iii)

$T(\sqrt{3})$。最後の結果で $y = b = \sqrt{3}$ とする。$\sqrt{3} > \frac{1}{\sqrt{3}}$ なので条件 $y > \frac{1}{b}$ は満たされる。このとき

$$\frac{y+b}{by-1} = \frac{2\sqrt{3}}{3-1} = \sqrt{3},$$

であるから $T(\sqrt{3}) = 2T_\infty - T(\sqrt{3}) - T(\sqrt{3})$、すなわち $3T(\sqrt{3}) = 2T_\infty$ となり

$$T(\sqrt{3}) = \tfrac{2}{3}T_\infty.$$

まず $T(1)$。小問 (i) で $x = 1$ とすると $T(1) = T_\infty - T(1)$ となるので、$T(1) = \frac{1}{2}T_\infty$ である。

> **考えてみよう** $x = a$ のとき $\frac{x+a}{1-ax}$ が 1 に等しくなるのは、a がどのような値のときか。

$\frac{2a}{1-a^2} = 1$、すなわち $a^2 + 2a - 1 = 0$ が必要であり、その正の解は $a = \sqrt{2} - 1$ である。

$T(\sqrt{2}-1)$。そこで加法定理で $x = a = \sqrt{2} - 1 > 0$ とする。条件 $x < \frac{1}{a}$ は $\sqrt{2} - 1 < \sqrt{2} + 1$ となり、成り立つ。$a^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ であるから

$$\frac{x+a}{1-ax} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(3-2\sqrt{2})} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}-1)} = 1,$$

よって $T(\sqrt{2}-1) = T(1) - T(\sqrt{2}-1)$ となり

$$T(\sqrt{2}-1) = \tfrac{1}{2}T(1) = \tfrac{1}{4}T_\infty.$$

検算

もちろん T の正体は arctan であり、$T_\infty = \frac{\pi}{2}$ である。解答では使うことを許されていなかったが、検算に使うことは十分できる。実際、$\frac{\pi}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{2}$、$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2}$ であ

る。積分を数値的に（シンプソン（Simpson）の公式で）計算すると $T_\infty \approx 1.570796$、$T(\sqrt{3}) \approx 1.047198$、$T(\sqrt{2}-1) \approx 0.392699$ となり、$\frac{2}{3}T_\infty$ および $\frac{1}{4}T_\infty$ と一致する。小問 (ii) の加法定理（addition formula）は、$x = \tan A$、$a = \tan B$ とおけば、おなじみの $\tan(A+B)$ の公式が姿を変えたものである。

よくある間違い

- $u = 1/t$ と置換した後、積分の上下端を入れ替えるのを忘れる。$\mathrm{d}u = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$ から出るマイナス符号こそが、$\int_\infty^{1/x}$ を $\int_{1/x}^\infty$ にひっくり返すものである。
- 小問 (iii) で $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ や arctan の性質をこっそり使ってしまう。問題はそれを禁じており、要点はすべてを小問 (i) と (ii) から導くことにある。
- 実際に用いる数について、条件 $x < \frac{1}{a}$ や $y > \frac{1}{b}$ を確かめない。

STEP のその先へ

関数を積分で定義し、その性質をすべてその定義から導くというのは、解析学（analysis）の講義で ln、exp、arctan、さらには π までも厳密に構成するときの方法である。ここでは π を単に $2T_\infty$ と定義してもよい。置換 $v = \frac{u+a}{1-au}$ はメビウス変換（Möbius transformation）であり、それが $\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ を保つという事実は、円の回転を反映している。解析学の側面については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を、メビウス変換の幾何については Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析の本）を参照するとよい。

解答例

STEP III 2017、第 7 問

純粋数学 ・ 楕円の接線

> **STEP III 2017、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q7

鍵となる考え方

パラメータ t を用いると、「T における接線が (X,Y) を通る」という条件は t についての 2 次方程式に変わる。各解が 1 つの接点に対応するので、点から引ける接線の本数を数えることは実数解の個数を数えることと同じであり、これは判別式（discriminant）の問題になる。小問 (ii) では、2 つの接点のパラメータ p と q がちょうどこの 2 次方程式の 2 つの解なので、それらの和と積は係数からただちに得られる。

解答

点が楕円上にあること

T の座標を代入すると、

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{(1-t^2)^2+4t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{1+2t^2+t^4}{(1+t^2)^2}=1,$$

となるので、すべての実数 t に対して T は楕円（ellipse）上にある。

小問 (i)

t で微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{-4at}{(1+t^2)^2},\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{2b(1-t^2)}{(1+t^2)^2}.$$

これらを割り算する（$t=0$ のとき扱いにくい）代わりに、楕円上の点 (x_0,y_0) における標準的な接線（tangent）の方程式 $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ を用いる。その法線方向 $\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2}\right)$ は上の速度ベクトルと垂直である。実際、$\frac{1-t^2}{a}\cdot(-4at)+\frac{2t}{b}\cdot 2b(1-t^2)=0$ である。し

たがって T における接線 L は

$$\frac{x(1-t^2)}{a(1+t^2)}+\frac{2ty}{b(1+t^2)}=1 \iff bx(1-t^2)+2aty=ab(1+t^2).$$

$(x,y)=(X,Y)$ を代入し、t の累乗ごとに整理すると、

$$bX-bXt^2+2aYt-ab-abt^2=0 \iff (a+X)bt^2-2aYt+b(a-X)=0,$$

となり、示すべき式が得られた。

2 本の接線。 逆向きに読むと、パラメータ t の点における接線が (X,Y) を通るのは、t がこの方程式を満たすとき、かつそのときに限る。$X\neq -a$ かつ $b\neq 0$ なので t^2 の係数は 0 でなく、これは真の 2 次方程式であり、その判別式は

$$4a^2Y^2-4b^2(a+X)(a-X)=4\big(a^2Y^2-(a^2-X^2)b^2\big).$$

である。$a^2Y^2>(a^2-X^2)b^2$ ならばこれは正なので、相異なる 2 つの実数解 $t_1\neq t_2$ が存在する。異なる t の値は楕円上の異なる点を与える（写像 $t\mapsto T$ は 1 対 1（one-to-one）である。$t=\tan\frac{\theta}{2}$ とおけば、$-\pi<\theta<\pi$ に対するおなじみの $(a\cos\theta,b\sin\theta)$ になる）。また、楕円の接線は接点でしか楕円と交わらないので、異なる接点は異なる接線を与える。よって (X,Y) を通る相異なる接線が 2 本存在する。

> **考えてみよう** パラメータ t では表せない接線を見落としている可能性はないだろうか。

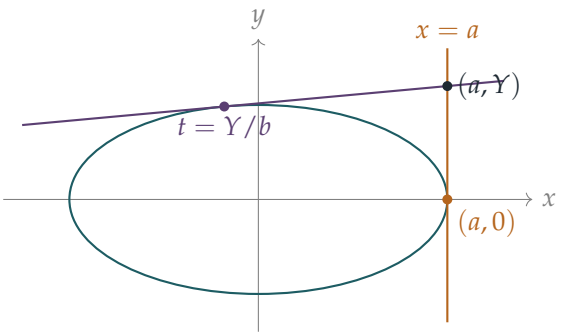
楕円上の点で $(*)$ の形に表せないのは $(-a,0)$（$t\to\infty$ の極限）だけであり、そこでの接線は $x=-a$ である。この直線が (X,Y) を通るのは $X=-a$ のときに限るが、これは除外されている。よって、この 2 次方程式は (X,Y) を通るすべての接線を捉えている。

解釈。 条件を $a^2b^2>0$ で割ると

$$\frac{Y^2}{b^2}>1-\frac{X^2}{a^2} \iff \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}>1,$$

となり、これは (X,Y) が楕円の**外部**にあることを意味する。したがって、円の場合と同様に、楕円の外部の任意の点から楕円に 2 本の接線を引くことができる。

$X^2=a^2$ の場合。 このとき条件は $a^2Y^2>0$、すなわち $Y\neq 0$ となる。点は鉛直な直線 $x=\pm a$ のいずれかの上にあるが、頂点 $(\pm a,0)$ ではない。一方の接線は単に鉛直な直線 $x=\pm a$ そのものであり、楕円と $(\pm a,0)$ で接する。もう一方は楕円の別の点で接する。$X=a$ のとき 2 次方程式は $2abt^2-2aYt=0$ となり、解は $t=0$（鉛直な接線）と $t=Y/b\neq 0$ である。$X=-a$ のときは $-2aYt+2ab=0$ となって $t=b/Y$ を与え、2 本目の接線は $x=-a$、すなわち欠けている点 $(-a,0)$ における接線である。図は $X=a, Y>0$ の場合を示している。



よって $X^2 = a^2$ のときも結果は成り立つ。$Y \neq 0$ であるとき、すなわち点が楕円の外部にあるときは常に、(X, Y) を通る相異なる接線が 2 本存在する。

小問 (ii)

P における接線は (X, Y) を通るので、小問 (i) より p は

$$(a + X)bt^2 - 2aYt + b(a - X) = 0,$$

の解であり、q も同様である。$X \neq -a$ なのでこれは 2 次方程式であり、また（$P \neq Q$ より）$p \neq q$ なので、p と q はその 2 つの解である。したがって、解と係数の関係（relationship between roots and coefficients）より

$$pq = \frac{b(a - X)}{b(a + X)} = \frac{a - X}{a + X} \quad \Longrightarrow \quad (a + X)pq = a - X,$$

となり示すべき式が得られ、さらに

$$p + q = \frac{2aY}{b(a + X)}.$$

である。

最後の部分

接線 $bx(1 - t^2) + 2aty = ab(1 + t^2)$ において $x = 0$ とおくと $2aty = ab(1 + t^2)$ を得る。接線は y 軸と交わるので $p, q \neq 0$ である（$t = 0$ のとき接線は $x = a$）。よって

$$y_1 = \frac{b(1 + p^2)}{2p}, \qquad y_2 = \frac{b(1 + q^2)}{2q}.$$

$\frac{1+p^2}{p} = p + \frac{1}{p}$ と書くと、

$$y_1 + y_2 = \frac{b}{2}\left(p + q + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{b}{2}(p + q)\left(1 + \frac{1}{pq}\right) = \frac{b(p + q)(1 + pq)}{2pq}.$$

上で得た結果から $1+pq=\dfrac{2a}{a+X}$ であるので、$pq=\dfrac{a-X}{a+X}\neq 0$ を用いて

$$y_1+y_2=\frac{b}{2}\cdot\frac{2aY}{b(a+X)}\cdot\frac{2a}{a+X}\cdot\frac{a+X}{a-X}=\frac{2a^2Y}{(a+X)(a-X)}=\frac{2a^2Y}{a^2-X^2}.$$

これを $2b$ に等しいとおき、$(a^2-X^2)/(2a^2b)$（$X^2\neq a^2$ より 0 でない）を掛けると、

$$\frac{Y}{b}=\frac{a^2-X^2}{a^2}=1-\frac{X^2}{a^2}\iff\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y}{b}=1,$$

となり、示すべき式が得られた。したがって、交点は $(\pm a,0)$ と $(0,b)$ を通る放物線（parabola）上にある。

検算

- $a=2, b=1, (X,Y)=(4,1)$（$4+1>1$ より外部）とすると、2 次方程式は $6t^2-4t-2=0$ となり、解は $t=1$ と $t=-\frac{1}{3}$ である。これらは $(0,1)$ と $(1.6,-0.6)$ における接線に対応する。2 本の接線 $y=1$ と $2x-3y=5$ はいずれも確かに $(4,1)$ を通る。このとき $pq=-\frac{1}{3}=\frac{2-4}{2+4}$、$p+q=\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ であり、公式の予測どおりである。
- 中心 $(0,0)$ では判別式は $-4a^2b^2<0$ となり、接線は存在しない。楕円の内部の点なので、予想どおりである。
- 多数のランダムな楕円と点 P, Q の組について、接線の交点を直接求めてコンピュータで確認した。$pq, p+q, y_1+y_2$ の公式はすべて一致し、$y_1+y_2=2b$ のとき交点は $X^2/a^2+Y/b=1$ を満たした。

よくある間違い

- 傾きを $\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}$ として求め、接線が鉛直になる $t=0$ でこれが破綻することを忘れる。
- $X=-a$ のときにも $(a+X)bt^2-2aYt+b(a-X)=0$ を 2 次方程式として扱ってしまう。まさにこのために、$X^2=a^2$ の場合は別に扱う必要がある。
- 「判別式が正である」で止めてしまい、2 つの解がなぜ**異なる** 2 本の直線を与えるのかを説明しない。

STEP のその先へ

2 次曲線（conic）の有理パラメータ表示（rational parametrisation）$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)$ は代数幾何学（algebraic geometry）の出発点である。有理点を 1 つもつ 2 次曲線が必ず無

数の有理点をもつのはこのためであり、ピタゴラス数（Pythagorean triples）の分類の基礎にもなっている。外部の点から引いた 2 本の接線は極線（polar）の概念や射影幾何学（projective geometry）へとつながり、そこでは $t = \infty$ に対応する厄介な欠けた点も普通の点になる。Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* には、この種の問題がさらに収録されている。

解答例

STEP III 2017、第 8 問

純粋数学 ・ 部分和分

> **STEP III 2017、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q8

鍵となる考え方

冒頭の恒等式は部分積分（integration by parts）の離散版（「部分和分（summation by parts）」）である。これは b の差分を含む和を、a の差分を含む和に置き換えるものである。これを三角関数の和に用いるには、$b_{m+1} - b_m$ が求めたい項を生み出すように b_m を選べばよい。和積の公式（sum-to-product formula）により、正弦どうしや余弦どうしの差は一つの積に変わる。そのうえで a_m を 1 または m に選べば、もう一方の辺は簡単になる。

解答

恒等式

量 $a_{n+1}b_{n+1} - a_1b_1$ は望遠鏡和（telescoping sum）として次のように書ける。

$$a_{n+1}b_{n+1} - a_1b_1 = \sum_{m=1}^{n} \left(a_{m+1}b_{m+1} - a_m b_m\right).$$

各括弧の中で $a_m b_{m+1}$ を足して引くと、

$$a_{m+1}b_{m+1} - a_m b_m = a_m(b_{m+1} - b_m) + b_{m+1}(a_{m+1} - a_m).$$

これを $m = 1, \ldots, n$ について足し合わせて整理すれば、求める恒等式がそのまま得られる。

三角関数を扱う部分では、$\operatorname{cosec} \frac{1}{2}x$ が定義されるように、終始 $\sin \frac{1}{2}x \neq 0$（すなわち x は 2π の倍数でない）と仮定する。

小問 (i)

$b_m = \sin mx$ とおき、$A = (m+1)x$、$B = mx$ として和積の公式を用いると、

$$b_{m+1} - b_m = \sin(m+1)x - \sin mx = 2\cos\left(m+\tfrac{1}{2}\right)x\,\sin\tfrac{1}{2}x.$$

ここで、すべての m について $a_m = 1$ とすると、$a_{m+1} - a_m = 0$ となり、恒等式の最後の和は消える。恒等式は次のようになる。

$$2\sin\tfrac{1}{2}x\sum_{m=1}^{n}\cos\left(m+\tfrac{1}{2}\right)x = b_{n+1} - b_1 = \sin(n+1)x - \sin x.$$

$2\sin\frac{1}{2}x \neq 0$ で割ると、

$$\sum_{m=1}^{n}\cos\left(m+\tfrac{1}{2}\right)x = \tfrac{1}{2}\left(\sin(n+1)x - \sin x\right)\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}x,$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

因子 m があることから $a_m = m$ とおくことが考えられ、このとき $a_{m+1} - a_m = 1$ である。すると $b_{m+1} - b_m$ が $\sin mx$ の定数倍になる必要がある。

考えてみよう b_m をどう選べば、$b_{m+1} - b_m$ が $\sin mx$ の定数倍になるか。

小問 (i) では、$(m+1)x$ と mx における二つの正弦の差が、**中点** $(m+\frac{1}{2})x$ における余弦を与えた。$\sin mx$ を得るには、引数の中点が mx となるような余弦どうしの差がほしいので、$b_m = \cos\left(m-\frac{1}{2}\right)x$ とおく。$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$（これは問題文の最初の注からも導かれる）を用いると、

$$b_{m+1} - b_m = \cos\left(m+\tfrac{1}{2}\right)x - \cos\left(m-\tfrac{1}{2}\right)x = -2\sin mx\,\sin\tfrac{1}{2}x.$$

$S = \sum_{m=1}^{n} m\sin mx$ とおく。$a_m = m$ として恒等式を用いると、

$$-2\sin\tfrac{1}{2}x\,S = (n+1)\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x - \cos\tfrac{1}{2}x - \sum_{m=1}^{n}\cos\left(m+\tfrac{1}{2}\right)x.$$

最後の和はちょうど小問 (i) のものである。これを代入し、全体に $-2\sin\frac{1}{2}x$ を掛けると、

$$4\sin^2\tfrac{1}{2}x\,S = 2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x - 2(n+1)\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\,\sin\tfrac{1}{2}x + \sin(n+1)x - \sin x.$$

次に、二つの積を簡単にする。

- $2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x = \sin x$ であり、これは $-\sin x$ と打ち消し合う。

- $A=(n+\frac{1}{2})x$、$B=\frac{1}{2}x$ として $2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$ を用いると、

$$2\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\,\sin\tfrac{1}{2}x=\sin(n+1)x-\sin nx.$$

したがって、

$$\begin{aligned}4\sin^2\tfrac{1}{2}x\,S&=-(n+1)\left(\sin(n+1)x-\sin nx\right)+\sin(n+1)x\\&=-n\sin(n+1)x+(n+1)\sin nx.\end{aligned}$$

$4\sin^2\frac{1}{2}x$ で割ると、

$$\sum_{m=1}^{n}m\sin mx=\left(-\tfrac{n}{4}\sin(n+1)x+\tfrac{n+1}{4}\sin nx\right)\operatorname{cosec}^2\tfrac{1}{2}x,$$

よって、

$$p=-\frac{n}{4},\qquad q=\frac{n+1}{4}.$$

検算

- $n=1$ のとき、$1-\cos x=2\sin^2\frac{1}{2}x$ を用いると、公式は $\frac{1}{4}(2\sin x-\sin 2x)\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}\sin x\,(1-\cos x)\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}x=\sin x$ を与える。これはただ一つの項 $1\cdot\sin x$ に一致する。
- 数値で確かめると、$n=3$、$x=1$ のとき $\sin 1+2\sin 2+3\sin 3\approx 3.08343$ であり、$\left(-\frac{3}{4}\sin 4+\sin 3\right)\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}\approx 3.08343$ も同じ値になる。
- 小問 (ii) は、$\sum_{m=1}^{n}\cos mx$ を x で微分しても求められ、その結果は $-S$ となる。これは独立した検算として役に立つ。

よくある間違い

- 小問 (ii) で $b_m=\cos mx$ と選んでしまうこと。このとき差は $\sin mx$ ではなく $\sin(m+\frac{1}{2})x$ の定数倍となり、方法が行き詰まる。
- $\cos A-\cos B$ の符号の誤り。正しくは $-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$ であり、マイナス符号が付く。
- $\sin\frac{1}{2}x\neq 0$ で割る前に、そのことを述べ忘れること。

STEP のその先へ

部分和分（アーベルの総和法（Abel summation））は部分積分の離散版の双子であり、大学 1 年の解析学で大いに活躍する道具である。$\cos(m+\frac{1}{2})x$ の部分和が有界にとどまる

ことを示す小問 (i) のような評価と組み合わせると、ディリクレの判定法（Dirichlet's test）が証明できる。たとえば、$\sum \frac{\sin mx}{m}$ はすべての x に対して収束（converge）する。小問 (ii) のような和はフーリエ級数（Fourier series）にも現れ、そこではこうした閉じた形の式が収束を調べる出発点となる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、アーベルの総和法とディリクレの判定法をわかりやすく扱っている。

解答例

STEP III 2017、第 9 問

力学 ・ 連結された質点とエネルギー

STEP III 2017、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

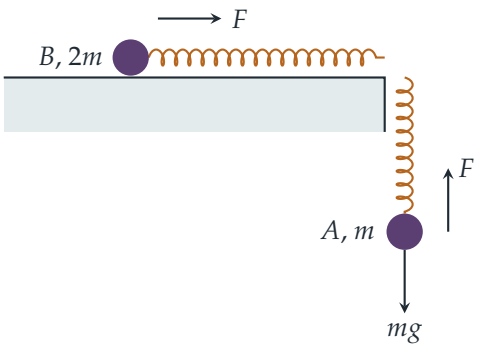
step.maths.org/questions/17-s3-q9

鍵となる考え方

ばねの張力（tension）は未知であり時間とともに変化するが、両方の質点に同じ大きさで作用する。したがって、2 つの運動方程式（equations of motion）を適切な比で足し合わせれば張力は消去され、すぐに積分できる式が残る。後半では、この積分して得られた関係式から、時刻 T における両質点の位置と、それらの速さの間の関係がわかる。さらにエネルギー保存則（conservation of energy）から 2 つ目の方程式が得られ、この 2 式を合わせると B の速さが決まる。

解答

A と B を質点とみなし、ばねは軽い（質量が無視できる）ものとする。台はなめらかであり、ばねは台の縁をなめらかに通っている。放した後、A は鉛直に落下し、B は台の上を縁に向かって滑る。時刻 t におけるばねの張力を F とする。$x < a$ である間は、B はまだ台の上にある。



関係式 $y+2x=\frac{1}{2}gt^2$

A については下向きを正として y をとり、B については縁に向かう向きを正として x をとる。ニュートン（Newton）の運動の第2法則（Newton's second law）により、

$$\begin{aligned} &\text{質点}A\text{ について（鉛直方向）：} && m\ddot{y}=mg-F,\\ &\text{質点}B\text{ について（水平方向）：} && 2m\ddot{x}=F. \end{aligned}$$

（B については、重力と垂直抗力（normal reaction）がつり合い、摩擦はない。）2つの方程式を足すと F が消える：

$$m\ddot{y}+2m\ddot{x}=mg \quad\Longrightarrow\quad \ddot{y}+2\ddot{x}=g.$$

両質点は $x=y=0$ で静止した状態から動き始める。1回積分すると $\dot{y}+2\dot{x}=gt$ となる。$t=0$ で両方の速度が0なので積分定数はつかない。もう1回積分すると

$$y+2x=\tfrac{1}{2}gt^2,$$

となり、ここでも積分定数はつかない。これが求める結果である。

> **考えてみよう** F は伸び $y-x$ に依存し、その伸びは絶えず変化するので、F はわからない。それでもなぜ何かが言えるのだろうか？

F を求める必要はまったくない。2つの方程式に適切な係数を掛ける（ここでは単に足す）と、F は逆符号で現れる。組み合わせ $y+2x$ は運動量に似た量 $my+2mx$ の $1/m$ 倍であり、それを変化させる外力は A にはたらく重力だけである。

時刻 T における B の速さ

時刻 $T=\sqrt{6a/g}$ に質点 B は縁に達するので、$x=a$ である。$\frac{1}{2}gT^2=\frac{1}{2}g\cdot\frac{6a}{g}=3a$ であるから、前半の結果より

$$y+2a=3a \quad\Longrightarrow\quad y=a.$$

よって、時刻 T におけるばねの伸びは $y-x=a-a=0$ である。ばねは再び自然長に戻っており、弾性エネルギー（elastic energy）を蓄えていない。

時刻 T における B と A の速さをそれぞれ u と v とおく。1回積分した関係式 $\dot{y}+2\dot{x}=gt$ から、$t=T$ において

$$v+2u=gT=\sqrt{6ag}. \tag{1}$$

エネルギー。台はなめらかでばねは軽いので、力学的エネルギーは保存される。最初、両質点は静止しており、ばねは伸びていない。時刻 T には A は距離 a だけ落下してお

り、ばねは再び伸びていないので、位置エネルギーの減少分 mga はすべて運動エネルギー（kinetic energy）になっている：

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}(2m)u^2 = mga \quad \Longrightarrow \quad v^2 + 2u^2 = 2ga. \tag{2}$$

考えてみよう 方程式が 2 つあり、そのうち 1 つは 2 次式である。速さは 2 通りありうると考えるべきではないか？

(1) から得られる $v = \sqrt{6ag} - 2u$ を (2) に代入すると、

$$\begin{aligned} 6ag - 4\sqrt{6ag}\,u + 4u^2 + 2u^2 &= 2ga \\ 6u^2 - 4\sqrt{6ag}\,u + 4ag &= 0 \\ 3u^2 - 2\sqrt{6ag}\,u + 2ag &= 0. \end{aligned}$$

判別式（discriminant）は $4 \cdot 6ag - 4 \cdot 3 \cdot 2ag = 0$ であるから、この 2 次式は完全平方式であり、根はただ 1 つである：

$$\left(\sqrt{3}\,u - \sqrt{2ag}\right)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = \sqrt{\frac{2ag}{3}}.$$

よって、B が縁に達したときの速さは、求めるとおり $\sqrt{2ag/3}$ である。(1) より $v = \sqrt{6ag} - 2\sqrt{2ag/3} = \sqrt{2ag/3}$ も成り立つ。この瞬間、2 つの質点は同じ速さで動いており、これはばねが自然長にあることと整合する。

検算

- 重根には意味がある。「運動量」の総和 $v + 2u$ を固定すると、運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2 + mu^2$ は $v = u$ のとき最小となり、ここではその最小値がちょうど mga である。したがって、エネルギーの式と (1) が同時に成り立つのは $u = v$ のときに限られ、そのとき (1) から直ちに $3u = \sqrt{6ag}$ が得られる。
- 運動を完全に解く（問題文ではそうしないよう指示されている）と、$\omega^2 = 3\lambda/(2am)$ として $\omega T = 2\pi$ となる。つまり、伸びはちょうど 1 周期の振動をして 0 に戻る。$a = 1.3\,\mathrm{m}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ として逐次的な数値積分を行うと、$x(T) = y(T) = a$ となり、両方の速さは $2.9143\,\mathrm{m\,s^{-1}} = \sqrt{2ag/3}$ に等しくなる。
- 次元：$\sqrt{ag}$ は速さであり、$\sqrt{a/g}$ は時間である。

よくある間違い

- ばねは一般には弾性エネルギーをもつことを忘れる。この議論が成り立つのは、時刻 T で $x = y = a$ となり伸びが 0 になるからにほかならない。このことを明示的に

示すこと。

- エネルギーの式だけを書いて、それを u について解こうとする。未知数が 2 つあるので、関係式 (1) も必要である。

STEP のその先へ

量 $my + 2mx$ は運動量のようにふるまう：内力（ここではばねの張力）はその中で打ち消し合い、外力だけがそれを変化させる。これが質点系の力学（mechanics of systems of particles）の出発点である。一般には、運動を重心（centre of mass）の運動と相対運動に分け、ここでは相対座標 $y - x$ が単振動（simple harmonic motion）を行う。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、これらの考え方が丁寧に展開されている。

解答例

STEP III 2017、第 10 問

力学 ・ 回転する剛体

STEP III 2017、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/17-s3-q10

鍵となる考え方

粒子が滑らない間は、棒と粒子は一つの剛体（rigid body）として蝶番（hinge）のまわりを一体となって回転する。したがってエネルギー保存則（conservation of energy）からただちに $\dot{\theta}$ が得られ、それを微分すれば $\ddot{\theta}$ が得られる。このとき粒子は P を中心とする円周上を動くので、その加速度はおなじみの動径方向成分と横断方向成分（radial and transverse components）をもつ。粒子だけに対してニュートン（Newton）の運動の第二法則（Newton's second law）を立て、棒に平行な方向と垂直な方向に分解すれば、摩擦力（friction）と垂直抗力（normal reaction）が求まる。摩擦力が抗力の μ 倍に達したとき、滑りが始まる。

解答

エネルギーの式

粒子を質点（point mass）とみなし、蝶番はなめらかであるとする。一様な棒の端 P のまわりの慣性モーメント（moment of inertia）は $\frac{1}{3}m(3a)^2 = 3ma^2$ であり、P から距離 ℓ にある粒子は $m\ell^2$ だけ寄与する。滑りがない間、この系は角速度（angular speed）$\dot{\theta}$ で P のまわりを回転する剛体であり、その運動エネルギー（kinetic energy）は

$$\tfrac{1}{2}\left(3ma^2 + m\ell^2\right)\dot{\theta}^2.$$

である。棒が角 θ だけ回転したとき、棒の中心（P から距離 $\frac{3}{2}a$）は $\frac{3}{2}a\sin\theta$ だけ下がり、粒子は $\ell\sin\theta$ だけ下がる。蝶番からの抗力は仕事をしない（作用点が固定されているからである）。また、摩擦力と垂直抗力は系の内力であり、滑りがなければ全体と

して仕事をしない。静止状態から始まるので、エネルギー保存則より

$$\tfrac{1}{2}m\left(3a^2+\ell^2\right)\dot{\theta}^2 = mg\left(\tfrac{3}{2}a+\ell\right)\sin\theta,$$

が成り立ち、両辺に $2/m$ を掛ければ

$$(3a^2+\ell^2)\dot{\theta}^2 = g(3a+2\ell)\sin\theta,$$

となって、求める式が得られる。

角加速度

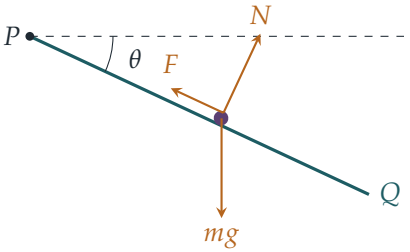
t で微分すると

$$2(3a^2+\ell^2)\dot{\theta}\,\ddot{\theta} = g(3a+2\ell)\cos\theta\,\dot{\theta}.$$

$t>0$ では $\dot{\theta}\neq 0$ であるから、$2\dot{\theta}$ で割ることができる（$t=0$ での結果は連続性から従うし、P のまわりの力のモーメントを考えて直接求めることもできる）：

$$\ddot{\theta} = \frac{g(3a+2\ell)\cos\theta}{2(3a^2+\ell^2)}.$$

粒子にはたらく力



棒は水平から下向きに角 θ をなしている。棒は粒子に対し、棒に垂直な垂直抗力 N（粒子は棒の上に載っているので、棒から離れる向き）と、棒に沿った摩擦力 F を及ぼす。F は P に向かう向きにはたらくとする。粒子は P を中心とする半径 ℓ の円周上を動くので、その加速度は、棒に垂直で θ が増加する向き（下向き、すなわち棒の上面から離れる向き）の成分 $\ell\ddot{\theta}$ と、棒に沿って P に向かう成分 $\ell\dot{\theta}^2$ をもつ。

棒に垂直で θ が増加する向きには、重力の成分は $mg\cos\theta$ であり、N は逆向きにはたらく：

$$mg\cos\theta - N = m\ell\ddot{\theta}.$$

棒に沿って P に向かう向きには、重力の成分は $-mg\sin\theta$ である（重力は粒子を P から遠ざける向きに引く）：

$$F - mg\sin\theta = m\ell\dot{\theta}^2.$$

垂直抗力

上で求めた $\ddot{\theta}$ を用いると

$$N = mg\cos\theta - m\ell\ddot{\theta} = mg\cos\theta\left(1 - \frac{\ell(3a+2\ell)}{2(3a^2+\ell^2)}\right)$$
$$= mg\cos\theta\,\frac{6a^2+2\ell^2-3a\ell-2\ell^2}{2(3a^2+\ell^2)} = \frac{3mga(2a-\ell)\cos\theta}{2(3a^2+\ell^2)}.$$

$\ell < 2a$ であるから因数 $2a-\ell$ は正であり、θ が鋭角ならば $\cos\theta > 0$ である。よって $N > 0$ である。特に、θ が鋭角である間、垂直抗力は 0 でなく、粒子は棒と接触し続ける。

滑り始める点

第二の運動方程式とエネルギーの式から

$$F = mg\sin\theta + m\ell\dot{\theta}^2 = mg\sin\theta\left(1 + \frac{\ell(3a+2\ell)}{3a^2+\ell^2}\right)$$
$$= mg\sin\theta\,\frac{3a^2+3a\ell+3\ell^2}{3a^2+\ell^2} = \frac{3mg(a^2+a\ell+\ell^2)\sin\theta}{3a^2+\ell^2}.$$

これは $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ で正であるから、仮定したとおり摩擦力は確かに P に向かってはたらく。摩擦がなければ、粒子は棒に沿って外側へ滑っていってしまう。

考えてみよう 滑りの条件が不等式ではなく $F = \mu N$ となるのはなぜか？

粒子が棒に張り付いている間、摩擦は μN までの任意の大きさの力を供給できるので、$F \le \mu N$ が必要である。$\theta = 0$ では $F = 0 < \mu N$ である。θ が増加すると、F は（$\sin\theta$ のように）増加し、N は（$\cos\theta$ のように）減少するので、$\tan\theta$ の正の定数倍である F/N は単調に増加する。粒子は、初めて $F = \mu N$ となる角で滑り始める寸前の状態になる：

$$\frac{3mg(a^2+a\ell+\ell^2)\sin\theta}{3a^2+\ell^2} = \mu\,\frac{3mga(2a-\ell)\cos\theta}{2(3a^2+\ell^2)}.$$

$3mg/(3a^2+\ell^2)$ を約し、$\cos\theta \neq 0$ で割ると

$$\tan\theta = \frac{\mu a(2a-\ell)}{2(\ell^2+a\ell+a^2)},$$

となり、求める式が得られる。

$\ell > 2a$ の場合

N の式は、粒子が棒と一体となって動くという仮定のもとで導いたものである。$\ell > 2a$ ならば、この式は $\theta = 0$ で $N < 0$ を与えるが、これはありえない。棒は粒子を押すこ

とはできても、引くことはできないからである。したがって、手を離した瞬間でさえ、粒子は棒と一体となって動くことはできない。

実際に何が起こるかを見るために、棒だけを考える。手を離した瞬間に P のまわりの力のモーメントを考えると

$$3ma^2\,\ddot{\theta} = mg\cdot\tfrac{3}{2}a \quad\Longrightarrow\quad \ddot{\theta} = \frac{g}{2a},$$

であるから、粒子の真下にある棒上の点は下向きの加速度 $\ell\ddot{\theta} = \frac{\ell}{2a}g$ で動き始める。これは $\ell > 2a$ のとき g より大きい。棒は、粒子が自由落下するよりも速く落ちていくのである。よって、手を離した瞬間に粒子は棒から離れ（両者の間の抗力は 0 である）、重力のもとで自由落下を始め、棒は単独で振り下ろされていく。

検算

- 系全体について P のまわりの力のモーメントを考えると $(3ma^2 + m\ell^2)\ddot{\theta} = mg\cos\theta\,(\frac{3}{2}a + \ell)$ となり、エネルギーの式を微分して得たものと同じ $\ddot{\theta}$ が得られる。
- 境界の場合 $\ell = 2a$ は両方の描像と整合する。手を離した瞬間に $N = 0$ であり、距離 $2a$ にある棒上の点はちょうど加速度 g で動き始める。
- $a = \ell = 1$、$\mu = 1$ とすると、滑り始める角は $\tan\theta = \frac{1}{6}$ を満たし、その角で上の式から $F/N = 6\tan\theta = 1 = \mu$ となる。N と F の式は、運動を数値的に追跡し、粒子の位置から加速度を直接計算することにより、コンピュータでも確認した。

よくある間違い

- 蝶番のまわりではなく、中心のまわりの慣性モーメント $\frac{1}{12}m(3a)^2$ を用いてしまう。長さ L の棒の端のまわりの慣性モーメントは $\frac{1}{3}mL^2$ である。
- 摩擦の式で向心力の項 $m\ell\dot{\theta}^2$ を忘れてしまう。分子が a^2 ではなく $a^2 + a\ell + \ell^2$ になるのは、この項のためである。
- 垂直方向の式で $\ell\ddot{\theta}$ の符号を間違える。棒は粒子から離れる向きに加速しているので、N は $mg\cos\theta$ より大きいのではなく小さい。

STEP のその先へ

最後の小問は古典的な意外な事実である。蝶番で留められて倒れていく棒の上の点は、g より大きな加速度をもちうる。倒れていく定規の端近くに置いた硬貨（あるい

は倒壊する煙突）が置き去りにされるのはこのためである。N や F のような拘束力（constraint forces）を求める体系的な方法は、運動方程式を極座標（polar coordinates）で書くことであり、のちに学ぶラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）では、拘束力をまったく使わずに運動を求める方法が示される。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の回転とこうした極座標での加速度を丁寧に扱っている。

解答例

STEP III 2017、第 11 問

力学 ・ 運動量保存則

> **STEP III 2017、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q11

この問題は、*Beyond STEP* の第 10.3 節「**ロケットと大砲**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch10/rockets.html

鍵となる考え方

系には水平方向の外力がはたらかないので、各発射において水平方向の運動量（momentum）は保存される。地面に対する速さが $v - V$ という一見奇妙な形をしているが、実は単純なことを述べている。すなわち、発射体はつねに**台車に対して**速さ v で飛び出すのである。運動エネルギー（kinetic energy）については、毎回すべてを一から計算し直すのではなく、$(*)$ を用いて 1 回の発射におけるエネルギーの変化を簡単にし、それから足し合わせればよい。

解答

台車、砲、発射体を一直線上を運動する質点としてモデル化し、前向き（台車の進む向き）を正とする。台車の速さが V のときに発射された発射体の速度は $-(v - V) = V - v$、すなわち台車に対する相対速度（relative velocity）は $-v$ である。発射は系の内部で起こり、線路はなめらかであるから、各発射において水平方向の全運動量は保存される。

小問 (i)

発射前はすべてが静止しているので、運動量は 0 である。$V = 0$ であるから、各発射体は速度 $-v$ で飛び出し、台車（質量 M）は速さ u で前進する：

$$Mu - nmv = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{nmv}{M}.$$

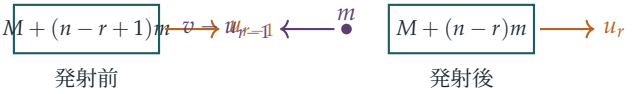
系ははじめ運動エネルギーをもたないので、得られたエネルギーは

$$K = \tfrac{1}{2}Mu^2 + \tfrac{1}{2}nmv^2 = \tfrac{1}{2}\,\frac{n^2m^2v^2}{M} + \tfrac{1}{2}nmv^2 = \tfrac{1}{2}nmv^2\left(1 + \frac{nm}{M}\right),$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

r 回目の発射を考える。その直前、台車は未発射の発射体を $n-r+1$ 個載せているので、運動している質量は $M+(n-r+1)m$ で、速さは u_{r-1} である。直後には、質量 $M+(n-r)m$ が速さ u_r で運動し、質量 m の発射体 1 個が速度 $u_{r-1}-v$ をもつ。それ以前に発射された発射体は影響を受けないので、考慮から外してよい。



運動量保存則（conservation of momentum）より

$$\big(M+(n-r+1)m\big)u_{r-1} = \big(M+(n-r)m\big)u_r + m(u_{r-1}-v).$$

左辺を $\big(M+(n-r)m\big)u_{r-1} + mu_{r-1}$ と書く。すると mu_{r-1} の項が打ち消し合い、

$$\big(M+(n-r)m\big)(u_r-u_{r-1}) = mv, \qquad \text{よって} \qquad u_r - u_{r-1} = \frac{mv}{M+(n-r)m},$$

が残る。これが $(*)$ である。

$(*)$ を $r=1,\ldots,n$ について足し合わせると、左辺は隣り合う項が打ち消し合う和（telescoping sum）となり、$u_0=0$ であるから

$$u_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{mv}{M+(n-r)m}.$$

各分母は $M+(n-r)m \geq M$ を満たすので、各項は $\dfrac{mv}{M}$ 以下である。$n>1$ より $(n-1)m>0$ となるので、$r=1$ では不等号は狭義である。したがって

$$u_n < n\cdot\frac{mv}{M} = u.$$

考えてみよう なぜ 1 つずつ発射するほうが不利なのだろうか？

初期の発射では、砲は台車だけでなく、まだ載っているすべての発射体も押さなければならないので、1 発ごとの速さの増加は小さくなる。$r=n$ の項（最後の 1 発で、もう何も載っていない）だけが、同時発射の場合の 1 発分の寄与と一致する。

小問 (iii)

r 回目の発射では、速度が変化するのは台車（残りの積荷を含む）と、いま発射された発射体だけである。よって

$$\begin{aligned} K_r - K_{r-1} &= \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r)m\big)u_r^2 + \tfrac{1}{2}m(u_{r-1}-v)^2 - \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r+1)m\big)u_{r-1}^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r)m\big)(u_r^2-u_{r-1}^2) + \tfrac{1}{2}m\big[(v-u_{r-1})^2-u_{r-1}^2\big] \\ &= \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r)m\big)(u_r-u_{r-1})(u_r+u_{r-1}) + \tfrac{1}{2}m(v^2-2vu_{r-1}). \end{aligned}$$

$(*)$ より $\big(M+(n-r)m\big)(u_r-u_{r-1}) = mv$ であるから、第 1 項は $\frac{1}{2}mv(u_r+u_{r-1})$ である。したがって

$$\begin{aligned} K_r - K_{r-1} &= \tfrac{1}{2}mvu_r + \tfrac{1}{2}mvu_{r-1} + \tfrac{1}{2}mv^2 - mvu_{r-1} \\ &= \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}mv(u_r-u_{r-1}), \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

これを $r=1,\dots,n$ について足し合わせ、$K_0=0$ と $u_0=0$ を用いると、両辺とも隣り合う項が打ち消し合う：

$$K_n = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mv(u_n-u_0) = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu_n.$$

最後に、小問 (i) と比較する。$u = nmv/M$ であるから

$$K = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}\,\frac{n^2m^2v^2}{M} = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}nmv\,u.$$

小問 (ii) より $u_n < u$ であり、$u>0$ かつ $n>1$ であるから $u<nu$ である。$mv>0$ なので

$$K_n = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu_n < \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu < \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}nmvu = K.$$

よって $K_n < K$ である。つまり、1 つずつ発射すると、解放される運動エネルギーは少なくなる。

検算

- $n=3$、$M=10$、$m=1$、$v=1$ とする。このとき $u=0.3$ であり、一方 $(*)$ からは $u_3 = \frac{1}{12}+\frac{1}{11}+\frac{1}{10} = \frac{181}{660} \approx 0.274$ が得られ、予想どおり小さい。エネルギーは $K=1.95$、$K_3 = \frac{2161}{1320} \approx 1.637$ である。
- n、M、m、v を無作為に数千通り選び、各発射の直後におけるすべての物体の運動量と運動エネルギーを直接計算すると、$(*)$ および K_n の式と完全に一致する。このことはコンピュータで確認した。

- 極限の場合：$m \ll M$ ならば、$(*)$ の各項は mv/M に近いので $u_n \approx u$ となり、どちらのエネルギーも $\frac{1}{2}nmv^2$ に近い。台車が非常に重いときは、発射の仕方はほとんど影響しない。

よくある間違い

- 未発射の発射体が台車とともに運動していることを忘れ、r 回目の発射の前の質量として $M + (n - r + 1)m$ ではなく M を用いてしまう。
- 発射体の速度を $u_{r-1} - v$ ではなく $-v$ としてしまう。問題文では、地面に対する発射体の速さは v ではなく $v - V$ と定められている。
- $K_r - K_{r-1}$ に、それ以前の発射体の運動エネルギーを含めてしまう。それらは影響を受けず、打ち消し合う。

STEP のその先へ

これはロケットの運動の離散版である。n 回の発射を連続的な噴射の流れに置き換えると、u_n の和は積分になり、ツィオルコフスキー（Tsiolkovsky）のロケット方程式（rocket equation）$\Delta u = v \ln(m_0/m_1)$ が得られる。ロケットは 1 つずつ発射する台車と同じ立場にある。燃料をすべて一瞬で燃やすことはできないので、小問 (ii) で明らかになった代償を払うことになる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、質量が変化する系とロケットが丁寧に扱われている。

解答例

STEP III 2017、第 12 問

確率・統計 ・ 離散型同時分布

STEP III 2017、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/17-s3-q12

鍵となる考え方

すべては二つの標準的な和の公式 $\sum_{r=1}^{n} r = \frac{1}{2}n(n+1)$ と $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ から導かれる。まず、確率（probability）の総和が 1 になることから k を定める。次に y について和をとることで周辺分布（marginal distribution）を求める。共分散（covariance）を求めるには $\mathrm{E}(X)$ と $\mathrm{E}(XY)$ が必要である。$x+y$ が x と y について対称（symmetric）であることを使うと、計算量は半分になる。

解答

小問 (i)

n^2 個のすべての組 (x,y) にわたる確率の総和は 1 でなければならない。対称性より $\sum_{x,y} x = \sum_{x,y} y$ である。各 x は y の n 個の値それぞれに対して一度ずつ現れるので、これらはいずれも $n\sum_{x=1}^{n} x = \frac{1}{2}n^2(n+1)$ に等しい。したがって

$$1 = k\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{n}(x+y) = k\cdot 2\cdot \tfrac{1}{2}n^2(n+1) = k\,n^2(n+1), \qquad \text{よって} \qquad k = \frac{1}{n^2(n+1)}.$$

X の周辺分布を求めるには、x を固定して y について和をとる：

$$\mathrm{P}(X=x) = k\sum_{y=1}^{n}(x+y) = k\Big(nx + \tfrac{1}{2}n(n+1)\Big) = \frac{kn\,(2x+n+1)}{2}$$
$$= \frac{n+1+2x}{2n(n+1)},$$

これが求める結果である。$x+y$ は x と y について対称なので、Y も同じ分布をもつ：$\mathrm{P}(Y=y) = \dfrac{n+1+2y}{2n(n+1)}$。

考えてみよう X と Y が独立でないことを示すには、すべての組 (x,y) を調べる必要があるだろうか？

その必要はない。独立（independent）であるためには**すべての**組について $\mathrm{P}(X=x, Y=y)=\mathrm{P}(X=x)\,\mathrm{P}(Y=y)$ が成り立たなければならないので、これが成り立たない組が一つあれば十分である。$x=y=1$ とすると

$$\mathrm{P}(X=1,Y=1)=2k=\frac{2}{n^2(n+1)},\qquad \mathrm{P}(X=1)\,\mathrm{P}(Y=1)=\frac{(n+3)^2}{4n^2(n+1)^2}.$$

これらが等しくなるのは $8(n+1)=(n+3)^2$、すなわち $n^2-2n+1=0$、つまり $(n-1)^2=0$ のときに限る。よって等しくなるのは $n=1$ のときだけである。$n\geq 2$ なので二つの確率は異なり、X と Y は**独立でない**。

小問 (ii)

$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$ を用いる。また、二つの確率変数は同じ分布をもつので $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(X)$ であることに注意する。

平均。小問 (i) の周辺分布を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\frac{1}{2n(n+1)}\sum_{x=1}^{n}\bigl((n+1)x+2x^2\bigr)=\frac{1}{2n(n+1)}\Bigl(\tfrac{1}{2}n(n+1)^2+\tfrac{1}{3}n(n+1)(2n+1)\Bigr)\\&=\frac{1}{2}\Bigl(\frac{n+1}{2}+\frac{2n+1}{3}\Bigr)=\frac{7n+5}{12}.\end{aligned}$$

積の平均。ここで $xy(x+y)=x^2y+xy^2$ であり、対称性より二つの項の二重和は等しい。さらに、x^2y の二重和は一重の和の積に分解できる：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY)&=k\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{n}xy(x+y)=2k\Bigl(\sum_{x=1}^{n}x^2\Bigr)\Bigl(\sum_{y=1}^{n}y\Bigr)=2k\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{6\,n^2(n+1)}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

共分散。以上を共通の分母 144 でまとめると

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y)&=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(7n+5)^2}{144}=\frac{24(2n^2+3n+1)-(49n^2+70n+25)}{144}\\&=\frac{-n^2+2n-1}{144}=-\frac{(n-1)^2}{144}.\end{aligned}$$

$n\geq 2$ より $(n-1)^2>0$ なので、$\mathrm{Cov}(X,Y)=-\dfrac{(n-1)^2}{144}<0$ である。よって共分散は負であり、題意は示された。

共分散が負になるのは自然なことである。同時確率は $x+y$ だけで決まり、合計が大きいほど起こりやすい。X がすでに大きければ、合計を大きくするために Y まで大きくなる必要はないので、Y が大きくなる理由はわずかに弱まるのである。

検算

- $n=2$ とする。このとき $k=\frac{1}{12}$ であり、四つの確率は $\frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}$ で、総和は 1 になる。周辺分布は $\mathrm{P}(X=1)=\frac{5}{12}$、$\mathrm{P}(X=2)=\frac{7}{12}$ で、公式と一致する。したがって $\mathrm{E}(X)=\frac{19}{12}$、$\mathrm{E}(XY)=\frac{2+6+6+16}{12}=\frac{5}{2}$ である。これより $\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{5}{2}-\frac{361}{144}=-\frac{1}{144}$ となり、$-(n-1)^2/144$ と一致する。
- 周辺確率の総和は 1 になる：$\sum_x (n+1+2x)=n(n+1)+n(n+1)=2n(n+1)$。
- 独立性の判定を破綻させる $(n-1)^2$ の値は、共分散を 0 にする値と同じである。どちらにおいても、$n=1$ は確率 1 で $X=Y=1$ となる退化した場合である。
- $n=2,\ldots,29$ について厳密な分布をコンピュータで確認し、k、周辺分布、$\mathrm{E}(X)$、$\mathrm{E}(XY)$、共分散の公式が正しいことを確かめた。

よくある間違い

- $\sum_{x,y} x$ には y についての和から因数 n が掛かることを忘れる。この場合 $k=1/(n(n+1))$ となり、誤りである。
- 具体的な組を一つ示すのではなく、「一般的に」独立でないことを示そうとする。反例（counterexample）は一つで十分であり、しかも最も明快な論証である。
- 従属性を示すには共分散が 0 でないことが必要だと考える。ここでは確かに共分散によって従属性が示されるが、共分散が 0 であっても独立性が証明されるわけではない。

STEP のその先へ

$f(x,y)=g(x+y)$ という形の同時分布（joint distribution）は、合計を通じて結びついた確率変数の簡単なモデルである。このとき共分散の符号は g の形によって決まる。ここでは g は一次関数であり、共分散は小さな負の値になる。大学では、同時分布、周辺分布、条件付き分布（conditional distribution）、相関（correlation）をまとめて学び、連続型の場合には二重和（double sum）の代わりに二重積分（double integral）を用いる。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、STEP に近いスタイルでこの内容を扱っている。

解答例

STEP III 2017、第13問

確率・統計 ・ 期待値と分散

> **STEP III 2017、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題はSTEP Support Programmeの問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q13

鍵となる考え方

$X - x$ を $(X - \mu) + (\mu - x)$ と書く。第1項の平均（mean）は0であるから、2乗して期待値（expectation）をとると交差項が消える。残るのは分散（variance）に定数を加えたものであり、これは「$\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + \mu^2$」と同じ恒等式である。一様分布（uniform distribution）の場合、Y は X の関数であるが一対一（one-to-one）ではない。そのため、Y の確率密度関数（density）を求めるには、累積分布関数（cumulative distribution function）を経由するのが最も確実である。

解答

関数 V

任意の固定された数 x に対して、

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(x) = \mathrm{E}\big((X-x)^2\big) &= \mathrm{E}\big(((X-\mu)+(\mu-x))^2\big)\\ &= \mathrm{E}\big((X-\mu)^2\big) + 2(\mu-x)\,\mathrm{E}(X-\mu) + (\mu-x)^2\\ &= \sigma^2 + (x-\mu)^2\end{aligned}$$

となる。ここで期待値の線形性（linearity of expectation）（$\mu - x$ は定数である）と $\mathrm{E}(X - \mu) = 0$ を用いた。

Y の平均

$\mathrm{V}(x) = \sigma^2 + (x - \mu)^2$ はすべての実数 x について成り立つから、$x = X$ とおいてよい：

$$Y = \mathrm{V}(X) = \sigma^2 + (X-\mu)^2.$$

考えてみよう V は期待値によって定義されたのだから、$\mathrm{V}(X)$ は単なる数ではないのか？

そうではない。V は実変数の普通の関数（x の二次関数（quadratic））である。期待値は x を固定したままとったものである。この二次関数に確率変数（random variable）X を代入すると、新しい確率変数が得られる。したがって

$$\mathrm{E}(Y) = \sigma^2 + \mathrm{E}\big((X-\mu)^2\big) = \sigma^2 + \sigma^2 = 2\sigma^2,$$

となり、これが $(*)$ である。

一様分布の場合

X が $[0,1]$ 上の一様分布に従うとき、$\mu = \frac{1}{2}$、$\sigma^2 = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ である。よって

$$\mathrm{V}(x) = \tfrac{1}{12} + \big(x - \tfrac{1}{2}\big)^2 = x^2 - x + \tfrac{1}{3}.$$

Y の分布。 このとき $Y = \frac{1}{12} + (X - \frac{1}{2})^2$ である。X が $[0,1]$ を動くと $|X - \frac{1}{2}|$ は $[0, \frac{1}{2}]$ を動くので、Y のとる値は $[\frac{1}{12}, \frac{1}{12} + \frac{1}{4}] = [\frac{1}{12}, \frac{1}{3}]$ の範囲にある。

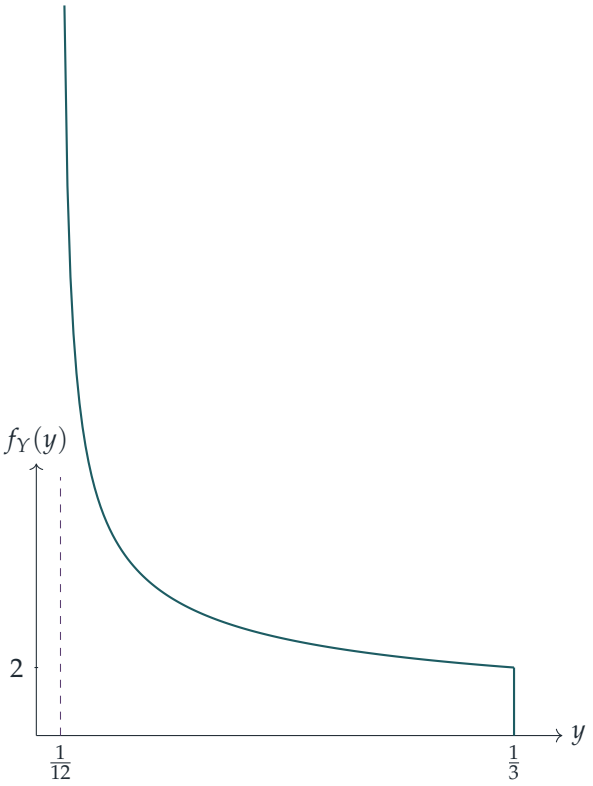
写像 $X \mapsto Y$ は二対一（two-to-one）である（点 $\frac{1}{2} \pm h$ は同じ Y を与える）から、分布関数（distribution function）を用いて考える。$\frac{1}{12} \le y \le \frac{1}{3}$ のとき、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y \le y) &= \mathrm{P}\big((X-\tfrac{1}{2})^2 \le y - \tfrac{1}{12}\big) = \mathrm{P}\big(\tfrac{1}{2} - s \le X \le \tfrac{1}{2} + s\big), \quad \text{ただし} s = \sqrt{y - \tfrac{1}{12}}, \\ &= 2s = 2\sqrt{y - \tfrac{1}{12}}\end{aligned}$$

となる。なぜなら $0 \le s \le \frac{1}{2}$ であるから、この区間は $[0,1]$ に含まれ、長さは $2s$ だからである。（$y = \frac{1}{3}$ のときこれは $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ となり、当然そうあるべき値である。）微分すると、

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{y - \frac{1}{12}}} \quad （\text{ただし} \tfrac{1}{12} < y \le \tfrac{1}{3}, \qquad f_Y(y) = 0 （\text{それ以外のとき}）$$

を得る。この確率密度関数は $y = \frac{1}{12}$ の近くで有界ではないが、それでも可積分（integrable）である。$(X - \frac{1}{2})^2$ は $X = \frac{1}{2}$ の近くで平らなので、Y は最小値の近くの値をとる可能性が最も高い。



$(*)$ **の確認。** 確率密度関数を用い、$t = y - \frac{1}{12}$ と置換すると（t は 0 から $\frac{1}{4}$ まで動く）、

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{1/12}^{1/3} \frac{y}{\sqrt{y - \frac{1}{12}}}\,\mathrm{d}y = \int_0^{1/4} \left(t^{1/2} + \tfrac{1}{12}t^{-1/2}\right)\mathrm{d}t = \left[\tfrac{2}{3}t^{3/2} + \tfrac{1}{6}t^{1/2}\right]_0^{1/4}$$
$$= \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{12} = \tfrac{1}{6}.$$

$2\sigma^2 = 2\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{6}$ であるから、これは $(*)$ と一致する。

検算

- 確率密度関数の積分は 1 になる：$\int_0^{1/4} t^{-1/2}\,\mathrm{d}t = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$。
- $\mathrm{V}(x)$ は $x = \mu$ で最小となり、最小値は σ^2 である。つまり、平均とは期待二乗距離を最小にする点である。一様分布の場合 $\mathrm{V}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{12}$ であり、これは Y の値域の下端である。
- 400 000 個の一様乱数を用いたコンピュータシミュレーションでは、Y の標本平均は約 0.1667 となり、$\frac{1}{6}$ と一致した。

よくある間違い

- $\mathrm{V}(X)$ を定数 σ^2 とみなしてしまい、$\mathrm{E}(Y) = \sigma^2$ を得る。
- 一対一の場合の変数変換（change of variable）の公式 $f_Y = f_X \left|\mathrm{d}x/\mathrm{d}y\right|$ を一方の枝だけに適用してしまい、正しい確率密度関数の半分を得る。$X = \frac{1}{2} + s$ と $X = \frac{1}{2} - s$ の両方が寄与する。

STEP のその先へ

$\mathrm{V}(x) = \sigma^2 + (x - \mu)^2$ は最も単純なバイアス・バリアンス分解（bias–variance decomposition）である。ある量を x で推定するとき、平均二乗誤差（mean squared error）は、データのばらつきと偏り（bias）の 2 乗との和に分解される。結果 $\mathrm{E}(Y) = 2\sigma^2$ は、X の独立（independent）な 2 つのコピーの間の期待二乗距離が $2\sigma^2$ であることを述べている。統計学者はこの事実を繰り返し用いる。たとえば、標本分散（sample variance）がなぜ $n - 1$ で割るのかを説明するときである。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）は、これら両方の考え方に加え、確率変数の単調（monotonic）でない関数の確率密度関数の求め方も扱っている。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

2017 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

