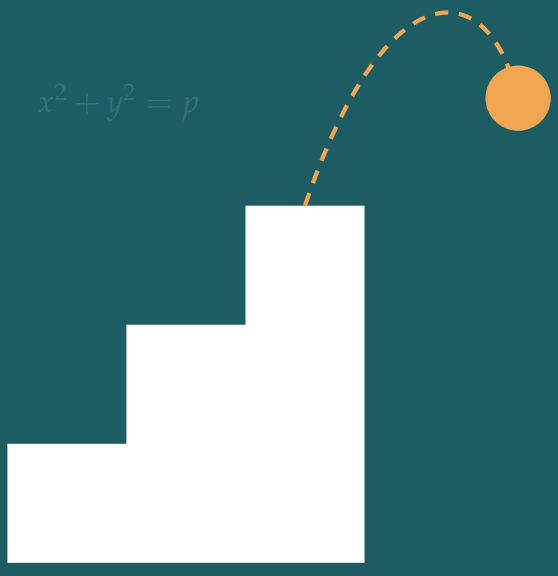
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

2016 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

2016 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

2016 年解答例

2016 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 37 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 多項式の恒等式と因数分解 純粋数学 . . . 3
Q4 曲線の曲率 純粋数学 . . . 7
Q5 接する円 純粋数学 . . . 11
Q6 ベクトルと図形 純粋数学 . . . 15
Q7 4 を法とする因数分解 純粋数学 . . . 19
Q8 母関数 純粋数学 . . . 23
Q9 最大摩擦力でのつり合い 力学 . . . 27
Q10 衝突と反発係数 力学 . . . 31
Q11 放物運動の最大到達距離 力学 . . . 35
Q12 二項係数の対称性 確率・統計 . . . 39
Q13 指数分布の順序統計量 確率・統計 . . . 43

STEP II

Q1 媒介変数表示された曲線と接線 純粋数学 . . . 47
Q2 因数定理 純粋数学 . . . 51
Q3 多項式の根 純粋数学 . . . 55
Q4 分数関数の値域 純粋数学 . . . 59
Q5 二項係数の恒等式 純粋数学 . . . 63
Q6 チェビシェフ多項式の方程式 純粋数学 . . . 67
Q7 対称性を用いた定積分 純粋数学 . . . 71
Q8 積分による和の近似 純粋数学 . . . 75
Q9 運動量とエネルギー損失 力学 . . . 79
Q10 摩擦とつり合い 力学 . . . 83
Q11 放物運動と衝突 力学 . . . 87

Q12 包除原理と完全順列 確率・統計 . . . 91
Q13 正規近似 確率・統計 . . . 95

STEP III

Q1 漸化式による積分 純粋数学 . . . 99
Q2 放物線の法線 純粋数学 . . . 103
Q3 積分と多項式 純粋数学 . . . 107
Q4 望遠鏡型級数 純粋数学 . . . 111
Q5 素数の積 純粋数学 . . . 115
Q6 双曲線関数 純粋数学 . . . 119
Q7 1の冪根 純粋数学 . . . 124
Q8 関数方程式 純粋数学 . . . 128
Q9 ばねと単振動 力学 . . . 132
Q10 平面上の円運動 力学 . . . 136
Q11 仕事率と抵抗 力学 . . . 141
Q12 チェビシェフの不等式 確率・統計 . . . 145
Q13 和の尖度 確率・統計 . . . 148

解答例

STEP I 2016、第 1 問

純粋数学 ・ 多項式の恒等式と因数分解

> **STEP I 2016、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q1

鍵となる考え方

商（quotient）$q_n(x)$ は実は多項式（polynomial）である。$2n+1$ は奇数なので $x+1$ は $x^{2n+1}+1$ を割り切り、その商は符号が交互に変わる等比数列の和になる。したがって小問 (i) は、p_n を展開して係数を比較（comparing coefficients）すればよい。小問 (ii) の見どころは p_n の形から生まれる。$2n+1$ と x の積が平方数になるとき、p_n は平方の差（difference of two squares）となり、因数分解（factorisation）できるのである。

解答

小問 (i)

$x \neq -1$ のとき、初項 1、公比 $-x$ の等比級数（geometric series）の和をとると

$$1 - x + x^2 - \cdots + x^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-x)^k = \frac{1-(-x)^{2n+1}}{1+x} = \frac{1+x^{2n+1}}{1+x},$$

となる。ここで $2n+1$ が奇数であることから $(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$ を用いた。よって

$$q_n(x) = x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - \cdots - x + 1,$$

であり、$2n+1$ 個の係数はすべて ± 1 で、符号は交互に変わる。以下、各場合について p_n を展開する。

$n = 1$ のとき。

$$p_1(x) = (x+1)^2 - 3x = x^2 + 2x + 1 - 3x = x^2 - x + 1 = q_1(x).$$

$n = 2$ **のとき**。

$$\begin{aligned} p_2(x) &= (x+1)^4 - 5x(x^2+x+1) \\ &= (x^4+4x^3+6x^2+4x+1) - (5x^3+5x^2+5x) \\ &= x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = q_2(x). \end{aligned}$$

$n = 3$ **のとき**。まず $(x^2+x+1)^2 = x^4+2x^3+3x^2+2x+1$ であるから、

$$\begin{aligned} p_3(x) &= (x+1)^6 - 7x(x^2+x+1)^2 \\ &= (x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1) - (7x^5+14x^4+21x^3+14x^2+7x) \\ &= x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = q_3(x). \end{aligned}$$

以上より、$n = 1,2,3$ のとき $x \neq -1$ に対して $p_n(x) \equiv q_n(x)$ が成り立つ。これが示すべきことであった。

$n = 4$ **のとき**。恒等式（identity）を否定するには、x の値が一つあれば十分である。$x = 1$ とすると

$$p_4(1) = 2^8 - 9 \cdot 1 \cdot 3^3 = 256 - 243 = 13, \qquad q_4(1) = \frac{1+1}{1+1} = 1,$$

であるから、$p_4 \not\equiv q_4$ である。（完全に展開すると $p_4(x) = x^8 - x^7 + x^6 + 2x^5 + 7x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 1$ となり、x^5 の項から先が合わなくなる。）

小問 (ii)

考えてみよう どの n とどの x を使えばよいか。そして、p_n はどうすれば因数分解できるのか。

$\dfrac{x^{2n+1}+1}{x+1}$ を与えられた数に合わせることで、x と n が決まる。そこで p_n の形が役に立つ。$(x+1)^{2n} = ((x+1)^n)^2$ は常に平方であり、$(x^2+x+1)^{n-1}$ は n が奇数のとき平方である。したがって $(2n+1)x$ も平方数であれば、$p_n(x)$ は平方の差になる。

(a) $n = 1$、$x = 300$ とする。このとき $2n+1 = 3$ であり、$3x = 900 = 30^2$ である。小問 (i) より

$$\begin{aligned} \frac{300^3+1}{301} = q_1(300) = p_1(300) &= 301^2 - 3 \cdot 300 \\ &= 301^2 - 30^2 \\ &= (301-30)(301+30) = 271 \times 331. \end{aligned}$$

どちらの因数も 1 ではない。（直接計算しても $300^2 - 300 + 1 = 89\,701 = 271 \times 331$ である。）

(b) $7^{49} = (7^7)^7$ であるから、$n = 3$（すなわち $2n+1 = 7$）、$x = 7^7$ とする。すると $(2n+1)x = 7 \cdot 7^7 = 7^8 = (7^4)^2$ は平方数であり、$n - 1 = 2$ は偶数である。小問 (i) より

$$\begin{aligned}\frac{7^{49}+1}{7^7+1} = q_3(7^7) = p_3(7^7) &= (7^7+1)^6 - 7^8\,(7^{14}+7^7+1)^2 \\ &= [(7^7+1)^3]^2 - [7^4(7^{14}+7^7+1)]^2,\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{7^{49}+1}{7^7+1} = \Big[(7^7+1)^3 - 7^4(7^{14}+7^7+1)\Big]\Big[(7^7+1)^3 + 7^4(7^{14}+7^7+1)\Big].$$

2 番目の因数が 1 より大きいことは明らかである。1 番目については、$(7^7+1)^3 > 7^{21}$ である一方、

$$7^4(7^{14}+7^7+1) = 7^{18} + 7^{11} + 7^4 < 7^{19},$$

であるから、1 番目の因数は $7^{21} - 7^{19} = 48 \cdot 7^{19} > 1$ より大きい。どちらの因数も 1 ではなく、求める因数分解が得られた。（括弧を展開すると、2 つの因数は $7^{21} + 3 \cdot 7^{14} + 3 \cdot 7^7 + 1 \mp (7^{18} + 7^{11} + 7^4)$ と書くこともできる。）

検算

- 小問 (i) で $x = 1$ とおくと、$p_1(1) = 4 - 3 = 1$、$p_2(1) = 16 - 15 = 1$、$p_3(1) = 64 - 63 = 1$ となり、いずれも $q_n(1) = 1$ に等しい。一方、$p_4(1) = 13$ である。
- (a) において、$271 \times 331 = 89\,701 = 300^2 - 300 + 1$ である。
- (b) において、正確な整数値をコンピュータで確かめると、2 つの因数の積は $(7^{49}+1)/(7^7+1)$ に等しい。因数はおよそ 5.57×10^{17} と 5.60×10^{17} である。

よくある間違い

- どちらの因数も 1 でない理由を述べ忘れること。(b) ではこのために簡単な大きさの評価が必要である。
- (b) で $n = 24$ や $x = 7$ を使うこと。指数 49 は 7×7 と見なければならず、そうすると $x = 7^7$、$2n + 1 = 7$ となる。

STEP のその先へ

ここで使った技法は、オーリフィーユ型因数分解（Aurifeuillean factorisation）の特別な場合である。これは $x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy)$ のような恒等式で、$a^k \pm 1$ の形の数を、自明な代数的因数から予想されるよりもさらに細かく分解する。これらは円分多項式（cyclotomic polynomials）から生じるもので、円分多項式は大学 1 年の代数学や整数論（number theory）の講義に登場する。また、$2^k \pm 1$ の形の大きな数を素因数分解する探求にも使われてきた。因数分解と素数についてさらに学ぶには、ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等整数論』）がよい出発点である。

解答例

STEP I 2016、第 4 問

純粋数学 • 曲線の曲率

> **STEP I 2016、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q4

鍵となる考え方

κ の式は難しい二階微分方程式（second-order differential equation）のように見えるが、小問 (i) はそれが完全な導関数（exact derivative）であることを示すために置かれている。$p = \mathrm{f}'(x)$ とおくと、曲率（curvature）は $p/\sqrt{1+p^2}$ の x による導関数であるから、曲率が一定ならば一見して一度積分できる。二度目の積分は定型的な計算であり、答えはなじみのある図形になる。

解答

小問 (i)

$z(1+z^2)^{-1/2}$ に積の微分法（product rule）を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{(1+z^2)^{1/2}}\right) &= (1+z^2)^{-1/2} - z\cdot z(1+z^2)^{-3/2} \\ &= \frac{(1+z^2)-z^2}{(1+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+z^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

小問 (ii)

κ を 0 でない定数とし、$p = \mathrm{f}'(x)$ とおく。すると $\mathrm{f}''(x) = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ である。小問 (i) と合成関数の微分法（chain rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = \frac{1}{(1+p^2)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{f}''(x)}{\left(1+(\mathrm{f}'(x))^2\right)^{3/2}} = \kappa.$$

x について積分すると、ある定数が存在し、それを $-\kappa a$ と書けば（$\kappa \neq 0$ であるからこう書ける）、

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \kappa(x-a). \qquad (*)$$

が成り立つ。

考えてみよう 符号を見失わずに $(*)$ を p について解くにはどうすればよいか。

2 乗によって何が失われるかを覚えておけば、2 乗しても問題はない。$\sqrt{1+p^2} > 0$ であるから、$(*)$ は p が $\kappa(x-a)$ と同じ符号をもつことを意味し、さらに $|p| < \sqrt{1+p^2}$ であるから $|\kappa(x-a)| < 1$ も意味する。2 乗すると $p^2 = \kappa^2(x-a)^2(1+p^2)$ となるので、

$$p^2 = \frac{\kappa^2(x-a)^2}{1-\kappa^2(x-a)^2}, \qquad \text{かつ、上のように符号を選ぶと、} \qquad p = \frac{\kappa(x-a)}{\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2}}.$$

逆に、$1+p^2 = 1/\left(1-\kappa^2(x-a)^2\right)$ であるから、この p は確かに $(*)$ を満たす。

ここでもう一度積分する。$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2} = \dfrac{-\kappa^2(x-a)}{\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2}}$ であるから、ある定数 b を用いて

$$y = b - \frac{1}{\kappa}\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2}, \qquad |x-a| < \frac{1}{|\kappa|}.$$

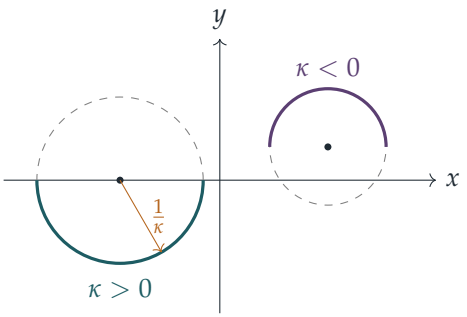
を得る。変形すると $\kappa(y-b) = -\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2}$ となり、2 乗すると

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{1}{\kappa^2}.$$

が得られる。したがって、0 でない一定の符号付き曲率（signed curvature）κ をもつ曲線はどれも、中心 (a,b)、半径 $1/|\kappa|$ の円の一部であり、逆にそのような弧はすべて実際に現れる。実際、手順を逆にたどれば、上の各関数の符号付き曲率はちょうど κ である。より正確には $\kappa(y-b) \leq 0$ であるから、次のようになる。

- $\kappa > 0$ ならば、曲線は下半分 $y = b - \sqrt{\kappa^{-2} - (x-a)^2}$ であり、中心より下にあって上に曲がっている（$\mathrm{f}'' > 0$）。
- $\kappa < 0$ ならば、曲線は上半分 $y = b + \sqrt{\kappa^{-2} - (x-a)^2}$ であり、中心より上にあって下に曲がっている（$\mathrm{f}'' < 0$）。

端点 $x = a \pm 1/|\kappa|$ では傾きが無限大になるので除外される。曲線 $y = \mathrm{f}(x)$ はグラフでしかありえないから、開いた半円（またはその一部）を超えることは決してない。



幾何学的な意味

これらの曲線では $|\kappa|$ は円の半径の逆数であるから、$|\kappa|$ が大きいほど円は小さく、急に曲がる。κ の符号は曲線がどちらに曲がるかを表す。円の中心が曲線より上にあるとき（曲線が下に凸のとき）$\kappa > 0$ であり、中心が曲線より下にあるとき $\kappa < 0$ である。

検算

- $\kappa = \frac{1}{2}$、$a = b = 0$ とすると、曲線は $y = -\sqrt{4 - x^2}$、すなわち半径 2 の円の下半分である。$x = 1$ では $y = -\sqrt{3}$、$y' = x/\sqrt{4 - x^2} = 1/\sqrt{3}$、$y'' = 4/(4 - x^2)^{3/2} = 4/3^{3/2}$ であるから、$1 + y'^2 = \frac{4}{3}$ となり、$\kappa = \dfrac{4/3^{3/2}}{(4/3)^{3/2}} = \frac{1}{2}$ となって、期待どおりである。
- 直線では $f'' = 0$ であるから $\kappa = 0$ である。これは半径 $1/|\kappa| \to \infty$ としたときの円の極限であり、問題が $\kappa = 0$ を除外しているのはこのためである。
- $f'' = \kappa(1 + f'^2)^{3/2}$ をランダムな初期値からコンピュータで逐次的に解いたところ、各点は小数第 6 位まで予測どおりの円の上にあった。

よくある間違い

- 最初の段階で積分定数（constant of integration）を忘れること。これにより、中心を水平方向に動かす自由度が失われる。
- p について誤った平方根をとること。これにより、中心の反対側の半円と、誤った κ の符号が得られてしまう。
- 「κ is the radius」（κ は半径である）とだけ述べること。κ は半径の逆数であり、その符号が曲がる向きを表す。

STEP のその先へ

曲率は曲線の微分幾何学（differential geometry）の出発点である。弧長（arc length）s でパラメータ表示された曲線では $\kappa = \mathrm{d}\psi/\mathrm{d}s$ である。ここで ψ は接線（tangent）が x 軸となす角である。いまの場合 $p/\sqrt{1+p^2} = \sin\psi$ であるから、$(*)$ は本質的には、ψ が曲線に沿って一定の割合で変化するという主張である。3 次元では曲率に捩率（torsion）が加わり、フレネ–セレの公式（Frenet–Serret formulae）により、これら二つの関数が剛体運動（rigid motion）を除いて曲線を決定することが示される。Pressley の *Elementary Differential Geometry*（初等微分幾何学）は、大学 1 年生程度の水準の親しみやすい入門書である。

解答例

STEP I 2016、第 5 問

純粋数学 • 接する円

> **STEP I 2016、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q5

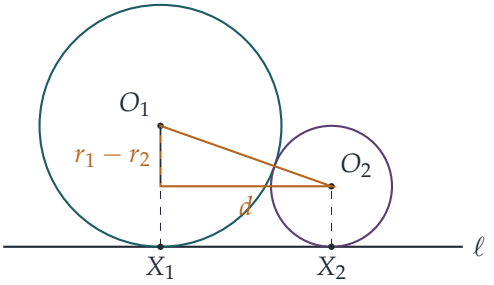
鍵となる考え方

すべては一つの事実に基づいている。二つの円が互いに接し、さらに両方が同じ直線に接しているとき、それぞれの円と直線との接点の間の距離は $2\sqrt{r_1 r_2}$ である。これはただ一つの直角三角形から導かれる。そのうえで置換（substitution）$x = 1/\sqrt{a}$, $y = 1/\sqrt{b}, z = 1/\sqrt{c}$ を行うと、$(**)$ は対称な 4 次式になり、これは四つの 1 次因数に因数分解（factorisation）される。そしてその因数の一つがちょうど $(*)$ なのである。

解答

小問 (i)

直線上で接する二つの円。半径 r_1 と r_2 の二つの円が互いに外接（touching externally）し、ともに直線 ℓ の同じ側にあって、それぞれ点 X_1, X_2 で ℓ に接しているとする。X_1 と X_2 への半径は ℓ に垂直であるから、中心 O_1, O_2 は ℓ からそれぞれ高さ r_1, r_2 の位置にある。二つの円は外接しているので、$O_1O_2 = r_1 + r_2$ である。



O_2 から半径 O_1X_1 に垂線を下ろす（図は $r_1 \geq r_2$ の場合）。すると、斜辺が $r_1 + r_2$、縦の辺が $|r_1 - r_2|$、横の辺が $d = X_1X_2$ の直角三角形ができる。三平方の定理（Pythagoras' theorem）により

$$d^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2, \qquad \text{よって} \qquad X_1X_2 = 2\sqrt{r_1r_2}.$$

これを3回用いる。図では、どの2円も互いに接し、3円すべてが直線に点 P, Q, R で接しており、Q は P と R の間にある。したがって

$$PQ = 2\sqrt{ab}, \qquad QR = 2\sqrt{bc}, \qquad PR = 2\sqrt{ac},$$

であり、$PQ + QR = PR$ より $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} = \sqrt{ac}$ が得られる。両辺を $\sqrt{abc} > 0$ で割ると

$$\frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}},$$

となり、これが $(*)$ である。

$(**)$ **を導く**。$x = \dfrac{1}{\sqrt{a}}, y = \dfrac{1}{\sqrt{b}}, z = \dfrac{1}{\sqrt{c}}$ とおくと、$\dfrac{1}{a} = x^2$ などが成り立ち、$(*)$ は $y = x + z$ ということである。このとき $(**)$ は $2(x^4 + y^4 + z^4) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$ となる。右辺を展開して整理すると、これは

$$F := x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = 0.$$

と同値である。

考えてみよう この4次式はどのように因数分解できるだろうか。

二つの平方の差としてまとめる。$(x^2 + y^2 - z^2)^2 = x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2$ であるから

$$\begin{aligned} F &= (x^2 + y^2 - z^2)^2 - (2xy)^2 \\ &= \left(x^2 - 2xy + y^2 - z^2\right)\left(x^2 + 2xy + y^2 - z^2\right) \\ &= \left((x - y)^2 - z^2\right)\left((x + y)^2 - z^2\right) \\ &= (x - y - z)(x - y + z)(x + y - z)(x + y + z). \end{aligned}$$

$(*)$ より $x - y + z = 0$ であるから $F = 0$ となり、$(**)$ が成り立つ。

小問 (ii)

今度は a, b, c を、$b < c < a$ かつ $(**)$ を満たす任意の正の数とする。x, y, z を前と同様に定める。これらは正であり、$t \mapsto 1/\sqrt{t}$ は $t > 0$ で減少関数（decreasing function）であるから、条件 $b < c < a$ より

$$y > z > x > 0.$$

が成り立つ。小問 (i) で示したとおり、$(**)$ は

$$(x-y-z)(x-y+z)(x+y-z)(x+y+z)=0,$$

と同値であるから、四つの因数のうちどれかが 0 になる。そのうち三つは 0 になりえない。

- 三つとも正であるから、$x+y+z>0$。
- $y>z$ かつ $x>0$ であるから、$x+y-z>0$。
- $x<y$ かつ $z>0$ であるから、$x-y-z<0$。

したがって $x-y+z=0$、すなわち $y=x+z$ であり、

$$\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{c}},$$

これが $(*)$ である。（実際に必要だったのは、b が三つのうち最小であるという事実だけである。）

検算

- $a=4, c=1$ とする。$(*)$ より $1/\sqrt{b}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ であるから $b=\frac{4}{9}$。このとき $2\left(\frac{1}{16}+\frac{81}{16}+1\right)=\frac{49}{4}$ かつ $\left(\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+1\right)^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$ となり、$(**)$ のとおりである。
- なぜ (ii) で大小関係が必要なのか。$a=4, c=1$ のとき、関係式 $(**)$ は $1/b$ についての 2 次方程式で、二つの解 $b=\frac{4}{9}$ と $b=4$（$1/\sqrt{b}=|x-z|=\frac{1}{2}$ から）をもつ。後者では b は最小ではなく最大であり、$(**)$ は満たすが $(*)$ は満たさない。この場合は $1/\sqrt{c}=1/\sqrt{a}+1/\sqrt{b}$ によって a と b が結びついている。文字の役割を入れ替えることは、どの円が真ん中に来るかを入れ替えることに対応する。
- 直線上で互いに接する 3 円の無作為な配置数千通りについてコンピュータで検証したところ、$(*)$ と $(**)$ の両方が確かめられた。

よくある間違い

- 中心間の距離 r_1+r_2 を接点間の距離として用いてしまう。中心の高さは異なっている。
- 小問 (ii) で、残りの三つの因数を除外せずに因数分解から $(*)$ を結論してしまう。まさにここで $b<c<a$ が使われるのである。

STEP のその先へ

関係式 $(**)$ は、デカルト（Descartes）の円定理（Descartes' circle theorem）の退化した場合である。互いに接する 4 円の曲率（curvature）を $k_i = 1/r_i$ とすると $2\sum k_i^2 = \left(\sum k_i\right)^2$ が成り立ち、直線は曲率 0 の円とみなされる。隙間に新しい円を次々とはめ込んでいくとアポロニウスのギャスケット（Apollonian gasket）ができ、曲率が整数の場合には驚くべき数論が現れる。F の因数分解は、ヘロンの公式（Heron's formula）の背後にあるものでもあり、x, y, z を三角形の 3 辺とすると $16\Delta^2 = -F$ となる。円の幾何学と、これらの結果を見通しよくしてくれる反転（inversion）についてさらに知りたければ、Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析）を参照するとよい。

解答例

STEP I 2016、第 6 問

純粋数学 ・ ベクトルと図形

STEP I 2016、問 6

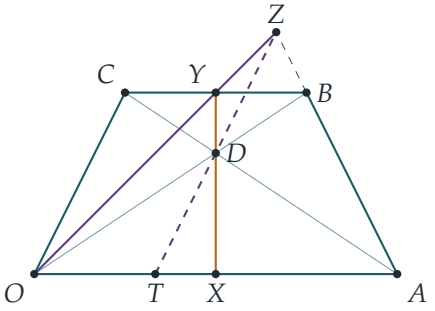
先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/16-s1-q6

鍵となる考え方

図中のどの点も 2 直線の交点であるから、各直線をベクトル表示して等置すればよい。$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は平行でないので、任意のベクトルは $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$ の形にただ一通りに表せる。したがって、同じ点を表す 2 つの式を等置すれば、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の係数（coefficient）をそれぞれ別々に比較できる。終始 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を基底（basis）として計算すれば、どの段階も短い 2 本の 1 次方程式で済む。

解答



c と x の形

CB は OA に平行であるから、ベクトル $\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$ は $\mathbf{a}$ のスカラー倍（scalar multiple）であり、$\mathbf{c}-\mathbf{b}=k\mathbf{a}$ とおける。よって $\mathbf{c}=k\mathbf{a}+\mathbf{b}$ である。四角形（quadrilateral）を $O\to A\to B\to C$ の順に回るとき、辺 BC は OA と逆向きでなければならない（同じ向きであれば、辺 AB と辺 CO が交わり、$OABC$ はまともな四角形にならない）。また

$C \neq B$ である。したがって

$$k < 0.$$

負の値であれば何でもよく、$k = -1$ のときが平行四辺形（parallelogram）である。

X は OA 上にあるから、$\mathbf{x}$ は $\mathbf{a}$ の実数倍であり、$\mathbf{x} = m\mathbf{a}$ とおける。X が O と A の間（端点を除く）にあることから

$$0 < m < 1.$$

また、O, A, B は同一直線上（collinear）にないので、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は平行でない。

点 Z

D を求める。 OB 上の点は $\lambda\mathbf{b}$ と表され、AC 上の点は

$$\mathbf{a} + \mu(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = (1 - \mu + \mu k)\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}.$$

と表される。係数を比較すると、$\lambda = \mu$ かつ $1 - \mu(1 - k) = 0$ である。$k < 0$ より $1 - k > 0$ であるから $\mu = \frac{1}{1-k}$ となり、

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{b}}{1 - k}.$$

Y を求める。 BC 上の点は $\mathbf{b} + t\mathbf{a}$ と表される。XD 上の点は

$$m\mathbf{a} + s(\mathbf{d} - m\mathbf{a}) = m(1 - s)\mathbf{a} + \frac{s}{1 - k}\mathbf{b}.$$

と表される。$\mathbf{b}$ の係数から $s = 1 - k$ であり、このとき $\mathbf{a}$ の係数は $m(1 - (1 - k)) = mk$ となる。よって

$$\mathbf{y} = \mathbf{b} + mk\,\mathbf{a}.$$

Z を求める。 OY 上の点は $\rho(\mathbf{b} + mk\mathbf{a})$、$AB$ 上の点は $\mathbf{a} + \sigma(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1 - \sigma)\mathbf{a} + \sigma\mathbf{b}$ と表される。係数を比較すると $\rho = \sigma$ かつ $\rho mk = 1 - \sigma$ であるから、$\rho(mk + 1) = 1$ である。$mk + 1 \neq 0$ であれば

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{b} + mk\,\mathbf{a}}{mk + 1},$$

となり、示すべき式が得られた。（$mk = -1$ のとき、これは $k < -1$ の場合に起こりうるが、$\mathbf{y} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ となるので OY は AB に平行であり、Z は存在しない。）

考えてみよう Z は辺 AB そのものの上にあるか？

そうではない。$-1 < mk < 0$ であるから $\sigma = \frac{1}{mk+1} > 1$ となり、図のとおり Z は AB を B の先へ延長した直線上にある。問題は直線について述べているので、これは差し支えない。

点 T と 2 つの関係式

DZ 上の点は $\mathbf{d}+\tau(\mathbf{z}-\mathbf{d})$ と表される。$\mathbf{b}$ の係数は

$$\frac{1}{1-k}+\tau\left(\frac{1}{mk+1}-\frac{1}{1-k}\right)=\frac{1}{1-k}-\tau\,\frac{k(1+m)}{(mk+1)(1-k)},$$

である。ここで $(1-k)-(mk+1)=-k(1+m)$ を用いた。T が OA 上にあるためにはこれが 0 でなければならないので、$\tau=\dfrac{mk+1}{k(1+m)}$ である（$k\neq 0$ に注意）。このとき $\mathbf{a}$ の係数は

$$\tau\cdot\frac{mk}{mk+1}=\frac{mk+1}{k(1+m)}\cdot\frac{mk}{mk+1}=\frac{m}{1+m}.$$

となる。ゆえに

$$\mathbf{t}=\frac{m}{1+m}\,\mathbf{a}.$$

驚くべきことに k が消えている。T は X の位置だけで決まるのである。

ここで $a=|\mathbf{a}|=OA$ とおく。$0<\frac{m}{1+m}<1$ であるから T は O と A の間にあり、

$$OT=\frac{ma}{1+m},\qquad TA=a-\frac{ma}{1+m}=\frac{a}{1+m},\qquad OX=ma.$$

したがって

$$OT\times OA=\frac{ma^2}{1+m}=ma\times\frac{a}{1+m}=OX\times TA,$$

であり、また

$$\frac{1}{OX}+\frac{1}{OA}=\frac{1}{ma}+\frac{1}{a}=\frac{1+m}{ma}=\frac{1}{OT},$$

である。これらがともに示すべき結果である。

検算

図の台形（trapezium）で試してみよう：$\mathbf{a}=(4,0)$, $\mathbf{b}=(3,2)$, $k=-\frac{1}{2}$, $m=\frac{1}{2}$ とする。このとき $D=(2,\frac{4}{3})$, $Y=(2,2)$, $Z=(\frac{8}{3},\frac{8}{3})$, $T=(\frac{4}{3},0)$ であり、T, D, Z が同一直線上にあること、および $\frac{1}{OT}=\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{OX}+\frac{1}{OA}$ が確かめられる。20,000 個の無作為な台形についてコンピュータで検証したところ、上のすべての式と 10^{-10} 以内の誤差で一致した。極限の場合 $m\to 1$（$X\to A$）では $OT=\frac{1}{2}OA$ となり、$\frac{1}{OT}=\frac{2}{OA}$ と整合する。

よくある間違い

- $k>0$ としてしまう：$\mathbf{c}=\mathbf{b}+k\mathbf{a}$ で $k>0$ とすると、「四角形」が自己交差してしまう。

- 係数比較が許される理由を述べずに係数を等置する：これは **a** と **b** が平行でないことに依拠している。
- 異なる 2 直線に同じパラメータの文字を使う：これにより、誤った一致が強制されてしまう。

STEP のその先へ

T が k に（さらには **a** と **b** のなす角にも）依存しないという事実は、これが本質的にはアフィン幾何（affine geometry）、さらには射影幾何（projective geometry）の定理であることを示している。意味をもつのは結合関係と直線上の比だけなのである。関係式 $\frac{1}{OT} = \frac{1}{OX} + \frac{1}{OA}$ は、複比（cross-ratio）や調和点列（harmonic range）を用いるとエレガントに扱える種類の命題であり、同じ作図を繰り返すと、点が $\frac{m}{1+2m}\mathbf{a}$, $\frac{m}{1+3m}\mathbf{a}$, …と順に定まっていく。さらに知りたい読者は、コクセター（Coxeter）と Greitzer の *Geometry Revisited*（邦題『幾何学再入門』）、またはコクセターの *Projective Geometry*（射影幾何学）を参照されたい。

解答例

STEP I 2016、第 7 問

純粋数学 ・ 4 を法とする因数分解

> **STEP I 2016、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q7

この問題は、*Beyond STEP* の第 1.7 節「**因数分解が破綻するとき**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch01/factorisation-fails.html

鍵となる考え方

すべては 4 を法として（modulo）考えることから導かれる。奇数は $\equiv 1$ または $\equiv 3 \equiv -1 \pmod 4$ であるから、奇数の積が S に属するか T に属するかは、T からの因数が偶数個か奇数個かによって決まる。この一つの偶奇（parity）の規則だけで、小問 (ii)、(iii)、(iv)(a) が解ける。小問 (iv)(b) では、S-素数が素数であるとは限らないこと、そしてそのために素因数分解の一意性（unique factorisation）が失われることに気づく必要がある。

解答

小問 (i)

正の奇数はすべて 4 で割った余りが 1 または 3 であり、偶数はそのどちらにもならない。よって $S \cup T$ は**正の奇数全体の集合**である。また、ある整数が異なる二つの余りをもつことはないので、$S \cap T$ は**空集合**（*empty set*）である。

小問 (ii)

$a, b \geq 0$ を整数として、S の元 $4a+1$ と $4b+1$ をとる。すると

$$(4a+1)(4b+1) = 16ab + 4a + 4b + 1 = 4(4ab + a + b) + 1,$$

であり、これは余りが 1 となる正の整数であるから、S に属する。

T については、答えは**否**である。たとえば $3 \in T$ であるが $3 \times 3 = 9 = 4 \times 2 + 1 \in S$ であり、$S \cap T$ は空である。実はこれは常に成り立つ。

$$(4a+3)(4b+3) = 16ab + 12a + 12b + 9 = 4(4ab + 3a + 3b + 2) + 1 \in S.$$

混合した積も後で必要になる。

$$(4a+1)(4b+3) = 16ab + 12a + 4b + 3 = 4(4ab + 3a + b) + 3 \in T.$$

まとめると、T の数を $\equiv -1 \pmod 4$ と書けば、奇数の積は $\equiv (-1)^k \pmod 4$ となる。ここで k は T からの因数の個数である。したがって、k が偶数ならば積は S に属し、k が奇数ならば T に属する。

小問 (iii)

$n \in T$ を合成数（composite）とし、$n = p_1 p_2 \cdots p_r$ と素数の積に表す。n は奇数であるから、各 p_i も奇数であり、小問 (i) より各 p_i は S または T に属する。

背理法（proof by contradiction）により、すべての p_i が S に属すると仮定する。小問 (ii) をくり返し用いると、$p_1 p_2 \in S$、次に $(p_1 p_2) p_3 \in S$、以下同様にして $n \in S$ となる。しかし $n \in T$ かつ $S \cap T = \varnothing$ であるから、これは矛盾である。よって、n の素因数の少なくとも一つは T に属する。（偶奇の言葉でいえば、$n \equiv -1$ となるには $\equiv -1$ である因数が奇数個、したがって少なくとも一個必要である。）

小問 (iv)(a)

まず $1 \notin T$ であるから、T の元はすべて 3 以上であることに注意する。

すべての $n \in T$ は、T-素数であるか、T-素数の積である。 n についての強い帰納法（strong induction）を用いる。n が T-素数ならば示すことはない。そうでなければ、$k \geq 2$ かつ各 $t_i \in T$ として $n = t_1 t_2 \cdots t_k$ と書ける。各 $t_i \geq 3$ であるから各 $t_i \leq n/3 < n$ であり、帰納法の仮定により各 t_i は T-素数であるか T-素数の積である。これらを $n = t_1 \cdots t_k$ に代入すれば、n は T-素数の積として表される。

> **考えてみよう** T-素数の積は得られたが、なぜその個数は**奇数**でなければならないのか？

T-素数はすべて T に属するので、$\equiv -1 \pmod 4$ である。したがって、小問 (ii) の最後に述べた規則により、それらを m 個掛けた積は $\equiv (-1)^m \pmod 4$ となる。もし m が偶数ならば、積は $\equiv 1$ となり、T ではなく S に属することになる。積は $n \in T$ であるから、m は奇数である。よって、すべての $n \in T$ は T-素数であるか、奇数個の T-素数の積であり、これが示すべきことであった。

T-素数が素数であるとは限らないことに注意しよう。$15 = 3 \times 5$ は T-素数である。なぜなら $5 \notin T$ であり、1 より大きい数への分解は 3×5 しかないからである。

小問 (iv)(b)

15 についての注意と同じ考え方が S でも使える。T に属する二つの素数の積は S に属するが、S の中では分解できない。そこで

$$9 = 3 \times 3, \qquad 21 = 3 \times 7, \qquad 49 = 7 \times 7.$$

をとる。いずれも S に属する。また、いずれも S-素数である。実際、1 と自分自身以外の約数は 3 または 7 であり、これらは S ではなく T に属する。(21 の約数は $1, 3, 7, 21$ である。) ここで

$$441 = 9 \times 49 = 21 \times 21,$$

であり、$441 = 4 \times 110 + 1 \in S$ である。これらは 441 の S-素数への本当に異なる二つの分解である。一つ目は 9 と 49 を用い、二つ目は 21 を二回用いている。よって 441 が求める例である。

考えてみよう この例はどのようにすれば見つけられただろうか？

通常の整数では $441 = 3^2 \times 7^2$ であり、素数 $3, 7$ は T に属する。S の中では 3 や 7 を一つだけ切り離すことはできないので、T-素数は二つずつ組にしなければならない。3 が二つ、7 が二つあれば、組の作り方は $(3 \cdot 3)(7 \cdot 7)$ と $(3 \cdot 7)(3 \cdot 7)$ の二通りある。相異なる素数 $p, q \in T$ による任意の p^2q^2 でも同様にうまくいく。たとえば $9 \times 121 = 33 \times 33$ である。

検算

- 小さい場合を試す：$5 \times 9 = 45 \in S$、$3 \times 7 = 21 \in S$、$5 \times 7 = 35 \in T$。
- (iii) について：$15 = 3 \times 5$ と $35 = 5 \times 7$ は T に属し、いずれも T に属する素因数 (3、7) をもつ。
- コンピュータで調べると、3000 未満のすべての $n \in T$ について、T-素数へのどの分解も因数の個数は奇数である。T-素数は $3, 7, 11, 15, 19, 23, 31, 35, \ldots$ と始まる。$27 = 3 \times 3 \times 3$ は T-素数ではないことに注意しよう。因数は三個で、奇数である。

よくある間違い

- 具体例を確かめずに、T の二つの元の積は T に属すると主張してしまう。$3 \times 3 = 9$ を見ればすぐに決着がつく。

- X-素数が素数であるとは限らないことを忘れる。これこそが (iv)(b) の要点である。9 と 21 は S-素数である。
- (iv)(a) で、因数の個数が奇数であることだけを証明し、そもそも T-素数への分解が存在することを示し忘れる。

STEP のその先へ

集合 S は乗法について閉じている（closed under multiplication）が、その「素数」による分解は一意的ではない。これは（ヒルベルト数（Hilbert numbers）と呼ばれることもある）古典的な簡単なモデルであり、$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ のような環（ring）で何がうまくいかなくなるかを示している。そこでは $6 = 2 \times 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$ となる。このような環で分解の一意性を回復しようとする試みから、イデアル（ideal）と代数的整数論（algebraic number theory）が生まれた。Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、$\mathbb{Z}$ における素因数分解の一意性がなぜ証明を要する定理なのかを説明しており、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（『環・体・群』）は、それが成り立たない環を扱っている。

解答例

STEP I 2016、第 8 問

純粋数学 ・ 母関数

> **STEP I 2016、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q8

この問題は、*Beyond STEP* の第 9.4 節「**関数としての数列**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/generating-functions.html

鍵となる考え方

母関数（generating function）は数列全体を一つの関数にまとめたものであり、数列に対する操作は関数に対する代数的な計算に置き換わる。小問 (i) では、$1-x$ の負のべきに対する二項級数（binomial series）から必要な係数が得られ、すでに知っている数列を組み合わせて n^2 を作る。小問 (ii) では、漸化式（recurrence）に x^n を掛けて和をとることで、f についての方程式に変換する。数列の添字をずらすことは、その母関数に x を掛けることと同じなのである。

解答

小問 (i)

指数 -2 の二項級数により、

$$(1-x)^{-2} = \sum_{n\geq 0} \binom{-2}{n} (-x)^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n\geq 0} (n+1)x^n,$$

となる。$\binom{-2}{n}(-1)^n = \frac{2\cdot 3\cdots(n+1)}{n!} = n+1$ だからである。x を掛けると

$$x(1-x)^{-2} = \sum_{n\geq 0} (n+1)x^{n+1} = \sum_{n\geq 0} nx^n,$$

となる。ここで和の添字をつけ直したが、$n=0$ を含めても差し支えない（その項は 0 である）。したがって、$u_n = n$ の母関数は $x(1-x)^{-2}$ であり、題意は示された。

同様に、指数 -3 のとき

$$\binom{-3}{n}(-1)^n = \frac{3\cdot 4\cdots(n+2)}{n!} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

であるから、

$$(1-x)^{-3} = \sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n.$$

x を掛けて先ほどと同様に添字をつけ直すと、

$$x(1-x)^{-3} = \sum_{n\geq 0}\frac{n(n+1)}{2}x^n,$$

となるので、数列は $u_n = \frac{1}{2}n(n+1)$、すなわち $0, 1, 3, 6, 10, \ldots$ であり、三角数（triangular numbers）である。

考えてみよう すでに知っている二つの数列から、どうすれば n^2 を作れるか？

母関数は線形である。すなわち、u_n と v_n の母関数がそれぞれ f と g ならば、$\alpha u_n + \beta v_n$ の母関数は $\alpha \mathrm{f} + \beta \mathrm{g}$ である。

$$n^2 = 2\cdot\tfrac{1}{2}n(n+1) - n,$$

であるから、$u_n = n^2$ の母関数は

$$\frac{2x}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2x - x(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

である。

小問 (ii)(a)

各 $n \geq 1$ に対して $u_n x^n = k u_{n-1} x^n$ が成り立つ。すべての $n \geq 1$ について和をとると

$$\sum_{n\geq 1} u_n x^n = kx \sum_{n\geq 1} u_{n-1} x^{n-1}$$
$$\mathrm{f}(x) - u_0 = kx\,\mathrm{f}(x),$$

となる。左辺の和は $\mathrm{f}(x)$ から定数項を除いたものであり、右辺の和は $m = n-1$ とおけば $\sum_{m\geq 0} u_m x^m = \mathrm{f}(x)$ だからである。$u_0 = a$ であるから、これは $\mathrm{f}(x) = a + kx\,\mathrm{f}(x)$ となり、題意は示された。よって

$$\mathrm{f}(x) = \frac{a}{1-kx}.$$

（確認として、展開すると $a + akx + ak^2x^2 + \cdots$ となり、確かに $u_n = ak^n$ である。）

小問 (ii)(b)

$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ に x^n を掛けて $n \geq 2$ について和をとる（漸化式は $n = 2$ からしか成り立たないので、ここから始めなければならない）：

$$\sum_{n\geq 2} u_n x^n = x \sum_{n\geq 2} u_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n\geq 2} u_{n-2} x^{n-2}.$$

考えてみよう これら三つの和のそれぞれで、f のどの項が欠けているか？

左辺には $u_0 + u_1 x$ の項が欠けている。右辺の第一の和は $u_1 x + u_2 x^2 + \cdots$ にわたるので、欠けているのは u_0 だけである。第二の和は $\mathrm{f}(x)$ 全体である。したがって

$$\mathrm{f}(x) - u_0 - u_1 x = x\big(\mathrm{f}(x) - u_0\big) + x^2\,\mathrm{f}(x).$$

$u_0 = 0$、$u_1 = 1$ とすると、これは $\mathrm{f}(x) - x = x\,\mathrm{f}(x) + x^2\,\mathrm{f}(x)$ となるので、

$$\mathrm{f}(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

これはフィボナッチ数（Fibonacci numbers）$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ の母関数である。

検算

- $x(1+x)(1-x)^{-3} = (x + x^2)(1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots)$ を展開すると $x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \cdots$ となり、期待どおり平方数が得られる。
- x を $1 - x - x^2$ で割る筆算を行うと $x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \cdots$ が得られる。
- $x = 0.1$ のとき、和 $\sum n^2 (0.1)^n$ と $0.11/0.9^3 = 0.150891\ldots$ は一致し、フィボナッチ数に対する $\sum u_n (0.1)^n$ は $0.1/0.89 = 10/89 = 0.112359\ldots$ と一致する。これらは、問題中のすべての母関数の最初の 30 個の係数とともに、コンピュータで確認した。

よくある間違い

- 負の指数に対する二項係数を誤ること。$\binom{-r}{n}$ と $(-x)^n$ から生じる符号は打ち消し合うので、係数はすべて正である。
- (ii)(b) で、漸化式が成り立たない $n = 0$ や $n = 1$ から和をとってしまうこと、あるいは初項 u_0 と $u_1 x$ を引き忘れること。
- 三角数を $\frac{1}{2}n(n-1)$ と書いてしまうこと。$u_1 = 1$ を確かめよ。

STEP のその先へ

$\phi, \psi = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ として $1 - x - x^2 = (1 - \phi x)(1 - \psi x)$ と因数分解し、部分分数分解（partial fractions）と小問 (ii)(a) を組み合わせると、ビネの公式（Binet's formula）$u_n = (\phi^n - \psi^n)/\sqrt{5}$ が得られる。同じ方法で定数係数の線形漸化式はどれでも解くことができ、母関数は組合せ論や確率論において中心的な道具である（確率論では確率母関数（probability generating function）となる）。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は確率論の側面を展開している。Wilf の *generatingfunctionology*（母関数論）は、組合せ論の側面を扱った、生き生きとした本であり、無料で入手できる。

解答例

STEP I 2016、第9問

力学 ・ 最大摩擦力でのつり合い

> **STEP I 2016、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q9

鍵となる考え方

点 A のまわりのモーメント（moment）を考える。すると壁で働く二つの力は式から消え、レールでの垂直抗力（normal reaction）が摩擦（friction）を含まない形で θ を用いてただちに求まる。あとは水平方向と鉛直方向に力を分解（resolve）すれば片がつくが、そのためには各摩擦力がどちら向きに働くかを知っておく必要がある。これこそがこの問題の本質である。摩擦力は棒がこれから起こそうとする運動を妨げる向きに働くので、端 A が壁に沿って滑り落ちようとしているのか、それとも滑り上がろうとしているのかを判断しなければならない。

解答

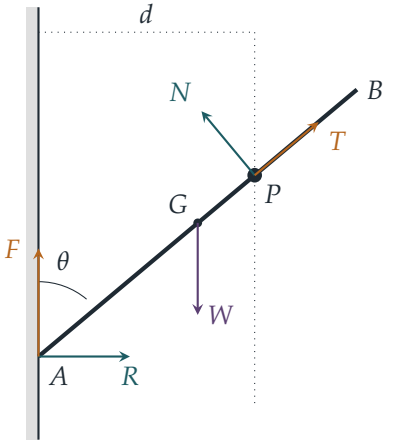
棒を重さ W の一様な（uniform）剛体（rigid body）の棒とみなし、その重心 G は A から距離 a の位置にあるとする。また、レールを固定された直線とみなし、棒とはただ一点 P で接するものとする。A からレールまでの水平距離は d であり、棒は鉛直方向と角 θ をなすから、

$$AP = \frac{d}{\sin\theta}.$$

条件 $a\sin\theta < d$ は、G が A と P の間にあることを意味する。

働く力は次のとおりである。

- A において：水平で壁から離れる向きの垂直抗力 R、および壁に沿った摩擦力 F。
- P において：棒に垂直な垂直抗力 N、および棒に沿った摩擦力 T。
- G に働く重力 W。



F と T の矢印は、以下で扱う第一の場合の向きを示している。

A のまわりのモーメント

N は棒に垂直であるから、A のまわりの N のモーメントは $N \cdot AP$ である。T は棒に沿って働くので A のまわりのモーメントをもたず、R と F も同様である。重力の腕の長さ（lever arm）は $a\sin\theta$ である。よって

$$N\frac{d}{\sin\theta} = Wa\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad N = \frac{Wa\sin^2\theta}{d}. \tag{1}$$

これは棒がどちら向きに滑ろうとしていても成り立つ。

どちら向きに滑るか

考えてみよう A は壁に沿って滑り落ちようとしているのか、それとも滑り上がろうとしているのか。

まず、摩擦がまったくないと仮定してみる。鉛直方向に分解すると $N\sin\theta = W$ が必要であり、(1) と合わせるとこれは $a\sin^3\theta = d$ を意味する。ここでは $a\sin^3\theta < a\sin\theta < d$ であるから、(1) より $N\sin\theta < W$ となる。つまり垂直抗力だけでは棒を支えきれず、不足分は摩擦力が補わなければならない。棒は**下向きに**滑ろうとしている。すなわち A が壁に沿って滑り落ち、θ が減少し、$AP = d/\sin\theta$ が増加するので、棒はレールの上を壁に向かって滑り下りる。摩擦力はこれを妨げるので、図のように F は壁に沿って上向きに、T は棒に沿って上向き（B の方向）に働く。両方の接点で限界つり合い（limiting equilibrium）の状態にあるとき、

$$F = \mu R, \qquad T = \lambda N.$$

力の分解

棒に沿って上向きの単位ベクトル（unit vector）は $(\sin\theta, \cos\theta)$ であり、N の向きは $(-\cos\theta, \sin\theta)$（壁に向かい、かつ上向き）である。水平方向に分解すると

$$R - N\cos\theta + \lambda N\sin\theta = 0 \quad \Longrightarrow \quad R = N(\cos\theta - \lambda\sin\theta).$$

（壁が棒を押すためには $R \geq 0$ でなければならないので、この場合には $\tan\theta \leq 1/\lambda$ が必要である。）鉛直方向に分解すると

$$\begin{aligned} W &= \mu R + N\sin\theta + \lambda N\cos\theta \\ &= N\big(\mu\cos\theta - \lambda\mu\sin\theta + \sin\theta + \lambda\cos\theta\big) \\ &= N\big((\lambda+\mu)\cos\theta + (1-\lambda\mu)\sin\theta\big). \end{aligned}$$

(1) の N を代入し、$W\sin^2\theta$ で割ると

$$d\,\mathrm{cosec}^2\theta = a\big((\lambda+\mu)\cos\theta + (1-\lambda\mu)\sin\theta\big),$$

となり、これが求める結果である。

$a\sin\theta > d$ の場合

このとき G はレールより先にある。式 (1) も幾何的な配置も変わらないので、問題は再び滑る向きだけである。

考えてみよう G がレールより先にあることで、何が変わるか。

上の議論から、下向きの滑りは $a\sin^3\theta < d$ のときに、上向きの滑りは $a\sin^3\theta > d$ のときに起こることがわかった。$a\sin\theta < d$ のもとでは前者しか起こりえなかった。$a\sin\theta > d$ のもとでは後者が起こりうるようになる。レールより先に張り出した部分の重さによって $N\sin\theta > W$ となり、棒はレールの上を壁から**離れる**向きに滑り下りようとし、A は壁に沿って上に動く。これが新たな場合であり、このとき二つの摩擦力はどちらも向きが逆になる。すなわち $F = \mu R$ は壁に沿って下向きに、$T = \lambda N$ は棒に沿って下向きに働く。上の計算で λ を $-\lambda$ に、μ を $-\mu$ に置き換えると

$$R = N(\cos\theta + \lambda\sin\theta), \qquad W = N\big((1-\lambda\mu)\sin\theta - (\lambda+\mu)\cos\theta\big),$$

となり、(1) と合わせて

$$d\,\mathrm{cosec}^2\theta = a\big((1-\lambda\mu)\sin\theta - (\lambda+\mu)\cos\theta\big).$$

この場合、$R > 0$ は自動的に成り立つ。（もし $a\sin^3\theta < d < a\sin\theta$ であれば、棒は依然として下向きに滑り出す寸前にあり、第一の結果がそのまま成り立つ。その導出では G の位置をまったく用いていないからである。）

検算

- 摩擦がない場合（$\lambda = \mu = 0$）、どちらの結果も $d = a\sin^3\theta$ に帰着する。これは上で求めた摩擦のないときのつり合いである。
- $\lambda = \tan\alpha$、$\mu = \tan\beta$（摩擦角（angle of friction））とおくと、右辺はそれぞれ $a\sin(\theta+\alpha+\beta)/(\cos\alpha\cos\beta)$ と $a\sin(\theta-\alpha-\beta)/(\cos\alpha\cos\beta)$ になる。二つの場合の違いは、当然そうあるべきとおり、摩擦角の符号だけである。
- $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$、$\theta = \frac{1}{3}\pi$ のとき、二つの場合からそれぞれ $d/a = \frac{3}{8} + \frac{9\sqrt{3}}{32} \approx 0.862$ と $d/a = \frac{9\sqrt{3}}{32} - \frac{3}{8} \approx 0.112$ が得られる。それぞれを上で定めた摩擦力の向きのもとで力とモーメントの式に代入し直すと、合力（resultant）もモーメントも 0 になる。

よくある間違い

- レールからの垂直抗力を鉛直方向とみなしてしまう。棒はレールとただ一点で接しているので、垂直抗力は棒に垂直である。
- モーメントの式で、A からレールまでの距離として $d/\sin\theta$ ではなく長さ d を用いてしまう。
- 棒が実際にどちらへ動こうとするかを考えずに、摩擦力の向きを決めてしまう。

STEP のその先へ

棒は、下向きの限界の場合と上向きの限界の場合の間にある角 θ の区間全体にわたって静止していられる。摩擦があると、つり合いの状態は一つではなく、ある範囲にわたって存在するのである。このような集合（各接点での摩擦円錐（friction cone）や、接点が保持できる状態の集合）を記述することは、接触力学（contact mechanics）やロボット工学における把持の解析の出発点となる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、摩擦と剛体の静力学（statics）を大学 1 年レベルで丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 2016、第 10 問

力学 ・ 衝突と反発係数

STEP I 2016、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/16-s1-q10

鍵となる考え方

衝突は三回起こり、どの衝突も同じ二つの式、すなわち運動量保存則（conservation of momentum）とニュートン（Newton）の反発の法則（law of restitution）によって扱える。最初の二つの衝突は同時に起こるが互いに独立なので、別々に計算して、B と C が出会う直前の速度を求めればよい。そのうえで、B が最終的に静止するという条件から、λ と e を結ぶ式が一つ得られる。

解答

四つの物体を滑らかな（smooth）台の上の質点（particle）としてモデル化する。したがって衝突以外では水平方向の力ははたらかず、どの衝突も一直線上での直接衝突（direct collision）である。A から D へ向かう向きを正とすると、A の初速度は u、D の初速度は $-u$ である。



小問 (i)

A が B に衝突する。衝突後の A と B の速度をそれぞれ v_A、v_B とする。このとき

$$\begin{aligned} \text{運動量：}\quad & \lambda mu = \lambda m v_A + m v_B, \\ \text{反発：}\quad & v_B - v_A = eu. \end{aligned}$$

$v_B = v_A + eu$ を第一の式に代入すると $(\lambda+1)v_A = (\lambda - e)u$ となるので、

$$v_A = \frac{(\lambda - e)u}{\lambda + 1}, \qquad v_B = v_A + eu = \frac{\lambda(1+e)u}{\lambda+1}.$$

D が C に衝突する。衝突後の C と D の速度をそれぞれ v_C、v_D とする。このとき

$$\begin{aligned} \text{運動量：}\quad & -mu = m v_C + m v_D, \\ \text{反発：}\quad & v_D - v_C = e\big(0 - (-u)\big) = eu. \end{aligned}$$

（衝突前、C と D は速さ u で近づく。衝突後は D が C の右側にあるので、両者は $v_D - v_C$ の割合で遠ざかる。）この二式を解くと

$$v_C = -\tfrac{1}{2}(1+e)u, \qquad v_D = -\tfrac{1}{2}(1-e)u.$$

よって C は速さ $\frac{1}{2}(1+e)u$ で B に向かって動き、D はそれより小さい速さ $\frac{1}{2}(1-e)u$ で左向きに C を追う。

B が C に衝突する。このとき B は速度 v_B で右へ、C は左へ動いているので、両者は速さ $v_B - v_C$ で近づく。衝突後 B は静止する。C の速度を w とすると

$$\begin{aligned} \text{運動量：}\quad & m v_B + m v_C = 0 + mw, \\ \text{反発：}\quad & w - 0 = e(v_B - v_C). \end{aligned}$$

w を消去すると $v_B + v_C = e(v_B - v_C)$、すなわち

$$(1-e)v_B = -(1+e)v_C.$$

上で求めた速度を代入すると

$$(1-e)\cdot\frac{\lambda(1+e)u}{\lambda+1} = (1+e)\cdot\tfrac{1}{2}(1+e)u.$$

$u \neq 0$ かつ $1+e > 0$ なので、$(1+e)u$ で割ってよい：

$$\begin{aligned} 2\lambda(1-e) &= (1+e)(\lambda+1) \\ 2\lambda - 2\lambda e &= \lambda + 1 + e\lambda + e \\ \lambda - 1 &= e(3\lambda + 1), \end{aligned}$$

さらに $3\lambda+1>0$ であるから

$$e=\frac{\lambda-1}{3\lambda+1},$$

となり、題意が示された。

後半の結論については、$\lambda>1$ より

$$\frac{1}{3}-e=\frac{(3\lambda+1)-3(\lambda-1)}{3(3\lambda+1)}=\frac{4}{3(3\lambda+1)}>0,$$

である。したがって $e<\frac{1}{3}$ である。（また $\lambda>1$ より $e>0$ なので、これらの衝突は確かに完全非弾性（perfectly inelastic）ではない。）

小問 (ii)

三回目の衝突の後、C の速度は

$$w=v_B+v_C=(1+e)u\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}-\frac{1}{2}\right)=\frac{(1+e)(\lambda-1)u}{2(\lambda+1)},$$

であり、$\lambda>1$ よりこれは正である。つまり C は今度は右向きに動き、依然として速さ $\frac{1}{2}(1-e)u$ で左向きに動いている D の方へ戻っていく。

考えてみよう 「速さが等しい」という条件からどのような式が得られるか。また、e をどのように消去すればよいか。

速さが等しいのは

$$\frac{(1+e)(\lambda-1)}{2(\lambda+1)}=\frac{1-e}{2}.$$

のときである。小問 (i) より $1+e=\dfrac{4\lambda}{3\lambda+1}$、$1-e=\dfrac{2(\lambda+1)}{3\lambda+1}$ である。これらを代入し、共通因数 $\dfrac{1}{3\lambda+1}$ を約すと

$$\begin{aligned}\frac{4\lambda(\lambda-1)}{\lambda+1}&=2(\lambda+1)\\ 2\lambda^2-2\lambda&=\lambda^2+2\lambda+1\\ \lambda^2-4\lambda-1&=0,\end{aligned}$$

よって $\lambda=2\pm\sqrt{5}$ である。$\lambda>1$ を満たすのは $\lambda=2+\sqrt{5}$ のみである（もう一方の解は負である）。このとき

$$e=\frac{1+\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}}=\frac{(1+\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})}{49-45}=\frac{4\sqrt{5}-8}{4}=\sqrt{5}-2.$$

したがって

$$\lambda=2+\sqrt{5},\qquad e=\sqrt{5}-2.$$

検算

- $e = \sqrt{5} - 2 \approx 0.236$ であり、小問 (i) の要求どおり確かに 0 と $\frac{1}{3}$ の間にある。
- $\lambda = 2 + \sqrt{5} \approx 4.236$、$u = 1$、$e \approx 0.236$ として三回の衝突を数値的に計算すると、三回目の衝突の前は $v_B = 1$（たまたまちょうど 1 になる）、$v_C \approx -0.618$ となる。衝突後は B が静止し、C は約 0.382 の速さで右へ、D は約 0.382 の速さで左へ動く。共通の速さは $\frac{1}{2}(1-e)u = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})u$ である。
- 極限の場合：$\lambda \to 1$ のとき $e \to 0$ となる。質量が等しく $e = 0$ のとき、B と C は大きさが等しく向きが逆の速度で出会うので、合体すると静止する。これは当然そうなるべき結果である。

よくある間違い

- C と D の衝突における反発の式で符号を誤ること。すべての速度を同じ正の向きで表し、「遠ざかる速さ $= e\times$ 近づく速さ」を注意深く用いること。
- C が B に向かって動きながら三回目の衝突に至ることを忘れること。近づく速さは $v_B - v_C = v_B + \frac{1}{2}(1+e)u$ であって、$v_B - \frac{1}{2}(1+e)u$ ではない。
- 負である解 $\lambda = 2 - \sqrt{5}$ を残してしまうこと。

STEP のその先へ

反発を伴う衝突は、エネルギー損失の最も単純なモデルである。直接衝突で失われる運動エネルギー（kinetic energy）は $1 - e^2$ に比例し、$e = 1$ はエネルギーが保存される弾性衝突（elastic collision）の場合にあたる。大学一年目の講義では、これらの考え方から重心系（centre-of-mass frame）へと進む。重心系では二体衝突はすべて対称的に見え、上の計算はほとんど自明になる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この方法で衝突の理論を展開している。

解答例

STEP I 2016、第 11 問

力学 ・ 放物運動の最大到達距離

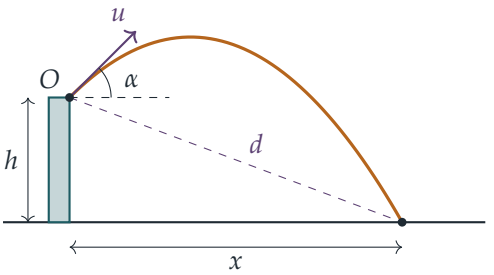
> **STEP I 2016、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q11

鍵となる考え方

水平方向と鉛直方向の運動を書き下し、時間を消去して、$\sin\alpha$ と $\cos\alpha$ の 2 乗を倍角（double angle）の式に直す。水平到達距離（range）の最大値を求めるには、着地の方程式が x を α の陰関数（implicit function）として定めているとみなして微分する。最大となるところでは $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\alpha = 0$ であり、あとはただ一つの未知数 $\cos 2\alpha$ についての三角関数の式変形である。

解答

P を重力のみを受けて運動する質点（particle）としてモデル化し（空気抵抗は無視する）、地面は水平であるとする。塔の根元を原点とし、x 軸を発射方向に水平に、y 軸を鉛直上向きにとる。このとき O は点 $(0, h)$ である。



着地の方程式

発射から時間 t が経過したとき、

$$X = ut\cos\alpha, \qquad Y = h + ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

塔は鉛直に立っており、P はある距離 $x > 0$ のところに着地するので、$\cos\alpha \neq 0$ であり、$Y = 0$ となる着地の時点で $t = \dfrac{x}{u\cos\alpha}$ である。よって

$$0 = h + x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}.$$

両辺に $2\cos^2\alpha$ を掛け、$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$ と $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ を用いると

$$\frac{gx^2}{u^2} = 2h\cos^2\alpha + 2x\sin\alpha\cos\alpha = h(1 + \cos 2\alpha) + x\sin 2\alpha,$$

となり、これが求める方程式である。

水平距離の最大値

角 α は $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動きうる（下向きに発射してもよい）。このような各 α に対し、着地距離 x は α の正の値をとる滑らかな関数であり、$\alpha \to \pm\frac{\pi}{2}$ のとき $x \to 0$ となる。水平方向の速さ $u\cos\alpha$ が 0 に近づく一方で、飛行時間は有界にとどまるからである。したがって x は区間の内部のある α で最大値をとり、そこでは $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\alpha = 0$ である。

$x' = \mathrm{d}x/\mathrm{d}\alpha$ と書き、着地の方程式を α で微分すると

$$\frac{2gx}{u^2}\,x' = -2h\sin 2\alpha + x'\sin 2\alpha + 2x\cos 2\alpha.$$

$x' = 0$ とおくと

$$x\cos 2\alpha = h\sin 2\alpha.$$

ここで $\cos 2\alpha \neq 0$ である。実際、そうでなければ $h > 0$ より $h\sin 2\alpha = 0$ から $\sin 2\alpha = 0$ も成り立つことになるが、これはありえない。したがって最大となるところで

$$x = h\tan 2\alpha,$$

が成り立ち、これが示すべきことであった。

> **考えてみよう** これで x と α についての方程式が二つ得られた。x をうまく消去するにはどうすればよいだろうか。

$x = h\tan 2\alpha$ を着地の方程式に代入し、$c = \cos 2\alpha$、$s = \sin 2\alpha$ とおく。右辺は

$$h(1 + c) + h\,\frac{s^2}{c} = \frac{h\,(c + c^2 + s^2)}{c} = \frac{h(1 + c)}{c},$$

となり、左辺は

$$\frac{gh^2}{u^2}\cdot\frac{s^2}{c^2}=\frac{gh^2(1-c)(1+c)}{u^2c^2}.$$

となる。両者を等しいとおき、$h(1+c)/c$ で割る。$c\neq -1$ なのでこれは 0 でない（$c\neq 0$ はすでに示した。また $c=-1$ なら $\alpha=\pm\frac{\pi}{2}$ となってしまう）。すると

$$\frac{gh(1-c)}{u^2c}=1 \quad\Longrightarrow\quad gh-ghc=u^2c \quad\Longrightarrow\quad \cos 2\alpha=\frac{gh}{u^2+gh}.$$

停留点（stationary point）でとりうる値はこれしかなく、さらに $\tan 2\alpha=x/h>0$ より $0<2\alpha<\frac{\pi}{2}$ に限られるので、停留点はちょうど一つであり、それが最大を与える点である。（参考までに、$\tan 2\alpha=\dfrac{u\sqrt{u^2+2gh}}{gh}$ であるから、最大距離は $x=\dfrac{u\sqrt{u^2+2gh}}{g}$ である。）

O からの距離の最大値

着地点は $(x,0)$ であるから、$O=(0,h)$ からの距離は

$$d=\sqrt{x^2+h^2}.$$

である。h を固定すると d は x について増加するので、d が最大となるのはちょうど x が最大となるときである。そのとき $x=h\tan 2\alpha$ であるから、$\sec 2\alpha>0$ を用いて

$$d=\sqrt{h^2\tan^2 2\alpha+h^2}=h\sec 2\alpha=h\cdot\frac{u^2+gh}{gh}=\frac{u^2}{g}+h,$$

となる。これが求める最大距離である。

検算

- $h=0$ とすると $\cos 2\alpha=0$ となるので $\alpha=45^\circ$ であり、最大到達距離は u^2/g である。これは水平な地面の上でのおなじみの結果である。
- $u=10$、$g=10$、$h=5$（SI 単位）とする。このとき $\cos 2\alpha=\frac{50}{150}=\frac{1}{3}$、最大到達距離は $\sqrt{100\cdot 200}/10=10\sqrt{2}\approx 14.14$、そして $d=\sqrt{200+25}=15=\frac{100}{10}+5$ となり、予測どおりである。計算機で α を走査して調べると、着地距離の最大値は確かに 14.14 である。
- h を大きくしていくと $\cos 2\alpha\to 1$ となるので、最適な角度は 0 に近づく。非常に高い塔からは、ほぼ水平に発射すべきなのである。

よくある間違い

- $x = h\tan 2\alpha$ と書いたあと、それが最大となるところでのみ成り立ち、すべての α で成り立つわけではないことを忘れてしまう。
- $1 + \cos 2\alpha$ や $\cos 2\alpha$ で割るときに、それらが 0 でない理由を述べない。
- $d^2 = x^2 + h^2$ が x と同じ角度で最大になることに気づかず、d を別途最大化しようとする。

STEP のその先へ

答え $d = u^2/g + h$ には美しい幾何学的な説明がある。O から速さ u で発射される軌道はすべて、ある一つの**包絡線**（envelope）に接する。これは「安全放物線」（parabola of safety）と呼ばれ、O を焦点（focus）とし、O の上方 u^2/g の高さにある直線を準線（directrix）とする放物線である。最も遠い着地点はこの包絡線上にあるので、焦点と準線の性質により、その点の O からの距離は準線からの距離、すなわち $u^2/g + h$ に等しい。曲線族の包絡線は、大学 1 年次の微積分や力学で扱われる標準的な題材である。放物運動の問題をこのように丁寧に扱った次の一冊としては、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい。

解答例

STEP I 2016、第12問

確率・統計 ・ 二項係数の対称性

> **STEP I 2016、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q12

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.6 節「もう 1 枚の硬貨」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/one-more-coin.html

鍵となる考え方

小問 (i) と (ii) は二項分布の確率（binomial probabilities）を用いた直接計算であり、どちらも驚くほど簡単な同じ答えになる。小問 (iii) はその理由を説明するものである。ボブの投げる回数を最初の n 回と追加の 1 回に分ける。最初の n 回についてはボブとアリスは対等な立場にあるので、対称性（symmetry）が効いてくる。そして追加の 1 回が引き分けを公平に決着させる。

解答

以下、アリスが出す表の回数を A、ボブが出す表の回数を B とする。公平な硬貨を m 回投げるとき、表の回数 X は

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{m}{k} \frac{1}{2^m}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m,$$

を満たす。また、アリスとボブの試行は独立（independent）であるから、A と B に関する確率は掛け合わせることができる。

小問 (i)

アリスは 2 回、ボブは 3 回投げるので、

k	0	1	2	3
$\mathrm{P}(A=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	
$\mathrm{P}(B=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

となる。アリスの得点で条件付け（conditioning）を行う。$A=a$ のとき $B>a$ が必要なので、裾確率（tail probabilities）$\mathrm{P}(B>0)=\frac{7}{8}$、$\mathrm{P}(B>1)=\frac{1}{2}$、$\mathrm{P}(B>2)=\frac{1}{8}$ が必要になる。よって

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B>A) &= \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{7}{8}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{8}\\ &= \frac{7+8+1}{32}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

小問 (ii)

今度は $a=0,1,2,3$ に対して $\mathrm{P}(A=a)=\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{8}$ であり、$k=0,\ldots,4$ に対して $\mathrm{P}(B=k)=\frac{1}{16},\frac{4}{16},\frac{6}{16},\frac{4}{16},\frac{1}{16}$ である。裾確率は

$$\mathrm{P}(B>0)=\tfrac{15}{16},\quad \mathrm{P}(B>1)=\tfrac{11}{16},\quad \mathrm{P}(B>2)=\tfrac{5}{16},\quad \mathrm{P}(B>3)=\tfrac{1}{16}.$$

である。したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B>A) &= \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{15}{16}+\tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{11}{16}+\tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{5}{16}+\tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{1}{16}\\ &= \frac{15+33+15+1}{128}=\frac{64}{128}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

今回もまた、答えはちょうど $\frac{1}{2}$ である。

小問 (iii)

まず、投げる回数が等しいゲームについての事実を確認する。アリスとボブがそれぞれ n 回投げるとき、「ボブの方が多い」「同じ」「アリスの方が多い」のうちちょうど一つが起こる。二人は同一の試行を行うので状況は二人の間で対称であり、「アリスの方が多い」の確率も p_2 である。したがって

$$2p_2+p_1=1. \qquad (*)$$

次に、アリスが n 回、ボブが $n+1$ 回投げるとする。ボブの**最初の** n 回における表の回数を B' とし、最後の 1 回が表であるという事象を H とする。このとき、H が起これば $B=B'+1$、そうでなければ $B=B'$ である。

考えてみよう B と A の比較は、B' と A の比較にどう依存するか？

B' と A は整数であり、B は B' または $B'+1$ であるから、

- $B' > A$ ならば、最後の 1 回の結果によらず必ず $B > A$ である。
- $B' = A$ ならば、$B > A$ となるのは最後の 1 回が表のときであり、かつそのときに限る。
- $B' < A$ ならば、$B' \leq A - 1$ であるから $B \leq A$ となり、ボブは勝たない。

ボブの最初の n 回とアリスの n 回の比較は、まさに投げる回数が等しいゲームそのものであるから、$\mathrm{P}(B' > A) = p_2$、$\mathrm{P}(B' = A) = p_1$ である。最後の 1 回は他のすべてと独立であり、$\mathrm{P}(H) = \frac{1}{2}$ である。よって

$$\mathrm{P}(\text{ボブがアリスより多く表を出す}) = p_2 + \tfrac{1}{2}p_1.$$

$(*)$ より、$p_2 + \frac{1}{2}p_1 = \frac{1}{2}(2p_2 + p_1) = \frac{1}{2}$ である。

これが一般化（generalisation）である。**アリスが公平な硬貨を n 回、ボブが公平な硬貨を $n+1$ 回投げるとき、ボブがアリスより多く表を出す確率は、すべての $n \geq 0$ に対して $\frac{1}{2}$ である。**小問 (i) と (ii) はそれぞれ $n = 2$ と $n = 3$ の場合にあたる。

検算

- $n = 0$：アリスは一度も投げず、ボブは 1 回だけ投げる。ボブが勝つのは表が出たときであり、かつそのときに限るので、確率は $\frac{1}{2}$ である。
- $n = 2$：手計算で $p_1 = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$ であり、$(*)$ より $p_2 = \frac{5}{16}$ である。すると $p_2 + \frac{1}{2}p_1 = \frac{5}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$ となり、小問 (i) と一致する。
- コンピュータによる全数列挙（exact enumeration）で、29 以下のすべての n について $\mathrm{P}(B > A) = \frac{1}{2}$ であることが確かめられた。また、小問 (ii) を 200 000 回試行するシミュレーション（simulation）では 0.4997 という値が得られた。

よくある間違い

- 投げる回数が等しいゲームで $p_2 = \frac{1}{2}$ と思い込むこと。引き分けの確率は正であるから、$p_2 = \frac{1}{2}(1 - p_1) < \frac{1}{2}$ である。
- 小問 (iii) で $B' = A$ の場合を忘れること、あるいは追加の 1 回に対応する係数 $\frac{1}{2}$ を掛けずにそのまま全部数えてしまうこと。
- 裾確率として $\mathrm{P}(B > a)$ ではなく $\mathrm{P}(B \geq a)$ を用いること。

STEP のその先へ

この美しい答えは、対称性の議論と、追加の 1 ステップについての条件付けを組み合わせることで得られる。これはランダムウォーク（random walk）から投票問題（ballot problem）に至るまで、確率論全体を貫く典型的な手法である。より鮮やかな別証もある。ボブは 1 回多く投げるので、ボブがアリスより多く表を出すことに**失敗する**のは、ボブがアリスより多く裏を出すときであり、かつそのときに限る。表と裏を入れ替えれば「表の方が多い」と「裏の方が多い」の確率は等しく、しかもこの二つは互いに余事象（complementary）であるから、それぞれの確率は $\frac{1}{2}$ である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、こうした条件付けと対称性の技法が展開されている。

解答例

STEP I 2016、第 13 問

確率・統計　・　指数分布の順序統計量

> **STEP I 2016、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q13

鍵となる考え方

1 通目と 2 通目の到着については、それらがまだ起きていないのはいつかを考える。1 通目のメールが時刻 t より後に届くのは、n 通すべてがそうなるとき、かつそのときに限る。また 2 通目が t より後に届くのは、その時点までに届いたメールが高々 1 通であるとき、かつそのときに限る。どちらの事象も独立性（independence）を使えば容易に数えられ、生存確率（survival probability）を微分すれば確率密度関数（density）が得られる。

解答

$X_1, \ldots, X_n$ を到着時刻とする。これらは独立であり、それぞれについて

$$\mathrm{P}(X_i > t) = \int_t^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda s}\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad \mathrm{P}(X_i \le t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

が $t \ge 0$ に対して成り立つ。$k > 0$ に対する標準的な積分 $\int_0^\infty t k \mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k}$ を用いる。これはパラメータ k の指数分布（exponential distribution）の平均（mean）である。（部分積分（integration by parts）すればよい：$\left[-t\mathrm{e}^{-kt}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t = 0 + \frac{1}{k}$。）

小問 (i)

1 通目の到着が t より遅いのは、すべてのメールが t より遅く届くとき、かつそのときに限る。独立性より

$$\mathrm{P}(T > t) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X_i > t) = \left(\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^n = \mathrm{e}^{-n\lambda t}.$$

よって累積分布関数（cumulative distribution function）は $t \geq 0$ に対して $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-n\lambda t}$ である。微分すると確率密度関数

$$f(t) = F'(t) = n\lambda\,\mathrm{e}^{-n\lambda t} \qquad (t \geq 0),$$

が得られ、これが示すべきものであった。これはパラメータ $n\lambda$ の指数分布の密度関数であるから、$k = n\lambda$ として標準的な積分を用いると

$$\mathrm{E}(T) = \frac{1}{n\lambda}.$$

小問 (ii)

S を 2 通目のメールの到着時刻とする（したがって $n \geq 2$ が必要である）。2 通目の到着が t より遅いのは、時刻 t までに届いたメールが**高々 1 通**であるとき、すなわち 1 通も届いていないか、ちょうど 1 通だけ届いているとき、かつそのときに限る。

> **考えてみよう** 時刻 t までにちょうど 1 通だけ届いている場合は何通りあるか？

n 通のメールのうち、どれが早く届いた 1 通であってもよい。その 1 通は届いており（確率 $1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$）、残りの $n-1$ 通は届いていない（それぞれ確率 $\mathrm{e}^{-\lambda t}$）。独立性と、n 個の場合が互いに排反（mutually exclusive）であることから、

$$\mathrm{P}(S > t) = \mathrm{e}^{-n\lambda t} + n\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)\mathrm{e}^{-(n-1)\lambda t}.$$

第 2 項を展開すると $n\mathrm{e}^{-(n-1)\lambda t} - n\mathrm{e}^{-n\lambda t}$ となるので、

$$\mathrm{P}(S > t) = n\,\mathrm{e}^{-(n-1)\lambda t} - (n-1)\,\mathrm{e}^{-n\lambda t}.$$

簡単な妥当性の確認として、これは $t = 0$ で 1 に等しく、$t \to \infty$ のとき 0 に近づく。

S の密度関数 g は $1 - \mathrm{P}(S > t)$ の導関数である：

$$\begin{aligned} g(t) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(n\,\mathrm{e}^{-(n-1)\lambda t} - (n-1)\,\mathrm{e}^{-n\lambda t}\right) \\ &= n(n-1)\lambda\,\mathrm{e}^{-(n-1)\lambda t} - n(n-1)\lambda\,\mathrm{e}^{-n\lambda t} \\ &= n(n-1)\lambda\left(\mathrm{e}^{-(n-1)\lambda t} - \mathrm{e}^{-n\lambda t}\right) \qquad (t \geq 0). \end{aligned}$$

期待値（expectation）を求めるため、g を指数分布の密度関数の組合せとして書く：

$$g(t) = n \cdot (n-1)\lambda\,\mathrm{e}^{-(n-1)\lambda t} \;-\; (n-1) \cdot n\lambda\,\mathrm{e}^{-n\lambda t}.$$

$k = (n-1)\lambda$ と $k = n\lambda$ として標準的な積分を用いると（$n \geq 2$ なのでどちらの場合も

$k > 0$ であり、適用できる)、

$$\mathrm{E}(S) = \int_0^\infty t\, g(t)\, \mathrm{d}t = \frac{n}{(n-1)\lambda} - \frac{n-1}{n\lambda}$$
$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{n^2 - (n-1)^2}{n(n-1)} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{2n-1}{n(n-1)}.$$

$\dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{n + (n-1)}{n(n-1)} = \dfrac{2n-1}{n(n-1)}$ であるから、これは

$$\mathrm{E}(S) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right),$$

となり、示すべき結果が得られた。

考えてみよう なぜ答えは 2 つの単純な項の和になるのか？

指数分布は無記憶性（memoryless property）をもつ。1 通目は率（rate）$n\lambda$ の指数分布に従う時間の後に届き、その平均は $\frac{1}{n\lambda}$ である。その後、残りの $n-1$ 通のメールは、まるで時計がちょうどリセットされたかのように新たに始まるので、追加の待ち時間は率 $(n-1)\lambda$、平均 $\frac{1}{(n-1)\lambda}$ の指数分布に従う。2 つの待ち時間を足せばただちに答えが得られ、これは結果を覚えるよい方法でもある。

検算

- $n = 2$ かつ $\lambda = 1$ のとき、2 通目の到着は独立な 2 つの指数分布に従う時間のうち遅いほうである。その平均は $1 + \frac{1}{2} = 1.5$ となるはずであり、10^5 回の試行によるコンピュータシミュレーションでは 1.501 が得られた。
- 密度関数 g の積分は 1 になる：$\int_0^\infty g = n - (n-1) = 1$。
- $n = 5$ かつ $\lambda = 1$ のとき、公式から $\mathrm{E}(S) = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = 0.45$ が得られ、これは $\int_0^\infty t\, g(t)\, \mathrm{d}t$ の数値計算と一致する。

よくある間違い

- ちょうど 1 通が届いている場合の因子 n を忘れる。n 通のどれが早く届いた 1 通であってもよい。
- $\mathrm{P}(S > t)$ を、ちょうど 1 通が届いている確率として書いてしまう。これでは 1 通も届いていない場合が抜け落ちる。

STEP のその先へ

T と S は、指数分布に従う標本の最初の 2 つの**順序統計量**（order statistics）である。上の無記憶性による議論を拡張すると、k 番目の到着の平均が $\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{n-k+1}\right)$ であることが示され、これはポアソン過程（Poisson process）や待ち行列理論（queueing theory）の基礎となっている。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）は、順序統計量と無記憶性をわかりやすく扱っている。

解答例

STEP II 2016、第 1 問

純粋数学 • 媒介変数表示された曲線と接線

> **STEP II 2016、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q1

鍵となる考え方

座標ではなく媒介変数（parameter）で考える。O における直角という条件は、2 点の媒介変数 p と q の間のただ一つの非常に単純な関係式に変わり、また一般の点における接線（tangent）は t を用いたすっきりした方程式で表される。2 本の接線の交点を求めると、その座標は p と q の対称関数（symmetric function）として表され、p と q の間の関係式こそが、それらを消去するのにちょうど必要なものとなっている。

解答

一般の点における接線

媒介変数 t に対応する点において、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3t}{2} \qquad (t \neq 0).$$

よって (t^2, t^3) における接線は $y - t^3 = \frac{3t}{2}(x - t^2)$、すなわち

$$2y = 3tx - t^3. \qquad (*)$$

である。（$t = 0$ のときこれは $y = 0$ となり、尖点（cusp）における接線を与えるが、この点は以下では必要ない。）

直角の条件

$P = (p^2, p^3)$、$Q = (q^2, q^3)$ とする。$\angle POQ$ が意味をもつためには、どちらの点も O ではないので、$p \neq 0$ かつ $q \neq 0$ である。この角が直角となるのは、$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$ のと

き、かつそのときに限る：

$$p^2q^2 + p^3q^3 = p^2q^2(1+pq) = 0.$$

$p^2q^2 \neq 0$ であるから、

$$pq = -1.$$

が従う。特に $p \neq q$ である（積が負であるから）。したがって P と Q における接線の傾き（gradient）は $\frac{3p}{2} \neq \frac{3q}{2}$ と異なり、確かにただ 1 点で交わる。

接線の交点

$(*)$ で $t = p$ としたものと $t = q$ としたものの差をとると、

$$3(p-q)x = p^3 - q^3 = (p-q)(p^2+pq+q^2).$$

$p - q \neq 0$ で割り、$pq = -1$ を用いると、

$$3x = p^2 + pq + q^2 = p^2 + q^2 - 1.$$

これを $t = p$ とした $(*)$ に代入すると：

$$\begin{aligned} 2y &= p(p^2+pq+q^2) - p^3 \\ &= p^2q + pq^2 = pq(p+q) = -(p+q). \end{aligned}$$

考えてみよう x と y が 2 つの媒介変数で表された。x と y だけの 1 つの方程式を得るにはどうすればよいか？

y を 2 乗する。現れる交差項 $2pq$ は既知の定数であり、残るのは p^2+q^2 で、これはまさに $3x$ に含まれているものである。実際、

$$4y^2 = (p+q)^2 = p^2+q^2+2pq = p^2+q^2-2 = (3x+1)-2 = 3x-1.$$

よって P と Q における接線は $C_2\colon 4y^2 = 3x - 1$ 上で交わり、題意は示された。

（実は C_2 のすべての点が現れる。p が正の実数全体を動くとき、$2y = -(p+q) = \frac{1}{p} - p$ はすべての実数値をとり、そのとき x は C_2 の方程式によって定まる。）

C_1 と C_2 は交わるか？

C_2 の方程式に $x = t^2$、$y = t^3$ を代入すると：

$$4t^6 = 3t^2 - 1 \iff 4u^3 - 3u + 1 = 0, \quad \text{ただし} u = t^2 \geq 0.$$

明らかに $u=-1$ は解であり、因数 $u+1$ で割ると

$$4u^3-3u+1=(u+1)(4u^2-4u+1)=(u+1)(2u-1)^2.$$

を得る。$u\geq 0$ であるから、可能なのは $u=\frac{1}{2}$ のみであり、$t=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。したがって 2 曲線は**確かに**交わり、交点はちょうど次の 2 点である。

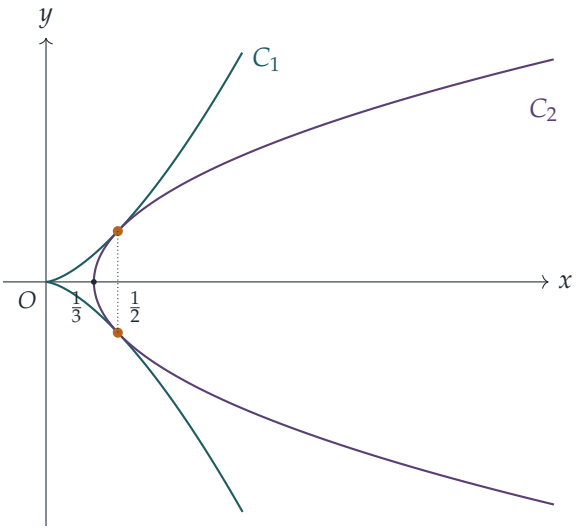
$$\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)\quad\text{および}\quad\left(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

重解（repeated root）であることから、さらに多くのことがわかる。すなわち、2 曲線はそこで交差するのではなく接する（touch）のである。このことは直接確かめられる。$t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ において C_1 の傾きは $\frac{3t}{2}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$ である。$4y^2=3x-1$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると $8y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3$ となるので、$y=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ における C_2 の傾きは $\frac{3}{8y}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$ であり、一致する。x 軸に関する対称性により、もう一方の点でも同じことが成り立つ。

$u\geq 0$ のとき $4u^3-3u+1=(u+1)(2u-1)^2\geq 0$ であるから、曲線 C_1 が放物線（parabola）の内側に入ることはない。すなわち、2 つの接点を除いて、C_2 は C_1 の 2 つの枝の間にある。

概形

C_1 は $y^2=x^3$ を満たす。C_1 は $x\geq 0$ の範囲にあり、x 軸に関して対称で、O に尖点をもつ（どちらの枝も傾きが $\frac{3t}{2}\to 0$ となるので、x 軸の正の向きに沿って O から出ていく）。C_2 は放物線 $x=\frac{1}{3}(4y^2+1)$ であり、頂点は $(\frac{1}{3},0)$、右に開いていて、やはり x 軸に関して対称である。この放物線は尖点の内側、C_1 の 2 つの枝の間に位置し、各枝と $x=\frac{1}{2}$ で 1 回ずつ接する。



検算

- $p = 1$、$q = -1$ とする：$P = (1, 1)$、$Q = (1, -1)$ であり、$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 1 - 1 = 0$ である。接線は $2y = 3x - 1$ と $2y = -3x + 1$ であり、C_2 の頂点 $(\frac{1}{3}, 0)$ で交わる。
- $p = 2$、$q = -\frac{1}{2}$ とする：接線 $2y = 6x - 8$ と $2y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{8}$ は $x = \frac{13}{12}$、$y = -\frac{3}{4}$ で交わり、$4y^2 = \frac{9}{4} = 3 \cdot \frac{13}{12} - 1$ が成り立つ。
- 接点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}) \approx (0.5, 0.35355)$ は $4y^2 = \frac{1}{2} = 3x - 1$ を満たし、そこでの両曲線の傾きはともに ≈ 1.06066 である。$pq = -1$ を満たす 10^5 組の無作為な組について計算機で確認したところ、すべての交点が丸め誤差の範囲で C_2 上にあった。

よくある間違い

- $p = 0$ や $q = 0$ を除外し忘れること。$pq = -1$ を得るために割る前に、因数 p^2q^2 が 0 でないことが必要である。
- $p - q$ が 0 でない理由を述べずに $p - q$ で割ること。
- 「$4u^3 - 3u + 1 = 0$ は解をもつ」で止めてしまい、それが $u = t^2 \geq 0$ を与えるかどうかを確かめないこと。解 $u = -1$ は C_1 上のどの点にも対応しない。

STEP のその先へ

曲線 $y^2 = x^3$ は古典的な**尖点 3 次曲線**（cuspidal cubic）である。曲線と媒介変数表示された曲線とを交わらせ、重解から接することを読み取るという手法は、代数幾何学（algebraic geometry）の出発点である。交点重複度（intersection multiplicity）は曲線どうしが何重に交わるかを数えるものであり、ベズー（Bézout）の定理は、3 次曲線と 2 次曲線（conic）は重複度を正しく数えれば 6 点で交わることを述べている。ここでの 6 点は、重解 $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$（合わせて 4 点）と複素数の組 $t = \pm i$ である。親しみやすい入門書として Kirwan, *Complex Algebraic Curves*（複素代数曲線）がある。

解答例

STEP II 2016、第 2 問

純粋数学 ・ 因数定理

> **STEP II 2016、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q2

鍵となる考え方

$(*)$ を、係数にたまたま a と b を含む c の多項式（polynomial）とみなす。因数定理（factor theorem）によれば、$c-(a+b)$ が因数（factor）であるのは、$c=a+b$ を代入して 0 になるとき、かつそのときに限る。因数を一つ見つければ、$(*)$ の a, b, c に関する対称性（symmetry）から、さらに二つの因数がただちに得られ、次数（degree）を数えれば因数分解（factorisation）が完成する。二つの方程式は、実はこの恒等式の特別な場合を装ったものである。なすべきことは、それらに合うように a, b, c（後には d, e）を選ぶことである。

解答

因数 $a+b-c$

$(*)$ を $F(a,b,c)$ と書く。F を c の多項式とみなすと、F が因数 $c-(a+b)$、したがって $a+b-c$ をもつのは、$F(a,b,a+b)=0$ のとき、かつそのときに限る。$p=a+b$ とおき、$c=p$ とする。すると $a+b+c=2p$ であり、$a^2+b^2=p^2-2ab$ と $a^3+b^3=p^3-3abp$ を用いると、

$$a^2+b^2+c^2=2p^2-2ab, \qquad a^3+b^3+c^3=2p^3-3abp.$$

よって

$$\begin{aligned} F(a,b,a+b) &= 8p^3-6(2p)(2p^2-2ab)+8(2p^3-3abp) \\ &= 8p^3-24p^3+24abp+16p^3-24abp=0, \end{aligned}$$

となり、$a+b-c$ は $(*)$ の因数である。これが示すべきことであった。

$(*)$ を完全に因数分解する

F は a, b, c をどのように並べ替えても変わらない。b と c を入れ替えると因数 $a+b-c$ は $a+c-b$ に、a と c を入れ替えると $b+c-a$ になる。したがって

$$a+b-c, \qquad b+c-a, \qquad c+a-b$$

の三つはいずれも因数である。これらは互いに異なる一次式であり、どれも他の定数倍ではないので、その積は F を割り切る。F のどの項も次数 3 なので、残りの因数の次数は 0 である。すなわちそれは定数 k であり、

$$F(a,b,c) = k(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

k を求めるために $a=b=c=1$ とおく。左辺は $27-6\cdot3\cdot3+8\cdot3=-3$ であり、積は 1 である。よって $k=-3$ であり、

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 - 6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) + 8(a^3+b^3+c^3)\\ = -3(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).\end{aligned}$$

小問 (i)

方程式の中央の項と最後の項を変形して、$(*)$ の形にそろえる。

$$(x+1)^3 - 6(x+1)\left(x^2+\tfrac{5}{2}\right) + 8\left(x^3+\tfrac{13}{4}\right) = 0.$$

考えてみよう どのような a, b, c をとれば、これはちょうど $(*)$ になるか。

$a=x$ とし、b, c を定数としてみる。必要な条件は

$$b+c=1, \qquad b^2+c^2=\tfrac{5}{2}, \qquad b^3+c^3=\tfrac{13}{4}.$$

はじめの二つから $2bc=(b+c)^2-(b^2+c^2)=-\tfrac{3}{2}$、よって $bc=-\tfrac{3}{4}$ である。すると

$$b^3+c^3=(b+c)^3-3bc(b+c)=1+\tfrac{9}{4}=\tfrac{13}{4},$$

となり、三つ目の条件は自動的に成り立つ。b, c は $t^2-t-\tfrac{3}{4}=0$、すなわち $(2t-3)(2t+1)=0$ の解であるから、$b=\tfrac{3}{2}, c=-\tfrac{1}{2}$ である。

$a=x, b=\tfrac{3}{2}, c=-\tfrac{1}{2}$ とすると、因数分解から

$$a+b-c=x+2, \qquad b+c-a=1-x, \qquad c+a-b=x-2,$$

となるので、方程式は $-3(x+2)(1-x)(x-2)=0$ であり、

$$x=-2, \quad x=1, \quad x=2.$$

小問 (ii)

4 変数の式を $G(a,b,d,e)$ と書く。($c=d+e$ とおくと $a+b-d-e$ は $a+b-c$ のように見え、これが因数を示唆する。しかし直接確かめても同じくらい速い。) 因数定理により、G を e の多項式とみなせば、$a+b=d+e$ のとき $G=0$ となることを示せば十分である。$p=a+b=d+e$ とおく。先ほどとまったく同様に $a^2+b^2=p^2-2ab$, $d^2+e^2=p^2-2de$, $a^3+b^3=p^3-3abp$, $d^3+e^3=p^3-3dep$ であるから、$q=ab+de$ とおくと

$$\begin{aligned} G &= (2p)^3-6(2p)(2p^2-2q)+8(2p^3-3pq) \\ &= 8p^3-24p^3+24pq+16p^3-24pq=0. \end{aligned}$$

よって $a+b-d-e$ は G の因数である。

さて、G は a,b,d,e をどのように並べ替えても変わらない。因数 $a+b-d-e$ は、四つの文字を組 $\{a,b\}$ と $\{d,e\}$ に分けることから生じる。二つずつの組に分ける残り二通りの分け方から、因数

$$a+d-b-e \quad (\text{入れ替え} b,d), \qquad a+e-b-d \quad (\text{入れ替え} b,e).$$

が得られる。これら三つの一次因数は互いに異なり、どれも他の定数倍ではない。また G は次数 3 の斉次式 (homogeneous polynomial) であるから、ある定数 k を用いて $G=k(a+b-d-e)(a+d-b-e)(a+e-b-d)$ と書ける。$a=1, b=d=e=0$ とおくと左辺は $1-6+8=3$、右辺は k となるので、

$$G=3(a+b-d-e)(a+d-b-e)(a+e-b-d).$$

方程式については、$a=x$ とし、定数 b,d,e を

$$b+d+e=6, \qquad b^2+d^2+e^2=14, \qquad b^3+d^3+e^3=36.$$

を満たすようにとる。数 1, 2, 3 がこれを満たす。実際 $1+2+3=6$, $1+4+9=14$, $1+8+27=36$ である。よって $a=x, b=1, d=2, e=3$ とすると、方程式はちょうど $G=0$ となり、これは

$$3(x+1-2-3)(x+2-1-3)(x+3-1-2)=3(x-4)(x-2)x=0.$$

と因数分解される。したがって

$$x=0, \quad x=2, \quad x=4.$$

検算

- $(*)$ に $a=b=1, c=2$ を代入すると $64-6\cdot4\cdot6+8\cdot10=0$ となり、因数 $a+b-c$ から予想されるとおりである。

- (i) で $x = 1$ とすると $8 - 3 \cdot 2 \cdot 7 + 2 \cdot 17 = 8 - 42 + 34 = 0$ となる。
- (ii) で $x = 0$ とすると $216 - 6 \cdot 6 \cdot 14 + 8 \cdot 36 = 216 - 504 + 288 = 0$、$x = 4$ とすると $1000 - 6 \cdot 10 \cdot 30 + 8 \cdot 100 = 0$ となる。
- これらの因数分解は、変数に数千組のランダムな有理数の値を代入して、コンピュータでも確認した。

よくある間違い

- 定数を忘れること。$(*)$ は因数の積そのものではなく、その -3 倍である。都合のよい値を代入して、必ず k を決定すること。
- (ii) で因数を三つより多く挙げてしまうこと。たとえば a と d を入れ替えると $d + b - a - e$ が得られるが、これは $-(a + e - b - d)$ にすぎない。本当に異なる三つの因数は、四つの文字を二つずつ組にする三通りの方法から生じる。
- すべてを力ずくで展開すること。それでも解けるが、長く誤りやすい。方程式を恒等式に当てはめることこそが、この問題の眼目である。

STEP のその先へ

因数定理は任意の体（field）上で成り立つ。ここでは、一つを除くすべての変数を定数とみなすことで、多変数の多項式に対してこれを用いた。対称性と多項式の一意分解（unique factorisation）の組み合わせは強力である。対称式（symmetric polynomial）の理論によれば、どの対称式も基本対称式（elementary symmetric polynomials）$a + b + c$, $ab + bc + ca$, abc を用いて表すことができ、これが (i) における b, c の条件の背後に隠れている構造である。ちなみに、積 $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$ は、三角形の面積を与えるヘロンの公式（Heron's formula）にまさに現れるものである。多項式環（polynomial ring）と因数分解についてさらに知りたければ、Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）を参照されたい。

解答例

STEP II 2016、第 3 問

純粋数学 ・ 多項式の根

> **STEP II 2016、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q3

鍵となる考え方

すべては一つの恒等式（identity）$\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_{n-1}(x) + \dfrac{x^n}{n!}$ にかかっている。これを小問 (i) と組み合わせると、f_n の根（root）a における傾きは $\mathrm{f}_n'(a) = -a^n/n!$ となる。つまり、根そのものを知らなくても、すべての根における傾き（gradient）がわかるのである。すべての根は同じ符号をもつので、それらの傾きもすべて同じ符号をもつ。そして曲線は、間で下向きに横切ることなく、続けて二度上向きに軸を横切ることはできない。

解答

以下、$\mathrm{f}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ と書く。

小問 (i)

項ごとに微分すると、定数項 1 は消え、$1 \le k \le n$ に対して

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^k}{k!}\right) = \frac{kx^{k-1}}{k!} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}.$$

となる。したがって

$$\mathrm{f}_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!} = \mathrm{f}_{n-1}(x),$$

であり、これが示すべきことであった。

小問 (ii)

$x \geq 0$ ならば、$\mathrm{f}_n(x)$ のすべての項は非負であり、最初の項は 1 であるから、$\mathrm{f}_n(x) \geq 1 > 0$ である。よって $a \geq 0$ を満たす根は存在せず、実数の根はすべて $a < 0$ を満たす。($n = 0$ のときは $\mathrm{f}_0 = 1$ であって根は一つもなく、これと矛盾しない。)

小問 (iii)

定義より $\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_{n-1}(x) + \dfrac{x^n}{n!}$ である。$\mathrm{f}_n(a) = 0$ ならば、小問 (i) により

$$\mathrm{f}_n'(a) = \mathrm{f}_{n-1}(a) = \mathrm{f}_n(a) - \frac{a^n}{n!} = -\frac{a^n}{n!},$$

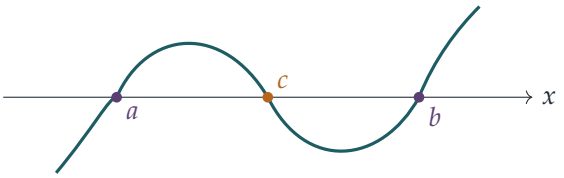
であり、同様に $\mathrm{f}_n'(b) = -b^n/n!$ である。したがって

$$\mathrm{f}_n'(a)\,\mathrm{f}_n'(b) = \frac{(ab)^n}{(n!)^2} > 0,$$

となる。小問 (ii) より $a < 0$ かつ $b < 0$ であるから $ab > 0$ だからである。これが求める不等式である。特に、どちらの傾きも 0 ではなく、両者は同じ符号をもつ。

考えてみよう 二つの傾きの符号が等しいと、なぜその間に別の根が存在しなければならないのだろうか。

$a < b$ とし、両方の傾きが正であると仮定する（負の場合は鏡像である）。$\mathrm{f}_n'(a) > 0$ であるから、曲線は a で軸を上向きに横切り、a より少し大きい x に対して $\mathrm{f}_n(x) > 0$ となる。$\mathrm{f}_n'(b) > 0$ であるから、曲線は b でも上向きに横切り、b より少し小さい x に対して $\mathrm{f}_n(x) < 0$ となる。ある点で正、それより後の点で負となる連続関数は、その間で 0 にならなければならない（中間値の定理（intermediate value theorem））。よって、$a < c < b$ を満たすある c に対して $\mathrm{f}_n(c) = 0$ である。



曲線は a を上昇しながら通過し、b も上昇しながら通過するので、その間のどこかで軸を下向きに横切らなければならない。

実数の根は高々一つ。 $(*)$ が二つ以上の相異なる実数の根をもつと仮定する。これは n 次の多項式（polynomial）であるから根は有限個であり、その中から**隣り合う**二つ、すなわち間に根をもたない $a < b$ を選ぶことができる。ところが上の議論により、a と b の間に根 c が存在することになり、矛盾である。よって $(*)$ の実数の根は高々一つで

ある。（この議論では問題文どおり $n \geq 2$ を用いた。$n = 1$ のとき根は -1 のみであり、$n = 0$ のときは根がないので、結論はすべての n について成り立つ。）

n が奇数の場合。 このとき f_n は奇数次で、最高次の係数（leading coefficient）$1/n!$ は正であるから、$x \to -\infty$ のとき $\mathrm{f}_n(x) \to -\infty$、$x \to +\infty$ のとき $\mathrm{f}_n(x) \to +\infty$ である。中間値の定理により、少なくとも一つの実数の根をもち、したがって**ちょうど一つ**の実数の根をもつ。

n が偶数の場合。 $n = 0$ のときは根がない。偶数 $n \geq 2$ に対しては、$x \to \pm\infty$ のとき $\mathrm{f}_n(x) \to +\infty$ であるから、f_n はある点 x_0 で最小値（global minimum）をとり、そこで $\mathrm{f}_n'(x_0) = \mathrm{f}_{n-1}(x_0) = 0$ である。$\mathrm{f}_{n-1}(0) = 1 \neq 0$ であるから $x_0 \neq 0$ であり、したがって

$$\mathrm{f}_n(x_0) = \mathrm{f}_{n-1}(x_0) + \frac{x_0^n}{n!} = \frac{x_0^n}{n!} > 0,$$

となる。n が偶数だからである。最小値が正であるから、すべての x に対して $\mathrm{f}_n(x) > 0$ であり、$(*)$ は**実数の根をもたない**。

（別解：根 a があれば、$\mathrm{f}_n'(a) \neq 0$ であるからそれは単根（simple root）であり、f_n はそこで符号を変える。しかし、最高次の係数が正の偶数次多項式がちょうど一回だけ符号を変えるとすると、十分大きなすべての x で負になるか、十分小さな（負で絶対値の大きな）すべての x で負になるかのどちらかでなければならず、これは不可能である。）

検算

- $n = 1$：$1 + x = 0$ はただ一つの根 -1 をもつ。$n = 2$：$1 + x + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\big((x+1)^2 + 1\big) > 0$ であり、根はない。どちらも結論に合う。
- $n = 3$：根はおよそ -1.596 であり、そこで $\mathrm{f}_3'(a) = \mathrm{f}_2(a) \approx 0.678 = -a^3/3!$ となり、予想どおりである。
- $n \leq 25$ のすべての n について f_n の符号変化をコンピュータで調べたところ、奇数の n ではちょうど一つの根、偶数の n では根なしという結果が得られた。

よくある間違い

- 傾きの積が正であることを示す際に、**なぜ** $ab > 0$ なのかを述べないこと。これには小問 (ii) が必要である。
- 任意の二つの根の間に根があることから、二つの根を隣り合うものとして選ばずに「根は高々一つ」と結論すること。その選び方こそが矛盾を生むのである。

- 偶数の n について、$x_0 \neq 0$ の確認を忘れること。これは $x_0^n/n! > 0$ が狭義の不等式となるために必要である。

STEP のその先へ

多項式 f_n は e^x のテイラー多項式（Taylor polynomial）であり、小問 (i) は $(e^x)' = e^x$ の有限版の影である。e^x は決して 0 にならないので、f_n の実数の根が少ないのは自然なことである。その複素数の根を $1/n$ 倍に縮小すると、$n \to \infty$ のとき、セゲー曲線（Szegő curve）と呼ばれる曲線の上に集まっていく。ここで用いた道具、すなわち中間値の定理と連続関数の最小値の存在は、解析学の最初の講義で厳密に証明される。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照するとよい。

解答例

STEP II 2016、第 4 問

純粋数学 ・ 分数関数の値域

STEP II 2016、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/16-s2-q4

鍵となる考え方

分母を払うと、y の定義式は x についての二次方程式（quadratic equation）になり、「x が実数である」という条件は「判別式（discriminant）が非負である」という条件に言い換えられる。θ を消去するには、すべての θ に対して成り立つ $y\cos\theta - \sin\theta$ の上界（upper bound）が必要である。これを $(y, -1)$ と単位ベクトル（unit vector）$(\cos\theta, \sin\theta)$ の内積（dot product）とみなすと、ちょうど $\sqrt{y^2+1}$ が得られる。小問 (ii) では、不等式の連鎖のすべてが等号で成り立たなければならず、そのことから x と θ の両方が決まる。

解答

小問 (i)

まず、分母が決して 0 にならないことに注意する。x の二次式とみると、$x^2 + x\cos\theta + 1$ の判別式は $\cos^2\theta - 4 < 0$ であるから、この式はつねに正である。したがって、両辺に分母を掛けても問題はない。

$$y\left(x^2 + x\cos\theta + 1\right) = x^2 + x\sin\theta + 1 \iff (y-1)x^2 + (y\cos\theta - \sin\theta)\,x + (y-1) = 0.$$

$y \neq 1$ のとき、これは x についての真の二次方程式であり、実数解 x をもつための必要十分条件は判別式が非負であることである。

$$(y\cos\theta - \sin\theta)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0.$$

$y = 1$ のとき、示すべき不等式は $(\cos\theta - \sin\theta)^2 \geq 0$ となり、これはいずれにせよ成り立つ。よって、x が実数ならば

$$(y\cos\theta - \sin\theta)^2 \geq 4(y-1)^2,$$

となり、示された。

考えてみよう どうすれば θ を消去できるだろうか。$(y\cos\theta - \sin\theta)^2$ 以上であって、θ によらないものが欲しい。

式 $y\cos\theta - \sin\theta$ は $(y, -1)$ と単位ベクトル $(\cos\theta, \sin\theta)$ の内積であるから、その絶対値は高々 $|(y,-1)| = \sqrt{y^2+1}$ である。同じことであるが、コーシー＝シュワルツの不等式（Cauchy–Schwarz inequality）により、あるいは直接

$$(y^2+1)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - (y\cos\theta - \sin\theta)^2 = (y\sin\theta + \cos\theta)^2 \geq 0,$$

から、$(y\cos\theta - \sin\theta)^2 \leq y^2 + 1$ が得られる。これを最初の結果と組み合わせると

$$y^2 + 1 \geq (y\cos\theta - \sin\theta)^2 \geq 4(y-1)^2,$$

となり、これが二つ目の不等式である。

展開すると $y^2 + 1 \geq 4y^2 - 8y + 4$、すなわち

$$3y^2 - 8y + 3 \leq 0.$$

$3y^2 - 8y + 3 = 0$ の解は $y = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-36}}{6} = \dfrac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$ であり、この二次式は最高次の係数が正であるから、値が正でないのはちょうど二つの解の間である。よって

$$\frac{4-\sqrt{7}}{3} \leq y \leq \frac{4+\sqrt{7}}{3}.$$

小問 (ii)

$y = \frac{1}{3}(4+\sqrt{7})$ とおくと、$y - 1 = \frac{1}{3}(1+\sqrt{7}) > 0$ である。このとき

$$y^2 + 1 = \frac{16 + 8\sqrt{7} + 7}{9} + 1 = \frac{32 + 8\sqrt{7}}{9},$$
$$4(y-1)^2 = \frac{4\left(1 + 2\sqrt{7} + 7\right)}{9} = \frac{32 + 8\sqrt{7}}{9}.$$

両者は等しく、また $2(y-1) > 0$ であるから、正の平方根をとって $\sqrt{y^2+1} = 2(y-1)$ が得られ、示された。（当然である。y は $3y^2 - 8y + 3 = 0$ の解であり、この方程式は $y^2 + 1 = 4(y-1)^2$ にほかならない。）

考えてみよう この等式は、小問 (i) の不等式の連鎖について何を教えてくれるだろうか。

連鎖 $y^2+1 \geq (y\cos\theta-\sin\theta)^2 \geq 4(y-1)^2$ の両端が等しくなったので、二つの不等式はいずれも等号で成り立つ。

判別式が零であるから、x の二次方程式は重解（repeated root）

$$x = -\frac{y\cos\theta-\sin\theta}{2(y-1)}.$$

をもつ。

θ に関する評価で等号が成り立つから、$y\sin\theta+\cos\theta=0$ であり、

$$\tan\theta = -\frac{1}{y} = -\frac{3}{4+\sqrt{7}} = -\frac{3(4-\sqrt{7})}{16-7} = \frac{\sqrt{7}-4}{3}.$$

を得る。(ここで $\cos\theta\neq 0$ である。そうでなければ $\sin\theta=0$ ともなってしまうからである。)さらに $(y\cos\theta-\sin\theta)^2 = y^2+1 = 4(y-1)^2$ であるから、$y\cos\theta-\sin\theta = \pm 2(y-1)$ となり、したがって

$$x = \mp 1.$$

具体的には、$(\cos\theta,\sin\theta)$ は $(y,-1)$ と平行である。同じ向きのとき、すなわち $\cos\theta>0$ かつ $\sin\theta<0$ のとき、$y\cos\theta-\sin\theta=+2(y-1)$ であり $x=-1$ となる。逆向きのとき、すなわち $\cos\theta<0$ かつ $\sin\theta>0$ のとき、$x=1$ となる。いずれの場合も

$$x=\pm 1, \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{7}-4}{3}.$$

である。この二つの場合は実は一つのものである。x を $-x$ に、θ を $\theta+\pi$ に置き換えても y は変わらないからである。

検算

- $x=1$ のとき、式は $y=\dfrac{2+\sin\theta}{2+\cos\theta}$ となる。$\tan\theta=\frac{1}{3}(\sqrt{7}-4)\approx -0.4514$ を満たす θ を第 2 象限にとると $\theta\approx 2.7176$ であり、このとき $y\approx 2.21525$ となって、$\frac{1}{3}(4+\sqrt{7})\approx 2.21525$ と一致する。
- コンピュータで実数 x と θ を無作為に多数選んで調べたところ、y の値は 0.45142 と 2.21524 の間に収まり、上下の限界 $\frac{1}{3}(4\mp\sqrt{7})\approx 0.451416$ および 2.215250 のわずかに内側にとどまった。
- 注目すべきうまい一致がある。$\tan\theta=-\frac{1}{3}(4-\sqrt{7})$ は下限の符号を変えたものである。これは二つの限界が互いに逆数になっている（積が $\frac{1}{9}(16-7)=1$ である）からである。

よくある間違い

- $y = 1$ の場合を忘れること。このとき x の方程式は二次方程式ではなく、判別式による議論はそのままでは使えない。
- $\sqrt{y^2+1} = -2(y-1)$ としてしまったり、符号を確認しなかったりすること。ここで正の平方根が正しいのは、$y > 1$ だからにすぎない。
- x の値を一つしか答えないこと。$x = 1$ と $x = -1$ のどちらも現れ、それぞれ θ は異なる象限にある。

STEP のその先へ

$(y\cos\theta - \sin\theta)^2 \leq (y^2+1)(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$ という段階は、コーシー＝シュワルツの不等式 $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$ の二次元の場合であり、等号が成り立つのはちょうど二つのベクトルが平行なときである。この不等式はあらゆる内積空間（inner-product space）で成り立ち、大学 1 年次の解析学（analysis）と線形代数（linear algebra）で最もよく使われる道具の一つである。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）はこれを幾何的に展開しており、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学を理解する）は解析学の中でこの不等式が活躍する様子を示している。

解答例

STEP II 2016、第 5 問

純粋数学 ・ 二項係数の恒等式

> **STEP II 2016、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q5

鍵となる考え方

3 つの恒等式（identity）はすべて、ひとつの工夫から導かれる。すなわち、ある関数を 2 通りの積として表し、x のある 1 つの冪の係数（coefficient）を比較するのである。添字の和が一定であるような二項係数（binomial coefficient）の積の和は、2 つの冪級数（power series）を掛け合わせてその 1 つの係数を読み取ったときに得られるものにほかならない。問題文の「$p \geq q \geq 0$ でないときは $\binom{p}{q} = 0$ とする」という約束のおかげで、どの項が存在するかを気にせずに、和を j のすっきりした範囲でとることができる。

解答

小問 (i)

$|x| < 1$ のとき、二項級数（binomial series）により、$(1-x)^{-N}$ における x^n の係数は

$$\frac{(-N)(-N-1)\cdots(-N-n+1)}{n!}(-1)^n = \frac{N(N+1)\cdots(N+n-1)}{n!} = \frac{(N+n-1)!}{n!\,(N-1)!} = \binom{N+n-1}{n}.$$

となる。各因数から出る n 個の負号が、$(-x)^n$ から出る n 個の負号と打ち消し合う。したがって

$$(1-x)^{-N} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{N+n-1}{n} x^n \qquad (|x| < 1).$$

である。（$n = 0$ のとき係数は $\binom{N-1}{0} = 1$ である。$N \geq 1$ なので、これで問題ない。）

さて、$(1-x)^{-1}(1-x)^{-N} = (1-x)^{-(N+1)}$ である。上の展開で N を $N+1$ に置き換

えると、右辺における x^n の係数は $\binom{N+n}{n}$ である。

左辺では、$(1-x)^{-1} = \sum_{i\geq 0} x^i$ の係数はすべて 1 である。$(1-x)^{-N}$ の項 x^j は $(1-x)^{-1}$ の x^{n-j} と組になり、j は 0 から n までを動く。よって積における x^n の係数は

$$\sum_{j=0}^{n} 1 \cdot \binom{N+j-1}{j}.$$

である。両方の冪級数は $|x| < 1$ で収束（converge）し、そこで同じ関数を表すので、係数は一致する。これより

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{N+j-1}{j} = \binom{N+n}{n},$$

が示された。

小問 (ii)

$(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$ を用いる。ここで 3 つとも多項式（polynomial）である。問題文の約束により

$$(1+x)^m = \sum_{j\geq 0} \binom{m}{j} x^j, \qquad (1+x)^n = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} x^k,$$

と書ける。$j > m$ や $k > n$ の係数は 0 だからである。積における x^r の係数は $j+k=r$ となる組、すなわち $0 \leq j \leq r$ で $k = r-j$ となる組から得られる：

$$\sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j}\binom{n}{r-j}.$$

考えてみよう $j > m$ や $r-j > n$ となる項はどうなるだろうか。そのような冪は多項式には現れない。

それらの項は、$j > m$ である因数 $\binom{m}{j}$ か、$r-j > n$ である因数 $\binom{n}{r-j}$ を含むので、約束により 0 である。これらは何も寄与せず、また実際の項どうしの積にも対応しないので、$0 \leq j \leq r$ にわたる和でちょうど正しい。$(1+x)^{m+n}$ における x^r の係数は $\binom{m+n}{r}$ である。等しい多項式は係数も等しいので

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j}\binom{n}{r-j}.$$

である。

小問 (iii)

因数 $(-1)^j\binom{m+j-1}{j}$ を見ると、小問 (i) で x を $-x$ に置き換えればよいと気づく。小問 (i) の展開で x を $-x$ に、N を m に置き換えると

$$(1+x)^{-m} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{m+j-1}{j}x^j \qquad (|x|<1).$$

となる。

? **考えてみよう** どのような積を用いればよいだろうか。

もう一方の因数 $\binom{N+m}{n-j}$ は $(1+x)^{N+m}$ の係数であり、答えの $\binom{N}{n}$ は $(1+x)^N$ の係数である。m は正の整数なので、$|x|<1$ のとき

$$(1+x)^{N+m}\,(1+x)^{-m} = (1+x)^N.$$

が成り立つ。左辺では、($k > N+m$ に対する約束を用いて) $(1+x)^{N+m} = \sum_{k\geq 0}\binom{N+m}{k}x^k$ である。x^n の係数は、$0 \leq j \leq n$ について、$(1+x)^{-m}$ の x^j と $(1+x)^{N+m}$ の x^{n-j} の積から得られる：

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{N+m}{n-j}(-1)^j\binom{m+j-1}{j}.$$

右辺では、$(1+x)^N$ における x^n の係数は $\binom{N}{n}$ である。$n > N$ のときこれは約束により 0 であり、$(1+x)^N$ の次数は N なので、これも正しい。両辺は $|x|<1$ で等しいので、冪級数の係数は一致する：

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{N+m}{n-j}\binom{m+j-1}{j} = \binom{N}{n}.$$

検算

- 小問 (i) で $N=2$、$n=3$ のとき：$1+2+3+4 = 10 = \binom{5}{3}$。
- 小問 (ii) で $m=n=2$、$r=2$ のとき：$1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1 = 6 = \binom{4}{2}$。
- 小問 (iii) で $m=2$、$N=3$、$n=2$ のとき：$\binom{5}{2}\binom{1}{0} - \binom{5}{1}\binom{2}{1} + \binom{5}{0}\binom{3}{2} = 10 - 10 + 3 = 3 = \binom{3}{2}$。$n > N$ のときは交代和が 0 になるはずである。たとえば $m=1$、$N=1$、$n=2$ とすると $\binom{2}{2} - \binom{2}{1} + \binom{2}{0} = 1 - 2 + 1 = 0$ となる。

3 つの恒等式はすべて、$m, N \leq 9$ かつ $n \leq 24$ のすべての場合について、コンピュータでも確かめてある。

よくある間違い

- $(1-x)^{-N}$ の係数で符号を見失うこと。$(-1)^n$ が 2 組あり、それらは打ち消し合う。
- 小問 (iii) で、$(1+x)^{-m}$ の級数が無限級数であり、$|x|<1$ でしか成り立たないことを忘れること。係数を比較してよいのは、ある区間で一致する 2 つの冪級数は同じ係数をもつからである。

STEP のその先へ

これは**母関数**（generating functions）の方法である。数列を冪級数の係数として符号化すると、級数の積はここで見たような畳み込み（convolution）の和になる。小問 (ii) はヴァンデルモンド（Vandermonde）の恒等式であり、小問 (i) はしばしばホッケースティック恒等式（hockey-stick identity）とよばれる。どちらにも見事な数え上げによる証明があり、探してみる価値がある。Wilf の *generatingfunctionology*（オンラインで無料公開）や、Graham、クヌース（Knuth）、Patashnik による *Concrete Mathematics*（邦訳『コンピュータの数学』）では、この道具立てがさらに深く展開されている。

解答例

STEP II 2016、第 6 問

純粋数学 ・ チェビシェフ多項式の方程式

> **STEP II 2016、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q6

鍵となる考え方

どの小問も、候補となる関数を微分方程式（differential equation）に代入し、$x = 1$ における条件を確かめるだけで済む。あとは一意性（uniqueness）の仮定がすべてを片づけてくれる。(iii) と (iv) のコツは、y_n を決して具体的に展開しようとしないこと（そもそも明示的な形はわかっていない）、そして方程式 $(1 - x^2)y_n'^2 = n^2(1 - y_n^2)$ そのものを使って導関数を消去することである。

解答

以下を通して、y_k は

$$(1 - x^2)\big(y_k'(x)\big)^2 = k^2\big(1 - y_k(x)^2\big), \qquad y_k(1) = 1,$$

を満たす。これは $(*)$ を変形しただけのものである。ある関数が y_k に等しいことを示すには、（仮定された一意性により）その関数がその k の値に対して $(*)$ を満たし、かつ $x = 1$ で値 1 をとることを示せば十分である。

小問 (i)

$k = 1$ のとき、方程式は

$$(1 - x^2)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + y^2 = 1.$$

となる。$y = x$ とすると $y' = 1$ であり、左辺は $(1 - x^2) + x^2 = 1$ となって条件を満たす。また $y(1) = 1$ であるから、$y_1(x) = x$ である。

小問 (ii)

$k = 2$ のとき、方程式は

$$(1 - x^2)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 4y^2 = 4.$$

となる。$y = 2x^2 - 1$ とすると $y' = 4x$ であるから、

$$\begin{aligned}(1 - x^2)(4x)^2 + 4(2x^2 - 1)^2 &= 16x^2 - 16x^4 + 16x^4 - 16x^2 + 4 \\ &= 4.\end{aligned}$$

$y(1) = 2 - 1 = 1$ であるから、$y_2(x) = 2x^2 - 1$ を得る。

小問 (iii)

簡単のため $y = y_n(x)$ と書く。$z = 2y^2 - 1$ を合成関数の微分法（chain rule）で微分すると $z' = 4yy'$ となるから、y_n の方程式を用いて

$$(1 - x^2)z'^2 = 16y^2\,(1 - x^2)y'^2 = 16y^2 \cdot n^2(1 - y^2),$$

を得る。また

$$4n^2z^2 = 4n^2(2y^2 - 1)^2 = 4n^2(4y^4 - 4y^2 + 1).$$

である。これらを足し合わせると

$$(1 - x^2)z'^2 + 4n^2z^2 = 16n^2y^2 - 16n^2y^4 + 16n^2y^4 - 16n^2y^2 + 4n^2 = 4n^2,$$

となり、求める方程式が得られる。

考えてみよう この方程式は y_{2n} とどう関係しているだろうか？

$(2n)^2 = 4n^2$ であるから、これはちょうど $k = 2n$ のときの $(*)$ である。さらに $z(1) = 2y_n(1)^2 - 1 = 2 - 1 = 1$ である。したがって z は $k = 2n$ のときの $(*)$ の解で、$x = 1$ において値 1 をとる。よって一意性により

$$y_{2n}(x) = 2\big(y_n(x)\big)^2 - 1.$$

である。検算として、$n = 1$ とすると $y_2 = 2x^2 - 1$ となって (ii) と一致し、$n = 2$ とすると $y_4 = 2(2x^2 - 1)^2 - 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$ を得る。

小問 (iv)

$u = y_m(x)$ とおくと、$v = y_n(u)$ である。合成関数の微分法により

$$v'(x) = y_n'(u)\,y_m'(x).$$

である。したがって、まず（点 x における）y_m の方程式を、次に（点 u における）y_n の方程式を用いると、

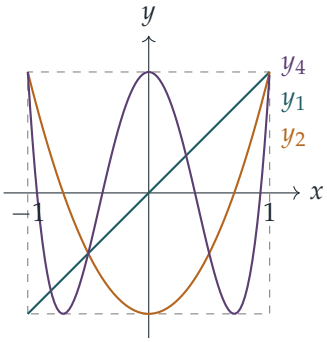
$$\begin{aligned}(1-x^2)v'^2 &= y_n'(u)^2\,(1-x^2)y_m'(x)^2\\ &= y_n'(u)^2\cdot m^2(1-u^2)\\ &= m^2\,(1-u^2)y_n'(u)^2\\ &= m^2\cdot n^2\big(1-y_n(u)^2\big) = m^2n^2(1-v^2).\end{aligned}$$

となる。よって $(1-x^2)v'^2+(mn)^2v^2=(mn)^2$ であり、これは $k=mn$ のときの $(*)$ である。最後に

$$v(1)=y_n\big(y_m(1)\big)=y_n(1)=1,$$

であるから、一意性により $v(x)=y_{mn}(x)$ となり、示すべきことが示された。

y_n の方程式は x ではなく点 u において適用している。この方程式は変数のすべての値で成り立つので、x の代わりに u を入れて使ってよいのである。(iv) を成り立たせているのはこの一歩である。



3 本の曲線はいずれも $(1,1)$ を通り、$[-1,1]$ 上では -1 と 1 の間にとどまる。これは方程式から必然的に従うことである。実際、そこでは $(1-x^2)y'^2\geq 0$ であるから、$k^2y^2\leq k^2$ となる。

検算

- 小問 (iii) で $n=2$ とすると $y_4(x)=8x^4-8x^2+1$ が予測される。直接代入すると、$y_4'=32x^3-16x$ であり、$(1-x^2)(32x^3-16x)^2+16(8x^4-8x^2+1)^2$ は整理すると 16 になる。$x=0.3$ のとき、$y_4=0.3448$ である。
- 小問 (iv) で $m=n=2$ とすると、$y_2(y_2(x))=2(2x^2-1)^2-1$ となり、(iii) から得られたものと同じ y_4 になる。当然そうでなければならない。

- コンピュータによる検証で、このようにして作った多項式が 24 以下のすべての k について $(*)$ を満たすこと、および $m, n \leq 4$ について $y_n(y_m(x)) = y_{mn}(x)$ が成り立つことを、厳密な有理数演算で確かめた。

よくある間違い

- $x = 1$ における条件を忘れる。$(*)$ を満たすだけでは不十分である。$-y_k$ も $(*)$ を満たすからである。
- (iii) や (iv) で y_n を具体的に展開しようとする。y_n について明示的なことは何もわかっていない。その微分方程式を使って $(1 - x^2)y_n'^2$ を置き換えよ。
- (iv) で、y_n の方程式を $u = y_m(x)$ ではなく x で使ってしまう。そうすると因子 $(1 - x^2)$ が誤った場所に現れる。

STEP のその先へ

関数 y_k はチェビシェフ多項式（Chebyshev polynomials）T_k である。$x = \cos\theta$ とおくと $(*)$ は $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta)^2 = k^2(1 - y^2)$ となり、その解は $y = \cos k\theta$ であるから、$T_k(\cos\theta) = \cos k\theta$ が成り立つ。すると小問 (iii) は倍角の公式（double-angle formula）そのものであり、小問 (iv) は $\cos\big(n(m\theta)\big) = \cos(mn\theta)$ を述べていることになる。ひとつ注意しておこう。仮定してよいとされた一意性は、実は厳密には正しくない。定数関数 $y = 1$ も $(*)$ と $y(1) = 1$ を満たすからである。この方程式のように導関数が符号を除いてしか定まらない方程式こそ、一意性定理（uniqueness theorem）の扱いに注意が必要な場面である。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）では、解の存在と一意性（existence and uniqueness）が論じられている。

解答例

STEP II 2016、第 7 問

純粋数学 ・ 対称性を用いた定積分

> **STEP II 2016、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q7

鍵となる考え方

区間 $[0, a]$ をその中点に関して折り返す変換 $x \mapsto a - x$ を施しても積分（integral）の値は変わらないが、被積分関数（integrand）はもとの関数と見事に組み合わさる形に変わることがある。$[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上の三角関数の被積分関数では、この変換によって sin と cos が入れ替わる。$[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上では、$\tan(\frac{1}{4}\pi - x)$ に対する加法定理（compound-angle formula）が役に立つ。最後の小問は新しい問題に見えるが、部分積分（integration by parts）によって小問 (iii) に帰着する。

解答

結果 $(*)$

$\int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x$ において $u = a - x$ と置換（substitution）すると、$\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$ である。$x = 0$ のとき $u = a$、$x = a$ のとき $u = 0$ である。よって

$$\int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x = \int_a^0 f(u)\,(-\mathrm{d}u) = \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x,$$

となる。積分変数の名前は何でもよいからである。これが $(*)$ である。

小問 (i)

この積分を I とおく。$a = \frac{1}{2}\pi$ とすると $\sin(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos x$、$\cos(\frac{1}{2}\pi - x) = \sin x$ であるから、$(*)$ より

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x.$$

これをもとの形の I に加えると

$$2I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},$$

したがって

$$I = \frac{\pi}{4}.$$

（分母 $\cos x + \sin x$ は $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上で正であるから、何も問題は生じない。）

小問 (ii)

今度は $a = \frac{1}{4}\pi$ であり、小問 (i) の手法ではもはや sin と cos は入れ替わらない。代わりに、分子と分母を $\cos x$（この区間で正）で割ると、被積分関数は

$$\frac{\sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{\tan x}{1 + \tan x}.$$

となる。$t = \tan x$ とおく。$\tan(\frac{1}{4}\pi - x) = \dfrac{1-t}{1+t}$ であるから

$$\frac{\tan(\frac{1}{4}\pi - x)}{1 + \tan(\frac{1}{4}\pi - x)} = \frac{(1-t)/(1+t)}{2/(1+t)} = \frac{1-t}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tan x.$$

よって、この積分を J とおくと、$(*)$ より

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tan x\Big)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\Big[-\ln\cos x\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2. \end{aligned}$$

考えてみよう $(*)$ をまったく使わずに小問 (ii) を解く方法はあるだろうか？

ある。$K = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x$ とおく。すると $J + K = \frac{1}{4}\pi$ であり、分子 $\cos x - \sin x$ は分母の導関数であるから

$$K - J = \Big[\ln(\cos x + \sin x)\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \ln\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

辺々引くと $2J = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\ln 2$ となり、上の答えと一致する。

小問 (iii)

この積分を L とおく。同じ加法定理より

$$1 + \tan(\tfrac{1}{4}\pi - x) = 1 + \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \frac{2}{1 + \tan x}.$$

よって $(*)$ より

$$L = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \ln \frac{2}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \big(\ln 2 - \ln(1+\tan x)\big)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\ln 2 - L.$$

ゆえに $2L = \frac{1}{4}\pi \ln 2$ であり

$$L = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

小問 (iv)

分子と分母を $\cos^2 x$ で割ると

$$\frac{x}{\cos x\,(\cos x + \sin x)} = \frac{x\sec^2 x}{1+\tan x}.$$

考えてみよう $\dfrac{\sec^2 x}{1+\tan x}$ は小問 (iii) とどのように関係しているだろうか？

これはちょうど $\ln(1+\tan x)$ の導関数である。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+\tan x) = \sec^2 x$ だからである。また $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上で $1+\tan x > 0$ である。そこで $u = x$、$\mathrm{d}v = \dfrac{\sec^2 x}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x$、$v = \ln(1+\tan x)$ として部分積分を行う：

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{x\sec^2 x}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x &= \Big[x\ln(1+\tan x)\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{\pi}{8}\ln 2 \qquad \text{（小問 (iii) を用いた）} \\ &= \frac{\pi}{8}\ln 2.\end{aligned}$$

したがって、小問 (iv) の積分は小問 (iii) の積分と同じ値をもつ。

検算

- 小問 (i)：被積分関数は 0 から 1 まで増加し、点 $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$ に関して対称であるから、その平均値は $\frac{1}{2}$ であり、積分の値は区間の長さの半分 $\frac{1}{4}\pi$ となる。
- 小問 (ii) の値は小問 (i) の値の半分より小さいはずである。$[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上で被積分関数は $\frac{1}{2}$ より小さいからである。実際 $\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4}\ln 2 \approx 0.2194 < 0.3927$ である。
- 数値積分（numerical quadrature）（シンプソンの公式（Simpson's rule））によると、四つの小問の値は 0.785398、0.219412、0.272198、0.272198 となり、$\frac{1}{4}\pi$、$\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4}\ln 2$、$\frac{1}{8}\pi\ln 2$（2 回）と一致する。

よくある間違い

- 置換 $u = a - x$ によって積分の上端と下端が入れ替わることを忘れる。$\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$ から生じる負号によって、それが再び入れ替わる。
- 小問 (ii) で、小問 (i) と同じように sin と cos を入れ替えようとする。$[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上の折り返しは $x \mapsto \frac{1}{4}\pi - x$ であって、$\frac{1}{2}\pi - x$ ではない。
- $\int \tan x \,\mathrm{d}x = \ln\cos x$ と書いてしまう。正しくは $-\ln\cos x$（あるいは $\ln\sec x$）である。

STEP のその先へ

小問 (iii) は古典的な問題である。同じ折り返しの手法によって、$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln\sin x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi\ln 2$ のような積分を計算することができる。この積分は初等関数（elementary functions）で表される原始関数（antiderivative）からは求められない。大学では、こうした対称性による議論は、周回積分（contour integration）や積分記号下での微分（differentiation under the integral sign）と並んで、初等的な原始関数をもたない定積分（definite integrals）を求める道具として位置づけられる。STEP の精神に沿った例をさらに多く知りたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を参照するとよい。置換積分や部分積分を正当化する解析学（analysis）については、Abbott, *Understanding Analysis* を参照のこと。

解答例

STEP II 2016、第 8 問

純粋数学 • 積分による和の近似

> **STEP II 2016、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q8

鍵となる考え方

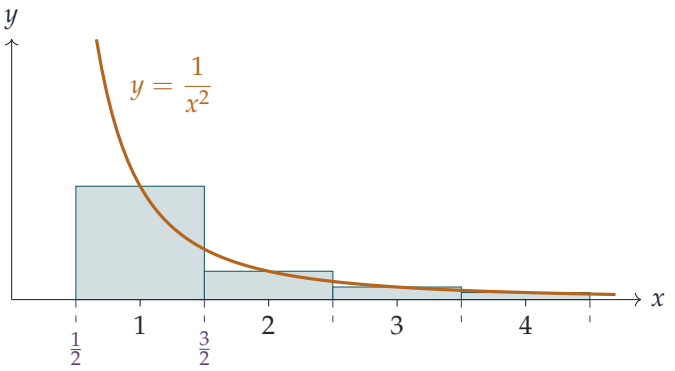
項 $\frac{1}{r^2}$ は幅 1、高さ $\frac{1}{r^2}$ の長方形の面積である。この長方形を $x = r$ を中心に置くと、その面積は $r - \frac{1}{2}$ から $r + \frac{1}{2}$ までの $y = \frac{1}{x^2}$ の下側の面積にきわめて近い（中点公式（midpoint rule））。これらの細長い帯をつなぎ合わせると、和が一つの積分（integral）に変わる。さらに各帯における誤差（error）は正確に計算でき、その誤差を足し合わせることで、第二の級数（series）$\sum \frac{1}{r^4}$ がほとんど労せずに得られる。

解答

積分と概形

$m > \frac{1}{2}$ のとき下端は正であるから、被積分関数（integrand）は積分区間で連続であり、

$$\int_{m-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{m-\frac{1}{2}}^{X} = \frac{1}{m-\frac{1}{2}} = \frac{2}{2m-1}.$$



$x = r$ を中心とする長方形は幅 1、高さ $\frac{1}{r^2}$ であるから、その面積は $\frac{1}{r^2}$ である。帯 $r - \frac{1}{2} \le x \le r + \frac{1}{2}$ において、曲線は左半分では長方形の上辺より上にあり、右半分では下にある。この二つの小さな部分はほぼ打ち消し合う。よって

$$\frac{1}{r^2} \approx \int_{r-\frac{1}{2}}^{r+\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

これを $r = m, m+1, \ldots, n$ について足し合わせると、帯は端と端がつながって $[m - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]$ を覆うので、$(*)$ が得られる。

小問 (i)

$(*)$ において $n \to \infty$ とする。右辺は先に求めた積分に収束（converge）するので、

$$\sum_{r=m}^{\infty} \frac{1}{r^2} \approx \frac{2}{2m-1}.$$

これを級数全体に適用してもよいし、最初の数項は正確に足し、残りの部分（tail）だけを近似してもよい：

$$\begin{aligned}
m = 1: &\quad E \approx \frac{2}{1} = 2,\\
m = 2: &\quad E = 1 + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r^2} \approx 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3},\\
m = 3: &\quad E = 1 + \frac{1}{4} + \sum_{r=3}^{\infty} \frac{1}{r^2} \approx \frac{5}{4} + \frac{2}{5} = \frac{33}{20}.
\end{aligned}$$

これらが求める三つの近似値である。遠くへ行くほど曲線は平らになり、中点による近似がよくなるので、m が大きくなるにつれて近似は改善するはずである。

小問 (ii)

一つの帯における積分は

$$\int_{r-\frac{1}{2}}^{r+\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r-\frac{1}{2}} - \frac{1}{r+\frac{1}{2}} = \frac{1}{r^2-\frac{1}{4}} = \frac{4}{4r^2-1}.$$

よって、$\frac{1}{r^2}$ をこの積分で近似したときの誤差は

$$\frac{4}{4r^2-1} - \frac{1}{r^2} = \frac{4r^2-(4r^2-1)}{r^2(4r^2-1)} = \frac{1}{r^2(4r^2-1)} = \frac{1}{4r^4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4r^2}}.$$

r が大きいとき $\frac{1}{4r^2}$ は小さいので、最後の因数は 1 に近く、誤差はおよそ $\frac{1}{4r^4}$ となり、題意が示された。(積分の方が常に大きいことは図とも整合する。$\frac{1}{x^2}$ は凸 (convex) であるから、各帯の左側で余分になる面積が右側で不足する面積を上回るのである。)

最後の結果を得るため、$r = m$ 以降の誤差を足し合わせる。帯ごとの積分を足し合わせると最初に求めた積分になるので、

$$\frac{2}{2m-1} - \sum_{r=m}^{\infty}\frac{1}{r^2} = \sum_{r=m}^{\infty}\frac{1}{r^2(4r^2-1)} \approx \frac{1}{4}\sum_{r=m}^{\infty}\frac{1}{r^4}.$$

考えてみよう いちばん簡単そうに見える $m = 1$ をとらないのはなぜか。

$m = 1$ とすると左辺は $2 - 1.645 = 0.355$ となり、$\sum \frac{1}{r^4} \approx 1.42$ が得られるが、これは大きすぎる。問題は、「$\approx \frac{1}{4r^4}$」が r の大きいときにしか良い近似でないことである。$r = 1$ では真の誤差は $\frac{1}{4}$ ではなく $\frac{1}{3}$ であり、この最初の項が和全体を支配してしまう。したがって、最初の数項は正確に保ち、近似は残りの部分にだけ用いるべきである。$m = 3$ ($\frac{33}{20}$ を与えた選び方) をとると、最も悪い因数 $\frac{1}{1-1/(4r^2)}$ は $\frac{36}{35}$ であり、1 との差は 3% 以内である：

$$\frac{1}{4}\sum_{r=3}^{\infty}\frac{1}{r^4} \approx \frac{2}{5} - \left(E - 1 - \frac{1}{4}\right) \approx 0.4 - 0.395 = 0.005,$$

よって $\sum_{r=3}^{\infty}\frac{1}{r^4} \approx 0.02$ であり、

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^4} \approx 1 + \frac{1}{16} + 0.02 = 1.0825 \approx 1.08.$$

これが求める結果である。E は小数第 3 位までしか与えられていないので、E における最大 0.0005 の誤差はここでは最大 0.002 の誤差となるが、それでも 1.08 は変わらない。

検算

- 近似値 2、$\frac{5}{3} \approx 1.667$、$\frac{33}{20} = 1.65$ は $E = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.6449$ に向かって減少しており、凸性による議論が予測するとおり、いずれも大きすぎる。

- $r = 10$ のとき、正確な誤差 $\frac{1}{100\times399} \approx 2.506 \times 10^{-5}$ は $\frac{1}{4\times10^4} = 2.5 \times 10^{-5}$ にきわめて近い。
- 正確な値は $\sum \frac{1}{r^4} = \frac{\pi^4}{90} \approx 1.0823$ であり、我々の 1.0825 と一致する。代わりに $m = 2$ を用いると $1 + 4\left(\frac{2}{3} - 0.645\right) \approx 1.087$ となり、明らかに悪くなる。$m = 1$ では 1.42 となる。

よくある間違い

- 最後の小問で、r が大きいときの近似 $\frac{1}{4r^4}$ が悪い $m = 1$ を用いてしまい、1.42 を得る。
- 誤差の符号を逆にする。積分は $\frac{1}{r^2}$ より大きいので、$\frac{2}{2m-1}$ は残りの部分の過大評価である。
- 正確に計算した最初の項（$1 + \frac{1}{4}$ や $1 + \frac{1}{16}$）を足し戻すのを忘れる。

STEP のその先へ

これは中点公式であり、誤差項 $\frac{1}{4r^4}$ はオイラー＝マクローリンの公式（Euler–Maclaurin formula）の一端を垣間見せるものである。この公式は和を積分と導関数の項からなる級数とで補正するものであり、$\sum \frac{1}{r^2}$ のような和を小数点以下何桁も計算するのに用いられる。正確な値 $\frac{\pi^2}{6}$ と $\frac{\pi^4}{90}$ は、フーリエ級数（Fourier series）、あるいはオイラー（Euler）による $\sin x$ の積表示から得られる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門）は級数と積分を丁寧に扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（発展的な数学の問題集）にはこの種の問題がさらに収められている。

解答例

STEP II 2016、第 9 問

力学 ・ 運動量とエネルギー損失

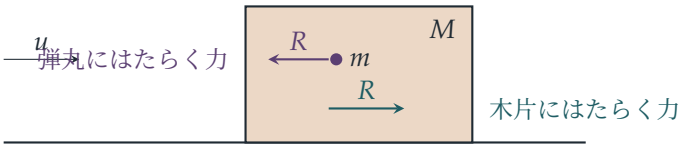
> **STEP II 2016、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q9

鍵となる考え方

抵抗力 R は弾丸と木片の間にはたらく内力（internal force）である。この力は弾丸を減速させ、ニュートン（Newton）の第 3 法則により、同じ大きさで木片を前方へ押す。したがって、両者を合わせた運動量（momentum）は保存されるが、運動エネルギー（kinetic energy）は保存されない。失われるエネルギーは、弾丸が木片の内部を**相対的に**進む距離にわたって R がする仕事にちょうど等しい。木片だけに仕事とエネルギーの関係（work–energy principle）を適用すれば、木片が動く距離が求まる。

解答

弾丸と木片を一本の水平な直線上を運動する質点とみなし、弾丸が木片に対して動いている間、抵抗力 R は一定であるとする。弾丸の初めの向きを正の向きにとる。



鉛直方向の力（重力と台からの垂直抗力）はつり合っており、運動には関与しない。水平方向には、弾丸は後ろ向きに R を受け、木片は前向きに R を受ける。

小問 (i)

木片が固定されているとき、弾丸の減速度は一定で R/m である。$v^2 = u^2 + 2\alpha s$ において、最後の速さを 0、$\alpha = -R/m$ とすると

$$0 = u^2 - \frac{2R}{m}a \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a = \frac{mu^2}{2R}.}$$

（同じことであるが、抵抗力に逆らってする仕事 Ra が、弾丸の初めの運動エネルギー $\frac{1}{2}mu^2$ に等しいといってもよい。）

小問 (ii)

最終的な共通の速度。台はなめらかなので、弾丸と木片からなる系には水平方向の外力がはたらかない。弾丸が木片に対して静止したとき、両者は同じ速度 V で動き、運動量保存則（conservation of momentum）により

$$mu = (M+m)V \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{mu}{M+m}.$$

考えてみよう 抵抗力は木片内部の弾丸の経路上で距離 b にわたってはたらくが、弾丸自身は台に対して $b+c$ だけ進む。エネルギーの式に入るのはどちらの距離だろうか？

b を求める。台に対して考えると、弾丸は $b+c$ だけ動くので、弾丸にはたらく力 R がする仕事は $-R(b+c)$ である。木片は c だけ動くので、木片にはたらく力 R がする仕事は $+Rc$ である。よって系全体にされる仕事の総和は $-Rb$ であり、相対変位だけが効いてくる。仕事とエネルギーの関係により

$$\begin{aligned} Rb &= \tfrac{1}{2}mu^2 - \tfrac{1}{2}(M+m)V^2 \\ &= \tfrac{1}{2}mu^2 - \frac{m^2u^2}{2(M+m)} \\ &= \tfrac{1}{2}mu^2\left(1 - \frac{m}{M+m}\right) = \tfrac{1}{2}mu^2 \cdot \frac{M}{M+m}. \end{aligned}$$

小問 (i) より $\frac{1}{2}mu^2 = Ra$ であるから、両辺を R で割って

$$\boxed{b = \frac{M}{M+m}a.}$$

c を求める。次に、木片だけに仕事とエネルギーの関係を適用する。木片は静止状態から動き始めて速さ V に達し、木片にはたらく水平方向の力は前向きの R のみで、それが距離 c にわたってはたらく。したがって

$$Rc = \tfrac{1}{2}MV^2 = \frac{Mm^2u^2}{2(M+m)^2} = \tfrac{1}{2}mu^2 \cdot \frac{mM}{(M+m)^2}.$$

再び $\frac{1}{2}mu^2 = Ra$ を用いると

$$\boxed{c = \frac{mM}{(M+m)^2}\,a.}$$

運動学による別解。弾丸は R/m で減速し、木片は R/M で加速する。両者の速度が一致するのは $u - Rt/m = Rt/M$ のときであるから

$$t = \frac{mMu}{R(M+m)}, \qquad c = \frac{1}{2}\cdot\frac{R}{M}\,t^2 = \frac{m^2Mu^2}{2R(M+m)^2},$$

となり、上の結果と一致する。また b は、弾丸の変位から c を引けば得られる。

検算

- $M \to \infty$ のとき、木片は固定されているのと同じようにふるまう。実際 $b \to a$、$c \to 0$ となり、期待どおりである。
- $\frac{M}{M+m} < 1$ であるから $b < a$ である。動くことのできる木片は弾丸のエネルギーのうち熱として吸収する分が少ないので、弾丸はそれほど深くまでめり込まない。
- $M = 4m$ のとき、$b = \frac{4}{5}a$、$c = \frac{4}{25}a$ となる。m、M、u、R をいくつか無作為に選び、小さな時間刻みで運動を数値的に進めてみると、a、b、c が有効数字 4 桁まで再現される。

よくある間違い

- エネルギー損失の式で、相対距離 b ではなく、弾丸が台に対して進む距離 $b + c$ を用いてしまう。
- 衝突において運動エネルギーが保存されると仮定してしまう。実際には保存されず、損失分 Rb が発生する熱である。
- 木片も力 R を受けること（ニュートンの第 3 法則）を忘れ、木片の運動を説明できないままにしてしまう。

STEP のその先へ

内力がする仕事の総和が 0 になるのは相対運動がない場合に限る、という事実は、質点系のエネルギーを丁寧に扱う理論の出発点である。重心系（centre-of-mass frame）で考えると見通しがよくなる。散逸に使える運動エネルギーは、換算質量（reduced mass）$\mu = mM/(M+m)$ を用いて $\frac{1}{2}\mu u^2$ と表され、これはここでの Rb にちょうど等

しい。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、これらの考え方を徹底的に展開している。

解答例

STEP II 2016、第10問

力学 ・ 摩擦とつり合い

> **STEP II 2016、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題はSTEP Support Programmeの問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q10

鍵となる考え方

三角形にはたらく力は二つしかない。重心（centre of mass）Gにはたらく重力と、接触点Pで釘（peg）から受けるただ一つの接触力である。つり合っている二つの力は、大きさが等しく、向きが反対で、同一直線上になければならない。したがって三角形は、GがPの真下にくるまで回転する。すると問題は次のようになる。釘からの反力はBCの法線からどれだけ傾かなければならないか、そして摩擦はそれを支えるのに十分な強さをもつか。そこでまずGの位置を求める。

解答

モデルと重心

針金を単位長さあたりの質量が等しい三本の一様な棒とみなし、釘を一点で接触するものとみなす。釘は垂直抗力（normal reaction）R（BCに垂直）と摩擦力（friction force）F（BCに沿う向き）を及ぼし、$F \le \mu R$である。

$AB = AC = b$とし、BCの中点をMとする。Aにおける角は2θであるから、直線AMはこの角を二等分し、BCに垂直である。よって

$$BM = MC = b\sin\theta, \qquad AM = b\cos\theta, \qquad BC = 2b\sin\theta.$$

対称性よりGはAM上にある。BCからAに向かって距離を測る。棒ABとACはそれぞれ質量がbに比例し、その中心は中点にあってBCからの距離は$\frac{1}{2}b\cos\theta$である。棒BCは質量が$2b\sin\theta$に比例し、その中心はBC上にある。よって距離$d = GM$は

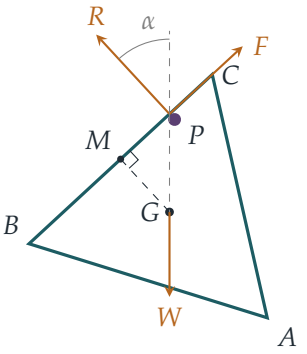
$$d = \frac{b\cdot\frac{1}{2}b\cos\theta + b\cdot\frac{1}{2}b\cos\theta + 2b\sin\theta\cdot 0}{b+b+2b\sin\theta} = \frac{b\cos\theta}{2(1+\sin\theta)}.$$

釘が一般の点にあるときのつり合い

釘が BC に点 P で接し、$MP = x$、ただし $0 \le x \le b\sin\theta$ であるとする（対称性より P は M と C の間にあるとしてよい）。三角形は釘の下にぶら下がっているので、釘は三角形の内側にあり、BC がその上に載っている。

> **考えてみよう** 三角形はどんな角度でもぶら下がりうる。実際にどの角度をとるかは、どうすればわかるだろうか。

三角形にはたらく力は、G における重力 W と、P における釘からの接触力の合力である。力が二つしかないので、つり合うためには両者が大きさ等しく向きが反対であること（したがって接触力は鉛直上向きに W）、そして同一直線上にはたらくこと（そうでなければ偶力（couple）になってしまう）が必要である。よって PG は鉛直でなければならない。すなわち三角形は、G が P の真下にくる位置で静止する。



PG（鉛直線）と BC の法線 GM のなす角を α とする。直角三角形 PMG において

$$\tan\alpha = \frac{MP}{GM} = \frac{x}{d}.$$

BC の法線は鉛直線と角 α をなし、BC は水平線と角 α をなす。BC に垂直な方向と BC に沿う方向に力を分解すると

$$R = W\cos\alpha, \qquad F = W\sin\alpha.$$

$0 \le \alpha < \frac{1}{2}\pi$ であるからどちらも非負であり、$R > 0$ である。三角形が滑らずに静止しているための条件は $F \le \mu R$、すなわち

$$\mu \ge \tan\alpha = \frac{x}{d}.$$

BC のすべての点

右辺 x/d は x について増加するので、この条件が最も厳しくなるのは P が端点にあるとき、つまり $x = b\sin\theta$ のときである。BC のすべての点でつり合いが可能であるこ

とは、そこでつり合いが可能であることと同値である。

$$\mu \geq \frac{b\sin\theta}{d} = b\sin\theta \cdot \frac{2(1+\sin\theta)}{b\cos\theta} = 2\tan\theta\,(1+\sin\theta),$$

これが求める条件である。これが成り立てば、$[0, b\sin\theta]$ のすべての x について $\mu \geq x/d$ となるので、釘が BC のどの点にあっても三角形は静止できる。

検算

- $x = 0$（釘が M にある）のとき $\alpha = 0$ となる。三角形は BC が水平な状態でぶら下がり、摩擦はまったく必要ない。対称性から期待されるとおりである。
- $\theta = 30^\circ$ のとき三角形は正三角形となり、$d = \frac{1}{3}b\cos 30^\circ$ である。このとき G は図形の重心、すなわち BC から高さ $b\cos 30^\circ$ の三分の一の位置にあるはずであり、実際そうなっている。条件は $\mu \geq 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} = \sqrt{3} \approx 1.732$ となる。頂点では、BC は水平線と 60° をなさなければならない。
- $\theta \to 0$ のとき三角形は細いとげのようになり、BC は縮んで消え、上界は 0 に近づく。$\theta \to \frac{1}{2}\pi$ のときは細長い平らな帯のようになり、上界は発散する。どちらも直観に合う。
- コンピュータによる検算として、三本の棒を多数の小片に分けて G を求め、ランダムな θ と b に対して BC 上の 201 点で力を分解したところ、$2\tan\theta(1+\sin\theta)$ と 10^{-11} 以内で一致した。

よくある間違い

- **針金**の重心ではなく、三角形の**薄板**（lamina）の重心（AM の三分の一の高さ）を使ってしまう。針金の枠は質量が辺の上にあるので、BC は重み $2b\sin\theta$ として数える。
- BC が水平のままであると仮定し、モーメントをとろうとしてしまう。三角形は G が釘の真下にくるまで傾く。その傾きの角度こそ、摩擦が支えなければならないものである。
- BC の一点しか調べない。最も厳しいのは BC の端点の場合であり、それが上界を決める。

STEP のその先へ

$\tan\alpha \leq \mu$ と書くことは、接触力の合力が**摩擦円錐**（cone of friction）、すなわち法線のまわりの半頂角 $\arctan\mu$ の円錐の内側になければならない、ということを表している。この見方をすると、多くの摩擦の問題（はしご、くさび、粗い釘）がほとんど幾何の問題になる。さらにこれは接触点が複数ある剛体へと一般化され、そこでは各円錐の内側にある力をうまく選んで荷重とつり合わせられるかどうかが問題となる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、摩擦と剛体のつり合いをこのような丁寧さで扱っている。

解答例

STEP II 2016、第 11 問

力学 ・ 放物運動と衝突

> **STEP II 2016、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q11

鍵となる考え方

2 つの粒子が衝突するのは、同じ時刻に両方の座標が一致するときである。したがって、未知数 t を共有する 2 つの方程式が得られ、一方を他方で割れば t を消去できる。小問 (ii) のポイントは、重力が弾丸と標的をどの瞬間にもまったく同じ量 $\frac{1}{2}gt^2$ だけ引き下げることに気づくことである。したがって、両者が出会うかどうかは小問 (i) の重力のない運動によって決まり、重力が関係するのは、出会ったときに標的がどこにあるかを問うときだけである。

解答

小問 (i)

第 1 の粒子を P（$(a,0)$ から出発）、第 2 の粒子を Q（$(0,b)$ から出発）とする。時刻 t で衝突するとする。x 座標と y 座標をそれぞれ等しいとおくと、

$$\begin{aligned} a + ut\cos\alpha &= vt\cos\beta, & \text{よって} \quad t\,(v\cos\beta - u\cos\alpha) &= a, \\ ut\sin\alpha &= b + vt\sin\beta, & \text{よって} \quad t\,(u\sin\alpha - v\sin\beta) &= b. \end{aligned}$$

$a > 0$ であるから、第 1 式より $t \neq 0$ である（2 つの粒子は異なる点から出発する）。したがって $t > 0$ であり、第 2 式を第 1 式で割ることができる：

$$\frac{u\sin\alpha - v\sin\beta}{v\cos\beta - u\cos\alpha} = \frac{b}{a} = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

（分母は $a/t \neq 0$ である。）分母を払うと

$$\cos\theta\,(u\sin\alpha - v\sin\beta) = \sin\theta\,(v\cos\beta - u\cos\alpha),$$

となり、u を含む項を左辺に、v を含む項を右辺にまとめると

$$u(\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta)=v(\sin\beta\cos\theta+\cos\beta\sin\theta).$$

$\sin(A+B)$ の加法定理（compound-angle formula）により、これは

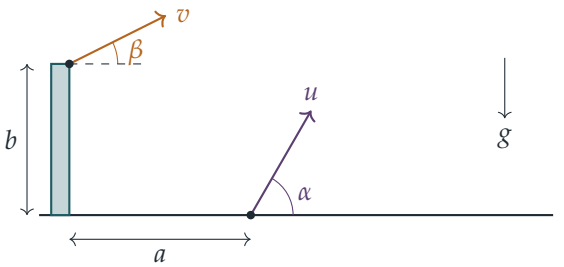
$$u\sin(\theta+\alpha)=v\sin(\theta+\beta),$$

となり、示すべき式が得られた。あとで使うために、次の 2 つの事実も記録しておく。$a,b,t>0$ であるから

$$v\cos\beta>u\cos\alpha \qquad \text{かつ} \qquad u\sin\alpha>v\sin\beta. \tag{$*$}$$

小問 (ii)

弾丸と標的を、空気抵抗なしで重力のみを受けて自由に運動する質点としてモデル化する。塔の根元を原点とし、標的の発射点を通る水平方向（塔から離れる向き）を x 軸、鉛直上向きを y 軸にとる。命中する可能性があるためには弾丸は標的の方向に発射されなければならないので、両者はこの鉛直面内を運動する。



時刻 t（どちらも着地する前）において、標的と弾丸の位置は

$$T=\left(a+ut\cos\alpha,\ ut\sin\alpha-\tfrac{1}{2}gt^2\right), \qquad B=\left(vt\cos\beta,\ b+vt\sin\beta-\tfrac{1}{2}gt^2\right).$$

である。これらはちょうど小問 (i) の位置を、それぞれ同じ量 $\frac{1}{2}gt^2$ だけ下にずらしたものである。

考えてみよう 小問 (i) には重力がなかったのに、なぜ小問 (i) を使えるのだろうか。

命中は $T=B$ のときに起こる。y 座標の方程式では項 $-\frac{1}{2}gt^2$ が両辺に現れて打ち消し合うので、衝突の条件は小問 (i) のものと一字一句同じになる：

$$t\,(v\cos\beta-u\cos\alpha)=a, \qquad t\,(u\sin\alpha-v\sin\beta)=b.$$

特に小問 (i) と $(*)$ がそのまま適用でき、命中の時刻は

$$t = \frac{b}{u\sin\alpha - v\sin\beta},$$

である。ここで分母は $(*)$ により正である。

この瞬間に標的がまだ空中にあるのは、その高さが正であるとき、かつそのときに限る：

$$ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2 > 0 \iff t < \frac{2u\sin\alpha}{g},$$

ここで $\frac{1}{2}t > 0$ で割った。命中の時刻を代入すると

$$\frac{b}{u\sin\alpha - v\sin\beta} < \frac{2u\sin\alpha}{g}.$$

両方の分母は正なので、$g(u\sin\alpha - v\sin\beta)$ を両辺に掛けても不等式（inequality）の向きは変わらず、

$$2u\sin\alpha\,(u\sin\alpha - v\sin\beta) > bg,$$

が得られ、示すべき式が得られた。（命中の瞬間、弾丸は標的と同じ高さにあるので、弾丸も地面より上にある。）

なぜ $\alpha > \beta$ が必要なのか

命中のためには、2 つの粒子が小問 (i) の意味で衝突しなければならないことを見た。したがって

$$u\sin(\theta+\alpha) = v\sin(\theta+\beta),$$

が成り立つ。ここで $\tan\theta = b/a$ であり、さらに $(*)$ より $u\sin\alpha > v\sin\beta$ である。θ、α、β は鋭角なので、$\theta+\alpha$ と $\theta+\beta$ は 0 と π の間（端点を除く）にあり、ここに現れる 4 つの正弦はすべて正である。等式を不等式で割ると向きが逆になる：

$$\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\sin\alpha} < \frac{\sin(\theta+\beta)}{\sin\beta}.$$

展開すると $\dfrac{\sin(\theta+\alpha)}{\sin\alpha} = \sin\theta\cot\alpha + \cos\theta$ であり、β についても同様なので

$$\sin\theta\cot\alpha < \sin\theta\cot\beta \iff \cot\alpha < \cot\beta,$$

となる。ここで $\sin\theta > 0$ を用いた。$(0, \frac{\pi}{2})$ 上で余接（cotangent）は狭義単調減少であるから、$\alpha > \beta$ である。

物理的には次のように理解できる。弾丸から見ると、重力が打ち消し合うため、標的は一定の速度で直線運動をする。この相対速度（relative velocity）は標的の出発点 $(a, 0)$ から $(0, b)$ にある銃の方向を向いていなければならないので、後ろ向きかつ上向

きでなければならない。$(*)$ より、標的は弾丸と比べて水平方向には遅く、鉛直方向には速くなければならず、そのため標的の軌道はより急勾配、すなわち $\tan\alpha > \tan\beta$ でなければならない。（$(*)$ の 2 つの式を割り算しても、同じ結論が直接得られる。）

検算

$u = 20$、$\alpha = 60°$、$v = 15$、$\beta = 30°$ とし、$g = 9.8$ で $t = 1$ に命中する場合を考える。衝突の方程式から $a \approx 2.990$、$b \approx 9.821$ となるので、$\theta \approx 73.06°$ である。このとき $u\sin(\theta+\alpha) \approx 14.612$、$v\sin(\theta+\beta) \approx 14.612$ となり、一致する。命中の瞬間、標的の高さは $17.32 - 4.9 \approx 12.42 > 0$ であり、実際 $2u\sin\alpha(u\sin\alpha - v\sin\beta) \approx 340.2 > bg \approx 96.2$ が成り立つ。何千通りものランダムな発射条件についてコンピュータで確認したところ、この不等式が成り立つのは命中の瞬間に標的がまだ空中にあるとき、かつそのときに限ること、そしてすべての命中で $\alpha > \beta$ であることが確かめられた。

よくある間違い

- 2 つの粒子が**同じ**時刻に同じ場所にいなければならないことを忘れ、2 つの異なる時刻について解いてしまう。
- $u\sin\alpha - v\sin\beta$ が正であることを先に確かめずに、両辺に掛けてしまう。実際には $t > 0$ かつ $b > 0$ なので正である。
- $u\sin\alpha > v\sin\beta$ だけから $\alpha > \beta$ を導こうとする。速さも比較しない限り、この式は角度について何も教えてくれない。

STEP のその先へ

重力が打ち消し合うことは、ガリレイの相対性原理（Galilean relativity）の一例である。弾丸とともに自由落下する座標系では、標的は一定の速度で直線運動をするので、「標的をまっすぐ狙う」ことでうまくいく。これは古典的な「猿と狩人」の実験であり、慣性系（inertial frame、あるいは自由落下する座標系）の考え方は、大学 1 年の力学の出発点であり、さらに後には一般相対性理論（general relativity）における等価原理（equivalence principle）の出発点でもある。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、相対運動と座標系を丁寧に展開している。

解答例

STEP II 2016、第 12 問

確率・統計 ・ 包除原理と完全順列

> **STEP II 2016、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q12

この問題は、*Beyond STEP* の第 9.8 節「誰も自分のシャツを受け取らない」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/derangements.html

鍵となる考え方

3 つの事象（event）については、$A \cup B$ を 1 つの事象とみなし、2 事象の公式を 2 回適用すればよい。同じ符号の交代するパターン（単独の確率を足し、2 つの共通部分を引き、3 つの共通部分を足し、...）は、事象がいくつあっても成り立つ。これを「カード i が位置 i にある」という事象に適用すると、r 個の事象を含む項はすべて同じ確率をもつので、和の各層は 1 つの分数にまとまる。「ちょうど 1 つ」については、どのカードが一致するかを固定し、残りのカードがまったく一致しない確率を考える。

解答

3 つの事象

$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$ と書き、A の代わりに $A \cup B$、B の代わりに C として 2 事象の公式を用いる：

$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A \cup B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}\big((A \cup B) \cap C\big).$$

第 1 項は $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$ である。最後の項については、分配法則（distributive law）により $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ であり、2 事象の公式をもう一度適用す

ると

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\big((A\cap C)\cup(B\cap C)\big) &= \mathrm{P}(A\cap C)+\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}\big((A\cap C)\cap(B\cap C)\big)\\ &= \mathrm{P}(A\cap C)+\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}(A\cap B\cap C).\end{aligned}$$

両方を代入すると

$$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}(C\cap A)+\mathrm{P}(A\cap B\cap C),$$

となり、示すべき式が得られた。

4 つの事象

4 つの単独の確率を足し、6 つの 2 事象の共通部分を引き、4 つの 3 事象の共通部分を足し、4 事象の共通部分を引く：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B\cup C\cup D) = {}& \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)+\mathrm{P}(D)\\ & -\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A\cap C)-\mathrm{P}(A\cap D)\\ & -\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}(B\cap D)-\mathrm{P}(C\cap D)\\ & +\mathrm{P}(A\cap B\cap C)+\mathrm{P}(A\cap B\cap D)+\mathrm{P}(A\cap C\cap D)+\mathrm{P}(B\cap C\cap D)\\ & -\mathrm{P}(A\cap B\cap C\cap D).\end{aligned}$$

小問 (i)–(iii)

$n!$ 通りの並べ方はすべて同様に確からしい。特定の r 枚のカードがそれぞれ自分の位置にあることを要求すると、残りの $n-r$ 枚の並べ方は $(n-r)!$ 通りなので、その確率は $(n-r)!/n!$ である。したがって

$$\text{(i) } \mathrm{P}(E_i)=\frac{1}{n},\qquad \text{(ii) } \mathrm{P}(E_i\cap E_j)=\frac{1}{n(n-1)},\qquad \text{(iii) } \mathrm{P}(E_i\cap E_j\cap E_k)=\frac{1}{n(n-1)(n-2)}.$$

（(ii) は次のように考えてもよい：カード i が位置 i に来る確率は $\frac{1}{n}$ であり、そのうえでカード j が残りの $n-1$ か所のうち位置 j に来る確率は $\frac{1}{n-1}$ である。）

少なくとも 1 つ一致する場合

少なくとも 1 枚のカードが一致するのは、$E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n$ が起こるときであり、そのときに限る。上のパターンは n 個の事象に拡張できる：第 r 層は、相異なる r 個の事象のすべての共通部分の確率の和に $(-1)^{r+1}$ を掛けたものである。

考えてみよう r 個の事象のすべての選び方にわたる和を、それがどの事象かを知らずに計算するにはどうすればよいか？

対称性（symmetry）により、相異なる r 個の事象の共通部分はすべて同じ確率 $(n-r)!/n!$ をもち、r 個の事象の選び方は $\binom{n}{r}$ 通りある。よって第 r 層の寄与は

$$(-1)^{r+1}\binom{n}{r}\frac{(n-r)!}{n!} = (-1)^{r+1}\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\cdot\frac{(n-r)!}{n!} = \frac{(-1)^{r+1}}{r!}.$$

$r = 1, 2, \ldots, n$ について和をとると

$$\mathrm{P}(\text{少なくとも 1 つ一致}) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!},$$

となり、示すべき式が得られた。（$r = 1, 2, 3$ の場合、これは小問 (i)–(iii) から得られる $n\cdot\frac{1}{n}$、$\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n(n-1)}$、$\binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n(n-1)(n-2)}$ にほかならない。）

ちょうど 1 つ一致する場合

シャッフルした m 枚のカードのどれも自分の位置にない確率を p_m とおく。前の結果により

$$p_m = 1 - \left(1 - \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^{m+1}\frac{1}{m!}\right) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{m}\frac{1}{m!}.$$

事象「ちょうど 1 つ一致」は、事象「カード i が一致し、ほかのカードは一致しない」の i にわたる互いに素な（disjoint）和集合である。E_i が起こったという条件のもとで、ほかの $n-1$ 枚のカードはほかの $n-1$ か所にどの順にも同様に確からしく並ぶので、これは $n-1$ 枚のカードを新たにシャッフルしたものとなり、そのどれも一致しない確率は p_{n-1} である。したがって

$$\mathrm{P}(\text{ちょうど 1 つ一致}) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(E_i)\,p_{n-1} = n\cdot\frac{1}{n}\cdot p_{n-1} = p_{n-1},$$

すなわち

$$\mathrm{P}(\text{ちょうど 1 つ一致}) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!} \qquad (n \geq 2),$$

であり、$n = 1$ のときは 1 である。同値な表し方として、これは $\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r/r!$ であり、この形なら $n = 1$ の場合も含まれる。

検算

$n = 3$ のとき、並べ方は 123、132、213、231、312、321 である。そのうち 4 つが一致を含むので、確率は $\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ となる。また 3 つ（互換 132、213、321）がちょうど 1 つの一致をもつので確率は $\frac{1}{2}$ となり、公式と一致する。$n = 2$ のとき、ちょうど 1 つ一致することは不可能であり（1 枚が自分の位置にあれば、もう 1 枚もそ

うである）、公式も 0 を与える。$n \leq 7$ についてすべての並べ方をコンピュータで数え上げると、両方の公式と一致する。たとえば $n = 7$ のとき、ちょうど 1 つ一致する確率は $\frac{53}{144} \approx 0.368$ である。$n \to \infty$ のとき、どちらの答えもよく知られた極限に収束（converge）する：少なくとも 1 つ一致する確率は $1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0.632$ に、ちょうど 1 つ一致する確率は e^{-1} に収束する。

よくある間違い

- $\mathrm{P}(E_i \cap E_j) = \frac{1}{n^2}$ と書いてしまう：これらの事象は独立（independent）ではない。カード i が位置 i にあると、カード j のために残る位置は $n - 1$ か所しかないからである。
- 「ちょうど 1 つ」の答えを $n \cdot \frac{1}{n} = 1$ や $\mathrm{P}(E_1)$ としてしまう：必要なのは、カード i が自分の位置にあり、**かつ**ほかのどのカードも自分の位置にないことである。
- 「少なくとも 1 つ」の和で $r = 1$ の項が $n \cdot \frac{1}{n} = 1$ であることを忘れる。これが級数が 1 から始まる理由である。

STEP のその先へ

これは古典的な**撹乱順列**（*derangement*）の問題（*problème des rencontres*、出会いの問題）であり、一般の包除原理（inclusion–exclusion）の公式は、数学的帰納法（induction）や指示確率変数（indicator random variable）を用いてきれいに証明できる。一致の個数は、n が大きいとき平均 1 のポアソン（Poisson）分布で近似できることがわかる：ちょうど k 個一致する確率は $\mathrm{e}^{-1}/k!$ に収束する。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）、および Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率入門）は、いずれも包除原理と一致の問題を扱っている。

解答例

STEP II 2016、第 13 問

確率・統計　・　正規近似

> **STEP II 2016、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q13

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.23 節「**確率から導くスターリングの公式**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/stirling-probability.html

鍵となる考え方

離散分布（discrete distribution）における一つの確率 $\mathrm{P}(X = k)$ は、k を中心とする幅 1 の棒の面積である。分布が正規分布（normal distribution）に近ければ、その面積はおおよそ k における正規分布の確率密度（density）に幅 1 を掛けたものになる。これを平均（mean）において適用すると、標準正規分布（standard normal distribution）の密度はそこで $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ であるから、正確に分かっている確率が一つの近似式に変わる。分布をうまく選べば、その正確な確率に求めたい階乗（factorial）が含まれるようにできる。

解答

全体を通して用いる近似

W は整数値をとり、平均 μ、分散（variance）σ^2 をもち、$V \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ でよく近似されるとする。V の密度関数は

$$f(v) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

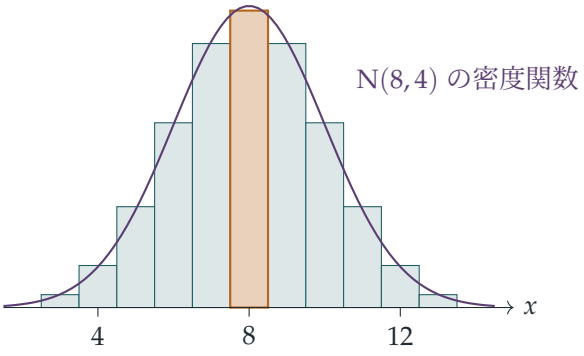
である。連続性補正（continuity correction）を行うと

$$\mathrm{P}(W = k) \approx \mathrm{P}\left(k - \tfrac{1}{2} < V < k + \tfrac{1}{2}\right) = \int_{k-1/2}^{k+1/2} f(v)\,\mathrm{d}v \approx 1 \times f(k),$$

となる。最後の近似は、区間の幅が 1 であり、σ が小さくなければ f はその区間でほとんど変化しないことによる。$k = \mu$ では指数関数の部分が $\mathrm{e}^0 = 1$ となるので

$$\mathrm{P}(W = \mu) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}. \qquad (*)$$

である。



小問 (i)

$X \sim \mathrm{B}(16, \frac{1}{2})$ に対して

$$\mathrm{E}(X) = np = 8, \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p) = 16 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = 4,$$

であるから $\sigma = 2$ である。$p = \frac{1}{2}$ なので分布は 8 に関して対称であり、n もそれなりに大きいので、$\mathrm{N}(8,4)$ はよい近似となる（図は棒グラフと正規分布の曲線を重ねて示している）。$(*)$ により、色を付けた棒の面積は

$$\mathrm{P}(X = 8) \approx \frac{1}{2\sqrt{2\pi}},$$

となり、示すべき結果が得られた。

小問 (ii)

$Y \sim \mathrm{B}(2n, \frac{1}{2})$ とする。このとき $\mathrm{E}(Y) = n$、$\mathrm{Var}(Y) = 2n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$ であるから $\sigma = \sqrt{n/2}$ である。正確には

$$\mathrm{P}(Y = n) = \binom{2n}{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2\, 2^{2n}}.$$

である。n が大きければ正規近似が使え、$(*)$ より

$$\mathrm{P}(Y = n) \approx \frac{1}{\sqrt{n/2}\,\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

を得る。二つの式を等しいとおき、$2^{2n}(n!)^2$ を掛けると

$$(2n)! \approx \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n\pi}},$$

となり、これが求める結果である。(小問 (i) は $n = 8$ の場合にあたる：$\sqrt{8\pi} = 2\sqrt{2\pi}$。)

小問 (iii)

$Z \sim \mathrm{Po}(n)$ とすると、$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{Var}(Z) = n$ であり $\sigma = \sqrt{n}$ である。正確には

$$\mathrm{P}(Z = n) = \frac{\mathrm{e}^{-n}n^n}{n!}.$$

である。

> **考えてみよう** ここでポアソン分布（Poisson distribution）を正規分布で近似してよいのはなぜか。

$\mathrm{Po}(n)$ に従う確率変数は、互いに独立な n 個の $\mathrm{Po}(1)$ に従う確率変数の和と同じ分布をもつ。したがって中心極限定理（central limit theorem）により、n が大きいとき近似的に $\mathrm{N}(n,n)$ に従う。これは、λ が大きいとき $\mathrm{Po}(\lambda) \approx \mathrm{N}(\lambda,\lambda)$ という標準的な規則にほかならない。

よって $(*)$ により

$$\frac{\mathrm{e}^{-n}n^n}{n!} \approx \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}},$$

であり、変形すると

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\,\mathrm{e}^{-n}\,n^n,$$

となって、示すべき結果が得られた。

検算

- 小問 (i)：正確な値は $\mathrm{P}(X = 8) = \binom{16}{8}/2^{16} = 12870/65536 \approx 0.1964$ であり、一方 $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \approx 0.1995$ である。誤差はおよそ 1.6% 以内である。
- 小問 (ii) で $n = 10$ のとき：$\binom{20}{10}/2^{20} \approx 0.1762$ に対して $1/\sqrt{10\pi} \approx 0.1784$ である。階乗の近似式の両辺の比は n が大きくなるにつれて 1 に近づく（$n = 100$ ではおよそ 0.9988）。
- 小問 (iii) で $n = 10$ のとき：$10! = 3\,628\,800$ であり、$\sqrt{20\pi}\,\mathrm{e}^{-10}\,10^{10} \approx 3\,598\,696$ であるから、1% 未満だけ小さい。
- 整合性：(iii) の結果を (ii) の $(2n)!$ と $n!$ の両方に代入すると、両辺とも $\sqrt{4\pi n}\,\mathrm{e}^{-2n}(2n)^{2n}$ となり、二つの近似は一致する。

よくある間違い

- 標準正規分布の密度 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ を σ で割らずに使ってしまう。$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の平均における密度は $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ である。
- 小問 (ii) で標準偏差（standard deviation）として $\sqrt{n/2}$ ではなく $\frac{n}{2}$ を使ってしまう、あるいは $\mathrm{B}(2n, \frac{1}{2})$ の分散を誤る。
- 小問 (iii) で、ポアソン分布を正規分布で近似してよい理由を述べ忘れる。

STEP のその先へ

小問 (iii) の結果はスターリングの公式（Stirling's formula）であり、この議論は中心極限定理を一点に適用した発見的な形、すなわち「局所極限定理（local limit theorem）」である。これを厳密にするには注意が必要である。分布関数（distribution function）が正規分布のものに近いと分かっても、それだけでは個々の確率が密度に近いことは言えないからである。スターリングの公式は直接証明することもでき、たとえば $\ln n! = \sum \ln k$ を $\int \ln x \, \mathrm{d}x$ と比較する方法や、ガンマ関数（gamma function）からラプラスの方法（Laplace's method）を用いる方法がある。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）は中心極限定理とポアソン分布・正規分布の関係を扱っており、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）はよい副読本である。

解答例

STEP III 2016、第 1 問

純粋数学 ・ 漸化式による積分

STEP III 2016、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/16-s3-q1

鍵となる考え方

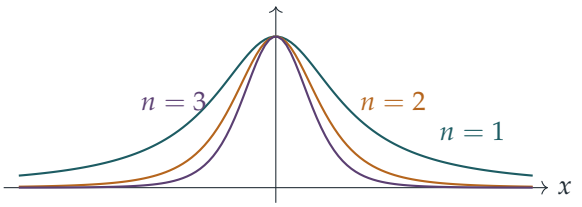
平方完成（completing the square）により、2 次式は $(x+a)^2+c^2$（ただし $c^2=b-a^2>0$）の形になる。そのうえで正接による置換（tangent substitution）を行えば、I_1 はただちに求まる。漸化式（reduction formula）については、1 を相手に部分積分（integration by parts）するのがこつである。$(x^2+2ax+b)^{-n}$ を微分すると指数が $n+1$ に上がり、これこそ I_n と I_{n+1} を結びつけるのに必要なものである。あとの数学的帰納法（induction）は、二項係数（binomial coefficient）を整理するだけの作業である。

解答

以下では一貫して

$$Q(x)=x^2+2ax+b=(x+a)^2+c^2, \qquad c=\sqrt{b-a^2}>0.$$

と書く。すべての x に対して $Q(x)\geq c^2>0$ であるから被積分関数（integrand）は連続であり、また $Q(x)^n$ は $2n\geq 2$ として x^{2n} のように増大するから、どの I_n も収束（converge）する。



$a=0$、$b=1$ のときの被積分関数 $1/Q^n$。n が大きくなるにつれて幅が狭くなるので、

$c = 1$ のとき I_n は小さくなっていくと予想される。

小問 (i)

$x + a = c\tan u$ とおくと、$\mathrm{d}x = c\sec^2 u\,\mathrm{d}u$ である。x が $-\infty$ から ∞ まで動くとき、u は $-\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}$ まで動き、

$$Q(x) = c^2\tan^2 u + c^2 = c^2\sec^2 u.$$

となる。したがって

$$I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{c\sec^2 u}{c^2\sec^2 u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{c}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{c} = \frac{\pi}{\sqrt{b-a^2}},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

$u = Q^{-n}$、$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$ として I_n を部分積分する。$Q'(x) = 2(x+a)$ であるから、$v = x$ ではなく $v = x + a$ を選ぶほうが賢い（原始関数（antiderivative）はどれを選んでもよい）。このとき

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,Q^{-n} = -2n(x+a)\,Q^{-n-1},$$

であるから、

$$I_n = \Big[\,\frac{x+a}{Q^n}\,\Big]_{-\infty}^{\infty} + 2n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+a)^2}{Q^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

となる。

? 考えてみよう なぜ境界項は消えるのか？

分子は $|x|$ のように増大し、分母は x^{2n} のように増大する。そして $n \geq 1$ であるから $2n \geq 2$ である。よって $x \to \pm\infty$ のとき $(x+a)/Q^n \to 0$ となり、括弧の項は 0 である。

次に $(x+a)^2 = Q - c^2$ を用いて、残った積分を分ける。

$$\begin{aligned} I_n &= 2n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q-c^2}{Q^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2n\,I_n - 2nc^2\,I_{n+1}. \end{aligned}$$

整理すると $2nc^2 I_{n+1} = (2n-1)I_n$、すなわち

$$2n(b-a^2)\,I_{n+1} = (2n-1)\,I_n,$$

となり、示すべき式が得られた。（I_n と I_{n+1} はともに収束するので、積分を分けることは正当である。）

小問 (iii)

$P(n)$ を次の命題とする。

$$I_n = \frac{\pi}{2^{2n-2}\,c^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1},$$

ここで $c^{2n-1} = (b-a^2)^{n-\frac{1}{2}}$ である。

初期段階。$n=1$ のとき、右辺は $\dfrac{\pi}{2^0 c^1}\binom{0}{0} = \dfrac{\pi}{c}$ であり、小問 (i) よりこれは I_1 に等しい。よって $P(1)$ は成り立つ。

帰納段階。ある $n \geq 1$ について $P(n)$ が成り立つと仮定する。小問 (ii) より

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2nc^2}\,I_n = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2^{2n-2}\,c^{2n+1}}\binom{2n-2}{n-1}.$$

である。これが $P(n+1)$ にあたる $\dfrac{\pi}{2^{2n}c^{2n+1}}\binom{2n}{n}$ に等しいことを示したい。二つの二項係数の間には次の関係がある。

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{(2n)(2n-1)}{n\cdot n}\cdot\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!} = \frac{2(2n-1)}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

考えてみよう 2 の累乗をどのように合わせればよいか？

$\dfrac{2n-1}{2n} = \dfrac{4}{2^2}\cdot\dfrac{2n-1}{2n} = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2(2n-1)}{n}$ と書く。すると

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{1}{4}\cdot\frac{2(2n-1)}{n}\cdot\frac{\pi}{2^{2n-2}\,c^{2n+1}}\binom{2n-2}{n-1} \\ &= \frac{\pi}{2^{2n}\,c^{2n+1}}\cdot\frac{2(2n-1)}{n}\binom{2n-2}{n-1} = \frac{\pi}{2^{2n}\,c^{2n+1}}\binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

となる。$2n = 2(n+1)-2$、$n = (n+1)-1$、$c^{2n+1} = (b-a^2)^{(n+1)-\frac{1}{2}}$ であるから、これはまさに $P(n+1)$ である。

数学的帰納法により、すべての正の整数 n について $P(n)$ が成り立つ。すなわち

$$I_n = \frac{\pi}{2^{2n-2}(b-a^2)^{n-\frac{1}{2}}}\binom{2n-2}{n-1}.$$

である。

検算

- $a=0$、$b=1$、$n=2$ のとき、公式は $I_2 = \frac{\pi}{4}\binom{2}{1} = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$ を与える。$\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-2}\,\mathrm{d}x$ の数値計算は、小数第 10 位まで一致する。

- 正接による置換からは $I_n = c^{1-2n}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2n-2}u\,\mathrm{d}u$ も得られる。これは標準的なウォリス（Wallis）積分（Wallis integral）であり、その既知の値は公式と一致する。
- $b > a^2$ を満たす無作為ないくつかの a、b について、$n = 1,\ldots,5$ で数値積分により公式を確認した。したがって小問 (ii) の漸化式も確認されたことになる。

よくある間違い

- 小問 (ii) の境界項（boundary term）が消えることの正当化を忘れる。これには $n \geq 1$ が必要である。
- 部分積分で $v = x + a$ ではなく $v = x$ を選んでしまう。それでも計算はできるが、余分な項 $a\int(x+a)Q^{-n-1}\,\mathrm{d}x$ を処理しなければならなくなる。
- 帰納段階で $b - a^2$ の指数を見失う。各段階で $1/c^2$ を掛けるので、c の指数はちょうど 2 ずつ、$2n-1$ から $2n+1$ へと増える。

STEP のその先へ

有理関数（rational function）の実数直線全体にわたる積分は、複素解析（complex analysis）の格好の見せ場である。留数定理（residue theorem）を使えば、上半平面（upper half-plane）にある $1/Q^n$ のただ一つの極（pole）$z = -a + ic$ に着目することで、I_n を数行で計算できる。ここに現れた中心二項係数（central binomial coefficient）は、π に関するウォリス積（Wallis product）やランダムウォーク（random walk）にも登場する。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ビジュアル複素解析』）は、留数について美しく幾何学的な解説を与えている。

解答例

STEP III 2016、第2問

純粋数学 • 放物線の法線

> **STEP III 2016、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q2

鍵となる考え方

一般の点 $(at^2, 2at)$ における法線（normal）の方程式を書き、どの t の値に対して法線が P を通るかを考える。その条件は t についての3次方程式（cubic）となり、根の一つ $t = p$ は常に存在する（P における法線は P を通る）。この根を取り除くと2次方程式が残り、その2つの根がちょうど q と r である。以降の議論はすべて、根の和と積 $q + r$ と qr によって進む。

解答

小問 (i)

$x = at^2, y = 2at$ とおくと、$y^2 = 4ax$ 上で $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2a}{2at} = \dfrac{1}{t}$ となるので、パラメータ（parameter）t の点における法線の傾き（gradient）は $-t$ である。

$$y - 2at = -t\,(x - at^2), \qquad \text{すなわち} \qquad y + tx = 2at + at^3.$$

（この形は頂点 $t = 0$ の場合も含んでおり、そのとき法線は x 軸である。）

t における法線が $P(ap^2, 2ap)$ を通るための必要十分条件は

$$2ap + tap^2 = 2at + at^3.$$

である。$a > 0$ で割って整理すると、

$$\begin{aligned} 0 &= 2(p - t) + t(p^2 - t^2) \\ &= (p - t)\big(2 + t(p + t)\big) \\ &= (p - t)\,(t^2 + pt + 2). \end{aligned}$$

考えてみよう なぜ因数 $p-t$ を捨ててよいのか？

根 $t=p$ は自明なものである。P 自身における法線は P を通るからである。$Q\neq P$ と与えられているので $q\neq p$ であり、因数 $p-q$ は零ではない。よって

$$q^2+qp+2=0,$$

が成り立ち、これが示すべき式である。同じ議論により $r^2+rp+2=0$ も成り立つ。

小問 (ii)

したがって q と r はともに $t^2+pt+2=0$ の根である。$Q\neq R$ より $q\neq r$ なので、これらはこの方程式の **2つの**根であり、

$$q+r=-p,\qquad qr=2.$$

（特に判別式（discriminant）は正であり、$p^2>8$ である。また、$q=p$ となるには $2p^2+2=0$ が必要だがこれは不可能なので、Q と R は自動的に P とは異なる。）

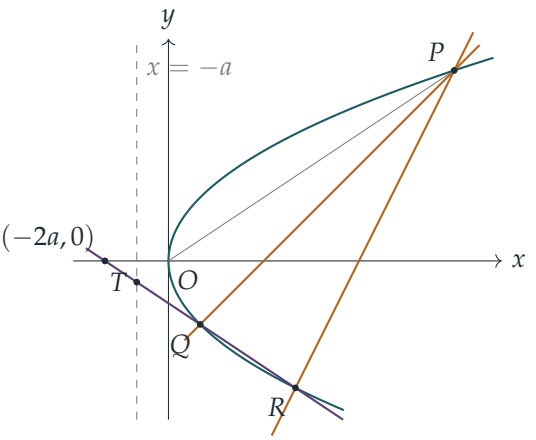
$(aq^2,2aq)$ と $(ar^2,2ar)$ を通る弦（chord）の傾きは $\dfrac{2a(q-r)}{a(q^2-r^2)}=\dfrac{2}{q+r}$ であり、その方程式は

$$(q+r)\,y=2x+2aqr.$$

である。（確認：Q において左辺は $2aq^2+2aqr$ となり、右辺に等しい。R においても同様である。）$q+r=-p$ と $qr=2$ を代入すると、

$$-p\,y=2x+4a.$$

p の値によらず、点 $(-2a,0)$ はこの方程式を満たす。よって QR は常に $(-2a,0)$ を通り、この点は P の選び方によらない。



図は $a=1, p=3$ の場合を示しており、このとき $q=-1, r=-2$ である。2 本の法線（琥珀色）は P で交わり、弦 QR（紫色）は $(-2,0)$ を通り、T は破線 $x=-1$ 上にある。

小問 (iii)

$p^2>8$ より $p\neq 0$ なので $P\neq O$ であり、直線 OP は $y=\dfrac{2ap}{ap^2}x=\dfrac{2}{p}x$、すなわち $x=\frac{1}{2}py$ である。（これは QR と平行ではない。QR の傾きは $-2/p$ だからである。）

$x=\frac{1}{2}py$ を QR の方程式に代入すると、

$$-py=py+4a \quad\Longrightarrow\quad y=-\frac{2a}{p}, \qquad x=\tfrac{1}{2}p\Big(-\frac{2a}{p}\Big)=-a.$$

よって $T=\left(-a,-\frac{2a}{p}\right)$ であり、これは P の選び方によらず常に直線 $x=-a$（放物線の準線（directrix））上にある。

x 軸から T までの距離は $\dfrac{2a}{|p|}$ である。小問 (ii) より、P を通る相異なる 2 本の法線が存在することから $p^2>8$、すなわち $|p|>2\sqrt{2}$ が従う。$a>0$ なので

$$\frac{2a}{|p|}<\frac{2a}{2\sqrt{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}},$$

となり、証明が完了する。$p^2=8$ ならば $q=r$ となってしまうので、この不等式は狭義（strict）である。

検算

- 図の場合 $a=1, p=3$ では、t^2+3t+2 の根は -1 と -2 である。法線 $y=x-3$ と $y=2x-12$ はともに $P(9,6)$ を通る。$(1,-2)$ と $(4,-4)$ を通る弦は $-3y=2x+4$ であり、これは $(-2,0)$ を通る。そして $T=(-1,-\frac{2}{3})$ であり、$\frac{2}{3}<\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.707$ である。
- $|p|\to 2\sqrt{2}$ と上から近づけると、Q と R は一致し、T の高さは $a/\sqrt{2}$ に近づくので、この評価は最良（sharp）である。a と p を無作為に 20,000 通り選んでコンピュータで確認したところ、すべての結果が確かめられ、T の高さは $a/\sqrt{2}$ の 0.9996 倍に達したが、それを超えることはなかった。

よくある間違い

- $p-q$ で割ることの正当化を忘れる。それを可能にしているのは条件 $Q\neq P$ である。
- $q\neq r$ を用いて、q と r が同じ 2 次方程式の**両方の**根であると述べない。これこそが $q+r=-p$ と $qr=2$ を与えるのである。

- $p^2 > 8$ がどこから来るのかを述べずに最後の評価を証明する。それは2次方程式が相異なる2つの実数解をもつという条件から来ている。

STEP のその先へ

小問 (i) の背後にある t の3次方程式は、古典的な事実の特別な場合である。一般の点 (h,k) に対しては条件は $at^3 + (2a - h)\,t - k = 0$ となり、したがって平面上の1点からは放物線へ最大3本の法線が引ける。そして「法線が1本」と「法線が3本」の境界は**縮閉線**（evolute）と呼ばれる曲線である（ここでは半3次放物線（semicubical parabola））。縮閉線、包絡線、曲率は、曲線の微分幾何学の最初の講義で扱われる標準的な話題である。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この座標幾何の流儀による STEP の問題がさらに収められている。

解答例

STEP III 2016、第 3 問

純粋数学 ・ 積分と多項式

STEP III 2016、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/16-s3-q3

この問題は、*Beyond STEP* の第 4.6 節「**公式で表せない積分**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch04/no-formula.html

鍵となる考え方

$\int g(x)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{P}{Q}\,\mathrm{e}^x + \text{定数}$ という形の等式は、導関数（derivative）についての主張にすぎない。したがって右辺を微分し、分母を払えばよい。こうすると問題は多項式（polynomial）の恒等式（identity）に帰着する。多項式の恒等式には二通りの攻め方がある。うまく選んだ値（ここでは $x=-1$）を代入する方法と、次数（degree）を比較する方法である。

解答

以下、$P(x), Q(x)$ を P, Q と書く。商の微分法（quotient rule）と積の微分法（product rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{P}{Q}\,\mathrm{e}^x\right) = \frac{PQ + P'Q - PQ'}{Q^2}\,\mathrm{e}^x.$$

よって積分の等式が成り立つのは、これが被積分関数に等しいとき（ただし Q は零多項式でない）であり、またそのときに限る。

小問 (i)

導関数を $\frac{x^3-2}{(x+1)^2}\,\mathrm{e}^x$ と等置し、$\mathrm{e}^x \neq 0$ で割って分母を払うと、多項式の恒等式

$$(x+1)^2\left(PQ + P'Q - PQ'\right) = (x^3-2)\,Q^2. \qquad (*)$$

を得る。

Q は因数 $x+1$ をもつ。 $(*)$ に $x=-1$ を代入する。左辺は 0 であり、右辺は $-3\,Q(-1)^2$ である。ゆえに $Q(-1)=0$ であり、因数定理（factor theorem）により $x+1$ は Q を割り切る。

次数。 P は零多項式ではない。そうでなければ導関数は 0 となり、被積分関数にならないからである。$\deg P = p$, $\deg Q = q$ とし、最高次の係数（leading coefficient）をそれぞれ $a \neq 0, b \neq 0$ とする。$PQ + P'Q - PQ'$ において、項 PQ は次数 $p+q$ で最高次の係数は ab である。一方、$P'Q$ と PQ' の次数はいずれも高々 $p+q-1$ である。よって $PQ + P'Q - PQ'$ の次数はちょうど $p+q$ であり、$(*)$ の左辺の次数は $p+q+2$ である。右辺の次数は $3+2q$ である。したがって

$$p+q+2 = 2q+3 \quad \Longrightarrow \quad p = q+1,$$

となり、P の次数は Q の次数よりちょうど一つ大きい。

$Q = x+1$ の場合。 このとき P の次数は 2 であり、$P = ax^2+bx+c$ とおく。$Q = x+1$, $Q' = 1$ より、$(*)$ は

$$(x+1)^2\big((x+1)P + (x+1)P' - P\big) = (x^3-2)(x+1)^2,$$

となり、$(x+1)^2$ で割ると

$$xP + (x+1)P' = x^3 - 2.$$

を得る。$xP = ax^3+bx^2+cx$ かつ $(x+1)P' = (x+1)(2ax+b) = 2ax^2 + (2a+b)x + b$ であるから、

$$ax^3 + (2a+b)x^2 + (2a+b+c)x + b = x^3 - 2.$$

係数を比較する。$a=1$ である。定数項から $b=-2$ を得る。このとき x^2 の項の条件 $2a+b=0$ は矛盾なく成り立つ。さらに x の項から $c = -(2a+b) = 0$ を得る。ゆえに

$$P(x) = x^2 - 2x, \qquad \int \frac{x^3-2}{(x+1)^2}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2-2x}{x+1}\,\mathrm{e}^x + \text{定数}.$$

小問 (ii)

背理法（proof by contradiction）で示す。共通因数をもたないそのような P と Q が存在すると仮定する。先と同様に、微分して分母を払うと

$$(x+1)\big(PQ + P'Q - PQ'\big) = Q^2. \qquad (**)$$

を得る。$x=-1$ を代入すると $Q(-1)^2 = 0$ となるので、$x+1$ は Q を割り切る。そこで

$$Q = (x+1)^n R, \qquad n \geq 1, \quad R(-1) \neq 0,$$

と書く。つまり n は Q に含まれる $x+1$ のちょうどの冪である。すると $Q' = n(x+1)^{n-1}R + (x+1)^n R'$ であり、

$$\begin{aligned} PQ + P'Q - PQ' &= (x+1)^n\big(PR + P'R - PR'\big) - n(x+1)^{n-1}PR \\ &= (x+1)^{n-1}\Big[(x+1)\big(PR + P'R - PR'\big) - nPR\Big]. \end{aligned}$$

これを $(**)$ に代入し、両辺から共通因数 $(x+1)^n$ を約す（右辺は $(x+1)^{2n}R^2$ である）と、

$$(x+1)\big(PR + P'R - PR'\big) - nPR = (x+1)^n R^2.$$

考えてみよう $(**)$ にもう一度 $x=-1$ を代入するだけで済ませず、わざわざ $x+1$ のちょうどの冪をくくり出すのはなぜだろうか。

$(**)$ に直接 $x=-1$ を代入しても、わかるのは $Q(-1)=0$ だけである。そうなるとすべての項が消えてしまい、P については何もわからない。Q から $x+1$ の因数をすべて取り除くと、$x=-1$ で自動的には消えない項 $-nPR$ が残るのである。

ここで $x=-1$ を代入する。$n \geq 1$ であるから右辺は 0 であり、左辺の第一項も同様に消える。ゆえに

$$-n\,P(-1)\,R(-1) = 0.$$

しかし $n \neq 0$ かつ $R(-1) \neq 0$ であるから、$P(-1)=0$ である。すると $x+1$ は Q だけでなく P の因数でもあり、両者が共通因数をもたないという仮定に矛盾する。よってそのような多項式は存在しない。 ■

（P, Q を互いに素（coprime）なものに限っても一般性は失われない。共通因数があれば、関数を変えることなく P/Q から約分できるからである。）

検算

- (i) の答えを直接微分する。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2-2x}{x+1}\right) = \frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$ であり、これに $\frac{x^2-2x}{x+1} = \frac{x^3-x^2-2x}{(x+1)^2}$ を加えると $\frac{x^3-2}{(x+1)^2}$ となり、求める形になる。
- 数値的には $\int_0^1 \frac{x^3-2}{(x+1)^2}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \approx -1.359141$ であり、これは $\left[\frac{x^2-2x}{x+1}\mathrm{e}^x\right]_0^1 = -\frac{\mathrm{e}}{2}$ と一致する。
- (i) では次数の関係も合っている。P の次数は 2 であり、$Q = x+1$ の次数より一つ大きい。

よくある間違い

- $P'Q - PQ'$ は最高次の項が打ち消し合うため、次数が $p+q$ より小さいことを忘れる。次数を決めるのは PQ だけである。
- (ii) で $(**)$ に $x=-1$ を代入しただけで、$Q(-1)=0$ が得られたところで止まってしまう。矛盾を導くには、Q に含まれる $x+1$ のちょうどの冪が必要である。

STEP のその先へ

小問 (ii) は、$\int \frac{e^x}{x+1}\,dx$（本質的には指数積分（exponential integral）Ei）が、この制限された意味で「初等的（elementary）」でないことを述べている。そもそも積分が初等関数で表せるのはいつかを判定する完全な理論は、微分代数（differential algebra）におけるリウヴィル（Liouville）の定理とリッシュのアルゴリズム（Risch algorithm）である。ここでの議論はその小さな一例である。上で用いた多項式の代数（因数定理、整除性、互いに素であること）を丁寧に扱ったものとしては、Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を参照されたい。

解答例

STEP III 2016、第 4 問

純粋数学 • 望遠鏡型級数

STEP III 2016、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/16-s3-q4

鍵となる考え方

問題で示唆されている二つの分数の差は一般項の定数倍になっていることがわかるので、和は望遠鏡和（telescoping sum）となる。すなわち、ほとんどすべての項が打ち消し合い、最初と最後の部分だけが残る。小問 (ii) では、sech を指数関数（exponential）で表して因数をくくり出すと、各項は $x = \mathrm{e}^{-2y}$ とした小問 (i) の項とまったく同じ形になる。さらに、sech は偶関数（even function）であるから、両側無限和（doubly infinite sum）は片側の和に帰着される。

解答

小問 (i)

示唆された差を通分（common denominator）すると、

$$\frac{1}{1+x^r} - \frac{1}{1+x^{r+1}} = \frac{x^{r+1}-x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})} = (x-1)\,\frac{x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})}.$$

$|x| \neq 1$ より $x \neq 1$ であるから、$x-1$ で割ってよい。（この条件から $x \neq -1$ も保証されるので、分母 $1+x^r$ が 0 になることはない。$x^r = -1$ ならば $|x| = 1$ となってしまうからである。）したがって

$$\frac{x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})} = \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{1+x^r} - \frac{1}{1+x^{r+1}}\right).$$

$r = 1$ から N まで和をとると、各括弧の第 2 の分数が次の括弧の第 1 の分数と打ち消し合い、

$$\sum_{r=1}^{N} \frac{x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})} = \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x^{N+1}}\right)$$
$$= \frac{x\,(x^N-1)}{(x-1)(1+x)(1+x^{N+1})},$$

が残る。ここで 2 番目の形は二つの分数をまとめることで得られる。分子は $x^{N+1} - x = x(x^N - 1)$ である。

次に $|x| < 1$ と仮定する。すると $N \to \infty$ のとき $x^{N+1} \to 0$ であるから、部分和（partial sum）は

$$\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{1+x} - 1\right) = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{-x}{1+x} = \frac{x}{1-x^2},$$

に収束（converge）する。これが求める無限和の値である。

小問 (ii)

任意の実数 t に対して

$$\operatorname{sech} t = \frac{2}{e^t + e^{-t}} = \frac{2e^{-t}}{1+e^{-2t}}.$$

$x = e^{-2y}$ とおく。$y > 0$ より $0 < x < 1$ である。このとき $\operatorname{sech}(ry) = 2e^{-ry}/(1+x^r)$ であり、

$$\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}\big((r+1)y\big) = \frac{4\,e^{-(2r+1)y}}{(1+x^r)(1+x^{r+1})} = 4e^{-y}\,\frac{x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})},$$

となる。$e^{-2ry} = x^r$ だからである。

考えてみよう なぜ $e^{-(2r+1)y}$ を $e^{-y} \cdot e^{-2ry}$ と分けるのか？

分子を、分母に現れるのと同じ x のべき x^r にしたいからである。そうすれば小問 (i) を項ごとに適用できる。残りの因数 e^{-y} は r によらないので、和の外に出せる。

$|x| < 1$ であるから、小問 (i) より

$$\sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}\big((r+1)y\big) = 4e^{-y}\,\frac{x}{1-x^2} = \frac{4e^{-y}}{x^{-1}-x} = \frac{4e^{-y}}{e^{2y}-e^{-2y}} = \frac{4e^{-y}}{2\sinh 2y},$$

となり、これは $2e^{-y}\operatorname{cosech}(2y)$ に等しい。以上で示された。この和を S とおく。

両側無限和

すべての整数 r にわたる和を、$r \geq 1$、$r \in \{-1, 0\}$、$r \leq -2$ の三つの部分に分ける。

考えてみよう r が負の項はどのような形をしているか？

$r \le -2$ に対して $s = -r-1$ とおくと、$s \ge 1$ であり、$r+1 = -s$、$r = -(s+1)$ となる。sech は偶関数であるから

$$\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}\big((r+1)y\big) = \operatorname{sech}\big((s+1)y\big)\operatorname{sech}(sy),$$

であり、r が $-2,-3,\ldots$ を動くとき、s は $1,2,\ldots$ を動く。よって $r \le -2$ の項の和も S である。（片側の和はどちらも収束するので、両側無限和をこのように分けることは正当である。）

中央の二つの項は

$$r=-1:\ \operatorname{sech}(-y)\operatorname{sech}0 = \operatorname{sech}y, \qquad r=0:\ \operatorname{sech}0\operatorname{sech}y = \operatorname{sech}y.$$

である。したがって、$\sinh 2y = 2\sinh y\cosh y$ を用いると

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty}\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}\big((r+1)y\big) = 2S + 2\operatorname{sech}y = \frac{2\mathrm{e}^{-y}}{\sinh y\cosh y} + \frac{2\sinh y}{\sinh y\cosh y}$$
$$= \frac{2(\mathrm{e}^{-y}+\sinh y)}{\sinh y\cosh y}.$$

ところが $\mathrm{e}^{-y}+\sinh y = \mathrm{e}^{-y}+\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y}) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y}) = \cosh y$ であるから、$\cosh y$ が約分されて

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty}\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}\big((r+1)y\big) = \frac{2}{\sinh y} = 2\operatorname{cosech}y.$$

検算

- $N=1$ のとき、有限和の公式は $\dfrac{x(x-1)}{(x-1)(1+x)(1+x^2)} = \dfrac{x}{(1+x)(1+x^2)}$ を与え、これは $r=1$ の項そのものである。
- $x=\frac{1}{2}$ のとき：無限和は $\frac{1/2}{3/4}=\frac{2}{3}$ となるはずであり、実際に部分和は 0.6667 に近づく。
- $y=1$ のとき：$2\mathrm{e}^{-1}\operatorname{cosech}2 \approx 0.202864$、$2\operatorname{cosech}1 \approx 1.701836$ であり、どちらも級数を直接足し合わせた値と小数点以下多くの桁まで一致する（多くの y の値についてコンピュータで確認済み）。
- $y \to \infty$ のとき、残るのは $r=-1,0$ の項だけで、それぞれ約 $2\mathrm{e}^{-y}$ であるから、合計は約 $4\mathrm{e}^{-y}$ となる。一方 $2\operatorname{cosech}y \approx 4\mathrm{e}^{-y}$ でもある。

よくある間違い

- 因数 $\frac{1}{x-1}$ を忘れる、あるいはその符号を誤る。差は項の $(x-1)$ 倍であり、$(1-x)$ 倍ではない。
- 両側無限和で S を 2 倍しただけで、$r=-1$ と $r=0$ の二つの項を忘れる。これらは $\operatorname{sech} 0 = 1$ を含み、どちらの片側の和にも含まれない。

STEP のその先へ

ここで無限和の項を並べ替えたり分割したりしてよいのは、すべての項が正である（級数が絶対収束（absolutely convergent）する）からである。条件収束（conditionally convergent）する級数については、リーマン（Riemann）の再配列定理（rearrangement theorem）により、項の順序を入れ替えると和を好きな値に変えられることが知られている。これは解析学（analysis）の最初の講義で出会う印象的な結果である。また、$\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}((r+1)y)$ のような積をすべての整数にわたって足し合わせた和は、楕円関数（elliptic function）の理論にも現れ、そこではこのような両側級数（bilateral series）が美しい閉じた形で表される。級数の解析については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照のこと。

解答例

STEP III 2016、第 5 問

純粋数学 ・ 素数の積

> **STEP III 2016、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q5

この問題は、*Beyond STEP* の第 1.2 節「素数はどれほどまばらか？」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch01/prime-distribution.html

鍵となる考え方

中央の二項係数（binomial coefficient）$\binom{2m+1}{m}$ は小さい（これとその双子である $\binom{2m+1}{m+1}$ は、ほかの項とともに合計 2^{2m+1} を分け合っている）が、$m+1$ と $2m+1$ の間にあるすべての素数で割り切れる。したがって、それらの素数の積も小さい。$2m+1$ 以下の素数を「$m+1$ 以下」と「$m+1$ より大きい」に分けると、強い数学的帰納法（strong induction）の準備が整う。偶数は（2 を除いて）決して素数にならないので、偶数の場合は何の手間もかからない。

解答

小問 (i)

$(1+x)^{2m+1}$ の二項展開（binomial expansion）に $x=1$ を代入すると

$$\sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k}=2^{2m+1}.$$

左辺の各項はすべて正である。対称性より $\binom{2m+1}{m}=\binom{2m+1}{m+1}$ であり、これらは和の中の異なる二つの項である。$m\geq 1$ であるから、項 $\binom{2m+1}{0}=1$ はこれらとは異なる第三の項である。よって

$$2\binom{2m+1}{m}=\binom{2m+1}{m}+\binom{2m+1}{m+1}<2^{2m+1},$$

したがって $\binom{2m+1}{m} < 2^{2m}$ となり、示すべきことが得られた。

小問 (ii)

次のように書く。

$$\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{m!\,(m+1)!}, \qquad \text{よって} \qquad m!\,(m+1)!\binom{2m+1}{m} = (2m+1)!.$$

p を $m+1 < p \leq 2m+1$ を満たす素数とする。このとき p は $(2m+1)!$ の因数の一つであるから、p は右辺を割り切る。一方、$m!\,(m+1)!$ の因数はどれも $m+1 < p$ 以下であるから、素数 p はそのどれも割り切らず、したがって $p \nmid m!\,(m+1)!$ である。積 ab を割り切る素数は a または b を割り切らなければならないので、$p \mid \binom{2m+1}{m}$ である。

> **考えてみよう** このような素数はそれぞれこの係数を割り切る。では、なぜそれらの積も割り切るのだろうか。

これらの素数は相異なるので、どの二つも互いに素（coprime）であり、どの二つも互いに素な数たちで割り切れる数は、それらの積で割り切れる。（同じことであるが、素因数分解の一意性（unique factorisation）により、これらの素数はそれぞれ $\binom{2m+1}{m}$ の素因数分解に現れる。）よって $P_{m+1,2m+1}$ は $\binom{2m+1}{m}$ を割り切る。そのような素数が存在しない場合は $P_{m+1,2m+1} = 1$ であり、これはあらゆる数を割り切る。

正の整数の正の約数はその数以下であるから、小問 (i) より

$$P_{m+1,2m+1} \leq \binom{2m+1}{m} < 2^{2m}.$$

小問 (iii)

$m \geq 1$ であるから $1 < m+1 < 2m+1$ が成り立つ。$p \leq 2m+1$ を満たす素数はすべて、$p \leq m+1$ または $m+1 < p \leq 2m+1$ のいずれか一方のみを満たすので

$$P_{1,2m+1} = P_{1,m+1}\,P_{m+1,2m+1}.$$

また（$m \geq 1$ より）$2 \leq m+1 \leq 2m$ であるから、$k = m+1$ は仮定が適用される値の一つであり、$P_{1,m+1} < 4^{m+1}$ が得られる。小問 (ii) と合わせて

$$P_{1,2m+1} < 4^{m+1} \cdot 2^{2m} = 4^{m+1} \cdot 4^m = 4^{2m+1}.$$

小問 (iv)

n に関する強い数学的帰納法を用いる。$S(n)$ を命題 $P_{1,n} < 4^n$ とする。

基本の場合。 $P_{1,2} = 2 < 16 = 4^2$ である。

帰納段階。 $n \geq 3$ とし、$k = 2, 3, \ldots, n-1$ に対して $S(k)$ が成り立つと仮定する。

- n が奇数のとき、$m \geq 1$ として $n = 2m+1$ と書く。このとき $n-1 = 2m$ であるから、$k = 2, \ldots, 2m$ に対して $S(k)$ が成り立つ。小問 (iii) より $P_{1,2m+1} < 4^{2m+1}$ が得られ、これは $S(n)$ そのものである。
- n が偶数のとき、$n \geq 4$ は 2 より大きい偶数であるから素数ではない。よって n 以下の素数はちょうど $n-1$ 以下の素数と一致し

$$P_{1,n} = P_{1,n-1} < 4^{n-1} < 4^n.$$

> **考えてみよう** なぜすべての n に対して小問 (iii) をそのまま使うことができないのだろうか。

小問 (iii) が扱えるのは奇数 $2m+1$ だけである。偶数 n に対しては別の議論が必要であり、2 より大きい偶数は積に新しい素数を加えないので、上の議論は簡単に済む。

よってどちらの場合も $S(n)$ が成り立ち、強い数学的帰納法により、すべての $n \geq 2$ に対して $P_{1,n} < 4^n$ である。

検算

- $m = 3$：$\binom{7}{3} = 35 < 64 = 2^6$ である。$(4, 7]$ に含まれる素数は 5 と 7 であり、$P_{4,7} = 35$ は 35 をちょうど割り切る。
- $m = 5$：$\binom{11}{5} = 462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$ であり、これは $P_{6,11} = 77$ で割り切れる。また $462 < 1024$ である。
- $P_{1,10} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ であり、$4^{10} = 1\,048\,576$ をはるかに下回る。コンピュータによる確認でも、2 から 1500 までのすべての n に対して $P_{1,n} < 4^n$ が成り立つ。

よくある間違い

- 小問 (i) で $<$ ではなく $\leq$ と書いてしまう。狭義の不等号にするには、中央の二つの項のほかに、$\binom{2m+1}{0}$ のような第三の正の項が必要である。
- 小問 (iii) で、$m+1$ が仮定の適用される範囲 $2, \ldots, 2m$ に入っていることの確認を忘れる。
- 小問 (iv) で、奇数の n しか扱わない、あるいは基本の場合 $n = 2$ を忘れる。

STEP のその先へ

これは、評価 $\prod_{p\leq n} p < 4^n$ に対するエルデシュ（Erdős）の初等的な証明である。対数をとると、これはチェビシェフ（Chebyshev）の関数 $\theta(n) = \sum_{p\leq n} \ln p$ が $n \ln 4$ より小さいことを意味する。これは、n 以下の素数の個数が $n/\ln n$ のオーダーであるというチェビシェフの定理の半分にあたる。エルデシュは同種の二項係数の議論を用いて、ベルトランの仮説（Bertrand's postulate）、すなわち n と $2n$ の間には常に素数が存在することを証明した。初等整数論を次に学ぶには、ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）がよい。

解答例

STEP III 2016、第 6 問

純粋数学 ・ 双曲線関数

STEP III 2016、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/16-s3-q6

鍵となる考え方

$\operatorname{sech} x = a\tanh x + b$ の両辺に $\cosh x$ を掛けると $a\sinh x + b\cosh x = 1$ となり、これはまさに最初の小問で扱う組合せである。したがって最初の仕事は、おなじみの「$R\cos(x+\alpha)$」の技法の双曲線関数（hyperbolic function）版である。三角関数の場合とは異なり、得られる形は B と $\pm A$ の大小関係によって変わり、それぞれの形から解の個数がただちにわかる。

解答

$A\sinh x + B\cosh x$ の形

展開すると

$$R\cosh(x+\gamma) = R\sinh\gamma\,\sinh x + R\cosh\gamma\,\cosh x,$$

であるから、$R\sinh\gamma = A$ かつ $R\cosh\gamma = B$ となればよい。$\cosh^2\gamma - \sinh^2\gamma = 1$ であるから、このとき必ず $R^2 = B^2 - A^2$ かつ $\tanh\gamma = A/B$ となる。$B > A > 0$ のときはこの両方を満たすことができる。すなわち

$$R = \sqrt{B^2 - A^2} > 0, \qquad \gamma = \operatorname{artanh}\frac{A}{B},$$

とおけばよく、$0 < A/B < 1$ であるからこれは存在する。このとき $\cosh\gamma = 1/\sqrt{1 - A^2/B^2} = B/R$ かつ $\sinh\gamma = \tanh\gamma\cosh\gamma = A/R$ であるから、求めるとおり $R\cosh\gamma = B$ かつ $R\sinh\gamma = A$ となる。よって $A\sinh x + B\cosh x = R\cosh(x+\gamma)$ である。

$A > 0$ のもとでの残りの場合は次のとおりである。

- $-A < B < A$：代わりに $R\sinh(x+\gamma) = R\cosh\gamma\sinh x + R\sinh\gamma\cosh x$ と係数を比較すると

$$A\sinh x + B\cosh x = \sqrt{A^2 - B^2}\,\sinh(x+\gamma), \qquad \gamma = \operatorname{artanh}\frac{B}{A}.$$

- $B = A$：$A(\sinh x + \cosh x) = Ae^x$。
- $B = -A$：$A(\sinh x - \cosh x) = -Ae^{-x}$。
- $B < -A$：最初の結果を $-A\sinh x - B\cosh x$ に適用すると（$-B > A$ かつ $-A < 0$ である。上の計算で必要だったのは $|A| < B$ だけである）

$$A\sinh x + B\cosh x = -\sqrt{B^2 - A^2}\,\cosh(x+\gamma), \qquad \gamma = \operatorname{artanh}\frac{A}{B}.$$

交点の方程式

$\cosh x > 0$ であるから、2曲線が交わるのは

$$\operatorname{sech} x = a\tanh x + b \iff 1 = a\sinh x + b\cosh x. \qquad (*)$$

となる点である。

小問 (i)

$b > a > 0$ のとき $R = \sqrt{b^2 - a^2}$ とおくと、$(*)$ は

$$\cosh\left(x + \operatorname{artanh}\tfrac{a}{b}\right) = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

となる。2曲線が交わるならこの方程式は解をもつので、右辺は1以上である。$c \geq 1$ のとき $\cosh u = c$ の解は $u = \pm\operatorname{arcosh} c$ であるから

$$x = \pm\operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}\right) - \operatorname{artanh}\frac{a}{b},$$

となり、これが求める形である。

小問 (ii)

$a > b > 0$ のときは sinh の場合にあたり、$(*)$ は $\sqrt{a^2 - b^2}\,\sinh\left(x + \operatorname{artanh}\frac{b}{a}\right) = 1$ となる。sinh は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への全単射（bijection）であるから、交点はつねにちょうど1個あり、それは

$$x = \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right) - \operatorname{artanh}\frac{b}{a}.$$

である。

小問 (iii)

最初の小問の各場合について（$A = a > 0$、$B = b$ として）$(*)$ の解の個数を数える。

- $b < -a$：左辺 $-\sqrt{b^2 - a^2}\cosh(x + \gamma)$ は負であるから、解はない。
- $b = -a$：$-ae^{-x} = 1$ は解をもたない。
- $-a < b < a$：(ii) と同様にちょうど 1 個の解をもつ。(ii) の議論はこの範囲のどの b に対しても成り立つ。
- $b = a$：$ae^{x} = 1$ はただ 1 つの解 $x = -\ln a$ をもつ。
- $b > a$：$\cosh(x + \gamma) = 1/\sqrt{b^2 - a^2}$ は、$1/\sqrt{b^2 - a^2} > 1$ ならば 2 個、1 に等しければ 1 個、1 より小さければ 0 個の解をもつ。

> **考えてみよう** $b \leq a$ の場合に交点が 2 個になることが決してないのはなぜか？

これらの場合、$(*)$ の左辺は x の狭義単調（strictly monotonic）な関数（$\sinh(x + \gamma)$ または $e^{\pm x}$ の定数倍）であるか、つねに負であるかのいずれかなので、値 1 をとるのは高々 1 回である。いったん減少してから再び増加する cosh の形だけが、1 に 2 回到達できる。

したがって、2 曲線が相異なる 2 点で交わるための必要十分条件は $b > a$ かつ $b^2 - a^2 < 1$、すなわち

$$a < b < \sqrt{a^2 + 1}.$$

である。

小問 (iv)

$\operatorname{sech} x - (a\tanh x + b) = \operatorname{sech} x\left(1 - a\sinh x - b\cosh x\right)$ かつ $\operatorname{sech} x \neq 0$ であるから、2 曲線が接する（touch）のは、$g(x) = a\sinh x + b\cosh x - 1$ が重複した零点（repeated zero）をもつ点、すなわち $g(x) = g'(x) = 0$ となる点にほかならない。sinh の場合と指数関数の場合には、$g'(x)$ は $\cosh(x + \gamma)$ または e^{x} の定数倍であって決して 0 にならないので、重複した零点はない。$b > a$ の場合は $g(x) = R\cosh(x + \gamma) - 1$、$g'(x) = R\sinh(x + \gamma)$ であり、これらが同時に 0 になるのは $x + \gamma = 0$ かつ $R = 1$ のときに限る。よって 2 曲線が接するための必要十分条件は

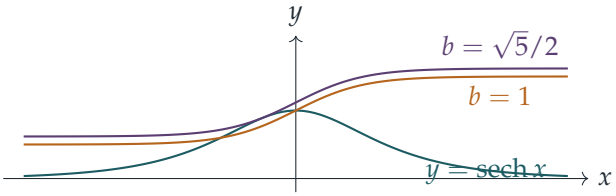
$$b > a \quad \text{かつ} \quad b^2 - a^2 = 1, \qquad \text{すなわち} \quad b = \sqrt{1 + a^2}.$$

である。接点は $x = -\gamma = -\operatorname{artanh}(a/b)$ であるから、$\operatorname{sech}^2 u = 1 - \tanh^2 u$ と $\operatorname{sech} u > 0$ を用いて

$$y = \operatorname{sech}\left(\operatorname{artanh}\tfrac{a}{b}\right) = \sqrt{1 - \tfrac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = \frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}},$$

となる。検算として、もう一方の曲線からも $y = -a \cdot \frac{a}{b} + b = \frac{b^2 - a^2}{b} = \frac{1}{b}$ が得られる。

下の図は $a = \frac{1}{2}$ の場合を示している。$b = 1$（琥珀色）では交点が 2 個あり、$b = \sqrt{5}/2$（紫）では 2 曲線が高さ $2/\sqrt{5}$ で接する。



検算

$a = \frac{3}{4}$、$b = 1$ とすると $b^2 - a^2 = \frac{7}{16} < 1$ であり、(iii) によれば交点は 2 個である。このとき $\operatorname{arcosh}(4/\sqrt{7}) = \ln\left((4+3)/\sqrt{7}\right) = \ln\sqrt{7}$ かつ $\operatorname{artanh}\frac{3}{4} = \frac{1}{2}\ln 7 = \ln\sqrt{7}$ であるから、(i) の公式から $x = 0$ と $x = -\ln 7 \approx -1.946$ が得られる。$x = 0$ では、当然そうなるべきとおり、両曲線とも $(0, 1)$ を通る。また、多数の無作為な a、b について $(*)$ をコンピュータで調べたところ、すべての場合で解の個数が確認され、接する条件のもとで重解（double root）が得られることも確かめられた。

よくある間違い

- 境界の場合 $b = \pm a$ を忘れること。この場合は cosh の形も sinh の形も存在せず、式は単一の指数関数になる。
- (iii) で $b^2 - a^2 < 1$ だけを答え、$b > a$ を書き落とすこと。$b < a$ でも 2 曲線は交わるが、交点は 1 個だけである。
- γ の符号を誤ること。解は $\pm\operatorname{arcosh}(\cdot)$ から $\operatorname{artanh}(a/b)$ を引いたものである。

STEP のその先へ

場合分けを支配しているのは $B^2 - A^2$ の符号である。点 (A, B) は、直線 $B = \pm A$ で区切られた領域のいずれかの内部にあるか、これらの直線上にある。これは特殊相対

性理論（special relativity）の幾何そのものである。そこではローレンツ・ブースト（Lorentz boost）が双曲的な「回転」であり、通常の回転が x^2+y^2 を保つのとまったく同様に t^2-x^2 を保つ。そして $B=\pm A$ は光円錐（light cone）の役割を果たし、ブーストによって決して越えることのできない唯一の境界となる。双曲線関数とこの種の問題についてさらに知りたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（上級数学問題集）を参照せよ。

解答例

STEP III 2016、第 7 問

純粋数学 • 1 の冪根

> **STEP III 2016、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q7

この問題は、*Beyond STEP* の第 5.4 節「**正多角形の中の距離**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch05/polygon-distances.html

鍵となる考え方

距離は絶対値（modulus）であり、絶対値の積は積の絶対値である。多角形を複素平面（Argand diagram）上に置き、頂点が回転した 1 の n 乗根（roots of unity）になるようにすれば、冒頭の恒等式（identity）により、距離の積は適当な w に対する $|w^n - 1|$ となる。本当に工夫が必要なのは座標の選び方だけである。O を原点に置き、X_0X_1 の垂直二等分線（perpendicular bisector）を実軸にすれば、P は実数になる。

解答

因数分解

$k = 0, 1, \ldots, n-1$ に対して $(\omega^k)^n = \mathrm{e}^{2\pi i k} = 1$ であるから、各 ω^k は $z^n - 1$ の根である。これら n 個の数は相異なる。実際、それらの偏角（argument）$2\pi k/n$ は $[0, 2\pi)$ 内の相異なる数である。恒等式の両辺はともに n 次のモニック多項式（monic polynomial）であるから、その差

$$D(z) = (z-1)(z-\omega)\cdots(z-\omega^{n-1}) - (z^n - 1)$$

の次数（degree）は高々 $n-1$ である。ところが D は n 個の相異なる点 $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$ で 0 となり、次数が高々 $n-1$ の 0 でない多項式の根は高々 $n-1$ 個である。したがっ

て $D \equiv 0$ であり、

$$\prod_{k=0}^{n-1}(z-\omega^k) = z^n - 1 \quad \text{任意の複素数}z.$$

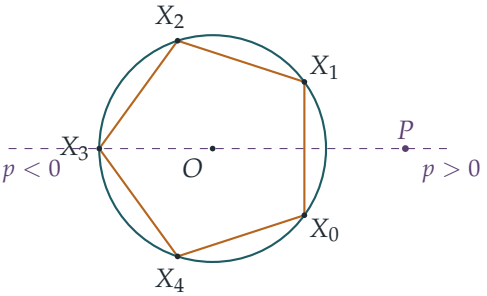
が成り立つ。

小問 (i)

頂点は円周上に順に番号が付けられているものとする。したがって X_0 と X_1 は隣り合い、$\angle X_0OX_1 = 2\pi/n$ である。図形を回転や鏡映で動かしても距離は変わらないから、O を原点に置いて

$$X_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k-1)\pi/n} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}\,\omega^k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

としてよい。このとき $X_0 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}$ と $X_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}$ は実軸に関して互いに対称であるから、X_0X_1 の垂直二等分線は実軸である。X_0 と X_1 から等距離にある点はちょうどこの直線上の点であるから、P は実数 p であり、$|OP| = |p|$ である。X_0X_1 の中点（midpoint）は $\cos(\pi/n) > 0$ であるから、$p > 0$ は P が O から見て辺 X_0X_1 と同じ側にあることを意味する。



（図は $n = 5$ の場合である。n が奇数のとき、O を通るこの直線は反対側の頂点も通る。）

さて、$|ab| = |a||b|$ と $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}| = 1$ を用いると、

$$\begin{aligned}|PX_0|\,|PX_1|\cdots|PX_{n-1}| &= \prod_{k=0}^{n-1}|p - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}\omega^k| = \prod_{k=0}^{n-1}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}|\,|p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n} - \omega^k| \\ &= \left|\prod_{k=0}^{n-1}(p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n} - \omega^k)\right| = \left|(p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n})^n - 1\right|,\end{aligned}$$

となる。最後の等号は $z = p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}$ として因数分解（factorisation）を用いた。$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$ であるから、

$$|PX_0|\,|PX_1|\cdots|PX_{n-1}| = |-p^n - 1| = |p^n + 1|.$$

考えてみよう p の符号が、n が奇数のときには効いてくるのに、n が偶数のときには効いてこないのはなぜか？

n が偶数ならば、p の符号によらず $p^n = |p|^n \geq 0$ であるから $|p^n + 1| = |p|^n + 1$ となり、

$$|PX_0| \times |PX_1| \times \cdots \times |PX_{n-1}| = |OP|^n + 1,$$

が示された。n が奇数ならば、p^n は p と同じ符号をもち、次の二つの場合がある。

- P が O から X_0X_1 の中点へ向かう半直線（ray）上にある場合（$p \geq 0$）、$p^n = |OP|^n$ であり、積は $|OP|^n + 1$ である。
- P が反対向きの半直線上にある場合（$p < 0$）、これは n が奇数のとき O から頂点 $X_{(n+1)/2}$（$e^{i\pi} = -1$ の位置にある）へ向かう半直線であり、$p^n = -|OP|^n$ となって、積は

  $$\big||OP|^n - 1\big|.$$

  である。

二つ目の場合には絶対値記号が重要である。P が円の内部にあるとき値は $1 - |OP|^n$ であり、$P = X_{(n+1)/2}$ のとき値は 0 となる。このとき距離の一つが 0 になるのだから、そうでなければならない。

小問 (ii)

今度は $X_k = \omega^k$ となるように回転させる。すると $X_0 = 1$ である。$z \neq 1$ に対して、因数分解から

$$(z - \omega)(z - \omega^2) \cdots (z - \omega^{n-1}) = \frac{z^n - 1}{z - 1} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}.$$

が得られる。左端と右端はともに多項式であり、無限個の点（$z \neq 1$ であるすべての点）で一致するから、$z = 1$ も含めたすべての z で等しい。$z = 1$ を代入すると

$$(1 - \omega)(1 - \omega^2) \cdots (1 - \omega^{n-1}) = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} = n.$$

となる。絶対値をとり、$|1 - \omega^k| = |X_0X_k|$ を用いると、

$$|X_0X_1| \times |X_0X_2| \times \cdots \times |X_0X_{n-1}| = n,$$

となり、これが求める結果である。

検算

- 正方形（$n=4$）で $P=O$ の場合：どの距離も 1 であるから、積は $1=0^4+1$ である。P が非常に遠くにあるときは、公式のとおり積は $|OP|^n$ のように振る舞う。
- 正三角形（$n=3$）で、P が反対側の O から距離 2 の位置にある場合：距離は 1（-1 にある反対側の頂点まで）と $\sqrt{(-2-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\sqrt{7}$（二つ）であり、積は $7=2^3-1$ となる。
- 正方形に対する小問 (ii)：$|X_0X_1|\,|X_0X_2|\,|X_0X_3|=\sqrt{2}\times 2\times\sqrt{2}=4$。三つの結果はいずれも、ランダムな n、回転、P の位置についてコンピュータでも確認した。

よくある間違い

- 小問 (i) で X_0 を 1 に置いてしまうこと：このとき X_0X_1 の垂直二等分線は実軸ではなく角 π/n の直線となり、計算が煩雑になる。座標は P に合わせて選ぶこと。
- n が奇数で P が反対側にある場合に絶対値を忘れること：P が円の内部にあるとき $|OP|^n-1$ は負である。
- $\dfrac{z^n-1}{z-1}$ にそのまま $z=1$ を代入してしまうこと。値が n であることを正当化するのは多項式の恒等式である。

STEP のその先へ

小問 (ii) は、z^n-1 の $z=1$ における微分係数が n であるという主張にほかならない。一般に、$f(z)=\prod(z-a_k)$ ならば $f'(a_0)=\prod_{k\neq 0}(a_0-a_k)$ である。このような 1 の冪根にわたる積は、円分多項式（cyclotomic polynomials）の理論や判別式（discriminants）の計算に現れる。また小問 (i) は本質的に、正多角形の対称軸上の点からの距離に関するコーツ（Roger Cotes）の古典的な結果である。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、こうした複素数の掛け算の幾何学が展開されていく様子を見るのにうってつけの美しい本である。

解答例

STEP III 2016、第 8 問

純粋数学 • 関数方程式

> **STEP III 2016、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q8

鍵となる考え方

それぞれの方程式は、未知の関数の x における値を、変換を施した別の点における値と結びつけている。その変換をもう一度（あるいは三度）施すと x に戻るならば、変換後の点を方程式に代入することで、同じ未知数についての**第二の**方程式が得られる。こうして連立一次方程式（simultaneous linear equations）が得られるので、通常の未知数の場合とまったく同様に、不要な値を消去することができる。

解答

小問 (i)

この方程式は**すべての** x について成り立つので、x を $-x$ に置き換えても成り立つ：

$$\mathrm{f}(-x) + (1+x)\,\mathrm{f}(x) = (-x)^2 = x^2,$$

これが示すべき結果である。

これで、2 つの未知数 $\mathrm{f}(x)$ と $\mathrm{f}(-x)$ についての 2 つの方程式が得られた。第二の式から $\mathrm{f}(-x) = x^2 - (1+x)\mathrm{f}(x)$ となり、これをもとの方程式に代入すると

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) + (1-x)\big(x^2 - (1+x)\mathrm{f}(x)\big) &= x^2 \\ \mathrm{f}(x)\big(1 - (1-x^2)\big) &= x^2 - (1-x)x^2 \\ x^2\,\mathrm{f}(x) &= x^3. \end{aligned}$$

$x \neq 0$ のときは x^2 で割って $\mathrm{f}(x) = x$ を得る。$x = 0$ のときは、もとの方程式は

$f(0)+f(0)=0$ となるので、やはり $f(0)=0$ である。したがって

$$f(x)=x \quad \text{すべての} x.$$

確認：$x+(1-x)(-x)=x-x+x^2=x^2$ となり、確かに成り立つ。

考えてみよう なぜ問題文は答えの確認を求めているのだろうか。

上の議論が示しているのは、ある関数がこの方程式を満たすならばそれは $f(x)=x$ でなければならない、ということだけである。そのような関数が存在することまでは示していない。式変形の途中で情報が失われている可能性があり、その場合にはどの関数も条件を満たさないことになる。代入して確かめることで、この隙間が埋まるのである。

小問 (ii)

まず、$x\neq 1$ であるすべての x について $K(x)\neq 1$ であることに注意する。$\frac{x+1}{x-1}=1$ となるには $x+1=x-1$ が必要だからである。よって $K(K(x))$ は定義され、分母と分子に $x-1$ を掛けると

$$K(K(x))=\frac{\dfrac{x+1}{x-1}+1}{\dfrac{x+1}{x-1}-1}=\frac{(x+1)+(x-1)}{(x+1)-(x-1)}=\frac{2x}{2}=x.$$

g についての方程式は $g(x)+x\,g(K(x))=x$ である。$K(x)\neq 1$ なので x を $K(x)$ に置き換えてよく、$K(K(x))=x$ であるから

$$g(K(x))+K(x)\,g(x)=K(x).$$

$K(x)$ を K と書く。すると $g(K)=K-K\,g(x)$ であり、これをもとの方程式に代入すると

$$g(x)+x\big(K-K\,g(x)\big)=x \quad\Longrightarrow\quad (1-xK)\,g(x)=x-xK.$$

ここで

$$1-xK=\frac{(x-1)-x(x+1)}{x-1}=-\frac{x^2+1}{x-1},$$
$$x-xK=x\cdot\frac{(x-1)-(x+1)}{x-1}=-\frac{2x}{x-1}.$$

$x^2+1>0$ なので因数 $1-xK$ は決して 0 にならず、割り算ができる：

$$g(x)=\frac{-2x/(x-1)}{-(x^2+1)/(x-1)}=\frac{2x}{x^2+1}\qquad (x\neq 1),$$

これが示すべき結果である。（この関数が実際に方程式を満たすことは確かめられる。たとえば $x=2$ のとき、$K(2)=3$ であり $\frac{4}{5}+2\cdot\frac{6}{10}=2$ となる。）

小問 (iii)

$\mathrm{M}(x) = \dfrac{1}{1-x}$ とおく。方程式は

$$\mathrm{h}(x) + \mathrm{h}(\mathrm{M}(x)) = 1 - x - \mathrm{M}(x),$$

となり、右辺が x と $\mathrm{M}(x)$ だけで書かれているのは心強い。

今度は M は自分自身の逆関数（inverse）ではないので、繰り返し施した結果を調べる。$x \neq 0, 1$ のとき

$$\mathrm{M}(\mathrm{M}(x)) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} = \frac{x-1}{x}, \qquad \mathrm{M}(\mathrm{M}(\mathrm{M}(x))) = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{1} = x.$$

よって M は周期（period）3 をもつ。また、M によって定義域（domain）の外に出ないことも必要である。$\mathrm{M}(x)$ は決して 0 にならず、$\mathrm{M}(x) = 1$ となるのは $x = 0$ のときに限るので、$x \neq 0, 1$ ならば $\mathrm{M}(x) \neq 0, 1$ でもある。

> ? **考えてみよう** M を 2 回施しても x には戻らない。どうすれば十分な数の方程式が得られるだろうか。

サイクルの 3 点すべてを使う。$a = x$、$b = \mathrm{M}(x)$、$c = \mathrm{M}(b) = \frac{x-1}{x}$ とおくと、$\mathrm{M}(c) = a$ である。方程式を a、b、c において順に適用すると

$$\begin{aligned} \mathrm{h}(a) + \mathrm{h}(b) &= 1 - a - b, \\ \mathrm{h}(b) + \mathrm{h}(c) &= 1 - b - c, \\ \mathrm{h}(c) + \mathrm{h}(a) &= 1 - c - a. \end{aligned}$$

3 式をすべて加えて 2 で割ると

$$\mathrm{h}(a) + \mathrm{h}(b) + \mathrm{h}(c) = \tfrac{3}{2} - (a + b + c).$$

ここから第二の式を引くと

$$\mathrm{h}(a) = \tfrac{3}{2} - a - b - c - (1 - b - c) = \tfrac{1}{2} - a.$$

したがって

$$\mathrm{h}(x) = \tfrac{1}{2} - x \qquad (x \neq 0,\ x \neq 1).$$

確認：$\left(\frac{1}{2} - x\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1-x}\right) = 1 - x - \frac{1}{1-x}$ となり、確かに成り立つ。

検算

▶ (i) で $x = 3$ とすると、$3 + (-2)(-3) = 9 = 3^2$ である。

- (ii) で $x = -1$ とすると、$\mathrm{K}(-1) = 0$ であり、$\mathrm{g}(-1) + (-1)\,\mathrm{g}(0) = -1 - 0 = -1$ となる。また $\mathrm{K}(0) = -1$ であり、周期が 2 であることも確かめられる。
- (iii) で $x = 2$ とすると、サイクルは $2 \to -1 \to \frac{1}{2} \to 2$ であり、$\mathrm{h}(2) + \mathrm{h}(-1) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$、一方 $1 - 2 - (-1) = 0$ である。

3 つの関数はいずれも、コンピュータを用いて、2000 個のランダムな有理数の値において各方程式を厳密な演算で検証することでも確認した。

よくある間違い

- (i) で x^2 で割り、$x = 0$ の場合を忘れること。この場合には別途（1 行で済む）議論が必要である。
- $\mathrm{K}(x)$ や $\mathrm{M}(x)$ を x に代入する際に、それが方程式の成り立つ定義域の中にとどまることを確かめないこと。
- (iii) で 1 回だけ代入し、未知数が 3 つのまま行き詰まること。サイクル全体が必要である。

STEP のその先へ

写像 $x \mapsto -x$、K、M はいずれもメビウス変換（Möbius transformations）$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ であり、これらは合成（composition）に関して群（group）をなす。有限位数（finite order）の変換は有限巡回群（finite cyclic group）を生成し、ここでの方法はその群全体にわたって和をとる（あるいは消去する）ことである。これは群の表現論（group representation theory）で再び現れる考え方である。メビウス変換は 2×2 行列と対応しており、行列を 3 乗することで $\mathrm{M}^3 =$ 恒等写像 を求めることができる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ビジュアル複素解析』）には、メビウス変換についての見事な解説がある。

解答例

STEP III 2016、第 9 問

力学 ・ ばねと単振動

> **STEP III 2016、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q9

鍵となる考え方

原点を三角形の中心にとり、対称性（symmetry）を利用する。平衡位置（equilibrium position）は中心であり、そこでは等しい三つの張力（tension）が打ち消し合う。粒子が P に向かう直線に沿って動くとき、ばね QX と RX は互いに鏡像の関係を保つので、横向きの引く力は打ち消し合い、運動はその直線上にとどまる。RX を求めるには余弦定理（cosine rule）が必要である。周期（period）を求めるには、厳密な復元力（restoring force）を書き下し、そのうえで小さな変位（displacement）について 1 次の項だけを残す。

解答

X をなめらかな台の上の質点とし、ばねはフックの法則（Hooke's law）に従う軽いばねとしてモデル化する。すなわち、長さ r のばねの張力は $\frac{\lambda}{l}(r-l)$ である。

平衡

三角形の中心を O とする。各頂点は O から距離

$$c = \frac{2}{3} \times (\text{高さ}) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}\, a = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

の位置にあり、直線 OP、OQ、OR は互いに 120° をなす。X が O にあるとき、各ばねの長さは c であるから、三つの張力はすべて等しい。互いに 120° をなす等しい三つの力の和は零であるから、O は平衡位置である。以下ではこの平衡を用いる。$l < \frac{2}{\sqrt{3}}a$

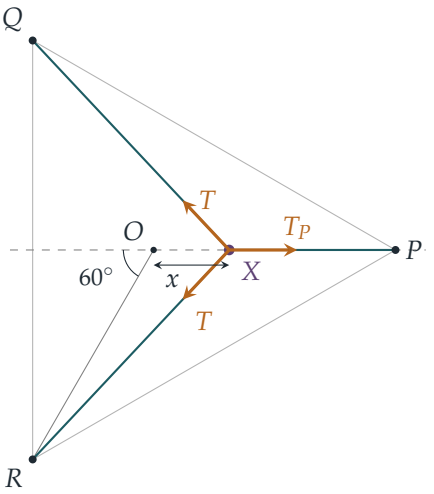
であるから、各ばねは伸びており、その伸びは

$$\frac{2}{\sqrt{3}}a - l,$$

となり、題意が示された。

RX の張力

x 軸を OP に沿ってとり、P の向きを正とする。X が O から P の向きに変位 x の位置にあるとする。このとき $OX = x$、$OR = c$、$\angle XOR = 180° - 60° = 120°$ である。



三角形 XOR に余弦定理を用いると、

$$RX^2 = c^2 + x^2 - 2cx\cos 120° = c^2 + cx + x^2 = \frac{4a^2}{3} + \frac{2ax}{\sqrt{3}} + x^2.$$

よってフックの法則により、RX の張力は

$$T = \frac{\lambda}{l}\left(\sqrt{\frac{4a^2}{3} + \frac{2ax}{\sqrt{3}} + x^2} - l\right),$$

となり、題意が示された。軸 OP に関する対称性から $QX = RX$ であるので、QX も同じ張力 T をもつ。

運動方程式

$r = RX$ とおく。ばね PX の長さは $c - x$ であるから、その張力は $T_P = \frac{\lambda}{l}(c - x - l)$ であり、P の向き（$+x$ の向き）にはたらく。

点 R の x 座標は $-c\cos 60^\circ = -\frac{c}{2}$ であるから、X から R への変位の x 成分は $-\left(x+\frac{c}{2}\right)$ である。したがって XR に沿った力 T の x 成分は $-T\,\dfrac{x+c/2}{r}$ である。QX による力も同じ x 成分をもち、二つの垂直成分は対称性により打ち消し合う。よって直線 OP を横切る向きの力ははたらかず、X はこの直線に沿って運動する。

考えてみよう この平方根から、どうすれば線形の方程式が得られるだろうか。

まず厳密な力を書き、それから x が小さいとして展開する。OP に沿って力を分解すると、

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= T_P - 2T\,\frac{x+c/2}{r} = \frac{\lambda}{l}\left[(c-x-l)-(2x+c)\left(1-\frac{l}{r}\right)\right] \\ &= \frac{\lambda}{l}\left[-3x-l+\frac{l(2x+c)}{r}\right]. \end{aligned}$$

この式は厳密である。ここで $r^2 = c^2\left(1+\frac{x}{c}+\frac{x^2}{c^2}\right)$ である。二項展開（binomial expansion）を用い、x^2 以上の項を落とすと、

$$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{c}\left(1-\frac{x}{2c}\right), \qquad \frac{2x+c}{r} \approx \left(1+\frac{2x}{c}\right)\left(1-\frac{x}{2c}\right) \approx 1+\frac{3x}{2c}.$$

これを代入すると、

$$m\ddot{x} \approx \frac{\lambda}{l}\left[-3x-l+l+\frac{3lx}{2c}\right] = -\frac{3\lambda}{l}\left(1-\frac{l}{2c}\right)x.$$

$\frac{l}{2c} = \frac{\sqrt{3}\,l}{4a}$ であるから、

$$\ddot{x} \approx -\omega^2 x, \qquad \omega^2 = \frac{3\lambda(4a-\sqrt{3}\,l)}{4mla}.$$

$\sqrt{3}\,l < 2a < 4a$ であるから、この ω^2 は正である。よって力は復元力であり、x が小さいとき粒子は O を中心とする近似的な単振動（simple harmonic motion）を行い、その周期は

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4mla}{3(4a-\sqrt{3}\,l)\lambda}},$$

となり、題意が示された。

検算

- $x=0$ のとき厳密な力は $\frac{\lambda}{l}\left[-l+\frac{lc}{c}\right]=0$ であり、最初に求めた平衡と一致する。
- 単位：λ は力、l と a は長さであるから、$\frac{mla}{a\lambda}$ の単位は $\mathrm{kg\,m/N} = \mathrm{s}^2$ となり、周期は時間の次元をもつ。

- ω^2 を求める別の方法。小さな変位に対して、一つのばねは伸びによって剛性（stiffness）$\frac{\lambda}{l}\cos^2\phi$ を、向きの回転によって剛性 $\frac{T_0}{c}\sin^2\phi$ を与える。ここで ϕ はばねが OP となす角であり、$T_0 = \frac{\lambda}{l}(c-l)$ は平衡時の張力である。$\phi = 0°, 60°, 60°$ とすると、全体の剛性は $\frac{3}{2}\cdot\frac{\lambda}{l} + \frac{3}{2}\cdot\frac{T_0}{c} = \frac{3\lambda}{l}\left(1-\frac{l}{2c}\right)$ となり、先の結果と一致する。
- $a = \lambda = m = 1$、$l = 0.8$ とすると、公式から周期はおよそ 2.838 となる。P の向きへの小さな変位から始めて、2 次元の運動全体をコンピュータでシミュレーションすると、有効数字 4 桁まで同じ値が得られる。

よくある間違い

- $\cos 120° = +\frac{1}{2}$ としてしまう、あるいは余弦定理で誤った角を用いる。こうすると平方根の中が $-\frac{2ax}{\sqrt{3}}$ になってしまう。
- QX と RX の張力を一定として扱う。張力の**向き**の変化と**大きさ**の変化は、どちらも x について 1 次の項に寄与する。
- 中心から頂点までの距離を求める際に、三角形の一辺を $2a$ ではなく a としてしまう。

STEP のその先へ

安定な平衡の近くでは、力は変位についてほぼ線形である。ここでの復元力は弾性ポテンシャルエネルギー（elastic potential energy）の勾配（gradient）であり、$m\omega^2$ はその 2 階導関数（second derivative）である。2 次元では、この 2 階導関数は 2×2 行列（ヘッセ行列（Hessian））となり、その固有ベクトル（eigenvector）が微小振動の**基準振動**（normal modes）である。3 回対称性により、この系は OP に沿った方向だけでなく、O のまわりのどの方向にも同じ周期で振動する。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、微小振動と連成系（coupled systems）を扱っている。

解答例

STEP III 2016、第 10 問

力学 ・ 平面上の円運動

> **STEP III 2016、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q10

鍵となる考え方

糸がぴんと張り、粒子が斜面上にある間は、P は常に A から距離 a の位置にあり、しかも斜面内にあるので、A から下ろした垂線の足を中心とする**斜面内の**円の上を動く。斜面内で見れば、これは重力が $g\sin\alpha$ に弱められた鉛直面内の円運動にすぎない。一方、斜面に垂直な方向には糸が P を斜面から引き離そうとするので、垂直抗力（normal reaction）は正であり続けなければならない。そこで、張力（tension）と垂直抗力を求め、それぞれがどこで最小になるかを調べる。

解答

設定

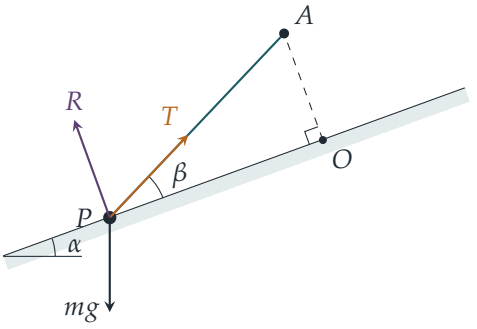
P を質点、糸を軽く伸び縮みしないもの、斜面をなめらかなものとしてモデル化する。A から斜面に下ろした垂線の足を O とする。糸の長さは a で、糸と斜面のなす角は β であるから、

$$AO = a\sin\beta, \qquad OP = a\cos\beta.$$

釣り合い（equilibrium）の状態では、重力以外で斜面に沿った成分をもつ力は張力だけなので、糸は最大傾斜線（line of greatest slope）に沿っていなければならず、P は O から見て斜面の真下の方向にある。斜面に沿った方向と斜面に垂直な方向に力を分解すると（張力 T_0、垂直抗力 R_0）、

$$T_0\cos\beta = mg\sin\alpha, \qquad R_0 + T_0\sin\beta = mg\cos\alpha,$$

よって $R_0 = mg(\cos\alpha - \sin\alpha\tan\beta) = mg\cos(\alpha+\beta)/\cos\beta$ である。したがって、そもそも釣り合いが存在するためには $\cos(\alpha+\beta) > 0$ でなければならない。



図は、初期状態において最大傾斜線を通る断面である。AO は斜面に垂直である。

撃力（impulse）が加えられた後、糸が張ったままで P が斜面上にある限り、$AP = a$ かつ $AO = a\sin\beta$ であるから、三平方の定理（Pythagoras）より常に $OP = a\cos\beta$ である。つまり P は斜面内で O を中心とする半径

$$r = a\cos\beta$$

の円の上を動く。糸は常に斜面と角 β をなし、その斜面への射影は P から O の向きを向く。撃力は水平かつ斜面に平行なので、この円の最下点における接線の方向を向いている。

O を通る下向きの最大傾斜線と OP のなす角を θ とし（初期状態では $\theta = 0$）、速さを v とする。重力は、斜面に沿って下向きに（斜面内で）$mg\sin\alpha$、斜面に垂直に斜面へ向かって $mg\cos\alpha$ の成分をもつ。

斜面に垂直な方向には P は加速度をもたないので、

$$R + T\sin\beta = mg\cos\alpha. \tag{1}$$

斜面内で O に向かう方向には、加速度は v^2/r である。張力の寄与は $T\cos\beta$、斜面下向きの重力成分の寄与は $-mg\sin\alpha\cos\theta$ であるから、

$$T\cos\beta - mg\sin\alpha\cos\theta = \frac{mv^2}{a\cos\beta}. \tag{2}$$

エネルギー：垂直抗力と張力は仕事をしない（どちらも速度に垂直である）。また P は斜面に沿って距離 $r(1-\cos\theta)$ だけ上がる、すなわち高さ $r(1-\cos\theta)\sin\alpha$ だけ上昇する。よって

$$v^2 = u^2 - 2ga\cos\beta\sin\alpha\,(1-\cos\theta). \tag{3}$$

すぐには斜面を離れないこと

撃力を加えた直後は $\theta = 0$、$v = u$ である。(2) より $T\cos\beta = mg\sin\alpha + \dfrac{mu^2}{a\cos\beta}$ であり、これと (1) から

$$\begin{aligned} R &= mg\cos\alpha - \tan\beta\left(mg\sin\alpha + \frac{mu^2}{a\cos\beta}\right) \\ &= \frac{m}{\cos\beta}\left(g\cos\alpha\cos\beta - g\sin\alpha\sin\beta\right) - \frac{mu^2\tan\beta}{a\cos\beta} \\ &= \frac{m}{a\cos\beta}\Big(ag\cos(\alpha+\beta) - u^2\tan\beta\Big). \end{aligned}$$

$\cos\beta > 0$ であるから、垂直抗力が正となり、粒子がすぐには斜面を離れないのは

$$ag\cos(\alpha+\beta) > u^2\tan\beta,$$

のときであり、これが示すべきことであった。

円を一周する

(3) を (2) に代入すると、一般の位置での張力が得られる：

$$T\cos\beta = \frac{mu^2}{a\cos\beta} - 2mg\sin\alpha + 3mg\sin\alpha\cos\theta,$$

したがって (1) より

$$R = mg\cos\alpha - \tan\beta\left(\frac{mu^2}{a\cos\beta} - 2mg\sin\alpha + 3mg\sin\alpha\cos\theta\right).$$

? **考えてみよう** 粒子が斜面を離れる可能性が最も高いのは円上のどこか。最上点か、それとも最下点か。

鉛直面内の円運動からの直感では「最上点」と答えたくなるが、ここでの最上点は**糸**にとっての危険箇所であって、斜面にとってのものではない。糸は P を力 $T\sin\beta$ で斜面から引き離そうとし、張力は最下点で最大になる。そこでは P が最も速く動いており、しかも斜面内の重力も O から遠ざかる向きに引くからである。実際、R は $\cos\theta$ が最大のとき、すなわち $\theta = 0$ で最小となり、T は $\cos\theta = -1$ のとき、すなわち最上点で最小となる。したがって、接触を保ったまま円を一周するには、次の二つが必要である。

- **最下点での接触**。$\theta = 0$ で $R > 0$ であること。これはまさに前半の条件 $u^2\tan\beta < ag\cos(\alpha+\beta)$ である。

- **最上点で糸が張っていること**。$\theta = \pi$ で $T \geq 0$ であること。すなわち $\dfrac{u^2}{a\cos\beta} - 5g\sin\alpha \geq 0$、つまり $u^2 \geq 5ag\sin\alpha\cos\beta$ である。（(3) より、このとき最上点で $v^2 > 0$ も成り立つ。）

二つ目の条件に $\tan\beta > 0$ を掛けると、両方が成り立ちうるのは

$$5ag\sin\alpha\cos\beta\tan\beta \leq u^2\tan\beta < ag\cos(\alpha+\beta),$$

の場合に限られる。すなわち

$$5\sin\alpha\sin\beta < \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \iff 6\sin\alpha\sin\beta < \cos\alpha\cos\beta.$$

$\cos\alpha\cos\beta > 0$ で割ると、必要条件

$$6\tan\alpha\tan\beta < 1.$$

が得られる。（これは十分条件でもある。これが成り立てば、$5ag\sin\alpha\cos\beta \leq u^2 < ag\cos(\alpha+\beta)/\tan\beta$ を満たす任意の u でよい。このとき円上のいたるところで R と T が正になるからである。）

検算

- $u = 0$ とすると、前半で求めた垂直抗力は $mg\cos(\alpha+\beta)/\cos\beta$ となり、釣り合いのときの値 R_0 と一致する。
- $\beta \to 0$（糸がほぼ斜面に沿っている）のとき、糸は粒子を持ち上げることができず、条件 $6\tan\alpha\tan\beta < 1$ は自動的に成り立つ。これは当然そうなるべきである。
- $\alpha = 30°$、$\beta = 5°$（このとき $6\tan\alpha\tan\beta \approx 0.30$）、$a = 1\,\mathrm{m}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ とすると、許される範囲は $24.4 \leq u^2 < 91.8$（単位は $\mathrm{m^2\,s^{-2}}$）である。$u^2 = 50$ とすると、垂直抗力の最小値は最下点で約 $0.37mg$、張力の最小値は最上点で約 $2.63mg$ となる。円周全体にわたって三次元でニュートン（Newton）の運動の第二法則を解くことで、R と T が正のままであり、上の値になることをコンピュータで確認した。

よくある間違い

- 円の半径として糸の長さ a をそのまま使ってしまう。半径は $a\cos\beta$ である。
- 粒子が斜面を離れやすいのは円の最上点だと思い込む。垂直抗力が最小になるのは最下点である。
- エネルギーの式で $g\sin\alpha$ の代わりに g を使ってしまう。粒子が鉛直方向に上がるのは $r(1-\cos\theta)\sin\alpha$ だけである。

STEP のその先へ

これは拘束（constraint）のもとでの運動である。斜面と糸はそれぞれ、拘束を保つのにちょうど必要な大きさの抗力を及ぼし、その運動が有効なのはそれらの力が正しい符号をもつ間だけである。大学 1 年次の講義では、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）を用いて拘束を取り除き、あとから抗力を求めるという、系統的な扱い方を学ぶ。Kleppner and Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）には、まさにこの「いつ接触が失われるか」という種類の問題が数多く収められている。

解答例

STEP III 2016、第 11 問

力学 ・ 仕事率と抵抗

STEP III 2016、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

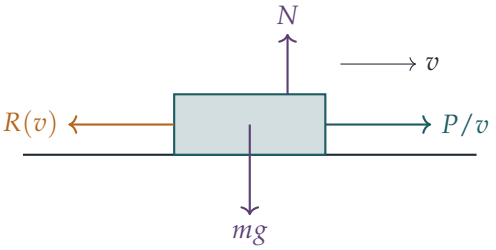
step.maths.org/questions/16-s3-q11

鍵となる考え方

一定の仕事率（power）P で動くエンジンは、速さ v のとき P/v の駆動力を生む。ここでは時間ではなく速さの関数として**距離**を求めたいので、加速度を $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ と書く。こうするとニュートン（Newton）の第二法則は、x を v で表す変数分離形（separable）の方程式になる。速さ $4U$ で加速度が 0 になるという事実から、抵抗（resistance）の定数が P と U で決まり、それぞれの距離は一つの定積分（definite integral）に帰着する。

解答

車を質量 m の質点（particle）とみなし、水平な直線上を、前向きの牽引力（tractive force）P/v と後ろ向きの抵抗 $R(v)$ を受けて運動するものとする。鉛直方向には重力と垂直抗力がつり合っており、以後の議論には関わらない。



$a = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ を用いると、水平方向の運動方程式（equation of motion）は

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{P}{v} - R(v), \qquad \text{したがって} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v} = \frac{mv^2}{P - vR(v)}.$$

となる。どちらのモデルでも $vR(v)$ は v について増加し、$v = 4U$ で P に等しい。よって $U \le v \le 2U$ では分母は正であり、車はこの間ずっと確かに加速している。つまり x は v とともに増加し、距離は

$$X = \int_U^{2U} \frac{mv^2}{P - vR(v)}\,\mathrm{d}v.$$

である。

小問 (i)

$R = kv$ とする。$4U$ で加速度が 0 であることから $\dfrac{P}{4U} = 4kU$、よって $k = \dfrac{P}{16U^2}$ である。すると

$$P - kv^2 = k\,(16U^2 - v^2), \qquad \frac{m}{k} = \frac{16mU^2}{P} = \frac{1}{\lambda U}.$$

となる。したがって、$v = Uw$ と置換すると

$$\lambda X_1 = \frac{1}{U}\int_U^{2U} \frac{v^2}{16U^2 - v^2}\,\mathrm{d}v = \int_1^2 \frac{w^2}{16 - w^2}\,\mathrm{d}w,$$

を得る。$\dfrac{w^2}{16 - w^2} = -1 + \dfrac{16}{16 - w^2} = -1 + \dfrac{2}{4 - w} + \dfrac{2}{4 + w}$ と書き直すと、

$$\begin{aligned}\lambda X_1 &= \Big[-w + 2\ln\frac{4 + w}{4 - w}\Big]_1^2 \\ &= -1 + 2\ln 3 - 2\ln\tfrac{5}{3} = 2\ln\tfrac{9}{5} - 1,\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

次に $R = cv^2$ とする。$4U$ で加速度が 0 であることから $\dfrac{P}{4U} = 16cU^2$、よって $c = \dfrac{P}{64U^3}$ である。すると

$$P - cv^3 = c\,(64U^3 - v^3), \qquad \frac{m}{c} = \frac{64mU^3}{P} = \frac{4}{\lambda}.$$

となる。

考えてみよう ここにはきれいな原始関数（antiderivative）があるだろうか。それとも再び部分分数分解（partial fractions）が必要だろうか。

分子の v^2 は、定数倍を除いて分母 $64U^3 - v^3$ の導関数である。したがって、この積分はすぐに対数になる。

$$\begin{aligned}\lambda X_2 &= 4\int_U^{2U} \frac{v^2}{64U^3 - v^3}\,\mathrm{d}v = 4\Big[-\tfrac{1}{3}\ln\big(64U^3 - v^3\big)\Big]_U^{2U} \\ &= \tfrac{4}{3}\ln\frac{63U^3}{56U^3} = \tfrac{4}{3}\ln\tfrac{9}{8},\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (iii)

$\lambda > 0$ なので、$X_1 > X_2$ となるのは $\lambda X_1 - \lambda X_2 > 0$ のとき、かつそのときに限る。与えられているのは $\ln 24$ と $\ln 5$ の評価だけなので、差をこれらで書き直す。

$$\begin{aligned}\lambda(X_1 - X_2) &= 2\ln 9 - 2\ln 5 - 1 - \tfrac{4}{3}\ln 9 + \tfrac{4}{3}\ln 8 \\ &= \tfrac{4}{3}\ln 3 + 4\ln 2 - 2\ln 5 - 1 \\ &= \tfrac{4}{3}(\ln 3 + 3\ln 2) - 2\ln 5 - 1 = \tfrac{4}{3}\ln 24 - 2\ln 5 - 1.\end{aligned}$$

考えてみよう それぞれの評価をどちら向きに使うべきだろうか。

差が正であることを示すには**下からの**評価が必要である。そこで、$\ln 24$（正の符号で現れる）には下界を、$\ln 5$（負の符号で現れる）には上界を用いる。

$$\lambda(X_1 - X_2) > \tfrac{4}{3}(3.17) - 2(1.61) - 1 = 4.22\dot{6} - 3.22 - 1 = 0.00\dot{6} > 0.$$

したがって $X_1 > X_2$ である。すなわち、U から $2U$ まで加速する間に車が進む距離は、抵抗が速さの 2 乗に比例する場合よりも、速さに比例する場合のほうが長い。

これは物理的にも納得がいく。二つの抵抗は $v = 4U$ で一致するが、$v < 4U$ では $cv^2 = kv \cdot \frac{v}{4U} < kv$ となる。よって、問題となる速さの範囲では 2 乗の法則のほうが抵抗が**小さく**、車はより強く加速し、より早く $2U$ に達する。

検算

- 数値的には $\lambda X_1 = 2\ln 1.8 - 1 \approx 0.1756$、$\lambda X_2 = \frac{4}{3}\ln 1.125 \approx 0.1570$ であり、差はおよそ 0.0185 で、求めたとおり正である。$v = U$ から運動方程式を時間について刻んでいくコンピュータシミュレーションでも、両方の値が小数第 5 位まで再現される。
- 単位：$P/(mU^3)$ の単位は $\mathrm{W}/(\mathrm{kg\,m^3\,s^{-3}}) = \mathrm{m^{-1}}$ なので、λX は無次元量（dimensionless）であり、そうなるべきである。
- 小問 (iii) の最後の物理的な議論は、これとは独立に同じ大小関係を予測している。

よくある間違い

- $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ を使ってしまうと、距離ではなく時間が求まる。ここで必要なのは $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ である。

- 小問 (iii) で評価を逆向きに使ってしまう。3.18 と 1.60 を使うと上界しか得られず、符号については何も証明できない。
- 余裕がごくわずか（$0.00\dot{6}$）であることを忘れ、$\frac{4}{3}(3.17)$ を 4.2 に丸めてしまうと結論が失われる。

STEP のその先へ

$a = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ と書くことは、大学の力学で学ぶエネルギー法（energy method）への第一歩である。運動方程式に v を掛けると運動エネルギー（kinetic energy）の変化率が得られ、それは供給される仕事率から散逸する仕事率を引いたものに等しい。$4U$ のように両者がつり合う速さは一階微分方程式の**平衡点**（equilibria）であり、解がそこへどのように近づくかを調べることが力学系（dynamical systems）の始まりである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、仕事、仕事率、速度に依存する力をこのような流儀で扱っている。

解答例

STEP III 2016、第 12 問

確率・統計 ・ チェビシェフの不等式

> **STEP III 2016、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q12

鍵となる考え方

チェビシェフ（Chebyshev）の不等式（Chebyshev's inequality）は平均から遠く離れる確率を上から評価するものであるから、何かが平均に近いという主張は余事象（complement）から得られる。各小問でなすべきことは、適切な確率変数（random variable）を見抜き、その平均と標準偏差（standard deviation）を求め、$k\sigma$ がちょうど注目している距離になるように k を選ぶことである。小問 (ii) では、e^n と並んで現れる和 $\sum n^r/r!$ が、ポアソン分布（Poisson distribution）の「指紋」である。

解答

小問 (i)

$100n$ 回の投げのうち表が出る回数を X とする。各回の投げは独立（independent）で、それぞれ確率 0.2 で表が出ると仮定すると、$X \sim \mathrm{B}(100n, 0.2)$ であるから、

$$\mu = 100n \times 0.2 = 20n, \qquad \sigma^2 = 100n \times 0.2 \times 0.8 = 16n, \qquad \sigma = 4\sqrt{n}.$$

事象 $16n \le X \le 24n$ はちょうど $|X - 20n| \le 4n$ であるから、

$$\alpha = \mathrm{P}\big(|X-\mu| \le 4n\big) = 1 - \mathrm{P}\big(|X-\mu| > 4n\big).$$

$k\sigma = 4n$、すなわち $k \cdot 4\sqrt{n} = 4n$ としたいので、$k = \sqrt{n}$ であり、これは正である。チェビシェフの不等式により

$$\mathrm{P}\big(|X-\mu| > 4n\big) = \mathrm{P}\big(|X-\mu| > \sqrt{n}\,\sigma\big) \le \frac{1}{(\sqrt{n})^2} = \frac{1}{n},$$

となり、したがって

$$\alpha \geq 1 - \frac{1}{n},$$

が示された。（条件 $n > 1$ は、この評価が意味のある内容をもつようにするためのものにすぎない。$n = 1$ のときは $\alpha \geq 0$ となる。）

小問 (ii)

考えてみよう 確率が $n^r/r!$ のような形をしている確率変数は何か。

$Y \sim \mathrm{Po}(n)$ ならば $r = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $\mathrm{P}(Y = r) = \mathrm{e}^{-n} n^r / r!$ であるから、

$$\mathrm{e}^{-n}\left(1 + n + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^{2n}}{(2n)!}\right) = \mathrm{P}(Y \leq 2n).$$

したがって、示すべき不等式は、$\mathrm{e}^n > 0$ で割ると

$$\mathrm{P}(Y \leq 2n) \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

と同値である。ポアソン分布では平均と分散（variance）はともに n であるから、$\mu = n$、$\sigma = \sqrt{n}$ である。

考えてみよう チェビシェフの不等式は両側の評価であるが、$Y \leq 2n$ は片側の事象である。両者をどう対応させればよいか。

$Y \geq 0$ であるから常に $Y - n \geq -n$ が成り立ち、$Y - n < -n$ は起こりえない。よって

$$|Y - n| > n \iff Y - n > n \iff Y > 2n.$$

$k\sigma = n$ となるように $k = \sqrt{n}$ とすると、チェビシェフの不等式により

$$\mathrm{P}(Y > 2n) = \mathrm{P}\left(|Y - n| > \sqrt{n}\,\sigma\right) \leq \frac{1}{n},$$

となるので、$\mathrm{P}(Y \leq 2n) = 1 - \mathrm{P}(Y > 2n) \geq 1 - \frac{1}{n}$ である。両辺に e^n を掛けると

$$1 + n + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^{2n}}{(2n)!} \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\mathrm{e}^n,$$

となり、これが求める結果である。

検算

これらの評価は正しいが、かなり甘い。$n = 2$ のとき、(i) の二項分布による正確な確率は $\alpha \approx 0.868$ であり、評価の値 0.5 を大きく上回る。$n = 10$ のときは $\alpha \approx 0.9986$ で、評価の値は 0.9 である。(ii) で $n = 2$ のとき、左辺は $1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 7$ であり、一方 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^2 \approx 3.69$ である。両方の不等式を、(i) では 2 から 30 までのすべての n について、(ii) では 1 から 59 までのすべての n について厳密に確かめた。

よくある間違い

- k を選ぶときに、標準偏差 $4\sqrt{n}$ の代わりに分散 $16n$ を使ってしまう。
- チェビシェフの不等式が評価するのは区間の**外側**にある確率であり、α を得るには余事象を考える必要があることを忘れる。
- (ii) で、下側の裾 $Y < 0$ が何も寄与しない理由を説明しない。

STEP のその先へ

チェビシェフの不等式は**集中不等式**（concentration inequality）の最も簡単な例であり、これを m 回の独立な試行の平均に適用すると大数の弱法則（weak law of large numbers）が得られる。すなわち、ばらつきは $1/\sqrt{m}$ のように縮む。小問 (ii) はまた、指数関数の級数のうち $n^{2n}/(2n)!$ より先の部分（裾）が高々 e^n/n であることも述べており、これは確率によって証明された解析的な事実である。チェルノフ限界（Chernoff bounds）のようなより鋭い道具を使うと、真の確率は 1 に指数関数的に近いことがわかる。さらに詳しくは、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）を参照されたい。

解答例

STEP III 2016、第 13 問

確率・統計 ・ 和の尖度

STEP III 2016、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/16-s3-q13

鍵となる考え方

尖度（kurtosis）は平均（mean）からの偏差だけからつくられるので、確率変数を平行移動しても変わらない。このおかげで、すべての確率変数を 0 を中心とするように取り直し、通常のモーメント（moment）で計算することができる。正規分布（Normal distribution）の場合、4 次のモーメントは部分積分（integration by parts）によって求まる。その際、x の因数を 1 つ切り離して指数関数と組にするのである。平均が 0 の独立（independent）な確率変数の和については、T^4 を展開して期待値をとると、ある変数が 1 乗で現れる項はすべて消える。これが小問 (ii) のすべてであり、それがそのまま小問 (iii) につながる。

解答

平行移動. $W = X - a$ とおく。期待値の線形性（linearity of expectation）により $\mathrm{E}(W) = \mu - a$ であるから、

$$W - \mathrm{E}(W) = (X - a) - (\mu - a) = X - \mu.$$

W の平均からの偏差は、X の平均からの偏差とちょうど一致する。したがって W は同じ分散（variance）$\mathrm{E}\big((X-\mu)^2\big) = \sigma^2$、同じ 4 次の中心モーメント（fourth central moment）$\mathrm{E}\big((X-\mu)^4\big)$ をもち、よって同じ尖度をもつ。特に $a = \mu$ とすると、どの確率変数も、平均が 0 となるように中心化したもの $X - \mu$ と同じ尖度をもつ。

小問 (i)

$X \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ とし、その確率密度関数（probability density）を

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)}, \qquad \text{したがって} \qquad f'(x) = -\frac{x}{\sigma^2}\,f(x)$$

とする。$\mu = 0$ であるから、求めるべきものは $\mathrm{E}(X^4) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ である。

> **考えてみよう** $\mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)}$ は初等関数で表せる原始関数（antiderivative）をもたないのに、$x^4\mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)}$ をどのように積分すればよいだろうか。

関数 $xf(x)$ は原始関数をもつ。すなわち $-\sigma^2 f(x)$ である。そこで $x^4 f(x) = x^3 \cdot xf(x)$ と書き、$u = x^3$、$\mathrm{d}v = xf(x)\,\mathrm{d}x$、$v = -\sigma^2 f(x)$ として部分積分すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\sigma^2 x^3 f(x)\Big]_{-\infty}^{\infty} + 3\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$x \to \pm\infty$ のとき $x^3\mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)} \to 0$ となるので（指数関数はどんな累乗が増大するよりも速く減衰する）、境界項は消える。$u = x$ として同じ操作を行うと、

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\sigma^2 x f(x)\Big]_{-\infty}^{\infty} + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sigma^2$$

を得る。ここで、f は確率密度関数なので積分すると 1 になることを用いた。（これにより分散が σ^2 であることも確かめられる。）よって $\mathrm{E}(X^4) = 3\sigma^2 \cdot \sigma^2 = 3\sigma^4$ であり、

$$\kappa = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} - 3 = 0.$$

平行移動の結果により、平均が何であっても、すべての正規分布の尖度は 0 である。

小問 (ii)

$T^4 = (Y_1 + \cdots + Y_n)^4$ を多項定理（multinomial theorem）によって展開する。各項は 4 つの因数 Y_r の積であり、4 つの因数が相異なる添字にどのように割り振られるかによって、項は次の 5 つの型に分けられる。

$$Y_r^4, \qquad 4\,Y_r^3 Y_s, \qquad 6\,Y_r^2 Y_s^2, \qquad 12\,Y_r^2 Y_s Y_t, \qquad 24\,Y_r Y_s Y_t Y_u,$$

ここで、異なる文字は異なる添字を表す。係数は並べ方の数を数えたものである。たとえば $Y_r^2 Y_s^2$ は、4 つの括弧のうちどの 2 つから Y_r をとるかを選ぶことで生じ、その方法は $\binom{4}{2} = 6$ 通りである。順序を考えない各組 $\{r, s\}$ は、$Y_r^2 Y_s^2$ 型の中にちょうど 1 回ずつ現れる。

次に期待値をとる。Y は互いに独立なので、異なる Y の累乗の積の期待値は、それぞれの期待値の積に等しい。$Y_r^3 Y_s$、$Y_r^2 Y_s Y_t$、$Y_r Y_s Y_t Y_u$ の型では、ある変数が 1 乗でしか

現れず、その因数 $\mathrm{E}(Y_s) = 0$ によって期待値全体が 0 になる。たとえば

$$\mathrm{E}(Y_r^3 Y_s) = \mathrm{E}(Y_r^3)\,\mathrm{E}(Y_s) = 0.$$

残るのは 1 番目と 3 番目の型だけであり、やはり独立性により、$r \neq s$ のとき $\mathrm{E}(Y_r^2 Y_s^2) = \mathrm{E}(Y_r^2)\,\mathrm{E}(Y_s^2)$ である。組を $r < s$ として列挙すると、

$$\mathrm{E}(T^4) = \sum_{r=1}^{n} \mathrm{E}(Y_r^4) + 6 \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=r+1}^{n} \mathrm{E}(Y_r^2)\,\mathrm{E}(Y_s^2)$$

となり、示すべき式が得られた。（この小問では独立性と平均が 0 であることを用いたが、Y が同一の分布に従うことは用いていない点に注意せよ。）

小問 (iii)

各 X_r の平均を μ、標準偏差（standard deviation）を σ とし、$S = X_1 + \cdots + X_n$ とおく。$Y_r = X_r - \mu$ とおく。Y_r は平均 0 の独立同分布（independent and identically distributed）な確率変数であり、

$$\mathrm{E}(Y_r^2) = \sigma^2, \qquad \mathrm{E}(Y_r^4) = (\kappa + 3)\sigma^4$$

が成り立つ。2 つ目の式は κ の定義を変形したものである。このとき $T = \sum Y_r = S - n\mu$ である。平行移動の結果により S は T と同じ尖度をもつので、平均が 0 である T を考えればよい。

独立性により $\mathrm{Var}(T) = \sum \mathrm{Var}(Y_r) = n\sigma^2$ である。小問 (ii) の二重和は $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ 個の項からなり、各項は σ^4 に等しいので、

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(T^4) &= n(\kappa + 3)\sigma^4 + 6 \cdot \tfrac{1}{2}n(n-1)\sigma^4 \\ &= n\sigma^4\big(\kappa + 3 + 3(n-1)\big) = n\sigma^4(\kappa + 3n). \end{aligned}$$

したがって T の尖度、すなわち S の尖度は

$$\frac{\mathrm{E}(T^4)}{\big(\mathrm{Var}\,T\big)^2} - 3 = \frac{n\sigma^4(\kappa + 3n)}{n^2\sigma^4} - 3 = \frac{\kappa}{n} + 3 - 3 = \frac{\kappa}{n}$$

となり、示すべき結果が得られた。

検算

- Y がそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で $Y = \pm 1$ をとるとする。このとき $\mathrm{E}(Y^4) = \sigma^4 = 1$ なので $\kappa = 1 - 3 = -2$ である。$n = 2$ のとき、和は値 $-2, 0, 2$ をそれぞれ確率 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ でとるので、$\mathrm{E}(T^4) = 8$、$\mathrm{Var}\,T = 2$ である。よって尖度は $8/4 - 3 = -1 = \kappa/2$ となり、予想どおりである。

- $n = 1$ のとき、小問 (iii) は何も変わらないことを述べており、当然そうあるべきである。
- 独立な正規分布に従う確率変数の和は正規分布に従うので、$\kappa = 0$ のときの小問 (iii) は再び 0 を与えなければならず、実際そうなっている。
- 3 つの値をとる確率変数の独立なコピーを最大 6 個まで加えた和の尖度が、ちょうど κ/n になることを、正確な分数を用いてコンピュータで確認した。また、いくつかの σ の値について $\int x^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 3\sigma^4$ となることも数値的に確かめた。

よくある間違い

- $Y_r^2 Y_s^2$ の係数を間違える。正しくは順序を考えない組 1 つあたり $\binom{4}{2} = 6$（順序を考える組 1 つあたりなら 3）であり、4 や 12 ではない。
- 小問 (ii) を使う前に X_r を中心化し忘れる。小問 (ii) は平均が 0 であることを必要とする。
- $(n\sigma^2)^2$ ではなく σ^4 で割ってしまう。和の分散は $n\sigma^2$ である。

STEP のその先へ

ここで定義した尖度は、4 次の**キュミュラント**（cumulant）を σ^4 で割ったものである。キュミュラントとは、積率母関数（moment generating function）の対数を展開したときの係数であり、独立な確率変数の和に対しては単純に足し合わされる。このため、和の標準化された 4 次のキュミュラントは $1/n$ のように小さくなり、3 次のもの（歪度（skewness））は $1/\sqrt{n}$ のように小さくなる。これは中心極限定理（central limit theorem）を定量的に垣間見せるものである。すなわち、和はますます正規分布に近づいていき、正規分布では 2 次より高次のキュミュラントはすべて 0 である。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、このレベルで母関数と中心極限定理を展開している。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

2016 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

