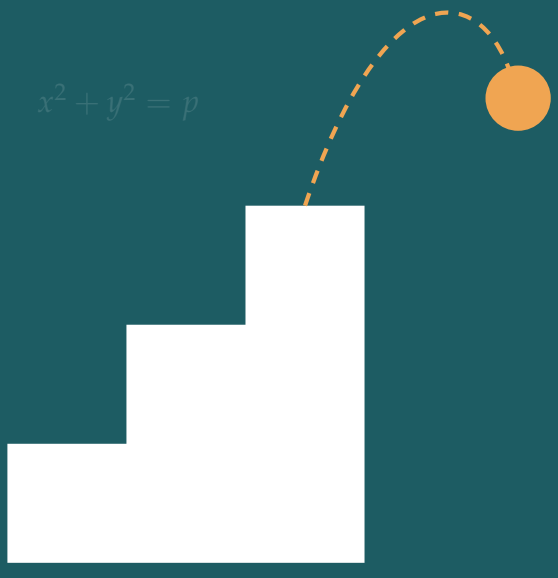
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

2015 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

2015 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

2015 年解答例

2015 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 39 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 曲線の概形 純粋数学 . . . 3
Q2 3次方程式の三角関数による解法 純粋数学 . . . 8
Q3 座標幾何と可視性 純粋数学 . . . 12
Q4 媒介変数表示された曲線と面積 純粋数学 . . . 16
Q5 パラメータを含む積分 純粋数学 . . . 19
Q6 幾何におけるベクトル 純粋数学 . . . 23
Q7 区間における最大値 純粋数学 . . . 26
Q8 べき乗和の整除性 純粋数学 . . . 30
Q9 放物運動 力学 . . . 34
Q10 相対速度 力学 . . . 38
Q11 摩擦とモーメント 力学 . . . 42
Q12 ポアソン分布の間引き 確率・統計 . . . 47
Q13 条件付き確率 確率・統計 . . . 51

STEP II

Q1 不等式と級数 純粋数学 . . . 55
Q2 三角形の幾何 純粋数学 . . . 59
Q3 数え上げと数学的帰納法 純粋数学 . . . 63
Q4 逆正接関数の分枝 純粋数学 . . . 67
Q5 逆正接関数の級数 純粋数学 . . . 73
Q6 対称性による積分 純粋数学 . . . 77
Q7 交わる円 純粋数学 . . . 81
Q8 ベクトルと接する円 純粋数学 . . . 85
Q9 剛体の回転 力学 . . . 89

Q10 束縛運動 力学 . . . 93
Q11 運動量とエネルギー 力学 . . . 97
Q12 硬貨の表裏の列のゲーム 確率・統計 . . . 102
Q13 指数分布のモーメント 確率・統計 . . . 107

STEP III

Q1 積分の漸化式と置換 純粋数学 . . . 111
Q2 解析学 純粋数学 . . . 115
Q3 極方程式の曲線と面積 純粋数学 . . . 119
Q4 3次方程式の解 純粋数学 . . . 124
Q5 無限降下法による無理性の証明 純粋数学 . . . 128
Q6 解の対称式 純粋数学 . . . 132
Q7 微分作用素 純粋数学 . . . 136
Q8 極座標の微分方程式 純粋数学 . . . 140
Q9 非線形弾性振動 力学 . . . 145
Q10 回転する剛体棒 力学 . . . 149
Q11 円運動 力学 . . . 153
Q12 確率母関数 確率・統計 . . . 158
Q13 一様分布に従う確率変数の関数 確率・統計 . . . 162

解答例

STEP I 2015、第 1 問

純粋数学 • 曲線の概形

> **STEP I 2015、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q1

鍵となる考え方

因数分解できるものはすべて因数分解する。2 次式が因数分解できるので零点（zeros）はすぐにわかり、導関数（derivative）もまた e^x と因数分解できる 2 次式の積になるので、極値をとる点（turning points）もすぐにわかる。グラフの概形が正しく描ければ、「曲線 $= k$」の解の個数を数えるには、水平な直線を上下に動かし、それが曲線と何回交わるかを見ればよい。小問 (ii) では、新しい関数がもとの関数に x^2 を代入したものであることに気づけば、ほとんどすべてを再利用できる。

解答

小問 (i)

$f(x) = e^x(2x^2 - 5x + 2) = e^x(2x - 1)(x - 2)$ とおく。

零点と符号。 $e^x > 0$ であるから、$f(x) = 0$ となるのはちょうど $x = \frac{1}{2}$ または $x = 2$ のときである。また、f は $x < \frac{1}{2}$ および $x > 2$ で正、$(\frac{1}{2}, 2)$ で負である。曲線は $f(0) = 2$ において y 軸と交わる。

極値をとる点。 積の微分法（product rule）により、

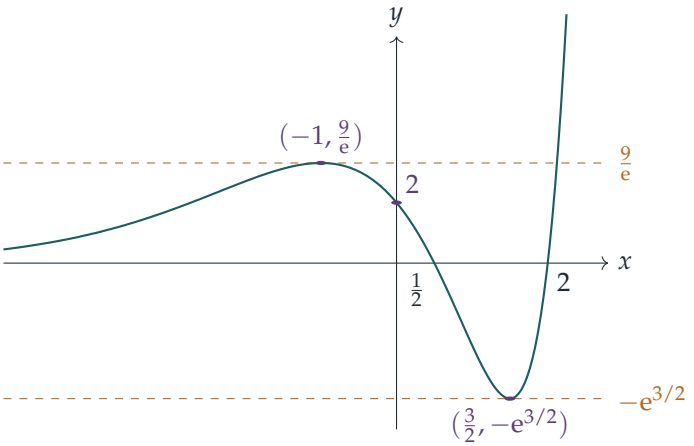
$$f'(x) = e^x(2x^2 - 5x + 2) + e^x(4x - 5) = e^x(2x^2 - x - 3) = e^x(2x - 3)(x + 1).$$

よって $f'(x) = 0$ となるのは $x = -1$ と $x = \frac{3}{2}$ である。f' の符号は $(2x - 3)(x + 1)$ の符号と一致し、$x < -1$ で正、$(-1, \frac{3}{2})$ で負、$x > \frac{3}{2}$ で正である。したがって f は増加

し、次に減少し、再び増加する。そして

$$f(-1) = \mathrm{e}^{-1}(2+5+2) = \frac{9}{\mathrm{e}} \approx 3.31 \qquad \text{（極大値）},$$
$$f(\tfrac{3}{2}) = \mathrm{e}^{3/2}(\tfrac{9}{2} - \tfrac{15}{2} + 2) = -\mathrm{e}^{3/2} \approx -4.48 \qquad \text{（極小値）}.$$

両端での振る舞い。 $x \to \infty$ のとき両方の因数が大きくなるので、$f(x) \to \infty$ である。$x \to -\infty$ のとき、与えられた事実（$n = 2, 1, 0$ の場合）から $2x^2\mathrm{e}^x$、$-5x\mathrm{e}^x$、$2\mathrm{e}^x$ のいずれも 0 に収束（converge）するので、$f(x) \to 0$ である。$x < \frac{1}{2}$ で $f > 0$ であるから、曲線は x 軸の負の部分に上から近づく。すなわち x 軸は漸近線（asymptote）である。



$f(x) = k$ の解の個数を数える。 解の個数は、水平な直線 $y = k$ が曲線と交わる回数に等しい。曲線を単調（monotonic）な 3 つの部分に分けて順に見ていく。

- $(-\infty, -1]$ では、f は狭義単調増加（strictly increasing）であり、$(0, \frac{9}{\mathrm{e}}]$ のすべての値をちょうど 1 回ずつとる（0 には決して達しない）。
- $[-1, \frac{3}{2}]$ では、f は $\frac{9}{\mathrm{e}}$ から $-\mathrm{e}^{3/2}$ まで狭義単調減少し、その間の各値をちょうど 1 回ずつとる。
- $[\frac{3}{2}, \infty)$ では、f は $-\mathrm{e}^{3/2}$ から ∞ まで狭義単調増加し、各値をちょうど 1 回ずつとる。

それぞれの寄与を合計すると（$x = -1$ や $x = \frac{3}{2}$ を二重に数えないよう注意する）、次のようになる。

$k < -e^{3/2}$	解なし
$k = -e^{3/2}$	解は 1 個（$x = \frac{3}{2}$）
$-e^{3/2} < k \leq 0$	解は 2 個
$0 < k < \frac{9}{e}$	解は 3 個
$k = \frac{9}{e}$	解は 2 個（$x = -1$ と、$x > 2$ を満たすもの 1 個）
$k > \frac{9}{e}$	解は 1 個

考えてみよう なぜ $k = 0$ のとき解は 3 個ではなく 2 個なのか？

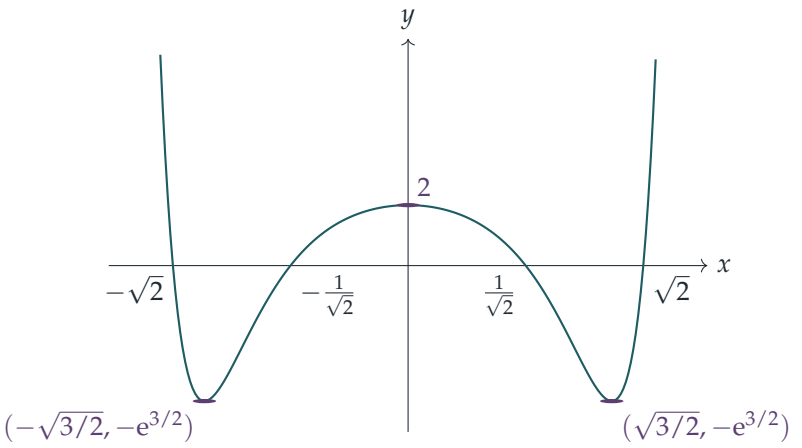
x 軸は左側で漸近線になっており、すべての $x < \frac{1}{2}$ に対して $f(x) > 0$ であるから、左端の部分は実際には決して 0 に達しない。$f(x) = 0$ の解は $x = \frac{1}{2}$ と $x = 2$ だけである。しかし、どんなに小さな $k > 0$ に対しても左側の部分は高さ k に達するので、解の個数は 3 個に跳ね上がるのである。

小問 (ii)

$g(x) = e^{x^2}(2x^4 - 5x^2 + 2)$ とおく。このとき $g(x) = f(x^2)$ であるから、g は偶関数（even function）であり、そのグラフは y 軸に関して対称である。x が $[0, \infty)$ を動くとき、$u = x^2$ は $[0, \infty)$ を増加しながら動くので、$x \geq 0$ における g のグラフは、f のグラフの $u \geq 0$ の部分をそのままなぞるだけである。

- $g(0) = f(0) = 2$ である。
- 零点は $x^2 = \frac{1}{2}$ または $x^2 = 2$ となるところ、すなわち $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ と $x = \pm\sqrt{2}$ である。
- 合成関数の微分法（chain rule）により $g'(x) = 2x\,f'(x^2) = 2x\,e^{x^2}(2x^2 - 3)(x^2 + 1)$ であり、これが 0 になるのは $x = 0$ と $x = \pm\sqrt{3/2}$ のときだけである。（$x^2 = -1$ は実数解をもたないので、f の $u = -1$ における極値の点は消えている。）

$0 < x < \sqrt{3/2}$ では $g'(x) < 0$、$x > \sqrt{3/2}$ では $g'(x) > 0$ である。よって $(0, 2)$ は極大点であり（対称性により、0 のすぐ左側では $g' > 0$）、$x = \pm\sqrt{3/2}$ は極小点で、その値は $f(\frac{3}{2}) = -e^{3/2}$ である。最後に、$x \to \pm\infty$ のとき $g(x) \to \infty$ であり、e^{x^2} という因数のために非常に急速に増大する。曲線は「W」字形になる。



検算

- $f(-1) = 9/e \approx 3.311$、$f(1.5) = -e^{1.5} \approx -4.482$ であり、近くのいくつかの点で f の値を計算すると、これらがそれぞれ極大値と極小値であることが確かめられる。
- $x = 0$ の近くでは $g(x) = f(x^2) \approx f(0) + f'(0)x^2 = 2 - 3x^2$ となり、これは下に凸でない（上に凸の）放物線であるから、$(0, 2)$ が極大点であることが確かめられる。
- 解の個数は、各範囲から k の値をいくつか選んでコンピュータで確認した（たとえば $k = 2$ では解は 3 個、$k = -1$ では解は 2 個）。
- $f(-40) \approx 1.4 \times 10^{-14}$ であり、漸近線から予想されるとおり、正で非常に小さい。

よくある間違い

- 曲線が左側では x 軸に近づくだけであることを忘れて、$k = 0$ のとき解を 3 個と数えてしまう。
- 境界の場合 $k = \frac{9}{e}$ と $k = -e^{3/2}$ を見落とす。これらの場合、直線は曲線に接し、2 つの解が 1 つに重なる。
- 小問 (ii) で、$x^2 = -1$ に対応する極値の点を残してしまう。

STEP のその先へ

解の個数を数える議論は、中間値の定理（intermediate value theorem）と狭義単調性とに基づいている。すなわち、区間上で連続かつ狭義単調増加な関数は、両端の値の間にある各値をちょうど 1 回ずつとる。大学の解析学の講義では、これらの事実

を、ここで仮定してよいとされた極限 $x^n e^x \to 0$ とともに丁寧に証明する。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、それがどのように行われるかを知るのに非常に読みやすい本である。

解答例

STEP I 2015、第 2 問

純粋数学 • 3 次方程式の三角関数による解法

> **STEP I 2015、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q2

鍵となる考え方

三次式(cubic)$4x^3 - 3x$ は、三倍角の公式(triple-angle formula)$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ にちょうど現れる形である。したがって、この形の三次方程式は、解を余弦の値として見当をつければ解ける。解が一つわかれば因数分解（factorise）でき、残った二次方程式を解けばよい。最後の小問では、変数の置き換え $y = 2x$ によって与えられた三次方程式をこの形に直す。そこで必要となる正確な値は小問 (i) で求めてある。

解答

小問 (i)

$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ と書き、加法定理（compound-angle formulae）を用いる。

$$\cos 15^\circ = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},$$

となり、示すべき式が得られた。同様にして

$$\sin 15^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

分母を有理化（rationalise the denominator）すると、同値な形

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \qquad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

が得られる。小問 (iii) ではこちらの形のほうが扱いやすい。

小問 (ii)

$c = \cos\alpha$、$s = \sin\alpha$ とおく。$\cos(2\alpha + \alpha)$ を展開すると

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha \\ &= (2c^2 - 1)c - 2s^2 c \\ &= 2c^3 - c - 2(1 - c^2)c \\ &= 4c^3 - 3c.\end{aligned}$$

よって $4c^3 - 3c - \cos 3\alpha = 0$ であり、$x = \cos\alpha$ は解である。

他の解を求めるため、$\cos 3\alpha$ を $4c^3 - 3c$ で置き換えて因数分解する。

$$\begin{aligned}4x^3 - 3x - (4c^3 - 3c) &= 4(x^3 - c^3) - 3(x - c) \\ &= (x - c)\big(4x^2 + 4cx + 4c^2 - 3\big).\end{aligned}$$

考えてみよう 二次の因数の判別式はどのように簡単にできるか？

$c^2 + s^2 = 1$ を用いると、判別式（discriminant）は $16c^2 - 16(4c^2 - 3) = 48(1 - c^2) = 48s^2$ である。その平方根は $4\sqrt{3}\,|s|$ であるが、符号 $\pm$ の両方をとるので絶対値は外してよい。解の公式（quadratic formula）より

$$x = \frac{-4c \pm 4\sqrt{3}\,s}{8},$$

となるので、残りの二つの解は

$$x = -\tfrac{1}{2}\cos\alpha + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha \quad \text{および} \quad x = -\tfrac{1}{2}\cos\alpha - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha.$$

である。これらは $\cos(\alpha - 120^\circ)$ と $\cos(\alpha + 120^\circ)$ に等しい。これは納得のいく結果である。実際、$3(\alpha \pm 120^\circ) = 3\alpha \pm 360^\circ$ であるから、これらの角は α と同じ $\cos 3\theta$ の値をもつ。

小問 (iii)

考えてみよう 与えられた三次式は $y^3 - 3y - \sqrt{2}$ であり、$4x^3 - 3x - \cdots$ の形ではない。両者をどのように対応させればよいか？

小問 (ii) と同じように、三次の係数と一次の係数の比を 4 対 3 にしたい。$y = 2x$ とおくと

$$8x^3 - 6x - \sqrt{2} = 0 \iff 4x^3 - 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

これは $\cos 3\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$ とした小問 (ii) の方程式であるから、$\alpha = 15^\circ$ ととればよい。すると小問 (ii) から三つの解 x が得られる。これらは互いに異なる（後述）ので、三次方程式の解はこれですべてであり、$y = 2x$ より

$$y = 2\cos\alpha, \qquad y = -\cos\alpha \pm \sqrt{3}\sin\alpha, \qquad \alpha = 15^\circ.$$

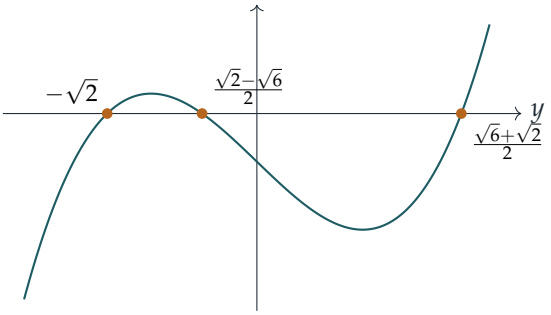
となる。ここに小問 (i) の値を代入する。

- $y = 2\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$。
- $y = -\cos 15^\circ + \sqrt{3}\sin 15^\circ = \dfrac{-(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + (\sqrt{18}-\sqrt{6})}{4}$ であり、これを整理すると $\dfrac{2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ となる。
- $y = -\cos 15^\circ - \sqrt{3}\sin 15^\circ = \dfrac{-(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - (3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4} = -\sqrt{2}$。

ここで $\sqrt{3}\sqrt{6} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ を用いた。この三つの値は明らかに互いに異なる。よって解は

$$y = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \qquad y = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}, \qquad y = -\sqrt{2}.$$

である。角を用いて表せば、それぞれ $2\cos 15^\circ$、$2\cos 255^\circ$、$2\cos 135^\circ$ である。



検算

- $y^3 - 3y - \sqrt{2}$ の y^2 の係数は 0 であるから、解の和は 0 でなければならない。実際、$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} - \sqrt{2} = 0$ である。
- 解の積は $\sqrt{2}$ になるはずである。$(\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{6}) = 2-6 = -4$ であるから、積は $(-1)\cdot(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ となる。
- 解 $y = -\sqrt{2}$ は直接確かめやすい：$-2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$。数値的には $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \approx 1.93185$ であり、$(1.93185)^3 - 3(1.93185) \approx 1.41421 = \sqrt{2}$ となる。

- 小問 (ii) で $\alpha = 0$ とすると、方程式 $4x^3 - 3x - 1 = 0$、すなわち $(x-1)(2x+1)^2 = 0$ が得られる。公式から得られる解は $1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ であり、確かに一致する。

よくある間違い

- 小問 (iii) で変数の置き換えを忘れ、$4x^3 - 3x - \sqrt{2} = 0$ を解いてしまう。この方程式では $\cos 3\alpha = \sqrt{2} > 1$ が必要となり、これは不可能である。
- $y = 2x$ ではなく x の値を答えとしてしまう。
- 符号 $\pm$ によって $\sin\alpha < 0$ の場合も扱えていることに触れずに、$\sqrt{3(1-c^2)} = \sqrt{3}\sin\alpha$ と書いてしまう。

STEP のその先へ

これは三つの実数解をもつ三次方程式を解く三角関数による方法であり、ヴィエト（Viète）によるものである。どの三次方程式も、平行移動によって二次の項を消去し、$t^3 + pt + q = 0$ の形にできる。$p < 0$ のとき、$t = 2\sqrt{-p/3}\,x$ という置き換えによって $4x^3 - 3x = k$ の形になる。この場合、カルダノの公式（Cardano's formula）は役に立たない。三つの解がすべて実数であるにもかかわらず、負の数の平方根を経由してしまうからである。なぜそうなるのか、そして余弦を用いる工夫がなぜそれを回避できるのかを考えると、自然に複素数（complex numbers）と 1 の累乗根（roots of unity）へと導かれる。Needham の *Visual Complex Analysis* は、これについての美しい幾何学的描像を与えている。

解答例

STEP I 2015、第 3 問

純粋数学 • 座標幾何と可視性

STEP I 2015、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

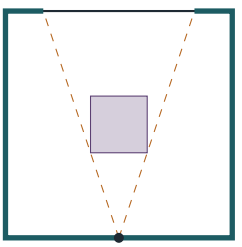
step.maths.org/questions/15-s1-q3

鍵となる考え方

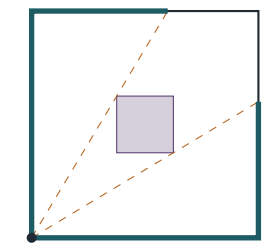
警備員の視線は建物によってさえぎられる。建物は凸（convex）な正方形なので、その角の一つをかすめる直線が、壁の見える部分の終わる位置を決める。そこで、各位置についてこのかすめる直線を引き、それが外周と交わる点を求めて、見える長さを足し合わせればよい。計算はすべて相似な三角形（similar triangles）（あるいは直線の方程式）で済む。数 $3a$ は、壁の中点から引いたかすめる直線がちょうど中庭の隅に達するときの b の値として現れる。

解答

原点を中心にとる。すると外周の壁は辺が $x = \pm\frac{b}{2}, y = \pm\frac{b}{2}$ 上にある正方形であり、建物は正方形 $|x| \leq \frac{a}{2}, |y| \leq \frac{a}{2}$ である。ただし $0 < a < b$ とする。外周（perimeter）の全長は $4b$ である。警備員が壁上の点 Q を見ることができるのは、警備員から Q への線分（segment）が建物を通らないとき、かつそのときに限る。



壁の中点（$b > 3a$）



隅

壁の太線（ティール色）の部分が警備員から見える部分であり、破線は建物の角をかすめる直線である。

壁の中点にいる警備員

警備員が下側の壁の中点 $G = (0, -\frac{b}{2})$ にいるとする。建物は下側の壁より真に上にあるので、下側の壁全体が見え、その長さは b である。y 軸に関する対称性（symmetry）により、右側だけを調べればよい。

右上に向かう視線が建物に当たらないのは、それが最も近い角 $K = (\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$ の右側を通るとき、かつそのときに限る。（この直線はまず $y = -\frac{a}{2}$ と交わり、上に進むにつれて x 座標が増加する。したがって高さ $-\frac{a}{2}$ で建物の右側にあれば、その後も右側にとどまる。一方、そこで K の左側にあれば、高さ $-\frac{a}{2}$ での x 座標は 0 と $\frac{a}{2}$ の間にあるから、建物の中に入ってしまう。）よって G から見える範囲の境界は直線 GK である。この直線は水平距離 $\frac{a}{2}$ の間に $\frac{b-a}{2}$ だけ上昇するので、傾き（gradient）は $\frac{b-a}{a}$ である。

この直線は右側の壁 $x = \frac{b}{2}$ と高さ

$$y_1 = -\frac{b}{2} + \frac{b}{2} \cdot \frac{b-a}{a} = -\frac{b}{2} + \frac{b(b-a)}{2a}.$$

で交わる。これがその壁の上端に達する（$y_1 \geq \frac{b}{2}$）のは $\frac{b-a}{a} \geq 2$、すなわち $b \geq 3a$ のとき、かつそのときに限る。

考えてみよう なぜここで b と $3a$ の大小比較が出てくるのだろうか？

それは、かすめる直線 GK がどの壁に当たるかを決めるからである。$b < 3a$ ならば右側の壁に、$b > 3a$ ならば向かい側（上側）の壁に当たる。二つの場合で、見える長さの式は異なる。

場合 $b < 3a$。 警備員には右側の壁が下端の隅から高さ y_1 まで見え、その長さは

$$y_1 + \frac{b}{2} = \frac{b(b-a)}{2a},$$

である。それより先は見えない（その壁のより高い点や上側の壁へ向かう直線は、すべて K の左側を通る）。左側の対応する部分を合わせると、見える長さの合計は

$$M = b + 2 \cdot \frac{b(b-a)}{2a} = b + \frac{b(b-a)}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

である。

場合 $b > 3a$。 このとき右側の壁全体（長さ b）が見える。直線 GK は b だけ上昇したところで上側の壁 $y = \frac{b}{2}$ と交わるから、その交点は

$$x = \frac{a}{b-a} \cdot b = \frac{ab}{b-a},$$

であり、$2a < b - a$ なのでこれは $\frac{b}{2}$ より小さい。警備員には上側の壁がそこから隅まで見え、その長さは $\frac{b}{2} - \frac{ab}{b-a} = \frac{b(b-3a)}{2(b-a)}$ である。下側の壁、両側の壁、上側の壁の二つの部分を足し合わせると

$$M = 3b + \frac{b(b-3a)}{b-a} = \frac{3b(b-a) + b(b-3a)}{b-a} = \frac{b(4b-6a)}{b-a}.$$

隅にいる警備員

警備員が $H = (-\frac{b}{2}, -\frac{b}{2})$ にいるとする。H を通る二つの壁は全体が見え、その長さは $2b$ である。図は対角線 $y = x$ に関して対称なので、右側の壁を調べる。先ほどと同じ議論により、見える部分は H と角 $K = (\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$ を通る直線で区切られ、その傾きは

$$\frac{\frac{b}{2} - \frac{a}{2}}{\frac{b}{2} + \frac{a}{2}} = \frac{b-a}{b+a}.$$

である。壁 $x = \frac{b}{2}$ までの水平距離 b の間に、この直線は $\frac{b(b-a)}{a+b}$ だけ上昇する。これは b より小さいので、a と b の値にかかわらず、この直線は常に右側の壁に当たる。警備員には右側の壁が長さ $\frac{b(b-a)}{a+b}$ だけ見え、上側の壁も同じ長さだけ見え、どちらの壁もそれ以外の部分は見えない。したがって

$$C = 2b + \frac{2b(b-a)}{a+b} = \frac{2b(a+b) + 2b(b-a)}{a+b} = \frac{4b^2}{a+b}.$$

二つの位置の比較

場合 $b < 3a$。

$$C - M = \frac{4b^2}{a+b} - \frac{b^2}{a} = \frac{b^2\big(4a - (a+b)\big)}{a(a+b)} = \frac{b^2(3a-b)}{a(a+b)} > 0,$$

よって**隅**のほうがよい。

場合 $b > 3a$。

$$M - C = \frac{b(4b-6a)}{b-a} - \frac{4b^2}{a+b} = \frac{b\big[(4b-6a)(a+b) - 4b(b-a)\big]}{(b-a)(a+b)} = \frac{2ab(b-3a)}{(b-a)(a+b)} > 0,$$

ここで $(4b-6a)(a+b) - 4b(b-a) = 4b^2 - 2ab - 6a^2 - 4b^2 + 4ab = 2ab - 6a^2$ を用いた。よって**壁の中点**のほうがよい。

$b = 3a$ のときは M の二つの式はどちらも $9a$ を与え、$C = \frac{36a^2}{4a} = 9a$ でもあるので、二つの位置は同等である。

検算

- $a = 1, b = 2$ とすると $M = 4$、$C = \frac{16}{3} \approx 5.33$ であり、隅のほうがよい。$a = 1, b = 5$ とすると $M = \frac{5 \cdot 14}{4} = 17.5$、$C = \frac{100}{6} \approx 16.67$ であり、中点のほうがよい。これらの値は、壁に沿った数千個の点への視線を調べるコンピュータによる検証で確認した。
- $b \to a$ とすると建物が中庭全体を埋める。このとき $M \to a$（警備員自身のいる壁のみ）、$C \to 2a$（隅で交わる二つの壁）となり、期待どおりである。
- $b \to \infty$ とすると建物は無視できるほど小さくなる。$M = \frac{b(4b-6a)}{b-a}$ と $C = \frac{4b^2}{a+b}$ はどちらも外周の全長 $4b$ に近づき、どちらも常にそれより小さい。

よくある間違い

- $b > 3a$ のとき、壁の中点にいる警備員には両側の壁だけでなく、向かい側の壁の一部も見えることを忘れる。
- 建物の誤った角をかすめさせる。下から見るとき、問題となる角は下側の二つ $(\pm\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$ である。
- 警備員自身のいる壁（または壁たち）を合計に含め忘れる。

STEP のその先へ

領域のどの部分がある点から見えるかという問題は、計算幾何学（computational geometry）に属する。古典的な「美術館定理」（art gallery theorem）によれば、n 本の壁をもつ多角形の美術館のすべての点を見張るには、$\lfloor n/3 \rfloor$ 人の警備員が常に十分であり、場合によってはその人数が必要となる。ここで行ったように可視領域を求めることは、そうした問題の基本的な第一歩であり、コンピュータグラフィックスにおいても同様である。そこでは陰面消去（hidden-surface removal）が同じ原理で働いている。この種の問題をさらに解きたければ、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）が次の一歩としてよい。

解答例

STEP I 2015、第 4 問

純粋数学 ・ 媒介変数表示された曲線と面積

STEP I 2015、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/15-s1-q4

鍵となる考え方

曲線の傾き（gradient）をパラメータとして用いる。中点における接線（tangent）が x 軸となす角を θ とすると、そこでの傾きは $\tan\theta$ であり、これにより中点が定まる。各端点は、中点から単位ベクトル（unit vector）$(\cos\theta, \sin\theta)$ の方向に距離 b だけ離れた点である。面積については、半分の棒 AP が P における接線上にあるので、領域は放物線（parabola）とその接線の一本に挟まれた部分にすぎず、その被積分関数（integrand）は完全平方式（perfect square）になる。

解答

端点の軌跡

中点を P とし、棒が x 軸の正の向きとなす角を θ とする。$y = \frac{1}{4}x^2$ では $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}x$ であり、棒は P において曲線に接するから、

$$\tfrac{1}{2}x_P = \tan\theta, \qquad \text{よって} \qquad P = \left(2\tan\theta,\ \tan^2\theta\right).$$

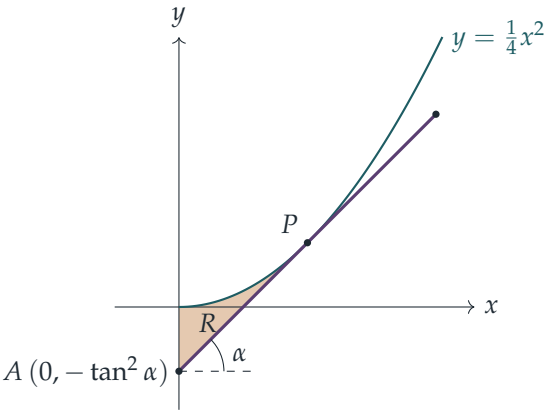
条件 $x \geq 0$ より $\tan\theta \geq 0$ であるから、$0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi$ としてよい。θ がこの範囲を動くとき、$2\tan\theta$ は $[0, \infty)$ のすべての値をとるので、中点のどの位置もただ一つの θ から得られる。

棒の方向の単位ベクトルは $(\cos\theta, \sin\theta)$ であり、各端点は P から距離 b にある。したがって端点は $P \pm b(\cos\theta, \sin\theta)$ である。負号をとると（下側、左側の端点）、

$$x = 2\tan\theta - b\cos\theta,$$
$$y = \tan^2\theta - b\sin\theta,$$

となり、求める式が得られた。（もう一方の端点は、$-b$ を $+b$ に置き換えた同じ式で表される曲線を描く。）

R の面積



y 軸に達する端点は $x = 2\tan\theta - b\cos\theta$ のほうである。もう一方の端点は常に $x = 2\tan\theta + b\cos\theta > 0$ だからである。よって $\theta = \alpha$ のとき、

$$2\tan\alpha = b\cos\alpha.$$

A の y 座標は $\tan^2\alpha - b\sin\alpha$ であり、直前の式を使って b を消去できる：

$$b\sin\alpha = (b\cos\alpha)\tan\alpha = 2\tan^2\alpha, \qquad \text{よって} \qquad A = \big(0, -\tan^2\alpha\big).$$

考えてみよう A は原点に対してどこにあるか。また、直線 AP の方程式は何か。

A は原点の下にあり、直線 AP は P における放物線の接線である。$t = \tan\alpha$ とおく。$P = (2t, t^2)$ における接線の傾きは t であるから、その方程式は

$$y = t^2 + t(x - 2t) = tx - t^2,$$

であり、確かに $A = (0, -t^2)$ を通る。放物線はこの接線より上にある。実際、

$$\tfrac{1}{4}x^2 - (tx - t^2) = \big(\tfrac{1}{2}x - t\big)^2 \geq 0.$$

したがって R は、$0 \leq x \leq 2t$ で、直線 AP（下側）と曲線（上側）の間にある点全体の集合である。その左端は、y 軸上の A から O までの線分である。ゆえに

$$\text{面積}R = \int_0^{2t} \Big(\tfrac{1}{4}x^2 - (tx - t^2)\Big)\mathrm{d}x = \int_0^{2t} \big(\tfrac{1}{2}x - t\big)^2\,\mathrm{d}x$$
$$= \Big[\tfrac{2}{3}\big(\tfrac{1}{2}x - t\big)^3\Big]_0^{2t} = 0 - \tfrac{2}{3}(-t)^3 = \tfrac{2}{3}t^3.$$

よって R の面積は $\frac{2}{3}\tan^3\alpha$ であり、求める結果が得られた。

b が完全に消えていることに注意しよう。面積は、P における接線が y 軸と交わる位置だけで決まるのである。もちろん b と α は $2\sin\alpha = b\cos^2\alpha$ で結ばれているので、b によって α は定まる。

検算

- $\alpha = \frac{1}{4}\pi$（図の場合）とする。このとき $b\cos\alpha = 2$ より $b = 2\sqrt{2}$ であり、$P = (2,1)$、$A = (0,-1)$ となる。面積は $\int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 - x + 1\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{3} - 2 + 2 = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\tan^3\frac{1}{4}\pi$ である。
- $b = 2$ のとき、$2\tan\alpha = 2\cos\alpha$ を数値的に解くと $\alpha \approx 0.6662$ となり、数値積分（numerical integration）で求めた面積は 0.32391 で、$\frac{2}{3}\tan^3\alpha$ と一致する。
- $b \to 0$ のとき $\alpha \to 0$ となり、公式が示すとおり領域は縮んで消える。

よくある間違い

- 領域を x 軸で分割し、その下にある三角形を忘れること。接線と曲線の間の一つの積分で、両方の部分をまとめて扱える。
- 棒の端点を取り違えること。$+b\cos\theta$ をもつ端点は決して y 軸に達しない。
- $b\cos\alpha = 2\tan\alpha$ を使って b を消去せず、答えに b を残すこと。

STEP のその先へ

中点は放物線を描き、各端点は接線に沿って一定の距離 b にある曲線を描く。元の曲線の接線から新しい曲線を作ることは、平面曲線の微分幾何学（differential geometry）の標準的なテーマであり（伸開線（involute）、包絡線（envelope）、追跡線（tractrix）が古典的な例である）、大学 1 年次の講義で弧長（arc length）や曲率（curvature）とともに学ぶ。面積が簡潔な値になることは、アルキメデス（Archimedes）による放物線の求積（quadrature）を思い起こさせる。それは、放物線の弓形（parabolic segment）の面積が、ある内接三角形の面積の $\frac{4}{3}$ 倍であることを示すものである。この趣旨の問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* に挑戦するとよい。

解答例

STEP I 2015、第 5 問

純粋数学 ・ パラメータを含む積分

> **STEP I 2015、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q5

鍵となる考え方

どちらの積分も、x をパラメータとして固定すれば、t についての初等的な原始関数（antiderivative）をもつ。したがって「積分を計算することにより」という指示がヒントのすべてである。すなわち、x の閉じた式を求め、それを図示すればよい。注意すべきは細部である。(i) では被積分関数（integrand）が $t = 1$ で有界でなくなることがあり、(ii) では平方根が**絶対値**（absolute value）になる。そのため g は区分的（piecewise）に定義された関数となり、その形は意外なほど単純である。

解答

小問 (i)

$x > 0$ を固定すると、$(t-1)^{x-1}$ の原始関数の一つは $\frac{1}{x}(t-1)^x$ である。よって

$$f(x) = \left[\frac{(t-1)^x}{x}\right]_1^3 = \frac{2^x - 0}{x} = \frac{2^x}{x}.$$

$0 < x < 1$ のとき、被積分関数 $(t-1)^{x-1}$ は $t \to 1^+$ で発散するので、この積分は広義積分（improper integral）である。しかし $x > 0$ であるから $t \to 1^+$ のとき $(t-1)^x \to 0$ となり、積分は収束し、上の値はそのまま成り立つ。

次に、$x > 0$ において $y = 2^x/x$ を図示する。

- $x \to 0^+$ のとき $2^x \to 1$ であるから $f(x) \to +\infty$ となる。すなわち y 軸が漸近線（asymptote）である。
- $x \to \infty$ のとき、指数関数はべき関数より速く増加するので $f(x) \to \infty$ となる（しかもどんな直線よりも速い）。

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2^x = 2^x \ln 2$ を用いて微分すると

$$f'(x) = \frac{2^x \ln 2 \cdot x - 2^x}{x^2} = \frac{2^x(x \ln 2 - 1)}{x^2},$$

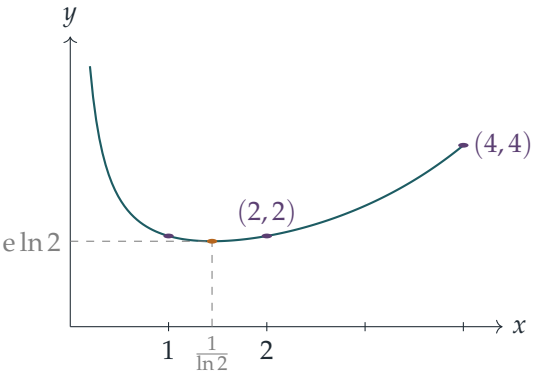
となり、これは $x < 1/\ln 2$ で負、$x > 1/\ln 2$ で正である。したがって停留点（stationary point）はただ一つで、それは $x = 1/\ln 2 \approx 1.44$ における極小点である。

- このとき $2^{1/\ln 2} = \mathrm{e}^{(\ln 2)/\ln 2} = \mathrm{e}$ であるから、最小値は

$$f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \mathrm{e} \ln 2 \approx 1.88.$$

- 役に立つ点：$f(1) = f(2) = 2$、$f(4) = 4$。

この曲線は凸（convex）でもある。実際、$\ln f(x) = x \ln 2 - \ln x$ は凸であり（その第 2 次導関数は $1/x^2 > 0$）、凸関数の指数関数は凸である。よって、グラフは一つの U 字形の曲線となる。



小問 (ii)

まず、被積分関数が意味をもつことを確かめる。$-1 \le t \le 1$ のとき

$$1 - 2xt + x^2 \ge 1 - 2|x| + x^2 = (1 - |x|)^2 \ge 0,$$

であり、等号が成り立つのは $|x| = 1$ かつ $t = \pm 1$（端点）のときに限る。この場合については後で改めて扱う。

$x = 0$ のとき被積分関数は 1 であるから $g(0) = 2$ である。$x \neq 0$ のときは x を定数とみなす。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1 - 2xt + x^2) = -2x$ であるから、原始関数の一つは $-\frac{1}{x}\sqrt{1 - 2xt + x^2}$ である。よって

$$g(x) = -\frac{1}{x}\left[\sqrt{1 - 2xt + x^2}\right]_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{(1+x)^2} - \sqrt{(1-x)^2}}{x} = \frac{|1+x| - |1-x|}{x}.$$

考えてみよう なぜ単純に $\sqrt{(1+x)^2}=1+x$、$\sqrt{(1-x)^2}=1-x$ と書いてはいけないのだろうか？

それは $\sqrt{u^2}=|u|$ であって、u ではないからである。不注意に計算すると、すべての x に対して $g(x)=2$ となってしまうが、これは $|x|$ が大きいときには明らかに誤りである。そのとき被積分関数はおよそ $1/|x|$ であり、したがって $g(x)\approx 2/|x|$ となるはずだからである。場合分けをしなければならない。

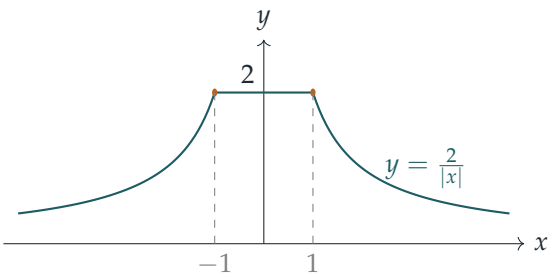
- $-1\leq x\leq 1$、$x\neq 0$ のとき：$1+x$ と $1-x$ はともに ≥ 0 であるから $g(x)=\dfrac{(1+x)-(1-x)}{x}=2$。これは $g(0)=2$ とも一致する。
- $x>1$ のとき：$|1+x|=1+x$、$|1-x|=x-1$ であるから $g(x)=\dfrac{2}{x}$。
- $x<-1$ のとき：$|1+x|=-1-x$、$|1-x|=1-x$ であるから $g(x)=\dfrac{-2}{x}=\dfrac{2}{|x|}$。

$x=\pm 1$ のとき、被積分関数は一方の端点で有界でなくなる（$x=1$ のときは $1/\sqrt{2-2t}$ となり、$t\to 1$ で発散する）ので、この積分は広義積分である。原始関数 $-\sqrt{2-2t}$ は $t=1$ まで連続であるから積分は収束し、上の式からやはり $g(\pm 1)=2$ が得られる。

以上より

$$g(x)=\begin{cases}2, & |x|\leq 1,\\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|\geq 1.\end{cases}$$

この関数は偶関数（even function）である（当然そうなるはずである。t を $-t$ に置き換えると $g(-x)=g(x)$ がわかる）。また、いたるところ連続で、$[-1,1]$ 上では定数であり、$2/|x|$ のように減衰して漸近線 $y=0$ に近づく。$x=\pm 1$ では角ができる。片側からの傾きは 0（内側）と ∓ 2（外側）であるから、g はそこで微分可能（differentiable）ではない。



検算

- 小問 (i) で $x = 1$ のとき：被積分関数は 1 であるから $f(1) = 2$ となり、$2^1/1$ と一致する。$x = 2$ のとき積分は $\int_1^3 (t-1)\,\mathrm{d}t = 2$ であり、$2^2/2$ と一致する。
- 小問 (ii) で $x = 0$ のとき：被積分関数は 1 で、$g(0) = 2$ である。$|x|$ が大きいとき、被積分関数は長さ 2 の区間全体で $1/|x|$ に近く、$2/|x|$ と一致する。
- 数値的には $\int_1^3 (t-1)^{0.5}\,\mathrm{d}t = 1.8856\ldots = 2^{1.5}/1.5$ である。(ii) の積分は $x = 1.2$ のとき $1.6667 = 2/1.2$、$x = 0.8$ のとき 2.0000 となる。

よくある間違い

- すべての x に対して $\sqrt{(1-x)^2} = 1 - x$ と書き、g が定数であると結論してしまう。
- (i) の積分が $0 < x < 1$ のとき広義積分であることを忘れる。あるいは、$(t-1)^x$ が $t = 1$ で 0 になるのは $x > 0$ だからこそであることを忘れる。
- $x = \pm 1$ で g のグラフを滑らかに描いてしまう。二つの部分は異なる傾きで接続している。

STEP のその先へ

小問 (ii) は、姿を変えたニュートン（Newton）の殻定理（shell theorem）である。$t = \cos\theta$ とおくと、$1/\sqrt{1 - 2xt + x^2}$ という量は、単位球の中心から距離 x にある点と球面上の点との距離の逆数である。したがって g は（定数倍を除いて）一様な球殻による重力ポテンシャルであり、内部では定数、外部では点質量によるポテンシャルに等しい。同じ式はルジャンドル（Legendre）多項式（Legendre polynomials）の母関数（generating function）$\sum_n P_n(t)x^n$ でもあり、$|x| < 1$ で $g(x) = 2$ となることは、$n \geq 1$ のすべての P_n の $[-1, 1]$ 上の積分が 0 であるという事実を反映している。小問 (i) の、x をパラメータとして t^{x-1} を積分する操作は、ガンマ関数（Gamma function）とベータ関数（Beta function）への第一歩である。Mary Boas の *Mathematical Methods in the Physical Sciences*（物理科学のための数学的方法）は、ルジャンドル多項式とガンマ関数をちょうどよい水準で扱っている。

解答例

STEP I 2015、第 6 問

純粋数学 ・ 幾何におけるベクトル

STEP I 2015、問 6

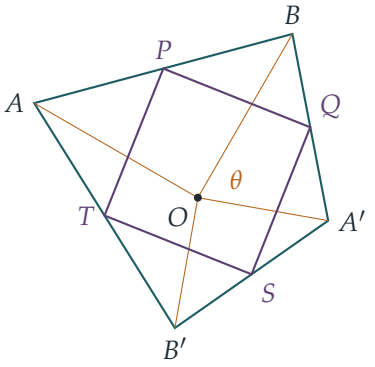
先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/15-s1-q6

鍵となる考え方

O を原点とすると、条件 $OA = OB$ と $\angle AOB = 90°$ は、B が A を O のまわりに直角だけ回転（rotation）した点であることを意味する。同様に、B' は A' を同じ向きに回転した点である。この四分の一回転を R と書く。すると、中点四角形の各辺は、直前の辺に R を施したものになることがわかり、これこそが正方形になる理由である。辺を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{a}'$ で表せれば、面積は余弦定理（cosine rule）の計算に帰着する。

解答



中点は正方形をなす

O を原点とし、A, B, A', B' の位置ベクトル（position vector）を $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}', \mathbf{b}'$ とする。R を O のまわりの時計回りの 90° 回転とする。R は線形（linear）であり、長さを保ち、

零でないすべてのベクトルを直角だけ回転させる。

頂点は時計回りに並び、O は四角形の内部にあるので、OA から OB へは時計回りに 90° 回転することになる。$OA = OB$ であるから、$\mathbf{b} = R\mathbf{a}$ が成り立つ。同様にして $\mathbf{b}' = R\mathbf{a}'$ である。

P, Q, S, T をそれぞれ AB、BA'、$A'B'$、$B'A$ の中点（midpoint）とする。

$$\mathbf{p} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}), \quad \mathbf{q} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{a}'), \quad \mathbf{s} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}'+\mathbf{b}'), \quad \mathbf{t} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}'+\mathbf{a}).$$

4 つの辺を順に調べる。$\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}'-\mathbf{a}) = \mathbf{u},\\
\overrightarrow{QS} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}'-\mathbf{b}) = \tfrac{1}{2}R(\mathbf{a}'-\mathbf{a}) = R\mathbf{u},\\
\overrightarrow{ST} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{a}') = -\mathbf{u},\\
\overrightarrow{TP} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{b}') = -R\mathbf{u}.
\end{aligned}$$

ここで $A \neq A'$ であるから $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ である。よって PQ と ST は大きさが等しく向きが逆であり、$PQST$ は平行四辺形（parallelogram）である。その隣り合う辺 QS は、$\mathbf{u}$ を長さを変えずに直角だけ回転させたものである。隣り合う辺が等しくかつ垂直な平行四辺形は正方形であるから、$PQST$ は正方形である。これが示すべきことであった。

考えてみよう A を B に移す四分の一回転が、A' を B' に移す四分の一回転と同じでなければならないのはなぜか。

どちらの組も時計回りの頂点の並びで連続しており、O は内部にあるので、いずれの場合も 1 本目の半直線から 2 本目への回転は時計回りである。もし一方が時計回りで他方が反時計回りであれば、$\overrightarrow{QS}$ から $R\mathbf{u}$ を導く段階が成り立たなくなり、一般にはこの図形は正方形にならない。

面積の最大化

$OA = OB = p$、$OA' = OB' = q$ とし、どちらも固定する。また $\theta = \angle BOA'$ とおく。O における 4 つの角の和は 360° であり、そのうち 2 つは直角であるから、$\angle B'OA = 180^\circ - \theta$ である。O は内部にあるので、θ と $180^\circ - \theta$ はともに 0° より大きく 180° より小さい。したがって $0 < \theta < 180^\circ$ である。

正方形の 1 辺は $|\mathbf{u}| = \frac{1}{2}AA'$ であるから、その面積は $\frac{1}{4}AA'^2$ である。OA から OB を経て OA' まで回転すると考えれば、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{a}'$ のなす角は $90^\circ + \theta$ であり、$\cos(90^\circ+\theta) = -\sin\theta$ である。余弦定理により（あるいは $|\mathbf{a}'-\mathbf{a}|^2$ を展開して）、

$$AA'^2 = p^2 + q^2 - 2pq\cos(90^\circ+\theta) = p^2 + q^2 + 2pq\sin\theta,$$

となるので、

$$\text{面積} = \frac{1}{4}\left(p^2 + q^2 + 2pq\sin\theta\right).$$

p と q を固定すると、これは $\sin\theta$ が最大のときに最大となる。$0 < \theta < 180^\circ$ においてそれが起こるのは、ちょうど

$$\angle BOA' = \theta = 90^\circ,$$

のときであり、最大面積は $\frac{1}{4}(p+q)^2$ である。このとき O における 4 つの角はすべて直角となるので、A' は AO を O の先へ延長した直線上にあり、正方形の 1 辺は $\frac{1}{2}(p+q)$ である。

検算

- $p = 2$、$q = 3$ とする。面積の式は $\frac{1}{4}(13 + 12\sin\theta)$ となり、$\theta = 0$ の近くで 3.25、$\theta = 90^\circ$ で $6.25 = \frac{1}{4}\cdot 5^2$ まで増加し、再び 3.25 に向かって減少する。コンピュータで θ を細かく走査すると、最大値は 90.0° でとられる。
- 対称な場合 $p = q$、$\theta = 90^\circ$：$ABA'B'$ 自体が O を中心とする 1 辺 $p\sqrt{2}$ の正方形となり、その中点正方形は 1 辺 p、面積 $p^2 = \frac{1}{4}(2p)^2$ であって、式と一致する。
- p、q、θ を無作為に選んだ場合について、中点が面積 $\frac{1}{4}(p^2 + q^2 + 2pq\sin\theta)$ の正方形をなすことをコンピュータで確認した。

よくある間違い

- OA と OA' のなす角を $90^\circ + \theta$ ではなく θ としてしまう。すると面積が $\frac{1}{4}(p^2 + q^2 - 2pq\cos\theta)$ となり、θ を 180° に近づけるべきだという誤った結論に至る。
- 4 つの辺が等しいことだけを示す。それではひし形（rhombus）であることしかわからない。直角であることも必要であり、ここではそれが $\overrightarrow{QS} = R\overrightarrow{PQ}$ から自動的に得られる。

STEP のその先へ

直角の回転は線形写像 $R(x, y) = (y, -x)$ であり、複素平面（complex plane）では $-\mathrm{i}$ を掛けることにあたる。議論全体は線形写像を用いた計算である。R は引き算と可換（commute）であるから、$\mathbf{q} - \mathbf{p}$ と $\mathbf{s} - \mathbf{q}$ は R だけ異なる。同じ考え方で、ナポレオン（Napoleon）の定理やファン・アウベル（van Aubel）の定理などの結果を手早く証明できる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、まさにこの方法で、複素数の掛け算を通して幾何学を展開している。

解答例

STEP I 2015、第 7 問

純粋数学 ・ 区間における最大値

> **STEP I 2015、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q7

鍵となる考え方

閉区間（closed interval）上の滑らかな関数（smooth function）の最大値（greatest value）は、区間内部の停留点（stationary point）か端点（endpoint）のいずれかでとられる。ここでは停留点は $x = 0$ と $x = \frac{a}{3}$ であり、後者は a が大きくなるにつれて右へ移動し、やがて区間の外に出てしまう。そこで候補を列挙し、a を動かしながらそれらを比較する。三つの範囲は、比較の大小が入れ替わる点と、$\frac{a}{3}$ が $x = 1$ を越える点から生じる。

解答

候補

微分すると

$$f'(x) = 6ax - 18x^2 = 6x(a - 3x),$$

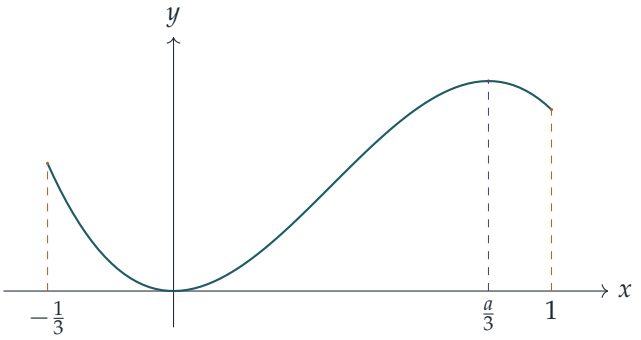
であるから、停留点は $x = 0$ と $x = \frac{a}{3}$ である。$a \geq 0$ のとき、f' の符号からグラフの形がわかる。

- $x < 0$ では $6x < 0$ かつ $a - 3x > 0$ であるから $f'(x) < 0$ となり、f は減少する。
- $0 < x < \frac{a}{3}$ では $f'(x) > 0$ であり、f は増加する。
- $x > \frac{a}{3}$ では $f'(x) < 0$ であり、f は減少する。

したがって $x=0$ は極小（local minimum）、$x=\frac{a}{3}$ は極大（local maximum）である（$a=0$ のときは両者が一致し、$f=-6x^3$ は全体で減少する）。必要な値は

$$f\left(-\tfrac{1}{3}\right)=\frac{a}{3}+\frac{2}{9},\qquad f\left(\tfrac{a}{3}\right)=\frac{a^3}{3}-\frac{2a^3}{9}=\frac{a^3}{9},\qquad f(1)=3a-6.$$

である。f は $[-\frac{1}{3},0]$ で減少するから、この部分での最大値は $f(-\frac{1}{3})$ であり、値 $f(0)=0$ が最大になることはない。よって $\mathrm{M}(a)$ は、$f(-\frac{1}{3})$ と $[0,1]$ 上での f の最大値のうち大きい方である。



この図は $a=\frac{5}{2}$ の場合である。三つの候補は二つの端点（琥珀色）と極大点（紫）であり、この場合は極大点が最大となる。

$0\le a\le 3$ の場合

このとき $\frac{a}{3}\in[0,1]$ であるから、$[0,1]$ 上で関数は $x=\frac{a}{3}$ まで増加し、その後減少する。そこでの最大値は $f(\frac{a}{3})=\frac{a^3}{9}$ であり、これを $f(-\frac{1}{3})$ と比較しなければならない。

$$\frac{a^3}{9}-\left(\frac{a}{3}+\frac{2}{9}\right)=\frac{a^3-3a-2}{9}=\frac{(a+1)^2(a-2)}{9}.$$

考えてみよう a^3-3a-2 の因数分解（factorisation）はどうすれば見つけられるか？

小さな整数を試してみる。$a=-1$ とすると $-1+3-2=0$、$a=2$ とすると $8-6-2=0$ である。三つの根の和は 0 である（a^2 の項がない）から、三つ目の根も -1 であり、$(a+1)^2(a-2)$ が得られる。

$a\ge 0$ のとき $(a+1)^2>0$ であるから、差の符号は $a-2$ の符号と一致する。したがって

$$\mathrm{M}(a)=\frac{a}{3}+\frac{2}{9}\quad\text{ただし}0\le a\le 2,\qquad \mathrm{M}(a)=\frac{a^3}{9}\quad\text{ただし}2\le a\le 3,$$

であり、$a=2$ ではどちらの式も $\frac{8}{9}$ を与える。

$a > 3$ の場合

このとき $\frac{a}{3} > 1$ であるから、f は $[0,1]$ 全体で増加し、そこでの最大値は $f(1) = 3a - 6$ である。左端点と比較すると

$$(3a-6) - \left(\frac{a}{3} + \frac{2}{9}\right) = \frac{8a}{3} - \frac{56}{9} = \frac{8}{9}(3a-7),$$

となり、$a > 3 > \frac{7}{3}$ よりこれは正である。よって $a \geq 3$ のとき $\mathrm{M}(a) = 3a - 6$ である。$a = 3$ ではこれは $3 = \frac{27}{9}$ となり、中央の式と一致する。

結論

$$\mathrm{M}(a) = \begin{cases} \dfrac{a}{3} + \dfrac{2}{9}, & 0 \leq a \leq 2, \\ \dfrac{a^3}{9}, & 2 \leq a \leq 3, \\ 3a - 6, & a \geq 3. \end{cases}$$

言葉で言えば、a が小さいときは左端点が最大となり、a が中程度のときは極大値が最大となり、極大点が区間の外に出てしまうと右端点が最大となる。

検算

- M は連続（continuous）である。$a = 2$ では両側から $\frac{8}{9}$、$a = 3$ では両側から 3 となる。最大値は a に関して連続的に変化するのだから、こうなるはずである。
- $a = 0$：$f(x) = -6x^3$ は減少関数であるから、最大値は $f(-\frac{1}{3}) = \frac{2}{9}$ であり、第一の式と一致する。
- $a = \frac{5}{2}$：式からは $\frac{125}{72} \approx 1.736$ が得られ、一方、端点での値は $f(-\frac{1}{3}) \approx 1.056$ と $f(1) = 1.5$ であり、どちらも小さい。0 から 12 までの数百通りの a について、x の細かい格子上でコンピュータにより探索したところ、式と 10^{-8} 以内で一致した。

よくある間違い

- 左端点 $x = -\frac{1}{3}$ を忘れること。$x < 0$ で f は減少するので、この端点は極大値を上回ることがあり、実際 $a < 2$ のときはそうなる。
- $a > 3$ のときに $f(\frac{a}{3})$ を用いること。このとき $\frac{a}{3}$ は区間の外にあるので、候補にはならない。
- 極大値がそのまま区間上の最大値になると思い込むこと。

STEP のその先へ

ここで $\mathrm{M}(a) = \max_{x\in[-1/3,1]} f(x)$ は、関数族にわたる最適化によって定義される関数である。このような関数は一般に連続ではあるが、区分的に滑らか（piecewise smooth）であるにすぎない。実際、$a = 2$ で M の左微分係数と右微分係数（left and right derivatives）が一致しないことを確かめてみるとよい。そもそも有界閉区間上の連続関数が最大値をとるということは最大値定理（Extreme Value Theorem）であり、大学の解析学（analysis）の最初の講義で証明される。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門の教科書）を参照せよ。

解答例

STEP I 2015、第 8 問

純粋数学 • べき乗和の整除性

> **STEP I 2015、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q8

鍵となる考え方

和を 2 回、一度は順に、一度は逆順に書いて足し合わせる。これは小問 (i) のためのガウス（Gauss）の工夫であり、各項が k 乗（k は奇数）であるときに小問 (ii) がまさに想定している方法でもある。r^k と $(n-r)^k$ を組にすると、$2S$ が n の倍数であることがわかる。r^k と $(n+1-r)^k$ を組にすると、$2S$ が $n+1$ の倍数でもあることがわかる。n と $n+1$ は共通の約数（factor）をもたないので、この 2 つの事実を組み合わせると $\frac{1}{2}n(n+1)$ で割り切れることが得られる。

解答

小問 (i)

$T = 1+2+\cdots+n$ とおく。和を逆順に書くと、

$$T = 1+2+\cdots+(n-1)+n,$$
$$T = n+(n-1)+\cdots+2+1.$$

縦に足すと、n 個の各列の和はいずれも $n+1$ であるから、$2T = n(n+1)$ となり、

$$1+2+\cdots+n = \tfrac{1}{2}n(n+1).$$

小問 (ii)

N を法（modulo）として考えると、$N-m \equiv -m$ であるから、

$$(N-m)^k + m^k \equiv (-m)^k + m^k = -m^k + m^k = 0 \pmod{N},$$

ここで k が奇数であることから $(-m)^k = -m^k$ である。よって N は $(N-m)^k + m^k$ を割り切る。

合同式（congruence）を避けたい場合は次のようにすればよい。k が奇数のとき、因数分解

$$a^k + b^k = (a+b)\left(a^{k-1} - a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 - \cdots + b^{k-1}\right),$$

が成り立つ（符号は交互に変わり、括弧の中には k 個の項があるので、最後の符号は $+$ である）。$a = N - m$、$b = m$ とおくと、$a + b = N$ に整数を掛けたものが得られる。ここでは $m \leq N$ である必要はまったくない。$m > N$ ならば $N - m$ は負になるが、それでも整数である。

n または $\frac{1}{2}n$ で割り切れること

k を奇数として $S = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$ とおく。小問 (i) の工夫をまねる。$0^k = 0$ であるから、

$$S = \sum_{r=0}^{n} r^k = \sum_{r=0}^{n} (n-r)^k,$$

と書ける。2 つ目の形は同じ和を逆順に並べたものである。足し合わせると、

$$2S = \sum_{r=0}^{n} \left[(n-r)^k + r^k\right].$$

小問 (ii) で $N = n$、$m = r$ とすれば、各括弧は n で割り切れるので、n は $2S$ を割り切る。整数 M を用いて $2S = nM$ と書く。

- n が奇数ならば、n は $2S$ を割り切り、かつ 2 と共通の約数をもたないので、n は S を割り切る。
- n が偶数ならば、$\frac{1}{2}n$ は整数で $S = \frac{1}{2}n \cdot M$ であるから、$\frac{1}{2}n$ は S を割り切る。

考えてみよう n が偶数のとき、単に「n は S を割り切る」と言えないのはなぜか？

「$n \mid 2S$」から「$n \mid S$」を導くには、n が 2 と互いに素（coprime）である必要があるからである。実際、これは成り立たないことがある。$n = 2$、$k = 1$ とすると $S = 3$ となり、これは 2 の倍数ではない。n が偶数のときに言えるのは、n の半分が S を割り切るということだけである。

$1+2+\cdots+n$ で割り切れること

小問 (i) より、$\frac{1}{2}n(n+1) \mid S$ を示せばよい。項の組み方を変える。$1,2,\ldots,n$ を逆順にすると r は $n+1-r$ に移るので、

$$2S = \sum_{r=1}^{n} \left[(n+1-r)^k + r^k \right],$$

となり、小問 (ii) で $N = n+1$、$m = r$ とすれば、各括弧は $n+1$ で割り切れる。よって $n+1$ は $2S$ を割り切る。

さて、n と $n+1$ は連続する整数であるから、1 以外に共通の約数をもたない。したがって、n の任意の約数と $n+1$ の任意の約数についても同じことが成り立つ。ここで、互いに素な 2 つの整数がそれぞれ S を割り切るならば、その積も S を割り切るという事実を用いる。

- **n が奇数の場合。** $n \mid S$ はすでに示した。また $n+1$ は偶数で $n+1 \mid 2S$ であるから、$2S = (n+1)L$ と書くと $S = \frac{1}{2}(n+1)L$、すなわち $\frac{1}{2}(n+1) \mid S$ である。n と $\frac{1}{2}(n+1)$ は互いに素であるから、その積 $\frac{1}{2}n(n+1)$ は S を割り切る。
- **n が偶数の場合。** $\frac{1}{2}n \mid S$ はすでに示した。また $n+1$ は奇数で $2S$ を割り切るので、(2 と互いに素であるから) S を割り切る。$\frac{1}{2}n$ と $n+1$ は互いに素であるから、その積 $\frac{1}{2}n(n+1)$ は S を割り切る。

いずれの場合も、S は $\frac{1}{2}n(n+1) = 1+2+\cdots+n$ で割り切れる。これが示すべきことであった。

> **考えてみよう** 約数どうしを掛けることで、2 つの割り切れる事実を 1 つにまとめてよいのはなぜか？

$\gcd(a,b) = 1$ のもとで $a \mid S$ かつ $b \mid S$ であるとし、$S = aq$ と書く。すると $b \mid aq$ であり、b は a と共通の素因数 (prime factor) をもたないので、b を割り切る素数べきはすべて q を割り切らなければならない。よって $b \mid q$ であり、$ab \mid S$ となる。互いに素でなければこれは成り立たない。たとえば $4 \mid 12$ かつ $6 \mid 12$ であるが、$24 \nmid 12$ である。だからこそ、n が偶数のときに n と $n+1$ を組にするのではなく、n と $\frac{1}{2}(n+1)$、あるいは $\frac{1}{2}n$ と $n+1$ を組にするよう注意したのである。

検算

$k = 3$、$n = 4$ の場合を試す。$S = 1+8+27+64 = 100$ であり、$1+2+3+4 = 10$ は 100 を割り切る。実は $1^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$ であるから、$k = 3$ のときは結果は明らかである。$k = 5$、$n = 5$ の場合は $S = 1+32+243+1024+3125 = 4425 = 15 \times 295$

である。最終的な結果は、すべての $n \leq 119$ とすべての奇数 $k \leq 15$ についてコンピュータでも確かめられている。k が偶数のときは主張は成り立たない。$1^2 + 2^2 = 5$ は 3 で割り切れない。このことから、k が奇数であることが本当に使われていることがわかる。

よくある間違い

- n が偶数のときに、$n \mid 2S$ から $n \mid S$ を結論づけてしまう。
- 互いに素でない約数どうしを掛けてしまう。たとえば $n(n+1) \mid 2S$ を主張し、そのあと注意せずに半分にしてしまう。
- r^k と $(n-r)^k$ を組にするときに、$r = 0$（または $r = n$）の項を忘れる。$0^k = 0$ を含めることで、すべての項がきれいに組になる。

STEP のその先へ

べき乗和（power sum）$1^k + \cdots + n^k$ は n の $k+1$ 次の多項式であり、ベルヌーイ数（Bernoulli numbers）を用いたファウルハーバー（Faulhaber）の公式で与えられる。k が奇数のときは $\frac{1}{2}n(n+1)$ の多項式として書くことさえでき、これは今回の結果を別の角度から説明するものである。ここでの議論は、初等整数論（elementary number theory）の基本中の基本である合同式と互いに素であることを扱う、最初の手ほどきである。Davenport の *The Higher Arithmetic*（邦題『初等整数論講義』）はすばらしい入門書である。

解答例

STEP I 2015、第 9 問

力学 ・ 放物運動

STEP I 2015、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/15-s1-q9

鍵となる考え方

「最後に地面に着く」とは**着地時刻**（landing time）の話であって、発射時刻（firing time）の話ではない。後から低い角度で発射された弾丸は空中にいる時間が短いので、先に発射された弾丸より早く着地することがある。着地時刻を「発射時刻＋飛行時間（time of flight）」として表し、発射期間全体にわたってそれを最大化すればよい。変数として t の代わりに角度 α を用いると微分の計算がすっきりし、k に関する条件によって、最大値が停留点（stationary point）でとられるか端点でとられるかが決まる。

解答

設定

各弾丸を、空気抵抗（air resistance）のない状態で重力のみを受けて運動する質点（particle）とみなし、地面の高さから発射されるものとする。仰角（elevation）α で発射された弾丸の、発射から時間 s 後の鉛直方向の位置は $y = u\sin\alpha\, s - \frac{1}{2}gs^2$ であるから、この弾丸は

$$\frac{2u\sin\alpha}{g},$$

の時間の後に地面に戻り、その間に水平方向に

$$R(\alpha) = u\cos\alpha \cdot \frac{2u\sin\alpha}{g} = \frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

だけ進む。仰角 α の弾丸は時刻 $t = (\frac{1}{3}\pi - \alpha)/\lambda$ に発射され、t が $[0, \frac{\pi}{6\lambda}]$ を動くとき、α は $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi]$ の各値をちょうど一度ずつとる。したがって、この弾丸の着地時刻は

$$L(\alpha) = \frac{\frac{1}{3}\pi - \alpha}{\lambda} + \frac{2u\sin\alpha}{g}, \qquad \tfrac{1}{6}\pi \le \alpha \le \tfrac{1}{3}\pi.$$

である。最後に着地する弾丸は、L を最大にする弾丸である。$k = \dfrac{g}{2\lambda u}$ より $\dfrac{2u}{g} = \dfrac{1}{\lambda k}$ であるから、

$$L(\alpha) = \frac{1}{\lambda}\left(\tfrac{1}{3}\pi - \alpha + \frac{\sin\alpha}{k}\right), \qquad L'(\alpha) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\cos\alpha}{k} - 1\right) = \frac{\cos\alpha - k}{\lambda k}.$$

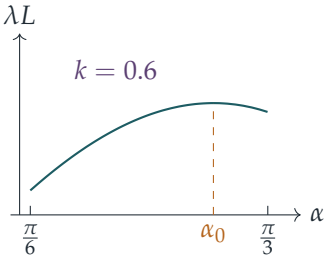
となる。よって L は $\cos\alpha > k$ となるところで増加し、$\cos\alpha < k$ となるところで減少する。いま考えている区間では、$\cos\alpha$ は $\frac{1}{2}\sqrt{3}$（$\alpha = \frac{1}{6}\pi$ のとき）から $\frac{1}{2}$（$\alpha = \frac{1}{3}\pi$ のとき）まで減少する。

考えてみよう　なぜ α が大きいほど発射時刻が**早い**のか。また、そのことが L' の符号にとってなぜ重要なのか。

砲身は下がっていくので、角度の大きい弾丸ほど先に発射される。α を少し大きくすると、発射時刻は 1 ラジアンあたり $1/\lambda$ だけ早まるが、飛行時間は 1 ラジアンあたり $\frac{2u}{g}\cos\alpha$ だけ増える。$L'(\alpha)$ はこの二つの効果の差し引きであり、その符号がどちらの効果が勝つかを教えてくれる。

$\frac{1}{2} \le k \le \frac{1}{2}\sqrt{3}$ の場合

このとき k は $\cos\alpha$ のとりうる値の範囲にあるので、$\cos\alpha_0 = k$ を満たす $\alpha_0 \in [\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi]$ がちょうど一つ存在する。区間上で cos は減少するから、$\alpha < \alpha_0$ では $\cos\alpha > k$、$\alpha > \alpha_0$ では $\cos\alpha < k$ である。よって L は α_0 まで増加し、その後減少するので、仰角 α_0 で発射された弾丸が最後に着地する。（$k = \frac{1}{2}$ または $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ のときは、α_0 は端点となり L は単調（monotonic）であるが、結論は同じである。）



（着地時刻の変化が見えるように、縦軸はずらしてある。）

$\sin\alpha_0 = \sqrt{1-k^2}$（$\alpha_0$ は鋭角（acute angle）なので正）を用いると、この弾丸の水平到達距離（range）は

$$R(\alpha_0) = \frac{2u^2 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0}{g} = \frac{2ku^2\sqrt{1-k^2}}{g},$$

であり、これが求める距離である。

$k < \frac{1}{2}$ の場合

このとき区間内のすべての α に対して $\cos\alpha \geq \frac{1}{2} > k$ であるから、区間全体で $L'(\alpha) > 0$ となり、L は狭義単調増加（strictly increasing）である。最大値は $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ でとられる。つまり、**最初に**発射された弾丸が最後に着地する。その水平到達距離は

$$R\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) = \frac{2u^2}{g} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}.$$

である。したがって $k < \frac{1}{2}$ のとき、最後の弾丸は砲から距離 $\dfrac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}$ の地点に着地する。

（念のため述べておくと、$k > \frac{1}{2}\sqrt{3}$ のときは L は減少し、最後に発射された弾丸が最後に着地する。$\sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3}$ であるから、その距離はやはり $\frac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}$ である。）

検算

- 連続性（continuity）：$k = \frac{1}{2}$ のとき、最初の公式は $\dfrac{2 \cdot \frac{1}{2}u^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{g} = \dfrac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}$ を与え、$k < \frac{1}{2}$ の場合の答えと一致する。$k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ のときも再び同じ値を与える。
- $u^2/g = 1$、$k = 0.6$ とすると、最後の弾丸は $\cos\alpha_0 = 0.6$ を満たし、距離 $2(0.6)(0.8) = 0.96$ の地点に着地する。発射時刻を 2 万個サンプリングし、その弾丸の運動を数値的に追跡するコンピュータによる検証でも、この結果と一致した。
- 次元：k は無次元量（dimensionless）である（g を、速さ毎時間の次元をもつ λu で割ったもの）。また u^2/g は長さの次元をもつ。

よくある間違い

- 着地時刻 $t + \frac{2u\sin\alpha}{g}$ ではなく、水平到達距離や飛行時間だけを最大化してしまう。
- 最後に発射された弾丸が最後に着地すると思い込む。
- α が増加すると t が減少することを忘れ、L' の符号を誤る。

STEP のその先へ

閉区間（closed interval）上で関数を最大化するには、内部の停留点と端点とを比較する必要があり、ここではパラメータによってどちらが勝つかが決まった。このような「どの制約が効いているか」の切り替わりは、制約付き最適化（constrained optimisation）の出発点であり、大学 1 年次の数理手法の講義で出会うことになる。この流儀の力学をさらに学びたければ、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

解答例

STEP I 2015、第 10 問

力学 ・ 相対速度

> **STEP I 2015、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q10

鍵となる考え方

面に当たる雨は流束（flux）である。単位時間あたりの量は（単位体積あたりの雨粒の数）×（面積）×（雨の速度の、面に垂直な成分）で与えられる。バスが動いているときはバスの座標系（frame）で考える。この座標系では、雨の速度のうち水平成分だけが変わる。そのうえで、道のり全体について、この割合に所要時間 D/u を掛け、u について最小化する。絶対値（modulus）があるため、バスが雨の水平方向の動きより遅いか速いかによって、二つの場合に分かれる。

解答

雨がバスに当たる割合

雨を、空気中に一様に分布した雨粒としてモデル化する。単位体積あたり n 個の雨粒があり、すべて同じ速度で動いているとする。バスの幅を b とする。北を水平方向の正の向きにとる。南から吹きつける雨は北向きに動くので、その速度は

$$\text{水平成分} v\cos\theta \text{（北向き）}, \qquad \text{鉛直成分} v\sin\theta \text{（下向き）}.$$

をもつ。雨には東西方向の成分がないので、バスの二つの長い側面は濡れない。

$u = 0$ の場合。 時間 δt の間に屋根に当たる雨粒は、屋根の上に立つ、鉛直方向の高さ $v\sin\theta\,\delta t$ の斜めの角柱（prism）の中にある雨粒である。その体積は $ab\,v\sin\theta\,\delta t$ である。後面（南側の面、面積 hb）に当たる雨粒は、その後ろにある水平方向の奥行き $v\cos\theta\,\delta t$ の角柱を満たす。北を向いた前面は雨から遮られている。したがって、割合は

$$nb\left(h\,v\cos\theta + a\,v\sin\theta\right).$$

である。

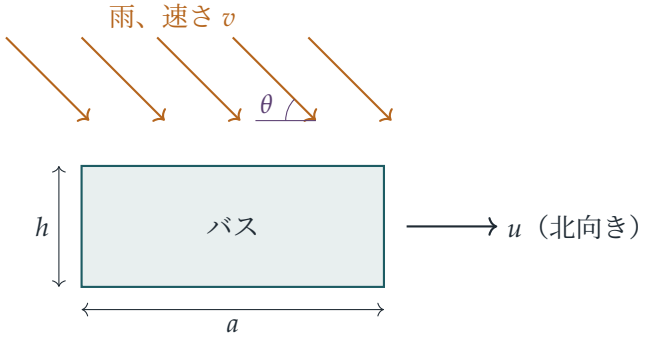
$u > 0$ の場合。一定の速度で動くバスの座標系では、雨の速度は

$$(v\cos\theta - u) \text{ 北向き}, \qquad v\sin\theta \text{ 下向き}.$$

となる。この座標系ではバスは静止しているので、上の議論は $v\cos\theta$ を $v\cos\theta - u$ に置き換えればそのまま成り立つ。鉛直成分は変わらないので、屋根は依然として割合 $nab\,v\sin\theta$ で雨を受ける。$v\cos\theta > u$ ならば、雨は依然としてバスを追い越し、割合 $nhb\,(v\cos\theta - u)$ で後面に当たる。$v\cos\theta < u$ ならば、バスが雨の中に突っ込んでいく形になり、雨は割合 $nhb\,(u - v\cos\theta)$ で前面に当たる。いずれの場合も、全体の割合は

$$nb\left(h\,|v\cos\theta - u| + a\,v\sin\theta\right),$$

であり、これは求めるとおり $h|v\cos\theta - u| + av\sin\theta$ に比例する。



速さの選び方

道のりの長さを D とする。所要時間は D/u なので、受ける雨の総量は

$$R(u) = \frac{D}{u}\left(h|v\cos\theta - u| + av\sin\theta\right), \qquad 0 < u \le w.$$

に比例する。$c = v\cos\theta$ とおき、絶対値を外す。

$u \le c$ のとき：

$$R(u) = D\left(\frac{hv\cos\theta + av\sin\theta}{u} - h\right).$$

分子は正なので、R は $0 < u \le c$ で狭義単調減少（strictly decreasing）である。

$u \ge c$ のとき：

$$R(u) = D\left(h + \frac{v\,(a\sin\theta - h\cos\theta)}{u}\right).$$

これが増加するか減少するかは、$a\sin\theta - h\cos\theta$ の符号だけで決まる。

考えてみよう 速く走るほど良いとは限らないのはなぜか。

速く走れば所要時間が短くなり、これは屋根については常に有利にはたらく。屋根の分は $Dav\sin\theta/u$ だからである。しかし $u > c$ になると、バスは雨の中に突っ込んでいき、前面の分 $Dh(u-c)/u$ は u とともに増える。どちらの効果が勝つかは、$a\sin\theta - h\cos\theta$ の符号で決まる。

二つの式は $u = c$ で一致するので、R は連続（continuous）である。ここで、

- $w < v\cos\theta$ ならば、許されるすべての速さで $u \le c$ であり、そこで R は減少する。したがって、最善の選択は $u = w$ である。
- $a\sin\theta > h\cos\theta$ ならば、R は $u \le c$ でも $u \ge c$ でも減少する。したがって R は $(0, w]$ 全体で減少し、やはり最善の選択は $u = w$ である。

これで最初の主張が証明された。

$w > v\cos\theta$ かつ $a\sin\theta < h\cos\theta$ のとき： R は $(0, c]$ で減少し、$[c, w]$ で狭義単調増加する。したがって、最小となるのは

$$u = v\cos\theta,$$

のときであり、これは雨の水平方向の速さとちょうど同じ速さで走ることを意味する。このときバスから見ると雨は鉛直に降るので、濡れるのは屋根だけであり、総量は（ここでの単位で）$R(c) = Da\tan\theta$ となる。

$a\sin\theta = h\cos\theta$ のとき： $u \ge c$ では $R(u) = Dh$ であり、これは u によらない。$w \ge v\cos\theta$ ならば、$v\cos\theta$ から w までのどの速さも同じく最善である。$v\cos\theta$ より遅い速さはどれもそれより悪い。（$w < v\cos\theta$ ならば最初の場合が当てはまり、$u = w$ となる。）物理的には、$u = c$ を超えると、速く走ることで屋根で減る雨の量と前面で増える雨の量がちょうど等しくなる。この条件は $\tan\theta = h/a$ を意味する。すなわち、道路から見ると、雨はバスの側面の対角線に平行に降っている。

帰り道

今度はバスは南へ、雨に向かって進む。北向きを正とする約束のもとではバスの速度は $-u$ なので、雨の相対的な水平速度は $v\cos\theta + u > 0$ となり、雨は常に前面に当たる。総量は

$$R(u) = \frac{D}{u}\Big(h(v\cos\theta + u) + av\sin\theta\Big) = D\left(h + \frac{v\,(h\cos\theta + a\sin\theta)}{u}\right),$$

に比例し、これは u について狭義単調減少である。したがって帰り道では、a、h、θ の値にかかわらず、運転手はできるだけ速く、$u = w$ で走るべきである。

検算

- $a = 1.3$、$h = 0.8$、$v = 2$、$\theta = 0.6$、$u = 0.7$ のとき、公式から得られる割合は（雨粒の密度と幅を単位量として）2.229 である。バスの断面を横切る雨粒をランダムに配置したコンピュータシミュレーションでは 2.232 となった。$u = 0$ の場合、$u > v\cos\theta$ の場合、u が負の場合（帰り道）にも、同様によく一致した。
- $\theta \to \frac{1}{2}\pi$（雨が鉛直に降る）とする。このとき $a\sin\theta > h\cos\theta$ なので、全速力で走るべきである。これは理にかなっている。濡れるのは屋根だけであり、雨の中にいる時間が短いほど受ける雨は少ない。
- $\tan\theta = h/a$ となる等号の場合、予想どおり、総量 Dh は $u = v\cos\theta$、$1.5v\cos\theta$、$3v\cos\theta$ のいずれでも同じである。

よくある間違い

- 総量ではなく割合を最小化してしまう。割合には所要時間 D/u を掛けなければならない。
- $u > v\cos\theta$ のとき、雨が後面ではなく前面に当たることを忘れる。絶対値が現れるのはこのためである。
- 帰り道でも $|v\cos\theta - u|$ を使ってしまう。このときの相対速度は $v\cos\theta + u$ である。

STEP のその先へ

「密度 × 面積 × 法線方向の速度」という計算は、面を通過するベクトル場（vector field）の流束である。ベクトル解析では、これは面積分（surface integral）$\iint \rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$ となり、流体力学（fluid dynamics）や電磁気学（electromagnetism）における保存則（conservation laws）の出発点となる。バスの座標系に移ることはガリレイ変換（Galilean transformation）であり、相対性理論（relativity）の古典的な先駆けである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、相対運動とこの種の流束の議論の両方を扱っている。

解答例

STEP I 2015、第 11 問

力学 ・ 摩擦とモーメント

STEP I 2015、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/15-s1-q11

鍵となる考え方

円柱（cylinder）にはたらく垂直抗力（normal reaction）はどれも半径に沿って作用するので、中心を通る。したがって、それぞれの中心のまわりのモーメント（moment）を考えると、重力とすべての垂直抗力が消え、摩擦力（frictional force）だけが残る。しかも摩擦力はすべて中心から同じ距離のところに作用する。これで小問 (i) はほとんど労せずに得られる。小問 (ii) では、各円柱について斜面に平行な方向の力を分解し、そのうえで不等式が問題にしている二つの接触点に摩擦の法則を適用する。

解答

二つの円柱を半径 r の一様な剛体の円柱としてモデル化する。どちらも斜面に接しており、上側の円柱のほうが斜面の上方にある。半径が等しいので、中心を結ぶ線は斜面に平行であり、円柱どうしの接触点は斜面から高さ r のところ、つまり両方の中心と同じ高さにある。円柱どうしの間の垂直抗力は中心を結ぶ線に沿って（斜面に平行に）はたらき、円柱どうしの間の摩擦力は斜面に垂直にはたらく。

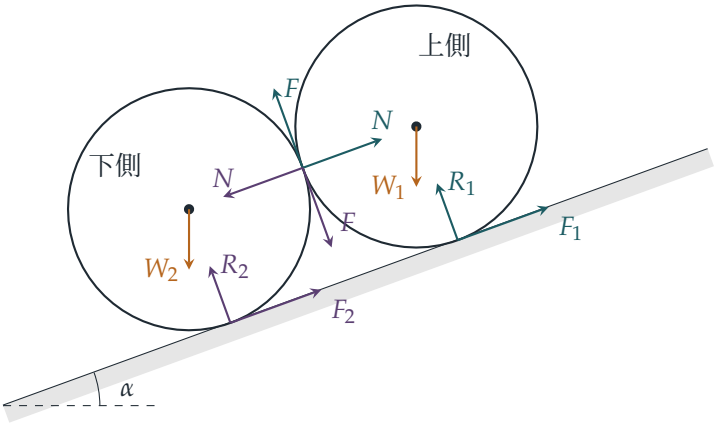
斜面に沿って上向きを x 方向、斜面に垂直で斜面から離れる向きを y 方向とする。次のようにおく。

- R_1, R_2 を、斜面が上側の円柱、下側の円柱に及ぼす垂直抗力とする。
- F_1, F_2 を、斜面が上側の円柱、下側の円柱に及ぼす摩擦力とし、斜面に沿って**上向き**を正として測る（符号つきの量とするので、負の値なら斜面に沿って下向きを意味する）。
- N を、下側の円柱が上側の円柱に及ぼす垂直抗力とする。これは斜面に沿って上向

きにはたらく。

- F を、下側の円柱が上側の円柱に及ぼす摩擦力とし、斜面**から離れる向き**を正として測る（これも符号つき）。

ニュートンの第 3 法則（Newton's third law）により、上側の円柱は下側の円柱に、斜面に沿って下向きに N を、斜面に向かう向きに F を及ぼす。



上側の円柱にはたらく力をティール色で、下側の円柱にはたらく力をプラム色で示している。

小問 (i)

上側の円柱の中心のまわりのモーメントを考える。重力は中心に作用し、R_1 と N はどちらも半径に沿って作用するので、いずれもモーメントをもたない。残るのは二つの摩擦力だけであり、どちらも中心から距離 r の接線（tangent）に沿って作用する。

- F_1 は円柱の最下点で斜面に沿って上向きに作用し、（図において）反時計回りのモーメント rF_1 を与える。
- F は接触点で斜面から離れる向きに作用する。接触点は中心より斜面の下側にあるので、時計回りのモーメント rF を与える。

つり合い（equilibrium）の状態ではこれらが打ち消し合うので、$rF_1 = rF$、すなわち $F_1 = F$ である。

考えてみよう 中心のまわりのモーメントを考えるとき、垂直抗力を無視できるのはなぜか。

円に対する垂直抗力は接触点における接線に垂直なので、半径に沿っており、その作

用線（line of action）は中心を通る。したがって中心のまわりのモーメントは 0 である。まさにこの理由から、ここでは中心のまわりのモーメントを考えるのが適切なのである。

下側の円柱についても同様に、モーメントをもつのは F_2（最下点で斜面に沿って上向き、反時計回りのモーメント rF_2）と、接触点で斜面に向かう向きの摩擦力 F（接触点は中心より斜面の上側にあり、時計回りのモーメント rF）だけである。よって $F_2 = F$ である。

ゆえに符号つきの量として $F = F_1 = F_2$ であり、特にそれらの大きさは等しい。これが示すべきことであった。

小問 (ii)

各円柱について、斜面に平行な方向に力を分解する。

$$\begin{aligned} \text{上側：} \quad & F_1 + N = W_1 \sin\alpha, \\ \text{下側：} \quad & F_2 = N + W_2 \sin\alpha. \end{aligned}$$

辺々を加え、$F_1 = F_2 = F$ を用いると、

$$2F = (W_1 + W_2)\sin\alpha, \qquad \text{よって} \qquad F = \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha > 0,$$

となる。これから、どの摩擦力も図に描いた向きにはたらくこともわかる。これを代入し直すと、

$$N = W_1 \sin\alpha - F = \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha,$$

となり、$W_1 > W_2$ かつ $\alpha > 0$ なのでこれは正である。したがって、二つの円柱は確かに互いに押し合っている。上側の円柱について斜面に垂直な方向に力を分解すると、

$$R_1 + F = W_1 \cos\alpha, \qquad \text{よって} \qquad R_1 = W_1 \cos\alpha - F.$$

考えてみよう 実際に必要なのは、どの摩擦の不等式か。

つり合いの状態では、各接触点での摩擦力は、そこでの摩擦係数（coefficient of friction）と垂直抗力の積以下である。一つ目の結果は円柱どうしの接触点から、二つ目の結果は上側の円柱と斜面の接触点から得られる。（下側の円柱と斜面の接触点からは μ_2 を含む三つ目の条件が得られるが、これは問われていない。）

円柱どうしの間。 $F \le \mu N$ が必要である。すなわち

$$\tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha \le \mu \cdot \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha.$$

正の量 $\frac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha$ で割ると

$$\mu \ge \frac{W_1 + W_2}{W_1 - W_2},$$

となり、示すべき結果が得られる。

上側の円柱と斜面の間。 $F \le \mu_1 R_1 = \mu_1(W_1\cos\alpha - F)$ が必要である。すなわち

$$(1+\mu_1)F \le \mu_1 W_1 \cos\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}(1+\mu_1)(W_1+W_2)\sin\alpha \le \mu_1 W_1 \cos\alpha.$$

斜面（inclined plane）の傾斜角は $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ を満たすので $\cos\alpha > 0$ であり、また $(1+\mu_1)(W_1+W_2) > 0$ である。これら両方で割ると、

$$\tan\alpha \le \frac{2\mu_1 W_1}{(1+\mu_1)(W_1+W_2)},$$

となり、示すべき結果が得られる。（$\mu_1 R_1 \ge F > 0$ なので、この条件から $R_1 > 0$ も導かれ、上側の円柱は斜面から離れないことに注意しよう。）

検算

- $W_1 = 3, W_2 = 1$ のときは $\mu \ge 2$ が必要であり、さらに $\mu_1 = 1$ とすると $\tan\alpha \le \frac{3}{4}$ が必要である。このような値を六つのつり合いの式（各円柱について二つの分解の式と一つのモーメントの式）に代入して直接解くと、上と同じ F, N, R_1 が得られる。
- $W_1 \to W_2$ のとき、μ に対する下限は無限大に発散する。これは納得がいく。このとき $N \to 0$ となり、円柱どうしはほとんど押し合わないのに、両者の間の摩擦力は依然として $\frac{1}{2}(W_1+W_2)\sin\alpha$ でなければならないからである。
- $\mu_1 \to \infty$ のとき、条件は $\tan\alpha \le 2W_1/(W_1+W_2)$ となり、これはちょうど $R_1 \ge 0$ という条件である。上側の円柱が浮き上がり始めてしまえば、どれほど粗い斜面でも助けにはならない。

よくある間違い

- 円柱どうしの間の摩擦力が斜面に沿ってはたらくとしてしまうこと。摩擦力は接触点における共通接線に沿ってはたらき、ここではそれは斜面に垂直である。
- モーメントの式を忘れること。力の分解だけでは、未知数六つに対して式が四つしか得られない。摩擦力を決定するのは二つのモーメントの式である。
- 垂直抗力 R_1 の式に F を入れ忘れること。下側の円柱からの摩擦力は上側の円柱を斜面から離れる向きに押すので、R_1 は $W_1\cos\alpha$ より小さい。

STEP のその先へ

剛体（rigid body）がつり合いの状態にあるのは、合力と合モーメントの両方が 0 になるときに限られる。そして、モーメントを考える点をうまく選ぶことこそ、剛体の静力学における主要な技術である。ここでは式の個数と未知数の個数がちょうど等しかった。未知数のほうが式より多いとき、その問題は**不静定**（statically indeterminate）であるといい、解き切るには物体の変形をモデル化する必要がある。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の静力学とトルクを丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 2015、第 12 問

確率・統計　・　ポアソン分布の間引き

> **STEP I 2015、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q12

鍵となる考え方

到着人数で条件をつけると、手術を必要とする人数は二項分布に従う個数になる。そのうえで、ありうるすべての到着人数について和をとれば（全確率の法則（law of total probability））、手術を必要とする人数の分布が得られ、その和は指数関数の級数にまとまる。最後の小問で鍵となるのは、平均が等しい独立な 2 つのポアソン分布（Poisson distribution）に従う個数を、その合計で条件づけると、両者への振り分けが二項分布（binomial distribution）に従うという事実である。

解答

ある 1 日に到着する負傷者の数を X とし、そのうち手術を必要とする人数を Y とする。

小問 (i)

$X = n$ という条件のもとで、n 人の負傷者はそれぞれ他と独立に確率 $\frac{1}{4}$ で手術を必要とする。したがって条件付きで $Y \sim \mathrm{B}(n, \frac{1}{4})$ であり、$0 \le r \le n$ に対して

$$\mathrm{P}(Y = r \mid X = n) = \binom{n}{r}\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{n-r} = \binom{n}{r}\frac{3^{n-r}}{4^n}.$$

（$r > n$ のときは確率は 0 である。）

小問 (ii)

$r \geq 0$ を固定する。$Y = r$ が起こりうるのは $X \geq r$ のときに限られるから、全確率の法則より

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y = r) &= \sum_{n=r}^{\infty} \mathrm{P}(X = n)\,\mathrm{P}(Y = r \mid X = n) \\ &= \sum_{n=r}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-8} 8^n}{n!} \cdot \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \left(\frac{1}{4}\right)^r \left(\frac{3}{4}\right)^{n-r}. \end{aligned}$$

$n!$ は約分される。ここで $8^n = 8^r \cdot 8^{n-r}$ と分けると、$8^r (\frac{1}{4})^r = 2^r$、$8^{n-r} (\frac{3}{4})^{n-r} = 6^{n-r}$ となるので

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y = r) &= \frac{\mathrm{e}^{-8} 2^r}{r!} \sum_{n=r}^{\infty} \frac{6^{n-r}}{(n-r)!} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-8} 2^r}{r!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6^k}{k!} \qquad (k = n - r) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-8} 2^r}{r!}\, \mathrm{e}^6 = \frac{\mathrm{e}^{-2} 2^r}{r!}. \end{aligned}$$

これはすべての $r = 0, 1, 2, \ldots$ について成り立つから、1 日に手術を必要とする人数は平均 $8 \times \frac{1}{4} = 2$ のポアソン分布に従う。

考えてみよう e^6 はどこから出てきたのか？

r だけに依存するものをすべて和の外に出すと、残るのは $\sum 6^k/k!$、すなわち e^6 の指数関数の級数である。8^n を $8^r \cdot 8^{n-r}$ と分けることこそが、残りの和を $n - r$ だけに依存させる決め手なのである。

小問 (iii)

月曜日と火曜日に手術を必要とする人数をそれぞれ M、T とする。小問 (ii) より、どちらも $\mathrm{Po}(2)$ に従う。異なる日の到着は独立であり、負傷者は互いに独立に手術を必要とするから、M と T は独立である。すると

$$\mathrm{P}(M = 8 \mid M + T = 12) = \frac{\mathrm{P}(M = 8,\ T = 4)}{\mathrm{P}(M + T = 12)}.$$

独立性より分子は

$$\mathrm{P}(M = 8)\,\mathrm{P}(T = 4) = \frac{\mathrm{e}^{-2} 2^8}{8!} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-2} 2^4}{4!} = \frac{\mathrm{e}^{-4}\, 2^{12}}{8!\,4!}.$$

分母については、独立なポアソン確率変数の和は平均を足し合わせたポアソン分布に従うので、$M + T \sim \mathrm{Po}(4)$ である。この事実を引用したくなければ、直接次のように

導ける：

$$\mathrm{P}(M+T=12)=\sum_{m=0}^{12}\frac{\mathrm{e}^{-2}2^m}{m!}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-2}2^{12-m}}{(12-m)!}=\frac{\mathrm{e}^{-4}2^{12}}{12!}\sum_{m=0}^{12}\binom{12}{m}=\frac{\mathrm{e}^{-4}\,4^{12}}{12!},$$

ここで $\sum_m \binom{12}{m}=2^{12}$ を用いた。割り算をすると

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(M=8\mid M+T=12)&=\frac{\mathrm{e}^{-4}\,2^{12}}{8!\,4!}\cdot\frac{12!}{\mathrm{e}^{-4}\,4^{12}}\\&=\binom{12}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{12}=\frac{495}{4096}.\end{aligned}$$

$495=3^2\cdot5\cdot11$ は奇数で $4096=2^{12}$ であるから、この分数は既約である。よって求める確率は $\dfrac{495}{4096}$ である。

考えてみよう　なぜ答えが二項分布の確率のような形をしているのか？

合計が 12 であるという条件のもとでは、2 日間の平均が等しいので、12 件の手術症例のそれぞれは月曜日から来たのか火曜日から来たのかが同様に確からしい。したがって月曜日の人数は $\mathrm{B}(12,\frac{1}{2})$ に従う。もとの平均 8 が完全に消えていることに注意しよう。

検算

- 小問 (ii) の平均は $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}\big(\mathrm{E}(Y\mid X)\big)=\mathrm{E}(X/4)=2$ と一致する。
- 小問 (ii) の級数を $r=0,\dots,14$ について数値的に計算すると、丸め誤差の範囲で $\mathrm{e}^{-2}2^r/r!$ が再現される。たとえば $\mathrm{P}(Y=0)=\sum_n \mathrm{e}^{-8}8^n(\frac{3}{4})^n/n!=\mathrm{e}^{-8}\mathrm{e}^{6}$ である。
- $m=0,\dots,12$ に対する条件付き確率 $\binom{12}{m}/2^{12}$ の和は 1 であり、$495/4096\approx0.121$ である。モデル全体（ポアソン分布に従う到着、続いてそれぞれ確率 $\frac{1}{4}$ で手術）のコンピュータ・シミュレーションでも、これと整合する値が得られた。

よくある間違い

- 小問 (ii) の和を $n=r$ からではなく $n=0$ から始めてしまう。到着者が r 人未満なら、r 人が手術を必要とすることはありえない。
- 小問 (iii) で各日に $\mathrm{Po}(8)$ を用いてしまう。条件づけているのは手術症例の数なので、関係する平均は 2 である。（この問題では結局平均は打ち消し合うが、途中の計算は正しくあるべきである。）
- 既約分数で答えるよう求められているのに、答えを $\binom{12}{8}/2^{12}$ や $1980/16384$ のままにしてしまう。

STEP のその先へ

小問 (ii) の内容は**間引き**（thinning）と呼ばれる。ポアソン過程（Poisson process）の各点を独立に確率 p で残すと、残った点は強度が p 倍のポアソン過程をなし、しかも意外なことに、捨てられた点とは独立になる。小問 (iii) はこの逆である。独立なポアソン分布に従う個数は、その合計で条件づけると多項分布（multinomial distribution）に従って振り分けられる。この 2 つの事実はポアソン過程の理論の土台であり、大学最初の確率論の講義で出会うことになる。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は両方を扱っている。

解答例

STEP I 2015、第 13 問

確率・統計 ・ 条件付き確率

> **STEP I 2015、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q13

鍵となる考え方

最初の 6 がいつ出るかで条件付け（conditioning）をする。最初の 6 が第 n 回目に出るとわかっていれば、それより前の $n-1$ 回の投げはそれぞれ独立に $1,\dots,5$ のどれも等確率でとるので、最初の 6 より前の 4 や 5 に関する問いは通常の二項分布（binomial distribution）の問題になる。そのうえで n について和をとると、等比級数（geometric series）とその導関数が現れる。ヒントにある二項展開（binomial expansion）が使われるのはまさにこの場面である。

解答

各回の投げは独立（independent）であり、どの目も確率 $\frac{1}{6}$ で出る。最初の 6 が第 n 回目に出るという事象を A とし、$p_n = \mathrm{P}(A)$ とおく。

小問 (i)

最初の 6 が第 n 回目に出るのは、第 $1,\dots,n-1$ 回目がすべて 6 以外で、第 n 回目が 6 であるときであり、そのときに限る。独立性より、

$$\mathrm{P}(A) = p_n = \left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1}\tfrac{1}{6}, \qquad n = 1,2,3,\dots$$

条件付けに関する事実。 A のもとでは、第 $1,\dots,n-1$ 回目の各投げについてわかっているのは「6 ではない」ということだけである。さいころは公正で各回の投げは独立なので、これら $n-1$ 回の投げは独立であり、それぞれ $\{1,2,3,4,5\}$ 上の一様分布（uniform distribution）に従う。以降のすべての小問で、この事実と全確率の法則（law

of total probability）$\mathrm{P}(X) = \sum_n \mathrm{P}(X \mid A)\, p_n$ を用いる。

小問 (ii)

最初の 6 より前に 5 が一度も出ないという $\mathrm{P}(B')$ を求めるほうが易しい。A のもとで、それより前の $n-1$ 回の各投げが 5 を避ける確率は $\frac{4}{5}$ なので、

$$\mathrm{P}(B') = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{4}{5}\right)^{n-1} \left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1} \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1} = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \tfrac{1}{2}.$$

よって $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$ である。

小問 (iii)

包除原理（inclusion–exclusion principle）を余事象（complement）の形で用いると、

$$\mathrm{P}(B \cap C) = 1 - \mathrm{P}(B') - \mathrm{P}(C') + \mathrm{P}(B' \cap C').$$

目 4 と目 5 の対称性（symmetry）より、$\mathrm{P}(C') = \mathrm{P}(B') = \frac{1}{2}$ である。$B' \cap C'$ については、A のもとでそれより前の各投げが 4 と 5 の両方を避けなければならず、その確率は $\frac{3}{5}$ である：

$$\mathrm{P}(B' \cap C') = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{3}{5}\right)^{n-1} \left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1} \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{3}.$$

したがって $\mathrm{P}(B \cap C) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ である。

小問 (iv)

A のもとで、それより前の $n-1$ 回の投げのうち 5 が出る回数は $\mathrm{B}(n-1, \frac{1}{5})$ に従うので、

$$\mathrm{P}(D \mid A) = (n-1)\tfrac{1}{5} \left(\tfrac{4}{5}\right)^{n-2} \qquad (n \geq 2),$$

であり、$n = 1$ のときは 0 である。よって

$$\mathrm{P}(D) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)\tfrac{1}{5} \left(\tfrac{4}{5}\right)^{n-2} \left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1} \tfrac{1}{6}.$$

$\frac{5}{6}$ を 1 つくくり出し、残りを組にする：$\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$、$\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2}{3}$ である。$m = n-1$ とおくと、

$$\mathrm{P}(D) = \tfrac{1}{36} \sum_{m=1}^{\infty} m \left(\tfrac{2}{3}\right)^{m-1} = \tfrac{1}{36} \left(1 - \tfrac{2}{3}\right)^{-2} = \tfrac{9}{36} = \tfrac{1}{4},$$

ここで、与えられた展開を指数 -2 の場合に用いた：$(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$。

考えてみよう 一方または両方が起こるすべての場合を列挙せずに、$\mathrm{P}(D \cup E)$ を求めるにはどうすればよいか。

小問 (v)

$\mathrm{P}(D \cup E) = \mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(E) - \mathrm{P}(D \cap E)$ を用いる。4 と 5 の対称性より $\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}(D) = \frac{1}{4}$ である。したがって、求める必要があるのは $\mathrm{P}(D \cap E)$ だけである。

A のもとで、それより前の $n-1$ 回の投げのうち 4 がちょうど 1 回、5 がちょうど 1 回出るということは、どの回が 5 でどの回が 4 かを選び（順序を区別して $(n-1)(n-2)$ 通り）、残りの $n-3$ 回がすべて $\{1,2,3\}$ に属するということである：

$$\mathrm{P}(D \cap E \mid A) = (n-1)(n-2)\left(\tfrac{1}{5}\right)^2\left(\tfrac{3}{5}\right)^{n-3} \qquad (n \geq 3).$$

すると

$$\mathrm{P}(D \cap E) = \sum_{n=3}^{\infty} (n-1)(n-2)\tfrac{1}{25}\left(\tfrac{3}{5}\right)^{n-3}\left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1}\tfrac{1}{6}.$$

$\left(\frac{5}{6}\right)^2$ をくくり出すと定数 $\frac{1}{25}\cdot\frac{25}{36}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{216}$ が得られ、また $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6} = \frac{1}{2}$ である。$k = n-3$ とおくと、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(D \cap E) &= \tfrac{1}{216}\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^k = \tfrac{2}{216}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+2)!}{k!\,2!}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k \\ &= \tfrac{1}{108}\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{-3} = \tfrac{8}{108} = \tfrac{2}{27},\end{aligned}$$

ここで、与えられた展開を指数 -3 の場合に用いた。その x^k の係数は $\frac{(k+2)!}{k!\,2!}$ である。したがって

$$\mathrm{P}(D \cup E) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{27} = \tfrac{27-4}{54} = \tfrac{23}{54}.$$

検算

すべての答えをもっと鮮やかに見通す方法があり、これは格好の検算になる。1, 2, 3 の目が出た投げ（さらに (ii) と (iv) では 4 も）はすべて無視する。それらは事象にまったく影響しないからである。残った関係のある投げは、関係のある各目が等確率で現れる列をなす。

- (ii)：5 か 6 が出る最初の投げは、そのどちらであることも等確率なので、$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$ である。
- (iii)：4, 5, 6 のうち、3 つの目のそれぞれが「初めて現れるのが最も遅い目」になることは等確率であり、$B \cap C$ は 6 が最も遅いことを意味するので、$\frac{1}{3}$ である。

- (iv)：D は、5 または 6 からなる列が 5, 6 で始まることを意味する。その確率は $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ である。
- (v)：$D \cap E$ は、4・5・6 からなる列が 4,5,6 または 5,4,6 で始まることを意味する。その確率は $2\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2}{27}$ である。

5 つの答えはすべて、3×10^5 通りの投げの列によるコンピュータ・シミュレーションでも確認した。シミュレーションでは $\mathrm{P}(D \cup E) \approx 0.426$ となり、$\frac{23}{54} \approx 0.4259$ と一致した。

よくある間違い

- それより前の投げを 6 つの目すべての上で一様とみなしてしまう：A のもとではそれらは 6 にはなりえないので、5 が出る確率は $\frac{1}{6}$ ではなく $\frac{1}{5}$ である。
- (v) で因子 $(n-1)(n-2)$ を忘れる、あるいは $\binom{n-1}{2}$ を用いてしまう。後者では 2 回の投げのどちらが 4 かが区別されない。
- (v) で重なりを引かずに $\mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(E)$ を足してしまう。

STEP のその先へ

ここで行ったように確率的な停止時刻（stopping time）で条件付けをして和をとることは、全確率の法則の最も有用な形であり、現れた級数は負の二項分布（negative binomial distribution）の母関数（generating function）である。「関係のない投げを無視する」という検算は、強力な考え方の一例である。すなわち、関係のあることが起こる瞬間だけを観察した過程は、もとの過程よりはるかに単純になることが多い。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、この両方の考え方を展開している。

解答例

STEP II 2015、第 1 問

純粋数学 • 不等式と級数

> **STEP II 2015、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q1

鍵となる考え方

関数と対数（logarithm）の間の各不等式は、x にうまく選んだ値を代入すると、級数（series）の一つの項と対数の**差**との間の不等式になる。その差を足し合わせるとほとんどすべてが打ち消し合い（和が望遠鏡和（telescoping sum）になる）、対数が一つか二つだけ残る。腕の見せどころは、対数が差に分かれるような代入の選び方にある。

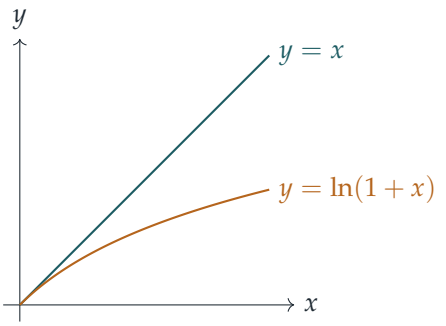
解答

小問 (i)

$x \geq 0$ に対して $f(x) = x - \ln(1+x)$ とおく。すると $f(0) = 0 - \ln 1 = 0$ であり、

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0 \qquad \text{ただし} x > 0.$$

よって f は $[0, \infty)$ で狭義単調増加（strictly increasing）であり、任意の $x > 0$ に対して $f(x) > f(0) = 0$ が成り立つ。すなわち、すべての正の x に対して $x > \ln(1+x)$ であり、これが示すべきことであった。



ここで正の整数 k に対して $x = \frac{1}{k}$ とおくと、

$$\frac{1}{k} > \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k.$$

これらを $k = 1, 2, \ldots, n$ について足し合わせると、右辺は打ち消し合う。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &> (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n) \\ &= \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1).\end{aligned}$$

これが求める結果である。（副産物として、$\ln(n+1) \to \infty$ であるから、調和級数（harmonic series）は発散（diverge）する。）

小問 (ii)

$0 \le x < 1$ に対して $g(x) = x + \ln(1-x)$ とおく。すると $g(0) = 0$ であり、

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} < 0 \qquad \text{ただし} 0 < x < 1,$$

である。この範囲では $1 - x > 0$ だからである。よって g は狭義単調減少であり、$0 < x < 1$ に対して $g(x) < 0$ となる。すなわち

$$x < -\ln(1-x) \qquad (0 < x < 1).$$

考えてみよう x にどんな値を代入すべきか。また、なぜ $k = 1$ は使えないのか。

左辺に $\frac{1}{k^2}$ がほしいので、$x = \frac{1}{k^2}$ とおく。これには $x < 1$、すなわち $k \ge 2$ が必要である。$k = 1$ では対数 $\ln(1-1)$ が定義されない。項 $\frac{1}{1} = 1$ を別扱いにするのはこのためであり、これがちょうど上界 $1 + \ln 2$ の 1 にあたる。$k \ge 2$ については、$1 - \frac{1}{k^2}$ が因数分解できることが鍵となる。

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2},$$

したがって

$$\frac{1}{k^2} < -\ln\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \big(\ln k - \ln(k-1)\big) - \big(\ln(k+1) - \ln k\big).$$

$a_k = \ln k - \ln(k-1)$ とおくと、右辺は $a_k - a_{k+1}$ である。$k = 2$ から N まで足し合わせると打ち消し合い、

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2} < a_2 - a_{N+1} = \ln 2 - \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) < \ln 2,$$

となる。$\ln\frac{N+1}{N} > 0$ だからである。

よって部分和（partial sum）$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2}$ は N とともに増加し、いずれも $1+\ln 2$ より小さい。上に有界（bounded above）な単調増加数列は収束（converge）するので、この無限級数は収束し、その和は $1+\ln 2$ 以下である。

不等式を厳密な（等号なしの）ものにするには、極限をとる操作では $\le$ しか保たれないことに注意し、少し余裕を残しておく。$k = 2$ の不等式 $\frac{1}{4} < \ln\frac{4}{3}$ は等号なしで成り立つので、$\delta = \ln\frac{4}{3} - \frac{1}{4} > 0$ とおく。すると任意の $N \ge 2$ に対して、同じ打ち消し合いにより

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2} < \ln 2 - \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) - \delta < \ln 2 - \delta,$$

が得られ、極限では $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2} \le \ln 2 - \delta < \ln 2$ となる。$k = 1$ の項を加えて

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 1 + \ln 2,$$

これが求める結果である。

検算

- 小問 (i) で $n = 1$ のとき：$1 > \ln 2 \approx 0.693$。$n = 10$ のとき：$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k} \approx 2.929$ であり、一方 $\ln 11 \approx 2.398$ である。
- 小問 (ii)：真の和は $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.6449$ であり、$1+\ln 2 \approx 1.6931$ を余裕をもって下回る。実際、上の議論からはやや精密な上界 $1+\ln 2-\delta \approx 1.6555$ が得られる（$\delta \approx 0.0377$）。
- $\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k^2}$ に対する打ち消し合いによる上界 $\ln 2 - \ln\frac{N+1}{N}$ は、10^5 までのすべての N についてコンピュータで確認した。

よくある間違い

- $k = 1$ についても $x = \frac{1}{k^2}$ を代入してしまう：このとき $\ln(1-x)$ は定義されず、最初の項を別扱いにし忘れると $1+\ln 2$ の 1 が抜け落ちる。

- $f(0) = 0$ を示さずに $f'(x) > 0$ だけを示す：関数は増加していても負であり得る。
- 等号なしの不等式の極限をとり、何の説明もなく極限でも等号なしだと主張する：極限からは $\leq$ しか得られない。

STEP のその先へ

和を対数（あるいは積分）と比較することは積分判定法（integral test）の出発点であり、小問 (i) を精密化すると、$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ がオイラー（Euler）の定数 $\gamma \approx 0.5772$ に収束することがわかる。厳密な値 $\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ はオイラーによるバーゼル問題（Basel problem）の解であり、大学 1 年の講義ではフーリエ級数（Fourier series）から導くことが多い。ここで用いた単調収束（monotone convergence）の議論、すなわち有界な単調増加数列は収束するという事実は、実解析（real analysis）の礎石の一つである。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）はこれを丁寧に展開している。

解答例

STEP II 2015、第 2 問

純粋数学 ・ 三角形の幾何

STEP II 2015、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

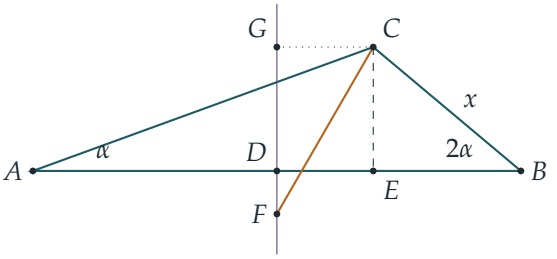
step.maths.org/questions/15-s2-q2

鍵となる考え方

最初の結果は、正弦定理（sine rule）と $\sin 3\alpha$ の 3 倍角の公式（triple-angle formula）から得られる。DE については、すべてを AB に沿って一方の端から測る。CE の両側にある直角三角形（right-angled triangle）から AE と BE が直接求まる。DE の答えは驚くほど簡単な形になり、その簡単さこそが三等分（trisection）を成り立たせている。それは C が垂直二等分線（perpendicular bisector）からどれだけ離れているかを教えてくれ、それを $CF = x$ と比べることで角がひとつに定まるのである。

解答

以下を通して、C における角は $\angle ACB = \pi - 3\alpha$ であり、2α は鋭角であるから $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ である。



長さ AB

正弦定理により、$\sin(\pi - 3\alpha) = \sin 3\alpha$ を用いると

$$\frac{AB}{\sin 3\alpha} = \frac{x}{\sin \alpha}.$$

3倍角の公式 $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ を用い、$\sin\alpha \neq 0$ で割ると

$$AB = x\,\frac{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{\sin\alpha} = (3 - 4\sin^2\alpha)\,x,$$

となり、示すべき式が得られる。

長さ DE

A と B における角はともに鋭角であるから、C から下ろした垂線の足（foot of the perpendicular）E は A と B の間にある。直角三角形 CEB において

$$BE = x\cos 2\alpha, \qquad CE = x\sin 2\alpha.$$

したがって

$$AE = AB - BE = x\big(3 - 4\sin^2\alpha - (1 - 2\sin^2\alpha)\big) = x(2 - 2\sin^2\alpha) = 2x\cos^2\alpha,$$
$$AD = \tfrac{1}{2}AB = x\big(\tfrac{3}{2} - 2\sin^2\alpha\big).$$

引き算すると

$$AE - AD = x\big(2 - 2\sin^2\alpha - \tfrac{3}{2} + 2\sin^2\alpha\big) = \tfrac{1}{2}x.$$

これは正であるから、E は D と B の間にあり、

$$DE = \tfrac{1}{2}x,$$

となる。これは α によらない。

三等分

C から AB の垂直二等分線 DF に下ろした垂線の足を G とする。CE と GD はともに AB に垂直であるから、$CGDE$ は長方形であり、$CG = DE = \frac{1}{2}x$ である。また CG は AB に平行、すなわち CE に垂直である。

考えてみよう $CF = x$ をどのようにして角に結びつければよいか。

三角形 CGF は G に直角をもち、斜辺は $CF = x$、一辺は $CG = \frac{1}{2}x$ である。よって

$$\cos\angle GCF = \frac{CG}{CF} = \frac{1}{2}, \qquad \text{よって} \qquad \angle GCF = \frac{\pi}{3}.$$

垂直二等分線上で C からの距離が x である点は、G の両側にひとつずつ、計 2 つある。半直線 CE（AB に向かって下向き）から A の方へ回転して角を測ると、半直線 CG は角 $\frac{\pi}{2}$ の位置にあるので、候補となる 2 本の半直線 CF は角 $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$（$G$ より下の点）と $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$（$G$ より上の点）の位置にある。

次に、どちらが AC に関して B と同じ側にあるかを決める。直角三角形 ACE において $\angle ACE=\frac{\pi}{2}-\alpha$ であるから、半直線 CA は同じ側に CE から角 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ の位置にある。直線 AC に関して B の側にある C からの半直線は、このように測って $\frac{\pi}{2}-\alpha$ より小さい角の位置にあるもの（または CE の反対側、B の方にあるもの）である。$\alpha<\frac{\pi}{4}$ であるから

$$\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}-\alpha<\frac{5\pi}{6},$$

となり、G より下の点は B の側にあり、G より上の点はそうでない。よって F は下の点であり、$\angle ECF=\frac{\pi}{6}$ で、半直線 CF は角 ACE の内部、したがって $\angle ACB$ の内部にある。ゆえに

$$\angle ACF=\angle ACE-\angle ECF=\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}-\alpha=\frac{1}{3}(\pi-3\alpha)=\frac{1}{3}\angle ACB.$$

したがって CF は CA の隣で $\angle ACB$ の 3 分の 1 を切り取り（$\angle FCB=\frac{2}{3}\angle ACB$ である）、直線 FC は角 ACB を三等分する。

検算

- $\alpha=\frac{\pi}{6}$ のとき、三角形の角は 30°、60°、90° であり、$AB=(3-1)x=2x$ はおなじみの斜辺の長さである。このとき $AE=2x\cos^2 30^\circ=\frac{3}{2}x$、$AD=x$ であるから $DE=\frac{1}{2}x$ となる。C における角は 90° であり、$\angle ACF=60^\circ-30^\circ=30^\circ$ はその 3 分の 1 である。
- $\alpha=20^\circ$、$x=1$ のとき、$AB\approx 2.532$、$\angle ACB=120^\circ$ であり、座標から直接 F を作図すると $\angle ACF=40^\circ$ となる。3 つの結果はすべて、数千個のランダムな三角形についてコンピュータでも確認した。

よくある間違い

- F を G より上にとってしまうこと。その点も C からの距離は x であるが、AC に関して反対側にある。問題文がどちらの側かを指定しているのはそのためである。
- DE を長さの差として書く前に、E が A と B の間にあること（および D のどちら側にあるか）を確かめ忘れること。

STEP のその先へ

一般の角を定規とコンパスで三等分することは不可能であり、この事実は体論（field theory）を用いて証明される。60° を三等分するには既約な 3 次方程式（irreducible cubic）の根を作図しなければならないが、作図可能な（constructible）長さは常に 2 次方程式を積み重ねたものしか満たさないのである。ここでは三角形が追加の情報（B における角が A における角の 2 倍であること）を与えており、それによって簡単な作図で三等分が実現できるのである。さらに美しい三角形の幾何については、コクセター（Coxeter）と Greitzer の *Geometry Revisited*（邦訳『幾何学再入門』）を、不可能性の証明については Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）を参照されたい。

解答例

STEP II 2015、第 3 問

純粋数学 • 数え上げと数学的帰納法

> **STEP II 2015、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q3

鍵となる考え方

三角形を最も長い棒によって分類する。T_n には数えられるが T_{n-1} には数えられない三角形は、ちょうど長さ n の棒を使うものである。したがって $T_n - T_{n-1}$ は、$a+b \geq n$ を満たす組 $a < b < n$ の個数に等しい。中間の棒 b を一つ固定するごとにその個数は簡単に数えられ、しかもそれらの個数は等差数列（arithmetic progression）をなす。連続する二つの差を足し合わせると $T_{2m} - T_{2m-2}$ が得られ、これはまさに帰納法（induction）の段階で必要となるものである。

解答

最も長い棒が c である三角形を数える

T_n に数えられる三角形は、棒 $a < b < c \leq n$ からなる。そのうち $c \leq n-1$ であるものは、ちょうど T_{n-1} に数えられる三角形である。よって

$$T_n - T_{n-1} = \#\{(a,b) : 1 \leq a < b < n,\ a+b \geq n\}.$$

中間の棒 b を固定する。必要な条件は $n-b \leq a \leq b-1$ である（$b < n$ であるから $a \geq 1$ は自動的に成り立つ）。したがって $2b - n > 0$ のときは $2b-n$ 通りの選び方があり、そうでないときは選び方は一つもない。よって b は $\frac{n}{2}$ より大きい最小の整数から $n-1$ まで動く。

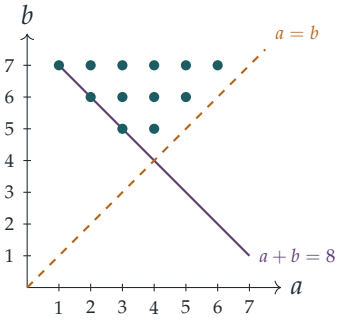
$n = 8$ の場合

$c = 8$ のとき、中間の棒としてありうるのは $b = 5, 6, 7$ であり、a の選び方はそれぞれ 2、4、6 通りである：

$$b = 5 : \ a \in \{3, 4\}, \qquad b = 6 : \ a \in \{2, 3, 4, 5\}, \qquad b = 7 : \ a \in \{1, \ldots, 6\}.$$

（$b = 4$ とすると $4 \leq a \leq 3$ が必要となり、これは不可能である。）ゆえに $T_8 - T_7 = 2 + 4 + 6 = 12$ となり、求める結果が得られた。

下の図は、これら 12 個の組 (a, b) を示している。すなわち、直線 $a + b = 8$ 上またはその上側にあり、かつ対角線 $a = b$ より真に上側にある点である。



$T_7 - T_6$ については、最も長い棒は 7 であり、中間の棒 $b = 4, 5, 6$ に対して選び方は $2b - 7 = 1, 3, 5$ 通りである。よって $T_7 - T_6 = 1 + 3 + 5 = 9$ となる。したがって

$$T_8 - T_6 = (T_8 - T_7) + (T_7 - T_6) = 12 + 9 = 21.$$

一般の差

$n = 2m$ のとき、中間の棒は $b = m + 1, \ldots, 2m - 1$ を動き、選び方は $2b - 2m = 2, 4, \ldots, 2(m - 1)$ 通りである：

$$T_{2m} - T_{2m-1} = 2 + 4 + \cdots + 2(m - 1) = m(m - 1).$$

$n = 2m - 1$ のとき、中間の棒は $b = m, \ldots, 2m - 2$ を動き、選び方は $2b - (2m - 1) = 1, 3, \ldots, 2m - 3$ 通りである。最初の $m - 1$ 個の奇数の和は $(m - 1)^2$ である。これらを足し合わせると

$$T_{2m} - T_{2m-2} = m(m - 1) + (m - 1)^2 = (m - 1)(2m - 1).$$

（$m = 4$ とすると、これらは 12 と 21 を与え、上で求めた値と一致する。）これらの式は、小さい方の添字が 3 以上であればいつでも成り立つ。すなわち、二つ目の式では $m \geq 3$ のときである。

帰納法

$f(m)=\frac{1}{6}m(m-1)(4m+1)$ とおく。すべての $m\geq 2$ に対して $T_{2m}=f(m)$ が成り立つことを証明する。

基底段階（*base case*）、$m=2$。棒 $1,2,3,4$ からの選び方は $(1,2,3)$、$(1,2,4)$、$(1,3,4)$、$(2,3,4)$ の四通りであり、$(1,2,4)$ 以外はすべて $a+b\geq c$ を満たす。よって $T_4=3$ であり、また $f(2)=\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 1\cdot 9=3$ である。

帰納段階（*inductive step*）。ある $k\geq 3$ に対して $T_{2k-2}=f(k-1)$ が成り立つと仮定する。差の公式より

$$T_{2k}=f(k-1)+(k-1)(2k-1),$$

であるから、$f(k)-f(k-1)=(k-1)(2k-1)$ を示せば十分である。

> **考えてみよう**　二つの 3 次式を完全に展開することなく、$f(k)-f(k-1)$ をどのように整理すればよいか？

どちらの項も因数 $k-1$ を含むので、まずそれをくくり出す：

$$\begin{aligned} f(k)-f(k-1) &= \tfrac{1}{6}(k-1)\big[k(4k+1)-(k-2)(4k-3)\big] \\ &= \tfrac{1}{6}(k-1)\big[(4k^2+k)-(4k^2-11k+6)\big] \\ &= \tfrac{1}{6}(k-1)(12k-6)=(k-1)(2k-1). \end{aligned}$$

ゆえに $T_{2k}=f(k)$ である。数学的帰納法により、すべての $m\geq 2$ に対して $T_{2m}=\frac{1}{6}m(m-1)(4m+1)$ が成り立つ。

棒の本数が奇数の場合

$T_{2m-1}=T_{2m}-m(m-1)$ を用いると

$$T_{2m-1}=\tfrac{1}{6}m(m-1)(4m+1)-m(m-1)=\tfrac{1}{6}m(m-1)(4m-5)\qquad (m\geq 2).$$

棒の本数を代わりに $2m+1$ と書けば（m を $m+1$ に置き換える）、これは次のようになる。

$$T_{2m+1}=\tfrac{1}{6}m(m+1)(4m-1)\qquad (m\geq 1).$$

たとえば $T_3=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$ であり、これはただ一つの三角形 $(1,2,3)$ に対応する。

検算

- 公式から $T_6=\frac{1}{6}\cdot 3\cdot 2\cdot 13=13$、$T_7=\frac{1}{6}\cdot 3\cdot 4\cdot 11=22$、$T_8=\frac{1}{6}\cdot 4\cdot 3\cdot 17=34$ が得られる。よって $T_8-T_7=12$、$T_8-T_6=21$ となり、直接求めた値と一致する。

- $\{1,\ldots,n\}$ から選んだすべての三つ組をコンピュータで数え上げた結果は、3 から 79 までのすべての n について、二つの閉じた式（closed form）の両方と一致する。
- $n = 2m$ とすると、偶数の場合の式はおよそ $\frac{2}{3}m^3 = \frac{n^3}{12}$ であり、奇数の場合の式も同様に振る舞う。これはありうる三つ組の個数 $\binom{n}{3} \approx \frac{n^3}{6}$ の半分である。したがって n が大きいとき、三本の棒の選び方のうちおよそ半分が三角形をつくる。

よくある間違い

- 棒がすべて異なること、すなわち $a < b$ が真の不等号であることを忘れる。$a = b$ を許すと数えすぎになる。
- 面積が 0 の三角形（退化三角形（degenerate triangle））を落とす。条件は $a + b \geq c$ であるから、$(1,2,3)$ も数に入る。
- 帰納法を $m = 1$ から始める。$n \geq 3$ が必要なので、T_2 は定義されていない。

STEP のその先へ

図のように領域内の格子点（lattice points）を数えることは、分割（partitions）と母関数（generating functions）の理論の出発点である。T_n は有理関数で表される母関数をもち、n が偶数か奇数かで場合が分かれることは、その分母に因数 $1 - x^2$ があることを反映している。このように、個数が n の多項式で表され、しかもその多項式が n の剰余に依存するような結果は、準多項式（quasi-polynomials）とよばれる。漸化式や数え上げの議論についてさらに知りたい場合は、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）を参照するとよい。

解答例

STEP II 2015、第 4 問

純粋数学 ・ 逆正接関数の分枝

> **STEP II 2015、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q4

鍵となる考え方

$\tan\theta$ の値がわかっても、θ は π の整数倍の差を除いてしか定まらない。したがって各方程式には無限個の解の分枝（branch）があり、それらは互いに π ずつ上下に平行移動したものである。連続性（continuity）と $x = 0$ での値によって分枝が一つ選ばれる。さらに連続性により、右辺が $\pm\infty$ に発散するたびに分枝を**乗り換え**なければならない。それはちょうど角が $\frac{1}{2}\pi$ の奇数倍を通過する瞬間である。そこで各小問では、まず右辺のグラフを描き、それから角を連続的に追跡する。

以下、arctan は主値（principal value）を表し、$-\frac{1}{2}\pi < \arctan u < \frac{1}{2}\pi$ とする。

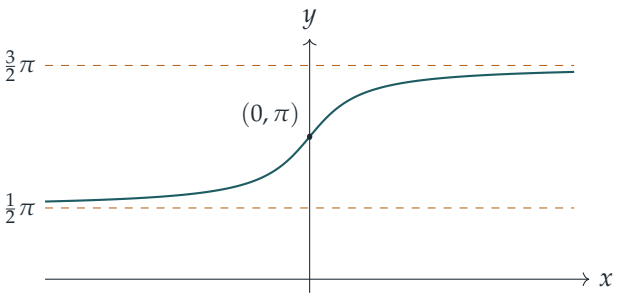
解答

小問 (i)

$\tan\theta = x$ の解はすべて、整数 n を用いて $\theta = \arctan x + n\pi$ と表される。関数 $\arctan x$ は実数全体で連続であるから、$\mathrm{f}(x) - \arctan x$ は $\{n\pi\}$ の値のみをとる連続関数である。連続関数がこれらの孤立した値の間を跳ぶことはできないので、これは定数である。$\mathrm{f}(0) = \pi$ かつ $\arctan 0 = 0$ であるから、その定数は π である：

$$\mathrm{f}(x) = \pi + \arctan x.$$

したがってこの曲線は、通常の arctan の曲線を π だけ持ち上げたものである。狭義単調増加（strictly increasing）であり、（$\mathrm{f}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ であるから）傾き 1 で $(0, \pi)$ を通り、$x \to -\infty$ のとき $y = \frac{1}{2}\pi$、$x \to \infty$ のとき $y = \frac{3}{2}\pi$ を水平漸近線（horizontal asymptote）にもつ。また $\mathrm{f}(-x) = 2\pi - \mathrm{f}(x)$ であるから、$(0, \pi)$ に関して位数 2 の回転対称性をもつ。



小問 (ii)

曲線 $y = \dfrac{x}{1+x^2}$。これを $q(x)$ とおく。これは奇関数（odd function）であり、零となるのは $x = 0$ のときに限り、その符号は x の符号と一致する。$x \to \pm\infty$ のとき $q(x) \approx 1/x \to 0$ であるから、x 軸が漸近線であり、右側では上から、左側では下から近づく。微分すると

$$q'(x) = \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$$

であるから、停留点（stationary point）は $x = \pm 1$ にあり、極大点 $(1, \frac{1}{2})$ と極小点 $(-1, -\frac{1}{2})$ である。（同じことであるが、相加・相乗平均の不等式（AM–GM）より $1 + x^2 \geq 2|x|$ であるから、$|q(x)| \leq \frac{1}{2}$ である。）原点における傾きは 1 である。

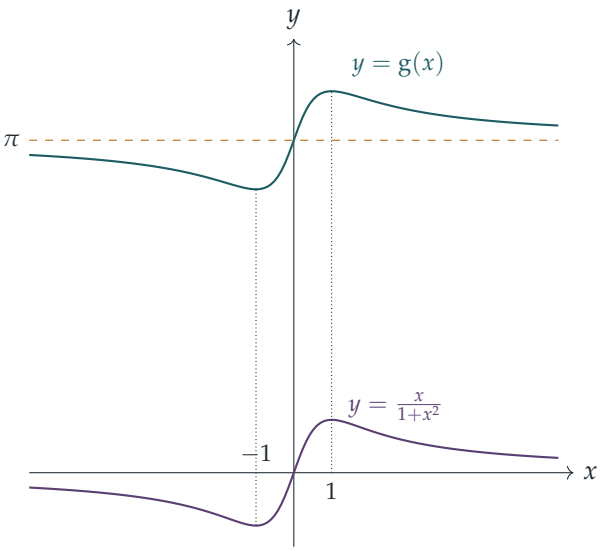
曲線 $y = \mathrm{g}(x)$。今度は右辺 $q(x)$ が連続かつ有界であるから、小問 (i) とまったく同じ議論により

$$\mathrm{g}(x) = \pi + \arctan\frac{x}{1+x^2}.$$

を得る。arctan は増加関数であるから、g は q が増減するところでちょうど同じように増減する。したがって

- $x \to \pm\infty$ のとき $\mathrm{g}(x) \to \pi$ である（右側では上から、左側では下から近づく）。
- g は $x = 1$ で極大値 $\pi + \arctan\frac{1}{2} \approx 3.61$ をとり、$x = -1$ で極小値 $\pi - \arctan\frac{1}{2} \approx 2.68$ をとる。
- 傾き $\dfrac{q'(0)}{1+q(0)^2} = 1$ で $(0, \pi)$ を通る。

その形は q のグラフを（$u > 0$ のとき $\arctan u < u$ であるから）わずかに平らにし、π だけ持ち上げたものである。$\frac{1}{2}\pi$ や $\frac{3}{2}\pi$ に近づくことはないので、分枝を乗り換える必要は一度もない。



小問 (iii)

曲線 $y = \dfrac{x}{1-x^2}$。これを $r(x)$ とおく。これは奇関数であり、零となるのは $x = 0$ のときに限り、$x = \pm 1$ に垂直漸近線（vertical asymptote）をもつ。$x \to \pm\infty$ のとき $r(x) \approx -1/x \to 0$ である。導関数は

$$r'(x) = \frac{(1-x^2)+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} > 0,$$

であるから、r は定義されている 3 つの区間のそれぞれで狭義単調増加である。x と $1-x^2$ の符号を読み取ると、

- $x < -1$ では、r は 0^+（$x \to -\infty$ のとき）から $+\infty$（$x \to -1^-$ のとき）まで増加する。
- $-1 < x < 1$ では、r は $-\infty$ から $+\infty$ まで増加し、傾き 1 で原点を通る。
- $x > 1$ では、r は $-\infty$（$x \to 1^+$ のとき）から 0^-（$x \to \infty$ のとき）まで増加する。

曲線 $y = \mathrm{h}(x)$。各区間ごとに見れば r は連続であるから、そこでは $\mathrm{h}(x) - \arctan r(x)$ は π の定数倍である。ただし、その倍数は区間ごとに異なりうる。これを区間ごとに求める。

$-1 < x < 1$ では、条件 $\mathrm{h}(0) = \pi$ より $\mathrm{h}(x) = \pi + \arctan r(x)$ である。$x \to 1^-$ のとき $r \to +\infty$ であるから $\mathrm{h}(x) \to \pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi$ となり、$x \to -1^+$ のとき $r \to -\infty$ であるから $\mathrm{h}(x) \to \frac{1}{2}\pi$ となる。$x = \pm 1$ での連続性から、$\mathrm{h}(1) = \frac{3}{2}\pi$ かつ $\mathrm{h}(-1) = \frac{1}{2}\pi$ でなければならない。

考えてみよう $x=1$ のすぐ右では $r(x)$ は絶対値の大きな負の数であるから、$\arctan r(x)$ は $-\frac{1}{2}\pi$ に近い。h が $x=1$ で連続になるためには、π のどの倍数を加えればよいか？

$x>1$ では $\mathrm{h}(x)=n\pi+\arctan r(x)$ であり、$x\to 1^+$ のときこれは $n\pi-\frac{1}{2}\pi$ に近づく。これが $\frac{3}{2}\pi$ に等しくなるには $n=2$ でなければならない。同様に、$x<-1$ では $x\to -1^-$ のとき $\mathrm{h}(x)=m\pi+\arctan r(x)\to m\pi+\frac{1}{2}\pi$ であり、これを $\frac{1}{2}\pi$ に一致させるには $m=0$ が必要である。したがって

$$\mathrm{h}(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{x}{1-x^2}, & x<-1,\\[2mm] \pi+\arctan\dfrac{x}{1-x^2}, & -1<x<1,\\[2mm] 2\pi+\arctan\dfrac{x}{1-x^2}, & x>1,\end{cases}\qquad \mathrm{h}(\pm1)=\pi\pm\tfrac{1}{2}\pi.$$

このように、r が $+\infty$ へ跳ね上がって $-\infty$ から再び現れるとき、角 h はそのまま $\frac{3}{2}\pi$ を通過して増加し続ける（$x=-1$ で $\frac{1}{2}\pi$ を通過するときも同様である）。

では、グラフの特徴をまとめる。

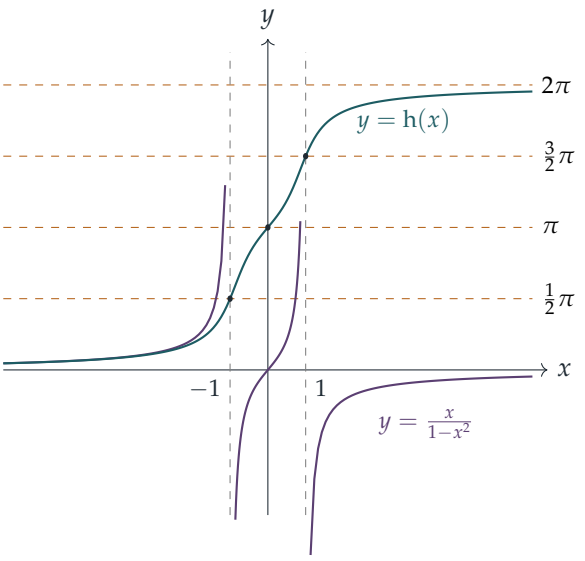
- **漸近線。** $x\to-\infty$ のとき $r\to 0^+$ であるから $\mathrm{h}(x)\to 0$（上から近づく）であり、$x\to\infty$ のとき $r\to 0^-$ であるから $\mathrm{h}(x)\to 2\pi$（下から近づく）である。
- **単調性。** ±1 以外では、合成関数の微分法（chain rule）により

$$\mathrm{h}'(x)=\frac{r'(x)}{1+r(x)^2}=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2+x^2}=\frac{1+x^2}{x^4-x^2+1}>0.$$

  （分母は $(x^2-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$ である。）この式は $x=\pm1$ でもまったく問題なく定義され、そこでの値は 2 であるから、h はそこで滑らかである。曲線は $(1,\frac{3}{2}\pi)$ と $(-1,\frac{1}{2}\pi)$ を傾き 2 で通り、折れ曲がりはない。
- **主要な点。** 傾き 1 で通る $(0,\pi)$、および傾き 2 で通る $(\pm1,\pi\pm\frac{1}{2}\pi)$。
- **対称性。** $\mathrm{h}(-x)=2\pi-\mathrm{h}(x)$ であるから、曲線は $(0,\pi)$ に関して回転対称である。

したがって h は 0 から 2π まで単調に増加し、小問 (i) の曲線と同様の S 字形であるが、高さはその 2 倍に及ぶ。グラフにおいて、r の漸近線 $x=\pm1$ は、h が $\frac{1}{2}\pi$ と $\frac{3}{2}\pi$ を横切る点とちょうど一直線に並ぶ。

3 つの場合をまとめて書くすっきりした方法がある：$\mathrm{h}(x)-\pi$ は、点 $(1-x^2,x)$ の、$(-\pi,\pi)$ にとった偏角（polar angle）である。この点は原点にも負の横軸にも決して到達しない（$1-x^2\le 0$ のとき $x\neq 0$ である）。これが、角が連続的に変化する理由である。



検算

- 各式は定義の方程式を満たす。例えば $\tan(2\pi+\theta)=\tan\theta$ であり、0 での値はいずれも π である。
- 具体的な値：$\mathrm{g}(1)=\pi+\arctan\frac{1}{2}\approx 3.605$、また $\mathrm{h}(2)=2\pi+\arctan(-\frac{2}{3})\approx 5.695$ であり、これはグラフが示すとおり $\frac{3}{2}\pi\approx 4.712$ と $2\pi\approx 6.283$ の間にある。
- h の連続性：$\mathrm{h}(0.999)\approx 4.710$、$\mathrm{h}(1.001)\approx 4.714$ であり、$\frac{3}{2}\pi\approx 4.712$ の両側にあって、$x=1$ での傾きが 2 であることと整合する。$[-10,10]$ を細かく刻んで調べた計算機による検証でも、f、g、h のいずれもどこにも跳びがないことが確認された。

よくある間違い

- すべての x に対して $\mathrm{h}(x)=\pi+\arctan\frac{x}{1-x^2}$ と書いてしまうこと。これは $x=1$ で π だけ下に跳び、$x=-1$ で π だけ上に跳ぶので、連続ではない。
- $\frac{x}{1-x^2}$ が垂直漸近線をもつからといって、$y=\mathrm{h}(x)$ にも $x=\pm1$ で垂直漸近線を描いてしまうこと。角は有限のままであり、発散するのはその正接だけである。
- $y=\mathrm{h}(x)$ の $x=\pm1$ に角（かど）を描いてしまうこと。そこでの傾きは両側とも 2 である。

STEP のその先へ

ここで行ったのは、多価の逆関数の連続な**分枝**を選ぶことであり、「正接が無限大を通過するたびに π を加える」という規則は、道を被覆空間（covering space）へ持ち上げること（lifting）の最初の体験である。同じ考え方を複素対数関数と $\arg z$ に適用したものが、複素解析（complex analysis）における回転数（winding number）や偏角の原理（argument principle）の基礎となっている。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）はこれを幾何学的に展開しており、読んでいて楽しい一冊である。

解答例

STEP II 2015、第 5 問

純粋数学 • 逆正接関数の級数

STEP II 2015、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/15-s2-q5

鍵となる考え方

正接の加法定理（tangent addition formula）を使うと、逆正接（arctangent）の和は一つの分数にまとまる。したがって $\tan S_n$ に関する帰納法（induction）は、丁寧に代数計算を進めれば済む。微妙なのは、$\tan S_n$ から S_n そのものへ進む段階である。正接の値がわかっても、角は π の整数倍の差を除いてしか定まらない。そのため、S_n がどの区間にあるかを確定させなければならない。小問 (ii) では、角 α_n がちょうど小問 (i) の逆正接になっていることがわかり、無限和は S_n の極限（limit）となる。

解答

小問 (i)

$\theta_m = \arctan\left(\frac{1}{2m^2}\right)$ とおく。すると $S_n = \theta_1 + \cdots + \theta_n$ であり、$\tan\theta_m = \frac{1}{2m^2}$ である。

$\tan S_n$ の公式。 $n = 1$ のとき $\tan S_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ であるから、結果は成り立つ。

ある $n \geq 1$ について $\tan S_n = \frac{n}{n+1}$ が成り立つと仮定する。$S_{n+1} = S_n + \theta_{n+1}$ であるから、加法定理により

$$\tan S_{n+1} = \frac{\tan S_n + \tan\theta_{n+1}}{1 - \tan S_n \tan\theta_{n+1}} = \frac{\dfrac{n}{n+1} + \dfrac{1}{2(n+1)^2}}{1 - \dfrac{n}{2(n+1)^3}}.$$

積 $\frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2(n+1)^2}$ は 1 より小さいので、分母は 0 にならない。分子と分母に $2(n+1)^3$ を

掛けると、

$$\tan S_{n+1} = \frac{(n+1)\big(2n(n+1)+1\big)}{2(n+1)^3 - n} = \frac{(n+1)(2n^2+2n+1)}{2n^3+6n^2+5n+2}.$$

考えてみよう 分母がうまく因数分解できると、なぜわかるのだろうか。

目標は $\frac{n+1}{n+2}$ であるから、分母は $(n+2)(2n^2+2n+1)$ になるはずである。展開すると確かに $(n+2)(2n^2+2n+1) = 2n^3+6n^2+5n+2$ となる。正の因数 $2n^2+2n+1$ で約分すると

$$\tan S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2},$$

となり、これは $n+1$ の場合の結果である。数学的帰納法により、すべての $n \geq 1$ について $\tan S_n = \frac{n}{n+1}$ である。

S_n の公式。 $\tan S_n = \frac{n}{n+1}$ だけからは、ある整数 k について $S_n = \arctan \frac{n}{n+1} + k\pi$ であるとしか言えない。$k = 0$ を示すために、再び帰納法で

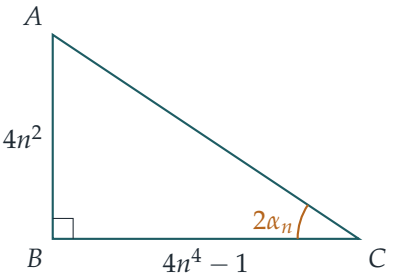
$$S_n = \arctan \frac{n}{n+1}.$$

を証明する。$n = 1$ のとき $S_1 = \arctan \frac{1}{2}$ であり、成り立つ。ある n について結果が成り立つと仮定する。$0 < \frac{n}{n+1} < 1$ であるから、$0 < S_n < \arctan 1 = \frac{1}{4}\pi$ である。また $0 < \frac{1}{2(n+1)^2} < 1$ であるから、$0 < \theta_{n+1} < \frac{1}{4}\pi$ である。これらを足して

$$0 < S_{n+1} = S_n + \theta_{n+1} < \tfrac{1}{2}\pi.$$

よって S_{n+1} は $[0, \frac{1}{2}\pi)$ にあり、これはちょうど非負の数に対する arctan の値域である。さらに最初の結果より $\tan S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$ である。tan はこの区間で一対一（one-to-one）であるから、$S_{n+1} = \arctan \frac{n+1}{n+2}$ となる。以上で帰納法が完結する。

小問 (ii)



B における角は直角であるから、角 C の対辺は AB、隣辺は BC である（$n \geq 1$ のとき $4n^4 - 1 > 0$ であることに注意）。よって

$$\tan 2\alpha_n = \frac{AB}{BC} = \frac{4n^2}{4n^4 - 1}.$$

小問 (i) から、$\tan \alpha_n = \frac{1}{2n^2}$ を試してみたくなる。$t = \frac{1}{2n^2}$ とすると、倍角の公式（double-angle formula）により

$$\frac{2t}{1 - t^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{4n^4}} = \frac{4n^2}{4n^4 - 1},$$

となり、一致する。これが単に条件を満たす値の一つではなく、求める値そのものであることを確かめるため、$t = \tan \alpha_n$ とおく。方程式 $\frac{2t}{1-t^2} = \frac{4n^2}{4n^4-1}$ を整理すると二次方程式（quadratic equation）

$$4n^2t^2 + 2(4n^4 - 1)t - 4n^2 = 0,$$

が得られ、その二つの解の積は -1 である。一方の解は $\frac{1}{2n^2}$ であるから、もう一方は $-2n^2 < 0$ である。しかし $2\alpha_n$ は直角三角形の直角以外の角であるから $0 < 2\alpha_n < \frac{1}{2}\pi$ であり、$0 < \alpha_n < \frac{1}{4}\pi$、したがって $t > 0$ である。ゆえに $\tan \alpha_n = \frac{1}{2n^2}$ であり、α_n は arctan の値域にあるから

$$\alpha_n = \arctan \frac{1}{2n^2}.$$

考えてみよう ここで無限和とは何を意味するのか。また、小問 (i) はどのように役立つのか。

無限和とはその部分和（partial sums）の極限であり、小問 (i) により部分和は

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n = S_N = \arctan \frac{N}{N+1}.$$

である。$N \to \infty$ のとき $\frac{N}{N+1} \to 1$ であり、arctan は連続（continuous）であるから、$\arctan \frac{N}{N+1} \to \arctan 1 = \frac{1}{4}\pi$ となる。したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \tfrac{1}{4}\pi,$$

となり、示すべきことが示された。

検算

- $n = 1$ のとき、小問 (ii) の三角形はおなじみの 3–4–5 の三角形であり、$\tan 2\alpha_1 = \frac{4}{3}$ である。このとき $\tan \alpha_1 = \frac{1}{2}$ は $\frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$ を満たす。

- $S_2 = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{8}$ であり、$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{16}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ となって、公式の予測どおりである。
- 数値的には、最初の 2000 項を足すと $S_{2000} \approx 0.785148$ となり、$\frac{1}{4}\pi \approx 0.785398$ と比べられる。差はおよそ $\frac{1}{4000}$ であり、これは当然である。実際、減法定理により $\frac{1}{4}\pi - \arctan\frac{N}{N+1} = \arctan\frac{1}{2N+1}$ が厳密に成り立つ。

よくある間違い

- S_n が $[0, \frac{1}{2}\pi)$ にあることを示さずに、$\tan S_n = \frac{n}{n+1}$ からただちに $S_n = \arctan\frac{n}{n+1}$ と結論してしまう。
- 二次方程式のもう一方の解を除外せずに、うまく当たった推測から $\tan\alpha_n = \frac{1}{2n^2}$ としてしまう。
- 無限和が S_N の極限であることを述べずに、それを S_∞ として扱ってしまう。

STEP のその先へ

これは姿を変えたテレスコーピング級数（telescoping series）である。$\frac{1}{2m^2} = \frac{(2m+1)-(2m-1)}{1+(2m+1)(2m-1)}$ であるから、各項は $\arctan(2m+1) - \arctan(2m-1)$ に等しく、和は打ち消し合って $\arctan(2n+1) - \frac{1}{4}\pi$ となり、これは $\arctan\frac{n}{n+1}$ に等しい。無限和を部分和の極限として定義し、極限と連続関数の順序をいつ入れ替えてよいかを知ることは、解析学（analysis）の最初の講義の出発点である。これについて読むには、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門）がよい。

解答例

STEP II 2015、第6問

純粋数学 • 対称性による積分

> **STEP II 2015、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q6

鍵となる考え方

$\sin x$ を $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$ と書き直すと、$1+\sin x$ は2倍角の式に変わり、あとは $\sec^2$ がすぐに積分できる。置換（substitution）$y = \pi - x$ は区間 $[0, \pi]$ をその中点に関して折り返すものであり、$\sin x$ はこの折り返しで変わらない。したがって、$\mathrm{f}(\sin x)$ の前にかかる多項式（polynomial）の因子は、それを折り返したものと取り替えることができる。小問 (iii) の3次式は、この取り替えによって x のべきがすべて一度に消えるように選ばれている。

解答

小問 (i)

$\sin x = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$ であり、また $1+\cos 2\theta = 2\cos^2\theta$ であるから、$\theta = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$ とおくと

$$1+\sin x = 1+\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right) = 2\cos^2\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right).$$

両辺の逆数をとって2を掛けると $\sec^2\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right) = \dfrac{2}{1+\sin x}$ となり、示すべき式が得られる。（両辺が定義されないのは同じ点、すなわち $\sin x = -1$ となる点である。）

よって

$$\int \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sec^2\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x = -\tan\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right) + C,$$

である。これは、合成関数の微分法（chain rule）により、$\tan\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$ を微分すると因子 $-\frac{1}{2}$ が現れるからである。

小問 (ii)

$I = \displaystyle\int_0^{\pi} x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$ とおく。$y = \pi - x$ とおくと $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$ であり、積分の端点 $x = 0, \pi$ は $y = \pi, 0$ となり、さらに $\sin x = \sin(\pi - y) = \sin y$ である。このとき

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi}^{0} (\pi - y)\,\mathrm{f}(\sin y)\,(-\mathrm{d}y) = \int_0^{\pi} (\pi - y)\,\mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y \\ &= \pi \int_0^{\pi} \mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y - \int_0^{\pi} y\,\mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y = \pi \int_0^{\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x - I, \end{aligned}$$

となる。ここで y は単なる積分変数（dummy variable）にすぎないことを用いた。よって $2I = \pi \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$ となり、これが求める結果である。

考えてみよう 未知の積分 I が両辺に現れた。これは問題だろうか？

問題ではない。むしろ、まさに望んでいたことである。この置換は I の値を直接求めるものではなく、I についての 1 次方程式を与えるのであり、それを解けばよい。

ここで $\mathrm{f}(t) = \dfrac{1}{1+t}$ とする。これは $t \in [0,1]$ で連続であり、$[0,\pi]$ 上で $\sin x$ がとる値はこの範囲にある。小問 (i) より

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\tan\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right) \Big]_0^{\pi} = -\tan\left(-\tfrac{1}{4}\pi\right) + \tan\tfrac{1}{4}\pi = 1 + 1 = 2,$$

であり、$\tan\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$ は $[0,\pi]$ 上で連続である。引数が $[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ の範囲にとどまるからである。したがって

$$\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi.$$

小問 (iii)

同じ折り返しを用いる。$g(x) = 2x^3 - 3\pi x^2$ とおく。展開すると

$$\begin{aligned} g(\pi - x) &= 2(\pi^3 - 3\pi^2 x + 3\pi x^2 - x^3) - 3\pi(\pi^2 - 2\pi x + x^2) \\ &= -\pi^3 + 3\pi x^2 - 2x^3 = -\pi^3 - g(x). \end{aligned}$$

$J = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{g(x)}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$ とおく。小問 (ii) とまったく同様に置換 $y = \pi - x$ を行うと

$$J = \int_0^{\pi} \frac{g(\pi - y)}{(1+\sin y)^2}\,\mathrm{d}y = -\pi^3 K - J, \qquad \text{ただし} K = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x)^2}.$$

よって $J = -\frac{1}{2}\pi^3 K$ である。

考えてみよう なぜこの 3 次式はこれほどうまくいくのだろうか？

中点からの距離 $u = x - \frac{1}{2}\pi$ を用いて表すと、$g(x) = 2u^3 - \frac{3}{2}\pi^2 u - \frac{1}{2}\pi^3$ となる。$\sin x = \cos u$ であるから、関数 $1/(1+\sin x)^2$ は u について偶関数（even function）であり、したがって奇数次の項 $2u^3$ と $-\frac{3}{2}\pi^2 u$ は対称な区間で積分すると 0 になる。残るのは定数 $-\frac{1}{2}\pi^3$ だけであり、これは上で得た結果と一致する。小問 (ii) も $x = u + \frac{1}{2}\pi$ として同じことをしているのである。

K を求めるために、小問 (i) の恒等式を 2 乗する：$\dfrac{1}{(1+\sin x)^2} = \frac{1}{4}\sec^4\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$。$u = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$ と置換すると $\mathrm{d}x = -2\,\mathrm{d}u$ であり、$x = 0, \pi$ は $u = \frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi$ となる。$\sec^4 u = (1+\tan^2 u)\sec^2 u$ と書けば、その積分は $\tan u + \frac{1}{3}\tan^3 u$ であるから

$$\begin{aligned} K &= \int_{\pi/4}^{-\pi/4} \tfrac{1}{4}\sec^4 u\,(-2\,\mathrm{d}u) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1+\tan^2 u)\sec^2 u\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\Big[\tan u + \tfrac{1}{3}\tan^3 u\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left(\tfrac{4}{3} + \tfrac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

したがって

$$\int_0^{\pi} \frac{2x^3 - 3\pi x^2}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi^3}{2}\cdot\frac{4}{3} = -\frac{2\pi^3}{3}.$$

検算

- $-\tan\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$ を微分すると $\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right) = 1/(1+\sin x)$ となる。
- 符号：小問 (ii) では被積分関数は正であり、$\pi \approx 3.14$ という値は妥当である。$\frac{1}{2} \le 1/(1+\sin x) \le 1$ より、積分は $\frac{1}{4}\pi^2 \approx 2.47$ と $\frac{1}{2}\pi^2 \approx 4.93$ の間にあるからである。小問 (iii) では $(0, \pi]$ 上で $2x^3 - 3\pi x^2 = x^2(2x - 3\pi) < 0$ であるから、負の答えは正しい。
- 数値積分（numerical quadrature）によれば $\int_0^{\pi}(1+\sin x)^{-2}\,\mathrm{d}x \approx 1.33333$、小問 (iii) の積分は ≈ -20.6709 であり、それぞれ $\frac{4}{3}$ と $-\frac{2}{3}\pi^3$ に一致する。

よくある間違い

- 小問 (i) で合成関数の微分法による因子 $-\frac{1}{2}$ を落とし、$+2\tan(\dots)$ や $-\frac{1}{2}\tan(\dots)$ としてしまう。
- 積分の端点を入れ替えると $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$ のマイナス符号が打ち消されることを忘れる。

- 小問 (iii) で部分積分（integration by parts）を 3 回行おうとする。それでも解けるが、折り返しを使えば 1 行で済む。

STEP のその先へ

小問 (ii) の技巧は対称性を利用している。重み関数がある折り返しで変わらないならば、被積分関数のうち折り返しの中心に関して偶である部分だけが積分に寄与する。この考え方は大学 1 年の数学のいたるところで出会うことになる。たとえばフーリエ級数（Fourier series）では奇関数は余弦の項をもたず、確率論では μ に関して対称な分布の平均は μ である。また、置換 $t = \tan \frac{1}{2}x$ は、$\sin x$ と $\cos x$ の任意の有理関数に対して使える系統的な別の方法である。この種の積分をさらに学ぶには、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を参照するとよい。

解答例

STEP II 2015、第7問

純粋数学 ・ 交わる円

> **STEP II 2015、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q7

鍵となる考え方

2つの円が2点で交わるとき、その2点を通る直線（共通弦（common chord））は中心線（line of centres）に垂直である。円 D が C を二等分する（bisect）のは、この弦が C の直径（diameter）であるとき、すなわち C の中心を通るときであり、またそのときに限る。すると、2つの中心と交点の1つが作る直角三角形にピタゴラスの定理（Pythagoras' theorem）を用いることで、「二等分する」という条件はただ1つの等式（中心間の距離）$^2 = r^2 - a^2$ に変わる。

解答

小問 (i)

D の中心を Q、半径を r とし、原点を O とする。

一般的な条件。 D が C を二等分し、P と $P' = -P$ で交わるとする。ただし $|P| = a$ である。どちらの点も D 上にあるから、$QP = QP' = r$ である。よって Q は P と P' から等距離にあるので、PP' の垂直二等分線（perpendicular bisector）上にあり、この直線は O（PP' の中点）を通る。したがって $OQ \perp OP$ であり、三角形 OQP にピタゴラスの定理を用いると

$$r^2 = OQ^2 + a^2. \qquad (*)$$

を得る。逆に、D が $OQ^2 = r^2 - a^2$ かつ $OQ > 0$ を満たす任意の円であるとき、C 上に $OP \perp OQ$ となる点 P をとる。すると $QP^2 = OQ^2 + a^2 = r^2$ であり、$-P$ についても同様であるから、D は C の直径の両端にある2点を通る。異なる2つの円は高々2点でしか交わらないので、これらが唯一の交点であり、D は C を二等分する。

$r > a$ のときの存在。中心を x 軸上で O から距離 $\sqrt{r^2 - a^2} > 0$ の位置にとる：

$$\left(x - \sqrt{r^2 - a^2}\right)^2 + y^2 = r^2.$$

直接確かめると、この方程式から $x^2 + y^2 = a^2$ を引けば $-2x\sqrt{r^2 - a^2} + (r^2 - a^2) = r^2 - a^2$ となるので、（$r \neq a$ より）$x = 0$ であり、このとき $y = \pm a$ である。2 つの円はちょうど $(0, a)$ と $(0, -a)$ で交わり、これらは C 上で直径の両端にある。よって、この半径 r の円は C を二等分する。

$r \leq a$ のときの不可能性。半径 r のある円が C を二等分するならば、$(*)$ より $r^2 = OQ^2 + a^2 \geq a^2$ である。よって $r < a$ は起こりえない。$r = a$ ならば、$(*)$ から $OQ = 0$ となり、D は C そのものになる。これは C と無限個の点で交わり、ちょうど 2 点で交わるのではない。したがって、半径 $r \leq a$ の円で C を二等分するものは存在しない。

小問 (ii)

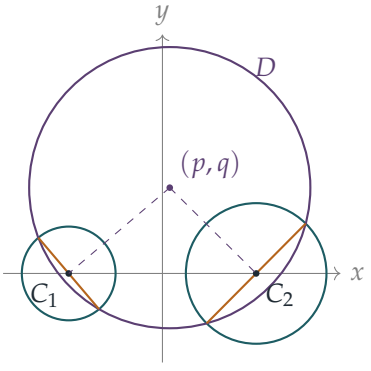
D の中心を (p, q) とする。各円に $(*)$ を用いると（原点をそれぞれの中心に移して考える）、

$$(p + d)^2 + q^2 = r^2 - a_1^2,$$
$$(p - d)^2 + q^2 = r^2 - a_2^2.$$

第 1 式から第 2 式を引くと、q^2 の項と p^2 の項が消えて $4pd = a_2^2 - a_1^2$ が残る。よって

$$p = \frac{a_2^2 - a_1^2}{4d},$$

となり、示すべき式が得られた。



図（$d = 2$、$a_1 = 1$、$a_2 = 1.5$、$r = 3$）では、各共通弦（琥珀色）は C_1 または C_2 の直径であり、中心どうしを結ぶ破線に垂直である。

q を求めるため、p を第 1 式に代入し直す。まず

$$p+d=\frac{4d^2+a_2^2-a_1^2}{4d},$$

であるから

$$q^2=r^2-a_1^2-\frac{(4d^2+a_2^2-a_1^2)^2}{16d^2}=\frac{16d^2r^2-16d^2a_1^2-(4d^2+a_2^2-a_1^2)^2}{16d^2}.$$

分子で引かれている項を展開すると

$$\begin{aligned}16d^2a_1^2+(4d^2+a_2^2-a_1^2)^2&=16d^4+8d^2(a_2^2-a_1^2)+16d^2a_1^2+(a_2^2-a_1^2)^2\\&=16d^4+8d^2(a_1^2+a_2^2)+(a_2^2-a_1^2)^2\\&=\left(4d^2+(a_2-a_1)^2\right)\left(4d^2+(a_2+a_1)^2\right),\end{aligned}$$

となる。最後の行が成り立つのは、$(a_2-a_1)^2+(a_2+a_1)^2=2(a_1^2+a_2^2)$ かつ $(a_2-a_1)^2(a_2+a_1)^2=(a_2^2-a_1^2)^2$ だからである。したがって

$$q=\pm\frac{\sqrt{16r^2d^2-\left(4d^2+(a_2-a_1)^2\right)\left(4d^2+(a_2+a_1)^2\right)}}{4d}.$$

考えてみよう 不等式はどこから出てくるのだろうか。ここまでのところ、不等式らしきものは何も見当たらない。

中心 (p,q) は実数の点であるから、$q^2\geq 0$ である。$16d^2>0$ なので、これは

$$16r^2d^2\geq\left(4d^2+(a_2-a_1)^2\right)\left(4d^2+(a_2+a_1)^2\right),$$

を意味し、これが求める r の条件である。

小問 (i) の要請 $r>a_1$（および $r>a_2$）が追加の条件にならないことも確かめておくべきである。$d>a_1$ より $4d^2+a_2^2-a_1^2>0$ であるから $p+d>0$ であり、よって $r^2-a_1^2=(p+d)^2+q^2>0$ である。同様に、$d>a_2$ より $d-p>0$ であるから $r^2-a_2^2=(p-d)^2+q^2>0$ である。よって、求めた円 D は確かに C_1 と C_2 の両方を二等分する。

検算

- 対称な場合 $a_1=a_2=a$：このとき、y 軸に関する対称性から当然であるように $p=0$ となり、条件は $16r^2d^2\geq 4d^2(4d^2+4a^2)$、すなわち $r^2\geq d^2+a^2$ となる。これは中心を原点、つまり $(\pm d,0)$ の両方に最も近い位置においたときの $(*)$ にほかならない。

- 図の例では $p = 0.15625$、$q \approx 1.830$ であり、D と C_1 の交点はおよそ $(-1.353, -0.762)$ と $(-2.647, 0.762)$ である。その中点は $(-2, 0)$ で、C_1 の中心に一致する。この場合の r の最小値は約 2.377 である。
- C_1 と C_2 を入れ替える（$a_1 \leftrightarrow a_2$、$d \to -d$）と、p の式の形は変わらず、不等式も変わらない。当然そうなるべきである。

よくある間違い

- 小問 (i) で $r = a$ の場合を忘れること：$(*)$ は $OQ = 0$ を許すので、$D = C$ がなぜ該当しないのかを述べなければならない。
- 条件を $OQ^2 = r^2 + a^2$ と書くこと。これは二等分することと直角に交わること（直交円（orthogonal circles））を混同している。三角形を描いてみよ。直角は C の中心にあるので、斜辺は D の半径 r である。
- $q = +\sqrt{\cdots}$ だけを答えること：x 軸に関して折り返すと、もう 1 つの円が得られる。

STEP のその先へ

点 (p, q) と、中心 (x_0, y_0)、半径 r の円に対して、量 $(p - x_0)^2 + (q - y_0)^2 - r^2$ をその円に関する点の**方べき**（power）という。2 つの円に関する方べきが等しい点全体の集合は直線であり、これを**根軸**（radical axis）という。ここで行ったように 2 つの円の方程式を引き算すると、根軸が求まる。この問題では、二等分の条件は「C の中心の D に関する方べきが $-a^2$ である」と言い換えられる。これらの考え方や、関連する円に関する反転（inversion）は、Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）で見事に展開されており、STEP 風の応用例の多くは Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）に収められている。

解答例

STEP II 2015、第 8 問

純粋数学 • ベクトルと接する円

> **STEP II 2015、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q8

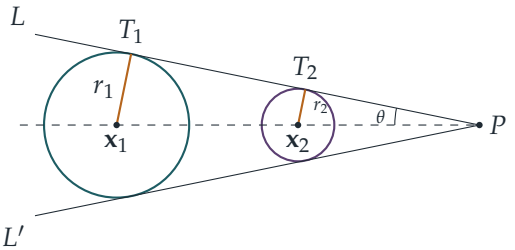
鍵となる考え方

それぞれの中心は 2 本の接線（tangent）のどちらからも同じ距離（その円の半径）にあるので、2 つの中心はどちらも L と L' のなす角の二等分線（angle bisector）上にある。この直線上では P からの距離が半径に比例するので、(i) の式がただちに得られる。(ii) では、この式を $r_1 r_2$ で割ると対称性がはるかに高まる。$\mathbf{x}_i / r_i$ と $1/r_i$ を用いて表すと、3 つの焦点（focus）は係数の和が零になる 1 つの線形関係式を満たし、これこそが一直線上にある（collinear）ということの意味なのである。

解答

小問 (i)

θ を、P において L と L' がなす角のうち円を含む側の角の半分とする。



円の接線は、中心からの垂直距離が半径に等しい。よって $\mathbf{x}_1$ は L からも L' からも距離 r_1 のところにあり、交わる 2 直線から等距離にある点は P における 2 本の角の二等分線のいずれかの上にある。2 つの円はどちらも L に関して同じ側にあり、かつ L' に

関して同じ側にあるので、2 つの中心は L と L' によって分けられる 4 つの角領域のうち同じ 1 つの中にある。したがって、2 つの中心は P から出る**同じ**半直線、すなわちその領域の二等分線上にある。この半直線に沿った単位ベクトルで、P から円の方へ向かうものを $\mathbf{u}$ とする。

L が C_1 に接する点を T_1 とすると、三角形 PT_1X_1（X_1 は中心）は T_1 で直角をなすので、$r_1 = PX_1 \sin\theta$ である。同様に $r_2 = PX_2 \sin\theta$ である。ゆえに

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{p} = \frac{r_1}{\sin\theta}\,\mathbf{u}, \qquad \mathbf{x}_2 - \mathbf{p} = \frac{r_2}{\sin\theta}\,\mathbf{u},$$

となる。ここで $\mathbf{p}$ は P の位置ベクトルである。$\mathbf{u}/\sin\theta$ を消去すると、

$$r_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{p}) = r_1(\mathbf{x}_2 - \mathbf{p}) \quad \Longrightarrow \quad (r_1 - r_2)\,\mathbf{p} = r_1\mathbf{x}_2 - r_2\mathbf{x}_1.$$

2 つの円は大きさが異なるので $r_1 \neq r_2$ であり、両辺を割ることができる：

$$\mathbf{p} = \frac{r_1\mathbf{x}_2 - r_2\mathbf{x}_1}{r_1 - r_2},$$

これが示すべき式である。（半径が等しければ L と L' は平行になり、焦点はそもそも存在しない。）

小問 (ii)

> **考えてみよう** $\mathbf{p}$ の式は、見てすぐわかるような対称性をもっていない。3 つの焦点が同じ形に見えるように書き直せないだろうか？

$(r_1 - r_2)\mathbf{p} = r_1\mathbf{x}_2 - r_2\mathbf{x}_1$ を $r_1 r_2$ で割る。$s_i = 1/r_i$、$\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i/r_i$ とおくと、これは

$$(s_2 - s_1)\,\mathbf{p} = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1.$$

となる。残りの 2 組の円に小問 (i) を適用すると（$r_3 \neq r_1$ かつ $r_3 \neq r_2$ であり、円どうしは重ならないので適用できる）、Q と R の位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{q}$、$\mathbf{r}$ として

$$(s_3 - s_1)\,\mathbf{q} = \mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1, \qquad (s_3 - s_2)\,\mathbf{r} = \mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_2.$$

を得る。右辺は $(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) + (\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_2) = \mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1$ を満たすので、

$$(s_2 - s_1)\,\mathbf{p} + (s_3 - s_2)\,\mathbf{r} = (s_3 - s_1)\,\mathbf{q}.$$

である。$s_3 \neq s_1$ であるから、

$$\mathbf{q} = \lambda\,\mathbf{p} + (1 - \lambda)\,\mathbf{r}, \qquad \text{ここで} \lambda = \frac{s_2 - s_1}{s_3 - s_1},$$

と書ける。2 つの係数 $\frac{s_2 - s_1}{s_3 - s_1}$ と $\frac{s_3 - s_2}{s_3 - s_1}$ の和が 1 になるからである。よって $\mathbf{q} = \mathbf{r} + \lambda(\mathbf{p} - \mathbf{r})$ であり、これは R と P を通る直線上の点である。ゆえに P、Q、R は一直線上にある。（たまたま P と R が一致する場合には、これから $Q = P = R$ も得られ、主張は自明に成り立つ。）

小問 (iii)

小問 (ii) より $\mathbf{q} = \lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{r}$ である。$P \neq R$ と仮定すると、点 $\lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{r}$ が中点 $\frac{1}{2}(\mathbf{p}+\mathbf{r})$ になるのは、ちょうど $\lambda = \frac{1}{2}$ のときである（λ の値が異なれば直線上の異なる点を与える）。したがって条件は

$$\frac{s_2 - s_1}{s_3 - s_1} = \frac{1}{2} \iff 2s_2 = s_1 + s_3 \iff \frac{2}{r_2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \iff r_2 = \frac{2r_1 r_3}{r_1 + r_3}.$$

である。言葉で言えば、r_2 は r_1 と r_3 の調和平均（harmonic mean）でなければならない。（退化した場合 $P = R$ では、3 つの焦点はすべて一致し、半径がどうであれ Q は自明に中点である。）

検算

- 小問 (i)：$r_2 \to 0$ とすると C_2 は 1 点に縮み、式は $\mathbf{p} = \mathbf{x}_2$ を与える。1 点から引いた接線はその点を通るからである。また $\mathbf{p}$ は $\mathbf{x}_2 + \frac{r_2}{r_1 - r_2}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$ であり、$r_2 < r_1$ のときは図のとおり小さい方の円の先にある。
- (iii) の数値例：中心を $(0,0)$、$(10,1)$、$(3,8)$、半径を 1、$\frac{3}{2}$、3 とする。このとき $\frac{2}{3/2} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$ である。すると $P = (-20,-2)$、$R = (17,-6)$、$Q = (-\frac{3}{2},-4)$ となり、確かに Q は PR の中点である。
- これらの式はコンピュータでも確認した：多数のランダムな円の組について、2 本の接線の交点を直接求めると同じ点 P が得られる。

よくある間違い

- P が中心どうしを結ぶ直線上にある理由や、P が中心を結ぶ線分の外側にある理由を説明していない（2 つの中心を載せているのは P から出る**同じ**半直線である）。
- $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ と $\mathbf{r} - \mathbf{p}$ が平行であることを示そうとして、関係式の係数の和が零になることを確かめていない。関係式 $\alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{q} + \gamma\mathbf{r} = \mathbf{0}$ から一直線上にあることが導かれるのは、$\alpha + \beta + \gamma = 0$ のときに限る。

STEP のその先へ

焦点 P は、C_1 を C_2 に写す、正の拡大率 r_2/r_1 の拡大（相似変換、homothety）の中心である。小問 (ii) はモンジュ（Monge）の三円定理である：Q と R を中心とする拡大を合成すると P を中心とする拡大が得られ、2 つの拡大の合成の中心はそれぞれの中心を通る直線上にある。(ii) の計算は重心座標（barycentric coordinates、アフィン座

標）への最初の入り口であり、そこでは一直線上にあることが、係数の和が零になる線形関係式として表される。その背後にある線形写像については、ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）で詳しく展開されており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）にはこの種の問題がさらに収められている。

解答例

STEP II 2015、第 9 問

力学 ・ 剛体の回転

> **STEP II 2015、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q9

鍵となる考え方

この系のすべては、ただ一つの点、すなわち 2 つの粒子の重心（centre of mass）G によって支配されている。A を支点とする剛体（rigid body）は、G が A の真下にある状態で静止してつり合い、G を最高点の上まで運べるだけのエネルギーをもつときに限って完全な回転をする。したがって、G がどこにあり、A からどれだけ離れているかを求めれば、どちらの小問もすぐに解ける。

解答

B と C を軽い剛体の棒でつながれた粒子とみなし、A にはなめらかな軸があるとする。したがって、仕事をする力は重力だけである。

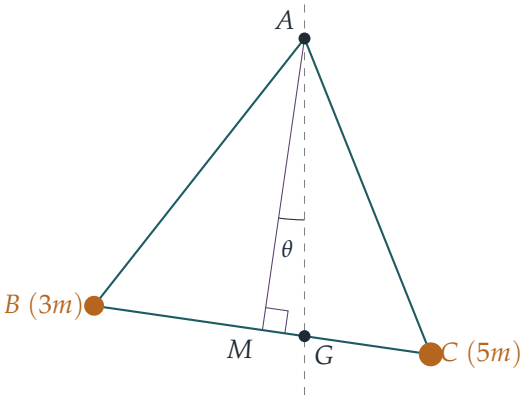
小問 (i)

棒は軽いので、系の重心は、B にある質量 $3m$ と C にある質量 $5m$ の重心である。その点 G は BC 上にあり、

$$BG = \frac{5}{8}a, \qquad CG = \frac{3}{8}a.$$

である。BC の中点を M とする。すると $MG = \frac{5}{8}a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{8}a$ であり、これは C の側である。三角形は正三角形なので $AM \perp BC$ かつ $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ であるから、三角形 AMG にピタゴラス（Pythagoras）の定理を用いると、

$$AG^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{64} = \frac{49a^2}{64}, \qquad AG = \frac{7a}{8}.$$



つり合い（equilibrium）の状態では、G にはたらく重力 $8mg$ の A のまわりのモーメント（moment）はゼロでなければならないので、G は A の真下にある。すなわち、直線 AG は鉛直である。さて、BC は AM に垂直であり、水平方向は鉛直な AG に垂直である。2 本の直線をともに直角だけ回転させても、それらのなす角は変わらないので、

$$\theta = \angle GAM.$$

である。直角三角形 AMG（M が直角）において、

$$\sin\theta = \frac{MG}{AG} = \frac{a/8}{7a/8} = \frac{1}{7},$$

となり、題意が示された。なお、重いほうの粒子 C が BC の下側の端にあることに注意しよう。これは当然そうあるべき結果である。

小問 (ii)

2 つの粒子はどちらも軸から距離 a のところにあるので、つねに同じ速さをもつ。三角形が角速度（angular speed）ω で回転するとき、各粒子の速さは $a\omega$ である。撃力（impulse）を受けた直後、B の速さは v であるから C の速さも同じであり、運動エネルギー（kinetic energy）は

$$\tfrac{1}{2}(3m)v^2 + \tfrac{1}{2}(5m)v^2 = 4mv^2.$$

となる。（同じことだが、A のまわりの慣性モーメント（moment of inertia）は $8ma^2$ であり、$\omega = v/a$ である。）撃力の向きは関係ない。以下のエネルギーの式には速さしか現れないからである。

? **考えてみよう** 糸につながれた粒子の場合のように、最高点で何かがたるまないように v を十分大きくする必要があるだろうか？

その必要はない。棒は剛体であり、引くだけでなく押すこともできるので、必要な条件は、系が一回りする前に角速度がゼロにならないことだけである。これは純粋にエネルギーだけで決まる条件である。

系の位置エネルギー（potential energy）は、$8mg$ と G の高さの積である。G は A を中心とする半径 $AG = \frac{7}{8}a$ の円周上を動くので、位置エネルギーは G が A の真上にあるときに最大となる。その位置は最初の位置より

$$2 \cdot \frac{7a}{8} = \frac{7a}{4}$$

だけ高い。エネルギー保存則（conservation of energy）より、G が h だけ上昇した位置では

$$4m(a\omega)^2 = 4mv^2 - 8mgh.$$

が成り立つ。右辺は $h = \frac{7}{4}a$ のとき最小となる。そこで右辺が正ならば、運動の間つねに $\omega \neq 0$ であるから、ω の符号は変わらず、系は同じ向きに回り続け、何回も回転を繰り返す。右辺が負ならば、G が最高点に達する前に ω はゼロにならなければならず、系は振り戻される。したがって条件は

$$4mv^2 > 8mg \cdot \frac{7a}{4} \iff v^2 > \frac{7ag}{2}.$$

である。よって

$$v_0 = \sqrt{\frac{7ag}{2}}.$$

（ちょうど $v = v_0$ のときは、G は A の真上の位置にじわじわと近づき、そこに達するには無限の時間がかかる。条件が狭義の不等式（strict inequality）になっているのはこのためである。）

検算

- 質量が等しければ G は M に一致し、$\theta = 0$、$AG = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ となる。$MG = 0$ とおいた式はまさにその結果を与える。
- すべての向きについて位置エネルギーを数値的に最小化すると、$\sin\theta = 0.142857\ldots = \frac{1}{7}$ が得られる。
- 単位：ag の単位は $\mathrm{m^2\,s^{-2}}$ なので、v_0 は速さを表す。$a = 1\,\mathrm{m}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ のとき、$v_0 \approx 5.86\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ である。
- 運動を 1 ステップずつ計算するコンピュータ・シミュレーションにより、$v = 1.01v_0$ のときは系が最高点を越え、$v = 0.99v_0$ のときは振り戻されることが確かめられる。

よくある間違い

- （AG の代わりに AM を用いて）G の上昇量を $2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a$ としてしまう。この場合 $v_0^2 = 2\sqrt{3}ag$ となる。
- B と C を別々に扱い、撃力によって C も速さ v を得ることを忘れる。
- 最高点で「糸がたるまない」という条件を課してしまう。棒は押す力（thrust）をはたらかせることができるので、そのような条件は必要ない。

STEP のその先へ

ここでのエネルギーによる議論は、実体振り子（compound pendulum）の剛体版である。重心から距離 d の点を支点とする物体は単振り子のようにふるまい、その運動方程式は $I\ddot{\psi} = -Mgd\sin\psi$ となる。大学 1 年次の講義では、この方程式の相平面（phase plane）を学ぶ。そこでは臨界速度 v_0 が、振動と完全な回転とを分けるセパラトリクス（separatrix）に対応する。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、固定軸のまわりの剛体の回転と物理振り子を詳しく扱っている。

解答例

STEP II 2015、第 10 問

力学 ・ 束縛運動

STEP II 2015、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

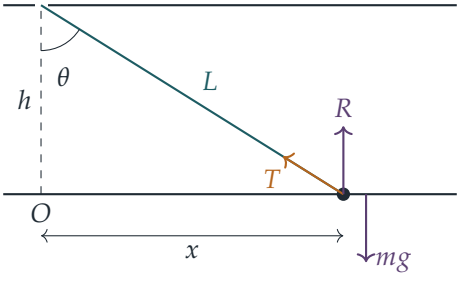
step.maths.org/questions/15-s2-q10

鍵となる考え方

これは拘束（constraint）の問題である。質点の運動は糸によって完全に決まってしまうので、まず運動学（kinematics）を扱い、力はその後で考える。天井より下にある糸の長さを、穴の真下の点から質点までの水平距離で表し、時間で微分する。この長さの変化率はわかっている。加速度が求まれば、水平方向のニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）から張力（tension）が得られる。また、鉛直方向の力のつり合いから垂直抗力（normal reaction）が得られる。質点が床の上にある間、垂直抗力は負になってはならない。

解答

質点はなめらかな水平な床の上の点とみなし、糸は軽く伸び縮みしない（inextensible）ものとする。したがって、張力 T は糸のどこでも等しい。床上で穴の真下にある点を O とし、O から質点までの距離を x、穴から質点までの糸の長さを L とする。



速さ

三平方の定理（Pythagorean theorem）と図の三角形から、

$$L^2 = x^2 + h^2, \qquad x = h\tan\theta, \qquad \sin\theta = \frac{x}{L}.$$

糸は穴から速さ V で引き込まれるので、$\dot{L} = -V$ である。$L^2 = x^2 + h^2$ を時間で微分すると（h は定数）、

$$2L\dot{L} = 2x\dot{x} \quad \Longrightarrow \quad \dot{x} = \frac{L}{x}\dot{L} = -\frac{VL}{x} = -\frac{V}{\sin\theta}.$$

よって、質点は O に向かって速さ

$$\boxed{v = \frac{V}{\sin\theta} = V\operatorname{cosec}\theta}$$

で動く。これはつねに V より大きい（速さ V で動くのは糸であって、質点ではない）。

考えてみよう 質点の速さが単純に V や $V\sin\theta$ にならないのはなぜか。

糸が引き込まれる速さと等しくなければならないのは、質点の速度の**糸に沿った**成分だけである。糸は床と角 $\frac{\pi}{2} - \theta$ をなすので、この成分は $v\sin\theta$ である。$v\sin\theta = V$ とおくと上と同じ答えが得られ、$v > V$ となる理由もはっきりする。

加速度

$\dot{x} = -VL/x$ を、商の微分法（quotient rule）と $\dot{L} = -V$、$\dot{x} = -VL/x$ を用いてもう一度微分する。

$$\ddot{x} = -V\frac{\dot{L}x - L\dot{x}}{x^2} = -V\frac{-Vx + VL^2/x}{x^2} = -\frac{V^2(L^2 - x^2)}{x^3} = -\frac{V^2h^2}{x^3}.$$

$x = h\tan\theta$ を代入すると $\ddot{x} = -\dfrac{V^2}{h\tan^3\theta}$ となる。$\dot{x}$ と $\ddot{x}$ はともに負なので、質点は加速している。その加速度の大きさは

$$\boxed{a = \frac{V^2}{h\tan^3\theta} = \frac{V^2\cos^3\theta}{h\sin^3\theta}}$$

であり、向きは O の方向である。（検算として、θ が減少すると $v = V/\sin\theta$ は確かに増加する。）

張力と床からの離脱

質点にはたらく力は、重力 mg、床からの垂直抗力 R（床はなめらかなので鉛直方向）、および糸に沿った張力 T である。張力の水平成分は O に向かって $T\sin\theta$、鉛直成分は上向きに $T\cos\theta$ である。

水平方向について、ニュートンの運動の第 2 法則より

$$T\sin\theta = ma = \frac{mV^2}{h\tan^3\theta} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{T = \frac{mV^2}{h\sin\theta\tan^3\theta} = \frac{mV^2\cos^3\theta}{h\sin^4\theta}}$$

鉛直方向については、質点が床の上にある間はつり合っているので、

$$R + T\cos\theta = mg \quad\Longrightarrow\quad R = mg - \frac{mV^2\cos\theta}{h\sin\theta\tan^3\theta} = mg - \frac{mV^2}{h\tan^4\theta}.$$

考えてみよう 質点が引き寄せられるにつれて、R はどちら向きに変化するか。

質点が O に近づくと θ は減少するので、$\tan^4\theta$ が減少し、R は単調に減少する。最初（θ が大きいとき）は R は mg に近い。質点は $R \geq 0$ である限り床の上にとどまり、初めて $R = 0$ となる瞬間に床を離れる。それは

$$\frac{mV^2}{h\tan^4\theta} = mg \quad\Longleftrightarrow\quad \tan^4\theta = \frac{V^2}{gh},$$

のときであり、これが示すべきことであった。θ がこれより小さいと、式は $R < 0$ を与えるが、これはありえないので、質点は確かに床を離れている。

検算

- 次元（dimensions）：V^2/h は加速度、mV^2/h は力の次元をもち、$V^2/(gh)$ は無次元である。$\tan^4\theta$ が無次元であることと整合する。
- 極限：$\theta \to \frac{\pi}{2}$（質点が非常に遠い）のとき、糸はほぼ水平になり、予想どおり $v \to V$、$a \to 0$ となる。$\theta \to 0$ のときは速さと張力が発散するので、質点は O に達する前に床を離れなければならない。
- 数値：$V = 2$、$h = 1$、$\theta = \frac{\pi}{4}$ とすると、$v = 2\sqrt{2} \approx 2.83$、$a = 4$ となる。$x(t) = \sqrt{(L_0 - Vt)^2 - h^2}$ を数値的に微分しても同じ値が得られる。$g = 9.8$ とすると、質点が床を離れるのは $\theta \approx 38.6°$ のときである。

よくある間違い

- 質点の速さを $V/\sin\theta$ ではなく、V や $V\sin\theta$ としてしまう。
- $\dot{x} = -VL/x$ を 2 回目に微分するときに、L が変化することを忘れる。
- 糸が一定の速さで動くので張力も一定だと思い込む。質点は加速しているので、張力は一定ではない。

STEP のその先へ

ここでの質点の自由度（degree of freedom）は 1 つだけである。糸の運動が指定されれば、各時刻における質点の位置は決まってしまう。このような拘束をもつ問題は、大学の 1 年次または 2 年次で学ぶラグランジュ（Lagrange）力学（Lagrangian mechanics）で体系的に扱われる。そこでは拘束を座標の選び方に組み込み、R や T のような拘束力（constraint forces）は後から求める。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）には、この種の問題が数多く収められている。

解答例

STEP II 2015、第 11 問

力学 ・ 運動量とエネルギー

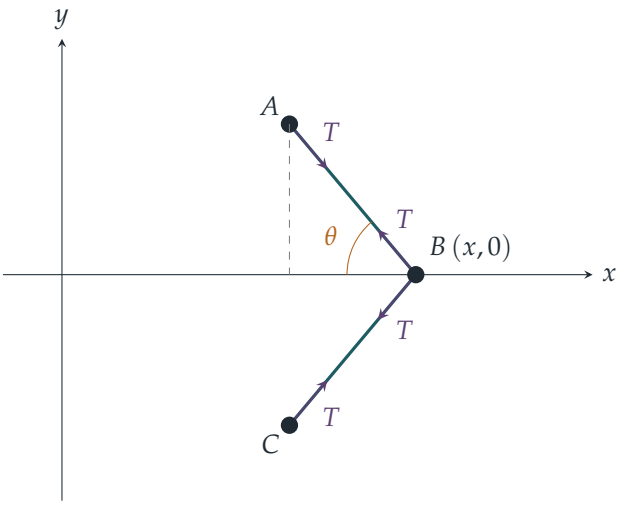
> **STEP II 2015、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q11

鍵となる考え方

運動は x 軸に関して対称なままなので、系全体は 2 つの座標 x と θ で記述できる。台はなめらかで、糸は軽く伸び縮みしないので、2 つの量、すなわち x 方向の運動量（momentum）と運動エネルギー（kinetic energy）が保存される。この 2 つの保存則（conservation law）から (ii) の 2 つの式が直ちに得られ、2 つ目の式を注意深く読むと、$\dot{\theta}$ が決してゼロにならないことがわかる。この事実ひとつで (iii) と (iv) がともに解決する。

解答

A、B、C を質点（particle）とみなし、糸は軽く伸び縮みしないものとしてモデル化する。重力と垂直抗力（normal reaction）はどちらも鉛直方向なので、水平方向の力は張力（tension）だけであり、これは系の内力である。



小問 (i)

A は、x 軸の負の向きと角 θ をなす直線上で、B から距離 a の位置にあるので、

$$A = (x - a\cos\theta,\ a\sin\theta).$$

$\cos\theta$ と $\sin\theta$ に合成関数の微分法（chain rule）を用いて t で微分すると、

$$\dot{\mathbf{r}}_A = \left(\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta},\ a\cos\theta\,\dot{\theta}\right),$$

となり、求める式が得られる（また $\dot{x} = v$ は B の速さである）。

設定も力積（impulse）も x 軸に関する鏡映について対称なので、運動は対称なままである。すなわち $C = (x - a\cos\theta,\ -a\sin\theta)$ であり、その速度は $\left(\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta},\ -a\cos\theta\,\dot{\theta}\right)$ である。

小問 (ii)

まず初期値を求める。力積が加わった瞬間、2 本の糸はともに y 軸に沿っていて B の新しい速度に垂直なので、糸が A や C を急に引く必要はない。よってこれらは静止した状態から動き始め、一方で $\dot{x} = u$ である。x 方向の運動量の総和は mu、運動エネルギーは $\frac{1}{2}mu^2$ である。

運動量。水平方向の外力はないので、x 方向の運動量の総和は mu に等しいままである：

$$m\dot{x} + 2m\left(\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta}\right) = mu \quad\Longrightarrow\quad 3\dot{x} + 2a\dot{\theta}\sin\theta = u. \tag{1}$$

（A と C の y 方向の運動量は、当然ながら打ち消し合う。）ここで右辺は B の初速 u である。問題用紙には v と印刷されているが、v はすでに $\dot{x}$ を表すのに使われているので、これは u の誤植に違いない。

エネルギー。糸は軽く伸び縮みしないので、張力は系全体として正味の仕事をせず、ほかの力も仕事をしない。したがって、A と C が衝突するまで運動エネルギーは保存される：

$$\dot{x}^2 + 2\Big[\big(\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta}\big)^2 + a^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2\Big] = u^2. \tag{2}$$

$s = \sin\theta$、$c = \cos\theta$ とおくと、(1) より

$$\dot{x} = \tfrac{1}{3}\big(u - 2as\dot{\theta}\big), \qquad \dot{x} + as\dot{\theta} = \tfrac{1}{3}\big(u + as\dot{\theta}\big).$$

これを (2) に代入すると、交差項 $\mp 4uas\dot{\theta}$ が打ち消し合う：

$$\tfrac{1}{9}\big(u - 2as\dot{\theta}\big)^2 + \tfrac{2}{9}\big(u + as\dot{\theta}\big)^2 + 2a^2c^2\dot{\theta}^2 = \tfrac{1}{9}\big(3u^2 + 6a^2s^2\dot{\theta}^2\big) + 2a^2c^2\dot{\theta}^2 = u^2.$$

よって $a^2\dot{\theta}^2\big(\frac{2}{3}s^2 + 2c^2\big) = \frac{2}{3}u^2$、すなわち $a^2\dot{\theta}^2(s^2 + 3c^2) = u^2$ である。$s^2 + 3c^2 = 3 - 2s^2$ であるから、

$$\dot{\theta}^2 = \frac{u^2}{a^2(3 - 2\sin^2\theta)},$$

となり、これが 2 つ目の結果である（ここでも v を u と読む）。

小問 (iii)

$3 - 2\sin^2\theta \le 3$ であるから、小問 (ii) より

$$\dot{\theta}^2 \ge \frac{u^2}{3a^2} > 0.$$

したがって $\dot{\theta}$ は決してゼロにならない。衝突と衝突の間ではこれは連続なので、符号は一定に保たれ、θ は単調に変化する。

最初 A は静止しているので、小問 (i) より $\dot{x} + a\dot{\theta} = 0$、すなわち $\dot{\theta} = -u/a < 0$ である。よって θ は $\frac{\pi}{2}$ から一様に減少していく。A と C は常に同じ x 座標をもち、y 座標は $\pm a\sin\theta$ なので、両者が出会うのはちょうど $\sin\theta = 0$ のときである。1 回目の衝突は $\theta = 0$ のとき、B の後方で起こる。

考えてみよう 衝突によって $\dot{x}$ と $\dot{\theta}$ はどうなるか？

$\theta = 0$ では 2 本の糸はともに x 軸に沿っており、A と C は同じ x 方向の速度と、$\pm a\dot{\theta}$ という y 方向の速度をもつ。両者は y 方向に接近するので、両者の間に働く力積も y 方向である。これは糸に垂直なので、撃力的な張力は生じず、x 方向の速度はすべて変わらない。等しい質量どうしの弾性衝突（elastic collision）では、中心線方向の速度成分が交換される。よって A の y 方向の速度は $a\dot{\theta}$ から $-a\dot{\theta}$ に変わる。つまり衝突は単に $\dot{\theta}$ の符号を反転させるだけで、$\dot{x}$ は変わらない。

衝突の前後で運動量とエネルギーは変わらないので、(1) と (2)、したがって (ii) の 2 つの結果は、運動の次の段階でも成り立つ。今度は $\dot{\theta} > 0$ であり、先ほどと同様にゼ

ロにはなりえない。よって θ は 0 から一様に増加し、次に $\sin\theta = 0$ となる値は $\theta = \pi$ である。$\dot{\theta} \geq u/(a\sqrt{3})$ であるから、そこには有限時間、高々 $\pi a\sqrt{3}/u$ で到達する。2 回目の衝突は

$$\theta = \pi,$$

のときに起こり、A と C は B の**前方**で出会う。

小問 (iv)

運動全体を通して $\theta \in [0, \pi]$ なので、$\sin\theta \geq 0$ である。$v = \dot{x} = 0$ ならば、(1) より $2a\dot{\theta}\sin\theta = u$ であり、これを 2 乗して (ii) を用いると

$$4a^2\sin^2\theta \cdot \frac{u^2}{a^2(3 - 2\sin^2\theta)} = u^2 \iff 4\sin^2\theta = 3 - 2\sin^2\theta \iff \sin^2\theta = \tfrac{1}{2}.$$

よって候補となる値は $\theta = \frac{\pi}{4}$ と $\theta = \frac{3\pi}{4}$ である。

> **考えてみよう** 2 乗したことで符号の情報が失われた。実際に必要なのはどちらの符号か？

2 乗したのは $2a\dot{\theta}\sin\theta = u$ であり、$u > 0$ なので $\dot{\theta}\sin\theta > 0$、すなわち $\dot{\theta} > 0$ も必要である。$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ では $\dot{\theta}^2 = \frac{u^2}{2a^2}$ なので、$\dot{\theta} = \pm\frac{u}{a\sqrt{2}}$ であり、$2a\dot{\theta}\sin\theta = \pm u$ となる。(1) より：

- $\dot{\theta} > 0$ ならば $\dot{x} = \frac{1}{3}(u - u) = 0$ である。
- $\dot{\theta} < 0$ ならば $\dot{x} = \frac{1}{3}(u + u) = \frac{2}{3}u$ である。

したがって、答えは「いいえ」である。最初の振れ（θ が $\frac{\pi}{2}$ から 0 へ減少する間）では、θ は $v = \frac{2}{3}u$ の状態で $\frac{\pi}{4}$ を通過する。1 回目と 2 回目の衝突の間（θ が 0 から π へ増加する間）では、$\theta = \frac{\pi}{4}$ と $\theta = \frac{3\pi}{4}$ のどちらでも $v = 0$ となる。2 回目の衝突の後、$\dot{\theta}$ は再び負になるので、π から 0 へ戻る振れでは、どちらの値でも $v = \frac{2}{3}u$ となる。以後はこのパターンが繰り返される。すなわち、これらの角度で $v = 0$ となるのは、θ が増加する振れのときだけである。

検算

- 初期状態の $\theta = \frac{\pi}{2}$ では、(ii) より $\dot{\theta}^2 = u^2/a^2$ となり、A が静止していることから直接求めた $\dot{\theta} = -u/a$ と一致する。
- (1) より $\dot{x} = \frac{u}{3}\left(1 - \frac{2a\dot{\theta}\sin\theta}{u}\right)$ である。$\theta = 0$ ではこれは $\frac{u}{3}$ となり、3 つの質点はすべて $\frac{u}{3}$ で一緒に動く。これは重心（centre of mass）の速度であり、糸が x 軸に沿ってまっすぐ伸びているときには当然そうなるはずである。増加する振れの途中の

$\theta = \frac{\pi}{2}$ では $\dot{x} = -\frac{u}{3}$ となるので、B はしばらく後ろ向きに動く。これが、v が 0 を 2 回通過する理由である。

- 3つの質点を非常に硬いばねでつないだ系を $a = u = 1$ としてコンピュータでシミュレーションすると、(ii) の 2 つの式がともに再現される。また、1 回目の衝突が $\theta = 0$、2 回目が $\theta = \pi$ で起こること、そして v の符号が変わるのは増加する振れの $\theta \approx 0.785$ と 2.356 の付近だけで、そこでは $\dot{\theta} \approx 0.707$ であることも示される。最初の振れでは、$\theta = \frac{\pi}{4}$ において $v \approx 0.67$ となる。

よくある間違い

- (1) の右辺を $\dot{x}$ としてしまう。右辺は力積によって定まる定数 u である。
- 衝突によって θ が $\frac{\pi}{2}$ に向かって戻り、2 回目の衝突も再び $\theta = 0$ で起こると考えてしまう。$\dot{\theta}$ が反転すると θ は $\frac{\pi}{2}$ を**通り越して**増加し、$\dot{\theta}^2$ は 0 から離れた値で下から抑えられているので、π に達する前に止まることはない。
- 小問 (iv) で、2 乗すると $\dot{\theta}$ の符号が失われることを忘れる。

STEP のその先へ

x と θ を座標に選び、それらを用いて運動エネルギーを組み立てることは、大学 1 年で学ぶラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）の出発点である。そこでは、x がエネルギーに現れない（つまり「循環座標」（ignorable coordinate）である）ため、x 方向の運動量の保存が自動的に導かれる。そしてここと同じく、エネルギーの式によって問題は θ に関する 1 つの 1 階微分方程式に帰着される。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、質点系に対する運動量とエネルギーの方法を非常に詳しく扱っている。

解答例

STEP II 2015、第 12 問

確率・統計 ・ 硬貨の表裏の列のゲーム

STEP II 2015、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/15-s2-q12

鍵となる考え方

ここで扱う列はどれも長さ 3 であるから、ある投げでゲームが終わるかどうかは、その投げとその直前の 2 回だけで決まる。したがって追跡すべきものは自然に**直近 2 回の結果**である。状態（state）は HH, HT, TH, TT の 4 つしかなく、それぞれの状態から次の 1 回でゲームが終わるか、別の状態へ移るかのどちらかである。勝者がただちに決まる状態もあり、残りの状態については次の 1 回の結果で条件付け（conditioning）して、簡単な連立方程式を立てればよい。

解答

以下を通して、各回の投げは独立（independent）であり、それぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で H または T が出るものとする。最初の 2 回でいずれかの列が完成することはないので、ゲームは必ず 4 つの 2 回分の状態のいずれかに達し、各状態の確率は $\frac{1}{4}$ である。また、ゲームは確率 1 で終わることにも注意しておく。どの局面からでも、続く 3 回で特定の列が完成する確率は $\frac{1}{8}$ であるから、ゲームがさらに $3n$ 回を超えて続く確率は高々 $(\frac{7}{8})^n \to 0$ である。

小問 (i)

ここでは HHT（A の列）と THH（B の列）だけが対象である。

最初の 2 回が HH の場合：しばらく H が出続け、最初に現れる T は少なくとも 2 つの H の後に来るので、HHT を完成させる。その T より前には裏が一度も出ていないので、THH は起こり得ない。よって A が勝つ。

最初の 2 回の中に T が現れる場合：その T の後で初めて表が 2 回連続する時点を考える。この HH の直前の投げは H ではあり得ない（もし H なら、その T の後にもっと早い HH があることになるか、あるいはその HH が最初の 2 回であることになるが、これは除外している）。よって直前は T であり、THH が完成している。HHT は HH を必要とし、この HH が最初のものであるから、HHT がそれより先に起こることはない。よって B が勝つ。

したがって、A が勝つのは最初の 2 回がともに表であるときに限り、

$$\mathrm{P}(A \text{ が勝つ}) = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4},$$

となり、示すべきことが示された。

小問 (ii)

今度は HHT, THH, TTH, HTT の 4 つの列すべてが有効である。最初の 2 回で条件付けする。

- **HH.** 小問 (i) と同様に、最初の T が出るまで H, H, ... と続き、その T が HHT を完成させる。他の列はいずれも「HH の後に H」という形を含まず、また THH, TTH, HTT を始める裏もまだ出ていない。よって A が勝つ。
- **TT.** H と T の役割を入れ替えた同じ議論により、最初の H が TTH を完成させるので、C が勝つ。
- **HT.** 次が T なら HTT となり D が勝つ。次が H なら直近 2 回は TH となる（HTH はどの列も完成させない）。
- **TH.** 次が H なら THH となり B が勝つ。次が T なら直近 2 回は HT となる（THT はどの列も完成させない）。

したがって、ゲームが状態 HT または TH に入ると、D か B が勝つまでこの 2 つの状態の間を行き来する。HT から始めたとき、TH から始めたときに D が勝つ確率をそれぞれ d_1, d_2 とする。次の 1 回で条件付けすると、

$$d_1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}d_2, \qquad d_2 = \tfrac{1}{2}d_1.$$

代入すると $d_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}d_1$ であるから、$d_1 = \frac{2}{3}, d_2 = \frac{1}{3}$ となる。これらの状態からは B か D しか勝てないので、B が勝つ確率は HT からでは $\frac{1}{3}$、TH からでは $\frac{2}{3}$ である。したがって

$$\mathrm{P}(A) = \tfrac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}(C) = \tfrac{1}{4},$$
$$\mathrm{P}(D) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}(B) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{4}.$$

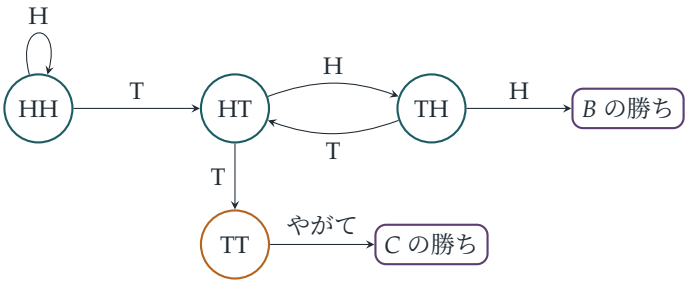
各プレイヤーが勝つ確率はいずれも $\frac{1}{4}$ である。

小問 (iii)

今度は THH（B の列）と TTH（C の列）だけが対象である。

最初の 2 回が TT の場合。その後は最初の H が出るまで T, T, ... と続き、その H が TTH を完成させる。THH には TH の後に H が必要であるが、H はまだ一度も出ていないので、B が先に勝つことはあり得ない。よって C が確率 1 で勝つ。

それ以外の始まり方については、ゲームが終わっていないという条件のもとで、状態（直近 2 回）がどう移るかを見るとわかりやすい。



（TT からは、次が T なら TT にとどまり、次が H なら TTH が完成する。このため TT を C の勝ちとして扱ってよい。）

HT, TH, HH から C が勝つ確率をそれぞれ p, q, r とする。

HT から。T が出れば TT となり、そこから C は確率 1 で勝つ。H が出れば HTH となり、どちらの列も完成せず状態 TH に移る。よって

$$p = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}q,$$

となり、示すべきことが示された。

TH から。H が出れば THH が完成して B が勝つ。T が出れば THT となり、何も完成せず状態 HT に移る。よって $q = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}p$ である。

> **考えてみよう** 直近 2 回の結果がわかれば、それ以前の経過が関係なくなるのはなぜか。

対象となる列はどちらも長さ 3 であるから、次の 1 回でゲームが終わるかどうかは、その 1 回と直前の 2 回だけで決まる。それより前の結果は無関係であり、今後の投げは過去と独立である。したがって、ある状態から C が勝つ確率は、その状態にどう到達したかによらず同じである。これにより、p の方程式の右辺に q が再び現れることが正当化される。

HH から。H が出れば HH にとどまり、T が出れば HT に移る。よって $r = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}p$ であり、$r = p$ を得る。

これを解く。$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}p$ であるから、

$$p = \tfrac{2}{3}, \qquad q = \tfrac{1}{3}, \qquad r = \tfrac{2}{3}.$$

最後に、それぞれ確率 $\frac{1}{4}$ である最初の 2 回で条件付けすると、

$$\mathrm{P}(C \text{ が勝つ}) = \tfrac{1}{4}(1 + p + q + r) = \tfrac{1}{4}\left(1 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{8}{3} = \tfrac{2}{3}.$$

検算

- 小問 (ii) では 4 つの確率の和は 1 であり、答えは対称的である。H と T を入れ替えると $A \leftrightarrow C$ および $B \leftrightarrow D$ が入れ替わるので、$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(C)$ かつ $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(D)$ となるのは当然である。
- 小問 (iii) で $q = \frac{1}{3} < p$ となるのは納得がいく。TH からは、B はあと 1 回で勝てるからである。
- 各タイプのゲームを 200,000 回コンピュータでシミュレーションすると、小問 (i) では $\mathrm{P}(A) \approx 0.250$、小問 (ii) では 4 人とも 0.25 に近く、小問 (iii) では $\mathrm{P}(C) \approx 0.667$ となり、マルコフ連鎖に沿った厳密な計算と一致した。

よくある間違い

- 同じ長さの 2 つの列は、先に現れる確率が等しいはずだと思い込むこと。HHT と THH はそれぞれ単独では期待待ち時間（expected waiting time）が 8 回であるが、THH は 4 回に 3 回の割合で HHT に勝つ。
- 勝ちにつながらない投げでも有利な状態に移り得ることを忘れること。HT からの H は単なる「失敗」ではなく、TH へ移る投げである。
- HTH が TH から始めた場合と同じ局面になる理由を説明せずに $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}q$ と書くこと。

STEP のその先へ

ここでの方法は**マルコフ連鎖**（Markov chains）への第一歩である。マルコフ連鎖とは、未来が現在の状態だけに依存する確率過程であり、吸収確率（absorption probabilities）に関する連立一次方程式を解くことで解析される。このゲームは Penney のゲーム（Penney's game）の一種である。このゲームでは、相手がどの 3 回分の列を選んでも、少なくとも確率 $\frac{2}{3}$ でそれに勝つ列を必ず選ぶことができる。したがって「どの

列が先に現れるか」という関係は推移的（transitive）ではない。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、マルコフ連鎖と吸収確率をちょうどこの水準で扱っている。

解答例

STEP II 2015、第 13 問

確率・統計 ・ 指数分布のモーメント

STEP II 2015、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/15-s2-q13

鍵となる考え方

費用は、一定額 ky と、洪水が備えを越えない限り 0 である確率的な額との和である。したがって、すべては洪水が備えた高さを超える超過分 $W = \max(X - y, 0)$ のモーメント（moments）に帰着する。指数分布（exponential distribution）は**無記憶性**（*memoryless property*）**をもつ**。すなわち、$X > y$ という条件のもとで、超過分 $X - y$ は再び同じパラメータの指数分布に従う。これにより、期待値（expectation）も分散（variance）も一行の計算で求まる。

解答

$p = \mathrm{P}(X > y) = \int_y^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\lambda y}$ とおき、

$$W = \begin{cases} X - y & \text{ただし} X > y, \\ 0 & \text{ただし} X \le y, \end{cases} \qquad \text{このとき} \qquad C = ky + aW.$$

と定める。ここで $y \ge 0$ はあらかじめ選んだ定数であるから、ky は確率的ではない。

小問 (i)

$X \le y$ のとき $W = 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(W) &= \int_y^\infty (x - y)\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty u\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda(u+y)}\,\mathrm{d}u \qquad (u = x - y) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda y} \int_0^\infty u\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\lambda y} \cdot \frac{1}{\lambda}, \end{aligned}$$

となる。ここで、パラメータ λ の指数分布の平均が $\frac{1}{\lambda}$ であることを用いた（部分積分（integration by parts）で計算してもよい）。したがって

$$\mathrm{E}(C) = ky + a\,\mathrm{E}(W) = ky + \frac{a}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda y},$$

であり、これが示すべきことであった。

最小化。$y \geq 0$ に対して $g(y) = ky + \frac{a}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda y}$ とおく。すると

$$g'(y) = k - a\mathrm{e}^{-\lambda y}, \qquad g''(y) = a\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y} > 0,$$

であるから、g' は狭義単調増加であり、$g'(0) = k - a$ から始まって $y \to \infty$ のとき k に近づく。

> ? **考えてみよう** なぜ単に $g'(y) = 0$ とおいて終わりにできないのだろうか？

y は $y \geq 0$ に制限されており、停留点（stationary point）$\mathrm{e}^{-\lambda y} = k/a$ がその範囲にあるのは $k/a \leq 1$ のときに限られるからである。そこで a/k の値によって場合分けする。

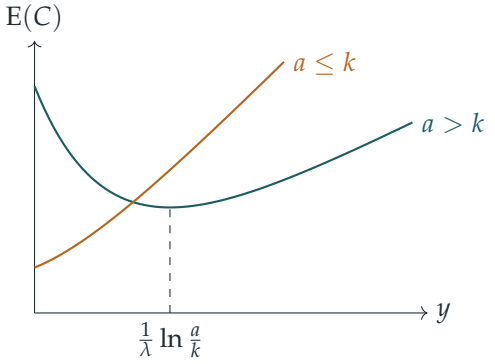
- **$a/k > 1$ の場合**。このとき $g'(0) = k - a < 0$ であり、

  $$y = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{a}{k} > 0.$$

  において $g'(y) = 0$ となる。g' は増加関数であるから、g はこの点より前で減少し、後で増加する。よってこれは $y \geq 0$ における最小値（global minimum）を与える。最小の期待費用は $\frac{k}{\lambda}\left(1 + \ln\frac{a}{k}\right)$ である。

- **$a/k \leq 1$ の場合**。このとき、すべての $y > 0$ に対して $g'(y) > g'(0) = k - a \geq 0$ であるから、g は $y \geq 0$ で狭義単調増加であり、最小値は $y = 0$ でとる。つまり、まったく備えをしないのがよい。このときの期待費用は $\frac{a}{\lambda}$ である。

これは納得のいく結果である。備えを 1 メートル増やすごとに確実に k の費用がかかり、節約できる a は洪水がその高さに達した場合にしか得られない。$a \leq k$ ならば、その節約が支出に見合うことは決してない。



小問 (ii)

定数 ky を加えても分散は変わらないので、$\mathrm{Var}(C) = a^2\,\mathrm{Var}(W)$ である。二次モーメント（second moment）については、同じ置換 $u = x - y$ により

$$\mathrm{E}(W^2) = \int_y^\infty (x-y)^2 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\lambda y}\int_0^\infty u^2 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\lambda y}\cdot\frac{2}{\lambda^2},$$

となる。パラメータ λ の指数分布に従う確率変数 U は $\mathrm{E}(U^2) = \mathrm{Var}(U) + \mathrm{E}(U)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}$ を満たすからである。よって、$p = \mathrm{e}^{-\lambda y}$ として、

$$\mathrm{Var}(C) = a^2\left(\frac{2p}{\lambda^2} - \frac{p^2}{\lambda^2}\right) = \frac{a^2}{\lambda^2}\,\mathrm{e}^{-\lambda y}\left(2 - \mathrm{e}^{-\lambda y}\right).$$

前もって支出する額は ky であり、$k > 0$ であるから y とともに増加する。したがって、y が増加するにつれて $\mathrm{Var}(C)$ が減少することを示せばよい。微分すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(2\mathrm{e}^{-\lambda y} - \mathrm{e}^{-2\lambda y}\right) = -2\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y} + 2\lambda\mathrm{e}^{-2\lambda y} = -2\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda y}\right),$$

となり、$y > 0$ のときは $0 < \mathrm{e}^{-\lambda y} < 1$ であるから、これは負である。よって $\mathrm{Var}(C)$ は $y \geq 0$ において y について狭義単調減少である。すなわち、備えに多く支出するほど費用の分散は小さくなり、証明が完了する。（同値な言い方をすれば、$p(2-p) = 1 - (1-p)^2$ は $[0,1]$ 上で p について増加し、$p = \mathrm{e}^{-\lambda y}$ は y について減少する。）

検算

- $y = 0$ のとき $C = aX$ であるから、$\mathrm{E}(C) = a/\lambda$、$\mathrm{Var}(C) = a^2/\lambda^2$ となり、いずれも公式と一致する。
- $y \to \infty$ のとき分散は 0 に近づく。非常に高い堤防を築けば不確実性は実質的になくなり、一定の費用 ky だけが残る。
- $k = 1$、$a = 3$、$\lambda = 0.5$、$y = 1.2$ のとき、公式からは $\mathrm{E}(C) \approx 4.493$、$\mathrm{Var}(C) \approx 28.67$ が得られる。100 万年分のコンピュータ・シミュレーションでは 4.496 と 28.68 が得られた。これらの値に対する最適な高さは $2\ln 3 \approx 2.197$ であり、コンピュータによる探索でも確かめられた。

よくある間違い

- $a(x-y)\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$ を y からではなく 0 から積分してしまう。$X \leq y$ のときは洪水の被害はない。

- 境界 $y \geq 0$ を忘れ、$a < k$ で負になる場合にも $y = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{a}{k}$ を答えてしまう。
- 分散に ky を含めてしまう。これは定数であり、分散には何の寄与もしない。

STEP のその先へ

量 $\mathrm{E}\big(\max(X - y, 0)\big)$ は、行使価格（strike）y のコールオプション（call option）のペイオフそのものである。また最適条件 $\mathrm{P}(X > y) = k/a$ は、オペレーションズ・リサーチ（operations research）における古典的な「新聞売り子問題（newsvendor problem）」の規則である。すなわち、備えの限界費用（marginal cost）が期待される限界的な節約額に等しくなる水準を選べ、というものである。きれいな答えを支えている無記憶性は、連続分布（continuous distributions）の中では指数分布に特有の性質である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、指数分布や確率変数（random variables）の関数の期待値を扱っている。

解答例

STEP III 2015、第 1 問

純粋数学 • 積分の漸化式と置換

STEP III 2015、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/15-s3-q1

鍵となる考え方

小問 (i) では、$I_n - I_{n+1}$ をまとめると分子に u^2 をもつ一つの積分になる。u^2 を $u \cdot u$ と書いて部分積分（integration by parts）を行うと、I_n に戻ってくる。小問 (ii) では、式 $(x - x^{-1})^2$ は x を $1/x$ に置き換えても変わらず、この置換（substitution）によって因子 x^{-2} が現れる。二つの形の平均をとると $1 + x^{-2}$ が得られ、これはちょうど $x - x^{-1}$ の導関数（derivative）であるから、置換 $u = x - x^{-1}$ がうまくいく。小問 (iii) は、分母を $x - x^{-1}$ を用いて書き直せば、姿を変えた小問 (ii) にほかならない。

解答

小問 (i)

二つの被積分関数を通分してまとめると、

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^\infty \frac{(1+u^2)-1}{(1+u^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty u \cdot \frac{u}{(1+u^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}u.$$

二つ目の因子は原始関数（antiderivative）が容易に求まる：

$$\int \frac{u}{(1+u^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2n(1+u^2)^n}.$$

そこで、u を微分し $u/(1+u^2)^{n+1}$ を積分する形で部分積分を行う：

$$I_n - I_{n+1} = \left[-\frac{u}{2n(1+u^2)^n}\right]_0^\infty + \frac{1}{2n}\int_0^\infty \frac{1}{(1+u^2)^n}\,\mathrm{d}u.$$

境界項（boundary term）は $u = 0$ において 0 である。また $u \to \infty$ のときも 0 に収束する。なぜなら $n \geq 1$ より $0 \leq u/(1+u^2)^n \leq u/(1+u^2) < 1/u$ となるからである。

したがって

$$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{2n} I_n,$$

となり、示すべき式が得られた。整理すると

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n \qquad (n \geq 1).$$

初期値は $I_1 = \left[\arctan u\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$ である。この漸化式（recurrence）を繰り返し用いると

$$I_{n+1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}.$$

考えてみよう 奇数の積を階乗に直すにはどうすればよいか。

分子と分母に偶数の積 $2 \cdot 4 \cdots (2n) = 2^n n!$ を掛ける。すると分子は $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n) = (2n)!$ となり、分母は $(2^n n!)^2$ となる。よって

$$I_{n+1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{(2n)!\,\pi}{2^{2n+1}(n!)^2},$$

となり、示すべき式が得られた。（厳密な証明には数学的帰納法（induction）を用いる。$n = 0$ のとき公式は $I_1 = \frac{\pi}{2}$ を与えるので成り立つ。I_n について成り立つと仮定すると、$\frac{2n-1}{2n} = \frac{(2n-1)(2n)}{(2n)^2}$ を掛けることで $\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}$ は $\frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$ に変わる。）

小問 (ii)

第一の等式。J において $x = 1/t$ と置換すると $\mathrm{d}x = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$ であり、x が 0 から ∞ まで動くことは t が ∞ から 0 まで動くことに対応する。また

$$\left(x - x^{-1}\right)^2 = \left(t^{-1} - t\right)^2 = \left(t - t^{-1}\right)^2,$$

である。2 乗すれば符号の反転が消えるからである。したがって

$$J = \int_{\infty}^{0} \mathrm{f}\big((t - t^{-1})^2\big) \left(-t^{-2}\right) \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} t^{-2}\,\mathrm{f}\big((t - t^{-1})^2\big)\,\mathrm{d}t,$$

となり、ダミー変数（dummy variable）t を x と書き直せば第一の形が得られる。

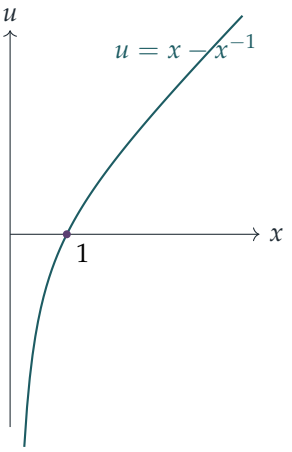
第二の等式。J のもとの式とこの式を足して 2 で割ると

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(1 + x^{-2}\right) \mathrm{f}\big((x - x^{-1})^2\big)\,\mathrm{d}x.$$

第三の等式。ここで $u = x - x^{-1}$ とおくと $\mathrm{d}u = (1 + x^{-2})\,\mathrm{d}x$ である。$\mathrm{d}u/\mathrm{d}x > 0$ であるから、u は x について狭義単調増加し、$-\infty$（$x \to 0^+$ のとき）から $+\infty$（$x \to \infty$ のとき）まで動く。よってこの置換は全範囲にわたる一対一の変数変換である：

$$J = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(u^2)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\infty} \mathrm{f}(u^2)\,\mathrm{d}u.$$

最後の等式が成り立つのは、$\mathrm{f}(u^2)$ が u の偶関数（even function）であり、$(-\infty, 0)$ 上の積分と $(0, \infty)$ 上の積分が等しいからである。以上で小問 (ii) が示された。



この曲線は点 $(1, 0)$ を通り、$x > 0$ の範囲で単調に増加して、u のすべての実数値をちょうど一度ずつとる。

小問 (iii)

目標は、被積分関数を $x^{-2}\,\mathrm{f}\big((x - x^{-1})^2\big)$ の形に書き直すことである。$(x - x^{-1})^2 = x^2 - 2 + x^{-2}$ であるから

$$x^4 - x^2 + 1 = x^2\left(x^2 - 1 + x^{-2}\right) = x^2\left(1 + (x - x^{-1})^2\right).$$

したがって

$$\frac{x^{2n-2}}{(x^4 - x^2 + 1)^n} = \frac{x^{2n-2}}{x^{2n}\big(1 + (x - x^{-1})^2\big)^n} = x^{-2}\,\mathrm{f}\big((x - x^{-1})^2\big), \qquad \text{ただし} \mathrm{f}(y) = \frac{1}{(1+y)^n}.$$

小問 (ii) における J の第一の形と最後の形により

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-2}}{(x^4 - x^2 + 1)^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{(1 + u^2)^n}\,\mathrm{d}u = I_n.$$

小問 (i) の公式で n を $n - 1$ に置き換える（$n - 1 \geq 0$、すなわちすべての正の整数 n に対して有効）と

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-2}}{(x^4 - x^2 + 1)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{(2n-2)!\,\pi}{2^{2n-1}\big((n-1)!\big)^2}.$$

検算

- $n = 1$ のとき答えは $\frac{\pi}{2}$ であり、$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4 - x^2 + 1} = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$ となる。$n = 2$ のときは $\frac{\pi}{4}$、$n = 3$ のときは $\frac{3\pi}{16} \approx 0.5890$ である。もとの積分を数値積分すると、これらすべての値と一致し、$n = 8$ までの場合とも一致する。
- 漸化式による $I_2 = \frac{1}{2} I_1 = \frac{\pi}{4}$ は、$u = \tan\theta$ による直接計算 $I_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}$ と一致する。
- 小問 (ii) で $\mathrm{f}(y) = \mathrm{e}^{-y}$ とすると $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x - 1/x)^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2} \, \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.88623$ となる。四つの形すべてを数値計算すると、この値が得られる。

よくある間違い

- 境界項 $u/(1 + u^2)^n$ が無限遠で消えることの確認を忘れる。ここでは確かに消えるが、それは $n \geq 1$ だからこそである。
- $u = x - x^{-1}$ と置換したのに、積分範囲を 0 と ∞ のままにしてしまう。新しい下端は $-\infty$ であり、範囲を $(0, \infty)$ に戻せるのは $\mathrm{f}(u^2)$ が偶関数だからである。
- 添字をずらさずに I_{n+1} の公式を使ってしまう。小問 (iii) の答えは I_n であって、I_{n+1} ではない。

STEP のその先へ

比 $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \binom{2n}{n}/4^n$ は中心二項確率（central binomial probability）であり、小問 (i) の漸化式は π に関するウォリス（Wallis）の積を導くものと同じである。小問 (ii) の技法はコーシー・シュレーミルヒ変換（Cauchy–Schlömilch transformation）として知られている。これを用いると、検算で扱ったものと同様のガウス型積分（Gaussian-type integral）をはじめ、初等的な原始関数をもたない多くの定積分を計算できる。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* には、うまく選んだ置換で解ける積分がさらに載っており、Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis* は、広義積分（improper integral）と変数変換を厳密に扱っている。

解答例

STEP III 2015、第 2 問

純粋数学 ・ 解析学

> **STEP III 2015、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q2

この問題は、*Beyond STEP* の第 2.1 節「**「いずれは」とは何を意味するか**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch02/eventually.html

鍵となる考え方

関係 $(s_n) \leq (t_n)$ は「最終的に（eventually）$s_n \leq t_n$ となる」ことを意味する。つまり、初めのほうの有限個の項は無視してよい。したがって、正しい主張を示すには、それより先では不等式が保証されるような点 m を明示する証明が必要であり、誤った主張を示すには、どのような m を選んでも破綻させる数列（sequence）の組が必要である。常に「**どの n から先で**これが成り立つのか」と問い続けること。

解答

小問 (i)

正しい。正の整数 n に対しては $n > 0$ で割ることができるので、

$$1000n \leq n^2 \iff 1000 \leq n.$$

よって $n \geq 1000$ ならば常に $1000n \leq n^2$ が成り立ち、$m = 1000$ とすればよい。（$1000 \cdot 999 > 999^2$ であるから、これより小さい m ではうまくいかない。）

小問 (ii)

誤りである。落とし穴は、「最終的に $s_n \leq t_n$ となるわけではない」ということからわかるのは、$s_n > t_n$ となる n が**無限に多く**存在することだけであり、**最終的に**そうなる

ことではない、という点である。2つの数列は互いに何度も追い越し合うことができる。そこで

$$s_n = 2 + (-1)^n, \qquad t_n = 2,$$

とおく。すると s_n は $1,3,1,3,\ldots$ と続き、どちらの数列もすべての項が正である。

- $(s_n) \leq (t_n)$ は成り立たない。どのような正の整数 m を提示されても、偶数 $n \geq m$ が存在し、その n に対して $s_n = 3 > 2 = t_n$ となるからである。
- $(t_n) \leq (s_n)$ も成り立たない。どのような m を提示されても、奇数 $n \geq m$ が存在し、その n に対して $t_n = 2 > 1 = s_n$ となるからである。

よって、この主張の仮定は成り立つが、結論は成り立たない。

小問 (iii)

正しい。仮定より、すべての $n \geq m_1$ に対して $s_n \leq t_n$ となる正の整数 m_1 が存在し、すべての $n \geq m_2$ に対して $t_n \leq u_n$ となる正の整数 m_2 が存在する。

$$m = \max(m_1, m_2).$$

とおく。$n \geq m$ ならば $n \geq m_1$ かつ $n \geq m_2$ であるから、n において両方の不等式が成り立ち、

$$s_n \leq t_n \leq u_n.$$

を得る。よって $n \geq m$ ならば常に $s_n \leq u_n$ であり、これは $(s_n) \leq (u_n)$ にほかならない。

考えてみよう なぜ単に $m = m_1$ や $m = m_1 + m_2$ としないのか？

$m = m_1$ とするとうまくいかない。$m_1 \leq n < m_2$ の範囲では、t_n と u_n の大小について何もわからないからである。n が**両方の**境目を同時に越えている必要があり、$\max(m_1, m_2)$ はそれを保証する最小の選び方である。（$m_1 + m_2$ でもうまくいくが、無駄が多い。）

小問 (iv)

正しい。$m = 4$ **とすればよい**。短い表を作ると、どこから始めればよいかがわかる。

n	1	2	3	4	5	6
n^2	1	4	9	16	25	36
2^n	2	4	8	16	32	64

不等式は $n=1,2$ で成り立ち、$n=3$ で成り立たず、$n=4$ から再び成り立つ。よって $m=4$ が最小の選び方であり、すべての $n \geq 4$ に対して $n^2 \leq 2^n$ が成り立つことを数学的帰納法（induction）で証明する。

基底段階（*base case*）。$n=4$ のとき、$n^2=16=2^4$ である。

帰納段階（*inductive step*）。$n \geq 4$ かつ $n^2 \leq 2^n$ と仮定する。$n \geq 3$ であるから $n^2-2n-1=(n-1)^2-2 \geq 2>0$ となり、$2n+1<n^2$ である。したがって

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= n^2+2n+1 \\ &< n^2+n^2 && \text{なぜなら} 2n+1<n^2 \\ &= 2n^2 \\ &\leq 2\cdot 2^n && \text{帰納法の仮定より} \\ &= 2^{n+1}.\end{aligned}$$

よって n での結果から $n+1$ での結果が導かれ、数学的帰納法により、すべての $n \geq 4$ に対して $n^2 \leq 2^n$ が成り立つ。ゆえに $m=4$ として $(n^2) \leq (2^n)$ である。

考えてみよう 帰納法のどこで、n が大きいことが本当に必要だったのか？

$2n+1<n^2$ という段階だけであり、そこでは $n \geq 3$ が必要である。これが、帰納法を $n=1$ から始められない理由である。$n=2$ から $n=3$ への段階では $5<4$ を用いることになるが、これは誤りであり、実際 $3^2>2^3$ となっている。

検算

- 小問 (i)：$n=1000$ では両辺とも 10^6 に等しい。$n=999$ では $999\,000>998\,001$ である。
- 小問 (iv)：4 から 2000 までのすべての n についてコンピュータで $n^2 \leq 2^n$ を確かめると成り立つことが確認でき、上の表から $n=3$ で成り立たないことも確認できる。2^n がどれほど速く勝つかを実感するには、$20^2=400$ だが $2^{20}=1\,048\,576$ であることを見るとよい。
- 小問 (ii)：どの m を試しても、一方の順序に対しては次の偶数 n によって、もう一方の順序に対しては次の奇数 n によって破られる。

よくある間違い

- 「最終的に $\leq$ とはならない」を「最終的に $>$ となる」と取り違えること。「ある m が存在して、すべての $n \geq m$ に対して…」の否定（negation）は、「すべての m に

対して、$s_n > t_n$ となる $n \geq m$ が存在する」である。

- (iv) の帰納法を $n = 1$ や $n = 2$ から始めること。そこでは帰納段階が実際に成り立たない。
- (iii) で、2つの境目が一致しなければならないかのように、両方の仮定に同じ文字 m を使うこと。

STEP のその先へ

ここでの関係は、実解析（real analysis）全体を貫く「最終的に」という量化子（quantifier）である。数列が収束（converge）するとは、どのような許容誤差に対しても、数列が**最終的に**極限からその許容誤差以内に収まることである。小問 (ii) は、実数の順序とは異なり、この数列の順序が全順序（total order）ではないこと、すなわち2つの数列が比較可能であるとは限らないことを示している。計算機科学者は同じ考え方をビッグオー記法（big-O notation）に用いており、そこでは (iv) は、指数関数（exponential）が最終的には多項式（polynomial）に勝つというよく知られた事実である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、こうした量化子を用いた議論が体系化される様子を見るのに親しみやすい本である。

解答例

STEP III 2015、第 3 問

純粋数学 • 極方程式の曲線と面積

STEP III 2015、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/15-s3-q3

鍵となる考え方

$r\cos\theta = x$ であるから、曲線 $r = a\sec\theta$ は単に直線 $x = a$ にほかならない。したがって $r - a\sec\theta$ は、原点から角 θ の方向に伸びる半直線（ray）に沿って、点がその半直線と直線との交点からどれだけ離れているかを測る量であり、方程式はこの距離が b であることを述べている。これはまさに、極（pole）を定点とするコンコイド（conchoid）の定義である。概形を描くには、絶対値（modulus）を外して $r = a\sec\theta + b$ と $r = a\sec\theta - b$ に分け、それぞれについて θ のどの値で $r \geq 0$ となるかを考えればよい。

解答

以下を通じて、$\sec\theta$ は $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ で定義されないので、これらの角は除外する。絶対値を外すと、$(*)$ は

$$r = a\sec\theta + b \qquad \text{または} \qquad r = a\sec\theta - b,$$

を意味し、いずれの場合も $r \geq 0$ が必要である。

小問 (i)

$\sec\theta > 0$ **となる理由**。 $\sec\theta < 0$ と仮定する。すると $|\cos\theta| \leq 1$ より $\sec\theta \leq -1$ となり、$a\sec\theta \leq -a$ である。このとき r のとりうる二つの値はいずれも、$a > b$ を用いると

$$r = a\sec\theta \pm b \leq -a + b < 0,$$

を満たす。これは $r \geq 0$ に矛盾するので、$(*)$ を満たすすべての点で $\sec\theta > 0$、すなわち $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ である。

コンコイド。A を極 O、L を直線 $x = a$（極形式では $r\cos\theta = a$、すなわち $r = a\sec\theta$）、$d = b$ とする。$a > 0$ であるから、A は L 上にないことに注意する。

P を $(*)$ を満たす偏角 θ の点とすると、$\cos\theta > 0$ である。直線 OP は L に平行でなく、同じ半直線上にあって $OQ = a\sec\theta$ となる点 Q、すなわち直交座標で $Q = (a, a\tan\theta)$ において L と交わる。O、Q、P はすべて O から出る一本の半直線上にあり、O からの距離はそれぞれ $a\sec\theta$ と r であるから、

$$PQ = |r - a\sec\theta| = b.$$

したがって P は、$A = O$ を通る直線に沿って測って L から距離 b の位置にある。すなわち、この L、A、$d = b$ に対するニコメデス（Nicomedes）のコンコイド上にある。

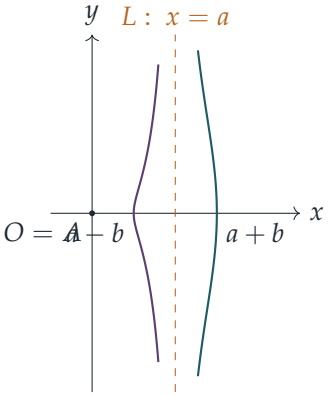
（逆に、そのコンコイド上のすべての点は $(*)$ を満たす。O を通り L と Q で交わる任意の直線上で、Q から距離 b にある二点は、半直線 OQ に沿って O から距離 $a\sec\theta \pm b$ の位置にあり、$a\sec\theta \geq a > b$ であるから両方とも正である。したがって軌跡（locus）はコンコイド全体である。）

概形。直交座標では $x = r\cos\theta = a \pm b\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ である。$r - a\sec\theta = \pm b$ に $\cos\theta$ を掛けると $x - a = \pm b\cos\theta = \pm bx/r$ となるので、曲線は

$$(x-a)^2(x^2+y^2) = b^2x^2.$$

である。枝は二つあり、どちらも x 軸に関して対称であり（θ を $-\theta$ に置き換えればよい）、どちらも $r \to \infty$ となる $\theta \to \pm\frac{\pi}{2}$ において L に漸近する（asymptotic）。

- 外側の枝 $r = a\sec\theta + b$。$x = a + b\cos\theta \in (a, a+b]$ であり、軸と $(a+b, 0)$ で交わる。
- 内側の枝 $r = a\sec\theta - b$。$x = a - b\cos\theta \in [a-b, a)$ であり、軸と $(a-b, 0)$ で交わる。この点は O の右側にある。



（図は $a=2$、$b=1$ の場合であり、外側の枝をティール、内側の枝をプラムで示す。）

小問 (ii)

今度は $a<b$ とする。二つの場合をもう一度調べ、$r\geq 0$ となるところを確かめる。

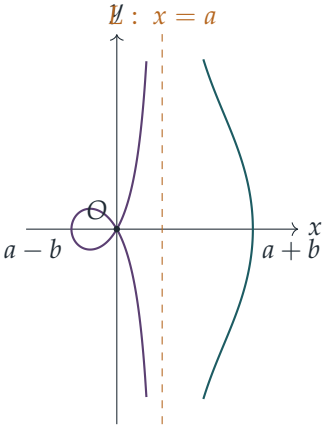
- $r=a\sec\theta+b$ の場合。$\sec\theta>0$ ならばこれは常に正であり、以前と同じ外側の枝で、L の右側にある。$\sec\theta<0$ ならば、$r\geq 0$ となるのはちょうど $-a\sec\theta\leq b$、すなわち $|\sec\theta|\leq b/a$、すなわち $\cos\theta\leq -a/b$ のときである。
- $r=a\sec\theta-b$ の場合。$\sec\theta<0$ ならばこれは負なので、点は存在しない。$\sec\theta>0$ ならば、$r\geq 0$ となるのはちょうど $\sec\theta\geq b/a$、すなわち $0<\cos\theta\leq a/b$ のときである。

$\alpha=\arccos(a/b)$ とおく。$0<a/b<1$ であるから、これは $(0,\frac{\pi}{2})$ に属する。

考えてみよう $\sec\theta<0$ の部分はどのような形をしているか？

それは $\cos\theta\leq -a/b$、すなわち $\pi-\alpha\leq|\theta|\leq\pi$ における $r=b+a\sec\theta$ である。端点では $\cos\theta=-a/b$ より $r=b-b=0$ となるので、この部分は原点から始まり原点で終わる。$\theta=\pi$ では $r=b-a$ となり、これは負の x 軸上の点 $(a-b,0)$ である。その間では $r>0$ であり、曲線は x 軸に関して対称であるから、この部分は原点の左側にある閉じたループであり、（$x=a+b\cos\theta$ であるから）$a-b\leq x\leq 0$ の範囲にある。

内側の枝 $r=a\sec\theta-b$（$\alpha\leq|\theta|<\frac{\pi}{2}$）も原点（$\cos\theta=a/b$ となるところ）から始まり、$|\theta|\to\frac{\pi}{2}$ のとき漸近線 L に向かって伸びていき、$0\leq x<a$ の範囲にとどまる。したがって内側の枝とループは合わせて、O で自分自身と交差する一本の曲線をなし、そこでの接線の方向は $\theta=\pm\alpha$ である。



（図は $a=1$、$b=2$ の場合であり、$\alpha=\frac{\pi}{3}$ である。外側の枝をティールで、内側の枝と

ループを合わせたものをプラムで示す。）

$a=1$、$b=2$ のときのループの面積。ここで $\cos\theta \le -\frac{1}{2}$ は $\frac{2\pi}{3} \le |\theta| \le \pi$ を意味し、ループ上では $r = 2+\sec\theta$ である。θ がこの範囲を動くとき、半直線はループをちょうど一度だけ掃くので、面積は $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ である。x 軸に関する対称性を用いて、上半分 $\frac{2\pi}{3} \le \theta \le \pi$ の2倍をとる：

$$\begin{aligned}\text{面積} &= 2\cdot\frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{\pi}(2+\sec\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \int_{2\pi/3}^{\pi}\left(4+4\sec\theta+\sec^2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \Big[\,4\theta+4\ln|\sec\theta+\tan\theta|+\tan\theta\,\Big]_{2\pi/3}^{\pi}.\end{aligned}$$

与えられた $\sec\theta$ の原始関数（antiderivative）は、区間が $\frac{\pi}{2}$ を含まないので、ここでも有効である。$\theta=\pi$ では $\sec\theta=-1$、$\tan\theta=0$ であるから、括弧の値は $4\pi+4\ln 1+0=4\pi$ である。$\theta=\frac{2\pi}{3}$ では $\sec\theta=-2$、$\tan\theta=-\sqrt{3}$ であるから、括弧の値は $\frac{8\pi}{3}+4\ln(2+\sqrt{3})-\sqrt{3}$ である。差をとると、

$$\text{ループの面積} = \frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}-4\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

検算

- 数値的には、面積は $4.1888+1.7321-5.2678 \approx 0.6530$ である。これは当然のことながら正であり、ループが収まる長方形 $-1\le x\le 0$、$|y|\le 0.45$（その面積は0.9）と比べて小さい。$[\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}]$ 上で $\frac{1}{2}(2+\sec\theta)^2$ を直接数値積分しても、やはり0.65301が得られる。
- ループは O と $(-1,0)$ を通る。$\theta=\frac{2\pi}{3}$ では $r=2-2=0$、$\theta=\pi$ では $r=2-1=1$ である。
- (i) の曲線上の点を一つ選ぶ。たとえば $a=2$、$b=1$、$\theta=\frac{\pi}{4}$ とすると $r=2\sqrt{2}+1$ であり、半直線は L と $(2,2)$ で交わる。この交点は O から距離 $2\sqrt{2}$ にあるので、曲線上の点はそこからさらに $1=b$ だけ先にある。

よくある間違い

- 条件 $r\ge 0$ を忘れる。この条件こそが (i) で $\sec\theta>0$ を導くものであり、(ii) でループの θ の範囲を定めるものである。
- ループの積分を、$\theta=\frac{2\pi}{3}$ で $r=0$ となるところから始めずに、漸近線の方向を通って $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ で行ってしまう。
- 第2象限での $\ln|\sec\theta+\tan\theta|$ の符号の誤り。第2象限では $\sec\theta$ と $\tan\theta$ はどちらも負である。

STEP のその先へ

コンコイドは紀元前200年ごろ、ニコメデスによって角の三等分（trisection of angles）と立方根を求めるために考案された。これらは定規とコンパスだけでは不可能な問題であり、その不可能性の証明は、代数学の最初の講義で学ぶ体論（field theory）から得られる（Allenby, *Rings, Fields and Groups* を参照）。(ii) の原点における自己交差は**結節点**（node）であり、代数曲線（algebraic curve）上の特異点（singular point）の一例である。ここでの代数曲線は4次曲線 $(x-a)^2(x^2+y^2)=b^2x^2$ である。STEP 形式の曲線の概形を描く問題をさらに多く知りたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を参照せよ。

解答例

STEP III 2015、第 4 問

純粋数学 • 3 次方程式の解

> **STEP III 2015、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q4

鍵となる考え方

小問 (iii) の三つの条件は三角関数のパズルのように見えるが、どれも何かの虚部（imaginary part）になっている。すなわち、$z_k = r_k e^{i\theta_k}$ とおけば、$r_k^n \sin(n\theta_k)$ は z_k^n の虚部である。したがってこれらの条件は、三つの複素数の冪和（power sum）S_1, S_2, S_3 が実数であることを述べている。小問 (ii) によって実数の冪和は実数係数の 3 次式（cubic）に変換され、さらに小問 (i) によって実数解が得られる。

解答

小問 (i)

実数 x に対して $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とおく。これは連続な実関数である。$R = 1 + |a| + |b| + |c|$ とおく。$x \geq R$ のとき $x \geq 1$ であるから $|x| \leq x^2$ かつ $1 \leq x^2$ であり、$|ax^2 + bx + c| \leq (|a| + |b| + |c|)x^2$ が成り立つ。よって

$$f(x) \geq x^3 - (|a| + |b| + |c|)x^2 = x^2\big(x - |a| - |b| - |c|\big) > 0.$$

同様に、$x \leq -R$ のとき $f(x) \leq -|x|^2\big(|x| - |a| - |b| - |c|\big) < 0$ が得られる。ゆえに $f(-R) < 0 < f(R)$ であり、中間値の定理（intermediate value theorem）により f は $-R$ と R の間に零点をもつ。この零点が $(*)$ の実数解である。

（同じことを別の言い方で述べると、実数係数の多項式の虚数解は共役（conjugate）な組として現れ、三つの解をすべて組にすることはできない。）

小問 (ii)

z_1, z_2, z_3 が解であるから

$$z^3 + az^2 + bz + c = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3),$$

であり、係数を比較すると

$$a = -(z_1 + z_2 + z_3), \qquad b = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1, \qquad c = -z_1z_2z_3.$$

を得る。よって $a = -S_1$ である。和を 2 乗すると $S_1^2 = S_2 + 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) = S_2 + 2b$ であるから

$$a = -S_1, \qquad b = \tfrac{1}{2}\left(S_1^2 - S_2\right).$$

c については、S_1^3 を展開する代わりに、各解が方程式を満たすことを用いる。すなわち $k = 1, 2, 3$ に対して $z_k^3 + az_k^2 + bz_k + c = 0$ である。これら三つの式を足し合わせると

$$S_3 + aS_2 + bS_1 + 3c = 0.$$

a と b を代入して 2 倍すると

$$\begin{aligned} 6c &= -2S_3 + 2S_1S_2 - S_1\left(S_1^2 - S_2\right) \\ &= -S_1^3 + 3S_1S_2 - 2S_3, \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (iii)

$k = 1, 2, 3$ に対して $z_k = r_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}$ と定める。ド・モアブルの定理（de Moivre's theorem）により $z_k^n = r_k^n\left(\cos n\theta_k + \mathrm{i}\sin n\theta_k\right)$ であるから、与えられた三つの条件はちょうど

$$\operatorname{Im} S_1 = \operatorname{Im} S_2 = \operatorname{Im} S_3 = 0,$$

を意味する。ここで S_1, S_2, S_3 は小問 (ii) と同様に z_1, z_2, z_3 の冪和である。よって S_1, S_2, S_3 はすべて実数である。

> **考えてみよう** 小問 (ii) は 3 次方程式から出発した。ここでの 3 次方程式はどこにあるのか？

それは自分で作る。$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 + az^2 + bz + c$ によって a, b, c を定める。すると z_1, z_2, z_3 はこの 3 次方程式の解であるから、小問 (ii) が適用でき

$$a = -S_1, \qquad b = \tfrac{1}{2}\left(S_1^2 - S_2\right), \qquad c = \tfrac{1}{6}\left(-S_1^3 + 3S_1S_2 - 2S_3\right),$$

を得る。これらはすべて実数である。小問 (i) によりこの 3 次方程式は実数解をもち、その解は z_1, z_2, z_3 のみであるから、ある z_k は実数である。ところで $r_k > 0$ のと

き $z_k = r_k e^{i\theta_k}$ が実数となるのは $\sin\theta_k = 0$、すなわち θ_k が π の整数倍のときに限る。$-\pi < \theta_k < \pi$ の範囲でそのような値は $\theta_k = 0$ のみである。よって少なくとも一つの k について $\theta_k = 0$ である。

ここで $\theta_1 = 0$ と仮定すると、$z_1 = r_1$ は0でない実数である。このとき

$$z_2 + z_3 = S_1 - z_1 \quad \text{かつ} \quad z_2 z_3 = \frac{-c}{z_1}$$

はともに実数である。よって z_2 と z_3 は実数係数の2次方程式 $z^2 - (z_2+z_3)z + z_2z_3 = 0$ の解である。場合は二つある。

- 解が虚数であるとき、それらは互いに共役な複素数である。すなわち $z_3 = \overline{z_2} = r_2 e^{-i\theta_2}$。$-\theta_2$ もまた $(-\pi, \pi)$ に属し、この区間における偏角（argument）は一意であるから、$\theta_3 = -\theta_2$（かつ $r_3 = r_2$）である。
- 解が実数であるとき、上と全く同様に（どちらも正の絶対値（modulus）をもち、偏角は $(-\pi, \pi)$ にある）$\theta_2 = \theta_3 = 0$ を得るので、やはり $\theta_2 = -\theta_3$ である。

いずれの場合も $\theta_2 = -\theta_3$ であり、示すべきことが示された。

検算

- 解を $1, 2, 3$ として小問 (ii) を確かめる：$S_1 = 6$, $S_2 = 14$, $S_3 = 36$ であり、$-216 + 252 - 72 = -36 = 6c$ から $c = -6$ となる。これは $(z-1)(z-2)(z-3)$ について正しい値である。
- 小問 (iii) の逆向き：$\theta_1 = 0, \theta_3 = -\theta_2, r_3 = r_2$ のとき、各和の第2項と第3項は打ち消し合い、第1項は0であるから、三つの条件はすべて成り立つ。また、数千個のランダムな初期値から三つの条件を数値的に解くコンピュータ探索を行ったところ、見つかった解はどれも、一つの角が0で残り二つが互いに符号の反対なものだけであった。

よくある間違い

- 小問 (i) で、根拠を示さずに「3次関数のグラフは必ず軸と交わる」と述べること。$|x|$ が大きいところでの符号の変化には、一行の議論が必要である。
- 小問 (iii) で、$\theta_k = \pm\pi$ のときにも z_k が実数になることを忘れること。これを除外するのは開区間 $(-\pi, \pi)$ であることである。
- 共役の場合だけから $\theta_2 = -\theta_3$ を結論し、z_2, z_3 がともに実数である場合を見落とすこと。

STEP のその先へ

多項式の係数はその解の基本対称式（elementary symmetric functions）であり、小問 (ii) の恒等式は、それらを冪和と結びつけるニュートンの恒等式（Newton's identities）の最初のものである。代数学の入門課程では、解についてのあらゆる対称式が基本対称式の多項式として表されることを学ぶ。これはガロア理論（Galois theory）の出発点である。この話題については Allenby の *Rings, Fields and Groups*（『環・体・群』）がよい入門書である。

解答例

STEP III 2015、第 5 問

純粋数学 ・ 無限降下法による無理性の証明

> **STEP III 2015、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q5

この問題は、*Beyond STEP* の第 1.3 節「**最小の反例**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch01/well-ordering.html

鍵となる考え方

これは**無限降下法**（infinite descent）による証明である。もし $\sqrt{2}$ が有理数（rational）であれば、掛けると $\sqrt{2}$ を整数にするような最小の正の整数が存在するはずであり、そこからさらに小さいものを構成するのである。この役目を果たすのが $\sqrt{2}-1$ を掛けることである。これは 0 と 1 の間の数であり、しかも集合の中から外に出ないからである。2 の立方根の場合、同じ手法を使うには $2^{2/3}$ の情報も保持する集合が必要になる。問題が最初に二つの数を結びつけるよう求めているのはそのためである。

解答

小問 (i)

ステップ 3. ステップ 1 の仮定により、ある整数 p, q（ただし $q \neq 0$）を用いて $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ と書ける。$\sqrt{2} > 0$ であるから、p と q はともに正にとってよい。このとき

$$q\sqrt{2} = p$$

は整数であり、q は正の整数であるから、$q \in S$ である。よって S は空ではない。

ステップ 5. $k \in S$ であるから、数 $m = k\sqrt{2}$ は整数である。$n = (\sqrt{2}-1)k$ について二つのことを確かめる必要がある。

- n は正の整数である：$n = k\sqrt{2} - k = m - k$ は整数の差であり、$k > 0$ かつ $\sqrt{2} > 1$ であるから $n > 0$ である。
- $n\sqrt{2}$ は整数である：

$$n\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)k\sqrt{2} = 2k - k\sqrt{2} = 2k - m,$$

これもやはり整数の差である。

したがって $(\sqrt{2} - 1)k \in S$ である。

ステップ 6. $1 < \sqrt{2} < 2$（$1 < 2 < 4$ による）であるから $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ であり、$k > 0$ より

$$(\sqrt{2} - 1)k < k.$$

したがってステップ 5 により、k より小さい S の正の整数が得られる。これはステップ 4 で k を S の最小元として選んだことに矛盾する。（ステップ 4 は正当である。空でない正の整数の集合には必ず最小元が存在し、ステップ 3 で S が空でないことを示したからである。）置いた仮定はステップ 1 のみであるから、それが誤りでなければならない。すなわち $\sqrt{2}$ は無理数（irrational）である。

小問 (ii)

$a = 2^{1/3}$ とおく。すると $a^2 = 2^{2/3}$ かつ $a^3 = 2$ である。

同値性。a が有理数ならば、有理数の積である a^2 も有理数である。逆に、a^2 が有理数ならば、$a^2 \neq 0$ であるから

$$a = \frac{a^3}{a^2} = \frac{2}{a^2}$$

は有理数である。よって $2^{1/3}$ が有理数であることと $2^{2/3}$ が有理数であることは同値である。

無理性。矛盾を導くために、a が有理数であると仮定する。同値性により、a^2 も有理数である。na と na^2 がともに整数となるような正の整数 n 全体の集合を T と定める。

> **考えてみよう** $S = \{n : na \text{ が整数}\}$ として小問 (i) をそのまま写せばよいのではないか？

小問 (i) では、$(\sqrt{2} - 1)k \in S$ を確かめる際に $k(\sqrt{2})^2 = 2k$ が整数であることが必要だったが、これは自動的に成り立っていた。ここでは、$(a - 1)k$ に a を掛けると $ka^2 - ka$ となるが、「ka が整数である」という条件には ka^2 が整数であることを保証するものは何もない。そこでその条件を集合の定義に組み込むのであり、ここで小問の前半が必要になる。

T は空でない。 p, q を正の整数として $a = \frac{p}{q}$ と書く。すると $q^2 a = pq$ と $q^2 a^2 = p^2$ は整数であるから、$q^2 \in T$ である。

降下。 k を T の最小元とすると、$u = ka$ と $v = ka^2$ は整数である。$n = (a-1)k$ を考える。

- $n = u - k$ は整数であり、$a > 1$（$1^3 < 2$ による）であるから $n > 0$ である。
- $na = ka^2 - ka = v - u$ は整数である。
- $a^3 = 2$ を用いると、$na^2 = ka^3 - ka^2 = 2k - v$ は整数である。

したがって $n \in T$ である。ところが $a < 2$（$2^3 = 8 > 2$ による）であるから $0 < a - 1 < 1$ となり、$n = (a-1)k < k$ である。これは k の最小性に矛盾する。よって $2^{1/3}$ は無理数であり、同値性により $2^{2/3}$ も無理数である。

検算

- 「惜しい例」で降下を試してみる。分数 $\frac{7}{5}$ は $\sqrt{2}$ に近い。ステップ 5 の写像 $(k, m) \mapsto (m - k, 2k - m)$ は $(5, 7)$ を $(2, 3)$ に移し、$3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1 = -(7^2 - 2 \cdot 5^2)$ である。量 $m^2 - 2k^2$ は符号が変わるだけなので、もしこれが 0（すなわち $m = k\sqrt{2}$）であれば、k が小さくなり続ける間ずっと 0 のままであることになるが、それは不可能である。
- 数値的には $\sqrt{2} - 1 \approx 0.414$、$2^{1/3} - 1 \approx 0.260$ であり、降下に必要なとおり、どちらも 0 と 1 の間に厳密に収まっている。
- $n \leq 2 \times 10^5$ のすべての n についてコンピュータで探索すると、$2n^2$ が平方数（perfect square）となる n も、$2n^3$ または $4n^3$ が立方数（perfect cube）となる n も見つからない。

よくある間違い

- $(\sqrt{2} - 1)k$ が**正**であることを示し忘れる。S は正の整数しか含まないので、これは必要である。
- 小問 (ii) で、na だけで定義した集合を用いておきながら、根拠なく ka^2 が整数であると主張する。
- 最小元 k がなぜ存在するのかを述べない。そのためには S（あるいは T）が空でないことが必要であり、それこそがステップ 3 の目的である。

STEP のその先へ

この議論の本質は正の整数の整列性(well-ordering)、すなわち数学的帰納法(induction)の背後にある原理であり、一般化することができる。$\sqrt[r]{N}$ が整数でなければ、それは無理数である。このことは、$n\alpha, n\alpha^2, \ldots, n\alpha^{r-1}$ がすべて整数となるような n 全体の集合を考え、その最小元に $\alpha - \lfloor \alpha \rfloor$ を掛けることでわかる。この数は 0 と 1 の間に厳密に収まるからである。代数学の最初の講義では、これは整数全体が**整閉**（integrally closed）な環（ring）をなすという主張になる。すなわち、整数係数のモニック多項式（monic polynomial）の有理数解は整数でなければならない。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（整数論の入門書）は、整数とその性質についてさらに学ぶのにうってつけの一冊である。

解答例

STEP III 2015、第 6 問

純粋数学 • 解の対称式

> **STEP III 2015、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q6

鍵となる考え方

w, z の組に関するすべては、その和と積によって決まる。w と z は $t^2 - (w+z)t + wz = 0$ の 2 つの根（roots）だからである。すると小問 (i) は、実数係数の二次方程式（quadratic）がいつ実数解をもつかについての主張となり、条件 $u^2 \leq 2v$ は形を変えた判別式（discriminant）にほかならない。小問 (ii) では、最初の 2 つの方程式から積 wz が定まり、3 つ目の方程式は u だけの三次方程式（cubic）となる。しかもその根の 1 つはすぐに見つけられる。

解答

小問 (i)

すべてを動かす恒等式（identity）は次である。

$$2v - u^2 = 2(w^2 + z^2) - (w+z)^2 = w^2 - 2wz + z^2 = (w-z)^2.$$

また、$wz = \frac{1}{2}\big((w+z)^2 - (w^2+z^2)\big) = \frac{1}{2}(u^2 - v)$ であることにも注意しておく。

w と z が実数のとき：このとき $u = w+z$ と $v = w^2+z^2$ は当然実数であり、$w-z$ が実数なので $2v - u^2 = (w-z)^2 \geq 0$ である。よって $u^2 \leq 2v$ が成り立つ。

逆に、u と v が実数で $u^2 \leq 2v$ であると仮定する。このとき $p = wz = \frac{1}{2}(u^2 - v)$ も実数である。

$$(t-w)(t-z) = t^2 - ut + p,$$

であるから、w と z はちょうど、実数係数の二次方程式 $t^2 - ut + p = 0$ の 2 つの根で

ある。その判別式は

$$u^2 - 4p = u^2 - 2(u^2 - v) = 2v - u^2 \geq 0,$$

であるから、2つの根はともに実数である。したがって w と z は実数であり、これで同値性（equivalence）の証明が完了する。

考えてみよう なぜ「u と v が実数である」だけでは不十分なのだろうか？

共役複素数の組（conjugate pair）も、和と2乗の和はともに実数になるからである。例えば $w = 1 + 2\mathrm{i}, z = 1 - 2\mathrm{i}$ とすると $u = 2, v = -6$ となり、どちらも実数であるが、$u^2 = 4 > -12 = 2v$ である。この不等式こそが、実数でない共役複素数の組を排除しているのである。

小問 (ii)

三次方程式への帰着。1つ目の方程式は $u = w + z$ を意味する。$v = w^2 + z^2$ とおくと、2つ目の方程式は $v = u^2 - \frac{2}{3}$ となるので、

$$wz = \tfrac{1}{2}(u^2 - v) = \tfrac{1}{3}.$$

3乗については、よく知られた恒等式

$$w^3 + z^3 = (w + z)^3 - 3wz(w + z) = u^3 - u.$$

を用いる。したがって3つ目の方程式は $u^3 - u - \lambda u = -\lambda$、すなわち

$$u^3 - (1 + \lambda)u + \lambda = 0.$$

となる。$u = 1$ を代入すると $1 - 1 - \lambda + \lambda = 0$ となるので、$u - 1$ は因数であり、

$$u^3 - (1 + \lambda)u + \lambda = (u - 1)(u^2 + u - \lambda).$$

である。

根の個数を数える。$\lambda > 0$ であるから、二次の因数の判別式は $1 + 4\lambda > 0$ である。よって相異なる2つの実数解

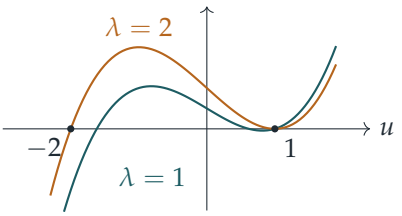
$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda}}{2}.$$

をもつ。このうちの1つが1に等しくなるのは、$1^2 + 1 - \lambda = 0$、すなわち $\lambda = 2$ のときに限る。したがって次のようになる。

- $\lambda \neq 2$ のとき、u のとりうる値は1と $\frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda}\right)$ であり、相異なる3つの値で、すべて実数である。

- $\lambda = 2$ のとき、三次式は $(u-1)^2(u+2)$ となり、値は $u = 1$ と $u = -2$ の 2 つだけである。

これらの値はいずれも実際に現れる。u が与えられたとき、w と z を $t^2 - ut + \frac{1}{3} = 0$ の根とすればよい。すると $w + z = u$ かつ $wz = \frac{1}{3}$ であり、上の手順を逆にたどれば 3 つの方程式がすべて成り立つことがわかる。よって例外となる値は $\lambda = 2$ である。



この概形図（縦方向に縮小してある）は $u^3 - (1+\lambda)u + \lambda$ を示している。$\lambda = 1$ のときは軸と 3 か所で交わり、$\lambda = 2$ のときは曲線が $u = 1$ で軸にちょうど接している。

w と z は必ず実数か？ そうではない。u は実数であり $v = u^2 - \frac{2}{3}$ も実数であるから、小問 (i) により、w と z が実数であるための必要十分条件は $u^2 \le 2v = 2u^2 - \frac{4}{3}$、すなわち $u^2 \ge \frac{4}{3}$ である。根 $u = 1$ はどの λ に対しても存在し、$1 < \frac{4}{3}$ であるから、この根からは常に実数でない w と z が得られる。

具体的には、$u = 1$ のとき $t^2 - t + \frac{1}{3} = 0$ となるので、

$$w = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{3}}, \qquad z = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{3}}.$$

である。確かめておくと、$w + z = 1 = u$ であり、$wz = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$ であるから $w^2 + z^2 = 1 - \frac{2}{3} = u^2 - \frac{2}{3}$ である。さらに $w^3 + z^3 = u^3 - 3wz\,u = 1 - 1 = 0$ であるから、すべての $\lambda > 0$ に対して $w^3 + z^3 - \lambda u = -\lambda$ が成り立つ。これが反例（counterexample）である。u の 3 つの値はすべて実数であるが、w と z は実数であるとは限らない。

検算

- $\lambda = 1$ のとき、u の値は 1 と $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}) \approx 0.618, -1.618$ であり、いずれも $u^3 - 2u + 1 = 0$ を満たす。
- $\lambda = 2$ のとき、三次式 $u^3 - 3u + 2$ は $u = -2$ で 0 になり（$-8 + 6 + 2 = 0$）、$u = 1$ ではこの式とその導関数（derivative）$3u^2 - 3$ がともに 0 になる。これにより重根（double root）であることが確認できる。
- 多数の λ の値についてコンピュータで検証し、各 u から w と z を構成して、3 つの

方程式がすべて丸め誤差の範囲で成り立つことを確認した。また、$\lambda = 2$ の場合を除いて u が相異なる3つの値をとることも確認した。

よくある間違い

- 小問 (i) で一方向しか証明しないこと。逆を示すには積 wz が実数であることが必要であり、そこで v が実数であることが使われる。
- 二次式の根が1と異なることの確認を忘れ、例外の値 $\lambda = 2$ を見落とすこと。
- u が実数だから w と z も実数に違いないと思い込むこと。w と z の実数値の対称式は、共役複素数の組とも同じように両立する。

STEP のその先へ

2つの数の組（あるいは任意の数の集合）がその対称式によって決まるという考え方は、対称多項式（symmetric polynomials）の理論の出発点である。w と z のどんな対称多項式も $w+z$ と wz で表すことができ、ニュートン（Newton）の恒等式（Newton's identities）は w^3+z^3 のようなべき和をそれらと結びつける。同じ推論を判別式とともに用いれば、実数係数の多項式の根がすべて実数となるのはいつかを判定できる。Needham の *Visual Complex Analysis*（複素解析を視覚的に解説した本）は複素数を学ぶ上で素晴らしい友となる一冊であり、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）は対称多項式をさらに深く扱っている。

解答例

STEP III 2015、第 7 問

純粋数学 ・ 微分作用素

> **STEP III 2015、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q7

鍵となる考え方

x の累乗は $\mathrm{D} = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ の固有関数（eigenfunction）である。すなわち、D を x^a に作用させると、単に a 倍されるだけである。したがって D^n は多項式（polynomial）に項ごとに作用し、x^r の係数を r^n 倍する。最後の和に現れる r^n はまさにここから来ている。割り切れること（divisibility）については、D を 1 回作用させるごとに、因数 $(1-x)$ の指数は高々 1 しか下がらないことに注目する。

解答

冒頭の結果

任意の定数 a に対して（a が整数でないときは $x > 0$ とする）、

$$\mathrm{D}x^a = x \cdot ax^{a-1} = ax^a.$$

もう一度 D を作用させ、定数 a を外に出してこの結果を用いると、

$$\mathrm{D}^2x^a = \mathrm{D}\left(ax^a\right) = a\,\mathrm{D}x^a = a^2x^a,$$

となり、求める結果が得られる。D は線形（linear）である（定数 α, β に対して $\mathrm{D}(\alpha f + \beta g) = \alpha\,\mathrm{D}f + \beta\,\mathrm{D}g$）から、この操作を繰り返せば、数学的帰納法（induction）により

$$\mathrm{D}^n x^a = a^n x^a \qquad (n \geq 1).$$

が成り立つ。

小問 (i)

$c_r \neq 0$ として $\mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{r} c_k x^k$ と書く。線形性と上の結果より、

$$\mathrm{D}^n \mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{r} c_k \, k^n x^k.$$

これは x^r より高次の項をもたない多項式であり、その x^r の係数は $r^n c_r$ である。$r \geq 1$ より $r^n \neq 0$ であり、また $c_r \neq 0$ であるから $r^n c_r \neq 0$ である。よって $\mathrm{D}^n \mathrm{P}(x)$ は次数（degree）がちょうど r の多項式である。

（条件 $r \geq 1$ は重要である。$0^n = 0$ であるから、定数多項式は 0 に写されてしまう。）

小問 (ii)

m を固定する。n に関する帰納法により、$1 \leq n \leq m$ に対して

$$\mathrm{D}^n (1-x)^m = (1-x)^{m-n} \mathrm{Q}_n(x) \quad \text{を満たす多項式} \mathrm{Q}_n.$$

が存在することを証明する。

基本ステップ。 $\mathrm{D}(1-x)^m = x \cdot \big(-m(1-x)^{m-1}\big) = (1-x)^{m-1} \cdot (-mx)$ であるから、$\mathrm{Q}_1(x) = -mx$ である。

帰納ステップ。 ある n について、$n < m$ のもとで主張が成り立つと仮定する。このとき $m - n \geq 1$ である。積の微分法則（product rule）より、

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{n+1}(1-x)^m &= x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \Big[(1-x)^{m-n} \mathrm{Q}_n(x) \Big] \\
&= x \Big[-(m-n)(1-x)^{m-n-1} \mathrm{Q}_n(x) + (1-x)^{m-n} \mathrm{Q}_n'(x) \Big] \\
&= (1-x)^{m-n-1} \cdot x \Big[(1-x)\mathrm{Q}_n'(x) - (m-n)\mathrm{Q}_n(x) \Big].
\end{aligned}$$

角括弧の中は多項式であるから、$\mathrm{Q}_{n+1}(x) = x\big[(1-x)\mathrm{Q}_n'(x) - (m-n)\mathrm{Q}_n(x)\big]$ とおけば、これは求める形になっている。

> **考えてみよう** 帰納ステップのどこで $n < m$ を用いたか？

因数 $(1-x)^{m-n-1}$ をくくり出すことが多項式の因数として意味をもつのは、$m - n - 1 \geq 0$、すなわち $n < m$ のときに限る。$n = m$ では、失うべき $(1-x)$ の因数がもう残っていないので、帰納法は（正しく）そこで止まる。

以上より、すべての正の整数 $n < m$ に対して、$\mathrm{D}^n(1-x)^m$ は $(1-x)^{m-n}$ で割り切れる。

小問 (iii)

二項定理（binomial theorem）により展開する：

$$(1-x)^m = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} x^r.$$

小問 (i) とまったく同様に、D^n を項ごとに作用させると、

$$\mathrm{D}^n(1-x)^m = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} r^n x^r.$$

$n < m$ であるから、小問 (ii) より左辺は $(1-x)^{m-n}\mathrm{Q}_n(x)$（ただし $m-n \geq 1$）に等しく、したがって $x = 1$ で値が零になる。ゆえに右辺で $x = 1$ とおくと

$$\sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} r^n = 0,$$

となり、求める結果が得られる。（$r = 0$ の項は $0^n = 0$ であり、D が定数項を消すことと整合している。）

検算

$m = 3, n = 2$ とすると、和は $0 - 3\cdot 1 + 3\cdot 4 - 1\cdot 9 = 0$ である。$m = 4, n = 3$ とすると $0 - 4 + 6\cdot 8 - 4\cdot 27 + 64 = 0$ である。この恒等式はコンピュータによっても $1 \leq n < m \leq 19$ のすべてについて確認されており、さらに $(1-x)^{m-n}$ が $\mathrm{D}^n(1-x)^m$ を割り切るちょうどの累乗であることも $m \leq 11$ について確認されている。対照的に、$n = m$ のときは和はもはや零ではない。$m = 2$ のときは $0 - 2 + 4 = 2 = 2!$ であり、一般には $(-1)^m m!$ となる。

よくある間違い

- $\mathrm{D}^2 x^a$ を $x^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} x^a = a(a-1)x^a$ と書いてしまう。D^2 は D を 2 回作用させたものであって、x^2 と 2 階導関数（second derivative）の積ではない。
- 小問 (i) で、最高次の係数 $r^n c_r$ が零でない理由を述べ忘れる。$r \geq 1$ を使うのはまさにここである。
- 小問 (iii) で、D^n を作用させる前に $(1-x)^m$ に $x = 1$ を代入してしまう。要点は、因数 $(1-x)$ が $n < m$ 回の作用を経ても残ることにある。

STEP のその先へ

作用素 $x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ はオイラー作用素（Euler operator）と呼ばれることがあり、x^a は固有値（eigenvalue）a に対する固有関数である。これは $x^2y'' + bxy' + cy = 0$ のようなオイラー・コーシー方程式（Euler–Cauchy equation）を扱うための自然な道具であり、これらの方程式は $x = e^t$ とおくと定数係数の方程式になる。小問 (iii) の恒等式は、次数が m 未満の多項式の m 階差分（finite difference）が零であることを述べており、スターリング数（Stirling numbers）や、包除原理（inclusion–exclusion）による全射（surjection）の数え上げと密接に関係している。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式入門）はオイラー方程式を扱っている。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この種の問題がさらに多く載っている。

解答例

STEP III 2015、第 8 問

純粋数学 • 極座標の微分方程式

STEP III 2015、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/15-s3-q8

この問題は、*Beyond STEP* の第 8.4 節「渦を巻いて円に近づく」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch08/limit-cycle.html

鍵となる考え方

2 つの微分方程式（differential equation）はどちらも $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$ と $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ という組合せから組み立てられており、これらはまさに極座標（polar coordinates）によって簡単になる組合せである。実際、それぞれ $r^2\,\mathrm{d}\theta$ と $r\,\mathrm{d}r$ になる。そこで θ を曲線に沿った媒介変数（parameter）とみなし、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ を θ による導関数の比として表し、三角関数の部分が消えていくのに任せる。小問 (ii) では、追加された項によって方程式は r についてのベルヌーイ型微分方程式（Bernoulli equation）になり、置換 $u = r^{-2}$ によって線形になる。

解答

r' で $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ を表し、$c = \cos\theta$、$s = \sin\theta$ とおく。曲線 $r = r(\theta)$ に沿って

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = r'c - rs, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = r's + rc, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta}.$$

である。どちらの方程式も両辺に $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$ を掛けると、$P\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = Q$ の形の方程式は

$$P\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - Q\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = 0.$$

となる。計算の要はすべて次の 2 つの恒等式である。

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = rc(r's + rc) - rs(r'c - rs) = r^2(c^2 + s^2) = r^2,$$
$$x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = rc(r'c - rs) + rs(r's + rc) = rr'.$$

小問 (i)

ここでは $P = y + x$、$Q = y - x$ であるから

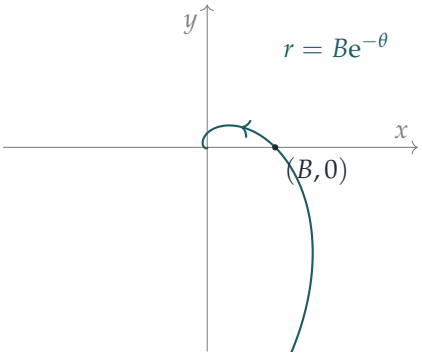
$$\begin{aligned}(y+x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - (y-x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} &= \left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left(x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)\\ &= r^2 + rr'.\end{aligned}$$

よって方程式は $r(r' + r) = 0$ となり、$r > 0$ なので r で割ることができて

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} + r = 0,$$

を得る。これが求める式である。

これは変数分離形（separable）である（あるいは単に指数関数的減衰と見抜けばよい）。$r = B\mathrm{e}^{-\theta}$（$B > 0$）となる。これは**等角螺旋**（equiangular spiral）、すなわち対数螺旋（logarithmic spiral）である。θ が増加すると、曲線は反時計回りに原点へと巻き込んでいくが、原点に到達することはない。θ が減少すると、限りなく外側へ巻き広がっていく。$r/r' = -1$ であるから、曲線は原点から出るすべての半直線と同じ角度、すなわち内向きの動径に対して 45° の角度で交わる。$B\mathrm{e}^{-\theta} = \mathrm{e}^{-(\theta - \ln B)}$ であるから、B の値が異なる曲線は同じ螺旋を回転させたものである。



矢印は θ が増加する向きを示す。螺旋は 1 周ごとに $\mathrm{e}^{2\pi} \approx 535$ 分の 1 に縮むので、どの縮尺で見てもおよそ 1 周分しか見えず、残りは原点のまわりにぎっしりと詰まっている。

小問 (ii)

今度は $P = y + x - x(x^2 + y^2)$、$Q = y - x - y(x^2 + y^2)$ であり、$x^2 + y^2 = r^2$ である。新しい項の寄与は

$$-r^2\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right) = -r^2 \cdot r^2 = -r^4,$$

であるから、もとの項には小問 (i) の結果を用いると、方程式は

$$r^2 + rr' - r^4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = r^3 - r,$$

となる。ここでもまた $r > 0$ で割った。

> **考えてみよう** 方程式が線形になるのを妨げている r^3 の項はどう扱えばよいだろうか。

これはベルヌーイ型微分方程式である。目標の答えは r^2 を用いて表されているので、$u = r^{-2}$ を使って計算することが示唆される。すると

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -2r^{-3}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -2r^{-3}(r^3 - r) = -2 + 2u.$$

となる。よって $u' - 2u = -2$ であり、これは定数係数の線形微分方程式である。$u = 1$ が特殊解（particular solution）であり、$A\mathrm{e}^{2\theta}$ が斉次方程式（homogeneous equation）の解であるから

$$\frac{1}{r^2} = 1 + A\mathrm{e}^{2\theta} \qquad \Longrightarrow \qquad r^2 = \frac{1}{1 + A\mathrm{e}^{2\theta}},$$

を得る。これが求める形である。（変数分離をして $\dfrac{1}{r(r-1)(r+1)}$ を部分分数（partial fractions）に分解しても同じ結果が得られるが、手間が多くかかる。）曲線は $1 + A\mathrm{e}^{2\theta} > 0$ となるところでのみ存在する。

解曲線の形

まず、$A = \pm\mathrm{e}^{-2\alpha}$ ならば $A\mathrm{e}^{2\theta} = \pm\mathrm{e}^{2(\theta-\alpha)}$ であるから、A に対する曲線は $A = \pm 1$ に対する曲線を α だけ回転させたものであることに注意する。したがって、A の符号に応じて、本質的には 3 種類の形しかない。

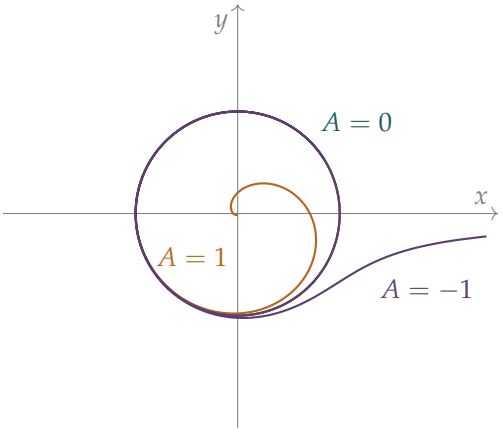
- $A = 0$ のとき：$r = 1$ であり、単位円である。
- $A > 0$ のとき：$1 + A\mathrm{e}^{2\theta} > 1$ であるから $r < 1$ であり、曲線はすべての θ に対して定義される。$r' = r(r^2 - 1) < 0$ であるから、r は単調に減少する。$\theta \to -\infty$ のとき $r \to 1$ であるから、曲線は内側から単位円に向かって巻き広がっていく。$\theta \to +\infty$ のとき $r \approx A^{-1/2}\mathrm{e}^{-\theta} \to 0$ であるから、曲線は原点へと螺旋状に巻き込んでいき、次第に小問 (i) の螺旋に似てくる。

- $A<0$ のとき：$\mathrm{e}^{2\theta}<-1/A$、すなわち $\theta<\theta_0=\frac{1}{2}\ln(-1/A)$ が必要である。このとき $r>1$ かつ $r'>0$ である。$\theta\to-\infty$ のとき上から $r\to1$ となるので、曲線は外側から単位円に向かって巻き込んでいく。$\theta\to\theta_0^-$ のとき $r\to\infty$ である。θ_0 の近くでは（$A\mathrm{e}^{2\theta_0}=-1$ であるから）$1+A\mathrm{e}^{2\theta}\approx2(\theta_0-\theta)$ となるので $r\approx\big(2(\theta_0-\theta)\big)^{-1/2}$ であり、曲線から直線 $\theta=\theta_0$ までの距離は

$$r\sin(\theta_0-\theta)\approx r(\theta_0-\theta)\approx\frac{1}{2r}\to0.$$

である。よって曲線は、原点を通り角 θ_0 をなす直線を漸近線（asymptote）として、時計回り側からそれに近づきながら無限遠へと向かう。$A=-1$ のときは $\theta_0=0$ であり、x が大きいところで曲線は $y=-\frac{1}{2x}$ に近づく。

単位円はリミットサイクル（limit cycle）である。他のすべての解は、$\theta\to-\infty$ のとき単位円に向かって螺旋状に近づき、θ が増加するにつれて単位円から離れていく。



紫の曲線（$A=-1$）は、正の x 軸に沿ってそのすぐ下側を無限遠へと延びていく。

検算

- $r=B\mathrm{e}^{-\theta}$ を (i) のもとの方程式にいくつかの点で代入し戻す（x、y および $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ に変換する）と、0 になる。(ii) の式についても、正負両方の符号のいくつかの A の値で同様である。
- $A=0$ のとき $r=1$ となり、実際、定数 $r=1$ は $r'=r^3-r$ を満たす。x、y で見ると、円 $x^2+y^2=1$ 上では追加された項がもとの項をちょうど打ち消す。
- $r(0)=\frac{1}{2}$（すなわち $A=3$）から出発すると、式から $r(2)=1/\sqrt{1+3\mathrm{e}^4}\approx0.0779$ が得られ、これは $r'=r^3-r$ を逐次的に数値計算して得た解と小数点以下何桁にもわたって一致する。

- $A = -1$、$\theta = -10^{-4}$ のとき $r \approx 70.71$ であり、x 軸までの距離は $0.00707 \approx 1/(2r)$ となって、漸近線であることが確かめられる。

よくある間違い

- $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ は r も変化するものとして $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta)/(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta)$ として求めなければならないことを忘れる。すなわち r' の項を落としてしまう。
- $A < 0$ のときの制限 $1 + A\mathrm{e}^{2\theta} > 0$ を見落とし、そのためこれらの曲線が有限の角度で無限遠へ向かうことに気づかない。
- A の各符号について曲線を 1 本ずつしか描かず、他の曲線がそれを回転させたものであることを述べない。

STEP のその先へ

方程式 $r' = r^3 - r$ は平面力学系（dynamical system）を極座標で見たものであり、単位円は**リミットサイクル**、すなわち近くの軌道が螺旋状に近づいたり遠ざかったりする孤立した閉軌道である。このように動径方向の方程式が分離する系は、非線形微分方程式や相平面解析（phase-plane analysis）の講義で最初に扱われる標準的な例であり、ポアンカレ＝ベンディクソン（Poincaré–Bendixson）の定理へとつながっていく。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（『常微分方程式入門』）には、非線形系とリミットサイクルについての優れた章がある。

解答例

STEP III 2015、第 9 問

力学 ・ 非線形弾性振動

> **STEP III 2015、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q9

鍵となる考え方

レールはなめらかであり、垂直抗力（normal reaction）は仕事をしないので、エネルギーが保存され、そこからただちに 1 階の方程式が得られる。レール上のどの点でも $PQ \geq a$ であるから、糸がたるむことはない。折り返し点は $\dot{x} = 0$ となる点である。周期は、中心から x_0 まで進むのにかかる時間の 4 倍である。v が小さいとき、質点は出発点の近くにとどまるので $\sqrt{x^2 + a^2} - a \approx x^2/(2a)$ となり、置換 $x = x_0 u$ によって積分がすっきりした形になる。

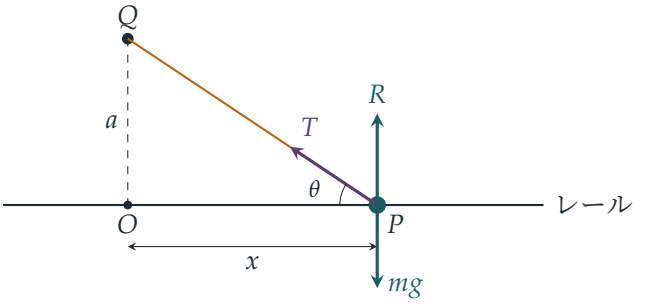
解答

エネルギーの式

P を質点とみなし、糸は軽く、フックの法則（Hooke's law）に従う弾性糸とする。レールを x 軸にとり、P は Q から下ろした垂線の足である原点から出発するものとする。P が x にあるとき、Q からの距離は $PQ = \sqrt{x^2 + a^2} \geq a$ であるから糸は張っており、その伸びは

$$e = \sqrt{x^2 + a^2} - a \ \ (\geq 0).$$

である。



P にはたらく力は、重力、レールからの垂直抗力 R（いずれも運動の向きに垂直なので仕事をしない）、および張力 T である。張力は保存力であり、その弾性エネルギーは $\lambda e^2/(2a)$ である。はじめ $e = 0$ で速さは v であるから、エネルギー保存則（conservation of energy）より

$$\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{\lambda}{2a}\left(\sqrt{x^2+a^2} - a\right)^2 = \tfrac{1}{2}mv^2.$$

両辺に $2/m$ を掛け、$k^2 = \lambda/(ma)$ とおくと

$$\dot{x}^2 = v^2 - k^2\left(\sqrt{x^2+a^2} - a\right)^2,$$

となり、求める式が得られる。

最大変位とそこでの加速度

伸び e は $|x|$ とともに増加するので、P が外側へ進むにつれて $\dot{x}^2$ は減少し、P は $\dot{x} = 0$ となるまで外側へ進む。その点では $k\left(\sqrt{x_0^2+a^2} - a\right) = v$ である（$e \geq 0$ なので正の根をとる）。よって

$$\sqrt{x_0^2+a^2} = a + \frac{v}{k} \quad \Longrightarrow \quad x_0^2 = \left(a + \frac{v}{k}\right)^2 - a^2 = \frac{2av}{k} + \frac{v^2}{k^2},$$

となるから、

$$x_0 = \frac{\sqrt{v\,(2ak+v)}}{k}.$$

を得る。

加速度を求めるには、レールに沿った方向に力を分解する。θ を PQ とレールのなす角とすると $\cos\theta = x/\sqrt{x^2+a^2}$ であり、張力のレール方向の成分は O に向かう向きに $T\cos\theta$ である。$T = \lambda e/a$ であるから

$$m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{a}\left(\sqrt{x^2+a^2} - a\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}, \qquad \text{よって} \qquad \ddot{x} = -k^2\left(\sqrt{x^2+a^2} - a\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

（エネルギーの式を t で微分し、$2\dot{x}$ で割っても同じ結果が得られる。）$x = x_0$ では $\sqrt{x_0^2 + a^2} - a = v/k$ かつ $\sqrt{x_0^2 + a^2} = (ak + v)/k$ であるから

$$\ddot{x} = -k^2 \cdot \frac{v}{k} \cdot \frac{k\,x_0}{ak + v} = -\frac{k^2 v\,x_0}{ak + v} = -\frac{kv\sqrt{v\,(2ak + v)}}{ak + v}.$$

したがって、x_0 における加速度の大きさは $\dfrac{kv\sqrt{v(2ak + v)}}{ak + v}$ であり、その向きはレールに沿って最初の位置へ戻る向きである。

周期

$\dot{x}^2$ の式は x^2 のみに依存するので、運動は O に関して対称である。質点は $-x_0$ と x_0 の間で振動し、4 つの区間 $O \to x_0 \to O \to -x_0 \to O$ はいずれも同じ時間を要する。最初の区間では $\dot{x} > 0$ であるから $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/\dot{x}$ となり、周期（period）は

$$\tau = 4\int_0^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{v^2 - k^2\left(\sqrt{x^2 + a^2} - a\right)^2}}.$$

である。被積分関数は x_0 で発散するが、その発散は $(x_0 - x)^{-1/2}$ 程度にすぎないので、積分は収束（converge）する。

考えてみよう $v \ll ka$ から、x の大きさについて何がわかるか。

$x_0^2 = 2av/k + v^2/k^2$ であるから、$v/k \ll a$ ならば $x_0^2 \approx 2av/k$ となり、$x_0^2/a^2 \approx 2v/(ka) \ll 1$ である。したがって積分範囲のすべての x は $|x| \ll a$ を満たし、二項展開（binomial expansion）により

$$\sqrt{x^2 + a^2} - a = a\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2} - a \approx \frac{x^2}{2a}.$$

となる。周期は

$$\tau \approx 4\int_0^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{v^2 - k^2x^4/(4a^2)}}, \qquad x_0 \approx \sqrt{\frac{2av}{k}},$$

となり、$k^2x_0^4/(4a^2) = v^2$ であるから、この近似した x_0 はちょうど新しい分母が 0 になる点である。ここで $x = x_0 u$ と置換すると、$\mathrm{d}x = x_0\,\mathrm{d}u$ かつ $k^2x^4/(4a^2) = v^2u^4$ であるから

$$\tau \approx 4\int_0^1 \frac{x_0\,\mathrm{d}u}{v\sqrt{1 - u^4}} = \frac{4}{v}\sqrt{\frac{2av}{k}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^4}} = \sqrt{\frac{32a}{kv}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^4}},$$

となる。ここで $\frac{16}{v^2} \cdot \frac{2av}{k} = \frac{32a}{kv}$ を用いた。これが求める近似式である。

検算

- 単位：$k^2 = \lambda/(ma)$ の単位は s^{-2} であるから、v/k は長さであり（x_0 における伸びなので、そうでなければならない）、$\sqrt{a/(kv)}$ は時間である。
- $m = 1$、$\lambda = 2$、$a = 1$、$v = 1$ とすると、$k = \sqrt{2}$、$x_0 = \sqrt{1 + 2\sqrt{2}} \approx 1.3836$ であり、x_0 における加速度は ≈ -1.1462 となる。運動方程式を数値的に時間発展させると同じ折り返し点が得られ、周期は約 7.612 となって、積分の値と一致する。
- $a = 1$、$k = 2$、$v = 0.001$ のとき、周期の積分の厳密な値は 165.862 であり、近似式からは 165.833 が得られる。ここで $\int_0^1 (1 - u^4)^{-1/2}\,\mathrm{d}u \approx 1.3110$ である。$v \to 0$ のとき、この比は 1 に近づく。

よくある間違い

- 伸びとして $\sqrt{x^2 + a^2} - a$ ではなく x や $\sqrt{x^2 + a^2}$ を使ってしまう。糸ははじめ自然長である。
- 張力を分解し忘れる。レールに沿ってはたらくのは成分 $T\cos\theta$ だけである。
- 周期を $2\int_0^{x_0}$ や $\int_0^{x_0}$ としてしまう。振動は $-x_0$ と x_0 の間で起こるので、4 分の 1 周期が 4 つ必要である。

STEP のその先へ

v が小さいとき、復元力はおよそ x ではなく x^3 に比例するので、これは非線形振動子（nonlinear oscillator）であり、単振動（simple harmonic motion）とは異なり、周期が振幅に依存して、エネルギーが小さくなるにつれて $v^{-1/2}$ のように増大する。積分 $\int_0^1 (1 - u^4)^{-1/2}\,\mathrm{d}u$ は楕円積分（elliptic integral）であり（レムニスケート定数の半分）、振り子の厳密な周期にも現れる種類の積分である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このような考え方でエネルギーを用いた解法と振動を扱っている。

解答例

STEP III 2015、第 10 問

力学 ・ 回転する剛体棒

STEP III 2015、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

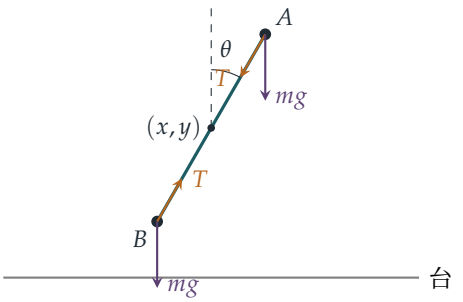
step.maths.org/questions/15-s3-q10

鍵となる考え方

系の運動を、中点の運動と棒の回転によって記述する。各質点の位置を x、y、θ で表し、2 回微分して、それぞれの質点にニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）を適用する。2 つの方程式を足し合わせると張力（tension）が消え、重心（centre of mass）の運動が得られる。引き算をして棒に垂直な方向に分解すると再び張力が消え、回転の様子が残る。3 つの加速度がすべてわかれば、最後の小問は放物運動（projectile motion）と一定の回転の組み合わせにすぎない。

解答

2 つの質量を、軽い剛体の棒でつながれた質点としてモデル化する。各質点にはたらく力は重力と棒からの力だけであり、棒からの力は棒に沿った向きにはたらく。張力を T とおく。$T > 0$ のとき、棒は各質点を中点の方へ引く。（棒は押すこともでき、そのときは $T < 0$ となる。以下の議論は符号によらない。）



質点 A の運動方程式

はじめに中点より上にある棒の端の質点を A とする。このとき中点から A へのベクトルは $a(\sin\theta, \cos\theta)$ である。よって A の位置は

$$\mathbf{r}_A = \begin{pmatrix} x + a\sin\theta \\ y + a\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \text{よって} \qquad \dot{\mathbf{r}}_A = \begin{pmatrix} \dot{x} + a\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} - a\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$$

となる。ここで連鎖律（chain rule）を用いた。これが求める速度である。$\dot{\theta}\cos\theta$ と $\dot{\theta}\sin\theta$ に積の微分法則（product rule）を用いてもう一度微分すると、

$$\ddot{\mathbf{r}}_A = \begin{pmatrix} \ddot{x} + a\ddot{\theta}\cos\theta - a\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y} - a\ddot{\theta}\sin\theta - a\dot{\theta}^2\cos\theta \end{pmatrix}.$$

棒は A を中点の方へ、すなわち $-(\sin\theta, \cos\theta)$ の向きに、大きさ T の力で引く。重力の寄与は $-mg(0,1)$ である。したがって A に対するニュートンの第 2 法則から、問題文の方程式がそのまま得られる。

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x} + a\ddot{\theta}\cos\theta - a\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y} - a\ddot{\theta}\sin\theta - a\dot{\theta}^2\cos\theta \end{pmatrix} = -T\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} - mg\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{A}$$

もう一方の質点

反対側の端にある B については、すべての a を $-a$ に置き換えればよい。棒は今度は B を $+(\sin\theta, \cos\theta)$ の向きに引く。

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x} - a\ddot{\theta}\cos\theta + a\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y} + a\ddot{\theta}\sin\theta + a\dot{\theta}^2\cos\theta \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} - mg\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{B}$$

ここで B の速度は $(\dot{x} - a\dot{\theta}\cos\theta,\ \dot{y} + a\dot{\theta}\sin\theta)$ である。

加速度を導く

(A) と (B) を足すと、a または T を含む項はすべて打ち消し合う。

$$2m\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -2mg\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{よって} \qquad \ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g.$$

(A) から (B) を引いて 2 で割ると、

$$ma\ddot{\theta}\cos\theta - ma\dot{\theta}^2\sin\theta = -T\sin\theta,$$
$$-ma\ddot{\theta}\sin\theta - ma\dot{\theta}^2\cos\theta = -T\cos\theta.$$

考えてみよう 未知の T をどうやって消去すればよいだろうか？

張力は棒に沿ってはたらくので、棒に垂直な方向、すなわち $(\cos\theta, -\sin\theta)$ の向きに分解する。つまり、1 つ目の方程式の $\cos\theta$ 倍から 2 つ目の方程式の $\sin\theta$ 倍を引く。右辺は $-T\sin\theta\cos\theta + T\cos\theta\sin\theta = 0$ となり、$\dot{\theta}^2$ の項も同様に打ち消し合う。残るのは

$$ma\ddot{\theta}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 0,$$

であり、$m, a \neq 0$ であるから $\ddot{\theta} = 0$ が得られる。（代わりに棒に沿った方向に分解すると $T = ma\dot{\theta}^2$ が得られる。これは中点のまわりの円運動に必要な張力である。）

最後の小問

$t = 0$ において棒は鉛直なので $\theta = 0$ である。このとき質点 A が上側にあり、その速度は $(\dot{x} + a\dot{\theta},\ \dot{y})$、$B$ が下側にあり、その速度は $(\dot{x} - a\dot{\theta},\ \dot{y})$ である。これらを与えられた初速度と比較すると、

$$\dot{x} + a\dot{\theta} = u, \qquad \dot{x} - a\dot{\theta} = 0, \qquad \dot{y} = v,$$

したがって初期状態で $\dot{x} = \frac{1}{2}u$、$\dot{\theta} = \dfrac{u}{2a}$、$\dot{y} = v$ である。

前の小問より $\dot{\theta}$ は一定に保たれるので、$\theta = \dfrac{ut}{2a}$ である。θ が増加するように $u > 0$ とする。また $\ddot{y} = -g$ かつ $y(0) = h$ であるから、

$$y = h + vt - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

棒が $\frac{1}{2}\pi$ だけ回転するのは $\dfrac{ut}{2a} = \dfrac{\pi}{2}$、すなわち $t = \dfrac{\pi a}{u}$ のときである。このとき棒は水平なので、2 つの質点はともに中点と同じ高さ y にある。2 つの質点がその瞬間にそろって台に達するのは、そのときちょうど $y = 0$ となる場合である。

$$h + v\cdot\frac{\pi a}{u} - \frac{1}{2}g\cdot\frac{\pi^2a^2}{u^2} = 0.$$

両辺に $2u^2$ を掛けて整理すると

$$2hu^2 = \pi^2a^2g - 2\pi uva,$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

- $v = 0$ のとき落下時間は $\sqrt{2h/g}$ であり、これが $\pi a/u$ に等しくなければならない。両辺を 2 乗すると $2hu^2 = \pi^2a^2g$ となり、結果と一致する。

- 単位：結果の各項の次元はすべて $\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2}$ である。
- 剛体の棒でつながれた 2 つの質点の運動を、$g = 9.8$ とし、a、u、v をいくつかランダムに選び、h を公式で定めてコンピュータでシミュレーションした。たとえば $a \approx 1.754$ のとき $h \approx 17.93$ となる。どの場合も、2 つの質点は $t = \pi a/u$ において誤差 10^{-10} 以内でそろって台に達し、そのとき棒は水平であった。

よくある間違い

- 一方の質点について張力の向きを誤る。棒は各質点を中点の方へ引くので、2 つの力は大きさが等しく向きが反対である。
- 2 つの方程式で異なる T の値を用いる。棒は軽いので、棒にはたらく合力は 0 でなければならず、張力は両端で等しい。
- $\dot{\theta}\cos\theta$ を微分するときに $-a\dot{\theta}^2$ の項を落とす。この項がないと、引き算の段階がきれいにまとまらない。

STEP のその先へ

この問題は、質点系に関する一般的な定理の小さな一例である。重心は、すべての質量とすべての外力（external force）がそこに集中しているかのように運動する。内力（internal forces）は対ごとに打ち消し合うので、重心のまわりに外力によるトルク（torque）がなければ、重心のまわりの角運動量（angular momentum）は保存される。大学 1 年の力学では、x、y、θ を一般化座標（generalised coordinates）とし、T をまったく必要としないラグランジュ形式（Lagrangian approach）にも出会うだろう。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、重心と剛体（rigid body）の回転を丁寧に扱っている。

解答例

STEP III 2015、第 11 問

力学 ・ 円運動

> **STEP III 2015、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q11

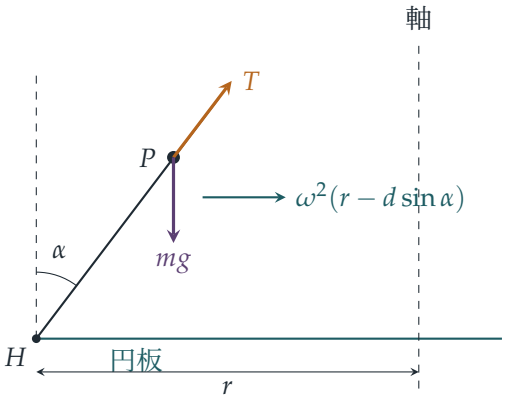
鍵となる考え方

軽い棒（light rod）は質量をもたないので、運動していても、棒にはたらく力とモーメント（moment）は正確につり合っていなければならない。小問 (i) では棒にはたらく力は 2 つだけであり、ちょうつがい（hinge）からの力はちょうつがいのまわりにモーメントをもたないので、P からの力はちょうつがいへまっすぐ向かっていなければならない。そうすれば、P は水平な円周上を運動する質点（particle）であり、あとは力の分解（resolving）で片がつく。小問 (ii) では 2 つの質点からの力が棒に沿っている必要はないが、ちょうつがいのまわりのモーメントを考えると、やはり β についての方程式が 1 つ得られる。

解答

モデル化。質点は大きさをもたない点とし、棒は軽くて変形しないものとし、ちょうつがいはなめらかであるとする。したがって、ちょうつがいは自身の軸（ちょうつがいを通り、棒を含む鉛直面に垂直な水平直線）のまわりに偶力（couple）を及ぼさない。この平面内に座標軸をとり、原点をちょうつがい H、x 軸を回転軸の方へ向かう水平方向、y 軸を鉛直上向きとする。H から距離 s にある棒上の点は $(s\sin\theta,\ s\cos\theta)$ にある。ここで θ は棒が鉛直上向きとなす角であり、この点の回転軸からの水平距離は $r - s\sin\theta$ である。

小問 (i)



上の図には P にはたらく力を描いてある。重力と、棒からの力である。棒からの力が棒に沿ってはたらくことは、これから示す。青緑の矢印は P の加速度である。

P からの力は棒に沿っている。棒にはたらく力は 2 つだけである。H にはたらくちょうつがいからの力と、P にはたらく P からの力 $\mathbf{G}$ である。棒は軽いので、その運動がどのようなものであっても、ちょうつがいの軸のまわりで棒にはたらくモーメントの和は零である（質量と角加速度（angular acceleration）の積が零であるため）。ちょうつがいからの力は H のまわりにモーメントをもたないので、$\mathbf{G}$ もモーメントをもたない。

次に、P は回転軸を中心とする水平な円周上を運動するので、その加速度は水平で、回転軸の方を向いている。回転軸は棒を含む鉛直面内にある。重力もこの平面内にあるので、棒から P にはたらく力も、したがって（ニュートンの第三法則（Newton's third law）により、それと大きさが等しく向きが反対の）$\mathbf{G}$ も、この平面内にある。平面内の力で H のまわりのモーメントが零であるものは、その作用線（line of action）が H を通る。この作用線は棒上にある P も通るので、$\mathbf{G}$ は棒に平行である。これで示された。

角度。よって棒は、棒に沿った大きさ T の力で P を押すか引くかしている。この力の向きを H から P へ向かう向きにとる。すなわち成分は $(T\sin\alpha,\ T\cos\alpha)$ である。P の回転軸からの距離は $r - d\sin\alpha$ であり、$d\sin\alpha < r$ よりこれは正である。したがって P は回転軸に関して H と同じ側にあり、その加速度 $\omega^2(r - d\sin\alpha)$ は $+x$ 方向を向く。P についての運動方程式（ニュートンの第二法則）は

$$\begin{aligned} &\text{鉛直方向：} \quad T\cos\alpha - mg = 0, \\ &\text{水平方向：} \quad T\sin\alpha = m\omega^2(r - d\sin\alpha). \end{aligned}$$

第 2 式を第 1 式で割ると（$\cos\alpha \neq 0$ である。そうでなければ $T\cos\alpha = 0 \neq mg$ となっ

てしまう)、

$$\tan\alpha = \frac{\omega^2(r - d\sin\alpha)}{g} = \frac{r - d\sin\alpha}{a}.$$

両辺に $a\cot\alpha$ を掛けると $a = r\cot\alpha - d\cos\alpha$、すなわち

$$r\cot\alpha = a + d\cos\alpha,$$

となり、示すべき式が得られた。

ちょうつがいからの力。第 1 式から $T = mg/\cos\alpha > 0$ であるので、棒は P をちょうつがいから遠ざかる向きに押している。つまり棒は圧縮（compression）を受けている。ニュートンの第三法則により、P は棒に沿って H の方へ、大きさ T の力で棒を押す。棒は軽いので棒にはたらく力の和は零であり、ちょうつがいが棒に及ぼす力はこれと大きさが等しく向きが反対である。すなわちその力は**棒に沿って、ちょうつがいから P の方へ向かう向き**（上向きで、回転軸の方へ向かう向き）にはたらき、その大きさは

$$\frac{mg}{\cos\alpha} = mg\sec\alpha.$$

である。

小問 (ii)

今度は質量 m_i $(i = 1, 2)$ の質点が $(d_i\sin\beta,\ d_i\cos\beta)$ にあり、回転軸からの距離は $r - d_i\sin\beta > 0$ である。

> **考えてみよう** 各質点は、向きのわからない力で棒を引いている。これらの力を個別に求めずに済ませるにはどうすればよいか。

個別に求める必要はない。各質点についての運動方程式から、棒がその質点に及ぼす力がわかり、軽い棒についての H のまわりのモーメントの式を使えば、未知のちょうつがいからの力は消える。棒から質点 i にはたらく力を $\mathbf{F}_i$ とする。質点の加速度は $+x$ 方向に $\omega^2(r - d_i\sin\beta)$ であるから、

$$\mathbf{F}_i + (0, -m_ig) = \big(m_i\omega^2(r - d_i\sin\beta),\ 0\big) \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{F}_i = \big(m_i\omega^2(r - d_i\sin\beta),\ m_ig\big).$$

ニュートンの第三法則により、質点 i は点 $(x_i, y_i) = (d_i\sin\beta,\ d_i\cos\beta)$ において棒に力 $-\mathbf{F}_i$ を及ぼす。点 (x, y) にはたらく力 (X, Y) の H のまわりの反時計回りのモーメントは $xY - yX$ であるから、$-\mathbf{F}_i$ のモーメントは

$$-d_i\sin\beta\cdot m_ig + d_i\cos\beta\cdot m_i\omega^2(r - d_i\sin\beta).$$

である。ちょうつがいからの力は H のまわりにモーメントをもたず、棒は軽いので、これら 2 つのモーメントの和は零である。$\omega^2\sin\beta$ で割り（これは零ではない。もし

$\beta = 0$ ならモーメントの式は $\sum m_i d_i \omega^2 r = 0$ となり、これは成り立たない)、$g/\omega^2 = a$ を用いると

$$\sum_{i=1}^{2} m_i d_i \left(-a + r\cot\beta - d_i \cos\beta\right) = 0,$$

すなわち

$$(m_1 d_1 + m_2 d_2)\, r\cot\beta = (m_1 d_1 + m_2 d_2)\, a + (m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2)\cos\beta.$$

$m_1 d_1 + m_2 d_2 > 0$ で割ると、

$$r\cot\beta = a + b\cos\beta, \qquad b = \frac{m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2}{m_1 d_1 + m_2 d_2}.$$

検算

- 質点が 1 つの場合（たとえば $m_2 = 0$)、$b = d_1$ となり、小問 (i) の結果に戻る。また $d_1 = d_2 = d$ ならやはり $b = d$ であり、同じ点にある 2 つの質点は 1 つの質点のようにふるまう。
- b は d_1 と d_2 の（重み $m_i d_i$ による）加重平均（weighted average）であるから、両者の間にある。当然そうあるべきである。
- $\omega \to 0$ のとき $a \to \infty$ であるから $\cot\alpha \to \infty$ となり、棒は鉛直に近づく。円板がほとんど回っていないときに予想されるとおりである。$d > r$ のもとで $\omega \to \infty$ とすると $a \to 0$ であり、方程式は $r = d\sin\alpha$ に近づく。質点は回転軸に近づき、そこでは向心力（centripetal force）がほとんど必要ない。
- $r = 1\,\mathrm{m}$、$\omega = 5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$、$d = 0.6\,\mathrm{m}$、$g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ とすると $a = 0.3924\,\mathrm{m}$ であり、方程式から $\alpha \approx 0.9251$（約 53.0°）が得られる。このとき $r\cot\alpha \approx 0.7538 \approx a + d\cos\alpha$ である。この角度で静止した状態から棒の運動をコンピュータでシミュレーションすると、棒はその角度にとどまる。

よくある間違い

- 小問 (ii) で、各質点が棒に及ぼす力が棒に沿っていると仮定してしまう。それは質点が 1 つの場合に特有のことであり、2 つの場合には H のまわりのモーメントの和が零であることしかいえない。
- 質点の描く円の半径として、$r - d\sin\alpha$ ではなく r（あるいは $d\sin\alpha$）を使ってしまう。
- ちょうつがいからの力をちょうつがいへ向かう向きと答えてしまう。棒は圧縮を受けているので、ちょうつがいは棒を P の方へ押している。

STEP のその先へ

小問 (ii) のモーメントの式は、有効ポテンシャル（effective potential）$\sum m_i\left(gd_i\cos\theta - \frac{1}{2}\omega^2(r-d_i\sin\theta)^2\right)$ が停留するという条件である。回転座標系（rotating frame）では、遠心力（centrifugal force）が付加的なポテンシャルのようにふるまうのである。これは、遠心調速機（centrifugal governor）のような回転する系を解析したり、定常状態が安定（stable）かどうかを問うたりする際の出発点となる。ここでは有効ポテンシャルは $\theta = \alpha$ で極大となるので、小問 (i) の定常状態は実は不安定である。棒を少しつつくと、棒は離れていくように振れてしまう。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体（rigid body）のモーメントと回転座標系を扱っている。

解答例

STEP III 2015、第 12 問

確率・統計 ・ 確率母関数

> **STEP III 2015、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q12

鍵となる考え方

m で割った余り（remainder）は指数を m で割った余りにしか関係しないので、余りの母関数（generating function）では、x^m が現れるところはどこでも 1 に置き換えてよい。独立（independent）な試行の結果を足すことは母関数を掛けることにあたり、そのあとで再び x の冪を簡約すればよい。この規則を使うと、計算全体は $x \cdot y$ や y^2 が y の定数倍につぶれてしまう単純な多項式の計算になる。

解答

以下を通して、$X_1, X_2, \ldots$ をさいころを投げた結果とする。これらは独立で、それぞれ $\{1, \ldots, 6\}$ 上の一様分布（uniform）に従う。

簡約の規則。 m を正の整数とする。U と V が独立で $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ の値をとるとき、$U+V$ の確率母関数（pgf, probability generating function）は $\mathrm{G}_U(x)\mathrm{G}_V(x)$ であり、これは x^k の項が $U+V=k$ となる確率をもつ多項式である。$U+V$ を m で割った余りが j となるのは、$U+V$ が j または $j+m$ のときちょうどである。したがって、その余りの確率母関数は、$k \geq m$ に対してすべての x^k を x^{k-m} に置き換えることで、言い換えれば $x^m = 1$ とおくことで得られる。S_n の余りは（S_{n-1} の余り）+（X_n の余り）の余りであり、この二つは独立であるから、各余りの確率母関数は、一つ前のものに掛け算をしてから $x^m = 1$ とおくことで得られる。「$x^m = 1$ を用いると等しい」ことを $\equiv$ で表す。

小問 (i)

$1,\ldots,5$ の目は余り $1,\ldots,5$ を与え、6 の目は余り 0 を与える。それぞれ確率 $\frac{1}{6}$ で起こるので、

$$\mathrm{G}(x) = \tfrac{1}{6}\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right) = \tfrac{1}{6}z, \qquad \text{ただし} z = 1+x+\cdots+x^5.$$

$x^6 = 1$ のもとでは、z に x を掛けることは各項を一つずつ巡回的にずらすだけである：$xz = x+x^2+\cdots+x^5+x^6 \equiv z$。よって、すべての k について $x^k z \equiv z$ であり、

$$z^2 = \sum_{k=0}^{5} x^k z \equiv 6z.$$

したがって R_2 の確率母関数は

$$\tfrac{1}{36}z^2 \equiv \tfrac{1}{36}\cdot 6z = \tfrac{1}{6}z = \mathrm{G}(x),$$

となり、示すべきことが示された。

同じ手順がすべての段階で成り立つ：R_{n-1} の確率母関数が $\mathrm{G}(x)$ ならば、R_n の確率母関数は $\mathrm{G}(x)^2 \equiv \mathrm{G}(x)$ である。数学的帰納法（induction）により、すべての R_n の確率母関数は $\mathrm{G}(x) = \frac{1}{6}z$ である。$6 \mid S_n$ となる確率は $\mathrm{P}(R_n = 0)$、すなわち $\mathrm{G}(x)$ の定数項であるから、

$$\mathrm{P}(S_n \text{ が次の数で割り切れる：} 6) = \tfrac{1}{6}.$$

小問 (ii)

今度は $m = 5$ である。$1,2,3,4$ の目は余り $1,2,3,4$ を与え、5 の目は 0 を、6 の目は 1 を与える。よって余り 1 の確率は $\frac{2}{6}$、他はそれぞれ $\frac{1}{6}$ である：

$$\mathrm{G}_1(x) = \tfrac{1}{6}\left(1+2x+x^2+x^3+x^4\right) = \tfrac{1}{6}(x+y), \qquad y = 1+x+x^2+x^3+x^4.$$

小問 (i) とまったく同様に、$x^5 = 1$ のもとで $xy \equiv y$ であるから、すべての k について $x^k y \equiv y$ であり、

$$y^2 = \sum_{k=0}^{4} x^k y \equiv 5y.$$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{G}_2(x) &\equiv \tfrac{1}{36}(x+y)^2 = \tfrac{1}{36}\left(x^2+2xy+y^2\right)\\ &\equiv \tfrac{1}{36}\left(x^2+2y+5y\right) = \tfrac{1}{36}\left(x^2+7y\right),\end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。（確認として $x = 1$ を代入すると $\frac{1}{36}(1+35) = 1$ となる。）

一般の確率母関数。 簡約の規則により、$G_n(x) \equiv G_1(x)^n = \frac{1}{6^n}(x+y)^n$ である。二項定理（binomial theorem）で展開すると

$$(x+y)^n = x^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

$k \geq 1$ のとき、$y^k \equiv 5^{k-1} y$（$y^2 \equiv 5y$ から帰納法で得られる）と、さらに $x^{n-k} y \equiv y$ を用いると、

$$x^{n-k} y^k \equiv 5^{k-1} y.$$

よって

$$(x+y)^n \equiv x^n + y \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 5^{k-1} = x^n + \frac{y}{5}\left[(1+5)^n - 1\right] = x^n + \frac{6^n - 1}{5} y.$$

考えてみよう $(6^n - 1)/5$ はどこから出てきたのか？

和 $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^k$ は二項定理により $(1+5)^n = 6^n$ である。ここでは $k = 0$ の項（1 である）が欠けており、さらに因子 $\frac{1}{5}$ が余分についている。したがって

$$G_n(x) = \frac{1}{6^n}\left(x^r + \frac{6^n - 1}{5} y\right),$$

ここで r は n を 5 で割った余りである（$x^n \equiv x^r$ であるため）。よって、どの余りも確率 $\frac{6^n - 1}{5 \cdot 6^n}$ をもつが、余り r だけは $\frac{1}{6^n}$ が上乗せされる。

5 で割り切れること。 必要なのは $P(T_n = 0)$、すなわち $G_n(x)$ の定数項である。y の定数項は 1 である。

- $5 \nmid n$ のとき、$r \neq 0$ であり x^r は定数項に寄与しないので、

$$P(S_n \text{ が次の数で割り切れる：} 5) = \frac{6^n - 1}{5 \cdot 6^n} = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{6^n}\right),$$

  となり、示すべきことが示された。

- $5 \mid n$ のとき、$r = 0$ であり $x^r = 1$ が $\frac{1}{6^n}$ を加えるので、

$$P(S_n \text{ が次の数で割り切れる：} 5) = \frac{6^n - 1}{5 \cdot 6^n} + \frac{1}{6^n} = \frac{6^n + 4}{5 \cdot 6^n} = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{4}{6^n}\right).$$

検算

- $n = 1$：公式は $\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ を与え、実際 5 で割り切れるのは 5 の目だけである。

- $n=2$：公式は $\frac{1}{5}\cdot\frac{35}{36}=\frac{7}{36}$ を与える。直接数えると、和が5（4通り）と10（3通り）で $\frac{7}{36}$ となり、$\frac{1}{36}(x^2+7y)$ の定数項と一致する。
- $n=5$：答えは $\frac{6^5+4}{5\cdot 6^5}=\frac{389}{1944}\approx 0.2001$ であり、$\frac{1}{5}$ よりわずかに大きい。$n\le 8$ についてコンピュータで 6^n 通りの結果をすべて列挙すると、確率母関数 $G_n(x)$ 全体と両方の場合が確かめられる。
- $n\to\infty$ のとき、どちらの答えも $\frac{1}{5}$ に収束（converge）する：余りは一様分布に近づく。

よくある間違い

- 6の目は5で割ると余り1を残すことを忘れ、G_1 の x の係数が $\frac{2}{6}$ になることを見落とす。
- すべての n について x^n を x^0 に簡約してしまう：項 x^n は n の余りを r として x^r に簡約されるのであり、まさにこのために $5\mid n$ の場合が異なるのである。
- $G_n(x)=G_1(x)^n$ を「=」で書き、$x^5=1$ を法とした簡約をせずに係数を読み取ってしまう。

STEP のその先へ

$x^m=1$ とおくことは、x^m-1 を法とする多項式環（ring）、すなわち位数 m の巡回群（cyclic group）の群環（group algebra）の中で計算することにあたる。同等の道具として1の冪根フィルター（roots-of-unity filter）がある：$P(m\mid S_n)=\frac{1}{m}\sum_{\omega^m=1}G_S(\omega)$ であり、これは離散フーリエ変換（discrete Fourier transform）のはたらきそのものである。この見方は、巡回群上のランダムな歩みの和がなぜ一様分布に近づくのかも説明し、マルコフ連鎖（Markov chains）や群上のランダムウォーク（random walks）の理論の出発点となる。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、母関数とランダムウォークをちょうどよい水準で扱っている。

解答例

STEP III 2015、第 13 問

確率・統計 ・ 一様分布に従う確率変数の関数

> **STEP III 2015、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q13

鍵となる考え方

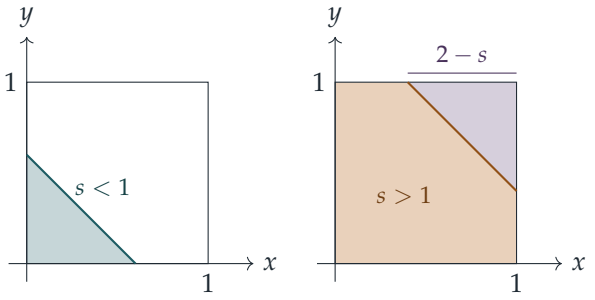
X と Y は独立（independent）で、$[0,1]$ 上の一様分布（uniform distribution）に従うので、組 (X,Y) は単位正方形（unit square）上に一様に分布する。したがって、X と Y に関する確率はすべて単に**面積**である。$X+Y \le s$ や $Y \le rX$ のような事象は正方形を直線で切り分け、その片側の面積は三角形の面積、または正方形から三角形を除いた部分の面積になる。そのあと、$1/(X+Y)$ と $X/(X+Y)$ の分布は、それらの事象を、すでに面積を求めた事象を用いて書き直すことで得られる。

解答

以下では一貫して、(X,Y) は面積 1 の単位正方形 $[0,1]^2$ 上の一様分布に従う。よって正方形内の任意の領域 A について、$\mathrm{P}\big((X,Y)\in A\big)$ は A の面積に等しい。

小問 (i)

$S = X+Y$ とおくと、これは $[0,2]$ の値をとる。また $F(s) = \mathrm{P}(S \le s)$ とおく。事象 $S \le s$ は、正方形のうち直線 $x+y=s$ 上またはその下側にある部分である。



$0 \le s \le 1$ のとき、この直線は座標軸と $(s,0)$ および $(0,s)$ で交わり、その下側の領域は直角をはさむ 2 辺の長さが s の直角二等辺三角形である。$1 \le s \le 2$ のときは、直線の**上側**の領域が、角 $(1,1)$ にある三角形になる。直角をはさむ 2 辺は直線から角までのびており、その長さは $1-(s-1)=2-s$ である。よって

$$F(s) = \mathrm{P}(X+Y \le s) = \begin{cases} 0 & s < 0, \\ \frac{1}{2}s^2 & 0 \le s \le 1, \\ 1 - \frac{1}{2}(2-s)^2 & 1 \le s \le 2, \\ 1 & s > 2. \end{cases}$$

中央の 2 つの式は $s=1$ で一致する（どちらも $\frac{1}{2}$ を与える）。当然そうでなければならない。

小問 (ii)

$T = 1/S$ とおく。$0 < S \le 2$ であるから（値 $S=0$ をとる確率はゼロである）、T は $[\frac{1}{2}, \infty)$ の値をとる。$t > 0$ に対して、$s \mapsto 1/s$ は $s > 0$ で減少するから、

$$\mathrm{P}(T \le t) = \mathrm{P}\left(S \ge \tfrac{1}{t}\right) = 1 - F\left(\tfrac{1}{t}\right),$$

ここで、S は連続型であり、したがって $\mathrm{P}(S = 1/t) = 0$ となることを用いた。

> **考えてみよう** F のどちらの式を用いるのか。それは t の位置ではなく、$1/t$ の位置によって決まる。

$t \ge 1$ ならば $0 < 1/t \le 1$ なので、1 つ目の式を用いる：$\mathrm{P}(T \le t) = 1 - \frac{1}{2}t^{-2}$。$\frac{1}{2} \le t \le 1$ ならば $1 \le 1/t \le 2$ なので、2 つ目の式を用いる：$\mathrm{P}(T \le t) = \frac{1}{2}\left(2 - t^{-1}\right)^2$。また、$t < \frac{1}{2}$ に対しては $\mathrm{P}(T \le t) = 0$ である。

微分すると確率密度関数（density）が得られる。$t \ge 1$ のとき、

$$f(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1 - \tfrac{1}{2}t^{-2}\right) = t^{-3},$$

また $\frac{1}{2} \le t \le 1$ のときは、連鎖律（chain rule）により

$$f(t) = \left(2 - t^{-1}\right) \cdot t^{-2} = 2t^{-2} - t^{-3},$$

であり、それ以外では $f(t) = 0$ である。これが求める確率密度関数である。

期待値（expectation）は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\frac{1}{X+Y}\right) = \int_{1/2}^{\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{1/2}^{1} \left(2t^{-1} - t^{-2}\right)\mathrm{d}t + \int_{1}^{\infty} t^{-2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[2\ln t + t^{-1}\right]_{1/2}^{1} + \left[-t^{-1}\right]_{1}^{\infty} \\
&= (0+1) - (-2\ln 2 + 2) + 1 \\
&= 2\ln 2.
\end{aligned}$$

t^{-2} は $[1,\infty)$ で可積分であるから、この広義積分（improper integral）は収束する。

小問 (iii)

$R = Y/X$ とおくと、これは $[0,\infty)$ の値をとる（事象 $X = 0$ の確率はゼロである）。$r \ge 0$ に対して、事象 $R \le r$ は $Y \le rX$ であり、これは正方形のうち、原点を通る直線 $y = rx$ 上またはその下側にある部分である。

$0 \le r \le 1$ のとき、この直線は右側の辺上の点 $(1, r)$ で正方形から出ていき、その下側の領域は底辺 1、高さ r の三角形で、面積は $\frac{1}{2}r$ である。$r \ge 1$ のときは、直線は上側の辺上の点 $(1/r, 1)$ で正方形から出ていき、その**上側**の領域は、上側の辺に沿った底辺 $1/r$、高さ 1 の三角形で、面積は $\frac{1}{2r}$ である。よって

$$H(r) = \mathrm{P}\left(\frac{Y}{X} \le r\right) = \begin{cases} 0 & r < 0, \\ \frac{1}{2}r & 0 \le r \le 1, \\ 1 - \dfrac{1}{2r} & r \ge 1. \end{cases}$$

次に $Z = \dfrac{X}{X+Y} = \dfrac{1}{1+R}$ とおくと、これは $[0,1]$ の値をとる。$0 < z \le 1$ に対して、$r \mapsto 1/(1+r)$ は $r \ge 0$ で減少するから、

$$\mathrm{P}(Z \le z) = \mathrm{P}\left(1 + R \ge \frac{1}{z}\right) = \mathrm{P}\left(R \ge \frac{1-z}{z}\right) = 1 - H\left(\frac{1-z}{z}\right).$$

ここでも、どちらの式を用いるかは $(1-z)/z$ の位置によって決まる。それが 1 以下となるのは、ちょうど $z \ge \frac{1}{2}$ のときである。

► $\frac{1}{2} \le z \le 1$ のとき：$\mathrm{P}(Z \le z) = 1 - \dfrac{1-z}{2z} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2z}$。

- $0 < z \le \frac{1}{2}$ のとき：$\mathrm{P}(Z \le z) = 1 - \left(1 - \dfrac{z}{2(1-z)}\right) = \dfrac{z}{2(1-z)}$。

どちらも $z = \frac{1}{2}$ で $\frac{1}{2}$ となる。微分すると（2 つ目については $\frac{z}{2(1-z)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z} - 1\right)$ と書き直す）、Z の確率密度関数は

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-z)^2} & 0 \le z \le \frac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2z^2} & \frac{1}{2} \le z \le 1, \\ 0 & \text{それ以外.} \end{cases}$$

$g(1-z) = g(z)$ であることに注意しよう。すなわち、この確率密度関数は $\frac{1}{2}$ に関して対称である。

期待値。これは積分せずに書き下すことができる。X と Y は独立で同じ分布に従うので、組 (X, Y) と (Y, X) は同じ分布をもつ。よって $\dfrac{X}{X+Y}$ と $\dfrac{Y}{X+Y}$ は同じ期待値をもつ。それらの和はちょうど 1 であるから、

$$\mathrm{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right) = \frac{1}{2}.$$

積分による確認。

$$\mathrm{E}(Z) = \int_0^{1/2} \frac{z}{2(1-z)^2}\,\mathrm{d}z + \int_{1/2}^1 \frac{1}{2z}\,\mathrm{d}z.$$

2 つ目の積分は $\frac{1}{2}\left[\ln z\right]_{1/2}^1 = \frac{1}{2}\ln 2$ である。1 つ目の積分では $u = 1 - z$ と置換（substitution）する。すると $\mathrm{d}z = -\mathrm{d}u$ であり、$z = 0, \frac{1}{2}$ は $u = 1, \frac{1}{2}$ に対応する。

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{z}{2(1-z)^2}\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2}\int_{1/2}^1 \frac{1-u}{u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{u} - \ln u\right]_{1/2}^1 \\ &= \frac{1}{2}\left(-1 - (-2 + \ln 2)\right) = \frac{1}{2}(1 - \ln 2). \end{aligned}$$

足し合わせると $\mathrm{E}(Z) = \frac{1}{2}(1 - \ln 2) + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}$ となり、上で求めた値が確かめられる。

検算

- どの分布関数（distribution function）も 0 から 1 まで増加し、式のつなぎ目で連続である：$F(1) = \frac{1}{2}$、$\mathrm{P}(T \le 1) = \frac{1}{2}$、$H(1) = \frac{1}{2}$、$\mathrm{P}(Z \le \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$。これらがいずれも $\frac{1}{2}$ となるのは、正方形が対角線に関して対称だからである。
- 確率密度関数 f を積分すると 1 になる：$\int_{1/2}^1 (2t^{-2} - t^{-3})\,\mathrm{d}t = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ かつ $\int_1^\infty t^{-3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$。

- $2\ln 2 \approx 1.386$ は当然 1 と 2 の間にあり、また凸関数（convex function）$1/s$ に対するイェンセン（Jensen）の不等式から予想されるとおり、$1/\mathrm{E}(X+Y) = 1$ より大きい。正方形上での $\iint (x+y)^{-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ を直接数値計算すると 1.3863 となる。分布関数および $\mathrm{E}(Z) = \frac{1}{2}$ は、コンピュータシミュレーションによっても確認した。

よくある間違い

- F や H の式を、$1/t$ や $(1-z)/z$ ではなく t や z の値に基づいて選んでしまい、2 つの式を取り違える。
- $1/s$ や $1/(1+r)$ が減少関数であり、不等号の向きを逆にしなければならないことを忘れる。$T \leq t$ は $S \geq 1/t$ を意味する。
- 小問 (i) の角にある三角形の、直角をはさむ辺の長さを間違える。それは $s-1$ ではなく $2-s$ である。

STEP のその先へ

(X, Y) に関する命題を面積に置き換え、それから分布関数を微分するという方法は、確率変数の関数の分布を求めるための一般的な手法である**分布関数法**（distribution function method）である。大学では、これに同時確率密度関数に対する変数変換の公式（change-of-variables formula、ヤコビアンを用いる）が加わり、$X+Y$ と $X/(X+Y)$ を同時に扱うことができる。特に、ここでの $X+Y$ の確率密度関数は、2 つの一様分布の確率密度関数の**畳み込み**（convolution）である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction* は両方の方法を扱っており、Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability* には同じ趣旨の例が数多く載っている。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

2015 年解答例. 本書全体、すべての章、すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

