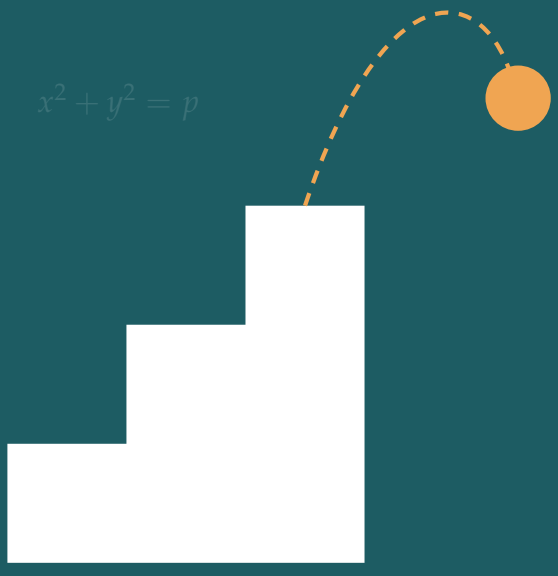
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

2014 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

2014 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

2014 年解答例

2014 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 39 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 平方の差 純粋数学 . . . 3
Q2 対数の積分 純粋数学 . . . 7
Q3 多項式の方程式と不等式 純粋数学 . . . 12
Q4 関連する変化率 純粋数学 . . . 16
Q5 3次不等式 純粋数学 . . . 20
Q6 ロジスティック写像の漸化式 純粋数学 . . . 24
Q7 三角形とベクトル 純粋数学 . . . 28
Q8 直線族の包絡線 純粋数学 . . . 32
Q9 水平方向の力を受ける放物運動 力学 . . . 36
Q10 衝突と反発係数 力学 . . . 40
Q11 連結した滑車系 力学 . . . 44
Q12 離散確率変数 確率・統計 . . . 48
Q13 三角分布 確率・統計 . . . 52

STEP II

Q1 三角形の幾何と2次方程式 純粋数学 . . . 56
Q2 積分の不等式 純粋数学 . . . 61
Q3 接線と包絡線 純粋数学 . . . 65
Q4 置換積分 純粋数学 . . . 70
Q5 同次形微分方程式 純粋数学 . . . 74
Q6 三角級数 純粋数学 . . . 78
Q7 絶対値関数のグラフ 純粋数学 . . . 82
Q8 最大の二項係数 純粋数学 . . . 87
Q9 剛体のつり合い 力学 . . . 92

Q10 軌道の包絡線 力学 . . . 96
Q11 円運動 力学 . . . 101
Q12 ハザード関数 確率・統計 . . . 106
Q13 離散確率変数 確率・統計 . . . 110

STEP III

Q1 対数関数の級数展開 純粋数学 . . . 114
Q2 双曲線関数による積分 純粋数学 . . . 118
Q3 放物線までの距離 純粋数学 . . . 122
Q4 積分の不等式 純粋数学 . . . 127
Q5 図形における複素数 純粋数学 . . . 132
Q6 凸性による不等式 純粋数学 . . . 137
Q7 ベクトルと円に内接する四角形 純粋数学 . . . 141
Q8 級数の収束 純粋数学 . . . 145
Q9 抵抗のある放物運動 力学 . . . 149
Q10 連成振動 力学 . . . 153
Q11 円運動 力学 . . . 157
Q12 対数正規分布 確率・統計 . . . 161
Q13 確率母関数 確率・統計 . . . 165

解答例

STEP I 2014、第 1 問

純粋数学 ・ 平方の差

> **STEP I 2014、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q1

鍵となる考え方

すべては一つの因数分解（factorisation）$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ に基づいている。n を二つの平方数の差（difference of two squares）として表すことは、$n = de$ と表すことと同じである。ただし $d = a - b$、$e = a + b$ である。さらに d と e の差は偶数 $2b$ であるから、両者の偶奇（parity）は一致しなければならない。このことに気づけば、どの小問も、偶奇の等しい因数の組（factor pair）についての問題になる。

解答

以下、a と b は非負整数（non-negative integer）とする。$n = a^2 - b^2$ かつ $n \geq 1$ ならば $a > b$ であるから、表し方は常に $a > b \geq 0$ を満たす組 (a, b) として列挙できる。

小問 (i)

$$3 = 2^2 - 1^2, \quad 5 = 3^2 - 2^2, \quad 8 = 3^2 - 1^2, \quad 12 = 4^2 - 2^2, \quad 16 = 5^2 - 3^2.$$

（16 については、すぐに思いつく $4^2 - 0^2$ は許されない。平方数は零でないものでなければならないからである。）

小問 (ii)

連続する二つの平方数の差は奇数である：$(m+1)^2 - m^2 = 2m + 1$。したがって、任意の奇数 $2m + 1$（ただし $m \geq 0$）は

$$2m + 1 = (m+1)^2 - m^2.$$

と表される。

小問 (iii)

二つ離れた数の平方の差は 4 の倍数である：$(k+1)^2-(k-1)^2=4k$。$k\geq 1$ のとき $k+1$ と $k-1$ はともに非負であるから、

$$4k=(k+1)^2-(k-1)^2.$$

である。$k=0$ のときは単に $0=0^2-0^2$（または 1^2-1^2）である。

小問 (iv)

すべての平方数は、4 で割った余りが 0 または 1 である：$(2m)^2=4m^2$、$(2m+1)^2=4(m^2+m)+1$。したがって a^2-b^2 を 4 で割った余りは

$$0-0=0,\quad 1-1=0,\quad 1-0=1\quad \text{または}\quad 0-1\equiv 3\pmod 4,$$

のいずれかであり、2 になることはない。よって、$4k+2$ の形の数は二つの平方数の差として表せない。

（同値な言い方をすれば：$(a-b)(a+b)=4k+2$ ならば、$a-b$ と $a+b$ の偶奇は一致する。ともに奇数なら積は奇数であり、ともに偶数なら積は 4 で割り切れる。いずれの場合も $4k+2$ にはならない。）

小問 (v)

$pq=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$（ただし $a>b\geq 0$）と仮定する。$d=a-b$、$e=a+b$ とおく。すると d と e は正の整数で、$d\leq e$ かつ $de=pq$ を満たす。逆に、$d\leq e$ で d、e の偶奇が一致するような任意の分解 $pq=de$ から、ちょうど一つの表し方

$$a=\frac{e+d}{2},\qquad b=\frac{e-d}{2},$$

が得られ、これらは非負整数である。したがって、pq の表し方は、そのような因数の組 (d,e) と一対一に対応する。

> ? **考えてみよう** ここで d と e の偶奇が常に一致するのはなぜか。また、組が二つしかないのはなぜか。

p と q は奇素数（odd prime）であるから pq は奇数であり、pq の約数（divisor）はすべて奇数なので、偶奇の条件は自動的に満たされる。$p\leq q$ とする。素因数分解の一意性（unique factorisation）により、$d\leq e$ を満たす因数の組は

$$(d,e)=(1,pq)\qquad \text{および}\qquad (d,e)=(p,q).$$

に限られる。（これは $p=q$ のときも正しい。p^2 の約数は 1、p、p^2 である。）これらから

$$pq=\left(\frac{pq+1}{2}\right)^2-\left(\frac{pq-1}{2}\right)^2 \qquad \text{および} \qquad pq=\left(\frac{p+q}{2}\right)^2-\left(\frac{q-p}{2}\right)^2.$$

が得られる。この二つの表し方は異なる。$d=a-b$ の値がそれぞれ 1 と p であり、$p\geq 3$ だからである。したがって、pq は二つの平方数の差として、ちょうど二通りに表される。例えば $15=8^2-7^2=4^2-1^2$ である。$p=q$ のとき二つ目の表し方は p^2-0^2 となるが、零でない平方数を要求しているのは小問 (i) だけなので、ここではこれも許される。

$q=2$ のとき、この結果は成り立た**ない**。このとき $pq=2p$ で p は奇数であり、$p=2m+1$ とおくと $2p=4m+2$ となる。小問 (iv) により、$2p$ はどのようにしても二つの平方数の差として表せない。（因数の組 $(1,2p)$ と $(2,p)$ は、いずれも一方が奇数で他方が偶数である。）

小問 (vi)

小問 (v) と同様に、675 の表し方は、因数の組 $675=de$ のうち $d\leq e$ で d、e の偶奇が一致するものに対応する。675 は奇数なので約数はすべて奇数であり、どの因数の組も数に入る。

さて、$675=27\times 25=3^3\times 5^2$ であり、約数は $(3+1)(2+1)=12$ 個ある。約数は $d\leftrightarrow 675/d$ によって対をなし、675 は完全平方数（perfect square）ではない（$26^2=676$）から、自分自身と対になる約数はない。したがって、組は $12/2=6$ 個ある：

(d,e)	$(1,675)$	$(3,225)$	$(5,135)$	$(9,75)$	$(15,45)$	$(25,27)$
(a,b)	$(338,337)$	$(114,111)$	$(70,65)$	$(42,33)$	$(30,15)$	$(26,1)$

よって、675 は二つの平方数の差として、相異なるちょうど **6** 通りに表される。

> **考えてみよう** (a,b) と $(-a,b)$、あるいは a^2-b^2 と $-(b^2-a^2)$ は、異なる表し方として数えるべきだろうか。

そうではない。問題ではすべてを非負整数に制限しており、$a^2-b^2=675>0$ から $a>b$ が従う。したがって、各表し方は $a>b\geq 0$ を満たす一つの組 (a,b) であり、ここで数えたのはまさにこれである。

検算

- 表の抜き取り確認：$26^2-1^2=676-1=675$、$30^2-15^2=900-225=675$。

- 小問 (ii)〜(iv) を合わせると、$n \geq 1$ が二つの平方数の差として表せるのは、$n \not\equiv 2 \pmod 4$ のとき、かつそのときに限る。2000 までのすべての n についてコンピュータで確認した結果はこれと一致する。また、pq の表し方が $p \leq q < 200$ を満たすすべての奇素数に対してちょうど二通りであり、$2p$ には表し方が一つもないことの確認結果も一致する。
- すべての b にわたって探索すると、675 の表し方はちょうど六つ、すなわち表にある六つが見つかる。

よくある間違い

- 偶奇の条件を忘れる：$(2, p)$ のような組を $2p$ に対して数えてしまう。これは整数でない $a = \frac{p+2}{2}$ を与える。
- 小問 (v) で $p = q$ の場合を見落とす、あるいはそこで $p^2 - 0^2$ を除外してしまう。小問 (i) 以外では零が許される。
- 小問 (vi) で、約数の個数（12）を、因数の組の個数（6）の代わりに数えてしまう。

STEP のその先へ

ここに見られる、表し方の個数が n の約数によって支配されるというパターンは、初等整数論（elementary number theory）に典型的なものである。よく知られた類似の結果に、二つの平方数の和に関するフェルマー（Fermat）の定理がある：奇素数が $x^2 + y^2$ と表せるのは、それが 1 mod 4 であるとき、かつそのときに限る。この主張はガウス整数（Gaussian integers）$a + bi$ を用いて鮮やかに証明される。さらに知りたければ、Davenport, *The Higher Arithmetic*（整数論の入門書）を読むとよい。

解答例

STEP I 2014、第 2 問

純粋数学 • 対数の積分

STEP I 2014、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s1-q2

鍵となる考え方

すべては因数分解（factorisation）$x^2-4=(x-2)(x+2)$ にかかっている。これにより、2 次式の対数（logarithm）は $\ln(2-x)+\ln(2+x)$ に分かれ、この 2 つの部分は小問 (i)（およびその鏡像）によってすぐに積分できる。あとは絶対値（modulus）の記号のために、$\ln|x^2-4|$ がどこで正になりどこで負になるかを把握すればよく、(ii) の概形がまさにそれを示している。

解答

小問 (i)

$x<2$ のとき $2-x>0$ であるから、すべての式が定義される。右辺を微分する。$-(2-x)\ln(2-x)$ には積の微分法（product rule）を用いる。$-(2-x)$ の導関数は 1 であり、合成関数の微分法（chain rule）により $\ln(2-x)$ の導関数は $-\frac{1}{2-x}$ である。よって

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[-(2-x)\ln(2-x)+(2-x)\Big] &= 1\cdot\ln(2-x)-(2-x)\cdot\left(-\frac{1}{2-x}\right)-1\\ &= \ln(2-x)+1-1=\ln(2-x),\end{aligned}$$

となり、与えられた原始関数（antiderivative）は正しい。

（別解として、$u=2-x$ と置換（substitution）し、$\int \ln u\,\mathrm{d}u = u\ln u-u$ を用いてもよい。）

同様にして、$x > -2$ のとき

$$\int \ln(2+x)\,\mathrm{d}x = (2+x)\ln(2+x) - (2+x) + c,$$

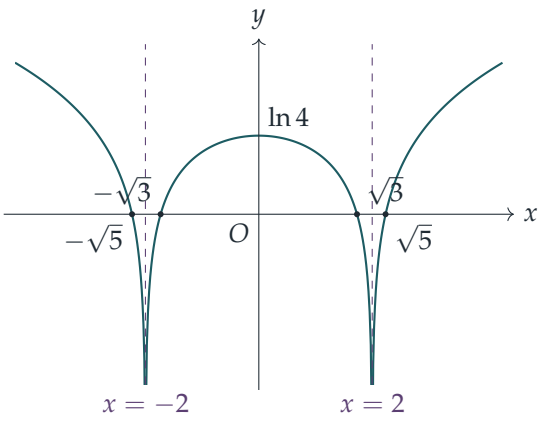
であり、これも後で必要になる。

小問 (ii)

$f(x) = \ln|x^2-4|$ とおく。これは $x \neq \pm 2$ で定義される。$f(-x) = f(x)$ であるから、曲線は y 軸に関して対称（symmetric）である。

- $|x| < 2$ のとき：$f(x) = \ln(4-x^2)$ であり、これは $x = 0$ で最大となり、そのとき $y = \ln 4$ である。$4 - x^2 = 1$、すなわち $x = \pm\sqrt{3}$ のとき 0 となり、$x \to \pm 2$ のとき $-\infty$ に発散する。
- $|x| > 2$ のとき：$f(x) = \ln(x^2-4)$ であり、これは $x = \pm 2$ の近くの $-\infty$ から増加し、$x^2 - 4 = 1$、すなわち $x = \pm\sqrt{5}$ で軸と交わり、その後は $2\ln|x|$ のようにゆっくりと増加する。

直線 $x = \pm 2$ は垂直な漸近線（asymptote）である。



小問 (iii)

x 軸の正の部分、y 軸および A で囲まれた有限の領域は、$x = 0$ から $x = \sqrt{3}$ までの山形の部分であり、そこでは $y = \ln(4-x^2) \geq 0$ である。その面積は

$$\int_0^{\sqrt{3}} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{3}} \ln(2-x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\sqrt{3}} \ln(2+x)\,\mathrm{d}x,$$

である。ここで $\ln(4-x^2)=\ln(2-x)+\ln(2+x)$ を用いた。この範囲では両方の因数が正であるから、これは成り立つ。小問 (i) により

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}}\ln(2-x)\,\mathrm{d}x &= \Big[-(2-x)\ln(2-x)+(2-x)\Big]_0^{\sqrt{3}}\\ &= -(2-\sqrt{3})\ln(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})+2\ln 2-2\\ &= -(2-\sqrt{3})\ln(2-\sqrt{3})-\sqrt{3}+2\ln 2,\end{aligned}$$

であり、また

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}}\ln(2+x)\,\mathrm{d}x &= \Big[(2+x)\ln(2+x)-(2+x)\Big]_0^{\sqrt{3}}\\ &= (2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})-2\ln 2+2\\ &= (2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-\sqrt{3}-2\ln 2.\end{aligned}$$

である。

? **考えてみよう** $\ln(2-\sqrt{3})$ と $\ln(2+\sqrt{3})$ はどのようにまとめればよいか。

$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=4-3=1$ であるから、$\ln(2-\sqrt{3})=-\ln(2+\sqrt{3})$ である。2 つの積分を足すと $\ln 2$ の項は打ち消し合い、

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}}\ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x &= (2-\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3}\\ &= 4\ln(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3},\end{aligned}$$

となって、求める結果が得られる。

小問 (iv)

$|x|<2$ において、B は漸近線の間にある A の部分のうち、軸より下にある部分を上側に折り返したものである。概形より、$|x|\le\sqrt{3}$ では $\ln(4-x^2)\ge 0$、$\sqrt{3}<|x|<2$ では $\ln(4-x^2)<0$ である。対称性を用いると、求める面積は

$$2\left[\int_0^{\sqrt{3}}\ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x-\int_{\sqrt{3}}^{2}\ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x\right].$$

である。2 つ目の積分は、被積分関数が $x=2$ で $-\infty$ に発散するので、広義積分である。$x=2-\varepsilon$ まで積分し、$\varepsilon\to 0^+$ とする。(i) で求めた $\ln(2-x)$ の原始関数に $x=2-\varepsilon$ を代入すると

$$-\varepsilon\ln\varepsilon+\varepsilon\to 0,$$

となる。これは、$t \to 0$ のとき $t\ln t \to 0$ という与えられた事実による。よって上端からの寄与は 0 であり、

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \ln(2-x)\,\mathrm{d}x = 0 - \Big[-(2-\sqrt{3})\ln(2-\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})\Big]$$
$$= -(2-\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) - 2 + \sqrt{3},$$

となる。ここでも $\ln(2-\sqrt{3}) = -\ln(2+\sqrt{3})$ を用いた。もう一方は通常の積分である：

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \ln(2+x)\,\mathrm{d}x = (4\ln 4 - 4) - \Big[(2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) - (2+\sqrt{3})\Big]$$
$$= 8\ln 2 - 2 + \sqrt{3} - (2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}).$$

これらを足すと

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x = 8\ln 2 - 4 + 2\sqrt{3} - 4\ln(2+\sqrt{3}),$$

となり、その値はおよそ -0.259 である。予想どおり負になっている。したがって面積は

$$2\Big[\big(4\ln(2+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}\big) - \big(8\ln 2 - 4 + 2\sqrt{3} - 4\ln(2+\sqrt{3})\big)\Big]$$
$$= 16\ln(2+\sqrt{3}) - 16\ln 2 + 8 - 8\sqrt{3}$$
$$= 16\ln\Big(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\Big) + 8 - 8\sqrt{3} \approx 4.125.$$

である。

検算

- $[0,\sqrt{3}]$ と $[\sqrt{3},2]$ での 2 つの積分を足すと $\int_0^2 \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x = 8\ln 2 - 4 \approx 1.545$ となる。これは (i) から 1 行で直接求めることもできる。$x=0$ において 2 つの原始関数の値は $-2\ln 2 + 2$ と $2\ln 2 - 2$ であり、打ち消し合うからである。
- (iii) の面積は $4\ln(2+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3} \approx 1.804$ である。これは山形の部分を囲む長方形の面積 $\sqrt{3}\times\ln 4 \approx 2.40$ より小さく、当然そうでなければならない。
- $\big|\ln|x^2-4|\big|$ を $(-2,2)$ で数値積分すると 4.1246 となり、$16\ln\big(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\big) + 8 - 8\sqrt{3} = 4.12457\ldots$ と一致する。

よくある間違い

- $x=\sqrt{3}$ から $x=2$ までの曲線の部分が軸より下にあることを忘れ、符号付きの積分を引かずに足してしまう。

- $\ln(2-\sqrt{3})$ をまとめずに放置する。恒等式 $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$ こそが答えをすっきりさせる鍵である。
- 何の説明もなく $(2-x)\ln(2-x)$ に $x=2$ をそのまま代入する。この式はそこでは定義されておらず、値 0 を正当化するのは極限 $t\ln t\to 0$ である。

STEP のその先へ

(iv) の積分は**広義積分**（improper integral）である。被積分関数は有界ではないが、対数の発散が非常にゆるやかで $t\ln t\to 0$ となるため、面積は有限になる。大学ではこれを厳密に扱い、有界でない g に対して $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ がどのようなときに収束（converge）するかを正確に判定する（たとえば、$\int_0^1 t^{-p}\,\mathrm{d}t$ が収束するのはちょうど $p<1$ のときである）。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、$t\ln t\to 0$ のような極限や積分の定義を丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 2014、第 3 問

純粋数学 • 多項式の方程式と不等式

> **STEP I 2014、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q3

鍵となる考え方

どちらの積分（integral）も初等的に計算できるので、条件は a と b についての単なる多項式（polynomial）の方程式になる。手間がかかるのは、共通因数（common factor）$b-a$ を見つけること（これは 0 でないので約分してよい）と、小問 (iii) において、残った式が十分に対称（symmetric）であり、和 $b+a$ と差 $b-a$ を用いてすっきり書けることに気づくことである。

解答

積分を計算すると、条件は

$$\frac{b^3-a^3}{3}=\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2(b+a)^2}{4}. \qquad (*)$$

となる。$b^3-a^3=(b-a)(b^2+ab+a^2)$ であり、$b-a>0$ であるから、$(*)$ を $b-a$ で割って

$$4(b^2+ab+a^2)=3(b-a)(b+a)^2. \qquad (**)$$

を得る。

小問 (i)

$a=0$ のとき、$(**)$ は $4b^2=3b^3$ となる。$b>0$ であるから b^2 で割ることができ、

$$b=\tfrac{4}{3}.$$

を得る。

小問 (ii)

$a = 1$ のとき、$(**)$ は

$$4(b^2+b+1) = 3(b-1)(b+1)^2 = 3(b^3+b^2-b-1),$$

となる。すなわち $3b^3+3b^2-3b-3-4b^2-4b-4=0$、つまり

$$3b^3-b^2-7b-7=0,$$

であり、これが示すべき式である。

次に $f(x) = 3x^3-x^2-7x-7$ とおくと、

$$f'(x) = 9x^2-2x-7 = (9x+7)(x-1).$$

である。停留点（stationary point）は $x=-\frac{7}{9}$（最高次の係数（leading coefficient）が正の 3 次関数（cubic）なので極大（local maximum））と $x=1$（極小（local minimum））であり、

$$f(1) = 3-1-7-7 = -12, \qquad f\left(-\tfrac{7}{9}\right) = \frac{-343-147+1323-1701}{243} = -\frac{868}{243}.$$

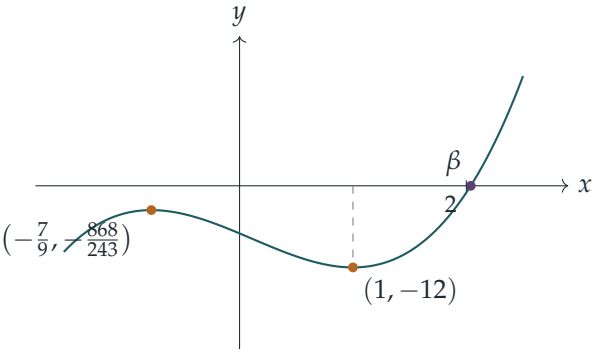
となる。

考えてみよう 極大値がわかると、なぜ解の個数がわかるのだろうか。

極大値は負である。$x \le 1$ では、f は $x=-\frac{7}{9}$ まで増加し、その後減少するので、そこでは $f(x) \le f(-\frac{7}{9}) < 0$ である。よって $x \le 1$ の範囲に解はない。$x > 1$ では、f は狭義単調増加（strictly increasing）であり（f' の 2 つの因数はともに正である）、$f(x) \to \infty$ であるから、ちょうど 1 回だけ 0 をまたぐ。したがって実数解（real root）はちょうど 1 つであり、

$$f(2) = 24-4-14-7 = -1 < 0, \qquad f(3) = 81-9-21-7 = 44 > 0,$$

であるから、連続性（continuity）によりその解は 2 と 3 の間にある。



図は曲線 $y = 3x^3 - x^2 - 7x - 7$ の概形である。極値をとる 2 点（turning points）はどちらも x 軸より下にあるので、曲線は $\beta \approx 2.04$ でただ 1 回だけ x 軸と交わる。

小問 (iii)

$p = b + a$、$q = b - a$ とおくと、$p^2 = b^2 + 2ab + a^2$、$q^2 = b^2 - 2ab + a^2$ であるから、

$$3p^2 + q^2 = 4b^2 + 4ab + 4a^2 = 4(b^2 + ab + a^2).$$

となる。よって $(**)$ の左辺は $3p^2 + q^2$ であり、右辺は $3qp^2$ である。ゆえに

$$3p^2 + q^2 = 3p^2 q,$$

であり、これが示すべき式である。変形すると $q^2 = 3p^2(q-1)$ となる。$q > 0$ より左辺は正であるから、$q \neq 1$ であり、

$$p^2 = \frac{q^2}{3(q-1)}.$$

となる。

後半の結論を導く。

- **下界**（*lower bound*）。 $q^2 > 0$ かつ $p^2 > 0$（$p = b + a > 0$ だから）であるので、$3(q-1) = q^2/p^2 > 0$、すなわち $q > 1$ である。
- **上界**（*upper bound*）。$a \geq 0$ であるから $p = q + 2a \geq q > 0$ となり、$p^2 \geq q^2$ である。したがって
  $$\frac{q^2}{3(q-1)} \geq q^2 \iff 1 \geq 3(q-1) \iff q \leq \tfrac{4}{3},$$
  となる。ここで $q^2 > 0$ で割り、$3(q-1) > 0$ を掛けたが、どちらも不等号の向きを保つ。

したがって $1 < b - a \leq \frac{4}{3}$ であり、等号が成り立つのはちょうど $a = 0$ のとき、すなわち小問 (i) の場合である。

検算

- 小問 (i) は小問 (iii) と整合する。$a = 0$ のとき $q = b = \frac{4}{3}$ となり、範囲の上端である。
- 小問 (ii) も整合する。解は $b \approx 2.0390$ なので $q = b - 1 \approx 1.039$ であり、$(1, \frac{4}{3}]$ の中にある。$[1, 2.0390]$ 上で 2 つの積分を計算すると、小数点以下何桁にもわたって等しい値（約 2.4924）が得られる。

- 逆に、$(1, \frac{4}{3}]$ の任意の q に対して $p = q/\sqrt{3(q-1)} \geq q$ となり、したがって条件を満たす $a = \frac{1}{2}(p-q) \geq 0$ が得られる。よってこの評価は最良（sharp）である。

よくある間違い

- 小問 (ii) で $b-a$ を約分し忘れ、見かけの解（spurious root）$b=1$ をもつ 4 次式（quartic）が残ってしまう。
- $f(2) < 0 < f(3)$ だけを示すこと。これで $(2,3)$ に解が**ある**ことは示せるが、それが唯一の実数解であることは示せない。極値をとる点も調べる必要がある。
- 小問 (iii) で、$q-1>0$ を確かめる前に不等式を $q-1$ で割ってしまう。

STEP のその先へ

積分に関するコーシー＝シュワルツの不等式（Cauchy–Schwarz inequality）により $\left(\int_a^b x\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x$ が成り立ち、等号は被積分関数（integrand）x が定数のときに限るが、そうではない。これを与えられた条件と組み合わせると $\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x < (b-a)\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x$ となるので、$b-a>1$ である。こうして小問 (iii) の下界がたった 1 行で得られる。コーシー＝シュワルツの不等式は、さまざまな形で大学 1 年次の解析学（analysis）において最もよく使われる道具の一つである。Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は、リーマン積分（Riemann integral）とこのような不等式を丁寧に展開している。

解答例

STEP I 2014、第 4 問

純粋数学 • 関連する変化率

> **STEP I 2014、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q4

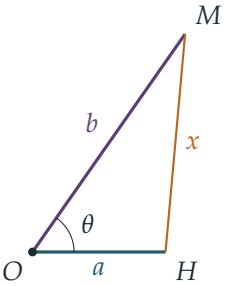
鍵となる考え方

2 本の針と、その先端どうしを結ぶ線分は三角形をなすので、余弦定理（cosine rule）により x を θ で表すことができる。時計は正確なので θ は一定の割合で増加し、したがって x の増加率はその定数と $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$ の積になる。これを最大化するのは通常の 1 変数の微分の問題であり、停留点（stationary point）の方程式は $\cos\theta$ についての 2 次方程式となって、きれいに因数分解できる。

解答

x の増加率

O を針の軸、H を短針の先端、M を長針の先端とする。すると $OH = a$, $OM = b$, $\angle HOM = \theta$, $HM = x$ である。



余弦定理より

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

$x \geq b - a > 0$ であるから、x で自由に割ってよいことに注意する。時刻 t で微分すると

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2ab\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}.$$

時計は正確なので、各針は一定の角速度（angular speed）で回転し、2 本の針のなす角は一定の割合 $\omega > 0$ で変化する（これは 2 つの角速度の差である。$0 \leq \theta < \pi$ の間は長針が先行していくので、θ は増加している）。したがって

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega ab\,\frac{\sin\theta}{x}.$$

よって、x が θ に依存し $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{ab\sin\theta}{x}$ を満たすことに注意しながら、$0 \leq \theta < \pi$ において $f(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{x}$ が最大となる点を求めればよい。

最大化

商の微分法（quotient rule）より

$$f'(\theta) = \frac{x\cos\theta - \sin\theta\cdot\dfrac{ab\sin\theta}{x}}{x^2} = \frac{x^2\cos\theta - ab\sin^2\theta}{x^3}.$$

$c = \cos\theta$ とおく。$x^2 = a^2 + b^2 - 2abc$ と $\sin^2\theta = 1 - c^2$ を用いると、分子は

$$\begin{aligned} x^2\cos\theta - ab\sin^2\theta &= (a^2+b^2)c - 2abc^2 - ab + abc^2 \\ &= -\left(abc^2 - (a^2+b^2)c + ab\right) \\ &= -(ac-b)(bc-a) \\ &= (b-ac)(bc-a). \end{aligned}$$

> **考えてみよう** この停留点が最大値を与え、しかも唯一の停留点であることは、どうすればわかるだろうか。

$c \leq 1 < b/a$ であるから $ac < b$ となり、因数 $b - ac$ は常に正である。また $x^3 > 0$ である。よって $f'(\theta)$ の符号は $bc - a$ の符号、すなわち $\cos\theta - \dfrac{a}{b}$ の符号と一致する。

- $\cos\theta > a/b$（θ が小さいとき）には $f'(\theta) > 0$ であり、f は増加する。
- $\cos\theta < a/b$（θ が大きいとき）には $f'(\theta) < 0$ であり、f は減少する。

$\cos\theta$ は $[0, \pi)$ で減少し、$0 < a/b < 1$ であるから、この範囲で $\cos\theta = a/b$ を満たす θ はちょうど 1 つ存在し、f はそこまで増加し、そのあと減少する。したがって、ここで x の増加率は大域的最大値（global maximum）をとる。このとき

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\frac{a}{b} = b^2 - a^2,$$

であるから、x の増加率が最大となるのは $x = (b^2 - a^2)^{1/2}$ のときであり、題意が示された。

幾何学的には、$x^2 + a^2 = b^2$ は三角形が H で直角をもつことを意味する。すなわち、増加率が最大となるのは、先端どうしを結ぶ線分が短針と垂直になるときである。

$b = 2a$ の場合

このとき $\cos\theta = a/b = \frac{1}{2}$ であるから、増加率が最大となるのは $\theta = \pi/3$ のときである。

t を正午からの経過時間（分）とする。長針は 60 分で 2π だけ回転し、短針は 720 分で 2π だけ回転する。どちらも鉛直方向から時計回りに回る。よって 2 本の針のなす角は

$$\theta = 2\pi\left(\frac{1}{60} - \frac{1}{720}\right)t = 2\pi \cdot \frac{11}{720}\,t = \frac{11\pi}{360}\,t,$$

であり、これはこの値が π 未満である間は成り立つ。正午に $\theta = 0$ から出発して、θ が初めて $\pi/3$ に達するのは

$$\frac{11\pi}{360}\,t = \frac{\pi}{3} \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{120}{11} = 10\tfrac{10}{11}\ \text{分}.$$

のときである。これは約 10.91 分（10 分約 55 秒）であり、題意のとおり 11 分よりわずかに短い。

検算

- $\theta = 0$ では増加率は 0 である（2 本の針は重なっており、$x = b - a$ は最小である）。また $\theta \to \pi$ のときも増加率は再び 0 に近づく（このとき $x \to a + b$ は最大である）。したがって、その間の点で最大となるのはまさに予想どおりである。
- $a = 1, b = 2$ として、針の先端の位置を 1 分ごとに追跡し、その距離の変化率を見積もると、最大の変化率は $t \approx 10.909$ 分に現れ、そこでは $x \approx 1.732 = \sqrt{3} = \sqrt{b^2 - a^2}$ となる。
- 答えが 11 よりわずかに小さいのは、もし短針が止まっていれば長針が 60° に達するのにちょうど 10 分かかるが、実際には短針が少しずつ進むため、わずかに余分な時間が必要になるからである。120/11 は、よく知られた「2 本の針が次に重なるのは 720/11 分後」と同じ種類の数である。

よくある間違い

- x そのものを最大化してしまう、あるいは商の微分法の段階で x も θ に依存することに気づかずに $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$ を最大化してしまう。
- $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ として長針の速さ（毎分 $2\pi/60$）だけを用いてしまい、ちょうど 10 分という答えを得てしまう。2 本の針のなす角は、2 つの速さの**差**で増加する。
- 根 $\cos\theta = b/a$ を除外し忘れる。$b > a$ であるから、これはありえない。

STEP のその先へ

これは関連変化率（related rates）の問題である。ある量が既知の割合で変化するとき、それと幾何学的に結びついた量がどう応答するかを追跡するのである。時間とともに一様に変化する角度で位置を記述するという同じ考え方は、惑星の運動を扱う出発点でもある。円軌道上の 2 つの惑星の間の距離はここでの x とまったく同じように振る舞い、最も速く離れていく瞬間も同じ方法で求められる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この種の運動学をベクトルを用いて展開している。

解答例

STEP I 2014、第 5 問

純粋数学 • 3 次不等式

> **STEP I 2014、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q5

鍵となる考え方

小問 (i) は 1 変数の 3 次関数（cubic）の問題であり、$x \geq 0$ における最小値はちょうどゼロになり、グラフは $x = a$ で軸に接する。この 1 つの不等式 $(x+2a)^3 \geq 27a^2x$ は、姿を変えた相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）である。左辺には和 $x+a+a$ が、右辺には積 $x \cdot a \cdot a$ が現れている。小問 (ii) と (iii) は、何を x と a とみなすかを選び、等号がどのような場合に成り立つかを正確に追跡する問題である。

解答

小問 (i)

微分すると

$$f'(x) = 3(x+2a)^2 - 27a^2 = 3\big((x+2a)^2 - 9a^2\big) = 3(x-a)(x+5a),$$

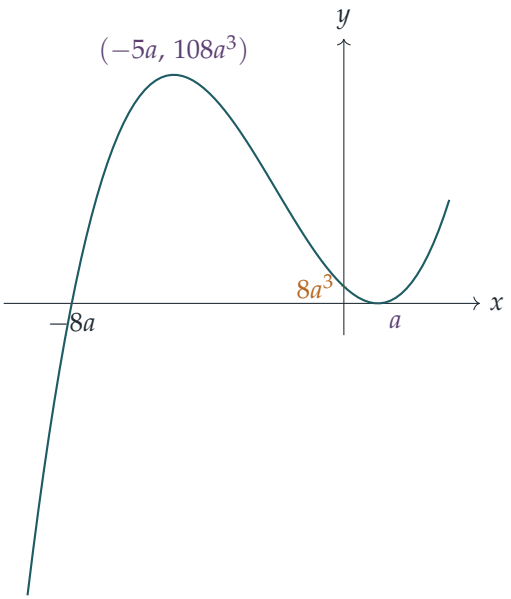
となるので、停留点（stationary point）は $x = a$ と $x = -5a$ である。そこでの値は

$$f(a) = (3a)^3 - 27a^3 = 0, \qquad f(-5a) = (-3a)^3 + 135a^3 = 108a^3,$$

であり、また $f(0) = 8a^3$ である。f は最高次の係数（leading coefficient）が正の 3 次関数であるから、$x = -5a$ は極大（local maximum）、$x = a$ は極小（local minimum）である。極小値が 0 であるから、グラフは x 軸と $x = a$ で接し、したがって $(x-a)^2$ は因数（factor）である。さらに定数項を比較すると

$$f(x) = (x-a)^2(x+8a),$$

を得る。これは両辺を展開してともに $x^3 + 6ax^2 - 15a^2x + 8a^3$ となることから確かめられる。



$x \geq 0$ では、グラフは高さ $8a^3 \geq 0$ から始まり、減少して 0 となるのは $x = a$ においてであり、その後は限りなく増加する。したがって f の、$x \geq 0$ における最小値は 0 であり、

$$f(x) \geq 0 \quad \text{ただし} x \geq 0,$$

が成り立ち、等号は $x = a$ のときに限る。（因数分解した形からも直接同じことがわかる。$x \geq 0$ のとき $(x-a)^2 \geq 0$ であり、また $x + 8a > 0$ である（ただし $x = a = 0$ の場合を除く）。）$a = 0$ の場合は退化して $f(x) = x^3$ となるが、これも $x \geq 0$ で非負であり、等号は $x = 0 = a$ のときに限る。いずれの場合も

$$(x+2a)^3 \geq 27a^2x \quad (x, a \geq 0), \qquad \text{等号成立の必要十分条件は} x = a.$$

小問 (ii)

xy^2 を扱いたいので、小問 (i) で $a = y \geq 0$ とおく。$x \geq 0$、$y \geq 0$ のとき

$$27xy^2 \leq (x+2y)^3 \leq 3^3 = 27,$$

となる。2 つ目の不等号は、$0 \leq x + 2y \leq 3$ であり、3 乗が増加関数であることによる。よって領域全体で $xy^2 \leq 1$ である。

この評価は実際に達成される。等号成立（equality）には（小問 (i) より）$x = y$ かつ $x + 2y = 3$ が必要であり、これらから $x = y = 1$ を得る。実際 $1 \cdot 1^2 = 1$ である。したがって xy^2 の最大値（greatest value）は 1 であり、それをとるのは $x = 1$、$y = 1$ のときに限る。

小問 (iii)

考えてみよう 小問 (i) には x と a の2つの数しか登場しない。それがどうして3つの数について何かを語れるのだろうか？

q と r をひとまとめにする。すなわち $x=p$、$2a=q+r$ とおくと、$a=\frac{1}{2}(q+r)\geq 0$ である。小問 (i) より

$$(p+q+r)^3 \geq 27p\left(\frac{q+r}{2}\right)^2.$$

ここで $\left(\frac{q+r}{2}\right)^2 - qr = \frac{(q-r)^2}{4} \geq 0$ であり、$p\geq 0$ であるから

$$(p+q+r)^3 \geq 27p\left(\frac{q+r}{2}\right)^2 \geq 27pqr,$$

となり、これが示すべき不等式である。

等号成立。$(p+q+r)^3 = 27pqr$ ならば、この不等式の連鎖における2つの不等号はともに等号となる。

- 1つ目が等号となるのは、ちょうど $x=a$、すなわち $p=\frac{1}{2}(q+r)$ のときである。
- 2つ目が等号となるのは、ちょうど $\frac{27}{4}p(q-r)^2=0$、すなわち $p=0$ または $q=r$ のときである。

$p=0$ ならば、1つ目の条件から $q+r=0$ となるので、$q=r=0$ でもある。$q=r$ ならば、1つ目の条件から $p=q$ となる。いずれにしても $p=q=r$ である。逆に $p=q=r$ ならば、両辺はともに $27p^3$ に等しい。よって等号が成り立つのは次の場合であり、かつその場合に限る：

$$p=q=r.$$

検算

- $(x-a)^2(x+8a)$ を展開すると $(x+2a)^3-27a^2x$ に戻る。$a=1$ のとき $f(0)=8$、$f(1)=0$、$f(3)=4\cdot 11=44$ であり、いずれも非負である。
- 小問 (ii) で、直線 $x+2y=3$ 上のほかの点を試してみる。$(x,y)=(2,\frac{1}{2})$ では $\frac{1}{2}$、$(0.5,1.25)$ では約 0.78 となり、どちらも 1 より小さい。三角形を細かい格子で調べるコンピュータ探索でも、最大値は 1 であり、それは $(1,1)$ でとられる。
- 小問 (iii) で $p=1,q=2,r=3$ とすると $216\geq 162$ となる。小さな非負整数についてコンピュータで探索したところ、等号が成り立つのは $p=q=r$ のときだけであった。

よくある間違い

- $f(a) = 0$ を示しただけで、それが $x \geq 0$ における**最小**値である理由を説明しないこと。グラフの形（または因数分解）が必要であり、端点での値 $f(0) = 8a^3 \geq 0$ も含めて論じなければならない。
- 小問 (ii) で、上界（upper bound）1 が実際に達成されることの確認を忘れること。上界だけでは最大値にはならない。
- 小問 (iii) の等号成立の場合で、$q = r$ だけを結論し、もう一つの可能性 $p = 0$ を見落とすこと。これは排除する（あるいは $p = q = r = 0$ を導くことを示す）必要がある。

STEP のその先へ

小問 (iii) は 3 項の相加平均・相乗平均の不等式 $\frac{1}{3}(p+q+r) \geq \sqrt[3]{pqr}$ である。ここで用いた方法、すなわち 2 つの変数をその平均でまとめ、2 変数の不等式を用いるという方法は、n 項の相加平均・相乗平均の不等式の古典的な証明の萌芽である。小問 (ii) は小規模な制約付き最適化（constrained optimisation）問題であり、大学の講義ではラグランジュ（Lagrange）の未定乗数法（Lagrange multipliers）で扱う類のものであるが、相加平均・相乗平均の不等式のような不等式を使えば、はるかに簡潔に答えが得られることが多い。この精神に沿った内容をさらに学ぶには、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を参照するとよい。

解答例

STEP I 2014、第 6 問

純粋数学 ・ ロジスティック写像の漸化式

> **STEP I 2014、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q6

この問題は、*Beyond STEP* の第 8.7 節「**解けるカオス**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch08/solvable-chaos.html

鍵となる考え方

式 $4x(1-x)$ は一見扱いにくいが、$x = \sin^2\theta$ とおくと $1-x = \cos^2\theta$ となり、$4\sin^2\theta\cos^2\theta = (2\sin\theta\cos\theta)^2$ は姿を変えた 2 倍角の公式（double-angle formula）にほかならない。漸化式（recurrence）の各ステップは、単に角を 2 倍にするだけである。小問 (ii) では、係数に関するある 1 つの条件が成り立つかぎり、**どんな** 2 次の漸化式も 1 次の変数変換（linear change of variable）によってこの漸化式に帰着できることを見抜くことが要点となる。

解答

小問 (i)

$u_0 = \sin^2\theta$ とすると $1-u_0 = \cos^2\theta$ であるから、

$$u_1 = 4\sin^2\theta\cos^2\theta = (2\sin\theta\cos\theta)^2 = \sin^2 2\theta.$$

これは u_0 の θ を 2θ に置き換えたものとまったく同じ形であるから、同じ計算により

$$u_2 = 4\sin^2 2\theta\,\cos^2 2\theta = \sin^2 4\theta.$$

各ステップで角が 2 倍になるので、次のように予想できる。

$$u_n = \sin^2(2^n\theta) \qquad (n \geq 0).$$

数学的帰納法（*induction*）による証明。 $n = 0$ のとき、これは $u_0 = \sin^2\theta$ となり、成り立つ。ある $k \geq 0$ に対して $u_k = \sin^2(2^k\theta)$ が成り立つと仮定する。このとき $1 - u_k = \cos^2(2^k\theta)$ であり、

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 4\sin^2(2^k\theta)\cos^2(2^k\theta) \\ &= \left(2\sin(2^k\theta)\cos(2^k\theta)\right)^2 \\ &= \sin^2(2^{k+1}\theta), \end{aligned}$$

となる。ここで $A = 2^k\theta$ として $\sin 2A = 2\sin A\cos A$ を用いた。よって k のときの結果から $k+1$ のときの結果が導かれ、数学的帰納法により、すべての $n \geq 0$ に対して $u_n = \sin^2(2^n\theta)$ が成り立つ。

小問 (ii)

$\alpha \neq 0$ として $v_n = \alpha u_n + \beta$ とおく（v_n から u_n を復元できるように $\alpha \neq 0$ が必要である）。v_n の漸化式に代入すると

$$\alpha u_{n+1} + \beta = -p(\alpha u_n + \beta)^2 + q(\alpha u_n + \beta) + r.$$

展開して α で割ると

$$u_{n+1} = -p\alpha\, u_n^2 + (q - 2p\beta)\, u_n + \frac{-p\beta^2 + (q-1)\beta + r}{\alpha}.$$

これが $u_{n+1} = 4u_n - 4u_n^2$ となってほしいので、係数を比較する（compare coefficients）。

- u_n^2： $p\alpha = 4$ より $\alpha = \dfrac{4}{p}$（$p \neq 0$ であるから問題なく、このとき $\alpha \neq 0$ でもある）。
- u_n： $q - 2p\beta = 4$ より $\beta = \dfrac{q-4}{2p}$。
- 定数項： $-p\beta^2 + (q-1)\beta + r = 0$。

はじめの 2 つで α と β が定まり、3 つ目は p、q、r に関する条件となる。$\beta = (q-4)/(2p)$ を代入し、両辺に $4p$ を掛けると

$$\begin{aligned} & 0 = -p \cdot \frac{(q-4)^2}{4p^2} + (q-1)\frac{q-4}{2p} + r \\ \iff \quad & 0 = -(q-4)^2 + 2(q-1)(q-4) + 4pr \\ & \quad = (q-4)\big(-(q-4) + 2(q-1)\big) + 4pr \\ & \quad = (q-4)(q+2) + 4pr \\ & \quad = q^2 - 2q - 8 + 4pr. \end{aligned}$$

したがって $4pr = 8 + 2q - q^2$ ならば、$\alpha = 4/p$、$\beta = (q-4)/(2p)$ とすれば 3 つの係数がすべて一致し、数列（sequence）$u_n = (v_n - \beta)/\alpha$ は $(*)$ を満たす。これが示すべきことであった。

具体的な数列。ここでは $p = 1$、$q = 2$、$r = 2$ である。$4pr = 8$、$8 + 2q - q^2 = 8 + 4 - 4 = 8$ であるから条件は成り立つ。よって

$$\alpha = 4, \qquad \beta = \frac{2-4}{2} = -1, \qquad \text{したがって} \qquad v_n = 4u_n - 1.$$

考えてみよう 小問 (i) を使うには $u_0 = \sin^2\theta$ が必要である。ここで適切な θ は見つかるだろうか？

$v_0 = 1$ であるから $u_0 = (1+1)/4 = \frac{1}{2}$ が必要であり、$\frac{1}{2} = \sin^2\frac{\pi}{4}$ である。よって $\theta = \pi/4$ とすればよく、小問 (i) より $u_n = \sin^2(2^n\pi/4) = \sin^2(2^{n-2}\pi)$ となる。したがって

$$v_n = 4\sin^2\left(2^{n-2}\pi\right) - 1 = 1 - 2\cos\left(2^{n-1}\pi\right),$$

ここで $2\sin^2 A = 1 - \cos 2A$ を用いた。値を求めると

- $n = 0$：$v_0 = 4\sin^2\frac{\pi}{4} - 1 = 1$；
- $n = 1$：$v_1 = 4\sin^2\frac{\pi}{2} - 1 = 3$；
- $n \geq 2$：2^{n-2} は整数であるから $\sin(2^{n-2}\pi) = 0$ となり、$v_n = -1$。

よって数列は

$$1,\ 3,\ -1,\ -1,\ -1,\ \ldots$$

となる。すなわち $v_0 = 1$、$v_1 = 3$ であり、すべての $n \geq 2$ に対して $v_n = -1$ である。

検算

漸化式を直接くり返し適用してみる：$v_1 = -1 + 2 + 2 = 3$、$v_2 = -9 + 6 + 2 = -1$、$v_3 = -1 - 2 + 2 = -1$。-1 は自分自身に移るので、数列は -1 にとどまり、公式のとおりである。小問 (i) については $\theta = \pi/6$ を試す：$u_0 = \frac{1}{4}$、$u_1 = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \sin^2\frac{\pi}{3}$、$u_2 = 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \sin^2\frac{2\pi}{3}$ となり、予想どおりである。公式 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$ は、多数のランダムな角と最初のいくつかの項についてコンピュータでも確認した。

よくある間違い

- $u_n = \sin^2(2n\theta)$ と書いてしまう。角は毎回 2 倍になるので、$2n$ ではなく 2^n のように増える。

- 初期値 $u_0 = (v_0 - \beta)/\alpha$ が $[0,1]$ に入っていること、すなわち本当に $\sin^2\theta$ の形に書けることの確認を忘れる。
- 定数項の方程式を、問題が導くよう求めている条件としてではなく、3 つ目の未知数を求める式として扱ってしまう。

STEP のその先へ

漸化式 $u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$ は、パラメータが最も極端な値をとるときのロジスティック写像（logistic map）であり、カオス（chaos）の標準的な例である。$u_n = \sin^2(2^n\theta)$ であるから、θ/π を 2 進法で表すと、各ステップは 2 進数の桁を 1 つずらすだけであることがわかる。そのため、近い 2 つの初期値は指数関数的な速さで離れていく。小問 (ii) の置き換えは**共役**（conjugacy）であり、これは 2 つの力学系（dynamical system）が座標変換をすれば実は同じものである、という考え方である。ストロガッツ（Strogatz）の *Nonlinear Dynamics and Chaos*（『非線形ダイナミクスとカオス』）は、これらの考え方へのたいへん読みやすい入門書である。

解答例

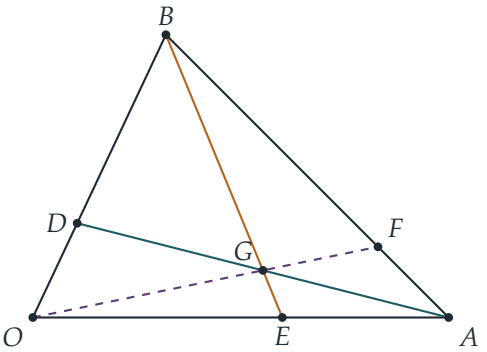
STEP I 2014、第 7 問

純粋数学 ・ 三角形とベクトル

> **STEP I 2014、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q7

鍵となる考え方

すべての点を **a** と **b** の一次結合（linear combination）で表す。既知の 2 点を通る直線上の点は、1 つのパラメータ（parameter）を含むベクトル方程式（vector equation）で表せるので、G は 2 本の直線のそれぞれから 1 通りずつ、合わせて 2 通りに表せる。**a** と **b** は平行でない（三角形が退化（degenerate）していない）ので係数を比較（comparing coefficients）してよく、その結果、2 つのパラメータについての簡単な方程式が 2 つ得られる。



解答

まず D と E の位置を求める。$BD = r\,DO$ であるから、点 D は O から B へ向かって全体の $\frac{1}{1+r}$ だけ進んだ点である。$OE = s\,EA$ であるから、点 E は O から A へ向かって

全体の $\frac{s}{1+s}$ だけ進んだ点である。よって

$$\mathbf{d} = \frac{1}{1+r}\,\mathbf{b}, \qquad \mathbf{e} = \frac{s}{1+s}\,\mathbf{a}.$$

小問 (i)

直線 AD 上の一般の点は

$$\mathbf{a} + \lambda(\mathbf{d} - \mathbf{a}) = (1-\lambda)\,\mathbf{a} + \frac{\lambda}{1+r}\,\mathbf{b},$$

であり、直線 BE 上の一般の点は

$$\mathbf{b} + \mu(\mathbf{e} - \mathbf{b}) = \frac{\mu s}{1+s}\,\mathbf{a} + (1-\mu)\,\mathbf{b}.$$

である。G においてこれらは等しい。

> **考えてみよう** なぜ $\mathbf{a}$ の係数どうし、$\mathbf{b}$ の係数どうしをそれぞれ別々に等しいとおいてよいのだろうか。

O、A、B は本当の三角形をなすので、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は零ベクトルでなく、互いに平行でもない。もし $\alpha \neq \alpha'$ で $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \alpha'\mathbf{a} + \beta'\mathbf{b}$ が成り立つとすると、$\mathbf{a}$ は $\mathbf{b}$ の実数倍となってしまい、これは不可能である。よって

$$1 - \lambda = \frac{\mu s}{1+s}, \qquad \frac{\lambda}{1+r} = 1 - \mu.$$

第 2 式から $\lambda = (1+r)(1-\mu)$ が得られる。これを第 1 式に代入すると

$$\begin{aligned} 1 - (1+r)(1-\mu) &= \frac{\mu s}{1+s} \\ \mu\left[(1+r) - \frac{s}{1+s}\right] &= r \\ \mu\,\frac{(1+r)(1+s) - s}{1+s} &= r \\ \mu\,\frac{1+r+rs}{1+s} &= r, \end{aligned}$$

となるので

$$\mu = \frac{r(1+s)}{1+r+rs}.$$

である。$r, s > 0$ より $1 + r + rs > 0$ であるから、この割り算は許される。この μ の値を BE の式に代入すると、$\mathbf{a}$ の係数は

$$\frac{\mu s}{1+s} = \frac{rs}{1+r+rs},$$

であり、$\mathbf{b}$ の係数は

$$1 - \mu = \frac{1+r+rs-r-rs}{1+r+rs} = \frac{1}{1+r+rs}.$$

である。したがって

$$\mathbf{g} = \frac{rs}{1+r+rs}\,\mathbf{a} + \frac{1}{1+r+rs}\,\mathbf{b},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

直線 OG は原点を通るので、その上の点はすべて $\mathbf{g}$ の実数倍 $k\mathbf{g}$ で表される：

$$k\mathbf{g} = \frac{k}{1+r+rs}\left(rs\,\mathbf{a} + \mathbf{b}\right).$$

直線 AB は点 $(1-\nu)\mathbf{a} + \nu\mathbf{b}$ 全体からなるので、点 $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ が直線 AB 上にあるのは $\alpha + \beta = 1$ のとき、かつそのときに限る。よって F では $k(rs+1) = 1+r+rs$ でなければならず、

$$\mathbf{f} = \frac{rs}{1+rs}\,\mathbf{a} + \frac{1}{1+rs}\,\mathbf{b}.$$

となる。一方、$AF = t\,FB$ は、F が A から B へ向かって全体の $\frac{t}{1+t}$ だけ進んだ点であることを意味する：

$$\mathbf{f} = \frac{1}{1+t}\,\mathbf{a} + \frac{t}{1+t}\,\mathbf{b}.$$

$\mathbf{a}$ の係数を比較する（先ほどと同じ理由で許される）と $1+t = \dfrac{1+rs}{rs}$ となるので

$$t = \frac{1}{rs}.$$

である。$\mathbf{b}$ の係数も一致している：$\dfrac{t}{1+t} = \dfrac{1/(rs)}{(1+rs)/(rs)} = \dfrac{1}{1+rs}$。

検算

- **中線**。$r = s = 1$ のとき、D と E は中点であるから、G は重心（centroid）になるはずである。公式から $\mathbf{g} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$ が得られ、これは正しい。また $t = 1$ であるから F は AB の中点であり、3 本の中線（median）は 1 点で交わる（concurrent）ので、確かにそうなるべきである。
- **チェバの定理**。答えは $r \cdot s \cdot t = 1$、すなわち $\dfrac{BD}{DO} \cdot \dfrac{OE}{EA} \cdot \dfrac{AF}{FB} = 1$ を述べている。これは 1 点で交わる直線 AD、BE、OF に対するチェバの定理（Ceva's theorem）そのものである。
- **数値例**。$\mathbf{a} = (5,0)$、$\mathbf{b} = (0,5)$、$r = 2$、$s = 3$ とする。このとき $D = (0, \frac{5}{3})$、$E = (\frac{15}{4}, 0)$ であり、公式から $G = (\frac{30}{9}, \frac{5}{9}) = (\frac{10}{3}, \frac{5}{9})$ が得られる。この点は方程式 $x + 3y = 5$ で表される AD 上にあり、方程式 $4x + 3y = 15$ で表される BE 上にもある。直線 OG

は $x+y=5$ と $F=(\frac{30}{7},\frac{5}{7})$ で交わり、$\overrightarrow{AF}=(-\frac{5}{7},\frac{5}{7})$、$\overrightarrow{FB}=(-\frac{30}{7},\frac{30}{7})$ であるから $AF:FB=1:6$ となり、$t=\frac{1}{6}=\frac{1}{rs}$ を得る。さらに、2000 個の無作為な三角形と比について、厳密な有理数演算を用いたコンピュータ計算でも公式が確かめられている。

よくある間違い

- 比を逆に取ってしまう：$BD=r\,DO$ のとき、D は O から B へ向かって全体の $\frac{1}{1+r}$ の位置にあり、$\frac{r}{1+r}$ ではない。
- 係数比較が正当である理由を述べずに比較してしまう：そのためには **a** と **b** が平行でないことが必要である。
- 小問 (ii) で **g** の実数倍を考えるのを忘れる：G 自身は AB 上にはない。その係数の和は 1 より小さいからである。

STEP のその先へ

f の係数のように和が 1 になる係数は**重心座標**（barycentric coordinates）である。重心座標は点を頂点における重みによって表すものであり、これを使うとチェバの定理やメネラウス（Menelaus）の定理のような結果がほとんど自動的に得られる。線形代数の言葉でいえば、係数比較がうまくいくのは、**a** と **b** が一次独立（linearly independent）であり、したがって平面の基底（basis）をなすからである。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）では、基底と座標が丁寧に展開されている。

解答例

STEP I 2014、第 8 問

純粋数学 • 直線族の包絡線

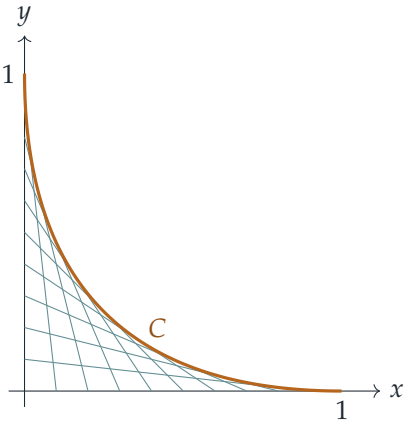
STEP I 2014、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s1-q8

鍵となる考え方

各直線を切片形（intercept form）$\frac{x}{a}+\frac{y}{1-a}=1$ で表す。すると 2 直線の交点は連立一次方程式からただちに求まり、a と b について対称な形で得られる。$b\to a$ とすると、直線がその「隣」の直線と交わる点が得られ、これらの点はすべての直線 L_a が接する曲線を描く。曲線 C はこの直線族の**包絡線**（envelope）であり、小問 (iii) はこのことを逆の方向から確かめるものである。



解答

$(a,0)$ と $(0,1-a)$ を通る直線の切片は a と $1-a$ であるから、

$$L_a:\ \frac{x}{a}+\frac{y}{1-a}=1,\qquad \text{すなわち}\qquad (1-a)x+ay=a(1-a).$$

小問 (i)

次の連立方程式を解く。

$$(1-a)x + ay = a(1-a),$$
$$(1-b)x + by = b(1-b).$$

y を消去するために、第 1 式に b を、第 2 式に a を掛けて辺々引くと、

$$\big[b(1-a) - a(1-b)\big]x = ab(1-a) - ab(1-b), \qquad \text{すなわち} \qquad (b-a)x = ab(b-a).$$

$a \neq b$ であるから $b-a$ で割ることができ、$x = ab$ を得る。これを第 1 式に代入すると、

$$ay = a(1-a) - (1-a)ab = a(1-a)(1-b),$$

となり、$a \neq 0$ であるから $y = (1-a)(1-b)$ である。よって L_a と L_b の交点は

$$\big(ab,\ (1-a)(1-b)\big).$$

(当然そうなるべきとおり、答えは a と b について対称である。この点が L_b 上にもあることも確かめられる：$(1-b)ab + b(1-a)(1-b) = b(1-b)\big(a + 1 - a\big) = b(1-b)$。)

小問 (ii)

両座標はともに b の多項式であるから連続であり、$b \to a$ のときの極限（limit）は単に $b = a$ における値である：

$$(x, y) = \big(a^2,\ (1-a)^2\big).$$

$0 < a < 1$ より $0 < x = a^2 < 1$ であり、$a > 0$ であるから正の平方根をとって $\sqrt{x} = a$ となる。したがって

$$y = (1-a)^2 = (1-\sqrt{x})^2,$$

となり、極限の点は求めるとおり C 上にある。

小問 (iii)

C 上の任意の点をとる。その x 座標は $(0,1)$ に属するので、$t = \sqrt{x} \in (0,1)$ として t^2 と書くことができ、その点は $\big(t^2, (1-t)^2\big)$ である。

$y = (1-\sqrt{x})^2$ を連鎖律（chain rule）で微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2(1-\sqrt{x}) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}},$$

であり、$x = t^2$ ではこれは $-\frac{1-t}{t}$ となる。この点における接線（tangent）は

$$y - (1-t)^2 = -\frac{1-t}{t}\left(x - t^2\right).$$

考えてみよう この直線が L_a のひとつであることは、どうすればわかるだろうか？

直線 L_a は 2 つの切片によって決まり、それらは a と $1-a$ でなければならない。そこで接線の切片を求める。

- $y=0$ とおくと：$-(1-t)^2 = -\frac{1-t}{t}(x-t^2)$。$1-t \neq 0$ であるから約分して $x-t^2=t(1-t)$ を得るので、$x=t$ である。
- $x=0$ とおくと：$y=(1-t)^2+\frac{1-t}{t}t^2=(1-t)^2+t(1-t)=1-t$。

よって接線は $0<t<1$ として $(t,0)$ と $(0,1-t)$ を通り、まさに L_t である。C のすべての点はある $t\in(0,1)$ から得られるので、C のすべての接線は L_a の形をしている（接点において $a=\sqrt{x}$）。以上で証明が完了する。

$(a^2,(1-a)^2)$ における接線は L_a であり、この点はちょうど小問 (ii) で L_a から得られた点であることに注意しよう。すなわち、各直線は自身の極限の交点において C に接している。

検算

- $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{3}$ のとき、小問 (i) から $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)$ が得られる。$L_{1/2}$ 上：$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$。$L_{1/3}$ 上：$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$。
- $x=\frac{1}{4}$ において曲線は $y=\frac{1}{4}$、傾き -1 であるから、接線は $x+y=\frac{1}{2}$ であり、これは $(\frac{1}{2},0)$ と $(0,\frac{1}{2})$ を通る $L_{1/2}$ である。
- 曲線そのものは x と y について対称な放物線（parabola）$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ の一部であり、直線族の対称性 $a\leftrightarrow 1-a$ と一致している。

よくある間違い

- 小問 (ii) で $\sqrt{x}=a$ の根拠を述べ忘れること。これには $a>0$ が必要であり、それは問題で与えられている。
- 小問 (iii) で、L_a が C に接することだけを示してしまうこと。問題が求めているのはその逆である：C の任意の接線から出発して、それがある L_a であることを示さなければならない。

STEP のその先へ

曲線 C は直線族 L_a の**包絡線**、すなわちそのすべての直線に接する曲線である。一般に、曲線族 $F(x,y,a)=0$ の包絡線は、$F=0$ と $\partial F/\partial a=0$ から a を消去することで求められる。これは小問 (ii) における「$b\to a$ とする」極限の微分法による言い換えである。包絡線は光学において火線（caustic）として現れ、たとえばコーヒーカップの中に見える明るい光の曲線がそれである。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この趣旨の問題がさらに収められている。

解答例

STEP I 2014、第 9 問

力学 ・ 水平方向の力を受ける放物運動

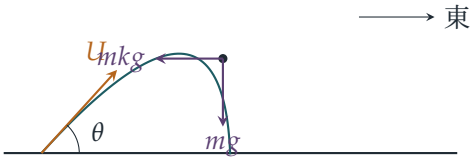
> **STEP I 2014、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q9

鍵となる考え方

2 つの力はどちらも一定なので、各方向の加速度（acceleration）は一定であり、通常の放物運動（projectile motion）とまったく同じように水平方向と鉛直方向の運動を別々に扱うことができる。鉛直方向の運動は西向きの力の影響をまったく受けない。新しい点は、水平方向の速度が一定の割合で減少し続けるため、粒子はある瞬間に東への移動をやめ、その後は西へ戻っていくことである。軌道全体の形は、その瞬間が最高点や着地と比べて**いつ**訪れるかによって決まる。

解答

粒子を鉛直面内を運動する質点（point mass）とみなし、重力と与えられた水平方向の力以外には力がはたらかないとする。東向きに x 軸、鉛直上向きに y 軸をとり、投射点を原点とする。



時刻 T_H と T_L

各方向についてニュートンの運動の第 2 法則（Newton's second law）を書き、m で割ると

$$\ddot{x} = -kg, \qquad \ddot{y} = -g.$$

を得る。初速度は $(U\cos\theta,\ U\sin\theta)$ であるから、2 回積分して

$$\dot{x} = U\cos\theta - kgt, \qquad x = Ut\cos\theta - \tfrac{1}{2}kgt^2,$$
$$\dot{y} = U\sin\theta - gt, \qquad y = Ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

となる。最高点に達するのは $\dot{y} = 0$ のときであり、粒子が着地するのは $t > 0$ で $y = 0$ となるときである：

$$\boxed{T_H = \frac{U\sin\theta}{g}, \qquad T_L = \frac{2U\sin\theta}{g}.}$$

西向きの力には鉛直成分がないので、これらは西向きの力がない場合と同じである。

T の意味

与えられた時刻 $T = \dfrac{U\cos\theta}{kg}$ は、ちょうど $\dot{x} = 0$ となる時刻である。T より前には粒子は東へ動いており、T より後には西へ動く。したがって、時刻 T に粒子がまだ空中にあれば、それは粒子が**最も東に**位置する瞬間である。3 つの時刻を比べると

$$\frac{T_H}{T} = \frac{U\sin\theta}{g}\cdot\frac{kg}{U\cos\theta} = k\tan\theta, \qquad \frac{T_L}{T} = 2k\tan\theta.$$

となる。粒子の着地位置も知っておくと役に立つ：

$$x(T_L) = T_L\left(U\cos\theta - \tfrac{1}{2}kgT_L\right) = \frac{2U^2\sin\theta}{g}(\cos\theta - k\sin\theta) = \frac{2U^2\sin\theta\cos\theta}{g}(1 - k\tan\theta).$$

これは $k\tan\theta < 1$ ならば正（出発点より東）、$k\tan\theta > 1$ ならば負（西）である。

? **考えてみよう** 軌道はもはや対称ではない。では、実際にはどのような形をしているのだろうか？

加速度 $(-kg, -g)$ は一定なので、軌道はやはり放物線（parabola）であるが、その軸は傾いている。すなわち、西寄りの下向きにはたらく大きさ $g\sqrt{1+k^2}$ の「重力」のもとで得られる放物線である。最高点はもはや放物線の頂点ではなく、以下の 3 つの場合は、最も東の点（時刻 T）がどこに来るかについてのものである。

3 つの場合

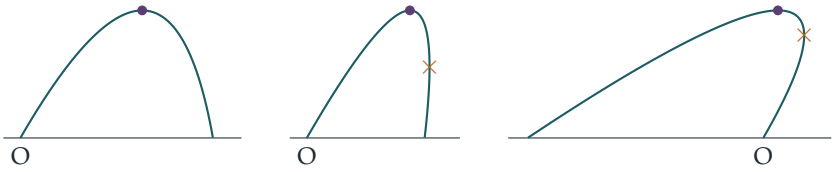
$k\tan\theta < \frac{1}{2}$ の場合。このとき $T_H < T_L < T$ である。粒子は東向きの速度がなくなる前に着地するので、終始東へ動き続ける。軌道は通常の放物運動の軌道に似ており、最高点まで上昇した後、水平方向の速さが減り続けるため、上るときよりも急な角度で落ちてくる。着地点は出発点より東である。

$\frac{1}{2} < k\tan\theta < 1$ の場合。このとき $T_H < T < T_L$ である。粒子はまだ東へ動いている間に最高点を通過し、下降しながら時刻 T まで東へ進み続ける。時刻 T には速度は鉛直

下向きとなり、その後、着地する前に西へ巻き戻るように曲がる。$k\tan\theta < 1$ であるから着地点はやはり出発点より東であるが、最も東の点よりは西である。

$k\tan\theta > 1$ の場合。このとき $T < T_H$ である。粒子がまだ上昇している間に東向きの運動が止まり、その瞬間、粒子は鉛直上向きに動いている。粒子はすでに西へ動きながら最高点に達し、投射点より**西**に着地する。

下の図は、$\theta = 60^\circ$ とし、U と g を共通にした 3 つの場合を示したもので、それぞれ $k\tan\theta \approx 0.35$、0.6、1.8 である。点は時刻 T_H における最高点、× 印は時刻 T における最も東の点を表し、O は投射点である。



$k\tan\theta < \frac{1}{2}$　　$\frac{1}{2} < k\tan\theta < 1$　　$k\tan\theta > 1$

$k\tan\theta = 1$ の場合

このとき $T = T_H$ であるから、最高点において速度の**両方の**成分が同時に 0 となり、粒子は一瞬静止する。また $x(T_L) = 0$ であるから、粒子は投射点に戻って着地する。

実は、この運動は直線上の運動である。$\tan\theta = 1/k$ のとき、初速度 $U(\cos\theta, \sin\theta)$ は $(k, 1)$ の正の定数倍であり、一方、加速度 $(-kg, -g) = -g(k, 1)$ はちょうど逆向きである。加速度が一定で速度と正反対の向きをもつ粒子は直線上を動く。すなわち粒子は、大きさ $g\sqrt{1+k^2}$ で減速しながら投射の方向の直線を上っていき、時刻 T_H に止まり、同じ直線をまっすぐ滑り戻って、時刻 $T_L = 2T_H$ に出発点に着地する。このことは運動方程式からも確かめられる。$k = \cot\theta$ とすると

$$x\tan\theta = Ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2 = y \quad \text{任意の} t,$$

が成り立つので、粒子は直線 $y = x\tan\theta$ から決して離れない。

検算

- $k \to 0$ とすると $T \to \infty$ となるので、常に 1 つ目の場合にあたり、$x(T_L)$ はおなじみの水平到達距離 $U^2\sin 2\theta/g$ になる。
- 着地位置 $\frac{2U^2\sin\theta\cos\theta}{g}(1 - k\tan\theta)$ はちょうど $k\tan\theta = 1$ で符号が変わり、2 つ目と 3 つ目の場合の境界と一致する。
- $U = g = 1$、$\theta = 60^\circ$、$k = 0.45$ とすると、粒子は $x \approx 0.191$ に着地するが、$T_H \approx 0.87$ と $T_L \approx 1.73$ の間の時刻 $T \approx 1.11$ に $x = \frac{\cos^2\theta}{2k} \approx 0.278$ に達するので、確かに着地

前に引き返している。運動を一歩ずつ数値積分すると、3 つの時刻と着地点のすべてが一致する。

よくある間違い

- 西向きの力が鉛直方向の運動を変えるとしてしまう：T_H と T_L には k はまったく含まれない。
- 最高点が軌道の「真ん中」だと思い込む。水平方向の力があると軌道は傾いた放物線になるので、最高点と最も東の点は異なる。
- 2 つ目の場合を、粒子が出発点より西に着地するかのように描いてしまう：粒子は引き返すが、$k\tan\theta < 1$ であるから出発点より西に戻るほどではない。

STEP のその先へ

任意の向きの一定の加速度は、常に放物線を生む。ここでは実質的な重力が単に傾いているだけであり、座標軸を回転させてその向きにそろえれば、問題は通常の放物運動に戻る。力に適した座標を選ぶというこの考え方は、大学 1 年の力学の中心をなすものであり、一様な電場中の荷電粒子もまさにこのように振る舞うという話題も同様である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、これらの考え方が丁寧に展開されている。

解答例

STEP I 2014、第 10 問

力学 ・ 衝突と反発係数

STEP I 2014、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s1-q10

鍵となる考え方

どちらの小問も、自由飛行の部分はエネルギーで、各衝突はニュートン（Newton）の実験法則（Newton's experimental law）で扱う。小問 (ii) の要点は、ボール同士が衝突する瞬間、大きいボールはちょうど向きを反転したところであるのに対し、小さいボールはまだ全速力で落下しているという点に気づくことである。すなわち、両者は大きな接近速度で出会い、重い下のボールは軽いボールを出発点よりはるかに高く打ち上げることができる。そこから先は二つの方程式による衝突の問題であり、与えられた数値によって速さの比がきれいに求まる。

解答

両方のボールを鉛直方向に運動する一様な剛体球とみなし、空気抵抗はないものとし、g を重力加速度とする。各衝突は瞬間的であるから、衝突の間に重力が運動量を変化させることはない。

小問 (i)

ボールが地面に触れるのは中心の高さが R になったときであるから、ボールは距離 H だけ落下している。エネルギー保存則（conservation of energy）により、衝突直前の速さは

$$u = \sqrt{2gH}.$$

である。地面は固定されているので、ニュートンの実験法則により跳ね返りの速さは上向きに eu となる。ボールはその後、速さがゼロになるまで上昇する。再びエネルギ

ーにより、さらに

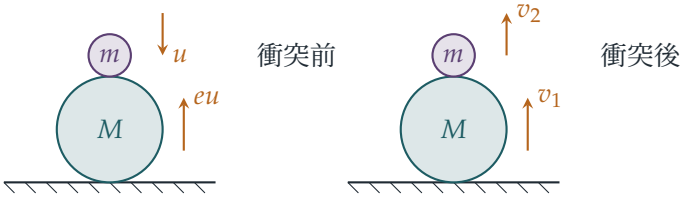
$$\frac{(eu)^2}{2g} = \frac{e^2 \cdot 2gH}{2g} = e^2 H.$$

だけ上昇する。この上昇の始まりでの中心の高さは R であるから、ボールは地面から高さ $R + He^2$ に達する。これが示すべきことであった。

小問 (ii)

二つのボールは一緒に静止状態から自由落下するので、各瞬間において同じ速さをもつ。下のボールは中心が H だけ落下したときに地面に達するので、その瞬間、両方のボールは下向きに $u = \sqrt{2gH}$ で運動している。下のボールは跳ね返り、小問 (i) と同様に上向きの速さ eu で地面を離れる。その直後、まだ u で下向きに運動している上のボールと衝突する。

上向きを正とし、ボール同士の衝突直後の速度を v_1（質量 M のボール）、v_2（質量 m のボール）とする。



運動量保存則（conservation of momentum）により

$$Meu - mu = Mv_1 + mv_2,$$

が成り立ち、ニュートンの実験法則（遠ざかる速さは近づく速さの e 倍であり、近づく速さは $eu + u$ である）により

$$v_2 - v_1 = e(1+e)u.$$

が成り立つ。$v_1 = v_2 - e(1+e)u$ を運動量の式に代入すると、

$$\begin{aligned}(M+m)v_2 &= Meu - mu + Me(1+e)u \\ &= \big(Me(2+e) - m\big)u,\end{aligned}$$

となるので、

$$v_2 = \frac{Me(2+e) - m}{M+m}\,u.$$

である。

考えてみよう 衝突が起こるとき、小さいボールの中心はどこにあるか？

衝突は跳ね返りの直後に起こるので、大きいボールはまだ地面に接している。その中心の高さは R、上端の高さは $2R$ であり、小さいボールの中心の高さは $2R+r$ である。そこから小さいボールはさらに $v_2^2/(2g)$ だけ上昇するので、

$$h = 2R + r + \frac{v_2^2}{2g}.$$

である。与えられた値では $2R+r = 0.45$ であるから $v_2^2/(2g) = 4.05$ であり、また $u^2/(2g) = H = 1.8$ である。割り算をすると

$$\frac{v_2^2}{u^2} = \frac{4.05}{1.8} = \frac{9}{4}, \qquad \text{よって} \qquad v_2 = \tfrac{3}{2}u,$$

となる。ここで、衝突後に小さいボールは上向きに運動するので正の平方根をとった。

$e = \frac{2}{3}$ のとき $e(2+e) = \frac{2}{3}\cdot\frac{8}{3} = \frac{16}{9}$ である。$k = M/m$ とおき、分子と分母を m で割ると、

$$\frac{\frac{16}{9}k - 1}{k+1} = \frac{3}{2} \implies \tfrac{32}{9}k - 2 = 3k + 3 \implies \tfrac{5}{9}k = 5,$$

したがって

$$\frac{M}{m} = 9.$$

である。

検算

- $M/m = 9$ のとき $v_2 = \frac{3}{2}u$、$v_1 = v_2 - \frac{10}{9}u = \frac{7}{18}u$ となる。衝突前の運動量は $9m\cdot\frac{2}{3}u - mu = 5mu$、衝突後は $9m\cdot\frac{7}{18}u + m\cdot\frac{3}{2}u = 5mu$ である。両者は一致する。
- $v_1 < v_2$ であるから、衝突後に二つのボールは離れていく。当然そうでなければならない。
- 数値的には $u = \sqrt{2\times 9.8\times 1.8} \approx 5.94\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$v_2 \approx 8.91\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ であり、この速さで $4.05\,\mathrm{m}$ 上昇するので $h = 4.5$ となる。
- $M \gg m$ のとき $v_2 \to e(2+e)u$ である。$e = 1$ ならばこれは $3u$ となり、完全弾性の「積み重ねたボール」の落下で高さが 9 倍になるというよく知られた結果である。

よくある間違い

- 地面からの最終的な高さを $v_2^2/(2g)$ だけで測ってしまい、衝突が小さいボールの中心の高さ $2R+r$ で起こることを忘れる。

- 遠ざかる速さとして $e \cdot 2u$ や eu を使ってしまう。ボールは互いに向かって運動しているので、近づく速さは $eu + u$ である。
- 符号の誤り。上向きを正と定め、衝突前の上のボールの速度を $-u$ とすること。

STEP のその先へ

積み重ねたボールの落下は、運動量を軽い物体へと集中させる仕組みを示す見事な実演である。いくつものボールを、それぞれが下のボールより軽くなるように積み上げた塔では、一番上のボールを放した高さの何倍もの高さまで打ち上げることができる。このような衝突を解析する最もすっきりした方法は、運動量ゼロの座標系（重心系、zero-momentum (centre-of-mass) frame）で考えることである。そこでは各ボールの速度は単に向きが反転し、e 倍されるだけである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、衝突と重心系を丁寧に展開している。

解答例

STEP I 2014、第 11 問

力学 ・ 連結した滑車系

> **STEP I 2014、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q11

鍵となる考え方

各質点についてニュートンの運動の第 2 法則（Newton's second law）を立てる。張力（tension）は糸 1 本につき 1 つずつ置き、すべての質点の加速度を糸による拘束条件（constraint）から求める。システム II で重要なのは、滑車（pulley）P_1 が**軽い**という事実である。P_1 にはたらく力の合力は 0 でなければならない（さもなければ加速度が無限大になってしまう）。したがって、上の糸の張力はちょうど下の糸の張力の 2 倍となる。このことを押さえれば、P_1 とそれにつながる 2 つの質点は、M に対してちょうど質量 4μ の 1 つの質点と同じようにはたらく。

解答

以下を通して、質点は大きさのない点質量（point mass）、糸は軽くて伸びない（inextensible）もの、滑車はなめらかで軽いものとしてモデル化する。したがって、各糸の張力は糸のどこでも等しい。

小問 (i)

糸の張力を T とする。糸は伸びないので、M が下向きに加速度 a_1 で運動するとき、m は上向きに加速度 a_1 で運動する。運動の向きを正として各質点にニュートンの第 2 法則を適用すると、

$$\begin{aligned} M: &\quad Mg - T = Ma_1, \\ m: &\quad T - mg = ma_1. \end{aligned}$$

辺々を加えると $(M-m)g=(M+m)a_1$ となるので、

$$a_1=\frac{M-m}{M+m}\,g,$$

となり、題意が示された。これを m の式に代入すると、

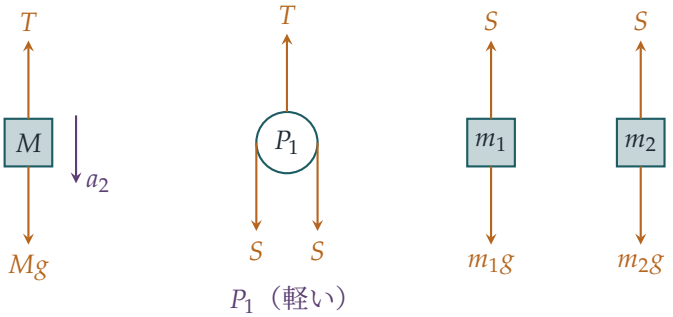
$$T=m(g+a_1)=m\cdot\frac{2M}{M+m}\,g=\frac{2Mmg}{M+m}.$$

糸のまっすぐな 2 つの部分はどちらも滑車から鉛直下向きに出ており、それぞれ張力 T で引くので、張力によって滑車にはたらく力は

$$2T=\frac{4Mmg}{M+m}\quad\text{鉛直下向き。}$$

小問 (ii)

固定滑車 P にかかる糸の張力を T、P_1 にかかる糸の張力を S とする。



軽い滑車。 P_1 にはたらく力は、上向きの T と下向きの $2S$ である（自身の重さは 0）。質量が 0 なので $T-2S=0\cdot(\text{加速度})=0$ となり、

$$T=2S.$$

考えてみよう m_1 と m_2 の加速度は、M の加速度とどのような関係にあるか。

上の糸は伸びないので、M が下向きに加速度 a_2 で運動するとき、P_1 は**上向き**に加速度 a_2 で運動する。下の糸が定めるのは、m_1 と m_2 の**P_1 に対する相対的な**運動だけである。すなわち、m_1 が P_1 に対して下向きに加速度 b で運動するとき、m_2 は P_1 に対して上向きに加速度 b で運動する。これに P_1 の運動を加えると、実際の加速度は

$$m_1:\ b-a_2\ \text{下向き},\qquad m_2:\ b+a_2\ \text{上向き}.$$

ここで b は 2 つ目の未知数であり、後で消去する。

運動方程式（equations of motion）。

$$\begin{aligned} M: &\quad Mg - 2S = Ma_2, \\ m_1: &\quad m_1 g - S = m_1(b - a_2), \\ m_2: &\quad S - m_2 g = m_2(b + a_2). \end{aligned}$$

m_1 の式を m_1 で、m_2 の式を m_2 で割ると、

$$g - \frac{S}{m_1} + a_2 = b = \frac{S}{m_2} - g - a_2.$$

よって

$$2(g + a_2) = S\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = S\,\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = \frac{S}{\mu},$$

したがって $S = 2\mu(g + a_2)$、$T = 2S = 4\mu(g + a_2)$ である。これを M の式に代入すると、

$$Mg - 4\mu g - 4\mu a_2 = Ma_2 \quad \Longrightarrow \quad (M + 4\mu)a_2 = (M - 4\mu)g,$$

ゆえに

$$a_2 = \frac{M - 4\mu}{M + 4\mu}\,g,$$

となり、題意が示された。これを小問 (i) と比べてみよ。M は、ちょうど質量 4μ の 1 つの質点とつり合わされてぶら下がっているかのようにふるまう。

a_1 と a_2 が等しくなるのはいつか。 $x > 0$ に対して $f(x) = \dfrac{M - x}{M + x}$ とおくと、$a_1 = f(m)\,g$、$a_2 = f(4\mu)\,g$ である。

$$f(x) = \frac{2M}{M + x} - 1$$

であり $M > 0$ なので、f は $x > 0$ で狭義単調減少（strictly decreasing）であり、したがって単射（one-to-one）である。よって $a_1 = a_2$ となるのは $m = 4\mu$ のとき、かつそのときに限る。$m = m_1 + m_2$ とすると、これは

$$m_1 + m_2 = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} \iff (m_1 + m_2)^2 = 4m_1 m_2 \iff (m_1 - m_2)^2 = 0 \iff m_1 = m_2,$$

となる。ここで最初の変形は $m_1 + m_2 > 0$ を掛けるもので、逆にたどることができる。以上で両方向の証明が完了する。

検算

- $m_1 = m_2$ ならば、システム II の下の部分はつり合うので $b = 0$ である。このとき P_1 とその質点は質量 $m_1 + m_2$ の 1 つの物体として動き、システム II はシステム I に帰着する。これはこの場合に $4\mu = m_1 + m_2$ となることと一致する。

- $m_2 \to 0$ ならば $\mu \to 0$ かつ $a_2 \to g$ となる。m_1 は単に落下するだけで張力を受けないので、M を引き止める重いものが何もない。妥当である。
- 小問 (ii) の張力 $T = 4\mu(g + a_2)$ は小問 (i) からも求められる。P_1 が固定されていれば、それにはたらく力は $4m_1m_2g/(m_1 + m_2) = 4\mu g$ となる。上向きに加速度 a_2 で運動することは、g を $g + a_2$ に置き換えることにほかならない。
- 数値で確かめると、$M = 3$、$m_1 = 1$、$m_2 = 2$ のとき $\mu = \frac{2}{3}$ であり、$a_2 = \frac{1}{17}g \approx 0.576\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ となる（$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ とする）。4 つの方程式を直接解いても同じ値が得られる。

よくある間違い

- P_1 が動くことを忘れ、m_1 と m_2 の加速度を $b - a_2$ と $b + a_2$ ではなく $\pm b$ と書いてしまう。
- 軽い滑車の上下で $T = S$ としてしまう。P_1 の両側がそれぞれ S で下に引くので、その上の糸は $2S$ を担わなければならない。
- 理由を述べずに $a_1 = a_2 \Rightarrow m = 4\mu$ と結論してしまう。これには f が単射であることが必要である。

STEP のその先へ

この設定はアトウッドの器械（Atwood machine）の中にアトウッドの器械を組み込んだものであり、$\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ は**換算質量**（reduced mass）である。これは、惑星とその恒星のような二体問題（two-body problem）を 1 つの物体の問題に帰着させるときに現れるのと同じ量である。このような拘束のある系は、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）を用いると最もすっきりと扱える。ラグランジュ力学では独立な座標（ここでは P_1 の高さと、それに対する m_1 の位置）を直接用い、張力をまったく必要としない。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は滑車の系を丁寧に扱い、さらに二体問題における換算質量へと進んでいる。

解答例

STEP I 2014、第 12 問

確率・統計 ・ 離散確率変数

> **STEP I 2014、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q12

鍵となる考え方

2 乗すれば絶対値記号（modulus signs）は消える。したがって $\mathrm{E}(X^2)$ を求めるには、サイコロの目 S についての $\mathrm{E}(S)$ と $\mathrm{E}(S^2)$ だけがあればよく、それを硬貨の 2 通りの結果について平均すればよい。すると、整数であるという条件は $(k-1)^2$ に関する整除性（divisibility）の問題に帰着し、1 桁の候補はごくわずかしか残らない。k が決まれば X のとる値は 5 つだけであり、2 回戦のゲームは組の短い列挙で処理できる。

解答

$\mathrm{E}(X^2)$ を求める

サイコロの出た目を S とする。このとき

$$\mathrm{P}(S=1)=\tfrac{1}{2},\qquad \mathrm{P}(S=2)=\tfrac{1}{3},\qquad \mathrm{P}(S=3)=\tfrac{1}{6}.$$

である。よって

$$\mathrm{E}(S)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{3}{6}=\tfrac{5}{3},\qquad \mathrm{E}(S^2)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{4}{3}+\tfrac{9}{6}=\tfrac{10}{3}.$$

硬貨は公平で、サイコロとは独立（independent）である。$|a|^2 = a^2$ であるから、表が出たとき $X^2 = (kS-1)^2$、裏が出たとき $X^2 = (k-S)^2$ となる。したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2) &= \tfrac{1}{2}\mathrm{E}\left[(kS-1)^2\right] + \tfrac{1}{2}\mathrm{E}\left[(k-S)^2\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[k^2\mathrm{E}(S^2) - 2k\mathrm{E}(S) + 1\right] + \tfrac{1}{2}\left[k^2 - 2k\mathrm{E}(S) + \mathrm{E}(S^2)\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{10}{3}k^2 - \tfrac{10}{3}k + 1 + k^2 - \tfrac{10}{3}k + \tfrac{10}{3}\right] \\ &= \frac{13k^2 - 20k + 13}{6}.\end{aligned}$$

一方、

$$k + \frac{13(k-1)^2}{6} = \frac{6k + 13k^2 - 26k + 13}{6} = \frac{13k^2 - 20k + 13}{6},$$

であるから、求める通り $\mathrm{E}(X^2) = k + \frac{13}{6}(k-1)^2$ が成り立つ。

k を求める

k は整数であるから、$\mathrm{E}(X^2)$ が整数となるのは、6 が $13(k-1)^2$ を割り切るときであり、かつそのときに限る。13 と 6 は互いに素（coprime）であるから、これは $6 \mid (k-1)^2$、すなわち 2 と 3 がともに $(k-1)^2$ を割り切ることを意味する。2 と 3 は素数（prime）であるから、それぞれが $k-1$ 自身を割り切らなければならず、したがって $6 \mid k-1$ である。$1 \le k \le 9$ より、$k = 1$ または $k = 7$ が残る。

> **考えてみよう** どちらの候補でも $\mathrm{E}(X^2)$ は整数になる。一方を除外するのはどの条件か。

$\mathrm{E}(X)$ に関する条件である。$k = 1$ のとき、どちらの規則でも $X = |S-1| = S-1$ となるので、$\mathrm{E}(X) = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$ であり、これは整数ではない。

$k = 7$ のとき、どの目についても $7S - 1 > 0$ かつ $7 - S > 0$ であるから、絶対値記号を外すことができて

$$\mathrm{E}(X) = \tfrac{1}{2}\left(7 \cdot \tfrac{5}{3} - 1\right) + \tfrac{1}{2}\left(7 - \tfrac{5}{3}\right) = \tfrac{16}{3} + \tfrac{8}{3} = 8,$$

となり、また $\mathrm{E}(X^2) = 7 + \frac{13}{6} \cdot 36 = 85$ である。どちらも正の整数であるから、$k = 7$ である。

X の分布

$k = 7$ のとき、表が出れば $X = 7S - 1 \in \{6, 13, 20\}$、裏が出れば $X = 7 - S \in \{6, 5, 4\}$ である。（硬貨、サイコロ）の各組合せの確率は $\frac{1}{2}\mathrm{P}(S = s)$ であり、値 6 は表かつ $S = 1$ の場合と、裏かつ $S = 1$ の場合の両方から生じる。よって分布（distribution）は次の

ようになる。

x	4	5	6	13	20
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

確率の和は 1 になる。

2 回戦のゲーム

2 回の結果を X_1, X_2 とする。各回で新たにサイコロを振り硬貨を投げるので、これらは独立であり、それぞれ上の分布に従う。和が 25 を超える組と、和がちょうど 25 になる組を求めればよい。

> **考えてみよう** 合計が 25 を超える組を、漏れなく書き出すにはどうすればよいか。

大きい方の値で分類すればよい。どちらの結果も 20 でないとき、合計の最大値は $13+13=26$ であり、$13+6=19$ ではすでに小さすぎるので、該当する組は $(13,13)$ だけである。一方の結果が 20 のとき、他方は 5 より大きくなければならないので、6, 13, 20 のいずれかである。他方が 5 のときは合計がちょうど 25 になる。よって

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_1+X_2>25) &= \mathrm{P}(13,13)+2\,\mathrm{P}(20,6)+2\,\mathrm{P}(20,13)+\mathrm{P}(20,20)\\ &= \tfrac{1}{36}+2\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{2}+2\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{144}\\ &= \frac{4+12+4+1}{144}=\frac{7}{48},\end{aligned}$$

である。ここで係数 2 は 2 通りの順序を数えたものである。同様に

$$\mathrm{P}(X_1+X_2=25)=2\,\mathrm{P}(20,5)=2\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{6}=\tfrac{1}{36}.$$

したがって、賭け手が受け取ると期待される金額（ポンド単位）は

$$\frac{7w}{48}+\frac{1}{36}.$$

である。

これが賭け金（stake）£1 より小さいとき、ゲームはカジノに有利である。

$$\frac{7w}{48}+\frac{1}{36}<1 \iff \frac{7w}{48}<\frac{35}{36} \iff w<\frac{35\cdot 48}{36\cdot 7}=\frac{20}{3}.$$

w は整数であるから、とりうる最大の値は $w=6$ である。$\frac{20}{3}$ は整数ではないので、公平なゲーム（fair game、受け取る金額の期待値がちょうど £1）を認めるかどうかにかかわらず、答えは変わらない。

検算

- 表から $\mathrm{E}(X) = \frac{4+10+36+26+20}{12} = 8$、$\mathrm{E}(X^2) = \frac{16+50+216+338+400}{12} = 85$ となり、公式と一致する。
- $w = 6$ のとき、受け取る金額の期待値は $\frac{7}{8} + \frac{1}{36} = \frac{65}{72} \approx £0.90$ で賭け金を下回る。$w = 7$ のときは $\frac{151}{144} \approx £1.05$ で賭け金を上回る。
- 2 回戦のゲーム 2×10^5 回をコンピュータでシミュレーションしたところ、合計が 25 を超えたのは約 14.5%（$\frac{7}{48} \approx 14.6\%$）、ちょうど 25 になったのは約 2.8%（$\frac{1}{36} \approx 2.8\%$）であった。

よくある間違い

- 分布の中で $X = 6$ を表の場合と裏の場合で 2 回書き出してしまい、まとめて $\mathrm{P}(X = 6) = \frac{1}{2}$ としない。
- $(20, 6)$ のような異なる値の組について、2 通りの順序を表す係数 2 を忘れる。
- 「和が 25 に等しい」場合を $£w$ の勝ちや負けとして扱ってしまう。この場合、賭け手は賭け金が戻ってくるだけである。

STEP のその先へ

$\mathrm{E}(X^2)$ の計算は、全期待値の法則（law of total expectation）$\mathrm{E}(Y) = \sum_i \mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{E}(Y \mid A_i)$ の一例であり、大学 1 年の確率論の講義では絶えず用いられる。2 回戦のゲームは独立な確率変数（random variable）の和の分布、すなわち畳み込み（convolution）に関するものであり、これは母関数（generating function）を使うと見通しよく扱える。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、この両方の考え方を扱っている。

解答例

STEP I 2014、第 13 問

確率・統計 ・ 三角分布

STEP I 2014、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

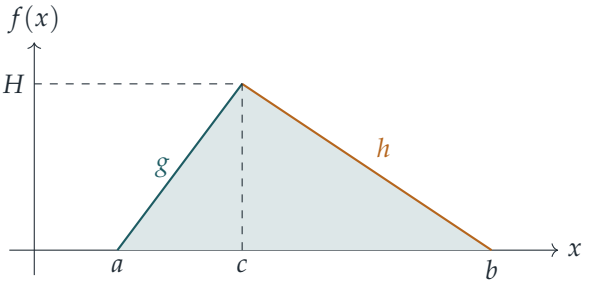
step.maths.org/questions/14-s1-q13

鍵となる考え方

確率密度関数（density）のグラフは、底辺が a から b まで、頂点（apex）が c の真上にある三角形であり、その面積は 1 でなければならない。これで頂点の高さが決まり、あとは各線形（linear）部分が 2 点によって定まる。平均（mean）と中央値（median）については、各線形部分が 0 から始まるように変数をずらすと積分がすっきりする。さらに中央値については、まずそれが c のどちら側にあるかを考えればよい。

解答

以下では常に $a < c < b$ とし、どちらの部分も実際に存在するものとする（問題の公式が意味をもつためには、$c - a$ と $b - c$ が 0 でないことが必要である）。



2 つの線形部分

頂点の高さを $H = g(c) = h(c)$ とおく。f のグラフの下の領域は底辺 $b-a$、高さ H の三角形であり、全確率は 1 であるから、

$$\tfrac{1}{2}(b-a)H = 1, \qquad H = \frac{2}{b-a}.$$

g は線形で $g(a) = 0$ であるから、ある定数 k を用いて $g(x) = k(x-a)$ と書ける。$g(c) = H$ より $k(c-a) = \dfrac{2}{b-a}$ である。よって

$$g(x) = \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)},$$

となり、求める式が得られた。同様に $h(x) = m(b-x)$ かつ $h(c) = H$ であるから、

$$h(x) = \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}.$$

$b-a$、$c-a$、$b-c$ はすべて正であるから、要求どおり g は増加関数、h は減少関数である。

小問 (i)

$\mathrm{E}(X) = I_1 + I_2$ と書く。ただし $I_1 = \int_a^c x\,g(x)\,\mathrm{d}x$、$I_2 = \int_c^b x\,h(x)\,\mathrm{d}x$ である。

I_1 において $x = a+t$ と置換すると、t は 0 から $c-a$ まで動く：

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{(b-a)(c-a)} \int_0^{c-a} (a+t)\,t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{(b-a)(c-a)} \left[\frac{a(c-a)^2}{2} + \frac{(c-a)^3}{3}\right] \\ &= \frac{(c-a)\big(3a + 2(c-a)\big)}{3(b-a)} = \frac{(c-a)(a+2c)}{3(b-a)}. \end{aligned}$$

I_2 において $x = b-s$ と置換すると、s は 0 から $b-c$ まで動く：

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2}{(b-a)(b-c)} \int_0^{b-c} (b-s)\,s\,\mathrm{d}s = \frac{2}{(b-a)(b-c)} \left[\frac{b(b-c)^2}{2} - \frac{(b-c)^3}{3}\right] \\ &= \frac{(b-c)\big(3b - 2(b-c)\big)}{3(b-a)} = \frac{(b-c)(b+2c)}{3(b-a)}. \end{aligned}$$

これらを足すと、分子は

$$\begin{aligned} (c-a)(a+2c) + (b-c)(b+2c) &= \big(ac + 2c^2 - a^2 - 2ac\big) + \big(b^2 + 2bc - bc - 2c^2\big) \\ &= b^2 - a^2 + bc - ac \\ &= (b-a)(b+a+c). \end{aligned}$$

$3(b-a)$ で割ると、

$$\mathrm{E}(X) = \tfrac{1}{3}(a+b+c),$$

となり、求める結果が得られた。（これは三角形の重心（centroid）の x 座標であり、偶然ではない。平均とは、密度関数の下の領域の釣り合いの点なのである。）

小問 (ii)

まず、頂点より左側にどれだけの確率があるかを求める。これは左側の三角形の面積である：

$$\mathrm{P}(X \le c) = \tfrac{1}{2}(c-a)H = \frac{c-a}{b-a}.$$

考えてみよう 中央値が c の左にあるか右にあるかは、どうすれば分かるだろうか？

中央値 M は $\mathrm{P}(X \le M) = \frac{1}{2}$ を満たす。$\mathrm{P}(X \le c) \ge \frac{1}{2}$ ならば中央値は c 上またはその左にあり、そうでなければ右にある。ここで $\frac{c-a}{b-a} \ge \frac{1}{2}$ となるのは $c \ge \frac{1}{2}(a+b)$ のとき、すなわち頂点が $[a,b]$ の中点上またはその右にあるときに限る。したがって、場合分けは c と $\frac{1}{2}(a+b)$ の比較によって決まる。

$c \ge \frac{1}{2}(a+b)$ の場合。 このとき $a < M \le c$ であり、$a \le m \le c$ に対して、a から m までの小さな三角形の面積は

$$\mathrm{P}(X \le m) = \int_a^m g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(m-a)^2}{(b-a)(c-a)}.$$

これを $\frac{1}{2}$ に等しいとおき、正の根をとると（$M > a$ であるから）、

$$M = a + \sqrt{\tfrac{1}{2}(b-a)(c-a)}.$$

$c < \frac{1}{2}(a+b)$ の場合。 このとき中央値は c の右にあり、右端から考える方が簡単である。$c \le m \le b$ に対して、

$$\mathrm{P}(X \ge m) = \int_m^b h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(b-m)^2}{(b-a)(b-c)}.$$

これを $\frac{1}{2}$ に等しいとおき、$M < b$ を用いると、

$$M = b - \sqrt{\tfrac{1}{2}(b-a)(b-c)}.$$

$c = \frac{1}{2}(a+b)$ のとき分布は対称（symmetric）であり、どちらの公式も $M = \frac{1}{2}(a+b)$ を与える（たとえば 1 つ目の公式からは $a + \sqrt{\frac{1}{4}(b-a)^2} = a + \frac{1}{2}(b-a)$ が得られる）。したがって 2 つの場合はつながっている。

検算

- $a = 0$、$b = 4$、$c = 1$ のとき：$\mathrm{P}(X \le c) = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ であるから 2 つ目の場合にあたり、$M = 4 - \sqrt{6} \approx 1.5505$ である。平均は $\frac{5}{3}$ である。コンピュータで 200 000 個の値をシミュレーションしたところ、標本中央値は 1.5505、標本平均は 1.668 であった。

- $a = 0$、$b = 4$、$c = 3$ のとき：1 つ目の場合にあたり、$M = \sqrt{6} \approx 2.449$ である。これは当然そうあるべきとおり、前の例の鏡像になっている。
- 中央値は常に最頻値（mode）c と中点 $\frac{1}{2}(a+b)$ の間にある。たとえば 1 つ目の場合には $M \leq c$ であり、また $c \geq \frac{1}{2}(a+b)$ のとき $(b-a)(c-a) \geq \frac{1}{2}(b-a)^2$ であるから $M \geq \frac{1}{2}(a+b)$ となる。

よくある間違い

- 中央値を求める際に、密度関数の誤った部分を使ってしまう。まず中央値が c のどちら側にあるかを確かめること。
- 負の平方根をとってしまい、M が $[a,b]$ の外に出てしまう。
- 平均の積分を、変数をずらさずに x のまま直接展開する。それでも計算はできるが、式変形がずっと重くなり、誤りが入り込みやすい。

STEP のその先へ

三角分布（triangular distribution）は、c が中点のとき、2 つの独立（independent）な一様確率変数（uniform random variable）の和の分布になっている。また、最小値・最大値・最も起こりやすい値だけが分かっている場合の大まかなモデルとして（たとえばプロジェクト計画において）広く用いられている。独立な確率変数の和の分布を計算すると、畳み込み（convolution）に行き着く。これは大学 1 年次の確率論における中心的な道具である。これについて読むには、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）がよい。

解答例

STEP II 2014、第 1 問

純粋数学 • 三角形の幾何と 2 次方程式

> **STEP II 2014、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q1

鍵となる考え方

A から B へ、折れ線 $A \to P \to Q \to B$ に沿って歩く。3 本の線分の長さはすべて x であり、合わせてちょうど 1 の水平距離を進み、正味の高さ 0 だけ上らなければならない。水平方向と鉛直方向に分解する（resolving）と $x\cos\theta$ と $x\sin\theta$ が得られ、$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ によって未知の角を消去できる。その後はすべて x の二次方程式（quadratic）とその判別式（discriminant）の話である。

解答

A を原点に、B を $(1,0)$ に置き、C は AB の上側にあるとする。P は A から C を通る半直線（ray）上で A から距離 x の点であり、Q は B から C を通る半直線上で B から距離 x の点であるから、

$$P = (x\cos\alpha,\ x\sin\alpha), \qquad Q = (1 - x\cos\beta,\ x\sin\beta).$$

小問 (i)

水平方向。$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{PQ}$、$\overrightarrow{QB}$ の水平成分は $x\cos\alpha$、$x\cos\theta$、$x\cos\beta$ であり、その和は $AB = 1$ に等しい。よって

$$x\cos\theta = 1 - x\cos\alpha - x\cos\beta,$$

となり、これが最初の結果である。（座標で言えば、これは Q と P の x 座標の差である。）

鉛直方向。P の高さは $x\sin\alpha$、Q の高さは $x\sin\beta$ であるから、

$$x\sin\theta = x\sin\beta - x\sin\alpha.$$

（これは決して負にならない。三角形の内角の和は 180° 未満であるから $\alpha \le \beta < 180^\circ - \alpha$ であり、この区間では $\sin\beta \ge \sin\alpha$ となる。よって Q が P より低くなることはない。）

θ の消去。両辺を 2 乗して加え、$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を用いると、

$$x^2 = \big(1 - x(\cos\alpha + \cos\beta)\big)^2 + x^2(\sin\beta - \sin\alpha)^2.$$

右辺を展開すると、x^2 の係数は

$$\begin{aligned}(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2 &= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta) \\ &\quad + 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \\ &= 2 + 2\cos(\alpha+\beta).\end{aligned}$$

となる。よって $x^2 = 1 - 2(\cos\alpha + \cos\beta)x + \big(2 + 2\cos(\alpha+\beta)\big)x^2$ である。x^2 を右辺に移すと

$$\big(1 + 2\cos(\alpha+\beta)\big)x^2 - 2(\cos\alpha + \cos\beta)x + 1 = 0, \qquad (*)$$

となり、題意が示された。

P と Q が辺の延長上にある場合。P が AC の延長（produced）上にあっても、A から C を通る半直線上で A から距離 x の点であることに変わりはないので、その座標はやはり $(x\cos\alpha, x\sin\alpha)$ である。同様に Q もやはり $(1 - x\cos\beta, x\sin\beta)$ である。上の導出はこれ以外に何も用いていない。P から Q への変位は

$$\big(1 - x\cos\alpha - x\cos\beta,\ x\sin\beta - x\sin\alpha\big),$$

であり、$PQ^2 = x^2$ からまったく同じ方程式 $(*)$ が得られる。（このとき x は AC や BC を超えることがあり、$1 - x\cos\alpha - x\cos\beta$ は負になりうるので、θ は鈍角になりうる。しかし 2 乗すると符号は消えるので、これは問題にならない。）

小問 (ii)

方程式 $(*)$ が一次方程式になるのは、ちょうど $1 + 2\cos(\alpha+\beta) = 0$、すなわち $\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{2}$ のときである。$0 < \alpha + \beta < 180^\circ$ であるから、可能性は

$$\alpha + \beta = 120^\circ.$$

のみである。

それ以外のとき $(*)$ は真の二次方程式であり、その判別式の 4 分の 1 は

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}\Delta &= (\cos\alpha + \cos\beta)^2 - \big(1 + 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\big) \\ &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1 + 2\sin\alpha\sin\beta \\ &= 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta \\ &= 1 - (\sin\beta - \sin\alpha)^2,\end{aligned}$$

となる。ここで $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$ と $\cos^2\beta - 1 = -\sin^2\beta$ を用いた。

考えてみよう なぜ $(\sin\beta-\sin\alpha)^2$ は 1 より小さくなければならないのか？

どちらの角も 0° と 180° の間に（両端を含まずに）あるので、$0 < \sin\alpha \le 1$ かつ $0 < \sin\beta \le 1$ である。$(0,1]$ に属する 2 つの数の差は、-1 より大きく 1 より小さい。したがって $(\sin\beta-\sin\alpha)^2 < 1$ であるから $\Delta > 0$ となり、$(*)$ は相異なる 2 つの実数解をもつ。

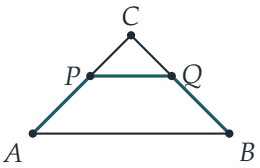
小問 (iii)

(a) $\alpha = \beta = 45^\circ$。このとき $\cos(\alpha+\beta) = \cos 90^\circ = 0$、$\cos\alpha + \cos\beta = \sqrt{2}$ であるから、$(*)$ は

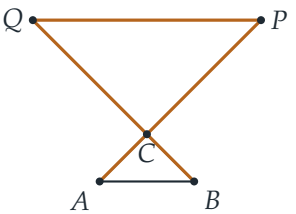
$$x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0, \qquad x = \sqrt{2} \pm 1.$$

となる。この三角形は直角二等辺三角形（right-angled isosceles triangle）であり、$C = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$、$AC = BC = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$ である。

- $x = \sqrt{2}-1 \approx 0.414 < AC$：$P$ と Q は辺上にあり、$P = (1-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1-\frac{1}{\sqrt{2}})$、$Q = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1-\frac{1}{\sqrt{2}})$ である。対称性より PQ は AB に平行であるから、$\theta = 0$ である。確認：$PQ = \sqrt{2}-1 = x$。
- $x = \sqrt{2}+1 \approx 2.414 > AC$：$P$ と Q はそれぞれ AC の延長上と BC の延長上にあり、$P = (1+\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\frac{1}{\sqrt{2}})$、$Q = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\frac{1}{\sqrt{2}})$ である。延長した 2 直線は C で交差しているので、今度は P が Q の**右側**にある。PQ はやはり水平で、長さは $1+\sqrt{2} = x$ である。



$x = \sqrt{2}-1$



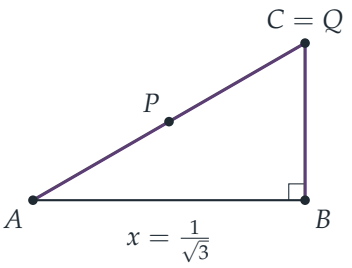
$x = \sqrt{2}+1$

(b) $\alpha = 30^\circ$、$\beta = 90^\circ$。このとき $\alpha+\beta = 120^\circ$ であるから、これは小問 (ii) の一次方程式の場合である。$\cos\alpha + \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より、$(*)$ は

$$-\sqrt{3}\,x + 1 = 0, \qquad x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

となる。この三角形は B で直角であり、$BC = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$、$AC = \frac{2}{\sqrt{3}}$ である。よって $QB = BC$ は Q が C **そのもの**であることを意味し、$AP = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}AC$ より P は AC

の中点（midpoint）にある。すると $PQ = PC = \frac{1}{\sqrt{3}} = x$ となり、確かに条件を満たす。可能性はこれだけである。



2 つ目の解はどこへ行ったのだろうか。$\alpha + \beta = 120^\circ$ のとき、直線 AC と BC は 60° で交わる。すると x が非常に大きいとき、それらの直線上の遠く離れた点 P と Q は、ほぼちょうど距離 x だけ離れており、C とともにほぼ正三角形をなす。$\alpha + \beta \to 120^\circ$ とすると、二次方程式の一方の解は無限大へと逃げていく。

検算

- (a) では $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$ であり、解の積 $1/(1+2\cos 90^\circ) = 1$ と一致する。
- 適当な三角形、たとえば $\alpha = 40^\circ$、$\beta = 70^\circ$ について $(*)$ を解き、P と Q を配置して PQ を測ると、どちらの解についても x に等しくなる。多数のランダムな三角形についてコンピュータで確かめたところ、約 10^{-10} の精度で一致した。
- (b) では $x = 1/\sqrt{3} \approx 0.577$ はちょうど BC に等しく、AC の中点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}})$ は $C = (1, \frac{1}{\sqrt{3}})$ から距離 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ の位置にある。

よくある間違い

- $\cos\beta$ の項の符号を誤る。$\overrightarrow{QB}$ は B **に向かう**ので、Q が B の左側にあっても、その水平成分は $+x\cos\beta$ である。
- 小問 (ii) で $\alpha + \beta = 240^\circ$ を許してしまう。三角形の内角の和は 180° 未満である。
- (b) で、最高次の係数（leading coefficient）がゼロであるのに解の公式（quadratic formula）を使おうとしたり、解が存在しないと結論したりする。

STEP のその先へ

閉じたベクトルの多角形を成分に分解し、$\cos^2 + \sin^2 = 1$ で角を消去するのは、運動学（kinematics）やリンク機構（linkage）の問題における標準的な手法である。今回の折れ線は単純な 3 節リンク機構にほかならない。二次方程式が一次方程式になるときに「無限遠へ逃げる」解は、射影幾何学（projective geometry）を初めて垣間見る機会である。射影幾何学では平行線は無限遠点（point at infinity）で交わり、それらも数に入れれば二次の方程式はつねに 2 つの解をもつ。コクセター（Coxeter）と Greitzer による *Geometry Revisited* は、このレベルで古典幾何学に入門するための素晴らしい本である。

解答例

STEP II 2014、第 2 問

純粋数学 • 積分の不等式

> **STEP II 2014、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q2

この問題は、*Beyond STEP* の第 3.7 節「$\pi^2 \leq 10$」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch03/wirtinger.html

鍵となる考え方

$(*)$ の両辺は、具体的に与えられた f に対しては正確に計算できる積分である。したがって、両端で値が 0 になる関数を一つ選ぶたびに、$(*)$ は π を含む数どうしの不等式（inequality）になる。実質的に選ぶべきものは、$f(0) = f(\pi) = 0$ となるように自由な定数を定めることだけである。端で 0 にならない関数は、ゆっくり変化しながらも大きな値をとりうる。端点での条件が重要なのはこのためである。

解答

小問 (i)

$f(x) = \sin nx$ とすると $f'(x) = n\cos nx$ である。$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ と $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$ を用いると、

$$\int_0^{\pi} \sin^2 nx\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left[x - \tfrac{1}{2n}\sin 2nx\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$
$$\int_0^{\pi} n^2\cos^2 nx\,\mathrm{d}x = \tfrac{n^2}{2}\left[x + \tfrac{1}{2n}\sin 2nx\right]_0^{\pi} = \frac{n^2\pi}{2},$$

となる。ここで、整数 n に対して $\sin 2n\pi = 0$ であることを用いた。$n \geq 1$ より $n^2 \geq 1$ であるから $\frac{\pi}{2} \leq \frac{n^2\pi}{2}$ となり、$(*)$ が成り立つ（等号が成り立つのはちょうど $n = 1$ のときである）。

反例（counterexamples）。$f(x) = \pi - x$ をとる。これは $f(\pi) = 0$ を満たすが、$f(0) = \pi \neq 0$ である。このとき $f'(x) = -1$ であり、

$$\int_0^\pi (\pi - x)^2 \,\mathrm{d}x = \left[-\tfrac{1}{3}(\pi - x)^3\right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{3}, \qquad \int_0^\pi 1 \,\mathrm{d}x = \pi.$$

$\pi^2 > 3$ であるから $\frac{\pi^3}{3} > \pi$ となり、$(*)$ は成り立たない。同様に、$f(x) = x$ は $f(0) = 0$ を満たすが $f(\pi) = \pi \neq 0$ であり、同じ二つの積分 $\frac{\pi^3}{3} > \pi$ を与えるので、やはり $(*)$ は成り立たない。したがって、一方の端点条件が成り立っていても、もう一方の条件を外すことはできない。

小問 (ii)

2 次関数の場合。$f(0) = c = 0$ かつ $f(\pi) = a\pi^2 + b\pi = 0$ が必要であるから、$b = -a\pi$ となり $f(x) = ax(x - \pi)$ である。$a = 0$ とすると $f \equiv 0$ となり、役に立たない不等式 $0 \leq 0$ しか得られないので、$a \neq 0$ とする。f を a 倍すると $(*)$ の両辺はともに a^2 倍されるので、$a = -1$ としてよい：

$$f(x) = x(\pi - x), \qquad f'(x) = \pi - 2x.$$

$x = \frac{\pi}{2} + u$ と置換すると、両方の積分が対称な形になる：$f = \frac{\pi^2}{4} - u^2$、$f' = -2u$ であり、u は $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ を動く。$h = \frac{\pi}{2}$ とおくと、

$$\int_0^\pi f^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-h}^{h} \left(h^2 - u^2\right)^2 \mathrm{d}u = 2\left(h^5 - \tfrac{2}{3}h^5 + \tfrac{1}{5}h^5\right) = \frac{16h^5}{15} = \frac{\pi^5}{30},$$
$$\int_0^\pi f'^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-h}^{h} 4u^2 \,\mathrm{d}u = \frac{8h^3}{3} = \frac{\pi^3}{3}.$$

よって $(*)$ から $\dfrac{\pi^5}{30} \leq \dfrac{\pi^3}{3}$ が得られ、正の数 $\frac{\pi^3}{30}$ で割ると

$$\pi^2 \leq 10,$$

となって、示すべきことが得られる。

三角関数の場合。今度は $f(0) = q + r$、$f(\pi) = p \sin\frac{\pi}{2} + q\cos\frac{\pi}{2} + r = p + r$ である。これらがともに 0 になるのは、ちょうど $p = q = -r$ のときである。ここでも $r = 0$ とすると $f \equiv 0$ となり、定数倍は影響しないので、$r = -1$ とする：

$$f(x) = \sin\tfrac{1}{2}x + \cos\tfrac{1}{2}x - 1, \qquad f'(x) = \tfrac{1}{2}\left(\cos\tfrac{1}{2}x - \sin\tfrac{1}{2}x\right).$$

? **考えてみよう** 交差項でごちゃごちゃにならずに f を 2 乗するにはどうすればよいか。

$s=\sin\frac{1}{2}x$、$c=\cos\frac{1}{2}x$ として、$(s+c)-1$ とまとめる。すると $(s+c)^2=1+2sc=1+\sin x$ であるから、

$$f^2=(s+c)^2-2(s+c)+1=2+\sin x-2\sin\tfrac{1}{2}x-2\cos\tfrac{1}{2}x.$$

$\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x=2$、$\int_0^\pi \sin\frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x=\left[-2\cos\frac{1}{2}x\right]_0^\pi=2$、$\int_0^\pi \cos\frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x=\left[2\sin\frac{1}{2}x\right]_0^\pi=2$ を用いると、

$$\int_0^\pi f^2\,\mathrm{d}x=2\pi+2-4-4=2\pi-6.$$

同様に $(c-s)^2=1-\sin x$ であるから、

$$\int_0^\pi f'^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^\pi(1-\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi-2}{4}.$$

このとき $(*)$ は $2\pi-6\le\frac{1}{4}(\pi-2)$、すなわち $8\pi-24\le\pi-2$ を意味するので、

$$7\pi\le 22,\qquad \text{すなわち}\qquad \pi\le\frac{22}{7}.$$

比較。 2 番目の不等式の両辺を 2 乗すると（両辺とも正である）、

$$\pi^2\le\frac{484}{49}<\frac{490}{49}=10.$$

したがって、三角関数を選んだほうが小さい上界（upper bound）$\pi^2\le\frac{484}{49}\approx 9.878$ を与え、よりよい評価となる。どちらも上界であるから、小さいほうが真の値に近い。

検算

- 真の値は $\pi^2\approx 9.8696$ であり、10 と $\frac{484}{49}\approx 9.8776$ のどちらよりも小さい。当然そうでなければならない。
- 数値で見ると、三角関数の f に対する $(*)$ の両辺は $2\pi-6\approx 0.2832$ と $\frac{1}{4}(\pi-2)\approx 0.2854$ であり、非常に近い。評価 $\pi\le\frac{22}{7}$ がこれほど鋭いのはこのためである。2 次関数の場合、両辺は $\frac{\pi^5}{30}\approx 10.20$ と $\frac{\pi^3}{3}\approx 10.34$ である。
- 小問 (i) では $n=1$ のとき等号が成り立つので、$\sin x$ は $(*)$ の極端な場合である。三角関数の f は形が $\sin x$ に近いが、$x(\pi-x)$ はそれよりやや離れている。どちらの評価がよいかはこれで説明がつく。

よくある間違い

- $f=1$ のように、端点条件を**両方とも**破る反例を選んでしまう。これも正しい反例ではあるが、$\pi-x$ と x はそれ以上のこと、すなわち各条件がそれ単独で必要であることを示している。

- 三角関数の場合に f^2 を積分するとき、$\int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = 2$（0 ではない）であることを忘れる。
- 10 のほうが「きりがよい」からよりよい評価だと言ってしまう。どちらも上界なので、小さいほうがよい評価である。

STEP のその先へ

不等式 $(*)$ はヴィルティンガーの不等式（Wirtinger's inequality）であり、最良の定数 1 は $\sin x$ から得られる。これは、$f(0) = f(\pi) = 0$ のもとでの $-f'' = \lambda f$ の最小固有値（eigenvalue）である。選んだ関数で $(*)$ を試す方法はレイリー・リッツ法（Rayleigh–Ritz method）と呼ばれ、この固有値の上界を常に与える。技術者が振動数（vibration frequency）を見積もる方法の根底にもこの考え方がある。$(*)$ そのものは、フーリエ級数（Fourier series）を用いると鮮やかに証明できる。背後にある解析学（analysis）については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を、固有値の側面については Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）を参照のこと。

解答例

STEP II 2014、第 3 問

純粋数学 • 接線と包絡線

STEP II 2014、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s2-q3

鍵となる考え方

点 P における接線（tangent）は単なる直線であり、傾き（gradient）は y'、y 切片（intercept）は $y - xy'$ である。したがって小問 (i) を用いると、距離が一定という性質は微分方程式（differential equation）に書き換えられる。この方程式を微分すると因数 y'' が現れ、積をゼロにする二通りの方法から二つの曲線族が得られる。すなわち直線（$y'' = 0$）と円である。小問 (iii) では、これらの断片をなめらかにつなぎ合わせることが求められる。

解答

小問 (i)

$m = 0$ のとき直線は $y = c$ であり、距離は明らかに c であるから、$m \neq 0$ と仮定する。直線は y 軸と $A = (0, c)$ で交わり、x 軸と鋭角 θ をなす。ここで $\tan\theta = |m|$ である。O から直線に下ろした垂線の足（foot of the perpendicular）を N とする。直角三角形 ONA において、A における直線と y 軸のなす角は $\frac{\pi}{2} - \theta$ であるから、角 AON は θ であり、

$$ON = OA\cos\theta = \frac{c}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{c}{\sqrt{1+m^2}} = c(m^2+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

（同じ値は、$x^2 + (mx + c)^2$ を最小化しても得られる。これは x の 2 次式であり、$x = -\frac{mc}{1+m^2}$ で最小値 $\frac{c^2}{1+m^2}$ をとる。）

$c < 0$ のときは、原点に関して対称移動すると、O からの距離を変えずに直線は $y = mx + |c|$ に移る。したがって一般に距離は $|c|(1+m^2)^{-\frac{1}{2}}$ である。

小問 (ii)

$P=(x,y)$ における接線は傾き y' をもち P を通るので、座標 (X,Y) を用いたその方程式は

$$Y = y'X + (y - xy').$$

である。これは小問 (i) の形の直線で、$m = y'$、$c = y - xy'$ である（仮定により鉛直ではない）。したがって O からの距離は

$$a = \frac{|y - xy'|}{\sqrt{1+(y')^2}},$$

であり、2 乗すると

$$(y - xy')^2 = a^2\big(1 + (y')^2\big). \qquad (*)$$

微分する。ここで a は定数であり、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y - xy') = y' - y' - xy'' = -xy''$ である。よって $(*)$ を微分すると

$$2(y - xy')(-xy'') = 2a^2y'y'', \qquad \text{すなわち、} \qquad y''\big[\,x(y - xy') + a^2y'\,\big] = 0.$$

> **考えてみよう** 積がゼロであることから、曲線についてどのようにして二つの場合に分かれるのか？

各点において、$y'' = 0$ であるか、または括弧の中がゼロである。曲線のうち $y'' = 0$ となる部分では曲線はまっすぐであり、$y'' \neq 0$ となる部分では括弧の中がゼロでなければならない。二つの場合を順に考える。（$a > 0$ と仮定する。$a = 0$ ならばすべての接線が O を通り、C は単に原点を通る直線である。）

場合 1：$y'' = 0$ のとき。このとき $y' = m$ は定数であり、定数 m、k を用いて $y = mx + k$ と書ける。$y - xy' = k$ であることに注意して $(*)$ に代入すると $k^2 = a^2(1+m^2)$ となるので、

$$y = mx \pm a(1+m^2)^{\frac{1}{2}}.$$

場合 2：括弧の中がゼロのとき。このとき $xy - x^2y' + a^2y' = 0$ であるから、

$$(x^2 - a^2)\,y' = xy.$$

まず $x^2 \neq a^2$ である。実際、$x = \pm a$ ならば $xy = 0$ より $y = 0$ となり、$(*)$ は $a^2(y')^2 = a^2\big(1 + (y')^2\big)$ となるが、これは不可能である。よって割り算ができて、

$$y' = \frac{xy}{x^2 - a^2}, \qquad y - xy' = \frac{y(x^2 - a^2) - x^2y}{x^2 - a^2} = \frac{-a^2y}{x^2 - a^2}.$$

両方を $(*)$ に代入し、全体に $(x^2-a^2)^2/a^2$ を掛けると、

$$\begin{aligned} & a^2y^2 = (x^2-a^2)^2 + x^2y^2 \\ \iff \quad & y^2(a^2-x^2) = (a^2-x^2)^2 \\ \iff \quad & (a^2-x^2)\left(x^2+y^2-a^2\right) = 0. \end{aligned}$$

$a^2-x^2 \neq 0$ であるから、$x^2+y^2=a^2$ が結論される。

以上より、ある m に対して $y = mx \pm a(1+m^2)^{\frac{1}{2}}$ であるか、または $x^2+y^2=a^2$ であり、これが示すべきことであった。どちらも実際にこの性質をもつ。直線は小問 (i) より O からの距離が a であり、O を中心とする半径 a の円の接線はすべて O からの距離が a である。

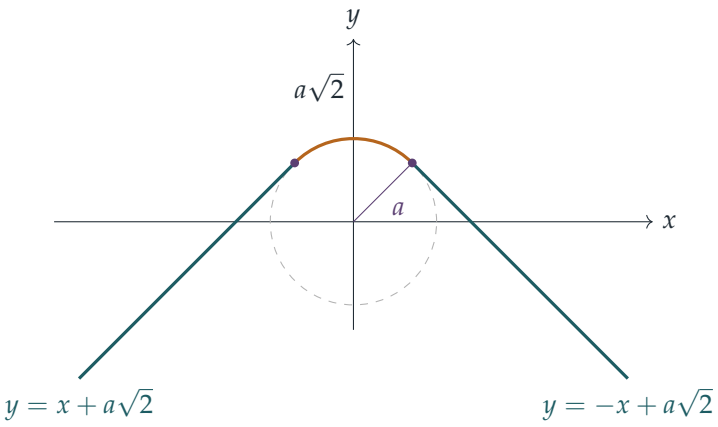
小問 (iii)

直線部分と円弧がつながる点で C は接線をもたなければならないので、そこで直線は円弧と同じ傾きをもつ必要がある。すなわち、各直線は円弧の端点における円の接線である。また、すべての接線は鉛直であってはならないので、円弧は点 $(\pm a, 0)$ に達してはならない。さらに C は x の関数のグラフであるから、円の上半分のみ、または下半分のみを用いる。

例として、$x^2+y^2=a^2$ の円弧のうち、$\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ から上側を通って $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ に至る部分をとり、その両端における接線で延長する。

$$y = \begin{cases} x + a\sqrt{2}, & x \leq -\frac{a}{\sqrt{2}}, \\ \sqrt{a^2-x^2}, & |x| \leq \frac{a}{\sqrt{2}}, \\ -x + a\sqrt{2}, & x \geq \frac{a}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

直線は $m = \pm 1$、切片 $a\sqrt{2} = a(1+m^2)^{\frac{1}{2}}$ であり、場合 1 の条件を満たす。$x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$ において円弧の傾きは $-\frac{x}{y} = \mp 1$ であり直線の傾きと一致するので、傾きはいたるところで連続かつ有限である。



$(\pm a, 0)$ を含まない上半円（または下半円）の任意の円弧を、その両端の接線で延長したものも、同様にうまくいく。

検算

- 小問 (i) で $m = 0$ とすると距離は c となり、$|m| \to \infty$ とすると直線は急になって距離は 0 に近づく。これは $(0, c)$ を通る直線として当然である。
- 円上では $y' = -x/y$ より $y - xy' = a^2/y$ となり、$(*)$ の両辺はともに a^4/y^2 に等しい。
- $a = 1$ の例について、$x = -5$ から $x = 5$ までの 1001 個の点で O から接線までの距離をコンピュータで確かめたところ、すべて 1 であった。たとえば $x = 2$ では接線は $y = -x + \sqrt{2}$ であり、距離は $\sqrt{2}/\sqrt{2} = 1$ である。

よくある間違い

- 微分した方程式を y'' で割ってしまい、直線解を失う。
- a が定数であることを忘れる、あるいは xy' の微分を $y' + xy''$ ではなく y' としてしまう。
- 小問 (iii) で、直線と円弧を角ができるようにつないでしまう、あるいは両端で接線が鉛直になる半円全体を使ってしまう。

STEP のその先へ

ここでの円は直線族 $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$ の**包絡線**（envelope）であり、$(*)$ はクレロー（Clairaut）の方程式 $y = xy' + f(y')$ である。その一般解（general solution）は直線族であり、**特異解**（singular solution）はそれらの包絡線である。y' についての 2 次方程式とみると、$(*)$ の判別式（discriminant）は $4a^2(x^2+y^2-a^2)$ であり、二つの傾きの選択はちょうど円上で一致する。そのため、小問 (iii) のように解をそこでつなぎ合わせることができ、また解の一意性（uniqueness）が成り立たなくなる。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）では、1 階の方程式に対する解の存在と一意性が論じられている。

解答例

STEP II 2014、第 4 問

純粋数学 • 置換積分

> **STEP II 2014、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q4

鍵となる考え方

置換（substitution）$u = 1/x$ は区間 $[1/b, b]$ の両端を入れ替えるので、積分 I は同じ範囲上の積分に戻る。新しい被積分関数（integrand）がもとのものの符号を変えただけなら、$I = -I$ が得られる。何か密接に関係したものになるなら、I の二つの表示を足し合わせることで、ずっと積分しやすい被積分関数が得られることがある。最後の小問では、$[0, \infty)$ がそれ自身に写るように $u = a^2/x$ とおいて同じ工夫を用いると、求めたい積分について解くことのできる方程式が得られる。

解答

小問 (i)

この積分を I とおく。$x = 1/u$ とすると $\mathrm{d}x = -\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$ であり、$\ln x = -\ln u$ である。$x = 1/b$ のとき $u = b$、$x = b$ のとき $u = 1/b$ である。また

$$(a^2 + x^2)(a^2x^2 + 1) = \left(a^2 + \frac{1}{u^2}\right)\left(\frac{a^2}{u^2} + 1\right) = \frac{(a^2u^2 + 1)(a^2 + u^2)}{u^4}.$$

よって

$$\begin{aligned} I &= \int_b^{1/b} \frac{\frac{1}{u}(-\ln u)}{(a^2u^2 + 1)(a^2 + u^2)/u^4}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_b^{1/b} \frac{u \ln u}{(a^2 + u^2)(a^2u^2 + 1)}\,\mathrm{d}u = -\int_{1/b}^{b} \frac{u \ln u}{(a^2 + u^2)(a^2u^2 + 1)}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

最後の積分は、ダミー変数（dummy variable）の名前を変えただけで I そのものである。したがって $I = -I$ となり、$I = 0$ が得られる。これで題意が示された。（$b > 0$ な

ので被積分関数は $[1/b, b]$ 上で連続であり、I は有限の値であるから、この議論は正当である。）

小問 (ii)

この積分を I とおく。同じ置換により $\frac{\mathrm{d}x}{x} = u \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}u}{u}$ となり、積分区間の端も先ほどと同様に入れ替わる。

$$I = \int_b^{1/b} \arctan\left(\frac{1}{u}\right)\left(-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u = \int_{1/b}^{b} \frac{\arctan(1/u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

今回は単に符号が反転するわけではないので、この表示をもとの表示に足し合わせる。

$$2I = \int_{1/b}^{b} \frac{\arctan u + \arctan(1/u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

考えてみよう $u > 0$ のとき、$\arctan u + \arctan(1/u)$ はいくらか？

$u > 0$ として $\theta = \arctan u$ とおくと、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であり、$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta = 1/u$ である。$\frac{\pi}{2} - \theta$ もまた $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ に属するので、これは $\arctan(1/u)$ に等しい。よって、すべての $u > 0$ に対して $\arctan u + \arctan(1/u) = \frac{\pi}{2}$ である。（$u < 0$ のときはこの和は $-\frac{\pi}{2}$ になるが、$[1/b, b]$ に属する u はすべて正である。）したがって

$$2I = \frac{\pi}{2}\int_{1/b}^{b} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{\pi}{2}\left(\ln b - \ln(1/b)\right) = \pi \ln b,$$

となるので、$I = \dfrac{\pi \ln b}{2}$ であり、題意が示された。これは $b > 1$ の場合にも $0 < b < 1$ の場合にも成り立つ。

小問 (iii)

$J = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2 + x^2)^2}$ とおく。被積分関数は連続であり、x が大きいところでは $1/x^4$ 以下であるから、この積分は収束（converge）する。$(0, \infty)$ をそれ自身に写し、$a^2 + x^2$ を $a^2 + u^2$ の定数倍に変えるような置換が欲しいので、$u = a^2/x$、すなわち $k = a^2$ とする。このとき $x = a^2/u$、$\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{u^2}\,\mathrm{d}u$ であり、$x \to 0^+$ は $u \to \infty$ に対応し、

$$a^2 + x^2 = a^2 + \frac{a^4}{u^2} = \frac{a^2(u^2 + a^2)}{u^2}.$$

したがって

$$J = \int_{\infty}^{0} \frac{u^4}{a^4(a^2 + u^2)^2}\left(-\frac{a^2}{u^2}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{a^2}\int_0^{\infty} \frac{u^2}{(a^2 + u^2)^2}\,\mathrm{d}u.$$

ここで分子を $u^2 = (a^2 + u^2) - a^2$ と書き直す。

$$\frac{u^2}{(a^2+u^2)^2} = \frac{1}{a^2+u^2} - \frac{a^2}{(a^2+u^2)^2}.$$

どちらの項も $(0, \infty)$ 上の積分が収束するので、積分を分けてよい。与えられた結果を用いると

$$J = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\pi}{2a} - a^2 J\right) = \frac{\pi}{2a^3} - J.$$

よって $2J = \dfrac{\pi}{2a^3}$ であるから、

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3},$$

となり、題意が示された。

検算

- (ii) において、$b = 1$ とすると積分区間の長さが零になり、実際 $\frac{\pi}{2}\ln 1 = 0$ である。b を $1/b$ に置き換えると積分区間の端が入れ替わるので、積分の符号が変わるはずであり、$\ln(1/b) = -\ln b$ はこれと合っている。
- (iii) において、答えは正しくスケールするはずである。$x = at$ とおくと $J = a^{-3}\int_0^\infty (1+t^2)^{-2}\,\mathrm{d}t$ となるので、J は定数と a^{-3} の積でなければならない。$a = 1$ のとき、置換 $x = \tan\theta$ により $\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}$ が得られ、結果と一致する。
- 数値的には、$b = 2$ のときの (ii) の積分は $1.08879\ldots = \frac{\pi}{2}\ln 2$ である。(i) の積分は、a と b をいくつか無作為に選んで計算すると、（小数点以下何桁にもわたって）0 になる。

よくある間違い

- $u = 1/x$ によって積分区間の端も逆になることを忘れる。$\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u/u^2$ から出る負号と、積分区間の端の入れ替わりの両方を追跡しなければならない。
- $\arctan u + \arctan(1/u) = \frac{\pi}{2}$ を、$u > 0$ が必要であることに触れずに用いる。
- (iii) において、$\frac{1}{a^2}\int_0^\infty \frac{u^2}{(a^2+u^2)^2}\,\mathrm{d}u$ を得たところで止まってしまい、それが J と与えられた積分を用いて書き直せることに気づかない。

STEP のその先へ

定義域（domain）の対称性を利用して積分をそれ自身と関係づけるのは、よく使われる工夫である。これは複素関数論の周回積分（contour integration）や、$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, \mathrm{d}x$ のような積分でも再び現れる。また、(iii) の積分はある一般的な族から生じるものでもある。$\int_0^{\infty} (\lambda + x^2)^{-1} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \lambda^{-1/2}$ を λ について微分すると、ただちに同じ答えが得られる（「積分記号下での微分（differentiation under the integral sign）」）。このような操作や、広義積分（improper integral）の扱いがいつ許されるのかは、実解析（real analysis）の講義で説明される。Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）を参照するとよい。

解答例

STEP II 2014、第 5 問

純粋数学 ・ 同次形微分方程式

STEP II 2014、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s2-q5

鍵となる考え方

どちらの右辺も一次式どうしの比である。(i) ではすべての項の次数（degree）が 1 なので、傾き（gradient）は y/x だけで決まり、$y = xu$ とおけば方程式は変数分離形（separable）になる。(ii) では定数項があるためこの方法はそのままでは使えないが、分子と分母の 2 直線の交点に原点を移せば定数項を消すことができ、あとは (i) とまったく同じである。

解答

$y = xu$ とすると、積の微分法（product rule）により

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

小問 (i)

右辺の分子と分母を x で割ると、方程式は

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2u+1}{u-2}, \qquad \text{よって} \qquad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2u+1-u(u-2)}{u-2} = \frac{1+4u-u^2}{u-2}.$$

となる。変数を分離すると

$$\int \frac{u-2}{1+4u-u^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

考えてみよう 部分分数分解（partial fractions）を使わずに左辺を積分するにはどうすればよいか。

分母を微分すると $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(1+4u-u^2) = 4-2u = -2(u-2)$ である。したがって分子は分母の導関数の $-\frac{1}{2}$ 倍であり、

$$-\tfrac{1}{2}\ln\left|1+4u-u^2\right| = \ln|x| + C.$$

両辺に -2 を掛けて指数をとると、正の定数 A を用いて $x^2\left|1+4u-u^2\right| = A$ となる。すなわち、ある定数 K に対して $x^2(1+4u-u^2) = K$ である（曲線に沿って符号は一定である）。ここで $u = y/x$ を代入すると $x^2(1+4y/x-y^2/x^2) = x^2+4xy-y^2$ なので、

$$x^2+4xy-y^2 = K.$$

$(1,1)$ において $K = 1+4-1 = 4$ となるから、解曲線は

$$\boxed{x^2+4xy-y^2 = 4}$$

である（$(1,1)$ では $u=1$ であり、$1+4u-u^2 = 4 \neq 0$ かつ $u \neq 2$ なので、出発点において割った式はどれも 0 にならない）。

小問 (ii)

2 直線 $x-2y-4=0$ と $2x+y-3=0$ の交点は $y = 3-2x$ かつ $x-2(3-2x)-4=0$ を満たす点、すなわち $(2,-1)$ である。そこで $a=2$、$b=-1$ とし、$x = X+2$、$y = Y-1$ とおく。このとき $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \mathrm{d}Y/\mathrm{d}X$ であり、

$$x-2y-4 = (X+2)-2(Y-1)-4 = X-2Y,$$
$$2x+y-3 = 2(X+2)+(Y-1)-3 = 2X+Y,$$

となるので、定数項が消えて

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{X-2Y}{2X+Y}.$$

これは (i) と同じ形であるから、$Y = XV$ とおくと

$$V + X\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}X} = \frac{1-2V}{2+V} \quad\Longrightarrow\quad X\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}X} = \frac{1-2V-V(2+V)}{2+V} = \frac{1-4V-V^2}{2+V}.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}(1-4V-V^2) = -2(2+V)$ なので、ここでも分子は分母の導関数の定数倍である。よって

$$\int \frac{2+V}{1-4V-V^2}\,\mathrm{d}V = \int \frac{1}{X}\,\mathrm{d}X \quad\Longrightarrow\quad -\tfrac{1}{2}\ln\left|1-4V-V^2\right| = \ln|X| + C,$$

となり、先ほどと同様に $X^2(1-4V-V^2)=K$、すなわち

$$X^2-4XY-Y^2=K.$$

点 $(1,1)$ は $X=-1$、$Y=2$ に対応するので、$K=1-4(-1)(2)-4=5$ である。x と y に戻すと

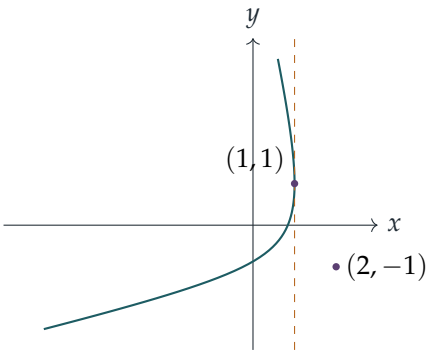
$$(x-2)^2-4(x-2)(y+1)-(y+1)^2=5,$$

となり、展開すると

$$\begin{aligned}&(x^2-4x+4)-4(xy+x-2y-2)-(y^2+2y+1)=5\\ \iff\quad &\boxed{x^2-4xy-y^2-8x+6y+6=0}\end{aligned}$$

考えてみよう $(1,1)$ では分母 $2x+y-3$ が 0 になる。それでもこの解は意味をもつだろうか。

意味をもつ。そこでは傾きが無限大となるので、曲線は $(1,1)$ で鉛直な接線（vertical tangent）をもつ。陰関数の方程式は曲線をまったく問題なく表しており、ただその点を通る関数 $y(x)$ のグラフになっていないというだけである。言い換えれば、x は y のなめらかな関数である。x についての二次方程式を解くと、$(1,1)$ を通る枝では $x=2y+4-\sqrt{5y^2+10y+10}$ となる。$5y^2+10y+10=5(y+1)^2+5>0$ であるからこれはすべての y で定義され、$y=1$ において最大値 $x=1$ をとる。



図は $(1,1)$ を通る枝（青緑）を示しており、この枝はその点で鉛直線 $x=1$（破線）に接している。$(2,-1)$ は双曲線（hyperbola）の中心である。

検算

▶ 答えを陰関数微分(implicit differentiation)する。(i) では $2x+4y+(4x-2y)y'=0$ から $y'=\dfrac{x+2y}{y-2x}$ となり、求める式に一致する。(ii) では $2x-4y-8+(6-4x-2y)y'=$

0 から $y' = \dfrac{x-2y-4}{2x+y-3}$ となる。

- どちらの曲線も $(1,1)$ を通る：$1+4-1=4$、$1-4-1-8+6+6=0$。
- それぞれの微分方程式を $(1,1)$ からコンピュータで数値的に解き進めたところ、枠で囲んだ式の左辺は約 10^{-13} の精度でそれぞれ 4 と 0 に等しいままであった。(i) では $(1,1)$ における傾きは -3 である。

よくある間違い

- $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = u + x\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ の u を忘れてしまい、誤った変数分離形の方程式を得る。
- (ii) で条件を誤った座標系で適用する：点 $(1,1)$ は $(X,Y) = (-1,2)$ になるのであって、$(1,1)$ ではない。
- u について部分分数分解に飛びつく：$1+4u-u^2$ の根は $2\pm\sqrt{5}$ で計算が煩雑になるが、被積分関数はすでに f'/f の形をしている。

STEP のその先へ

右辺が y/x だけに依存する方程式は同次形（homogeneous）と呼ばれ、(ii) の原点の平行移動は一次関数どうしの比に対する定石である。ここで扱った 2 つの方程式はどちらも完全微分方程式（exact equation）でもある。(i) を $(2y+x)\,\mathrm{d}x - (y-2x)\,\mathrm{d}y = 0$ と書くと、2 つの係数は交差微分の条件を満たし、保存量 $x^2+4xy-y^2$ を直接読み取ることができる。完全微分方程式、積分因子（integrating factor）、そして線形系の相図（phase portrait）（双曲線の正体はまさにこれである）については、Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）で扱われている。

解答例

STEP II 2014、第 6 問

純粋数学 ・ 三角級数

> **STEP II 2014、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q6

鍵となる考え方

各 $\cos rx$ に $2\sin\frac{1}{2}x$ を掛けると二つの正弦の差になるので、和は隣り合う項が次々に打ち消し合う（telescoping）形になる。その和はちょうど $S_n'(x)$ であり、この恒等式が与えられているのはそのためである。つまり、この恒等式によって S_n がどこで停留点（stationary point）をとるかがわかる。そのような点では新しい項 $\frac{1}{n}\sin nx$ が非負となることがわかるので、この項を加えても負の最小値は生じない。あとは $S_1 = \sin x$ から始める数学的帰納法（induction）で証明が完成する。

解答

余弦の和

和積公式（factor formula）$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$ において $A = (r+\frac{1}{2})x$, $B = (r-\frac{1}{2})x$ とすると、

$$\sin(r+\tfrac{1}{2})x - \sin(r-\tfrac{1}{2})x = 2\cos rx\,\sin\tfrac{1}{2}x.$$

これを $r = 1$ から n まで加えると、右辺の和は $2\sin\frac{1}{2}x\,(\cos x + \cdots + \cos nx)$ となり、左辺では最初と最後の項以外がすべて打ち消し合う：

$$2\sin\tfrac{1}{2}x\sum_{r=1}^{n}\cos rx = \sin(n+\tfrac{1}{2})x - \sin\tfrac{1}{2}x.$$

両辺を $2\sin\frac{1}{2}x \neq 0$ で割れば求める結果が得られる。項別に微分すると

$$S_n'(x) = \sum_{r=1}^{n}\cos rx,$$

となることに注意しよう。したがって、この恒等式は S_n' の閉じた形の表示である。

小問 (i)

ここでは $S_2(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$ であるから、

$$S_2'(x) = \cos x + \cos 2x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1).$$

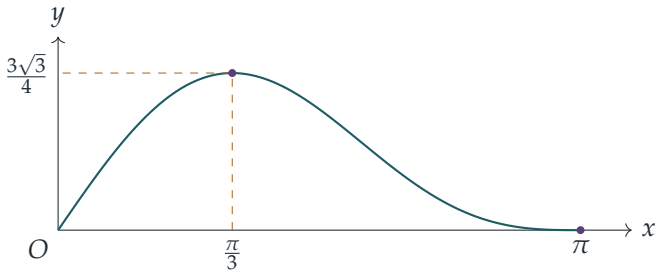
$[0, \pi]$ 上でこれが 0 になるのは $\cos x = \frac{1}{2}$、すなわち $x = \frac{\pi}{3}$ のときと、$\cos x = -1$、すなわち $x = \pi$ のときである。そのときの値は

$$S_2(\tfrac{\pi}{3}) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{3\sqrt{3}}{4}, \qquad S_2(\pi) = 0.$$

$\cos x + 1 \geq 0$ であるから、S_2' の符号は $2\cos x - 1$ の符号と一致し、$[0, \frac{\pi}{3})$ では正、$(\frac{\pi}{3}, \pi)$ では負である。よって $x = \frac{\pi}{3}$ で極大となり、S_2 はそこから減少して $x = \pi$ で 0 に達し、そのとき傾きは零である。π の近くで $x = \pi - t$ とおくと、

$$S_2 = \sin t - \tfrac{1}{2}\sin 2t \approx \left(t - \tfrac{t^3}{6}\right) - \left(t - \tfrac{4t^3}{6}\right) = \tfrac{1}{2}t^3,$$

となるので、曲線は軸に達するとき三次関数のように平らになる。また $S_2(0) = 0$ かつ $S_2'(0) = 2$ である。



小問 (ii)

$0 < x_0 < \pi$ において $S_n'(x_0) = 0$ であるとする。このとき $\sin\frac{1}{2}x_0 \neq 0$ であるから恒等式が適用でき、$\sin(n + \frac{1}{2})x_0 = \sin\frac{1}{2}x_0$ が得られる。左辺を展開すると、

$$\sin nx_0 \cos\tfrac{1}{2}x_0 + \cos nx_0 \sin\tfrac{1}{2}x_0 = \sin\tfrac{1}{2}x_0 \iff \sin nx_0 \cos\tfrac{1}{2}x_0 = (1 - \cos nx_0)\sin\tfrac{1}{2}x_0.$$

$0 < \frac{1}{2}x_0 < \frac{\pi}{2}$ より $\cos\frac{1}{2}x_0 > 0$ であり、これで割ると

$$\sin nx_0 = (1 - \cos nx_0)\tan\tfrac{1}{2}x_0,$$

となり、求める式が得られる。したがって $n \geq 2$ のとき、

$$S_n(x_0) - S_{n-1}(x_0) = \frac{1}{n}\sin nx_0 = \frac{1}{n}(1 - \cos nx_0)\tan\tfrac{1}{2}x_0 \geq 0,$$

である。なぜなら $1 - \cos nx_0 \geq 0$ かつ $\tan\frac{1}{2}x_0 > 0$ だからである。よって $S_n(x_0) \geq S_{n-1}(x_0)$ が成り立つ。

次に、すべての $x \in (0, \pi)$ に対して $S_{n-1}(x) > 0$ であると仮定し、矛盾を導くために、ある $c \in (0, \pi)$ に対して $S_n(c) \leq 0$ であると仮定する。

> **考えてみよう** 利用できる停留点が存在することは、どうしてわかるだろうか？

S_n は閉区間 $[0, \pi]$ 上で連続（continuous）であるから、そこで最小値 m をとり、$m \leq S_n(c) \leq 0$ である。$m < 0$ ならば、$S_n(0) = S_n(\pi) = 0$ であるから最小値は端点ではとられない。$m = 0$ ならば、c 自身が最小値をとる内点である。いずれの場合も $S_n(x_0) = m \leq 0$ となる $x_0 \in (0, \pi)$ が存在し、S_n は微分可能（differentiable）であるから、内点での最小値は停留点であり、$S_n'(x_0) = 0$ となる。すると先の結果より

$$0 \geq S_n(x_0) \geq S_{n-1}(x_0) > 0,$$

となり、矛盾である。よって、すべての $x \in (0, \pi)$ に対して $S_n(x) > 0$ である。

小問 (iii)

$0 < x < \pi$ に対して $S_n(x) > 0$ であることを数学的帰納法で証明する。$n = 1$ のとき、$(0, \pi)$ 上で $S_1(x) = \sin x > 0$ である。S_{n-1} について成り立つならば、小問 (ii) より S_n についても成り立つ。よって、すべての $n \geq 1$ について成り立つ。端点ではすべての項 $\frac{1}{r}\sin rx$ が零であるから、$S_n(0) = S_n(\pi) = 0$ である。したがって、すべての $n \geq 1$ と $0 \leq x \leq \pi$ に対して $S_n(x) \geq 0$ である。

検算

- 余弦の和で $n = 1$ とおくと、$\dfrac{\sin \frac{3}{2}x - \sin \frac{1}{2}x}{2 \sin \frac{1}{2}x}$ は $\cos x$ になるはずであり、和積公式により実際にそうなる。
- 小問 (i) は恒等式と整合する：$S_2' = 0$ は $\sin \frac{5}{2}x = \sin \frac{1}{2}x$ を意味し、$(0, \pi]$ におけるその解は $x = \frac{\pi}{3}$ と $x = \pi$ である。
- 最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.299$ は、細かい格子点上で S_2 を直接計算した値と一致する。コンピュータによる確認では、$2 \leq n \leq 40$ について $(0, \pi)$ における S_n のすべての停留点を求め、そのそれぞれで小問 (ii) の恒等式と $S_n(x_0) \geq S_{n-1}(x_0)$ が成り立つことを確かめた。また $n \leq 60$ について区間の内部で $S_n > 0$ であることも確かめた。

よくある間違い

- 「いたるところで $S_n \geq S_{n-1}$」と論じること。これは誤りである（例えば $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上で $\sin 2x < 0$ である）。この不等式が成り立つのは S_n の停留点においてだけであり、だからこそ最小値を用いた議論が必要になる。
- 最小値の位置を特定するときに端点を忘れること：正でない最小値が区間の内部にあることを示すには、$S_n(0) = S_n(\pi) = 0$ を用いなければならない。
- $\cos \frac{1}{2}x_0$ が正である理由を述べずに、それで割ること。

STEP のその先へ

小問 (iii) の結果は、フェイエール・ジャクソン・グロンウォールの不等式（Fejér–Jackson–Gronwall inequality）である。$n \to \infty$ のとき、$(0, \pi]$ 上で $S_n(x)$ は $\frac{1}{2}(\pi - x)$ に収束（converge）する：$\sum \frac{1}{r} \sin rx$ はのこぎり波（sawtooth wave）のフーリエ級数（Fourier series）であり、$x = 0$ の近くでは部分和が行き過ぎる（ギブス現象（Gibbs phenomenon））。フーリエ級数と、それがいつ収束するかという繊細な問題は、大学初年次の解析学や応用数学の講義の中心的な話題である。T. W. Körner の *Fourier Analysis*（フーリエ解析）は、幅広い内容を扱ったすばらしい解説書である。

解答例

STEP II 2014、第 7 問

純粋数学 • 絶対値関数のグラフ

STEP II 2014、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s2-q7

鍵となる考え方

絶対値関数（modulus function）の和は区分的に線形（piecewise linear）である。すなわち、傾き（gradient）が変わるのは、いずれかの絶対値の中身が 0 になる点だけである。したがって $|x-a|+|x-b|$ のグラフは、a と b の間に平らな底をもち、傾き ± 2 の壁をもつ「浴槽」の形になる。後半の方程式の解の個数を数える問題は、傾きの比較に帰着する。傾き 2 のグラフは傾き 1 のグラフに必ず追いつき、同じ傾きの二つのグラフは一致するか、まったく交わらないかのどちらかである。

解答

以下では一貫して、$a<b$ として $f(x)=|x-a|+|x-b|$ とおく。

小問 (i)

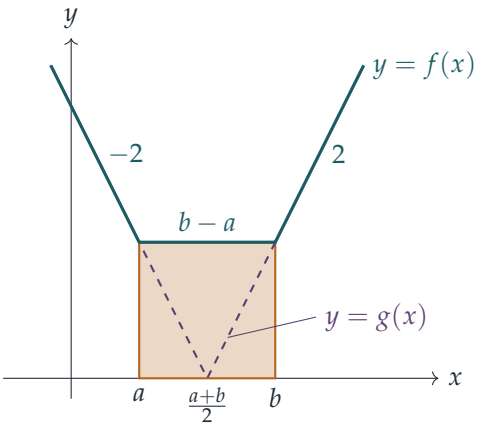
区間ごとに絶対値をはずすと

$$f(x)=\begin{cases} a+b-2x, & x\le a,\\ b-a, & a\le x\le b,\\ 2x-a-b, & x\ge b. \end{cases}$$

よって傾きは、$x<a$ で -2、$a<x<b$ で 0、$x>b$ で 2 である。グラフは連続（continuous）であり、$[a,b]$ の上で高さ $b-a$ の平らな底をもつ。

$g(x)=|2x-a-b|=2|x-\frac{a+b}{2}|$ のグラフは、頂点が $\left(\frac{a+b}{2},0\right)$ で傾きが ± 2 の V 字形である。$x\ge b$ のとき $2x-a-b\ge b-a>0$ であるから $g(x)=2x-a-b=f(x)$ となり、同様に $x\le a$ のとき $g(x)=a+b-2x=f(x)$ となる。したがって二つのグラフは

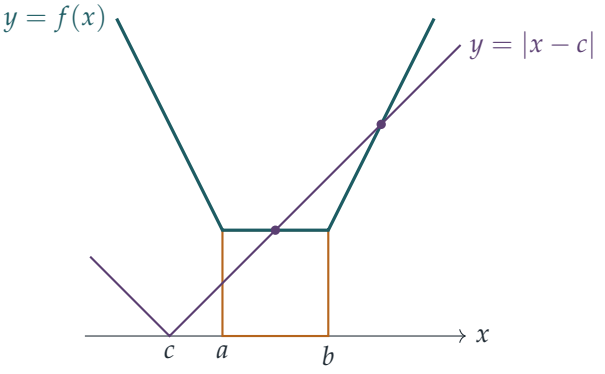
(a,b) の外側で一致する。内側では、f が $b-a$ のままであるのに対し、g は 0 まで下がる。（実際、$f(x)=\max\{b-a,\,g(x)\}$ である。）



$f(a)=f(b)=b-a$ を用いると、この四角形（quadrilateral）の頂点は $(a,0)$、$(b,0)$、$(b,b-a)$、$(a,b-a)$ である。底辺の長さは $b-a$、縦の辺の長さも $b-a$ であり、すべての角は直角である。よってこれは一辺 $b-a$ の**正方形**（square）である。また、$g(a)=g(b)=b-a$ であるから、g の V 字は正方形の底辺の中点（midpoint）から出て、上の二つの角を通ることにも注意しよう。

小問 (ii)

次に、$y=f(x)$ と $y=|x-c|$ を比べる。後者は頂点 $(c,0)$ が軸上にあり、腕の傾きが ±1 の V 字形である。鍵となる事実は、f はつねに $b-a>0$ 以上であり、その壁（傾き ±2）は V 字の腕より急だということである。図は $c<a$ の場合で、V 字が浴槽と 2 回交わる様子を示している。



$a<c<b$ の場合：解なし。 $[a,b]$ 上では、距離 $|x-c|$ は高々 $\max\{c-a,\,b-c\}<$

$b-a=f(x)$ であるから、V 字は浴槽の底より真に下にある。$x \geq b$ のとき

$$f(x)-|x-c| = (2x-a-b)-(x-c) = x-b+(c-a) \geq c-a > 0,$$

であり、$x \leq a$ についても同じ議論（あるいは後で述べる対称性）で処理できる。よって V 字は完全に浴槽の内側にあり、解は存在しない。

$c=a$ または $c=b$ の場合：解は 1 個。 $c=a$ とする。$[a,b]$ 上では $|x-a| = x-a \leq b-a$ であり、等号は $x=b$ のときに限る。$x>b$ のとき $f(x)-(x-a) = x-b > 0$、$x<a$ のとき $f(x)-(a-x) = b-x > 0$ である。よって解は $x=b$ のみであり、V 字の右の腕はちょうど正方形の上の角 $(b, b-a)$ を通る。同様に、$c=b$ のときの解は $x=a$ のみである。

$c<a$ の場合：解は 2 個。 左の腕 $y=c-x$ は $x \leq c < a$ の範囲にあり、そこでは f の傾きは -2 である。$x=c$ において $f(c) > 0 = c-c$ であり、左へ進むにつれて f は腕より速く増加するので、すべての $x \leq c$ に対して $f(x) > c-x$ である。左の腕からは解は得られない。

右の腕 $y=x-c$（$x \geq c$）について、$k(x) = f(x)-(x-c)$ とおく。f の傾きから 1 を引くと、k の傾きは (c,a) で -3、(a,b) で -1、$x>b$ で $+1$ である。よって k は $[c,b]$ で狭義単調減少（strictly decreasing）、$[b,\infty)$ で狭義単調増加である。さらに

$$k(c) = f(c) > 0, \qquad k(b) = (b-a)-(b-c) = c-a < 0, \qquad k(x) \to \infty \text{ ただし} x \to \infty.$$

したがって k は (c,b) にちょうど 1 個、(b,∞) にちょうど 1 個の零点をもつ。具体的には、これらは

$$x = a+b-c \quad \text{と} \quad x = \begin{cases} b-a+c, & 2a-b \leq c < a, \\ \frac{1}{3}(a+b+c), & c < 2a-b, \end{cases}$$

であり、二つ目の解はそれぞれ浴槽の底、または左の壁と交わる点である。

$c>b$ の場合：解は 2 個。 直線 $x=\frac{a+b}{2}$ に関する鏡映（reflection）$x \mapsto a+b-x$ は f を変えず（$|x-a|$ と $|x-b|$ を入れ替える）、$|x-c|$ を $c' = a+b-c < a$ として $|x-c'|$ に移す。よってこの場合は前の場合の鏡像である。

まとめると、解の個数は、$a<c<b$ ならば 0 個、$c=a$ または $c=b$ ならば 1 個、$c<a$ または $c>b$ ならば 2 個である。

小問 (iii)

$F(x) = |x-c|+|x-d|$ とおく。小問 (i) より、F は二つ目の浴槽であり、$[c,d]$ の上に高さ $d-c$ の底をもち、壁の傾きは ± 2 である。$d-c < b-a$ であるから、その底は f の底より低く、幅も狭い。二つの底の中点を

$$m = \tfrac{1}{2}(a+b), \qquad n = \tfrac{1}{2}(c+d)$$

と書き、$h(x) = f(x) - F(x)$ とおく。

十分左側（$x \leq \min\{a,c\}$）では両方のグラフが左の壁の上にあるので、$h(x) = (a+b-2x) - (c+d-2x) = 2(m-n)$ である。十分右側（$x \geq \max\{b,d\}$）では $h(x) = 2(n-m)$ である。その間では、h は連続かつ区分的に線形である。

> **考えてみよう** 二つのグラフが線分全体を共有し、解が無数に存在することはありうるか？

それが起こりうるのは、傾きが等しいところだけである。二つの底はどちらも平らだが、高さ $b-a \neq d-c$ が異なるので重ならない。それ以外で傾きが一致するのは、両方のグラフが左の壁上にある（$x < \min\{a,c\}$）か、両方が右の壁上にある（$x > \max\{b,d\}$）ときだけであり、そこでは $h = \pm 2(m-n)$ である。よって二つのグラフが線分を共有するのは、ちょうど $m = n$ のときである。

$a+b = c+d$ の場合：解は無数。 このとき $x \leq \min\{a,c\}$ および $x \geq \max\{b,d\}$ で $h = 0$ である。$d-c < b-a$ かつ中点が一致するので $a < c < d < b$ であり、小さい浴槽は大きい浴槽の中央に収まっている。$c \leq x \leq b$ では F のグラフは底か右の壁の上にあるので、$F(x) \leq 2b - c - d = b - a = f(x)$ であり、等号は $x = b$ のときに限る。対称性により $[a,d]$ でも同じことが成り立つ。よって解の集合は、ちょうど $x \leq a$ と $x \geq b$ を合わせたものである。

$a+b < c+d$ の場合：解はちょうど 1 個。 このとき、十分左側で $h = 2(m-n) < 0$、十分右側で $h = 2(n-m) > 0$ である。h が減少しうるのはどこか。それには f の傾きが F の傾きより小さくなければならない。その可能性は二通りある。

- f が左の壁上にあり、F がそうでない場合。これには $c < x < a$ が必要である。すると $c < a$ であり、$d-c < b-a$ より $d < b$ でもあるから $c+d < a+b$ となるが、これはこの場合に反する。
- f が底の上にあり、F が右の壁上にある場合。これには $d < x < b$ が必要である。

よって h は $(-\infty, d]$ で単調非減少である。$[d,\infty)$ では、h は $[d,b]$ で（$d < b$ ならば）単調非増加であり、その後 $x \geq \max\{b,d\}$ では $2(n-m)$ で一定である。よってすべての $x \geq d$ に対して $h(x) \geq 2(n-m) > 0$ である。$(-\infty, d]$ では、h は値 $2(m-n) < 0$ から $h(d) > 0$ まで減少することなく増加し、（上の枠の議論により）値が 0 となる区間で一定になることはない。よって h はそこにちょうど 1 個の零点をもつ。したがって解は全体でちょうど 1 個である。

$a+b > c+d$ の場合：解はちょうど 1 個。 鏡映 $x \mapsto -x$ により a,b,c,d は $-b,-a,-d,-c$ に置き換わり、和の大小関係が逆転するので、前の場合に帰着する。

まとめると、$a < b$、$c < d$、$d-c < b-a$ のもとで、$a+b = c+d$（二つの区間の中点

が一致する）ならば解は無数に存在し、それはすべての $x \leq a$ とすべての $x \geq b$ である。それ以外の場合、解はちょうど 1 個である。

検算

- 小問 (ii) で $a = 1$、$b = 3$、$c = 0$ とすると、解 $x = a + b - c = 4$ と $x = b - a + c = 2$ について $|3| + |1| = 4$ と $1 + 1 = 2$ となり、確かに成り立つ。$c = -5$ のとき二つ目の解は $\frac{1}{3}(1 + 3 - 5) = -\frac{1}{3}$ であり、実際 $\frac{4}{3} + \frac{10}{3} = \frac{14}{3} = |-\frac{1}{3} + 5|$ である。
- 小問 (iii) で $a = 0$、$b = 10$、$c = 6$、$d = 7$ とすると、h は十分左側で -3 であり、$[6, 7]$ で 9 まで増加し、その後 3 まで減少してそのまま一定となる。唯一の零点は $x = \frac{3}{2}$ であり、そこでは両辺とも 10 に等しい。
- a, b, c, d をランダムな整数として数万通り選んでコンピュータで確かめたところ、すべての場合で上の解の個数とちょうど一致した。

よくある間違い

- (ii) で、V 字が正方形の角にちょうど接する境界の場合 $c = a$ と $c = b$ を見落とす。
- (iii) で、h が単調（monotonic）であると思い込む。実際はそうではない。小さい浴槽が大きい浴槽の中で中央からずれているとき、h は (d, b) で減少する。それでも解の個数が変わらないのは、そこでは h がすでに正だからである。
- (iii) で、中点が一致するときに解が無数になる場合を見落とす。

STEP のその先へ

関数 $|x - a| + |x - b|$ は、x から 2 点までの距離の合計である。このような距離の和を最小化するという考え方は、統計学における中央値（median）や、ℓ^1 ノルム（norm、「タクシー距離」）の背後にある。f のような関数は凸（convex）であり、ここで用いた「区間ごとに傾きが増加していく」という議論は、線形計画法（linear programming）や最適化（optimisation）の基礎となる凸解析（convex analysis）の出発点である。Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）では、ここで用いた連続性と単調性の議論が厳密に扱われている。

解答例

STEP II 2014、第 8 問

純粋数学 ・ 最大の二項係数

STEP II 2014、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s2-q8

鍵となる考え方

正の項からなる数列がどこで最大になるかを調べるには、各項を次の項と比べればよい。すなわち比（ratio）c_{r+1}/c_r を考えるのである。二項展開の場合、この比は r についての簡単な分数式で、単調に減少する。したがって係数は、この比が 1 を超えている間は増加し、1 を下回ると減少する。最大の係数は比が 1 をまたぐところにあり、以降の各小問はすべて、ある一つの式の整数部分（integer part）を読み取るだけの問題になる。

解答

係数とその比

二項定理（binomial theorem）により、

$$c_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r, \qquad 0 \le r \le n.$$

$a, b > 0$ であるから、これらはすべて正である。$0 \le r \le n-1$ のとき、

$$\frac{c_{r+1}}{c_r} = \frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} \cdot \frac{b}{a} = \frac{(n-r)\,b}{(r+1)\,a},$$

ここで $\binom{n}{r+1} = \binom{n}{r}\frac{n-r}{r+1}$ を用いた。

$$L = \frac{b(n+1)}{a+b}.$$

とおく。$(r+1)a > 0$ であるから、

$$c_{r+1} \geq c_r \iff (n-r)b \geq (r+1)a \iff nb - a \geq r(a+b)$$
$$\iff r \leq \frac{nb-a}{a+b} = \frac{b(n+1)}{a+b} - 1 = L - 1,$$

であり、すべてを $=$ に置き換えても同じ同値関係が成り立つ。よって

$c_{r+1} > c_r$ となるのは$r < L-1$, $\quad c_{r+1} = c_r$ となるのは$r = L-1$, $\quad c_{r+1} < c_r$ となるのは$r > L-1$
$(*)$

m の範囲

上からの評価。 $m = 0$ ならば、$L > 0$ であるから $m \leq L$ である。$m \geq 1$ ならば、c_m が最大であることから $c_m \geq c_{m-1}$ であり、$r = m-1$ として $(*)$ を用いると $m - 1 \leq L - 1$、すなわち $m \leq L$ を得る。

下からの評価。 $m = n$ ならば、$L < n+1$（$\frac{b}{a+b} < 1$ による）であるから $m \geq L-1$ である。$m \leq n-1$ ならば $c_m \geq c_{m+1}$ であり、$r = m$ として $(*)$ を用いると $m \geq L-1$ でなければならない。

以上より、いずれの場合も

$$\frac{b(n+1)}{a+b} - 1 \leq m \leq \frac{b(n+1)}{a+b},$$

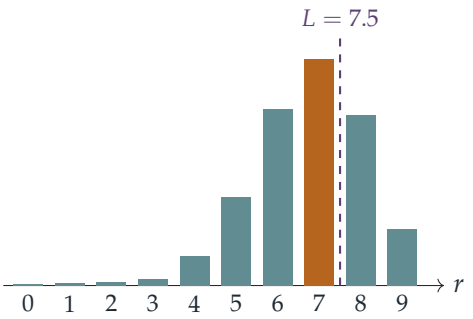
が成り立ち、示すべきことが示された。

> **考えてみよう** m の値が三つあったり、隣り合わない二つの値があったりすることがないのはなぜか？

区間 $[L-1, L]$ の長さは 1 である。L が整数でなければ、この区間に含まれる整数はちょうど一つ、$\lfloor L \rfloor$ であり、m は一意に定まる。L が整数ならば、この区間に含まれる整数は連続する二つの整数 $L-1$ と L だけであり、m はそのいずれかである。（実際、$r = L-1$ として $(*)$ を用いると $c_{L-1} = c_L$ となるので、両方とも本当に最大である。）いずれにせよ、一意な値、あるいは二つのうち大きい方は

$$G(n,a,b) = \left\lfloor \frac{b(n+1)}{a+b} \right\rfloor.$$

である。以降はこの公式だけを用いればよい。



$(1+3x)^9$ の係数を縮尺どおりに描いたもの：$r < L-1 = 6.5$ の間は増加し、その後減少して、$r = 7$ で最大となる。

小問 (i)

$(n,a,b) = (9,1,3)$ のとき、$L = \frac{3\times10}{4} = 7.5$ であるから $G(9,1,3) = 7$ である。

$(n,a,b) = (9,2,3)$ のとき、$L = \frac{3\times10}{5} = 6$ は整数であるから、最大の係数は $r = 5$ と $r = 6$ の両方で現れ、$G(9,2,3) = 6$ である。（検算：$c_5 = 126\cdot 2^4\cdot 3^5 = 489\,888 = 84\cdot 2^3\cdot 3^6 = c_6$。）

小問 (ii)

$a = b$ のとき、$L = \frac{n+1}{2}$ である。

- $n = 2k$：$L = k + \frac{1}{2}$ であるから、$G(2k,a,a) = k$（中央の係数で、一意）。
- $n = 2k-1$：$L = k$ は整数であるから、中央の二つの係数 $r = k-1$ と $r = k$ が等しくなり、$G(2k-1,a,a) = k$ である。

これはパスカルの三角形（Pascal's triangle）の各行の対称性と一致している。

小問 (iii)

n と b を固定すると、$L = \frac{b(n+1)}{a+b}$ は a の減少関数であるから、$\lfloor L \rfloor$ は a について単調非増加（non-increasing）な関数である。したがって正の整数の範囲では $a = 1$ で最大となり、そのとき $G(n,1,b) = \left\lfloor \frac{b(n+1)}{b+1} \right\rfloor$ である。（他の a の値で同じ値になることはありうるが、これを上回るものはない。）

小問 (iv)

ここで

$$\frac{b(n+1)}{b+1} = (n+1) - \frac{n+1}{b+1}.$$

である。$\frac{n+1}{b+1} > 0$ であるから、これは $n+1$ より小さく、よって $G(n,1,b) \leq n$ である。（これは $m \leq n$ からも従う。）さらに、

$$G(n,1,b) = n \iff (n+1) - \frac{n+1}{b+1} \geq n \iff \frac{n+1}{b+1} \leq 1 \iff b \geq n.$$

よって $G(n,1,b)$ のとりうる最大の値は n であり、それが達成されるのはちょうど $b \geq n$ のときである。$b = n$ のときは、$c_{n-1} = n \cdot b^{n-1} = b^n = c_n$ であるから最後の二つの係数が等しくなる。$b > n$ のときは最後の係数 b^n がただ一つの最大値である。

検算

- $(1+3x)^9$ の係数は $1, 27, 324, 2268, 10206, 30618, 61236, 78732, 59049, 19683$ であり、最大は $r = 7$ のところにある。これは (i) の結果と一致する。
- $(1+x)^4$（$n = 2k$、$k = 2$）の係数 $1, 4, 6, 4, 1$ は $r = 2 = k$ で最大となる。$(1+x)^3$（$k = 2$）の係数は $1, 3, 3, 1$ であり、$r = 1, 2$ で等しく、大きい方の値は $2 = k$ である。
- (iv) で $n = 3$ の場合：$(1+2x)^3$ の係数は $1, 6, 12, 8$ で、$r = 2$ で最大となる。$(1+3x)^3$ の係数は $1, 9, 27, 27$ であるから、$b = 3$ となったところで $G = 3$ に達する。
- $n < 30$、$a, b < 15$ のすべてについて $G(n,a,b) = \lfloor b(n+1)/(a+b) \rfloor$ をコンピュータで確かめたところ、すべての場合で一致した。

よくある間違い

- 範囲を証明する際に端の場合 $m = 0$ と $m = n$ を忘れること。比べるべき c_{-1} や c_{n+1} は存在しない。
- L が整数のとき、等しい二つの値のうち小さい方をとること。G は大きい方として定義されているので、$G(9,2,3) = 6$ であり、5 ではない。
- (iv) で $b = n$ とだけ答えること。$b \geq n$ であればどれでも $G = n$ となる。

STEP のその先へ

ここで用いた、連続する項を比べるという比による判定は、級数の収束に関する比判定法（ratio test）と同じ考え方である。また、これにより $p = \frac{b}{a+b}$ とした二項分布（binomial distribution）$\mathrm{B}(n,p)$ の最頻値（mode）の位置がわかる。最頻値は $\lfloor (n+1)p \rfloor$ である。二項係数のように、項が増加した後に減少する数列は単峰（unimodal）であるといい、これを証明するための標準的な道具が対数凹性（log-concavity、$c_r^2 \geq c_{r-1}c_{r+1}$）

である。確率論の側面については、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）を参照せよ。

解答例

STEP II 2014、第 9 問

力学 ・ 剛体のつり合い

> **STEP II 2014、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q9

鍵となる考え方

未知の力は 3 つ（張力（tension）、垂直抗力（normal reaction）、A における摩擦力（friction））であり、方程式も 3 つある。水平方向の力のつり合い、鉛直方向の力のつり合い、そして力のモーメント（moments）のつり合いである。隅 A のまわりのモーメントをとるのが巧みな選択である。壁から受ける 2 つの接触力はどちらも A に作用するので式から消え、張力と重さを結ぶ式が 1 本だけ残るからである。これが得られれば、摩擦力の向きは、糸だけで支える力が重さより大きいか小さいかという問題にすぎない。

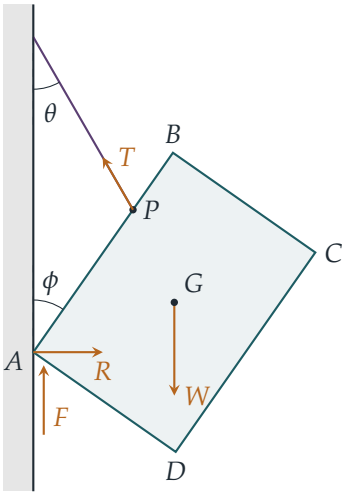
解答

薄板（lamina）を重さ W の一様な剛体（rigid body）とみなし、その重心（centre of mass）G は長方形の中心にあるとする。また糸は軽く伸び縮みしないとみなすので、張力 T は糸のどこでも等しい。A において壁は垂直抗力 R（水平で、壁から離れる向き）と摩擦力 F（鉛直）を及ぼす。F は上向きを正とする。したがって F が負であれば、摩擦力は実際には下向きにはたらくことを意味する。

A を原点とし、x 軸を壁から離れる水平方向、y 軸を鉛直上向きにとる。辺 AB は鉛直上向きと角 ϕ をなすので、AB 方向の単位ベクトルは $(\sin\phi, \cos\phi)$ である。辺 AD はこれに垂直で壁から離れる向きなので、その単位ベクトルは $(\cos\phi, -\sin\phi)$ である。よって

$$G = b(\sin\phi, \cos\phi) + a(\cos\phi, -\sin\phi), \qquad P = d(\sin\phi, \cos\phi),$$

ここで P は糸の取り付け点である。糸は P から壁へ向かって、鉛直下向きと角 θ をなして上方に張られているので、薄板にはたらく張力は $T(-\sin\theta, \cos\theta)$ である。



小問 (i)

水平方向と鉛直方向の力のつり合いより

$$R = T\sin\theta,$$
$$F + T\cos\theta = W.$$

A のまわりのモーメントでは、R と F は寄与しない。点 (x, y) にはたらく力 (f_x, f_y) の反時計回りのモーメントは $xf_y - yf_x$ である。P にはたらく張力についてこれは

$$d\sin\phi \cdot T\cos\theta - d\cos\phi \cdot (-T\sin\theta) = Td\sin(\theta+\phi),$$

であり、G にはたらく重力 $(0, -W)$ については $-W(a\cos\phi + b\sin\phi)$ である。よって

$$Td\sin(\theta+\phi) = W(a\cos\phi + b\sin\phi). \tag{1}$$

量 $a\cos\phi + b\sin\phi$ はちょうど G の壁からの水平距離であり、重力のモーメントをすばやく求める方法になっている。

摩擦力が上向きの極限つり合い（limiting equilibrium）では $F = \mu R = \mu T\sin\theta$ なので、鉛直方向の式は

$$T(\cos\theta + \mu\sin\theta) = W.$$

となる。これを (1) の W に代入し、T（糸がぴんと張っているので正である）で割ると

$$d\sin(\theta+\phi) = (\cos\theta + \mu\sin\theta)(a\cos\phi + b\sin\phi),$$

となり、これが $(*)$ である。

小問 (ii)

摩擦力が極限状態にあり下向きにはたらくならば、$F = -\mu R = -\mu T \sin\theta$ であり、鉛直方向の式は $T(\cos\theta - \mu\sin\theta) = W$ となる。ほかは何も変わらないので、$(*)$ は

$$d\sin(\theta+\phi) = (\cos\theta - \mu\sin\theta)(a\cos\phi + b\sin\phi);$$

となる。すなわち、μ が $-\mu$ に置き換わる。

小問 (iii)

今度は摩擦力が極限状態にあるとは仮定しない。式 (1) はどのようなつり合いでも成り立ち、

$$T = \frac{W(a\cos\phi + b\sin\phi)}{d\sin(\theta+\phi)},$$

を与える。ここで θ と ϕ はともに鋭角なので $\sin(\theta+\phi) > 0$ である。すると鉛直方向の式から

$$F = W - T\cos\theta = W\left(1 - \frac{\cos\theta\,(a\cos\phi + b\sin\phi)}{d\sin(\theta+\phi)}\right).$$

が得られる。

考えてみよう 「$F > 0$」を、正接（tangent）だけを含む条件に書き換えるにはどうすればよいか。

摩擦力が上向きにはたらくのは、ちょうど $F > 0$ のとき、すなわち $d\sin(\theta+\phi) > 0$ であることから

$$d\sin(\theta+\phi) > \cos\theta\,(a\cos\phi + b\sin\phi),$$

のときである。$\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$ と展開し、両辺を $\cos\theta\cos\phi$ で割る。両方の角が鋭角なのでこれは正であり、不等号の向きは変わらない：

$$d(\tan\theta + \tan\phi) > a + b\tan\phi.$$

$\tan\theta + \tan\phi > 0$ であるから、必要十分条件（necessary and sufficient condition）は

$$d > \frac{a + b\tan\phi}{\tan\theta + \tan\phi}.$$

である。（d がこの値に等しいときは摩擦力はまったくはたらかず、d がこれより小さいときは摩擦力は下向きにはたらく。）

物理的には、糸は辺 AB に取り付けられているので $d \le 2b$ である。条件が成り立つならば

$$\frac{a + b\tan\phi}{\tan\theta + \tan\phi} < d \le 2b,$$

なので $a + b\tan\phi < 2b\tan\theta + 2b\tan\phi$、すなわち $a < b(2\tan\theta + \tan\phi)$ である。対偶（contrapositive）をとると、$b(2\tan\theta + \tan\phi) < a$ ならば、取り付け点をどこに置いても摩擦力は上向きにならず、条件は満たされない。以上で証明が完了する。

検算

- $\mu = 0$ のとき壁はなめらかであり、$(*)$ と小問 (ii) の式は当然一致する。どちらも小問 (iii) の境界の場合 $d\sin(\theta+\phi) = \cos\theta\,(a\cos\phi + b\sin\phi)$ に帰着する。
- AB が鉛直な薄板（$\phi \to 0$）：境界は $d\tan\theta = a$ となる。これは、糸の作用線（line of action）が、壁から水平距離 a にある G を通る鉛直線と交わることを意味する。このとき糸と重力だけでつり合い、壁は水平に押すだけである。
- 数値例として $a = 1$、$b = 1.5$、$\theta = 30^\circ$、$\phi = 40^\circ$ とすると、臨界値は $d \approx (1 + 1.259)/(0.577 + 0.839) \approx 1.595 < 3 = 2b$ である。A ではなく G のまわりのモーメントを用いて 3 つのつり合いの式を直接解くと、この値のすぐ上では $F > 0$、すぐ下では $F < 0$ となる。数千通りのランダムな配置についてコンピュータで確認し、$(*)$、小問 (ii) の式、および (iii) の条件が正しいことを確かめた。

よくある間違い

- P や G のまわりのモーメントをとること：これでも解けるが、R と F がモーメントの式に入り込み、計算がずっと煩雑になる。
- G の位置を誤ること：D は壁から離れた側にあるので、AD は $(\cos\phi, -\sin\phi)$ の向きであり、G の壁からの水平距離は $a\cos\phi + b\sin\phi$ である。
- 最後の小問で制約 $d \le 2b$ を忘れること。AB の長さが関わるのはここだけである。

STEP のその先へ

これは小さな静定（statically determinate）問題である。平面内の剛体について、未知の力が 3 つ、独立なつり合いの式が 3 つある。技術者は何よりも先にこの数え上げを確認する。支点がこれより多いと、力は静力学だけでは決まらず、物体がどのように変形するかを知る必要がある。未知の力が作用する点のまわりのモーメントをとるという技法は、トルク（torque）の原点をうまく選ぶことの平面版である。さらに学ぶには Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

解答例

STEP II 2014、第 10 問

力学 ・ 軌道の包絡線

STEP II 2014、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s2-q10

この問題は、*Beyond STEP* の第 11.9 節「**安全放物線**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/safety-parabola.html

鍵となる考え方

時間を消去すると、$\sec^2\theta = 1 + \lambda^2$ であるから、軌道（trajectory）の方程式は $\lambda = \tan\theta$ に関する**二次式**（quadratic）になる。点 (x, y) を固定し、その点を通るような発射角が存在するかどうかを問う。これは、λ に関するこの二次方程式が実数解をもつかどうかを問うことと同じであるから、判別式（discriminant）によって到達可能な領域の境界が得られる。最後の小問では、境界の曲線が O を焦点（focus）とする放物線（parabola）であることがわかり、そのおかげで O からの距離がきわめて簡単に求められる。

解答

軌道

物体を、空気抵抗（air resistance）のない状態で重力のみを受けて自由に運動する質点としてモデル化する。時刻 t において、

$$x = ut\cos\theta, \qquad y = ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

角は直角より小さいので $\cos\theta \neq 0$ であり、$t = x/(u\cos\theta)$ である。これを代入すると

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta}.$$

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \lambda^2$ を用いると、直交座標による方程式は

$$\boxed{y = \lambda x - \frac{gx^2}{2u^2}\left(1 + \lambda^2\right).}$$

与えられた x の真上での最大の高さ Y

u を固定し、$x > 0$ を固定する。このとき y は λ のみの関数であり、次のように書き直せる。

$$\frac{gx^2}{2u^2}\lambda^2 - x\lambda + \left(\frac{gx^2}{2u^2} + y\right) = 0.$$

考えてみよう これを y ではなく λ についての方程式と見るのはなぜか。

この x の真上で値 y が実現されるのは、ある発射角がそれを生み出すとき、すなわちこの二次方程式が実数解 λ をもつときであり、かつそのときに限る。したがって判別式は非負でなければならない。

$$x^2 - 4 \cdot \frac{gx^2}{2u^2}\left(\frac{gx^2}{2u^2} + y\right) \geq 0.$$

$x^2 > 0$ で割り、さらに $u^2/(2g) > 0$ を掛けても不等号の向きは変わらないから、

$$\frac{u^2}{2g} \geq \frac{gx^2}{2u^2} + y \iff y \leq \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}.$$

よって

$$\boxed{Y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}}$$

であり、この x の真上で Y より高く上がる軌道は存在しない。

さらに、Y **以下の**すべての値が、$\lambda > 0$ となる正当な発射角によって実現されることも示す必要がある。λ の関数として見ると、y は上に凸な二次関数である。頂点は $\lambda_0 = u^2/(gx) > 0$ にあり、そこで $y = Y$ となる（代入して確かめよ）。$\lambda \geq \lambda_0$ において y は連続かつ減少であり、$\lambda \to \infty$ のとき $y \to -\infty$ である。したがって連続性（continuity）により、$y \leq Y$ を満たすすべての値は、ある $\lambda \geq \lambda_0 > 0$、すなわちある $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ に対してとられる。ゆえに、求めるとおり y のとる値は区間 $y \leq Y$ 全体となる。（$x = 0$ のときは真上に投げなければならない。このとき y は 0 から $u^2/(2g)$ までの値をとり、これはやはり $Y(0)$ に等しい。）

どちらの向きにも投射してよい場合には、$x < 0$ の場合は鏡像となり、Y は x^2 のみに依存するので同じ公式が成り立つ。

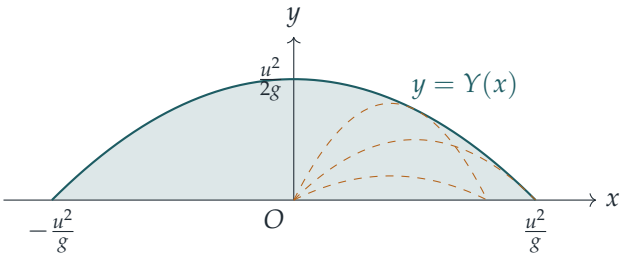
グラフと到達可能な領域

Y のグラフは上に凸な放物線である。頂点は $(0,\, u^2/2g)$ にあり、これは到達可能な最大の高さである。また $x = \pm u^2/g$ で地面と交わり、これは最大の水平到達距離である。個々の軌道はすべてこの曲線の下にあり、$\lambda = \lambda_0$ において一度だけこの曲線に接する。このため、この曲線はしばしば**包絡放物線**（bounding parabola）または**安全放物線**（parabola of safety）とよばれる。

質点は地面に達すると止まる。$\lambda > 0$ かつ $x > 0$ である軌道上の、$y \geq 0$ を満たす点をとる。その軌道は O とその点の間のすべての x において地面より上にあるから、質点は着地する前に確かにその点に到達する。よって到達可能な集合は、次の領域である。

$$0 \leq y \leq \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}, \qquad |x| \leq \frac{u^2}{g},$$

これを下図に網掛けで示す。図は u^2/g を単位としており、破線の曲線は 3 本の軌道の例である。



O からの最大距離

到達可能な任意の点 P は、半直線 OP が境界と交わる点を Q とするとき、O から Q への線分上にある。領域は包絡放物線と地面で囲まれており、各半直線に沿って O と境界の間にあるすべての点を含む。したがって $OP \leq OQ$ であり、境界上で距離を最大化すればよい。地面上で最も遠い点までの距離は u^2/g である。曲線部分では $y = Y(x)$ であるから、

$$\begin{aligned} OQ^2 = x^2 + Y^2 &= x^2 + \left(\frac{u^2}{2g}\right)^2 - 2 \cdot \frac{u^2}{2g} \cdot \frac{gx^2}{2u^2} + \left(\frac{gx^2}{2u^2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{u^2}{2g}\right)^2 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{gx^2}{2u^2}\right)^2 = \left(\frac{u^2}{2g} + \frac{gx^2}{2u^2}\right)^2. \end{aligned}$$

よって $OQ = \dfrac{u^2}{2g} + \dfrac{gx^2}{2u^2} = \dfrac{u^2}{g} - Y$ である。言い換えると、O からの距離は直線 $y = u^2/g$ から下向きに測った距離に等しい。すなわち O は包絡放物線の焦点であり、$y = u^2/g$ はその準線（directrix）である。この距離は Y が最小のときに最大となり、曲線の到

達可能な部分における Y の最小値は $x = \pm u^2/g$ における $Y = 0$ である。ゆえに、投射物が到達できる O からの最大距離は

$$\boxed{\frac{u^2}{g}},$$

であり、これは $\theta = \frac{\pi}{4}$ で達成される最大の水平到達距離に等しい。境界上で高さ $y > 0$ にある点はどれも、ちょうど y だけ O に近い。

検算

- $x = 0$ とおくと $Y = u^2/(2g)$ となり、これは真上に投げたときに達する高さである（$v^2 = u^2 - 2gh$ より）。$Y = 0$ とおくと $x = u^2/g$ となり、これはおなじみの最大到達距離 $u^2 \sin 2\theta/g$ の $\theta = \frac{\pi}{4}$ における値である。
- $u^2/g = 10$ とする（たとえば $g = 9.8$ として $u = \sqrt{98}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$）。$x = 4$ において公式は $Y = 5 - 0.8 = 4.2$ を与え、これは $\lambda_0 = 10/4 = 2.5$ で達成される。実際、$2.5 \cdot 4 - \frac{1}{20} \cdot 16 \cdot 7.25 = 10 - 5.8 = 4.2$ である。
- $u = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ に対して多数の発射角と時刻にわたって計算機で探索したところ、O から最も遠い点は地面上にあり、その距離は $10.204\,\mathrm{m} = u^2/g$ であった。

よくある間違い

- 判別式のところで止めてしまうこと。判別式は $y \le Y$ が**必要**であることを示すが、問題はさらに、そのような値がすべて地面より上で正当な発射角によって**実現される**ことも求めている。
- 地面より下の点も含めて、$y = Y$ の下の領域全体を網掛けしてしまうこと。質点は着地すると止まるので、到達可能な集合はさらに $y \ge 0$ を満たす。
- 最も遠い点は安全放物線の頂点であると思い込むこと。その点は O から $u^2/(2g)$ しか離れておらず、これは到達距離の半分である。

STEP のその先へ

包絡放物線は軌道の族の**包絡線**（envelope）、すなわち族のすべての曲線に接する曲線である。包絡線を求める標準的な方法の一つは、$F(x, y, \lambda) = 0$ と $\partial F/\partial\lambda = 0$ からパラメータを消去することであり、これはまさに本問で用いた重解条件にほかならない。エネルギーとの関連もある。すべての軌道は同じ準線、すなわち直線

$y = u^2/(2g)$ をもつ。これは、運動エネルギー（kinetic energy）がすべて位置エネルギー（potential energy）に変わったときに達する高さである。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、大学 1 年生の水準で放物運動とエネルギーを扱っている。

解答例

STEP II 2014、第 11 問

力学 ・ 円運動

> **STEP II 2014、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q11

鍵となる考え方

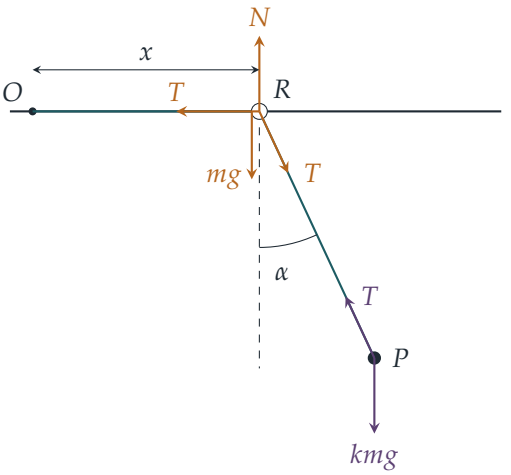
すべては一つの変数 x によって決まる。糸は伸び縮みせず（inextensible）、α は一定であるから、P の位置は x の簡単な関数となり、P の加速度の二つの成分はどちらも $\ddot{x}$ の定数倍になる。こうして運動方程式（equation of motion）が三つ（P について二つ、環について水平方向の一つ）得られるが、未知数は $\ddot{x}$ と T の二つしかない。方程式の数が未知数より多い連立方程式（overdetermined system）は、何か特別なことが成り立つ場合にしか解をもたない。その整合性の条件こそが、α と k を結びつけるのである。

解答

モデル化。環と P は質点、糸は軽く伸び縮みせず、環とレールはなめらかであるとする。環がなめらかなので、張力（tension）T は糸の両側の部分で等しい。O を原点とし、x 軸をレールに沿って O から環へ向かう向きにとり、y 軸を鉛直上向きにとる。

P の座標。糸のうち O から環までの部分はレールに沿っていて長さは x であるから、環から P までの部分の長さは $L-x$ である。この部分は鉛直下向きと角 α をなし、P は環に関して O と反対側に垂れ下がっている（この選び方が正しいことは小問 (i) の最後で示す）。よって

$$P = \big(x + (L-x)\sin\alpha,\ -(L-x)\cos\alpha\big).$$



小問 (i)

α を定数として P の座標を 2 回微分すると

$$\ddot{x}_P = \ddot{x}\,(1-\sin\alpha), \qquad \ddot{y}_P = \ddot{x}\cos\alpha.$$

P にはたらく力は、下向きの重力 kmg と、糸に沿って環の方へ向かう張力 T である。張力の成分は水平方向が $-T\sin\alpha$、鉛直方向が $+T\cos\alpha$ である。

P の鉛直方向： $km\ddot{y}_P = T\cos\alpha - kmg$、すなわち

$$km\ddot{x}\cos\alpha = T\cos\alpha - kmg,$$

となり、示すべき式が得られた。

P の水平方向：

$$km\ddot{x}\,(1-\sin\alpha) = -T\sin\alpha. \tag{1}$$

環の水平方向。環は両側から糸の力を受ける。レールに沿った部分は環を力 T で O の方へ引き、P へ垂れ下がる部分は水平成分 $T\sin\alpha$ で環を O から遠ざかる向きに引く。環の重力とレールからの垂直抗力（normal reaction）は鉛直方向である（レールはなめらかである）。よって

$$m\ddot{x} = T\sin\alpha - T = -T(1-\sin\alpha). \tag{2}$$

考えてみよう なぜ P は環に関して O と反対側になければならないのだろうか。

もし P が O の側に垂れ下がっているとすると、その x 座標は $x-(L-x)\sin\alpha$ となり、二つの水平方向の方程式は $km\ddot{x}(1+\sin\alpha) = T\sin\alpha$ と $m\ddot{x} = -T(1+\sin\alpha)$ になる。前

者からは $\ddot{x} \geq 0$、後者からは $\ddot{x} \leq 0$ が従うので、$\ddot{x} = 0$ かつ $T = 0$ である。しかしこのとき鉛直方向の方程式から $0 = -kmg$ となり、これは不可能である。したがってその配置では α を一定に保ったまま運動することはできず、上の座標が正しいものである。

小問 (ii)

まず $T \neq 0$ である。実際、$T = 0$ ならば (2) より $\ddot{x} = 0$ となり、鉛直方向の方程式から $0 = -kmg$ となって矛盾する。

(2) より $m\ddot{x} = -T(1 - \sin\alpha)$ である。これを (1) に代入すると

$$k\big(-T(1-\sin\alpha)\big)(1-\sin\alpha) = -T\sin\alpha.$$

$-T \neq 0$ で割ると

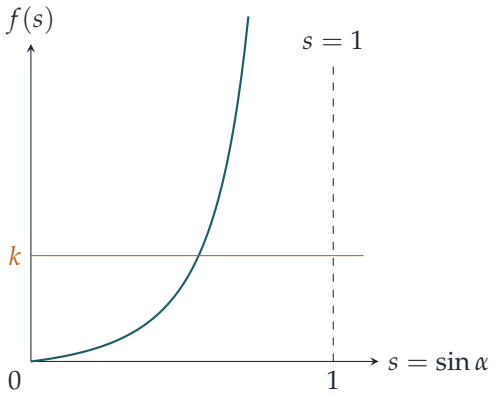
$$\frac{\sin\alpha}{(1-\sin\alpha)^2} = k,$$

となり、示すべき式が得られた。(α は鋭角なので $0 < \sin\alpha < 1$ であり、$(1-\sin\alpha)^2$ で割ってよい。)

どんな k も実現できる。$s = \sin\alpha$ とおき、$0 < s < 1$ で $f(s) = \dfrac{s}{(1-s)^2}$ を考える。この範囲はちょうど $\alpha \neq 0$ である鋭角 α 全体に対応する。商の微分法 (quotient rule) により

$$f'(s) = \frac{(1-s)^2 + 2s(1-s)}{(1-s)^4} = \frac{1+s}{(1-s)^3} > 0,$$

であるから、f は狭義単調増加 (strictly increasing) である。また $s \to 0^+$ のとき $f(s) \to 0$、$s \to 1^-$ のとき $f(s) \to \infty$ であり、f は連続である。よって f はすべての正の値をちょうど 1 回ずつとり、各 $k > 0$ に対して条件を満たす鋭角 α がただ一つ存在する。



水平な直線 $y = k$ の高さがどうであっても、この直線は曲線とちょうど 1 回交わる。

小問 (iii)

次に、(2) と鉛直方向の方程式を用いて T を消去する。(2) より $T = -\dfrac{m\ddot{x}}{1-\sin\alpha}$ である。これを鉛直方向の方程式に代入し、m で割ると

$$k\ddot{x}\cos\alpha = -\frac{\ddot{x}\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - kg \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x}\cos\alpha\left(k + \frac{1}{1-\sin\alpha}\right) = -kg.$$

ここで小問 (ii) を用いて括弧内の k を置き換えると

$$k + \frac{1}{1-\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha + (1-\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)^2} = \frac{1}{(1-\sin\alpha)^2}.$$

したがって

$$\ddot{x} = -\frac{kg(1-\sin\alpha)^2}{\cos\alpha} = -\frac{g\sin\alpha}{\cos\alpha} = -g\tan\alpha,$$

となる。ここでもう一度 $k(1-\sin\alpha)^2 = \sin\alpha$ を用いた。これが求める結果である。

おまけとして、$T = -\dfrac{m\ddot{x}}{1-\sin\alpha} = \dfrac{mg\tan\alpha}{1-\sin\alpha} > 0$ であるから、モデルが要求するとおり、糸は確かにぴんと張っている。

検算

- $k = 1$ のとき、条件 $s = (1-s)^2$ から $\sin\alpha = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) \approx 0.382$ となるので、$\alpha \approx 22.46°$、$\ddot{x} \approx -0.413g$ である。これらを (1)、(2) および鉛直方向の方程式に代入すると、三つともつり合う。
- 二変数（x と糸の角度）の運動全体を数値的にシミュレーションし、この角度から環が動いている状態で始めたところ、角度は 10^{-10} rad 以内で一定に保たれ、環はちょうど $g\tan\alpha$ で減速した。わずかに異なる角度から始めると、角度はただちに変化し始める。したがって α の特別な値は本当に重要である。
- 極限の場合：$k \to 0$（非常に軽い質点）のとき $\alpha \to 0$、$\ddot{x} \to 0$ となる。$k \to \infty$ のとき $\alpha \to 90°$ となり、減速度は限りなく大きくなる。軽い環が重い質点に引っ張られているからである。
- 符号：$\ddot{x} < 0$ であるから、環は常に O の方へ加速している。これは整合的である。環にはたらく水平方向の合力 $-T(1-\sin\alpha)$ は O の方を向いているからである。

よくある間違い

- 環が糸から**両側**の力を受けることを忘れる。レールに沿って O の方へ引く力があるからこそ (2) が成り立つ。

- P の水平方向の加速度を $\ddot{x}$ と書いてしまう。垂れ下がっている部分の長さ $L-x$ も変化し、それが $-\ddot{x}\sin\alpha$ の寄与を生む。
- 微分するときに α を変数として扱う。ここでは α は定数であり、まさにそのことが問題を解けるものにしている。

STEP のその先へ

これは 2 自由度（degrees of freedom）の系（環の位置と糸の角度）であり、この問題は、相対平衡（relative equilibrium）の考え方に沿って、そのうち一方が一定に保たれる特別な解を探している。大学 1 年の講義であれば、x と角度を用いてラグランジアン（Lagrangian）を書き下し、角度一定の運動が可能なのはここで求めたただ一つの α の値に限られることを確かめるだろう。自然に続く問いは、その運動が安定（stable）かどうかである。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この種の拘束系をよく扱っている。

解答例

STEP II 2014、第 12 問

確率・統計 ・ ハザード関数

> **STEP II 2014、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q12

鍵となる考え方

ハザード関数（hazard function）とは、まだ生きているものについての死亡率である。後半の小問はすべて、次のただ一つの観察から導かれる。$F'(t) = f(t)$ であるから、

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln\bigl(1 - F(t)\bigr).$$

つまり、h を知ることは $\ln(1 - F)$ の導関数を知ることにほかならない。これを積分し、寿命の始まる点で $F = 0$ となることを用い、さらに F を微分すれば f が得られる。

解答

小問 (i)

事象 $T \geq t$（時刻 t にハエが生きている）を A、事象 $t \leq T \leq t + \delta t$（その後の δt の間に死ぬ）を B とする。$B \cap A = B$ であるから（連続型確率変数では $\mathrm{P}(T = t) = 0$ なので、端点を含めるかどうかは問題にならない）、

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{F(t + \delta t) - F(t)}{1 - F(t)}.$$

δt が小さいとき $F(t + \delta t) - F(t) \approx F'(t)\,\delta t = f(t)\,\delta t$ であるから、

$$\mathrm{P}(B \mid A) \approx \frac{f(t)\,\delta t}{1 - F(t)} = h(t)\,\delta t,$$

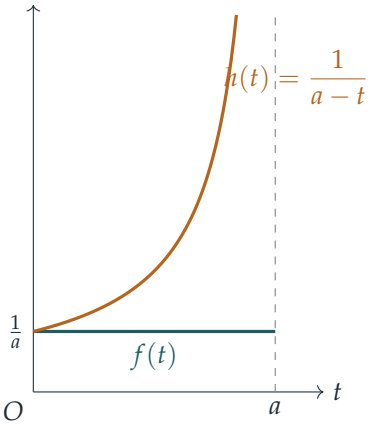
となり、示すべきことが示された。（起こりえない事象を条件にしないために $F(t) < 1$ が必要である。これはちょうど h が定義される範囲である。）

小問 (ii)

ここでは $0 < t < a$ において $f(t) = F'(t) = \frac{1}{a}$ であり、T は $(0,a)$ 上の一様分布（uniform distribution）に従う。このとき

$$h(t) = \frac{1/a}{1 - t/a} = \frac{1}{a-t}, \qquad 0 < t < a.$$

確率密度関数（probability density function）は平坦であるが、ハザードは $h(0) = \frac{1}{a}$ から始まって増加し、$t \to a^-$ のとき $h(t) \to \infty$ となる。これは納得のいく結果である。時刻 a の直前まで生き延びたハエは、残されたごくわずかな時間のうちに確実に死ぬからである。



（図は $a = 2$ として描いてある。）

小問 (iii)

鍵となる考え方により、$t > a$ において $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\bigl(1 - F(t)\bigr) = \frac{1}{t}$ である。a から t まで積分し、T は a より大きい値しかとらないので $F(a) = 0$ であることを用いると、

$$-\ln\bigl(1 - F(t)\bigr) = \ln t - \ln a = \ln\frac{t}{a}, \qquad \text{よって} \qquad 1 - F(t) = \frac{a}{t}.$$

したがって $F(t) = 1 - \frac{a}{t}$ であり、

$$f(t) = \frac{a}{t^2}, \qquad t > a$$

となる（$t \le a$ では $f(t) = 0$）。確認として、$\int_a^\infty at^{-2}\,\mathrm{d}t = 1$ であり、$f/(1-F) = (a/t^2)/(a/t) = 1/t$ である。

小問 (iv)

十分性（「**if**」）。$k > 0$ として、$t > b$ において $f(t) = k\mathrm{e}^{-k(t-b)}$ であるとする。$\int_b^\infty k\mathrm{e}^{-k(t-b)}\,\mathrm{d}t = 1$ であるから、確率はすべて $t > b$ の範囲にあり、$t \le b$ では $f(t) = 0$ かつ $F(t) = 0$ である。よって $t \le b$ では $h(t) = 0/1 = 0$ である。$t > b$ では

$$F(t) = \int_b^t k\mathrm{e}^{-k(s-b)}\,\mathrm{d}s = 1 - \mathrm{e}^{-k(t-b)}, \qquad h(t) = \frac{k\mathrm{e}^{-k(t-b)}}{\mathrm{e}^{-k(t-b)}} = k,$$

となり、これは定数である。

必要性（「**only if**」）。$t \le b$ で $h(t) = 0$、$t > b$ で $h(t) = k$（定数）であるとする。

> **考えてみよう** $t \le b$ で $h(t) = 0$ であることから、$F(b)$ について何がわかるか。

$h(t) = 0$ となるところでは $f(t) = h(t)\big(1 - F(t)\big) = 0$ である。よって f はすべての $t \le b$ で 0 となり、$t \le b$ において $F(t) = \int_{-\infty}^t f = 0$ が得られる。特に $F(b) = 0$ である。（これにより、そこで $F < 1$ であることも確かめられるので、h は実際に $t \le b$ で定義されている。）

$t > b$ では $-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\big(1 - F(t)\big) = k$ である。b から t まで積分し、$F(b) = 0$ を用いると、

$$-\ln\big(1 - F(t)\big) = k(t-b), \qquad F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-k(t-b)},$$

となり、これを微分して $t > b$ において $f(t) = k\mathrm{e}^{-k(t-b)}$ を得る。最後に、k は正でなければならない。$f \ge 0$ であるから $k \ge 0$ であり、もし $k = 0$ ならば F はいつまでも 0 のままで $F(t) \not\to 1$ となり、T はまともな確率変数にならないからである。以上で両方向が示された。

小問 (v)

ここでも $t > 0$ において $-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\big(1 - F(t)\big) = \dfrac{\lambda}{\theta^\lambda}t^{\lambda-1}$ である。$T > 0$ より $F(0) = 0$ であることを用いて 0 から t まで積分する。$\lambda > 0$ であるから $t \to 0$ のとき $t^\lambda \to 0$ となることに注意すると、

$$-\ln\big(1 - F(t)\big) = \frac{\lambda}{\theta^\lambda}\cdot\frac{t^\lambda}{\lambda} = \left(\frac{t}{\theta}\right)^\lambda.$$

よって $F(t) = 1 - \exp\big(-(t/\theta)^\lambda\big)$ であり、微分すると

$$f(t) = \frac{\lambda}{\theta^\lambda}\,t^{\lambda-1}\exp\left(-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\lambda\right), \qquad t > 0.$$

これはまともな確率密度関数である。実際、正の値をとり、$t \to \infty$ のとき $F(t) \to 1$ となる。

検算

- どの答えも、$f/(1-F)$ を直接計算すれば確かめられる。たとえば (v) では、指数関数の因子が打ち消し合って $\lambda\theta^{-\lambda}t^{\lambda-1}$ が残る。
- 小問 (v) で $\lambda = 1$ とすると、ハザードは定数 $1/\theta$ となり $f(t) = \frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-t/\theta}$ が得られる。これは小問 (iv) で $b = 0, k = 1/\theta$ としたものである。
- 数値的に確かめると、$\lambda = \frac{1}{2}, \theta = 2$ のとき f を $(0,\infty)$ で積分すると 1.0000 となり、$F(1) = 1 - \mathrm{e}^{-1/\sqrt{2}} \approx 0.5069$ は f を 0 から 1 まで直接積分した値と一致する。

よくある間違い

- 寿命の始まる点で $F = 0$ という条件を忘れ、F に任意の積分定数（constant of integration）を残したままにしてしまう。
- (iv) で「必要十分」（if and only if）の一方向しか証明しない、あるいは $t \le b$ で $h = 0$ であることを用いて $F(b) = 0$ を導くことをしない。
- マイナス符号を落とす。正しくは $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(1-F) = -f/(1-F)$ である。

STEP のその先へ

関係式 $1 - F(t) = \exp\left(-\int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s\right)$ は、**生存解析**（survival analysis）と信頼性理論（reliability theory）の基礎である。(v) の分布はワイブル分布（Weibull distribution）である。$\lambda < 1$ ならハザードは減少し（初期故障）、$\lambda = 1$ なら無記憶性（memoryless）をもつ指数分布（exponential distribution）となり、$\lambda > 1$ ならハザードは増加する（摩耗故障）。生存解析は、医学の臨床試験から工学まで、あらゆるところで用いられている。基礎となる確率論については、Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）を参照されたい。

解答例

STEP II 2014、第 13 問

確率・統計 ・ 離散確率変数

STEP II 2014、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s2-q13

鍵となる考え方

これは姿を変えた誕生日問題（birthday problem）である。事象 $X \geq k$ は、最初の $k-1$ 個の整数がすべて異なることにほかならず、$X = r$ は、最初の $r-1$ 個が互いに異なり、r 番目がそのうちのどれかと一致することを意味する。どちらの確率も簡単な因数の積で表される。そして二つの奇妙な恒等式は、同じ量を二通りに計算することから得られる。小問 (i) では確率の総和が 1 に等しいことを、小問 (iv) では $\mathrm{E}(X)$ を表す二つの式が一致することを用いる。

解答

以下を通じて

$$Q_m = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \qquad (m \geq 1),$$

とおき、$Q_1 = 1$（空積（empty product））とする。各整数はそれ以前の整数と独立（independent）で、$\{1, \ldots, n\}$ 上の一様分布（uniform distribution）に従うから、Q_m は $I_1, \ldots, I_m$ がすべて異なる確率である。実際、最初の j 個が互いに異なるとき、次の整数がそのいずれとも一致しない確率は $1 - \frac{j}{n}$ である。

$\mathrm{P}(X = 4)$ の値

I_1, I_2, I_3 が互いに異なり、さらに I_4 がその三つのうちどれかに等しければよい。

$$\mathrm{P}(X = 4) = 1 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{3}{n} = \frac{3(n-1)(n-2)}{n^3}.$$

小問 (i)

同様に、$X = r$ は、$I_1, \ldots, I_{r-1}$ が互いに異なり（確率 Q_{r-1}）、かつ I_r がこれら $r-1$ 個の値のどれかである（独立に確率 $\frac{r-1}{n}$）ことを意味する。よって

$$\mathrm{P}(X = r) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{r-2}{n}\right)\frac{r-1}{n} = Q_{r-1}\,\frac{r-1}{n}, \qquad 2 \le r \le n+1.$$

考えてみよう なぜこれらの確率の和は 1 になるのか。

X は必ず存在し、2 以上 $n+1$ 以下である。最初の整数が重複になることはありえないので $X \ge 2$ である。また、$I_1, \ldots, I_{n+1}$ は n 通りの値しかとらない $n+1$ 個の整数であるから、鳩の巣原理（pigeonhole principle）により、時刻 $n+1$ までにある値が 2 回現れている。よって $X \le n+1$ である。（数列がいつまでも重複しない確率は 0 なので、取りこぼしはない。）したがって

$$\sum_{r=2}^{n+1} \mathrm{P}(X = r) = 1.$$

$r = 2, 3, 4, \ldots$ の項を書き並べると

$$\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{2}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{3}{n} + \cdots = 1,$$

となり、これが求める恒等式である。級数は $r = n+1$ で終わり、それより先の項は因数 $1 - \frac{n}{n}$ を含むので 0 である。以上で示された。$m = r - 1$ とおくと、これは

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{m}{n}\,Q_m = 1. \qquad (*)$$

と書ける。

小問 (ii)

期待値（expectation）の定義より

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{r=2}^{n+1} r\,\frac{r-1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{r-2}{n}\right) = \sum_{m=1}^{n} \frac{m(m+1)}{n}\,Q_m.$$

小問 (iii)

$X \ge k$ が起こるのは、$I_1, \ldots, I_{k-1}$ の中に重複がないとき、すなわちこれら $k-1$ 個の整数がすべて異なるとき、かつそのときに限る。よって

$$\mathrm{P}(X \ge k) = Q_{k-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-2}{n}\right), \qquad 2 \le k \le n+2,$$

であり、$\mathrm{P}(X \ge 1) = \mathrm{P}(X \ge 2) = 1$ である。（$k = n+2$ のとき、積は $1 - \frac{n}{n} = 0$ を含み、当然そうなるべき値になっている。）

小問 (iv)

$p_r = \mathrm{P}(Y = r)$ とおく。$r = \sum_{k=1}^{r} 1$ であるから

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{r=1}^{N} r\,p_r = \sum_{r=1}^{N}\sum_{k=1}^{r} p_r = \sum_{k=1}^{N}\sum_{r=k}^{N} p_r = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{P}(Y \geq k).$$

和は有限なので、和をとる順序を入れ替えてよい。どちらの二重和も、$1 \leq k \leq r \leq N$ を満たすすべての組 (k, r) にわたる和である。以上で示された。

> **考えてみよう** $\mathrm{E}(X)$ のどの二つの表し方を比べればよいか。

この結果を $Y = X$ に適用する。X は $N = n+1$ として $\{1, \ldots, N\}$ に値をとる（値 1 の確率が 0 であるだけである）。小問 (iii) を用いると

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{P}(X \geq k) = 1 + \sum_{k=2}^{n+1} Q_{k-1} = 1 + \sum_{m=1}^{n} Q_m.$$

これを小問 (ii) の結果と等しいとおき、$\frac{m(m+1)}{n} = \frac{m^2}{n} + \frac{m}{n}$ と分けて $(*)$ を用いる。

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{m(m+1)}{n} Q_m = \sum_{m=1}^{n} \frac{m^2}{n} Q_m + \underbrace{\sum_{m=1}^{n} \frac{m}{n} Q_m}_{=1 \leftarrow (*)}.$$

よって $1 + \sum_{m=1}^{n} Q_m = \sum_{m=1}^{n} \frac{m^2}{n} Q_m + 1$、すなわち

$$\sum_{m=1}^{n} Q_m \left(1 - \frac{m^2}{n}\right) = 0.$$

$m = 1, 2, 3$ の項は $\left(1 - \frac{1^2}{n}\right)$、$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2^2}{n}\right)$、$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3^2}{n}\right)$ であるから、これはまさに求める恒等式である。小問 (i) と同様に、$m = n$ より先の項はすべて因数 $1 - \frac{n}{n} = 0$ をもつ。以上で示された。

検算

- $n = 1$ のとき、確実に $X = 2$ である。小問 (i) は $\frac{1}{1} = 1$ を与え、最後の和はただ一つの項 $1 - 1 = 0$ となる。
- $n = 4$ のとき、最後の和は $\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cdot 0 + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right) + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot(-3) = \frac{24-15-9}{32} = 0$ であり、どちらの式からも $\mathrm{E}(X) = \frac{103}{32}$ が得られる。
- $n = 365$（誕生日）のとき、$\mathrm{E}(X) = 1 + \sum Q_m \approx 24.62$ である。10^5 個の数列によるコンピュータシミュレーションでは平均 24.61 が得られ、$n \leq 5$ に対する厳密な数え上げにより、上のすべての式が確認された。

よくある間違い

- $\mathrm{P}(X = r)$ を、$1 - \frac{j}{n}$ の形の因数を $r-2$ 個ではなく $r-1$ 個として書いてしまう。それ以前の値を避けなければならないのは、2 番目から $(r-1)$ 番目までの整数だけである。
- $\sum \mathrm{P}(X \geq k)$ の $k = 1$ の項を忘れる。この項は 1 を寄与し、それがちょうど $(*)$ と打ち消し合う。

STEP のその先へ

裾和公式（tail-sum formula）$\mathrm{E}(Y) = \sum_k \mathrm{P}(Y \geq k)$ は、非負整数値をとる任意の確率変数（random variable）に対して成り立ち、その連続版 $\mathrm{E}(T) = \int_0^\infty \mathrm{P}(T > t)\,\mathrm{d}t$ は大学 1 年次の確率論における標準的な道具である。n が大きいとき $\mathrm{E}(X) \approx \sqrt{\pi n/2}$ であり、これがハッシュ関数（hash function）の衝突がわずか $\sqrt{n}$ 回程度の試行で現れる理由である（「誕生日攻撃（birthday attack）」）。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、この両方の考え方を扱っている。

解答例

STEP III 2014、第 1 問

純粋数学 • 対数関数の級数展開

STEP III 2014、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s3-q1

鍵となる考え方

3 次式（cubic）$1+qx^2+rx^3$ は $(1+ax)(1+bx)(1+cx)$ と因数分解（factorise）できるので、その対数（logarithm）は 3 つの対数に分かれ、それぞれの級数（series）展開はすでに知っている。これにより、x^n の係数（coefficient）が a、b、c で表される。一方、同じ対数を $u=qx^2+rx^3$ とおいて $\ln(1+u)$ として直接展開することもでき、こちらからは係数が q と r で表される。2 つの展開を比較すると、q と r に関する事実が S_n どうしの恒等式に変わる。

解答

展開すると、

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx)=1+(a+b+c)x+(ab+bc+ca)x^2+abc\,x^3.$$

$a+b+c=0$ であるから、x の項は消える。すべての実数 x について一致する 2 つの多項式は係数が等しいので、x^2 と x^3 の係数を $1+qx^2+rx^3$ と比較すると

$$q=bc+ca+ab, \qquad r=abc,$$

となり、求める結果が得られる。

小問 (i)

$|x|$ が十分小さいとき（具体的には $|x|<1/\max(|a|,|b|,|c|)$ のとき、あるいは $a=b=c=0$ ならば任意の x について）、各因数は正であり、各対数は収束する級数をもつ。

$|t| < 1$ に対して $\ln(1+t) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}t^n/n$ を用いると、

$$\begin{aligned}\ln(1+qx^2+rx^3) &= \ln(1+ax)+\ln(1+bx)+\ln(1+cx)\\ &= \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{a^nx^n}{n}+\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{b^nx^n}{n}+\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{c^nx^n}{n}\\ &= \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{a^n+b^n+c^n}{n}x^n.\end{aligned}$$

よって x^n の係数は $(-1)^{n+1}S_n$ であり、求める結果が得られる。（$n=1$ のときは $S_1 = a+b+c = 0$ であり、x の項がないことと一致する。）

小問 (ii)

次に、同じ関数を別の方法で展開する。$u = qx^2+rx^3$ とおくと、

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\cdots.$$

u の各項の次数は 2 以上なので、u^k には x^{2k} から x^{3k} までの冪しか現れない。x^n の係数を求めるには、$2k \leq n \leq 3k$ を満たす u^k だけを考えればよい：

$$\begin{aligned}u &= qx^2+rx^3,\\ u^2 &= q^2x^4+2qr\,x^5+r^2x^6.\end{aligned}$$

したがって、

- x^2：寄与するのは u のみで、q を与える。
- x^3：寄与するのは u のみで、r を与える。
- x^5：寄与するのは $-\frac{1}{2}u^2$ のみで、$-\frac{1}{2}(2qr) = -qr$ を与える。

係数が $-S_2$、S_3、S_5 である小問 (i) と比較すると、

$$S_2 = -q, \qquad S_3 = r, \qquad S_5 = -qr.$$

ゆえに $S_2S_3 = (-q)(r) = -qr = S_5$ となり、求める結果が得られる。

考えてみよう 同じ関数に対する 2 つの異なる級数の係数を比較してよいのはなぜか？

どちらの展開も、0 を含むある区間で $\ln(1+qx^2+rx^3)$ に収束する x の冪級数（power series）である。0 の近くで収束する冪級数の係数は一意的である（マクローリン（Maclaurin）の定理にあるように、係数は 0 における導関数を $n!$ で割ったものである）。したがって、係数は一致しなければならない。

小問 (iii)

x^7 については $2k \le 7 \le 3k$ が必要であり、これより $k = 3$ に限られる。二項定理（binomial theorem）により $u^3 = (qx^2 + rx^3)^3$ を展開すると、

$$u^3 = q^3x^6 + 3q^2r\,x^7 + 3qr^2x^8 + r^3x^9,$$

よって $\ln(1+u)$ における x^7 の係数は $\frac{1}{3} \cdot 3q^2r = q^2r$ である。小問 (i) よりこれは $(-1)^8 S_7 = S_7$ に等しいので、$S_7 = q^2r$ である。小問 (ii) を用いると、

$$S_2S_5 = (-q)(-qr) = q^2r = S_7,$$

となり、求める結果が得られる。

小問 (iv)

x^9 については $2k \le 9 \le 3k$ が必要であり、$k = 3$ または $k = 4$ である。

- $\frac{1}{3}u^3$ から：u^3 の x^9 の項は r^3x^9 であり、$\frac{1}{3}r^3$ を与える。
- $-\frac{1}{4}u^4$ から：$(qx^2 + rx^3)^4$ において、x^9 の項には qx^2 が 3 つと rx^3 が 1 つ必要であり、$\binom{4}{1}q^3r\,x^9 = 4q^3r\,x^9$ を与える。これは $-q^3r$ の寄与となる。

よって x^9 の係数は $\frac{1}{3}r^3 - q^3r$ であり、小問 (i) よりこれは $(-1)^{10}S_9 = S_9$ に等しい。一方、

$$S_2S_7 = (-q)(q^2r) = -q^3r.$$

したがって

$$S_9 - S_2S_7 = \tfrac{1}{3}r^3 = \tfrac{1}{3}(abc)^3,$$

であり、主張 $S_2S_7 = S_9$ が成り立つのは $abc = 0$ のとき、かつそのときに限る。一般には成り立たない。

具体的な反例（counterexample）として、$a = b = 1$、$c = -2$ をとる（このとき $a+b+c = 0$ かつ $abc = -2 \neq 0$ である）。すると

$$S_2 = \frac{1+1+4}{2} = 3, \qquad S_7 = \frac{1+1-128}{7} = -18, \qquad S_9 = \frac{1+1-512}{9} = -\frac{170}{3},$$

となり、$S_2S_7 = -54 \neq -\frac{170}{3} = S_9$ である。よって主張は偽である。

> **考えてみよう** 小問 (ii) と (iii) ではうまくいったのに、なぜ x^9 でパターンが崩れるのか？

x^5 と x^7 では u の冪が 1 つしか寄与しないので、各係数は q と r の単一の積となり、それがたまたま以前の S たちの適切な積に分解できる。x^9 では u の 2 つの冪が寄与し、u^3 から生じる余分な r^3 の項がその分解を崩してしまう。

検算

- $a=b=1$、$c=-2$ のとき、$q=-3$、$r=-2$ である。このとき $S_2=3=-q$、$S_3=(1+1-8)/3=-2=r$、$S_5=(1+1-32)/5=-6=-qr$ であるから、$S_2S_3=S_5$ が成り立つ。また $S_7=-18=q^2r$ であり、$S_9-S_2S_7=-\frac{170}{3}+54=-\frac{8}{3}=\frac{1}{3}r^3$ となって、予想どおりである。
- $c=0$（したがって $b=-a$）のとき、奇数番目の S_n はすべて消え、(iv) の主張の両辺はともに 0 となる。これは $abc=0$ のとき主張が成り立つことと整合する。
- (ii)–(iv) の恒等式と $S_9-S_2S_7$ の公式は、a と b をランダムな有理数として 200 通り選び、コンピュータによる厳密な計算でも確認した。

よくある間違い

- x^9 への u^4 の寄与を見落とす：u^3 で止めてしまいやすく、誤った係数 $\frac{1}{3}r^3$ が得られてしまう。
- $(-1)^{n+1}$ による符号の誤り：x^2 の係数は $-S_2$ であるから、$S_2=-q$ であって q ではない。
- 二項係数を忘れる：u^3 の x^7 の項は $3q^2r$ であって、q^2r ではない。

STEP のその先へ

S_n は（因子 $1/n$ を除いて）3 次式の根の**冪和**（power sums）であり、q、r はその**基本対称式**（elementary symmetric polynomials）である。対数をとって係数を比較することは、ニュートン（Newton）の恒等式（Newton's identities）の母関数（generating function）による証明になっている。ニュートンの恒等式は、すべての冪和を基本対称式で表すものであり、その背後にある定理は、すべての対称式は基本対称式で表せるというものである。対称式と多項式の根については Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）で学ぶことができ、級数に関する STEP 形式の演習をさらに積みたければ Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）が参考になる。

解答例

STEP III 2014、第 2 問

純粋数学 ・ 双曲線関数による積分

STEP III 2014、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s3-q2

鍵となる考え方

どちらの被積関数（integrand）も分母に $\cosh 2x$ をもち、倍角公式（double-angle formula）は $\cosh^2 x$ を用いても $\sinh^2 x$ を用いても表せる。分子に合うほうの形を選べば、それぞれの積分は標準的な有理式の積分になる。最後の小問では、指数関数に戻るのがこつである。$u = \mathrm{e}^x$ とおくと、どちらの被積関数も分母に $1 + u^4$ をもつ u の有理関数（rational function）となり、それらを適切に組み合わせるとちょうど $1/(1+u^4)$ が得られる。

解答

小問 (i)

$\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$ を用いる。$u = \cosh x$ とおくと $\mathrm{d}u = \sinh x \,\mathrm{d}x$ であるから、

$$\int \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{2u^2 - 1}.$$

分母は $(\sqrt{2}u - 1)(\sqrt{2}u + 1)$ と因数分解でき、二つの因数の差は 2 であるから、

$$\frac{1}{2u^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}u - 1} - \frac{1}{\sqrt{2}u + 1}\right).$$

各項を積分すると対数になり、u の係数から因子 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ が出る：

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}u}{2u^2-1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\ln|\sqrt{2}u - 1| - \ln|\sqrt{2}u + 1|\Big) + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}\cosh x - 1}{\sqrt{2}\cosh x + 1}\right| + C,\end{aligned}$$

これが求める結果である。（実際には $\cosh x \geq 1$ より $\sqrt{2}\cosh x - 1 > 0$ となるので、実数 x に対しては絶対値記号は不要である。）

小問 (ii)

今度は分子が $\cosh x$ であり、これは $\sinh x$ の導関数であるから、同様の置換（substitution）は $u = \sinh x$、$\mathrm{d}u = \cosh x\,\mathrm{d}x$ である。$\cosh 2x = 1 + 2\sinh^2 x$ と書くと、

$$\int \frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+2u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\,u\right) + C$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\sinh x\right) + C,$$

ここで $a = \sqrt{2}$ として $\int \mathrm{d}u/(1+a^2u^2) = \frac{1}{a}\arctan(au)$ を用いた。

小問 (iii)

一見すると、$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}$ のどこにも cosh は現れない。

> **考えてみよう**　すべてを $u = \mathrm{e}^x$ で書き表すと、$\cosh x/\cosh 2x$ はどのような形になるか？

$\cosh x = \frac{1}{2}(u + u^{-1})$、$\cosh 2x = \frac{1}{2}(u^2 + u^{-2})$ であるから、分母と分子に u^2 を掛けると

$$\frac{\cosh x}{\cosh 2x} = \frac{u + u^{-1}}{u^2 + u^{-2}} = \frac{u(u^2+1)}{u^4+1}, \qquad \frac{\sinh x}{\cosh 2x} = \frac{u(u^2-1)}{u^4+1}.$$

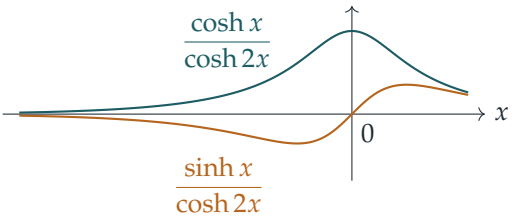
また $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/u$ であるから、余分な因子 u は約分される：

$$\frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1+u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u, \qquad \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{u^2-1}{1+u^4}\,\mathrm{d}u.$$

第 1 式から第 2 式を引くと $\dfrac{2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u$ が残る。最後に、u が 0 から 1 まで動くとき、$x = \ln u$ は $-\infty$ から 0 まで動く。したがって

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x.$$

$x \to -\infty$ のときどちらの被積関数も $O(\mathrm{e}^x)$ であるから、右辺の二つの積分はいずれも収束（converge）する。（左辺は通常の積分であるから、これは実際には単なる変数変換であり、無限の端は $u \to 0$ から生じている。）



cosh の積分。小問 (ii) より、$x \to -\infty$ のとき $\sinh x \to -\infty$ であり、したがって $\arctan(\sqrt{2}\sinh x) \to -\frac{\pi}{2}$ である。よって

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan 0 - \left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

sinh の積分。小問 (i) より、$x \to -\infty$ のとき $\cosh x \to \infty$ であるから、対数の中の分数は 1 に、対数は 0 に近づく。$x = 0$ では $\cosh 0 = 1$ であるから、

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}.$$

有理化すると $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)^2$ であり、また $\sqrt{2}-1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ であるから、

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}-1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}+1).$$

これは負であり、そうなるべきである。$x < 0$ では $\sinh x < 0$ だからである（琥珀色の曲線を参照）。

まとめると。

$$\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}+1)\right) = \frac{\pi + 2\ln(\sqrt{2}+1)}{4\sqrt{2}},$$

となり、求める結果が得られた。

検算

- (i) と (ii) の答えを微分して、被積関数に戻ることを確かめる。(ii) については $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\sinh x) = \dfrac{\cosh x}{1+2\sinh^2 x}$ である。
- 最終的な値は ≈ 0.86697 であり、シンプソンの公式（Simpson's rule）による $\int_0^1 \mathrm{d}u/(1+u^4)$ の数値計算と一致する。この値は $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$（より小さい関数 $1/(1+u^2)$ の積分）と 1 の間にあり、妥当である。
- これとは別に、二つの無限区間の積分も数値的に確認した：$\pi/(2\sqrt{2}) \approx 1.1107$ および $-\ln(1+\sqrt{2})/\sqrt{2} \approx -0.6232$。

よくある間違い

- 小問 (ii) でも $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$ を使ってしまうこと。$u = \sinh x$ とおくときは $\sinh^2$ の形 $1 + 2\sinh^2 x$ が必要である。

- $u = \mathrm{e}^x$ のとき $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/u$ となることを忘れること。分子に残る余分な u を約分するのは、まさにこの因子である。
- 積分区間を誤ること。$u \in [0,1]$ に対応するのは $x \in (-\infty, 0]$ であり、$[0,1]$ ではない。

STEP のその先へ

$1 + u^4 = (u^2 + \sqrt{2}u + 1)(u^2 - \sqrt{2}u + 1)$ であるから、同じ積分は部分分数（partial fractions）分解によって直接計算することもできる。$\frac{1+u^2}{1+u^4}$ と $\frac{1-u^2}{1+u^4}$ を組み合わせる方法は、その代数計算の大部分を省ける巧妙な近道である。大学では、$\int_0^\infty \mathrm{d}u/(1+u^4) = \pi/(2\sqrt{2})$ のような積分は周回積分（contour integration）と留数定理（residue theorem）によって一行で求められ、広義積分（improper integral）は解析学（analysis）において完全な厳密さをもって扱われる。複素解析の側面を見るには、Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）が素晴らしい一冊である。

解答例

STEP III 2014、第 3 問

純粋数学 ・ 放物線までの距離

STEP III 2014、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s3-q3

鍵となる考え方

放物線（parabola）上のすべての点は $(at^2, 2at)$ と書けるので、必要な距離はどれも一変数 t の関数となり、どちらの小問でもその関数は二次関数（quadratic）になる（直線の場合は t の、点の場合は t^2 の二次関数である）。二次関数の最小化は平方完成（completing the square）にすぎないが、変数がとりうる範囲には注意しなければならない。t^2 は負になりえず、まさにこの制約が小問 (ii) を場合分けさせるのである。円の場合は労せずして結果が得られる。点から円までの距離は、中心までの距離から半径を引いたものだからである。

解答

小問 (i)

L を $mx - y + c = 0$ と書く。放物線上の点 $P = (at^2, 2at)$ から L までの垂線の距離（perpendicular distance）は次のとおりである。

$$\frac{|mat^2 - 2at + c|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

$f(t) = mat^2 - 2at + c$ とおく。$ma > 0$ であるから、平方完成すると

$$f(t) = ma\left(t - \frac{1}{m}\right)^2 + c - \frac{a}{m} = ma\left(t - \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{mc - a}{m},$$

となるので、f の最小値は $\dfrac{mc - a}{m}$ であり、$t = 1/m$ で達成される。

$mc > a$ の場合。 このとき任意の t に対して $f(t) \geq \frac{mc-a}{m} > 0$ であるから、放物線全体は L の一方の側にあり、L と交わることはない。L と放物線の最短距離は、放物線上

の点から L までの距離の最小値、すなわち $|f(t)|/\sqrt{m^2+1} = f(t)/\sqrt{m^2+1}$ の最小値であり、

$$\frac{mc-a}{m\sqrt{m^2+1}},$$

となって、求める結果が得られる。最も近い点は $t = 1/m$ であり、そこでの放物線の接線（tangent）の傾きは $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 1/t = m$ である。つまり接線は L に平行であり、幾何的な直観のとおりである。

$mc \le a$ の場合。このとき $f(1/m) \le 0$ である一方、$t \to \infty$ のとき $f(t) \to +\infty$ となる。f は連続（continuous）であるから、ある t で $f(t) = 0$ となる。よって L は放物線と交わり、最短距離は 0 である。

小問 (ii)：点 $(p,0)$

$C = (p,0)$ から $P = (at^2, 2at)$ までの距離の二乗は次式で与えられる。

$$(at^2-p)^2 + 4a^2t^2.$$

これは $u = t^2$ のみに依存し、u は $[0,\infty)$ のすべての値をとる。よって次を最小化すればよい。

$$g(u) = (au-p)^2 + 4a^2u = a^2u^2 - 2a(p-2a)u + p^2 \qquad (u \ge 0).$$

平方完成すると

$$g(u) = a^2\left(u - \frac{p-2a}{a}\right)^2 + p^2 - (p-2a)^2 = a^2\left(u - \frac{p-2a}{a}\right)^2 + 4a(p-a).$$

考えてみよう g の制約なしの最小値は $u = (p-2a)/a$ でとられる。この値は常にとれるだろうか？

とれるとは限らない。$u = t^2$ は非負でなければならず、$(p-2a)/a \ge 0$ となるのは $p \ge 2a$ のときに限る。

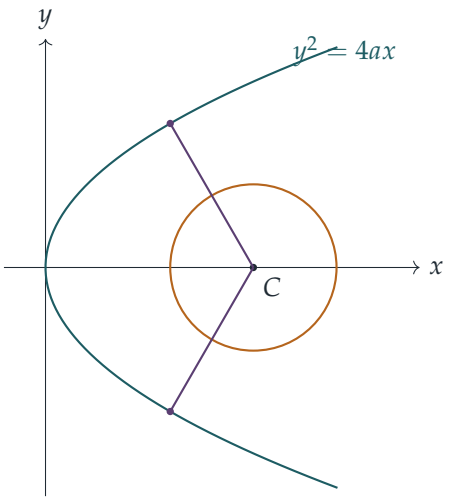
$p/a > 2$ の場合。頂点（vertex）$u = p/a - 2$ は正であるから許され、g の最小値は $4a(p-a)$ である。これは $p > 2a > a$ より正である。最短距離は

$$2\sqrt{a(p-a)},$$

であり、二つの点 $\left(p-2a,\ \pm 2\sqrt{a(p-2a)}\right)$ で達成される。

$p/a \le 2$ の場合。頂点は $u \le 0$ にあるので、g は $u \ge 0$ で増加し、そこでの最小値は $g(0) = p^2$ である。最短距離は p であり、放物線の頂点 $(0,0)$ で達成される。

二つの答えは $p = 2a$ で一致し、どちらも $2a$ を与える。



図は $a = 1$、$p = 5$ の場合である。放物線上で C に最も近い点（紫）までの距離は $2\sqrt{1 \cdot 4} = 4$ であり、C を中心とする半径 $b = 2$ の円（琥珀色）は放物線から距離 2 だけ離れている。

小問 (ii)：円

d を、いま求めた $C = (p, 0)$ から放物線までの距離とする。すなわち

$$d = \begin{cases} p & \text{条件：} p \leq 2a, \\ 2\sqrt{a(p-a)} & \text{条件：} p > 2a. \end{cases}$$

である。円の中心は C、半径は b である。

$d > b$ の場合。放物線上の任意の点 P と円上の任意の点 Q をとる。三角不等式（triangle inequality）より

$$|PQ| \geq |PC| - |CQ| = |PC| - b \geq d - b > 0.$$

等号は、P が放物線上で C に最も近い点であり、Q が線分 CP と円の交点であるときに成り立つ（$|CP| = d > b$ であるから、線分は実際に円と交わる）。よって最短距離は $d - b$ である。

$d \leq b$ の場合。P が放物線上を動くとき、$|PC|$ は最小値 $d \leq b$ からいくらでも大きな値まで連続的に変化するので、どこかで $|PC| = b$ となる。その点は両方の曲線上にあり、最短距離は 0 である。

以上をまとめると、円と放物線の最短距離は次のとおりである。

$$\begin{cases} p-b & \text{条件：} p \le 2a \text{ かつ} b < p, \\ 2\sqrt{a(p-a)}-b & \text{条件：} p > 2a \text{ かつ} b < 2\sqrt{a(p-a)}, \\ 0 & \text{それ以外（すなわち} b \ge d \text{ のとき）.} \end{cases}$$

検算

- $m=1, c=2, a=1$ とすると $mc=2>a$ である。公式は $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7071$ を与える。直接計算すると、$t=1$ の点は $(1,2)$ であり、$x-y+2=0$ までの距離は $|1-2+2|/\sqrt{2}=1/\sqrt{2}$ である。代わりに $c=\frac{1}{2}$ とすると（このとき $mc<a$）、直線 $y=x+\frac{1}{2}$ は $y^2=4x$ と $x^2-3x+\frac{1}{4}=0$ を満たす点で交わり、この方程式は実数解をもつので、距離が 0 であることが確かめられる。
- $a=1, p=5$ のとき、点 $(3,\pm 2\sqrt{3})$ と $(5,0)$ の距離は $\sqrt{4+12}=4=2\sqrt{1\cdot 4}$ であり、コンピュータで放物線上を探索しても、これより近い点は見つからなかった。
- $p \to 0$ のとき距離 $p \to 0$ となるが、$(0,0)$ は放物線上にあるので、これは正しい。p が大きいとき $2\sqrt{a(p-a)}<p$ となるが、頂点までの距離が p であるから、そうでなければならない。
- すべての結果は、m、c、a、p、b の数百通りのランダムな選び方に対するコンピュータ探索で確認した。

よくある間違い

- 距離の二乗の t に関する導関数（derivative）をゼロとおいて根 $t=0$ を見落とす、あるいは $p<2a$ のとき $t^2=p/a-2$ が解をもたないことを忘れる。この場合分けこそが小問 (ii) の核心である。
- $mc<a$ のときに $(mc-a)/(m\sqrt{m^2+1})$ と答えてしまう。これは負であり、実際には直線は放物線と交わっている。
- 円について、符号を確かめずに $d-b$ と書いてしまう。$b \ge d$ のときは曲線どうしが交わり、答えは 0 である。

STEP のその先へ

小問 (ii) の最も近い点は CP が放物線の法線（normal）となる点であり、$p=2a$ での切り替わりは偶然ではない。$(2a,0)$ は放物線の頂点における曲率中心（centre of

curvature）なのである。軸上でそれより先にある点に対しては、軸から外れた最も近い点が二つあり、このような切り替わりの点の軌跡である縮閉線（evolute）は、曲線の微分幾何学（differential geometry）における古典的な対象である。制限された範囲で関数を最小化する問題では、答えが停留点（stationary point）ではなく境界に現れることがあり、これは制約付き最適化（constrained optimisation）の出発点である。この趣旨の問題をさらに解きたければ、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* に挑戦するとよい。

解答例

STEP III 2014、第 4 問

純粋数学 • 積分の不等式

> **STEP III 2014、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q4

この問題は、*Beyond STEP* の第 4.7 節「**変分法**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch04/variations.html

鍵となる考え方

I_1 の中の 2 乗を展開して I と比べる。その差はある関数の導関数（derivative）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^2 \tan x\right)$ の積分（integral）であり、$y(1) = 0$ かつ $\tan 0 = 0$ であるから 0 になる。I を 2 乗の積分として書き表してしまえば、それが非負であることは明らかである。小問 (ii) でも同じ手法が使える。ただし、$\sec^2$ の項がちょうど a^2y^2 を生み出すように b を選ぶ必要がある。うまくいかなくなりうるのは、$[0,1]$ の内部で $\tan bx$ が発散する場合だけである。

解答

問題の意図どおり、以下では一貫して y が $[0,1]$ 上で連続な導関数をもつと仮定する。

小問 (i)

$0 \le x \le 1 < \frac{\pi}{2}$ であるから、関数 $\tan x$ は $[0,1]$ 上で連続であり、I_1 は意味をもつ。2 乗を展開すると

$$I_1 = \int_0^1 \left((y')^2 + 2yy' \tan x + y^2 \tan^2 x\right) \mathrm{d}x,$$

となるので、

$$\begin{aligned} I - I_1 &= -\int_0^1 \left(y^2 + 2yy' \tan x + y^2 \tan^2 x\right) \mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 \left(2yy' \tan x + y^2 \sec^2 x\right) \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

である。ここで $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ を用いた。積の微分法（product rule）により $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^2 \tan x\right) = 2yy' \tan x + y^2 \sec^2 x$ であり、これはちょうど被積分関数に一致する。したがって

$$I - I_1 = -\Big[y^2 \tan x\Big]_0^1 = -\left(y(1)^2 \tan 1 - y(0)^2 \tan 0\right) = 0,$$

である。$y(1) = 0$ かつ $\tan 0 = 0$ だからである。よって、求めるとおり $I = I_1$ が成り立つ。

I_1 は正の長さをもつ区間上での 2 乗の積分であるから $I_1 \geq 0$ であり、したがって $I \geq 0$ である。

次に $I = 0$ と仮定する。このとき $I_1 = 0$ であり、被積分関数 $(y' + y \tan x)^2$ は連続かつ非負であるから、$[0, 1]$ 全体で 0 でなければならない（もしある 1 点で正ならば、その近くの小さな区間で正となり、積分が正になってしまう）。よって $0 \leq x \leq 1$ に対して $y' + y \tan x = 0$ である。

> **考えてみよう** どこかで 0 になるかもしれない y で割ることなく、$y' + y \tan x = 0$ を解くにはどうすればよいか？

積分因子（integrating factor）を用いる。$[0, 1]$ 上で $\cos x > 0$ であるから、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{\cos x}\right) = \frac{y' \cos x + y \sin x}{\cos^2 x} = \frac{y' + y \tan x}{\cos x} = 0,$$

となり、ある定数 C を用いて $y = C \cos x$ と表される。条件 $y(1) = 0$ から $C \cos 1 = 0$ となり、$\cos 1 \neq 0$ であるから $C = 0$ である。したがって、$I = 0$ となるのは $[0, 1]$ のすべての x に対して $y = 0$ のときに限る。

小問 (ii)

$K = \int_0^1 (y' + ay \tan bx)^2 \, \mathrm{d}x$ とおく。ここで $b > 0$ はこれから選ぶ。展開すると

$$K = \int_0^1 \left((y')^2 + 2ayy' \tan bx + a^2 y^2 \tan^2 bx\right) \mathrm{d}x.$$

現れてほしい導関数は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ay^2 \tan bx\right) = 2ayy' \tan bx + aby^2 \sec^2 bx = 2ayy' \tan bx + aby^2 + aby^2 \tan^2 bx.$$

である。これを K の被積分関数と比べると、$\tan^2$ の項がちょうど一致するのは $ab = a^2$、すなわち $b = a$ のときである。このように選ぶと

$$(y' + ay\tan ax)^2 = (y')^2 - a^2y^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ay^2\tan ax\right),$$

となり、したがって

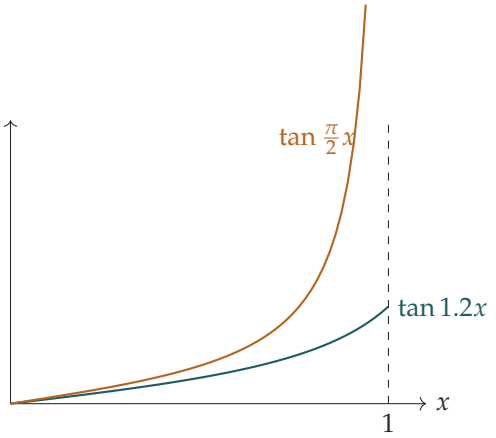
$$K = J + \Big[ay^2\tan ax\Big]_0^1 = J + a\,y(1)^2\tan a = J,$$

である。$y(1) = 0$ かつ $\tan 0 = 0$ だからである。

この議論では、K が存在し、微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）が適用できるように、$\tan ax$ が $[0,1]$ 全体で定義されて連続である必要がある。$a > 0$ であるから ax は $[0,a]$ を動き、$\tan$ がそこで連続となるのはちょうど $a < \frac{\pi}{2}$ のときである。よってこの証明は

$$a < k = \frac{\pi}{2}.$$

に対して有効である。このような a に対しては、K は 2 乗の積分であるから $J = K \geq 0$ が成り立つ。（実際、小問 (i) の議論で $\cos x$ を $\cos ax$ に置き換えれば、$J = 0$ ならば $C\cos a = 0$ を満たす $y = C\cos ax$ となり、$y \equiv 0$ が導かれる。したがって、恒等的に 0 ではない y に対しては $J > 0$ さえ成り立つ。）



この図は $k = \frac{\pi}{2}$ となる理由を示している。$a < \frac{\pi}{2}$ のとき重み $\tan ax$ は $[0,1]$ 上で有界にとどまるが、$a = \frac{\pi}{2}$ のときは端点 $x = 1$ に漸近線（asymptote）をもつ。

$a = \frac{\pi}{2}$ の場合

証明がどこを探せばよいかを示唆している。$K = 0$ となるには $y' + ay\tan ax = 0$ が必要であり、その解は $y = C\cos ax$ である。$a < \frac{\pi}{2}$ のときこれらは条件 $y(1) = 0$ を満た

さないが、$a = \frac{\pi}{2}$ のときは満たす。そこで

$$y = \cos\tfrac{\pi x}{2}, \qquad y' = -\tfrac{\pi}{2}\sin\tfrac{\pi x}{2},$$

を試す。これは恒等的に o ではなく、$y(1) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ を満たす。このとき

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \left(\sin^2\tfrac{\pi x}{2} - \cos^2\tfrac{\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \cos \pi x\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\pi^2}{4}\left[\frac{\sin \pi x}{\pi}\right]_0^1 = 0. \end{aligned}$$

よって $a = k$ のとき、$y = \cos\frac{\pi x}{2}$（またはその o でない定数倍）は $J = 0$ を与える。

検算

- 小問 (i) で $y = 1 - x$ とすると $I = \int_0^1 \left(1 - (1-x)^2\right)\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} > 0$ であり、I_1 を数値計算しても 0.6667 となる。
- $(1 - x)$ に 3 次式を掛けたものを多数ランダムに選び、$(0, \frac{\pi}{2})$ 内の a もランダムに選んでコンピュータで確認したところ、高い精度で $J = K > 0$ が確かめられた。
- 上界 $k = \frac{\pi}{2}$ は最良である。$y = \cos\frac{\pi x}{2}$ とすると $J = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - a^2\right)$ となり、これはすべての $a > \frac{\pi}{2}$ に対して負である（たとえば $a = 2$ のとき $J \approx -0.766$）。

よくある間違い

- $x = 0$ における境界項が o になるのは $\tan 0 = 0$ だからであって、$y(0)$ に関する条件によるのではないことを忘れる。$y(0)$ については何も仮定されていない。
- 理由を述べずに $I_1 = 0$ から $y' + y\tan x = 0$ を結論づける。重要なのは被積分関数の連続性である。
- $\tan bx$ が $[0, 1]$ 上で有限にとどまるかを確かめずに b を選ぶ。条件 $a < \frac{\pi}{2}$ はまさにそこから生じる。

STEP のその先へ

$y(1) = 0$ のときの不等式 $\int_0^1 (y')^2\,\mathrm{d}x \geq \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}x$ は、ヴィルティンガー（Wirtinger）の不等式（あるいはポアンカレ（Poincaré）の不等式）の一つの形であり、定数 $\frac{\pi^2}{4}$ は $y'(0) = 0$、$y(1) = 0$ のもとでの $-y'' = \lambda y$ の最小固有値（eigenvalue）である。極値を与える関数 $\cos\frac{\pi x}{2}$ はその固有関数（eigenfunction）である。変分法（calculus of variations）において、うまく選んだ導関数を用いて平方完成（completing the square）

するという手法は、停留曲線（stationary path）が本当に最小を与えるかを判定するルジャンドル（Legendre）の判定法やヤコビ（Jacobi）の判定法の背後にある考え方である。この趣旨の問題をさらに解きたければ Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）を、背景にある固有値問題については Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）を参照されたい。

解答例

STEP III 2014、第 5 問

純粋数学 ・ 図形における複素数

STEP III 2014、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s3-q5

鍵となる考え方

複素平面（complex plane）において、「平行で長さが等しい」とは単に「変位ベクトル（displacement vector）として等しい」ということであり、反時計回り（anticlockwise）の 4 分の 1 回転は i を掛けることにあたる。したがって、この問題の幾何的な条件はすべて、頂点についての短い線形方程式になる。辺上の正方形については、辺の中点まで進み、そこから辺に垂直に外側へ辺の長さの半分だけ進むことで、それぞれの中心を求める。

解答

平行四辺形の判定条件

まず $a+c=b+d$ と仮定する。このとき

$$b-a=c-d \qquad \text{かつ} \qquad d-a=c-b,$$

であるから、変位 $\overrightarrow{AB}$ は $\overrightarrow{DC}$ に等しく、$\overrightarrow{AD}$ は $\overrightarrow{BC}$ に等しい。等しい変位は平行で長さも等しいから、2 組の対辺はどちらも平行で長さが等しい。すなわち $ABCD$ は平行四辺形（parallelogram）である。

逆に、$ABCD$ が平行四辺形であると仮定する。平行で長さの等しい 2 つの線分の変位は、等しいか互いに逆向きであるから

$$b-a=\varepsilon(c-d), \qquad d-a=\eta(c-b), \qquad \varepsilon,\eta\in\{1,-1\}.$$

である。$\varepsilon=1$ または $\eta=1$ ならば、いずれの式も整理すると $a+c=b+d$ となる。残る場合は $\varepsilon=\eta=-1$ のみであり、すなわち $b-a=d-c$ かつ $d-a=b-c$ である。

第 1 式から第 2 式を引くと $b-d=d-b$ となるので $b=d$ であるが、頂点は相異なるのでこれはありえない。よって $a+c=b+d$ であり、同値性（equivalence）が証明された。

正方形の判定条件

$ABCD$ を平行四辺形とし、$m=\frac{1}{2}(a+c)=\frac{1}{2}(b+d)$ を対角線（diagonal）の共通の中点（すなわち中心）とする。このとき

$$a-m=\tfrac{1}{2}(a-c),\qquad b-m=\tfrac{1}{2}(b-d),\qquad c-m=-(a-m),\qquad d-m=-(b-m).$$

である。

$ABCD$ が**正方形**（*square*）**ならば**、その対角線は長さが等しく、互いに直交して二等分し合うので、B は A を m のまわりに 4 分の 1 回転したものである。頂点は反時計回りに名づけられているので、この回転は反時計回りである。したがって $b-m=\mathrm{i}(a-m)$ であり、これは $\frac{1}{2}(b-d)=\frac{1}{2}\mathrm{i}(a-c)$、すなわち $\mathrm{i}(a-c)=b-d$ である。

逆に、$\mathrm{i}(a-c)=b-d$ ならば、$w=a-m\neq 0$ とおく。このとき

$$a-m=w,\quad b-m=\mathrm{i}w,\quad c-m=-w,\quad d-m=-\mathrm{i}w,$$

であるから、4 つの頂点は w を m のまわりに 90° ずつ順に回転したものである。これらは正方形の頂点である（4 辺はすべて $|w|\sqrt{2}$ であり、各辺は 1 つ前の辺に i を掛けたものである）。これで 2 つ目の同値性が証明された。

小問 (i)

頂点 P,Q,R,S は反時計回りに並ぶので、P から Q へ進むとき $PQRS$ の内部は左側にある。したがって PQ 上の外側の正方形は右側にある。

中心 X には、PQ の中点 $\frac{1}{2}(p+q)$ から、PQ に垂直に右へ距離 $\frac{1}{2}|q-p|$（辺の半分）だけ進むことで到達する。$q-p$ に $-\mathrm{i}$ を掛けると時計回り（clockwise）に 90° 回転する、すなわち右を向くので、この移動は $-\frac{1}{2}\mathrm{i}(q-p)$ である。よって

$$x=\tfrac{1}{2}(p+q)-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}(q-p)=\tfrac{1}{2}\big(p(1+\mathrm{i})+q(1-\mathrm{i})\big),$$

となり、題意が示された。

> **考えてみよう** なぜ $-\mathrm{i}$ であって $+\mathrm{i}$ ではないのか？

$+\mathrm{i}$ を掛けると $\overrightarrow{PQ}$ は左へ回転し、四角形の内部を向くので、内側に作った正方形の中心が得られてしまう。内角はすべて 180° 未満なので、内部は各辺の左側に完全に含まれ、右側は確かに外側である。

小問 (ii)

小問 (i) を各辺に順に適用すると（どの辺も内部を左に見ながら進むので、同じ議論がすべての辺に通用する）、

$$2x = p(1+\mathrm{i}) + q(1-\mathrm{i}), \qquad 2y = q(1+\mathrm{i}) + r(1-\mathrm{i}),$$
$$2z = r(1+\mathrm{i}) + s(1-\mathrm{i}), \qquad 2t = s(1+\mathrm{i}) + p(1-\mathrm{i}).$$

となる。判定条件に現れる 2 つの式を比較する。

対頂点の和。

$$\begin{aligned} 2(x+z) - 2(y+t) &= (p+r)(1+\mathrm{i}) + (q+s)(1-\mathrm{i}) - (q+s)(1+\mathrm{i}) - (p+r)(1-\mathrm{i}) \\ &= 2\mathrm{i}\,(p+r-q-s), \end{aligned}$$

より

$$x + z - (y+t) = \mathrm{i}\big(p+r-(q+s)\big). \tag{1}$$

対角線。

$$2\mathrm{i}(x-z) = \mathrm{i}(p-r)(1+\mathrm{i}) + \mathrm{i}(q-s)(1-\mathrm{i}) = (p-r)(\mathrm{i}-1) + (q-s)(1+\mathrm{i}),$$
$$2(y-t) = (q-s)(1+\mathrm{i}) + (r-p)(1-\mathrm{i}) = (q-s)(1+\mathrm{i}) + (p-r)(\mathrm{i}-1).$$

これらは一致するので、

$$\mathrm{i}(x-z) = y-t \tag{2}$$

が**任意の**このような四角形 $PQRS$ について成り立つ。すなわち、線分 XZ と YT はつねに長さが等しく、直交する。

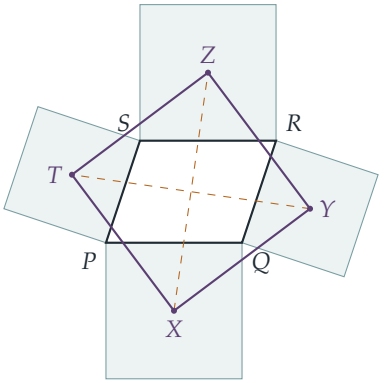
> **考えてみよう** (2) はつねに成り立つのだから、$XYZT$ が正方形であるかどうかを決めるのは何か？

平行四辺形の条件だけである。では、これらをまとめよう。

$PQRS$ が平行四辺形ならば、$p+r = q+s$ であるから、(1) より $x+z = y+t$ となり、最初の結果から $XYZT$ は平行四辺形である。(2) と合わせると、正方形の判定条件より $XYZT$ は正方形である。（この判定条件の逆向きの部分は頂点の名づけ方に関する仮定を必要としない。また $X \neq Z$ である。実際、$x = z$ とすると $r-p = \mathrm{i}(s-q)$ となり、$\overrightarrow{PR}$ は $\overrightarrow{QS}$ を**反時計回り**に 4 分の 1 回転したものになる。しかし反時計回りに名づけられた凸四角形（convex quadrilateral）では、$\overrightarrow{PR}$ はつねに $\overrightarrow{QS}$ を**時計回り**に 0° と 180° の間の角だけ回転し、拡大縮小したものである。）

$XYZT$ が正方形ならば、特に平行四辺形であるから、最初の結果より $x+z = y+t$ である。(1) より $\mathrm{i}(p+r-q-s) = 0$ となるので、$p+r = q+s$ であり、$PQRS$ は平行四辺形である。

よって、$XYZT$ が正方形であるための必要十分条件（if and only if）は、$PQRS$ が平行四辺形であることである。



検算

$p=0$、$q=4$、$r=5+3\mathrm{i}$、$s=1+3\mathrm{i}$ の平行四辺形をとる（上図）。公式より $x=2-2\mathrm{i}$、$y=6+\mathrm{i}$、$z=3+5\mathrm{i}$、$t=-1+2\mathrm{i}$ となる。$XYZT$ の辺は $4+3\mathrm{i}$、$-3+4\mathrm{i}$、$-4-3\mathrm{i}$、$3-4\mathrm{i}$ であり、それぞれ 1 つ前の辺の i 倍である。したがって 1 辺が 5 の正方形である。小問 (i) の検算として、$x=2-2\mathrm{i}$ は確かに、PQ の下側にある頂点 0、4、$4-4\mathrm{i}$、$-4\mathrm{i}$ の正方形の中心である。ランダムに生成した数千個の凸四角形についてコンピュータで調べたところ、恒等式（identity）(2) はつねに成り立ち、また $XYZT$ が正方形になるのは $PQRS$ が平行四辺形であるときに限ることが確認された。

よくある間違い

- 小問 (i) で $+\mathrm{i}$ を用いてしまうこと。これでは正方形が四角形の内側にできる。
- 平行四辺形の判定条件で、「平行で長さが等しい」には $b-a=-(c-d)$ の場合も含まれ、それを除外しなければならないことを忘れること。
- 「必要十分」の一方向しか証明しないこと。小問 (ii) では「正方形 $\Rightarrow$ 平行四辺形」の向きは (1) だけで示せる。

STEP のその先へ

恒等式 (2) は van Aubel の定理（van Aubel's theorem）である。すなわち、任意の四角形について、向かい合う外側の正方形の中心を結ぶ線分は長さが等しく、直交する。これは一般的な原理の小さな例である。回転と中点から作られる幾何的な構成は頂点

についての線形写像（linear map）であるから、それらに関する定理は代数的な恒等式に帰着する（正三角形に関するナポレオンの定理（Napoleon's theorem）もその一例である）。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、複素数の掛け算に対するこの幾何的な見方を見事に展開している。

解答例

STEP III 2014、第 6 問

純粋数学 ・ 凸性による不等式

STEP III 2014、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s3-q6

鍵となる考え方

ゼロから出発し、傾き（slope）もゼロで、グラフが上に曲がっている関数は、ゼロより大きくならなければならない。与えられた事実を 2 回積分すると、この図式がそのまま証明になる。問題の各不等式については、すべてを一方の辺に移項して $f(0) = f'(0) = 0$ を満たす関数 f をつくり、f'' が正であることを確かめればよい。本当の作業は、f'' が簡単な形になるように、適切な整理の仕方を選ぶことである。

解答

冒頭の結果

$0 < t < x_0$ において $f''(t) > 0$ であり、$f(0) = f'(0) = 0$ であるとする。$0 < x < x_0$ を満たす x を固定する。

$h = f''$ とおく。$0 < t < x$ において $f''(t) > 0$ であるから、与えられた結果より

$$f'(x) = f'(x) - f'(0) = \int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t > 0.$$

これは $(0, x_0)$ のすべての x について成り立つので、$0 < t < x_0$ において $f'(t) > 0$ である。

次に、今度は $h = f'$ として、与えられた結果を再び用いる。$0 < x < x_0$ のとき、$0 < t < x$ において $f'(t) > 0$ であるから

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t > 0.$$

よって、$0 < t < x_0$ において $f(t) > 0$ であり、示すべきことが示された。以下では一

貫して $x_0 = \frac{1}{2}\pi$ としてこれを用いる。

小問 (i)

$f(x) = 1 - \cos x \cosh x$ とおく。すると $f(0) = 1 - 1 = 0$ であり、積の微分法（product rule）により

$$f'(x) = \sin x \cosh x - \cos x \sinh x, \qquad f'(0) = 0 - 0 = 0.$$

さらに微分すると、

$$\begin{aligned} f''(x) &= (\cos x \cosh x + \sin x \sinh x) - (-\sin x \sinh x + \cos x \cosh x) \\ &= 2 \sin x \sinh x. \end{aligned}$$

$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ では $\sin x > 0$ かつ $\sinh x > 0$ であるから、$f''(x) > 0$ である。冒頭の結果により $f(x) > 0$、すなわち

$$\cos x \cosh x < 1 \qquad \text{ただし} 0 < x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

小問 (ii)

考えてみよう 冒頭の結果をどの関数に適用すればよいだろうか？$\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{\cosh x}$ をそのまま使うのは煩雑に見える。

まず分数を払う。$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ では x、$\sin x$、$\sinh x$、$\cosh x$ はすべて正であるから、正の量を両辺に掛けても不等号の向きは変わらない。すると

$$\frac{1}{\cosh x} < \frac{\sin x}{x} \iff x < \sin x \cosh x, \qquad \frac{\sin x}{x} < \frac{x}{\sinh x} \iff \sin x \sinh x < x^2.$$

（1 つ目には $x \cosh x > 0$ を、2 つ目には $x \sinh x > 0$ を掛ける。）積 $\sin x \cosh x$ と $\sin x \sinh x$ はきれいに微分できる。これが、この形が適切である理由である。

左側の不等式。 $g(x) = \sin x \cosh x - x$ とおく。すると $g(0) = 0$ であり

$$g'(x) = \cos x \cosh x + \sin x \sinh x - 1, \qquad g'(0) = 1 + 0 - 1 = 0.$$

さらに微分すると、$\sin x \cosh x$ の項が打ち消し合う：

$$\begin{aligned} g''(x) &= (-\sin x \cosh x + \cos x \sinh x) + (\cos x \sinh x + \sin x \cosh x) \\ &= 2 \cos x \sinh x, \end{aligned}$$

となる。$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ では $\cos x > 0$ かつ $\sinh x > 0$ であるから、これは正である。（上限 $\frac{1}{2}\pi$ が効いてくるのはここである。）冒頭の結果により $g(x) > 0$ であるから、$x < \sin x \cosh x$、したがって $\frac{1}{\cosh x} < \frac{\sin x}{x}$ である。

右側の不等式。 $k(x) = x^2 - \sin x \sinh x$ とおく。すると $k(0) = 0$ であり

$$k'(x) = 2x - \cos x \sinh x - \sin x \cosh x, \qquad k'(0) = 0.$$

さらに微分すると、$\sin x \sinh x$ の項が打ち消し合う：

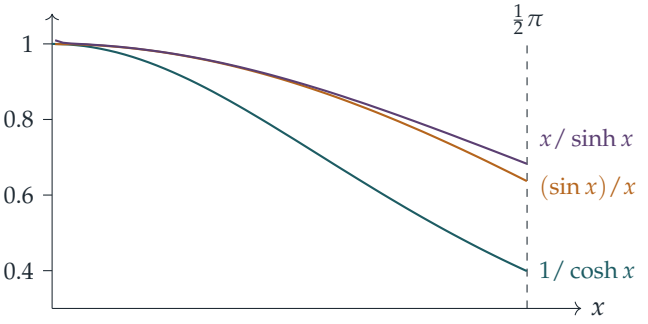
$$\begin{aligned} k''(x) &= 2 - (-\sin x \sinh x + \cos x \cosh x) - (\cos x \cosh x + \sin x \sinh x) \\ &= 2 - 2\cos x \cosh x. \end{aligned}$$

小問 (i) より、$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ において $\cos x \cosh x < 1$ であるから、そこで $k''(x) > 0$ である。冒頭の結果により $k(x) > 0$ であるから、$\sin x \sinh x < x^2$、したがって $\frac{\sin x}{x} < \frac{x}{\sinh x}$ である。

2 つを合わせると、$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ において

$$\frac{1}{\cosh x} < \frac{\sin x}{x} < \frac{x}{\sinh x},$$

が成り立ち、示すべきことが示された。



検算

- 級数（series）：$\cos x \cosh x = 1 - \frac{1}{6}x^4 + \cdots$ であるから、小さい x では確かに 1 をわずかに下回り、(i) と整合する。同様に $\frac{1}{\cosh x} \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$、$\frac{\sin x}{x} \approx 1 - \frac{1}{6}x^2$、$\frac{x}{\sinh x} \approx 1 - \frac{1}{6}x^2$ であるから、小さい x では左側の不等式は明らかであり、右側の不等式は次の項で決まる（x^4 の係数は $\frac{\sin x}{x}$ では $\frac{1}{120}$、$\frac{x}{\sinh x}$ ではそれより大きい $\frac{7}{360}$ である）。
- $x = 1$ のとき：$\cos 1 \cosh 1 \approx 0.834 < 1$、および $\frac{1}{\cosh 1} \approx 0.648 < \sin 1 \approx 0.841 < \frac{1}{\sinh 1} \approx 0.851$ である。
- $x = \frac{1}{2}\pi$ の近く、$x = 1.57$ では：3 つの値はおよそ 0.399、0.637、0.683 であり、$\cos x \cosh x \approx 0.002$ である。

よくある間違い

- 冒頭の結果を $\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{\cosh x}$ そのものに適用すること。これは 0 では定義すらされず、導関数も扱いにくい。まず分母を払い、その際に掛ける因数がすべて正であることを確かめること。
- $f(0) = 0$ だけでなく $f'(0) = 0$ も確かめるのを忘れること。これがなければ冒頭の結果は適用できない。
- 2 つ目の不等式に小問 (i) が必要であることに気づかないこと。$k'' = 2 - 2\cos x \cosh x$ が正であるのは、まさに (i) による。

STEP のその先へ

冒頭の結果は、平均値の定理（mean value theorem）を用いた議論の一形態であり、「導関数が正である関数は増加する（increasing）」という事実を 2 回適用したものである。これは、凸関数（convex function）がその接線（tangent line）の上側にあること、ここでは原点における接線 $y = 0$ の上側にあることを述べている。この「二階導関数を比較する」手法は、初等関数の間の不等式を証明する標準的な方法である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、平均値の定理とその帰結を丁寧に展開している。

解答例

STEP III 2014、第 7 問

純粋数学 • ベクトルと円に内接する四角形

STEP III 2014、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

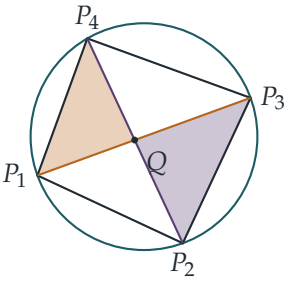
step.maths.org/questions/14-s3-q7

鍵となる考え方

小問 (i) は方べきの定理（intersecting chords theorem）であり、同じ弧に対する円周角（angles in the same segment）が等しいことから導かれる。ベクトルを用いる小問では、同じ事実をもう一度別の方法で示す。平面上の 4 点は「アフィン従属」（affinely dependent）であり、その従属関係の係数が対角線の交点の位置を決める。したがって係数は各対角線を既知の比に分ける。その比を (i) に代入すると、最終的な関係式が得られる。

解答

この図形について、全体を通して二つの事実を用いる。第一に、P_i のうちどの 3 点も同一直線上にない（共線（collinear）でない）。直線と円の共有点は高々 2 個だからである。第二に、頂点は円周上に順に名前が付けられているので、P_1 と P_3 は弦 P_2P_4 によって分けられる二つの異なる弧の上にある。よって両者は直線 P_2P_4 に関して反対側にあり、対角線は線分 P_1P_3 と P_2P_4 のどちらに対しても、その真に内部にある点 Q で交わる。



小問 (i)

三角形 P_1QP_4 と P_2QP_3 において、

- $\angle P_1QP_4 = \angle P_2QP_3$ である。これらは Q における対頂角（vertically opposite angles）だからである。
- $\angle QP_1P_4 = \angle P_3P_1P_4$ かつ $\angle QP_2P_3 = \angle P_4P_2P_3$ である。これらが等しいのは、どちらも同じ弧（P_1 と P_2 を通って P_4 から P_3 に至る弧）の上の点 P_1、P_2 から弦 P_3P_4 を見込む円周角だからである。

よって二つの三角形は $P_1 \leftrightarrow P_2$、$Q \leftrightarrow Q$、$P_4 \leftrightarrow P_3$ の対応で相似（similar）である。対応する辺の比は等しいので、

$$\frac{P_1Q}{P_2Q} = \frac{QP_4}{QP_3}, \qquad \text{よって} \qquad (P_1Q)(QP_3) = (P_2Q)(QP_4),$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

円に内接する四角形（cyclic quadrilateral）は平面上にあるので、3 つのベクトル $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$、$\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1$、$\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1$ はすべて 2 次元空間の中にある。2 次元の中の 3 つのベクトルは一次従属（linearly dependent）であるから、すべてが 0 ではない数 b_2, b_3, b_4 で

$$b_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) + b_3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) + b_4(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1) = \mathbf{0}.$$

を満たすものが存在する。（具体的には、P_1, P_2, P_3 は同一直線上にないので $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ と $\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1$ は平行でなく、したがって平面を張り（span）、$\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1$ はそれらの一次結合で表される。このとき $b_4 = -1$ ととれる。）ここで $a_1 = -(b_2 + b_3 + b_4)$、$i = 2, 3, 4$ に対して $a_i = b_i$ とおく。すると $\sum a_i = 0$ であり、a_i のすべてが 0 ではなく、

$$\sum_{i=1}^{4} a_i\mathbf{p}_i = a_1\mathbf{p}_1 + b_2\mathbf{p}_2 + b_3\mathbf{p}_3 + b_4\mathbf{p}_4 = b_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) + b_3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) + b_4(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1) = \mathbf{0},$$

となるので、$(*)$ が成り立つ。

小問 (iii)

$a_1 + a_3 \neq 0$ であること。仮に $a_1 + a_3 = 0$ であったとする。すると $(*)$ の第 1 式より $a_2 + a_4 = 0$ でもあるので、$a_3 = -a_1$、$a_4 = -a_2$ である。第 2 式は

$$a_1(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3) + a_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4) = \mathbf{0}.$$

となる。直線 P_1P_3 と P_2P_4 は異なり（そうでなければ 4 点すべてが同一直線上にあることになる）、Q で交わるので、平行ではない。よって $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$ と $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4$ は零ベ

クトルでなく、互いに平行でもないので、$a_1 = a_2 = 0$ でなければならない。すると 4 つの a_i がすべて 0 となり、矛盾である。したがって $a_1 + a_3 \neq 0$ であり、同様に $a_2 + a_4 = -(a_1 + a_3) \neq 0$ である。

交点。 $(*)$ より $a_1\mathbf{p}_1 + a_3\mathbf{p}_3 = -(a_2\mathbf{p}_2 + a_4\mathbf{p}_4)$ かつ $a_1 + a_3 = -(a_2 + a_4)$ である。一方を他方で割ると、

$$\mathbf{r} = \frac{a_1\mathbf{p}_1 + a_3\mathbf{p}_3}{a_1 + a_3} = \frac{a_2\mathbf{p}_2 + a_4\mathbf{p}_4}{a_2 + a_4}.$$

第 1 の形から $\mathbf{r} = \mathbf{p}_1 + \dfrac{a_3}{a_1 + a_3}(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)$ であり、これは直線 P_1P_3 上の点である。同様に、第 2 の形からこれは直線 P_2P_4 上の点でもある。平行でない 2 直線はただ 1 点でしか交わらないので、$\mathbf{r}$ は Q の位置ベクトル（position vector）である。

> **?** **考えてみよう** Q を表すこの式から、長さ P_1Q と QP_3 をどのように求めればよいだろうか？

引き算をすればよい。$\mathbf{q} = \mathbf{r}$ を用いると、

$$\mathbf{q} - \mathbf{p}_1 = \frac{a_3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)}{a_1 + a_3}, \qquad \mathbf{p}_3 - \mathbf{q} = \frac{a_1(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)}{a_1 + a_3}.$$

長さをとると $P_1Q = \dfrac{|a_3|}{|a_1 + a_3|}P_1P_3$、$QP_3 = \dfrac{|a_1|}{|a_1 + a_3|}P_1P_3$ となる。同様に、$\mathbf{r}$ の第 2 の形から $P_2Q = \dfrac{|a_4|}{|a_2 + a_4|}P_2P_4$、$QP_4 = \dfrac{|a_2|}{|a_2 + a_4|}P_2P_4$ が得られる。

符号。 Q は P_1 と P_3 の真に間にあるので、分数 $\frac{a_3}{a_1+a_3}$ は 0 と 1 の真に間にある。すると $\frac{a_1}{a_1+a_3} = 1 - \frac{a_3}{a_1+a_3}$ もまた 0 と 1 の真に間にある。正の数どうしの積は正であるから、

$$\frac{a_1a_3}{(a_1 + a_3)^2} > 0, \qquad \text{すなわち} a_1a_3 > 0.$$

P_2P_4 について同じ議論を行うと $a_2a_4 > 0$ が得られる。よって $|a_1a_3| = a_1a_3$、$|a_2a_4| = a_2a_4$ である。

結論の導出。 小問 (i) に代入すると、

$$\frac{a_1a_3}{(a_1 + a_3)^2}(P_1P_3)^2 = (P_1Q)(QP_3) = (P_2Q)(QP_4) = \frac{a_2a_4}{(a_2 + a_4)^2}(P_2P_4)^2.$$

$(a_2 + a_4)^2 = (a_1 + a_3)^2 \neq 0$ であるから、両辺にこれを掛けると

$$a_1a_3(P_1P_3)^2 = a_2a_4(P_2P_4)^2,$$

となり、これが求める結果である。

検算

- 頂点が $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ の正方形を考える。このとき $\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_3=\mathbf{0}=\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_4$ であるから、$a=(1,-1,1,-1)$ は $(*)$ を満たす。公式から Q は原点となり、$a_1a_3(P_1P_3)^2=4=a_2a_4(P_2P_4)^2$ である。
- 対称でない場合として、図のように $P_1,\dots,P_4$ を単位円上の角 $200°,290°,20°,120°$ の位置にとる。この場合と、無作為に選んだ数千個の円に内接する四角形について、$a_1a_3>0$ と $a_2a_4>0$ を含む (iii) の 3 つの主張すべてが、10^{-10} の精度でコンピュータにより確認された。
- すべての a_i を同じ因数 λ 倍しても答えは変わらない。そうでなければならない。最終的な関係式の両辺はどちらも λ^2 倍になるからである。

よくある間違い

- (i) で角の組合せを誤ること。P_1 と P_2 における等しい角は弦 P_3P_4 に対する円周角であり、これによってどの辺が対応するかが決まる。
- (iii) で何の説明もなく絶対値記号を外すこと。絶対値付きの関係式は易しい。本当の仕事は $a_1a_3>0$ と $a_2a_4>0$ を示すことであり、そこでは Q が両方の対角線の内部にあるという事実を用いる。
- $a_1+a_3\neq 0$ を証明する際に、対角線が平行でない理由を述べ忘れること。

STEP のその先へ

量 $(P_1Q)(QP_3)$ は、円に関する点 Q の**方べき**（power）であり、Q を通るどの弦についても同じ値になる。小問 (ii) は、平面上の 4 点がアフィン従属であるという主張である。数 a_i は重心座標（barycentric coordinates）風の座標であり、Q を表す式は、アフィン幾何（affine geometry）が座標を一切使わずに点・直線・比をどのように扱うかを初めて垣間見せるものである。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）では、一次従属と、(ii) の背後にある次元の数え上げが扱われている。

解答例

STEP III 2014、第 8 問

純粋数学 ・ 級数の収束

STEP III 2014、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s3-q8

この問題は、*Beyond STEP* の第 2.3 節「**発散する級数と、収束するその親戚**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch02/kempner.html

鍵となる考え方

正の整数をブロック $[k^n, k^{n+1})$ に切り分ける。各ブロック内のどの項も、そのブロックの先頭での値と次のブロックの先頭での値の間にあるので、各ブロックの和は「項数 × その二つの値」で上下から挟まれる。ブロックごとに足し合わせると、扱いにくい級数（series）が等比級数（geometric series）、あるいは各ブロックで定数となる項からなる級数に変わり、発散する（diverge）かどうかがすぐにわかる。数字 2 を含まない整数についても、各ブロックにいくつあるかを数えさえすれば、同じ数え方が使える。

解答

ブロックに関する不等式

ブロック $k^n \le r \le k^{n+1} - 1$ には

$$(k^{n+1} - 1) - k^n + 1 = k^{n+1} - k^n = k^n(k-1)$$

個の整数が含まれる。f は狭義単調減少（strictly decreasing）であるから、ブロック内のすべての r に対して

$$\mathrm{f}(k^{n+1}) < \mathrm{f}(r) \le \mathrm{f}(k^n),$$

が成り立つ。一つ目は $r < k^{n+1}$ から、二つ目は $r \geq k^n$ から従う（等号は $r = k^n$ のときに限る）。これを $k^n(k-1)$ 個の r の値について足し合わせると

$$k^n(k-1)\,\mathrm{f}(k^{n+1}) \leq \sum_{r=k^n}^{k^{n+1}-1} \mathrm{f}(r) \leq k^n(k-1)\,\mathrm{f}(k^n),$$

となり、求める不等式が得られる。（実際には左側の不等式は狭義の不等号で成り立つ。）



$k = 2$ のときのブロックと、各ブロックに含まれる項の個数。

小問 (i)

$k = 2$、$\mathrm{f}(r) = \frac{1}{r}$ とする。これは狭義単調減少である。ブロックに関する不等式は

$$\frac{2^n}{2^{n+1}} \leq \sum_{r=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{r} \leq \frac{2^n}{2^n}, \qquad \text{すなわち} \qquad \tfrac{1}{2} \leq \sum_{r=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{r} \leq 1.$$

となる。各ブロックは次のブロックが始まる直前で終わるので、$n = 0, 1, \ldots, N$ のブロックは隙間なくつながり、ちょうど $1 \leq r \leq 2^{N+1} - 1$ を覆う。$N+1$ 個の不等式を足し合わせると

$$\frac{N+1}{2} \leq \sum_{r=1}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{r} \leq N+1.$$

を得る。

結論の導出：部分和（partial sum）$H_m = \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{r}$ は m について増加し、$H_{2^{N+1}-1} \geq \frac{N+1}{2}$ である。右辺は N を大きくとればいくらでも大きくできる。したがって部分和は有界（bounded）でなく、$\sum \frac{1}{r}$ は収束（converge）しない。

小問 (ii)

$k = 2$、$\mathrm{f}(r) = \frac{1}{r^3}$ とする。これもやはり狭義単調減少である。今度は右側の不等式だけを用いればよい：

$$\sum_{r=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{r^3} \leq \frac{2^n}{2^{3n}} = \frac{1}{4^n}.$$

先ほどと同様に $n = 0, 1, \ldots, N$ について足し合わせると

$$\sum_{r=1}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{r^3} \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{4^n} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

考えてみよう これで押さえられたのは部分和の一部にすぎない。なぜこれで無限和が押さえられるのか。

すべての項は正であるから、部分和は増加する。任意の部分和 $\sum_{r=1}^{m} r^{-3}$ は $2^{N+1}-1 \geq m$ となる部分和以下であり、したがって $\frac{4}{3}$ より小さい。上に有界な増加数列は収束し、その極限はその上界以下である。よって

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^3} \leq \frac{4}{3} = 1\tfrac{1}{3}.$$

小問 (iii)

$S(1000)$ の要素を数える。 0 から 999 までの各整数を、先頭に 0 を補って 3 桁の数字列として書く（たとえば 7 は 007 となる）。補った 0 が 2 を生むことはないので、整数が 2 を含まないことと、その数字列が 2 を含まないことは同値である。3 つの各桁は $0,1,3,4,\ldots,9$ の 9 個の数字のいずれでもよいので、数字列は 9^3 通りあり、それぞれ異なる整数に対応する。そのうち一つは 000 で、これは正でないから、$S(1000)$ には 9^3-1 個の数が含まれる。

ブロックごとに数える。 桁数を $n+1$ にして同じ議論を行うと、$S(10^{n+1})$ には $9^{n+1}-1$ 個の整数があることがわかる。したがって、$(n+1)$ 桁の数からなるブロック $10^n \leq r \leq 10^{n+1}-1$ には、2 を含まない整数が

$$(9^{n+1}-1)-(9^n-1) = 8\cdot 9^n$$

個含まれる。（同じことだが、最上位の桁は 0 にも 2 にもなれないので 8 通り、残りの n 個の桁はそれぞれ 9 通りである。）

$\sigma(n)$ を評価する。 これは $k=10$ のブロックの議論であるが、2 を含まない整数だけを数える点が異なる。ブロック内のすべての r について $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{10^n}$ であるから、このブロックの和への寄与は高々

$$8\cdot 9^n \cdot \frac{1}{10^n} = 8\left(\tfrac{9}{10}\right)^n.$$

である。ここで n を固定し、$n \leq 10^{M+1}$ となる M をとる。$S(n)$ のすべての要素は $m=0,1,\ldots,M$ のブロックのいずれかに属し、逆数はすべて正である。よって

$$\sigma(n) \leq \sum_{m=0}^{M} 8\left(\tfrac{9}{10}\right)^m < \sum_{m=0}^{\infty} 8\left(\tfrac{9}{10}\right)^m = \frac{8}{1-\frac{9}{10}} = 80.$$

二つ目の不等式が狭義であるのは、$m>M$ の正の項を除いているからである。したがって、すべての n について $\sigma(n)<80$ である。

検算

- 小問 (ii)：$\sum r^{-3} = 1.2020\ldots$（アペリー（Apéry）の定数）であり、$1\frac{1}{3}$ を十分に下回っている。
- 小問 (i) で $N = 2$ のとき：$\sum_{r=1}^{7} \frac{1}{r} \approx 2.593$ であり、1.5 と 3 の間にある。
- 小問 (iii)：直接数えると、1000 未満に $728 = 9^3 - 1$ 個、各ブロックに $8 \cdot 9^n$ 個あることが確かめられる。コンピュータで直接和をとると $\sigma(10^7) \approx 10.28$ となり、80 をはるかに下回る。この上界はかなり甘いが、問われているのはそれだけである。

よくある間違い

- ブロックの項数を数え間違える。ブロックは k^n から $k^{n+1} - 1$ までであり、項数は $k^{n+1} - k^n - 1$ ではなく $k^{n+1} - k^n$ である。
- (iii) で、n 番目のブロックに 2 を含まない数字列が 9^n 個すべてあるとして数えてしまう。最上位の桁は 0 になれないので、$8 \cdot 9^n$ 個しかない。9^{n+1} を使うと上界が 90 となり、不十分である。
- (ii) で、$2^{N+1} - 1$ までの部分和の上界を求めたところで止まり、無限和全体がなぜ有界なのかを述べない。

STEP のその先へ

これはコーシー（Cauchy）の凝縮判定法（condensation test）である：正の減少数列に対して、$\sum a_r$ が収束することと $\sum 2^n a_{2^n}$ が収束することは同値である。これにより、$\sum r^{-p}$ が収束するのは $p > 1$ のとき、かつそのときに限ることがすぐにわかる。小問 (iii) はケンプナー級数（Kempner series）である：発散する調和級数（harmonic series）から、ある特定の数字を含む整数をすべて取り除くと収束する級数になる。これは、大きな整数のほとんどすべてがあらゆる数字を含むからである。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、凝縮判定法と比較判定法（comparison tests）を丁寧に扱っている。

解答例

STEP III 2014、第 9 問

力学 ・ 抵抗のある放物運動

STEP III 2014、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s3-q9

鍵となる考え方

位置（position）が与えられているので、速度（velocity）は 1 回微分するだけで得られる。運動方程式（equation of motion）の確認も、$\mathbf{v}$ と $\dot{\mathbf{v}}$ を $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g} - k\mathbf{v}$ に代入するだけである。その後はすべて成分の問題になる。$\mathbf{r}$ の $\mathbf{j}$ 成分から T が決まり、時刻 T における $\mathbf{v}$ の成分の比から $\tan\beta$ が得られる。最後の不等式は一見複雑だが、$x = kT$ とおいて分母を払うと、ちょうどヒントの $\sinh x > x$ に帰着する。

解答

速度と運動の確認

物体を質点（particle）とみなす。ニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）より $m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{g} - mk\mathbf{v}$ であるから、運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{g} - k\mathbf{v},$$

であり、初期条件（initial conditions）は $t = 0$ で $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ である。

ここで $\mathbf{g}$ と $\mathbf{u}$ は定ベクトルなので、与えられた $\mathbf{r}$ を係数ごとに微分すればよい。

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{k - k\mathrm{e}^{-kt}}{k^2}\,\mathbf{g} + \frac{k\mathrm{e}^{-kt}}{k}\,\mathbf{u} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-kt}}{k}\,\mathbf{g} + \mathrm{e}^{-kt}\,\mathbf{u}.$$

もう一度微分すると $\dot{\mathbf{v}} = \mathrm{e}^{-kt}\mathbf{g} - k\mathrm{e}^{-kt}\mathbf{u}$ となる。一方、

$$\mathbf{g} - k\mathbf{v} = \mathbf{g} - \left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right)\mathbf{g} - k\mathrm{e}^{-kt}\mathbf{u} = \mathrm{e}^{-kt}\mathbf{g} - k\mathrm{e}^{-kt}\mathbf{u},$$

であり、両者は一致するので運動方程式が成り立つ。$t = 0$ では $\mathrm{e}^0 = 1$ であるから、

$\mathbf{r} = \frac{0-1+1}{k^2}\mathbf{g} + 0\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{v} = 0\,\mathbf{g} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ となる。よって初期条件も両方とも成り立つ。

滞空時間

次に $\mathbf{u} = u\cos\alpha\,\mathbf{i} + u\sin\alpha\,\mathbf{j}$、$\mathbf{g} = -g\,\mathbf{j}$ とおく。$\mathbf{r}$ の $\mathbf{j}$ 成分は

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{j} = -\frac{kt - 1 + \mathrm{e}^{-kt}}{k^2}\,g + \frac{1-\mathrm{e}^{-kt}}{k}\,u\sin\alpha.$$

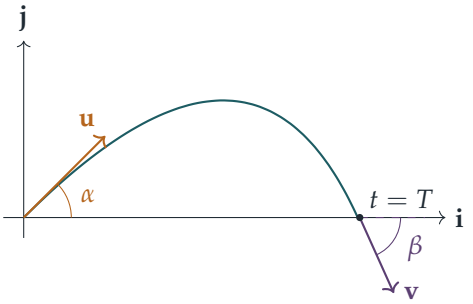
である。$t = T$ でこれを 0 とおき、k^2 を掛けると

$$uk\sin\alpha\left(1-\mathrm{e}^{-kT}\right) = \left(kT - 1 + \mathrm{e}^{-kT}\right)g.$$

となる。$T > 0$ かつ $k > 0$ より $1-\mathrm{e}^{-kT} > 0$ であるから、これで割ってよい。$kT - 1 + \mathrm{e}^{-kT} = kT - \left(1-\mathrm{e}^{-kT}\right)$ と書き直すと

$$uk\sin\alpha = \left(\frac{kT}{1-\mathrm{e}^{-kT}} - 1\right)g,$$

となり、求める式が得られる。



時刻 T における角度

$t = T$ において、$\mathbf{v} = \frac{1-\mathrm{e}^{-kT}}{k}\mathbf{g} + \mathrm{e}^{-kT}\mathbf{u}$ の成分は

$$v_x = \mathrm{e}^{-kT}u\cos\alpha, \qquad v_y = -\frac{1-\mathrm{e}^{-kT}}{k}\,g + \mathrm{e}^{-kT}u\sin\alpha.$$

である。$0 < \alpha < 90^\circ$ より $v_x > 0$ である。質点は落下してくるところなので $v_y < 0$ となるはずであり、これは後で証明する。したがって、$\mathbf{v}$ と $\mathbf{i}$ のなす鋭角（acute angle）は $\tan\beta = -v_y/v_x$ を満たす。v_x で割ると

$$\tan\beta = \frac{\left(1-\mathrm{e}^{-kT}\right)g}{k\,\mathrm{e}^{-kT}u\cos\alpha} - \frac{\mathrm{e}^{-kT}u\sin\alpha}{\mathrm{e}^{-kT}u\cos\alpha} = \frac{\left(\mathrm{e}^{kT}-1\right)g}{uk\cos\alpha} - \tan\alpha,$$

となる。ここで $\left(1-\mathrm{e}^{-kT}\right)/\mathrm{e}^{-kT} = \mathrm{e}^{kT} - 1$ を用いた。

$\tan\beta > \tan\alpha$ を示す

直前の結果から、$\tan\beta > \tan\alpha$ は

$$\frac{\left(\mathrm{e}^{kT}-1\right)g}{uk\cos\alpha} > 2\tan\alpha \iff \left(\mathrm{e}^{kT}-1\right)g > 2uk\sin\alpha,$$

と同値である（$uk\cos\alpha > 0$ を掛けた）。ここで滞空時間の結果を用いて $uk\sin\alpha$ を置き換えると、u と α が完全に消える。

考えてみよう これを $\sinh kT$ を含む形にするにはどうすればよいか？

$x = kT > 0$ とおく。すると $\frac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \frac{x\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}-1}$ であり、$g > 0$ で割ると、示すべき不等式は

$$\mathrm{e}^{x} - 1 > \frac{2x\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}-1} - 2.$$

となる。$\mathrm{e}^{x} - 1 > 0$ を掛け（不等号の向きは変わらない）、展開すると

$$\begin{aligned}
&\iff \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x} + 1 > 2x\mathrm{e}^{x} - 2\mathrm{e}^{x} + 2 \\
&\iff \mathrm{e}^{2x} - 1 > 2x\mathrm{e}^{x} \\
&\iff \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} > 2x \qquad (\mathrm{e}^{x} > 0 \text{ で割った}) \\
&\iff \sinh x > x.
\end{aligned}$$

となる。どの変形も逆向きにたどることができ、$kT > 0$ のとき $\sinh kT > kT$ である（これは仮定してよい）。よって $\tan\beta > \tan\alpha$ である。

これにより v_y の符号も確定する。$-v_y/v_x > \tan\alpha > 0$ かつ $v_x > 0$ を示したので、$v_y < 0$ である。質点は時刻 T において確かに下降しており、$\tan\beta$ の式は正当化される。

最後に、α と β はともに $(0°, 90°)$ に属し、この範囲で tan は狭義単調増加（strictly increasing）である。よって $\tan\beta > \tan\alpha$ から $\beta > \alpha$ が従う。抵抗（resistance）があると、質点は上がっていったときよりも急な角度で落ちてくるのである。

検算

- $\mathrm{e}^{-kt} \approx 1 - kt + \frac{1}{2}k^2t^2$ を用いると、$k \to 0$ のとき $\mathbf{r} \to \frac{1}{2}t^2\mathbf{g} + t\mathbf{u}$ となる。これは通常の放物運動である。また、x が小さいとき $\frac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}} - 1 \approx \frac{x}{2}$ であるから、滞空時間の式から $T \to 2u\sin\alpha/g$ が得られる。同様に $\tan\beta \to \frac{gT}{u\cos\alpha} - \tan\alpha = \tan\alpha$ となり、左右対称な放物線（parabola）になる。
- $k = 1\,\mathrm{s}^{-1}$、$g = 10\,\mathrm{m\,s}^{-2}$、$u = 10\,\mathrm{m\,s}^{-1}$、$\alpha = 45°$ とする。$\mathbf{r}\cdot\mathbf{j} = 0$ を数値的に解くと $T \approx 1.185\,\mathrm{s}$ となり、抵抗がない場合の $1.414\,\mathrm{s}$ より短い。着地角は $\beta \approx 65.7° > 45°$

であり、どちらの公式も小数点以下何桁にもわたって一致する。コンピュータで $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g} - k\mathbf{v}$ を逐次的に数値積分（numerical integration）すると、与えられた $\mathbf{r}$ と $\mathbf{v}$ が再現される。

よくある間違い

- マイナス符号をつけずに $\tan\beta = v_y/v_x$ としてしまう。着地時に v_y は負であり、β は鋭角である。
- $1 - \mathrm{e}^{-kT}$ や $\mathrm{e}^{kT} - 1$ で割ったり掛けたりするときに、それが正であることを述べない。これこそが不等号の向きを正しく保つ根拠である。
- $\tan\beta > \tan\alpha$ で止めてしまう。$\beta > \alpha$ を導くには、tan が鋭角の範囲で増加であることが必要である。

STEP のその先へ

与えられた $\mathbf{r}$ は線形微分方程式（linear differential equation）$\ddot{\mathbf{r}} + k\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}$ の解であり、この方程式は積分因子（integrating factor）e^{kt} を用いて直接解くことができる。速度に比例する抵抗（linear drag）は、$\mathbf{i}$ 方向と $\mathbf{j}$ 方向の運動が分離する唯一の抵抗法則である。より現実的な速度の 2 乗に比例する抵抗（quadratic drag）$-mk|\mathbf{v}|\mathbf{v}$ では両者が連成し、閉じた形の解（closed form）は存在しない。それでも、下りのほうが急になる非対称な軌道は、どちらの場合にも成り立つ。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、抵抗力を受ける運動をこうした観点から扱っている。

解答例

STEP III 2014、第 10 問

力学 ・ 連成振動

> **STEP III 2014、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q10

この問題は、*Beyond STEP* の第 11.2 節「**基準振動**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/normal-modes.html

鍵となる考え方

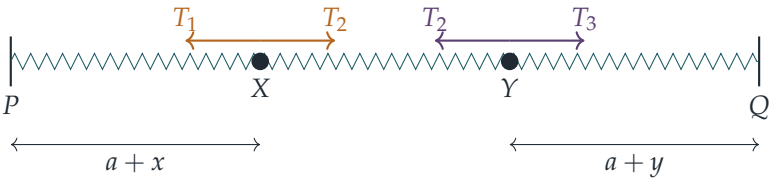
すべてを一直線上に置いて座標を一つだけ用い、各ばねの伸び（extension）を x と y で表せば、ニュートン（Newton）の運動の第 2 法則から連立した二つの方程式が得られる。このような対称性をもつ連立方程式（coupled equations）は、足したり引いたりすると分離する。$x-y$ と $x+y$ はそれぞれ独自の単振動（simple harmonic motion）の方程式に従い、その振動数は異なる。そうすると、Y がいつか元の位置に戻るかどうかは、二つの振動数の比が有理数（rational）であるかどうかで決まる。

解答

運動方程式

X と Y を質点とし、ばねは質量が無視でき、フックの法則（Hooke's law）に従うものとしてモデル化する。台は滑らかなので、水平方向にはたらく力はばねの張力だけである。すべての力は直線 PQ に沿ってはたらき、運動もこの直線上にとどまる。

位置は直線に沿って P から Q の向きに測る。すると P は 0、Q は $3a$ の位置にある。このとき X は $a+x$ の位置にあり、Y は $3a-(a+y)=2a-y$ の位置にある。



三つのばねの長さと張力は次のとおりである（フックの法則より、張力 $= \lambda \times$ 伸び$/a$ であり、負の値は押す力を表す）。

$$PX:\ \text{長さ}\, a+x, \qquad T_1 = \frac{\lambda x}{a},$$

$$XY:\ \text{長さ}\, (2a-y)-(a+x) = a-x-y, \qquad T_2 = -\frac{\lambda(x+y)}{a},$$

$$YQ:\ \text{長さ}\, a+y, \qquad T_3 = \frac{\lambda y}{a}.$$

張力のはたらいているばねは、両端をそれぞれ他方の端の方へ引く。よって X は P の向きに T_1 を、Y の向きに T_2 を受ける。$P \to Q$ の向きを正とすると、

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -T_1 + T_2 = -\frac{\lambda}{a}x - \frac{\lambda}{a}(x+y) = -\frac{\lambda}{a}(2x+y),$$

となり、示すべき式が得られた。（符号は自動的に正しく扱われる。$T_2 < 0$ ならばばね XY は縮んでおり、X を P の方へ押す。）

Y の位置は $2a-y$ なので、正の向きの加速度は $-\ddot{y}$ である。また、X の向き（負の向き）に T_2 を、Q の向き（正の向き）に T_3 を受ける。

$$-m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -T_2 + T_3 = \frac{\lambda}{a}(x+y) + \frac{\lambda}{a}y, \qquad \text{よって} \qquad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\lambda}{a}(x+2y).$$

これは第 1 式で x と y を入れ替えたものであり、配置の対称性（PQ の中点に関する折り返し）から当然そうなるはずである。

組み合わせ $x-y$

二つの式を引くと、

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x-y) = -\frac{\lambda}{a}\left[(2x+y)-(x+2y)\right] = -\frac{\lambda}{a}(x-y).$$

$\omega^2 = \lambda/(ma)$ とおくと、これは $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x-y) = -\omega^2(x-y)$ となり、単振動であるから、

$$x-y = A\cos\omega t + B\sin\omega t.$$

最初は $XP = a$、$YQ = \frac{1}{2}a$ であるから、$x = 0$、$y = -\frac{1}{2}a$（$t = 0$ において）となり、$x-y = \frac{1}{2}a$、したがって $A = \frac{1}{2}a$ である。質点は静止状態から放されるので、$\dot{x} = \dot{y} = 0$（$t = 0$ において）である。微分すると $\omega B = 0$ となるので $B = 0$ である。よって

$$x-y = \tfrac{1}{2}a\cos\omega t.$$

組み合わせ $x+y$

今度は二つの式を足すと、

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x+y) = -\frac{\lambda}{a}(3x+3y), \qquad \text{よって} \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x+y) = -3\omega^2(x+y).$$

これは角振動数（angular frequency）$\sqrt{3}\,\omega$ の単振動であるから、$x+y = C\cos\sqrt{3}\,\omega t + D\sin\sqrt{3}\,\omega t$ となる。$t=0$ において $x+y = -\frac{1}{2}a$ であり、その導関数は 0 であるから、$C = -\frac{1}{2}a$、$D=0$ となる。

$$x+y = -\tfrac{1}{2}a\cos\sqrt{3}\,\omega t.$$

Y は決して戻らない

二つの結果の差の半分をとると、

$$y = \tfrac{1}{2}\big[(x+y)-(x-y)\big] = -\tfrac{1}{4}a\big(\cos\omega t + \cos\sqrt{3}\,\omega t\big).$$

（同様に $x = \frac{1}{4}a(\cos\omega t - \cos\sqrt{3}\,\omega t)$ である。）Y が初期位置に戻るのは、ちょうど $y = -\frac{1}{2}a$ となるとき、すなわち

$$\cos\omega t + \cos\sqrt{3}\,\omega t = 2.$$

となるときであり、そのときに限る。

> **考えてみよう** どちらの余弦も周期的なのだから、いつかは必ず再びそろうのではないか？

それぞれの余弦は 1 以下なので、和が 2 に等しくなるのは、同じ時刻 $t>0$ において両方が 1 に等しくなるときに限る。そのためには

$$\omega t = 2\pi n \quad \text{かつ} \quad \sqrt{3}\,\omega t = 2\pi k$$

となる整数 n,k が必要であり、$t>0$ より $n \geq 1$ である。辺々割ると $\sqrt{3} = k/n$ が有理数となってしまうが、そうではない。したがってそのような $t>0$ は存在せず、Y は初期位置に決して戻らない。二つの周期 $2\pi/\omega$ と $2\pi/(\sqrt{3}\,\omega)$ は通約不可能（incommensurable）なので、二つの振動が再び足並みをそろえることはない。ただし、いくらでもそれに近い状態にはなる。

検算

- $t=0$ において、公式は $x = \frac{1}{4}a(1-1) = 0$、$y = -\frac{1}{4}a(1+1) = -\frac{1}{2}a$ を与え、初期位置と一致する。また、そこで二つの導関数はともに零となる。

- ばね XY の長さは $a - x - y = a + \frac{1}{2}a\cos\sqrt{3}\,\omega t$ であり、常に $\frac{1}{2}a$ と $\frac{3}{2}a$ の間にあるので、質点どうしが衝突することはない。同様に $PX = a + x \geq \frac{1}{2}a$、$YQ = a + y \geq \frac{1}{2}a$ である。モデルは全体を通して物理的に妥当である。
- $m = a = 1$、$\lambda = 2$ として運動を数値的に追跡すると、x と y の公式が 10^{-10} より良い精度で $t = 20$ まで再現される。$0 < \omega t \leq 20\,000$ の範囲をコンピュータで探索すると、$\cos\omega t + \cos\sqrt{3}\,\omega t$ は 1.999995 まで 2 に近づくが、決して到達しない。

よくある間違い

- Y の方程式の符号を間違える。y は Q から測っているので、y が増加すると Y は**負の**向きに動く。
- XY の長さを $a - x - y$ ではなく $a + x + y$ と書いてしまう。x と y のどちらが増加しても、中央のばねは短くなる。
- 二つの周期が異なることだけを論じる。周期が異なるだけでは不十分である（周期 1 と 2 は $t = 2$ で再びそろう）。重要なのは、それらの比 $\sqrt{3}$ が無理数であるという点である。

STEP のその先へ

組み合わせ $x - y$ と $x + y$ はこの系の**基準振動**（normal modes）である。すなわち、行列（matrix）$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有ベクトル（eigenvectors）であり、固有値（eigenvalues）1 と 3 が振動数の 2 乗 ω^2 と $3\omega^2$ を与える。連成系の微小振動はすべてこのように基準振動に分解され、運動が周期的になるのは振動数の比がすべて有理数のときに限る。そうでなければ運動は準周期的（quasi-periodic）であり、決して繰り返すことはないが、出発点にいくらでも近いところへ戻ってくる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は連成振動子（coupled oscillators）を扱っており、Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）はその背後にある固有ベクトルの方法を解説している。

解答例

STEP III 2014、第 11 問

力学 ・ 円運動

> **STEP III 2014、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q11

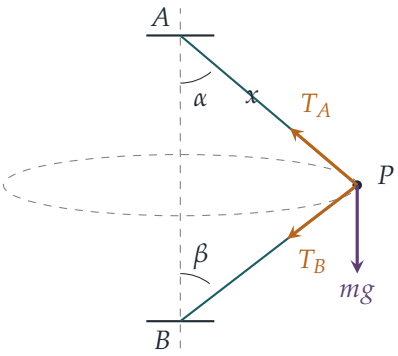
鍵となる考え方

質点には 3 つの力（2 本の糸の張力（tension）と重力）がはたらき、それらの合力が円運動に必要な向心力（centripetal force）をちょうど与えなければならない。鉛直方向と水平方向に分解すると、2 つの張力についての 2 本の連立 1 次方程式が得られる。糸は引くことしかできないので $T_B \geq 0$ であり、ここから不等式が導かれる。境界の場合には下側の糸がたるみかけ、三角形 ABP に余弦定理（cosine rule）を用いると、どのような角 α が起こりうるかがわかる。

解答

設定

P を質点とし、糸は軽くて伸び縮みしないものとみなす。P は直線 AB 上に中心をもつ半径 $r = x\sin\alpha$ の水平な円周上を運動するので、その加速度は軸に向かう水平方向に $\omega^2 x\sin\alpha$ である。張力 T_A は PA に沿ってはたらき、鉛直上向きと角 α をなす。張力 T_B は PB に沿ってはたらき、鉛直下向きと角 β をなす。



張力

鉛直方向（鉛直方向の加速度はない）と、軸に向かう水平方向に分解すると、

$$T_A \cos\alpha - T_B \cos\beta = mg, \tag{1}$$

$$T_A \sin\alpha + T_B \sin\beta = m\omega^2 x \sin\alpha. \tag{2}$$

これらの式は β が鈍角の場合、すなわち P が B より下にある場合にも成り立つ。そのときは $\cos\beta < 0$ となり、T_B の鉛直成分は本来そうあるべきとおり上向きになるからである。

T_B を消去するには、(1) に $\sin\beta$ を、(2) に $\cos\beta$ を掛けて加える。$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$ を用いると、

$$T_A = \frac{m\left(g\sin\beta + \omega^2 x \sin\alpha\cos\beta\right)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

T_A を消去するには、(2) に $\cos\alpha$ を、(1) に $\sin\alpha$ を掛けて引く：

$$T_B = \frac{m\sin\alpha\left(\omega^2 x\cos\alpha - g\right)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

ここで α と β は三角形 ABP の 2 つの内角なので、$0 < \alpha+\beta < \pi$ であり $\sin(\alpha+\beta) > 0$ である。また $\sin\alpha > 0$ である。張っている糸では $T_B \geq 0$ なので、

$$\omega^2 x\cos\alpha \geq g,$$

となり、示すべき式が得られた。

$\omega^2 x\cos\alpha = g$ の場合

このとき $T_B = 0$ であり、下側の糸はちょうど張っているが張力ははたらいていない。すると (1) から

$$T_A = \frac{mg}{\cos\alpha},$$

が得られ、これは (2) と矛盾しない。(2) からはこの場合 $T_A = m\omega^2 x$ となるからである。また $\cos\alpha = g/(\omega^2 x) > 0$ なので、α は鋭角であることにも注意しておく。

考えてみよう h、d、α だけを含む不等式は、どこから出てくるのだろうか？

それは力学ではなく幾何から出てくる。三角形 ABP の頂点 A において余弦定理を用いると、

$$d^2 = h^2 + x^2 - 2hx\cos\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - (2h\cos\alpha)\,x + (h^2 - d^2) = 0.$$

長さ x はこの 2 次方程式の実数解なので、判別式（discriminant）は 0 以上である：

$$4h^2\cos^2\alpha - 4(h^2 - d^2) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad h^2\cos^2\alpha \geq h^2 - d^2.$$

$h\cos\alpha$ と $\sqrt{h^2 - d^2}$ はともに正である（α は鋭角で $h > d$ だから）ので、両辺の平方根をとって

$$h\cos\alpha \geq \sqrt{h^2 - d^2}.$$

を得る。

T_A の範囲

質点は実際に軸上にはないので、$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ かつ $0 < \cos\alpha < 1$ である。したがって $T_A = mg/\cos\alpha > mg$ である。もう一方の評価については、直前の結果から $\cos\alpha \geq \sqrt{h^2 - d^2}/h$ なので、

$$mg < T_A = \frac{mg}{\cos\alpha} \leq \frac{mgh}{\sqrt{h^2 - d^2}}.$$

上界が達成されるとき

等号が成り立つには $h\cos\alpha = \sqrt{h^2 - d^2}$ が必要であり、このとき判別式は 0 で、2 次方程式は重解（repeated root）

$$x = h\cos\alpha = \sqrt{h^2 - d^2}.$$

をもつ。すると $x^2 + d^2 = h^2$、すなわち $AP^2 + BP^2 = AB^2$ である。三平方の定理の逆（converse of Pythagoras）により、角 APB は直角である。つまり 2 本の糸は垂直であり、P は AB を直径とする円周上にある。同じことだが、AP は B を中心とする半径 d の円に接しており、だからこそこの位置で α が最大になる。この位置では $\sin\alpha = d/h$ であり、P は B より高さ d^2/h だけ上にある。不等式で許されるそれ以外の鋭角 α に対しては、三角形が 2 通り（x の値が 2 つ）存在し、それらがこの位置で一つに合わさる。

検算

- ω が非常に大きいとき、$T_B \approx m\omega^2 x \sin\alpha / \sin(\alpha+\beta)$ は ω^2 に比例して大きくなる。このとき 2 本の糸がともに大きな向心力を与えなければならないからである。
- 極端な位置で $h=3$、$d=2$ とすると、$\cos\alpha = \sqrt{5}/3$、$x=\sqrt{5}$ であり、$x^2+d^2 = 5+4 = 9 = h^2$ となる。このとき $T_A/(mg) = 3/\sqrt{5} \approx 1.342$ で、これは $h/\sqrt{h^2-d^2}$ に等しい。
- T_A と T_B の式をベクトル形式の運動方程式に代入し直すと、コンピュータで調べた多数のランダムな配置において残差は 0 になる。

よくある間違い

- 円の半径を $x\sin\alpha$ ではなく x としてしまう。
- T_B の鉛直方向の向きを逆にしてしまう。β を BA から測ると、(β が鋭角のとき) 糸 PB は P を下向きに引く。
- 両辺が正であることを確かめずに、不等式を 2 乗したり平方根をとったりしてしまう。

STEP のその先へ

境界の場合 $T_B = 0$ は、拘束が**非活性**（inactive）になる場合である。糸は片側拘束（one-sided constraint）であり、引くことはできるが押すことはできない。このような不等式拘束をもつ問題は、力学や最適化において符号条件つきのラグランジュ乗数（Lagrange multipliers）につながる。円錐振り子（conical pendulum）とその仲間については、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）でよく扱われている。

解答例

STEP III 2014、第 12 問

確率・統計 ・ 対数正規分布

STEP III 2014、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s3-q12

鍵となる考え方

$y = \mathrm{e}^x$ は狭義単調増加（strictly increasing）であるから、Y に関する命題は対数をとるだけで X に関する命題に書き換えられる。すなわち、$Y \leq y$ となるのは $X \leq \ln y$ のときであり、かつそのときに限る。これにより、Y の中央値（median）と密度関数がただちに得られる。平均（mean）については、指数部分を平方完成（completing the square）して、被積分関数を別の正規分布（normal distribution）の密度関数にするのが要点である。その積分が 1 であることはすでにわかっている。

解答

小問 (i)

e^x は狭義単調増加であるから、事象 $\{Y \leq \mathrm{e}^{x_m}\}$ と $\{X \leq x_m\}$ は同じ事象である。したがって

$$\mathrm{P}\left(Y \leq \mathrm{e}^{x_m}\right) = \mathrm{P}(X \leq x_m) = \tfrac{1}{2},$$

となるから、Y の中央値は

$$y_m = \mathrm{e}^{x_m}.$$

である。（中央値はこのように任意の増加関数で移り合うが、平均はそうではない。このことは小問 (iv) で示される。）

小問 (ii)

Y は正の値のみをとる。$y > 0$ に対して、G を Y の累積分布関数（cumulative distribution function）とする。先と同じ同値関係を用いると

$$G(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(X \leq \ln y) = F(\ln y).$$

合成関数の微分法（chain rule）により微分し、$F' = f$ を用いると

$$g(y) = G'(y) = f(\ln y) \cdot \frac{1}{y} = \frac{f(\ln y)}{y}, \qquad y > 0,$$

となり、求める式が得られる（また $y \leq 0$ では $g(y) = 0$ である）。

最頻値（mode）λ は g が最大値をとる点である。これは g が微分可能な開区間 $(0, \infty)$ に含まれるから、$g'(\lambda) = 0$ である。商の微分法（quotient rule）により

$$g'(y) = \frac{f'(\ln y) \cdot \frac{1}{y} \cdot y - f(\ln y)}{y^2} = \frac{f'(\ln y) - f(\ln y)}{y^2}.$$

$y^2 \neq 0$ であるから、$g'(\lambda) = 0$ とおくと

$$f'(\ln \lambda) = f(\ln \lambda),$$

が得られ、これが求める条件である。

小問 (iii)

関数

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-(x-\mu-\sigma^2)^2/(2\sigma^2)}$$

は、ちょうど $\mathrm{N}(\mu + \sigma^2, \sigma^2)$ に従う確率変数の確率密度関数（probability density function）である。実際、これは与えられた正規分布の密度関数において μ を $\mu + \sigma^2$ に置き換えたものである。どのような確率密度関数も実数全体で積分すると 1 になるので、与えられた積分の値はこれで説明がつく。

さて、

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^X\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^x\, \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\, \mathrm{d}x.$$

まとめた指数部分を平方完成する。$(x - \mu - \sigma^2)^2 = (x-\mu)^2 - 2\sigma^2 x + 2\mu\sigma^2 + \sigma^4$ と展開すると

$$\begin{aligned} x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} &= -\frac{(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 x}{2\sigma^2} \\ &= -\frac{(x-\mu-\sigma^2)^2 - 2\mu\sigma^2 - \sigma^4}{2\sigma^2} \\ &= -\frac{(x-\mu-\sigma^2)^2}{2\sigma^2} + \mu + \tfrac{1}{2}\sigma^2. \end{aligned}$$

を得る。定数 $\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$ は積分の外に出せるので

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x-\mu-\sigma^2)^2/(2\sigma^2)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2},$$

となる。ここで上で説明した積分を用いた。これが求める結果である。

小問 (iv)

3 つの量をすべて具体的に求める。

中央値。 正規分布の密度関数は μ に関して対称であるから $x_m = \mu$ であり、小問 (i) より $y_m = \mathrm{e}^{\mu}$ である。

最頻値。 正規分布の密度関数を微分すると

$$f'(x) = -\frac{x-\mu}{\sigma^2} f(x).$$

考えてみよう f が決して 0 にならないとき、小問 (ii) の条件をどのように使えばよいか？

すべての x に対して $f(x) > 0$ であるから、条件 $f'(\ln\lambda) = f(\ln\lambda)$ の両辺を $f(\ln\lambda)$ で割ることができ、

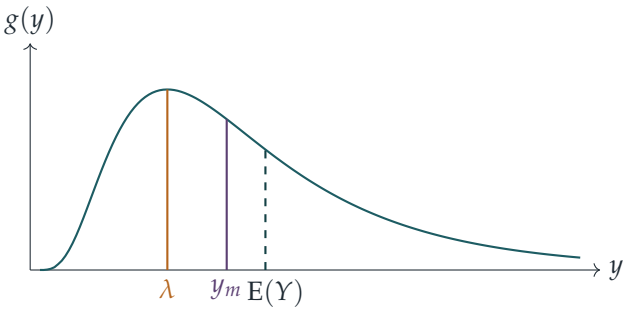
$$-\frac{\ln\lambda - \mu}{\sigma^2} = 1 \quad\Longrightarrow\quad \ln\lambda = \mu - \sigma^2 \quad\Longrightarrow\quad \lambda = \mathrm{e}^{\mu-\sigma^2}.$$

を得る。これは g の唯一の停留点（stationary point）であり、Y の最頻値はただ 1 つであると与えられているので、これが最頻値である。

比較。 $\sigma > 0$ より $\mu - \sigma^2 < \mu < \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$ であり、e^t は狭義単調増加であるから

$$\lambda = \mathrm{e}^{\mu-\sigma^2} \;<\; y_m = \mathrm{e}^{\mu} \;<\; \mathrm{E}(Y) = \mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2},$$

となり、求める不等式が得られる。不等号が厳密であることは $\sigma^2 > 0$ に基づいており、これは本来の意味での正規分布であれば必ず成り立つ。



図は $\mu = 0$、$\sigma = 0.6$ のときの Y の密度関数を示している。右側に長く伸びた裾が平均を最も右へ引っ張り、中央値はその中間に位置し、山の頂点は両者よりも左にある。

検算

- $\sigma \to 0$ のとき、Y は e^{μ} に集中し、3 つの値はいずれも e^{μ} に近づく。これは当然そうあるべき結果である。
- $\mu = 0$、$\sigma = 1$ のとき、$\lambda = e^{-1} \approx 0.368$、$y_m = 1$、$E(Y) = e^{1/2} \approx 1.649$ である。$e^x f(x)$ の数値積分と g の最大値の数値探索はこれらの値と一致する。
- 比 $E(Y)/\lambda = e^{3\sigma^2/2}$ は σ のみに依存する。これは納得できる。μ を変えることは Y を e^{μ} 倍に拡大・縮小するにすぎないからである。

よくある間違い

- 合成関数の微分法から生じる因子 $1/y$ を忘れて、Y の密度関数を $f(\ln y)$ と書いてしまう。この因子がないと、最頻値が中央値と同じ e^{μ} になってしまう。
- $E(e^X) = e^{E(X)}$ と思い込む。これは中央値については正しいが、平均については正しくない。
- 平方完成での符号の誤り。$(x - \mu - \sigma^2)^2$ を丁寧に展開し、残る定数を確認すること。

STEP のその先へ

ここでの Y は**対数正規分布**（lognormal distribution）に従い、この分布は所得、株価、粒子の大きさのモデル化に用いられる。不等式 $E(e^X) \geq e^{E(X)}$ は凸関数（convex function）に関するイェンセンの不等式（Jensen's inequality）の特別な場合であり、小問 (iii) の計算は正規分布の積率母関数（moment generating function）$E(e^{tX}) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$ を $t = 1$ で評価したものである。Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）は、確率変数の変換、積率母関数、対数正規分布を扱っている。

解答例

STEP III 2014、第 13 問

確率・統計 ・ 確率母関数

> **STEP III 2014、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q13

鍵となる考え方

第 1 ラウンドで何が起こるかで条件付け（conditioning）を行う。このゲームには記憶がない。ゲームが続くどのラウンドの後でも、その後に続くのは同じゲームのまったく新しいコピーであり、したがってその時点から先の**追加の**得点は N 自身と同じ分布をもつ。これにより G をそれ自身を用いて表す方程式が得られ、それを解いて等比級数（geometric series）として展開する。

解答

$p_n = P(N = n)$ とおくと、$G(t) = \sum_{n\geq 0} p_n t^n$ である。第 1 ラウンドの結果がそれぞれ 1、2、3 であるという事象を E_1, E_2, E_3 とすると、$P(E_1) = a, P(E_2) = b, P(E_3) = c$ である。

小問 (i)

E_1 が起きたとき、ゲームは得点 0 で終了するので、$P(N = 0 \mid E_1) = 1$ であり、$n \geq 1$ に対して $P(N = n \mid E_1) = 0$ である。したがって条件付き母関数（conditional generating function）は

$$\sum_{n\geq 0} P(N = n \mid E_1)\, t^n = 1 \cdot t^0 = 1.$$

である。

小問 (ii)

E_2 が起きたとき、第 1 ラウンドの後も得点は 0 のままで、ゲームは続く。各ラウンドの確率は同じで、それ以前に起きたことに依存しないので、第 2 ラウンド以降のラウンドは得点 0 から始まる新しいゲームをなす。その新しいゲームが生み出す得点を N' とすると、これは N と同じ分布をもつ。最終得点は $0 + N' = N'$ であるから、

$$P(N = n \mid E_2) = P(N' = n) = p_n \quad \text{任意の} n \geq 0,$$

であり、条件付き母関数は $\sum p_n t^n = G(t)$ である。

小問 (iii)

同様に、E_3 が起きたとき、第 1 ラウンドの後の得点は 1 であり、残りは得点 N' の新しいゲームであるから、最終得点は $1 + N'$ である。よって $P(N = 0 \mid E_3) = 0$ であり、$n \geq 1$ に対して $P(N = n \mid E_3) = p_{n-1}$ である。条件付き母関数は $\sum_{n\geq 1} p_{n-1} t^n = tG(t)$ となる。

全確率の法則（law of total probability）により、

$$p_n = a\,P(N = n \mid E_1) + b\,P(N = n \mid E_2) + c\,P(N = n \mid E_3).$$

$G(t)$ における t^n の係数は p_n である。右辺について、$1, G(t), tG(t)$ における t^n の係数は、小問 (i)–(iii) で求めた $P(N = n \mid E_1), P(N = n \mid E_2), P(N = n \mid E_3)$ にちょうど一致する。したがって $G(t)$ と $a + bG(t) + ctG(t)$ における t^n の係数はすべての $n \geq 0$ について一致し、これにより

$$G(t) = a + bG(t) + ctG(t).$$

が示された。

> **考えてみよう** $1 - b - ct$ で割ってよいか。また、等比級数として展開することは正当か。

式を整理すると $G(t)(1 - b - ct) = a$ となる。$1 - b = a + c > c > 0$ であるから、$|t| < (1 - b)/c$ のとき常に $1 - b - ct \neq 0$ であり、$(1 - b)/c = 1 + a/c > 1$ なので、この範囲は $|t| \leq 1$ を含む。このような t に対して、$|ct/(1 - b)| < 1$ であるから

$$G(t) = \frac{a}{1 - b - ct} = \frac{a}{1 - b} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{ct}{1 - b}} = \frac{a}{1 - b} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{c}{1 - b}\right)^n t^n,$$

となる。t^n の係数を読み取ると、

$$P(N = n) = \frac{ac^n}{(1 - b)^{n+1}}, \qquad n \geq 0.$$

（同じことであるが、係数比較により $p_0 = a + bp_0$、および $n \geq 1$ に対して $p_n = bp_n + cp_{n-1}$ が得られる。すなわち $p_0 = a/(1-b)$ かつ $p_n = \frac{c}{1-b}p_{n-1}$ であり、これからも同じ公式が導かれる。）

小問 (iv)

平均は $\mu = G'(1)$ である。$G(t) = a(1-b-ct)^{-1}$ を微分すると、$1-b-c = a$ を用いて

$$G'(t) = \frac{ac}{(1-b-ct)^2}, \qquad \text{よって} \qquad \mu = G'(1) = \frac{ac}{(1-b-c)^2} = \frac{ac}{a^2} = \frac{c}{a},$$

となる。すると $1+\mu = \dfrac{a+c}{a} = \dfrac{1-b}{a}$ であり、したがって

$$\frac{\mu^n}{(1+\mu)^{n+1}} = \frac{c^n}{a^n} \cdot \frac{a^{n+1}}{(1-b)^{n+1}} = \frac{ac^n}{(1-b)^{n+1}} = P(N=n),$$

となり、示すべきことが示された。

検算

- 確率の総和は 1 である：$\sum_n p_n = G(1) = a/(1-b-c) = a/a = 1$。
- 直接的な議論：結果が 2 となる「無駄な」ラウンドを無視する。残りの各ラウンドは確率 $a/(a+c)$ で終了、確率 $c/(a+c)$ で 1 点獲得となるので、N は最初の終了までに獲得する点数であり、$P(N=n) = \left(\frac{c}{a+c}\right)^n \frac{a}{a+c}$ となる。$a+c = 1-b$ であるから、これは同じ公式である。
- $a = \frac{1}{5}, b = \frac{3}{10}, c = \frac{1}{2}$ とすると、$\mu = \frac{5}{2}$、$P(N=0) = \frac{2}{7} \approx 0.2857$、$P(N=1) = \frac{10}{49} \approx 0.2041$ となる。2×10^5 回のゲームをコンピュータでシミュレーションしたところ、0.2855、0.2038、平均得点 2.498 が得られた。

よくある間違い

- 場合 3 の条件付き母関数を $tG(t)$ ではなく $G(t)$ と書いてしまうこと。すでに獲得した 1 点によって、t のすべての累乗が 1 つずつ上にずれる。
- 第 1 ラウンド後のゲームが元のゲームのコピーである**理由**を述べ忘れること。これは、各ラウンドが過去とは独立に同じ確率をもつことに依拠している。

STEP のその先へ

第 1 ステップで条件付けることはマルコフ連鎖（Markov chain）の理論における基本的な道具であり、そこでは**第一ステップ解析**（first-step analysis）と呼ばれる。また、ここでの答えは姿を変えた幾何分布（geometric distribution）である。小問 (iv) は、$\{0, 1, 2, \dots\}$ 上の幾何分布が平均だけで決まることを示している。G についての方程式を立てるのと同じ手法は分枝過程（branching process）にも使え、そこでは家系の名字が途絶える確率に関する有名な結果につながる。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、母関数と分枝過程を非常に読みやすく扱っている。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

2014 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

