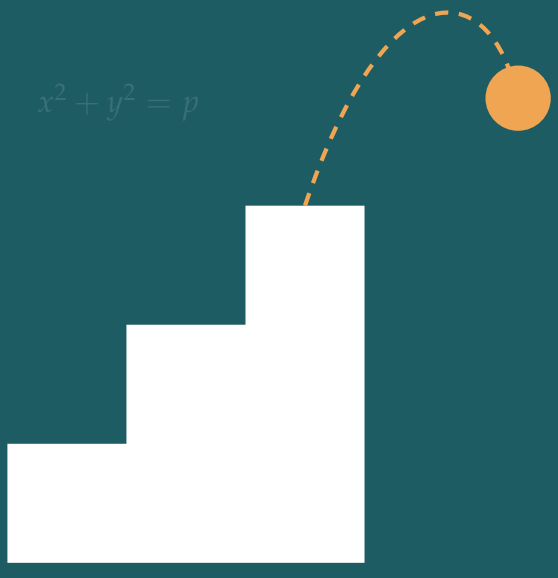
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

2013 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

2013 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

2013 年解答例

2013 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 39 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 平方根を含む方程式 純粋数学 . . . 3
Q2 床関数を含む方程式 純粋数学 . . . 7
Q3 ベクトルの演算 純粋数学 . . . 12
Q4 置換積分 純粋数学 . . . 16
Q5 2次曲線と回転 純粋数学 . . . 20
Q6 二項係数とフィボナッチ数 純粋数学 . . . 25
Q7 一階微分方程式 純粋数学 . . . 29
Q8 合成関数 純粋数学 . . . 33
Q9 放物運動と衝突 力学 . . . 38
Q10 反発係数と摩擦 力学 . . . 42
Q11 摩擦とつり合い 力学 . . . 46
Q12 非復元抽出 確率・統計 . . . 50
Q13 数え上げと期待値 確率・統計 . . . 54

STEP II

Q1 対数関数の弦 純粋数学 . . . 57
Q2 漸化式による積分 純粋数学 . . . 62
Q3 3次式の根 純粋数学 . . . 66
Q4 弦の中点の軌跡 純粋数学 . . . 71
Q5 対称性と曲線の概形 純粋数学 . . . 76
Q6 数列の収束 純粋数学 . . . 81
Q7 ペル方程式の解 純粋数学 . . . 86
Q8 微積分と不等式 純粋数学 . . . 90
Q9 つり合いにおける摩擦 力学 . . . 94

Q10 放物運動 力学 . . . 99
Q11 繰り返される衝突 力学 . . . 103
Q12 ポアソン分布のモーメント 確率・統計 . . . 107
Q13 硬貨投げにおける連 確率・統計 . . . 110

STEP III

Q1 半角の置換 純粋数学 . . . 114
Q2 マクローリン級数 純粋数学 . . . 118
Q3 ベクトルと球面 純粋数学 . . . 122
Q4 1の冪根の積 純粋数学 . . . 127
Q5 有理性と互いに素 純粋数学 . . . 131
Q6 複素数の絶対値に関する不等式 純粋数学 . . . 135
Q7 常微分方程式のエネルギー法 純粋数学 . . . 140
Q8 2次曲線の極方程式 純粋数学 . . . 144
Q9 浮力と単振動 力学 . . . 148
Q10 回転を伴う撃力 力学 . . . 152
Q11 ばねとエネルギー 力学 . . . 156
Q12 指示確率変数 確率・統計 . . . 160
Q13 積率と分布関数 確率・統計 . . . 164

解答例

STEP I 2013、第 1 問

純粋数学 ・ 平方根を含む方程式

> **STEP I 2013、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q1

鍵となる考え方

どの方程式も、姿を変えた二次方程式（quadratic）である。平方根（square root）を y とおき、残りをすべて y で表せば、y についての普通の二次方程式が得られる。注意すべき点はただ一つ、平方根は決して負にならないので $y \geq 0$ だということである。この条件こそが、毎回、見かけの解（spurious root）を捨てる根拠になる。

解答

小問 (i)

$y = \sqrt{x}, y \geq 0$ とおくと $x = y^2$ であり、方程式は

$$y^2 + 3y - \tfrac{1}{2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2y^2 + 6y - 1 = 0.$$

となる。解の公式（quadratic formula）により

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{36+8}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{11}}{2}.$$

である。マイナスの符号をとると負の値となり、平方根としてはありえない。$\sqrt{11} > 3$ であるから、プラスの符号をとると $y = \frac{1}{2}(\sqrt{11} - 3) > 0$ となり、これが唯一の候補である。よって

$$x = y^2 = \frac{11 - 6\sqrt{11} + 9}{4} = \frac{10 - 3\sqrt{11}}{2}.$$

である。$y \geq 0$ がわかっていれば各段階は逆にたどれる（可逆である（reversible））ので、これは確かに（唯一の）実数解である。

小問 (ii)(a)

ここでは平方根の中身は $x+2$ なので、$y=\sqrt{x+2}, y\geq 0$ とおくと $x=y^2-2$ となる。方程式は

$$y^2-2+10y-22=0 \quad\Longleftrightarrow\quad y^2+10y-24=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (y+12)(y-2)=0.$$

となる。$y\geq 0$ であるから $y=-12$ は不適であり、$y=2$、したがって $x=2^2-2=2$ である。

検算：$2+10\sqrt{4}-22=0$。唯一の実数解は $x=2$ である。

> **考えてみよう** $y=-12$ を残していたら、どうなっていただろうか。

このとき $x=144-2=142$ となるが、$142+10\sqrt{144}-22=240\neq 0$ である。値 $y=-12$ は関連する方程式 $x-10\sqrt{x+2}-22=0$ の解であり、不用意に両辺を二乗すると、こちらの方程式まで一緒に解いてしまうことになる。条件 $y\geq 0$ こそが、この二つを区別するものである。

小問 (ii)(b)

今回は置換（substitution）が示されていないので、自分で見つける必要がある。根号の中の式は

$$2x^2-8x-3=2(x^2-4x)-3,$$

であり、x^2-4x は根号の外にも現れている。これが手がかりである。

> **考えてみよう** ここで y とすべきなのは x^2-4x だろうか、それとも平方根全体だろうか。

y を平方根全体とすれば、方程式は根号を含まない二次方程式になる。$y=\sqrt{2x^2-8x-3}, y\geq 0$ とおく。すると $y^2=2(x^2-4x)-3$ であるから

$$x^2-4x=\frac{y^2+3}{2}.$$

である。これを方程式に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{y^2+3}{2}+y-9=0 \quad&\Longleftrightarrow\quad y^2+2y-15=0\\ &\Longleftrightarrow\quad (y+5)(y-3)=0.\end{aligned}$$

$y\geq 0$ であるから $y=3$ でなければならない。よって

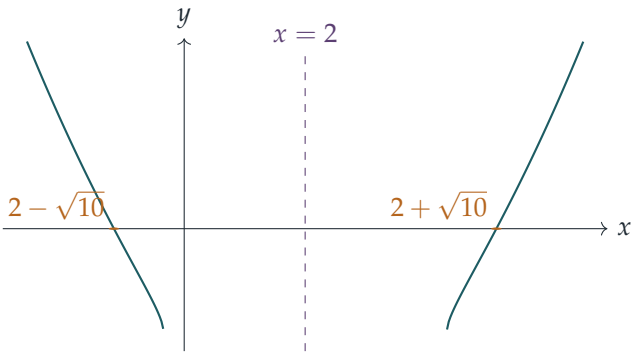
$$2x^2-8x-3=9 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2-4x-6=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x=2\pm\sqrt{10}.$$

である。どちらの値でも $2x^2-8x-3$ は正の数 9 に等しくなるので、平方根は定義され、その値は 3 である。したがって両方とも真の解であり、実数解は

$$x=2+\sqrt{10} \quad \text{および} \quad x=2-\sqrt{10}.$$

である。方程式は $x^2-4x=(x-2)^2-4$ を通してのみ x に依存するので、当然ながら、この二つの解は $x=2$ に関して対称である。

左辺のグラフを見るとこのことがわかる。左辺は $2x^2-8x-3\geq 0$ となるところ、すなわち $x\leq 2-\sqrt{5.5}$ または $x\geq 2+\sqrt{5.5}$ でのみ定義され、それぞれの枝で一度ずつ零を横切る。



検算

- 小問 (i)：$x=\frac{1}{2}(10-3\sqrt{11})\approx 0.02506$ であるから $\sqrt{x}\approx 0.1583$ であり、$x+3\sqrt{x}\approx 0.02506+0.47494=0.5$ となる。
- 小問 (ii)(b)：$x=2+\sqrt{10}\approx 5.1623$ のとき $x^2-4x=6, 2x^2-8x-3=9$ であるから、左辺は $6+3-9=0$ となる。不適とした値 $y=-5$ では $x^2-4x=14$ が必要となり、そのとき左辺は $14+5-9=10\neq 0$ である。
- 各左辺をその定義域（domain）全体で数値的に調べると、上の解がちょうど見つかり、それ以外の解はない。

よくある間違い

- y についての二次方程式の負の解を残してしまう。平方根は決して負にならないので、その解からは方程式の解は得られない。
- (ii)(b) でいきなり両辺を二乗してしまう。すると四次方程式（quartic）になってずっと難しくなるうえ、余分な解が入り込み、それらを一つひとつ確かめなければならなくなる。

► (ii)(a) で、x が y^2 ではなく $x = y^2 - 2$ であることを忘れる。

STEP のその先へ

新しい変数を導入して、難しい方程式をなじみのある方程式に変えることは、数学で最も役に立つ習慣の一つである。(ii)(b) では方程式は $x^2 - 4x$ のみに依存するので、$(x-2)^2$ の関数である。このような対称性（symmetry）を見抜き、それによって変わらない量を用いて考えるという発想は、ガロア理論（Galois theory）で再び登場する。そこでは、対称性によって固定される解の式を見つけることで多項式（polynomial）方程式を解くのである。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は、これらの考え方へのやさしい入門書である。この種の問題をさらに解きたければ、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（上級数学問題集）が素晴らしい（しかも無料である）。

解答例

STEP I 2013、第 2 問

純粋数学 • 床関数を含む方程式

> **STEP I 2013、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q2

鍵となる考え方

関数 $\lfloor x \rfloor$ は各区間 $[k, k+1)$ 上で一定なので、その区間上で $f(x) = k/x$ は直角双曲線（rectangular hyperbola）の一部にすぎない。グラフ全体は、整数 k ごとに一つずつあるこれらの断片の連なりである。すると $f(x) = c$ を解くことは、どの断片が高さ c に届くかを問うことに帰着する。k に対応する断片上で候補となるのは $x = k/c$ だけであり、それが解として数えられるのは、ちょうど $[k, k+1)$ に入るときである。

解答

小問 (i)

整数 k を固定し、$k \le x < k+1$（ただし $x \neq 0$）の範囲を考える。ここでは $f(x) = k/x$ である。

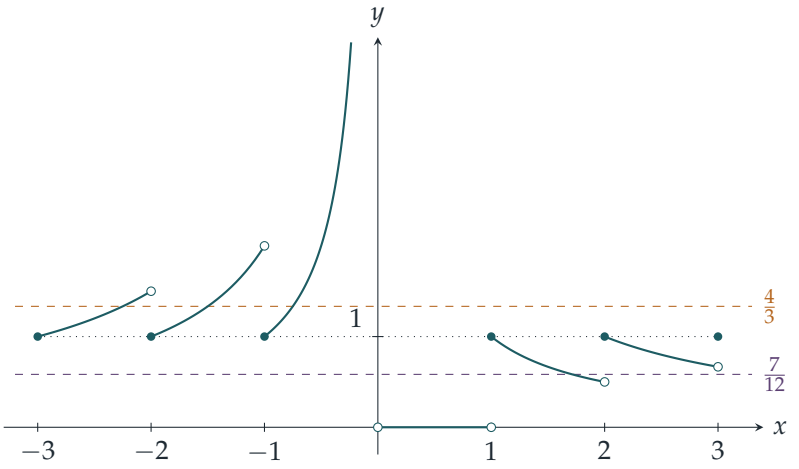
- $k = 0$、すなわち $0 < x < 1$ のとき：ここでは $f(x) = 0$ である。
- $k \ge 1$ のとき：$f(x) = k/x$ は $f(k) = 1$ から $k/(k+1)$ に向かって減少するが、その値には決して達しない。したがって、この断片がとる値はちょうど $\left(\frac{k}{k+1}, 1\right]$ の範囲の値である。
- $k \le -1$ のとき：$m \ge 1$ として $k = -m$ と書く。このとき x と k はともに負なので、$f(x) = m/|x| > 0$ である。x が $-m$ から $-m+1$ に向かって増加すると $|x|$ は減少するので、f は $f(-m) = 1$ から増加する。$m \ge 2$ のときは $\frac{m}{m-1}$ に近づくが、その値には決して達しないので、この断片がとる値はちょうど $\left[1, \frac{m}{m-1}\right)$ の範囲の値である。$m = 1$ のときは $x \to 0^-$ で $f(x) = -1/x \to +\infty$ となるので、この断片は $[1, \infty)$

の範囲の値をとる。

$-3 \le x \le 3$ における断片は次のとおりである。

x	$[-3,-2)$	$[-2,-1)$	$[-1,0)$	$(0,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$
$f(x)$	$-3/x$	$-2/x$	$-1/x$	0	$1/x$	$2/x$
値	$[1,\frac{3}{2})$	$[1,2)$	$[1,\infty)$	0	$(\frac{1}{2},1]$	$(\frac{2}{3},1]$

そして最後に $f(3)=1$ である。どの断片も左端（整数の点）で高さ 1 から始まり、その点は含まれる。また右端は開いている。



小問 (ii)

$\lfloor x \rfloor = k$ となる断片上では、方程式 $f(x)=c$（ただし $c \neq 0$）は $k/x = c$ を意味するので、$x = k/c$ である。これが本当の解（root）となるのは、ちょうど $k \le k/c < k+1$ のときである。したがって各 c について、小問 (i) で求めた値域を用いて、どの断片が高さ c に届くかを判定すればよい。

$f(x)=\frac{7}{12}$. $0 < \frac{7}{12} < 1$ であるから、役に立つのは $k \ge 1$ の断片だけであり、$\frac{k}{k+1} < \frac{7}{12}$、すなわち $12k < 7k+7$、すなわち $k < \frac{7}{5}$ が必要である。よって条件を満たすのは $k=1$ だけであり、$x = 1\big/\frac{7}{12}$ より

$$x = \frac{12}{7}.$$

グラフ上では、直線 $y=\frac{7}{12}$ は $[1,2)$ 上の断片とだけ交わる。$[2,3)$ 上の断片は $\frac{2}{3}$ より上にあるからである。

$f(x) = \frac{17}{24}$. 今度は $\frac{k}{k+1} < \frac{17}{24}$、すなわち $24k < 17k + 17$、すなわち $k < \frac{17}{7}$ が必要なので、$k = 1$ または $k = 2$ である。解は $x = k/\frac{17}{24}$ であり、

$$x = \tfrac{24}{17} \quad \text{および} \quad x = \tfrac{48}{17}.$$

(実際、$2 \leq \frac{48}{17} \approx 2.82 < 3$ である。)

$f(x) = \frac{4}{3}$. $\frac{4}{3} > 1$ であるから、役に立つのは負の側の断片だけである。$k = -m$ の断片が $\frac{4}{3}$ に届くのは $\frac{4}{3} < \frac{m}{m-1}$ (または $m = 1$) のとき、すなわち $4m - 4 < 3m$、すなわち $m < 4$ のときである。よって $m = 1, 2, 3$ であり、解は $x = -m/\frac{4}{3} = -\frac{3m}{4}$ より

$$x = -\tfrac{3}{4}, \quad x = -\tfrac{3}{2}, \quad x = -\tfrac{9}{4}.$$

$m = 4$ の場合はわずかに届かない。$[-4, -3)$ 上の断片がとるのは $\frac{4}{3}$ 未満の値だけである。

小問 (iii)

ここでは $0 < \frac{9}{10} < 1$ なので、解は $k \geq 1$ かつ $\frac{k}{k+1} < \frac{9}{10}$、すなわち $10k < 9k + 9$、すなわち $k < 9$ となる断片から得られる。よって $k = 1, 2, \ldots, 8$ のそれぞれが解 $x = \frac{10k}{9}$ を与える。最大のものは $k = 8$ のときの

$$x = \tfrac{80}{9} \approx 8.89,$$

であり、これは確かに $[8, 9)$ に入っている。

最後の小問

まず、解をもたない、または解を無限に多くもつ c の値を調べる。

- $c < 0$：解はない。$x > 0$ のとき $f(x) \geq 0$ であり、$x < 0$ のとき $f(x) > 0$ だからである。
- $c = 0$：すべての $x \in (0, 1)$ が解であるから、解は無限に多い。
- $c = 1$：零でないすべての整数が解であるから、やはり解は無限に多い。

> **考えてみよう** 一般の c に対して、グラフを描かずに解の個数を数えるにはどうすればよいだろうか。

小問 (i) で求めた値域を用いる。各断片が与える解は高々一つなので、値域が c を含む断片の個数を数えればよい。

$0 < c < 1$ **の場合。** c に届く断片は、$k \geq 1$ かつ $\frac{k}{k+1} < c$ を満たすものである。$\frac{k}{k+1}$ は k について増加するので、それらは $k = 1, 2, \ldots$ から、$\frac{k}{k+1} < c$ を満たす最後の k までである。したがって、解がちょうど n 個となるのは、n 番目の断片は c に届くが $(n+1)$ 番目の断片は届かないときに限る：

$$\frac{n}{n+1} < c \leq \frac{n+1}{n+2}.$$

（$0 < c \leq \frac{1}{2}$ のときはどの断片も c に届かず、解は存在しない。）

$c > 1$ **の場合。** c に届く断片は、$k = -m$ であって、$m = 1$ または $\frac{m}{m-1} > c$ を満たすものである。$\frac{m}{m-1} = 1 + \frac{1}{m-1}$ は m が増加すると減少するので、それらは $m = 1, 2, \ldots$ から、$\frac{m}{m-1} > c$ を満たす最後の m までである。したがって、解がちょうど n 個となるのは、$m = n$ の断片は c に届くが $m = n+1$ の断片は届かないときに限る：

$$\frac{n+1}{n} \leq c < \frac{n}{n-1} \qquad (n \geq 2),$$

また $n = 1$ のときは単に $c \geq 2$ である（$[-1, 0)$ 上の断片はつねに c に届き、$[-2, -1)$ 上の断片は $c \geq 2$ のとき届かない）。

結論。 $n \geq 1$ に対し、方程式 $f(x) = c$ がちょうど n 個の解をもつための必要十分条件（if and only if）は

$$\frac{n}{n+1} < c \leq \frac{n+1}{n+2} \qquad \text{または} \qquad \frac{n+1}{n} \leq c < \frac{n}{n-1},$$

である。ただし $n = 1$ のときは、二つ目の条件を $c \geq 2$ と読み替える。等号がどこに付くかに注意しよう。どちらも断片の開いた端に由来する。$c = \frac{n+1}{n+2}$ には $[n+1, n+2)$ 上の断片は届かず、$c = \frac{n+1}{n}$ には $[-(n+1), -n)$ 上の断片は届かない。したがって、これらの境界値はいずれも、やはりちょうど n 個の解を与える。

検算

- 代入して確かめる。$\lfloor \frac{12}{7} \rfloor = 1$ であり $1/\frac{12}{7} = \frac{7}{12}$、$\lfloor \frac{48}{17} \rfloor = 2$ であり $2/\frac{48}{17} = \frac{17}{24}$、$\lfloor -\frac{9}{4} \rfloor = -3$ であり $-3/(-\frac{9}{4}) = \frac{4}{3}$、$\lfloor \frac{80}{9} \rfloor = 8$ であり $8/\frac{80}{9} = \frac{9}{10}$ である。
- 一般の答えは個別の場合と一致する。$\frac{2}{3} < \frac{17}{24} \leq \frac{3}{4}$ より $n = 2$、$\frac{4}{3} \leq \frac{4}{3} < \frac{3}{2}$ より $n = 3$、$\frac{8}{9} < \frac{9}{10} \leq \frac{9}{10}$ より $n = 8$ である。後の二つは範囲のちょうど端点にあるので、$\leq$ と $<$ の置き方の確認になる。
- 境界値として、$c = 2$ では解が一つになるはずである。実際、$x = -\frac{1}{2}$ は解であり、一方 $x = -1$（$k = -2$ から得られるもの）は $\lfloor -1 \rfloor = -1 \neq -2$ なので解ではない。

- $c = \frac{1}{2}$ を試すと、条件を満たす n は存在しない。実際、$x = k/c = 2k$ は $k \neq 0$ のとき $\lfloor 2k \rfloor = k$ を決して満たさない。

よくある間違い

- $\lfloor x \rfloor$ は負の x に対しても**下向きに**丸めるので、$\lfloor -2.25 \rfloor = -3$ であって -2 ではないことを忘れる。これを忘れると、$c > 1$ に対する負の側の枝がまるごと抜け落ちてしまう。
- 端点を取り違える。各断片は左端（整数の点）を高さ 1 で含むが、右端は含まない。これによって、最終的な条件に現れるのが $\leq$ か $<$ かが決まる。
- 解が無限に多い $c = 0$ と $c = 1$ の場合や、解が存在しない $c < 0$ と $0 < c \leq \frac{1}{2}$ の場合を見落とす。

STEP のその先へ

$\lfloor x \rfloor / x$ のような関数は、各断片上では連続（continuous）だが孤立した点で跳ぶ関数の、最も簡単な例である。どの端点で値が実際にとられるかに注意を払うことは、まさに大学で最初に学ぶ解析学の講義で上限（supremum）と下限（infimum）を扱うときに必要となる習慣である。ここで $\sup f$ は $x > 0$ において 1 であり、これは達成されるが、$x \geq 1$ における下限は $\frac{1}{2}$ であり、これは達成されない。同じ関数から、$x \to \infty$ のとき $\lfloor x \rfloor / x \to 1$ となることもわかる。これは解析的整数論（analytic number theory）で用いられる評価を初めて味わう例である。上限、極限、連続性についてさらに学ぶには、Abbott の *Understanding Analysis* がよい。

解答例

STEP I 2013、第 3 問

純粋数学 • ベクトルの演算

> **STEP I 2013、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q3

鍵となる考え方

ここで扱うものはすべて線形（linear）であるから、毎回もっとも見通しのよい方法は、各点を $\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$、$\mathbf{z}$ の組合せとして書き出し、それから引き算することである。2 点が異なるのは、それらの位置ベクトル（position vector）の差が零でないときであり、かつそのときに限る。そしてその差は、つねに簡単な係数と $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ のようなベクトルの積になる。幾何的には、$X*Y$ は直線 XY 上の点であり、$0<\lambda<1$ のときは 2 点を結ぶ線分（segment）上にある。

解答

以下を通じて、2 点が同じであるのは、それらの位置ベクトルが等しいときであり、かつそのときに限る。

小問 (i)

定義より $Y*X$ の位置ベクトルは $\lambda\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{x}$ であるから、

$$\begin{aligned}\big(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}\big)-\big(\lambda\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{x}\big) &= (2\lambda-1)\mathbf{x}-(2\lambda-1)\mathbf{y}\\ &= (2\lambda-1)(\mathbf{x}-\mathbf{y}).\end{aligned}$$

X と Y は異なるので $\mathbf{x}-\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$ であり、したがってこの差が零となるのは $2\lambda-1=0$ のとき、かつそのときに限る。よって $X*Y$ と $Y*X$ は、$\lambda=\frac{1}{2}$ の場合を除いて異なる。$\lambda=\frac{1}{2}$ のときは、どちらも XY の中点である。

小問 (ii)

両辺をそれぞれ展開すると、

$$\begin{aligned}(X*Y)*Z: &\quad \lambda\big(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}\big)+(1-\lambda)\mathbf{z}=\lambda^2\mathbf{x}+\lambda(1-\lambda)\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{z},\\ X*(Y*Z): &\quad \lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\big(\lambda\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{z}\big)=\lambda\mathbf{x}+\lambda(1-\lambda)\mathbf{y}+(1-\lambda)^2\mathbf{z}.\end{aligned}$$

$\mathbf{y}$ の項は一致しており、引き算すると

$$\begin{aligned}\text{差}&=(\lambda^2-\lambda)\mathbf{x}+\big((1-\lambda)-(1-\lambda)^2\big)\mathbf{z}\\&=-\lambda(1-\lambda)\mathbf{x}+\lambda(1-\lambda)\mathbf{z}\\&=\lambda(1-\lambda)(\mathbf{z}-\mathbf{x}).\end{aligned}$$

これが零でないのは、各因子がすべて零でないとき、かつそのときに限る。したがって $(X*Y)*Z$ と $X*(Y*Z)$ が異なるための必要十分条件は

$$\lambda\neq 0,\qquad \lambda\neq 1\qquad \text{かつ}\qquad Z\neq X.$$

である。Y がまったく関わらないことに注意しよう。除外される値にも納得がいく。$\lambda=1$ ならこの演算はつねに 1 番目の点を返し、$\lambda=0$ ならつねに 2 番目の点を返すので、どちらの括弧の付け方でもそれぞれ X、Z となるのである。

小問 (iii)

式を簡潔にするため $\mu=1-\lambda$ とおく。右辺は

$$\begin{aligned}(X*Z)*(Y*Z): &\quad \lambda(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{z})+\mu(\lambda\mathbf{y}+\mu\mathbf{z})\\&=\lambda^2\mathbf{x}+\lambda\mu\,\mathbf{y}+\mu(\lambda+\mu)\mathbf{z}\\&=\lambda^2\mathbf{x}+\lambda\mu\,\mathbf{y}+\mu\,\mathbf{z},\end{aligned}$$

となる。ここで $\lambda+\mu=1$ を用いた。これは小問 (ii) で求めた $(X*Y)*Z$ の展開とまったく同じであるから、すべての点 X、Y、Z に対して

$$(X*Y)*Z=(X*Z)*(Y*Z)$$

が成り立つ。これが示すべきことであった。

> **考えてみよう** $X*(Y*Z)$ に対する「対応する結果」はどのような形になるべきだろうか。

小問 (iii) では、外側の $*Z$ が左側の括弧の中に分配されている。その鏡像は、$X*$ を右側の括弧の中に分配することであり、$(X*Y)*(X*Z)$ を試してみればよいと考えら

れる。実際、

$$\begin{aligned}(X*Y)*(X*Z): \quad \lambda(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y})+\mu(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{z})\\ =\lambda(\lambda+\mu)\mathbf{x}+\lambda\mu\,\mathbf{y}+\mu^2\mathbf{z}\\ =\lambda\mathbf{x}+\lambda\mu\,\mathbf{y}+\mu^2\mathbf{z},\end{aligned}$$

であり、これは小問 (ii) で求めた $X*(Y*Z)$ の展開である。したがって、任意の点 X、Y、Z に対して

$$X*(Y*Z)=(X*Y)*(X*Z).$$

小問 (iv)

P_n の位置ベクトルが

$$\mathbf{p}_n=\lambda^n\mathbf{x}+(1-\lambda^n)\mathbf{y}.$$

であることを示す。$n=1$ のとき、これは $X*Y$ の定義そのものである。$n-1$ のときに成り立つとすると、

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_n=\lambda\mathbf{p}_{n-1}+(1-\lambda)\mathbf{y}&=\lambda^n\mathbf{x}+\big(\lambda-\lambda^n+1-\lambda\big)\mathbf{y}\\ &=\lambda^n\mathbf{x}+(1-\lambda^n)\mathbf{y},\end{aligned}$$

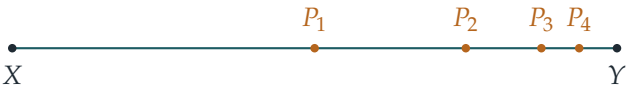
となるので、数学的帰納法（induction）により、この式はすべての $n\geq 1$ で成り立つ。

次に線分に沿って測ると、

$$\mathbf{p}_n-\mathbf{x}=(1-\lambda^n)(\mathbf{y}-\mathbf{x}),\qquad \mathbf{y}-\mathbf{p}_n=\lambda^n(\mathbf{y}-\mathbf{x}).$$

$0<\lambda<1$ より $0<\lambda^n<1$ であるから、どちらも同じ零でないベクトル $\mathbf{y}-\mathbf{x}$ の正の定数倍である。したがって P_n は X と Y の間（端点を除く）にあり、

$$XP_n:P_nY=(1-\lambda^n):\lambda^n.$$



$\lambda=\frac{1}{2}$：各ステップで Y までの距離が半分になる

各ステップで Y までの残りの距離が λ 倍になるので、点は Y に向かって進んでいき、$n\to\infty$ のとき $P_n\to Y$ となる。

検算

- 小問 (i) で、直線上に $\mathbf{x}=\mathbf{0}$、$\mathbf{y}=\mathbf{1}$ をとり、$\lambda=\frac{1}{3}$ とする。$X*Y$ は $\frac{2}{3}$ に、$Y*X$ は $\frac{1}{3}$ にあり、その差は $\frac{1}{3}=|2\lambda-1|$ である。

- 小問 (ii) で $Z = X$ ならば、任意の λ について **2** 通りの括弧の付け方は一致するはずである。実際、求めた差 $\lambda(1-\lambda)(\mathbf{z}-\mathbf{x})$ はこのとき零になり、期待どおりである。
- 小問 (iv) で $\lambda = \frac{1}{2}$、$n = 3$ とすると比は $\frac{7}{8} : \frac{1}{8} = 7 : 1$ であり、実際 P_3 は X から Y までの $\frac{7}{8}$ の位置にある（距離を **3** 回半分にしたことになる）。$n = 1$ のとき、比 $(1-\lambda) : \lambda$ はまさに $X * Y$ の定義である。

よくある間違い

- 小問 (ii) で $Z \neq X$ を忘れること。答えは λ に関する条件だけではない。
- 小問 (iv) で比を逆にしてしまうこと。$\mathbf{p}_n$ は $\mathbf{x}$ に重み λ^n をもつので、λ^n が大きいときに X に近くなる。したがって短い方の部分 XP_n が $1-\lambda^n$ に対応する。

STEP のその先へ

点 $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$ は凸結合（convex combination、アフィン結合（affine combination）ともいう）であり、凸集合、重心座標、そしてコンピュータグラフィックスにおける線形補間の基本的な構成要素である。小問 (ii) は $*$ が結合的（associative）でないことを、小問 (iii) は $*$ が自己分配的（self-distributive）であることを示している。この性質をもつ演算は、代数学においてラック（rack）、カンドル（quandle）、メディアル代数（medial algebra）などの名前で研究されている。線形代数の観点からは、Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照するとよい。

解答例

STEP I 2013、第 4 問

純粋数学 ・ 置換積分

STEP I 2013、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/13-s1-q4

鍵となる考え方

小問 (i) では、どちらの被積分関数（integrand）も「あるものの関数に、そのあるものの導関数（derivative）を掛けたもの」になっている。$\sec^2 x$ は $\tan x$ の導関数であり、$\sec x \tan x$ は $\sec x$ の導関数である。小問 (ii) では、x や x^2 という余分な因数があるので、部分積分（integration by parts）を用いる。積分する側に選ぶのは三角関数の因数であり、その積分の仕方はまさに小問 (i) で示したばかりである。

解答

小問 (i)

1 つ目の積分では、$u = \tan x$ と置換（substitution）する。すると $\mathrm{d}u = \sec^2 x \, \mathrm{d}x$ である。$x = 0$ のとき $u = 0$、$x = \frac{1}{4}\pi$ のとき $u = 1$ となる。よって

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan^n x \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \int_0^1 u^n \, \mathrm{d}u = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

となる。ここで $n > 0$ より $0^{n+1} = 0$ であることを用いた。

考えてみよう 2 つ目の積分について、$\sec^n x \tan x$ の中にはどの関数の導関数が隠れているだろうか。

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sec x = \sec x \tan x$ であるから、$\sec x$ の因数を 1 つ切り離す。

$$\sec^n x \tan x = \sec^{n-1} x \, (\sec x \tan x).$$

ここで $u = \sec x$ と置換すると $\mathrm{d}u = \sec x \tan x \, \mathrm{d}x$ であり、$x = 0$ のとき $u = 1$、$x = \frac{1}{4}\pi$

のとき $u=\sqrt{2}$ である。$n>0$ なので n で割ることができ、

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\sec^n x\tan x\,\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{2}}u^{n-1}\,\mathrm{d}u=\left[\frac{u^n}{n}\right]_1^{\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2})^n-1}{n},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

1 つ目の積分。これを I_1 とおく。x を微分し、$\sec^4 x\tan x$ を積分する形で部分積分を行う。小問 (i) の置換 $u=\sec x$ により、原始関数（antiderivative）

$$\int\sec^4 x\tan x\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{4}\sec^4 x+C.$$

が得られる（$[0,\frac{1}{4}\pi]$ 上の定積分（definite integral）は $\frac{1}{4}(4-1)=\frac{3}{4}$ であり、これは小問 (i) の $n=4$ の場合である）。したがって

$$I_1=\left[\tfrac{1}{4}x\sec^4 x\right]_0^{\frac{1}{4}\pi}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\sec^4 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{4}{4}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\sec^4 x\,\mathrm{d}x,$$

となる。$\sec^4\frac{1}{4}\pi=(\sqrt{2})^4=4$ だからである。残った積分については、$\sec^2 x=1+\tan^2 x$ と書き換えると

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\sec^4 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\sec^2 x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\tan^2 x\sec^2 x\,\mathrm{d}x=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3},$$

となる。ここで 1 つ目の積分は $[\tan x]_0^{\frac{1}{4}\pi}=1$ であり、2 つ目は小問 (i) の $n=2$ の場合である。ゆえに

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi}x\sec^4 x\tan x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}.$$

2 つ目の積分。これを I_2 とおく。今度も x のべきを微分し、$\sec^2 x\tan x$ を積分する。原始関数の 1 つは $\frac{1}{2}\sec^2 x$ であるが、$\frac{1}{2}\tan^2 x$ でも同じように使える（両者の差は定数 $\frac{1}{2}$ である）。そして、こちらのほうがよい選択である。

> **考えてみよう** なぜ $\frac{1}{2}\sec^2 x$ よりも $\frac{1}{2}\tan^2 x$ のほうがよいのだろうか。

部分積分を行うと $x\tan^2 x$ が残るが、$\tan^2 x=\sec^2 x-1$ と分解すれば、それぞれ積分できる部分に分かれる。また、$\tan^2 x$ は 0 で 0 になるので、境界項（boundary terms）がすっきりする（$\frac{1}{2}\sec^2 x$ を用いても、最終的には同じ答えになる）。

そこで、$\tan\frac{1}{4}\pi=1$ を用いると

$$I_2=\left[\tfrac{1}{2}x^2\tan^2 x\right]_0^{\frac{1}{4}\pi}-\int_0^{\frac{1}{4}\pi}x\tan^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{32}-\int_0^{\frac{1}{4}\pi}x\tan^2 x\,\mathrm{d}x.$$

となる。ここで

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} x\tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} x\sec^2 x\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} x\sec^2 x\,\mathrm{d}x - \frac{\pi^2}{32}.$$

である。$\sec^2 x$ の原始関数として $\tan x$ をとってもう一度部分積分を行い、$\int \tan x\,\mathrm{d}x = \ln\sec x$（この区間では $\sec x > 0$ なので成り立つ）を用いると

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{4}\pi} x\sec^2 x\,\mathrm{d}x &= \Big[x\tan x\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{4} - \Big[\ln\sec x\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

となる。以上をまとめると

$$I_2 = \frac{\pi^2}{32} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}\right),$$

すなわち

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} x^2\sec^2 x\tan x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

検算

- 小問 (i) で $n = 1$ とすると、2 つの公式からそれぞれ $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan x\sec^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ と $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec x\tan x\,\mathrm{d}x = \sqrt{2} - 1$ が得られる。これは $\left[\frac{1}{2}\tan^2 x\right]$ と $[\sec x]$ から直接確かめられる。
- 符号と大きさ：小問 (ii) の被積分関数はどちらも $(0, \frac{1}{4}\pi)$ で正であり、答え $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \approx 0.4521$ と $\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.1780$ もともに正である。2 つ目のほうが小さいのは当然で、この区間では $x^2\sec^2 x \le x\sec^4 x$ が成り立つからである（$x < 1 < \sec^2 x$ による）。
- 大まかな評価：$x\sec^4 x\tan x \le \frac{\pi}{4}\sec^4 x\tan x$ より、$I_1 \le \frac{\pi}{4}\cdot\frac{3}{4} \approx 0.589$ である。得られた 0.452 はこれと矛盾しない。電卓で数個の区間に分けてシンプソンの公式（Simpson's rule）を用いれば、どちらの値にもかなり近い値が得られる。

よくある間違い

- 小問 (i) の 2 つ目の積分で、先に $\sec x\tan x$ を切り離さずに $u = \sec x$ と置換してしまい、べきが $n - 1$ ではなく n のままになる。
- $\sec\frac{1}{4}\pi = \sqrt{2}$、したがって $\sec^4\frac{1}{4}\pi = 4$、$\sec^2\frac{1}{4}\pi = 2$ であることを忘れる。
- 境界項 $\left[\frac{1}{2}x^2\tan^2 x\right]$ を落とす、あるいは $\int \tan x\,\mathrm{d}x$ の符号を間違える（正しくは $\ln\sec x = -\ln\cos x$ である）。

STEP のその先へ

小問 (i) の積分は、$\sec^m x \tan^n x$ の積分に関する標準的な理論の第一歩であり、そこでは漸化式（reduction formulae）を用いてべきを一段ずつ下げていく。小問 (ii) のように多項式の因数を含む部分積分は、「表形式」の方法（tabular method）へと一般化され、さらにずっと先では、微分方程式（differential equations）の弱解（weak solutions）の基礎にある、導関数をある関数から別の関数へ移すという考え方につながる。置換積分と部分積分がなぜ成り立つのかを丁寧に説明したものとしては Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照するとよい。この種の問題をさらに多く解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（発展的な数学の問題集）に挑戦してみるとよい。

解答例

STEP I 2013、第 5 問

純粋数学 • 2 次曲線と回転

> **STEP I 2013、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q5

鍵となる考え方

k によって変わるのは xy の項だけであり、この項がどのような曲線になるかを決めている。xy の項がなければ、x と y についてそれぞれ別々に平方完成（completing the square）できる。二次の部分が因数分解（factorise）できるときは、方程式全体が因数分解されて 2 本の直線になることがある。そして二次の部分が完全平方 $(x+y)^2$ のときは、座標軸を 45° 回転（rotation）させると $x+y$ が 1 つの座標になり、見慣れた放物線（parabola）が残る。

また、$x=0$ または $y=0$ とおくと xy の項が消えるので、座標軸との切片（intercept）はどの k に対しても同じであることにも注意しよう。$x^2+3x=0$ から $x=0$ または $x=-3$、$y^2+y=0$ から $y=0$ または $y=-1$ が得られる。どの軌跡（locus）も $(0,0)$、$(-3,0)$、$(0,-1)$ を通る。

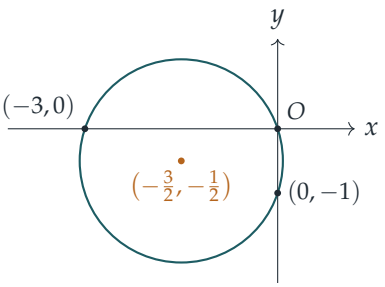
解答

小問 (i)

$k=0$ のとき、各変数について平方完成すると

$$\left(x+\tfrac{3}{2}\right)^2+\left(y+\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{9}{4}+\tfrac{1}{4}=\tfrac{5}{2}.$$

よって軌跡は、中心 $\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$、半径 $\sqrt{5/2}\approx 1.58$ の円である。この円は x 軸と $(0,0)$ および $(-3,0)$ で交わり、y 軸と $(0,0)$ および $(0,-1)$ で交わる。（原点と $(-3,0)$ は弦（chord）の両端なので、中心はその垂直二等分線（perpendicular bisector）$x=-\frac{3}{2}$ 上にあり、実際そうなっている。）



小問 (ii)

$k = \frac{10}{3}$ のとき、両辺を 3 倍すると

$$3x^2 + 3y^2 + 10xy + 9x + 3y = 0.$$

二次の部分は

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 = (3x + y)(x + 3y),$$

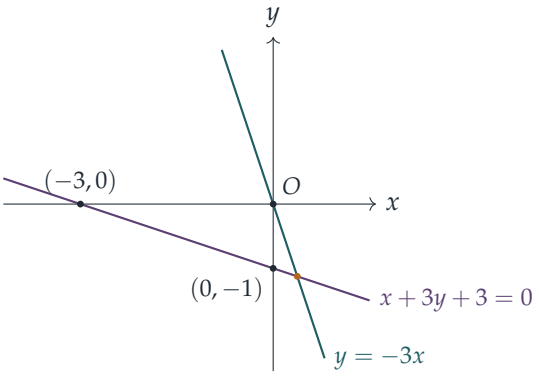
と因数分解でき、一次の部分は $9x + 3y = 3(3x + y)$ であって、共通因数 $3x + y$ をもつ。よって

$$(3x + y)(x + 3y) + 3(3x + y) = (3x + y)(x + 3y + 3) = 0.$$

積が 0 になるのはいずれかの因数が 0 になるときに限るので、軌跡は 2 本の直線

$$y = -3x \qquad \text{および} \qquad x + 3y + 3 = 0.$$

である。1 本目は原点を通る（これがどちらの軸との唯一の交点でもある）。2 本目は x 軸と $(-3, 0)$ で、y 軸と $(0, -1)$ で交わる。2 式を連立させると $x - 9x + 3 = 0$ となるので、2 直線は $\left(\frac{3}{8}, -\frac{9}{8}\right)$ で交わる。



小問 (iii)

$k = 2$ のとき、方程式は

$$(x+y)^2 + 3x + y = 0.$$

となる。$\theta = 45^\circ$ のとき $\cos\theta = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ なので

$$X = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \qquad Y = \frac{y-x}{\sqrt{2}}.$$

したがって $x+y = \sqrt{2}\,X$、$y-x = \sqrt{2}\,Y$ であり、これらの和と差をとると

$$x = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}.$$

? **考えてみよう** なぜ X と Y を x と y で表すのではなく、x と y を X と Y で表す必要があるのだろうか。

P が曲線上にあることはわかっており、求めたいのは Q が満たす方程式である。したがって、P の軌跡の方程式の x と y に代入しなければならず、そのためには x と y を X と Y で表しておく必要がある。（この写像は回転なので、逆写像は単に逆向きの回転であり、これは容易である。）

一次の部分は

$$3x + y = \frac{3X - 3Y + X + Y}{\sqrt{2}} = \frac{4X - 2Y}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,X - \sqrt{2}\,Y,$$

となり、$(x+y)^2 = 2X^2$ である。よって Q の軌跡は

$$2X^2 + 2\sqrt{2}\,X - \sqrt{2}\,Y = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt{2}\,Y = 2X^2 + 2\sqrt{2}\,X = \left(\sqrt{2}\,X + 1\right)^2 - 1,$$

となり、示すべき式が得られた。どの変形も逆にたどれるので、これはちょうど Q の軌跡である。

これは (X, Y) 平面上の放物線であり、Y が増加する向きに開いている。直線 $\sqrt{2}\,X + 1 = 0$、すなわち $X = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ に関して対称であり、頂点（vertex）は $X = -\frac{1}{\sqrt{2}}$、$Y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ にある。

ここで回転をもとに戻す。Q は P を時計回りに 45° 回転して得られたものなので、P の軌跡はこの放物線を**反時計回り**に 45° 回転したものである。x と y で表すと次のようになる。

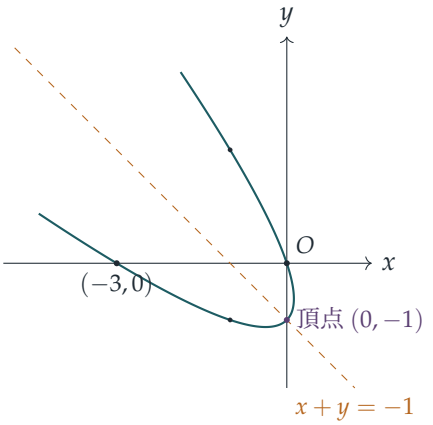
- 対称軸（line of symmetry）$X = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ は $\dfrac{x+y}{\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$、すなわち

$$x + y = -1;$$

- 頂点は $x = \dfrac{X-Y}{\sqrt{2}} = 0$、$y = \dfrac{X+Y}{\sqrt{2}} = -1$、すなわち $(0,-1)$ にある。
- 放物線は $Y = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$ が増加する向き、すなわち $(-1,1)$ の向き（左上）に開いている。

切片は最初に述べたとおり $(0,0)$、$(-3,0)$、$(0,-1)$ であり、$(0,-1)$ は頂点である。頂点における接線（tangent）は対称軸に垂直なので、その傾き（gradient）は 1 である。したがって曲線は頂点で y 軸に接するのではなく、y 軸を横切る。対称性の確認として、$x+y=-1$ に関する鏡映は (a,b) を $(-1-b,-1-a)$ に移すので、原点は $(-1,-1)$ に、$(-3,0)$ は $(-1,2)$ に移る。どちらも $(x+y)^2+3x+y=0$ を満たす。

概形を描くには $u=x+y$ とおくとよい。すると $3x+y=-u^2$ となり、これを解くと $x=-\frac{1}{2}(u^2+u)$、$y=\frac{1}{2}(u^2+3u)$ が得られる。



P の軌跡は、頂点 $(0,-1)$、対称軸 $x+y=-1$ の放物線である。

検算

- 切片 $(0,0)$、$(-3,0)$、$(0,-1)$ を 3 つの方程式すべてに代入すると、k の値によらずいずれも 0 になる。
- (ii) では、$(3x+y)(x+3y+3)$ を展開して 3 で割ると、$k=\frac{10}{3}$ のときのもとの方程式に戻る。交点 $\left(\frac{3}{8},-\frac{9}{8}\right)$ は $3x+y=0$ と $x+3y+3=0$ の両方を満たす。
- (iii) では、$u=1$ とすると点 $(-1,2)$ は P の軌跡上にある。このとき $X=\frac{1}{\sqrt{2}}$、$Y=\frac{3}{\sqrt{2}}$ であり、$\sqrt{2}Y=3=(1+1)^2-1$ となる。

よくある間違い

- (iii) で、x, y を X, Y で表す代わりに、X, Y の式を方程式に代入してしまう。
- 放物線を逆向きに回転して戻してしまい、対称軸を $x+y=-1$ ではなく $y-x=-1$ としてしまう。
- (ii) で、一次の項が共通因数 $3x+y$ をもつことを見落とし、軌跡を別の種類の二次曲線として扱ってしまう。

STEP のその先へ

方程式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ はどれも二次曲線（conic）を表し、その種類は二次の部分の判別式（discriminant）b^2-4ac によって決まる。負なら楕円（ellipse）（ここでは $k=0$ の円）、0 なら放物線（$k=2$）、正なら双曲線（hyperbola）であり、双曲線は 2 本の直線に退化することがある（$k=\frac{10}{3}$）。大学 1 年の線形代数の講義では、二次形式（quadratic form）の対称行列（symmetric matrix）の固有ベクトル（eigenvector）の方向へ回転することで、xy の項を系統的に消去する方法を学ぶ。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）はこれをわかりやすく解説している。

解答例

STEP I 2013、第 6 問

純粋数学 ・ 二項係数とフィボナッチ数

STEP I 2013、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/13-s1-q6

鍵となる考え方

パスカルの法則（Pascal's rule）がすべての原動力である。各 B_n は二項係数（binomial coefficient）の和であり、B_{n+2} の各項をパスカルの法則で分解すると、その断片は B_{n+1} と B_n の項にちょうど組み直される。注意が必要なのは和の両端だけである。そこではパスカルの法則が使えず、余った 1 を手で対応させなければならない。B_n は n が偶数か奇数かで定義が異なるので、二つの場合を別々に扱う。

解答

パスカルの法則

$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n$ であるから、両辺の x^r の係数は一致する。左辺の係数は $\binom{n+1}{r}$ である。右辺は

$$(1+x)\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^s = \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^s + \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^{s+1},$$

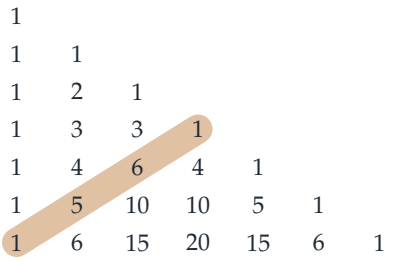
であり、$1 \le r \le n$ のとき、第 1 の和からは $\binom{n}{r}$（$s = r$ の項）、第 2 の和からは $\binom{n}{r-1}$（$s = r-1$ の項）が寄与する。したがって

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r} \qquad (1 \le r \le n).$$

漸化式

B_n が何を表しているかを見ておくとよい。B_n はパスカルの三角形（Pascal's triangle）の「浅い対角線」$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots$ を、上の数が下の数以上である最後の項ま

で足し合わせたものである。三角形を左詰めに並べると、$B_6 = 1+5+6+1 = 13$ を構成する項は一直線上に並ぶ。



（琥珀色の帯が $\binom{6}{0}, \binom{5}{1}, \binom{4}{2}, \binom{3}{3}$ を示している。）

偶数の場合、$n = 2m$（$m \geq 0$）。示すべきは $B_{2m+2} = B_{2m+1} + B_{2m}$ である。定義より

$$B_{2m+2} = \sum_{j=0}^{m+1} \binom{2m+2-j}{j}.$$

両端の項は、$j = 0$ のときの $\binom{2m+2}{0} = 1$ と、$j = m+1$ のときの $\binom{m+1}{m+1} = 1$ である。$1 \leq j \leq m$ に対しては、上が $2m+1-j$、下が j としてパスカルの法則を用いる。$j \leq m$ から $j \leq 2m+1-j$ が従うので、これは許される。よって

$$B_{2m+2} = \underbrace{1 + \sum_{j=1}^{m} \binom{2m+1-j}{j}}_{\text{(a)}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \binom{2m+1-j}{j-1} + 1}_{\text{(b)}}.$$

(a) において、1 は欠けていた $k = 0$ の項 $\binom{2m+1}{0}$ であるから、(a) は $\sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1-k}{k} = B_{2m+1}$ である。

考えてみよう 第 2 の和は何になるべきか。そして余った 1 はどこへ行くのか。

(b) で $i = j-1$ とおくと、和は $\sum_{i=0}^{m-1} \binom{2m-i}{i}$ となる。これは B_{2m} から最後の項 $i = m$ を除いたものである。その最後の項は $\binom{m}{m} = 1$ であり、ちょうど余った 1 にあたる。よって (b) $= B_{2m}$ であり、$B_{2m+2} = B_{2m+1} + B_{2m}$ が成り立つ。（$m = 0$ のときは和が空になり、この式は $2 = 1+1$ となる。）

奇数の場合、$n = 2m+1$（$m \geq 0$）。示すべきは $B_{2m+3} = B_{2m+2} + B_{2m+1}$ である。今度は

$$B_{2m+3} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{2m+3-k}{k}.$$

そのまま残すのは $k = 0$ の項 $1 = \binom{2m+2}{0}$ だけである。$1 \leq k \leq m+1$ に対しては、上が $2m+2-k$、下が k としてパスカルの法則を用いてよい。$k \leq m+1$ から $k \leq 2m+2-k$

が従うからである。したがって

$$\begin{aligned} B_{2m+3} &= \binom{2m+2}{0} + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{2m+2-k}{k} + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{2m+2-k}{k-1} \\ &= \sum_{j=0}^{m+1} \binom{2m+2-j}{j} + \sum_{i=0}^{m} \binom{2m+1-i}{i} \qquad (i = k-1) \\ &= B_{2m+2} + B_{2m+1}. \end{aligned}$$

今回は余る端の項はない。

任意の $n \geq 0$ は $2m$ または $2m+1$ の形であるから、求めるとおり、すべての $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $B_{n+2} - B_{n+1} = B_n$ が成り立つ。

フィボナッチ数との関係

直接計算すると、$B_0 = \binom{0}{0} = 1$、$B_1 = \binom{1}{0} = 1$ である。フィボナッチ数（Fibonacci numbers）は $F_1 = 1$、$F_2 = 1$ から始まる。よって $B_0 = F_1$、$B_1 = F_2$ であり、二つの数列は同じ漸化式（recurrence）「各項は直前の 2 項の和である」に従う。数学的帰納法（induction）により（$B_n = F_{n+1}$ かつ $B_{n+1} = F_{n+2}$ ならば $B_{n+2} = F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}$ である）、

$$B_n = F_{n+1} \qquad \text{すべての} n \geq 0.$$

数列 B はフィボナッチ数列を一つずらしたもの $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ である。

検算

- 定義からいくつかの項を直接計算する。$B_2 = 1 + 1 = 2$、$B_3 = 1 + 2 = 3$、$B_4 = 1 + 3 + 1 = 5$、$B_5 = 1 + 4 + 3 = 8$。これらは $F_3, \ldots, F_6$ である。
- もっと大きな例：$B_9 = \binom{9}{0} + \binom{8}{1} + \binom{7}{2} + \binom{6}{3} + \binom{5}{4} = 1 + 8 + 21 + 20 + 5 = 55 = F_{10}$。
- パスカルの法則の確認：$\binom{5}{2} + \binom{5}{1} = 10 + 5 = 15 = \binom{6}{2}$。

よくある間違い

- $\binom{m+1}{m+1}$ のような端の項にパスカルの法則を適用してしまう。すると $\binom{m}{m+1}$ が現れるが、これは法則を証明した範囲 $1 \leq r \leq n$ の外である。先に端の項を取り分けておくこと。
- 偶奇（parity）の一方しか扱わない。B_{2m} と B_{2m+1} は定義が異なり、漸化式は偶数番目の項と奇数番目の項を結びつけるので、両方の場合が必要である。

- 添字のずれを誤る。答えは $B_n = F_{n+1}$ であって、$B_n = F_n$ ではない（$B_0 = 1 \neq F_0$ を確かめよ）。

STEP のその先へ

恒等式 $F_{n+1} = \sum_k \binom{n-k}{k}$ には鮮やかな数え上げによる証明がある。両辺はいずれも、$1 \times n$ の帯を正方形とドミノで敷き詰める（tiling）方法の数を数えている（k はドミノの個数であり、$n-k$ 枚のタイルの中からドミノの位置を選ぶ方法が $\binom{n-k}{k}$ 通りある）。同じ集合を二通りに数えて（double counting）恒等式を証明するのは、大学の組合せ論（combinatorics）における中心的な手法である。母関数（generating function）の見方も同様に重要であり、その見方では $\sum F_n x^n = x/(1-x-x^2)$ となる。さらに学びたければ、Wilf の *generatingfunctionology*（母関数論）や Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）を読んでみるとよい。

解答例

STEP I 2013、第 7 問

純粋数学 ・ 一階微分方程式

STEP I 2013、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/13-s1-q7

鍵となる考え方

(i) と (ii) では右辺が比 y/x のみに依存するので、$y = ux$ とおくと、方程式は変数分離（separation of variables）ができる形になる。小問 (iii) ではこのパターンが崩れる。x^2/y は y/x だけの関数ではないからである。これを解決するには、解が x の何乗のように振る舞う「はず」かを考えればよい。2 つの項の釣り合いを考えると $y = u\,x^{3/2}$ とおけばよいことがわかり、そうすると再びすべてが分離できる。

解答

小問 (i)

$y = ux$ とおく。積の微分法（product rule）により $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ である。$x/y = 1/u$、$y/x = u$ であるから、方程式は

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u} + u \quad \Longrightarrow \quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}.$$

となる。u の項が打ち消し合うことが、この置換がうまくいく理由である。変数を分離すると（$x > 0$ なので x で割ってよい）、

$$\int u\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{1}{2}u^2 = \ln x + C,$$

となる。$x > 0$ なので $\ln|x|$ ではなく $\ln x$ とした。$x = 1$ のとき $y = 2$ であるから $u = y/x = 2$ となり、$2 = 0 + C$ を得る。したがって

$$u^2 = 4 + 2\ln x.$$

である。ここで $y>0$ かつ $x>0$ より $u>0$ でなければならないので、正の平方根をとって $u=\sqrt{4+2\ln x}$ となり、

$$y=x\sqrt{4+2\ln x}.$$

を得る。これには $4+2\ln x>0$ が必要である（単に $y\geq 0$ ではなく $y>0$ が必要だからである）。すなわち $\ln x>-2$、つまり $x>\mathrm{e}^{-2}$ である。これが求める結果である。

小問 (ii)

右辺は再び y/x の関数なので、同じ置換 $y=ux$ を用いる。

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}+2u \quad\Longrightarrow\quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}+u=\frac{1+u^2}{u}.$$

今回は u の項は打ち消し合わないが、それでも変数は分離できる。

$$\int\frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln x+C,$$

ここで左辺の積分は $\frac{1}{2}\int f'/f$ の形であり、$1+u^2>0$ なので絶対値は不要である。$x=1$ で $u=2$ であるから、$C=\frac{1}{2}\ln 5$ となる。両辺を 2 倍して指数をとると、

$$1+u^2=5x^2, \qquad \text{よって} \qquad u=\sqrt{5x^2-1}$$

となる（$u>0$ なので正の平方根をとる）。したがって

$$y=x\sqrt{5x^2-1} \qquad \left(x>\tfrac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

である。この制限は、$x>0$ のもとで $5x^2-1>0$ であることから来る。

小問 (iii)

今度は $y=ux$ とすると $x^2/y=x/u$ となり、x が単独で残るので、方程式は分離できない。右辺の両方の項が同じようにスケールするような置換が欲しい。

> **?** **考えてみよう** y が累乗 x^k のように振る舞うとすると、$\dfrac{x^2}{y}$ と $\dfrac{2y}{x}$ が同じ大きさになるのは k がどの値のときか。

x^{2-k} と x^{k-1} が一致する必要があるので $2-k=k-1$、よって $k=\frac{3}{2}$ である。（このとき左辺の $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ も $x^{1/2}$ のように振る舞うので、3 つの項すべてが一致する。）そこで置換 $y=u\,x^{3/2}$ を考えると、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^{3/2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\tfrac{3}{2}u\,x^{1/2}, \qquad \frac{x^2}{y}=\frac{x^{1/2}}{u}, \qquad \frac{2y}{x}=2u\,x^{1/2}.$$

となる。方程式全体を $x^{1/2}$（これは正である）で割ると、

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\tfrac{3}{2}u=\frac{1}{u}+2u \quad\Longrightarrow\quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}+\frac{u}{2}=\frac{2+u^2}{2u}.$$

変数を分離すると、

$$\int\frac{2u}{2+u^2}\,\mathrm{d}u=\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad \ln(2+u^2)=\ln x+C.$$

$x=1$ で $u=y/x^{3/2}=2$ であるから $C=\ln 6$ となり、したがって $2+u^2=6x$ である。正の平方根をとって $u=\sqrt{6x-2}$ となるので、

$$y=x^{3/2}\sqrt{6x-2}=\sqrt{6x^4-2x^3} \qquad \left(x>\tfrac{1}{3}\right),$$

を得る。ここで $x>\frac{1}{3}$ は $6x-2>0$ のために必要である。

(iii) の別解。方程式に $2y$ を掛け、$z=y^2$ とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{4}{x}z=2x^2,$$

となる。これは積分因子（integrating factor）x^{-4} をもつ線形（linear）方程式である。すると $\left(x^{-4}z\right)'=2x^{-2}$ となり、$z(1)=4$ を用いて $x^{-4}z=-2/x+6$ を得るので、先と同じく $y^2=6x^4-2x^3$ となる。同じ技法（$z=y^2$）で (i) と (ii) も解ける。

検算

- どの答えも $x=1$ で $y=2$ を与える：$1\cdot\sqrt{4}$、$1\cdot\sqrt{4}$、$\sqrt{6-2}$。
- (ii) の答えを微分して元の式に代入する。$y^2=5x^4-x^2$ より $2yy'=20x^3-2x$ なので、$y'=(10x^3-x)/y$ である。一方、$\dfrac{x}{y}+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{x^2+2y^2}{xy}=\dfrac{10x^4-x^2}{xy}$ となり、両者は一致する。
- $x=2$ では、3 つの解はそれぞれ $2\sqrt{4+2\ln 2}\approx 4.642$、$2\sqrt{19}\approx 8.718$、$4\sqrt{5}\approx 8.944$ を与える。予想どおり、(ii) では y/x の係数が大きいため、y は (i) よりも速く増加する。

よくある間違い

- $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ の u を書き忘れ、u についての方程式を誤ってしまう。
- 初期条件（initial condition）を u ではなく y に適用してしまう。ここでは $x=1$ で両者は一致するが、(iii) では一般に $u=y/x^{3/2}$ が必要である。
- 定義域（domain）を書き落とす。平方根は実数かつ正でなければならず、そこから $x>\mathrm{e}^{-2}$、$x>1/\sqrt{5}$、$x>\frac{1}{3}$ が得られる。

STEP のその先へ

右辺が y/x のみに依存する方程式は**同次形**（homogeneous）とよばれ、置換 $y = ux$ によって常に変数分離できる。小問 (iii) は、スケーリング対称性（scaling symmetry）が姿を変えて現れたものである。この方程式は $x \mapsto \lambda x$、$y \mapsto \lambda^{3/2} y$ のもとで不変であり、このようなスケーリング対称性があれば、方程式を変数分離形にする置換が必ず見つかる。$y' + P(x)y = Q(x)y^n$ の形の方程式は、$z = y^{1-n}$ とおくと線形になり、ベルヌーイ（Bernoulli）方程式とよばれる。ここでの 3 つの小問はすべて $n = -1$ のこの型である。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は、1 階方程式の章でこの両方の族を扱っている。

解答例

STEP I 2013、第 8 問

純粋数学 ・ 合成関数

STEP I 2013、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/13-s1-q8

鍵となる考え方

合成関数（composite）pq は「まず q を施し、次に p を施す」という意味であり、q の出力が p の定義域（domain）の中に入る範囲でのみ定義される。したがって、定義域は q から決まり（必要ならば制限される）、値域（range）は p が実際にどのような値を受け取るかを考えることで求められる。計算そのものは軽い。得点の鍵は、$\sqrt{x^2} = |x|$ と定義域に注意を払うことにある。小問 (iii) では、恒等式 $(x + \sqrt{x^2-1})(x - \sqrt{x^2-1}) = 1$ がほとんどの仕事をしてくれる。

解答

小問 (i)

- $\mathrm{cb}(x) = \mathrm{c}(\ln x) = 2\ln x$ である。定義域は b の定義域、すなわち $x > 0$ であり、c はすべての実数を受け付ける。$\ln x$ はすべての実数値をとるので、$2\ln x$ もすべての実数値をとる。よって値域は $\mathbb{R}$ である。
- $\mathrm{ab}(x) = (\ln x)^2$ であり、定義域は $x > 0$ である。$\ln x$ はすべての実数値をとるので、その 2 乗は $[0, \infty)$ のすべての値をとる（$x = 1$ のとき 0）。よって値域は $y \geq 0$ である。
- $\mathrm{da}(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ であり、x ではない。根号は非負の平方根を表すからである。ここで $x^2 \geq 0$ は常に成り立つので、定義域は $\mathbb{R}$ 全体であり、値域は $y \geq 0$ である。
- $\mathrm{ad}(x) = (\sqrt{x})^2 = x$ であるが、これは $x \geq 0$ の場合に限る。d が先に作用しなければならないからである。よって定義域は $x \geq 0$、値域は $y \geq 0$ である。

da と ad は値域が同じであるが、定義域も式も異なることに注意せよ。これらは異なる関数である。

小問 (ii)

fg について：任意の実数 x に対して $g(x) = \sqrt{x^2+1} \geq 1$ であるから、$g(x)$ は常に f の定義域に入る。よって

$$fg(x) = \sqrt{(x^2+1)-1} = \sqrt{x^2} = |x|, \qquad \text{定義域}\mathbb{R}, \quad \text{値域}y \geq 0.$$

gf について：f が先に作用するので $|x| \geq 1$ が必要である。また g はどんな入力も受け付ける。よって

$$gf(x) = \sqrt{(x^2-1)+1} = |x|, \qquad \text{定義域}|x| \geq 1, \quad \text{値域}y \geq 1.$$

ここでも 2 つの式は一致するが、関数としては異なる。gf の定義域からは $-1 < x < 1$ が除かれており、そのため値域は 1 から始まる。

小問 (iii)

基本となる事実は

$$\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) = x^2-(x^2-1) = 1,$$

であり、したがって $x \geq 1$ に対して $h(x)\,k(x) = 1$ が成り立つ。

h のグラフ（$x \geq 1$）。

- $h(1) = 1$ である。
- $x > 1$ に対して $h'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 0$ であるから、h は増加関数である。また $x \to 1^+$ のとき $h'(x) \to \infty$ であるから、曲線は点 $(1,1)$ から鉛直な接線（vertical tangent）をもって出発する。
- $x \to \infty$ のとき $h(x) \to \infty$ である。漸近線（asymptote）を求めると、

  $$h(x) - 2x = \sqrt{x^2-1} - x = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} \to 0^-,$$

  となるので、$y = 2x$ は漸近線であり、曲線は下側から近づく。

したがって h は 1 から連続的に限りなく増加し、その値域は $[1,\infty)$ である。

k のグラフ、$x \geq 1$ の枝。

- $\mathrm{k}(1) = 1$ であり、基本となる事実より $\mathrm{k}(x) = 1/\mathrm{h}(x)$ である。
- h は正で、無限大へ向かって増加するので、k は正で減少し、$\mathrm{k}(x) \to 0^+$ となる。よって $y = 0$ は漸近線であり、曲線は上側から近づく。
- $x \to 1^+$ のとき $\mathrm{k}'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \to -\infty$ である。ここでも点 $(1,1)$ において鉛直な接線をもち、この枝はそこで h のグラフとつながる。

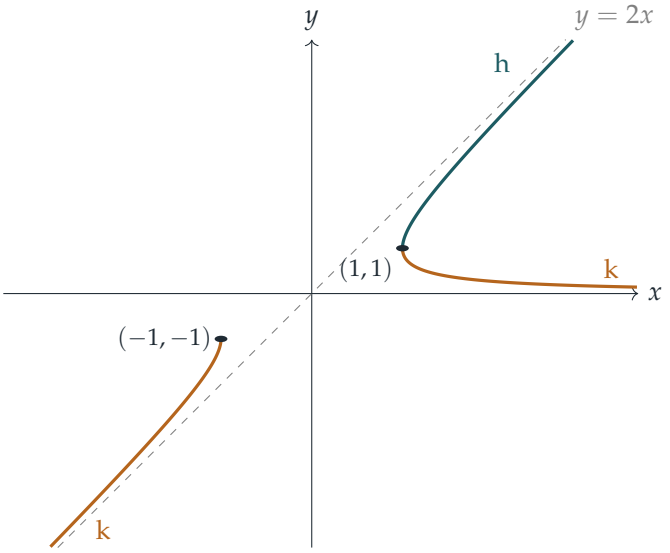
k のグラフ、$x \leq -1$ の枝。

- $\mathrm{k}(-1) = -1$ である。
- $x < -1$ のとき $x < 0$ であるから、$\mathrm{k}'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 1 > 0$ となり、k は増加関数である。$x \to -1^-$ のとき $\mathrm{k}'(x) \to +\infty$ であるから、点 $(-1,-1)$ において鉛直な接線をもつ。
- x と $-\sqrt{x^2-1}$ はともに負であるから、$x \to -\infty$ のとき $\mathrm{k}(x) \to -\infty$ である。$u \geq 1$ として $x = -u$ とおくと、

$$\mathrm{k}(x) - 2x = u - \sqrt{u^2-1} = \frac{1}{u + \sqrt{u^2-1}} \to 0^+,$$

となるので、$y = 2x$ はこの枝の漸近線でもあり、曲線は上側から近づく。

この枝は $(-\infty, -1]$ のすべての値をとる。



（これらすべてを一度に見渡す巧妙な方法がある。$t \geq 0$ として $x = \cosh t$ とおくのである。すると $\sqrt{x^2-1} = \sinh t$ となるので、$\mathrm{h}(x) = e^t$、$\mathrm{k}(x) = e^{-t}$ である。また $x = -\cosh t$ のときは $\mathrm{k}(x) = -e^t$ である。）

合成関数 kh。 h の定義域は $x \geq 1$ であり、すべての値 $\mathrm{h}(x)$ は $\mathrm{h}(x) \geq 1$ を満たすので、k の定義域に入る。したがって kh は $x \geq 1$ 全体で定義される。

考えてみよう kh は k のグラフのどの部分を実際に用いているか？

$x \geq 1$ の枝のみである。h は 1 未満の値を決して出力しないからである。さらに h は $[1,\infty)$ の**すべての**値をとるので、kh がとる値は、$[1,\infty)$ 上での k の値とちょうど一致する。この枝の上で k は $\mathrm{k}(1) = 1$ から 0 に向かって連続的に減少し、0 には決して到達しない（$\mathrm{k} = 1/\mathrm{h} > 0$ であるから）。よって

$$\mathrm{kh}: \quad \text{定義域} x \geq 1, \qquad \text{値域} 0 < y \leq 1.$$

双曲線関数（hyperbolic function）による見方では、$\mathrm{kh}(\cosh t) = \mathrm{k}(e^t)$ であり、これは $t = 0$ のとき 1 から始まる t の減少関数である。

検算

- 具体的な値で確かめる：$\mathrm{h}(2) = 2+\sqrt{3} \approx 3.732$、$\mathrm{k}(2) = 2-\sqrt{3} \approx 0.268$ であり、その積は 1 である。また $\mathrm{k}(-2) = -2-\sqrt{3} \approx -3.732$ であり、漸近線の解析が予測するとおり、$2x = -4$ のわずかに上にある。
- $\mathrm{kh}(1) = \mathrm{k}(1) = 1$ であり、$\mathrm{kh}(2) = \mathrm{k}(3.732\ldots) = 3.732 - \sqrt{3.732^2-1} \approx 0.136$ は $(0,1]$ の中にある。
- $x = 1000$ において、$\mathrm{h}(x) - 2x \approx -0.0005$、$\mathrm{k}(x) \approx 0.0005$ であり、それぞれ $-1/(2x)$、$1/(2x)$ と一致する。

よくある間違い

- $\sqrt{x^2} = x$ と書いてしまうこと。正しくは $|x|$ であり、だからこそ da、fg、gf は恒等関数（identity）ではない。
- 最終的な式 $|x|$ がいたるところで意味をもつからといって、gf の定義域を $\mathbb{R}$ としてしまうこと。合成関数の定義域は、最初に施される関数によって決まる。
- $x \leq -1$ における k の 2 つ目の枝や、その漸近線 $y = 2x$ を見落とすこと。

STEP のその先へ

大学では、関数とは定義域、終域（codomain）、対応の規則の三つ組である。ここでの fg と gf のように、規則が同じでも定義域が異なる 2 つの関数は本当に別物であり、逆関数（inverse）、単射性（injectivity）、全射性（surjectivity）を論じ始めるとすぐに、この厳密さが重要になる。関数 h は $e^{\operatorname{arcosh} x}$ であり、$\ln \mathrm{h}(x)$ は $\operatorname{arcosh} x$ を表す標準的な公式である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、関数、連続性（continuity）、単調性（monotonicity）をこのような注意深さで扱っている。

解答例

STEP I 2013、第 9 問

力学 ・ 放物運動と衝突

STEP I 2013、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

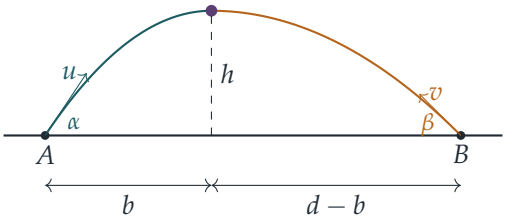
step.maths.org/questions/13-s1-q9

鍵となる考え方

投射体（projectile）は軌道の最高点で鉛直方向の速度をもたない。したがって、そこで衝突が起きたあとに落下して戻るのにかかる時間は、上昇にかかった時間に等しい。出発点に着地するためには、各質点は同じ時間で水平方向の行程を逆にたどらなければならない。そのためには、水平方向の速度がちょうど逆向きになるしかない。これを運動量保存（conservation of momentum）に代入し、2 つの質点が同じ瞬間に最高点に達することを用いれば、あとはすべて導かれる。

解答

A と B を、空気抵抗なしに重力のみを受けて自由に運動する質点（particle）としてモデル化し、衝突における撃力（impulse）は中心線に沿って働くものとする。衝突は直接衝突であり、その瞬間には両方の質点が水平に運動しているので、この撃力は水平である。x 軸を平面に沿って A の出発点から B の出発点へ向かう向きにとる。すると B は $x = d$ から出発する。



最高点での出会い

A の鉛直方向の速度は $u\sin\alpha - gt$ であるから、最高点に達するのは時刻 $t = u\sin\alpha/g$ である。同様に、B が最も高くなるのは $t = v\sin\beta/g$ である。2 つは同時に投げ出され、それぞれが最高点にあるときに衝突するので、これらの時刻は等しい：

$$T = \frac{u\sin\alpha}{g} = \frac{v\sin\beta}{g}, \qquad \text{よって} \qquad u\sin\alpha = v\sin\beta. \tag{1}$$

衝突の直前、A は速度 $u\cos\alpha$ で x 軸の正の向きに、B は速度 $v\cos\beta$ で x 軸の負の向きに運動しており、どちらも鉛直方向の速度はもたない。

衝突のあと

考えてみよう 反発係数（coefficient of restitution）について何もわかっていないのに、衝突後の速度について何かいえるのはなぜだろうか。

鍵を握るのは、出発点に戻るという条件である。撃力は水平なので、衝突直後も A の鉛直方向の速度は 0 のままであり、平面からの高さは h である。（鉛直方向に）静止状態から高さ h を落下するのにかかる時間は、高さ h を上昇するのにかかった時間とちょうど等しく、T である。その間に A は水平方向に $x = b$ から $x = 0$ まで戻らなければならない。ここで $b = u\cos\alpha\, T$ は上昇中に進んだ水平距離である。よって、衝突後の水平方向の速度は

$$-\frac{b}{T} = -u\cos\alpha :$$

となる。つまり A の水平方向の速度はちょうど逆向きになり、同じ理由で B の水平方向の速度も逆向きになる。（実際、各質点は自分の軌道を逆向きにたどる。）

ここで x 方向の運動量保存より

$$mu\cos\alpha - Mv\cos\beta = -mu\cos\alpha + Mv\cos\beta, \qquad \text{よって} \qquad mu\cos\alpha = Mv\cos\beta. \tag{2}$$

いいかえれば、運動量の総和は衝突の前後どちらでも 0 である。(2) を (1) で割ると（α と β は 0 と $\frac{1}{2}\pi$ の間に厳密にあるので、(1) の両辺は 0 でなく、この割り算は許される）

$$m\cot\alpha = M\cot\beta,$$

となり、示すべき式が得られた。

衝突の位置

時間 T の間に、A は水平距離 $b = u\cos\alpha\, T$ を進み、B は $v\cos\beta\, T$ を進む。2 つ合わせて間の距離を埋めるので

$$u\cos\alpha\, T + v\cos\beta\, T = d.$$

(2) より $v\cos\beta = \dfrac{m}{M}u\cos\alpha$ であるから

$$b\left(1+\frac{m}{M}\right) = d \qquad \Longrightarrow \qquad b = \frac{Md}{m+M},$$

となり、示すべき式が得られた。(B が重いほど水平方向の動きは遅くなり、出会う点は A の出発点から遠くなる。)

衝突の高さ

A の鉛直方向の運動に $v^2 = u^2 + 2as$ を用いると、最高点の高さは

$$h = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}, \qquad \text{一方} \qquad b = u\cos\alpha\cdot\frac{u\sin\alpha}{g} = \frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

割り算をすると

$$\frac{h}{b} = \frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \tfrac{1}{2}\tan\alpha, \qquad \text{よって} \qquad h = \tfrac{1}{2}b\tan\alpha.$$

検算

- 対称性：$m = M$ とすると $\alpha = \beta$ かつ $b = \frac{1}{2}d$ となり、2 つの質点はちょうど真ん中で出会う。当然そうなるべきである。
- 高さの公式は、A の出発点から軌道の最高点へ引いた直線の傾きが $\frac{1}{2}\tan\alpha$、すなわち発射時の傾きの半分であることを示している。これは、放物線の出発点での接線が対称軸と交わる点の高さは頂点の高さの 2 倍である、というよく知られた事実である。B について同じ計算をすると $h = \frac{1}{2}(d-b)\tan\beta$ となり、これが $\frac{1}{2}b\tan\alpha$ と一致するのは、まさに $m\cot\alpha = M\cot\beta$ が成り立つからである。
- 数値で確かめる。$m = 1$、$M = 2$、$\alpha = 45°$、$u = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ とする。すると $\cot\beta = \frac{1}{2}$、$v = \sqrt{50}/\sin\beta \approx 7.91\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$d \approx 7.65\,\mathrm{m}$ であり、$b = \frac{2}{3}d \approx 5.10\,\mathrm{m}$、$h = \frac{1}{2}b \approx 2.55\,\mathrm{m}$ が得られる。衝突時に水平方向の速度を反転させて、両方の運動をコンピュータで時間を追って計算すると、2 つの質点がこの点でそれぞれの最高点において出会い、どちらも出発点に着地することが確かめられる。

よくある間違い

- 反発係数を使おうとすること：反発係数は与えられておらず、必要もない。出発点に戻るという条件によって衝突後の速度が決まるからである。
- 2 つの質点が同時に最高点に達しなければならないことを忘れること。この条件から (1) が得られるのであり、これがなければ余接（cot）の式は導けない。

- 運動量の式での符号の誤り：衝突前、B は負の向きに運動している。

STEP のその先へ

出発点に戻るという条件は、時間反転（time reversal）にほかならない。重力のもとでのニュートン（Newton）の運動方程式は、時計を逆向きに進めても同じ形をしているので、質点の速度を反転させるとその質点は自分の軌道に沿って戻っていく。この問題では運動量の総和が 0 であり、これは重心系（centre-of-mass frame）で考えていることを意味する。重心系では、弾性衝突（elastic collision）は両方の速度を単に反転させるだけであり、まさにここで起きていることである（したがって、この衝突は完全弾性衝突である）。重心系と保存則については、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）で見事に論じられている。

解答例

STEP I 2013、第 10 問

力学 ・ 反発係数と摩擦

> **STEP I 2013、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q10

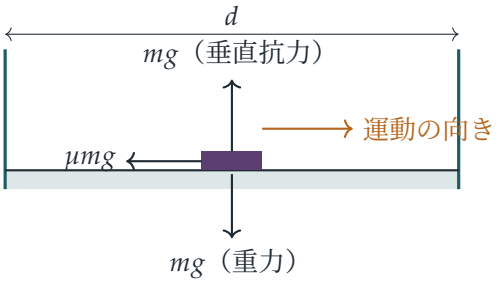
鍵となる考え方

衝突と衝突の間にはたらく水平方向の力は摩擦（friction）だけなので、パックは一定の減速度（deceleration）μg で運動し、等加速度運動の公式 $v^2 = u^2 + 2as$ によって、一方の壁を離れるときの速さと次の壁に到達するときの速さが結びつく。そのうえでニュートン（Newton）の反発の法則（law of restitution）により、到達時の速さが r 倍される。その結果 v_i^2 についての線形漸化式（linear recurrence）が得られる。線形漸化式 $w_{i+1} = aw_i + b$ は、その不動点（fixed point）だけずらせば、単なる等比数列（geometric sequence）になって解ける。

解答

漸化式

パックを、壁に垂直な直線上を運動する質点とみなす。衝突と衝突の間に氷上を滑っている間、鉛直方向の加速度はないので垂直抗力（normal reaction）は mg であり、パックは滑っているので摩擦力は最大値（limiting friction）μmg をとり、運動を妨げる向きにはたらく。



ニュートンの第二法則より減速度は一定値 μg である。よって、（i 回目の衝突の直後に）速さ v_i で出発して長さ d の区間を横断するとき、反対側の壁に到達したときの速さ u は

$$u^2 = v_i^2 - 2\mu g d.$$

を満たす。壁は固定されているので、ニュートンの反発の法則より、パックは近づく速さの r 倍の速さで跳ね返る：$v_{i+1} = ru$。両辺を 2 乗すると

$$v_{i+1}^2 = r^2u^2 = r^2v_i^2 - 2r^2\mu g d, \qquad \text{よって} \qquad v_{i+1}^2 - r^2v_i^2 = -2r^2\mu g d,$$

となり、示すべき式が得られた。最初の速さを $v_0 = v$ と書けば、最初の横断にも同じ議論が当てはまるので、この漸化式はすべての $i \geq 0$ で成り立つ。

横断の回数

両辺を $2\mu g d$ で割り、$w_i = \dfrac{v_i^2}{2\mu g d}$ とおくと、$w_0 = k$ であり

$$w_{i+1} = r^2(w_i - 1).$$

となる。「n 回の横断の後に壁に接して静止する」とは、n 回目の横断の終わりにパックが速さ 0 で壁に到達することを意味する。このとき跳ね返る速さも 0 なので $v_n = 0$、すなわち $w_n = 0$ である（また $i < n$ では $w_i > 0$）。

> **考えてみよう** $w_{i+1} = r^2(w_i - 1)$ はどのように解けばよいか？

定数解 $w_i = c$ を探す。$c = r^2(c-1)$ が必要なので $c = -\dfrac{r^2}{1-r^2}$ であり、$r \neq 1$ なのでこれは意味をもつ。漸化式から $c = r^2(c-1)$ を辺々引くと

$$w_{i+1} - c = r^2(w_i - c),$$

となるので、$w_i - c$ は公比 r^2 の等比数列である：

$$w_i = c + r^{2i}(k - c).$$

$w_n = 0$ とおくと $r^{2n}(k-c) = -c$、すなわち

$$r^{2n}\left(k + \frac{r^2}{1-r^2}\right) = \frac{r^2}{1-r^2} \quad \Longrightarrow \quad r^{2n-2}\left(k(1-r^2)+r^2\right) = 1.$$

を得る。両辺に r^{-2n} を掛けて整理すると

$$r^{-2n} = 1 + k\left(r^{-2}-1\right), \qquad \text{よって} \qquad \boxed{n = \frac{\ln\left(1+k(r^{-2}-1)\right)}{2\ln(1/r)}}$$

となる（$0 < r < 1$ より $\ln(1/r) > 0$ であり、$k > 0$ かつ $r^{-2} > 1$ より対数の中身は 1 より大きいので、当然ながら $n > 0$ となる）。

$r = \mathrm{e}^{-1}$ の場合

このとき $r^{-2} = \mathrm{e}^2$、$\ln(1/r) = 1$ なので、公式は

$$n = \tfrac{1}{2}\ln\left(1 + k(\mathrm{e}^2 - 1)\right),$$

となり、これが求める結果である。

$r = 1$ の場合

漸化式は $w_{i+1} = w_i - 1$ となる。壁での損失がないので、1 回の横断ごとに v^2 がちょうど $2\mu g d$ ずつ減るのである。よって $w_i = k - i$ であり、$w_n = 0$ から

$$n = k = \frac{v^2}{2\mu g d}.$$

を得る。これは単にエネルギーの話である。はじめの運動エネルギー（kinetic energy）$\frac{1}{2}mv^2$ が、合計の距離 nd にわたって摩擦によってすべて散逸するので、$\frac{1}{2}mv^2 = \mu mg\, nd$ となる。

検算

- $r = \mathrm{e}^{-1}$ として $w_3 = 0$ から漸化式を逆向きにたどると、$w_2 = 1$、$w_1 = \mathrm{e}^2 + 1$、$w_0 = \mathrm{e}^4 + \mathrm{e}^2 + 1 \approx 62.99$ となる。公式からは $\frac{1}{2}\ln\left(1 + (\mathrm{e}^4 + \mathrm{e}^2 + 1)(\mathrm{e}^2 - 1)\right) = \frac{1}{2}\ln \mathrm{e}^6 = 3$ が得られ、確かに一致する。
- $r \to 1$ のとき $r^{-2} - 1 \approx 2(1-r)$、$\ln(1/r) \approx 1 - r$ なので、一般の公式は $\dfrac{2k(1-r)}{2(1-r)} = k$ に近づき、$r = 1$ の場合の答えと一致する。
- k は無次元量（dimensionless）であり（v^2 も gd も速さの 2 乗の次元をもつ）、n が無次元であることと整合する。

- μ、d、r、v を無作為に選んで運動を数値的に追跡すると、漸化式が高い精度で成り立つことが確かめられる。

よくある間違い

- v_i^2 に対して反発の法則を r^2 ではなく r 倍として適用してしまうこと。反発の法則は速さについての法則なので、速さの 2 乗には r^2 が掛かり、摩擦の項にも同じく r^2 が掛かる。
- n が数えているのは横断の回数であって、跳ね返りの速さが 0 でない衝突の回数ではないことを忘れること。条件は $v_0 = v$ のもとで $v_n = 0$ である。

STEP のその先へ

漸化式 $w_{i+1} = aw_i + b$ は最も単純な線形差分方程式（linear difference equation）であり、不動点を引くという工夫は、線形微分方程式（linear differential equation）で学ぶ「余関数（complementary function）と特解（particular solution）の和」という方法そのものである。このような跳ね返りの問題（床で弾むボールが典型例である）は、エネルギー散逸（energy dissipation）の好例であり、また摩擦がない場合には有限の時間内に無限回の事象が起こる例ともなっている。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、衝突と摩擦がより深く扱われている。

解答例

STEP I 2013、第 11 問

力学 ・ 摩擦とつり合い

> **STEP I 2013、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q11

鍵となる考え方

2 本の糸は、水平方向に対してそれぞれ反対側に角 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ と α をなすので、互いに**垂直**（perpendicular）である。垂直な 2 つの力 $T\cos\beta$ と $T\sin\beta$ は、大きさ T で、1 つ目の力から β だけ回転した向きの 1 つの力に合成される。2 本の糸を、水平方向と角 $\alpha + \beta$ をなす大きさ T の 1 つの引く力に置き換えてしまえば、どちらの小問も短い演習問題になる。(i) では極限摩擦（limiting friction）を扱い、(ii) ではブロックが面からすっかり持ち上がってしまうことに気づけばよい。

解答

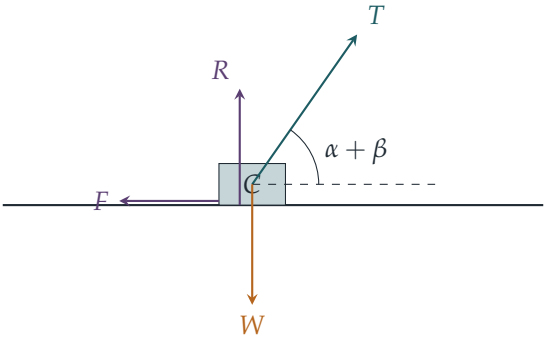
C を質点（particle）とみなし、糸は軽いとする。x 軸を水平で B の向きに、y 軸を鉛直上向きにとる。

張力の合力

糸 BC は x 軸の正の向きから上方に角 α の向きを指すので、その単位ベクトル（unit vector）は $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ である。糸 AC は x 軸の負の向きと角 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ をなすので、x 軸の正の向きに対して角 $\pi - (\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \frac{1}{2}\pi + \alpha$ の向きを指し、その単位ベクトルは $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$ である。これらは互いに垂直である。したがって、糸が引く力の合計は

$$\begin{aligned} T\cos\beta\,(\cos\alpha, \sin\alpha) + T\sin\beta\,(-\sin\alpha, \cos\alpha) &= T\big(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\ &\qquad \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\big) \\ &= T\big(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta)\big). \end{aligned}$$

となる。よって、2 本の糸は、水平方向から上方に角 $\alpha+\beta$ をなし B の側へ引く、大きさ T の 1 つの力とまったく同じようにはたらく。$0<\alpha+\beta<\frac{1}{2}\pi$ であるから、どちらの成分も正である。



小問 (i)

R を垂直抗力（normal reaction）、F を摩擦力（friction force）とする。摩擦力は（ブロックが静止しているならば）水平で B から遠ざかる向きにはたらく。釣り合い（equilibrium）の条件は

$$\begin{aligned}&\text{鉛直方向:}\quad R+T\sin(\alpha+\beta)=W, \qquad \text{よって} R=W-T\sin(\alpha+\beta),\\ &\text{水平方向:}\quad F=T\cos(\alpha+\beta).\end{aligned}$$

である。条件 $W>T\sin(\alpha+\beta)$ により $R>0$ となるので、ブロックは確かに面に押しつけられており、摩擦がはたらきうる。ブロックが静止したままであるのは、必要な摩擦力がその極限値を超えないとき、すなわち $F\le\mu R$ のときである：

$$T\cos(\alpha+\beta)\le\mu\big(W-T\sin(\alpha+\beta)\big).$$

ここで $\mu=\tan\lambda=\sin\lambda/\cos\lambda$ とおき、両辺に $\cos\lambda$ を掛ける。λ は鋭角なので、これは正である：

$$T\cos(\alpha+\beta)\cos\lambda\le W\sin\lambda-T\sin(\alpha+\beta)\sin\lambda.$$

移項して $\cos(P-Q)=\cos P\cos Q+\sin P\sin Q$ を用いると

$$W\sin\lambda\ge T\big(\cos(\alpha+\beta)\cos\lambda+\sin(\alpha+\beta)\sin\lambda\big)=T\cos(\alpha+\beta-\lambda),$$

となり、これが求める条件である。（どの段階も逆にたどれるので、実際には、ブロックが静止したままであるのはこれが成り立つとき、かつそのときに限る。）

? **考えてみよう** そもそもなぜ条件 $W>T\sin(\alpha+\beta)$ が必要なのだろうか。

この条件がなければ、鉛直方向の式から $R \leq 0$ となってしまう。面は押すことはできても引くことはできないので、負の R はありえない。ブロックは持ち上げられる（あるいはかろうじて触れているだけになる）ので、ブロックを支える摩擦ははたらかない。これはまさに小問 (ii) の状況である。

小問 (ii)

今度は $\alpha + \beta = 2\phi$ として $W = T\tan\phi$ であるから、$0 < \phi < \frac{1}{4}\pi$ である。重力と、糸が上向きに引く力を比べると

$$\begin{aligned} T\sin(\alpha+\beta) - W &= T\left(2\sin\phi\cos\phi - \tan\phi\right) \\ &= T\tan\phi\left(2\cos^2\phi - 1\right) \\ &= T\tan\phi\cos 2\phi > 0, \end{aligned}$$

となる。$0 < \phi < \frac{1}{4}\pi$ より $\tan\phi$ と $\cos 2\phi$ はともに正だからである。よって、糸が上に引く力は重力が下に引く力より大きい。もしブロックが面上にとどまるとすれば $R = W - T\sin(\alpha+\beta) < 0$ でなければならないが、これはありえない。したがって、ブロックはただちに面を離れる。すなわち $R = 0$ であり、接触がないので摩擦もはたらかない。

このとき、はたらく力は角 2ϕ の向きの引く力 T と重力だけである。合力（resultant force）は

$$\left(T\cos 2\phi,\ T\sin 2\phi - T\tan\phi\right) = \left(T\cos 2\phi,\ T\tan\phi\cos 2\phi\right) = \frac{T\cos 2\phi}{\cos\phi}\left(\cos\phi,\ \sin\phi\right),$$

である。ここで鉛直成分には上の計算を用いた。その大きさ $T\cos 2\phi/\cos\phi$ は正なので、合力はゼロではない。ブロックは静止状態から動き出すので、初期の加速度（acceleration）、したがって動き始める向きは合力の向きである。その向きは $(\cos\phi, \sin\phi)$、すなわち水平方向から上方に角 ϕ をなす（B の側への）向きであり、題意が示された。

検算

- $T = 10\,\mathrm{N}$、$\alpha = 20°$、$\beta = 40°$ とすると、$\phi = 30°$、$W = 10\tan 30° \approx 5.77\,\mathrm{N}$ である。上向きに引く力は $10\sin 60° \approx 8.66\,\mathrm{N} > W$ であり、合力は $(10\cos 60°,\ 8.66 - 5.77) = (5,\ 2.89)$、その角は $\arctan(2.89/5) = 30° = \phi$ となる。
- (i) において、$\lambda = \frac{1}{2}\pi$（無限に粗い面）とすると $W \geq T\sin(\alpha+\beta)$ となり、これはすでに成り立っているので、ブロックは決して滑らない。$\lambda \to 0$（なめらかな面）とすると $0 \geq T\cos(\alpha+\beta)$ となり、これは成り立たないので、なめらかな面ではブロックを支えられない。どちらも予想どおりである。

- (i) の条件は、α, β, T, W, μ を多数ランダムに選び、直接の判定 $F \leq \mu R$ と照らし合わせることで、コンピュータでも確認した。

よくある間違い

- 2 本の糸が垂直であることに気づいてまず合成する代わりに、それぞれの糸を別々に分解して、式変形の中で迷子になる。
- 小問 (ii) で $R = W - T\sin(\alpha + \beta)$ と書き、R が負になることに気づかずに摩擦の議論を続けてしまう。
- 静止状態から動き出す質点は、はじめ合力の向きに動くということの根拠を述べ忘れる。

STEP のその先へ

摩擦角（angle of friction）λ の考え方とは、垂直抗力と極限摩擦力を合成すると、法線と角 λ をなす 1 つの全抗力（total reaction）になるというものである。釣り合いが可能なのは、全抗力がこの「摩擦円錐」（cone of friction）の内部にありうるとき、かつそのときに限る。小問 (i) は、この主張を形を変えて述べたものであり、同じ描像によって 3 次元の摩擦や剛体（rigid body）の問題も扱うことができる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、摩擦、束縛、接触力を丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 2013、第 12 問

確率・統計 ・ 非復元抽出

> **STEP I 2013、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q12

鍵となる考え方

k 錠を「無作為に」選ぶとは、容器に残っている錠剤から作られる k 錠の組がどれも同様に確からしいということである。したがって、各日の確率は個数の比、すなわち条件を満たす選び方の数を $\binom{\text{残りの錠剤数}}{k}$ で割ったものになる。最終日についての問いでは、対称性（symmetry）が決め手となる。最終日のために残される錠剤は、1 日目に選ばれる錠剤とまったく同じように無作為なのである。(iii) では、各日がうまくつながる。うまくいった日の翌日には、容器の中はちょうど日数の短い休暇の場合と同じ状態になっているからである。

解答

以下では一貫して、錠剤は見た目が同じであっても区別できる（たとえば番号が付いている）ものと考える。こう考えても確率は変わらず、しかも N 錠から k 錠を選ぶ $\binom{N}{k}$ 通りの選び方がすべて同様に確からしくなる。

小問 (i)

$k = 3, n = 3$ のとき錠剤は 9 錠あり、各種類 3 錠ずつである。そこから 3 錠を選ぶ方法は $\binom{9}{3} = 84$ 通りである。各種類を 1 錠ずつ得るには、種類 1 の 3 錠から 1 錠、種類 2 の 3 錠から 1 錠、種類 3 の 3 錠から 1 錠を選べばよいので、$3^3 = 27$ 通りある。よって

$$\mathrm{P}(\text{1 日目に各種類 1 錠ずつ}) = \frac{27}{84} = \frac{9}{28},$$

となり、求める結果が得られる。

考えてみよう 最終日の確率を求めるのに、なぜ 1 日目と 2 日目に何が起こるかを追いかける必要がないのだろうか。

休暇の間に、9 錠の錠剤は無作為に 3 錠ずつの 3 つのグループに分けられる。1 日目のグループ、2 日目のグループ、そして 3 日目のグループ（残ったもの）である。グループを 1, 2, 3 の順に選んでも 3, 2, 1 の順に選んでも、得られる分布は同じである。錠剤をラベル付きの 3 つのグループに分ける方法はどれも同様に確からしいからである。特に、3 日目のために残される組は、1 日目に選ばれる組とまったく同様に、3 錠の組として一様（uniformly）に無作為である。したがって、最終日に各種類 1 錠ずつが残っている確率もまた

$$\frac{9}{28}.$$

である。

小問 (ii)

今度は錠剤が $3n$ 錠あり、各種類 n 錠ずつである。同様に確からしい選び方は $\binom{3n}{3}$ 通りあり、そのうち各種類を 1 錠ずつ含むものは n^3 通りである。よって

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(1\text{ 日目に各種類 }1\text{ 錠ずつ}) &= \frac{n^3}{\binom{3n}{3}} = \frac{6n^3}{3n(3n-1)(3n-2)} \\ &= \frac{2n^2}{(3n-1)(3n-2)}.\end{aligned}$$

$n = 3$ のとき、これは $\frac{18}{8\cdot 7} = \frac{9}{28}$ となり、(i) と一致する。

小問 (iii)

今度は $k = 2$ で、錠剤は $2n$ 錠あり、2 つの種類それぞれ n 錠ずつである。$m = n, n-1, \ldots, 1$ に対して、その日の始めに容器に各種類 m 錠ずつ入っている日に各種類を 1 錠ずつ選ぶという事象を G_m とする（したがって 1 日目は $m = n$ である）。

容器に各種類 m 錠ずつ入っているとき、2 錠の選び方は $\binom{2m}{2} = m(2m-1)$ 通りあり、そのうち各種類 1 錠ずつとなるものは $m \cdot m$ 通りである。よって

$$\mathrm{P}(\text{各種類 }1\text{ 錠ずつ} \mid m\text{ 錠ずつ残っている}) = \frac{m^2}{m(2m-1)} = \frac{m}{2m-1}.$$

それまでの日がすべてうまくいっていれば、各日にちょうど各種類 1 錠ずつが取り除かれているので、次の日は各種類 $m-1$ 錠ずつで始まる。条件付き確率（conditional probability）を 1 日ずつ掛け合わせると

$$\mathrm{P}(\text{毎日各種類 }1\text{ 錠ずつ}) = \prod_{m=1}^{n} \frac{m}{2m-1} = \frac{n!}{1\times 3\times 5\times \cdots \times (2n-1)}.$$

奇数の積を整理するために、分子と分母に偶数の積 $2\times 4\times\cdots\times(2n)=2^n\,n!$ を掛けると

$$1\times 3\times\cdots\times(2n-1)=\frac{(2n)!}{2^n\,n!}.$$

よって

$$\boxed{\mathrm{P}(\text{毎日各種類 1 錠ずつ})=\frac{2^n\,(n!)^2}{(2n)!}}$$

（検算として、$n=1$ のときは 1 となり、これは正しい。各種類 1 錠ずつしかなければ、両方を取るしかないからである。）

次に、$n!$ と $(2n)!$ にスターリングの近似（Stirling's approximation）を用いる。

$$(n!)^2\approx 2n\pi\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n},$$

$$(2n)!\approx\sqrt{4n\pi}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}=2\sqrt{n\pi}\,2^{2n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}.$$

因数 $(n/\mathrm{e})^{2n}$ が約分されて

$$\frac{2^n\,(n!)^2}{(2n)!}\approx\frac{2^n\cdot 2n\pi}{2\sqrt{n\pi}\,2^{2n}}=2^{-n}\,\frac{n\pi}{\sqrt{n\pi}}=2^{-n}\sqrt{n\pi},$$

が残り、これが求める近似である。

検算

- 錠剤の取り出し方をすべてコンピュータで数え上げると、(i) で 1 日目と 3 日目のいずれについても $\frac{9}{28}$ となること、$n\le 7$ に対して (ii) の公式、$n\le 4$ に対して (iii) の公式が正しいことが確かめられる。
- $n=10$ のとき、(iii) の正確な確率は $\frac{2^{10}(10!)^2}{20!}\approx 0.005542$ であり、一方 $2^{-10}\sqrt{10\pi}\approx 0.005474$ である。近似値は約 1.3% 小さい。n が大きくなるとこの比は 1 に近づく（$n=50$ では約 1.0025 である）。これはスターリングの近似から予想されるとおりである。
- (iii) の別の数え方：$2n$ 錠を n 組のペアの順序付きの列に分ける方法は $(2n)!/2^n$ 通りあり、どれも同様に確からしい。条件を満たす分け方は、種類 1 の錠剤と種類 2 の錠剤を日ごとにペアにするもので、$n!\times n!$ 通りある。その比はやはり $2^n(n!)^2/(2n)!$ である。

よくある間違い

- 錠剤を 1 錠ずつ取り出すと考えて $\frac{3}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{3}{7}$ と書いてしまう。これは種類 1, 2, 3 が**この順に**出る確率である。種類の出る順序は 3! 通りあるので、$6\times\frac{27}{504}=\frac{9}{28}$ とな

る。（あるいは、最初の錠剤は何でもよいので $1 \times \frac{6}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{28}$ となる。）

- 最終日の確率を求めるのに、1 日目に起こりうることすべてについて条件付けしようとする。それでも解けるが長くなり、対称性を使えば答えはすぐに得られる。
- $(2n)!$ にスターリングの近似を用いるとき、平方根の中も含めてすべての n を $2n$ に置き換える必要がある。$\sqrt{2(2n)\pi} = 2\sqrt{n\pi}$ であり、$\sqrt{2n\pi}$ ではない。

STEP のその先へ

(iii) の答えは $2^n / \binom{2n}{n}$ であり、評価式 $\binom{2n}{n} \approx 4^n / \sqrt{n\pi}$ は確率論のいたるところに現れる。これは単純ランダムウォーク（simple random walk）が $2n$ ステップ後に出発点に戻っている確率を与え、1 次元や 2 次元のそのようなランダムウォークが確率 1 で出発点に戻ることの証明の原動力となる。(i) の対称性の議論は**交換可能性**（exchangeability）という考え方である。すなわち、無作為な取り出しを行う順序を変えても、それらの同時分布（joint distribution）は変わらない。どちらの考え方も、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）や、Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）で展開されている。

解答例

STEP I 2013、第 13 問

確率・統計 ・ 数え上げと期待値

STEP I 2013、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/13-s1-q13

鍵となる考え方

数 $1, \ldots, 52$ は 26 個の互いに交わらない（disjoint）「相方の組」$\{k, 53-k\}$ に分かれる。そして捨てられる組とは、両方の要素を選んでしまった相方の組にほかならない。したがって、完全な組をちょうど k 組含む選び方を数えるには、まずどの組を完全な組にするかを選び、残りの枠を**異なる**組から来る数で埋めればよい。その際、各組でどちらの相方を取るかは自由に選べる。期待値（expectation）については、26 組にわたる線形性（linearity）を使えば手早く確かめられる。

解答

選び方を数える

整数を 26 組 $\{1,52\}, \{2,51\}, \ldots, \{26,27\}$ に分けて書く。1 から 52 までの二つの整数の和が 53 になるのは、それらがこれらの組の一つをなすときであり、そのときに限る。また、各整数はちょうど一つの組に属する。よって X は、選ばれた七つの数の中に両方の要素が含まれる組の個数である。$2X \leq 7$ であるから、X のとりうる値は $0, 1, 2, 3$ である。

$\binom{52}{7}$ 通りの選び方はすべて同様に確からしいので、$X = k$ となる選び方を数える。

- 完全な組を k 組選ぶ：$\binom{26}{k}$ 通り。これらで七つの数のうち $2k$ 個を使う。
- 残りの $7-2k$ 個の数は、残る $26-k$ 組のうちの**異なる** $7-2k$ 組から来なければならない（同じ組から二つ取ると、完全な組がもう一つできてしまう）：$\binom{26-k}{7-2k}$ 通り。
- それらの各組から、二つの要素のうち一方を取る：2^{7-2k} 通り。

$X = k$ となる各選び方は、この方法でちょうど一回ずつ現れるから、

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\binom{26}{k}\binom{26-k}{7-2k}\,2^{7-2k}}{\binom{52}{7}}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

具体的な数値

$$\begin{aligned}
X = 0: &\quad \binom{26}{7}2^7 = 657\,800 \times 128 = 84\,198\,400,\\
X = 1: &\quad 26\binom{25}{5}2^5 = 26 \times 53\,130 \times 32 = 44\,204\,160,\\
X = 2: &\quad \binom{26}{2}\binom{24}{3}2^3 = 325 \times 2024 \times 8 = 5\,262\,400,\\
X = 3: &\quad \binom{26}{3}\binom{23}{1}2 = 2600 \times 23 \times 2 = 119\,600,
\end{aligned}$$

であり、$\binom{52}{7} = 133\,784\,560$ である。これら四つの個数の和は確かに $\binom{52}{7}$ に等しく、数え漏れや重複がないことのよい確認になる。

考えてみよう 九桁の数を含む分数は、どうやって約分すればよいだろうか？

問題文の注がヒントである。分母は $5593 = 7 \times 17 \times 47$ になるはずだ。実際 $\binom{52}{7} = 23\,920 \times 5593$ であり、四つの個数はどれも 23 920 の倍数である：

$$\begin{aligned}
84\,198\,400 &= 3520 \times 23\,920, & 44\,204\,160 &= 1848 \times 23\,920,\\
5\,262\,400 &= 220 \times 23\,920, & 119\,600 &= 5 \times 23\,920.
\end{aligned}$$

よって X の分布（distribution）は

k	0	1	2	3
$\mathrm{P}(X = k)$	$\frac{3520}{5593}$	$\frac{1848}{5593}$	$\frac{220}{5593}$	$\frac{5}{5593}$

である（二番目は既約分数で表すと $\frac{264}{799}$ である）。そして当然ながら $3520 + 1848 + 220 + 5 = 5593$ となっている。

期待値

$$\mathrm{E}(X) = \frac{0 \times 3520 + 1 \times 1848 + 2 \times 220 + 3 \times 5}{5593} = \frac{2303}{5593}.$$

ここで $2303 = 7^2 \times 47$、$5593 = 7 \times 17 \times 47$ であるから、

$$\mathrm{E}(X) = \frac{7^2 \times 47}{7 \times 17 \times 47} = \frac{7}{17},$$

となり、示すべきことが示された。

期待値へのより速い道

$j = 1, \ldots, 26$ に対し、第 j 組の両方の要素が選ばれていれば $I_j = 1$、そうでなければ 0 と定める。すると $X = I_1 + \cdots + I_{26}$ である。ある組の両方の要素を選ぶと、残りの 50 個からさらに 5 個を選ぶことになるので、

$$\mathrm{P}(I_j = 1) = \frac{\binom{50}{5}}{\binom{52}{7}} = \frac{7 \times 6}{52 \times 51} = \frac{7}{442}.$$

期待値の線形性（これには独立性（independence）は必要ない。実際、I_j たちは互いに従属している）により、

$$\mathrm{E}(X) = 26 \times \frac{7}{442} = \frac{7}{17}.$$

検算

- 四つの確率の和は 1 であり、二つの方法は同じ $\mathrm{E}(X) = \frac{7}{17} \approx 0.412$ を与える。
- 無作為な選び方 300 000 回のコンピュータシミュレーションでは、$X = 0, 1, 2, 3$ の相対度数（relative frequency）はおよそ 0.630、0.329、0.039、0.001 となり、厳密な値 0.6294、0.3304、0.0393、0.0009 とよく合った。
- 妥当性の確認：$\mathrm{P}(X = 3)$ はごく小さい。七つの数だけで完全な組が三組できるのだから、そうなるはずである。

よくある間違い

- $X = 0$ となる選び方の数を、$\binom{52}{7}$ から何かを大ざっぱに引いたものとしたり、$\binom{26}{7}$ だけとしたりして、各組のどちらの要素を取るかに対応する因数 2^7 を忘れる。
- $X = 1$ のとき、残りの五つの数の選び方を $\binom{50}{5}$ とする。これでは二つ目の完全な組ができる場合も含まれてしまい、数えすぎになる。

STEP のその先へ

個数を指示変数（indicator variable）の和として表し、期待値の線形性を使うのは、大学一年次の確率論で最も役に立つ技法の一つである。分布を求めるのが絶望的な場合でも、期待値は求められるのだ。今回は分布全体を求めることができたが、たとえば無作為な置換（permutation）の不動点（fixed point）の個数の期待値などでは、指示変数を使うのが自然な入り口となる。Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）は、この考え方を何度も繰り返し用いている。

解答例

STEP II 2013、第 1 問

純粋数学 • 対数関数の弦

> **STEP II 2013、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q1

この問題は、*Beyond STEP* の第 3.5 節「π^e か e^π か？」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch03/pi-e-or-e-pi.html

鍵となる考え方

ここで扱う不等式はどれも、p^q と q^p の比較である。対数（logarithm）をとって pq で割れば、これは $\frac{\ln p}{p}$ と $\frac{\ln q}{q}$ の比較になる。そして $\frac{\ln x}{x}$ は、原点と曲線上の点 $(x, \ln x)$ を結ぶ直線の傾き（gradient）である。したがって、すべては $y = \ln x$ と交わる直線や弦の問題に帰着する。必要な事実は、この曲線が上に凸（concave、下向きに曲がっている）であることと、原点から引いた接線が $x = \mathrm{e}$ で曲線に接することである。

解答

小問 (i)

$y = mx$ が $y = \ln x$ に $x = x_0$ で接するとする。傾きが一致し、かつ 2 曲線が交わるから、

$$m = \frac{1}{x_0}, \qquad mx_0 = \ln x_0.$$

第 1 式より $mx_0 = 1$ であるから、$\ln x_0 = 1$、$x_0 = \mathrm{e}$ であり、

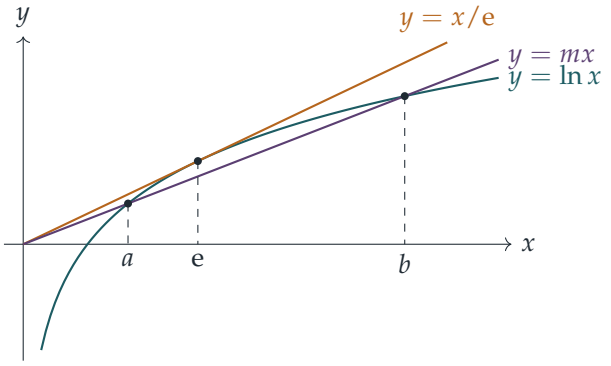
$$m = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

次に、$y = mx$ が曲線と $x = a$ および $x = b$ で交わるとする。このとき $\ln a = ma$ かつ

$\ln b = mb$ であるから、（$a, b > 0$ より）

$$\frac{\ln a}{a} = m = \frac{\ln b}{b} \implies b\ln a = a\ln b \implies \ln\left(a^b\right) = \ln(b^a),$$

となる。ln は単射（one-to-one）であるから、$a^b = b^a$ が成り立ち、示すべきことが示された。



図の概形について述べる。$m \le 0$ ならば $\ln x - mx$ は狭義単調増加であるから、直線と曲線は高々 1 回しか交わらない。$m \ge \frac{1}{\mathrm{e}}$ ならば、$x > 0$ において直線は接線そのものであるかその上側にあり、上に凸な曲線は接線 $y = x/\mathrm{e}$ の下側にあって e でのみ接するから、やはり交点は 2 つにならない。よって $0 < m < \frac{1}{\mathrm{e}}$ であり、図のように直線 $y = mx$ は接線の下側にある。$x = \mathrm{e}$ において曲線の高さは 1、直線の高さは $m\mathrm{e} < 1$ であるから、そこでは曲線が直線の上側にある。曲線は上に凸で直線はまっすぐであるから、$\ln x - mx$ は上に凸である。したがって、これが正となる範囲はひとつの区間であり、その両端が 2 つの交点 a と b である。この区間は e を含むから、$a < \mathrm{e} < b$ である。

小問 (ii)

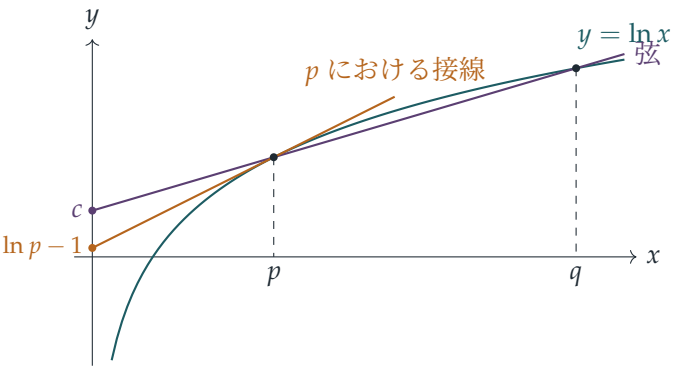
ここでは $0 < p < q$ として $\ln p = mp + c$、$\ln q = mq + c$ である。それぞれ p と q で割ると、

$$\frac{\ln p}{p} = m + \frac{c}{p}, \qquad \frac{\ln q}{q} = m + \frac{c}{q}.$$

$c > 0$ かつ $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$ であるから $\frac{c}{p} > \frac{c}{q}$ となり、$\frac{\ln p}{p} > \frac{\ln q}{q}$ を得る。両辺に $pq > 0$ を掛けると $q\ln p > p\ln q$、すなわち $\ln(p^q) > \ln(q^p)$ となり、したがって $p^q > q^p$ である。

図で見ると、原点から $(p, \ln p)$ および $(q, \ln q)$ へ引いた直線の傾きはそれぞれ $\frac{\ln p}{p}$ と $\frac{\ln q}{q}$ である。弦（chord）が原点より上で y 軸と交わるならば、近いほうの点へ O から引いた直線のほうが傾きが急になる。（c の符号によって不等式の向きが決まる。このことは小問 (iv) で再び用いる。）

小問 (iii)



$P=(p,\ln p)$ と $Q=(q,\ln q)$ を通る弦の傾きを s、y 切片（intercept）を c とすると、$c=\ln p-sp$ である。曲線は上に凸であるから、P からそれより右の点へ引いた弦は、P における接線（tangent）よりも傾きが緩やかである。よって

$$s<\frac{1}{p}.$$

（あるいは平均値の定理（mean value theorem）により、ある $\xi\in(p,q)$ に対して $s=\frac{1}{\xi}$ であり、$\frac{1}{\xi}<\frac{1}{p}$ である。）P における接線は $y=\ln p+\frac{1}{p}(x-p)$ であり、これは y 軸と $\ln p-1$ で交わる。弦と接線はともに P を通り、弦のほうが傾きが緩やかである。したがって、P から左へ $x=0$ まで進むと、弦は接線より上側にある：

$$c=\ln p-sp>\ln p-1\geq 0,$$

ここで最後の段階では $p\geq \mathrm{e}$ を用いた。よって、弦は y 軸と正の y の値で交わる。

考えてみよう このことから、π^{e} と e^{π} の大小はどう決まるか？

$p=\mathrm{e}$、$q=\pi$ とすると、これらは $\mathrm{e}\leq p<q$ を満たす。弦は $c>0$ を満たすから、小問 (ii) が適用でき、$p^q>q^p$ すなわち

$$\mathrm{e}^{\pi}>\pi^{\mathrm{e}}.$$

小問 (iv)

今度は $(p,\ln p)$ と $(q,\ln q)$ を通る弦の傾きが $\frac{1}{\mathrm{e}}$ であるから、弦は $y=\frac{x}{\mathrm{e}}+c$ であり、

$$c=\ln p-\frac{p}{\mathrm{e}}.$$

直線 $y=\frac{x}{\mathrm{e}}$ は小問 (i) で求めた $x=\mathrm{e}$ における接線であり、上に凸な曲線はその上または下側にある：$\ln x\leq\frac{x}{\mathrm{e}}$ であり、等号は $x=\mathrm{e}$ のときに限る。よって $c\leq 0$ であり、

$c = 0$ となるのは $p = \mathrm{e}$ のときに限る。しかし $c = 0$ ならば弦は接線そのものとなり、接線は曲線と e でしか交わらないから、2 点 $p < q$ で交わることはない。したがって

$$c < 0.$$

弦は接線に平行で、その下側にある。ここで、符号を逆にして小問 (ii) の議論を繰り返す：

$$\frac{\ln p}{p} = \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{c}{p}, \qquad \frac{\ln q}{q} = \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{c}{q}.$$

$c < 0$ かつ $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$ であるから $\frac{c}{p} < \frac{c}{q}$ となり、$\frac{\ln p}{p} < \frac{\ln q}{q}$ を得る。両辺に $pq > 0$ を掛けると $q \ln p < p \ln q$ となり、したがって

$$q^p > p^q.$$

（小問 (i) と同様に、ここでも上に凸であることから $p < \mathrm{e} < q$ が従うが、この議論にはそれは必要ない。）

検算

- $\mathrm{e}^\pi \approx 23.14$、$\pi^\mathrm{e} \approx 22.46$ であり、小問 (iii) と矛盾しない。
- 小問 (i)：組 $a = 2$、$b = 4$ は $2^4 = 4^2$ を満たし、実際 $\frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 4}{4}$ かつ $2 < \mathrm{e} < 4$ である。
- 小問 (iv)：$p = 1$ とすると、弦の傾きの条件 $\frac{\ln q}{q-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$ より $q \approx 5.76$ である。このとき $q^p \approx 5.76 > 1 = p^q$ となる。
- 小問 (ii) と (iii) は、多数のランダムな弦についてコンピュータで確かめることでも確認した。

よくある間違い

- $q \ln p > p \ln q$ の向きを逆にしてしまう。pq を掛ける前に、$\frac{\ln p}{p} > \frac{\ln q}{q}$ をはっきり書き出すこと。
- 小問 (iii) で、切片が正である理由を説明せずに「曲線は上に凸である」で止めてしまう。p における接線は軸と $\ln p - 1 \geq 0$ で交わり、弦はその上側で軸と交わる。
- 小問 (iv) で、$c = 0$ の場合を除外し忘れる。これは狭義の不等式を得るために必要である。

STEP のその先へ

関数 $\frac{\ln x}{x}$ は e で最大値をとり、これが有名な組 $2^4 = 4^2$ の説明となる。$x \neq y$ である $x^y = y^x$ の正の解は 1 本の曲線をなし、$x = t^{1/(t-1)}$、$y = t^{t/(t-1)}$ とパラメータ表示（parametrise）できる。より一般に、「上に凸な関数の弦は曲線の下側、接線の上側にある」というのは凸性（convexity）の基本的な不等式である。これはイェンセンの不等式（Jensen's inequality）や相加相乗平均の不等式（AM–GM inequality）の根底にある。Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は、平均値の定理と凸関数を丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 2013、第 2 問

純粋数学 ・ 漸化式による積分

> **STEP II 2013、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q2

鍵となる考え方

被積分関数（integrand）$x^n(1-x)^n$ は鏡映 $x \mapsto 1-x$ に関して対称（symmetric）であり、この対称性のおかげで x と $1-x$ の役割を労せずに入れ替えることができる。そのうえで部分積分（integration by parts）によって x の累乗を $1-x$ の累乗と交換し、恒等式 $x+(1-x)=1$ を用いて積をすでに知っている積分へと分解し直す。これらを組み合わせると漸化式（reduction formula）が得られ、それをたどっていくと整数の n に対しては階乗（factorial）が現れ、さらに半整数（half-integer）に対しても同じ式が使える。

解答

小問 (i)

$n \geq 1$ に対して $J_n = \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^n \,\mathrm{d}x$ とおく。$u = 1-x$ と置換（substitution）すると $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$ であり、積分区間の端 $0, 1$ は $1, 0$ になる：

$$J_n = \int_1^0 (1-u)^{n-1}u^n\,(-\mathrm{d}u) = \int_0^1 u^n(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u,$$

これが求める等式である（積分変数（dummy variable）の名前は何でもよい）。

J_n の二つの等しい表示を足し合わせると、

$$\begin{aligned} 2J_n &= \int_0^1 \left[x^{n-1}(1-x)^n + x^n(1-x)^{n-1}\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n-1}\left[(1-x)+x\right]\mathrm{d}x = I_{n-1}. \end{aligned}$$

次に、$u = x^n$、$\mathrm{d}v = (1-x)^n\,\mathrm{d}x$ として I_n を部分積分する。このとき $v = -\dfrac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$ である：

$$I_n = \Big[-\frac{x^n(1-x)^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1 + \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n+1}\,\mathrm{d}x.$$

境界項（boundary term）は両端で 0 になる。$x=1$ では $(1-x)^{n+1}$ があるから、$x=0$ では $n \geq 1$ のもとで x^n があるからである。よって問題文の式

$$I_n = \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n+1}\,\mathrm{d}x.$$

が得られる。

考えてみよう この積分から I_n と I_{n-1} に戻るにはどうすればよいか？

$1-x$ の因数を一つ切り離し、それを文字どおり $1-x$ として書く：

$$x^{n-1}(1-x)^{n+1} = x^{n-1}(1-x)^n\,(1-x) = x^{n-1}(1-x)^n - x^n(1-x)^n.$$

積分すると、上の結果を用いて右辺は $J_n - I_n = \frac{1}{2}I_{n-1} - I_n$ となる。したがって

$$I_n = \frac{n}{n+1}\Big(\tfrac{1}{2}I_{n-1} - I_n\Big) \quad\Longrightarrow\quad I_n \cdot \frac{2n+1}{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}I_{n-1},$$

であり、両辺に $\dfrac{n+1}{2n+1}$ を掛けると、

$$I_n = \frac{n}{2(2n+1)}\,I_{n-1},$$

となって、求める式が得られる。この議論のどこにも n が整数であることは使われていない点に注意しよう。必要だったのは $n \geq 1$ だけである（境界項のため、そしてすべての被積分関数が $[0,1]$ 上で連続であるため）。このことを小問 (iii) で用いる。

小問 (ii)

$I_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ を数学的帰納法（induction）で証明する。出発点は $n=0$ で、$I_0 = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1 = \dfrac{(0!)^2}{1!}$ である。$n \geq 1$ として、$n-1$ に対して式が成り立つと仮定する。すると小問 (i) より

$$\begin{aligned} I_n = \frac{n}{2(2n+1)} \cdot \frac{\big((n-1)!\big)^2}{(2n-1)!} &= \frac{n^2\big((n-1)!\big)^2}{2n(2n+1)(2n-1)!} \\ &= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}, \end{aligned}$$

ここで分子と分母に n を掛け、$2n(2n+1)(2n-1)! = (2n+1)!$ を用いた。これで帰納法が完結し、式はすべての正の整数 n（および $n=0$）に対して成り立つ。

小問 (iii)

$x = \sin^2\theta$ とおくと $\mathrm{d}x = 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$ であり、θ は 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで動く。この区間では $\sin\theta$ と $\cos\theta$ は非負であるから、

$$\big(x(1-x)\big)^{1/2} = \big(\sin^2\theta\cos^2\theta\big)^{1/2} = \sin\theta\cos\theta.$$

考えてみよう ここでなぜ $\sin\theta\cos\theta \geq 0$ が必要なのか？

$\sqrt{t^2} = |t|$ であって t ではないからである。$[0, \frac{\pi}{2}]$ 上では絶対値をそのまま外してよい。よって

$$\begin{aligned} I_{\frac{1}{2}} &= \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{4}\big(1-\cos 4\theta\big)\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{4}\Big[\theta - \tfrac{1}{4}\sin 4\theta\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

$I_{\frac{3}{2}}$ については、小問 (i) の漸化式を $n = \frac{3}{2}$ として用いる。$\frac{3}{2} \geq 1$ であり、導出のどこでも n が整数である必要はなかったので、これは許される：

$$I_{\frac{3}{2}} = \frac{3/2}{2\cdot 4} I_{\frac{1}{2}} = \frac{3}{16}\cdot\frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{128}.$$

確認として、同じ置換を使うと直接

$$I_{\frac{3}{2}} = \int_0^{\pi/2} 2\sin^4\theta\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \sin^4 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{8}\cdot\frac{3\pi}{16} = \frac{3\pi}{128},$$

が得られる。ここで $\sin^4\phi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\phi + \frac{1}{8}\cos 4\phi$ を用いた。

検算

- $I_1 = \int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$ であり、公式からも $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$ が得られる。同様に $I_2 = \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30} = \frac{4}{5!}$ である。
- $I_{\frac{1}{2}}$ は半径 $\frac{1}{2}$ の半円（semicircle）$y = \sqrt{\frac{1}{4} - (x-\frac{1}{2})^2}$ の下の面積であり、これは $\frac{1}{2}\pi\big(\frac{1}{2}\big)^2 = \frac{\pi}{8}$ である。
- 数値的には $I_{\frac{3}{2}} \approx 0.073631$ であり、$3\pi/128$ と一致する。また漸化式は、$n = 2.7$ のような整数でない n についてもコンピュータで確認した。

よくある間違い

- 部分積分の境界項が 0 になること、特に $x = 0$ での確認を忘れる。

- $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上での符号に触れずに $\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta} = \sin\theta\cos\theta$ と書いてしまう。
- 整数に対してしか証明されていない小問 (ii) の階乗の公式から $I_{\frac{3}{2}}$ を計算してしまう。漸化式を使うのが安全な道である。

STEP のその先へ

I_n はベータ関数（beta function）$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$ の特別な場合であり、ここでは $I_n = B(n+1, n+1)$ である。そして小問 (ii) は $B(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ の整数の場合にあたる。この恒等式に $n = \frac{1}{2}$ を代入すると $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ が得られ、これこそが小問 (iii) に π が現れるより深い理由である。このような積分は、統計学におけるベータ分布（beta distribution）や π に関するウォリス（Wallis）の積の背後にある。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、同じ趣旨の漸化式の問題がさらに収められている。

解答例

STEP II 2013、第 3 問

純粋数学 • 3 次式の根

> **STEP II 2013、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q3

鍵となる考え方

すべては、最高次の係数（leading coefficient）が正で、相異なる 3 つの実数解をもつ三次関数（cubic）のグラフの形から導かれる。そのグラフは $-\infty$ から上昇し、軸を下から上へ横切り、再び下がり、そしてもう一度下から上へ軸を横切る。値 $f(0) = c$ によって 0 が解に対してどこに位置するかがわかり、極値点（turning points）（二次方程式 $f'(x) = 0$ の解）はその和と積によって特定できる。最後の小問は、極値点についての条件だけでは、曲線が実際に軸と 3 回交わることを保証できないことを思い出させてくれる。

解答

以下、全体を通して

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + c, \qquad f'(x) = 3\big(x^2 + 2ax + b\big).$$

とおく。$f(x) = 0$ が相異なる 3 つの実数解 $\alpha < \beta < \gamma$ をもつとき、$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ と書けるので、3 つの因数の符号を読み取ると

$$f(x) < 0 \text{ となるのは} (-\infty, \alpha) \cup (\beta, \gamma), \qquad f(x) > 0 \text{ となるのは} (\alpha, \beta) \cup (\gamma, \infty).$$

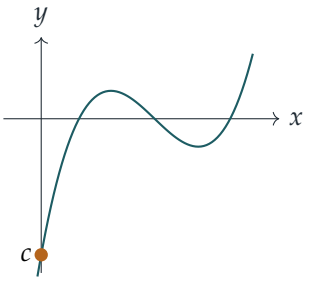
である。また、ロルの定理（Rolle's theorem）により、f' は (α, β) に零点をもち、(β, γ) にももう 1 つ零点をもつ。f' は二次式なので、これ以外の零点はない。よって極値点は $p < q$ で、

$$\alpha < p < \beta < q < \gamma.$$

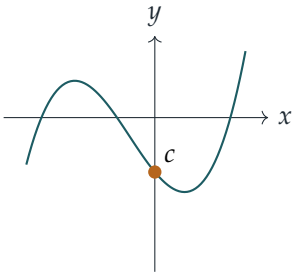
を満たす。

小問 (i)

曲線 $y = f(x)$ は y 軸と $(0, c)$ で交わり、$c < 0$ なのでこの点は x 軸より下にある。上の符号の様子から、$f(0) < 0$ であることは、$0 < \alpha$ または $\beta < 0 < \gamma$ のいずれかであることを意味する。これらが下の 2 つの図である。



3 つの解がすべて正



ちょうど 1 つの解が正

$0 < \alpha$ ならば、3 つの解はすべて正である。$\beta < 0 < \gamma$ ならば $\alpha < \beta < 0$ なので、ちょうど 1 つの解（γ）が正である。$f(0) = c \neq 0$ なので、0 となる解はない。したがって、ちょうど 1 つの解が正であるか、3 つすべてが正であるかのいずれかであり、題意は示された。

小問 (ii)

ここでは $0 < \alpha < \beta < \gamma$ である。

c の符号。 $0 < \alpha$ なので、点 0 は $f < 0$ となる区間 $(-\infty, \alpha)$ に含まれる。よって $c = f(0) < 0$ である。

極値点。 方程式 $x^2 + 2ax + b = 0$ は相異なる 2 つの実数解 p と q をもつので、その判別式（discriminant）は正である：

$$4a^2 - 4b > 0 \quad \Longrightarrow \quad a^2 > b.$$

$p > \alpha > 0$ かつ $q > p$ なので、2 つの極値点はどちらも正である。二次式 $x^2 + 2ax + b$ について、解の和と積は

$$p + q = -2a, \qquad pq = b.$$

である。$p, q > 0$ なので $-2a > 0$、すなわち $a < 0$ であり、$b = pq > 0$ である。これらをまとめると

$$a^2 > b > 0, \qquad a < 0, \qquad c < 0,$$

となり、これが $(*)$ である。

($a<0$、$b>0$、$c<0$ は解から直接得ることもできる。$\alpha+\beta+\gamma=-3a$、$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3b$、$\alpha\beta\gamma=-c$ はいずれも正だからである。しかし $a^2>b$ を示すには、やはり極値点が必要である。)

小問 (iii)

ここでは $c=f(0)>0$ なので、0 は $f>0$ となる2つの区間 (α,β) または (γ,∞) のいずれかに含まれる。これにより2通りの図の候補が得られる。$\alpha<0<\beta<\gamma$(負の解が1つ、正の解が2つ)か、$\alpha<\beta<\gamma<0$(3つすべて負)のいずれかである。

考えてみよう 条件 $ab<0$ によって、これらのうち一方をどのように排除できるだろうか?

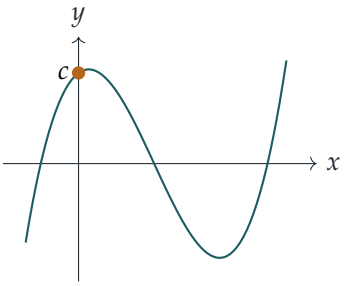
再び極値点に注目する。仮に3つの解がすべて負であるとすると、$p<q<\gamma<0$ となるので、2つの極値点はどちらも負になる。すると

$$-2a=p+q<0 \quad \text{かつ} \quad b=pq>0,$$

となるので $a>0$ かつ $b>0$ であり、$ab>0$ となる。これは $ab<0$ に矛盾する。したがって2つ目の図はありえず、

$$\alpha<0<\beta<\gamma:$$

1つの解が負で、残りの2つは正である。



この場合は実際に起こりうる。たとえば、解 -1、2、5 からは $x^3-6x^2+3x+10$ が得られ、$a=-2$、$b=1$、$c=10$ となり、$ab=-2<0$ かつ $c>0$ である。これが上に描いた曲線である。

小問 (iv)

考えてみよう 三次関数が 3 つの実数解をもつためには、$(*)$ に加えてどのような条件が必要だろうか？

条件 $(*)$ が制御しているのは、極値点と $f(0)$ の符号だけである。3 つの実数解をもつためには、さらに極大値（local maximum）が軸より上になければならない。そこで、a と b を 2 つの正の極値点が得られるように選び、そのうえで c を十分に負にして極大値を軸より下に引き下げればよい。

$a=-1$、$b=\frac{3}{4}$ とすると

$$f'(x)=3\left(x^2-2x+\tfrac{3}{4}\right)=3\left(x-\tfrac{1}{2}\right)\left(x-\tfrac{3}{2}\right).$$

となる。極大となるのは $x=\frac{1}{2}$ においてであり、そこでは

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1}{8}-\tfrac{3}{4}+\tfrac{9}{8}+c=\tfrac{1}{2}+c.$$

である。$c=-1$ と選ぶ。すると方程式は

$$x^3-3x^2+\tfrac{9}{4}x-1=0 \qquad \left(a=-1,\ b=\tfrac{3}{4},\ c=-1\right),$$

となり、$a^2=1>\frac{3}{4}=b>0$、$a<0$、$c<0$ なので $(*)$ が成り立つ。

次に解の個数を数える。f は $(-\infty,\frac{1}{2}]$ で増加するので、そこでは $f(x)\le f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}<0$ である。$[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ では f は減少するので、$-\frac{1}{2}$ より下にとどまる。$[\frac{3}{2},\infty)$ では f は $f(\frac{3}{2})=-1$ から $+\infty$ まで増加するので、軸をちょうど 1 回横切る。したがって実数解はちょうど 1 つである（$f(2)=-\frac{1}{2}$、$f(3)=\frac{23}{4}$ なので、その解は 2 と 3 の間にある）。

検算

- 三次式 $(x-1)(x-2)(x-3)=x^3-6x^2+11x-6$ は $a=-2$、$b=\frac{11}{3}$、$c=-6$ であり、小問 (ii) の予測どおり、確かに $a^2=4>\frac{11}{3}>0$ である。
- 曲線を $x\mapsto -x$ で折り返すと、解 α,β,γ は $-\alpha,-\beta,-\gamma$ に移り、a と c の符号は変わるが b の符号は変わらない。よって ab と c はどちらも符号を変え、小問 (i) の鏡像から、$c>0$ のときは、ちょうど 1 つの解が負であるか、3 つすべてが負であるかのいずれかとなる。これはまさに、小問 (iii) で出発点とした 2 つの図である。
- 小問 (iv) における唯一の実数解は $x\approx 2.178$ である。相異なる 3 つの実数解をもつ数千個のランダムな三次式をコンピュータで調べた結果も、小問 (i)〜(iii) と一致した。

よくある間違い

- 解の符号だけから $a^2 > b$ を証明しようとすること。この不等式は、極値点が実数で相異なることから得られる。
- $(*)$ が 3 つの正の解をもつことと**同値**（equivalent）であると思い込むこと。小問 (iv) は、それが必要条件（necessary condition）にすぎず、十分条件（sufficient condition）ではないことを示している。
- 小問 (iv) で、極小値（local minimum）は負になるが極大値はまだ正であるように c を選んでしまうこと。そうすると解は 1 つではなく 3 つになる。

STEP のその先へ

ここでの符号に関する議論は、一般的な理論の入り口である。デカルトの符号法則（Descartes' rule of signs）は、正の解の個数を係数の符号の変化の回数で上から抑え、スツルムの定理（Sturm's theorem）は区間内の実数解の個数を正確に数える。三次式の場合、小問 (iv) で欠けていた条件は判別式の符号であり、判別式は（正の因数を除いて）極値点における値の積 $-f(p)f(q)$ に等しい。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は、大学 1 年次の水準で多項式とその解を論じている。

解答例

STEP II 2013、第 4 問

純粋数学 • 弦の中点の軌跡

> **STEP II 2013、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q4

鍵となる考え方

弦（chord）の中点（midpoint）は、弦の端点を求めなくても求められる。P と Q の x 座標は二次方程式の解であり、その平均は最初の 2 つの係数の比の半分に負号をつけたものである。その後は、それぞれの軌跡（locus）はパラメータ（parameter）を消去するだけの問題になる。どの答えも幾何学で説明がつく。円の中心から弦の中点へ引いた直線は、その弦に垂直である。

解答

M の座標

直線は $y = b(x - a)$ である。これを $x^2 + y^2 = 1$ に代入すると

$$(1 + b^2)x^2 - 2ab^2x + a^2b^2 - 1 = 0.$$

を得る。この方程式の解は P, Q の x 座標 x_P, x_Q であるから、解と係数の関係（sum of the roots）より

$$x_M = \tfrac{1}{2}(x_P + x_Q) = \frac{ab^2}{1 + b^2}.$$

である。M は直線上にあるから $y_M = b(x_M - a) = b \cdot \dfrac{ab^2 - a - ab^2}{1 + b^2}$ となり、

$$M = \left(\frac{ab^2}{1 + b^2}, -\frac{ab}{1 + b^2} \right).$$

である。P と Q が存在して相異なるためには、判別式（discriminant）が正でなければならない：

$$4a^2b^4 - 4(1+b^2)(a^2b^2-1) = 4\big(1+b^2-a^2b^2\big) > 0 \iff a^2b^2 < 1+b^2.$$

（これは、O から直線までの距離 $|ab|/\sqrt{1+b^2}$ が 1 より小さいということである。）この条件はどの小問でも必要になる。

小問 (i)

$b>0$ を固定すると、

$$-by_M = -b\cdot\left(-\frac{ab}{1+b^2}\right) = \frac{ab^2}{1+b^2} = x_M,$$

となるので、軌跡上のすべての点で $x=-by$ が成り立ち、これが示すべきことであった。これは O を通り傾き $-1/b$ の直線であり、鍵となる考え方から予想されるとおり、弦に垂直である。

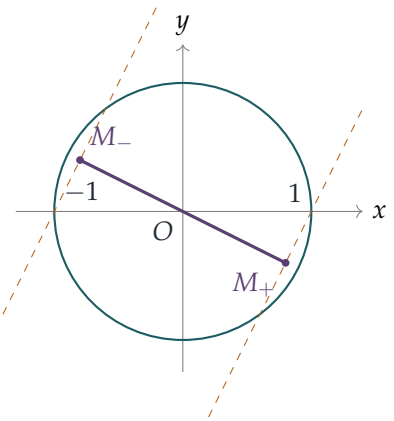
$-1\le a\le 1$ ならば $a^2b^2\le b^2<1+b^2$ であるから、直線はつねに円と 2 点で交わり、そのようなすべての a に対して M が定まる。M の座標はどちらも a の定数倍であるから、a が $[-1,1]$ を動くとき、点 M は直線 $x=-by$ 上を、$a=-1$ に対応する点から $a=1$ に対応する点まで一様に動く。したがって軌跡は次の 2 点を結ぶ線分である：

$$M_\pm = \pm\left(\frac{b^2}{1+b^2}, -\frac{b}{1+b^2}\right),$$

その長さは

$$2\,\frac{\sqrt{b^4+b^2}}{1+b^2} = \frac{2b\sqrt{1+b^2}}{1+b^2} = \frac{2b}{(1+b^2)^{1/2}},$$

である。ここで b^2 の平方根をとる際に $b>0$ を用いた。これが求める長さである。この線分の中点は O であり、端点 M_+ は $(1,0)$ を通る弦の中点、M_- は $(-1,0)$ を通る弦の中点である。図は $b=2$ の場合で、このとき端点は $\pm(\frac{4}{5},-\frac{2}{5})$ である。



破線は両端の弦であり、$(\pm 1, 0)$ を通り傾きは 2 である。

小問 (ii)(a)

今度は $0 < a < 1$ として a を固定する。すると $a^2b^2 < b^2 < 1 + b^2$ であるから、$A = (a, 0)$ を通るどの直線も円と 2 点で交わる。M の式から

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2b^4 + a^2b^2}{(1+b^2)^2} = \frac{a^2b^2}{1+b^2} = a \cdot \frac{ab^2}{1+b^2} = ax.$$

である。よって M は

$$x^2 + y^2 - ax = 0, \quad \text{すなわち} \quad \left(x - \tfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\tfrac{a}{2}\right)^2,$$

で表される、中心 $(\frac{a}{2}, 0)$、半径 $\frac{a}{2}$ の円、つまり OA を直径とする円の上にある。

考えてみよう この円全体が描かれるだろうか？

完全にではない。$x = ab^2/(1+b^2) = a - a/(1+b^2)$ であるから、つねに $0 \le x < a$ となり、点 $A = (a, 0)$ そのものには決して到達しない。そこに到達するには A を通る鉛直な直線が必要だが、その直線には傾きがない。それ以外の点にはすべて到達する。実際、$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ として $b = \tan\theta$ とおくと

$$M = \left(a\sin^2\theta,\ -a\sin\theta\cos\theta\right) = \left(\tfrac{a}{2} - \tfrac{a}{2}\cos 2\theta,\ -\tfrac{a}{2}\sin 2\theta\right),$$

となり、2θ が $(-\pi, \pi)$ を動くとき、これは $2\theta = \pm\pi$ に対応する点、すなわち A を除いて円をちょうど 1 周する。よって軌跡は、OA を直径とする円から 1 点 A を除いたものである。幾何学的には、OM は弦 AM に垂直なので $\angle OMA$ は直角であり、M は OA を直径とする円の上にある（$b = 0$ のときは $M = O$ である）。この円は単位円（unit circle）の内部にある。

小問 (ii)(b)

今度は $0 < b \le 1$ として $a = 1/b$ とする。条件 $a^2b^2 < 1 + b^2$ は $1 < 1 + b^2$ となり、これは成り立つ。直線は $y = b(x - 1/b) = bx - 1$ であるから、つねに単位円上の点 $B = (0, -1)$ を通る。したがって B はつねに P, Q のいずれかである。公式より

$$M = \left(\frac{b}{1+b^2},\ -\frac{1}{1+b^2}\right), \qquad x^2 + y^2 = \frac{b^2+1}{(1+b^2)^2} = \frac{1}{1+b^2} = -y.$$

である。よって M は

$$x^2 + y^2 + y = 0, \quad \text{すなわち} \quad x^2 + \left(y + \tfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2,$$

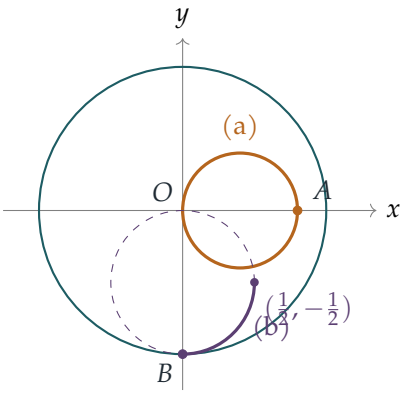
で表される、中心 $(0, -\frac{1}{2})$、半径 $\frac{1}{2}$ の円、つまり OB を直径とする円の上にある（理由は (a) と同じく直角による）。

今回は円の一部しか描かれない。$b = \tan\theta, 0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$ とおくと

$$M = \left(\tfrac{1}{2}\sin 2\theta,\ -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta\right),$$

であり、2θ は $(0, \frac{\pi}{2}]$ を動く。よって軌跡は円の 4 分の 1、すなわち $B = (0,-1)$（含まない。$b = 0$ が必要になるため）から反時計回りに $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$（含む。$b = 1, a = 1$ から得られる）までの弧である。この弧の上では $0 < x \leq \frac{1}{2}$ かつ $-1 < y \leq -\frac{1}{2}$ である。

図は、(a) で $a = 0.8$ とした場合の両方の軌跡を単位円とともに示したものである。白丸は (a) で除かれる点 A と、(b) で除かれる端点 B を表す。



(b) では実線の弧が軌跡であり、小さい円の残りの破線部分には到達しない。

検算

- $a = 0$ のとき直線は O を通るので弦は直径であり、M は O になるはずである。実際、公式は $(0,0)$ を与える。
- (i) で $b = 1$ のとき、$(1,0)$ を通り傾き 1 の弦は $(1,0)$ と $(0,-1)$ を結び、その中点は $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ で、M_+ と一致する。このとき線分の長さは、公式どおり $\sqrt{2} = 2/\sqrt{2}$ である。
- 同じ弦は (ii)(b) の弧の $b = 1$ 側の端に対応し、$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ は $x^2 + y^2 + y = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$ を満たす。
- (ii)(a) で $b = 1$ とすると $M = (\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$ となり、これは OA を直径とする円の最下点である。45° の傾きをもつ弦であれば当然そうなるはずである。

よくある間違い

- 二次方程式の解の公式を使って P と Q を具体的に求めてしまう。それでも解けるが、解の和を使えば M は 1 行で求まる。
- (ii)(a) や (ii)(b) で円全体が軌跡だと主張してしまう。パラメータが実際にとる値と、それらが与える点をつねに確認すること。
- 直線が実際に円と交わることの確認を忘れる。(i) でも (ii) の両方の場合でもつねに交わるが、そのことは述べておく必要がある。

STEP のその先へ

平行な弦の中点が中心を通る直線上にあるという事実は、任意の二次曲線（conic）について成り立つ。楕円の場合、その直線は**共役直径**（conjugate diameter）と呼ばれ、極と極線（poles and polars）という射影幾何の考え方を垣間見る最初の機会となる。小問 (ii) の円は、「半円に対する円周角は直角である」という古典的な定理を逆向きにたどったものである。軌跡と媒介変数表示（parametrisation）を問題解決の道具としてさらに学ぶには、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* がよい次の一歩となる。

解答例

STEP II 2013、第 5 問

純粋数学 • 対称性と曲線の概形

STEP II 2013、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/13-s2-q5

鍵となる考え方

関数が $x \mapsto 1-x$ や $x \mapsto 1/x$ のような置き換え（substitution）によって変わらないならば、その恒等式を合成関数の微分法（chain rule）で微分すると、x における傾きと、像の点における傾きとが結びつく。置き換えによって動かない点（不動点）では、傾きはそれ自身の符号を反転したものに等しくなければならないので、0 である。小問 (iii) の方程式については、この対称性から、すべてを $u = x^2 - x$ で表すことが示唆される。u 自身も $x \mapsto 1-x$ で変わらないからである。こうすると、x の 6 次式よりもはるかに扱いやすい u の 3 次式が得られる。

解答

小問 (i)

$\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(1-x)$ を x で微分し、右辺には合成関数の微分法を用いると、

$$\mathrm{f}'(x) = -\mathrm{f}'(1-x) \qquad \text{任意の} x.$$

$x = \frac{1}{2}$ を代入すると $\mathrm{f}'(\frac{1}{2}) = -\mathrm{f}'(\frac{1}{2})$ となるので、$\mathrm{f}'(\frac{1}{2}) = 0$ である。

次に、$x \neq 0$ に対して $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(1/x)$ も成り立つとする。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2}$ であるから、微分すると

$$\mathrm{f}'(x) = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{f}'\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \neq 0).$$

$x = -1$（これは自分自身の逆数である）では $\mathrm{f}'(-1) = -\mathrm{f}'(-1)$ となるので、$\mathrm{f}'(-1) = 0$ である。

$x = 2$ では、最初の結果より $\mathrm{f}'(2) = -\frac{1}{4}\mathrm{f}'(\frac{1}{2}) = 0$ となる。（同様に、最初の恒等式に

$x=2$ を代入しても $f'(2)=-f'(-1)=0$ が得られる。）

小問 (ii)

x を $1/x$ に置き換える。分子は

$$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1\right)^3=\frac{(1-x+x^2)^3}{x^6},$$

となり、分母は

$$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)^2=\frac{(1-x)^2}{x^4}.$$

となる。割り算をして $x^2(1-x)^2=(x^2-x)^2$ を用いると、

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{(x^2-x+1)^3}{x^6}\cdot\frac{x^4}{(1-x)^2}=\frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}=f(x).$$

x を $1-x$ に置き換える。$(1-x)^2-(1-x)=(1-x)(-x)=x^2-x$ であるから x^2-x は変わらず、したがって x^2-x+1 も変わらない。ゆえに $f(1-x)=f(x)$ である。

グラフの概形。小問 (i) より、$x=-1,\frac{1}{2},2$ は停留点（stationary point）である。停留点はちょうど 3 つであるから、これらがすべてである。その値は

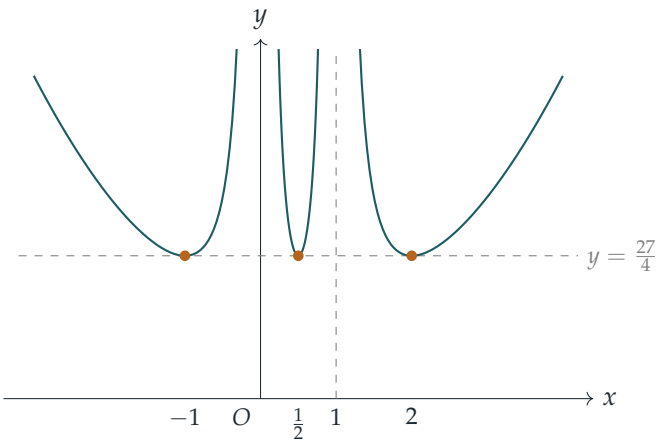
$$f(-1)=\frac{3^3}{2^2}=\frac{27}{4},\qquad f(\tfrac{1}{2})=\frac{(3/4)^3}{(1/4)^2}=\frac{27}{4},\qquad f(2)=\frac{3^3}{2^2}=\frac{27}{4}.$$

3 つとも等しいが、これは当然である。$f(2)=f(\frac{1}{2})$ かつ $f(2)=f(1-2)=f(-1)$ だからである。

その他の特徴：

- $x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$ であるから、いたるところで $f(x)>0$ であり、曲線は x 軸と交わらない。
- $x\to 0$ または $x\to 1$ のとき、分子は 1 に、分母は 0^+ に近づくので、両側から $f(x)\to+\infty$ となる。すなわち $x=0$ と $x=1$ は垂直漸近線（vertical asymptote）である。
- $|x|$ が大きいとき $f(x)\approx x^6/x^4=x^2$ であるから、$x\to\pm\infty$ のとき $f(x)\to+\infty$ となり、おおよそ放物線のように振る舞う。

したがって、3 つの区間 $(-\infty,0),(0,1),(1,\infty)$ のそれぞれにおいて、関数は連続で、両端で $+\infty$ に発散する。よって各区間には最小値をとる点があり、それは停留点である。各区間には $-1,\frac{1}{2},2$ のうちちょうど 1 つが含まれるので、その点が最小点であり、他に極値点はない。各分枝は U 字形で、最小値は $\frac{27}{4}$ である。



小問 (iii)

方程式 $f(x) = \frac{27}{4}$。グラフの概形から、$\frac{27}{4}$ はどの分枝においても最小値であり、それをとるのは 3 つの停留点だけである。よって解は

$$x = -1, \qquad x = \tfrac{1}{2}, \qquad x = 2,$$

であり、定義域内のそれ以外のすべての x、すなわち

$$x < -1, \quad -1 < x < 0, \quad 0 < x < \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{2} < x < 1, \quad 1 < x < 2, \quad x > 2.$$

に対して $f(x) > \frac{27}{4}$ である。これは代数的にも確かめられる。$u = x^2 - x$ とおく（定義域内では $u \neq 0$）。すると $f(x) = \dfrac{(u+1)^3}{u^2}$ であり、

$$f(x) - \frac{27}{4} = \frac{4u^3 - 15u^2 + 12u + 4}{4u^2} = \frac{(u-2)^2(4u+1)}{4u^2}.$$

$4u + 1 = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 \geq 0$ であるから、これは決して負にならず、0 となるのは $u = 2$（すなわち $x^2 - x - 2 = 0$ で、$x = 2$ または -1）のときか、$x = \frac{1}{2}$ のときに限る。

考えてみよう 6 次方程式を解かずに、$f(x) = \frac{343}{36}$ の解を 1 つ見当をつけるにはどうすればよいか。

方程式 $f(x) = \frac{343}{36}$。$\frac{343}{36} = \frac{7^3}{6^2}$ に注目し、$x^2 - x + 1 = 7$ かつ $x^2 - x = 6$ となる x を探す。$x = 3$ はどちらも満たすので、$f(3) = \frac{343}{36}$ である。すると対称性によって、さらに多くの解が労せずして得られる。3 に $x \mapsto 1 - x$ と $x \mapsto 1/x$ を繰り返し施すと

$$3, \quad 1 - 3 = -2, \quad \tfrac{1}{3}, \quad 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}, \quad \tfrac{3}{2}, \quad 1 - \tfrac{3}{2} = -\tfrac{1}{2}.$$

が得られる。これらは相異なる 6 つの数であり、分母を払うと $\mathrm{f}(x) = \frac{343}{36}$ は 6 次の多項式方程式になるので、解はこれですべてである：

$$x = -2,\ -\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{3}{2},\ 3.$$

（u で表すと、方程式は $36u^3 - 235u^2 + 108u + 36 = 0$ となり、$(u-6)(9u+2)(4u-3) = 0$ と因数分解できる。これから組 $\{3,-2\}, \{\frac{1}{3},\frac{2}{3}\}, \{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\}$ が得られる。）

$\frac{343}{36} > \frac{27}{4}$ であるから、水平な直線 $y = \frac{343}{36}$ は各 U 字形の分枝と、最小点の両側で 1 回ずつ、計 2 回交わり、2 つの交点の外側では分枝はこの直線より上にある。$(-\infty, 0)$ 上の分枝とは -2 と $-\frac{1}{2}$ で、$(0,1)$ 上の分枝とは $\frac{1}{3}$ と $\frac{2}{3}$ で、$(1,\infty)$ 上の分枝とは $\frac{3}{2}$ と 3 で交わる。したがって、$\mathrm{f}(x) > \frac{343}{36}$ となるのは

$$x < -2, \quad -\tfrac{1}{2} < x < 0, \quad 0 < x < \tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{2}{3} < x < 1, \quad 1 < x < \tfrac{3}{2}, \quad x > 3.$$

のときであり、かつそのときに限る。

検算

- 値を代入してみる：$\mathrm{f}(-\frac{1}{2}) = \dfrac{(7/4)^3}{(3/4)^2} = \dfrac{343/64}{9/16} = \dfrac{343}{36}$ となり、主張どおりである。
- 主張した区間内の点で確かめる：$\mathrm{f}(4) = \frac{13^3}{12^2} \approx 15.3 > \frac{343}{36} \approx 9.53$ である一方、$\mathrm{f}(2) = 6.75$ は下にあり、$(\frac{3}{2},3)$ が除かれることと整合する。
- 6 つの解は、和が 1 となる組と、互いに逆数となる組に分かれており、2 つの対称性が要請するとおりである。また、コンピュータで 10^5 個の無作為な点において不等式を確認した。

よくある間違い

- $\mathrm{f}(1/x)$ を微分する際に、合成関数の微分法から生じる因子 $-1/x^2$ を忘れること。$x = -1$ では影響しないが、2 における傾きが 0 になる理由を理解するには欠かせない。
- 範囲を $x < -2$ や $x > 3$ のような単一の区間として書き、$x = 0$ と $x = 1$ の漸近線が解の集合を分割することを忘れること。$x = 0$ と $x = 1$ は除かなければならない。
- 停留点を極大点として扱うこと。どの分枝も両端で $+\infty$ に発散するので、これらは極小点である。

STEP のその先へ

$x \mapsto 1-x$ と $x \mapsto 1/x$ によって生成される 6 つの写像は群（group）をなし（三角形の対称性のなす群と同型（isomorphic）である）、f は定数倍を除いて、複比（cross-ratio）の古典的な j 不変量（j-invariant）、すなわち 6 つの写像すべてで変わらない関数である。置き換えのなす群のもとで不変な関数は、ガロア（Galois）理論や楕円曲線（elliptic curve）の理論の中心的な主題である。このような変換群に出会うには、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）がよい出発点である。

解答例

STEP II 2013、第 6 問

純粋数学 • 数列の収束

> **STEP II 2013、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q6

この問題は、*Beyond STEP* の第 2.2 節「**極限としての黄金比**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch02/golden-limit.html

鍵となる考え方

項 $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$ は最終的な極限（limit）の上下に交互に跳ねるので、数列全体は単調（monotonic）ではなく、定理を直接適用することはできない。しかし、1 つおきに項を取り出すと、2 つの単調な数列が得られる。小問 (i) はこのことを示す道具である。すなわち、分母が正であるから、ステップ $u_{n+2} - u_n$ は 1 つ前のステップ $u_n - u_{n-2}$ と同じ符号をもつ、ということを述べている。

解答

まず、すべての u_n は正であることに注意する。実際、$u_1 = 1 > 0$ であり、$u_n > 0$ ならば $u_{n+1} = 1 + 1/u_n > 1 > 0$ である。したがって 0 で割ることは決してなく、$1 + u_n$ のような因子はすべて正である。

小問 (i)

$(*)$ を 2 回用いると、

$$u_{n+2} - u_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_{n-1}} = \frac{u_{n-1} - u_{n+1}}{u_{n+1}u_{n-1}}, \qquad u_{n+1} - u_{n-1} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-2}} = \frac{u_{n-2} - u_n}{u_n u_{n-2}}.$$

（2 つ目の式には u_{n-2} が存在することが必要であり、これが $n \geq 3$ とする理由である。）2 つ目の式を 1 つ目に代入すると、2 つのマイナス符号が打ち消し合う：

$$u_{n+2} - u_n = \frac{u_n - u_{n-2}}{(u_n u_{n+1})(u_{n-2} u_{n-1})}.$$

最後に、$(*)$ に u_n を掛けると $u_n u_{n+1} = u_n + 1$ が得られ、同様に $u_{n-2} u_{n-1} = u_{n-2} + 1$ である。よって

$$u_{n+2} - u_n = \frac{u_n - u_{n-2}}{(1 + u_n)(1 + u_{n-2})}$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

数学的帰納法（induction）を用いる。$u_1 = 1$ であるから、主張 $1 \leq u_1 \leq 2$ は正しい。$1 \leq u_n \leq 2$ と仮定する。正の数の逆数（reciprocal）をとると不等号の向きが逆になるので、$\frac{1}{2} \leq 1/u_n \leq 1$ であり、したがって

$$\frac{3}{2} \leq u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \leq 2$$

となる。これから確かに $1 \leq u_{n+1} \leq 2$ が従う。数学的帰納法により、すべての n について $1 \leq u_n \leq 2$ である。

小問 (iii)

奇数番目の項。 $u_1 = 1$、$u_3 = \frac{3}{2}$ であるから $u_3 - u_1 > 0$ である。奇数 $n \geq 3$ に対して、小問 (i) によれば $u_{n+2} - u_n$ は $u_n - u_{n-2}$ に正の数 $1/\big((1 + u_n)(1 + u_{n-2})\big)$ を掛けたものであるから、両者は同じ符号をもつ。数学的帰納法により、すべてのステップ $u_{n+2} - u_n$（n は奇数）は正である。すなわち、数列 $u_1, u_3, u_5, \ldots$ は増加（increasing）する。(ii) よりこの数列は 2 で上に有界（bounded above）であるから、定理によりある極限 L に収束する。すべての項が $[1, 2]$ に含まれるので、$1 \leq L \leq 2$ である。

偶数番目の項。 こちらは $u_2 = 2$、$u_4 = \frac{5}{3}$ であるから $u_4 - u_2 < 0$ であり、同じ議論により $u_2, u_4, u_6, \ldots$ は減少（decreasing）することがわかる。この数列は 1 で下に有界である。

> **考えてみよう** 定理は上に有界な増加数列についてのものである。減少数列に対してこれをどう使えばよいだろうか？

符号を反転させたものに適用すればよい。$-u_2, -u_4, -u_6, \ldots$ は増加し、-1 で上に有界であるから極限に収束し、したがって $u_2, u_4, \ldots$ も収束する。その極限を M とおく。ここでも $1 \leq M \leq 2$ である。

極限を求める。 $(*)$ を 2 ステップ用いると、同じ偶奇の項どうしを結ぶ漸化式（recurrence）が得られる：

$$u_{n+2} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{u_n}} = 1 + \frac{u_n}{u_n + 1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}.$$

考えてみよう なぜ u_{n+2} と u_n を単純に L で置き換えてよいのだろうか？

奇数の n に沿って、u_n と u_{n+2} はともに L に収束する。右辺は u_n の連続関数（continuous function）である（分母は 2 以上である）から、$(2L+1)/(L+1)$ に収束する。極限は一意であるから、

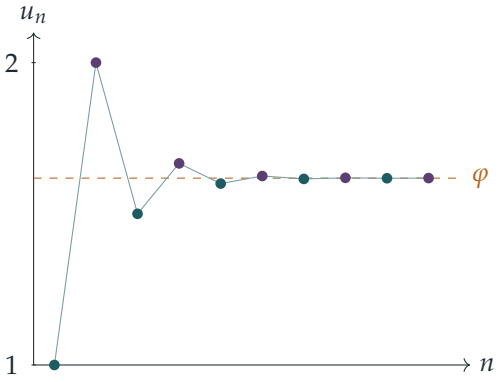
$$L = \frac{2L+1}{L+1} \quad \Longrightarrow \quad L^2 + L = 2L + 1 \quad \Longrightarrow \quad L^2 - L - 1 = 0,$$

よって $L = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ である。$L \geq 1$ であるから、$L = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ でなければならない。M についてもまったく同じ方程式が成り立ち、$M \geq 1$ であるから、

$$\lim_{k\to\infty} u_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} u_{2k} = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

2 つの極限が異なる可能性もあった（その場合、数列全体は振動することになる）が、この方程式には 1 以上の解が 1 つしかない。

数列全体。 $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ とおき、$\varepsilon > 0$ とする。すべての奇数 $n > K_1$ に対して $|u_n - \varphi| < \varepsilon$ となるような K_1 が存在し、すべての偶数 $n > K_2$ に対して同じことが成り立つような K_2 が存在する。すると、すべての $n > \max(K_1, K_2)$ に対して $|u_n - \varphi| < \varepsilon$ となるので、$u_n \to \varphi$ である。



奇数番目の項（ティール）は φ に向かって上昇し、偶数番目の項（プラム）は φ に向かって下降する。

$u_1 = 3$ から始める場合

結論は変わらない。今度は $u_1 = 3$、$u_2 = \frac{4}{3}$、$u_3 = \frac{7}{4}$、$u_4 = \frac{11}{7}$ である。議論はわずかな修正だけで済む。

- 小問 (i) では $(*)$ と各項が正であることしか使っておらず、これは依然として成り立つので、恒等式はやはり正しい。
- 小問 (ii) は $n = 1$ で成り立たないが、$1 \leq u_2 = \frac{4}{3} \leq 2$ であり、帰納法のステップは変わらないので、すべての $n \geq 2$ について $1 \leq u_n \leq 2$ である。また $u_1 = 3 \geq 1$ であるから、すべての項は 1 以上である。
- 今回は $u_3 - u_1 = -\frac{5}{4} < 0$、$u_4 - u_2 = \frac{5}{21} > 0$ である。したがって奇数番目の項は減少して 1 で下に有界であり、偶数番目の項は増加して 2 で上に有界である。役割は入れ替わるが、どちらも収束する。
- 漸化式 $u_{n+2} = (2u_n + 1)/(u_n + 1)$ は依然として成り立ち、2 つの極限はともに 1 以上であるから、どちらもやはり φ である。

よって、この数列もやはり $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ に収束する。

検算

$u_1 = 1$ のとき、項は $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \ldots$ であり、これは連続するフィボナッチ数（Fibonacci numbers）の比である。また $u_{10} = \frac{89}{55} \approx 1.61818$ であり、すでに $\varphi \approx 1.61803$ に非常に近い。$u_1 = 3$ のとき、項は $3, \frac{4}{3}, \frac{7}{4}, \frac{11}{7}, \frac{18}{11}, \ldots$（リュカ数（Lucas numbers）の比）であり、これらもやはり 1.61803 に近づく。(i) の恒等式を $n = 3$ で確かめることもできる：$u_5 - u_3 = \frac{1}{10}$ であり、$\dfrac{u_3 - u_1}{(1 + u_3)(1 + u_1)} = \dfrac{1/2}{5} = \frac{1}{10}$ である。

よくある間違い

- 数列全体が収束すると仮定して、いきなり $L = 1 + 1/L$ を解いてしまう。これで正しい値は得られるが、それが許されるのは収束が証明された後であり、その証明こそがこの問題の要点である。
- 解 $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ のことを忘れる。これは除外しなければならず、ここでは $L \geq 1$ によって除外される。
- 減少する偶数番目の部分列に、どのようにするのか（例えば $-u_{2k}$ を経由するなど）を述べずに定理を適用してしまう。

STEP のその先へ

これは大学 1 年次の解析学（analysis）における標準的な議論の雛形である。すなわち、単調収束定理（monotone convergence theorem）、部分列（subsequence）、そして奇数番目と偶数番目の部分列が同じ極限に収束するならば数列全体もその極限に収束するという事実である。実は u_n は連分数（continued fraction）$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}$ の第 n 近似分数（convergent）であり、写像 $x \mapsto 1+1/x$ は φ の近くで縮小写像（contraction）となっている。これが、どんな正の初期値から始めても φ に至る理由である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は単調数列と部分列を丁寧に扱っており、ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（整数論の入門書）は連分数を扱っている。

解答例

STEP II 2013、第 7 問

純粋数学 • ペル方程式の解

STEP II 2013、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/13-s2-q7

鍵となる考え方

$x^2 - 2y^2 = 1$ の形の方程式はペル方程式（Pell equation）である。解が一つ見つかれば、ある決まった線形写像（linear map）によってさらに無数の解が得られる。小問 (i) と (ii) では、これらの解を、平方数（square）でもある三角数（triangular number）と結びつける。小問 (iii) の鍵は、a^2 を移項し、$c^4 - a^2$ を二つの平方の差（difference of two squares）として因数分解することである。b は素数（prime）なので、b^3 を二つの因数に分ける方法はごくわずかしかない。そして最後の部分では、小問 (ii) から素数でない b が得られる。

解答

小問 (i)

明らかな解は $x = 1, y = 0$ である。$1^2 - 2 \cdot 0^2 = 1$ だからである。

次に $p^2 - 2q^2 = 1$ と仮定する。すると

$$\begin{aligned}(3p + 4q)^2 - 2(2p + 3q)^2 &= (9p^2 + 24pq + 16q^2) - 2(4p^2 + 12pq + 9q^2) \\ &= p^2 - 2q^2 = 1,\end{aligned}$$

となる。pq の項が打ち消し合うからである。よって $x = 3p + 4q, y = 2p + 3q$ も解であり、示すべきことが示された。

これを $(p, q) = (1, 0)$ に適用すると $(3, 2)$ が得られ、さらに $(3, 2)$ に適用すると $(3 \cdot 3 + 4 \cdot 2,\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2) = (17, 12)$ が得られる。確認：$9 - 8 = 1$、$289 - 288 = 1$。し

たがって、x が正の奇数、y が正の偶数である解として、次の二つがある。

$$(x,y)=(3,2)\quad \text{および}\quad (x,y)=(17,12).$$

(実際、$3p+4q\equiv p \pmod 2$ なのでこの写像は常に x を奇数のまま保ち、$2p+3q\equiv q \pmod 2$ なので y が一度偶数になれば偶数のまま保つ。よって、この連鎖の以降の解もすべて正しい偶奇をもつ：$(99,70)$、$(577,408)$ などである。)

小問 (ii)

x を奇数、y を偶数とし、m,n を整数として $x=2m+1, y=2n$ と書く。すると $(*)$ は

$$(2m+1)^2-2(2n)^2=1 \iff 4m^2+4m=8n^2 \iff n^2=\tfrac{1}{2}m(m+1),$$

となる。最後の段階では 8 で割った。これが求める形である。(各段階はすべて逆にたどれるので、このような x と y に対して二つの方程式は同値である。)

したがって n^2 は三角数 $1+2+\cdots+m$ である。小問 (i) より、$(3,2)$ からは $m=1$, $n=1$（すなわち $1=1$）が、$(17,12)$ からは $m=8, n=6$（すなわち $36=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 9$）が得られる。小問 (iii) では後者を用いる。

小問 (iii)

移項して平方の差として因数分解すると、

$$b^3=c^4-a^2=(c^2-a)(c^2+a).$$

$b^3>0$ かつ $c^2+a>0$ なので、因数 c^2-a も正の整数である。また $a>0$ なので $c^2-a<c^2+a$ である。

考えてみよう b^3 を二つの正の整数の積として表す方法は何通りあるか？

b は素数なので、b^3 の正の約数は $1, b, b^2, b^3$ のみである。したがって、b^3 を小さい因数と大きい因数の積に分解する方法は $1\times b^3$ と $b\times b^2$ だけである。他にはなく、また b^3 は平方数ではないので、二つの因数が等しくなることはない。

場合 1：$c^2-a=1$ かつ $c^2+a=b^3$。辺々を足し引きすると、

$$c^2=\tfrac{1}{2}(b^3+1),\qquad a=\tfrac{1}{2}(b^3-1).$$

場合 2：$c^2-a=b$ かつ $c^2+a=b^2$。辺々を足し引きすると、

$$c^2=\tfrac{1}{2}b(b+1),\qquad a=\tfrac{1}{2}b(b-1).$$

(問題が求めているのはこれらの式だけだが、どちらの場合が実際に起こるかを知っておく価値はある。場合 2 は決して起こらない。$b=2$ のときは $c^2=3$ が必要になる。b

が奇素数なら、$1 \leq \frac{1}{2}(b+1) < b$ なので b と $\frac{1}{2}(b+1)$ は互いに素（coprime）であり、その積が平方数 c^2 なので、それぞれが平方数でなければならない。しかし素数が平方数になることはない。場合 1 は実際に起こる：$b = 23$ とすると $\frac{1}{2}(23^3+1) = 6084 = 78^2$ となるので、$a = 6083, b = 23, c = 78$ は解である。）

最後の小問

場合 2 は素数に対しては成り立たないが、b が素数であるという条件を外せば、その式からやはり解が得られる。$\frac{1}{2}b(b+1)$ が平方数 c^2 になるときは常に、$a = \frac{1}{2}b(b-1)$ とおく。すると

$$a^2 + b^3 = (c^2 - b)^2 + b^3 = c^4 - 2bc^2 + b^2 + b^3 = c^4 - b^2(b+1) + b^2 + b^3 = c^4,$$

となる。ここで $2c^2 = b(b+1)$ を用いた。$\frac{1}{2}b(b+1)$ がいつ平方数になるかは、小問 (ii) によって正確にわかる：$b = m$ で $n^2 = \frac{1}{2}m(m+1)$ となるときである。解 $m = 1$ からは $a = 0$ が得られ、これは許されないが、$m = 8, n = 6$ はうまくいく。$b = 8, c = 6, a = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 = 28$ とすると

$$28^2 + 8^3 = 784 + 512 = 1296 = 6^4.$$

よって $a = 28, b = 8, c = 6$ は、$b = 2^3$ が素数でない解である。

検算

- 連鎖の次の解 $(99, 70)$ は $9801 - 2 \cdot 4900 = 1$ を満たし、$m = 49, n = 35$ を与える。実際 $\frac{1}{2} \cdot 49 \cdot 50 = 1225 = 35^2$ である。
- $6^4 = 1296$ であり、$28^2 + 8^3 = 784 + 512 = 1296$ である。
- $c < 400$ のすべてについてコンピュータで探索したところ、b が素数である解は $a = 6083, b = 23, c = 78$ のみであった。これは場合 1 の解である：$78^4 - 6083^2 = (78^2 - 6083)(78^2 + 6083) = 1 \times 12167 = 23^3$。

よくある間違い

- $c^2 - a$ が小さいほうの因数でなければならないことを忘れ、a が負になる余分な「場合」を考えてしまう。
- 分解 $1 \times b^3$ を見落として $b \times b^2$ の場合だけを求めてしまう、あるいはその逆。
- 最後の小問で、$(3, 2)$ から得られる $m = 1$ を使ってしまい、$a = 0$ となる。問題では a は正でなければならない。

STEP のその先へ

方程式 $x^2 - 2y^2 = 1$ はペル方程式である。その解はちょうど累乗 $(3+2\sqrt{2})^k = x + y\sqrt{2}$ で与えられ、小問 (i) の写像は $3+2\sqrt{2}$ を掛けることにほかならない。これは、$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ のような環における単数（unit）の理論や、連分数（continued fraction）の理論の出発点である。$a^2 + b^3 = c^4$ のような方程式は、一般化されたフェルマー方程式（generalised Fermat equation）の研究に属する。これらすべてへの美しい入門書として、ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）を読むとよい。

解答例

STEP II 2013、第 8 問

純粋数学 ・ 微積分と不等式

> **STEP II 2013、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q8

鍵となる考え方

f は減少関数（decreasing function）なので、領域は右へ進むほど低くなる一方の「階段」のような形をしている。したがって最良の長方形は左下の隅、すなわち直線 $y = \mathrm{f}(t)$ の上で y 軸に接する位置にあり、その右上の頂点は曲線上にある。これにより小問 (i) は 1 変数関数の最大化に帰着する。小問 (ii) では二つの面積、すなわち領域全体とその内部の長方形の面積を比較し、小問 (iii) では $\mathrm{f}(x) = 1/(1+x)$ の場合にすべてを具体的に計算するだけである。

解答

小問 (i)

領域は $\{(x,y) : 0 \le x \le t,\ \mathrm{f}(t) \le y \le \mathrm{f}(x)\}$ である。f は減少関数なので、$x < t$ では曲線は直線 $y = \mathrm{f}(t)$ より上にある。

領域内にある任意の長方形 $[a,b] \times [c,d]$ をとる。その下辺は $c \ge \mathrm{f}(t)$、左辺は $a \ge 0$ を満たさなければならず、右上の頂点 (b,d) は領域内になければならないので、$b \le t$ かつ $d \le \mathrm{f}(b)$ である。よってその面積は高々

$$b\big(\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(t)\big),$$

であり、この値は長方形 $[0,b] \times [\mathrm{f}(t), \mathrm{f}(b)]$ によって実現される。この長方形は実際に領域内に収まる。$0 \le x \le b$ に対して $\mathrm{f}(x) \ge \mathrm{f}(b)$ なので、長方形は曲線の下にあるからである。したがって

$$A_0(t) = \max_{0 \le x \le t} R(x), \qquad R(x) = x\big(\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t)\big).$$

ここで $R(0) = R(t) = 0$ であり、$0 < x < t$ では $R(x) > 0$ であるから、$t > 0$ のとき最大値は内点 $x_0 \in (0, t)$ でとられ、そこで $R'(x_0) = 0$ となる：

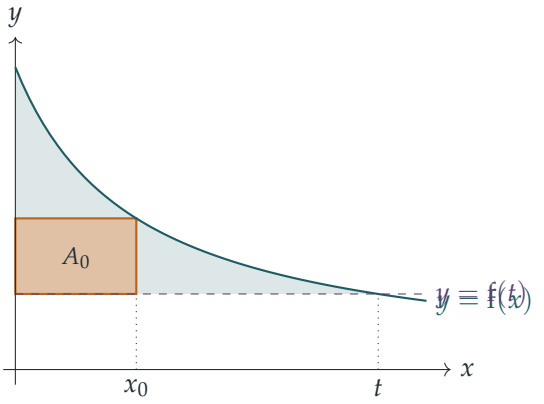
$$R'(x) = \mathrm{f}(x) + x\mathrm{f}'(x) - \mathrm{f}(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0\mathrm{f}'(x_0) + \mathrm{f}(x_0) = \mathrm{f}(t).$$

よって、x_0 がこの条件を満たすとき $A_0(t) = x_0\big(\mathrm{f}(x_0) - \mathrm{f}(t)\big)$ であり、題意は示された。（$t = 0$ のときは領域の幅がなく、$A_0(0) = 0$ であり、$x_0 = 0$ は自明に条件を満たす。）

小問 (ii)

$t\,\mathrm{g}(t) = \displaystyle\int_0^t \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ とおく。両辺を微分する。左辺には積の微分法（product rule）を、右辺には微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）を用いると、

$$\mathrm{g}(t) + t\,\mathrm{g}'(t) = \mathrm{f}(t) \quad \Longrightarrow \quad t\,\mathrm{g}'(t) = \mathrm{f}(t) - \mathrm{g}(t).$$



積分 $\int_0^t \big(\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t)\big)\,\mathrm{d}x$ は、$0 \le x \le t$ において曲線と直線 $y = \mathrm{f}(t)$ に挟まれた、網掛けの領域の面積にちょうど等しい。小問 (i) の最適な長方形はこの領域の内部にあるが、領域を埋め尽くしてはいない。$x_0 < x < t$ では長方形の寄与はないが、f は狭義減少なので、そこでの領域の高さは $\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t) > 0$ である。したがってこの細長い部分の面積は正であり、

$$\int_0^t \big(\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t)\big)\,\mathrm{d}x > A_0(t).$$

考えてみよう 左辺を g' を含む式に変形するにはどうすればよいか？

積分を分け、g の定義を用いてから、先ほど示した結果を使う：

$$\begin{aligned}\int_0^t \big(\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(t)\big)\,\mathrm{d}x &= t\,\mathrm{g}(t)-t\,\mathrm{f}(t)\\ &= -t\big(\mathrm{f}(t)-\mathrm{g}(t)\big)\\ &= -t\cdot t\,\mathrm{g}'(t) = -t^2\mathrm{g}'(t).\end{aligned}$$

よって $-t^2\mathrm{g}'(t) > A_0(t)$ である。

小問 (iii)

ここで $\mathrm{f}(x)=\dfrac{1}{1+x}$ は $x\geq 0$ において正かつ狭義減少であるから、これまでの議論はすべて適用できる。

左辺。 小問 (ii) の最後の計算より、

$$-t^2\mathrm{g}'(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{1+x} - \frac{t}{1+t} = \ln(1+t) - \frac{t}{1+t}.$$

長方形。 $\mathrm{f}'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ であるから、

$$x\mathrm{f}'(x)+\mathrm{f}(x) = \frac{-x+(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2},$$

となり、x_0 に対する条件は $(1+x_0)^2 = 1+t$ である。$s=\sqrt{1+t}$ とおくと、$s>1$ かつ $x_0 = s-1$ である（正の根をとる。$0<x_0<t$ に注意）。このとき $1+t=s^2$ であり、

$$A_0(t) = (s-1)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}\right) = \frac{(s-1)^2}{s^2} = \left(1-\frac{1}{s}\right)^2.$$

考えてみよう 両辺とも複雑に見える。自然な変数は何か？

s を用いるとすべてが簡潔になる。$\ln(1+t) = 2\ln s$ かつ $\dfrac{t}{1+t} = 1-\dfrac{1}{s^2}$ であるから、$-t^2\mathrm{g}'(t) > A_0(t)$ は次のようになる：

$$\begin{aligned}&2\ln s - 1 + \frac{1}{s^2} > 1 - \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}\\ \iff\quad &2\ln s > 2 - \frac{2}{s}\\ \iff\quad &\ln s > 1 - \frac{1}{s}.\end{aligned}$$

$s=\sqrt{1+t}$ であり $\ln s = \ln\sqrt{1+t}$ であるから、これは

$$\ln\sqrt{1+t} > 1 - \frac{1}{\sqrt{1+t}} \qquad (t>0),$$

となり、題意は示された。

検算

- $t = 3$ のとき：$s = 2$、$x_0 = 1$、$A_0 = \frac{1}{4}$ であり、領域の面積は $\ln 4 - \frac{3}{4} \approx 0.636 > 0.25$ である。最後の不等式は $\ln 2 \approx 0.693 > 0.5$ となる。
- 多くの t の値について長方形の面積 $x\big(\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t)\big)$ を直接探索し、最大値が $(1 - 1/\sqrt{1+t})^2$ であって $x = \sqrt{1+t} - 1$ でとられることをコンピュータで確認した。
- $t \to 0^+$ のとき、最後の不等式の両辺はともに 0 に収束する。展開すると $\ln s \approx (s-1) - \frac{1}{2}(s-1)^2$、$1 - \frac{1}{s} \approx (s-1) - (s-1)^2$ であるから、左辺が約 $\frac{1}{2}(s-1)^2$ だけ大きく、期待どおりである。

よくある間違い

- 最良の長方形の頂点が曲線上にあることを断りなく仮定してしまう。小問 (i) のように、減少性を用いる必要がある。
- 面積の不等式が**狭義**である理由を述べ忘れる。長方形は領域のうち $x_0 < x < t$ の部分を覆っていない。
- 負の根 $1 + x_0 = -\sqrt{1+t}$ をとってしまう。これは $x_0 < 0$ を与える。

STEP のその先へ

最後の不等式 $s > 1$ に対する $\ln s > 1 - 1/s$ は、$\int_1^s \mathrm{d}u/u$ を長方形と比較して得られる古典的な評価 $1 - \frac{1}{s} < \ln s < s - 1$ の片方である。この問題は、より巧妙な幾何的な道筋でそこに到達している。積分を長方形の面積と比較することはリーマン積分（Riemann integral）の核心であり、大学 1 年の解析学の講義では上限和と下限和からこれを丁寧に構成する。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は非常に読みやすい解説を与えている。

解答例

STEP II 2013、第 9 問

力学 ・ つり合いにおける摩擦

> **STEP II 2013、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q9

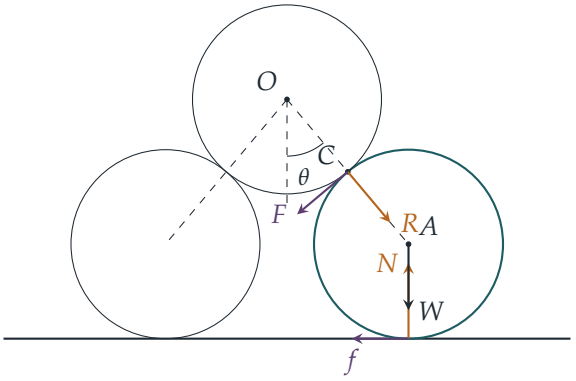
鍵となる考え方

仕事の大半は対称性（symmetry）がやってくれる。3 枚の円板をまとめて 1 つの系とみなせば、地面からの抗力はすぐに求まる。次に下の円板の中心のまわりのモーメント（moment）を考える。地面での摩擦力（friction）と上の円板からの摩擦力はどちらも接線に沿って働くので、腕の長さ（lever arm）は同じ（半径）であり、大きさは等しくなければならない。これがわかれば、下の円板と上の円板それぞれについて力を分解することで、2 つの未知数に対する 2 つの方程式が得られる。

解答

円板は半径 r、重さ W の同一の一様な剛体（rigid body）の円板であり、すべて同一の鉛直面内にあるとモデル化する。上の円板の中心を O、右下の円板の中心を A とすると、$OA = 2r$ であり、OA は鉛直下向きと角 θ をなす。これら 2 枚の円板の接点 C は OA の中点である。

左右の対称性により、左下の円板に働く力は右下の円板に働く力の鏡像になっているので、右下の円板だけを考えればよい。右下の円板は、C において OA に沿った垂直抗力（normal reaction）R（O から遠ざける向き）と、共通接線に沿った摩擦力 F を受ける。地面では垂直抗力 N と摩擦力 f を受ける。



図は右下の円板に働く力を示している。ニュートンの第 3 法則（Newton's third law）により、上の円板は C において逆向きの R と F を受ける。したがって摩擦力は上の円板を接線に沿って上向きかつ外向きに押す。

小問 (i)

3 枚の円板をまとめて 1 つの系とみなす。円板どうしの間の力は内力であり打ち消し合うので、外力は 3 つの重力と地面からの力だけである。2 つの地面からの抗力は対称性により等しく、地面での摩擦力は水平であるから、鉛直方向に力を分解すると

$$2N = 3W \quad \Longrightarrow \quad N = \tfrac{3}{2}W,$$

となり、示すべきことが得られた。

小問 (ii)

考えてみよう 下の円板には R、F、f の 3 つの未知数があるように見える。3 つ目の方程式はどこから得られるだろうか。

モーメントから得られる。右下の円板について A のまわりのモーメントを考える。重力 W、垂直抗力 N、垂直抗力 R はいずれも A を通るので、モーメントをもたない。摩擦力 f は最下点での接線に沿って、F は C での接線に沿って働くので、どちらも腕の長さは r である。これらは円板を互いに逆向きに回そうとしなければならないので、

$$fr = Fr \quad \Longrightarrow \quad f = F.$$

（これにより図の力の向きも定まる。円板は外向きに押されるので f は内向きであり、そのモーメントと釣り合うためには、下の円板に働く F は接線に沿って下向きかつ内向きでなければならない。）

O から A への単位ベクトルは $(\sin\theta, -\cos\theta)$ であり、下の円板に働く F の接線方向は $(-\cos\theta, -\sin\theta)$ である。下の円板について水平方向に分解すると、

$$R\sin\theta - F\cos\theta - f = 0 \quad \Longrightarrow \quad R\sin\theta = F(1+\cos\theta),$$

となる。ここで $f = F$ を用いた。

上の円板については、2 つの接点から等しい上向き成分 $R\cos\theta + F\sin\theta$ がそれぞれ働く。鉛直方向に分解すると、

$$2(R\cos\theta + F\sin\theta) = W.$$

$F = \dfrac{R\sin\theta}{1+\cos\theta}$ を代入すると、

$$W = 2R\left(\cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta}\right) = 2R\cdot\frac{\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}{1+\cos\theta} = 2R\cdot\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta} = 2R.$$

よって、接している 2 枚の円板の間の垂直抗力は

$$R = \tfrac{1}{2}W,$$

であり、θ によらない。すると

$$F = \frac{R\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{W\sin\theta}{2(1+\cos\theta)},$$

となり、これが求める摩擦力である。

整合性の確認として、下の円板について鉛直方向に分解すると $N = W + R\cos\theta + F\sin\theta = W + \frac{1}{2}W = \frac{3}{2}W$ となり、小問 (i) と一致する。

小問 (iii)

半角の公式（half-angle formulae）$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ と $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ を用いると、

$$\frac{F}{R} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \tan\tfrac{\theta}{2}.$$

釣り合い（equilibrium）のためには、すべての接点で摩擦力が最大摩擦力（limiting friction）を超えてはならない。円板どうしの間では $F \le \mu R$、すなわち

$$\tan\tfrac{\theta}{2} \le \mu.$$

が必要である。（地面では $f \le \mu N$、すなわち $\frac{1}{2}W\tan\frac{\theta}{2} \le \frac{3}{2}\mu W$ が必要である。これはより弱い条件なので、問題になるのは円板どうしの接点である。）

考えてみよう θ をいくらでも小さくして $\tan\frac{\theta}{2}$ をごく小さくすることを妨げているのは何だろうか。

下の 2 枚の円板は互いに接していない。それらの中心間の距離は $2\cdot 2r\sin\theta = 4r\sin\theta$ であり、これは $2r$ より大きくなければならないので、$\sin\theta > \frac{1}{2}$ である。$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるから $\theta > \frac{\pi}{6}$、したがって $\frac{\theta}{2} > \frac{\pi}{12}$ である。tan は $(0, \frac{\pi}{2})$ で増加するので、

$$\tan\frac{\theta}{2} > \tan\frac{\pi}{12} = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = 2-\sqrt{3}.$$

よって釣り合いには $\mu \geq \tan\frac{\theta}{2} > 2-\sqrt{3}$ が必要である。$\mu < 2-\sqrt{3}$ ならば、これを満たす許される θ の値は存在せず、釣り合いは不可能である。

検算

- $\theta \to 0$ のとき、上の円板は他の円板の真上に載り、$F \to 0$ となる。予想どおり摩擦力は必要ない。
- 任意の角、たとえば $\theta = 1$ ラジアンについて、$R = \frac{1}{2}W$、$F = f = \frac{1}{2}W\tan\frac{1}{2}$、$N = \frac{3}{2}W$ を代入すると、各円板について力の両成分とモーメントがすべて釣り合う。
- $2-\sqrt{3} \approx 0.2679$ であり、これは $\tan 15^\circ \approx 0.2679$ と一致する。30° をわずかに超える範囲で θ を数値的に走査すると、$\mu = 0.2679$ では釣り合いが不可能であり、$\mu = 0.268$ では可能であることが確かめられる。

よくある間違い

- 円板どうしの間の摩擦力を 0 と仮定したり、まったく考え忘れたりすること。それがなければ下の円板のモーメントの方程式から $f = 0$ となり、下の円板が滑って離れていくのを止めるものは何もなくなる。
- 下の円板どうしが接しないという条件を見落とすこと。これが θ を下から押さえる唯一の条件であり、$2-\sqrt{3}$ はここから出てくる。
- F の向きを間違えること。推測に頼らず、A のまわりのモーメントの方程式を使って向きを決めるとよい。

STEP のその先へ

この問題が静定（statically determinate）になるのは、対称性とモーメントの方程式のおかげにすぎない。粗い物体を積み重ねた多くの場合、摩擦力は釣り合いだけからは求められず、技術者は物体の変形の仕方をモデル化する必要がある。$F/R = \tan\frac{\theta}{2}$ という美しい結果は、摩擦角（friction angle）の考え方の一例である。すなわち、釣り合いが可能であるのは、接触力の合力が法線から角 $\arctan\mu$ 以内にあるときに限る。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、大学 1 年生のレベルで摩擦と剛体の静力学を丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 2013、第 10 問

力学 ・ 放物運動

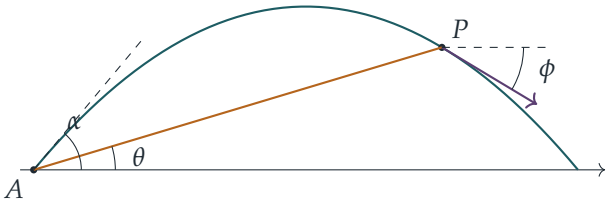
STEP II 2013、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/13-s2-q10

鍵となる考え方

時刻 t における位置と速度（velocity）を書き下すと、$\tan\theta$ と $\tan\phi$ がどちらも t の**一次式**になることがわかる。(i) の恒等式はそこからただちに得られ、これによって B と C はどちらも角の正接（tangent）に関する条件に言い換えられる。どちらの角も時間とともに一様に減少するので、「どちらが先か」は二つの数の比較にすぎず、(i) を使えばその比較を一点 B だけで行うことができる。



一般の点 P において、θ は A から見た P の仰角（angle of elevation）であり、ϕ は速度が水平方向となす角である（粒子は落下しているので、図では負である）。

解答

粒子は空気抵抗（air resistance）なしに重力加速度 g のもとで自由に運動するものとしてモデル化する。時刻 $t=0$ に速さ u で投射されたとし、$0<\alpha<90^\circ$ とする。A を原点にとると、時刻 t において

$$x = ut\cos\alpha, \qquad y = ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2, \qquad \dot{x} = u\cos\alpha, \qquad \dot{y} = u\sin\alpha - gt.$$

粒子が着地するのは再び $y=0$ となるとき、すなわち $t = 2u\sin\alpha/g$ のときである。

小問 (i)

$t > 0$ に対して、A から見た粒子の仰角は

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{ut\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2}{ut\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{gt}{2u\cos\alpha},$$

を満たし、運動の向きは

$$\tan\phi = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{u\sin\alpha - gt}{u\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{gt}{u\cos\alpha}.$$

を満たす。一つ目を 2 倍し、二つ目を用いると

$$2\tan\theta = 2\tan\alpha - \frac{gt}{u\cos\alpha} = \tan\alpha + \left(\tan\alpha - \frac{gt}{u\cos\alpha}\right) = \tan\alpha + \tan\phi,$$

となり、示すべき式が得られた。

後で使うことを記録しておく価値がある。$k = \dfrac{g}{u\cos\alpha} > 0$ とおくと

$$\tan\theta = \tan\alpha - \tfrac{1}{2}kt, \qquad \tan\phi = \tan\alpha - kt, \tag{$*$}$$

であるから、$\tan\theta$ と $\tan\phi$ はどちらも時間の経過とともに狭義単調減少（strictly decreasing）する。飛行中に θ は α から 0 まで減少し、ϕ は α から $-\alpha$ まで減少するので、$\theta = \frac{1}{2}\alpha$ と $\phi = -\frac{1}{2}\alpha$ はそれぞれちょうど一度だけ起こる。したがって B と C はきちんと定まる。

小問 (ii)

$T = \tan\frac{1}{2}\alpha$ とおく。$0 < \frac{1}{2}\alpha < 45^\circ$ であるから $0 < T < 1$ である。B では $\tan\theta = T$ である。C では $\tan\phi = \tan(-\frac{1}{2}\alpha) = -T$ である。B と C が同じ点ならば、そこで両方が成り立つので、(i) より

$$2T = \tan\alpha - T, \qquad \text{すなわち} \qquad \tan\alpha = 3T.$$

倍角の公式（double-angle formula）より $\tan\alpha = \dfrac{2T}{1-T^2}$ であるから

$$\frac{2T}{1-T^2} = 3T \implies 2 = 3(1-T^2) \implies T^2 = \tfrac{1}{3},$$

となる。ここで T で割ったが、$T > 0$ なのでこれは許される。正の根をとると $\tan\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ であるから、$\frac{1}{2}\alpha = 30^\circ$ となり

$$\alpha = 60^\circ.$$

小問 (iii)

考えてみよう　二つの時刻を計算せずに、どちらの点に先に到達するかをどうすれば判定できるだろうか。

$(*)$ より、ϕ は飛行中ずっと減少する。したがって C が B より後になるのは、粒子が B にある瞬間に ϕ がまだ $-\frac{1}{2}\alpha$ まで下がっていないとき、すなわち $\tan\phi_B > -T$ のとき、かつそのときに限る。ここで ϕ_B は B における運動の向きである。

B において、小問 (i) より $\tan\phi_B = 2\tan\theta - \tan\alpha = 2T - \tan\alpha$ である。よって

$$B \text{ に先に到達する} \iff 2T - \tan\alpha > -T \iff \tan\alpha < 3T.$$

再び $\tan\alpha = \dfrac{2T}{1-T^2}$ を用い、$T > 0$ で割り、$1 - T^2 > 0$ を掛ける（これらは不等号の向きを変えない）と

$$\frac{2T}{1-T^2} < 3T \iff 2 < 3 - 3T^2 \iff T^2 < \frac{1}{3} \iff \frac{1}{2}\alpha < 30^\circ,$$

となる。最後の段階は tan が $(0^\circ, 45^\circ)$ で増加することによる。どの段階も逆にたどれるので

$$\alpha < 60^\circ \iff B \text{ に } C \text{ より先に到達する.}$$

したがって、$\alpha < 60^\circ$ のとき粒子は先に B に到達する。

時刻を明示的に求めたいなら、$(*)$ より $kt_B = 2(\tan\alpha - T)$、$kt_C = \tan\alpha + T$ であり、$t_B < t_C$ はやはり $\tan\alpha < 3T$ と同値である。

検算

- $t = 0$ では $(*)$ の二つの式はどちらも $\tan\alpha$ を与え、当然そうあるべきである。投射直後、粒子は投射の方向の直線に沿って運動しているからである。着地時には $kt = 2\tan\alpha$ となり、$\tan\theta = 0$ と $\tan\phi = -\tan\alpha$ が得られる。これはおなじみの軌道（trajectory）の対称性である。
- $\alpha = 60^\circ$ のとき $\tan\alpha = \sqrt{3} = 3\tan 30^\circ$ であり、(ii) と矛盾しない。
- $u = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$\alpha = 45^\circ$ とすると、公式から $t_B \approx 0.845\,\mathrm{s}$、$t_C \approx 1.020\,\mathrm{s}$ となるので、B が先である。コンピュータで運動を数値的に追跡しても同じ時刻が得られ、さらに $\alpha = 61^\circ$、75°、85° では C が先になることも確かめられる。

よくある間違い

- θ（A から見た粒子の方向）を ϕ（粒子の速度の方向）と取り違える。両者が一致するのは投射の瞬間だけである。

- C での符号を誤る。そこでは $\tan\phi = -\tan\frac{1}{2}\alpha$ であり、$+\tan\frac{1}{2}\alpha$ ではない。
- (iii) で、「$\tan\phi_B > -T$」がなぜ B が先であることを意味するのかを述べずに答えを主張する。それを正当化するのは ϕ の単調減少（monotonic decrease）である。

STEP のその先へ

(i) の恒等式は、A から放物線（parabola）上の任意の点への弦（chord）の傾きが、その両端における接線の傾きの平均に等しいことを述べている。これは二次関数に特有の性質である（中点がちょうど特定された平均値の定理（mean value theorem）にあたる）。大学 1 年の力学の講義では、斜面（inclined plane）上の放物運動を学ぶ際に同じ考え方に出会うだろう。そこでは投射点からの直線の角が、ここでの θ とまったく同じ役割を果たす。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物運動の問題がこのように丁寧に扱われている様子を見るのによい本である。

解答例

STEP II 2013、第 11 問

力学 ・ 繰り返される衝突

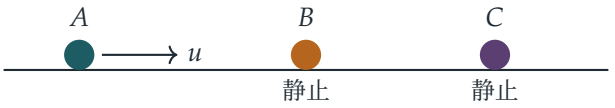
> **STEP II 2013、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q11

鍵となる考え方

この問題の衝突はすべて等しい質量どうしの衝突なので、どの衝突も同じ小さな計算、すなわち運動量保存則（conservation of momentum）とニュートンの反発の法則（Newton's law of restitution）の組合せで処理できる。一度一般的に計算しておき、それを使い回せばよい。さらに衝突が起こるかどうかは、後ろの粒子が前の粒子より速く動いているかどうかという問題にすぎないので、問題全体は速度の比較に帰着する。

解答

粒子を、なめらかな面上にある質量 m の同一の粒子としてモデル化する。したがって衝突と衝突の間には水平方向の力ははたらかず、各粒子は等速度で運動する。直線上に並んだ順に A、B、C とし、A を B と C の方へ打ち出される粒子とする。A のはじめの運動の向きを正の向きとする。



一般の衝突

速度 p の粒子が、その前方にある速度 $q < p$ の同一の粒子に追いつき、衝突後の速度がそれぞれ p'、q' になったとする。運動量保存（m を約す）と反発の法則から

$$p' + q' = p + q, \qquad q' - p' = e(p - q).$$

これらを足したり引いたりして

$$p' = \tfrac{1}{2}\big[(p+q) - e(p-q)\big], \qquad q' = \tfrac{1}{2}\big[(p+q) + e(p-q)\big]. \tag{$*$}$$

$e > 0$ かつ $p > q$ であるから、つねに $q' > p'$ となる。つまり衝突後は前の粒子のほうが後ろの粒子より速く動くので、他の何かがどちらかの速度を変えない限り、その 2 つが再び出会うことはない。

小問 (i)

1 回目の衝突（A が B に衝突）：$(*)$ に $p = u$、$q = 0$ を代入して

$$v_A = \tfrac{1}{2}u(1-e), \qquad v_B = \tfrac{1}{2}u(1+e).$$

ここで $v_B > v_A$ なので A は B に追いつけない。しかし B は静止している C に向かって動くので、2 回目の衝突は B と C の衝突である。

2 回目の衝突（B が C に衝突）：$p = \tfrac{1}{2}u(1+e)$、$q = 0$ を代入して

$$v_B = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}u(1+e)(1-e) = \tfrac{1}{4}u(1-e^2), \qquad v_C = \tfrac{1}{4}u(1+e)^2.$$

A には何も起きていないので、依然として $v_A = \tfrac{1}{2}u(1-e)$ である。3 つの速度はすべて正である（$0 < e < 1$ より）から、速さはそれぞれ $\tfrac{1}{2}u(1-e)$、$\tfrac{1}{4}u(1-e^2)$、$\tfrac{1}{4}u(1+e)^2$ となり、示すべきことが示された。

3 回目の衝突。$(*)$ より C は B より速いので、B と C は離れていく。次に起こりうる衝突は A が B に追いつくものだけであり、それが起こるのはちょうど $v_A > v_B$ のときである：

$$v_A - v_B = \tfrac{1}{4}u(1-e)\big[2-(1+e)\big] = \tfrac{1}{4}u(1-e)^2 > 0,$$

これは $e \neq 1$ による。よって A は B の後ろにあって B より速く動いており、$0 < e < 1$ のすべての e に対して 3 回目の衝突（A と B）が起こる。

小問 (ii)

3 回目の衝突（A が B に衝突）：ここでは $p = \tfrac{1}{2}u(1-e)$、$q = \tfrac{1}{4}u(1-e^2)$ であるから

$$p+q = \tfrac{1}{4}u(1-e)\big[2+(1+e)\big] = \tfrac{1}{4}u(1-e)(3+e), \qquad p-q = \tfrac{1}{4}u(1-e)^2.$$

$(*)$ より、B の新しい速度は

$$\begin{aligned} v_B &= \tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{1}{4}u(1-e)(3+e) + \tfrac{1}{4}eu(1-e)^2\Big] \\ &= \tfrac{1}{8}u(1-e)\big[3+e+e-e^2\big] \\ &= \tfrac{1}{8}u(1-e)(3+2e-e^2) = \tfrac{1}{8}u(1-e)(1+e)(3-e), \end{aligned}$$

であり、（念のため）$v_A = \frac{1}{8}u(1-e)\big[3+e-e(1-e)\big] = \frac{1}{8}u(1-e)(3+e^2)$ で、これは v_B より小さい。

考えてみよう 3 回目の衝突の後、再び衝突する可能性があるのはどの組か。

A と B はちょうど衝突したところなので、$(*)$ より B のほうが A より速く、2 つは離れていく。C は依然として $\frac{1}{4}u(1+e)^2$ で動いており、C の先には何もない。したがって 4 回目の衝突が起こるのは B が C に追いつくとき、かつそのときに限る。すなわち $v_B > v_C$ のとき、かつそのときに限る。$\frac{1}{8}u(1+e) > 0$ で割ると

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{8}u(1-e)(1+e)(3-e) > \tfrac{1}{4}u(1+e)^2 &\iff (1-e)(3-e) > 2(1+e)\\ &\iff e^2-6e+1>0.\end{aligned}$$

2 次式 e^2-6e+1 の根は $e = 3\pm 2\sqrt{2}$ であり、この式は 2 根の外側で正である。大きいほうの根 $3+2\sqrt{2}$ は 1 を超え、一方 $3-2\sqrt{2} \approx 0.172$ は $(0,1)$ に含まれる。よって $0<e<1$ のとき

$$4\text{ 回目の衝突が起こる} \iff e < 3-2\sqrt{2}.$$

ちょうど $e = 3-2\sqrt{2}$ のときは、B と C は等しい速度で動き、決して出会わないので、不等号は等号を含まない。

検算

- 運動量：2 回目の衝突の後の合計は $\frac{1}{4}u\big[2(1-e)+(1-e^2)+(1+e)^2\big] = \frac{1}{4}u\cdot 4 = u$ であり、当然そうなるべき値になっている。
- 極限の場合：$e\to 1$ のとき、2 回の衝突後の速度は 0、0、u に近づき（おなじみの「ニュートンのゆりかご」型の速度の受け渡し）、$v_A - v_B \to 0$ となるので、3 回目の衝突はぎりぎりで起こる。臨界値 $3-2\sqrt{2}$ が 1 よりかなり小さいことは、これと整合している。
- 数値で確かめると、$e=0.1$ のとき 3 回目の衝突後の速度は $v_B \approx 0.3589u$、$v_C = 0.3025u$ なので、B は確かに C に追いつく。$e=0.2$ のときは $v_B = 0.336u < v_C = 0.36u$ で、追いつかない。運動のコンピュータ・シミュレーションでも、$e>0.1716$ のすべての e でちょうど 3 回、それより小さい e では少なくとも 4 回の衝突が起こることが確認された。

よくある間違い

- 次に衝突するのがどの組かの根拠を示し忘れる。毎回、直前に衝突した 2 つの粒子が離れていくこと、そして残りの組が近づいていることを確認すること。

- 反発の法則の符号を間違える。法則は（遠ざかる速さ）$= e\times$（近づく速さ）であり、したがって $q' - p' = e(p - q)$ で、左辺では前の粒子の速度が先にくる。
- 許される範囲 $0 < e < 1$ の外にある根 $3 + 2\sqrt{2}$ を残してしまう。

STEP のその先へ

規則 $(*)$ は衝突前の速度の組を衝突後の速度の組に移す線形写像（linear map）であり、したがって一連の衝突は行列（matrix）の積になる。衝突が全部で何回起こるかを問うのは古典的な問題であり、弾性的なビリヤード球の系に対しては、運動をくさび形領域内の直線へと「展開」することによる美しい幾何的な答えがある。衝突、運動量、座標系（frames of reference）を大学レベルの丁寧さで扱ったものとしては、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

解答例

STEP II 2013、第 12 問

確率・統計 ・ ポアソン分布のモーメント

> **STEP II 2013、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q12

鍵となる考え方

X は U の奇数の値だけを残し、Y は偶数の値だけを残す。したがって、どの期待値（expectation）も、奇数番目の項だけ、あるいは偶数番目の項だけにわたるポアソン（Poisson）分布の和になる。$\mathrm{E}(U)$ や $\mathrm{E}(U(U-1))$ を求めるときの技法はここでも使える。すなわち、k や $k(k-1)$ を $k!$ と約分し、λ や λ^2 をくくり出すのである。k が 1 減るごとに奇数と偶数が入れ替わり、これによって α と β の役割が入れ替わる。また、$\alpha+\beta=\mathrm{e}^{\lambda}$ であるから、因子 $\mathrm{e}^{-\lambda}$ は $1/(\alpha+\beta)$ に等しいことにも注意する。

解答

以下では一貫して、$\lambda>0$ として $k=0,1,2,\ldots$ に対し $\mathrm{P}(U=k)=\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k/k!$ である。2 つの級数（series）を項ごとに足すと

$$\alpha+\beta=\sum_{k\geq 0}\frac{\lambda^k}{k!}=\mathrm{e}^{\lambda},\qquad \text{よって}\qquad \mathrm{e}^{-\lambda}=\frac{1}{\alpha+\beta}.$$

（実は $\alpha=\cosh\lambda$、$\beta=\sinh\lambda$ である。）

小問 (i)

U が奇数でなければ X は 0 であるから、奇数の k だけが寄与する：

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k\ \text{奇数}}k\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda\sum_{k\ \text{奇数}}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda\left(1+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^4}{4!}+\cdots\right),$$

ここで $k-1$ は $0,2,4,\ldots$ を動くからである。よって

$$\mathrm{E}(X)=\frac{\lambda\alpha}{\alpha+\beta}.$$

同様に、Y は偶数 $k \geq 2$ の項を拾い（$k = 0$ の項はいずれにせよ 0 である）、このとき $k-1$ は $1,3,5,\ldots$ を動く：

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda \sum_{k\text{ 偶数},k\geq 2} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{\lambda\beta}{\alpha+\beta}.$$

確認として、$X+Y=U$ であるから当然 $\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)=\lambda=\mathrm{E}(U)$ となる。

小問 (ii)

> **考えてみよう** k^2 が $k!$ ときれいに約分できないとき、$k^2\lambda^k/k!$ の和はどう求めればよいか。

$k^2 = k(k-1)+k$ と書く。$k(k-1)$ の部分は $k!$ の因子を 2 つ約分し、k の部分は 1 つ約分する。奇数の k について、$k(k-1)$ の和は $k=3$ から始まり（$k=1$ では 0 になる）、$k-2$ は $1,3,5,\ldots$ を動く：

$$\sum_{k\text{ 奇数}} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 \sum_{k\text{ 奇数},k\geq 3} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2\beta, \qquad \sum_{k\text{ 奇数}} k\,\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda\alpha$$

（2 つ目の和は小問 (i) で求めたものである）。したがって

$$\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\lambda\alpha+\lambda^2\beta\right) = \frac{\lambda\alpha+\lambda^2\beta}{\alpha+\beta},$$

であり、$\mathrm{E}(X)^2$ を引くと

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{\lambda\alpha+\lambda^2\beta}{\alpha+\beta} - \frac{\lambda^2\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2},$$

となり、求める結果を得る。

Y については偶奇（parity）が入れ替わる。偶数の k について、$k(k-1)$ の和は $k=2$ から始まり、$k-2$ は $0,2,4,\ldots$ を動くので、$\lambda^2\alpha$ を与える。k の和は小問 (i) と同様に $\lambda\beta$ を与える。よって

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{\lambda\beta+\lambda^2\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\lambda^2\beta^2}{(\alpha+\beta)^2}.$$

最後の問い。 $X+Y=U$ であるから、$\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(U)=\lambda$ である。2 つの分散（variance）を足すと

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y) &= \frac{\lambda(\alpha+\beta)+\lambda^2(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta} - \frac{\lambda^2(\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha+\beta)^2} \\ &= \lambda + \lambda^2\,\frac{(\alpha+\beta)^2-\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta)^2} = \lambda + \frac{2\lambda^2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}.\end{aligned}$$

考えてみよう なぜ両辺が異なると予想すべきなのか。

一般に $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$ である。ここでは X、Y のうち高々一方しか 0 でない値をとらないので、常に $XY = 0$ である。よって共分散（covariance）は $\mathrm{Cov}(X,Y) = -\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = -\lambda^2\alpha\beta/(\alpha+\beta)^2$ となり、上の計算と一致する。等号が成り立つには $\lambda^2\alpha\beta = 0$ が必要である。しかし $\lambda > 0$ ならば $\alpha \geq 1$ かつ $\beta \geq \lambda > 0$ であるから、$\lambda^2\alpha\beta > 0$ となる。したがって、$\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X+Y)$ となる 0 **でない** λ **の値は存在しない**。左辺は常に真に大きい。実際、$\alpha = \cosh\lambda$、$\beta = \sinh\lambda$ であるから、その差は $\lambda^2 \sinh 2\lambda / \mathrm{e}^{2\lambda} = \frac{1}{2}\lambda^2\left(1 - \mathrm{e}^{-4\lambda}\right)$ である。

検算

- $\lambda \to 0$ のとき、U はほとんど常に 0 か 1 であるから、Y はほとんど常に 0 である。実際、$\mathrm{E}(Y) \approx \lambda^2 \to 0$ かつ $\mathrm{E}(X) \approx \lambda$ である。
- λ が大きいとき、$\alpha \approx \beta \approx \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\lambda}$ であるから、$\mathrm{E}(X) \approx \mathrm{E}(Y) \approx \frac{1}{2}\lambda$ となる。すなわち、奇数の値と偶数の値が同程度に起こりやすくなる。
- $\lambda = 1$ のとき、ポアソン分布の確率を直接足し合わせると $\mathrm{Var}(X) \approx 0.6778$、$\mathrm{Var}(Y) \approx 0.8131$ となり、その和は $\mathrm{Var}(U) = 1$ を約 $0.4908 = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-4})$ だけ上回る。どちらの公式とも一致する。

よくある間違い

- 約分した後の偶奇を取り違える。k が奇数ならば、$k-1$ は偶数（α を与える）、$k-2$ は奇数（β を与える）である。
- $\mathrm{e}^{-\lambda} = 1/(\alpha+\beta)$ であることを忘れ、答えが要求された形になっていない。
- 分散が足し算できると思い込む。X と Y は独立（independent）とはほど遠い。$X \neq 0$ がわかれば $Y = 0$ が確定してしまう。

STEP のその先へ

級数を偶数部分と奇数部分に分けることは、分解 $\mathrm{e}^{\lambda} = \cosh\lambda + \sinh\lambda$ にほかならない。確率母関数（probability generating function）を使えば、これは定型的な操作になる。$G(s)$ の偶数部分は $\frac{1}{2}\big(G(s) + G(-s)\big)$ である。最後に用いた共分散の恒等式は、大学の確率論の講義で最初に学ぶ道具の一つである。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、母関数と共分散の両方を扱っている。

解答例

STEP II 2013、第 13 問

確率・統計 ・ 硬貨投げにおける連

> **STEP II 2013、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q13

鍵となる考え方

事象 $S = n$ は、最初の $n+1$ 回の投げの結果をちょうど指定している。すなわち、同じ結果が n 回続き、次の 1 回でその連（run）が途切れる。$A = n$ についても同様で、n 回交互に出たあと、同じ結果が繰り返される。したがって、それぞれの確率（probability）は、最初の投げの結果の 2 通りに対応する 2 つの積の和になる。S と A の比較は、4 つの項の差を因数分解（factorisation）することに帰着する。そしてその因数分解は、q を $1-p$ で置き換えるよりも、p と q を独立した文字のまま扱う方が見つけやすい。

解答

以下では、各投げは独立（independent）であり、それぞれ確率 p で表、確率 q で裏が出るとし、$p, q > 0$ かつ $p \neq q$ とする。

一般の公式

$S = n$ が起こるのは、ちょうど $1, \ldots, n$ 回目の投げがすべて 1 回目と一致し、$n+1$ 回目が異なるときである。1 回目が表ならばこれは $\mathrm{H}^n\mathrm{T}$ であり、その確率は $p^n q$ である。1 回目が裏ならば $\mathrm{T}^n\mathrm{H}$ であり、その確率は $q^n p$ である。これらの場合は互いに排反（disjoint）であるから、

$$\mathrm{P}(S = n) = p^n q + q^n p = pq\left(p^{n-1} + q^{n-1}\right).$$

$A = n$ が起こるのは、ちょうど $1, \ldots, n$ 回目の投げが交互になっていて、$n+1$ 回目が n 回目と同じになり、交互の並びが終わるときである。

▶ $n = 2m$（偶数）のとき：並び $\mathrm{HTHT}\cdots\mathrm{HT}$ は表を m 回、裏を m 回含み、T で終わ

るので、次の投げは T でなければならず、確率は $p^m q^m \cdot q$ となる。裏から始まる場合は $q^m p^m \cdot p$ となる。よって

$$\mathrm{P}(A = 2m) = p^m q^m (p + q).$$

- $n = 2m + 1$（奇数）のとき：並び $\mathrm{HTH}\cdots\mathrm{H}$ は表を $m + 1$ 回、裏を m 回含み、H で終わるので、次の投げは H でなければならず、確率は $p^{m+2} q^m$ となる。裏から始まる場合は $q^{m+2} p^m$ となる。よって

$$\mathrm{P}(A = 2m + 1) = p^m q^m \left(p^2 + q^2\right).$$

小問 (i)

$A = 1$ は 2 回目の投げが 1 回目と同じであること、すなわち HH または TT を意味する。よって $\mathrm{P}(A = 1) = p^2 + q^2$ である（上の $m = 0$ の場合）。$S = 1$ は 2 回目の投げが 1 回目と異なること、すなわち HT または TH を意味するので、

$$\mathrm{P}(S = 1) = pq + qp = 2pq.$$

すると

$$\mathrm{P}(A = 1) - \mathrm{P}(S = 1) = p^2 - 2pq + q^2 = (p - q)^2 > 0,$$

であり、$p \neq q$ であるから不等号は厳密に成り立つ。したがって $\mathrm{P}(S = 1) < \mathrm{P}(A = 1)$ である。

小問 (ii)

公式より、

$$\mathrm{P}(S = 2) = p^2 q + q^2 p = pq(p + q) = \mathrm{P}(A = 2),$$

となり、示すべきことが得られた。長さ 3 については、

$$\mathrm{P}(S = 3) = p^3 q + q^3 p = pq\left(p^2 + q^2\right) = \mathrm{P}(A = 3),$$

となるので、この 2 つも等しい。

小問 (iii)

偶数の長さ。$n > 1$ とする。両方の確率を $pq > 0$ で割ると、

$$\frac{\mathrm{P}(S = 2n)}{pq} = p^{2n-1} + q^{2n-1}, \qquad \frac{\mathrm{P}(A = 2n)}{pq} = p^{n-1} q^{n-1}(p + q) = p^n q^{n-1} + p^{n-1} q^n.$$

考えてみよう $p^{2n-1}+q^{2n-1}-p^nq^{n-1}-p^{n-1}q^n$ の符号はどうすれば判定できるか？

それぞれの純粋なべき乗を、同じ文字の最高次のべきを共有する交差項と組にする：

$$\begin{aligned}p^{2n-1}+q^{2n-1}-p^nq^{n-1}-p^{n-1}q^n &= p^n\left(p^{n-1}-q^{n-1}\right)-q^n\left(p^{n-1}-q^{n-1}\right)\\ &= \left(p^n-q^n\right)\left(p^{n-1}-q^{n-1}\right).\end{aligned}$$

$p,q>0$ かつ $p\neq q$ であるから、任意の $k\geq 1$ に対して数 p^k-q^k は 0 でなく、$p-q$ と同符号である（$x\mapsto x^k$ は $x>0$ において狭義単調増加（strictly increasing）であるため）。ここで $n\geq 2$ であるから、n と $n-1$ はともに 1 以上であり、2 つの括弧はどちらも 0 でなく同符号である。その積は正であり、$pq>0$ を掛け戻すと、

$$\mathrm{P}(S=2n)>\mathrm{P}(A=2n)\qquad (n>1).$$

（$n=1$ のときは 2 つ目の括弧が $p^0-q^0=0$ となり、これが小問 (ii) の等式である。）

奇数の長さ。同様に、やはり $n>1$ として、

$$\frac{\mathrm{P}(S=2n+1)}{pq}=p^{2n}+q^{2n},$$

$$\frac{\mathrm{P}(A=2n+1)}{pq}=p^{n-1}q^{n-1}\left(p^2+q^2\right)=p^{n+1}q^{n-1}+p^{n-1}q^{n+1},$$

であり、

$$\begin{aligned}p^{2n}+q^{2n}-p^{n+1}q^{n-1}-p^{n-1}q^{n+1} &= p^{n+1}\left(p^{n-1}-q^{n-1}\right)-q^{n+1}\left(p^{n-1}-q^{n-1}\right)\\ &= \left(p^{n+1}-q^{n+1}\right)\left(p^{n-1}-q^{n-1}\right).\end{aligned}$$

同じ議論により、2 つの括弧はどちらも 0 でなく $p-q$ と同符号であるから、

$$\mathrm{P}(S=2n+1)>\mathrm{P}(A=2n+1)\qquad (n>1).$$

ここでも因数 $p^{n-1}-q^{n-1}$ は $n=1$ で 0 となり、これは $\mathrm{P}(S=3)=\mathrm{P}(A=3)$ と一致する。

まとめると、長さ 1 では同じ結果が続く連の方が交互の連より起こりにくく、長さ 2 と 3 では両者は等しく起こりやすく、長さ 4 以上ではどの長さでも同じ結果が続く連の方が起こりやすい。

検算

- $p=\frac{1}{3}$、$q=\frac{2}{3}$ とする。すると $\mathrm{P}(S=4)=pq(p^3+q^3)=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{27}\approx 0.074$、$\mathrm{P}(A=4)=p^2q^2=\frac{4}{81}\approx 0.049$ であり、確かに $S=4$ の方が起こりやすい。

- すべての $n \geq 1$ について $\mathrm{P}(S = n)$ を足し合わせると $q \cdot \frac{p}{1-p} + p \cdot \frac{q}{1-q} = p + q = 1$ となり、当然そうなるべき値になっている。
- 各公式は、いくつかの p の値について、14 回の投げのすべての列を正確な分数で列挙するコンピュータ計算により、長さ 13 まで確認した。

よくある間違い

- 連を終わらせる投げを忘れること。$S = n$ には $n+1$ 回目の投げが異なることが必要であり、これがないと $\mathrm{P}(S \geq n)$ を計算していることになる。
- 交互の連を誤った文字で終わらせること。奇数の長さの連は始まりと同じ文字で終わり、偶数の長さの連はもう一方の文字で終わる。
- 小問 (iii) で $q = 1 - p$ を代入すること。式が p の多項式になり、その因数分解ははるかに見つけにくくなる。

STEP のその先へ

S は幾何分布型の確率変数（geometric-type random variable）である。最初の投げの結果が与えられれば、連の長さは最初に結果が変わるまでの待ち時間（waiting time）になる。このような連は、結果の列がランダムに見えるかどうかを判定するために用いられる統計学の連検定（runs test）の基礎となっており、また母関数（generating function）を使うと最長連の分布全体をうまく求めることができる。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、母関数と待ち時間をちょうどよい水準で扱っている。

解答例

STEP III 2013、第 1 問

純粋数学 ・ 半角の置換

> **STEP III 2013、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q1

鍵となる考え方

半角置換（half-angle substitution）$t = \tan\frac{1}{2}x$ を用いると、$\sin x$ の任意の有理関数（rational function）は t の有理関数に変わる。したがって最初の積分は $\int \mathrm{d}t/(2\text{次式})$ の形になり、これは平方完成（completing the square）によって計算できる。そのうえで答えを求められた形にするには、$\tan(A-B)$ の公式が必要になる。I_n については、厄介な分母が約分されるようにヒントが工夫されている。すなわち $\sin^{n+1}x + 2\sin^n x = \sin^n x\,(2+\sin x)$ である。これにより I_0 から順に上っていく漸化式（recurrence）が得られる。前半の結果が本当に必要になるのは I_0 だけである。

解答

置換

$t = \tan\frac{1}{2}x$ とおくと、連鎖律（chain rule）により

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \tfrac{1}{2}\sec^2\tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\tfrac{1}{2}x\right) = \tfrac{1}{2}(1+t^2).$$

正弦については、倍角の公式（double-angle formula）を用いてから $\cos^2\frac{1}{2}x = 1/\sec^2\frac{1}{2}x$ と書き換える：

$$\sin x = 2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x = 2\tan\tfrac{1}{2}x\cos^2\tfrac{1}{2}x = \frac{2\tan\frac{1}{2}x}{\sec^2\frac{1}{2}x} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

以上で両方の結果が示された。

最初の積分

x が 0 から $\frac{1}{2}\pi$ まで動くとき、t は $\tan 0 = 0$ から $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$ まで動き、$\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$ である。また

$$1 + a\sin x = \frac{1 + t^2 + 2at}{1+t^2},$$

であるから、因数 $1+t^2$ が約分されて

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\sin x} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+2at+1} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+a)^2+(1-a^2)}.$$

$0 < a < 1$ より定数 $1-a^2$ は正である。そこで $r = \sqrt{1-a^2}$ とおく。$\int \mathrm{d}u/(u^2+r^2) = \frac{1}{r}\arctan\frac{u}{r}$ を用いると

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\sin x} = \frac{2}{r}\left[\arctan\frac{t+a}{r}\right]_0^1 = \frac{2}{r}(\alpha - \beta),$$

となる。ただし

$$\tan\alpha = \frac{1+a}{r} = \frac{1+a}{\sqrt{1-a}\sqrt{1+a}} = \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}}, \qquad \tan\beta = \frac{a}{r},$$

であり、$\alpha, \beta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ である。

考えてみよう これは求めたい答えの形には見えない。2 つの逆正接の差を 1 つの逆正接にまとめるにはどうすればよいだろうか。

差の正接をとればよい。

$$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{(1+a)-a}{r} = \frac{1}{r}, \qquad 1 + \tan\alpha\tan\beta = 1 + \frac{a(1+a)}{1-a^2} = 1 + \frac{a}{1-a} = \frac{1}{1-a},$$

であるから

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{1-a}{r} = \frac{1-a}{\sqrt{1-a}\sqrt{1+a}} = \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}.$$

逆関数をとる前に、$\alpha - \beta$ が arctan の値域 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ に入っていることを確かめる必要がある。実際に入っている。両方の角は $(0, \frac{1}{2}\pi)$ にあり、しかも $\tan\alpha > \tan\beta$（その差は $1/r > 0$）なので、$0 < \alpha - \beta < \frac{1}{2}\pi$ である。よって $\alpha - \beta = \arctan\dfrac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}$ であり、

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\sin x} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}},$$

が示された。

I_3 の計算

ヒントに従うと

$$I_{n+1} + 2I_n = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^n x\,(\sin x + 2)}{2 + \sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x\,\mathrm{d}x.$$

$n = 0, 1, 2$ に対する右辺が必要である：

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} 1\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 1, \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\pi.$$

考えてみよう この漸化式は各 I_n を次の項と結びつけるが、出発点はどこだろうか。

I_0 は別に求める必要があり、ここで前半の結果が役に立つ。因数 2 をくくり出して $a = \frac{1}{2}$ とすると

$$\begin{aligned} I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2 + \sin x} &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \frac{1}{2}\sin x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3/4}} \arctan \frac{\sqrt{1/2}}{\sqrt{3/2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

あとは漸化式 $I_{n+1} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x\,\mathrm{d}x - 2I_n$ を順に上っていけばよい：

$$\begin{aligned} I_1 &= \tfrac{1}{2}\pi - 2I_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, \\ I_2 &= 1 - 2I_1 = 1 - \pi + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}, \\ I_3 &= \tfrac{1}{4}\pi - 2I_2 = \frac{\pi}{4} - 2 + 2\pi - \frac{8\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

したがって

$$I_3 = \frac{9\pi}{4} - \frac{8\sqrt{3}\,\pi}{9} - 2.$$

検算

- $a \to 0$ のとき、最初の結果は $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi$ を与えるはずである。実際、$2\arctan 1 = \frac{1}{2}\pi$ に収束する。
- $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上で $0 \le \sin^3 x/(2 + \sin x) \le \frac{1}{3}$ であるから、$0 < I_3 < \frac{1}{6}\pi \approx 0.52$ でなければならない。得られた答えは $I_3 \approx 0.2318$ であり、I_3 の数値積分とも小数点以下何桁にもわたって一致する。同様に $I_0 = \pi/(3\sqrt{3}) \approx 0.6046$ であり、当然そうあるべきとおり $\frac{\pi}{6}$ と $\frac{\pi}{4}$ の間にある。

- 区間上で $0 \leq \sin x \leq 1$ であるから、値は $I_0 > I_1 > I_2 > I_3 > 0$ と減少するはずであり、実際にそうなっている。

よくある間違い

- 積分区間を $t = 0$ と $t = 1$ に変更し忘れる、あるいは $\mathrm{d}x$ から生じる因数 $2/(1+t^2)$ を付け忘れる。
- $\alpha - \beta$ が $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ に入ることを確かめずに、$\tan(\alpha - \beta)$ から $\alpha - \beta = \arctan(\dots)$ と結論してしまう。
- 最初の結果を $a = 2$ として I_0 に適用してしまう。この結果は $0 < a < 1$ のときにしか成り立たないので、先に因数 2 をくくり出さなければならない。

STEP のその先へ

$t = \tan \frac{1}{2}x$ による置換（ワイエルシュトラス（Weierstrass）置換（Weierstrass substitution）と呼ばれることが多い）を用いると、$\sin x$ と $\cos x$ の任意の有理関数が初等的な原始関数（antiderivative）をもつことがわかる。t の有理関数はどれも部分分数分解（partial fractions）で処理できるからである。幾何学的には、これは単位円の立体射影（stereographic projection）によるパラメータ表示 $(\cos x, \sin x) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ であり、有理数 t からすべてのピタゴラス数（Pythagorean triple）を生み出すものでもある。また $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x/(1 + a\sin x)$ のような積分は、複素解析（complex analysis）における周回積分（contour integration）の最初の応用例として古典的なものである。その理由を知るには、Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）がすばらしい一冊である。

解答例

STEP III 2013、第 2 問

純粋数学 ・ マクローリン級数

STEP III 2013、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/13-s3-q2

鍵となる考え方

まず $y\sqrt{1-x^2} = \arcsin x$ と書いて平方根を払っておくと、1 階導関数（first derivative）の計算が楽になる。高階の関係式は、この 1 階の方程式をライプニッツの法則（Leibniz's rule）を用いて繰り返し微分すれば得られる。$x = 0$ ではほとんどの項が消え、導関数についての 2 項おきの漸化式（recurrence）が残る。これによってマクローリン級数（Maclaurin series）の係数が一つずつ求まる。最後の和は、うまく選んだ x の値で級数を評価したものに見える。

解答

1 階の方程式

分母を払って $y\sqrt{1-x^2} = \arcsin x$ とし、両辺を x で微分する。左辺には積の微分法（product rule）を用いる：

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

両辺に $\sqrt{1-x^2}$（$|x| < 1$ では 0 でない）を掛けると

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xy - 1 = 0,$$

となり、求める式が得られる。

高階の関係式

$\dfrac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k}$ を $y^{(k)}$ と書く。1 階の方程式を $n+1$ 回微分する。定数 1 は消え、2 つの積はライプニッツの法則で処理できる。$1-x^2$ の導関数は順に $-2x$、-2、その後は 0 であり、x の導関数は 1、その後は 0 であるから、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\Big[(1-x^2)y'\Big] &= (1-x^2)y^{(n+2)} + \binom{n+1}{1}(-2x)\,y^{(n+1)} + \binom{n+1}{2}(-2)\,y^{(n)} \\ &= (1-x^2)y^{(n+2)} - 2(n+1)x\,y^{(n+1)} - n(n+1)\,y^{(n)},\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\Big[xy\Big] = x\,y^{(n+1)} + (n+1)\,y^{(n)}.$$

第 1 式から第 2 式を引いて項をまとめると、

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - \big(2(n+1)+1\big)x\,y^{(n+1)} - \big(n(n+1)+(n+1)\big)y^{(n)} = 0,$$

すなわち

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+3)x\,y^{(n+1)} - (n+1)^2 y^{(n)} = 0.$$

ここでは $n \geq 1$ はどこにも必要なかった。1 回だけ微分した場合（$n=0$）も同じ形 $(1-x^2)y'' - 3xy' - y = 0$ になり、この場合も後で用いる。

マクローリン級数

$x=0$ とおく。中央の項は因数 x を含むので消え、

$$y^{(n+2)}(0) = (n+1)^2\,y^{(n)}(0) \qquad (n \geq 0).$$

この漸化式は 2 つずつ進むので、初期値が 2 つ必要である。定義から $y(0) = \arcsin 0 = 0$ であり、1 階の方程式で $x=0$ とおくと $y'(0) - 0 - 1 = 0$ となるので $y'(0) = 1$ である。

> **考えてみよう** この 2 つの値だけから、どのようにしてすべての導関数が得られるだろうか。

漸化式は $y^{(n)}(0)$ を $y^{(n+2)}(0)$ にしか結びつけないので、偶数階の導関数は $y(0)$ から始まる一つの連鎖をなし、奇数階の導関数は $y'(0)$ から始まる別の連鎖をなす。

偶数乗の項。 $y(0)=0$ であるから、漸化式より $y''(0) = 1^2 \cdot 0 = 0$、次いで $y^{(4)}(0) = 0$、以下同様に、すべての k について $y^{(2k)}(0) = 0$ である。よって x の偶数乗の係数はすべて 0 である。（これは、y が奇関数 $\arcsin x$ を偶関数 $\sqrt{1-x^2}$ で割った商であるから奇関数（odd function）であることと整合する。）

奇数乗の項。 漸化式を $n = 1, 3, \ldots, 2k-1$ について用いると

$$y^{(2k+1)}(0) = (2k)^2(2k-2)^2 \cdots 4^2 \cdot 2^2 \cdot y'(0) = \big(2 \cdot 4 \cdots 2k\big)^2 = \big(2^k\,k!\big)^2,$$

となり、これは $k=0$ でも成り立つ。$(2k+1)!$ で割るとマクローリン級数の係数が得られる：

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} = x + \frac{2^2}{3!}x^3 + \frac{2^2\cdot 4^2}{5!}x^5 + \cdots,$$

したがって奇数次の一般項は $\dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}x^{2k+1}$、偶数次の一般項は $0\cdot x^{2k}$ である。

無限和

和の第 n 項は $\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ であり、$n=0$ が先頭の 1 を与える。級数と比べると因数 2^{2n} を取り除きたいので、$2^{2n}x^{2n+1}$ が 1 の定数倍になるように x を選ぶ。$x=\frac{1}{2}$ とすれば $2^{2n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}=\frac{1}{2}$ となる。よって

$$\frac{\arcsin\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

左辺は $\dfrac{\pi/6}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$ であるから、

$$1+\frac{1}{3!}+\frac{2^2}{5!}+\frac{2^2\times 3^2}{7!}+\cdots = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\,\pi}{9}.$$

検算

- 既知の級数 $\arcsin x = x+\frac{1}{6}x^3+\cdots$ に $(1-x^2)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x^2+\cdots$ を掛けると $x+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)x^3+\cdots = x+\frac{2}{3}x^3+\cdots$ となり、確かに $\frac{2^2}{3!}=\frac{2}{3}$ である。
- 和の最初の 5 項は $1+0.16667+0.03333+0.00714+0.00159\approx 1.2087$ であり、すでに $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\approx 1.20920$ に近い。項は毎回およそ 4 分の 1 ずつ小さくなるので、残りの和は小さい。

よくある間違い

- ライプニッツの法則で $y^{(n)}$ の項に付く二項係数（binomial coefficient）$\binom{n+1}{2}$ を忘れること。そうすると $(n+1)^2$ が正しく得られない。
- 漸化式を $n\geq 1$ についてしか用いず、そのため $y''(0)=0$ を示さないままにすること。偶数階の連鎖には $n=0$ の場合（1 回の微分）が必要である。
- 最後の小問で $x=1$ や $x=\frac{1}{4}$ を代入すること。因数 2^{2n} は x^{2n} で打ち消されなければならず、それによって $x=\frac{1}{2}$ に決まる。

STEP のその先へ

ここでは「収束の問題は無視した」が、大学の最初の解析学の講義ではこれを厳密に扱う。比判定法（ratio test）によりこの級数の収束半径（radius of convergence）は 1 であり、剰余項付きのテイラーの定理（Taylor's theorem）を用いると、その区間の内部では級数が実際にもとの関数に等しいことが示される。係数 $\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$ は中心二項係数（central binomial coefficients）と密接に関係しており、また同じ関数を 1 回積分すると $(\arcsin x)^2$ の級数が得られる。べき級数の背後にある解析学については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照するとよい。

解答例

STEP III 2013、第 3 問

純粋数学 ・ ベクトルと球面

STEP III 2013、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/13-s3-q3

鍵となる考え方

すべては二つの事実から導かれる。各 $\mathbf{p}_i$ が単位ベクトル（unit vector）であること、そして四つの和が $\mathbf{0}$ になることである。長さの 2 乗を内積（dot product）として展開すると、$(XP_i)^2$ は $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i$ について線形（linear）な式になり、線形な項の和は $\sum \mathbf{p}_i = \mathbf{0}$ により消えてしまう。4 乗の場合は 2 次の項が残るので、実際の座標が必要になる。それをちょうど与えてくれるのが小問 (ii) である。

解答

内積 $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j$

四面体は正四面体（regular tetrahedron）なので、6 本の辺の長さはすべて等しい。$i \neq j$ のとき、

$$(P_iP_j)^2 = (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)\cdot(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = |\mathbf{p}_i|^2 + |\mathbf{p}_j|^2 - 2\,\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j = 2 - 2\,\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j,$$

である。ここで $|\mathbf{p}_i| = 1$（各頂点は単位球面（unit sphere）上にある）を用いた。したがって辺の長さが等しいことから、すべての $\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j$（$i \neq j$）は同じ値をとる。その値を c とおく。

次に、$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 = \mathbf{0}$ と $\mathbf{p}_1$ との内積をとると、

$$\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_4 = 0 \quad\Longrightarrow\quad 1 + 3c = 0,$$

となるので $c = -\frac{1}{3}$ である。すなわち、すべての $i \neq j$ について $\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j = -\frac{1}{3}$ が成り立ち、示すべきことが示された。

小問 (i)

$|\mathbf{x}| = 1$ でもあるから、

$$(XP_i)^2 = (\mathbf{p}_i - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{x}) = |\mathbf{p}_i|^2 - 2\,\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}_i + |\mathbf{x}|^2 = 2 - 2\,\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}_i.$$

i について和をとり、内積の分配法則（distributive law）を用いると、

$$\sum_{i=1}^{4} (XP_i)^2 = 8 - 2\,\mathbf{x} \cdot \left(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4\right) = 8 - 2\,\mathbf{x} \cdot \mathbf{0} = 8,$$

となり、示すべきことが示された。

小問 (ii)

$\mathbf{p}_1 = (0, 0, 1)$、$\mathbf{p}_2 = (a, 0, b)$ とすると、条件 $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = -\frac{1}{3}$ からただちに $b = -\frac{1}{3}$ を得る。さらに $|\mathbf{p}_2| = 1$ より

$$a^2 = 1 - b^2 = \tfrac{8}{9}, \qquad \text{よって} \qquad a = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

である。$a > 0$ なので正の平方根をとった。

$\mathbf{p}_3 = (u, v, w)$ とおく。次の三つの条件によってこれは決まる。

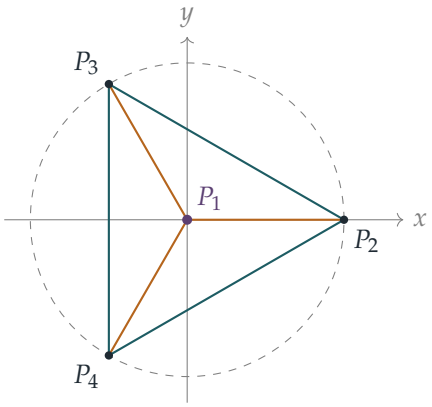
$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 = -\tfrac{1}{3} &\implies w = -\tfrac{1}{3}, \\
\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 = -\tfrac{1}{3} &\implies \tfrac{2\sqrt{2}}{3}u + \tfrac{1}{9} = -\tfrac{1}{3} \implies u = -\tfrac{4}{9} \cdot \tfrac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}, \\
|\mathbf{p}_3| = 1 &\implies v^2 = 1 - \tfrac{2}{9} - \tfrac{1}{9} = \tfrac{6}{9} \implies v = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}.
\end{aligned}$$

$\mathbf{p}_4$ についてもまったく同じ方程式が成り立つので、P_3 と P_4 はこれによって得られる 2 点である（両者は異なる点でなければならないので、それぞれが一方の符号をとる）。一方の向きにラベルをつけると、

$$P_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{1}{3}\right), \qquad P_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

（P_3 と P_4 のラベルは入れ替えてもよい。）検算として、四つの位置ベクトル（position vector）の和は確かに $\mathbf{0}$ であり、$\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_4 = \frac{2}{9} - \frac{6}{9} + \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}$ である。

上から見ると、P_2、P_3、P_4 は平面 $z = -\frac{1}{3}$ 上で正三角形（equilateral triangle）をなし、P_1 はその中心の真上にある。



小問 (iii)

小問 (i) より $(XP_i)^2 = 2(1-\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)$ であるから、両辺を2乗して

$$(XP_i)^4 = 4(1-\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{4}(XP_i)^4 = 4\sum_{i=1}^{4}(1-\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2,$$

となり、示すべき式が得られる。括弧を展開し、再び $\sum \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i = 0$ を用いると、

$$\sum_{i=1}^{4}(XP_i)^4 = 4\Big(4 - 2\sum_{i=1}^{4}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i + \sum_{i=1}^{4}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2\Big) = 16 + 4\sum_{i=1}^{4}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2.$$

? **考えてみよう** 線形な項はまた消えた。では、なぜ同じ手法で $\sum(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2$ を片づけることができないのだろうか。

2乗の和は $\mathbf{p}_i$ について線形ではないので、$\sum \mathbf{p}_i = \mathbf{0}$ がわかっていても、それについて直接は何もわからない。ここで座標の出番となる。$\mathbf{x} = (x, y, z)$ とし、小問 (ii) の頂点を用いると、

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_1 = z, \qquad \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_2 = \tfrac{1}{3}\big(2\sqrt{2}\,x - z\big),$$
$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_3 = \tfrac{1}{3}\big(-\sqrt{2}\,x + \sqrt{6}\,y - z\big), \qquad \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_4 = \tfrac{1}{3}\big(-\sqrt{2}\,x - \sqrt{6}\,y - z\big).$$

これらを2乗して加え、項ごとにまとめる。

- x^2：$\tfrac{1}{9}(8+2+2) = \tfrac{4}{3}$；　y^2：$\tfrac{1}{9}(6+6) = \tfrac{4}{3}$；　z^2：$1 + \tfrac{1}{9}(1+1+1) = \tfrac{4}{3}$。
- xy と yz：これらは $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_3$ と $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_4$ にしか現れず、この二つは y の項の符号だけが異なるので、打ち消し合う。
- xz：$\tfrac{1}{9}\big(-4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\big) = 0$。

したがって

$$\sum_{i=1}^{4}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2 = \tfrac{4}{3}\big(x^2 + y^2 + z^2\big) = \tfrac{4}{3},$$

である。X が単位球面上にあるからである。ゆえに

$$\sum_{i=1}^{4}(XP_i)^4 = 16 + 4\cdot\tfrac{4}{3} = \frac{64}{3},$$

となり、これは X の位置によらない。以上で示すべきことが示された。

考えてみよう ここでは特定の座標を用いた。この結論は、球に内接するすべての正四面体について成り立つだろうか。

成り立つ。そのような正四面体はどれも、O のまわりに回転（rotation）させて、P_1 を $(0,0,1)$ に、P_2 を半平面 $y=0$、$x>0$ 内に移すことができる。回転は長さを保ち、X が球面全体を動けば、その回転による像も球面全体を動く。したがって、小問 (ii) の座標をとっても一般性は失われない。

検算

- $X = P_1$ とする。距離は 0 と 3 本の辺で、各辺の長さは $\sqrt{2-2(-\frac{1}{3})} = \sqrt{8/3}$ である。このとき $\sum(XP_i)^2 = 3\cdot\frac{8}{3} = 8$、$\sum(XP_i)^4 = 3\cdot\frac{64}{9} = \frac{64}{3}$ となり、二つの結果と一致する。
- P_1 の反対側の点 $X = (0,0,-1)$ をとる。このとき $XP_1 = 2$ であり、残りの 3 点については $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i = \frac{1}{3}$ なので $(XP_i)^2 = \frac{4}{3}$ である。これより $4 + 3\cdot\frac{4}{3} = 8$、$16 + 3\cdot\frac{16}{9} = \frac{64}{3} \approx 21.33$ を得る。
- 球面上の数千個のランダムな点でコンピュータにより確かめたところ、毎回 8 と 21.333... が得られた。

よくある間違い

- すべての $\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j$ が等しいことを、理由を述べずに主張してしまう。理由は辺の長さが等しいことであり、$(P_iP_j)^2 = 2 - 2\,\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j$ を通じて導かれる。
- $|\mathbf{x}| = 1$ を忘れる。これは $(XP_i)^2 = 2 - 2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i$ にも、最後の段階の $x^2+y^2+z^2=1$ にも必要である。
- 小問 (iii) の交差項での計算ミス。そこで符号を誤ると、X への見かけ上の依存が残ってしまう。

STEP のその先へ

小問 (iii) の核心は、**すべての**ベクトル $\mathbf{x}$ について成り立つ恒等式 $\sum_i (\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2 = \frac{4}{3}|\mathbf{x}|^2$ である。行列の言葉でいえば $\sum_i \mathbf{p}_i\mathbf{p}_i^{\mathsf{T}} = \frac{4}{3}I$ であり、四つの頂点ベクトルは過剰な（over-complete）正規直交基底（orthonormal basis）のようにふるまう。これを**タイトフレーム**（tight frame）という。これは対称性から必ず成り立つ。この行列は正四面体のすべての回転と可換なので I の定数倍でなければならず、そのトレース（trace）は 4 だからである。球面上の点集合で、低次の平均が球面そのものの平均と一致するものを**球面デザイン**（spherical design）という。これは数値積分（numerical integration）や符号理論（coding theory）で用いられる。この背後にある線形代数（外積（outer product）、対称行列（symmetric matrix）、固有値（eigenvalue））については、ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照するとよい。

解答例

STEP III 2013、第 4 問

純粋数学 ・ 1 の冪根の積

> **STEP III 2013、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q4

この問題は、*Beyond STEP* の第 5.3 節「$z^{2n}+1$ の因数分解」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch05/z2n-plus-one.html

鍵となる考え方

$z^{2n}=-1$ の根は共役（conjugate）な組 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta}$ として現れ、各組を掛け合わせると実数係数の 2 次式（quadratic）になる。これが因数分解（factorisation）を与える。次に、うまく選んだ z の値をひとつ代入すると、この因数分解は余弦についての主張に変わる。$z=\mathrm{i}$ ではどの 2 次式でも z^2+1 の部分が消え、$-2z\cos\theta$ の項だけが残るのである。小問 (ii) では同じ代入をすると両辺がともに 0 になってしまうので、まず $z=\mathrm{i}$ で 0 になる因数をひとつ約分しておく。

解答

因数分解

展開すると、

$$\begin{aligned}(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(z-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) &= z^2 - z\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \\ &= z^2 - 2z\cos\theta + 1,\end{aligned}$$

である。ここで $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=2\cos\theta$ を用いた。

さて、$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ が $z^{2n}=-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ を満たすのは、$2n\theta$ が π の奇数倍であるとき、すなわち整数 k を用いて $\theta=\frac{(2k-1)\pi}{2n}$ と書けるとき、かつそのときに限る。$(-\pi,\pi]$ に含まれる値

は

$$\theta = \pm\frac{\pi}{2n}, \pm\frac{3\pi}{2n}, \ldots, \pm\frac{(2n-1)\pi}{2n},$$

である。実際、$\frac{(2n-1)\pi}{2n} < \pi$ であり、一方 $\frac{(2n+1)\pi}{2n} > \pi$ である。これらは相異なる $2n$ 個の根なので、-1 の $(2n)$ 乗根はこれで全部である：

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta_k}, \qquad \theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

$z^{2n}+1$ は次数 $2n$ のモニック（monic）な多項式であり、これら相異なる $2n$ 個の根をもつから、

$$z^{2n}+1 = \prod_{k=1}^{n}(z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k})(z - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_k}) = \prod_{k=1}^{n}\left(z^2 - 2z\cos\theta_k + 1\right),$$

となる。ここで各共役な組に最初の結果を用いた。これが求める恒等式である。

小問 (i)

$z = \mathrm{i}$ とおく。各因数は

$$\mathrm{i}^2 - 2\mathrm{i}\cos\theta_k + 1 = -2\mathrm{i}\cos\theta_k,$$

となり、n は偶数なので左辺は $\mathrm{i}^{2n}+1 = (-1)^n + 1 = 2$ である。よって

$$2 = (-2\mathrm{i})^n \prod_{k=1}^{n}\cos\theta_k.$$

n が偶数のとき $(-2)^n = 2^n$ かつ $\mathrm{i}^n = (\mathrm{i}^2)^{n/2} = (-1)^{\frac{1}{2}n}$ なので、$(-2\mathrm{i})^n = 2^n(-1)^{\frac{1}{2}n}$ である。したがって

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\theta_k = \frac{2}{2^n(-1)^{\frac{1}{2}n}} = (-1)^{\frac{1}{2}n}\,2^{1-n},$$

となる。ここで $1/(-1)^{\frac{1}{2}n} = (-1)^{\frac{1}{2}n}$ を用いた。左辺の積はちょうど $\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{3\pi}{2n}\cdots\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}$ であり、これで示された。

小問 (ii)

考えてみよう なぜ、もう一度因数分解に $z = \mathrm{i}$ を代入するだけではいけないのだろうか？

n が奇数のとき $\mathrm{i}^{2n}+1 = (-1)^n + 1 = 0$ なので、左辺は 0 になる。右辺では、$m = \frac{1}{2}(n+1)$ として真ん中の値 $k = m$ が $\theta_m = \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$ を与えるので、その因数は z^2+1 となり、これも $z = \mathrm{i}$ で 0 になる。結局 $0 = 0$ が得られるだけで、何もわからない。対処法は、まず両辺から因数 z^2+1 を取り除くことである。

与えられた事実と因数分解を用いると、

$$(1+z^2)\left(1-z^2+z^4-\cdots+z^{2n-2}\right)=(z^2+1)\prod_{k\neq m}\left(z^2-2z\cos\theta_k+1\right).$$

これらは多項式であり、z^2+1 は零多項式ではないので、これを約分してよい（多項式の割り算の結果は一意である）：

$$1-z^2+z^4-\cdots+z^{2n-2}=\prod_{k\neq m}\left(z^2-2z\cos\theta_k+1\right),$$

これは多項式としての恒等式であり、$z=\mathrm{i}$ を含むすべての z で成り立つ。

ここで $z=\mathrm{i}$ を代入する。左辺では項 $(-1)^j z^{2j}$ が $(-1)^j(-1)^j=1$ となり、項は n 個（$j=0,1,\ldots,n-1$）あるので、左辺は n である。右辺には $n-1$ 個の因数があり、それぞれ $-2\mathrm{i}\cos\theta_k$ に等しい：

$$n=(-2\mathrm{i})^{n-1}\prod_{k\neq m}\cos\theta_k.$$

$n-1$ は偶数なので、小問 (i) とまったく同様に $(-2\mathrm{i})^{n-1}=2^{n-1}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$ である。

積を平方の積に直すために、k と $n+1-k$ を組にする。

$$\theta_{n+1-k}=\frac{(2n+1-2k)\pi}{2n}=\pi-\theta_k,$$

であるから、$\cos\theta_{n+1-k}=-\cos\theta_k$ が成り立つ。$k\neq m$ である値は、$1\leq k\leq\frac{1}{2}(n-1)$ に対する $\frac{1}{2}(n-1)$ 個の組 $\{k,\,n+1-k\}$ に分かれるので、

$$\prod_{k\neq m}\cos\theta_k=\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(-\cos^2\theta_k\right)=(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}P,\qquad P=\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\cos^2\theta_k.$$

これらをまとめると、2 つの符号 $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$ の積は $+1$ になる：

$$n=2^{n-1}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}P=2^{n-1}P,$$

よって $P=n\,2^{1-n}$ である。P の最後の因数は $k=\frac{1}{2}(n-1)$、すなわち $\theta_k=\frac{(n-2)\pi}{2n}$ に対応するので、P はまさに

$$\cos^2\frac{\pi}{2n}\cos^2\frac{3\pi}{2n}\cdots\cos^2\frac{(n-2)\pi}{2n}=n\,2^{1-n},$$

であり、これで示された。（$n=1$ のときは積は空であり、$1=1\cdot 2^0$ に等しいので矛盾はない。）

検算

- 小問 (i) で $n=2$ のとき：$\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{1}{2}=(-1)^1 2^{-1}$。$n=4$ のとき積は $\frac{1}{8}$ であり、$(-1)^2 2^{-3}$ と一致する。
- 小問 (ii) で $n=3$ のとき：$\cos^2\frac{\pi}{6}=\frac{3}{4}=3\cdot 2^{-2}$。$n=5$ のとき、$\cos^2\frac{\pi}{10}\cos^2\frac{3\pi}{10}=0.3125=\frac{5}{16}$。
- 両方の恒等式は 39 までのすべての n についてコンピュータでも確認し、因数分解はランダムな複素数 z で検証した。

よくある間違い

- 小問 (ii) で因数分解に $z=\mathrm{i}$ をそのまま代入してしまい、$0=0$ しか得られない。
- 符号を落とす：小問 (i) の答えは $n\equiv 2 \pmod 4$ のとき本当に負になる。$\frac{\pi}{2}$ を超える $\frac{1}{2}n$ 個の角では $\cos\theta_k<0$ だからである。
- $\cos\theta_{n+1-k}=-\cos\theta_k$ を忘れ、平方をつくるときに符号を誤る。

STEP のその先へ

同じ技法、すなわち $z^N\pm 1$ を 1 の冪根（roots of unity）を用いて因数分解し、うまく選んだ点で値を求めるという方法から、$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$ のような積の公式が一群として得られる（$\frac{z^n-1}{z-1}$ に $z=1$ を代入してみよ）。このような有限積で $n\to\infty$ とすると、オイラー（Euler）の無限積（infinite product）$\sin\pi x=\pi x\prod_{k\geq 1}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$ に至る。これは、複素解析（complex analysis）が関数をその零点から組み立てる様子を初めて味わう例である。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は、1 の冪根やこれらの考え方を幾何学的に眺めるのに素晴らしい本である。

解答例

STEP III 2013、第 5 問

純粋数学 ・ 有理性と互いに素

STEP III 2013、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/13-s3-q5

鍵となる考え方

すべての段階は一つの道具で動いている。すなわち、ある数が積を割り切り、かつ一方の因数と互いに素（coprime）であれば、その数はもう一方の因数を割り切る、という事実である。有理数を既約分数で表し、分母を払い、各因数がどちら側に落ち着かざるを得ないかを見届けるのである。小問 (ii) では、この論法によって分母 b が二つの事実の間に挟み込まれ、b がごく小さくない限りそれらは両立しない。

次の小さな事実を繰り返し用いる。**p と q が互いに素ならば、任意の正の整数 s, t に対して p^s と q^t も互いに素である。**実際、p^s と q^t の両方を割り切る素数（prime）があれば、それは p と q の両方を割り切ることになり（素数が積を割り切るならば因数のいずれかを割り切る。これは与えられた結果で a を素数とした場合である）、互いに素であることに矛盾する。

解答

小問 (i)

$q^n N = p^n$ より、p^n は $q^n N$ を割り切る。p と q は互いに素であるから、p^n と q^n も互いに素であり、与えられた結果（$a = p^n, b = q^n, c = N$ とする）により p^n は N を割り切る。よって、ある正の整数 k を用いて $N = kp^n$ と書ける。これが示すべきことであった。

これを代入し直すと $q^n k p^n = p^n$ となるから、$q^n k = 1$ である。どちらも正の整数であるから $k = 1$ かつ $q^n = 1$ であり、

$$q = 1 \quad （および N = p^n）.$$

を得る。

次に、任意の正の整数 n と N をとり、$\sqrt[n]{N}$ が有理数であると仮定する。これは正であるから、p, q を正の整数として、既約分数（lowest terms）の形 $\sqrt[n]{N} = p/q$、すなわち p と q が互いに素であるように書ける。両辺を n 乗すると $q^n N = p^n$ となり、上の議論から $q = 1$ である。したがって $\sqrt[n]{N} = p$ は正の整数である。以上より、$\sqrt[n]{N}$ は正の整数であるか、無理数（irrational）であるかのいずれかである。

小問 (ii)

$\gcd(a,b) = \gcd(c,d) = 1$ のもとで $a^a d^b = b^a c^b$ が成り立っている。

$d^b = b^a$ **を示す**。右辺を見ると、b^a は $a^a d^b$ を割り切る。a と b は互いに素であるから b^a と a^a も互いに素であり、よって b^a は d^b を割り切る。同様に、d^b は $b^a c^b$ を割り切り、d^b は c^b と互いに素であるから、d^b は b^a を割り切る。互いに割り切り合う二つの正の整数は等しいから、

$$d^b = b^a,$$

であり、これをもとの等式で約すと $a^a = c^b$ も得られる。

p が d の素因数であるとすると、p は $d^b = b^a$ を割り切り、b の累乗を割り切る素数は b を割り切る。よって p は b の素因数である。

p **の累乗**。d と b を割り切る p の最大の累乗をそれぞれ p^m, p^n とする。前段落より $m, n \geq 1$ である。素因数分解の一意性（unique factorisation）により、d^b を割り切る p の最大の累乗は p^{mb} であり、b^a を割り切る最大の累乗は p^{na} である。$d^b = b^a$ であるからこれらは等しく、$mb = na$ であり、

$$b = \frac{na}{m}.$$

考えてみよう $b = na/m$ から、p^n に対するどのような上界が得られるか？

これを $mb = na$ と書き直すと、b は na を割り切る。ところが b は a と互いに素であるから、与えられた結果により b は n を割り切り、特に $b \leq n$ である。また p^n は b を割り切るから $p^n \leq b$ である。合わせて

$$p^n \leq b \leq n.$$

しかし $p \geq 2$ かつ $n > 0$ であるから、与えられた事実 $y^x > x$（$y = p, x = n$ とする）により $p^n > n$ である。この矛盾により、仮定が成り立ち得ないことがわかる。すなわち d は素因数を**一つももたない**。よって $d = 1$ であり、$b^a = d^b = 1$ となるから、

$$b = 1.$$

最後の小問

r を正の有理数とし、r^r が有理数であるとする。$r = a/b$ を既約分数で表し（a, b は正で互いに素）、$r^r = c/d$ も既約分数で表す（$r^r > 0$ より c, d は正で、互いに素）。すると

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{a/b} = \frac{c}{d} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{a} = \left(\frac{c}{d}\right)^{b} \quad \Longrightarrow \quad a^a d^b = b^a c^b,$$

となる。ここで両辺を b 乗し、分母を払った。これはまさに小問 (ii) の状況であるから、$b = 1$ であり、$r = a$ は正の整数である。

検算

- 整数の r は確かに条件を満たす。$r = 2$ のとき $r^r = 4$ である。また、$b = 1$ のときの結論 $c^b = a^a$ は単に $c = a^a$ を意味しており、そうなるべきである。
- 反例となる場合：$r = \frac{1}{2}$ のとき $r^r = 1/\sqrt{2}$ は無理数であり、結果と整合する。小問 (i) については、$\sqrt[3]{27} = 3$ であり、$\sqrt[3]{24}$ は無理数である。二つの可能性はどちらも実際に起こる。
- 互いに素な $a, b \leq 24$、$c < 200$、$d < 60$ のすべてについてコンピュータで探索したところ、$a^a d^b = b^a c^b$ の解として見つかったのは $b = d = 1$ のもの（すなわち $a = 1, 2, 3$ で $c = a^a$）だけであった。

よくある間違い

- p^n と q^n が互いに素である**理由**を述べ忘れること。与えられた結果は a と b が互いに素である場合についてのものなので、累乗どうしが互いに素であることが必要である。
- $b \mid n$ という段階を経ずに、$b = na/m$ から $p^n \leq n$ を結論づけること。$mb = na$ を $b \mid n$ に変えるのは、a と b が互いに素であるという事実である。
- $(a/b)^{a/b} = c/d$ と書きながら、c/d が既約分数であることを要求しないこと。$\gcd(c, d) = 1$ がなければ、$d^b \mid b^a$ の段階が成り立たない。

STEP のその先へ

与えられた「互いに素な約数」に関する結果はユークリッドの補題（Euclid's lemma）であり、通常はベズーの等式（Bézout's identity）から証明される。これは素数への素因数分解の一意性を支える原動力である。最初の小問は $\sqrt{2}$ の無理性の一般化であり、

二番目の小問は超越数論（transcendence theory）への最初の入口である。超越数論では、ゲルフォント–シュナイダーの定理（Gelfond–Schneider theorem）により、たとえば $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ は代数的数でさえないことが示される。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、これらの基礎を見事に展開している。

解答例

STEP III 2013、第 6 問

純粋数学 ・ 複素数の絶対値に関する不等式

STEP III 2013、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/13-s3-q6

この問題は、*Beyond STEP* の第 5.8 節「円板に隠れた距離」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch05/poincare-disc.html

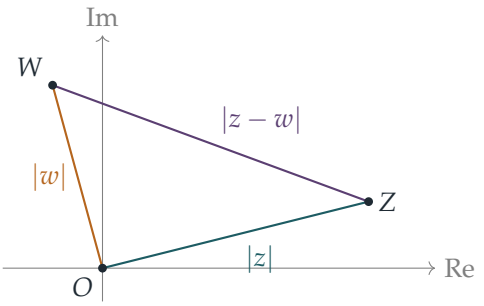
鍵となる考え方

すべての土台は、絶対値（modulus）の 2 乗をその数と複素共役（conjugate）の積として $|u|^2 = uu^*$ と書くことにある。この方法で $|z-w|^2$ と $|1-zw^*|^2$ を展開すると、どちらにも同じ交差項 $zw^* + z^*w$ が現れる。ただ一つの量 E が両方に登場するのは、まさにこのためである。両方の絶対値を「何かの 2 乗から E を引いたもの」の形に書いてしまえば、最後の不等式は $\frac{A-E}{B-E}$ と $\frac{A}{B}$ という形の二つの分数の比較となり、それは $B-A$ の符号に帰着する。

解答

三角不等式

アルガン図（Argand diagram、複素数平面）上に、原点 O と、z、w を表す点 Z、W をとる。距離 OZ と OW はそれぞれ $|z|$ と $|w|$ であり、距離 WZ は $|z-w|$ である。



線分 WZ は W から Z への最短経路であるから、経路 $W \to O \to Z$ より長くはない。すなわち

$$|z-w| = WZ \leq WO + OZ = |w| + |z|.$$

これが三角不等式（triangle inequality）である。等号が成り立つのは、O が線分 WZ 上にあるとき、すなわち z と w が互いに逆向きであるとき（またはどちらかが 0 のとき）に限る。O、Z、W が一直線上にあって O がその間にない場合、「三角形」はつぶれてしまうが、最短経路による議論はそのまま適用できる。

小問 (i)

$|u|^2 = uu^*$ と $(z-w)^* = z^* - w^*$ を用いると、

$$\begin{aligned} |z-w|^2 &= (z-w)(z^*-w^*) \\ &= zz^* + ww^* - zw^* - z^*w \\ &= |z|^2 + |w|^2 - (zw^* + z^*w). \end{aligned}$$

$|zw| = |z||w|$ であるから $(|z|+|w|)^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2|zw|$ となり、したがって

$$(|z|+|w|)^2 - E = |z|^2 + |w|^2 + 2|zw| - zw^* - z^*w - 2|zw| = |z-w|^2,$$

となって、示すべき式が得られる。これを変形すると

$$E = (|z|+|w|)^2 - |z-w|^2.$$

右辺は実数の 2 乗の差であるから、E は実数である。三角不等式より $0 \leq |z-w| \leq |z|+|w|$ であり、非負の量を 2 乗しても不等号の向きは変わらないので、$E \geq 0$ である。

（直接示すこともできる。z^*w は zw^* の複素共役であるから $E = 2\,\mathrm{Re}(zw^*) + 2|zw^*|$ であり、$\mathrm{Re}\,u \geq -|u|$ なので、これは実数で 0 以上である。）

小問 (ii)

同様に、$(zw^*)^* = z^*w$ を用いると、

$$\begin{aligned}|1-zw^*|^2 &= (1-zw^*)(1-z^*w)\\ &= 1-zw^*-z^*w+zz^*ww^*\\ &= 1+|zw|^2-(zw^*+z^*w)\\ &= \left(1+2|zw|+|zw|^2\right)-(zw^*+z^*w+2|zw|)\\ &= (1+|zw|)^2-E,\end{aligned}$$

となって、示すべき式が得られる。

最後の不等式

$$A=(|z|+|w|)^2, \qquad B=(1+|zw|)^2,$$

とおく。すると小問 (i)、(ii) の結果は $|z-w|^2 = A-E$ および $|1-zw^*|^2 = B-E$ と書ける。

まず、左辺が意味をもつことを確かめる。$|z|>1$ かつ $|w|>1$ ならば $|zw^*| = |z||w| > 1$ であるから、$zw^* \neq 1$ であり、$B-E = |1-zw^*|^2 > 0$ となる。また $B>0$ である。

示すべき不等式の両辺はともに非負であるから、それは両辺の 2 乗の間の不等式

$$\frac{A-E}{B-E} \leq \frac{A}{B}.$$

と同値（equivalent）である。正の量 $B(B-E)$ を両辺に掛けると、これは

$$(A-E)B \leq A(B-E) \iff -EB \leq -EA \iff E(B-A) \geq 0.$$

と同値である。

> **考えてみよう** $B-A$ の符号はどうなるか。また、$|z|$ と $|w|$ に関する条件はどこで効いてくるか。

$a=|z|$、$b=|w|$ とおくと、

$$B-A = (1+ab)^2-(a+b)^2 = 1+a^2b^2-a^2-b^2 = (1-a^2)(1-b^2).$$

$a>1$ かつ $b>1$ ならば、二つの括弧はともに負であるから $B-A>0$ である。小問 (i) より $E \geq 0$ なので、$E(B-A) \geq 0$ となる。上の各段階はすべて同値変形であったから、

$$\frac{|z-w|}{|1-zw^*|} \leq \frac{|z|+|w|}{1+|zw|}.$$

が成り立つ。等号が成り立つのは $E=0$ のとき、すなわち z と w が互いに逆向きであるときに限る。

$|z| < 1$ かつ $|w| < 1$ の場合

答えは「はい」であり、この不等式はやはり成り立つ。このとき $|zw^*| = ab < 1$ であるから、やはり $zw^* \neq 1$ かつ $B - E > 0$ であり、同値変形の連鎖はそのまま通用する。今度は $(1-a^2)(1-b^2)$ の二つの括弧がともに正であるから、やはり $B - A > 0$ となり、$E(B-A) \geq 0$、したがって不等式が得られる。

重要なのは、$1-a^2$ と $1-b^2$ が同符号であることだけである。一方の絶対値が 1 より大きく、他方が 1 より小さい場合は $B - A < 0$ となり、不等式は成り立たないことがある。たとえば $z = 2$、$w = 0.4$ のとき、左辺は $1.6/0.2 = 8$ であるが、右辺は $2.4/1.8 = \frac{4}{3}$ である。

検算

- $z = 2$、$w = 2\mathrm{i}$ とする。このとき $|z-w| = 2\sqrt{2}$、$1 - zw^* = 1 - 2(-2\mathrm{i}) = 1 + 4\mathrm{i}$ であるから、左辺は $2\sqrt{2}/\sqrt{17} \approx 0.686$、右辺は $4/5 = 0.8$ である。両方を $\frac{1}{4}$ 倍した場合（$z = \frac{1}{2}$、$w = \frac{1}{2}\mathrm{i}$）も同じ二つの数 $0.686 \leq 0.8$ が得られ、$|z|, |w| < 1$ の場合の例となっている。
- 等号の場合：$z = 2 + \mathrm{i}$、$w = -1.5z$ とすると $E = 0$ となり、両辺はともに小数第 4 位まで 0.6577 に等しい。
- 数十万組のランダムな組についてコンピュータで確認したところ、二つの恒等式、$E \geq 0$、および両方の場合の不等式が確かめられた。

よくある間違い

- $|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2zw^*$ と書いてしまう。交差項は $zw^* + z^*w$ であり、これらは互いに複素共役であるが、一般には等しくない。
- $|1 - zw^*| \neq 0$ を確かめずに分母を払ってしまう。ここでは $|zw| \neq 1$ がそれを保証している。
- 導出で $|z|, |w| > 1$ を用いたからという理由で、最後の問いに「いいえ」と答えてしまう。因数分解 $(1-a^2)(1-b^2)$ を見れば、符号が一致することだけが重要だとわかる。

STEP のその先へ

$|1 - zw^*| = |1 - z^*w|$ であるから、左辺は $\dfrac{z - w}{1 - z^*w}$ の絶対値である。$|z| < 1$ を満たす z を固定すると、写像 $w \mapsto \dfrac{z - w}{1 - z^*w}$ は単位円板（unit disc）をそれ自身の上へ写すメビウス変換（Möbius transformation）であり、$\left|\frac{z-w}{1-z^*w}\right|$ は z と w の間の擬双曲距離（pseudo-hyperbolic distance）である。この問題の不等式は、この距離が、z から 0 までの距離と w から 0 までの距離の「双曲的な和」以下であることを述べている。これは三角不等式の強い形であり、双曲幾何（hyperbolic geometry）の基礎の一つである。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、メビウス変換と双曲円板を美しい図とともに解説している。

解答例

STEP III 2013、第 7 問

純粋数学 ・ 常微分方程式のエネルギー法

STEP III 2013、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/13-s3-q7

この問題は、*Beyond STEP* の第 8.2 節「解かずに評価する」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch08/bounding-without-solving.html

鍵となる考え方

どの方程式も、ばねにつながれた粒子のように見える。未知関数だけに依存する「力」の項があり、さらに (ii) と (iii) では導関数に比例する摩擦の項が加わっている。方程式に導関数を掛けると、それはある「エネルギー」の導関数に変わる。摩擦がなければエネルギーは保存される。逆向きに押すことのない摩擦があれば、エネルギーは減少することしかできないので、初期値を超えることはない。小問 (iii) では、エネルギーを自分で構成し、摩擦係数が決して負にならないことを示すことが求められている。

解答

小問 (i)

$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ と書く。連鎖律（chain rule）により、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} &= 2y'y'' + 2y^3y' \\ &= 2y'\left(y'' + y^3\right) = 0,\end{aligned}$$

となる。ここで微分方程式（differential equation）を用いた。よって E は定数であり、その値は $\mathrm{E}(0) = 0^2 + \frac{1}{2}\cdot 1^4 = \frac{1}{2}$ である。したがって、すべての x に対して

$$\tfrac{1}{2}y^4 = \tfrac{1}{2} - (y')^2 \le \tfrac{1}{2},$$

が成り立つ。$(y')^2 \geq 0$ だからである。よって $y^4 \leq 1$ であり、すべての x に対して $|y(x)| \leq 1$ が得られる。

小問 (ii)

同様に微分し、方程式を $v'' + \sinh v = -xv'$ の形で用いると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} &= 2v'v'' + 2\sinh v\, v' \\ &= 2v'\bigl(v'' + \sinh v\bigr) \\ &= -2x\,(v')^2.\end{aligned}$$

$x \geq 0$ のとき x も $(v')^2$ も非負であるから、求めるとおり $\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} \leq 0$ である。

よって E は $x \geq 0$ で単調非増加（non-increasing）であり、そこで $\mathrm{E}(x) \leq \mathrm{E}(0)$ が成り立つ。$x = 0$ では $\cosh(\ln 3) = \frac{1}{2}\bigl(3 + \frac{1}{3}\bigr) = \frac{5}{3}$ であるから、$\mathrm{E}(0) = 0 + 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$ となる。したがって、$x \geq 0$ に対して

$$2\cosh v(x) = \mathrm{E}(x) - (v')^2 \leq \mathrm{E}(x) \leq \tfrac{10}{3},$$

であり、$\cosh v(x) \leq \frac{5}{3}$ が成り立つ。

小問 (iii)

(ii) と同様に、$\mathrm{E} = (w')^2 + F(w)$ の形のエネルギーを探す。すると

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = 2w'w'' + F'(w)\,w' = w'\bigl(2w'' + F'(w)\bigr),$$

となり、方程式を用いて括弧内が w' の倍数になるようにしたい。そうなるのは $F'(w) = 2(w\cosh w + 2\sinh w)$ のときである。

考えてみよう 導関数が $w\cosh w + 2\sinh w$ となる w の関数は何か。

部分積分（integration by parts）により $\int w\cosh w\,\mathrm{d}w = w\sinh w - \cosh w$ であり、また $\int 2\sinh w\,\mathrm{d}w = 2\cosh w$ である。これらを足すと、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\bigl(w\sinh w + \cosh w\bigr) = \sinh w + w\cosh w + \sinh w = w\cosh w + 2\sinh w.$$

そこで

$$\mathrm{E}(x) = \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 2\bigl(w\sinh w + \cosh w\bigr).$$

とおく。$g(x) = 5\cosh x - 4\sinh x - 3$ と書くと、方程式は $w'' + (w\cosh w + 2\sinh w) = -g(x)\,w'$ を意味するので、

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = 2w'\bigl(w'' + w\cosh w + 2\sinh w\bigr) = -2g(x)\,(w')^2.$$

考えてみよう $g(x)$ が負になることはあるか。

指数関数で表すと、

$$\begin{aligned} g(x) &= \tfrac{5}{2}\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)-2\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)-3 \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}-3+\tfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-x} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x}-6\mathrm{e}^{x}+9\right)=\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{x}-3\right)^{2} \ \geq\ 0 \end{aligned}$$

がすべての x に対して成り立つ（0 になるのは $x=\ln 3$ のときだけである）。よって $\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x}\leq 0$ であり、$x\geq 0$ に対して $\mathrm{E}(x)\leq \mathrm{E}(0)$ である。$x=0$ では $w=0$、$w'=\frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから、$\mathrm{E}(0)=\frac{1}{2}+2(0+1)=\frac{5}{2}$ となる。したがって、$x\geq 0$ に対して

$$2\left(w\sinh w+\cosh w\right)\leq \mathrm{E}(x)\leq \tfrac{5}{2}, \qquad \text{よって} \qquad w\sinh w+\cosh w\leq \tfrac{5}{4}.$$

最後に、すべての実数 w に対して $w\sinh w\geq 0$ である。w と $\sinh w$ は常に同符号だからである。この項を落とすと、求めるとおり $x\geq 0$ に対して $\cosh w(x)\leq \frac{5}{4}$ が得られる。

検算

- (ii) では、この評価は出発点で等号が成立する（sharp）。実際 $\cosh v(0)=\cosh(\ln 3)=\frac{5}{3}$ である。
- (iii) では $g(0)=5-0-3=2$ であり、因数分解した形から得られる $\frac{1}{2}(1-3)^2=2$ と一致する。
- 各方程式を数値的に解くと、この描像が確かめられる。(i) では E は 0.5 のままであり、(ii) では E は $\frac{10}{3}$ から減少し、(iii) では E は 2.5 から減少して、$\cosh w$ はおよそ 1.03 を超えることがなく、上界 1.25 を十分に下回っている。

よくある間違い

- $F(w)$ を x で微分するとき、連鎖律から出る因子 w' を忘れる。
- (iii) で、$w\sinh w\geq 0$ だからその項を落とせるという説明をせずに、$w\sinh w+\cosh w\leq\frac{5}{4}$ で止めてしまう。
- $g(x)>0$ と主張する。g は $x=\ln 3$ で 0 になるので、成り立つのは $\leq$ だけである（必要なのはそれで十分である）。

STEP のその先へ

これらのエネルギー関数は**リャプノフ関数**（Lyapunov function）と呼ばれる。解に沿って決して増加しない量であり、系を解かずに、それが有界にとどまること、あるいは落ち着くことを証明するために用いられる。エネルギー保存と減衰による散逸という同じ考え方が、非線形振動子の安定性理論の基礎となっている。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）では、非線形系と安定性の章でリャプノフ（Lyapunov）の方法を扱っている。

解答例

STEP III 2013、第 8 問

純粋数学 • 2 次曲線の極方程式

> **STEP III 2013、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q8

鍵となる考え方

関係式 $r = ks$（ただし $k < 1$）は、E が焦点（focus）O、準線（directrix）D をもつ楕円（ellipse）であることを表しており、O を中心とする極座標（polar coordinates）では、r を θ で表すきわめて簡単な方程式になる。O を通る弦（chord）は互いに逆向きの 2 本の動径にすぎないので、$1/l$ は $\cos^2\theta$ の簡単な式として得られる。さらに、等間隔に並んだ n 本の直線によって、この和は $\cos 2\theta$ の項の和に変わる。これはまさに冒頭の和で片がつくものである。

解答

冒頭の和

各項は初項 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$、公比 $w = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}$ の等比数列（geometric progression）をなす。$n \geq 2$ より角 $2\pi/n$ は $(0, \pi]$ に属するので $w \neq 1$ であり、通常の公式が使える：

$$\sum_{r=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\alpha + r\pi/n)} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\,\frac{1 - w^n}{1 - w} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\,\frac{1 - \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}}{1 - w} = 0.$$

実部をとると $\sum_{r=0}^{n-1} \cos\left(2\alpha + 2r\pi/n\right) = 0$ である。以後はこの形を用いる。

距離 s

図のように、θ は O から D に下ろした垂線から測る。その垂線の足は O から距離 d の位置にあり、P は同じ向きに O から距離 $r\cos\theta$ の位置にあるので、P が D に関して O

と同じ側にあるとき

$$s = d - r\cos\theta.$$

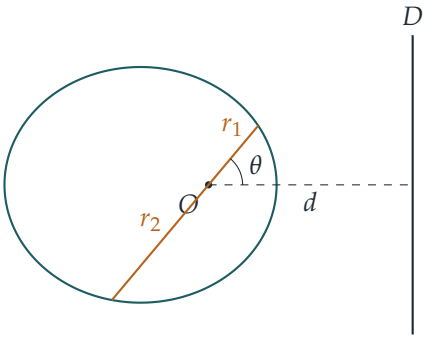
となる。（これはすべての θ で成り立つ。$\cos\theta < 0$ のとき P は O よりも D から遠く、この式は正しく $s > d$ を与える。）

E の極方程式

E のすべての点は D に関して O と同じ側にある。実際、P が反対側にあるとすると $s = r\cos\theta - d$ となり、$r = ks$ から $r(1 - k\cos\theta) = -kd < 0$ が得られるが、$0 < k < 1$ のとき $1 - k\cos\theta > 0$ であるから、これは不可能である。よって $s = d - r\cos\theta$ を使うことができ、$r = ks$ は

$$r = k(d - r\cos\theta) \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{kd}{1 + k\cos\theta}.$$

となる。$k < 1$ より分母はすべての θ に対して正であるから、O から出る各半直線は E とちょうど 1 回交わる。



O を通る弦の長さ

O を通り垂線と角 θ をなす直線は、E と方向 θ および $\theta + \pi$ にある点で交わり、これらは O に関して互いに反対側にある。$\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$ であるから、弦の長さは

$$l = \frac{kd}{1 + k\cos\theta} + \frac{kd}{1 - k\cos\theta} = \frac{2kd}{1 - k^2\cos^2\theta}, \qquad \text{よって} \qquad \frac{1}{l} = \frac{1 - k^2\cos^2\theta}{2kd}.$$

これは直線だけで決まり、その 2 つの向きのどちらを θ とよぶかにはよらないことに注意する。

考えてみよう n 本の直線について $\cos^2\theta$ の和をどのように求めればよいか？

2 倍角の公式 $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$ を使う。$\cos 2\theta$ の項はまさに冒頭の和の実部である。

n 本の直線にわたる和

隣り合う直線のなす角は π/n であるから、n 本の直線の角は、ある定数 α を用いて $\theta_j = \alpha + j\pi/n$（$j = 1, \ldots, n$）と表せる。これら n 個の $2\theta_j$ の値は $2\alpha + 2j\pi/n$ であり、$j = n$ を $j = 0$ に置き換えると（これは $2\theta_j$ を 2π だけ変える）、冒頭の和の角と一致する。したがって

$$\sum_{j=1}^{n} \cos^2\theta_j = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \cos 2\theta_j = \frac{n}{2} + 0 = \frac{n}{2},$$

であり、よって

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{l_j} = \frac{1}{2kd}\left(n - k^2 \cdot \frac{n}{2}\right) = \frac{(2-k^2)n}{4kd},$$

となる。これが求める結果である。条件 $n \geq 2$ は、冒頭の和で $w \neq 1$ を保証するためにただ一度だけ用いた。

検算

- $n = 2$、$k = \frac{1}{2}$、$d = 1$ とし、直線を OD に沿う方向とそれに垂直な方向にとる。OD に沿う弦は長軸（major axis）であり、その長さは $\frac{1/2}{3/2} + \frac{1/2}{1/2} = \frac{4}{3}$ である。それに垂直な弦（通径（latus rectum））の長さは $2kd = 1$ である。よって $\frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$ となり、公式は $\frac{(7/4)\cdot 2}{2} = \frac{7}{4}$ を与える。
- $n = 1$ のときは、当然ながら結果は成り立たない。1 本の直線の $1/l$ はその向きに依存するからである。$n = 1$ の場合はちょうど $w = 1$ となる場合である。
- 無作為に選んだ d、k、n、α に対して各弦を $r = ks$ から直接求めるコンピュータによる検証でも、公式と一致した。たとえば $d = 1$、$k = \frac{1}{2}$、$n = 3$ のとき、どの α に対しても $2.625 = \frac{21}{8}$ となる。

よくある間違い

- $s = d + r\cos\theta$ と書いてしまう。図では θ は D の方へ向かって測っているので、OP に沿って外へ進むと D に近づく。
- 弦の残り半分を再び $kd/(1 + k\cos\theta)$ としてしまう。反対向きの角が $\theta + \pi$ であることを忘れている。
- $2\theta_j$ ではなく角 $\alpha + j\pi/n$ そのものを足し合わせてしまう。円をちょうど一周、等間隔に回るのは 2 倍した角のほうであり、そのために冒頭の和には因子 2 がついている。

STEP のその先へ

焦点–準線による定義から、すべての円錐曲線（conic）は極方程式 $r = \ell/(1 + e\cos\theta)$ をもち、楕円、放物線、双曲線はそれぞれ $e < 1$、$e = 1$、$e > 1$ に対応する。これは、惑星の運動に関するニュートン（Newton）の方程式を解いたときにケプラー（Kepler）の軌道が現れる形である。直交する任意の 2 本の焦点弦（focal chord）について $1/l_1 + 1/l_2$ が一定であることは古典的な性質であり、本問の結果はそれを一般化している。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、この方法で軌道の方程式を導いている。

解答例

STEP III 2013、第 9 問

力学 ・ 浮力と単振動

STEP III 2013、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/13-s3-q9

鍵となる考え方

球の沈んでいる部分は球冠（spherical cap）であり、その体積は円板に切り分けて求められる。これは回転体の体積（volume of revolution）の計算である。あとは、重力以外に働く力が浮力（buoyancy）だけである場合のニュートン（Newton）の運動の第二法則（Newton's second law）の問題となる。微小振動（small oscillations）については $x = x_0 + y$ とおき、右辺の 3 次式を平衡点（equilibrium）のまわりで線形化（linearise）し、$\ddot{y} = -\omega^2 y$ の形の方程式から ω^2 を読み取る。

解答

排除される体積

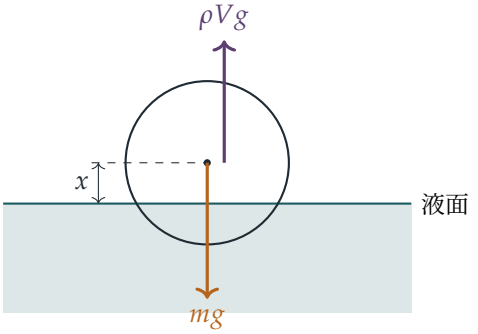
球の中心を原点とし、z を鉛直上向きにとる。このとき液面は平面 $z = -x$ であり、沈んでいる部分は球のうち $-R \le z \le -x$ を満たす部分である。これは $-R < x < R$ で意味をもつので、問題の場合を含んでいる。高さ z における断面は半径 $\sqrt{R^2 - z^2}$ の円板であるから、

$$V = \int_{-R}^{-x} \pi \left(R^2 - z^2\right) \mathrm{d}z = \pi \left[R^2 z - \tfrac{1}{3} z^3\right]_{-R}^{-x}$$
$$= \pi \left(-R^2 x + \tfrac{1}{3} x^3 + R^3 - \tfrac{1}{3} R^3\right) = \frac{\pi}{3} \left(2R^3 - 3R^2 x + x^3\right),$$

となり、これが求める体積である。

運動方程式

球を鉛直方向に運動する剛体（rigid body）としてモデル化する。タンクは大きいので、球が上下に揺れても液面の高さは変わらず、$\ddot{x}$ は球の上向きの加速度である。球の質量は $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_s$ である。球に働く力は二つ、下向きの重力 mg と上向きの浮力 $\rho V g$ である。



上向きを正として鉛直方向の力のつり合いを考えると、

$$m\ddot{x} = \rho V g - mg \quad \Longrightarrow \quad m\left(g + \ddot{x}\right) = \rho g V.$$

m と V を代入すると

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3 \rho_s \left(g + \ddot{x}\right) = \tfrac{\pi}{3}\left(2R^3 - 3R^2 x + x^3\right)\rho g,$$

となり、両辺に $3/\pi$ を掛けると

$$4R^3 \rho_s \left(g + \ddot{x}\right) = \left(2R^3 - 3R^2 x + x^3\right)\rho g,$$

が得られ、題意が示された。

平衡状態での密度

平衡状態では $\ddot{x} = 0$ である。$x = \frac{1}{2}R$ を代入すると

$$4R^3 \rho_s g = \left(2R^3 - \tfrac{3}{2}R^3 + \tfrac{1}{8}R^3\right)\rho g = \tfrac{5}{8}R^3 \rho g,$$

したがって

$$\rho_s = \frac{5}{32}\rho.$$

これは $\frac{1}{2}\rho$ より小さく、当然そうあるべきである。中心が液面より上にあるので、液中にあるのは球の半分未満だからである。

微小振動

$f(x) = 2R^3 - 3R^2x + x^3$ とおき、y を微小量として $x = \frac{1}{2}R + y$ とおく。このとき $\ddot{x} = \ddot{y}$ である。

> **考えてみよう** 3 次式を y について線形なものに変えるにはどうすればよいか。

f を平衡点のまわりで展開し、1 次の項までだけを残す。すなわち $f(\frac{1}{2}R + y) = f(\frac{1}{2}R) + f'(\frac{1}{2}R)\,y + O(y^2)$ である。ここで

$$f'(x) = -3R^2 + 3x^2, \qquad f'(\tfrac{1}{2}R) = -3R^2 + \tfrac{3}{4}R^2 = -\tfrac{9}{4}R^2,$$

であり、先の計算から $f(\frac{1}{2}R) = \frac{5}{8}R^3$ である。$\rho_s = \frac{5}{32}\rho$ を用いると、運動方程式の左辺は $4R^3 \cdot \frac{5}{32}\rho\,(g + \ddot{y}) = \frac{5}{8}R^3\rho\,(g + \ddot{y})$ となる。よって 1 次の近似で

$$\tfrac{5}{8}R^3\rho\,(g + \ddot{y}) = \left(\tfrac{5}{8}R^3 - \tfrac{9}{4}R^2 y\right)\rho g.$$

$\frac{5}{8}R^3\rho g$ の項は打ち消し合い（これはまさに平衡条件である）、

$$\tfrac{5}{8}R^3\ddot{y} = -\tfrac{9}{4}R^2 g\,y \quad\Longrightarrow\quad \ddot{y} = -\frac{18g}{5R}\,y.$$

が残る。これは $\omega^2 = \dfrac{18g}{5R}$ の単振動（simple harmonic motion）であるから、微小振動の周期は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{5R}{18g}}.$$

検算

- 体積：$x = R$ のとき公式は 0 を与え（液面にちょうど接している）、$x = 0$ のとき $\frac{2}{3}\pi R^3$（球の半分）、$x = -R$ のとき $\frac{4}{3}\pi R^3$（完全に沈んでいる）を与える。
- 次元：$\omega^2 = 18g/(5R)$ の単位は s^{-2} であり、当然そうあるべきである。
- 数値：$R = 1\,\mathrm{m}$、$g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ とすると、周期は約 $1.06\,\mathrm{s}$ である。微小な変位から出発して、非線形のままの方程式をコンピュータで数値的に追跡すると、10^4 分の 1 より良い精度で同じ周期が得られる。

よくある間違い

- 沈んでいる球冠の高さを $R - x$ ではなく x としてしまう。x は液面から上の中心の高さである。

- 復元力が $f'(\frac{1}{2}R)$ から生じ、それが負であることを忘れる。ここで符号を誤ると $\ddot{y} = +\omega^2 y$ となり、これはまったく振動ではない。
- 左辺の球自身の質量を落としてしまう。$\ddot{x}$ に掛かるのは ρ_s であって ρ ではない。（実際の浮体は周囲の液体の一部も引きずって動き、これを「付加質量」（added mass）というが、問題文ではこれを無視するよう指示されている。）

STEP のその先へ

ここで用いた方法、すなわち力を平衡点のまわりで展開して線形の項を残す方法は、あらゆる系の微小振動を求める標準的な方法である。その項の符号から安定性がわかり、その大きさから振動数がわかる。大学 1 年の講義では、これは $\ddot{x} = F(x)$ の線形化となり、さらに自由度（degrees of freedom）が複数ある場合の基準振動（normal modes）の研究へとつながる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、平衡点まわりの微小振動と流体の浮力をこのレベルで扱っている。

解答例

STEP III 2013、第 10 問

力学 ・ 回転を伴う撃力

STEP III 2013、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

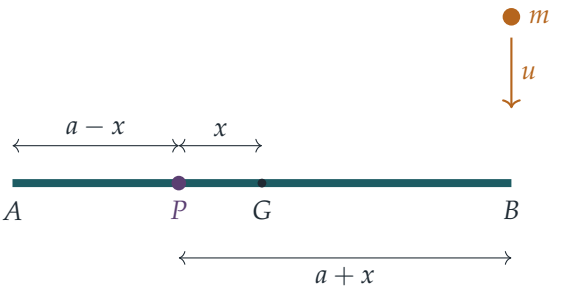
step.maths.org/questions/13-s3-q10

鍵となる考え方

棒の中心が P からどれだけ離れているかに気づけば、慣性モーメント（moment of inertia）は平行軸の定理（parallel axis theorem）からただちに求まる。衝突については、回転軸が棒に未知の力積（impulse）を及ぼすので、運動量（linear momentum）は保存されない。しかし、その力積は P を通って作用するので、P のまわりのモーメントをもたない。P のまわりの角運動量（angular momentum）保存則と、B におけるニュートンの実験則（Newton's experimental law）を合わせれば、2 つの未知数に対する 2 本の方程式が得られる。

解答

棒を一様な剛体（rigid body）の棒、粒子を質点とみなし、衝突は瞬間的に起こるとモデル化する。すると、水平方向の力積は B におけるものと回転軸におけるものだけである（重力のような有限の大きさの力は、衝突の瞬間には力積を与えない）。



慣性モーメント

G を棒の中点、すなわち重心（centre of mass）とする。$AG = a$、$AP = a - x$ であるから、距離 PG は x である（$x > 0$ のとき、G は P から見て B の側にある）。一様な棒の、中心を通り棒に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは $\frac{1}{3}Ma^2$ である（長さ $2a$ の棒の場合）。平行軸の定理より

$$I_P = \tfrac{1}{3}Ma^2 + Mx^2 = \tfrac{1}{3}M(a^2 + 3x^2),$$

となり、示すべき式が得られた。

定義から直接計算したければ、次のようにすればよい。線密度（line density）を $M/(2a)$ とし、s を P から棒に沿って測った位置とすると、棒は $s = -(a-x)$ から $s = a + x$ までにわたっていて、

$$I_P = \frac{M}{2a}\int_{-(a-x)}^{a+x} s^2\,\mathrm{d}s = \frac{M}{6a}\left[(a+x)^3 + (a-x)^3\right] = \frac{M}{6a}(2a^3 + 6ax^2),$$

となり、同じ結果である。

衝突

P から B までの距離は $2a - (a-x) = a + x$ である。衝突直後の粒子の速度（最初の運動の向きを正とする）を v、棒の角速度（angular velocity）を ω とする。このとき B は同じ向きに速さ $(a+x)\omega$ で動く。

考えてみよう なぜここでは運動量保存則が使えないのだろうか？

回転軸は固定されているので、衝突の間に棒に大きさの分からない力積を与える。その力積は P に作用するので、P のまわりのモーメントは 0 である。粒子と棒の間の力積は、棒と粒子からなる系の内力によるものである。したがって、P のまわりの系全体の角運動量は保存される：

$$mu(a+x) = mv(a+x) + I_P\,\omega. \tag{1}$$

B におけるニュートンの実験則（遠ざかる速さは近づく速さの e 倍である）より

$$(a+x)\omega - v = eu. \tag{2}$$

(2) より $v = (a+x)\omega - eu$ である。これを (1) に代入すると

$$mu(a+x) = m(a+x)\left[(a+x)\omega - eu\right] + I_P\,\omega$$
$$mu(1+e)(a+x) = \left[m(a+x)^2 + \tfrac{1}{3}M(a^2+3x^2)\right]\omega.$$

両辺に 3 を掛けて

$$\omega = \frac{3mu(1+e)(a+x)}{M(a^2+3x^2) + 3m(a+x)^2},$$

となり、与えられた結果が得られる。

$m = 2M$ の場合

$m = 2M$ とおいて M を約分すると

$$\omega = \frac{6u(1+e)(a+x)}{a^2+3x^2+6(a+x)^2}.$$

自然に現れる変数は腕の長さ $s = a + x$、すなわち距離 PB であり、これは $[0, 2a]$ に属する。$x = s - a$ とすると、分母は

$$a^2 + 3(s-a)^2 + 6s^2 = 9s^2 - 6as + 4a^2,$$

となるので

$$\omega = \frac{6u(1+e)\,s}{9s^2 - 6as + 4a^2}.$$

$s = 0$（回転軸が B にある場合）では $\omega = 0$ であるから、最大値は $s > 0$ でとられる。そこでは分子と分母を s で割ることができて

$$\omega = \frac{6u(1+e)}{9s + \dfrac{4a^2}{s} - 6a}.$$

分母をできるだけ小さくしたい。$s > 0$ であるから、相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）より

$$9s + \frac{4a^2}{s} \;\geq\; 2\sqrt{9s \cdot \frac{4a^2}{s}} = 12a,$$

であり、等号が成り立つのはちょうど $9s = 4a^2/s$、すなわち $s = \frac{2}{3}a$ のときである。これは確かに $(0, 2a]$ に属する。よって分母は $12a - 6a = 6a$ 以上であり、等号は $s = \frac{2}{3}a$ のときに限って成り立つ。したがって

$$\omega \leq \frac{6u(1+e)}{6a} = \frac{u(1+e)}{a}.$$

ゆえに角速度の最大値は $u(1+e)/a$ であり、それは $a + x = \frac{2}{3}a$、すなわち

$$x = -\tfrac{1}{3}a.$$

のときにとられる。負の符号は、単に P が中心から見て B の側にあることを意味する。P は A から距離 $\frac{4}{3}a$、B から距離 $\frac{2}{3}a$ の位置にある。

検算

- $x = a$（回転軸が A にある場合）かつ $e = 1$ のとき、公式は $\omega = 3mu/\big(a(M+3m)\big)$ を与える。$M \to 0$ とすると $\omega = u/a$ となり、B は速さ $2u$ で動く。これは、非常に軽い「標的」に弾性衝突したときのおなじみの結果である。

- 最適な場合で $a = 1$、$u = 1$、$e = \frac{1}{2}$ とすると、棒は $\omega = 1.5$ で回転するので B は速さ 1 で動き、衝突後の粒子の速度は $v = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ である。このとき P のまわりの角運動量は $2M \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3}M\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot 1.5 = \frac{4}{3}M$ となり、衝突前の $2M \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}$ と一致する。
- $x \in [-a, a]$ についてコンピュータで細かく探索すると、最大値が $x = -a/3$ でとられることが確かめられる。

よくある間違い

- 運動量保存則を使ってしまう：固定された回転軸が力積を与えるので、保存されるのは P のまわりの角運動量だけである。
- 距離 PB を $a + x$ ではなく $a - x$ や $2a - x$ としてしまう。
- $x = -\frac{1}{3}a$ を負だからという理由で捨ててしまう：x は符号付きの位置であり、$[-a, a]$ のどの x に対しても P は棒の上にある。

STEP のその先へ

未知の反力が消えるようにモーメントをとる点を選ぶのは、剛体力学において最も役に立つ技法の 1 つである。これは「打撃の中心（centre of percussion）」にも再び現れる。打撃の中心とは、バットや棒のうち、そこを打っても支点に力積が生じない点のことである。大学 1 年の力学では、これが角運動量と慣性テンソル（inertia tensor）の一般論へと発展する。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、撃力による回転と打撃の中心を非常に分かりやすく扱っている。

解答例

STEP III 2013、第 11 問

力学 ・ ばねとエネルギー

STEP III 2013、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/13-s3-q11

鍵となる考え方

すべては対称性（symmetry）によって決まる。三角形は水平を保ち、その中心はつねに吊り下げ点の真下にあり、三角形は上下にしか動けない。したがって、質点 1 つとばね 1 本を調べれば全体がわかる。ばねを含む鉛直面内の幾何から、ばねの長さが θ で表される。鉛直方向の力のつり合いから平衡状態が求まり、エネルギー保存則（conservation of energy）（弾性エネルギー、重力による位置エネルギー、運動エネルギー）から速さが求まる。

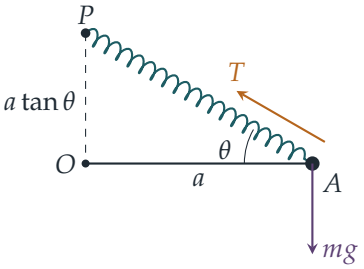
解答

モデルと幾何

おもりを質点、棒を軽い剛体、ばねを軽くフックの法則（Hooke's law）に従うものとみなす。P を吊り下げ点、O を三角形の中心とし、O は P の真下にある。1 辺 s の正三角形の中心から頂点までの距離は $s/\sqrt{3}$ であるから、各頂点は O から水平距離

$$OA = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3}} = a$$

の位置にある。頂点 A をとり、P、O、A を通る鉛直面を考える。



ばね PA は水平な OA と角 θ をなすので、ばねの長さは $a/\cos\theta$ であり、A は P より深さ $a\tan\theta$ だけ下にある。

張力

各ばねの伸び（extension）は

$$x = \frac{a}{\cos\theta} - a = \frac{a(1-\cos\theta)}{\cos\theta},$$

である。よって、弾性係数（modulus of elasticity）kmg、自然長（natural length）a としてフックの法則より

$$T = \frac{kmg}{a}\,x = \frac{kmg(1-\cos\theta)}{\cos\theta},$$

となり、示すべき式が得られた。

$\theta = \frac{1}{6}\pi$ における平衡

A にある質点にはたらく力は、重力、AP 方向のばねの張力、2 本の棒からの力である。棒は水平面内にあるので、棒からの力は水平である。

考えてみよう なぜ棒からの力を無視してよいのか。

鉛直方向に力を分解するが、棒からの力には鉛直成分がないからである。（水平方向では張力の成分 $T\cos\theta$ が棒からの力とつり合っており、そのために棒が必要なのだが、その式は使わない。）A において鉛直方向の力のつり合いを考えると

$$T\sin\theta = mg \quad\Longrightarrow\quad k(1-\cos\theta)\tan\theta = 1.$$

$\theta = \frac{1}{6}\pi$ のとき $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$、$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ であるから

$$k\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 1 \quad\Longrightarrow\quad k = \frac{2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 4\sqrt{3}+6,$$

となる。ここで $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$ を用いた。これが求める値である。

平衡位置における速さ

対称性により、三角形は中心を P の真下に保ったまま水平を保つので、3 つの質点はすべて同じ速さで鉛直に動く。重力とばね以外の外力は仕事をしないので、エネルギーは保存される。伸び x のばねに蓄えられる弾性エネルギーは $kmg\,x^2/(2a)$ である。

初めの状態（$\theta = \frac{1}{3}\pi$、**静止**）。このとき $\cos\theta = \frac{1}{2}$ であるから伸びは $x_1 = a$ であり、P からの深さは $a\tan\frac{1}{3}\pi = \sqrt{3}a$ である。

平衡状態（$\theta = \frac{1}{6}\pi$）。伸びは

$$x_2 = a\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) = \frac{a(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}, \qquad x_2^2 = \frac{a^2(7-4\sqrt{3})}{3},$$

であり、深さは $a\tan\frac{1}{6}\pi = \frac{a}{\sqrt{3}}$ である。よって各質点の上昇量は

$$\sqrt{3}a - \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

3 本のばねから**放出される弾性エネルギー**は

$$\begin{aligned} 3\cdot\frac{kmg}{2a}\left(x_1^2 - x_2^2\right) &= \frac{3kmg}{2a}\cdot\frac{a^2\left(3-7+4\sqrt{3}\right)}{3} \\ &= 2kmga(\sqrt{3}-1). \end{aligned}$$

$k = 4\sqrt{3}+6$ のとき $k(\sqrt{3}-1) = 12 - 4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 6 = 6 + 2\sqrt{3}$ であるから、放出される弾性エネルギーは $4mga(3+\sqrt{3})$ である。

3 つの質点が**得る重力による位置エネルギー**は $3mg\cdot\dfrac{2a}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\,mga$ である。

その差が、それぞれ速さ V で動く 3 つの質点の運動エネルギーになる。

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{2}mV^2 &= 4mga(3+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}\,mga = mga\left(12+2\sqrt{3}\right), \\ V^2 &= \frac{2ag}{3}\left(12+2\sqrt{3}\right) = \frac{4ag}{3}\left(6+\sqrt{3}\right), \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

- 符号：$\theta = \frac{1}{3}\pi$ において各ばねが引く力の鉛直成分は $T\sin\theta = kmg\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 11.2\,mg > mg$ であるから、エネルギーの式で仮定したとおり、三角形はまず平衡位置に向かって**上向きに**動き出す。
- 答えは正であり、速さの 2 乗の次元（ag）をもつ。

- $a = 1.3\,\mathrm{m}$、$g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ として、運動方程式 $\ddot{y} = g - \frac{T}{m}\sin\theta$ を $\theta = \frac{1}{3}\pi$ での静止状態から数値的に時間発展させると、$\theta = \frac{1}{6}\pi$ において $V^2 \approx 131.48\,\mathrm{m^2\,s^{-2}}$ となり、$\frac{4ag}{3}(6+\sqrt{3})$ と一致する。

よくある間違い

- 中心から頂点までの距離を a ではなく $\sqrt{3}a$ や $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ としてしまう。
- ばねも質点も 3 つずつあることを忘れる。因数 3 は弾性エネルギー、位置エネルギー、運動エネルギーのすべての項に現れる。
- 運動の向きを取り違える。2 つの位置の間で質点は**上昇する**ので、重力による位置エネルギーは失われるのではなく増加する。

STEP のその先へ

ここで三角形の自由度（degree of freedom）が 1 しかないのは、対称性によってほかのあらゆる運動が排除されるからである。1 つの座標（ここでは θ、あるいは深さ y）を選び、エネルギーをその座標で表すことは、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）の出発点である。また、平衡点のまわりで位置エネルギーを展開すれば、鉛直方向の微小振動（small oscillations）の周期も求まる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このような考え方でエネルギーを用いる方法と微小振動を展開している。

解答例

STEP III 2013、第 12 問

確率・統計 ・ 指示確率変数

> **STEP III 2013、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q12

鍵となる考え方

各 X_k は、位置 k で A の新しいブロックが始まるときにちょうど 1 となる。したがって S は、列に含まれる A のブロック（連、run）の個数を数えている。これらの変数は指示変数（indicator variable）なので、どの期待値（expectation）も、いくつかの指定された位置に指定された文字が入る確率にほかならない。そしてその確率は、関係する位置の個数だけで決まり、それらがどこにあるかにはよらない。分散（variance）を求めるには S^2 を展開し、積 X_iX_j を種類ごとに分類する。すなわち、添字が等しいもの、添字が隣り合うもの（これは起こりえないことがわかる）、そしてそれ以外である。

解答

以下では一貫して、$\binom{n}{a}$ 通りの並べ方がすべて同様に確からしいとする。ここから役に立つ帰結が得られる。任意の m 個の**相異なる**位置について、それらに p 個の A と q 個の B からなる（$p+q=m$）指定された並びが入る確率は、位置を一つずつ埋めていくことで求められる。たとえば

$$\Pr(\text{位置}r,s\text{ に入るのが}B,A) = \frac{b}{n}\cdot\frac{a}{n-1},$$

であり、これは相異なる位置 r と s がどこであっても成り立つ。各 X_k は 0 と 1 の値しかとらないので $\mathrm{E}(X_k) = \Pr(X_k = 1)$ であり、同様に $\mathrm{E}(X_iX_j) = \Pr(X_i = 1 \text{ かつ} X_j = 1)$ である。

小問 (i)

$i=1$ のときは、最初の文字が A であればよいので

$$\mathrm{E}(X_1)=\frac{a}{n}.$$

$2\le i\le n$ のときは、位置 $i-1$ に B、位置 i に A が入ればよいので

$$\mathrm{E}(X_i)=\frac{b}{n}\cdot\frac{a}{n-1}=\frac{ab}{n(n-1)}.$$

期待値の線形性（linearity of expectation）により、$n-1$ 個の添字 $i\ge 2$ について和をとると

$$\mathrm{E}(S)=\frac{a}{n}+(n-1)\cdot\frac{ab}{n(n-1)}=\frac{a}{n}+\frac{ab}{n}=\frac{a(b+1)}{n},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

(a) $j\ge 3$ とする。このとき $X_1X_j=1$ となるのは、位置 1 に A、位置 $j-1$ に B、位置 j に A が入るときであり、かつそのときに限る。$j-1\ge 2$ なので、これらは相異なる三つの位置であり、そこに A が二つと B が一つ入る。順に埋めていくと

$$\mathrm{E}(X_1X_j)=\frac{a}{n}\cdot\frac{b}{n-1}\cdot\frac{a-1}{n-2}=\frac{a(a-1)b}{n(n-1)(n-2)}.$$

(b) 次に $2\le i$ かつ $j\ge i+2$ とする。このとき $X_iX_j=1$ となるのは、位置 $i-1$, i, $j-1$, j にそれぞれ B, A, B, A が入るときであり、かつそのときに限る。$j-1\ge i+1>i$ なので、これら四つの位置は相異なり、そこに A が二つと B が二つ入る。よって

$$\mathrm{E}(X_iX_j)=\frac{b}{n}\cdot\frac{a}{n-1}\cdot\frac{b-1}{n-2}\cdot\frac{a-1}{n-3}=\frac{a(a-1)b(b-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

（ここで $a,b\ge 2$ より $n\ge 4$ なので、分母が 0 になることはない。）これは二重和に現れるどの組についても同じ値なので、組の個数を数えればよい。与えられた i に対して j は $i+2$ から n まで動くので、その値は $n-i-1$ 個である。i が 2 から $n-2$ まで動くと、この個数は $n-3, n-4, \dots, 1$ という値をとる。したがって組の個数は

$$1+2+\cdots+(n-3)=\tfrac{1}{2}(n-3)(n-2),$$

であり、

$$\sum_{i=2}^{n-2}\left(\sum_{j=i+2}^{n}\mathrm{E}(X_iX_j)\right)=\frac{(n-2)(n-3)}{2}\cdot\frac{a(a-1)b(b-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}=\frac{a(a-1)b(b-1)}{2n(n-1)}.$$

(c) $\mathrm{Var}(S) = \mathrm{E}(S^2) - \big(\mathrm{E}(S)\big)^2$ を用い、

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sum_{i<j} X_i X_j.$$

と展開する。X_i は 0 か 1 なので $X_i^2 = X_i$ であり、第一の和の期待値は $\mathrm{E}(S)$ である。

考えてみよう 小問 (b) で除外した、$j = i+1$ となる組はどうなるだろうか。

これらは何も寄与しない。常に $X_i X_{i+1} = 0$ だからである。$i = 1$ のとき、$X_1 = 1$ となるには位置 1 に A が必要だが、$X_2 = 1$ となるにはそこに B が必要である。$i \geq 2$ のとき、$X_i = 1$ となるには位置 i に A が必要だが、$X_{i+1} = 1$ となるにはそこに B が必要である。（A の二つのブロックが隣り合う位置から始まることはありえない。）

したがって、考慮すべき $i < j$ の組は $j \geq i+2$ を満たすものである。そのうち $i = 1$ のものは $j = 3, \ldots, n$ であり、$n-2$ 組あって、それぞれ小問 (a) で与えられる。$i \geq 2$ のものは、ちょうど小問 (b) の二重和である。よって

$$\begin{aligned}\sum_{i<j} \mathrm{E}(X_i X_j) &= (n-2)\cdot \frac{a(a-1)b}{n(n-1)(n-2)} + \frac{a(a-1)b(b-1)}{2n(n-1)} \\ &= \frac{a(a-1)b}{n(n-1)}\left(1 + \frac{b-1}{2}\right) = \frac{a(a-1)b(b+1)}{2n(n-1)},\end{aligned}$$

であり、したがって

$$\mathrm{E}(S^2) = \frac{a(b+1)}{n} + \frac{a(a-1)b(b+1)}{n(n-1)}.$$

$\big(\mathrm{E}(S)\big)^2 = a^2(b+1)^2/n^2$ を引き、共通因数 $\dfrac{a(b+1)}{n^2(n-1)}$ をくくり出すと

$$\mathrm{Var}(S) = \frac{a(b+1)}{n^2(n-1)}\Big[n(n-1) + n(a-1)b - a(b+1)(n-1)\Big].$$

括弧の中を展開すると、項 nab と $-nab$ が打ち消し合い、

$$\begin{aligned}n^2 - n - nb - na + ab + a &= n(n-a-b) - n + ab + a \\ &= -n + ab + a \qquad \text{なぜなら} n = a+b \\ &= ab - b = b(a-1).\end{aligned}$$

が残る。よって

$$\mathrm{Var}(S) = \frac{a(b+1)}{n^2(n-1)}\cdot b(a-1) = \frac{a(a-1)b(b+1)}{n^2(n-1)},$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

$a=3$、$b=2$ とすると $n=5$ であり、並べ方は 10 通りある。A のブロックを数えると、並べ方 $AAABB$、$BAAAB$、$BBAAA$ では $S=1$、$ABABA$ では $S=3$、残りの六つでは $S=2$ である。したがって $\mathrm{E}(S)=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}$、$\mathrm{E}(S^2)=\frac{36}{10}$ であり、$\mathrm{Var}(S)=\frac{18}{5}-\frac{81}{25}=\frac{9}{25}$ となる。公式からは $\frac{3\cdot3}{5}=\frac{9}{5}$ と $\frac{3\cdot2\cdot2\cdot3}{25\cdot4}=\frac{9}{25}$ が得られる。コンピュータによる全数列挙により、$2\le a,b\le 6$ のすべてについて、問題中のすべての公式が厳密に成り立つことが確認された。

これらの公式は、問題で指定された範囲の外でも妥当な振る舞いをする。$a=2$、$b=1$ のとき、並べ方 AAB、ABA、BAA では $S=1,2,1$ なので $\mathrm{E}(S)=\frac{4}{3}$、$\mathrm{Var}(S)=2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9}$ であり、$\frac{2\cdot2}{3}$ および $\frac{2\cdot1\cdot1\cdot2}{9\cdot2}$ と一致する。また $a=1$ のとき、分散の公式は 0 を与えるが、これは当然である。このときブロックは常にちょうど一つだからである。

よくある間違い

- X_1 をほかと同じように扱ってしまう。位置 0 は存在しないので、X_1 に必要なのは一文字だけであり、$\mathrm{E}(X_1)=a/n$ であって $ab/(n(n-1))$ ではない。
- X_i と X_{i+1} が同時に 1 になりえないことを忘れる、あるいは $\mathrm{E}(X_iX_{i+1})$ を 0 でない式で計算してしまう。
- (b) の組の個数を数え間違える。組の個数は $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ であって、$\frac{1}{2}n(n-1)$ ではない。

STEP のその先へ

個数を指示変数の和として書き、平均を線形性から、分散を二つずつの積から求めるという方法は、大学の確率論で最も役に立つ技法の一つである。連、一致（matching）、ランダムな置換の不動点（fixed point）、ランダムグラフ（random graph）などは、この方法で解析される。ここでの S は、本質的には Wald–Wolfowitz の連検定（runs test）の統計量であり、これは列の非ランダム性を検出するために用いられる。Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）には、指示変数を用いる方法の例が数多く載っている。

解答例

STEP III 2013、第 13 問

確率・統計 ・ 積率と分布関数

STEP III 2013、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/13-s3-q13

鍵となる考え方

$\mathrm{F}' = \mathrm{f}$ であるから、式 $2\mathrm{F}(x)\mathrm{f}(x)$ は $\big(\mathrm{F}(x)\big)^2$ の導関数（derivative）である。このため小問 (i)(b) は 1 回の部分積分（integration by parts）で済み、g をうまく選べば、Y に関するあらゆる問いが X に関する問いに変わる。不等式による評価は、f や F を小問 (i)(a) のより大きな量 M や Mx で置き換えることで得られる。その際、置き換えはいつも積分が大きくなる向きに行う。

解答

以下を通して $\mathrm{F}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$ とする。したがって $\mathrm{F}'(x) = \mathrm{f}(x)$ であり、X は $[0,1]$ に値をとるから $\mathrm{F}(0) = 0$、$\mathrm{F}(1) = 1$ である。

小問 (i)

(a) $0 \le x \le 1$ とする。すべての t について $0 \le \mathrm{f}(t) \le M$ であるから、

$$0 \le \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t \le \int_0^x M\,\mathrm{d}t = Mx,$$

すなわち $0 \le \mathrm{F}(x) \le Mx$ である。

(b) 合成関数の微分法（chain rule）により $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\mathrm{F}(x)\big)^2 = 2\mathrm{F}(x)\mathrm{f}(x)$ である。$u = \mathrm{g}(x)$、$\mathrm{d}v = 2\mathrm{F}(x)\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ として部分積分を行うと、$v = \big(\mathrm{F}(x)\big)^2$ であるから、

$$\begin{aligned}\int_0^1 2\mathrm{g}(x)\mathrm{F}(x)\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[\mathrm{g}(x)\big(\mathrm{F}(x)\big)^2\Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{g}'(x)\big(\mathrm{F}(x)\big)^2\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{g}(1) - \int_0^1 \mathrm{g}'(x)\big(\mathrm{F}(x)\big)^2\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

となる。ここで $\mathrm{F}(1) = 1$、$\mathrm{F}(0) = 0$ を用いた。（g が微分可能である必要があるが、問題文では暗黙のうちにこれが仮定されている。）

小問 (ii)

(a) Y の確率密度関数（probability density function）は積分すると 1 にならなければならない。(i)(b) で $\mathrm{g}(x) = 1$ とおくと $\mathrm{g}' = 0$ であるから、

$$\int_0^1 2\mathrm{F}(y)\mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y = 1,$$

よって $k = 2$ である。（同じことだが、$\int_0^1 k\mathrm{Ff}\,\mathrm{d}y = \frac{k}{2}\big[\mathrm{F}^2\big]_0^1 = \frac{k}{2}$ としてもよい。）また $k\mathrm{Ff} \geq 0$ であるから、これは確かに確率密度関数になっていることにも注意しておく。

(b)

$$\mathrm{E}(Y^n) = \int_0^1 2y^n\,\mathrm{F}(y)\mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y.$$

である。

上からの評価。 (i)(a) より $\mathrm{F}(y) \leq My$ であり、残りの因子 $2y^n\mathrm{f}(y)$ は非負であるから、

$$\mathrm{E}(Y^n) \leq \int_0^1 2y^n \cdot My \cdot \mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y = 2M\int_0^1 y^{n+1}\mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y = 2M\mu_{n+1}.$$

下からの評価。 今度は (i)(b) を $\mathrm{g}(y) = y^n$ として用いる。$\mathrm{g}(1) = 1$、$\mathrm{g}'(y) = ny^{n-1}$ であるから、

$$\mathrm{E}(Y^n) = 1 - \int_0^1 ny^{n-1}\big(\mathrm{F}(y)\big)^2\,\mathrm{d}y.$$

（$n = 0$ のときは、この積分は単に 0 である。）$\mathrm{E}(Y^n)$ を下から評価するには、この積分を**上から**評価する必要がある。

> **考えてみよう** $\big(\mathrm{F}(y)\big)^2$ の 2 つの因子のうち、どちらを My で置き換えるべきだろうか。

一方だけである。$0 \leq \mathrm{F}(y) \leq My$ より $\big(\mathrm{F}(y)\big)^2 \leq My\,\mathrm{F}(y)$ であり、$ny^{n-1} \geq 0$ であるから、

$$\int_0^1 ny^{n-1}\big(\mathrm{F}(y)\big)^2\,\mathrm{d}y \leq nM\int_0^1 y^n\mathrm{F}(y)\,\mathrm{d}y.$$

両方の因子を置き換えると $\int y^{n+1}\,\mathrm{d}y$ が残るだけで、X について何も教えてくれない。F を 1 つ残しておけば、もう一度部分積分を行って X のモーメント（moment）を作り出せる。$u = \mathrm{F}(y)$、$\mathrm{d}v = y^n\,\mathrm{d}y$ として部分積分すると、

$$\int_0^1 y^n \mathrm{F}(y)\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^{n+1}}{n+1}\mathrm{F}(y)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{y^{n+1}}{n+1}\mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1-\mu_{n+1}}{n+1}.$$

以上をまとめると、

$$\mathrm{E}(Y^n) \geq 1 - \frac{nM}{n+1}\left(1-\mu_{n+1}\right) = 1 + \frac{nM}{n+1}\mu_{n+1} - \frac{nM}{n+1},$$

となり、上からの評価と合わせて、求める 2 つの不等式が得られる。

(c) (b) の両端を組み合わせると、$n \geq 0$ に対して

$$1 + \frac{nM}{n+1}\mu_{n+1} - \frac{nM}{n+1} \leq 2M\mu_{n+1},$$

であり、μ_{n+1} を含む項を右辺にまとめると、

$$1 - \frac{nM}{n+1} \leq \left(2M - \frac{nM}{n+1}\right)\mu_{n+1} = \frac{(n+2)M}{n+1}\,\mu_{n+1}.$$

係数 $\frac{(n+2)M}{n+1}$ は正である（f の積分が 1 であるから $M > 0$）。したがって、不等号の向きを変えずにこれで割ることができ、

$$\mu_{n+1} \geq \frac{n+1}{(n+2)M} - \frac{n}{n+2}.$$

これはすべての $n \geq 0$ について成り立つ。$m = n+1$ とおくと $m \geq 1$ であり、

$$\mu_m \geq \frac{m}{(m+1)M} - \frac{m-1}{m+1} \qquad (m \geq 1),$$

となる。これが（m を n と書き直せば）求める結果である。

検算

- 一様分布（uniform distribution）に従う X：$\mathrm{f} = 1$、$M = 1$、$\mu_n = \frac{1}{n+1}$ である。(c) の評価は $\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{1}{n+1}$ となり、等号で成り立つ。このとき Y の確率密度関数は $2y$ で $\mathrm{E}(Y^n) = \frac{2}{n+2}$ であり、(b) の 2 つの評価もともに $\frac{2}{n+2}$ に等しい。これは納得がいく。用いた唯一の不等式 $\mathrm{F}(y) \leq My$ は、一様分布では等式になるからである。
- $\mathrm{f}(x) = 3x^2$、$M = 3$、$n = 2$：$\mu_2 = \frac{3}{5}$ であり、評価は $\frac{2}{9} - \frac{1}{3} < 0$ となるので、余裕をもって成り立つ。この確率密度関数では $\mathrm{E}(Y^2) = \frac{3}{4}$、$\mu_3 = \frac{1}{2}$ であるから、(b) の評価は $1 + 2\cdot\frac{1}{2} - 2 = 0$ と $2\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = 3$ であり、$\frac{3}{4}$ はその間にある。
- (i)(b) の恒等式とすべての不等式は、いくつかの確率密度関数と g のいくつかの選び方について、数値積分でも確認した。

よくある間違い

- $\big(\mathrm{F}\big)^2$ を M^2y^2 で評価してしまう。これは正しいが、X についての情報がすべて失われるため、どこにも行き着かない。
- $\mathrm{E}(Y^n)$ の式で積分の前に負号がついていることを忘れる。$\mathrm{E}(Y^n)$ を下から評価するには、積分を**上から**評価しなければならない。
- μ_{n+1} の評価で止めてしまい、添字をずらして $n \geq 1$ に対する所定の形にしていない。

STEP のその先へ

確率密度関数 $2\mathrm{F}(y)\mathrm{f}(y)$ は偶然の産物ではない。$\mathrm{P}(\max \leq y) = \big(\mathrm{F}(y)\big)^2$ であるから、これは X と同じ分布に従う 2 つの独立（independent）な確率変数に対する $\max(X_1, X_2)$ の確率密度関数なのである。より一般に、n 個の独立な観測値のうち小さい方から r 番目のものの確率密度関数は、F と $1-\mathrm{F}$ のべきから組み立てられる。これらの**順序統計量**（order statistics）は、ノンパラメトリック統計学（non-parametric statistics）において中心的な役割を果たす。Blitzstein と Hwang による *Introduction to Probability*（確率論入門）には、順序統計量のわかりやすい解説がある。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

2013 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

