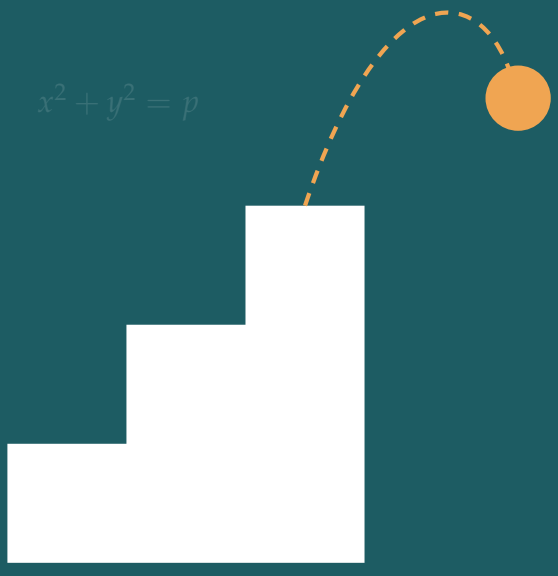
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

2012 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

2012 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

2012 年解答例

2012 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 39 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 微積分による最適化 純粋数学 3
Q2 曲線の概形と解 純粋数学 7
Q3 面積から導く不等式 純粋数学 12
Q4 接線と法線 純粋数学 17
Q5 置換積分 純粋数学 21
Q6 三角不等式（三角関数） 純粋数学 25
Q7 周期的な漸化式 純粋数学 29
Q8 同次形微分方程式 純粋数学 34
Q9 放物運動 力学 38
Q10 自由落下と音 力学 42
Q11 滑車と摩擦 力学 46
Q12 条件付き確率 確率・統計 50
Q13 指示変数を用いた期待値 確率・統計 54

STEP II

Q1 二項級数の係数 純粋数学 58
Q2 多項式の合成 純粋数学 62
Q3 置換積分 純粋数学 66
Q4 対数級数の不等式 純粋数学 69
Q5 逆数関数のグラフ 純粋数学 73
Q6 円に内接する四角形の面積 純粋数学 78
Q7 ベクトルと円 純粋数学 82
Q8 非線形漸化式 純粋数学 86
Q9 放物運動 力学 90

Q10 摩擦とモーメント 力学 . . . 94
Q11 非弾性衝突 力学 . . . 98
Q12 条件付き確率 確率・統計 . . . 102
Q13 ポアソン過程と最近接距離 確率・統計 . . . 106

STEP III

Q1 非線形微分方程式 純粋数学 . . . 110
Q2 無限積と級数 純粋数学 . . . 114
Q3 接する曲線と 4 次式 純粋数学 . . . 118
Q4 無限級数の和 純粋数学 . . . 124
Q5 2 次曲線上の有理点 純粋数学 . . . 128
Q6 複素数の根の軌跡 純粋数学 . . . 132
Q7 連立微分方程式 純粋数学 . . . 137
Q8 フィボナッチ数の望遠鏡和 純粋数学 . . . 141
Q9 回転する滑車の力学 力学 . . . 145
Q10 円運動 力学 . . . 149
Q11 折り重なったロープの落下 力学 . . . 153
Q12 幾何的確率 確率・統計 . . . 157
Q13 切断正規分布 確率・統計 . . . 161

解答例

STEP I 2012、第 1 問

純粋数学 • 微積分による最適化

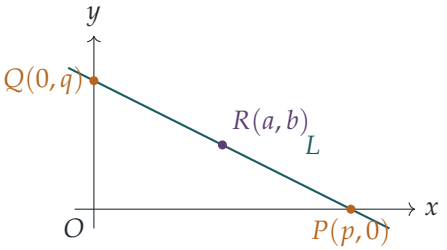
> **STEP I 2012、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q1

鍵となる考え方

すべてはただ一つの数、傾き（gradient）によって決まる。L が R を通るように固定されると、切片（intercept）p と q は m の簡単な関数となり、最小化すべき二つの距離はどちらも m だけの関数になる。和 $p+q$ は定数と $am+b/m$ の形の項とに分かれ、これは相加相乗平均の不等式（AM–GM）（あるいは一回の微分）の典型的な出番である。長さ PQ については、$q=mp$ に気づいておくと得をする。これにより、微分する前に PQ^2 がきれいに因数分解できるからである。

解答

p と q を求める



$R(a,b)$ は $y=c-mx$ 上にあるので $b=c-ma$、すなわち $c=b+ma$ である。直線は $x=0$ のところで y 軸と交わるので $q=c$ であり、$y=0$ のところで x 軸と交わるので $p=c/m$ である（$m>0$ なので、この割り算は許される）。したがって

$$p=a+\frac{b}{m}, \qquad q=b+ma.$$

任意の $m > 0$ に対して、要求どおりどちらも正である。また、次のことにも注意しよう。

$$q = b + ma = m\left(a + \frac{b}{m}\right) = mp,$$

これは L の傾きが $-q/p$ であることを言い換えたにすぎない。この事実は後で用いる。

$OP + OQ$ の最小化

$p, q > 0$ なので、O から P、Q までの距離はそれぞれ p、q そのものである。よって、R を固定したまま m を $m > 0$ の範囲で動かすとき、次の量を最小化しなければならない。

$$S(m) = p + q = a + b + \left(am + \frac{b}{m}\right).$$

括弧の中は二つの正の数の和であり、その積 ab は m によらない。相加相乗平均の不等式より

$$am + \frac{b}{m} \geq 2\sqrt{am \cdot \frac{b}{m}} = 2\sqrt{ab},$$

であり、等号が成り立つのは $am = b/m$、すなわち $m = \sqrt{b/a}$ のときであり、かつそのときに限る（これは正なので、この直線は許される）。したがって

$$S(m) \geq a + b + 2\sqrt{ab} = (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^2,$$

であり、この下界は実際に達成される。よって、距離の和の最小値は要求どおり $(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^2$ である。

（微分法を使いたければ：$S'(m) = a - b/m^2$ は $m = \sqrt{b/a}$ でのみ値が 0 となり、代入すると同じ値が得られる。）

PQ の最小化

三平方の定理（Pythagoras' theorem）と $q = mp$ を用いると

$$PQ^2 = p^2 + q^2 = p^2(1 + m^2) = \left(a + \frac{b}{m}\right)^2 (1 + m^2).$$

$PQ > 0$ なので、PQ を最小化することは $f(m) = PQ^2$ を最小化することと同じである。積の微分法と合成関数の微分法（chain rule）を用いて微分すると

$$\begin{aligned} f'(m) &= 2\left(a + \frac{b}{m}\right)\left(-\frac{b}{m^2}\right)(1 + m^2) + 2m\left(a + \frac{b}{m}\right)^2 \\ &= 2\left(a + \frac{b}{m}\right)\left[-\frac{b}{m^2} - b + am + b\right] \\ &= 2\left(a + \frac{b}{m}\right)\left(am - \frac{b}{m^2}\right). \end{aligned}$$

? 考えてみよう $-b$ はどこで打ち消し合うのか？

角括弧の中では $-\frac{b}{m^2}(1+m^2) = -\frac{b}{m^2} - b$ であり、一方 $m(a+\frac{b}{m}) = am+b$ であるから、二つの b が打ち消し合う。p^2+q^2 を直接展開せずに PQ^2 を $p^2(1+m^2)$ と書いたのは、この打ち消し合いのためである。

最初の因数は正なので、$f'(m)=0$ となるのは $am = b/m^2$、すなわち $m^3 = b/a$ のときであり、かつそのときに限る。よって停留点（stationary point）はただ一つで、

$$m = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}.$$

である。（これが最小であると仮定してよいと問題文にあるが、実際、これより小さい m では $f'<0$、大きい m では $f'>0$ となるので、これは $m>0$ 全体での最小値を与える。）

では代入しよう。この m に対して

$$a+\frac{b}{m} = a+b\cdot\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} = a+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}), \qquad 1+m^2 = 1+\frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}.$$

したがって

$$PQ^2 = a^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^2\cdot\frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} = (a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^3,$$

となり、P と Q の距離の最小値は

$$PQ_{\min} = (a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

である。これが問題で求められている「同様の形」である。最初の答えは内側の指数が $\frac{1}{2}$、外側が 2 であり、今回の答えは内側が $\frac{2}{3}$、外側が $\frac{3}{2}$ である。

検算

- 対称性：a と b を入れ替える（$y=x$ に関して折り返す）と、二つの最小値はどちらも変わらないはずであり、実際そうなっている。
- 数値例：$a=1$、$b=8$ とする。第二の結果からは $m=2$ と予測され、このとき $p=5$、$q=10$、$PQ=\sqrt{125}=5\sqrt{5}\approx 11.180$ となり、確かに $(1+4)^{3/2}=5\sqrt{5}$ である。和については、$m=\sqrt{8}$ のとき $p+q=9+4\sqrt{2}\approx 14.657=(1+2\sqrt{2})^2$ となる。
- 2000 組のランダムな (a,b) について、二つの最小値を m に関する総当たり探索の結果と照合したところ、約 10^{-8} の精度で一致した。

よくある間違い

- p^2+q^2 を完全に展開してから微分すること。正しくはあるが煩雑で、因数 $am-b/m^2$ を見落としやすい。先に $q=mp$ に気づけば、大幅に手間が省ける。
- PQ の最小化と PQ^2 の最小化が同値なのは $PQ>0$ だからこそであることを忘れること。また、$a+b/m$ を簡単にする際に分数べきの扱いを見失うこと。

STEP のその先へ

第二の結果は、古典的な「角を曲がるはしご」の問題が姿を変えたものである。$(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$ は、幅 a と b の廊下が交わる角を、水平に保ったまま運んで曲がることのできる最も長いはしごの長さである。一定の長さをもつ線分 PQ の族の包絡線（envelope）はアステロイド（astroid）$x^{2/3}+y^{2/3}=\ell^{2/3}$ であり、R が包絡線上にあるのは ℓ がちょうどこの最小値に等しいときである。包絡線や制約付き最適化（constrained optimisation、のちにはラグランジュ（Lagrange）の未定乗数法）は大学 1 年次の微積分の講義に登場する。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* には、この趣旨の問題がさらに収められている。

解答例

STEP I 2012、第2問

純粋数学 • 曲線の概形と解

STEP I 2012、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s1-q2

鍵となる考え方

$p(x) = 0$ の実数解（real roots）の個数を数えることは、グラフ $y = p(x)$ が x 軸と交わる点を数えること、あるいは定数を移項したうえで、固定された曲線と水平な直線との交点を数えることと同じである。したがって、この問題の核心は四次関数（quartic）のグラフの形、すなわちどこで向きを変え、そのときどれだけ高いか低いかを把握することにある。小問 (i) ではこの四次式は完全平方式であり、小問 (ii) では導関数（derivative）に関する条件によって $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ が重解（repeated root）をもつ形に因数分解され、その結果、極値をとる点（turning point）はただ一つになる。

解答

小問 (i)

まず

$$y = x^4 - 6x^2 + 9 = (x^2 - 3)^2,$$

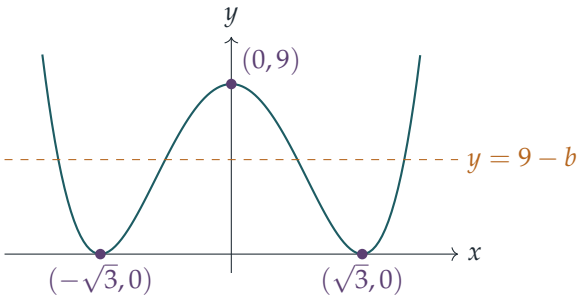
であることに注意する。よって、いたるところで $y \geq 0$ であり、$y = 0$ となるのはちょうど $x = \pm\sqrt{3}$ のときである。この曲線は偶関数（even）のグラフ（y 軸に関して対称）であり、y 軸と $(0, 9)$ で交わる。微分すると

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3),$$

となり、これは $x = 0$ および $x = \pm\sqrt{3}$ で 0 となる。したがって停留点（stationary point）は

$$(0, 9)\text{（極大）}, \qquad (\sqrt{3}, 0) \text{ と } (-\sqrt{3}, 0)\text{（極小）}.$$

である。$y \geq 0$ かつそこで $y = 0$ であるから、極小（minimum）であることは明らかである。また、第2次導関数（second derivative）$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 12x^2 - 12$ は $x = 0$ で $-12 < 0$ となるので、この点は極大（local maximum）である。$x \to \pm\infty$ のとき $y \to +\infty$ である。この曲線は $x = \pm\sqrt{3}$ で x 軸に接する「W」字形である。



解の個数を調べるために、両辺に9を加える：

$$x^4 - 6x^2 + b = 0 \iff (x^2 - 3)^2 = 9 - b.$$

よって n は、水平な直線 $y = 9 - b$ が先ほど描いた曲線と交わる回数である。直線を上から下へ動かしながら図を読み取ると、次のようになる。

- $9 - b > 9$、すなわち $b < 0$ のとき：直線は極大点より上にあり、外側の二つの枝とだけ交わるので、$n = 2$ である。
- $9 - b = 9$、すなわち $b = 0$ のとき：直線は極大点を通り、$x = 0$ と外側の二点で交わる。実際、$x^2(x^2 - 6) = 0$ より $x = 0, \pm\sqrt{6}$ である。よって $n = 3$ である。
- $0 < 9 - b < 9$、すなわち $0 < b < 9$ のとき：直線は四つの単調な部分のそれぞれと一度ずつ交わるので、$n = 4$ である。
- $9 - b = 0$、すなわち $b = 9$ のとき：直線は二つの極小点 $x = \pm\sqrt{3}$ でのみ接するので、$n = 2$ である。
- $9 - b < 0$、すなわち $b > 9$ のとき：直線は曲線より下にあるので、$n = 0$ である。

以上をまとめると、

(a) $n = 0 \iff b > 9$; (b) $n = 1$ となる値は存在しない：b; (c) $n = 2 \iff b < 0$ または$b = 9$;

(d) $n = 3 \iff b = 0$; (e) $n = 4 \iff 0 < b < 9$.

$n = 1$ が不可能であることは対称性からも分かる。x が解ならば $-x$ も解であるから、解がただ一つならそれは $x = 0$ でなければならず、このとき $b = 0$ となるが、そうすると解は三つになる。

小問 (ii)

ここでは $y = x^4 - 6x^2 + ax + b$ であるから、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x^3 - 12x + a, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 12x^2 - 12.$$

である。第2次導関数が0になるのは $x = \pm 1$ のときだけである。$x = 1$ における第1次導関数の値は $a - 8$、$x = -1$ における値は $a + 8$ である。よって、両者が同じ点で0になるのはちょうど

$$a = 8 \text{ (点} x = 1) \qquad \text{または} \qquad a = -8 \text{ (点} x = -1).$$

のときである。

$a = 8$ の場合。 このとき

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4(x^3 - 3x + 2) = 4(x-1)^2(x+2),$$

となる。因数 $(x-1)^2$ が見つかったのは、$x = 1$ が y' と y'' の両方の解、すなわち y' の重解となるように設定したからである。

考えてみよう この曲線が実際にもつ極値をとる点はいくつか？

$(x-1)^2 \geq 0$ であるから、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ の符号は $x + 2$ の符号と一致する。よって y は $x < -2$ で狭義単調減少、$x > -2$ で狭義単調増加である（$x = 1$ で傾きは0になるが符号は変わらない。これは停留変曲点（stationary point of inflection）であって、極値をとる点ではない）。極値をとる点はただ一つで、$x = -2$ における最小値（global minimum）であり、その値は

$$y(-2) = 16 - 24 - 16 + b = b - 24.$$

である。ただ一つの極小点まで下がってから上がる曲線は、その極小値が軸より下にあれば x 軸と2回交わり、軸上にあれば1回（接する）、軸より上にあれば1回も交わらない。したがって、異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} 2 & \text{となるのは} b < 24, \\ 1 & \text{となるのは} b = 24, \\ 0 & \text{となるのは} b > 24. \end{cases}$$

である（$b = 24$ のときの重解は直接確かめられる：$x^4 - 6x^2 + 8x + 24 = (x+2)^2(x^2 - 4x + 6)$ であり、この二次式の判別式（discriminant）は $16 - 24 < 0$ である）。

$a = -8$ の場合。 x を $-x$ に置き換えると $x^4 - 6x^2 - 8x + b$ は $x^4 - 6x^2 + 8x + b$ になるので、この曲線は前の曲線を y 軸に関して折り返したものである。ただ一つの極小点は今度は $x = 2$ にあり、その値は $b - 24$ である。解の個数も同じで、$b < 24$ なら2、$b = 24$ なら1、$b > 24$ なら0である。

小問 (iii)

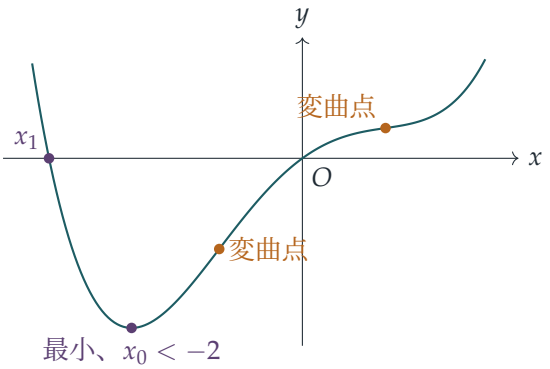
$a > 8$ として $y = x^4 - 6x^2 + ax$ を考える。

停留点。 $\frac{dy}{dx} = 0$ は $x^3 - 3x = -\frac{a}{4}$ を意味する。三次関数（cubic）$g(x) = x^3 - 3x$ は極大値 $g(-1) = 2$ と極小値 $g(1) = -2$ をもち、また $g(-2) = -2$ である。$-\frac{a}{4} < -2$ であるから、高さ $-\frac{a}{4}$ の水平な直線は g の極小値より下にあり、g のグラフとちょうど 1 回、$x < -2$ となる左側の枝で交わる。よって停留点はちょうど一つで、ある $x_0 < -2$ にある。その左側では傾きが負、右側では正であるから、これは最小点である。

x 軸との交点。 $y = x(x^3 - 6x + a)$ であるから、$x = 0$ が交点の一つであり、他の交点は $h(x) = x^3 - 6x + a$ の解である。この三次関数は $x = \sqrt{2}$ で極小となり、$a > 8 > 4\sqrt{2}$ より $h(\sqrt{2}) = a - 4\sqrt{2} > 0$ である。よって h の実数解はただ一つであり、$h(0) = a > 0$ であるからそれは負である。実際、$h(-2) = a + 4 > 0$ であり、h は $x < -\sqrt{2}$ で増加するので、この解 x_1 は $x_1 < -2$ を満たす。曲線は x_1 と原点で軸と交わり、その間では負の値をとる。最小点はこの区間内にある。

その他の特徴。 原点における傾きは $a > 0$ である。第 2 次導関数 $12(x^2 - 1)$ は $x = \pm 1$ で符号を変えるので、$(-1, -a - 5)$ と $(1, a - 5)$ に変曲点（point of inflection）がある。そこでの傾きは $a + 8$ と $a - 8$ でいずれも正であるから、曲線はこれらの点を通過する際にも上昇し続けている。曲線は $-1 < x < 1$ で上に凸（concave down）、その外側では下に凸である。$x \to \pm\infty$ のとき $y \to +\infty$ である。

下図は $a = 10$ の場合であり、このとき $x_0 \approx -2.05$、最小値は約 -28、$x_1 \approx -3.05$ である。



検算

- 小問 (i) で $b = 5$ のときは解が四つになるはずである：$x^2 = 3 \pm 2$ より $x = \pm 1, \pm\sqrt{5}$。確かにそうなっている。

- 小問 (ii) で $b = 24$ のときは因数分解 $(x+2)^2(x^2-4x+6)$ が得られ、最小点でただ一つの（二重の）解をもつことが確認できる。
- 数値的に、0、9、24 の前後の多くの b の値について四次方程式のすべての複素数解を求め、異なる実数解の個数を数えたところ、すべての個数が一致した。8 から 200 までの無作為な a について、(iii) の曲線は常に停留点を一つ、軸との交点を二つもち、$x_1 < x_0 < -2$ であった。$a = 10$ のとき、$x_0 \approx -2.054$、$y(x_0) \approx -28.05$ である。

よくある間違い

- （$b = 9$ のときの）$x = \pm\sqrt{3}$ における重解を四つの解と数えてしまう。問題が求めているのは**異なる** x の値の個数である。
- 小問 (ii) で $y' = y'' = 0$ となる点を極値をとる点として扱ってしまう。そこでは y' が平方の因数をもつので符号が変わらず、停留変曲点となる。
- $a = -8$ を忘れる。$y'' = 0$ には解が二つあり、それぞれが a の値を一つずつ与える。

STEP のその先へ

b が 0、9、24 を通過するときに実数解の個数が跳ぶように変化する様子は、**分岐**（bifurcation）の小さな例である。答えが変わるのは、水平な直線が停留値を通過するときだけである。小問 (ii) の特別な場合 $y' = y'' = 0$ は、二つの停留点が合体して消滅する点であり、これは最も単純な「カタストロフィー」（catastrophe）である折り目（fold）にあたる。そしてこれこそが、$a > 8$ となると (iii) の四次関数が極値をとる点を一つしかもたない理由である。同じ推論を中間値の定理（intermediate value theorem）と単調性（monotonicity）によって厳密にしたものが、実解析（real analysis）の出発点である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、それが丁寧に展開される様子を見るのに適した一冊である。

解答例

STEP I 2012、第 3 問

純粋数学 ・ 面積から導く不等式

> **STEP I 2012、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q3

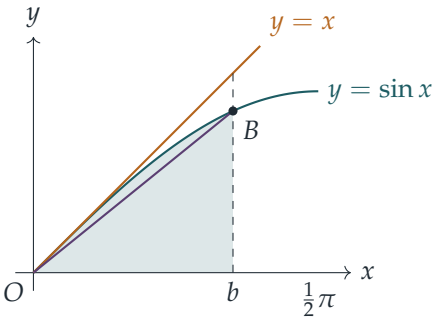
鍵となる考え方

常に同じ向きに曲がっている曲線は、その各接線（tangent）に対しては一方の側にあり、各弦（chord）に対してはもう一方の側にある。したがって、曲線の下の面積は接線の下の面積と弦の下の面積に挟まれ、しかもそれらはどちらも単なる三角形か台形（trapezium）である。それぞれの面積を正確に書き下せば、不等式は自然に得られる。本当に考えるべきことは、どの接線とどの弦を使うかを決めることだけである。

解答

小問 (i)

$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ において $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sin x = -\sin x < 0$ であるから、曲線 $y = \sin x$ はこの範囲で上に凸（concave）、すなわち下向きに曲がっている。原点における接線の傾きは $\cos 0 = 1$ であるから、接線は直線 $y = x$ である。O から $B = (b, \sin b)$ への弦は直線 $y = \dfrac{\sin b}{b}\,x$ である。



上に凸であることから、O と B の間では曲線は弦より真に上にあり、$x > 0$ では O における接線より真に下にある。よって、$0 < x < b$ に対して

$$\frac{\sin b}{b}\, x \;<\; \sin x \;<\; x.$$

ここで、$0 \le x \le b$ における 3 つの面積を比べる。

- 曲線の下（網掛け部分）：$\displaystyle\int_0^b \sin x \,\mathrm{d}x = 1 - \cos b.$
- 接線の下：底辺 b、高さ b の直角三角形であり、面積は $\frac{1}{2}b^2$ である。
- 弦の下：底辺 b、高さ $\sin b$ の三角形であり、面積は $\frac{1}{2}b\sin b$ である。

$0 < x < b$ において曲線は 2 直線の真に間にある（そして 3 つとも連続である）から、面積は狭義の不等式を満たす。

$$\tfrac{1}{2}b\sin b \;<\; 1 - \cos b \;<\; \tfrac{1}{2}b^2.$$

右側の不等式を変形すると $\cos b > 1 - \frac{1}{2}b^2$ となり、左側の不等式を変形すると $\cos b < 1 - \frac{1}{2}b\sin b$ となる。合わせて

$$1 - \tfrac{1}{2}b^2 < \cos b < 1 - \tfrac{1}{2}b\sin b,$$

となり、示すべきことが得られた。

小問 (ii)

$k = \ln a$ とおく。$a > 1$ より $k > 0$ であり、$a^x = \mathrm{e}^{kx}$ である。すると

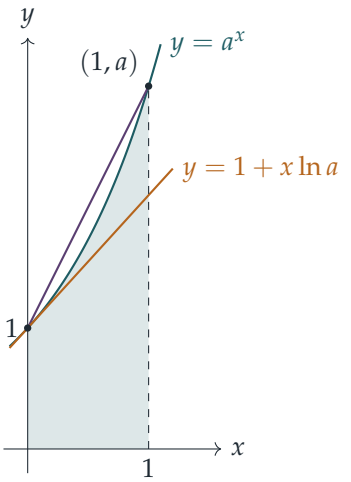
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = k\,\mathrm{e}^{kx}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}a^x = k^2\mathrm{e}^{kx} > 0,$$

であるから、この曲線は下に凸（convex）、すなわち上向きに曲がっている。今度は役割が入れ替わる。曲線はその弦より真に下にあり、（接点を除いて）その接線より真に上にある。

考えてみよう どの区間で面積を比べればよいだろうか？

答えには $\ln a$ と a だけが現れ、それ以外は現れない。区間 $0 \leq x \leq 1$ がまさにそうなる。曲線の端点は $(0,1)$ と $(1,a)$ であり、曲線の下の面積は

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^k - 1}{k} = \frac{a-1}{\ln a}.$$



下界（弦）。$(0,1)$ から $(1,a)$ への弦は $0 < x < 1$ で曲線より上にあり、その下の領域は幅 1、平行な 2 辺が 1 と a の台形で、面積は $\frac{1}{2}(1+a)$ である。よって

$$\frac{a-1}{\ln a} < \frac{a+1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \ln a > \frac{2(a-1)}{a+1},$$

ここでは正の量 $2\ln a/(a+1)$ を両辺に掛けたので、不等号の向きは変わらない。

上界（接線）。$(0,1)$ における接線の傾きは $k = \ln a$ であるから、接線は $y = 1 + kx$ である。これは $x > 0$ で曲線より下にあり、$[0,1]$ におけるその下の面積は平行な 2 辺が 1 と $1+k$ の台形で、面積は $1 + \frac{1}{2}k$ である。よって

$$1 + \tfrac{1}{2}k < \frac{a-1}{k}.$$

$2k > 0$ を掛けると

$$2k + k^2 < 2a - 2 \quad \Longleftrightarrow \quad k^2 + 2k + 1 < 2a - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (k+1)^2 < 2a - 1.$$

考えてみよう そのまま平方根をとってよいだろうか？

よい。ただし、それは両辺が正だからである。$2a - 1 > 1 > 0$ であり、$k > 0$ より $k + 1 > 0$ である。正の数については $u^2 < v^2$ から $u < v$ が従うので、$k + 1 < \sqrt{2a-1}$、

すなわち

$$\frac{2(a-1)}{a+1} < \ln a < -1 + \sqrt{2a-1},$$

となり、証明が完了する。

検算

- 小問 (i) で $b = 1$ とすると、$1 - \frac{1}{2} = 0.5$、$\cos 1 \approx 0.5403$、$1 - \frac{1}{2}\sin 1 \approx 0.5793$ である。主張どおりの大小関係になっている。
- 小問 (ii) で $a = 2$ とすると、$\frac{2}{3} \approx 0.6667$、$\ln 2 \approx 0.6931$、$\sqrt{3} - 1 \approx 0.7321$ である。こちらも正しい大小関係になっている。
- $a \to 1$ のとき、小問 (ii) の 3 つの式はすべて 0 に近づき、互いに挟まれて接近する。$a = 1.01$ では小数第 5 位まで一致する。これは理にかなっている。短い範囲では、滑らかな曲線はほとんど直線だからである。
- 両方の不等式の連鎖を数千個のランダムな値で確かめ、面積の公式はシンプソンの公式（Simpson's rule）で確かめた。

よくある間違い

- 位置関係を逆にしてしまう。正弦曲線は上に凸（接線の下、弦の上）であり、a^x は下に凸（その逆）である。これは図ではなく第 2 次導関数（second derivative）で根拠づけること。
- 不等式に $\ln a$ を掛けたり $\ln a$ で割ったりするときに、$\ln a > 0$ であることを確認し忘れる。
- $k + 1 > 0$ を確認せずに $(k+1)^2 < 2a - 1$ の平方根をとる。

STEP のその先へ

弦による評価は、ある一般原理の特別な場合である。下に凸な関数について、区間上の平均値は、中点での値と両端点での値の平均との間にある（エルミート・アダマールの不等式（Hermite–Hadamard inequality）。端点ではなく中点での接線を使うと、さらに精密な下界が得られる）。小問 (ii) の下界は、a と 1 の対数平均（logarithmic mean）$(a-1)/\ln a$ がそれらの算術平均（arithmetic mean）より小さいことを述べている。これは解析学の至るところや物理学にも現れる事実である。Bartle と Sherbert による *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は、凸関数と積分の評価を丁寧に扱

っている。

解答例

STEP I 2012、第4問

純粋数学 • 接線と法線

STEP I 2012、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s1-q4

鍵となる考え方

すべては $y = \frac{1}{2x}$ の傾き（gradient）と、注意深い消去（elimination）から導かれる。p と q を入れ替えただけの違いしかない2直線の交点を求めるとき、方程式どうしを引き算すると必ず因数（factor）$p - q$ が現れる。2点は異なるので、この因数は約分してよい。特別な場合には、条件が Q に何をもたらすかに注目するとよい。この条件により Q は直線 $y = x$ に関する P の鏡像（mirror image）となり、この対称性によって T と N がその直線上にくる理由が説明できる。

解答

点 T

C 上では $y = \dfrac{1}{2x}$ であるから、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{1}{2x^2}$ である。したがって P における接線（tangent）の傾きは $-\frac{1}{2p^2}$ であり、その方程式は

$$y - \frac{1}{2p} = -\frac{1}{2p^2}(x - p).$$

両辺に $2p^2$ を掛けると $2p^2y - p = -x + p$、すなわち

$$x + 2p^2y = 2p. \tag{1}$$

同様に、Q における接線は

$$x + 2q^2y = 2q. \tag{2}$$

(1) から (2) を引くと、

$$2(p^2 - q^2)\,y = 2(p - q).$$

2点は異なるので $p \neq q$ であり、$2(p-q)$ で割って $(p+q)y = 1$ を得る。$p, q > 0$ より $p+q \neq 0$ であるから、

$$y = \frac{1}{p+q}.$$

これを (1) に代入すると、

$$x = 2p - \frac{2p^2}{p+q} = \frac{2p(p+q) - 2p^2}{p+q} = \frac{2pq}{p+q}.$$

よって T は点 $\left(\frac{2pq}{p+q}, \frac{1}{p+q}\right)$ であり、題意が示された。

$pq = \frac{1}{2}$ のときの点 N

P における法線（normal）は接線に垂直であるから、その傾きは $2p^2$ であり、方程式は

$$y = 2p^2 x - 2p^3 + \frac{1}{2p}. \tag{3}$$

同様に、Q における法線は $y = 2q^2 x - 2q^3 + \frac{1}{2q}$ である。y の2つの式を等しいとおくと、

$$2(p^2 - q^2)\, x = 2(p^3 - q^3) - \left(\frac{1}{2q} - \frac{1}{2p}\right) = 2(p^3 - q^3) + \frac{p-q}{2pq}.$$

$2(p-q) \neq 0$ で割ると、

$$(p+q)\, x = p^2 + pq + q^2 + \frac{1}{4pq}.$$

これは任意の異なる p と q に対して成り立つ。ここで $pq = \frac{1}{2}$ を用いると $\frac{1}{4pq} = \frac{1}{2} = pq$ となり、右辺は次のようになる。

$$p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2.$$

したがって $x = p+q$ である。これを (3) に代入すると、

$$y = 2p^2(p+q) - 2p^3 + \frac{1}{2p} = 2p^2 q + \frac{1}{2p} = p\,(2pq) + q = p + q,$$

ここで $2pq = 1$ を2回用いた。すなわち $2p^2 q = p(2pq) = p$ および $\frac{1}{2p} = q$ である。したがって

$$N = (p+q,\ p+q).$$

（$p \neq q$ と $pq = \frac{1}{2}$ を合わせると $p \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ となることに注意する。これが p に対する唯一の制約である。）

考えてみよう そもそもなぜ T と N は $y = x$ 上にあるのだろうか？

$pq=\frac{1}{2}$ のとき $\frac{1}{2q}=p$、$\frac{1}{2p}=q$ であるから、$P=(p,q)$、$Q=(q,p)$ となる。曲線 $xy=\frac{1}{2}$ は $y=x$ に関する鏡映（reflection）について対称であり、この鏡映は P と Q を入れ替える。したがってこの鏡映は2本の接線を入れ替え、2本の法線も入れ替えるので、それぞれの交点は自分自身に移される。そして、この鏡映で動かない点は $y=x$ 上にある。計算もこのことを裏づけている。

$y=x$ 上の T と N、および距離の積

$2pq=1$ のとき、T についての結果から

$$T=\left(\frac{1}{p+q},\frac{1}{p+q}\right),$$

となり、これは $y=x$ 上にある。また $N=(p+q,\,p+q)$ であったから、これも $y=x$ 上にある。

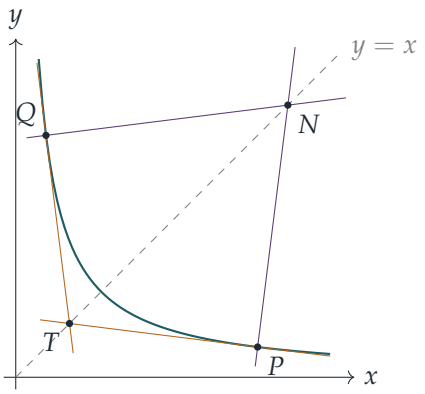
$a>0$ のとき、点 (a,a) と原点との距離は $\sqrt{2}\,a$ である。$p+q>0$ であるから、

$$OT=\frac{\sqrt{2}}{p+q},\qquad ON=\sqrt{2}\,(p+q),$$

よって

$$OT\cdot ON=2,$$

となり、これは（p によらない）定数である。以上で題意が示された。



図は $p=2$、$q=\frac{1}{4}$ の場合を示している。接線は琥珀色、法線は紫色で描いてある。

検算

$p=2$、$q=\frac{1}{4}$ とすると $pq=\frac{1}{2}$ である。接線は $x+8y=4$ と $8x+y=4$ であり、その交点は $\left(\frac{4}{9},\frac{4}{9}\right)$ で、$\frac{1}{p+q}=\frac{4}{9}$ と一致する。法線は $y=8x-\frac{63}{4}$ と $y=\frac{x}{8}+\frac{63}{32}$ であり、そ

の交点は $\left(\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\right)$ で、$p+q=\frac{9}{4}$ と一致する。さらに $OT \cdot ON = \frac{4\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{4} = 2$ となる。また、p と q を無作為に 2000 通り選び、厳密な有理数演算によって、T の一般式と、特別な場合の 2 つの結果をすべて確認した。

よくある間違い

- なぜ許されるのかを述べずに $p-q$ で割ってしまう。まさにここで「異なる 2 点」という条件が使われるのである。
- N を求める際に、$\frac{1}{2q} - \frac{1}{2p} = \frac{p-q}{2pq}$ で符号を誤る。
- $pq=\frac{1}{2}$ を用いて T を簡単にしないまま、それが $y=x$ 上にあると主張してしまう。

STEP のその先へ

直角双曲線（rectangular hyperbola）$xy=c^2$ は円錐曲線（conic）の一つであり、$OT \cdot ON$ が一定であるという事実は、T と N が円 $x^2+y^2=2$ に関して**互いに反転の関係にある点**（inverse points）であることを意味している。円に関する反転（inversion）は、幾何学においても複素解析（complex analysis）においても強力な変換であり、複素解析では写像 $z \mapsto 1/\bar{z}$ として現れる。Needham の *Visual Complex Analysis* には、反転とその幾何学的性質についての見事な解説がある。

解答例

STEP I 2012、第5問

純粋数学 • 置換積分

STEP I 2012、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s1-q5

鍵となる考え方

最初の二つの積分は、いずれも標準的な手法で処理できる。$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ と書けば、$\sin x$ が $\cos x$ の導関数（derivative）の（符号を変えた）ものであることがわかるので、置換（substitution）$u = \cos x$ がうまくいく。二つ目の積分では対数が扱いにくい因子なので、部分積分（integration by parts）によってこれを微分して消す。最後の積分では、$\cos x + \sin x$ が姿を変えた余弦 $\sqrt{2}\cos(x - \frac{1}{4}\pi)$ であることに注目する。変数を $\frac{1}{4}\pi$ だけずらすと、積分区間は $[0, \frac{1}{4}\pi]$ になり、被積分関数（integrand）は先に求めた二つの積分の組合せになる。

解答

一つ目の積分

一つ目の積分を I_1 とおく。$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ であるから、$u = \cos x$ と置換すると $\mathrm{d}u = -\sin x \,\mathrm{d}x$ である。$x = 0$ のとき $u = 1$、$x = \frac{1}{4}\pi$ のとき $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。よって

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} 2\cos x \ln(\cos x)\, \sin x \,\mathrm{d}x = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} 2u \ln u \,\mathrm{d}u,$$

ここで、$\mathrm{d}u$ から生じる負号を用いて積分の上端と下端を入れ替えた。部分積分（$\ln u$ を微分し、$2u$ を積分する）により

$$\int 2u \ln u \,\mathrm{d}u = u^2 \ln u - \int u^2 \cdot \frac{1}{u} \,\mathrm{d}u = u^2 \ln u - \tfrac{1}{2}u^2.$$

$u = 1$ のとき、これは $-\frac{1}{2}$ である。$u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のときは $u^2 = \frac{1}{2}$、$\ln u = -\frac{1}{2}\ln 2$ であるから、値は $-\frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{4}$ となる。したがって

$$I_1 = -\tfrac{1}{2} - \left(-\tfrac{1}{4}\ln 2 - \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{4}\ln 2 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}(\ln 2 - 1),$$

となり、求める結果が得られた。

二つ目の積分

二つ目の積分を I_2 とおく。$\ln(\cos x)$ を微分し、$\cos 2x$ を積分する形で部分積分を行う。$\cos 2x$ の原始関数（antiderivative）としては $\frac{1}{2}\sin 2x = \sin x \cos x$ をとるのが便利であり、$\ln(\cos x)$ の導関数は $-\sin x / \cos x$ である。よって

$$\begin{aligned} I_2 &= \Big[\sin x \cos x \, \ln(\cos x)\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin x \cos x \cdot \left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right) \mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - 0 + \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin^2 x \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

考えてみよう なぜ単に $\frac{1}{2}\sin 2x$ と書くのではなく、$\sin x \cos x$ を選ぶのだろうか？

両者は同じ関数であるが、$\sin x \cos x$ の形にしておくと、因子 $\cos x$ が $\ln(\cos x)$ の導関数の分母にある $\cos x$ と約分され、$\sin^2 x$ という易しい積分が残る。

境界項は $\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}\ln 2) = -\frac{1}{4}\ln 2$ である。$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ を用いると

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \tfrac{\pi}{8} - \tfrac{1}{4}.$$

よって

$$I_2 = -\tfrac{1}{4}\ln 2 + \tfrac{\pi}{8} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8}\left(\pi - 2\ln 2 - 2\right) = \tfrac{1}{8}(\pi - \ln 4 - 2),$$

となり、求める結果が得られた。

最後の積分

最後の積分を I とおく。加法定理（compound-angle formula）により

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(\cos x \cos \tfrac{1}{4}\pi + \sin x \sin \tfrac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \tfrac{1}{4}\pi\right).$$

このことから置換 $t = x - \frac{1}{4}\pi$ が思い浮かぶ。この置換により、積分区間 $[\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ は I_1 と I_2 の積分区間である $[0, \frac{1}{4}\pi]$ に移る。$2x = 2t + \frac{1}{2}\pi$ であるから

$$\cos 2x = \cos\left(2t + \tfrac{1}{2}\pi\right) = -\sin 2t, \qquad \sin 2x = \sin\left(2t + \tfrac{1}{2}\pi\right) = \cos 2t,$$

であり、また

$$\ln(\cos x + \sin x) = \ln\left(\sqrt{2}\cos t\right) = \tfrac{1}{2}\ln 2 + \ln(\cos t),$$

である。これは $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上で $\cos t > 0$ であるから成り立つ。したがって

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\cos 2t - \sin 2t)\left(\tfrac{1}{2}\ln 2 + \ln(\cos t)\right) \mathrm{d}t \\ &= \tfrac{1}{2}\ln 2 \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\cos 2t - \sin 2t)\,\mathrm{d}t + I_2 - I_1. \end{aligned}$$

残りの積分は 0 になる：

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\cos 2t - \sin 2t)\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{2}\sin 2t + \tfrac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = 0.$$

よって、上の二つの結果を用いると

$$I = I_2 - I_1 = \tfrac{1}{8}(\pi - 2\ln 2 - 2) - \tfrac{1}{8}(2\ln 2 - 2) = \frac{\pi - 4\ln 2}{8} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

検算

シンプソンの公式（Simpson's rule）によると $I_1 \approx -0.076713$、$I_2 \approx -0.030588$、$I \approx 0.046125$ であり、これらは $\frac{1}{4}(\ln 2 - 1)$、$\frac{1}{8}(\pi - \ln 4 - 2)$、$\frac{1}{8}(\pi - 4\ln 2)$ と小数第10位まで一致する。一つ目の積分の符号も手早く確かめておこう。$(0, \frac{1}{4}\pi)$ 上では $\sin 2x > 0$ かつ $\ln(\cos x) < 0$ であるから、I_1 は負でなければならない。実際、$\ln 2 - 1 < 0$ である。

よくある間違い

- I_2 の部分積分で境界項を忘れる。境界項は $x = \frac{1}{4}\pi$ において 0 ではない。
- $\cos(2t + \frac{1}{2}\pi)$ と $\sin(2t + \frac{1}{2}\pi)$ の符号を取り違え、$I_2 - I_1$ ではなく $I_1 - I_2$ や $I_1 + I_2$ を得てしまう。
- $\ln\sqrt{2}$ から生じる定数 $\frac{1}{2}\ln 2$ を、その係数の積分が 0 になることを確かめずに落としてしまう。

STEP のその先へ

$\ln(\cos x)$ や $\ln(\sin x)$ の積分は古典的な題材である。同じ対称性の工夫を使うと、有名な結果 $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi\ln 2$ が得られ、一般の区間で考えるとクラウゼン関数

（Clausen function）やカタランの定数（Catalan's constant）につながる。大学1年次の解析学の講義では、対数が区間の端点で発散する場合にこのような積分がきちんと定義されることも確かめる。このとき、これらは広義積分（improper integral）となる。この種の問題をさらに練習したければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）を参照するとよい。

解答例

STEP I 2012、第 6 問

純粋数学 ・ 三角不等式（三角関数）

> **STEP I 2012、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q6

鍵となる考え方

ここで現れる仰角（angle of elevation）はどれも対辺が共通で、それは旗竿である。したがって、それぞれの余接（cotangent）は水平距離を高さで割ったものにすぎない。すると最初の結果は円の中の長さに関する事実 $DC^2 = AD \cdot DB$ に帰着する。これは半円の弧に対する円周角が直角であることによる。三角関数の恒等式（identity）によって、$\cot p \cot q - \cot^2 \frac{1}{2}(p+q)$ は符号を直接読み取れる形に変わる。その不等式（inequality）が得られれば、幾何的な考察から最後の結果はほとんど労せずに得られる。

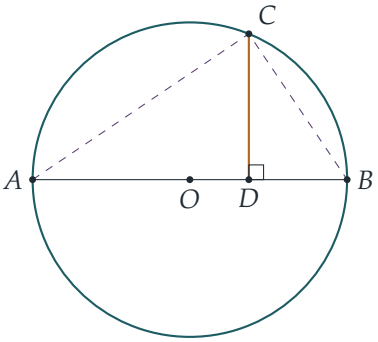
解答

幾何的な結果

旗竿の高さを $h > 0$、先端を T とし、DT は鉛直であるとする。A, B, C はいずれも地面上にあるので、三角形 TDA, TDB, TDC はいずれも D で直角をなす。よって

$$\cot\alpha = \frac{AD}{h}, \qquad \cot\beta = \frac{DB}{h}, \qquad \cot\phi = \frac{DC}{h}.$$

α と β は鋭角であるから、D は A とも B とも一致しない（そのどちらの点から見ても仰角は直角になってしまう）。したがって D は A と B の間に真にあり、$DC > 0$ である。



次に地面を真上から見た図を考える。O を中心、r を半径とし、$x = OD$ とする（B の向きを正として測るので $-r < x < r$ である）。すると $AD = r + x, DB = r - x$ であり、三角形 ODC に三平方の定理（Pythagoras' theorem）を用いると $DC^2 = OC^2 - OD^2 = r^2 - x^2$ である。したがって

$$AD \cdot DB = (r + x)(r - x) = r^2 - x^2 = DC^2.$$

（同じことであるが、$\angle ACB$ は半円の弧に対する円周角なので直角であり、CD は直角三角形 ACB の垂線（altitude）である。）両辺を h^2 で割ると

$$\cot\alpha \cot\beta = \frac{AD \cdot DB}{h^2} = \frac{DC^2}{h^2} = \cot^2\phi,$$

となり、示すべき式が得られる。

恒等式

$s = \frac{1}{2}(p + q)$ とおき、2 倍角の公式（double-angle formulae）から得られる形 $\sin^2 s = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(p + q)\big)$ および $\cos^2 s = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(p + q)\big)$ を用いる。左辺は

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\cos p \cos q\big(1 - \cos(p + q)\big) - \tfrac{1}{2}\sin p \sin q\big(1 + \cos(p + q)\big) \\
&\quad = \tfrac{1}{2}\big(\cos p \cos q - \sin p \sin q\big) - \tfrac{1}{2}\cos(p + q)\big(\cos p \cos q + \sin p \sin q\big) \\
&\quad = \tfrac{1}{2}\cos(p + q) - \tfrac{1}{2}\cos(p + q)\cos(p - q),
\end{aligned}$$

となる。ここで $\cos(p + q)$ と $\cos(p - q)$ の加法定理（compound-angle formulae）を用いた。これはすべての p, q について成り立つ。

不等式

恒等式の右辺を因数分解すると

$$\cos p \cos q \sin^2 s - \sin p \sin q \cos^2 s = \tfrac{1}{2}\cos(p + q)\big(1 - \cos(p - q)\big).$$

ここで $p,q > 0$ かつ $p+q \leq \frac{1}{2}\pi$ と仮定する。すると $0 < p+q \leq \frac{1}{2}\pi$ なので $\cos(p+q) \geq 0$ であり、また $1-\cos(p-q) \geq 0$ は常に成り立つ。よって右辺は o 以上であり、

$$\cos p \cos q \sin^2 s \ \geq \ \sin p \sin q \cos^2 s.$$

考えてみよう 両辺を $\sin p \sin q \sin^2 s$ で割ってもよいだろうか？

よい。p と q は正で和が $\frac{1}{2}\pi$ 以下であるから、p, q, s はいずれも $(0, \frac{1}{2}\pi)$ に属し、$\sin p$, $\sin q$, $\sin s$ はすべて真に正である。正の量 $\sin p \sin q \sin^2 s$ で割っても不等号の向きは変わらないので、

$$\cot p \cot q \ \geq \ \cot^2 s = \cot^2 \tfrac{1}{2}(p+q).$$

等号が成り立つのは $p = q$ または $p+q = \frac{1}{2}\pi$ のとき、かつそのときに限る。

最後の結果

$p = \alpha, q = \beta$ とする。どちらも正であり（正の高さをもつ旗竿の仰角であるから）、$\alpha + \beta \leq \frac{1}{2}\pi$ なので、上の不等式が適用できる。最初の結果と合わせると

$$\cot^2 \phi = \cot\alpha \cot\beta \ \geq \ \cot^2 \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

ϕ と $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ はどちらも $(0, \frac{1}{2}\pi)$ に属する（ϕ については $DC > 0$ かつ $h > 0$ による）ので、どちらの余接も正であり、平方根をとってよい：$\cot\phi \geq \cot\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$。

考えてみよう なぜこれから $\phi \leq \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ が得られ、$\geq$ ではないのだろうか？

cot は $(0, \frac{1}{2}\pi)$ で狭義単調減少だからである。つまり、余接が大きいほど角は小さい。よって

$$\phi \leq \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \qquad \text{ただし} \alpha+\beta \leq \tfrac{1}{2}\pi.$$

検算

- $D = O$ ならば $AD = DB = DC = r$ なので $\alpha = \beta = \phi$ である。このとき最初の結果の両辺は等しく、最後の不等式は等号となり、$p = q$ の場合と一致する。
- 数値による確認：$r = 1, OD = \frac{1}{2}, h = 1$ とすると $\cot\alpha = 1.5, \cot\beta = 0.5, \cot^2\phi = 0.75$ となり、予想どおりである。この場合 $\alpha+\beta \approx 0.588 + 1.107 = 1.695 > \frac{1}{2}\pi$ なので最後の結果は成り立つとは限らない。実際 $\phi \approx 0.857 > \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \approx 0.848$ であり、条件が本質的であることがわかる。
- 恒等式を 10^5 組のランダムな (p,q) で、不等式を許される範囲内の 2×10^5 組のラ

ンダムな組で、そして $\phi \leq \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ を $\alpha+\beta \leq \frac{1}{2}\pi$ を満たす約 8×10^4 通りのランダムな配置で確かめたが、成り立たない例はなかった。

よくある間違い

- cot が減少関数であることを忘れて、$\phi \geq \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ と結論してしまう。
- $\sin p \sin q \sin^2 s$ が正である理由を述べずに、不等式をそれで割ってしまう。
- 条件 $p+q \leq \frac{1}{2}\pi$ を無視してしまう。この条件こそが $\cos(p+q) \geq 0$ を保証するものであり、これがなければ不等式は成り立たないことがある。

STEP のその先へ

この不等式は、$\ln\cot t$ が $(0, \frac{1}{4}\pi]$ 上の凸関数（convex function）であることを述べている。実際、$\ln\cot p$ と $\ln\cot q$ の平均が、平均に対する $\ln\cot$ の値以上であるということを主張しているからである。凸性とイェンセンの不等式（Jensen's inequality）は、大学 1 年次の解析学において不等式を生み出す強力な源である。関係式 $DC^2 = AD\cdot DB$ は、ユークリッド（Euclid）による相乗平均（geometric mean）の作図である：$\cot\phi$ は $\cot\alpha$ と $\cot\beta$ の相乗平均なのである。Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は凸関数を扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）にはこの種の問題がさらに収められている。

解答例

STEP I 2012、第7問

純粋数学 • 周期的な漸化式

> **STEP I 2012、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q7

鍵となる考え方

周期（period）1、2 または 3 で繰り返す数列は最初の数項で完全に決まるので、漸化式（recurrence）は一周期の中にある少数の連続する 3 項の組（および周期の折り返し部分）について成り立てばよい。これらを書き出すと、x, y, z についての小さな連立一次方程式（simultaneous linear equations）が得られる。この方程式には全部が 0 ではない解があり、そのことが p と q に対する条件を強いるのである。全体を通して、約分（両辺を割ること）を可能にしているのは $x \neq 0$ という事実である。

解答

小問 (i)

すべての n について $t_n = x$ ならば、漸化式より $x = px + qx$、すなわち $(p+q-1)x = 0$ である。$x \neq 0$ であるから、$p+q=1$ を得る。

逆に、$p+q=1$ かつ $t_0 = t_1 = x$ ならば $t_2 = (p+q)x = x$ であり、数学的帰納法（induction）によりすべての項は x に等しい。x を制限するものは何もないので、x は 0 でない任意の実数でよい。

小問 (ii)

パターン $x, y, x, y, \ldots$ が漸化式を満たすのは、連続する 2 つの 3 項の組 (x, y, x) と (y, x, y) が漸化式を満たすとき、かつそのときに限る：

$$x = py + qx, \qquad \text{すなわち} \quad (1-q)x = py, \tag{1}$$
$$y = px + qy, \qquad \text{すなわち} \quad (1-q)y = px. \tag{2}$$

(1) と (2) の和と差をとると

$$(1-q-p)(x+y) = 0, \qquad (1-q+p)(x-y) = 0.$$

を得る。$x+y$ と $x-y$ がともに 0 になることはない。そうなると $x = 0$ となってしまうからである。$x+y \neq 0$ ならば $p+q = 1$ であり、$x-y \neq 0$ ならば $q-p = 1$ である。よって、$q+p = 1$ と $q-p = 1$ の少なくとも一方が成り立ち、題意が示された。

次に、x と y の関係を導く。

- $q+p = 1$ ならば $1-q = p$ であり、(1) は $px = py$ となる。よって $p \neq 0$ であれば $x = y$ である。
- $q-p = 1$ ならば $1-q = -p$ であり、(1) は $-px = py$ となる。よって、やはり $p \neq 0$ であれば $x = -y$ である。

唯一の例外は $p = 0$ の場合であり、このときどちらの場合も $q = 1$ となる。$p = 0$ かつ $q = 1$ のとき漸化式は $t_{n+2} = t_n$ であり、どんなパターン $x, y, x, y, \ldots$ もこれを満たすので、x と y の間には何の関係もない。したがって、$p = 0$ かつ $q = 1$ の場合を除いて、$x = y$ または $x = -y$ である。

小問 (iii)

今度のパターンは $x, y, z, x, y, z, \ldots$ であり、連続する 3 つの 3 項の組 (x, y, z)、(y, z, x)、(z, x, y) が必要である：

$$z = py + qx, \tag{3}$$
$$x = pz + qy, \tag{4}$$
$$y = px + qz. \tag{5}$$

(3) を用いて、残りの 2 式から z を消去する：

$$(4): \quad x = p(py + qx) + qy \quad \Longrightarrow \quad (pq-1)x + (p^2+q)y = 0,$$
$$(5): \quad y = px + q(py + qx) \quad \Longrightarrow \quad (p+q^2)x + (pq-1)y = 0.$$

第1式に $pq-1$ を、第2式に p^2+q を掛けて引く。y の項が消えて

$$\left[(pq-1)^2-(p^2+q)(p+q^2)\right]x=0.$$

が残る。

考えてみよう なぜこの括弧の中身は0でなければならないのか。方程式にそもそも解がないということはありえないのか。

解は存在する。数列が存在するのだから、x と y は両方の式を満たしている。そして $x\neq 0$ であるから、x で割ることができる。括弧の中身を展開すると

$$\begin{aligned}(pq-1)^2-(p^2+q)(p+q^2)&=p^2q^2-2pq+1-\left(p^3+p^2q^2+pq+q^3\right)\\&=1-3pq-p^3-q^3,\end{aligned}$$

となるので、$p^3+q^3+3pq-1=0$ であり、題意が示された。

因数分解（factorisation）。この式は $a=p$、$b=q$、$c=-1$ とした $a^3+b^3+c^3-3abc$ であり、よく知られた恒等式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\cdot\tfrac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

により

$$p^3+q^3+3pq-1=\tfrac{1}{2}(p+q-1)\left[(p-q)^2+(q+1)^2+(p+1)^2\right].$$

となる。（この恒等式を覚えていなければ、展開して確かめればよい。角括弧の中身は $2(p^2+q^2+1-pq+p+q)$ であり、これに $p+q-1$ を掛けると元の3次式に戻る。）積が0であるから、$p+q=1$ または $(p-q)^2+(p+1)^2+(q+1)^2=0$ である。

$(p-q)^2+(p+1)^2+(q+1)^2=0$ の場合。実数の平方の和が0となるのは各平方がすべて0のときに限るので、$p=q=-1$ である。このとき (3) は $z=-y-x$、すなわち $x+y+z=0$ となる。

$p+q=1$ の場合。(3)、(4)、(5) に $q=1-p$ を代入し、それぞれを差の形に整理すると

$$z-x=p(y-x),\qquad x-y=p(z-y),\qquad y-z=p(x-z).$$

となる。$a=y-x$、$b=z-y$、$c=x-z$ とおくと、$a+b+c=0$ である。第1式と第3式から $c=-pa$ および $b=-pc=p^2a$ が得られる。すると

$$0=a+b+c=a(1-p+p^2).$$

考えてみよう $1-p+p^2$ が 0 になることはありうるか。

ありえない。すべての実数 p について $1-p+p^2=\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ である。よって $a=0$ であり、ここから $c=-pa=0$、さらに $b=0$ が得られる。すなわち $x=y=z$ である。

$p=q=-1$ のとき $p+q=-2\neq 1$ であるから、2 つの場合が重なることはない。よって、$x=y=z$（$p+q=1$ のとき）または $x+y+z=0$（$p=q=-1$ のとき）のいずれかである。どちらも実際に起こる。第 2 の場合、漸化式 $t_{n+2}=-t_{n+1}-t_n$ は任意の初期値に対して $x,\ y,\ -x-y,\ x,\ y,\ \ldots$ を与える。

検算

- $p=q=-1$、$t_0=2$、$t_1=5$ とすると、数列は $2,5,-7,2,5,-7,\ldots$ となり、$2+5-7=0$ である。
- $p=3$、$q=4$（したがって $q-p=1$）とし、$1,-1$ から始めると $t_2=-3+4=1$、$t_3=3-4=-1$ となり、小問 (ii) の予測どおり交互に並ぶ。
- $p=2$、$q=-1$ のとき 3 次式は $8-1-6-1=0$ となり、$p+q=1$ と整合する。また、展開と因数分解、および 3 次式が (3)–(5) の 3×3 行列式（determinant）と一致することを、無作為に選んだ 1000 組の (p,q) で確認した。漸化式のシミュレーションにより、上記のすべての場合が確かめられた。

よくある間違い

- 小問 (ii) で $p+q=1$ **かつ** $q-p=1$ と結論してしまうこと。この議論が示すのは少なくとも一方が成り立つことだけであり、両方が成り立つのは例外的な場合 $p=0$、$q=1$ に限られる。
- 小問 (ii) で、$p=0$ こそが問題の問うている例外であることに気づかずに p で割ってしまうこと。
- 折り返しの式 (4) と (5) を忘れること。一周期につき 1 つの式だけでは、条件を導くのに足りない。

STEP のその先へ

$t_{n+2} = pt_{n+1} + qt_n$ を扱う標準的な方法は、**特性方程式**（characteristic equation）$\lambda^2 = p\lambda + q$ を用いるものである。一般に $t_n = A\alpha^n + B\beta^n$ であり、ここで α と β はその根である。数列が k 項ごとに繰り返すのは、その数列に現れる根が $\lambda^k = 1$ を満たすとき、かつそのときに限る。定数列には根 1 が必要であり（よって $p + q = 1$）、交互に並ぶ数列には -1 が必要である（よって $q - p = 1$）。$p = q = -1$ の場合は $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ となり、その根は 1 の虚数の 3 乗根（cube roots of unity）である。だからこそ、それらの和 $1 + \omega + \omega^2 = 0$ が $x + y + z = 0$ として再び現れるのである。これは姿を変えた線形代数（linear algebra）（数列に作用するシフト写像（shift map））であり、Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、まさにこのように固有値（eigenvalues）を通して漸化式を扱っている。

解答例

STEP I 2012、第 8 問

純粋数学 ・ 同次形微分方程式

STEP I 2012、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s1-q8

鍵となる考え方

どちらの方程式も**同次**（homogeneous）である。すなわち、全体にかかる x のべきを除けば、どの項も x と y について同じ全次数をもつ。$y = xv$ とおくと、その x のべきが約されて、方程式は v の部分と x の部分に分離される。小問 (i) ではこの手順が誘導されている。小問 (ii) では自分で行う必要がある。x で両辺を割ると同じ種類の方程式であることがわかり、そのあとの v についての積分には部分分数分解（partial fractions）が必要になる。

解答

小問 (i)

$y = xv$ ならば、積の微分法（product rule）により $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = v + x\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ である。これを代入すると、

$$x(xv)\left(v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) + x^2v^2 - 2x^2 = x^3v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + 2x^2v^2 - 2x^2 = 0.$$

$x \neq 0$ であるから x^2 で割ることができ、

$$xv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + 2v^2 - 2 = 0,$$

を得る。これが示すべき式である。

次に変数分離（separation of variables）を行う。方程式は $xv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2(1 - v^2)$ を意味する。$v^2 \neq 1$ ならば、

$$\int \frac{v}{1 - v^2}\,\mathrm{d}v = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad -\tfrac{1}{2}\ln|1 - v^2| = 2\ln|x| + c.$$

-2 を掛けて指数をとると、ある定数 $A>0$ に対して $|1-v^2| = Ax^{-4}$ となるので、

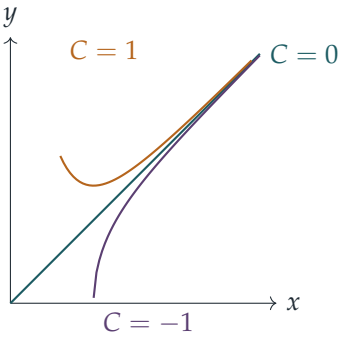
$$x^4(v^2-1) = C,$$

ただし $C = \pm A$ は 0 でない定数である。除外しておいた場合 $v = \pm 1$（すなわち $y = \pm x$）も解である。このとき $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = 0$ かつ $2v^2 - 2 = 0$ となるからである。これらはちょうど $C = 0$ の場合にあたるので、C は任意の定数としてよい。

最後に $v = y/x$ を代入すると、

$$x^4\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right) = x^2(y^2 - x^2) = C,$$

となり、これが求める形である。



図は第1象限におけるいくつかの解曲線を示している。$y^2 = x^2 + C/x^2$ からわかるとおり、これらは $x \to \infty$ のとき直線 $y = x$ に近づく。

小問 (ii)

$6x + 5y$ のどの項も次数は 1 であり、$y\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ も同様である。そこで同じ置換 $y = xv$ を試みる：

$$xv\left(v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) + 6x + 5xv = 0.$$

$x \neq 0$ で割って項を整理すると、

$$xv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -(v^2 + 5v + 6) = -(v+2)(v+3).$$

考えてみよう $\dfrac{v}{(v+2)(v+3)}$ はどのように積分すればよいか？

部分分数分解を用いる。$v = P(v+3) + Q(v+2)$ とおく。$v = -2$ とすると $P = -2$、$v = -3$ とすると $Q = 3$ を得る。よって

$$\frac{v}{(v+2)(v+3)} = \frac{3}{v+3} - \frac{2}{v+2}.$$

$v \neq -2, -3$ ならば、変数分離により

$$\int \Big(\frac{3}{v+3} - \frac{2}{v+2} \Big) \mathrm{d}v = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Longrightarrow \quad 3\ln|v+3| - 2\ln|v+2| = -\ln|x| + c.$$

したがって $|x|\,|v+3|^3/(v+2)^2$ は定数である。絶対値記号を外すと（$v \neq -3$ である解曲線上では $x(v+3)^3$ の符号は変わりえない）、

$$\frac{x(v+3)^3}{(v+2)^2} = K.$$

ここで $v = y/x$ を代入する。分子は $x(y+3x)^3/x^3$、分母は $(y+2x)^2/x^2$ となるので、x のべきは完全に約される：

$$\boxed{(y+3x)^3 = K(y+2x)^2},$$

ただし K は定数である。

除外した直線も解である。$y = -3x$ ならば $y\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 9x$、$6x + 5y = -9x$ となるので、方程式は成り立つ。この直線は枠で囲んだ式の $K = 0$ の場合にあたる。$y = -2x$ ならば $y\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 4x$、$6x + 5y = -4x$ となるので、この直線も解である。これはどの有限の K にも含まれず、$K \to \infty$ に対応する。解を $(y+2x)^2 = k(y+3x)^3$ と書けば、代わりにこちらが $k = 0$ として含まれる。

検算

- 小問 (i)：$x^2y^2 - x^4 = C$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると $2xy^2 + 2x^2y\,y' - 4x^3 = 0$ となる。$2x$ で割るともとの方程式に戻る。
- 小問 (ii)：多数のランダムな初期点から、方程式を数値的に（ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で）解き進めた。どの解に沿っても、量 $(y+3x)^3/(y+2x)^2$ は約 10^{-14} の精度で一定であった。たとえば点 $(1,1)$ を通る曲線では $K = 64/9$ である。
- 各方程式の解となる原点を通る直線 $y = \pm x$ および $y = -2x, -3x$ は、$2v^2 - 2 = 0$ と $v^2 + 5v + 6 = 0$ の根から得られる。これは v についての方程式が正しいことのよい兆候である。

よくある間違い

- 積の微分法を忘れること：$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ は $v + x\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ であって、$x\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ ではない。
- 部分分数分解を誤ること（たとえば $2/(v+2) - 3/(v+3)$ としてしまう）。$v = 0$ などの値で分解を確かめるとよい。

- $1-v^2$ や $(v+2)(v+3)$ で割る際に、それによって直線解の一部が失われることに言及しないこと。

STEP のその先へ

方程式 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = F(y/x)$ は同次であるという。その解曲線どうしは拡大 $(x,y) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$ によって互いに移り合い、これが $v = y/x$ がうまくいく理由である。これは、ソフス・リー（Sophus Lie）による深い考え方、すなわち微分方程式（differential equation）の対称性（symmetry）を用いてその階数（order）を下げることができるという考え方の、最も単純な場合である。直線解 $y = mx$ は、この拡大で動かない曲線である。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は、同次方程式やその他の 1 階の方程式を扱っている。

解答例

STEP I 2012、第 9 問

力学 ・ 放物運動

STEP I 2012、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

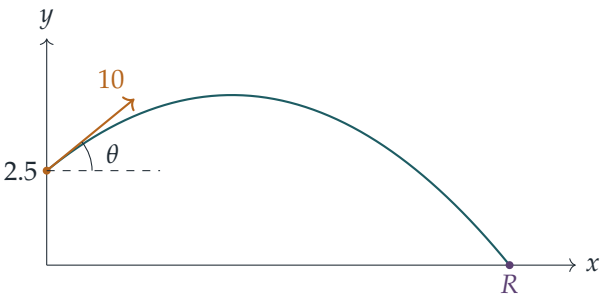
step.maths.org/questions/12-s1-q9

鍵となる考え方

これはある高さから打ち出される放物運動（projectile）であるから、飛行時間（time of flight）は t についての二次方程式（quadratic）から得られる。この問題の本質は、その解を $c = \cos 2\theta$ を用いて書き直すことにある。倍角公式（double-angle formulae）$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-c)$ と $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+c)$ がすべての仕事をしてくれる。到達距離（range）がただ一つの変数 c の関数として表されれば、その最大化は通常の微分法の問題であり、2 乗する操作に少し注意を払えばよい。

解答

砲丸を、空気抵抗（air resistance）のない状態で重力のみを受けて自由に運動する質点としてモデル化する。投射点の真下の地面を原点とし、x を水平方向、y を鉛直上向きにとる。また $0 \le \theta < 90°$（砲丸は前方かつ上方へ投げられる）と仮定する。したがって $\sin\theta \ge 0$ かつ $\cos\theta > 0$ である。



飛行時間

水平方向の速度は $10\cos\theta$ のまま一定であり、鉛直方向の運動は初速度 $10\sin\theta$、加速度 -10 である。よって時刻 t において

$$x = 10t\cos\theta, \qquad y = 2.5 + 10t\sin\theta - 5t^2.$$

砲丸が着地するのは $y = 0$ のとき、すなわち

$$5t^2 - 10t\sin\theta - 2.5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t^2 - 2t\sin\theta - \tfrac{1}{2} = 0.$$

のときである。2つの解の積は $-\frac{1}{2} < 0$ であるから、正の解はちょうど1つであり、それは正の符号をとったものである：

$$T = \sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + \tfrac{1}{2}}.$$

ここで $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) = \frac{1}{2}(1-c)$ を用いる。$\sin\theta \geq 0$ であるから $\sin\theta = \sqrt{\frac{1}{2}(1-c)}$ と書くことができ、また $\sin^2\theta + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2-c)$ である。したがって

$$T = \sqrt{\frac{1-c}{2}} + \sqrt{\frac{2-c}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-c} + \sqrt{2-c}\right),$$

となり、これが求める時間（秒）である。

到達距離

同様に $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+c)$ であり、$\cos\theta > 0$ であるから $\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{2}(1+c)}$ である。到達距離は

$$\begin{aligned} R = 10T\cos\theta &= 10\sqrt{\frac{1+c}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-c} + \sqrt{2-c}\right) \\ &= 5\left(\sqrt{1-c^2} + \sqrt{(1+c)(2-c)}\right) = 5\left(\sqrt{1-c^2} + \sqrt{2+c-c^2}\right)\ \text{m}. \end{aligned}$$

である。θ が $[0°, 90°)$ を動くとき、$c = \cos 2\theta$ は $(-1, 1]$ を動くので、この区間で R を最大化すればよい。

到達距離の最大化

$-1 < c < 1$ において微分すると

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}c} = 5\left(\frac{-c}{\sqrt{1-c^2}} + \frac{1-2c}{2\sqrt{2+c-c^2}}\right).$$

停留点（stationary point）であるためには

$$\frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{1-2c}{2\sqrt{2+c-c^2}}. \qquad (*)$$

が必要である。

考えてみよう $(*)$ をそのまま 2 乗してよいだろうか。何がまずくなりうるだろうか。

2 乗すると符号の情報が失われるため、偽の解（extraneous roots）が紛れ込むことがある。両辺の分母はともに正であるから、$(*)$ において c と $1-2c$ は同符号でなければならない（両方とも 0 になることはありえない）。これより $0 < c < \frac{1}{2}$ が導かれるので、このことを念頭に置いておく。2 乗して分母を払うと

$$\begin{aligned} 4c^2(2+c-c^2) &= (1-2c)^2(1-c^2) \\ 8c^2+4c^3-4c^4 &= 1-4c+3c^2+4c^3-4c^4 \\ 5c^2+4c-1 &= 0 \\ (5c-1)(c+1) &= 0. \end{aligned}$$

解 $c=-1$ は $0<c<\frac{1}{2}$ の範囲外である（これは鉛直に投げ上げる場合に当たる）。よって停留点は $c=\frac{1}{5}$ のみである。これは実際に $(*)$ を満たす。$\sqrt{1-\frac{1}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$、$\sqrt{2+\frac{1}{5}-\frac{1}{25}}=\frac{3\sqrt{6}}{5}$ であるから、両辺はともに $\frac{1}{2\sqrt{6}}$ に等しい。

この点において

$$R\left(\tfrac{1}{5}\right)=5\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}+\frac{3\sqrt{6}}{5}\right)=5\sqrt{6}\approx 12.25.$$

これが最大値であることを確かめるため、区間の端点での値と比較する。$c\to -1$ のとき $R\to 0$ であり、$R(1)=5\sqrt{2}\approx 7.07$ である。R は $[-1,1]$ で連続かつ内部で微分可能であるから、その最大値は端点または停留点でとられる。そしてただ一つの停留点がこれらの値のうち最大のものを与える。よって、求めるとおり、到達距離は $c=\frac{1}{5}$ のとき最大となる。（これは $\theta=\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{5}\approx 39.2^\circ$ であり、45° より少し小さい。）

距離の増分

45° では $c=\cos 90^\circ=0$ であるから

$$R(0)=5\left(1+\sqrt{2}\right).$$

したがって距離の増分は

$$5\sqrt{6}-5\left(1+\sqrt{2}\right)=5\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}-1\right)\ \text{m},$$

となり、求める結果が得られた。

検算

- $\theta = 0$（$c = 1$）のとき時間は $\frac{1}{\sqrt{2}}$ であり、高さ 2.5 m の段から転がり落ちる球についての $2.5 = 5t^2$ と一致する。
- $c \to -1$（鉛直投げ上げ）のとき、到達距離は当然 0 に近づく。
- 数値的には、距離の増分は $5(2.4495 - 1.4142 - 1) \approx 0.176$ m であり、わずか約 18 cm にすぎない。最適点の近くは非常に平坦なのである。飛行の逐次シミュレーションと、$R(c)$ の細かいグリッド探索のいずれも公式と一致し、最大値を $c = 0.2$ に与える。

よくある間違い

- 解の公式で負の符号をとってしまい、負の時間を得る。
- $(*)$ を 2 乗したあと $c = -1$ を確認せずに残してしまう。あるいは $c = \frac{1}{5}$ が最小ではなく最大であることの正当化を忘れる。
- 最適な角度は 45° だと思い込む。それが正しいのは投射点と着地点が同じ高さにある場合だけである。

STEP のその先へ

ある高さから打ち出すと、最適な角度は必ず 45° より小さくなる。一般に最適な角度は $\tan\theta = u/\sqrt{u^2 + 2gh}$ を満たし、ここではこれが $\tan\theta = \sqrt{2/3}$ を与える。これは $\cos 2\theta = \frac{1}{5}$ と同じことである。パラメータの関数を最適化し、その最大値の付近がいかに平坦であるかに気づくことは、感度分析（sensitivity analysis）の最初の一歩である。最大点の近くでは、パラメータの小さな誤差は 2 次の損失しかもたらさない。空気抵抗がある場合とない場合の放物運動についてさらに知りたければ、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

解答例

STEP I 2012、第 10 問

力学 ・ 自由落下と音

> **STEP I 2012、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q10

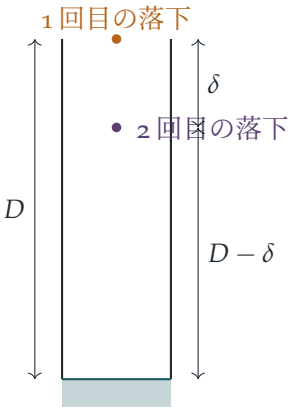
鍵となる考え方

測定される時間はそれぞれ二つの部分からなる。石が静止状態から自由落下（free fall）する時間と、着水音が一定の速さで井戸を上ってくる時間である。両方の時間を書き下して引き算すれば、ただちに t が得られる。「これを用いて（hence）」の部分では、二つの平方根がそれぞれ二つの落下時間を表している。その差はわかっており、2 乗の差は簡単な形をしているので、因数分解（factorisation）$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ によって和も得られ、そこから各々が個別に求まる。

解答

t の式

石を、重力のみを受けて（空気抵抗（air resistance）は無視して）静止状態から落下する質点（particle）としてモデル化し、音は井戸の中をまっすぐ上向きに一定の速さ u で伝わると仮定する。



静止状態から落とした石は、時間 τ の間に距離 h だけ落下し、$h = \frac{1}{2}g\tau^2$ が成り立つので、$\tau = \sqrt{2h/g}$ である。その後、音は同じ距離 h を上って私のところまで戻ってくるので、h/u の時間がかかる。したがって、水面からの高さ h の位置から石を落としたときに私が測定する時間は

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{u}.$$

である。井戸の上端からは $h = D$ である。下に降りた後は、私（そして石の出発点）は水面から高さ $D - \delta$ の位置にあり、音はそこまで届けばよい。よって

$$\begin{aligned} t &= \left(\sqrt{\frac{2D}{g}} + \frac{D}{u}\right) - \left(\sqrt{\frac{2(D-\delta)}{g}} + \frac{D-\delta}{u}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2D}{g}} - \sqrt{\frac{2(D-\delta)}{g}} + \frac{\delta}{u}, \end{aligned}$$

となり、題意は示された。

D の式

二つの落下時間を $a = \sqrt{2D/g}$、$b = \sqrt{2(D-\delta)/g}$ とおく。いま示した結果から

$$a - b = t - \frac{\delta}{u} = \beta.$$

である。$\delta > 0$ より $a > b$ なので $\beta > 0$ であり、特に $\beta \neq 0$ である。また

$$a^2 - b^2 = \frac{2D}{g} - \frac{2(D-\delta)}{g} = \frac{2\delta}{g}.$$

である。

考えてみよう $a - b$ はわかっている。では a 単独はどうすれば求められるか。

因数分解すると $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = \beta(a+b)$ であり、β は正なので β で割ってよい。よって

$$a + b = \frac{2\delta}{\beta g}.$$

これを $a - b = \beta$ に加えて 2 で割ると

$$a = \tfrac{1}{2}\beta + \frac{\delta}{\beta g} = T.$$

最後に、$a = \sqrt{2D/g}$ は $D = \tfrac{1}{2}ga^2$ を意味するので

$$D = \tfrac{1}{2}gT^2,$$

となり、題意は示された。（つまり T は、石が上端から井戸の深さ全体を落下するのにかかる時間にほかならない。）

数値の場合

$u = 300\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$t = \frac{1}{5}\,\mathrm{s}$、$\delta = 10\,\mathrm{m}$ のとき

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{1}{5} - \frac{10}{300} = \frac{1}{5} - \frac{1}{30} = \frac{1}{6}\,\mathrm{s},\\
T &= \frac{1}{12} + \frac{10}{\frac{1}{6}\cdot 10} = \frac{1}{12} + 6 = \frac{73}{12}\,\mathrm{s},\\
D &= \tfrac{1}{2}\cdot 10 \cdot \left(\frac{73}{12}\right)^2 = \frac{5\times 5329}{144} = \frac{26645}{144} \approx 185.03\,\mathrm{m}.
\end{aligned}$$

である。したがって、井戸の深さはおよそ 185 m である。

検算

- $D = 26645/144$ を $\delta = 10$ として t の式に代入し直す。落下時間は $73/12 \approx 6.083\,\mathrm{s}$ と $\sqrt{2(175.03)/10} \approx 5.917\,\mathrm{s}$ であり、その差は $1/6\,\mathrm{s}$ である。これに $\delta/u = 1/30\,\mathrm{s}$ を加えると、ちょうど $t = 0.2\,\mathrm{s}$ となる。
- 音が瞬時に伝わる（$u \to \infty$）ならば $\beta = t$ となり、当然そうあるべきである。このときは落下時間だけが問題となる。
- 落下する石の運動を数値的に時間刻みで計算し、音の遅れを加えると、t の式が $10^{-4}\,\mathrm{s}$ の精度で再現される。また、逆算 $D = \tfrac{1}{2}gT^2$ により、10^4 個のランダムな場合で D が復元される。

よくある間違い

- 下に降りた後は音が $D-\delta$ しか伝わらないことを忘れ、δ/u の項を落としてしまう。
- 方程式 $a-b=\beta$ をそのまま 2 乗しようとする。これは煩雑な計算につながるが、$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ を使えば 1 行で $a+b$ が得られる。
- 音をまったく無視してしまう。$\beta=t=0.2$ とすると、同じ方法で $T=5.1\,\mathrm{s}$、$D\approx 130\,\mathrm{m}$ となり、大きく外れた答えになる。

STEP のその先へ

ここでの方法は**差分測定**（*differential measurement*）である。一回の計時を信頼するのではなく、既知の量だけ異なる二つの実験を比較し、未知量を打ち消し合わせるのである。最後の間違いの例は、データの小さな変化に対して答えがいかに敏感であるかを示している。t は二つの大きな時間の小さな差だからである。物理学者や工学者はこれを誤差伝播（error propagation）や条件数（condition number）によって定量化し、大学 1 年次の実験手法や数値解析（numerical analysis）で学ぶ。単純な運動を注意深くモデル化することについてさらに知りたければ、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を読むとよい。

解答例

STEP I 2012、第 11 問

力学 ・ 滑車と摩擦

> **STEP I 2012、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q11

鍵となる考え方

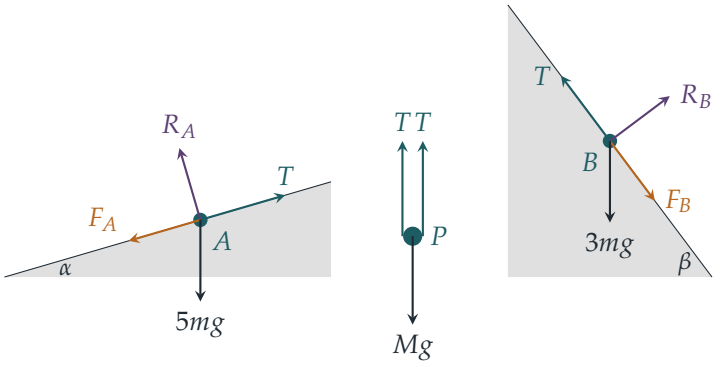
滑車はすべてなめらかで糸は軽いので、張力（tension）は糸のどこでも等しい。したがって、各質点について張力と摩擦力（friction）を結びつける式が一つずつ得られ、滑車 P から三つ目の式が得られる。角は $7, 24, 25$ および $3, 4, 5$ の三角形から選ばれているので、正弦・余弦はすべて正確な分数になる。運動している場合には、もう一つの材料が必要である。すなわち、糸の長さが一定であることによって、A、B、P の加速度（acceleration）がどのように結びついているかである。

解答

A、B を質点とし、糸は軽く伸び縮みしない（inextensible）ものとしてモデル化する。滑車 Q と R はなめらかで軽く、固定されており、P はなめらかで質量 M をもつ。$\alpha = \arctan\frac{7}{24}$、$\beta = \arctan\frac{4}{3}$ とおく。辺の長さが $7, 24, 25$ および $3, 4, 5$ の直角三角形から、

$$\sin\alpha = \frac{7}{25}, \quad \cos\alpha = \frac{24}{25}, \qquad \sin\beta = \frac{4}{5}, \quad \cos\beta = \frac{3}{5}.$$

張力を T とする。滑車はすべてなめらかなので、T は糸のどの部分でも同じである。



どちらの小問でも、質点は斜面を**上向きに**動き出す直前にあるか、上向きに動いているので、図のように摩擦力はそれぞれの斜面に沿って**下向きに**はたらく。斜面に垂直な方向に力を分解すると、

$$R_A = 5mg\cos\alpha = \tfrac{24}{5}mg, \qquad R_B = 3mg\cos\beta = \tfrac{9}{5}mg.$$

小問 (i)

両方の質点がすべり出す直前にあるので、摩擦力は最大摩擦力（limiting friction）であり、$F_A = \mu R_A$、$F_B = \mu R_B$ である。各斜面に沿って力を分解すると（つり合い）、

$$\begin{aligned} A: &\quad T = 5mg\sin\alpha + \mu R_A = \tfrac{mg}{5}(7 + 24\mu), \\ B: &\quad T = 3mg\sin\beta + \mu R_B = \tfrac{mg}{5}(12 + 9\mu). \end{aligned}$$

両者を等しいとおくと $7 + 24\mu = 12 + 9\mu$ となるので、

$$\mu = \tfrac{1}{3},$$

であり、このとき $T = \frac{mg}{5}(7 + 8) = 3mg$ である。

滑車 P は、鉛直な二本の糸に上向きに引かれ、重力に下向きに引かれてつり合っているので、

$$2T = Mg \quad \Longrightarrow \quad M = \frac{2 \cdot 3mg}{g} = 6m,$$

となり、題意が示された。

小問 (ii)

いま $M = 9m$ であり、これはちょうど限界のつり合いで支えられる $6m$ より重いので、P は下降し、両方の質点を斜面に沿って上へ引きずると予想される。

? **考えてみよう** 三つの加速度はどのように関係しているか？

A と B の斜面に沿って上向きの加速度をそれぞれ a、b とし、P の下向きの加速度を p とする。糸の長さ $AQ+QP+PR+RB$ は一定である。A が斜面に沿って距離 x だけ上がり、B が斜面に沿って距離 y だけ上がると、AQ と RB はそれぞれ x、y だけ短くなる。また P が z だけ下がると、QP と PR はそれぞれ z だけ長くなる。よって常に $2z=x+y$ が成り立ち、これを二回微分すると

$$2p=a+b.$$

$\mu=\frac{1}{3}$ のとき、上向きにすべっている間の摩擦力は、A では $\frac{1}{3}R_A=\frac{8}{5}mg$、$B$ では $\frac{1}{3}R_B=\frac{3}{5}mg$ である。各斜面に沿った方向と、P については鉛直方向に、ニュートン（Newton）の運動の第二法則を適用すると、

$$\begin{aligned} A:&\quad T-\tfrac{7}{5}mg-\tfrac{8}{5}mg=5ma, && \text{よって} T-3mg=5ma,\\ B:&\quad T-\tfrac{12}{5}mg-\tfrac{3}{5}mg=3mb, && \text{よって} T-3mg=3mb,\\ P:&\quad 9mg-2T=9mp. \end{aligned}$$

$T=3mg+X$ とおく。すると $a=\dfrac{X}{5m}$、$b=\dfrac{X}{3m}$ であり、糸の条件から

$$p=\tfrac{1}{2}(a+b)=\frac{4X}{15m}.$$

これを P の式に代入すると、

$$3mg-2X=\frac{12X}{5}\quad\Longrightarrow\quad X=\frac{15mg}{22}.$$

したがって

$a=\dfrac{3g}{22}$（斜面に沿って上向き），　$b=\dfrac{5g}{22}$（斜面に沿って上向き），　$p=\dfrac{2g}{11}$（鉛直下向き），

であり、張力は $T=\frac{81}{22}mg$ である。

考えてみよう 一方が静止したままではなく、両方の質点が本当に上向きに動くことは、どうしてわかるのか？

上の式から、質点が斜面を上向きにすべるのは $T>3mg$ のときに限り、静止したままである（あるいは下向きにすべろうとする）のは $T\le 3mg$ のときに限る。値 $3mg$ は両方の質点で同じなので、両方とも上向きに動くか、どちらも動かないかのいずれかである。どちらも上向きに動かないとすると $a+b\le 0$ なので $p\le 0$ となる。ところが $T\le 3mg$ からは $9mg-2T\ge 3mg>0$ となり、$p>0$ でなければならない。これは矛盾であるから、両方とも上向きに動き、（$a,b>0$ である）上の解は矛盾なく成り立つ。

検算

- 小問 (i) で、$\mu = \frac{1}{3}$ を両方の質点の式に代入すると、同じ張力 $3mg$ が得られる。
- 小問 (ii) で、$2p = \frac{4g}{11} = \frac{3g}{22} + \frac{5g}{22} = a + b$ であり、糸の条件を満たしている。また $T = \frac{81}{22}mg \approx 3.68mg$ は、$3mg$（すべり出しの境目）と $4.5mg$（P の加速度が 0 になる値）の間にある。
- 三つの運動方程式を時間刻みで数値シミュレーションすると、糸の長さは丸め誤差の範囲で一定に保たれ、$p \approx 0.182g$ となる。
- もし M が再び $6m$ であれば、同じ方法で $X = 0$ となり、加速度はすべて 0 になって、小問 (i) と一致する。

よくある間違い

- $a = b = p$ としてしまうこと。滑車 P の運動は二本の糸が分け合っているので、P は二つの質点の動きを合わせた速さの半分で動く。
- 摩擦力を斜面に沿って上向きにとってしまうこと。両方の質点は**上向きに**引かれているので、摩擦力はそれを妨げる向き、すなわち斜面に沿って下向きにはたらく。
- P にかかる二本の糸の両方に張力 T がはたらき、P にかかる上向きの力が $2T$ であることを忘れること。

STEP のその先へ

関係式 $2p = a + b$ は**拘束条件**（constraint）であり、独立な座標の数を三つから二つに減らす。大学の一年次か二年次で学ぶラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）では、拘束条件を自動的に満たす座標を選ぶので、張力を求める必要はまったくない。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）には、拘束条件の式を通じて丁寧に扱われた滑車の系が数多く載っており、その見方への良い橋渡しとなる。

解答例

STEP I 2012、第 12 問

確率・統計 ・ 条件付き確率

STEP I 2012、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s1-q12

鍵となる考え方

すべては消火器が何年目に故障するかにかかっている。そこでまず確率密度関数（density）を累積分布関数（cumulative distribution function）に直し、故障が 1 年目、2 年目、3 年目に起こる確率を読み取る。何年目かがわかれば、検査は独立な（independent）合格が続いたあとに不合格が 1 回来るという列にすぎない。最後の部分は条件付き確率（conditional probability）であり、「18 か月時点で故障している」という事象もまた、T がどの区間に入るかについての主張である。

解答

T の分布

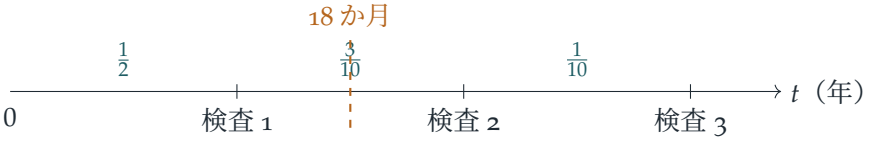
$t \geq 0$ に対して、$u = 1 + s^2$ と置換すると（このとき $\mathrm{d}u = 2s\,\mathrm{d}s$）、

$$F(t) = \mathrm{P}(T \leq t) = \int_0^t \frac{2s}{(1+s^2)^2}\,\mathrm{d}s = \left[-\frac{1}{1+s^2}\right]_0^t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

よって $F(1) = \frac{1}{2}$、$F(2) = \frac{4}{5}$、$F(3) = \frac{9}{10}$ であり、

$$\mathrm{P}(0 < T < 1) = \tfrac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(1 < T < 2) = \tfrac{4}{5} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{10}, \qquad \mathrm{P}(2 < T < 3) = \tfrac{9}{10} - \tfrac{4}{5} = \tfrac{1}{10}.$$

T は連続型なので、故障がちょうど検査日に起こる確率は 0 である。したがって、端点で $<$ と $\leq$ のどちらを使うかを気にする必要はない。



製造からちょうど3年後に廃棄される確率

製造から3年後の検査で消火器が廃棄されるという事象を D とする。これが起こるためには、3回目の検査までに故障していなければならず（つまり $T<3$）、それまでに故障した状態で受ける検査にはすべて合格し、3回目の検査で不合格にならなければならない。故障していない消火器は必ず合格するので、関係するのは時刻 T 以降の検査だけであり、それらは独立で、不合格になる確率は p である。

- $0<T<1$ のとき：検査1、2、3のすべてで故障しているので、合格、合格、不合格とならなければならない。確率は $(1-p)^2p$ である。
- $1<T<2$ のとき：検査1には自動的に合格し、その後検査2に合格して検査3で不合格にならなければならない。確率は $(1-p)p$ である。
- $2<T<3$ のとき：検査1と2には自動的に合格し、検査3で不合格にならなければならない。確率は p である。

$T>3$ ならば検査3の時点では故障していないので、そのとき廃棄されることはない。全確率の法則（law of total probability）により、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(D) &= \tfrac{1}{2}(1-p)^2p + \tfrac{3}{10}(1-p)p + \tfrac{1}{10}p \\ &= \frac{p}{10}\Big(5(1-2p+p^2)+3(1-p)+1\Big) \\ &= \frac{p\,(5p^2-13p+9)}{10},\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

3年後に廃棄されたという条件のもとで、18か月時点で故障していた確率

製造から18か月後に消火器が故障していたという事象、すなわち $T<\frac{3}{2}$ を E とする。求めるのは

$$\mathrm{P}(E\mid D)=\frac{\mathrm{P}(E\cap D)}{\mathrm{P}(D)}.$$

である。

> **考えてみよう** 区間 $(0,\frac{3}{2})$ は検査日をまたいでいる。どのように分ければよいか？

検査にとって重要なのは故障が何年目に起こるかなので、E を $0<T<1$ と $1<T<\frac{3}{2}$ に分ける。$F(\frac{3}{2})=\dfrac{9/4}{13/4}=\dfrac{9}{13}$ であるから、

$$\mathrm{P}\big(1<T<\tfrac{3}{2}\big)=\tfrac{9}{13}-\tfrac{1}{2}=\tfrac{5}{26}.$$

$0 < T < 1$ のもとでは、D の確率は先ほどと同じく $(1-p)^2 p$ である。$1 < T < \frac{3}{2}$ のもとでも故障は 2 年目に起こっているので、D の確率は $(1-p)p$ である。したがって

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(E \cap D) &= \tfrac{1}{2}(1-p)^2 p + \tfrac{5}{26}(1-p)p \\ &= \frac{p(1-p)}{26}\big(13(1-p)+5\big) = \frac{p(1-p)(18-13p)}{26}. \end{aligned}$$

これを $\mathrm{P}(D)$ で割ると（$5p^2 - 13p + 9$ の判別式（discriminant）は $169 - 180 < 0$ なので常に正であり、よって $0 < p \leq 1$ では正である）、因数 p が約分されて

$$\mathrm{P}(E \mid D) = \frac{10(1-p)(18-13p)}{26(5p^2-13p+9)} = \frac{5(1-p)(18-13p)}{13(5p^2-13p+9)}.$$

検算

- $p = 1$ のとき、故障した消火器はすべて故障後最初の検査で廃棄されるので、3 年目に廃棄されたということは故障が $(2,3)$ で起こったことを意味する。よって $\mathrm{P}(D) = \frac{1}{10}$ かつ $\mathrm{P}(E \mid D) = 0$ であり、どちらの式とも一致する。
- $p \to 0$ のとき $\mathrm{P}(E \mid D) \to \dfrac{5 \cdot 18}{13 \cdot 9} = \dfrac{10}{13}$ となり、これは $\mathrm{P}(T < \frac{3}{2} \mid T < 3) = \dfrac{9/13}{9/10}$ に等しい。検査がほとんど故障を検出しないとき、廃棄されたという事実は $T < 3$ 以上のことをほとんど教えてくれないのである。
- $p = 0.4$ として 10^6 個の消火器をシミュレーションしたところ、$\mathrm{P}(D) \approx 0.1838$（厳密値 0.184）、$\mathrm{P}(E \mid D) \approx 0.642$（厳密値 $\frac{192}{299} \approx 0.642$）が得られた。

よくある間違い

- 故障した消火器は、3 回目の検査で不合格になる前に、それ以前の検査に**合格**しなければならないことを忘れる。
- 最後の部分で $\mathrm{P}(T < \frac{3}{2}) = \frac{9}{13}$ をひとまとまりとして使ってしまう。1 年目の故障と 2 年目前半の故障とでは、受ける検査の回数が異なる。

STEP のその先へ

ここで T は連続的な寿命であるが、私たちはそれを離散的で不完全な検査を通してしか観測できない。これは生存時間解析（survival analysis）や信頼性理論（reliability theory）における**区間打ち切り**（interval-censored）データの設定であり、最後の部分は小さなベイズ更新（Bayesian update）になっている。すなわち、T の事前分布（prior distribution）が、観測された不合格に照らして改訂されるのである。Grimmett

と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、連続分布とこの種の条件付けを扱っている。

解答例

STEP I 2012、第 13 問

確率・統計 ・ 指示変数を用いた期待値

STEP I 2012、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s1-q13

鍵となる考え方

まず、条件付き標本空間（conditional sample space）を正しく把握する。どの数字が除外されるかがわかれば、この数は $\{1,2,3,4,5\}$ から選んだ数字を 5 個並べた列にすぎず、そのような列はどれも同様に確からしい。次に、異なる数字の個数の分布（distribution）全体を求めるのではなく、その個数を、現れうる数字ごとに 1 つずつ用意した指示変数（indicator variable）の和として表す。期待値の線形性（linearity of expectation）により、問題はただ 1 つの確率を求めることに帰着し、その確率は余事象（complement）を考えれば容易に求められる。

解答

条件付き標本空間

10000 から 99999 までの整数はどれも、$d_1 \neq 0$ を満たす 5 個の数字の列 $d_1d_2d_3d_4d_5$ であり、そのような列はそれぞれちょうど 1 回ずつ現れる。条件は、すべての数字が $\{1,2,3,4,5\}$ に属するということである。0 はもともと除外されているので、制約 $d_1 \neq 0$ は何も付け加えない。したがって、条件を満たす整数は、$\{1,2,3,4,5\}$ の数字からなる 5 桁の列と過不足なく対応し、その個数は

$$5^5 = 3125$$

である。

もとの選び方は一様（uniform）であった。ある事象で条件付けても、その事象に含まれる結果は同様に確からしいままである。よって、条件のもとでこれら 3125 個の列はそれぞれ確率 $\frac{1}{3125}$ をもつ。言い換えれば、5 個の数字は独立（independent）であり、

それぞれが $\{1,2,3,4,5\}$ 上の一様分布に従う。実際、3125 個の結果はどれも $\frac{1}{5}$ を 5 個掛けたものである。

指示変数

選ばれた数に含まれる異なる数字の個数を N とする。$j = 1,2,3,4,5$ に対して

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{数字} j \text{が少なくとも1回現れるとき,} \\ 0 & \text{それ以外のとき.} \end{cases}$$

と定める。現れる数字はそれぞれ和にちょうど 1 だけ寄与するので、

$$N = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.$$

となる。

> **考えてみよう** I_j は独立ではない。それでもそれらの期待値を足し合わせてよいのだろうか？

よい。期待値の線形性 $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$ は、独立であるかどうかにかかわらず、任意の確率変数（random variable）について成り立つ。したがって

$$\mathrm{E}(N) = \sum_{j=1}^{5} \mathrm{E}(I_j) = \sum_{j=1}^{5} \mathrm{P}(\text{数字} j \text{が現れる}).$$

である。

数字 j が現れないのは、独立な 5 個の数字のそれぞれが残りの 4 つの値のいずれかであるときであり、またそのときに限る。各数字についてその確率は $\frac{4}{5}$ である。よって

$$\mathrm{P}(\text{数字} j \text{が現れる}) = 1 - \left(\tfrac{4}{5}\right)^5 = 1 - \frac{1024}{3125} = \frac{2101}{3125}.$$

である。対称性（symmetry）により、これは j の 5 つの値すべてについて同じであるから、

$$\mathrm{E}(N) = 5 \cdot \frac{2101}{3125} = \frac{2101}{625} = 3.3616,$$

となり、示すべきことが得られた。

別解：分布全体を求める

直接数え上げたい場合は、ちょうど k 個の異なる数字を用いる列の個数は、$\binom{5}{k}$（数字の選び方）と、選んだ k 個の数字がすべて現れるように 5 つの位置を埋める方法の数との積である。後者の個数は包除原理（inclusion–exclusion）から得られる。たとえば $k = 3$ のときは $3^5 - 3\cdot 2^5 + 3\cdot 1^5 = 150$ である。

k	1	2	3	4	5	合計
列の個数	$5\cdot 1$	$10\cdot 30$	$10\cdot 150$	$5\cdot 240$	$1\cdot 120$	
	5	300	1500	1200	120	3125

すると

$$\mathrm{E}(N)=\frac{1\cdot 5+2\cdot 300+3\cdot 1500+4\cdot 1200+5\cdot 120}{3125}=\frac{10505}{3125}=3.3616.$$

となる。この方法でも答えは得られるが、手間がかかり、間違えやすい箇所も多い。指示変数を用いる方法では、確率を 1 つ求めるだけで済む。

検算

- 表の個数を合計すると $3125=5^5$ となり、どの列もちょうど 1 回ずつ数えられていることが確認できる。
- 答えは妥当である。N は 1 以上 5 以下であり、5 つの値から 5 回選ぶのだから、かなりの重複が予想される。したがって 3 を少し上回る値はもっともらしい。一般的な検算として、m 個の値から n 回選ぶ場合、同じ議論により $m\left(1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n\right)$ が得られ、これは $n=1$ のとき当然そうあるべきように 1 となる。
- 10000 から 99999 までのすべての整数をコンピュータで列挙し、数字 1–5 のみを用いる 3125 個を残して異なる数字の個数を平均すると、ちょうど $\frac{2101}{625}=3.3616$ となる。

よくある間違い

- 標本空間を 90000 個すべての整数とみなしてしまう。条件によって、標本空間は同様に確からしい 5^5 個の列に縮小される。
- 期待値の線形性には独立性が必要だと考えてしまう。必要ではない。まさにそのことが、指示変数がこれほど役に立つ理由である。
- P(数字jが現れる) を、5 つの位置それぞれについて $\frac{1}{5}$ を足して計算してしまう。こうすると 1 になるが、それは j が 2 回以上現れる列を何重にも数えているからである。余事象を用いること。

STEP のその先へ

これは古典的な「占有問題（occupancy problem）」、あるいはクーポン収集問題（coupon-collector problem）である。n 個の球を m 個の箱に無作為に投げ入れ、最終的に球が入っている箱の個数を N とする。指示変数を用いる技法による $\mathrm{E}(N) = m\left(1 - (1 - \frac{1}{m})^n\right)$ は、大学 1 年次の確率論や、ハッシュ法（hashing）などのアルゴリズムの解析において、最も有用な道具の 1 つである。正確な分布には第 2 種スターリング数（Stirling numbers of the second kind）が関わり、これは上の包除原理による数え上げにも現れていた。Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）は全編を通じて指示確率変数を用いており、次の一歩として最適である。

解答例

STEP II 2012、第 1 問

純粋数学 ・ 二項級数の係数

> **STEP II 2012、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q1

鍵となる考え方

各因数 $(1-x^k)^{-1}$ は x^k についての等比級数（geometric series）であるから、こうした因数を掛け合わせて x^n の係数（coefficient）を読み取ることは、n を許された部品の和として表す方法の数を**数え上げる**ことにほかならない。係数を個数として捉えれば場合分けはおのずと整理され、$(1-x)^{-1}$ を掛けることは、係数の列をその累積和（running totals）の列に変えるだけの操作になる。

解答

一般項

二項展開（binomial expansion）により、$|y|<1$ のとき $(1-y)^{-2}=\sum_{r\geq 0}(r+1)y^r$ である（係数は $\binom{-2}{r}(-1)^r=r+1$）。$y=x^6$ とおくと

$$(1-x^6)^{-2}=\sum_{r=0}^{\infty}(r+1)\,x^{6r},$$

となるので、一般項は $(r+1)x^{6r}$ であり、6 の倍数でない x の累乗の係数はすべて 0 である。

小問 (i)

また $(1-x^3)^{-1}=\sum_{s\geq 0}x^{3s}$ である。二つの級数を掛け合わせると、項 x^n は $6r+3s=n$ を満たす非負整数の組 (r,s) のそれぞれから生じ、$(r+1)\cdot 1$ だけ寄与する。したがっ

て

$$\text{次の項の係数：} x^n = \sum_{\substack{r,s\geq 0\\ 6r+3s=n}} (r+1).$$

$n=24$ のときは $2r+s=8$ が必要なので、r は $0,1,2,3,4$ のいずれかであり（それぞれに対して $s=8-2r\geq 0$ がちょうど一つ定まる）、x^{24} の係数は

$$1+2+3+4+5=15.$$

である。

一般の n の場合。 $6r+3s$ はつねに 3 の倍数であるから、$3\mid n$ でない限り係数は 0 である。$n=3m$ のときは $2r+s=m$ が必要であり、$0\leq 2r\leq m$ を満たす各 r に対して条件を満たす s がちょうど一つ存在する。よって r は 0 から $\lfloor m/2\rfloor$ までを動き、係数は

$$1+2+\cdots+(\lfloor m/2\rfloor+1).$$

となる。n を 6 で割った余りで分類すると、次のようになる。

- $n=6k$（このとき $m=2k$、$\lfloor m/2\rfloor=k$）：係数は $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$。
- $n=6k+3$（このとき $m=2k+1$、$\lfloor m/2\rfloor=k$）：係数はやはり $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$。
- $n\not\equiv 0 \pmod 3$：係数は 0。

確認として、$n=24=6\times 4$ のとき $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6=15$ となり、上で求めた値と一致する。

小問 (ii)

小問 (i) で求めた x^n の係数を b_n、いま求めたい係数を c_n と書く。$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots$ であるから

$$\Big(\sum_j b_j x^j\Big)(1+x+x^2+\cdots)=\sum_n\Big(\sum_{j=0}^{n} b_j\Big)x^n,$$

となり、$c_n=b_0+b_1+\cdots+b_n$、すなわち小問 (i) の係数の累積和である。

考えてみよう $(1-x)^{-1}$ を掛けると累積和が得られるのはなぜか。

積の中で x^n を得るには、第一の級数から x^j を、$1+x+x^2+\cdots$ から x^{n-j} を取ればよく、後者の係数はつねに 1 である。したがって $0\leq j\leq n$ を満たすすべての b_j が、重み 1 でちょうど一回ずつ c_n に現れる。

0 でないのは $3\mid j$ を満たす b_j だけであり、小問 (i) よりそれらは等しい二つ組で現れる。すなわち $b_{6k}=b_{6k+3}=T_{k+1}$ である。ここで $T_p=\frac{1}{2}p(p+1)$ は第 p 三角数

（triangular number）である。よって $n = 24$ のとき

$$\begin{aligned} c_{24} &= (b_0 + b_3) + (b_6 + b_9) + (b_{12} + b_{15}) + (b_{18} + b_{21}) + b_{24} \\ &= 2(1 + 3 + 6 + 10) + 15 = 40 + 15 = 55, \end{aligned}$$

となり、求める結果が得られる。

$n = 25$ のときは、$3 \nmid 25$ より追加される項 b_{25} は 0 なので、$c_{25} = c_{24} = 55$ である。

$n = 66 = 6 \times 11$ のときは、同じパターンにより

$$c_{66} = 2\,(T_1 + T_2 + \cdots + T_{11}) + T_{12}.$$

となる。最初の p 個の三角数の和は四面体数（tetrahedral number）$\frac{1}{6}p(p+1)(p+2)$ である（数学的帰納法（induction）によって示せるし、ホッケースティック恒等式（hockey-stick identity）により $T_1 + \cdots + T_p = \binom{p+2}{3}$ となることからもわかる）。よって $T_1 + \cdots + T_{11} = \frac{1}{6} \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 = 286$ であり、$T_{12} = 78$ である。ゆえに

$$c_{66} = 2 \times 286 + 78 = 650.$$

同じ議論から一般の公式が得られる。$n = 6K + r$ とおくと、$0 \le r \le 2$ のとき $c_n = 2\binom{K+2}{3} + \binom{K+2}{2}$、$3 \le r \le 5$ のとき $c_n = 2\binom{K+3}{3}$ である。$K = 4$ のとき前者は $40 + 15 = 55$ を与え、$K = 11$ のときは $572 + 78 = 650$ を与える。

検算

小問 (ii) における x^n の係数は、$6a + 6b + 3c + d = n$ の非負整数解の個数を数えている（各因数に一つずつ等比級数が対応し、$(1 - x^6)^{-2}$ は二つと数える）。これらの解をコンピュータで直接数えると、$n = 24, 25, 66$ に対して 55、55、650 が得られる。また、級数を x^{80} まで項ごとに掛け合わせても、両方の小問の公式が確かめられる。手計算でも小さな場合はすぐに確認できる。小問 (ii) では $c_0 = c_1 = c_2 = 1$、$c_3 = c_4 = c_5 = 2$ であり、$K = 0$ とした一般の公式と一致する。

よくある間違い

- 小問 (i) で $n = 6k + 3$ の場合を忘れること。3 の奇数倍も、x^3 の因数を奇数個取ることで現れる。
- $(1 - x^6)^{-2}$ の一般項を $(r+1)x^{6r}$ ではなく $r\,x^{6r}$ と書いてしまうこと。定数項は 0 ではなく 1 である。
- x^{25} を新たに計算し直すこと。小問 (i) の級数には指数が 25 の項がないので、その係数は x^{24} の係数に等しい。

STEP のその先へ

このように数え上げの道具として用いられる冪級数（power series）は**母関数**（generating functions）と呼ばれる。ここでの積は、価値が 6、6（デザインの異なるもの）、3、1 の硬貨を使って n ペンスを支払う方法の数を数えている。分割（partitions）の理論はまさにこの考え方から発展したものであり、答えが n を 6 で割った余りに応じた区分的な多項式になるという事実は、一般的な現象である（「準多項式」（quasi-polynomials））。この手法への生き生きとした入門としては、Wilf の *generatingfunctionology* を読むとよい。

解答例

STEP II 2012、第 2 問

純粋数学 • 多項式の合成

> **STEP II 2012、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q2

鍵となる考え方

次数（degree）は合成（composition）によって掛け算される。そのため、p を何回か反復（iteration）すると、次数はすぐに右辺と一致しえないほど大きくなってしまう。次数を比較すれば p の次数が決まり、そのあとは p を未知の係数（coefficients）を使って書き下せば、各小問は短い代数計算になる。(ii) には巧みな近道がある。$\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$ はそれ自体が$\mathrm{p}(x)$ についての二次式（quadratic）であるから、左辺全体が $\mathrm{p}(x)$ の二次式となり、平方完成（completing the square）によって片がつく。

解答

合成関数の次数

$a_m, b_n \neq 0$ として、$\mathrm{p}(x) = a_m x^m + \ldots$、$\mathrm{q}(x) = b_n x^n + \ldots$ と書く。$\mathrm{p}(\mathrm{q}(x)) = a_m[\mathrm{q}(x)]^m + a_{m-1}[\mathrm{q}(x)]^{m-1} + \ldots$ において、項 $a_m[\mathrm{q}(x)]^m$ の次数は mn で、最高次の係数（leading coefficient）は $a_m b_n^m \neq 0$ である。一方、他のすべての項の次数は高々 $(m-1)n < mn$ である（$n \geq 1$ のとき）。よって最高次の項を打ち消すものはなく、

$$\deg \mathrm{p}(\mathrm{q}(x)) = mn.$$

（$n = 0$ のときは $\mathrm{p}(\mathrm{q}(x))$ は定数であり、この場合も $mn = 0$ である。）

小問 (i)

p の次数を m とする。

$m \geq 2$ ならば、上の結果より $\mathrm{p}(\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)))$ の次数は m^3 であり、$3\mathrm{p}(x)$ の次数は $m < m^3$

である。よって左辺の次数は $m^3 \geq 8$ となるが、右辺 $-2x$ の次数は 1 である。これは不可能である。

$m = 0$ ならば、定数 c を用いて $\mathrm{p}(x) = c$ と書け、左辺は定数 $c - 3c = -2c$ となる。これはすべての x について $-2x$ に等しくなることはない。これも不可能である。

したがって $m = 1$ である。$a \neq 0$ として $\mathrm{p}(x) = ax + b$ と書く。すると

$$\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + (a + 1)b,$$
$$\mathrm{p}(\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))) = a^3x + (a^2 + a + 1)b,$$

であり、方程式は

$$(a^3 - 3a)x + (a^2 + a + 1 - 3)b = -2x \quad \text{任意の} x.$$

となる。二つの多項式（polynomial）がすべての x について一致するのは、係数がすべて一致するときに限るから、

$$a^3 - 3a + 2 = 0 \qquad \text{かつ} \qquad (a^2 + a - 2)\, b = 0.$$

$a = 1$ は第一式の解であるから、第一式は $(a - 1)^2(a + 2) = 0$ と因数分解でき、$a = 1$ または $a = -2$ を得る。第二の条件は $(a - 1)(a + 2)b = 0$ であり、これは b が何であっても、これら二つの値のどちらについても自動的に成り立つ。よって解はちょうど

$$\mathrm{p}(x) = x + b \qquad \text{および} \qquad \mathrm{p}(x) = -2x + b, \qquad b \text{は任意の定数.}$$

である。二つ目の族を検算しておく。$\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = 4x - b$、$\mathrm{p}(\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))) = -8x + 3b$ であるから、左辺は $-8x + 3b + 6x - 3b = -2x$ となる。

小問 (ii)

p の次数を m とする。左辺の三つの項の次数はそれぞれ m^2、$2m$、m である。

- $m \geq 3$ ならば $m^2 > 2m > m$ であるから、左辺の次数は $m^2 \geq 9 \neq 4$ となる。
- $m = 1$ ならば左辺の次数は高々 2 であり、$m = 0$ ならば左辺は定数である。いずれも x^4 に等しくなりえない。

したがって $m = 2$ である。（このとき $m^2 = 2m = 4$ であるから、$2\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$ と $3[\mathrm{p}(x)]^2$ の最高次の項は同じ次数をもち、それらの係数を調べなければならない。）

$a \neq 0$ として $\mathrm{p}(x) = ax^2 + bx + c$ と書き、記述を簡単にするため P で $\mathrm{p}(x)$ を表す。

考えてみよう 本当に $\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$ をすべて展開しなければならないだろうか？

その必要はない。定義より $\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = aP^2 + bP + c$ であるから、左辺は

$$2(aP^2 + bP + c) + 3P^2 - 4P = (2a+3)P^2 + (2b-4)P + 2c,$$

となり、P の二次式である。P^2 の最高次の項（leading term）は a^2x^4 であり、P の次数は 2 にすぎないから、この式の x^4 の係数は $(2a+3)a^2$ である。これを x^4 と比較すると

$$2a^3 + 3a^2 - 1 = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad (a+1)^2(2a-1) = 0,$$

（解 $a = -1$ を見つけて割ればよい）となり、$a = -1$ または $a = \frac{1}{2}$ である。

ここで簡単な事実を用いる。$S(x)$ が多項式で、定数 K について $S(x)^2 = x^4 + K$ が成り立つならば、$(S - x^2)(S + x^2) = K$ である。S の最高次の項が $\pm x^2$ のとき、どちらの因数も零多項式でないとすると、少なくとも一方の次数は 2 となり、積は定数になりえない。よって、最高次の項が $\pm x^2$ である S については、一方の因数が零であり、ちょうど $S = \pm x^2$ となる。

$a = -1$ の場合。このとき $2a + 3 = 1$ であり、平方完成すると

$$P^2 + (2b-4)P + 2c = \big(P + b - 2\big)^2 - (b-2)^2 + 2c = x^4.$$

よって $S = P + b - 2 = -x^2 + bx + (c + b - 2)$ は定数 K について $S^2 = x^4 + K$ を満たし、最高次の項は $-x^2$ である。すると $S + x^2 = bx + (c + b - 2)$ の次数は 2 未満であり、$S - x^2$ の次数は 2 であるから、上の事実より $S + x^2 = 0$ でなければならない。すなわち $b = 0$ かつ $c + b - 2 = 0$ である。よって $b = 0$、$c = 2$ であり、このとき $K = (b-2)^2 - 2c = 0$ となって矛盾はない。これより

$$\mathrm{p}(x) = 2 - x^2.$$

$a = \frac{1}{2}$ の場合。このとき $2a + 3 = 4$ であり、

$$4P^2 + (2b-4)P + 2c = \left(2P + \tfrac{b-2}{2}\right)^2 - \tfrac{(b-2)^2}{4} + 2c = x^4.$$

ここで $S = 2P + \frac{b-2}{2} = x^2 + 2bx + 2c + \frac{b-2}{2}$ の最高次の項は x^2 であるから、同様にして $S - x^2 = 0$、すなわち $b = 0$ かつ $2c - 1 = 0$ である。よって $b = 0$、$c = \frac{1}{2}$ であり、$K = \frac{(b-2)^2}{4} - 2c = 1 - 1 = 0$ となって矛盾はない。これより

$$\mathrm{p}(x) = \tfrac{1}{2}(x^2 + 1).$$

各段階はすべて逆にたどれるから、どちらも実際に解であるが、直接確かめておくと安心である。$\mathrm{p}(x) = 2 - x^2$ については $\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = 2 - (2 - x^2)^2 = -x^4 + 4x^2 - 2$ であり、

$$2(-x^4 + 4x^2 - 2) + 3(x^4 - 4x^2 + 4) - 4(2 - x^2) = x^4.$$

$\mathrm{p}(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)$ については $u=x^2+1$ とおくと $2\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))=\frac{1}{4}u^2+1$ であり、左辺は $\frac{1}{4}u^2+1+\frac{3}{4}u^2-2u=(u-1)^2=x^4$ となる。

以上より、(ii) の方程式を満たす多項式はちょうど $\mathrm{p}(x)=2-x^2$ と $\mathrm{p}(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)$ である。

検算

- (i) で $b=1$ を試す。$\mathrm{p}(x)=x+1$ のとき $(x+3)-3(x+1)=-2x$ となる。
- (ii) で $x=1$ を代入する。$\mathrm{p}(x)=2-x^2$ については $\mathrm{p}(1)=1$、$\mathrm{p}(\mathrm{p}(1))=1$ であり、$2+3-4=1=1^4$ となる。$\mathrm{p}(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)$ については $x=3$ で $\mathrm{p}(3)=5$、$\mathrm{p}(5)=13$ であり、$26+75-20=81=3^4$ となる。
- さらに厳密な算術計算により、(i) の二つの族が多数の無作為な b について成り立つこと、また b,c を $\frac{1}{4}$ 刻みでとった二次式の格子を探索すると、(ii) の二つの解しか見つからないことも確かめた。

よくある間違い

- (ii) で、左辺の次数を単純に m^2 だと思い込むこと。$m=2$ のとき、項 $2\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$ と $3[\mathrm{p}(x)]^2$ はともに次数 4 であり、それらが打ち消し合う可能性があるからこそ、a を $2a^3+3a^2=1$ から求めなければならないのである。
- (i) で次数が 1 でなければならない理由を説明する際に、$m=0$ の場合を忘れること。
- (i) で $a=1$ または $a=-2$ で止めてしまい、特定の b に固定すること。定数項の条件はすべての b について成り立つ。

STEP のその先へ

規則 $\deg(\mathrm{p}\circ\mathrm{q})=\deg\mathrm{p}\cdot\deg\mathrm{q}$ は、$\deg(\mathrm{pq})=\deg\mathrm{p}+\deg\mathrm{q}$ と同様に、係数の中に零因子（zero divisors）が存在しないことに依存している。零でない二つの数の積が零になりうる環（ring）では、最高次の項が消えることがあり、どちらの規則も成り立たなくなる。$\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))=\ldots$ のような関数方程式（functional equations）は、反復写像と力学系（dynamics）の研究にもつながっている。多項式環と、次数による議論が通用する場合については、Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）を参照されたい。

解答例

STEP II 2012、第 3 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP II 2012、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q3

鍵となる考え方

扱いにくい式 $x+\sqrt{1+x^2}$ は、t と名付けてくれと言わんばかりである。この置換（substitution）がうまくいく決め手は、その逆数が $\sqrt{1+x^2}-x$ になることである。そのため、t と $1/t$ の和と差をとれば、x と $\sqrt{1+x^2}$ がどちらも t の簡単な関数として表せる。その後は、二つの積分のそれぞれについて、被積分関数（integrand）を $x+\sqrt{1+x^2}$ だけの関数として書く方法を見抜けばよい。

解答

恒等式

$t=x+\sqrt{1+x^2}$ とおく。共役（conjugate）な式を掛けると、

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}-x}=\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{(1+x^2)-x^2}=\sqrt{1+x^2}-x.$$

これら二つの式の差と和をとると、

$$x=\tfrac{1}{2}\Big(t-\frac{1}{t}\Big),\qquad \sqrt{1+x^2}=\tfrac{1}{2}\Big(t+\frac{1}{t}\Big).$$

このうち一つ目の式は x を t の関数として直接与えるので、

$$\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)\mathrm{d}t.$$

積分区間については、$x=0$ のとき $t=1$ であり、$x\to\infty$ のとき $t\to\infty$ である。また、t は x の狭義単調増加関数である（$x\geq 0$ において x も $\sqrt{1+x^2}$ も増加する）から、この置換は $[0,\infty)$ 上で一対一（one-to-one）である。したがって

$$\int_0^\infty f\big(x+\sqrt{1+x^2}\big)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^\infty\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)f(t)\,\mathrm{d}t,$$

となり、示すべき式が得られた。

一つ目の積分

考えてみよう 分母 $2x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}$ は、どうすれば $x+\sqrt{1+x^2}$ の関数になるだろうか。

2乗してみる。$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2 = x^2+2x\sqrt{1+x^2}+(1+x^2) = 2x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}$ であり、これはちょうど分母に一致する。よって被積分関数は $f(t)=1/t^2$ としたときの $f\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ であり、恒等式より

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}} &= \frac{1}{2}\int_1^\infty \left(1+\frac{1}{t^2}\right)\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^\infty \left(t^{-2}+t^{-4}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t}-\frac{1}{3t^3}\right]_1^\infty = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

二つ目の積分

$x=\tan\theta$ とおくと $\mathrm{d}x=\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$、すなわち $\mathrm{d}\theta = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ である。θ が0から $\frac{1}{2}\pi$ まで動くとき、x は0から ∞ まで動く。$0\le\theta<\frac{1}{2}\pi$ より $\cos\theta>0$ であるから、$\sec\theta=\sqrt{1+x^2}$ であり、

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad 1+\sin\theta=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{t}{\sqrt{1+x^2}},$$

となる。ここでも $t=x+\sqrt{1+x^2}$ である。よって

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\sin\theta)^3} = \int_0^\infty \frac{(1+x^2)^{3/2}}{t^3}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_0^\infty \frac{\sqrt{1+x^2}}{t^3}\,\mathrm{d}x.$$

考えてみよう 被積分関数にはまだ $\sqrt{1+x^2}$ が残っている。これを t で表すにはどうすればよいだろうか。

それは最初の部分ですでに求めてある。$\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}(t+1/t)$ である。よって被積分関数は

$$\frac{t+t^{-1}}{2t^3} = \tfrac{1}{2}\left(t^{-2}+t^{-4}\right),$$

となり、$t=x+\sqrt{1+x^2}$ だけの関数である。$f(t)=\frac{1}{2}(t^{-2}+t^{-4})$ として恒等式を用いると、

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\sin\theta)^3} &= \frac{1}{2}\int_1^\infty \left(1+\frac{1}{t^2}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^4}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_1^\infty \left(t^{-2}+2t^{-4}+t^{-6}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{28}{15} = \frac{7}{15}.\end{aligned}$$

検算

- 簡単な f で恒等式を確かめる。$f(t) = 1/t^3$ とすると右辺は $\frac{1}{2}\int_1^\infty (t^{-3} + t^{-5})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$ であり、左辺を数値積分（numerical quadrature）しても 0.375 が得られる。
- もとの二つの積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると 0.666667 と 0.466667 が得られ、$\frac{2}{3}$ と $\frac{7}{15}$ に一致する。
- 大きさの妥当性の確認：$[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上で被積分関数 $1/(1+\sin\theta)^3$ は 1 から $\frac{1}{8}$ まで減少するので、積分の値は $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\pi \approx 0.20$ と $\frac{1}{2}\pi \approx 1.57$ の間にある。値 $\frac{7}{15} \approx 0.47$ は十分にこの範囲内に収まっている。

よくある間違い

- $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x$ を求めてから、それを苦労して t で表そうとすること。先に x を t の関数として書き、それを微分するほうがずっと速い。
- 二つ目の積分で、$\mathrm{d}\theta$ から生じる因子 $1/(1+x^2)$ を忘れること、あるいは被積分関数の $\sqrt{1+x^2}$ を $\frac{1}{2}(t+1/t)$ に書き換えずに残してしまうこと。

STEP のその先へ

置換 $t = x + \sqrt{1+x^2}$ の正体は、$x = \sinh u$ としたときの $t = \mathrm{e}^u$ である。実際 $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ であり、公式 $x = \frac{1}{2}(t - 1/t)$、$\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}(t+1/t)$ は $\sinh u$ と $\cosh u$ を指数関数で書いたものにすぎない。このような双曲線関数による置換（hyperbolic substitution）は、$\sqrt{1+x^2}$ を含む積分に対して大学 1 年次で学ぶ標準的な手法である。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この趣旨の STEP の積分問題がさらに収められている。

解答例

STEP II 2012、第4問

純粋数学 • 対数級数の不等式

STEP II 2012、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s2-q4

鍵となる考え方

すべては $\ln(1+x)$ の級数（series）展開と、e^t が単調増加（increasing）であるという事実から導かれる。$(1+\frac{1}{n})^n$ と e を比較するには対数をとればよい。すなわち、$n\ln(1+\frac{1}{n})$ と 1 を比較すればよいのである。項が小さくなっていく交代級数（alternating series）は、2 項ずつ括弧でまとめることで初項より小さいことが示せる。また、組み合わせ $\ln\frac{1+x}{1-x}$ では負の項がすべて消えるので、これは初項より大きい。この二つの評価ではさみこめば極限が得られる。

解答

小問 (i)

$n>1$ かつ $k\geq 1$ であるから $(k+1)n>n>1$ であり、当然 $(k+1)n>k$ が成り立つ。両辺に $n^k>0$ を掛けると

$$(k+1)n^{k+1}>kn^k>0,$$

となり、これらの正の数の逆数をとると不等号の向きが逆になる：

$$\frac{1}{(k+1)n^{k+1}}<\frac{1}{kn^k}.$$

ここで級数に $x=\frac{1}{n}$ を代入する。$n>1$ より $0<x<1$ であるから、これは許される。初項以降の項を 2 項ずつまとめると

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}\right)-\left(\frac{1}{4n^4}-\frac{1}{5n^5}\right)-\cdots.$$

各括弧は k を偶数として $\frac{1}{kn^k} - \frac{1}{(k+1)n^{k+1}}$ の形をしており、いま証明した不等式により真に正である。

考えてみよう 無限級数をこのように括弧でまとめてよいのだろうか？

よい。この級数は収束（converge）するからである。項数が奇数の部分和（partial sum）は、部分和全体のなす数列の部分列（subsequence）をなすので、同じ極限 $\ln(1+\frac{1}{n})$ に収束する。括弧でまとめた級数は、ちょうどこの奇数項の部分和の列にほかならない。

括弧でまとめた級数の部分和は $\frac{1}{n} - b_1$, $\frac{1}{n} - b_1 - b_2$, ... であり、ここですべての $b_j > 0$ である。これらは減少していくので、いずれも $\frac{1}{n} - b_1$ 以下であり、したがってその極限も同様である：

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} - b_1 < \frac{1}{n}, \qquad b_1 = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} > 0.$$

（b_1 を別にとっておくことで、最後の不等式が真の不等式になる。そうしなければ、$\frac{1}{n}$ より小さい数の極限が $\frac{1}{n}$ に等しくなる可能性がある。）

$n > 0$ を掛けると $n\ln(1+\frac{1}{n}) < 1$、すなわち $\ln\left((1+\frac{1}{n})^n\right) < 1$ を得る。指数関数（exponential function）は単調増加であるから

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e}.$$

小問 (ii)

$x = \frac{1}{2y}$ とおく。$y > \frac{1}{2}$ より $0 < x < 1$ であるから、x と $-x$ はともに級数が成り立つ範囲にある：

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots,$$
$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots.$$

項ごとに引き算すると（二つの収束する級数に対しては正当な操作である）、偶数乗の項は打ち消し合い、奇数乗の項は 2 倍になる：

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right).$$

ここで

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\frac{1}{2y}}{1-\frac{1}{2y}} = \frac{2y+1}{2y-1},$$

であるから、$2x = \frac{1}{y}$ を用いて

$$\ln\left(\frac{2y+1}{2y-1}\right) = \frac{1}{y} + \frac{2}{3(2y)^3} + \frac{2}{5(2y)^5} + \cdots = \frac{1}{y}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)(2y)^{2r}}.$$

初項以降の各項は（$y > 0$ より）真に正であるから、第2項以降までの部分和はすべて $\frac{1}{y} + \frac{2}{3(2y)^3}$ 以上であり、したがって

$$\ln\left(\frac{2y+1}{2y-1}\right) \geq \frac{1}{y} + \frac{2}{3(2y)^3} > \frac{1}{y},$$

となって、示すべき不等式が得られる。

次の結論を導くには、分数が $1 + \frac{1}{n}$ となるように y を選べばよい。$y = n + \frac{1}{2}$ とおくと（これはすべての正の整数 n に対して $\frac{1}{2}$ より大きい）

$$\frac{2y+1}{2y-1} = \frac{2n+2}{2n} = 1 + \frac{1}{n},$$

であるから

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n + \frac{1}{2}}.$$

$n + \frac{1}{2} > 0$ を掛けると $\left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(1 + \frac{1}{n}) > 1$ となり、指数をとると（ここでも単調増加関数である）

$$\mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

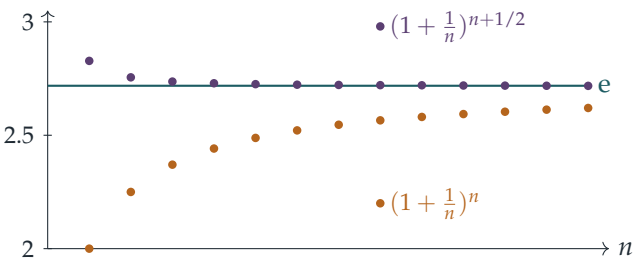
小問 (iii)

小問 (ii) の結果を $(1 + \frac{1}{n})^{1/2} > 0$ で割り、小問 (i) と組み合わせると、$n \geq 2$ を満たすすべての整数に対して

$$\frac{\mathrm{e}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e}.$$

$n \to \infty$ のとき $1 + \frac{1}{n} \to 1$ であるから、$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \to 1$（平方根は連続（continuous）である）となり、左辺は e に収束する。右辺は定数 e である。はさみうちの原理（squeeze theorem、sandwich theorem）により

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}.$$



検算

$n = 10$ のとき、$(1.1)^{10} \approx 2.5937$、$(1.1)^{10.5} \approx 2.7203$ であり、確かに $\mathrm{e} \approx 2.7183$ をはさんでいる。$n = 1000$ のときは、下からの評価 $\mathrm{e}/\sqrt{1.001} \approx 2.7169237$ が $(1.001)^{1000} \approx 2.7169239$ のわずかに下にあり、はさみこみがいかにきついかがわかる。また、数千までのすべての n について二つの真の不等式を確かめ、さらに $y > \frac{1}{2}$ を無作為に選んで、小問 (ii) の級数の和が $\ln \frac{2y+1}{2y-1}$ になることを数値的に確かめた。

よくある間違い

- 小問 (i) で $x = 1$ を代入してしまうこと。級数は $|x| < 1$ に対してしか与えられておらず、そのためにそこでは $n > 1$ が必要なのである（小問 (iii) では大きな n しか用いないので、何も失われない）。
- 真の不等式の極限から、そのまま真の不等式を結論してしまうこと。極限で保たれるのは $\leq$ だけである。$<$ を得るには、正の項を一つ別にとっておくこと。
- 指数をとって不等式が保たれるのは e^t が単調増加だからにほかならない、ということを忘れること。そのことは明記すべきである。

STEP のその先へ

これらの評価からは極限以上のことがわかる。$(1+\frac{1}{n})^{n+1/2}/(1+\frac{1}{n})^n = \sqrt{1+1/n} \approx 1+\frac{1}{2n}$ であるから、誤差 $\mathrm{e} - (1+\frac{1}{n})^n$ はおよそ $\mathrm{e}/(2n)$ の大きさであり、この数列の収束はかなり遅い。収束する級数の並べ替え、部分和の比較、はさみうちの原理は、大学最初の解析学（analysis）の講義では日常的に使う道具であり、そこでは微妙な点にも出会う（条件収束（conditionally convergent）する級数を並べ替えると、和が変わることがあるのだ !）。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門の定評ある教科書）は、これらすべてを見事に扱っている。

解答例

STEP II 2012、第 5 問

純粋数学 ・ 逆数関数のグラフ

STEP II 2012、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s2-q5

鍵となる考え方

どちらの曲線も逆数（reciprocal）の形をしているので、分母のグラフを頭の中で描き、それを「ひっくり返す」。分母が 0 になるところには鉛直漸近線（vertical asymptote）が現れ、分母が大きいところでは y は 0 に近く、分母の極値をとる点（turning point）は曲線の極値をとる点になる。小問 (ii) では、2 つの 2 次式の因数が a と b の中点に関して互いに鏡像になっているので、原点をその中点に移すと g は新しい変数の偶関数（even function）になり、停留点（stationary point）は t^2 の 2 次式から自然に求まる。

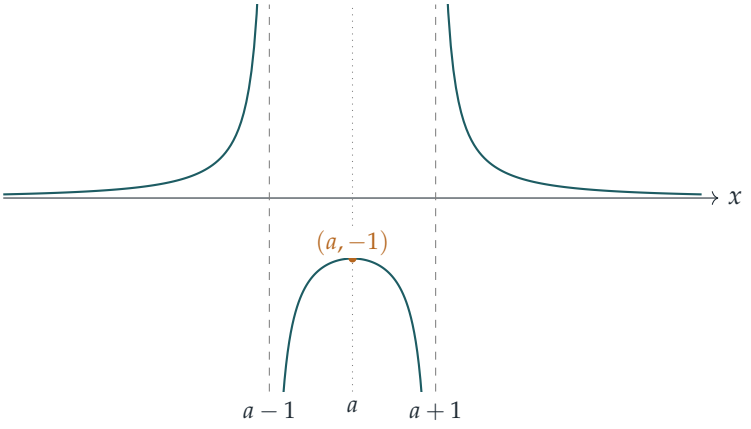
解答

小問 (i)

$D(x) = (x-a)^2 - 1$ とおくと、$f = 1/D$ である。分母 D は放物線（parabola）であり、$x = a$ に関して対称で、$x = a$ において最小値 -1 をとり、$x = a \pm 1$ で 0 になる。これを逆数に読み替えると、次のようになる。

- 曲線は $x = a$ に関して対称であり、鉛直漸近線は $x = a \pm 1$ である。
- $|x-a| < 1$ のとき $-1 \leq D < 0$ なので $f \leq -1$ であり、等号が成り立つのは $x = a$ のときに限る。よって $(a, -1)$ は極大点（local maximum）であり、x が内側から $a \pm 1$ に近づくとき $f \to -\infty$ となる。
- $|x-a| > 1$ のとき $D > 0$ であり、$|x-a|$ が大きくなるにつれて D は増加するので、f は正で、（漸近線の近くの）$+\infty$ から 0 に向かって減少する。x 軸は水平漸近線（horizontal asymptote）であり、$|x|$ が大きいとき $f \approx 1/x^2$ である。

実際、$f'(x) = -2(x-a)/D^2$ が 0 になるのは $x = a$ のときだけである。曲線は（$a \neq \pm 1$ のとき）y 軸と $1/(a^2-1)$ で交わるが、その位置は a によって変わるので、図は $x = a$ を基準にして描く。



小問 (ii)

$p = (x-a)^2 - 1$、$q = (x-b)^2 - 1$ とおくと、$g = 1/(pq)$ である。さらに

$$c = \tfrac{1}{2}(a+b), \qquad d = \tfrac{1}{2}(b-a) > 0, \qquad t = x - c,$$

とおくと、$x - a = t + d$、$x - b = t - d$ となる。このとき $(t+d)(t-d) = t^2 - d^2$ および $(t+d)^2 + (t-d)^2 = 2t^2 + 2d^2$ を用いると、

$$\begin{aligned} pq &= \big((t+d)^2 - 1\big)\big((t-d)^2 - 1\big) \\ &= (t^2 - d^2)^2 - (2t^2 + 2d^2) + 1. \end{aligned}$$

これは t^2 だけに依存するので、g は a と b の中点 $x = c$ に関して対称である。$u = t^2$、$h(u) = (u - d^2)^2 - 2u - 2d^2 + 1$ とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}(pq)}{\mathrm{d}t} = 2t\,h'(u) = 2t\big(2(u - d^2) - 2\big) = 4t\,(t^2 - d^2 - 1).$$

$g' = -(pq)'/(pq)^2$ であるから、g の停留点は $(pq)' = 0$ となる点、すなわち

$$t = 0 \qquad \text{または} \qquad t = \pm\sqrt{d^2 + 1},$$

である。ただし、これらが漸近線上にない場合に限る。漸近線は $t = \pm(d+1)$ と $t = \pm(d-1)$ にあり、$d < \sqrt{d^2+1} < d+1$ であるから、外側の 2 つの停留点は常に本物の停留点である。a と b を用いて表すと、候補は

$$x = \frac{a+b}{2} \qquad \text{および} \qquad x = \frac{a + b \pm \sqrt{(b-a)^2 + 4}}{2}.$$

これらの点での値は $h(0) = (d^2-1)^2$ および $h(d^2+1) = 1-2(d^2+1)-2d^2+1 = -4d^2$ である。

> **考えてみよう** これらの候補のうち実際に残るのはどれか。また、それらは極大か極小か。

それは $t=0$ が漸近線と一致するかどうか、すなわち $d=1$ かどうかによる。これはちょうど $b>a+2$（$d>1$）と $b=a+2$（$d=1$）の場合分けに対応する。各点の性質を調べるには、もう一度微分するのではなく、漸近線で区切られた各区間における g の符号と、区間の端での振る舞いを見る。

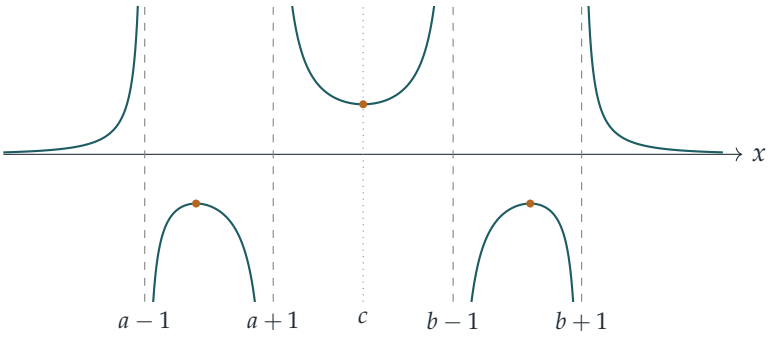
$b>a+2$ の場合。 このとき $d>1$ であり、4本の漸近線は順に

$$t=-(d+1),\ -(d-1),\ d-1,\ d+1, \quad \text{すなわち} \quad x=a-1,\ a+1,\ b-1,\ b+1,$$

であり、すべて異なる。また c は $a+1$ と $b-1$ の間に（端点を含まずに）ある。

- **外側、$|t|>d+1$：** ここでは $|x-a|>1$ かつ $|x-b|>1$ なので $p,q>0$ であり、$g>0$ である。停留点はないので、g は漸近線での $+\infty$ から無限遠での0まで減少し、$1/x^4$ のように振る舞う。
- **中央、$|t|<d-1$、すなわち $a+1<x<b-1$：** ここでも $p,q>0$ なので $g>0$ であり、両端で $g\to+\infty$ となる。停留点は $t=0$ だけなので、これは極小点でなければならず、その値は
$$g(c)=\frac{1}{(d^2-1)^2}=\frac{16}{\big((b-a)^2-4\big)^2}.$$
- **2つの隙間、$d-1<|t|<d+1$：** t が $(d-1,d+1)$ にあるとき、$|x-b|<1$ であるが $x-a>2d-1>1$ なので、$q<0<p$ となり $g<0$ であり、両端で $g\to-\infty$ となる。そこでの停留点は $t=\sqrt{d^2+1}$ だけなので、これは極大点でなければならず、その値は
$$g=\frac{1}{-4d^2}=-\frac{1}{(b-a)^2}.$$
隙間 $-(d+1)<t<-(d-1)$ はこれの鏡像である。

したがって停留点は3つある。$x=\frac{1}{2}(a+b)$ における極小点と、$x=\frac{1}{2}\big(a+b\pm\sqrt{(b-a)^2+4}\big)$ における2つの極大点であり、後者はいずれも $y=-1/(b-a)^2$ である。下の図は $b-a=4.8$ の場合であり、極値をとる点が見えるように y 方向を引き伸ばしてある。



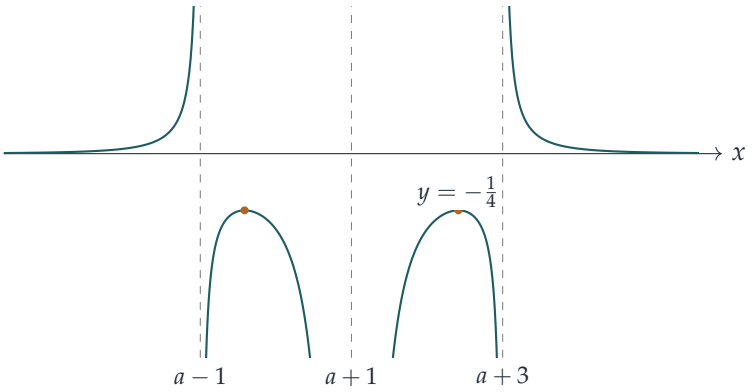
$b = a + 2$ の場合。 このとき $d = 1$ なので $a + 1 = b - 1 = c$ となり、中央の2本の漸近線は $x = a + 1$ の1本に重なる。$t = x - a - 1$ とおくと、

$$pq = h(t^2) = t^4 - 4t^2 = t^2(t^2 - 4), \qquad g = \frac{1}{t^2(t^2-4)},$$

であるから、漸近線は $x = a - 1$、$a + 1$、$a + 3$ の3本である。候補 $t = 0$ はここでは停留点ではなく漸近線であり、残るのは $t = \pm\sqrt{2}$ だけである。

- $|t| > 2$ のとき、先と同様に $g > 0$ であり、g は $+\infty$ から 0 まで減少する。
- $0 < |t| < 2$ のとき $g < 0$ であり、$t \to 0$ のとき（ここで $g \approx -1/(4t^2)$ なので、両側とも下に向かう）も $|t| \to 2$ のときも $g \to -\infty$ となる。よって $t = \sqrt{2}$ における停留点は極大点であり、$g = 1/\big(2 \cdot (-2)\big) = -\frac{1}{4}$ である。$t = -\sqrt{2}$ においても同様である。

したがって停留点は $x = a + 1 \pm \sqrt{2}$ にあり、いずれも $y = -\frac{1}{4}$ の極大点である。（これは一般の公式と一致する。$b - a = 2$ とすると $x = \frac{1}{2}(2a + 2 \pm \sqrt{8})$ となり、$-1/(b-a)^2 = -\frac{1}{4}$ である。）このとき曲線は、$x = a - 1$ と $x = a + 3$ の間では決して x 軸より上に出ない。



検算

- $a=0$、$b=5$ のとき、$g(2.5)=1/\left((6.25-1)^2\right)=1/27.5625$ であり、公式 $16/(25-4)^2=16/441$ も同じ値、約 0.0363 を与える。$x=\frac{1}{2}(5+\sqrt{29})\approx 5.193$ において直接計算すると $g\approx -0.04=-1/25$ となる。
- 第1の場合で $b\to a+2$ とすると、極小値 $16/\left((b-a)^2-4\right)^2$ は発散する。これは中央の枝が重なった漸近線の中に消えていくことと合っている。
- ランダムな a と b について g' の符号変化を数値的に調べると、$b>a+2$ のときはちょうど3つ、$b=a+2$ のときは2つの停留点が、上で求めた位置に見つかる。

よくある間違い

- pq を x の4次式（quartic）として展開し、3次式 $(pq)'$ を直接因数分解しようとすること。それでも解けるが、対称性を利用した置換 $t=x-c$ を使えば因数分解はすぐにできる。
- $b=a+2$ の場合に、点 $x=a+1$ が極値をとる点ではなく漸近線（分母の2重の零点）であることを見落とすこと。
- 隙間の区間で g の符号を間違えること。そこでは p、q のうちちょうど一方が負なので、$g<0$ である。

STEP のその先へ

D から $1/D$ のグラフを描くことは、関数を定性的に考えることの最初の体験である。符号、零点、対称性、無限遠での振る舞いがわかれば、微積分を使う前にほとんどすべてがわかる。置換 $t=x-\frac{1}{2}(a+b)$ は、対称性を利用して4次式を t^2 の2次式に帰着させるものであり、この手法は代数学や解析学の至るところで繰り返し現れる。このようなグラフの背後にある極限や漸近線の厳密な扱いについては Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を、この種の問題をさらに多く解きたい場合は Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（発展的な数学の問題集）を参照するとよい。

解答例

STEP II 2012、第 6 問

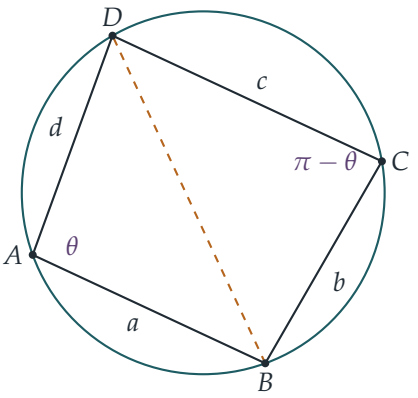
純粋数学 ・ 円に内接する四角形の面積

> **STEP II 2012、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q6

鍵となる考え方

対角線 BD は四角形を 2 つの三角形に分け、BD は余弦定理（cosine rule）によって 2 通りに表すことができる。円に内接する四角形（cyclic quadrilateral）の特別な点は、向かい合う角（対角、opposite angles）の和が π になることであり、したがって C における角は $\pi - \theta$ である。すると $\cos C = -\cos\theta$、$\sin C = \sin\theta$ となり、余弦定理と面積の公式 $\frac{1}{2}xy\sin(\text{角})$ のどちらにも、ただ 1 つの角 θ しか現れない。あとは $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ と丁寧な因数分解（factorising）で片がつく。

解答



$\cos\theta$ と $\sin\theta$ を求める

$ABCD$ は円に内接するので、対角 DAB と BCD の和は π であり、$\angle BCD = \pi - \theta$ である。よって

$$\cos\angle BCD = -\cos\theta, \qquad \sin\angle BCD = \sin\theta.$$

対角線 BD に余弦定理を適用する。まず三角形 ABD（2辺 a、d とその間の角 θ）で、次に三角形 CBD（2辺 b、c とその間の角 $\pi-\theta$）で用いると

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta = b^2 + c^2 + 2bc\cos\theta.$$

$\cos\theta$ を含む項をまとめると $2(ad+bc)\cos\theta = a^2+d^2-b^2-c^2$ となるので

$$\cos\theta = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}.$$

対角線 BD は四角形をこれら2つの三角形に分けるので、それらの面積の和が Q である：

$$Q = \tfrac{1}{2}ad\sin\theta + \tfrac{1}{2}bc\sin(\pi-\theta) = \tfrac{1}{2}(ad+bc)\sin\theta, \qquad \text{よって} \qquad \sin\theta = \frac{2Q}{ad+bc}.$$

（辺の長さはすべて正なので、$ad+bc$ で割ってよい。）

$16Q^2$ の公式

両方の式を $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入すると

$$\frac{4Q^2}{(ad+bc)^2} + \frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{4(ad+bc)^2} = 1.$$

両辺に $4(ad+bc)^2$ を掛けると

$$16Q^2 = 4(ad+bc)^2 - (a^2+d^2-b^2-c^2)^2,$$

となり、示すべき式が得られた。

ブラーマグプタ（Brahmagupta）の公式

右辺は平方の差（difference of two squares）$X^2 - Y^2$ であり、$X = 2(ad+bc)$、$Y = a^2+d^2-b^2-c^2$ である。

考えてみよう $X-Y$ と $X+Y$ を1次因数の積にするにはどうすればよいか？

それぞれが再び平方の差になるように項をまとめる。a,d の項どうし、b,c の項どうしをまとめると

$$X - Y = (b^2+2bc+c^2) - (a^2-2ad+d^2) = (b+c)^2 - (a-d)^2,$$
$$X + Y = (a^2+2ad+d^2) - (b^2-2bc+c^2) = (a+d)^2 - (b-c)^2.$$

これらをさらにそれぞれ因数分解すると

$$\begin{aligned}16Q^2 &= (X-Y)(X+Y)\\ &= (b+c-a+d)(b+c+a-d)(a+d-b+c)(a+d+b-c).\end{aligned}$$

$2s = a+b+c+d$ とおくと、各かっこは $2s$ から 1 辺の 2 倍を引いたものである。たとえば $b+c+d-a = 2s-2a$ である。したがって 4 つのかっこは $2(s-a)$、$2(s-d)$、$2(s-b)$、$2(s-c)$ であり

$$16Q^2 = 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d), \qquad \text{すなわち} \qquad Q^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

三角形の面積

三角形の 3 頂点はその外接円（circumcircle）上にあるので、どんな三角形も円に内接する。ここで、D を円周に沿って A まで滑らせ、辺 DA を縮めて消してしまおう。すると $ABCD$ は 3 辺が a、b、c の三角形 ABC となり、$d = 0$ である。公式の両辺は D に関して連続的に変化するので、極限においても公式は成り立つ。$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ とすると、三角形の面積 Δ は

$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), \qquad \text{よって} \qquad \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

を満たす。これがヘロン（Heron）の公式（Heron's formula）である。

検算

- 単位正方形は円に内接し $s = 2$ であり、$(2-1)^4 = 1$ はその面積に一致する。3 辺が 3–4–5 の三角形では $s = 6$ であり、$\sqrt{6\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 6 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4$ である。
- 長方形では $a = c$、$b = d$ なので $\cos\theta = 0$ となる。長方形の角はすべて $\frac{\pi}{2}$ なので、これは正しい。
- 円周上に 20 000 個の円に内接する四角形を無作為に配置し、$\cos\theta$、$\sin\theta$、Q^2 の公式を、実際の角および靴ひも公式（shoelace formula）による面積と比較した。両者は 3×10^{-12} 以内で一致した。ヘロンの公式も無作為な 1000 個の三角形で一致した。

よくある間違い

- $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$ を忘れること。そうすると $+2bc\cos\theta$ がマイナスになり、その後がすべて台無しになる。
- $4(ad+bc)^2 - (a^2+d^2-b^2-c^2)^2$ を完全に展開しようとすること。平方の差として 2 回因数分解するほうがはるかに速く、間違いもずっと少ない。

STEP のその先へ

一般の（円に内接するとは限らない）四角形については、ブレートシュナイダー（Bretschneider）の公式が面積を与える。この公式では項 $abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}$ が引かれる。ここで α と γ は 1 組の対角である。したがって、辺の長さを固定すると、円に内接する四角形の面積が最大となる。また、因数分解されたヘロンの公式の形から、面積が 0 になるのは三角不等式（triangle inequality）が等号になるときであり、かつそのときに限ることがただちにわかる。この流れをくむ幾何学をさらに学ぶには、コクセター（Coxeter）と Greitzer の *Geometry Revisited*（邦題『幾何学再入門』）を参照するとよい。

解答例

STEP II 2012、第 7 問

純粋数学 ・ ベクトルと円

STEP II 2012、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

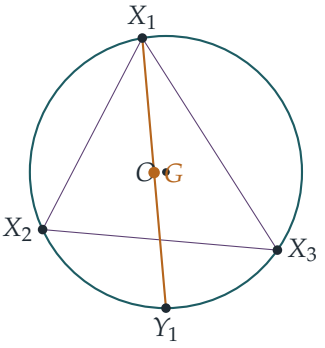
step.maths.org/questions/12-s2-q7

鍵となる考え方

点 Y_1 は X_1 と G を通る直線上にあるので、その位置ベクトル（position vector）は $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{g}$ の簡単な結合で表され、未知のスカラーは一つだけである。Y_1 について他に分かっているのは単位円上にあることだけなので、$|\overrightarrow{OY_1}|^2 = 1$ から λ_1 についての方程式が得られる。これは二次方程式であるが、一つの解はあらかじめ明らかである。直線は X_1 自身で円と交わるので、その解に対応する因数をくくり出すことができる。

解答

$\mathbf{g} = \frac{1}{3}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)$、$\lambda = \lambda_1$ とおく。各 $\mathbf{x}_i$ は単位ベクトル（unit vector）なので、$\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i = 1$ である。



Y_1 の位置ベクトル

$\overrightarrow{GY_1} = -\lambda\overrightarrow{GX_1}$ より $\mathbf{y}_1 - \mathbf{g} = -\lambda(\mathbf{x}_1 - \mathbf{g})$ であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OY_1} = \mathbf{y}_1 &= (1+\lambda)\mathbf{g} - \lambda\mathbf{x}_1 \\ &= \tfrac{1}{3}(1+\lambda)(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3) - \lambda\mathbf{x}_1 \\ &= \tfrac{1}{3}\big((1-2\lambda)\mathbf{x}_1 + (1+\lambda)(\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3)\big),\end{aligned}$$

となる。ここで $\frac{1}{3}(1+\lambda) - \lambda = \frac{1}{3}(1-2\lambda)$ を用いた。これが求める式である。

λ_1 を求める

Y_1 は円周上にあるので $|\mathbf{y}_1|^2 = 1$、したがって $|3\mathbf{y}_1|^2 = 9$ である。必要なのは

$$|\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3|^2 = 1+2\alpha+1 = 2+2\alpha, \qquad \mathbf{x}_1\cdot(\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3) = \beta+\gamma.$$

である。よって $|3\mathbf{y}_1|^2$ を自分自身との内積（dot product）として展開すると、

$$(1-2\lambda)^2 + (1+\lambda)^2(2+2\alpha) + 2(1-2\lambda)(1+\lambda)(\beta+\gamma) = 9.$$

を得る。λ の累乗ごとに整理して 2 で割ると、

$$(3+\alpha-2\beta-2\gamma)\lambda^2 + (2\alpha-\beta-\gamma)\lambda - (3-\alpha-\beta-\gamma) = 0.$$

となる。見通しをよくするために

$$A = 3+\alpha-2\beta-2\gamma, \qquad B = 3-\alpha-\beta-\gamma,$$

とおくと、一次の係数はちょうど $A-B$ になっていることに気づく。よって方程式は $A\lambda^2 + (A-B)\lambda - B = 0$ であり、次のように因数分解できる。

$$(\lambda+1)(A\lambda - B) = 0.$$

> **考えてみよう** なぜ $\lambda = -1$ が解になるはずなのか。また、なぜそれを除外してよいのか。

$\mathbf{y}_1 = (1+\lambda)\mathbf{g} - \lambda\mathbf{x}_1$ に $\lambda = -1$ を代入すると $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$ となる。X_1 と G を通る直線上のすべての点は $(1+\lambda)\mathbf{g} - \lambda\mathbf{x}_1$ の形をしており、この直線は Y_1 だけでなく X_1 でも円と交わるので、この二次方程式は初めから $\lambda = -1$ を解にもつはずであった。$\lambda_1 > 0$ が与えられているので $\lambda_1 \neq -1$ であり、したがって $A\lambda_1 = B$ である。

あとは A で割ってよいことを確かめればよい。$A = 0$ ならば、$A\lambda_1 = B$ から $B = 0$ となってしまう。しかし

$$|\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3|^2 = 3+2(\alpha+\beta+\gamma), \qquad \text{よって} \qquad B = \tfrac{1}{2}\big(9-|\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3|^2\big) = \tfrac{9}{2}\big(1-|\mathbf{g}|^2\big).$$

である。三角不等式（triangle inequality）より $|\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3|\le 3$ であり、等号が成り立つのは三つの単位ベクトルが等しいときに限る。三点は相異なるので $B>0$ である。ゆえに $A\neq 0$ であり、

$$\lambda_1=\frac{B}{A}=\frac{3-\alpha-\beta-\gamma}{3+\alpha-2\beta-2\gamma},$$

となって、示すべき式が得られた。

最後の小問

$\lambda_1>0$ として $\overrightarrow{GY_1}=-\lambda_1\overrightarrow{GX_1}$ であるから、長さについて $GY_1=\lambda_1 GX_1$ が成り立ち、

$$\frac{GX_1}{GY_1}=\frac{1}{\lambda_1}=\frac{3+\alpha-2\beta-2\gamma}{3-\alpha-\beta-\gamma}.$$

となる。添字を巡回させて（$1\to 2\to 3\to 1$、これにより $\alpha\to\beta\to\gamma\to\alpha$ となる）同じ議論を行えば、残り二つの比が得られる。分母 $B=3-\alpha-\beta-\gamma$ は対称式なので三つとも共通であり、分子はそれぞれ

$$3+\alpha-2\beta-2\gamma,\qquad 3+\beta-2\gamma-2\alpha,\qquad 3+\gamma-2\alpha-2\beta.$$

である。これらの和は $9+(1-2-2)(\alpha+\beta+\gamma)=9-3(\alpha+\beta+\gamma)=3B$ となる。したがって

$$\frac{GX_1}{GY_1}+\frac{GX_2}{GY_2}+\frac{GX_3}{GY_3}=\frac{3B}{B}=3.$$

検算

- 正三角形の場合：このとき $G=O$ であり、G を通る弦はすべて直径なので、どの比も 1 である。公式では $\alpha=\beta=\gamma=-\frac{1}{2}$ となり、$\lambda_1=\frac{9/2}{9/2}=1$ を得る。
- 幾何学的な解釈もできる：$A=\frac{1}{2}|\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3-2\mathbf{x}_1|^2=\frac{9}{2}GX_1^2$、$B=\frac{9}{2}(1-OG^2)$ であるから、$\lambda_1=B/A$ は $GX_1\cdot GY_1=1-OG^2$ を意味する。これは方べきの定理（intersecting chords theorem、power of a point）である。
- 数値による確認：X_1,X_2,X_3 を角度 0、1、2.5 ラジアンの位置にとると、三つの比 GX_i/GY_i はそれぞれ約 1.13、0.31、1.57 となり、その和は計算機の精度の範囲で 3 に一致する。同じ方法で 20 000 個のランダムな三角形について確かめた。

よくある間違い

- $|\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3|^2$ には単なる $1+1$ だけでなく交差項 2α が含まれることを忘れる。
- 解 $\lambda=-1$ に気づかず、解の公式で力ずくで計算してしまう。
- $3+\alpha-2\beta-2\gamma$ が 0 でない理由を述べずにそれで割ってしまう。

STEP のその先へ

この問題に隠れている等式 $GX_1 \cdot GY_1 = 1 - OG^2$ は、円に関する点の**方べき**であり、内積を用いた計算はそのベクトルによる証明になっている。長さや角度がすべて $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ から得られるように、幾何学を内積の言葉で書き表すことは、大学初年度の線形代数の講義で学ぶ内積空間（inner-product space）の出発点である。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、この視点を発展させている。

解答例

STEP II 2012、第 8 問

純粋数学 • 非線形漸化式

STEP II 2012、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s2-q8

鍵となる考え方

漸化式（recurrence）$u_{n+1}u_{n-1} = u_n^2 - q^2$ は非線形（non-linear）であるが、これはすべての n について成り立つ。そこで、連続する二つの n の値についてこの式を書き下して辺々引くと、扱いにくい定数 q^2 が消える。残った式は、比 $(u_{n+1} + u_{n-1})/u_n$ が決して変化しないことを述べており、これによって数列は定数係数 p をもつ線形漸化式（linear recurrence）に帰着される。最初の不等式（inequality）はまさに $p > 2$ という主張であり、これが数列の増加を生み出すのである。

解答

不等式

すべてを共通の分母 $\alpha\beta$ でまとめると、

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 - q^2}{\alpha\beta} - 2 = \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - q^2}{\alpha\beta} = \frac{(\beta - \alpha)^2 - q^2}{\alpha\beta}.$$

$\beta - \alpha > q > 0$ であるから、両辺を 2 乗すると（両辺とも正）$(\beta - \alpha)^2 > q^2$ となり、分子は正である。$\alpha, \beta > 0$ より分母 $\alpha\beta$ も正である。したがってこの式は正であり、示すべきことが示された。

第一の恒等式

漸化式の両辺に u_{n-1} を掛けると、すべての $n \geq 1$ について

$$u_{n+1}u_{n-1} = u_n^2 - q^2.$$

n を $n+1$ に置き換えると（$n+1 \geq 1$ であるから、これも許される）、

$$u_{n+2}u_n = u_{n+1}^2 - q^2.$$

第二の式から第一の式を引くと q^2 が消えて、

$$u_n u_{n+2} - u_{n-1}u_{n+1} = u_{n+1}^2 - u_n^2,$$

これを整理すると、すべての $n \geq 1$ について

$$u_n^2 + u_n u_{n+2} = u_{n+1}^2 + u_{n-1}u_{n+1}, \qquad \text{すなわち} \qquad u_n(u_n + u_{n+2}) = u_{n+1}(u_{n-1} + u_{n+1})$$

が成り立つ。これが求める結果である。

線形漸化式

考えてみよう いま証明した恒等式には四つの異なる項が含まれている。これがどうして単一の定数 p をもつ漸化式を与えるのだろうか。

この恒等式を $u_n u_{n+1}$ で割る。数列のどの項も 0 ではないので、これは許される：

$$\frac{u_{n+2} + u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{u_n} \qquad (n \geq 1).$$

よって、量 $v_n = (u_{n+1} + u_{n-1})/u_n$ はすべての $n \geq 1$ について $v_{n+1} = v_n$ を満たす。つまりこれは定数である。その共通の値を p とおくと $u_{n+1} + u_{n-1} = pu_n$、すなわち

$$u_{n+1} - pu_n + u_{n-1} = 0 \qquad (n \geq 1).$$

p を求めるには $n = 1$ を用いる。漸化式より $u_2 = (\beta^2 - q^2)/\alpha$ であるから、

$$p = \frac{u_2 + u_0}{u_1} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\beta^2 - q^2}{\alpha} + \alpha\right) = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - q^2}{\alpha\beta}.$$

これは最初の部分の式そのものであるから、$\beta - \alpha > q$ のとき $p > 2$ であることはすでにわかっている。

$\beta > \alpha + q$ のとき数列は増加する

$d_n = u_{n+1} - u_n$ とおく。線形漸化式を $u_{n+1} = pu_n - u_{n-1}$ の形で用いると、

$$d_n - d_{n-1} = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = (p-2)u_n.$$

考えてみよう $p-2>0$ であることはわかっているが、なぜ $(p-2)u_n$ が正といえるのだろうか。$u_n>0$ であることはまだわかっていない。

正であることと増加することは、数学的帰納法（induction）によって同時に証明しなければならない。主張：すべての $n\geq 1$ について、$u_n>0$ かつ $d_{n-1}>0$ である。

$n=1$ のとき：$u_1=\beta>0$ かつ $d_0=\beta-\alpha>q>0$ である。

ある $n\geq 1$ について $u_n>0$ かつ $d_{n-1}>0$ と仮定する。このとき $p>2$ であるから、

$$d_n=d_{n-1}+(p-2)u_n>0,\qquad u_{n+1}=u_n+d_n>0,$$

となり、これは $n+1$ に対する主張である。数学的帰納法により、すべての $n\geq 0$ について $d_n=u_{n+1}-u_n>0$ となるので、数列は狭義単調増加（strictly increasing）である。（実際には差そのものも増加するので、増加は線形よりも速い。また、すべての項が正であるから、この場合はどの項も o でないという条件は自動的に満たされる。）

$\beta=\alpha+q$ の場合

このとき $(\beta-\alpha)^2-q^2=0$ であるから、ちょうど $p=2$ となり、$d_n-d_{n-1}=0$ である。差はすべて $d_0=\beta-\alpha=q$ に等しいので、数列は等差数列（arithmetic progression）

$$u_n=\alpha+nq.$$

となる。$q>0$ であるから依然として狭義単調増加であるが、今度は線形にしか増加しない。直接確かめると、$(\alpha+(n+1)q)(\alpha+(n-1)q)=(\alpha+nq)^2-q^2$ であるから、この数列は確かにもとの漸化式を満たす。

検算

- $\alpha=1$、$\beta=4$、$q=2$ とする（このとき $\beta>\alpha+q$）。漸化式から $1,4,12,35,\frac{407}{4},\ldots$ が得られ、$p=\frac{1+16-4}{4}=\frac{13}{4}$ である。実際、$\frac{13}{4}\cdot 4-1=12$ かつ $\frac{13}{4}\cdot 12-4=35$ となる。
- $\alpha=1$、$q=2$、$\beta=3$ とすると、項は $1,3,5,7,\ldots$ となり、最後の部分の等差数列になる。
- 数百組の無作為な α,β,q について、二つの恒等式を厳密な有理数演算で確かめ、$\beta>\alpha+q$ のときは常に数列が増加することも確かめた。

よくある間違い

- $u_n > 0$ であることを先に知らないまま、$p > 2$ から $d_n > d_{n-1}$ を結論してしまうこと。この二つの事実は同じ帰納法の中で扱わなければならない。
- $u_n u_{n+1}$ が 0 でないことに触れずに、それで割ってしまうこと。
- 辺々引く段階で添字 $n+1$ における漸化式を用いており、そのためには $n+1 \geq 1$ が必要であることを忘れること。

STEP のその先へ

非線形漸化式がひそかに線形漸化式を満たしているとき、その漸化式は隠れた**不変量**（invariant）をもつという。ここでは $(u_{n+1} + u_{n-1})/u_n$、あるいは同値な $u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = q^2$ がそれであり、これは力学における保存量（conserved quantity）の離散版である。線形漸化式 $u_{n+1} - pu_n + u_{n-1} = 0$ の解は、$\lambda + \lambda^{-1} = p$ として $u_n = A\lambda^n + B\lambda^{-n}$ で与えられる。これは $p > 2$ のとき実数で指数関数的に増加し、重解（repeated root）の場合 $p = 2$ には $A + Bn$ となる。これはまさに上で見た二分法である。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には STEP 風の漸化式がさらに載っており、微分方程式との類似については Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）で展開されている。

解答例

STEP II 2012、第 9 問

力学 ・ 放物運動

STEP II 2012、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

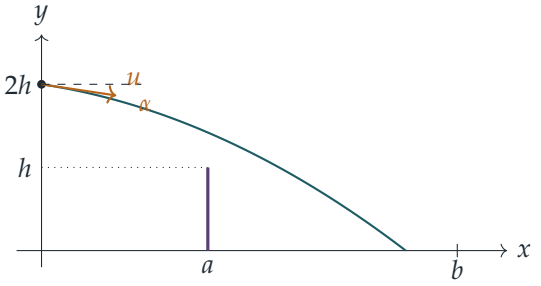
step.maths.org/questions/12-s2-q9

鍵となる考え方

ボールの高さを、発射点からの水平距離 x の関数として表す。これが軌道の方程式（trajectory equation）である。すると「ネットを越える」は $x = a$ における一つの不等式となり、「b より手前に着地する」は飛行時間（time of flight）についての不等式となる。最後の部分がうまくいくのは、二つの条件がいずれも同じ量 $1/u^2$ の評価、一方は上界（upper bound）、もう一方は下界（lower bound）になるからである。したがって下界は上界より小さくなければならず、u は消える。

解答

ボールを、空気抵抗と回転を無視して重力のみを受けて自由に運動する質点（particle）としてモデル化し、$0 \leq \alpha < \frac{1}{2}\pi$ とする。原点を発射点の真下の地面にとり、x をネットに向かう水平方向、y を鉛直上向きにとる。



ネットを越える条件

初速度の成分は、水平方向に $u\cos\alpha$、下向きに $u\sin\alpha$ である。時間 t が経過した後、

$$x = ut\cos\alpha, \qquad y = 2h - ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$t = x/(u\cos\alpha)$ を代入して消去すると、軌道は

$$y = 2h - x\tan\alpha - \frac{gx^2\sec^2\alpha}{2u^2}.$$

水平方向の速度は一定かつ正なので、ボールはちょうど一度だけ $x = a$ に到達し、そこで $y > h$ であればネットを越える：

$$2h - a\tan\alpha - \frac{ga^2\sec^2\alpha}{2u^2} > h \iff \frac{ga^2\sec^2\alpha}{2u^2} < h - a\tan\alpha.$$

正の量 $2/(ga^2\sec^2\alpha)$ を掛けると、

$$\frac{1}{u^2} < \frac{2(h - a\tan\alpha)}{ga^2\sec^2\alpha},$$

となり、これが求める結果である。

b より手前に着地する条件

ボールは $2h$ だけ落下したときに着地する。すなわち $\frac{1}{2}gt^2 + ut\sin\alpha - 2h = 0$ のときである。この t についての二次方程式は異符号の二つの解をもち（解の積は $-4h/g < 0$）、着地時刻は正の解である：

$$T = \frac{-u\sin\alpha + \sqrt{u^2\sin^2\alpha + 4gh}}{g}.$$

ボールが水平距離 b より手前に着地するのは、$uT\cos\alpha < b$、すなわち $T < \dfrac{b}{u\cos\alpha}$ のとき、かつそのときに限る（$u\cos\alpha > 0$ だからである）。両辺に g を掛けて $u\sin\alpha$ を加えると、

$$\sqrt{u^2\sin^2\alpha + 4gh} < \frac{bg}{u\cos\alpha} + u\sin\alpha,$$

となり、これが二つ目の結果である。

最後の不等式

考えてみよう u を含む二つの条件から、どうして u を含まない条件が得られるのだろうか？

一つ目の結果は $1/u^2$ の上界である。二つ目を $1/u^2$ の**下界**に書き直すことができれば、u が何であっても、下界は上界より小さくなければならない。

二つ目の不等式の両辺はともに正である（右辺が正であるのは $\sin\alpha \geq 0$ かつ $\cos\alpha > 0$ だからである）。よって両辺を 2 乗しても不等式は保たれる：

$$u^2\sin^2\alpha + 4gh < \frac{b^2g^2}{u^2\cos^2\alpha} + 2bg\tan\alpha + u^2\sin^2\alpha.$$

$u^2\sin^2\alpha$ の項が打ち消し合い、$2g(2h - b\tan\alpha) < b^2g^2\sec^2\alpha/u^2$ が残る。すなわち

$$\frac{2(2h - b\tan\alpha)}{gb^2\sec^2\alpha} < \frac{1}{u^2}.$$

一つ目の結果と合わせると、

$$\frac{2(2h - b\tan\alpha)}{gb^2\sec^2\alpha} < \frac{1}{u^2} < \frac{2(h - a\tan\alpha)}{ga^2\sec^2\alpha}.$$

正の因数 $2/(g\sec^2\alpha)$ を約し、全体に $a^2b^2 > 0$ を掛けると、

$$\begin{aligned} & a^2(2h - b\tan\alpha) < b^2(h - a\tan\alpha) \\ \iff \quad & (ab^2 - a^2b)\tan\alpha < h(b^2 - 2a^2) \\ \iff \quad & ab(b-a)\tan\alpha < h(b^2 - 2a^2). \end{aligned}$$

考えてみよう $b - a$ で割ってよいだろうか？

よい。ただし符号が重要である。ボールは $x = a$ においてまだ高さ $h > 0$ より上にあるので、a より遠いところに着地する。そして b より手前に着地する。よって $b > a$ であり、$ab(b-a) > 0$ だから、割っても不等号の向きは変わらない：

$$\tan\alpha < \frac{h(b^2 - 2a^2)}{ab(b-a)}.$$

検算

- 単位：$a\tan\alpha$ は h と同じく長さであり、ga^2/u^2 も長さである。したがって $1/u^2$ に対するそれぞれの評価の単位は $\mathrm{s}^2\,\mathrm{m}^{-2}$ となり、あるべき単位になっている。
- $\alpha = 0$ のとき、最終結果は $b^2 > 2a^2$ となる。実際、水平に打ち出されたボールが $x = a$ までに落下する距離は h 未満である。落下距離は x^2 に比例するので、$x = \sqrt{2}\,a$ までの落下距離は $2h$ 未満であり、したがってボールは $\sqrt{2}\,a$ より遠くに着地し、$b > \sqrt{2}\,a$ となる。

- 数値的には、$g = 9.8$、$u = 12$、$\alpha = 0.2$、$h = 1.5$ として運動を逐次計算すると、着地距離は 6.7759 となり、$uT\cos\alpha$ と一致する。20 000 個の無作為な場合について、最初の二つの不等式は「ネットを越える」「b より手前に着地する」とそれぞれ完全に一致し、両方が成り立つときには必ず最後の不等式が成り立った。

よくある間違い

- 初速度の鉛直成分を $+u\sin\alpha$ としてしまう。ボールは水平より**下向き**に打ち出されている。
- 両辺が正であることを確かめずに不等式を 2 乗する。
- $b - a$ で割る際に、それが正である理由を述べない。

STEP のその先へ

最後の部分は、不等式の間でパラメータを消去すること（eliminating a parameter）の小さな例である。L と U が u を含まないとき、連立不等式 $L < 1/u^2 < U$ が解をもつのは $L < U$ のとき、かつそのときに限る。同じ考え方を多数の一次不等式に対して系統的に行うのがフーリエ–モツキンの消去法（Fourier–Motzkin elimination）であり、線形計画法（linear programming）の基礎の一つである。力学については、軌道がもはや放物線にならない空気抵抗のある放物運動も含めて、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics* を参照されたい。

解答例

STEP II 2012、第 10 問

力学 ・ 摩擦とモーメント

> **STEP II 2012、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q10

鍵となる考え方

棒は円形断面の弦（chord）であるから、垂直抗力（normal reaction）はすべて中心 O をまっすぐ向き、棒と各半径のなす角 ϕ は幾何学的に $\cos\phi = a/r$ と定まる。棒が動きうるのは O のまわりの回転だけなので、両端は同時に滑る。したがって、各端で摩擦（friction）がどちら向きにはたらくかがわかる。**中点**のまわりのモーメント（moment）をとれば重さが消え、最初の関係式がただちに得られる。次に O のまわりのモーメントと一方向への力の分解によって $\tan\theta$ が求まる。

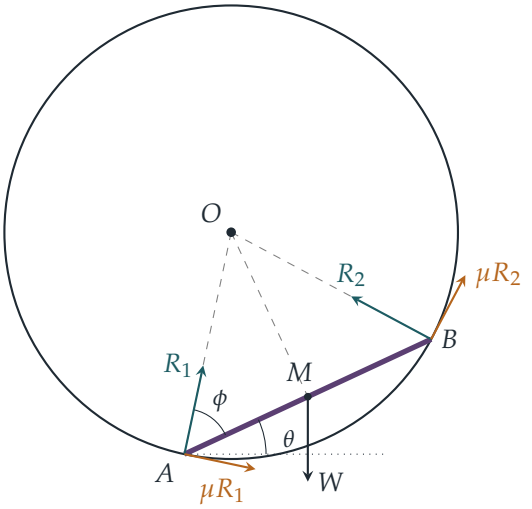
解答

設定

棒を重さ W の一様な剛体（rigid body）の棒とみなし、粗い円柱に接するのは両端 A（低い方）と B（高い方）のみとする。O を円形断面の中心、M を AB の中点とする。$OA = OB = r$ より三角形 OAB は二等辺三角形であるから、OM は AB に垂直であり、

$$\cos\phi = \frac{a}{r}, \qquad \sin\phi = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r}, \qquad OM = \sqrt{r^2 - a^2} = r\sin\phi,$$

ここで $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ である。棒と半径のなす角は**両端とも** ϕ である。



考えてみよう 各端で摩擦はどちら向きにはたらくか？

両端は円周上にとどまり、AB の長さは変わらないので、OM は長さを保ったまま棒に垂直であり続ける。したがって、可能な運動は O のまわりの回転だけである。$\theta \neq 0$ であるから M は O の真下にはなく、重さは O のまわりに棒を水平に近づける向きのモーメントをもつ（図では時計回りであり、A は壁を上り、B は壁を下ることになる）。抗力は O を通るので、これに抵抗できるのは摩擦だけである。両端は同時に動くので、滑り出す直前には両端とも摩擦が限界摩擦（limiting friction）に達している。すなわち、図のように μR_1 と μR_2 が A と B における接線に沿って、どちらも O のまわりの反時計回りの向きにはたらく。

R_1 と R_2 の関係

M のまわりのモーメントをとると、重さが消える。R_1 の作用線は AO であり、これは AM と角 ϕ をなすので、M からの垂直距離は $a\sin\phi$ である。A における摩擦は OA に垂直な接線に沿ってはたらくので、M からの距離は $a\cos\phi$ である。B でも同様である。図において R_1 は M のまわりに棒を時計回りに回し、R_2 と二つの摩擦力はいずれも反時計回りに回すので、

$$R_1 a\sin\phi = R_2 a\sin\phi + \mu R_1 a\cos\phi + \mu R_2 a\cos\phi.$$

両辺を $a\cos\phi$ で割って整理すると

$$\mu(R_1 + R_2) = (R_1 - R_2)\tan\phi,$$

となり、求める式が得られた。特に $R_1 > R_2$ であり、低い方の端のほうが強く押しつけている。

$\tan\theta$ を求める

O のまわりのモーメント。抗力は O を通り、各摩擦力の腕の長さは r である。重さは M にはたらき、OM は棒に垂直なので鉛直方向と角 θ をなす。よって、M の O からの水平距離は $OM\sin\theta = r\sin\phi\sin\theta$ である。したがって

$$\mu(R_1+R_2)\,r = Wr\sin\phi\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \mu(R_1+R_2) = W\sin\phi\sin\theta. \tag{1}$$

棒に垂直な方向への分解（O を含む側を正の向きとする）。各抗力は棒と角 ϕ をなすので、その寄与は $R_i\sin\phi$ である。各摩擦力はこの垂直方向と角 ϕ をなし、A では棒に対して O の側から離れる向き、B ではその側へ向かう向きである。重さの寄与は $-W\cos\theta$ である。よって

$$(R_1+R_2)\sin\phi - \mu(R_1-R_2)\cos\phi = W\cos\theta. \tag{2}$$

$S = R_1+R_2$ とおく。最初の結果より $R_1-R_2 = \mu S\cot\phi$ であるから、(2) は

$$S\,\frac{\sin^2\phi-\mu^2\cos^2\phi}{\sin\phi} = W\cos\theta,$$

となる。一方、(1) は $\dfrac{\mu S}{\sin\phi} = W\sin\theta$ を意味する。辺々割ると（棒は鉛直ではなく傾いているので $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ かつ $\cos\theta\neq 0$ である）

$$\tan\theta = \frac{\mu}{\sin^2\phi-\mu^2\cos^2\phi}.$$

分母と分子に r^2 を掛け、$r^2\sin^2\phi = r^2-a^2$ と $r^2\cos^2\phi = a^2$ を用いると

$$\tan\theta = \frac{\mu r^2}{r^2-a^2-\mu^2a^2} = \frac{\mu r^2}{r^2-a^2(1+\mu^2)},$$

となり、求める式が得られた。

$\lambda<\phi$ を導く

考えてみよう 手もとにあるのが等式だけのとき、不等式はどこから出てくるのか？

符号からである。棒は水平と角 θ をなして傾いており、$\theta\neq 0$ であるから、$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ かつ $\tan\theta>0$ である。$\mu>0$ より分子 μr^2 は正なので、分母も正でなければならない：

$$r^2\sin^2\phi-\mu^2r^2\cos^2\phi>0 \quad\Longleftrightarrow\quad \tan^2\phi>\mu^2=\tan^2\lambda.$$

ϕ と λ はともに $(0,\frac{\pi}{2})$ に属し、そこで tan は正かつ増加であるから、$\tan\phi>\tan\lambda$ から $\lambda<\phi$ が得られる。

検算

- 滑らかな場合の極限：$\mu \to 0$ のとき $\tan\theta \to 0$ であるから、滑らかな棒は水平な位置、すなわち M が O の真下にある位置でしか静止できない。正しい。
- 数値：$r = 5, a = 3, \mu = \frac{1}{2}$ とすると $\tan\phi = \frac{4}{3} > \frac{1}{2}$ であり、$\tan\theta = \frac{12.5}{25-11.25} = \frac{10}{11}$ となる。この角度において（さらに無作為に選んだ数千組の r, a, μ においても）二つの力のつり合いの式をベクトル形式で R_1, R_2 について解くと、O のまわりのモーメントは消え、$\mu(R_1 + R_2) = (R_1 - R_2)\tan\phi$ が 10^{-12} 以内の誤差で成り立つ。
- $\lambda < \phi$ の物理的な意味：λ は摩擦角（angle of friction）である。$\lambda \geq \phi$ ならば摩擦は十分に強く、どの傾きでも棒を支えられるので、棒が滑り出す直前の状態になることはなく、そのような θ は存在しない。

よくある間違い

- 抗力を半径に沿った向きではなく棒に垂直な向きにとってしまう。接触している相手は円柱なので、法線は円柱の法線である。
- 二つの摩擦力を棒に沿って互いに逆向きにとってしまう。両端は O のまわりに同じ回転の向きに動くので、摩擦はどちらの端でも O のまわりに反時計回りである。
- 最初の結果を出すのに、棒に平行な方向と垂直な方向に力を分解してしまう。どちらの式にも W が含まれてしまう。M のまわりのモーメントをとれば、これを避けられる。

STEP のその先へ

$\lambda < \phi$ という結論は、摩擦円錐（friction cone）の考え方そのものである。粗い接触点における全抗力は、法線から角 λ 以内の向きになければならない。ここでは棒が 2 点で接しており、問題は、二つの摩擦円錐が三つの力を 1 点で交わらせる余地を残しているかどうかということである。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、摩擦と剛体の静力学（statics）をより詳しく扱っており、起ころうとしている運動の向きを自分で見きわめなければならない問題も含んでいる。

解答例

STEP II 2012、第 11 問

力学 ・ 非弾性衝突

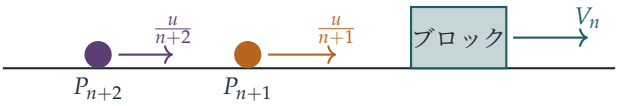
> **STEP II 2012、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q11

鍵となる考え方

各粒子が運ぶ運動量（momentum）に注目する。質量 im に速さ u/i を掛けると mu となり、これはどの粒子でも同じである。したがって n 個の粒子が取り込まれた後のブロックの運動量は単に nmu であり、運動量保存則（conservation of momentum）からその速さがただちに求まる。次の粒子が到達するかどうかは 2 つの速さの比較に帰着し、エネルギーの損失は「入ってきた運動エネルギー（kinetic energy）から出ていく運動エネルギーを引いたもの」である。

解答

ブロックと粒子を、なめらかな面上の一直線に沿って動く質点としてモデル化する。したがって水平方向の外力ははたらかず、直線方向の運動量はすべての衝突で保存される。粒子はブロックにめり込むので、各衝突は完全非弾性衝突（perfectly inelastic collision）である。



n 回目の衝突後の速さ

粒子 P_i の運動量は $im \cdot \frac{u}{i} = mu$ であり、i によらない。

n 番目の粒子がブロックに衝突するとする。このとき、粒子 $P_1, \ldots, P_{n-1}$ はそれより前に衝突していなければならない。粒子は順に発射され、それぞれ直前の粒子より遅い

（u/i は減少する）ので、後の粒子が前の粒子を追い越すことはなく、またどの粒子もブロックに当たらずに通り過ぎることはできないからである。よって n 回目の衝突の直後、ブロックは $P_1, \ldots, P_n$ を含み、その質量は

$$km + m(1 + 2 + \cdots + n) = m\left(k + \tfrac{1}{2}n(n+1)\right)$$

である。ブロックは静止状態から動き始め、取り込まれた各粒子は運動量 mu をもたらしたので、運動量保存則より全運動量は現在 nmu である。したがって n 回目の衝突後のブロックの速さ V_n は

$$m\left(k + \tfrac{1}{2}n(n+1)\right)V_n = nmu \quad \Longrightarrow \quad V_n = \frac{2nu}{2k + n(n+1)}$$

を満たし、これが求める結果である。

$2k = N(N+1)$ のときの衝突回数

n 回の衝突の後、ブロックは一定の速さ V_n で動く（面はなめらかである）。ブロックの後方にある粒子 P_{n+1} がブロックに追いつくのは、それがブロックより真に速いとき、かつそのときに限る：

$$\frac{u}{n+1} > \frac{2nu}{2k + n(n+1)} \iff 2k + n(n+1) > 2n(n+1) \iff 2k > n(n+1).$$

ここで正の量 $n+1$ と $2k + n(n+1)$ を両辺に掛けた。（$n = 0$ のときこれは $2k > 0$ となり、確かに成り立つ。P_1 は静止しているブロックに必ず当たる。）

考えてみよう 一度ある粒子が外れたら、その後の粒子がブロックに当たることはありうるだろうか？

ありえない。P_{n+1} がブロックに追いつけなければ、ブロックはその後ずっと速さ $V_n \geq \frac{u}{n+1}$ を保ち、$i > n+1$ に対して $\frac{u}{i} < \frac{u}{n+1}$ であるから、それ以降の粒子はさらに遅い。したがって衝突するのは、$P_1, P_2, \ldots$ のうち、初めて外れる粒子の直前までのものちょうどである。

ここで $2k = N(N+1)$ とする。$n(n+1)$ は $n \geq 0$ において狭義単調増加（strictly increasing）であるから、P_{n+1} が当たる条件は $n(n+1) < N(N+1)$、すなわち $n < N$ となる。よって $P_1, \ldots, P_N$ はすべてブロックに当たり、P_{N+1} は当たらない。$n = N$ のとき等号が成り立ち、実際

$$V_N = \frac{2Nu}{N(N+1) + N(N+1)} = \frac{u}{N+1}$$

となって、これは P_{N+1} の速さにちょうど等しい。したがってこの粒子はブロックの後方に一定の距離を保ったままである。以上より、衝突はちょうど N 回である。

失われる運動エネルギー

衝突に関わるのは $P_1, \ldots, P_N$ だけなので、損失の総量は、これらの粒子の発射時の運動エネルギー（ブロックは静止状態から始まる）からブロックの最終的な運動エネルギーを引いたものである。

初めは、

$$\sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2}(im)\left(\frac{u}{i}\right)^2 = \tfrac{1}{2}mu^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}.$$

最終的にブロックの質量は $m\big(k + \frac{1}{2}N(N+1)\big) = mN(N+1)$、速さは $\frac{u}{N+1}$ であるから、その運動エネルギーは

$$\tfrac{1}{2}\, mN(N+1)\, \frac{u^2}{(N+1)^2} = \tfrac{1}{2}mu^2\, \frac{N}{N+1} = \tfrac{1}{2}mu^2\Big(1 - \frac{1}{N+1}\Big).$$

差をとると、

$$\begin{aligned} \text{失われた運動エネルギー} &= \tfrac{1}{2}mu^2 \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} - 1 + \frac{1}{N+1} \right) \\ &= \tfrac{1}{2}mu^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} \right) = \tfrac{1}{2}mu^2 \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。

検算

- $N = 1$（$k = 1$）：質量 m の粒子 1 個が速さ u で質量 m のブロックに当たると、速さ $\frac{1}{2}u$ となり、損失は $\frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{4}mu^2 = \frac{1}{4}mu^2$ で、$\frac{1}{2}mu^2 \cdot \frac{1}{2}$ と一致する。このとき P_2 も速さ $\frac{1}{2}u$ で動くので、決して到達しない。
- $N = 2$（$k = 3$）：公式から損失は $\frac{1}{2}mu^2(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{5}{12}mu^2 \approx 0.4167\, mu^2$ となる。運動を厳密に 1 段階ずつシミュレーションしたところ（位置と衝突時刻は分数で計算）、同じ値が得られ、衝突はちょうど 2 回で、速さ V_n は公式と一致した。さらに、11 までのすべての N について、衝突が N 回であることと損失の公式も確かめられた。
- 単位：損失は質量と速さの 2 乗の積であり、エネルギーとして正しい形をしている。

よくある間違い

- n 番目の粒子の運動量だけを使い、ブロックがすでに $P_1, \ldots, P_{n-1}$ を含んでいることを忘れる（あるいはブロック自身の質量 km を忘れる）。

- 衝突を $N+1$ 回と数える。P_{N+1} はブロックとちょうど同じ速さなので、決して接触しない。
- 損失に $P_{N+1}, P_{N+2}, \ldots$ の運動エネルギーを含めてしまう。これらは決して衝突しないので、何も失わない。

STEP のその先へ

このブロックは、物質を掃き集めながら質量が増えていく物体であり、ロケットや、雲の中を落下する雨粒の仲間である。このような可変質量系（variable-mass system）に対しては、ニュートン（Newton）の第 2 法則を「運動量の変化率は力に等しい」という形で系全体に適用する。これはまさに、私たちが衝突ごとに行ったことである。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、可変質量系とロケットの運動を丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 2012、第 12 問

確率・統計 ・ 条件付き確率

> **STEP II 2012、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q12

鍵となる考え方

スイッチを押すとその状態は**反転する**（toggle）。したがって、廊下にあるプール用のスイッチが最後にオンになっているのは、最初からオンで手を触れられなかった場合か、最初はオフで押された場合のどちらかである。台所の側は、実は見かけ倒しの「おとり」である。確率 $\frac{1}{2}$ でオンであるスイッチは、反転されてもされなくても、確率 $\frac{1}{2}$ でオンのままである。小問 (i) で一つの条件付き確率（conditional probability）が求まれば、7 回の月曜日は二項分布（binomial distribution）に従う試行となり、「最頻値（mode）が 3 である」という条件は、隣り合う二項確率どうしの一組の不等式に帰着される。

解答

小問 (i)

次の事象を定める。

- H：客が廊下にあるプール用のスイッチを押す。よって $\mathrm{P}(H) = \frac{1}{4}$ である。
- A：最初の時点で廊下のスイッチがすべてオンである。よって $\mathrm{P}(A) = p$ である。
- L：最後にプールの照明がついている。

客はスイッチを無作為に選ぶので、H は A と独立（independent）である。

廊下。押した後に廊下のプール用スイッチがオンであるのは、A が起こり H が起こらない場合（オンで手を触れられなかった）か、A が起こらず H が起こる場合（オフで、

反転されてオンになった）のちょうどどちらかのときである。よって

$$\mathrm{P}(\text{最後に廊下のプール用スイッチがオン}) = p\cdot\tfrac{3}{4} + (1-p)\cdot\tfrac{1}{4} = \frac{1+2p}{4}.$$

台所。台所にあるプール用のスイッチは、最初に確率 $\frac{1}{2}$ でオンである。押されなければそのままであり、押されれば反転する。確率 $\frac{1}{2}$ でオフであるスイッチは、反転すると確率 $\frac{1}{2}$ でオンになる。いずれにせよ、客が台所で何をしようと、このスイッチが最後にオンである確率は $\frac{1}{2}$ である。

台所のスイッチの状態と客の台所での選択は、廊下で起こることすべてと独立であるから

$$\mathrm{P}(L) = \frac{1+2p}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1+2p}{8}.$$

条件付き確率を求める。$H\cap L$ が起こるためには、客が廊下のプール用スイッチを押し、そのスイッチが最初はオフであり（押すとオンになるように）、さらに台所のスイッチが最後にオンでなければならない。

$$\mathrm{P}(H\cap L) = \frac{1}{4}\cdot(1-p)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1-p}{8}.$$

したがって

$$\mathrm{P}(H\mid L) = \frac{(1-p)/8}{(1+2p)/8} = \frac{1-p}{1+2p},$$

となり、題意が示された。

小問 (ii)

$q = \dfrac{1-p}{1+2p}$ とおく。各月曜日には照明がついていたことがわかっているので、小問 (i) より、廊下のプール用スイッチが押された確率は q であり、これは週ごとに独立である（客はそれぞれ独立に行動し、初期状態も月曜日ごとに新たに定まる）。よって、スイッチが押された日数 X は

$$X\sim \mathrm{B}(7,q).$$

を満たす。$1-q$ も必要である。

$$1-q = \frac{(1+2p)-(1-p)}{1+2p} = \frac{3p}{1+2p}, \qquad \text{よって} \qquad \frac{q}{1-q} = \frac{1-p}{3p}.$$

（ここで $p>0$ である。$p=0$ ならば $q=1$ であり、確実に $X=7$ となるので、3 が最頻値になることはありえない。）

考えてみよう 「3 が最頻値である」という条件を、計算できる形にするにはどうすればよいか。

隣り合う確率を比べる。$1 \le k \le 7$ に対して

$$\frac{\mathrm{P}(X=k)}{\mathrm{P}(X=k-1)} = \frac{\binom{7}{k}q^k(1-q)^{7-k}}{\binom{7}{k-1}q^{k-1}(1-q)^{8-k}} = \frac{8-k}{k}\cdot\frac{q}{1-q}.$$

因子 $\frac{8-k}{k}$ は k の増加に伴って狭義単調減少するので、確率はこの比が 1 を超えている間は増加し、1 を下回ると減少する。したがって、3 が（ただ一つの）最頻値となるのは、$k=2$ から $k=3$ で確率が増加し、$k=3$ から $k=4$ で確率が減少するとき、かつそのときに限る。

$$\frac{\mathrm{P}(X=3)}{\mathrm{P}(X=2)} = \frac{5}{3}\cdot\frac{q}{1-q} > 1 \qquad \text{かつ} \qquad \frac{\mathrm{P}(X=4)}{\mathrm{P}(X=3)} = \frac{4}{4}\cdot\frac{q}{1-q} < 1.$$

（必要な向きについては、この二つの条件だけで十分である。3 が最頻値ならば、当然 $\mathrm{P}(X=3) > \mathrm{P}(X=2)$ かつ $\mathrm{P}(X=3) > \mathrm{P}(X=4)$ である。）

$\frac{q}{1-q} = \frac{1-p}{3p}$ を代入し、正の量 $3p$ を両辺に掛けると

- 二つ目の条件から $1-p < 3p$、すなわち $p > \frac{1}{4}$ を得る。
- 一つ目の条件から $\frac{5}{3}(1-p) > 3p$、すなわち $5-5p > 9p$ となり、$p < \frac{5}{14}$ を得る。

したがって $\frac{1}{4} < p < \frac{5}{14}$ となり、題意が示された。

検算

- $p=0$ のとき廊下のスイッチはすべてオフなので、照明がつくのはプール用スイッチが押された場合に限る。小問 (i) の式は $\mathrm{P}(H \mid L) = 1$ を与え、確かにそうなっている。$p=1$ のときは、そのスイッチが押されなかった場合に限り照明がつき、式は 0 を与える。
- 端点は $q=\frac{1}{2}$（$p=\frac{1}{4}$ のとき）と $q=\frac{3}{8}$（$p=\frac{5}{14}$ のとき）に対応する。$q=\frac{1}{2}$ では $\mathrm{B}(7,\frac{1}{2})$ が対称なので 3 と 4 が同率となり、$q=\frac{3}{8}$ では $(n+1)q=3$ となって 2 と 3 が同率となる。よって、不等号が狭義であることはまさに正しい。
- 小問 (i) は、すべての初期状態とすべてのスイッチの選び方を分数で厳密に列挙して確認した。小問 (ii) は、刻み幅 $\frac{1}{2800}$ の格子上の p について $\mathrm{B}(7,q)$ の確率を計算して確認した。ただ一つの最頻値が 3 となるのは、ちょうど $\frac{1}{4} < p < \frac{5}{14}$ のときである。

よくある間違い

- すでにオンのスイッチを押すとオフになることを忘れる。廊下の計算では、「オン」に至る二つの経路の両方が必要である。

- 答えは単に $\frac{1}{2}$ なのに、台所を場合分けして計算する。場合分け自体は害はないが、計算ミスを起こしやすい箇所である。
- 小問 (ii) で、二項分布のパラメータとして q ではなく p を使う。照明がついているという条件付けこそが、スイッチが押される確率を $\frac{1}{4}$ から q に変えているのである。

STEP のその先へ

小問 (i) はベイズの定理（Bayes' theorem）の実践例である。観測（照明がついている）によって、客がスイッチを押した確率が $\frac{1}{4}$ から $\frac{1-p}{1+2p}$ へと更新される。小問 (ii) はこの考え方を逆向きに用い、与えられた最頻値と矛盾しない未知パラメータ p の値はどれかを問うている。これは統計的推測（statistical inference）と最尤推定（maximum likelihood estimation）の萌芽である。連続する項の比を用いて最頻値を求める手法は、多くの離散分布（ポアソン分布、超幾何分布）に対して有効である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、条件付き確率とこれらの分布を詳しく扱っている。

解答例

STEP II 2012、第 13 問

確率・統計 ・ ポアソン過程と最近接距離

STEP II 2012、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s2-q13

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.19 節「**平面上のランダムな点**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/spatial-poisson.html

鍵となる考え方

「最寄りのスーパーマーケットまでの距離が y 以上である」という事象は、「選んだ点を中心とする半径 y の円の中にスーパーマーケットが 1 軒もない」という事象とまったく同じであり、その確率はポアソンモデル（Poisson model）から直接わかる。これにより Y の累積分布関数（cumulative distribution function）が得られ、それを微分すれば確率密度関数（density）が得られる。モーメント（moments）はガウス型積分（Gaussian-type integrals）になる。部分積分（integration by parts）を 1 回行えば $\mathrm{E}(Y)$ は仮定してよい積分に帰着し、置換（substitution）$u = y^2$ によって $\mathrm{E}(Y^2)$ は初等的に計算できる。

解答

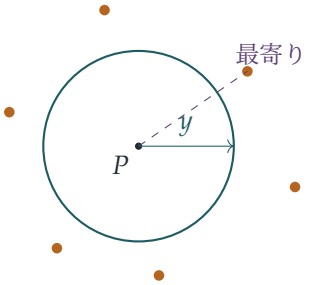
以下では、領域は十分に広く境界効果（edge effects）は無視できるものとする。したがって、問題となるどの y についても、選んだ点を中心とする半径 y の円は領域の内部に収まる。

円の中にスーパーマーケットがない確率

半径 y の円の内部にあるスーパーマーケットの数を N とする。この円の面積は πy^2 であるから、$N \sim \mathrm{Po}(\pi k y^2)$ であり、

$$\mathrm{P}(N = 0) = \mathrm{e}^{-\pi k y^2}.$$

Y の分布



無作為に選んだ点を P とする。最寄りのスーパーマーケットが P から距離 y 以上離れているのは、P を中心とする半径 y の開円板にスーパーマーケットが 1 軒も含まれないときであり、またそのときに限る。よって、$y \geq 0$ に対して

$$\mathrm{P}(Y \geq y) = \mathrm{e}^{-\pi k y^2}, \qquad \text{したがって} \qquad \mathrm{P}(Y < y) = 1 - \mathrm{e}^{-\pi k y^2}.$$

（Y は連続型であるから、$<$ と書いても $\leq$ と書いても違いはない。）これが Y の累積分布関数 $F(y)$ であり、距離は負にならないので $y < 0$ では $F(y) = 0$ である。$y \geq 0$ において微分すると

$$f(y) = F'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(1 - \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\right) = 2\pi k y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2},$$

となり、これが求める確率密度関数である。簡単な確認として、$y \to \infty$ のとき $F(y) \to 1$ であるから、f の積分は 1 になる。

平均

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^\infty y \cdot 2\pi k y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\, \mathrm{d}y.$$

考えてみよう　指数関数の前に y^2 があるとき、与えられた積分をどのように使えばよいだろうか。

被積分関数を $y \times \left(2\pi k y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\right)$ と分ける。2 つ目の因子は $-\mathrm{e}^{-\pi k y^2}$ の導関数である。$u = y$ として部分積分すると

$$\mathrm{E}(Y) = \left[-y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\, \mathrm{d}y = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\, \mathrm{d}y,$$

となる。ここで、$y \to \infty$ のとき $y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2} \to 0$ であり（指数関数のほうが速く減少する）、$y = 0$ でも 0 になることを用いた。次に指数を $-\tfrac{1}{2}x^2$ に合わせる。$\pi k y^2 = \tfrac{1}{2}x^2$、すなわち $y = x/\sqrt{2\pi k}$、$\mathrm{d}y = \mathrm{d}x/\sqrt{2\pi k}$ とおく。積分区間は 0 から ∞ のままであるから

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

分散

$\mathrm{E}(Y^2)$ については、与えられた積分はまったく必要ない。y の奇数乗が現れるので、$u = \pi k y^2$、$\mathrm{d}u = 2\pi k y\, \mathrm{d}y$ と置換できるからである。

$$\mathrm{E}(Y^2) = \int_0^{\infty} y^2 \cdot 2\pi k y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\, \mathrm{d}y = \int_0^{\infty} \frac{u}{\pi k}\, \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{\pi k} \int_0^{\infty} u\, \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{\pi k},$$

ここで $\int_0^{\infty} u\, \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u = 1$ を用いた（部分積分で示せるし、パラメータ 1 の指数分布（exponential distribution）の平均と見ることもできる）。したがって

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \big(\mathrm{E}(Y)\big)^2 = \frac{1}{\pi k} - \frac{1}{4k} = \frac{4 - \pi}{4\pi k},$$

となり、求める結果が得られた。

検算

- **スケーリング。** スーパーマーケットの密度が k 倍になれば、長さは $\sqrt{k}$ 分の 1 に縮むはずである。よって $\mathrm{E}(Y) \propto k^{-1/2}$、$\mathrm{Var}(Y) \propto k^{-1}$ となるべきであり、どちらの答えもこの形をしている。
- **正値性。** $4 - \pi > 0$ であるから分散は正であり、当然そうでなければならない。
- **数値計算。** $k = 1$ として確率密度関数を中点則（midpoint quadrature）で数値積分すると $\mathrm{E}(Y) = 0.5000$、$\mathrm{Var}(Y) = 0.06831$ となり、$(4 - \pi)/(4\pi) \approx 0.06831$ と一致する。ある点の周囲にスーパーマーケットをポアソン分布に従って無作為に配置するシミュレーションを 10^5 回行ったところ、平均 0.4996、分散 0.0681 が得られた。

よくある間違い

- $\mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{e}^{-\pi k y^2}$ と書いてしまう。これは距離 y 以内にスーパーマーケットが *1* **軒もない**確率、すなわち $\mathrm{P}(Y \geq y)$ である。

- $x = \sqrt{2\pi k}\,y$ ではなく $x = \sqrt{\pi k}\,y$ と置換してしまう。すると仮定された $\mathrm{e}^{-x^2/2}$ ではなく e^{-x^2} が現れ、答えが $\sqrt{2}$ 倍ずれる。

STEP のその先へ

ここでのスーパーマーケットは平面上の**ポアソン点過程**（Poisson point process）をなしている。これは「完全な空間的ランダムネス」の基本モデルであり、森の木々、空の星、携帯電話の基地局などのモデルに用いられる。Y の分布は**レイリー分布**（Rayleigh distribution）であり、これは 2 つの成分が独立な正規分布に従うベクトルの長さの分布としても現れる。また、今回の部分積分で明らかになった簡潔な裾の公式 $\mathrm{E}(Y) = \int_0^\infty \mathrm{P}(Y \geq y)\,\mathrm{d}y$ は、任意の非負の確率変数について成り立つ。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、ポアソン過程やこうした裾の積分の考え方が扱われている。

解答例

STEP III 2012、第 1 問

純粋数学 ・ 非線形微分方程式

STEP III 2012、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s3-q1

鍵となる考え方

どちらの微分方程式（differential equation）も二階（second order）かつ非線形（non-linear）であり、決まった解法はない。工夫の要点は、n をうまく選ぶことで、$\mathrm{d}z/\mathrm{d}x$ に現れる括弧の部分を各方程式の左辺に一致させられることである。そうすると方程式は「$\mathrm{d}z/\mathrm{d}x$ がただちに積分できる式に等しい」ことを述べていることになり、そこから変数分離（separation of variables）できる一階（first order）の方程式が得られる。

解答

準備の結果

$y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$、$y'' = \mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$ と書く。積の微分法（product rule）を用い、y^n と $(y')^2$ には合成関数の微分法（chain rule）を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= ny^{n-1}y'\,(y')^2 + y^n \cdot 2y'y'' \\ &= y^{n-1}y'\big(n(y')^2 + 2yy''\big),\end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。

小問 (i)

左辺は $(y')^2 + 2yy''$ であり、これは $n = 1$ のときの括弧の部分である。そこで $z = y(y')^2$ とおく。すると

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y'\big((y')^2 + 2yy''\big) = y'\sqrt{y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\tfrac{2}{3}y^{3/2}\right).$$

積分すると $y(y')^2 = \frac{2}{3}y^{3/2} + C$ である。$x = 0$ では $y = 1$、$y' = 0$ であるから $0 = \frac{2}{3} + C$ となり、

$$y\,(y')^2 = \tfrac{2}{3}\big(y^{3/2} - 1\big). \qquad (*)$$

考えてみよう $(*)$ からわかるのは $(y')^2$ だけである。平方根の符号はどちらをとればよいか。また、両辺をともに 0 にする $y \equiv 1$ は解になりうるか。

定数関数 $y \equiv 1$ はもとの方程式の解では**ない**。代入すると $0 = 1$ となってしまうからである。実際、方程式に $x = 0$ を代入すると $0 + 2y''(0) = 1$ となるので $y''(0) = \frac{1}{2} > 0$ である。したがって y は $x = 0$ で極小値をとり、小さな $x > 0$ に対して $y' > 0$ である。また、方程式は $x \mapsto -x$ で不変であるから、解は偶関数（even function）であり、$x > 0$、$y' > 0$、$y > 1$ の範囲で考えればよい。

$(*)$ に y を掛け、正の平方根をとって変数を分離すると、

$$\frac{\sqrt{y}\,y'}{\sqrt{y^{3/2} - 1}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

$w = y^{3/2} - 1$ とおくと $\mathrm{d}w = \frac{3}{2}y^{1/2}\,\mathrm{d}y$ である。左辺は $\frac{2}{3}w^{-1/2}\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$ となり、$x = 0$（このとき $w = 0$）から積分すると、

$$\tfrac{4}{3}\sqrt{w} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,x \quad \Longrightarrow \quad w = \tfrac{9}{16}\cdot\tfrac{2}{3}\,x^2 = \tfrac{3}{8}x^2.$$

よって $y^{3/2} = \frac{3}{8}x^2 + 1$ であり、偶関数であることから $x < 0$ でもこれが成り立つ。したがって

$$y = \big(\tfrac{3}{8}x^2 + 1\big)^{2/3},$$

となり、示された。

直接確かめてみる。$u = \frac{3}{8}x^2 + 1$ とおくと $y' = \frac{2}{3}u^{-1/3}\cdot\frac{3}{4}x = \frac{1}{2}xu^{-1/3}$ であるから、$y(y')^2 = u^{2/3}\cdot\frac{1}{4}x^2u^{-2/3} = \frac{1}{4}x^2$ である。一方 $\frac{2}{3}(y^{3/2} - 1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}x^2 = \frac{1}{4}x^2$ であるから、$(*)$ は成り立つ。

小問 (ii)

今度は左辺が $(y')^2 - yy''$ である。$n(y')^2 + 2yy''$ がこれの定数倍になる必要があるので $n : 2 = 1 : -1$、すなわち $n = -2$ である。$z = y^{-2}(y')^2$ とおく（y は 1 の近くにあり 0 ではないので問題ない）と、

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y^{-3}y'\big(-2(y')^2 + 2yy''\big) = -2y^{-3}y'\big((y')^2 - yy''\big) = -2y^{-3}y'\,(-y^2) = \frac{2y'}{y},$$

となる。ここで方程式を $(y')^2 - yy'' = -y^2$ の形で用いた。積分すると $z = 2\ln y + C$ であり、$x = 0$ とすると $0 = 0 + C$ である。よって

$$\left(\frac{y'}{y}\right)^2 = 2\ln y.$$

$v = \ln y$ とおくと $v' = y'/y$ であり、方程式は $(v')^2 = 2v$、$v(0) = 0$ となる。

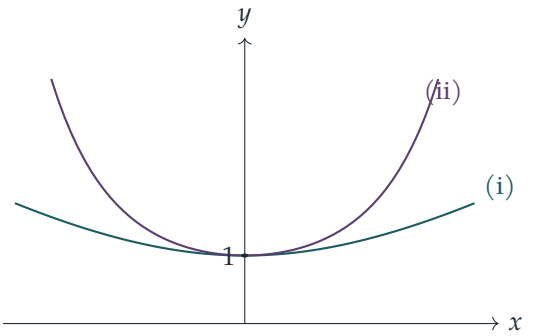
小問 (i) と同様に、$v \equiv 0$（すなわち $y \equiv 1$）はこの一階の方程式を満たすが、もとの方程式は満たさない。代入すると $1 = 0$ となってしまうからである。$x = 0$ でもとの方程式から $0 - y''(0) + 1 = 0$ となるので $y''(0) = 1 > 0$ である。方程式はやはり $x \mapsto -x$ で不変であるから、$v' > 0$ となる $x > 0$ の範囲で考える。すると

$$\frac{v'}{\sqrt{2v}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{2v} = x \quad \Longrightarrow \quad v = \tfrac{1}{2}x^2,$$

となり、偶関数であることからこれはすべての x で成り立つ。したがって

$$y = \mathrm{e}^{x^2/2}.$$

確認しよう。$y' = xy$、$y'' = (1 + x^2)y$ であるから、$(y')^2 - yy'' + y^2 = y^2\left(x^2 - 1 - x^2 + 1\right) = 0$ である。また $y(0) = 1$、$y'(0) = 0$ も成り立つ。



検算

- どちらの解も偶関数であり、$y''(0)$ の値から予想されるとおり、$x = 0$ で最小値 1 をとる。
- 小問 (ii) にはもっと速い方法がある。$y = \mathrm{e}^v$ を方程式に直接代入すると $y' = v'\mathrm{e}^v$、$y'' = (v'' + (v')^2)\mathrm{e}^v$ となり、すべてが打ち消し合って $v'' = 1$ が残る。よってただちに $v = \frac{1}{2}x^2$ が得られる。
- 数値的には、(i) を $y(0) = 1$、$y'(0) = 0$ からルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で解くと $y(2) \approx 1.842016$ となり、$(\frac{5}{2})^{2/3}$ と一致する。(ii) では $y(1) \approx 1.648721 = \mathrm{e}^{1/2}$ となる。

よくある間違い

- z の積分定数（constant of integration）を忘れること。小問 (i) では初期条件により積分定数は 0 でなく、$C = -\frac{2}{3}$ である。
- 小問 (ii) で類推から $n = 1$ を選んでしまうこと。$(y')^2$ と yy'' の係数の比が一致しなければならず、そのためには $n = -2$ でなければならない。
- 一階の方程式から得られる $y \equiv 1$ を、もとの方程式で確かめずに解として認めてしまうこと。

STEP のその先へ

ここで用いた方法は、二階の方程式に対する**積分因子**（integrating factor）である。$(y')^2 + 2yy''$ に y' を掛けると完全な導関数の形になる。これは、$\ddot{x} = -\omega^2 x$ に $\dot{x}$ を掛けるとエネルギー保存則（conservation of energy）が得られるのとまったく同じである。今回の方程式のように x を陽に含まない方程式は、$p = y'$ を y の関数とみなすことで、つねに一階の方程式に帰着できる。$y \equiv 1$ についての懸念は、解の非一意性（non-uniqueness）の一端を垣間見せている。$v' = \sqrt{2v}$ は $v = 0$ においてリプシッツ（Lipschitz）条件を満たさないのである。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）では、階数低下法（reduction of order）と解の存在と一意性の定理（existence and uniqueness theorem）の両方が扱われている。

解答例

STEP III 2012、第 2 問

純粋数学 • 無限積と級数

STEP III 2012、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s3-q2

鍵となる考え方

(i) の積は、平方の差（difference of two squares）の公式によって括弧が一つずつ畳み込まれていくので、望遠鏡式に打ち消し合い（telescoping）、非常に簡単な形になる。$\frac{1}{1-x}$ を無限積（infinite product）として表してしまえば、対数（logarithm）をとることで積は和に変わり、その和を項別に微分すれば分数の級数（series）が得られる。(ii) は同じ技法が姿を変えたものである。$1+x+x^2$ は $1-t$ の形の二つの式の商であるから、(i) の結果をそれぞれに適用できる。

解答

以下では常に $|x|<1$ とし、問題文が認めているとおり収束（convergence）については気にしないことにする。

小問 (i)

毎回 $(1-a)(1+a)=1-a^2$ を用いて、左から括弧をまとめていく：

$$\begin{aligned}(1-x)(1+x)&=1-x^2,\\(1-x^2)(1+x^2)&=1-x^4,\\(1-x^4)(1+x^4)&=1-x^8,\end{aligned}$$

以下同様である。各段階で指数は 2 倍になり、最後の括弧 $1+x^{2^n}$ が $1-x^{2^n}$ を $1-x^{2^{n+1}}$ に変える。よって

$$(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})=1-x^{2^{n+1}}.$$

$x \neq 1$ であるから $1-x$ で割ることができて

$$(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n}) = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{2^{n+1}}}{1-x},$$

これを整理すれば、求める $\frac{1}{1-x}$ の表示が得られる。

ここで $n \to \infty$ とする。$|x| < 1$ より $x^{2^{n+1}} \to 0$ であるから、剰余項は消えて

$$\frac{1}{1-x} = \prod_{r=0}^{\infty}(1+x^{2^r}).$$

各因数は正であり（$x^{2^r} > -1$ だからである）、$1-x$ も正であるから、対数をとってよい。積の対数は対数の和である：

$$-\ln(1-x) = \sum_{r=0}^{\infty}\ln\left(1+x^{2^r}\right),$$

両辺に -1 を掛ければ、これが求める結果である。

考えてみよう 対数の和から分数の和へは、どうすれば移れるだろうか？

両辺を x で微分する。合成関数の微分法（chain rule）により、$\ln(1+x^{2^r})$ の導関数（derivative）は

$$\frac{2^r x^{2^r-1}}{1+x^{2^r}}.$$

左辺では $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\ln(1-x)\right) = \frac{1}{1-x}$ である。項別微分（term-by-term differentiation）を行うと（これが、無視してよいとされた収束の問題である）

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{2^r x^{2^r-1}}{1+x^{2^r}} = \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \cdots,$$

が得られる。ここで書き出した項は $r = 0, 1, 2$ のものである。これが求める級数である。

小問 (ii)

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2) = 1+2x$ であるから、左辺は $\ln(1+x+x^2)$ の導関数である。そこで $1+x+x^2$ に対する対数の和の表示を探す。因数分解（factorisation）$1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$ からそれが得られる：

$$\ln(1+x+x^2) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x).$$

$|x^3| < 1$ でもあるから、(i) の対数に関する結果は x を x^3 に置き換えても成り立つ。$y_r = x^{2^r}$ とおくと $(x^3)^{2^r} = y_r^3$ となるので

$$\ln(1+x+x^2) = -\sum_{r=0}^{\infty}\ln\left(1+y_r^3\right) + \sum_{r=0}^{\infty}\ln\left(1+y_r\right) = -\sum_{r=0}^{\infty}\ln\frac{1+y_r^3}{1+y_r}.$$

立方の和は $1+y^3=(1+y)(1-y+y^2)$ と因数分解できるので、各分数は $1-y_r+y_r^2$ となり

$$\ln(1+x+x^2)=-\sum_{r=0}^{\infty}\ln\left(1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}\right).$$

($1-y+y^2=(y-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ はつねに正であるから、これらの対数は意味をもつ。)

考えてみよう 微分するとき、マイナス符号はどこへ行くのだろうか？

合成関数の微分法により

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}\right)=\frac{-2^r x^{2^r-1}+2^{r+1}x^{2^{r+1}-1}}{1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}}=-\frac{2^r x^{2^r-1}\left(1-2x^{2^r}\right)}{1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}},$$

となり、このマイナス符号が和の前のマイナス符号と打ち消し合う。両辺を項別に微分すると

$$\frac{1+2x}{1+x+x^2}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{2^r x^{2^r-1}\left(1-2x^{2^r}\right)}{1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}}.$$

最初の 3 項は

$$\begin{aligned}
r=0:&\quad \frac{1-2x}{1-x+x^2},\\
r=1:&\quad \frac{2x(1-2x^2)}{1-x^2+x^4}=\frac{2x-4x^3}{1-x^2+x^4},\\
r=2:&\quad \frac{4x^3(1-2x^4)}{1-x^4+x^8}=\frac{4x^3-8x^7}{1-x^4+x^8},
\end{aligned}$$

であり、これはまさに示すよう求められた級数である。

別解。 恒等式 $(1+y+y^2)(1-y+y^2)=1+y^2+y^4$ を用いると、(i) とまったく同様に、$1+x+x^2$ に対する望遠鏡式の積が直接得られる：$1+x+x^2=\left(1+x^{2^{n+1}}+x^{2^{n+2}}\right)/\prod_{r=0}^{n}\left(1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}\right)$ であり、分子は 1 に近づく。

検算

- $x=0$ とおくと、いずれの級数も両辺が 1 に等しい。
- $x=\frac{1}{2}$ のとき、(ii) の左辺は $\frac{2}{7/4}=\frac{8}{7}\approx 1.142857$ である。右辺の最初の 4 項の和は 1.142369 であり、累乗 x^{2^r} が急速に小さくなるので、誤差も非常に速く小さくなる。
- 望遠鏡式に畳み込んだ積は分数を用いて厳密に確かめ、二つの級数と対数の恒等式は $(-0.95, 0.95)$ 内の 1000 個の無作為な x について、30 項を用いて数値的に確かめた。

よくある間違い

- 合成関数の微分法で因数を落とすこと：x^{2^r} の導関数は $2^r x^{2^r-1}$ であり、$2^r x^{2^r}$ ではない。
- (ii) で全体の符号を誤ること：$1-y+y^2$ の導関数は $-1+2y$ であり、このマイナスこそが和の前のマイナスを打ち消すのである。

STEP のその先へ

積 $\prod(1+x^{2^r})$ は、すべての正の整数が相異なる 2 の累乗の和としてただ一通りに表せることを述べている。これは 2 進法を母関数（generating function）の形で表したものである。「収束を無視する」ことの裏には本物の問題が隠れている。無限積の対数をとってよいのはどのようなときか、また級数を項別に微分してよいのはどのようなときか。解析学の最初の講義では、これらに一様収束（uniform convergence）を用いて答える。$|x| \le c < 1$ 上では、ここに現れたものはすべて一様収束する。わかりやすい解説としては Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照のこと。

解答例

STEP III 2012、第 3 問

純粋数学 ・ 接する曲線と 4 次式

STEP III 2012、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s3-q3

鍵となる考え方

第 2 式に $y = 4 - x^2$ を代入すると x の 4 次方程式（quartic）が得られ、その解が交点の x 座標である。「接する」とは**重解**（repeated root）をもつことを意味する。m と k を未知数として扱う代わりに、すべてを接点の x 座標 a で表すことにする。すると m、k およびほかのすべての交点が a の簡単な関数になることがわかる。これにより 4 つの概形がそれぞれどうなるべきかが正確にわかり、小問 (ii) は $m = 12$ という特別な場合にすぎない。

解答

準備：2 曲線はどこで接しうるか

2 曲線を $C_1 : y = 4 - x^2$、$C_2 : mx = k - y^2$ とおく。C_1 はおなじみの上に凸の放物線（parabola）で、$(\pm 2, 0)$ と $(0, 4)$ を通る。C_2 は $x = (k - y^2)/m$ であり、x 軸に関して対称で、（$m > 0$ より）左に開き、頂点が $(k/m, 0)$ の放物線である。$k > 0$ のときは y 軸と $(0, \pm\sqrt{k})$ で交わり、$k < 0$ のときはまったく交わらない。

C_1 上の点はすべて $(x, 4 - x^2)$ と表せるので、その点が C_2 上にあるのは

$$F(x) = x^4 - 8x^2 + mx + 16 - k = 0,$$

のとき、かつそのときに限る。ここで $(4 - x^2)^2 = x^4 - 8x^2 + 16$ を用いた。

? **考えてみよう** なぜ「接する」ことが、F が重解をもつことを意味するのか？

共有点において、C_1 の方向ベクトルは $(1, -2x)$ であり、C_2（$mx + y^2$ の等高線（level

curve)）の法線ベクトル（normal）は $(m, 2y)$ である。2曲線が接するのは方向ベクトルが法線ベクトルと垂直なとき、すなわち $m - 4xy = 0$、つまり $m - 4x(4 - x^2) = 0$ のときである。ところが $F'(x) = 4x^3 - 16x + m$ はちょうどこの式である。よって2曲線が $x = a$ で接するのは、$F(a) = F'(a) = 0$、すなわち重解となるときであり、かつそのときに限る。

$F'(a) = 0$ より $m = 4a(4 - a^2)$ を得る。これを $F(a) = 0$ に代入すると

$$k = a^4 - 8a^2 + 4a^2(4 - a^2) + 16 = -3a^4 + 8a^2 + 16 = (4 - a^2)(3a^2 + 4),$$

となり、したがって

$$\frac{k}{m} = \frac{3a^2 + 4}{4a}.$$

である。$m > 0$ であるから、$0 < a < 2$ または $a < -2$ でなければならない。2重の因数をくくり出すと

$$F(x) = (x - a)^2\left(x^2 + 2ax + 3a^2 - 8\right),$$

となる。これは展開すれば確かめられる：x^3 の項は打ち消し合い、x^2 の係数は $3a^2 - 8 - 4a^2 + a^2 = -8$、$x$ の係数は $2a^3 - 2a(3a^2 - 8) = 4a(4 - a^2) = m$、定数項は $a^2(3a^2 - 8) = 16 - k$ である。2次の因数の判別式（discriminant）は $8(4 - a^2)$ なので、ほかの交点が存在するのは $0 < a < 2$ のときに限る。それらは次の位置にある：

$$x_\pm = -a \pm \sqrt{8 - 2a^2}.$$

これで4つの場合を a によって分類できる：

- $k < 0$ となるのは $a^2 > 4$ のとき、かつそのときに限るので、$a < -2$ である。
- $0 < a < 2$ のとき $k - 16 = a^2(8 - 3a^2)$ であるから、$k > 16$ となるのは $a < \sqrt{8/3}$ のとき、かつそのときに限る。
- $0 < a < 2$ のとき、$\frac{k}{m} < 2$ となるのは $3a^2 - 8a + 4 < 0$、すなわち $(3a - 2)(a - 2) < 0$、すなわち $a > \frac{2}{3}$ のとき、かつそのときに限る。

したがって (a) は $a < -2$、(c) は $0 < a < \frac{2}{3}$、(d) は $\frac{2}{3} < a < \sqrt{8/3}$、(b) は $\sqrt{8/3} < a < 2$ に対応する。（$0 < k < 16$ かつ $k/m > 2$ となる接し方は存在しない。そのためこの場合は挙げられていない。）

小問 (i)

どの場合も、座標軸との交点は $(\pm 2, 0)$ と $(0, 4)$ が C_1 のもの、$(k/m, 0)$ および（$k > 0$ のときは）$(0, \pm\sqrt{k})$ が C_2 のものである。

(a) ここでは $a < -2$ なので、2曲線は第3象限の点 $(a, 4 - a^2)$ で接し、それ以外では交わらない。頂点は $k/m = -(3a^2 + 4)/(4|a|)$ にあり、$(3|a| - 2)(|a| - 2) > 0$ である

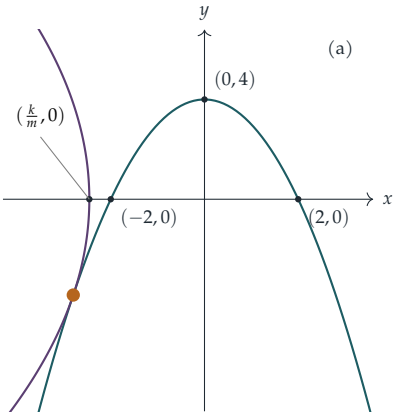
からこれは -2 より小さい。よって C_2 は全体が $(-2,0)$ より左にあり、その下側の枝は C_1 の左側の枝に寄りかかるように接する。

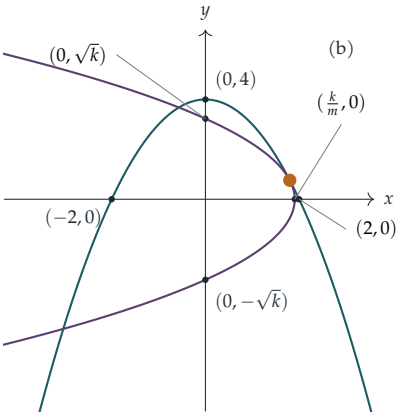
(b) 今度は $\sqrt{8/3} < a < 2$ なので、接点は第1象限の $(2,0)$ の近くにある。頂点は $\sqrt{3} \le k/m < 2$ を満たし(相加平均・相乗平均の不等式(AM–GM)より $3a^2+4 \ge 4\sqrt{3}\,a$)、また $\sqrt{k} < 4$ であるから、C_2 の頂点と2つの y 切片はいずれも C_1 の下側にある。上側の枝は C_1 に下から接し、その後 x_+ でこれと交わる。ここで $-2 < x_+ < 0$ である(第2象限の点)。下側の枝は第3象限の $x_- < -2$ で C_1 と交わる。

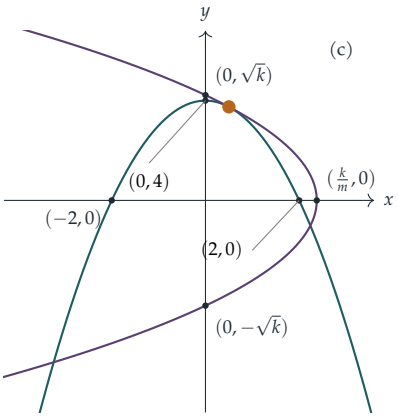
(c) ここでは $0 < a < \frac{2}{3}$ である。頂点は $(2,0)$ より右にあり、$\sqrt{k} > 4$ であるから、C_2 は C_1 の上部を包み込むように回り込み、第1象限で外側から接する。さらに $x_+ > 2$ である。$\sqrt{8-2a^2} > 2+a \iff (3a-2)(a+2) < 0$ だからである。また $x_- < -2$ である。よって下側の枝は C_1 と第4象限で交わり、さらに第3象限でも交わる。

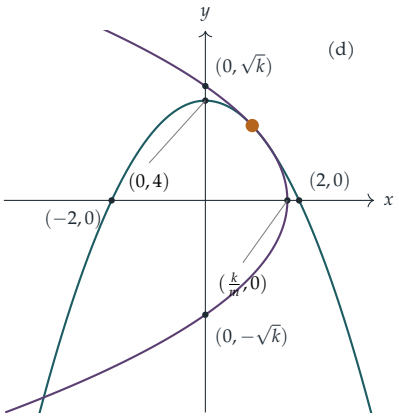
(d) ここでは $\frac{2}{3} < a < \sqrt{8/3}$ である。頂点は0と2の間で C_1 の下側にあるが、$\sqrt{k} > 4$ であるから、上側の枝は $(0,4)$ の上を通る。上側の枝は第1象限で C_1 に接し、同じく第1象限の $x_+ \in (0,2)$ で交わりもする($x_+ > 0 \iff a^2 < \frac{8}{3}$ であるから)。下側の枝は $x_- < -2$ で交わる。

どの場合も $x_- < -2$ である($0 < a < 2$ のとき)。$a + \sqrt{8-2a^2} > 2$ だからである($\sqrt{8-2a^2} > 2-a$ の両辺を2乗すればよい)。概形はそれぞれ $a = -2.8,\ 1.8,\ 0.5,\ 1$ として描いている。C_1 は青緑、C_2 は紫、接点は琥珀色で示す。









小問 (ii)

$m=12$ とし、$y=4-x^2$ を $12x=k-y^2$ に代入すると $12x=k-16+8x^2-x^4$ となる。すなわち

$$x^4-8x^2+12x+16-k=0,$$

であり、これが示すべき式である。

接点 $x=a$ においてこの 4 次方程式は重解をもつ（上の囲みを参照）ので、その導関数（derivative）もそこで 0 になる：

$$4a^3-16a+12=0 \quad\Longrightarrow\quad a^3-4a+3=0.$$

$a=1$ は解であるから $a^3-4a+3=(a-1)(a^2+a-3)$ となり、したがって

$$a=1 \qquad \text{または} \qquad a=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}.$$

k を求めるため、4 次方程式に $x=a$ を代入し、$a^3=4a-3$、したがって $a^4=4a^2-3a$ を用いて次数を下げる：

$$k=a^4-8a^2+12a+16=(4a^2-3a)-8a^2+12a+16=-4a^2+9a+16.$$

3 つの場合を順に調べる：

- $a=1$ のとき：$k=21$ なので $k>16$ かつ $k/m=\frac{7}{4}<2$ である。これは場合 **(d)** である。
- $a=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{13})\approx 1.303$ のとき：$a^2=3-a$ であるから $k=-4(3-a)+9a+16=13a+4=\frac{1}{2}(13\sqrt{13}-5)\approx 20.94$ である。これが 16 を超えるのは $13\sqrt{13}>37$（2 乗すると $2197>1369$）だからであり、24 より小さいのは $13\sqrt{13}<53$（$2197<2809$）だからである。よって $k>16$ かつ $k/m<2$ であり、これも場合 **(d)** である。

- $a = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{13}) \approx -2.303$ のとき：$k = 13a + 4 = -\frac{1}{2}(5+13\sqrt{13}) \approx -25.94 < 0$ である。これは場合 **(a)** である。

よって現れる概形は (a) と (d) のみである。これは上で行った a による分類と一致する：1 と 1.303 は $(\frac{2}{3}, \sqrt{8/3}) \approx (0.667, 1.633)$ に含まれ、$-2.303 < -2$ である。なお、$a^3 - 4a + 3 = 0$ は $m = 4a(4-a^2)$ において $m = 12$ としたものにほかならない。

2つの (d) の図はわずかに異なる。$a = 1$ のとき、ほかの交点は $x = -1 \pm \sqrt{6}$ であり、$x \approx 1.45$ での交点は接点の**右側**にあって、上側の枝は C_1 に上から接する（概形の図のとおり）。$a \approx 1.303$ のときは交点が $x \approx 0.84$ にあって接点の左側にあり、上側の枝は下から接する。

検算

- $m = 12$、$k = 21$ のとき、4次式は $(x-1)^2(x^2+2x-5)$ と因数分解される。展開すると $x^4 - 8x^2 + 12x - 5$ となり、これは $16 - k = -5$ とした4次式である。
- $(1,3)$ における C_1 の傾きは -2 であり、$12x = 21 - y^2$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -6/y = -2$ となる。よって2曲線は確かにそこで接している。
- 数値的にも、ランダムな a を $(0,2)$ 内および $a < -2$ の範囲から選ぶと、公式 $m = 4a(4-a^2)$ と $k = (4-a^2)(3a^2+4)$ により $F(a)$ と $F'(a)$ が0になり、場合の境界は $a = \frac{2}{3}$ と $a = \sqrt{8/3}$ に現れる。$a \approx 1.3028$ のとき、数値的な解の探索によりほかの交点が $x \approx 0.8433$ と $x \approx -3.4488$ に見つかり、$x_\pm$ の予測と一致する。

よくある間違い

- 4次方程式の解がただ1つであることを要求してしまう。「ちょうど1回接する」はほかの交点の存在を許す。実際、場合 (d) で $m = 12$ のときには交点が2つある。
- C_2 を右に開くように描いてしまう。$m > 0$ のとき、$x = (k - y^2)/m$ は $|y|$ が大きくなるにつれて減少する。
- (a) において、C_2 が y 切片をもたないことを忘れたり、頂点を -2 と 0 の間に置いたりしてしまう。頂点は -2 より左になければならない。

STEP のその先へ

配置を接点 a で表すという考え方は、**判別式**と**包絡線**（envelope）の世界を初めて垣間見るものである。F が重解をもつような (m,k) 全体の集合は曲線 $\big(4a(4-a^2),\,(4-a^2)(3a^2+4)\big)$ であり、この曲線を横切ると実数の交点の個数が 2 だけ変化する。これは平面曲線の代数幾何学（algebraic geometry）の入り口であり、また解がパラメータとともにどのように変化するかを調べるのに用いられる特異点（「カタストロフィー」）理論（singularity theory, catastrophe theory）の入り口でもある。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、同じ趣旨の STEP 形式の曲線の問題がさらに多く収められている。

解答例

STEP III 2012、第 4 問

純粋数学 • 無限級数の和

STEP III 2012、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s3-q4

鍵となる考え方

すべては二つの標準的な級数（series）、$\sum x^n/n! = \mathrm{e}^x$ と $\sum x^n/n = -\ln(1-x)$ に基づいている。小問 (i) では、n の各多項式を $n!$ と約分できる形に書き直すことが工夫の要である。つまり、n の累乗ではなく、$n(n-1)$ や $n(n-1)(n-2)$ のような積を用いる。小問 (ii) では、部分分数分解（partial fractions）によって扱いにくい有理式の因子を $1/(n+k)$ の形の項に分ける。そしてそれぞれが、添字をずらした対数の級数になる。

解答

小問 (i)

二つの事実ですべてが片づく。第一に、$\sum_{n=0}^{\infty} 1/n! = \mathrm{e}$ であるから、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e} - 1.$$

第二に、任意の整数 $k \geq 1$ に対して、項 $n(n-1)\cdots(n-k+1)/n!$ は $n < k$ のとき 0 となり、$n \geq k$ のとき $1/(n-k)!$ に等しい。よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} = \mathrm{e} \qquad (k \geq 1). \tag{$*$}$$

ここに現れる級数はすべて絶対収束（absolute convergence）する（いずれも n の多項式を $n!$ で割ったものである）から、自由に分けたり組み合わせたりしてよい。

一つ目の和。 $n+1=n+1$ であるから、$k=1$ として $(*)$ を用いると

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}=\mathrm{e}+(\mathrm{e}-1)=2\mathrm{e}-1,$$

となり、示すべき式が得られる。

二つ目の和。 $(n+1)^2=n^2+2n+1=n(n-1)+3n+1$ と書く。すると $k=2$ と $k=1$ の場合の $(*)$ から

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}=\mathrm{e}+3\mathrm{e}+(\mathrm{e}-1)=5\mathrm{e}-1,$$

となり、示すべき式が得られる。

三つ目の和。

考えてみよう $(2n-1)^3$ を下降する積 $n(n-1)(n-2)$、$n(n-1)$、n で表すにはどうすればよいか。

展開すると $(2n-1)^3=8n^3-12n^2+6n-1$ である。次に

$$n^3=n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n,\qquad n^2=n(n-1)+n.$$

を用いる。これらは右辺を展開するか、$n=0,1,2,3$ を代入すれば確かめられる。代入すると

$$\begin{aligned}(2n-1)^3&=8\big[n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n\big]-12\big[n(n-1)+n\big]+6n-1\\&=8\,n(n-1)(n-2)+12\,n(n-1)+2n-1.\end{aligned}$$

(簡単な確認：$n=1$ では両辺とも 1、$n=2$ では両辺とも 27 である。) ここで $k=3,2,1$ の場合の $(*)$ から

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^3}{n!}=8\mathrm{e}+12\mathrm{e}+2\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=21\mathrm{e}+1.$$

小問 (ii)

部分分数分解。 分子と分母の次数が等しいので、まず割り算を行う。

$$\frac{n^2+1}{(n+1)(n+2)}=1-\frac{3n+1}{(n+1)(n+2)}.$$

$\dfrac{3n+1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{A}{n+1}+\dfrac{B}{n+2}$ とおくと、隠蔽法(cover-up rule)により $A=\dfrac{-2}{1}=-2$ ($n=-1$ において)、$B=\dfrac{-5}{-1}=5$ ($n=-2$ において) を得る。したがって

$$\frac{n^2+1}{(n+1)(n+2)}=1+\frac{2}{n+1}-\frac{5}{n+2}.$$

三つの部分。 $x=\frac{1}{2}$ とおき、$|x|<1$ で成り立つ $-\ln(1-x)=\sum_{m=1}^{\infty} x^m/m$ を用いる。以下の三つの級数はいずれも収束する（項は少なくとも 2^{-n} と同じ速さで小さくなる）から、和を分けることは正当である。

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = 2,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} = \frac{-\ln(1-x)}{x} = 2\ln 2,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2} = \frac{1}{x^2}\sum_{m=2}^{\infty} \frac{x^m}{m} = \frac{-\ln(1-x)-x}{x^2} = 4\left(\ln 2-\tfrac{1}{2}\right) = 4\ln 2-2.$$

2行目と3行目では、それぞれ $m=n+1$、$m=n+2$ とおいた。3行目は、対数の級数全体からその $m=1$ の項 x を取り除いたものである。

考えてみよう 三つ目の部分で余分な $-x$ が必要なのはなぜか。

$m=n+2$ と添字をずらすと和は $m=2$ から始まるので、この級数は $-\ln(1-x)$ から初項が欠けたものになる。これを忘れるのが、ここで最も間違えやすい点である。

まとめる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2+1)2^{-n}}{(n+1)(n+2)} = 2+2(2\ln 2)-5(4\ln 2-2) = 12-16\ln 2.$$

検算

- $n=60$ までの部分和（partial sums）は、(i) の三つの和について 4.436564、12.591409、58.083918 となる。これらは計算機の精度の範囲で $2e-1$、$5e-1$、$21e+1$ と一致する。
- (ii) では $12-16\ln 2\approx 0.909645$ であり、部分和と一致する。最初の数項は $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{5}{48}$、$\frac{1}{16}$ であるから、合計が1を少し下回るのはもっともらしい。
- (ii) の答えは正でなければならないが、実際そうなっている：$16\ln 2\approx 11.09<12$。

よくある間違い

- $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n! = e$ としてしまう。これは $n=0$ の項が欠けていることを忘れている。
- $\sum n^2/n!$ を $\sum n/(n-1)!$ と書いたところで止まってしまう。さらに $n=(n-1)+1$ と分ける必要がある。
- (ii) で、$\sum x^n/(n+2)$ の添字をずらすときに $-x$ を落としてしまう。

STEP のその先へ

下降する積 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ は下降階乗（falling factorial）と呼ばれ、多項式をこれらで表すには第 2 種スターリング数（Stirling numbers of the second kind）を用いる。$(*)$ の和は、平均 1 のポアソン分布（Poisson distribution）の k 次の階乗モーメント（factorial moment）が 1 であることを表している。たとえば $\sum n^k/n!$ が e と第 k ベル数（Bell number）の積になるのはこのためである。ここでの和の組み替えは絶対収束によって正当化されるが、これは大学 1 年の解析学の重要なテーマである。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照せよ。確率論の側面については、Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）を参照せよ。

解答例

STEP III 2012、第 5 問

純粋数学 • 2 次曲線上の有理点

STEP III 2012、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s3-q5

鍵となる考え方

(i)(b) の恒等式（identity）は、姿を変えた回転（rotation）である。点 $(\cos\theta + \sqrt{m}\sin\theta,\ \sin\theta - \sqrt{m}\cos\theta)$ は、点 $(1, -\sqrt{m})$ を角 θ だけ回転して得られる点であり、したがって半径 $\sqrt{1+m}$ の円の上にとどまる。$\cos\theta$ と $\sin\theta$ がともに有理数（(i)(a) で得た $\frac{3}{5}$ と $\frac{4}{5}$ など）であれば、この回転は「よい」点を別の「よい」点に移す。(ii) はすべて同じ手法を、適当な整数点から出発して使うものであり、双曲線（hyperbola）の場合には回転をその双曲線版に取りかえればよい。

解答

小問 (i)

(a) 点 $(1,0)$ は $x^2 + y^2 = 1$ 上の整数有理点（integer rational point）である。非整数のものを得るには、辺の比が 3,4,5 の三角形を用いる。$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9+16}{25} = 1$ であるから、$\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ が条件を満たし、どちらの座標も整数ではない。

(b) 点 $(1,1)$ は $x^2 + y^2 = 2$ 上の整数有理点である。

展開すると、交差項は $+2\sqrt{m}\sin\theta\cos\theta$ と $-2\sqrt{m}\sin\theta\cos\theta$ となって打ち消し合うので、

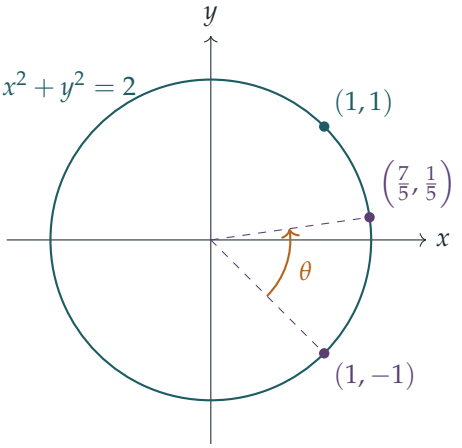
$$\begin{aligned}(\cos\theta + \sqrt{m}\sin\theta)^2 + (\sin\theta - \sqrt{m}\cos\theta)^2 &= \cos^2\theta + m\sin^2\theta + \sin^2\theta + m\cos^2\theta \\ &= (1+m)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 1 + m.\end{aligned}$$

$m = 1$ とすると右辺は 2 となる。さらに $\cos\theta = \frac{3}{5}$、$\sin\theta = \frac{4}{5}$ となる θ を選ぶ（$\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

は単位円（unit circle）上にあるので、これは可能である)。すると

$$x = \tfrac{3}{5} + \tfrac{4}{5} = \tfrac{7}{5}, \qquad y = \tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{5} = \tfrac{1}{5}$$

は $x^2 + y^2 = 2$ を満たす。実際、$\frac{49+1}{25} = 2$ である。よって $\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$ は $x^2 + y^2 = 2$ 上の非整数の有理点である。



図は何が起きたかを示している。$\cos\theta = \frac{3}{5}$、$\sin\theta = \frac{4}{5}$ である角 θ だけ $(1, -1)$ を反時計回りに回転すると、$\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$ に移る。

小問 (ii)

(a) $1^2 + (\sqrt{2})^2 = 3$ であるから、点 $(1, \sqrt{2})$、すなわち $p = 1$、$q = 0$、$r = 0$、$s = 1$ は、$x^2 + y^2 = 3$ 上の整数 2-有理点（2-rational point）である。

非整数のものを得るには、(i)(b) の恒等式を $1 + m = 3$ となるように $m = 2$ として用い、再び $\cos\theta = \frac{3}{5}$、$\sin\theta = \frac{4}{5}$ とする。

$$x = \tfrac{3}{5} + \tfrac{4}{5}\sqrt{2}, \qquad y = \tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{5}\sqrt{2}.$$

このとき $p = \frac{3}{5}$、$q = \frac{4}{5}$、$r = \frac{4}{5}$、$s = -\frac{3}{5}$ であり、いずれも整数ではなく、恒等式より $x^2 + y^2 = 3$ が成り立つ。直接確かめると、$x^2 = \frac{9+32+24\sqrt{2}}{25}$、$y^2 = \frac{16+18-24\sqrt{2}}{25}$ であり、その和は $\frac{75}{25} = 3$ となる。

考えてみよう 恒等式からは $1 + m$ しか得られず、しかも m には $\sqrt{2}$ が関わらなければならないのに、どうすれば 11 に到達できるだろうか？

出発点を拡大すればよい。恒等式は $(1, -\sqrt{m})$ を回転して得られたものであったが、同様に任意の点 $(a, -b\sqrt{2})$ を回転してもよい。交差項が同じように打ち消し合い、

$$(a\cos\theta + b\sqrt{2}\sin\theta)^2 + (a\sin\theta - b\sqrt{2}\cos\theta)^2 = (a^2 + 2b^2)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = a^2 + 2b^2.$$

したがって $a^2+2b^2=11$ を満たす整数が必要であり、$a=3$、$b=1$ がこれを満たす $(9+2=11)$。言いかえれば、$x^2+y^2=11$ 上の整数 2-有理点 $(3,\sqrt{2})$ から出発するのである。

(b) $a=3$、$b=1$、$\cos\theta=\frac{3}{5}$、$\sin\theta=\frac{4}{5}$ とすると、

$$x=\tfrac{9}{5}+\tfrac{4}{5}\sqrt{2},\qquad y=\tfrac{12}{5}-\tfrac{3}{5}\sqrt{2}.$$

よって $p=\frac{9}{5}$、$q=\frac{4}{5}$、$r=\frac{12}{5}$、$s=-\frac{3}{5}$ であり、いずれも整数ではなく、$x^2+y^2=11$ が成り立つ。直接確かめると、$x^2=\frac{81+32+72\sqrt{2}}{25}$、$y^2=\frac{144+18-72\sqrt{2}}{25}$ であり、その和は $\frac{275}{25}=11$ となる。

(c) 双曲線に対しては、x^2+y^2 ではなく x^2-y^2 を保つ「回転」が欲しい。$c^2-s^2=1$（$c=\cosh t$、$s=\sinh t$ と考えればよい）ならば、

$$\begin{aligned}(ac+b\sqrt{2}\,s)^2-(as+b\sqrt{2}\,c)^2&=a^2c^2+2b^2s^2-a^2s^2-2b^2c^2\\&=(a^2-2b^2)(c^2-s^2)=a^2-2b^2,\end{aligned}$$

となる。交差項 $2\sqrt{2}\,abcs$ がここでも打ち消し合うからである。$a^2-2b^2=7$ が必要であるから、$a=3$、$b=1$ とする（したがって $(3,\sqrt{2})$ はこの双曲線上の整数 2-有理点である）。

次に、$c^2-s^2=(c-s)(c+s)=1$ を満たす有理数 c、s が必要である。$c+s=2$、$c-s=\frac{1}{2}$ と選ぶと、$c=\frac{5}{4}$、$s=\frac{3}{4}$ を得る。すると

$$x=\tfrac{15}{4}+\tfrac{3}{4}\sqrt{2},\qquad y=\tfrac{9}{4}+\tfrac{5}{4}\sqrt{2},$$

であり、$p=\frac{15}{4}$、$q=\frac{3}{4}$、$r=\frac{9}{4}$、$s=\frac{5}{4}$ はいずれも整数ではない。直接確かめると、$x^2=\frac{225+18+90\sqrt{2}}{16}$、$y^2=\frac{81+50+90\sqrt{2}}{16}$ であるから、$x^2-y^2=\frac{112}{16}=7$ となる。これは $x^2-y^2=7$ 上の非整数の 2-有理点である。

検算

どの点も、上で行ったように分数を用いて正確に確かめられるし、数値的にも確かめられる。(ii)(c) では $x\approx 4.81066$、$y\approx 4.01777$ であり、$x^2-y^2\approx 7.0000$ となる。(ii)(b) では $x\approx 2.93137$、$y\approx 1.55147$ であり、$x^2+y^2\approx 11.0000$ となる。最後には必ず p,q,r,s を見直し、どれも整数でないことを確認すること。

よくある間違い

- 0 が整数であることを忘れる。$\left(\frac{7}{5}\sqrt{2},\ldots\right)$ のような点は $p=0$ であるから、非整数の 2-有理点ではない。

▶ (c) では、一見問題なさそうな選び方がうまくいかないことがある。$c = \frac{5}{3}$、$s = \frac{4}{3}$ も $c^2 - s^2 = 1$ を満たすが、$x = 5 + \frac{4}{3}\sqrt{2}$ となり、$p = 5$ が整数になってしまう。係数はすべて確認すること。

STEP のその先へ

$p + q\sqrt{2}$ の形の数全体は体（field）$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ をなし、この問題は本質的に、その体の上で円錐曲線（conic）上の点を求める問題である。既知の点を有理的な角だけ回転するという手法は、美しい理論の出発点である。円錐曲線が有理点（rational point）を一つでももてば、その点を通る直線によって他のすべての有理点が媒介変数表示（parametrise）でき、また $x^2 - 2y^2 = 1$（ペル方程式（Pell's equation））の有理点全体は、(c) で用いたまさにその双曲線的な「回転」のもとで群（group）をなす。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（初等整数論の入門書）はペル方程式と平方数の和を扱っており、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）は $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ のような体を導入している。

解答例

STEP III 2012、第 6 問

純粋数学 • 複素数の根の軌跡

> **STEP III 2012、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q6

鍵となる考え方

複素数が 0 であるのは、その実部（real part）と虚部（imaginary part）がともに 0 であるとき、かつそのときに限る。したがって、$z = x + \mathrm{i}y$ に関する 1 つの複素数の方程式は、x、y、p に関する 2 つの実数の方程式になる。虚部の方程式は常に因数 y をもつように因数分解でき、これによってどの軌跡も「実数解」と「虚数解」に分かれる。それぞれの場合に p を消去して (x, y) 平面上の曲線を求め、その曲線上のどの点が実際に実数の p から得られるのかを確かめる。

解答

第 1 の方程式 $z^2 + pz + 1 = 0$

x, y を実数として $z = x + \mathrm{i}y$ とおく。すると

$$z^2 + pz + 1 = (x^2 - y^2 + px + 1) + \mathrm{i}\,(2xy + py).$$

p は実数であるから、2 つの括弧はそれぞれ実部と虚部であり、ともに 0 でなければならない：

$$x^2 - y^2 + px + 1 = 0, \qquad (2x + p)y = 0,$$

これが示すべき式である。

第 2 式より、$p = -2x$ または $y = 0$ である。$y = 0$ ならば、第 1 式は $x^2 + px + 1 = 0$ となる。ここで $x \neq 0$ である。なぜなら $x = 0$ とすると $1 = 0$ となってしまうからである。よって x で割ることができ、$p = -(x^2 + 1)/x$ を得る。したがって、$p = -2x$ であるか、または $x \neq 0$ のもとで $p = -(x^2 + 1)/x$ である（後者の場合は $y = 0$）。

解の軌跡。 $p=-2x$ **の場合。**実部の方程式に代入すると $x^2-y^2-2x^2+1=0$、すなわち

$$x^2+y^2=1.$$

逆に、単位円上の任意の点 $x+\mathrm{i}y$ をとり、$p=-2x$ とおくと、これは実数である。このとき $(2x+p)y=0$ かつ $x^2-y^2+px+1=1-x^2-y^2=0$ となるので、この点は解である。よって単位円全体が軌跡に含まれる。

$y=0$、$p=-(x^2+1)/x$ **の場合。** $x\neq 0$ であるすべての実数 x に対してこの p は実数であり、x は $x^2+px+1=0$ の解である。点 $x=0$ は決して解にならない。$0^2+p\cdot 0+1=1$ だからである。

したがって、解の軌跡は原点を除いた実軸と単位円 $|z|=1$ を合わせたものである（点 ± 1 は両方に属する）。

第2の方程式 $pz^2+z+1=0$

$z=x+\mathrm{i}y$ とすると、実部と虚部から

$$p(x^2-y^2)+x+1=0,\qquad (2px+1)y=0.$$

原点は決して解にならない。$z=0$ とすると $1=0$ となるからである。

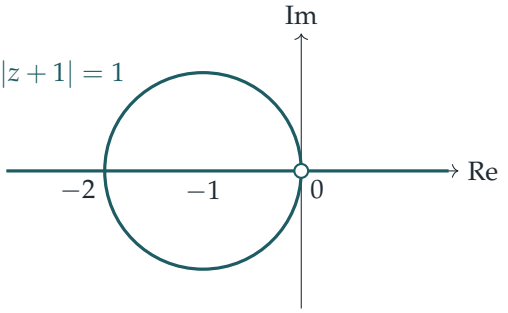
$y=0$ **の場合。**このとき $x\neq 0$ のもとで $px^2+x+1=0$ であるから、$p=-(x+1)/x^2$ である。これは $x\neq 0$ であるすべての実数 x に対して実数となるので、原点を除く実軸上のすべての点が軌跡に含まれる（$x=-1$ のときは $p=0$ となり、方程式は1次方程式 $z+1=0$ になるが、その解は確かに -1 である）。

$2px+1=0$ **の場合。**このとき $x\neq 0$ であり、$p=-1/(2x)$ である。実部の方程式に代入して $-2x$ を掛けると

$$(x^2-y^2)-2x^2-2x=0 \iff x^2+y^2+2x=0 \iff (x+1)^2+y^2=1.$$

逆に、この円上の原点以外の任意の点では $x\neq 0$ であるから $p=-1/(2x)$ は実数であり、上の式変形を逆にたどれば両方の方程式が成り立つことがわかる。

したがって、解の軌跡は実軸と円 $|z+1|=1$（中心 -1、半径 1）を合わせたものから、両方に属する原点を除いたものである。



白丸は除かれた点 $z=0$ を表す。

考えてみよう この軌跡が第 1 の軌跡を裏返したような形をしているのはなぜか？

z が $pz^2+z+1=0$ の解ならば、$w=1/z$ は $w^2+w+p=0$ を満たす。写像 $z\mapsto 1/z$ は（0 を除いた）実軸をそれ自身に移し、$w^2+w+p=0$ の虚数解が乗る直線 $\operatorname{Re} w=-\frac{1}{2}$ を、原点を通る円 $|z+1|=1$ に移す。原点が除かれるのは、それが $w=\infty$ に対応するからである。

第 3 の方程式 $pz^2+p^2z+2=0$

$p=0$ ならば方程式は $2=0$ となり解をもたないので、以下では常に $p\neq 0$ である。実部と虚部から

$$p(x^2-y^2)+p^2x+2=0, \qquad p(2x+p)y=0,$$

を得る。$p\neq 0$ であるから、第 2 式は $(2x+p)y=0$ となる。

$p=-2x$ の場合。 $p\neq 0$ であるから $x\neq 0$ である。代入すると

$$-2x(x^2-y^2)+4x^3+2=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x(x^2+y^2)=-1.$$

逆に、この曲線上の任意の点では $x\neq 0$ であるから $p=-2x$ は 0 でない実数であり、式変形を逆にたどればその点が解であることがわかる。$x^2+y^2>0$ であるから、この曲線上では $x<0$ である。曲線を

$$y^2=-\frac{1}{x}-x^2,$$

と書き直すと、$-1/x\geq x^2$ が必要である。$x<0$ を掛けると不等式（inequality）の向きが逆になり $-1\leq x^3$ となるので、$-1\leq x<0$ である。この曲線は -1 を通り（そこで $y=0$）、実軸に関して対称であり、$x\to 0^-$ のとき $y^2\to\infty$ となるので、虚軸が漸近線（asymptote）である。また $x<0$ に対して $\mathrm{d}(y^2)/\mathrm{d}x=x^{-2}-2x>0$ であるから、x が -1 から 0 へ進むにつれて $|y|$ は単調に増加する。極形式で表すと、この曲線は $r^3\cos\theta=-1$ である。

$y = 0$ の場合。このとき実数 x が軌跡に含まれるのは、$xp^2 + x^2p + 2 = 0$ を満たす実数 p が存在するときである。$x = 0$ に対してはこれは $2 = 0$ となるので、0 は軌跡に含まれない。$x \neq 0$ に対してはこれは p の2次方程式であり、実数解をもつのは判別式（discriminant）が0以上のとき、かつそのときに限る：

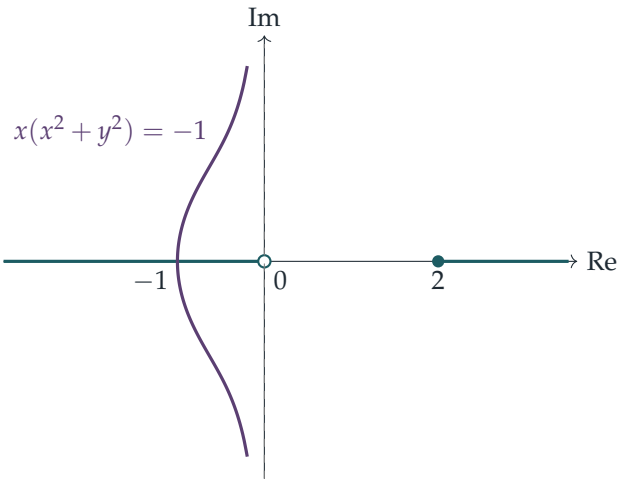
$$x^4 - 8x = x(x^3 - 8) \geq 0.$$

これは $x < 0$ のとき（両方の因数が負）または $x \geq 2$ のとき（両方の因数が0以上）に成り立ち、$0 < x < 2$ では成り立たない。このようにして得られる実数 p は自動的に0でない。$p = 0$ とすると $2 = 0$ となるからである。たとえば $x = 2$ に対しては $2p^2 + 4p + 2 = 0$ が必要であり、$p = -1$ となる。実際、$-z^2 + z + 2 = -(z-2)(z+1)$ である。

考えてみよう ここで x ではなく p について解くのはなぜか？

知りたいのはどの点 x が到達可能かであるから、x が与えられたものであり、p が未知数である。方程式は p について2次であり、実数解が存在することはちょうど x に関する判別式の条件になる。

したがって、解の軌跡は負の実軸、実軸上の半直線 $x \geq 2$、および -1 から虚軸に向かって上下両方向に伸びる曲線 $x(x^2 + y^2) = -1$ からなる。



この曲線は -1 においてのみ実軸と交わり、そこでの接線は垂直である。また $|y| \to \infty$ のとき虚軸に近づく。

検算

- $z^2 + pz + 1 = 0$ では解の積が 1 であるから、虚数解は共役複素数 $z, \bar{z}$ であり、$|z|^2 = 1$ を満たす。ここでも単位円が得られる。
- 第 3 の方程式で $p = -1$ とすると解は 2 と -1 であり、これは半直線の端点と曲線の頂点である。$p = 1$ とすると $z^2 + z + 2 = 0$ となり、その解は $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{i}$ である。このとき $x(x^2 + y^2) = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$ となり、確かに成り立つ。
- 数値的に、10^5 個のランダムな p の値に対して 3 つの方程式すべてを解き、すべての解が述べた軌跡上にあることを確認した。また、各軌跡上のランダムな点が述べた p によって実際に得られることも確認した。さらに p を細かく走査したところ、第 3 の方程式は $(0, 2)$ に実数解をもたず、正の実数解の最小値は 2.0 であった。

よくある間違い

- 逆の確認を忘れること。p を消去して得られる曲線は軌跡を**含む**ものであり、さらに各点が実数の p によって到達されることを示す必要がある。第 3 の方程式では、$(0, 2)$ の実数の点は $y = 0$ を満たすが、決して到達されない。
- x や p で割るときに、それが 0 でない理由を述べないこと。原点が除かれる理由はまさにここにある。
- $p = 0$ の扱いを雑にすること。第 2 の方程式では $p = 0$ は正真正銘の解 -1 を与えるが、第 3 の方程式では解をまったく与えない。

STEP のその先へ

根軌跡（root locus）は制御工学における標準的な道具である。ゲインと呼ばれるパラメータを変化させると、系の極が曲線に沿って動き、系の安定性はそれらが右半平面に入り込むかどうかで決まる。この問題はまた、写像 $z \mapsto 1/z$ の幾何学も示唆している。この写像は直線や円を直線や円に移す。これはメビウス変換（Möbius transformation）の理論の出発点であり、Needham, *Visual Complex Analysis*（複素解析を視覚的に解説した本）に美しく図解されている。

解答例

STEP III 2012、第 7 問

純粋数学 ・ 連立微分方程式

STEP III 2012、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s3-q7

鍵となる考え方

連立した 2 つの 1 階微分方程式（coupled first-order equations）は、変数を 1 つ消去すれば 1 つの 2 階微分方程式になる。$\dot{y}$ の式を微分し、さらに第 1 式そのものを使って z を y と $\dot{y}$ で表せばよい。あとは、各小問で定数 A と B を選ぶだけである。小問 (iii) では無限和が 2 つの等比級数（geometric series）になり、その結果を小問 (ii) と比べると c が決まる。物理的には、z_2 は単位時間ごとに同じ量の注射を 1 回ずつ行ったときに到達する定常状態（steady state）である。

解答

一般解

$\dot{y} = -2y + 2z$ を微分し、$\dot{z}$ に第 2 式を代入すると、

$$\ddot{y} = -2\dot{y} + 2\dot{z} = -2\dot{y} + 2(-\dot{y} - 3z) = -4\dot{y} - 6z.$$

第 1 式から、z は y を用いて次のように表される。

$$z = y + \tfrac{1}{2}\dot{y}, \qquad \text{したがって} \qquad 6z = 6y + 3\dot{y}.$$

これを代入すると、

$$\ddot{y} + 7\dot{y} + 6y = 0.$$

補助方程式（auxiliary equation）$m^2 + 7m + 6 = (m+1)(m+6) = 0$ の解は $m = -1$ と $m = -6$ であるから、

$$y = Ae^{-t} + Be^{-6t}$$

となる。ここで A と B は任意定数である。次に、$z = y + \frac{1}{2}\dot{y}$ から z が求まる。

$$z = Ae^{-t}\left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + Be^{-6t}(1 - 3) = \tfrac{1}{2}Ae^{-t} - 2Be^{-6t},$$

となり、題意が示された。

考えてみよう y の方程式を導くには両方の式を使ったが、z を求めるには第 1 式しか使っていない。求めた組は本当に第 2 式も満たしているだろうか。

満たしている。$z = y + \frac{1}{2}\dot{y}$ とすると、$\dot{z} = \dot{y} + \frac{1}{2}\ddot{y} = \dot{y} + \frac{1}{2}(-7\dot{y} - 6y) = -\frac{5}{2}\dot{y} - 3y$ である。また $-\dot{y} - 3z = -\dot{y} - 3y - \frac{3}{2}\dot{y} = -\frac{5}{2}\dot{y} - 3y$ であり、両者は一致する。したがって、連立方程式のすべての解はこの形をもち、逆にこの形の組はすべて解である。

小問 (i)

$t = 0$ において $y(0) = A + B$、$z(0) = \frac{1}{2}A - 2B$ である。条件より

$$\tfrac{1}{2}A - 2B = 0, \qquad A + B = 5,$$

であるから $A = 4B$ となり、$5B = 5$ を得る。よって $B = 1$、$A = 4$ であり、

$$y = 4e^{-t} + e^{-6t}, \qquad z_1(t) = 2e^{-t} - 2e^{-6t}.$$

薬ははじめ血液中にあり、脳内の量は 0 から増加したのち、吸収されるにつれて減衰していく。

小問 (ii)

$a = \frac{1}{2}A$、$b = 2B$ とおくと、$z = ae^{-t} - be^{-6t}$ となる。条件は

$$a - b = c, \qquad ae^{-1} - be^{-6} = c.$$

第 1 式から第 2 式を引くと $a(1 - e^{-1}) = b(1 - e^{-6})$ を得る。この共通の値を k とおくと、

$$a = \frac{k}{1 - e^{-1}}, \qquad b = \frac{k}{1 - e^{-6}}, \qquad \text{かつ} \qquad c = a - b = kC,$$

ただし

$$C = \frac{1}{1 - e^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-6}}.$$

である。$e^{-1} > e^{-6}$ より $1 - e^{-1} < 1 - e^{-6}$ であるから、$C > 0$ である。特に $C \neq 0$ なので、これで割ることができ、$k = c/C$ を得る。（同じことだが、2 つの 1 次方程式の行列式（determinant）は $e^{-1} - e^{-6} \neq 0$ であるから、解はただ 1 つに定まる。）したがって

$$z_2(t) = \frac{c}{C}\left(\frac{e^{-t}}{1 - e^{-1}} - \frac{e^{-6t}}{1 - e^{-6}}\right),$$

$$y_2(t) = \frac{c}{C}\left(\frac{2e^{-t}}{1 - e^{-1}} + \frac{e^{-6t}}{2(1 - e^{-6})}\right),$$

である。ここで y_2 は $A = 2a$ と $B = \frac{1}{2}b$ から得られる。

小問 (iii)

$m = -n$ とおくと、m は $0, 1, 2, \ldots$ を動き、$t - n = t + m$ となる。小問 (i) を用いると、

$$\sum_{n=-\infty}^{0} z_1(t-n) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(2\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}^{-1})^m - 2\mathrm{e}^{-6t}(\mathrm{e}^{-6})^m\right).$$

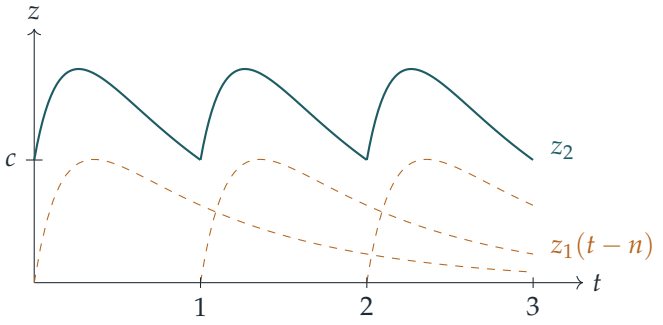
2 つの部分はどちらも等比級数で、公比 e^{-1} と e^{-6} はともに 0 と 1 の間に（等号なしで）ある。よってそれぞれ収束（converge）し、別々に和をとってよい。

$$\sum_{n=-\infty}^{0} z_1(t-n) = \frac{2\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-1}} - \frac{2\mathrm{e}^{-6t}}{1-\mathrm{e}^{-6}}.$$

これはちょうど $z_2(t)$ の括弧内を 2 倍したものである。したがって、$0 \le t \le 1$ でこの恒等式が成り立つのは $c/C = 2$ のとき、すなわち

$$c = 2C = \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-1}} - \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-6}} \approx 1.159.$$

のとき、かつそのときに限る。（それ以外の c では、両辺の差は同じ o でない関数の o でない定数倍になるので、条件を満たす値はこれだけである。）



この図がその意味を表している。時刻 n に血液中へ量 5 を注射すると、脳内の量は曲線 $z_1(t-n)$（破線）を描く。はるか過去からすべての整数時刻に注射を行うと、脳内の量はこれらすべての応答の和になる。その和は単位時間ごとに同じ形を繰り返し（実線）、$[0, 1]$ 上ではこの値の c に対する z_2 に一致する。

検算

▶ 小問 (i) では $z_1(0) = 2 - 2 = 0$、$y(0) = 4 + 1 = 5$ である。

- 小問 (iii) では、$z_2(0)$ と $z_2(1)$ はともに c に等しくなるはずである。和において、$t=1$ の級数は $t=0$ の級数から初項を除いたものであり、その初項は $z_1(0)=0$ である。これにより、計算をしなくても $z(0)=z(1)$ が確かめられる。
- $c=2C$ のとき $y_2(0)-y_2(1)=4+1=5$ である。つまり、各周期で血液はちょうど 1 回分の投与量を失い、それを次の注射が補っている。
- 数値的には $c\approx 1.15898$ である。$t=0.37$ において $z_1(t+m)$ を 200 項まで足すと $1.967693\ldots$ となり、$z_2(0.37)$ と小数第 12 位まで一致する。

よくある間違い

- z が $z=y+\frac{1}{2}\dot{y}$ によって y から決まることを忘れ、新たな独立した定数を用いて z についての別の方程式を解いてしまう。
- 小問 (iii) でずらす向きを取り違える。$n\le 0$ は $t-n\ge t$ を意味するので、寄与するのは過去の投与だけである。

STEP のその先へ

これは線形コンパートメントモデル（linear compartment model）であり、2×2 行列 M を用いて $\dot{\mathbf{x}}=M\mathbf{x}$ と書ける。減衰率 1 と 6 は M の固有値（eigenvalues）の符号を変えたものであり、これは大学 1 年次の講義で学ぶ、線形系に対する行列指数関数（matrix exponential）の見方である。小問 (iii) は重ね合わせ（superposition）の簡単な例である。すなわち、繰り返されるインパルスに対する応答は、1 つのインパルス応答（impulse response）をずらしたものの和になる。この考え方はグリーン関数（Green's functions）や畳み込み（convolution）へとつながる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は、線形連立微分方程式とインパルス応答を扱っている。

解答例

STEP III 2012、第8問

純粋数学 • フィボナッチ数の望遠鏡和

STEP III 2012、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s3-q8

鍵となる考え方

(ii) の式は n が 1 増えるたびに符号が変わる。小問 (i) は、まさにそのような規則性（pattern）を探すよう促すヒントである。奇数の n に対する値がわかれば、(iii) の逆正接（arctan）の恒等式は $\tan(A-B)$ の公式を言い換えたものにすぎない。この恒等式を変形すると、級数の各項が二つの逆正接の**差**として書けるので、和は望遠鏡和（telescoping sum）として打ち消し合う。

解答

最初のいくつかの項は次のとおりである。

$$F_0, F_1, \ldots, F_8 = 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21.$$

小問 (i)

これらの値を用いると、

$$F_0F_3 - F_1F_2 = 0\cdot 2 - 1\cdot 1 = -1, \qquad F_2F_5 - F_3F_4 = 1\cdot 5 - 2\cdot 3 = -1,$$

となるので、求めるとおり二つの式は等しい。

小問 (ii)

$G_n = F_nF_{n+3} - F_{n+1}F_{n+2}$ とおく。小問 (i) は $G_0 = G_2$ を示しており、これは G_{n+1} と G_n を比べてみることを示唆している。漸化式（recurrence）を $F_{n+4} = F_{n+3} + F_{n+2}$ の

形で用いると、

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= F_{n+1}F_{n+4} - F_{n+2}F_{n+3} \\ &= F_{n+1}F_{n+3} + F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+2}F_{n+3} \\ &= F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+3}\left(F_{n+2} - F_{n+1}\right) \\ &= F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+3}F_n \\ &= -G_n, \end{aligned}$$

となる。ここで 4 行目では、再び漸化式 $F_{n+2} - F_{n+1} = F_n$ を用いた。

したがって G_n は 1 段ごとに符号が変わる。小問 (i) より $G_0 = -1$ であるから、(n に関する数学的帰納法（induction）により）$G_n = (-1)^{n+1}$ が従う。二つの場合を書くと次のようになる。

$$F_nF_{n+3} - F_{n+1}F_{n+2} = \begin{cases} -1 & n \text{ が偶数のとき、} \\ 1 & n \text{ が奇数のとき。} \end{cases}$$

たとえば $n = 1$ のときは $1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1$ であり、$n = 4$ のときは $3 \cdot 13 - 5 \cdot 8 = -1$ である。

小問 (iii)

$r \geq 1$ を固定し、

$$\alpha = \arctan\frac{1}{F_{2r}}, \qquad \beta = \arctan\frac{1}{F_{2r+1}}.$$

とおく。$k \geq 1$ であるすべての F_k は正の整数なので、これらはきちんと定義される。加法定理（compound-angle formula）により、

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\dfrac{1}{F_{2r}} - \dfrac{1}{F_{2r+1}}}{1 + \dfrac{1}{F_{2r}F_{2r+1}}} = \frac{F_{2r+1} - F_{2r}}{F_{2r}F_{2r+1} + 1} = \frac{F_{2r-1}}{F_{2r}F_{2r+1} + 1},$$

となる。ここで $F_{2r+1} - F_{2r} = F_{2r-1}$ を用いた。次に、**奇数**の値 $n = 2r - 1$ に対して小問 (ii) を適用すると、

$$F_{2r-1}F_{2r+2} - F_{2r}F_{2r+1} = 1, \qquad \text{よって} \qquad F_{2r}F_{2r+1} + 1 = F_{2r-1}F_{2r+2}.$$

$F_{2r-1} \geq 1$ より、これは 0 でないので約分できる。

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{F_{2r-1}}{F_{2r-1}F_{2r+2}} = \frac{1}{F_{2r+2}}.$$

考えてみよう 正接が等しくても、角が等しいとは限らない。なぜ $\alpha-\beta=\arctan(1/F_{2r+2})$ と結論してよいのだろうか。

tan は $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上で単射（one-to-one）であるから、両方の角がこの区間に属することを確かめれば十分である。$1\le F_{2r}\le F_{2r+1}$ であるから $0<\beta\le\alpha\le\frac{\pi}{4}$ となり、したがって $0\le\alpha-\beta<\frac{\pi}{4}$ である。また、$\arctan(1/F_{2r+2})$ は定義により $(0,\frac{\pi}{2})$ に属する。ゆえに

$$\arctan\frac{1}{F_{2r}}=\arctan\frac{1}{F_{2r+1}}+\arctan\frac{1}{F_{2r+2}}\qquad(r=1,2,3,\dots),$$

が成り立ち、これが求める恒等式である。

和の計算。この恒等式を変形すると

$$\arctan\frac{1}{F_{2r+1}}=\arctan\frac{1}{F_{2r}}-\arctan\frac{1}{F_{2r+2}},$$

となるので、部分和（partial sum）は次のように打ち消し合う。

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{N}\arctan\frac{1}{F_{2r+1}}&=\left(\arctan\frac{1}{F_2}-\arctan\frac{1}{F_4}\right)+\left(\arctan\frac{1}{F_4}-\arctan\frac{1}{F_6}\right)+\cdots\\&\quad+\left(\arctan\frac{1}{F_{2N}}-\arctan\frac{1}{F_{2N+2}}\right)\\&=\arctan\frac{1}{F_2}-\arctan\frac{1}{F_{2N+2}}=\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{F_{2N+2}},\end{aligned}$$

ここで $F_2=1$ を用いた。$n\ge2$ のとき $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}\ge F_n+1$ であるから、$F_n\to\infty$ である。すると $1/F_{2N+2}\to0$ となり、arctan は連続（continuous）で $\arctan0=0$ であるから、$N\to\infty$ とすると

$$\sum_{r=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{F_{2r+1}}=\frac{\pi}{4}.$$

が得られる。

検算

- $r=1$ のとき、恒等式は $\arctan1=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}$ となる。右辺の tan は $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})/(1-\frac{1}{6})=1$ であるから、これはよく知られた $\frac{\pi}{4}$ の恒等式である。
- 最初の 3 項は $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{13}\approx0.4636+0.1974+0.0768=0.7378$ であり、$\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{21}\approx0.7378$ と一致する。
- 数値的には、級数の 89 項の和は $0.785398163\dots$ となり、計算機の精度の範囲で $\frac{\pi}{4}$ と一致する。また、小問 (ii) の公式は $n<150$ のすべての n について厳密に成り立つ。

よくある間違い

- 小問 (iii) で (ii) の偶数の場合を使ってしまう。そこでの添字は $2r-1$, $2r$, $2r+1$, $2r+2$ であるから、$n=2r-1$ は奇数であり、値は $+1$ である。
- 両方の角が $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に属することを確かめずに、正接が等しいことから角が等しいと結論してしまう。
- 打ち消し合った後の和の最初の項を誤る。それは $\arctan(1/F_2) = \frac{\pi}{4}$ であって、$\arctan(1/F_1)$ ではない。

STEP のその先へ

小問 (ii) は、カッシーニ（Cassini）の恒等式（Cassini's identity）$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ の親戚である。どちらも行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を通して理解するのがよい。この行列の n 乗の成分はフィボナッチ数（Fibonacci numbers）であり、行列式（determinant）をとればただちにカッシーニの恒等式が得られる。望遠鏡和、そして部分和から極限へ移るときに必要な注意深さは、解析学（analysis）の最初の講義の定番の題材である。これらについて読むには Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）がよく、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（『数学の発展問題』）には漸化式に関する STEP 風の演習がさらに収められている。

解答例

STEP III 2012、第 9 問

力学 ・ 回転する滑車の力学

STEP III 2012、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

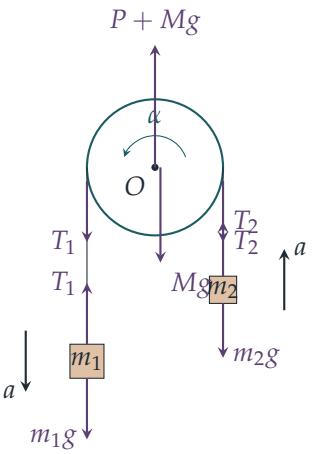
step.maths.org/questions/12-s3-q9

鍵となる考え方

手がかりは、測定された軸にはたらく力である。滑車の重心（centre of mass）は動かないので、軸は滑車の重さを支えるとともに、糸の 2 つの張力（tension）とも釣り合わなければならない。このことから P は張力の和となり、そこから質点の加速度が求まる。加速度がわかれば、滑車の回転の運動方程式から慣性モーメント（moment of inertia）が得られる。摩擦偶力（friction couple）が変えるのはこの 1 つの方程式だけで、ほかには何も変えない。

解答

モデル。質点は大きさのない質点とし、糸は軽く伸び縮みしないとする。糸は滑車の上を滑らないので、糸の速さは円板の縁の速さに等しい。系は静止状態から放されたものとし、したがって重い方の質点 m_1 が下降する。m_1 の下向きの加速度を a とする。これは m_2 の上向きの加速度でもある。このとき滑車の角加速度（angular acceleration）は $\alpha = a/r$ である。張力は m_1 側の糸で T_1、m_2 側で T_2 とする（滑車に慣性があるので、この 2 つは異なる）。軸のまわりの慣性モーメントを I とする。



各質点にニュートンの運動の第 2 法則（Newton's second law）を適用すると

$$m_1 g - T_1 = m_1 a, \qquad T_2 - m_2 g = m_2 a,$$

となるので

$$T_1 = m_1(g - a), \qquad T_2 = m_2(g + a).$$

軸にはたらく力。滑車の重心は固定された点 O にあるので、滑車にはたらく力の合力はゼロである。滑車にはたらく力は、重さ Mg、2 つの張力（糸は両側とも鉛直に垂れているので、どちらも下向きに引く）、そして軸からの力である。摩擦偶力（小問 (ii) で加える）は合力をもたないので、ここには入ってこない。したがって軸にはたらく鉛直方向の力は $Mg + T_1 + T_2$ であり、測定値と比べると

$$P = T_1 + T_2 = (m_1 + m_2)g - (m_1 - m_2)a,$$

となるので

$$a = \frac{(m_1 + m_2)g - P}{m_1 - m_2}. \tag{1}$$

これは測定値と質点の運動方程式しか用いていないので、どちらの小問でも成り立つ。

小問 (i)

軸に摩擦がなければ、O のまわりにモーメント（moment）をもつのは張力だけである。軸のまわりのモーメントを考えると

$$(T_1 - T_2)r = I\alpha = \frac{Ia}{r}, \qquad \text{よって} \qquad I = \frac{(T_1 - T_2)r^2}{a}.$$

ここで $T_1 - T_2 = (m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a$ であるから

$$I = r^2 \left(\frac{(m_1 - m_2)g}{a} - (m_1 + m_2) \right).$$

a に (1) を代入すると

$$\begin{aligned} I &= r^2\left(\frac{(m_1-m_2)^2g}{(m_1+m_2)g-P}-(m_1+m_2)\right) \\ &= r^2\,\frac{(m_1-m_2)^2g-(m_1+m_2)^2g+(m_1+m_2)P}{(m_1+m_2)g-P} \\ &= \frac{\big((m_1+m_2)P-4m_1m_2g\big)r^2}{(m_1+m_2)g-P}, \end{aligned}$$

となる。ここで $(m_1+m_2)^2-(m_1-m_2)^2=4m_1m_2$ を用いた。これが $(*)$ であり、示すべきことが示された。

小問 (ii)

新たに計算される値を I' とする。摩擦偶力 C は回転を妨げる向きにはたらき、回転は T_1 によって駆動される向きなので、モーメントの式は次のようになる。

$$(T_1-T_2)r-C=\frac{I'a}{r}.$$

加速度は依然として (1) で与えられる。同じ測定値 P を用いており、軸にはたらく力についての議論には C が関わらないからである。したがって T_1-T_2 と a は小問 (i) とまったく同じであり

$$I'=\frac{(T_1-T_2)r^2}{a}-\frac{Cr}{a}=(*)-\frac{Cr}{a}.$$

> **?** **考えてみよう** a の符号はどうしてわかるのだろうか？

系は静止状態から動き出し、滑車は m_1 が下がる向きに回るので、m_1 の下向きの加速度は正でなければならない。（もし a がゼロまたは負であれば、m_1 は決して下向きに動き始めない。）よって $a>0$ である。$C>0$ かつ $r>0$ なので $Cr/a>0$ となり、**摩擦を考慮して計算した値は $(*)$ より小さい**。これは理にかなっている。張力による正味のトルク（torque）の一部が摩擦に打ち勝つために使われるので、同じ観測された加速度を説明するのに必要な慣性はより小さくなるのである。

C の上限。張力をモーメントの式に代入すると

$$\big((m_1-m_2)g-(m_1+m_2)a\big)r-C=\frac{I'a}{r},$$

となり、これを整理すると

$$(m_1-m_2)rg-C=a\left(\frac{I'}{r}+(m_1+m_2)r\right).$$

右辺では $a>0$、$I'\geq 0$（慣性モーメントは負になりえない）、$(m_1+m_2)r>0$ であるから、右辺は正である。したがって

$$C<(m_1-m_2)rg,$$

となり、示すべきことが示された。言葉で言えば、摩擦偶力は釣り合っていない重さによる偶力 $(m_1 - m_2)gr$ より小さくなければならない。そうでなければ、系はそもそも動き出さないのである。

検算

- **軽い滑車：**$I = 0$ かつ $C = 0$ ならば $a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}$（おなじみのアトウッドの器械（Atwood machine）の結果）であり、$P = \frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$ となる。このとき $(*)$ の分子は当然ながら消える。
- **静止した滑車：**$a \to 0$ のとき $P \to (m_1 + m_2)g$ となり、$(*)$ の分母はゼロに近づき、$(*)$ は発散する。無限に重い滑車は加速しない。
- **数値による確認：**$g = 9.8$、$m_1 = 3$、$m_2 = 1$、$r = 0.5$、$I = 0.7$、$C = 2$（SI 単位）とすると、実際の運動では $a \approx 2.29\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$P \approx 34.6\,\mathrm{N}$ である。式 $(*)$ からは $I \approx 1.14$ が得られ、ちょうど $Cr/a \approx 0.44$ だけ大きすぎる。一方、摩擦を含むモデルからは 0.7 が正しく得られる。ここでは $C = 2 < (m_1 - m_2)rg = 9.8$ である。同様の方法で 10^4 個のランダムな場合を検証した。

よくある間違い

- 張力が両側で同じだとしてしまうこと。これが成り立つのは軽い滑車、または摩擦のない滑車の場合だけであり、ここでそうすると問題から I が消えてしまう。
- 軸にはたらく力に滑車自身の重さを入れ忘れること。測定値が $P + Mg$ と書かれているのはこのためである。
- 摩擦偶力が軸にはたらく力を変えると考えること。偶力の合力はゼロなので、どちらの小問でも $P = T_1 + T_2$ である。

STEP のその先へ

これは**測定値から隠れたパラメータを推定する**ことの小さな例である。答えは仮定するモデルに依存し、摩擦を無視すると推定値は予測可能な方向に偏る。大学 1 年の力学では、剛体（rigid body）は運動量（momentum）と角運動量（angular momentum）の理論一式を用いて扱われ、一般の軸のまわりに回転する物体に対しては慣性モーメントはテンソル（tensor）となる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、固定軸のまわりの回転や、質量のある滑車をもつアトウッドの器械が詳しく扱われている。

解答例

STEP III 2012、第 10 問

力学 ・ 円運動

STEP III 2012、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

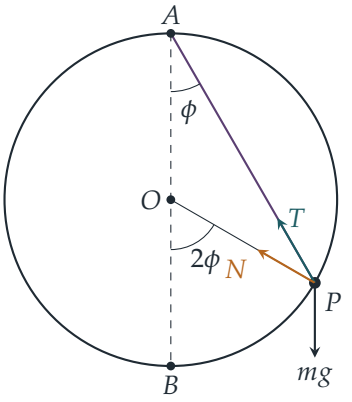
step.maths.org/questions/12-s3-q10

鍵となる考え方

すべては、円環の中心、円環の最高点、小環の 3 点がつくる二等辺三角形（isosceles triangle）の幾何に帰着する。糸の長さが $2a\cos\phi$ であること、そして小環へ向かう半径が鉛直下向きと角 2ϕ をなすことが分かれば、問題はエネルギーの式 1 本（λ と速さを求める）と、半径方向の運動方程式 1 本（抗力を求める）に帰着する。

解答

小環をなめらかな円周上を動く質点とみなし、糸はフックの法則（Hooke's law）に従う軽い弾性糸とする。円環の中心を O、最高点を A、最低点を B、小環を P とし、$c = \cos\phi$ とおく。



幾何

三角形 OAP では $OA = OP = a$ であるから二等辺三角形であり、A と P における角はともに ϕ である。したがって

$$AP = 2a\cos\phi, \qquad \angle AOP = \pi - 2\phi, \qquad \angle BOP = 2\phi.$$

よって P の O からの深さは $a\cos 2\phi$ であり、B からの高さは $a(1-\cos 2\phi) = 2a\sin^2\phi$ である。糸の伸び（ぴんと張っている間）は $x = 2a\cos\phi - a = a(2c-1)$ であり、糸は $2c-1=0$、すなわち $\phi = \frac{\pi}{3}$ のときにたるむ。

弾性率

円環はなめらかで、抗力は運動の向きに垂直であるから、力学的エネルギーは保存される（conservation of mechanical energy）。B（$\phi = 0$）では小環は静止しており、伸びは a であるから、弾性エネルギーは $\lambda a^2/(2a) = \frac{1}{2}\lambda a$ である。$\phi = \frac{\pi}{3}$ では再び静止し、糸はちょうどたるんだところで（弾性エネルギーは o）、小環は $2a\sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}a$ だけ上昇している。したがって

$$\tfrac{1}{2}\lambda a = mg\cdot\tfrac{3}{2}a \quad\Longrightarrow\quad \lambda = 3mg.$$

速さ

糸が張っている一般の角 ϕ において、B からのエネルギー保存により

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}mv^2 &= \tfrac{1}{2}\lambda a - \frac{\lambda a^2(2c-1)^2}{2a} - 2mga\sin^2\phi\\ &= \tfrac{3}{2}mga\left[1-(2c-1)^2\right] - 2mga(1-c^2)\\ &= \tfrac{3}{2}mga(4c-4c^2) - 2mga + 2mgac^2\\ &= mga(-4c^2+6c-2),\end{aligned}$$

よって

$$\frac{mv^2}{a} = mg(-8c^2+12c-4) = -4mg(2c-1)(c-1).$$

これは $c=1$ と $c=\frac{1}{2}$ で o となり、その間では正である。これは小環が $\phi = -\frac{\pi}{3}$ と $\phi = \frac{\pi}{3}$ の間を往復することと整合する。すなわち、静止したのち B を通って反対側の対称な点まで滑り戻り、これを繰り返す。運動の間つねに $\frac{1}{2} \le c \le 1$ であり、糸は張っていて（両端の点でちょうどたるむ）、張力は

$$T = \frac{\lambda x}{a} = 3mg(2c-1).$$

抗力

図のように、抗力（reaction）の O へ向かう成分を N とする（負になることもありうる）。PO に沿って中心向きに力を分解する。

- 張力は PA に沿って働き、これは PO と角 ϕ（二等辺三角形の底角）をなすので、O 向きの成分は $T\cos\phi$ である。
- OP は鉛直下向きと角 2ϕ をなすので、重力は O から**遠ざかる**向きに成分 $mg\cos 2\phi$ をもつ。

考えてみよう ここで重力の成分が内向きではなく外向きになるのはなぜか？

$\phi < \frac{\pi}{4}$ では小環は O より下にあり、重力は小環を中心から遠ざける向きに引く。P が O の高さを通過するとき $\cos 2\phi$ の符号が変わるので、1つの式 $-mg\cos 2\phi$（O 向き）で両方の場合を表せる。

中心向きのニュートン（Newton）の第2法則により

$$N + T\cos\phi - mg\cos 2\phi = \frac{mv^2}{a}.$$

T、mv^2/a および $\cos 2\phi = 2c^2 - 1$ を代入すると

$$\begin{aligned} N &= mg(-8c^2 + 12c - 4) - 3mg(2c-1)c + mg(2c^2 - 1) \\ &= mg(-8c^2 + 12c - 4 - 6c^2 + 3c + 2c^2 - 1) \\ &= -mg(12c^2 - 15c + 5). \end{aligned}$$

したがって抗力の大きさは

$$R = (12\cos^2\phi - 15\cos\phi + 5)\, mg,$$

となり、示すべき式が得られる。ただし括弧内が決して負にならないことが必要で、これを次に示す。（負号は、運動の間つねに円環が小環を**外向き**、すなわち O から遠ざかる向きに押していることを表している。）

R は決して0にならない

2次式 $12c^2 - 15c + 5$ の判別式（discriminant）は $15^2 - 4\cdot 12\cdot 5 = 225 - 240 = -15 < 0$ であり、最高次の係数は正であるから、すべての実数 c に対して厳密に正である。平方完成（completing the square）すると

$$12c^2 - 15c + 5 = 12\left(c - \tfrac{5}{8}\right)^2 + \tfrac{5}{16} \geq \tfrac{5}{16},$$

よって運動の間つねに $R \geq \frac{5}{16}mg > 0$ であり、最小となるのは $\cos\phi = \frac{5}{8}$ のときである（これは $[\frac{1}{2}, 1]$ に含まれるので、実際に最小値をとる）。

検算

- B（$c = 1$）では、小環は静止しており、$T = 3mg$ が上向き、重力 mg が下向きに働くので、円環は $2mg$ で下向きに押さなければならない。公式は $(12 - 15 + 5)mg = 2mg$ を与える。
- たるむ点（$c = \frac{1}{2}$）では、張力も速さも 0 で、P は O より $\frac{a}{2}$ だけ上にあるので、半径方向の抗力は重力の内向き成分 $mg\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}mg$ とつり合う。公式は $(3 - 7.5 + 5)mg = \frac{1}{2}mg$ を与える。
- 運動方程式を数値的に積分した（RK4、B からわずかにずらした位置から出発）。小環は B から角 $2.094 \approx \frac{2\pi}{3}$ のところで止まり、計算された抗力は公式と 10^{-7} 以内で一致し、その最小値は $0.3125\,mg = \frac{5}{16}mg$ であった。

よくある間違い

- 小環の角度位置を 2ϕ ではなく ϕ としてしまう。円周角は中心角の半分である。
- フックの法則や弾性エネルギーで、伸び $2a\cos\phi - a$ ではなく糸の全長 $2a\cos\phi$ を使ってしまう。
- 抗力が内向きであると決めつけ、負の答えが出て戸惑う。問題が求めているのはその大きさだけである。

STEP のその先へ

この小環は自由度（degree of freedom）1 の系であり、このような系を扱う最もすっきりした方法は、1 つの座標を用いたエネルギー（あるいはラグランジアン（Lagrangian））による定式化である。R のような拘束力（constraint force）は、そのあとでニュートンの法則から求めればよい。運動方程式はエネルギーから、拘束力は力の分解から、というこの役割分担こそ、大学 1 年の力学の講義で針金に通したビーズを扱う方法そのものである。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics* は、拘束のある円運動とエネルギー法をこの精神で扱っている。

解答例

STEP III 2012、第 11 問

力学 ・ 折り重なったロープの落下

STEP III 2012、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s3-q11

鍵となる考え方

すべてはループの幾何から導かれる。質点が x だけ落下したときに、静止している側と動いている側の長さがそれぞれいくらかがわかれば、失われた位置エネルギー（potential energy）（各直線部分の重心（centre of mass）を用いる）と、得られた運動エネルギー（kinetic energy）（速さをもつのは質点と動いている側だけである）を書き下すことができる。するとエネルギー保存則（energy conservation）により v^2 が x の関数として得られ、$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ であるから、加速度（acceleration）は $\frac{1}{2}v^2$ を x で微分すれば求まる。

解答

モデルと幾何

ロープを、一様で伸び縮みせず（inextensible）、完全に柔軟な線とみなし、その単位長さあたりの質量を

$$\rho = \frac{2M}{2L} = \frac{M}{L},$$

とする。質点は質点（point mass）として扱い、ループの底の曲がった部分の大きさは無視できるものとする。深さは P から下向きに測る。

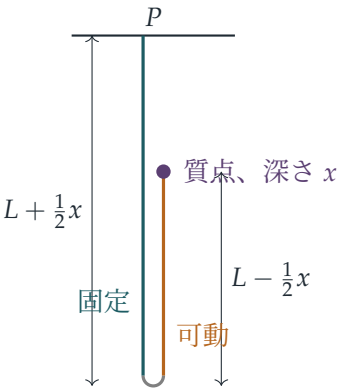
質点が距離 x だけ落下したとき、ロープはループの底（深さを d とする）でつながった 2 本の鉛直な部分からなる。

- **固定**部分：P から底までの部分で、静止しており、長さは d である。
- **可動**部分：質点（深さ x）から底までの部分で、長さは $d - x$ である。

全長は $2L$ であるから $d+(d-x)=2L$ となり、

$$d=L+\tfrac{1}{2}x, \qquad \text{可動部分の長さ}=L-\tfrac{1}{2}x.$$

を得る。（最初は $x=0$ であり、両部分の長さはともに L である。）



失われた位置エネルギー

各直線部分は一様であるから、その重心は中点にある。深さ h にある質量 μ の位置エネルギーは $-\mu gh$ である。系全体にわたる質量 × 深さの和を $D(x)$ とおくと、

$$\begin{aligned} D(x) &= mx+\rho d\cdot\frac{d}{2}+\rho(d-x)\cdot\frac{x+d}{2} \\ &= mx+\frac{\rho}{2}(2d^2-x^2) \\ &= mx+\rho\Big(L^2+Lx+\tfrac{1}{4}x^2-\tfrac{1}{2}x^2\Big)=mx+\rho\Big(L^2+Lx-\tfrac{1}{4}x^2\Big). \end{aligned}$$

最初は $D(0)=\rho L^2$ であるから、$\rho L=M$ を用いると、失われた位置エネルギーは

$$g\big(D(x)-D(0)\big)=gx\Big(m+\rho L-\tfrac{1}{4}\rho x\Big)=\frac{gx}{L}\Big(mL+ML-\tfrac{1}{4}Mx\Big),$$

である。

得られた運動エネルギー

固定部分は静止している。質点と可動部分の各点は（仮定してよいとされているとおり）速さ v をもつので、動いている質量は $m+\rho\big(L-\frac{1}{2}x\big)$ であり、

$$\text{運動エネルギー}=\tfrac{1}{2}\Big(m+M-\frac{Mx}{2L}\Big)v^2=\frac{1}{2L}\Big(mL+ML-\tfrac{1}{2}Mx\Big)v^2.$$

となる。系は静止状態から動き始めるので、エネルギー保存則より運動エネルギー＝失われた位置エネルギーである。

$$\frac{1}{2L}\Big(mL+ML-\tfrac{1}{2}Mx\Big)v^2=\frac{gx}{L}\Big(mL+ML-\tfrac{1}{4}Mx\Big),$$

すなわち

$$v^2 = \frac{2gx\left(mL + ML - \frac{1}{4}Mx\right)}{mL + ML - \frac{1}{2}Mx},$$

となり、示すべき式が得られた。$x < 2L$ のとき $ML - \frac{1}{2}Mx > 0$ であるから $mL + ML - \frac{1}{2}Mx > mL \geq 0$ となり、分母が 0 になることはない。

加速度

簡単のため

$$A = mL + ML - \tfrac{1}{4}Mx, \qquad B = mL + ML - \tfrac{1}{2}Mx,$$

とおくと、$\frac{1}{2}v^2 = gxA/B$ であり、（x で微分して）$A' = -\frac{1}{4}M$、$B' = -\frac{1}{2}M$ である。

考えてみよう x の関数としての v^2 から、どのようにして加速度を得ればよいか？

連鎖律（chain rule）により $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ であり、これが加速度である。これは質点が下向きに動いていて、x が t とともに増加している間は正しい。

積の微分法（product rule）と商の微分法（quotient rule）により、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{gxA}{B}\right) &= g\left[\frac{A}{B} + x\,\frac{A'B - AB'}{B^2}\right] \\ &= g\left[\frac{A}{B} + x\,\frac{-\frac{1}{4}MB + \frac{1}{2}MA}{B^2}\right] \\ &= g\left[\frac{A - \frac{1}{4}Mx}{B} + \frac{MxA}{2B^2}\right].\end{aligned}$$

鍵となる簡約は $A - \frac{1}{4}Mx = mL + ML - \frac{1}{2}Mx = B$ であり、したがって最初の分数はちょうど 1 になる。よって

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g + \frac{Mgx\left(mL + ML - \frac{1}{4}Mx\right)}{2\left(mL + ML - \frac{1}{2}Mx\right)^2},$$

となり、示すべき式が得られた。

加速度は g を上回る

放した後は $0 < x < 2L$ である。このとき

- 上で示したとおり $B = mL + M\left(L - \frac{1}{2}x\right) > 0$ であるから、$B^2 > 0$ である。
- $A = B + \frac{1}{4}Mx > B > 0$ である。
- $M > 0$、$g > 0$、$x > 0$ である。

したがって付加項 $\frac{MgxA}{2B^2}$ は正であり、$0 < x < 2L$ を満たすすべての x に対して加速度は g より真に大きい。（放した瞬間は $x = 0$ であり、加速度はちょうど g である。）

検算

- $M = 0$（軽いロープ）とすると、どちらの式も自由落下（free fall）の式 $v^2 = 2gx$、加速度 g に帰着する。
- $m = 0.3$、$M = L = 1$、$x = 1$、$g = 9.8$ とすると、$A = 1.05$、$B = 0.8$ であるから $v^2 = 25.725$ となり、加速度は $9.8 + 9.8 \times 1.05/1.28 \approx 17.84\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ で、g を大きく上回る。この点で $\frac{1}{2}v^2$ を数値的に微分しても同じ値が得られ、静止状態から運動方程式（equation of motion）を数値的に時間発展させると v^2 の式が再現される。
- 単位：mL、ML、Mx はいずれも質量 × 長さの単位をもつので、分数は無次元（dimensionless）であり、v^2 は gx と同じ単位をもつ。

よくある間違い

- 可動部分の長さを誤る：落下する側が引き込むロープは両側で分け合われるので、ループの底は x ではなく $\frac{1}{2}x$ だけ下がる。
- 固定部分に運動エネルギーを与えてしまう、あるいは固定部分の位置エネルギーも変化すること（長くなるので重心が下がる）を忘れる。
- $\frac{1}{2}v^2$ ではなく v^2 を微分してしまい、加速度が 2 倍になる。

STEP のその先へ

これは古典的な「折り畳まれた鎖の落下」の問題であり、運動している質量が時間とともに変化する系である。ここで用いたエネルギーが保存されるモデルでは、端が g より速く加速することが予測され、さらに $m = 0$ ならば $x \to 2L$ のとき速さは限りなく大きくなる。これが鞭の鳴る音の背後にある考え方である。曲がった部分で本当にエネルギーが保存されるかどうかは研究文献の中で議論されてきたが、実際の鎖を用いた実験では、ここでの結果と同様に g より大きい加速度が観測されている。可変質量系（variable-mass systems）や、エネルギーと運動量（momentum）の注意深い使い分けについては、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）で扱われている。

解答例

STEP III 2012、第12問

確率・統計 ・ 幾何的確率

STEP III 2012、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s3-q12

鍵となる考え方

三角形を、頂点 P を共有する三つの小さな三角形に分割すると、三つの距離の和がつねに高さに等しいことがわかる。最小値については、裾確率（tail probability）$\mathrm{P}(X > x)$ を考えるのが見通しのよい方法である。すべての距離が x より大きいという事象は、もとの三角形と相似な小さな三角形に対応し、相似な図形の面積は長さの比の 2 乗に比例する。三次元でも同じ考え方が体積について成り立ち、体積は長さの比の 3 乗に比例する。

解答

小問 (i)

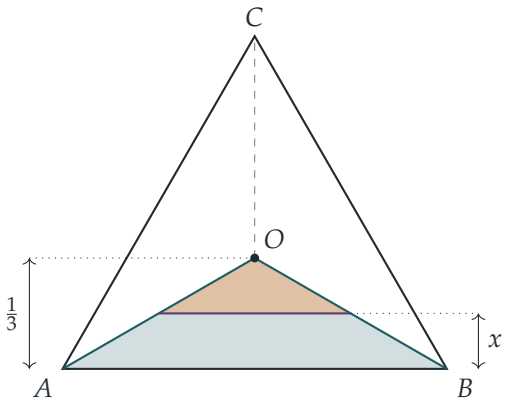
三角形の一辺の長さを s とする。高さが 1 であるから、ABC の面積は $\frac{1}{2}s$ である。P と三つの頂点を結ぶと、ABC は三角形 PAB、PBC、PCA に分割される。これらの底辺はいずれも長さ s の辺であり、高さはそれぞれ x_1、x_2、x_3 である。面積を足し合わせると

$$\tfrac{1}{2}sx_1 + \tfrac{1}{2}sx_2 + \tfrac{1}{2}sx_3 = \tfrac{1}{2}s, \qquad \text{よって} \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

となり、示すべきことが得られた。

X_1 が最小となる領域。 AB と CA から等距離にある点は、角 A の二等分線（angle bisector）上にある。この二等分線の B 側では、P は CA よりも AB に近い。同様に、P が BC よりも AB に近いのは、P が角 B の二等分線の A 側にあるときであり、かつそのときに限る。正三角形では角の二等分線は中線（median）でもあり、それらは中心 O で交わる。したがって、$X_1 = \min(X_1, X_2, X_3)$ となるのは、P が三角形 ABO（下

図の網掛け部分）の内部にあるときであり、かつそのときに限る。O から AB までの距離は高さの 3 分の 1、すなわち $\frac{1}{3}$ である。



X の確率密度関数。三つの三角形 ABO、BCO、CAO は合同であるから、それぞれの確率は $\frac{1}{3}$ である（距離が等しくなるのは二等分線上だけであり、その面積は 0 である）。対称性により、X の分布は、P が ABO 内にあるという条件のもとでの X_1 の条件付き分布（conditional distribution）に等しい。このとき $X = X_1$ であり、これは P から AB までの距離である。

考えてみよう 三角形 ABO の内部で、$X_1 > x$ となるのはどのような点か。

それは、AB に平行で AB から距離 x にある直線より上側の点であり、頂点を O とする小さな琥珀色の三角形である。この三角形は ABO と相似で、高さは $\frac{1}{3}$ に対して $\frac{1}{3} - x$ であるから、その面積は ABO の面積の $\left((\frac{1}{3} - x)/\frac{1}{3}\right)^2 = (1-3x)^2$ 倍である。よって、$0 \le x \le \frac{1}{3}$ に対して

$$\mathrm{P}(X > x) = (1-3x)^2, \qquad \mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(X \le x) = 1 - (1-3x)^2.$$

また、三つの距離の和は 1 であるから、X が $\frac{1}{3}$ を超えることはない。微分すると

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{F}'(x) = 6(1-3x) \quad (0 \le x \le \tfrac{1}{3}),$$

であり、それ以外では $\mathrm{f}(x) = 0$ となり、示すべきことが得られた。

期待値。

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^{1/3} 6x(1-3x)\,\mathrm{d}x = \left[3x^2 - 6x^3\right]_0^{1/3} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{9} = \tfrac{1}{9}.$$

小問 (ii)

点から各面までの四つの距離を $Y_1, \ldots, Y_4$ とし、$Y = \min(Y_1, \ldots, Y_4)$ とおく。各面の面積はすべて等しく S であり、体積は $\frac{1}{3}S \cdot 1$ である。点と四つの頂点を結ぶと、四面

体（tetrahedron）は四つの小さな四面体に分割される。それぞれは一つの面を底面とし、Y_i の一つを高さとするから

$$\tfrac{1}{3}S(Y_1+Y_2+Y_3+Y_4)=\tfrac{1}{3}S, \qquad \text{よって} \qquad Y_1+Y_2+Y_3+Y_4=1.$$

重心（centroid）はどの面からも距離 $\frac{1}{4}$ にあるから、内接球の半径は $\frac{1}{4}$ である。

考えてみよう 今度は集合 $\{Y>y\}$ はどのような形をしているか。

それは、四つの面すべてから距離が y より大きい点の集合である。各面を自分自身と平行に y だけ内側へ移動すると、重心を共有するより小さな正四面体が得られる。重心から各面までの距離は $\frac{1}{4}$ から $\frac{1}{4}-y$ に減るから、相似比は $(\frac{1}{4}-y)/\frac{1}{4}=1-4y$ である。体積は相似比の 3 乗に比例するから、$0\le y\le\frac{1}{4}$ に対して

$$\mathrm{P}(Y>y)=(1-4y)^3.$$

（同じ議論を小問 (i) の三角形に適用すると、内側の三角形の内接円の半径が $\frac{1}{3}-x$ であることから、$(1-3x)^2$ が直接得られる。）

$Y\ge 0$ であるから、裾確率を積分することで $\mathrm{E}(Y)$ を求めることができる：

$$\mathrm{E}(Y)=\int_0^{1/4}\mathrm{P}(Y>y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{1/4}(1-4y)^3\,\mathrm{d}y=\left[-\tfrac{1}{16}(1-4y)^4\right]_0^{1/4}=\tfrac{1}{16}.$$

確率密度関数を用いたい場合は、それは $[0,\frac{1}{4}]$ 上で $12(1-4y)^2$ であり、やはり $\int_0^{1/4}12y(1-4y)^2\,\mathrm{d}y=\frac{1}{16}$ となる。

したがって、最も近い面までの距離の期待値は $\frac{1}{16}$ である。

検算

- $\int_0^{1/3}6(1-3x)\,\mathrm{d}x=1$ であるから、f は確かに確率密度関数である。
- 規則性がある：高さ 1 の三角形では $\mathrm{E}(X)=\frac{1}{9}=\frac{1}{3^2}$、高さ 1 の四面体では $\mathrm{E}(Y)=\frac{1}{16}=\frac{1}{4^2}$ である。一次元では、$[0,1]$ から無作為に選んだ点から近いほうの端までの距離の平均は $\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$ であり、この規則性に合致する。
- 三角形内の 4×10^5 個の無作為な点を用いたモンテカルロ・シミュレーション（Monte Carlo simulation）では、平均は 0.1110（$\frac{1}{9}\approx0.1111$ に対して）となり、ヒストグラムは $6(1-3x)$ とよく一致した。四面体内の 3×10^5 個の点では、平均は 0.0625（$\frac{1}{16}=0.0625$ に対して）であった。

よくある間違い

- $\mathrm{P}(X > x)$ を微分するときにマイナス符号を忘れる：確率密度関数は $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{P}(X > x)$ である。
- 内側の三角形の高さが $1 - x$ ではなく $1 - 3x$ であることを忘れる：三つの辺がそれぞれ x だけ内側に移動するからである。
- 小問 (ii) で相似比の 2 乗を用いてしまう。体積は 3 乗に比例する。

STEP のその先へ

この問題に現れる二つの道具は、大学の最初の確率論の講義で頻繁に登場する。$\mathrm{P}(\min\ >\ x)$ を通して最小値の分布を求める方法と、非負の確率変数（random variable）に対して $\mathrm{E}(Y) = \int_0^\infty \mathrm{P}(Y > y)\,\mathrm{d}y$ を計算する方法である。先ほどの規則性はさらに続き、高さ 1 の n 次元単体（simplex）では、最も近い面までの距離の期待値は $1/(n+1)^2$ となる。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、これら二つの道具を丁寧に扱っている。

解答例

STEP III 2012、第 13 問

確率・統計　・　切断正規分布

STEP III 2012、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s3-q13

鍵となる考え方

区間上の条件付き期待値（conditional expectation）は、その区間上での $z\,f(z)$ の積分を、その区間の確率で割ったものである。標準正規分布（standard Normal distribution）では、$z\,\mathrm{e}^{-z^2/2}$ はちょうど $-\mathrm{e}^{-z^2/2}$ の導関数になっているので、この積分は厳密に計算できる。あとは $X = \mu + \sigma Z$ と標準化（standardising）し、X の符号に応じて $|X|$ を分けて考えるだけである。

解答

以下、Z の確率密度関数（probability density function）を $\phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-z^2/2}$ と書く。すると $\Phi'(z) = \phi(z)$ かつ $\phi'(z) = -z\,\phi(z)$ である。

小問 (i)

$a < Z < b$ という条件のもとでの Z の条件付き密度は、(a, b) 上で $\phi(z)/\mathrm{P}(a < Z < b)$ であり、$\mathrm{P}(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$ である。よって

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z \mid a < Z < b) &= \frac{1}{\Phi(b) - \Phi(a)} \int_a^b z\,\phi(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\big(\Phi(b) - \Phi(a)\big)} \Big[-\mathrm{e}^{-z^2/2} \Big]_a^b \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-a^2/2} - \mathrm{e}^{-b^2/2}}{\sqrt{2\pi}\,\big(\Phi(b) - \Phi(a)\big)},
\end{aligned}$$

となる。ここで $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big(-\mathrm{e}^{-z^2/2}\big) = z\,\mathrm{e}^{-z^2/2}$ を用いた。これが求める結果である。積分は収束するので、$\mathrm{e}^{-\infty} = 0$、$\Phi(\infty) = 1$ と読めば、$b = \infty$（あるいは $a = -\infty$）の場合にもこの式は成り立つ。

小問 (ii)

$Z \sim \mathrm{N}(0,1)$、$\sigma > 0$ として $X = \mu + \sigma Z$ と書く。$\sigma > 0$ であるから

$$X > 0 \iff Z > -\mu/\sigma,$$

であり、$X > 0$ という条件をつけることは $Z > -\mu/\sigma$ という条件をつけることと同じである。期待値の線形性（linearity）は条件付きでも成り立つので

$$\mathrm{E}(X \mid X > 0) = \mathrm{E}(\mu + \sigma Z \mid Z > -\mu/\sigma) = \mu + \sigma\,\mathrm{E}(Z \mid Z > -\mu/\sigma),$$

となり、示すべき式が得られる。

$|X|$ の平均。 $c = \mu/\sigma$ とおく。小問 (i) で $a = -c$、$b = \infty$ とすると

$$\mathrm{E}(Z \mid Z > -c) = \frac{\mathrm{e}^{-c^2/2}}{\sqrt{2\pi}\,\big(1 - \Phi(-c)\big)} = \frac{\phi(c)}{p}, \qquad \text{ただし} p = \mathrm{P}(X > 0) = 1 - \Phi(-c).$$

直前の式の両辺に p を掛けると

$$\mathrm{E}(X;\, X > 0) := \mathrm{E}(X \mid X > 0)\,\mathrm{P}(X > 0) = \mu p + \sigma\phi(c).$$

> **考えてみよう** 2 つ目の積分を計算せずに、$X < 0$ の部分からの寄与を求めるにはどうすればよいか？

2 つの部分を足し合わせると全体の平均になる：$\mathrm{E}(X;\, X > 0) + \mathrm{E}(X;\, X < 0) = \mathrm{E}(X) = \mu$（事象 $X = 0$ の確率は 0 である）。したがって $\mathrm{E}(X;\, X < 0) = \mu - \mu p - \sigma\phi(c)$ である。$X < 0$ のとき $|X| = -X$ であるから

$$\begin{aligned} m = \mathrm{E}|X| &= \mathrm{E}(X;\, X > 0) - \mathrm{E}(X;\, X < 0) \\ &= 2\big(\mu p + \sigma\phi(c)\big) - \mu \\ &= \mu(2p - 1) + 2\sigma\phi(c). \end{aligned}$$

最後に $2p - 1 = 1 - 2\Phi(-\mu/\sigma)$、$2\phi(c) = \sqrt{2/\pi}\,\mathrm{e}^{-\mu^2/(2\sigma^2)}$ を用いると

$$m = \mu\big(1 - 2\Phi(-\mu/\sigma)\big) + \sigma\sqrt{2/\pi}\,\exp\big(-\tfrac{1}{2}\mu^2/\sigma^2\big),$$

となり、示すべき式が得られる。

$|X|$ の分散。要点は $|X|^2 = X^2$ であることで、二次モーメント（second moment）を求めるのに新たな計算は要らない：

$$\mathrm{E}\big(|X|^2\big) = \mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + \big(\mathrm{E}X\big)^2 = \sigma^2 + \mu^2.$$

したがって

$$\mathrm{Var}|X| = \mu^2 + \sigma^2 - m^2.$$

検算

- $\mu = 0$ のとき、$|X|$ は半正規分布（half-Normal distribution）に従い、公式から $m = \sigma\sqrt{2/\pi}$ というよく知られた値が得られる。このとき分散は $\sigma^2(1 - 2/\pi)$ であり、正である。
- $\mu \gg \sigma$ のとき、X はほぼ常に正であり、$\Phi(-\mu/\sigma) \approx 0$ で指数関数の項もごく小さいので、$m \approx \mu$、$\mathrm{Var}|X| \approx \sigma^2$ となる。これは当然そうなるべき結果である。
- m の公式は μ を $-\mu$ に置き換えても変わらない（$1 - 2\Phi(-c) = -(1 - 2\Phi(c))$ を用いる）。これは対称性 $|X| \sim |-X|$ と合致している。
- 数値的には、$\mu = 1$、$\sigma = 2$ のとき $m \approx 1.7912$、$\mathrm{Var}|X| \approx 1.7917$ となり、直接の数値積分（quadrature）や 2×10^5 個の値によるシミュレーションの結果と一致する。

よくある間違い

- 小問 (i) で $\Phi(b) - \Phi(a)$ で割るのを忘れること。積分だけでは $\mathrm{E}(Z;\, a < Z < b)$ であり、条件付き期待値ではない。
- $\mathrm{E}|X| = \mathrm{E}(X \mid X > 0)$ と書いてしまうこと。条件付き期待値には $\mathrm{P}(X > 0)$ と $\mathrm{P}(X < 0)$ で重みをつけなければならない。
- $|X|^2 = X^2$ からただちに得られるのに、$\mathrm{E}(X^2)$ を別の積分で計算してしまうこと。

STEP のその先へ

$|X|$ の分布は**折り畳み正規分布**（folded Normal distribution）と呼ばれ、小問 (i) の条件付き分布は**切断正規分布**（truncated Normal distribution）である。比 $\phi(c)/\big(1 - \Phi(-c)\big)$ は逆ミルズ比（inverse Mills ratio）と呼ばれ、データが打ち切られたり（censored）選択されたりする計量経済学（econometrics）のモデルで中心的な役割を果たす。また、$\phi'(z) = -z\phi(z)$ という工夫は、正規近似（Normal approximation）のためのスタイン

（Stein）の方法の出発点でもある。条件付き期待値についてさらに学ぶには、Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）を参照するとよい。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

2012 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

