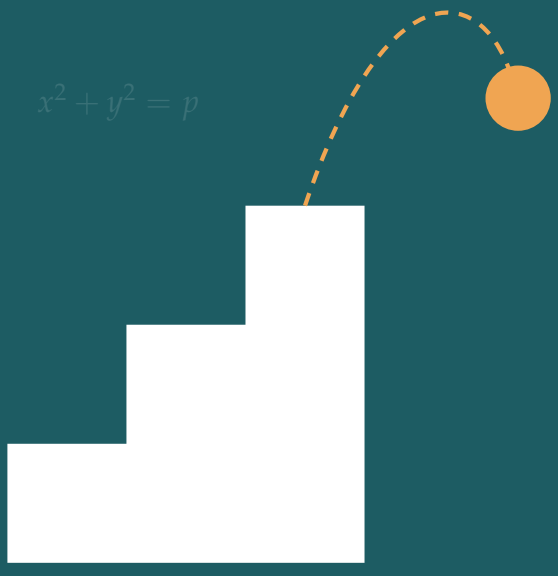
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

2011 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

2011 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

2011 年解答例

2011 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 39 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 陰関数の微分 純粋数学 . . . 3
Q2 置換積分 純粋数学 . . . 7
Q3 三角関数の恒等式 純粋数学 . . . 10
Q4 放物線の接線 純粋数学 . . . 14
Q5 絶対値を含む積分 純粋数学 . . . 18
Q6 二項級数の和 純粋数学 . . . 22
Q7 変数分離形の微分方程式 純粋数学 . . . 26
Q8 ディオファントス方程式 純粋数学 . . . 30
Q9 放物運動 力学 . . . 34
Q10 弾性衝突 力学 . . . 38
Q11 剛体のつり合い 力学 . . . 42
Q12 待ち行列と投票問題 確率・統計 . . . 46
Q13 連続型確率変数 確率・統計 . . . 51

STEP II

Q1 平方根を含む方程式 純粋数学 . . . 55
Q2 ディオファントス方程式 純粋数学 . . . 59
Q3 単調性による不等式 純粋数学 . . . 63
Q4 三角方程式 純粋数学 . . . 67
Q5 ベクトルと鏡映 純粋数学 . . . 72
Q6 部分積分 純粋数学 . . . 76
Q7 数列と級数 純粋数学 . . . 80
Q8 円の伸開線 純粋数学 . . . 84
Q9 衝突と反発係数 力学 . . . 89

Q10 放物運動と力積 力学 . . . 93
Q11 三次元でのつり合い 力学 . . . 97
Q12 ゲームと等比級数 確率・統計 . . . 101
Q13 歪度の尺度 確率・統計 . . . 106

STEP III

Q1 階数低下法 純粋数学 . . . 111
Q2 多項式の有理数解 純粋数学 . . . 115
Q3 3次方程式を解く 純粋数学 . . . 119
Q4 ヤングの不等式 純粋数学 . . . 123
Q5 積分による面積 純粋数学 . . . 127
Q6 積分の置換 純粋数学 . . . 131
Q7 数学的帰納法 純粋数学 . . . 134
Q8 複素平面上の軌跡 純粋数学 . . . 138
Q9 円柱面上の運動 力学 . . . 142
Q10 弾性ひもと単振動 力学 . . . 146
Q11 剛体の回転 力学 . . . 150
Q12 確率母関数による複合分布 確率・統計 . . . 154
Q13 離散分布の最頻値 確率・統計 . . . 158

解答例

STEP I 2011、第 1 問

純粋数学 • 陰関数の微分

> **STEP I 2011、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q1

鍵となる考え方

陰関数微分（implicit differentiation）を使えば、y について解かなくても各曲線の傾き（gradient）が求まる。そのあとは、どの小問も交点 (p,q) における条件を書き下すだけである。すなわち、その点は直線上にあり、曲線上にあり、そして両者の傾きの間に関係がある（接する（touching）場合は等しく、法線（normal）の場合は積が -1 である）。傾きの条件から p と q の間の簡単な関係が得られ、それを残りの二つの式に代入すると p が二通りの方法で定まり、それらが一致しなければならない。

解答

小問 (i)

y を x の関数とみなして、$\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=1$ を x で微分すると

$$-\frac{a}{x^2}-\frac{b}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0.$$

$b\neq 0$ であるから、整理して

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{ay^2}{bx^2},$$

を得る。これが示すべきことであった。（方程式に a/x と b/y が含まれるので、曲線上のどの点でも x と y はともに 0 でない。）

傾きが等しい場合。直線 $ax+by=1$ の傾きは $-\frac{a}{b}$ である。点 (p,q) における曲線の傾

きは $-\dfrac{aq^2}{bp^2}$ であるから

$$-\frac{aq^2}{bp^2} = -\frac{a}{b} \quad \Longrightarrow \quad \frac{q^2}{p^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad q^2 = p^2,$$

となる。ここで a/b を約したが、$a \neq 0$ であるからこれは許される。したがって $p = \pm q$ である。

二つの場合。点 (p, q) はさらに

$$ap + bq = 1 \qquad \text{かつ} \qquad \frac{a}{p} + \frac{b}{q} = 1.$$

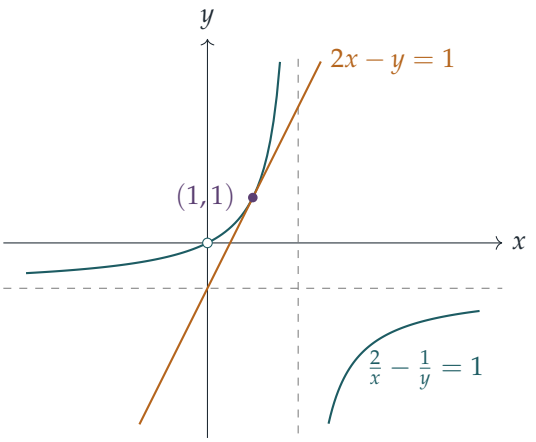
を満たす。

- $q = p$ のとき：直線の式から $p(a+b) = 1$ となるので $p = \dfrac{1}{a+b}$ である（特に $a + b \neq 0$）。曲線の式から $\dfrac{a+b}{p} = 1$ となるので $p = a + b$ である。両者を比べると $a + b = \dfrac{1}{a+b}$、すなわち $(a+b)^2 = 1$ である。
- $q = -p$ のとき：直線の式から $p(a-b) = 1$ となるので $p = \dfrac{1}{a-b}$ である。曲線の式から $\dfrac{a-b}{p} = 1$ となるので $p = a - b$ である。両者を比べると $(a-b)^2 = 1$ である。

よって $(a-b)^2 = 1$ または $(a+b)^2 = 1$ であり、示すべきことが示された。

考えてみよう このような点は本当に存在するのだろうか。それとも必要条件（necessary condition）を求めただけなのだろうか。

実際に存在する。$a = 2$、$b = -1$ とすると $a + b = 1$ である。点 $(1, 1)$ は直線 $2x - y = 1$ 上にも曲線 $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 1$ 上にもあり、そこでの傾きはどちらも 2 である。この場合、曲線は $y = \dfrac{x}{2-x}$ であり、原点を除いた直角双曲線（rectangular hyperbola）である。共有点で傾きが等しいということは、直線が接線（tangent）であることを意味する：



白丸は原点を表す。原点は双曲線 $y = \frac{x}{2-x}$ 上にはあるが、曲線そのものの上にはない。

小問 (ii)

$\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = 1$ を陰関数微分すると

$$-\frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{ay^2}{bx^2}.$$

直線が点 (p, q) で曲線の法線になっているとする。このとき $p \neq 0$ かつ $q \neq 0$ であり、

$$ap + bq = 1 \qquad \text{かつ} \qquad \frac{a}{p} - \frac{b}{q} = 1.$$

が成り立つ。a、b、p、q はすべて 0 でないので、接線の傾き $\frac{aq^2}{bp^2}$ と直線の傾き $-\frac{a}{b}$ はともに有限かつ 0 でない。よって「法線である」とは、それらの積が -1 であることを意味する：

$$\frac{aq^2}{bp^2} \cdot \left(-\frac{a}{b}\right) = -1 \quad \Longrightarrow \quad a^2q^2 = b^2p^2 \quad \Longrightarrow \quad aq = \pm bp.$$

考えてみよう どちらの符号がありうるだろうか。

それぞれの符号を曲線の方程式で確かめる。

- $aq = bp$ ならば $\frac{b}{q} = \frac{a}{p}$ であるから、$\frac{a}{p} - \frac{b}{q} = 0 \neq 1$ となる。この符号はありえない。
- $aq = -bp$ ならば $\frac{b}{q} = -\frac{a}{p}$ であるから、曲線の方程式は $\frac{2a}{p} = 1$ となり、$p = 2a$、さらに $q = -\frac{bp}{a} = -2b$ を得る。

$p = 2a$、$q = -2b$ を直線の方程式に代入すると

$$2a^2 - 2b^2 = 1, \qquad \text{すなわち} \qquad a^2 - b^2 = \tfrac{1}{2},$$

となり、示すべきことが示された。法線の足は点 $(2a, -2b)$ である。

検算

- 小問 (i) について、上の例 $a = 2$、$b = -1$ では $(a+b)^2 = 1$ であり、直線は $(1,1) = (p,p)$ で接する。同様に $a = 2$、$b = 1$ では $(a-b)^2 = 1$ であり、直線 $2x + y = 1$ は $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$ に $(1,-1)$ で接する。
- 小問 (ii) について、$a = \frac{\sqrt{3}}{2}$、$b = \frac{1}{2}$ とすると $a^2 - b^2 = \frac{1}{2}$ であり、点は $(2a, -2b) = (\sqrt{3}, -1)$ である。直線の式は $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$、曲線の式は $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ となる。そこでの接線の傾きは $\dfrac{aq^2}{bp^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$、直線の傾きは $-\sqrt{3} \approx -1.732$ であり、積は -1 である。
- 数値的にも、傾きの公式は数百個のランダムな点で有限差分（finite difference）による傾きと一致し、(a,b) をランダムに探索すると、法線が見つかるのは $a^2 - b^2$ が丸め誤差の範囲で 0.5 に等しいときだけである。

よくある間違い

- 小問 (i) で $q = -p$ の場合を落とすこと：$(a-b)^2 = 1$ を与えるのはこの場合である。
- 小問 (ii) で $aq = \pm bp$ で止めてしまい、曲線がどちらの符号を許すかを確かめないこと。

STEP のその先へ

陰関数微分は、陰関数定理（implicit function theorem）の最初の姿である。すなわち、$\partial F/\partial y \neq 0$ となる任意の点の近くで、方程式 $F(x,y) = 0$ は y を x の微分可能な関数として定め、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -F_x/F_y$ が成り立つ。ここでの接することに関する議論には代数的な対応物もある。直線が二次曲線（conic）に接するのは、交点を求める二次方程式が重根（repeated root）をもつときであり、かつそのときに限る。この方法で小問 (i) を導き直すこともできる。これらすべての背後にある解析学（analysis）については、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）を読んでみるとよい。

解答例

STEP I 2011、第 2 問

純粋数学 • 置換積分

STEP I 2011、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/11-s1-q2

鍵となる考え方

積分（integral）E は初等的な閉じた形（elementary closed form）をもたないので、これを直接計算しようとはしない。その代わりに、ほかの積分をそれぞれ変形して、E そのものが現れるようにする。最初の二つについては、代数的な割り算によって分数を分解し、扱いにくい $\frac{1}{1+x}$ を切り離すことを意味する。(i) と (ii) については、被積分関数（integrand）を $[0,1]$ 上の $\frac{\mathrm{e}^u}{1+u}$ に戻すような置換（substitution）を選ぶことを意味する。指数の部分に注目し、何を新しい変数にすればよいかを考えるのである。

解答

最初の二つの積分

$x = (1+x) - 1$ と書くと、

$$\frac{x\,\mathrm{e}^x}{1+x} = \mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}^x}{1+x},$$

であるから、

$$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x - E = \mathrm{e} - 1 - E,$$

となり、求める結果が得られる。

二つ目については、x^2 を $1+x$ で割る。$x^2 = (x-1)(1+x)+1$ であるから、

$$\frac{x^2\,\mathrm{e}^x}{1+x} = x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}.$$

$u = x$、$\mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ として部分積分（integration by parts）を行うと、

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[x\,\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = 1.$$

したがって

$$\int_0^1 \frac{x^2 \mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x = 1-(\mathrm{e}-1)+E = 2-\mathrm{e}+E.$$

（別解として、$\frac{x^2}{1+x} = x - \frac{x}{1+x}$ と書いて最初の結果をそのまま用いてもよい。$1-(\mathrm{e}-1-E)$ から同じ答えが得られる。）

小問 (i)

厄介なのは指数の部分なので、それを新しい変数にする：

$$u = \frac{1-x}{1+x}.$$

x について解くと、$u(1+x) = 1-x$ より $x = \dfrac{1-u}{1+u}$ である。すると

$$1+x = \frac{2}{1+u}, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{-(1+u)-(1-u)}{(1+u)^2} = -\frac{2}{(1+u)^2}.$$

$x=0$ のとき $u=1$、$x=1$ のとき $u=0$ である。したがって

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\frac{1-x}{1+x}}}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^0 \mathrm{e}^u \cdot \frac{1+u}{2} \cdot \left(-\frac{2}{(1+u)^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^u}{1+u}\,\mathrm{d}u = E.\end{aligned}$$

$\mathrm{d}x/\mathrm{d}u$ から出てくる負号は、積分区間の上端と下端を入れ替えて増加の順に戻すのに使った。

考えてみよう なぜ答えが、e をまったく含まないちょうど E になると予想できるのだろうか？

写像 $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ は $[0,1]$ をそれ自身に移し（両端を入れ替える）、因子 $\frac{1}{1+x}$ は $\mathrm{d}x$ と組み合わさってちょうど $\frac{\mathrm{d}u}{1+u}$ になる。実際 $\frac{\mathrm{d}x}{1+x} = -\frac{\mathrm{d}u}{1+u}$ であり、これは計算全体を覚えておくうまい方法である。

小問 (ii)

今度は、目標の区間 $[0,1]$ が $x \in [1,\sqrt{2}]$ から生じなければならない。この範囲で x^2 は 1 から 2 まで動く。そこで

$$u = x^2 - 1, \qquad \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x,$$

を試す。$x=1$ のとき $u=0$、$x=\sqrt{2}$ のとき $u=1$ である。すると

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{\mathrm{d}u}{2(1+u)}, \qquad \mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{1+u} = \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^u,$$

であるから、

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^u}{1+u}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}E}{2}.$$

考えてみよう なぜ $u = x^2$ と置換しないのだろうか？

その置換でもうまくいき、$\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u$ が得られるが、区間は $[0,1]$ ではなく $[1,2]$ になる。さらに $u \mapsto u-1$ と 1 だけずらせば同じ答えにたどり着く。$u = x^2 - 1$ は、この二つの手順を一度に行っているにすぎない。

検算

シンプソンの公式（Simpson's rule）によれば $E \approx 1.125386$ である。数値的には、最初の積分は $0.592896 = \mathrm{e} - 1 - E$、二つ目は $0.407104 = 2 - \mathrm{e} + E$、(i) の積分は $1.125386 = E$、(ii) の積分は $1.529558 = \frac{1}{2}\mathrm{e}E$ である。コンピュータを使わない簡単な確認としては、最初の二つの被積分関数はどちらも正であり、実際 $\mathrm{e} - 1 - E \approx 0.59 > 0$、$2 - \mathrm{e} + E \approx 0.41 > 0$ となっている。また、$[0,1]$ 上で $x^2 \leq x$ であるから二つ目は一つ目より小さくなるはずであり、実際そうなっている。

よくある間違い

- (i) で積分区間の上端と下端を入れ替え忘れる（あるいは負号を落とす）と $-E$ が得られるが、被積分関数が正なのでこれはありえない答えである。
- (ii) で、$\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{1+u}$ から出てくる因子 e や、$\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ から出てくる因子 $\frac{1}{2}$ を落とす。

STEP のその先へ

E のような積分は**指数積分**（exponential integral）$\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$ と結びついている。$t = 1 + x$ と置換すると $E = \mathrm{e}^{-1}\big(\mathrm{Ei}(2) - \mathrm{Ei}(1)\big)$ であることがわかる。リウヴィル（Liouville）の理論により、$\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x$ は初等的な原始関数（antiderivative）をもたないことが示される。まさにそのために、この問題では E を名前のついた定数として扱い、すべてをそれに帰着させるよう求めているのである。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* には、この趣旨の問題がさらに数多く収められている。

解答例

STEP I 2011、第 3 問

純粋数学 ・ 三角関数の恒等式

STEP I 2011、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/11-s1-q3

鍵となる考え方

$\frac{1}{3}\pi \mp \theta$ における 2 つの正弦（sine）の積は、平方の差（difference of squares）の技法によってきれいにまとまり、これにより $(*)$ が 1 行で証明できる。その後、余接（cotangent）の和は積を微分することから得られる。3 つの因数の積の導関数をその積自身で割ると、3 つの「対数微分（logarithmic derivative）」の和になり、正弦の場合それらは余接になる。余弦（cosine）版に同じことを行うと正接（tangent）が得られ、さらに $\tan x + \cot x$ は余割（cosecant）になる。

解答

恒等式 $(*)$

$a = \frac{1}{3}\pi$ とおく。加法定理（compound-angle formulae）により、

$$\begin{aligned}\sin(a-\theta)\sin(a+\theta) &= (\sin a\cos\theta - \cos a\sin\theta)(\sin a\cos\theta + \cos a\sin\theta)\\ &= \sin^2 a\cos^2\theta - \cos^2 a\sin^2\theta\\ &= \sin^2 a\,(1-\sin^2\theta) - (1-\sin^2 a)\sin^2\theta = \sin^2 a - \sin^2\theta.\end{aligned}$$

$\sin^2 a = \frac{3}{4}$ であるから、3 倍角の公式（triple-angle formula）により

$$4\sin\theta\sin(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)\sin(\tfrac{1}{3}\pi+\theta) = 4\sin\theta\left(\tfrac{3}{4}-\sin^2\theta\right) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \sin 3\theta$$

となる。これで、すべての θ について $(*)$ が証明された。

小問 (i)

$(*)$ はすべての θ について成り立つので、両辺を微分してよい。積の微分法（product rule）により、

$$4\Big[\cos\theta\sin(a-\theta)\sin(a+\theta)-\sin\theta\cos(a-\theta)\sin(a+\theta) \\ +\sin\theta\sin(a-\theta)\cos(a+\theta)\Big]=3\cos 3\theta$$

となる。ここで中央の項の負号は、$a-\theta$ に合成関数の微分法（chain rule）を適用したことから生じる。

? **考えてみよう** これをどうすれば余接に変えられるだろうか？

両辺を $\sin 3\theta$ で割る。これは $(*)$ により $4\sin\theta\sin(a-\theta)\sin(a+\theta)$ に等しい。左辺の各項では、微分された因数以外の正弦がすべて消える。この操作は $\sin 3\theta\neq 0$ のときには常に許され、そのとき 3 つの正弦もすべて 0 でない。こうして

$$\cot\theta-\cot(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)+\cot(\tfrac{1}{3}\pi+\theta)=3\cot 3\theta \qquad (\sin 3\theta\neq 0). \tag{A}$$

を得る。ここで $\theta=\frac{1}{9}\pi$ とおくと、$\sin 3\theta=\sin\frac{1}{3}\pi\neq 0$ である。$\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{9}\pi=\frac{2}{9}\pi$、$\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{9}\pi=\frac{4}{9}\pi$ であるから、

$$\cot\tfrac{1}{9}\pi-\cot\tfrac{2}{9}\pi+\cot\tfrac{4}{9}\pi=3\cot\tfrac{1}{3}\pi=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

$(*)$ において $\theta=\frac{1}{6}\pi-\phi$ とおく。4 つの正弦は

$$\begin{aligned}\sin\theta&=\sin(\tfrac{1}{6}\pi-\phi)=\cos(\tfrac{1}{3}\pi+\phi),\\ \sin(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)&=\sin(\tfrac{1}{6}\pi+\phi)=\cos(\tfrac{1}{3}\pi-\phi),\\ \sin(\tfrac{1}{3}\pi+\theta)&=\sin(\tfrac{1}{2}\pi-\phi)=\cos\phi,\\ \sin 3\theta&=\sin(\tfrac{1}{2}\pi-3\phi)=\cos 3\phi,\end{aligned}$$

となる。いずれも $\sin(\frac{1}{2}\pi-x)=\cos x$ を用いた。したがって、ϕ を θ と書き直せば

$$4\cos\theta\cos(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)\cos(\tfrac{1}{3}\pi+\theta)=\cos 3\theta \qquad \text{任意の}\theta. \tag{**}$$

が成り立つ。$(*)$ を $(**)$ で割ると、因数 4 は約分され、正弦を余弦で割ったものはそれぞれ正接になる。逆数をとって

$$\cot\theta\cot(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)\cot(\tfrac{1}{3}\pi+\theta)=\cot 3\theta,$$

を得る。これは両辺が定義される範囲、すなわち $\sin 3\theta \neq 0$ かつ $\cos 3\theta \neq 0$ となるところで成り立つ（それぞれの条件により、対応する3つの因数が0でなくなる）。

余割の和を得るために、小問 (i) とまったく同様に $(**)$ を微分する：

$$4\Big[-\sin\theta\cos(a-\theta)\cos(a+\theta)+\cos\theta\sin(a-\theta)\cos(a+\theta) \\ -\cos\theta\cos(a-\theta)\sin(a+\theta)\Big] = -3\sin 3\theta.$$

$\cos 3\theta = 4\cos\theta\cos(a-\theta)\cos(a+\theta)$ で割り（これが0でないとき）、-1 を掛けると

$$\tan\theta - \tan(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)+\tan(\tfrac{1}{3}\pi+\theta) = 3\tan 3\theta. \qquad \text{(B)}$$

となる。(A) と (B) の符号は一致しているので、両者を足し合わせることができる。

考えてみよう なぜ正接と余接を足すと役に立つのだろうか？

$\tan x + \cot x$ は1つの余割になるからである：

$$\tan x+\cot x = \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{2}{\sin 2x} = 2\operatorname{cosec} 2x.$$

よって $\sin 6\theta \neq 0$ のとき、(A) と (B) を足すと

$$2\operatorname{cosec} 2\theta - 2\operatorname{cosec}(\tfrac{2}{3}\pi-2\theta)+2\operatorname{cosec}(\tfrac{2}{3}\pi+2\theta) = 6\operatorname{cosec} 6\theta.$$

を得る。ここで $\theta = \frac{1}{18}\pi$ とすると、$2\theta = \frac{1}{9}\pi$、$6\theta = \frac{1}{3}\pi$ である（$\sin 6\theta \neq 0$ を満たす）。$\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{9}\pi = \frac{5}{9}\pi$、$\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{9}\pi = \frac{7}{9}\pi$ であるから、2で割って

$$\operatorname{cosec}\tfrac{1}{9}\pi - \operatorname{cosec}\tfrac{5}{9}\pi + \operatorname{cosec}\tfrac{7}{9}\pi = 3\operatorname{cosec}\tfrac{1}{3}\pi = 3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3},$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

- $\theta = \frac{1}{6}\pi$ において $(*)$ は $4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = 1 = \sin\frac{1}{2}\pi$ となり、$\theta = 0$ において $(**)$ は $4\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 1 = \cos 0$ となる。
- 数値的には、$\cot 20^\circ - \cot 40^\circ + \cot 80^\circ \approx 2.7475 - 1.1918 + 0.1763 = 1.7321 \approx \sqrt{3}$ であり、$\operatorname{cosec} 20^\circ - \operatorname{cosec} 100^\circ + \operatorname{cosec} 140^\circ \approx 2.9238 - 1.0154 + 1.5557 = 3.4641 \approx 2\sqrt{3}$ である。
- 恒等式 (A)、(B) および余接の積の式は、電卓を使って任意の θ で確かめることができる。我々は数千個のランダムな値で確認した。

よくある間違い

- $\sin(\frac{1}{3}\pi - \theta)$ を微分するときに合成関数の微分法による負号を忘れ、(A) の交互に変わる符号を崩してしまう。
- 代入する値において $\sin 3\theta$ が 0 でないことを確認せずに、それで割ってしまう。
- 余割の和を余接の積から得ようとする。組み合わせるべきなのは和 (A) と (B) である。

STEP のその先へ

導関数を関数自身で割る技法は対数微分法である：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln|f| = f'/f$ は積を和に変える。これをさらに推し進めると、sin そのものをその零点にわたる無限積（infinite product）として表すことができ、対数微分によって有名な部分分数展開（partial-fraction expansion）$\pi\cot\pi x = \sum_n \frac{1}{x-n}$ が得られる。恒等式 $(*)$ はこの有限版の影のようなものである。これらの考え方は複素解析（complex analysis）で展開される。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、学び始めるのにうってつけの美しい本である。

解答例

STEP I 2011、第 4 問

純粋数学 • 放物線の接線

> **STEP I 2011、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q4

鍵となる考え方

放物線（parabola）上の一般の点における接線（tangent）を分数を含まない形で書けば、2 本の接線の交点は引き算するだけで求まる。角については、$\overrightarrow{FT}$ と $\overrightarrow{FP}$ の内積（scalar product）を用いる。長さは見かけほど厄介ではない。FP は焦点距離（focal distance）であり、FT^2 は因数分解できる。$\cos\phi$ が求まったら、その答えが p と q について対称であることに注目しよう。この対称性こそが、二等分（bisection）の議論のすべてである。

解答

点 T

$y^2 = 4ax$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると $2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4a$ となるので、$y = 2ap \neq 0$（$p \neq 0$ より）である点 P における傾き（gradient）は $\dfrac{4a}{4ap} = \dfrac{1}{p}$ である。したがって P における接線は

$$y - 2ap = \frac{x - ap^2}{p} \quad \Longleftrightarrow \quad py = x + ap^2,$$

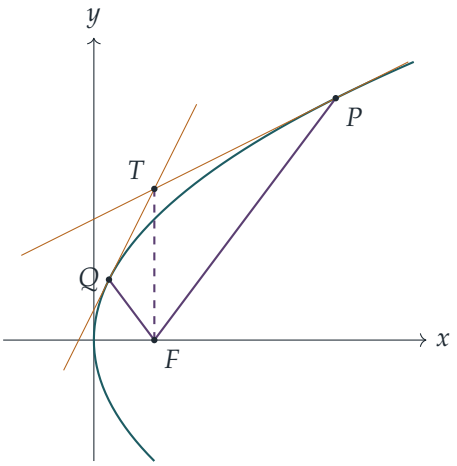
であり、同様に Q における接線は $qy = x + aq^2$ である。辺々引くと

$$(p - q)\,y = a(p^2 - q^2) = a(p - q)(p + q).$$

P と Q は異なる点なので $p \neq q$ であり、$p - q$ で割って $y = a(p + q)$ を得る。すると

$$x = py - ap^2 = ap^2 + apq - ap^2 = apq,$$

となるので、T は点 $\big(apq,\, a(p+q)\big)$ であり、題意が示された。



図は $a=1$、$p=2$、$q=\frac{1}{2}$ の場合であり、このときたまたま FT は鉛直になる。

角 ϕ

まず $T \neq F$ であることに注意する。$T=F$ となるには $p+q=0$ かつ $pq=1$ が必要であり、そうすると $p^2=-1$ となって不可能である。よって角 TFP は意味をもつ。$F=(a,0)$ とすると

$$\overrightarrow{FP}=a\begin{pmatrix}p^2-1\\2p\end{pmatrix},\qquad \overrightarrow{FT}=a\begin{pmatrix}pq-1\\p+q\end{pmatrix}.$$

長さは

$$FP^2=a^2\left[(p^2-1)^2+4p^2\right]=a^2(p^2+1)^2,$$
$$FT^2=a^2\left[(pq-1)^2+(p+q)^2\right]=a^2\left[p^2q^2+p^2+q^2+1\right]=a^2(p^2+1)(q^2+1),$$

である。交差項 $-2pq$ と $+2pq$ が打ち消し合うからである。よって $FP=|a|(p^2+1)$、$FT=|a|\sqrt{(p^2+1)(q^2+1)}$ である。

考えてみよう 内積が因数分解できることに、どうすれば気づけるだろうか？

(p^2+1) が FP と約分されることを期待して、この因数を探す。展開すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FT}&=a^2\left[(p^2-1)(pq-1)+2p(p+q)\right]\\&=a^2\left[p^3q-p^2-pq+1+2p^2+2pq\right]\\&=a^2\left[p^3q+pq+p^2+1\right]\\&=a^2(p^2+1)(pq+1).\end{aligned}$$

したがって、$|a|^2 = a^2$ を用いると

$$\cos\phi = \frac{\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FT}}{FP\cdot FT} = \frac{a^2(p^2+1)(pq+1)}{a^2(p^2+1)\sqrt{(p^2+1)(q^2+1)}} = \frac{pq+1}{\sqrt{(p^2+1)(q^2+1)}},$$

となり、求める結果が得られた。

二等分

T の座標は p と q について対称なので、上の計算で P と Q の役割を入れ替えると、角 TFQ について

$$\cos\angle TFQ = \frac{qp+1}{\sqrt{(q^2+1)(p^2+1)}} = \cos\phi.$$

が成り立つ。どちらの角も $[0,\pi]$ の範囲にあり、そこでは余弦は一対一（one-to-one）であるから、$\angle TFP = \angle TFQ = \phi$ である。

よって半直線（ray）FP と FQ はいずれも半直線 FT と角 ϕ をなす。平面上で、F から出て FT と角 ϕ をなす半直線は 2 本しかなく、それらは直線 FT に関して互いに鏡映の関係にある。半直線 FP と FQ は同じ半直線ではない。焦点（focus）を通る直線は放物線と F の両側にある 2 点で交わる（あるいは 1 点でしか交わらない）ので、F から出る 1 本の半直線が P と Q の両方を通ることはありえないからである。したがって FP と FQ は直線 FT に関して互いの鏡映であり、これはまさに直線 FT が角 PFQ を二等分するという主張にほかならない。

問題文が**直線** FT と言っている理由は、次の細部によって説明される。$pq+1>0$ ならば $\phi < \frac{\pi}{2}$ であり、半直線 FT そのものが角 $PFQ = 2\phi$ の内側にある。$pq+1<0$ ならば $\phi > \frac{\pi}{2}$ であり、角 PFQ は $2\pi - 2\phi$ となって、これを二等分するのは TF を F の先へ延長した部分である。$pq=-1$ ならば PQ は焦点弦（focal chord）であり、$\phi = \frac{\pi}{2}$ で、FT はそれに垂直となって平角（straight angle）を二等分する。いずれの場合も、直線 FT は角 PFQ を二等分する。

検算

図と同じく $a=1$、$p=2$、$q=\frac{1}{2}$ とすると、$T=(1,\frac{5}{2})$、$\overrightarrow{FP}=(3,4)$、$\overrightarrow{FQ}=(-\frac{3}{4},1)$、$\overrightarrow{FT}=(0,\frac{5}{2})$ である。このとき $\cos\angle TFP = \frac{4}{5}$、$\cos\angle TFQ = \frac{1}{5/4} = \frac{4}{5}$ となり、$\dfrac{2}{\sqrt{5\cdot\frac{5}{4}}} = \dfrac{4}{5}$ と一致する。a（正負どちらも）、p、q を 10^5 通り無作為に選んでコンピュータで検証したところ、T の座標、$\cos\phi$ の公式、二等分のいずれも 10^{-10} 以内の精度で確認された。その中には $pq<-1$ の場合も多く含まれており、その場合は FT の逆向きの延長が二等分している。

よくある間違い

- $p-q$ が 0 でない理由（2 点が異なること）を述べずに $p-q$ で割ってしまう。
- $FP = a(p^2+1)$ と書いてしまう。これは $a<0$ のとき誤りである。ただし $\cos\phi$ には a^2 しか現れないので、最終的には a の符号は影響しない。
- FP と FQ が直線 FT の反対側にある理由を説明せずに、「余弦が等しいので FT は二等分する」と言ってしまう。

STEP のその先へ

これは姿を変えた放物線の反射の性質（reflective property）である。すなわち、外部の任意の点から引いた 2 本の接線の線分は、焦点から見て等しい角をなす。同じことは楕円（ellipse）と双曲線（hyperbola）についても成り立ち、3 つとも円錐曲線（conic）の焦点・準線（focus–directrix）による定義から導かれる。この定義は、大学 1 年の幾何学や射影幾何学（projective geometry）の講義でさらに深く展開される。この種の問題をもっと解きたければ、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（『上級数学問題集』）が無料で入手でき、取り組む価値が大いにある。

解答例

STEP I 2011、第 5 問

純粋数学 • 絶対値を含む積分

> **STEP I 2011、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q5

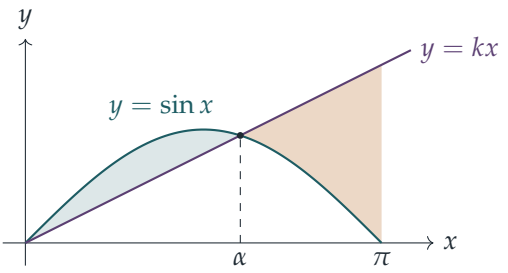
鍵となる考え方

絶対値（modulus）記号が厄介なのは、$\sin x - kx$ の符号がどこで変わるかがわからないうちだけである。そしてそれは図が教えてくれる。符号が変わるのはただ一度、$x = \alpha$ においてである。そこで積分を分割すれば、絶対値記号は消える。最後の一歩は、k を変数とみなすのをやめることである。$k = \sin\alpha/\alpha$ であるから、すべてを α で表すことができ、そうすると I の導関数（derivative）はきれいに因数分解（factorise）できる。

解答

ただ一つの解

$g(x) = \sin x - kx$ とおく。直線 $y = kx$ は原点を通り、傾き $k < 1$ をもつ。一方、$y = \sin x$ は原点から傾き $\cos 0 = 1$ で出発する。したがって、0 のすぐ右側では正弦曲線のほうが直線より上にある。$x = \pi$ では正弦曲線は再び 0 に戻るが、直線は高さ $k\pi > 0$ にあるので、そこでは直線のほうが上にある。$y = \sin x$ は $(0, \pi)$ で下に曲がっており、直線はまっすぐであるから、両者はその間でちょうど一度だけ交わる。



「ちょうど一度」を厳密にしておこう。$g(0)=0$、$g'(x)=\cos x-k$ であり、$(0,\pi)$ で $g''(x)=-\sin x<0$ である。よって g' は狭義単調減少（strictly decreasing）であり、0 における $1-k>0$ から π における $-1-k<0$ まで減少するので、ちょうど一点 β で 0 になる。ゆえに g は $(0,\beta]$ で狭義単調増加であり、（0 から出発するので）そこでは正である。また $[\beta,\pi)$ では正の値から $g(\pi)=-k\pi<0$ まで狭義単調減少する。したがって g は $(0,\pi)$ にちょうど一つの零点 α をもち、

$$\sin x>kx \text{ となるのは} 0<x<\alpha, \qquad \sin x<kx \text{ となるのは} \alpha<x<\pi.$$

I の計算

これらの符号（図の青緑色と琥珀色の領域）を用いると、

$$I=\int_0^{\alpha}(\sin x-kx)\,\mathrm{d}x-\int_{\alpha}^{\pi}(\sin x-kx)\,\mathrm{d}x.$$

$\sin x-kx$ の原始関数（antiderivative）の一つは $F(x)=-\cos x-\frac{1}{2}kx^2$ であるから、

$$\begin{aligned} I&=\big(F(\alpha)-F(0)\big)-\big(F(\pi)-F(\alpha)\big)=2F(\alpha)-F(0)-F(\pi)\\ &=\big(-2\cos\alpha-k\alpha^2\big)+1-\big(1-\tfrac{1}{2}k\pi^2\big)\\ &=\tfrac{1}{2}k\pi^2-2\cos\alpha-k\alpha^2. \end{aligned}$$

α は $(*)$ の解であるから $k=\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ であり、よって $k\alpha^2=\alpha\sin\alpha$ となって

$$I=\frac{\pi^2\sin\alpha}{2\alpha}-2\cos\alpha-\alpha\sin\alpha,$$

が得られる。これが示すべきことであった。

停留値

考えてみよう α はどのような値をとりうるか。

各 $k\in(0,1)$ に対して $\alpha\in(0,\pi)$ が一つ定まる。逆に、各 $\alpha\in(0,\pi)$ は $k=\sin\alpha/\alpha$ から得られ、この範囲では $0<\sin\alpha<\alpha$ であるから、この k は $(0,1)$ に属する。したがって、開区間（open interval）$(0,\pi)$ のすべての α について $I(\alpha)$ を調べればよい。

第 1 項には商の微分法（quotient rule）を用いて微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha} &= \frac{\pi^2(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)}{2\alpha^2} + 2\sin\alpha - (\sin\alpha+\alpha\cos\alpha)\\ &= \frac{\pi^2(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)}{2\alpha^2} - (\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)\\ &= (\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)\left(\frac{\pi^2}{2\alpha^2}-1\right).\end{aligned}$$

第 1 因数は $(0,\pi)$ で決して 0 にならない。実際、$h(\alpha) = \alpha\cos\alpha - \sin\alpha$ とおくと、$h(0) = 0$ であり、$(0,\pi)$ で $h'(\alpha) = \cos\alpha - \alpha\sin\alpha - \cos\alpha = -\alpha\sin\alpha < 0$ であるから、この区間全体で $h(\alpha) < 0$ となる。（同じことだが、$(0, \frac{1}{2}\pi)$ では $\tan\alpha > \alpha$ であり、その先では $\cos\alpha \le 0$ である。）

よって $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha = 0$ となるのは $\pi^2 = 2\alpha^2$ のとき、すなわち $\alpha = \pi/\sqrt{2}$ のときに限られ、これは確かに $(0,\pi)$ に属する。これがただ一つの停留値（stationary value）を与える。$h < 0$ であるから、$\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha$ の符号は $\frac{\pi^2}{2\alpha^2} - 1$ の符号と逆である。

- $0 < \alpha < \pi/\sqrt{2}$ では $\frac{\pi^2}{2\alpha^2} > 1$ であるから $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha < 0$ である。
- $\pi/\sqrt{2} < \alpha < \pi$ では $\frac{\pi^2}{2\alpha^2} < 1$ であるから $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha > 0$ である。

したがって I は減少したのち増加する。よってこの停留値は極小値であり、区間内でただ一つの停留点であるから、I の最小値である。

$\alpha = \pi/\sqrt{2}$ では $\dfrac{\pi^2}{2\alpha} = \dfrac{\pi^2}{\sqrt{2}\,\pi} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}} = \alpha$ となるので、I の第 1 項と第 3 項が打ち消し合う。

$$I_{\min} = \alpha\sin\alpha - 2\cos\alpha - \alpha\sin\alpha = -2\cos\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$\pi/\sqrt{2} \approx 2.22$ は余弦が負となる $\frac{1}{2}\pi$ と π の間にあるから、この値は当然そうあるべきとおり正である。

検算

- $k \to 0$ のとき $\alpha \to \pi$ であり、公式から $I \to 2$ が得られる。これは $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$ に等しい。$k \to 1$ のとき $\alpha \to 0$ であり、$I \to \frac{1}{2}\pi^2 - 2$ となる。これは $\int_0^\pi (x - \sin x)\,\mathrm{d}x$ に等しい。
- 数値的には $-2\cos(\pi/\sqrt{2}) \approx 1.2114$ であり、これは両端の値 2 と $\frac{1}{2}\pi^2 - 2 \approx 2.935$ のどちらよりも小さい。$k = \sin\alpha/\alpha \approx 0.3582$ として $\int_0^\pi |\sin x - kx|\,\mathrm{d}x$ を中点則による数値積分（midpoint quadrature）で直接計算しても、1.2114 が得られる。

よくある間違い

- k を定数とみなしたまま α について微分してしまうこと。k は α に依存しており、だからこそ最初に $k = \sin\alpha/\alpha$ を代入するのである。
- $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha = 0$ となるのが $\alpha = \pi/\sqrt{2}$ だけであることを示す際に、$\alpha\cos\alpha - \sin\alpha$ が $(0,\pi)$ に零点をもたないことを示し忘れること。

STEP のその先へ

ただ一つの解の存在を示す議論では、中間値の定理（intermediate value theorem）と狭義単調性を組み合わせて用いている。また最小化の議論では、$\alpha \mapsto k$ が $(0,\pi)$ と $(0,1)$ の間の全単射（bijection）であり、したがって α について最小化することは k について最小化することと同じである、という事実をさりげなく用いている。このような変数の取り替え（reparametrisation）や存在の議論を厳密にすることは、実解析（real analysis）の最初の講義の仕事である。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学入門』）は、その出発点として最適な一冊である。

解答例

STEP I 2011、第 6 問

純粋数学 ・ 二項級数の和

> **STEP I 2011、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q6

鍵となる考え方

$(1-x)^{-3}$ の係数（coefficients）がわかってしまえば、多項式（polynomial）を掛けることは隣り合ういくつかの係数を混ぜ合わせることにすぎない。したがって、より複雑な有理関数（rational function）の係数もほとんど労せずに得られる。この過程を逆にたどれば、項が (多項式、変数r) $\times x^r$ の形をした級数（series）は、それを生成する有理関数を見抜き、適切な x の値（ここでは $x=\frac{1}{2}$）を代入することで和を求められる。

解答

最初の結果

$|x|<1$ のとき、指数（index）-3 の二項展開（binomial expansion）により

$$(1-x)^{-3}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-3)(-4)\cdots(-3-r+1)}{r!}(-x)^r.$$

分子は r 個の因数からなり、いずれも負であるから、その積は $(-1)^r\,\dfrac{(r+2)!}{2!}$ であり、この $(-1)^r$ は $(-x)^r$ から出る $(-1)^r$ と打ち消し合う。よって x^r の係数は

$$a_r=\frac{(r+2)!}{2!\,r!}=\tfrac{1}{2}(r+1)(r+2),$$

となり、示すべき結果を得る。（したがって $a_0=1, a_1=3, a_2=6, a_3=10, \ldots$である。）

小問 (i)

次のように書く。

$$\frac{1-x+2x^2}{(1-x)^3} = (1-x+2x^2)\sum_{k\geq 0} a_k x^k.$$

x^r の項は $1\cdot a_r x^r$、$-x\cdot a_{r-1}x^{r-1}$、$2x^2\cdot a_{r-2}x^{r-2}$ から生じるので、$r\geq 2$ のとき x^r の係数は

$$\begin{aligned} a_r - a_{r-1} + 2a_{r-2} &= \tfrac{1}{2}(r+1)(r+2) - \tfrac{1}{2}r(r+1) + (r-1)r \\ &= (r+1) + r^2 - r \\ &= r^2 + 1. \end{aligned}$$

考えてみよう a_{r-1} や a_{r-2} が存在しない $r=0$ や $r=1$ の場合にも、この式は成り立つだろうか。

成り立つ。$a_{-1} = a_{-2} = 0$ と定めると、式 $\frac{1}{2}(r+1)(r+2)$ も $r=-1$ と $r=-2$ で 0 を与えるので、上の計算はすべての $r\geq 0$ に対して有効である。直接確かめると、定数項は $a_0 = 1 = 0^2+1$ であり、x の係数は $a_1 - a_0 = 2 = 1^2+1$ である。よって、すべての $r\geq 0$ に対して x^r の係数は r^2+1 であり、示すべき結果を得る。

級数については、分子 $1,2,5,10,17,26,37,50,\ldots$ は $r=0,1,2,\ldots$ に対する r^2+1 であり、分母は 2^r である。よってこの級数は

$$\sum_{r=0}^{\infty}(r^2+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^r,$$

であり、これは上の展開に $x=\frac{1}{2}$ を代入したものである。$(1-x)^{-3}$ の二項展開は $|x|<1$ で収束（converge）するので、この代入は正当である。したがって

$$1+\frac{2}{2}+\frac{5}{4}+\frac{10}{8}+\cdots = \frac{1-\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{1/8} = 8.$$

小問 (ii)

最初の仕事は規則性を見つけることである。分母を $1,2,4,8,16,32,64$ として項を書き直すと

$$1, \frac{4}{2}, \frac{9}{4}, \frac{16}{8}, \frac{25}{16}, \frac{36}{32}, \frac{49}{64}, \cdots$$

となるので、この級数は $\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(r+1)^2}{2^r}$ である。

考えてみよう $(1-x)^3$ の上にどのような分子を置けば、係数が $(r+1)^2$ になるだろうか。

小問 (i) からすると、分子として（ここでも短い多項式である）$1+x$ を試してみるのがよさそうである。$(1+x)(1-x)^{-3}$ における x^r の係数は

$$a_r + a_{r-1} = \tfrac{1}{2}(r+1)(r+2) + \tfrac{1}{2}r(r+1) = \tfrac{1}{2}(r+1)(2r+2) = (r+1)^2,$$

であり、これは（先ほどと同様に $a_{-1}=0$ とすれば）すべての $r \geq 0$ に対して成り立つ。$x = \frac{1}{2}$ を代入すると

$$1+2+\frac{9}{4}+2+\frac{25}{16}+\cdots = \frac{1+\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{3}{2}\cdot 8 = 12.$$

別解：小問 (i) を利用する。$s = r+1$ として添字をずらすと、$2^{-r} = 2\cdot 2^{-s}$ であるから

$$\sum_{r\geq 0}\frac{(r+1)^2}{2^r} = 2\sum_{s\geq 1}\frac{s^2}{2^s} = 2\left(\sum_{s\geq 0}\frac{s^2+1}{2^s} - \sum_{s\geq 0}\frac{1}{2^s}\right) = 2(8-2) = 12,$$

となる。ここで小問 (i) の答えと等比級数（geometric series）$\sum 2^{-s} = 2$ を用いた。

検算

- $(1-x)^{-3}$ を $(1+x+x^2+\cdots)^3$ として手で展開するか、いくつかの項を掛け合わせると $1+3x+6x^2+10x^3+\cdots$ となり、$\frac{1}{2}(r+1)(r+2)$ と一致する。
- 小問 (i) の級数の部分和（partial sums）は 8 に近づく。200 項まで足すと、和は計算機の精度の範囲で 8 に一致する。小問 (ii) についても同様に、極限 12 が確かめられる。
- 小問 (ii) の二通りの解法は同じ答え 12 を与える。

よくある間違い

- 二項係数の符号を誤る。$(-3)(-4)\cdots$ から r 個、$(-x)^r$ から r 個の負号が出て、それらは打ち消し合う。
- 小問 (ii) で、一部の分数が既約分数で与えられているために規則性を読み違える。$2 = \frac{4}{2} = \frac{16}{8}$ であり、$\frac{9}{8} = \frac{36}{32}$ である。
- 展開がそこで収束すること（$|x|<1$）に触れずに $x = \frac{1}{2}$ を代入する。

STEP のその先へ

ここまで行ってきたのは**母関数**（generating functions）の利用である。数列 $c_0, c_1, c_2, \ldots$ をべき級数（power series）$\sum c_r x^r$ として符号化すると、数列に対する操作が関数の代数計算になる。実際、r の任意の多項式に x^r を掛けたものの和は、分母が $(1-x)$ のべきである有理関数になる。これらの和が常に有理数になるのはそのためである。x に値を代入することの正当化は、べき級数とその収束半径（radius of convergence）の理論に基づいており、これは Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）で扱われている。問題解決の道具としての母関数については Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）を参照されたい。

解答例

STEP I 2011、第 7 問

純粋数学 ・ 変数分離形の微分方程式

STEP I 2011、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/11-s1-q7

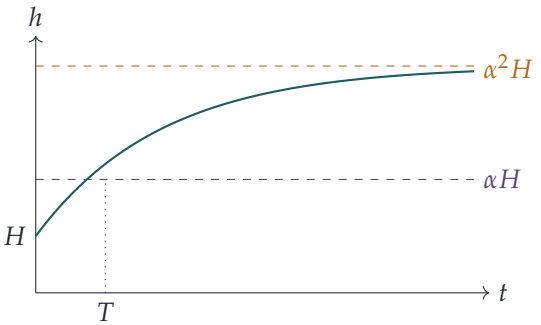
鍵となる考え方

体積は（一定の断面積）×（高さ）であるから、高さの変化率は単に（流入量 − 流出量）を断面積で割ったものである。「高さが一定に保たれる」という言い回しが流入量を決める手がかりになる。その高さでは流入と流出がちょうど釣り合っているのである。あとはどの小問も変数分離形の微分方程式（separable differential equation）であり、小問 (ii) では置換（substitution）$u = \sqrt{h}$ によって積分が定型的な計算に帰着する。

解答

一定の断面積（cross-sectional area）を A、一定の流入率（単位時間あたりの体積）を q とする。水の体積は Ah であるから、

$$A\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = q - (\text{流出率}).$$



高さは H から、流入と流出が釣り合う水位 $\alpha^2 H$ に向かって上昇し、限りなく近づくが決して到達しない。問われているのは αH に達するまでの時間であり、$1 < \alpha < \alpha^2$ であるからこの水位は両者の間にある。（図は小問 (i) の場合を示している。）

小問 (i)

流出率はある定数 $\lambda > 0$ を用いて λh と表されるから、

$$A\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = q - \lambda h.$$

$h = \alpha^2 H$ のとき高さは一定に保たれるので、そこで $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t = 0$ となり、$q = \lambda\alpha^2 H$ を得る。これを代入すると、

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\lambda}{A}\left(\alpha^2 H - h\right) = k\left(\alpha^2 H - h\right), \qquad k = \frac{\lambda}{A} > 0,$$

となり、求める式が得られた。

上昇の間はつねに $H \le h < \alpha^2 H$ であるから $\alpha^2 H - h > 0$ であり、変数を分離できる：

$$\begin{aligned} kT &= \int_H^{\alpha H} \frac{\mathrm{d}h}{\alpha^2 H - h} = \Big[-\ln\left(\alpha^2 H - h\right) \Big]_H^{\alpha H} = \ln\frac{\alpha^2 H - H}{\alpha^2 H - \alpha H} \\ &= \ln\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)} = \ln\frac{\alpha+1}{\alpha} = \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right), \end{aligned}$$

ここで $\alpha > 1$ より $\alpha - 1 \neq 0$ であるから約分した。これが求める結果である。

α が大きいとき $x = 1/\alpha$ は小さいので、

$$kT \approx \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha^2} \approx \frac{1}{\alpha},$$

となる。α が大きいとき、第 2 項は第 1 項に比べて無視できるからである。

小問 (ii)

今度は流出率がある定数 $\mu > 0$ を用いて $\mu\sqrt{h}$ と表されるので、$A\,\mathrm{d}h/\mathrm{d}t = q - \mu\sqrt{h}$ である。高さは $h = \alpha^2 H$ で一定となるから、（$\alpha > 0$ を用いて）$q = \mu\sqrt{\alpha^2 H} = \mu\alpha\sqrt{H}$ である。したがって

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = c\left(\alpha\sqrt{H} - \sqrt{h}\right), \qquad c = \frac{\mu}{A} > 0.$$

やはり $h < \alpha^2 H$ である間は括弧内が正であるから、

$$cT' = \int_H^{\alpha H} \frac{\mathrm{d}h}{\alpha\sqrt{H} - \sqrt{h}}.$$

考えてみよう 分母にある $\sqrt{h}$ はどう扱えばよいだろうか。

$u = \sqrt{h}$ と置換すると、$h = u^2$、$\mathrm{d}h = 2u\,\mathrm{d}u$ であり、積分区間の端は $u = \sqrt{H}$ と $u = \sqrt{\alpha H}$ になる。簡単のため $a = \alpha\sqrt{H}$ と書くと、被積分関数は有理関数（rational function）となり、割り算を実行して

$$\frac{2u}{a-u} = -2 + \frac{2a}{a-u}.$$

したがって

$$\begin{aligned} cT' &= \int_{\sqrt{H}}^{\sqrt{\alpha H}} \left(-2 + \frac{2a}{a-u}\right) \mathrm{d}u = \Big[-2u - 2a\ln(a-u)\Big]_{\sqrt{H}}^{\sqrt{\alpha H}} \\ &= -2\left(\sqrt{\alpha H} - \sqrt{H}\right) + 2\alpha\sqrt{H}\,\ln\frac{\alpha\sqrt{H} - \sqrt{H}}{\alpha\sqrt{H} - \sqrt{\alpha}\sqrt{H}} \\ &= 2\sqrt{H}\left(1 - \sqrt{\alpha} + \alpha\ln\frac{\alpha - 1}{\alpha - \sqrt{\alpha}}\right). \end{aligned}$$

$u \le \sqrt{\alpha H} < \alpha\sqrt{H} = a$ であるから（$\alpha > 1$ のとき $\sqrt{\alpha} < \alpha$ なので）、対数の中身は正である。最後に $\alpha - 1 = (\sqrt{\alpha} - 1)(\sqrt{\alpha} + 1)$ および $\alpha - \sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha} - 1)$ と因数分解すると、

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha - \sqrt{\alpha}} = \frac{\sqrt{\alpha} + 1}{\sqrt{\alpha}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$

となるので、

$$cT' = 2\sqrt{H}\left(1 - \sqrt{\alpha} + \alpha\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\right),$$

となり、求める式が得られた。

α が大きいとき $1/\sqrt{\alpha}$ は小さいので、

$$\alpha\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) \approx \alpha\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{2\alpha}\right) = \sqrt{\alpha} - \frac{1}{2}.$$

大きな項 $\pm\sqrt{\alpha}$ は打ち消し合い、

$$cT' \approx 2\sqrt{H}\left(1 - \sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha} - \tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{H}.$$

が残る。ここでは対数の x^2 の項が必要だったことに注意しよう。$\ln(1+x) \approx x$ だけを使うと括弧内は 1 となり、$2\sqrt{H}$ という誤った結果が得られてしまう。問題文が 2 項までの近似を与えているのはこのためである。

検算

- $\alpha \to 1^+$ のとき、(i) からは $kT \to \ln 2$ が得られ、0 にはならない。これは正しい。平衡（equilibrium）までの差ははじめ $(\alpha^2 - 1)H \approx 2(\alpha - 1)H$ であり、これが

$(\alpha^2-\alpha)H \approx (\alpha-1)H$ まで縮まらなければならない。つまり差は半分になるのであり、速さ k の指数関数的減衰（exponential decay）で半分になるのにかかる時間は $(\ln 2)/k$ である。(ii) では $cT' \to 2\sqrt{H}\ln 2$ となり、これは $h = H$ の近くで $\sqrt{h}$ を線形化（linearising）して得られる実効的な速さ $c/(2\sqrt{H})$ による同じ半減と一致する。

- $\alpha = 4$、$H = 1$ のとき：$kT = \ln 1.25 \approx 0.2231$、$cT' = 2(-1+4\ln 1.5) \approx 1.2437$ である。いくつかのランダムな H, α, k, c に対して両方の微分方程式を数値的に（ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta）で）解くと、どちらの公式も 10^{-9} の精度で再現される。
- $\alpha = 10^4$、$H = 2$ のとき：$\alpha\ln(1+1/\alpha) \approx 0.99995$、$cT'/\sqrt{H} \approx 1.0066$ であり、極限と整合している（次の項まで含めると $cT' \approx \sqrt{H}\,(1+\frac{2}{3\sqrt{\alpha}})$ となる）。

よくある間違い

- 平衡の条件を使って流入率を消去するのを忘れ、定数が多すぎるまま残ってしまう。
- 小問 (ii) で $\ln(1+x) \approx x$ だけを使い、決定的に重要な $-\frac{1}{2}$ を失ってしまう。
- $\sqrt{\alpha^2 H}$ を $\alpha^2\sqrt{H}$ と書いてしまう。

STEP のその先へ

どちらのモデルも、$h = \alpha^2 H$ に安定平衡（stable equilibrium）をもつ 1 階の自励系微分方程式（first-order autonomous differential equation）$\dot{h} = f(h)$ である。線形の場合は姿を変えたニュートン（Newton）の冷却の法則（law of cooling）であり、$\sqrt{h}$ の場合は穴からの流出に関するトリチェリ（Torricelli）の法則である。陽に解くことなく平衡点とその安定性を調べることは、常微分方程式の定性的理論（qualitative theory of ODEs）の出発点である。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『初等微分方程式』）は、その初めのほうの章で自励系の方程式とタンクの混合モデルを扱っている。

解答例

STEP I 2011、第 8 問

純粋数学 ・ ディオファントス方程式

STEP I 2011、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/11-s1-q8

鍵となる考え方

3 乗する関数は狭義単調増加（strictly increasing）であるから、m^3 を n^3 や $(n+1)^3$ と比べることは、m を n や $n+1$ と比べることと同じである。m が連続する 2 つの整数（consecutive integers）の**真に**間にあれば、m は整数ではありえない。すると、手で調べるべき n の値は少数しか残らない。小問 (ii) では、同じはさみ込み（squeeze）の議論を新しい方程式に適用する。

解答

全体を通して、$x \mapsto x^3$ が $\mathbb{R}$ 全体で狭義単調増加であるという事実を用いる。したがって、実数 a, b に対して

$$a < b \iff a^3 < b^3.$$

が成り立つ。

小問 (i)(a)

$(*)$ より

$$m^3 - n^3 = n^2 + 1 > 0,$$

である。ここで $n^2 \geq 0$ を用いた。よって $m^3 > n^3$ であり、したがって $m > n$ である。

次に、$m < n+1$ であることは $m^3 < (n+1)^3$ であることと同値である。$(*)$ を用いて

展開すると

$$\begin{aligned} m^3 < (n+1)^3 &\iff n^3 + n^2 + 1 < n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &\iff 0 < 2n^2 + 3n, \end{aligned}$$

となり、これが求める同値関係 (equivalence) である。各段階は逆にたどれるので、「同値」が成り立つ。

さて、$2n^2 + 3n = n(2n+3)$ である。これは根が $n = -\frac{3}{2}$ と $n = 0$ で、最高次の係数 (leading coefficient) が正の二次式であるから、正となるのはちょうど $n < -\frac{3}{2}$ または $n > 0$ のときである。このような n に対しては、$m > n$ と $m < n+1$ の両方が成り立つ。よって

$$n < m < n+1 \quad \text{ただし次の場合を除く：} \quad -\tfrac{3}{2} \le n \le 0.$$

小問 (i)(b)

m と n が $(*)$ を満たす整数であるとする。$n < -\frac{3}{2}$ または $n > 0$ ならば、小問 (a) より $n < m < n+1$ である。連続する整数 n と $n+1$ の真に間にある整数は存在しないので、これは不可能である。

> **考えてみよう** 小問 (a) はすべての実数 n について成り立つ。では、整数であることはどこで効いてくるのか。

2 か所で効いてくる。上で見たように、区間の外にあるすべての n を除外するところと、区間 $-\frac{3}{2} \le n \le 0$ を $n \in \{-1, 0\}$ に絞り込むところである。両方の値を確かめる。

- $n = 0$：$m^3 = 0 + 0 + 1 = 1$ より $m = 1$。
- $n = -1$：$m^3 = -1 + 1 + 1 = 1$ より $m = 1$。

どちらも整数の m を与える。よって、整数解は $(m, n) = (1, 0)$ と $(1, -1)$ のみであり、示すべきことが示された。

小問 (ii)

小問 (i) と同じ手順をたどる。まず p を q と比べる。

$$p^3 - q^3 = 2q^2 - 1,$$

これは $q^2 > \frac{1}{2}$ のとき、すなわち $q \neq 0$ であるすべての整数 q に対して正である。このような q に対しては $p > q$ である。

次に p を $q+1$ と比べる。

$$\begin{aligned} p^3 < (q+1)^3 &\iff q^3 + 2q^2 - 1 < q^3 + 3q^2 + 3q + 1 \\ &\iff 0 < q^2 + 3q + 2 = (q+1)(q+2). \end{aligned}$$

これが成り立つのはちょうど $q > -1$ または $q < -2$ のときである。

2 つを合わせる。q が $q \neq 0$、$q \neq -1$、$q \neq -2$ を満たす整数ならば $q < p < q+1$ であるから、p は整数ではありえない（$q \geq 1$ または $q \leq -3$ ならば、両方の条件が成り立つ）。残るのは $q \in \{-2, -1, 0\}$ である。

- $q = 0$：$p^3 = -1$ より $p = -1$。
- $q = -1$：$p^3 = -1 + 2 - 1 = 0$ より $p = 0$。
- $q = -2$：$p^3 = -8 + 8 - 1 = -1$ より $p = -1$。

3 つとも整数の p を与えるので、整数解は

$$(p, q) = (-1, 0), \quad (0, -1), \quad (-1, -2).$$

である。

検算

それぞれの答えをもとの式に代入してみる。たとえば $(-1)^3 = -1 = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 1 = -8 + 8 - 1$ である。$|n|, |q| < 10^5$ を満たすすべての整数をコンピュータで探索すると、$(*)$ の解はちょうど 2 つ、小問 (ii) の解はちょうど 3 つ見つかり、それ以外は見つからない。はさみ込みを数値的に確かめることもできる。$n = 5$ のとき $m = \sqrt[3]{151} \approx 5.32$ であり、これは 5 と 6 の真に間にある。

よくある間違い

- 小問 (ii) で $q = 0$ を忘れる。このとき $p^3 - q^3 = -1 < 0$ なので下からの評価 $p > q$ が成り立たず、この場合は別に調べる必要がある。
- 理由を書かずに「$m^3 > n^3$ より $m > n$」と書く。これが正しいのは 3 乗が狭義単調増加だからであり（2 乗では負の数を含むと成り立たない）、そのことは述べておく価値がある。
- $n < m < n+1$ で止めてしまい、それがなぜ m が整数でないことを意味するのかを述べない。

STEP のその先へ

$y^3 = f(x)$ のような方程式の整数点を求める問題は**ディオファントス方程式**（Diophantine equations）とよばれる。未知数を連続するべき乗の間にはさみ込むことは、これに対する標準的な最初の攻め方である。$y^2 = x^3 + k$ のようなより難しい方程式は、楕円曲線（elliptic curves）や、ベイカー（Baker）による対数の一次形式（linear forms in logarithms）の理論へとつながる。これらは奥の深い分野であるが、それでも多くの場合はこのような初等的な評価で解ける。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic* は、初等整数論（elementary number theory）へのよい入門書である。

解答例

STEP I 2011、第 9 問

力学 ・ 放物運動

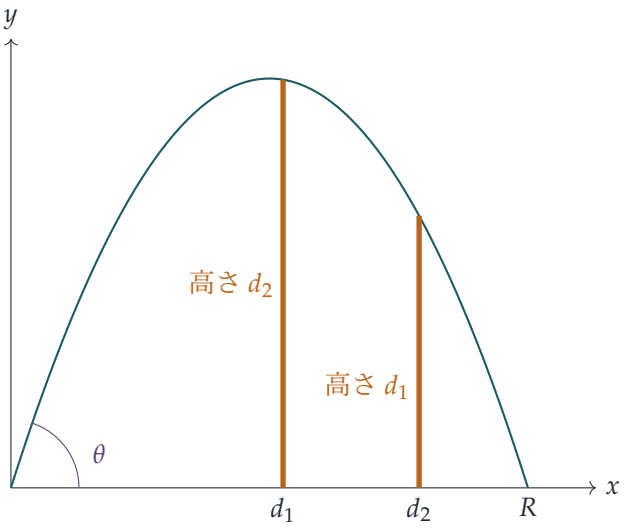
> **STEP I 2011、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q9

鍵となる考え方

軌道（trajectory）を一つの式 $y = x\tan\theta - ax^2$ で表す。ここで定数 a は g、速さ、角度をひとまとめにしたものである。壁を「ぎりぎりで越える」とは、経路が壁の上端の角を通るということである。したがって各壁から、二つの未知数 $\tan\theta$ と a についての一次方程式が一つずつ得られる。この連立方程式を解けば角度が求まり、水平到達距離（range）は $y = 0$ のもう一つの解にすぎない。

解答

粒子を、重力のみを受けて運動する（空気抵抗（air resistance）はない）質点とみなし、原点 O から速さ u、角度 θ で投射されるとする。x は水平方向、y は鉛直上向きとする。二つの壁の高さは異なるので、$d_1 \neq d_2$ と仮定する。



（図では $d_1 < d_2$ としているが、計算はどちらが大きいかには依存しない。）

軌道

時刻 t において $x = ut\cos\theta$、$y = ut\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$ である。$t = x/(u\cos\theta)$ を代入して t を消去すると、

$$y = x\tan\theta - ax^2, \qquad \text{ただし} a = \frac{g}{2u^2\cos^2\theta} > 0.$$

$T = \tan\theta$ とおく。粒子は各壁をぎりぎりで越えるので、壁の上端 (d_1, d_2) と (d_2, d_1) を通る：

$$d_2 = d_1 T - a d_1^2, \tag{1}$$
$$d_1 = d_2 T - a d_2^2. \tag{2}$$

$\tan\theta$ を求める

a を消去するために、(1) に d_2^2 を、(2) に d_1^2 を掛けて、a を含む項をどちらも $ad_1^2 d_2^2$ にそろえる：

$$d_2^3 = d_1 d_2^2\, T - a d_1^2 d_2^2,$$
$$d_1^3 = d_1^2 d_2\, T - a d_1^2 d_2^2.$$

辺々引くと、

$$d_2^3 - d_1^3 = d_1 d_2 (d_2 - d_1)\, T.$$

? **考えてみよう** $d_2 - d_1$ で割ってよいだろうか？

よい。二つの壁の高さ d_2 と d_1 は異なるので、$d_1 \neq d_2$ である。（もし等しければ壁は一つしかないことになり、一点だけでは θ と u の両方を決めることはできない。）$d_2^3 - d_1^3 = (d_2 - d_1)(d_2^2 + d_1 d_2 + d_1^2)$ であるから、$d_1 d_2 (d_2 - d_1)$ で割ると

$$\tan\theta = \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{d_1 d_2},$$

となり、示すべき式が得られた。

水平到達距離

粒子が着地するのは $x \neq 0$ かつ $y = 0$ となる点、すなわち $x = T/a$ である。したがって a も必要である。(1) を d_1 で、(2) を d_2 で割ると、

$$\frac{d_2}{d_1} = T - a d_1, \qquad \frac{d_1}{d_2} = T - a d_2.$$

第 2 式から第 1 式を引くと T が消える：

$$a(d_2 - d_1) = \frac{d_2}{d_1} - \frac{d_1}{d_2} = \frac{(d_2 - d_1)(d_2 + d_1)}{d_1 d_2}, \qquad \text{よって} \qquad a = \frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2},$$

ここでも $d_1 \neq d_2$ を用いた。したがって水平到達距離は

$$R = \frac{T}{a} = \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{d_1 d_2} \cdot \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} = \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{d_1 + d_2}.$$

妥当性の確認として、$R - d_2 = \dfrac{d_1^2}{d_1 + d_2} > 0$、同様に $R - d_1 = \dfrac{d_2^2}{d_1 + d_2} > 0$ であるから、粒子は当然そうあるべきとおり、両方の壁よりも先に着地する。

> **考えてみよう** g と u はどこへ行ったのだろうか？

これらは常に一つの組み合わせ a を通してしか現れず、二つの壁によって a は完全に決まる：$u^2 = g/(2a\cos^2\theta)$。つまり壁によって軌道全体が決まり、水平到達距離は d_1 と d_2 だけに依存する。

検算

- 対称性（symmetry）：d_1 と d_2 を入れ替えることは壁を入れ替えることにすぎず、実際どちらの答えも d_1, d_2 について対称である。
- 数値：$d_1 = 2$、$d_2 = 3$ とすると、$\tan\theta = \frac{19}{6}$、$a = \frac{5}{6}$、$R = \frac{19}{5}$ を得る。このとき $y(2) = \frac{19}{3} - \frac{10}{3} = 3$、$y(3) = \frac{19}{2} - \frac{15}{2} = 2$ となり、条件を満たす。$g = 9.8$ として運動を数値的に追っても、着地点は $x = 3.8$ となる。

- $d_1^2 + d_2^2 \geq 2d_1d_2$ より $\tan\theta \geq 3$ であるから、投射は常に急角度である（少なくとも約 71.6°）。これは理にかなっている。まず高いほうの壁を越え、そのすぐ後に低いほうの壁の高さまで下りてくるためには、経路は幅の狭いアーチでなければならない。

よくある間違い

- どの壁がどの高さかを取り違える：距離 d_1 にある壁の高さは d_2 である。
- a を $\cos^2\theta$ ではなく $\cos\theta$ で書いてしまう、あるいは a を一つの未知数として扱わず、u と θ についての煩雑な連立方程式が残ってしまう。
- $d_2 - d_1$ が 0 でない理由を述べずに、それで割ってしまう。

STEP のその先へ

ここでの工夫は、二つの自由なパラメータ（ここでは $\tan\theta$ と a）をもつ曲線族が、通過すべき二点によって決定されるという点にある。これは補間（interpolation）の小さな例である。未知数のうまい組み合わせを選ぶという同じ考え方は、力学のいたるところに現れる。たとえば、投射速度を一定にしたときのすべての軌道の「包絡線」（envelope）（安全放物線（parabola of safety））を求める問題がそうである。大学 1 年レベルの放物運動や質点の力学をさらに学びたければ、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

解答例

STEP I 2011、第 10 問

力学 ・ 弾性衝突

> **STEP I 2011、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q10

鍵となる考え方

2 つの質点はともに同じ点から静止状態で動き始め、放してから衝突するまでの間（自由落下と完全弾性的な跳ね返り）にエネルギーは一切失われない。したがって、どの高さにおいても 2 つの質点の速さは等しく、両者は同じ高さで出会う。その後の衝突は、運動量と $e = 1$ のニュートンの反発法則（Newton's law of restitution）という 2 つの式を用いる標準的な問題であり、B の最高点の高さは再びエネルギーから求まる。

解答

A と B を質点（particle）としてモデル化し、空気抵抗を無視し、全体を通して上向きを正とする。

速さが等しい理由

各質点は高さ h から静止状態で動き始める。自由飛行中に働く力は重力のみなので、力学的エネルギー（mechanical energy）は保存される。また、A の平面での跳ね返りは完全弾性的（perfectly elastic）なので、A の速度の向きを逆にするだけで速さは変えず、ここでもエネルギーは失われない。よって、最初の衝突までは各質点の単位質量あたりの全エネルギーは gh であり、高さ y にある質点の速さ v は次を満たす。

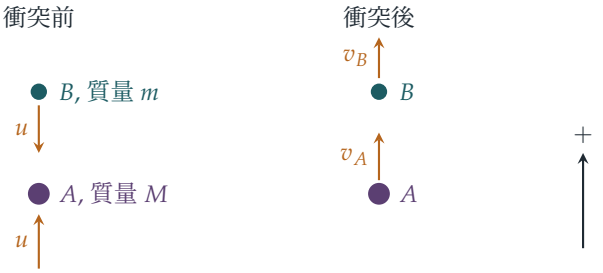
$$\tfrac{1}{2}v^2 + gy = gh, \qquad \text{よって} \qquad v = \sqrt{2g(h-y)}.$$

速さは高さだけで決まり、質量や質点のそれまでの経緯にはよらない。最初の衝突の瞬間、2 つの質点は同じ高さ y にあるので、速さは等しい。さらに、A はまだ P に戻っていないので $y < h$ であり、この共通の速さ $u = \sqrt{2g(h-y)}$ は正である。A は跳

ね返った後なので上向きに動いており、B（一度も跳ね返っていない）は下向きに動いている。

衝突

衝突の直前、A の速度は $+u$、B の速度は $-u$ である。衝突直後のそれぞれの速度を v_A、v_B とする。



衝突における撃力（impulsive force）は 2 つの質点の間の内力であり、衝突の一瞬の間に重力が与える力積（impulse）はないので、運動量（momentum）は保存される。

$$Mu - mu = Mv_A + mv_B. \tag{1}$$

衝突は完全弾性的（$e = 1$）なので、遠ざかる速さは近づく速さに等しい。

$$v_B - v_A = u - (-u) = 2u. \tag{2}$$

(2) から得られる $v_B = v_A + 2u$ を (1) に代入すると

$$(M-m)u = (M+m)v_A + 2mu \quad \Longrightarrow \quad v_A = \frac{(M-3m)u}{M+m},$$

となり、さらに

$$v_B = v_A + 2u = \frac{(M-3m)u + 2(M+m)u}{M+m} = \frac{(3M-m)u}{M+m}.$$

$M > 3m$ より $M - 3m > 0$ なので $v_A > 0$ であり、$v_B = v_A + 2u > 0$ も成り立つ。よって、題意のとおり、最初の衝突の後は 2 つの質点はともに上向きに動く。

> **考えてみよう** B が次に A と出会う前に、実際に飛行の最高点に達することはどうしてわかるだろうか？

衝突後、2 つの質点の加速度はともに $-g$ なので、両方が飛行している間は相対速度（relative velocity）は $v_B - v_A = 2u$ のまま一定である。つまり B は一定の割合で A から離れていき、A が次に平面に当たるまでは両者は出会えない。B がまだ上昇してい

る間に A が跳ね返った場合は、単位質量あたりのエネルギーを比べる。B のエネルギーは $\frac{1}{2}v_B^2 + gy$、A のエネルギーは $\frac{1}{2}v_A^2 + gy$ であり、$v_B > v_A > 0$ なので後者の方が小さい（そして A の跳ね返りはエネルギーを保つ）。したがって、同じ高さにあるときは常に、A の速さは B の速さより小さい。B がまだ上昇している間に下から B に追いつくには、出会う瞬間に A が B 以上の速さで上昇していなければならないが、今見たようにそれは不可能である。よって 2 回目の衝突は B が最高点を通過した後にしか起こらず、その最高点こそが求める最大値である。

B の最高点の高さ

衝突は $u^2 = 2g(h-y)$ を満たす高さ y で起こる。すなわち

$$y = h - \frac{u^2}{2g}.$$

衝突後、B は初速 v_B で重力のみを受けて上昇するので、さらに $v_B^2/(2g)$ だけ上る（$v = 0$ として $v^2 = v_B^2 - 2gs$ から）。したがって最高点の高さは

$$\begin{aligned} y + \frac{v_B^2}{2g} &= h - \frac{u^2}{2g} + \frac{(3M-m)^2u^2}{2g(M+m)^2} \\ &= h + \frac{u^2}{2g(M+m)^2}\left[(3M-m)^2 - (M+m)^2\right] \\ &= h + \frac{u^2}{2g(M+m)^2}(2M-2m)(4M) \\ &= h + \frac{4M(M-m)u^2}{(M+m)^2 g}, \end{aligned}$$

となる。ここで 3 行目では 2 乗の差の因数分解（difference of two squares）を用いた。これが求める結果である。

検算

- エネルギー：v_A と v_B を上のとおりとすると $Mv_A^2 + mv_B^2 = (M+m)u^2$ となり、弾性衝突で要求されるとおりである。
- 極限の場合：$m \to 0$ とすると $v_A \to u$、$v_B \to 3u$ となり（非常に軽い球は、動く壁から跳ね返るように重い球から跳ね返り、それに対して相対速度 $2u$ で離れていく）、高さは $h + 4u^2/g$ となって、$y + 9u^2/(2g)$ と一致する。
- $M > m$ なので、追加の高さは正である。B は A からエネルギーを得て、当然ながら P より上に達する。
- 数値的にも確かめた。B を放す時刻、h、$M > 3m$ を満たす質量をランダムに選

び、（A のその後の跳ね返りも含めて）2 回目の衝突まで運動を数値的に追跡したところ、B の最高点の高さは公式と相対誤差約 10^{-10} で一致した。

よくある間違い

- 符号の誤り：衝突前の速度を両方とも $+u$ とすると、A が上昇している間に B が落下していることを見落とすことになる。
- 追加の上昇距離 $v_B^2/(2g)$ を、衝突の高さ $h - u^2/(2g)$ からではなく、平面や P から測ってしまう。

STEP のその先へ

速さが高さだけで決まるという議論は、保存力（conservative force）に対するエネルギー保存則である。ある点での速さはその点での位置エネルギー（potential energy）だけで決まり、たどった経路にはよらない。衝突そのものは重心系（centre-of-mass frame）で考えるのが最も簡単なことが多い。重心系では弾性衝突は各質点の速度の向きを逆にするだけであり、元の座標系に戻せば v_A と v_B が 1 行で得られる。Kleppner and Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、これら 2 つの考え方を丁寧に展開している。

解答例

STEP I 2011、第 11 問

力学 ・ 剛体のつり合い

STEP I 2011、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

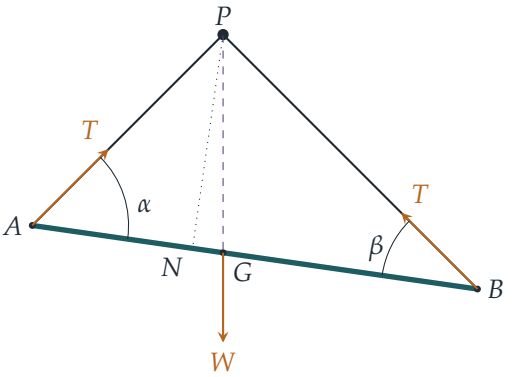
step.maths.org/questions/11-s1-q11

鍵となる考え方

棒にはたらく力は 3 つだけである。A と B における 2 つの糸の張力（tension）と、G における重力である。杭が滑らか（smooth）であるから 2 つの張力は等しく、したがって G のまわりのモーメント（moment）を考えれば（重力は G のまわりにモーメントをもたない）、角どうしの関係がただちに得られる。後半で追加で必要となる事実は、平衡（equilibrium）にある 3 つの力がすべて平行でないならば、それらは 1 点を通らなければならないということである。ここではその点が杭であるから、PG は鉛直である。

解答

棒を剛体の棒（rigid rod）、糸を軽く（light）伸びない（inextensible）ものとし、杭は滑らかであるとモデル化する。棒の重さを W とする。



$3\sin\alpha = 4\sin\beta$ であることの証明

糸は軽く、滑らかな杭にかけられているから、その張力 T は糸全体で等しい。したがって棒には、W が G において鉛直にはたらくほかに、A において AP の向きに大きさ T の力が、B において BP の向きに大きさ T の力がはたらく。

G のまわりのモーメントを考える。重力はモーメントをもたない。G から直線 AP までの距離は $AG\sin\alpha = 3d\sin\alpha$ であり、$GB = 7d - 3d = 4d$ であるから、G から直線 BP までの距離は $GB\sin\beta = 4d\sin\beta$ である。A における張力は棒を G のまわりに一方の向きに回し、B における張力は逆の向きに回すから、平衡のためには

$$T\cdot 3d\sin\alpha = T\cdot 4d\sin\beta \quad\Longrightarrow\quad 3\sin\alpha = 4\sin\beta,$$

が成り立つ（$Td \neq 0$ で割った）。これが示すべきことであった。

糸の長さ

$\cos\beta = \frac{4}{5}$ のとき $\sin\beta = \frac{3}{5}$ である（β は三角形の内角であるから $\sin\beta > 0$）。すると

$$\sin\alpha = \tfrac{4}{3}\sin\beta = \tfrac{4}{5}, \qquad \cos\alpha = \tfrac{3}{5},$$

となる。ここで α は鋭角（acute）であるから正の根をとった。さらに

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{4}{5} - \tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{3}{5} = 0,$$

であり、$0 < \alpha+\beta < \pi$ であるから $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$ である。したがって三角形 PAB は P を直角とする直角三角形で、斜辺（hypotenuse）は $AB = 7d$ である。よって

$$PA = 7d\cos\alpha = \tfrac{21}{5}d, \qquad PB = 7d\cos\beta = \tfrac{28}{5}d,$$

であり、糸の長さは

$$PA + PB = \tfrac{49}{5}d.$$

である。

棒の傾き

> **考えてみよう** 棒に対する P の位置はわかっている。では「鉛直」はどの向きか？

2 つの張力は P を通る直線に沿ってはたらくから、その合力も P を通ってはたらく。平衡のためにはこの合力が重力とつり合わなければならないので、合力は W と大きさが等しく向きが反対で、同じ直線上になければならない（平行でない 3 力が平衡にあ

るとき、それらは共点（concurrent）である）。よって G を通る鉛直線は P を通る。すなわち PG は鉛直である。

P から AB に下ろした垂線の足を N とする。直角三角形 PAN において

$$AN = PA\cos\alpha = \tfrac{21}{5}d \cdot \tfrac{3}{5} = \tfrac{63}{25}d, \qquad PN = PA\sin\alpha = \tfrac{21}{5}d \cdot \tfrac{4}{5} = \tfrac{84}{25}d.$$

である。$AN = \frac{63}{25}d < 3d = AG$ であるから、点 N は A と G の間にあり、

$$NG = 3d - \tfrac{63}{25}d = \tfrac{12}{25}d.$$

である。直角三角形 PNG において

$$\tan\angle PGN = \frac{PN}{NG} = \frac{84}{12} = 7.$$

角 PGN は、棒と鉛直線 GP のなす角を A の側で測ったものである。これは鋭角であるから、端 A は G を通る水平線より上に、B はその下にあり、与えられた配置と一致する。棒と水平線のなす角 θ は $\frac{\pi}{2} - \angle PGN$ であるから

$$\tan\theta = \frac{1}{\tan\angle PGN} = \frac{1}{7}, \qquad \text{すなわち} \qquad \theta = \arctan\tfrac{1}{7},$$

となり、これが示すべきことであった。

検算

- 糸の長さ $\frac{49}{5}d = 9.8d$ は棒の長さ $7d$ より長く、三角形 PAB における三角不等式（triangle inequality）の要請を満たしている。
- 等しい 2 つの張力の合力はそれらのなす角を二等分するから、PG は角 APB を二等分する。角の二等分線定理（angle bisector theorem）により、$PA : PB$ は $AG : GB = 3 : 4$ に等しいはずであり、実際 $\frac{21}{5} : \frac{28}{5} = 3 : 4$ である。
- 数値的な検算として、P を A と B を焦点（foci）とする楕円（ellipse）上（この糸の長さに対して杭がとりうる位置の集合）におき、P から測った G の深さが停留（stationary）する傾きを探した。結果は 8.13° となり、$\arctan\frac{1}{7} \approx 8.130°$ と一致した。

よくある間違い

- 糸の 2 つの部分に異なる張力を与えてしまう。滑らかな杭は軽い糸の張力を変えることはできない。
- 距離を取り違えて $4\sin\alpha = 3\sin\beta$ としてしまう。長いほうの腕 $GB = 4d$ は B における角と組になる。

- α が鋭角であることを忘れて $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ を許してしまう。そうすると別の三角形になり、そこでは $\alpha + \beta$ は直角にならない。

STEP のその先へ

糸の長さを固定すると、杭は A と B を焦点とする楕円上になければならない。すると PG が角 APB を二等分するという事実は、楕円の反射の性質、すなわち P における法線が 2 本の焦半径のなす角を二等分するという性質にほかならない。また、平衡の位置とはちょうど位置エネルギー（potential energy）が停留する位置であり、これは大学 1 年の講義における仮想仕事の原理（principle of virtual work）やラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）の出発点となる。平衡、トルク（torque）、エネルギーを用いる方法について学ぶには、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい。

解答例

STEP I 2011、第 12 問

確率・統計 ・ 待ち行列と投票問題

> **STEP I 2011、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q12

この問題は、*Beyond STEP* の第 9.10 節「いつでもおつりを渡せる」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/ballot.html

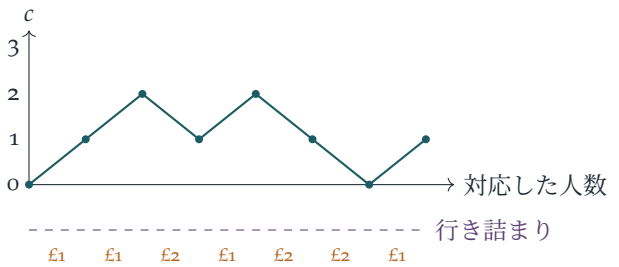
鍵となる考え方

追いかける数は一つだけでよい。それは、私が手元に持っている £1 硬貨の枚数である。£1 硬貨で払う客が来るとこれが一枚増え、£2 硬貨で払う客が来ると一枚減る（受け取った £2 硬貨は釣り銭（change）としては役に立たない）。私が行き詰まるのは、ちょうど £2 の客が来たときに £1 硬貨を一枚も持っていない場合である。£2 の客が少数しかいないときは、危険はすべて列の先頭部分に集中している。そこで最初の数人に注目し、それぞれの始まり方からどのような状況になるかを調べる。

解答

問題になるのは列に並ぶ硬貨のパターンだけであり、誰が並んでいるかは関係ない。人の並び方はすべて同様に確からしいので、どの位置にいる人も、まだ並べられていない人のうちの誰であるかが等しい確率である。したがって列を先頭から順に作っていけばよい。£1 硬貨を持つ人が a 人、£2 硬貨を持つ人が b 人残っているとき、次の人が £1 硬貨を持つ確率（probability）は $\frac{a}{a+b}$、£2 硬貨を持つ確率は $\frac{b}{a+b}$ である。

私が持っている £1 硬貨の枚数を c とする。全員に売ることができるのは、c が 0 を下回る必要が一度もないとき、かつそのときに限る。すなわち、列のどの時点でも、それまでに対応した £1 の客の人数が £2 の客の人数以上であるときである。



図はうまくいく列の例である。c の経路は一度も破線に触れていない。

小問 (i)

£2 の客が一人だけのとき、行き詰まるのはその人が列の先頭にいて、私が釣り銭を持っていない場合に限られる。ほかの誰かが先頭にいれば、£2 の客が来る時点で私は少なくとも一枚の £1 硬貨を持っている。£2 の客は $m+1$ 個の位置のどれにいることも同様に確からしいので、

$$\mathrm{P}(\text{全員に売れる}) = 1 - \frac{1}{m+1} = \frac{m}{m+1}.$$

小問 (ii)

£1 の客を 1、£2 の客を 2 と書き、列の始まり方を列挙する。

- 先頭の人が 2 ならば、ただちに行き詰まる。
- 列が 1,2,2 で始まるならば、c は 1,0 と変化し、3 人目で行き詰まる。
- 列が 1,1 で始まるならば、2 人の後で $c = 2$ である。£2 の客は全部で 2 人しかおらず、c が減るのはそのどちらかに対応したときだけなので、c が $2-2=0$ を下回ることはない。成功である。
- 列が 1,2,1 で始まるならば、c は 1,0,1 と変化し、£2 の客は残り 1 人だけなので、c が 0 を下回ることはない。成功である。

これらの場合ですべての可能性を尽くしているので、全員に売れるのは列が 1,1 または 1,2,1 で始まるときであり、かつそのときに限る。列を先頭から作っていくと、

$$\mathrm{P}(1,1) = \frac{m}{m+2}\cdot\frac{m-1}{m+1}, \quad \mathrm{P}(1,2,1) = \frac{m}{m+2}\cdot\frac{2}{m+1}\cdot\frac{m-1}{m} = \frac{2(m-1)}{(m+2)(m+1)}.$$

これらの事象は互いに排反（disjoint）であるから、

$$\mathrm{P}(\text{全員に売れる}) = \frac{m(m-1)+2(m-1)}{(m+2)(m+1)} = \frac{(m-1)(m+2)}{(m+2)(m+1)} = \frac{m-1}{m+1},$$

となり、示すべき結果が得られた。（最後の因数で £1 の客が $m-1 \geq 1$ 人残っている必要があるので、$m \geq 2$ が必要である。）

小問 (iii)

今度は £2 の客が 3 人いる。ここでも最初の 3 人に注目する。

- 2 で始まる場合、または 1,2,2 で始まる場合：(ii) とまったく同様に行き詰まる。
- 1,1,1 で始まる場合：$c = 3$ となり、3 人の £2 の客は最悪でも c を 0 まで減らすだけである。成功である。
- 1,1,2 または 1,2,1 で始まる場合：どちらの場合も 3 人の後で $c = 1$ であり、残りは £1 硬貨を持つ $m-2$ 人と £2 硬貨を持つ 2 人が無作為な順序で並んだものである。

考えてみよう 最後の場合、列の残りの部分がうまくいかないのはどのようなときか。

$c = 1$ の状態で列の残りを始めるのは、£2 の客が 2 人いる列の先頭に、おまけの £1 の客が 1 人いるのと同じであり、これは小問 (ii) の姿を変えたものである。$c = 1$ で £2 の客が 2 人だけ残っているとき、行き詰まるのは次の 2 人がともに £2 の客である場合に限られる。このとき c は 0 になり、その次の人に対応できない。次の 2 人のどちらかが £1 硬貨を持っていれば、c が 0 を下回ることはない（(ii) と同様に $1,\ldots$ と $2,1,\ldots$ を確かめよ）。最初の 3 人の後に残る m 人について、

$$\mathrm{P}(\text{次の 2 人がともに2}) = \frac{2}{m} \cdot \frac{1}{m-1},$$

$$\text{よって}\quad \mathrm{P}(\text{残りがうまくいく}) = 1 - \frac{2}{m(m-1)} = \frac{(m-2)(m+1)}{m(m-1)},$$

ここで $m^2 - m - 2 = (m-2)(m+1)$ を用いた。

$D = (m+3)(m+2)(m+1)$ とおく。役に立つ始まり方の確率は

$$\mathrm{P}(1,1,1) = \frac{m(m-1)(m-2)}{D},$$

$$\mathrm{P}(1,1,2) = \frac{m \cdot (m-1) \cdot 3}{D}, \qquad \mathrm{P}(1,2,1) = \frac{m \cdot 3 \cdot (m-1)}{D}.$$

始まり方どうしは互いに排反であり、どの始まり方であっても列の残りはやはり無作

為な順序になっているので、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{success}) &= \frac{m(m-1)(m-2)}{D} + \frac{6m(m-1)}{D}\cdot\frac{(m-2)(m+1)}{m(m-1)} \\ &= \frac{(m-2)\big[m(m-1)+6(m+1)\big]}{D} = \frac{(m-2)(m^2+5m+6)}{D} \\ &= \frac{(m-2)(m+2)(m+3)}{(m+3)(m+2)(m+1)} = \frac{m-2}{m+1},\end{aligned}$$

となり、示すべき結果が得られた。（ここで $m \geq 3$ により $m-1 \geq 2$ が保証されるので、条件付き確率（conditional probability）が意味をもつ。）

検算

- 最も小さい場合：$m = n$ のとき、公式は $n = 1, 2, 3$ に対してそれぞれ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ を与える。$m = n = 2$ のとき、1 と 2 の並べ方 6 通りは同様に確からしく、成功するのは 1122 と 1212 だけなので $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ である。✓
- m が大きい場合：3 つの確率はいずれも 1 に近づく。£1 硬貨が豊富にあるのだから、そうなるべきである。
- 列の順序をすべて数え上げると、$m = 5$ のとき $n = 1, 2, 3$ に対してそれぞれ $\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ が得られ、$\frac{m}{m+1}, \frac{m-1}{m+1}, \frac{m-2}{m+1}$ と一致する。また、14 以下のすべての m について公式が厳密に成り立つことも確かめた。

よくある間違い

- 受け取った £2 硬貨は釣り銭として使えないことを忘れる。数に入るのは £1 硬貨だけである。
- 各人を、一定の確率 $\frac{m}{m+n}$ による独立な抽出として扱う。列は非復元抽出（without replacement）で作られるので、人を並べるにつれて確率は変化する。
- (iii) で、3 人の後に $c = 1$ であれば常に安全だと思い込み、1, 1, 2, 2, 2 や 1, 2, 1, 2, 2 という失敗を見落とす。

STEP のその先へ

一般に、$n \leq m$ であるすべての n に対して確率は $\frac{m+1-n}{m+1}$ となる。これは**投票問題**（ballot problem）であり、最もすっきりした証明は**鏡像原理**（reflection principle）を用いるものである。行き詰まりの水準に触れる経路を折り返すと、別の場所で終わる

経路が得られ、これによって悪い列の個数が一つの二項係数（binomial coefficient）に帰着する。$m = n$ のとき、良い列の個数はカタラン数（Catalan number）であり、これは組合せ論（combinatorics）のいたるところに現れる。ランダムウォーク（random walk）と鏡像原理については、Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）を参照されたい。

解答例

STEP I 2011、第 13 問

確率・統計 ・ 連続型確率変数

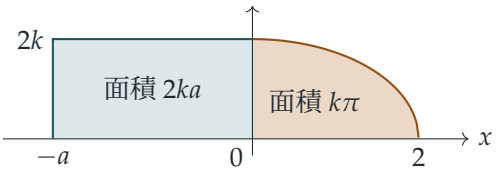
STEP I 2011、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/11-s1-q13

鍵となる考え方

確率密度（density）のグラフを描いてみる。それは $[-a,0)$ 上の高さ $2k$ の長方形と、$[0,2]$ 上の半径 2 の四分円（縦方向に k 倍したもの）をつなげた形である。グラフの下の面積が確率を表すので、積分をしなくても長方形と四分円でほとんどの計算が済む。全体の面積は 1 でなければならず、これにより k が決まる。その後は、d に関するどの問いも、ある点より右側にどれだけの面積があるかを問うことに帰着する。



解答

k を求める

$[0,2]$ 上で $\sqrt{4-x^2}$ のグラフは円 $x^2+y^2=4$ の四分の一であるから、

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\pi\cdot 2^2 = \pi.$$

（与えられた原始関数（antiderivative）を用いても一致する：$2\arcsin 1 + 0 - 0 = \pi$。）したがって全確率は $2ka + k\pi = 1$ であり、

$$k = \frac{1}{2a+\pi}.$$

小問 (i)

$\mathrm{E}(X)$ の積分を 0 で分ける：

$$\int_{-a}^{0} 2kx\,\mathrm{d}x = k\left[x^2\right]_{-a}^{0} = -ka^2.$$

後半については、$(4-x^2)^{3/2}$ の導関数（derivative）が $-3x(4-x^2)^{1/2}$ であるから、

$$\int_{0}^{2} kx\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = k\left[-\tfrac{1}{3}(4-x^2)^{3/2}\right]_{0}^{2} = k\cdot\tfrac{1}{3}\cdot 8 = \tfrac{8}{3}k.$$

二つを足し合わせて、

$$\mathrm{E}(X) = k\left(\frac{8}{3} - a^2\right) = \frac{8-3a^2}{3(2a+\pi)}.$$

小問 (ii)

0 より右側の確率は四分円の面積である：

$$\mathrm{P}(X>0) = k\pi = \frac{\pi}{2a+\pi}.$$

考えてみよう $\mathrm{P}(X>0)$ がわかると、なぜ d の符号がわかるのだろうか。

確率密度は $(-a,2)$ 上で正であるから、関数 $t \mapsto \mathrm{P}(X>t)$ は $-a \le t \le 2$ で連続かつ狭義単調減少（strictly decreasing）である。この関数は 1 から 0 まで減少するので、$\mathrm{P}(X>d) = \frac{1}{10}$ を満たす d はちょうど一つ存在する。関数は減少するので、$d<0$ となるのは $\mathrm{P}(X>0) < \frac{1}{10}$ のときであり、かつそのときに限る。言い換えれば、0 より右側にある確率が十分の一未満のとき、d は負になる。

いま $2a > 9\pi$ と仮定する。すると $2a+\pi > 10\pi$ であるから、

$$\mathrm{P}(X>0) = \frac{\pi}{2a+\pi} < \frac{1}{10},$$

よって $d<0$ となり、示すべきことが示された。（この議論は逆向きにもたどれる：$d<0$ ならば $2a>9\pi$ である。）

この場合 $-a \le d < 0$ であるから、d より右側の面積は、長方形のうち d から 0 までの幅 $-d$ の部分と、四分円全体とを合わせたものである：

$$\mathrm{P}(X>d) = 2k(-d) + k\pi = \frac{\pi-2d}{2a+\pi}.$$

これを $\frac{1}{10}$ とおくと $10\pi - 20d = 2a+\pi$ となり、

$$d = \frac{9\pi - 2a}{20}.$$

この値は確かに $[-a,0)$ に属する。$2a>9\pi$ より負であり、また $d \ge -a$ は $9\pi+18a \ge 0$ と同値で、これは成り立つ。

小問 (iii)

今度は $d = \sqrt{2} > 0$ であるから、d は円弧の部分の下にあり、

$$\mathrm{P}(X > \sqrt{2}) = k \int_{\sqrt{2}}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

与えられた結果を用いると、

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{2}}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[2\arcsin\left(\tfrac{1}{2}x\right) + \tfrac{1}{2}x\sqrt{4 - x^2}\right]_{\sqrt{2}}^{2} \\ &= \left(2 \cdot \tfrac{\pi}{2} + 0\right) - \left(2 \cdot \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - 1.\end{aligned}$$

（幾何学的には、これは $x = \sqrt{2}$ における弦で切り取られる弓形（circular segment）である。その面積は円板の八分の一 $\frac{\pi}{2}$ から面積 1 の直角三角形を引いたものに等しい。）よって

$$\frac{\frac{\pi}{2} - 1}{2a + \pi} = \frac{1}{10} \quad \Longrightarrow \quad 5\pi - 10 = 2a + \pi \quad \Longrightarrow \quad a = 2\pi - 5.$$

これは正であり（$a \approx 1.283$）、$2a \leq 9\pi$ を満たす。$d > 0$ であるから、これは小問 (ii) の結果と整合する。

検算

- 小問 (i) で $a = 1$ とすると、平均は $\frac{5}{3(2+\pi)} \approx 0.3242$ である。標本数 2×10^5 のモンテカルロ・シミュレーション（Monte Carlo simulation）では 0.3236 が得られた。
- 小問 (ii) の式は境界 $2a = 9\pi$ で $d = 0$ を与え、条件と整合する。$a = 20$ のときは $d = \frac{9\pi - 40}{20} \approx -0.586$ となり、$\mathrm{P}(X > d) = \frac{1}{10}$ を数値的に解いても同じ値が得られる。
- 小問 (iii) で $a = 2\pi - 5$ とすると、シンプソンの公式（Simpson's rule）により $\mathrm{P}(X > \sqrt{2}) = 0.1000$ が得られる。

よくある間違い

- k を未知のまま放置すること。正規化（normalisation）の条件 $2ka + k\pi = 1$ が隠れた最初の一歩であり、すべての答えは a のみで表される。
- 小問 (ii) で四分円を忘れ、$\mathrm{P}(X > d) = -2kd$ だけを書くこと。$[0, 2]$ 上の確率もすべて、負の d より右側にある。
- $\int_{-a}^{0} 2kx\,\mathrm{d}x$ の符号を誤ること。積分区間全体で $x < 0$ であるから、この値は負である。

STEP のその先へ

値 d は X の上側 10% 点、すなわち 0.9 分位点（quantile）である。これを求めることは累積分布関数（cumulative distribution function）F の逆関数を求めることであり、その逆関数こそ、一様分布に従う確率変数から別の確率変数をシミュレートする際に用いられるもの（逆変換法（inverse transform sampling））である。一方では平らで他方では曲がっているというこの確率密度の混合した形は、分位点をしばしば区間ごとに求めなければならない理由を示している。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、分布関数と分位点を丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 2011、第 1 問

純粋数学 • 平方根を含む方程式

> **STEP II 2011、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q1

鍵となる考え方

どちらの小問も平方根の和を扱っており、定義域（domain）、端点での値、対称性（symmetry）を押さえれば、そのグラフは容易に理解できる。小問 (i) では、グラフから不等式（inequality）が得られる。曲線はある高さより下には決して下がらず、直線がその高さに達するのは一点のみであるから、実質的に解くべきものは何もない。小問 (ii) では、グラフから解がいくつあるべきかがわかり、それによって両辺を 2 乗したときに紛れ込む余分な解を捨てることができる。

解答

小問 (i)

$f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{3+x}$ とおく。2 つの平方根がともに実数となるのは $1-x \geq 0$ かつ $3+x \geq 0$ のときに限るので、定義域は $-3 \leq x \leq 1$ である。両端では $f(-3) = 2+0 = 2$、$f(1) = 0+2 = 2$ である。

$x = -1+t$ とおくと $f = \sqrt{2-t} + \sqrt{2+t}$ となり、これは t を $-t$ に置き換えても変わらないので、曲線は $x = -1$ に関して対称である。微分すると

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2\sqrt{3+x}},$$

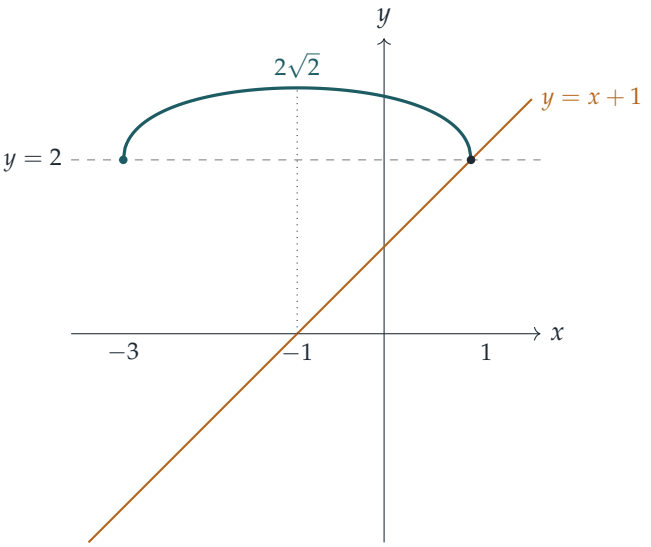
となり、これが 0 になるのは $1-x = 3+x$ のとき、すなわち $x = -1$ のときに限る。このとき $f(-1) = 2\sqrt{2}$ である。$x < -1$ では $3+x < 1-x$ なので $f'(x) > 0$ であり、$x > -1$ では $f'(x) < 0$ である。よって f は 2 から最大値 $2\sqrt{2}$ まで増加し、再び 2 まで減少する。$x = -3$ の近くでは f' の第 2 項が発散するので、曲線は $(-3, 2)$ から垂直に

立ち上がり、同様に $(1,2)$ には垂直に到達する。f の各項は凹（concave）であるから、曲線全体はなめらかな山形となる。

最小値をよりすっきりと見るには、2 乗すればよい：

$$f(x)^2 = (1-x)+(3+x)+2\sqrt{(1-x)(3+x)} = 4+2\sqrt{(1-x)(3+x)} \geq 4,$$

したがって定義域全体で $f(x) \geq 2$ であり、等号が成り立つのは $x=-3$ と $x=1$ のときに限る。



ここで直線 $y=x+1$ を考える。定義域では $x \leq 1$ なので $x+1 \leq 2$ であり、等号は $x=1$ のときに限る。一方で $f(x) \geq 2$ である。よって $f(x)=x+1$ が成り立つには両辺がともに 2 に等しくなければならず、それは $x=1$ のときに限る。確かめると $\sqrt{0}+\sqrt{4}=2=1+1$ である。したがって、方程式を満たす実数はちょうど 1 つであり、

$$x = 1.$$

である。（$[-3,1]$ の外では左辺が定義されないので、ほかに候補はない。）

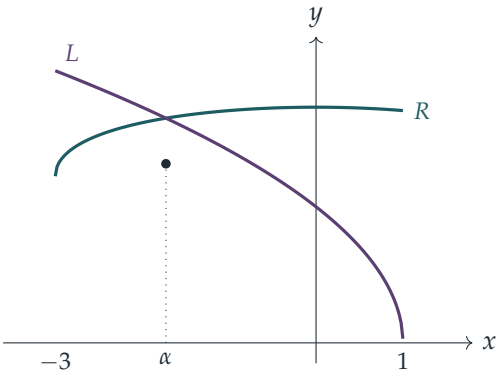
小問 (ii)

ここでも $x \leq 1$、$x \geq -3$、$x \leq 3$ が必要なので、定義域は $[-3,1]$ である。

$$L(x) = 2\sqrt{1-x} \qquad と \qquad R(x) = \sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}.$$

を比較する。L は狭義単調減少で、$L(-3)=4$ から $L(1)=0$ まで減少する。R は小問 (i) の曲線と同じ形をしている。すなわち $x=0$ に関して対称であり（x と $-x$ を入れ

替えればわかる)、$R(\pm 3) = \sqrt{6}$、最大値は $R(0) = 2\sqrt{3}$ で、$[-3, 0]$ で増加し $[0, 3]$ で減少する。今の定義域では $x = -3$ から $x = 1$ までの部分だけを見ることになり、そこでは $R(1) = 2 + \sqrt{2}$ である。



$x = -3$ では $L = 4 > \sqrt{6} = R$ であり、$x = 0$ では $L = 2 < 2\sqrt{3} = R$ である。$[-3, 0]$ では L は狭義単調減少、R は増加なので、$L - R$ は狭義単調減少であり、符号はちょうど 1 回だけ変わる。$[0, 1]$ では $L \leq 2$ である一方 $R \geq 2 + \sqrt{2}$ なので、交わることはない。よって実数解は**ちょうど 1 つ**であり、それは $-3 < x < 0$ にある。

解を求めるために 2 乗する。両辺は非負なので、2 乗しても何も失われない：

$$\begin{aligned} & 4(1-x) = (3+x) + (3-x) + 2\sqrt{9-x^2} \\ \iff \quad & -1 - 2x = \sqrt{9-x^2}. \end{aligned}$$

考えてみよう もう一度 2 乗したとき、新しい方程式の解のうち本当の解はどれか。

右辺は平方根なので ≥ 0 である。したがって本当の解であるためには $-1 - 2x \geq 0$、すなわち $x \leq -\frac{1}{2}$ でなければならない。この条件のもとでは、2 乗する操作は可逆である：

$$1 + 4x + 4x^2 = 9 - x^2 \iff 5x^2 + 4x - 8 = 0 \iff x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{11}}{5}.$$

解 $\frac{-2+2\sqrt{11}}{5} \approx 0.93$ は $x \leq -\frac{1}{2}$ を満たさないので、これを捨てる。もう一方の解 $\frac{-2-2\sqrt{11}}{5} \approx -1.73$ はこの条件を満たし、グラフから予想された通り $[-3, 0]$ にある。よって唯一の解は

$$x = -\frac{2 + 2\sqrt{11}}{5}.$$

である。

検算

- $x \approx -1.72665$ では $2\sqrt{1-x} \approx 3.3025$ であり、$\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x} \approx 1.1284+2.1741 \approx 3.3025$ である。両辺は一致する。
- 捨てた解 $x \approx 0.92665$ では $L \approx 0.542$ であるが $R \approx 3.42$ である。これは実際には $\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}=2\sqrt{1-x}$ の解であり、この式も 2 乗すると同じ式になる。
- 小問 (i) では $f(-1)=2\sqrt{2} \approx 2.83 > 0 = (-1)+1$ であり、直線が $(1,2)$ 以外のすべての点で曲線の下にあることと整合している。

よくある間違い

- 小問 (i) で 2 乗して代数的に解こうとすること。これは煩雑で、余分な解（spurious roots）が紛れ込むおそれもあるが、評価 $f \geq 2 \geq x+1$ を使えば即座に決着がつく。
- $5x^2+4x-8=0$ の 2 つの解を両方とも残してしまうこと。2 乗する操作のたびに符号の条件が必要であり、ここではそれが $-1-2x \geq 0$ である。
- 定義域を忘れること。どちらの方程式も $x>1$ では意味をもたない。

STEP のその先へ

小問 (i) は、解析学でよく使われる手法の小さな例である。すなわち、$f(x)=g(x)$ を直接解く代わりに $f \geq c \geq g$ を示し、等号がいつ成り立つかを調べるのである。小問 (ii) では、中間値の定理（intermediate value theorem）と単調性（monotonicity）を組み合わせて、解を実際に求める前にその個数を数えている。これは、大学初年級の解析学の講義で存在と一意性（existence and uniqueness）を証明するときのやり方そのものである。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、連続性と中間値の定理を丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 2011、第 2 問

純粋数学 ・ ディオファントス方程式

> **STEP II 2011、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q2

鍵となる考え方

x^3+y^3 を見たら、必ず因数分解（factorise）する：$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$。$x+y$ の値が決まれば（(i) では k、(ii) では z^2）、因数 $x+y$ が kz^3 の一部と約分され、2 次の条件が残る。その 2 次式を平方完成（completing the square）すると「何か $=3\times$ 完全平方数（perfect square）」という形になり、さらに不等式で範囲を絞ると、試すべき立方数はほんの数個しか残らない。問題が最初に 10^3 までの立方数を求めさせているのはそのためである。

参考までに：$1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000$。

解答

小問 (i)

$x+y=k$ であるから、

$$kz^3=x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=k(x^2-xy+y^2),$$

であり、$k>0$ より $z^3=x^2-xy+y^2$ である。$y=k-x$ を代入すると、

$$\begin{aligned} z^3 &= x^2-x(k-x)+(k-x)^2 \\ &= x^2-kx+x^2+k^2-2kx+x^2 \\ &= k^2-3kx+3x^2, \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

完全平方数。4 を掛けて平方完成する：

$$4z^3 - k^2 = 12x^2 - 12kx + 3k^2 = 3\left(4x^2 - 4kx + k^2\right) = 3(k-2x)^2.$$

よって $\dfrac{4z^3 - k^2}{3} = (k-2x)^2$ であり、これは整数 $k-2x$ の平方である。

範囲の評価。上の式から $4z^3 = k^2 + 3(k-2x)^2 \geq k^2$ であるので、$\frac{1}{4}k^2 \leq z^3$ である。上からの評価については、$3kx - 3x^2 = 3x(k-x) = 3xy$ に注意すると、

$$z^3 = k^2 - 3xy < k^2,$$

となる。x と y は正だからである。したがって $\frac{1}{4}k^2 \leq z^3 < k^2$ である。

$k = 20$ の場合。$x + y = 20$ を満たす解を探す。不等式から $100 \leq z^3 < 400$ であるので、立方数の一覧より $z^3 \in \{125, 216, 343\}$ である。そこで $(4z^3 - 400)/3$ が完全平方数かどうかを調べる：

- $z = 5$：$(500 - 400)/3 = 100/3$ となり、整数でない。
- $z = 6$：$(864 - 400)/3 = 464/3$ となり、整数でない。
- $z = 7$：$(1372 - 400)/3 = 324 = 18^2$。✓

よって $k = 20$ のもとで $(k-2x)^2 = 18^2$ である。$x < y$ は $2x < x + y = k$ を意味するので $k - 2x > 0$ であり、$k - 2x = 18$ となって、$x = 1$、$y = 19$ を得る。検算：$1^3 + 19^3 = 1 + 6859 = 6860 = 20 \times 343 = 20 \times 7^3$。したがって

$$x = 1, \quad y = 19, \quad z = 7$$

は $k = 20$ のときの $(*)$ の解である。

小問 (ii)

今度は $x + y = z^2$ と仮定する。すると

$$kz^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = z^2(x^2 - xy + y^2),$$

であり、z^2 で割ると（$z > 0$ なので許される）$x^2 - xy + y^2 = kz$ を得る。

> **考えてみよう** ここでも同じ「完全平方数」の技法を使うにはどうすればよいか。

恒等式（identity）$4(x^2 - xy + y^2) = (x+y)^2 + 3(x-y)^2$ を用いる。これは (i) で見つけた式を形を変えて表したものである（右辺を展開して確かめよ）。$x + y = z^2$、$k = 19$ とすると、これは

$$76z = z^4 + 3(y-x)^2, \qquad \text{すなわち} \qquad 3(y-x)^2 = z\,(76 - z^3).$$

となる。$y > x$ より左辺は正であるので、$z^3 < 76$、したがって $z \in \{1,2,3,4\}$ である。$z(76 - z^3)/3$ が完全平方数である必要がある：

- $z = 1$：$75/3 = 25 = 5^2$ より $y - x = 5$。しかし $x + y = 1$ であり、正の整数ではありえない。
- $z = 2$：$2 \times 68/3 = 136/3$ となり、整数でない。
- $z = 3$：$3 \times 49/3 = 49 = 7^2$ より $y - x = 7$、$x + y = 9$ であり、$x = 1$、$y = 8$ を得る。
- $z = 4$：$4 \times 12/3 = 16 = 4^2$ より $y - x = 4$、$x + y = 16$ であり、$x = 6$、$y = 10$ を得る。

検算：$1^3 + 8^3 = 513 = 19 \times 27 = 19 \times 3^3$、$6^3 + 10^3 = 1216 = 19 \times 64 = 19 \times 4^3$。よって $k = 19$ のときの $(*)$ の解として、次の 2 つがある。

$$(x,y,z) = (1,8,3) \quad \text{および} \quad (x,y,z) = (6,10,4).$$

（実際、上の議論から、$x + y = z^2$ を満たす解はこれらに限ることがわかる。）

検算

- (i) の恒等式を小さな例で確かめる：$k = 5$、$x = 2$、$y = 3$ とすると $x^3 + y^3 = 35 = 5 \times 7$ であり、$k^2 - 3kx + 3x^2 = 25 - 30 + 12 = 7$。✓
- 上で行ったように、すべての答えを $(*)$ に代入して確かめる：$6860 = 20 \times 343$、$513 = 19 \times 27$、$1216 = 19 \times 64$。
- $x + y = 20$ を満たすすべての $x < y$、および $k = 19$ に対して $x + y = z^2$ を満たすすべての $x < y$ をコンピュータで探索すると、ちょうどこれらの解が見つかり、ほかには見つからない。

よくある間違い

- 符号を忘れる：$(k - 2x)^2 = 18^2$ からは $k - 2x = -18$ も考えられるが、これは $x = 19 > y$ を与え、条件 $x < y$ により除外される。
- (ii) で $z = 1$ を解として残してしまう：$y - x = 5$ 自体は問題ないが、$x + y = 1$ と両立しない。

STEP のその先へ

$x^3 + y^3 = kz^3$ のような方程式は、どの整数 k が 2 つの有理数（rational）の立方の和として表せるかを問うものであり、この問いは楕円曲線（elliptic curves）へと直結し、今なお完全には解決されていない。有名なタクシー数（taxicab number）$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ も同じ世界に属している。ここで用いた技法（因数分解し、平方完成し、範囲を評価して有限個の探索に帰着させる）は、初等整数論（elementary number theory）の基本中の基本である。次の一歩としては、ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）がすばらしい。

解答例

STEP II 2011、第 3 問

純粋数学 • 単調性による不等式

> **STEP II 2011、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q3

鍵となる考え方

ここで扱う不等式（inequality）はすべて、ひとつの原理から導かれる。すなわち、関数が 0 から出発し、その導関数（derivative）が非負であれば、関数は非負のままである。最後の二つの結果には、さらにひとひねりが加わる。ある関数が増加（increasing）であるとわかれば、大小関係がすでにわかっている二つの入力（たとえば $x \leq \arcsin x$）を代入し、出力どうしの不等式を読み取ることができる。**どの**二つの入力を比べるかを見抜くことが、この問題の要点のすべてである。

解答

小問 (i)(a)

$x\cos x$ に積の微分法（product rule）を用いて微分すると、

$$f'(x) = \cos x - (\cos x - x\sin x) = x\sin x.$$

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ では $x \geq 0$ かつ $\sin x \geq 0$ であるから、$f'(x) \geq 0$ となり、f はこの区間で増加である。

よって $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ に対して $x \geq 0$ であるから、$f(x) \geq f(0) = \sin 0 - 0 = 0$ となり、示すべきことが得られた。

小問 (i)(b)

$0 \leq x < 1$ に対して $h(x) = \arcsin x - x$ とおく。与えられた事実を用いると、

$$h'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arcsin x) - 1 \geq 1 - 1 = 0,$$

である。したがって h は増加であり、$h(x) \geq h(0) = 0$ が成り立つ。すなわち、$0 \leq x < 1$ に対して $\arcsin x \geq x$ である。

（与えられた事実とは $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \geq 1$ にほかならず、これは $0 < \sqrt{1-x^2} \leq 1$ であることから成り立つ。）

小問 (i)(c)

$g(x) = \dfrac{x}{\sin x}$ とおく。$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ に対して、商の微分法（quotient rule）により

$$g'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{f(x)}{\sin^2 x}.$$

(a) より、この範囲で $f(x) \geq 0$ であり、また $\sin^2 x > 0$ であるから、$g'(x) \geq 0$ となり、g は $(0, \frac{1}{2}\pi)$ で増加である。

考えてみよう g が増加であることがわかると、$\arcsin x$ を含む不等式を示すのにどう役立つだろうか。

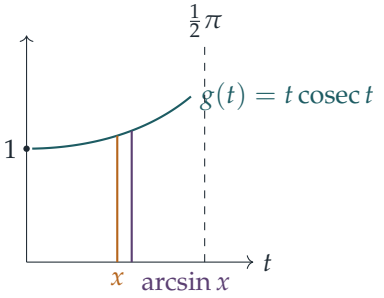
目標の式 $\dfrac{\arcsin x}{x} \geq \dfrac{x}{\sin x}$ を見てみよう。右辺は $g(x)$ である。左辺もまた g のある値になっている。$y = \arcsin x$ とおくと $\sin y = x$ であるから、

$$g(y) = \frac{y}{\sin y} = \frac{\arcsin x}{x}.$$

したがって $g(\arcsin x) \geq g(x)$ を示せばよく、これは g が増加であることから、(b) の結果 $\arcsin x \geq x$ より従う。

仕上げとして、$0 < x < 1$ をとり、$y = \arcsin x$ とおく。このとき $0 < y < \frac{1}{2}\pi$ である。また $0 < x < 1 < \frac{1}{2}\pi$ であるから、x と y はともに g が増加である区間に属する。(b) より $y \geq x$ であるから、$g(y) \geq g(x)$ となる：

$$(\arcsin x)\, x^{-1} = \frac{y}{\sin y} \geq \frac{x}{\sin x} = x \operatorname{cosec} x \qquad (0 < x < 1).$$



図は $x = 0.8$ の場合の議論を示している。入力 $\arcsin x$ は x の右側にあるので、増加する曲線はそこでより高い位置にある。

小問 (ii)

(i) の流れをそのままなぞる。まず (b) に相当する部分である。$x \geq 0$ に対して $m(x) = x - \arctan x$ とおく。与えられた事実より $m'(x) = 1 - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan x) \geq 0$ であるから、$m(x) \geq m(0) = 0$ となる。よって

$$\arctan x \leq x \qquad (x \geq 0).$$

次に、(c) に相当する部分である。$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ に対して $k(x) = x^{-1}\tan x$ とおく。分子と分母に $\cos^2 x$（これは正である）を掛け、さらに 2 を掛けると、

$$k'(x) = \frac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2} = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x} = \frac{2x - \sin 2x}{2x^2 \cos^2 x},$$

が得られる。

考えてみよう なぜ $2x - \sin 2x \geq 0$ なのだろうか。

これはおなじみの不等式 $t \geq 0$ に対する $\sin t \leq t$ において $t = 2x$ としたものである。これも他と同じやり方で証明できる。$p(t) = t - \sin t$ とおくと $p'(t) = 1 - \cos t \geq 0$ かつ $p(0) = 0$ であるから、$t \geq 0$ に対して $p(t) \geq 0$ である。

したがって $k'(x)$ の分子は非負、分母は正であり、$k'(x) \geq 0$ となる。よって k は $(0, \frac{1}{2}\pi)$ で増加である。

ここで $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ をとり、$y = \arctan x$ とおく。このとき $0 < y < \frac{1}{2}\pi$ であるから、x と y はともに k が増加である区間に属し、さらに $\tan y = x$ である。$y \leq x$ であるから、$k(y) \leq k(x)$ となる：

$$\frac{x}{\arctan x} = \frac{\tan y}{y} \leq \frac{\tan x}{x}.$$

x と $\arctan x$ はともに正であるから、両辺に $x\arctan x$ を掛けても不等号の向きは変わらない：

$$(\tan x)(\arctan x) \geq x^2 \qquad (0 < x < \tfrac{1}{2}\pi),$$

これで示すべきことが得られた。

検算

- (c) で $x = \frac{1}{2}$ とすると、$\arcsin(\frac{1}{2})/\frac{1}{2} = \pi/3 \approx 1.0472$ であり、一方 $\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{1}{2} \approx 1.0429$ である。不等式は成り立っているが、その差はわずかである。これは予想どおりであり、$x \to 0$ のとき両辺はともに 1 に近づく。

- (ii) で $x = 1$ とすると、$\tan 1 \cdot \arctan 1 = \frac{1}{4}\pi \tan 1 \approx 1.2232 \geq 1$ である。
- x が小さいとき、$\tan x \approx x + \frac{1}{3}x^3$、$\arctan x \approx x - \frac{1}{3}x^3$ であるから、積は $x^2 + O(x^6)$ となる。つまり (ii) の不等式は 0 の近くで極めてきわどい。20,000 個の無作為な点での数値計算により、上のすべての不等式と導関数の式が正しいことを確認した。

よくある間違い

- (c) で、誤った二点で g の値を比べてしまう。あるいは、$\arcsin x$ が g の増加がわかっている区間 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ に入っていることの確認を忘れる。
- (ii) では入力どうしの不等式が逆向き（$\arctan x \leq x$）であるから、出力どうしの不等式も逆向きになる。ここを取り違えると、誤った不等式が得られてしまう。
- 不等式の両辺に何かを掛けるときに、掛ける数（$x \arctan x$ や $\cos^2 x$）が正であることを述べ忘れる。

STEP のその先へ

全体を通して用いた原理、すなわち導関数が非負であれば関数は増加するという事実は、平均値の定理（mean value theorem）の帰結であり、この定理は解析学（analysis）の最初の講義で必ず証明される。sin と arcsin が互いに逆関数であることを利用して $g(x)$ と $g(\arcsin x)$ を比べる技法は、逆関数（inverse function）や凸性（convexity）に関連して出会う考え方の親戚である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、平均値の定理とその帰結について、丁寧で読みやすい証明を与えている。

解答例

STEP II 2011、第 4 問

純粋数学 • 三角方程式

> **STEP II 2011、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q4

鍵となる考え方

$\cos\theta$ を関連する角の正弦(sine)(あるいは余弦(cosine))として書き直し、「$\cos\theta = \sin 4\theta$」を二つの余弦の間の方程式に変えれば、厳密に解くことができる。$\sin 4\theta$ を $\sin\theta$ のべきで展開すると、それらの角の正弦を根（root）にもつ三次方程式（cubic）が得られる。$\sin 18^\circ$ のような累乗根（surd）を含む値が現れるのはこのためである。小問 (ii) は $\sin^2 x$ についての二次方程式（quadratic）であり、小問 (iii) は、正弦の 2 乗が $\frac{1}{4}$ となる角に気づけば、姿を変えた小問 (ii) にすぎない。

解答

小問 (i)

同じ種類のもの同士を比べるために、$\sin 4\theta = \cos(90^\circ - 4\theta)$ と書く。二つの角の余弦が等しいのは、360° の倍数の差を除いて、それらが等しいか符号が逆であるときであり、かつそのときに限るから、

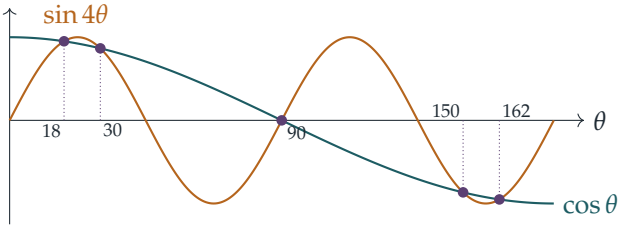
$$\cos\theta = \cos(90^\circ - 4\theta) \iff \theta = \pm(90^\circ - 4\theta) + 360^\circ k \quad \text{ある整数} k.$$

- $+$ の符号の場合：$5\theta = 90^\circ + 360^\circ k$ より $\theta = 18^\circ + 72^\circ k$ である。$0^\circ < \theta < 180^\circ$ の範囲では $\theta = 18^\circ, 90^\circ, 162^\circ$ となる。
- $-$ の符号の場合：$3\theta = 90^\circ - 360^\circ k$ より $\theta = 30^\circ - 120^\circ k$ であり、$\theta = 30^\circ, 150^\circ$ を得る。

したがって解は

$$\theta = 18^\circ, 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 162^\circ.$$

である。下のグラフから、交点がちょうど 5 個であることが確かめられる。



次に「これを用いて」(hence) の部分に移る。$s = \sin\theta$ とおく。倍角の公式 (double-angle formulae) を 2 回用いると、

$$\sin 4\theta = 2\sin 2\theta\cos 2\theta = 4\sin\theta\cos\theta\,(1 - 2\sin^2\theta),$$

となるので、方程式 $\cos\theta = \sin 4\theta$ は

$$\cos\theta\big(1 - 4s(1 - 2s^2)\big) = 0.$$

となる。

考えてみよう なぜ $\cos\theta$ を約してよいのか？

5 つの解のうち、$\cos\theta = 0$ となるのは $\theta = 90°$ だけである。残りの 4 つ $18°, 30°, 150°, 162°$ はいずれも $\cos\theta \neq 0$ を満たすので、これらについては $\cos\theta$ で割ることができ、

$$8s^3 - 4s + 1 = 0.$$

を得る。$s = \sin 30° = \frac{1}{2}$ が一つの根であることはわかっているので、因数分解 (factorise) すると

$$8s^3 - 4s + 1 = (2s - 1)(4s^2 + 2s - 1).$$

となる。さて $\sin 18°$ はこの三次方程式の根であり、$0 < \sin 18° < \sin 30° = \frac{1}{2}$ である (正弦は $[0°, 90°]$ で増加するから)。よって $\sin 18° \neq \frac{1}{2}$ であり、これは $4s^2 + 2s - 1 = 0$ の根でなければならない。その根は

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

である。正となるのは $+$ の根だけなので、

$$\sin 18° = \tfrac{1}{4}\big(\sqrt{5} - 1\big),$$

となり、題意が示された。

小問 (ii)

$s = \sin x$ とおく。$\sin^2 2x = 4\sin^2 x \cos^2 x = 4s^2(1-s^2)$ であるから、方程式は s のみで表される：

$$4s^2 + 1 = 16s^2(1-s^2) \iff 16s^4 - 12s^2 + 1 = 0.$$

これは s^2 についての二次方程式である：

$$s^2 = \frac{12 \pm \sqrt{144-64}}{32} = \frac{12 \pm 4\sqrt{5}}{32} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}.$$

平方根をとるために、次のことに注意する。

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}, \qquad \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{3-\sqrt{5}}{8}.$$

s^2 のどちらの値も 0 と 1 の間にあるので、4 つの平方根はどれも $\sin x$ の値として実際にとりうるものであり、上の変形はすべて同値変形であったから、いずれももとの方程式を満たす。とりうる値は

$$\sin x = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5}, \qquad -\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\sqrt{5}, \qquad -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5}, \qquad \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\sqrt{5}.$$

である。小問 (i) より $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) = \sin 18^\circ$ である。また $\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) = \sin 54^\circ$ である（これは $\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ$ に等しく、計算すれば同じ値になることが確かめられる）。

小問 (iii)

小問 (ii) の方程式を 4 で割ると

$$\sin^2 x + \tfrac{1}{4} = \sin^2 2x.$$

となる。これを $\sin^2 3\alpha + \sin^2 5\alpha = \sin^2 6\alpha$ と比べよう。$x = 3\alpha$ とおけば自動的に $2x = 6\alpha$ となり、

$$\sin^2 5\alpha = \tfrac{1}{4} \qquad \text{かつ} \qquad \sin 3\alpha \text{ が小問 (ii) の 4 つの値のいずれかである。}$$

ならば、二つの方程式は一致する。

考えてみよう $\sin 3\alpha$ がそれらの値のいずれかであれば十分だろうか？

十分である。小問 (ii) で見たように、方程式 $\sin^2 x + \frac{1}{4} = \sin^2 2x$ は x を $s = \sin x$ を通してのみ含み、s のこれら 4 つの値はこの方程式を満たす。したがって、正弦がこれらの値のいずれかとなる x であれば、どれでも方程式を満たす。

$\alpha = 6°$ とする。すると $5\alpha = 30°$ なので $\sin^2 5\alpha = \frac{1}{4}$ であり、$3\alpha = 18°$ なので $\sin 3\alpha = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$ となって、これは求めた値の一つである。よって

$$\sin^2 18° + \sin^2 30° = \sin^2 36°,$$

であり、$\alpha = 6°$ は解である。

$\alpha = 42°$ とする。すると $5\alpha = 210°$ なので $\sin 5\alpha = -\frac{1}{2}$、$\sin^2 5\alpha = \frac{1}{4}$ であり、$3\alpha = 126°$ なので $\sin 3\alpha = \sin 54° = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$ となって、これも求めた値の一つである。したがって $\alpha = 42°$ は解である。

以上より、条件を満たす値として $\alpha = 6°$ と $\alpha = 42°$ の二つが得られる。

同じ方法で、$\alpha = 66°$（$5\alpha = 330°$、$\sin 3\alpha = \sin 198° = -\sin 18°$）と $\alpha = 78°$（$5\alpha = 390°$、$\sin 3\alpha = \sin 234° = -\sin 54°$）も得られる。範囲内で $\sin^2 5\alpha = \frac{1}{4}$ を満たすもう一つの角は $\alpha = 30°$ であるが、$\sin 90° = 1$ は求めた値のいずれでもないので、これは解にならない（実際、$1 + \frac{1}{4} \neq \sin^2 180° = 0$ である）。

検算

- $\sin 18° \approx 0.30902$ であり、$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \approx 0.30902$ である。
- $\alpha = 6°$ のとき：$\sin^2 18° + \sin^2 30° \approx 0.09549 + 0.25 = 0.34549$ であり、$\sin^2 36° \approx 0.34549$ である。
- $(0°, 90°)$ 上で $\sin^2 3\alpha + \sin^2 5\alpha - \sin^2 6\alpha$ を数値的に調べると、零点はちょうど $6°, 42°, 45°, 66°, 78°$ にある。余分な $45°$ は小問 (ii) からは得られない。そこでは $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ となっている。

よくある間違い

- $\cos A = \cos B$ の解のもう一つの系列（すなわち $A = -B + 360°k$）を忘れ、小問 (i) で $30°$ と $150°$ を見落とす。
- 断りなく $\cos\theta$ を約す。ここではそれで問題ないが、それは $\cos\theta = 0$ となる解が $90°$ であって $18°$ ではないからにすぎない。
- 小問 (ii) で $\sin x$ の正の値だけを答える。4 つともとりうる値である。

STEP のその先へ

$\sin 18^\circ$ の正確な値が求まるのは、18° が直角の 5 分の 1 であることによる。そのためこの値は正五角形（regular pentagon）や黄金比（golden ratio）と結びついている：$\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) = \frac{1}{2}\varphi$。より一般に、$\cos(360^\circ/n)$ が平方根だけを用いて表せるのは、正 n 角形が定規とコンパス（ruler and compasses）で作図できるときであり、かつそのときに限る。ガウス（Gauss）が示したように、これは n を割り切るフェルマー素数（Fermat primes）によって決まる。これは体論（field theory）とガロア理論（Galois theory）の古典的な最初の応用である。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は必要な代数を一から積み上げており、Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的複素解析）は、1 の冪根（roots of unity）と多角形がなぜ結びつくのかを示している。

解答例

STEP II 2011、第 5 問

純粋数学 ・ ベクトルと鏡映

> **STEP II 2011、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q5

鍵となる考え方

原点を通る直線に関して点を折り返すには、その点の位置ベクトル（position vector）を、直線に沿った成分と直線に垂直な成分とに分解すればよい。鏡映（reflection）は前者をそのまま保ち、後者の向きを反転させる。$\mathbf{b}$ の $\mathbf{a}$ 方向の成分はおなじみの射影（projection）$\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\,\mathbf{a}$ であり、あとは内積の計算を整理するだけである。共線性（collinearity）については、ある点が直線 AB 上にあるのは、その位置ベクトルが $s+t=1$ を満たす $s\mathbf{a}+t\mathbf{b}$ の形に書けるときであり、そのときに限ることを思い出そう。

解答

以下では常に、O、A、B が同一直線上にないことから、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は零ベクトルでなく、しかも平行でない。特に $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\neq 0$ かつ $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\neq 0$ であるから、これらで割ってよい。$\theta=\angle AOB$ とおく。

鏡映点 C

B から直線 OA に下ろした垂線の足（foot of the perpendicular）を P とする。その位置ベクトルはある実数倍 $k\mathbf{a}$ であり、$\mathbf{b}-k\mathbf{a}$ は $\mathbf{a}$ に垂直であるから

$$(\mathbf{b}-k\mathbf{a})\cdot\mathbf{a}=0 \quad\Longrightarrow\quad k=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}.$$

直線 OA に関する鏡映は P を動かさず、B を反対側にある点 C で、P が BC の中点となるものに移す。よって $\mathbf{c}=2\overrightarrow{OP}-\mathbf{b}$、すなわち

$$\mathbf{c}=\frac{2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\,\mathbf{a}-\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}-\mathbf{b},\qquad \lambda=\frac{2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}},$$

となり、示すべきことが得られた。

鏡映点 D

OA の代わりに直線 OB を用いて同じ議論を行うと

$$\mathbf{d} = \frac{2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\,\mathbf{b} - \mathbf{c}.$$

ここで $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$ であるから

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= \left(\frac{2\lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} - 2\right)\mathbf{b} - (\lambda\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ &= \left(\frac{2\lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} - 1\right)\mathbf{b} - \lambda\mathbf{a}.\end{aligned}$$

これは $\mathbf{d} = \mu\mathbf{b} - \lambda\mathbf{a}$ の形であり、

$$\mu = \frac{2\lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} - 1 = \frac{4(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})} - 1 = 4\cos^2\theta - 1,$$

である。最後の等号では $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$ を用いた。以下で必要になるのは $4\cos^2\theta - 1$ という形である。

A、B、D が同一直線上にある場合

点 D が直線 AB 上にあるのは、ある実数 t に対して $\mathbf{d} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ となるとき、かつそのときに限る。一方で $\mathbf{d} = -\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ でもある。

考えてみよう なぜ $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の係数を比較してよいのだろうか？

$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が平行でないからである。$s\mathbf{a} + t\mathbf{b} = s'\mathbf{a} + t'\mathbf{b}$ ならば $(s - s')\mathbf{a} = (t' - t)\mathbf{b}$ であり、両辺の括弧がともに 0 でない限り、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は平行になってしまう。O、A、B が同一直線上にないという条件が使われるのはここである。

したがって $-\lambda = 1 - t$ かつ $\mu = t$ である。t を消去すると、A、B、D が同一直線上にあるのは、ちょうど

$$\mu = \lambda + 1.$$

のときである。

$\lambda = -\frac{1}{2}$ の場合

このとき共線条件より $\mu = \frac{1}{2}$ となるので、$4\cos^2\theta - 1 = \frac{1}{2}$、すなわち $\cos^2\theta = \frac{3}{8}$ である。$\lambda < 0$ より $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} < 0$ であるから $\cos\theta < 0$ となり、

$$\cos\angle AOB = -\sqrt{\frac{3}{8}} = -\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

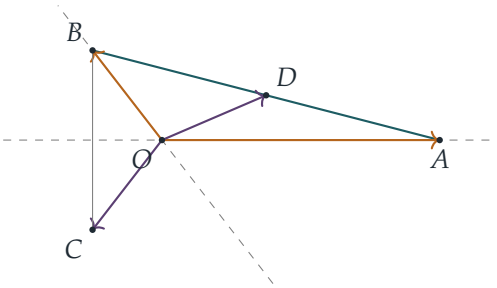
さらに

$$\mathbf{d} = \tfrac{1}{2}\mathbf{b} + \tfrac{1}{2}\mathbf{a} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}),$$

であるから、D **は** AB **の中点である**。図形の形についてさらに詳しく述べることができる。$\lambda = \dfrac{2|\mathbf{b}|\cos\theta}{|\mathbf{a}|} = -\tfrac{1}{2}$ より

$$\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|} = -4\cos\theta = \sqrt{6},$$

となるので $OA = \sqrt{6}\,OB$ であり、角 AOB は鈍角（約 127.8°）である。また、鏡映は O からの距離を保つから $OD = OC = OB$ である。つまり、AB の中点は O からちょうど B と同じ距離にある。



検算

- まず OA に関して、次に OB に関して、と 2 回折り返すことは、O を中心とする角 2θ の回転（rotation）である。よって D は B を角 2θ だけ回転させた点であるはずで、$\cos\angle BOD = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ となる。最後の場合、これは $2\cdot\frac{3}{8} - 1 = -\frac{1}{4}$ である。直接計算すると、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -\frac{1}{4}\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = -\frac{3}{2}\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$ を用いて $\mathbf{b}\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \frac{1}{2}(-\frac{3}{2}+1)|\mathbf{b}|^2 = -\frac{1}{4}|\mathbf{b}|^2$ となり、一致する。
- $\theta = 90°$ ならば $\lambda = 0$ であり、C は $-\mathbf{b}$、D もまた $-\mathbf{b}$ である。公式からは $\mu = 4\cdot 0 - 1 = -1$ が得られ、期待どおりである。
- 数値で確かめると、$\mathbf{a} = (\sqrt{6}, 0)$、$\mathbf{b} = (-0.6124, 0.7906)$ として 2 回折り返すと $\mathbf{d} = (0.9186, 0.3953)$ となり、これは AB の中点であって、$|\mathbf{d}| = 1 = |\mathbf{b}|$ である。

よくある間違い

- 鏡映を $\mathbf{b} - 2\times$(射影) と書いてしまう。これは OA に**垂直な**直線に関する鏡映である。動かないはずの $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ を代入して確かめるとよい。
- $\cos\theta = +\sqrt{6}/4$ としてしまう。λ の符号によって $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ の符号が決まる。

- $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が一次独立（linearly independent）であることを述べずに係数を比較してしまう。

STEP のその先へ

写像 $\mathbf{x} \mapsto \frac{2\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a} - \mathbf{x}$ は線形写像（linear map）であり、その行列は、行列式（determinant）が -1 の直交行列（orthogonal matrix）の例として大学 1 年で定番のものである。2 つの鏡映を合成すると、2 枚の鏡のなす角の 2 倍だけの回転が得られる。これは、等長変換（isometry）や、正多角形の対称性の群のような鏡映によって生成される群（group）の研究の出発点である。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、射影と鏡映の行列をよく扱っている。

解答例

STEP II 2011、第 6 問

純粋数学 ・ 部分積分

STEP II 2011、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/11-s2-q6

鍵となる考え方

被積分関数（integrand）$[f'(x)]^2[f(x)]^n$ は、f' の因子を一つ除けばすぐに積分できる形になる。$f'(x)[f(x)]^n$ は $[f(x)]^{n+1}/(n+1)$ の導関数だからである。そこで、その部分を切り離して部分積分（integration by parts）を行う。残った積分には f'' が含まれるが、条件 $f'' = kff'$ によって再び同じ易しい形 $f'f^m$ に戻る。応用問題では、与えられた被積分関数が $[f']^2 f^n$ となるように f と n を選び、k を求めればよい。

解答

一般的な結果

$f(x)$ を f と書き、他も同様に略記する。$u = f'$、$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = f'f^n$ として部分積分すると、$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f''$、$v = \dfrac{f^{n+1}}{n+1}$ である（$n \geq 1$ より $n+1 \neq 0$ なので問題ない）：

$$\begin{aligned} I = \int f' \cdot f'f^n \,\mathrm{d}x &= \frac{f'f^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int f''f^{n+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{f'f^{n+1}}{n+1} - \frac{k}{n+1}\int f'f^{n+2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{次を用いた：} f'' = kff' \\ &= \frac{f'f^{n+1}}{n+1} - \frac{kf^{n+3}}{(n+1)(n+3)} + C. \end{aligned}$$

よって

$$\boxed{I = \frac{f'(x)\,[f(x)]^{n+1}}{n+1} - \frac{k\,[f(x)]^{n+3}}{(n+1)(n+3)} + C}$$

であり、これは求められているとおり $f(x)$、$f'(x)$、k、n で表された式である。

小問 (i)

$f(x)=\tan x$ のとき $f'(x)=\sec^2 x$ であり、

$$f''(x)=2\sec x\cdot\sec x\tan x=2\tan x\sec^2 x=2f(x)f'(x),$$

となるので、$k=2$ として条件が成り立つ。したがって公式より

$$\int \sec^4 x\tan^n x\,\mathrm{d}x=\frac{\sec^2 x\tan^{n+1}x}{n+1}-\frac{2\tan^{n+3}x}{(n+1)(n+3)}+C. \tag{1}$$

検証。$\sec^2 x=1+\tan^2 x$ と置換（substitution）$t=\tan x$、$\mathrm{d}t=\sec^2 x\,\mathrm{d}x$ を用いて直接計算すると

$$\int \sec^4 x\tan^n x\,\mathrm{d}x=\int(1+t^2)t^n\,\mathrm{d}t=\frac{t^{n+1}}{n+1}+\frac{t^{n+3}}{n+3}+C.$$

一方、(1) の右辺を $\sec^2 x=1+t^2$ を用いて書き直すと

$$\frac{(1+t^2)t^{n+1}}{n+1}-\frac{2t^{n+3}}{(n+1)(n+3)}=\frac{t^{n+1}}{n+1}+\frac{(n+3)-2}{(n+1)(n+3)}t^{n+3}=\frac{t^{n+1}}{n+1}+\frac{t^{n+3}}{n+3},$$

となり、同じ答えが得られる。よって $f=\tan$ の場合に結果が確かめられた。

積分の計算。

$$\frac{\sin^4 x}{\cos^8 x}=\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\cdot\frac{1}{\cos^4 x}=\tan^4 x\sec^4 x=[f'(x)]^2[f(x)]^4,$$

であるから、これは (1) の $n=4$ の場合である。いま得た簡単な形を用いると

$$\int\frac{\sin^4 x}{\cos^8 x}\,\mathrm{d}x=\frac{\tan^5 x}{5}+\frac{\tan^7 x}{7}+C.$$

小問 (ii)

考えてみよう f として何を選べばよいか。また $\sec^2 x$ はどこから来るのか。

括弧 $(\sec x+\tan x)$ が f の候補として自然なので、$f(x)=\sec x+\tan x$ としてみる。その導関数は

$$f'(x)=\sec x\tan x+\sec^2 x=\sec x(\tan x+\sec x)=\sec x\,f(x).$$

これが鍵となる事実である。f を微分すると、単に $\sec x$ が掛かるだけなのである。したがって

$$\begin{aligned}f''(x)&=\sec x\tan x\,f(x)+\sec x\,f'(x)=\sec x\tan x\,f+\sec^2 x\,f\\&=\sec x\,f\,(\tan x+\sec x)=\sec x\,f^2,\end{aligned}$$

であり、$ff' = f \cdot \sec x f = \sec x f^2$ でもあるから $f'' = ff'$、すなわち $k = 1$ である。

また $[f'(x)]^2 = \sec^2 x\,[f(x)]^2$ であるから

$$\sec^2 x\,(\sec x + \tan x)^6 = \sec^2 x\, f^2 \cdot f^4 = [f'(x)]^2[f(x)]^4,$$

となり、これは一般的な結果の $n = 4$、$k = 1$ の場合である：

$$\begin{aligned}\int \sec^2 x\,(\sec x + \tan x)^6\,\mathrm{d}x &= \frac{f'f^5}{5} - \frac{f^7}{35} + C = \frac{\sec x\, f^6}{5} - \frac{f^7}{35} + C \\ &= \frac{f^6}{35}\left(7\sec x - (\sec x + \tan x)\right) + C \\ &= \frac{(\sec x + \tan x)^6\,(6\sec x - \tan x)}{35} + C.\end{aligned}$$

検算

- (i) の答えを微分すると：$\sec^2 x \tan^4 x + \sec^2 x \tan^6 x = \sec^2 x \tan^4 x(1 + \tan^2 x) = \tan^4 x \sec^4 x$。
- 数値的には、シンプソンの公式（Simpson's rule）により $\int_{-0.7}^{1.1} \sin^4 x / \cos^8 x\,\mathrm{d}x \approx 22.12954$ となり、$\left[\frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{1}{7}\tan^7 x\right]_{-0.7}^{1.1}$ と一致する。また $\int_{-1}^{0.9} \sec^2 x(\sec x + \tan x)^6\,\mathrm{d}x \approx 133.68566$ となり、(ii) の答えと一致する。
- 一般公式は、$f = \tan$ かつ n が 1 から 6 までのすべての場合に数値積分（quadrature）と一致する。

よくある間違い

- 部分積分で $u = f^n$ を選ぶこと：これでは $f^{n-1}[f']^3$ が現れ、かえって悪くなる。f' の一つを f^n と組にして、ちょうど積分できるようにする。
- $\tan x$ に対して $k = 1$ とすること：$f'' = 2\sec^2 x \tan x$ であるから $k = 2$ である。
- (ii) で、$\sec^2 x$ を $[f']^2/f^2$ として吸収しなければならないことを忘れること。指数が 6 から $n = 4$ に下がるのはこのためである。

STEP のその先へ

条件 $f'' = kff'$ はそれ自体が微分方程式（differential equation）である。一度積分すると $f' = \frac{1}{2}kf^2 + c$ という一階の変数分離形（separable）の方程式になり、その解には $\tan$（$k = 2$、$c = 1$）や $\sec x + \tan x$（$k = 1$、$c = \frac{1}{2}$）が含まれる。関数がある常微分

方程式を満たすがゆえに被積分関数が扱いやすくなる、と見抜くことは、大学一年次の特殊関数（special functions）や漸化式（reduction formulae）の学習で繰り返し現れるテーマである。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『常微分方程式入門』）では、このような変数分離形の方程式や自励系（autonomous）の方程式が扱われている。

解答例

STEP II 2011、第 7 問

純粋数学 • 数列と級数

STEP II 2011、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/11-s2-q7

鍵となる考え方

数列を項ごとに扱ってはならない。すべての和を λ のべきの和と μ のべきの和に分け、それぞれに等比級数（geometric series）の和の公式を用いる。2 つの数は $\lambda+\mu=2$ と $\lambda\mu=-1$ を満たすので、$x^2=2x+1$ の解である。このただ 1 つの 2 次方程式によって、扱いにくい分母がすべて簡単になる。もう 1 つの道具は 2 乗することである。b_k^2 と a_k^2 はどちらも a_{2k} に定数を加えた形になる。

解答

まず、全体を通して用いる事実を挙げておく。

$$\lambda-1=\sqrt{2}, \qquad \mu-1=-\sqrt{2}, \qquad \lambda\mu=1-2=-1, \qquad \lambda-\mu=2\sqrt{2}.$$

また、$a_0=2$、$b_0=0$ である。

小問 (i)

$\lambda\neq 1$ かつ $\mu\neq 1$ であるから、それぞれの和に等比級数の和の公式を用いることができる。

$$\sum_{r=0}^{n}\lambda^r=\frac{\lambda^{n+1}-1}{\lambda-1}=\frac{\lambda^{n+1}-1}{\sqrt{2}}, \qquad \sum_{r=0}^{n}\mu^r=\frac{\mu^{n+1}-1}{\mu-1}=-\frac{\mu^{n+1}-1}{\sqrt{2}}.$$

1 つ目の和から 2 つ目の和を引くと、

$$\sum_{r=0}^{n}b_r=\frac{\lambda^{n+1}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\mu^{n+1}-1}{\sqrt{2}}=\frac{a_{n+1}-2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}a_{n+1},$$

となり、示すべき式が得られた。代わりに 2 つの和を足すと、-1 どうしが打ち消し合う。

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n} a_r = \frac{\lambda^{n+1}-1}{\sqrt{2}} - \frac{\mu^{n+1}-1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, b_{n+1}.}$$

（簡単な確認：$n=0$ のとき、この式は $a_0 = b_1/\sqrt{2} = 2\sqrt{2}/\sqrt{2} = 2$ となり、正しい。）

小問 (ii)

小問 (i) より、内側の和は $b_{m+1}/\sqrt{2}$ である。よって

$$\sum_{m=0}^{2n}\left(\sum_{r=0}^{m} a_r\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m=0}^{2n} b_{m+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{s=1}^{2n+1} b_s = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{s=0}^{2n+1} b_s,$$

となる。ここで最後の変形ができるのは $b_0 = 0$ だからである。次に、小問 (i) で n の代わりに $2n+1$ とすると、

$$\sum_{m=0}^{2n}\left(\sum_{r=0}^{m} a_r\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{2} + \frac{a_{2n+2}}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{1}{2}a_{2n+2} - 1. \qquad (*)$$

を得る。

考えてみよう a_{2n+2} と b_{n+1}^2 をどのように結びつければよいか。

2 乗し、交差項には $\lambda\mu = -1$ を用いる。

$$b_{n+1}^2 = \lambda^{2n+2} + \mu^{2n+2} - 2(\lambda\mu)^{n+1} = a_{2n+2} - 2(-1)^{n+1}, \qquad a_{n+1}^2 = a_{2n+2} + 2(-1)^{n+1}.$$

n が奇数ならば $n+1$ は偶数なので、$b_{n+1}^2 = a_{2n+2} - 2$ である。よって $(*)$ は $\frac{1}{2}(a_{2n+2} - 2) = \frac{1}{2}b_{n+1}^2$ に等しく、示すべき式が得られた。

n が偶数ならば $(-1)^{n+1} = -1$ なので、今度は a_{n+1}^2 が $a_{2n+2} - 2$ に等しい。したがって

$$\boxed{n \text{ が偶数}: \quad \sum_{m=0}^{2n}\left(\sum_{r=0}^{m} a_r\right) = \tfrac{1}{2}a_{n+1}^2}$$

であり、これは $\frac{1}{2}b_{n+1}^2 - 2$ と同値である。

小問 (iii)

小問 (i) と、続いて小問 (ii) の 2 乗の恒等式を用いると、

$$\left(\sum_{r=0}^{n} a_r\right)^2 = \tfrac{1}{2}b_{n+1}^2 = \tfrac{1}{2}a_{2n+2} - (-1)^{n+1}.$$

2 つ目の和についても再び 2 つの等比級数に分ける。今回は公比が λ^2 と μ^2 である。

$$\sum_{r=0}^{n} \lambda^{2r+1} = \lambda\,\frac{\lambda^{2n+2}-1}{\lambda^2-1}.$$

考えてみよう λ^2-1 は簡単にできるか。

できる。$\lambda^2 = 2\lambda+1$ であるから $\lambda^2-1 = 2\lambda$ となり、因数 λ が約分されて、和は $\frac{1}{2}(\lambda^{2n+2}-1)$ となる。μ も同じ 2 次方程式を満たすので、$\mu^2-1=2\mu$ であり、μ の和は $\frac{1}{2}(\mu^{2n+2}-1)$ となる（$\mu^2 \neq 1$ であるから、公式は適用できることに注意する）。2 つを足すと、

$$\sum_{r=0}^{n} a_{2r+1} = \tfrac{1}{2}\left(a_{2n+2}-2\right) = \tfrac{1}{2}a_{2n+2} - 1.$$

したがって

$$\left(\sum_{r=0}^{n} a_r\right)^2 - \sum_{r=0}^{n} a_{2r+1} = \left(\tfrac{1}{2}a_{2n+2} - (-1)^{n+1}\right) - \left(\tfrac{1}{2}a_{2n+2} - 1\right) = 1 + (-1)^n.$$

n が偶数ならばこれは 2 に等しく、示すべき式が得られた。n が奇数ならば 0 であるから、

$$n \text{ が奇数}: \quad \left(\sum_{r=0}^{n} a_r\right)^2 = \sum_{r=0}^{n} a_{2r+1}.$$

検算

a_n は $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$ を満たす整数であり、$2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, \ldots$ と続く。小問 (ii) で $n=3$ とすると、部分和 $2, 4, 10, 24, 58, 140, 338$ の合計は 576 である。$b_4 = 24\sqrt{2}$ であるから $\frac{1}{2}b_4^2 = 576$ となり、一致する。小問 (iii) で $n=2$ とすると、$(2+2+6)^2 - (2+14+82) = 100-98 = 2$ である。$n=1$ では $(2+2)^2-(2+14) = 0$ である。3 つの小問すべてについて、偶奇の両方の場合を含め、24 までのすべての n でコンピュータによる確認を行った。

よくある間違い

- $\mu - 1 = -\sqrt{2}$ が負であることを忘れ、小問 (i) で a と b の役割を入れ替えてしまう。
- $(-1)^{n+1}$ とすべきところを $(\lambda\mu)^{n+1} = 1$ と書いてしまう。この符号こそが奇数と偶数で場合分けする理由そのものである。
- 小問 (ii) で b_{m+1} の和の添字をずらす際、和を 0 から始められるのは $b_0 = 0$ だからであることに気づかない。

STEP のその先へ

2 つの数列はどちらも線形漸化式（linear recurrence）$x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}$ を満たし、その特性方程式（characteristic equation）は $x^2 = 2x + 1$ である。したがって λ と μ はその解であり、a_n と b_n は特殊解である。$\lambda^n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ であるから、恒等式 $\lambda^n\mu^n = (-1)^n$ は $a_n^2 - b_n^2 = 4(-1)^n$ となる。これは環（ring）$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ におけるペル型方程式（Pell-type equation）である。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等整数論』）では、このような単数（unit）と $\sqrt{2}$ の連分数（continued fraction）がどのように結びつくのかが説明されている。

解答例

STEP II 2011、第 8 問

純粋数学 ・ 円の伸開線

> **STEP II 2011、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q8

鍵となる考え方

どの瞬間においても、糸は二つの部分からなる。一つは円の弧（arc）であり、その長さは角度から直ちに読み取れる。もう一つは接線（tangent）に沿って円から離れていく直線部分である。糸の全長は一定なので、直線部分の長さは全長から弧の長さを引いた残りである。また接線は半径に垂直であるから、ベクトルを使えば B の位置は容易に求まる。最後の面積については、糸が掃く領域全体が「外側の枝の下の面積から、内側の枝の下の面積と半円の面積を引いたもの」になっていることに注目する。

解答

媒介変数表示

糸が円から離れる点を $P = (\cos t, \sin t)$ とする。すなわち t は x 軸の正の向きから OP までの角である。最初は $P = A = (-1, 0)$ なので $t = \pi$ である。糸が円の上側に巻きついていくにつれて、P は時計回りに動き、t は 0 まで減少する。

糸のうち円に接している部分は、角 π から角 t までの弧である。半径は 1 なので、この弧の長さは $\pi - t$ である。糸の長さは π なので、直線部分 PB の長さは

$$\pi - (\pi - t) = t.$$

である。糸はぴんと張っているので、PB は P における円の接線であり、$OP = (\cos t, \sin t)$ に垂直である。OP に垂直な単位ベクトル（unit vector）は $\pm(\sin t, -\cos t)$ の二つである。最初（$t = \pi$）は糸は A から真上、すなわち $(0, 1) = (\sin \pi, -\cos \pi)$ の向きを向い

ており、連続性から符号は途中で変わらない。したがって

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + t\,(\sin t, -\cos t),$$

すなわち

$$x = \cos t + t\sin t, \qquad y = \sin t - t\cos t,$$

となり、求める式が得られた。（確認：$t = \pi$ のとき $(-1, \pi)$ となり、これは B の最初の位置である。また $t = 0$ のとき $(1, 0)$ となり、これは B が円に達する点である。）

x の最大値

微分すると、$\pm\sin t$ の項と $\pm\cos t$ の項が打ち消し合う：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t.$$

$0 < t < \pi$ において、$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = t\cos t$ は $t < \frac{\pi}{2}$ のとき正、$t > \frac{\pi}{2}$ のとき負である。よって t が $[0, \pi]$ を動くとき、x は増加したのち減少し、最大となるのは

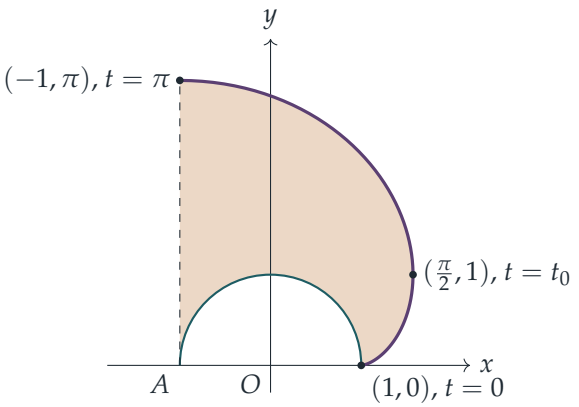
$$t_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{このとき} (x, y) = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right).$$

のときである。

概形

二つの事実が役に立つ。第一に、$0 < t \leq \pi$ において $y > 0$ である。実際、$t \leq \frac{\pi}{2}$ ならば $\tan t > t$ より $y = \cos t\,(\tan t - t) > 0$ であり（$t = \frac{\pi}{2}$ のときは直接 $y = 1$）、$t > \frac{\pi}{2}$ ならば $\cos t < 0$ なので y の二つの項はともに非負で、$\sin t - t\cos t > 0$ となる。第二に、$x^2 + y^2 = 1 + t^2$ なので、B は常に円の外側にあり、円からの離れ具合は t とともに大きくなる。さらに $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = t\sin t \geq 0$ なので、y は t とともに単調に増加する。

したがって曲線は $(1, 0)$ から出発し（ここで $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan t = 0$ なので、x 軸から水平に離れる）、最も右の点 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ まで上っていき、そこで鉛直になる。その後、円の上方を回り込んで $(-1, \pi)$ に戻り、そこで再び水平になる。この曲線は円の**伸開線**（involute）である。



曲線、糸の最初の位置（破線）、半円で囲まれた網かけの領域が、糸が掃く領域である。

$\pi \geq t \geq t_0$ の部分の面積

曲線のこの部分では、x は $\frac{\pi}{2}$（$t = \frac{\pi}{2}$ のとき）から -1（$t = \pi$ のとき）まで減少し、$y > 0$ である。よってこの弧と x 軸の間の面積は

$$\int_{-1}^{\pi/2} y\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{\pi/2} y\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{\pi} \left(t^2\cos^2 t - t\sin t\cos t\right)\mathrm{d}t,$$

である。ここで積分の上端と下端を入れ替えて負号を吸収した。必要な積分は二つであり、どちらも倍角の公式（double-angle formula）を使ったあとに部分積分（integration by parts）で求められる。$\sin t\cos t = \frac{1}{2}\sin 2t$、$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$ と書く。部分積分により

$$\int t\sin 2t\,\mathrm{d}t = -\tfrac{1}{2}t\cos 2t + \tfrac{1}{4}\sin 2t,$$
$$\int t^2\cos 2t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}t^2\sin 2t - \int t\sin 2t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}t^2\sin 2t + \tfrac{1}{2}t\cos 2t - \tfrac{1}{4}\sin 2t.$$

である。$t = \pi$ では $\sin 2t = 0$、$\cos 2t = 1$ であり、$t = \frac{\pi}{2}$ では $\sin 2t = 0$、$\cos 2t = -1$ である。したがって

$$\int_{\pi/2}^{\pi} t\sin t\cos t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\left[-\tfrac{1}{2}t\cos 2t\right]_{\pi/2}^{\pi} = \tfrac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{8},$$
$$\int_{\pi/2}^{\pi} t^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{3}t^3\right]_{\pi/2}^{\pi} + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}t\cos 2t\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{7\pi^3}{48} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{7\pi^3}{48} + \frac{3\pi}{8}.$$

よって求める面積は

$$\frac{7\pi^3}{48} + \frac{3\pi}{8} - \left(-\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{7\pi^3}{48} + \frac{3\pi}{4}.$$

である。

糸が掃く領域の面積

考えてみよう $t \geq t_0$ の部分の弧の下の領域は、糸が掃く領域より大きい。何を取り除かなければならないか。

先ほど求めた面積は、$-1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における外側の弧（$t_0 \leq t \leq \pi$）と x 軸の間にあるすべての部分の面積である。糸が掃く領域は、ここからその下にある二つの部分を除いたものである。一つは上半分の半円で、面積は $\frac{\pi}{2}$ である。もう一つは、$1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における内側の弧（$0 \leq t \leq t_0$）と x 軸の間の細長い部分である。内側の弧は円の外側にあり（$t > 0$ のとき $x^2 + y^2 = 1 + t^2 > 1$ であるから）、かつ外側の弧より下にあるので、これら二つの部分は重ならず、引き算をしてよい。

内側の弧では x は t とともに増加するので、細長い部分の面積は

$$\int_0^{\pi/2} y \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \left(t \sin t \cos t - t^2 \cos^2 t\right) \mathrm{d}t.$$

である。同じ原始関数（antiderivative）を用い、今度は下端を $t = 0$ とすると（ここで $\sin 2t = 0$、$\cos 2t = 1$）、

$$\int_0^{\pi/2} t \sin t \cos t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\left[-\tfrac{1}{2} t \cos 2t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8},$$
$$\int_0^{\pi/2} t^2 \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\pi^3}{24} + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2} t \cos 2t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8},$$

となるので、細長い部分の面積は $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi^3}{48}$ である（約 0.14 であり、小さな正の値なので安心できる）。したがって糸が掃く領域の面積は

$$\left(\frac{7\pi^3}{48} + \frac{3\pi}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^3}{48}\right) - \frac{\pi}{2} = \frac{8\pi^3}{48} = \frac{\pi^3}{6}.$$

である。

検算

- 最後の答えにはもっと手際のよい求め方がある。t が δt だけ減少するとき、糸の直線部分（長さ t）は、ほぼ固定されているとみなせる点のまわりに角 δt だけ回転し、面積がおよそ $\frac{1}{2} t^2\,\delta t$ の細い扇形（sector）を掃く。これらを足し合わせると $\int_0^{\pi} \frac{1}{2} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^3}{6}$ となり、結果は一致する。
- 数値的な確認：シンプソンの公式（Simpson's rule）により外側の弧の下の面積は 6.87794 となり、$\frac{7\pi^3}{48} + \frac{3\pi}{4}$ と一致する。また網かけの領域の境界に靴ひも公式（shoelace formula）を適用すると 5.16771 $\approx \frac{\pi^3}{6}$ が得られる。

よくある間違い

- 直線部分の長さを $\pi - t$ としてしまう（それは弧の長さである）、あるいは二つの接線方向のうち誤った方を選んでしまう。$t = \pi$ の場合を確認すれば、どちらの誤りにも気づける。
- その弧に沿って x が減少することに気づかず、積分区間を t_0 から π のままにしてしまう。こうすると負の「面積」が得られる。
- 内側の弧の下にある小さな領域を忘れてしまう。こうすると掃く面積が $\frac{7\pi^3}{48} + \frac{\pi}{4}$ となってしまう。

STEP のその先へ

ある曲線からほどけていく糸の端が描く曲線を伸開線といい、糸がほどけていく元の曲線をその縮閉線（evolute）という。B における伸開線の曲率中心（centre of curvature）は、ちょうど糸が円から離れる点 P である。円の伸開線は、ほとんどの歯車の歯形に用いられている。そのような二つの歯は、一定の速度比で互いに転がり合うからである。検算で用いた「細い扇形」の議論は、極座標での面積公式 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ を姿を変えて用いたものにほかならない。曲率やこの種の曲線についてさらに知りたければ Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を、その背後にある厳密な微積分については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照するとよい。

解答例

STEP II 2011、第 9 問

力学 ・ 衝突と反発係数

STEP II 2011、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

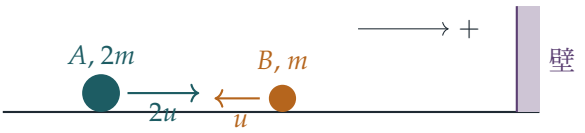
step.maths.org/questions/11-s2-q9

鍵となる考え方

ここでの衝突はすべて直接衝突（direct collision）であるから、どの衝突も同じ二つの式、すなわち運動量保存則（conservation of momentum）とニュートン（Newton）の反発の法則（law of restitution）によって決まる。本当に危ないのは符号だけである。最初に正の向きを一つ（壁に向かう向き）に定め、すべての速度をその向きの符号付きの数として書けば、計算はおのずと進む。最後の主張は、ある式が正であり続けることを示す問題に帰着する。その式は f について一次であるから、f の範囲の両端だけを調べればよい。

解答

モデル化。 A と B を滑らかな（smooth）平面上の質点（particle）とみなす。したがって衝突の瞬間を除いて水平方向の力ははたらかない。また壁も滑らかであるから、壁は B の速度の向きを反転させる（大きさは f 倍になる）だけである。最初の衝突のあと B は壁に衝突するので、壁は B の側、すなわち A がはじめに動いていた向きに B より先にある。この向きを正とする。すると直線上の並び順はつねに A、B、壁である。



1 回目の衝突

衝突前、A の速度は $2u$、B の速度は $-u$ である。衝突後の速度をそれぞれ v_A、v_B とする。運動量は保存されるから

$$2m(2u) + m(-u) = 2m\,v_A + m\,v_B \quad \Longrightarrow \quad 2v_A + v_B = 3u.$$

近づく速さは $2u - (-u) = 3u$ である。B は A の前方にあるので、遠ざかる速さは $v_B - v_A$ であり、ニュートンの反発の法則により

$$v_B - v_A = 3eu.$$

第 1 式から第 2 式を引くと $3v_A = 3u - 3eu$ となるので

$$v_A = (1-e)u, \qquad v_B = (1+2e)u.$$

どちらも ≥ 0 であるから、衝突後 A は速さ $(1-e)u$ で壁に向かって動き（$e = 1$ のときは静止する）、B は速さ $(1+2e)u$ で壁に向かって動く。これはその後 B が壁に達することと矛盾しない。

壁

壁は滑らかで衝突は直接衝突であるから、B は直線に沿って速さ $f(1+2e)u$ ではね返る。その速度は $-f(1+2e)u$ となる。一方 A には何も力がはたらかないので、速度 $(1-e)u \geq 0$ で動き続けている。B は今や A に向かって動いているので、二つは必ず再び出会う。

2 回目の衝突

2 回目の衝突の直前の速度は

$$A:\ (1-e)u, \qquad B:\ -f(1+2e)u.$$

衝突後の速度を w_A、w_B とする。運動量保存より

$$2w_A + w_B = 2(1-e)u - f(1+2e)u.$$

考えてみよう 今回、反発の式はどちら向きに書けばよいだろうか。

B は依然として壁に近い側の質点であるから、遠ざかる速度は依然として $w_B - w_A$ である。近づく速さは A の速度から B の速度を引いたもの、すなわち $(1-e)u + f(1+2e)u$ である。よって

$$w_B - w_A = e\big[(1-e)u + f(1+2e)u\big].$$

w_B だけを取り出すために、この式の 2 倍を運動量の式に加える：

$$\begin{aligned} 3w_B &= 2(1-e)u - f(1+2e)u + 2e(1-e)u + 2ef(1+2e)u \\ &= 2(1-e)(1+e)u + f(1+2e)(2e-1)u \\ &= 2(1-e^2)u - (1-4e^2)fu. \end{aligned}$$

したがって

$$w_B = \tfrac{2}{3}(1-e^2)u - \tfrac{1}{3}(1-4e^2)fu,$$

であり、これは正の向き、すなわち壁に向かう向きに測った値である。これが求める結果である。

B はつねに壁に向かって動く

$0 < e \leq 1$ かつ $0 < f \leq 1$ のすべてに対して $w_B > 0$ であることを示さなければならない。$u > 0$ であるから、これは

$$g(f) = 2(1-e^2) + (4e^2-1)f > 0.$$

を示すことと同じである。項 $1-4e^2$ はどちらの符号もとりうるので、単純に無視することはできない。そこで e を固定すると g は f の一次関数であり、

$$g(0) = 2(1-e^2) \geq 0, \qquad g(1) = 2 - 2e^2 + 4e^2 - 1 = 1 + 2e^2 > 0.$$

であることに注意する。$[0,1]$ 上の一次関数は両端の値の重み付き平均である：$g(f) = (1-f)\,g(0) + f\,g(1)$。$0 < f \leq 1$ のとき第 1 項は ≥ 0 であり、第 2 項は（$f > 0$ かつ $g(1) > 0$ より）真に正であるから、$g(f) > 0$ となる。よって $w_B > 0$ であり、e と f の値によらず、2 回目の衝突のあと B は壁に向かって動く。

検算

- $e = f = 1$（全過程で完全弾性（perfectly elastic））のとき、A は 1 回目の衝突でぴたりと止まり、B は $3u$ で出ていき、$3u$ で戻ってきて、質量が自分の 2 倍の静止した質点に衝突する。公式は $w_B = 0 + u = u$ を与え、これは弾性衝突の結果 $\frac{m-2m}{3m}(-3u) = u$ と一致する。
- $e = f = \frac{1}{2}$ のとき、公式は $w_B = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}u = \frac{1}{2}u$ を与える。位置と衝突を一歩ずつ追うシミュレーションでも同じ値 $0.5u$ が得られる。
- 符号について最も厳しい場合は、$e = 1$ で f が小さいときである。このとき $w_B = fu$ であり、小さいがやはり正である。

よくある間違い

- 2 回目の衝突で符号付きの速度ではなく速さを用いてしまい、その結果 B のはね返りの速度の符号を誤る。
- B が「壁から来た」からといって、反発の式を $w_A - w_B$ と書いてしまう。直線上の質点の並び順は変わっていないので、遠ざかる速度は依然として $w_B - w_A$ である。
- $1 - 4e^2 > 0$ を仮定して $w_B > 0$ を主張してしまう。これは $e > \frac{1}{2}$ のとき成り立たない。だからこそ議論では $f \leq 1$ を用いる必要がある。

STEP のその先へ

反発は経験則に基づくモデルである。大学 1 年の講義では、より見通しのよい重心系（centre-of-mass frame）の考え方とあわせてこれを学ぶ。重心系では全運動量が 0 であり、反発係数（coefficient of restitution）e の衝突は両方の速度を単に $-e$ 倍するだけである。これを使えば、1 回目の衝突のような結果はほとんど即座に得られる。壁との繰り返し衝突は、ビリヤードの問題や数え上げの議論にも再び現れる。たとえば、二つのブロックと壁の間の衝突回数が π の各桁を与えるという有名な問題がある。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、運動量と衝突をこのような考え方で扱っている。

解答例

STEP II 2011、第 10 問

力学 ・ 放物運動と力積

STEP II 2011、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/11-s2-q10

鍵となる考え方

R は常に P の真下にあるので、2 つの粒子は運動の間ずっと同じ水平速度をもつ。したがって糸は鉛直であり、鉛直方向の運動だけを考えればよい。糸がぴんと張るのは P が平面からちょうど $\frac{1}{2}H$ の高さにあるときである。そのときの衝撃（jerk）は、P の上向きの運動量（momentum）を R と分け合う鉛直方向の撃力（impulse）である。その後 2 つの粒子は同じ速度をもつので、R が着地するまで一体の放物体（projectile）として一緒に飛ぶ。

解答

最高点の高さ

粒子を重力のみを受ける質点としてモデル化する。速度の鉛直成分は $u\sin\theta - gt$ であり、これは最高点でゼロとなる。鉛直方向に $v^2 = u^2 + 2as$ を、最終的な鉛直方向の速さを 0 として用いると、

$$0 = u^2\sin^2\theta - 2gH \qquad \Longrightarrow \qquad H = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}.$$

後のために、これから $u\sin\theta = \sqrt{2gH}$ が得られることに注意しておく。

糸がぴんと張る時刻

O を原点とし、x 軸を水平方向、y 軸を鉛直上向きにとる。粒子 P は常に水平速度 $u\cos\theta$ をもつ。R が P の真下にあり続けるためには、速さ $u\cos\theta$ で打ち出されなければならない。平面はなめらか（smooth）なので、R はその後この一定の速さで滑る。

したがって糸は常に鉛直であり、距離 PR は単に P の高さに等しい：

$$y_P = u\sin\theta\, t - \tfrac{1}{2}gt^2 = \sqrt{2gH}\, t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

糸がぴんと張るのは y_P が初めて $\frac{1}{2}H$ に達するときである（P は $H > \frac{1}{2}H$ まで上昇するので、実際に達する）：

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - \sqrt{2gH}\, t + \tfrac{1}{2}H = 0 \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{\sqrt{2gH} \pm \sqrt{2gH - gH}}{g} = (\sqrt{2}\pm 1)\sqrt{\frac{H}{g}}.$$

小さい方の解が最初の時刻であるから、糸がぴんと張るのは

$$t_1 = (\sqrt{2}-1)\sqrt{H/g},$$

が経過したときであり、題意が示された。（大きい方の解は、P が下降して再び高さ $\frac{1}{2}H$ を通過する時刻である。）

糸が張る瞬間の衝撃

時刻 t_1 における P の鉛直方向の速度は

$$u\sin\theta - gt_1 = \sqrt{2gH} - (\sqrt{2}-1)\sqrt{gH} = \sqrt{gH},$$

で上向きであり、一方 R の鉛直方向の速度はゼロである。どちらも水平速度 $u\cos\theta$ をもつ。

> **考えてみよう** 糸が急に張る瞬間にはたらく撃力はどれか。また、それはどの向きか。

糸は鉛直なので、張力（tension）による撃力 J も鉛直であり、P には下向きに、R には上向きにはたらく。平面はなめらかで、R を上向きに押すことしかできない。R は平面から上向きに引き離されるので、平面は撃力を及ぼさない。よって水平方向の速度は変わらず、鉛直方向には 2 粒子全体の運動量が保存される。糸は伸びない（inextensible）ので張ったままであり、直後には P と R は同じ鉛直方向の速度 w をもつ。質量はともに m で等しいので、

$$m\sqrt{gH} + m\cdot 0 = 2mw \qquad\Longrightarrow\qquad w = \tfrac{1}{2}\sqrt{gH}.$$

距離 D

衝撃の後、張力がゼロであれば P と R は同じ速度と同じ下向きの加速度 g をもつ。よって両者は一定の距離 $\frac{1}{2}H$ を隔てた 2 つの同一の放物体として運動する。このとき糸は張力ゼロのままちょうど張った状態を保つので、矛盾はない。R は高さ 0 から上向

きの速度 w で出発するので、平面に戻るまでの時間は

$$t_2 = \frac{2w}{g} = \sqrt{\frac{H}{g}}.$$

したがって R の運動の全時間は

$$t_1 + t_2 = \sqrt{2}\sqrt{\frac{H}{g}} = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{u^2\sin^2\theta}{g^2}} = \frac{u\sin\theta}{g},$$

であり、その間ずっと R は水平方向に $u\cos\theta$ で動く。よって

$$D = u\cos\theta \cdot \frac{u\sin\theta}{g} = \frac{u^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{u^2\sin 2\theta}{2g}.$$

これは P 単独での水平到達距離（range）のちょうど半分である。R が着地するのは、糸がなければ P が軌道の最高点に達していたはずの瞬間である。

$D = H$ の場合

等式

$$\frac{u^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$$

をおき、$u^2\sin\theta/g$ で割ると（粒子が上昇するためには $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ なので、これはゼロでない）、$\cos\theta = \frac{1}{2}\sin\theta$ を得る。よって

$$\tan\theta = 2.$$

検算

- t についての 2 つの解の積は H/g、和は $2\sqrt{2H/g}$ であり、この和は P が最高点に達して平面に戻るまでの時間である。対称性から当然そうなるべきである。
- 乱数で選んだ u と θ に対する数値シミュレーション（P の飛行を $\frac{1}{2}H$ の高さに達するまで時間刻みで計算し、衝撃を適用し、さらに R が着地するまで再び時間刻みで計算する）の結果は t_1 および D と一致した。例えば $u = 18.11$、$\theta = 0.711$、$g = 9.8$ のとき、どちらの方法でも $D \approx 16.543$ となる。
- $\tan\theta = 2$、$u = 10$、$g = 9.8$ のとき：$D = H \approx 4.082$。

よくある間違い

- 大きい方の解 $(\sqrt{2}+1)\sqrt{H/g}$ を採用してしまう。これは P が下降して再び高さ $\frac{1}{2}H$ を通過する時刻である。

- 衝撃の前に R が滑っている時間 t_1 を忘れ、衝撃後の飛行だけから D を計算してしまう。
- 衝撃の瞬間にエネルギー保存則を用いてしまう。伸びない糸が急に張るとき運動エネルギーは失われる。保存されるのは運動量だけである。

STEP のその先へ

衝撃の後、2 粒子の組はその重心（centre of mass）にある 1 つの粒子とまったく同じようにふるまう。内力（ここでは張力）は系の重心の運動を決して変えない。これは大学 1 年次の講義で学ぶ質点系と剛体（rigid body）の力学の出発点であり、そこではこのような撃力的な拘束も同じ方法で扱われる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、これらの考え方を丁寧に展開している。

解答例

STEP II 2011、第 11 問

力学 ・ 三次元でのつり合い

> **STEP II 2011、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q11

鍵となる考え方

すべては、各糸に沿った単位ベクトル（unit vector）を書き下すことにかかっている。各単位ベクトルは鉛直部分と水平部分に分かれる。鉛直部分は糸が鉛直方向となす角で決まり、水平部分は O から天井にある糸の端点へ向かう向きをもち、その向きが OA となす角で決まる。3 つの単位ベクトルがわかれば、釣り合い（equilibrium）の条件は $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ のそれぞれについての 3 つのスカラー方程式にすぎない。

解答

P を質点（particle）とみなし、糸は軽く伸び縮みしない（light and inextensible）ものとする。したがって各糸は、糸に沿った力で P をその固定端の方へ引く。O を原点とし、$\mathbf{j}$ を OA の向きに、$\mathbf{k}$ を鉛直上向きにとる。$\mathbf{i}$ は水平で OA に垂直である。

まず三角比を求める。$\tan\theta = \sqrt{2}$ であるから、辺の長さが $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ の直角三角形より

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$\tan\phi = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ であるから、2 辺は $4, \sqrt{2}$、斜辺は $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ となり、

$$\sin\phi = \frac{1}{3}, \qquad \cos\phi = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

小問 (i)

鉛直方向と角 α をなす糸の（P から天井へ向かう）単位ベクトルは、鉛直成分が $\cos\alpha$、水平部分の長さが $\sin\alpha$ である。

PB については $\alpha = 90^\circ - \theta$ であるから、鉛直成分は $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$、水平

部分の長さは $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ である。

水平部分は OB の向きを向き（O は P の真上にあるため）、これは $\mathbf{j}$ と角 $90^\circ + \theta$ をなす。$\mathbf{j}$ と角 $90^\circ + \theta$ をなす水平な単位ベクトルは $\pm\sin(90^\circ + \theta)\,\mathbf{i} + \cos(90^\circ + \theta)\,\mathbf{j} = \pm\cos\theta\,\mathbf{i} - \sin\theta\,\mathbf{j}$ である。$\mathbf{i}$ の向きは、B が負の $\mathbf{i}$ 側、つまり OA に関して負の側にあるように選ぶ。求める形からこの選び方が定まる。すると PB の向きの単位ベクトルの水平部分は

$$\tfrac{1}{\sqrt{3}}(-\cos\theta\,\mathbf{i} - \sin\theta\,\mathbf{j}) = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{i} - \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\mathbf{j}\right) = -\tfrac{1}{3}\,\mathbf{i} - \tfrac{\sqrt{2}}{3}\,\mathbf{j}.$$

となる。鉛直成分を加えると、PB の向きの単位ベクトルは

$$-\tfrac{1}{3}\,\mathbf{i} - \tfrac{\sqrt{2}}{3}\,\mathbf{j} + \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\mathbf{k},$$

となり、題意が示された。（確認：$\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{3} = 1$。）

小問 (ii)

同じ手順で残りの 2 本の糸も求まる。

糸 PA：鉛直方向との角は 30°、水平部分は $\mathbf{j}$ の向き：

$$\mathbf{e}_A = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{j} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{k}.$$

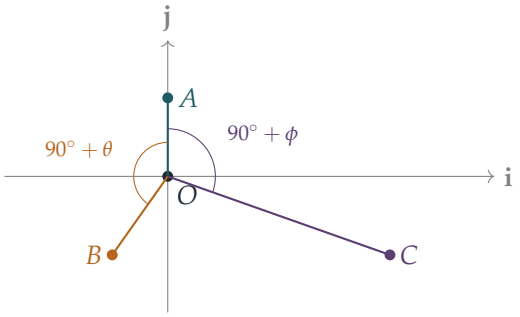
糸 PC：鉛直方向との角は 60° であるから、鉛直成分は $\frac{1}{2}$、水平部分の長さは $\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。向き OC は $\mathbf{j}$ と角 $90^\circ + \phi$ をなすので、その水平な単位ベクトルは $\pm\cos\phi\,\mathbf{i} - \sin\phi\,\mathbf{j}$ である。

> **考えてみよう** C は OA に関して B と同じ側にあるか、それとも反対側にあるか？

図では反対側に描かれているが、いずれにせよ釣り合いの条件からそうでなければならない。PA の張力（tension）は $\mathbf{i}$ 成分をもたず、PB の張力のその成分は負である。もし PC も負の $\mathbf{i}$ 成分をもてば、それらを打ち消すものがない。したがって符号は $+$ であり、

$$\mathbf{e}_C = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\tfrac{2\sqrt{2}}{3}\,\mathbf{i} - \tfrac{1}{3}\,\mathbf{j}\right) + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{k} = \tfrac{\sqrt{6}}{3}\,\mathbf{i} - \tfrac{\sqrt{3}}{6}\,\mathbf{j} + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{k}.$$

下の天井の平面図（$OP = 1$ とし、したがって $OA = \tan 30^\circ$、$OB = \cot\theta$、$OC = \tan 60^\circ$）は配置を示している。



したがって P にはたらく力は次のとおりである。

$$\begin{aligned}
\text{張力}PA: &\quad T\left(\tfrac{1}{2}\,\mathbf{j}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{k}\right),\\
\text{張力}PB: &\quad U\left(-\tfrac{1}{3}\,\mathbf{i}-\tfrac{\sqrt{2}}{3}\,\mathbf{j}+\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\mathbf{k}\right),\\
\text{張力}PC: &\quad V\left(\tfrac{\sqrt{6}}{3}\,\mathbf{i}-\tfrac{\sqrt{3}}{6}\,\mathbf{j}+\tfrac{1}{2}\,\mathbf{k}\right),\\
\text{重力}: &\quad -W\,\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

小問 (iii)

P は釣り合っているので、4 つの力の和は零である。成分ごとに考える。

i：

$$-\tfrac{1}{3}U+\tfrac{\sqrt{6}}{3}V=0 \quad\Longrightarrow\quad U=\sqrt{6}\,V,$$

となり、題意が示された。

j：

$$\tfrac{1}{2}T-\tfrac{\sqrt{2}}{3}U-\tfrac{\sqrt{3}}{6}V=0.$$

$U=\sqrt{6}V$ を代入し、$\sqrt{2}\sqrt{6}=2\sqrt{3}$ を用いると、

$$\tfrac{1}{2}T=\tfrac{2\sqrt{3}}{3}V+\tfrac{\sqrt{3}}{6}V=\tfrac{5\sqrt{3}}{6}V \quad\Longrightarrow\quad T=\tfrac{5\sqrt{3}}{3}V.$$

k：

$$\tfrac{\sqrt{3}}{2}T+\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}U+\tfrac{1}{2}V=W.$$

両方の結果を代入すると、

$$\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\tfrac{5\sqrt{3}}{3}V+\tfrac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{\sqrt{3}}V+\tfrac{1}{2}V=\tfrac{5}{2}V+2V+\tfrac{1}{2}V=5V=W.$$

よって

$$V=\frac{W}{5},\qquad U=\frac{\sqrt{6}\,W}{5},\qquad T=\frac{5\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{W}{5}=\frac{W}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\,W}{3}.$$

3 つとも正であるから、どの糸もぴんと張っており、モデルと矛盾しない。

検算

- 各単位ベクトルの長さは 1 である。$\mathbf{e}_C$ については $\frac{6}{9} + \frac{3}{36} + \frac{1}{4} = 1$。
- $\mathbf{e}_A$ と $\mathbf{e}_C$ の水平部分のなす角の余弦は $-\frac{1}{3} = -\sin\phi$ であるから、その角は $90^\circ + \phi \approx 109.47^\circ$ であり、あるべき値と一致する。
- $W = 1$ とすると $T \approx 0.5774$、$U \approx 0.4899$、$V = 0.2$ である。このとき鉛直成分 $0.5774 \times 0.8660 + 0.4899 \times 0.8165 + 0.2 \times 0.5 = 0.5 + 0.4 + 0.1 = 1$ が重力と釣り合う。分担がきれいであることに注目しよう。PA、PB、PC はそれぞれ重さの $\frac{1}{2}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{1}{10}$ を支えている。

よくある間違い

- 糸 PB について sin と cos を取り違える。この糸が鉛直方向となす角は $90^\circ - \theta$ であるから、鉛直成分は $\sin\theta$ であって $\cos\theta$ ではない。
- C を OA に関して B と同じ側に置いてしまう。すると $\mathbf{i}$ 方向の式から張力が負（すなわち $V = -\frac{1}{3}W$）となってしまうが、糸の張力が負になることはありえない。
- $\cos(90^\circ + \phi) = -\sin\phi$ であることを忘れ、$\mathbf{e}_B$ と $\mathbf{e}_C$ の $\mathbf{j}$ 成分の符号を誤る。

STEP のその先へ

互いに独立な 3 つの方向に張られた 3 本の糸があると、系は**静定**（statically determinate）となる。すなわち、釣り合いの式は一意的な解をもつ 3×3 の連立一次方程式となる。4 本目の糸を加えると、張力は静力学だけでは定まらなくなり、技術者は糸の弾性を考慮に入れなければならない。これが構造解析（structural analysis）の出発点であり、また階数（rank）と零空間（null space）に関する線形代数の出発点でもある。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）はこのように力をベクトルとして扱っており、Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、このような連立方程式がいつ一意的な解をもつかを説明している。

解答例

STEP II 2011、第 12 問

確率・統計　・　ゲームと等比級数

STEP II 2011、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/11-s2-q12

鍵となる考え方

各ゲームは高々 3 ポイントで終わるので、ゲームの進み方をすべて書き出すことができ（ポイントの列は 8 通りしかない）、それらを「Xavier の勝ち」「Younis の勝ち」「どちらも勝たず、もう 1 ゲーム行う」に分類できる。新しいゲームは毎回まっさらな状態から始まるので、試合全体は幾何的な過程となる。すなわち、Younis が試合に勝つ確率（probability）は、Younis が 1 ゲームに勝つ確率を、1 ゲームで決着がつく確率で割ったものである。

解答

各ゲームを、各ポイントを取った選手の列で表す。たとえば XYY は、第 1 ポイントを Xavier が取り、第 2・第 3 ポイントを Younis が取ったことを意味する。第 1 ポイントは確率 p で X が取る。それ以降の各ポイントは、確率 p で直前のポイントと同じ選手が取り、確率 $1-p$ で入れ替わる。

同じ選手が 2 ポイント連続で取った時点でゲームの決着がつくので、起こりうるゲームは次のとおりである。

列	確率	結果
XX	$p \cdot p$	Xavier の勝ち
YXX	$(1-p)(1-p)p$	Xavier の勝ち
YY	$(1-p)p$	Younis の勝ち
XYY	$p(1-p)p$	Younis の勝ち
XYX	$p(1-p)(1-p)$	もう 1 ゲーム
YXY	$(1-p)(1-p)(1-p)$	もう 1 ゲーム

（ゲームが XX または YY に達したら第 3 ポイントは必要なく、それが行われたと想像しても結果に違いはない。）決着がつかないゲームは、ちょうどポイントが交互に取られるもの、すなわち後の 2 ポイントがともに「入れ替わる」ものである。

小問 (i)

あるゲームで Younis が勝つ事象を A、そのゲームで決着がつかない事象を C とする。表より

$$\mathrm{P}(A) = (1-p)p + p^2(1-p) = p(1-p)(1+p) = p(1-p^2),$$
$$\mathrm{P}(C) = p(1-p)^2 + (1-p)^3 = (1-p)^2\big(p + (1-p)\big) = (1-p)^2.$$

各ゲームは同じルールのもとで独立に行われるので、Younis が試合に勝つのは、ある $n \geq 1$ について、最初の $n-1$ ゲームで決着がつかず、第 n ゲームで Younis が勝つときである。したがって

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(C)^{n-1}\,\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{P}(A)}{1-\mathrm{P}(C)},$$

ここで $p \neq 0$ のとき $\mathrm{P}(C) = (1-p)^2 < 1$ であるから、この等比級数（geometric series）は収束（converge）する。（同値な見方として、第 1 ゲームで決着がつかなければ出発点に戻るので、$w = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(C)\,w$ が成り立つ。）さて、$1-(1-p)^2 = 2p - p^2 = p(2-p)$ であるから

$$w = \frac{p(1-p^2)}{p(2-p)} = \frac{1-p^2}{2-p},$$

ここで p の約分には $p \neq 0$ を用いた。これが求める結果である。

$\frac{1}{2}$ との比較。

$$w - \tfrac{1}{2} = \frac{2(1-p^2) - (2-p)}{2(2-p)} = \frac{p - 2p^2}{2(2-p)} = \frac{p(1-2p)}{2(2-p)}.$$

$0 < p \leq 1$ では因数 p と $2-p$ は正であるから、$w - \frac{1}{2}$ の符号は $1-2p$ の符号と一致する。よって $0 < p < \frac{1}{2}$ のとき $w > \frac{1}{2}$、$p > \frac{1}{2}$ のとき $w < \frac{1}{2}$ である（そして対称性から当然のとおり、$p = \frac{1}{2}$ のとき $w = \frac{1}{2}$ である）。

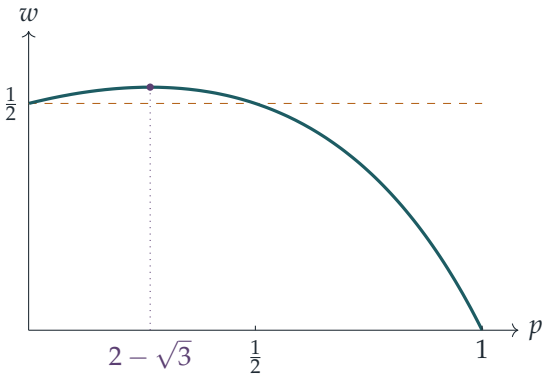
? **考えてみよう** p を小さくすると、Younis が第 1 ポイントを取りやすくなる。これは常に Younis に有利にはたらくのだろうか？

w は p について減少するか？そうではない。商の微分法（quotient rule）で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}p} = \frac{-2p(2-p) + (1-p^2)}{(2-p)^2} = \frac{p^2 - 4p + 1}{(2-p)^2}.$$

分子の根は $p = 2 \pm \sqrt{3}$ であり、$[0,1]$ に含まれるのは $2 - \sqrt{3} \approx 0.268$ のみである。よって $0 < p < 2 - \sqrt{3}$ では $\mathrm{d}w/\mathrm{d}p > 0$、$2 - \sqrt{3} < p \leq 1$ では $\mathrm{d}w/\mathrm{d}p < 0$ である。区間 $0 < p < 2 - \sqrt{3}$ では、p を小さくすると実際には w が**小さくなる**。たとえば $w(0.2) = \frac{8}{15} \approx 0.533$ であるが、$w(0.1) = \frac{99}{190} \approx 0.521$ である。

その理由は、p が二つの役割を担っていることにある。p が小さいと Younis が第 1 ポイントを取りやすくなるが、同時に連勝も起こりにくくなる。あるポイントを取った選手が次も取る確率は p にすぎないからである。p がごく小さいとポイントは交互に取られる傾向があり、第 1 ポイントの有利さは打ち消されてしまう。最大値は $w(2 - \sqrt{3}) = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0.536$ であり、$p \to 0$ のとき $w \to \frac{1}{2}$ となる。



小問 (ii)

$p = \frac{2}{3}$ のとき

$$w = \frac{1 - \frac{4}{9}}{2 - \frac{2}{3}} = \frac{5/9}{4/3} = \frac{5}{12}.$$

$\mathrm{P}(C) = \frac{1}{9} < 1$ であるから試合は確率 1 で終わり、したがって Xavier が試合に勝つ確率は $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$ である。Xavier の利得の期待値（expected value）は

$$\tfrac{7}{12} \times 1 - \tfrac{5}{12} \times k,$$

であり、これが 0 のとき、すなわち

$$k = \frac{7}{5}.$$

のとき、ゲームは公平である。よって Younis が勝ったとき、Xavier は Younis に £1.40 を支払うべきである。

小問 (iii)

$p = 0$ のとき、どのゲームでも第 1 ポイントは確実に Younis が取り、それ以降の各ポイントは直前のポイントを**失った**選手が確実に取る。よってどのゲームも確率 1 で

YXY となる。誰も 2 ポイント連続で取ることはなく、試合は決して終わらない。すなわち、どちらの選手も勝たない。

小問 (i) で $p = 0$ が除かれているのはこのためである。このとき $\mathrm{P}(A) = 0$ かつ $1 - \mathrm{P}(C) = 0$ となり、公式 $w = \mathrm{P}(A)/(1 - \mathrm{P}(C))$ は $0/0$ となってしまう。$p \to 0$ のとき $\frac{1-p^2}{2-p} \to \frac{1}{2}$ となる事実は、最終的には終わる近くの試合について述べたものであり、$p = 0$ の場合そのものの確率ではない。

検算

- $p = \frac{1}{2}$ のとき、各ポイントは公平な硬貨投げであるから、w は $\frac{1}{2}$ になるはずである。公式は $\frac{3/4}{3/2} = \frac{1}{2}$ を与える。
- $p = 1$ のとき、Xavier が最初の 2 ポイントを確実に取るので $w = 0$ である。公式は 0 を与える。
- 表の 6 通りのゲームの確率の和は 1 である。
- 8 通りのポイント列すべてを厳密に数え上げると（p を 0.01 から 0.99 まで変えて）w が再現された。また、$p = \frac{2}{3}$ で 200 000 回の試合をシミュレーションしたところ、Younis が勝った割合は 41.6% であり、$\frac{5}{12} \approx 41.7\%$ とよく一致した。

よくある間違い

- 推移の規則を逆に取り違える。確率 p は Xavier ではなく、**直前のポイント**を取った選手に属する。
- 誤った積どうしを等置して $k = \frac{5}{7}$ と答える。公平であるとは $\mathrm{P}(\text{X が勝つ}) \times 1 = \mathrm{P}(\text{Y が勝つ}) \times k$ ということであり、勝つ可能性の低い側がより大きな支払いを受ける。
- 小問 (iii) で公式に $p = 0$ を代入し、各選手の勝つ確率は $\frac{1}{2}$ であると答える。実際には試合は決して終わらない。

STEP のその先へ

ここでのポイントの列は**マルコフ連鎖**（Markov chain）をなす。すなわち、各ポイントは直前のポイントのみに依存する。試合を同一で独立なゲームに分割することは**再生**（renewal）論法の一例であり、方程式 $w = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(C)w$ は「第一歩解析」（first-step analysis）の最も簡単な例である。これはマルコフ連鎖における吸収確率（absorption

probability）を求める標準的な方法である。小問 (iii) は吸収が起こらない場合に何が起こるかを示している。すなわち、連鎖は永遠に巡回し続ける。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、マルコフ連鎖とこれらの手法を大学 1 年生のレベルで扱っている。

解答例

STEP II 2011、第 13 問

確率・統計 ・ 歪度の尺度

STEP II 2011、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/11-s2-q13

鍵となる考え方

歪度（skewness）とは分布の偏りのことであり、ここで扱う 3 つの指標はそれを 3 通りの方法でとらえる。すなわち、3 次の中心モーメント（central moment）によるもの、2 つの十分位数（decile）の間で中央値（median）がどこに位置するかによるもの、そして平均（mean）と中央値の差によるものである。$[0,1]$ 上の確率密度関数（probability density function）$2x$ については、すべてを具体的に計算できる。モーメントは 1 行で済む積分であり、累積分布関数（cumulative distribution function）は x^2 なので、その逆関数は単なる平方根である。実質的な作業は根号を含む数の注意深い計算と、最後にそれらをすっきりと比較する方法だけである。

解答

歪度が測るもの。歪度は、分布の中心に関する**非対称性**（asymmetry）を測る。対称な分布の歪度は 0 である。長い裾が右側にあれば歪度は正であり、長い裾が左側にあれば負である。

小問 (i)

μ が定数であることに注意して、3 乗を展開し、期待値の線形性（linearity of expectation）を用いる。

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\big((X-\mu)^3\big) &= \mathrm{E}(X^3) - 3\mu\,\mathrm{E}(X^2) + 3\mu^2\,\mathrm{E}(X) - \mu^3 \\ &= \mathrm{E}(X^3) - 3\mu(\sigma^2+\mu^2) + 3\mu^3 - \mu^3 \\ &= \mathrm{E}(X^3) - 3\mu\sigma^2 - \mu^3,\end{aligned}$$

ここで $\mathrm{E}(X)=\mu$ と $\mathrm{E}(X^2)=\sigma^2+\mu^2$（分散（variance）の通常の公式を変形したもの）を用いた。これを σ^3 で割れば、γ について求める式が得られる。

確率密度関数 $2x$ をもつ分布。$k\geq 0$ に対して

$$\mathrm{E}(X^k)=\int_0^1 x^k\cdot 2x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{k+2}.$$

よって $\mu=\frac{2}{3}$、$\mathrm{E}(X^2)=\frac{1}{2}$、$\mathrm{E}(X^3)=\frac{2}{5}$ である。したがって

$$\sigma^2=\tfrac{1}{2}-\tfrac{4}{9}=\tfrac{1}{18},\qquad \sigma=\frac{1}{3\sqrt{2}},\qquad \sigma^3=\frac{1}{27\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{1}{54\sqrt{2}}.$$

分子は

$$\mathrm{E}(X^3)-3\mu\sigma^2-\mu^3=\frac{2}{5}-3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}-\frac{8}{27}=\frac{2}{5}-\frac{1}{9}-\frac{8}{27}=\frac{54-15-40}{135}=-\frac{1}{135}.$$

ゆえに

$$\gamma=-\frac{1}{135}\cdot 54\sqrt{2}=-\frac{54\sqrt{2}}{135}=-\frac{2\sqrt{2}}{5},$$

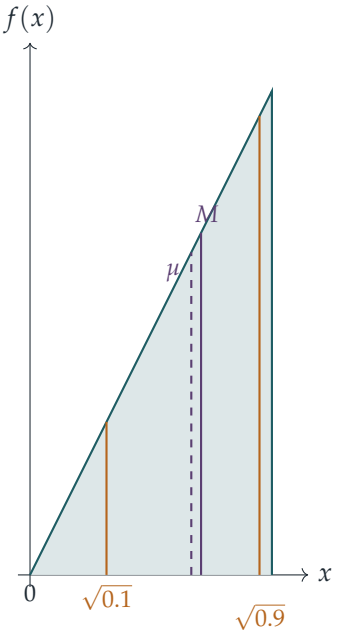
となり、示すべき式が得られた。負の符号は納得のいくものである。確率密度は $x=1$ の近くに集中しており、左側の 0 に向かって長い裾が残るからである。

小問 (ii)

$0\leq x\leq 1$ に対して、累積分布関数は

$$\mathrm{F}(x)=\int_0^x 2t\,\mathrm{d}t=x^2,$$

であり、これは $[0,1]$ 上で増加するので、$0\leq p\leq 1$ に対してその逆関数は $\mathrm{F}^{-1}(p)=\sqrt{p}$ である。



十分位歪度。D の分子と分母に $\sqrt{10}$ を掛けると、根号は 1 つを残してすべて消える。

$$D = \frac{\sqrt{\frac{9}{10}} - 2\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{10}}}{\sqrt{\frac{9}{10}} - \sqrt{\frac{1}{10}}} = \frac{3 - 2\sqrt{5} + 1}{3 - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5},$$

ここで $\sqrt{10} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ を用いた。これが示すべきことであった。

ピアソン（Pearson）の歪度。中央値は $\mathrm{F}(M) = \frac{1}{2}$ を満たすので、$M = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。$\frac{1}{\sigma} = 3\sqrt{2}$ を用いると

$$P = 3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} - 9 = 6\sqrt{2} - 9.$$

数値的には $D \approx -0.236$、$P \approx -0.515$、$\gamma \approx -0.566$ であり、大小関係は正しそうである。それでは、これを証明しよう。

> **考えてみよう** $2 - \sqrt{5}$ や $6\sqrt{2} - 9$ のような数を、電卓を使わずにどう比較すればよいだろうか？

両辺がともに正になるように変形してから 2 乗すればよい。正の数については、$a < b$ であることと $a^2 < b^2$ であることは同値である。以下の各段階はすべて逆にたどれるので、最後の主張が正しければ最初の主張が証明される。

$D > P$。示すべきことは $2 - \sqrt{5} > 6\sqrt{2} - 9$、すなわち $\sqrt{5} + 6\sqrt{2} < 11$ である。両辺は

正なので、これは次と同値である。

$$\begin{aligned}(\sqrt{5}+6\sqrt{2})^2 = 77+12\sqrt{10} < 121 &\iff 12\sqrt{10} < 44\\ &\iff 3\sqrt{10} < 11\\ &\iff 90 < 121,\end{aligned}$$

ここで最後の段階では、再び 2 つの正の数を 2 乗した。$90 < 121$ は正しいので、$D > P$ である。

$P > \gamma$。示すべきことは $6\sqrt{2} - 9 > -\frac{2\sqrt{2}}{5}$ である。5 を掛けて整理すると、これは $32\sqrt{2} > 45$ となる。両辺は正なので、これは $32^2 \cdot 2 > 45^2$、すなわち $2048 > 2025$ と同値であり、これは正しい。よって $P > \gamma$ である。

以上より $D > P > \gamma$ である。3 つの指標はいずれも負であり、分布が左に歪んでいるという点では一致するが、その程度については食い違っている。

検算

- (i) の恒等式は、任意の対称な分布に対して 0 を与える。たとえば、X が等しい確率で ± 1 をとるならば、$\mu = 0$、$\sigma = 1$、$\mathrm{E}(X^3) = 0$ である。
- 数値的に、中点則（midpoint rule）によって $\mathrm{E}\big((X-\mu)^3\big)/\sigma^3$ を計算すると -0.56569 となり、$-2\sqrt{2}/5$ と一致する。
- U を $[0,1]$ 上の一様分布（uniform distribution）に従う確率変数として $X = \sqrt{U}$（これは $\mathrm{F}(x) = x^2$ をもつ）をシミュレーションすると、標本中央値は 0.707 に近く、十分位数は 0.316 と 0.949 に近くなり、図のとおりである。
- 平均 $\frac{2}{3}$ は中央値 $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$ の左にある。これは左に歪んだ分布に典型的なことであり、$P < 0$ となる理由でもある。

よくある間違い

- $(\frac{1}{18})^{3/2}$ とすべきところを $\sigma^3 = (\frac{1}{18})^3$ と書いてしまう。3 乗するのは分散ではなく標準偏差（standard deviation）である。
- 一方の辺が負になりうるのに不等式を 2 乗してしまう。まず両辺が正になるように変形すること。
- γ の式や P の分母で、$\sigma^2 = \frac{1}{18}$ を用いるべきところに $\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{2}$ を用いてしまう。

STEP のその先へ

量 $\mathrm{E}\big((X-\mu)^3\big)$ は 3 次の**中心モーメント**であり、(i) の展開はモーメントと**キュムラント**（cumulant）の関係の入口である。キュムラントは、独立な確率変数の和に対してうまく足し合わされるという性質をもつ。D のような分位点に基づく指標は、**頑健**（robust）であるために統計学で重宝される。極端な観測値が 1 つあっても十分位数はほとんど動かないが、3 次のモーメントは劇的に変わりうるのである。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、モーメントと積率母関数（moment generating function）をちょうどよい水準で展開している。

解答例

STEP III 2011、第 1 問

純粋数学 ・ 階数低下法

STEP III 2011、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/11-s3-q1

鍵となる考え方

小問 (i) は変数分離形（separable）の方程式であり、これには理由がある。$(*)$ に $y = ze^{-x}$ を代入したときに現れるのが、まさにこの方程式なのである。z そのものを含む項は打ち消し合い、z' と z'' だけを含む方程式が残る。これは $u = z'$ についての 1 階の方程式である。これが**階数低下法**（reduction of order）である。すなわち、解を 1 つ（e^{-x}）知っていれば、もう 1 つの解を求めることができる。小問 (iii) では、右辺のある場合に同じ置き換えを行う。すると線形 1 階方程式が得られ、これは積分因子（integrating factor）によって解ける。

解答

以下では $x \neq -1$ となる区間で考える。したがって $x+1$ で割ってよい。

小問 (i)

$$\frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1},$$

であるから、（$u \neq 0$ のとき）変数を分離すると

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|u| = x + \ln|x+1| + c.$$

指数をとると $|u| = e^c\,|x+1|\,e^x$ となる。符号と因子 e^c はまとめて 1 つの任意定数にでき、また $u = 0$ も解であるから、一般解（general solution）は

$$u = C(x+1)e^x, \qquad C \text{ は任意定数}$$

である。

小問 (ii)

$y = ze^{-x}$ とすると、積の微分法（product rule）により

$$y' = (z' - z)e^{-x},$$
$$y'' = (z'' - z')e^{-x} - (z' - z)e^{-x} = (z'' - 2z' + z)e^{-x}.$$

これらを $(*)$ に代入し、0 でない因子 e^{-x} を約すと

$$\begin{aligned} 0 &= (x+1)(z'' - 2z' + z) + x(z' - z) - z \\ &= (x+1)z'' + \big(-2(x+1) + x\big)z' + \big((x+1) - x - 1\big)z \\ &= (x+1)z'' - (x+2)z'. \end{aligned}$$

z の項は完全に消えた。$u = \dfrac{dz}{dx}$ とおき、$x+1$ で割ると

$$\frac{du}{dx} - \left(\frac{x+2}{x+1}\right)u = 0,$$

となり、これは求めるとおり $\dfrac{dz}{dx}$ についての 1 階方程式である。しかもこれは小問 (i) の方程式そのものである。

考えてみよう なぜ z の項は消えたのだろうか。それを前もって予想できただろうか。

z の係数は、$z = 1$ とおいたとき、つまり $y = e^{-x}$ を $(*)$ に当てはめてみたときに得られるものである。$(x+1)e^{-x} - xe^{-x} - e^{-x} = 0$ であるから、$y = e^{-x}$ はすでに解であり、したがって定数の z は方程式を満たさなければならず、z 単独の項が残ることはありえない。この置き換えが選ばれたのはそのためである。

小問 (i) より $z' = C(x+1)e^{x}$ である。部分積分（integration by parts）により

$$\int (x+1)e^{x}\,dx = (x+1)e^{x} - \int e^{x}\,dx = xe^{x} + \text{const},$$

となるので

$$z = Cxe^{x} + B.$$

よって $y = ze^{-x} = Cx + Be^{-x}$ であり、C を A と書き直すと

$$y = Ax + Be^{-x},$$

を得る。ここで A と B は任意定数である。任意の y は $z = ye^{x}$ として ze^{-x} の形に書けるから、$(*)$ のすべての解はこのようにして得られる。したがって、求めるとおり、これが一般解である。

小問 (iii)

同じ置き換えを行うと変わるのは右辺だけであり、右辺は $(x+1)^2$ を e^{-x} で割ったものになる：

$$(x+1)z'' - (x+2)z' = (x+1)^2\mathrm{e}^x.$$

$u = z'$ とおき、$x+1$ で割ると

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \left(\frac{x+2}{x+1}\right)u = (x+1)\mathrm{e}^x.$$

これは線形（linear）である。小問 (i) より $(x+1)\mathrm{e}^x$ は斉次方程式（homogeneous equation）の解であるから、その逆数 $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$ が積分因子となる。（これは符号を除いて $\exp\left(-\int \frac{x+2}{x+1}\,\mathrm{d}x\right)$ に等しい。）両辺に掛けると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u\,\mathrm{e}^{-x}}{x+1}\right) = 1 \quad\Longrightarrow\quad u = (x+1)\mathrm{e}^x(x+k)$$

となる。ここで k は定数である。よって

$$z' = (x^2+x)\mathrm{e}^x + k(x+1)\mathrm{e}^x.$$

第 2 項を積分すると、小問 (ii) と同様に $kx\mathrm{e}^x$ となる。第 1 項については、部分積分を 2 回行って

$$\begin{aligned}\int (x^2+x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= (x^2+x)\mathrm{e}^x - \int (2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= (x^2+x)\mathrm{e}^x - (2x+1)\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + \text{const} = (x^2-x+1)\mathrm{e}^x + \text{const}.\end{aligned}$$

したがって $z = (x^2-x+1)\mathrm{e}^x + kx\mathrm{e}^x + B$ であり、

$$y = z\mathrm{e}^{-x} = x^2 - x + 1 + kx + B\mathrm{e}^{-x}.$$

$-x$ は任意の kx に吸収されるので、$A = k-1$ とおくと、一般解は

$$y = x^2 + 1 + Ax + B\mathrm{e}^{-x},$$

である。ここで A と B は任意定数である。

別解として、右辺が 2 次式であることから、特殊解（particular integral）として $y = px^2+qx+r$ を試してもよい。代入すると $(x+1)2p + x(2px+q) - (px^2+qx+r) = px^2 + 2px + 2p - r$ となり、これを x^2+2x+1 と比較すると $p = 1, r = 1$ を得る。q は自由である（x が余関数（complementary function）だからである）。これに小問 (ii) の余関数を加えると、同じ答えが得られる。

検算

$y = x^2 + 1$ を直接代入する。$y' = 2x$、$y'' = 2$ であるから、左辺は $2(x+1) + 2x^2 - x^2 - 1 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ となり、確かに成り立つ。数値的にも、A, B を無作為に選び、$x \in (-0.9, 3)$ を無作為にとって、$y = x^2 + 1 + Ax + Be^{-x}$ の導関数を有限差分（finite difference）で近似すると、方程式はおよそ 3×10^{-6} 以内の誤差で満たされる。同じ検査により小問 (i) と (ii) も確認できる。

よくある間違い

- y'' を間違える。正しくは $(z'' - 2z' + z)e^{-x}$ であり、z の符号は**プラス**である。ここで符号を誤ると、余計な z の項が残ってしまう。
- 小問 (iii) で因子 e^{-x} を約すときに、右辺に e^{x} を掛けるのを忘れる。
- 定数を落とす。最終的な答えには任意定数が 2 つ必要であり、それぞれの積分から 1 つずつ生じる。

STEP のその先へ

階数低下法は一般的な手法である。y_1 が線形 2 階方程式の解であれば、$y = y_1 v$ とおくと必ず v の項が消え、v' についての 1 階方程式が残る。これはまた、任意の右辺に対して特殊解を与える**定数変化法**（variation of parameters）の背後にある考え方でもある。どちらも Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（『微分方程式入門』）でわかりやすく扱われている。

解答例

STEP III 2011、第 2 問

純粋数学 ・ 多項式の有理数解

> **STEP III 2011、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q2

鍵となる考え方

$\mathrm{f}(p/q) = 0$ の両辺に q^{n-1} を掛けると、分母は一つを除いてすべて払われる。最高次の項は p^n/q となり、残りはすべて整数になる。したがって p^n/q は整数でなければならず、p と q は共通因数をもたないので、$q = 1$ が導かれる。そのあとは、各小問は**整数解**についての問題となり、大きさ、整除性、あるいは鮮やかに偶奇性（parity）によって整数解の存在を否定できる。

解答

冒頭の結果

p, q を互いに素（coprime）な整数で $q > 0$ とし、$\mathrm{f}(p/q) = 0$ であると仮定する。すると

$$0 = q^{n-1}\,\mathrm{f}\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p^n}{q} + a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \cdots + a_1 p\, q^{n-2} + a_0 q^{n-1},$$

となる。項 $a_k(p/q)^k$ は $a_k p^k q^{n-1-k}$ となり、$k \leq n-1$ であるすべての k について $n-1-k \geq 0$ だからである。最初の項以外はすべて整数であるから、

$$\frac{p^n}{q} = -\left(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0 q^{n-1}\right)$$

は整数である。すなわち、q は p^n を割り切る。

> ? **考えてみよう** なぜ $q \mid p^n$ から $q = 1$ が従うのか。

$q > 1$ ならば、q はある素因数 r をもつ。このとき r は p^n を割り切り、r は素数である

から p 自身を割り切らなければならない。すると r は p と q の 1 より大きい公約数となり、これは不可能である。よって q は素因数をもたず、$q > 0$ であるから

$$q = 1.$$

を得る。ゆえに、$\mathrm{f}(x) = 0$ の有理数解 p/q はすべて p に等しく、整数である。（ここで f が**モニック**（monic、最高次の係数が 1）であることを用いている点に注意せよ。最高次の係数 a_n があると $a_n p^n/q$ が残り、$q \mid a_n$ としか結論できない。）

以下では二つの簡単な事実が役に立つ。m が整数解ならば

$$m\left(m^{n-1} + a_{n-1}m^{n-2} + \cdots + a_1\right) = -a_0,$$

であるから、m は a_0 を割り切る。また、$a_0 \neq 0$ であるから $m \neq 0$ である。

小問 (i)

数 $2^{1/n}$ は $x^n - 2 = 0$ の解であり、これは整数係数のモニック多項式で $a_0 = -2 \neq 0$ である。したがって、もし $2^{1/n}$ が有理数（rational）ならば、それは $m^n = 2$ を満たす整数 m となる。しかし

$$1^n = 1 < 2 < 4 \leq 2^n,$$

であるから、正の実数 $2^{1/n}$ は連続する整数 1 と 2 の間に（等号なしで）あり、整数にはなりえない。ゆえに、すべての $n \geq 2$ について $2^{1/n}$ は無理数（irrational）である。

小問 (ii)

ここでは $n = 3$、$a_0 = 1$ である。有理数解はどれも 1 を割り切る整数 m であるから、$m = \pm 1$ である。しかし

$$1^3 - 1 + 1 = 1 \neq 0, \qquad (-1)^3 - (-1) + 1 = 1 \neq 0.$$

よって $x^3 - x + 1 = 0$ は有理数解をもたない。

（別解：$m^3 - m = (m-1)m(m+1)$ は連続する二つの整数を含む積であるから偶数であり、$m^3 - m + 1$ は奇数となり、決して 0 にならない。この偶奇性の考え方こそ、小問 (iii) で必要となるものである。）

小問 (iii)

多項式 $x^n - 5x + 7$ は整数係数のモニック多項式で、定数項は $7 \neq 0$ であるから、有理数解はどれも整数 m である。$m^n - 5m + 7$ がつねに奇数であることを示す。

- m が偶数ならば、m^n と $5m$ は偶数であるから、$m^n - 5m + 7$ は偶数 − 偶数 + 奇数となり、奇数である。

- m が奇数ならば、m^n と $5m$ はともに奇数であるから、$m^n - 5m$ は偶数であり、$m^n - 5m + 7$ は奇数である。

いずれの場合も $m^n - 5m + 7$ は奇数であり、とくに 0 ではない。ゆえに、どの $n \geq 2$ についても $x^n - 5x + 7 = 0$ は整数解をもたず、したがって有理数解ももたない。

（代わりに 7 の約数を調べるのであれば、$m = \pm 1, \pm 7$ と**すべての** n について $m^n - 5m + 7 \neq 0$ を示すことになる。これでもうまくいくが、より煩雑である。偶奇性を用いれば、すべての n を一度に扱える。）

検算

- 有理数解を**もつ**多項式、たとえば $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$ を試してみよう。解 3 と -2 は約束どおり整数であり、$a_0 = -6$ を割り切る。
- モニックでない多項式は、整数でない有理数解をもちうる。たとえば $2x - 1$ である。最高次の係数が 1 であることが重要なのはこのためである。
- 数値的には、$2^{1/2} \approx 1.414$ と $2^{1/3} \approx 1.260$ は 1 と 2 の間にある。また $x^3 - x + 1$ は $x = \pm 1$ で値 1 をとる。3000 個の無作為なモニック整数係数多項式をコンピュータで探索したところ、有理数解は整数のものしか見つからず、また $|m| \leq 200$、$2 \leq n \leq 14$ について $m^n - 5m + 7$ が奇数であることも確認された。

よくある間違い

- q^{n-1} ではなく q^n を掛けてしまう。すると $p^n = -q(\cdots)$ が得られ、これでもうまくいくが、その場合は $q \mid p^n$ であることを述べなければならない。q^{n-1} を掛ければ、分数 p^n/q によってこのことが明示される。
- 理由を述べずに「$q \mid p^n$ だから $q \mid p$」と主張してしまう。この議論は q の素因数を経由して行う。
- (iii) で、いくつかの n の値だけを調べてしまう。議論はすべての $n \geq 2$ について同時に成り立たなければならない。

STEP のその先へ

これはモニックの場合の**有理根定理**（rational root theorem）である。すなわち、モニック整数係数多項式の解である有理数は整数である。代数的整数論（algebraic number theory）の言葉でいえば、整数環は**整閉**（integrally closed）であり、モニック整数係

数多項式の解となる数は代数的整数（algebraic integer）とよばれる。(iii) の偶奇性の技法は、多項式を素数を法として還元する（reducing modulo a prime）ことの最も単純な場合であり、これは多項式が解をもたないことや既約（irreducible）であることを証明するための強力な道具である。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は次の一歩として素晴らしい本であり、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（『環・体・群』）は代数的な側面を展開している。

解答例

STEP III 2011、第 3 問

純粋数学 • 3 次方程式を解く

> **STEP III 2011、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q3

鍵となる考え方

2 つの立方 $(x-\alpha)^3$ と $(x-\beta)^3$ を用いると、自由に選べる定数が a と b の 2 つ得られる。一方、x^2 の項をもたないモニック（monic）な三次式（cubic）に一致させるには 4 つの条件が課される。そこで、条件のうち 2 つを用いて a と b を求めると、残りの 2 つは二次方程式から得られる $\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ についての事実そのものになっていなければならない。三次式が 2 つの立方の和として表されれば、それを 0 とおいた方程式は「ある比の 3 乗が定数に等しい」という形になり、立方根（cube root）を、それも 3 つすべてをとることで解ける。

解答

三次式を 2 つの立方の和として表す

$p \neq 0$ であるから、二次方程式 $pt^2 - qt + p^2 = 0$ について

$$\alpha+\beta = \frac{q}{p}, \qquad \alpha\beta = \frac{p^2}{p} = p,$$

が成り立ち、その判別式（discriminant）は $q^2 - 4p^3$ である。したがって、条件 $q^2 \neq 4p^3$ はちょうど $\alpha \neq \beta$ であることを意味している。また $\alpha\beta = p \neq 0$ であるから、どちらの解も 0 ではない。

展開すると

$$a(x-\alpha)^3 + b(x-\beta)^3 = (a+b)x^3 - 3(a\alpha+b\beta)x^2 + 3(a\alpha^2+b\beta^2)x - (a\alpha^3+b\beta^3).$$

これを $x^3 - 3px + q$ に一致させるには

$$a + b = 1, \qquad a\alpha + b\beta = 0, \qquad a\alpha^2 + b\beta^2 = -p, \qquad a\alpha^3 + b\beta^3 = -q.$$

が必要である。はじめの2つは a と b について一次である。$b = 1 - a$ を2番目の式に代入すると $a(\alpha - \beta) = -\beta$ となり、$\alpha \neq \beta$ であるから両辺を割ることができて

$$a = \frac{\beta}{\beta - \alpha}, \qquad b = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}.$$

を得る。次に、残りの2つの条件が自動的に成り立つことを確かめる：

$$a\alpha^2 + b\beta^2 = \frac{\beta\alpha^2 - \alpha\beta^2}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha\beta(\alpha - \beta)}{\beta - \alpha} = -\alpha\beta = -p,$$
$$a\alpha^3 + b\beta^3 = \frac{\beta\alpha^3 - \alpha\beta^3}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha\beta(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{\beta - \alpha} = -\alpha\beta(\alpha + \beta) = -p \cdot \frac{q}{p} = -q.$$

よって、a と b をこの値にとれば

$$x^3 - 3px + q = \frac{\beta}{\beta - \alpha}(x - \alpha)^3 + \frac{\alpha}{\alpha - \beta}(x - \beta)^3,$$

となり、示すべき式が得られた。

$x^3 - 24x + 48 = 0$ を解く

ここでは $p = 8$、$q = 48$ であり、$q^2 = 2304 \neq 2048 = 4p^3$ であるから、上の結果が適用できる。二次方程式は $8t^2 - 48t + 64 = 0$、すなわち $t^2 - 6t + 8 = 0$ であり、その解は2と4である。$\alpha = 2$、$\beta = 4$ とおくと $a = 2$、$b = -1$ となるので

$$x^3 - 24x + 48 = 2(x - 2)^3 - (x - 4)^3.$$

（簡単に展開して確かめられる：$2x^3 - 12x^2 + 24x - 16 - x^3 + 12x^2 - 48x + 64$。）

> **考えてみよう** $2(x - 2)^3 = (x - 4)^3$ を、どうすれば解ける形に直せるだろうか？

$(x - 4)^3$ で割る。$x = 4$ は解ではない（$64 - 96 + 48 = 16$）ので、これは許される。方程式は

$$\left(\frac{x - 2}{x - 4}\right)^3 = \frac{1}{2}.$$

となる。$c = 2^{1/3}$ とおく。3乗すると $\frac{1}{2}$ になる複素数は $k = c^{-1}$、$c^{-1}\omega$、$c^{-1}\omega^2$ である。それぞれについて $\dfrac{x - 2}{x - 4} = k$ を解くと

$$x - 2 = kx - 4k \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2 - 4k}{1 - k},$$

となり、$k \neq 1$ であるからこれは正当である。写像 $k \mapsto x$ は一対一（one-to-one）であるから、3 つの k の値から相異なる 3 つの解が得られ、これらが三次方程式の解のすべてでなければならない。

$k = c^{-1}$ のときは、分子と分母に c を掛けて

$$x = \frac{2c-4}{c-1} = \frac{2(2-2^{1/3})}{1-2^{1/3}},$$

となり、これが問題文に与えられた解である。$k = c^{-1}\omega$ のときは、（$\omega^3 = 1$ を用いて）分子と分母に $c\,\omega^{-1} = c\,\omega^2$ を掛けて

$$x = \frac{2c\omega^2-4}{c\omega^2-1} = \frac{2(2-2^{1/3}\omega^2)}{1-2^{1/3}\omega^2},$$

を得る。同様に $k = c^{-1}\omega^2$ からは

$$x = \frac{2(2-2^{1/3}\omega)}{1-2^{1/3}\omega}.$$

が得られる。よって 3 つの解は $j = 0, 1, 2$ に対する $x = \dfrac{2(2-2^{1/3}\omega^j)}{1-2^{1/3}\omega^j}$ である。

$p = r^2, q = 2r^3$ の場合

このとき $q^2 = 4r^6 = 4p^3$ であるから、これはまさにこの方法が除外している場合である。二次式 $r^2t^2 - 2r^3t + r^4 = r^2(t-r)^2$ は重解（repeated root）$t = r$ をもち、a と b を求めることはできない。しかし、二次方程式が重解をもつことは、三次方程式も重解をもつことを示唆している。実際、$x = r$ とすると $r^3 - 3r^3 + 2r^3 = 0$ であり、導関数（derivative）$3x^2 - 3r^2$ も $x = r$ で 0 になるので、$(x-r)^2$ は因数である。x^3 の項と定数項を比較して

$$x^3 - 3r^2x + 2r^3 = (x-r)^2(x+2r).$$

を得る。解は $x = r$（重解）と $x = -2r$ である。

考えてみよう これらの解は、先ほどの公式から求められただろうか？

求められない。$\alpha = \beta$ のとき 2 つの立方は 1 つにまとまってしまうので、$a(x-\alpha)^3 + b(x-\alpha)^3$ は $(x-\alpha)^3$ の定数倍にしかなりえず、それでは $-3px$ に一致させるべき x の項が残らない。別の方法が必要だったのはこのためである。三次式を $(x-r)$ の累乗で表すと、代わりに何が起きているかがわかる：$x^3 - 3r^2x + 2r^3 = (x-r)^3 + 3r(x-r)^2$ であり、二重解はちょうど二次方程式の重解 $t = r$ のところにある。

検算

- 実数解は $2(2-1.259921)/(1-1.259921) \approx -5.694644$ であり、これを代入すると誤差 10^{-13} 程度で $x^3 - 24x + 48 \approx 0$ となる。残りの2つは $2.847322 \pm 0.567212\,\mathrm{i}$ であり、これらも残差（residual）は0である。
- 3つの解の和は（x^2 の項がないので）0であり、積は -48 である：$-5.694644 \times (2.847322^2 + 0.567212^2) \approx -48.0$。
- 実数解が1つと複素数解が2つという結果は理論と合っている：$x^3 - 3px + q$ が3つの実数解をもつのは $q^2 < 4p^3$ のときに限られ、ここでは $q^2 > 4p^3$ である。
- 恒等式（identity）は数値的に検証できる：ランダムな2000組の (p, q) について、ランダムな複素数 x で恒等式を確かめ、また r のいくつかの値について因数分解（factorisation）$(x-r)^2(x+2r)$ を確かめた。

よくある間違い

- $\frac{1}{2}$ の実数の立方根だけをとり、その結果、解を1つしか求めないこと。三次方程式には3つの解があり、それらは3つの立方根から得られる。
- a, b のどちらがどちらの解に対応するかを取り違えること：a（$(x-\alpha)^3$ の係数）は分子に β をもつ。
- 分母を払うときに ω と ω^2 を取り違えること。2つの答えは互いに共役（conjugate）な組をなすので、どちらにしても最終的な解の集合は同じになる。

STEP のその先へ

これは、しばしばカルダノ（Cardano）とタルターリャ（Tartaglia）に帰せられる、16世紀の三次方程式の解法の一形態である：まず x^2 の項をもたない「被約」三次式（depressed cubic）に帰着させ、次に補助的な二次方程式（**分解式**（resolvent））を解く。ガロア理論（Galois theory）は、三次方程式や四次方程式がなぜこのような分解式をもち、一般の五次方程式がなぜそれをもたないのかを説明する。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は、これらの考え方へ向かう読みやすい道筋を与えてくれる。

解答例

STEP III 2011、第 4 問

純粋数学 • ヤングの不等式

> **STEP III 2011、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q4

この問題は、*Beyond STEP* の第 3.4 節「**不等式を証明する面積**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch03/areas-inequalities.html

鍵となる考え方

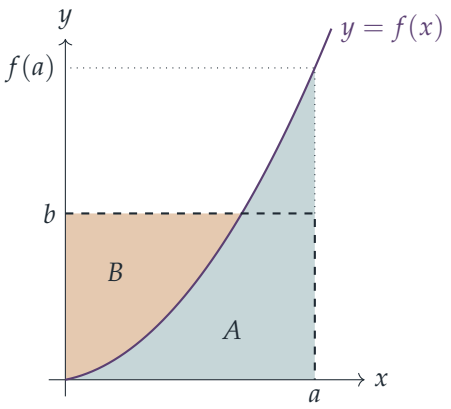
$(*)$ の 2 つの積分は、どちらも同じ図の上の面積である。$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ は曲線と x 軸の間の面積であり、$\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$ は曲線と y 軸の間の面積である。この 2 つを合わせると、頂点 $(0,0)$ と (a,b) をもつ長方形を必ず覆い、頂点 (a,b) が曲線上にない限り、はみ出す部分が生じる。小問 (ii) と (iii) は、あとは f を選んで 2 つの積分を計算するだけである。

解答

小問 (i)

f は連続（continuous）で傾き（gradient）が正であるから、狭義単調増加（strictly increasing）である。したがって逆関数（inverse function）f^{-1} が存在し、これも増加関数である。また $f(0)=0$ より、曲線 $y=f(x)$ は原点から始まる。

$0 \le x \le a$ の範囲で曲線と x 軸に挟まれた領域を A とする。その面積は $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ である。$0 \le y \le b$ の範囲で曲線と y 軸に挟まれた領域を B とする。y について積分すれば、その面積は $\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$ である。2 つの領域は曲線に関して反対側にあるので、重なり合わない。



まず、図のように $b \le f(a)$ の場合を考える。長方形 $0 \le x \le a, 0 \le y \le b$ のすべての点は、曲線上またはその下側（したがって A に属する）か、曲線上またはその左側（したがって B に属する）のいずれかにある。よって A と B を合わせると面積 ab の長方形を覆い、$(*)$ が成り立つ。はみ出す部分は A のうち直線 $y = b$ より上の部分、すなわち $f^{-1}(b) \le x \le a$ における直線と曲線の間の細い領域である。

逆に $b \ge f(a)$ の場合は、役割を入れ替えれば同じ議論が通用する。長方形は覆われ、今度ははみ出す部分は B のうち直線 $x = a$ より右の部分である。

したがって $(*)$ はどの場合にも成り立ち、等号が成り立つにははみ出す部分の面積が 0 でなければならない。$a, b > 0$ かつ $b \ne f(a)$ のとき、はみ出す部分は一方の端でしか交わらない曲線と直線で囲まれるので、その面積は正である。ゆえに $a > 0$ かつ $b > 0$ のとき、

$$\text{等号成立の必要十分条件は} b = f(a),$$

すなわち長方形の頂点 (a, b) が曲線上にあることである。

小問 (ii)

$p > 1$ のとき、$f(x) = x^{p-1}$ は $x \ge 0$ で連続であり、$f(0) = 0$ を満たし、そこで狭義単調増加であるから、$(*)$ が適用できる。（傾き $(p-1)x^{p-2}$ は $x > 0$ で正である。$p < 2$ のときは 0 で発散するが、面積による議論には影響しない。）その逆関数は $f^{-1}(y) = y^{1/(p-1)}$ である。

条件 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ から $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$ が得られるので、

$$q = \frac{p}{p-1}, \qquad \frac{1}{p-1} + 1 = \frac{p}{p-1} = q.$$

よって $f^{-1}(y) = y^{q-1}$ であり、2 つの積分は

$$\int_0^a x^{p-1}\,\mathrm{d}x = \frac{a^p}{p}, \qquad \int_0^b y^{q-1}\,\mathrm{d}y = \frac{b^q}{q}.$$

これを $(*)$ に代入すると

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

となり、示すべき不等式が得られる。

考えてみよう ここで等号成立条件 $b = f(a)$ は何を意味するか。また b^q はどう簡単にできるか。

条件は $b = a^{p-1}$ である。このとき $(p-1)q = p$ であるから $b^q = a^{(p-1)q} = a^p$ となる。よって

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} = a^p\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = a^p = a \cdot a^{p-1} = ab,$$

となり、確かに等号が成り立つ。

小問 (iii)

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ において $f(x) = \sin x$ とする。これは連続で $f(0) = 0$ を満たし、傾き $\cos x$ は $0 \leq x < \frac{1}{2}\pi$ で正であるから、狭義単調増加である（傾きが 0 になるのは端点のみであり、議論には影響しない）。この関数は $[0, \frac{1}{2}\pi]$ を $[0,1]$ の上へ写し、逆関数は arcsin である。これらはちょうど a と b に許された範囲である。

1 つ目の積分は

$$\int_0^a \sin x \,\mathrm{d}x = 1 - \cos a.$$

2 つ目については、$u = \arcsin y$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}y$ として部分積分（integration by parts）を行う：

$$\begin{aligned}\int_0^b \arcsin y \,\mathrm{d}y &= \Big[y \arcsin y\Big]_0^b - \int_0^b \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y \\ &= b \arcsin b + \Big[\sqrt{1-y^2}\Big]_0^b \\ &= b \arcsin b + \sqrt{1-b^2} - 1.\end{aligned}$$

これらを足すと 1 どうしが打ち消し合い、$(*)$ は

$$ab \leq b \arcsin b + \sqrt{1-b^2} - \cos a,$$

となる。これが示すべき不等式であり、等号は $b = \sin a$ のときに成り立つ。

考えてみよう a は自由に選べる。どれを選べば目的の不等式が得られるか。

$t \geq 1$ に対して $b = t^{-1}$ とおくと、これは必要どおり $(0,1]$ に属する。不等式の両辺に $t > 0$ を掛け、$t\sqrt{1-t^{-2}} = \sqrt{t^2-1}$（$t > 0$ より成り立つ）を用いると

$$a \leq \arcsin(t^{-1}) + \sqrt{t^2-1} - t\cos a \quad \text{任意の} a \in [0, \tfrac{1}{2}\pi].$$

目標の不等式には a が含まれず、右辺に t がある。これは $a = 0$ のときの $t\cos a$ にほかならない。$a = 0$ とすると

$$0 \le \arcsin(t^{-1}) + \sqrt{t^2-1} - t, \qquad \text{すなわち} \qquad \arcsin(t^{-1}) \ge t - \sqrt{t^2-1} \quad (t \ge 1).$$

検算

- $t = 1$ のとき最終的な不等式は $\frac{1}{2}\pi \ge 1$ となり、$t = 2$ のときは $\frac{1}{6}\pi \approx 0.5236 \ge 2 - \sqrt{3} \approx 0.2679$ となる。
- $t \to \infty$ のとき、両辺はともに $\frac{1}{t}$ の程度である。実際 $\arcsin(t^{-1}) \approx t^{-1} + \frac{1}{6}t^{-3}$ である一方、$t - \sqrt{t^2-1} = \frac{1}{t+\sqrt{t^2-1}} \approx \frac{1}{2t}$ である。したがって、この評価は真の値のおよそ半分である。
- 小問 (iii) の不等式を 2×10^5 個の無作為な点 (a, b) で検証したところ、一度も破れず、差が 0 に近づくのは曲線 $b = \sin a$ の近くだけであった。また、無作為な p, a, b についてヤングの不等式（Young's inequality）を確かめ、2 つの積分をシンプソンの公式（Simpson's rule）で確かめた。

よくある間違い

- 小問 (i) で $b \le f(a)$ の場合しか図示しないこと。$b \ge f(a)$ の場合は対称であるが、そのことは明記すべきである。
- $f^{-1}(y) = y^{1/(p-1)}$ と書いたのに $1/(p-1) = q - 1$ に気づかず、積分 b^q/q が現れないこと。
- 最後の段階で、評価を最適化する a を探そうとすること。その a は $\arcsin(t^{-1})$ であり、自明な恒等式しか与えない。うまくいくのは最も単純な選択 $a = 0$ である。

STEP のその先へ

小問 (ii) はヤングの不等式であり、ヘルダー（Hölder）の不等式 $\sum |x_i y_i| \le \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum |y_i|^q\right)^{1/q}$ を導く標準的な道筋である。そしてヘルダーの不等式は、解析学における L^p 空間の土台となっている。$\int f$ と $\int f^{-1}$ を組にする考え方は、ルジャンドル変換（Legendre transform）と凸双対性（convex duality）の萌芽であり、これらは力学（ラグランジアンからハミルトニアンへの移行）や最適化に再び現れる。解析学の背景については、Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）を参照するとよい。

解答例

STEP III 2011、第 5 問

純粋数学 • 積分による面積

STEP III 2011、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/11-s3-q5

この問題は、*Beyond STEP* の第 4.9 節「**ホールディッチの定理**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch04/holditch.html

鍵となる考え方

直交座標による公式 $(*)$ が役に立つのは、それが**双線形**（bilinear）だからである。A が P を t のみに依存するベクトルだけずらした点であれば、OA が掃く面積は、OP が掃く面積、ずれだけから生じる面積、そして交差項（cross term）に分かれる。棒はまさにそのようなずれ、すなわち単位ベクトル（unit vector）$(\cos t, \sin t)$ の $\mp$ 倍を与える。交差項 f は計算できそうにないが、実は計算する必要はない。A と B はどちらも同じ曲線 $\mathcal{C}$ を一周するので $[A] = [B]$ であり、この等式から f が決まるのである。

解答

面積の公式

$x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ とおく。ここで r と θ は t の関数である。積の微分法則（product rule）により

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta},$$

となる。ここでドットは $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ を表す。よって

$$\begin{aligned} x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= r\cos\theta\,(\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}) - r\sin\theta\,(\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}) \\ &= r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,\dot{\theta} = r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \end{aligned}$$

である。$r\dot{r}\sin\theta\cos\theta$ の項が打ち消し合うからである。積分変数を θ から t に変換すると

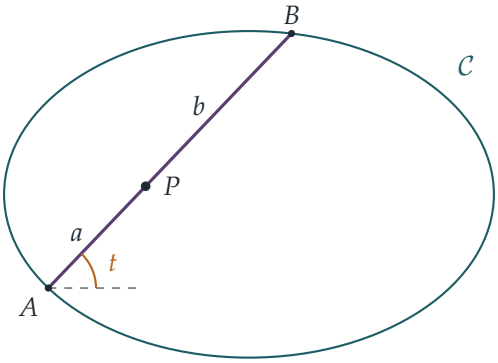
$$\tfrac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{2}\int r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\int\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t,$$

となり、これが $(*)$ である。

A と B の座標

棒は A から B へ向かって単位ベクトル $\mathbf{u} = (\cos t, \sin t)$ の方向を向いており、P はその間にあって $AP = a$、$PB = b$ である。よって A は $P - a\mathbf{u}$、B は $P + b\mathbf{u}$ であり、

$$A = (x - a\cos t,\ y - a\sin t), \qquad B = (x + b\cos t,\ y + b\sin t).$$



OA が掃く面積

再びドットで $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ を表す。A については

$$x_A = x - a\cos t, \quad \dot{x}_A = \dot{x} + a\sin t, \qquad y_A = y - a\sin t, \quad \dot{y}_A = \dot{y} - a\cos t.$$

である。展開すると

$$x_A\dot{y}_A = x\dot{y} - a\cos t\,(x + \dot{y}) + a^2\cos^2 t,$$
$$y_A\dot{x}_A = y\dot{x} + a\sin t\,(y - \dot{x}) - a^2\sin^2 t,$$

となるので

$$x_A\dot{y}_A - y_A\dot{x}_A = (x\dot{y} - y\dot{x}) + a^2 - a\Big[(x + \dot{y})\cos t + (y - \dot{x})\sin t\Big].$$

である。ここで t を 0 から 2π まで動かして $(*)$ を適用する。最初の括弧からは $[P]$ が、定数 a^2 からは $\frac{1}{2}\cdot 2\pi a^2 = \pi a^2$ が得られ、最後の項は f の定義により $-af$ となる。したがって

$$[A] = [P] + \pi a^2 - af,$$

であり、これが示すべきことであった。

B については、変わるのは全体を通して $-a$ が $+b$ になる点だけである（上の計算で a を $-b$ に置き換えればよい）。よって

$$[B] = [P] + \pi b^2 + bf.$$

$\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ の間の面積

考えてみよう $[A]$、$[B]$、$[P]$ は実際には何に等しいか？

t が 0 から 2π まで動くと、棒はちょうど一回転する。両端はどちらも $\mathcal{C}$ を反時計回りに一周して出発点に戻る。半回転した時点で A と B は入れ替わり、一回転すると元の位置に戻るのである。原点は $\mathcal{D}$ の内部にあり、したがって $\mathcal{C}$ の内部にもある。よって OA と OB はそれぞれ $\mathcal{C}$ で囲まれた領域をちょうど一度掃き、OP は $\mathcal{D}$ で囲まれた領域を一度掃く。これらの面積を $|\mathcal{C}|$、$|\mathcal{D}|$ と書くと

$$[A] = [B] = |\mathcal{C}|, \qquad [P] = |\mathcal{D}|.$$

$[A] = [B]$ とおくと $[P]$ が消去される：

$$\pi a^2 - af = \pi b^2 + bf \quad \Longrightarrow \quad (a+b)f = \pi(a^2 - b^2) = \pi(a-b)(a+b).$$

$a + b > 0$（棒の長さである）なので、両辺を割って $f = \pi(a-b)$ を得る。したがって

$$|\mathcal{C}| - |\mathcal{D}| = [A] - [P] = \pi a^2 - a\pi(a-b) = \pi ab.$$

よって曲線の間の面積は πab である。代わりに $[B]$ を使っても $\pi b^2 + b\pi(a-b) = \pi ab$ となり、整合性が確かめられて安心できる。

検算

- **円の場合。** $\mathcal{C}$ が半径 R の円であれば、長さ $a+b$ の弦は中心から常に距離 $d = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}(a+b)^2}$ にある。三平方の定理（Pythagoras' theorem）により、P は中心から距離 $\sqrt{d^2 + \frac{1}{4}(a-b)^2}$ にあるので、$\mathcal{D}$ は半径の 2 乗が $R^2 - ab$ である同心円である。両者の間の面積は $\pi R^2 - \pi(R^2 - ab) = \pi ab$ である。
- **対称性。** 答えは a と b について対称であり、そうでなければならない。棒の向きを逆にすると両者の役割が入れ替わるからである。
- **数値的な確認。** $a = 1$、$b = 1.5$ の棒を楕円 $x^2/16 + y^2/9 = 1$ に沿って動かし、描かれた曲線の面積を靴ひも公式（shoelace formula）で計算した。曲線の間の面積

は 4.712390 となり、$\pi ab = 1.5\pi \approx 4.712389$ と一致した。また、ランダムに選んだ曲線 $P(t)$ について、$[A]$ と $[B]$ の恒等式を数値積分（quadrature）で確かめた。

よくある間違い

- $\dot{x}_A = \dot{x} + a\sin t$ の符号を間違える。$-a\cos t$ を微分すると $+a\sin t$ になる。
- f を直接計算しようとする。f は $\mathcal{D}$ の形に依存し、それ以上の情報がなければ計算できない。肝心なのは、$[A] = [B]$ によって f が決まるという点である。

STEP のその先へ

これは Holditch の定理（Holditch's theorem、1858 年）である。$\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ の間の面積は a と b のみに依存し、$\mathcal{C}$ の形にはよらない。公式 $(*)$ はグリーンの定理（Green's theorem）の特別な場合である。グリーンの定理は、領域上の面積分をその境界に沿った線積分（line integral）に変換するものである。これはまた、境界をなぞることで面積を測る機械的な装置であるプラニメーター（planimeter、面積計）の原理でもある。グリーンの定理は大学 1 年次のベクトル解析（vector calculus）の中心的な話題であり、Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、こうした境界積分について見事に幾何学的な見方を与えている。

解答例

STEP III 2011、第 6 問

純粋数学 ・ 積分の置換

STEP III 2011、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/11-s3-q6

鍵となる考え方

どの積分も値を求めてはならないので、使える道具はある積分を別の積分に書き換えるもの、すなわち置換積分（substitution）と部分積分（integration by parts）だけである。手がかりは積分区間にある。$\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ と $\ln 2, \ln 3$ は $v = e^{-u}$ で結びつき、$\frac{1}{2}\ln 2, \frac{1}{2}\ln 3$ は $t = e^{-2x}$ によって $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ と結びつく。積分 T と V は積分区間が同じであり、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{artanh} t = \frac{1}{1-t^2}$ であることから、両者の間に部分積分を用いればよいと見当がつく。この三つのつながりがあれば、四つの積分がすべて等しいことを示すのに十分である。



解答

全体を通して次を用いる。

$$\operatorname{artanh} t = \tfrac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} \quad (|t|<1), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{artanh} t = \frac{1}{1-t^2},$$

特に $\operatorname{artanh}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln 3$、$\operatorname{artanh}\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\ln 2$ である。被積関数（integrand）はいずれもそれぞれの（有界な閉）区間で連続（continuous）であるから、どの積分も存在し、以下の式変形は正当である。

$T = V$：部分積分

T において $\frac{1}{t}$ を積分し $\operatorname{artanh} t$ を微分する。すなわち $u = \operatorname{artanh} t$、$\mathrm{d}w = \frac{\mathrm{d}t}{t}$ とおくと $w = \ln t$ である（積分区間で $t > 0$ なので問題ない）。

$$\begin{aligned} T &= \Big[\ln t \, \operatorname{artanh} t\Big]_{1/3}^{1/2} - \int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[\ln t \, \operatorname{artanh} t\Big]_{1/3}^{1/2} + V, \end{aligned}$$

残った積分はちょうど V だからである（積分変数（dummy variable）の名前は関係ない）。

考えてみよう 境界項があると等式が崩れてしまうのではないか？

境界項（boundary term）は消える。ここがこの問題の巧妙なところである。上端では $\ln\frac{1}{2}\cdot\operatorname{artanh}\frac{1}{2} = (-\ln 2)(\frac{1}{2}\ln 3)$、下端では $\ln\frac{1}{3}\cdot\operatorname{artanh}\frac{1}{3} = (-\ln 3)(\frac{1}{2}\ln 2)$ となる。どちらも $-\frac{1}{2}\ln 2\ln 3$ であるから

$$\Big[\ln t \, \operatorname{artanh} t\Big]_{1/3}^{1/2} = -\tfrac{1}{2}\ln 2\ln 3 + \tfrac{1}{2}\ln 2\ln 3 = 0,$$

したがって $T = V$ である。

$V = U$：置換 $v = e^{-u}$

$v = e^{-u}$ とおくと、$\ln v = -u$、$\mathrm{d}v = -e^{-u}\,\mathrm{d}u$ である。$v = \frac{1}{3}$ のとき $u = \ln 3$、$v = \frac{1}{2}$ のとき $u = \ln 2$ である。よって

$$\begin{aligned} V &= -\int_{\ln 3}^{\ln 2} \frac{-u}{1-e^{-2u}}\left(-e^{-u}\right)\mathrm{d}u = -\int_{\ln 3}^{\ln 2} \frac{u\,e^{-u}}{1-e^{-2u}}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{u\,e^{-u}}{1-e^{-2u}}\,\mathrm{d}u \qquad \text{（上端と下端を入れ替えた）} \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{u}{e^{u}-e^{-u}}\,\mathrm{d}u \qquad \text{（分母と分子に } e^{u} \text{ を掛けた）} \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{u}{2\sinh u}\,\mathrm{d}u = U. \end{aligned}$$

$X = T$：置換 $t = e^{-2x}$

まず X の被積関数を書き換える。$x > 0$ のとき

$$\coth x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}} = \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}, \qquad \text{よって} \qquad \ln(\coth x) = \ln\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = 2\operatorname{artanh}\left(e^{-2x}\right),$$

これは $0 < e^{-2x} < 1$ であるから成り立つ。ここで $t = e^{-2x}$ とおくと $\mathrm{d}t = -2t\,\mathrm{d}x$、すなわち $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{2t}$ である。$x = \frac{1}{2}\ln 2$ のとき $t = \frac{1}{2}$、$x = \frac{1}{2}\ln 3$ のとき $t = \frac{1}{3}$ である。ゆ

えに

$$X = \int_{1/2}^{1/3} 2\operatorname{artanh} t \left(-\frac{1}{2t}\right) \mathrm{d}t = \int_{1/3}^{1/2} \frac{\operatorname{artanh} t}{t}\, \mathrm{d}t = T.$$

結論

三つのつながりを合わせると $X = T = V = U$ となり、四つの積分はすべて等しい。これが示すべきことであった。どの積分についても、値を求める必要は一度もなかった。

検算

それぞれの積分に個別にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると $T \approx U \approx V \approx X \approx 0.177704$ となり、小数点以下およそ 12 桁まで一致する。境界項が消えることを電卓で手早く確かめておくのも安心材料になる。$\ln\frac{1}{2} \cdot \operatorname{artanh}\frac{1}{2}$ と $\ln\frac{1}{3} \cdot \operatorname{artanh}\frac{1}{3}$ はどちらも $-0.3807\ldots$ となる。

よくある間違い

- $V = U$ で負号を落とす。負号は三つあり（V の前のもの、$\ln v = -u$ のもの、$\mathrm{d}v = -e^{-u}\,\mathrm{d}u$ のもの）、上端と下端の入れ替えで四つ目が加わる。
- 境界項が 0 でないように見えるからといって、両端で値を計算しないまま部分積分をあきらめてしまう。
- $\ln\coth x = \operatorname{artanh}(e^{-2x})$ と書いて係数 2 を落とす。この 2 は後で $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{2t}$ の $\frac{1}{2}$ と打ち消し合う。

STEP のその先へ

$\operatorname{artanh} t/t$ をべき級数（power series）に展開すると、共通の値は $\chi_2(\frac{1}{2}) - \chi_2(\frac{1}{3})$ であることがわかる。ここで $\chi_2(z) = \sum_{k\geq 0} z^{2k+1}/(2k+1)^2$ はルジャンドル（Legendre）のカイ関数（chi function）であり、二重対数関数（dilogarithm）$\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{n\geq 1} z^n/n^2$ の近い親類である。これらの関数に関する多くの恒等式は、まさにこの種の変数変換から得られる。どちらの値も計算せずに二つの積分が等しいことを示すのは解析学（analysis）の標準的な手法であり、置換積分や部分積分を正当化する定理（連続性、微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus））は、大学で最初に学ぶ解析学の講義で厳密に扱われる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、それらが丁寧に証明されるのを見るのに適した本である。

解答例

STEP III 2011、第 7 問

純粋数学 • 数学的帰納法

STEP III 2011、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/11-s3-q7

鍵となる考え方

$\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$ を 2 乗すると個々の平方根が消え、$p+q\sqrt{a(a+1)}$ の形の数が残る。したがって n が偶数のときは、T_2 を掛けることで T_n から T_{n+2} へ進むことができる。さらに量 $A^2-a(a+1)B^2$ はこの掛け算で変わらないことがわかり、これがまさに数学的帰納法（induction）に必要なことである。もう 1 つ因数 $\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$ を掛ければ奇数の n も扱え、(i) と (ii) の恒等式は、2 つの項が連続する整数の平方根であることを示している。

解答

以下を通じて $N=a(a+1)$ とおく。すると $\sqrt{a+1}\,\sqrt{a}=\sqrt{N}$ である。

小問 (i)

基底段階（*base case*）、$n=2$。展開すると

$$T_2=(a+1)+2\sqrt{a+1}\,\sqrt{a}+a=(2a+1)+2\sqrt{N},$$

となるので、$A_2=2a+1$ と $B_2=2$ は整数であり、

$$A_2^2-NB_2^2=4a^2+4a+1-4a(a+1)=1.$$

帰納段階（*inductive step*）。ある偶数 $n\geq 2$ について、$T_n=A_n+B_n\sqrt{N}$ であり、整数 A_n, B_n が $A_n^2-NB_n^2=1$ を満たすと仮定する。簡単のため $p=2a+1$ と書き、

$p^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 4N + 1$ に注意する。$T_{n+2} = T_n T_2$ であるから、

$$\begin{aligned} T_{n+2} &= \left(A_n + B_n\sqrt{N}\right)\left(p + 2\sqrt{N}\right) \\ &= \left(pA_n + 2NB_n\right) + \left(2A_n + pB_n\right)\sqrt{N}. \end{aligned}$$

よって

$$A_{n+2} = pA_n + 2NB_n, \qquad B_{n+2} = 2A_n + pB_n,$$

ととればよく、p、N、A_n、B_n が整数であるからこれらも整数である。恒等式については、交差項 $\pm 4pNA_nB_n$ が打ち消し合う：

$$\begin{aligned} A_{n+2}^2 - NB_{n+2}^2 &= \left(p^2A_n^2 + 4pNA_nB_n + 4N^2B_n^2\right) - N\left(4A_n^2 + 4pA_nB_n + p^2B_n^2\right) \\ &= (p^2 - 4N)A_n^2 - N(p^2 - 4N)B_n^2 \\ &= A_n^2 - NB_n^2 = 1, \end{aligned}$$

ここで $p^2 - 4N = 1$ を使い、続いて帰納法の仮定（inductive hypothesis）を用いた。したがって主張は $n+2$ についても成り立ち、数学的帰納法により、すべての正の偶数 n について成り立つ。

また、$A_2, B_2 > 0$ であり漸化式（recurrence）の係数はすべて正であるから、すべての偶数 n について $A_n > 0$ かつ $B_n > 0$ である。これは小問 (iii) で必要になる。

考えてみよう なぜ $A^2 - NB^2$ は T_2 を掛けても変わらないのか？

$A^2 - NB^2 = (A + B\sqrt{N})(A - B\sqrt{N})$ であり、同じ計算により「共役」（conjugate）$A - B\sqrt{N}$ には各段階で $p - 2\sqrt{N}$ が掛かることがわかるからである。したがって積には $(p + 2\sqrt{N})(p - 2\sqrt{N}) = p^2 - 4N = 1$ が掛かる。上の計算は、この事実を書き下したものにすぎない。

小問 (ii)

$n = 1$ の場合。 $T_1 = 1 \cdot \sqrt{a+1} + 1 \cdot \sqrt{a}$ であるから $C_1 = D_1 = 1$ であり、$(a+1)C_1^2 = a + 1 = aD_1^2 + 1$ である。

$n \geq 3$ が奇数の場合。 このとき $m = n - 1$ は正の偶数であるから、小問 (i) より $T_m = A_m + B_m\sqrt{N}$ かつ $A_m^2 - NB_m^2 = 1$ である。$\sqrt{N}\sqrt{a+1} = (a+1)\sqrt{a}$ と $\sqrt{N}\sqrt{a} = a\sqrt{a+1}$ を用いると、

$$\begin{aligned} T_n = \left(\sqrt{a+1} + \sqrt{a}\right)\left(A_m + B_m\sqrt{N}\right) &= A_m\sqrt{a+1} + A_m\sqrt{a} + (a+1)B_m\sqrt{a} + aB_m\sqrt{a+1} \\ &= \left(A_m + aB_m\right)\sqrt{a+1} + \left(A_m + (a+1)B_m\right)\sqrt{a}. \end{aligned}$$

よって $C_n = A_m + aB_m$ と $D_n = A_m + (a+1)B_m$ は整数である（しかも正である）。さ

て、

$$\begin{aligned}(a+1)C_n^2 - aD_n^2 &= (a+1)\left(A_m^2 + 2aA_mB_m + a^2B_m^2\right)\\ &\quad - a\left(A_m^2 + 2(a+1)A_mB_m + (a+1)^2B_m^2\right)\\ &= A_m^2 + a(a+1)\left[a-(a+1)\right]B_m^2\\ &= A_m^2 - NB_m^2 = 1,\end{aligned}$$

となる。A_mB_m の項が打ち消し合うからである。したがって、求める通り $(a+1)C_n^2 = aD_n^2 + 1$ である。($n=1$ の場合も、実は $T_0 = 1$、すなわち $A_0 = 1$、$B_0 = 0$ とした同じ計算である。)

小問 (iii)

n が偶数の場合。$A_n > 0$ かつ $B_n > 0$ であるから、

$$T_n = A_n + B_n\sqrt{N} = \sqrt{A_n^2} + \sqrt{NB_n^2},$$

であり、小問 (i) より整数 NB_n^2 と $A_n^2 = NB_n^2 + 1$ は連続している。

考えてみよう なぜ A_n と B_n の符号が必要なのか？

$\sqrt{A^2} = |A|$ であり、A ではないからである。$A_n = \sqrt{A_n^2}$ と書けるのは $A_n \geq 0$ がわかっている場合に限られる。小問 (i) で正であることを記録しておいたのはこのためである。

n が奇数の場合。$C_n, D_n > 0$ であるから、

$$T_n = C_n\sqrt{a+1} + D_n\sqrt{a} = \sqrt{(a+1)C_n^2} + \sqrt{aD_n^2},$$

であり、小問 (ii) より整数 aD_n^2 と $(a+1)C_n^2 = aD_n^2 + 1$ は連続している。

以上より、すべての正の整数 n について、ある正の整数 k を用いて $T_n = \sqrt{k+1} + \sqrt{k}$ と書ける。具体的には、n が偶数のとき $k = a(a+1)B_n^2$、n が奇数のとき $k = aD_n^2$ である。

検算

$a = 3$ とすると $T_n = (2+\sqrt{3})^n$ である。このとき $T_2 = 7 + 4\sqrt{3} = 7 + 2\sqrt{12} = \sqrt{49} + \sqrt{48}$ であり、$49 = 12 \cdot 4 + 1$ である。次に、$A_2 = 7$、$B_2 = 2$ から $C_3 = 13$、$D_3 = 15$ が得られ、$T_3 = 26 + 15\sqrt{3} = \sqrt{676} + \sqrt{675} \approx 51.9808$ となる。これは $(2+\sqrt{3})^3$ を直接計算した値と一致する。コンピュータで $1 \leq a \leq 39$、$n \leq 23$ の範囲について漸化式を計算し、両方の恒等式が整数演算で厳密に成り立つこと、および T_n の展開が数値的に正しいことを確認した。

よくある間違い

- 基底段階を忘れる、あるいは小問 (i) が偶数の n のみを扱っているのに $n = 1$ から帰納法を始めてしまう。
- 小問 (iii) で、A_n（および B_n、C_n、D_n）が正であることに触れずに $A_n = \sqrt{A_n^2}$ と書いてしまう。

STEP のその先へ

方程式 $x^2 - Ny^2 = 1$ はペル方程式（Pell's equation）であり、小問 (i) は $(2a+1) + 2\sqrt{a(a+1)}$ の累乗が $N = a(a+1)$ に対する無限個の解を生み出すことを示している。鍵となる事実は、$x + y\sqrt{N}$ の「ノルム」（norm）$x^2 - Ny^2$ が乗法的（multiplicative）であることであり、これが二次体（quadratic number fields）とその単数（units）の理論の出発点となる。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等整数論』）には、ペル方程式と連分数（continued fractions）についての非常に読みやすい解説がある。

解答例

STEP III 2011、第 8 問

純粋数学 • 複素平面上の軌跡

STEP III 2011、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/11-s3-q8

鍵となる考え方

分母の共役（conjugate）を分子と分母に掛けて u と v を求める。その後は、各小問とも与えられた直線を代入し、見慣れた曲線を見抜けばよい。半角の置換（half-angle substitution）によって $\frac{2x}{1+x^2}$ と $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ は正弦と余弦に変わる。問題文がこの置換を勧めているのはまさにそのためである。全体を通して、曲線上のどの点が実際に取られるのかに注意を払うこと。端点や除外される点こそが答えの半分なのである。

解答

$z = x + \mathrm{i}y$ とおく。すると $1 + \mathrm{i}z = (1-y) + \mathrm{i}x$、$\mathrm{i} + z = x + \mathrm{i}(1+y)$ であるから、分子と分母に $x - \mathrm{i}(1+y)$ を掛けて

$$\begin{aligned} w &= \frac{\big((1-y) + \mathrm{i}x\big)\big(x - \mathrm{i}(1+y)\big)}{x^2 + (1+y)^2} \\ &= \frac{(1-y)x + x(1+y) + \mathrm{i}\big(x^2 - (1-y)(1+y)\big)}{x^2 + (1+y)^2}. \end{aligned}$$

よって

$$u = \frac{2x}{x^2 + (1+y)^2}, \qquad v = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (1+y)^2},$$

である。これは $z \neq -\mathrm{i}$ のとき成り立つ（そこでは w は定義されない）。

逆写像（inverse map）も求めておくと役に立つ。$w(\mathrm{i} + z) = 1 + \mathrm{i}z$ より $z(w - \mathrm{i}) = 1 - \mathrm{i}w$ となるから

$$z = \frac{1 - \mathrm{i}w}{w - \mathrm{i}}, \qquad w \neq \mathrm{i}.$$

したがって、$w \neq \mathrm{i}$ であるすべての w はちょうど一つの z から得られ、$w = \mathrm{i}$ は決して取られない。これが、以下で何度も出会う除外点である。

小問 (i)

$y = 0$ のとき

$$u = \frac{2x}{1+x^2}, \qquad v = \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

$x = \tan(\theta/2)$ とおく。x がすべての実数を動くとき、θ は $-\pi < \theta < \pi$ を動き、各 x に対してそのような θ がちょうど一つ対応する。半角の公式より

$$u = \frac{2\tan(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} = \sin\theta, \qquad v = -\frac{1-\tan^2(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} = -\cos\theta.$$

よって $u^2+v^2 = 1$ である。さらに、$-\pi < \theta < \pi$ における $(\sin\theta, -\cos\theta)$ は、$\theta = \pm\pi$ に対応する点、すなわち $(u,v) = (0,1)$ を除いて単位円全体を描く。したがって w の軌跡（locus）は、ただ一点 $w = \mathrm{i}$ を除いた円 $u^2+v^2 = 1$ であり、これが示すべきことであった。（除外点は $x \to \pm\infty$ のときの w の極限である。）

小問 (ii)

今度は $-1 < x < 1$ であり、これは $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ に対応する。この範囲では $v = -\cos\theta < 0$ であり、$u = \sin\theta$ は -1 から 1 まで（両端を含まずに）増加する。よって w の軌跡は

$$u^2+v^2 = 1, \quad v < 0,$$

すなわち単位円の下半分であり、端点 $w = \pm 1$（これらは $x = \pm 1$ から得られる）は含まない。

小問 (iii)

$x = 0$ のとき $u = 0$ であり、

$$v = \frac{y^2-1}{(1+y)^2} = \frac{(y-1)(y+1)}{(y+1)^2} = \frac{y-1}{y+1} = 1 - \frac{2}{y+1},$$

となる。ここで $y > -1$ であるから $y+1$ で約分してよい。

考えてみよう 負の v の値はすべて取られるのか、それとも一部だけなのか？

y が -1 から 1 まで増加するとき、$y+1$ は $(0,2)$ を増加し、したがって $\frac{2}{y+1}$ は $(1,\infty)$ を減少し、v は $(-\infty, 0)$ を連続かつ狭義に増加する。$y \to -1^+$ のとき $v \to -\infty$、$y \to 1^-$ のとき $v \to 0^-$ である。よって負の v はすべてちょうど一回ずつ取られる。w の軌跡

は虚軸の負の部分

$$u = 0, \quad v < 0,$$

であり、原点（これは $y = 1$ から得られる）は除かれる。

小問 (iv)

$y = 1$ のとき

$$u = \frac{2x}{x^2+4}, \qquad v = \frac{x^2}{x^2+4}.$$

すると

$$u^2 + v^2 = \frac{4x^2 + x^4}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2(x^2+4)}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2}{x^2+4} = v,$$

であるから、w は $u^2 + v^2 = v$ 上、すなわち

$$u^2 + \left(v - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4},$$

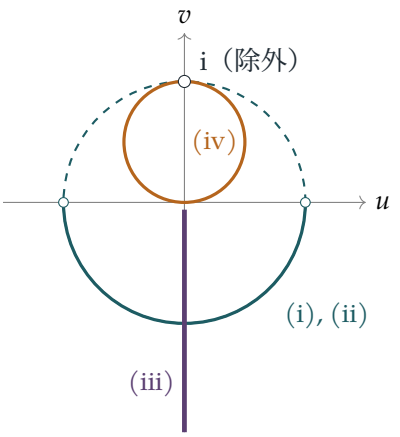
上にある。これは中心 $\frac{1}{2}\mathrm{i}$、半径 $\frac{1}{2}$ の円である。

考えてみよう この円のどの点が実際に取られるのか？

$v = 1 - \frac{4}{x^2+4}$ であるから $0 \le v < 1$ となり、最上点 $w = \mathrm{i}$ は決して取られない。それ以外の点はすべて取られる。実際、$-\pi < \phi < \pi$ として $x = 2\tan(\phi/2)$ とおくと

$$u = \frac{\tan(\phi/2)}{1+\tan^2(\phi/2)} = \tfrac{1}{2}\sin\phi, \qquad v = \frac{\tan^2(\phi/2)}{1+\tan^2(\phi/2)} = \tfrac{1}{2}(1-\cos\phi),$$

となり、これは $\phi = \pm\pi$ に対応する点 $(0,1)$ を除いて円全体を一周する。（あるいは、逆写像から各 $w \neq \mathrm{i}$ がちょうど一つの z から得られることがわかる。）よって軌跡は、点 $w = \mathrm{i}$ を除いた円 $u^2 + v^2 = v$ である。この円は $w = 0$ で実軸に接し、この点は $z = \mathrm{i}$ の像である。



破線と実線からなるティール色の円は実軸の像であり、小問 (i) にあたる。実線の下半分が小問 (ii) である。プラム色の半直線が小問 (iii)、アンバー色の円が小問 (iv) である。

検算

- $z = 0$ gives $w = 1/\mathrm{i} = -\mathrm{i}$ となる。これは下半円 (ii) 上にも半直線 (iii) 上にもあり、実際 $z = 0$ は両方の線分上にある。
- $z = 1 + \mathrm{i}$ のとき $w = \frac{\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = 0.4 + 0.2\mathrm{i}$ であり、$0.4^2 + 0.2^2 = 0.2 = v$ であるから、(iv) の円上にある。
- 大きな実数 z：$w(10^8) \approx 2 \times 10^{-8} + \mathrm{i}$ であり、除外点 i に近づく。
- さらに、数千個の無作為な点について、u, v の公式と、主張した各軌跡上のすべての点が正しい直線または線分上に原像をもつことを数値的に確かめた。

よくある間違い

- 円や半円を答えるだけで、どの点が除外されるか、あるいは含まれないかを述べないこと。ここでは (i) と (iv) の $w = \mathrm{i}$、(ii) の端点 ± 1 がそれにあたる。
- (iii) の軌跡を虚軸全体だと主張すること。$v = \frac{y-1}{y+1}$ はすべての $-1 < y < 1$ に対して負である。

STEP のその先へ

この写像はメビウス変換（Möbius transformation）である。実際 $w = \mathrm{i}\,\dfrac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$ であるから $|w| = |z - \mathrm{i}|/|z + \mathrm{i}|$ となり、これが 1 に等しいのは z が $\pm\mathrm{i}$ から等距離にあるとき、すなわち実数のときに限る。メビウス変換は直線と円を直線と円に移し（直線は「∞ を通る円」とみなす）、除外点 i は ∞ の像である。この写像（ケーリー変換（Cayley transform））は上半平面（upper half-plane）を単位円板（unit disc）の上に移し、複素解析（complex analysis）や双曲幾何（hyperbolic geometry）における重要な道具である。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、図を中心にしたメビウス変換の美しい解説を含んでいる。

解答例

STEP III 2011、第 9 問

力学 ・ 円柱面上の運動

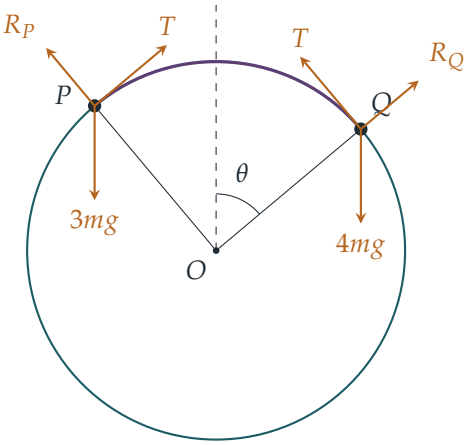
> **STEP III 2011、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q9

鍵となる考え方

円柱面上にある長さ $\frac{1}{2}\pi a$ の糸は O において直角をはさむので、OP と OQ は常に垂直であり、系全体はただ一つの座標 θ で記述できる。すると、エネルギー保存則（conservation of energy）から $\dot{\theta}^2$ が直接得られ、中心方向のニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）から、各垂直抗力（normal reaction）が $\dot{\theta}^2$ を用いて表される。面から離れるとは、垂直抗力がゼロになることである。張力（tension）については接線方向（tangential）の運動方程式を用いる。2 式を加えると T が消去されて $\ddot{\theta}$ が得られ、あとはどちらか一方の式から T が求まる。

解答

モデル化。P と Q は質点、糸は軽く伸び縮みしない（light and inextensible）とし、円柱はなめらか（smooth）とする。なめらかな面にかかる軽い糸の張力は、どこでも同じ値 T である。2 つの質点の間の弧の長さは $\frac{1}{2}\pi a$ なので、$\angle POQ = \frac{1}{2}\pi$ である。θ を、OQ が鉛直上向きとなす角とし、Q は頂点の一方の側にあるとする。すると OP は、頂点の反対側で鉛直上向きと角 $\frac{1}{2}\pi - \theta$ をなす。質点が面上にある間は、どちらも半径 a の円周上を角速度（angular speed）$\dot{\theta}$ で動くので、それぞれの速さは $a\dot{\theta}$ である。



つり合い（equilibrium）。各質点で面に沿った方向に力を分解する（垂直抗力は接線方向の成分をもたず、糸は接線方向に頂点へ向かって引く）。Q については $T = 4mg\sin\theta$、P については $T = 3mg\sin(\frac{1}{2}\pi - \theta) = 3mg\cos\theta$ を得る。したがって初めの状態では $\tan\theta = \frac{3}{4}$、すなわち $\sin\theta = \frac{3}{5}$、$\cos\theta = \frac{4}{5}$ である。

エネルギー。O の高さを位置エネルギー（potential energy）の基準とする。Q の高さは $a\cos\theta$、P の高さは $a\cos(\frac{1}{2}\pi - \theta) = a\sin\theta$ である。垂直抗力は運動の方向に垂直なので仕事をせず、張力は糸が伸び縮みしないので系全体に対して正味の仕事をしない。よってエネルギーは保存される。わずかに乱しただけなので系は静止状態から動き出し、

$$\tfrac{1}{2}(3m+4m)a^2\dot{\theta}^2 + 4mga\cos\theta + 3mga\sin\theta = 4mga\cdot\tfrac{4}{5} + 3mga\cdot\tfrac{3}{5} = 5mga.$$

両辺に $2/(ma)$ を掛けると

$$7a\dot{\theta}^2 + 8g\cos\theta + 6g\sin\theta = 10g,$$

となり、示すべき式が得られた。Q が下に動くにつれて、θ は $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ から増加する。

小問 (i)

Q は半径 a の円周上を速さ $a\dot{\theta}$ で動くので、O に向かう加速度 $a\dot{\theta}^2$ をもつ。重力の O 向きの成分は $4mg\cos\theta$ であり、R_Q は外向きにはたらく。糸は接線方向なので、半径方向には寄与しない。よって

$$4mg\cos\theta - R_Q = 4ma\dot{\theta}^2, \qquad \text{よって} \qquad R_Q = 4mg\cos\theta - 4ma\dot{\theta}^2.$$

Q が面から離れるのは R_Q がゼロになるとき、すなわち $a\dot{\theta}^2 = g\cos\theta$ のときである。これを $\theta = \beta$ におけるエネルギーの式に代入すると

$$7g\cos\beta + 8g\cos\beta + 6g\sin\beta = 10g \quad \Longrightarrow \quad 15\cos\beta + 6\sin\beta = 10,$$

となり、示すべき式が得られた。

> **考えてみよう** なぜエネルギーの式は $\theta = \beta$ に至るまでずっと成り立つのだろうか。

この式は 2 つの質点がともに円柱上にある限り成り立ち、問題文から先に離れるのは Q であることがわかっている。このことは確かめることもできる。P について同じ議論をすると $R_P = 3mg\sin\theta - 3ma\dot{\theta}^2$ となり、これは $13\sin\theta + 8\cos\theta = 10$ のときにゼロになる。$\beta \approx 73.6^\circ$ では左辺はおよそ 14.7 なので、R_P はまだ正である。

小問 (ii)

今度は運動の向きを正として接線方向に分解する。Q は接線方向の加速度 $a\ddot{\theta}$ で頂点から遠ざかり、P は同じ接線方向の加速度 $a\ddot{\theta}$ で頂点に近づく（糸によって両者の速さは等しく保たれる）。Q については、重力の成分 $4mg\sin\theta$ が前向きにはたらき、張力が後ろ向きに引く：

$$4ma\ddot{\theta} = 4mg\sin\theta - T. \tag{1}$$

P については、張力が前向きに引き、重力の成分 $3mg\cos\theta$ が後ろ向きにはたらく：

$$3ma\ddot{\theta} = T - 3mg\cos\theta. \tag{2}$$

(1) と (2) を加えると T が消去されて

$$7ma\ddot{\theta} = 4mg\sin\theta - 3mg\cos\theta.$$

（これは、エネルギーの式を時間で微分して $2\dot{\theta}$ で割ったものと一致する。）これを (1) に代入すると

$$\begin{aligned} T &= 4mg\sin\theta - 4ma\ddot{\theta} \\ &= 4mg\sin\theta - \tfrac{4}{7}m(4g\sin\theta - 3g\cos\theta) \\ &= \tfrac{12}{7}mg\sin\theta + \tfrac{12}{7}mg\cos\theta = \tfrac{12}{7}mg(\sin\theta + \cos\theta), \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。これは $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ で正なので、糸は運動の間ずっと張ったままである。

検算

- つり合いの位置では $\sin\theta + \cos\theta = \frac{7}{5}$ なので $T = \frac{12}{5}mg$ である。これは $4mg \cdot \frac{3}{5}$ および $3mg \cdot \frac{4}{5}$ と一致する。
- $\tan\alpha = \frac{2}{5}$ として $15\cos\beta + 6\sin\beta = \sqrt{261}\cos(\beta - \alpha)$ と書くと、$\beta \approx 1.2839$ rad $\approx 73.56^\circ$ を得る。つり合いの位置をわずかに過ぎたところから運動を数値的に追跡

したところ、R_Q はまさにこの角度で初めてゼロになり、その間 R_P は正のままであった。エネルギーの関係式と張力の式は、経路全体にわたって丸め誤差の範囲で成り立っていた。

よくある間違い

- P の高さを $a\sin\theta$ ではなく $a\cos\theta$ としてしまう。糸の長さの意味はまさに直角 $\angle POQ$ にある。
- 質点ごとに異なる張力を与えたり、半径方向の式に T を入れたりする。糸は質点に接線方向に接しているので、T は接線方向の式にしか現れない。

STEP のその先へ

ただ一つの座標 θ ですべてが記述されるので、これは 1 自由度（one degree of freedom）の系である。ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）を用いると、拘束力（forces of constraint）をまったく考えずに、運動エネルギー（kinetic energy）と位置エネルギーから直接運動方程式が得られる。そのうえで、垂直抗力や張力は拘束条件に対する「ラグランジュ乗数（Lagrange multipliers）」として現れる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、ラグランジュ（Lagrange）の方法に出会う前に、拘束された運動やエネルギーを用いた方法の感覚を深めるのに適した本である。

解答例

STEP III 2011、第 10 問

力学 ・ 弾性ひもと単振動

STEP III 2011、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/11-s3-q10

鍵となる考え方

2 つの粒子には外部から水平方向の力がはたらかないので、その重心（centre of mass）は撃力（impulse）によって定まる一定の速さで動く。重心に対する相対的な運動を見ると、糸の伸び（extension）は単振動（simple harmonic motion）に従い、糸が張っているのはちょうど半周期の間である。運動を「重心」と「伸び」に分けて考えれば、どの答えもほとんど手間をかけずに得られる。

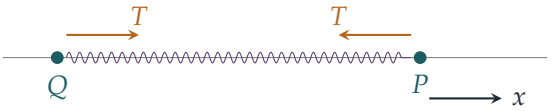
解答

モデルと設定

粒子はなめらかな水平面上を動くので、粒子にはたらく水平方向の力は軽い糸の張力（tension）だけであり、それらは大きさが等しく向きが逆である。直線 QP を x 軸とし、Q から P へ向かう向きを正とする。また、最初 Q は $x = 0$、P は $x = a$ にあるとする。撃力を加えてから時間 t 後のそれぞれの位置を x_P, x_Q とし、

$$e = (x_P - x_Q) - a$$

を糸の伸びとする。撃力の直後には $\dot{x}_P = u, \dot{x}_Q = 0, e = 0$ であり、$\dot{e} = u > 0$ であるから、糸はただちに張る。



糸が張っている間、フックの法則（Hooke's law）により張力は

$$T = \frac{\lambda e}{a} = \frac{\frac{1}{2}ma\omega^2\, e}{a} = \tfrac{1}{2}m\omega^2 e.$$

となる。張力は P を Q の方へ引き戻し、Q を P の方へ前向きに引く：

$$m\ddot{x}_P = -\tfrac{1}{2}m\omega^2 e, \qquad m\ddot{x}_Q = +\tfrac{1}{2}m\omega^2 e.$$

重心

2 つの式を足すと $\ddot{x}_P + \ddot{x}_Q = 0$ である。したがって、$\bar{x} = \frac{1}{2}(x_P + x_Q)$ にある重心 G は、初期値に等しい一定の速度

$$\dot{\bar{x}} = \tfrac{1}{2}(u + 0) = \tfrac{1}{2}u.$$

で動く。（これは運動量保存（conservation of momentum）にほかならない。全運動量 mu を質量 $2m$ が分け合っているのである。）

伸び

2 つの式を引くと、

$$\ddot{e} = \ddot{x}_P - \ddot{x}_Q = -\omega^2 e.$$

これは角振動数（angular frequency）ω の単振動である。$e(0) = 0, \dot{e}(0) = u$ より、

$$e = \frac{u}{\omega}\sin\omega t.$$

考えてみよう 角振動数が $\omega/\sqrt{2}$ や $\sqrt{2}\,\omega$ ではなく ω になるのはなぜか。

各粒子が受ける力は $\frac{1}{2}m\omega^2 e$ であるが、e が変化するのは**両方の**粒子が動くからである。2 つの式を引くと、加速度が足し合わされる。言い換えると、等しい質量 m の 2 物体の換算質量（reduced mass）は $\frac{1}{2}m$ であり、糸のばね定数は $\lambda/a = \frac{1}{2}m\omega^2$ であるから、$\omega^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 / \frac{1}{2}m$ となる。弾性率はこれがきれいに求まるように選ばれているのである。

次に糸の長さが a になるのは再び $e = 0$ となるとき、すなわち $t > 0$ で初めて $\sin\omega t = 0$ となるときであり、

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega}.$$

である。$0 < t < \pi/\omega$ の間はつねに $e > 0$ であるから、糸は確かに張っており、上の運動方程式が成り立つ。

移動距離

各位置を、重心に間隔の半分を足したもの、または引いたものとして書くと、

$$x_P = \bar{x} + \tfrac{1}{2}(a+e), \qquad x_Q = \bar{x} - \tfrac{1}{2}(a+e).$$

t_1 では再び $e = 0$ となるので、各粒子は G とちょうど同じだけ、すなわち

$$\tfrac{1}{2}u \cdot \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi u}{2\omega}.$$

だけ動いている。この変位が移動距離に等しいことを確かめるため、どちらの粒子も向きを変えないことを確認する。微分すると、

$$\dot{x}_P = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}\dot{e} = \tfrac{1}{2}u(1+\cos\omega t), \qquad \dot{x}_Q = \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}\dot{e} = \tfrac{1}{2}u(1-\cos\omega t),$$

であり、どちらもすべての t で ≥ 0 である。よって各粒子は前方にのみ進み、それぞれ距離 $\dfrac{\pi u}{2\omega}$ だけ移動したことになり、題意は示された。

速さ

$t_1 = \pi/\omega$ では $\cos\omega t_1 = -1$ であるから、

$$\dot{x}_P = 0, \qquad \dot{x}_Q = u.$$

となる。したがって P は一瞬静止し、Q は速さ u で P の方へ動いている。2 つの粒子は速度をちょうど入れ替えたのであり、これは等しい質量の完全弾性衝突（perfectly elastic collision）とまったく同じである。これは偶然ではない。運動量は保存され、蓄えられた弾性エネルギーは完全に運動エネルギーとして戻されたのである。

衝突までの時間

t_1 の後、Q は P の方へ動いているので、間隔は a より小さくなる。糸はたるんで力を及ぼさず、どちらの粒子にも水平方向の力ははたらかない。よって P は静止したままであり、Q は P から距離 a の位置から一定の速さ u で動く。Q はさらに時間 a/u 後に P に達する。撃力から衝突までの時間の合計は

$$\frac{\pi}{\omega} + \frac{a}{u}.$$

である。

検算

- 運動量：t_1 での全運動量は $m\cdot 0 + mu = mu$ であり、最初と同じである。エネルギー：どちらの時刻でも運動エネルギーは $\tfrac{1}{2}mu^2$ であり、糸はどちらのときも自然長である。

- 次元：u/ω は長さ、a/u は時間であり、そうなるべきとおりである。
- $m = a = \omega = u = 1$ として運動方程式を数値的に解いた。糸は $t = 3.14159$ でたるみ、そのとき各粒子は $1.57080 = \pi/2$ だけ動いていた。そのときの速さは 0 と 1 であり、衝突は $t = 4.14159 = \pi + 1$ で起きた。

よくある間違い

- P が固定点につながれているものとして扱うこと。これでは角振動数が $\omega/\sqrt{2}$ となり、時間を誤る。糸の両端はどちらも動く。
- t_1 の後も単振動が続くとしてしまうこと。糸が a より短くなるとたるむので、運動は等速運動になる。
- 最後の段階をまるごと忘れること。衝突は、糸が自然長に戻ってからさらに a/u 後に起こる。

STEP のその先へ

2 体問題（two-body problem）を、重心の運動と、換算質量 $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ に支配される相対位置の運動とに分けることは、大学 1 年の力学で最も役に立つ技法の一つである。これにより、惑星の軌道、振動する 2 原子分子、衝突する粒子などが 1 体問題に帰着される。ここでは弾性糸が「柔らかい」衝突の役割を果たしており、その衝突は時間 π/ω だけ続くが、瞬間的な弾性衝突とまったく同じ結果をもたらす。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、2 体問題の帰着と換算質量が丁寧に展開されている。

解答例

STEP III 2011、第 11 問

力学 ・ 剛体の回転

STEP III 2011、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/11-s3-q11

鍵となる考え方

ねじった後も、各糸は天井の固定点から、円板の縁上で θ だけ回転した点へと張られている。したがって各糸の水平成分は円の**弦**（chord）になり、幾何的な関係は真上から見下ろすことで得られる。対称性によりすべての糸は同じふるまいをするので、鉛直方向のつり合いから張力（tension）が決まり、張力の水平成分の軸まわりのモーメント（moment）から偶力（couple）が求まる。円板を放した後は、エネルギー保存（energy conservation）がすべてを片づけてくれる。

解答

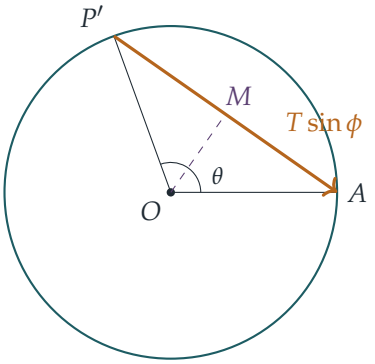
円板を剛体（rigid）の一様な薄板（lamina）、糸を軽くて伸びない（inextensible）ものとしてモデル化する。対称性により、すべての糸はぴんと張っていて、同じ張力 T と同じ傾き ϕ をもち、円板は水平を保ったまま中心が z 軸上にある。円板を θ だけ回転させると、円板は上昇して天井から深さ h の位置に来る。

糸の角度

P を通る糸は天井の $A = (a, 0, 0)$ に取り付けられている。回転後、その下端は

$$P' = (a\cos\theta,\ a\sin\theta,\ -h).$$

にある。真上から見ると、A と P' はともに軸を中心とする半径 a の円周上にあり、中心 O においてなす角は θ である。よって、糸の水平面への射影は長さ $2a\sin\frac{1}{2}\theta$ の弦である。



真上から見た図。M は弦 $P'A$ の中点なので、OM は角 θ を二等分し、弦に垂直で、長さは $OM = a\cos\frac{1}{2}\theta$ である。糸そのものの長さは b で、鉛直方向と角 ϕ をなすから、その水平射影の長さは $b\sin\phi$ である。両者を等しいとおくと

$$b\sin\phi = 2a\sin\tfrac{1}{2}\theta,$$

となり、求める式が得られる。鉛直射影からは円板の新しい深さが得られる：

$$h = b\cos\phi = \sqrt{b^2 - 4a^2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta}.$$

$b > 2a$ であるから、これは実数である。$0 < \theta < \pi$ より $0 < \sin\frac{1}{2}\theta < 1$ であり、したがって $0 < \phi < \frac{1}{2}\pi$ である。

偶力

円板について鉛直方向の力のつり合いを考えると、n 本の等しい張力が重さを支えている：

$$nT\cos\phi = mg.$$

偶力 C は円板の面内にはたらくので、このつり合いには影響しない。

各張力は、鉛直成分と、P' から A へ向かう弦に沿った水平成分 $T\sin\phi$ とをもつ。鉛直成分は軸に平行なので、軸まわりのモーメントをもたない。水平成分は弦に沿ってはたらき、その弦と O との距離は $OM = a\cos\frac{1}{2}\theta$ である。どの糸の水平方向の引っ張りも円板を $\theta = 0$ の方へ戻そうとするので、n 個のモーメントはすべて同じ向きである。軸まわりのモーメントを考えると

$$\begin{aligned} C &= n\,T\sin\phi\cdot a\cos\tfrac{1}{2}\theta = mg\tan\phi\; a\cos\tfrac{1}{2}\theta \\ &= mg\,a\cos\tfrac{1}{2}\theta\cdot\frac{2a\sin\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{b^2-4a^2\sin^2\frac{1}{2}\theta}} = \frac{mga^2\sin\theta}{\sqrt{b^2-4a^2\sin^2\frac{1}{2}\theta}}, \end{aligned}$$

となる。ここで $nT = mg/\cos\phi$、次に $\tan\phi = b\sin\phi/(b\cos\phi)$、最後に $2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta = \sin\theta$ を用いた。これが求める大きさである。

静止状態からの解放

偶力を取り除くと、円板はねじれが戻りながら落下する。糸は伸びず、ぴんと張ったままなので仕事をしない。各糸の張力は、取り付け点の、天井の固定点に対する相対速度に垂直だからである。仕事をする力は重力だけなので、力学的エネルギーは保存される。

上の幾何的考察により、糸が鉛直な位置から円板が α だけ回転したとき、その深さは

$$z(\alpha) = \sqrt{b^2 - 4a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha} = \sqrt{b^2 - 2a^2(1 - \cos\alpha)}.$$

である。円板の運動エネルギー（kinetic energy）は $\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ であり、軸まわりの慣性モーメント（moment of inertia）は $I = \frac{1}{2}ma^2$ である。

> **考えてみよう** 糸が鉛直になったとき、円板の中心はまだ鉛直方向の速度をもっているだろうか？

もっていない。微分すると

$$\dot{z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\alpha}\,\dot{\alpha} = -\frac{a^2 \sin\alpha}{z}\,\dot{\alpha},$$

となり、これは $\alpha = 0$ で 0 になる。その瞬間に糸は鉛直であり、円板は最も低い位置にあるので、そこでは運動エネルギーはすべて回転のエネルギーである。

円板は深さ $\sqrt{b^2 - 4a^2 \sin^2 \frac{1}{2}\theta}$ から深さ b まで落下する。エネルギー保存により

$$\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} m a^2 \omega^2 = mg\left(b - \sqrt{b^2 - 4a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta}\right),$$

すなわち

$$\frac{a^2\omega^2}{4g} = b - \sqrt{b^2 - 4a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta},$$

となり、求める式が得られる。

検算

- **仮想仕事。** 偶力に逆らって円板をさらに $\delta\theta$ だけ回すと、円板は $-\delta z$ だけ上昇するので、$C = mg\,|\mathrm{d}z/\mathrm{d}\theta| = mg\,a^2 \sin\theta / z$ である。これはモーメントを考えて求めた偶力とちょうど一致する。
- **小さなねじれ。** θ が小さいとき $C \approx mga^2\theta/b$ であり、これは二本吊り（bifilar suspension、ここでは n 本吊り）のよく知られた復元偶力である。
- **数値計算。** n 本の糸を三次元空間に具体的に配置し、ランダムな a, b, θ, m, n に対して張力のモーメントを合計した。結果は公式と一致した。また、$a = 1$、$b = 3$、

$\theta = 2$、$g = 9.81$ として、解放後の運動を数値的に積分した。糸が鉛直になったときに $a^2\omega^2/(4g) = 0.51651$ が得られ、$3 - \sqrt{9 - 4\sin^2 1} = 0.51651$ と一致した。

よくある間違い

- 張力の水平成分の腕の長さを $a\cos\frac{1}{2}\theta$ ではなく a としてしまう。力は接線ではなく弦に沿ってはたらく。
- ねじると円板が**上昇する**ことを忘れる。この高さの変化こそが、最後の小問でのエネルギーの源である。
- 並進の運動エネルギー $\frac{1}{2}m\dot{z}^2$ を含めておきながら、糸が鉛直のときにそれが消えることに気づかない。

STEP のその先へ

これは運動が拘束された、自由度（degree of freedom）1 の系である。深さはねじれ角の決まった関数なので、エネルギーは α と $\dot{\alpha}$ だけに依存する。ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）は、この観察を運動方程式に変える。また、偶力がちょうど $mg\,\mathrm{d}z/\mathrm{d}\alpha$ になる理由も説明してくれる。これが仮想仕事の原理（principle of virtual work）である。$\alpha = 0$ のまわりで線形化（linearise）すると単振動（simple harmonic）のねじれ振動が得られ、これが二本吊りを用いて慣性モーメントを測定する原理である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の回転とエネルギーを用いた方法をこの水準で扱っている。

解答例

STEP III 2011、第 12 問

確率・統計 ・ 確率母関数による複合分布

STEP III 2011、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/11-s3-q12

鍵となる考え方

分布の平均（mean）と分散（variance）について必要なことはすべて、その確率母関数（probability generating function, pgf）の $t = 1$ における 1 階と 2 階の導関数に含まれている。そこで、合成関数（composite function）$G(H(t))$ を連鎖律（chain rule）で（2 回）微分し、$t = 1$ を代入して $H(1) = 1$ を用いる。硬貨の問題では、N は幾何分布（geometric distribution）に従い、各 X_i は公正な硬貨 1 回分の指示変数（indicator）である。したがって、どちらの確率母関数も単純であり、$G(H(t))$ は等比級数（geometric series）として展開できる有理関数となる。

解答

一般的な結果

非負整数値をとる任意の確率変数 Z で、確率母関数が $P(t) = \mathrm{E}(t^Z)$ であるものについて、$P(1) = 1$ および

$$P'(1) = \mathrm{E}(Z), \qquad P''(1) = \mathrm{E}\big(Z(Z-1)\big),$$

が成り立ち、したがって

$$\mathrm{Var}(Z) = P''(1) + P'(1) - \big(P'(1)\big)^2.$$

である。$\mu = \mathrm{E}(X_i) = H'(1)$、$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_i)$ とおき、Y の確率母関数を $K(t) = G(H(t))$ と書く。

連鎖律により $K'(t) = G'(H(t))\,H'(t)$ である。$H(1) = 1$ であるから

$$\mathrm{E}(Y) = K'(1) = G'(1)H'(1) = \mathrm{E}(N)\,\mathrm{E}(X_i),$$

となり、これが 1 つ目の結果である。

もう一度微分すると（積の微分法則（product rule）を用い、続いて連鎖律を用いる）

$$K''(t) = G''(H(t))\big(H'(t)\big)^2 + G'(H(t))\,H''(t),$$

となるので、再び $H(1) = 1$ を用いて

$$K''(1) = G''(1)\mu^2 + \mathrm{E}(N)\,H''(1).$$

を得る。上の分散の公式を N と X_i に適用すると

$$G''(1) = \mathrm{Var}(N) - \mathrm{E}(N) + \big(\mathrm{E}(N)\big)^2, \qquad H''(1) = \sigma^2 - \mu + \mu^2.$$

である。

> **考えてみよう** $G''(1)$ と $H''(1)$ を書き直さずに、$K''(1)$ から直接 $\mathrm{Var}(Y)$ を計算すればよいのではないか。なぜそうしないのだろうか。

求めたい答えは階乗モーメント（factorial moments）ではなく分散で表されたものだからである。$G''(1)$ と $H''(1)$ を $\mathrm{Var}(N)$ と σ^2 を用いて表すことで、不要な項が打ち消し合う。$m = \mathrm{E}(N)$ とおくと

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) &= K''(1) + K'(1) - \big(K'(1)\big)^2 \\ &= \big(\mathrm{Var}(N) - m + m^2\big)\mu^2 + m\big(\sigma^2 - \mu + \mu^2\big) + m\mu - m^2\mu^2 \\ &= \mathrm{Var}(N)\mu^2 + m\sigma^2 + \big(-m\mu^2 + m\mu^2\big) + \big(m^2\mu^2 - m^2\mu^2\big) + \big(-m\mu + m\mu\big) \\ &= \mathrm{Var}(N)\big(\mathrm{E}(X_i)\big)^2 + \mathrm{E}(N)\,\mathrm{Var}(X_i),\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

硬貨の問題

N の確率母関数。 初めて表が出るのが n 回目の投げであるのは、最初の $n-1$ 回が裏で n 回目が表のときであるから、$n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して $\mathrm{P}(N = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ である（幾何分布）。よって $|t| < 2$ のとき

$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^n = \frac{t/2}{1 - t/2} = \frac{t}{2 - t}.$$

各 X_i の確率母関数。 追加の投げのうち i 回目が表ならば $X_i = 1$、そうでなければ $X_i = 0$ とする。このとき $Y = X_1 + \cdots + X_N$ であり、$H(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}(1 + t)$ である。追加の投げは互いに独立であり、また N を決めた投げとも独立であるから、一般的な結果の条件が満たされる。

Y の確率母関数。

$$G(H(t)) = \frac{\frac{1}{2}(1+t)}{2-\frac{1}{2}(1+t)} = \frac{1+t}{3-t}.$$

平均と分散。 $p = \frac{1}{2}$ の幾何分布では $\mathrm{E}(N) = 1/p = 2$、$\mathrm{Var}(N) = (1-p)/p^2 = 2$ である（あるいは G を微分してもよい。$G'(t) = 2/(2-t)^2$、$G''(t) = 4/(2-t)^3$ より $G'(1) = 2$、$G''(1) = 4$ となり、$\mathrm{Var}(N) = 4+2-4 = 2$ である）。各 X_i はベルヌーイ分布（Bernoulli distribution）$\mathrm{Bernoulli}\left(\frac{1}{2}\right)$ に従うので、$\mathrm{E}(X_i) = \frac{1}{2}$、$\mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{4}$ である。したがって

$$\mathrm{E}(Y) = 2\cdot\tfrac{1}{2} = 1, \qquad \mathrm{Var}(Y) = 2\cdot\tfrac{1}{4} + 2\cdot\tfrac{1}{4} = 1.$$

Y の分布。 $|t| < 3$ のとき、次のように展開する。

$$\frac{1+t}{3-t} = \frac{1+t}{3}\cdot\frac{1}{1-t/3} = \frac{1+t}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{3^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k+1}}{3^{k+1}}.$$

t^0 の係数は 1 つ目の和からのみ生じる。$r \geq 1$ に対して t^r の係数は $\dfrac{1}{3^{r+1}} + \dfrac{1}{3^r} = \dfrac{4}{3^{r+1}}$ である。よって

$$\mathrm{P}(Y=0) = \frac{1}{3}, \qquad \mathrm{P}(Y=r) = \frac{4}{3^{r+1}} \quad (r = 1,2,3,\ldots).$$

検算

- 確率の総和は 1 になる：$\frac{1}{3} + 4\sum_{r\geq 1} 3^{-(r+1)} = \frac{1}{3} + 4\cdot\frac{1}{6} = 1$。
- $\mathrm{P}(Y=0)$ を直接求めると $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n\geq 1} 4^{-n} = \frac{1}{3}$ である。同様に $\mathrm{P}(Y=1) = \sum_{n\geq 1} n\,4^{-n} = \frac{4}{9}$ であり、$4/3^2$ と一致する。
- $n \leq 200$ の範囲で $\mathrm{P}(N=n)\binom{n}{r}2^{-n}$ を厳密に足し合わせると、$r \leq 7$ について $\mathrm{P}(Y=r)$ が再現され、平均と分散はともに 1.000 となった。200 000 回のシミュレーションでは 0.996 と 0.994 が得られた。

よくある間違い

- N が 0 から始まるとしてしまう（確率母関数が $1/(2-t)$ になる）。ここでの N は表が出た投げも数えるので、$N \geq 1$ である。
- $P''(1)$ が $\mathrm{E}(Z^2)$ ではなく $\mathrm{E}(Z^2) - \mathrm{E}(Z)$ であることを忘れ、分散の公式の $+P'(1)$ を落としてしまう。
- すべての $r \geq 0$ に対して $4/3^{r+1}$ と答えてしまう。$r = 0$ の項だけは異なる。

STEP のその先へ

Y は**確率和**（random sum）（複合分布（compound distribution））であり、分散の公式は全分散の公式（law of total variance）$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}\big(\mathrm{Var}(Y \mid N)\big) + \mathrm{Var}\big(\mathrm{E}(Y \mid N)\big)$ の特別な場合である。確率母関数の合成は分岐過程（branching process）の原動力でもある。分岐過程では $G(G(\cdots G(t)))$ が第 n 世代の大きさを与え、絶滅確率は G の不動点（fixed point）となる。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、母関数、確率和、分岐過程をちょうどこの水準で扱っている。

解答例

STEP III 2011、第 13 問

確率・統計 ・ 離散分布の最頻値

STEP III 2011、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/11-s3-q13

鍵となる考え方

離散確率変数（discrete random variable）の最も起こりやすい値を求めるとき、微分は使わない。隣り合う確率どうしを比べるのである。比（ratio）$\mathrm{P}(X=r+1)/\mathrm{P}(X=r)$ は r の簡単な有理関数であり、それがいつ 1 を超えるかを問うと、r についての 1 次不等式になる。比が 1 より大きい間は確率は増加し、それを下回ると減少に転じるので、最大値は切り替わる直前の r でとられる。復元抽出（with replacement）でも非復元抽出（without replacement）でも同じ方法が使え、変わるのは比だけである。

解答

小問 (i)

復元抽出では各回の取り出しは独立（independent）であり、それぞれ確率 $p=b/n$ で黒球となるので、$X\sim \mathrm{B}(k,p)$ である：

$$\mathrm{P}(X=r)=\binom{k}{r}p^r(1-p)^{k-r},\qquad r=0,1,\ldots,k.$$

まず $0<b<n$ と仮定する。このとき、これらの確率はすべて正である。$0\le r\le k-1$ に対して

$$\frac{\mathrm{P}(X=r+1)}{\mathrm{P}(X=r)}=\frac{k-r}{r+1}\cdot\frac{p}{1-p}=\frac{(k-r)\,b}{(r+1)(n-b)}.$$

分母は正であるから、この比が 1 を超えるのは次のときであり、かつそのときに限る：

$$\begin{aligned} & (k-r)b > (r+1)(n-b) \\ \iff \quad & kb - rb > rn - rb + n - b \\ \iff \quad & (k+1)b > (r+1)n \\ \iff \quad & r+1 < \frac{(k+1)b}{n}. \end{aligned}$$

同様に、

$$m = \frac{(k+1)b}{n}.$$

とおくと、比が 1 に等しいのは $r+1 = m$ のときに限り、1 より小さいのは $r+1 > m$ のときに限る。したがって、r が増加するにつれて、$\mathrm{P}(X = r)$ は到達先の値が $r+1 < m$ となる各段階では狭義に増加し、到達先が $r+1 > m$ となる各段階では狭義に減少する。$0 < b < n$ より $0 < m < k+1$ であるから、切り替わりは範囲 $0, \ldots, k$ の内部で起こることに注意する。

考えてみよう m が整数でないとき、最大の確率は正確にはどこでとられるか？

m が整数でないとき、$M = \lfloor m \rfloor$ とおくと、$M < m < M+1$ かつ $0 \leq M \leq k$ である。確率は $\mathrm{P}(X = M)$ まで狭義に増加し（各段階の到達先は $\leq M < m$ である）、その後は狭義に減少する（以降の各段階の到達先は $\geq M+1 > m$ である）。よって、最も起こりやすい黒球の個数はただ一つで、

$$\left\lfloor \frac{(k+1)b}{n} \right\rfloor,$$

となり、示すべきことが示された。

一意でない場合。 m が整数のとき、$r = m-1$ から $r = m$ への段階の比はちょうど 1 であるから $\mathrm{P}(X = m-1) = \mathrm{P}(X = m)$ となり、この等しい二つの値は他のどの値よりも大きい（確率は $m-1$ まで狭義に増加し、m の後は狭義に減少する）。$1 \leq m \leq k$ であるから、どちらもとりうる値である。したがって、答えが一意でないのは（$0 < b < n$ のもとで）$(k+1)b/n$ が整数であるときに限り、そのとき $m-1$ と m が同じく最も起こりやすい値となる。たとえば $n = 3$、$b = 1$、$k = 5$ のとき $m = 2$ であり、実際 $\mathrm{P}(X = 1) = \mathrm{P}(X = 2) = \frac{80}{243}$ である。

自明な場合はこの議論の外にある。$b = 0$ ならば確実に $X = 0$ であり、これは公式と一致する。$b = n$ ならば確実に $X = k$ であるが、上の比は $n-b$ で割ることを含むので、公式（これは $k+1$ を与えてしまう）は適用できない。

小問 (ii)

非復元抽出では、X は超幾何分布（hypergeometric distribution）に従う。標本を k 個の球からなる順序のない集合として選ぶと、$\binom{n}{k}$ 通りの集合はすべて同様に確からしいので、

$$\mathrm{P}(X=r)=\frac{\binom{b}{r}\binom{n-b}{k-r}}{\binom{n}{k}}.$$

$k\le b$ であるから、とりうる最大の値は $r=k$ である。黒でない球は $n-b$ 個より多くは取り出せないので、最小の値は $r_0=\max(0,k-(n-b))$ である。$r_0\le r\le k$ では確率は正であり、$r_0\le r\le k-1$ に対しては、$\binom{a}{r+1}=\binom{a}{r}\frac{a-r}{r+1}$ と $\binom{a}{s-1}=\binom{a}{s}\frac{s}{a-s+1}$ を用いて

$$\frac{\mathrm{P}(X=r+1)}{\mathrm{P}(X=r)}=\frac{b-r}{r+1}\cdot\frac{k-r}{n-b-k+r+1}.$$

この範囲ではどちらの分母も正であるから、比が 1 を超えるのは次のときであり、かつそのときに限る：

$$(b-r)(k-r)>(r+1)(n-b-k+r+1).$$

展開すると、左辺は $bk-r(b+k)+r^2$、右辺は $(r+1)(n-b-k+1)+r^2+r$ となる。r^2 の項は打ち消し合い、不等式は次のようになる：

$$\begin{aligned} & bk-r(b+k)>r(n-b-k+1)+(n-b-k+1)+r \\ \iff\quad & bk+b+k+1>r(n+2)+(n+2) \\ \iff\quad & r+1<\frac{(b+1)(k+1)}{n+2}. \end{aligned}$$

考えてみよう 切り替わる点は、とりうる値の範囲 $r_0,\dots,k$ の内部に本当にあるか？

$m=\frac{(b+1)(k+1)}{n+2}$ とおく。$b+1<n+2$ であるから $m<k+1$ である。下端については、$m>0$ は明らかであり、$r_0=k+b-n>0$ の場合には $(b+1)(k+1)>(n+2)(k+b-n)$ を示す必要がある。$x=n-b$、$y=n-k$ とおくと、左辺から右辺を引いたものは

$$(n+1-x)(n+1-y)-\left[(n+1)^2-1-(n+2)(x+y)\right]=1+x+y+xy>0.$$

よって、どの場合も $r_0<m<k+1$ であり、小問 (i) の議論がそのまま通用する。すなわち、確率は $r+1<m$ の間は狭義に増加し、$r+1>m$ となると狭義に減少する。したがって、一意である場合、最も起こりやすい黒球の個数は

$$\left\lfloor\frac{(b+1)(k+1)}{n+2}\right\rfloor.$$

である。一意でないのは $(b+1)(k+1)/(n+2)$ が整数のときに限る。そのとき $m-1$ と m（$r_0 \leq m-1$ かつ $m \leq k$ であるから、どちらもとりうる値である）は同じ確率をもち、他のどの値よりも起こりやすい。たとえば $n=10$、$b=7$、$k=5$ のとき $m=4$ であり、$X=3$ と $X=4$ が同率で、それぞれの確率は $\frac{105}{252} = \frac{5}{12}$ である。

検算

- コンピュータを用いて、すべての $n \leq 24$、$0 \leq b \leq n$、$1 \leq k \leq 19$（小問 (ii) では $k \leq b$）について両方の分布を分数で厳密に計算し、総当たりで最頻値（mode）を求め、すべての場合（小問 (ii) では 2565 通り）で両方の公式と両方の同率条件を確認した。
- $n=10$、$b=6$、$k=4$ のとき：$m = \frac{35}{12}$ なので公式は 2 を与え、実際 $X=2$ がただ一つの最頻値である。
- n が k に比べて非常に大きければ、数個の球を取り除いても黒球の割合はほとんど変わらないので、小問 (ii) は小問 (i) と同じようになるはずである。実際そうなっている：$(b+1)(k+1)/(n+2) \approx (k+1)b/n$。

よくある間違い

- 最頻値を平均の整数部分 $\lfloor kb/n \rfloor$ と結論してしまうこと。最頻値は平均に近いが、常に平均の整数部分に等しいとは限らない。
- 比がちょうど 1 のときには最頻値が一つではなく二つになることを忘れること。
- 小問 (ii) で $(r+1)(n-b-k+r+1)$ を展開する際に符号を誤ること。r^2 の項が打ち消し合うことは、よい確認になる。

STEP のその先へ

連続する確率どうしを比べることは、任意の離散分布の最頻値を求める標準的な方法であり、同じ計算により、小問 (i) の極限の場合としてポアソン分布（Poisson distribution）の最頻値 $\lfloor \lambda \rfloor$ が得られる。超幾何分布は標本理論（sampling theory）や、統計学におけるフィッシャー（Fisher）の正確検定（exact test）の中心にある。このように確率が増加してから減少する分布は単峰（unimodal）であるという。二項分布と超幾何分布の場合、この性質はより強い性質である対数凹性（log-concavity）から導かれる。さらに詳しくは、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）や Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）を参照せよ。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

2011 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

