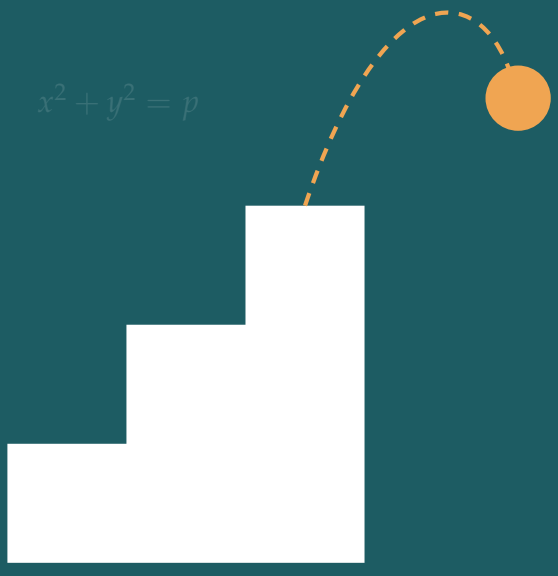
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

2010 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

2010 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

2010 年解答例

2010 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 39 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 平方完成 純粋数学 3

Q2 曲線の概形 純粋数学 7

Q3 和積の公式 純粋数学 12

Q4 置換積分 純粋数学 16

Q5 二項係数の恒等式 純粋数学 20

Q6 階数低下法 純粋数学 24

Q7 ベクトルと交わる直線 純粋数学 28

Q8 無限降下法 純粋数学 32

Q9 摩擦とつり合い 力学 36

Q10 ベクトルによる運動学 力学 40

Q11 円周上での衝突 力学 44

Q12 裾の和を用いた期待値 確率・統計 48

Q13 ポアソン過程の待ち時間 確率・統計 52

STEP II

Q1 曲率と曲率円 純粋数学 56

Q2 三角関数の積分法 純粋数学 59

Q3 フィボナッチ数と漸化式 純粋数学 63

Q4 置換積分 純粋数学 66

Q5 ベクトルのなす角と円錐 純粋数学 70

Q6 正四面体の幾何 純粋数学 74

Q7 3次方程式 純粋数学 78

Q8 曲線で囲まれた図形の面積 純粋数学 82

Q9 放物体の衝突 力学 86

Q10 弾性衝突 力学 . . . 89
Q11 3力のつり合い 力学 . . . 93
Q12 平均値と中央値 確率・統計 . . . 97
Q13 独立な事象 確率・統計 . . . 101

STEP III

Q1 平均と分散 純粋数学 . . . 105
Q2 定積分 純粋数学 . . . 109
Q3 1の冪根 純粋数学 . . . 113
Q4 多項式の共通根 純粋数学 . . . 117
Q5 座標幾何による作図 純粋数学 . . . 121
Q6 3次元の回転 純粋数学 . . . 125
Q7 マクローリン級数 純粋数学 . . . 129
Q8 商の微分法と積分 純粋数学 . . . 134
Q9 円周上の運動 力学 . . . 138
Q10 微小振動 力学 . . . 142
Q11 摩擦と相対運動 力学 . . . 146
Q12 幾何分布の期待値 確率・統計 . . . 150
Q13 線形結合の相関 確率・統計 . . . 154

解答例

STEP I 2010、第 1 問

純粋数学 • 平方完成

> **STEP I 2010、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q1

鍵となる考え方

この恒等式（identity）は、扱いにくい二次式を二つの平方の和と定数で書き直すものである。二つ目の方程式も同じ二つの括弧 $x-y+2$ と $2x-y$ を用いて書けることに気づけば、問題は二つの新しい未知数に関する簡単な二つの方程式に帰着する。これらは新しい未知数の平方について一次であるから、直接解くことができる。

解答

恒等式

右辺を展開すると、

$$\begin{aligned} &a(x-y+2)^2+b(cx+y)^2+d \\ &\quad =a(x^2+y^2-2xy+4x-4y+4)+b(c^2x^2+2cxy+y^2)+d \\ &\quad =(a+bc^2)x^2+(a+b)y^2+(2bc-2a)xy+4ax-4ay+(4a+d). \end{aligned}$$

これは恒等式であるから、$5x^2+2y^2-6xy+4x-4y$ と係数を比較する（comparing coefficients）ことができる：

$$\begin{aligned}
x:&\quad 4a=4, && \text{よって} a=1;\\
y:&\quad -4a=-4, && \text{これは一致する;}\\
y^2:&\quad a+b=2, && \text{よって} b=1;\\
xy:&\quad 2bc-2a=-6, && \text{よって} 2c=-4,\ c=-2;\\
x^2:&\quad a+bc^2=5, && \text{確認：} 1+4=5;\\
\text{定数項}:&\quad 4a+d=0, && \text{よって} d=-4.
\end{aligned}$$

x^2 の係数だけからは $c^2=4$ しか得られず、符号を決めるのは xy の係数であることに注意せよ。したがって

$$a=1,\qquad b=1,\qquad c=-2,\qquad d=-4,$$

すなわち

$$5x^2+2y^2-6xy+4x-4y\equiv(x-y+2)^2+(2x-y)^2-4,$$

である。ここで $(-2x+y)^2$ を $(2x-y)^2$ と書いた。

連立方程式

恒等式により、一つ目の方程式は

$$(x-y+2)^2+(2x-y)^2=13.$$

となる。

> **考えてみよう** 二つ目の方程式は見た目が異なる。これも同じ二つの括弧を用いて書けるだろうか？

その x と y の一次の項は $8x-8y$ であり、一つ目の方程式の項のちょうど 2 倍である。そこで、一次の項が合う $2(x-y+2)^2$ を試してみる：

$$2(x-y+2)^2=2x^2+2y^2-4xy+8x-8y+8.$$

左辺の残りは

$$6x^2+3y^2-8xy+8x-8y-2(x-y+2)^2=4x^2+y^2-4xy-8=(2x-y)^2-8.$$

である。よって二つ目の方程式は $2(x-y+2)^2+(2x-y)^2-8=14$、すなわち

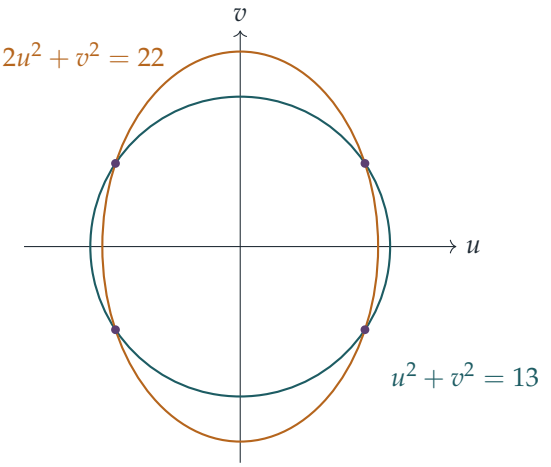
$$2(x-y+2)^2+(2x-y)^2=22.$$

となる。（恒等式を求めたときと同じように、$\alpha(x-y+2)^2+\beta(\gamma x+y)^2+\delta$ の係数を比較して求めることもできる。）

ここで $u=x-y+2$、$v=2x-y$ とおく。連立方程式（simultaneous equations）は

$$u^2+v^2=13, \qquad 2u^2+v^2=22.$$

となる。辺々引くと $u^2=9$ が得られ、したがって $v^2=4$ である。よって $u=\pm3$、$v=\pm2$ であり、符号はそれぞれ独立に選べるので、(u,v) の組は四つ得られる。



x と y に戻すには引き算をすればよい：$v-(u-2)=(2x-y)-(x-y)=x$ であるから

$$x=v-u+2, \qquad y=2x-v=v-2u+4.$$

この変数変換（change of variables）は一次かつ可逆であるから、各 (u,v) に対して (x,y) はちょうど一つ定まる。四つの解は次のとおりである：

u	v	x	y
3	2	1	0
3	−2	−3	−4
−3	2	7	12
−3	−2	3	8

よって

$$(x,y)=(1,0), \quad (-3,-4), \quad (7,12), \quad (3,8).$$

検算

$(1,0)$ を代入すると、一つ目の方程式は $5+4=9$、二つ目は $6+8=14$ となる。$(7,12)$ については $245+288-504+28-48=9$ および $294+432-672+56-96=14$ である。コンピュータを用いて、二つの恒等式を 1000 個のランダムな有理点で確かめ、また四つの組がすべて両方の方程式を満たすことも確かめた。$|x|,|y|\le 50$ を満たすすべての整数の組を総当たりで調べたところ、解はちょうどこの四つであった。二つの円錐曲線（conic）の交点は高々四つであるから、見落とした解はない。

よくある間違い

- xy の係数を確認せずに、$c^2=4$ から $c=2$ としてしまう。
- 正の平方根だけを考え、四つの解のうち一つしか求めない。
- もとの方程式から直接変数を消去しようとする。これは四次方程式（quartic）になり、手計算では非常に骨が折れる。

STEP のその先へ

二次形式を平方の組み合わせとして書き表すことは、二次形式（quadratic form）の理論の出発点である。対称行列（symmetric matrix）を対角化する（diagonalising）ことで、$Ax^2+Bxy+Cy^2$ を $\lambda_1 u^2+\lambda_2 v^2$ に変える一次の変数変換を常に見つけることができ、円錐曲線はこのようにして分類される。本問では、二つの方程式がたまたま同じ二つの平方を共有していたため、これほどきれいに分離できたのである。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、対称行列と二次形式をわかりやすく扱っている。

解答例

STEP I 2010、第 2 問

純粋数学 ・ 曲線の概形

STEP I 2010、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/10-s1-q2

鍵となる考え方

商の微分法（quotient rule）で微分し、決して 0 にならない因数 e^x をくくり出す。すると停留点（stationary point）は 2 次式の根となるので、「停留点が 2 つある」とはその判別式（discriminant）についての主張になる。概形を描くには、同じ 2 次式の符号から曲線の増減がわかり、漸近線（asymptote）の近くおよび $x \to \pm\infty$ のときのふるまいから残りがわかる。

解答

$y = \dfrac{x-a}{x-b}\,\mathrm{e}^x$ とおく。これは $x \neq b$ で定義される。$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{x-a}{x-b}\right) = \dfrac{(x-b)-(x-a)}{(x-b)^2} = \dfrac{a-b}{(x-b)^2}$ であるから、積の微分法（product rule）により

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x-a}{x-b}\,\mathrm{e}^x + \frac{a-b}{(x-b)^2}\,\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^x\left[(x-a)(x-b)+(a-b)\right]}{(x-b)^2}.$$

$x \neq b$ のとき $\mathrm{e}^x > 0$ かつ $(x-b)^2 > 0$ であるから、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ の符号は

$$q(x) = (x-a)(x-b)+(a-b) = x^2 - (a+b)x + ab + a - b,$$

の符号に一致し、停留点はちょうど q の根のうち $x = b$ 以外のものである。

考えてみよう q の根が、曲線の定義されていない $x = b$ にくることはありうるだろうか？

これは問題にならない。$q(b) = a - b$ であるから、$x = b$ が根になるのは $a = b$ のときに限る。しかしそのとき曲線は単に $y = \mathrm{e}^x$（ただし $x = b$ に穴があく）であり、停留

点をまったくもたない。したがって、どの場合も停留点はちょうど q の実数解であり、停留点が2つあるのは q が異なる2つの実数解をもつとき、すなわち判別式が正のときに限る：

$$(a+b)^2 - 4(ab+a-b) = (a-b)^2 - 4(a-b) = (a-b)(a-b-4) > 0.$$

2つの因数の積が正になるのは、両方が正か両方が負のときである。両方が負であることは $a-b<0$ を意味し、両方が正であることは $a-b>4$ を意味する（これはすでに $a-b>0$ を含む）。よって、停留点が2つあるためには

$$a-b<0 \quad \text{または} \quad a-b>4,$$

が必要であり、これが示すべきことであった。（逆に、どちらの条件からも停留点が2つ得られる。）

小問 (i)

$a=0$、$b=\frac{1}{2}$ のとき $a-b=-\frac{1}{2}<0$ であり、

$$y=\frac{x\,\mathrm{e}^x}{x-\frac{1}{2}}, \qquad q(x)=x^2-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}=(x-1)\big(x+\tfrac{1}{2}\big).$$

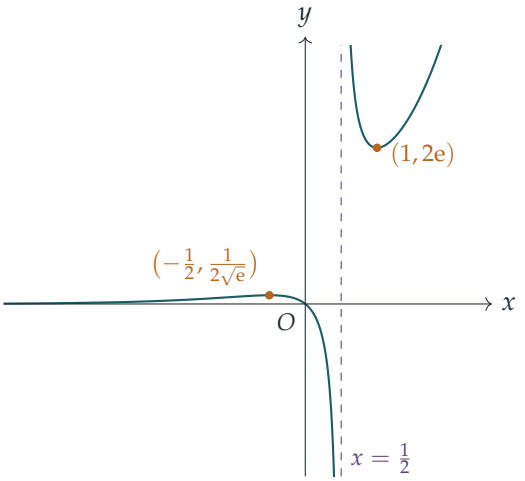
停留点は $x=-\frac{1}{2}$ と $x=1$ にあり、題意のとおり、鉛直漸近線 $x=\frac{1}{2}$ の両側に1つずつある。それらの y 座標は

$$y\big(-\tfrac{1}{2}\big)=\frac{-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}}{-1}=\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}\approx 0.30, \qquad y(1)=\frac{\mathrm{e}}{\frac{1}{2}}=2\mathrm{e}\approx 5.44.$$

$x<-\frac{1}{2}$ で $q>0$、$-\frac{1}{2}<x<1$（ただし $x\neq\frac{1}{2}$）で $q<0$、$x>1$ で $q>0$ であるから、点 $\big(-\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}\big)$ は極大点（local maximum）、$(1,2\mathrm{e})$ は極小点（local minimum）である。

その他の特徴：

- $x\to-\infty$ のとき $\frac{x}{x-1/2}\to 1$ かつ $\mathrm{e}^x\to 0$ であるから $y\to 0$ である。$x<0$ では x も $x-\frac{1}{2}$ も負であるから $y>0$ となる。すなわち、曲線は x 軸の負の部分に上から近づく。
- 曲線が座標軸と交わるのは原点のみであり、$0<x<\frac{1}{2}$ で $y<0$ である。
- $x\to\frac{1}{2}^-$ のとき $y\to-\infty$、$x\to\frac{1}{2}^+$ のとき $y\to+\infty$ である（分子は $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1/2}>0$ に近づく）。
- $x\to\infty$ のとき $y\to\infty$ であり、e^x のように増大する。



小問 (ii)

$a=\frac{9}{2}$、$b=0$ のとき $a-b=\frac{9}{2}>4$ であるから、やはり停留点は 2 つある。このとき

$$y=\frac{x-\frac{9}{2}}{x}\,\mathrm{e}^x, \qquad q(x)=x^2-\tfrac{9}{2}x+\tfrac{9}{2}=\tfrac{1}{2}(2x-3)(x-3),$$

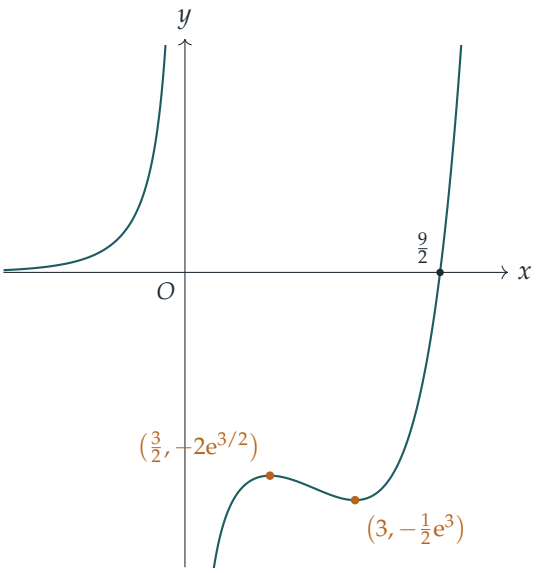
であるから、停留点は $x=\frac{3}{2}$ と $x=3$ にあり、どちらも漸近線 $x=0$ の右側にある。それらの y 座標は

$$y\left(\tfrac{3}{2}\right)=\frac{-3}{\frac{3}{2}}\,\mathrm{e}^{3/2}=-2\mathrm{e}^{3/2}\approx -8.96, \qquad y(3)=\frac{-\frac{3}{2}}{3}\,\mathrm{e}^3=-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^3\approx -10.04.$$

q の符号は $x<\frac{3}{2}$（$x\neq 0$）で正、$\left(\frac{3}{2},3\right)$ で負、$x>3$ で正であるから、$\left(\frac{3}{2},-2\mathrm{e}^{3/2}\right)$ は極大点、$\left(3,-\frac{1}{2}\mathrm{e}^3\right)$ は極小点である。どちらも x 軸より下にあり、極小値は極大値よりわずかに小さいだけなので、その間のくぼみは浅いことに注意せよ。

その他の特徴：

- $x\to-\infty$ のとき $y\to 0$ である。$x<0$ では $x-\frac{9}{2}$ も x も負であるから $y>0$ となる。$x<0$ では（そこで $q>0$ であるから）曲線は増加し、軸のすぐ上から漸近線に向かって上がっていく。
- $x\to 0^-$ のとき $y\to+\infty$、$x\to 0^+$ のとき $y\to-\infty$ である（分子は $-\frac{9}{2}$ に近づく）。
- 軸との交点は $\left(\frac{9}{2},0\right)$ のみである。$\left(0,\frac{9}{2}\right)$ で $y<0$、$x>\frac{9}{2}$ で $y>0$ であり、$x\to\infty$ のとき $y\to\infty$ である。



ここでは y 軸そのものが鉛直漸近線である。

検算

- ランダムな (a,b,x) における y の数値微分は $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ の式と一致する。また、ランダムな (a,b) について q の符号変化を数えると、停留点が2つになるのはちょうど $a-b<0$ または $a-b>4$ のときである。
- (i) では $y(1)=5.4366=2\mathrm{e}$、$y(-\frac{1}{2})=0.3033$ であり、(ii) では $y(\frac{3}{2})=-8.9634$、$y(3)=-10.0428$ である。各点のすぐ両側の値から、極大か極小かが確かめられる。
- 条件の妥当性の確認：(i) では $a-b=-\frac{1}{2}$、(ii) では $a-b=\frac{9}{2}$ であり、当然ながらどちらも許される範囲に入っている。

よくある間違い

- 判別式が $(a-b)^2-4(a-b)$ であることに気づかずに展開してしまう。$a-b$ を用いて書けば、きれいに因数分解できる。
- q の根が漸近線 $x=b$ 上にこないことの確認を忘れる。
- (ii) で極大点と極小点を x 軸の反対側に描いてしまう。どちらも軸より下にあり、曲線が軸と交わるのは $x=\frac{9}{2}$ のみである。

STEP のその先へ

ここでの方法、すなわち導関数の符号と極限から曲線の形を読み取るという方法は、大学最初の解析学の講義において、平均値の定理（Mean Value Theorem）（区間上で導関数が正ならば本当に増加する）と、無限遠での極限の注意深い定義によって厳密なものとなる。$x \to \pm\infty$ のとき e^x がどんな有理関数（rational function）にも勝るという事実も、そこで証明される標準的な結果である。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、これらすべてを見事に扱っている。

解答例

STEP I 2010、第 3 問

純粋数学 • 和積の公式

> **STEP I 2010、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q3

鍵となる考え方

正弦（または余弦）の差を積に変えるのが和積公式（sum-to-product formulae）である。楕円（ellipse）上のパラメータ u と v の点を結ぶ弦（chord）の傾き（gradient）は $\dfrac{b(\sin v - \sin u)}{a(\cos v - \cos u)}$ である。分子も分母も差なので、この公式で因数分解でき、共通因数が約分されて、傾きは和 $u+v$ だけで決まる。すると、二つの弦の比較は二つの余接（cotangent）の比較に帰着する。

解答

三角関数の恒等式

加法定理（compound-angle formulae）を用いると、

$$\begin{aligned}\sin(x+y) - \sin(x-y) &= (\sin x \cos y + \cos x \sin y) - (\sin x \cos y - \cos x \sin y) \\ &= 2\cos x \sin y,\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られる。次に、任意の A と B に対して $x = \frac{1}{2}(A+B)$、$y = \frac{1}{2}(A-B)$ とおくと、$x+y = A$、$x-y = B$ である。恒等式は

$$\sin A - \sin B = 2\cos \tfrac{1}{2}(A+B)\ \sin \tfrac{1}{2}(A-B).$$

となる。同様に、

$$\begin{aligned}\cos(x+y) - \cos(x-y) &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) - (\cos x \cos y + \sin x \sin y) \\ &= -2\sin x \sin y,\end{aligned}$$

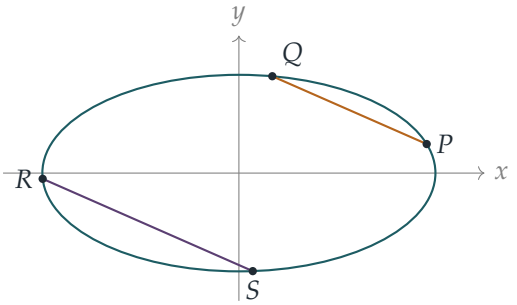
であり、同じ置き換えにより

$$\cos A - \cos B = -2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\,\sin\tfrac{1}{2}(A-B).$$

が得られる。

平行な弦

4 点はすべて楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上にあり、反時計回りに P、Q、R、S の順に並んでいる。図は $a=2$、$b=1$ の場合の平行な弦の組を示している。



弦の傾き。 $[0,2\pi)$ 内の二つのパラメータ $u<v$ を、$(a\cos u, b\sin u)$ と $(a\cos v, b\sin v)$ を通る弦が鉛直でない、すなわち $\cos v \neq \cos u$ となるようにとる。$A=v$、$B=u$ として二つの恒等式を用いると、その傾きは

$$\frac{b(\sin v-\sin u)}{a(\cos v-\cos u)}=\frac{2b\cos\frac{1}{2}(u+v)\,\sin\frac{1}{2}(v-u)}{-2a\sin\frac{1}{2}(u+v)\,\sin\frac{1}{2}(v-u)}=-\frac{b}{a}\cot\tfrac{1}{2}(u+v).$$

である。この約分は正当である。実際、$0<v-u<2\pi$ より $\frac{1}{2}(v-u)$ は 0 と π の間（両端を除く）にあり、$\sin\frac{1}{2}(v-u)\neq 0$ となる。もとの分母は 0 でないので $\sin\frac{1}{2}(u+v)\neq 0$ でもあり、余接は定義される。

$\alpha=\frac{1}{2}(p+q)$、$\beta=\frac{1}{2}(r+s)$ とおく。PQ も SR も鉛直でないので、

$$\text{弦の傾き：}PQ=-\frac{b}{a}\cot\alpha,\qquad \text{弦の傾き：}SR=-\frac{b}{a}\cot\beta,$$

であり、$\sin\alpha\neq 0$ かつ $\sin\beta\neq 0$ である。鉛直でない 2 直線が平行であるのは傾きが等しいときであり、そのときに限る。さらに $b/a\neq 0$ なので、

$$PQ\parallel SR \iff \cot\alpha=\cot\beta.$$

考えてみよう なぜ単純に「cot を約分して」$\alpha = \beta$ と結論してはいけないのだろうか。

cot は単射（one-to-one）ではなく、周期（period）π で同じ値を繰り返すからである。これを正しく扱うために、差を一つの正弦で表す。

$$\cot\alpha - \cot\beta = \frac{\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

分母は 0 でないので、

$$PQ \parallel SR \iff \sin(\beta-\alpha) = 0 \iff \beta - \alpha = k\pi \text{ を満たす整数} k.$$

が存在する。

k の決定。

$$\beta - \alpha = \tfrac{1}{2}\big[(r-p) + (s-q)\big].$$

である。$p < r$ かつ $q < s$ より、二つの括弧はどちらも正なので $\beta - \alpha > 0$ である。4 つのパラメータはすべて $[0, 2\pi)$ にあるので、各括弧は 2π より小さく、$\beta - \alpha < 2\pi$ となる。0 と 2π の間（両端を除く）にある π の倍数は π 自身のみであるから、$k = 1$ である。したがって

$$PQ \parallel SR \iff \tfrac{1}{2}(r+s-p-q) = \pi \iff r+s-p-q = 2\pi.$$

各段階はすべて同値変形なので、これで両方向が示された。

（2 直線が一致することはない。直線と楕円の交点は高々 2 個であり、P、Q、R、S は相異なる 4 点だからである。したがって、ここでの「平行」は、一致しない真の平行を意味する。）

検算

- $p = 0$、$q = \frac{\pi}{2}$、$r = \pi$、$s = \frac{3\pi}{2}$ とすると、$r+s-p-q = 2\pi$ である。このとき $P = (a, 0)$、$Q = (0, b)$、$R = (-a, 0)$、$S = (0, -b)$ であり、PQ と SR の傾きはともに $-b/a$ である。$a = 2$、$b = 1$ とすると、どちらの傾きも -0.5 となる。
- 対称性：条件は $\frac{1}{2}(r+s) = \frac{1}{2}(p+q) + \pi$ を意味する。点の写像 $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ はパラメータに π を加えるものであり、弦 PQ を半回転させると平行な弦が得られるので、これと整合する。
- 数値的にも、ランダムな a, b とランダムな $p < q < r < s$ をとると、$r+s-p-q = 2\pi$ となる場合（構成した約 5000 例）では傾きが正確に一致し、それ以外の場合には一度も一致しなかった。

よくある間違い

- $\cot\alpha = \cot\beta$ からただちに $\alpha = \beta$ としてしまう。これは $r+s = p+q$ を導くが、ここではそれは起こりえない。cot の周期こそが核心なのである。
- $\sin\frac{1}{2}(v-u)$ を約分できる理由を述べ忘れる、あるいは順序 $p < q < r < s$ を用いて $k = 0$ と $k = 2$ を除外していない。

STEP のその先へ

楕円を $(a\cos t, b\sin t)$ と表すと、楕円は単位円を伸縮 $(x,y) \mapsto (ax,by)$ で写した像であることがわかる。このような線形写像（linear map）は平行な直線を平行な直線に写すので、この問題は実は円についての問題である。円では、角 p から角 q への弦は角 $\frac{1}{2}(p+q)$ の半径に垂直であり、結果はほとんど明らかになる。写像で保たれる性質を利用して問題を簡単にするというこの種の考え方は、線形代数（linear algebra）や幾何学の至るところに現れる。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、線形写像が実際に働く様子を見るのによい本である。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には、三角関数の恒等式を用いる STEP 形式の演習がさらに収められている。

解答例

STEP I 2010、第 4 問

純粋数学 • 置換積分

STEP I 2010、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/10-s1-q4

鍵となる考え方

この置換は、x と $x+1$ がともに同じ分母 t^2-1 をもつ簡単な分数になるように選ばれている。そのため、両者の積の平方根がきれいに求まる。こうして積分は問題文の注にある標準的な積分に帰着する。体積については、y を 2 乗すると簡単な対数になる 2 つの項と 1 つの交差項（cross term）が現れ、その交差項こそがちょうど直前に求めた積分なのである。

解答

積分

$x>0$ とする。$t>1$ として置換（substitution）$x=\dfrac{1}{t^2-1}$ を行うことは正当である。実際、t について解くと

$$t=\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}},$$

となり、t が $(1,\infty)$ を動くとき、x は $(0,\infty)$ を（減少しながら）動き、各 t に対して x の値がただ 1 つ対応する。

さて、

$$x+1=\frac{1}{t^2-1}+1=\frac{t^2}{t^2-1},\qquad \text{よって}\qquad x(x+1)=\frac{t^2}{(t^2-1)^2}.$$

$t>1$ であるから、t と t^2-1 はともに正であり、

$$\sqrt{x(x+1)}=\frac{t}{t^2-1}.$$

考えてみよう 平方根をとるときに、なぜ $t>1$ が必要だったのだろうか。

平方根は決して負にならないので、$\sqrt{t^2/(t^2-1)^2}=|t|/|t^2-1|$ である。条件 $t>1$ により、2 つの絶対値記号をともに外すことができる。これは置換の選び方の理由も説明している。$t^2-1>0$ こそが、ちょうど $x>0$ を保証する条件なのである。

微分すると $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{2t}{(t^2-1)^2}$ である。したがって

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{t^2-1}{t}\cdot\left(-\frac{2t}{(t^2-1)^2}\right)\mathrm{d}t=-2\int\frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t\\&=-2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c=\ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right)+c,\end{aligned}$$

となる。ここで、問題文の注を $a=1$ として用い、さらに $t>1$ より $(t-1)/(t+1)$ が正であることを用いた。

次に、$t=\sqrt{x+1}/\sqrt{x}$ を用いて x に戻す。分子と分母に $\sqrt{x}$ を掛けると

$$\frac{t+1}{t-1}=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2}{(x+1)-x}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2,$$

となる。ここで、分子と分母に $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ を掛け、2 乗の差の公式（difference of two squares）を用いた。よって

$$\int\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\,\mathrm{d}x=2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)+c,$$

となり、示すべき式が得られた。

体積

$x>0$ において、$\sqrt{x}<\sqrt{x+1}$ より $1/\sqrt{x}>1/\sqrt{x+1}$ となるので、曲線は $y>0$ を満たす。よって、曲線と x 軸の間の領域を回転させてできる回転体の体積（volume of revolution）は $V=\pi\int y^2\,\mathrm{d}x$ である。展開すると

$$y^2=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{\sqrt{x(x+1)}},$$

であり、最後の項は前半の被積分関数の 2 倍である。したがって

$$V=\pi\Big[\ln x+\ln(x+1)\Big]_{1/8}^{9/16}-2\pi\Big[2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\Big]_{1/8}^{9/16}.$$

積分区間の端は、平方根がきれいな値になるように選ばれている。

▶ $x=\frac{9}{16}$ では、$\sqrt{x}=\frac{3}{4}$、$\sqrt{x+1}=\frac{5}{4}$ で、その和は 2 であり、$x(x+1)=\frac{225}{256}$ である。

- $x = \frac{1}{8}$ では、$\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$、$\sqrt{x+1} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ で、その和は $\frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ であり、$x(x+1) = \frac{9}{64}$ である。

1 つ目の括弧は

$$\ln\frac{225}{256} - \ln\frac{9}{64} = \ln\left(\frac{225}{256}\cdot\frac{64}{9}\right) = \ln\frac{25}{4},$$

であり、2 つ目の括弧は

$$2\ln 2 - 2\ln\sqrt{2} = 2\ln 2 - \ln 2 = \ln 2.$$

である。したがって

$$V = \pi\ln\frac{25}{4} - 2\pi\ln 2 = \pi\ln\frac{25}{4} - \pi\ln 4 = \pi\ln\frac{25}{16} = 2\pi\ln\frac{5}{4},$$

となり、求める結果が得られた。

検算

- 答えを微分すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right) = \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}},$$

  となる。括弧の中が $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$ に等しいからである。

- 数値的には、シンプソンの公式 (Simpson's rule) により $\pi\int_{1/8}^{9/16} y^2\,\mathrm{d}x \approx 1.402052$ が得られ、$2\pi\ln\frac{5}{4} \approx 1.402052$ と一致する。シンプソンの公式からは $\int_{1/8}^{9/16}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}} = \ln 2 \approx 0.693147$ も確かめられる。

よくある間違い

- $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ のマイナス符号を忘れること。この符号こそが $\ln\frac{t-1}{t+1}$ を $\ln\frac{t+1}{t-1}$ に変えるのである。
- y^2 を $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ と展開してしまうこと。交差項 $-2/\sqrt{x(x+1)}$ こそが前半の要点である。
- 体積の公式で係数 π を忘れること、あるいは π の代わりに 2π を用いること。

STEP のその先へ

答え $2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)$ は、実は $2\operatorname{arsinh}\sqrt{x}$ である。なぜなら $\operatorname{arsinh} u = \ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)$ だからである。置換 $x = \sinh^2\theta$ を用いれば、同じ結果が 1 行で得られる。

平方根を有理化するような置換を選ぶことは体系的な技法（オイラー（Euler）置換（Euler substitutions））であり、x と $\sqrt{ax^2+bx+c}$ の有理関数（rational function）の積分はすべて初等関数（elementary functions）で求められるという結果の背後にある。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この趣旨の積分がさらに多く収められている。

解答例

STEP I 2010、第 5 問

純粋数学 ・ 二項係数の恒等式

STEP I 2010、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/10-s1-q5

鍵となる考え方

これらの和はどれも、$(1+x)^n$ の二項展開（binomial expansion）が姿を変えたものであり、何らかの操作を施した後に $x=1$ を代入して得られる。$\binom{n}{k}$ の前に付く因子 k は x^k を微分すると現れるものであり、因子 $\frac{1}{k+1}$ は x^k を積分すると現れるものである。そこで、恒等式

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

を微分あるいは積分し、そのうえで $x=1$ を代入する。k^2 については、途中で x を掛ける操作を挟みながら 2 回微分する必要がある。

解答

以下、n は正の整数であり、

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n \qquad (*)$$

がすべての実数 x に対して成り立つ。両辺はともに多項式（polynomial）であるから、項別に微分しても積分しても恒等式はそのまま成り立つ。

小問 (i)

$(*)$ に $x=1$ を代入する。左辺は 2^n となり、各 x^k は 1 になるので、

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

となり、示すべき式が得られる。

小問 (ii)

$(*)$ を x について微分する。定数項は消え、$\binom{n}{k}x^k$ は $k\binom{n}{k}x^{k-1}$ になる：

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1}. \qquad (**)$$

$x = 1$ を代入すると

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n\,2^{n-1},$$

となり、示すべき式が得られる。

小問 (iii)

今度は $\binom{n}{k}$ を $k+1$ で割ったものが欲しい。これは $\int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}$ から得られる。$(*)$ を 0 から 1 まで積分すると、左辺は

$$\int_0^1 (1+x)^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1},$$

であり、右辺は

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

である。したがって

$$\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right),$$

となり、示すべき式が得られる。下端が重要であることに注意しよう。0 から積分することによって -1 が生じるのである。

小問 (iv)

> **?** **考えてみよう** $(**)$ をそのままもう一度微分すると、係数は k^2 ではなく $k(k-1)$ になってしまう。代わりに k^2 を得るにはどうすればよいか？

2 回目の微分をする前に、$(**)$ に x を掛ける。こうすると $k\binom{n}{k}$ とともに x^k のべきが元に戻るので、次の微分でちょうど k という因子がもう一つ現れる：

$$nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k.$$

左辺に積の微分法（product rule）を用いて微分すると、

$$n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}x^{k-1}.$$

（$n=1$ のときは左辺の第 2 項が因子 $n-1=0$ をもつので、その項は単に現れない。それでも恒等式は成り立つ。）ここで $x=1$ を代入すると、

$$\begin{aligned}\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+3^2\binom{n}{3}+\cdots+n^2\binom{n}{n} &= n\,2^{n-1}+n(n-1)2^{n-2}\\ &= n\,2^{n-2}\big(2+(n-1)\big)\\ &= n(n+1)2^{n-2},\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られる。

別の方法として、$k^2=k(k-1)+k$ と書くこともできる。$(*)$ を 2 回微分して $x=1$ を代入すると $\sum k(k-1)\binom{n}{k}=n(n-1)2^{n-2}$ が得られ、これに小問 (ii) の結果を加えると同じ答えになる。

検算

$n=3$ をとる。このとき係数は $1,3,3,1$ である。

- (i) $1+3+3+1=8=2^3$.
- (ii) $3+6+3=12=3\cdot 2^2$.
- (iii) $1+\frac{3}{2}+1+\frac{1}{4}=\frac{15}{4}=\frac{1}{4}(2^4-1)$.
- (iv) $3+12+9=24=3\cdot 4\cdot 2$.

また、1 から 40 までのすべての n について、4 つの恒等式すべてを分数を用いて厳密に確かめた。

よくある間違い

- (iii) で、下端からの寄与を忘れて $\frac{2^{n+1}}{n+1}$ としてしまう。
- (iv) で、$(**)$ を直接微分してしまい、$\sum k^2\binom{n}{k}$ ではなく $\sum k(k-1)\binom{n}{k}$ を得てしまう。

STEP のその先へ

これらの恒等式には確率論的な意味がある。公平な硬貨を n 回投げたときの表の回数を X とすると、$\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}/2^n$ であるから、小問 (ii) は $\mathrm{E}(X)=\frac{n}{2}$ を、小問 (iv) は $\mathrm{E}(X^2)=\frac{n(n+1)}{4}$ を意味し、これより $\mathrm{Var}(X)=\frac{n}{4}$ が得られる。母関数（generating function）を微分してモーメント（moment）を取り出すのは、大学 1 年次の標準的な

手法である。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、この手法がきちんと展開されている。

解答例

STEP I 2010、第 6 問

純粋数学 ・ 階数低下法

> **STEP I 2010、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q6

鍵となる考え方

2 階線形微分方程式（linear second-order differential equation）の解が一つわかっていれば、一般解（general solution）をその既知の解と未知関数 u の積として書くことで、u そのもの（微分されていない u）を含む項はすべて打ち消し合う。残るのは u' と u'' だけを含む項なので、これは実質的には $v = u'$ についての 1 階の方程式であり、しかも変数分離形（separable）である。この手法を**階数低下法**（reduction of order）という。

解答

$y = \mathrm{e}^x$ が解であることの確認

$y = \mathrm{e}^x$ ならば $y' = y'' = \mathrm{e}^x$ であるから

$$(x-1)\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = (x - 1 - x + 1)\mathrm{e}^x = 0,$$

となり、$y = \mathrm{e}^x$ は $(*)$ を満たす。

u についての方程式

$y = u\mathrm{e}^x$ とおく。積の微分法（product rule）により

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= (u' + u)\,\mathrm{e}^x,\\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= (u'' + u')\,\mathrm{e}^x + (u' + u)\,\mathrm{e}^x = (u'' + 2u' + u)\,\mathrm{e}^x.\end{aligned}$$

これを $(*)$ の左辺に代入し、因数 e^x をくくり出すと

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^x\left[(x-1)(u''+2u'+u)-x(u'+u)+u\right]\\&\quad=\mathrm{e}^x\left[(x-1)u''+(2x-2-x)u'+(x-1-x+1)u\right]\\&\quad=\mathrm{e}^x\left[(x-1)u''+(x-2)u'\right].\end{aligned}$$

u を含む項は、$y=\mathrm{e}^x$ を確認したときとまったく同じように打ち消し合う（あの確認は $u=1$ の場合にあたる）。e^x は決して 0 にならないので、$y=u\mathrm{e}^x$ が $(*)$ を満たすための必要十分条件は

$$(x-1)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+(x-2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=0,$$

であり、これは $(**)$ にほかならない。以上で示された。

v、そして u を求める

$v=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ とおくと、$(**)$ は 1 階の方程式

$$(x-1)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-(x-2)\,v.$$

となる。$v=0$ は一つの解である。それ以外の場合は、$x\neq1$ かつ $v\neq0$ となる区間で考え、変数を分離する：

$$\int\frac{1}{v}\,\mathrm{d}v=-\int\frac{x-2}{x-1}\,\mathrm{d}x.$$

考えてみよう $\dfrac{x-2}{x-1}$ はどのように積分すればよいか？

分子を分母を使って表す：$x-2=(x-1)-1$ であるから

$$\frac{x-2}{x-1}=1-\frac{1}{x-1}.$$

よって

$$\ln|v|=-x+\ln|x-1|+c,\qquad\text{したがって}\qquad v=C(x-1)\mathrm{e}^{-x},$$

ただし $C=\pm\mathrm{e}^c$ である。$C=0$ も許せば解 $v=0$ も含まれるので、任意定数 C を用いて $v=C(x-1)\mathrm{e}^{-x}$ と書ける。（これが $x=1$ も含めたすべての x で $(x-1)v'+(x-2)v=0$ を満たすことは、直接容易に確かめられる。）

次に積分して u を求める。$(x-1)$ を微分し、e^{-x} を積分する形で部分積分（integration by parts）を行うと

$$\begin{aligned}\int(x-1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x&=-(x-1)\mathrm{e}^{-x}+\int\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\&=-(x-1)\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}=-x\mathrm{e}^{-x}.\end{aligned}$$

よって $u = -Cxe^{-x} + B$ である。$-C$ を改めて A とおくと

$$u = Axe^{-x} + B,$$

ここで A と B は任意定数である。

最後の部分

上で、u が $(**)$ を満たすならば $y = ue^x$ は $(*)$ を満たすことを示した。いま求めた $u = Axe^{-x} + B$ は $(**)$ を満たす。実際、その導関数は $v = -A(x-1)e^{-x}$ であり、これは v についての方程式の解だからである。したがって

$$y = ue^x = \left(Axe^{-x} + B\right)e^x = Ax + Be^x$$

は任意の定数 A, B に対して $(*)$ を満たす。以上で示された。

検算

$y = x$ を直接確かめる：$y' = 1, y'' = 0$ であるから、$(*)$ の左辺は $0 - x + x = 0$ となる。$(*)$ は線形なので、二つの解 x と e^x の任意の結合 $Ax + Be^x$ もまた解である。数値による確認として、$A = 2, B = -1, x = 0.5$ とすると $y = 1 - e^{0.5} \approx -0.64872$、$y' = 2 - e^{0.5} \approx 0.35128$、$y'' = -e^{0.5} \approx -1.64872$ であり、$(-0.5)(-1.64872) - 0.5(0.35128) - 0.64872 = 0.82436 - 0.17564 - 0.64872 = 0$ を得る。

よくある間違い

- 積の微分法により y'' に現れるのが（u' ではなく）$2u'$ であることを忘れる。
- 先に 1 を分離せずに、$\frac{x-2}{x-1}$ をいきなり対数として積分してしまう。
- v を積分して u を求めるときに積分定数を落とす。この定数 B こそが、もとの解 e^x を呼び戻すものである。

STEP のその先へ

階数低下法は任意の線形方程式 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ に対して使える。y_1 が一つの解ならば、$y = uy_1$ とおくと必ず u' についての 1 階の方程式が得られる。ロンスキアン（Wronskian）に関するアーベル（Abel）の公式と合わせると、解全体が 2 次元のベクトル空間（vector space）をなすことがわかる。したがって、特異点（singular point）$x = 1$ を含まない各区間において、$Ax + Be^x$ は実はこの方程式の一般解である。Boyce

and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）では、この両方の考え方が扱われている。

解答例

STEP I 2010、第 7 問

純粋数学 • ベクトルと交わる直線

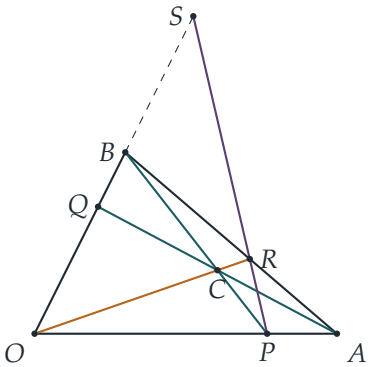
STEP I 2010、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/10-s1-q7

鍵となる考え方

O、A、B は同一直線上にない（not collinear）ので、平面上のすべての点は $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ の形にただ一通りに表せる。したがって、2 本の直線の交点を求めるには、それぞれの直線上の一般の点をこの形で書き、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の係数を比較（compare coefficients）すればよい。点が直線 OB 上にあるのは $\mathbf{a}$ の係数が 0 のときであり、またそのときに限る。点が AB 上にあるのは 2 つの係数の和が 1 のときであり、またそのときに限る。この 2 つの事実で、ほとんどすべてが片づく。



この図では $\alpha = \frac{1}{2}$、$\beta = \frac{7}{20}$ としている。S は直線 OB 上にあるが線分（segment）OB の外側にあり、一方 Q は O と B の間にあることに注意しよう。

解答

p と q を求める

直線 BC 上の一般の点は

$$\mathbf{b}+\mu(\mathbf{c}-\mathbf{b})=\mu\alpha\,\mathbf{a}+\big(1-\mu(1-\beta)\big)\mathbf{b}.$$

と表される。直線 OA 上の点は $\lambda\mathbf{a}$ の形であり、$\mathbf{b}$ 成分をもたない。O、A、B は同一直線上にないので $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は平行でなく、係数を比較してよい。$\mathbf{b}$ の係数が 0 でなければならないから、$\mu=\dfrac{1}{1-\beta}$ である。$\beta<1-\alpha<1$ より $1-\beta\neq0$ なので、これは許される。このとき

$$\mathbf{p}=\mu\alpha\,\mathbf{a}=\frac{\alpha\mathbf{a}}{1-\beta},$$

となり、求める結果が得られた。

この設定は $A\leftrightarrow B$ と $\alpha\leftrightarrow\beta$ を入れ替えても変わらない（このとき $P\leftrightarrow Q$ が入れ替わる）ので、ただちに

$$\mathbf{q}=\frac{\beta\mathbf{b}}{1-\alpha}.$$

と書ける。

点 R

まず、$\mathbf{r}=\dfrac{1}{\alpha+\beta}\,\mathbf{c}$ は $\mathbf{c}$ のスカラー倍であるから、R は直線 OC 上にある。

次に、$t=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ として $\mathbf{r}=t\mathbf{a}+(1-t)\mathbf{b}$ と書く。実際、$1-t=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$ であり、これは $\mathbf{r}$ における $\mathbf{b}$ の係数に等しい。$t\mathbf{a}+(1-t)\mathbf{b}=\mathbf{b}+t(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ の形の点はちょうど直線 AB 上の点であるから、R は AB 上にもある。

点 S

直線 PR 上の一般の点は $\mathbf{p}+t(\mathbf{r}-\mathbf{p})$ であり、これは

$$\left[\frac{\alpha}{1-\beta}+t\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}-\frac{\alpha}{1-\beta}\right)\right]\mathbf{a}\;+\;\frac{t\beta}{\alpha+\beta}\,\mathbf{b}.$$

に等しい。この点が OB 上にあるためには、$\mathbf{a}$ の係数が 0 でなければならない。$\alpha\neq0$ で割ると

$$\frac{1}{1-\beta}=t\cdot\frac{(\alpha+\beta)-(1-\beta)}{(1-\beta)(\alpha+\beta)},\qquad\text{よって}\qquad t=\frac{\alpha+\beta}{\alpha+2\beta-1}.$$

を得る。（問題文で 2 直線が交わるとされているので、$\alpha+2\beta\neq1$ でなければならない。$\alpha+2\beta=1$ ならば PR は OB と平行になる。）したがって

$$\mathbf{s}=\frac{t\beta}{\alpha+\beta}\,\mathbf{b}=\frac{\beta}{\alpha+2\beta-1}\,\mathbf{b}.$$

である。

考えてみよう 位置ベクトル（position vector）$k\mathbf{b}$ を、O からの距離と B からの距離の比に直すにはどうすればよいか？

X の位置ベクトルが $k\mathbf{b}$ ならば、$\overrightarrow{OX} = k\mathbf{b}$、$\overrightarrow{BX} = (k-1)\mathbf{b}$ であるから

$$\frac{OX}{BX} = \frac{|k|}{|1-k|}.$$

となる。k は負になることも 1 より大きくなることもあり（図の S がまさにそうである）、絶対値が重要になる。

比

Q については $k = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$ であり、$0 < \beta < 1-\alpha$ より $0 < k < 1$ である。このとき $1-k = \dfrac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha}$ であるから

$$\frac{OQ}{BQ} = \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}.$$

S については $k = \dfrac{\beta}{\alpha+2\beta-1}$ であるから

$$1-k = \frac{\alpha+2\beta-1-\beta}{\alpha+2\beta-1} = \frac{\alpha+\beta-1}{\alpha+2\beta-1'} \qquad \frac{k}{1-k} = \frac{\beta}{\alpha+\beta-1} = -\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}.$$

絶対値をとり、$\beta > 0$ と $1-\alpha-\beta > 0$ を用いると

$$\frac{OS}{BS} = \left|\frac{k}{1-k}\right| = \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} = \frac{OQ}{BQ}.$$

これで証明が完了した。絶対値をとる前の負号は、Q が OB を内分（divide internally）し、S が同じ比で外分（divide externally）することを表している。

検算

- $\alpha = \frac{1}{2}$、$\beta = \frac{7}{20}$（図の値）で試す。このとき $\mathbf{q} = 0.7\mathbf{b}$、$\mathbf{s} = 1.75\mathbf{b}$ であるから、$OQ/BQ = 0.7/0.3 = \frac{7}{3}$、$OS/BS = 1.75/0.75 = \frac{7}{3}$ となる。公式からも $\beta/(1-\alpha-\beta) = 0.35/0.15 = \frac{7}{3}$ が得られる。
- ランダムな $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、α、β に対して、2 直線の方程式の組を解いて 4 つの交点をすべて直接計算し、公式と比較するとともに、2 つの比が一致することを確かめた。8000 通り以上の場合で一致した。
- 対称性（symmetry）：$\alpha \leftrightarrow \beta$ と $\mathbf{a} \leftrightarrow \mathbf{b}$ を入れ替えると、$\mathbf{p}$ の公式は $\mathbf{q}$ の公式になる。当然そうなるべきである。

よくある間違い

- 絶対値を忘れること。**s** の係数は負になることも 1 より大きくなることもあり、不注意に $k/(1-k)$ を計算すると負の「長さの比」が出てしまう。
- なぜ許されるのかを述べずに **a** と **b** の係数を比較すること。これが成り立つのは **a** と **b** が平行でないからである。

STEP のその先へ

点 Q と S は OB を同じ比で内分・外分するので、O と B に関して**調和共役**（harmonic conjugates）である。ここでの図形、すなわち 4 本の直線とそれらの交点は、古典的な**完全四辺形**（complete quadrilateral）である。調和分割（harmonic division）は射影によって保たれ、射影幾何学（projective geometry）の中心的な考え方の一つである。点を 2 つの独立なベクトルで表して係数を比較するという習慣は線形代数（linear algebra）の出発点であり、そこでは基底（basis）という考え方になる。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、その方面を展開している。

解答例

STEP I 2010、第 8 問

純粋数学 • 無限降下法

> **STEP I 2010、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q8

鍵となる考え方

両小問とも、**無限降下法**（infinite descent）と呼ばれる同じ技法を用いる。まず方程式を素数（prime）を法として（modulo）考える（小問 (i) では 3、小問 (ii) では 5）。すると、その素数がすべての未知数を割り切らなければならないことがわかる。その素数で割ると、**まったく同じ方程式**のより小さな解が得られる。しかし、0 でない整数を 3（あるいは 5）でいつまでも割り続けることはできない。実質的な作業は、どの剰余（residue）が起こりうるかを見抜くことだけであり、小問 (ii) では 4 乗数（fourth power）の一の位がその役割を果たしてくれる。

解答

小問 (i)

移項すると

$$a^3 = 9c^3 - 3b^3 = 3\left(3c^3 - b^3\right),$$

となるので、a^3 は 3 で割り切れる。3 は素数なので、積 $a \cdot a \cdot a$ を割り切るならば、いずれかの因数を割り切る。よって $3 \mid a$ である。

a_1 を整数として $a = 3a_1$ とおく。代入して 3 で割ると

$$27a_1^3 + 3b^3 = 9c^3 \quad \Longrightarrow \quad 9a_1^3 + b^3 = 3c^3,$$

となるので、$b^3 = 3\left(c^3 - 3a_1^3\right)$ は 3 で割り切れ、先ほどと同様に $3 \mid b$ である。$b = 3b_1$ とおくと

$$9a_1^3 + 27b_1^3 = 3c^3 \quad \Longrightarrow \quad c^3 = 3\left(a_1^3 + 3b_1^3\right),$$

となるので、$3 \mid c$ でもある。以上より、a、b、c はすべて 3 で割り切れる。

さらに $c = 3c_1$ とおく。最後の等式は $27c_1^3 = 3a_1^3 + 9b_1^3$ となる。すなわち

$$a_1^3 + 3b_1^3 = 9c_1^3.$$

考えてみよう 3 がすべてを割り切ることを示した。なぜそれによって、すべてがゼロでなければならないことになるのだろうか。

それは、$(a_1, b_1, c_1) = (a/3, b/3, c/3)$ が再びもとの方程式の整数解になっているので、いま証明したことがすべてこの解にも当てはまるからである。すなわち a_1、b_1、c_1 は 3 で割り切れ、言い換えれば a、b、c は 9 で割り切れる。この議論を k 回繰り返すと、すべての $k \geq 1$ に対して 3^k が a、b、c のそれぞれを割り切ることがわかる。しかし、0 でない整数 n は、$3^k > |n|$ となれば 3^k で割り切れない。したがって $a = b = c = 0$ であり、これは明らかに解であるから、これが唯一の解である。

（同値な言い方：$(0,0,0)$ 以外の解が存在するとすれば、そのうち $|a| + |b| + |c|$ が正でかつ最小となるものを選ぶ。すると $(a/3, b/3, c/3)$ は、この値がより小さい正の値となる解であり、矛盾である。）

小問 (ii)

$p^4 = |p|^4$ であるから、p^4 の一の位は $|p|$ の一の位だけで決まる。

n の一の位	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^4 の一の位	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1

（たとえば $2^4 = 16$、$3^4 = 81$、$7^4 = 2401$ である。）よって 4 乗数の一の位は 0、1、5、6 のいずれかであり、一の位が 0 または 5 となるのは $5 \mid n$ のときに限る。

次に、各項の一の位を調べる。

- $5r^4$ は 5 の倍数なので、一の位は 0 または 5 である。
- $2q^4$ の一の位は 0（q^4 の一の位が 0 または 5 のとき）または 2（q^4 の一の位が 1 または 6 のとき）である。
- p^4 の一の位は 0、1、5、6 のいずれかである。

$\{0,1,5,6\}$ に属する一の位と $\{0,2\}$ に属する一の位を足すと、一の位は $0,1,5,6,2,3,7,8$ のいずれかになる。0 または 5 になるのは $0+0$ と $5+0$ の場合だけである。よって $2q^4$ の一の位は 0 であり、これは q^4 の一の位が 0 または 5、すなわち $5 \mid q$ であることを意味する。また p^4 の一の位は 0 または 5、すなわち $5 \mid p$ である。以上より、p と q は 5 で割り切れる。

（別解：フェルマー（Fermat）の小定理（Fermat's little theorem）より、$5 \nmid n$ のとき $n^4 \equiv 1 \pmod 5$ であるから、$p^4 + 2q^4$ は 5 を法として $0+0$、$1+0$、$0+2$、$1+2$ のいずれかと合同（congruent）であり、0 となるのは最初のものだけである。）

$p = 5p_1$、$q = 5q_1$ とおく。すると

$$625\left(p_1^4 + 2q_1^4\right) = 5r^4 \quad \Longrightarrow \quad r^4 = 125\left(p_1^4 + 2q_1^4\right),$$

となるので $5 \mid r^4$ であり、5 は素数であるから $5 \mid r$ である。$r = 5r_1$ とおくと

$$625r_1^4 = 125\left(p_1^4 + 2q_1^4\right) \quad \Longrightarrow \quad p_1^4 + 2q_1^4 = 5r_1^4.$$

よって $(p/5, q/5, r/5)$ は再び同じ方程式の整数解である。

小問 (i) とまったく同様に、これを繰り返すと、すべての k に対して 5^k が p、q、r のそれぞれを割り切ることがわかるが、これは o でない整数では不可能である。したがって、整数解は $p = q = r = 0$ だけである。

検算

計算機で探索すると、$|a|, |b|, |c| \le 60$ の範囲で $a^3 + 3b^3 = 9c^3$ の解は $(0,0,0)$ 以外に見つからず、$|p|, |q|, |r| \le 150$ の範囲で $p^4 + 2q^4 = 5r^4$ についても同様に見つからない。p と q の一の位の組 100 通りをすべて調べると、$p^4 + 2q^4$ の一の位が 0 または 5 となるのは、両方の一の位が 0 または 5 のときに限ることが確かめられる。手計算による簡単な確認：$p = q = 1$ とすると $p^4 + 2q^4 = 3$ となり、表の予測どおり 5 の倍数ではない。

よくある間違い

- 各未知数が 3（あるいは 5）で割り切れることを示したところで止めてしまう。それだけではゼロであるとは言えない。要点は、割った結果が**同じ**方程式の解になるので、議論を繰り返せることである。
- 理由を述べずに「$3 \mid a^3$」から「$3 \mid a$」を導く。これが成り立つのは 3 が素数だからであり、たとえば $9 \mid a^3$ から $9 \mid a$ を導くことはできない（$a = 3$ で試してみよ）。
- 一の位を列挙するときに負の整数を忘れる。4 乗は偶数乗なので $p^4 = |p|^4$ であり、表ですべての場合が尽くされている。

STEP のその先へ

無限降下法の起源はフェルマーにさかのぼる。フェルマーはこれを用いて、$x^4 + y^4 = z^2$ が正の整数解をもたないこと（したがってフェルマーの最終定理（Last Theorem）の $n = 4$ の場合）を証明した。ここで用いた考え方、すなわち素数のべきを法として非自明な解をもたない方程式は非自明な整数解をもちえない、という考え方は、p 進数（p-adic numbers）とハッセ原理（Hasse principle）の研究へと発展していく。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic* は、合同式と降下法への美しい入門書である。

解答例

STEP I 2010、第 9 問

力学 ・ 摩擦とつり合い

> **STEP I 2010、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q9

鍵となる考え方

床に接する角の位置を定め、そこから互いに垂直な 2 辺に沿って重心（centre of mass）まで進めば、壁からの距離が得られる。釣り合い（equilibrium）については、「両方の接点で摩擦が限界に達している」という条件により、各摩擦力（friction）はそれぞれの垂直抗力（normal reaction）の μ 倍に定まる。したがって、2 方向の力のつり合いの式から、両方の垂直抗力が重さを用いて表せる。あとはモーメント（moment）の式を 1 つ立てれば片がつき、$\mu = \tan\lambda$ とおくと計算は加法定理（compound-angle formulae）に帰着する。

解答

モデル

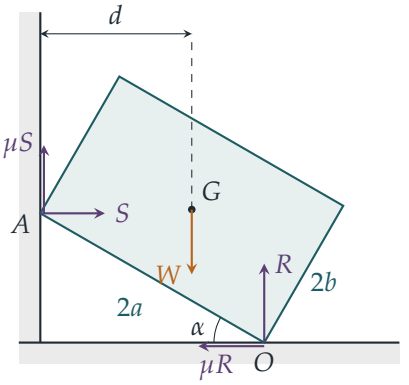
薄板（lamina）は重さ W の一様な長方形の剛体（rigid body）であるから、その重心 G は長方形の中心である。床に接する角を O、壁に接する角を A とする。すると OA は長さ $2a$ の辺で床と角 α をなし、O から出る長さ $2b$ の辺は壁から離れる向きに上方へ伸びている。働く力は次のとおりである。

- O において：上向きの垂直抗力 R と水平方向の摩擦力 F。
- A において：壁から離れる水平方向の垂直抗力 S と鉛直方向の摩擦力 P。
- G において下向きに働く重さ W。

薄板は、O が壁から離れる向きに、A が壁に沿って下向きに滑り出す直前の状態にあるので、摩擦力はこれを妨げる向きに働く。すなわち F は壁に向かう向き、P は上向

きである。両方の接点で摩擦が限界摩擦（limiting friction）に達しているから、

$$F = \mu R, \qquad P = \mu S.$$



重心と壁の距離

OA は長さ $2a$ で水平と角 α をなすから、O と壁との水平距離は $2a\cos\alpha$ である。

O から出る 2 辺のそれぞれに沿って半分ずつ進めば、O から G に到達する。OA に沿って（壁の方へ）a 進むと、壁に向かって $a\cos\alpha$ だけ近づく。長さ $2b$ の辺は OA に垂直なので、水平と角 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ をなし、壁から離れる向きに傾いている。この辺に沿って b 進むと、壁から $b\cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = b\sin\alpha$ だけ遠ざかる。よって G と壁の距離は

$$d = 2a\cos\alpha - a\cos\alpha + b\sin\alpha = a\cos\alpha + b\sin\alpha,$$

となり、示すべき式が得られた。同様にして、G の床からの高さは $a\sin\alpha + b\cos\alpha$、$A$ の床からの高さは $2a\sin\alpha$ である。

釣り合いの条件

水平方向と鉛直方向の力のつり合いより、

$$S = \mu R,$$
$$R + \mu S = W.$$

第 1 式を第 2 式に代入すると $R(1+\mu^2) = W$ となるから、

$$R = \frac{W}{1+\mu^2}, \qquad S = \frac{\mu W}{1+\mu^2}.$$

次に O のまわりのモーメントを考えると、R と μR は消える。水平方向に見て G は O より $2a\cos\alpha - d = a\cos\alpha - b\sin\alpha$ だけ壁に近いので、重さのモーメントは

$W(a\cos\alpha - b\sin\alpha)$ であり、薄板を壁の方へ回転させようとする。A では、力 S は O から高さ $2a\sin\alpha$ の直線に沿って働き、μS は O から水平距離 $2a\cos\alpha$ にある壁に沿って働く。これらはいずれも薄板を壁から離れる向きに回転させようとする。したがって

$$W(a\cos\alpha - b\sin\alpha) = S\cdot 2a\sin\alpha + \mu S\cdot 2a\cos\alpha = \frac{2a\mu W(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{1+\mu^2}. \qquad (*)$$

? **考えてみよう** $\mu = \tan\lambda$ とおくと、右辺はどのように整理されるか？

$\mu = \tan\lambda$ とすると $1+\mu^2 = \sec^2\lambda$ であるから、

$$\frac{\mu}{1+\mu^2} = \tan\lambda\cos^2\lambda = \sin\lambda\cos\lambda,$$

$$\sin\alpha + \mu\cos\alpha = \frac{\sin\alpha\cos\lambda + \cos\alpha\sin\lambda}{\cos\lambda} = \frac{\sin(\alpha+\lambda)}{\cos\lambda}.$$

よって $(*)$ の右辺は $2aW\sin\lambda\sin(\alpha+\lambda)$ となる。W で割り、$P = \alpha+\lambda$、$Q = \lambda$ として $2\sin P\sin Q = \cos(P-Q) - \cos(P+Q)$ を用いると、

$$\begin{aligned} b\sin\alpha &= a\cos\alpha - 2a\sin\lambda\sin(\alpha+\lambda) \\ &= a\cos\alpha - a\big(\cos\alpha - \cos(\alpha+2\lambda)\big) \\ &= a\cos(2\lambda+\alpha), \end{aligned}$$

となり、求める結果が得られた。

正方形の薄板

薄板が正方形ならば $b = a$ であり、$a \neq 0$ で割ると

$$\cos(2\lambda+\alpha) = \sin\alpha = \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha\right).$$

よって、ある整数 k に対して $2\lambda+\alpha = \pm\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) + 2k\pi$ である。正しい場合を選び出す必要がある。ここで $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$（薄板は傾いている）であり、$\mu > 0$ より $0 < \lambda < \frac{1}{2}\pi$ であるから、$0 < 2\lambda+\alpha < \frac{3}{2}\pi$ となる。

- 符号が $+$ のとき $2\lambda+\alpha = \frac{1}{2}\pi - \alpha + 2k\pi$ である。$\frac{1}{2}\pi - \alpha$ は $(0, \frac{1}{2}\pi)$ に属するので、$(0, \frac{3}{2}\pi)$ に入るのは $k = 0$ の場合だけであり、$\lambda = \frac{1}{4}\pi - \alpha$ を得る。
- 符号が $-$ のとき $2\lambda = -\frac{1}{2}\pi + 2k\pi$、すなわち $\lambda = -\frac{1}{4}\pi + k\pi$ であり、このような値で $(0, \frac{1}{2}\pi)$ に属するものはない。

したがって $\lambda = \frac{1}{4}\pi - \alpha$ であり、示すべき式が得られた。（特に、このような限界状態での釣り合いには $\alpha < \frac{1}{4}\pi$ が必要であり、これは G が O より壁側にある、すなわち $a\cos\alpha > a\sin\alpha$ という条件と一致する。）

検算

- $\mu = 0$（$\lambda = 0$）のとき、条件は $a\cos\alpha = b\sin\alpha$ となる。これは G が O の真上にあることを意味し、まさに壁の助けなしに薄板が角の上で釣り合うことのできる場合である。
- $\alpha = 15°$ の正方形では、結果より $\lambda = 30°$、すなわち $\mu = 1/\sqrt{3} \approx 0.577$ となる。$(*)$ に $a = b = 1$、$\alpha = \frac{\pi}{12}$、$\mu = 1/\sqrt{3}$ を代入すると、両辺はともに $W(\cos 15° - \sin 15°) \approx 0.707W$ に等しい。
- 数値的に、2000 個のランダムな長方形と角度について、力とモーメントの式から二分法（bisection）で μ を求め、$a\cos(2\lambda + \alpha) = b\sin\alpha$ が 10^{-14} の精度で成り立つことを確認した。

よくある間違い

- 摩擦力の向きを誤る。まず各接点がどちらへ滑ろうとするかを決め、それを妨げる向きにとること。
- 壁からの距離 $a\cos\alpha + b\sin\alpha$ を、O のまわりのモーメントの腕の長さとして使ってしまう。O のまわりの腕の長さは $a\cos\alpha - b\sin\alpha$ である。
- $\lambda = \frac{3}{4}\pi$ も三角方程式の解であることを見落とす。$\mu > 0$ より $0 < \lambda < \frac{1}{2}\pi$ となるため、この解は除外される。

STEP のその先へ

$\tan\lambda = \mu$ を満たす角 λ は**摩擦角**（angle of friction）とよばれる。限界摩擦の状態では、接触力の合力は法線と角 λ をなす。別の簡潔な解法として、3 力を受けて釣り合っている剛体では、それらの力の作用線が 1 点で交わる（共点（concurrent）である）必要があるという事実を用いるものがある。2 つの接触力の合力と重さが 1 点で交わらなければならないので、問題は純粋な幾何の問題になる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、ニュートン力学の他の分野と並行して、剛体の静力学と摩擦を展開している。

解答例

STEP I 2010、第 10 問

力学 ・ ベクトルによる運動学

STEP I 2010、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/10-s1-q10

鍵となる考え方

すべては $\mathbf{r}$ を微分し、内積（dot product）をとることから導かれる。2 つのベクトルのなす角は $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$ から求まり、垂直（perpendicular）であることは内積が零であることを意味する。2 つ目の粒子については、時刻 t における Q の位置が、ちょうど時刻 $t-T$ における P の位置であることに気づくのが有用である。位置を複素数（complex number）$z = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$ として表すと、最後の部分は 1 行の計算になる。

解答

速度と加速度

$\mathbf{r} = \mathrm{e}^t(\cos t,\ \sin t)$ とおく。積の微分法（product rule）により、

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} &= \mathrm{e}^t\big(\cos t - \sin t,\ \sin t + \cos t\big),\\ \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} &= \mathrm{e}^t\big((\cos t - \sin t) + (-\sin t - \cos t),\ (\sin t + \cos t) + (\cos t - \sin t)\big)\\ &= \mathrm{e}^t\big(-2\sin t,\ 2\cos t\big).\end{aligned}$$

速度と変位のなす角

大きさは $|\mathbf{r}| = \mathrm{e}^t$ であり、

$$|\mathbf{v}|^2 = \mathrm{e}^{2t}\left[(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2\right] = \mathrm{e}^{2t}\cdot 2,$$

である。交差項 $\mp 2\sin t\cos t$ が打ち消し合うからである。よって $|\mathbf{v}| = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^t$ である。内積は

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = \mathrm{e}^{2t}\left[\cos t(\cos t - \sin t) + \sin t(\sin t + \cos t)\right] = \mathrm{e}^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t) = \mathrm{e}^{2t}.$$

したがって、$\mathbf{r}$ と $\mathbf{v}$ のなす角を θ とすると、

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{r}||\mathbf{v}|} = \frac{\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^t\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{e}^t} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

となり、すべての t について $\theta = \frac{\pi}{4}$ であり、題意は示された。($\mathrm{e}^t > 0$ より、どちらのベクトルも零ベクトルになることはないので、なす角は常に定義される。)

加速度は変位に垂直である

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = \mathrm{e}^{2t}\left[-2\sin t\cos t + 2\sin t\cos t\right] = 0,$$

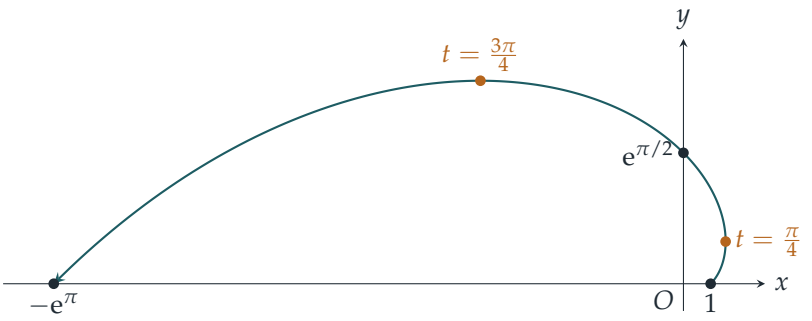
であり、どちらのベクトルも零ベクトルでないから、$\mathbf{a}$ は常に $\mathbf{r}$ に垂直である。また、$\mathbf{a} = 2\mathrm{e}^t(-\sin t, \cos t)$ は $\mathbf{r}$ を $\frac{\pi}{2}$ 回転させて 2 倍したものであることにも注意しよう。

$0 \le t \le \pi$ における軌跡

極座標(polar coordinates)では、軌跡は $\theta = t$ として $r = \mathrm{e}^\theta$ と表される。粒子が反時計回りに回るにつれて O からの距離が指数関数的に増大する、**等角螺旋**(equiangular spiral、対数螺旋(logarithmic spiral)とも呼ぶ)である。目印となる点は次のとおりである。

- $t = 0$:点 $(1, 0)$ にあり、x 軸に対して $\frac{\pi}{4}$ の角をなす方向 $(1, 1)$ に進む。
- $t = \frac{\pi}{4}$:$\dot{x} = \mathrm{e}^t(\cos t - \sin t) = 0$ なので x が最大となり、その点は $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\pi/4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\pi/4}\right) \approx (1.55, 1.55)$ である。
- $t = \frac{\pi}{2}$:点 $(0, \mathrm{e}^{\pi/2}) \approx (0, 4.81)$。
- $t = \frac{3\pi}{4}$:$\dot{y} = \mathrm{e}^t(\sin t + \cos t) = 0$ なので y が最大となり、その点は $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4}\right) \approx (-7.46, 7.46)$ である。
- $t = \pi$:点 $(-\mathrm{e}^\pi, 0) \approx (-23.1, 0)$ で、$\frac{\pi}{4}$ の角をなして軸を横切り、左下へ向かう。

軌跡はすべての点で O からの動径と $\frac{\pi}{4}$ の角をなして交わり、これによって形が定まる。



2 つ目の粒子

考えてみよう 時刻 t において Q はどこにあるか。P の運動を用いて表せ。

Q は各点に P より T だけ遅れて到達するので、時刻 t には、時刻 $t-T$ に P があった位置にいる。

$$\mathbf{r}_Q(t) = \mathbf{r}(t-T) = e^{t-T}\big(\cos(t-T),\, \sin(t-T)\big).$$

すると

$$\begin{aligned} |PQ|^2 &= |\mathbf{r}(t)|^2 + |\mathbf{r}(t-T)|^2 - 2\,\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t-T) \\ &= e^{2t} + e^{2t-2T} - 2e^{2t-T}\big(\cos t\cos(t-T) + \sin t\sin(t-T)\big) \\ &= e^{2t}\big(1 - 2e^{-T}\cos T + e^{-2T}\big), \end{aligned}$$

となる。ここで $\cos t\cos(t-T) + \sin t\sin(t-T) = \cos\big(t-(t-T)\big) = \cos T$ を用いた。したがって

$$|PQ| = k\,e^{t}, \qquad k = \sqrt{1 - 2e^{-T}\cos T + e^{-2T}},$$

であり、k は T のみに依存し、t には依存しない。よって P と Q の距離は e^t に比例し、題意は示された。（括弧の中身は $|1 - e^{-T}e^{iT}|^2$ であり、$T \neq 0$ のとき $e^{-T} \neq 1$ であるから正である。よって $k > 0$ である。）

複素数による別解。$z = x + iy$ とすると、P は $z_P = e^t e^{it} = e^{(1+i)t}$ に、Q は $z_Q = e^{(1+i)(t-T)}$ にある。よって

$$z_P - z_Q = e^{(1+i)t}\big(1 - e^{-(1+i)T}\big), \qquad |z_P - z_Q| = e^t\,\big|1 - e^{-(1+i)T}\big|.$$

これから、$\overrightarrow{QP}$ が z_P の一定の複素数倍であることもわかる。したがって線分 PQ は OP と一定の角をなし、三角形 OQP は同じ形を保ったまま、拡大しながら回転するだけである。

検算

- $z = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$ を微分すると $\dot{z} = (1+\mathrm{i})z$、$\ddot{z} = (1+\mathrm{i})^2 z = 2\mathrm{i}z$ となる。$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ を掛けることは $\frac{\pi}{4}$ の回転であり、$2\mathrm{i}$ を掛けることは $\frac{\pi}{2}$ の回転である。これで前半の 2 つの結果が一目でわかる。
- 数値的に、無作為に選んだ t について $\mathbf{r}$ と $\mathbf{v}$ のなす角は $0.785398\ldots = \frac{\pi}{4}$ となり、$\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = 0$ となった。$T = 1$ のとき、試したすべての t で $|PQ|/\mathrm{e}^t = 0.85895\ldots$ となり、$\sqrt{1 - 2\mathrm{e}^{-1}\cos 1 + \mathrm{e}^{-2}}$ と一致した。
- $T \to 0$ のとき $k \approx T\sqrt{2}$ なので $|PQ| \approx \sqrt{2}\,\mathrm{e}^t T = |\mathbf{v}|T$ となる。これは時間 T の間に進む距離であり、当然そうなるべき結果である。

よくある間違い

- Q の位置を $\mathbf{r}(t+T)$ としてしまう。Q は P の**後ろ**にいるので、位置は $\mathbf{r}(t-T)$ である。（それでも答えは e^t に比例するが、定数が異なる。）
- 時計回りに回る螺旋を描いたり、軌跡が原点を通るように描いたりする。O からの距離は $\mathrm{e}^t \geq 1$ であり、粒子が反時計回りに動くにつれて増加する。

STEP のその先へ

曲線 $r = \mathrm{e}^\theta$ は対数螺旋である。O を中心とするこの曲線の拡大はすべて、この曲線の回転になっている。交わる角が一定であることも、OQP が形を保つことも、これが理由である。大学 1 年次の講義では、平面上の運動はしばしば極座標の単位ベクトル $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$ を用いて扱われる。この場合は動径方向の加速度 $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ が零になり、垂直であることが直接得られる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、まさにこの種の問題のために極座標を展開している。

解答例

STEP I 2010、第 11 問

力学 ・ 円周上での衝突

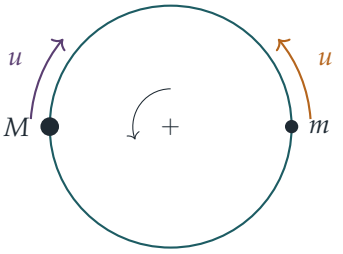
> **STEP I 2010、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q11

鍵となる考え方

2 つの質点は円周上を動くが、各衝突は共通接線（common tangent）に沿った通常の 1 次元の衝突である。なめらかな溝は運動に垂直な向きにしか押さないので、速さを変えることも、接線方向の力積（impulse）に影響を与えることもできない。そこで、円周に沿って測った**符号付き**速度を用いて、運動量保存則（conservation of momentum）とニュートンの実験法則（Newton's experimental law）を適用する。そうすれば、あとは 2 つの事実がすべての情報を担う。すなわち、符号付きの運動量の総和は決して変化せず、相対速度（relative speed）は衝突のたびに e 倍になる。

解答

2 つの質点を、なめらかな水平の溝の中にある点としてモデル化する。反時計回りを正の向きとし、はじめ m は速さ u で反時計回りに、M は速さ u で時計回りに動いているとする。したがって、それぞれの符号付き速度は u と $-u$ である。



衝突と衝突の間に各質点にはたらく水平方向の力は、なめらかな溝からの垂直抗力（normal reaction）だけであり、これは速度に垂直である。この力は仕事をしないので、

各質点は一定の速さを保つ。衝突の際、質点どうしが及ぼし合う力積は共通接線に沿ってはたらき、大きさが等しく向きが逆である。また、溝は接線方向の力積を与えない。よって各衝突において、円周に沿った符号付きの運動量の総和は変化せず、ニュートンの法則は符号付き速度に対して成り立つ。

最初の衝突

最初の衝突後の符号付き速度を、m については p、M については q とする。運動量保存則とニュートンの法則から

$$mp + Mq = mu - Mu,$$
$$q - p = e\big(u - (-u)\big) = 2eu.$$

$q = p + 2eu$ を第 1 式に代入すると $(m+M)p = (m-M)u - 2eMu$ となるので、

$$p = -\frac{u\,(M - m + 2eM)}{M+m}, \qquad q = p + 2eu = \frac{u\,\big(2em - (M-m)\big)}{M+m}.$$

したがって、最初の衝突後の速さは

$$\text{速さ}m = \frac{u\,(M - m + 2eM)}{M+m}, \qquad \text{速さ}M = \frac{u\,|2em - (M-m)|}{M+m}.$$

である（それぞれ m の速さ、M の速さ）。

考えてみよう どの符号が、質点が向きを変えたことを意味するだろうか？

質点 m は正の向きに動いていたので、向きを反転するのはちょうど $p < 0$ のときである。$M > m$ かつ $e \geq 0$ であるから、括弧内の $M - m + 2eM$ は正であり、m は**必ず**反転する。質点 M は負の向きに動いていたので、向きを反転するのはちょうど $q > 0$ のとき、すなわち

$$2em > M - m.$$

のときである。よってこの条件の下で、求められているとおり両方の質点が向きを変える。

さらに $2n$ 回衝突した後

$mv - MV = u(M-m)$ **となる理由**。はじめの符号付き運動量の総和は $mu - Mu = -u(M-m)$ である。衝突ではこれが保存され、衝突と衝突の間には速さは変わらないので、この値はいつまでも保たれる。

両方の質点は衝突のたびに反転するので、最初の衝突後、m は時計回りに、M は反時計回りに動く。その後の衝突のたびに、この向きは入れ替わる。さらに $2n$ 回衝突した

後には、全部で $2n+1$ 回、すなわち奇数回の衝突が起きているので、再び m は時計回りに、M は反時計回りに動いている。それぞれの符号付き速度は $-v$ と V であり、

$$m(-v) + MV = -u(M-m) \quad \Longrightarrow \quad mv - MV = u(M-m).$$

相対速度。各衝突の後、2 つの質点は円周に沿って互いに逆向きに一定の速さで離れていき、次は円の反対側で出会う。そのとき両者は、離れていったときと同じ相対速度で近づく。ニュートンの法則によれば、衝突後に離れる速さは、衝突前に近づく速さの e 倍である。はじめに近づく速さは $2u$ なので、$2n+1$ 回の衝突の後に離れる速さは $2ue^{2n+1}$ となる。2 つの質点は逆向きに動いているので、これは $v+V$ に等しい：

$$v + V = 2ue^{2n+1}.$$

連立方程式を解く。第 2 式を M 倍して第 1 式に加えると

$$(m+M)v = u(M-m) + 2Mue^{2n+1},$$

となり、第 2 式を m 倍して第 1 式を引くと

$$(m+M)V = 2mue^{2n+1} - u(M-m).$$

となる。よって

$$v = \frac{u\big(M-m+2Me^{2n+1}\big)}{M+m}, \qquad V = \frac{u\big(2me^{2n+1} - (M-m)\big)}{M+m}.$$

検算

- $n=0$ とおくと、上で求めた最初の衝突後の速さに戻る。
- $m=2, M=3, e=0.8, u=1$ のとき、公式は $n=0$ に対して $(v,V) = (1.16, 0.44)$、$n=1$ に対して $(0.8144, 0.2096)$ を与える。質点が円周を回って衝突する様子を 1 ステップずつシミュレーションすると、1 回目と 3 回目の衝突の後にちょうどこれらの値が得られる。
- 運動エネルギー（kinetic energy）は増加しないはずである。$e=1$ のとき $v = u\,\frac{3M-m}{M+m}$、$V = u\,\frac{3m-M}{M+m}$ であり、$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}(m+M)u^2$ が成り立つことを確かめられる。

よくある間違い

- 速さと速度を混同すること。ニュートンの法則と運動量保存則は、符号付き速度を用いて書かなければならない。速さに直すのは最後だけである。

- さらに $2n$ 回の衝突とは全部で $2n+1$ 回であることを忘れること。これにより、べきは e^{2n} ではなく e^{2n+1} となる。
- 溝からの向心力（centripetal force）を気にしすぎること。この力は運動に垂直なので、速さを変えることもなく、衝突の式にも現れない。

STEP のその先へ

V の公式から、$e<1$ のとき与えられた仮定がいつまでも続くわけではないことがわかる。$2me^{2n+1}$ が $M-m$ を下回ると、重い方の質点は反転しなくなる。ここで運動量が保存されるのは、回転という意味においてだけである。溝からの力は常に中心を通る向きにはたらくので、保存される量は実は中心のまわりの**角運動量**（angular momentum）であり、円の半径は約分されて消える。このような対称性（symmetry）から生じる保存則（conservation law）は、大学 1 年次の力学の中心的なテーマである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、角運動量と衝突を丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 2010、第 12 問

確率・統計 ・ 裾の和を用いた期待値

STEP I 2010、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/10-s1-q12

鍵となる考え方

裾和公式（tail-sum formula）は、$n\,\mathrm{P}(X = n)$ を $\mathrm{P}(X = n)$ を n 回足したものとして書き、項を別の順序でまとめ直すことから得られる。ペンギンの問題では、事象 $X \geq n$ のほうが $X = n$ よりはるかに記述しやすい。$n-1$ 個の箱を開けたあとでさらに箱を開ける必要があるのは、ちょうどその $n-1$ 個の箱にすべて同じ種類のペンギンが入っているときである。したがって裾確率は簡単な形になり、いま証明した公式によって $\mathrm{E}(X)$ は 2 つの等比級数（geometric series）になる。

解答

定義と裾和公式

X は $1, 2, 3, \ldots$ の値しかとらないので、

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{m=1}^{\infty} m\,\mathrm{P}(X = m),$$

である。ただし、この級数が収束（converge）する場合に限る。

各 $n \geq 1$ について、事象 $X \geq n$ は $m \geq n$ に対する事象 $X = m$ の互いに排反な

（disjoint）和事象であるから、$\mathrm{P}(X \geq n) = \sum_{m \geq n} \mathrm{P}(X = m)$ である。よって

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(X \geq n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \mathrm{P}(X = m) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m} \mathrm{P}(X = m) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m\,\mathrm{P}(X = m) = \mathrm{E}(X).\end{aligned}$$

考えてみよう なぜ 2 つの和の順序を入れ替えてよいのだろうか。

この二重和は、$1 \leq n \leq m$ を満たすすべての組 (n, m) について $\mathrm{P}(X = m)$ を足し合わせたものである。1 行目では n を固定して m について和をとり、2 行目では m を固定して $n = 1, \ldots, m$ の m 個の値について和をとっている。どの項も非負であり、非負の項からなる級数では、総和は和をとる順序によらない（両辺が無限大になることもあり、その場合は両辺とも無限大である）。項を三角形状に並べ、第 m 行に $\mathrm{P}(X = m)$ を m 個置いた図を思い描くとよい。行ごとに足せば $\mathrm{E}(X)$ が得られ、列ごとに足せば裾和が得られる。これで公式が証明された。

裾確率

意図されているとおり、異なる箱の中身は独立（independent）であると仮定する。D_k を箱 k に父ペンギンが入っているという事象とすると、$\mathrm{P}(D_k) = p$、$\mathrm{P}(D_k') = q$ である。

$n \geq 2$ とする。$X \geq n$ となるのは、最初の $n-1$ 個の箱にまだ両方の種類がそろっていないとき、すなわちすべて父ペンギンであるか、すべて母ペンギンであるときであり、かつそのときに限る。この 2 つの場合は互いに排反であるから、独立性より

$$\mathrm{P}(X \geq n) = p^{n-1} + q^{n-1} \qquad (n \geq 2).$$

特に $n = 4$ とすると

$$\mathrm{P}(X \geq 4) = p^3 + q^3,$$

となり、求める結果が得られる。また、1 つの箱に両方の種類が入ることはないので常に $X \geq 2$ であり、$\mathrm{P}(X \geq 1) = \mathrm{P}(X \geq 2) = 1$ である。（上の式は $n = 2$ では $p + q = 1$ を与えるので一致するが、$n = 1$ では 2 を与えてしまうので、$n = 1$ の項は別に扱わなければならない。）

期待値

裾和公式より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \mathrm{P}(X \geq 1) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(p^{n-1} + q^{n-1}\right) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p^k + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \\ &= 1 + \frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q},\end{aligned}$$

である。ここで、$0 < p < 1$ かつ $0 < q < 1$ であるから、どちらの等比級数も収束する（$p \neq 0$、$q \neq 0$ という条件はここで使われる）。$1 - p = q$、$1 - q = p$ であるから、

$$\mathrm{E}(X) = 1 + \frac{p}{q} + \frac{q}{p} = 1 + \frac{p^2 + q^2}{pq}.$$

さらに $p^2 + q^2 = (p+q)^2 - 2pq = 1 - 2pq$ であるから、

$$\mathrm{E}(X) = 1 + \frac{1 - 2pq}{pq} = 1 + \frac{1}{pq} - 2 = \frac{1}{pq} - 1,$$

となり、求める結果が得られる。

最後の小問

正の数 p と q に対する相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）より、

$$\sqrt{pq} \leq \frac{p+q}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \text{ゆえに} \qquad 0 < pq \leq \frac{1}{4}.$$

考えてみよう 逆数をとると、不等号の向きはどうなるだろうか。

$pq > 0$ であるから、逆数をとると不等号の向きが逆になり、$\dfrac{1}{pq} \geq 4$ である。したがって

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{pq} - 1 \geq 4 - 1 = 3,$$

であり、等号が成り立つのは $p = q = \frac{1}{2}$ のときであり、かつそのときに限る。（同値な見方として、$pq = p(1-p) = \frac{1}{4} - (p - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$ としてもよい。）

検算

- $p = q = \frac{1}{2}$ のとき：$X - 1$ は箱 1 と異なる中身の箱が初めて出るまでの待ち時間であり、平均 2 の幾何分布（geometric distribution）に従う確率変数である。よって $\mathrm{E}(X) = 3$ となり、$\frac{1}{1/4} - 1$ と一致する。

- $p \to 0$ のとき $\mathrm{E}(X) \to \infty$ となる。父ペンギンがめったに出ないので、長く待つことになる。これは $\frac{1}{pq} - 1$ が発散することと合っている。
- 直接計算すると、$n \geq 2$ に対して $\mathrm{P}(X = n) = p^{n-1}q + q^{n-1}p$ である。$p = \frac{1}{3}$ として $n\,\mathrm{P}(X = n)$ を数値的に足し合わせると 3.5 が得られる。また、$p = 0.3$ で 200 000 人の収集者をシミュレーションしたところ、平均は 3.761 となり、厳密値 $\frac{1}{0.21} - 1 \approx 3.762$ とよく一致した。

よくある間違い

- $p^{n-1} + q^{n-1}$ を $n = 1$ にもそのまま使ってしまうこと。これでは「確率」が 2 になり、期待値が 1 だけ大きくなってしまう。
- $\mathrm{P}(X \geq 4) = p^4 + q^4$ と書いてしまうこと。4 個目の箱が必要になるのは、最初の 3 個の箱の中身がそろっているときである。
- 最後の小問で、正の数どうしの不等式では逆数をとると不等号の向きが逆になることを忘れること。

STEP のその先へ

裾和公式には連続版の双子がある。非負の確率変数（random variable）に対して $\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty \mathrm{P}(X > x)\,\mathrm{d}x$ が成り立ち、これもまったく同じ順序の入れ替えによって証明される（一般の場合にはトネリの定理（Tonelli's theorem）がこれを正当化する）。ペンギンの問題は**クーポン収集問題**（coupon collector's problem）の 2 種類の場合である。等確率の N 種類がある場合、必要な箱の個数の期待値は $N(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N})$ であり、およそ $N \ln N$ である。これらの考え方はどちらも、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）や、Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）に載っている。

解答例

STEP I 2010、第 13 問

確率・統計 ・ ポアソン過程の待ち時間

STEP I 2010、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/10-s1-q13

鍵となる考え方

「最初のメッセージが 1 時間後から 2 時間後の間に届く」ということは、「最初の 1 時間にはメッセージが届かないが、最初の 2 時間にメッセージが 1 通も届かないわけではない」ということと同じである。そのそれぞれは事象が 0 回起こるポアソン分布（Poisson distribution）の確率であり、1 つの指数関数（exponential）で表される。さらに $x = \mathrm{e}^{\lambda}$ と置換すればすべてが 2 次方程式に帰着し、あとは解と係数の関係（Vieta's formulas、2 解の和と積）がミルドレッドの場合も含めて残りの仕事をしてくれる。

解答

通常のポアソンモデルを採用する。すなわち、長さ t 時間の任意の区間にジョージが受け取るメッセージの数は平均 λt のポアソン分布に従い、重なり合わない区間における個数は互いに独立（independent）であるとする。時刻は朝の始まりから測る。時間は連続であるから、最初のメッセージがちょうど 1 時間後またはちょうど 2 時間後に届く確率は 0 であり、したがって区間の端点を含めるかどうかは問題にならない。

ジョージの方程式

ジョージの最初のメッセージまでの時間（単位は時間）を T とする。$T > t$ となるのは $[0, t]$ にメッセージが 1 通も届かないときであり、かつそのときに限るので、

$$\mathrm{P}(T > t) = \mathrm{P}(\text{ポアソン}(\lambda t) = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

事象 $\{1 < T \leq 2\}$ は $\{T > 1\}$ から $\{T > 2\}$ を取り除いたものであり、$\{T > 2\} \subseteq \{T > 1\}$ であるから、

$$p = \mathrm{P}(1 < T \leq 2) = \mathrm{P}(T > 1) - \mathrm{P}(T > 2) = \mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-2\lambda}.$$

両辺に $\mathrm{e}^{2\lambda}$ を掛けると $p\mathrm{e}^{2\lambda} = \mathrm{e}^{\lambda} - 1$、すなわち

$$p\mathrm{e}^{2\lambda} - \mathrm{e}^{\lambda} + 1 = 0,$$

となり、題意が示された。

λ の 2 つの正の値

$x = \mathrm{e}^{\lambda}$ とおく。$\lambda \mapsto \mathrm{e}^{\lambda}$ は $(0, \infty)$ から $(1, \infty)$ への狭義単調増加（strictly increasing）な全単射（bijection）であるから、正の解 λ は

$$px^2 - x + 1 = 0.$$

の解 $x > 1$ とちょうど 1 対 1 に対応する。ここで $p > 0$ である（たとえば $[1, 2]$ にちょうど 1 通のメッセージが届き、それ以前には 1 通も届かないときには必ず起こる事象の確率だからである）。よってこれは確かに 2 次方程式である。

> **考えてみよう** 解が実数であることを示すのは易しい。では、2 つの解がどちらも 1 より大きいことはどうすればわかるだろうか。

相異なる実数解であること。 判別式（discriminant）は、$4p < 1$ であるから $1 - 4p > 0$ である。よって相異なる 2 つの実数解 $x_1 < x_2$ が存在する。

どちらも 1 より大きいこと。 解と係数の関係より、$x_1 + x_2 = \frac{1}{p}$ かつ $x_1 x_2 = \frac{1}{p}$ である。すると

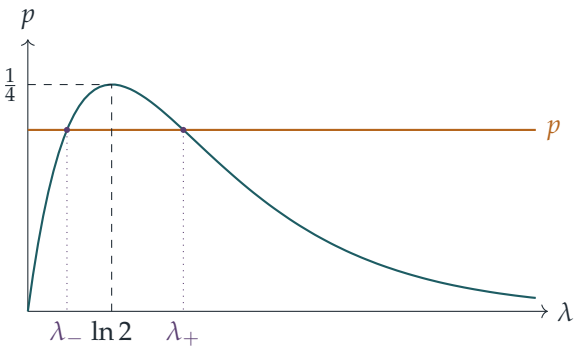
$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} + 1 = 1 > 0,$$

であるから、$x_1 - 1$ と $x_2 - 1$ は同符号である。その和は $x_1 + x_2 - 2 = \frac{1}{p} - 2 > 0$ である。$p < \frac{1}{4}$ より $\frac{1}{p} > 4$ となるからである。よって両者はともに正であり、$x_1 > 1$ かつ $x_2 > 1$ である。

したがって $\lambda_{\pm} = \ln\left(\dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4p}}{2p}\right)$ は、方程式を満たす λ の相異なる 2 つの正の値である。

図を描くとこのことがよく理解できる。λ の関数として見ると、$p = \mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-2\lambda}$ は $\lambda = 0$ で 0 であり、$\lambda \to \infty$ のとき 0 に近づき、さらに（$u = \mathrm{e}^{-\lambda}$ とおくと $p = u - u^2$ となるので）$u = \frac{1}{2}$、すなわち $\lambda = \ln 2$ で最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。高さ $p < \frac{1}{4}$ の水平な直線はこのグラフと 2 回交わる。つまり、静かな電話（メッセージがそもそもめったに届

かない）と忙しい電話（メッセージがたいてい最初の 1 時間以内に届く）が同じ p を与えうるのである。



ミルドレッド：$\lambda_1 + \lambda_2$

それぞれの電話を単独で見ればジョージの状況とまったく同じであるから、e^{λ_1} と e^{λ_2} はどちらも $px^2 - x + 1 = 0$ を満たす。この 2 次方程式の解は 2 つしかなく、$\lambda_1 \neq \lambda_2$ であるから、e^{λ_1} と e^{λ_2} はその 2 つの解 x_1 と x_2 である。（このためには $p < \frac{1}{4}$ が必要であるが、相異なる 2 つの値が存在するのだからこれは成り立つ。$p = \frac{1}{4}$ のときは重解（repeated root）となるからである。）2 解の積より、

$$e^{\lambda_1+\lambda_2} = e^{\lambda_1}e^{\lambda_2} = x_1x_2 = \frac{1}{p}, \qquad \text{よって} \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = \ln\frac{1}{p} = -\ln p.$$

ミルドレッドの最初のメッセージ

考えてみよう ミルドレッドが 2 台の電話で受け取るメッセージの総数は、どのような分布に従うだろうか。

2 つの個数は独立なポアソン分布に従う確率変数であるから、その和は平均の和を平均とするポアソン分布に従う。すなわち、t 時間に彼女が受け取るメッセージの総数はポアソン$\big((\lambda_1 + \lambda_2)t\big)$ に従う。同じことであるが、2 台の電話での待ち時間をそれぞれ T_1, T_2 とすると、これらは独立であり、彼女の最初のメッセージは $T = \min(T_1, T_2)$ に届いて、

$$\mathrm{P}(T > t) = \mathrm{P}(T_1 > t)\,\mathrm{P}(T_2 > t) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}.$$

いずれにせよ、$\mu = \lambda_1 + \lambda_2$ とおくと $e^{-\mu} = p$ であり、ジョージの場合と同じ議論により

$$\mathrm{P}(1 < T \leq 2) = e^{-\mu} - e^{-2\mu} = p - p^2 = p(1 - p).$$

を得る。

検算

- $\lambda = 0.8$ のとき $p = \mathrm{e}^{-0.8} - \mathrm{e}^{-1.6} \approx 0.2474$ である。指数分布に従う待ち時間を 2×10^5 個生成したシミュレーションでは 0.2462 となった。
- $p = 0.2$ のとき、解は $\lambda_1 \approx 0.3235$ と $\lambda_2 \approx 1.2859$ であり、どちらも正で、その和は $1.6094 = \ln 5 = -\ln 0.2$ である。$\min(T_1, T_2)$ をシミュレーションすると、最後の確率は 0.1601 となり、$p - p^2 = 0.16$ とよく一致した。
- 妥当性の確認：$p(1-p) < p$ となっており、これは当然である。2 台の電話があれば最初のメッセージはより早く届く傾向にあるので、「1 時間メッセージが届かない」ことは起こりにくくなるからである。

よくある間違い

- x についての解が実数かつ正であることは示したものの、$\lambda > 0$ であるためには単に $x > 0$ ではなく $x > 1$ が必要であることを忘れてしまう。
- 最後の小問で、2 台の電話についての確率を足したり、掛けたり（p^2）してしまう。正しい事象は「どちらかの電話に最初のメッセージが届くこと」であり、これは合わせた到着率によって決まる。

STEP のその先へ

ポアソン過程（Poisson process）において最初の事象が起こるまでの待ち時間は指数分布に従う。また、ここで用いた合併の性質（到着率 λ_1、λ_2 の独立なポアソン過程を合わせると、到着率 $\lambda_1 + \lambda_2$ の 1 つのポアソン過程になる）は、間引き（thinning、各事象を独立に確率 q で残すこと）と並んで、ポアソン過程の基本的な性質の 1 つである。これらの考え方は待ち行列理論（queueing theory）や応用確率論の多くの分野の土台となっている。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、この問題から自然につながる形でポアソン過程を扱っている。

解答例

STEP II 2010、第 1 問

純粋数学 ・ 曲率と曲率円

> **STEP II 2010、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q1

鍵となる考え方

「接する（touch）」とは、円と曲線が点 P を共有し、そこでの傾き（gradient）も一致することを意味する。「傾きの変化率」とは $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ のことである。したがって、P において y、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$、$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ がすべて曲線のものと一致する円を求めればよい。一般の円の方程式を陰関数微分（implicit differentiation）で 2 回微分すると、この条件は中心についての簡単な方程式になる。

解答

P における曲線

$y = 1 - x + \tan x$ に対して、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1 + \sec^2 x = \tan^2 x, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 2\tan x \sec^2 x.$$

$x = \frac{1}{4}\pi$ では $\tan x = 1$、$\sec^2 x = 2$ であるから、

$$y = 2 - \tfrac{1}{4}\pi, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 4.$$

よって $P = \left(\frac{1}{4}\pi,\ 2 - \frac{1}{4}\pi\right)$ である。

円

円を $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ とおく。x について陰関数微分すると、

$$(x-a) + (y-b)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0,$$

さらにもう一度微分すると（第 2 項には積の微分法則（product rule）を用いる）、

$$1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+(y-b)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0.$$

考えてみよう なぜ曲線の値をそのまま円の方程式に代入してよいのだろうか。

この 2 つの方程式は円上のすべての点で成り立ち、そこでの y、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$ は円自身の値である。2 つの条件は、円が P を通り、P において C と同じ傾きと同じ二階導関数（second derivative）をもつことを述べている。したがって P においては、$x=\frac{1}{4}\pi$、$y=2-\frac{1}{4}\pi$、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=1$、$\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2=4$ を用いてよい。

2 番目の方程式から

$$1+1+4(y-b)=0 \quad\Longrightarrow\quad y-b=-\tfrac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad b=2-\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}=\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{4}\pi.$$

次に 1 番目の方程式から

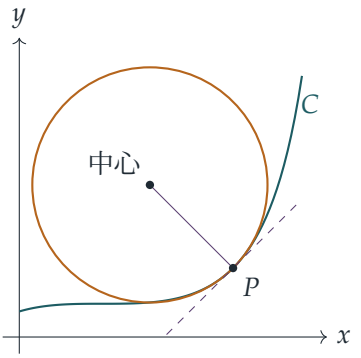
$$x-a=-(y-b)\cdot 1=\tfrac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad a=\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}.$$

最後に、$r^2=(x-a)^2+(y-b)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ である。よって接触円（osculating circle）は

$$\text{中心}\left(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2},\ \tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{4}\pi\right) \quad \text{、半径} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

である。

これは幾何的にも納得がいく。中心は、傾き 1 の接線（tangent）に垂直な方向 $(-1,1)$ に沿って P から距離 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の位置にある。また中心は $y>2-\frac{1}{4}\pi$ の側、すなわち曲線の上側にある。$\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2>0$ であり、そこで曲線は下に凸（concave upwards）なので、これは正しい。



検算

- 曲率半径（radius of curvature）の一般公式 $\rho = \left(1 + y'^2\right)^{3/2} / |y''|$ からは $2^{3/2}/4 = 1/\sqrt{2}$ が得られ、求めた値と一致する。
- 数値的には、中心はおよそ $(0.2854,\ 1.7146)$、P はおよそ $(0.7854,\ 1.2146)$ であり、その距離は 0.70711 である。円の下半分 $y = b - \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$ をとり、$x = 0.7854$ で数値微分すると、傾きは 1.0000、二階導関数は 4.000 となり、曲線のものと一致する。

よくある間違い

- 中心を接線の反対側に置いてしまうこと。$y - b$ の符号は 2 番目の方程式によって決まるので、計算に判断を任せればよい。
- $(y-b)\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ の微分に積の微分法則が必要であることを忘れること。$(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2$ の項はそこから生じる。

STEP のその先へ

接触円の半径は曲率半径であり、その逆数 $\kappa = |y''|/(1+y'^2)^{3/2}$ は曲率（curvature）である。曲率は曲線の微分幾何学（differential geometry）における中心的な量である。空間内の曲線では、曲率は捩率（torsion）とともにフレネ–セレの公式（Frenet–Serret formulae）に現れ、この公式は曲線がどのように曲がり、ねじれるかを記述する。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この趣旨の STEP の問題がさらに収められている。

解答例

STEP II 2010、第 2 問

純粋数学 • 三角関数の積分法

STEP II 2010、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/10-s2-q2

鍵となる考え方

3 次式（cubic）$7\sin x - 8\sin^3 x$ はそのままでは積分しにくそうに見えるが、これが 3 倍角の公式（triple-angle formula）から組み立てられていること、すなわち $\sin 3x$ の 2 倍に少しの余りを加えたものであることに気づけば話は変わる。さらに余弦の 3 倍角の公式を使えば、答えは $c = \cos\alpha$ の多項式に戻る。Eustace の積分については、$\sin^2\alpha = 1 - c^2$ を用いると彼の（誤った）答えも同じ変数で表せる。両者を比べると c の 4 次方程式（quartic）が得られ、その根については問題文でヒントが与えられている。

解答

3 倍角の公式

加法定理（addition formulae）と $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ を用いると、

$$\begin{aligned}\cos 3x = \cos(2x + x) &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x,\end{aligned}$$

となり、求める式が得られる。同様に、$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ を用いると、

$$\begin{aligned}\sin 3x = \sin(2x + x) &= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x \\ &= 2 \sin x \cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x) \sin x \\ &= 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + \sin x - 2 \sin^3 x \\ &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x.\end{aligned}$$

小問 (i)

正弦の公式より $8 \sin^3 x = 6 \sin x - 2 \sin 3x$ であるから、

$$7 \sin x - 8 \sin^3 x = \sin x + 2 \sin 3x.$$

これで積分は容易である：

$$\mathrm{I}(\alpha) = \Big[-\cos x - \tfrac{2}{3} \cos 3x \Big]_0^{\alpha} = -\cos \alpha - \tfrac{2}{3} \cos 3\alpha + 1 + \tfrac{2}{3}.$$

余弦の公式より $\cos 3\alpha = 4c^3 - 3c$ であるから、

$$\mathrm{I}(\alpha) = -c - \tfrac{2}{3}(4c^3 - 3c) + \tfrac{5}{3} = -\tfrac{8}{3} c^3 + c + \tfrac{5}{3},$$

となり、これが求める結果である。

$\mathrm{I}(\alpha) = 0$ となる c の値について：$\alpha = 0$ とすれば積分は自明に 0 となるので、$c = 1$ はその条件を満たす（確認：$-\frac{8}{3} + 1 + \frac{5}{3} = 0$）。実際、これが唯一の値である。なぜなら $8c^3 - 3c - 5 = (c - 1)(8c^2 + 8c + 5)$ であり、この 2 次式の判別式（discriminant）は $64 - 160 < 0$ だからである。

小問 (ii)

Eustace の規則によれば $\int \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sin^2 x$、$\int \sin^3 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \sin^4 x$ となるので、彼の求める定積分（definite integral）の値は

$$\mathrm{E}(\alpha) = \Big[\tfrac{7}{2} \sin^2 x - 2 \sin^4 x \Big]_0^{\alpha} = \tfrac{7}{2} s^2 - 2s^4, \qquad s = \sin \alpha.$$

小問 (i) と比較するため、$s^2 = 1 - c^2$ と書くと、

$$\mathrm{E}(\alpha) = \tfrac{7}{2}(1 - c^2) - 2(1 - c^2)^2 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} c^2 - 2c^4.$$

$\cos \beta = -\frac{1}{6}$ **の場合。** $c = -\frac{1}{6}$ とすると、

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(\beta) &= -\tfrac{8}{3} \cdot \big(-\tfrac{1}{216} \big) - \tfrac{1}{6} + \tfrac{5}{3} = \tfrac{1}{81} + \tfrac{3}{2} = \tfrac{245}{162}, \\ \mathrm{E}(\beta) &= \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{36} - 2 \cdot \tfrac{1}{1296} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{72} - \tfrac{1}{648} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{8}{648} = \tfrac{245}{162}.\end{aligned}$$

両者は一致するので、Eustace は偶然にも $\mathrm{I}(\beta)$ の正しい値を得ることになる。

すべての α の値。 Eustace の答えが正しくなるのは、ちょうど $\mathrm{E}(\alpha) = \mathrm{I}(\alpha)$ のとき、すなわち（6 を掛けて項を整理すると）

$$12c^4 - 16c^3 - 3c^2 + 6c + 1 = 0.$$

のときである。

考えてみよう このような 4 次式を、公式を使わずにどう因数分解（factorise）すればよいだろうか？

根はすでに 2 つわかっている。直前の計算により $c = -\frac{1}{6}$ は条件を満たすので、$6c+1$ は因数である。また $c = 1$（すなわち $\alpha = 0$）も条件を満たすはずである。そこでは I も E も 0 になるからである。$6c+1$ で割ると（c^3 と c の係数を比較して）、

$$12c^4 - 16c^3 - 3c^2 + 6c + 1 = (6c+1)(2c^3 - 3c^2 + 1),$$

となり、さらに $c = 1$ はこの 3 次式の根であるから、

$$2c^3 - 3c^2 + 1 = (c-1)(2c^2 - c - 1) = (c-1)^2(2c+1).$$

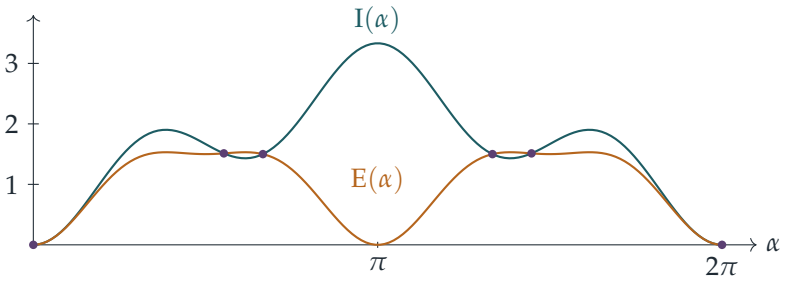
よって条件は

$$(6c+1)(2c+1)(c-1)^2 = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad c = 1,\ -\tfrac{1}{2} \text{ または } -\tfrac{1}{6}.$$

となる。$c = \cos\alpha$ であり、$[-1, 1]$ に属するどの c の値もある α から得られるので、Eustace が $\mathrm{I}(\alpha)$ の正しい値を得るのは、ある整数 n に対して

$$\alpha = 2n\pi, \qquad \alpha = 2n\pi \pm \tfrac{2\pi}{3}, \qquad \text{または} \qquad \alpha = 2n\pi \pm \arccos\left(-\tfrac{1}{6}\right).$$

となるときであり、かつそのときに限る。（負の α も含まれる。I も E も $\cos\alpha$ を通してのみ α に依存するからである。）下のグラフは、$0 \le \alpha \le 2\pi$ における真の積分の値（ティール）と Eustace の答え（アンバー）を示している。両者は $\alpha = 0$、$\frac{2\pi}{3}$、$\arccos(-\frac{1}{6}) \approx 1.738$、およびこれらを $\alpha = \pi$ に関して対称に移した点で交わる。



検算

- $\alpha = \pi$（$c = -1$）のとき、公式は $\mathrm{I}(\pi) = \frac{8}{3} - 1 + \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$ を与え、これは $\int_0^{\pi} (\sin x + 2\sin 3x)\,\mathrm{d}x = 2 + \frac{4}{3}$ と一致する。
- もとの被積分関数（integrand）にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると $\mathrm{I}(\beta) \approx 1.5123457$ となり、$\frac{245}{162} = 1.5123456\ldots$ と一致する。また $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ では、積分の値も Eustace の答えもともに 1.5 に等しい。

よくある間違い

- 下端（lower limit）を忘れること：$-\cos 0 - \frac{2}{3}\cos 0 = -\frac{5}{3}$ であり、これが $+\frac{5}{3}$ をもたらす。
- $c = 1$ がこの 4 次方程式の**重根**（double root）であることを見落とす、あるいはこの根自体を忘れて $c = -\frac{1}{2}$ と $c = -\frac{1}{6}$ だけを答えること。
- $[0, \pi]$ に属する α だけを答えること。問題はすべての値を求めている。

STEP のその先へ

$\sin^3 x$ のような累乗を $\sin x$ と $\sin 3x$ の組合せで表すことは、フーリエ解析（Fourier analysis）の出発点である。どの累乗 $\sin^n x$ も $\sin kx$ または $\cos kx$ の有限和であり、それは $\sin x = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})/2\mathrm{i}$ を使えば素早く求められる。$\cos nx$ を $\cos x$ で表す多項式はチェビシェフ（Chebyshev）多項式（Chebyshev polynomial）T_n であり、$T_3(c) = 4c^3 - 3c$ である。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は、ド・モアブル（de Moivre）の定理（de Moivre's theorem）によってこれらの恒等式がすべて自然なものになる理由を示している。

解答例

STEP II 2010、第 3 問

純粋数学 ・ フィボナッチ数と漸化式

> **STEP II 2010、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q3

鍵となる考え方

与えられた項が 4 つ、未知数も 4 つである。$(*)$ に $n = 0, 1, 2, 3$ を代入して解けばよい。工夫すべき点は、ある式を別の式で割ることである。こうすると a が消え、条件は $\lambda + \mu$ と $\lambda\mu$ についての式になる。これらは対称関数（symmetric functions）であり、λ と μ を二次方程式（quadratic equation）の解として捉えることを可能にする。公式が求まれば、(iii) の和は 2 つの等比級数（geometric series）に分かれる。

解答

小問 (i)

$(*)$ に $n = 0, 1, 2, 3$ を代入すると

$$a + b = 0, \qquad a\lambda + b\mu = 1,$$
$$a\lambda^2 + b\mu^2 = 1, \qquad a\lambda^3 + b\mu^3 = 2.$$

を得る。第 1 式から $b = -a$ であるから、残りの 3 式は

$$a(\lambda - \mu) = 1, \qquad a(\lambda^2 - \mu^2) = 1, \qquad a(\lambda^3 - \mu^3) = 2.$$

となる。特に $a(\lambda - \mu) = 1$ から $a \neq 0$ かつ $\lambda \neq \mu$ がわかる。因数分解すると

$$\lambda^2 - \mu^2 = (\lambda - \mu)(\lambda + \mu), \qquad \lambda^3 - \mu^3 = (\lambda - \mu)(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2),$$

であるから、第 2 式と第 3 式を $a(\lambda - \mu) = 1$ で割ると（これは 0 でないので割ってよい）

$$\lambda + \mu = 1 \qquad \text{かつ} \qquad \lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 = 2,$$

を得る。このうち後者が示すべき結果である。

考えてみよう この2つの式から、λ と μ そのものはどのように求められるだろうか。

第2の式を和と積で表すと $\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2=(\lambda+\mu)^2-\lambda\mu$ であるから、$1-\lambda\mu=2$ より $\lambda\mu=-1$ である。和が1、積が -1 である2数は

$$t^2-t-1=0, \qquad \text{より} \qquad t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

の解である。どちらの解が λ だろうか。$a(\lambda-\mu)=1$ と $a>0$ から $\lambda-\mu>0$ でなければならないので、λ は大きい方の解である。このとき $\lambda-\mu=\sqrt{5}$ であり、

$$\lambda=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \mu=\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad a=\frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad b=-\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

となる。（逆の割り当てでは $a=-1/\sqrt{5}$ となってしまい、これは条件に反する。）逆に、上の各段階はすべて逆にたどれるので、これらの値は4つの式をすべて満たす。

小問 (ii)

$F_6=(\lambda^6-\mu^6)/\sqrt{5}$ である。$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6$ を直接展開する代わりに、λ が $t^2=t+1$ の解であることを使って次数を下げる。

$$\begin{aligned}
\lambda^2&=\lambda+1,\\
\lambda^3&=\lambda^2+\lambda=2\lambda+1,\\
\lambda^6&=(2\lambda+1)^2=4\lambda^2+4\lambda+1=4(\lambda+1)+4\lambda+1=8\lambda+5.
\end{aligned}$$

μ も同じ二次方程式を満たすので全く同様のことが成り立ち、$\mu^6=8\mu+5$ である。よって

$$F_6=\frac{(8\lambda+5)-(8\mu+5)}{\sqrt{5}}=\frac{8(\lambda-\mu)}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=8.$$

小問 (iii)

$(*)$ を用いると

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n-\left(\frac{\mu}{2}\right)^n\right].$$

である。$\lambda\approx 1.618$、$\mu\approx -0.618$ であるから、公比（common ratio）$\lambda/2$ と $\mu/2$ はいずれも絶対値（modulus）が1より小さい。したがって2つの等比級数はどちらも収

束（converge）し、和を 2 つの級数の差に分けてよい。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1-\lambda/2} - \frac{1}{1-\mu/2}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{2-\lambda} - \frac{1}{2-\mu}\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\lambda-\mu}{(2-\lambda)(2-\mu)} = \frac{1}{4-2(\lambda+\mu)+\lambda\mu},$$

ここで $\lambda - \mu = \sqrt{5}$ を用いた。$\lambda + \mu = 1$ と $\lambda\mu = -1$ より分母は $4-2-1=1$ であるから

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{2^{n+1}} = 1.$$

検算

この公式からは整数が得られるはずである。$\lambda^4 = 3\lambda + 2$ を用いると $F_4 = (\lambda^4 - \mu^4)/\sqrt{5}$ から $F_4 = 3$ を得る。また $F_5 = 5$、$F_6 = 8$ は、最初の 4 項に見られる規則 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ に合っている。(iii) については、部分和（partial sums）0, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{19}{32}$, ... は少しずつ 1 に近づいていく。最初の 300 項を数値的に足すと、計算機の精度の範囲で 1.0000000 となる。項は $(0.809)^n$ 程度でしか減衰しないので、収束は遅い。

よくある間違い

- どちらの解が λ かを決めるのに $a > 0$ を使い忘れること。これがないと答えは定まらない。
- なぜ 0 でないかを述べずに $\lambda - \mu$ で割ること（$a(\lambda - \mu) = 1$ であるから 0 ではない）。
- 各級数が収束することを確かめずに、無限和を 2 つの級数に分けること。

STEP のその先へ

ここで得た公式はフィボナッチ数（Fibonacci numbers）に対するビネの公式（Binet's formula）であり、その方法は線形漸化式（linear recurrence）に対する一般的な方法である。λ と μ は $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ の特性方程式（characteristic equation）$t^2 = t + 1$ の解である。小問 (iii) は母関数（generating function）$\sum F_n x^n = x/(1 - x - x^2)$ を $x = \frac{1}{2}$ で評価して（それを半分にして）おり、やはり 1 を与える。母関数は大学 1 年次の組合せ論（combinatorics）や確率において重要な道具である。黄金比（golden ratio）λ とフィボナッチ数の連分数（continued fractions）論における役割については、Davenport, *The Higher Arithmetic*（整数論の入門書）を参照されたい。

解答例

STEP II 2010、第 4 問

純粋数学 • 置換積分

> **STEP II 2010、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q4

鍵となる考え方

置換（substitution）$u = a - x$ は区間の両端を入れ替え、$f(x)$ を $f(a-x)$ に、またその逆に変える。したがって、この積分は、分子が分母のもう一方の項に置き換わった「相方」の積分に等しい。2 つの形を足し合わせると分子が分母に等しくなり、被積分関数（integrand）は 1 になる。この問題の残りの部分は、この構造が姿を変えて現れているのを見抜けるかどうかにかかっている。小問 (ii) では、$[\frac{1}{2}, 2]$ の両端を入れ替える置換 $x \mapsto 1/x$ を用いて同じ手法を使う。

解答

小問 (i)

以下では常に $[0, a]$ 上で $f(x) + f(a-x) \neq 0$ であると仮定する。これにより被積分関数は定義される。I において $u = a - x$ と置換すると、$\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$ である。$x = 0$ のとき $u = a$、$x = a$ のとき $u = 0$ である。よって

$$I = \int_a^0 \frac{f(a-u)}{f(a-u)+f(u)}\,(-\mathrm{d}u) = \int_0^a \frac{f(a-u)}{f(u)+f(a-u)}\,\mathrm{d}u.$$

u はダミー変数（dummy variable）であるから x と書き換えてよく、これにより求める I の第 2 の形が得られる。

次に、I の 2 つの表示を足し合わせる。

$$2I = \int_0^a \frac{f(x)+f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^a 1\,\mathrm{d}x = a, \qquad \text{よって} \qquad I = \frac{a}{2}.$$

第 1 の積分。

考えてみよう $\ln(2+x-x^2)$ のどこに $f(x)+f(a-x)$ が隠れているだろうか。

この 2 次式は $2+x-x^2=(1+x)(2-x)$ と因数分解できる。したがって

$$\ln(2+x-x^2)=\ln(1+x)+\ln(2-x),$$

が成り立つ。$[0,1]$ 上で 2 つの因数はともに正であるから、これは正しい。$a=1$、$f(x)=\ln(1+x)$ とおく。すると $f(1-x)=\ln(2-x)$ であり、被積分関数はちょうど $\dfrac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}$ となる。$[0,1]$ 上で $2+x-x^2\geq 2$ であるから、分母が零になることはない。したがって

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{\ln(2+x-x^2)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

第 2 の積分。 加法定理（compound-angle formula）を用いて分母を展開する。

$$\sin\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right)=\sin x\cos\tfrac{\pi}{4}+\cos x\sin\tfrac{\pi}{4}=\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}.$$

よって被積分関数は $\sqrt{2}\,\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}$ である。$a=\frac{\pi}{2}$、$f=\sin$ とすると、$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ である。分母 $\sin x+\cos x$ は $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上で正である。上の結果により

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\cdot\frac{\pi/2}{2}=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}.$$

小問 (ii)

この積分を J とおく。被積分関数は $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\sin x}{\sin x+\sin(1/x)}$ である。分母に問題はない。$x\in[\frac{1}{2},2]$ のとき、x と $1/x$ はともに $[\frac{1}{2},2]\subset(0,\pi)$ に属するので、$\sin x>0$ かつ $\sin(1/x)>0$ である。

考えてみよう $\sin x$ と $\sin\frac{1}{x}$ を入れ替え、しかも積分区間の端 $\frac{1}{2}$ と 2 を保つ置換はどれだろうか。

答えは $x=1/u$ である。このとき $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u/u^2$ である。$x=\frac{1}{2}$ のとき $u=2$、$x=2$ のとき $u=\frac{1}{2}$ である。因子 $\frac{1}{x}$ は u になるので

$$J=\int_2^{1/2}u\cdot\frac{\sin(1/u)}{\sin(1/u)+\sin u}\cdot\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right)=\int_{1/2}^{2}\frac{\sin(1/u)}{u\left(\sin u+\sin\frac{1}{u}\right)}\,\mathrm{d}u.$$

u を x と書き換え、これを J のもとの形と足し合わせると

$$2J=\int_{1/2}^{2}\frac{\sin x+\sin\frac{1}{x}}{x\left(\sin x+\sin\frac{1}{x}\right)}\,\mathrm{d}x=\int_{1/2}^{2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln 2-\ln\tfrac{1}{2}=2\ln 2.$$

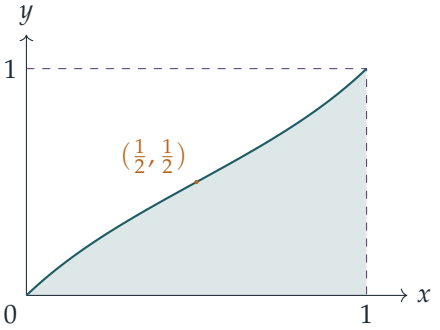
よって

$$\int_{1/2}^{2} \frac{\sin x}{x\left(\sin x + \sin \frac{1}{x}\right)}\,\mathrm{d}x = \ln 2.$$

ここでは因子 $\frac{1}{x}$ が本質的である。$\mathrm{d}x$ が $x \mapsto a - x$ で変わらないのと同じように、測度（measure）$\frac{\mathrm{d}x}{x}$ は $x \mapsto 1/x$ で（向きを除いて）変わらない。

検算

- 被積分関数 $g(x) = \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}$ は $g(x) + g(a-x) = 1$ を満たす。したがってそのグラフは点 $(\frac{a}{2}, \frac{1}{2})$ に関して点対称（半回転で不変）であり、グラフの下の面積は $a \times 1$ の長方形の面積の半分となる。下図は第 1 の積分についてこのことを示している。



- 数値的には、シンプソンの公式（Simpson's rule）により、第 1 の積分は 0.500000、第 2 の積分は 1.110721（実際 $\frac{\sqrt{2}\pi}{4} \approx 1.110721$）、小問 (ii) は 0.693147（実際 $\ln 2 \approx 0.693147$）となる。

よくある間違い

- $\sin(x + \frac{\pi}{4})$ を書き換える際に因子 $\sqrt{2}$ を忘れ、$\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ ではなく $\frac{\pi}{4}$ としてしまう。
- 小問 (ii) で $\frac{1}{x}$ を見失う。これは u になり、$-\frac{1}{u^2}$ と合わさって $-\frac{1}{u}$ が残る。

STEP のその先へ

どちらの手法も、積分の「測度」を変えない区間の対称性を利用している。鏡映 $x \mapsto a - x$ は $\mathrm{d}x$ を保ち、反転 $x \mapsto 1/x$ は $\frac{\mathrm{d}x}{x}$ を保つ。大学では、これは不変測度（invariant measure）の考え方へと発展する。たとえば、$\frac{\mathrm{d}x}{x}$ は乗法に関する正の実数全体上の自然な測度であり、メリン変換（Mellin transform）の基礎となっている。置換積分の実解析的な基礎については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門

書）を参照のこと。STEP 風の積分の技法をさらに多く知りたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）を参照のこと。

解答例

STEP II 2010、第 5 問

純粋数学 ・ ベクトルのなす角と円錐

> **STEP II 2010、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q5

鍵となる考え方

ここでのすべては、ただ一つの事実に帰着する。方向ベクトル（direction vector）$\mathbf{d}$ をもつ直線とベクトル $\mathbf{a}$ のなす角 θ は $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{d}|\,|\mathbf{a}|}$ を満たす、という事実である。「等しく傾いている」や「角 α で傾いている」という条件は、そのまま $\mathbf{d}$ の成分についての方程式になる。最後の小問では、直交座標による方程式（Cartesian equation）が、直前に求めた関係式と同じ形をしていることに注目しよう。O を通り、固定された直線とすべて同じ角をなす直線の集まりは、円錐（cone）である。

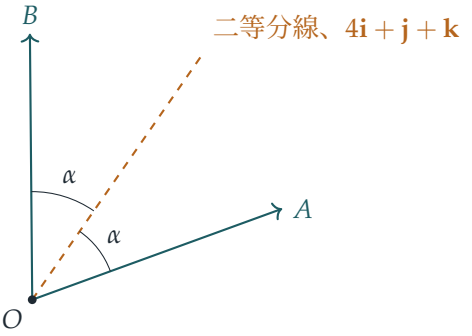
解答

$\mathbf{a} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$、$\mathbf{b} = 5\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$ とおくと、$|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$、$|\mathbf{b}| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ である。また $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 5-1-1 = 3$ である。したがって

$$\cos 2\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{3}{\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

$\cos 2\alpha > 0$ であるから角 2α は鋭角であり、α は 0 と $\frac{\pi}{4}$ の間にある。後で次の値が必要になる。

$$\cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) = \tfrac{2}{3}.$$



（図は平面 OAB を模式的に示したものにすぎない。）

小問 (i)

L_1 の方向を $\mathbf{d} = m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{k}$ とする。$\mathbf{d}$ が OA、OB となす角の余弦は、それぞれ

$$\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{d}|\sqrt{3}} = \frac{m+n+p}{\sqrt{3}\,|\mathbf{d}|} \qquad \text{および} \qquad \frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{d}|\,3\sqrt{3}} = \frac{5m-n-p}{3\sqrt{3}\,|\mathbf{d}|}.$$

である。cos は $[0,\pi]$ 上で単射（one-to-one）であるから、角が等しいことは余弦が等しいことと同値である。両辺に $3\sqrt{3}\,|\mathbf{d}|$ を掛けると

$$3(m+n+p) = 5m-n-p \quad \Longleftrightarrow \quad m = 2(n+p).$$

を得る。

> **考えてみよう** 直線には決まった向きがない。直線が OA とは角 θ をなし、OB とは $\pi-\theta$ をなす場合はどうなるだろうか。

「2 直線のなす角」を鋭角の方と解釈するなら、余弦は符号を除いて等しければよい。もう一方の符号からは $3(m+n+p) = -(5m-n-p)$、すなわち $4m+n+p=0$ が得られる。これらの直線は、O を通り二等分線に垂直な平面上にあり、この平面は $\angle AOB$ の外角の二等分線（external bisector）を含む。想定されている答えは $m = 2(n+p)$ であるが、第二の族が存在することも知っておく価値がある。

$\angle AOB$ の二等分線（angle bisector）を求めるには、OA と OB に沿う**単位**ベクトル（unit vector）を足し合わせる。2 つの単位ベクトルはひし形（rhombus）を張るので、その和は両者のなす角を二等分する。よって

$$\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{b}}{3\sqrt{3}} = \frac{3\mathbf{a}+\mathbf{b}}{3\sqrt{3}} = \frac{8\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{3\sqrt{3}},$$

であり、$m=4$、$n=1$、$p=1$（あるいはその 0 でない任意の定数倍）ととることができる。確認として、$4 = 2(1+1)$ であるから、この方向は上の関係式を満たしている。

小問 (ii)

L_2 の方向を $\mathbf{e} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ とする。この直線が OA と角 α をなすのは

$$\frac{u+v+w}{\sqrt{3}\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = \pm\cos\alpha.$$

のときである。$\pm$ は直線に沿ったどちらの向きも許すためのものである。両辺を 2 乗すると符号が消え、$\cos^2\alpha = \frac{2}{3}$ を用いると

$$(u+v+w)^2 = 2(u^2+v^2+w^2).$$

を得る。左辺を $u^2+v^2+w^2+2(vw+wu+uv)$ と展開して整理すると、次の関係式が得られる。

$$u^2+v^2+w^2 = 2(vw+wu+uv).$$

考えてみよう 方向についての条件が、どのようにして曲面になるのだろうか。

任意の点 $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ をとる。この点は O を通るちょうど 1 本の直線、すなわち方向 $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ をもつ直線上にある。小問 (ii) により、この点が

$$x^2+y^2+z^2 = 2(yz+zx+xy)$$

を満たすのは、その点を通る O からの直線が OA と角 α をなすとき、かつそのときに限る。原点もこの方程式を満たす。したがって、この曲面は O を通り直線 OA に対して角 α で傾いたすべての直線の和集合である。

これは、頂点が原点、軸が直線 $x=y=z$（直線 OA）である**（二葉の）直円錐**（right circular cone）である。その半頂角（semi-vertical angle）α は

$$\cos\alpha = \sqrt{\tfrac{2}{3}}, \qquad \tan\alpha = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \alpha \approx 35.3^\circ,$$

を満たし、これは $\angle AOB$ のちょうど半分である。μ がすべての実数を動くので、この円錐は 2 つの葉（nappe）をもつ。小問 (i) の二等分線はこの円錐上にある。実際 $(4,1,1)$ について $16+1+1 = 18 = 2(1+4+4)$ となる。

検算

- 点 $(1,1,0)$ は $2 = 2(0+0+1)$ を満たす。この点の方向と $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ のなす角の余弦は $2/(\sqrt{2}\sqrt{3}) = \sqrt{2/3}$ であり、確かにそうなっている。
- 数値的には $\arccos(1/3)/2 = 0.61548\,\text{rad}$ であり、二等分線 $4\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ は OA とも OB とも $0.61548\,\text{rad}$ の角をなす。

- c を $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ とのなす角の余弦とすると、恒等式 $x^2+y^2+z^2-2(yz+zx+xy)=(x^2+y^2+z^2)(2-3c^2)$ が成り立つ。よって左辺が 0 になるのは、ちょうど $c^2=\frac{2}{3}$ のときである。

よくある間違い

- 単位ベクトルの和ではなく $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ で二等分してしまう。$|\mathbf{b}|\neq|\mathbf{a}|$ であるから、$\mathbf{a}+\mathbf{b}=6\mathbf{i}$ は二等分線ではない。
- $\cos\alpha=\frac{1}{2}\cos 2\alpha$ のような式を使ってしまう。必要なのは倍角の公式（double-angle formula）$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$ である。
- 頂点、軸、半頂角を示さずに、曲面を単に「円錐」とだけ述べてしまう。

STEP のその先へ

この円錐の方程式は**二次形式**（quadratic form）$\mathbf{x}^{\mathsf{T}}M\mathbf{x}=0$ であり、M は対称行列（symmetric matrix）である。大学 1 年の線形代数（linear algebra）では、このような曲面を M の固有値（eigenvalue）によって分類する。ここでの M は対角成分が 1、非対角成分が -1 であるから、その固有値は -1（$\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 方向）と 2（重複度 2）である。負の固有値が 1 つ、等しい正の固有値が 2 つというのは、まさに、仲間外れの固有値に対応する固有ベクトル（eigenvector）を軸とする円錐の符号（signature）である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（『線形代数入門』）では、対称行列と二次形式を扱う箇所でこの内容が展開されている。

解答例

STEP II 2010、第 6 問

純粋数学 ・ 正四面体の幾何

STEP II 2010、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

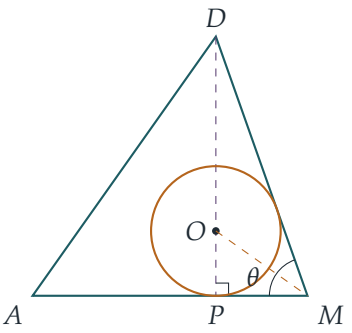
step.maths.org/questions/10-s2-q6

鍵となる考え方

正四面体（regular tetrahedron）は対称性が非常に高いので、ほとんどすべてのことが一つの鉛直な断面（cross-section）の中で起こる。すなわち、ある辺の中点、それに向かい合う頂点、そして頂上の頂点を通る平面である。この平面の中では、3 次元の問題はすべて直角三角形の問題になる。球については、対称性から中心の位置が決まり、小問 (ii) の角から中心が各面からどれだけ離れているかがわかる。

解答

以下では一貫して、M を BC の中点とする。各面は 1 辺の長さが 1 の正三角形であるから、各中線（median）（たとえば AM や DM）の長さは $\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。



小問 (i)

D は A、B、C から等距離にあり、DP は平面 ABC に垂直であるから、三平方の定理（Pythagoras）により $PA^2 = DA^2 - DP^2 = DB^2 - DP^2 = PB^2$ であり、同様に $PB = PC$ である。よって P は正三角形 ABC の外心（circumcentre）であり、これはその重心（centroid）でもある。重心は各中線を頂点の側から 3 分の 2 の位置にあるので、

$$PA = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad PM = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

すると、三角形 DPA の P における直角から、

$$PD^2 = DA^2 - PA^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \qquad \text{よって} \qquad PD = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

小問 (ii)

6 本の辺はすべて同じように見える（正四面体の対称変換によって、どの辺も他のどの辺にも移すことができる）。したがって、BC で交わる面 ABC と面 DBC のなす角（angle between faces）θ を求めれば十分である。

> **考えてみよう** 図の中のどの角が、本当に二つの面のなす角**そのもの**なのだろうか。

1 本の直線で交わる二つの平面のなす角は、それぞれの平面内に 1 本ずつ、共通の直線上の同じ点でその直線に垂直な 2 本の直線を用いて測る。正三角形 ABC では中線 AM が BC に垂直であり、正三角形 DBC では中線 DM が BC に垂直である。よって $\theta = \angle AMD$ であり、P は AM 上の A と M の間にあるから、$\theta = \angle PMD$ でもある。

三角形 DPM は P に直角をもち、$PM = \frac{1}{2\sqrt{3}}$、斜辺は $DM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。したがって

$$\cos\theta = \frac{PM}{DM} = \frac{1/(2\sqrt{3})}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{3},$$

となり、示すべきことが得られた。（検算として、$PD^2 = DM^2 - PM^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$ であり、小問 (i) と一致する。）

小問 (iii)

最適な球。 O を DP 上の点で $OP = r$ となるものとし、O が三つの斜めの面からも距離 r にあるように r を定める。対称性により、面 DBC だけを扱えば十分である。

平面 AMD は BC に垂直である（どちらも BC に垂直な AM と DM を含むから）。よってこの平面は面 DBC に垂直であり、O からその面に下ろした垂線はこの断面内にある。すなわち、それは O から直線 MD に下ろした垂線である。O は直線 MP から

距離 OP、直線 MD から距離 r の位置にあり、この二つを等しくしたいのだから、O は M における角 θ の二等分線（bisector）上になければならない。よって

$$r = PM\tan\tfrac{\theta}{2}.$$

小問 (ii) から、$\tan^2\frac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ を用いると、

$$\tan^2\tfrac{\theta}{2} = \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}, \qquad \tan\tfrac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

（θ は鋭角であるから正）。したがって

$$r = \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

中心 O、半径 $\frac{\sqrt{6}}{12}$ の球は四つの面すべてに接し、しかも四面体の内部にある。O は内部の点であり、どの面からの距離も r 以上だからである。

> **考えてみよう** どこに置いたとしても、これより大きな球が存在しないことはどうしてわかるのだろうか。

これより大きな球は入らない。四面体の内部の任意の点 X をとり、四つの面からの距離を d_1, d_2, d_3, d_4 とする。X と各頂点を結ぶと、四面体は各面を底面とする四つの角錐（pyramid）に分割され、それぞれの底面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}$ である。それらの体積を足し合わせると、

$$V = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{4}\,(d_1+d_2+d_3+d_4).$$

ところが $X = D$ とおく（このとき三つの距離は 0 で、残りの一つは PD である）と、$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\,PD$ がわかる。したがって、すべての内部の点について

$$d_1+d_2+d_3+d_4 = PD = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

X を中心とする半径 ρ の球が内部に収まるのは、すべての $d_i \geq \rho$ のときに限るから、$4\rho \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$、すなわち $\rho \leq \frac{\sqrt{6}}{12}$ である。よって最大の球の半径は

$$r = \frac{\sqrt{6}}{12} = \tfrac{1}{4}\,PD,$$

であり、等号が成り立つのは四つの距離がすべて等しいとき（O において）に限る。

検算

- 座標：$A=(0,0,0)$、$B=(1,0,0)$、$C=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$、$D=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\sqrt{2/3})$ とすると 6 本の辺の長さはすべて 1 となり、$PD \approx 0.8165$ である。

- 任意の二つの面の外向き単位法線ベクトル（unit normal）の内積（dot product）は $-\frac{1}{3}$ であり、$\cos\theta = \frac{1}{3}$（約 70.5°）が確かめられる。
- 点 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{12})$ は四つの面すべてから距離 $0.20412\ldots = \frac{\sqrt{6}}{12}$ にある。内部の点を無作為にとると、距離の和は常に $0.8165\ldots$ となり、最小の距離が 0.2041 を超えることはなかった。
- 中心は PD を下から 4 分の 1 の位置にある。これは、正四面体の内心（incentre）が重心と一致し、重心はある面から向かい合う頂点までの 4 分の 1 の位置にあるという事実と合致する。

よくある間違い

- $\angle DAM$ や $\angle DBA$ を面のなす角として用いること。2 本の直線はどちらも共通の辺に垂直でなければならず、DM と AM はその条件を満たしている。
- PA を中線の 3 分の 2 ではなく半分としてしまうこと。
- 四つの面に接する球を求めただけで、他の場所にある球がそれより大きくなり得ない理由を述べないこと。距離の和に関する恒等式を使えば、これは 2 行で片づく。

STEP のその先へ

面までの距離の和が一定であることは、正三角形に関するヴィヴィアーニの定理（Viviani's theorem）の 3 次元版である。これは重心座標（barycentric coordinates）から導かれる。重心座標とは、単体（simplex）の任意の点をその頂点の重み付き平均として表すものである。角 $\arccos\frac{1}{3}$ は化学にも現れる。メタンの結合角は $\arccos(-\frac{1}{3}) \approx 109.5°$ であり、これはこの同じ四面体の二つの頂点が中心に対して張る角である。この種の 3 次元的な推論をさらに学ぶには、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*、あるいは内積と外積（cross product）を用いたベクトルによる方法については、ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra* を参照するとよい。

解答例

STEP II 2010、第 7 問

純粋数学 • 3 次方程式

> **STEP II 2010、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q7

鍵となる考え方

最高次の係数（leading coefficient）が正である三次関数（cubic）のグラフが軸とただ一度だけ交わるのは、2 つの停留点（turning point）が軸に関して同じ側にあるとき、かつそのときに限る。小問 (ii) は、x^2 の項をもたない三次方程式を解くための古典的な技法である。置換（substitution）$x = u + q/u$ は、x^3 に現れる交差項が $-3qx$ と打ち消し合うように選ばれており、その結果 u^3 についての二次方程式が残る。小問 (iii) は、実は x の代わりに p を用いた同じ三次方程式が姿を変えて現れたものであることがわかる。

解答

小問 (i)

$f(x) = x^3 - 3qx - q(1+q)$ とおく。このとき $f'(x) = 3x^2 - 3q$ であり、これは $x = \pm\sqrt{q}$ で 0 になる（$q > 0$ であるから実数である）。$f''(x) = 6x$ であるから、$x = -\sqrt{q}$ における点は極大点（local maximum）、$x = \sqrt{q}$ における点は極小点（local minimum）である。

極大点では

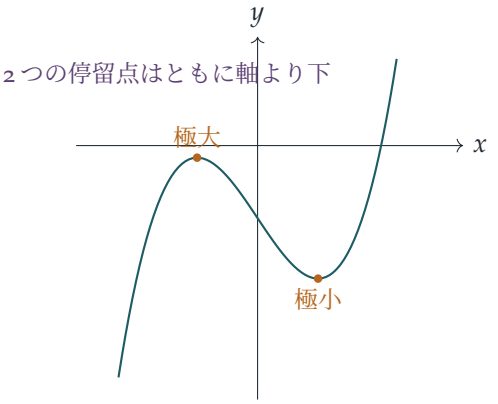
$$\begin{aligned} f(-\sqrt{q}) &= -q\sqrt{q} + 3q\sqrt{q} - q - q^2 \\ &= -q\left(q - 2\sqrt{q} + 1\right) \\ &= -q\left(\sqrt{q} - 1\right)^2. \end{aligned}$$

である。$q > 0$ かつ $q \neq 1$（したがって $\sqrt{q} \neq 1$）であるから、これは厳密に負である。

極小点はさらに低い：

$$f(\sqrt{q}) = q\sqrt{q} - 3q\sqrt{q} - q - q^2 = -2q\sqrt{q} - q - q^2 < 0.$$

よって、2 つの停留点はともに x 軸より下にある。$x < \sqrt{q}$ では、曲線は負である極大値より上に出ることがないので、そこでは軸と交わらない。$x > \sqrt{q}$ では関数は狭義単調増加であり、負の値から $+\infty$ まで増加するので、軸とちょうど一度交わる。したがって、曲線は x 軸とただ一度だけ交わる。



小問 (ii)

二項定理（binomial theorem）を用いて $x = u + q/u$ を 3 乗すると

$$\begin{aligned} x^3 &= u^3 + 3u^2 \cdot \frac{q}{u} + 3u \cdot \frac{q^2}{u^2} + \frac{q^3}{u^3} \\ &= u^3 + \frac{q^3}{u^3} + 3q\left(u + \frac{q}{u}\right) = u^3 + \frac{q^3}{u^3} + 3qx. \end{aligned}$$

となる。よって $x^3 - 3qx = u^3 + q^3/u^3$ であり、三次方程式は

$$u^3 + \frac{q^3}{u^3} = q(1+q).$$

となる。u^3 を掛けると（この置換が意味をもつためには $u \neq 0$ であることに注意する）、u^3 が満たす二次方程式は

$$\left(u^3\right)^2 - q(1+q)\,u^3 + q^3 = 0.$$

である。

? **考えてみよう** この二次式はどのように因数分解できるか。

2 つの解の和は $q+q^2$、積は $q^3 = q\cdot q^2$ でなければならないので、解は q と q^2 である：

$$\left(u^3-q\right)\left(u^3-q^2\right)=0.$$

実数の立方根（cube root）をとると、$u=q^{1/3}$ または $u=q^{2/3}$ である。どちらも同じ x を与える：

$$q^{1/3}+\frac{q}{q^{1/3}}=q^{1/3}+q^{2/3},\qquad q^{2/3}+\frac{q}{q^{2/3}}=q^{2/3}+q^{1/3}.$$

直接確かめると、$s=q^{1/3}$、$x=s+s^2$ とおけば $x^3=s^3+3s^4+3s^5+s^6$ かつ $3qx=3s^4+3s^5$ であるから、$x^3-3qx=s^3+s^6=q(1+q)$ となる。小問 (i) より、$q>0$、$q\neq 1$ のときこの三次方程式の実数解はただ 1 つであるから、その実数解は

$$x=q^{1/3}+q^{2/3}.$$

である。

小問 (iii)

$\alpha+\beta=p$ かつ $\alpha\beta=q$ であるから

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=p^3-3qp,$$

となり、示すべき式が得られた。

一方の解が他方の解の 2 乗であるならば、$\alpha^2=\beta$ または $\beta^2=\alpha$ であるから、いずれの場合も

$$(\alpha^2-\beta)(\beta^2-\alpha)=0.$$

が成り立つ。この式は α と β について対称（symmetric）であるから、p と q で表すことができる。展開すると

$$\begin{aligned}(\alpha^2-\beta)(\beta^2-\alpha)&=\alpha^2\beta^2-(\alpha^3+\beta^3)+\alpha\beta\\&=q^2-(p^3-3qp)+q.\end{aligned}$$

となる。これを 0 とおくと、関係式

$$p^3-3qp-q(1+q)=0.$$

が得られる。これはまさに、小問 (ii) の三次方程式で x の代わりに p としたものである。$q>0$、$q\neq 1$ で p が実数のとき、p はその唯一の実数解でなければならないので

$$p=q^{1/3}+q^{2/3}.$$

である。これは納得のいく結果である。このとき解は $\alpha=q^{1/3}$ と $\beta=q^{2/3}=\alpha^2$ であり、その和は p、積は q である。

検算

$q = 8$ とする。小問 (ii) からは $x = 2 + 4 = 6$ が得られ、実際 $216 - 144 - 72 = 0$ である。小問 (iii) では、$p = 6$ のとき $t^2 - 6t + 8 = (t - 2)(t - 4)$ となり、$4 = 2^2$ である。コンピュータにより、無作為に選んだ数千個の q について (i) の 2 つの停留点での値を、無作為に選んだ複素数 u について恒等式 $x^3 - 3qx = u^3 + q^3/u^3$ を確認し、さらに $p = q^{1/3} + q^{2/3}$ のとき常に一方が他方の 2 乗であるような解の組が得られることも確認した。

よくある間違い

- (i) で、極小値が負であることだけを確かめてしまう。それだけでは 3 回交わる可能性が残る。重要なのは極大値が負であることであり、$q \neq 1$ が使われるのはまさにそこである。
- (ii) で、u^3 の 2 つの値が異なる 2 つの解を与えるのではないかと心配してしまう。u と q/u は対称な役割を果たすので、両者は当然同じ x を与える。

STEP のその先へ

(ii) の置換は、一般の三次方程式に対するカルダーノ（Cardano）の公式の核心であり、数学において複素数が初めて避けられないものとなった場面でもある。三次方程式が 3 つの実数解をもつとき、u^3 についての二次方程式は複素数解をもつのである。除外された場合 $q = 1$ はよい例である。このときは $p = -1$ も許され、$t^2 + t + 1 = 0$ の解は ω と ω^2、すなわち 1 の虚立方根であり、それぞれが他方の 2 乗になっている。多項式方程式がいつ冪根によって解けるか（solvable by radicals）という問題の全体像はガロア理論（Galois theory）であり、Allenby, *Rings, Fields and Groups*（『環・体・群』）にわかりやすく書かれている。

解答例

STEP II 2010、第 8 問

純粋数学 • 曲線で囲まれた図形の面積

STEP II 2010、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/10-s2-q8

鍵となる考え方

$\sin x \leq 1$ であるから、曲線 $y = \mathrm{e}^{-x}\sin x$ が $y = \mathrm{e}^{-x}$ より上に出ることは決してない。両者が出会うのはちょうど $\sin x = 1$ となる点であり、そこではちょうど接する（touch）。したがって各面積は、隣り合う接点の間での $\mathrm{e}^{-x}(1 - \sin x)$ のただ 1 つの積分で表され、符号の変化を気にする必要はない。$\mathrm{e}^{-x}\sin x$ の積分は「部分積分（integration by parts）を 2 回行う」定番の計算であり、さらに積分の端点はすべて $\sin x = 1$ かつ $\cos x = 0$ となる点なので、そこでは原始関数（antiderivative）が非常に簡単な形になる。

解答

概形

C_1 はおなじみの減衰する指数関数であり、$(0, 1)$ から始まって 0 に向かって減少する。C_2 は減衰する正弦波（damped sine wave）である。原点から始まり、π のすべての倍数で値がゼロになり、$y = \mathrm{e}^{-x}$ と $y = -\mathrm{e}^{-x}$ の間に閉じ込められている。これは $-1 \leq \sin x \leq 1$ だからである。振動は非常に速く小さくなり、最初の負の谷でさえ深さはわずか約 0.014 にすぎない（$x = \frac{5\pi}{4}$ において）。

2 曲線はどこで出会うか。$\mathrm{e}^{-x} > 0$ であるから、

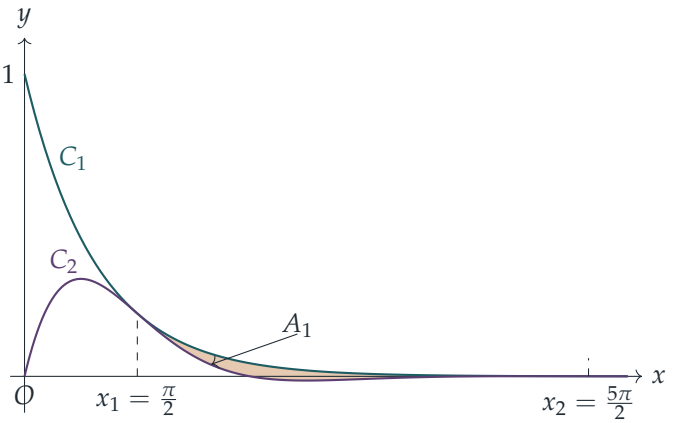
$$\mathrm{e}^{-x}\sin x = \mathrm{e}^{-x} \iff \sin x = 1 \iff x = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

これらの点で 2 曲線は交差するのではなく接する。すなわち、C_2 はいたるところで C_1

上またはその下にある。実際、そこでは傾きも一致する。なぜなら

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-x}\sin x\right) = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x) = -\mathrm{e}^{-x} \quad \text{ただし } \sin x = 1,\ \cos x = 0.$$

C_2 の最初の極大（maximum）は $x = \frac{\pi}{4}$（$\cos x = \sin x$ となる点）にあり、最初の接点 $x = \frac{\pi}{2}$ より**前**にあることに注意しよう。概形図では、C_2 がいったん山の頂上に達したあと下がってきて、C_1 に接するように描かなければならない。



面積 A_n

n 番目の接点とは、n 番目の $\sin x = 1$ の解（ただし $x > 0$）である：

$$x_n = \tfrac{\pi}{2} + 2(n-1)\pi = \tfrac{(4n-3)\pi}{2}, \qquad x_{n+1} = x_n + 2\pi.$$

x_n と x_{n+1} の間では $\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\sin x = \mathrm{e}^{-x}(1 - \sin x) \geq 0$ であるから、この区間全体で C_1 が上側の境界となり、

$$A_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \mathrm{e}^{-x}(1 - \sin x)\,\mathrm{d}x.$$

考えてみよう $\mathrm{e}^{-x}\sin x$ はどのように積分すればよいか。

部分積分を 2 回行うと、もとの積分に戻ってくる。$I = \int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$ とおく。$u = \sin x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ として部分積分し、さらに $u = \cos x$ としてもう一度部分積分すると、

$$\begin{aligned} I &= -\mathrm{e}^{-x}\sin x + \int \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{-x}\sin x - \mathrm{e}^{-x}\cos x - \int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

よって $2I = -\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x)$ となり、$I = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x) + c$ である。（微分すれば確かめられる。）

したがって、$\mathrm{e}^{-x}(1-\sin x)$ の原始関数の 1 つは

$$F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x).$$

ここからがうまいところである。どの接点でも $\sin x = 1$ かつ $\cos x = 0$ であるから、そこでは

$$F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} = -\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}.$$

ゆえに、$x_{n+1} = x_n + 2\pi$ を用いて

$$\begin{aligned} A_n = F(x_{n+1}) - F(x_n) &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_n} - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_n-2\pi} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_n-2\pi}\left(\mathrm{e}^{2\pi} - 1\right). \end{aligned}$$

最後に $x_n + 2\pi = \frac{(4n-3)\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} = \frac{(4n+1)\pi}{2}$ であるから、

$$A_n = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2\pi} - 1\right)\mathrm{e}^{-(4n+1)\pi/2},$$

となり、示すべき式が得られた。

無限和

この式から $A_{n+1} = \mathrm{e}^{-2\pi}A_n$ がわかるので、面積の列は初項 $A_1 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)\mathrm{e}^{-5\pi/2}$、公比（common ratio）$r = \mathrm{e}^{-2\pi}$ の等比級数（geometric series）をなす。$0 < r < 1$ であるから級数は収束（converge）し、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{A_1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi}} &= \frac{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)\mathrm{e}^{-5\pi/2}}{\mathrm{e}^{-2\pi}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi/2}. \end{aligned}$$

検算

- 総和は x_1 より右側にある 2 曲線の間の面積全体なので、$\int_{\pi/2}^{\infty} \mathrm{e}^{-x}(1-\sin x)\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to\infty} F(X) - F(\frac{\pi}{2}) = 0 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi/2}$ に等しいはずである。実際そうなっており、級数を使う必要すらない。
- 数値的には $A_1 \approx 0.10375$、$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi/2} \approx 0.10394$ である。概形図からも予想されるとおり、面積のほとんどは最初の領域にある。これは $\mathrm{e}^{-2\pi} \approx 0.0019$ だからである。シンプソンの公式（Simpson's rule）を $\mathrm{e}^{-x}(1-\sin x)$ に区間 $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ で適用しても、同じ 0.103746 が得られる。

よくある間違い

- 接点を C_2 が極大となる点だと考えてしまう。極大は $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ であり、2 曲線が接するのは $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ である。
- $\sin x = \pm 1$ の解をすべて数えてしまう、あるいは $\sin x = 1$ の解の間隔を π としてしまう。隣り合う接点の間隔は 2π である。
- $\int \mathrm{e}^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x$ での符号の誤り。答えを微分して確かめること。

STEP のその先へ

曲線 C_2 は減衰振動（damped oscillation）、すなわち摩擦のあるばねの運動の形をしており、包絡線（envelope）$\pm\mathrm{e}^{-x}$ が振動の減衰の速さを決めている。$\int \mathrm{e}^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x$ のような積分は、$\int \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x} \, \mathrm{d}x$ の虚部（imaginary part）として計算するほうがずっと速い。これは大学 1 年目の講義で、微分方程式（differential equations）やラプラス変換（Laplace transform）を扱う際に絶えず使われる技法である。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）では、減衰振動が詳しく扱われている。

解答例

STEP II 2010、第 9 問

力学 ・ 放物体の衝突

STEP II 2010、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

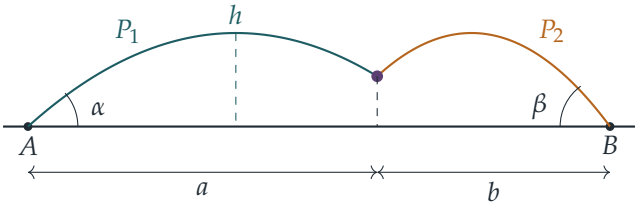
step.maths.org/questions/10-s2-q9

鍵となる考え方

同時に投げ出された二つの粒子は同じ加速度 g で落下するので、衝突の瞬間に高さが一致するためには、鉛直方向の初速度が等しくなければならない。すると両者の鉛直方向の運動はまったく同じになる。すなわち、最高点の高さ h は等しく、そこに達する時刻も等しく、地面に落ちるはずの時刻も等しい。衝突は最高点に達してから着地するまでの間に起こり、各粒子が進んだ水平距離は時間に比例するので、その距離は二つの簡単な限界の間に挟まれる。

解答

二つの粒子を、空気抵抗がなく重力 g のみを受けて自由に運動する放物体（projectile）としてモデル化する。P_1 の速さを u、P_2 の速さを v とし、投げ出した瞬間を $t = 0$ とし、衝突が時刻 $t_c > 0$ に起こるとする。



鉛直方向の運動が等しいこと

時刻 t における P_1 と P_2 の高さは

$$y_1 = ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2, \qquad y_2 = vt\sin\beta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

である。衝突の瞬間には $y_1 = y_2$ であるから $(u\sin\alpha - v\sin\beta)\,t_c = 0$ となり、$t_c > 0$ より

$$u\sin\alpha = v\sin\beta.$$

を得る。したがって、二つの粒子の鉛直方向の運動はまったく同じである。特に、両者は同じ時刻 T に同じ最高点の高さ h に達する。ここで

$$T = \frac{u\sin\alpha}{g} = \frac{v\sin\beta}{g}, \qquad h = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{v^2\sin^2\beta}{2g},$$

であり、両者とも時刻 $2T$ に地面に戻るはずである。

考えてみよう 「空中で」と「P_1 が最高点に達した後に」という条件から、t_c について何がわかるか？

P_1 は時刻 T に最高点にあるので、「後に」から $t_c > T$ が得られる。両粒子が地面より上にあるのは $0 < t < 2T$ のときだけなので、空中で衝突するためには $t_c < 2T$ でなければならない。よって

$$T < t_c < 2T.$$

b の評価

水平方向には P_2 は一定の速さ $v\cos\beta$ で運動するので、$b = v\cos\beta\, t_c$ である。時刻 T までに進む距離は

$$v\cos\beta\, T = \frac{v^2\sin\beta\cos\beta}{g} = \frac{v^2\sin^2\beta}{2g}\cdot\frac{2\cos\beta}{\sin\beta} = 2h\cot\beta.$$

である。したがって

$$b = v\cos\beta\, T\cdot\frac{t_c}{T} = 2h\cot\beta\cdot\frac{t_c}{T},$$

であり、$1 < t_c/T < 2$ かつ（β は鋭角なので）$2h\cot\beta > 0$ であるから、

$$2h\cot\beta < b < 4h\cot\beta,$$

となり、示すべき式が得られた。

a の評価

まったく同様に、$a = u\cos\alpha\, t_c$ であり、

$$u\cos\alpha\, T = \frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = 2h\cot\alpha,$$

であるから $a = 2h\cot\alpha\cdot t_c/T$ となり、$1 < t_c/T < 2$ より

$$2h\cot\alpha < a < 4h\cot\alpha.$$

を得る。ここでは同じ h を用いている。h は定義により P_1 の最高点の高さであるが、鉛直方向の運動が同一であるから P_2 の最高点の高さでもある。

検算

- 境界の場合：ちょうど最高点で衝突する場合（$t_c = T$）は $a = 2h\cot\alpha$ となり、これはおなじみの水平到達距離（range）の半分 $\frac{u^2\sin 2\alpha}{2g}$ である。着地の瞬間に衝突する場合（$t_c = 2T$）は $a = 4h\cot\alpha$ となり、これは水平到達距離全体 $\frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$ である。問題の狭義の不等式はこれらの間にある。
- 数値による確認：$g = 9.8$、$u = 20$、$\alpha = 0.7$、$\beta = 0.9$（ラジアン）、$v = u\sin\alpha/\sin\beta$、$t_c = 1.5T$ とすると、$h \approx 8.470$、$a \approx 30.17$ となり、これは $2h\cot\alpha \approx 20.11$ と $4h\cot\alpha \approx 40.22$ の間にある（実際、ちょうど 1.5×20.11 である）。この方法で 20 000 通りのランダムな設定を試し、P_1 の運動を時間刻みで追って h を確認し、粒子が実際に一致することを確かめた。

よくある間違い

- 衝突点に達するまでの時間を二つの粒子で異なるものとして扱うこと。両者は同時に投げ出されるので、同じ t_c である。
- 上からの評価の根拠を示し忘れること。これは衝突が空中で、すなわち共通の着地時刻 $2T$ より前に起こることから得られる。

STEP のその先へ

鍵となる一歩は座標系の変換である。加速度 g で自由落下する座標系では、両粒子とも一定の速度で直線運動をするので、その座標系で互いに向かって投げられていた場合に限り衝突する。これは古典的な「猿と狩人（monkey and hunter）」の考え方である。加速する座標系で考えること、そして加速度が一様でないときに現れる見かけの力（fictitious force）は、大学 1 年次の力学の中心的なテーマである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物運動、相対運動、非慣性系（non-inertial frame）を多くの良問とともに扱っている。

解答例

STEP II 2010、第 10 問

力学 ・ 弾性衝突

> **STEP II 2010、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q10

この問題は、*Beyond STEP* の第 10.2 節「**重ねたボールの効果**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch10/stacked-balls.html

鍵となる考え方

すべては一つの衝突、すなわち静止している粒子に別の粒子が弾性衝突（elastic collision）する場面に帰着する。運動量保存則（conservation of momentum）とニュートンの実験則（Newton's experimental law）（$e = 1$ の場合）から、受け渡される速さが求まり、それは質量の比だけで決まる。小問 (ii) ではどの衝突でも質量比が同じ λ であるから、各衝突で速さは同じ倍率で掛けられ、あとは等比数列（geometric progression）が片づけてくれる。

解答

粒子を、なめらかな台の上の一直線上を運動する質点（point mass）とみなし、速度はすべて B の最初の運動の向きを正として測る。

小問 (i)

衝突直後の B と A の速度をそれぞれ v_B、v_A とする。運動量保存則より

$$bmu = bm\,v_B + m\,v_A,$$

であり、衝突は完全弾性（$e = 1$）であるから、ニュートンの実験則より遠ざかる速さは近づく速さに等しい：

$$v_A - v_B = u.$$

$v_B = v_A - u$ を運動量の式に代入して m で割ると

$$bu = b(v_A - u) + v_A \quad \Longrightarrow \quad v_A = \frac{2bu}{b+1}.$$

よって A の速さは $\dfrac{2b}{b+1}\,u$ である。

この式は質量の比 b しか用いておらず、導出は任意の $b > 0$ に対して成り立つ。$b + 1 > b$ かつ $u > 0$ であるから、b の値によらず

$$v_A = 2u \cdot \frac{b}{b+1} < 2u,$$

となる。したがって A を B の初速の 2 倍の速さで動かすことは決してできない。ただし b を大きくとれば、いくらでも $2u$ に近づけることができる。

小問 (ii)

直線上に並ぶ順に、質量は

$$B_1 : \lambda^n m, \quad B_2 : \lambda^{n-1} m, \quad \ldots, \quad B_n : \lambda m, \quad A : m.$$

である。各粒子は、その次の粒子の λ 倍の重さである。したがって、速さ v で動く粒子が次の（静止している）粒子に衝突するたびに、$b = \lambda$ として小問 (i) が適用でき、衝突された粒子は速さ kv で動き出す。ここで

$$k = \frac{2\lambda}{\lambda + 1}.$$

である。小問 (i) の式 $v_B = v_A - u$ より、衝突した側の粒子は速さ

$$kv - v = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\,v,$$

で前方へ進み続ける。$\lambda > 1$ であるから、これは正である。

こうして B_1 は B_2 に速さ ku を与え、次に B_2 は B_3 に速さ k^2u を与え、以下同様に続き、最後に速さ $k^{n-1}u$ で動く B_n が A に速さ

$$v_A = k^n u = \left(\frac{2\lambda}{\lambda + 1}\right)^n u.$$

を与える。

考えてみよう ある B_i が速さを受け渡したあと、前方の粒子に追いついて、さらに衝突が起こることはあり得ないだろうか？

n 回の衝突がすべて終わったとき、$i = 1, \ldots, n$ に対して B_i は速さ $\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}k^{i-1}u$ で前方へ進み、A は速さ $k^n u$ で進む。$\lambda > 1$ より $k > 1$ である（$2\lambda > \lambda + 1$ だから）。よってこれらの速さは直線に沿って狭義単調に増加する。すなわち各粒子は後ろの粒子より速く動き、互いに離れていく。したがってそれ以上の衝突は起こらず、A の最終的な速さは $k^n u$ である。

$k > 1$ であるから、$n \to \infty$ のとき $k^n \to \infty$ である。よって任意の目標の速さ V に対し、$k^n u > V$ となるほど n を大きくとれば、A を V より速く動かせる。つまり A の速さに上限はない。

$\lambda = 4$ の場合

このとき $k = \frac{8}{5}$ であり、$\left(\frac{8}{5}\right)^n > 20$ を満たす最小の n を求めればよい。底 10 の対数（logarithm）をとると（対数は増加関数なので不等号の向きは保たれる）

$$n \log_{10} \tfrac{8}{5} > \log_{10} 20.$$

$\frac{8}{5} = \frac{2^4}{10}$、$20 = 2 \times 10$ と書けば

$$\log_{10} \tfrac{8}{5} = 4\log_{10} 2 - 1 \approx 0.20412,$$
$$\log_{10} 20 = \log_{10} 2 + 1 \approx 1.30103.$$

$\log_{10} \frac{8}{5} > 0$ であるから、これで割ってよく、

$$n > \frac{1.30103}{0.20412} \approx 6.37.$$

を得る。これを満たす最小の整数は $n = 7$ である。（余裕は十分にある。6.37 は整数から遠いので、$\log_{10} 2$ の近似によって答えが変わることはない。）

検算

- 小問 (i) で $b = 1$ とすると $v_A = u$、$v_B = 0$ となる。等しい質量の粒子は速度を入れ替えるはずであり、そのとおりになっている。また $b \to \infty$ のとき $v_A \to 2u$ である。
- 運動エネルギー（kinetic energy）：$v_A = \frac{2b}{b+1}u$、$v_B = \frac{b-1}{b+1}u$ とすると $bv_B^2 + v_A^2 = \frac{b(b-1)^2+4b^2}{(b+1)^2}u^2 = bu^2$ となり、エネルギーは保存されている。
- 直接計算すると $1.6^6 \approx 16.78 < 20$、$1.6^7 \approx 26.84 > 20$ であり、$n = 7$ が確かめられる。また、厳密な分数を用いて粒子の列を一段ずつシミュレーションしたところ、ちょうど n 回の衝突のあとで A の速さがちょうど $k^n u$ となった。

よくある間違い

- 質量の大小を逆にしてしまう：B_1 が**最も重く**（$\lambda^n m$）、B_n が B たちの中で最も軽く（λm）、A はさらに軽い。
- 衝突の回数を n ではなく $n-1$ と数えてしまう：速さは $B_1 \to B_2 \to \cdots \to B_n \to A$ と受け渡されるので、n 段階である。
- その後の衝突が起こらないことの確認を忘れる、あるいは最小の整数 $n = 7$ ではなく整数でない 6.37 を答えてしまう。

STEP のその先へ

1 回の弾性衝突では速さはせいぜい 2 倍にしかならないが、衝突を連鎖させればそのような上限はない。これは「積み重ねたボール」の実演の背後にある考え方である。重いボールの上に軽いボールを載せて落とすと、軽いボールは落とした高さよりはるかに高く跳ね上がる。運動量とエネルギーによって衝突を解析すること（さらにすっきりと扱うには、弾性衝突が各速度を単に反転させるだけになる重心系（centre-of-mass frame）で考えること）は、大学 1 年次の力学の中心的なテーマである。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がこれを詳しく扱っている。

解答例

STEP II 2010、第 11 問

力学 ・ 3 力のつり合い

> **STEP II 2010、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q11

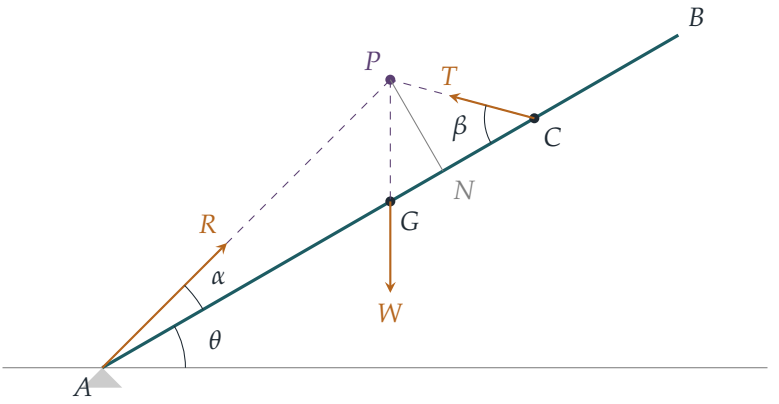
鍵となる考え方

棒にはたらく力は、重力、A における抗力（reaction）、C における張力（tension）の 3 つだけである。互いに平行でない 3 つの力が物体を釣り合い（equilibrium）の状態に保っているとき、それらの作用線（line of action）は 1 点で交わらなければならない。したがって、A からの抗力の作用線、C からの糸の作用線、そして棒の中点を通る鉛直線はすべて 1 点で交わる。この共通の点から、棒に沿った方向と棒に垂直な方向に距離を測れば、問題全体はちょっとした直角三角形の三角比の問題になり、力そのものを求める必要はなくなる。

解答

モデルと図

棒を一様な剛体の棒（uniform rigid rod）としてモデル化する。したがって重さ W は中点 G にはたらき、$AG = 2L$ である。糸は軽いので、$AC = 3L$ である点 C において、糸自身の方向に棒を引く。支点は A において単一の力 R を及ぼす（支点がなめらかか粗いかは与えられていないが、それを知る必要はない）。図は $\theta = 30°$、$\beta = 45°$ の場合を正確な縮尺で描いたものである。



公式を示す

重力は G を通って鉛直にはたらく。糸の作用線は C を通り、抗力の作用線は A を通る。これら 3 本の直線は平行ではないので、3 本とも 1 点を通る。その点を P とする。

考えてみよう なぜ 3 本の作用線は 1 点で交わらなければならないのだろうか。

R と T の作用線が P で交わるとする。P のまわりのモーメント（moment）を考えると、R と T のモーメントはどちらも 0 である。よって棒が回転について釣り合うためには、重力の P のまわりのモーメントも 0 でなければならない。これは、G を通る鉛直線もまた P を通ることを意味する。

P から棒に下ろした垂線の足を N とし、$h = PN$ とおく。直角三角形 PNA において A における角は α であるから、$AN = h\cot\alpha$ である。直角三角形 PNC において C における角は β であるから、$NC = h\cot\beta$ である。$AN + NC = AC$ であるから、

$$h\cot\alpha + h\cot\beta = 3L. \tag{1}$$

（α または β が鈍角の場合、N は A または C の外側にあるが、符号付きの長さ $h\cot\alpha$ と $h\cot\beta$ の和はやはり AC に等しいので、(1) はどの場合にも成り立つ。）

次に 3 本目の作用線を用いる。棒は水平と角 θ をなすので、垂線 PN は鉛直線 PG と角 θ をなす。直角三角形 PNG において P における角は θ であるから $GN = h\tan\theta$ であり、図のように N は G より上側（A から遠い側）にある。したがって

$$h\cot\alpha = AN = AG + GN = 2L + h\tan\theta. \tag{2}$$

(1) から (2) を引くと $h\cot\beta = L - h\tan\theta$、すなわち

$$L = h(\cot\beta + \tan\theta).$$

この L の値を (2) に代入すると

$$h\cot\alpha = 2h(\cot\beta + \tan\theta) + h\tan\theta = h(3\tan\theta + 2\cot\beta).$$

$h \neq 0$ である（そうでなければ P は棒上の G に一致し、C に取り付けられた糸は棒に沿うことになるので、A のまわりの重力のモーメントと釣り合うことができない）から、h で割ってよく、

$$\cot\alpha = 3\tan\theta + 2\cot\beta,$$

となり、示すべき式が得られた。

$\theta = 30°$、$\beta = 45°$ の場合

$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$、$\cot 45° = 1$ であるから、

$$\cot\alpha = \frac{3}{\sqrt{3}} + 2 = 2 + \sqrt{3}.$$

ここで $\cot 15°$ が必要になる。$A = 45°$、$B = 30°$ として $\tan(A - B)$ の公式を用いると、

$$\tan 15° = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3},$$

よって

$$\cot 15° = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = 2 + \sqrt{3}.$$

したがって $\cot\alpha = \cot 15°$ である。角 α は $0°$ と $180°$ の間にあり、cot はこの区間で狭義単調減少（strictly decreasing）であるから、各値をちょうど 1 回ずつとる。ゆえに $\alpha = 15°$ である。

検算

- **別の方法による確認。** A のまわりのモーメントを考えると $T \cdot 3L\sin\beta = W \cdot 2L\cos\theta$ が得られる。次に棒に沿った方向と棒に垂直な方向に力を分解すると R の成分が得られ、$\cot\alpha$ はそれらの比である。こうして同じ公式が再現される。この方法で 10^5 組の無作為な (θ, β) について数値的に確認したところ、約 10^{-15} の精度で一致した。
- **特別な値。** $\theta = 30°$、$\beta = 45°$ のとき、数値的に求めた釣り合いから $\alpha = 15.000°$ が得られ、$\cot 15° = 3.7320\ldots = 2 + \sqrt{3}$ である。図は正確な縮尺で描かれており、P は G の真上、A から高さ $\sqrt{3}L$ の位置にある。
- **極限の場合。** $\theta \to 0$ かつ $\beta = 90°$（水平な棒と鉛直な糸）のとき、公式から $\cot\alpha = 0$、よって $\alpha = 90°$ となる。つまり抗力も鉛直になる。ほかの力がすべて鉛直なのだから、当然そうでなければならない。

よくある間違い

- 重力を C にはたらかせたり、$AG = 3L/2$ としたりすること。重力は棒全体の中点、つまり A から $2L$ の位置にはたらく。
- GN の符号を誤ること。棒は A から上向きに傾いているので、G を通る鉛直線は P からの垂線と G に関して A と反対側で交わる。よって $AN = 2L + h\tan\theta$ であり、$2L - h\tan\theta$ ではない。
- $\cot\alpha = 2 + \sqrt{3}$ で止めてしまい、これが $\cot 15^\circ$ であることを示さず、またそれによって α が一意に定まる理由も述べないこと。

STEP のその先へ

三力の定理（three-force theorem）は、静力学（statics）におけるより一般的な事実の特別な場合である。剛体にはたらく任意の力の系は、選んだ 1 点を通る単一の力と 1 つの偶力（couple）に帰着でき、釣り合いとはその両方が 0 になることである。大学ではこれは、力の総和と全モーメント $\sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ がともに消えるというベクトルの条件になり、さらに剛体の力学（rigid-body dynamics）の基礎となる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、トルク（torque）と釣り合いをこのベクトルの言葉で展開している。

解答例

STEP II 2010、第 12 問

確率・統計　・　平均値と中央値

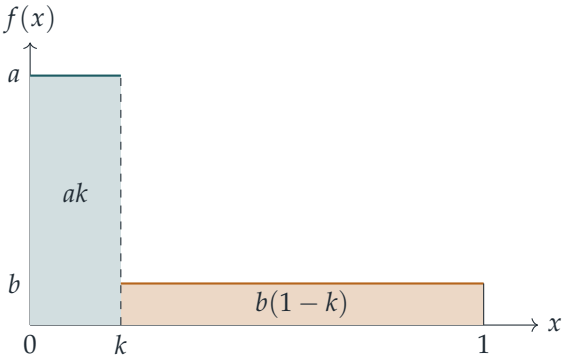
STEP II 2010、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/10-s2-q12

鍵となる考え方

密度関数（density function）は 2 段の階段関数（step function）なので、どの確率も長方形の面積であり、本質的な条件は全面積が 1 であることだけである。この条件によって k が a と b で表され、k を消去してしまえば、あとはすべて代数計算である。中央値（median）については、背の高い最初の長方形だけですでに確率の半分を占めているかどうか、という問題にすぎない。



解答

図の 2 つの長方形の面積は ak と $b(1-k)$ であるから、密度関数の積分が 1 になるのは

$$ak + b(1-k) = 1, \qquad \text{すなわち} \qquad k = \frac{1-b}{a-b}.$$

のときであり、かつそのときに限る（$a > b$ であるから $a - b$ で割ってよい）。以下ではこの k の値を用いる。

$a > 1$ かつ $b < 1$ である理由。 等式 $ak + b(1-k) = 1$ は、1 が a と b の重み k と $1-k$ による加重平均（weighted average）であることを表しており、どちらの重みも 0 と 1 の間に厳密に含まれる。正の重みによる加重平均は 2 つの値の厳密に間にあるので、$b < 1 < a$ である。言葉を使わずに表せば、$1 - b = k(a-b) > 0$ かつ $a - 1 = (1-k)(a-b) > 0$ である。

小問 (i)

各区間で $xf(x)$ を積分すると、

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \int_0^k ax\,\mathrm{d}x + \int_k^1 bx\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}ak^2 + \tfrac{1}{2}b(1-k^2) = \tfrac{1}{2}\big(b + (a-b)k^2\big).$$

ここで $(a-b)k^2 = \dfrac{(1-b)^2}{a-b}$ であるから、

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{b(a-b) + (1-b)^2}{2(a-b)} = \frac{ab - b^2 + 1 - 2b + b^2}{2(a-b)} = \frac{1 - 2b + ab}{2(a-b)},$$

となり、題意が示された。

小問 (ii)

累積分布関数（cumulative distribution function）は

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} ax & 0 \le x < k, \\ ak + b(x-k) & k \le x \le 1. \end{cases}$$

である。これは $[0,1]$ 上で連続かつ狭義単調増加であるから、中央値 M は $\mathrm{F}(M) = \frac{1}{2}$ のただ 1 つの解である。どちらの式が当てはまるかは、最初の長方形が確率の半分以上を占めるかどうかによって決まる。

> **考えてみよう** 「最初の長方形の面積が $\frac{1}{2}$ 以上である」ことを、a と b に関する条件に書き換えるにはどうすればよいか。

k を代入し、正の分母 $a-b$ を払うと、

$$ak \ge \tfrac{1}{2} \iff 2a(1-b) \ge a - b \iff 2a - 2ab \ge a - b \iff a + b \ge 2ab.$$

$a + b \ge 2ab$ の場合。 このとき $\mathrm{F}(k) = ak \ge \frac{1}{2}$ であるから、中央値は $[0,k]$ にあり、$aM = \frac{1}{2}$ を満たす。よって

$$M = \frac{1}{2a}.$$

$a+b \le 2ab$ **の場合。** このとき $ak \le \frac{1}{2}$ であるから、中央値は $[k,1]$ にある。右端から考えるのが最も簡単である。M より右側の確率は $b(1-M)$ であり、これが $\frac{1}{2}$ に等しくなければならない。したがって

$$M = 1 - \frac{1}{2b} = \frac{2b-1}{2b}.$$

$a+b = 2ab$ のときは両方の式が当てはまり、しかも一致する。実際、このとき $1-\frac{1}{2b} = \frac{2ab-a}{2ab} = \frac{b}{2ab} = \frac{1}{2a}$ である。

小問 (iii)

それぞれの場合について $\mathrm{E}(X) - M$ を計算し、それが正であることを示す。

$a+b \ge 2ab$ **の場合。** 共通分母 $2a(a-b)$ で通分すると、

$$\mathrm{E}(X) - \frac{1}{2a} = \frac{a(1-2b+ab)-(a-b)}{2a(a-b)} = \frac{b-2ab+a^2b}{2a(a-b)} = \frac{b(a-1)^2}{2a(a-b)}.$$

$a+b \le 2ab$ **の場合。** 共通分母 $2b(a-b)$ で通分すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) - \frac{2b-1}{2b} &= \frac{b(1-2b+ab)-(2b-1)(a-b)}{2b(a-b)} \\ &= \frac{(b-2b^2+ab^2)-(2ab-2b^2-a+b)}{2b(a-b)} = \frac{a(1-b)^2}{2b(a-b)}.\end{aligned}$$

> **考えてみよう** これらが単に非負であるだけでなく、厳密に正であるのはなぜか。

どちらの場合も a、b、$a-b$ は正であり、最初に $a>1$ かつ $b<1$ を示したので、平方の部分も厳密に正である。よって、どの場合でも $\mathrm{E}(X) - M > 0$ であり、$M < \mathrm{E}(X)$ が成り立つ。

検算

- $a=3$、$b=\frac{1}{2}$ とする。このとき $k=\frac{1}{5}$、$a+b=\frac{7}{2} \ge 3 = 2ab$ であり、$\mathrm{E}(X) = \frac{1-1+\frac{3}{2}}{5} = 0.3$、一方 $M=\frac{1}{6}$ である。差 $0.1\overline{3}$ は $\frac{b(a-1)^2}{2a(a-b)} = \frac{2}{15}$ と一致する。
- $a=\frac{5}{4}$、$b=\frac{9}{10}$ とする。今度は $a+b=2.15 \le 2.25 = 2ab$ であるから、$M = 1-\frac{5}{9} = \frac{4}{9} \approx 0.444$、また $\mathrm{E}(X) = \frac{13}{28} \approx 0.464$ である。
- $a \to 1^+$（したがって $b \to 1^-$）のとき、密度関数は一様分布の密度関数に近づき、どちらの差も 0 に近づく。対称性から当然そうあるべきように、平均（mean）と中央値は $\frac{1}{2}$ で一致する。

300 組の無作為な (a, b) について、F に二分法（bisection）を適用して求めた中央値が場合分けの式と一致すること、中点則（midpoint quadrature）による平均が小問 (i) の結果と一致すること、そして $\mathrm{E}(X) - M$ が上の因数分解された式に等しいことを数値的に確認した。

よくある間違い

- k を消去し忘れる。答えは a と b だけで表すことが求められている。
- 2 つ目の中央値を $b(M-k) = \frac{1}{2}$ の解として書いてしまい、$[0, k)$ ですでに蓄積された確率 ak を忘れる。
- $\mathrm{E}(X) \geq M$ しか結論しない。厳密な不等式には $a \neq 1$ かつ $b \neq 1$ が必要であり、それこそが冒頭の部分で示されたことである。

STEP のその先へ

この密度関数は減少関数なので「右に歪んでいる（skewed to the right）」。長い裾が平均を中央値より先へ引っ張るのである。このパターンはよく見られるが普遍的ではなく、確率論の最初の講義では、単峰（unimodal）分布について平均、中央値、最頻値（mode）がどのような関係にあるか、そしてよく知られた経験則がどこで成り立たなくなるかを学ぶ。このような階段関数は、ヒストグラム（histogram）の構成要素でもあり、また測度論（measure theory）で積分を定義する際に用いられる単関数（simple function）の構成要素でもある。連続分布についてさらに学ぶには、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）を参照されたい。

解答例

STEP II 2010、第 13 問

確率・統計 ・ 独立な事象

> **STEP II 2010、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q13

鍵となる考え方

Rosalind が合格するのは、Pardeep との対戦で少なくとも 1 勝し、**かつ** Quentin との対戦でも少なくとも 1 勝するとき、かつそのときに限る。「少なくとも 1 回」は、つねに余事象（complement）を通して考えるのが最も簡単である。n 回の対戦で少なくとも 1 勝する確率は、1 から全敗する確率を引いたものである。各対戦が独立（independent）であれば、各戦略の成功確率はこのような因子 2 つの積となり、戦略どうしの比較は差の因数分解に帰着する。負ける確率を $a = 1 - p$、$b = 1 - q$ とおくと、計算が見通しよくなる。

解答

異なる対戦の結果は独立であり、Pardeep（または Quentin）との各対戦には、それまでの結果にかかわらず確率 p（または q）で勝つと仮定する。対戦の順序は関係ない。合格が決まった時点で対戦を打ち切るかどうかにかかわらず、合格となる結果はまったく同じだからである。

Rosalind が Pardeep と m 回、Quentin と n 回対戦するとき、Pardeep との対戦で少なくとも 1 勝する事象を A、Quentin との対戦で少なくとも 1 勝する事象を B とする。A が起こらないのは m 回すべてに負けるときに限るので $\mathrm{P}(A) = 1 - (1-p)^m$ であり、同様に $\mathrm{P}(B) = 1 - (1-q)^n$ である。2 つの事象は異なる対戦にかかわるので独立であり、

$$\mathrm{P}(\text{合格}) = \big(1 - (1-p)^m\big)\big(1 - (1-q)^n\big).$$

以下つねに $a = 1 - p$、$b = 1 - q$ とおく。$0 < p < q < 1$ より $0 < b < a < 1$ である。

小問 (i)

Pardeep と 2 回、Quentin と 1 回対戦する場合の成功確率は $(1-a^2)(1-b)$ であり、Quentin と 2 回、Pardeep と 1 回対戦する場合は $(1-a)(1-b^2)$ である。それぞれの平方の差を因数分解すると、

$$\begin{aligned}(1-a^2)(1-b)-(1-a)(1-b^2) &= (1-a)(1-b)\big[(1+a)-(1+b)\big]\\ &= (1-a)(1-b)(a-b)\\ &= pq(q-p).\end{aligned}$$

$p, q > 0$ かつ $q > p$ なので、これは正である。したがって、Pardeep と 2 回対戦するほうが合格の確率が大きく、彼女はそちらを選ぶべきである。

小問 (ii)

3 つの戦略の成功確率は

$$S_1 = (1-a^3)(1-b), \qquad S_2 = (1-a^2)(1-b^2), \qquad S_3 = (1-a)(1-b^3).$$

$1-x^k = (1-x)(1+x+\cdots+x^{k-1})$ であるから、いずれも因子 $(1-a)(1-b) = pq$ を含む。

戦略 1 はつねに戦略 3 より優れている。実際、

$$\begin{aligned}S_1 - S_3 &= pq\big[(1+a+a^2)-(1+b+b^2)\big]\\ &= pq\,(a-b)(1+a+b) > 0,\end{aligned}$$

であり、これは $a > b$ による。よって戦略 3 が最善となることはなく、戦略 1 と戦略 2 だけを比較すればよい。

戦略 1 と戦略 2 の比較。

$$S_1 - S_2 = pq\big[(1+a+a^2)-(1+a)(1+b)\big] = pq\big[a^2-b(1+a)\big].$$

p と q に戻すと、

$$S_1 - S_2 = pq\,D, \qquad \text{ただし} \qquad D = (1-p)^2-(1-q)(2-p).$$

$pq > 0$ なので、戦略 1 が戦略 2 より優れているのは $D > 0$ のとき、かつそのときに限る。

考えてみよう 条件 $q - p > \frac{1}{2}$ は、D を正にするのにどのように役立つか？

D のうち q を含む項は $-(1-q)(2-p)$ だけであり、$2-p>0$ なので、この項は q が増加すると増加する。そこで q を、条件が許す最小の値で置き換える。$q-p>\frac{1}{2}$ ならば $1-q<\frac{1}{2}-p$ であり、$2-p>0$ なので

$$(1-q)(2-p)<\left(\tfrac{1}{2}-p\right)(2-p)=1-\tfrac{5}{2}p+p^2.$$

したがって

$$D>(1-2p+p^2)-\left(1-\tfrac{5}{2}p+p^2\right)=\tfrac{1}{2}p>0.$$

よって $S_1>S_2$ であり、$S_1>S_3$ と合わせて、$q-p>\frac{1}{2}$ のとき Rosalind は戦略 1 を選ぶべきであることが示された。

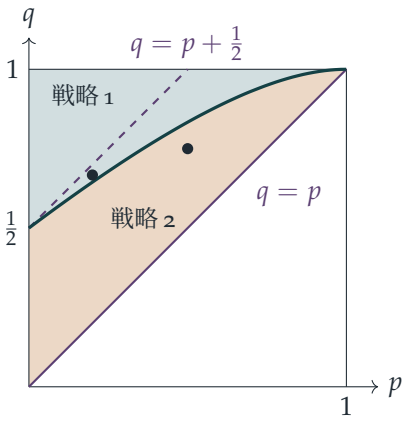
$q-p<\frac{1}{2}$ **のときは、どちらも勝ちうる。**例を 2 つ挙げる。

- $p=\frac{1}{2}$、$q=\frac{3}{4}$（したがって $q-p=\frac{1}{4}$）。このとき $D=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}=-\frac{1}{8}<0$ である。実際 $S_1=\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{4}=\frac{42}{64}$、$S_2=\frac{3}{4}\cdot\frac{15}{16}=\frac{45}{64}$ なので、**戦略 2 のほうが優れている**。
- $p=\frac{1}{5}$、$q=\frac{2}{3}$（したがって $q-p=\frac{7}{15}<\frac{1}{2}$）。このとき $D=\frac{16}{25}-\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{5}=\frac{16}{25}-\frac{15}{25}=\frac{1}{25}>0$ である。実際 $S_1=\frac{61}{125}\cdot\frac{2}{3}=\frac{122}{375}$、$S_2=\frac{9}{25}\cdot\frac{8}{9}=\frac{120}{375}$ なので、**戦略 1 のほうが優れている**。

全体像は (p,q) 平面で見ると明らかである。$D=0$ とおくと境界曲線 $q=1-\dfrac{(1-p)^2}{2-p}$ が得られる。

$$\left(p+\tfrac{1}{2}\right)-\left(1-\frac{(1-p)^2}{2-p}\right)=\frac{p}{2(2-p)}>0,$$

が確かめられるので、この曲線は直線 $q=p+\frac{1}{2}$ のすぐ下にある。曲線より上では戦略 1 が最善であり、曲線と対角線 $q=p$ の間では戦略 2 が最善である。



2 つの点は上の例である。$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ は戦略 2 の領域にあり、$\left(\frac{1}{5},\frac{2}{3}\right)$ は曲線のすぐ上にある。

検算

小問 (i) で $q \to 1$ とする。Quentin には確実に勝つので、Pardeep との対戦だけが問題となり、その回数が多いほうが明らかに有利である。これは差 $pq(q-p) \to p(1-p) > 0$ と一致する。小問 (ii) については、$p < q$ を満たすランダムな 2000 組について 2^4 通りの結果すべてを分数で厳密に数え上げ、S_1, S_2, S_3 の式と因数分解を確認した。$p = \frac{1}{2}$、$q = \frac{3}{4}$ でのシミュレーションでは $S_1 \approx 0.657$、$S_2 \approx 0.703$ となり、厳密値 $\frac{21}{32} = 0.65625$ および $\frac{45}{64} \approx 0.7031$ とよく合う。

よくある間違い

- 「少なくとも 1 勝」の確率を $1-(1-p)^m$ ではなく mp と計算してしまう。重なりのある事象の確率を足すと、数えすぎになる。
- 戦略 3 を忘れる。戦略 1 が最善であることを示すには、**両方の**代替案に勝つことを示さなければならない。
- $q - p < \frac{1}{2}$ の例を挙げながら、条件 $0 < p < q < 1$ を確認しない。

STEP のその先へ

直観的には「自分が最も弱いところに労力をかけよ」となるが、後半の小問はそれがつねに正しいとは限らないことを示している。Pardeep との追加の対戦には収穫逓減（diminishing returns）があり、p がそれほど小さくないときには、Quentin との 2 回目の対戦のほうが価値が大きいのである。決まった回数の試行を割り振って「少なくとも 1 回成功する」確率の積を最大化する問題は、信頼性理論（reliability theory）や実験計画法（design of experiments）の背後にある最適化問題の小さな例である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は独立性と余事象を丁寧に扱っており、この種の問題を数多く収録している。

解答例

STEP III 2010、第 1 問

純粋数学 ・ 平均と分散

> **STEP III 2010、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q1

鍵となる考え方

A と B は最初の n 個の数の平均（mean）と分散（variance）であり、C と D は数をもう一つ加えたときの平均と分散である。分散は「2 乗の平均から平均の 2 乗を引いたもの」という形で扱うのが最も楽であり、小問 (ii) がまさにそれを与えてくれる。これを使うと、D は x_{n+1} の二次式（quadratic）として表され、二つの不等式（inequality）はどちらもその二次式についての主張となる。

解答

以下では簡単のため $x = x_{n+1}$ と書く。

小問 (i)

定義より $\sum_{k=1}^{n} x_k = nA$ であるから、

$$C = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k + x\right) = \frac{nA + x}{n+1}.$$

小問 (ii)

2 乗を展開し、$\sum_{k=1}^{n} x_k = nA$ と $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$ を用いると、

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^2 - 2Ax_k + A^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \frac{2A}{n}\cdot nA + \frac{1}{n}\cdot nA^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - A^2, \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (iii)

小問 (ii) は任意の数の並びについて成り立つので、これを（平均が C である）$n+1$ 個の数 $x_1, \ldots, x_{n+1}$ に適用すると

$$D = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 - C^2.$$

を得る。再び小問 (ii) より $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n(B+A^2)$ であるから、$\sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = n(B+A^2)+x^2$ である。C に小問 (i) を用いると、

$$D = \frac{nB+nA^2+x^2}{n+1} - \frac{(nA+x)^2}{(n+1)^2}.$$

両辺に $(n+1)^2$ を掛けて展開する：

$$\begin{aligned}(n+1)^2 D &= (n+1)\left(nB+nA^2+x^2\right) - \left(n^2A^2+2nAx+x^2\right)\\ &= n(n+1)B + (n^2+n-n^2)A^2 - 2nAx + (n+1-1)x^2\\ &= n(n+1)B + n\left(x^2-2Ax+A^2\right)\\ &= n(n+1)B + n(x-A)^2.\end{aligned}$$

したがって

$$\boxed{D = \frac{n}{n+1}B + \frac{n}{(n+1)^2}\left(x_{n+1}-A\right)^2.}$$

一つ目の不等式。 $n+1$ を掛けると

$$(n+1)D = nB + \frac{n}{n+1}\left(x_{n+1}-A\right)^2 \;\geq\; nB,$$

となる。最後の項は平方の非負の定数倍だからである。これは x_{n+1} のすべての値について成り立ち、等号が成立するのはちょうど $x_{n+1} = A$ のときである。

? **考えてみよう** 負の数の平方根を気にすることなく、$D < B$ を x_{n+1} についての条件に書き換えるにはどうすればよいか？

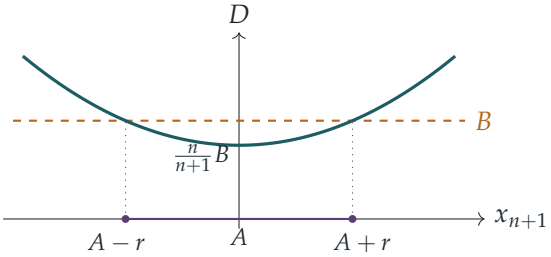
二つ目の不等式。 まず、B は平方の平均なので $B \geq 0$ であり、したがって $\sqrt{(n+1)B/n}$ は実数であることに注意する。枠で囲んだ式を用いると、以下の各変形はいずれも逆にたどることができる（両辺から同じ量を引くことと、正の数 $(n+1)^2/n$ を掛けるこ

としかしていない）：

$$\begin{aligned} D < B &\iff \frac{n}{(n+1)^2}(x_{n+1}-A)^2 < B - \frac{n}{n+1}B = \frac{B}{n+1} \\ &\iff (x_{n+1}-A)^2 < \frac{(n+1)B}{n} \\ &\iff |x_{n+1}-A| < \sqrt{\frac{(n+1)B}{n}} \\ &\iff A - \sqrt{\frac{(n+1)B}{n}} < x_{n+1} < A + \sqrt{\frac{(n+1)B}{n}}. \end{aligned}$$

3 番目の変形では両辺の非負の平方根をとっているが、これは非負の数どうしの狭義の不等式を保つ。以上が求める「必要十分（if and only if）」の主張である。（$B = 0$ のときはこの区間は空であり、実際このとき常に $D \geq 0 = B$ となる。）

下の図は、$n = 3, A = 0, B = 1$ の場合に D を x_{n+1} の関数（function）として描いたものである。これは $x_{n+1} = A$ で最小値 $\frac{n}{n+1}B$ をとる放物線（parabola）であり、上で求めた区間上でちょうど水準 B を下回る。



ここで $r = \sqrt{(n+1)B/n}$ である。

検算

- $n = 1$ とする。このとき $B = 0$ であり、公式は $D = \frac{1}{4}(x_2 - x_1)^2$ を与える。これは二つの数 x_1, x_2 について正しい。実際、その平均は 2 数の中点である。
- $x_1, x_2, x_3 = 0, 0, 3$ とすると $A = 1, B = 2$ であり、ここに $x_4 = 1 = A$ を加える。直接計算すると $D = \frac{1}{4}(1+1+4+0) = \frac{3}{2} = \frac{3}{4}B$ となり、これは最小値である。
- 20 000 個の無作為な数の並びについて、同値性 $D < B \iff (x_{n+1}-A)^2 < (n+1)B/n$ を含む三つの結果すべてを（分数を用いて）厳密に確かめ、さらに区間の両端が有理数となる 216 通りの場合について、両端で $D = B$ となることを確認した。

よくある間違い

- 小問 (ii) で展開する際に、$\sum_{k=1}^{n} A^2 = nA^2$ であって A^2 ではないことを忘れる。
- D を $\sum x_k^2$ を用いて表したところで止めてしまう。問題は D を B, A, x_{n+1}, n で表すことを求めているので、この和は小問 (ii) を用いて置き換えなければならない。
- $(x_{n+1} - A)^2 < k$ の平方根をとって $x_{n+1} - A < \sqrt{k}$ だけを得てしまい、区間の下端を失う。

STEP のその先へ

D の公式は**更新式**（updating formula）である。これを使えば、コンピュータはすべてのデータを保存することなく、データの流れの平均と分散を値を一つずつ受け取りながら保持できる。この考え方は Welford のアルゴリズムで洗練されている。項 $n(x_{n+1} - A)^2/(n+1)^2$ は、統計学における分散分析（analysis of variance）の基礎にある、分散を「群内」と「群間」の部分に分解する考え方の小さな一例である。詳しくは Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）を参照されたい。

解答例

STEP III 2010、第 2 問

純粋数学 • 定積分

STEP III 2010、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/10-s3-q2

鍵となる考え方

ここに現れる分母はどれも（x についての、あるいは x^2 についての）2 次式であり、その根は $\pm e^{a}$ や $\pm e^{-a}$ になる。双曲線関数（hyperbolic function）の係数を指数関数で書き直すと、因数分解（factorisation）がすぐに見える。e^{a} と e^{-a} は積が 1 で、和が $2\cosh a$（あるいは差が $2\sinh a$）だからである。そのあとは部分分数分解（partial fractions）によってすべてが対数か逆正接（arctangent）に帰着し、残る作業は答えを双曲線関数の形に整理することである。

解答

小問 (i)

定義より

$$\cosh a = \tfrac{1}{2}\left(e^{a} + e^{-a}\right).$$

よって $2\cosh a = e^{a} + e^{-a}$ かつ $e^{a}\cdot e^{-a} = 1$ であり、したがって

$$x^2 + 2x\cosh a + 1 = (x + e^{a})(x + e^{-a}).$$

$x \geq 0$ ではどちらの因数も正なので、被積分関数（integrand）は $[0,1]$ 上で連続である。$a > 0$ より 2 つの根 $-e^{a}$ と $-e^{-a}$ は相異なり、部分分数分解は

$$\frac{1}{(x+e^{-a})(x+e^{a})} = \frac{1}{e^{a}-e^{-a}}\left(\frac{1}{x+e^{-a}} - \frac{1}{x+e^{a}}\right) = \frac{1}{2\sinh a}\left(\frac{1}{x+e^{-a}} - \frac{1}{x+e^{a}}\right),$$

となる。通分して確かめることができる。分子は $(x+e^a)-(x+e^{-a})=e^a-e^{-a}$ となる。積分すると

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\cosh a+1} = \frac{1}{2\sinh a}\Big[\ln\frac{x+e^{-a}}{x+e^a}\Big]_0^1$$
$$= \frac{1}{2\sinh a}\left(\ln\frac{1+e^{-a}}{1+e^a} - \ln\frac{e^{-a}}{e^a}\right).$$

1つ目の対数はきれいに簡単になる。$1+e^a=e^a(e^{-a}+1)$ なので $\dfrac{1+e^{-a}}{1+e^a}=e^{-a}$ である。2つ目は $\ln e^{-2a}=-2a$ である。よって

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\cosh a+1} = \frac{1}{2\sinh a}(-a+2a) = \frac{a}{2\sinh a},$$

となり、これが求める結果である。

小問 (ii)

1つ目の積分。 今度は係数が $2\sinh a = e^a-e^{-a}$、定数項が $-1=e^a\cdot(-e^{-a})$ なので

$$x^2+2x\sinh a-1=(x+e^a)(x-e^{-a}).$$

考えてみよう 被積分関数は範囲 $[1,\infty)$ 全体で問題なく振る舞うだろうか？

根は $-e^a<0$ と e^{-a} であり、$a>0$ より $e^{-a}<1$ である。よって $x\geq 1$ ではどちらの因数も正で、被積分関数は連続である。x が大きいときは $1/x^2$ のように振る舞うので、この広義積分（improper integral）は収束（convergence）する。前と同様に部分分数分解すると、今度は $e^a-(-e^{-a})=2\cosh a$ を用いて

$$\frac{1}{(x-e^{-a})(x+e^a)} = \frac{1}{2\cosh a}\left(\frac{1}{x-e^{-a}} - \frac{1}{x+e^a}\right).$$

1から X まで積分して $X\to\infty$ とすると

$$\int_1^X \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\sinh a-1} = \frac{1}{2\cosh a}\left(\ln\frac{X-e^{-a}}{X+e^a} - \ln\frac{1-e^{-a}}{1+e^a}\right).$$

$X\to\infty$ のとき分数 $\frac{X-e^{-a}}{X+e^a}\to 1$ なので、1つ目の対数は0に近づく。2つ目については、分子から e^{-a} をくくり出すと

$$\frac{1-e^{-a}}{1+e^a} = e^{-a}\frac{e^a-1}{e^a+1} = e^{-a}\tanh\tfrac{a}{2},$$

となる。ここで $\dfrac{e^a-1}{e^a+1}=\dfrac{e^{a/2}-e^{-a/2}}{e^{a/2}+e^{-a/2}}=\tanh\frac{a}{2}$（分子と分母を $e^{a/2}$ で割る）を用いた。よって2つ目の対数は $-a+\ln\tanh\frac{a}{2}$ であり、

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\sinh a-1} = \frac{a-\ln\tanh\frac{a}{2}}{2\cosh a} = \frac{a+\ln\coth\frac{a}{2}}{2\cosh a}.$$

分子の2つの項はどちらも正であり（$0<\tanh\frac{a}{2}<1$ だから）、正の被積分関数に対しては当然そうでなければならない。

2 つ目の積分。 これは小問 (i) の 2 次式で x を x^2 に置き換えたものである：

$$x^4 + 2x^2\cosh a + 1 = (x^2 + e^a)(x^2 + e^{-a}),$$

どちらの因数もすべての実数 x で正なので被積分関数は連続であり、無限遠では $O(1/x^4)$ なので積分は収束する。x^2 を変数とみて同じ部分分数分解を行うと

$$\frac{1}{(x^2 + e^{-a})(x^2 + e^a)} = \frac{1}{2\sinh a}\left(\frac{1}{x^2 + e^{-a}} - \frac{1}{x^2 + e^a}\right).$$

それぞれの項は標準的な逆正接の積分である。$c > 0$ に対して

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + c^2} = \left[\frac{1}{c}\arctan\frac{x}{c}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2c}.$$

それぞれ $c = e^{-a/2}$ と $c = e^{a/2}$ とすると（各項は単独で収束するので、積分を分けてよい）

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + 2x^2\cosh a + 1} = \frac{1}{2\sinh a}\cdot\frac{\pi}{2}\left(e^{a/2} - e^{-a/2}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\sinh\frac{a}{2}}{2\sinh a}.$$

最後に、倍角公式（double-angle formula）$\sinh a = 2\sinh\frac{a}{2}\cosh\frac{a}{2}$ により $\sinh\frac{a}{2}$ が約分されて

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + 2x^2\cosh a + 1} = \frac{\pi}{4\cosh\frac{a}{2}}.$$

考えてみよう $\cosh\frac{a}{2}$ が現れることを前もって見抜く方法はあるだろうか？

ある。この積分を I とおく。置換（substitution）$x \mapsto 1/x$ により $I = \int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+2x^2\cosh a+1}\,\mathrm{d}x$ でもあることがわかるので

$$2I = \int_0^\infty \frac{1 + 1/x^2}{x^2 + 1/x^2 + 2\cosh a}\,\mathrm{d}x.$$

$u = x - 1/x$ とおくと $\mathrm{d}u = (1 + 1/x^2)\,\mathrm{d}x$、$x^2 + 1/x^2 = u^2 + 2$ であり、u は $-\infty$ から ∞ まで動く。分母は $u^2 + 2 + 2\cosh a = u^2 + 4\cosh^2\frac{a}{2}$ となるので、$2I = \pi/(2\cosh\frac{a}{2})$ となり、同じ答えが得られる。

検算

- $a \to 0$ のとき、小問 (i) は $\int_0^1 (1+x)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ となり、$a/(2\sinh a) \to \frac{1}{2}$ である。最後の積分は $\int_0^\infty (1+x^2)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ となり、$\pi/(4\cosh 0)$ と一致する。
- 数値的には、$a = 1$ のとき、シンプソンの公式（Simpson's rule）により小問 (i) は 0.4254590641、(ii) の 1 つ目の積分は 0.5741556186、2 つ目は 0.6965059227 となり、それぞれ $\frac{1}{2\sinh 1}$、$\frac{1-\ln\tanh\frac{1}{2}}{2\cosh 1}$、$\frac{\pi}{4\cosh\frac{1}{2}}$ と小数第 10 位まで一致する。

よくある間違い

- 部分分数分解の定数を間違える。定数は1/(根の差)であり、小問(i)では$1/(2\sinh a)$だが、(ii)の1つ目の積分では$1/(2\cosh a)$である。
- $e^{-a} < 1$、すなわち分母の根が$[1, \infty)$の外にあることの確認を忘れる。
- 答えを指数関数のまま残す。問題は双曲線関数での表示を求めているので、$\frac{e^a-1}{e^a+1}$は$\tanh\frac{a}{2}$に直すべきである。

STEPのその先へ

(ii)の2つ目の積分は、大学では通常、複素積分（contour integration）によって計算される。被積分関数は$\pm ie^{\pm a/2}$に単純極（simple pole）をもち、上半平面（upper half-plane）にある留数（residue）を足し合わせると、数行で$\pi/(4\cosh\frac{a}{2})$が得られる。同じ方法で$\int_0^\infty \mathrm{d}x/(1+x^n)$や、実解析的な方法では手に負えない多くの積分を扱うことができる。Needhamの*Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析の入門書）には、留数とそれがなぜうまくいくのかについての幾何学的な説明がある。

解答例

STEP III 2010、第 3 問

純粋数学 ・ 1 の冪根

> **STEP III 2010、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q3

この問題は、*Beyond STEP* の第 6.1 節「**1 の累乗根を根にもつ多項式**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch06/cyclotomic.html

鍵となる考え方

1 の冪根（root of unity）a には、それぞれただ一つの**位数**（order）が定まる。すなわち、$a^m = 1$ を満たす最小の正の整数 m である。1 の原始 n 乗根（primitive nth root of unity）であるとは、位数がちょうど n であることにほかならない。したがって $\mathrm{C}_n(x)$ を求めるには、1 の n 乗根 $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k/n}$ を列挙し、それより前の冪ですでに 1 に戻るものを取り除き、残ったものについて $(x-a)$ を掛け合わせればよい。各数の位数がただ一つであるという事実は、最後の小問を解決する鍵でもある。

解答

以下を通じて、1 の n 乗根は $k = 0, 1, \ldots, n-1$ に対する ω^k である。ただし $\omega = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/n}$ であり、$(\omega^k)^m = 1$ となるのは n が km を割り切るとき、かつそのときに限る。C_n はモニック（monic）で重根（repeated roots）をもたず、その根はちょうど 1 の原始 n 乗根であるから、

$$\mathrm{C}_n(x) = \prod_{a \text{ が原始的}} (x-a).$$

4 乗根

1 の 4 乗根は $1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}$ である。ここで $1^1 = 1$、$(-1)^2 = 1$ であるから、この二つは原始的ではない。一方、$\mathrm{i}^1 = \mathrm{i}$、$\mathrm{i}^2 = -1$、$\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$ はいずれも 1 に等しくなく、$-\mathrm{i}$ についても同様である（その冪は共役になる）。よって 1 の原始 4 乗根は i と $-\mathrm{i}$ であり、

$$\mathrm{C}_4(x) = (x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i}) = x^2 + 1,$$

となって、求める結果が得られる。

小問 (i)

$n = 1$ のとき。 1 の 1 乗根は 1 のみであり、$0 < m < 1$ を満たす m は存在しないから、1 は原始的である：$\mathrm{C}_1(x) = x - 1$。

$n = 2$ のとき。 1 の平方根は ± 1 である。$1^1 = 1$ より 1 は除かれ、一方 $(-1)^1 \neq 1$ である。よって $\mathrm{C}_2(x) = x + 1$。

$n = 3$ および $n = 5$ のとき。 n が素数（prime）のとき、$1 \leq k \leq n - 1$ なる根 ω^k が $(\omega^k)^m = 1$ を満たすのは $n \mid km$ のときに限る。n は素数で k を割り切らないから、これより $n \mid m$ が従う。したがって、1 以外のすべての 1 の n 乗根は原始的である。これらは

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1,$$

の根であり、この多項式はモニックで相異なる根をもつ。よって

$$\mathrm{C}_3(x) = x^2 + x + 1, \qquad \mathrm{C}_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

$n = 6$ のとき。 $\omega = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/3}$ とすると、冪 ω^k の位数は $6/\gcd(k, 6)$ である。よって $\omega^0 = 1$ の位数は 1、$\omega^3 = -1$ の位数は 2、ω^2, ω^4 の位数は 3 であり、位数 6 をもつのは ω と $\omega^5 = \overline{\omega}$ のみである。それらの和は $2\cos\frac{\pi}{3} = 1$、積は $|\omega|^2 = 1$ であるから、

$$\mathrm{C}_6(x) = x^2 - x + 1.$$

（検算として、1 の 6 乗根の位数はすべて 1、2、3、6 のいずれかであるから $x^6 - 1 = \mathrm{C}_1\mathrm{C}_2\mathrm{C}_3\mathrm{C}_6$ であり、実際 $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1) = (x^3-1)(x^3+1) = x^6 - 1$ である。）

小問 (ii)

a を $x^4 + 1 = 0$ の任意の根とする。すると $a^4 = -1$ であるから $a^8 = 1$ である。a の位数 d は 8 を割り切る（$0 \leq r < d$ として $8 = qd + r$ と書くと $a^r = a^8(a^d)^{-q} = 1$ となり、d の最小性より $r = 0$ である）。よって $d \in \{1, 2, 4, 8\}$ である。もし d が 1、2、4 のいず

れかならば $a^4 = 1$ となり、$a^4 = -1$ に矛盾する。したがって、$x^4 + 1$ のすべての根は 1 の原始 8 乗根である。

逆に、$\omega = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/4}$ として ω^k の位数が 8 となるのは、k が奇数のとき、かつそのときに限る（k が偶数ならば $(\omega^k)^4 = 1$ である）。したがって原始 8 乗根はちょうど四つ、すなわち $\omega, \omega^3, \omega^5, \omega^7$ である。4 次式 $x^4 + 1$ は相異なる四つの根（それらは $\mathrm{e}^{(2j+1)\pi \mathrm{i}/4}$、$j = 0, 1, 2, 3$ である）をもち、それらはすべて原始 8 乗根であるから、まさにこの四つである。よって $\mathrm{C}_8(x) = x^4 + 1$ である。

ほかの n は条件を満たさない。C_n の根はすべて位数 n をもち、$x^4 + 1$ の根は位数 8 をもつからである。よって答えは $n = 8$ である。

小問 (iii)

小問 (i) で $n = 3$ と $n = 5$ に対して用いた議論は、任意の素数 p に適用できる。すなわち、1 以外のすべての 1 の p 乗根は原始的である。したがって

$$\mathrm{C}_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1.$$

（$p = 2$ のとき、これは $x + 1$ となり、小問 (i) と一致する。）

小問 (iv)

背理法（proof by contradiction）により、ある正の整数 q, r, s に対して $\mathrm{C}_q(x) \equiv \mathrm{C}_r(x)\mathrm{C}_s(x)$ が成り立つと仮定する。

まず、C_s は少なくとも一つの根をもつ。$\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/s}$ が 1 の原始 s 乗根だからである：$(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/s})^m = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}m/s} = 1$ となるのは $s \mid m$ のときに限る。C_r についても同様である。よって C_r と C_s の次数（degree）はともに 1 以上である。

C_r の任意の根 a をとる。恒等式（identity）より $\mathrm{C}_q(a) = \mathrm{C}_r(a)\mathrm{C}_s(a) = 0$ であるから、a は 1 の原始 q 乗根であると同時に、1 の原始 r 乗根でもある。

> **考えてみよう** 一つの数が、$r \neq q$ でありながら 1 の原始 r 乗根であり、かつ 1 の原始 q 乗根でもあることはありうるだろうか？

ありえない。例えば $r < q$ ならば、$0 < r < q$ で $a^r = 1$ となり、a が原始 q 乗根であることに矛盾する。$q < r$ のときは役割を入れ替えればよい。よって $r = q$ であり、同様に（C_s の根を用いて）$s = q$ である。

しかしこのとき、恒等式は $\mathrm{C}_q = \mathrm{C}_q^2$ となる。次数を比較すると $\deg \mathrm{C}_q = 2 \deg \mathrm{C}_q$ であるから $\deg \mathrm{C}_q = 0$ となり、C_q が根をもつことに矛盾する。（あるいは、C_q^2 は重根をもつが、C_q はもたない、と論じてもよい。）したがって、そのような q, r, s は存在しない。

検算

- C_n の次数は、$1 \le k \le n$ かつ $\gcd(k,n) = 1$ を満たす k の個数に等しい。$n = 1,\dots,6$ に対して次数は $1,1,2,2,4,2$、$n = 8$ に対して 4 であり、すべて一致する。
- 1 の n 乗根はいずれも n を割り切るある位数 d をもつから、$x^n - 1$ は n の約数 d にわたる C_d の積である。$n = 4$ のとき：$(x-1)(x+1)(x^2+1) = x^4 - 1$。$n = 8$ のとき：$(x^4-1)(x^4+1) = x^8 - 1$。
- 数値的に、$n \le 40$ について原始根にわたって $(x - a)$ を掛け合わせると、上のすべての多項式が再現され、$x^4 + 1$ が得られるのは $n = 8$ のときのみであり、$q, r, s \le 30$ の範囲では恒等式 $C_q = C_r C_s$ は見つからない。

よくある間違い

- 原始根の中に 1（あるいは -1）を含めてしまう：C_n は $x^n - 1$ ではない。
- 小問 (ii) で、$x^4 + 1$ が $x^8 - 1$ を割り切ることだけを確認し、より小さい位数を排除しない：要点は $a^4 = -1 \neq 1$ であることである。
- 小問 (iv) で、次数だけから論じる：$\deg C_q = \deg C_r + \deg C_s$ は起こりうる（例えば $4 = 2 + 2$）ので、矛盾を導くのは次数ではなく根である。

STEP のその先へ

C_n は**円分多項式**（cyclotomic polynomials）である。恒等式 $x^n - 1 = \prod_{d \mid n} C_d(x)$ から、これらが常に整数係数をもつことがわかる。さらに深い定理によれば、いずれも有理数体上で既約（irreducible）である。円分多項式はガロア理論（Galois theory）の中心にあり、また定規とコンパスでどの正多角形が作図可能かというガウス（Gauss）の発見においても中心的な役割を果たす。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）はこの代数を展開しており、Needham の *Visual Complex Analysis*（ビジュアル複素解析）は 1 の冪根の幾何学的な描像を与えている。

解答例

STEP III 2010、第 4 問

純粋数学 • 多項式の共通根

> **STEP III 2010、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q4

鍵となる考え方

α が最高次の係数の等しい 2 つの 2 次方程式（quadratic equation）をともに満たすならば、α はそれらの差も満たし、x^2 の項が打ち消し合って 1 次方程式が残る。これにより α が決まり、それを一方の 2 次方程式に代入し直せば条件が得られる。小問 (ii) でも、3 次式を 2 次式で割れば同じ方法が使える。2 次式の根の上では、3 次式はその余りとまったく同じようにふるまうので、2 つの 2 次方程式の場合に帰着し、小問 (i) の結果を引用できる。

解答

以下を通じて、「根」（root）は複素数の範囲での根を意味する。したがって、どの 2 次方程式も（重複度（multiplicity）を込めて数えて）2 つの根をもつ。

小問 (i)

α が両方の方程式を満たすとする。第 1 式から第 2 式を引くと

$$(a-c)\alpha + (b-d) = 0.$$

$a \neq c$ であるから $a-c$ で割ることができ、

$$\alpha = -\frac{b-d}{a-c},$$

が得られる。これが示すべきことであった。

条件について。 $k = a-c \neq 0$、$m = b-d$ とおくと、条件は $m^2 - amk + bk^2 = 0$ となる。

($\Rightarrow$) 共通根が存在するならば、最初の結果によりそれは $\alpha = -m/k$ である。これを $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ に代入すると

$$\frac{m^2}{k^2} - \frac{am}{k} + b = 0,$$

となり、$k^2 \neq 0$ を掛けると $m^2 - amk + bk^2 = 0$ が得られる。

($\Leftarrow$) $m^2 - amk + bk^2 = 0$ と仮定し、$\alpha = -m/k$ と**定義する**。条件を k^2 で割り、上の議論を逆にたどれば $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ がわかる。また、α の選び方から $(a-c)\alpha + (b-d) = k\alpha + m = 0$ である。よって

$$\alpha^2 + c\alpha + d = (\alpha^2 + a\alpha + b) - \big((a-c)\alpha + (b-d)\big) = 0 - 0 = 0,$$

となり、α は共通根である。以上で $a \neq c$ のときの同値性（equivalence）が示された。

? 考えてみよう 順方向の証明だけではなぜ不十分なのか？

順方向の証明は、共通根が存在する**ならば**条件が成り立つ、ということしか述べていない。「必要十分」（if and only if）を示すには、条件から共通根が得られることも示さなければならない。だからこそ、条件から α を定義し、それが**両方の**方程式を満たすことを確かめたのである。

$a \neq c$ を外す場合。 $a = c$ とする。このとき条件は $(b-d)^2 = 0$、すなわち $b = d$ となる。

- $b = d$ ならば、2つの方程式は同一であるから当然共通根をもち（両方の根がともに共通根である）、条件も成り立つ。
- $b \neq d$ ならば、共通根 α があったとすると、引き算により $(a-c)\alpha + (b-d) = b - d = 0$ となり矛盾する。よって共通根は存在せず、条件も成り立たない。

いずれの場合も「共通根をもつこと」と「条件」は一致するので、条件 $a \neq c$ がなくても**結果はやはり成り立つ**。

（唯一注意を要するのは、実数の根だけを数える場合である。$a = c$、$b = d$ かつ $a^2 < 4b$ ならば条件は成り立つが、同一の2つの方程式は実数解をもたない。$a \neq c$ のときはこのような問題は生じない。係数が実数ならば、共通根 $-(b-d)/(a-c)$ は自動的に実数になるからである。）

小問 (ii)

3次式を $x^2 + ax + b$ で割る。$(x+1)(x^2 + ax + b) = x^3 + (a+1)x^2 + (a+b)x + b$ であるから

$$x^3 + (a+1)x^2 + qx + r = (x+1)(x^2 + ax + b) + (q - a - b)x + (r - b).$$

よって $x=\alpha$ で $x^2+ax+b=0$ ならば、そこで 3 次式は値 $(q-a-b)\alpha+(r-b)$ をとり、2 次式

$$(x^2+ax+b)+(q-a-b)x+(r-b)=x^2+(q-b)x+r.$$

も同じ値をとる。したがって、α が 2 次方程式と 3 次方程式の共通根であるための必要十分条件は、それが

$$x^2+ax+b=0 \qquad \text{かつ} \qquad x^2+(q-b)x+r=0.$$

の共通根であることである。次に、$c=q-b$、$d=r$ として小問 (i) を適用する。すると $a-c=a+b-q$、$b-d=b-r$ であるから、共通根が存在するための必要十分条件は

$$(b-r)^2-a(b-r)(a+b-q)+b(a+b-q)^2=0.$$

である。小問 (i) の結果は $a=c$ であってもなくても成り立つので、ここで追加の条件は必要ない。

例について。両方の方程式を 2 で割ってモニック（monic、最高次の係数が 1）にする：

$$x^2+\tfrac{5}{2}x+b=0, \qquad x^3+\tfrac{7}{2}x^2+\tfrac{5}{2}x+\tfrac{1}{2}=0.$$

これらは $a=\frac{5}{2}$（実際 $a+1=\frac{7}{2}$ である）、$q=\frac{5}{2}$、$r=\frac{1}{2}$ として要求された形になっている。このとき $a+b-q=b$、$b-r=b-\frac{1}{2}$ であるから、条件は

$$\left(b-\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{5}{2}\left(b-\tfrac{1}{2}\right)b+b\cdot b^2=0.$$

となる。4 を掛けると：

$$(2b-1)^2-5b(2b-1)+4b^3=0$$
$$4b^3-6b^2+b+1=0.$$

見ればわかるように $b=1$ は根であり、

$$4b^3-6b^2+b+1=(b-1)(4b^2-2b-1).$$

と因数分解される。2 次の因数から $b=\dfrac{2\pm\sqrt{4+16}}{8}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$ が得られる。よって、2 つの方程式が共通根をもつのは、ちょうど

$$b=1 \qquad \text{または} \qquad b=\frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad \text{または} \qquad b=\frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

のときである。

別の方法。ここでの 3 次方程式には b が含まれないので、そのまま解くことができる。$x=-\frac{1}{2}$ を試すと $-\frac{1}{4}+\frac{7}{4}-\frac{5}{2}+1=0$ となるので

$$2x^3+7x^2+5x+1=(2x+1)(x^2+3x+1),$$

であり、根は $-\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{5})$ である。共通根 x があれば $2b=-(2x^2+5x)$ でなければならない。$x=-\frac{1}{2}$ のとき、これより $b=1$ となる。他の 2 つの根については $x^2=-3x-1$ であるから $2x^2+5x=-x-2$ となり、$b=\frac{1}{2}(x+2)=\frac{1}{4}(1\pm\sqrt{5})$ である。これは上の答えと一致する。

検算

- $b=1$ のとき、2 次式 $2x^2+5x+2=(2x+1)(x+2)$ は根 $-\frac{1}{2}$ をもち、これは 3 次方程式の根である。
- $b=\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})\approx 0.8090$：2 次方程式の根は ≈ -0.3820 と -2.1180 であり、$-0.3820\approx\frac{1}{2}(-3+\sqrt{5})$ は 3 次方程式の根である。
- a,b,c,d（および a,b,q,r）の整数値を無作為に 20 000 通り選んでコンピュータで検証したところ、$a=c$ の場合も含め、条件式の値が零になるのは、方程式が複素数の共通根をもつときちょうどそのときであることが確かめられた。

よくある間違い

- 「共通根 ⇒ 条件」だけを証明し、逆（converse）を忘れる。
- $a=c$ についての問いに「いいえ、$a-c$ で割ったから」と答える。証明は破綻するが、**結果**は生き残る。両辺とも $b=d$ に帰着するからである。
- 2 で割らずに小問 (ii) を適用する。この公式はモニックな方程式を前提としている。

STEP のその先へ

小問 (i) の式は、2 つの 2 次式の**終結式**（resultant）である。これは係数についての多項式で、2 つの多項式が共通根をもつときちょうどそのときに零になる。終結式はシルベスター（Sylvester）の行列式に由来し、多項式の連立方程式を解くのに用いられる消去理論（elimination theory）の基礎となっている。小問 (ii) の「割って余りを残す」操作は、多項式に対するユークリッドの互除法（Euclidean algorithm）の第 1 段階であり、整数の場合とまったく同様に、2 つの多項式の最大公約式（highest common factor）を求めるものである。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は、この枠組みで多項式の割り算と最大公約式を展開している。

解答例

STEP III 2010、第 5 問

純粋数学 • 座標幾何による作図

> **STEP III 2010、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q5

鍵となる考え方

ここでは座標がすべてを片づけてくれる。R と S を求め、直線 PQ と RS を切片形（intercept form）で書き下し、それぞれが A を通り AC に垂直（perpendicular）な直線とどこで交わるかを調べればよい。両者はその直線と同じ点で交わり、その点こそが T でなければならない。作図のほうは一つの観察にもとづく。与えられた正方形の対角線がちょうど必要な辺の長さであり、前半の結果は、その対角線に対する直角を定規（straight-edge）だけで描く方法を与えてくれるのである。

解答

$TA \perp AC$ であることの証明

$C(a,a)$ を通る直線は扱いやすい。直線 CP は (a,a) と $(an,0)$ を結ぶので、その傾き（gradient）は $\dfrac{a}{a-an} = \dfrac{1}{1-n}$（$n<1$ より定義される）であり、方程式は

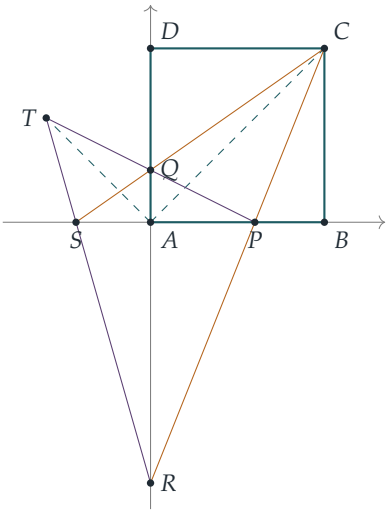
$$y = \frac{x-an}{1-n}.$$

である。直線 DA は $x=0$ なので、

$$R = \left(0,\ -\frac{an}{1-n}\right).$$

同様に、CQ は (a,a) と $(0,am)$ を結び、傾きは $1-m \neq 0$ で、方程式は $y = am + (1-m)x$ である。$y=0$（直線 BA）とおくと、

$$S = \left(-\frac{am}{1-m},\ 0\right).$$



ここで切片形を用いる。直線 PQ の切片は an と am であり、直線 RS の切片は $-\frac{am}{1-m}$ と $-\frac{an}{1-n}$ である。したがって

$$\begin{aligned} PQ: &\quad \frac{x}{n}+\frac{y}{m}=a, \\ RS: &\quad -\frac{(1-m)x}{m}-\frac{(1-n)y}{n}=a. \end{aligned}$$

AC の傾きは 1 なので、A を通り AC に垂直な直線は $y=-x$ である。それぞれの方程式に $y=-x$ を代入すると、

$$\begin{aligned} PQ: &\quad x\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)=a, \\ RS: &\quad x\left(-\frac{1}{m}+1+\frac{1}{n}-1\right)=x\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)=a. \end{aligned}$$

これらは同じ方程式である。$m\neq n$ より括弧内は 0 でないので、どちらの直線も $y=-x$ とただ一つの点

$$\left(\frac{amn}{m-n},\ -\frac{amn}{m-n}\right).$$

で交わる。

考えてみよう PQ と RS の両方の上にある点が見つかった。なぜそれが T でなければならないのか。

異なる二直線は高々一点でしか交わらない。直線 PQ と RS は異なる（PQ は x 軸上の $x>0$ の点 P を通り、RS は x 軸と $x<0$ の点 S で交わる）。よって両者に共通な点はその交点 T にほかならない。ゆえに

$$T=\left(\frac{amn}{m-n},\ -\frac{amn}{m-n}\right),$$

であり、これは $y=-x$ 上にある。ベクトル $\overrightarrow{AT}$ は $(1,-1)$ の定数倍であり、$\overrightarrow{AC}=(a,a)$ で、$(1,-1)\cdot(a,a)=0$ である。したがって、求めるとおり TA は AC に垂直である。

この計算では $m<n$ はまったく使っておらず、使ったのは $m\neq n$ だけであることに注意しよう。また P と Q の実際の位置も使っていないので、辺 AB 上の点 P と辺 AD 上の点 Q をどのように選んでも、$AP\neq AQ$ でありさえすれば、A における AC の垂線上に T が得られる。

作図

面積 $2a^2$ の正方形の一辺は $\sqrt{2}a$ であり、これは対角線 AC の長さである。そこで AC を一辺とする正方形を作る。座標で表せば、頂点が

$$A(0,0),\quad E(a,-a),\quad F(2a,0),\quad C(a,a).$$

の正方形である。その辺 $\overrightarrow{AE}=(a,-a)$、$\overrightarrow{EF}=(a,a)$、$\overrightarrow{FC}=(-a,a)$、$\overrightarrow{CA}=(-a,-a)$ はすべて長さ $\sqrt{2}a$ で、隣り合う辺は垂直であるから、面積は $2a^2$ である。

考えてみよう 目盛りのない定規では、点を結ぶことと直線を延長することしかできない。いったいどうすれば直角が得られるのか。

前半の内容がまさにその手順になっている。そこでの各段階は、既知の二点を結ぶか二直線の交点をとるかのどちらかだからである。定規を使って次のようにする。

1. 対角線 AC を引く。AB 上に任意の点 P、AD 上に任意の点 Q をとる。ただし A からの距離が見た目にはっきり異なるように選ぶ（測定は不要で、$AP\neq AQ$ でありさえすればよい）。
2. CP を延長して直線 DA との交点を R とし、CQ を延長して直線 BA との交点を S とする。PQ と RS を延長してその交点を T とする。
3. 直線 TA を引く。上の結果により、これは AC に垂直である。CB を B の先へ延長し、直線 TA との交点を E とする。（直線 CB は $x=a$、直線 TA は $y=-x$ なので、$E=(a,-a)$ である。）
4. 反対側の頂点 C で手順 1–3 を繰り返す。すなわち、CD 上と CB 上に、C からの距離が見た目にはっきり異なる点をとり、同じ作図を行う。正方形の中心のまわりの半回転は A と C を入れ替え、正方形をそれ自身に移すので、これにより C を通り AC に垂直な直線、すなわち $x+y=2a$ が得られる。
5. AB を B の先へ延長し、この直線との交点を $F=(2a,0)$ とする。

すると $AEFC$ は一辺 $AC=\sqrt{2}a$ の正方形であり、その面積は $2a^2$ である。（その対角線 AF と CE は直線 AB と CB に沿っており、新しい正方形の中心 B で交わる。）

検算

- $a=1$、$m=0.3$、$n=0.6$ とする。このとき $R=(0,-1.5)$、$S=(-\frac{3}{7},0)$、$T=(-0.6,0.6)$ である。点 T は R と S を通る直線上にある：$-\frac{0.7}{0.3}(-0.6)-\frac{0.4}{0.6}(0.6)=1.4-0.4=1$。また PQ 上にもある：$-1+2=1$。そして T は $y=-x$ 上にある。
- a、m、n を無作為に2000通り選び、$m<n$ と $m>n$ の両方の大小関係について、コンピュータで分数を用いて R、S、T を厳密に計算した。どの場合も $\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ であり、作図した $AEFC$ は長さの2乗が $2a^2$ の等しい四辺が直角に交わっていた。

よくある間違い

- PQ と RS の連立方程式を力ずくで解くこと。それでも解けるが、計算が煩雑になる。候補となる直線（$y=-x$）を両方の方程式で試すほうがはるかに速い。
- 共通の点が本当に T である理由を説明し忘れること。二直線が異なることが必要である。
- 作図において、どうやって行うのかを述べずに「垂線を引く」や「長さを写し取る」とすること。各段階は、点を結ぶか直線の交点をとるかのどちらかでなければならない。

STEP のその先へ

定規だけを用いる作図は**射影幾何学**（projective geometry）に属する。そこでは結ぶことと交わらせることだけが許された操作であり、R、S、T に潜んでいるような比は、複比（cross-ratio）や調和点列（harmonic range）を通して研究される。ポンスレ（Poncelet）とシュタイナー（Steiner）による古典的な定理によれば、円が一つとその中心が描かれていさえすれば、定規だけで定規とコンパスによる作図のすべてが可能である。ここでは正方形が同様の役割を果たしている。コクセター（Coxeter）の *Projective Geometry* は、この分野へのすばらしい入門書である。

解答例

STEP III 2010、第 6 問

純粋数学 • 3 次元の回転

STEP III 2010、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/10-s3-q6

鍵となる考え方

ある軸のまわりの回転（rotation）は、軸上のすべての点をそのままにし、軸に垂直な平面内のすべてのものを、ちょうどその平面の回転と同じように回す。したがって各段階は 2 次元の回転に帰着する。すなわち、回される平面を見つけ、その平面内の正規直交（orthonormal）なベクトルの組を書き下し、それらを回転させればよい。軸方向のベクトルは単にそのまま残る。この一つの観察が、Q についての議論の大部分を担う。

解答

座標軸方向の単位ベクトルを $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ と書く。すると P_0、Q_0、R_0 の位置ベクトルはそれぞれ $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ である。

小問 (i)

z 軸のまわりの回転は、x-y 平面を ϕ だけ回し、$\mathbf{i}$ は $\mathbf{j}$ の方へ動く。よって

$$P_1 = (\cos\phi,\ \sin\phi,\ 0).$$

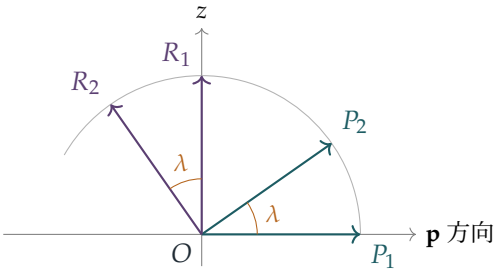
後のために述べておくと、この平面内で Q は常に P より直角だけ先にあるので、同じ回転によって $\mathbf{j}$ は $Q_1 = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$ に移る。また R_0 は軸上にあるので動かない：$R_1 = (0, 0, 1)$。

小問 (ii)

$\mathbf{p} = \overrightarrow{OP_1} = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$ とおく。x-y 平面内で OP_1 に垂直な直線の方向は

$$\mathbf{u} = (-\sin\phi,\ \cos\phi,\ 0),$$

である。実際 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{p} = 0$ かつ $\mathbf{u}\cdot\mathbf{k} = 0$ である。この軸に垂直な平面は正規直交な組 $\mathbf{p}$ と $\mathbf{k}$ が張る平面であり、2 回目の回転はこの平面を λ だけ回し、$\mathbf{p}$ は $\mathbf{k}$ の方へ動く：



この平面内で回転は

$$\mathbf{p} \mapsto \cos\lambda\,\mathbf{p} + \sin\lambda\,\mathbf{k}, \qquad \mathbf{k} \mapsto -\sin\lambda\,\mathbf{p} + \cos\lambda\,\mathbf{k},$$

と写す。2 つ目は、$\mathbf{k}$ が常に $\mathbf{p}$ より直角だけ先にあることによる。したがって

$$P_2 = (\cos\lambda\cos\phi,\ \cos\lambda\sin\phi,\ \sin\lambda), \qquad R_2 = (-\sin\lambda\cos\phi,\ -\sin\lambda\sin\phi,\ \cos\lambda).$$

? **考えてみよう** 2 回目の回転で Q はどこへ行くか。

1 回目の回転の後、Q は $Q_1 = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$ にあり、これはちょうど $\mathbf{u}$ である。つまり Q は 2 回目の回転の軸上にあるので動かない。よって

$$Q_2 = (-\sin\phi,\ \cos\phi,\ 0).$$

検算として、P_2、Q_2、R_2 は互いに垂直な単位ベクトルである（たとえば $\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OR_2} = -\sin\lambda\cos\lambda\cos^2\phi - \sin\lambda\cos\lambda\sin^2\phi + \sin\lambda\cos\lambda = 0$）。回転の後なので、そうでなければならない。

小問 (iii)

この小問を通して $P_2 \neq \pm P_0$ を仮定する。これにより O、P_0、P_2 は実際に平面を一つ定める。

? **考えてみよう** なぜ回転角は角 P_2OP_0 と等しいのか。

P は平面 OP_0P_2 内にとどまるので、回転の軸はこの平面に垂直で O を通る直線でなければならない（回転は点を、その点を通り軸に垂直な平面内で動かすからである）。したがって P はこの平面内の大円（great circle）に沿って動き、この平面内のすべてのベクトルは回転角だけ回される。よってその角は $\overrightarrow{OP_2}$ と $\overrightarrow{OP_0}$ のなす角であり、両者とも単位ベクトルなので

$$\cos\theta = \overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_0} = (\cos\lambda\cos\phi)(1) + (\cos\lambda\sin\phi)(0) + (\sin\lambda)(0) = \cos\phi\cos\lambda,$$

となり、示すべきことが得られた。（遠回りに $2\pi-\theta$ だけ回しても、余弦は同じである。）

軸は $\overrightarrow{OP_2}$ と $\overrightarrow{OP_0}$ の両方に垂直なので、それらの外積（cross product）の方向にある：

$$\overrightarrow{OP_2}\times\overrightarrow{OP_0} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\lambda\cos\phi & \cos\lambda\sin\phi & \sin\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,\ \sin\lambda,\ -\cos\lambda\sin\phi).$$

よって軸方向のベクトルは

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\lambda \\ -\cos\lambda\sin\phi \end{pmatrix}.$$

である。この向きをとると、右ねじの法則（right-hand rule）に従う θ の回転が P_2 を P_0 に移す。軸に x 成分がないことに注意しよう。軸は OP_0 に垂直なので、当然そうなる。

検算

- $\lambda = 0$ ならば 2 回目の回転は何もしないので、3 回目の回転は単に 1 回目を元に戻すだけである：$\theta = \phi$ であり、軸は $(0, 0, -\sin\phi)$ の方向、すなわち z 軸である。公式と一致する。
- $\phi = 0$ ならば回転は y 軸のまわりのものだけであり、実際に軸は $(0, \sin\lambda, 0)$ の方向、$\theta = \lambda$ となる。
- 数値的に、ランダムな (ϕ, λ) 20 000 組に対してロドリゲスの公式（Rodrigues' formula）で回転を施すと P_2、Q_2、R_2 が再現され、$(0, \sin\lambda, -\cos\lambda\sin\phi)$ のまわりの θ の回転は P_2 を P_0 に戻す。$\phi = 0.7$、$\lambda = 0.4$ のとき $\cos\theta \approx 0.7045$ であり、$\theta \approx 0.789$ である。

よくある間違い

- 2 回目の段階で Q を回転させてしまう：Q は軸上にあるので動かない。

- R_2 の符号を間違える：P が $\mathbf{k}$ の方へ起き上がるにつれて、R は下へ、OP_1 から離れる向きに傾くので、その水平成分は $-\sin\lambda\,\mathbf{p}$ である。

STEP のその先へ

ここでの 2 つの角は経度（longitude）ϕ と緯度（latitude）λ であり、$\cos\theta = \cos\phi\cos\lambda$ は球面三角法の余弦定理（spherical cosine rule）の直角の場合である。これは航海術で大円距離を求めるのに使われる。より一般に、2 つの回転の合成は再びある一つの軸のまわりの回転となり（オイラー（Euler）の回転定理（Euler's rotation theorem））、列 $\overrightarrow{OP_2}$、$\overrightarrow{OQ_2}$、$\overrightarrow{OR_2}$ は合成された回転の直交行列（orthogonal matrix）をなす。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は回転行列と直交行列を扱っている。Needham の *Visual Complex Analysis*（ヴィジュアル複素解析）は、球面の回転が複素数を用いてどのように記述できるかを示している。

解答例

STEP III 2010、第 7 問

純粋数学 ・ マクローリン級数

> **STEP III 2010、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q7

鍵となる考え方

すべてがうまくいくのは、扱いにくい平方根を片付けることができるからである。$\sqrt{1-x^2}\,y'$ を一つのすっきりした式として書き、もう一度微分すると、2 階の微分方程式（second-order differential equation）が自然に得られる。その後は、微分を繰り返すと係数に規則性が現れ、それを数学的帰納法（induction）で証明する。一般の関係式に $x=0$ を代入すると、それはマクローリン係数（Maclaurin coefficients）に関する漸化式（recurrence relation）になり、m が偶数のときはその漸化式に 0 となる因子が現れるので、級数は途中で終わる。

解答

微分方程式

$\theta = \arcsin x$ とおく。すると $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$ のもとで $\sin\theta = x$ であり、$|x| < 1$ に対して $\cos\theta = \sqrt{1-x^2} > 0$ である。このとき $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ かつ $y = \cos m\theta$ であるから、合成関数の微分法（chain rule）により

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{m\sin m\theta}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{すなわち} \qquad \sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -m\sin m\theta.$$

これを x で微分する。左辺には積の微分法（product rule）を用いると

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{m^2\cos m\theta}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{m^2 y}{\sqrt{1-x^2}}.$$

両辺に $\sqrt{1-x^2}$（これは 0 でない）を掛けると

$$(1-x^2)\,y'' - x\,y' + m^2 y = 0,$$

となり、示すべき式が得られた。（ここおよび以下では、$y^{(n)}$ は $\mathrm{d}^n y/\mathrm{d}x^n$ を表す。）

3 階および 4 階の方程式

いま証明した方程式を微分する。積 $(1-x^2)y''$ からは $(1-x^2)y'''-2xy''$ が、xy' からは $xy''+y'$ が得られるので

$$(1-x^2)\,y'''-3x\,y''+(m^2-1)\,y'=0.$$

同様にもう一度微分すると

$$(1-x^2)\,y^{(4)}-2x\,y'''-3x\,y'''-3y''+(m^2-1)\,y''=0,$$

したがって

$$(1-x^2)\,y^{(4)}-5x\,y'''+(m^2-4)\,y''=0.$$

一般の関係式

x の係数は 1,3,5 と進み、定数項は m^2-0^2, m^2-1^2, m^2-2^2 と進むので、すべての整数 $n\geq 0$ に対して

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)}-(2n+1)\,x\,y^{(n+1)}+(m^2-n^2)\,y^{(n)}=0. \qquad (*)$$

が成り立つと予想される。これを n に関する数学的帰納法で証明する。$n=0$ の場合は最初に証明した方程式である。ある n について $(*)$ が成り立つと仮定する。これを微分すると

$$\begin{aligned}(1-x^2)\,y^{(n+3)}-2x\,y^{(n+2)}-(2n+1)\,x\,y^{(n+2)}\\ -(2n+1)\,y^{(n+1)}+(m^2-n^2)\,y^{(n+1)}=0.\end{aligned}$$

項をまとめると、$x\,y^{(n+2)}$ の係数は $-(2n+3)=-\big(2(n+1)+1\big)$ であり、$y^{(n+1)}$ の係数は $m^2-(n^2+2n+1)=m^2-(n+1)^2$ である。よって

$$(1-x^2)\,y^{(n+3)}-\big(2(n+1)+1\big)x\,y^{(n+2)}+\big(m^2-(n+1)^2\big)y^{(n+1)}=0,$$

となり、これは $(*)$ の n を $n+1$ に置き換えたものである。数学的帰納法により、$(*)$ はすべての $n\geq 0$ について成り立つ。

マクローリン級数

$x=0$ のとき $\theta=0$ であるから、$y(0)=\cos 0=1$ かつ $y'(0)=-m\sin 0=0$ である。$(*)$ に $x=0$ を代入すると中央の項が消える：

$$y^{(n+2)}(0)=(n^2-m^2)\,y^{(n)}(0).$$

$y'(0)=0$ であるから、奇数階の導関数はすべて 0 において 0 となる。偶数階については

$$\begin{aligned} y''(0) &= (0-m^2)\cdot 1 = -m^2,\\ y^{(4)}(0) &= (2^2-m^2)(-m^2) = m^2(m^2-2^2),\\ y^{(6)}(0) &= (4^2-m^2)\,m^2(m^2-2^2) = -m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2), \end{aligned}$$

であり、一般に $y^{(2k)}(0)=(-1)^k m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\cdots\left(m^2-(2k-2)^2\right)$ である。したがってマクローリン級数は

$$y = 1-\frac{m^2x^2}{2!}+\frac{m^2(m^2-2^2)\,x^4}{4!}-\frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\,x^6}{6!}+\cdots,$$

であり、0 でない最初の 3 項は $1-\dfrac{m^2x^2}{2!}+\dfrac{m^2(m^2-2^2)x^4}{4!}$ である。($m\neq 0,\pm 2$ であれば、これらはすべて 0 でない。これらの値に対しては級数の項はもっと少なくなる。その理由は次の小問で説明する。)

m が偶数の場合

m を偶数の整数とし、$|m|=2p$ とおく。因子 $m^2-(2p)^2$ は 0 であり、$2k-2\geq 2p$ となるとすぐに $y^{(2k)}(0)$ に現れる。したがって、$|m|$ より大きい階数の導関数はすべて $x=0$ において 0 となり、マクローリン級数は $x^{|m|}$ の項で終わる。

考えてみよう $x=0$ で途中で終わる級数は、1 点における導関数について教えてくれるだけである。すべての $|x|<1$ に対して y が本当にこの多項式に等しいことは、どうしてわかるのだろうか。

ここで再び $(*)$ を、今度は区間全体で用いる。$n=|m|$ とすると $m^2-n^2=0$ となる。さらに $v=y^{(n+1)}$ とおく。すると $(*)$ は

$$(1-x^2)\,v'-(2n+1)\,x\,v=0 \qquad (|x|<1).$$

となる。この 1 階の方程式は積分因子（integrating factor）$(1-x^2)^{(2n-1)/2}$ をもつ。実際

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)^{(2n+1)/2}\,v\right] = (1-x^2)^{(2n-1)/2}\left[(1-x^2)\,v'-(2n+1)\,x\,v\right]=0,$$

であるから、$(1-x^2)^{(2n+1)/2}\,v$ は $(-1,1)$ 上で定数である。$x=0$ におけるその値は、$n+1$ が奇数であるから $v(0)=y^{(n+1)}(0)=0$ である。よって $v\equiv 0$、すなわちすべての $|x|<1$ に対して $y^{(|m|+1)}(x)=0$ であり、したがって y は次数が高々 $|m|$ の多項式（polynomial）である。多項式はそれ自身のマクローリン級数に等しいので、$|x|<1$ に対して

$$\cos(m\arcsin x) = 1-\frac{m^2x^2}{2!}+\frac{m^2(m^2-2^2)\,x^4}{4!}-\cdots,$$

が成り立つ。ここで右辺は上で求めた有限で終わる級数である。

次に $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$ とし、$x = \sin\theta$ とおく。すると $|x| < 1$ であり、$\arcsin(\sin\theta) = \theta$ である（θ に対する制限が使われるのはまさにここである）。したがって

$$\cos m\theta = 1 - \frac{m^2 \sin^2\theta}{2!} + \frac{m^2(m^2 - 2^2)\sin^4\theta}{4!} - \cdots,$$

となり、これは示すべき形で始まる $\sin\theta$ の多項式である。

最後に、$\sin^{|m|}\theta$ の係数は $y^{(|m|)}(0)/|m|!$ であり、これは $\pm m^2(m^2-2^2)\cdots\left(m^2-(|m|-2)^2\right)/|m|!$ に等しい。$2j \le |m| - 2$ に対して $(2j)^2 < m^2$ であるから、これらの因子はどれも 0 でない。よって $m \neq 0$ のとき、この多項式の次数はちょうど $|m|$ である（すなわち、m が正の偶数のときは次数 m である）。$m = 0$ のときは定数 1 である。

検算

- $m = 2$：級数から $1 - 2\sin^2\theta$ が得られ、これはおなじみの $\cos 2\theta$ である。
- $m = 4$：級数から $1 - 8\sin^2\theta + \frac{16\cdot 12}{24}\sin^4\theta = 1 - 8\sin^2\theta + 8\sin^4\theta$ が得られる。直接計算すると $\cos 4\theta = 1 - 2\sin^2 2\theta = 1 - 8\sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - 8\sin^2\theta + 8\sin^4\theta$ である。両者は一致する。
- 各点のまわりでの $\cos(m \arcsin x)$ のテイラー展開（Taylor expansion）を用いて、ランダムに選んだ 200 組の (m, x) において $n = 0, \ldots, 8$ に対する $(*)$ を数値的に確かめた（最大の相対残差はおよそ 10^{-13}）。また、12 までのすべての偶数 m について $\cos m\theta$ を多項式と照合した。たとえば $m = 6$、$\theta = 1$ のとき、両辺はともに 0.96017 に等しい。

よくある間違い

- $(1 - x^2)y^{(n+2)}$ を微分するとき、積の微分法から出てくる $-2x\,y^{(n+2)}$ の項を忘れること。$2n + 1$ を $2n + 3$ に変えるのはこの項である。
- 途中で終わるマクローリン級数は関数に等しいはずだと思い込むこと。ここでは実際に等しいが、そのためには $v = y^{(|m|+1)}$ を用いた議論（あるいは別の正当化）が必要である。
- 次数を $m/2$ と答えること。多項式は $\sin\theta$ の偶数乗しか含まないが、最高次の冪は $\sin^m\theta$ である。

STEP のその先へ

代わりに $x = \cos\phi$ と置換すると、同じ種類の方程式はチェビシェフ（Chebyshev）の微分方程式 $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$ になる。その多項式解 $T_n(\cos\phi) = \cos n\phi$ はチェビシェフ多項式であり、数値近似において中心的な役割を果たす。微分した方程式に $x = 0$ を代入して係数の漸化式を得るという今回の工夫は、線形常微分方程式（ODE）に対する**冪級数法**（power series method）の出発点である。この方法では、特別なパラメータの値に対して級数が途中で終わることから、ルジャンドル（Legendre）多項式、エルミート（Hermite）多項式、チェビシェフ多項式がすべて現れる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）には、級数解についてのわかりやすい章がある。

解答例

STEP III 2010、第 8 問

純粋数学 ・ 商の微分法と積分

STEP III 2010、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/10-s3-q8

鍵となる考え方

式 $QR' - Q'R$ は、商 R/Q を微分したときに現れる分子である。したがって、与えられた P を生み出す R を見つけることさえできれば、P/Q^2 の形の被積分関数（integrand）は一目で積分できる。どちらの小問でも分母から Q がわかり、係数比較（comparing coefficients）によって R を求める。小問 (ii) では、微分方程式（differential equation）の左辺がちょうど $Qy' - Q'y$ になっていることがわかる。これは同じ構造が姿を変えて現れたものである。

解答

一般の積分

商の微分法（quotient rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{Q}(x)}\right) = \frac{\mathrm{Q}(x)\mathrm{R}'(x) - \mathrm{Q}'(x)\mathrm{R}(x)}{\big(\mathrm{Q}(x)\big)^2} = \frac{\mathrm{P}(x)}{\big(\mathrm{Q}(x)\big)^2},$$

であるから、

$$\int \frac{\mathrm{P}(x)}{\big(\mathrm{Q}(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{Q}(x)} + C.$$

小問 (i)

ここでは $\mathrm{Q}(x) = 1 + 2x + 3x^2$ であるから、$\mathrm{Q}'(x) = 2 + 6x$ である。$\mathrm{R}(x) = a + bx + cx^2$、$\mathrm{R}'(x) = b + 2cx$ とおくと、

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} &= (1 + 2x + 3x^2)(b + 2cx) - (2 + 6x)(a + bx + cx^2) \\ &= (b - 2a) + (2c - 6a)x + (2c - 3b)x^2.\end{aligned}$$

（x^3 の項は、どちらの積からも $6cx^3$ が出て打ち消し合う。）これが $5x^2 - 4x - 3$ に等しくなる必要があるので、

$$b - 2a = -3, \qquad 2c - 6a = -4, \qquad 2c - 3b = 5.$$

はじめの 2 式から $b = 2a - 3$、$c = 3a - 2$ を得る。これを 3 番目の式に代入すると、

$$2(3a - 2) - 3(2a - 3) = 6a - 4 - 6a + 9 = 5,$$

となり、これは a が**どんな値であっても**成り立つ。したがって 3 番目の式は新しい情報を何も与えず、a のすべての値が条件を満たす：

$$\mathrm{R}(x) = a + (2a - 3)x + (3a - 2)x^2.$$

$a = 1$ とおくと最もすっきりした $\mathrm{R}(x) = 1 - x + x^2$ が得られ、よって

$$\int \frac{5x^2 - 4x - 3}{(1 + 2x + 3x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1 - x + x^2}{1 + 2x + 3x^2} + C.$$

分母は決して 0 にならない（判別式（discriminant）が $4 - 12 < 0$ である）ので、これはすべての実数 x に対して成り立つ。

一意でないこと。 いま見たように、条件を満たす R は 1 パラメータの族をなすので、選び方は一意（unique）ではない。たとえば $a = 0$ とすると $\mathrm{R} = -3x - 2x^2$、$a = 1$ とすると $\mathrm{R} = 1 - x + x^2$ が得られ、どちらも条件を満たす。一般の a に対する選び方と $a = 0$ の場合とを比べると、

$$\big(a + (2a - 3)x + (3a - 2)x^2\big) - \big(-3x - 2x^2\big) = a + 2ax + 3ax^2 = a\,\mathrm{Q}(x).$$

考えてみよう R に Q の定数倍を加えても違いが生じないのはなぜか？

定数 k に対して R を $\mathrm{R} + k\mathrm{Q}$ に置き換えると、

$$\mathrm{Q}(\mathrm{R} + k\mathrm{Q})' - \mathrm{Q}'(\mathrm{R} + k\mathrm{Q}) = \mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} + k(\mathrm{QQ}' - \mathrm{Q}'\mathrm{Q}) = \mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R},$$

となるので、P は変わらない。これに対応して、答え R/Q は $\mathrm{R}/\mathrm{Q} + k$ に変わる。つまり、R の選び方が異なっても、得られる原始関数（antiderivative）は定数だけしか違わず、その定数は任意の積分定数（constant of integration）に吸収される。たとえば、

$$\frac{1 - x + x^2}{1 + 2x + 3x^2} = \frac{-3x - 2x^2}{1 + 2x + 3x^2} + 1.$$

小問 (ii)

$\mathrm{Q}(x) = 1 + \cos x + 2\sin x$ とおく。すると $\mathrm{Q}'(x) = -\sin x + 2\cos x$ であるから、方程式における y の係数 $\sin x - 2\cos x$ はちょうど $-\mathrm{Q}'(x)$ である。したがって方程式は

$$\mathrm{Q}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \mathrm{Q}'y = 5 - 3\cos x + 4\sin x.$$

となる。$\mathrm{Q} \neq 0$ である任意の区間で Q^2 で割ると、左辺が商の導関数であることがわかる：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{\mathrm{Q}}\right) = \frac{5 - 3\cos x + 4\sin x}{\mathrm{Q}^2}.$$

（言い換えると、$1/\mathrm{Q}^2$ は積分因子（integrating factor）である。）右辺を積分するために、$\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} = 5 - 3\cos x + 4\sin x$ を満たす R を探す。Q の形にならって $\mathrm{R} = a + b\cos x + c\sin x$ とおいてみると、$\mathrm{R}' = -b\sin x + c\cos x$ である。展開すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}' &= -b\sin x + c\cos x + (2c - b)\sin x\cos x + c\cos^2 x - 2b\sin^2 x,\\ \mathrm{Q}'\mathrm{R} &= -a\sin x + 2a\cos x + (2c - b)\sin x\cos x + 2b\cos^2 x - c\sin^2 x.\end{aligned}$$

引き算すると $\sin x\cos x$ の項は打ち消し合い、2 乗の項はまとめて $(c - 2b)(\cos^2 x + \sin^2 x) = c - 2b$ となる。よって

$$\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} = (c - 2b) + (c - 2a)\cos x + (a - b)\sin x.$$

これを $5 - 3\cos x + 4\sin x$ と比較すると、

$$c - 2b = 5, \qquad c - 2a = -3, \qquad a - b = 4.$$

1 番目の式から 2 番目の式を引くと $2a - 2b = 8$ となり、これは再び 3 番目の式である。したがって小問 (i) と同様に、同じ理由で自由なパラメータが 1 つ残る。$b = 0$ とおくと $c = 5$、$a = 4$ となり、$\mathrm{R} = 4 + 5\sin x$ である。ゆえに

$$\frac{y}{\mathrm{Q}} = \frac{4 + 5\sin x}{1 + \cos x + 2\sin x} + C,$$

であり、一般解（general solution）は

$$y = 4 + 5\sin x + C(1 + \cos x + 2\sin x),$$

である。ただし C は任意定数である。これを求める際には Q で割ったが、直接代入して確かめられるとおり、この関数はすべての x に対して方程式を満たす。b を別の値に選んでも C がずれるだけである。たとえば $b = -2$ とすると $\mathrm{R} = 2 - 2\cos x + \sin x = (4 + 5\sin x) - 2\mathrm{Q}$ となる。

検算

- 小問 (i) において、被積分関数の $\int_0^1$ は、求めた原始関数から $\frac{1}{6} - 1 = -\frac{5}{6}$ となるはずである。シンプソンの公式（Simpson's rule）では $-0.83333\ldots$ が得られ、a をどう選んでも、ランダムにとった区間で一致する。
- 小問 (ii) において、$y = 4 + 5\sin x$ を代入すると、左辺は $(1 + \cos x + 2\sin x)5\cos x - (2\cos x - \sin x)(4 + 5\sin x) = 5 - 3\cos x + 4\sin x$ となる。また $y = \mathrm{Q}$ とすると $\mathrm{QQ}' - \mathrm{Q}'\mathrm{Q} = 0$ となり、これが余関数（complementary function）である。
- 方程式を $y(0.5) = 1.7$ から $x = 1.5$ まで数値的に（ルンゲ・クッタ法（Runge–Kutta）で）解くと 3.910638 が得られ、対応する C をとった公式の値と一致する。

よくある間違い

- 3 つの未知数に関する 3 つの方程式には一意な解があると思い込むこと。ここではそれらは独立でなく、まさにそれこそが一意性に関する問いの核心である。
- 小問 (ii) で Q' の符号を間違えること。$\mathrm{Q}' = 2\cos x - \sin x$ であるから、y の係数は $+\mathrm{Q}'$ ではなく $-\mathrm{Q}'$ である。
- 最終的な答えにおいて、積分定数が Q に掛かることを忘れること。一般解は $y = \mathrm{R} + C$ ではなく $y = \mathrm{R} + C\mathrm{Q}$ である。

STEP のその先へ

小問 (ii) の方程式は 1 階線形微分方程式（first-order linear differential equation）であり、その一般解は「特殊解（particular solution）＋同次方程式（homogeneous equation）の解の定数倍」という形をしている。これはあらゆる線形の問題に通じるパターンである。式 $\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R}$ は Q と R のロンスキアン（Wronskian）であり、2 階線形方程式において中心的な役割を果たす。とくに階数低下法（reduction of order）や定数変化法（variation of parameters）で重要である。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は、積分因子とロンスキアンの両方を扱っている。

解答例

STEP III 2010、第 9 問

力学 ・ 円周上の運動

STEP III 2010、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

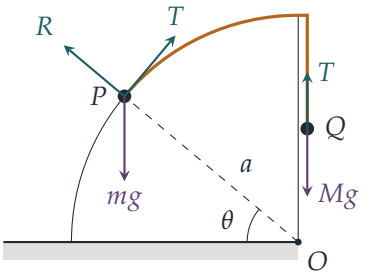
step.maths.org/questions/10-s3-q9

鍵となる考え方

糸は伸びず（inextensible）、台は滑らか（smooth）なので、P と Q は常に同じ速さで動き、系全体でエネルギーが保存される（conservation of energy）。これにより、微分方程式を解くことなく、P の速さが θ の関数として得られる。次に、P は円周上を動くので、O に向かう方向に力を分解すれば垂直抗力（normal reaction）が求まる。接触を保つとは、この抗力が負にならないことであり、上に凸であることを用いた議論（concavity）により、台の最上点だけを調べれば十分であることがわかる。

解答

モデル。 P と Q は質点、糸は軽くて伸びず、台は滑らかなので、張力（tension）T は糸のどこでも等しい。P を円弧上の角 θ の位置に置く。糸は P から円弧に沿って台の最上点まで伸び、そこから鉛直な面に沿ってまっすぐ下り、Q に至る。



速さ。 P が $\theta = 0$ から θ まで動いたとき、進んだ弧の長さは $a\theta$ であるから、Q は距離 $a\theta$ だけ下降している。両者はともに速さ $v = a\dot{\theta}$ で動く。一方、P は高さ $a\sin\theta$ だけ上昇している。台は滑らかで、糸は（伸びないので）系に対して正味の仕事をしないから、エネルギーは保存される。静止状態から動き始めるので、

$$\tfrac{1}{2}(m+M)v^2 = Mga\theta - mga\sin\theta, \qquad \text{よって} \qquad v^2 = \frac{2ga\,(M\theta - m\sin\theta)}{m+M}.$$

$0 < \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ では $M\theta > m\theta \geq m\sin\theta$ であるから、これは正である。したがって、系は確かに静止状態から動き出す。

垂直抗力。 P は O を中心とする半径 a の円周上を動くので、O に向かう加速度は v^2/a である。P にはたらく力は次のとおりである。

- 抗力 R。OP に沿って、O から遠ざかる向きにはたらく。
- 張力 T。接線方向にはたらき、動径方向の成分をもたない。
- 重力 mg。OP は水平方向と角 θ をなすので、その O に向かう成分は $mg\sin\theta$ である。

O に向かう方向に分解すると、

$$mg\sin\theta - R = \frac{mv^2}{a} = \frac{2mg\,(M\theta - m\sin\theta)}{m+M}.$$

したがって

$$R = \frac{mg\big[(m+M)\sin\theta - 2M\theta + 2m\sin\theta\big]}{m+M}$$
$$= \boxed{\frac{mg\big[(3m+M)\sin\theta - 2M\theta\big]}{m+M}.}$$

考えてみよう $[0, \frac{1}{2}\pi]$ のすべての θ に対して、R は負であってはならない。R の最小値を探す必要があるだろうか？

条件。 P が接触を保つのは、常に $R \geq 0$ であるとき、すなわち

$$f(\theta) = (3m+M)\sin\theta - 2M\theta \geq 0 \quad \text{ただし} 0 \leq \theta \leq \tfrac{1}{2}\pi.$$

が成り立つとき、かつそのときに限る。最小値を求める必要はない。この区間で $f''(\theta) = -(3m+M)\sin\theta \leq 0$ であるから f は上に凸であり、そのグラフは両端点を結ぶ弦（chord）の上側または弦上にある。$f(0) = 0$ であるから、次のことがいえる。

- **必要性。** P が $\theta = \frac{1}{2}\pi$ でまだ接触しているならば、$f(\frac{1}{2}\pi) = 3m + M - \pi M \geq 0$ である。
- **十分性。** $f(\frac{1}{2}\pi) \geq 0$ ならば、$(0,0)$ から $(\frac{1}{2}\pi, f(\frac{1}{2}\pi))$ への弦は軸の上側または軸上にある。上に凸であることから f は弦の上側または弦上にあるので、区間全体で $f \geq 0$ である。

よって条件は $3m \geq (\pi - 1)M$、すなわち

$$\frac{m}{M} \geq \frac{\pi - 1}{3},$$

となり、これが示すべきことであった。$(\pi - 1)/3 \approx 0.714 < 1$ であるから、これは $m < M$ と矛盾しないことに注意する。

検算

- $\theta = 0$ では $R = 0$ となる。これは正しい。始めに P は台の下端にあり、半径 OP は水平で、P の重さは机が支えているからである。
- P について接線方向に、Q について鉛直方向に力を分解すると $T = \dfrac{Mmg(1+\cos\theta)}{m+M} > 0$ となるので、糸は全過程を通じて確かに張っている。
- 数値的には、$m = 0.8$、$M = 1$、$a = 1$（比は $0.8 > 0.714$）として運動方程式を刻み幅ごとに解き、ニュートン（Newton）の第2法則から R を計算すると、公式と 10^{-13} の精度で一致し、R は負にならない。$m/M = \frac{2}{3}$ のときは、最上点付近で R が負になる。

よくある間違い

- Q も運動エネルギーをもつことを忘れ、$\frac{1}{2}(m+M)v^2$ ではなく $\frac{1}{2}mv^2$ と書いてしまう。
- 動径方向の方程式に張力を入れてしまう。滑らかな面上では、糸は P における接線に沿っている。
- $\theta = \frac{1}{2}\pi$ でのみ $R \geq 0$ を確かめ、それで十分である理由を示さない。それで十分といえるのは、f が上に凸だからである。

STEP のその先へ

ここでは、運動方程式 $(m+M)a\ddot{\theta} = g(M - m\cos\theta)$ を解く代わりにエネルギー保存を用いた。これは第一積分（first integral）の考え方であり、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）で中心的な役割を果たす。糸は拘束（constraint）であり、ただ一つの座標 θ で系全体が記述される。球面から離れる小球の問題群（この問題もその一つである）は、Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics* で丁寧に扱われている。

解答例

STEP III 2010、第 10 問

力学 ・ 微小振動

STEP III 2010、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/10-s3-q10

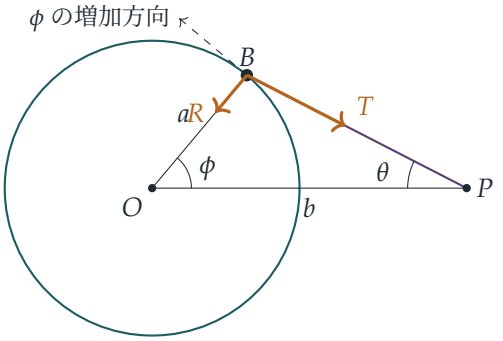
鍵となる考え方

ビーズは円周上に拘束されているので、その運動を変えるのはリングの接線（tangent）方向の力の成分だけである。垂直抗力（normal reaction）は（リングの鉛直方向の抗力とつり合う重力も同様に）まったく関わってこない。残りはすべて三角形 OBP の幾何であり、正弦定理（sine rule）によってその幾何が弦の長さに翻訳され、さらに角が小さいときには、後半で求められる θ と ϕ の間の線形な関係が得られる。

解答

運動方程式（equation of motion）

ビーズをなめらかなリング上の質点とし、弦を軽い弾性弦とみなす。P を x 軸の正の部分にとり、ϕ を反時計回りに測る。こうすると、図のように B は OP から角 ϕ の位置にある。三角形 OBP において O における角は ϕ、P における角は θ であるから、B における角は $\pi - \theta - \phi$ である。



$l = BP$ とおく。三角形 OBP における正弦定理により、

$$\frac{l}{\sin\phi} = \frac{a}{\sin\theta} = \frac{b}{\sin(\theta+\phi)},$$

である。ここで $\sin(\pi-\theta-\phi) = \sin(\theta+\phi)$ を用いた。特に $l = \dfrac{a\sin\phi}{\sin\theta}$ である。

B が P に最も近づいたときの距離は $b-a$ であり、$b-a > c$ であるから、弦は常に張っている。したがってフックの法則（Hooke's law）により、張力（tension）は

$$T = \frac{\lambda(l-c)}{c} = \lambda\left(\frac{a\sin\phi}{c\sin\theta} - 1\right).$$

である。

水平面内の力は、BP に沿った張力 T と、半径 OB に沿ったなめらかなリングからの垂直抗力 R である。（鉛直方向には、重さが抗力の鉛直成分とつり合っている。）ビーズは半径 a の円周上を動くので、ϕ が増加する向きの接線方向の加速度は $a\ddot{\phi}$ である。接線方向の成分をもつのは T だけである。

弦 BP は、内向きの半径 BO と角 $\pi-\theta-\phi$ をなす。したがって外向きの半径とは角 $\theta+\phi$ をなし、その接線方向の成分の大きさは $T\sin(\theta+\phi)$ である。この成分は P の方を向いており、それは ϕ が**減少する**向きである。接線方向に力を分解すると、

$$ma\ddot{\phi} = -\lambda\left(\frac{a\sin\phi}{c\sin\theta} - 1\right)\sin(\theta+\phi),$$

となり、示すべき式が得られた。（$\phi < 0$ のときは図を OP に関して折り返せばよい。このとき $\theta < 0$ でもあり、符号付きの角で考えれば同じ方程式が成り立つ。）

微小振動

正弦定理から、厳密に $a\sin(\theta+\phi) = b\sin\theta$ が得られていた。θ と ϕ が小さいとき、両辺で $\sin x \approx x$ となるので、

$$a(\theta+\phi) \approx b\theta.$$

である。よって $\theta \approx \dfrac{a\phi}{b-a}$ であり、$\theta+\phi \approx \dfrac{b\theta}{a} \approx \dfrac{b\phi}{b-a}$ である。

考えてみよう 両方の角が 0 に近づくとき、$\dfrac{a\sin\phi}{c\sin\theta}$ はどうなるだろうか。0/0 の形に見える。

この商はちょうど l/c であり、B がつり合いの位置に近づくと長さ l は $b-a$ に近づく。同じことだが、上の関係から $\dfrac{a\sin\phi}{\sin\theta} \approx \dfrac{a\phi}{\theta} \approx b-a$ である。したがって主要項までででは、張力はつり合いの位置での一定の張力

$$T_0 = \lambda\left(\frac{b-a}{c} - 1\right) = \frac{\lambda(b-a-c)}{c},$$

に等しい。$c < b - a$ であるから、これは正である。因子 $\sin(\theta + \phi)$ はすでに小さいので、T に対する補正は 2 次の項にしか寄与しない。

運動方程式に代入し、1 次の項まで残すと、

$$ma\ddot{\phi} \approx -\frac{\lambda(b-a-c)}{c} \cdot \frac{b\phi}{b-a}, \qquad \text{よって} \qquad \ddot{\phi} = -\omega^2\phi, \quad \omega^2 = \frac{\lambda b(b-a-c)}{mac(b-a)}.$$

となる。これは単振動（simple harmonic motion）であり、$\theta = \phi = 0$ のまわりの微小振動の周期は

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mac(b-a)}{\lambda b(b-a-c)}}.$$

である。

検算

- 次元（dimensions）：λ は力であるから、$mac(b-a)/(\lambda b(b-a-c))$ の次元は $\mathrm{ML}/(\mathrm{MLT}^{-2}) = \mathrm{T}^2$ であり、周期として正しい。
- $c \to b - a$ のとき、つり合いの位置での張力は 0 になり、周期は無限大になる。たるんだ弦は復元力を生まないので、これは理にかなっている。
- 数値的に、$a = 1$、$b = 2.5$、$c = 0.7$、$\lambda = 3$、$m = 0.5$ とすると、公式から周期は 1.8586 となる。小さな変位から出発して厳密な運動を数値的に追跡する（力は B の位置から直接計算する）と、有効数字 6 桁まで同じ値が得られる。また、厳密な運動方程式は、ランダムな位置においてベクトルによる直接の分解とも一致する。

よくある間違い

- 符号を間違える。接線方向の引く力は P の方、すなわち $\phi = 0$ の方を向いているので、負の符号がつかなければならない。
- つり合いの位置で張力を 0 とみなしてしまう。そこでは弦は長さ $b - a > c$ まで伸びているので、張力は $\lambda(b-a-c)/c$ であり、復元力を生むのはまさにこの張力である。
- $\theta + \phi \approx \phi$ としてしまう。ここでは θ は ϕ と同じ大きさの量なので、これを落とすと誤った周期が得られる。

STEP のその先へ

ここでの方法は、微小振動の振動数を求める標準的なやり方である。すなわち、つり合いの位置を見つけ、そのまわりで運動方程式を線形化（linearise）し、ω^2 を読み取る。興味深いのは、復元力がすべて**つり合いの位置での**張力が弦の向きの変化を通じて働くことから生じている点であり、これは張ったギターの弦と同じ仕組みである。大学 1 年次の講義では、これはラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）や基準振動（normal modes）へと発展する。微小振動の解析が丁寧に展開されている様子を見るには、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい。

解答例

STEP III 2010、第 11 問

力学 ・ 摩擦と相対運動

STEP III 2010、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

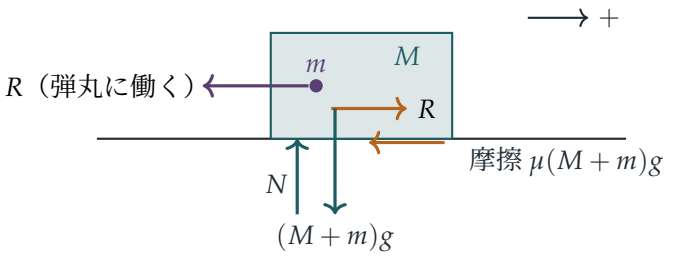
step.maths.org/questions/10-s3-q11

鍵となる考え方

この問題では運動量（momentum）は保存**されない**。地面からの摩擦（friction）が終始ブロックに働くからである。したがって、おなじみの「弾丸がブロックにめり込む」問題の近道は使えない。代わりに、弾丸とブロックを別々の質点（particle）として扱う。それぞれが一定の加速度をもち、大きさが等しく向きが反対の抵抗力 R によって結びついている。加速度が一定なので、*suvat* 公式（等加速度運動の公式）ですべて片がつく。相対運動（relative motion）は両者の差をとるだけでよい。

解答

弾丸とブロックを水平な直線上を運動する質点としてモデル化し、弾丸の進む向きを正とする。弾丸がブロック内にある間、ブロックは弾丸を力 R で押し返し、ニュートンの第三法則（Newton's third law）により、弾丸はブロックを力 R で前方へ押す。



垂直抗力（*normal reaction*）。鉛直方向には何も加速しない。弾丸はブロックに支えられているので、地面は両者の重さを支える。よって $N = (M + m)g$ である。

摩擦。題意より $R > (M+m)\mu g$ なので、ブロックに働く前向きの力 R は、摩擦力の最大値 $\mu N = (M+m)\mu g$ を上回る。したがってブロックは実際に滑り出し、動き始めると摩擦力は限界値 $\mu(M+m)g$ をとって後ろ向きに働く。

小問 (i)

弾丸に働く水平方向の力は後ろ向きの R だけなので、弾丸は R/m で減速する。ブロックに働く前向きの合力は $R-(M+m)\mu g$ なので、ブロックは前向きに

$$A = \frac{R-(M+m)\mu g}{M} > 0.$$

で加速する。ブロックに対する弾丸の加速度は $-\frac{R}{m} - A$ であるから、ブロックに対する弾丸の減速度の大きさは

$$a = \frac{R}{m} + \frac{R-(M+m)\mu g}{M},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

ブロックに対して、弾丸は速さ u で動き始め、一定の減速度 a で減速するので、時間

$$t_1 = \frac{u}{a}.$$

の後にブロックに対して静止する。その瞬間のブロックの速さが共通の速さ v である。ブロックは静止状態から一定の加速度 A で動き始めたので、

$$v = At_1 = \frac{Au}{a}, \qquad \text{すなわち} \qquad av = Au = \frac{Ru-(M+m)\mu gu}{M},$$

となり、これが求める結果である。

? 考えてみよう なぜ運動量保存則を使って v を求めてはいけないのか？

弾丸とブロックからなる系の運動量が保存されるのは、水平方向の外力が働かない場合に限られる。ここでは地面からの摩擦が時間 t_1 の間ずっとブロックに働き、運動量 $(M+m)\mu g\, t_1$ を奪う。（実際の弾丸ではこの時間はごく短いので $v \approx mu/(M+m)$ となるが、問題は厳密な値を求めている。）

小問 (iii)

時間 t_1 の間、ブロックは静止状態から速さ v まで一様に加速するので、移動距離は平均の速さと時間の積である。

$$s_1 = \frac{0+v}{2}\, t_1 = \frac{uv}{2a}.$$

小問 (iv)

弾丸がブロック内を進まなくなると、両者は質量 $M+m$ の一体の物体として運動する。その重さは依然として $(M+m)g$ なので、摩擦力は後ろ向きに $\mu(M+m)g$ であり、減速度は μg である。速さ v から始めて、さらに

$$s_2 = \frac{v^2}{2\mu g}$$

だけ滑ってから止まる（その後は静止したままである。静止摩擦（static friction）に打ち勝つ水平方向の力がもはや残っていないからである）。総移動距離は

$$s_1 + s_2 = \frac{uv}{2a} + \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{uv}{2a} + \frac{v}{2\mu g} \cdot \frac{Au}{a} = \frac{uv}{2a\mu g}\left(\mu g + A\right),$$

である。ここで、v の一方の因子に小問 (ii) の $v = Au/a$ を用いた。

考えてみよう どうすれば a と A を消去して、すっきりした答えにたどり着けるか？

両方を分母 mM にそろえて、共通因数を探す。

$$\mu g + A = \frac{M\mu g + R - (M+m)\mu g}{M} = \frac{R - m\mu g}{M},$$
$$a = \frac{MR + mR - m(M+m)\mu g}{mM} = \frac{(M+m)(R - m\mu g)}{mM}.$$

よって、因数 $R - m\mu g$ が約分されて $\dfrac{\mu g + A}{a} = \dfrac{m}{M+m}$ となる（$R > (M+m)\mu g > m\mu g$ なので、この因数は正である）。したがって、ブロックの総移動距離は

$$\frac{uv}{2\mu g} \cdot \frac{m}{M+m} = \frac{muv}{2(M+m)\mu g},$$

となり、示すべき式が得られた。

$R < (M+m)\mu g$ の場合

この場合、ブロックを前に押す力 R は限界摩擦力 $(M+m)\mu g$ より小さいので、静止摩擦によってブロックはその場にとどまる。すなわち、ブロックはまったく動かない。弾丸は静止したブロックの中で R/m で減速するだけであり、距離 $\dfrac{mu^2}{2R}$ だけ貫入したところで静止する（ブロックが十分に厚いと仮定する）。ブロックは終始動かない。

検算

- $m = 0.02\,\mathrm{kg}$、$M = 2\,\mathrm{kg}$、$u = 300\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$\mu = 0.5$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$R = 1000\,\mathrm{N}$ とする。このとき $a \approx 50\,495\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$v \approx 2.941\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$s_1 \approx 0.0087\,\mathrm{m}$、$s_2 \approx 0.8827\,\mathrm{m}$、

$s_1 + s_2 \approx 0.8914\,\mathrm{m}$ となり、$muv/\big(2(M+m)\mu g\big)$ と一致する。2 つの質点を逐次的に数値シミュレーションしても、同じ v と総移動距離が得られる。

- $R \to \infty$（瞬間的な衝突）のとき、$v = Au/a \to mu/(M+m)$ となり、運動量保存による答えに一致する。当然そうなるべきである。
- 次元（dimensions）：$muv/\big((M+m)\mu g\big)$ は (速さ)^2/(加速度) であり、長さの次元をもつ。

よくある間違い

- ブロックについて $N = Mg$ としてしまい、めり込んだ弾丸の重さも地面が支えていることを忘れる。
- 衝突の前後で運動量を保存させてしまい、摩擦による力積を無視する。
- ブロックに働く合力を、R から摩擦力を引いたものではなく、R そのものとしてしまう。

STEP のその先へ

力積（impulse）を使うと、運動全体の整合性を手早く確かめられる。系は最終的に静止するので、ブロックが動いている全時間にわたる地面からの摩擦の力積は、弾丸の最初の運動量 mu に等しくなければならない。系を部分に分け、内力はニュートンの第三法則で、外力は注意深く追跡することは、大学 1 年の力学の中核となるスキルであり、重心系（centre-of-mass frame）や非弾性衝突（inelastic collision）へとつながっていく。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、まさにこの種の問題を数多く用いてこれらの考え方を展開している。

解答例

STEP III 2010、第 12 問

確率・統計 ・ 幾何分布の期待値

STEP III 2010、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/10-s3-q12

鍵となる考え方

級数 S は算術幾何級数（arithmetico-geometric series）であり、rS を引くという技巧によって通常の等比級数（geometric series）に帰着する。これが得られれば、この問題に現れるすべての期待値（expectation）はまさにこの形の和になる。すなわち、射撃の回数は一次的に増加し、そこまで到達する確率は等比的に減少する。したがって問題全体は、各期待値を和として書き表し、適切な r と d の値を読み取ることに帰着する。

解答

級数

$|r| < 1$ であるから、この級数は絶対収束（converges absolutely）する（各項は定数と $n|r|^n$ の積で抑えられる）。したがって項ごとに引き算してよい。r の同じべきをそろえて並べると

$$\begin{aligned} S &= 1 + (1+d)r + (1+2d)r^2 + (1+3d)r^3 + \cdots, \\ rS &= \qquad r + (1+d)r^2 + (1+2d)r^3 + \cdots, \end{aligned}$$

となり、$n \geq 1$ に対する r^n の係数はちょうど d だけ異なる。よって

$$(1-r)S = 1 + d\,(r + r^2 + r^3 + \cdots) = 1 + \frac{rd}{1-r},$$

となる。ここで等比級数の和を用いたが、$|r| < 1$ であるからこれは正当である。$1 - r \neq 0$ で割ると

$$S = \frac{1}{1-r} + \frac{rd}{(1-r)^2},$$

となり、示すべき式が得られた。

アーサー単独の場合

$0 < a \leq 1$ と仮定する（$a = 0$ ならばアーサー（Arthur）は決して命中しない）。アーサーが必要とする射撃の回数を N とする。$N = n$ となるのは、最初の $n-1$ 回がすべて外れ、n 回目が命中するときに限る。よって独立性（independence）より

$$\mathrm{P}(N = n) = a'^{n-1}a, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

である。したがって

$$\mathrm{E}(N) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a\, a'^{n-1} = a\big(1 + 2a' + 3a'^2 + \cdots\big).$$

括弧内は $r = a'$、$d = 1$ とした S である（a'^n の係数は $1 + n$）。また $0 \leq a' < 1$ であるから

$$\mathrm{E}(N) = a\left(\frac{1}{1-a'} + \frac{a'}{(1-a')^2}\right) = a\left(\frac{1}{a} + \frac{a'}{a^2}\right) = \frac{a + a'}{a} = \frac{1}{a},$$

となる。ここで $1 - a' = a$、続いて $a + a' = 1$ を用いた。（この式は $a = 1$ のときにも 1 を与える。）

勝負：どちらが勝つか

以下では $0 < a < 1$ かつ $0 < b < 1$ とする。このとき $0 < a'b' < 1$ である。射撃 $1, 3, 5, \ldots$ はアーサーのもの、射撃 $2, 4, 6, \ldots$ はボアディケア（Boadicea）のものである。アーサーの射撃 1 回とそれに続くボアディケアの射撃 1 回をまとめて**ラウンド**（round）と呼ぶ。1 つのラウンドが誰も命中せずに終わる確率は $a'b'$ である。

アーサーが射撃 $2k + 1$（$k = 0, 1, 2, \ldots$）で勝つのは、最初の k ラウンドが命中なしで終わり、その後アーサーが命中するときに限る。独立性よりこの確率は $(a'b')^k a$ であり、これらの事象は互いに排反（disjoint）であるから

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (a'b')^k a = \frac{a}{1 - a'b'}.$$

同様に、ボアディケアが射撃 $2k + 2$ で勝つのは、k ラウンドが命中なしで終わり、アーサーが外し、ボアディケアが命中するときであり、その確率は $(a'b')^k a'b$ である。よって

$$\beta = \sum_{k=0}^{\infty} (a'b')^k a'b = \frac{a'b}{1 - a'b'} = \frac{(1-a)b}{1 - (1-a)(1-b)}.$$

検算として、$1 - a'b' = a + b - ab = a + a'b$ であるから $\alpha + \beta = 1$ となる。すなわち、勝負は確率 1 で終わる。

勝負：長さの期待値

勝負における射撃の回数を T とする。前の部分より、$T = 2k+1$ となる確率は $(a'b')^k a$、$T = 2k+2$ となる確率は $(a'b')^k a'b$ である。$q = a'b'$ とおくと

$$\mathrm{E}(T) = a\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)q^k + a'b\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)q^k.$$

考えてみよう これらの和は級数 S とどのように対応するか。

第 1 の和は $1+3q+5q^2+\cdots$ であり、これは $r=q$、$d=2$ とした S である。第 2 の和は $1+2q+3q^2+\cdots$ の 2 倍であり、これは $r=q$、$d=1$ とした S である。よって

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)q^k = \frac{1}{1-q} + \frac{2q}{(1-q)^2} = \frac{1+q}{(1-q)^2},$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)q^k = 2\left(\frac{1}{1-q} + \frac{q}{(1-q)^2}\right) = \frac{2}{(1-q)^2}.$$

したがって

$$\mathrm{E}(T) = \frac{a(1+q)+2a'b}{(1-q)^2}.$$

次に、目標の式と比較する。$\alpha = a/(1-q)$ と $\beta = a'b/(1-q)$ を用いると

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = \frac{1}{1-q} + \frac{a'}{1-q} = \frac{(1+a')(1-q)}{(1-q)^2}.$$

よって、あとは $a(1+q)+2a'b = (1+a')(1-q)$ を示せばよい。$1-q = a+a'b$ を用いると

$$(1+a')(1-q) = (1+a')(a+a'b) = a+aa'+a'b+a'^2b,$$
$$a(1+q)+2a'b = a+aa'(1-b)+2a'b = a+aa'-aa'b+2a'b.$$

その差（第 1 式から第 2 式を引いたもの）は

$$a'^2b + a'b - 2a'b + aa'b = a'b\,(a'+a-1) = 0,$$

である。$a+a'=1$ だからである。したがって

$$\mathrm{E}(T) = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b},$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

- $a=1$ ならば、アーサーは直ちに命中する。このとき $\alpha=1$、$\beta=0$、$\mathrm{E}(T)=1$ であり、$\alpha/a+\beta/b$ と一致する。

- $a = b = p$ ならば、$\alpha/p + \beta/p = (\alpha+\beta)/p = 1/p$ である。これは正しい。このとき勝負は、それぞれ確率 p で命中する独立な射撃の列にすぎず、最初の部分より、最初の命中までに要する射撃の回数の平均は $1/p$ である。
- $a = 0.3$、$b = 0.45$ とすると $\alpha = 0.3/0.615 \approx 0.4878$、$\mathrm{E}(T) = 1.7/0.615 \approx 2.764$ となる。200 000 回の勝負のシミュレーションでは 0.486 と 2.769 が得られた。

よくある間違い

- ボアディケアが勝てるのはアーサーが直前に外した場合に限ることを忘れ、$\beta = b/(1-a'b')$ と書いてしまう。欠けている因子 a' は、$\alpha+\beta \neq 1$ となることで露見する。
- 射撃の回数ではなくラウンドの数を数えてしまう。ボアディケアがラウンド $k+1$ で勝つ勝負の射撃回数は $2k+2$ であり、$k+1$ ではない。

STEP のその先へ

このような結果は通常、最初のラウンドで条件付けする（「第一段階解析」（first-step analysis））ことで、より手際よく証明される。最初のラウンドで誰も命中しなければ、2 回の射撃の後に勝負は新たに始まり直すので、$\mathrm{E}(T) = a\cdot 1 + a'b\cdot 2 + a'b'\big(2+\mathrm{E}(T)\big)$ となり、これから 1 行で $\mathrm{E}(T) = (1+a')/(1-a'b')$ が得られる。第一段階解析は、数学科の 1 年次または 2 年次で学ぶマルコフ連鎖（Markov chain）の基本的な道具である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、母関数（generating function）とこの種の議論を扱っている。

解答例

STEP III 2010、第 13 問

確率・統計 ・ 線形結合の相関

> **STEP III 2010、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q13

この問題は、*Beyond STEP* の第 13.7 節「**相関をつくり出す**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch13/correlation.html

鍵となる考え方

ここに現れるものはすべて、平均 0、分散 1 の独立な確率変数の線形結合（linear combination）である。したがって、期待値・分散・共分散はすべて係数から直ちに読み取れる。すなわち $U = \sum u_k Z_k$、$V = \sum v_k Z_k$ ならば $\operatorname{Cov}(U, V) = \sum u_k v_k$ である。この問題が実際に行っているのは、指定された任意の相関をもつ三つの標準化された確率変数を一つずつ構成することであり、これは姿を変えたグラム・シュミットの直交化（Gram–Schmidt process）にほかならない。新しい条件が一つ加わるごとに、新しい係数が一つ決まる。

解答

以下では一貫して、共分散の双線形性（bilinearity）、$\operatorname{Var}(Z_k) = 1$、および $j \neq k$ に対する $\operatorname{Cov}(Z_j, Z_k) = 0$（$Z_k$ が独立であることから成り立つ）を用いる。特に、定数 u_k、v_k に対して

$$\operatorname{Cov}\Big(\sum_k u_k Z_k,\ \sum_k v_k Z_k\Big) = \sum_{j,k} u_j v_k \operatorname{Cov}(Z_j, Z_k) = \sum_k u_k v_k.$$

Z_1 と Z_2 の相関

独立性より $\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) = \mathrm{E}(Z_1Z_2) - \mathrm{E}(Z_1)\mathrm{E}(Z_2) = 0$ であるから、$\mathrm{Corr}(Z_1, Z_2) = 0$ である。

確率変数 Y_2

$s = \sqrt{1-\rho_{12}^2}$ とおく。$-1 < \rho_{12} < 1$ であるから、これは正の実数である。このとき $Y_2 = \rho_{12}Z_1 + sZ_2$ であり、期待値の線形性より

$$\mathrm{E}(Y_2) = \rho_{12}\mathrm{E}(Z_1) + s\,\mathrm{E}(Z_2) = 0.$$

上で述べた共分散の規則により、

$$\mathrm{Var}(Y_2) = \rho_{12}^2 + s^2 = \rho_{12}^2 + (1-\rho_{12}^2) = 1, \qquad \mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = \mathrm{Cov}(Z_1, \rho_{12}Z_1 + sZ_2) = \rho_{12}.$$

$\mathrm{Var}(Y_1) = \mathrm{Var}(Y_2) = 1$ であるから、定義式の分母は 1 となり、

$$\mathrm{Corr}(Y_1, Y_2) = \rho_{12}.$$

確率変数 Y_3

条件 $\mathrm{E}(Y_3) = 0$ はどのような a, b, c に対しても自動的に成り立つので、何の情報も与えない。残りの三つの条件はそれぞれ一つずつ方程式を与える。Y_1, Y_2, Y_3 の分散はすべて 1 であるから、各相関は対応する共分散に等しい。

Y_1 との相関。 $\mathrm{Cov}(Z_1,\, aZ_1 + bZ_2 + cZ_3) = a$ であるから、

$$a = \rho_{13}.$$

Y_2 との相関。 $\mathrm{Cov}(\rho_{12}Z_1 + sZ_2,\, aZ_1 + bZ_2 + cZ_3) = \rho_{12}a + sb$ であるから、$\rho_{12}\rho_{13} + sb = \rho_{23}$ となり、$s \neq 0$ より

$$b = \frac{\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13}}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}}.$$

分散が 1 であること。 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ であり、$c \geq 0$ であるから非負の平方根をとる。

$$\begin{aligned} c^2 &= 1 - \rho_{13}^2 - \frac{(\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13})^2}{1-\rho_{12}^2} \\ &= \frac{(1-\rho_{12}^2)(1-\rho_{13}^2) - (\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13})^2}{1-\rho_{12}^2} \\ &= \frac{1 - \rho_{12}^2 - \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2 + 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}}{1-\rho_{12}^2}, \end{aligned}$$

ここで最後の段階では $\rho_{12}^2\rho_{13}^2$ の項が打ち消し合う。よって

$$c = \sqrt{\frac{1-\rho_{12}^2-\rho_{13}^2-\rho_{23}^2+2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}}{1-\rho_{12}^2}}.$$

考えてみよう 平方根の中の式が負になったらどうなるか？

その場合、実数 c は存在せず、これら三つの相関をもつ確率変数はそもそも存在しない。すなわち、数 $\rho_{12},\rho_{13},\rho_{23}$ は互いに整合していない。たとえば $\rho_{12}=\rho_{13}=0.9$ かつ $\rho_{23}=-0.9$ は不可能である。Y_2 と Y_3 がともに Y_1 に近いならば、両者が互いに強く逆向きであることはありえないからである。この問題は、与えられた相関が実現可能であることを暗黙のうちに仮定しており、それはちょうどこの分子が非負であるという条件にあたる。

最後の小問：X_i

$i=1,2,3$ に対して

$$X_i = \mu_i + \sigma_i Y_i,$$

とおく。ただし $\sigma_i>0$ とする（指定されているのは σ_i^2 だけなので、σ_i は正にとってよい）。このとき $\mathrm{E}(X_i)=\mu_i+\sigma_i\cdot 0=\mu_i$ かつ $\mathrm{Var}(X_i)=\sigma_i^2\mathrm{Var}(Y_i)=\sigma_i^2$ である。定数を加えても共分散は変わらないので、

$$\mathrm{Corr}(X_i,X_j)=\frac{\sigma_i\sigma_j\,\mathrm{Cov}(Y_i,Y_j)}{\sqrt{\sigma_i^2\sigma_j^2}}=\frac{\sigma_i\sigma_j}{|\sigma_i\sigma_j|}\,\rho_{ij}=\rho_{ij},$$

となる。ここで $\sigma_i\sigma_j>0$ を用いた。したがって、これらの X_i は要求された性質をすべてもつ。

検算

- $\rho_{13}=\rho_{23}=0$ ならば $a=b=0$、$c=1$ となるので $Y_3=Z_3$ であり、当然そうあるべきとおり他の変数と独立になる。$\rho_{12}=0$ ならば $Y_2=Z_2$ であり、$a=\rho_{13}$、$b=\rho_{23}$、$c=\sqrt{1-\rho_{13}^2-\rho_{23}^2}$ となって、自然な選び方に一致する。
- 数値的には、$\rho_{12}=0.5$、$\rho_{13}=-0.3$、$\rho_{23}=0.2$ のとき $a=-0.3$、$b\approx 0.4041$、$c\approx 0.8641$ となり、$a^2+b^2+c^2=1$ が成り立つ。2×10^5 組の三つ組のシミュレーション（Z_k には正規分布ではなく一様分布を用いた）では、X_i の標本相関は 0.500、-0.302、0.200 となり、平均と標準偏差も正しい値であった。

よくある間違い

- $\mathrm{Var}(Y_2) = 1$ であるから相関は単に共分散に等しい、ということを忘れ、誤ったもので割ってしまう。
- $X_i = \mu_i + \sigma_i^2 Y_i$ と書いてしまう。分散は掛ける数の **2 乗**倍になる。
- ある変数について $\sigma_i < 0$ ととってしまい、その変数の相関の符号が反転する。

STEP のその先へ

三つの条件は、係数の行列 A（行が $(1,0,0)$、$(\rho_{12}, s, 0)$、(a,b,c)）が $AA^{\mathsf{T}} = R$ を満たすことを意味する。ここで R は相関行列（correlation matrix）である。これは R の**コレスキー分解**（Cholesky decomposition）であり、R が半正定値（positive semi-definite）であるときに限り存在する。c^2 の分子は $\det R$ である。これは統計学者が実際に相関のある確率変数をシミュレーションする方法であり、Z_k を正規分布にとれば多変量正規分布（multivariate normal distribution）が得られる。Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）は共分散、相関、多変量正規分布を扱っている。Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は正定値行列とコレスキー分解を解説している。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

2010 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

