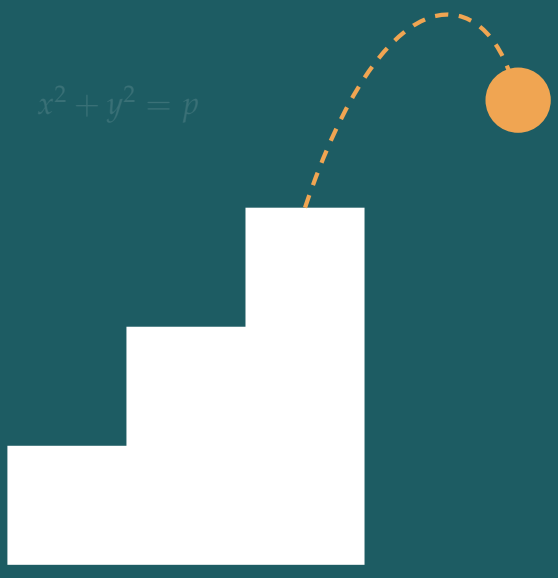
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

2009 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

2009 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

2009 年解答例

2009 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 39 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 約数の個数 純粋数学 . . . 3
Q2 3次曲線の接線 純粋数学 . . . 7
Q3 実数解の個数 純粋数学 . . . 11
Q4 余弦定理 純粋数学 . . . 15
Q5 制約付き最適化 純粋数学 . . . 18
Q6 置換積分 純粋数学 . . . 22
Q7 部分積分 純粋数学 . . . 26
Q8 円と接線 純粋数学 . . . 29
Q9 放物体の衝突 力学 . . . 33
Q10 斜面上の連結質点 力学 . . . 37
Q11 衝突と反発係数 力学 . . . 41
Q12 確率と不等式 確率・統計 . . . 45
Q13 並べ方と連 確率・統計 . . . 49

STEP II

Q1 曲線の対称性 純粋数学 . . . 52
Q2 曲線の概形と近似 純粋数学 . . . 56
Q3 三角関数の恒等式と無理数 純粋数学 . . . 60
Q4 多項式の整除性 純粋数学 . . . 64
Q5 二重根号 純粋数学 . . . 68
Q6 無限級数の評価 純粋数学 . . . 72
Q7 形を見抜く積分 純粋数学 . . . 76
Q8 ベクトルと図形 純粋数学 . . . 80
Q9 質量中心 力学 . . . 84

Q10 衝突と反発係数 力学 . . . 88
Q11 仕事率と抵抗 力学 . . . 92
Q12 半正規分布 確率・統計 . . . 96
Q13 二項分布と期待費用 確率・統計 . . . 100

STEP III

Q1 円の座標幾何 純粋数学 . . . 104
Q2 べき級数解 純粋数学 . . . 108
Q3 極限と曲線の概形 純粋数学 . . . 112
Q4 ラプラス変換 純粋数学 . . . 116
Q5 解の対称式 純粋数学 . . . 120
Q6 トレミーの定理 純粋数学 . . . 123
Q7 繰り返し微分と数学的帰納法 純粋数学 . . . 127
Q8 極限と漸化式 純粋数学 . . . 131
Q9 放物運動の軌道の角度 力学 . . . 135
Q10 単振動 力学 . . . 139
Q11 質量が変化する物体の運動 力学 . . . 143
Q12 確率母関数 確率・統計 . . . 147
Q13 中心極限定理 確率・統計 . . . 151

解答例

STEP I 2009、第 1 問

純粋数学 ・ 約数の個数

> **STEP I 2009、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q1

鍵となる考え方

$p^a q^b$（p, q は相異なる素数（prime））の約数（factor）はすべて $0 \le i \le a, 0 \le j \le b$ を満たす $p^i q^j$ の形であり、素因数分解の一意性（unique factorisation）により、(i, j) の選び方が異なれば異なる約数が得られる。したがって約数の個数は積 $(a+1)(b+1)$ となり、素数がいくつあっても同様のことが成り立つ。真の約数（proper factor）の個数を数えるには 2 を引けばよく、どちらの小問も、ある数を積として表す問題に帰着する。

解答

N の正の約数の個数を、1 と N を含めて $d(N)$ と書く。

$$N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

で、p_i が相異なる素数、$a_i \ge 1$ であるとすると、N の正の約数は $0 \le e_i \le a_i$ を満たす $p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ の形である。各 e_i の選び方は $a_i + 1$ 通りあり、素因数分解の一意性により、異なる選び方からは異なる約数が得られる。よって

$$d(N) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1).$$

$N > 1$ のとき約数 1 と N は異なるので、真の約数の個数は $d(N) - 2$ である。

小問 (i)

$3^2 \times 5^3$ については $d = (2+1)(3+1) = 12$ であるから、真の約数は $12 - 2 = 10$ 個であり、題意のとおりである。

次に $3^m \times 5^n$ を考える。これが整数であり、そもそも真の約数をもつためには $m, n \geq 0$ でなければならない（3 や 5 の負の累乗は、もう一方の素数によって打ち消されることはない）。約数は $0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$ を満たす $3^i 5^j$ であるから、$d = (m+1)(n+1)$ である（これは $m = 0$ や $n = 0$ の場合も含む）。求める条件は

$$(m+1)(n+1) = 12,$$

すなわち、12 を順序を考慮して二つの正の整数の積に分解することである。そのような分解は

$$1 \times 12, \quad 2 \times 6, \quad 3 \times 4, \quad 4 \times 3, \quad 6 \times 2, \quad 12 \times 1,$$

であり、これらから

$$(m, n) = (0, 11),\ (1, 5),\ (2, 3),\ (3, 2),\ (5, 1),\ (11, 0).$$

が得られる。やはり素因数分解の一意性により、これらはそれぞれ異なる整数を与える。このうち $(2, 3)$ は与えられた数であるから、真の約数を 10 個もつこの形の**他の**整数はちょうど **5** 個であり、それらは $5^{11}, 3 \times 5^5, 3^3 \times 5^2, 3^5 \times 5, 3^{11}$ である。

小問 (ii)

$d(N) = 426 + 2 = 428$ が必要であり、

$$428 = 2^2 \times 107,$$

である。ここで 107 は素数である（2, 3, 5, 7 のいずれでも割り切れず、$11^2 > 107$ だからである）。

> **考えてみよう** N の素因数分解として、どのような形がありうるか？

各 $a_i + 1$ はいずれも 2 以上で、その積は 428 である。107 は素数なので、これらのうちちょうど一つが 107 の倍数であり、それは 107, 214, 428 のいずれかである。残りのものの積はそれぞれ 4, 2, 1 となる。順序を無視すると、$a_i + 1$ の組としてありうるのは

$$\{428\}, \qquad \{214, 2\}, \qquad \{107, 4\}, \qquad \{107, 2, 2\},$$

であり、したがって指数の多重集合は

$$\{427\}, \qquad \{213, 1\}, \qquad \{106, 3\}, \qquad \{106, 1, 1\}.$$

である。

> **考えてみよう** 指数が与えられたとき、それぞれをどの素数に割り当てればよいか？

与えられた指数の組に対して N をできるだけ小さくするには、最も小さい素数たちを用い、最大の指数を最小の素数に割り当てればよい。使える素数のうち最小のものを用いるのが最善であることは明らかである。ある素数を、まだ使っていないより小さい素数に置き換えれば N は小さくなるからである。また、$p < q$ であるのに p の指数が a、q の指数が b で $a < b$ となっているならば、両者を入れ替えると N は

$$\frac{p^b q^a}{p^a q^b} = \left(\frac{p}{q}\right)^{b-a} < 1,$$

倍になるので、入れ替えによって N は小さくなる。よって、各形における最良の候補は

$$2^{427}, \qquad 2^{213} \times 3, \qquad 2^{106} \times 3^3, \qquad 2^{106} \times 3 \times 5.$$

である。これらを比較すると、

- $2^{106} \times 3 \times 5 = 2^{106} \times 15 < 2^{106} \times 27 = 2^{106} \times 3^3$；
- $2^{106} \times 27 < 2^{106} \times 2^5 = 2^{111}$ であり、これは $2^{213} \times 3$ や 2^{427} よりはるかに小さい。

したがって

$$N = 2^{106} \times 3 \times 5.$$

である。検算として、$d(N) = 107 \times 2 \times 2 = 428$ であるから、N は真の約数を 426 個もつ。

検算

- 小さな場合として、$3 \times 5^5 = 9375$ の約数を直接書き出す。$i \in \{0,1\}, j \in \{0,\ldots,5\}$ に対する $3^i 5^j$ で約数は 12 個となり、真の約数は 10 個である。
- $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = 428$ を満たすすべての指数パターン $2^a 3^b 5^c 7^d$ について簡単なコンピュータ探索を行うと、最小のものは $2^{106} \times 15 \approx 1.22 \times 10^{33}$ であり、次に小さいのは $2^{106} \times 27$ であることが確かめられる。

よくある間違い

- 小問 (i) で 6 と答えてしまう。問題は**他の**整数を問うているので、与えられた数は除かれる。
- $m = 0$ や $n = 0$ の場合（すなわち 5^{11} と 3^{11}）を忘れる。これらも求める形をしている。

- 小問 (ii) の答えはできるだけ多くの素数を使うはずだと思い込む。107 が素数であることから非常に大きな指数が一つ必ず現れ、実際に選択の余地があるのは因数 4 の分け方だけである。

STEP のその先へ

関数 $d(N)$ は**乗法的**関数（multiplicative function）である。すなわち、m と n が互いに素（coprime）であれば $d(mn) = d(m)d(n)$ が成り立ち、これがまさにここで用いた積の公式である。自分より小さいどの数よりも多くの約数をもつ数は、ラマヌジャン（Ramanujan）の**高度合成数**（highly composite numbers）であり、小問 (ii) の指数を入れ替える議論は、彼による高度合成数の記述の第一歩である。素因数分解の一意性や数論的関数（arithmetic functions）について読むには、ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）がよい。

解答例

STEP I 2009、第 2 問

純粋数学　•　3 次曲線の接線

> **STEP I 2009、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q2

この問題は、*Beyond STEP* の第 1.9 節「**三次曲線の接線**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch01/tangents-cubic.html

鍵となる考え方

接線（tangent）は接点（point of contact）において曲線と 2 回交わる。すなわち、接線の式を曲線の方程式に代入すると、接点は重根（repeated root）を与える。三次方程式（cubic equation）の重根が一つわかれば、残りの根は因数分解（factorisation）によってただちに求まり、その 3 番目の交点は有理数（rational number）の座標をもつことがわかる。そのうえで分母を払うと、曲線の方程式は立方数の和（sum of cubes）に書き換えられる。

解答

$(-a, b)$ における接線

まず、$x^3 + a^3 + b^3 = -a^3 + a^3 + b^3 = b^3 = y^3$ であるから、$(-a, b)$ は確かに曲線上にある。

$y^3 = x^3 + a^3 + b^3$ の両辺を x について陰関数微分（implicit differentiation）すると（a と b は定数である）、$y \neq 0$ であるところでは

$$3y^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2, \qquad \text{よって} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2}{y^2}$$

となる。$b > 0$ である点 $(-a, b)$ において、傾き（gradient）は a^2/b^2 である。したがっ

て接線は

$$y - b = \frac{a^2}{b^2}(x + a)$$
$$b^2y - b^3 = a^2x + a^3$$
$$b^2y - a^2x = a^3 + b^3,$$

となり、求める式が得られた。

$a = 1, b = 2$ のときの交点

このとき曲線は $y^3 = x^3 + 9$ であり、$(-1, 2)$ における接線は $4y - x = 9$、すなわち $y = \frac{1}{4}(x + 9)$ である。これを曲線の方程式に代入すると

$$\frac{(x+9)^3}{64} = x^3 + 9$$
$$x^3 + 27x^2 + 243x + 729 = 64x^3 + 576$$
$$0 = 63x^3 - 27x^2 - 243x - 153.$$

すべての係数は 9 で割り切れるので、両辺を 9 で割って

$$7x^3 - 3x^2 - 27x - 17 = 0,$$

を得る。これが問われている三次方程式である。

p, q, r, s を求める

考えてみよう この三次方程式の根の一つはすでにわかっている。それがなぜ**二重根**（double root）になるはずなのだろうか。

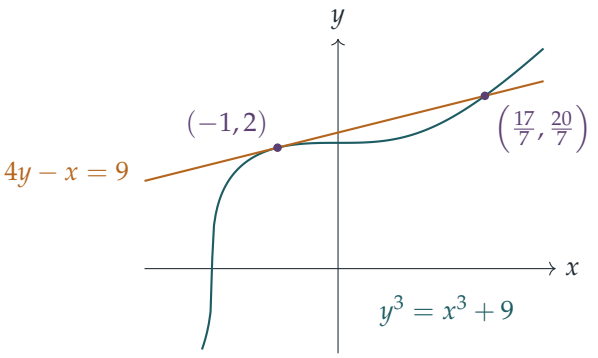
直線は $x = -1$ で曲線に接しているので、$x = -1$ は重根である。接点の近くでは直線と曲線は 1 次の近似まで一致するので、両者の差はそこで 2 次の位数で 0 になるからである。よって $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ は因数である。x^3 の係数と定数項を比較すると、もう一方の因数は $7x - 17$ でなければならず、実際に確かめることができる：

$$(x+1)^2(7x - 17) = 7x^3 + 14x^2 + 7x - 17x^2 - 34x - 17 = 7x^3 - 3x^2 - 27x - 17.$$

したがって、接線は $x = \frac{17}{7}$ で再び曲線と交わり、そこでは

$$y = \frac{1}{4}\left(\frac{17}{7} + 9\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{80}{7} = \frac{20}{7}.$$

である。



この点は $y^3 = x^3 + 9$ 上にあるので

$$\left(\frac{20}{7}\right)^3 = \left(\frac{17}{7}\right)^3 + 9.$$

が成り立つ。両辺に 7^3 を掛けると $20^3 = 17^3 + 9 \cdot 7^3$ となる。最後の項は立方数ではないが、$9 = 1 + 8 = 1^3 + 2^3$ であるから

$$9 \cdot 7^3 = 7^3 + 2^3 \cdot 7^3 = 7^3 + 14^3.$$

となる。（ここで、$a = 1, b = 2$ とした元の形 $a^3 + b^3$ が再び現れている。）したがって

$$20^3 = 17^3 + 14^3 + 7^3,$$

であり、$p = 20, q = 17, r = 14, s = 7$ とすればよい（後ろの 3 つの順序は任意である）。

検算

直接計算すると $17^3 + 14^3 + 7^3 = 4913 + 2744 + 343 = 8000 = 20^3$ である。また、三次方程式の 3 つの根は $-1, -1, \frac{17}{7}$ であり、その和は $\frac{3}{7}$、積は $\frac{17}{7}$ である。これは係数から読み取れる 3/7 および 17/7 と一致する。さらに、$y = \sqrt[3]{x^3 + a^3 + b^3}$ の $x = -a$ における数値微分の値は a^2/b^2 と一致する。

よくある間違い

- 重根を利用しないこと：$(x+1)^2$ で割る代わりに、三次方程式を一から解こうとしてしまう。
- $20^3 = 17^3 + 3087$ で止まってしまうこと。求めているのは立方数の和となる正の整数であり、$3087 = 9 \cdot 7^3$ を $7^3 + 14^3$ に分ける必要がある。

STEP のその先へ

これは 3 次曲線に対する古典的な**接線法**（tangent method）である。直線は 3 次曲線と重複度（multiplicity）を込めて 3 点で交わるので、2 つの有理点（rational point）（あるいは、ここでのように 2 重に数えた 1 点）から 3 番目の有理点が得られる。楕円曲線（elliptic curve）上では、この弦と接線による構成（chord-and-tangent construction）は群法則（group law）となり、現代の数論（number theory）の大きな分野の出発点となっている。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）はこの種のディオファントス方程式（Diophantine equation）を論じており、シルヴァーマン（Silverman）とテイト（Tate）の *Rational Points on Elliptic Curves*（『楕円曲線上の有理点』）はその幾何学を本格的に展開している。

解答例

STEP I 2009、第 3 問

純粋数学 ・ 実数解の個数

> **STEP I 2009、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q3

鍵となる考え方

両辺を適切に累乗して根号を外すが、そのとき失われるものを見落とさないようにする。平方根（square root）は決して負にならないので、2 乗する操作が可逆になるのは $x \geq 0$ という条件もあわせて課したときに限る。一方、実数の 3 乗根（cube root）にはそのような制約はない。すべての実数はちょうど 1 つの実数の 3 乗根をもつからである。そのあとは、どの個数の問題も二次方程式（quadratic equation）の解に帰着し、それらの解の符号は和と積から読み取ることができる。

解答

小問 (i)：平方根の方程式

ここで $(a-x)^{\frac{1}{2}}$ は非負（non-negative）の平方根を表すので、どの解も $x \geq 0$ を満たし、2 乗すると $x^2 = a - x$、すなわち $x^2 + x - a = 0$ を得る。逆に、$x \geq 0$ かつ $x^2 + x - a = 0$ ならば、$a - x = x^2 \geq 0$ であり、$(a-x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2} = |x| = x$ となる。よって

$$x = (a-x)^{\frac{1}{2}} \iff x^2 + x - a = 0 \text{ かつ } x \geq 0,$$

であり、二次方程式 $x^2 + x - a = 0$ の**非負の**解の個数を数えればよい。その解を（実数のとき）α, β とすると、

$$\alpha + \beta = -1, \qquad \alpha\beta = -a.$$

$a > 0$ の場合。判別式（discriminant）$1 + 4a$ は正なので、実数解は 2 つあり、その積 $-a$ は負である。よって一方の解は正、他方は負であり、解はちょうど 1 つである。

$a = 0$ の場合。二次方程式は $x(x+1) = 0$ となり、解は 0 と -1 である。非負なのは

$x = 0$ だけなので、解はちょうど 1 つである。

$a < 0$ の場合。 $a < -\frac{1}{4}$ ならば判別式は負で、実数解はまったくない。$-\frac{1}{4} \leq a < 0$ ならば解は実数で、その積 $-a$ は正なので同符号であり、その和は -1 なので両方とも負である。いずれにせよ非負の解はないので、解は存在しない。

したがって、方程式は $a \geq 0$ のとき実数解を 1 つもち、$a < 0$ のとき実数解をもたない。これが示すべきことであった。

小問 (i)：3 乗根の方程式

すべての実数 t はちょうど 1 つの実数の 3 乗根をもち、符号の条件なしに $x = t^{\frac{1}{3}} \iff x^3 = t$ が成り立つ。よって方程式は

$$x^3 - (1+a)x + a = 0.$$

と同値である。係数の和は $1 - (1+a) + a = 0$ なので、$x = 1$ は常に解であり、因数を割り出すと

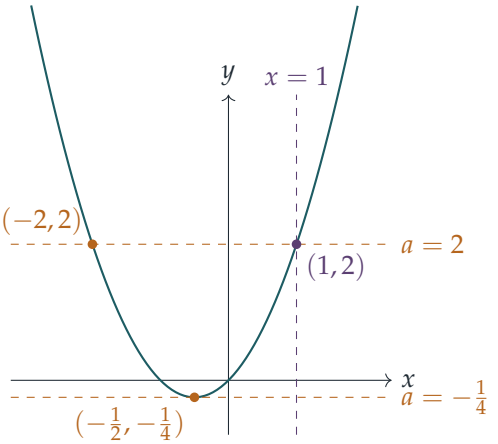
$$x^3 - (1+a)x + a = (x-1)(x^2 + x - a).$$

同じ二次式が現れた。解は $x = 1$ と、$x^2 + x - a = 0$ の実数解（今度は符号の制約なし）を合わせたものである。

> ? **考えてみよう** 二次方程式の解が $x = 1$ と一致したり、2 つの解どうしが一致したりすることはあるだろうか。

どちらも起こり、それこそが個数を減らす場合である。二次方程式が重解（repeated root）をもつのは $1 + 4a = 0$、すなわち $a = -\frac{1}{4}$ のときで、その解は $-\frac{1}{2}$ である。また、$x = 1$ が二次方程式の解になるのは $1 + 1 - a = 0$、すなわち $a = 2$ のときであり、このとき $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ なので、解は 1 と -2 である。

二次方程式を $a = x^2 + x$ と書くと、その実数解は、高さ a の水平な直線と放物線（parabola）$y = x^2 + x$ の交点に対応する。この放物線の最下点は $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ である。追加の解 $x = 1$ は放物線上の点 $(1, 2)$ に対応する。



場合をまとめると、相異なる実数解の個数は次のとおりである。

- $a < -\frac{1}{4}$：二次方程式は実数解をもたないので、解は $x = 1$ の **1 個**；
- $a = -\frac{1}{4}$：解は 1 と $-\frac{1}{2}$ なので **2 個**；
- $-\frac{1}{4} < a < 2$ または $a > 2$：二次方程式の相異なる 2 解はどちらも 1 に等しくなく、これに $x = 1$ を加えて **3 個**；
- $a = 2$：解は 1 と -2 なので **2 個**。

小問 (ii)

小問 (i) とまったく同様に、平方根は非負なので

$$x = (b + x)^{\frac{1}{2}} \iff x^2 - x - b = 0 \text{ かつ } x \geq 0,$$

である（逆が成り立つのは、$x \geq 0$ かつ $b + x = x^2$ ならば $(b + x)^{\frac{1}{2}} = |x| = x$ となるからである）。ここで $x^2 - x - b = 0$ の解の和は 1、積は $-b$ であり、判別式は $1 + 4b$ である。

$b < -\frac{1}{4}$ の場合。実数解はないので、解は**存在しない**。

$b = -\frac{1}{4}$ の場合。二次方程式は $(x - \frac{1}{2})^2 = 0$ となり、$x = \frac{1}{2} \geq 0$ なので、解は **1 個**である。

$-\frac{1}{4} < b < 0$ の場合。相異なる 2 つの実数解をもち、その積 $-b$ は正なので同符号であり、和 1 は正なので両方とも正である。解は **2 個**である。

$b = 0$ の場合。二次方程式は $x(x - 1) = 0$ となり、0 と 1 はどちらも非負なので、解は **2 個**である。（実際、$0 = \sqrt{0}$ かつ $1 = \sqrt{1}$ である。）

$b > 0$ **の場合。**2つの実数解の積は負なので、一方は正、他方は負である。解は**1個**である。

まとめると、$b < -\frac{1}{4}$ のとき解はなく、$b = -\frac{1}{4}$ のとき1個、$-\frac{1}{4} < b \leq 0$ のとき2個、$b > 0$ のとき1個である。

検算

- グラフで考えると、小問 (ii) は直線 $y = x$ と、点 $(-b, 0)$ から始まる半放物線 $y = \sqrt{b + x}$ との交点を問うている。$b = -\frac{1}{5}$ のとき解は $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{5}}$、すなわち約 0.276 と 0.724 であり、どちらも小数点以下何桁にもわたって $x = \sqrt{x - 0.2}$ を満たす。
- $a = 2$ のときの3乗根の方程式では、$x = 1$ と $x = -2$ のどちらも解になる：$(3 \cdot (-2) - 2)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = -2$。
- 各境界値（$-\frac{1}{4}$、0、2）の両側にわたる a と b の値の範囲について、細かい格子上でコンピュータにそれぞれの方程式の解を数えさせたところ、その個数は上の場合分けと一致した。

よくある間違い

- 2乗したあとで $x \geq 0$ を忘れること。そうすると小問 (i) で $a > -\frac{1}{4}$ のすべての a に対して解が2個となってしまうが、これは誤りである。
- 3乗根の方程式にまで $x \geq 0$ を課してしまうこと。負の数の3乗根も立派な実数である。
- $a = 2$ の場合を見落とすこと。このとき一次因数（linear factor）の解 $x = 1$ が二次方程式の解にもなるので、3つの解のうち2つが重なる。

STEP のその先へ

要点は、$\mathbb{R}$ 上で2乗は可逆な操作ではないが、3乗は可逆だということである。$x \mapsto x^3$ は $\mathbb{R}$ の全単射（bijection）であるが、$x \mapsto x^2$ はそうではない。そのため、「その」平方根は非負の分枝（branch）を選んではじめて定義される。$x = f(x)$ のような方程式を不動点（fixed point）の問題とみなし、パラメータを動かしながらその個数を数えることは、分岐理論（bifurcation theory）の出発点である。分岐理論では、解が対になって生まれたり（$a = -\frac{1}{4}$ のように）、入れ替わったり（$a = 2$ のように）する。関数、逆関数（inverse function）、連続性（continuity）についての丁寧な解説としては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照せよ。

解答例

STEP I 2009、第 4 問

純粋数学 ・ 余弦定理

STEP I 2009、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/09-s1-q4

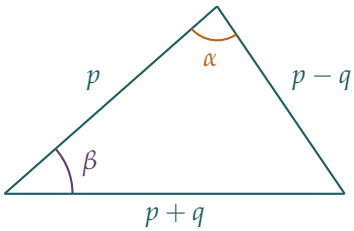
鍵となる考え方

三角形では、最大の角は最長の辺の対角であり、最小の角は最短の辺の対角である。したがって余弦定理（cosine rule）により $\cos\alpha$ と $\cos\beta$ が p と q で直接表され、恒等式（identity）は単なる式変形で示せる。後半では、$\alpha = 2\beta$ より、2 倍角の公式（double-angle formula）を用いて $\cos\alpha$ を $\cos\beta$ で表すことができる。すると恒等式は $\cos\beta$ だけの方程式になる。

解答

恒等式

$p-q < p < p+q$ であるから、最大の角 α は辺 $p+q$ の対角であり、最小の角 β は辺 $p-q$ の対角である。



α について余弦定理を用いると

$$\cos\alpha = \frac{p^2 + (p-q)^2 - (p+q)^2}{2p(p-q)} = \frac{p^2 - 4pq}{2p(p-q)} = \frac{p-4q}{2(p-q)},$$

となり、β については

$$\cos\beta = \frac{p^2+(p+q)^2-(p-q)^2}{2p(p+q)} = \frac{p^2+4pq}{2p(p+q)} = \frac{p+4q}{2(p+q)}.$$

となる。ここで p で約分したが、$p>0$ であるからこれは許される。すると

$$1-\cos\alpha = \frac{2(p-q)-(p-4q)}{2(p-q)} = \frac{p+2q}{2(p-q)},$$
$$1-\cos\beta = \frac{2(p+q)-(p+4q)}{2(p+q)} = \frac{p-2q}{2(p+q)},$$

であるから

$$4(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta) = \frac{(p+2q)(p-2q)}{(p-q)(p+q)} = \frac{p^2-4q^2}{p^2-q^2}.$$

一方、

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta &= \frac{(p-4q)(p+q)+(p+4q)(p-q)}{2(p^2-q^2)}\\ &= \frac{(p^2-3pq-4q^2)+(p^2+3pq-4q^2)}{2(p^2-q^2)} = \frac{p^2-4q^2}{p^2-q^2}.\end{aligned}$$

2 つの式は一致するので、題意のとおり $4(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$ が成り立つ。

(三角形が存在するためには $(p-q)+p>p+q$、すなわち $p>2q$ が必要である。このとき恒等式の両辺はともに正であるが、上の式変形はこの条件に依存しない。)

$\alpha = 2\beta$ の場合

$c=\cos\beta$ とおく。すると $\cos\alpha=\cos 2\beta = 2c^2-1$ であるから、$1-\cos\alpha = 2(1-c^2) = 2(1-c)(1+c)$ となる。これを恒等式に代入すると

$$8(1-c)^2(1+c) = 2c^2+c-1 = (2c-1)(c+1).$$

考えてみよう 両辺を $1+c$ で割ってよいだろうか？

よい。β は三角形の内角であるから $0<\beta<\pi$ であり、$c=\cos\beta>-1$、すなわち $1+c\neq 0$ である。これで割ると

$$8(1-c)^2 = 2c-1 \quad\Longrightarrow\quad 8c^2-18c+9=0 \quad\Longrightarrow\quad (4c-3)(2c-3)=0.$$

よって $c=\frac{3}{4}$ または $c=\frac{3}{2}$ である。余弦は 1 を超えないので、$\frac{3}{2}$ は不適である。したがって、題意のとおり $\cos\beta=\frac{3}{4}$ である。

辺の比

前半で求めた $\cos\beta$ の式を用いると

$$\frac{p+4q}{2(p+q)} = \frac{3}{4} \quad \Longrightarrow \quad 4p+16q = 6p+6q \quad \Longrightarrow \quad p = 5q.$$

これは $p > 2q$ を満たすので、三角形は存在する。その辺は $p-q = 4q$、$p = 5q$、$p+q = 6q$ であるから、辺の比は

$$4 : 5 : 6.$$

である。

検算

3 辺が 4, 5, 6 の三角形において、余弦定理より $\cos\beta = \frac{25+36-16}{60} = \frac{3}{4}$、$\cos\alpha = \frac{16+25-36}{40} = \frac{1}{8}$ である。また $2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8}$ であり、これにより $\alpha = 2\beta$ が確かめられる（2 つの角はともに $(0,\pi)$ にあり、そこでは余弦は単射（one-to-one）である）。数値的には $\beta \approx 0.7227$、$\alpha \approx 1.4455$ ラジアンである。この三角形では、恒等式は $4\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{8} = \frac{1}{8}+\frac{3}{4}$ となる。さらに、$p > 2q$ を満たす 10^5 個のランダムな三角形で恒等式を試したところ、両辺は 3×10^{-15} 以内の誤差で一致した。

よくある間違い

- 角と辺の対応を誤る。最大の角は**最長の**辺 $p+q$ の対角である。
- 因数 $1+c$ が 0 でない理由を述べずに約分してしまう、あるいは解 $c = \frac{3}{2}$ を残してしまう。
- 3 辺の比 4 : 5 : 6 ではなく、$p = 5q$ を答えとしてしまう。

STEP のその先へ

相似なものを同一視すれば、3 辺が等差数列（arithmetic progression）をなし、最大の角が最小の角の 2 倍であるような三角形は、3 辺が 4, 5, 6 の三角形ただ 1 つである。「辺の長さが整数で、角が与えられた比をなす三角形はどのようなものか？」といった問いは、ピタゴラス数（Pythagorean triples）の場合と同じように、すぐにディオファントス方程式（Diophantine equations）や、曲線上の有理点（rational points）のパラメータ表示へとつながっていく。こうした考え方の発展を見るには Davenport の *The Higher Arithmetic*（整数論の入門書）がよく、STEP 風の幾何と三角法の問題をさらに解きたければ Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* がある。

解答例

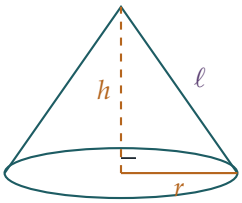
STEP I 2009、第 5 問

純粋数学 • 制約付き最適化

> **STEP I 2009、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q5

鍵となる考え方

長さは 3 つあるが、自由に動けるのは 2 つだけである。r、h、ℓ はピタゴラス（Pythagoras）の定理 $\ell^2 = r^2 + h^2$ で結びついているからである。さらに 1 つの量を固定すると自由度がもう 1 つ減るので、各小問では停留（stationary）させたい量を r だけの関数として表し、微分すればよい。平方根があると計算が煩雑になるので、代わりに V^2 や A^2 を扱うのが得策である。これらが停留するのは、V や A が停留するところとちょうど一致する。



解答

以下では常に r、h、ℓ は正であり、断面に現れる直角三角形から

$$\ell^2 = r^2 + h^2.$$

が成り立つ。$V > 0$ かつ $A > 0$ であるから、V^2 の導関数（derivative）は $2V \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$ であり、これが 0 になるのは $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$ が 0 になるときとちょうど一致する。A についても同様である。したがって、代わりに 2 乗した量の停留点（stationary point）を求めればよい。

小問 (i)

A を固定すると $\ell = \dfrac{A}{\pi r}$ であるから、

$$h^2 = \ell^2 - r^2 = \frac{A^2}{\pi^2 r^2} - r^2.$$

（実際に円錐（cone）となるためには $h > 0$、すなわち $A > \pi r^2$ が必要である。）このとき

$$\begin{aligned} V^2 = \tfrac{1}{9}\pi^2 r^4 h^2 &= \tfrac{1}{9}\pi^2 r^4 \left(\frac{A^2}{\pi^2 r^2} - r^2\right) \\ &= \tfrac{1}{9}\left(A^2 r^2 - \pi^2 r^6\right). \end{aligned}$$

A を定数とみて r で微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}(V^2)}{\mathrm{d}r} = \tfrac{1}{9}\left(2A^2 r - 6\pi^2 r^5\right) = \tfrac{2}{9} r\left(A^2 - 3\pi^2 r^4\right).$$

$r > 0$ であるから、これが 0 になるのはちょうど

$$A^2 = 3\pi^2 r^4,$$

のときであり、これが 1 つ目の結果である。正の平方根をとると $A = \sqrt{3}\,\pi r^2$ であるから、

$$\ell = \frac{A}{\pi r} = \frac{\sqrt{3}\,\pi r^2}{\pi r} = \sqrt{3}\, r,$$

となり、示すべき式が得られた。（$A = \sqrt{3}\,\pi r^2 > \pi r^2$ であるから、これは確かに円錐になっていることに注意する。）

r がこの値を通って増加するとき、V^2 の導関数は正から負に変わるので、この停留値は最大値（maximum）である。すなわち、与えられた側面積（curved surface area）に対して体積が最大となる円錐である。また $\ell^2 = r^2 + h^2$ から $h^2 = 3r^2 - r^2 = 2r^2$、よって $h = \sqrt{2}\, r$ も得られる。

小問 (ii)

今度は V を固定するので $h = \dfrac{3V}{\pi r^2}$ であり、

$$\begin{aligned} A^2 = \pi^2 r^2 \ell^2 = \pi^2 r^2 (r^2 + h^2) &= \pi^2 r^4 + \pi^2 r^2 \cdot \frac{9V^2}{\pi^2 r^4} \\ &= \pi^2 r^4 + \frac{9V^2}{r^2}. \end{aligned}$$

V を定数とみて r で微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}(A^2)}{\mathrm{d}r} = 4\pi^2 r^3 - \frac{18V^2}{r^3},$$

となり、これが 0 になるのはちょうど

$$V^2 = \tfrac{2}{9}\pi^2 r^6, \qquad \text{よって} \qquad V = \tfrac{\sqrt{2}}{3}\pi r^3$$

のときである（$V > 0$ であるから正の根をとった）。

考えてみよう V を r で表すことはできたが、問題が求めているのは h である。どうすればそこにたどり着けるだろうか。

体積の公式 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ をもう一度使えばよい。これを $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi r^3$ と等しいとおき、$\frac{1}{3}\pi r^2$ で割ると

$$h = \sqrt{2}\, r.$$

が得られる。今度は導関数が負から正に変わる（r が小さいときは項 $9V^2/r^2$ が非常に大きく、r が大きいときは項 $\pi^2 r^4$ が非常に大きい）ので、これは与えられた体積に対して側面積が最小となる円錐である。

考えてみよう 両方の小問で同じ形 $h = \sqrt{2}\, r$ が得られたのは偶然だろうか。

偶然ではない。ある円錐がその側面積に対して体積を最大にしているならば、その体積に対して側面積も最小にしている。実際、同じ体積でより小さい側面積をもつ円錐があったとすると、それを元の側面積になるまで拡大すれば、より大きな体積をもつことになり、これは不可能である。この問題で決まるのは相似を除いた形だけなので、両方の小問は同じ比 $h : r$ を選び出すはずである。

検算

- 小問 (i) で $r = 1$ とすると、$A = \sqrt{3}\,\pi$、$\ell = \sqrt{3}$、$h = \sqrt{2}$ であり、確かに $\pi r \ell = \sqrt{3}\,\pi$ となる。A を $\sqrt{3}\,\pi$ に保ったまま r を 0.99 や 1.01 に少しずらすと、体積はわずかに小さくなる。
- ランダムに固定した A に対して V を数値的に最大化し、ランダムに固定した V に対して A を数値的に最小化すると、常に $h/r \approx 1.41421$、すなわち $\sqrt{2}$ が得られた。
- 次元（dimensions）：A^2 と $\pi^2 r^4$ はどちらも（長さ）^{4}、V^2 と $\pi^2 r^6$ はどちらも（長さ）^{6} である。

よくある間違い

- ℓ が r と h に依存することを忘れること。実際に固定されているのは A（または V）だけなのに、小問 (i) で ℓ を、あるいは小問 (ii) で h を定数として扱ってしまう。

- 平方根を残したまま V を直接微分すること。それでも解けるが、誤りを犯しやすい。先に 2 乗しておけば、合成関数の微分法（chain rule）を使わずに済む。

STEP のその先へ

ある量を固定したまま別の量の極値を求めることは、**制約付き最適化**（*constrained optimisation*）の問題である。大学では、変数を消去せずに制約を扱えるラグランジュ（Lagrange）の未定乗数法（Lagrange multipliers）を学ぶ。この方法は、ここでの 2 つの小問の間にある「双対性（duality）」も説明してくれる。多変数の微積分（multivariable calculus）とラグランジュの未定乗数法をわかりやすく初めて学ぶには、Stewart, *Calculus* を読んでみるとよい。Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* には、STEP 形式の最適化の演習がさらに載っている。

解答例

STEP I 2009、第 6 問

純粋数学 ・ 置換積分

STEP I 2009、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/09-s1-q6

鍵となる考え方

積分の上下端 $1/m$ と m は $x \mapsto 1/x$ によって入れ替わるので、まず試すべきはこの置換（substitution）である。この置換は区間をそれ自身に写し、累乗 x^{-n} を累乗 u^{n-1} に変える。小問 (ii) を使えば、小問 (iii) の扱いにくい部分を小問 (i) の扱いやすい積分の形に直すことができる。(iii)(b) では区間がもはや対称ではないが、同じ置換によって $[1,2]$ は $[\frac{1}{2},1]$ に写り、二つの部分がつながって一つになる。

解答

小問 (i)

x^2 を $x+1$ で割ると

$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1},$$

となる。したがって、区間上で $x+1>0$ であるから（$m>0$ より）、

$$\int_{1/m}^{m} \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1)\right]_{1/m}^{m}.$$

対数の部分は

$$\ln(m+1) - \ln\left(\frac{1}{m}+1\right) = \ln\frac{m+1}{(m+1)/m} = \ln m.$$

となる。多項式の部分は

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\Big(m^2-\frac{1}{m^2}\Big)-\Big(m-\frac{1}{m}\Big) &= \Big(m-\frac{1}{m}\Big)\Big[\tfrac{1}{2}\Big(m+\frac{1}{m}\Big)-1\Big]\\ &= \frac{m^2-1}{m}\cdot\frac{m^2-2m+1}{2m}\\ &= \frac{(m-1)(m+1)(m-1)^2}{2m^2}=\frac{(m-1)^3(m+1)}{2m^2}.\end{aligned}$$

となる。二つの部分を足し合わせれば、求める結果が得られる。

小問 (ii)

$x=1/u$ とおくと、$\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u/u^2$ である。$x=1/m$ のとき $u=m$、$x=m$ のとき $u=1/m$ である。また

$$x^n(x+1)=\frac{1}{u^n}\cdot\frac{1+u}{u}=\frac{u+1}{u^{n+1}}.$$

である。よって

$$\begin{aligned}\int_{1/m}^{m}\frac{1}{x^n(x+1)}\,\mathrm{d}x &= \int_{m}^{1/m}\frac{u^{n+1}}{u+1}\cdot\Big(-\frac{1}{u^2}\Big)\mathrm{d}u\\ &= \int_{1/m}^{m}\frac{u^{n-1}}{u+1}\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

となる。ここで、負号を使って上下端を元の向きに入れ替えた。これが求める結果である。

小問 (iii)

(a) 被積分関数（integrand）を分解する：

$$\frac{x^5+3}{x^3(x+1)}=\frac{x^2}{x+1}+\frac{3}{x^3(x+1)}.$$

区間は $[\frac{1}{2},2]$ であり、これは小問 (ii) の区間で $m=2$ としたものである。小問 (ii) を $n=3$ として用いると

$$\int_{1/2}^{2}\frac{3}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x=3\int_{1/2}^{2}\frac{u^2}{u+1}\,\mathrm{d}u,$$

となり、これは第一の部分の 3 倍である。小問 (i) で $m=2$ とすると

$$\int_{1/2}^{2}\frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1^3\cdot 3}{2\cdot 4}+\ln 2=\frac{3}{8}+\ln 2.$$

である。したがって積分の値は $4\big(\frac{3}{8}+\ln 2\big)$、すなわち

$$\int_{1/2}^{2}\frac{x^5+3}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}+4\ln 2.$$

である。

(b) 今度は

$$\frac{x^5+x^3+1}{x^3(x+1)} = \frac{x^2}{x+1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^3(x+1)}.$$

である。

考えてみよう 今度の区間は $[1,2]$ であり、$[1/m, m]$ の形ではない。それでも小問 (ii) は役に立つだろうか？

役に立つ。置換 $x = 1/u$ は正の数からなる任意の区間で使うことができ、単に上下端が移るだけである。小問 (ii) とまったく同じ計算を、$x = 1$ のとき $u = 1$、$x = 2$ のとき $u = \frac{1}{2}$ として行えば

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^1 \frac{u^2}{u+1}\,\mathrm{d}u.$$

がわかる。これは第一の部分と同じ被積分関数を、隣り合う区間で積分したものである。よって二つを合わせると、小問 (i) で $m = 2$ とした積分になる：

$$\int_1^2 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^2 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8} + \ln 2.$$

残りの部分は

$$\int_1^2 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln 3 - \ln 2.$$

である。足し合わせると

$$\int_1^2 \frac{x^5+x^3+1}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8} + \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 = \frac{3}{8} + \ln 3.$$

となる。

検算

- 小問 (i) で $m = 1$ とすると、1 点上の積分となり、実際に右辺は $0 + \ln 1 = 0$ となる。また m を $1/m$ に置き換えると積分は符号が反転するはずであり（上下端が入れ替わるため）、実際に公式の符号も反転する。
- シンプソンの公式（Simpson's rule）によると、(iii)(a) の値は 4.272589 となり、$\frac{3}{2} + 4\ln 2 \approx 4.272589$ と一致する。(iii)(b) の値は 1.473612 となり、$\frac{3}{8} + \ln 3 \approx 1.473612$ と一致する。
- (b) の妥当性の確認：$[1,2]$ 上で被積分関数は 1.5 から約 1.37 まで下がり、その後約 1.71 まで上がるので、答えが 1.47 付近であるのは妥当である。

よくある間違い

- $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u/u^2$ から生じる負号を忘れること、あるいは上下端を入れ替えるのを忘れること。両方を行わなければならず、その二つが打ち消し合う。
- (iii)(b) で、区間が $[\frac{1}{2}, 2]$ であるかのように小問 (ii) を適用すること。置換によって $[1, 2]$ は $[\frac{1}{2}, 1]$ に移るのであり、まさにそのおかげで各部分がうまく組み合わさるのである。

STEP のその先へ

写像 $x \mapsto 1/x$ は区間 $[1/m, m]$ の対称性（symmetry）であり、定義域の対称性を利用して積分どうしを関係づけるのは、解析学で繰り返し現れる技法である。たとえば、$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$ を示すのにもこの方法が使われる。複素解析では、同じ反転（inversion）$z \mapsto 1/z$ が単位円の内側と外側を入れ替え、基本的な道具となる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ビジュアル複素解析』）には、反転についての美しい幾何学的な解説がある。

解答例

STEP I 2009、第 7 問

純粋数学 ・ 部分積分

> **STEP I 2009、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q7

鍵となる考え方

最初の積分は、「部分積分を 2 回行うと元の積分が戻ってくる」という古典的な技法である。2 回目のステップで元の積分が右辺に再び現れるので、それを方程式の未知数のように解けばよい。**すべての**整数 m について $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x$ の公式が得られれば、後半の小問は単なる整理作業になる。すなわち、正弦と余弦の積を単一の余弦の和に直せば、それぞれはすぐに積分できる。

解答

一般の積分

$I_m = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x$ とおき、簡単のため $E = \mathrm{e}^{2\pi} - 1$ とする。$u = \cos mx$、$\mathrm{d}v = \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ として部分積分（integration by parts）を行うと、

$$I_m = \Big[\mathrm{e}^x \cos mx\Big]_0^{2\pi} + m \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin mx \,\mathrm{d}x.$$

m は整数なので $\cos 2m\pi = 1$ であり、括弧の部分は $\mathrm{e}^{2\pi} - 1 = E$ となる。今度は $u = \sin mx$ として再び部分積分を行うと、

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin mx \,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x \sin mx\Big]_0^{2\pi} - m \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x = 0 - mI_m,$$

となる。ここでも m が整数であることを用いて $\sin 2m\pi = \sin 0 = 0$ とした。以上を合わせると、

$$I_m = E - m^2 I_m, \qquad \text{よって} \qquad (m^2 + 1) I_m = E.$$

考えてみよう 一周して I_m が戻ってきてしまった。これは行き詰まりだろうか。

そうではない。これこそ望んでいた形である。等式 $I_m = E - m^2 I_m$ は未知の数 I_m についての 1 次方程式であり、$m^2 + 1 \neq 0$ なのでこれで割ることができる：

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{m^2+1}\left(\mathrm{e}^{2\pi} - 1\right),$$

これが示すべき式である。($m = 0$ の場合も含まれている。そのときは単に $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = E$ を表す。）整数という条件は境界項を簡単にするために使われたことに注意しよう。m が整数でなければ、この公式は成り立たない。

小問 (i)

加法定理（compound-angle formulae）で展開すると、$\sin A \sin B$ の項が打ち消し合う：

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cos B.$$

$A = 6x$、$B = x$ とすると $\cos x \cos 6x = \frac{1}{2}(\cos 7x + \cos 5x)$ を得る。したがって、一般の結果で $m = 7$ と $m = 5$ とすれば、

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos x \cos 6x \,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}\left(I_7 + I_5\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{26}\right)E \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{26+50}{1300}\,E = \frac{76}{2600}\,E = \frac{19}{650}\left(\mathrm{e}^{2\pi} - 1\right),\end{aligned}$$

となり、求める結果が得られる。

小問 (ii)

積和の変換（product-to-sum）を 2 段階行う必要がある。加法定理を足すのではなく引くと $\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin A \sin B$ が得られるので、$A = 4x$、$B = 2x$ とすれば、

$$\sin 2x \sin 4x = \tfrac{1}{2}(\cos 2x - \cos 6x).$$

これに $\cos x$ を掛け、それぞれの積に小問 (i) の恒等式を用いると、

$$\begin{aligned}\sin 2x \sin 4x \cos x &= \tfrac{1}{2}\cos 2x \cos x - \tfrac{1}{2}\cos 6x \cos x \\ &= \tfrac{1}{4}(\cos 3x + \cos x) - \tfrac{1}{4}(\cos 7x + \cos 5x).\end{aligned}$$

これで各項は $m = 3, 1, 7, 5$ として一般の結果で扱える：

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin 2x \sin 4x \cos x \,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{4}\left(I_3 + I_1 - I_7 - I_5\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{2} - \frac{1}{50} - \frac{1}{26}\right)E \\ &= \tfrac{1}{4} \cdot \frac{65 + 325 - 13 - 25}{650}\,E = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{352}{650}\,E.\end{aligned}$$

よって

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin 2x \sin 4x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{44}{325}\left(\mathrm{e}^{2\pi} - 1\right).$$

検算

- $\dfrac{\mathrm{e}^x(\cos mx + m \sin mx)}{m^2 + 1}$ を微分すると $\mathrm{e}^x \cos mx$ になるので、これは原始関数（antiderivative）である。2π と 0 で値を求めれば、一般の結果が再現される。
- 小問 (ii) の恒等式に $x = 0$ を代入すると、左辺は 0、右辺は $\frac{1}{4}(1 + 1 - 1 - 1) = 0$ となり、一致する。
- 数値的に（シンプソンの公式（Simpson's rule）で）計算すると、小問 (i) の積分は 15.6236…、小問 (ii) の積分は 72.3619… であり、$E = \mathrm{e}^{2\pi} - 1 \approx 534.49$ として $\frac{19}{650}E$ および $\frac{44}{325}E$ と一致する。

よくある間違い

- 2 回目の部分積分での符号の誤り。$\sin mx$ の導関数は $+m \cos mx$ であり、部分積分の公式から来るマイナス符号と合わせて $-m^2 I_m$ となる。
- 積和の変換の各段階で係数 $\frac{1}{2}$ を忘れ、小問 (ii) で $\frac{1}{4}$ ではなく $\frac{1}{2}$ が付いてしまう。

STEP のその先へ

より鮮やかな方法として、$\cos mx = \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}$ と書けば、$I_m = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}m)x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re} \dfrac{E}{1 + \mathrm{i}m} = \dfrac{E}{1 + m^2}$ となり、部分積分はまったく必要ない。後半の小問で行ったように関数を成分 $\cos mx$ に分解することは、フーリエ級数（Fourier series）の出発点であり、大学 1 年次の解析学や微分方程式における中心的な道具である。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）には読みやすい入門があり、Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的複素解析）は、指数関数の視点がなぜこれほどうまく機能するのかを示している。

解答例

STEP I 2009、第 8 問

純粋数学 ・ 円と接線

STEP I 2009、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/09-s1-q8

鍵となる考え方

円が直線に接する（touch）のは、円の中心からその直線までの距離が半径に等しいとき、かつそのときに限る。円 C の中心はすべて、原点を通り x 軸と $3y = 4x$ のなす角を二等分する直線上にあるので、どの円も両方の直線に接する。したがって C は、その角の内側に収まる円全体の族であり、小問 (ii) の内接円（incircle）はそのうちの一つでなければならない。あとは、円が第三の辺にも接するような t の値を選べばよいだけである。

解答

小問 (i)

円 C は中心 $P = (2t, t)$、半径 t である。$t > 0$ であるから、中心は x 軸の上側にあり、x 軸からの距離は t で、これは半径に等しい。よって C は点 $(2t, 0)$ で $y = 0$ に接する。

直線 OP の傾き（gradient）は $\frac{t}{2t} = \frac{1}{2}$ であるから、$\tan\alpha = \frac{1}{2}$ であり、

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3},$$

となって、示すべき式が得られた。

次に、β を x 軸と直線 $3y = 4x$ のなす鋭角とする。この直線の傾きは $\frac{4}{3}$ である。すると $\tan\beta = \frac{4}{3} = \tan 2\alpha$ となる。$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$（$\tan\alpha = \frac{1}{2} < 1$ だから）であるので、角 2α も鋭角であり、tan は鋭角の範囲で一対一（one-to-one）であるから、$\beta = 2\alpha$ である。

考えてみよう $\beta = 2\alpha$ であることから、なぜ C が $3y = 4x$ に接するといえるのか。

直線 OP は x 軸と角 α をなし、直線 $3y = 4x$ と角 $\beta - \alpha = \alpha$ をなすので、OP は二直線のなす角を二等分する。P からそれぞれの直線に垂線を下ろすと、斜辺（hypotenuse）OP を共有し、O における角がともに α である二つの直角三角形ができるので、二つの垂線の長さは等しく、どちらも $OP\sin\alpha$ である。x 軸までの距離は t であるから、P から $3y = 4x$ までの距離も半径 t に等しい。よって C は $3y = 4x$ に接する。

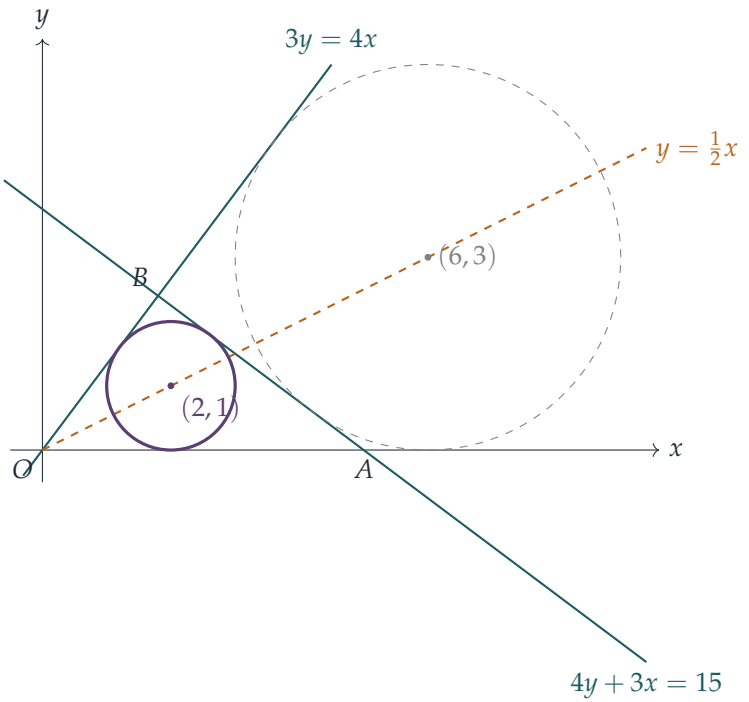
（確認として、点と直線の距離の公式を用いると、$(2t, t)$ から $4x - 3y = 0$ までの距離は $\frac{|8t-3t|}{5} = t$ となる。）

小問 (ii)

まず三角形を求める。直線 $y = 0$ と $3y = 4x$ は $O = (0,0)$ で交わり、$y = 0$ と $4y + 3x = 15$ は $A = (5,0)$ で交わる。三つ目の頂点を求めるため、$y = \frac{4}{3}x$ を $4y + 3x = 15$ に代入すると、

$$\tfrac{16}{3}x + 3x = 15 \quad \Longrightarrow \quad x = \tfrac{9}{5}, \qquad y = \tfrac{12}{5},$$

となるので、$B = \left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$ である。$3y = 4x$ と $4y + 3x = 15$ の傾きは $\frac{4}{3}$ と $-\frac{3}{4}$ で、その積は -1 であるから、この三角形は B で直角をもつ。辺の長さは $OA = 5$、$OB = 3$、$AB = 4$ である。



内接円は三角形の内部にあるので、O の近くでは、正の x 軸と直線 $3y = 4x$ のなす鋭角の中に収まり、両方の直線に接している。その中心は二直線から等距離にあるので、その角の二等分線（bisector）上にあり、これは小問 (i) より直線 $y = \frac{1}{2}x$（直線 OP）である。中心を $(2t, t)$（$t > 0$）とすると、$y = 0$ からの距離は t であり、これが半径でなければならない。よって内接円は小問 (i) の円 C の一つである。

残るは、C を第三の辺 $3x + 4y - 15 = 0$ にも接させることである。$(2t, t)$ からこの直線までの距離が t に等しくなければならないので、

$$\frac{|6t + 4t - 15|}{5} = t \quad \Longleftrightarrow \quad |10t - 15| = 5t.$$

$10t - 15 = 5t$ のときは $t = 3$、$15 - 10t = 5t$ のときは $t = 1$ となる。

どちらの円も三本の直線すべてに接するが、三角形の内部にあるのは一方だけである。$t = 3$ のとき、中心 $(6, 3)$ では $3x + 4y = 30 > 15$ となるので、中心は AB に関して O（$3x + 4y = 0 < 15$）と反対側にある。これは**傍接円**（excircle）であり、図の破線の円である。$t = 1$ のとき、中心 $(2, 1)$ では $3x + 4y = 10 < 15$ であり、さらに $y = 0$ の上側、$3y = 4x$ の下側にあるので、三角形の内部にある。中心が三角形の内部にあり三辺すべてに接する円は三角形の内部にあるので、内接円は中心 $(2, 1)$、半径 1 の円

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

である。

検算

直角をはさむ二辺が a, b、斜辺が c の直角三角形では、内接円の半径（inradius）は $\frac{1}{2}(a+b-c)$ である。ここでは $\frac{1}{2}(3+4-5)=1$ となり、求めた値と一致する。内接円の半径は面積 / 半周長（semi-perimeter）$= 6/6 = 1$ としても求められる。数値的にも、内心（incentre）を頂点の辺の長さによる重み付き平均 $\frac{4O+3A+5B}{12}$ として計算すると、ちょうど $(2,1)$ になり、$(2,1)$ から三本の直線までの距離はいずれも 1 である。

よくある間違い

- $|10t-15| = 5t$ を絶対値（modulus）を外さずに解いて $t=3$ だけを求めてしまう。これは内接円ではなく傍接円である。
- 二つの解を両方求めたものの、なぜ $t=1$ が三角形の内部にある方なのかを説明していない。
- 小問 (i) で、両方の角が鋭角であることに触れずに、$\tan\beta = \tan 2\alpha$ だから $\beta = 2\alpha$ と述べてしまう。

STEP のその先へ

どの三角形にも内接円が一つと傍接円が三つあり、それら四つの中心は内角の二等分線と外角の二等分線の交点である。ここで得られた $t=3$ の値は、O に対する傍接円である。これらの円は、九点円（nine-point circle）や、九点円がこれら四つの円すべてに接するというフォイエルバッハ（Feuerbach）の定理をはじめとする、古典幾何学の豊かな世界への入り口となる。これを探究するには、コクセター（Coxeter）の *Introduction to Geometry*（幾何学入門）が定番である。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の上級問題集）には、STEP 形式の演習問題がさらに収録されている。

解答例

STEP I 2009、第 9 問

力学 ・ 放物体の衝突

STEP I 2009、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

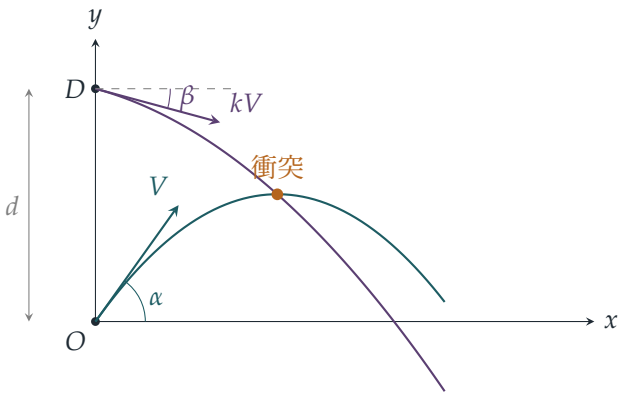
step.maths.org/questions/09-s1-q9

鍵となる考え方

重力のみを受けて運動する 2 つの粒子は同じ加速度（acceleration）をもつので、位置を比べると $-\frac{1}{2}gt^2$ の項は打ち消し合う。すなわち、互いに対して見れば、両者は等速度で直線運動をする。衝突とは、同じ時刻 T において水平方向の変位と鉛直方向の変位がともに等しくなることである。水平方向の式からただちに余弦の関係式が得られる。鉛直方向の式には β が含まれるが、これは $\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta$ と余弦の関係式を用いて消去する。

解答

P と Q を、空気抵抗のない状態で重力のみを受けて自由に運動する粒子（particle）としてモデル化する。両者が衝突するためには、同じ鉛直面内で、同じ水平方向に向かって投射されなければならない。O を原点とし、その方向に水平な x 軸、鉛直上向きに y 軸をとる。このとき D は $(0, d)$ である。



時刻 t における位置は

$$P:\quad x = Vt\cos\alpha, \qquad y = Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2,$$
$$Q:\quad x = kVt\cos\beta, \qquad y = d - kVt\sin\beta - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

である。ここで Q の鉛直方向の速度に負号がつくのは、β が水平方向から**下向きに**測った角だからである。

余弦の関係式と T の方程式

衝突の瞬間には $t = T > 0$ であり、座標が一致する。水平方向については

$$VT\cos\alpha = kVT\cos\beta,$$

であり、$VT \neq 0$ で割ると、求める $\cos\alpha = k\cos\beta$ が得られる。

鉛直方向については、両辺の $-\frac{1}{2}gT^2$ の項が打ち消し合い、

$$VT\sin\alpha = d - kVT\sin\beta, \qquad \text{よって} \qquad kVT\sin\beta = d - VT\sin\alpha.$$

が残る。

考えてみよう β をどのように消去すればよいか？

$k\cos\beta$ は α で表されているので、2 乗して $k^2\sin^2\beta$ を導入する。これは

$$k^2\sin^2\beta = k^2 - k^2\cos^2\beta = k^2 - \cos^2\alpha.$$

である。鉛直方向の式を 2 乗して代入すると、

$$(k^2 - \cos^2\alpha)V^2T^2 = d^2 - 2dVT\sin\alpha + V^2T^2\sin^2\alpha,$$
$$(k^2 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha)V^2T^2 + 2dVT\sin\alpha - d^2 = 0,$$
$$(k^2 - 1)V^2T^2 + 2dVT\sin\alpha - d^2 = 0,$$

となる。ここで $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ を用いた。これが求める方程式である。

T についての 2 次方程式 (quadratic) とみると、$k>1$ より 2 つの解の積は $-d^2/\left((k^2-1)V^2\right)<0$ である。したがって正の解はちょうど 1 つであり、その解が衝突の時刻である。

P の最高点での衝突

P の鉛直方向の速度は $V\sin\alpha-gt$ であり、これは $t=V\sin\alpha/g$ のとき 0 になる。よってこの場合 $T=V\sin\alpha/g$ である。2 次方程式に代入すると

$$(k^2-1)\frac{V^4\sin^2\alpha}{g^2}+\frac{2dV^2\sin^2\alpha}{g}-d^2=0.$$

g^2 を掛けて $\sin^2\alpha$ の項をまとめると $\sin^2\alpha\left((k^2-1)V^4+2gdV^2\right)=g^2d^2$ となるので、

$$\boxed{\sin^2\alpha=\frac{g^2d^2}{V^2\left((k^2-1)V^2+2gd\right)}}$$

である。$k>1$ より括弧内は正なので、この式は意味をもつ。

不等式

$\sin^2\alpha\le1$ であり、分母は正なので、

$$\begin{aligned}g^2d^2&\le(k^2-1)V^4+2gdV^2,\\ g^2d^2-2gdV^2+V^4&\le k^2V^4,\\ (gd-V^2)^2&\le(kV^2)^2.\end{aligned}$$

$|gd-V^2|$ と kV^2 はともに非負なので、平方根をとっても不等号の向きは保たれ、$|gd-V^2|\le kV^2$ が得られる。特に $gd-V^2\le kV^2$、すなわち

$$gd\le(1+k)V^2,$$

が成り立ち、これが求める結果である。等号が成り立つには $\sin^2\alpha=1$、すなわち P が鉛直に投射されることが必要である。

検算

- $g=10$、$V=10$、$k=2$、$d=10$ とする。公式から $\sin^2\alpha=\frac{100\cdot100}{100(300+200)}=\frac{1}{5}$ となり、$T=V\sin\alpha/g=1/\sqrt{5}$ である。このとき 2 次方程式は $3\cdot100\cdot\frac{1}{5}+2\cdot10\cdot10\cdot\frac{1}{5}-100=60+40-100=0$ となる。$\cos\beta=\cos\alpha/2$ とすると、時刻 T において両粒子はともに高さ 1 にある。また $gd=100\le300=(1+k)V^2$ である。

- 数値的な検証として、ランダムに選んだ数千組の V、k、α、T について両方の運動を時間刻みで追跡し、衝突、余弦の関係式、2 次方程式、$\sin^2\alpha$ の公式が丸め誤差の範囲で成り立つことを確認した。
- 極限の場合：$\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ とすると $\cos\beta \to 0$ ともなるので、両者とも鉛直に運動する。P は時間 V/g で高さ $V^2/(2g)$ まで上昇し、その間に Q は $kV^2/g + V^2/(2g)$ だけ落下するので、$d = (1+k)V^2/g$ となる。予想どおり等号が成り立つ。

よくある間違い

- Q の鉛直方向の速度の符号を誤る。水平方向より**下向きに**投射されるので、それは $-kV\sin\beta$ である。
- $\frac{1}{2}gT^2$ の項を残してしまう。これらは打ち消し合い、T の方程式には g が含まれない。
- $(gd - V^2)^2 \le k^2V^4$ の平方根をとる際に、絶対値に触れずに $gd - V^2 \le kV^2$ としてしまう。結論は正しいが、その根拠は $x \le |x|$ である。

STEP のその先へ

重力が打ち消し合うことは、座標系（frame of reference）の変換を初めて味わう体験である。加速度 g で自由落下する座標系では、両粒子はともに等速で直線運動をし、衝突の問題は相対速度の幾何学に帰着する。これはアインシュタイン（Einstein）の等価原理（equivalence principle）の背後にある考え方であり、これを使うと投射体の迎撃問題の多くが 1 行で解けてしまう。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、相対運動と非慣性系（non-inertial frame）を丁寧に展開している。

解答例

STEP I 2009、第 10 問

力学 ・ 斜面上の連結質点

STEP I 2009、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

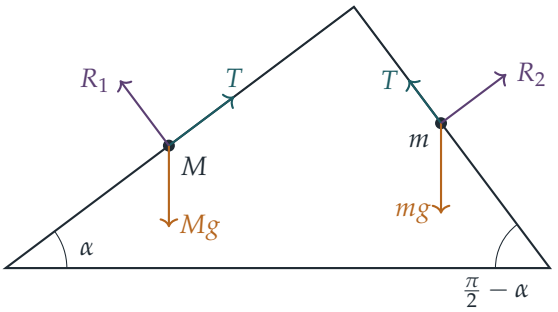
step.maths.org/questions/09-s1-q10

鍵となる考え方

糸は伸びない糸（inextensible string）であり、滑車はなめらか（smooth）なので、2 つの質点は 1 つの系として運動する。すなわち、M が斜面に沿って距離 s だけ下ると、m は自分の斜面に沿って同じ距離 s だけ上り、張力（tension）は両側で等しい。そこで、斜面に沿った重力の 2 つの成分を比較し、各質点についてニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）を用いれば、共通の加速度（acceleration）が得られる。最後の部分は、1 変数 α についての通常の微分による最大化問題となる。

解答

質点はなめらかな斜面上の質点としてモデル化し、軽くて伸びない糸がなめらかな滑車にかけられているとし、系は静止状態から動き始めるものとする。張力を T、M と m にはたらく垂直抗力（normal reaction）をそれぞれ R_1、R_2 とする。



頂点の角は $\pi - \alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{2}$ であるから、2 つの斜面は直交している。傾斜角 α の

斜面に沿って下向きの重力の成分は $Mg\sin\alpha$ であり、傾斜角 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ の斜面に沿って下向きの成分は $mg\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=mg\cos\alpha$ である。垂直抗力は斜面に垂直なので、斜面に沿った運動には関与しない。

小問 (i)

「M が斜面を下り、m が斜面を上る」向きを正とし、加速度を a とする。各斜面に沿って力を分解すると、

$$\begin{aligned} M:&\quad Mg\sin\alpha - T = Ma,\\ m:&\quad T - mg\cos\alpha = ma. \end{aligned}$$

辺々を加えると T が消去されて、

$$a=\frac{g\left(M\sin\alpha - m\cos\alpha\right)}{M+m}.$$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ では $\cos\alpha>0$ であるから、

$$a>0 \iff M\sin\alpha > m\cos\alpha \iff \tan\alpha > \frac{m}{M}.$$

したがって $\tan\alpha>\frac{m}{M}$ ならば、静止状態から動き始めた系は正の向きに加速する。すなわち、題意のとおり M は斜面を滑り下りる。

> **考えてみよう** 糸がたるまず張ったままであり、したがってこれらの方程式が正しいものであると、どうしてわかるのだろうか。

2 番目の式から $T=m(a+g\cos\alpha)$ であり、これは $a>0$ のとき正であるから、糸が張っていることと矛盾しない。また、糸がたるむことはありえない。もしたるんだとすれば、各質点はそれぞれの斜面を下ることになり、両方とも滑車から遠ざかるので、より長い糸が必要になってしまうからである。

小問 (ii)

今度は $\tan\alpha=\frac{2m}{M}$ であるから $m=\frac{1}{2}M\tan\alpha$ であり、また $\tan\alpha>\frac{m}{M}$ であるから、小問 (i) より、運動はやはり M が下る向きである。$m=\frac{1}{2}M\tan\alpha$ を代入して M を約分すると、

$$\begin{aligned} a&=\frac{g\left(M\sin\alpha-\frac{1}{2}M\tan\alpha\cos\alpha\right)}{M+\frac{1}{2}M\tan\alpha}=\frac{g\left(\sin\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)}{1+\frac{1}{2}\tan\alpha}=\frac{\frac{1}{2}g\sin\alpha}{\frac{1}{2}(2+\tan\alpha)}\\ &=\frac{g\sin\alpha}{\tan\alpha+2}, \end{aligned}$$

ここで $\tan\alpha\cos\alpha=\sin\alpha$ を用いた。これが求める加速度の大きさである。

最大化。比 m/M は $\tan\alpha = 2m/M$ によって α を定めるので、次を最大化すればよい。

$$f(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha + 2}, \qquad 0 < \alpha < \tfrac{\pi}{2}.$$

商の微分法（quotient rule）と $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\tan\alpha = \sec^2\alpha$ により、

$$f'(\alpha) = \frac{\cos\alpha\,(\tan\alpha + 2) - \sin\alpha\sec^2\alpha}{(\tan\alpha+2)^2} = \frac{\sin\alpha + 2\cos\alpha - \dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}}{(\tan\alpha+2)^2}.$$

分子に $\cos^2\alpha > 0$ を掛け、$1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$ を用いると、

$$\cos^2\alpha\,(\sin\alpha + 2\cos\alpha) - \sin\alpha = 2\cos^3\alpha - \sin\alpha\,(1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^3\alpha - \sin^3\alpha.$$

よって $f'(\alpha)$ の符号は $2\cos^3\alpha - \sin^3\alpha = \cos^3\alpha\,(2 - \tan^3\alpha)$ の符号と一致する。$\tan\alpha$ が 0 から ∞ まで増加するとき、これは $\tan^3\alpha < 2$ の間は正、$\tan^3\alpha > 2$ となると負である。ゆえに f は増加した後に減少し、その最大値は唯一の停留点（stationary point）

$$\tan^3\alpha = 2.$$

でとる。（区間上で $f > 0$ であり、両端で $f \to 0$ となることからも、これが最大であることがわかる。）$\tan\alpha = \frac{2m}{M}$ を用いると、これは

$$\frac{8m^3}{M^3} = 2, \qquad \text{すなわち} \qquad 4m^3 = M^3,$$

となり、題意が示された。

検算

- 小問 (i) の極限の場合：$m = 0$ とすると $a = g\sin\alpha$ となり、なめらかな斜面上の単独の質点の場合に一致する。また $\tan\alpha = m/M$ のときは $a = 0$ となり、つり合いの状態である。
- 最適な状態では $\tan\alpha = 2^{1/3} \approx 1.26$ であるから、$\alpha \approx 51.6°$、$m/M = 4^{-1/3} \approx 0.63$ である。$(0, \frac{\pi}{2})$ 上で f をグリッド探索すると、最大値は同じ α でとられ、その値は $f \approx 0.240$ であった。よって最大の加速度はおよそ $0.240g$ である。
- 質量と角度を無作為に選んで試したところ、$\tan\alpha = 2m/M$ のときはいつも小問 (i) の一般式が小問 (ii) の式と一致し、2 つの運動方程式はいずれも同じ正の張力を与えた。

よくある間違い

- m に対して $mg\sin\alpha$ を用いてしまう。その斜面の傾斜角は $\frac{\pi}{2} - \alpha$ なので、成分は $mg\cos\alpha$ である。

- a が α のみに依存することに気づかずに、m を固定して M を動かして（あるいはその逆で）最大化しようとする。すべてを α で表せば、1 変数の問題になる。

STEP のその先へ

このように物体どうしが束縛条件で結ばれた系は、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）の出発点である。座標を 1 つ（ここでは糸に沿って動いた距離 s）選べば、張力や垂直抗力のような束縛力（constraint force）は自動的に式から消える。大学 1 年次の講義では、これを滑車や振り子をはじめ、さらに多くの場面で使える体系的な方法へと発展させる。この水準のニュートン力学をわかりやすく扱った本としては、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を読んでみるとよい。

解答例

STEP I 2009、第 11 問

力学 ・ 衝突と反発係数

STEP I 2009、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/09-s1-q11

鍵となる考え方

一次元の衝突はすべて、運動量保存則（conservation of momentum）とニュートン（Newton）の反発の法則（law of restitution）という二つの式で決まる。エネルギーを扱うときのこつは、各粒子の損失を二乗の差として $\frac{1}{2}m(u-p)(u+p)$ の形に書くことである。運動量保存則によって因数 $u-p$ と $q-v$ が結びつくからである。共通因数 $u-p$ をくくり出してしまえば、残った括弧の中身はまさに反発の法則が記述しているものになる。

解答

粒子はなめらかな台の上で一直線上を運動するものとし、速度は **i** の向きを正として測る。$u > v$ であるから、質量 m の粒子が後ろから追いつく。水平方向の外力ははたらかないので、運動量は保存される：

$$mu + Mv = mp + Mq, \qquad \text{よって} \qquad M(q-v) = m(u-p). \tag{1}$$

ニュートンの反発の法則によれば、遠ざかる速さは近づく速さの e 倍である：

$$q - p = e(u-v). \tag{2}$$



衝突前（速度は **i** 方向）、$u > v$

小問 (i)

運動エネルギー（kinetic energy）の損失は

$$\Delta = \tfrac{1}{2}m(u^2 - p^2) + \tfrac{1}{2}M(v^2 - q^2) = \tfrac{1}{2}m(u-p)(u+p) - \tfrac{1}{2}M(q-v)(q+v).$$

である。(1) により $M(q-v)$ を $m(u-p)$ で置き換えられるので、因数 $\tfrac{1}{2}m(u-p)$ がくくり出せる：

$$\begin{aligned}\Delta &= \tfrac{1}{2}m(u-p)\big[(u+p) - (q+v)\big] \\ &= \tfrac{1}{2}m(u-p)\big[(u-v) - (q-p)\big] \\ &= \tfrac{1}{2}m(u-p)\big[(u-v) - e(u-v)\big] \qquad (2) \text{ より} \\ &= \tfrac{1}{2}m(u-p)(u-v)(1-e),\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

考えてみよう エネルギー損失の式から、どうして p について何かがわかるのだろうか。

衝突によって運動エネルギーが生まれることはないので、$\Delta \geq 0$ である。積 $\tfrac{1}{2}m(u-p)(u-v)(1-e)$ において、$m > 0$、$u - v > 0$（仮定）、$1 - e > 0$（$e < 1$ より）である。したがって Δ の符号は $u - p$ の符号に一致し、$\Delta \geq 0$ から $u \geq p$ が従う。質量 m の粒子は **i** の向きに速くなることはできない。M から受ける力積（impulse）は後ろ向きにはたらくのだから、これは納得のいく結果である。

$\Delta \geq 0$ を物理的事実として用いたくなければ、(1) と (2) を直接解けばよい：

$$p = \frac{mu + Mv - Me(u-v)}{m+M}, \qquad \text{よって} \qquad u - p = \frac{M(1+e)(u-v)}{m+M} > 0$$

が $e \geq 0$ に対して成り立つ。これで $u \geq p$ が確かめられ、したがって $\Delta \geq 0$ である。

小問 (ii)

各粒子は o でない同じ量のエネルギーを失うので、

$$\tfrac{1}{2}m(u-p)(u+p) = \tfrac{1}{2}M(v-q)(v+q) \neq 0.$$

である。(1) より $M(v-q) = -m(u-p)$ であるから、右辺は $-\tfrac{1}{2}m(u-p)(v+q)$ となり、

$$\tfrac{1}{2}m(u-p)(u+p) = -\tfrac{1}{2}m(u-p)(v+q).$$

を得る。左辺は o でないので $m(u-p) \neq 0$ であり、両辺を $\tfrac{1}{2}m(u-p)$ で割ることができる：

$$u + p = -(v+q), \qquad \text{すなわち} \qquad u + v + p + q = 0. \tag{3}$$

さて、(2) と (3) から p と q の和と差が得られる：

$$p+q=-(u+v), \qquad q-p=e(u-v),$$

したがって

$$p=-\tfrac{1}{2}\big[(u+v)+e(u-v)\big], \qquad q=-\tfrac{1}{2}\big[(u+v)-e(u-v)\big].$$

である。運動量保存則はまだ完全な形では使っておらず、e を決めるのはこの式である。$mp+Mq=mu+Mv$ に代入して両辺を 2 倍すると：

$$\begin{aligned}-(m+M)(u+v)+(M-m)e(u-v)&=2mu+2Mv,\\ (M-m)e(u-v)&=(m+M)(u+v)+2mu+2Mv\\ &=(M+3m)u+(3M+m)v.\end{aligned}$$

$u-v>0$ であり、また $m\neq M$ のとき $M-m\neq 0$ であるから、割り算をして

$$e=\frac{(M+3m)u+(3M+m)v}{(M-m)(u-v)},$$

を得る。これが示すべき式である。

検算

- $m=1$、$M=3$、$u=1$、$v=-\frac{1}{2}$ とする。公式から $e=\frac{6-5}{2\times\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}$ となる。このとき $p=-\frac{1}{2}$、$q=0$ であり、運動量も $1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}+0$ と確かに一致する。各粒子が失うエネルギーは $\frac{3}{8}$ であり、$u+v+p+q=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+0=0$ である。
- $e=1$ のとき、(i) の式は損失 0 を与える。完全弾性衝突（perfectly elastic collision）ではそうなるべきである。
- コンピュータで、(i) を 2000 通りのランダムな衝突について厳密な分数計算で検証し、(ii) を $0\le e<1$ を満たす 455 通りのランダムな場合について検証した。

よくある間違い

- 反発の法則を逆にしてしまうこと。正しくは $q-p=e(u-v)$、つまり「遠ざかる速さ」を「近づく速さ」で割ったものであり、ここではどちらも正の量として測っている。
- $u-p$ が 0 でない理由を述べずに $u-p$ で割ること。ここで「0 でない量」という条件があるのは、まさにそのためである。

STEP のその先へ

(i) の因数分解は、重心系（centre-of-mass frame）で考えることから自然に導かれる見事な帰結である。重心系では全運動量は o であり、運動エネルギーは換算質量（reduced mass）$\mu = \frac{mM}{m+M}$ を用いて $\frac{1}{2}\mu$(相対速度の大きさ)^2 と表され、損失は $\frac{1}{2}\mu(1-e^2)(u-v)^2$ となる。換算質量と重心系は、二体問題の軌道や粒子の散乱でも再び登場する。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、これらの考え方が丁寧に展開されている。

解答例

STEP I 2009、第 12 問

確率・統計 ・ 確率と不等式

STEP I 2009、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/09-s1-q12

鍵となる考え方

ここでの確率（probability）はどれも、袋の中の個数の積の和を総数の累乗で割ったものである。したがって、どの比較も a, b, c についての 2 つの多項式（polynomial）を比べることに帰着する。冒頭の不等式（inequality）$x^2 + y^2 \geq 2xy$ は、まさにそのための道具である。小問 (ii) では、「ちょうど 2 つが同じ」場合を正面から数えるのは面倒である。残りの 2 つの場合（すべて同じ、すべて異なる）を数えて 1 から引くほうが、はるかに簡単である。

解答

不等式

任意の実数 x, y に対して

$$x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geq 0,$$

が成り立つ。実数の 2 乗は決して負にならないからである。よって $x^2 + y^2 \geq 2xy$ であり、等号は $x = y$ のときに限り成り立つ。

小問 (i)

各袋には $a + b$ 個の菓子が入っており、2 回の取り出しは異なる袋から行うので独立（independent）である。2 個の菓子が同じ色であるという事象（event）を S、異なる

色であるという事象を D とする。このとき

$$\mathrm{P}(S) = \mathrm{P}(\text{赤}, \text{赤}) + \mathrm{P}(\text{青}, \text{青}) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b} = \frac{2ab}{(a+b)^2},$$
$$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(\text{赤}, \text{青}) + \mathrm{P}(\text{青}, \text{赤}) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} = \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}.$$

である。分母は等しく正であり、上の不等式より $2ab \leq a^2 + b^2$ である。よって、示すべき通り $\mathrm{P}(S) \leq \mathrm{P}(D)$ が成り立ち、等号は $a = b$ のときに限り成り立つ。

小問 (ii)

各袋の菓子の個数を $n = a + b + c$ とおく。袋の中身は次の通りである。

	赤	白	黄
袋 1	a	b	c
袋 2	b	c	a
袋 3	c	a	b

3 回の取り出しは独立なので、各袋から（順に）特定の色を取り出す確率は、3 つの個数の積を n^3 で割ったものである。3 個の菓子がすべて同じ色であるという事象を A、ちょうど 2 個が同じ色であるという事象を T、3 個すべてが異なる色であるという事象を E とする。これら 3 つの事象はあらゆる場合を尽くしており、互いに重なり合わない。

すべて同じ場合。 表の各列を縦に読むと、

$$\mathrm{P}(A) = \frac{abc + bca + cab}{n^3} = \frac{3abc}{n^3}.$$

すべて異なる場合。 袋 1, 2, 3 から出る色は、赤・白・黄の $3! = 6$ 通りの並べ方のいずれかである。

$$\text{RWY: } a \cdot c \cdot b \quad \text{RYW: } a \cdot a \cdot a \quad \text{WRY: } b \cdot b \cdot b$$
$$\text{WYR: } b \cdot a \cdot c \quad \text{YRW: } c \cdot b \cdot a \quad \text{YWR: } c \cdot c \cdot c$$

したがって

$$\mathrm{P}(E) = \frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}{n^3}.$$

考えてみよう 残りの 18 通りの結果を列挙せずに、これら 2 つの答えからどうやって $\mathrm{P}(T)$ を求めればよいだろうか？

$\mathrm{P}(T) = 1 - \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(E)$ なので、$n^3 = (a+b+c)^3$ の展開（expansion）が必要である。展開には 3 つの 3 乗の項、係数（coefficient）3 をもつ a^2b のような 6 つの項、そして係数 6 をもつ abc が現れる。

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3\left(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2\right) + 6abc.$$

よって

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T) &= \frac{n^3 - 3abc - (a^3 + b^3 + c^3 + 3abc)}{n^3} \\ &= \frac{3\left(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2\right)}{(a+b+c)^3},\end{aligned}$$

となり、与えられた結果が得られる。菓子がすべて同じ色である確率は

$$\mathrm{P}(A) = \frac{3abc}{(a+b+c)^3}.$$

である。

結論の導出。 6 つの項を、共通因数をもつ 2 つずつの組にまとめる。

$$a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 = a\left(b^2 + c^2\right) + b\left(c^2 + a^2\right) + c\left(a^2 + b^2\right).$$

冒頭の不等式より $b^2 + c^2 \geq 2bc$ であり、$a > 0$ なので両辺に掛けても不等号の向きは変わらない。すなわち $a(b^2 + c^2) \geq 2abc$ である。同様に $b(c^2 + a^2) \geq 2abc$、$c(a^2 + b^2) \geq 2abc$ である。これらを足し合わせると

$$a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 6abc.$$

両辺に $3/n^3 > 0$ を掛けると

$$\mathrm{P}(T) \geq \frac{18abc}{n^3} = 6 \cdot \frac{3abc}{n^3} = 6\,\mathrm{P}(A),$$

となり、示すべき結果が得られる。等号が成り立つには $b = c$、$c = a$、$a = b$ がすべて同時に必要なので、等号は $a = b = c$ のときに限り成り立つ。

検算

- $a = b = c$ のとき、どの袋も各色が 3 分の 1 ずつなので、$\mathrm{P}(A) = 3 \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{9}$、$\mathrm{P}(E) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$ となり、残りは $\mathrm{P}(T) = \frac{2}{3} = 6 \cdot \frac{1}{9}$ である。これは等号が成り立つ場合である。
- $a, b, c = 1, 2, 3$ $(n = 6)$ のとき：$\mathrm{P}(A) = \frac{18}{216} = \frac{1}{12}$、$\mathrm{P}(E) = \frac{54}{216} = \frac{1}{4}$、$\mathrm{P}(T) = \frac{144}{216} = \frac{2}{3}$ である。これらの和は 1 であり、$\frac{2}{3}$ は $\frac{1}{12}$ の 8 倍である。

- 3 つの公式はすべて、1 から 8 までのすべての a, b, c について厳密な数え上げで確かめ、さらにシミュレーションでも確かめた（$a, b, c = 2, 3, 5$ のとき、200 000 回の試行で $\mathrm{P}(T)$ は 0.659 となり、厳密な値 0.66 と比べられた）。

よくある間違い

- 袋の中身を誤った順序で書く。袋 2 に入っているのは a 個の**黄**であり、a 個の赤ではない。上のような表を作れば、この誤りを防げる。
- $\mathrm{P}(E)$ のどの並べ方も abc を与えると思い込む。そうなるのは 3 つだけであり、並べ方 RYW、WRY、YWR はそれぞれ a^3、b^3、c^3 を与える。
- 不等式に a、b、c を掛けるときに、$a, b, c > 0$ であることを述べ忘れる。

STEP のその先へ

最後の不等式は、ミュアヘッドの不等式（Muirhead's inequality）の一例である。これは単項式（monomial）の対称和を比較するための一般的な法則であり、ここでは項 a^2b の和が項 abc の和を上回ることを述べている。小問 (i) は同じ考え方の 2 変数の場合であり、どちらも相加・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）に基づいている。数え上げの議論と余事象（complementary event）についてさらに学びたければ、Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）を参照せよ。

解答例

STEP I 2009、第 13 問

確率・統計 ・ 並べ方と連

> **STEP I 2009、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q13

鍵となる考え方

重要なのは女子の位置だけであり、どの女子・どの男子がどこにいるかは関係ない。そこで $(n+3)!$ 通りの並び方を扱う代わりに、女子が占める 3 つの場所の集合を選ぶことにする。$\binom{n+3}{3}$ 個の集合はどれも等しい確率で現れる。有利な集合を数えるには、まず n 人の男子を一列に並べ、男子の間と両端にある隙間のうちどこに女子が入るかを考えるのがもっとも簡単である。

解答

$(n+3)!$ 通りの並び方はすべて同様に確からしく、女子の位置の 3 つ組の集合はどれも同じ個数 $3!\,n!$ 通りの並び方から生じるので、女子の位置の集合は

$$\binom{n+3}{3} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$$

個の可能な集合の上に一様分布（uniformly distributed）する。以下を通じて、K がとりうる値は 1、2、3 のみである。

一列に並んだ n 人の男子は $n+1$ 個の隙間をつくる（先頭の男子の前に 1 つ、最後の男子の後ろに 1 つ、隣り合う男子の間に $n-1$ 個）：



女子を隙間に入れる（1 つの隙間に何人入れてもよい）と一つの列が得られ、どの列もちょうど 1 通りの方法で得られる。同じ隙間に入った女子どうしは隣り合い、異な

る隙間に入った女子どうしの間には少なくとも 1 人の男子がいる。

小問 (i)

$K = 3$ とは、3 人の女子全員が一つのブロックをなすこと、すなわち全員が同じ隙間に入ることである。隙間の選び方は $n+1$ 通りなので、

$$\mathrm{P}(K=3) = \frac{n+1}{\binom{n+3}{3}} = \frac{6(n+1)}{(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{6}{(n+2)(n+3)}.$$

（同じことだが、連続する 3 つの場所からなるブロックは、位置 $1, 2, \ldots, n+1$ のいずれからでも始めることができる。）

小問 (ii)

$K = 1$ とは、どの 2 人の女子も隣り合わないこと、すなわち女子が 3 つの**異なる**隙間に入ることである。$n+1$ 個の隙間から 3 個を $\binom{n+1}{3}$ 通りの方法で選び、それぞれに女子を 1 人ずつ入れる。したがって

$$\mathrm{P}(K=1) = \frac{\binom{n+1}{3}}{\binom{n+3}{3}} = \frac{(n+1)n(n-1)}{(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)},$$

となり、示すべき式が得られた。（$n = 0$ または 1 のときは隙間が足りないが、この式は正しく 0 を与える。）

考えてみよう 数え上げの結果が $\binom{n+1}{3} \times 3!$ ではなく $\binom{n+1}{3}$ となるのはなぜか。

ここで数えているのは**位置**の集合であって、名前のついた子どもたちの並び方ではない。どの 3 つの隙間を使うかを選べば、女子の位置は完全に決まる。どの女子がどこに座るかは、位置の集合がどれも同様に確からしいという主張の中ですでに考慮されている。

小問 (iii)

まず $\mathrm{P}(K=2)$ が必要である。$K \in \{1,2,3\}$ であるから、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(K=2) &= 1 - \frac{6}{(n+2)(n+3)} - \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{(n^2+5n+6) - 6 - (n^2-n)}{(n+2)(n+3)} = \frac{6n}{(n+2)(n+3)}.\end{aligned}$$

検算として直接数えてみる。$K = 2$ とは、2 人の女子が一つの隙間に入り、3 人目の女子が別の隙間に入ることである。2 人組の隙間を選び、次に 1 人の女子のための別の隙間を選ぶと $(n+1)n$ 個の集合が得られ、$(n+1)n / \binom{n+3}{3} = 6n / \big((n+2)(n+3)\big)$ となって先ほどと一致する。

よって期待値（expectation）は

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(K) &= 1\cdot\frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)} + 2\cdot\frac{6n}{(n+2)(n+3)} + 3\cdot\frac{6}{(n+2)(n+3)}\\ &= \frac{n^2+11n+18}{(n+2)(n+3)} = \frac{(n+2)(n+9)}{(n+2)(n+3)}\\ &= \frac{n+9}{n+3}.\end{aligned}$$

検算

- $n=0$：女子しかいないので確実に $K=3$ であり、$\frac{n+9}{n+3}=3$ である。
- $n=1$：列は GGGB、GGBG、GBGG、BGGG の 4 通りで同様に確からしいので、$K=3$ と 2 がそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で起こり、$\mathrm{E}(K)=\frac{5}{2}=\frac{10}{4}$ である。
- $n\to\infty$ のとき $\mathrm{E}(K)\to 1$ である：男子が多ければ、女子どうしが隣り合うことはほとんどない。
- $n=0,\ldots,9$ について位置の集合をすべて正確な分数で列挙し（たとえば $n=3$ では $\mathrm{P}(K=1,2,3)=\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{5}$、$\mathrm{E}(K)=2$ となる）、$n\le 4$ についてはラベルのついた子どもたちの $(n+3)!$ 通りの並び方をすべて列挙した。結果はすべて一致した。

よくある間違い

- 一つの分数の中で、順序つきの並べ方の個数と位置の集合の個数を混ぜてしまう。標本空間（sample space）を一つ選び、それを使い通すこと。
- 両端の 2 つの隙間を忘れ、$n+1$ 個ではなく $n-1$ 個の隙間を使ってしまう。

STEP のその先へ

「男子が隙間をつくり、女子が隙間に入る」という技法は仕切り法（stars and bars）の考え方であり、ランダムな配列における最長の連（run）という一般的な問題は古典的なものである。長いランダムな列では、最長の連は長さの対数程度の速さで増大する。大学の確率論の講義では、これらを指示変数（indicator variables）や母関数（generating functions）を通して学ぶ。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、このような数え上げの議論が展開される様子を見るのによい本である。

解答例

STEP II 2009、第 1 問

純粋数学 ・ 曲線の対称性

> **STEP II 2009、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q1

鍵となる考え方

ここではほとんど計算を必要としない。対称性（symmetry）がすべてを片づけてくれる。2 つの曲線はどちらも直線 $y = x$ と $y = -x$ に関する鏡映（reflection）で変わらないので、交点（intersection point）を 1 つ求めれば、残りはそれを鏡映して得られる。長方形であることは、4 点の配置からただちに従う。面積については、α と β そのものを求める必要はない。答えに必要なのはそれらのある 1 つの組合せだけであり、それは $\alpha^4 + \beta^4 = u$ と $\alpha\beta = v$ から直接得られる。

解答

対称軸

曲線がある直線に関して対称であるとは、曲線上の任意の点をその直線に関して鏡映した点が、再び曲線上にあることをいう。必要となる 4 つの鏡映は

$$(x,y) \mapsto (-x,y), \quad (x,y) \mapsto (x,-y), \quad (x,y) \mapsto (y,x), \quad (x,y) \mapsto (-y,-x),$$

であり、これらはそれぞれ $x = 0$、$y = 0$、$y = x$、$y = -x$ に関する鏡映である。

曲線 $x^4 + y^4 = u$。4 乗は符号を区別せず、しかも式は x と y について対称なので、式 $x^4 + y^4$ は 4 つの写像のいずれによっても変わらない。よってこの曲線は 4 本の対称軸（line of symmetry）

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad y = x, \qquad y = -x.$$

をもつ。

曲線 $xy = v$。 x と y を入れ替えても xy は変わらず、$(-y)(-x) = xy$ であるから $(x, y) \mapsto (-y, -x)$ でも変わらない。一方、一方の座標だけの符号を変えると xy は $-xy$ に移り、$v > 0$ であるから点 $(-x, y)$ は $xy = -v$ 上にあって、もとの曲線上にはない。よってこの直角双曲線（rectangular hyperbola）の対称軸はちょうど 2 本

$$y = x, \qquad y = -x.$$

である。

4 つの交点

$y = x$ に関する鏡映を S、$y = -x$ に関する鏡映を T とする。どちらも 2 つの曲線をそれぞれ自分自身に移すので、交点を交点に移す。$A = (\alpha, \beta)$ から出発すると

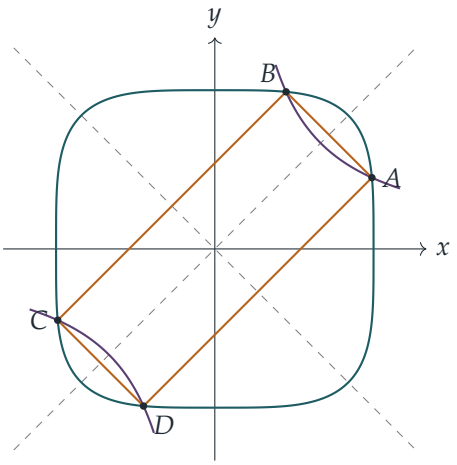
$$S(A) = (\beta, \alpha), \qquad T(A) = (-\beta, -\alpha), \qquad T(S(A)) = (-\alpha, -\beta).$$

を得る。$\alpha > \beta > 0$ であるから、これら 4 点は相異なる。ほかに交点はない。実際、$y = v/x$ を 4 次曲線（quartic）の式に代入すると $x^8 - ux^4 + v^4 = 0$ となり、これは x^4 についての 2 次方程式で正の解は高々 2 個であるから、x の実数値は高々 4 個である。

反時計回りに名前をつけるため、偏角（polar angle）を調べる。$0 < \beta < \alpha$ であるから、点 A の偏角 θ は $0 < \theta < 45°$ を満たす。すると (β, α) の偏角は $90° - \theta$、$(-\alpha, -\beta)$ の偏角は $180° + \theta$、$(-\beta, -\alpha)$ の偏角は $270° - \theta$ である。偏角はこの順に増加するので

$$B = (\beta, \alpha), \qquad C = (-\alpha, -\beta), \qquad D = (-\beta, -\alpha).$$

となる。



（図は $u = 81$、$v = 4$ の場合である。4 次曲線をティール色で、双曲線をプラム色で示している。）

$ABCD$ は長方形である

対角線（diagonal）は AC と BD である。AC の中点（midpoint）は $\left(\frac{\alpha-\alpha}{2}, \frac{\beta-\beta}{2}\right) = (0,0)$ であり、同様に BD の中点も $(0,0)$ である。よって対角線は互いに他を二等分し、$ABCD$ は平行四辺形（parallelogram）である。対角線の長さは

$$AC = \sqrt{(2\alpha)^2 + (2\beta)^2} = 2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \qquad BD = \sqrt{(2\beta)^2 + (2\alpha)^2} = 2\sqrt{\alpha^2+\beta^2},$$

であり、等しい。対角線の長さが等しい平行四辺形は長方形（rectangle）であるから、$ABCD$ は長方形である。

> **考えてみよう** 対角線の長さが等しい平行四辺形は、なぜ長方形でなければならないのか。

4 つの頂点はすべて O から同じ距離 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ にあるので、O を中心とする円周上にあり、AC と BD はその直径である。半円の弧に対する円周角（angle in a semicircle）は直角であるから、$ABCD$ の各角は直角である。直接確かめるなら、$\overrightarrow{AB} = (\beta-\alpha,\ \alpha-\beta)$、$\overrightarrow{BC} = (-\alpha-\beta,\ -\alpha-\beta)$ であり、その内積（scalar product）は

$$-(\beta-\alpha)(\alpha+\beta) - (\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)\big[(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)\big] = 0.$$

となる。

面積

辺の長さは、$\alpha > \beta > 0$ を用いて正の平方根をとると

$$AB = \sqrt{2(\alpha-\beta)^2} = \sqrt{2}\,(\alpha-\beta), \qquad BC = \sqrt{2(\alpha+\beta)^2} = \sqrt{2}\,(\alpha+\beta),$$

である。よって

$$\text{面積} = AB \cdot BC = 2(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = 2(\alpha^2-\beta^2).$$

ここで A が両方の曲線上にあること、すなわち $\alpha^4+\beta^4 = u$ かつ $\alpha\beta = v$ を用いる。すると

$$(\alpha^2-\beta^2)^2 = \alpha^4+\beta^4-2\alpha^2\beta^2 = u-2v^2.$$

$\alpha^2-\beta^2 > 0$ であるから正の平方根をとって

$$\boxed{\text{面積}ABCD = 2\sqrt{u-2v^2}}$$

を得る。これより、4 つの相異なる点があるという問題の仮定から $u > 2v^2$ が必然的に従うこともわかる。$u = 2v^2$ ならば $\alpha = \beta$ となり、2 つの曲線は接するだけである。

$u = 81$、$v = 4$ のとき、$u-2v^2 = 81-32 = 49$ であるから、面積は $2\times 7 = 14$ となり、題意のとおりである。

検算

$u = 81$、$v = 4$ に対して $x^8 - 81x^4 + 256 = 0$ を数値的に解くと、$\alpha \approx 2.9690$、$\beta = 4/\alpha \approx 1.3472$ を得る。このとき $2(\alpha^2 - \beta^2) \approx 14.000$ であり、4 頂点に靴ひも公式（shoelace formula）を適用しても同じ面積が得られる。u が $2v^2$ に向かって減少すると、各象限（quadrant）の 2 点は $y = x$ 上で一致し、長方形はつぶれて線分になる。これは面積 $2\sqrt{u - 2v^2} \to 0$ と合致する。

よくある間違い

- 座標軸を $xy = v$ の対称軸として挙げてしまう。座標軸に関して鏡映すると、第 1 象限の枝は第 2 象限に移るが、そこでは $xy < 0$ である。
- 点の名前を誤った順につけてしまう。たとえば $B = (-\alpha, -\beta)$ とすると、$ABCD$ をたどったときに辺が交差する四角形になる。
- α と β を具体的に求めようとする。面積に必要なのは $\alpha^2 - \beta^2$ だけであり、これは u と v から直接得られる。

STEP のその先へ

$x^4 + y^4 = u$ を保つ 4 つの鏡映と回転は、正方形の対称性の群、すなわち位数 8 の二面体群（dihedral group）をなす。双曲線が保つのはそのうち位数 4 の部分群（subgroup）だけである（2 つの鏡映、半回転（half-turn）、恒等変換（identity））。交点は 2 つの曲線に共通する対称性によって置換される。このように群の作用によって対象を見つけることは、大学 1 年次の群論（group theory）の主題の 1 つである。これらの考え方に触れるには、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）がよい出発点である。

解答例

STEP II 2009、第 2 問

純粋数学 ・ 曲線の概形と近似

STEP II 2009、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/09-s2-q2

鍵となる考え方

$a > 1$ であるから、関数 a^u は u について狭義単調増加（strictly increasing）である。したがって y は、ちょうど $\sin(\pi e^x)$ が最大となるところで最大となり、最小となるところで最小となる。よって曲線の性質はすべて内側の関数（inner function）πe^x から決まる。この関数は一様に増加し続け、x が大きくなるにつれてますます密集していく点で、正弦関数の山と谷を次々に通過していく。面積については、台形の両端の高さがそろっているため、和が対数の差ひとつにまでまとまってしまう。

解答

小問 (i)

対数をとると $\ln y = \ln a \, \sin(\pi e^x)$ である。陰関数として微分（implicit differentiation）すると

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pi \ln a \, e^x \cos(\pi e^x), \qquad \text{よって} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pi \ln a \, e^x \cos(\pi e^x)\, a^{\sin(\pi e^x)}.$$

ここで $\ln a > 0$（$a > 1$ より）、$e^x > 0$、$a^{\sin(\pi e^x)} > 0$ であるから、導関数が 0 となるのはちょうど $\cos(\pi e^x) = 0$ のとき、すなわち πe^x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍のときである。$\pi e^x > 0$ であるから、ありうるのは正の奇数倍だけである：

$$e^x = n + \tfrac{1}{2}, \qquad x = \ln\left(n + \tfrac{1}{2}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

これらの点では $\sin(\pi e^x) = \sin\left((n + \frac{1}{2})\pi\right) = (-1)^n$ となるので、$y = a^{(-1)^n}$ である。停留点（stationary point）は

$$\left(\ln\left(n + \tfrac{1}{2}\right),\, a\right) \ (n \text{ が偶数}), \qquad \left(\ln\left(n + \tfrac{1}{2}\right),\, \tfrac{1}{a}\right) \ (n \text{ が奇数}).$$

前者は極大点 (maximum)、後者は極小点 (minimum) である。a^u は増加関数であるから、すべての x に対して $y \leq a^1 = a$ かつ $y \geq a^{-1}$ が成り立つ。したがって $y = a$ となる点は最大点 (global maximum)、$y = 1/a$ となる点は最小点 (global minimum) である。具体的には、極大点は $x = \ln\frac{1}{2}, \ln\frac{5}{2}, \ln\frac{9}{2}, \ldots$ にあり、極小点は $x = \ln\frac{3}{2}, \ln\frac{7}{2}, \ln\frac{11}{2}, \ldots$ にある。

小問 (ii)

x が小さいとき $\mathrm{e}^x \approx 1 + x$ であるから

$$\sin(\pi \mathrm{e}^x) \approx \sin(\pi + \pi x) = -\sin(\pi x) \approx -\pi x,$$

となる。ここでは $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$ を用い、続いて $t = \pi x$ が小さいことから $\sin t \approx t$ を用いた。よって

$$y \approx a^{-\pi x} = \mathrm{e}^{-\pi x \ln a} \approx 1 - \pi x \ln a,$$

最後の段階では、今度は小さい量 $t = -\pi x \ln a$ に対して再び $\mathrm{e}^t \approx 1 + t$ を用いた。これが求める近似である。曲線は $x = 0$ において傾き $-\pi \ln a$ で直線 $y = 1$ と交わる。

> **考えてみよう** なぜ $\sin t \approx t$ を $\sin(\pi \mathrm{e}^x)$ にそのまま適用できないのだろうか？

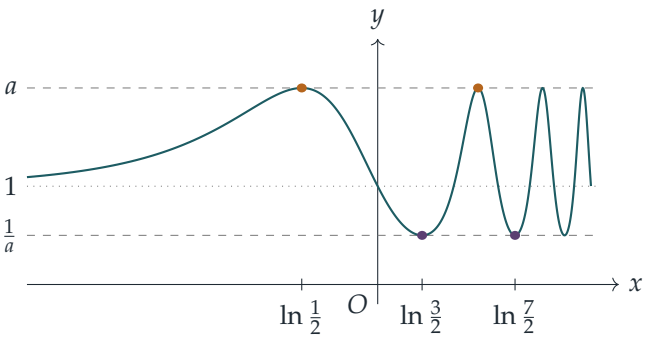
x が小さいとき、$\pi \mathrm{e}^x$ は 0 ではなく π に近いからである。まず $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$ を用いて、小さい量 πx を正弦の引数に移す必要がある。

小問 (iii)

概形に描き込むべき特徴をいくつか挙げる：

- $x \to -\infty$ のとき $\mathrm{e}^x \to 0$ であるから、$\sin(\pi \mathrm{e}^x) \to 0$ となり、$y \to 1$ と上から近づく（$x < \ln\frac{1}{2}$ では $0 < \pi \mathrm{e}^x < \frac{\pi}{2}$ であるから正弦は正であり、$y > 1$ となる）。直線 $y = 1$ は左側の漸近線（asymptote）である。
- 曲線は $x = \ln\frac{1}{2}$ で最初の極大値 a まで上昇し、その後は a と $1/a$ の間を永遠に振動し続け、常に x 軸より上にある。
- 曲線は e^x が正の整数となるところ、すなわち $x = 0, \ln 2, \ln 3, \ldots$ で $y = 1$ と交わり、小問 (ii) より $x = 0$ における傾きは $-\pi \ln a$ である。
- 隣り合う停留点の間隔は $\ln\frac{n+3/2}{n+1/2} \to 0$ であるから、x が増加するにつれて振動はどんどん速くなる。

図は $a = 2$ の場合である。



小問 (iv)

極大点を左から数える。k 番目の極大点は $n = 2(k-1)$ に対応するので、$\mathrm{e}^x = 2k - \frac{3}{2}$ にある。$(k+1)$ 番目の極大点は $\mathrm{e}^x = 2k + \frac{1}{2}$ にあり、その間にただひとつある極小点は $\mathrm{e}^x = 2k - \frac{1}{2}$ にある。

$$x_1 = \ln\left(2k - \tfrac{3}{2}\right), \qquad x_2 = \ln\left(2k - \tfrac{1}{2}\right), \qquad x_3 = \ln\left(2k + \tfrac{1}{2}\right).$$

とおく。(x_1, a) と $(x_2, \frac{1}{a})$、および $(x_2, \frac{1}{a})$ と (x_3, a) をそれぞれ線分で結ぶと、x 軸までの領域は 2 つの台形（trapezium）に分かれ、いずれも平行な辺の長さは a と $\frac{1}{a}$ である。よって面積の近似値は

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\left(a + \tfrac{1}{a}\right)(x_2 - x_1) + \tfrac{1}{2}\left(a + \tfrac{1}{a}\right)(x_3 - x_2) &= \frac{a^2+1}{2a}\,(x_3 - x_1) \\ &= \frac{a^2+1}{2a}\,\ln\frac{2k+\frac{1}{2}}{2k-\frac{3}{2}} = \frac{a^2+1}{2a}\,\ln\frac{k+\frac{1}{4}}{k-\frac{3}{4}}.\end{aligned}$$

最後に $\dfrac{k+\frac{1}{4}}{k-\frac{3}{4}} = 1 + \dfrac{1}{k-\frac{3}{4}}$ であるから、面積は近似的に

$$\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)\ln\left(1 + \left(k - \tfrac{3}{4}\right)^{-1}\right),$$

となり、これが求めるものである。極小点の位置 x_2 が完全に打ち消し合っていることに注意しよう。効いてくるのは 2 つの極大点だけである。

検算

- 数値微分により、$n = 0, \ldots, 7$ に対して $x = \ln(n + \frac{1}{2})$ で $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$ となり、$[-6, \ln 8]$ 上の他の点ではそうならないこと、また $x = 0$ における傾きが $-\pi \ln a$ であること（$a = 2$ のとき、どちらも -2.1776）が確認できる。
- $a = 2$、$k = 1$ のとき公式は $\frac{5}{4}\ln 5 \approx 2.012$ を与える。一方、シンプソンの公式（Simpson's rule）によれば真の面積は 1.954 であり、近似として十分に近い。台形

はわずかに過大評価している。極小点の付近で曲線が弦より下にへこむ量のほうが、極大点の付近で弦より上にふくらむ量よりも大きいからである。

- $k \to \infty$ のとき面積は 0 に近づき、振動の幅がどんどん狭くなることと整合している。

よくある間違い

- 小問 (i) で $\frac{\pi}{2}$ の負の奇数倍まで含めてしまう。πe^x は常に正である。
- 極大点の番号を $k = 1$ ではなく $k = 0$ から数えてしまい、答えが $\ln\left(1 + (k + \frac{1}{4})^{-1}\right)$ にずれる。
- 小問 (ii) で、最後の線形化（linearisation）$e^t \approx 1 + t$ を行わずに $a^{-\pi x}$ で止めてしまう。

STEP のその先へ

小問 (ii) は、より単純な展開を合成することで得られる 1 次のテイラー展開（Taylor expansion）であり、これはまさに大学生が合成関数の展開を扱うときのやり方である。k が大きいとき、1 回の振動あたりの真の面積はおよそ $(x_3 - x_1)$ と、1 周期にわたる $a^{\sin\theta}$ の平均との積になる。この平均を表す積分からは変形ベッセル関数（modified Bessel function）$I_0(\ln a)$ が現れる。これを $\frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ と比較することは、このような曲線に対して台形公式（trapezium rule）がなぜ過大評価になるのかを理解するよい演習である。近似とテイラー（Taylor）の定理の丁寧な扱いについては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照するとよい。

解答例

STEP II 2009、第 3 問

純粋数学 ・ 三角関数の恒等式と無理数

STEP II 2009、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/09-s2-q3

鍵となる考え方

恒等式（identity）$(*)$ は、角 x における既知の正接（tangent）の値を、角 $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$ における正接の値に変換する。この角はおよそ x の半分である。つまり、$(*)$ は半角を生み出す装置としてはたらく。肝心なのは、求めたい角にちょうど行き着くような出発点の角 x を選ぶことである。そのあとは、有理化（rationalising）、展開、平方といった無理数（surd）の計算を丁寧に進めればよい。

解答

$(*)$ の証明

$\theta = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$ とおくと、$x = \frac{1}{2}\pi - 2\theta$ である。このとき

$$\sin x = \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta, \qquad \cos x = \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta.$$

したがって、両辺が定義される範囲（すなわち $\cos x \neq 0$）において

$$\sec x - \tan x = \frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right).$$

$\cos x = 2\sin\theta\cos\theta \neq 0$ より $\sin\theta \neq 0$ が従うので、$\sin\theta$ で約分してよい。以上で $(*)$ が証明された。

小問 (i)

$\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x = \frac{1}{8}\pi$ となるようにしたいので、$x = \frac{1}{4}\pi$ とする。$\sec\frac{1}{4}\pi = \sqrt{2}$、$\tan\frac{1}{4}\pi = 1$ であるから

$$\tan\tfrac{1}{8}\pi = \sqrt{2} - 1.$$

二つ目の結果については、$\frac{11}{24}\pi = \frac{3}{24}\pi + \frac{8}{24}\pi = \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{3}\pi$ であることに注目する。$\tan\frac{1}{3}\pi = \sqrt{3}$ はわかっている。加法定理（addition formula）により

$$\tan\tfrac{11}{24}\pi = \frac{\tan\frac{1}{8}\pi + \tan\frac{1}{3}\pi}{1 - \tan\frac{1}{8}\pi\tan\frac{1}{3}\pi} = \frac{(\sqrt{2}-1)+\sqrt{3}}{1-(\sqrt{2}-1)\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{6}+1},$$

となり、求める結果が得られる。

小問 (ii)

三つの項からなる分母を有理化するよりも、

$$(2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) = \sqrt{3}+\sqrt{2}-1.$$

を示すほうが早い。$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ と $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ を用いて、$\sqrt{3}-\sqrt{6}+1$ に一つ目の括弧の各項を順に掛けると

$$\begin{aligned}
2(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= 2\sqrt{3}-2\sqrt{6}+2,\\
\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= \sqrt{6}-2\sqrt{3}+\sqrt{2},\\
\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= 3-3\sqrt{2}+\sqrt{3},\\
\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= 3\sqrt{2}-6+\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

ここで同類項をまとめる。定数項は $2+3-6=-1$、$\sqrt{2}$ の項は $1-3+3=1$、$\sqrt{3}$ の項は $2-2+1=1$、$\sqrt{6}$ の項は $-2+1+1=0$ となる。合計は $\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$ である。分母 $\sqrt{3}-\sqrt{6}+1 \approx 0.28$ は 0 でないから、これで割ることができて

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{6}+1} = 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}.$$

考えてみよう 最後の小問では、$(*)$ にどの x の値を代入すればよいか。

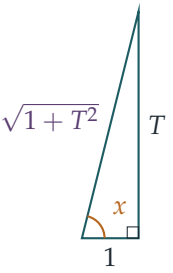
$\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x = \frac{1}{48}\pi$ となる必要があるので、$\frac{1}{2}x = \frac{11}{48}\pi$、すなわち $x = \frac{11}{24}\pi$ である。これはまさに (i) と (ii) で正接の値を求めた角である。

小問 (iii)

$T = \tan\frac{11}{24}\pi = 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ とおく。$x = \frac{11}{24}\pi$ として $(*)$ を用いると

$$\tan\tfrac{1}{48}\pi = \sec\tfrac{11}{24}\pi - T.$$

正割（secant）については $\sec^2 x = 1+\tan^2 x$ が成り立つ。$0 < \frac{11}{24}\pi < \frac{1}{2}\pi$ より余弦は正であるから、正の平方根をとって $\sec\frac{11}{24}\pi = \sqrt{1+T^2}$ となる。下の三角形も同じことを示している。



T を平方すると、四つの項それぞれの平方からは $4+2+3+6=15$ が得られる。異なる項どうしの積（cross terms）からは

$$2\left(2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}+\sqrt{6}+\sqrt{12}+\sqrt{18}\right)=2\left(5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}\right)=10\sqrt{2}+8\sqrt{3}+6\sqrt{6}.$$

が得られる。よって $1+T^2=16+10\sqrt{2}+8\sqrt{3}+6\sqrt{6}$ であり、したがって

$$\tan\tfrac{1}{48}\pi=\sqrt{16+10\sqrt{2}+8\sqrt{3}+6\sqrt{6}}-2-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6},$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

- $\sqrt{2}-1\approx 0.41421$ であり、$\tan 22.5^\circ$ と一致する。
- $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\approx 7.59575$ であり、$\tan 82.5^\circ$ と一致する。(i) の分数も同じ値になる。
- 最終的な式は $\sqrt{57.45\ldots}-7.59575\approx 0.0655435$ であり、$\tan 3.75^\circ\approx 0.0655435$ と一致する。
- $(*)$ の簡単な確認：$x=0$ のとき両辺はともに 1、$x=\frac{1}{3}\pi$ のとき両辺はともに $2-\sqrt{3}=\tan\frac{1}{12}\pi$ となる。

よくある間違い

- $\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}x=\frac{1}{48}\pi$ を解き間違えて、$x=\frac{11}{48}\pi$ を用いてしまう。$\frac{1}{2}$ を払うことを忘れてはならない。
- 四つの項からなる無理数を平方するときに、異なる項どうしの積を書き漏らす。それは全部で六つあり、それぞれ 2 倍される。
- 正の平方根が正しい理由を述べずに $\sec x=\sqrt{1+\tan^2 x}$ とする。

STEP のその先へ

このように角の半分をとることを繰り返すことで、$\tan\frac{\pi}{48}$ のような、二重根号を含む正確な値が組み立てられる。これは、どの正多角形（regular polygon）が定規とコンパス（ruler and compass）で作図できるかという古典的な問題の代数的な側面である。ガウス（Gauss）は、その答えが $\cos\frac{2\pi}{n}$ を平方根だけを用いて表せるかどうかにかかっていることを示し、ガロア理論（Galois theory）はその理由を説明する。この話の言葉である体（field）と体の拡大（field extension）に初めて触れるには、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を読んでみるとよい。

解答例

STEP II 2009、第 4 問

純粋数学 • 多項式の整除性

> **STEP II 2009、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q4

鍵となる考え方

$(x-1)^5$ で割り切れること（divisibility）は、式に書き下して扱うのがよい。すなわち、ある多項式（polynomial）q を用いて $\mathrm{p}(x) = 1 + (x-1)^5\mathrm{q}(x)$ と書くのである。微分すると、$\mathrm{p}(x) - 1$ がもつ重複した因数は、次数が一つ下がった形で $\mathrm{p}'(x)$ にも残ることがわかる。最後の小問では、これによって p' がほぼ完全に決まってしまうので、10 個の未知の係数（coefficient）と格闘するのではなく、p' を積分して p を求める。

解答

$\mathrm{p}(x) - 1$ は $(x-1)^5$ で割り切れ、次数（degree）は 9 であるから、

$$\mathrm{p}(x) = 1 + (x-1)^5\,\mathrm{q}(x),$$

と書ける。ここで q は次数 4 の多項式である。

小問 (i)

$x = 1$ を代入すると第 2 項が消えるので、

$$\mathrm{p}(1) = 1.$$

小問 (ii)

積の微分法（product rule）を用いて微分すると、

$$\begin{aligned} \mathrm{p}'(x) &= 5(x-1)^4\,\mathrm{q}(x) + (x-1)^5\,\mathrm{q}'(x) \\ &= (x-1)^4\big(5\mathrm{q}(x) + (x-1)\mathrm{q}'(x)\big). \end{aligned}$$

括弧の中は多項式であるから、$\mathrm{p}'(x)$ は $(x-1)^4$ で割り切れる。これが示すべきことであった。

小問 (iii)

$x-1$ の代わりに $x+1$ を用いて、まったく同じ議論が成り立つ。すなわち $\mathrm{p}(x) = -1 + (x+1)^5\,\mathrm{r}(x)$ と書けば $\mathrm{p}(-1) = -1$ が得られ、さらに $\mathrm{p}'(x)$ が $(x+1)^4$ で割り切れることがわかる。

したがって、$\mathrm{p}'(x)$ は $(x-1)^4$ でも $(x+1)^4$ でも割り切れる。

考えてみよう なぜこのことから、$\mathrm{p}'(x)$ が積 $(x-1)^4(x+1)^4$ で割り切れるといえるのか？

$\mathrm{p}'(x) = (x-1)^4\mathrm{s}(x)$ と書く。$(x+1)^4$ の根はすべて -1 であり、これは $(x-1)^4$ の根ではないので、因数 $(x+1)^4$ は $\mathrm{s}(x)$ を割り切らなければならない。（同じことであるが、1 次因数 $x+1$ は p' に 4 回現れ、そのどれも $(x-1)^4$ によって使い尽くされることはない。）よって $(x-1)^4(x+1)^4 = (x^2-1)^4$ は $\mathrm{p}'(x)$ を割り切る。

さて、p' の次数は 8 であり、$(x^2-1)^4$ の次数と等しいので、商（quotient）は 0 でない定数である：

$$\mathrm{p}'(x) = k(x^2-1)^4 = k\left(x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1\right).$$

積分すると、

$$\mathrm{p}(x) = k\,\mathrm{F}(x) + c, \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{x^9}{9} - \frac{4x^7}{7} + \frac{6x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + x.$$

F は奇関数（odd function）であるから、$\mathrm{F}(-1) = -\mathrm{F}(1)$ であることに注意する。既知の二つの値から

$$k\mathrm{F}(1) + c = \mathrm{p}(1) = 1, \qquad -k\mathrm{F}(1) + c = \mathrm{p}(-1) = -1.$$

辺々を加えると $c = 0$、引くと $k\mathrm{F}(1) = 1$ を得る。分母を 315 にそろえると、

$$\mathrm{F}(1) = \frac{35 - 180 + 378 - 420 + 315}{315} = \frac{128}{315}, \qquad \text{よって} \qquad k = \frac{315}{128}.$$

したがって

$$\mathrm{p}(x) = \frac{1}{128}\left(35x^9 - 180x^7 + 378x^5 - 420x^3 + 315x\right).$$

ここまでで示したのは、条件を満たす p があるとすれば必ずこの形になるということだけなので、この多項式が実際に条件を満たすことも確かめておくべきである。次数は 9 である。また $\mathrm{p}(1) - 1 = 0$ であり、$\mathrm{p}'(x) = \frac{315}{128}(x-1)^4(x+1)^4$ であるから、$\mathrm{p}(x) - 1$ の 1 階から 4 階までの導関数はすべて $x = 1$ で 0 となる。ゆえに $x = 1$ は $\mathrm{p}(x) - 1$ の重複度（multiplicity）5 以上の根であり、すなわち $(x-1)^5$ は $\mathrm{p}(x) - 1$ を割り切る。p は奇関数であるから、$\mathrm{p}(x) + 1 = -\big(\mathrm{p}(-x) - 1\big)$ であり、これは $(-x-1)^5 = -(x+1)^5$ で割り切れる。よって両方の条件が成り立ち、この p がただ一つの答えである。

検算

- 係数 $35, -180, 378, -420, 315$ の和は 128 であり、$\mathrm{p}(1) = 1$ が確かめられる。
- $\mathrm{p}(x) - 1$ を分数のまま正確に $x - 1$ で繰り返し割ると、ちょうど 5 回まで余りなく割り切れる。$\mathrm{p}(x) + 1$ を $x + 1$ で割る場合も同様である。
- p は奇関数であり、そうでなければならない。なぜなら、p が条件を満たすならば $-\mathrm{p}(-x)$ も条件を満たし、しかも答えはただ一つだからである。

よくある間違い

- 10 元の連立方程式（simultaneous equations）から p の 10 個の係数をすべて直接求めようとすること。原理的には可能だが、p' を積分するほうがはるかに速い。
- 積分定数（constant of integration）を忘れること、あるいは積分定数と k を決めるのに $\mathrm{p}(1) = 1$ と $\mathrm{p}(-1) = -1$ の両方を使わないこと。

STEP のその先へ

小問 (ii) の背後にある事実は、a が f の重複度 m の根であることと $\mathrm{f}(a) = \mathrm{f}'(a) = \cdots = \mathrm{f}^{(m-1)}(a) = 0$ が成り立つことが同値である、というものである。このように各点で値と導関数の値を指定することを**エルミート補間**（Hermite interpolation）といい、ここで求めた多項式は「スムーズステップ」（smoothstep）曲線と呼ばれる。これは両端でできるだけ平らになりながら -1 から 1 まで増加する曲線で、コンピュータグラフィックスで用いられている。互いに素（coprime）な因数がともに割り切るならその積も割り切る、という議論は環論（ring theory）の一部である。体（field）上の多項式は、整数とまったく同じように一意分解（unique factorisation）をもつのである。さらに

知りたければ、Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を参照されたい。

解答例

STEP II 2009、第 5 問

純粋数学 ・ 二重根号

STEP II 2009、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/09-s2-q5

鍵となる考え方

冒頭の展開こそが、形を変えた問題全体である。それは $x+2\sqrt{x-1}$ が完全平方（perfect square）であることを教えてくれ、同じ手法で $x-2\sqrt{x-1}$ もまた完全平方であることがわかる。入れ子になった根号をほどいてしまえば、どの被積分関数（integrand）も初等的なものに帰着する。ただ一つ注意すべきは $\sqrt{a^2}=|a|$ であって a ではないという点であり、したがって符号に気を配らなければならない。まさにこの点が小問 (ii) を面白くしている。

解答

展開

$x \geq 1$ に対して、

$$(\sqrt{x-1}+1)^2 = (x-1)+2\sqrt{x-1}+1 = x+2\sqrt{x-1}.$$

同様にして $(\sqrt{x-1}-1)^2 = x-2\sqrt{x-1}$ である。負でない平方根をとり、$\sqrt{a^2}=|a|$ であることに注意すると、

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}+1, \qquad \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \left|\sqrt{x-1}-1\right|.$$

前者は $\sqrt{x-1}+1>0$ であるから絶対値（modulus）を必要としない。後者は必要である。$\sqrt{x-1}-1$ は $1 \leq x < 2$ で負、$x \geq 2$ で非負となるからである。

小問 (i)

$[5,10]$ 上では $\sqrt{x-1} \geq 2 > 1$ であるから、$\left|\sqrt{x-1}-1\right| = \sqrt{x-1}-1$ である。したがって分子は

$$(\sqrt{x-1}+1)+(\sqrt{x-1}-1) = 2\sqrt{x-1},$$

となり、被積分関数は単に 2 である。ゆえに

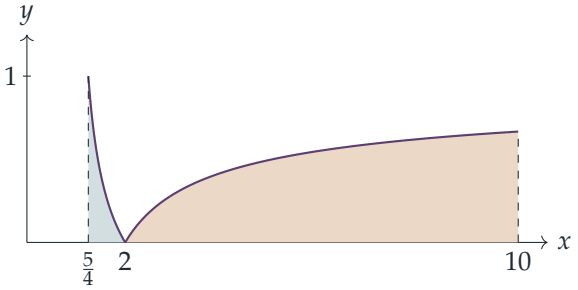
$$\int_5^{10} \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \int_5^{10} 2\,\mathrm{d}x = 10.$$

小問 (ii)

上の展開により、

$$y = \frac{\left|\sqrt{x-1}-1\right|}{\sqrt{x-1}} = \left|1-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right|.$$

よって全体で $y \geq 0$ であり、曲線は $\sqrt{x-1}=1$ となる $x=2$ で x 軸に接する。



考えてみよう なぜ根号をそのまま外して、範囲全体で $1-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ を積分してはいけないのだろうか？

$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ は決して負にならないが、$\sqrt{x-1}-1$ は $x<2$ で負になるからである。絶対値を無視すると、$[\frac{5}{4},2]$ 上の部分を負の面積として数えてしまう。そこで $x=2$ で区間を分ける。

$[\frac{5}{4},2]$ 上では $\sqrt{x-1} \leq 1$ であるから $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-1$ となり、

$$\int_{5/4}^{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}-1\right)\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x-1}-x\right]_{5/4}^{2} = (2-2)-\left(1-\tfrac{5}{4}\right) = \tfrac{1}{4}.$$

$[2,10]$ 上では $\sqrt{x-1} \geq 1$ であるから $y = 1-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ となり、

$$\int_{2}^{10}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)\mathrm{d}x = \left[x-2\sqrt{x-1}\right]_{2}^{10} = (10-6)-(2-2) = 4.$$

したがって面積の合計は $\frac{1}{4}+4 = \frac{17}{4}$ である。

小問 (iii)

分子の二つ目の根号は形が異なるが、$x-1$ の代わりに $x+1$ を用いれば同じ手法が使える。

$$\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2 = (x+1) - 2\sqrt{x+1} + 1 = x - 2\sqrt{x+1} + 2.$$

$x \geq \frac{5}{4}$ では $\sqrt{x+1} > 1$ であるから、$\sqrt{x-2\sqrt{x+1}+2} = \sqrt{x+1}-1$ となり、絶対値は必要ない。$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}$ と書くと（$x>1$ では両因数とも正なので正しい）、被積分関数は

$$\frac{(\sqrt{x-1}+1)+(\sqrt{x+1}-1)}{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

となる。二つの ± 1 の項が打ち消し合うのであり、これこそが少し奇妙に見える分子の狙いである。ゆえに

$$\begin{aligned}\int_{5/4}^{10}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)\mathrm{d}x &= \left[2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-1}\right]_{5/4}^{10} \\ &= \left(2\sqrt{11}+6\right) - \left(3+1\right) \\ &= 2\sqrt{11}+2,\end{aligned}$$

ここで下端では $\sqrt{9/4} = \frac{3}{2}$ と $\sqrt{1/4} = \frac{1}{2}$ を用いた。

検算

- $x=5$ では $\sqrt{5+4}=3$、$\sqrt{5-4}=1$ であるから、(i) の被積分関数は $(3+1)/2 = 2$ となり、主張どおりである。
- (ii) において、$x=\frac{5}{4}$ での曲線の高さは $|1-2|=1$、$x=10$ での高さは $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ であり、概形図と一致する。最初の部分は面積 $\frac{1}{4}$ の細い領域であり、妥当である。
- 元の被積分関数にシンプソン（Simpson）の公式（Simpson's rule）を適用すると 10.000、4.250、8.6332 が得られ、10、$\frac{17}{4}$、$2\sqrt{11}+2 \approx 8.6332$ と一致する。

よくある間違い

- すべての x に対して $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}-1$ と書いてしまう。(ii) ではこれにより $\frac{17}{4}$ ではなく $4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$ が得られてしまう。
- (iii) において、$x-2\sqrt{x+1}+2$ もまた完全平方であることに気づかず、代わりに置換積分を試みてしまう。

STEP のその先へ

恒等式 $\sqrt{a^2} = |a|$ は、解析学（analysis）における大きなテーマの小さな一例である。式で定義された関数には角や符号の変化が隠れていることがあり、式を積分する前に、それがどこで符号を変えるかを調べなければならない。また、$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}$ のような二重根号を外すこと（denesting radicals）には、体の拡大（field extensions）と結びついた、意外なほど深い代数的理論がある。解析学の側面については、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）が次の一歩としてよい。

解答例

STEP II 2009、第 6 問

純粋数学 ・ 無限級数の評価

> **STEP II 2009、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q6

鍵となる考え方

$\sum 1/F_i$ を正確に求めることはできないが、挟み込むことはできる。漸化式（recurrence）からは、二つの簡単な比較が得られる。各フィボナッチ数（Fibonacci number）は直前の項の 2 倍より小さく、二つ前の項の 2 倍より大きい。前者の比較により、級数（series）の残りの部分（tail）は等比級数（geometric series）で下から評価される。後者の比較により、残りの部分はそれ自身をずらしたものと結びつき、上から評価される。どちらの評価を使う前にも、最初のいくつかの項を正確に足しておけば、評価は望むだけ精密になる。

解答

隣り合う二項を順に足していくと

$$F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \quad F_6 = 8, \quad F_7 = 13, \quad F_8 = 21, \quad F_9 = 34, \quad F_{10} = 55.$$

を得る。すべての F_n は正であり、$n \geq 2$ のとき $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} > F_n$ であるから、この数列は F_2 以降で狭義単調増加である。

級数は収束する。 $i - 2 \geq 2$ のとき $F_{i-1} > F_{i-2}$ であるから、$i \geq 4$ に対して $F_i = F_{i-1} + F_{i-2} > 2F_{i-2}$ が成り立つ。$F_1 = 1 \geq 2^{-1/2}$、$F_2 = 1 \geq 2^0$、さらに $F_3 = 2 \geq 2^{1/2}$ であるから、二つずつ進む数学的帰納法（induction）により、すべての i に対して $F_i \geq 2^{(i-2)/2}$ が得られる。したがって $0 < 1/F_i \leq (1/\sqrt{2})^{i-2}$ であり、公比 $1/\sqrt{2} < 1$ の等比級数との比較により S は収束（converge）する。これにより、以下の和を自由に操作してよい。また、次の事実を繰り返し用いる。収束する級数について、すべて

の i で $a_i \le b_i$ であり、かつ少なくとも一つの i で $a_i < b_i$ ならば、$\sum a_i < \sum b_i$ である。

小問 (i)

下からの評価。 $i \ge 4$ のとき $F_{i-2} < F_{i-1}$ であるから

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2} < 2F_{i-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{F_i} > \frac{1}{2F_{i-1}} \qquad (i \ge 4),$$

となり、これが最初の結果である。($i = 3$ では $F_3 = 2F_2$ と等号が成り立つ。不等式が $i = 4$ から始まるのはこのためである。)

これを繰り返し用いると、$i \ge 4$ に対して

$$\frac{1}{F_i} > \frac{1}{2F_{i-1}} > \frac{1}{2^2F_{i-2}} > \cdots > \frac{1}{2^{i-3}F_3} = \frac{1}{2^{i-2}}.$$

$i \ge 4$ について和をとると

$$\sum_{i=4}^{\infty} \frac{1}{F_i} > \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{2},$$

よって

$$S = 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \sum_{i=4}^{\infty} \frac{1}{F_i} > \tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{2} = 3.$$

上からの評価。 今度はもう一方の比較を用いる。上で示した $F_i > 2F_{i-2}$ より、$i \ge 4$ に対して $1/F_i < 1/(2F_{i-2})$ である。これを $i = 5$ 以降のすべての項に適用し、$j = i - 2$ とおくと

$$\sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{F_i} < \frac{1}{2} \sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{F_{i-2}} = \frac{1}{2} \sum_{j=3}^{\infty} \frac{1}{F_j} = \frac{1}{2}(S - 2).$$

左辺は S から最初の 4 項 $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{17}{6}$ を引いたものである。ゆえに

$$S - \tfrac{17}{6} < \tfrac{1}{2}S - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \tfrac{1}{2}S < \tfrac{11}{6} \qquad \Longrightarrow \qquad S < \tfrac{11}{3} = 3\tfrac{2}{3}.$$

考えてみよう 上からの評価の比較を、$i = 4$ ではなく $i = 5$ から始めるのはなぜか。

$i = 4$ から始めても議論は成り立つが、$S - \frac{5}{2} < \frac{1}{2}(S - 1)$、すなわち $S < 4$ しか得られず、これでは不十分である。評価する前に正確に足しておく項が多いほど、係数 $\frac{1}{2}$ による損失は小さくなる。この考え方が小問 (ii) の原動力となる。

小問 (ii)

部分和（partial sum）を $S_k = \sum_{i=1}^{k} 1/F_i$、残りの部分を $T_k = \sum_{i=k}^{\infty} 1/F_i$ と書くと、$S = S_{k-1} + T_k$ である。小問 (i) では二つの一般的な評価を用いたが、どちらも $k \geq 3$ で成り立つ。

下から：先ほどとまったく同様に、$i > k$ に対して $1/F_i > 1/(2^{i-k}F_k)$ であるから

$$T_{k+1} > \frac{1}{F_k}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots\right) = \frac{1}{F_k}, \qquad \text{よって} \qquad S > S_k + \frac{1}{F_k}.$$

上から：$i \geq k+2 \geq 5$ に対する $1/F_i < 1/(2F_{i-2})$ から $T_{k+2} < \frac{1}{2}T_k$ が得られ、また $T_{k+2} = T_k - \frac{1}{F_k} - \frac{1}{F_{k+1}}$ であるから

$$T_k < 2\left(\frac{1}{F_k} + \frac{1}{F_{k+1}}\right), \qquad \text{よって} \qquad S < S_{k-1} + 2\left(\frac{1}{F_k} + \frac{1}{F_{k+1}}\right).$$

$k = 3$ とすると、これらは小問 (i) の評価 3 と $3\frac{2}{3}$ になる。そこで、両方で $k = 5$ とする。

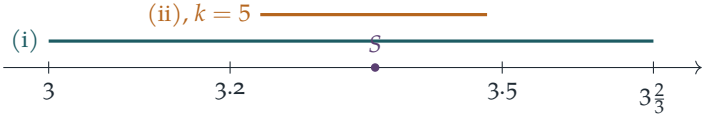
下からの評価については、$S_5 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{91}{30}$ であるから

$$S > \frac{91}{30} + \frac{1}{5} = \frac{97}{30} > \frac{96}{30} = 3.2.$$

上からの評価については、$S_4 = \frac{17}{6}$、$F_5 = 5$、$F_6 = 8$ であるから

$$S < \frac{17}{6} + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8}\right) = \frac{17}{6} + \frac{13}{20} = \frac{170 + 39}{60} = \frac{209}{60} < \frac{210}{60} = 3.5.$$

以上を合わせると、求める $3.2 < S < 3.5$ が得られる。（$k = 4$ では不十分である。得られるのは $\frac{19}{6} < S < \frac{107}{30}$、すなわちおよそ $3.17 < S < 3.57$ にすぎない。）



検算

- 最初の 200 項を数値的に足し合わせると $S \approx 3.35989$ となる。これは両方の区間に含まれ、$k = 3, \ldots, 6$ に対する評価はすべてこの値を挟んでいる：$3 < \frac{19}{6} < \frac{97}{30} < \frac{197}{60} < S < \frac{2681}{780} < \frac{209}{60} < \frac{107}{30} < \frac{11}{3}$。
- 比較を実際の値で確かめる：$F_7 = 13 < 2 \times 8$ かつ $13 > 2 \times 5$。

よくある間違い

- 等号が成り立つ $i = 3$ で $1/F_i > 1/(2F_{i-1})$ を使ってしまう。これにより不等号の狭義性が崩れたり、誤った等比級数の和が得られたりする。
- 級数が収束することを先に確かめずに、S を数として操作する（「$S - \frac{17}{6} < \frac{1}{2}S - 1$」）。
- $i = 4$ から始めた比較では $S < 4$ しか得られないため、上からの評価をあきらめてしまう。評価する前に、さらに多くの項を正確に足すこと。

STEP のその先へ

この値 $S \approx 3.3598856\ldots$ は**逆数フィボナッチ定数**（reciprocal Fibonacci constant）と呼ばれる。これが無理数（irrational）であることは知られている（André-Jeannin による 1989 年の結果）が、閉じた形（closed form）は知られていない。ここでの比較は、形を変えた比判定法（ratio test）である。F_{i+1}/F_i は黄金比（golden ratio）$\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ に収束するので、残りの部分は公比 $1/\varphi \approx 0.618$ の等比級数のように振る舞う。この公比は、我々が用いた粗い比 $\frac{1}{2}$ と $1/\sqrt{2}$ の間にある。このような比較判定法（comparison test）や残りの部分の評価は、解析学（analysis）の最初の講義の中核をなす。Abbott の *Understanding Analysis* は、これらをきちんと学ぶのに最適な一冊である。

解答例

STEP II 2009、第 7 問

純粋数学 ・ 形を見抜く積分

> **STEP II 2009、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q7

鍵となる考え方

このような積分は一見手の施しようがないように見えるが、それらが何かの導関数（derivative）にちょうど一致していることに気づけば話は変わる。最初の結果は、$(x-a)^n e^{bx}\sqrt{1+x^2}$ の導関数がどのような形になるかを教えてくれる。すなわち、$(x-a)$ の累乗、指数関数、3 次式の積を $\sqrt{1+x^2}$ で割った形である。したがって、各積分は実のところ照合の練習問題である。n、a、b を読み取り、3 次式が一致することを確かめればよい。分子の多項式が 3 次式ではなく 4 次式である場合には、余分な次数がどこから来るのかを突き止めなければならない。

解答

導関数

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{1+x^2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ を用いて、3 つの因子の積を微分する。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= n(x-a)^{n-1}e^{bx}\sqrt{1+x^2} + b(x-a)^n e^{bx}\sqrt{1+x^2} + (x-a)^n e^{bx}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{(x-a)^{n-1}e^{bx}}{\sqrt{1+x^2}}\Big[n(1+x^2) + b(x-a)(1+x^2) + x(x-a)\Big],\end{aligned}$$

ここでは共通因数 $(x-a)^{n-1}e^{bx}/\sqrt{1+x^2}$ をくくり出した（最初の 2 項には $\sqrt{1+x^2}$ を掛けて分母をそろえている）。かっこの中を展開すると、

$$q(x) = bx^3 + (n+1-ab)x^2 + (b-a)x + (n-ab).$$

$b \neq 0$ であるから x^3 の係数は 0 でなく、q は確かに 3 次式である。これで求める結果が得られた。以下ではこれを次の形で用いる。

$$\int \frac{(x-a)^{n-1}\mathrm{e}^{bx}\,q(x)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = (x-a)^n\mathrm{e}^{bx}\sqrt{1+x^2} + C. \qquad (*)$$

小問 (i)

因子を照合すると、$a=4$、$b=4$、$n-1=14$ すなわち $n=15$ でなければならない。これらの値に対して

$$q(x) = 4x^3 + (16-16)x^2 + (4-4)x + (15-16) = 4x^3 - 1,$$

となり、これは被積分関数（integrand）の 3 次式にちょうど一致する。よって $(*)$ より

$$\int \frac{(x-4)^{14}\mathrm{e}^{4x}(4x^3-1)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = (x-4)^{15}\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2} + C.$$

小問 (ii)

今度は多項式が 4 次式なので、そのまま q になることはありえない。

> **考えてみよう** 3 次式しか生み出さない公式に、4 次式をどうすれば当てはめられるだろうか？

$(*)$ における $(x-a)$ の累乗は自由に選べる。4 次式が因数 $(x-1)$ をもつならば、それを移して $(x-1)^{21}$ と合わせることができ、残りは 3 次式になる。$x=1$ を代入して確かめると $12-1-11=0$ であるから、$(x-1)$ は確かに因数であり、割り算を行うと

$$12x^4 - x^2 - 11 = (x-1)(12x^3 + 12x^2 + 11x + 11).$$

（これは $(x^2-1)(12x^2+11)$ と見抜くこともできる。）したがって被積分関数は

$$\frac{(x-1)^{22}\mathrm{e}^{12x}(12x^3+12x^2+11x+11)}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$a=1$、$b=12$、$n=23$ とおくと、

$$q(x) = 12x^3 + (24-12)x^2 + (12-1)x + (23-12) = 12x^3 + 12x^2 + 11x + 11,$$

となり一致する。ゆえに

$$\int \frac{(x-1)^{21}\mathrm{e}^{12x}(12x^4-x^2-11)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = (x-1)^{23}\mathrm{e}^{12x}\sqrt{1+x^2} + C.$$

小問 (iii)

ここでも多項式は 4 次式であるが、今回は $x=2$ とすると $64+8-2=70\neq 0$ となるので、$(x-2)$ は因数ではなく、(ii) の工夫は使えない。

> **考えてみよう** $(x-2)$ が因数でないならば、余分な次数はどこから来るのだろうか？

次数を数えてみよう。被積分関数の分子の次数は $6+4=10$ であるが、$(x-2)^6$ に対する $(*)$ では次数は $6+3=9$ にしかならない。答えに余分な因子 x があれば次数が 1 つ上がるので、$a=2$、$b=4$、$n=7$ に対応する関数を y として、xy を微分してみる。

$$y=(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2},\qquad q(x)=4x^3+(8-8)x^2+(4-2)x+(7-8)=4x^3+2x-1.$$

積の微分法（product rule）より $(xy)'=y+xy'$ である。y も分母 $\sqrt{1+x^2}$ の形に直すと、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xy)&=\frac{(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x(x-2)^6\mathrm{e}^{4x}(4x^3+2x-1)}{\sqrt{1+x^2}}\\&=\frac{(x-2)^6\mathrm{e}^{4x}}{\sqrt{1+x^2}}\Big[(x-2)(1+x^2)+4x^4+2x^2-x\Big].\end{aligned}$$

$(x-2)(1+x^2)=x^3-2x^2+x-2$ であるから、かっこの中は

$$x^3-2x^2+x-2+4x^4+2x^2-x=4x^4+x^3-2,$$

となり、求める 4 次式にちょうど一致する。したがって

$$\int\frac{(x-2)^6\mathrm{e}^{4x}(4x^4+x^3-2)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=x(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2}+C.$$

検算

- 各答えを微分して比較する。これが決定的な確認方法であり、いずれの場合もそれは $(*)$ そのものである（(iii) ではこれに積の微分法が加わる）。
- 手早い次数の確認：（平方根と指数関数を無視して）多項式としての次数が d の答えを微分すると、分子の次数は $d+2$ になる。(i) では $15+2=14+3$、(ii) では $23+2=21+4$、(iii) では $8+2=6+4$ である。
- 数値的には、(iii) の積分を区間 $[-1,\,1.2]$ でシンプソンの公式（Simpson's rule）により計算すると $-104.41424\ldots$ となり、$F(x)=x(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2}$ に対する $F(1.2)-F(-1)$ と有効数字約 13 桁まで一致する。(i) と (ii) も同様によく一致する。

よくある間違い

- n が被積分関数における累乗の指数より 1 大きいことを忘れる。(i) の答えには $(x-4)^{14}$ ではなく $(x-4)^{15}$ が現れる。
- (ii) で、まず因数 $(x-1)$ を取り込むことをせずに 4 次式を直接照合しようとし、解がないと結論してしまう。
- 積分定数（constant of integration）を書き忘れる。

STEP のその先へ

ここで用いた方法は「見抜いて積分する」方法（integration by recognition）である。すなわち、原始関数（antiderivative）の形を推測し、それを微分して係数を比較する。これをアルゴリズムにしたものがリッシュのアルゴリズム（Risch algorithm）であり、数式処理システムは、初等関数が初等的な原始関数をもつかどうかを判定し、もつ場合にはそれを求めるのにこのアルゴリズムを用いている。関連する考え方として、未知の係数を含む所定の形の解を推測する方法は、線形微分方程式に対する未定係数法（method of undetermined coefficients）であり、Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）で扱われている。STEP 風の積分問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）を参照するとよい。

解答例

STEP II 2009、第 8 問

純粋数学 ・ ベクトルと図形

> **STEP II 2009、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q8

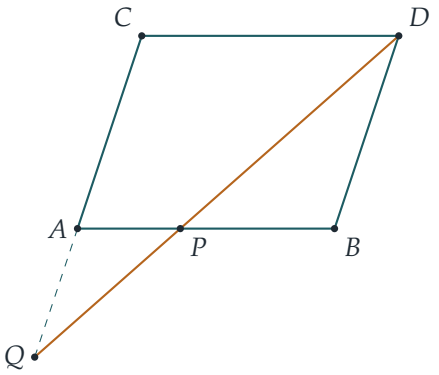
鍵となる考え方

それぞれの定義を「ある点から出発し、辺の何倍かだけ進む」という形に書き直す。すると $\mathbf{p}-\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ および $\mathbf{q}-\mathbf{c}=\mu(\mathbf{a}-\mathbf{c})$ となるので、長さ BP と CQ は単に $\lambda\,AB$ と $\mu\,AC$ であり、長さの条件はきわめて簡単な方程式になる。3 点が同一直線上にある（collinear）ことを示すには、それらを結ぶベクトルのうち 2 つが平行であることを示せばよい。

解答

図

$0<\lambda<1$ として $\mathbf{p}=\mathbf{b}+\lambda(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ であるから、点 P は線分（segment）AB 上の、A と B の間（端点を除く）にある。$\mu>1$ として $\mathbf{q}=\mathbf{c}+\mu(\mathbf{a}-\mathbf{c})$ であるから、点 Q は直線 CA 上の、A を越えた側にある。つまり C から出発して A へ向かい、そのまま進み続けた位置である。図（$\lambda=0.6$ として描いた）には、後で登場する点 D も示してある。



μ を求める

上の書き直しから、

$$BP = |\mathbf{p}-\mathbf{b}| = \lambda|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = \lambda\, AB, \qquad CQ = |\mathbf{q}-\mathbf{c}| = \mu|\mathbf{a}-\mathbf{c}| = \mu\, AC,$$

である。ここで $\lambda > 0$ と $\mu > 0$ を用いて、これらを絶対値の外に出した。条件 $CQ \times BP = AB \times AC$ は $\lambda\mu\, AB \cdot AC = AB \cdot AC$ となる。A, B, C は相異なるので $AB \cdot AC \neq 0$ であり、したがって

$$\mu = \frac{1}{\lambda}.$$

$0 < \lambda < 1$ であるから、これは確かに $\mu > 1$ を満たす。

定点 D

$\mathbf{d} = -\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ とおく。$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PD}$ を比較する。まず、

$$\begin{aligned}\mathbf{d} - \mathbf{p} &= -\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - \lambda\mathbf{a} - (1-\lambda)\mathbf{b} \\ &= -(1+\lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} + \mathbf{c}.\end{aligned}$$

次に、$\mu = 1/\lambda$ を用いると、

$$\begin{aligned}\mathbf{q} - \mathbf{p} &= \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right)\mathbf{a} + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\mathbf{c} - (1-\lambda)\mathbf{b} \\ &= \frac{1-\lambda}{\lambda}\Big[(1+\lambda)\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b} - \mathbf{c}\Big],\end{aligned}$$

となる。ここで $\frac{1}{\lambda} - \lambda = \frac{(1-\lambda)(1+\lambda)}{\lambda}$ と $1 - \frac{1}{\lambda} = -\frac{1-\lambda}{\lambda}$ を用いた。

? **考えてみよう**　この 2 つのベクトルが平行であることは、どうすればわかるだろうか。

括弧の中身はちょうど $-(\mathbf{d}-\mathbf{p})$ である。よって

$$\mathbf{q}-\mathbf{p}=-\frac{1-\lambda}{\lambda}(\mathbf{d}-\mathbf{p}),\qquad \text{すなわち}\qquad \mathbf{d}=\mathbf{p}-\frac{\lambda}{1-\lambda}(\mathbf{q}-\mathbf{p}).$$

$\lambda\neq 1$ であるからこの係数は有限であり、また Q は直線 AB 上にないので $\mathbf{q}\neq\mathbf{p}$ である。したがって D は直線 PQ 上にある。ベクトル $\mathbf{d}$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ だけで表されるので、これはすべての λ に対して同じ点であり、示すべきことが示された。係数 $-\lambda/(1-\lambda)$ は負であるから、図のとおり P は Q と D の間にある。

四角形 $ABDC$

$$\mathbf{d}-\mathbf{c}=\mathbf{b}-\mathbf{a}\quad\text{かつ}\quad\mathbf{d}-\mathbf{b}=\mathbf{c}-\mathbf{a},$$

であるから、$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$ かつ $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$ である。向かい合う辺が等しくかつ平行なので、$ABDC$ は**平行四辺形**（parallelogram）であり、D は A の対頂点である。（A, B, C は同一直線上にないので、これは退化（degenerate）していない。）

検算

- 幾何的な照合：$BD \parallel AC$ より三角形 PAQ と PBD は相似（similar）であるから、$AQ/BD = AP/BP$ である。ここで $AQ=(\mu-1)AC$、$BD=AC$、$AP=(1-\lambda)AB$、$BP=\lambda AB$ であるから $\mu-1=(1-\lambda)/\lambda$ となり、やはり $\mu=1/\lambda$ を得る。
- $A=(0,0)$、$B=(4,0)$、$C=(1,3)$、$\lambda=0.6$（図の場合）とすると、$P=(1.6,0)$、$Q=(-\frac{2}{3},-2)$、$D=(5,3)$ を得る。QP と PD の傾き（gradient）はいずれも $\frac{15}{17}$ である。
- さらに、3 次元空間内のランダムな三角形 20,000 個で検証した。長さの条件を μ について数値的に解いたところ、すべての場合で 10^{-13} の精度で $1/\lambda$ と一致し、P, Q, D は同一直線上にあった。

よくある間違い

- $BP=(1-\lambda)AB$ と書いてしまうこと。$\mathbf{p}$ における $\mathbf{b}$ の係数は $1-\lambda$ であるが、B からの距離を測るのは A にかかる重みのほうである。
- 頂点の順序を確かめずに $ABDC$ を「平行四辺形」と呼ぶこと。ここでは $A\to B\to D\to C$ の順であり、AD と BC が対角線である。

STEP のその先へ

$\lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}$ のように係数の和が 1 になる式を**アフィン結合**（affine combinations）という。これは（ベクトルではなく）点を扱うための自然な言葉であり、同一直線上にあるという性質はアフィンな性質である。すなわち、原点の選び方に依存しない。ここから重心座標（barycentric coordinates）や、直線が三角形の 3 辺（またはその延長）とどのようなときに交わるかを正確に記述するメネラウスの定理（Menelaus' theorem）のような古典的な結果へとつながっていく。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）はベクトルの側面を展開しており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には STEP 形式のベクトル幾何の問題がさらに収められている。

解答例

STEP II 2009、第 9 問

力学 ・ 質量中心

> **STEP II 2009、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q9

鍵となる考え方

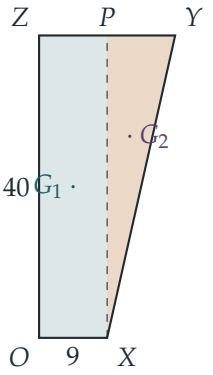
必要な距離はすべて、ある一つの固定された平面に垂直な方向に測られる。小問 (i) では辺 OZ、小問 (ii) では OZ を含むタンクの背面である。したがって、必要な座標は一つだけである。各図形を、重心（centre of mass）がわかっている部分（長方形と三角形）に分け、その直線または平面のまわりのモーメント（moment）をとり、全質量で割ればよい。タンクの場合も、一段上の同じ計算である。部分は板金でできた二枚の台形（trapezium）と三枚の長方形であり、さらにそこに液体の塊が加わる。

解答

小問 (i)

O を原点とし、x 軸を OX に沿って、y 軸を OZ に沿ってとる。すると $X = (9,0)$、$Z = (0,40)$ であり、YZ は OX に平行で長さが 18 であるから $Y = (18,40)$ である。確認として、$XY^2 = 9^2 + 40^2 = 1681 = 41^2$ となり、確かに正しい。OZ からの距離はちょうど x 座標である。

X から OZ に平行な直線を引き、ZY との交点を $P = (9,40)$ とする。これにより薄板（lamina）は長方形 $OXPZ$ と直角三角形 XYP に分けられる。



薄板の質量を cm^2 あたり 1 とし、質量と面積が等しくなるようにする。

- 長方形 $OXPZ$：面積は $9 \times 40 = 360$、重心 G_1 は $x = 4.5$ にある。
- 三角形 XYP：面積は $\frac{1}{2} \times 9 \times 40 = 180$。一様な三角形の重心は頂点の平均の位置にあるので、G_2 は $x = \frac{1}{3}(9 + 18 + 9) = 12$ にある。

薄板全体の面積は 540 である。OZ のまわりのモーメントをとると

$$540\,\bar{x} = 360 \times 4.5 + 180 \times 12 = 1620 + 2160 = 3780,$$

となるので、$\bar{x} = 7$ である。よって重心は OZ から 7 cm の位置にあり、示すべきことが示された。

小問 (ii)

今度は板金の質量を cm^2 あたり 1 とする。背面 $OTWZ$ は平面 $x = 0$ 上にあり、幅 d は端面に垂直な方向にとられているので、タンクのどの点も小問 (i) と同じ x 座標をもつ。そこで背面のまわりのモーメントをとる。長方形の各面は一様なので重心はその中心にあり、その x 座標は台形の対応する辺の中点の x 座標と等しい。

部分	面積 (cm^2)	中心の x 座標 (cm)	モーメント
両端面	$2 \times 540 = 1080$	7	7560
底面 $OXUT$	$9d$	4.5	$40.5d$
背面 $OTWZ$	$40d$	0	0
前面 $XUVY$	$41d$	$\frac{1}{2}(9 + 18) = 13.5$	$553.5d$
合計	$1080 + 90d$		$7560 + 594d$

考えてみよう 傾いた前面の中心はどこにあるか。

前面は、一組の辺 XU と YV をもつ長方形であり、これらの辺は $x = 9$ と $x = 18$ にある。その中心は両者のちょうど中間、$x = 13.5$ にある。面積には水平方向の幅 9 ではなく、斜辺の長さ $XY = 41$ を用いる。

したがって、空のタンクについて

$$\bar{x} = \frac{7560 + 594d}{1080 + 90d}.$$

である。係数はすべて 18 で割り切れる。実際、$7560 = 18 \times 420$、$594 = 18 \times 33$、$1080 = 18 \times 60$、$90 = 18 \times 5$ である。よって

$$\bar{x} = \frac{420 + 33d}{60 + 5d} = \frac{3(140 + 11d)}{5(12 + d)} \text{ cm},$$

となり、これが求める背面からの距離である。

液体を満たしたタンク

液体は、小問 (i) の台形を断面（cross-section）とし、長さが d の角柱（prism）を満たす。その体積は $540d$ なので、ここでの単位では質量は $540dk$ である（単位体積あたりの質量は、板金の単位面積あたりの質量の k 倍であり、後者を 1 としたのであった）。どの断面も同じ台形なので、液体の重心は小問 (i) と同じく $x = 7$ にある。

$d = 20$ のとき、タンクの質量は $1080 + 1800 = 2880$、背面のまわりのモーメントは $7560 + 594 \times 20 = 19440$ である。液体の質量は $10800k$、モーメントは $75600k$ である。よって液体を満たしたタンクについて

$$\bar{x} = \frac{19440 + 75600k}{2880 + 10800k} = \frac{27 + 105k}{4 + 15k} \text{ cm},$$

となる（分子と分母を 720 で割った）。これが、液体を満たしたタンクの重心の背面からの距離である。

検算

- $k = 0$（液体がない、または液体の密度（density）が無視できる）のとき答えは $\frac{27}{4} = 6.75$ であり、空のタンクの式に $d = 20$ を代入しても $\frac{3\times360}{5\times32} = 6.75$ となる。
- $k \to \infty$ のとき液体が支配的になり、$\bar{x} \to \frac{105}{15} = 7$ となる。これは液体自身の重心である。
- 答えは両者の加重平均（weighted average）なので、つねに 6.75 と 7 の間にある。たとえば $k = 1$ のときは $\frac{132}{19} \approx 6.947$ である。
- 数値による確認（靴ひも公式（shoelace formula）による台形の重心、$\bar{x} \approx 6.9994$ を与えるモンテカルロ法（Monte Carlo method）による推定、および二つのタンクの式の厳密な分数計算）は、すべての結果と一致する。

よくある間違い

- 前面の面積に $41d$ ではなく $9d$ を用いること。この面は傾いているので、その幅は斜辺の長さ XY である。
- モーメントが 0 だからといって背面を除外すること。背面は全質量には $40d$ だけ寄与する。
- 端面を一枚しか数えないこと、またはタンクにふたをつけてしまうこと。

STEP のその先へ

ここでは、中心がわかっている部分に分けることで重心を求めた。大学では、薄板や立体の重心は $\bar{x} = \frac{1}{M}\iint x\rho \,\mathrm{d}A$ のような積分（integral）で定義され、「部分に分ける」方法は、領域をいくつかの部分に切り分けたとき積分が加法的であるという事実にほかならない。同じ積分から慣性モーメント（moment of inertia）が得られ、これが物体の回転の仕方を支配する。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この二つの考え方を丁寧に展開している。

解答例

STEP II 2009、第 10 問

力学 ・ 衝突と反発係数

> **STEP II 2009、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q10

鍵となる考え方

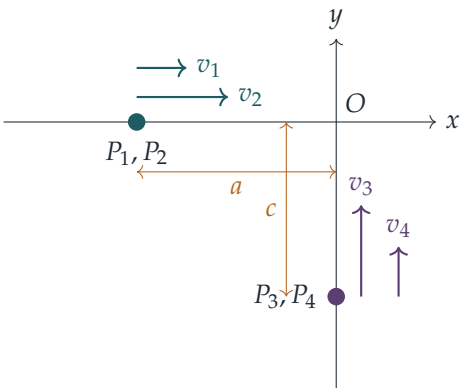
衝突（collision）は 4 回起こるが、力学が必要なのは最初の 2 回だけであり、それによって直後の 4 つの速さが決まる。残りはすべてタイミングの問題である。異なる軸に沿って進む 2 つの質点が「O で衝突する」とは、単に同じ瞬間に O に到達するということにすぎない。したがって、後に起こる各衝突から、距離 / 速さ ＝ 距離 / 速さという形の方程式が 1 つずつ得られる。一方のタイミングの方程式を他方で割ると、未知の距離が消えて、質量に関する条件が残る。

解答

設定

4 つの物体を、なめらかな座標軸上を動く質点（particle）としてモデル化する。したがって、衝突と衝突の間では各質点は等速度で運動する。P_2 は負の x 軸上で O から距離 a の位置から、P_3 は負の y 軸上で O から距離 c の位置から出発するとする。示すべきことは $a = c$ である。

最初の 2 回の（同時に起こる）衝突の瞬間を $t = 0$ とする。これらの衝突は P_2 と P_3 が静止している位置で起こるので、$t = 0$ において質点 P_1 と P_2 はともに O から距離 a の位置にあり、P_3 と P_4 はともに O から距離 c の位置にある。



最初の 2 回の衝突

速さ u で運動する質量 M の質点が、静止している質量 m の質点に反発係数（coefficient of restitution）e で正面衝突（direct collision）し、衝突後の速度がもとの運動方向を正としてそれぞれ V と w になるとする。運動量保存則（conservation of momentum）とニュートンの実験則（Newton's experimental law）から

$$Mu = MV + mw, \qquad w - V = eu,$$

が成り立つので、

$$w = \frac{M(1+e)u}{M+m}, \qquad V = \frac{(M-em)u}{M+m}.$$

これを P_1 が P_2 に衝突する場合と、P_4 が P_3 に衝突する場合に当てはめると、$t = 0$ の直後の O へ向かう向きの速度は次のようになる。

$$v_1 = \frac{(m_1 - em_2)u}{m_1 + m_2}, \qquad v_2 = \frac{m_1(1+e)u}{m_1 + m_2},$$
$$v_4 = \frac{(m_4 - em_3)u}{m_3 + m_4}, \qquad v_3 = \frac{m_4(1+e)u}{m_3 + m_4}.$$

明らかに $v_2, v_3 > 0$ である。P_1 と P_4 は後に O に到達するのだから、依然として O に向かって運動しているはずであり、したがって $v_1 > 0$ かつ $v_4 > 0$ でもある。

後の衝突を利用する

考えてみよう 直交する 2 本の軸上にある 2 つの質点は、どのようにして「衝突」できるのだろうか？

2 本の軸が共有する点は O だけである。したがって「P_2 と P_3 が O で衝突する」とは、単に両者が同時に O に到着するということであり、P_1 と P_4 についても同様である。$t = 0$ から O に到着するまで、各質点は一定の速さで運動する（問題文により、どの

質点についても次に関わる衝突は O で起こる)。よって到着時刻は距離を速さで割ったものであり、

$$\frac{a}{v_2} = \frac{c}{v_3} \qquad (P_2 \text{ と } P_3 \text{ が出会う点は} O), \tag{1}$$

$$\frac{a}{v_1} = \frac{c}{v_4} \qquad (P_1 \text{ と } P_4 \text{ が出会う点は} O). \tag{2}$$

(1) を (2) で割ると、距離が消える：

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{v_4}{v_3}.$$

上の式から、それぞれの比において因子 u と $m_1 + m_2$（または $m_3 + m_4$）が約分されるので、これは

$$\frac{m_1 - em_2}{m_1(1+e)} = \frac{m_4 - em_3}{m_4(1+e)},$$

ということであり、両辺に $m_1 m_4(1+e)$ を掛けると、

$$m_4(m_1 - em_2) = m_1(m_4 - em_3), \qquad \text{よって} \qquad e\,m_2 m_4 = e\,m_1 m_3.$$

$e > 0$ なので e で割ってよく、$m_1 m_3 = m_2 m_4$ となる。すなわち、

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_4}{m_3} = k, \text{ とおく。}$$

ここで v_2 と v_3 に戻る。分子と分母をそれぞれ m_2、m_3 で割ると、

$$v_2 = \frac{k(1+e)u}{k+1} = v_3.$$

したがって P_2 と P_3 は最初の衝突の後に等しい速さで動き出し、(1) より $a = c$ が得られる。ゆえに P_2 と P_3 ははじめ O から等距離にあったことになり、示すべきことが示された。

検算

- $m_1 = 2$、$m_2 = 1$、$m_3 = 3$、$m_4 = 6$（したがって $k = 2$）、$e = \frac{1}{2}$、$u = 1$、$a = c = 1.7$ とする。このとき $v_2 = v_3 = 1$、$v_1 = v_4 = \frac{1}{2}$ であり、P_2 と P_3 は $t = 1.7$ に同時に O に到達し、P_1 と P_4 は問題文のとおりそれより後の $t = 3.4$ に同時に到達する。時間刻みのシミュレーションでも同じ結果になる。
- $v_2 - v_1 = eu > 0$ に注意する。したがって P_1 は確かに P_2 より後に到着し、「しばらく後に」という記述と整合する。
- $e = 0$ の場合は、当然ながらこの議論は破綻する。このとき $v_1 = v_2$ かつ $v_3 = v_4$ となるので (2) は (1) と同じ式になり、$a/c = v_2/v_3$ を満たす任意の a と c が条件を満たしてしまう。問題文が $e > 0$ を課しているのはまさにこのためである。

よくある間違い

- P_1 の移動距離をその出発点から測ってしまう。$t = 0$ 以降、この質点は P_2 がいた位置、すなわち O から距離 a の位置から出発する。(1) と (2) の両方に同じ a が現れるのはこのためである。
- 断りなしに e で割ってしまう。$e = 0$ の場合は本当に事情が異なる。
- P_2 と P_3 の O での衝突を解析しようとしてしまう。その結果については何も必要なく、必要なのは両者が同時にそこに到達するという事実だけである。

STEP のその先へ

質量の条件 $m_1 m_3 = m_2 m_4$ は、2 つの衝突が互いを拡大縮小したコピーになっていることを意味している。正面衝突の後の速度は質量比と e だけで決まるのであり、これは次元解析（dimensional analysis）と相似（similarity）の考え方に初めて触れる機会である。大学では、衝突は重心系（centre-of-mass frame）で考えるのが最もすっきりしており、そこでは反発係数は単に相対速度を定数倍するだけのものになる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このような方法で運動量と衝突を展開している。

解答例

STEP II 2009、第 11 問

力学 ・ 仕事率と抵抗

STEP II 2009、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/09-s2-q11

鍵となる考え方

列車全体を、質量 $(n+1)M$、全抵抗 $(n+1)R$ の一つの物体として扱う。仕事率（power）が P のとき、速さ v における駆動力は P/v であるから、ニュートンの運動の第 2 法則（Newton's second law）からただちに加速度が得られる。ある速さに達するまでの時間を求めるには、加速度を $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ と書き、変数分離（separation of variables）を行って積分する。最後の小問はエネルギーの収支である。機関車のした仕事は、運動エネルギー（kinetic energy）と、抵抗に逆らってする仕事とに分かれる。

解答

機関車と貨車を、一緒に運動する質点とみなす（連結器は張ったまま変形しない）。すると列車は一つの物体となる。その全質量と全抵抗を

$$m = (n+1)M, \qquad k = (n+1)R$$

と書く。

加速度

仕事率は力と速さの積であるから、最大仕事率で速さが v のとき、機関車の牽引力は P/v である。線路に沿った方向の成分を考えると、列車全体に対するニュートンの第 2 法則から

$$ma = \frac{P}{v} - k, \qquad \text{よって} \qquad a = \frac{P-(n+1)Rv}{(n+1)Mv}.$$

速さ V に達するまでの時間

$a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ とおき、変数を分離する：

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v} = \frac{mv}{P-kv}, \qquad T = m\int_0^V \frac{v}{P-kv}\,\mathrm{d}v.$$

積分するために、分子を分母を用いて $v = \frac{1}{k}\big(P-(P-kv)\big)$ と書き、分数を分ける：

$$\frac{v}{P-kv} = -\frac{1}{k} + \frac{P}{k}\cdot\frac{1}{P-kv}.$$

したがって

$$T = m\Big[-\frac{v}{k} - \frac{P}{k^2}\ln(P-kv)\Big]_0^V = -\frac{mV}{k} - \frac{mP}{k^2}\ln\Big(1-\frac{kV}{P}\Big).$$

$m/k = M/R$ および $m/k^2 = M/\big((n+1)R^2\big)$ であるから、

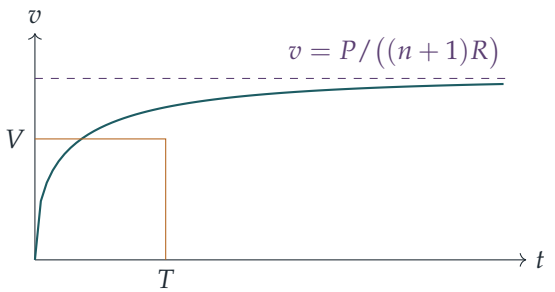
$$T = -\frac{MV}{R} - \frac{MP}{(n+1)R^2}\ln\Big(1-\frac{(n+1)RV}{P}\Big).$$

考えてみよう　P が $(n+1)RV$ より大きくなければならないのはなぜか。これは単に対数が意味をもつための条件にすぎないのではないのか。

物理的には、加速度 $(P-kv)/(mv)$ は $v < P/k$ の間は正であり、$v = P/k$ では 0 になるはずである。列車は $v = 0 < P/k$ から出発して加速するが、v が P/k に近づくにつれて加速度は消えていく。公式から、列車がそこに到達することは決してないことがわかる。実際、$V \to P/k$ と下から近づけると $\ln(1-kV/P) \to -\infty$ となり、$T \to \infty$ となる。したがって P/k は終端速度（terminal speed）であり、列車はそれに近づくが有限の時間では決して到達せず、それ以上の速さにも決して達しない。ゆえに速さ V に到達できるのは $V < P/k$ のとき、すなわち

$$P > (n+1)RV,$$

のときに限られ、これが示すべきことであった。（同じことだが、$P \le kV$ ならば、機関車は最大仕事率でも速さ V における抵抗とつり合うことすらできない。）



（この図は定性的なものである。駆動力 P/v が大きい最初のうちは速さが急激に増し、やがて終端速度に向かって頭打ちになる。）

小問 (i)

$x = \dfrac{(n+1)RV}{P} = \dfrac{kV}{P}$ とおくと、これは小さい。このとき $\ln(1-x) \approx -x - \frac{1}{2}x^2$ であり、$V = Px/k$ を用いると

$$T = -\frac{mV}{k} - \frac{mP}{k^2}\ln(1-x) \approx -\frac{mP}{k^2}x + \frac{mP}{k^2}\left(x + \tfrac{1}{2}x^2\right) = \frac{mP}{2k^2}x^2 = \frac{mP}{2k^2}\cdot\frac{k^2V^2}{P^2} = \frac{mV^2}{2P}.$$

1 次の項はちょうど打ち消し合う。x^2 の項が必要だったのはこのためである。したがって

$$PT \approx \tfrac{1}{2}(n+1)MV^2.$$

解釈。 PT は時間 T の間に機関車がした仕事であり、$\frac{1}{2}(n+1)MV^2$ は列車が得た運動エネルギーである。よって $(n+1)RV$ が P に比べて小さいとき（抵抗力と速さの積が機関車の仕事率に比べて小さいとき）、機関車の仕事のほとんどすべてが運動エネルギーになり、抵抗で失われる分はごくわずかである。つまり列車は抵抗がないかのようにふるまう。

小問 (ii)

時間 T の間に、一定の仕事率 P で働く機関車は仕事 PT をする。距離 X にわたって、一定の全抵抗 $(n+1)R$ は仕事 $-(n+1)RX$ をする。言い換えれば、列車は抵抗に逆らって仕事 $(n+1)RX$ をする。列車は静止状態から出発して速さ V に達し、線路は水平なので位置エネルギーの変化はない。仕事とエネルギーの原理（work–energy principle）により、

$$PT = \tfrac{1}{2}(n+1)MV^2 + (n+1)RX.$$

これを整理すると

$$X = \frac{2PT - (n+1)MV^2}{2(n+1)R},$$

となり、示すべき式が得られる。これは小問 (i) と整合している。抵抗が無視できるならば $(n+1)RX$ の項が消え、$PT \approx \frac{1}{2}(n+1)MV^2$ が残る。

検算

- $n = 3$、$M = 2$、$R = 1$、$P = 40$、$V = 6$ とする（このとき $(n+1)RV = 24 < 40$）。公式から $T \approx 6.3258$、さらに $X \approx 27.258$ が得られる。運動方程式を数値的に時間発展させても、有効数字 4 桁で同じ値が得られる。

- 次元：MV/R は（質量）（速さ）/（力）であり、これは時間である。MP/R^2 も同様である。対数は無次元である。
- $V \to P/\big((n+1)R\big)$ とすると T は限りなく大きくなる（上の数値では、終端速度の 90%、99%、99.9% で $T \approx 28, 72, 118$）。これは条件を裏づけている。
- x が小さいとき、比 $PT/\frac{1}{2}(n+1)MV^2$ はおよそ $1+\frac{2}{3}x$ であり、小問 (i) の予測どおり 1 に近づく。

よくある間違い

- 列車全体ではなく、機関車だけの質量と抵抗を用いてしまう。機関車は $n+1$ 両すべてを引いている。
- **時間**が求められているのに、$a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ と書いたり、$v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ を用いたりする。その方法では時間ではなく距離が得られる。
- 小問 (i) で対数を 1 次までしか展開しない。x の項が打ち消し合うので $T \approx 0$ となり、答えが失われてしまう。

STEP のその先へ

方程式 $m\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = P/v - k$ は 1 階の非線形常微分方程式（ODE）であり、たまたま変数分離形になっている。終端速度 P/k は安定平衡点（stable equilibrium）であり、解はそれに近づくが有限の時間では決して到達しない。解の一意性（uniqueness）が示すように、このふるまいは滑らかな常微分方程式の平衡点の近くでは典型的なものである。小問 (ii) は仕事とエネルギーの定理であり、大学の力学では中心的な指導原理となる。さらに学ぶには Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を、常微分方程式の側面については Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式入門）を参照するとよい。

解答例

STEP II 2009、第 12 問

確率・統計 ・ 半正規分布

STEP II 2009、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/09-s2-q12

鍵となる考え方

指数 $-2x^2$ は、正規分布（normal distribution）の密度関数（density）が姿を変えたものである。$-2x^2 = -\dfrac{x^2}{2\sigma^2}$ と書けば $\sigma = \frac{1}{2}$ となるので、f は $Y \sim \mathrm{N}(0, \frac{1}{4})$ の密度関数をちょうど 2 倍し、0 で切り落としたものである。言い換えると、X は $|Y|$ と同じ分布に従う。このことに気づけば、正規化定数（normalising constant）、$\mathrm{E}(X^2)$、中央値（median）はいずれも正規分布に関する事実からただちに求まる。積分が必要なのは $\mathrm{E}(X)$ だけであり、それも（ごく易しい）積分である。

解答

以下を通して、$Y \sim \mathrm{N}(0, \frac{1}{4})$、$Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ とする。すると Y は $\frac{1}{2}Z$ と同じ分布に従い、その密度関数は

$$g(y) = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-y^2/(2\cdot\frac{1}{4})} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-2y^2}.$$

である。

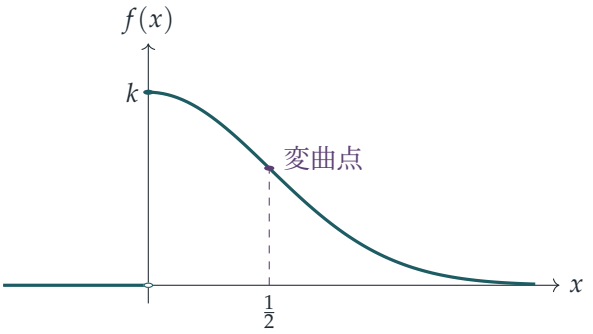
小問 (i)

$x \geq 0$ に対して $f'(x) = -4kx\,\mathrm{e}^{-2x^2} \leq 0$ であるから、f は $x = 0$ における最大値 k から減少し、そこでの傾きは 0 である。また

$$f''(x) = k(16x^2 - 4)\,\mathrm{e}^{-2x^2},$$

は $x = \frac{1}{2}$ で符号が変わるので、$x = \frac{1}{2}$ に変曲点（point of inflection）がある。$x \to \infty$ のとき $f(x) \to 0$ は非常に速く、また $x < 0$ では $f(x) = 0$ である。グラフは釣鐘型曲

線の右半分であり（小問 (ii) より $k \approx 1.60$）、$x = 0$ で 0 から k へ跳ね上がる。



小問 (ii)

全確率は 1 でなければならない。g は 0 に関して対称であり、実数全体での積分が 1 であるから、$[0,\infty)$ での積分は $\frac{1}{2}$ である：

$$\int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

よって $k \cdot \dfrac{\sqrt{2\pi}}{4} = 1$ であり、

$$k = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 1.596.$$

を得る。$x \geq 0$ に対して $f(x) = 2g(x)$ となることに注意しよう。これにより、X が $|Y|$ と同じ分布に従うことが確かめられる。

小問 (iii)

平均については、因子 x のおかげで積分は初等的に計算できる。$x\,\mathrm{e}^{-2x^2}$ は e^{-2x^2} の導関数の定数倍だからである：

$$\mathrm{E}(X) = k\int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}x = k\Big[-\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x^2}\Big]_0^\infty = \frac{k}{4} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.399.$$

? **考えてみよう** 長い部分積分（integration by parts）をせずに $\displaystyle\int_0^\infty x^2\,\mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}x$ を求めるにはどうすればよいか？

再び正規分布を使う。関数 $x^2 g(x)$ は偶関数であるから、

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot 2g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty x^2 g(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{E}(Y^2) = \mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{4},$$

となる。ここで $\mathrm{E}(Y)=0$ を用いた。（$u=x$、$\mathrm{d}v=x\mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}x$ として部分積分しても同じ結果 $\int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4k}$ が得られる。）したがって分散（variance）は

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\big(\mathrm{E}(X)\big)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi}=\frac{\pi-2}{4\pi}\approx 0.0908.$$

である。

小問 (iv)

中央値 m は $\mathrm{P}(X\le m)=\frac{1}{2}$ を満たす。X は $|Y|$ と、Y は $\frac{1}{2}Z$ と同じ分布に従うから、標準正規分布の対称性を用いて

$$\mathrm{P}(X\le m)=\mathrm{P}(|Z|\le 2m)=2\Phi(2m)-1,$$

となる。（直接計算すると $\mathrm{P}(X\le m)=\int_0^m 2g(x)\,\mathrm{d}x=2\big(\mathrm{P}(Y\le m)-\frac{1}{2}\big)$ である。）これを $\frac{1}{2}$ に等しいとおくと

$$\Phi(2m)=\frac{3}{4}.$$

を得る。数表より $\Phi^{-1}(0.75)=0.6745$ であるから、$2m=0.6745$ となり、

$$m\approx 0.337 \quad \text{（有効数字 3 桁）}.$$

である。

検算

$k=2\sqrt{2/\pi}$ として f を $[0,10]$ 上でシンプソンの公式（Simpson's rule）により数値積分すると、全確率 1.0000、$\mathrm{E}(X)=0.39894$、$\mathrm{Var}(X)=0.090845$ が得られ、$1/\sqrt{2\pi}$ および $(\pi-2)/(4\pi)$ と一致する。$\int_0^m f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$ を数値的に解くと $m=0.33724$ となる。標準偏差 $\frac{1}{2}$ の正規乱数 200 000 個について $|Y|$ をシミュレーションしたところ、平均 0.399、分散 0.091 となり、値の 50.0% が 0.337 を下回った。妥当性の確認：中央値 0.337 は平均 0.399 より小さい。右に長い裾をもつ分布ではそうなるはずである。

よくある間違い

- 指数から $\sigma^2=2$ や $\sigma=\frac{1}{4}$ としてしまうこと。$2x^2$ を $x^2/(2\sigma^2)$ と比べれば $\sigma^2=\frac{1}{4}$ となる。
- 因子 2 を忘れること。直線の半分の上では、正規分布の密度関数の積分は $\frac{1}{2}$ にしかならない。
- $\Phi(2m)=\frac{1}{2}$ を解いて $m=0$ としてしまうこと。X の確率のうち m より下にある半分は、Y の確率の中央の半分に対応するので、条件は $\Phi(2m)=\frac{3}{4}$ である。

STEP のその先へ

X は**半正規分布**（*half-normal*）に従う確率変数であり、Y が正規分布に従うときの $|Y|$ は**確率変数の変換**（*transformation of a random variable*）の最も簡単な例である。一般に $X = h(Y)$ ならば、X の密度関数は Y の密度関数をすべての逆像（preimage）にわたって足し合わせることで得られ、ここではそれが因子 2 にあたる。同じ考え方により、Z^2 が自由度（degree of freedom）1 のカイ二乗分布（chi-squared distribution）に従うことがわかり、これが統計学の多くの話題の出発点となる。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、確率変数の関数が丁寧に扱われている。

解答例

STEP II 2009、第 13 問

確率・統計 ・ 二項分布と期待費用

STEP II 2009、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/09-s2-q13

鍵となる考え方

故障するエンジンの個数は二項分布（binomial distribution）に従うので、修理費用は二項分布に従う確率変数（random variable）の簡単な関数であり、その期待値（expectation）は短い和で表される。きれいな形 $(*)$ に到達するための工夫は、「すべて交換する」場合を一つずつ足し合わせないことである。余事象（complement）を用い、さらに $1-q^n = p(1+q+\cdots+q^{n-1})$ と因数分解して因数 p をくくり出すのである。

解答

問題の意図どおり、各エンジンは互いに独立（independent）に、それぞれ確率 p で故障すると仮定し、$q = 1-p$ とおく。最後まで、費用はすべて K を単位として測る。

Andover 機

故障する Andover 機のエンジンの個数を X とすると $X \sim \mathrm{B}(4, p)$ であり、修理費用を C_A とする。このとき

$$C_A = \begin{cases} 0 & X = 0, \\ K & X = 1, \\ 4K & X \geq 2. \end{cases}$$

ここで $\mathrm{P}(X=0)=q^4$、$\mathrm{P}(X=1)=4pq^3$ であるから、$\mathrm{P}(X\geq 2)=1-q^4-4pq^3$ である。よって

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(C_A)&=K\cdot 4pq^3+4K\bigl(1-q^4-4pq^3\bigr)\\&=4K(1-q^4)-12Kpq^3.\end{aligned}$$

$1-q^4=(1-q)(1+q+q^2+q^3)=p(1+q+q^2+q^3)$ であるから、

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(C_A)&=4Kp\bigl(1+q+q^2+q^3\bigr)-4Kp\cdot 3q^3\\&=4Kp\bigl(1+q+q^2-2q^3\bigr),\end{aligned}$$

となり、これは求める $(*)$ である。

Basingstoke 機

故障する Basingstoke 機のエンジンの個数を $Y\sim \mathrm{B}(6,p)$ とし、修理費用を C_B とする。このとき、$Y\leq 2$ ならば $C_B=YK$、$Y\geq 3$ ならば $C_B=6K$ である。

$$\mathrm{P}(Y=0)=q^6,\qquad \mathrm{P}(Y=1)=6pq^5,\qquad \mathrm{P}(Y=2)=15p^2q^4,$$

を用いると、

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(C_B)&=K\cdot 6pq^5+2K\cdot 15p^2q^4+6K\bigl(1-q^6-6pq^5-15p^2q^4\bigr)\\&=6K(1-q^6)-30Kpq^5-60Kp^2q^4.\end{aligned}$$

を得る。$1-q^6=p(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5)$ を用いて $6Kp$ をくくり出すと、

$$\mathrm{E}(C_B)=6Kp\bigl(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5-5q^5-10pq^4\bigr).$$

> **考えてみよう**　かっこの中にはまだ p が残っている。どうすれば「$(*)$ に似た形」にできるだろうか。

$(*)$ の形は、因数 p と q だけの多項式との積である。そこで残っている p を $1-q$ で置き換える：$10pq^4=10q^4-10q^5$。項を整理すると、

$$\boxed{\mathrm{E}(C_B)=6Kp\bigl(1+q+q^2+q^3-9q^4+6q^5\bigr).}$$

Andover 機の費用が Basingstoke 機の費用の $\frac{2}{3}$ になるのはいつか

$\mathrm{E}(C_A)=\frac{2}{3}\mathrm{E}(C_B)$、すなわち

$$4Kp\bigl(1+q+q^2-2q^3\bigr)=4Kp\bigl(1+q+q^2+q^3-9q^4+6q^5\bigr).$$

となる必要がある。両辺は因数 $4Kp$ をもち、$K > 0$ であるから、これが成り立つのは $p = 0$ または

$$-2q^3 = q^3 - 9q^4 + 6q^5 \iff 3q^3 - 9q^4 + 6q^5 = 0 \iff 3q^3(1-q)(1-2q) = 0.$$

のときであり、かつそのときに限る。したがって $q = 0$、$q = 1$ または $q = \frac{1}{2}$ であり、それぞれ $p = 1$、$p = 0$、$p = \frac{1}{2}$ となる。三つとも $[0,1]$ に含まれるので、求める値は

$$p = 0, \qquad p = \tfrac{1}{2}, \qquad p = 1.$$

である。$p = 0$ はつまらない場合である。どのエンジンも決して故障せず、どちらの期待費用も 0 である。$p = 1$ ではすべてのエンジンが故障し、費用は $4K$ と $6K$ になる。興味深いのは $p = \frac{1}{2}$ である。

検算

$p = \frac{1}{2}$ のとき、$(*)$ から $\mathrm{E}(C_A) = 2K\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 3K$ を得る。また Basingstoke 機の式から $\mathrm{E}(C_B) = 3K\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{9}{16} + \frac{6}{32}\right) = \frac{9}{2}K$ を得て、確かに $3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2}$ である。さらに、二つの式を、p の 200 個の有理数値について二項分布を直接数え上げた結果と厳密に照合し、またシミュレーション（simulation）によっても確かめた。$p = 0.3$ のとき、2×10^5 回の模擬飛行で得られた平均費用は $1.811K$ と $2.483K$ であり、式の値 $1.805K$ と $2.485K$ とよく一致した。

よくある間違い

- Andover 機のエンジンが 2 個以上故障したときの費用を $4K$ ではなく XK としてしまう。閾値を超えると、正常なものも含めて**すべての**エンジンが交換される。
- Basingstoke 機のかっこの中に p を残してしまい、答えが問われた形になっていない。
- 最後の方程式で p で割って $p = 0$ を落としたり、q^3 で割って $p = 1$ を落としたりする。

STEP のその先へ

これは、閾値（threshold）に基づく方針のもとでの期待費用を扱う小さな例であり、信頼性理論（reliability theory）やオペレーションズ・リサーチ（operational research）の基本中の基本である。管理者は、正常な部品を交換する費用と、より頻繁に修理する費用との釣り合いがとれるように閾値を選ぶ。ここで用いた裾の和の操作、すなわ

ち $\mathrm{P}(X \geq k)$ を 1 から最初の数項を引いたものとして書くことは、非負整数値をとる確率変数に対して $\mathrm{E}(X) = \sum_{k \geq 1} \mathrm{P}(X \geq k)$ を導くのと同じ考え方である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、これらの考え方を丁寧に展開している。

解答例

STEP III 2009、第 1 問

純粋数学 ・ 円の座標幾何

STEP III 2009、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

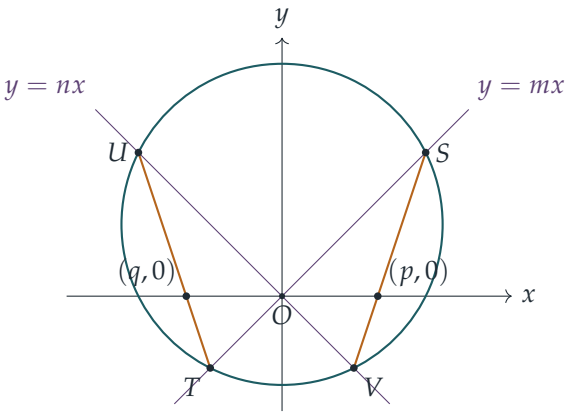
step.maths.org/questions/09-s3-q1

鍵となる考え方

4 点はすべて原点を通る直線上にあるので、各点はただ一つの数、すなわちその x 座標で表される。円と直線 $y = mx$ の交点を求めると二次方程式（quadratic equation）が得られ、その 2 つの解が s と t である。解そのものは必要なく、必要なのはその和と積だけである。最後の恒等式は、$p + q$ の分子を st、$s + t$、uv、$u + v$ だけが現れるようにまとめることで得られる。

解答

以下では、S と T は直線 $y = mx$ 上に、U と V は直線 $y = nx$ 上にあり、どちらの直線も原点 O を通るとする。$m \neq n$ を仮定する（そうでなければ 4 点はすべて一つの直線上にある）。また、SV と UT は水平ではなく、したがって $y = 0$ と交わるものとする。すなわち $ms \neq nv$ かつ $mt \neq nu$ である。



切片 p と q

$S(s, ms)$ と $V(v, nv)$ を通る直線の傾き（gradient）は $\dfrac{nv - ms}{v - s}$ であるから、その直線上の点は

$$y - ms = \frac{nv - ms}{v - s}(x - s).$$

を満たす。$y = 0$、$x = p$ とおくと $p - s = -\dfrac{ms(v - s)}{nv - ms}$ となるので、

$$p = \frac{s(nv - ms) - ms(v - s)}{nv - ms} = \frac{nsv - msv}{nv - ms} = \frac{(m - n)sv}{ms - nv},$$

となり、求める式が得られた。（$v = s$ のときは直線 SV は鉛直であり、$p = s$ となる。このときも公式は $\frac{(m-n)s^2}{(m-n)s} = s$ を与える。）

直線 UT は、$y = mx$ 上の $T(t, mt)$ と $y = nx$ 上の $U(u, nu)$ を結ぶ。これは SV が S と V を結ぶのとまったく同じ形である。s を t に、v を u に置き換えると、

$$q = \frac{(m - n)tu}{mt - nu}.$$

s と t についての二次方程式

点 (x, mx) が $x^2 + (y - c)^2 = r^2$ 上にあるのは、$x^2 + (mx - c)^2 = r^2$、すなわち

$$(1 + m^2)x^2 - 2mc\,x + c^2 - r^2 = 0.$$

が成り立つときであり、かつそのときに限る。s と t はどちらもこれを満たす。S と T を直線と円の 2 つの（異なる）交点とすれば、s と t はこの方程式の 2 つの解であるから、解と係数の関係（relations between roots and coefficients）より

$$st = \frac{c^2 - r^2}{1 + m^2}, \qquad s + t = \frac{2mc}{1 + m^2}.$$

$p + q = 0$ の証明

直線 $y = nx$ について同じ議論を行うと、u と v は $(1 + n^2)x^2 - 2nc\,x + c^2 - r^2 = 0$ の解であることがわかるので、

$$uv = \frac{c^2 - r^2}{1 + n^2}, \qquad u + v = \frac{2nc}{1 + n^2}.$$

次に、2 つの切片（intercept）を通分して加える。

$$p + q = (m - n)\,\frac{sv(mt - nu) + tu(ms - nv)}{(ms - nv)(mt - nu)}.$$

考えてみよう s,t,u,v の 4 つすべてを含む分子を、どうすれば扱いやすくできるだろうか？

分子を展開し、係数 m または n ごとに項をまとめる。

$$\begin{aligned} sv(mt-nu)+tu(ms-nv) &= mstv-nsuv+mstu-ntuv \\ &= mst(u+v)-nuv(s+t). \end{aligned}$$

これで、どの項もすでに値のわかっている対称式（symmetric function）になった。代入すると、

$$\begin{aligned} mst(u+v)-nuv(s+t) &= m\cdot\frac{c^2-r^2}{1+m^2}\cdot\frac{2nc}{1+n^2}-n\cdot\frac{c^2-r^2}{1+n^2}\cdot\frac{2mc}{1+m^2} \\ &= \frac{2mnc(c^2-r^2)}{(1+m^2)(1+n^2)}-\frac{2mnc(c^2-r^2)}{(1+m^2)(1+n^2)}=0. \end{aligned}$$

仮定より分母 $(ms-nv)(mt-nu)$ は 0 でないので、$p+q=0$ となり、求める結果が示された。

検算

図のように $c=1$、$r^2=5$、$m=1$、$n=-1$ とする。二次方程式は $x^2-x-2=0$ と $x^2+x-2=0$ であるから、$s=2$、$t=-1$、および $u=-2$、$v=1$ である。このとき $st=-2=\frac{1-5}{2}$、$s+t=1=\frac{2}{2}$ となり、予想どおりである。$S(2,2)$ から $V(1,-1)$ への直線は傾きが 3 で、$y=0$ と $p=\frac{4}{3}$ で交わる。これは $\frac{2\cdot2\cdot1}{2+1}$ と一致する。$U(-2,2)$ から $T(-1,-1)$ への直線は $q=-\frac{4}{3}$ で交わる。16 000 個のランダムな円と直線でコンピュータによる検証を行ったところ、$|p+q|$ は毎回 10^{-12} 未満であった。

よくある間違い

- 点の組み合わせを誤ること。q は U と T から得られるので、置き換えは $s\to t$、$v\to u$ である。代わりに $s\leftrightarrow v$ と入れ替えると、再び p が得られてしまう。
- 二次方程式を解いて s,t,u,v を具体的に求めようとすること。平方根が現れて計算は手に負えなくなる。$mst(u+v)-nuv(s+t)$ とまとめることこそが、式をきれいに消し去る鍵である。

STEP のその先へ

中心 $(0,c)$ は y 軸上にあるので、直線 $y=0$ は円と交わって、O を中点とする弦（chord）をつくる。したがってこの問題は**蝶の定理**（butterfly theorem）を証明している。す

なわち、2 本の弦 ST と UV がある弦の中点 O を通るならば、SV と UT はその弦と O から等距離にある点で交わる。この証明では $c^2 < r^2$ を一度も使っていないので、O が円の外部にある場合にも成り立つ。これは、この結果の自然な舞台が射影幾何学（projective geometry）であることを示唆しており、そこではこの結果はデザルグ（Desargues）の対合定理（involution theorem）の特別な場合となる。さらに学ぶには、コクセター（Coxeter）と Greitzer による *Geometry Revisited*（邦訳『幾何学再入門』）がすばらしい一冊である。

解答例

STEP III 2009、第 2 問

純粋数学 • べき級数解

> **STEP III 2009、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q2

鍵となる考え方

y が冪級数（power series）ならば、y'、y''、x^3y もまた冪級数であり、微分方程式（differential equation）は、それらを合わせた一つの冪級数が恒等的にゼロであることを述べている。すべての x に対して消える冪級数は係数（coefficient）がすべてゼロであるから、微分方程式は a_n どうしを結ぶ簡単な方程式の一覧に変わる。本当の作業は帳簿づけである。係数を比較する前に添字をずらし（shift indices）、すべての級数を x の同じ冪で表しておくのである。

解答

小問 (i)

項別微分（term-by-term differentiation）を行うと（すべての級数が収束することは与えられているので、これは許されるものとする）、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a_n x^n\right) = n a_n x^{n-1}.$$

$n = 0$ の項 a_0 は定数であり、その導関数は 0 であるから、和は $n = 1$ から始まる：

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

これが求める結果である。同じことをもう一度行うと、y' の $n = 1$ の項 a_1 は定数なので、

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

a_3 まで書き出すと：

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$
$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots,$$
$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + \cdots.$$

小問 (ii)

$xy'' - y' + 4x^3 y$ の各項を x^{n-1} の級数として書く。まず、

$$xy'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1}.$$

この和の $n = 1$ の項は $1 \cdot 0 \cdot a_1 = 0$ となるので、これも $n = 1$ から始めてよい。すると

$$xy'' - y' = \sum_{n=1}^{\infty} \left[n(n-1) - n\right] a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-2)a_n x^{n-1}.$$

最後の項については $4x^3 y = \sum_{m=0}^{\infty} 4a_m x^{m+3}$ であり、$m = n - 4$ とおくと冪は x^{n-1} となる：

$$4x^3 y = \sum_{n=4}^{\infty} 4a_{n-4}\, x^{n-1}.$$

考えてみよう そもそもなぜ係数を比較できるのか？

方程式は、級数が収束する区間内のすべての x に対して $xy'' - y' + 4x^3 y = 0$ が成り立つことを述べているので、合わせた冪級数はその区間でゼロ関数である。収束する冪級数が区間上でゼロになるのは、すべての係数がゼロであるときに限る（$x = 0$ を代入して定数項を求め、x で割り、これを繰り返せばよい）。したがって、x の各冪の係数はゼロでなければならない。

各係数は次の通りである：

- x^0（$n = 1$）：$1 \cdot (-1)\, a_1 = 0$ より $a_1 = 0$ であり、求める通りである。
- x^1（$n = 2$）：$2 \cdot 0 \cdot a_2 = 0$ は自動的に成り立つので、a_2 は自由に選べる。
- x^2（$n = 3$）：$3 \cdot 1 \cdot a_3 = 0$ より $a_3 = 0$ である。
- $n \geq 4$ に対する x^{n-1}：$n(n-2)a_n + 4a_{n-4} = 0$。

$n \geq 4$ では $n(n-2) \neq 0$ なのでこれで割ることができ、

$$a_n = -\frac{4}{n(n-2)}\, a_{n-4} \qquad (n \geq 4),$$

が得られ、求める結果となる。（a_0 もまた自由である。それ単独に関わる方程式が存在しないからである。）

$a_0 = 1, a_2 = 0$ **の場合。** 漸化式（recurrence）は a_n を a_{n-4} にのみ結びつけるので、係数は n を 4 で割った余りに応じて四つの鎖に分かれる。$a_1 = 0$、$a_2 = 0$、$a_3 = 0$ から始まる鎖はすべてゼロなので、ゼロでない可能性があるのは a_{4k} のみである。$k \geq 1$ として $n = 4k$ とおくと、

$$a_{4k} = -\frac{4}{4k(4k-2)}\, a_{4k-4} = -\frac{1}{2k(2k-1)}\, a_{4k-4}.$$

$a_0 = 1$ から出発すると、各段階で -1 を掛け、階乗の次の二つの因数で割ることになるので、

$$a_{4k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}.$$

（確認：$a_4 = -\frac{1}{2}$、$a_8 = -\frac{1}{12} \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{24}$。）よって

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^{2k}}{(2k)!} = \cos(x^2),$$

これはマクローリン級数（Maclaurin series）$\cos u = \sum_k (-1)^k u^{2k}/(2k)!$ に $u = x^2$ を代入したものである。これが求める結果である。

$a_0 = 0, a_2 = 1$ **の場合。** 今度は a_0、a_1、a_3 から始まる鎖がすべてゼロであり、残るのは a_{4k+2} のみである。$k \geq 1$ として $n = 4k + 2$ とおくと、

$$a_{4k+2} = -\frac{4}{(4k+2)\,4k}\, a_{4k-2} = -\frac{1}{(2k+1)\,2k}\, a_{4k-2},$$

であり、$a_2 = 1$ から $a_{4k+2} = (-1)^k/(2k+1)!$ が得られる。したがって

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k+2}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin(x^2).$$

検算

直接代入する。$y = \sin(x^2)$ に対して $y' = 2x\cos(x^2)$、$y'' = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$ なので

$$xy'' - y' + 4x^3 y = 2x\cos(x^2) - 4x^3\sin(x^2) - 2x\cos(x^2) + 4x^3\sin(x^2) = 0.$$

$\cos(x^2)$ についても同様である。数値的には、$x = 1.2$ における余弦の級数の最初の 40 項から 0.1304237… が得られ、$\cos(1.44)$ と一致する。また、どちらの答えも $x = 0$ で辻褄が合う。$\cos 0 = 1 = a_0$ であり、0 の近くで $\sin(x^2) \approx x^2$ となるので $a_2 = 1$ である。

よくある間違い

- 添字をずらす前に係数を比較してしまい、ある級数の a_n と別の級数の a_n を、異なる x の冪に掛かっているにもかかわらず対応させてしまう。
- $a_3 = 0$ を忘れる。これは鎖 $a_3, a_7, a_{11}, \ldots$ を消すために必要である。
- $n \geq 4$ で $n(n-2)$ がゼロでないことに触れずに割ってしまう。$n = 2$ ではこれはゼロであり、まさにそれが a_2 が自由である理由である。

STEP のその先へ

これは最も単純な形のフロベニウス（Frobenius）の方法である。点 $x = 0$ では y'' の係数が消えるので、そこはこの方程式の**確定特異点**（regular singular point）であり、一般論によって、通常の冪級数一つでうまくいかないこともあるのに、なぜここではうまくいくのかが説明される（決定方程式の根（indicial roots）である 0 と 2 は整数だけ異なる）。同じ方法でベッセル（Bessel）関数やルジャンドル（Legendre）関数が得られる。項別微分を正当化するには一様収束（uniform convergence）が必要であり、これは大学 1 年次の解析学（analysis）で学ぶ内容である。どちらの考え方についても、Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*、および Abbott, *Understanding Analysis* を参照のこと。

解答例

STEP III 2009、第 3 問

純粋数学 • 極限と曲線の概形

> **STEP III 2009、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q3

鍵となる考え方

この関数が $t = 0$ で定義されないのは 0/0 になるからにすぎないので、べき級数（power series）を使えば、そこで本来「とるべき」値がわかる。小問 (ii) はすべてを通分（common denominator）するだけの問題であり、現れる偶関数（even function）は実は $\frac{t}{2}\coth\frac{t}{2}$ が姿を変えたものである。小問 (iii) では、$f'(t)$ の符号は分子だけで完全に決まり、その分子がちょうど $\mathrm{e}^t(1-t)-1$ になっている。不等式が問題に含まれているのはそのためである。

解答

小問 (i)

$\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \cdots$ を用いると、$t \neq 0$ のとき因数 t を約分できる：

$$f(t) = \frac{t}{t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \cdots} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{6}t^2 + \cdots} \longrightarrow 1 \quad \text{ただし} t \to 0,$$

分母が 1 に収束するからである。したがって $\lim_{t\to 0} f(t) = 1$ である。

商の微分法（quotient rule）により、

$$f'(t) = \frac{(\mathrm{e}^t - 1) - t\,\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t - 1)^2}.$$

分子も分母も 0 に収束するので、それぞれを展開する。分子は

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^t - 1 - t\,\mathrm{e}^t &= \left(t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3 + \cdots\right) - \left(t + t^2 + \tfrac{1}{2}t^3 + \cdots\right) \\ &= -\tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{3}t^3 + \cdots,\end{aligned}$$

であり、分母は $\left(t+\frac{1}{2}t^2+\cdots\right)^2 = t^2\left(1+\frac{1}{2}t+\cdots\right)^2$ である。分子と分母を t^2 で割ると、

$$f'(t) = \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}t+\cdots}{\left(1+\frac{1}{2}t+\cdots\right)^2} \longrightarrow -\frac{1}{2} \quad \text{ただし} t \to 0.$$

小問 (ii)

$g(t) = f(t) + \frac{1}{2}t$ とおく。通分すると、

$$g(t) = \frac{t}{\mathrm{e}^t-1} + \frac{t}{2} = \frac{2t+t(\mathrm{e}^t-1)}{2(\mathrm{e}^t-1)} = \frac{t\,(\mathrm{e}^t+1)}{2(\mathrm{e}^t-1)}.$$

ここで t を $-t$ に置き換え、分子と分母に e^t を掛けると：

$$g(-t) = \frac{-t\,(\mathrm{e}^{-t}+1)}{2(\mathrm{e}^{-t}-1)} = \frac{-t\,(1+\mathrm{e}^t)}{2(1-\mathrm{e}^t)} = \frac{t\,(\mathrm{e}^t+1)}{2(\mathrm{e}^t-1)} = g(t).$$

よって、求めるとおり $f(t)+\frac{1}{2}t$ は偶関数である。（分子と分母を $\mathrm{e}^{t/2}$ で割ると $g(t) = \frac{t}{2}\coth\frac{t}{2}$ となり、これは二つの奇関数（odd function）の積である。これも別の見方である。）

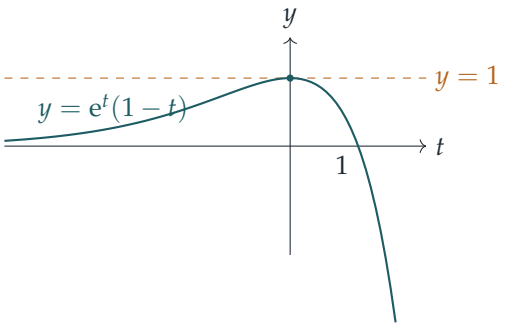
グラフを描くうえで役に立つ帰結がある：$f(t)-f(-t) = -t$ なので、f のグラフは偶関数のグラフを直線 $y = -\frac{1}{2}t$ に沿って傾けたものである。

小問 (iii)

$h(t) = \mathrm{e}^t(1-t)$ とおく。すると

$$h'(t) = \mathrm{e}^t(1-t) - \mathrm{e}^t = -t\,\mathrm{e}^t,$$

であり、これは $t<0$ で正、$t>0$ で負である。したがって h は $t=0$ まで増加し、その後は減少する。ただ一つの停留点（stationary point）は極大（maximum）であり、$h(0)=1$ である。また、$t\to-\infty$ のとき $h(t)\to 0$ であり、$t>1$ では $h(t)<0$ である。



この曲線は $t=0$ で $y=1$ に接し、それ以外ではいたるところで厳密にその下側にある。よって

$$\mathrm{e}^t(1-t)\le 1,\quad \text{ただし等号成立は} t=0.$$

考えてみよう この不等式から $f'(t)$ について何がわかるのだろうか？

小問 (i) で求めた $f'(t)$ の分子をもう一度見てみよう：

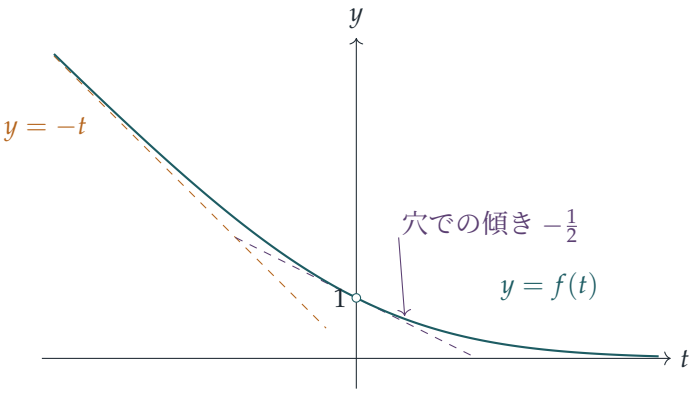
$$\mathrm{e}^t-1-t\,\mathrm{e}^t=\mathrm{e}^t(1-t)-1.$$

上の厳密な不等式により、$t\neq 0$ のときこれは厳密に負である。分母 $(\mathrm{e}^t-1)^2$ は $t\neq 0$ のとき厳密に正である。したがって、すべての $t\neq 0$ に対して $f'(t)<0$ である。特に $f'(t)\neq 0$ なので、f は停留点をもたず、0 の両側でそれぞれ減少する。

f のグラフ

事実をまとめよう。

- t と e^t-1 は同符号なので、すべての $t\neq 0$ に対して $f(t)>0$ である。
- 0 の近くでは、グラフは傾き $-\frac{1}{2}$ で $(0,1)$ に近づく（小問 (i)）。$f(0)$ は定義されないので、その点自体は抜けている。
- f は全体で減少する（小問 (iii)）。
- $t\to\infty$ のとき、指数関数が t より速く増大するので、$f(t)=t/(\mathrm{e}^t-1)\to 0^+$ である。
- $t\to-\infty$ のとき $f(t)+t=\dfrac{t\,\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t-1}\to 0$ なので、$y=-t$ は斜めの漸近線（oblique asymptote）である。これは小問 (ii) からも従う：$f(t)=f(-t)-t$ かつ $f(-t)\to 0$ である。



検算

- 小問 (ii) からは $f(-1) - f(1) = 1$ が予想される。数値的には $f(1) = 1/(\mathrm{e}-1) \approx 0.58198$、$f(-1) = \mathrm{e}/(\mathrm{e}-1) \approx 1.58198$ であり、差はちょうど 1 である。
- 導関数の式を $t = \pm 10^{-4}$ で評価すると -0.49998 と -0.50002 になり、極限 $-\frac{1}{2}$ と矛盾しない。
- coth の形から、小さい t に対して $g(t) \approx 1 + \frac{1}{12}t^2$ となるので、$f(t) \approx 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{12}t^2$ であり、小問 (i) の二つの極限の両方と一致する。

よくある間違い

- $f'(t)$ にロピタルの定理（L'Hôpital's rule）を一度だけ使い、再び 0/0 が現れたところで止まってしまう。分子と分母をともに t^2 の次数まで展開すれば、これは避けられる。
- $\mathrm{e}^t(1-t) \leq 1$ だけを証明して、$f'(t) \neq 0$ だと主張してしまう。$t \neq 0$ に対して不等式が**厳密**であることが必要であり、それは $t = 0$ が h のただ一つの停留点であることから得られる。
- グラフを $(0,1)$ を通る塗りつぶした点で描いてしまう：f はそこで定義されていない。

STEP のその先へ

展開 $\dfrac{t}{\mathrm{e}^t - 1} = \sum_{n \geq 0} B_n \dfrac{t^n}{n!}$ によってベルヌーイ数（Bernoulli numbers）B_n が定義される。小問 (i) は $B_0 = 1$ と $B_1 = -\frac{1}{2}$ を示しており、小問 (ii) はすべての奇数 $n \geq 3$ に対して $B_n = 0$ であることを示している。これらの数は、オイラー（Euler）–マクローリン（Maclaurin）の和公式、べき乗の和 $1^k + 2^k + \cdots + n^k$、そして $\sum 1/n^{2k}$ に関するオイラーの公式に現れる。$t = 0$ にあるような「穴」を取り除くことは、除去可能な特異点（removable singularity）という考え方である。極限と連続性（continuity）の丁寧な扱いについては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を読むとよい。

解答例

STEP III 2009、第 4 問

純粋数学 ・ ラプラス変換

> **STEP III 2009、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q4

鍵となる考え方

小問 (i)–(iii) は、いずれも定義の積分に微積分を 1 行適用するだけで済む。(i) は 2 つの指数関数をまとめるだけであり、(ii) は置換積分、(iii) は部分積分（integration by parts）である。小問 (iv) は部分積分を 2 回行っても解けるが、(iii) を 2 回使い、sin と cos の変換が互いを決定し合うようにするほうがすっきりする。最後の小問では、目標の $\mathrm{e}^{-pt}\cos qt$ を 3 段階 $\sin t \to \cos t \to \cos qt \to \mathrm{e}^{-pt}\cos qt$ で組み立てられるものと考える。各段階はそれぞれ 4 つの結果のうちの 1 つである。

解答

関数 g のラプラス変換（Laplace transform）を $\mathcal{L}[g](s)$ と書く。したがって $F = \mathcal{L}[f]$ である。「適切な」とは積分が収束することを意味する。特に、$s > 0$ に対して $t \to \infty$ のとき $\mathrm{e}^{-st}f(t) \to 0$ となることを仮定する。

小問 (i)

指数関数をまとめると、

$$\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-bt}f(t)\right](s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{-bt}f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+b)t}f(t)\,\mathrm{d}t = F(s+b),$$

となり、これは F の定義に $s+b$ を代入したものである。$s+b > 0$ であるから、これは正当である。

小問 (ii)

$u = at$ と置換すると、$t = u/a$、$\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/a$ である。$a > 0$ であるから積分区間の端 0 と ∞ は変わらず、

$$\mathcal{L}\big[f(at)\big](s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(at)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s/a)u} f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a}F\Big(\frac{s}{a}\Big),$$

となる。ここでも $s/a > 0$ を用いた。

小問 (iii)

e^{-st} を微分し、$f'(t)$ を積分する形で部分積分を行う。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'](s) &= \Big[\mathrm{e}^{-st}f(t)\Big]_0^\infty - \int_0^\infty (-s)\mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \big(0 - f(0)\big) + s\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= sF(s) - f(0),\end{aligned}$$

ここで、上端の項が消えるのは $t \to \infty$ のとき $\mathrm{e}^{-st}f(t) \to 0$ となるからである（これは f が適切であることの一部である）。

小問 (iv)

$S(s) = \mathcal{L}[\sin t](s)$、$C(s) = \mathcal{L}[\cos t](s)$ とおく。$|\mathrm{e}^{-st}\sin t| \le \mathrm{e}^{-st}$ であり、cos についても同様であるから、$s > 0$ のときどちらの積分も収束する。また、$\mathrm{e}^{-st}\sin t$ と $\mathrm{e}^{-st}\cos t$ はともに 0 に収束（converge）するので、それぞれに (iii) が適用できる。

導関数が cos で、$\sin 0 = 0$ である $f = \sin$ に (iii) を適用すると、

$$C(s) = sS(s).$$

導関数が $-\sin$ で、$\cos 0 = 1$ である $f = \cos$ に (iii) を適用すると、

$$-S(s) = sC(s) - 1.$$

（定数倍はそのまま積分の外に出せるので、$-\sin t$ の変換は $-S(s)$ である。）第 1 式を第 2 式に代入すると、

$$-S(s) = s^2S(s) - 1 \quad\Longrightarrow\quad (s^2+1)S(s) = 1 \quad\Longrightarrow\quad S(s) = \frac{1}{s^2+1},$$

となり、示すべき式が得られた。副産物として、

$$C(s) = \frac{s}{s^2+1}.$$

最後の小問

考えてみよう 新たな積分を一切せずに、$\sin t$ を $\cos qt$ に変えるにはどうすればよいか。

微分は sin を cos に変え（これが (iii)）、t のスケールを変えると $\cos t$ が $\cos qt$ になり（これが (ii)）、指数関数を掛けることは (i) にあたる。そこで 3 段階で進める。

第 1 段階：$\cos t$。 $f(t) = \sin t$ として (iii) を用い、F には (iv) を使うと、

$$\mathcal{L}[\cos t](s) = s \cdot \frac{1}{s^2+1} - \sin 0 = \frac{s}{s^2+1}.$$

（これは小問 (iv) の副産物である。）

第 2 段階：$\cos qt$。 $f(t) = \cos t$、$a = q > 0$ として (ii) を用いると、

$$\mathcal{L}[\cos qt](s) = \frac{1}{q} \cdot \frac{s/q}{(s/q)^2+1} = \frac{1}{q} \cdot \frac{sq}{s^2+q^2} = \frac{s}{s^2+q^2}.$$

第 3 段階：$\mathrm{e}^{-pt}\cos qt$。 $f(t) = \cos qt$、$b = p > 0$ として (i) を用い、s を $s+p$ で置き換える。

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-pt}\cos qt\right](s) = \frac{s+p}{(s+p)^2+q^2}} \qquad (s > 0).$$

検算

- $p \to 0$、$q = 1$ とすると $s/(s^2+1)$ となり、第 1 段階で得た $\cos t$ の変換に一致する。$q \to 0$ とすると $1/(s+p)$ となり、実際 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+p)t}\,\mathrm{d}t = 1/(s+p)$ である。
- $s \to \infty$ のとき $sF(s) \to 1 = \cos 0$ となり、そうなるべきである。s が大きいと重み $s\mathrm{e}^{-st}$ は $t = 0$ の近くに集中するので、$sF(s)$ は関数の 0 での値に近づくからである。
- 数値的には、$s = 1$、$p = \frac{1}{2}$、$q = 2$ のとき公式は $1.5/6.25 = 0.24$ を与え、積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用した値と一致する。コンピュータで (i)–(iv) と最終結果をランダムなパラメータ値で検証し、誤差は 10^{-12} 以内であった。

よくある間違い

- (ii) で、$\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/a$ から生じる因子 $1/a$ を忘れる。あるいは $F(s/a)$ ではなく $F(as)$ と書いてしまう。
- 第 3 段階で、一部の s しかずらさない。**すべての** s が $s+p$ になるので、分子は s ではなく $s+p$ である。
- (iii) で $f(0)$ の符号を誤る。境界項は $0 - f(0)$ である。

STEP のその先へ

これらの法則は、微分方程式（differential equation）に対するラプラス変換法の原動力である。(iii) は微分を s の掛け算に変えるので、定数係数の線形常微分方程式は $F(s)$ についての代数方程式になる。それを解き、ここで得たような結果から作った表で「引く」のである。シフト法則 (i) こそが、減衰振動 $\mathrm{e}^{-pt}\cos qt$ が $s = -p \pm \mathrm{i}q$ における極（pole）として現れる理由である。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）には、この方法について丸ごと 1 章が割かれている。

解答例

STEP III 2009、第 5 問

純粋数学 • 解の対称式

> **STEP III 2009、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q5

鍵となる考え方

ここでの議論はすべて、3 つの**基本対称式**（elementary symmetric functions）

$$e_1 = x + y + z, \qquad e_2 = yz + zx + xy, \qquad e_3 = xyz,$$

に関するものである。これらがわかれば、x、y、z は既知の 3 次方程式 $t^3 - e_1 t^2 + e_2 t - e_3 = 0$ の解となるからである。新しい情報はいずれも、与えられたべき和（power sums）のうち 2 つを掛け合わせ、どのような交差項が現れるかを調べることで得られる。漸化式（recurrence）はこの 3 次方程式から自然に導かれる。x、y、z のそれぞれがこの方程式を満たすので、それらのべき乗もまた同様の関係を満たすのである。

解答

$S_n = x^n + y^n + z^n$ とおく。すると与えられた条件は $S_1 = 1$、$S_2 = 2$、$S_3 = 3$ である。

$yz + zx + xy$ の値

S_1 を 2 乗すると、

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(yz + zx + xy),$$

であるから $1 = 2 + 2(yz + zx + xy)$ となり、

$$yz + zx + xy = -\tfrac{1}{2},$$

を得る。これが示すべきことであった。

$\sum x^2y$ の値、そして xyz の値

（ある変数の 2 乗）×（それとは別の変数）の形をした 6 つの項すべての和を $T = x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y$ とおく。S_2 と S_1 を掛けると 9 つの項が現れる。3 つの 3 乗の項と、T を構成する 6 つの項である：

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z) = (x^3 + y^3 + z^3) + T.$$

よって $2 \times 1 = 3 + T$ であり、

$$T = -1,$$

となる。これが 2 つ目の結果である。

考えてみよう 既知の量のどのような積が、T と xyz の両方を含むだろうか？

$(x + y + z)(yz + zx + xy)$ を考えてみよう。展開すると 9 つの項が現れる。そのうち 6 つは $x \cdot xy = x^2y$ の形をしており、これらはちょうど T の 6 つの項である。残りの 3 つは $x \cdot yz$、$y \cdot zx$、$z \cdot xy$ であり、いずれも xyz に等しい。したがって

$$(x + y + z)(yz + zx + xy) = T + 3xyz.$$

既知の値を代入すると $1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 + 3xyz$ となるので、$3xyz = \frac{1}{2}$ であり、

$$xyz = \frac{1}{6},$$

を得る。これが示すべきことであった。

漸化式

これで $e_1 = 1$、$e_2 = -\frac{1}{2}$、$e_3 = \frac{1}{6}$ がわかった。

$$(t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - e_1t^2 + e_2t - e_3 = t^3 - t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{6},$$

であるから、x、y、z はいずれもこの 3 次方程式の解である。特に

$$x^3 = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6},$$

が成り立ち、y と z についても同様である。両辺に x^{n-2} を掛けると

$$x^{n+1} = x^n + \frac{1}{2}x^{n-1} + \frac{1}{6}x^{n-2},$$

となり、x を y や z に置き換えても同じ式が成り立つ。これら 3 つの式を足し合わせると、

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2}S_{n-1} + \frac{1}{6}S_{n-2},$$

となるので、

$$a = 1, \qquad b = \frac{1}{2}, \qquad c = \frac{1}{6}.$$

考えてみよう 「すべての n について」という条件は、負のべき乗に関して何か問題を生じるだろうか？

$n \geq 2$ のときは、x^{n-2} を掛けても何の問題もない。それより小さい n に対しては x、y、z の負のべき乗が必要になるが、これらはいずれも 0 でないので負のべき乗は存在する。実際、それらの積は $\frac{1}{6} \neq 0$ である。したがって、この関係式はすべての整数 n について成り立つ。（x、y、z がすべて実数でなくても成り立つ。そして実際、すべてが実数というわけではない。この 3 次方程式は約 1.431 という実数解を 1 つと、互いに共役な 2 つの複素数解をもつ。）

検算

- $n = 2$ のとき、$S_0 = 3$ を用いれば、漸化式は与えられたデータを再現するはずである。実際、$S_2 + \frac{1}{2}S_1 + \frac{1}{6}S_0 = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3 = S_3$ である。
- 漸化式によれば $S_4 = 3 + 1 + \frac{1}{6} = \frac{25}{6}$、$S_5 = \frac{25}{6} + \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = 6$ となる。3 次方程式を数値的に解き（解は 1.43085 と $-0.21542 \pm 0.26471\,\mathrm{i}$）、4 乗と 5 乗の和を計算すると 4.16667 と 6.00000 となり、一致する。同じ解は負の n に対しても漸化式を満たす。

よくある間違い

- 3 次方程式の符号を間違える。正しくは $t^3 - e_1 t^2 + e_2 t - e_3$ であり、ここでは $b = -e_2 = +\frac{1}{2}$、$c = e_3 = \frac{1}{6}$ となる。
- $n = 2$ で漸化式を確かめる際に、$S_0 = 3$ であって 1 ではないことを忘れる。

STEP のその先へ

これらはニュートン（Newton）の恒等式であり、任意の個数の変数について、べき和と基本対称式を結びつけるものである。その背後には**対称式の基本定理**（fundamental theorem of symmetric polynomials）がある。すなわち、$x_1, \ldots, x_k$ のどのような対称式も $e_1, \ldots, e_k$ の多項式として表せる、という定理である。S_n の漸化式は線形漸化式であり、その特性方程式（characteristic equation）はこの 3 次方程式そのものである。これは線形差分方程式（linear difference equations）を解き、フィボナッチ（Fibonacci）数列の一般項の公式を与えるのと同じ考え方である。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は、このような精神で多項式とその解を論じている。

解答例

STEP III 2009、第 6 問

純粋数学 ・ トレミーの定理

STEP III 2009、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/09-s3-q6

鍵となる考え方

単位円（unit circle）上の 2 点間の距離は、2 点のなす角だけで決まる。その距離を求めるこつは、「平均」の角をくくり出すことである。すなわち $e^{i\beta} - e^{i\alpha}$ は $e^{i(\alpha+\beta)/2}$ と純虚数の積になる。すべての弦（chord）の長さを角の差の半分の正弦で表してしまえば、大きな恒等式は三角関数の恒等式になり、積和公式（product-to-sum formulae）を使えば数行で片がつく。さらに 4 点は円に内接する四角形をなし、この恒等式はその四角形に関する有名な定理なのである。

解答

弦の長さ

$e^{i(\alpha+\beta)/2}$ をくくり出す：

$$\begin{aligned} e^{i\beta} - e^{i\alpha} &= e^{i(\alpha+\beta)/2}\left(e^{i(\beta-\alpha)/2} - e^{-i(\beta-\alpha)/2}\right) \\ &= e^{i(\alpha+\beta)/2} \cdot 2i \sin \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha). \end{aligned}$$

$\left|e^{i(\alpha+\beta)/2}\right| = 1$ かつ $|2i| = 2$ であるから、

$$\left|e^{i\beta} - e^{i\alpha}\right| = 2\left|\sin \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)\right|.$$

最後に、$0 < \alpha < \beta < 2\pi$ より $0 < \frac{1}{2}(\beta - \alpha) < \pi$ となるので、正弦は正であり、絶対値記号を外すことができる：$\left|e^{i\beta} - e^{i\alpha}\right| = 2\sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$。これが示すべきことであった。

? **考えてみよう** そもそもなぜ $\alpha < \beta$ という条件があるのだろうか？

この条件がなければ、$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$ は $(-\pi,0)$ に入りうるので正弦が負になり、公式は負の長さを与えてしまう。角に順序をつけることこそが、絶対値を外すことを可能にしているのである。また $|e^{i\alpha}-e^{i\beta}|=|e^{i\beta}-e^{i\alpha}|$ であるから、絶対値の中の順序は関係ないことにも注意しよう。

恒等式

$0<\alpha<\beta<\gamma<\delta<2\pi$ であるから、恒等式に現れるどの組も小さい順に並んでおり、6つの絶対値すべてに最初の結果が適用できる。共通因数 $2\cdot 2=4$ で両辺を割ると、示すべきことは

$$\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\gamma)+\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\alpha)=\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\beta).$$

である。自然な変数は、隣り合う点どうしの3つの間隔である。

$$x=\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha),\qquad y=\tfrac{1}{2}(\gamma-\beta),\qquad z=\tfrac{1}{2}(\delta-\gamma),$$

とおくと、$\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)=x+y$、$\frac{1}{2}(\delta-\beta)=y+z$、$\frac{1}{2}(\delta-\alpha)=x+y+z$ となる。示すべき主張は

$$\sin x\sin z+\sin y\sin(x+y+z)=\sin(x+y)\sin(y+z).$$

である。それぞれの積に $2\sin P\sin Q=\cos(P-Q)-\cos(P+Q)$ を用いると、

$$\begin{aligned}2\sin x\sin z&=\cos(x-z)-\cos(x+z),\\ 2\sin y\sin(x+y+z)&=\cos(x+z)-\cos(x+2y+z),\\ 2\sin(x+y)\sin(y+z)&=\cos(x-z)-\cos(x+2y+z).\end{aligned}$$

最初の2行を足すと $\cos(x+z)$ の項が打ち消し合い、ちょうど3行目が得られる。よってこの三角関数の恒等式は成り立ち（実はすべての x,y,z について成り立つ）、4を掛け戻して弦の公式を用いれば

$$\left|e^{i\alpha}-e^{i\beta}\right|\left|e^{i\gamma}-e^{i\delta}\right|+\left|e^{i\beta}-e^{i\gamma}\right|\left|e^{i\alpha}-e^{i\delta}\right|=\left|e^{i\alpha}-e^{i\gamma}\right|\left|e^{i\beta}-e^{i\delta}\right|,$$

が得られる。これが示すべきことであった。

考えてみよう 三角関数の恒等式はすべての x、y、z について成り立つ。では、順序 $\alpha<\beta<\gamma<\delta$ はどこで使ったのだろうか？

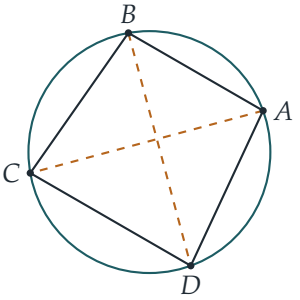
それぞれの絶対値を、絶対値記号**なしの** 2sin(角の差の半分) で置き換えたところである。点の順序がばらばらだと、それらの正弦のいくつかは負になり、長さについての恒等式は一般には成り立たない。たとえば角を $0.3,2,1,4$ とする（つまり $\gamma<\beta$）と、左辺は約 4.84、右辺は約 1.15 となる。

解釈

A, B, C, D をそれぞれ点 $e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, e^{i\delta}$ とする。これらは単位円上にあり、角の順序から、反時計回りに進むと A, B, C, D の順に出会う。よって $ABCD$ は、辺 AB, BC, CD, DA と対角線 AC、BD をもつ（凸な）円に内接する四角形（cyclic quadrilateral）であり、恒等式は

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

を主張している。



どんな円も単位円を拡大縮小して平行移動すれば得られ、この等式の両辺は同じ倍率（拡大率の 2 乗）で変化するので、この結果はすべての円に内接する四角形について成り立つ：**円に内接する四角形において、2 組の対辺の積の和は対角線の積に等しい。**これがトレミーの定理（Ptolemy's theorem）である。

検算

- 単位円に内接する正方形（$\alpha, \beta, \gamma, \delta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$）は辺が $\sqrt{2}$、対角線が 2 であり、$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 = 2 \cdot 2$ となる。
- 辺が a, b の長方形では $a^2 + b^2 = (\text{対角線})^2$ が得られる。トレミーの定理はピタゴラスの定理（Pythagoras）を含んでいるのである。
- 数値的には、順序づけられた角の 4 つ組を無作為に 10^5 個とったところ、両辺は 2×10^{-15} 以内で一致した。

よくある間違い

- 正弦が正であることを確かめずに $|e^{i\beta} - e^{i\alpha}| = 2\sin\frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ と書いてしまう。
- $\sin\frac{1}{2}(\delta - \alpha)$ などを、加法定理（compound-angle formulae）で元の 4 つの角を用いて展開してしまう。それでもうまくいくが、3 つの間隔 x, y, z を使うよりはるかに

煩雑である。

- 恒等式には頂点が円周上の順に並んでいることが必要だということを忘れる。右辺に現れるのは任意の 2 本の弦ではなく、対角線である。

STEP のその先へ

一般の位置にある 4 点に対しては、同じ量はトレミーの**不等式**（Ptolemy's inequality）$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$ しか満たさず、等号が成り立つのはちょうど 4 点がこの順に同一円周上にあるときである。複素数の恒等式 $(a-b)(c-d) + (a-d)(b-c) = (a-c)(b-d)$ と三角不等式を用いた鮮やかな証明がある。この背後には複比（cross-ratio）がある。複比はメビウス変換（Möbius transformations）の不変量であり、メビウス変換は円を円に移し、複素幾何学の中心をなすものである。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、これらの考え方を見事に展開している。

解答例

STEP III 2009、第 7 問

純粋数学 ・ 繰り返し微分と数学的帰納法

STEP III 2009、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/09-s3-q7

鍵となる考え方

すべては、一見何の変哲もない一つの恒等式（identity）$(1+x^2)f_0(x)=1$ から導かれる。これを繰り返し微分すると、連続する導関数どうしの関係式が得られる。ある n で成り立つ関係式をもう一度微分すれば次の関係式が得られるが、これはまさに帰納法（induction）の帰納段階の形そのものである。小問 (ii) では、$1+x^2$ の適切なべきを掛けることですべての分母が払われ、さらに二つ目の帰納法で最高次の項を追跡することにより次数が確定する。

解答

小問 (i)

$f_n(x)$ を f_n と書き、次の命題を $P(n)$ とする。

$$(1+x^2)f_{n+1}+2(n+1)xf_n+n(n+1)f_{n-1}=0.$$

基底段階（*base case*）。すべての x について $(1+x^2)f_0=1$ であるから、これを微分すると（$f_0'=f_1$ を用いて）

$$(1+x^2)f_1+2xf_0=0.$$

各項に積の微分法（product rule）を用いてさらに微分すると、

$$(1+x^2)f_2+2xf_1+2xf_1+2f_0=0, \qquad \text{すなわち} \qquad (1+x^2)f_2+4xf_1+2f_0=0,$$

となり、これが $P(1)$ である。

帰納段階。ある $n \geq 1$ について、すべての x で $P(n)$ が成り立つと仮定する。これは x についての恒等式であるから、微分してよい。$f_k' = f_{k+1}$ を用いると、

$$\begin{aligned} 0 &= (1+x^2)f_{n+2} + 2xf_{n+1} + 2(n+1)f_n + 2(n+1)xf_{n+1} + n(n+1)f_n \\ &= (1+x^2)f_{n+2} + 2(n+2)xf_{n+1} + (n+1)(n+2)f_n, \end{aligned}$$

となる。ここで $2 + 2(n+1) = 2(n+2)$ および $2(n+1) + n(n+1) = (n+1)(n+2)$ を用いた。これは $P(n+1)$ である。よって数学的帰納法により、すべての $n \geq 1$ について $P(n)$ が成り立つ。

（同じことだが、ライプニッツ（Leibniz）の公式を用いて $(1+x^2)f_0 = 1$ をちょうど $n+1$ 回微分してもよい。$1+x^2$ の 3 階導関数は 0 であるから残るのは 3 項だけであり、それらがちょうど $P(n)$ の 3 項になる。）

小問 (ii)

最初の三つ。$P_0 = (1+x^2)f_0 = 1$ である。次に、

$$f_1 = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \qquad \text{よって} \qquad P_1 = (1+x^2)^2 f_1 = -2x.$$

f_1 を商の微分法（quotient rule）で微分すると、

$$f_2 = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2) + 8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3},$$

となるから、$P_2 = (1+x^2)^3 f_2 = 6x^2 - 2$ である。（小問 (i) で $n = 1$ とした $(1+x^2)f_2 = -4xf_1 - 2f_0$ からも同じ結果が得られる。）

漸化式（recurrence）。$P_n = (1+x^2)^{n+1} f_n$ を積の微分法で微分すると、

$$P_n' = 2(n+1)x(1+x^2)^n f_n + (1+x^2)^{n+1} f_{n+1}.$$

両辺に $1+x^2$ を掛けると、各項が P の形になる。

$$(1+x^2)P_n' = 2(n+1)x\,(1+x^2)^{n+1} f_n + (1+x^2)^{n+2} f_{n+1} = 2(n+1)xP_n + P_{n+1}.$$

整理すると、すべての $n \geq 0$ について

$$P_{n+1} - (1+x^2)P_n' + 2(n+1)xP_n = 0$$

が成り立ち、これが示すべきことであった。ここでは帰納法は不要であり、各 n について成り立つ直接の計算である。

考えてみよう 最高次の項が打ち消し合って次数が小さくなるのではなく、次数がちょうど n であることは、どうすればわかるだろうか。

帰納法を通して必要な情報を運べるよう、少し強い命題を証明する。すなわち、P_n は次数（*degree*）n の多項式であり、その最高次の係数（*leading coefficient*）a_n は $a_n \neq 0$ を満たす。$P_0 = 1$ であるから、$n = 0$ の場合は成り立つ。

ある $n \geq 0$ について成り立つと仮定する。すなわち $P_n = a_n x^n + (\text{低次の項})$、$a_n \neq 0$ とする。漸化式より、

$$P_{n+1} = (1+x^2)P_n' - 2(n+1)xP_n.$$

P_n、したがって P_n' も多項式であるから、右辺は多項式である。さて $P_n' = na_n x^{n-1} + \cdots$ であり（$n = 0$ のときこれは 0 であり、$na_n = 0$ と整合する）、したがって $(1+x^2)P_n'$ は次数が $n+1$ 以下で、x^{n+1} の係数は na_n である。また $2(n+1)xP_n$ は次数 $n+1$ で、最高次の係数は $2(n+1)a_n$ である。よって P_{n+1} は次数が $n+1$ 以下であり、その x^{n+1} の係数は

$$a_{n+1} = na_n - 2(n+1)a_n = -(n+2)a_n.$$

$a_n \neq 0$ かつ $n+2 > 0$ であるから、これは 0 でない。したがって最高次の項は打ち消し合わず、P_{n+1} の次数はちょうど $n+1$ である。数学的帰納法により、すべての $n \geq 0$ について P_n は次数 n の多項式である。

おまけとして、$a_0 = 1$ と $a_{n+1} = -(n+2)a_n$ から $a_n = (-1)^n(n+1)!$ が得られ、上の $a_1 = -2$ および $a_2 = 6$ と一致する。

検算

- 小問 (i) で $x = 0$、$n = 1$ のとき：P_n から $f_0(0) = 1$、$f_1(0) = 0$、$f_2(0) = -2$ が得られ、$f_2 + 0 + 2f_0 = -2 + 2 = 0$ となる。
- 漸化式で $n = 1$ のとき：$(1+x^2)P_1' - 4xP_1 = -2 - 2x^2 + 8x^2 = 6x^2 - 2 = P_2$。
- 数値的に $x = 0.7$ では、中心差分（central difference）により $f_0''(0.7) \approx 0.284164$ が得られ、$(6x^2-2)/(1+x^2)^3 = 0.284164$ となる。さらに、小問 (i) の関係式と漸化式を、200 個の無作為な有理数点において $n = 12$ まで有理数演算で厳密に確かめた。

よくある間違い

- 示すべき範囲に合った基底段階を証明しないこと：小問 (i) の恒等式は $n = 1$ から始まるので、基底段階は $n = 1$ でなければならず、そのためには f_2 が必要である。

- $(1+x^2)P_n'$ と $2(n+1)xP_n$ の x^{n+1} の項が打ち消し合わないことを確かめずに、「次数は毎回一つずつ上がる」と述べること。$n \neq 2(n+1)$ であるから打ち消し合うことはないが、そのことは明記しなければならない。

STEP のその先へ

複素数を用いて部分分数（partial fractions）に分解し、$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}} - \frac{1}{x+\mathrm{i}}\right)$ とすると、どの導関数も容易に求まり、閉じた形 $P_n(x) = (-1)^n\, n!\, \mathrm{Im}\,(x+\mathrm{i})^{n+1}$ が得られる（$n = 1, 2$ で確かめてみよ）。さらに $x = \cot\theta$ とおくと、P_n の零点は $k = 1, \ldots, n$ に対する $\cot\frac{k\pi}{n+1}$ であることがわかる。これらはすべて実数で互いに異なり、古典的な直交多項式（orthogonal polynomials）の零点と同様である。直交多項式もまた、簡単な関数を繰り返し微分することで生成される。複素数がなぜこの種の計算を手なずけるのかを知るには、Needham の *Visual Complex Analysis*（『ビジュアル複素解析』）が格好の一冊である。

解答例

STEP III 2009、第 8 問

純粋数学 • 極限と漸化式

STEP III 2009、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/09-s3-q8

この問題は、*Beyond STEP* の第 4.5 節「2 年生の夢」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch04/sophomores-dream.html

鍵となる考え方

どの小問も、対数（logarithm）が「弱い」ことに関わっている。0 の近くで $\ln x$ は非常にゆっくりとしか発散しないので、x のどんな正の累乗も $\ln x$ のどんな累乗にも勝つ。置換（substitution）$x = \mathrm{e}^{-t}$ によって、これは指数関数が累乗に勝つという与えられた事実に帰着する。この極限が、部分積分（integration by parts）を行うときの境界項（boundary term）を消してくれる。最後の小問では、$x^x = \mathrm{e}^{x \ln x}$ に指数関数の級数を適用すると、ちょうど小問 (ii) の積分が現れる。

解答

小問 (i)

$\ln x$ は $x > 0$ でのみ定義されるので、この極限は $x \to 0^+$ を意味する。$x = \mathrm{e}^{-t}$ とおくと $\ln x = -t$ であり、$x \to 0^+$ となるのはちょうど $t \to \infty$ のときである。このとき

$$x^m (\ln x)^n = \mathrm{e}^{-mt}(-t)^n = (-1)^n \mathrm{e}^{-mt} t^n.$$

因子 $(-1)^n$ は単なる一定の符号であり、与えられた結果により $t \to \infty$ のとき $\mathrm{e}^{-mt} t^n \to 0$ である。したがって

$$\lim_{x \to 0} x^m (\ln x)^n = 0.$$

2 つ目の結果については、$m = n = 1$ とすればよい。これにより $x \to 0$ のとき $x \ln x \to 0$ が得られる。指数関数は連続（continuous）であるから

$$x^x = \mathrm{e}^{x \ln x} \to \mathrm{e}^0 = 1 \qquad \text{極限} x \to 0,$$

となり、示すべき結果が得られた。

小問 (ii)

まず、この積分が意味をもつことを確認する。被積分関数 $x^m (\ln x)^n$ は $(0,1]$ で連続であり、小問 (i) により $x \to 0$ のとき 0 に収束する。よって $(0,1]$ で有界（bounded）であり、I_n は通常の（収束する）積分である。

$u = (\ln x)^{n+1}$、$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = x^m$ として I_{n+1} を部分積分する。このとき $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{(n+1)(\ln x)^n}{x}$、$v = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}$ であるから

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[\frac{x^{m+1}(\ln x)^{n+1}}{m+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{(n+1)(\ln x)^n}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{m+1}(\ln x)^{n+1}}{m+1}\right]_0^1 - \frac{n+1}{m+1}\int_0^1 x^m (\ln x)^n\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

考えてみよう $\ln x$ が定義すらされない $x = 0$ での境界項はどうなるか？

下端は実際には $x \to 0^+$ の極限を意味する。小問 (i) を m、n の代わりに $m+1$、$n+1$ として適用すると（$m+1 \geq 1$ かつ $n+1 \geq 0$ なので、どちらも許される）、$x^{m+1}(\ln x)^{n+1} \to 0$ である。上端では $\ln 1 = 0$ かつ $n+1 \geq 1$ なので、その項も 0 である。したがって括弧の部分は消え、

$$I_{n+1} = -\frac{n+1}{m+1} I_n,$$

となり、示すべき式が得られた。

I_n を求めるために、まず

$$I_0 = \int_0^1 x^m\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m+1}.$$

から出発する。漸化式（recurrence）の各ステップで $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して $-\dfrac{k}{m+1}$ が掛けられるので

$$I_n = \left(-\frac{1}{m+1}\right)\left(-\frac{2}{m+1}\right)\cdots\left(-\frac{n}{m+1}\right)\frac{1}{m+1} = \frac{(-1)^n\, n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

（1 行の数学的帰納法（induction）で確かめられる。n で成り立つならば、漸化式より $-\frac{n+1}{m+1} \cdot \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(m+1)^{n+2}}$ となる。）

小問 (iii)

$0 < x \leq 1$ に対して $x^x = \mathrm{e}^{x\ln x}$ と書き、指数関数の級数（exponential series）を用いると

$$x^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\ln x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(\ln x)^n}{n!}.$$

（$x = 0$ での値は積分に影響しない。小問 (i) により関数 x^x はそこで 1 に収束するので有界であり、この積分は通常の積分である。）

ここで項別に積分する。$n = 0$ の項は $\int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1$ である。$n \geq 1$ のとき、第 n 項は小問 (ii) の I_n で $m = n$ としたものである（このとき m は正の整数なので許される）。

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n!}\cdot\frac{(-1)^n\,n!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

この式は $n = 0$ のときも 1 を与える。よって

$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} = 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^4 + \cdots,$$

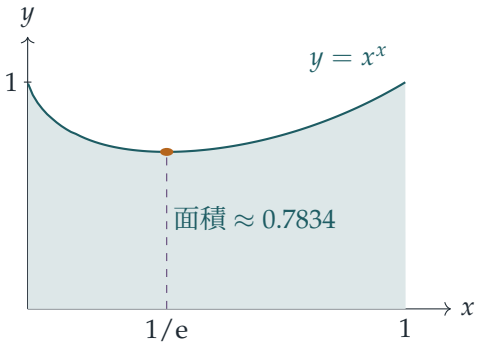
となり、これが示すべき結果である。

考えてみよう 無限和を項別に積分してよいのか？

無条件にはよくないが、ここでは $x\ln x$ が小さいままなので安全である。その導関数は $\ln x + 1$ なので、$(0,1]$ において $x = 1/\mathrm{e}$ で最小値をとり、$|x\ln x| \leq 1/\mathrm{e} < 1$ である。$u = x\ln x$ として級数を u^N の項で打ち切ると、剰余（remainder）は $(0,1]$ のすべての x に対して

$$\left|\sum_{n>N}\frac{u^n}{n!}\right| \leq \sum_{n>N}\frac{|u|^n}{n!} \leq \sum_{n>N}\frac{1}{n!} \leq \frac{2}{(N+1)!}$$

を満たす。長さ 1 の区間で積分すると、打ち切った項別積分（term-by-term integration）の誤差は高々 $2/(N+1)!$ であり、これは 0 に収束する。よって積分は級数の和に等しい。



検算

- 小問 (ii) で $m = 1$、$n = 1$ とすると $\int_0^1 x \ln x \, dx = -\frac{1}{4}$ であり、直接部分積分した結果（$[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2]_0^1 = -\frac{1}{4}$）と一致する。
- 数値的には、中点則（midpoint rule）により $\int_0^1 x^x \, dx \approx 0.7834305$ であり、部分和（partial sums）$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} + \frac{1}{3125} - \cdots$ は項が極めて速く小さくなるので、わずか数項で 0.7834305 に落ち着く。
- グラフは最小値 $e^{-1/e} \approx 0.69$ と 1 の間にあるので、面積は 0.69 と 1 の間になければならず、実際そうなっている。

よくある間違い

- 0 での境界項を説明なしに落とすこと。これこそが小問 (i) の要点であり、$m + 1 \geq 1$ が必要である。
- I_n の符号を間違えること。$(0, 1)$ で $\ln x < 0$ なので、I_n は $(-1)^n$ と同じ符号をもつ。
- 小問 (iii) で $n = 0$ の項を忘れること。先頭の 1 はこの項から来ている。

STEP のその先へ

最後の等式は「2 年生の夢」（sophomore's dream）として知られ、1697 年にヨハン・ベルヌーイ（Johann Bernoulli）によって発見された。私たちが正当化しなければならなかったステップ、すなわち積分と無限和の交換は、大学 1 年の解析学（analysis）の中心的なテーマである。級数が**一様に**収束する（一様収束、uniform convergence）ならばこの交換は安全であり、私たちの剰余の評価が示しているのはまさにそのことである（これはワイエルシュトラス（Weierstrass）の M 判定法の一例である）。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、一様収束と項別積分がうまくいく場合について、非常に読みやすい解説を与えている。

解答例

STEP III 2009、第 9 問

力学 ・ 放物運動の軌道の角度

STEP III 2009、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

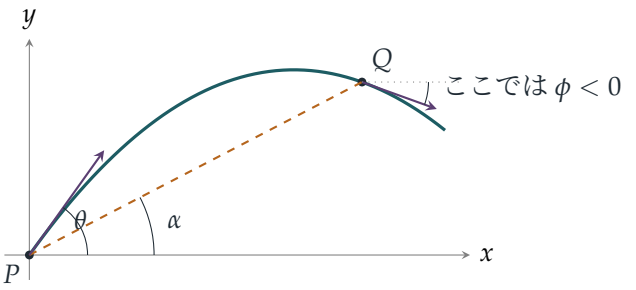
step.maths.org/questions/09-s3-q9

鍵となる考え方

放物運動（projectile motion）では、水平方向の速度はまったく変化せず、鉛直方向の速度は一定の割合で変化する。したがって、P と Q の間の鉛直方向の平均速度は両端での値の平均にほかならず、弦（chord）PQ の傾きは両端での傾きの平均になる。これで小問 (i) は一行で片づく。小問 (ii) では、軌道の方程式（trajectory equation）が（$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ と書き換えれば）$\tan\theta$ についての二次方程式（quadratic）になり、あとは解と係数の関係（sums and products of roots）がすべてを片づけてくれる。

解答

粒子は一定の重力 g のもとで自由に運動し、空気抵抗（air resistance）はないものとしてモデル化する。P を原点とし、x 軸を水平方向の正の向きに、y 軸を鉛直上向きにとる。投射の速さを u とし、$Q = (X, Y)$ とおく。$X > 0$ と仮定する。すなわち Q は P から見て正の側にあるので、水平方向の速度 $u\cos\theta$ は正であり、角 $\theta, \phi, \theta', \phi'$ はすべて $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に属する。（もし Q が P の真上または真下にあれば、P と Q における角はどちらも $\pm\frac{\pi}{2}$ となり、問題は何も主張しないことになる。）このとき $\tan\alpha = Y/X$ である。



小問 (i)

水平方向の速度は一定で $u\cos\theta$ である。鉛直方向の速度は P で $u\sin\theta$、Q で v_Q とし、これは一定の割合 g で減少するので、時刻の一次関数（linear function）である。よって、P から Q までの飛行に時間 T かかるとすると、

$$X = (u\cos\theta)\,T, \qquad Y = \frac{u\sin\theta + v_Q}{2}\,T,$$

が成り立つ。区間上での一次関数の平均は両端の値の平均に等しいからである。各点において運動の向きは速度の向きなので、$\tan\theta = \dfrac{u\sin\theta}{u\cos\theta}$、$\tan\phi = \dfrac{v_Q}{u\cos\theta}$ である。割り算をすると

$$\tan\alpha = \frac{Y}{X} = \frac{1}{2}\left(\frac{u\sin\theta}{u\cos\theta} + \frac{v_Q}{u\cos\theta}\right) = \tfrac{1}{2}(\tan\theta + \tan\phi),$$

となり、これは $\tan\theta + \tan\phi = 2\tan\alpha$ にほかならない。以上で示された。

小問 (ii)

二次方程式。 $x = ut\cos\theta$、$y = ut\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$ から t を消去すると、軌道は

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta} = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2}\left(1 + \tan^2\theta\right).$$

となる。$k = \dfrac{gX^2}{2u^2}$ とおくと、これは正である。軌道は (X, Y) を通るので、$T = \tan\theta$ は

$$kT^2 - XT + (Y + k) = 0.$$

を満たす。2 本目の軌道も u、X、Y が同じなので、$\tan\theta'$ も同じ方程式を満たす。2 本の軌道は異なるので $\theta \neq \theta'$ であり、tan は $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上で一対一（one-to-one）なので、$\tan\theta$ と $\tan\theta'$ はこの方程式の **2 つの**解である。したがって

$$\tan\theta + \tan\theta' = \frac{X}{k}, \qquad \tan\theta\tan\theta' = \frac{Y + k}{k} = 1 + \frac{Y}{k}.$$

1 つ目の結果。 加法定理（compound-angle formula）により

$$\tan(\theta+\theta') = \frac{\tan\theta+\tan\theta'}{1-\tan\theta\tan\theta'} = \frac{X/k}{-Y/k} = -\frac{X}{Y} = -\cot\alpha.$$

これには $Y \neq 0$ が必要である。$Y = 0$ のとき（このとき $\alpha = 0$ で $\cot\alpha$ は定義されない）、解の積は 1 となり、これは $\theta+\theta' = \frac{\pi}{2}$ を意味する。水平な地面で同じ到達距離を与える、おなじみの余角（complementary angles）の組である。この意味で、結果はこの場合にも成り立つ。

2 つ目の結果。 $t = \tan\alpha = Y/X$、$s = \tan\theta+\tan\theta' = X/k$ とおく。すると $Y/k = ts$ なので、$\tan\theta\tan\theta' = 1+ts$ である。小問 (i) をそれぞれの軌道に適用すると

$$\tan\phi = 2t-\tan\theta, \qquad \tan\phi' = 2t-\tan\theta'.$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\tan\phi+\tan\phi' &= 4t-s,\\ 1-\tan\phi\tan\phi' &= 1-\left(4t^2-2ts+\tan\theta\tan\theta'\right) = 1-4t^2+2ts-1-ts = t(s-4t).\end{aligned}$$

これらが同時に 0 になることはない。実際、$\tan\phi' = -\tan\phi$ ならば $\tan\phi\tan\phi' = -\tan^2\phi \leq 0 \neq 1$ である。$Y \neq 0$（すなわち $t \neq 0$）かつ $s \neq 4t$ のとき、

$$\tan(\phi+\phi') = \frac{4t-s}{t(s-4t)} = -\frac{1}{t} = -\cot\alpha = \tan(\theta+\theta').$$

それ以外の場合は、$1-\tan\phi\tan\phi'$ と $1-\tan\theta\tan\theta'$ がともに 0 である（$t=0$）か、あるいは $\tan(\phi+\phi')$ と $\tan(\theta+\theta')$ がともに無限大になる。したがって、いずれの場合も $\phi+\phi'$ と $\theta+\theta'$ は正接が等しいか、ともに $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍である。どちらにせよ

$$\theta+\theta'-(\phi+\phi') = n\pi \quad \text{ただしある整数} n.$$

考えてみよう 正接が等しいことからは、角は π の倍数の差を除いてしか定まらない。その倍数がちょうど π 1 つ分であることは、どうすればわかるだろうか。

角の大きさを用いる。それぞれの軌道で傾きは $\tan\theta - \dfrac{gx}{u^2\cos^2\theta}$ であり、これは x の増加とともに狭義に減少する。$X > 0$ なので $\tan\phi < \tan\theta$、よって $\phi < \theta$ である。同様に $\phi' < \theta'$ である。4 つの角はすべて $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ に属するので、$0 < \theta-\phi < \pi$ かつ $0 < \theta'-\phi' < \pi$ である。これらを足すと

$$0 < n\pi = (\theta+\theta')-(\phi+\phi') < 2\pi,$$

となるので $n = 1$ であり、$\theta+\theta' = \pi+\phi+\phi'$ が示された。

検算

- $X = 1$、$Y = \frac{1}{2}$、$u^2 = 4g$ とすると $k = \frac{1}{8}$ である。二次方程式は $T^2 - 8T + 5 = 0$ となり、その解は $4 \pm \sqrt{11}$ である。このとき $\tan(\theta + \theta') = 8/(1-5) = -2 = -\cot\alpha$ となる。数値的には、$\tan\phi = 1 - \tan\theta$、$\tan\phi' = 1 - \tan\theta'$ として、$\theta + \theta' \approx 2.0344$、$\pi + \phi + \phi' \approx 2.0344$ である。
- 水平な地面（$Y = 0$）の場合：$\theta + \theta' = \frac{\pi}{2}$ であり、対称性から $\phi = -\theta$、$\phi' = -\theta'$ である。よって $\pi + \phi + \phi' = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ となり、期待どおりである。
- 運動を数値的に刻んで計算して小問 (i) を確かめ、さらに 2 本の軌道が存在するような u、X、Y を無作為に 20,000 通り選んで、小問 (ii) の両方の結果を検証した。

よくある間違い

- 正接が等しいことだけから $\theta + \theta' = \pi + \phi + \phi'$ と結論してしまう。正接が等しくても角は π の倍数の差を除いてしか定まらず、どの倍数かを決めるには不等式 $\phi < \theta$ と $\phi' < \theta'$ が必要である。
- $\tan\theta$ と $\tan\theta'$ が同じ二次方程式の**相異なる 2 つの**解である理由を述べ忘れる。これらが異なるのは、軌道が異なり、かつ tan が $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上で一対一だからである。

STEP のその先へ

小問 (ii) には、可逆性（reversibility）の観点からの気持ちのよい解釈がある。どちらの軌道も逆向きにたどると、Q から P へ角 $\phi + \pi$ で投げ出された放物運動になる。つまり 4 つの角は両端の間の対称性によって結びついており、関係式 $\theta + \theta' = \pi + \phi + \phi'$ はそれを表している。（摩擦や抵抗のない場合の）ニュートン（Newton）の法則の時間反転対称性（time-reversal symmetry）は、大学の力学全体を貫くテーマである。放物運動をはじめ多くの話題を大学 1 年生向けに徹底的に扱ったものとして、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

解答例

STEP III 2009、第 10 問

力学 ・ 単振動

STEP III 2009、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/09-s3-q10

鍵となる考え方

平衡（equilibrium）における縮み d は、ばねの硬さ（stiffness）を名指しせずに教えてくれるために与えられている。平衡状態ではばねの力が重力とつり合うので、$k/m = g/d$ である。その後はニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）により、平衡位置を中心とする単振動（simple harmonic motion）が得られ、落下の高さ h は初速度を通してのみ関わってくる。粒子がばねから離れるのは、ばねがもはや粒子を押せなくなるときであり、それは縮みが再び 0 に戻るときに起こる。

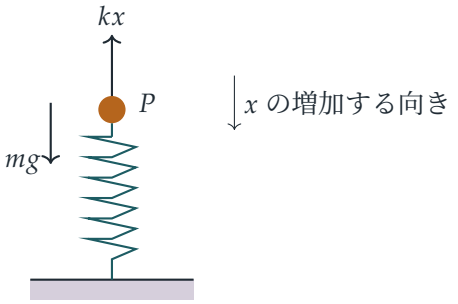
解答

微分方程式

P を質量 m の質点とみなし、ばねは質量が無視でき、ばね定数 k のフックの法則（Hooke's law）に従うものとし、空気抵抗は無視する。P がばねの上に静止しているとき、P にはたらく力は下向きの重力 mg と上向きのばねの力 kd であるから、

$$kd = mg, \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{k}{m} = \frac{g}{d}.$$

次に、落下させる場合を考える。x を下向きに測り（これは縮みである）、衝突の瞬間を $t = 0$ とする。P がばねと接触している間、P にはたらく力は図のとおりである。



ばねは軽いので、ばねが P に及ぼす力はちょうど上向きに kx である（軽いばねは両端で同じ大きさの力を伝える）。下向きを正としてニュートンの運動の第 2 法則を用いると $m\ddot{x} = mg - kx$ となるので、

$$\ddot{x} + \frac{g}{d}x = g, \qquad 0 \le t \le T.$$

方程式を解く

これは $x = d$ を中心とする単振動であり、

$$\omega = \sqrt{g/d}.$$

特解（particular solution）は定数 $x = d$ であり、余関数（complementary function）は $B\cos\omega t + C\sin\omega t$ であるから、一般解（general solution）は

$$x = d + B\cos\omega t + C\sin\omega t.$$

初期条件（initial conditions）は落下から定まる。$t = 0$ ではばねに触れた直後なので $x(0) = 0$ である。また P は高さ h だけ自由落下しているので、その速さは $\sqrt{2gh}$ で向きは下向き、すなわち x が増加する向きである。したがって

$$\begin{aligned} x(0) &= d + B = 0 && \Rightarrow \quad B = -d, \\ \dot{x}(0) &= C\omega = \sqrt{2gh} && \Rightarrow \quad C = \sqrt{2gh}\,\sqrt{d/g} = \sqrt{2hd}. \end{aligned}$$

よって

$$x = d - d\cos\omega t + \sqrt{2hd}\,\sin\omega t, \qquad A = d, \quad B = -d, \quad C = \sqrt{2hd}, \quad \omega = \sqrt{g/d}.$$

離れる時刻

? **考えてみよう** P が接触を失うのは正確にはいつか？

ばねは P に固定されていないので、押すことはできても引くことはできない。P にはたらく接触力はばねの力 kx であり、これは $x > 0$ である間は正で、P が上向きに運動しながら x が再び 0 に戻ったときに 0 になる。その時点を越えて運動が続くとすれば、方程式はばねによる下向きの引く力を必要とするが、ばねはそのような力を与えられない。したがって T は $x = 0$ となる最初の正の時刻である。

これを求めるために、振動する部分を 1 つのコサインにまとめる。$R = \sqrt{d^2 + 2hd}$ とおき、鋭角 φ を

$$\cos\varphi = \frac{d}{R}, \qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{2hd}}{R},$$

で定める。このとき $\tan\varphi = \sqrt{2h/d}$ であり、$\varphi = \arctan\sqrt{2h/d}$ である。すると $d\cos\omega t - \sqrt{2hd}\sin\omega t = R\cos(\omega t + \varphi)$ であり、

$$x = d - R\cos(\omega t + \varphi).$$

よって $x = 0$ となるのは、ちょうど $\cos(\omega t + \varphi) = d/R = \cos\varphi$ のときである。t が 0 から増加するとき、角 $\omega t + \varphi$ は φ から始まり、区間 $\varphi < \omega t + \varphi < 2\pi - \varphi$ では $\cos(\omega t + \varphi) < \cos\varphi$ となるので、そこでは $x > 0$ である。最初に $\cos\varphi$ に戻るのは

$$\omega T + \varphi = 2\pi - \varphi, \qquad \text{すなわち} \qquad \omega T = 2\pi - 2\varphi.$$

のときである。$\omega = \sqrt{g/d}$ で割ると、

$$T = \sqrt{d/g}\left(2\pi - 2\arctan\sqrt{2h/d}\right),$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

- $h = 0$ のとき、粒子は自然長のばねの上に速さ 0 で置かれることになり、$\varphi = 0$、$T = 2\pi\sqrt{d/g}$ となる。これはちょうど 1 周期（period）であり、その後 P は速さ 0 で最上点に戻る。まさに正しい。
- $h \to \infty$ のとき、$\varphi \to \frac{\pi}{2}$ かつ $\omega T \to \pi$ となる。非常に速い粒子はばねの上でわずか半周期しか過ごさない。これは振幅（amplitude）に比べて平衡位置のずれ d が無視できるほど小さくなるからである。
- エネルギー保存（energy conservation）により、P は速さ $\sqrt{2gh}$ で離れるはずである。実際、$\dot{x}(T) = R\omega\sin(2\pi - \varphi) = -R\omega\sin\varphi = -\sqrt{2gh}$ である。
- 数値的に、$d = 0.1\,\mathrm{m}$、$h = 0.2\,\mathrm{m}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ として運動を逐次計算すると、接触時間は 0.411 s となり、公式と一致する。d と h に無作為な値を与えても、小数第 6 位まで一致する。

よくある間違い

- 平衡位置から測ってしまい、問題文の x が縮みであることを忘れて、$A = 0$ としてしまう。
- 初速度を $\sqrt{2gh}$ としながら符号を誤る。下向きが x の増加する向きである。
- 離れるのは平衡位置 $x = d$ である、あるいは半周期後であると思い込む。ばねは自然長に戻るまで押し続ける。

STEP のその先へ

これは**片側拘束**（unilateral constraint）の最も簡単な例である。ばねは押すことはできるが引くことはできない。運動は段階ごとに異なる微分方程式（differential equation）に従い、それらは位置と速度を一致させることによってつなぎ合わされる。ちょうどここで、自由落下の段階がばねの段階につなぎ合わされたのと同じである。同じ考え方は、衝突の理論や跳ね返る系の理論全体に通じている。振動子や、上の検算で用いたようなエネルギーを用いた方法についてさらに知りたければ、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

解答例

STEP III 2009、第 11 問

力学 ・ 質量が変化する物体の運動

STEP III 2009、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/09-s3-q11

鍵となる考え方

質量が変化する場合、$F = ma$ は正しい法則ではない。力 = 運動量（momentum）の時間変化率、という法則を用いなければならない。塵は静止しているので、それ自身の運動量をもち込むことはなく、彗星の運動量 $M(1+bx)v$ は外力（external force）によってのみ変化する。このことから、ただちに第一積分（first integral）が得られる。さらに $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ と書けば、これは変数分離形（separable）の微分方程式となり、その解は x の 2 次式で表される。

解答

彗星を質点（particle）としてモデル化する。彗星が集める塵は静止していたので、彗星に運動量をもち込むことはない。したがって、系（彗星と集めた塵）にはたらく力は、運動の向きにはたらく重力 Mf のみである。

小問 (i)

$f = 0$ のとき外力ははたらかないので、運動量は保存される。進入時の運動量は MV であり、時刻 t における運動量は $M(1+bx)v$ である。よって

$$(1+bx)\,v = V.$$

ここで $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ とおいて変数を分離すると、

$$\int_0^x (1+bu)\,\mathrm{d}u = \int_0^t V\,\mathrm{d}s \quad\Longrightarrow\quad x + \tfrac{1}{2}bx^2 = Vt,$$

となる。ただし $t = 0$ のとき $x = 0$ であることを用いた。したがって $bx^2 + 2x - 2Vt = 0$ であり、$x \geq 0$ であるから、平方根の符号が正である解をとる必要がある：

$$x = \frac{\sqrt{1 + 2bVt} - 1}{b}.$$

小問 (ii)

今度は外力が Mf であるから、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[M(1 + bx)v\right] = Mf.$$

M と f は定数なので、0 から t まで積分すると $M(1 + bx)v - MV = Mft$ を得る（$t = 0$ のとき $x = 0$、$v = V$ である）。したがって

$$v = \frac{ft + V}{1 + bx},$$

となり、示すべき式が得られた。

? **考えてみよう** なぜ単に $M(1 + bx)\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = Mf$ と書いてはいけないのだろうか。

その式では、新たに加わる塵の一粒一粒を静止状態から速さ v まで加速するのに必要な運動量が無視されてしまう。積の微分法（product rule）を使うと違いがわかる。運動量の時間変化率は $M(1 + bx)\dot{v} + Mb\dot{x}\,v$ であり、第 2 項こそがその「追いつかせる」ためのコストである。

小問 (i) と同様に $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ と書いて変数を分離すると、

$$\int_0^x (1 + bu)\,\mathrm{d}u = \int_0^t (fs + V)\,\mathrm{d}s \quad \Longrightarrow \quad x + \tfrac{1}{2}bx^2 = \tfrac{1}{2}ft^2 + Vt.$$

よって $bx^2 + 2x - (ft^2 + 2Vt) = 0$ であり、再び非負の解をとると

$$x = \frac{\sqrt{1 + bft^2 + 2bVt} - 1}{b}.$$

（$f = 0$ とおけば小問 (i) の結果に戻る。）

一定の速さ。彗星が一定の速さ V で運動するのは、すべての t について $x = Vt$ となるとき、すなわち $\sqrt{1 + bft^2 + 2bVt} = 1 + bVt$ となるときであり、またそのときに限る。両辺を 2 乗すると、

$$1 + bft^2 + 2bVt = 1 + 2bVt + b^2V^2t^2 \quad \text{任意の} t,$$

が必要であり、これが成り立つのはちょうど $f = bV^2$ のときである。このとき $v = \dfrac{bV^2t + V}{1 + bVt} = V$ となるので、この選び方のもとで彗星は確かに一定の速さで運動

する。重力の引力が、掃き集めた塵を加速するのに必要な運動量をちょうど供給しているのである。

極限の速さ。一般には、x の式から得られる $1+bx=\sqrt{1+bft^2+2bVt}$ を用いると、

$$v=\frac{ft+V}{\sqrt{1+2bVt+bft^2}}=\frac{f+V/t}{\sqrt{bf+2bV/t+1/t^2}}\longrightarrow\frac{f}{\sqrt{bf}}=\sqrt{\frac{f}{b}}\quad\text{極限}t\to\infty,$$

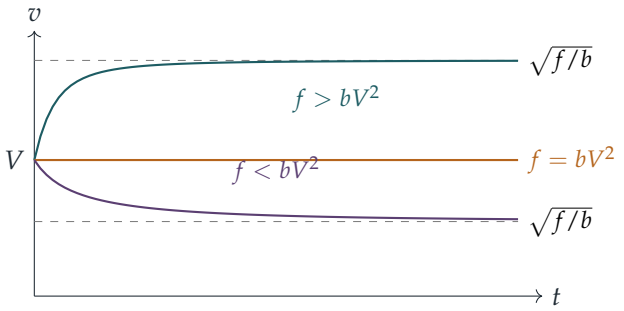
となる。ここで分子と分母を $t>0$ で割り、$bf>0$ であることを用いた（力は運動の向きにはたらくので、$f>0$ でなければならない）。したがって、速さは定数 $\sqrt{f/b}$ に収束（converge）する。

考えてみよう これは速さが一定の場合と矛盾しないだろうか。

矛盾しない。$f=bV^2$ ならば $\sqrt{f/b}=V$ であり、これは彗星が最初からずっともっていた速さである。実際、v^2 を微分すると

$$\frac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}t}=\frac{2(ft+V)(f-bV^2)}{(1+2bVt+bft^2)^2},$$

となるので、速さは $f>bV^2$ ならば $\sqrt{f/b}$ に向かって単調に増加し、$f<bV^2$ ならば単調に減少してそこに近づき、$f=bV^2$ ならば V のまま変わらない。



検算

- 単位：b の単位は 1/長さ であり、f は加速度であるから、f/b の単位は速さの 2 乗となり、$\sqrt{f/b}$ は速さである。また bft^2 と bVt は無次元（dimensionless）であり、平方根の中身として当然そうあるべきである。
- $b=1$、$V=1$、$f=3$ として、方程式 $\dot{x}=p/(1+bx)$、$\dot{p}=f$ を数値的に時間発展させると、x と v の式と小数第 8 位まで一致し、$t=10^6$ における速さは $1.7320508\ldots\approx\sqrt{3}$ となる。
- $b\to0$（塵がない場合）とすると、$x=\left(\sqrt{1+bft^2+2bVt}-1\right)/b\to\frac{1}{2}ft^2+Vt$ となり、おなじみの等加速度運動の結果が得られる。

よくある間違い

- 質量が変化している物体に対して (質量) $\times \dot{v} =$ 力 を用いてしまう。
- 2 次方程式の負の解をとってしまい、$x < 0$ となる。
- 運動量の方程式を積分するときに、積分定数（constant of integration）MV を忘れる。

STEP のその先へ

可変質量（variable mass）の問題は、大学 1 年で学ぶ古典的なテーマである。同じ運動量の収支計算からロケット方程式（rocket equation）が導かれ、雲の中を落下しながら成長する雨粒を考えると、これとよく似た方程式が現れる。極限の速さ $\sqrt{f/b}$ は終端速度（terminal velocity）であり、そこでは力が、新たな質量に費やされる運動量の割合とちょうどつり合っている。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、可変質量の系を丁寧に扱っている。

解答例

STEP III 2009、第 12 問

確率・統計 ・ 確率母関数

STEP III 2009、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/09-s3-q12

鍵となる考え方

小問 (i) では、投げるたびに硬貨の枚数の期待値は半分になるが、投げる回数そのものが確率変数であるため、それを条件として固定する。直前の枚数が与えられれば、次の枚数は二項分布（binomial distribution）に従い、その平均は容易に求まる。これにより期待値は等比数列（geometric sequence）となる。小問 (ii) では、合計は独立同分布（independent, identically distributed）な部分の和であり、確率母関数（probability generating function）を用いると「独立な確率変数の和」が「母関数の積」に変わる。

解答

小問 (i)

各回の投げは独立に確率 $\frac{1}{2}$ で表が出るので、$X_1 \sim \mathrm{B}(k, \frac{1}{2})$ であり、

$$\mathrm{E}(X_1) = \tfrac{1}{2}k.$$

$X_1 = x_1$ が与えられたとき、Albert は新たに独立な x_1 回の投げを行うので、$X_2 \mid X_1 = x_1 \sim \mathrm{B}(x_1, \frac{1}{2})$ であり、

$$\mathrm{E}(X_2 \mid X_1 = x_1) = \tfrac{1}{2}x_1.$$

（$x_1 = 0$ のときは一度も投げず $X_2 = 0$ となり、これと一致する。）X_1 のとりうる値について平均をとると、全期待値の法則（law of total expectation）により

$$\mathrm{E}(X_2) = \sum_{x_1=0}^{k} \mathrm{E}(X_2 \mid X_1 = x_1)\,\mathrm{P}(X_1 = x_1) = \tfrac{1}{2}\sum_{x_1=0}^{k} x_1\,\mathrm{P}(X_1 = x_1) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}(X_1) = \tfrac{1}{4}k,$$

となり、示すべき式が得られる。

考えてみよう なぜ単に「X_2 は $\mathrm{B}(\frac{1}{2}k, \frac{1}{2})$ に従う」と言えないのか。

2 回目に投げる回数は確率変数 X_1 であって、数 $\frac{1}{2}k$ ではないからである。実際、$\frac{1}{2}k$ は整数であるとも限らない。X_1 を条件とすることで投げる回数が固定され、そこで初めて二項分布の平均が使えるのである。

まったく同じ議論が各段階で成り立つ。$X_i = x_i$ が与えられたとき $X_{i+1} \sim \mathrm{B}(x_i, \frac{1}{2})$ であるから、$\mathrm{E}(X_{i+1}) = \frac{1}{2}\mathrm{E}(X_i)$ となる。数学的帰納法（induction）により

$$\mathrm{E}(X_i) = \frac{k}{2^i} \qquad (i \geq 1),$$

であり、公比 $\frac{1}{2}$ の等比級数（geometric series）を足し合わせると

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{E}(X_i) = k\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots\right) = k.$$

小問 (ii)

1 枚の硬貨について、$Y_i = n$ とは n 回表が出たのちに裏が出ることを意味するので、

$$\mathrm{P}(Y_i = n) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \cdot \tfrac{1}{2} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

その確率母関数は等比級数であり、$|t| < 2$ で収束（converge）する。

$$G_{Y_i}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} t^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}t} = \frac{1}{2 - t}.$$

k 枚の硬貨は別々に投げられるので $Y_1, \ldots, Y_k$ は独立であり、独立な確率変数の和の母関数はそれぞれの母関数の積である。したがって

$$G_Y(t) = \mathrm{E}\left(t^{Y_1 + \cdots + Y_k}\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathrm{E}\left(t^{Y_i}\right) = (2 - t)^{-k}.$$

平均と分散。 微分すると

$$G_Y'(t) = k(2 - t)^{-k-1}, \qquad G_Y''(t) = k(k+1)(2 - t)^{-k-2},$$

であるから、$G_Y'(1) = k$、$G_Y''(1) = k(k+1)$ である。よって

$$\mathrm{E}(Y) = G_Y'(1) = k,$$

であり、さらに $G_Y''(1) = \mathrm{E}\big(Y(Y-1)\big)$ であるから、分散（variance）は

$$\mathrm{Var}(Y) = G_Y''(1) + G_Y'(1) - \big(G_Y'(1)\big)^2 = k(k+1) + k - k^2 = 2k.$$

分布。 $\mathrm{P}(Y=r)$ は $G_Y(t)$ における t^r の係数である。

$$G_Y(t) = 2^{-k}\left(1-\tfrac{1}{2}t\right)^{-k},$$

と書き、負の指数に対する二項級数（binomial series）（$|t|<2$ で有効）を用いる。

$$(1-x)^{-k} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{k+r-1}{r}x^r.$$

（係数は $\dfrac{k(k+1)\cdots(k+r-1)}{r!}$ であり、これは $\binom{k+r-1}{r}$ に等しい。）$x=\frac{1}{2}t$ とおくと

$$\mathrm{P}(Y=r) = \binom{k+r-1}{r}\frac{1}{2^{k+r}}, \qquad r=0,1,2,\ldots$$

考えてみよう この公式を直接見てとる方法はあるだろうか。

ある。すべての投げを 1 本の長い列に並べて考える。$Y=r$ とは、k 回目の裏が $k+r$ 回目の投げで出ることを意味する。長さ $k+r$ の特定の投げの列が起こる確率は $2^{-(k+r)}$ であり、最後の投げは裏でなければならないので、最初の $k+r-1$ 回のうちどの r 回が表であるかを選ぶだけでよい。その選び方は $\binom{k+r-1}{r}$ 通りである。これが負の二項分布（negative binomial distribution）である。

検算

- $k=1$ のとき $\mathrm{P}(Y=r)=2^{-(r+1)}$ となり、硬貨 1 枚の幾何分布（geometric distribution）である。また $\mathrm{E}(Y)=1$、$\mathrm{Var}(Y)=2$ であり、0 から数えた $p=\frac{1}{2}$ の幾何分布に従う確率変数についてよく知られた値と一致する。
- $G_Y(1)=1$ であり、これはすべての母関数が満たすべき性質である。
- $k=2$ のとき、$\mathrm{P}(Y=0)=\frac{1}{4}$（最初の 2 回がともに裏）であり、$\mathrm{P}(Y=1)=\binom{2}{1}\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$（一方の硬貨が表のあと裏、もう一方が裏。順序は 2 通りで、それぞれ $\frac{1}{8}$）である。
- 分数による厳密な計算により、$k\le 7$ かつ $i<40$ について $\mathrm{E}(X_i)=k/2^i$ であること（したがって部分和が k に近づくこと）、および $k\le 6$ について $\mathrm{P}(Y=r)$ の公式、平均 k、分散 $2k$ が確認された。

よくある間違い

- 最後の裏を忘れて $\mathrm{P}(Y_i=n)=(\frac{1}{2})^n$ としてしまう。このとき確率の和は 2 になってしまう。

- $\mathrm{Var}(Y) = G''(1) - \big(G'(1)\big)^2$ を用いてしまう。これは $G'(1)$ の項が抜けており、$2k$ ではなく k が得られてしまう。
- 係数を $\binom{k+r}{r}$ と書いてしまう。最後の投げは裏に固定されているので、自由に決まるのは $k+r-1$ 回だけである。

STEP のその先へ

小問 (i) は分枝過程（branching process）である。各「個体」（表）は次の世代に確率的な数の「子孫」をもち、ここではその数は $\mathrm{B}(1, \frac{1}{2})$ に従う。子孫の数の平均が 1 より小さいので、個体群は絶滅する。条件付けの段階 $\mathrm{E}(X_{i+1}) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(X_{i+1} \mid X_i)\big)$ はタワー性（tower property）と呼ばれ、大学 1 年次の講義では、X_i の母関数が子孫の母関数を i 回合成したものになることが示される。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、母関数と分枝過程の両方を扱っている。

解答例

STEP III 2009、第 13 問

確率・統計 ・ 中心極限定理

STEP III 2009、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/09-s3-q13

鍵となる考え方

すべては一つの角 θ の関数である：$X = \cos\theta$、$Y = \sin\theta$。したがって X の分布は累積分布関数（cumulative distribution function）から求まり（$\cos\theta \le x$ となるのが円のどの弧かを調べればよい）、平均・分散・共分散は単に三角関数を一周にわたって平均したものにすぎない。小問 (ii) では、$\overline{X}$ は多数の独立同分布（independent, identically distributed）な確率変数の平均であり、これはまさに中心極限定理（central limit theorem）が適用できる状況である。

解答

小問 (i)

P は単位円上にあるので、$X = \cos\theta$、$Y = \sin\theta$ である。ここで θ は $[0, 2\pi)$ 上で密度 $\frac{1}{2\pi}$ をもつ。

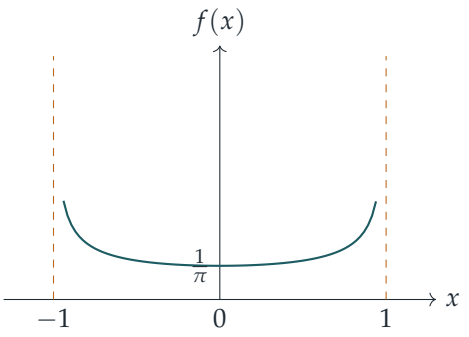
X の確率密度関数。 明らかに $-1 \le X \le 1$ である。$-1 < x < 1$ をとり、$\alpha = \arccos x \in (0, \pi)$ とおく。$[0, 2\pi)$ 上で $\cos\theta > x$ となるのはちょうど $\theta < \alpha$ または $\theta > 2\pi - \alpha$ のときであり、これは全長 2α の弧である。よって

$$F(x) = \mathrm{P}(X \le x) = 1 - \frac{2\alpha}{2\pi} = 1 - \frac{\arccos x}{\pi}.$$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arccos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を用いて微分すると、

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1),$$

であり、それ以外では $f(x) = 0$ である。（簡単な確認：$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\big[\arcsin x\big]_{-1}^{1} = 1$。）



密度は $x = 0$ で最小となり、$x = \pm 1$ で発散する。点 P は水平な直径の両端付近で水平方向に最もゆっくり動くので、X はそこで大部分の時間を過ごすのである。

分散。 対称性（f は偶関数）より $\mathrm{E}(X) = 0$ である。θ を直接用いて計算すると、

$$\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2},$$

よって

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 = \tfrac{1}{2}.$$

同じ議論により（あるいは $\theta - \frac{\pi}{2}$ もまた一周にわたって一様に分布することから）、$\mathrm{E}(Y) = 0$、$\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{2}$ である。

無相関であること。

$$\mathrm{E}(XY) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta = 0,$$

であるから、$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = 0 - 0 = 0$ である。よって X と Y は無相関（uncorrelated）である。

独立でないこと。 $X^2 + Y^2 = 1$ であるから、両者は決して独立（independent）ではない。X がわかれば、Y は $\pm\sqrt{1-X^2}$ のいずれかに確定してしまう。具体的な事象で示すと、$\mathrm{P}(X > 0.8) > 0$ かつ $\mathrm{P}(Y > 0.8) > 0$ であるが、$\mathrm{P}(X > 0.8 \text{ かつ} Y > 0.8) = 0$ である。このとき $X^2 + Y^2 > 1.28$ となってしまうからである。独立であれば、この同時確率は（正の）積に等しくなければならない。相関が 0 であるということは、**線形な**関係がないことを述べているにすぎない。ここでの関係は円であり、線形な傾向がまったく現れないほど対称なのである。

小問 (ii)

各組 (X_i, Y_i) は小問 (i) の分布に従い、点は独立に選ばれるので、添字の異なる組どうしは独立である。

$\overline{X}$ と $\overline{Y}$ は無相関である。 共分散は双線形（bilinear）であるから、

$$\mathrm{Cov}(\overline{X}, \overline{Y}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, Y_j).$$

$i \neq j$ のとき、X_i は P_i のみに、Y_j は P_j のみに依存し、これらは独立であるから $\mathrm{Cov}(X_i, Y_j) = 0$ である。$i = j$ のときは、小問 (i) より $\mathrm{Cov}(X_i, Y_i) = 0$ である。すべての項が 0 になるので $\mathrm{Cov}(\overline{X}, \overline{Y}) = 0$、すなわち $\overline{X}$ と $\overline{Y}$ は無相関である。

近似確率。 X_i は平均 0、分散 $\frac{1}{2}$ の独立同分布な確率変数である。したがって

$$\mathrm{E}(\overline{X}) = 0, \qquad \mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{1}{2n},$$

ここで分散を足し合わせてよいのは、X_i が独立だからである。

> **考えてみよう** X は正規分布とはまったく似ていない（その密度を見よ）。なぜ正規近似を用いてよいのだろうか。

中心極限定理が必要とするのは、分散が有限な独立同分布の項であることだけであり、分布の形は問わない。したがって n が大きいとき、$\overline{X}$ は近似的に $\mathrm{N}\left(0, \frac{1}{2n}\right)$ に従い、その標準偏差は $\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ である。ここで

$$\sqrt{\frac{2}{n}} = \frac{2}{\sqrt{2n}} = 2\sigma,$$

であるから、$Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ として

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(|\overline{X}| \leq \sqrt{\tfrac{2}{n}}\right) = \mathrm{P}\left(\frac{|\overline{X}|}{\sigma} \leq 2\right) &\approx \mathrm{P}(|Z| \leq 2) \\ &= 2\Phi(2) - 1 = 2(0.9772) - 1 \approx 0.954 \approx 0.95, \end{aligned}$$

となり、題意が示された。

検算

- 分散が $\frac{1}{2}$ であることは納得がいく。$X^2 + Y^2 = 1$ であり、対称性から $\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{E}(Y^2)$ なので、それぞれ $\frac{1}{2}$ でなければならない。積分は不要である！

- 4×10^5 個のランダムな角によるシミュレーションでは、いくつかの x の値において $F(x) = 1 - \frac{1}{\pi}\arccos x$ と小数第 3 位程度まで一致し、$\mathrm{Var}(X) \approx 0.5007$、$\mathrm{Cov}(X, Y) \approx 0.001$ が得られた。
- $n = 50$、反復 40 000 回のシミュレーションでは、$\mathrm{Var}(\overline{X})$ は 0.00997（理論値 0.01）であり、$|\overline{X}| \leq \sqrt{2/50} = 0.2$ となった割合は 0.954 であった。これに対し $\mathrm{P}(|Z| \leq 2) = 0.9545$ である。

よくある間違い

- $1 - \frac{1}{\pi}\arccos x$ を微分する際に符号を誤り、負の「密度」を得てしまう。密度が負になることはありえないので、符号を確認すること。
- 共分散が 0 であることから独立性を結論してしまう。独立ならば共分散は 0 であるが、逆は成り立たない。
- $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{1}{2}$ や $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ としてしまう。n 個の独立なコピーの平均の分散は、一つの分散を n で割ったものである。$1/\sqrt{n}$ 倍になるのは**標準偏差**のほうである。

STEP のその先へ

密度 $1/(\pi\sqrt{1-x^2})$ は**逆正弦分布**（arcsine distribution）であり、驚くほど頻繁に現れる。たとえば、ランダムウォーク（random walk）が正の側にいる時間の割合の極限分布として現れる。この問題の残りの部分は、無相関と独立の間の隔たり、そして中心極限定理に関するものである。中心極限定理は、大学 1 年次の確率論の講義で、積率母関数（moment generating function）や特性関数（characteristic function）を用いて証明することになる。実は $(\overline{X}, \overline{Y})$ は近似的に 2 変量正規分布（bivariate normal distribution）に従い、同時正規分布に従う確率変数については、相関が 0 ならば独立である。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、これらすべてをよく扱っている。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

2009 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

