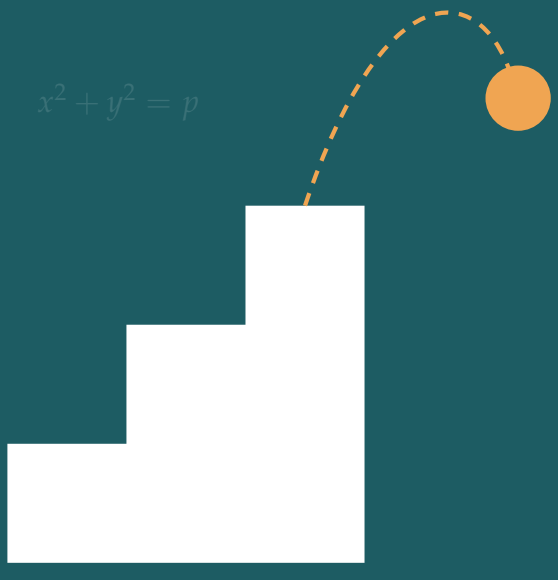
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

2008 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

2008 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

2008 年解答例

2008 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 39 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 背理法 純粋数学 . . . 3
Q2 置換積分 純粋数学 . . . 7
Q3 並べ替えによる不等式 純粋数学 . . . 11
Q4 凸関数 純粋数学 . . . 15
Q5 多項式の評価 純粋数学 . . . 19
Q6 逆関数と面積 純粋数学 . . . 23
Q7 回転と距離 純粋数学 . . . 27
Q8 クレロー型微分方程式 純粋数学 . . . 31
Q9 転がる輪の運動量 力学 . . . 35
Q10 放物運動 力学 . . . 39
Q11 最大摩擦力でのつり合い 力学 . . . 43
Q12 離散一様分布の最大値 確率・統計 . . . 48
Q13 円順列 確率・統計 . . . 52

STEP II

Q1 複素反復 純粋数学 . . . 56
Q2 部分分数分解と級数 純粋数学 . . . 60
Q3 不等式と背理法 純粋数学 . . . 64
Q4 陰関数の微分 純粋数学 . . . 68
Q5 置換積分 純粋数学 . . . 72
Q6 和積の公式 純粋数学 . . . 76
Q7 一階微分方程式 純粋数学 . . . 80
Q8 ベクトルと角の二等分線 純粋数学 . . . 84
Q9 放物運動 力学 . . . 88

Q10 壁との斜め衝突 力学 . . . 92
Q11 動く楔上の質点 力学 . . . 96
Q12 独立な事象 確率・統計 . . . 101
Q13 非復元抽出 確率・統計 . . . 105

STEP III

Q1 非線形連立方程式 純粋数学 . . . 109
Q2 累乗の和 純粋数学 . . . 113
Q3 楕円の接線と焦点 純粋数学 . . . 117
Q4 逆双曲線関数の不等式 純粋数学 . . . 121
Q5 漸化式 純粋数学 . . . 125
Q6 一階微分方程式 純粋数学 . . . 128
Q7 複素数と図形 純粋数学 . . . 132
Q8 級数と漸化式 純粋数学 . . . 137
Q9 摩擦と変化する力 力学 . . . 141
Q10 弾性ひもとエネルギー 力学 . . . 146
Q11 回転の力学 力学 . . . 150
Q12 積率母関数 確率・統計 . . . 154
Q13 指示変数の和 確率・統計 . . . 158

解答例

STEP I 2008、第 1 問

純粋数学 ・ 背理法

> **STEP I 2008、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q1

鍵となる考え方

有理数（rational number）は、加法、減法、乗法、および 0 でない数による除法について閉じている（closed）。ここで扱うことのほとんどすべては、この一つの事実から導かれる。すなわち、いくつかの数が有理数であれば、それらからこれらの演算で作った数もまた有理数である。最後の小問では、四つの数のうち二つが有理数であると仮定し、それらをうまく組み合わせて、無理数であると与えられている数のいずれかを作り出す。

解答

定義

実数 x が**有理数**であるとは、m と n を整数（integer）、$n \neq 0$ として $x = \frac{m}{n}$ と表せることをいう。実数が**無理数**（irrational number）であるとは、それが有理数でないこと、すなわち $x = \frac{m}{n}$ となる整数 m と $n \neq 0$ が存在しないことをいう。

命題 A

背理法（proof by contradiction）を用いる。pq は無理数であるが、p も q も無理数でないと仮定する。このとき両者とも有理数であるから、a, b, c, d を整数、$b, d \neq 0$ として $p = \frac{a}{b}$、$q = \frac{c}{d}$ と書ける。すると

$$pq = \frac{ac}{bd},$$

であり、ac と bd は整数で、b も d も 0 でないから $bd \neq 0$ である。よって pq は有理数となり、仮定に矛盾する。したがって、p と q の少なくとも一方は無理数である。

命題 B

同様に、$p+q$ は無理数であるが、$p = \frac{a}{b}$ と $q = \frac{c}{d}$（$b, d \neq 0$）がともに有理数であると仮定する。すると

$$p + q = \frac{ad + bc}{bd},$$

は分母が 0 でない整数の比であるから、$p+q$ は有理数である。この矛盾により、p と q の少なくとも一方は無理数であることが示された。

命題 C

$p = \sqrt{2}$、$q = -\sqrt{2}$ とする。両者とも無理数であるが、$p + q = 0 = \frac{0}{1}$ は有理数であるから、C は偽である。

念のため、$\sqrt{2}$ が無理数である理由を述べておく。$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ が既約分数（lowest terms）であるとすると、$m^2 = 2n^2$ であるから m^2 は偶数であり、したがって m は偶数である（奇数の 2 乗は奇数だからである）。$m = 2k$ とおくと $n^2 = 2k^2$ となり、n も偶数となって、既約であることに矛盾する。また、$-\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ ならば $\sqrt{2} = \frac{-m}{n}$ となるので、$-\sqrt{2}$ も無理数である。

最後の小問

π、π^2、$\mathrm{e}\pi$ が無理数であることは与えられている（必要なのはこの三つの事実だけである）。次の二つの簡単な事実を繰り返し用いる。

- r と s が有理数ならば、$r+s$、$r-s$、rs、および $s \neq 0$ のとき r/s も有理数である（その議論は A と B で用いたものとまったく同じである）。
- したがって、r が有理数ならば、$\frac{1}{2}$ が有理数であるから $\frac{1}{2}r$ も有理数である。

また、$\pi > 3 > \mathrm{e} > 0$ であるから $\pi + \mathrm{e} > 0$ かつ $\pi - \mathrm{e} > 0$ であり、特にどちらも 0 ではないことに注意する。

背理法を用いる。四つの数

$$\pi + \mathrm{e}, \quad \pi - \mathrm{e}, \quad \pi^2 - \mathrm{e}^2, \quad \pi^2 + \mathrm{e}^2$$

のうち二つが有理数であると仮定する。組は六通り考えられるので、それぞれを順に否定していく。

1. **$\pi + \mathrm{e}$ と $\pi - \mathrm{e}$ が有理数の場合。**両者を加えると 2π が有理数となるので、π は

有理数である。矛盾。

2. $\pi^2 - e^2$ と $\pi^2 + e^2$ が有理数の場合。両者を加えると $2\pi^2$ が有理数となるので、π^2 は有理数である。矛盾。

3. $\pi + e$ と $\pi^2 + e^2$ が有理数の場合。一つ目を 2 乗すると $(\pi + e)^2$ は有理数であり、

$$2e\pi = (\pi + e)^2 - (\pi^2 + e^2),$$

であるから、$e\pi$ は有理数である。矛盾。

4. $\pi - e$ と $\pi^2 + e^2$ が有理数の場合。同様に、

$$2e\pi = (\pi^2 + e^2) - (\pi - e)^2$$

は有理数であるから、$e\pi$ は有理数である。矛盾。

5. $\pi + e$ と $\pi^2 - e^2$ が有理数の場合。$\pi + e \neq 0$ であるから、

$$\pi - e = \frac{\pi^2 - e^2}{\pi + e}$$

は分母が 0 でない有理数どうしの商であり、有理数である。すると $\pi + e$ と $\pi - e$ がともに有理数となるが、これは場合 1 により不可能である。

6. $\pi - e$ と $\pi^2 - e^2$ が有理数の場合。$\pi - e \neq 0$ であるから、

$$\pi + e = \frac{\pi^2 - e^2}{\pi - e}$$

は有理数であり、やはり場合 1 により矛盾が生じる。

? **考えてみよう** 場合 6 で $\pi - e \neq 0$ が必要なのはなぜか。

0 で割ることは許されないからである。「有理数を有理数で割ると有理数になる」という手順は、分母が 0 でないときにしか成り立たない。もし $\pi = e$ であったなら、$\pi^2 - e^2 = 0$ は有理数であっても、$\pi + e$ については何もわからない。ここでは $\pi - e \approx 0.42$ であるから、問題はない。

どの組も矛盾に至るので、四つの数のうち二つが同時に有理数になることはない。よって、それらのうち有理数であるものは高々一つである。これが示すべきことであった。

検算

用いた恒等式は数値的に容易に確かめられる。$\pi \approx 3.14159$、$e \approx 2.71828$ とすると、$(\pi + e)(\pi - e) \approx 5.85987 \times 0.42331 \approx 2.48055 \approx \pi^2 - e^2$ であり、$(\pi + e)^2 - (\pi^2 + e^2) \approx$

$17.0795 \approx 2e\pi$ である。組の数も数えておこう。四つの数からは $\binom{4}{2} = 6$ 通りの組ができ、六つすべてを扱っている。なお、e と e^2 が無理数であることは一度も用いていないことに注意しよう。対称性により、場合 1 と 2 では π と π^2 の代わりにそれらを用いることもできた。

よくある間違い

- うっかり A や B の逆（converse）を証明してしまう。A は「積が無理数 $\Rightarrow$ ある因数が無理数」と述べている。その逆は偽である（$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$）。
- $\pi \pm e$ が 0 でないことに言及せずに、それで割ってしまう。
- 命題 C を真であるかのように用いる。たとえば「π と e は無理数なので、$\pi + e$ は無理数である」と主張してしまう。実は、$\pi + e$ が無理数であるかどうかは未解決問題（open problem）である。

STEP のその先へ

ここで用いた「閉じている」という事実は、有理数全体が体（field）をなすことを意味している。体とは、その中で加法、減法、乗法、除法（0 による除法を除く）を行っても外に出ることのない集合である。体は大学 1 年次の代数学の講義における中心的な対象であり、「$\pi + e$ は無理数か？」といった問いは超越数論（transcendence theory）へとつながっていく。この分野では、わかっていることは驚くほど少ない。代数学については Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を、有理数と無理数の整数論については Davenport, *The Higher Arithmetic*（高等算術）を読んでみるとよい。

解答例

STEP I 2008、第 2 問

純粋数学 ・ 置換積分

STEP I 2008、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s1-q2

鍵となる考え方

この置換（substitution）は、平方根（square root）が単純な式 $t-x$ になるように選ばれている。x について解いて煩雑な商を微分するのではなく、両辺を 2 乗して根号を消し、得られた関係式を陰関数微分（implicit differentiation）する。導関数にはちょうど因子 $t-x$ が現れ、これが被積分関数（integrand）の平方根と打ち消し合うので、積分は $\int \frac{1}{t+b}\,\mathrm{d}t$ に帰着する。最後の小問は、その約分と割り算がどのような場合に正当化されるかを問うものである。

解答

導関数

$R=\sqrt{x^2+2bx+c}$ とおくと、$t-x=R$ である。両辺を 2 乗すると、

$$t^2-2tx+x^2=x^2+2bx+c \quad\Longrightarrow\quad t^2-2tx-2bx-c=0.$$

これを t で微分すると（x は t の関数とみる）、

$$2t-2x-2t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-2b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0, \qquad \text{よって} \qquad (t+b)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=t-x.$$

$t+b$ で割るには、これが 0 でないことが必要である。$b^2<c$ より

$$x^2+2bx+c=(x+b)^2+(c-b^2)>(x+b)^2,$$

であるから $R>|x+b|$ となり、したがって

$$t+b=(x+b)+R>(x+b)+|x+b|\geq 0.$$

ゆえに、すべての x に対して $t+b>0$ であり、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{t-x}{t+b},$$

が示された。（2乗した関係式を直接解くこともできる。$x=\dfrac{t^2-c}{2(t+b)}$ であり、これを微分しても、いくらか式変形すれば同じ結果が得られる。）

積分

2次式（quadratic）$x^2+2bx+c$ はすべての x に対して正であるから、被積分関数はいたるところで定義される。置換し、$R=t-x$ を用いると、

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2bx+c}}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{t-x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=\int\frac{1}{t-x}\cdot\frac{t-x}{t+b}\,\mathrm{d}t\\&=\int\frac{1}{t+b}\,\mathrm{d}t=\ln(t+b)+C,\end{aligned}$$

となる。ここで $t+b>0$ であるから絶対値（modulus）は不要である。また $R>0$ であるから、$t-x=R$ の約分も問題ない。x に戻すと、

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2bx+c}}\,\mathrm{d}x=\ln\left(x+b+\sqrt{x^2+2bx+c}\right)+C.$$

これは微分して確かめることができる。$x+b+R$ の導関数は $1+\dfrac{x+b}{R}=\dfrac{R+x+b}{R}$ であり、これを $x+b+R$ で割ると $\dfrac{1}{R}$ が残る。

$b^2=c$ の場合

このとき $x^2+2bx+c=(x+b)^2$ であるから $\sqrt{x^2+2bx+c}=|x+b|$ となり、被積分関数は $\dfrac{1}{|x+b|}$ である（$x\neq -b$ で定義される）。

考えてみよう なぜ $\sqrt{(x+b)^2}$ は単に $x+b$ とはならないのか？

根号の記号は負でない方の平方根を表すので、$\sqrt{(x+b)^2}=|x+b|$ であり、$x+b<0$ のときこれは $-(x+b)$ に等しい。この符号こそが、公式が成り立ち続けるかどうかを決めるのである。

$x+b>0$ の場合：直接計算すると、

$$\int\frac{1}{x+b}\,\mathrm{d}x=\ln(x+b)+C.$$

公式からは

$$\ln\left(x+b+(x+b)\right)=\ln 2+\ln(x+b),$$

が得られ、直接計算の結果とは定数 $\ln 2$ だけしか違わない。したがって、結果は依然として成り立つ。

$x+b<0$ **の場合**：直接計算すると、

$$\int \frac{1}{-(x+b)}\,\mathrm{d}x = -\ln\big(-(x+b)\big)+C = -\ln|x+b|+C.$$

しかし公式からは $\ln\big(x+b+|x+b|\big) = \ln\big((x+b)-(x+b)\big) = \ln 0$ となり、これは定義されない。したがって、この場合には結果は成り立たない。

導出のどこが破綻するのかを見ておく価値がある。$x+b<0$ のとき、すべての x に対して $t = x-(x+b) = -b$ となる。つまり t は定数であり、新しい変数としてまったく使えない。そして $t+b=0$ は、まさに割り算に用いた量である。$t+b>0$ を保証していたのは狭義の不等式（strict inequality）$b^2<c$ であった。$b^2=c$ のときには広義の不等式（weak inequality）$t+b\geq 0$ しか残らず、等号はちょうど $x+b\leq 0$ のときに成り立つ。

検算

- $b=0$、$c=1$ とすると、結果は $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C = \operatorname{arsinh} x + C$ となり、よく知られた結果に一致する。
- 数値的にも、無作為に選んだ b と $c>b^2$ について、無作為な積分区間でシンプソンの公式（Simpson's rule）により求めた積分値は、対数の公式の差と 10^{-7} より高い精度で一致する。$b^2=c$、$b=1.3$ の場合、$\int_{0.5}^{4}\frac{\mathrm{d}x}{|x+b|}\approx 1.07992$ であり、公式から得られる $\ln\frac{5.3}{1.8}$ と一致する。

よくある間違い

- $t+b>0$ であることに気づかずに $\ln|t+b|$ と書き、その結果 $b^2=c$ のときに何がうまくいかなくなるのかを見落とす。
- 最後の小問で $\sqrt{(x+b)^2}=x+b$ としてしまい、$x+b<0$ での破綻を完全に覆い隠してしまう。

STEP のその先へ

置換 $t=x+\sqrt{x^2+2bx+c}$ は**オイラー（*Euler*）置換**（Euler's substitutions）の一つであり、x と $\sqrt{ax^2+bx+c}$ の有理関数（rational function）の積分を、どれも t の有理関数の積分に変換する。最後の小問は、変数変換（change of variable）において、新しい

変数が古い変数に滑らかかつ一対一（one-to-one）に依存していなければならない理由を示している。t が定数になると、この方法は崩壊するのである。Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）では、これらの仮定を厳密にした形で変数変換の定理が述べられている。

解答例

STEP I 2008、第 3 問

純粋数学 ・ 並べ替えによる不等式

> **STEP I 2008、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q3

鍵となる考え方

不等式 $(*)$ は、実は二つの非負の因数の積が姿を変えたものにすぎない。これが得られれば、以降の不等式はすべて、$(*)$ の両辺が示したい不等式の両辺になるように a, b, c, d を選び、しかも条件 $c \geq a$ と $d \geq b$ が本当に成り立つことを確かめるだけの問題になる。示すべき不等式は対称（symmetric）なので、まず変数を大きさの順に並べてよく、その順序づけこそがこれらの条件を保証してくれるのである。

解答

$(*)$ の証明

すべてを一方の辺に移項して因数分解（factorise）する：

$$ab + cd - bc - ad = a(b-d) - c(b-d) = (c-a)(d-b).$$

$c \geq a$ かつ $d \geq b$ ならば、二つの因数はともに非負であるから、その積も非負である。よって $ab + cd \geq bc + ad$ であり、等号が成り立つのはちょうど $c = a$ または $d = b$ のときである。

小問 (i)

2 変数の場合。 $x \geq y$ と仮定する。$(*)$ において

$$a = y, \quad b = y, \quad c = x, \quad d = x.$$

とおく。条件 $c \geq a$ と $d \geq b$ はどちらも $x \geq y$ を意味し、これは仮定されている。このとき $ab + cd = y^2 + x^2$, $bc + ad = xy + xy$ であるから、$(*)$ より

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

を得る。

3 変数の場合。さらに $x \geq z$ かつ $y \geq z$ と仮定する。

$$a = z, \quad b = z, \quad c = x, \quad d = y.$$

とおく。ここで $c \geq a$ は $x \geq z$、$d \geq b$ は $y \geq z$ であり、どちらも仮定されている。このとき $ab + cd = z^2 + xy$, $bc + ad = zx + zy$ であるから

$$z^2 + xy \geq xz + yz.$$

これを $x^2 + y^2 \geq 2xy$（$x \geq y$ なので使ってよい）に加えると

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy \geq 2xy + xz + yz,$$

となり、両辺から xy を引くと

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

を得る。ここまでで証明できたのは $x \geq y \geq z$ の場合だけである。

考えてみよう $x \geq y \geq z$ の場合にしか証明していない結果から、どうすればすべての x, y, z に対する結果が得られるだろうか？

$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ の両辺はともに対称である。すなわち、どの二つの変数を入れ替えても各辺は変わらない。任意の実数 x, y, z が与えられたとき、それらを大きい順に $X \geq Y \geq Z$ と並べる。いま示したことから $X^2 + Y^2 + Z^2 \geq XY + YZ + ZX$ が成り立つ。しかしこれは x, y, z についての不等式と同じものであり、項の順序が違うだけである。したがって、この不等式はすべての実数 x, y, z について成り立つ。

（等号が成り立つには、足し合わせた二つの不等式の両方で等号が成り立つ必要があり、そのためには $x = y = z$ でなければならない。）

小問 (ii)

この式は、それぞれが数とその逆数（reciprocal）の和である三つの組の和である：

$$\left(\frac{s}{t} + \frac{t}{s}\right) + \left(\frac{t}{r} + \frac{r}{t}\right) + \left(\frac{r}{s} + \frac{s}{r}\right).$$

したがって、任意の正の数 p, q に対して $\dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{p} \geq 2$ を示せば十分である。これは $x^2 + y^2 \geq 2xy$ に相当するものである。

式 $\frac{p}{q}+\frac{q}{p}$ は p と q について対称であるから、$p \geq q > 0$ となるように名前をつけてよい。$(*)$ において

$$a = q, \quad b = \frac{1}{p}, \quad c = p, \quad d = \frac{1}{q}.$$

とおく。すると $c \geq a$ は $p \geq q$ であり、$d \geq b$ は $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p}$ である。後者も、p と q が正であることから $p \geq q$ より従う。このとき

$$ab + cd = \frac{q}{p} + \frac{p}{q}, \qquad bc + ad = \frac{p}{p} + \frac{q}{q} = 2,$$

であるから、$(*)$ より $\dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{p} \geq 2$ を得る。

これを組 $(s,t), (t,r), (r,s)$ に適用し、三つの結果を足し合わせると、すべての正の数 r, s, t に対して

$$\frac{s}{t} + \frac{t}{r} + \frac{r}{s} + \frac{t}{s} + \frac{r}{t} + \frac{s}{r} \geq 2 + 2 + 2 = 6$$

が成り立ち、求める結果が得られた。各組でその二つの数が等しくなる必要があるから、等号が成り立つのはちょうど $r = s = t$ のときである。

検算

- 小問 (i) で $x = 3, y = 1, z = -2$ を試してみる。左辺は 14、右辺は $3 - 2 - 6 = -5$ である。三つの値を並べ替えても両辺は変わらず、これは対称性による議論が必要とする通りである。
- 小問 (i) の別証明：$2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$。
- $r = 2, s = 1, t = 1$ のとき、小問 (ii) の式は $1 + \frac{1}{2} + 2 + 1 + 2 + \frac{1}{2} = 7 \geq 6$ である。コンピュータで 20,000 個のランダムな厳密有理数の場合についてすべての段階を確かめたところ、反例は見つからなかった。また、$r = 1.001, s = 1, t = 0.999$ のような値では、和は 6 をわずかに上回る。

よくある間違い

- $c \geq a$ と $d \geq b$ を確かめずに $(*)$ を使うこと。文字の割り当てを誤ると、不等号の向きが逆になることがある。
- 小問 (ii) で、$\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p}$ が正であることを使っている点を忘れること。負の数の場合、逆数をとっても同じようには大小が逆転しない。
- 小問 (i) を $x \geq y \geq z$ の場合についてだけ証明し、対称性から一般の場合が導かれる理由を説明しないこと。

STEP のその先へ

不等式 $(*)$ は**並べ替え不等式**（rearrangement inequality）の 2 項の場合である。これは、二つの数の列がそれぞれ大きさの順に並んでいるとき、積の和は同じ順序で組にしたときに最大となり、逆の順序で組にしたときに最小となる、という不等式である。ここでの二つの結果も、2 項の相加相乗平均の不等式（AM–GM）も、そこからただちに導かれる。また、チェビシェフ（Chebyshev）の和の不等式とも密接に関係している。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 向け問題集）には STEP 形式の不等式の演習がさらに載っており、Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）では、このような順序に関する議論が解析学をどのように支えているかが示されている。

解答例

STEP I 2008、第 4 問

純粋数学 ・ 凸関数

> **STEP I 2008、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q4

鍵となる考え方

どちらの関数も指数関数（exponential）$\mathrm{e}^{h(x)}$ の形をしており、2 回微分すると $\big(h'' + (h')^2\big)\mathrm{e}^h$ となる。指数関数の因子はつねに正であるから、凸性（convexity）は $h'' + (h')^2$ の符号、すなわち純粋に三角関数の不等式に帰着する。(i) では、この不等式がちょうど描くよう求められている 2 曲線の比較になっている。(ii) では、$\sin 2x$ と $\sin 2\alpha$ の比較に簡約される。

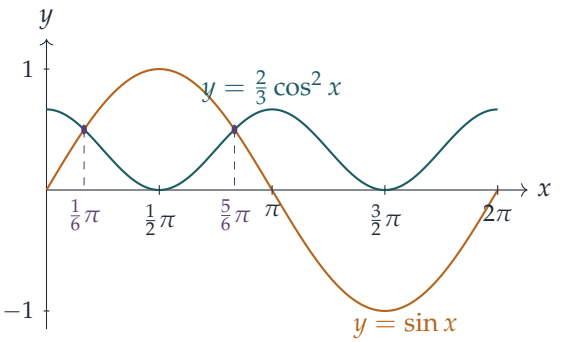
解答

小問 (i)

グラフ。 曲線 $y = \frac{2}{3}\cos^2 x$ は 0 と $\frac{2}{3}$ の間にある。$x = 0, \pi, 2\pi$ で $\frac{2}{3}$ に等しく、$x = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$ で x 軸に接し、周期（period）は π である。曲線 $y = \sin x$ はおなじみの正弦曲線である。交点を求めるため、$s = \sin x$、$\cos^2 x = 1 - s^2$ とおくと

$$\tfrac{2}{3}(1 - s^2) = s \iff 2s^2 + 3s - 2 = 0 \iff (2s - 1)(s + 2) = 0.$$

$s = -2$ はありえないので $\sin x = \frac{1}{2}$ であり、2 曲線は $x = \frac{1}{6}\pi$ と $x = \frac{5}{6}\pi$ でのみ交わる。$(\pi, 2\pi)$ では正弦曲線は負であり、もう一方の曲線は非負であるから、そこに交点はない。



f の凸性。 $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sin x}$ とすると、合成関数の微分法（chain rule）により $f'(x) = \frac{2}{3}\cos x\, f(x)$ であり、さらに積の微分法（product rule）により

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\tfrac{2}{3}\sin x\, f(x) + \tfrac{2}{3}\cos x\, f'(x) \\ &= f(x)\left(\tfrac{4}{9}\cos^2 x - \tfrac{2}{3}\sin x\right) \\ &= \tfrac{2}{3}f(x)\left(\tfrac{2}{3}\cos^2 x - \sin x\right). \end{aligned}$$

考えてみよう なぜ括弧の中身だけですべてが決まるのか。

$f(x)$ は指数関数なので狭義に正であり、したがって $f''(x) \geq 0$ となるのは $\frac{2}{3}\cos^2 x \geq \sin x$ のときであり、かつそのときに限る。言い換えれば、f が凸（convex）となるのは、ティール色の曲線が琥珀色の曲線と重なるか、その上方にある範囲にちょうど一致する。問題が先にグラフを描かせるのはこのためである。

グラフと先に求めた交点から、$0 < x \leq \frac{1}{6}\pi$ および $\frac{5}{6}\pi \leq x < 2\pi$ において $\frac{2}{3}\cos^2 x \geq \sin x$ である。$\frac{1}{6}\pi$ と $\frac{5}{6}\pi$ の間では正弦曲線のほうが上にある（たとえば $x = \frac{1}{2}\pi$ では、2 つの値は 0 と 1 である）。よって f は

$$0 < x \leq \tfrac{1}{6}\pi \qquad \text{および} \qquad \tfrac{5}{6}\pi \leq x < 2\pi,$$

で凸であり、これより広い区間では凸ではない。（$f'' = 0$ となる端点 $\frac{1}{6}\pi$ と $\frac{5}{6}\pi$ を含めるかどうかは好みの問題である。）

小問 (ii)

$g(x) = \mathrm{e}^{-k\tan x}$ とすると $g'(x) = -k\sec^2 x\, g(x)$ である。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^2 x = 2\sec^2 x\tan x$ と積の微分法を用いると

$$\begin{aligned} g''(x) &= -2k\sec^2 x\tan x\, g(x) - k\sec^2 x\, g'(x) \\ &= g(x)\left(k^2\sec^4 x - 2k\sec^2 x\tan x\right) \\ &= k\sec^2 x\, g(x)\left(k\sec^2 x - 2\tan x\right). \end{aligned}$$

ここで $0 < 2\alpha < \frac{1}{2}\pi$ より $k = \sin 2\alpha > 0$ であり、また $\sec^2 x > 0$、$g(x) > 0$ である。よって $g''(x) \geq 0$ となるのは $k\sec^2 x \geq 2\tan x$ のときであり、かつそのときに限る。両辺に $\cos^2 x > 0$ を掛けると、これは

$$k \geq 2\tan x\cos^2 x = 2\sin x\cos x = \sin 2x.$$

となる。したがって g が凸となるのは、ちょうど

$$\sin 2x \leq \sin 2\alpha.$$

となる範囲である。

> **考えてみよう** $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ のとき、$\sin 2x \leq \sin 2\alpha$ となるのはどこか。

x が $(0, \frac{1}{2}\pi)$ を動くとき、$2x$ は $(0, \pi)$ を動く。この区間で sin は $\frac{1}{2}\pi$ まで増加し、その後減少し、$\frac{1}{2}\pi$ に関して対称である。値 $\sin 2\alpha$（ただし $0 < 2\alpha < \frac{1}{2}\pi$）をとるのは $2x = 2\alpha$ と $2x = \pi - 2\alpha$ においてである。よって $\sin 2x \leq \sin 2\alpha$ となるのは、$2x \leq 2\alpha$ または $2x \geq \pi - 2\alpha$ のときであり、かつそのときに限る。すなわち

$$0 < x \leq \alpha \qquad \text{または} \qquad \tfrac{1}{2}\pi - \alpha \leq x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

特に、$0 < x < \alpha$ のとき $0 < 2x < 2\alpha < \frac{1}{2}\pi$ であり、そこで sin は増加するので、$\sin 2x < \sin 2\alpha = k$ となって $g''(x) > 0$ である。ゆえに、求められているとおり、g は $0 < x < \alpha$ で凸である。

もう一方の区間は

$$\tfrac{1}{2}\pi - \alpha < x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

である。$\alpha < \frac{1}{4}\pi$ より $\frac{1}{2}\pi - \alpha > \frac{1}{4}\pi > \alpha$ となるので、これは 1 つ目の区間とは確かに異なる。その間の区間 $\alpha < x < \frac{1}{2}\pi - \alpha$ では、g は凸ではない。

検算

- $x = \frac{1}{6}\pi$ では $\frac{2}{3}\cos^2 x = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{2} = \sin x$ であるから、そこで $f'' = 0$ となる。境界点ではそうなるべきである。

- (ii) では、$\sin 2x$ が変わらないので、問題は $x \mapsto \frac{1}{2}\pi - x$ に関して対称である。2 つ目の区間が 1 つ目の区間の鏡像になっているのはこのためである。
- 数値的には、$\alpha = 0.5$（$k \approx 0.841$）のとき、差分（finite difference）による g の第 2 次導関数（second derivative）の近似値は $x = 0.3$ と $x = 1.3$ で正、$x = 0.8$ で負である。$\frac{1}{2}\pi - \alpha \approx 1.071$ なので、これは求めた区間と一致する。多数のランダムな α と x についてコンピュータで調べたところ、両方の小問の結果と一致した。

よくある間違い

- $e^{h(x)}$ を 2 回微分するときに $(h')^2$ の項を忘れること。第 2 次導関数は単に $h''e^h$ ではない。
- (i) で $(\pi, 2\pi)$ 全体を見落とすこと。そこでは $\sin x < 0 \leq \frac{2}{3}\cos^2 x$ であるから、f は $\frac{5}{6}\pi$ から 2π までずっと凸である。
- $\sin 2x \leq \sin 2\alpha \Rightarrow x \leq \alpha$ で止めてしまうこと。sin は $(0, \pi)$ で単調（monotonic）ではないので、これでは 2 つ目の区間が失われる。

STEP のその先へ

第 2 次導関数による判定は、凸性の一つの側面にすぎない。本来の定義は幾何的なもので、どの弦（chord）もグラフと重なるかその上方にある、というものである。微分可能な関数については、これは f' が増加関数であることと同値であり、さらにイェンセンの不等式（Jensen's inequality）へとつながる。この不等式は相加相乗平均の不等式（AM–GM）の基礎であり、確率論や最適化（optimisation）の多くの部分を支えている。凸関数については Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）で丁寧に扱われている。Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、STEP 形式の演習問題がさらに収められている。

解答例

STEP I 2008、第 5 問

純粋数学 ・ 多項式の評価

> **STEP I 2008、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q5

鍵となる考え方

$n = 1$ のとき多項式は直線であり、区間の両端での値は互いに結びついている。両者の差はちょうど 2 なので、両方とも小さくなることはできない。小問 (ii) での工夫は、最高次の係数で割ることで、チェビシェフ（Chebyshev）の定理がその曲線自体に適用できるようにすることである。すると定理により、$[-1,1]$ のどこかで $|y|$ が大きくならなければならない。一方、端点での値は小さい。両端点での値よりも高く上る（あるいは両方よりも低く下がる）曲線は、その間のどこかで向きを変えなければならない。

解答

小問 (i)

$n = 1$ の場合。このとき $\mathrm{p}(x) = x + a_0$ であり、$M \geq 2^0 = 1$ を示せばよい。M は $[-1,1]$ の任意の点における $|\mathrm{p}|$ の値以上であるから、とくに端点での値以上である：

$$M \geq |\mathrm{p}(1)| = |1 + a_0| \quad \text{かつ} \quad M \geq |\mathrm{p}(-1)| = |a_0 - 1|.$$

これらを足し合わせ、三角不等式（triangle inequality）$|u| + |v| \geq |u - v|$ を用いると

$$2M \geq |1 + a_0| + |a_0 - 1| \geq \big|(1 + a_0) - (a_0 - 1)\big| = 2,$$

となるので、$M \geq 1 = 2^{1-n}$ であり、$n = 1$ のときに定理が証明された。（$\mathrm{p}(x) = x$ のとき等号が成り立つので、この評価はこれ以上改善できない。）

(a) $\mathrm{p}(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ かつ $|x| \leq 1$ のとき $0 \leq x^2 \leq 1$ であるから、$-\frac{1}{2} \leq \mathrm{p}(x) \leq \frac{1}{2}$ である。

値 $\frac{1}{2}$ は $x = \pm 1$ で（$-\frac{1}{2}$ は $x = 0$ で）とられるので、

$$M = \tfrac{1}{2} = 2^{1-2}.$$

定理は等号で成り立つ。

(b) $\mathrm{p}(x) = x^3 - x$ に対しては $M \geq 2^{1-3} = \frac{1}{4}$ を示せばよい。$|\mathrm{p}| \geq \frac{1}{4}$ となる点を一つ見つければ十分である。停留点（stationary point）は $3x^2 - 1 = 0$ となる点、すなわち $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ であり、どちらも $[-1, 1]$ に含まれ、

$$\mathrm{p}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

$\mathrm{p}(\pm 1) = 0$ であるから、これは実際に最大値である：$M = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \approx 0.385$。電卓を使わずに $\frac{1}{4}$ と比較するには、両辺を 2 乗すればよい：

$$\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{27} > \frac{4}{64} = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{4}\right)^2,$$

よって $M > \frac{1}{4}$ であり、定理は成り立つ（今回は十分な余裕をもって）。

小問 (ii)

$f(x) = 64x^5 + 25x^4 - 66x^3 - 24x^2 + 3x + 1$ とおく。チェビシェフの定理は最高次の係数が 1 の多項式についての定理であるから、

$$\mathrm{p}(x) = \tfrac{1}{64} f(x) = x^5 + \tfrac{25}{64}x^4 - \tfrac{66}{64}x^3 - \tfrac{24}{64}x^2 + \tfrac{3}{64}x + \tfrac{1}{64},$$

に適用する。これは $n = 5$ として要求される形をしている。定理より $\max_{|x|\leq 1} |\mathrm{p}(x)| \geq 2^{-4} = \frac{1}{16}$ であり、64 を掛けると

$$\max_{|x|\leq 1} |f(x)| \geq 4.$$

したがって、$|f(x_0)| \geq 4$ となる $x_0 \in [-1, 1]$ が存在する。

次に端点を調べる：

$$f(1) = 64 + 25 - 66 - 24 + 3 + 1 = 3,$$
$$f(-1) = -64 + 25 + 66 - 24 - 3 + 1 = 1.$$

どちらも絶対値は 4 より小さいので、x_0 は端点ではない：$-1 < x_0 < 1$。

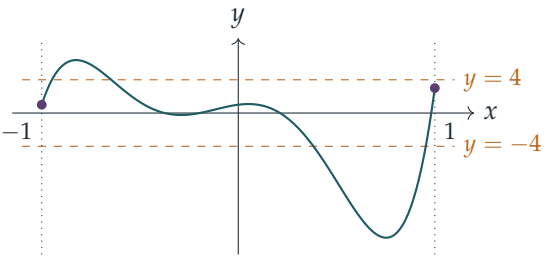
考えてみよう 区間の内部で $|f|$ が大きくなることはわかった。なぜそれによって極値点の存在が導かれるのだろうか？

二つの場合がある。

- $f(x_0) \geq 4$ ならば、$f(x_0)$ は $f(-1) = 1$ と $f(1) = 3$ のどちらよりも大きい。連続関数 f は閉区間 $[-1, 1]$ 上で最大値をとる。この値は $f(x_0) \geq 4$ 以上なので、どちらの端点でもとられない。したがって内部の点でとられ、その点は f の極大点である。
- $f(x_0) \leq -4$ ならば、$f(x_0)$ は両端点での値よりも小さく、同様にして $[-1, 1]$ 上の f の最小値は内部の点でとられ、その点は極小点である。

いずれにしても、f は開区間 $(-1, 1)$ の内部に極大点または極小点をもつ。そこでは $f' = 0$ であり、f は定数でない多項式なので、f' の零点は有限個しかない。よって f' はその点のすぐ左側で一定の符号を保ち、すぐ右側でも一定の符号を保つ。その点は極大点または極小点であるから、これらの符号は逆でなければならず、したがってそれは真の極値点（turning point）である。以上より、曲線は $-1 \leq x \leq 1$ の範囲に少なくとも一つの極値点をもち、題意が示された。

4 次方程式 $f'(x) = 0$ を一度も解く必要がなかったことに注意しよう。それこそがこの問題の要点である。



この図は $[-1, 1]$ 上の曲線を示している。両端点での値はどちらも破線 $y = \pm 4$ の間にあるが、曲線はその帯の外に出ている。実際、この曲線は区間内に四つの極値点をもち、最も深いものは $x \approx 0.75$ 付近で $y \approx -15$ である。

検算

- $n = 1$ について、a_0 にいくつかの値を代入してみると、$\max(|1 + a_0|, |1 - a_0|)$ は決して 1 を下回らず、1 に等しくなるのは $a_0 = 0$ のときだけであることがわかる。
- (b) では $\frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0.3849$ であり、0.25 を十分に上回る。細かい格子点で $x^3 - x$ の値を調べると、これが $|x^3 - x|$ の最大値であることが確かめられる。
- (ii) では、$[-1, 1]$ 上で f を数値的に走査すると $\max |f| \approx 15.0$（$x \approx 0.753$ において $f \approx -15.0$）となり、保証されている 4 を大きく上回る。また、f' が $x \approx -0.825, -0.292, 0.052, 0.753$ で符号を変えることもわかる。

よくある間違い

- 定理を f に直接適用してしまうこと。f の最高次の係数は 1 ではなく 64 なので、まず 64 で割らなければならない。評価は $64 \cdot 2^{-4} = 4$ となる。
- 「どこかで $|f| \geq 4$」で止まってしまうこと。それだけでは極値点の存在は導かれない。最大値または最小値が区間の内部でとられることを示すには、端点での値 1 と 3 が必要である。
- (b) で $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ と $\frac{1}{4}$ を不注意に比較すること。正の数どうしを 2 乗すれば、比較は厳密になる。

STEP のその先へ

チェビシェフの定理で等号が成り立つのは、ちょうど $2^{1-n}T_n(x)$ の場合である。ここで T_n は $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ で定義されるチェビシェフ多項式（Chebyshev polynomial）である。小問 (a) は $\frac{1}{2}T_2$ であり、$n = 1$ の場合は $T_1(x) = x$ である。これらの多項式は近似理論（approximation theory）の出発点であり、補間（interpolation）が等間隔の点よりもチェビシェフ節点（Chebyshev nodes）で最もよく機能する理由を説明する。小問 (ii) の議論は最大値・最小値の定理（extreme value theorem、閉区間上の連続関数は最大値と最小値をとる）を用いており、この定理は解析学の最初の講義で丁寧に証明される。アボット（Abbott）の *Understanding Analysis*（『解析学入門』）は、その証明を読むのによい本である。

解答例

STEP I 2008、第 6 問

純粋数学 ・ 逆関数と面積

> **STEP I 2008、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q6

鍵となる考え方

逆関数（inverse function）のグラフは、もとのグラフを直線 $y = x$ に関して折り返したものである。したがって g を y について積分したものは、曲線 $y = \mathrm{f}(x)$ と y 軸の間の、横向きに測った面積になる。上端 k は偶然の値ではなく、ちょうど $\mathrm{f}(\frac{1}{2})$ に等しい。このことに気づけば、二つの面積が組み合わさって一つの長方形を埋めることがわかる。

解答

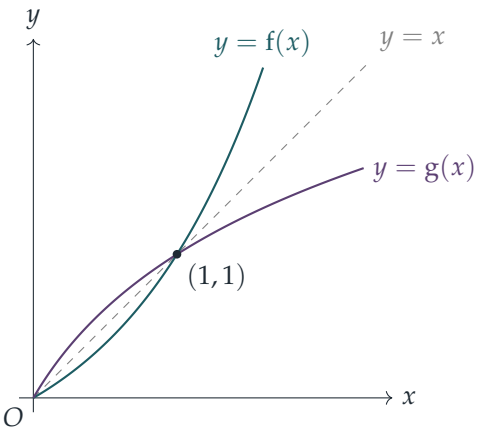
グラフの概形

関数 f は増加関数で、$\mathrm{f}(0) = 0$、$\mathrm{f}(1) = 1$ である。$\mathrm{f}''(x) = \mathrm{e}^x/(\mathrm{e}-1) > 0$ であるから下に凸（convex）であり、原点における傾きは $\mathrm{f}'(0) = 1/(\mathrm{e}-1) \approx 0.58 < 1$ である。よって $0 < x < 1$ では曲線は直線 $y = x$ の下側にあり、点 $(1,1)$ でその直線と交わり、その後は指数関数的に増加する。

g を求めるために、$y = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}-1}$ を x について解くと、f の値域は $[0,\infty)$ であるから

$$\mathrm{g}(x) = \ln\bigl(1 + (\mathrm{e}-1)x\bigr), \qquad x \geq 0,$$

となる。そのグラフは $y = \mathrm{f}(x)$ を $y = x$ に関して折り返したものである。すなわち、傾き $\mathrm{e}-1 \approx 1.72$ で $(0,0)$ を通り、上に凸（concave）で、$(1,1)$ で $y = x$ と交わり、その後は対数的にしか増加しない。



一つ目の積分

$$\int_0^{1/2} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\Big[\mathrm{e}^x - x\Big]_0^{1/2} = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\Big(\sqrt{\mathrm{e}} - \tfrac{1}{2} - 1\Big) = \frac{\sqrt{\mathrm{e}} - \frac{3}{2}}{\mathrm{e}-1}.$$

二つ目の積分

まず、平方の差の因数分解（difference of two squares）$\mathrm{e}-1 = (\sqrt{\mathrm{e}})^2 - 1$ を用いると

$$\mathrm{f}(\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}-1}{\mathrm{e}-1} = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}-1}{(\sqrt{\mathrm{e}}-1)(\sqrt{\mathrm{e}}+1)} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}+1} = k,$$

となることに注意する。言い換えれば $\mathrm{g}(k) = \frac{1}{2}$ であり、$1 + (\mathrm{e}-1)k = 1 + (\sqrt{\mathrm{e}}-1) = \sqrt{\mathrm{e}}$ である。

考えてみよう $\ln\big(1 + (\mathrm{e}-1)x\big)$ はどのように積分すればよいか？

$u = 1 + (\mathrm{e}-1)x$ と置換（substitution）すると $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/(\mathrm{e}-1)$ であり、積分区間は $u = 1$ から $u = \sqrt{\mathrm{e}}$ までとなる。さらに $\int \ln u\,\mathrm{d}u = u\ln u - u$（$\ln u$ と 1 の積とみた部分積分（integration by parts））を用いると

$$\begin{aligned}\int_0^k \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\mathrm{e}-1}\int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \ln u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\Big[u\ln u - u\Big]_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}-1}\Big(\tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}} - \sqrt{\mathrm{e}} - (0-1)\Big) = \frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}-1},\end{aligned}$$

となる。ここで $\ln\sqrt{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}$ を用いた。

和をとる

$$\int_0^{1/2} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{k} \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\mathrm{e}} - \frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}-1} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{\mathrm{e}}-1)}{(\sqrt{\mathrm{e}}-1)(\sqrt{\mathrm{e}}+1)} = \frac{1}{2(\sqrt{\mathrm{e}}+1)},$$

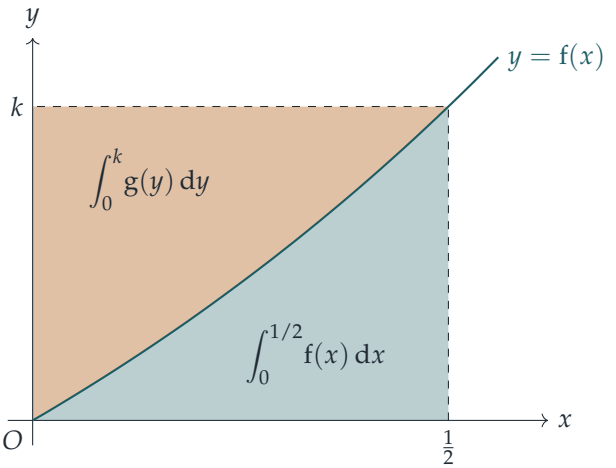
となり、示すべき式が得られた。

結果の説明

答えは $\frac{1}{2} \times k$ であり、これは $(0,0)$ と $(\frac{1}{2},k)$ を対角の頂点とする長方形の面積である。その理由を説明しよう。

考えてみよう　$\int_0^k \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x$ は f のグラフ上のどこに現れるか？

$y = x$ に関する折り返しは面積を保つ。$0 \le x \le k$ における $y = \mathrm{g}(x)$ の下側の領域は、折り返すと、$0 \le y \le k$ における曲線 $y = \mathrm{f}(x)$ と y 軸の間の領域に移る。言い換えれば、これは曲線 $y = \mathrm{f}(x)$ に沿った $\int_0^k x\,\mathrm{d}y$、すなわち曲線の**左側**の面積である。$\mathrm{f}(\frac{1}{2}) = k$ であるから、曲線は長方形の頂点 $(0,0)$ から頂点 $(\frac{1}{2},k)$ まで延びており、長方形を二つの部分に分ける。曲線の下側の部分（一つ目の積分、青緑色）と、曲線の左側の部分（二つ目の積分、琥珀色）である。



したがって、二つの積分を合わせると長方形全体になり、その面積は $\frac{1}{2}k = \dfrac{1}{2(\sqrt{\mathrm{e}}+1)}$ である。同じ図から、$\mathrm{f}(0) = 0$ を満たす増加関数について一般に

$$\int_0^a \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\mathrm{f}(a)} \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = a\,\mathrm{f}(a).$$

が成り立つことがわかる。

検算

数値的には、一つ目の積分はおよそ 0.08655、二つ目はおよそ 0.10222 である。それぞれにシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると、厳密な値と小数第 12 位まで一致し、その和 0.18877 は $1/\left(2(\sqrt{\mathrm{e}}+1)\right)$ に等しい。グラフの概形の妥当性の確認として、二つの部分はどちらも正であり、青緑色の部分のほうが小さい。これは当然であって、下に凸な曲線は長方形の対角線より下に垂れ下がっているからである。

よくある間違い

- $k = \mathrm{f}(\frac{1}{2})$ であることに気づかず、そのために $1 + (\mathrm{e}-1)k = \sqrt{\mathrm{e}}$ という簡約を見逃す。
- 原点付近で f のグラフを $y = x$ より上に描いてしまう。そこでの傾きは $1/(\mathrm{e}-1) < 1$ である。
- 図において、$y = \mathrm{g}(x)$ の下側の面積を別の図に塗るだけで、それが $y = \mathrm{f}(x)$ の横の領域とどう関係するかを述べない。要点は、折り返しによって一方が他方に移るということである。

STEP のその先へ

恒等式 $\int_0^a \mathrm{f} + \int_0^{\mathrm{f}(a)} \mathrm{f}^{-1} = a\,\mathrm{f}(a)$ は、**ヤングの不等式**（Young's inequality）の等号成立の場合である。ヤングの不等式とは、任意の $b \geq 0$ に対して $\int_0^a \mathrm{f} + \int_0^b \mathrm{f}^{-1} \geq ab$ が成り立つというものである。$\mathrm{f}(x) = x^{p-1}$ とおくと、$1/p + 1/q = 1$ のもとで $ab \leq a^p/p + b^q/q$ が得られ、これは解析学におけるヘルダー（Hölder）の不等式の出発点となる。このような積分がどのように厳密に扱われるかを知るには、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）がよい。

解答例

STEP I 2008、第 7 問

純粋数学 • 回転と距離

> **STEP I 2008、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q7

鍵となる考え方

原点を通る直線への垂線の長さ（perpendicular distance）は、その直線が x 軸に重なるように平面を回転（rotation）させれば容易に求まる。そのとき距離は、新しい y 座標の大きさにすぎない。最初の小問で得る回転の公式は、3 辺のうち 2 辺に対してまさにこの操作を行うものである。最後の小問での工夫は、絶対値（modulus）の記号を外すことである。3 つの符号付き距離（signed distance）の和はつねに同じ定数になり、絶対値をとると和は大きくなることはあっても小さくなることはない。

解答

回転の公式

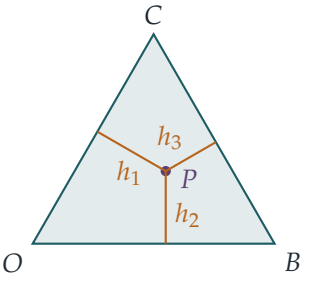
$x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ とおく。ここで $r = OP$ であり、θ は x 軸の正の向きから OP までの角である。OP を時計回りに 60° 回転させると、r は変わらず、角は $\theta - 60^\circ$ に変わる。よって新しい y 座標は

$$\begin{aligned} r\sin(\theta - 60^\circ) &= r\sin\theta\cos 60^\circ - r\cos\theta\sin 60^\circ \\ &= \tfrac{1}{2}y - \tfrac{\sqrt{3}}{2}x = \tfrac{1}{2}\left(y - \sqrt{3}\,x\right), \end{aligned}$$

となり、題意が示された。反時計回りの回転では角は $\theta + 60^\circ$ となり、同じ展開で $\sin 60^\circ$ の符号を反転させれば、新しい y 座標は

$$\tfrac{1}{2}\left(y + \sqrt{3}\,x\right).$$

3 つの距離



h_1。直線 OC は x 軸と $60°$ の角をなす。図全体を O のまわりに時計回りに $60°$ 回転させると、OC は x 軸に重なり、距離は保たれる。回転後の図では、P から x 軸までの距離は新しい y 座標の絶対値であるから、

$$h_1 = \tfrac{1}{2}\left| y - \sqrt{3}\,x \right|.$$

h_2。直線 OB は x 軸であるから、$h_2 = |y|$ である。

h_3。今度は O のまわりに反時計回りに $60°$ 回転させる。この回転により $B = (1,0)$ は $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ に移り、C（角 $60°$ の位置）は角 $120°$ の点、すなわち $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ に移る。したがって直線 BC は水平な直線 $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ となり、一方 P の y 座標は $\frac{1}{2}(y + \sqrt{3}\,x)$ となる。ゆえに

$$h_3 = \left| \tfrac{1}{2}(y + \sqrt{3}\,x) - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \right| = \tfrac{1}{2}\left| \sqrt{3}\,x + y - \sqrt{3} \right|.$$

（別解：BC の方程式は $\sqrt{3}\,x + y = \sqrt{3}$ であり、点と直線の距離の公式を用いても、$\sqrt{3+1} = 2$ であるから同じ答えが得られる。）

最後の小問

符号付きの量

$$s_1 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}\,x - y), \qquad s_2 = y, \qquad s_3 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{3}\,x - y),$$

を定めると、$i = 1,2,3$ に対して $h_i = |s_i|$ となる。これらを足すと、

$$s_1 + s_2 + s_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x - \tfrac{1}{2}y + y + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x - \tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

がすべての点 (x,y) に対して成り立つ。

? **考えてみよう** s_1、s_2、s_3 の符号は三角形とどのように関係しているだろうか？

各 s_i は、三角形の 1 辺の上で 0 になる 1 次式である。内部にある重心（centroid）$(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\sqrt{3})$ で調べると、$s_1 = s_2 = s_3 = \frac{1}{6}\sqrt{3} > 0$ となる。よって $s_2 \geq 0$ は OB に関して C を含む側、$s_1 \geq 0$ は OC に関して B を含む側、$s_3 \geq 0$ は BC に関して O を含む側である。周を含む三角形 OBC は、ちょうどこれら 3 つの半平面（half-plane）の共通部分であるから、

$$P \text{ は次の三角形の周上または内部にある：} OBC \iff s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0,\ s_3 \geq 0.$$

さて、任意の実数 s に対して $|s| \geq s$ であり、等号は $s \geq 0$ のとき、かつそのときに限り成り立つ。したがって

$$h_1 + h_2 + h_3 = |s_1| + |s_2| + |s_3| \ \geq\ s_1 + s_2 + s_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

であり、等号が成り立つのは各 i について $|s_i| = s_i$ となるとき、かつそのときに限る。すなわち、3 つの s_i がすべて 0 以上であるとき、かつそのときに限る。前段落より、これはちょうど P が三角形 OBC の周上または内部にあるときに起こる。これで両方向が一度に証明された：

$$h_1 + h_2 + h_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \iff P \text{ は次の三角形の周上または内部にある：三角形} OBC.$$

また、三角形の外部では和は $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ より真に大きいことにも注意しよう。

検算

- 頂点、たとえば $P = B = (1, 0)$ では、$h_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$、$h_2 = 0$、$h_3 = 0$ で、和は $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ である。正しい。
- 重心では各距離は $\frac{1}{6}\sqrt{3}$ であり、その 3 つの和は $\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0.8660$、すなわち三角形の高さになる。
- 外部の点 $P = (2, 0)$ では、$h_1 = \sqrt{3}$、$h_2 = 0$、$h_3 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ で、和は $\frac{3}{2}\sqrt{3} > \frac{1}{2}\sqrt{3}$ である。
- 3 つの公式すべてを、10^5 個のランダムな点で直接計算した点と直線の距離と比較し（10^{-15} の精度で一致）、さらに「必要十分」の主張を、辺上の多数の点を含む 2×10^5 個の点で検証したが、例外はなかった。

よくある間違い

- 回転の向きの符号を間違える。時計回りとは角が**減少する**ことであり、$\theta - 60^\circ$ となる。

- 一方向しか証明しない。三角形の内部で和が $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ になることを確かめるだけでは不十分であり、外部では $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ にならないことも示さなければならない。不等式 $|s| \geq s$ を使えば両方を一度に扱える。
- h_1、h_2、h_3 の絶対値の記号を忘れる。距離が負になることはない。

STEP のその先へ

これはヴィヴィアーニの定理（Viviani's theorem）である：正三角形において、内部の点から各辺までの距離の和は高さに等しい。符号付き距離 s_1, s_2, s_3 は（定数倍を除いて）P の**重心座標**（barycentric coordinates）あるいは**三線座標**（trilinear coordinates）であり、その和はつねに定数で、三角形の内部でちょうどすべてが 0 以上になる。これらは幾何学、コンピュータグラフィックス、凸解析（convex analysis）における標準的な道具である。回転の公式は 2×2 の回転行列（rotation matrix）の第 2 行であり、回転を線形写像（linear map）として捉えるには、ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）がよい手引きとなる。

解答例

STEP I 2008、第 8 問

純粋数学 ・ クレロー型微分方程式

> **STEP I 2008、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q8

鍵となる考え方

どちらの方程式も y' を含むが y'' は含まず、変数分離したり直接積分したりできる型ではない。そこで、もう一度微分するのが決め手となる。すると y' だけからなる項が打ち消し合い、残りは y'' を一つの因数とする形に因数分解（factorise）される。各因数がそれぞれ一つの場合を与え、各場合において積分するのではなくもとの方程式に代入し直す。そうすれば任意定数（arbitrary constant）も労せずに決まる。

解答

以下では $p = y'$ と書く。したがって $p' = y''$ である。

小問 (i)

$p^2 - xp + y = 0$ を x で微分する。xp には積の微分法（product rule）を用いる。

$$2p\,y'' - \left(p + x\,y''\right) + p = 0 \quad \Longrightarrow \quad y''\,(2p - x) = 0.$$

二つの p の項が打ち消し合うので、各点で $y'' = 0$ または $2y' = x$ が成り立つ。これが示すべきことであった。

$y'' = 0$ の場合。 このとき y' は定数 m であり、$y = mx + c$ となる。$(*)$ に代入すると

$$m^2 - xm + (mx + c) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = -m^2.$$

よって曲線は直線 $y = mx - m^2$ である。

$2y' = x$ の場合。 $(*)$ に $p = \frac{1}{2}x$ を代入すると

$$\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x^2 + y = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4y = x^2.$$

考えてみよう なぜ単に $y' = \frac{1}{2}x$ を積分して $y = \frac{1}{4}x^2 + k$ としないのか？

そうしてもよいが、$(*)$ を微分したことで情報の一部が失われている。$y = \frac{1}{4}x^2 + k$ はどれも $2y' = x$ を満たすが、$(*)$ そのものを満たすのは $k = 0$ のときだけである（たとえば $k = 1$ のとき、$x = 0$ で $0 - 0 + 1 \neq 0$ となる）。$(*)$ に直接代入し直せば、すべての情報を一度に用いることになり、定数がそのまま求まる。最初の場合に $c = -m^2$ となった理由も同じ考察で説明できる。

よって曲線は、$c = -m^2$ を満たす直線 $y = mx + c$ であるか、放物線 $4y = x^2$ である。

二つの答えは互いに関連している。直線 $y = mx - m^2$ と $4y = x^2$ の交点は $x^2 - 4mx + 4m^2 = 0$、すなわち $(x - 2m)^2 = 0$ で与えられるので、各直線は点 $(2m, m^2)$ における放物線の接線（tangent）である。放物線はこの直線族の**包絡線**（envelope）なのである。

小問 (ii)

$(x^2 - 1)p^2 - 2xyp + y^2 - 1 = 0$ を x で微分すると

$$2xp^2 + 2(x^2 - 1)p\,y'' - 2yp - 2xp^2 - 2xy\,y'' + 2yp = 0.$$

y'' を含まない項は二つずつ打ち消し合い、

$$2y''\big[(x^2 - 1)p - xy\big] = 0.$$

が残る。

$y'' = 0$ の場合。 このとき $y = mx + c$ である。ここで、方程式が

$$(y - xp)^2 = 1 + p^2,$$

と変形できることに気づくと見通しがよい。実際 $(y - xp)^2 - p^2 - 1 = y^2 - 2xyp + (x^2 - 1)p^2 - 1$ である。直線については $y - xp = c$、$p = m$ であるから

$$c^2 = 1 + m^2, \qquad \text{すなわち} \qquad y = mx \pm \sqrt{1 + m^2}.$$

$(x^2 - 1)p = xy$ の場合。 $x^2 \neq 1$ のところでは $p = \dfrac{xy}{x^2 - 1}$ であるから

$$y - xp = y - \frac{x^2 y}{x^2 - 1} = \frac{-y}{x^2 - 1}.$$

これを $(y - xp)^2 = 1 + p^2$ に代入し、$(x^2 - 1)^2$ を掛けると

$$\begin{aligned} y^2 &= (x^2 - 1)^2 + x^2 y^2 \\ y^2(1 - x^2) &= (1 - x^2)^2 \\ y^2 &= 1 - x^2, \end{aligned}$$

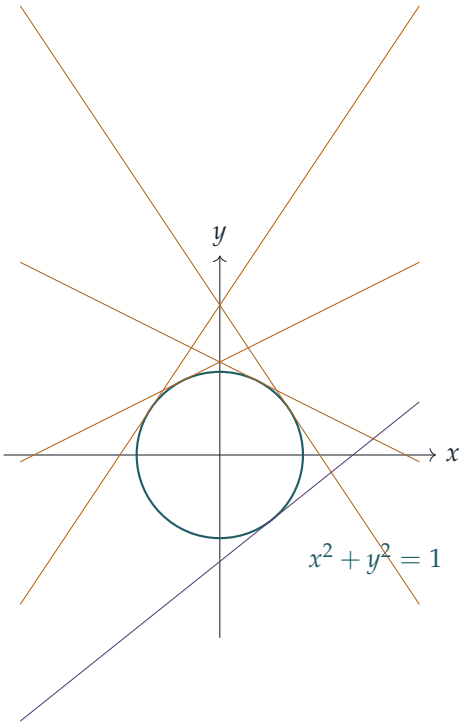
となる（最後は $1-x^2 \neq 0$ で割った）。よって曲線は円 $x^2+y^2=1$ である。（$x=\pm 1$ では、条件 $(x^2-1)p=xy$ から $y=0$ でなければならず、点 $(\pm 1,0)$ が得られるが、これらも同じ円の上にある。）

逆に、この円は実際に方程式を満たす。円の上では $p=-x/y$ であるから $y-xp=(y^2+x^2)/y=1/y$、$1+p^2=(x^2+y^2)/y^2=1/y^2$ となり、両者は一致する。

よって曲線は、$c^2=1+m^2$ を満たす直線 $y=mx+c$ であるか、単位円 $x^2+y^2=1$ である。

考えてみよう 直線 $y=mx\pm\sqrt{1+m^2}$ は円とどのような関係にあるのか？

原点から $y=mx+c$ までの距離は $|c|/\sqrt{1+m^2}$ であり、ここではちょうど 1 である。したがってこれらの直線は、まさに単位円の（y 軸に平行でない）接線である。これは (i) の直線が放物線の接線であったのとまったく同様である。



検算

- (i) で $m=1$ とする。$y=x-1$ では $p=1$ であり、$1-x+x-1=0$ となる。この直線は $(2,1)$ で $4y=x^2$ に接する。

- (ii) で、円上の点 $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ では $p = -\frac{3}{4}$ である。このとき $(x^2-1)p^2 - 2xyp + y^2 - 1 = -\frac{16}{25} \cdot \frac{9}{16} + \frac{18}{25} + \frac{16}{25} - 1 = 0$ となる。
- 数値的には、ランダムな三次曲線に沿って両方の導関数の因数分解を確かめ、直線、放物線、円では残差が 0（10^{-13} の精度で）となる一方、$y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ や $x^2 + y^2 = 4$ ではそうならないことを確認した。

よくある間違い

- $y' = \frac{1}{2}x$ や $y'' = 0$ を積分して任意定数を残したままにすること。定数はもとの方程式によって決めなければならない。
- $c = \pm\sqrt{1+m^2}$ の $\pm$ を落とすこと。各傾きについて、平行な接線は 2 本ある。

STEP のその先へ

小問 (i) は**クレローの方程式**（Clairaut equation）$y = xp - f(p)$ である。その一般解（general solution）は直線族 $y = mx - f(m)$ であり、さらにこの族の包絡線である**特異解**（singular solution）をもつ。特異解は、定数をどのように選んでも得られない。小問 (ii) も $y = xp \pm \sqrt{1+p^2}$ という同じ現象であり、円が包絡線となっている。特異解の存在は、一階の微分方程式が各点を通る解をただ一つしかもたないとは限らないことを示している。どのようなときに一意性が成り立つかは、常微分方程式（ODE）の最初の講義で学ぶ存在と一意性の定理（existence and uniqueness theorems）の主題である。これについて読むには、Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）がよい。

解答例

STEP I 2008、第 9 問

力学 ・ 転がる輪の運動量

STEP I 2008、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s1-q9

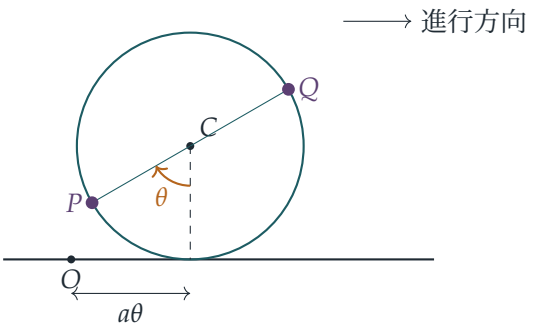
鍵となる考え方

滑らずに転がる（rolling without slipping）という条件によって、並進と回転が結びつく。輪（hoop）が角 θ だけ回転したとき、その中心は距離 $a\theta$、すなわち台に接した縁の長さだけ移動している。したがって各質点（particle）の位置は「中心＋回転する半径」と表され、これを微分すれば速度が得られる。最後の小問では、外力（external forces）が水平成分をもたないので全水平運動量（momentum）は変化しえないこと、そしてその運動量が $\dot{\theta}$ の定数倍になることに注目する。

解答

P の位置と速さ

P と Q を、質量の無視できる輪の上の質点とみなす。原点を P の出発点にとり、x 軸を転がる直線に沿って（輪の進む向きに）、y 軸を鉛直上向きにとる。輪は x 軸の正の向きに転がるものとし、下図では時計回りに回転する。



輪は滑らないので、台の上に転がり出た縁の弧の長さは中心の移動距離に等しい。よって中心 C は $(a\theta,\, a)$ にある。はじめ CP は真下を向いており、時計回りに θ だけ回転した後のベクトル $\overrightarrow{CP}$ は $(-a\sin\theta,\, -a\cos\theta)$ である。したがって

$$\boxed{P = \big(a\theta - a\sin\theta,\; a - a\cos\theta\big)}$$

となる（サイクロイド（cycloid））。連鎖律（chain rule）を用いて t で微分すると

$$\dot{x}_P = a\dot{\theta}(1-\cos\theta), \qquad \dot{y}_P = a\dot{\theta}\sin\theta,$$

であるから、

$$v_P^2 = a^2\dot{\theta}^2\big[(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\big] = 2a^2\dot{\theta}^2(1-\cos\theta) = 4a^2\dot{\theta}^2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta,$$

となる。ここで $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$ を用いた。したがって P の速さは

$$v_P = 2a\left|\dot{\theta}\sin\tfrac{1}{2}\theta\right| \qquad \big(= 2a\dot{\theta}\sin\tfrac{1}{2}\theta \text{ ただし} 0 \le \theta \le 2\pi,\ \dot{\theta} \ge 0\big).$$

である。これは θ が 2π の倍数のとき、すなわち P がちょうど接点にあるときに 0 となり、転がり運動の要請と一致する。

運動エネルギー

Q は直径の反対側の端にあるので $\overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{CP}$ であり、

$$Q = \big(a\theta + a\sin\theta,\; a + a\cos\theta\big), \qquad \dot{x}_Q = a\dot{\theta}(1+\cos\theta), \quad \dot{y}_Q = -a\dot{\theta}\sin\theta.$$

となる。同様にして

$$v_Q^2 = a^2\dot{\theta}^2\big[(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\big] = 2a^2\dot{\theta}^2(1+\cos\theta) = 4a^2\dot{\theta}^2\cos^2\tfrac{1}{2}\theta.$$

を得る。輪の質量は無視できるので、運動エネルギー（kinetic energy）は質点のものだけである：

$$T = \tfrac{1}{2}mv_P^2 + \tfrac{1}{2}mv_Q^2 = 2ma^2\dot{\theta}^2\big(\sin^2\tfrac{1}{2}\theta + \cos^2\tfrac{1}{2}\theta\big) = 2ma^2\dot{\theta}^2,$$

これが示すべきことであった。

速さが一定であること

外力は質点にはたらく重力 mg と台からの抗力（reaction）であり、いずれも鉛直方向である。よって系にはたらく水平方向の合力は 0 であり、系に対するニュートン（Newton）の運動の第 2 法則から、系の全水平運動量は一定である（輪は質量が無視できるので運動量をもたない）。

考えてみよう 質点は鉛直方向にも運動しているのに、なぜ水平運動量だけで十分なのか。

それは、水平運動量がたまたま $\dot\theta$ だけに依存するからである。水平方向の速度を足し合わせると

$$m\dot x_P + m\dot x_Q = ma\dot\theta(1-\cos\theta) + ma\dot\theta(1+\cos\theta) = 2ma\dot\theta.$$

となる。$\cos\theta$ の項は打ち消し合う。系の重心（centre of mass）は C であり、これは常に速度 $a\dot\theta$ で水平に動くからである。$2ma\dot\theta$ が一定なので $\dot\theta$ は一定であり、輪の速さ（その中心の速さ $a\dot\theta$）は一定である。 □

エネルギーを用いる別解。 P と Q の高さの和は $(a-a\cos\theta)+(a+a\cos\theta)=2a$ であるから、位置エネルギー（potential energy）$2mga$ は決して変化しない。抗力は接点にはたらき、転がり運動では接点は瞬間的に静止しているので、抗力は仕事をしない。したがって $T = 2ma^2\dot\theta^2$ は一定であり、$|\dot\theta|$ は一定である。さらに $\dot\theta$ は連続的に変化し、0 を通らずに一方の符号から他方へ飛び移ることはできないので、$\dot\theta$ 自身が一定である。運動量による議論ではこの最後の段階が不要であり、それが先に運動量の方法を用いた理由である。

検算

- $\theta = \pi$ のとき P は最上点にある。公式から $P = (a\pi, 2a)$、速さは $2a\dot\theta$ となり、中心の速さの 2 倍である。これは転がる車輪の最上点についてよく知られた結果である。
- 運動エネルギーは $\frac{1}{2}(2m)(a\dot\theta)^2 + \frac{1}{2}(2ma^2)\dot\theta^2$ に等しい。すなわち重心の並進運動と、重心のまわりの回転運動の和であり、慣性モーメント（moment of inertia）は $2ma^2$ である。どちらの項も $ma^2\dot\theta^2$ を与える。
- 数値的に、$a = 1.3$、$\dot\theta = 2.1$、$\theta = 1$ として位置を差分で微分すると $v_P^2 + v_Q^2 = 4a^2\dot\theta^2 \approx 29.8$ となり、また $\dot\theta$ が一定のとき P と Q の水平方向の加速度は打ち消し合う。

よくある間違い

- 中心を (a, a) に置いてしまう、あるいは中心が動くことを忘れてしまう。$a\theta$ の項こそが転がり運動の寄与である。
- P の位置で $\sin\theta$ の符号を誤る。P の初速度が 0 であることを確かめるとよい。

- $\dot{\theta}$ の符号が変わりえない理由を述べずに、運動エネルギーが一定であることから速さが一定であると結論してしまう。

STEP のその先へ

これは、系の全運動量は外力によってのみ変化し、内力（internal forces）（ここでは輪が伝える力）は対ごとに打ち消し合う、という一般的な事実の 2 質点の例である。検算で用いた運動エネルギーの分解はケーニッヒ（König）の定理であり、運動エネルギーは重心の運動エネルギーと重心に対する相対運動の運動エネルギーの和に等しいというものである。これは剛体の力学（rigid-body dynamics）の出発点となる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、転がり運動とこれらの考え方を丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 2008、第 10 問

力学 ・ 放物運動

> **STEP I 2008、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q10

鍵となる考え方

重力（gravity）は鉛直方向にしかはたらかないので、水平方向の速度 $V\cos\alpha$ は決して変化せず、水平到達距離（range）は単に $V\cos\alpha$ に全飛行時間（time of flight）を掛けたものになる。飛行時間は鉛直方向の運動だけから決まり、その運動は三つの段階に分けられる。下の層を通過して上昇する段階、高さ h より上に出ている段階、そして再び下の層を通過して下降する段階である。各段階はいずれも等加速度（constant acceleration）運動の問題であり、対称性（symmetry）が仕事の大部分を担ってくれる。

解答

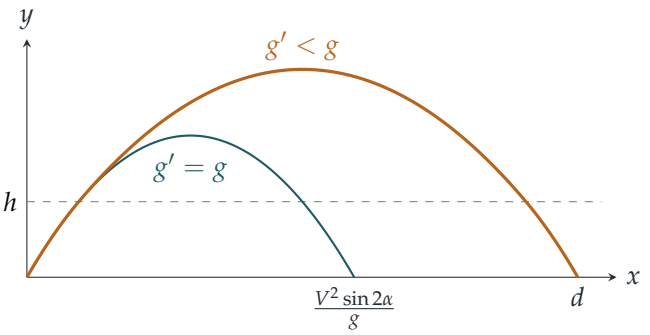
粒子を空気抵抗（air resistance）のない質点とみなし、平らな地面の上の鉛直面内を運動するものとする。x 軸を水平に、y 軸を鉛直上向きにとり、原点を投射点とする。

概形の図

高さ h より下では、二つの軌道はまったく同じ方程式に従うので、そこでは一致する。条件 $V^2\sin^2\alpha > 2gh$ は、はじめの鉛直方向の運動エネルギー（kinetic energy）が加速度 g のもとで高さ h まで上昇するのに十分であることを意味しており、したがって粒子は確かに $y = h$ より上に出る。

h より上では、$g' < g$ の場合は重力が弱いので、鉛直方向の速さの減り方がゆるやかになる。粒子はより高く上がり、そこにより長くとどまり、より平たく幅の広い放物線（parabola）を描く。$y = h$ において速度は連続である（不連続に変わるのは加速度だけである）から、二つの弧は角をつくらずになめらかにつながる。ただし曲率

(curvature) は急に変化する。下降するとき、粒子は（上の弧の対称性により）出ていったときと同じ速さと角度で下の層に再び入り、最後の弧は最初の弧の鏡像になる。したがって $g' < g$ の経路のほうが遠くに着地する。



水平到達距離

初速度の鉛直成分は $V\sin\alpha$ であり、$y < h$ の間の加速度は $-g$ である。

段階 1：高さ h まで上昇する。 $y = h$ に達したときの（上向きの）鉛直方向の速さを w とする。$v^2 = u^2 + 2as$ より

$$w^2 = V^2\sin^2\alpha - 2gh = \sin^2\alpha\left(V^2 - 2gh\,\mathrm{cosec}^2\alpha\right) = V'^2\sin^2\alpha,$$

であり、$\sin\alpha > 0$ かつ粒子はまだ上昇中なので正の平方根をとって $w = V'\sin\alpha$ となる。（与えられた条件は、ちょうど V' が正の実数となるための条件である。）かかる時間は、$v = u + at$ より

$$t_1 = \frac{V\sin\alpha - V'\sin\alpha}{g} = \frac{(V - V')\sin\alpha}{g}.$$

である。

段階 2：高さ h より上。 このとき粒子は $y = h$ から速さ w で上向きに動き始め、加速度は $-g'$ である。$wt - \frac{1}{2}g't^2 = 0$ となるとき、すなわち

$$t_2 = \frac{2w}{g'} = \frac{2V'\sin\alpha}{g'},$$

だけ時間が経ったときに $y = h$ に戻り、そのとき鉛直方向の速さ w で下向きに動いている。

考えてみよう 最後の段階にかかる時間が最初の段階と同じになるのはなぜか。

段階 3 では、粒子は $y = h$ から速さ w で下向きに動き始め、下向きの加速度 g を受けて $y = 0$ まで落下する。これは段階 1 を時間について逆にたどったものである。等加速度運動は可逆であり、段階 1 は同じ加速度のもとで、$y = 0$ を速さ $V\sin\alpha$ で出発して $y = h$ に速さ w で達する運動であった。したがって、時間 $t_3 = t_1$ の後に鉛直方向の速さ $V\sin\alpha$ で地面に達する。(直接計算してもよい。鉛直方向の速さは w から $V\sin\alpha$ まで割合 g で変化するので、かかる時間は $(V\sin\alpha - w)/g$ である。)

したがって全飛行時間は

$$T = 2t_1 + t_2 = 2\sin\alpha\left(\frac{V - V'}{g} + \frac{V'}{g'}\right).$$

である。水平方向の力ははたらかないので、水平方向の速度は終始 $V\cos\alpha$ のままであり、

$$\begin{aligned} d = V\cos\alpha \cdot T &= \left(\frac{V - V'}{g} + \frac{V'}{g'}\right) 2V\sin\alpha\cos\alpha \\ &= \left(\frac{V - V'}{g} + \frac{V'}{g'}\right) V\sin 2\alpha, \end{aligned}$$

となる。ここで $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ を用いた。これが求める結果である。

検算

- $g' = g$ ならば括弧の中は V/g となり、$d = V^2\sin 2\alpha/g$ という、地球上でおなじみの水平到達距離になる。
- $g' < g$ ならば $V'/g' > V'/g$ なので、d は一様な重力のもとでの水平到達距離より大きくなり、概形の図と合っている。
- ちょうど $V^2\sin^2\alpha = 2gh$ ならば $V' = 0$ である。このとき粒子は $y = h$ にちょうど触れるだけで g' の影響を受けず、やはり $d = V^2\sin 2\alpha/g$ となる。
- 数値で確かめる。$V = 10$、$\alpha = 60°$、$g = 10$、$h = 2$、$g' = 5$ とすると、$V' = \sqrt{140/3} \approx 6.83$、$d \approx 14.576$ となる。運動を数値的に刻んで追跡すると、相対誤差 10^{-5} 以内で同じ着地点が得られる。(これらは概形の図で用いた値である。)

よくある間違い

- 下の層を通過する下降の段階を忘れ、$2t_1 + t_2$ ではなく $t_1 + t_2$ としてしまう。
- 高さ h での鉛直方向の速さを $V'\sin\alpha$ ではなく V' としてしまう。V' は $\operatorname{cosec}\alpha$ 倍に拡大された速さであって、鉛直成分そのものではない。

- 弧がつながる点に角を描いてしまう。速度は連続なので、つなぎ目はなめらかである。

STEP のその先へ

位置によって変化する重力は、例外ではなくむしろ普通のことである。現実の重力は惑星の中心からの距離に対して $1/r^2$ のように弱まり、投射体の経路は放物線ではなく楕円（ellipse）の弧になる。運動を単純な力の法則が成り立つ領域に分け、境界で位置と速度をつなぎ合わせるのは標準的な手法であり、粒子の屈折（refraction）や、量子力学（quantum mechanics）における階段型ポテンシャル（step potential）でも再び用いられる。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、等加速度運動の道具立てと、逆二乗（inverse-square）の重力のもとでの軌道運動の両方を展開している。

解答例

STEP I 2008、第 11 問

力学 ・ 最大摩擦力でのつり合い

STEP I 2008、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s1-q11

鍵となる考え方

$\angle P_1OP_2$ は直角であるから、半径（radius）OP_2 は P_1 における接線（tangent）に平行であり、半径 OP_1 は P_2 における接線に平行である。したがって、2 本の半径の方向に力を分解すると、各方程式には法線抗力（normal reaction）と摩擦力（friction force）がそれぞれ 1 つずつしか現れない。これに、2 つの法線抗力がいずれもモーメントをもたない点 O のまわりのモーメント（moment）の式を加え、両端で限界摩擦（limiting friction）$F = \mu R$ を用いると、α が消えた 3 つの方程式が得られる。最後の部分は、姿を変えた倍角の公式（double-angle formulae）にほかならない。

解答

モデルと力

棒を、中点に重心（centre of mass）G をもつ一様な剛体（rigid body）の棒とみなし、輪は軽いものとし、針金の半径を a とする。輪は軽いので、針金が各輪に及ぼす力はそのまま棒に伝わる。よって、棒が P_1 と P_2 で針金に接しているとみなしてよい。各端には、半径方向の法線抗力と接線方向の摩擦力がはたらく。

原点を O とし、x 軸を右向き、y 軸を上向きにとり、P_1 は針金の最下点より左側にあるとする。$\angle P_1OP_2 = 90^\circ$ であり、P_1 は鉛直下向きと角 α をなすから、OP_2 は反対側で鉛直下向きと角 $90^\circ - \alpha$ をなす。

$$P_1 = a(-\sin\alpha, -\cos\alpha), \qquad P_2 = a(\cos\alpha, -\sin\alpha).$$

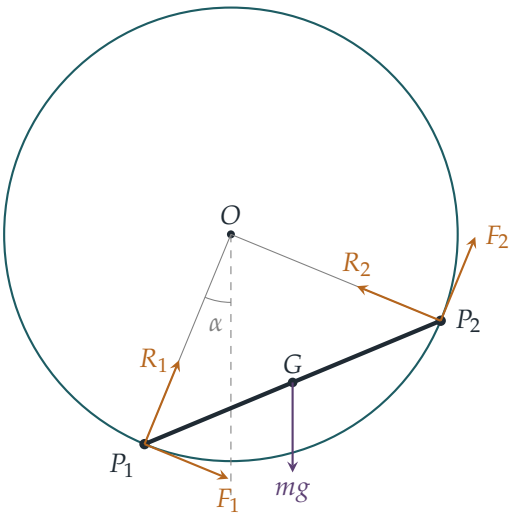
$0 < \alpha < 45^\circ$ より $\cos\alpha > \sin\alpha$ であるから、確かに P_1 は P_2 より低く、どちらも O より下にある。

中点は $G = \frac{a}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha, -\cos\alpha - \sin\alpha)$ であり、これは O を通る鉛直線の**右側**にある。したがって、重力は O のまわりに時計回りのモーメントをもち、棒は針金に沿って時計回りに滑り出そうとしている（P_2 は下へ、P_1 は上へ動く）。摩擦力はこれを妨げるので、両端で**反時計回り**にはたらく。すなわち、P_1 では針金に沿って下向きに、P_2 では針金に沿って上向きにはたらく。

P_1 と P_2 から O へ向かう単位ベクトル（unit vector）を $\mathbf{u}_1$、$\mathbf{u}_2$ とする。

$$\mathbf{u}_1 = (\sin\alpha, \cos\alpha), \qquad \mathbf{u}_2 = (-\cos\alpha, \sin\alpha), \qquad \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0.$$

P_1 における反時計回りの接線方向は $-\mathbf{u}_2$ であり、P_2 におけるそれは $\mathbf{u}_1$ である。（O へ向かう）法線抗力を R_1, R_2、摩擦力を F_1, F_2 とする。



つり合いの式

重力 mg は鉛直下向きにはたらくので、その $\mathbf{u}_1$ 方向および $\mathbf{u}_2$ 方向の成分は $-mg\cos\alpha$ と $-mg\sin\alpha$ である。

$\mathbf{u}_1$ 方向（すなわち P_1O 方向）に分解する。R_1 と F_2 が寄与し、R_2 と F_1 はこの方向に垂直である。よって

$$R_1 + F_2 = mg\cos\alpha. \tag{1}$$

$\mathbf{u}_2$ 方向（P_2O 方向）に分解する。R_2 は $+R_2$ を寄与し、$-\mathbf{u}_2$ の向きをもつ F_1 は $-F_1$ を寄与する。よって

$$R_2 - F_1 = mg\sin\alpha. \tag{2}$$

O のまわりのモーメントを考える。法線抗力は O を通る。各摩擦力は O から距離 a の位置で接線方向にはたらき、反時計回りのモーメント aF_1 と aF_2 を与える。重力は O

から水平距離 $\frac{a}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$ の位置で時計回りにはたらく。したがって

$$F_1+F_2=\tfrac{1}{2}mg(\cos\alpha-\sin\alpha). \tag{3}$$

限界摩擦と $\tan\alpha$

棒は両端で滑り出す直前にあるので、$F_1=\mu R_1$ かつ $F_2=\mu R_2$ である。$c=\cos\alpha$、$s=\sin\alpha$ とおくと、式 (1) と (2) は

$$R_1+\mu R_2=mgc,\qquad -\mu R_1+R_2=mgs,$$

となり、その解は

$$R_1=\frac{mg(c-\mu s)}{1+\mu^2},\qquad R_2=\frac{mg(s+\mu c)}{1+\mu^2}.$$

である。μ が小さいとき（後で見るように、ここでは必ずそうなる）どちらも正であるから、抗力は図のとおり確かに O へ向かってはたらく。さて、(3) は $\mu(R_1+R_2)=\frac{1}{2}mg(c-s)$ を意味する。すなわち

$$\begin{aligned}2\mu\left(c-\mu s+s+\mu c\right)&=(1+\mu^2)(c-s)\\ c\,(2\mu+2\mu^2-1-\mu^2)+s\,(2\mu-2\mu^2+1+\mu^2)&=0\\ s\,(1+2\mu-\mu^2)&=c\,(1-2\mu-\mu^2).\end{aligned}$$

$c\,(1+2\mu-\mu^2)$ で割ると（$c>0$ であり、次に見るように $\tan\alpha>0$ より μ は小さくなければならないので、これは 0 でない）、

$$\tan\alpha=\frac{1-2\mu-\mu^2}{1+2\mu-\mu^2},$$

となり、示すべき式が得られた。

考えてみよう 摩擦力が時計回りではなく反時計回りにはたらくことは、どうしてわかるのか？

G は O の右側にあるので、O のまわりの重力のモーメントは時計回りであり、法線抗力は O のまわりにモーメントをもたない。したがって、反時計回りのモーメントは摩擦力だけで生み出さなければならず、摩擦力がなければ棒は時計回りに滑る。もし摩擦力を逆向きに描いていたら、μ を $-\mu$ に置き換えた同じ計算になり、$\tan\alpha>1$ が得られるが、これは $\alpha<45^\circ$ に矛盾する。

棒の傾きの角

P_1 から P_2 へのベクトルは $a(\cos\alpha+\sin\alpha,\ \cos\alpha-\sin\alpha)$ であり、その成分はどちらも正である。よって、棒が水平となす鋭角 θ は

$$\tan\theta=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\tan(45^\circ-\alpha),$$

を満たし、$0 < 45^\circ - \alpha < 45^\circ$ であるから $\theta = 45^\circ - \alpha$ を得る。

次に、$\tan\alpha$ の式に $\mu = \tan\lambda$ を代入し、分子と分母に $\cos^2\lambda$ を掛ける。

$$\tan\alpha = \frac{(\cos^2\lambda - \sin^2\lambda) - 2\sin\lambda\cos\lambda}{(\cos^2\lambda - \sin^2\lambda) + 2\sin\lambda\cos\lambda} = \frac{\cos 2\lambda - \sin 2\lambda}{\cos 2\lambda + \sin 2\lambda} = \frac{1 - \tan 2\lambda}{1 + \tan 2\lambda} = \tan(45^\circ - 2\lambda).$$

$0 < \lambda < 22.5^\circ$ であるから、角 $45^\circ - 2\lambda$ は α と同様に 0° と 45° の間に（端を含まずに）ある。正接関数はこの区間で一対一（one-to-one）であるから、$\alpha = 45^\circ - 2\lambda$ である。したがって

$$\theta = 45^\circ - \alpha = 2\lambda,$$

となり、これが示すべきことであった。（これは条件 $\lambda < 22.5^\circ$、すなわち $\mu < \sqrt{2} - 1$ の意味も説明している。この条件はちょうど $\tan\alpha > 0$ となるための条件なのである。）

検算

- $\mu = 0$（滑らかな針金）のとき $\tan\alpha = 1$ となるので、$\alpha = 45^\circ$ であり、棒は水平になる。これは、滑らかな円上に置かれた棒が静止できる唯一の位置である。
- $\mu = 0.2$ のとき、$\tan\alpha = 0.56/1.36$ より $\alpha \approx 22.38^\circ$、$\theta = 45^\circ - \alpha \approx 22.62^\circ$ となり、$2\arctan 0.2 \approx 22.62^\circ$ と一致する。
- 数値的に、$\mu \in (0, \sqrt{2} - 1)$、$a$、$m$ の無作為な値 10^4 組について、これらの R_1, R_2, F_1, F_2 を完全なベクトル方程式に代入したところ、合力もモーメントも（約 10^{-14} の精度で）0 となり、$R_1, R_2 > 0$ かつ $\theta = 2\lambda$ であった。

よくある間違い

- 水平方向と鉛直方向に分解すること。それでも解けるが、すべての方程式に 4 つの力がすべて現れてしまう。互いに垂直な 2 本の半径の方向に分解するほうがはるかにすっきりする。
- 一方の端で摩擦力の向きを間違えること。2 つの輪は円に沿って同じ向きに滑るので、摩擦力は**両端**で反時計回りである。
- $\theta = 45^\circ - \alpha$ に一言の根拠が必要であることを忘れること。弦は $\angle P_1OP_2$ の二等分線に垂直である。

STEP のその先へ

もっと鮮やかな幾何学的見方もある。限界摩擦のとき、各端での抗力の合力は半径と角 λ をなす。そして 3 つの力を受けてつり合っている物体では、それらの力が共点（concurrent）でなければならず、ここからただちに $\theta = 2\lambda$ が導かれる。この「摩擦角（angle of friction）」の考え方と、摩擦が等式ではなく不等式 $|F| \leq \mu R$ で表されるという事実は、複数の接触点をもつ静力学の問題の出発点となる。そうした問題では、どの接触点が最初に滑るかを問わなければならない。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、摩擦と剛体のつり合いをこのような丁寧さで扱っている。

解答例

STEP I 2008、第 12 問

確率・統計 ・ 離散一様分布の最大値

STEP I 2008、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s1-q12

鍵となる考え方

X は 2 つの得点のうち大きい方にすぎない。「大きい方が r に等しい」確率を直接求めようとすると、いくつかの場合を数え上げる必要があるが、「大きい方が r **以下**である」確率は簡単に求まる。それはちょうど**両方**の得点が r 以下であるときに起こるからである。そこで、まず累積分布（cumulative distribution）$\mathrm{P}(X \leq r)$ を考え、その差をとる。同じ累積分布を使えば、中央値（median）もほとんどすぐに求まる。

解答

X_1 と X_2 を独立（independent）な 2 つの得点とし、$X = \max(X_1, X_2)$ とする（$X_1 = X_2$ のときは定義中の 2 つの場合が一致するので、X はきちんと定義されている）。

小問 (i)

$r = 0, 1, \ldots, N$ に対し、事象 $\{X \leq r\}$ は事象 $\{X_1 \leq r \text{ かつ} X_2 \leq r\}$ である。それぞれの確率は r/N であり、X_1 と X_2 が独立であるからこれらの事象も独立である。よって

$$\mathrm{P}(X \leq r) = \frac{r}{N} \cdot \frac{r}{N} = \frac{r^2}{N^2}.$$

これは $r = 0$ のときも成り立ち、値は 0 となる。したがって $r = 1, 2, \ldots, N$ に対し

$$\mathrm{P}(X = r) = \mathrm{P}(X \leq r) - \mathrm{P}(X \leq r - 1) = \frac{r^2 - (r-1)^2}{N^2} = \frac{2r - 1}{N^2},$$

となり、題意が示された。（確認として、$\sum_{r=1}^{N}(2r - 1) = N^2$ であるから、これらの和は 1 になる。）

小問 (ii)

与えられた 2 つの和の公式を用いると

$$\begin{aligned}\mu = \sum_{r=1}^{N} r\,\frac{2r-1}{N^2} &= \frac{1}{N^2}\left(2\sum_{r=1}^{N} r^2 - \sum_{r=1}^{N} r\right)\\ &= \frac{1}{N^2}\left(\frac{N(N+1)(2N+1)}{3} - \frac{N(N+1)}{2}\right)\\ &= \frac{N+1}{N}\cdot\frac{2(2N+1)-3}{6} = \frac{(N+1)(4N-1)}{6N}.\end{aligned}$$

$N = 100$ のとき

$$\mu = \frac{101\times 399}{600} = \frac{40\,299}{600} = 67.165,$$

となり、題意が示された。

小問 (iii)

小問 (i) より $\mathrm{P}(X \le m) = m^2/N^2$ であり、$\mathrm{P}(X \ge m) = 1 - \mathrm{P}(X \le m-1) = 1-(m-1)^2/N^2$ である。中央値に関する 2 つの条件は

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X \le m) \ge \tfrac{1}{2} &\iff m^2 \ge \tfrac{1}{2}N^2 \iff m \ge \frac{N}{\sqrt{2}},\\ \mathrm{P}(X \ge m) \ge \tfrac{1}{2} &\iff (m-1)^2 \le \tfrac{1}{2}N^2 \iff m-1 \le \frac{N}{\sqrt{2}},\end{aligned}$$

となる。ここでは正の平方根をとったが、$m \ge 1$ より m と $m-1$ はともに非負であるから、これは正当である。よって m は

$$\frac{N}{\sqrt{2}} \le m \le \frac{N}{\sqrt{2}} + 1.$$

を満たす整数でなければならない。

> **考えてみよう** 長さ 1 の区間には整数が 2 つ含まれることがある。中央値が 2 つになることはあり得るだろうか？

それが起こるのは両端がともに整数である場合に限られ、そのためには $N/\sqrt{2}$ が整数でなければならない。しかし $N/\sqrt{2} = k$ とすると $\sqrt{2} = N/k$ となり、$\sqrt{2}$ が有理数（rational number）になってしまうので、これは不可能である。よって 2 つの不等式はいずれも等号が成り立たず、長さ 1 の開区間にはちょうど 1 つの整数が含まれる。したがって

$$m = \left\lceil \frac{N}{\sqrt{2}} \right\rceil,$$

すなわち m は $N/\sqrt{2}$ より大きい最小の整数である。

$N = 100$ のとき、$N/\sqrt{2} = 50\sqrt{2} \approx 70.71$ であるから $m = 71$ である。直接確かめると、$71^2 = 5041 \geq 5000 = \frac{1}{2} \times 100^2$ かつ $70^2 = 4900 \leq 5000$ であるから、2 つの条件はともに成り立つ。

小問 (iv)

小問 (iii) より、ある $0 < \theta < 1$ を用いて $m = N/\sqrt{2} + \theta$ と表せるので

$$\frac{m}{N} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\theta}{N} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (N \to \infty.$$

小問 (ii) より

$$\frac{\mu}{N} = \frac{(N+1)(4N-1)}{6N^2} = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{N}\right)\left(4 - \frac{1}{N}\right) \to \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

したがって、N が大きいとき

$$\frac{\mu}{m} = \frac{\mu/N}{m/N} \approx \frac{2/3}{1/\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

検算

- $N = 2$ の場合：同様に確からしい 4 つの組のうち、$X = 1$ となるのは 1 回、$X = 2$ となるのは 3 回であり、小問 (i) の $\frac{1}{4}$ と $\frac{3}{4}$ に一致する。また $\mu = \frac{7}{4}$ であり、$\frac{3\times7}{12}$ に一致する。
- $N \leq 40$ についてコンピュータで N^2 個の組をすべて列挙すると、小問 (i) と (ii) が厳密に正しいことが確かめられる。また $N \leq 2000$ について、すべての整数を中央値の定義に照らして調べると、中央値は常にちょうど 1 つであり、$\lceil N/\sqrt{2} \rceil$ に等しい。
- $N = 10^5$ のとき $\mu/m \approx 0.942812$ であり、$2\sqrt{2}/3 \approx 0.942809$ とよく一致する。

よくある間違い

- $\mathrm{P}(X = r)$ を $2 \times \frac{r}{N} \cdot \frac{1}{N}$ と数えてしまう。これでは $X_1 = X_2 = r$ の場合を二重に数えている。正しい個数は $2(r-1)+1 = 2r-1$ である。
- $\mathrm{P}(X \geq m) = 1 - m^2/N^2$ と書いてしまう。これは $\mathrm{P}(X > m)$ であって、$\mathrm{P}(X \geq m)$ ではない。
- $N = 100$ のとき、70.71 を切り上げずに四捨五入して $m = 70$ と答えてしまう。

STEP のその先へ

X は順序統計量（order statistic）の最も簡単な例、すなわち標本の最大値である。$N \to \infty$ のとき、X/N は $[0,1]$ 上の確率密度（density）$2x$ をもつ連続確率変数（random variable）に近づく。この確率変数の平均は $\frac{2}{3}$、中央値は $1/\sqrt{2}$ であり、まさにこれが小問 (iv) の比が現れる理由である。より大きな標本の順序統計量を考えると、ベータ分布（beta distribution）に行き着く。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）は、順序統計量をわかりやすく扱っている。

解答例

STEP I 2008、第 13 問

確率・統計 ・ 円順列

> **STEP I 2008、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q13

鍵となる考え方

円卓では人どうしの相対的な位置だけが意味をもつので、1 人の席を固定し、残りの 5 人をその周りに並べる。すると同様に確からしい並び方は $5! = 120$ 通りとなり、どの確率も 120 通りのうちの個数として求められる。隣り合って座らなければならない夫婦は、1 つの「ブロック」にまとめて扱える。このブロックの内部の並び方は 2 通りある。「ちょうど」や「1 組も〜ない」の場合は、直接数えるか、事象「夫婦 k が隣り合う」に対して包除原理（inclusion–exclusion）を用いる。

解答

3 組の夫婦を A, a；B, b；C, c とする。全員を円卓に沿って 1 席ずつ回転させても、互いの相対的な座り方は変わらない。そこで A の席を固定し、残りの 5 人を時計回りの順に残りの席へ座らせる。こうして並び方は $5! = 120$ 通りとなり、これらはすべて同様に確からしい。

代わりに席に番号を付けて区別すると、並び方は $6! = 720$ 通りとなる。このとき各相対的な並び方は、A が座りうる席ごとに 1 回ずつ、ちょうど 6 回現れるので、確率は変わらない。

一般に役立つ数え方として、n 個のものを円形に並べる円順列（circular arrangement）の総数は $(n-1)!$ 通りである（1 つを固定し、残りを並べればよい）。

小問 (i)

すべての夫婦が隣り合うなら、各夫婦を 1 つのブロックにまとめる。すると円卓の周りには 3 つのブロックがあり、その並べ方は $(3-1)! = 2$ 通りである。各ブロックの内部では、夫は妻のどちら側にも座れるので、$2^3 = 8$ 通りの選び方がある。よって

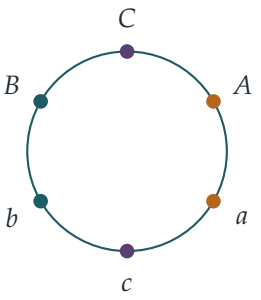
$$\mathrm{P}(3\text{組の夫婦がすべて隣り合う}) = \frac{2\times 8}{120} = \frac{16}{120} = \frac{2}{15},$$

となり、示すべき結果が得られた。

小問 (ii)

まず、隣り合わ**ない**夫婦を選ぶ。選び方は 3 通りである。それを C, c とすると、A, a と B, b は隣り合い、C と c は隣り合わない。

Aa と Bb をそれぞれブロックにまとめる。すると円卓の周りには Aa、Bb、C、c の 4 つの単位があり、その並べ方は $3! = 6$ 通りである。C を固定し、この 4 単位の円の残り 3 か所のうち c がどこに入るかを考える。そのうち 2 か所では c は C の隣になり、1 か所では c は真向かいになる。よって C と c が離れているのは、6 通りのうちちょうど $6/3 = 2$ 通りである。このとき、次の図のように、C と c の間にある 2 つのすき間にはそれぞれブロックが 1 つずつ入る。



考えてみよう なぜこれは見た目よりも簡単なのだろうか？

C と c が向かい合っているとき、残る自由度は、どちらのブロックがどちら側に座るか（2 通り）と、各ブロック内の順序（$2\times 2 = 4$ 通り）だけである。よって並び方は $2\times 4 = 8$ 通りとなる。離れて座る夫婦の選び方 3 通りすべてを考えると、

$$\mathrm{P}(\text{ちょうど 2 組の夫婦が隣り合う}) = \frac{3\times 8}{120} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}.$$

小問 (iii)

$k = 1, 2, 3$ に対し、夫婦 k が隣り合うという事象を E_k とする。それぞれの種類の並び方が 120 通りのうち何通りあるかを数える。

- $|E_1|$：夫婦 1 を 1 つのブロックにまとめる。すると円卓の周りには 5 つの単位が残るので、並べ方は $4! = 24$ 通りであり、それぞれに内部の順序が 2 通りあるから、48 通りとなる。
- $|E_1 \cap E_2|$：2 つのブロックと 2 人で 4 つの単位になる。並べ方は $3! = 6$ 通りで、内部の順序は $2^2 = 4$ 通りあるから、24 通りとなる。
- 小問 (i) より、$|E_1 \cap E_2 \cap E_3| = 16$ である。

対称性により、どの夫婦を選んでも同じ個数になる。包除原理により、少なくとも 1 組の夫婦が隣り合う並び方の数は

$$|E_1 \cup E_2 \cup E_3| = 3(48) - 3(24) + 16 = 144 - 72 + 16 = 88.$$

よって、どの夫婦も隣り合わない並び方は $120 - 88 = 32$ 通りであり、

$$\mathrm{P}(\text{どの夫も妻の隣に座らない}) = \frac{32}{120} = \frac{4}{15}.$$

考えてみよう 小問 (ii) も同じ個数から読み取れるだろうか？

読み取れる。各 $|E_i \cap E_j|$ は、ちょうど夫婦 i, j の組だけが隣り合う並び方に、3 組すべてが隣り合う並び方を加えたものを数えている。よって、ちょうど 2 組の夫婦が隣り合う並び方の数は $3(24) - 3(16) = 24$ であり、小問 (ii) と一致する。

検算

- 4 つの場合を合わせると、120 通りすべてを尽くさなければならない。ちょうど 1 組の夫婦が隣り合う並び方の数は $3(48) - 2 \cdot 3(24) + 3(16) = 48$ であり、$32 + 48 + 24 + 16 = 120$ となる。
- 席を区別した 720 通りの座り方すべてをコンピュータで列挙すると、隣り合う夫婦が 0, 1, 2, 3 組である確率はそれぞれ $\frac{4}{15}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{15}$ となる。これらは上の答えと一致する。
- 妥当性の確認：ある妻の両隣の 2 人は 5 人の中から選ばれるので、夫が妻の隣にいる確率は $\frac{2}{5}$ である。これは $|E_1|/120 = 48/120$ と一致する。

よくある間違い

- 並び方の総数に $6!$ を用いながら、条件を満たす座り方を円順列として数えること、またはその逆。分子と分母は同じ数え方で揃えなければならない。

- 各ブロック内の 2 人の順序に対する 2 倍を忘れること。
- 小問 (ii) で、3 組目の夫婦も隣り合う並び方を除くのを忘れること。これを除かないと $\frac{3\times 24}{120} = \frac{3}{5}$ となり、大きすぎる値になる。

STEP のその先へ

これは**メナージュ問題**（*ménage problem*）の縮小版である。古典的な問題では男女が交互に座ることも要求され、その一般解（Touchard の公式）はまさにこの種の包除原理から得られる。制限のない今回の問題で夫婦が n 組のとき、隣り合って座る夫婦の組数の期待値（expected number）は $n \cdot \frac{2}{2n-1} \to 1$ である。どの夫婦も隣り合わない確率は e^{-1} に収束（converge）し、これは有名な撹乱順列（derangement）の極限と同じである。男女が交互に座るメナージュ問題では、この確率は e^{-2} に収束する。包除原理やこのような極限については、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）に詳しい。

解答例

STEP II 2008、第 1 問

純粋数学 ・ 複素反復

> **STEP II 2008、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q1

鍵となる考え方

式 $x^2 - y^2$ と $2xy$ は、$(x + \mathrm{i}y)^2$ の実部（real part）と虚部（imaginary part）である。そこで各点を複素数（complex number）$z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ として表すと、2 成分の規則はただ一つの複素定数 c を用いた一つの式 $z_{n+1} = z_n^2 + c$ になる。すると「定数列である」ことや「周期 2 をもつ」ことは、一つの複素数の未知数についての二次方程式（quadratic equation）となり、解の公式（quadratic formula）で解くことができる。

解答

$z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$、$c = a + (b+2)\mathrm{i}$ とおく。

$$z_n^2 + c = (x_n^2 - y_n^2 + a) + \mathrm{i}\,(2x_n y_n + b + 2),$$

であり、二つの複素数が等しいのは実部どうし、虚部どうしがそれぞれ等しいときであり、またそのときに限るから、与えられた規則は

$$z_{n+1} = z_n^2 + c.$$

と同値である。a、b、x_n、y_n は実数であるから、各点 (x, y) にはちょうど一つの複素数が対応し、逆も成り立つ。したがって z を用いて考えても何も失われない。

小問 (i)

$a = 1$、$b = -1$ のとき $c = 1 + \mathrm{i}$ である。数列が定数列（constant sequence）となるのは $z_2 = z_1$ のとき、かつそのときに限る。実際、このとき以降の各段階では同じ計算

が繰り返されるだけである。よって

$$z^2 - z + (1+\mathrm{i}) = 0, \qquad z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1+\mathrm{i})}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3-4\mathrm{i}}}{2}.$$

となればよい。$-3-4\mathrm{i}$ の平方根（square root）を求めるため、p、q を実数として $(p+q\mathrm{i})^2 = -3-4\mathrm{i}$ となるものを探す。すなわち $p^2 - q^2 = -3$ かつ $pq = -2$ である。$(1-2\mathrm{i})^2 = 1 - 4\mathrm{i} - 4 = -3 - 4\mathrm{i}$ であるから、$p = 1$、$q = -2$ が条件を満たす。ゆえに

$$z = \frac{1 \pm (1-2\mathrm{i})}{2} = 1 - \mathrm{i} \quad \text{または} \quad \mathrm{i}.$$

したがって、数列が定数列となるのは

$$(x_1, y_1) = (1, -1) \quad \text{または} \quad (x_1, y_1) = (0, 1).$$

のとき、かつそのときに限る。直接確かめると、$(1,-1) \mapsto (1-1+1,\ -2+1) = (1,-1)$、$(0,1) \mapsto (0-1+1,\ 0+1) = (0,1)$ である。

小問 (ii)

今度は $z_1 = -1 + \mathrm{i}$ であるから、$z_1^2 = 1 - 2\mathrm{i} - 1 = -2\mathrm{i}$ であり、

$$z_2 = c - 2\mathrm{i}.$$

となる。$w = z_2$ とおく。数列が周期（period） 2 をもつのは、$z_3 = z_1$ かつ $z_2 \neq z_1$ のときである。いったん $z_3 = z_1$ となれば、規則により数列は $z_1, z_2, z_1, z_2, \ldots$ と繰り返す。$c = w + 2\mathrm{i}$ を用いると

$$z_3 = w^2 + c = w^2 + w + 2\mathrm{i},$$

であるから、$z_3 = z_1$ は

$$w^2 + w + 2\mathrm{i} = -1 + \mathrm{i} \quad \Longleftrightarrow \quad w^2 + w + (1+\mathrm{i}) = 0.$$

となる。

考えてみよう 未知数として c ではなく $w = z_2$ を選ぶのはなぜか。

条件 $z_3 = z_1$ はどちらを選んでも c の二次方程式になるが、w で表すと、定数列に対応する $w = z_1$ が必ず一つの解になる。つまり二次方程式の解の一つはすでにわかっており、もう一つの解が求めたいものである。実際、$w = -1 + \mathrm{i}$ は $(-1+\mathrm{i})^2 + (-1+\mathrm{i}) + 1 + \mathrm{i} = -2\mathrm{i} + 2\mathrm{i} = 0$ を満たす。解の和は -1 であるから、もう一つの解は $w = -\mathrm{i}$ である。（解の公式からも同じ結果が得られる。$w = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{-3-4\mathrm{i}}\right) = \frac{1}{2}\left(-1 \pm (1-2\mathrm{i})\right)$ であり、現れる平方根は (i) と同じである。）

- $w = -1 + \mathrm{i} = z_1$ のとき $c = -1 + 3\mathrm{i}$、すなわち $a = -1$、$b = 1$ である。このとき $z_2 = z_1$ であり数列は定数列となるから、周期は 2 ではなく 1 である。
- $w = -\mathrm{i}$ のとき $c = \mathrm{i}$、すなわち $a = 0$ かつ $b + 2 = 1$ である。

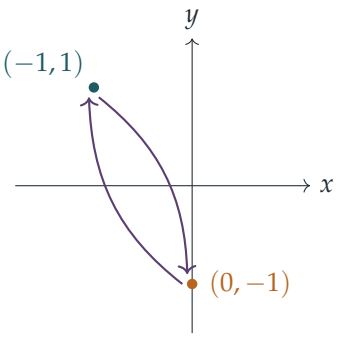
したがって、数列が周期 2 をもつのは

$$a = 0, \qquad b = -1.$$

のとき、かつそのときに限る。座標で確かめると、$a = 0$、$b = -1$ のとき

$$(-1, 1) \mapsto (1 - 1 + 0,\ -2 + 1) = (0, -1) \mapsto (0 - 1 + 0,\ 0 + 1) = (-1, 1),$$

であり、二点は異なるから、周期はちょうど 2 である。



検算

- もとの座標の規則を反復すると、$a = 1$、$b = -1$ のとき $(1, -1)$ と $(0, 1)$ が不動点（fixed point）であること、また $a = 0$、$b = -1$ のとき $(-1, 1) \to (0, -1) \to (-1, 1)$ となることが確かめられる。
- 平方根 $1 - 2\mathrm{i}$ は 2 乗すれば確かめられる。因数分解（factorisation）$w^2 + w + 1 + \mathrm{i} = (w + 1 - \mathrm{i})(w + \mathrm{i})$ も同様に確かめられる。解の積は $(-1 + \mathrm{i})(-\mathrm{i}) = 1 + \mathrm{i}$ である。
- ランダムな初期値から数値的に解を探索したところ、(i) では他の不動点は見つからず、(ii) では定数列を与える $(-1, 1)$ 以外に $z_3 = z_1$ となる (a, b) は見つからなかった。

よくある間違い

- 第 2 成分の「+2」を忘れ、c を $a + (b + 2)\mathrm{i}$ ではなく $c = a + b\mathrm{i}$ としてしまう。

- (ii) の二つ目の答えとして $a = -1$、$b = 1$ を挙げてしまう。この数列は定数列であり、周期は 1 である。
- 実数の座標だけで計算し、連立二次方程式（simultaneous quadratics）の中で迷ってしまう。この方法でも解けるが、複素数の形のほうがはるかに短い。

STEP のその先へ

写像 $z \mapsto z^2 + c$ は、複素力学系（complex dynamics）において最も有名な例である。マンデルブロ集合（Mandelbrot set）とは、0 の軌道（orbit）が有界（bounded）にとどまるような c 全体の集合であり、その最も大きな二つの部分、すなわち主カージオイド（main cardioid）とその左にある円板は、写像が吸引的不動点（attracting fixed point）または吸引的な 2 周期軌道（2-cycle）をもつような c からなる。ここでも、2 周期軌道の方程式には不動点に由来する因数が含まれていた。一般に $(z^2 + c)^2 + c - z = (z^2 - z + c)(z^2 + z + c + 1)$ が成り立つ。この背後にある幾何学への読みやすい入門としては、Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析入門）を参照するとよい。

解答例

STEP II 2008、第 2 問

純粋数学 ・ 部分分数分解と級数

STEP II 2008、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s2-q2

鍵となる考え方

部分分数分解（partial fractions）を用いると、扱いにくい一つの有理関数（rational function）が、展開をよく知っている三つの部分に分かれる。すなわち、等比級数（geometric series）、その導関数、そして $-x^2$ についての等比級数である。最初の二つからは n に比例して増える係数が得られ、三つ目は常に $\pm\frac{1}{2}$ しか寄与せず、それが周期 4 で繰り返される。「どちらか一方」という場合分けはここから生じる。最後の小問では、関数の値が与えられた分数になるような x の値を探せばよい。

解答

部分分数分解

$(1-x)^2$ は重複する一次因数であり、$1+x^2$ は既約な（irreducible）二次式であるから、

$$\frac{1+x}{(1-x)^2(1+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2},$$

とおく。このとき、すべての x について

$$1+x = A(1-x)(1+x^2) + B(1+x^2) + (Cx+D)(1-x)^2.$$

が成り立つ。

- $x=1$ を代入すると $2=2B$ となり、$B=1$ である。
- $x=0$ を代入すると $1=A+B+D$ となり、$A=-D$ である。
- $x=\mathrm{i}$ を代入する（これは多項式の恒等式であるから許される）と、$1+\mathrm{i}=$

$(\mathrm{C}\mathrm{i}+D)(1-\mathrm{i})^2 = (\mathrm{C}\mathrm{i}+D)(-2\mathrm{i}) = 2C-2D\mathrm{i}$ となる。実部と虚部を比較して $C=\frac{1}{2}$、$D=-\frac{1}{2}$ を得るので、$A=\frac{1}{2}$ である。

検算として、右辺の x^3 の係数は $-A+C=0$ であり、左辺と一致する。よって

$$\frac{1+x}{(1-x)^2(1+x^2)} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1-x}{2(1+x^2)}.$$

係数

$|x|<1$ のとき三つの展開はすべて収束（converge）し、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2(1-x)} &= \tfrac{1}{2}\sum_{n\geq 0} x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n,\\ -\frac{1-x}{2(1+x^2)} &= -\tfrac{1}{2}(1-x)\left(1-x^2+x^4-x^6+\cdots\right)\\ &= -\tfrac{1}{2}\left(1-x-x^2+x^3+x^4-x^5-x^6+x^7+\cdots\right).\end{aligned}$$

となる。最後の行の括弧内の係数は $1,-1,-1,1$ が周期 4 で繰り返される。すなわち、$n=2k$ のとき x^n の係数は $(-1)^k$ であり、$n=2k+1$ のとき $-(-1)^k$ である。したがって三つ目の部分は、$n\equiv 0$ または $3 \pmod 4$ のとき x^n に $-\frac{1}{2}$ を、$n\equiv 1$ または $2 \pmod 4$ のとき $+\frac{1}{2}$ を寄与する。

> **考えてみよう** 周期 4 のパターンから、四通りではなくちょうど二通りの場合が生じるのはなぜか。

符号だけが問題になるからである。三つの寄与を足し合わせると

$$a_n = \tfrac{1}{2} + (n+1) \mp \tfrac{1}{2} = \begin{cases} n+1, & n\equiv 0 \text{ または} 3 \pmod 4,\\ n+2, & n\equiv 1 \text{ または} 2 \pmod 4,\end{cases}$$

となり、これが求める結果である。この数列は $1,3,4,4,5,7,8,8,9,11,12,12,\ldots$ と始まる。

小数による近似

> **考えてみよう** どの x の値に対して、関数の値が $\frac{11\,000}{8181}$ になるか。

分母の形から $x=\frac{1}{10}$ が思い浮かぶ。このとき $(1-x)^2=0.81$、$1+x^2=1.01$ であるから $(1-x)^2(1+x^2)=0.8181$ となり、

$$\frac{1+\frac{1}{10}}{0.8181} = \frac{1.1}{0.8181} = \frac{11\,000}{8181}.$$

である。$\frac{1}{10} < 1$ であるから級数展開は有効であり、

$$\frac{11\,000}{8181} = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{10^n} = 1 + 0.3 + 0.04 + 0.004 + 0.0005 + 0.00007 + \cdots .$$

となる。$a_n \leq 9$ である間（すなわち $n = 8$ まで）は、係数がそのまま小数の各桁の数字になり、1.34457889 を得る。その先は係数が二桁になるので、繰り上がりを考えなければならない。

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{8} \frac{a_n}{10^n} &= 1.344\,578\,89 \\
+ 11 \times 10^{-9} &\to 1.344\,578\,901 \\
+ 12 \times 10^{-10} &\to 1.344\,578\,902\,2 \\
+ 12 \times 10^{-11} &\to 1.344\,578\,902\,32 \\
+ 13 \times 10^{-12} &\to 1.344\,578\,902\,333.
\end{aligned}$$

これ以降の項は有効数字（significant figures）の 11 桁目以降にしか影響しないので、有効数字 9 桁で

$$\frac{11\,000}{8181} \approx 1.344\,578\,90.$$

である。

検算

- 関数に $x = 0$ を代入すると $1 = a_0$ となり、$n = 0$ は $n+1$ の場合に当てはまる。$(1+x)(1+2x+\cdots)(1-x^2+\cdots)$ を展開すると $1+3x+\cdots$ となるので、$a_1 = 3 = 1+2$ である。
- 筆算による割り算で $11\,000/8181 = 1.344\,578\,902\,33\ldots$ を得て、級数による結果と一致する。また、$n < 60$ について冪級数（power series）の厳密な割り算によって a_n を確かめ、部分分数分解の恒等式も多数の無作為な有理数の点で確かめた。

よくある間違い

- 繰り上がりを忘れること。a_n からそのまま数字を読み取ると 1.34457889… となり、有効数字 9 桁目が誤りになる。
- $\frac{Cx+D}{1+x^2}$ の代わりに $\frac{D}{1+x^2}$ と書いてしまうこと。既約な二次式に対しては、分子を一次式にする必要がある。
- 1.344578902… を 1.34457890 に丸めたうえで、最後の 0 を落としてしまうこと。ここではこの 0 も有効数字である。

STEP のその先へ

有理関数は常に冪級数展開をもち、その係数は n の多項式に、r^n のような項や周期的なパターンを加えたものになる。これらは分母の根一つひとつに対応している。これが**線形漸化式**（linear recurrences）と**母関数**（generating functions）の理論である。本問では、根 1（重根）と ±i がそれぞれ線形の増加と周期 4 の揺らぎを生み出している。また、どんな分数の小数表示もいずれ循環するのも、同じ理由による。Wilf の *generatingfunctionology*（母関数論）は生き生きとした入門書で、無料で入手できる。また Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、同じ趣旨の問題がさらに収録されている。

解答例

STEP II 2008、第 3 問

純粋数学 • 不等式と背理法

STEP II 2008、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s2-q3

鍵となる考え方

略図から、$x \geq 0$ では 3 次曲線（cubic）が x 軸より下に出ないことがわかり、「$y \geq 0$」を変形すると不等式（inequality）$x^2(1-x) \leq 4/27$ が得られる。背理法（proof by contradiction）の部分では、3 つの数 $bc(1-a), ca(1-b), ab(1-c)$ は 1 つずつ見ると扱いにくいが、それらの積は $a^2(1-a)\cdot b^2(1-b)\cdot c^2(1-c)$ と組み替えられ、これは最初の結果で抑えられることに注目する。小問 (ii) は、3 次関数の代わりに 2 次関数（quadratic）を用いた同じ手法である。

解答

小問 (i)：曲線

$y = 27x^3 - 27x^2 + 4$ を微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 81x^2 - 54x = 27x(3x-2),$$

となり、これは $x = 0$ と $x = \frac{2}{3}$ でゼロになる。$x = 0$ のとき $y = 4$ であり、$x = \frac{2}{3}$ のとき

$$y = 27\cdot\tfrac{8}{27} - 27\cdot\tfrac{4}{9} + 4 = 8 - 12 + 4 = 0.$$

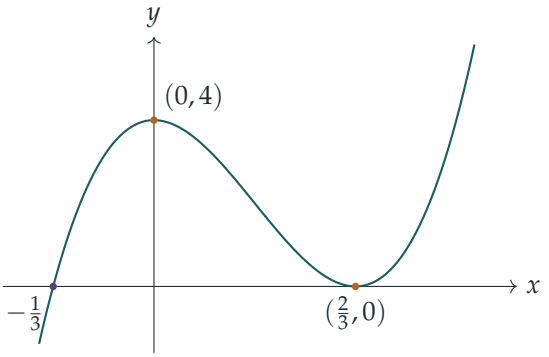
である。$\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = 162x - 54$ は $x = 0$ で $-54 < 0$、$x = \frac{2}{3}$ で $54 > 0$ となるから、停留点（turning point）は $(0,4)$ における極大（maximum）と $(\frac{2}{3},0)$ における極小（minimum）である。

極小点は x 軸上にあるので、曲線はそこで軸に接し、$(3x-2)^2$ は因数（factor）であ

る。x^3 の係数と定数項を比較すると

$$27x^3 - 27x^2 + 4 = (3x-2)^2(3x+1),$$

となるので、曲線が軸と交わる他の点は $x = -\frac{1}{3}$ のみである。曲線は $-\infty$ から上昇し、$x = -\frac{1}{3}$ で軸を横切り、$(0,4)$ で山の頂上に達し、下がって $(\frac{2}{3},0)$ で軸に接し、その後再び上昇する。



小問 (i)：不等式

$x \geq 0$ に対しては $3x+1 > 0$ かつ $(3x-2)^2 \geq 0$ であるから、因数分解より $27x^3 - 27x^2 + 4 \geq 0$ である。（同じことだが、略図からもわかる：$x \geq 0$ の範囲では、曲線の最も低い点は極小点 $(\frac{2}{3},0)$ である。）変形すると、

$$4 \geq 27x^2 - 27x^3 = 27x^2(1-x), \qquad \text{よって} \qquad x^2(1-x) \leq \frac{4}{27} \quad \text{任意の} x \geq 0,$$

が成り立ち、等号は $x = \frac{2}{3}$ のときのみ成り立つ。これが求める結果である。

小問 (i)：矛盾の導出

背理法のため、3 つの数がすべて 4/27 を超えると仮定する：

$$bc(1-a) > \tfrac{4}{27}, \qquad ca(1-b) > \tfrac{4}{27}, \qquad ab(1-c) > \tfrac{4}{27}.$$

ここに現れる 6 つの量はすべて正であるから、3 つの不等式を辺々掛け合わせてよい：

$$bc(1-a)\cdot ca(1-b)\cdot ab(1-c) > \left(\tfrac{4}{27}\right)^3.$$

考えてみよう 最初の結果は、これらの入り混じった積について何を教えてくれるだろうか？

左辺を、各文字がそれ自身の括弧とひとまとまりになるように組み替える：

$$bc(1-a)\cdot ca(1-b)\cdot ab(1-c) = \left[a^2(1-a)\right]\left[b^2(1-b)\right]\left[c^2(1-c)\right].$$

a, b, c はいずれも非負であるから、最初の結果により、各括弧は 0（$1-a \geq 0$ などより）と 4/27 の間にある。非負の数どうしのこれら 3 つの不等式を掛け合わせると、

$$\left[a^2(1-a)\right]\left[b^2(1-b)\right]\left[c^2(1-c)\right] \leq \left(\tfrac{4}{27}\right)^3.$$

これは上の狭義の不等式に矛盾する。よって仮定は誤りであり、$bc(1-a), ca(1-b), ab(1-c)$ のうち少なくとも 1 つは 4/27 以下である。

小問 (ii)

同じ考え方は 2 次関数でも通用する。任意の実数 t に対して、平方完成（completing the square）により

$$t(1-t) = \tfrac{1}{4} - \left(t - \tfrac{1}{2}\right)^2 \leq \tfrac{1}{4},$$

が成り立つ。背理法のため、$p(1-q) > \frac{1}{4}$ かつ $q(1-p) > \frac{1}{4}$ と仮定する。両辺とも正であるから、掛け合わせると

$$p(1-q)\cdot q(1-p) > \tfrac{1}{16}.$$

しかし左辺は $\left[p(1-p)\right]\left[q(1-q)\right]$ と組み替えられ、$0 < p, q < 1$ であるから各括弧は 0 と $\frac{1}{4}$ の間にあり、積は高々 $\frac{1}{16}$ である。これは矛盾であるから、$p(1-q)$ と $q(1-p)$ のうち少なくとも 1 つは $\frac{1}{4}$ 以下である。

検算

- 等号成立の場合：$a = b = c = \frac{2}{3}$ とすると (i) の 3 つの数はすべて $\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{27}$ に等しくなり、$p = q = \frac{1}{2}$ とすると (ii) の 2 つの数はともに $\frac{1}{4}$ に等しくなる。よって上界 4/27 と 1/4 はこれ以上改良できない。
- $(3x-2)^2(3x+1) = (9x^2-12x+4)(3x+1) = 27x^3 - 27x^2 + 4$ と展開すると、因数分解が正しいことが確かめられる。
- 数値的には、$[0,3]$ における $x^2(1-x)$ の最大値は $0.148148\ldots = 4/27$ である。$(0,1)$ 内の無作為な 3 つ組 (a,b,c) 100 万個について、3 つの積のうち最小のものは一度も 0.1468 を超えず、無作為な組 100 万個について、$p(1-q), q(1-p)$ の小さい方は一度も 0.24998 を超えなかった。

よくある間違い

- すべてが正であることを述べずに不等式を掛け合わせること。「$A > \alpha, B > \beta$ ならば $AB > \alpha\beta$」という推論は負の数では成り立たないので、仮定 $0 < a, b, c < 1$ は本当に必要である。
- 上界 $x^2(1-x) \leq 4/27$ を $x < 0$ に対して用いること。そこではこれは誤りである（$x = -1$ を試してみよ）。
- 特定の 1 つの数、たとえば $bc(1-a)$ が小さいことだけを示そうとすること。その数が小さいとは限らない：a が 0 に近く、$b = c$ が 1 に近いとき、それは 1 に近い。

STEP のその先へ

対称な評価が適用できるように量の積をとる手法は、相加・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）の近い親戚であり、これを使えば最初の結果が直接得られる：$0 \leq x \leq 1$ に対して、（和が 1 になる）$\frac{x}{2}, \frac{x}{2}, 1-x$ に相加・相乗平均の不等式を適用すると $\frac{x^2}{4}(1-x) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3$ が得られる。この議論には鳩の巣原理（pigeonhole principle）の趣もある：積が小さければ、すべての因数が大きいということはありえない。こうした評価と最適化の考え方は大学 1 年次の解析学（analysis）で展開される。Abbott の *Understanding Analysis* は入門に最適な親しみやすい本であり、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* にはこのスタイルの STEP の問題がさらに収められている。

解答例

STEP II 2008、第 4 問

純粋数学 • 陰関数の微分

> **STEP II 2008、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q4

鍵となる考え方

2 直線のなす角は、ベクトルを用いると最も扱いやすい。$F(x,y)=1$ の法線（normal）は ∇F の向きを向く。また、平面上の 2 つのベクトル $\mathbf{p}$ と $\mathbf{n}$ のなす角の tan は、外積（cross product）の大きさ |外積| を内積（dot product）で割ったものである。ここでは、内積がちょうど曲線の方程式の左辺に一致し、その値は 1 となる。そうすれば、θ が停留する（stationary）のは y^2-x^2 が停留するときであり、かつそのときに限る。あとは x^2+y^2 と xy を用いた代数計算である。

解答

傾き

$x^2+y^2+2axy=1$ を x について陰関数微分（implicit differentiation）すると、

$$2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2a\left(y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0 \quad\Longrightarrow\quad (ax+y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-(x+ay).$$

よって、$ax+y\neq 0$ である限り、傾き（gradient）は $-\dfrac{x+ay}{ax+y}$ であり、題意が示された。

角 θ

接線（tangent）の方向は $(ax+y,\ -(x+ay))$ であるから、法線の方向は、これに垂直なベクトル

$$\mathbf{n}=(x+ay,\ ax+y),$$

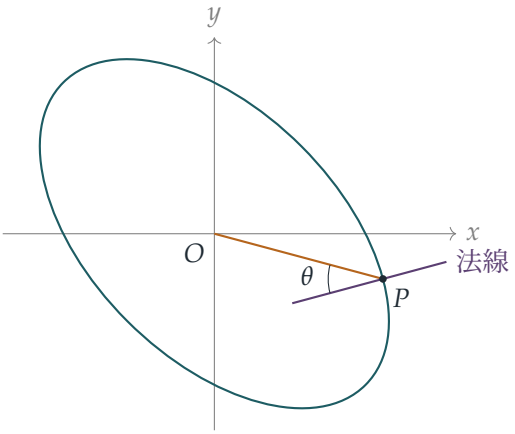
である。（これは $F = x^2 + y^2 + 2axy$ に対する $\frac{1}{2}\nabla F$ であり、$ax + y = 0$ となる点でも意味をもつ。）ベクトル $\overrightarrow{OP}$ は $\mathbf{p} = (x, y)$ である。$\mathbf{p}$ と $\mathbf{n}$ のなす角を ϕ とする。すると

$$|\mathbf{p}||\mathbf{n}|\cos\phi = \mathbf{p}\cdot\mathbf{n} = x(x+ay) + y(ax+y) = x^2 + y^2 + 2axy = 1,$$
$$|\mathbf{p}||\mathbf{n}|\sin\phi = |x(ax+y) - y(x+ay)| = |ax^2 - ay^2| = a|y^2 - x^2|,$$

となる。ここで 2 行目は 2 次元の外積の大きさ（$\mathbf{p}$ と $\mathbf{n}$ が張る平行四辺形の面積）であり、$a > 0$ を用いた。

内積は $+1 > 0$ であるから、ϕ ははじめから鋭角（acute）（または 0）であり、$\phi = \theta$ である。2 つの式を割ると、

$$\tan\theta = a\,|y^2 - x^2|.$$



図（$a = \frac{1}{2}$ の場合）は曲線を示している。$0 < a < 1$ であるから、これは軸が $y = \pm x$ に沿った楕円（ellipse）である。図に描いた点 P は、θ が最大となる点の 1 つである。

小問 (i)

関数 $t \mapsto \arctan(t)$ は狭義単調増加であるから、$f \neq 0$ となるところでは、θ は $f = y^2 - x^2$ の滑らかな増加関数である。

> **考えてみよう** $y^2 = x^2$ となる点、すなわち絶対値のために角ができる点ではどうか？

そこでは $\theta = 0$ である。そのような点で θ の導関数が 0 ならば、$a|f|$ を x の変化量で割ったものは 0 に近づくので、$\mathrm{d}f/\mathrm{d}x = 0$ でもなければならない。したがって、どの場合でも

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = 0 \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2 - x^2) = 0 \implies y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x.$$

ここでは傾きの公式を用いているので、$ax+y\neq 0$ である（これが自動的に成り立つことは後で確かめる）。代入して $ax+y$ を掛けると、

$$-y(x+ay)=x(ax+y) \implies -xy-ay^2=ax^2+xy \implies a(x^2+y^2)+2xy=0.$$

これが (i) である。

ちなみに、$ax+y=0$ であれば、(i) より $ax^2(1+a^2)-2ax^2=-a(1-a^2)x^2=0$ となり、$x=y=0$ となるが、これは曲線上にない。よって、そのような点が問題を引き起こすことはない。

小問 (ii)

$S=x^2+y^2$ とおく。(i) より $2xy=-aS$ である。これを曲線の方程式に代入すると、

$$S+a(-aS)=1 \quad\implies\quad S=\frac{1}{1-a^2}.$$

したがって

$$x^2+y^2+2xy=S-aS=\frac{1-a}{1-a^2}=\frac{1}{1+a},$$

すなわち $(1+a)(x^2+y^2+2xy)=1$ であり、題意が示された。

小問 (iii)

$|y^2-x^2|$ を求めればよい。$(y^2-x^2)^2=(x^2+y^2)^2-4x^2y^2=S^2-(2xy)^2$ を用いると、

$$(y^2-x^2)^2=S^2-a^2S^2=(1-a^2)\cdot\frac{1}{(1-a^2)^2}=\frac{1}{1-a^2}.$$

正の平方根をとると（$0<a<1$ より妥当である）、$|y^2-x^2|=1/\sqrt{1-a^2}$ となり、したがって

$$\tan\theta=\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

検算

- 座標軸を回転する。$u=(x+y)/\sqrt{2}$、$v=(x-y)/\sqrt{2}$ とおくと、曲線は $(1+a)u^2+(1-a)v^2=1$ となり、$y^2-x^2=-2uv$ である。AM–GM（相加平均と相乗平均の不等式）より $1\geq 2\sqrt{(1-a^2)}\,|uv|$ であるから、$\tan\theta=2a|uv|\leq a/\sqrt{1-a^2}$ であり、等号は $(1+a)u^2=\frac{1}{2}$ のときに成り立つ。$x^2+y^2+2xy=2u^2$ であるから、この等号成立条件はまさに (ii) である。よって、停留値は θ の最大値である。
- $a=\frac{1}{2}$ の場合：$P\approx(1.1154,\,-0.2989)$ は曲線の方程式と (i) を満たし、$\tan\theta=\frac{1}{2}|y^2-x^2|\approx 0.5774=1/\sqrt{3}$ であるから、$\theta=30^\circ$ である。いくつかの a の値につ

いて楕円を一周しながら $\tan\theta$ を数値的に調べると、その最大値はちょうどこれらの値になる。

- $a \to 0$ のとき、曲線は単位円になり、その法線は O を通るので $\theta \to 0$ となる。これは $\tan\theta \to 0$ と整合する。

よくある間違い

- OP と法線の傾きを用いて $\tan(\alpha - \beta)$ を使うこと。この方法でも解けるが、$x = 0$ の場合や符号に注意が必要であり、ベクトルを用いる方法ならその両方を避けられる。
- 求めた角がなぜ**鋭角**のほうなのかを忘れること。内積が $+1$ であることがこれを決定づける。
- $|y^2 - x^2|$ を求めるために 2 乗し、その後で正の平方根をとるのを忘れること。

STEP のその先へ

$x^2 + y^2 + 2axy$ を $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ による二次形式（quadratic form）$\mathbf{x}^{\mathsf{T}} A \mathbf{x}$ として書くと、楕円の軸は A の固有ベクトル（eigenvector）$(1,1)$ と $(1,-1)$ であり、固有値（eigenvalue）$1 \pm a$ から半軸が得られる。このような対称行列（symmetric matrix）の対角化（diagonalisation）は、大学 1 年次の線形代数（linear algebra）の中心的な考え方である。Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照のこと。

解答例

STEP II 2008、第 5 問

純粋数学 • 置換積分

STEP II 2008、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s2-q5

鍵となる考え方

どちらの積分も、導関数（derivative）を見抜くことで解ける。1 つ目では、分子 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ がちょうど分母 $1+\sin^2 x$ の導関数になっているので、積分は一目で対数（logarithm）になる。2 つ目では、$1+\sin^2 x = 2-\cos^2 x$ と書き直したうえで、分子にぽつんとある $\sin x$ が置換（substitution）$c = \cos x$ を示唆しており、その結果、標準的な部分分数分解（partial fractions）による積分が残る。すると 2 つの答えの比較は、$\sqrt{2}$ を含む 2 つの数の比較に帰着し、最後の小問の不等式（inequality）はまさにそれを決着させるように作られている。

解答

2 つの積分

2 つの積分を I_1（分子が $\sin 2x$）、I_2（分子が $\sin x$）とおく。

I_1 については、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1+\sin^2 x\right) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$ であるから、被積分関数（integrand）は $f(x) = 1+\sin^2 x > 0$ として $f'(x)/f(x)$ の形をしている。よって

$$I_1 = \Big[\ln\left(1+\sin^2 x\right)\Big]_0^{\pi/2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

I_2 については、$1+\sin^2 x = 2-\cos^2 x$ と書き、$c = \cos x$ と置換すると、$\mathrm{d}c = -\sin x\,\mathrm{d}x$ である。x が 0 から $\frac{1}{2}\pi$ まで動くとき、c は 1 から 0 まで減少する。負号によって積分の上端と下端が入れ替わり、

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}c}{2-c^2}.$$

部分分数分解を用いると

$$\frac{1}{2-c^2} = \frac{1}{(\sqrt{2}-c)(\sqrt{2}+c)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-c} + \frac{1}{\sqrt{2}+c}\right),$$

であり、$0 \leq c \leq 1$ ではどちらの分母も正であるから

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[\ln(\sqrt{2}+c) - \ln(\sqrt{2}-c)\Big]_0^1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}.$$

これはきれいに整理できる。$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1$ より $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2$ であるから、

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2\ln(1+\sqrt{2}) = \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}.$$

不等式

二項定理(binomial theorem)により、$(\sqrt{2})^2 = 2$、$(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$、$(\sqrt{2})^4 = 4$、$(\sqrt{2})^5 = 4\sqrt{2}$ を用いて

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^5 &= 1 + 5\sqrt{2} + 10\cdot 2 + 10\cdot 2\sqrt{2} + 5\cdot 4 + 4\sqrt{2} \\ &= 41 + 29\sqrt{2}.\end{aligned}$$

ここで $2 < 4$ より $\sqrt{2} < 2$ であるから、$29\sqrt{2} < 58$ となり、$(1+\sqrt{2})^5 < 41 + 58 = 99$ が示された。

次に、$1.4^2 = 1.96 < 2$ であり、1.4 と $\sqrt{2}$ はともに正なので、2 乗しても大小関係は保たれる。したがって $\sqrt{2} > 1.4$ である。

> **考えてみよう**　$(1+\sqrt{2})^5 < 99$ と $\sqrt{2} > 1.4$ から、いったいどうして $2^{\sqrt{2}}$ について何かがわかるのだろうか。

$1.4 = \frac{7}{5}$ と書く。すると $2^{7/5}$ は $2^7 = 128$ の 5 乗根であり、$1+\sqrt{2}$ の 5 乗はちょうど先ほど評価したものである。正確に述べよう。$t \mapsto 2^t$ は増加関数（increasing function）であり、$\sqrt{2} > \frac{7}{5}$ であるから

$$2^{\sqrt{2}} > 2^{7/5}.$$

また $(1+\sqrt{2})^5 < 99 < 128 = \left(2^{7/5}\right)^5$ であり、$y \mapsto y^5$ は $y > 0$ で増加するので、正の 5 乗根をとると $1+\sqrt{2} < 2^{7/5}$ を得る。これらを合わせて

$$2^{\sqrt{2}} > 2^{7/5} > 1 + \sqrt{2}.$$

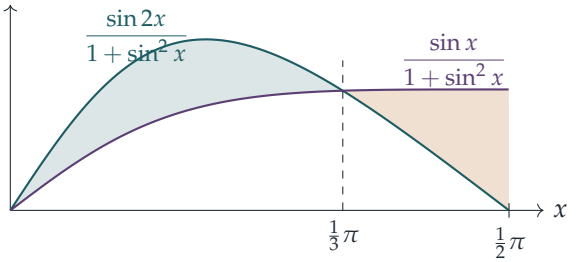
どちらの積分が大きいか

関数 ln は増加関数であるから、最後の不等式より $\ln(2^{\sqrt{2}}) > \ln(1+\sqrt{2})$、すなわち $\sqrt{2}\ln 2 > \ln(1+\sqrt{2})$ が成り立つ。両辺を $\sqrt{2} > 0$ で割って

$$I_1 = \ln 2 > \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = I_2.$$

したがって、分子が $\sin 2x$ である積分のほうが大きい。

この比較は、被積分関数から直接読み取れるものではない。$\sin 2x - \sin x = \sin x\,(2\cos x - 1)$ であるから、1つ目の被積分関数は $0 < x < \frac{1}{3}\pi$ では大きく、$\frac{1}{3}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ では小さい。



問題は、青緑色の領域が琥珀色の領域より大きいかどうかである。実際に大きいのだが、その差はわずか 0.07 ほどにすぎない。だからこそ、$\sqrt{2}$ を用いた慎重な計算が必要だったのである。

検算

- もとの被積分関数にシンプソンの公式(Simpson's rule)を適用すると $I_1 \approx 0.693147$、$I_2 \approx 0.623225$ となり、$\ln 2$ および $\ln(1+\sqrt{2})/\sqrt{2}$ と小数第10位まで一致する。
- $(1+\sqrt{2})^5 \approx 82.01$、$41 + 29\sqrt{2} \approx 82.01$ であり、99 を十分下回っている。
- $2^{\sqrt{2}} \approx 2.665$、$2^{1.4} \approx 2.639$、$1+\sqrt{2} \approx 2.414$ であり、主張どおりの順に並んでいる。
- I_2 の妥当性の確認：被積分関数は $\frac{1}{2}\sin x$ と $\sin x$ の間にあるので $\frac{1}{2} < I_2 < 1$ であり、0.62 はこれを満たしている。

よくある間違い

- $\mathrm{d}c = -\sin x\,\mathrm{d}x$ によって積分の上端と下端が入れ替わることを忘れ、正の被積分関数なのに負の値を得てしまう。

- I_2 を $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ のままにしておく。これが $(\sqrt{2}+1)^2$ であることに気づかないと、最後の小問での $1+\sqrt{2}$ とのつながりが見えなくなる。
- 電卓を使って $2^{\sqrt{2}} > 1+\sqrt{2}$ と主張する。問題が求めているのは $2^{7/5}$ を経由する不等式の連鎖であり、2^t と y^5 の単調性（monotonicity）を明示することである。

STEP のその先へ

そもそも $2^{\sqrt{2}}$ とは何を意味するのだろうか。大学では、これは $e^{\sqrt{2}\ln 2}$ として**定義**される。そして、ここで用いた事実、すなわち 2^t が有理数の t だけでなく無理数の t に対しても t について増加するということは、解析学（analysis）の最初の講義で丁寧に証明される指数関数（exponential function）の性質から導かれる。（ゲルフォント（Gelfond）とシュナイダー（Schneider）による有名な定理によれば、$2^{\sqrt{2}}$ は実は超越数（transcendental number）である。）e^x と $\ln x$ の丁寧な構成については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を参照せよ。

解答例

STEP II 2008、第 6 問

純粋数学 • 和積の公式

STEP II 2008、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s2-q6

鍵となる考え方

偏角の異なる余弦と正弦の和は扱いにくいが、2 つの余弦の和は和積の公式（sum-to-product formula）によって積に因数分解できる。まず正弦を余弦に書き直す。そうすれば f の零点（zero）は 2 つの単純な因数の零点となり、**両方**の因数が同時に 0 になる点で曲線は軸に接する。最後の小問では、余弦も正弦もそれぞれ高々 1 であることを思い出せばよい。

解答

以下を通して、

$$A = 2x + \frac{\pi}{3}, \qquad \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos B, \quad \text{ただし} B = \frac{3\pi}{4} - \frac{3x}{2},$$

と書く。すると $f(x) = \cos A + \cos B$ である。

小問 (i)

項 $\cos(2x + \frac{\pi}{3})$ の周期（period）は π であり、$\sin(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4})$ の周期は $\frac{2\pi}{3/2} = \frac{4\pi}{3}$ である。共通の周期はそれぞれの周期の整数倍でなければならない。$p\pi = q \cdot \frac{4\pi}{3}$ は $3p = 4q$ を意味し、最小の正の解は $p = 4$、$q = 3$ である。よってすべての x について $f(x + 4\pi) = f(x)$ であり、f の周期は

$$4\pi.$$

である。これより小さい周期は存在しない。小問 (iii) で見るように、$f(x) = 2$ となるのは整数 t を用いて $x = \frac{11\pi}{6} + 4t\pi$ と表されるときに限るので、f が最大値をとる点は 4π 間隔で並び、どの周期も 4π の倍数でなければならないからである。

小問 (ii)

$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ を用いる。ここで

$$\frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{13\pi}{12}\right) = \frac{x}{4} + \frac{13\pi}{24},$$
$$\frac{A-B}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{7x}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{7x}{4} - \frac{5\pi}{24},$$

であるから、

$$f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{13\pi}{24}\right)\cos\left(\frac{7x}{4} - \frac{5\pi}{24}\right).$$

を得る。したがって $f(x) = 0$ となるのは、2 つの余弦のいずれかが 0 になるときに限る。

第 1 の因数。 $\frac{x}{4} + \frac{13\pi}{24} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ より $x = -\frac{\pi}{6} + 4k\pi$ である。$[-\pi, \pi]$ に含まれるのは $x = -\frac{\pi}{6}$ のみである。

第 2 の因数。 $\frac{7x}{4} - \frac{5\pi}{24} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ より $\frac{7x}{4} = \frac{17\pi}{24} + k\pi$ であるから、

$$x = \frac{(17 + 24k)\pi}{42}.$$

となる。$-42 \le 17 + 24k \le 42$ が必要なので $k = -2, -1, 0, 1$ であり、$x = -\frac{31\pi}{42}, -\frac{7\pi}{42} = -\frac{\pi}{6}, \frac{17\pi}{42}, \frac{41\pi}{42}$ を得る。

以上を合わせると、$-\pi \le x \le \pi$ における f の零点は

$$x = -\frac{31\pi}{42}, \quad -\frac{\pi}{6}, \quad \frac{17\pi}{42}, \quad \frac{41\pi}{42}.$$

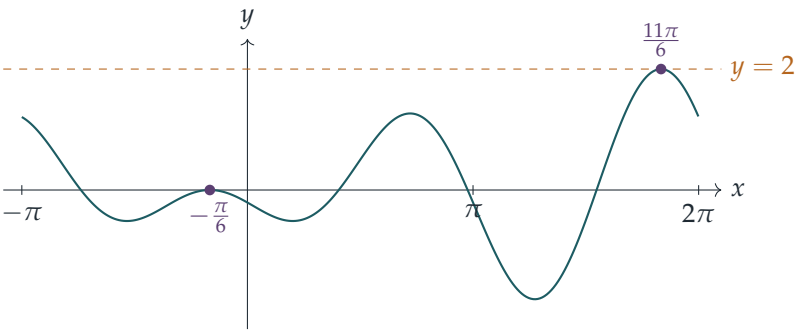
である。

? **考えてみよう** 両方のリストに現れる値は、なぜ特別なのだろうか。

$x = -\frac{\pi}{6}$ では 2 つの余弦因数がともに 0 になる。どちらも零点を通過する余弦なので、そこで符号を変える（cos が 0 となる点では sin は ± 1 なので、導関数（derivative）は 0 でない）。したがって $x = -\frac{\pi}{6}$ の近くで f は定数と $(x + \frac{\pi}{6})^2$ の積のように振る舞う。2 回の符号変化の積は符号変化を生まないのである。実際、x が増加して $-\frac{\pi}{6}$ を通過するとき、第 1 の因数は正から負へ変わり（その偏角は増加しながら $\frac{\pi}{2}$ を通過する）、第 2 の因数は負から正へ変わる（その偏角は増加しながら $-\frac{\pi}{2}$ を通過する）ので、f は両側で負である。よって曲線は

$$x = -\frac{\pi}{6}.$$

において x 軸を横切らずに接する。他の 3 つの零点では一方の因数だけが 0 になるので、f は符号を変え、曲線は軸を横切る。



小問 (iii)

$\cos A \leq 1$ かつ $\cos B \leq 1$ であるから $f(x) \leq 2$ であり、等号が成り立つのは $\cos A = 1$ かつ $\cos B = 1$ のとき、かつそのときに限る。もとの関数で書けば、

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \iff 2x + \frac{\pi}{3} = 2m\pi \iff x = -\frac{\pi}{6} + m\pi,$$
$$\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \iff \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \iff x = \frac{\pi}{2} + \frac{4n\pi}{3},$$

である（m、n は整数）。両方が成り立つのは $-\frac{\pi}{6} + m\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4n\pi}{3}$ のときである。両辺に $\frac{6}{\pi}$ を掛けると $6m - 1 = 3 + 8n$、すなわち

$$3m - 4n = 2.$$

となる。解の 1 つは $m = 2$、$n = 1$ であり、一般解は $m = 2 + 4t$、$n = 1 + 3t$ である（3 と 4 は互いに素（coprime）だからである）。よって $f(x) = 2$ となるのは

$$x = -\frac{\pi}{6} + (2 + 4t)\pi = \frac{11\pi}{6} + 4t\pi, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

のときに限る。$0 \leq x \leq 2\pi$ に含まれるそのような値は

$$x = \frac{11\pi}{6}.$$

のみである。確認：$2 \cdot \frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = 4\pi$ かつ $\frac{3}{2} \cdot \frac{11\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$ であるから、$f = \cos 4\pi + \sin\frac{5\pi}{2} = 1 + 1 = 2$ である。

検算

- 因数分解した形は、10^4 個のランダムな点でもとの f と（10^{-12} の精度で）一致する。
- $[-\pi, \pi]$ を数値的に走査すると、符号変化が見つかるのは $-\frac{31\pi}{42}$、$\frac{17\pi}{42}$、$\frac{41\pi}{42}$ の近くのみである。$-\frac{\pi}{6}$ では両側で $f(-\frac{\pi}{6} \pm 10^{-3}) \approx -8.7 \times 10^{-7}$ となり、符号変化のない接する零点であることが確かめられる。

- $[0, 2\pi]$ における f の最大値は 2 であり、$x \approx 1.8333\pi = \frac{11\pi}{6}$ でとる。

よくある間違い

- $-\frac{\pi}{6}$ を 2 回書き並べてしまう、あるいはそれが両方の因数から生じていることを見落とす。これこそが接点を見つける手がかりである。
- $\cos A = 1$ と $\cos B = 1$ を別々に解いてそこで止まってしまう。2 つの条件は同じ x で同時に成り立たなければならず、そのためには整数方程式 $3m - 4n = 2$ が必要である。

STEP のその先へ

小問 (iii) は、本質的には 2 つの周期的な運動がいつ揃うかという問題である。条件 $3m - 4n = 2$ は一次ディオファントス方程式（linear Diophantine equation）であり、$\gcd(3, 4)$ が 2 を割り切るので解をもつ。同じ考え方を多くの周波数に一度に適用すると、フーリエ級数（Fourier series）や、周期関数の和それ自身がいつ周期的になるか（周期どうしの比が有理数であるときに限る）という問題へとつながる。背後にある数論については、ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）を読んでみるとよい。

解答例

STEP II 2008、第 7 問

純粋数学 ・ 一階微分方程式

STEP II 2008、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s2-q7

鍵となる考え方

左辺の $\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ は $\ln y$ の導関数（derivative）であるから、この置換は対数（logarithm）をとって扱うのが最もよい。積 $y = u\,(1+x^2)^{1/2}$ は和に変わり、右辺の項 $\frac{x}{1+x^2}$ はちょうど $\ln(1+x^2)^{1/2}$ の導関数になっている。この項が打ち消し合い、u についての変数分離形（separable）の方程式が残る。小問 (ii) は立方根を用いた同じ考え方であり、二つの答えを並べてみれば (iii) のパターンは明らかである。

解答

小問 (i)

$x = 0$ で $y = 1 \neq 0$ であり、方程式には $1/y$ が含まれるので、$x = 0$ を含み $y \neq 0$ となる区間で考える。$(1+x^2)^{1/2} > 0$ であるから、置換によりそこでは $u \neq 0$ でもあり、$u(0) = 1$ である。

$|y| = |u|\,(1+x^2)^{1/2}$ の対数をとって微分すると、

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{x}{1+x^2}.$$

これを微分方程式（differential equation）と比べると、$\frac{x}{1+x^2}$ の項が打ち消し合い、

$$\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = xy = x\,u\,(1+x^2)^{1/2}, \qquad \text{よって} \qquad \frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = x(1+x^2)^{1/2},$$

が残る。ここで u で割ったが、$u \neq 0$ であるからこれは許される。

考えてみよう $x(1+x^2)^{1/2}$ を手間をかけずに積分するにはどうすればよいか。

因数 x は $1+x^2$ の導関数の半分であるから、合成関数の微分法の逆（reverse chain rule）により $\int x(1+x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}$ に定数を加えたものとなる。（微分して確かめよ。）

両辺を x で積分すると、

$$-\frac{1}{u} = \tfrac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C.$$

$x=0$ で $u=1$ であるから、$-1 = \frac{1}{3} + C$ より $C = -\frac{4}{3}$ である。したがって

$$\frac{1}{u} = \frac{4-(1+x^2)^{3/2}}{3}, \qquad u = \frac{3}{4-(1+x^2)^{3/2}},$$

となり、ゆえに

$$\boxed{y = \frac{3\,(1+x^2)^{1/2}}{4-(1+x^2)^{3/2}}}$$

である。これは 0 を含み分母が正となる区間、すなわち $(1+x^2)^{3/2} < 4$、つまり $|x| < \sqrt{2^{4/3}-1} \approx 1.233$ で成り立つ。$|x|$ がこの値に近づくと $y \to \infty$ となる。

小問 (ii)

今度は余分な項が $\frac{x^2}{1+x^3}$ であり、これは $\frac{1}{3}\ln(1+x^3) = \ln(1+x^3)^{1/3}$ の導関数である。このことから、$x=0$ の近く（$1+x^3>0$ となるところ）で $y = u\,(1+x^3)^{1/3}$ とおけばよいとわかる。先ほどとまったく同様に、

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{x^2}{1+x^3},$$

であるから、方程式は

$$\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = x^2 y = x^2 u\,(1+x^3)^{1/3}, \qquad \frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = x^2(1+x^3)^{1/3}.$$

となる。今回は x^2 が $1+x^3$ の導関数の 3 分の 1 であるから、

$$-\frac{1}{u} = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{4}(1+x^3)^{4/3} + C = \tfrac{1}{4}(1+x^3)^{4/3} + C.$$

$x=0$ で $u=1$ であるから、$-1 = \frac{1}{4} + C$ より $C = -\frac{5}{4}$ である。よって $\frac{1}{u} = \frac{5-(1+x^3)^{4/3}}{4}$ であり、

$$\boxed{y = \frac{4\,(1+x^3)^{1/3}}{5-(1+x^3)^{4/3}}}$$

これは 0 の近くで $-1 < x < \left(5^{3/4}-1\right)^{1/3} \approx 1.33$ に対して成り立つ。

小問 (iii)

二つの答えを比べると、分子には根号 $(1+x^n)^{1/n}$、分母には累乗 $(1+x^n)^{(n+1)/n}$ が現れ、定数は $n+1$ と $n+2$ である。そこで次のように予想する。

$$\boxed{y = \frac{(n+1)\,(1+x^n)^{1/n}}{n+2-(1+x^n)^{(n+1)/n}}}$$

これは $n=2$ と $n=3$ のとき (i) と (ii) の答えを与える。（証明は求められていないが、同じ置換 $y = u(1+x^n)^{1/n}$ によって証明できる。$\int x^{n-1}(1+x^n)^{1/n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}(1+x^n)^{(n+1)/n}$ であり、$x=0$ での条件から定数 $-\frac{n+2}{n+1}$ が得られる。）

検算

- $x=0$ では、どの式も要求どおり $\frac{n+1}{n+2-1} = 1$ を与える。
- (i) の $x=0$ の近くでは、方程式から $y'(0)=0$ が得られ、実際 $(1+x^2)^{1/2}$ と $(1+x^2)^{3/2}$ はいずれも 0 で傾きが 0 である。
- 方程式を数値的に解く（$x=0$ からルンゲ＝クッタ（Runge–Kutta）法で進める）と、$n=2,3,4,5,7$ についていくつかの点で、公式と 10^{-8} より高い精度で一致する。たとえば (i) では $x=1$ で $y = \frac{3\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} \approx 3.6213$、(ii) では $x=1$ で $y = \frac{4\cdot 2^{1/3}}{5-2^{4/3}} \approx 2.0320$ である。

よくある間違い

- $y = u(1+x^2)^{1/2}$ を代入して積の微分法（product rule）でそのまま微分すること。これでも解けるが、計算が煩雑になる。y で割る（同じことだが、対数をとる）と、打ち消し合いが一目でわかる。
- $\int u^{-2}\,\mathrm{d}u = -u^{-1}$ の負号を忘れること。これで定数が狂ってしまう。
- 定数を誤った段階で決めること。式を変形する前に $u(0)=1$ を適用せよ（u の方程式に $y(0)=1$ を用いるのではない）。

STEP のその先へ

この方程式は**ベルヌーイの微分方程式**（Bernoulli equation）$y' = P(x)y + Q(x)y^2$ であり、一般的な手法は置換 $v = 1/y$ によって線形の方程式にすることである。ここでは問題で与えられた置換がその役割を二段階で果たしている。まず積分因子（integrating factor）に似た $(1+x^n)^{1/n}$ で P の項を取り除き、次に変数を分離するのである。また、

方程式は一見無害に見えるのに、解は有限の x で発散することにも注意しよう。この「有限時間爆発」（finite-time blow-up）は y^2 の項をもつ方程式に典型的な現象であり、常微分方程式（ODE）の最初の講義で学ぶ。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）では、ベルヌーイの微分方程式と解の存在が扱われている。

解答例

STEP II 2008、第 8 問

純粋数学 • ベクトルと角の二等分線

STEP II 2008、問 8

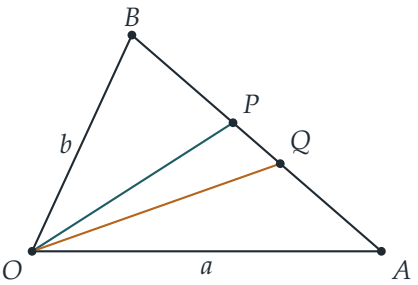
先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s2-q8

鍵となる考え方

$\angle AOB$ の二等分線（angle bisector）に沿ったベクトルは、OA と OB に沿った単位ベクトル（unit vector）の和である。長さの等しい 2 つのベクトルを加えるとひし形（rhombus）の対角線が得られ、ひし形の対角線はその角を二等分するからである。これを P の位置ベクトル（position vector）と比べることで λ が定まる。その後は、Q は P において A と B の役割を入れ替えたものにすぎず、最後の等式は内積（scalar product）を用いた直接的な計算であり、その計算の中で厄介な項 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ が打ち消し合う。

解答



図では $a > b$ であるから、P（二等分線上の点、青緑色）は B に近く、Q は B からの距離が P と A の距離に等しい点である。

P の位置ベクトル

$AP : PB = (1-\lambda) : \lambda$ であり、2 つの部分を合わせると AB になるから、$AP = (1-\lambda)AB$ である。よって $\overrightarrow{AP} = (1-\lambda)(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ であり、

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{a} + (1-\lambda)(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}.$$

（確認：比が示すとおり、$\lambda = 1$ のとき A、$\lambda = 0$ のとき B となる。）

λ を求める

ベクトル $\mathbf{a}/a$ と $\mathbf{b}/b$ は OA と OB に沿った単位ベクトルである。その和は OA と OB に沿った辺をもつひし形の対角線であるから、$\angle AOB$ の二等分線の方向を向く。P はこの二等分線上にあるので、あるスカラー k に対して

$$\lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b} = k\left(\frac{\mathbf{a}}{a} + \frac{\mathbf{b}}{b}\right)$$

が成り立つ。

? **考えてみよう** なぜ $\mathbf{a}$ の係数と $\mathbf{b}$ の係数を別々に比較してよいのだろうか。

O、A、B は同一直線上（collinear）にないから、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ はともに零ベクトルでなく、平行でもない。したがって $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は一次独立（linearly independent）である。すなわち、$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ならば $\alpha = \beta = 0$ である。よって

$$\lambda = \frac{k}{a}, \qquad 1-\lambda = \frac{k}{b}.$$

両辺を加えると $1 = k\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ となるから、$k = \dfrac{ab}{a+b}$ であり、

$$\boxed{\lambda = \frac{b}{a+b}}, \qquad 1-\lambda = \frac{a}{a+b}.$$

これは形を変えた角の二等分線定理（angle bisector theorem）である：$AP : PB = (1-\lambda) : \lambda = a : b = OA : OB$。したがって

$$\overrightarrow{OP} = \frac{b\,\mathbf{a} + a\,\mathbf{b}}{a+b}.$$

点 Q と等式

Q は AB 上にあって $BQ = AP = (1-\lambda)AB$ を満たすから、P のときと同じ議論を A からではなく B から測って行えば、

$$\overrightarrow{OQ} = \mathbf{b} + (1-\lambda)(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = (1-\lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} = \frac{a\,\mathbf{a} + b\,\mathbf{b}}{a+b}.$$

$c = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ とおき、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a^2$、$\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = b^2$ を用いる。すると

$$(a+b)^2\,OQ^2 = (a\mathbf{a}+b\mathbf{b})\cdot(a\mathbf{a}+b\mathbf{b}) = a^2\cdot a^2 + 2ab\,c + b^2\cdot b^2 = a^4 + b^4 + 2abc,$$
$$(a+b)^2\,OP^2 = (b\mathbf{a}+a\mathbf{b})\cdot(b\mathbf{a}+a\mathbf{b}) = b^2a^2 + 2ab\,c + a^2b^2 = 2a^2b^2 + 2abc.$$

辺々引くと、c を含む項が打ち消し合う：

$$(a+b)^2\left(OQ^2 - OP^2\right) = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = (a^2-b^2)^2 = (a-b)^2(a+b)^2.$$

$(a+b)^2 \neq 0$ で割ると

$$OQ^2 - OP^2 = (a-b)^2 = (b-a)^2,$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

$\mathbf{a} = (3,0)$、$\mathbf{b} = (0,4)$ とすると、$a=3$、$b=4$ であり、$\angle AOB$ は直角である。このとき $\lambda = \frac{4}{7}$ であり、$\overrightarrow{OP} = \left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right)$ は直角の二等分線 $y=x$ 上にある。また $\overrightarrow{OQ} = \left(\frac{9}{7}, \frac{16}{7}\right)$ であるから、$OQ^2 - OP^2 = \frac{337}{49} - \frac{288}{49} = 1 = (4-3)^2$ となる。$a=b$ のときは三角形は二等辺三角形（isosceles triangle）であり、$P=Q$ は AB の中点となって、差は当然 0 になる。2 次元および 3 次元の 20,000 個のランダムな三角形で数値的に検証したところ、すべての結果が誤差 10^{-13} 以内で一致した。

よくある間違い

- $\overrightarrow{OP} = (1-\lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ と書いてしまう。比のうち大きいほうの $1-\lambda$ は A からの距離であるから、これは $\mathbf{b}$ に掛かる。$\lambda = 1$ で確かめるとよい。
- $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ を二等分線の方向として使ってしまう。これが正しいのは $a=b$ のときだけであり、単位ベクトルが必要である。
- $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2$ を a^2+b^2 と展開し、交差項 $2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ を忘れる。ここではこの項は打ち消し合うが、それは両方の展開にこの項がきちんと書かれている場合に限る。

STEP のその先へ

最後の計算は、線形写像（linear map）のもとで長さがどのように変換されるかの特別な場合である。OP^2 と OQ^2 は二次形式（quadratic form）$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$ の値であり、交差項は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のグラム行列（Gram matrix）によって支配される。単位ベクトルを加え

ると二等分線が得られるという事実も一般化できる。任意の内積空間（inner-product space）において、正規化してから加えることが、2 つのベクトルの「中間」の方向を求める方法なのである。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、この精神で内積、長さ、角度を展開している。

解答例

STEP II 2008、第 9 問

力学 ・ 放物運動

STEP II 2008、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

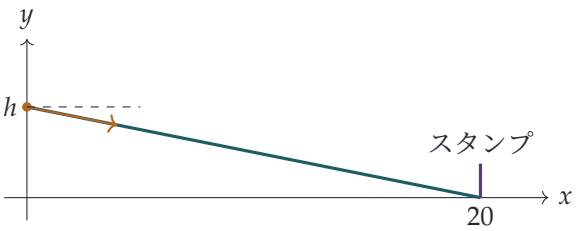
step.maths.org/questions/08-s2-q9

鍵となる考え方

水平方向の運動から、飛行時間が α を用いて定まる。その時間を鉛直方向の運動に代入すると、α と h を結ぶ一つの方程式が得られる。$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$ と書き換えると、これは $\tan\alpha$ についての二次方程式（quadratic equation）になる。これは「どの角度なら標的に当たるか」という問題の定番の手法である。その後は、クリケットについての常識から適切な解を選び、小角近似（small-angle approximation）で仕上げる。

解答

ボールを、空気抵抗（air resistance）も回転もなく重力のみを受けて自由に運動する質点（particle）としてモデル化する。投げ出す点の真下の地面を原点とし、x をスタンプ（stumps）に向かう水平方向、y を鉛直上向きにとる。すると、ボールは $(0, h)$ から速さ $40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、水平から上向きに角 α で投げ出される（α が負のときは下向きに投げられることを意味する）。



小問 (i)

水平方向には力がはたらかないので、$x = 40t\cos\alpha$ である。ボールが $x = 20$ に達するのは

$$t = \frac{20}{40\cos\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha}.$$

のときである。鉛直方向の加速度は $-10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ であるから、

$$y = h + 40t\sin\alpha - 5t^2.$$

この時刻にボールは地面の高さ $y = 0$ にあるので、

$$0 = h + 40\sin\alpha\cdot\frac{1}{2\cos\alpha} - \frac{5}{4\cos^2\alpha} = h + 20\tan\alpha - \tfrac{5}{4}\sec^2\alpha.$$

ここで $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$ を用い、$T = \tan\alpha$ とおくと、

$$h + 20T - \tfrac{5}{4}(1 + T^2) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 5T^2 - 80T + 5 - 4h = 0.$$

解の公式（quadratic formula）により、

$$T = \frac{80 \pm \sqrt{6400 - 20(5-4h)}}{10} = \frac{80 \pm \sqrt{6300 + 80h}}{10},$$

したがって、とりうる二つの値は

$$\tan\alpha = 8 \pm \sqrt{63 + \tfrac{4}{5}h}.$$

である。$h \geq 0$ であるから、どちらも実数である。

考えてみよう 速球投手（fast bowler）が実際に使うのはどちらの解だろうか？

$\sqrt{63} \approx 7.9$ であるから、大きい方の解では $\tan\alpha \approx 16$、すなわち $\alpha \approx 86°$ となる。これは約 80 m も上昇し、スタンプに落ちてくるまで約 8 s かかる、空高く上がる山なりの球である。速球投手の投球とはとても言えない。小さい方の解

$$\tan\alpha = 8 - \sqrt{63 + \tfrac{4}{5}h},$$

が適切な解である。現実的なリリースの高さ（2 メートル程度）では、$63 + \frac{4}{5}h$ は 64 に近いので、$\tan\alpha$ は 0 に近い。たとえば、0 から 3 までの任意の h に対して $|\tan\alpha| < 0.09$ となる。よって α は小さな角であり $\cos\alpha \approx 1$ であるから、スタンプに達するまでの時間は

$$t = \frac{1}{2\cos\alpha} \approx \tfrac{1}{2}\,\mathrm{s},$$

となり、示すべきことが示された。（実際には $t = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \tan^2\alpha}$ であり、$|\tan\alpha| < 0.1$ であれば常に $\frac{1}{2}$ との差は 0.5% 以内である。）

小問 (ii)

ボールが水平より下向きに投げ出されるのは、ちょうど $\tan\alpha < 0$ のときである。大きい方の解は常に正であるから、小さい方の解を用いる：

$$8 - \sqrt{63 + \tfrac{4}{5}h} < 0 \iff \sqrt{63 + \tfrac{4}{5}h} > 8 \iff 63 + \tfrac{4}{5}h > 64 \iff h > \tfrac{5}{4},$$

ここで、両辺が正なので 2 乗する操作は同値変形である。よって、投手がボールを水平より下向きに投げ出すのは $h > 1.25$ のときである。ちょうど $h = 1.25$ のときは、ボールは水平に投げ出される。

小問 (iii)

$h = 2.5$ のとき、小問 (ii) より α は小さな負の角である。$\cos\alpha \approx 1$ および（ラジアンで）$\sin\alpha \approx \alpha$ とすると、$\tan\alpha \approx \alpha$ かつ $\sec^2\alpha \approx 1$ となるので、小問 (i) の方程式 $0 = h + 20\tan\alpha - \frac{5}{4}\sec^2\alpha$ は

$$0 \approx 2.5 + 20\alpha - 1.25, \qquad \text{よって} \qquad \alpha \approx -\frac{1.25}{20} = -0.0625 \text{ rad}.$$

となる。度に換算すると、

$$\alpha \approx -0.0625 \times \frac{180}{\pi} \approx -3.58^\circ,$$

よって $\alpha \approx -3.6^\circ$ である。ボールは水平より約 3.6° 下向きにリリースされる。

別の見方もできる。二項近似（binomial approximation）を用いると、$\tan\alpha = 8 - \sqrt{65} = 8 - 8\sqrt{1 + \frac{1}{64}} \approx 8 - 8\left(1 + \frac{1}{128}\right) = -\frac{1}{16}$ となる。これからも同じ答えが得られる。

検算

- **厳密な値。** $\tan\alpha = 8 - \sqrt{65} = -0.06226$ より $\alpha = -3.563^\circ$ であり、有効数字 2 桁で -3.6° となって、近似と一致する。
- **シミュレーション。** $(0, 2.5)$ から $40\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$、$-3.563^\circ$ で運動を数値的に刻んで追跡すると、ボールは 0.501 s 後に高さ 0.0000 m で $x = 20$ に達する。
- **境界。** $h = 1.25$ のとき、小さい方の解は $8 - \sqrt{64} = 0$ である。ボールは水平に投げ出され、0.5 秒の飛行の間に $5(0.5)^2 = 1.25\,\text{m}$ 落下して、ちょうどスタンプの位置に着地する。

よくある間違い

- $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$ を思い出さず、$\sin\alpha$ と $\cos\alpha$ のまま別々に解こうとして、計算が煩雑になる。
- 角度をラジアンのまま答えたり、度のまま小角近似を使ったりする。$\sin\theta \approx \theta$ が成り立つのは θ がラジアンのときだけである。
- 小問 (iii) で負号を落とす。小問 (ii) が予測するとおり、角は水平より下向きである。

STEP のその先へ

解が二つある構造は、一定の速さで投げ出された物体は、その「包絡線（envelope）」（安全放物線（parabola of safety））の内側にある任意の点に二通りの軌道で到達できる、という一般的な事実の現れである。包絡線上では二つの軌道が一つに重なり、その外側の点にはまったく到達できない。実際のクリケットのボールは、空気抵抗や、回転によるマグヌス効果（Magnus effect）の影響も受ける。これらを考えると非線形微分方程式（nonlinear differential equation）が現れ、通常は数値的に解かなければならない。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物運動と抵抗を受ける運動を大学 1 年生のレベルで扱っている。

解答例

STEP II 2008、第 10 問

力学 ・ 壁との斜め衝突

STEP II 2008、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s2-q10

鍵となる考え方

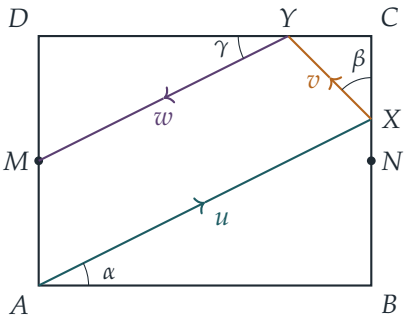
なめらかな（smooth）壁では力積（impulse）は壁に垂直であるから、速度の壁に沿う成分は変わらず、壁に向かう成分だけが e 倍される。速度を AB に平行な成分と AD に平行な成分に分解すると、すべてが見通しよくなる。各衝突では二つの成分のうち一方だけが定数倍されるのである。二回の衝突のあとでは両方の成分が e 倍されており、これにより最終的な向きと運動エネルギー（kinetic energy）が一挙に決まる。小問 (ii) の幾何は、あとは水平方向の距離を足し合わせるだけの問題である。

解答

球を質点（particle）とみなし、各辺をなめらかな壁とみなす。原点を A とし、x 軸を AB に沿って、y 軸を AD に沿ってとる。すると

$$B = (a, 0), \quad C = (a, 2b), \quad D = (0, 2b), \quad M = (0, b), \quad N = (a, b).$$

簡単のため $t = \tan\alpha$ とおく。



小問 (i)

はじめの速度は $(u\cos\alpha,\ u\sin\alpha)$ である。

X での衝突。辺 BC は y 軸に平行である。辺はなめらかであるから、球が受ける力積は x 方向を向き、y 成分 $u\sin\alpha$ は変わらない。ニュートンの反発法則（Newton's law of restitution）により、x 成分は向きが逆になり e 倍される。衝突後の速度は

$$(-eu\cos\alpha,\ u\sin\alpha).$$

である。角 $\beta = \angle CXY$ は XC から測るが、XC は y 軸の正の向きを指す。よって

$$\tan\beta = \frac{eu\cos\alpha}{u\sin\alpha} = \frac{e}{\tan\alpha}, \qquad \text{すなわち、} \qquad \tan\alpha\tan\beta = e,$$

となり、示すべき式が得られた。

Y での衝突。辺 DC は x 軸に平行であるから、今度は x 成分が変わらず、y 成分は向きが逆になり e 倍される。衝突後の速度は

$$(-eu\cos\alpha,\ -eu\sin\alpha) = -e\,(u\cos\alpha,\ u\sin\alpha).$$

である。これははじめの速度の負の定数倍であるから、経路の最後の区間は AX に平行で、逆向きに進む。角 $\gamma = \angle DYM$ は YD から測るが、YD は x 軸の負の向きを指し、向き $(-\cos\alpha, -\sin\alpha)$ はこれと角 α をなす。したがって

$$\gamma = \alpha.$$

小問 (ii)

経路に沿って x 座標を追跡する。

A から X まで。球は幅 a を横切る間に $a\tan\alpha$ だけ上昇するので、$X = (a,\ at)$ である。

X から Y まで。球はさらに $2b - at$ だけ上昇し、この区間では 1 単位上昇するごとに x 方向に $\tan\beta$ 単位動く（β は縦の辺から測っているからである）。小問 (i) の $\tan\beta = e/t$ を用いると、球は左へ距離 $(2b - at)\,e/t$ だけ動くので

$$x_Y = a - \frac{e(2b - at)}{t}.$$

Y から M まで。球は高さ $2b$ から高さ b まで、すなわち b だけ、水平から下向きに角 $\gamma = \alpha$ で下降する。よって進む水平距離は $b/\tan\alpha$ であり、これによってちょうど $x = 0$ に到達しなければならない：

$$x_Y = \frac{b}{t}.$$

考えてみよう なぜ x 座標だけを追跡すれば済むのだろうか？

各直線区間は直前の区間が終わったところから始まり、その向きは小問 (i) からわかっている。ある区間で球がどれだけ上昇または下降するかがわかれば、角度によって横方向にどれだけ動くかが決まる。各区間の端点の高さは強制的に決まる（O、次に DC で $2b$、次に M で b）ので、残る条件は横方向の距離のつじつまが合うことだけである。

x_Y の二つの式を等しいとおき、t を掛けると

$$\begin{aligned} b &= at - e(2b - at) \\ &= at(1+e) - 2be, \end{aligned}$$

よって $at(1+e) = b(1+2e)$ となり、

$$\tan\alpha = \frac{(1+2e)b}{(1+e)a},$$

が得られ、示すべき式となる。

このショットは常に可能である。 この $\tan\alpha$ の値はすべての $e > 0$ に対して正であるから、$(0, \frac{\pi}{2})$ の角 α を定める。あとは、衝突点が意図した辺の上にあることを確かめる必要がある。

- X の高さは $at = \dfrac{1+2e}{1+e}\,b$ である。$e > 0$ のとき $1+e < 1+2e < 2+2e$ であるから、これは b と $2b$ の間に厳密に入る。よって X は確かに BC 上の C より下にあり、かつポケット N より上にあるので、球が途中で N に落ちることはない。
- Y は $x_Y = b/t = \dfrac{1+e}{1+2e}\,a$ にあり、$e > 0$ のときこれは 0 と a の間に厳密に入る。よって Y は確かに DC 上の D と C の間にある。

最後の区間は台の内部を Y から M まで直線で進む。したがって、e の値によらず、経路のどの区間も実現可能である。

小問 (iii)

小問 (i) より、最終的な速度ははじめの速度の $-e$ 倍であるから $w = eu$ である。（直接見ることもできる。各成分はちょうど一回ずつ e 倍されている。）球の質量を m とすると、運動エネルギーは $\frac{1}{2}mu^2$ から $\frac{1}{2}me^2u^2$ に減少する。したがって失われる割合は

$$\frac{\frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}me^2u^2}{\frac{1}{2}mu^2} = 1 - e^2.$$

これは a、b や角度によらない。（$e > 1$ のとき「損失」は負となり、壁がエネルギーを与えることになる。これは物理的ではないが、計算そのものは成り立つ。）

検算

- $a = 4$、$b = 1.5$、$e = \frac{1}{2}$（図の場合）とすると、公式から $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ となる。このとき $X = (4, 2)$、$Y = (3, 3)$ であり、Y から傾き $\frac{1}{2}$ で進む直線は水平に 3 進む間に 1.5 下降し、ちょうど $M = (0, 1.5)$ に到達する。失われる運動エネルギーの割合は $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ である。
- $e = 1$（完全弾性（perfectly elastic））のとき、$\tan\alpha = 3b/(2a)$ である。台を BC に関して折り返し、さらに DC に関して折り返して展開すると、経路は A から M の像への直線になる。M の像は横に $2a$、上に $3b$ の位置にある。これから同じ傾き $3b/(2a)$ が得られる。エネルギーは失われず、$1 - e^2 = 0$ と一致する。
- a、b、e、u を無作為に 20,000 通り選んで衝突のシミュレーションを行ったところ、$\tan\alpha\tan\beta = e$、$\gamma = \alpha$、M への到達、および割合 $1 - e^2$ がすべて誤差 10^{-13} 以内で確認された。

よくある間違い

- 衝突時に速さ全体に e を掛けてしまう。変化するのは壁に垂直な成分だけである。なめらかな壁に沿う成分は変わらない。
- β を XC からではなく BC の法線から測ってしまい、$\tan\beta$ がその逆数になる。
- X が N より上にあり、Y が D と C の間にあることの確認を忘れる。この確認こそが「ショットが可能である」ことの中身である。

STEP のその先へ

$e = 1$ のとき、台を折り返してビリヤードの経路を「展開」すると、経路は直線になる。これは数学的ビリヤード（mathematical billiards）の出発点であり、力学系（dynamical systems）と結びつき、さらに有理数角の台については曲面上の幾何とも結びつく。$e < 1$ では反射はもはや鏡映のようにはならないが、速度を成分に分解すれば依然として容易に扱える。力積と反発の力学については、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。この種の問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）に挑戦してみるとよい。

解答例

STEP II 2008、第 11 問

力学 ・ 動く楔上の質点

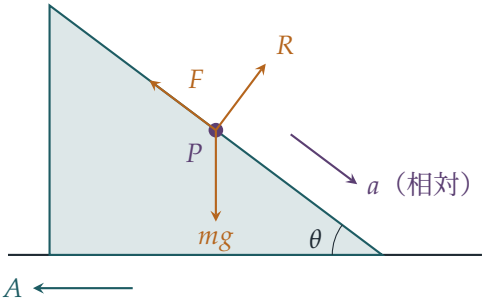
> **STEP II 2008、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q11

鍵となる考え方

系の外から水平方向に押すものは何もない（床はなめらか（smooth）である）ので、質点（particle）とくさび（wedge）を合わせた系の水平方向の運動量（momentum）はゼロのままである。これにより、くさびの加速度はほとんど労せずに得られる。それ以外はすべて、質点の**真の**加速度を「くさびに対する相対加速度（relative acceleration）にくさびの加速度を加えたもの」と書き、そのうえで質点にはたらく力を斜面に平行な方向と垂直な方向に分解する（resolve）ことから得られる。静止した観測者から見た経路は、真の加速度の方向を向く直線である。すべてが静止状態から始まり、加速度が一定だからである。

解答

P を質点、くさびを剛体（rigid body）としてモデル化する。床はなめらかであり、斜面は摩擦係数（coefficient of friction）μ をもつ粗い（rough）面である。鉛直な面を左側に置き、斜面が右下がりになるようにする。P が右へ滑り下りると、くさびは左へ押される。くさびの加速度を**左向きに** A とし、**くさびに対する** P の加速度を斜面に沿って下向きに a とする。P が受ける垂直抗力（normal reaction）を R、摩擦力を F とする。摩擦力は、P が滑り下りている間は斜面に沿って上向きにはたらく。



右向きに x 軸、上向きに y 軸をとる。斜面に沿って下向きの単位ベクトルは $(\cos\theta, -\sin\theta)$ であるから、P の真の加速度は次のようになる。

$$\big(a\cos\theta - A,\ -a\sin\theta\big).$$

小問 (i)：くさびの加速度

系「P とくさび」にはたらく外力（external force）は、重力となめらかな床からの垂直抗力だけであり、どちらも鉛直方向である。したがって水平方向の運動量の総和は一定であり、すべてが静止状態から始まるのでその値はゼロである。よって $m\times$（加速度）の水平成分の和はゼロになる：

$$m(a\cos\theta - A) + km(-A) = 0 \quad\Longrightarrow\quad A = \frac{a\cos\theta}{k+1},$$

これが求める結果である。（P とくさびの間にはたらく力 R と F は内力（internal force）であり、ニュートン（Newton）の第 3 法則により打ち消し合う。）

小問 (i)：45° の経路

考えてみよう　観測される経路が、真の加速度の方向を向く直線でなければならないのはなぜか？

以下の運動方程式により a と A は定数として定まるので、P の真の加速度は一定のベクトルである。静止状態から出発するので、速度は常にそのベクトルの t 倍、変位は $\frac{1}{2}t^2$ 倍であり、したがってその方向の一定の直線に沿って動く。

P の加速度の水平成分は

$$a\cos\theta - \frac{a\cos\theta}{k+1} = \frac{k}{k+1}\,a\cos\theta,$$

であり、鉛直成分の大きさは $a\sin\theta$ である。45° の直線とは、これらが等しいことを意味する：

$$a\sin\theta = \frac{k}{k+1}\,a\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad \tan\theta = \frac{k}{k+1},$$

ここで $a\cos\theta \neq 0$ で割った（P は実際に滑るので $a > 0$ である）。これが求める結果である。

小問 (i)：$k = 3$ の場合

このとき $\tan\theta = \frac{3}{4}$ であるから $\sin\theta = \frac{3}{5}$、$\cos\theta = \frac{4}{5}$ であり、$A = \frac{a\cdot 4/5}{4} = \frac{a}{5}$ である。

P について力を分解する。その真の加速度は、斜面に沿って下向きに $a - A\cos\theta$、外向きの法線方向に $-A\sin\theta$ の成分をもつ（くさびの左向きの加速度がこれらの成分をもち、相対加速度は斜面に沿った成分のみである）。

斜面に垂直な方向：

$$R - mg\cos\theta = -mA\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad R = m\left(\tfrac{4}{5}g - \tfrac{3}{25}a\right).$$

R は $mg\cos\theta$ より**小さい**ことに注意せよ。くさびが P から離れるように落ちていくのである。

斜面に沿って下向きには、P が滑っているので $F = \mu R$ として：

$$mg\sin\theta - \mu R = m(a - A\cos\theta) = m\left(a - \tfrac{4}{25}a\right) = \tfrac{21}{25}ma.$$

R を代入し、両辺に $25/m$ を掛けると：

$$15g - 20\mu g + 3\mu a = 21a \quad\Longrightarrow\quad a = \frac{5g(3-4\mu)}{3(7-\mu)}.$$

これは $\mu < \frac{3}{4} = \tan\theta$ のときちょうど正になる。P が滑るためにはそうでなければならず、これはそのまま小問 (ii) へとつながる。

小問 (ii)

$\tan\theta \leq \mu$ ならば、P はその場にとどまり、くさびも動かないことを示す。

静止は可能である。どちらの物体も動かないとすると、P について $R = mg\cos\theta$ と、斜面に沿って上向きの摩擦力 $F = mg\sin\theta$ が必要である。粗い接触面は、$F \leq \mu R$、すなわち $\sin\theta \leq \mu\cos\theta$、つまり $\tan\theta \leq \mu$ であればこれを供給でき、これはまさに我々の条件である。このときくさびは逆向きの R と F を受ける。それらの水平成分は、左向きに $R\sin\theta = mg\sin\theta\cos\theta$、右向きに $F\cos\theta = mg\sin\theta\cos\theta$ であり、打ち消し合う。したがってくさびもつり合い（equilibrium）の状態にあり、床は鉛直方向の力しか及ぼさない。

> **考えてみよう** 静止が可能であるとしても、それでも P が滑ることはありうるだろうか？

滑ることは不可能である。一般の k と θ について、P が $F = \mu R$ で滑り下りたと仮定する。$s = \sin\theta - \mu\cos\theta$ とおく。くさびの水平方向の運動方程式は $kmA = R\sin\theta - \mu R\cos\theta = Rs$ である。これを法線方向の方程式 $R = m(g\cos\theta - A\sin\theta)$ と組み合わせると

$$R = \frac{kmg\cos\theta}{k + s\sin\theta}, \qquad a = \frac{(k+1)\,gs}{k + s\sin\theta}.$$

を得る。接触しているためには $R > 0$ が必要であり、そのため $k + s\sin\theta > 0$ でなければならない。すると a は s と同符号である。しかし $\tan\theta \le \mu$ は $s \le 0$ を意味するので $a \le 0$ となり、滑り下りることに矛盾する。また、P を斜面に沿って**上向き**に滑らせるものもない。相対運動を起こしうるのは重力だけであり、重力の斜面方向の成分は下向きだからである。したがって $\tan\theta \le \mu$ のとき、P はくさびの上で静止したままであり、くさびも床の上で静止したままである。（$\tan\theta = \mu$ のとき摩擦は限界摩擦（limiting friction）になるが、それでも P は動かない。）

検算

- $\mu = 0$、$k = 3$ とすると $a = \frac{5g}{7}$、$A = \frac{g}{7}$ を得る。このとき P の真の加速度の水平成分は $\frac{4}{5}\cdot\frac{5g}{7} - \frac{g}{7} = \frac{3g}{7}$、鉛直成分は $\frac{3}{5}\cdot\frac{5g}{7} = \frac{3g}{7}$ であり、確かに 45° の方向である。
- $k \to \infty$(動かないくさび)のとき $A \to 0$ となり、一般の公式から $a \to g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$ が得られる。これはおなじみの固定された斜面での結果である。
- 数値的には、$g = 9.8$、$k = 3$、$\mu = 0.2$ として 3 つの運動方程式を直接解くと $a \approx 5.284\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ となり、$\frac{5g(3-0.8)}{3(6.8)}$ と一致する。運動を時間について逐次進めてみると、水平方向の運動量はゼロに保たれ、経路はちょうど 45° になる。

よくある間違い

- $R = mg\cos\theta$ とすること。これはくさびが固定されている場合にのみ成り立つ。ここではくさびが加速して離れていくので、R はより小さい。
- 相対加速度 a だけを用いて力を分解し、くさびの加速度を忘れること。ニュートンの第 2 法則には真の加速度が必要である。
- 小問 (ii) で、P が滑っていないのに摩擦力を μR と仮定すること。摩擦力は**最大でも** μR であり、必要なだけの値をとる。

STEP のその先へ

小問 (i) の鮮やかな一歩は保存則（conservation law）である。外力に水平成分がないので、運動量の一つの成分が保存される。大学 1 年の力学では、これは対称性と保存則を結びつける一般原理となる。ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）では、ラグランジアンが依存しない座標（ここでは系全体の水平位置）があれば、それに対応する運動量が自動的に保存される。なめらかなくさびとブロックは、そこでの標準的な最初の例である。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、まさにこの種の問題が詳しく扱われている。

解答例

STEP II 2008、第 12 問

確率・統計 ・ 独立な事象

STEP II 2008、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s2-q12

鍵となる考え方

個数の期待値（expectation）は、それを構成する個々の事象の確率の和である。したがって、最初の部分は p についての一つの二次方程式（quadratic）に帰着する。第二の部分では、裁判官たちは被告人を見ることなく心の中でコインを投げるので、王の宣告は真実と独立（independent）である。正しい宣告がなされる確率を t を用いて表し、それを $\frac{1}{2}$ のまわりで整理し直すと、答えは一行で得られる。

解答

p を求める

ロバ、ビーバー、ケンタウロスがそれぞれ有罪の評決を下す事象を A、B、C とし、それらの指示変数（indicator variable）を I_A、I_B、I_C とする（事象が起これば 1、そうでなければ 0 をとる）。このとき $X = I_A + I_B + I_C$ であり、$\mathrm{E}(I_A) = \mathrm{P}(A)$ などが成り立つから、期待値の線形性（linearity of expectation）により

$$\mathrm{E}(X) = p + \frac{p}{3} + p^2.$$

を得る。（線形性に独立性は必要ない。独立性を用いるのはもっと後である。）これを $\frac{4}{3}$ に等しいとおき、両辺を 3 倍すると

$$3p^2 + 4p - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (3p-2)(p+2) = 0.$$

となる。確率は負にはなりえないので $p + 2 \neq 0$ であり、したがって

$$p = \frac{2}{3}.$$

である。よって、3 人の裁判官が「有罪」と言う確率は

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3},\qquad \mathrm{P}(B)=\frac{2}{9},\qquad \mathrm{P}(C)=\frac{4}{9},$$

であり、当然そうであるべきように、いずれも $[0,1]$ に含まれる。

王が「有罪」と言う確率

少なくとも 2 人の裁判官が有罪の評決を下す事象を K とする。すると K は、王が被告人を有罪と宣告する事象である。上の 3 つの確率を a、b、c と書く。ちょうど 2 人が有罪とする場合は 3 通り、3 人全員が有罪とする場合は 1 通りある。裁判官たちの独立性を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(K)&=ab(1-c)+ac(1-b)+bc(1-a)+abc\\&=ab+ac+bc-2abc.\end{aligned}$$

となる。ここで $ab=\frac{4}{27}$、$ac=\frac{8}{27}$、$bc=\frac{8}{81}$、$abc=\frac{16}{243}$ であるから

$$\mathrm{P}(K)=\frac{36}{243}+\frac{72}{243}+\frac{24}{243}-\frac{32}{243}=\frac{100}{243}.$$

である。簡単のため、これを g とおく。

t を求める

被告人が実際に有罪である事象を D とすると、$\mathrm{P}(D)=t$ である。王が正しいのは、D と K がともに起こるとき、またはどちらも起こらないときである。

考えてみよう なぜ $\mathrm{P}(D)$ と $\mathrm{P}(K)$ を掛け合わせてよいのか？

裁判官たちは「まったくでたらめに」決める。つまり彼らの評決は証拠に依存しないので、K は D と独立である。よって

$$\mathrm{P}(\text{正しい})=\mathrm{P}(D)\,\mathrm{P}(K)+\mathrm{P}(D')\,\mathrm{P}(K')=tg+(1-t)(1-g).$$

となる。ここで $\frac{1}{2}$ を引いて因数分解すると

$$\begin{aligned}tg+(1-t)(1-g)-\tfrac{1}{2}&=2tg-t-g+\tfrac{1}{2}\\&=(2t-1)\big(g-\tfrac{1}{2}\big).\end{aligned}$$

となる。したがって、王が確率 $\frac{1}{2}$ で正しいのは $(2t-1)(g-\frac{1}{2})=0$ のとき、かつそのときに限る。$g=\frac{100}{243}\neq\frac{1}{2}$ であるから第二の因数は 0 でなく、

$$t=\frac{1}{2}.$$

でなければならない。因数分解を使わずに同じことを示すこともできる。$\frac{100}{243}t + \frac{143}{243}(1-t) = \frac{1}{2}$ から $143 - 43t = \frac{243}{2}$ が得られ、$43t = \frac{43}{2}$、すなわち $t = \frac{1}{2}$ である。

ここで p の値はほとんど関係しないことに注意しよう。裁判官たちの確率が何であっても、$\mathrm{P}(K) \neq \frac{1}{2}$ でありさえすれば、証拠を無視する法廷が半分の確率で正しいのは、有罪の被告人と無罪の被告人が同じ割合で現れるとき、かつそのときに限る。

検算

- $p = \frac{2}{3}$ のとき、$\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ となり、条件を満たす。
- 8 通りの評決パターンすべてを分数で正確に数え上げると、$\mathrm{P}(K) = \frac{100}{243} \approx 0.412$、$\mathrm{E}(X) = \frac{4}{3}$ となる。
- $t = \frac{1}{2}$ として 200 000 回の試行をシミュレーションしたところ、王が正しかった割合は 0.5007 であった。
- 式の妥当性の確認：$t = 1$（全員が有罪）ならば王が正しい確率は g、$t = 0$ ならば $1 - g$ である。この確率は t について一次式なので、中点で $\frac{1}{2}$ を通る。

よくある間違い

- 「少なくとも 2 人」を $ab + ac + bc$ としてしまう。これでは 3 人全員の場合を 3 回数えている。正しい式では $2abc$ を引く（あるいは、互いに排反な 4 つの場合を直接足し合わせる）。
- $p = -2$ を除外し忘れる、あるいは p^2 と $p/3$ が確率として妥当であることを確かめない。
- 「王が正しく宣告する」ことを $\mathrm{P}(K)$ だけで捉え、正しく無罪とされる無実の被告人を忘れてしまう。

STEP のその先へ

最初の部分は、強力な手法の小さな一例である。それは、個数を指示変数の和として表すことで、事象どうしが独立でなくても、その期待値を単なる確率の和として求めるという手法である。大学の確率論ではこれを絶えず用いる。たとえば、ランダムな置換（permutation）の不動点（fixed point）の個数の期待値を求めるときがそうである。第二の部分は、出力が真実と独立な分類器（classifier）についての話であり、検査における感度（sensitivity）、特異度（specificity）、そしてベイズ（Bayes）の定理を

考える出発点となる。Blitzstein と Hwang による *Introduction to Probability*（確率論入門）は指示変数を多用しており、次の一歩として好適である。

解答例

STEP II 2008、第 13 問

確率・統計 ・ 非復元抽出

> **STEP II 2008、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q13

鍵となる考え方

すべての駒（counter）を追いかける必要はない。黒い駒だけを追えばよい。黒い駒それぞれの行き先は 2 回の取り出しで決まり、各取り出しにおいて特定の駒が取り出される確率は単に（取り出す個数）/（袋の中の個数）である。1 回目の取り出しで何が起こるかによって場合分けすると、どちらの小問も短い和になり、しかもどちらも予想以上にきれいに簡約される。

解答

以下を通して、「無作為に取り出す」とは、袋の中の k 個の駒の組がどれも等しい確率で取り出されることを意味する。繰り返し用いる事実は次のとおりである：m 個の駒が入った袋から k 個を無作為に取り出すとき、**特定の**駒がその中に含まれる確率は、対称性（symmetry）により k/m である（m 個の駒はどれも等しい確率で含まれ、平均して k 個が含まれるからである）。

1 回目の移動の後、袋 P には $n-k$ 個、袋 Q には $n+k$ 個の駒が入っている。2 回目の移動では、その $n+k$ 個のうち k 個が取り出されて P に移される。

小問 (i)

P から出発する黒い駒を B とする。1 回目の移動で B が動くかどうかで場合分けする。

- B が P から取り出されない場合：確率は $\dfrac{n-k}{n}$ である。このとき B は最後まで P にとどまる。2 回目の移動では Q からしか駒を取り出さないからである。

▶ B が P から取り出される場合：確率は $\dfrac{k}{n}$ である。このとき B は Q の中の $n+k$ 個の駒の 1 つであり、B が P に戻るのは、戻すために取り出される k 個の中に B が含まれるときであり、そのときに限る。その確率は $\dfrac{k}{n+k}$ である。

これらの場合は互いに排反（disjoint）であり、すべての可能性を尽くしているので、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B\text{ が最後に入っている袋が}P) &= \frac{n-k}{n} + \frac{k}{n}\cdot\frac{k}{n+k} = \frac{(n-k)(n+k)+k^2}{n(n+k)} \\ &= \frac{n^2}{n(n+k)} = \frac{n}{n+k}.\end{aligned}$$

これは k について狭義単調減少であるから、$0 \le k \le n$ の範囲では $k=0$ のときに限り最大となり、そのとき値は 1 である。（驚くことではない。何も移さなければ、黒い駒は確実にその場にとどまる。）

小問 (ii)

今度は、P から出発する黒い駒を B_1、Q から出発する黒い駒を B_2 とする。2 つが最終的に同じ袋に入っているという事象を S とする。再び、1 回目の移動で B_1 が動くかどうかで場合分けする。

場合 1：B_1 が P にとどまる（確率 $\frac{n-k}{n}$）。このとき B_1 は何が起こっても最終的に P にあるので、S が起こるのは、Q の中の $n+k$ 個の駒から取り出される k 個の中に B_2 が含まれるときであり、そのときに限る：

$$\mathrm{P}(S \mid \text{場合 1}) = \frac{k}{n+k}.$$

場合 2：B_1 が Q に移る（確率 $\frac{k}{n}$）。このとき 2 つの黒い駒はどちらも Q の中の $n+k$ 個に含まれており、S が起こるのは、2 回目の取り出しでその**両方**を取り出すか、**どちらも**取り出さないときである。

> **考えてみよう** $n+k$ 個の駒から無作為に選んだ k 個の組が、与えられた 2 つの駒を両方とも含む確率、あるいはどちらも含まない確率はいくらか。

部分集合を数える。等しい確率で起こる選び方は $\binom{n+k}{k}$ 通りある。黒い駒を両方含む選び方では、残りの $k-2$ 個を残りの $n+k-2$ 個から選ぶ。どちらも含まない選び方では、k 個すべてを $n+k-2$ 個の白い駒から選ぶ。割り算をして、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{両方}) &= \binom{n+k-2}{k-2}\Big/\binom{n+k}{k} = \frac{k(k-1)}{(n+k)(n+k-1)}, \\ \mathrm{P}(\text{どちらも含まない}) &= \binom{n+k-2}{k}\Big/\binom{n+k}{k} = \frac{n(n-1)}{(n+k)(n+k-1)}.\end{aligned}$$

（これらの式は $k=0,1$ のときも成り立ち、そのとき $\mathrm{P}(\text{両方})=0$ である。）したがって

$$\mathrm{P}(S \mid \text{場合 2}) = \frac{k(k-1)+n(n-1)}{(n+k)(n+k-1)}.$$

場合をまとめる。全確率の法則（law of total probability）により、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(S) &= \frac{n-k}{n}\cdot\frac{k}{n+k} + \frac{k}{n}\cdot\frac{k(k-1)+n(n-1)}{(n+k)(n+k-1)} \\ &= \frac{k\big[(n-k)(n+k-1)+k^2-k+n^2-n\big]}{n(n+k)(n+k-1)}.\end{aligned}$$

角括弧の中では $(n-k)(n+k-1) = n^2-k^2-n+k$ であるから、角括弧の中身は $2n^2-2n=2n(n-1)$ となる。よって

$$\boxed{\mathrm{P}(S) = \frac{2k(n-1)}{(n+k)(n+k-1)}}$$

最大化。$k=0$ のとき確率は 0 であるから、$1\le k\le n$ として逆数を最小化する。正の定数 $2(n-1)$ を除けば、

$$\frac{(n+k)(n+k-1)}{k} = k + (2n-1) + \frac{n(n-1)}{k},$$

であるから、整数の範囲で $g(k)=k+\dfrac{n(n-1)}{k}$ を最小化すればよい。隣どうしを比べる：

$$g(k+1)-g(k) = 1-\frac{n(n-1)}{k(k+1)}.$$

これは $k(k+1)<n(n-1)$ のとき、すなわち $k<n-1$ のとき負であり、$k=n-1$ のときちょうど 0 になる。そのとき $k(k+1)=(n-1)n$ となるからである。したがって g は $k=1$ から $k=n-1$ まで狭義単調減少し、$g(n)=g(n-1)$ である。ゆえに確率が最大となるのは

$$k=n-1 \quad \text{および} \quad k=n,$$

のときであり、$n\ge 2$ であるから、どちらも許される範囲にある。$k=n-1$ のとき最大値は

$$\frac{2(n-1)^2}{(2n-1)(2n-2)} = \frac{n-1}{2n-1},$$

であり、$k=n$ のときも同じく $\dfrac{2n(n-1)}{2n(2n-1)} = \dfrac{n-1}{2n-1}$ となる。（g を連続関数とみたときの最小点は $\sqrt{n(n-1)}$ であり、これは $n-1$ と n の間に厳密に位置する。2 つの整数で値が等しくなるのは近似ではなく厳密な事実である。）

検算

- 小問 (i) で $k = n$ のとき：$\frac{1}{2}$。このとき $2n$ 個の駒すべてが Q を通り、そのうち n 個が戻るので、黒い駒はどちらの袋にも等しい確率で入る。正しい。
- 小問 (ii) で $k = 0$ のとき 0 となる。黒い駒どうしは決して出会わないので正しい。$n = 2, k = 1$ のとき $\frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3}$ となり、これは手計算で確かめられる。
- $2 \le n \le 7$ とすべての k について、起こりうる 2 回の取り出しの組をすべて（分数を用いて）厳密に数え上げた。どの場合も両方の式が一致し、(ii) の最大点は常に $\{n-1, n\}$ であった。例えば $n = 4$ のとき最大値は $\frac{3}{7} \approx 0.4286$ である。

よくある間違い

- 2 回目の取り出しで $k/(n+k)$ ではなく k/n を用いてしまう。袋 Q の駒は $n+k$ 個に増えている。
- 小問 (ii) の場合 2 で、「どちらも取り出されない」可能性を忘れる。黒い駒が両方とも Q に残れば、2 つは依然として同じ袋にある。
- 微分を用いて最大化し、$\sqrt{n(n-1)}$ を 1 つの整数に丸めてしまう。離散的な比較により、最大点が 2 つあり値が等しいことがわかる。

STEP のその先へ

両方の小問の背後にある道具は**超幾何**分布（hypergeometric distribution）である。これは、非復元抽出（sampling without replacement）で無作為に取り出した標本に含まれる、印のついた要素の個数の分布である。第 1 段階の結果で条件付け（conditioning）を行い、それを第 2 段階に用いるのが全確率の法則であり、同じ 2 段階の推論は、エーレンフェスト（Ehrenfest）の壺のような、容器間の混合や拡散のモデルの土台となっている。Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）は、超幾何分布と条件付けをまさにこのスタイルで扱っている。

解答例

STEP III 2008、第 1 問

純粋数学 ・ 非線形連立方程式

STEP III 2008、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s3-q1

鍵となる考え方

$s_k = ax^k + by^k$ とおくと、与えられた方程式から s_0, s_1, s_2, s_3 がわかる。$p = x + y$、$q = xy$ とすると x と y は $t^2 - pt + q = 0$ の解であるから、冪和（power sums）は漸化式（recurrence）を満たす。すなわち、各 s_k は直前の項の p 倍から、さらにその前の項の q 倍を引いたものになる。ヒントにある「$x + y$ を掛ける」という操作が生み出すのは、まさにこの関係である。これにより、4 つの非線形な方程式が p と q についての 2 つの線形（linear）な方程式に変わる。その後は二次方程式から x と y が求まり、最初の 2 つの方程式から a と b が求まる。

解答

$k = 0, 1, 2, 3$ に対して $s_k = ax^k + by^k$ とおくと、$s_0 = 1$、$s_1 = \frac{1}{3}$、$s_2 = \frac{1}{5}$、$s_3 = \frac{1}{7}$ である。また $p = x + y$、$q = xy$ とおく。

冪和の漸化式

任意の a, b, x, y と任意の $k \geq 1$ に対して

$$(x + y)(ax^k + by^k) = ax^{k+1} + by^{k+1} + xy\,(ax^{k-1} + by^{k-1}),$$

が成り立つ。交差項が $axyx^{k-1}$ と $bxy\,y^{k-1}$ になるからである。ここでの記号を用いれば

$$s_{k+1} = p\,s_k - q\,s_{k-1}.$$

これは恒等式（identity）であるから、連立方程式の**すべての**解に対して成り立つ。

$x+y$ と xy を求める

$k=1$ と $k=2$ をとり、既知の値を代入すると

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{3}p - q,$$
$$\frac{1}{7} = \frac{1}{5}p - \frac{1}{3}q.$$

第 1 式より $q = \frac{1}{3}p - \frac{1}{5}$ である。これを第 2 式に代入すると

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{5}p - \frac{1}{9}p + \frac{1}{15} \quad \Longrightarrow \quad \frac{4}{45}p = \frac{1}{7} - \frac{1}{15} = \frac{8}{105} \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{6}{7},$$

となり、さらに $q = \frac{2}{7} - \frac{1}{5} = \frac{3}{35}$ を得る。この連立一次方程式の行列式（determinant）は 0 でないから、これらの値は一意に定まる。すなわち、**すべての**解において $x+y = \frac{6}{7}$ かつ $xy = \frac{3}{35}$ である。

x と y を求める

したがって x と y は

$$t^2 - \frac{6}{7}t + \frac{3}{35} = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad 35t^2 - 30t + 3 = 0,$$

の 2 つの解であり、

$$t = \frac{30 \pm \sqrt{900-420}}{70} = \frac{30 \pm 4\sqrt{30}}{70} = \frac{15 \pm 2\sqrt{30}}{35}.$$

を得る。判別式（discriminant）は正であるから $x \neq y$ であり、$\{x, y\}$ はこの 2 数をどちらかの順に並べたものである。

考えてみよう x と y がわかれば、a と b は確かに定まるといえるだろうか？

いえる。x と y が既知であれば、最初の 2 つの方程式 $a+b=1$ と $ax+by=\frac{1}{3}$ は a と b についての線形な方程式であり、その行列式は $y-x$ である。$x \neq y$ よりこれは 0 でないから、組 (a,b) はちょうど 1 つ存在する。

a と b を求める

$x = \frac{15+2\sqrt{30}}{35}$、$y = \frac{15-2\sqrt{30}}{35}$ とすると、$x-y = \frac{4\sqrt{30}}{35}$ である。$a+b=1$ と $ax+by=\frac{1}{3}$ から b を消去すると $a(x-y) = \frac{1}{3} - y$ を得る。ここで

$$\frac{1}{3} - y = \frac{35 - 3(15-2\sqrt{30})}{105} = \frac{6\sqrt{30}-10}{105},$$

であるから

$$a = \frac{6\sqrt{30}-10}{105} \cdot \frac{35}{4\sqrt{30}} = \frac{6\sqrt{30}-10}{12\sqrt{30}} = \frac{1}{2} - \frac{5}{6\sqrt{30}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{30}}{36},$$

となり、$b = 1 - a = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{30}}{36}$ である。

これらが実際に解であること

ここまでに示したのは、解があるとすれば必ずこの形になるということだけであるから、これが実際に解になっていることを確かめる必要がある。作り方から $s_0 = 1$ かつ $s_1 = \frac{1}{3}$ である。p と q は上の 2 つの線形な方程式を満たすから、漸化式より $s_2 = ps_1 - qs_0 = \frac{1}{5}$、さらに $s_3 = ps_2 - qs_1 = \frac{1}{7}$ が得られる。よって 4 つの方程式はすべて成り立つ。

x と y の役割を入れ替えると、a と b も入れ替わる。したがって解はちょうど 2 つであり、

$$(a, b, x, y) = \left(\frac{18 - \sqrt{30}}{36}, \frac{18 + \sqrt{30}}{36}, \frac{15 + 2\sqrt{30}}{35}, \frac{15 - 2\sqrt{30}}{35} \right)$$

と、これを $a \leftrightarrow b$ と $x \leftrightarrow y$ を同時に入れ替えたものである。どちらの解においても、x, y のうち大きい方が小さい方の係数と組になっている。

検算

数値的には $x \approx 0.741556$、$y \approx 0.115587$、$a \approx 0.347855$、$b \approx 0.652145$ である。このとき $ax + by \approx 0.333333$、$ax^2 + by^2 \approx 0.200000$、$ax^3 + by^3 \approx 0.142857$ となり、計算機の精度の範囲で $\frac{1}{3}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{7}$ と一致する。簡単な妥当性の確認として、x と y はともに $(0, 1)$ に属し、a と b はともに正である。これは右辺が $[0, 1]$ 上での t^{2k} の平均値であること（下記参照）と整合している。

よくある間違い

- x と y を求めたものの、組み合わせが重要であることを忘れる。a は x と組になっているので、a と b も入れ替えずに x と y だけを入れ替えることはできない。
- 必要条件（necessary conditions）を求めたところで終えてしまう。問題文は「すべて求めよ」といっているので、すべての解がこの形をもつことと、これらの値が実際に 4 つの方程式をすべて満たすことの両方を示す必要がある。

STEP のその先へ

数 $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$ は $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^{2k}\,\mathrm{d}t$ に等しい。したがってこの連立方程式は、7 次以下の多項式に対して厳密に成り立つ公式 $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f \approx \frac{a}{2}\big(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\big) + \frac{b}{2}\big(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\big)$

を求めていることになる。これは 4 点のガウス（*Gauss*）–ルジャンドル（*Legendre*）求積（Gauss–Legendre quadrature）であり、その節点は $\pm\sqrt{x}$ と $\pm\sqrt{y}$、そして $a \approx 0.3479$ と $b \approx 0.6521$ はよく知られたその重みである。ここで行ったように冪和から漸化式を見つけるという発想は、信号処理におけるプロニー法（Prony's method）の背後にある考え方でもある。さらに学ぶには、Süli and Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis*（数値解析入門）を読んでみるとよい。

解答例

STEP III 2008、第 2 問

純粋数学 • 累乗の和

STEP III 2008、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s3-q2

鍵となる考え方

$(r+1)^k - r^k$ の和は隣り合う項が打ち消し合う（telescoping）ので、ただ一つの項にまで縮む。一方で、各括弧を二項定理（binomial theorem）で展開することもでき、そうすると同じ和がより低い次数の累乗和（power sum）$S_j(n)$ の一次結合になる。この二つを等しいとおくと、それ以前のものから各 S_{k-1} を組み立てる漸化式（recurrence）が得られ、その漸化式こそが小問 (ii) の多項式としての構造を見るのに必要なものでもある。

解答

小問 (i)

まず、打ち消し合いを確かめる。和を書き下すと

$$\sum_{r=0}^{n}\left[(r+1)^k - r^k\right] = (1^k - 0^k) + (2^k - 1^k) + \cdots + \left((n+1)^k - n^k\right) = (n+1)^k,$$

となる。途中の項はすべて打ち消し合い、また（$k \geq 1$ なので）$0^k = 0$ だからである。

次に、二項定理を用いる。各 r について

$$(r+1)^k - r^k = \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}r^j = 1 + \binom{k}{1}r + \binom{k}{2}r^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}r^{k-1},$$

が成り立つ。r^k の項が打ち消し合うからである。これを $r = 0, 1, \ldots, n$ について足し合わせると、定数 1 は（r の値は $n+1$ 個あるので）$n+1$ を与え、$j \geq 1$ である各 r^j は

$S_j(n)$ を与える。したがって

$$(n+1)^k = (n+1) + \binom{k}{1}S_1(n) + \binom{k}{2}S_2(n) + \cdots + \binom{k}{k-2}S_{k-2}(n) + \binom{k}{k-1}S_{k-1}(n).$$

最後の係数は $\binom{k}{k-1} = k$ である。それ以外については対称性 $\binom{k}{j} = \binom{k}{k-j}$ を用いると、$S_{k-j}(n)$ の係数は $\binom{k}{k-j} = \binom{k}{j}$ となる。特に $S_1(n)$ の係数は $\binom{k}{1} = \binom{k}{k-1}$ である。$kS_{k-1}(n)$ を一方の辺に残し、他のすべてを移項すると

$$kS_{k-1}(n) = (n+1)^k - (n+1) - \binom{k}{2}S_{k-2}(n) - \binom{k}{3}S_{k-3}(n) - \cdots - \binom{k}{k-1}S_1(n),$$

となり、これが求める $(*)$ である。（ここで S_{k-1} が考えている和の一つであるためには $k \geq 2$ が必要である。）

考えてみよう なぜ $j=0$ の項を $S_0(n)$ と書かずに、別に扱ったのだろうか。

S_k は正の k に対してしか定義されておらず、また $r=0$ における「0^0」は意味があいまいである。定数を外に出して直接 $n+1$ と数えれば、この二つの問題をともに避けられ、$(*)$ にただ一つ現れる $-(n+1)$ の理由も説明できる。

$S_3(n)$。 $(*)$ で $k=4$ とおくと、$\binom{4}{2} = 6$、$\binom{4}{3} = 4$ であるから

$$\begin{aligned} 4S_3(n) &= (n+1)^4 - (n+1) - 6S_2(n) - 4S_1(n) \\ &= (n+1)^4 - (n+1) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1). \end{aligned}$$

どの項も因数 $n+1$ をもつので

$$\begin{aligned} 4S_3(n) &= (n+1)\left[(n+1)^3 - 1 - n(2n+1) - 2n\right] \\ &= (n+1)\left[n^3 + 3n^2 + 3n - 2n^2 - n - 2n\right] \\ &= (n+1)(n^3 + n^2) = n^2(n+1)^2. \end{aligned}$$

よって

$$S_3(n) = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \big(S_1(n)\big)^2.$$

$S_4(n)$。 $k=5$ とおくと、$\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$、$\binom{5}{4} = 5$ であるから

$$5S_4(n) = (n+1)^5 - (n+1) - 10S_3(n) - 10S_2(n) - 5S_1(n).$$

ここでも S_3、S_2、S_1 の式を用いて因数 $n+1$ をくくり出す。

$$\begin{aligned}5S_4(n) &= (n+1)\left[(n+1)^4 - 1 - \tfrac{5}{2}n^2(n+1) - \tfrac{5}{3}n(2n+1) - \tfrac{5}{2}n\right]\\ &= (n+1)\Big[n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - \tfrac{5}{2}n^3 - \tfrac{5}{2}n^2\\ &\qquad - \tfrac{10}{3}n^2 - \tfrac{5}{3}n - \tfrac{5}{2}n\Big]\\ &= (n+1)\left[n^4 + \tfrac{3}{2}n^3 + \tfrac{1}{6}n^2 - \tfrac{1}{6}n\right]\\ &= \tfrac{1}{6}n(n+1)\left(6n^3 + 9n^2 + n - 1\right).\end{aligned}$$

S_4 も S_2 と同様に因数 $2n+1$ をもつはずなので、3 次式に $n = -\frac{1}{2}$ を代入してみると $-\frac{3}{4} + \frac{9}{4} - \frac{1}{2} - 1 = 0$ となる。よって $2n+1$ は因数であり、$6n^3 + 9n^2 + n - 1 = (2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$ である。したがって

$$S_4(n) = \tfrac{1}{30}\, n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

小問 (ii)

k についての強い数学的帰納法（strong induction）を用いる。$S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ は次数（degree）2 であるから、主張は $k = 1$ のとき（さらに $k = 2$ のときも）成り立つ。

ある $k \geq 2$ について、$S_1(n), \ldots, S_{k-1}(n)$ のそれぞれが n の多項式（polynomial）であり、S_j の次数が $j+1$ であると仮定する。$(*)$ を k の代わりに $k+1$ として適用すると

$$(k+1)\,S_k(n) = (n+1)^{k+1} - (n+1) - \binom{k+1}{2} S_{k-1}(n) - \cdots - \binom{k+1}{k} S_1(n).$$

右辺について：

- $(n+1)^{k+1}$ は最高次の係数（leading coefficient）が 1 の $k+1$ 次多項式である。
- $n+1$ の次数は 1 である。
- $1 \leq j \leq k-1$ である各 $S_j(n)$ は、仮定により $j+1 \leq k$ 次の多項式である。

したがって右辺は多項式であり、その n^{k+1} の項は $(n+1)^{k+1}$ からしか生じないので打ち消されることはない。$k+1 \neq 0$ で割ると、$S_k(n)$ はちょうど $k+1$ 次の多項式（最高次の係数は $\frac{1}{k+1}$）である。以上で帰納法が完結する。

> **考えてみよう** 多項式 $P(n)$ の「定数項」と「係数の和」は、それぞれ何に対応するだろうか。

それぞれ $P(0)$ と $P(1)$ である。$S_k(n) = P(n) = a_{k+1}n^{k+1} + \cdots + a_1 n + a_0$ と書く。これは $n \geq 0$ であるすべての整数 n について和 $\sum_{r=0}^{n} r^k$ と一致するので、$n = 0$ と $n = 1$ で値を求めてよい。

- 定数項（constant term）：$k \geq 1$ より $a_0 = P(0) = S_k(0) = 0^k = 0$。
- 係数の和：$a_{k+1} + \cdots + a_1 + a_0 = P(1) = S_k(1) = 0^k + 1^k = 1$。

以上で両方の結果が示された。

検算

- 小さな値：$S_3(3) = 1 + 8 + 27 = 36 = \frac{1}{4} \cdot 9 \cdot 16$、また $S_4(3) = 1 + 16 + 81 = 98 = \frac{1}{30} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 35$。
- 得られた答えに小問 (ii) を当てはめる：$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$ の定数項は 0、係数の和は $\frac{6+15+10-1}{30} = 1$ であり、最高次の係数は帰納法の予測どおり $\frac{1}{5} = \frac{1}{k+1}$ である。
- 直接和をとることにより、$2 \leq k \leq 9$ かつ $0 \leq n \leq 30$ について $(*)$ を正確に確かめ、$0 \leq n < 200$ について二つの閉じた式をともに確かめた。

よくある間違い

- $\sum 1$ の $r = 0$ の項を忘れること。これは n ではなく $n+1$ を与える。
- 先に共通因数 $n+1$ をくくり出さずにすべてを展開してしまうこと。そうすると S_4 の計算がずっと重くなる。
- 小問 (ii) で、次数が「高々 $k+1$」であるとしか述べないこと。問題はちょうど $k+1$ であることを求めているので、n^{k+1} の項が打ち消されないことに言及すること。

STEP のその先へ

これらの多項式の係数はベルヌーイ数（Bernoulli numbers）によって支配されており、ファウルハーバーの公式（Faulhaber's formula）は、$S_k(n)$ を n の累乗の一次結合として、その係数を二項係数とベルヌーイ数の積で表す。$S_k(n)$ が最高次の項 $\frac{n^{k+1}}{k+1}$ をもつ $k+1$ 次多項式であるという事実は、$\int_0^x t^k \, \mathrm{d}t = \frac{x^{k+1}}{k+1}$ の離散版であり、この考え方は差分法（calculus of finite differences）において厳密に定式化される。この種の問題をさらに解きたければ、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）に挑戦するとよい。

解答例

STEP III 2008、第 3 問

純粋数学 ・ 楕円の接線と焦点

STEP III 2008、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

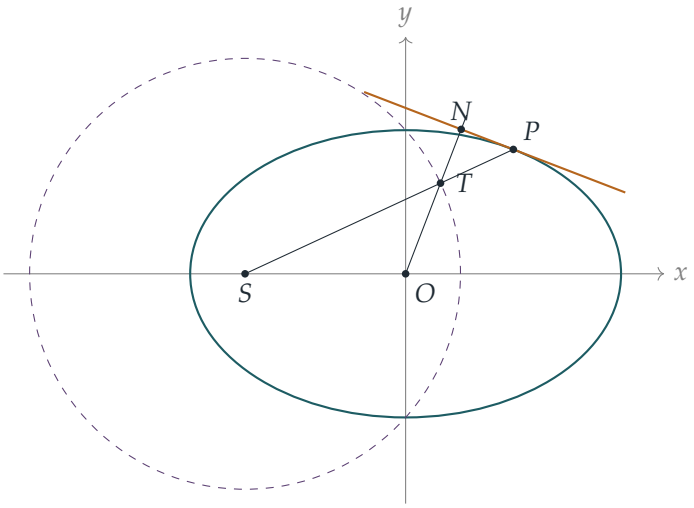
step.maths.org/questions/08-s3-q3

鍵となる考え方

この問題で扱うのはすべて 2 本の直線なので、それらの方程式をすっきりと書き下し、交点を求めればよい。直線 ON は接線（tangent）に垂直なので、その方向は接線の法線ベクトル（normal vector）であり、これは接線の方程式からそのまま読み取れる。SP を S を起点として媒介変数表示（parametrisation）すると、交点の計算は 1 行で済む。しかも、求めた媒介変数の値こそが円について必要な量そのものであることがわかる。すなわち、それは点 T が SP 上のどれだけの割合の位置にあるかを表している。

解答

以下では常に $0 < e < 1$ である。実際、$e^2 = 1 - b^2/a^2$ であり、$a > b > 0$ よりこれは 0 と 1 の間に厳密に収まる。また $\sin\theta \neq 0$ とする。$\sin\theta = 0$ ならば $P = (\pm a, 0)$ であり、接線は $x = \pm a$、$N = P$ となって、ON と SP はともに x 軸になるので、T は定まらない。



（図は $a=3$、$b=2$、$\theta=60^\circ$ の場合である。楕円（ellipse）は青緑色、P における接線は琥珀色で描かれ、破線の円は中心 S、半径 a の円である。）

T の y 座標

$x^2/a^2+y^2/b^2=1$ を陰関数微分（implicit differentiation）するか、よく知られた結果を用いれば、(x_1,y_1) における接線は $xx_1/a^2+yy_1/b^2=1$ である。P においては

$$\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}=1.$$

直線 $px+qy=1$ の法線ベクトルは (p,q) なので、接線の法線ベクトルは $\left(\frac{\cos\theta}{a},\frac{\sin\theta}{b}\right)$、あるいは ab 倍して $(b\cos\theta,\,a\sin\theta)$ である。直線 ON は O を通りこの方向をもつ（接線に垂直だからである）ので、その上の点は $\mu(b\cos\theta,a\sin\theta)$ と表され、方程式は

$$a\sin\theta\,x=b\cos\theta\,y. \tag{1}$$

次に、SP を S を起点として媒介変数表示する。その上の点は

$$\big(-ea+\lambda a(\cos\theta+e),\ \lambda b\sin\theta\big),$$

であり、$\lambda=0$ のとき S、$\lambda=1$ のとき P である。これを (1) に代入し、因子 $\sin\theta\neq0$ で割ると

$$a\big(-ea+\lambda a(\cos\theta+e)\big)=\lambda b^2\cos\theta$$
$$\lambda\big(a^2\cos\theta+a^2e-b^2\cos\theta\big)=ea^2.$$

ここで焦点（focus）の条件が効いてくる。$a^2-b^2=a^2e^2$ なので、括弧の中は $a^2e^2\cos\theta+a^2e=a^2e(1+e\cos\theta)$ となる。$a^2e\neq0$ で割って

$$\lambda=\frac{1}{1+e\cos\theta},$$

を得る。$1+e\cos\theta \geq 1-e > 0$ なので、この割り算は正当である。したがって T の y 座標は

$$y_T = \lambda b\sin\theta = \frac{b\sin\theta}{1+e\cos\theta},$$

となり、示すべき式が得られた。（後で使うために記しておくと、(1) から $x_T = \dfrac{b\cos\theta}{a\sin\theta}y_T = \dfrac{a(1-e^2)\cos\theta}{1+e\cos\theta}$ である。）

T は中心 S、半径 a の円上にある

考えてみよう 線分 ST が SP のどれだけの割合であるかはわかっている。ほかに何が必要だろうか。

$T = S+\lambda(P-S)$ かつ $\lambda > 0$ なので、$ST = \lambda SP$ である。よって必要なのは長さ SP、すなわち P の焦点半径（focal distance）だけである。

$$\begin{aligned} SP^2 &= (a\cos\theta+ea)^2 + b^2\sin^2\theta \\ &= a^2\left[\cos^2\theta + 2e\cos\theta + e^2 + (1-e^2)\sin^2\theta\right] \\ &= a^2\left[(\cos^2\theta+\sin^2\theta) + 2e\cos\theta + e^2(1-\sin^2\theta)\right] \\ &= a^2\left[1+2e\cos\theta+e^2\cos^2\theta\right] = a^2(1+e\cos\theta)^2, \end{aligned}$$

ここで 2 行目では $b^2 = a^2(1-e^2)$ を用いた。$a > 0$ かつ $1+e\cos\theta > 0$ なので、$SP = a(1+e\cos\theta)$ を得る。よって

$$ST = \lambda SP = \frac{a(1+e\cos\theta)}{1+e\cos\theta} = a,$$

となり、T は中心 S、半径 a の円上にある。

（座標から直接計算したい場合は次のようにする。$x_T + ea = \dfrac{a(\cos\theta+e)}{1+e\cos\theta}$ であり、$(x_T+ea)^2 + y_T^2$ は上の SP^2 とまったく同じ計算で a^2 に帰着する。）

検算

- $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき $P = (0,b)$ であり、接線は $y = b$ なので ON は y 軸となり、$T = (0, y_T)$ で、公式から $y_T = b$ である。このとき $ST^2 = e^2a^2 + b^2 = a^2$ となり、確かに成り立っている。
- $a = 3$、$b = 2$、$\theta = 60°$（図の場合）として 2 直線の交点を数値的に求めると $T \approx (0.4857, 1.2618)$ となる。公式からは $y_T = \sqrt{3}/(1+\sqrt{5}/6) \approx 1.2618$ であり、$ST \approx 3.0000$ である。

- 円の極限 $e \to 0$ では $S \to O$、$T \to P$ となり、P は確かに O を中心とする半径 a の円上にある。

よくある間違い

- ON を接線に垂直ではなく平行にとってしまう。ON の方向は法線 $(b\cos\theta, a\sin\theta)$ であり、$(-a\sin\theta, b\cos\theta)$ ではない。
- $a^2 - b^2$ を a^2e^2 に置き換えるのを忘れ、λ の式が簡単にならないまま残ってしまう。
- 断りなしに $\sin\theta$ で割ってしまう。$\sin\theta = 0$ の場合は実際に議論が破綻する。

STEP のその先へ

結果 $SP = a(1 + e\cos\theta) = a + ex_P$ は、姿を変えた焦点・準線の性質である。すなわち、焦点までの距離は準線（directrix）$x = -a/e$ までの距離の e 倍に等しい。円錐曲線（conic）を焦点を原点とする極座標（polar coordinates）で $r = \ell/(1 + e\cos\phi)$ と書くことは、大学 1 年次の力学でケプラー（Kepler）軌道を記述する方法であり、ここでも同じ分母 $1 + e\cos\theta$ が現れた。円錐曲線の幾何や、STEP 風の問題をさらに多く知りたければ Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を、軌道については Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics* を参照するとよい。

解答例

STEP III 2008、第 4 問

純粋数学 ・ 逆双曲線関数の不等式

STEP III 2008、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s3-q4

鍵となる考え方

$x = \cosh y$ とおく。半角の公式（half-angle formula）により $\tanh(y/2)$ は x の代数関数（algebraic function）に書き換えられるので、tanh に関する自明な不等式（inequality）が、arcosh に関する自明でない不等式に変わる。そのあと、この問題はちょっとした「からくり」を回す。すなわち、不等式を 1 から x まで積分し、式を整理して、より精密な不等式を得るのである。このからくりを 2 回回すと、(ii)、続いて (iii) が得られる。

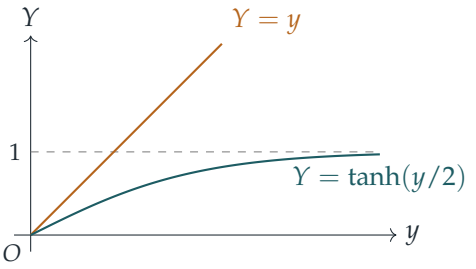
解答

以下、$x \geq 1$ に対して $A(x) = \operatorname{arcosh} x$、$S(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ と書く。必要となる 2 つの導関数（derivative）は次のとおりである。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arcosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sqrt{x^2 - 1} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad (x > 1).$$

小問 (i)

曲線 $Y = \tanh(y/2)$ は傾き $\frac{1}{2}$ で原点を通り、$y > 0$ で上に凸（concave）であり、決して 1 に達しない。一方、直線 $Y = y$ の傾きは 1 である。



すべての $y > 0$ に対して、直線は曲線より上にある。これを厳密に示すため、$g(t) = t - \tanh t$ とおく。すると $g(0) = 0$ であり、

$$g'(t) = 1 - \operatorname{sech}^2 t = \tanh^2 t > 0 \quad \text{ただし} t > 0,$$

であるから、g は狭義単調増加（strictly increasing）であり、$t > 0$ で $\tanh t < t$ が成り立つ。$t = y/2$ とすると

$$\tanh(y/2) < \tfrac{1}{2}y < y \qquad (y > 0).$$

次に $x > 1$ とし、$y = \operatorname{arcosh} x$ とおく。すると $y > 0$、$\cosh y = x$、$\sinh y = +\sqrt{x^2 - 1}$ である（$y > 0$ より正）。$\sinh y = 2\sinh \frac{y}{2}\cosh \frac{y}{2}$ と $1 + \cosh y = 2\cosh^2 \frac{y}{2}$ を用いると

$$\tanh \frac{y}{2} = \frac{\sinh y}{1 + \cosh y} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 1} = \frac{x^2 - 1}{(x + 1)\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

したがって $y > \tanh(y/2)$ は

$$\operatorname{arcosh} x > \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad (x > 1),$$

となり、これが $(*)$ である。

小問 (ii)

$x > 1$ を固定し、t を変数として $(*)$ を区間 $[1, x]$ で積分する。

> **考えてみよう** $(*)$ の右辺は分母に $\sqrt{t^2 - 1}$ を含む。$t = 1$ から積分してよいのだろうか。また、積分しても不等式は**狭義**のまま保たれるのだろうか。

どちらも問題ない。$t > 1$ のとき $\dfrac{t - 1}{\sqrt{t^2 - 1}} = \sqrt{\dfrac{t - 1}{t + 1}}$ であり、これは $t \to 1$ で 0 に収束（converge）するので、両辺とも $[1, x]$ で連続である。両辺の差は連続で、$(1, x]$ で正であるから、その $[1, x]$ 上の積分は正である。

左辺は、$u = \operatorname{arcosh} t$ として部分積分（integration by parts）を行うと

$$\int_1^x \operatorname{arcosh} t \, \mathrm{d}t = \Big[t \operatorname{arcosh} t\Big]_1^x - \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} \, \mathrm{d}t = x\,A(x) - S(x),$$

となる。ここで $\operatorname{arcosh} 1 = 0$、$\sqrt{1^2-1} = 0$ を用いた。

右辺は 2 つの基本的な積分に分かれる。

$$\int_1^x \frac{t-1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = S(x) - A(x).$$

したがって

$$x\,A(x) - S(x) > S(x) - A(x) \quad \Longrightarrow \quad (x+1)A(x) > 2S(x).$$

$x+1>0$ で割り、小問 (i) と同様に整理すると

$$\operatorname{arcosh} x > \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x+1} = 2\,\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (x>1),$$

となり、求める結果が得られる。これはちょうど $(*)$ の下界の 2 倍である。

小問 (iii)

小問 (ii) は、$t>1$ に対して $\operatorname{arcosh} t > 2\cdot\dfrac{t-1}{\sqrt{t^2-1}}$ であることを述べている。右辺は $(*)$ と同じものの 2 倍である。そこで同じからくりをもう一度回す。先ほどと同じ理由づけで $[1,x]$ 上で積分し、すでに求めた 2 つの積分を用いると

$$x\,A(x) - S(x) > 2\big(S(x) - A(x)\big) \quad \Longrightarrow \quad (x+2)A(x) > 3S(x).$$

$x+2>0$ であるから

$$\operatorname{arcosh} x > 3\,\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2} \qquad (x>1),$$

となり、これが求める結果である。

考えてみよう なぜここで止めるのか。もう一度積分できないだろうか。

このからくりが働くには、右辺が積分のわかっている $\dfrac{t-1}{\sqrt{t^2-1}}$ の定数倍でなければならない。新しい下界 $3\sqrt{t^2-1}/(t+2)$ はその形ではないので、この手法はここで尽きる。

独立な確認として（「別解」として）、$f(x) = A(x) - 3S(x)/(x+2)$ とおく。すると $f(1)=0$ であり、商の微分法（quotient rule）により

$$f'(x) = \frac{(x+2)^2 - 3x(x+2) + 3(x^2-1)}{(x+2)^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{(x-1)^2}{(x+2)^2\sqrt{x^2-1}} > 0 \quad (x>1),$$

であるから、f は狭義単調増加であり、$x>1$ で $f(x)>0$ となって、先ほどと同じ結論を得る。

検算

$x = 2$ のとき、$\operatorname{arcosh} 2 = \ln(2 + \sqrt{3}) \approx 1.3170$ であり、3 つの下界はそれぞれ $1/\sqrt{3} \approx 0.577$、$2/\sqrt{3} \approx 1.155$、$3\sqrt{3}/4 \approx 1.299$ である。各下界は前のものより良く、いずれも 1.3170 より小さい。$x = 1$ の近くでは下界は非常に良くなる。$x = 1.001$ のとき $\operatorname{arcosh} x \approx 0.04471763$ であり、(ii) の下界との差は約 7×10^{-6}、(iii) の下界との差はわずか約 10^{-9} である。これは、各下界が $x - 1$ についてより高次まで $\operatorname{arcosh} x$ と一致するからである。2 つの積分の数値的検証（$x = 1.5$、2、5 における中点則（midpoint rule）による数値積分）と、10 000 個のランダムな $x > 1$ における 3 つの不等式すべての数値的検証では、食い違いは見つからなかった。

よくある間違い

- 符号を確定させずに $\sinh(\operatorname{arcosh} x) = \pm\sqrt{x^2 - 1}$ とすること。$\operatorname{arcosh} x > 0$ であるから正の根をとる。
- 1 ではなく 0 から積分すること。arcosh は $x \geq 1$ でしか定義されず、下端を 1 にすることで境界項が消えるのである。
- 積分した不等式がなぜ依然として狭義であるのかを述べ忘れること。

STEP のその先へ

下界が良くなっていくのは、積分のたびに誤差が $x = 1$ で 1 次ずつ高い位数で消えるようになるからである。これは、次第に精度の上がる有理式型の近似の列の始まりであり、パデ（Padé）近似（Padé approximant）の近い親戚である。全体を通して用いた原理（$f(a) = 0$ かつ $f' > 0$ ならば、あるいはその積分形が成り立てば、$f > 0$）は、姿を変えた平均値の定理（mean value theorem）であり、解析学の非常に多くの部分の土台となっている。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、平均値の定理と積分を厳密に扱っている。

解答例

STEP III 2008、第 5 問

純粋数学 ・ 漸化式

> **STEP III 2008、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q5

鍵となる考え方

量 $\mathrm{T}_n^2 - \mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}$ はこの漸化式（recurrence）の**不変量**（invariant）である。n を 1 だけ増やすと、漸化式によって $\mathrm{T}_{n+1} + \mathrm{T}_{n-1}$ を $2x\mathrm{T}_n$ で置き換えられるため、差が消えてしまうのである。不変量が 0 のときは、隣り合う項の比がすべて等しくなるので、この数列は等比数列（geometric sequence）になる。そこで等比数列を漸化式に代入すると、公比（common ratio）がある二次方程式（quadratic equation）の解として定まる。

解答

以下では x を固定し、$\mathrm{T}_n(x)$ を T_n、$\mathrm{f}(x)$ を f と書く。漸化式 $(*)$ は次を主張している。

$$\mathrm{T}_{n+1} + \mathrm{T}_{n-1} = 2x\,\mathrm{T}_n \qquad (n \geq 1).$$

不変量

$n \geq 1$ に対して $D_n = \mathrm{T}_n^2 - \mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}$ とおく。すべての $n \geq 1$ について $D_n = f$ であることを数学的帰納法（induction）で証明する。

基底段階。 $D_1 = \mathrm{T}_1^2 - \mathrm{T}_0\mathrm{T}_2$ であり、これは定義により f である。

帰納段階。 ある $k \geq 1$ について $D_k = f$ が成り立つと仮定する。このとき

$$\begin{aligned} D_{k+1} - D_k &= \mathrm{T}_{k+1}^2 - \mathrm{T}_k\mathrm{T}_{k+2} - \mathrm{T}_k^2 + \mathrm{T}_{k-1}\mathrm{T}_{k+1} \\ &= \mathrm{T}_{k+1}\bigl(\mathrm{T}_{k+1} + \mathrm{T}_{k-1}\bigr) - \mathrm{T}_k\bigl(\mathrm{T}_{k+2} + \mathrm{T}_k\bigr) \\ &= \mathrm{T}_{k+1} \cdot 2x\mathrm{T}_k - \mathrm{T}_k \cdot 2x\mathrm{T}_{k+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。ただし3行目では、最初の括弧に $n=k$ として、2番目の括弧に $n=k+1$ として $(*)$ を用いた（$k\geq 1$ なので、どちらも適用してよい）。したがって $D_{k+1}=D_k=f$ であり、数学的帰納法により

$$\mathrm{T}_n^2-\mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}=f\quad \text{すべての}n\geq 1$$

が成り立つ。これが示すべきことであった。

$f\equiv 0$ の場合

まず、$f=0$ が $r=\mathrm{T}_1/\mathrm{T}_0$ について何を意味するかを調べよう。$n=1$ として $(*)$ を用いると $\mathrm{T}_2=2x\mathrm{T}_1-\mathrm{T}_0$ であるから、$\mathrm{T}_1=r\mathrm{T}_0$ と書けば

$$f=\mathrm{T}_1^2-\mathrm{T}_0(2x\mathrm{T}_1-\mathrm{T}_0)=\mathrm{T}_0^2\big(r^2-2xr+1\big),$$

となる。よって $\mathrm{T}_0\neq 0$ より

$$f=0\iff r^2=2xr-1. \tag{†}$$

> **考えてみよう** 不変量から $\mathrm{T}_n^2=\mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}$ が得られるので、比はすべて等しい。それなら単純に割り算をすればよいのではないか？

T_{n-1} で割るにはそれが0でないことが必要であり、そのためには別の議論がいる。「比が等しい」という発想から答えを予想し、(†) を使って漸化式そのものから証明するほうがすっきりしている。

主張。 すべての $n\geq 0$ について $\mathrm{T}_n=\mathrm{T}_0\,r^n$ である。

証明。 強い帰納法（strong induction）を用いる（連続する2つの場合をまとめて扱う）。$n=0$ のときは主張は自明であり、$n=1$ のときは r の定義から $\mathrm{T}_1=r\mathrm{T}_0$ なので成り立つ。$k\geq 1$ として、$n=k-1$ と $n=k$ について主張が成り立つと仮定する。このとき $(*)$ により

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_{k+1}&=2x\mathrm{T}_k-\mathrm{T}_{k-1}=2x\mathrm{T}_0r^k-\mathrm{T}_0r^{k-1}\\&=\mathrm{T}_0r^{k-1}\big(2xr-1\big)=\mathrm{T}_0r^{k-1}\cdot r^2=\mathrm{T}_0r^{k+1},\end{aligned}$$

となる。ただし4番目の等号で (†) を用いた。よって $n=k+1$ についても主張は成り立ち、数学的帰納法によりすべての $n\geq 0$ について次が成り立つ。

$$\boxed{\mathrm{T}_n(x)=\mathrm{T}_0(x)\,\big(\mathrm{r}(x)\big)^n}$$

$\mathrm{r}(x)$ のとりうる形

(†) より r は $r^2-2xr+1=0$ を満たすので、解の公式により

$$\mathrm{r}(x)=x+\sqrt{x^2-1}\qquad \text{または}\qquad \mathrm{r}(x)=x-\sqrt{x^2-1}.$$

逆に、どちらを選んでも (†) を満たすので $f \equiv 0$ となり、数列 $\mathrm{T}_0 r^n$ は確かに $(*)$ を満たす。2 つの解の積は 1 であるから、互いに逆数である。$|x| < 1$ のとき、これらは複素数 $x \pm \mathrm{i}\sqrt{1-x^2}$ となる。$x = \cos\theta$ と書けば $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta}$ となり、$\mathrm{T}_n = \mathrm{T}_0 \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}n\theta}$ である。

検算

- チェビシェフ多項式（Chebyshev polynomials）$\mathrm{T}_0 = 1$、$\mathrm{T}_1 = x$、$\mathrm{T}_2 = 2x^2 - 1$ では $f = x^2 - (2x^2 - 1) = 1 - x^2$ となり、実際すべての n について $\cos^2 n\theta - \cos(n-1)\theta \cos(n+1)\theta = \sin^2\theta$ が成り立つ。$x = \frac{3}{7}$ とすると、D_n の最初の 14 個の値はすべて $\frac{40}{49}$ に等しい。
- $r = 2$ とすると $x = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$ であり、$\mathrm{T}_0 = 1$、$\mathrm{T}_1 = 2$ とする。漸化式から $\mathrm{T}_2 = \frac{5}{2} \cdot 2 - 1 = 4$、$\mathrm{T}_3 = \frac{5}{2} \cdot 4 - 2 = 8$ が得られ、主張どおり 2 のべき乗になっている。また、$x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ がもう一方の解である。

よくある間違い

- $n = 0$ として $(*)$ を用いてしまうこと。漸化式は $n = 1$ から始まるので、基底段階は D_0 ではなく D_1 でなければならない（そもそも D_0 は定義されていない）。
- T_{n-1} が 0 でないことを確かめずに、$\mathrm{T}_n^2 = \mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}$ を T_{n-1} で割ってしまうこと。

STEP のその先へ

定数係数の線形漸化式（linear recurrence with constant coefficients）の解は $\alpha r_1^n + \beta r_2^n$ の形をしている。ここで r_1, r_2 はその特性方程式（characteristic equation）の解であり、今の場合は $r^2 - 2xr + 1 = 0$ である。条件 $f = 0$ は、等比数列の項がただ 1 つだけ残る場合をちょうど選び出している。一般には f は $\alpha\beta$ の定数倍である。不変量 D_n は、2 階微分方程式に対するロンスキアン（Wronskian）の離散版ともいえるものである。ロンスキアンは $y'' + q(x)y = 0$ に対しては定数となる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）ではロンスキアンが詳しく扱われており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）には STEP 形式の漸化式の問題がさらに収録されている。

解答例

STEP III 2008、第 6 問

純粋数学 ・ 一階微分方程式

> **STEP III 2008、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q6

鍵となる考え方

どちらの方程式も y を x と傾き（slope）p で直接表しているが、p について解かれていないので、そのまま積分することはできない。x について微分すると y が消え（$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = p$ だからである）、x、p、$\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ の間の関係式が残る。この関係式を逆数にしてみると、p の関数としての x に関する線形（linear）一階微分方程式（first-order differential equation）となり、積分因子（integrating factor）によって解くことができる。そのあと $x(p)$ をもとの方程式に戻して y を求める。

解答

小問 (i)

$y = p^2 + 2xp$ を x について微分する。p^2 には連鎖律（chain rule）を、$2xp$ には積の微分法（product rule）を用い、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ を p で置き換えると

$$p = 2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + 2p + 2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \quad \Longrightarrow \quad -p = (2p + 2x)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

> ? **考えてみよう** $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ をひっくり返して $\mathrm{d}x/\mathrm{d}p$ にしてよいのだろうか？

そのためには $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x \neq 0$ が必要である。上の式から、$p \neq 0$ であるところでは $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ と $2p + 2x$ はどちらも 0 でない。（いずれにせよ p で割るので、全体を通して $p \neq 0$ が必要である。）したがって

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = -\frac{2p + 2x}{p} = -2 - \frac{2x}{p},$$

と書くことができ、これが示すべき式である。

整理すると、これは x について線形である：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{2}{p}x = -2.$$

積分因子は $\mathrm{e}^{\int 2/p\,\mathrm{d}p} = p^2$ であり、両辺に掛けると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p^2x) = -2p^2 \quad\Longrightarrow\quad p^2x = -\tfrac{2}{3}p^3 + A \quad\Longrightarrow\quad x = -\tfrac{2}{3}p + Ap^{-2},$$

となる。ここで A は任意定数である。これが問題文の結果である。

次に、$x = 2$ のとき $p = -3$ であることを用いる：

$$2 = -\tfrac{2}{3}(-3) + \frac{A}{9} = 2 + \frac{A}{9},$$

よって $A = 0$ であり $x = -\frac{2}{3}p$、すなわち $p = -\frac{3}{2}x$ である。これをもとの方程式に代入すると

$$y = p^2 + 2xp = \tfrac{9}{4}x^2 + 2x\left(-\tfrac{3}{2}x\right) = \tfrac{9}{4}x^2 - 3x^2,$$

したがって

$$y = -\tfrac{3}{4}x^2.$$

確かめると、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}x$ であり、これは確かに p に等しく、$x = 2$ で -3 となる。

小問 (ii)

ここでは $\ln p$ が現れるので $p > 0$ である。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p\ln p) = \ln p + 1$ を用いて、$y = 2xp + p\ln p$ を x について微分すると

$$p = 2p + 2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + (\ln p + 1)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \quad\Longrightarrow\quad -p = (2x + \ln p + 1)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

先ほどと同様に、$p \neq 0$ から $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x \neq 0$ が従うので

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = -\frac{2x + \ln p + 1}{p} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{2}{p}x = -\frac{\ln p + 1}{p}.$$

積分因子はやはり p^2 である：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p^2x) = -p\ln p - p.$$

$u = \ln p$、$\mathrm{d}v = p\,\mathrm{d}p$ として部分積分（integration by parts）を行うと

$$\int p\ln p\,\mathrm{d}p = \tfrac{1}{2}p^2\ln p - \int \tfrac{1}{2}p\,\mathrm{d}p = \tfrac{1}{2}p^2\ln p - \tfrac{1}{4}p^2,$$

よって

$$\begin{aligned} p^2 x &= -\tfrac{1}{2}p^2 \ln p + \tfrac{1}{4}p^2 - \tfrac{1}{2}p^2 + B \\ &= -\tfrac{1}{2}p^2 \ln p - \tfrac{1}{4}p^2 + B, \end{aligned}$$

であり

$$x = -\tfrac{1}{2}\ln p - \tfrac{1}{4} + Bp^{-2}.$$

$x = -\frac{1}{4}$ のとき $p = 1$ であることを用いると、$-\frac{1}{4} = 0 - \frac{1}{4} + B$ となるので $B = 0$ であり

$$x = -\tfrac{1}{2}\ln p - \tfrac{1}{4},$$

これが示すように求められた結果である。

y を求めるために、この式が $\ln p = -2x - \frac{1}{2}$ を意味することに注目する。至るところで p を代入するより、これをもとの方程式に代入するほうが早い：

$$y = 2xp + p\left(-2x - \tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{1}{2}p,$$

そして $p = \mathrm{e}^{-2x-1/2}$ であるから

$$y = -\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x-\frac{1}{2}}.$$

検算：$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-2x-\frac{1}{2}} = p$ となり、当然そうなるべきとおりであり、$x = -\frac{1}{4}$ ではこれは $\mathrm{e}^0 = 1$ である。

検算

各小問で、最終的に得た y を微分し、その導関数が実際に用いた p に一致することを確かめる。$y = -\frac{3}{4}x^2$ からは $p = -\frac{3}{2}x$ が得られ、$p^2 + 2xp = \frac{9}{4}x^2 - 3x^2 = y$ となる。小問 (ii) では、$x = 0$ において $p = \mathrm{e}^{-1/2} \approx 0.6065$ であり、$2xp + p\ln p = 0.6065 \times (-0.5) \approx -0.3033 = y(0)$ となる。また数値的な検証により、A と B に無作為な値を与えたとき、一般のパラメータ曲線 $(x(p), y(p))$ の傾き $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ が p に等しいことも確認した。

よくある間違い

- 左辺の $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ が p であることを忘れ、打ち消し合って $-p$ が残ることに気づかない。
- 初期条件（initial condition）を用いる前に積分定数（constant of integration）を落としてしまう。ここではたまたま 0 になるが、それは定数を求めてみて初めてわかることである。

- 小問 (ii) で、$p\ln p$ を x について微分したものを $\ln p$ だけにしてしまい、因子 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ と余分な $+1$ を忘れる。

STEP のその先へ

$y = xf(p) + g(p)$ の形の方程式はダランベール（d'Alembert）の方程式（あるいはラグランジュ（Lagrange）の方程式）と呼ばれ、特別な場合 $y = xp + g(p)$ はクレロー（Clairaut）の方程式である。p を独立変数（independent variable）として扱う工夫は、これらすべてに通用する。これらの方程式は**特異解**（singular solutions）をもつこともある。特異解は $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ で割った箇所から生じ、一般解の族の包絡線（envelope）となっている。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）では、一階微分方程式とその解法が扱われている。

解答例

STEP III 2008、第 7 問

純粋数学 ・ 複素数と図形

STEP III 2008、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s3-q7

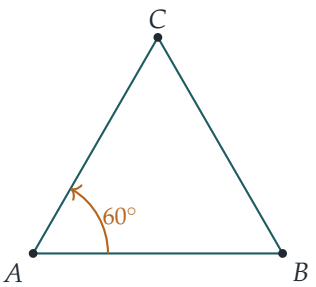
鍵となる考え方

アルガン図（Argand diagram）において、$e^{i\pi/3}$ を掛けることは反時計回り（anticlockwise）に 60° 回転（rotation）させることである。正三角形（equilateral triangle）とは、まさに一辺をある頂点（vertex）のまわりに 60° 回転させたものなので、冒頭の関係式によって「正三角形である」という条件は a, b, c についての一次方程式に置き換わる。その後は、両小問とも帳簿づけのような作業である。新しい点をすべて元の点で表し、求める条件を確かめればよい。その条件とは、平行四辺形（parallelogram）であれば $p + r = q + s$、正三角形であれば冒頭の関係式そのものである。

解答

冒頭の関係式

$\omega = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ とおく。ABC は正三角形なので、AC は AB と同じ長さをもち、AB と 60° の角をなす。三角形の頂点は反時計回りに並んでいるので、$\overrightarrow{AB}$ から $\overrightarrow{AC}$ へは**反時計回り**に回る。したがって、$\overrightarrow{AC}$ は $\overrightarrow{AB}$ を $+60°$ 回転させたものである。



$$c-a=\omega(b-a)=\tfrac{1}{2}(b-a)+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}(b-a),$$
$$2c=2a+(b-a)+\mathrm{i}\sqrt{3}(b-a)=(a+b)+\mathrm{i}\sqrt{3}(b-a),$$

となり、これが求める結果である。

頂点が時計回り（clockwise）に並んでいる場合は、$\overrightarrow{AC}$ は $\overrightarrow{AB}$ を -60° 回転させたものなので、$\bar{\omega}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ として $c-a=\bar{\omega}(b-a)$ となる。同じ計算により

$$2c=(a+b)-\mathrm{i}\sqrt{3}(b-a).$$

を得る。逆（converse）に、どちらかの関係式を満たす c は ABC を正三角形にする。なぜなら、それぞれの関係式は $c-a=\omega^{\pm1}(b-a)$ と同値だからである。したがって、三角形が正三角形であることを**示す**には、これらの関係式のどちらか一方を確かめれば十分である。

小問 (i)

4 つの頂点はこちらで選んでよく、それぞれを辺のどちら側に置いてもよい。冒頭の結果を、新しい頂点を c の役割として用いて、次のようにおく。

$$\begin{aligned}
2p&=(d+e)+\mathrm{i}\sqrt{3}(e-d) && (D,E,P\text{ 反時計回り}),\\
2q&=(e+f)-\mathrm{i}\sqrt{3}(f-e) && (E,F,Q\text{ 時計回り}),\\
2r&=(f+g)+\mathrm{i}\sqrt{3}(g-f) && (F,G,R\text{ 反時計回り}),\\
2s&=(g+d)-\mathrm{i}\sqrt{3}(d-g) && (G,D,S\text{ 時計回り}).
\end{aligned}$$

冒頭の議論により、このとき PDE, QEF, RFG, SGD はいずれも正三角形である。

> ? **考えてみよう** すべての三角形を辺の同じ側に置くのではなく、向きを交互にするのはなぜか。

実際に試してみるとよい。$PQRS$ が平行四辺形であるのは、$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$、すなわち $q-p=r-s$、つまり $p+r=q+s$ のときであり、そのときに限る。（これは対角線（diagonal）PR と QS が同じ中点（midpoint）をもつことを意味する。）上の選び方のもとでは

$$2(p+r)=(d+e+f+g)+\mathrm{i}\sqrt{3}\,(e-d+g-f),$$
$$2(q+s)=(d+e+f+g)-\mathrm{i}\sqrt{3}\,(f-e+d-g)=(d+e+f+g)+\mathrm{i}\sqrt{3}\,(e-d+g-f).$$

これらは等しいので、$p+r=q+s$ となり、$PQRS$ は平行四辺形である。もし代わりにすべてで「$+$」の符号を用いていたら、虚部は $\mathrm{i}\sqrt{3}(e-d+g-f)$ と $\mathrm{i}\sqrt{3}(f-e+d-g)$ になっていたはずである。これらが一致するのは $d+f=e+g$ のとき、すなわち

$DEFG$ がもともと平行四辺形であるときに限られる。符号を交互にすることで、どのような四角形（quadrilateral）に対しても $\sqrt{3}$ の項がそろうのである。

（四角形によっては、4 点がたまたま一直線上にある（collinear）こともあり、その場合は退化した（degenerate）平行四辺形となる。その場合でも条件 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ は成り立っている。）

小問 (ii)

LMN の頂点が時計回りに並んでいる場合は、図全体を実軸（real axis）に関して折り返す（すなわち複素共役（complex conjugate）をとる）。折り返しによって、正三角形であること、重心（centroid）、および辺上の三角形が外側に描かれているかどうかは保たれるので、LMN の頂点が**反時計回り**に並んでいる場合を考えれば十分である。

このとき N は有向辺 $L \to M$ の左側にあり、LM 上の外側の三角形 LMX の頂点 X は右側にあるので、L, M, X は時計回りに並ぶ。

$$2x = (l+m) - \mathrm{i}\sqrt{3}(m-l).$$

LMX の重心は

$$u = \tfrac{1}{3}(l+m+x) = \tfrac{1}{3}(l+m) + \tfrac{1}{6}(l+m) - \tfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{6}(m-l) = \frac{l+m}{2} + \frac{\mathrm{i}(l-m)}{2\sqrt{3}},$$

である。ここで $\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ を用いた。反時計回りの順序を保つ巡回 $l \to m \to n \to l$ を施すと

$$v = \frac{m+n}{2} + \frac{\mathrm{i}(m-n)}{2\sqrt{3}}, \qquad w = \frac{n+l}{2} + \frac{\mathrm{i}(n-l)}{2\sqrt{3}}.$$

を得る。U, V, W が反時計回りの関係式 $2w = (u+v) + \mathrm{i}\sqrt{3}(v-u)$ を満たすことを示す。まず

$$u + v = \tfrac{1}{2}l + m + \tfrac{1}{2}n + \frac{\mathrm{i}(l-n)}{2\sqrt{3}},$$
$$v - u = \tfrac{1}{2}(n-l) + \frac{\mathrm{i}(2m-l-n)}{2\sqrt{3}},$$
$$\mathrm{i}\sqrt{3}(v-u) = \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}(n-l) - \tfrac{1}{2}(2m-l-n).$$

考えてみよう m はどのようにして消えるのか。

1 行目と 3 行目を加える。実部は $\frac{1}{2}l + m + \frac{1}{2}n - m + \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}n = l + n$ となるので、m は実部から打ち消され、虚部にはもともと現れていない。虚部はまとめると

$$(n-l)\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\Big)\mathrm{i} = (n-l)\,\frac{3-1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{i} = \frac{\mathrm{i}(n-l)}{\sqrt{3}}.$$

となる。したがって

$$(u+v)+\mathrm{i}\sqrt{3}(v-u)=(n+l)+\frac{\mathrm{i}(n-l)}{\sqrt{3}}=2w.$$

冒頭の結果（およびその逆）により、UVW は頂点が反時計回りに並ぶ正三角形である。これがナポレオンの定理（Napoleon's theorem）である。

検算

- 冒頭の関係式：$a=0, b=2$ とすると $c=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ となり、頂点は実軸の上側にある。反時計回りの三角形であるから、そうなるべきである。
- 小問 (ii) で $l=0, m=6, n=6\mathrm{i}$ とする：公式から $u=3-\mathrm{i}\sqrt{3}, v=(3+\sqrt{3})(1+\mathrm{i})$, $w=-\sqrt{3}+3\mathrm{i}$ を得る。このとき UVW の 3 辺の長さの 2 乗はすべて $24+12\sqrt{3}$ である。
- 冒頭の関係式、平行四辺形の条件、ナポレオンの定理を、10^4 個のランダムな配置について数値的に検証した。また、小問 (i) ですべての辺に同じ向きを用いると一般には成り立たないことも確認した。

よくある間違い

- 小問 (ii) で外側の向きを取り違えること。反時計回りの LMN に対しては、LM 上の外側の頂点は L, M から見て**時計回り**の位置にある。符号を誤ると、代わりに内ナポレオン三角形が得られてしまう。（こちらも正三角形ではあるが、問題が求めているものではない。）
- 小問 (i) で、4 つの三角形をすべて同じ向きにしようとすること。それがうまくいくのは、$DEFG$ 自体が平行四辺形であるときだけである。
- 平行四辺形の判定に $p+q=r+s$ を用いること。対になるのは向かい合う頂点どうしであり、条件は $p+r=q+s$ である。

STEP のその先へ

根底にある考え方は、写像 $z\mapsto \alpha z+\beta$ がちょうど平面の回転、拡大（enlargement）、平行移動（translation）の全体であり、そのため幾何的な条件が $\mathbb{C}$ 上の一次方程式になる、ということである。冒頭の関係式をうまく言い換えると、ABC が正三角形であるのは $a+\omega^2 b+\omega^4 c=0$ または $a+\omega^4 b+\omega^2 c=0$ のときであり、そのときに限る。こうすると、ナポレオンの定理は数行の計算から自然に導かれる。Needham の *Visual*

Complex Analysis（『ヴィジュアル複素解析』）は、複素数の乗法に対するこの幾何的な見方を見事に展開している。

解答例

STEP III 2008、第 8 問

純粋数学 ・ 級数と漸化式

STEP III 2008、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s3-q8

鍵となる考え方

係数が線形漸化式（linear recurrence）を満たすということは、級数に適切な多項式を掛ければほとんどすべての項が打ち消し合うということである。その多項式は漸化式からそのまま読み取れる。$a_{r+1}+pa_r=0$ からは $1+px$ が、$a_{r+2}+pa_{r+1}+qa_r=0$ からは $1+px+qx^2$ が得られる。残るのは短い多項式だけなので、和は有理関数（rational function）になる。有限和の場合も同じ方法が使えるが、末尾にいくつか余分な項が残る。別の方法として、部分分数分解（partial fractions）を用いれば級数を等比級数（geometric series）に分けることができ、等比級数ならば和の求め方はわかっている。

解答

小問 (i)

ここでは級数は x の項から始まるので、$a_1=\frac{1}{3}$、$a_2=\frac{1}{6}$、$a_3=\frac{1}{12}$ である。各係数は直前の係数の半分であるから、$a_{r+1}-\frac{1}{2}a_r=0$ であり、

$$p=-\tfrac{1}{2}.$$

（定数項はない。漸化式は $a_1,a_2,a_3,\ldots$ を結びつけるものであり、$r=0$ については何も述べていない。）漸化式を解くと $a_r=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}$ を得る。

無限級数の和。 $1-\frac{1}{2}x$ を掛けると

$$\left(1-\tfrac{1}{2}x\right)S=a_1x+\sum_{r\geq 1}\left(a_{r+1}-\tfrac{1}{2}a_r\right)x^{r+1}=\tfrac{1}{3}x,$$

となる。漸化式により括弧の中はすべて 0 になるからである。したがって

$$S = \frac{\frac{1}{3}x}{1-\frac{1}{2}x} = \frac{2x}{3(2-x)}.$$

これは公比 $\frac{1}{2}x$ の等比級数であるから、無限級数の和が存在するのはちょうど $|x| < 2$ のときである。

初めの $n+1$ 項。 これは $x, x^2, \ldots, x^{n+1}$ の項である。$S_{n+1} = \sum_{r=1}^{n+1} a_r x^r$ とおく。同じ掛け算を行うと、途中の項はやはりすべて打ち消し合うが、最高次の項 $-\frac{1}{2}a_{n+1}x^{n+2}$ には相手がいない。

$$\left(1-\tfrac{1}{2}x\right) S_{n+1} = \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{2}a_{n+1}x^{n+2} = \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} x^{n+2} = \tfrac{1}{3}x\left(1-\left(\tfrac{x}{2}\right)^{n+1}\right).$$

よって、$x \neq 2$ のとき

$$S_{n+1} = \frac{2x}{3(2-x)}\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}\right).$$

$x = 2$ のときはすべての項が $\frac{2}{3}$ に等しいので、$S_{n+1} = \frac{2}{3}(n+1)$ である。

小問 (ii)

今度は $a_0 = 2$、$a_1 = 8$、$a_2 = 18$、$a_3 = 37$ である。漸化式に $r = 0$ と $r = 1$ を代入すると、次の 2 式を得る。

$$18 + 8p + 2q = 0, \qquad 37 + 18p + 8q = 0.$$

第 1 式から $q = -9 - 4p$ である。これを第 2 式に代入すると $37 + 18p - 72 - 32p = 0$ となるので、$p = -\frac{5}{2}$、したがって $q = 1$ である。漸化式は

$$a_{r+2} - \tfrac{5}{2}a_{r+1} + a_r = 0.$$

無限級数の和。 $1 + px + qx^2 = 1 - \frac{5}{2}x + x^2$ を掛ける。積における x^{r+2} の係数は、すべての $r \geq 0$ に対して $a_{r+2} - \frac{5}{2}a_{r+1} + a_r = 0$ である。残るのは x^0 と x^1 の係数だけである。

$$\left(1-\tfrac{5}{2}x+x^2\right) T = a_0 + \left(a_1 - \tfrac{5}{2}a_0\right) x = 2 + 3x.$$

分母と分子を 2 倍し、$2 - 5x + 2x^2 = (1-2x)(2-x)$ と因数分解すると

$$T = \frac{4+6x}{(1-2x)(2-x)}.$$

部分分数分解。 $\dfrac{4+6x}{(1-2x)(2-x)} = \dfrac{A}{1-2x} + \dfrac{B}{2-x}$ とおく。隠蔽法（cover-up）を $x=\frac{1}{2}$ で用いると $A = \dfrac{7}{3/2} = \frac{14}{3}$、$x=2$ で用いると $B = \dfrac{16}{-3} = -\frac{16}{3}$ を得る。よって

$$T = \frac{14}{3}\cdot\frac{1}{1-2x} - \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}x}.$$

各項を等比級数として展開すると

$$a_r = \tfrac{14}{3}\,2^r - \tfrac{8}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^r.$$

確認：$r=0,1,2,3$ とすると、それぞれ 2、$\frac{28}{3}-\frac{4}{3}=8$、$\frac{56}{3}-\frac{2}{3}=18$、$\frac{112}{3}-\frac{1}{3}=37$ となり、確かに一致する。

> **考えてみよう** 無限級数の和が実際に存在するのは、どのような x に対してか？

2 つの等比級数がともに収束（converge）する必要があるので、$|2x|<1$ かつ $|\frac{1}{2}x|<1$ でなければならない。第 1 の条件の方が厳しいので、$|x|<\frac{1}{2}$ が必要である。

初めの $n+1$ 項。 これは x^0 から x^n までの項である。各等比級数を $n+1$ 項まで足し合わせると、$x \neq \frac{1}{2}, 2$ のとき

$$\sum_{r=0}^{n} a_r x^r = \frac{14}{3}\cdot\frac{1-(2x)^{n+1}}{1-2x} - \frac{16}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{2-x}.$$

（第 2 の分数は $\frac{8}{3}\cdot\frac{1-(x/2)^{n+1}}{1-x/2}$ の分母と分子を 2 倍したものである。）$x=\frac{1}{2}$ または $x=2$ のときは、対応する等比級数の和は単に 1 を $n+1$ 個足したものになる。

検算

- $|x|<\frac{1}{2}$ として $n\to\infty$ とすると、累乗 $(2x)^{n+1}$ と $(x/2)^{n+1}$ は 0 に近づき、T の部分分数分解の形が得られる。小問 (i) でも $|x|<2$ のとき同じことが起こる。
- $n=0$ とすると、小問 (i) の式は $\frac{2x}{3(2-x)}\cdot\frac{2-x}{2} = \frac{1}{3}x$ を与える。小問 (ii) の式は $\frac{14}{3} - \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{2} = 2$ を与える。どちらも確かに初項になっている。
- 数値的には、$x=0.3$ のとき $T = \dfrac{5.8}{0.4\times 1.7} \approx 8.5294$ であり、$2+8x+18x^2+37x^3+\cdots$ の部分和はこの値に近づいていく。

よくある間違い

- 小問 (i) で、初項を a_0x^0 としてしまうこと。級数は x^1 から始まるので、初めの $n+1$ 項は x^{n+1} までである。
- **有限**和に $1+px$ を掛けるときに、末尾に残る項を忘れること。$(\frac{x}{2})^{n+1}$ という因子を生み出すのはまさにこれらの項である。
- T について $|x|<2$ と答えてしまうこと。収束半径（radius of convergence）を決めるのは、原点に近い方の根 $x=\frac{1}{2}$ である。

STEP のその先へ

べき級数（power series）$\sum a_r x^r$ は数列 (a_r) の**母関数**（generating function）である。定数係数の線形漸化式からは必ず有理関数の母関数が得られ、その関数の極（pole）によって、a_r の一般項の閉じた式と収束半径の両方が決まる。母関数は組合せ論や確率論における標準的な道具であり、べき級数の収束半径については大学 1 年次の解析学で丁寧に扱われる。収束に関する側面については、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）がよく解説している。

解答例

STEP III 2008、第 9 問

力学 ・ 摩擦と変化する力

STEP III 2008、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

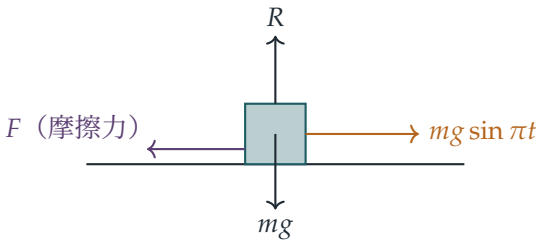
step.maths.org/questions/08-s3-q9

鍵となる考え方

摩擦には二つの状態がある。質点（particle）が静止している間は、静止摩擦力（static friction）が加えられた力とちょうど釣り合う（ただし限度 μmg まで）ので、加速度は 0 である。質点が滑り始めると、摩擦力は一定の大きさ μmg をもち、速度と逆向きにはたらく。したがって加速度のグラフは、値が 0 の平らな部分と、平行移動した正弦曲線とをつないだものになる。「静止する」とは、運動開始から加速度のグラフの下の面積として表される速度が、再び 0 に戻ることを意味する。

解答

物体を粗い水平面（rough horizontal plane）上の質点としてモデル化する。垂直抗力（normal reaction）は $R = mg$ であるから、摩擦力の大きさは静止時には高々 μmg、滑っているときにはちょうど μmg である。$\sin \pi t > 0$ のときの力の向きを正の向きとし、加速度と速度をそれぞれ a、v とする。



動き始め

鉛直方向の力の釣り合いより $R = mg$ である。質点が静止している間、水平方向の釣り合いには大きさ $mg|\sin \pi t|$ の摩擦力が必要であり、これは $mg|\sin \pi t| \le \mu mg$ である限り可能である。質点が初めて動くのは、加えられた力が初めて最大摩擦力（limiting friction）を上回るときであるから、（$\mu < 1$ のとき）

$$\sin \pi T_0 = \mu, \qquad \text{すなわち} \qquad T_0 = \frac{1}{\pi} \arcsin \mu, \quad 0 \le T_0 < \tfrac{1}{2}.$$

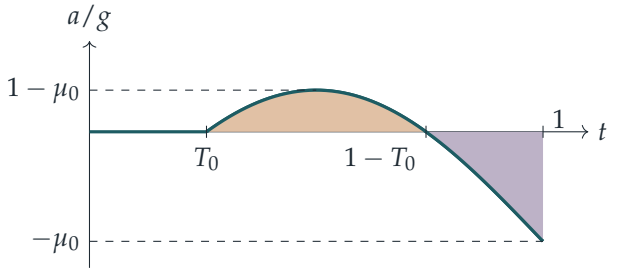
となる。（$\mu \ge 1$ ならば質点は決して動かない。）

小問 (i)

$0 \le t \le T_0$ では質点は静止しているので $a = 0$ である。$t > T_0$ では質点は正の向きに滑り、摩擦力 $\mu_0 mg$ が後ろ向きにはたらくので、ニュートンの第二法則（Newton's second law）より

$$a = g(\sin \pi t - \mu_0) \qquad (\text{ただし} v > 0).$$

を得る。これは $t = T_0$ で 0 から始まり、$t = \frac{1}{2}$ で $g(1 - \mu_0)$ まで増加し、（対称性 $\sin \pi(1 - t) = \sin \pi t$ により）$t = 1 - T_0$ で再び 0 に戻り、その後は負となって $t = 1$ で $-\mu_0 g$ に達する。



速度は T_0 からのこのグラフの下の面積である。曲線が軸より上にある間（琥珀色の領域）は速度が増加し、$1 - T_0$ 以降（紫色の領域）は減少する。二つの面積が釣り合うまで速度は正のままであり、釣り合った瞬間に質点は止まる。したがって

$$v(1) = \int_{T_0}^{1} g(\sin \pi t - \mu_0)\, \mathrm{d}t = 0.$$

となればよい。ここで

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^{1} (\sin \pi t - \mu_0)\, \mathrm{d}t &= \Big[-\frac{\cos \pi t}{\pi} \Big]_{T_0}^{1} - \mu_0 (1 - T_0) \\ &= \frac{1 + \cos \pi T_0}{\pi} - \mu_0 + \mu_0 T_0. \end{aligned}$$

である。これを 0 とおいて π を掛けると

$$1+\cos\pi T_0-\mu_0\pi+\mu_0\,\pi T_0=0.$$

となる。

考えてみよう $\cos\pi T_0$ を μ_0 で表すとき、符号はどちらになるか？

$0\le\pi T_0<\frac{\pi}{2}$ であるから余弦は正であり、$\cos\pi T_0=\sqrt{1-\sin^2\pi T_0}=(1-\mu_0^2)^{1/2}$ となる。また $\pi T_0=\arcsin\mu_0$ である。これらを両方代入すると

$$1+\left(1-\mu_0^2\right)^{\frac{1}{2}}-\mu_0\pi+\mu_0\arcsin\mu_0=0,$$

となり、示すべき式が得られた。（数値的には $\mu_0\approx0.7246$、$T_0\approx0.258$ である。）

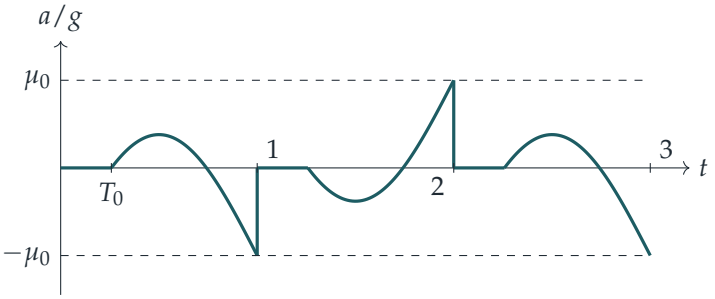
小問 (ii)

$t=1$ において質点は静止しており、加えられた力は $mg\sin\pi=0$ である。$1<t<2$ では力は負の向きで、大きさは $mg|\sin\pi t|$ である。これは $|\sin\pi t|=\mu_0$ となるまでは $\mu_0 mg$ より小さく、そうなるのは（$\sin\pi(1+T_0)=-\sin\pi T_0$ より）初めて $t=1+T_0$ のときである。したがって $1\le t\le1+T_0$ では質点は静止したままで、$a=0$ である。

その後、質点は負の向きに滑り、摩擦力は正の向きにはたらくので

$$a=g(\sin\pi t+\mu_0).$$

となる。$\sin\pi(t+1)=-\sin\pi t$ であるから、これは小問 (i) における時刻 $t-1$ での加速度のちょうど符号を反転したものである。よって $[1,2]$ における運動は $[0,1]$ における運動の鏡像になる。速度は以前の速度の符号を反転したものとなるので、質点は同じ距離を戻ったうえで $t=2$ で再び静止する。このとき質点は静止しており、加えられた力は 0 であって、これは $t=0$ での状況とまったく同じである。したがって $[2,3]$ では $[0,1]$ の運動が繰り返される。



$t = 1$ と $t = 2$ における縦の線分は、加速度の跳びを表している。質点が止まった瞬間に、動摩擦力（kinetic friction、大きさ $\mu_0 mg$）が静止摩擦力に置き換わり、静止摩擦力は 0 である加えられた力と釣り合いさえすればよいからである。

$\mu = \mu_0$ のときの運動。 質点は $t = T_0$ まで静止し、前方へ滑って $t = 1$ で止まり、$t = 1 + T_0$ まで待ってから後方へ滑り、$t = 2$ で出発点に止まる。以下同様である。質点は周期 2 で同じ区間を行き来し、両端でそれぞれ時間 T_0 だけ停止する。（もう一度積分すると、この区間の長さは $g\left[\mu_0/\pi^2 - (1 - T_0)(1 - \sqrt{1 - \mu_0^2})/(2\pi)\right] \approx 0.0367g$ となるが、これは問われていない。）

$\mu = 0$ のときの運動。 このとき $T_0 = 0$ であり、常に $a = g \sin \pi t$ であるから

$$v = \frac{g}{\pi}(1 - \cos \pi t) \geq 0, \qquad x = \frac{g}{\pi}\left(t - \frac{\sin \pi t}{\pi}\right).$$

となる。速度は決して負にならず、0 となるのは $t = 0, 2, 4, \ldots$ のときだけである。したがって質点は決して引き返さない。偶数の時刻に一瞬静止しながら、押し出されるように前進し、周期 2 ごとに $2g/\pi$ だけ進む。平均の速さは g/π である。粗い面の場合に質点を $t = 1$ で止めるのは摩擦である。摩擦がなければ、力の後ろ向きの半周期は質点を速度 0 まで減速させるだけである。

検算

小問 (i) の方程式を二分法（bisection）で解くと $\mu_0 \approx 0.72461$ となり、よって $T_0 \approx 0.25798$ である。$g = 9.8$ として、静止摩擦と動摩擦を切り替えながら $0 \leq t \leq 3$ における運動を数値シミュレーションすると、質点は $t \approx 0.258$ で動き始め、0.3598 だけ進んで $t = 1.000$ で止まり、$t \approx 1.258$ で戻り始めて $t = 2.000$ で出発点に止まる。これは $0.0367g$ と一致する。$\mu = 0$ の場合、シミュレーションは $x = g(t - \sin \pi t/\pi)/\pi$ と一致する。方程式の簡単な妥当性確認として、$\mu_0 = 0$ のとき左辺は $2 > 0$、$\mu_0 = 1$ のとき $1 - \pi/2 < 0$ であるから、$(0, 1)$ に解が存在する。

よくある間違い

- $t = 0$ から $a = g(\sin \pi t - \mu)$ とすること。T_0 より前は質点は静止しており摩擦は静止摩擦なので、$a = 0$ である。
- 小問 (ii) で質点が向きを変えた後も、摩擦力を同じ向きのままにしておくこと。摩擦力は常に速度と逆向きにはたらく。
- 質点が $t = 1 - T_0$ で止まると考えること。そこで 0 になるのは加速度であって、速度ではない。

STEP のその先へ

「固着」と「滑り」の間で切り替わる摩擦があると、運動方程式は区分的になり、加速度は不連続になる。これはきしむドアや弓で弾くバイオリンの弦の背後にあるスティック・スリップ（stick–slip）現象であり、非平滑力学系（non-smooth dynamical system）の最初の例である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、摩擦のモデルと強制運動をちょうどよい水準で論じている。

解答例

STEP III 2008、第 10 問

力学 ・ 弾性ひもとエネルギー

STEP III 2008、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s3-q10

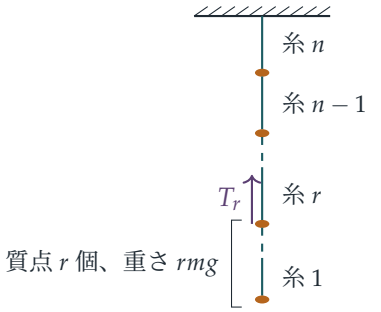
鍵となる考え方

短い糸はそれぞれ、その下にぶら下がっているものすべてを支えているので、その張力（tension）はすぐに書き下せる。そこでフックの法則（Hooke's law）を用いれば、伸び（extension）と蓄えられるエネルギーが求まり、それらの総和は r と r^2 の標準的な和になる。ロープも同じ状況で、質量が連続的に分布しているだけである。ロープを n 個の等しい部分に切り分け、各部分の質量をその下端にある質点とみなし、$n \to \infty$ とすればよい。和は積分になり、長さの式に現れる因子 $\frac{1}{2}$ は、ロープの各部分が平均してロープ全体の重さの半分を支えていることに由来する。

解答

質点をつないだ糸

短い糸はフックの法則に従う軽い弾性糸、おもりは質点としてモデル化する。問題文のとおり糸に下から番号をつけると、糸 r の下には r 個の質点がある。すなわち、糸 r 自身の質点と、糸 $1, \ldots, r-1$ の質点である。



系全体は静止している。糸 r の上端より下にあるもの、すなわち糸 r、糸 $1,\dots,r-1$ およびそれらについた r 個の質点をひとまとめにして考える。これにはたらく外力は、下向きの重力 rmg と、糸 r の上向きの張力 T_r だけである（糸は軽い）。よって

$$T_r = rmg.$$

フックの法則より、糸 r の伸びは

$$x_r = \frac{T_r\,\ell}{\lambda} = \frac{rmg\ell}{\lambda}.$$

したがって、長い糸の長さは

$$\sum_{r=1}^{n}(\ell + x_r) = n\ell + \frac{mg\ell}{\lambda}\sum_{r=1}^{n} r = n\ell + \frac{n(n+1)mg\ell}{2\lambda}.$$

自然長 (natural length) ℓ の糸を x だけ伸ばしたときの弾性エネルギー (elastic energy) は $\lambda x^2/(2\ell)$ である。糸 r については

$$\frac{\lambda}{2\ell}\left(\frac{rmg\ell}{\lambda}\right)^2 = \frac{r^2m^2g^2\ell}{2\lambda},$$

となり、$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を用いると、弾性エネルギーの総和は

$$\frac{m^2g^2\ell}{2\lambda}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)\,m^2g^2\ell}{12\lambda}.$$

重いロープ

考えてみよう 質量が連続的に分布したロープについて、前半の結果はどのように役立つだろうか。

ロープを n 個の等しい部分に切り分ける。各部分の自然長は $\ell = L_0/n$、質量は $m = M/n$ であり、各部分の弾性率（modulus）はロープと同じ λ である（弾性率は部分の長さによらない）。各部分の質量をその下端に集中させると、ちょうど上で考えた長い糸が得られる。$n\to\infty$ とすると各部分は短くなり、質量を集中させたモデルは実際のロープに近づいていく。

長さの式に代入すると、

$$n\ell + \frac{n(n+1)mg\ell}{2\lambda} = L_0 + \frac{n(n+1)}{2\lambda}\cdot\frac{Mg}{n}\cdot\frac{L_0}{n} = L_0 + \frac{MgL_0}{2\lambda}\left(1+\frac{1}{n}\right) \longrightarrow L_0\left(1+\frac{Mg}{2\lambda}\right)$$

$(n\to\infty)$。よって

$$L = L_0\left(1+\frac{Mg}{2\lambda}\right),$$

となり、示すべき式が得られた。

これは直接求めることもできる。ある点より下にあるロープの自然長を s とすると、その点が支える重さは Mgs/L_0 である。そこにある自然長 δs の微小部分の張力は $T = Mgs/L_0$ なので、その伸びは $T\,\delta s/\lambda$ である。これを足し合わせると

$$L - L_0 = \int_0^{L_0} \frac{Mgs}{\lambda L_0}\,\mathrm{d}s = \frac{MgL_0}{2\lambda}.$$

エネルギーについても、同様に代入すると

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{12\lambda}\cdot\frac{M^2g^2}{n^2}\cdot\frac{L_0}{n} = \frac{M^2g^2L_0}{12\lambda}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \longrightarrow \frac{M^2g^2L_0}{6\lambda}.$$

（直接求めるなら、微小部分が蓄えるエネルギーは $T^2\,\delta s/(2\lambda)$ であり、$\int_0^{L_0} \frac{M^2g^2s^2}{2\lambda L_0^2}\,\mathrm{d}s = \frac{M^2g^2L_0}{6\lambda}$ となる。）

これを L、L_0、λ で表すため、長さの式を用いて Mg を消去する。

$$L - L_0 = \frac{MgL_0}{2\lambda} \quad\Longrightarrow\quad Mg = \frac{2\lambda(L-L_0)}{L_0}.$$

したがって、ロープに蓄えられる弾性エネルギーは

$$\frac{L_0}{6\lambda}\cdot\frac{4\lambda^2(L-L_0)^2}{L_0^2} = \frac{2\lambda(L-L_0)^2}{3L_0}.$$

検算

- $n = 1$ のとき、前半の結果から長さは $\ell + mg\ell/\lambda$、エネルギーは $m^2g^2\ell/(2\lambda)$ となる。これは 1 本の糸が 1 個の質点を支える場合であり、正しい。
- 全体の伸びが同じ $e = L - L_0$ で、張力が**一様**なロープと比べてみる。このロープが蓄えるエネルギーは $\lambda e^2/(2L_0)$ である。今回の答えはその $\frac{4}{3}$ 倍であり、これはもっともらしい。伸びは上端付近に集中しており、エネルギーは局所的なひずみの 2 乗に比例して増えるからである。
- 数値で確かめる。$M = 3$、$L_0 = 2$、$\lambda = 50$、$g = 9.8$ とすると、公式からは $L = 2.588$、エネルギー 5.7624 が得られる。$n = 100\,000$ の離散的な鎖では 2.58801 と 5.76249 となり、また $2\lambda(L-L_0)^2/(3L_0) = 5.7624$ である。

よくある間違い

- 糸 r の張力を $(n-r+1)mg$ としてしまう。番号のつけ方では糸 n が最上部にあるので、糸 r が支える質点は r 個である。

- ロープの各部分の弾性率を λ/n としてしまう。弾性率は材質と断面で決まる量であり、長さにはよらない。変わるのはばね定数（stiffness）λ/ℓ のほうである。
- エネルギーを L、L_0、λ で表すよう求められているのに、M と g を含んだまま答えてしまう。

STEP のその先へ

n 個の集中質量から連続的なロープへ移行することは、連続体力学（continuum mechanics）の基本的な手法である。張力は関数 $T(s)$ となり、フックの法則は局所的な応力（stress）とひずみ（strain）の関係となり、エネルギーはエネルギー密度（energy density）の積分となる。同じ質点とばねの鎖を振動させると、その極限として弦の波動方程式（wave equation）が得られる。これらの考え方がどのように展開されるかを見るには、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい。

解答例

STEP III 2008、第 11 問

力学 ・ 回転の力学

STEP III 2008、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

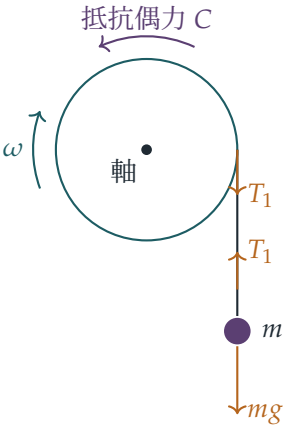
step.maths.org/questions/08-s3-q11

鍵となる考え方

偶力（couple）が一定であれば角減速度（angular deceleration）も一定である。したがって糸が外れた後、車輪は「suvat」の式の回転版に従い、最初の結果は「距離 = 平均の速さ × 時間」にすぎない。同じ段階から、抵抗偶力の大きさを I を用いて表すこともできる。下降の段階では、エネルギーの式を用いるのが自然である。各部分がどれだけ動くかはわかっており、一定の偶力に逆らってする仕事は単に偶力 × 角度だからである。

解答

モデル。車輪は固定された滑らかな軸のまわりを回転する剛体（rigid body）であり、大きさ C が一定の抵抗偶力だけが例外として働く。この偶力は運動の全過程（質点が下降している間も、その後も）を通じて働く。糸は軽く伸び縮みせず、滑らないので、糸がつながっている間は質点の速さは $v = r\omega$ である。ここで ω は車輪の角速度（angular speed）である。



糸は車輪の右側から垂れ下がっているので、質点が落下するにつれて車輪は時計回りに回転し、偶力 C は運動を妨げる向き、すなわち反時計回りに働く。（エネルギーを用いるので、実際には糸の張力（tension）T_1 は必要ない。）

糸が外れた後

このとき車輪に働く偶力は C だけなので、軸のまわりのモーメントを考えると

$$I\dot{\omega} = -C,$$

となり、角減速度 C/I は一定である。したがって角速度は時間 T の間に ω_0 から 0 まで**一次関数的に**減少するので、

$$\omega_0 = \frac{C}{I}T, \qquad \text{すなわち} \qquad C = \frac{I\omega_0}{T}. \tag{1}$$

角速度が一次関数的に減少するとき、平均の角速度は $\frac{1}{2}(\omega_0 + 0)$ であり、回転した角度は平均の角速度と時間の積である。その角度は n_2 回転、すなわち $2\pi n_2$ ラジアンなので、

$$\tfrac{1}{2}\omega_0 T = 2\pi n_2,$$

が成り立ち、これが最初の結果である。（これは $s = \frac{1}{2}(u+v)t$ の回転版である。）またこれより

$$\omega_0 = \frac{4\pi n_2}{T}, \qquad \text{よって (1) より} \qquad C = \frac{4\pi n_2 I}{T^2}. \tag{2}$$

質点が下降する間

車輪が n_1 回転、すなわち $2\pi n_1$ ラジアン回転する間に、糸は長さ $2\pi n_1 r$ だけほどけるので、質点は距離 $2\pi n_1 r$ だけ落下する。糸が外れる瞬間、車輪の角速度は ω_0 であり、糸は滑っていないので質点の速さは $r\omega_0$ である。

考えてみよう 抵抗があるのに、なぜここでエネルギーを用いることができるのだろうか？

エネルギーは保存されないが、仕事とエネルギーの原理（work–energy principle）は依然として成り立つ。すなわち、位置エネルギー（potential energy）の減少量は、運動エネルギー（kinetic energy）の増加量と抵抗に逆らってした仕事の和に等しい。一定の偶力 C に逆らって角度 θ だけ回転するときにする仕事は $C\theta$ である。これは一定の力に逆らってする仕事が力 $\times$ 距離であるのと同様である。糸は軽く伸び縮みせず滑らないので、張力が系全体にする仕事の総和は 0 である。糸が車輪にする仕事は、糸が質点から奪う仕事とちょうど等しいからである。

よって、放してから糸が外れるまでについて

$$mg\,(2\pi n_1 r) = \tfrac{1}{2}m(r\omega_0)^2 + \tfrac{1}{2}I\omega_0^2 + C\,(2\pi n_1).$$

ここで (2) の ω_0 と C を代入すると

$$2\pi mgrn_1 = \tfrac{1}{2}\,(mr^2 + I)\,\frac{16\pi^2 n_2^2}{T^2} + 2\pi n_1 \cdot \frac{4\pi n_2 I}{T^2}.$$

両辺に $T^2/(2\pi)$ を掛けると

$$\begin{aligned} mgrn_1 T^2 &= 4\pi n_2^2\,(mr^2 + I) + 4\pi n_1 n_2 I \\ &= 4\pi mr^2 n_2^2 + 4\pi n_2(n_1 + n_2)\,I. \end{aligned}$$

整理して、正の数 $4\pi n_2(n_1 + n_2)$ で割ると

$$I = \frac{mgrn_1 T^2 - 4\pi mr^2 n_2^2}{4\pi n_2(n_1 + n_2)},$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

- **次元**（*dimensions*）。分子の二つの項 $mgrT^2$ と mr^2 はどちらも慣性モーメント（moment of inertia）の単位（$\mathrm{kg\,m^2}$）をもち、n_1、n_2 は無次元の数である。
- **数値による確認。** $I = 0.5\,\mathrm{kg\,m^2}$、$m = 1\,\mathrm{kg}$、$r = 0.2\,\mathrm{m}$、$C = 0.5\,\mathrm{N\,m}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$n_1 = 5$ として運動を数値的に追った。その結果、$\omega_0 \approx 13.03\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$、$T \approx 13.03\,\mathrm{s}$、$n_2 \approx 13.52$ が得られる。このとき $\frac{1}{2}\omega_0 T \approx 84.94 \approx 2\pi n_2$ であり、公式からは $I = 0.5000$ が得られる。
- **抵抗がない場合。** $C \to 0$ のとき車輪は止まらないので、T と n_2 はともに無限大になる。公式の分子は T^2 のように増大し、分母は $n_2^2 \propto T^2$ のように増大するので、公式は妥当なふるまいをする。

よくある間違い

- 下降中に抵抗に逆らってする仕事を入れ忘れる。問題文には偶力が一定であると書かれており、偶力は糸が外れた後だけでなく常に働いている。これを入れないと公式は誤ったものになる。上の例では、I は 0.5 ではなく $I \approx 0.39$ となってしまう。
- 質点の運動エネルギー $\frac{1}{2}mr^2\omega_0^2$ を忘れる。$-4\pi mr^2 n_2^2$ の項はここから生じる。
- 回転数とラジアンを混同する。n 回転は $2\pi n$ ラジアンである。

STEP のその先へ

これは巧みな実験方法である。車輪が止まるまでの時間を測り、回転数を数えることで、慣性モーメントと軸受けの摩擦を、どちらも事前に知らなくても同時に測定できるのである。大学の力学では、これが剛体の回転の完全な理論へと発展する。そこでは角運動量（angular momentum）とトルク（torque）がそれぞれ運動量と力の役割を果たし、任意の軸のまわりに回転する物体に対しては慣性モーメントはテンソル（tensor）になる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）はこれを丁寧に展開しており、まさにこのような趣の問題を数多く収録している。

解答例

STEP III 2008、第 12 問

確率・統計 ・ 積率母関数

STEP III 2008、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s3-q12

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.24 節「**中心極限定理**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/clt.html

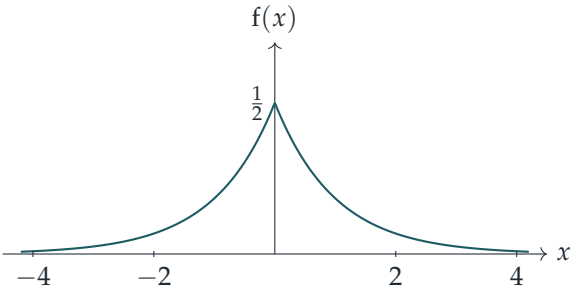
鍵となる考え方

確率密度関数（density）に含まれる絶対値（absolute value）によって、どの積分も $x < 0$ と $x > 0$ の二つに分かれ、それぞれは単純な指数関数の積分になる。その後は、積率母関数（moment generating function）に関する二つの事実だけで問題全体が進む。一つは、独立（independent）な確率変数の和の積率母関数はそれぞれの積率母関数の積になること、もう一つは $\mathrm{M}_{aY}(\theta) = \mathrm{M}_Y(a\theta)$ である。対数（logarithm）をとると n 乗が「n 倍の小さな量」に変わり、これはまさにマクローリン級数（Maclaurin series）が扱える形である。これは中心極限定理（central limit theorem）であり、すべての段階を手計算で実行できる場合に見ているのである。

解答

グラフの概形

この密度関数は偶関数であり、$x = 0$ で最大値 $\frac{1}{2}$ をとる。そこでは鋭い角になっており（左微分係数と右微分係数はそれぞれ $+\frac{1}{2}$ と $-\frac{1}{2}$ である）、両側で指数関数的に 0 へ減衰する。



積率母関数

定義より $\mathrm{M}_X(\theta) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta X})$ である。0 で積分を分けると、

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_X(\theta) &= \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(1+\theta)x}\,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(1-\theta)x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2(1+\theta)} + \frac{1}{2(1-\theta)} = \frac{(1-\theta)+(1+\theta)}{2(1-\theta^2)} = \frac{1}{1-\theta^2}.\end{aligned}$$

第 1 の積分は $1+\theta > 0$ のときに限り、第 2 の積分は $1-\theta > 0$ のときに限り収束する。したがってこの式は $-1 < \theta < 1$ で成り立ち、$\theta = 0$ の近くで必要なのはこれだけである。以上で求める結果が得られた。

分散（variance）を求めるため、$|\theta| < 1$ において等比級数（geometric series）として展開する：

$$\mathrm{M}_X(\theta) = 1 + \theta^2 + \theta^4 + \cdots.$$

これを $\mathrm{M}_X(\theta) = 1 + \mathrm{E}(X)\,\theta + \frac{1}{2}\mathrm{E}(X^2)\,\theta^2 + \cdots$ と比較すると、$\mathrm{E}(X) = 0$ および $\frac{1}{2}\mathrm{E}(X^2) = 1$ を得る。よって

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 = 2.$$

（2 回微分して $\theta = 0$ とおいても同じ結果が得られるが、級数を使う方が速い。）

カエル：$Y/\sqrt{2n}$ の積率母関数

跳躍 $X_1, \ldots, X_n$ は独立であるから、$\mathrm{e}^{\theta X_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\theta X_n}$ も独立であり、したがってそれらの積の期待値（expectation）は期待値の積に等しい：

$$\mathrm{M}_Y(\theta) = \mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{\theta X_1}\cdots\mathrm{e}^{\theta X_n}\big) = \prod_{i=1}^{n}\mathrm{M}_{X_i}(\theta) = (1-\theta^2)^{-n}.$$

$Z = Y/\sqrt{2n}$ とおくと、$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta Z}) = \mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{(\theta/\sqrt{2n})Y}\big) = \mathrm{M}_Y\big(\theta/\sqrt{2n}\big)$ であるから、

$$\mathrm{M}_Z(\theta) = \left(1 - \frac{\theta^2}{2n}\right)^{-n}, \qquad |\theta| < \sqrt{2n}.$$

$\sqrt{2n}$ で割るのは自然なことである。$\mathrm{Var}(Y) = 2n$ なので、Z は平均 0、分散 1 をもつ。

極限

θ を固定する。$n > \frac{1}{2}\theta^2$ となれば $0 \le \theta^2/(2n) < 1$ であるから、対数をとって、$|u| < 1$ に対する $\ln(1-u) = -u - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{3}u^3 - \cdots$ を用いることができる：

$$\begin{aligned}\ln \mathrm{M}_Z(\theta) &= -n \ln\left(1 - \frac{\theta^2}{2n}\right) = n\left(\frac{\theta^2}{2n} + \frac{\theta^4}{8n^2} + \frac{\theta^6}{24n^3} + \cdots\right) \\ &= \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{8n} + \frac{\theta^6}{24n^2} + \cdots .\end{aligned}$$

考えてみよう この級数の残りの部分が $n \to \infty$ のとき本当に消えることは、どうすればわかるだろうか？

$u = \theta^2/(2n)$ とおくと、初項より後の部分はすべて合わせて $n\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + \cdots\right) \le n \cdot \frac{1}{2}u^2(1 + u + u^2 + \cdots) = \dfrac{nu^2}{2(1-u)} = \dfrac{\theta^4}{8n(1-u)}$ であり、$u \to 0$ よりこれは 0 に収束する。よって $\ln \mathrm{M}_Z(\theta) \to \frac{1}{2}\theta^2$ であり、exp は連続であるから、

$$\mathrm{M}_{Y/\sqrt{2n}}(\theta) \to \exp\left(\tfrac{1}{2}\theta^2\right) \quad \text{ただし} n \to \infty,$$

となり、求める結果が示された。

跳躍の最小回数

この極限は標準正規分布（standard Normal）の積率母関数であるから、n が大きいとき $Z = Y/\sqrt{2n}$ は近似的に $\mathrm{N}(0,1)$ に従うとみなす。「出発点から 25 cm 以上離れた位置に着地する」とは、どちらの向きであれ $|Y| \ge 25$ となることであるから、

$$\mathrm{P}(|Y| \ge 25) = \mathrm{P}\left(|Z| \ge \frac{25}{\sqrt{2n}}\right) \approx 2\left(1 - \Phi\left(\frac{25}{\sqrt{2n}}\right)\right).$$

この確率は n とともに増加する（カエルはより遠くまで散らばる）ので、これが 5% に達する最小の n を求めればよい。$\Phi(1.96) = 0.975$ であるから、

$$\frac{25}{\sqrt{2n}} \le 1.96 \iff 2n \ge \left(\frac{25}{1.96}\right)^2 \approx 162.7 \iff n \ge 81.3.$$

が必要である。したがって跳躍の最小回数は $n = 82$ である。（$n = 81$ のとき近似確率は約 4.95%、$n = 82$ のときは約 5.09% である。）

検算

- $\mathrm{M}_X(0) = 1$ であり、これはどの積率母関数でも成り立つべきことである。また M_X は偶関数であり、グラフの概形の対称性と一致する。

- $\int x^2 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ の数値積分（numerical quadrature）は 2.0000 を与え、$\int \mathrm{e}^{0.3x}\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ の数値積分は $1.0989 = 1/0.91$ を与える。
- $\theta = 1$ のとき、$(1-\frac{1}{2n})^{-n}$ は $n = 10$ で 1.6702、$n = 100$ で 1.6508 であり、$\mathrm{e}^{1/2} = 1.6487$ に近づいている。
- 10^5 匹のカエルがそれぞれラプラス（Laplace）分布に従う跳躍を 82 回行うシミュレーションでは、約 5.1% が出発点から 25 cm 以上離れた位置で終わった。

よくある間違い

- 片側（one-tailed）の値 1.645 を使ってしまう。カエルはどちら側にも 25 cm 離れた位置に行き得るので、両側の裾を数えなければならない。
- $\mathrm{M}_{Y/\sqrt{2n}}(\theta) = \mathrm{M}_Y(\theta)/\sqrt{2n}$ と書いてしまう。確率変数を定数倍すると、その積率母関数の**引数**が定数倍されるのである。
- 81.3 を最も近い整数に丸めて $n = 81$ と答えてしまう。$n = 81$ では確率は 5% をわずかに下回る。

STEP のその先へ

ここで証明したのはラプラス分布に従う歩幅に対する中心極限定理であり、一般の場合の証明も同じ道筋をたどる。すなわち $\ln \mathrm{M}(\theta/\sqrt{n})$ を 2 次まで展開し、残りが消えることを示すのである。大学 1 年の講義では「連続性定理（continuity theorem）」に出会うだろう。これは、積率母関数（あるいは常に存在する特性関数（characteristic functions））の収束から確率の収束へ移ることを正当化する定理であり、ここでは信用して受け入れた段階である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）はその両方を扱っている。

解答例

STEP III 2008、第 13 問

確率・統計 ・ 指示変数の和

> **STEP III 2008、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q13

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.10 節「ひもの端を結ぶ」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/loose-ends.html

鍵となる考え方

各ステップで何が起こっても、ひもの本数は必ずちょうど 1 本減る。輪が 1 つできてゲームから取り除かれるか、2 本のひもが 1 本になるかのどちらかだからである。したがって、それまでに何が起こったかに関係なく、各ステップの後には本数が 1 本少ないだけの同じ状況に戻る。このことから、輪の総数を独立な指示変数（indicator variable）の和として表すことができ、平均と分散は単にそれぞれの和として求まる。

解答

最初のステップ

ひもが n 本あるとき、自由な端は $2n$ 個あるので、2 つの端の選び方は

$$\binom{2n}{2} = n(2n-1)$$

通りあり、これらは同様に確からしい。輪ができるのは 2 つの端が同じひもに属するときであり、そのような組はちょうど n 組（ひも 1 本につき 1 組）ある。よって

$$\mathrm{P}(\text{最初のステップで輪ができる}) = \frac{n}{n(2n-1)} = \frac{1}{2n-1}.$$

言い換えると、最初にどの端を選んでも、残りの $2n-1$ 個の端のうちその相方はちょうど 1 つである。最初のステップで輪ができるとき 1、そうでないとき 0 をとる確率

変数を X_n とすると、最初のステップでできる輪の個数の期待値（expectation）は

$$\mathrm{E}(X_n) = \frac{1}{2n-1}.$$

輪の個数の期待値

最初のステップの後、ひもは $n-1$ 本になり、それぞれに自由な端が 2 つずつある。これはどちらの場合にも成り立つ。輪ができればひもが 1 本ゲームから取り除かれ、異なる 2 本をつなげば 2 本が 1 本になるからである。ひもの長さは関係なく、関係するのは端だけである。

> **考えてみよう** いくつかのひもが他より長くなっていることや、それ以前に輪ができたかどうかは影響するだろうか？

影響しない。どの端の組が選ばれるかに影響するのは、残っているひも（したがって端）の本数だけである。よって、ひもが k 本残っているとき、そのステップで輪ができる確率は、それ以前のステップに関係なく $\frac{1}{2k-1}$ である。

各ステップを、その直前にあるひもの本数 $k = n, n-1, \ldots, 1$ で番号づけし、そのステップで輪ができることの指示変数を X_k とする。すると $\mathrm{P}(X_k = 1) = \frac{1}{2k-1}$ であり、この操作は $k = 1$ のステップの後で終わる（このステップでは必ず輪ができるので $X_1 = 1$ である）。輪の総数は

$$R = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

であるから、期待値の線形性（linearity of expectation）により

$$\mathrm{E}(R) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}.$$

分散

分散（variance）を求めるには線形性だけでは足りず、X_k が独立（independent）であることが必要である。実際に独立である。それ以前のステップがどのような結果であっても、ひもが k 本のステップで輪ができる確率は $\frac{1}{2k-1}$ のままである。したがって、それ以前のすべての X を与えたときの X_k の条件付き分布は、条件なしの分布と同じであり、よって X_k は独立である。

各 X_k は $p_k = \frac{1}{2k-1}$ のベルヌーイ分布（Bernoulli distribution）に従うので $\mathrm{Var}(X_k) =$

$p_k(1-p_k)$ であり、独立な確率変数については分散を足し合わせることができる：

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(R) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}\left(1-\frac{1}{2k-1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-2}{(2k-1)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \;-\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$n = 40\,000$ の場合

$H_m = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}$ とおく。$2n-1$ までの奇数の逆数の和は、$2n$ までのすべての逆数の和から偶数の逆数の和を引いたものである：

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = H_{2n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = H_{2n} - \tfrac{1}{2}H_n.$$

m が大きいとき $H_m \approx \ln m$ であることを用いると

$$\operatorname{E}(R) \approx \ln(2n) - \tfrac{1}{2}\ln n = \tfrac{1}{2}\left(2\ln 2n - \ln n\right) = \tfrac{1}{2}\ln(4n).$$

$n = 40\,000$ のとき $4n = 160\,000 = 20^4$ であるから

$$\operatorname{E}(R) \approx \tfrac{1}{2}\ln\left(20^4\right) = 2\ln 20 \approx 6.$$

したがって、40 000 本のひもからできる輪は、期待値でわずか 6 個ほどである。

検算

- $n = 1$：ひもが 1 本なら、輪は確実に 1 つできる。公式は $\operatorname{E}(R) = 1$、$\operatorname{Var}(R) = 0$ を与え、正しい。
- $n = 2$：最初のステップで輪ができる確率は $\frac{1}{3}$ であり、最後のステップでは必ず輪ができるので、R は確率 $\frac{1}{3}$ で 2、それ以外では 1 である。よって平均は $\frac{4}{3}$、分散は $\frac{2}{9}$ となり、公式から得られる $1 + \frac{1}{3}$ および $\frac{2}{9}$ と一致する。
- $n \le 5$ について選び方の列をすべて厳密に数え上げた結果、および $n = 6$ のシミュレーションの結果は、どちらの公式とも一致する。$n = 40\,000$ のとき、厳密な和は $\operatorname{E}(R) \approx 6.28$ である。上の見積もりより 0.29 大きいのは、粗い近似 $H_m \approx \ln m$ によるものである（下記参照）。

よくある間違い

- 輪ができる確率を、$\frac{1}{2n-1}$（2 つの**端**を選ぶ）ではなく $\frac{1}{n}$（2 本の**ひも**を選ぶ）としてしまう。

- X_k が独立であることを先に示さずに分散を足し合わせてしまう。平均には線形性で十分だが、分散にはそれでは足りない。
- 偶数の項を分けずに、$\sum \frac{1}{2k-1}$ を $\ln n$ や $\frac{1}{2}\ln n$ で近似してしまう。

STEP のその先へ

より精密な評価は $H_m = \ln m + \gamma + o(1)$ である。ここで $\gamma \approx 0.5772$ はオイラー・マスケローニ定数（Euler–Mascheroni constant）である。これにより $\mathrm{E}(R) \approx \frac{1}{2}\ln(4n) + \frac{1}{2}\gamma$ が得られ、さらに $\sum 1/(2k-1)^2 = \pi^2/8$ であることから $\mathrm{Var}(R) \approx \frac{1}{2}\ln(4n) + \frac{1}{2}\gamma - \frac{\pi^2}{8}$ も得られる。同じ「確率 $1/k$ の独立な指示変数の和」という構造は、ランダムな置換（permutation）の巡回（cycle）の個数や、ランダムな数列における記録（record）の個数を数える際にも現れ、どちらの場合も個数は $\ln n$ のように増加する。指示変数やこうしたランダムな構造についてさらに学ぶには、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論の入門書）がよい出発点である。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

2008 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

