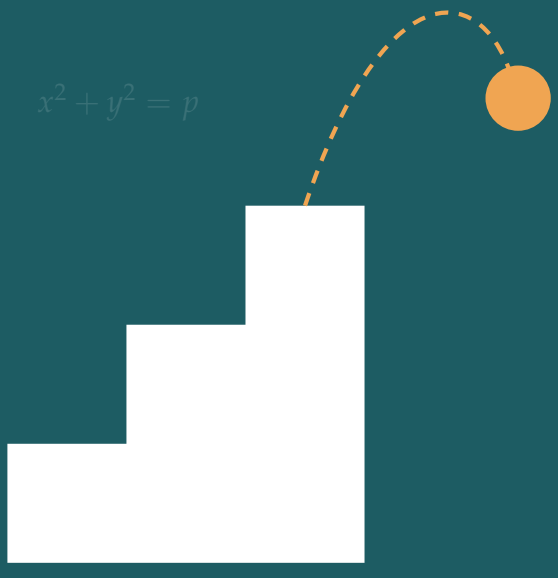
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

2007 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

2007 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

2007 年解答例

2007 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 42 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 数字の並べ方の数え上げ 純粋数学 . . . 3
Q2 逆正接関数の恒等式 純粋数学 . . . 7
Q3 三角関数の積分 純粋数学 . . . 11
Q4 2次方程式の共通解 純粋数学 . . . 15
Q5 多面体の幾何 純粋数学 . . . 19
Q6 ディオファントス方程式 純粋数学 . . . 23
Q7 直線間の距離 純粋数学 . . . 27
Q8 3次曲線の接し方 純粋数学 . . . 32
Q9 斜面上の最大摩擦力 力学 . . . 38
Q10 変位ー時間グラフ 力学 . . . 42
Q11 放物運動 力学 . . . 46
Q12 条件付き確率 確率・統計 . . . 50
Q13 条件付き確率 確率・統計 . . . 54
Q14 ポアソン分布の母数の一意性 確率・統計 . . . 58

STEP II

Q1 二項近似 純粋数学 . . . 63
Q2 3次曲線と面積 純粋数学 . . . 66
Q3 置換積分 純粋数学 . . . 70
Q4 三角方程式 純粋数学 . . . 73
Q5 関数の反復合成 純粋数学 . . . 77
Q6 一階微分方程式 純粋数学 . . . 81
Q7 イェンセンの不等式 純粋数学 . . . 84
Q8 ベクトルによるチェバの定理 純粋数学 . . . 88

Q9 反発係数を伴う斜め衝突 力学 92
Q10 摩擦のある静力学 力学 97
Q11 3次元の放物運動 力学 101
Q12 幾何分布の最大値 確率・統計 105
Q13 誕生日問題 確率・統計 109
Q14 区分的な確率密度 確率・統計 113

STEP III

Q1 正接の和とビエトの定理 純粋数学 116
Q2 二項べき級数 純粋数学 120
Q3 フィボナッチ数の恒等式 純粋数学 124
Q4 媒介変数表示された曲線と曲率 純粋数学 127
Q5 高階導関数と数学的帰納法 純粋数学 131
Q6 複素数と円 純粋数学 135
Q7 置換積分 純粋数学 139
Q8 リッカチ方程式 純粋数学 143
Q9 単振動 力学 147
Q10 斜面上の放物運動 力学 152
Q11 縁を越えて転がる運動 力学 156
Q12 ランダムな個数の和 確率・統計 161
Q13 ランダムウォークの期待値 確率・統計 164
Q14 幾何的確率 確率・統計 168

解答例

STEP I 2007、第 1 問

純粋数学 ・ 数字の並べ方の数え上げ

> **STEP I 2007、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q1

鍵となる考え方

バランス数（balanced number）を一つひとつ書き出そうとしてはいけない。そうではなく、2 つの数字の和に共通する値 s によって分類するのである。各 s について、前半の 2 桁と後半の 2 桁は互いに独立に選べるので、その和をもつバランス数の個数は 2 つの個数の積になる。すると、すべては s を 2 つの数字の和として表す方法の数を数えることに帰着する。これは正方形の格子の対角線上にある格子点（lattice points）を数えることと同じである。

解答

4 桁のバランス数を $abcd$ と書く。ここで各数字は $\{0,1,\ldots,k\}$ に属し、$a \geq 1$（先頭の数字は 0 にはなれない）であり、さらにある s（$0 \leq s \leq 2k$）について

$$a+b=c+d=s$$

が成り立つ。各 s に対して、

- $N(s)$ を、$c+d=s$ を満たす数字の順序対（ordered pair）(c,d) の個数とし、
- $M(s)$ を、$a \geq 1$ かつ $a+b=s$ を満たす数字の順序対 (a,b) の個数とする。

s を固定すれば、条件を満たす前半の組はどれも、条件を満たす後半の組のどれとでも組み合わせられる。したがって、数字の和が s であるバランス数の個数は $M(s)N(s)$ である。s の値が異なれば異なる数が得られるので、

$$\text{総数} = \sum_{s=0}^{2k} M(s)\,N(s).$$

組の個数を数える

$N(s)$。$0 \le s \le k$ ならば、c は $0, 1, \ldots, s$ のどれでもよく、$d = s - c$ は自動的に数字になる。よって $N(s) = s + 1$ である。$k < s \le 2k$ ならば、$d = s - c \le k$ より $c \ge s - k$ でなければならないので、c は $s - k$ から k までを動き、$N(s) = 2k + 1 - s$ となる。

$M(s)$。これも同じ数え方であるが、$a = 0$ となる組が存在すればそれを除く点だけが異なる。その組は $(0, s)$ であり、これが許されるのは $s \le k$ のときに限る。よって

$$M(s) = \begin{cases} s, & 0 \le s \le k, \\ 2k + 1 - s, & k < s \le 2k. \end{cases}$$

特に $M(0) = 0$ である。すなわち数字の和が 0 のバランス数は存在しないが、$a \ge 1$ であるからこれは正しい。

> **考えてみよう** $a + b = c + d$ を満たす 4 文字の数字列をすべて数えて、それで終わりにしてはなぜいけないのだろうか。

0312 のような数字列は 4 桁の数ではないからである。条件 $a \ge 1$ は前半の組にしか影響せず、しかも和が小さいときにしか影響しない。まさにそのために、$M(s)$ と $N(s)$ は $s \le k$ のときに限って異なるのである。

小問 (i)

ここでは $k = 4$ であり、和は 0 から 8 までを動く。

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$M(s)$	0	1	2	3	4	4	3	2	1
$N(s)$	1	2	3	4	5	4	3	2	1
$M(s)N(s)$	0	2	6	12	20	16	9	4	1

最下行の和は $(2 + 6 + 12 + 20) + (16 + 9 + 4 + 1) = 40 + 30 = 70$ である。よって、数字 0 から 4 を用いて作れる 4 桁のバランス数は 70 個であり、題意が示された。

小問 (ii)

次に、M と N の式を用いて、和を $s = k$ で分ける。

$$\text{総数} = \sum_{s=1}^{k} s(s+1) \; + \sum_{s=k+1}^{2k} (2k + 1 - s)^2.$$

（$s = 0$ の項は 0 である。）2 つ目の和において $r = 2k + 1 - s$ とおく。s が $k + 1$ から $2k$ まで動くとき、r は k から 1 まで減少しながら動くので、2 つ目の和は $\sum_{r=1}^{k} r^2$ である。

したがって

$$\begin{aligned}\text{総数} &= \sum_{r=1}^{k}(r^2+r)+\sum_{r=1}^{k}r^2 = 2\sum_{r=1}^{k}r^2+\sum_{r=1}^{k}r\\ &= \tfrac{1}{3}k(k+1)(2k+1)+\tfrac{1}{2}k(k+1)\\ &= \tfrac{1}{6}k(k+1)\big(2(2k+1)+3\big)\\ &= \tfrac{1}{6}k(k+1)(4k+5),\end{aligned}$$

となる。ここで、$\sum r^2$ について与えられた恒等式（$r=0$ の項は何も寄与しない）と $\sum_{r=1}^{k} r = \frac{1}{2}k(k+1)$ を用いた。これが求める結果である。

検算

- 公式に $k=4$ を代入すると $\frac{1}{6}\cdot 4\cdot 5\cdot 21 = 70$ となり、小問 (i) と一致する。
- $k=1$ のとき公式は 3 を与える。直接調べると、0 と 1 だけを用いる 4 桁のバランス数は 1001、1010、1111 である。
- $a \geq 1$ を満たすすべての数字列 $abcd$ を総当たりで数えた結果は、k が 1 から 15 までのすべての場合に公式と一致する（たとえば 10 進数の数字すべてを用いる $k=9$ のときは 615）。

よくある間違い

- 先頭の数字に関する条件を忘れること。この場合は代わりに $\sum N(s)^2 = \frac{1}{3}(k+1)(2k^2+4k+3)$ が得られ、$k=4$ のときは 85 となってしまう。
- $s > k$ のときの組の個数を誤ること。両方の数字が k 以下に制限されるので、その個数は $s+1$ ではなく $2k+1-s$ である。
- 和を分けるとき、中央の和 $s=k$ を両方に数えてしまう、あるいはどちらにも数えないこと。

STEP のその先へ

個数 $N(s)$ は $(1+x+\cdots+x^k)^2$ における x^s の係数であり、バランス数の総数はこのような多項式の積の係数として表される。この**母関数**（generating function）の方法は $2n$ 桁のバランス数も扱うことができ、そのような場合には直接数える方法はすぐに手に負えなくなる。これは大学の組合せ論における中心的な道具である。この趣旨の数

え上げの問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（『数学の発展問題』）に挑戦するとよい。

解答例

STEP I 2007、第 2 問

純粋数学 ・ 逆正接関数の恒等式

> **STEP I 2007、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q2

鍵となる考え方

逆正接（inverse tangent）どうしの等式は、両辺の正接をとって $\tan(A+B)$ の加法定理（addition formula）を用いれば、ただちに普通の分数どうしの等式になる。その代わり、tan は周期 π で同じ値を繰り返すので、$\tan(A+B)=1$ からわかるのは $A+B=\frac{1}{4}\pi+k\pi$ ということだけである。k を決めるには、角の大きさについて一言述べる必要がある。その後は、各小問は小さな整数論（number theory）の問題になる。因数分解するか、整除性（divisibility）による議論を用いればよい。

解答

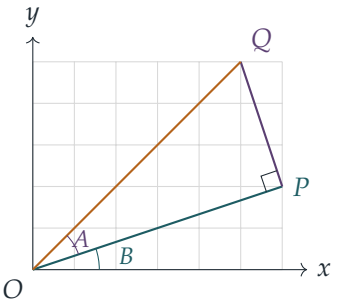
小問 (i)

$\tan A=\frac{1}{2}$、$\tan B=\frac{1}{3}$ であるから、

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1.$$

ここで A と B は鋭角なので $0<A+B<\pi$ であり、$(0,\pi)$ に含まれる角で正接が 1 となるものは $\frac{1}{4}\pi$ だけである。したがって、求めるとおり $A+B=\frac{1}{4}\pi$ である。

下の図は、同じ事実を方眼紙の上で示したものである。$O=(0,0)$、$P=(6,2)$、$Q=(5,5)$ とすると、直線 OP は x 軸と角 $\arctan\frac{1}{3}$ をなす。$PQ=(-1,3)$ は $OP=(6,2)$ に垂直で長さがその半分なので、角 POQ は $\arctan\frac{1}{2}$ である。そして Q は直線 $y=x$ 上、すなわち $\frac{1}{4}\pi$ の位置にある。



小問 (i)：整数 p と q

まず、加法定理でゼロ除算が起こる $pq=1$ の場合を除外する。このとき $p=q=1$ または $p=q=-1$ であり、左辺はそれぞれ $\frac{1}{2}\pi$、$-\frac{1}{2}\pi$ となって、どちらも $\frac{1}{4}\pi$ ではない。よって $pq\neq 1$ であり、与えられた等式の両辺の正接をとると、

$$\frac{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}{1-\frac{1}{pq}}=1.$$

分子と分母に pq を掛けると $\dfrac{p+q}{pq-1}=1$ となるので、

$$p+q=pq-1 \quad\Longrightarrow\quad pq-p-q+1=2 \quad\Longrightarrow\quad (p-1)(q-1)=2,$$

となり、これが求める結果である。

$p-1$ と $q-1$ は積が 2 となる整数であるから、組 $(p-1,q-1)$ は

$$(1,2),\quad (2,1),\quad (-1,-2),\quad (-2,-1),$$

のいずれかであり、$(p,q)=(2,3)$、$(3,2)$、$(0,-1)$、$(-1,0)$ を得る。p と q は 0 でないので、後の二つは除外される。よって $\{p,q\}=\{2,3\}$ であり、小問 (i) の前半により、どちらの順序でも実際に等式を満たす。

? **考えてみよう** ここで示したのは、解が $(p-1)(q-1)=2$ を満たさなければならないということだけである。なぜ後から候補を確かめる必要があるのだろうか？

正接をとると情報が失われる。$(p-1)(q-1)=2$ は $\tan(\arctan\frac{1}{p}+\arctan\frac{1}{q})=1$ と同値であり、これは和が $-\frac{3}{4}\pi$ のような場合も許してしまう。今回の候補の組は、0 を含む（したがって $\frac{1}{p}$ が意味をもたない）か、2 と 3 であるかのどちらかであり、後者が成り立つことはすでにわかっている。

小問 (ii)

$\theta = \arctan\frac{1}{r}$、$\phi = \arctan\dfrac{s}{s+t}$ とおく。与えられた等式の正接をとると、

$$\frac{\frac{1}{r}+\frac{s}{s+t}}{1-\frac{s}{r(s+t)}} = 1.$$

分母は 0 でない。実際、$r \geq 1$ かつ $t \geq 1$ より $r(s+t) > s$ である。分子と分母に $r(s+t)$ を掛けると、

$$\frac{(s+t)+rs}{r(s+t)-s} = 1 \quad \Longrightarrow \quad s+t+rs = rs+rt-s \quad \Longrightarrow \quad t(r-1) = 2s.$$

考えてみよう s と t の最大公約数に関する条件は、どこで効いてくるのだろうか？

等式 $t(r-1) = 2s$ は、t が $2s$ を割り切ることを意味している。$\mathrm{hcf}(s,t) = 1$ であるから、t は s と共通の素因数をもたない。したがって t の素因数はすべて 2 に由来しなければならず、t は 2 を割り切る。t は正の整数なので、可能な値は

$$t = 1 \quad \text{または} \quad t = 2.$$

だけである。

- $t = 1$ のとき：$r - 1 = 2s$ より $r = 2s + 1$。
- $t = 2$ のとき：$2(r-1) = 2s$ より $r = s + 1$。（$\mathrm{hcf}(s,2) = 1$ であるから、このとき s は奇数でなければならない。）

どちらの場合も実際に起こる。実際、$0 < \frac{1}{r} \leq 1$ かつ $0 < \frac{s}{s+t} < 1$ であるから、θ と ϕ はともに $(0, \frac{1}{4}\pi]$ に含まれ、$0 < \theta + \phi < \frac{1}{2}\pi$ である。上の計算を逆にたどれば、$t(r-1) = 2s$ から $\tan(\theta+\phi) = 1$ が得られ、したがってちょうど $\theta + \phi = \frac{1}{4}\pi$ となる。たとえば、$t = 1$, $s = 1$ とすると $\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{2}$ が、$t = 2$, $s = 1$ とすると $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$ が得られる。これは小問 (i) の恒等式を、順序を入れ替えて二通りに表したものである。

検算

- 電卓で計算すると、$\arctan 0.5 + \arctan(1/3) = 0.4636 + 0.3218 = 0.7854 = \frac{1}{4}\pi$。
- $|p|, |q| \leq 200$ を満たす 0 でないすべての p, q についてコンピュータで探索すると、見つかるのは $(2,3)$ と $(3,2)$ だけである。

- $\mathrm{hcf}(s,t) = 1$ を満たす $r < 400$、$s,t < 150$ について探索すると、見つかるのは $t = 1$, $r = 2s+1$ と $t = 2$, $r = s+1$ だけである。たとえば、$\arctan\frac{1}{8} + \arctan\frac{7}{9} = \frac{1}{4}\pi$（$s = 7$, $t = 2$）が計算機の精度の範囲で成り立つ。

よくある間違い

- $A+B$ が $\frac{5}{4}\pi$ になり得ない理由を述べずに、$\tan(A+B) = 1$ から $A+B = \frac{1}{4}\pi$ と結論してしまう。
- 2 の負の因数分解 $(-1)(-2)$ と $(-2)(-1)$ を忘れる。あるいは、それらが 0 を与えるので除外しなければならないことを忘れる。
- $\mathrm{hcf}(s,t) = 1$ に言及せずに「t は $2s$ を割り切るから、t は 2 を割り切る」と述べてしまう。まさにここでこの仮定が必要になるのである。

STEP のその先へ

tan の加法定理は、実は複素数（complex number）の掛け算そのものである。$\arctan\frac{1}{p}$ は $p+\mathrm{i}$ の偏角（argument）であるから、小問 (i) は $(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i}) = 5+5\mathrm{i}$ の偏角が $\frac{1}{4}\pi$ であるという主張にほかならない。かつて π を数百桁まで計算するのに使われたマチン（Machin）の公式 $4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{1}{4}\pi$ のような恒等式は、まさにこのようにガウス整数（Gaussian integer）を因数分解することから得られる。Needham の *Visual Complex Analysis*（複素解析を視覚的に解説した本）は複素数の掛け算の幾何を見事に展開しており、Davenport の *The Higher Arithmetic*（初等整数論の入門書）は小問 (ii) で用いた整除性の議論を扱っている。

解答例

STEP I 2007、第 3 問

純粋数学 ・ 三角関数の積分

> **STEP I 2007、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q3

鍵となる考え方

$\cos^4\theta$ も $\sin^4\theta$ も、それ単独では積分しにくい。しかし、$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を用いて 2θ の関数にまとめてしまえば、それらの**差**と**和**はどちらも容易に積分できる。和と差をそれぞれ積分すると、求めたい 2 つの積分についての簡単な連立一次方程式が得られる。同じ工夫を次数を 1 つ上げて用いれば、6 乗の場合も扱える。

解答

恒等式

平方の差を因数分解すると、

$$\cos^4\theta - \sin^4\theta = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \cos 2\theta \cdot 1 = \cos 2\theta.$$

和については平方完成（completing the square）を行う：

$$\begin{aligned}\cos^4\theta + \sin^4\theta &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}(2\sin\theta\cos\theta)^2 \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta,\end{aligned}$$

ここで $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ を用いた。以上で 2 つの恒等式（identity）が証明された。

4 乗の場合

$C_4 = \int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta$、$S_4 = \int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta$ とおく。1 つ目の恒等式を積分すると、

$$C_4 - S_4 = \int_0^{\pi/2}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \left[\tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 0.$$

2 つ目の恒等式については $\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta \, \mathrm{d}\theta$ が必要である。$\sin^2 2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 4\theta)$ を用いると、

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta \, \mathrm{d}\theta = \left[\tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{8}\sin 4\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4},$$

となる。$\sin 2\pi = 0$ だからである。したがって

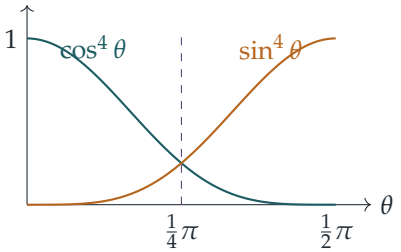
$$C_4 + S_4 = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta\right) \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}.$$

2 つの式を足したり引いたりすると、

$$\int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{16}.$$

考えてみよう 計算をせずに $C_4 = S_4$ がわかっただろうか。

わかる。置換（substitution）$\phi = \frac{1}{2}\pi - \theta$ により $\cos\theta$ は $\sin\phi$ に変わり、積分区間の端 0 と $\frac{1}{2}\pi$ が入れ替わるので、すべての n について $\int_0^{\pi/2} \cos^n \theta \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^n \phi \, \mathrm{d}\phi$ が成り立つ。$\cos^4\theta$ と $\sin^4\theta$ のグラフは直線 $\theta = \frac{1}{4}\pi$ に関して互いに鏡像になっているので、囲む面積は等しい：



つまり、1 つ目の恒等式が本当に必要なのは和の計算だけである。差の積分が 0 になるのは、対称性が姿を変えて現れたものにほかならない。

6 乗の場合

同じ方法を繰り返す。$c = \cos\theta$、$s = \sin\theta$ とおき、$c^2 + s^2 = 1$ を用いると：

$$\begin{aligned} c^6 - s^6 &= (c^2 - s^2)(c^4 + c^2 s^2 + s^4) = \cos 2\theta \left(1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta + \tfrac{1}{4}\sin^2 2\theta\right) \\ &= \cos 2\theta \left(1 - \tfrac{1}{4}\sin^2 2\theta\right), \end{aligned}$$

ここで、すでに証明した恒等式と $c^2 s^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta$ を用いた。和については $c^2 + s^2$ の 3 乗を用いる：

$$c^6 + s^6 = (c^2 + s^2)^3 - 3c^2 s^2 (c^2 + s^2) = 1 - \tfrac{3}{4}\sin^2 2\theta.$$

2 つの積分を C_6、S_6 とおく。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin^3 2\theta = 6\sin^2 2\theta\cos 2\theta$ であるから、

$$C_6 - S_6 = \left[\tfrac{1}{2}\sin 2\theta - \tfrac{1}{24}\sin^3 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 0,$$

となり、これは対称性による議論からの予想とも一致する。また、再び $\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\pi$ を用いると、

$$C_6 + S_6 = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{16}.$$

したがって

$$\int_0^{\pi/2}\cos^6\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2}\sin^6\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{5\pi}{32}.$$

検算

- 指数が大きくなるにつれて答えは小さくなっている：$n=0$ のとき $\frac{1}{2}\pi$、$n=2$ のとき $\frac{1}{4}\pi$、続いて $\frac{3}{16}\pi$、$\frac{5}{32}\pi$ である。区間上で $0 \le \cos\theta \le 1$ であるから、こうならなければならない。
- 数値的には、シンプソンの公式（Simpson's rule）により $\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta \approx 0.589049$、$\int_0^{\pi/2}\cos^6\theta\,\mathrm{d}\theta \approx 0.490874$ が得られ、$3\pi/16$ および $5\pi/32$ と一致する。サインの積分も同じ精度でこれらと一致する。
- 和の恒等式に $\theta = \frac{1}{4}\pi$ を代入すると $\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1-\frac{1}{2}$ および $\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = 1-\frac{3}{4}$ となり、どちらも正しい。

よくある間違い

- $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ からの類推で $\cos^4\theta + \sin^4\theta = 1$ と書いてしまう：交差項 $2\sin^2\theta\cos^2\theta$ が抜け落ちている。
- $\cos 2\theta$ や $\cos 4\theta$ を積分するとき、合成関数の微分法（chain rule）から生じる係数 $\frac{1}{2}$ を忘れる。ここでは $\cos 2\theta$ については問題にならない（どのみち積分は 0 である）が、$\sin^2 2\theta$ については問題になる。

STEP のその先へ

これらはウォリス（Wallis）積分 $I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\,\mathrm{d}\theta$ の特別な場合であり、この積分は漸化式（reduction formula）$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$ を満たす（部分積分（integration by parts）を行えばよい）。$I_4 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$ および $I_6 = \frac{5}{6}I_4$ が上の答えを再現することを確かめてみるとよい。I_{2n} と I_{2n+1} を比較すると、π についての有名なウォリスの無限積（infinite

product）が導かれる。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策問題集）には漸化式に関する STEP 形式の演習がさらに収められており、Bartle and Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）では極限に関する議論が厳密に扱われている。

解答例

STEP I 2007、第 4 問

純粋数学 ・ 2 次方程式の共通解

> **STEP I 2007、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q4

鍵となる考え方

前半は $x^3+y^3+z^3-3xyz$ のよく知られた因数分解（factorisation）であり、$x+b+c$ が因数であることさえわかれば、2 次式の部分は係数比較（matching coefficients）によって求まる。後半では、共通の解をもつ 2 つの 2 次方程式を扱う。定石は**消去**（eliminate）である。すなわち、2 つの方程式を組み合わせて k のある累乗の項を打ち消すのである。これを 2 通りの方法で行うと k と k^2 がそれぞれ比として表され、$k^2=(k)^2$ から係数だけの間の関係式が得られる。その関係式は、実は前半で $x=a$ としたものになっている。

解答

因数分解

$P(x)=x^3-3xbc+b^3+c^3$ に $x=-(b+c)$ を代入すると

$$\begin{aligned}P(-b-c)&=-(b+c)^3+3bc(b+c)+b^3+c^3\\&=-(b^3+3b^2c+3bc^2+c^3)+3b^2c+3bc^2+b^3+c^3=0,\end{aligned}$$

となるので、因数定理（factor theorem）により $x+b+c$ は因数である。係数を比較すると（P の x^2 の項は 0 であり、定数項は b^3+c^3 である）

$$x^3-3xbc+b^3+c^3=(x+b+c)\,\mathrm{Q}(x),\qquad \mathrm{Q}(x)=x^2+b^2+c^2-xb-bc-cx.$$

を得る。右辺を展開すれば確かめられる。x^2 の項は $x^2(b+c)-x^2(b+c)=0$、x の項はまとめると $-3bcx$、定数項は b^3+c^3 となる。

平方の和については、$2\mathrm{Q}(x)$ において x^2、b^2、c^2 はそれぞれ 2 回ずつ現れ、交差項はそれぞれ $-2xb$ などの形で現れるので

$$2\mathrm{Q}(x) = (x-b)^2 + (b-c)^2 + (c-x)^2.$$

である。

共通解

k は両方の方程式の解であるから

$$ak^2 + bk + c = 0, \tag{1}$$
$$bk^2 + ck + a = 0. \tag{2}$$

k^2 を消去するために $b \times (1) - a \times (2)$ をつくると

$$(b^2 - ac)k + bc - a^2 = 0, \qquad \text{よって} \qquad (ac - b^2)\,k = bc - a^2.$$

今度は k の項を消去するために $c \times (1) - b \times (2)$ をつくると

$$(ac - b^2)k^2 + c^2 - ab = 0, \qquad \text{よって} \qquad (ac - b^2)\,k^2 = ab - c^2.$$

これが k^2 を含む同様の式である。

ここで $k^2 = k \cdot k$ を用いる。$ac \neq b^2$ であるから $ac - b^2$ で割ることができ、$k = \dfrac{bc - a^2}{ac - b^2}$ を得る。したがって

$$(ac - b^2)\,\frac{(bc - a^2)^2}{(ac - b^2)^2} = ab - c^2 \quad \Longrightarrow \quad (ac - b^2)(ab - c^2) = (bc - a^2)^2,$$

となる（両辺に $ac - b^2$ を掛けた）。これが求める結果である。

両辺を展開すると

$$a^2bc - ac^3 - ab^3 + b^2c^2 = b^2c^2 - 2a^2bc + a^4,$$
$$\text{よって} \quad 0 = a^4 + ab^3 + ac^3 - 3a^2bc = a\left(a^3 - 3abc + b^3 + c^3\right).$$

$a \neq 0$ であるから $a^3 - 3abc + b^3 + c^3 = 0$ となり、示すべきことが得られた。

考えてみよう $a^3 - 3abc + b^3 + c^3$ は以前どこで見ただろうか？

これは前半で $x = a$ としたものである。よって

$$(a + b + c)\,\mathrm{Q}(a) = 0, \qquad 2\mathrm{Q}(a) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

ゆえに $a + b + c = 0$ または $\mathrm{Q}(a) = 0$ である。

$\mathrm{Q}(a) = 0$ **の場合**。a、b、c は実数であるから 3 つの平方はいずれも 0 以上であり、その和が 0 となるのはそれぞれが 0 のときに限る。よって $a = b = c$ であり、2 つの方程式はどちらも $a(y^2 + y + 1) = 0$ となる。すなわち、2 つの方程式は一致する。

$a + b + c = 0$ **の場合**。k の式に $c = -a - b$ を代入すると

$$bc - a^2 = -ab - b^2 - a^2, \qquad ac - b^2 = -a^2 - ab - b^2,$$

となるので $bc - a^2 = ac - b^2$ であり、これは 0 でないから $k = 1$ である。（実際、$y = 1$ は両方の方程式を満たす。このときどちらの方程式も $a + b + c = 0$ となるからである。）

以上より、$k = 1$ であるか、または 2 つの方程式が一致するかのいずれかであり、これで問題は解決した。

なお、方程式が一致する場合には $a = b = c$ から $ac = b^2$ となるが、これは仮定によって除外されている。したがって、与えられた条件のもとでは、共通解は実は常に $k = 1$ である。「一致する」という選択肢は条件 $ac \neq b^2$ を外したときに起こる場合であり、そのときの共通解は 1 の虚数立方根（complex cube roots of unity）である。

検算

$a = 1$、$b = 2$、$c = -3$ とすると $a + b + c = 0$ である。方程式は $y^2 + 2y - 3 = (y - 1)(y + 3) = 0$ と $2y^2 - 3y + 1 = (2y - 1)(y - 1) = 0$ であり、共通解 $k = 1$ をもつ。このとき $ac - b^2 = -7$、$bc - a^2 = -7$、$ab - c^2 = -7$ であるから、$(ac - b^2)k = bc - a^2$、$(ac - b^2)k^2 = ab - c^2$、$(-7)(-7) = (-7)^2$ はすべて成り立ち、また $a^3 - 3abc + b^3 + c^3 = 1 + 18 + 8 - 27 = 0$ である。さらに、前半の 2 つの恒等式（identity）と、展開式 $(ac - b^2)(ab - c^2) - (bc - a^2)^2 = -a(a^3 - 3abc + b^3 + c^3)$ についても、ランダムに選んだ 1000 組の 3 つ組で厳密な算術により検証した。

よくある間違い

- 定数項を消去する（$a \times (1) - c \times (2)$）と $k\big((a^2 - bc)k + ab - c^2\big) = 0$ となるが、これを役立てるにはさらに $k \neq 0$ が必要になる。$c \times (1) - b \times (2)$ という組み合わせならこの問題を避けられる。
- $ac - b^2$ が 0 でないことが問題文で保証されていると述べずに、$ac - b^2$ で割ってしまう。
- a、b、c が実数であることを使わずに $\mathrm{Q}(a) = 0$ から $a = b = c$ を結論してしまう。平方和の議論は複素数に対しては成り立たない。

STEP のその先へ

2 つの多項式が共通解をもつための条件は、一般に**終結式**（resultant）によって与えられる。これは係数からつくられる行列式である。関係式 $(ac-b^2)(ab-c^2)=(bc-a^2)^2$ は、まさにこの 2 つの 2 次式の終結式を 0 とおいたものである。また、式 $a^3+b^3+c^3-3abc$ は巡回行列（circulant matrix）の行列式でもあり、ω を 1 の虚数立方根として $(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$ と完全に因数分解される。多項式とその根についてさらに知りたければ、Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）を読んでみるとよい。

解答例

STEP I 2007、第 5 問

純粋数学 ・ 多面体の幾何

STEP I 2007、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s1-q5

鍵となる考え方

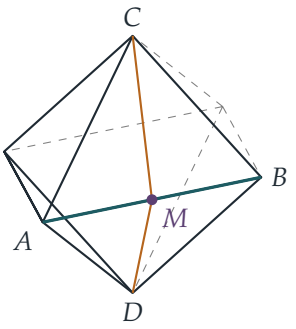
正八面体（regular octahedron）は座標の中にきわめてすっきりと収まる。その 6 個の頂点として、各座標軸の正の向きと負の向きにそれぞれ 1 単位進んだ点をとればよい。このモデルを使えば、どちらの小問も単なるベクトルの計算になる。2 つの面のなす角は、それらの共通の辺に垂直な平面の中で測るものなので、辺の中点（midpoint）から各面を横切って向かい側の頂点へ引いた 2 本の線分を用いる。面の中心は 3 つの頂点の単純な平均である。

解答

どの正八面体も他の正八面体を拡大・縮小したものであり、角の大きさも体積の比も拡大・縮小によって変わらない。したがって、頂点が

$$(\pm 1, 0, 0), \qquad (0, \pm 1, 0), \qquad (0, 0, \pm 1).$$

である正八面体で考えてよい。これらのうち互いに反対側にない 2 点の距離はどれも $\sqrt{2}$ であり、これで 12 本の辺が得られる。面は各軸上に 1 つずつ頂点をもつ 8 個の三角形であり、符号の選び方 1 通りごとに 1 つずつある。どの面も 1 辺 $\sqrt{2}$ の正三角形なので、これは確かに正八面体である。



小問 (i)

辺を共有する 2 つの面をとる。対称性によりどの辺も同じように見えるので、1 組調べれば十分である。$A=(1,0,0)$、$B=(0,1,0)$、$C=(0,0,1)$、$D=(0,0,-1)$ とおくと、面 ABC と面 ABD は AB に沿って交わる。AB の中点を $M=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ とする。

? **考えてみよう** 1 本の直線に沿って交わる 2 つの平面のなす角は、どのように測ればよいか。

共通の直線上に 1 点をとり、それぞれの平面の中で、その点を通り共通の直線に垂直な直線を引く。この 2 直線のなす角が、2 つの面のなす角である。各面は正三角形なので、三角形 ABC の中線（median）MC は AB に垂直であり、三角形 ABD の中線 MD も同様である。よって、求める角は $\angle CMD$ である。

さて、

$$\overrightarrow{MC}=\left(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},1\right),\qquad \overrightarrow{MD}=\left(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-1\right),$$

であり、どちらも当然 $\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$ に垂直である。どちらも長さの 2 乗は $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1=\frac{3}{2}$ であり、

$$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}-1=-\tfrac{1}{2}.$$

となる。したがって

$$\cos\angle CMD=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3},$$

であり、面のなす角は題意のとおり $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$、すなわち約 109.5° である。余弦が負なので、この角は鈍角（obtuse）である。つまり正八面体は、辺のところで立方体ほど尖っていない。

座標を使わなければ、同じ計算は三角形 CMD における余弦定理（cosine rule）になる。辺の長さを a とすると、中線は $MC=MD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ であり、C と D は互いに反対側の頂点である。4 点 A、C、$(-1,0,0)$、D は 1 辺 a の正方形をなすので、$CD=\sqrt{2}\,a$

である。すると

$$2a^2 = \tfrac{3}{4}a^2 + \tfrac{3}{4}a^2 - 2\cdot\tfrac{3}{4}a^2\cos\angle CMD \quad\Longrightarrow\quad \cos\angle CMD = -\tfrac{1}{3}.$$

小問 (ii)

面の中心は、その 3 つの頂点の平均である。各面は頂点を $(\pm1,0,0)$ から 1 つ、$(0,\pm1,0)$ から 1 つ、$(0,0,\pm1)$ から 1 つもつので、その中心は

$$\left(\pm\tfrac{1}{3},\pm\tfrac{1}{3},\pm\tfrac{1}{3}\right),$$

であり、符号の 8 通りの選び方から 8 個の中心が得られる。これらはちょうど 1 辺 $\frac{2}{3}$ の立方体の頂点なので、

$$V_{\text{立方体}} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 = \tfrac{8}{27}.$$

である。正八面体は、頂点 $(\pm1,0,0)$、$(0,\pm1,0)$ をもつ正方形に沿って 2 つの正四角錐（square-based pyramid）を貼り合わせたものである。この正方形の対角線の長さは 2 なので、面積は $\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=2$ であり、各四角錐の高さは 1 である。したがって

$$V_{\text{八面体}} = 2\times\tfrac{1}{3}\times2\times1 = \tfrac{4}{3}.$$

となる。比は

$$\frac{V_{\text{八面体}}}{V_{\text{立方体}}} = \frac{4/3}{8/27} = \frac{9}{2},$$

であるから、正八面体と立方体の体積の比は 9 : 2 である。

検算

- $\arccos(-\frac{1}{3}) \approx 109.47^\circ$ である。座標モデルの 12 本の辺すべてについて中点を用いた計算を数値的に繰り返すと、毎回 $\cos = -\frac{1}{3}$ となる。
- 正八面体は $|x|+|y|+|z|\le 1$ である。$[-1,1]^3$ 内の 10^6 個の無作為な点を用いたモンテカルロ法（Monte Carlo method）による体積の推定値は 1.330 であり、厳密な値 $\frac{4}{3}$ と比べて妥当である。
- 立方体は正八面体の内部にある（各中心は $|x|+|y|+|z|=1$ を満たす）ので、比は 1 より大きくなければならない。実際 $\frac{9}{2}$ はそうなっている。

よくある間違い

- 外向きの法線（normal）$(1,1,1)$ と $(1,1,-1)$ のなす角をとってしまい、$\arccos\frac{1}{3}$ を得る。面そのもののなす角は、その補角（supplement）である。

- 2本の辺 CA と DA のように、共通の辺に垂直でない直線に沿って角を測ってしまう。その角はここでは 90° であり、面のなす角ではない。
- 立方体の1辺を、向かい合う2つの面の中心間の距離だと考えてしまう。その距離 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ は立方体の空間対角線（space diagonal）である。

STEP のその先へ

立方体と正八面体は**双対**（dual）な多面体（polyhedra）である。どちらについても面の中心を結ぶともう一方が得られ、面と頂点の役割が入れ替わる。双対性は、2つの立体の対称性群（symmetry group）が同じ位数（order）48の群であることを示す最初の手がかりであり、これは群論の最初の講義で出会うことになる。プラトンの立体（Platonic solids）の対称性群については、Armstrong の *Groups and Symmetry*（『群と対称性』）を読んでみるとよい。

解答例

STEP I 2007、第 6 問

純粋数学 ・ ディオファントス方程式

> **STEP I 2007、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q6

鍵となる考え方

どちらの小問も累乗の差から始まり、そのどれもが $x-y$ を因数にもつ。この因数を約分すると（$d \neq 0$ であるから許される）、x と y の対称式（symmetric expression）が残る。これと $x-y=d$ を合わせると、x と y が決まる。整数解（integer solution）を得るには、さらに公式の値が整数になるように d を選べばよい。小問 (ii) では、それは平方根を有理数（rational）にすることを意味する。

解答

小問 (i)

左辺を因数分解（factorise）すると、

$$(x-y)(x+y)=(x-y)^3.$$

$x-y=d\neq 0$ であるから $x-y$ で割ることができ、$x+y=(x-y)^2=d^2$ を得る。これと $x-y=d$ の和と差をとると、

$$x=\frac{d^2+d}{2}=\frac{d(d+1)}{2}, \qquad y=\frac{d^2-d}{2}=\frac{d(d-1)}{2}.$$

整数の組については、$x=\sqrt{m}$、$y=\sqrt{n}$ とおく。すると $x^2-y^2=m-n$ であり、求める条件はちょうど $x^2-y^2=(x-y)^3$ となる。$d=\sqrt{m}-\sqrt{n}$ とおくと、$m>n$ よりこれは 0 でないので、

$$m=\left(\frac{d(d+1)}{2}\right)^2, \qquad n=\left(\frac{d(d-1)}{2}\right)^2.$$

d が正の整数ならば、$d(d\pm1)$ は連続する整数の積であるから偶数である。よって $\sqrt{m}$ と $\sqrt{n}$ は整数であり、m と n も整数である。また $d>0$ より $m>n$ である。$n>100$、すなわち $\frac{1}{2}d(d-1)>10$ が必要である。$d=5$ では $\frac{1}{2}d(d-1)=10$ となり足りないので、$d=6$ をとる：

$$\sqrt{m}=21,\quad \sqrt{n}=15,\qquad m=441,\quad n=225.$$

確認：$m-n=216=6^3=(21-15)^3$。（$d=7$ で $m=784$、$n=441$ とするなど、他の答えも同様に正しい。）

小問 (ii)

再び因数分解する：$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$。$x-y=d\neq0$ で割ると、

$$x^2+xy+y^2=d^3.$$

また $(x-y)^2=d^2$、すなわち $x^2-2xy+y^2=d^2$ である。これを前の式から引くと $3xy=d^3-d^2$ となり、示すべき式が得られる。

次に $y=x-d$ を代入する：

$$3x(x-d)=d^3-d^2\quad\Longrightarrow\quad 3x^2-3dx-(d^3-d^2)=0.$$

解の公式（quadratic formula）より、

$$x=\frac{3d\pm\sqrt{9d^2+12(d^3-d^2)}}{6}=\frac{3d\pm\sqrt{3d^2(4d-1)}}{6}.$$

ここで $\sqrt{3d^2(4d-1)}=|d|\sqrt{3(4d-1)}$ であり、$\pm$ がすでに両方の符号を含んでいるので、$|d|$ を d に置き換えてよい。2 を掛けると、

$$2x=d\pm\frac{d\sqrt{3(4d-1)}}{3}=d\pm d\sqrt{\frac{4d-1}{3}},$$

となり、これが求める結果である。

考えてみよう x と y が整数になるように d をどう選べばよいか？

$m=x$ と $n=y$ が整数ならば、$d=m-n$ は 0 でない整数である。x が有理数であるためには、$\sqrt{(4d-1)/3}$ が有理数でなければならない。これを k とおく。すると $k^2=(4d-1)/3$ は整数であり、整数の平方根が有理数になるのはその整数が平方数（perfect square）のときに限るので、k は整数である。したがって、次が必要である。

$$4d-1=3k^2\quad \text{ある整数} k\geq0.$$

左辺は奇数であるから、k は奇数である。すると $2x=d(1\pm k)$ は偶数となるので x は整数であり、$y=x-d$ も整数である。

- $k=1$ のとき $d=1$ であり、$x=1$、$y=0$ または $x=0$、$y=-1$ となる。どちらの組も二つの正の整数からなるものではない。
- $k=3$ のとき $d=7$ であり、$2x=7\pm21$ となる。正の符号をとると $x=14$、$y=7$ を得る。

よって $m=14$、$n=7$ が条件を満たす：

$$m^3-n^3=2744-343=2401=7^4=(m-n)^4.$$

順序が重要である。$m=7$、$n=14$ とすると、左辺は -2401 であるが右辺は $+2401$ である。

検算

- 小問 (i)：$21^2-15^2=441-225=216$ であり、$(21-15)^3=216$ である。
- 小問 (ii)：$d=7$ のとき、$3xy=3\cdot14\cdot7=294$ であり、$d^3-d^2=343-49=294$ である。
- $1\le m,n<200$ の範囲をコンピュータで探索すると、ちょうど $(14,7)$、$(57,38)$、$(148,111)$ が見つかる。これらは $k=3,5,7$（したがって $d=7,19,37$）から得られるもので、公式と一致する。この探索により、$(441,225)$ が小問 (i) で $n>100$ を満たす最小の解であることも確かめられる。

よくある間違い

- 約分には $x-y\neq0$ が必要であることを忘れる。問題が $d\neq0$ を仮定しているのはまさにこのためである。
- 小問 (i) で $d=5$ とすると $n=100$ となり、厳密な不等式 $n>100$ を満たさない。
- 断りなく $\sqrt{d^2}=d$ と書く。これは $|d|$ に等しく、絶対値（modulus）を外せるのは $\pm$ があるおかげである。

STEP のその先へ

小問 (ii) はディオファントス方程式（Diophantine equation）$m^3-n^3=(m-n)^4$ を完全に解いている。奇数 $k\ge3$ に対して $d=(3k^2+1)/4$ とおくと、解は $m=\frac{1}{2}d(k+1)$、$n=\frac{1}{2}d(k-1)$ である。平方根が有理数であることを要求するのは、このような方程式をはるかに単純な条件 $4d-1=3k^2$ に帰着させる標準的な方法である。このような

方程式や、その背後にある二次形式（quadratic forms）の整数論は、ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等整数論』）で扱われている。

解答例

STEP I 2007、第 7 問

純粋数学 ・ 直線間の距離

> **STEP I 2007、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q7

鍵となる考え方

各直線上の一般の点を書き下し、差をとって長さを 2 乗する。すると D^2 は 2 つのパラメータについての二次式（quadratic）になる。ここでの工夫は、その二次式を平方和（sum of squares）の形に書き直すことである。平方和は、各平方がそれぞれ取りうる最小の値をとるときに最小となるからである。小問 (ii) でも同じ方法が使え、k の値によって平方の分かれ方が変わる様子から、図形的な状況が読み取れる。

解答

小問 (i)

L_1 上の一般の点は $P = (1+2\lambda,\ 2\lambda,\ 2-3\lambda)$、$L_2$ 上の一般の点は $Q = (4+\mu,\ -2+2\mu,\ 9-2\mu)$ である。よって

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3+\mu-2\lambda \\ -2+2\mu-2\lambda \\ 7-2\mu+3\lambda \end{pmatrix}$$

であり、

$$D^2 = (3+\mu-2\lambda)^2 + (-2+2\mu-2\lambda)^2 + (7-2\mu+3\lambda)^2.$$

係数ごとに項を整理すると

$$\mu^2:\ \ 1+4+4=9, \qquad \lambda^2:\ \ 4+4+9=17, \qquad \lambda\mu:\ \ -4-8-12=-24,$$
$$\mu:\ \ 6-8-28=-30, \quad \lambda:\ \ -12+8+42=38, \quad \text{定数}:\ \ 9+4+49=62,$$

となるので、$D^2 = 9\mu^2 + 17\lambda^2 - 24\lambda\mu - 30\mu + 38\lambda + 62$ である。

次に、与えられた形を展開する。

$$\begin{aligned}(3\mu - 4\lambda - 5)^2 + (\lambda - 1)^2 + 36 &= \left(9\mu^2 + 16\lambda^2 + 25 - 24\lambda\mu - 30\mu + 40\lambda\right) \\ &\quad + \left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right) + 36 \\ &= 9\mu^2 + 17\lambda^2 - 24\lambda\mu - 30\mu + 38\lambda + 62.\end{aligned}$$

両者は一致するので、

$$D^2 = (3\mu - 4\lambda - 5)^2 + (\lambda - 1)^2 + 36,$$

が示された。

考えてみよう なぜ 2 つの平方を同時に 0 にできるのか？

各平方は 0 以上であるから、任意の λ、μ に対して $D^2 \geq 36$ である。等号が成り立つには $\lambda = 1$ かつ $3\mu = 4\lambda + 5 = 9$、すなわち $\mu = 3$ であることが必要である。この 2 つの条件は両立する（1 つ目で λ が定まり、続いて 2 つ目で μ が定まる）ので、$D^2 = 36$ は実際に達成される。したがって、2 直線間の最短距離は

$$D_{\min} = 6,$$

であり、これは

$$\lambda = 1 :\ P = (3,\, 2,\, -1) \quad \text{直線} L_1, \qquad \mu = 3 :\ Q = (7,\, 4,\, 3) \quad \text{直線} L_2.$$

において達成される。確認として、$\overrightarrow{PQ} = (4, 2, 4)$ の長さは $\sqrt{16 + 4 + 16} = 6$ であり、しかも両方の方向ベクトル（direction vector）に垂直である。実際、$(4, 2, 4) \cdot (2, 2, -3) = 8 + 4 - 12 = 0$、$(4, 2, 4) \cdot (1, 2, -2) = 4 + 4 - 8 = 0$ である。これはまさに、2 直線を結ぶ最短の線分に期待される性質である。

小問 (ii)

L_3 上の一般の点は $P = (2,\ 3 + \alpha,\ 5)$、L_4 上の一般の点は $Q = \left(3 + 4k\beta,\ 3 + (1 - k)\beta,\ -2 - 3k\beta\right)$ である。よって

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 + 4k\beta \\ (1 - k)\beta - \alpha \\ -7 - 3k\beta \end{pmatrix}$$

であり、

$$\begin{aligned}D^2 &= (1 + 4k\beta)^2 + \left((1 - k)\beta - \alpha\right)^2 + (7 + 3k\beta)^2 \\ &= \left((1 - k)\beta - \alpha\right)^2 + 25k^2\beta^2 + 50k\beta + 50 \\ &= \left((1 - k)\beta - \alpha\right)^2 + 25(k\beta + 1)^2 + 25,\end{aligned}$$

となる。ここで $(1+4k\beta)^2+(7+3k\beta)^2=1+8k\beta+16k^2\beta^2+49+42k\beta+9k^2\beta^2$ を用いた。

α は他のどこにも現れないので、β が何であっても $\alpha=(1-k)\beta$ と選べば 1 つ目の平方を 0 にできる。したがって問題は $25(k\beta+1)^2$ をどこまで小さくできるかであり、ここで 2 つの場合に分かれる。

?　考えてみよう　$k=0$ のとき何が変わるか？

$k\neq 0$ ならば $\beta=-1/k$ ととることができ、このとき $k\beta+1=0$ となる。$k=0$ ならば、β が何であっても項 $25(k\beta+1)^2$ は 25 のままである。

$k\neq 0$ の場合。各平方は非負であるから $D^2\geq 25$ であり、等号は $\beta=-1/k$、$\alpha=(1-k)\beta=(k-1)/k$ のとき成り立つ。最短距離は

$$D_{\min}=5,$$

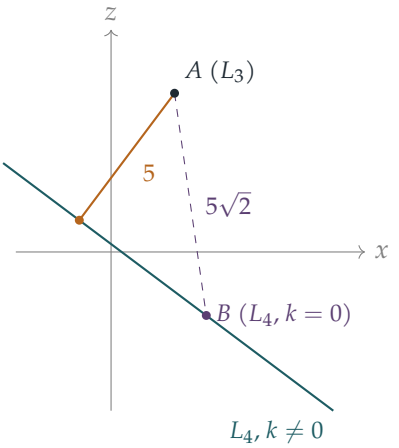
であり、これは（0 でない）k の値によらない。最も近い 2 点は $P=\left(2,\ 3+\frac{k-1}{k},\ 5\right)$ と $Q=\left(-1,\ 3+\frac{k-1}{k},\ 1\right)$ であり、$\overrightarrow{PQ}=(-3,0,-4)$ の長さは 5 である。$D_{\min}>0$ なので 2 直線は交わらず、また $k\neq 0$ のとき方向ベクトル $(0,1,0)$ と $(4k,1-k,-3k)$ は平行でない（後者の第 1 成分と第 3 成分がともに 0 になることはない）。よって 2 直線は**ねじれの位置**（skew）にあり、5 はそれらの共通垂線（common perpendicular）の長さである。共通垂線はただ 1 つに定まる。

$k=0$ の場合。このとき L_4 の方向ベクトルは $(0,1,0)$ となり、L_3 と同じである。すなわち 2 直線は**平行**（parallel）である。このとき $D^2=(\beta-\alpha)^2+50$ であり、$\alpha=\beta$ であれば常に最小となるので、

$$D_{\min}=\sqrt{50}=5\sqrt{2},$$

である。最短距離を与える点の組は無数にある。一方の直線上の任意の点と、他方の直線上でその真向かいにある点（y 座標が等しい点）の組がそれである。これは単に、平行な 2 直線間の一定の距離にほかならない。

図形的な見方。どちらの直線も、y 軸の方向にまっすぐ見下ろす、すなわち xz 平面に射影（projection）すると最も見やすい。L_3 は y 軸に平行なので 1 点 $A=(2,5)$ に射影され、L_3 に垂直な方向の距離は射影によって変わらない。$k\neq 0$ のとき、L_4 は $(3,-2)$ を通り方向ベクトルが $(4,-3)$ の直線に射影され（$1-k$ の成分は消える）、A からその直線までの距離は $\left|1\cdot(-3)-(-7)\cdot 4\right|/5=5$ となって k によらない。$k=0$ のとき、L_4 は 1 点 $B=(3,-2)$ に射影され、距離は $AB=\sqrt{1+49}=5\sqrt{2}$ である。



以上より、答えは $k \neq 0$ のとき 5（ねじれの位置にある 2 直線で、最短の線分はただ 1 つであり、それは両方の直線に垂直である）、$k = 0$ のとき $5\sqrt{2}$（平行な 2 直線で、距離はどこでも同じ）である。

検算

小問 (i) では、$\lambda = 1$、$\mu = 3$ を代入すると距離 6 の 2 点が得られ、$\overrightarrow{PQ}$ は両方の直線に垂直である。(λ, μ) の格子上で数値的に探索しても、$D^2 = 36$ を下回る値は見つからなかった。小問 (ii) では、$k = 0.001,\ 0.3,\ 1,\ -2,\ 5$ に対して D^2 を数値的に最小化するといずれも 25 となり、$k = 0$ では 50 となった。$D_{\min}$ が $k = 0$ で 5 から $5\sqrt{2}$ へ跳ぶことに注意しよう。k が非常に小さいとき、最も近い 2 点は $\beta = -1/k$ 付近のはるか遠くにあるので、極限が連続である必要はないのである。

よくある間違い

- 2 つの平方が**同時に** 0 になりうるかの確認を忘れること。この問題では同時に 0 にできるが、それは仮定するのではなく、きちんと述べなければならない。
- $k = 0$ のときに k で割ってしまうこと。$\beta = -1/k$ という選び方は $k \neq 0$ のときにしか使えず、まさにそのために 2 つの場合が生じるのである。
- $k \neq 0$ のときの 2 直線を「交わる」と言ってしまうこと。2 直線は平行ではないが、$D_{\min} = 5 > 0$ なので、ねじれの位置にある。

STEP のその先へ

多変数での平方完成は、二次形式（quadratic form）の理論の出発点である。D^2 を平方和で表すことは対称行列（symmetric matrix）を対角化（diagonalisation）することであり、その最小値を求めることは最小二乗法（least squares）の問題である。最後に確かめた垂直性は最小二乗法の「正規方程式」（normal equations）にあたり、ねじれの位置にある 2 直線間の距離の一般公式 $|(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})|/|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$ も同じ図形的考察から得られる。Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、射影と最小二乗法を見事に解説している。

解答例

STEP I 2007、第 8 問

純粋数学 • 3 次曲線の接し方

> **STEP I 2007、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q8

鍵となる考え方

2 つの曲線がある点で接する（touch）のは、交点を求める方程式がその点で重根（repeated root）をもつときであり、かつそのときに限る。そこで 2 つの 3 次関数の差を調べ、因数 $(x-2)^2$ が現れることを期待する。a を含む項の係数 $1, -6, 12, -8$ は $(x-2)^3$ の二項係数（binomial coefficients）であり、このことに気づけば因数分解（factorisation）も概形の描画もずっと容易になる。

解答

$(2,8)$ で接することと、もう 1 つの交点

a を含む項をまとめると、

$$ax^3 - 6ax^2 + 12ax - 8a = a(x-2)^3, \qquad \text{よって} \qquad y = a(x-2)^3 + 12x - 16. \quad (*)$$

$y = x^3$ との交点は

$$a(x-2)^3 + 12x - 16 - x^3 = 0.$$

の解である。ここで $x^3 - 12x + 16$ は $x = 2$ で 0 になり、割り算を実行すると $x^3 - 12x + 16 = (x-2)^2(x+4)$ を得る。したがって

$$\begin{aligned} a(x-2)^3 + 12x - 16 - x^3 &= a(x-2)^3 - (x-2)^2(x+4) \\ &= (x-2)^2\big[(a-1)x - 2a - 4\big]. \end{aligned}$$

$x = 2$ のとき両曲線はともに $(2,8)$ を通り、因数 $(x-2)^2$ は $x = 2$ が交点の方程式の重根であることを示している。同じことだが、傾き（gradient）も一致する。実際、$(*)$ よ

り $y' = 3a(x-2)^2 + 12$ であり、これは $x = 2$ で 12 となる。一方、その点での $y = x^3$ の傾きは $3 \cdot 2^2 = 12$ である。よって、a の値によらず、2 曲線は $(2, 8)$ で接する。

それ以外の交点は $(a-1)x = 2a + 4$ から得られる。

- $a \neq 1$ ならば $x = \dfrac{2a+4}{a-1}$ であり、これは決して 2 にならない（そうなるには $2a + 4 = 2a - 2$ が必要である）。したがって、ほかの交点はちょうど 1 つで、

$$\left(\frac{2a+4}{a-1}, \left(\frac{2a+4}{a-1} \right)^3 \right).$$

  である。

- $a = 1$ ならば、括弧内は定数 -6 となるので、ほかの交点は存在しない。

? **考えてみよう** どちらの曲線が上にあり、それはどこでか？

この問いには因数分解がそのまま答えてくれる。$(x-2)^2 \geq 0$ であるから、$(*)$ から x^3 を引いたものの符号は、1 次因数 $(a-1)x - 2a - 4$ の符号と一致する。これにより、もう 1 つの交点のどちら側で曲線 $(*)$ が $y = x^3$ より上にあるかがわかり、概形を描くのに必要なことの大部分がそろう。

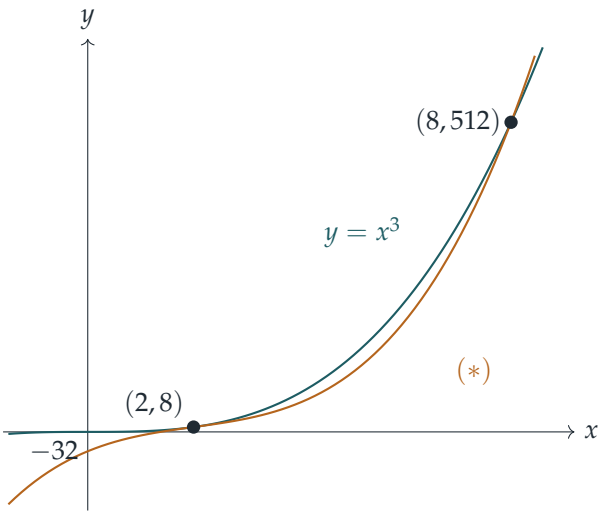
3 つの概形のいずれにおいても、$(*)$ は $(2, 8)$ に傾き 12 の変曲点（point of inflection）をもつ。$a \neq 0$ のとき、$y'' = 6a(x-2)$ がそこで符号を変えるからである。したがって $(*)$ と $y = x^3$ は $(2, 8)$ において共通の接線（tangent）$y = 12x - 16$ をもつ。その点で $y = x^3$ は下に凸（concave up）であるが、$(*)$ はそうではない。

小問 (i)：$a = 2$

このとき $y = 2(x-2)^3 + 12x - 16$ であり、

$$y - x^3 = (x-2)^2(x-8).$$

となる。もう 1 つの交点は $(8, 512)$ である。曲線 $(*)$ は $x < 8$ では $y = x^3$ の下にあり（$x = 2$ で接する）、$x > 8$ では上にある。傾き $6(x-2)^2 + 12$ はつねに正であるから、この曲線は単調増加で、極値をとる点（turning points）をもたない。y 軸とは $(0, -32)$ で交わり、x 軸とは $x \approx 1.37$ 付近で 1 回交わる。



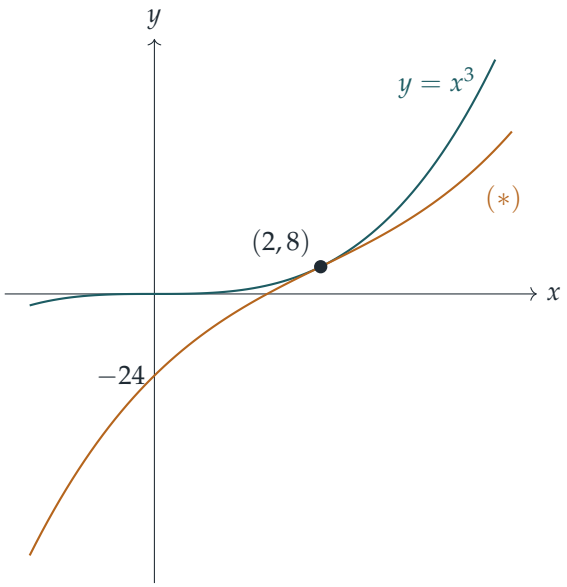
（縦方向の縮尺を大きく縮めているため、$(2,8)$ で接している様子は平らに見えるが、2 曲線はそこで共通の接線をもつ。）

小問 (ii)： $a = 1$

このとき $y = (x-2)^3 + 12x - 16 = x^3 - 6x^2 + 24x - 24$ であり、

$$y - x^3 = -6(x-2)^2 \leq 0.$$

となる。よって $(*)$ は、接点 $(2,8)$ を除くすべての点で $y = x^3$ の下にあり、ほかの交点はない。差 $6(x-2)^2$ は、$x = 2$ からどちらの方向へ離れても大きくなる。傾き $3(x-2)^2 + 12$ はつねに正であるから、$(*)$ は単調増加である。y 軸とは $(0,-24)$ で交わり、x 軸とは $x \approx 1.36$ 付近で 1 回交わる。



小問 (iii)： $a = -2$

このとき、もう 1 つの交点は $x = \dfrac{-4+4}{-3} = 0$ であるから原点 $(0,0)$ であり、

$$y - x^3 = (x-2)^2(-3x) = -3x(x-2)^2.$$

となる。よって $(*)$ は $x < 0$ では $y = x^3$ の上に、$x > 0$ では下にあり、$(2,8)$ で接する。

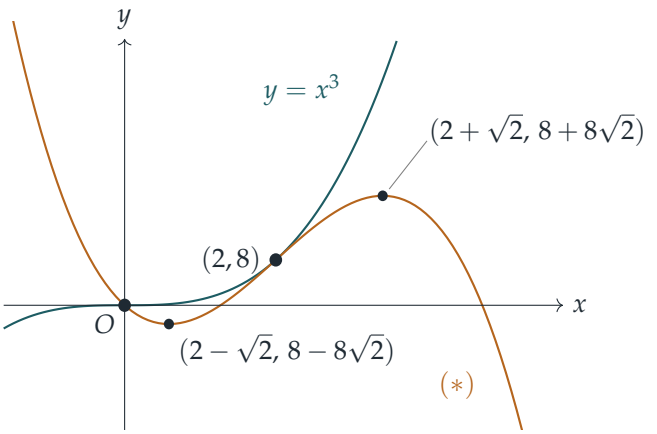
展開すると $y = -2(x-2)^3 + 12x - 16 = -2x^3 + 12x^2 - 12x = -2x(x^2 - 6x + 6)$ となり、x 軸とは $x = 0$ および $x = 3 \pm \sqrt{3}$（およそ 1.27 と 4.73）で交わる。傾きは

$$y' = -6(x-2)^2 + 12,$$

であり、これは $(x-2)^2 = 2$、すなわち $x = 2 \pm \sqrt{2}$ のとき 0 になる。代入すると、

$$x = 2 - \sqrt{2}: \quad y = 8 - 8\sqrt{2} \approx -3.31 \quad (\text{極小}),$$
$$x = 2 + \sqrt{2}: \quad y = 8 + 8\sqrt{2} \approx 19.3 \quad (\text{極大}).$$

最高次の係数（leading coefficient）が負であるから、$x \to -\infty$ のとき $y \to +\infty$、$x \to +\infty$ のとき $y \to -\infty$ である。原点において $(*)$ の傾きは -12 であるのに対し、$y = x^3$ の傾きは 0 であるから、2 曲線はそこで確かに交差する。



検算

- $x = 2$ のとき、$(*)$ はすべての a に対して $a \cdot 0 + 24 - 16 = 8$ を与え、また $y' = 12$ であり、$y = x^3$ と一致する。
- $a = 2$、$x = 8$ のとき、整理した形から $2 \cdot 6^3 + 96 - 16 = 512 = 8^3$ となり、点 $(8, 512)$ が確認できる。
- $a = 0$ のとき、$(*)$ は接線 $y = 12x - 16$ そのものであり、公式はもう 1 つの交点を $x = -4$ と与える。実際 $x^3 - 12x + 16 = (x-2)^2(x+4)$ である。
- 因数分解は、数千組の無作為な有理数 a と x について厳密に確かめた。また小問 (iii) の極値 $8 \pm 8\sqrt{2} \approx 19.31, -3.31$ も数値的に確かめた。

よくある間違い

- $a = 1$ の場合を忘れること。このときもう 1 つの交点が存在しないため、その公式は破綻する。
- 両曲線が $(2, 8)$ を通ることだけを示して終えること。接するためには傾きが等しいこと、あるいは同値なこととして重根をもつことも必要である。
- 小問 (iii) で、2 曲線が原点で接するように描くこと。実際には傾きが異なり、そこで交差している。

STEP のその先へ

$f(x) - g(x)$ の重根は、接することの代数的な影である。すなわち、その点で 2 曲線は 1 次の近似まで一致する。この考えをさらに推し進めると、接触の位数（order of contact）とは何階の導関数までが一致するかを数えるものであり、これはテイラー多項式（Taylor polynomials）の背後にある考え方である。テイラー多項式とは、ある点において関数と可能な限り高い位数で接触する多項式のことである。Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）はテイラーの定理を丁寧に展開している。Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には、STEP 形式の曲線の概形描画の問題がさらに収められている。

解答例

STEP I 2007、第 9 問

力学 ・ 斜面上の最大摩擦力

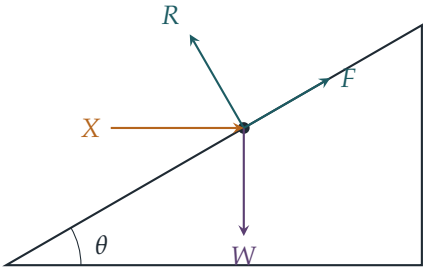
> **STEP I 2007、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q9

鍵となる考え方

この問題は極限摩擦（limiting friction）の 2 つの場合であり、両者の違いは摩擦力の向きだけである。それぞれの場合について、斜面に平行な方向と垂直な方向に力を分解し、垂直抗力（normal reaction）を消去すると、各水平力が W と三角関数の式の比との積として表される。一方を他方で割ると W が消え、k、μ、θ だけの関係式が残る。不等式は、$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ が決して $\frac{1}{2}$ を超えないという事実から導かれる。

解答

物体を質点（particle）とみなし、どちらの場合も摩擦は極限状態、すなわち $F = \mu R$ であると仮定する。計算を簡潔にするため、$s = \sin\theta$、$c = \cos\theta$ とおく。



水平力は質点を斜面に押しつけるので、斜面に沿って上向きの成分 Xc と、斜面に押しつける向きの成分 Xs をもつ。重力は、斜面に沿って下向きの成分 Ws と、斜面に押しつける向きの成分 Wc をもつ。

滑り下りる直前：力 X

質点は滑り下りる直前にあるので、摩擦力 μR は斜面に沿って**上向き**に働く（図のとおり）。斜面に垂直な方向、次に斜面に平行な方向に力を分解すると、

$$R = Wc + Xs, \qquad Xc + \mu R = Ws.$$

R を代入すると、

$$Xc + \mu Wc + \mu Xs = Ws \quad \Longrightarrow \quad X(c + \mu s) = W(s - \mu c). \tag{1}$$

滑り上がる直前：力 kX

今度は質点が滑り上がる直前にあるので、摩擦力は斜面に沿って**下向き**に働く。同様にして、

$$R' = Wc + kXs, \qquad kXc = Ws + \mu R',$$

よって

$$kX(c - \mu s) = W(s + \mu c). \tag{2}$$

考えてみよう ここで現れるものすべてで割ってよいのだろうか？

物理的な設定を考えれば、割ってよい。質点が滑り下りるのを防ぐために正の力 X が**必要**なのだから、この力がなければ質点は滑り下りる。これは $\tan\theta > \mu$、すなわち $s - \mu c > 0$ を意味する。すると (1) から $X > 0$ であり、$c + \mu s > 0$ はもともと成り立つ。水平に押すことで質点を斜面に沿って押し上げることがそもそも可能であるためには、(2) より $c - \mu s > 0$、すなわち $\tan\theta < 1/\mu$ が必要である。これらを合わせると $\mu < \tan\theta < 1/\mu$ となり、特に $\mu < 1$ である。これは最後に必要になる。

関係式

(2) を (1) で割ると、X と W がともに消える：

$$k\,\frac{c - \mu s}{c + \mu s} = \frac{s + \mu c}{s - \mu c} \quad \Longrightarrow \quad k(c - \mu s)(s - \mu c) = (s + \mu c)(c + \mu s).$$

両辺を展開し、$s^2 + c^2 = 1$ を用いると、

$$(c - \mu s)(s - \mu c) = sc - \mu c^2 - \mu s^2 + \mu^2 sc = (1 + \mu^2)sc - \mu,$$
$$(s + \mu c)(c + \mu s) = sc + \mu s^2 + \mu c^2 + \mu^2 sc = (1 + \mu^2)sc + \mu.$$

したがって $k(1 + \mu^2)sc - k\mu = (1 + \mu^2)sc + \mu$ であり、これを整理すると

$$(k - 1)(1 + \mu^2)\sin\theta\cos\theta = \mu(k + 1),$$

となり、示すべき式が得られた。

不等式

右辺は正であり（$\mu > 0$ かつ $k > 0$ より）、θ が鋭角なので $(1+\mu^2)\sin\theta\cos\theta$ も正である。よって $k > 1$ である（これは驚くことではない。質点を押し上げるには、支えておくよりも大きな力が要る）。さて、

$$\sin\theta\cos\theta = \tfrac{1}{2}\sin 2\theta \leq \tfrac{1}{2},$$

であり、$(k-1)(1+\mu^2) > 0$ なので、この不等式の両辺にこれを掛けてよい：

$$\mu(k+1) = (k-1)(1+\mu^2)\sin\theta\cos\theta \leq \tfrac{1}{2}(k-1)(1+\mu^2).$$

両辺を 2 倍し、k を含む項をまとめると、

$$2\mu k + 2\mu \leq k(1+\mu^2) - (1+\mu^2) \quad \Longrightarrow \quad k(1-2\mu+\mu^2) \geq 1 + 2\mu + \mu^2,$$

すなわち $k(1-\mu)^2 \geq (1+\mu)^2$ である。上で $\mu < 1$ を示したので $(1-\mu)^2 > 0$ であり、不等号の向きを変えずにこれで割ることができる：

$$k \geq \frac{(1+\mu)^2}{(1-\mu)^2}.$$

等号が成り立つのは $\sin 2\theta = 1$、すなわち $\theta = 45^\circ$ のときに限る。

> **考えてみよう** 最後のステップの前に、なぜ $\mu < 1$ を知っている必要があるのだろうか？

$\mu = 1$ ならば 0 で割ることになる（しかもその直前の行は $0 \geq 4$ となり、偽である）。$\mu > 1$ ならば割ること自体は許されるが、θ に関する条件がすでに成り立たなくなっている。物理的には、$\mu \geq 1$ のとき 2 つの要請 $\tan\theta > \mu \geq 1$ と $\tan\theta < 1/\mu \leq 1$ は互いに矛盾する。つまり、質点をそもそも支える必要がないか、あるいはどんな水平の押しでも質点を斜面に沿って動かし始めることができないかのどちらかである。したがって、この問題では暗に $\mu < 1$ が仮定されている。

検算

- $\mu = \frac{1}{2}$、$\theta = 45^\circ$ とすると $s = c = 1/\sqrt{2}$ である。(1) と (2) から $X = W \cdot \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}W$、$kX = W \cdot \frac{3/2}{1/2} = 3W$ となるので $k = 9 = (1.5/0.5)^2$ であり、これは等号の場合である。代わりに $\theta = 60^\circ$ とすると、同じ式から $k \approx 25.2 > 9$ が得られる。
- $\mu \to 0$ ならば $X = kX = W\tan\theta$ かつ $k \to 1$ となり、等式（両辺とも 0）とも下界 1 とも一致する。
- $\mu \in (0,1)$ と許容される θ を 10^5 通り無作為に選んで等式と不等式を数値的に検証したところ、成り立たない例は見つからなかった。

よくある間違い

- $R = W\cos\theta$ としてしまう。水平力も質点を斜面に押しつけており、垂直抗力に $X\sin\theta$ を加える。
- 2 つの場合で摩擦力の向きを同じにしてしまう。摩擦力は常に、これから起ころうとしている運動を妨げる向きに働く。
- $(1-\mu)^2$ が正である（そして 0 でない）理由を述べずに、それで割ってしまう。

STEP のその先へ

この問題を見通しよく理解するには、$\tan\lambda = \mu$ を満たす**摩擦角**（angle of friction）λ を用いるとよい。垂直抗力と極限摩擦力を合成すると、法線と角 λ をなす 1 つの力になり、(1) と (2) はそれぞれ $X = W\tan(\theta-\lambda)$、$kX = W\tan(\theta+\lambda)$ となる。よって $k = \tan(\theta+\lambda)/\tan(\theta-\lambda)$ であり、下界の不等式は、この比が $\theta = 45°$ で最小になるという主張にほかならない。この種の摩擦角を用いた議論や「摩擦円錐」（friction cone）の考え方は、大学の静力学（statics）や接触の理論で再び登場する。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、大学 1 年次の講義で求められる丁寧さで、摩擦と力の解析を扱っている。

解答例

STEP I 2007、第 10 問

力学 ・ 変位－時間グラフ

> **STEP I 2007、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q10

鍵となる考え方

変位–時間グラフ（displacement–time graph）の上では、騎手も軍も 1 本の直線（または 2 本の線分）で表され、「すれ違う」とは単に 2 本の直線が交わることにほかならない。そこで、サクソン軍からの変位を測ることにして各直線の方程式を書き下し、それらの交点を求める。問題文の不等式は、交わりが予想どおりの順序で起こるための条件そのものであり、最後の小問はその条件の一つが破れたときに何が起こるかを問うている。

解答

グラフの設定

軍と騎手を、一直線上を動く点としてモデル化する。s を（静止している）サクソン軍からノルマン軍の方向へ測った変位とし、両軍の距離が d となった時刻を時間の原点とする。すると次のようになる。

- サクソン軍：$s = 0$。
- ノルマン軍：$s = d - ut$。
- サクソンの騎手、往路：$s = xt$。$xt = d - ut$ となるときにノルマン軍に到達するので、それは時刻 $t_S = \dfrac{d}{x+u}$、位置 $s = \dfrac{xd}{x+u}$ である。速さ x で引き返すので、

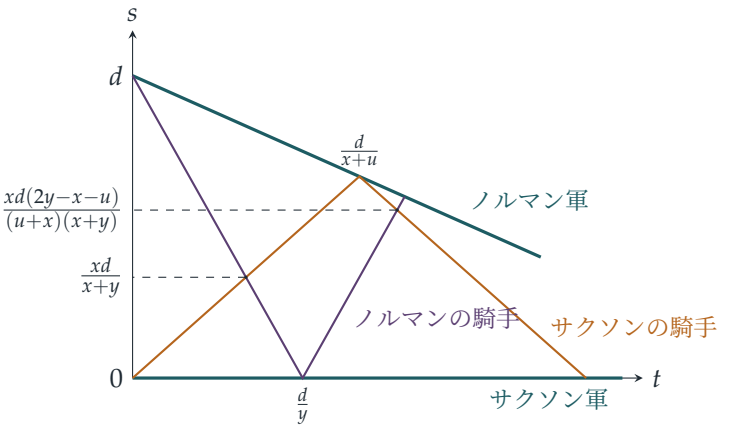
$$s = \frac{xd}{x+u} - x\left(t - \frac{d}{x+u}\right) = \frac{2xd}{x+u} - xt,$$

  となり、$t = \dfrac{2d}{x+u}$ に自軍へ帰り着く。

▶ ノルマンの騎手、往路：$s = d - yt$。時刻 $t_N = \dfrac{d}{y}$ にサクソン軍に到達し、速さ y で引き返すときの直線は

$$s = y\left(t - \frac{d}{y}\right) = yt - d.$$

である。$y > u$ であるから、$yt - d = d - ut$ となるとき、すなわち $t = \dfrac{2d}{y+u}$ に、確かに自軍に追いつく。



（図は $u = 1$、$x = 2$、$y = 4$、$d = 1$ として描いてある。）

1 回目のすれ違い

両騎手とも往路にあるので、$s = xt$ と $s = d - yt$ の交点を求める。$(x+y)t = d$ より

$$t = \frac{d}{x+y}, \qquad s = \frac{xd}{x+y}.$$

$\frac{d}{x+y}$ は $\frac{d}{y}$ と $\frac{d}{x+u}$ のいずれよりも小さい（後者には $y > u$ を用いる）ので、これは確かにどちらの騎手も引き返す前である。

2 回目のすれ違い

今度は両騎手とも帰路にある。$s = \dfrac{2xd}{x+u} - xt$ と $s = yt - d$ の交点を求める。両辺に $xt + d$ を加えると

$$(x+y)t = d + \frac{2xd}{x+u} = \frac{d(3x+u)}{x+u}, \qquad \text{よって} \qquad t_2 = \frac{d(3x+u)}{(x+u)(x+y)}.$$

このとき

$$s = \frac{2xd}{x+u} - \frac{xd(3x+u)}{(x+u)(x+y)} = \frac{xd\big(2(x+y) - (3x+u)\big)}{(x+u)(x+y)} = \frac{xd(2y-x-u)}{(u+x)(x+y)},$$

となり、これが求める 2 つ目の距離である。

考えてみよう 時刻 t_2 に両騎手が本当に帰路にあることは、どうすればわかるだろうか。

ここで不等式が効いてくる。ノルマンの騎手が引き返しているのは $t_2 \geq \frac{d}{y}$ のときであり、

$$y(3x+u) \geq (x+u)(x+y) \iff 3xy \geq x^2+xy+ux \iff u \leq 2y-x.$$

サクソンの騎手が引き返しているのは $t_2 \geq \frac{d}{x+u}$ のときであり、

$$3x+u \geq x+y \iff u \geq y-2x.$$

したがって、条件 $y-2x < u < 2y-x$ はまさに t_2 が両方の折り返し時刻より後になるための条件である。同じ条件 $u < 2y-x$ によって $s > 0$ ともなるので、サクソンの騎手はまだ帰り着いていない。（問題文には書かれていない条件がもう一つある。ノルマンの騎手が先に自軍に帰り着いてしまってはならない。$t_2 \leq \frac{2d}{y+u}$ を計算すると $(x-u)(2x-y+u) \geq 0$ に帰着し、$2x-y+u > 0$ であるから、これは $x \geq u$、すなわちサクソンの騎手がノルマン軍以上の速さをもつことを意味する。これは当然意図されている前提であろう。そうでなければ、騎手が引き返した瞬間に軍に追い抜かれてしまう。）

場合 (i)：$u > 2y-x$

このとき $t_2 < \frac{d}{y}$ であり、サクソンの騎手の帰路の直線とノルマンの騎手の**往路**の直線が先に交わる。$y > u$ であるから、この場合には $x > y$、つまりサクソンの騎手のほうが速いことが必要である。サクソンの騎手はノルマン軍に到達して引き返し、両者がともにサクソン軍に向かっている間に、ノルマンの騎手に後ろから追いつく。（$s = \frac{2xd}{x+u} - xt$ と $s = d - yt$ の交点を求めると、その位置はサクソン軍から $\frac{xd(x+u-2y)}{(x+u)(x-y)}$ である。）サクソンの騎手は $\frac{2d}{x+u}$ に帰り着き、これはノルマンの騎手が $\frac{d}{y}$ に到着するより前であるから、2 人が 2 度目に正面からすれ違うことはない。ノルマンの騎手はただサクソン軍に到着するだけで、そこには相手がすでに戻っている。

場合 (ii)：$u < y-2x$

このとき $t_2 < \frac{d}{x+u}$ であり、ノルマンの騎手のほうがはるかに速い。ノルマンの騎手はサクソン軍に到達して引き返し、まだノルマン軍に向かって往路を進んでいるサクソンの騎手を追い越す。$s = yt - d$ と $s = xt$ の交点を求めると、これは時刻 $t = \frac{d}{y-x}$、サクソン軍から $\frac{xd}{y-x}$ の位置で起こる。その後ノルマンの騎手は $\frac{2d}{y+u}$ に帰り着き、これはサクソンの騎手が $\frac{d}{x+u}$ にノルマン軍に到達するより前である（$2(x+u) < y+u$ であるから）。したがって、両軍の間の野原でそれ以上すれ違うことはない。

検算

- $d = 1$、$u = 1$、$x = 2$、$y = 4$（図と同じ）とすると、公式からすれ違いの位置は $\frac{1}{3}$ と $\frac{5}{9}$ となる。時間刻み 10^{-5} で運動を数値的に追うと、交差は 0.3333 と 0.5556 で起こる。
- $y = x + u$ ならば 2 つの距離は等しく、どちらも $\frac{x}{x+y}d$ となる。これは確かめるのにちょうどよい特別な値である。
- $u \to 2y - x$ のとき 2 つ目の距離は 0 に近づく。2 回目のすれ違いはちょうどサクソン軍の位置で起こり、これが場合 (i) との境界である。

よくある間違い

- 騎手の帰路を $s = -xt$ や $s = yt$ と書いてしまい、時間の原点を折り返しの瞬間にずらすのを忘れる。
- サクソンの騎手の折り返し地点として、騎手が到着した瞬間のノルマン軍の位置ではなく、$t = 0$ における位置を用いてしまう。
- 最後の小問で、「2 人は出会わない」とだけ答える。どちらの場合も 2 人は 2 度目にすれ違うが、それは同じ向きに進みながらであり、一方が他方を追い越すのである。

STEP のその先へ

このようなグラフは**世界線**（world line）と呼ばれ、特殊相対性理論（special relativity）の基本的な道具である。そこでは、運動する観測者の間を往復する光の信号がまさにこの方法（レーダー法）で解析され、直線の傾きが相対速度を表す。ここでの計算、すなわち一方の速さに u を加え、他方から引くという操作は、ガリレイの相対速度（Galilean relative velocity）である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、ガリレイ的な描像と相対論的な描像の両方を扱っている。

解答例

STEP I 2007、第 11 問

力学 ・ 放物運動

STEP I 2007、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

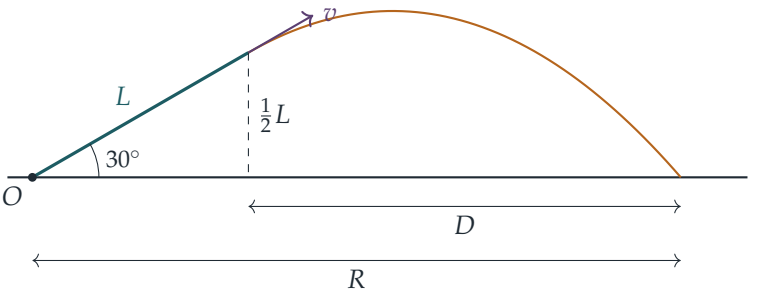
step.maths.org/questions/07-s1-q11

鍵となる考え方

運動を二つの段階に分ける。滑らかな管の中では、管に沿った方向にはたらく力は重力の成分だけなので、エネルギー（energy）の関係（あるいは等加速度運動の公式（constant-acceleration formulae））から出口での速さが求まる。その後は通常の放物運動（projectile motion）であり、到達地点の高さより $\frac{1}{2}L$ だけ高い点から 30° の角度で打ち出される。飛行時間を消去すれば D についての 2 次方程式が得られ、これを**陰関数微分**（implicit differentiation）すれば、D を解かずに $\mathrm{d}D/\mathrm{d}L$ が求まる。

解答

粒子を質点（point mass）とみなし、管は滑らか（smooth）である（したがって垂直抗力（normal reaction）は仕事をせず、管に沿った成分をもたない）とし、空気抵抗（air resistance）は無視する。



管の中

管に沿った方向に力を分解すると、その方向の力の成分は斜面下向きの $mg\sin 30^\circ = \frac{1}{2}mg$ だけなので、減速度は $\frac{1}{2}g$ である。距離 L を進む間に

$$v^2 = u^2 - 2\cdot\tfrac{1}{2}g\cdot L = u^2 - gL,$$

となる。ここで v は出口での速さである。(そもそも粒子が管から出るためには $u^2 > gL$ が必要である。) 管の上端は下端より高さ $L\sin 30^\circ = \frac{1}{2}L$ だけ高く、下端から水平距離 $L\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}L$ の位置にある。

放物運動の段階

粒子は管に沿った向きに飛び出すので、その速度の水平成分は $\frac{\sqrt{3}}{2}v$、鉛直成分は上向きに $\frac{1}{2}v$ である。出口の点を原点にとると、時刻 t において

$$x = \tfrac{\sqrt{3}}{2}vt, \qquad y = \tfrac{1}{2}vt - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

粒子が下端の高さに戻るのは $y = -\frac{1}{2}L$ となるときであり、その瞬間に $x = D$ である。第 1 式から $t = \dfrac{2D}{\sqrt{3}\,v}$ であり、これを第 2 式に代入すると

$$\frac{D}{\sqrt{3}} - \frac{2gD^2}{3v^2} = -\frac{L}{2}.$$

両辺に $-6v^2$ を掛けると

$$4gD^2 - 2\sqrt{3}\,v^2D - 3Lv^2 = 0,$$

となり、$v^2 = u^2 - gL$ を代入すると

$$4gD^2 - 2\sqrt{3}\,(u^2 - gL)D - 3L(u^2 - gL) = 0,$$

これが求める方程式である。(二つの解の積は $-3Lv^2/(4g) < 0$ なので、D は正の解の方である。)

導関数

u を固定すると D は L に依存するので、方程式を L で微分する。両者を含む各項には積の微分法 (product rule) を用いる：

$$8gD\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L} - 2\sqrt{3}(u^2 - gL)\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L} + 2\sqrt{3}\,gD - 3(u^2 - gL) + 3gL = 0.$$

最後の 2 項はまとめると $-3(u^2 - 2gL)$ になる。$\mathrm{d}D/\mathrm{d}L$ を含む項をまとめると

$$\left(8gD - 2\sqrt{3}(u^2 - gL)\right)\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L} = -\left(2\sqrt{3}\,gD - 3(u^2 - 2gL)\right),$$

したがって

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L} = -\frac{2\sqrt{3}\,gD - 3(u^2 - 2gL)}{8gD - 2\sqrt{3}(u^2 - gL)},$$

となり、示された。

考えてみよう なぜ $-3L(u^2 - gL)$ の項から二つの部分が生じるのか？

この項には L が 2 回現れるからである。$-3Lu^2 + 3gL^2$ を微分すると $-3u^2 + 6gL$ となり、これは $-3(u^2 - gL) + 3gL$ に等しい。括弧の中の L を忘れることが、答えの $2gL$ を見落とす最もありがちな原因である。

R の停留値

下端からの最終的な水平変位は、管の水平方向の長さに D を加えたものである：

$$R = \tfrac{\sqrt{3}}{2}L + D, \qquad \text{so} \qquad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}L} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L}.$$

よって $\mathrm{d}R/\mathrm{d}L = 0$ となるのは、ちょうど $\mathrm{d}D/\mathrm{d}L = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、すなわち（分母を払うと。分母が 0 でないことは後で確かめる）

$$2\sqrt{3}\,gD - 3(u^2 - 2gL) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\big(8gD - 2\sqrt{3}(u^2 - gL)\big) = 4\sqrt{3}\,gD - 3(u^2 - gL).$$

のときである。$3u^2$ の項は打ち消し合い、$6gL - 2\sqrt{3}\,gD = 3gL$ が残るので $2\sqrt{3}\,gD = 3gL$、すなわち

$$2D = L\sqrt{3}.$$

どの段階も逆にたどれるので、$2D = L\sqrt{3}$ のとき $\mathrm{d}R/\mathrm{d}L = 0$ となり、示された。

R を求めるために、$D = \frac{\sqrt{3}}{2}L$ を 2 次方程式に代入すると

$$4g \cdot \tfrac{3}{4}L^2 - 2\sqrt{3}(u^2 - gL) \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2}L - 3L(u^2 - gL) = 3gL^2 - 6L(u^2 - gL) = 0.$$

$L > 0$ なので $gL = 2(u^2 - gL)$ となり、$L = \dfrac{2u^2}{3g}$ である。（このとき $v^2 = u^2 - gL = \frac{1}{3}u^2 > 0$ なので粒子は確かに管から出ており、分母 $8gD - 2\sqrt{3}v^2 = \frac{8\sqrt{3}}{3}u^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}u^2 = 2\sqrt{3}\,u^2$ は 0 でない。）最後に

$$R = \tfrac{\sqrt{3}}{2}L + D = \sqrt{3}\,L = \frac{2\sqrt{3}\,u^2}{3g} = \frac{2u^2}{\sqrt{3}\,g}.$$

検算

- $L = 0$ のとき、2 次方程式から $D = \sqrt{3}u^2/(2g)$ が得られる。これは 30° で打ち出したときのおなじみの到達距離 $u^2 \sin 60°/g$ である。

- $L = u^2/g$ のとき、粒子は $v = 0$ でちょうど上端に達するので $D = 0$ となり、再び $R = \frac{\sqrt{3}}{2}u^2/g$ である。停留値 $2u^2/(\sqrt{3}g) \approx 1.155\,u^2/g$ はこれらの間の L でとられ、どちらの値よりも大きいので、最大値である。
- 数値的には、$u = g = 1$ として L を $[0, 1]$ の範囲で走査すると、$L \approx 0.6667$ で R の最大値 1.1547 が得られ、$2/\sqrt{3}$ および $L = \frac{2}{3}$ と一致する。また、運動を直接数値的に追跡しても D についての 2 次方程式が再現される。

よくある間違い

- 管の中での減速度を $g\sin 30^\circ = \frac{1}{2}g$ ではなく g としてしまう。
- $y = -\frac{1}{2}L$ ではなく $y = 0$ とおいてしまう。粒子は打ち出された点より低い位置に着地するのである。
- 管そのものの水平方向の長さ $\frac{\sqrt{3}}{2}L$ を忘れて $R = D$ と書いてしまう。

STEP のその先へ

方程式 $F(D, L) = 0$ を解かずに微分することは陰関数微分であり、大学 1 年の解析学では陰関数定理（implicit function theorem）となる：$\mathrm{d}D/\mathrm{d}L = -F_L/F_D$ は $F_D \neq 0$ であるところではどこでも成り立ち、この条件はまさに先ほど確かめた分母の条件である。力学について次に進むには、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい。

解答例

STEP I 2007、第 12 問

確率・統計 ・ 条件付き確率

STEP I 2007、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s1-q12

鍵となる考え方

2 個目の菓子については、袋の中身がどうなっているかがわからない。それは最初に何が起きたかに依存するからである。そこで条件付け（conditioning）を行う。すなわち、2 回目の取り出しより前に起きたことすべてに応じて場合分けし、各場合に赤が出る確率を求め、全確率の公式（law of total probability）を用いて足し合わせる。小問 (ii) には便利な近道がある。無作為に選ばれた菓子を 1 個受け取ったばかりの袋に入っている赤い菓子の個数の期待値（expected value）は簡単に書き下せるので、移された菓子の色による場合分けを何度も繰り返す必要はない。

解答

小問 (i)

1 個目の菓子が赤であるという事象（event）を R_1、2 個目の菓子が赤であるという事象を R_2 とする。どの菓子も 1 個目に取り出される確率は等しいので、

$$\mathrm{P}(R_1) = \frac{a}{N}.$$

R_2 については、1 個目の菓子の色で条件付ける。1 個目が赤ならば、残りは $N-1$ 個でそのうち $a-1$ 個が赤である。1 個目が赤でなければ、残りは $N-1$ 個でそのうち a 個が赤である。（ここで $N \geq 2$ により 2 個目の菓子が存在することが保証される。）全

確率の公式により、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(R_2) &= \mathrm{P}(R_1)\,\mathrm{P}(R_2 \mid R_1) + \mathrm{P}(R_1')\,\mathrm{P}(R_2 \mid R_1') \\ &= \frac{a}{N}\cdot\frac{a-1}{N-1} + \frac{N-a}{N}\cdot\frac{a}{N-1} \\ &= \frac{a\big[(a-1)+(N-a)\big]}{N(N-1)} = \frac{a(N-1)}{N(N-1)} = \frac{a}{N}.\end{aligned}$$

よって $\mathrm{P}(R_2) = \mathrm{P}(R_1)$ であり、示すべきことが示された。（同じことは対称性（symmetry）からもわかる。相異なる 2 個の菓子の順序対はどれも等しい確率で現れるので、2 個目の菓子が特定の菓子である確率は、1 個目がその菓子である確率と同じである。）

小問 (ii)

ここでの「1 個目の菓子」は 1 回目の硬貨投げの後に移される菓子であり、「2 個目の菓子」は 2 回目の硬貨投げの後に選ばれる菓子である。これらが赤であるという事象をそれぞれ R_1、R_2 とする。2 回の硬貨投げは互いに独立（independent）であり、またどちらもどの菓子が選ばれるかとは独立である。

1 個目の菓子。 1 回目の硬貨投げで条件付けると、

$$\mathrm{P}(R_1) = p\cdot\frac{a}{N} + q\cdot\frac{b}{N} = \frac{pa+qb}{N}.$$

2 個目の菓子。 2 回の硬貨投げの結果には 4 つの場合がある。

表、表。 袋 1 から菓子を 1 個取り、続いて袋 1 からもう 1 個取る。これはまさに小問 (i) の状況を袋 1（菓子 N 個、うち赤 a 個）に当てはめたものなので、2 個目の菓子が赤である確率は a/N である。

表、裏。 菓子が 1 個、袋 1 から袋 2 へ移り、袋 2 の菓子は $N+1$ 個になる。その後、袋 2 から取り出す。袋 2 の赤い菓子は確率 a/N で $b+1$ 個、確率 $1-a/N$ で b 個なので、

$$\mathrm{P}(R_2 \mid \mathrm{HT}) = \frac{a}{N}\cdot\frac{b+1}{N+1} + \left(1-\frac{a}{N}\right)\frac{b}{N+1} = \frac{b+\frac{a}{N}}{N+1} = \frac{Nb+a}{N(N+1)}.$$

考えてみよう 2 行目はなぜこれほどきれいにまとまるのか。

分子は、移し替えの後に袋 2 に入っている赤い菓子の個数の期待値である。すなわち、もともと入っていた b 個に、入ってきた菓子が赤である確率 a/N を加えたものである。この場合、袋 2 の大きさは $N+1$ に固定されているので、赤を取り出す確率はその期待値を $N+1$ で割ったものになる。

裏、表。袋を入れ替えて同じ議論をすると、袋 1 には $N+1$ 個の菓子があり、赤い菓子の個数の期待値は $a+b/N$ である。よって

$$\mathrm{P}(R_2 \mid \mathrm{TH}) = \frac{Na+b}{N(N+1)}.$$

裏、裏。小問 (i) を袋 2 に当てはめると、確率は b/N である。

ここで 4 つの場合を、それぞれの確率 p^2、pq、qp、q^2 を用いて合わせると、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(R_2) &= p^2\frac{a}{N} + pq\,\frac{(Nb+a)+(Na+b)}{N(N+1)} + q^2\frac{b}{N}\\ &= p^2\frac{a}{N} + pq\,\frac{(N+1)(a+b)}{N(N+1)} + q^2\frac{b}{N}\\ &= \frac{p^2a + pqa + pqb + q^2b}{N}\\ &= \frac{pa(p+q)+qb(p+q)}{N} = \frac{pa+qb}{N},\end{aligned}$$

となる。最後の段階で $p+q=1$ を用いた。これは $\mathrm{P}(R_1)$ に等しく、示すべきことが示された。

検算

- $p=1$ のとき、すべては袋 1 の中で起こり、両方の菓子に対する答え a/N はまさに小問 (i) である。$p=0$ のときは袋 2 に対する小問 (i) が得られる。
- $a=b=0$ のとき赤い菓子はなく、両方の確率は 0 である。$a=b=N$ のときすべての菓子が赤で、両方の確率は 1 である。
- $N=5$、$a=2$、$b=4$、$p=0.3$ のとき、公式は $(0.6+2.8)/5=0.68$ を与える。過程全体を 200 000 回シミュレーションしたところ、1 個目の菓子については 0.679、2 個目については 0.681 が得られた。また、小さな N、a、b すべてについて厳密に数え上げた結果も一致する。

よくある間違い

- 移し替えの後、受け取った袋の菓子は N 個ではなく $N+1$ 個であり、渡した袋は $N-1$ 個であることを忘れる。
- 表表および裏裏の場合に、2 回目の取り出しを 1 回目と独立であるとみなす。実際には独立ではないが、小問 (i) により答えは変わらないことがわかっているので、計算をやり直すのではなく小問 (i) を使えばよい。

STEP のその先へ

どちらの小問も、ある深い考え方の例になっている。壺から取り出したものを見ずにいれば、壺についての知識は変わらないので、次の取り出しも同じ分布をもつ。形式的に言えば、取り出しの列は**交換可能**（*exchangeable*）であり、小問 (ii) における量 $p \times$ (袋 1 の赤の割合) $+ q \times$ (袋 2 の赤の割合)、すなわち次に取り出す菓子が赤である確率は**マルチンゲール**（*martingale*）である。マルチンゲールとは、将来の値の期待値が現在の値に等しい量のことである。マルチンゲールは、賭けから金融に至るまで、現代確率論の中心をなしている。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、条件付き期待値（conditional expectation）やこれらの考え方に出会うのによい本である。

解答例

STEP I 2007、第 13 問

確率・統計 ・ 条件付き確率

> **STEP I 2007、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q13

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.1 節「**正確な条件付け**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/conditioning.html

鍵となる考え方

円板は 1 枚ずつ取り出されるが、4 枚の円板のどの組も等しい確率で現れるので、作業の大部分は組合せ（combinations）を数えることである。面白いのは条件のほうである。**どの**円板が最初に出たかを知ること、あるいは単にある特定の円板が取り出された**ということ**を知ることは、残る 3 枚の円板を、残りの 10 枚からの無作為な選択のままにしておく。一方、**何らかの**番号付きの円板が取り出されたことだけを知るのは、まったく種類の異なる情報であり、最後の二つの小問はその違いを示すために置かれている。

解答

取り出した 4 枚のうち番号付きの円板の枚数を N とする。袋はよく振られているので、相異なる 4 枚の円板の順序付きの並びはどれも等しい確率で現れ、したがって順序を考えない 4 枚の組もどれも等しい確率で現れる。そのような組は

$$\binom{11}{4} = 330$$

通りある。番号付きの円板をちょうど k 枚含む組は、5 枚の番号付きの円板から k 枚、6 枚の無地の円板から $4-k$ 枚を選ぶことで作られるので、

$$\mathrm{P}(N=k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{6}{4-k}}{330}.$$

小問 (i)

4 枚すべてが番号付きであるのは $k = 4$ のときである：

$$\mathrm{P}(N = 4) = \frac{\binom{5}{4}\binom{6}{0}}{330} = \frac{5}{330} = \frac{1}{66}.$$

同じことを、順に取り出すと考えて計算すれば $\frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{66}$ となる。

小問 (ii)

円板「3」が最初に取り出されるという事象を T_1 とする。T_1 のもとでは、振られた袋には 10 枚の円板、すなわち番号付きが 4 枚、無地が 6 枚入っており、次の 3 枚はこれらからの無作為な選択である。4 枚すべてが番号付きになるのは、この 3 枚がすべて番号付きであるときに限るので、

$$\mathrm{P}(N = 4 \mid T_1) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}.$$

小問 (iii)

引き続き T_1 のもとで、残りの 10 枚から取り出す 3 枚のうちに、番号付きの円板がちょうどもう 1 枚含まれればよい：

$$\mathrm{P}(N = 2 \mid T_1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{4 \times 15}{120} = \frac{1}{2}.$$

小問 (iv)

今度は、円板「3」がどこかの時点で取り出されるという事象を T とする。

> **考えてみよう**　円板「3」が最初に出たか、それ以外の回に出たかは問題になるだろうか？

問題にならない。T のもとでは、取り出された 4 枚は円板「3」とほかの 3 枚からなり、対称性（symmetry）により、ほかの 10 枚から選ばれる 3 枚の組はどれも等しい確率で現れる。これはまさに小問 (iii) の状況であり、そこでは取り出す順序はまったく関係なかった。したがって答えはやはり $\frac{1}{2}$ である。

直接確かめてみよう。$\mathrm{P}(T) = \binom{10}{3}/\binom{11}{4} = \frac{120}{330} = \frac{4}{11}$ であり、円板「3」、ほかの番号付きの円板 1 枚、無地の円板 2 枚を含む組は $\binom{4}{1}\binom{6}{2} = 60$ 通りあるので、

$$\mathrm{P}(N = 2 \mid T) = \frac{60/330}{120/330} = \frac{1}{2}.$$

小問 (v)

最初の円板が番号付きであるという事象を F とする。最初の円板にどの番号が書かれているかによって F を分ける。F は五つの事象「円板 j が最初に取り出される」($j = 1, \ldots, 5$) の互いに素な和（disjoint union）であり、それぞれの確率は $\frac{1}{11}$ である。小問 (iii) の議論は番号が 3 であることを使っていなかったので、各 j に対して

$$\mathrm{P}(N = 2 \mid \text{円板 } j \text{ が最初}) = \tfrac{1}{2}.$$

よって、全確率の法則（law of total probability）により、

$$\mathrm{P}(N = 2 \mid F) = \sum_{j=1}^{5} \frac{1/11}{5/11} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

（直接考えれば、F のもとでほかの 3 枚は番号付き 4 枚と無地 6 枚からの無作為な 3 枚であり、これはふたたび小問 (iii) である。）

小問 (vi)

番号付きの円板が少なくとも 1 枚取り出されるという事象を A とする。すなわち A は事象 $N \geq 1$ である。これはこれまでと同じ種類の情報**ではない**。1 枚の円板を特定して残りを無作為のままにするわけではないからである。そこで条件付き確率（conditional probability）の定義を用いる。$N = 2$ ならば A が成り立つので、

$$\mathrm{P}(N = 2 \mid A) = \frac{\mathrm{P}(N = 2)}{\mathrm{P}(N \geq 1)}.$$

考えてみよう なぜ単に「番号付きの円板が 1 枚わかっているので、ほかの 3 枚は残りの 10 枚から無作為に選ばれる」と言えないのだろうか？

どの円板がわかっている 1 枚なのかを知らないからである。番号付きの円板を 2 枚含む組も、4 枚含む組も、同じように A を満たす。脇に取り分けておける特定の 1 枚は存在しない。したがってこの条件は N そのものに応じて各組の重みを付け直すことになり、数え上げなければならない。

$$\mathrm{P}(N = 2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{6}{2}}{330} = \frac{10 \times 15}{330} = \frac{150}{330}, \qquad \mathrm{P}(N = 0) = \frac{\binom{6}{4}}{330} = \frac{15}{330},$$

であるから、$\mathrm{P}(N \geq 1) = \frac{315}{330}$ となり、

$$\mathrm{P}(N = 2 \mid A) = \frac{150}{315} = \frac{10}{21}.$$

検算

N の分布（distribution）は合計が合うはずである。$k = 0, \ldots, 4$ に対する個数 $\binom{5}{k}\binom{6}{4-k}$ は $15, 100, 150, 60, 5$ であり、合計は 330 となる。小問 (ii) と (iii) では、追加の番号付きの円板の枚数の条件付き分布の個数は 120 通りのうち $20, 60, 36, 4$ であり、こちらも正しく合計が合う。さらに、$11 \times 10 \times 9 \times 8 = 7920$ 通りの順序付きの取り出し方をすべて書き出し、正確な分数で計算することで、六つの答え（$\frac{1}{66}$、$\frac{1}{30}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{10}{21}$）をすべて確かめた。$\frac{10}{21} \approx 0.476$ が $\frac{1}{2}$ より少し小さいのは当然であることに注意しよう。$N \geq 1$ という条件は $N = 0$ の場合を取り除くだけなので、特定の円板がわかっている場合に比べて $N = 1$ に多くの重みが残るのである。

よくある間違い

- 小問 (iv) と (vi) を同じ種類の条件として扱ってしまう。「円板 3 が取り出される」は円板を名指ししているが、「番号付きの円板が取り出される」はそうではなく、答えも異なる。
- 小問 (vi) で、条件が $N \geq 1$ であることを忘れ、代わりに $\mathrm{P}(N = 1)$ や $\frac{5}{11}$ で割ってしまう。
- 分子では順序付きの取り出し方を数え、分母では順序を考えない組を数えてしまう。どちらか一方を選び、それを貫くこと。

STEP のその先へ

小問 (v) と (vi) の対比は、有名な「男の子か女の子か」のパラドックスと同じ落とし穴である。**特定の**子どもが男の子だと教えられた場合と、**少なくとも一人**が男の子だと教えられた場合とでは、答えが異なる。大学では、事象による条件付けを確率測度（probability measure）の制限と正規化の取り直しとして扱うことで、このことが厳密に定式化される。また、ここでの個数は超幾何分布（hypergeometric distribution）にほかならない。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）、および Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）は、いずれもこうしたパラドックスを丁寧に論じている。

解答例

STEP I 2007、第 14 問

確率・統計 ・ ポアソン分布の母数の一意性

STEP I 2007、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s1-q14

鍵となる考え方

それぞれの情報は $h(\lambda) =$ 定数 の形の方程式を与える。ここで h は平均（mean）のある関数である。この方程式が λ をただ一つに定めるかどうかは、$\lambda > 0$ における h の形だけで決まる。狭義単調（strictly monotonic）な h は各値を高々 1 回しかとらない。一方、増加してから減少する h は、ほとんどの値を 2 回とり、最大値だけを 1 回とる。したがって、この問題の本質は、各関数がどこで単調であり、どこで最大となるかを調べることにある。

解答

以下では常に $\lambda > 0$（ポアソン分布（Poisson distribution）の平均は正である）とし、$\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k/k!$ for $k = 0, 1, 2, \ldots$ である。

小問 (i)

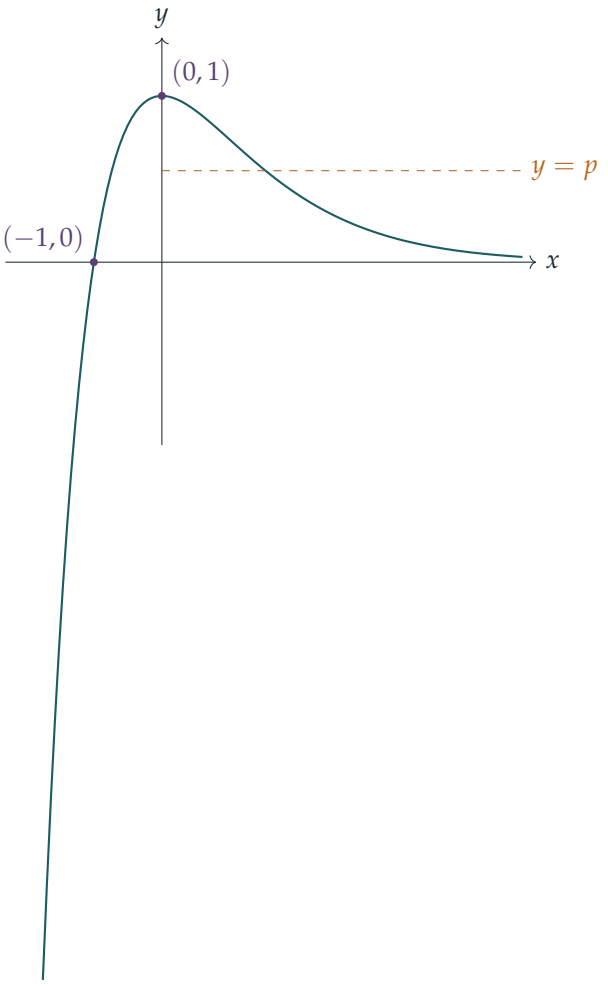
$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$ とおく。積の微分法（product rule）により、

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+1)\mathrm{e}^{-x} = -x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

$\mathrm{e}^{-x} > 0$ であるから、$f'(x)$ の符号は x の符号と逆である。すなわち、f は $x < 0$ で増加し、$x > 0$ で減少する。よって極値をとる点（turning point）はただ一つで、それは $(0, 1)$ における極大（maximum）であり、この点は曲線が y 軸と交わる点でもある。曲線は $x + 1 = 0$ となるところ、すなわち $(-1, 0)$ で x 軸と交わる。

両端の様子については次のとおりである。$x \to \infty$ のとき、e^{-x} が一次の因子に勝り、$f(x) \to 0$ となる（上から近づき、x 軸が漸近線（asymptote）となる）。$x \to -\infty$ のと

き、両方の因子の大きさが増大し、$f(x) \to -\infty$ となる。



次に確率を考える。

$$\mathrm{P}(X \geq 2) = 1 - \mathrm{P}(X = 0) - \mathrm{P}(X = 1) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} - \lambda\mathrm{e}^{-\lambda} = 1 - f(\lambda),$$

であるから、与えられた情報はちょうど

$$f(\lambda) = (1 + \lambda)\mathrm{e}^{-\lambda} = p.$$

ということである。$\lambda > 0$ において関数 f は連続かつ狭義単調減少であり（$f'(\lambda) = -\lambda\mathrm{e}^{-\lambda} < 0$ による）、$f(0) = 1$ から、$\lambda \to \infty$ のとき 0 に向かって減少する。したがって、$(0, 1)$ のすべての値をちょうど 1 回ずつとる。実際、中間値の定理（intermediate value theorem）により解が少なくとも一つ存在し、狭義単調性により二つ目の解は存在しない。グラフでいえば、$0 < p < 1$ のとき水平線 $y = p$ は右側の部分とちょうど 1 回交わる。よって λ はただ一つに定まる。

小問 (ii)

ここでは $\mathrm{P}(X=1)=\lambda \mathrm{e}^{-\lambda}=q$ である。$g(\lambda)=\lambda \mathrm{e}^{-\lambda}$ とおく。すると

$$g'(\lambda)=(1-\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda},$$

となるので、g は $(0,1]$ で狭義単調増加、$[1,\infty)$ で狭義単調減少であり、最大値は $g(1)=\mathrm{e}^{-1}$ である。また、$\lambda \to 0^+$ のときも $\lambda \to \infty$ のときも $g(\lambda)\to 0$ である。(実は $g(\lambda)=\mathrm{e}^{-1}f(\lambda-1)$ であるから、g のグラフは小問 (i) の曲線を右に 1 だけ平行移動し、縦方向に e^{-1} 倍したものである。)

考えてみよう 頂点まで増加してから減少する曲線と、水平線は何回交わりうるか？

単調な各部分とは高々 1 回しか交わらないので、次のようになる。

- $0<q<\mathrm{e}^{-1}$ ならば、$(0,1)$ に解が一つ、$(1,\infty)$ にもう一つあり、λ の候補は二つある。
- $q>\mathrm{e}^{-1}$ ならば、解は存在しない。
- $q=\mathrm{e}^{-1}$ ならば、解は頂点そのもの $\lambda=1$ だけである。

したがって、この情報が λ をただ一つに定めるのは、q がちょうど一つの値をとるとき、すなわち

$$q=\mathrm{e}^{-1}, \qquad \lambda=1.$$

のときに限る。

小問 (iii)

条件付き確率（conditional probability）の定義により、また事象 $\{X=1\}$ は $\{X\le 2\}$ に含まれるから、

$$\mathrm{P}(X=1 \mid X\le 2)=\frac{\mathrm{P}(X=1)}{\mathrm{P}(X\le 2)}=\frac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda}}{\mathrm{e}^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{1}{2}\lambda^2\right)}=\frac{2\lambda}{2+2\lambda+\lambda^2}.$$

これを $k(\lambda)$ とおく。分子と分母を λ で割ると（$\lambda>0$ であるから許される）、

$$k(\lambda)=\frac{2}{\lambda+\dfrac{2}{\lambda}+2}.$$

考えてみよう $\lambda>0$ のとき、$\lambda+2/\lambda$ の最小値は何か？

相加平均と相乗平均の不等式（AM–GM inequality）により $\lambda + \dfrac{2}{\lambda} \geq 2\sqrt{\lambda \cdot \dfrac{2}{\lambda}} = 2\sqrt{2}$ であり、等号が成り立つのは $\lambda = 2/\lambda$、すなわち $\lambda = \sqrt{2}$ のときに限る。さらに、$\lambda + 2/\lambda$ は $(0, \sqrt{2}]$ で狭義単調減少、$[\sqrt{2}, \infty)$ で狭義単調増加であり（その導関数 $1 - 2/\lambda^2$ の符号が変わるのは $\sqrt{2}$ においてのみである）、両端で ∞ に発散する。よって k は小問 (ii) の g と同じく、増加してから減少する形をしており、最大値は

$$k(\sqrt{2}) = \frac{2}{2\sqrt{2}+2} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1.$$

である。前と全く同様に、$0 < r < \sqrt{2} - 1$ のとき λ の値は二つ、$r > \sqrt{2} - 1$ のとき存在せず、$r = \sqrt{2} - 1$ のときちょうど一つである。したがって、λ がただ一つに定まるのは

$$r = \sqrt{2} - 1, \qquad \lambda = \sqrt{2}.$$

のときに限る。

別解として、$k(\lambda) = r$ の分母を払うと、二次方程式 $r\lambda^2 - 2(1-r)\lambda + 2r = 0$ が得られる。その解の積は $2 > 0$、和は $2(1-r)/r > 0$ であるから、実数解があればどちらも正である。解がちょうど一つとなるのは判別式（discriminant）$4\left[(1-r)^2 - 2r^2\right] = 4(1 - 2r - r^2)$ が 0 になるときであり、これより（正の解をとって）$r = \sqrt{2} - 1$、そのときの重解（double root）は $\lambda = (1-r)/r = \sqrt{2}$ である。

検算

- 小問 (ii)：$\lambda = 1$ のとき $\mathrm{P}(X = 1) = \mathrm{e}^{-1} \approx 0.3679$ である。$0 < \lambda < 40$ の範囲で $\lambda \mathrm{e}^{-\lambda}$ を数値的に調べると、この値を超えることはなく、$q = 0.3$ では交点が二つある。
- 小問 (iii)：$\lambda = \sqrt{2}$ のとき $\dfrac{2\sqrt{2}}{2 + 2\sqrt{2} + 2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \approx 0.4142$ であり、数値的に調べるとこれが最大値であることが確かめられる。$r = 0.35$ では λ の値が二つ、$r = 0.45$ では存在しない。
- 妥当性の確認：$\lambda \to 0$ のとき確率のほぼすべてが 0 に集まり、$\lambda \to \infty$ のとき $X \leq 2$ という条件の下での確率は 2 に集中する。よってどちらの極限でも $\mathrm{P}(X = 1 \mid X \leq 2) \to 0$ となり、式が示すとおりである。

よくある間違い

- $\lambda > 0$ であることを忘れる：小問 (i) の曲線は $x < 0$ でも存在するが、確率に関係するのは $x > 0$ の部分だけである。

- 小問 (i) で理由を述べずに一意性を主張する：解が存在すること（連続性と、値が 1 から 0 まで動くこと）と、二つ目の解がないこと（狭義単調性）の両方が必要である。
- 小問 (iii) で $\mathrm{P}(X = 1 \text{ かつ} X \leq 2) = \mathrm{P}(X = 1)\,\mathrm{P}(X \leq 2)$ を用いる：これらの事象は独立（independent）ではない。そうではなく、$\{X = 1\}$ が $\{X \leq 2\}$ に含まれているのである。

STEP のその先へ

これは**識別可能性**（identifiability）への最初の入り口である。統計学では、観測される量がモデルのパラメータを決定するかどうかを問題にする。その答えが「はい」となるのは、パラメータから観測量への写像が一対一（one-to-one）であるときにちょうど限る。ここでは $\mathrm{P}(X \geq 2)$ は λ を識別するが、$\mathrm{P}(X = 1)$ や $\mathrm{P}(X = 1 \mid X \leq 2)$ は一般には識別しない。同じ「増加してから減少する」形は、尤度（likelihood）を最大化するときにも再び現れる。$\lambda \mathrm{e}^{-\lambda}$ は観測値 $X = 1$ を一つ得たときの λ の尤度であり、その頂点 $\lambda = 1$ が最尤推定値（maximum likelihood estimate）である。ポアソン分布と条件付けについてさらに学ぶには、Blitzstein と Hwang による *Introduction to Probability*（確率論入門）が生き生きとした読み物である。

解答例

STEP II 2007、第 1 問

純粋数学 • 二項近似

STEP II 2007、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s2-q1

鍵となる考え方

二項級数（binomial series）が速く収束（converge）するのは、小さいはずの量が本当に小さいときに限られる。したがって、この問題の要点は、根号を含む数（surd）を $\sqrt{1+\text{ごく小さな量}}$ の簡単な有理数倍として書き直すことにある。そのために、3 または 6 を掛けると 10 の累乗のすぐ近くになる完全平方数（perfect square）（または完全立方数（perfect cube））を探す。そうすれば k は 100（または 1000）に比べて小さくなり、わずかな項数で必要な精度が得られる。

解答

小問 (i)

$x = \frac{k}{100}$ とすると、$(1+x)^{1/2}$ の二項級数の係数（coefficient）は

$$\binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \qquad \binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!} = -\frac{1}{8}, \qquad \binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!} = \frac{1}{16}.$$

である。$x = k/100$ を代入すると、

$$\left(1+\frac{k}{100}\right)^{1/2} \approx 1 + \frac{k}{200} - \frac{k^2}{80\,000} + \frac{k^3}{16\,000\,000}.$$

(a) $k = 8$ のとき左辺は $\sqrt{1.08}$ であり、要点は $108 = 3\times 36$ となることである。

$$\sqrt{1.08} = \frac{\sqrt{108}}{10} = \frac{6\sqrt{3}}{10} = \frac{3\sqrt{3}}{5}, \qquad \text{よって} \qquad \sqrt{3} = \frac{5}{3}\sqrt{1.08}.$$

級数から

$$\sqrt{1.08} \approx 1 + 0.04 - 0.0008 + 0.000032 = 1.039232,$$

が得られ、したがって

$$\sqrt{3} \approx \frac{5}{3} \times 1.039232 = 1.7320533\ldots \approx 1.73205\text{(小数第 5 位まで)}。$$

(b)

考えてみよう $1 + \frac{k}{100}$ がきれいな平方数の 6 倍になるのは、k がどんな値のときか？

ある整数 m について $100 + k = 6m^2$ となり、しかも $6m^2$ が 100 に近く k が小さくなるようにしたい。$6 \times 16 = 96$ であるから、$m = 4$、$k = -4$ とする。

$$\sqrt{0.96} = \frac{\sqrt{96}}{10} = \frac{4\sqrt{6}}{10} = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \qquad \text{よって} \qquad \sqrt{6} = \frac{5}{2}\sqrt{0.96}.$$

$k = -4$ のとき、第 1 項以外のすべての項は負になる。

$$\sqrt{0.96} \approx 1 - 0.02 - 0.0002 - 0.000004 = 0.979796,$$

したがって

$$\sqrt{6} \approx \frac{5}{2} \times 0.979796 = 2.44949\text{(小数第 5 位まで)}。$$

この k の大きさは (a) の半分なので、無視した項はここではさらに小さい。($1.5 = 6/4$ から得られる $k = 50$ のような値でも $\sqrt{6}$ を正確に表せるが、$x = \frac{1}{2}$ では級数の収束が遅すぎて、小数第 5 位までの精度は得られない。)

小問 (ii)

最初の 2 項から

$$\left(1 + \frac{k}{1000}\right)^{1/3} \approx 1 + \frac{k}{3000}.$$

が得られる。

考えてみよう 3 を掛けると 1000 を少しだけ上回る立方数はどれか？

k を小さくして $1000 + k = 3m^3$ としたい。$1000/3 \approx 333$ に近い立方数は $6^3 = 216$ と $7^3 = 343$ であり、$3 \times 343 = 1029$ は 1000 に非常に近い。そこで $k = 29$ とする。

$$\sqrt[3]{1.029} = \frac{\sqrt[3]{3 \times 7^3}}{10} = \frac{7\sqrt[3]{3}}{10}, \qquad \text{よって} \qquad \sqrt[3]{3} = \frac{10}{7}\sqrt[3]{1.029}.$$

2 項までの近似を用いると、

$$\sqrt[3]{3} \approx \frac{10}{7}\left(1 + \frac{29}{3000}\right) = \frac{10}{7} \cdot \frac{3029}{3000} = \frac{3029}{2100},$$

となり、これが求める近似である。

検算

電卓によれば $\sqrt{3} = 1.7320508\ldots$、$\sqrt{6} = 2.4494897\ldots$ であり、どちらの答えとも小数第 5 位まで一致する。小問 (ii) については、$3029/2100 = 1.44238\ldots$ であるのに対し $\sqrt[3]{3} = 1.44225\ldots$ である。約 1.3×10^{-4} の誤差は、無視した最初の項の大きさ $\frac{10}{7} \cdot \frac{1}{9} \left(\frac{29}{1000}\right)^2 \approx 1.3 \times 10^{-4}$ と一致するので、この近似はわずかに過大評価である。

よくある間違い

- 第 3 の係数を間違える。$\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)/6 = +\frac{1}{16}$ であり、$-\frac{1}{16}$ ではない。
- 級数を計算した後で、$\frac{5}{3}$、$\frac{5}{2}$、$\frac{10}{7}$ を掛け戻すのを忘れる。
- 大きな k（(b) における $k = 50$ など）を選んでしまい、3 項や 4 項ではまったく足りなくなる。

STEP のその先へ

何項必要かという問題は、結局のところテイラー級数（Taylor series）の剰余項（remainder）を評価することに帰着する。ラグランジュ（Lagrange）の剰余項を用いれば、これらの近似が小数第 5 位まで正しいことを、単に信じるのではなく証明できる。級数が速く収束する範囲へと尺度を変えるという同じ工夫は、電卓やコンピュータのライブラリが実際に累乗根や対数を計算する方法でもある。テイラー級数とその剰余項の理論については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照のこと。

解答例

STEP II 2007、第 2 問

純粋数学 • 3 次曲線と面積

STEP II 2007、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s2-q2

鍵となる考え方

三次関数（cubic）の極値点（turning points）に関する情報は、すべてその導関数（derivative）に詰まっている。極値点が $x = p$ と $x = q$ にあるのだから、導関数は $(x-p)(x-q)$ の定数倍でなければならず、係数比較（comparing coefficients）によって b と c がただちに求まる。その後、$m - n$ を求める最もすっきりした方法は、導関数を極値点の間で積分することである。また、$y - n$ が $x = q$ で**重根**（double root）をもつことに気づけば、面積の計算も容易になる。

解答

小問 (i)

微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 6x^2 - 2bx + c.$$

この二次式は極値点 $x = p$ と $x = q$ で 0 になり、最高次の係数は 6 であるから、

$$6x^2 - 2bx + c = 6(x-p)(x-q) = 6x^2 - 6(p+q)x + 6pq.$$

係数を比較して、

$$b = 3(p+q), \qquad c = 6pq.$$

後で使う事実を二つ挙げておく。第一に、x^3 の係数が正であるから、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 6(x-p)(x-q)$ は二つの根の外側で正、根の間で負となる。よって曲線は増加、減少、増加の順に変化する。すなわち極大（maximum）が先に来て、$p < q$ である。

第二に、条件 $n > 0$ によって q が制限される。$x = q$ を代入すると、

$$n = 2q^3 - 3(p+q)q^2 + 6pq^2 = q^2(3p - q),$$

であるから、$n > 0$ は $q < 3p$ を意味する。以上をまとめると $0 < p < q < 3p$ である。

小問 (ii)

曲線は原点を通り、

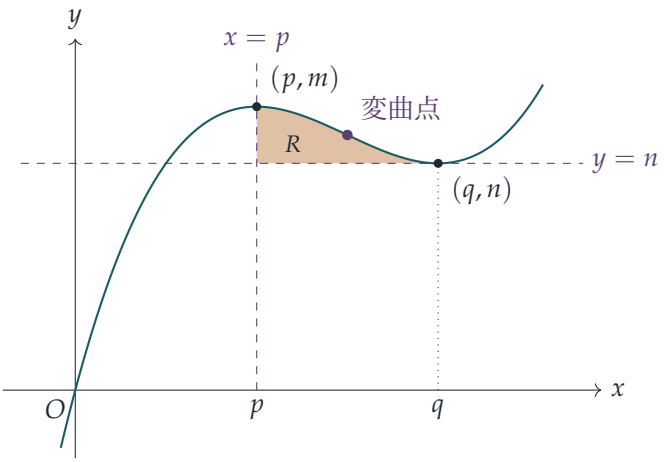
$$y = x\big(2x^2 - bx + c\big),$$

と表せる。ここで二次の因数の判別式（discriminant）は

$$b^2 - 8c = 9(p+q)^2 - 48pq = 3(3p - q)(p - 3q).$$

である。$q < 3p$ かつ $p < q < 3q$ であるから、一つ目の括弧は正、二つ目は負となり、判別式は負である。したがって、曲線が x 軸と交わる点は原点のみである。よって曲線は $-\infty$ から上がってきて O で軸を横切り、極大点 (p, m) まで上昇し、軸より上にある極小点（minimum）(q, n) まで下降し、その後はどこまでも上昇する。

変曲点（point of inflection）は $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = 12x - 2b = 0$ となる点、すなわち $x = \frac{b}{6} = \frac{1}{2}(p+q)$ であり、二つの極値点のちょうど中間にある。



領域 R（網掛け部分）は $x = p$ と $x = q$ の間にあり、曲線の下側かつ直線 $y = n$ の上側にある。曲線は極小点で $y = n$ に接している。

対称性。$s = \frac{1}{2}(p+q)$、$h = q - p$ とし、$x = s + t$ とおいて変曲点から測ることにする。すると $x - p = t + \frac{1}{2}h$、$x - q = t - \frac{1}{2}h$ であるから、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 6\big(t^2 - \tfrac{1}{4}h^2\big),$$

となり、これは t の偶関数（even function）である。したがって、これを 0 から積分したもの、すなわち $y - y(s) = 2t^3 - \frac{3}{2}h^2t$ は t の奇関数（odd function）である。よって $y(s+t) - y(s) = -\big(y(s-t) - y(s)\big)$ が成り立つ。つまり曲線は**変曲点に関して位数 2 の回転対称性**（rotational symmetry of order 2）をもつ（その点のまわりの半回転によって曲線は自分自身に移る）。特に、この半回転は二つの極値点を入れ替えるので、変曲点は (p, m) と (q, n) の中点、すなわち $\left(\frac{1}{2}(p+q), \frac{1}{2}(m+n)\right)$ である。

小問 (iii)

極大値から極小値への落差は、傾き（gradient）の積分である：

$$m - n = y(p) - y(q) = -\int_p^q 6(x-p)(x-q)\,\mathrm{d}x.$$

考えてみよう 展開せずに $\int_p^q (x-p)(x-q)\,\mathrm{d}x$ を手早く計算する方法はないだろうか？

$x = p + u$ と置換すると、$h = q - p$ として $x - q = u - h$ であり、u は 0 から h まで動く：

$$\int_0^h u(u-h)\,\mathrm{d}u = \frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} = -\frac{h^3}{6}.$$

よって

$$m - n = -6\left(-\frac{(q-p)^3}{6}\right) = (q-p)^3,$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (iv)

$p \le x \le q$ において曲線は m から n まで減少するので、$y = n$ 上またはその上側にあり、

$$\text{面積} R = \int_p^q (y - n)\,\mathrm{d}x.$$

である。三次式 $y - n = 2x^3 - bx^2 + cx - n$ は $x = q$ で 0 になり、その導関数も同じ点で 0 になるので、$x = q$ は重根であり、ある r を用いて

$$y - n = 2(x-q)^2(x-r)$$

と書ける。x^2 の係数を比較すると $-2(2q + r) = -b = -3(p+q)$ であるから、$r = \frac{1}{2}(3p - q)$ である。再び $h = q - p$ とし、$u = x - q$（$-h$ から 0 まで動く）とおくと、

$$x - r = u + q - \tfrac{1}{2}(3p - q) = u + \tfrac{3}{2}h.$$

したがって

$$\text{面積}R = \int_{-h}^{0} 2u^2\left(u+\tfrac{3}{2}h\right)\mathrm{d}u = \left[\tfrac{1}{2}u^4 + hu^3\right]_{-h}^{0}$$
$$= -\left(\tfrac{1}{2}h^4 - h^4\right) = \tfrac{1}{2}h^4 = \tfrac{1}{2}(q-p)^4,$$

となり、これが求める結果である。

検算

$p=1$、$q=2$ とする（$q<3p$ なので条件を満たす）。すると $b=9$、$c=12$ であり、$y=2x^3-9x^2+12x$ は $y'=6(x-1)(x-2)$ をもち、$m=y(1)=5$、$n=y(2)=4>0$ である。よって $m-n=1=(q-p)^3$ となる。変曲点は $(1.5,\,4.5)$ で、これは二つの極値点の中点である。また、$y-4$ を $[1,2]$ 上で数値積分すると $0.5000=\frac{1}{2}(q-p)^4$ が得られる。さらに、$0<p<q<3p$ を満たす 2000 組のランダムな組についても、四つの結果すべてを確認した。

よくある間違い

- $q<p$ としてしまう。三次の係数が正ならば、極大点は常に極小点の左側にある。
- $y-n$ ではなく y を積分してしまう。これでは直線 $y=n$ の下にある高さ n の長方形の分が加わってしまう。
- 対称性を直線 $x=\frac{1}{2}(p+q)$ に関する鏡映と説明してしまう。三次関数がもつのは点に関する半回転対称性であり、線対称性ではない。

STEP のその先へ

あらゆる三次関数のグラフは、その変曲点に関して半回転対称な曲線である。というのも、x を平行移動して x^2 の項を消去すると（カルダノ（Cardano）の公式で用いられる「被約三次式」（depressed cubic）への置換）、奇関数と定数の和が残るからである。小問 (iv) の重根の技法は、接触と根の重複度の理論の出発点であり、この理論は代数幾何学において中心的な役割を果たす。Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* には、この趣旨の問題がさらに収められている。

解答例

STEP II 2007、第 3 問

純粋数学 ・ 置換積分

STEP II 2007、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s2-q3

鍵となる考え方

すべては $1/(a^2+x^2)$ の標準的な積分に基づいている。したがって、この問題の要点は、置換（substitution）を行った後にその形を見抜くことにある。(i)(a) では、分子の $\cos x$ が $\sin x$ の導関数（derivative）になっていることが大きなヒントである。(i)(b) では、半角の置換（half-angle substitution）によって $1+\sin^2 x$ が t の 4 次式（quartic）に変わる。ここで大切なのは、同じ操作を逆向きにたどれることに気づくことである。すなわち (ii) では、新しい 4 次式を生み出すのがどの三角関数の積分なのかを見抜くのである。

解答

標準的な積分

$a \neq 0$ とし、$-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$ として $x = a\tan\theta$ とおく。θ がこの区間を動くとき、（a の符号によらず）x はすべての実数をちょうど 1 回ずつとるので、この置換は正当であり、$\tan\theta = x/a$ より $\theta = \arctan(x/a)$ である。ここで $\mathrm{d}x = a\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$ であり、

$$a^2 + x^2 = a^2(1+\tan^2\theta) = a^2\sec^2\theta,$$

であるから、

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2\sec^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{1}{a}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\theta}{a} + \text{定数} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + \text{定数},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (i)(a)

$u = \sin x$ と置換すると $\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$ であり、x が 0 から $\frac{1}{2}\pi$ まで動くとき u は 0 から 1 まで動く。$a = 1$ として標準的な積分を用いると、

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \Big[\arctan u\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

小問 (i)(b)

$t = \tan\frac{1}{2}x$ とおくと、半角に関する標準的な結果

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

が成り立つ。最後の式は $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(1+t^2)$ から従う。積分区間の端 $x = 0$ と $x = \frac{1}{2}\pi$ は、それぞれ $t = 0$ と $t = \tan\frac{1}{4}\pi = 1$ になる。次に、

$$1 + \sin^2 x = \frac{(1+t^2)^2 + 4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1+6t^2+t^4}{(1+t^2)^2}.$$

これらを組み合わせると、因数 $1+t^2$ は完全に約分される：

$$I = \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{(1+t^2)^2}{1+6t^2+t^4}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+6t^2+t^4}\,\mathrm{d}t.$$

両辺を 2 で割ると $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+6t^2+t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}I$ となり、示すべき式が得られた。（(i)(a) より、その値は $\pi/8$ である。）

小問 (ii)

考えてみよう　4 次式 $1+14t^2+t^4$ はどこから現れたのだろうか？

(i)(b) では、$6t^2$ は $1+t^2$ を 2 乗して得られる $2t^2$ と、$\sin^2 x$ から得られる $4t^2 = (2t)^2$ の和として現れた。$14t^2$ を得るには、さらに $12t^2 = 3(2t)^2$ が必要である。すなわち、$\sin^2 x$ の代わりに $3\sin^2 x$ を考えればよい。実際、$t = \tan\frac{1}{2}x$ とすると、

$$1 + 3\sin^2 x = \frac{(1+t^2)^2 + 12t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1+14t^2+t^4}{(1+t^2)^2}.$$

したがって、$1+\sin^2 x$ の代わりに $1+3\sin^2 x$ を用いて (i)(b) とまったく同じ計算を行うと、

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x}{1+3\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+14t^2+t^4}\,\mathrm{d}t.$$

が得られる。左辺は (i)(a) と同様に $u = \sin x$ として計算する：

$$\int_0^1 \frac{1}{1+3u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{\frac{1}{3}+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\Big[\arctan\left(\sqrt{3}\,u\right)\Big]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3},$$

ここで $a = 1/\sqrt{3}$ として標準的な積分を用いた。これを半分にして、

$$\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+14t^2+t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{18}.$$

検算

シンプソンの公式（Simpson's rule）によると、$I \approx 0.785398$（これは $\pi/4$ である）、(i)(b) の積分は ≈ 0.392699（これは $\pi/8$ である）、(ii) の積分は ≈ 0.302300 となり、$\sqrt{3}\,\pi/18 \approx 0.302300$ と一致する。簡単な妥当性の確認もしておこう。4 次式を含む 2 つの被積分関数（integrand）はどちらも $t = 0$ で 1、$t = 1$ で 0 になり、分母に $14t^2$ を含む方は区間全体で値が小さい。したがって、その積分は $\pi/8 \approx 0.393$ より小さいはずであり、実際にそうなっている。

よくある間違い

- $\mathrm{d}x$ から生じる因数 $\frac{2}{1+t^2}$ を忘れ、(i)(b) で因数 2 を落としてしまう。
- 因数 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ を付けずに $\int \frac{\mathrm{d}u}{1+3u^2} = \arctan(\sqrt{3}u)$ と書いてしまう。先に 3 をくくり出すか、$v = \sqrt{3}u$ と置換するとよい。
- 置換の後も積分区間を x のままにしてしまう。$x = \frac{1}{2}\pi$ に対応するのは $t = 1$ である。

STEP のその先へ

もっと直接的な方法もある。分子と分母を t^2 で割り、$v = t + 1/t$ とおくと、$\frac{1-t^2}{1+kt^2+t^4}$ は $-\frac{1}{v^2+k-2}$ に変わり、これもまた arctan 型の積分になる。$\sin x$ と $\cos x$ の有理関数（rational function）は、$t = \tan\frac{1}{2}x$ という置換によって必ず t の有理関数になり、したがって原理的には必ず積分できる。この一般的な教訓は、初等関数による積分の体系的な理論の出発点である。この趣旨の問題をさらに解きたい人は、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を参照されたい。

解答例

STEP II 2007、第 4 問

純粋数学 ・ 三角方程式

STEP II 2007、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s2-q4

鍵となる考え方

加法定理（compound-angle formulae）ですべてを展開し、$\cos A \cos B$ で割る。すると方程式は $t = \tan A$ と $u = \tan B$ の関係式となり、tu の項、t の項、u の項、定数項をもつ。このような式が二つの一次式の積に因数分解（factorise）できるのは、「長方形を完成させる」操作で余りが出ないときであり、かつそのときに限る。そしてその余りは $\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2$ の定数倍になることがわかる。三つの方程式はいずれも $\alpha = 2$、$\beta = \sqrt{3}$、$\gamma = 1$ であり、これらは条件を満たす。あとは A と B を正しく選ぶだけである。

解答

因数分解

加法定理により、

$$\begin{aligned}&\alpha \sin(A-B) + \beta\cos(A+B) - \gamma \sin(A+B)\\ &\quad = \alpha(\sin A\cos B - \cos A \sin B) + \beta(\cos A \cos B - \sin A \sin B)\\ &\qquad - \gamma(\sin A \cos B + \cos A \sin B).\end{aligned}$$

$\cos A \cos B \neq 0$ であるから、これで割ってよい。$t = \tan A$、$u = \tan B$ とおくと、方程式は $P(t,u) = 0$ と同値である。ここで

$$P(t,u) = \alpha(t-u) + \beta(1-tu) - \gamma(t+u) = -\beta tu + (\alpha-\gamma)t - (\alpha+\gamma)u + \beta.$$

である。$\beta \neq 0$ であるから、

$$m = -\frac{\alpha+\gamma}{\beta}, \qquad n = \frac{\alpha-\gamma}{\beta}.$$

とおく。すると $-\beta(t-m)(u-n) = -\beta tu + \beta n\,t + \beta m\,u - \beta mn = -\beta tu + (\alpha-\gamma)t - (\alpha+\gamma)u + \dfrac{\alpha^2-\gamma^2}{\beta}$ となり、これは定数項を除いて P と一致する。したがって、すべての t と u に対して

$$P(t,u) = -\beta(t-m)(u-n) + \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{\beta}. \qquad (*)$$

が成り立つ。

十分性（*if*）。$\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$ のとき $(*)$ の定数項は消えるので、（$\beta \neq 0$ より）方程式は $(\tan A - m)(\tan B - n) = 0$ となる。ここで m と n は α, β, γ のみに依存する。

必要性（*only if*）。方程式が定数 m', n' を用いて $(t-m')(u-n') = 0$ に帰着されるとする。すなわち、$P(t,u) = 0$ が成り立つのは $t = m'$ または $u = n'$ のとき、かつそのときに限るとする。$c = (\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)/\beta$ とおき、$c \neq 0$ と仮定する。このとき任意の組 (m', u) が解となるので、$P(m', u) = -\beta(m'-m)(u-n) + c$ はすべての u に対して零になる。$m' \neq m$ ならば、これは u の定数でない一次関数であり、恒等的に零にはならない。$m' = m$ ならば、これは $c \neq 0$ に等しく、決して零にならない。いずれにしても矛盾であるから $c = 0$、すなわち $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$ である。（「帰着される」を「P が $(t-m)(u-n)$ の定数倍である」と解釈する場合も、tu の係数を比較するとその定数倍は $-\beta$ でなければならず、やはり $(*)$ から $c = 0$ が従う。）

> **考えてみよう** 以下の小問で $\cos x = 0$ となり、割り算が許されない場合はどうなるだろうか。

$(*)$ の両辺に $\cos A \cos B$ を掛けて元に戻す。$\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$ のとき

$$\alpha\sin(A-B) + \beta\cos(A+B) - \gamma\sin(A+B) = -\beta(\sin A - m\cos A)(\sin B - n\cos B), \qquad (**)$$

が得られる。両辺はもはや正弦と余弦の組合せにすぎないので、この恒等式（identity）は**すべての** A と B に対して成り立つ（両辺は連続であり、$\cos A\cos B \neq 0$ のときは常に一致するからである）。$(**)$ を用いれば、$\cos A = 0$ の場合を別に扱う必要はない。

三つの小問すべてにおいて $\alpha = 2$、$\beta = \sqrt{3}$、$\gamma = 1$ であり、$\alpha^2 = 4 = \beta^2+\gamma^2$ である。よって

$$m = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}, \qquad n = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

となり、方程式は $(\sin A + \sqrt{3}\cos A)(\sin B - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos B) = 0$ となる。$\sin A + \sqrt{3}\cos A = 0$ ならば必ず $\cos A \neq 0$ である（そうでなければ $\sin A = 0$ にもなってしまう）ことに注意すると、これは $\tan A = -\sqrt{3}$ と同じことである。同様に、第二の括弧が零になるのは $\tan B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、かつそのときに限る。

小問 (i)

$A = x$、$B = \frac{1}{4}\pi$ ととると、$A - B = x - \frac{1}{4}\pi$、$A + B = x + \frac{1}{4}\pi$ となる。$\tan\frac{1}{4}\pi = 1 \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$ であるから第二の括弧は零でなく、$\tan x = -\sqrt{3}$ でなければならない。よって

$$x = \tfrac{2}{3}\pi \quad \text{または} \quad x = \tfrac{5}{3}\pi.$$

小問 (ii)

今度は $A = x$、$B = \frac{1}{6}\pi$ である。ところが $\tan\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}} = n$ であるから、第二の括弧は $\sin\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ となる。$(**)$ より、左辺から右辺を引いたものは恒等的に零である。つまりこの方程式は恒等式であり、$0 \leq x < 2\pi$ を満たす**すべての** x がこれを満たす。

小問 (iii)

$A - B = x + \frac{1}{3}\pi$ かつ $A + B = 3x$ となる必要がある。辺々を加えたり引いたりすると

$$A = 2x + \tfrac{1}{6}\pi, \qquad B = x - \tfrac{1}{6}\pi.$$

となる。よって解は $\tan(2x + \frac{1}{6}\pi) = -\sqrt{3}$ または $\tan(x - \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ で与えられる。

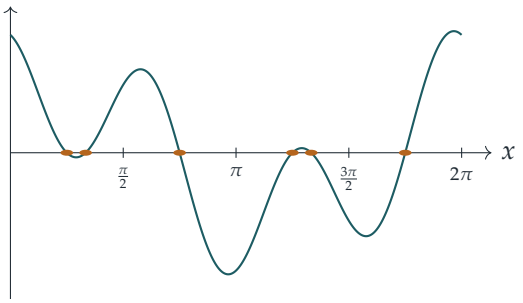
前者については、$2x + \frac{1}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi + k\pi$ より、整数 k に対して $x = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$ である。$[0, 2\pi)$ の範囲では $x = \frac{1}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$ が得られる。

後者については、$x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{6}\pi + k\pi$ より $x = \frac{1}{3}\pi + k\pi$ であり、$x = \frac{1}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$ が得られる。

これら六つの値は相異なるので、解は

$$x = \tfrac{1}{4}\pi,\ \tfrac{1}{3}\pi,\ \tfrac{3}{4}\pi,\ \tfrac{5}{4}\pi,\ \tfrac{4}{3}\pi,\ \tfrac{7}{4}\pi.$$

である。



(iii) の左辺から右辺を引いたもののグラフは、印をつけた六つの点においてのみ零を横切る。

検算

- (i) で $x = \frac{2}{3}\pi$ のとき：$2\sin\frac{5}{12}\pi \approx 1.932$、$\sqrt{3}\cos\frac{11}{12}\pi \approx -1.673$、$\sin\frac{11}{12}\pi \approx 0.259$ であり、確かに $1.932 - 1.673 = 0.259$ である。
- (ii) で $x = 0$ を試すと：$2\sin(-\frac{1}{6}\pi) + \sqrt{3}\cos\frac{1}{6}\pi = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = \sin\frac{1}{6}\pi$ となる。他のどの x でも成り立つ。
- (iii) で $x = \frac{1}{4}\pi$ のとき：$2\sin\frac{7}{12}\pi \approx 1.932$、$\sin\frac{3}{4}\pi - \sqrt{3}\cos\frac{3}{4}\pi \approx 0.707 + 1.225 = 1.932$ である。$[0, 2\pi)$ 上で数値的に根を探索すると、ちょうど上の六つの根が見つかる。

よくある間違い

- (iii) で $A = x + \frac{1}{3}\pi$ とし、$3x$ から B を決めてしまう：$A - B = x + \frac{1}{3}\pi$、$A + B = 3x$ を連立して解かなければならない。
- (iii) で $k = 0, 1$ で止めてしまい、解を落とす：$\tan(2x + \frac{1}{6}\pi)$ の周期は $\frac{1}{2}\pi$ であるから、この括弧からは四つの解が出る。
- (ii) が恒等式であることに気づかず、特定の解を探してしまう。

STEP のその先へ

式 $-\beta tu + (\alpha - \gamma)t - (\alpha + \gamma)u + \beta$ は円錐曲線（conic）の退化した場合にあたる。その零点集合は直角双曲線（rectangular hyperbola）であるが、行列式に似たある量が零になるときには二本の直線に分かれる。二次形式（quadratic form）がいつ因数分解できるかを判定することは、行列と固有値（eigenvalue）を用いて円錐曲線を分類する第一歩であり、大学一年次の線形代数で扱う話題である。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照のこと。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この趣旨の三角方程式がさらに載っている。

解答例

STEP II 2007、第 5 問

純粋数学 ・ 関数の反復合成

STEP II 2007、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s2-q5

鍵となる考え方

$\dfrac{x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,x}$ という形は、$\tan B = \sqrt{3}$、すなわち $B = \frac{\pi}{3}$ とした $\tan(A+B)$ の加法定理（compound-angle formula）そのものである。したがって f は角に $\frac{\pi}{3}$ を加えるだけの操作であり、tan は周期（period）π をもつから、3 回繰り返すともとに戻る。小問 (iii) でも sin と $\frac{\pi}{6}$ を用いて同じ手法が使えるが、落とし穴がある。$\sqrt{1-t^2}$ が余弦になるのは角が $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ にあるときに限られ、このことが答えを変えてしまうのである。

解答

小問 (i)

$y = f(x) = \dfrac{x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,x}$ とおく。すると $f^2(x) = \dfrac{y+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,y}$ であり、分子と分母に $1-\sqrt{3}\,x$ を掛けると

$$f^2(x) = \frac{(x+\sqrt{3})+\sqrt{3}(1-\sqrt{3}\,x)}{(1-\sqrt{3}\,x)-\sqrt{3}(x+\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}-2x}{-2-2\sqrt{3}\,x} = \frac{x-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\,x}.$$

ここでもう一度 f を適用する。今度は $y = f^2(x)$ として、分子と分母に $1+\sqrt{3}\,x$ を掛けると

$$f^3(x) = \frac{(x-\sqrt{3})+\sqrt{3}(1+\sqrt{3}\,x)}{(1+\sqrt{3}\,x)-\sqrt{3}(x-\sqrt{3})} = \frac{4x}{4} = x.$$

よって f^3 は恒等写像（identity）である。（除外された 2 点は、まさに各段階が定義されるために必要なものである。$f(x)$ には $x \neq 1/\sqrt{3}$ が、$f^2(x)$ には $x \neq -1/\sqrt{3}$ が必要であり、f は $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1/\sqrt{3}\}$ をそれ自身の上へ写すので、操作を続けることができる。）

$2007 = 3 \times 669$ であるから

$$f^{2007}(x) = \bigl(f^3\bigr)^{669}(x) = x.$$

小問 (ii)

$x = \tan\theta$ とおく。$\tan\alpha$ が定義され、かつ $1 - \sqrt{3}\tan\alpha \neq 0$ を満たす任意の角 α について、$\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ を用いた加法定理により

$$f(\tan\alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\frac{\pi}{3}}{1 - \tan\alpha\tan\frac{\pi}{3}} = \tan\bigl(\alpha + \tfrac{\pi}{3}\bigr).$$

$\alpha = \theta$ とすれば、これは $n = 1$ の場合である。$f^k(x) = \tan(\theta + \frac{1}{3}k\pi)$ であるとすると、$\alpha = \theta + \frac{1}{3}k\pi$ としてこの式を適用して

$$f^{k+1}(x) = f\bigl(\tan(\theta + \tfrac{1}{3}k\pi)\bigr) = \tan\bigl(\theta + \tfrac{1}{3}(k+1)\pi\bigr),$$

となるので、数学的帰納法（induction）により、すべての正の整数 n について $f^n(x) = \tan(\theta + \frac{1}{3}n\pi)$ が成り立つ。

途中で破綻することはない。この式が成り立たなくなるのは、ある角 $\theta + \frac{1}{3}k\pi$ が π を法として $\frac{\pi}{2}$ または $\frac{\pi}{6}$ と合同（congruent）になる場合だけであり、それは $\theta = \pm\frac{\pi}{6}$ または $\pm\frac{\pi}{2}$、すなわち $x = \pm 1/\sqrt{3}$ または x が無限大であることを意味するが、これらは除外されている。このことは小問 (i) の説明にもなっている。$\frac{\pi}{3}$ を 3 回加えると tan の周期である π を加えたことになるのである。

小問 (iii)

$|t| \leq 1$ であるから、$\varphi = \arcsin t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ として $t = \sin\varphi$ と書ける。

考えてみよう $\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ はつねに $\cos\alpha$ に等しいだろうか？

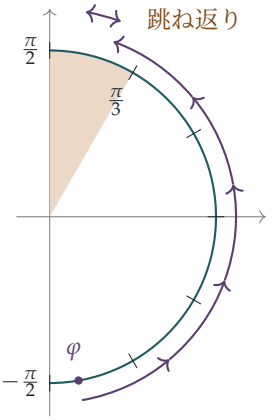
等しいのは $\cos\alpha \geq 0$ のときだけである。角 $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ については問題ないので

$$g(\sin\alpha) = \cos\tfrac{\pi}{6}\sin\alpha + \sin\tfrac{\pi}{6}\cos\alpha = \sin\bigl(\alpha + \tfrac{\pi}{6}\bigr). \qquad (*)$$

$(*)$ を再び適用するには、得られた答えを $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 内の角の sin として書き直さなければならない。場合は 2 つある。

- $\alpha \leq \frac{\pi}{3}$ ならば、$\alpha + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$ はすでに範囲内にある。
- $\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ならば、$\alpha + \frac{\pi}{6}$ は $\frac{\pi}{2}$ を超えてしまうかもしれないが、$\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \sin\bigl(\pi - \alpha - \frac{\pi}{6}\bigr) = \sin\bigl(\frac{5\pi}{6} - \alpha\bigr)$ であり、$\frac{5\pi}{6} - \alpha \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ である。

($\alpha = \frac{\pi}{3}$ のときは、どちらも $\frac{\pi}{2}$ を与える。) したがって範囲内の角は、$[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ に達するまで $\frac{\pi}{6}$ ずつ**上昇し**、それ以降は $\alpha \mapsto \frac{5\pi}{6} - \alpha$ によって**折り返される**。この折り返しはもう一度行うと元に戻るので、角は 2 つの値の間を行き来することになる。



g を 1 回適用するごとに、角は単位円の右半分を $\frac{\pi}{6}$ だけ回る。いったん影をつけた領域 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ に入ると、そこで行ったり来たりする。

ここで、必要な上昇の回数を m とする。すなわち $\varphi + \frac{m\pi}{6} \geq \frac{\pi}{3}$ を満たす最小の整数 $m \geq 0$ である。$\varphi \geq -\frac{\pi}{2}$ であるから $m \leq 5$ であり、t を用いて表すと次のようになる。

t	$[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$	$[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	$[0, \frac{1}{2})$	$[-\frac{1}{2}, 0)$	$[-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$	$[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$
m	0	1	2	3	4	5

$\varphi_n \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ かつ $\varphi_0 = \varphi$ として、$g^n(t) = \sin\varphi_n$ と書く。$n \leq m$ のときは、それ以前の角はすべて $\frac{\pi}{3}$ 未満であったから、$\varphi_n = \varphi + \frac{n\pi}{6}$ である。すると $\varphi_m \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ であるから、$\varphi_{m+1} = \frac{5\pi}{6} - \varphi_m$、$\varphi_{m+2} = \varphi_m$ というように、以後は交互に繰り返す。$\sin\varphi_{m+1} = \sin(\varphi_m + \frac{\pi}{6}) = \sin(\varphi + \frac{(m+1)\pi}{6})$ であるから、$\varphi = \arcsin t$ とし、m を表から定めると、次を得る。

$$g^n(t) = \begin{cases} \sin(\varphi + \frac{n\pi}{6}), & n \leq m+1, \\ \sin(\varphi + \frac{m\pi}{6}), & n > m+1,\ n-m \text{ が偶数}, \\ \sin(\varphi + \frac{(m+1)\pi}{6}), & n > m+1,\ n-m \text{ が奇数}. \end{cases}$$

特に、すべての t とすべての $n \geq 5$ について $g^{n+2}(t) = g^n(t)$ が成り立つ。

たとえば $t = 0$ では $\varphi = 0$、$m = 2$ であり、軌道は $0 \mapsto \frac{1}{2} \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2} \mapsto 1 \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2} \mapsto 1 \mapsto \cdots$ となる。

検算

- $x = 1$ のとき：$f(1) = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -2-\sqrt{3}$、$f^2(1) = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-2$、そして $f(\sqrt{3}-2) = 1$ であり、これらは $\tan\frac{\pi}{4}$、$\tan\frac{7\pi}{12}$、$\tan\frac{11\pi}{12}$ と一致する。
- 直接計算すると $g(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3}{4}+\frac{1}{4} = 1$、$g(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ であり、跳ね返りは実際に起こる。$g^5(0)$ を素朴に $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ と予想するのは誤りであり、繰り返し計算すると 1 になる。
- 数値的にも、ランダムに選んだ 5000 個の $t \in [-1,1]$ から始めて g を 19 回繰り返したところ、枠で囲んだ式と 2×10^{-12} 以内で一致した。

よくある間違い

- (iii) の答えを、すべての n について $\sin(\varphi + \frac{n\pi}{6})$ としてしまうこと。これは $\sqrt{1-t^2} \geq 0$ であるために角が決して $\frac{\pi}{2}$ を超えられないことを見落としている。
- f^2 の計算ミス。整理する前に、分子と分母の全体に $1-\sqrt{3}\,x$ を掛けること。

STEP のその先へ

写像 $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ はメビウス変換（Möbius transformation）であり、2 つのメビウス変換の合成はそれらの行列 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ の積に対応する。ここで f の行列は $2\left(\begin{smallmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{smallmatrix}\right)$ であり、これは $\frac{\pi}{3}$ の回転（rotation）を定数倍したものである。その 3 乗は単位行列の定数倍になるので、$f^3(x) = x$ となるのである。小問 (iii) は力学系（dynamical systems）の世界をほんの少し味わわせてくれる。そこに現れるのは、周期的な点ではなく**最終的に周期的**（eventually periodic）な点である。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析の入門書）には、メビウス変換の美しい幾何学的な解説がある。

解答例

STEP II 2007、第 6 問

純粋数学 ・ 一階微分方程式

STEP II 2007、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s2-q6

鍵となる考え方

小問 (i) では、導関数（derivative）の分母がともに $\sqrt{3+x^2}$ となる二つの関数が与えられている。これらを適切に組み合わせると、その導関数が $\sqrt{3+x^2}$ そのものの定数倍になるので、積分（integral）はおのずと求まる。小問 (ii) の微分方程式（differential equation）は $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ についての二次方程式である。この二次方程式を解くと二つの通常の一階微分方程式が得られ、そのいずれを解くにも、ちょうど小問 (i) の積分が必要になる。

解答

小問 (i)

$s=\sqrt{3+x^2}$ とおく。すると、すべての実数 x に対して $s>0$ であり、$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{s}$ である。また $s>|x|$ であるから $x+s>0$ であり、したがって対数はすべての x で定義される。

合成関数の微分法（chain rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x+s)=\frac{1+\frac{x}{s}}{x+s}=\frac{\frac{s+x}{s}}{x+s}=\frac{1}{\sqrt{3+x^2}}.$$

積の微分法（product rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xs)=s+x\cdot\frac{x}{s}=\frac{s^2+x^2}{s}=\frac{3+2x^2}{\sqrt{3+x^2}}.$$

考えてみよう この二つの導関数から、どうすれば $\int \sqrt{3+x^2}\,\mathrm{d}x$ が得られるか。

$\dfrac{3+x^2}{s} = s$ であるから、分母 s の上に分子 $3+x^2$ がくる形にしたい。二つ目の導関数の分子は $3+2x^2$ である。これに一つ目の導関数の 3 倍を加えると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(xs + 3\ln(x+s)\Big) = \frac{3+2x^2+3}{s} = \frac{2(3+x^2)}{s} = 2\sqrt{3+x^2}.$$

したがって

$$\int \sqrt{3+x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x\sqrt{3+x^2} + \tfrac{3}{2}\ln\big(x+\sqrt{3+x^2}\,\big) + C.$$

小問 (ii)

$p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ とおく。与えられた方程式は p についての二次方程式 $3p^2+2xp-1=0$ であるから、

$$p = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2+12}}{6} = \frac{-x \pm \sqrt{3+x^2}}{3}.$$

判別式（discriminant）$4x^2+12$ は常に正であるから、各 x において異なる二つの実数解がある。その差 $\frac{2}{3}\sqrt{3+x^2}$ は決して 0 にならないので、解が途中で一方の根から他方の根へ乗り換えることはできない。（導関数は中間値の性質（intermediate value property）をもつので、常に $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ 以上離れている二つの値の間を跳び移ることはできない。）よって、どの解もすべての x について

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3+x^2} \qquad \text{または} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3+x^2}$$

のいずれかを満たす。小問 (i) を用いて積分すると、

$$y = -\frac{x^2}{6} \pm \Big(\tfrac{1}{6}x\sqrt{3+x^2} + \tfrac{1}{2}\ln\big(x+\sqrt{3+x^2}\,\big)\Big) + C.$$

$x=1$ では $\sqrt{3+x^2}=2$、$\ln(x+\sqrt{3+x^2}) = \ln 3$ である。

符号 $+$ をとる場合：$y(1)=0$ より $0 = -\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\ln 3 + C$ であるから、$C = -\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\ln 3$ である。対数をまとめると、

$$y = \frac{x\sqrt{3+x^2}-x^2-1}{6} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{3+x^2}}{3}\right).$$

符号 $-$ をとる場合：$y(1)=0$ より $0 = -\frac{1}{6}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ln 3 + C$ であるから、$C = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 3$ であり、

$$y = \frac{3-x^2-x\sqrt{3+x^2}}{6} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{3+x^2}}{3}\right).$$

これらが $(1,0)$ を通る二つの解であり、どちらもすべての実数 x で有効である。

検算

- それぞれの答えに $x = 1$ を代入すると、分数の部分は $\frac{2-1-1}{6} = 0$（または $\frac{3-1-2}{6} = 0$）となり、$\ln\frac{1+2}{3} = 0$ である。よって、どちらでも $y(1) = 0$ である。
- p の二つの根の和は $-\frac{2x}{3}$ であるから、二つの解の和は $\frac{1-x^2}{3}$ になるはずである。実際、平方根と対数は打ち消し合い、ちょうど $\frac{2-2x^2}{6} = \frac{1-x^2}{3}$ が残る。
- 数値的には、シンプソンの公式（Simpson's rule）により $\int_{-1}^{2}\sqrt{3+x^2}\,\mathrm{d}x \approx 5.949681$ が得られ、小問 (i) の公式と一致する。方程式の各分枝を $(1,0)$ から $x = 4$ までルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で進めると $y \approx 0.584957$ および $y \approx -5.584957$ が得られ、二つの公式と一致する。（その和は $-5 = \frac{1-16}{3}$ である。）

よくある間違い

- $3p^2 + 2xp = 1$ を p についての二次方程式として解かずに、線形として扱ったり、変数分離を試みたりすること。
- 二つの分枝に同じ定数 C を使うこと。符号ごとに別々の定数が必要であり、それぞれ $y(1) = 0$ によって定まる。
- $\sqrt{3+x^2}$ の前の係数 $\frac{1}{3}$ を忘れ、小問 (i) の積分を誤った倍率で使ってしまうこと。

STEP のその先へ

$F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0$ のように導関数について線形でない方程式は**陰的**（implicit）であるという。ある点を通る解は複数ありうり、p についての方程式の根それぞれに一つずつ対応する。二つの根が一致するところでは、**特異解**（singular solution）が現れることがある（クレローの方程式（Clairaut's equation）のように、曲線族の包絡線となるもの）。ここでは根が一致することはないので、解はちょうど二つである。小問 (i) に現れた $\ln(x+\sqrt{3+x^2})$ は $\operatorname{arsinh}(x/\sqrt{3})$ に定数を加えたものであり、この積分は実は標準的な置換 $x = \sqrt{3}\sinh u$ を姿を変えて行っているのである。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は、一階微分方程式と、その解の存在と一意性を扱っている。

解答例

STEP II 2007、第 7 問

純粋数学 ・ イェンセンの不等式

STEP II 2007、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s2-q7

この問題は、*Beyond STEP* の第 3.3 節「凸性の威力」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch03/convexity.html

鍵となる考え方

イェンセン（Jensen）の不等式（Jensen's inequality）によれば、凹関数（concave function）に対しては、値の平均は平均における値以下である。各小問は、どの凹関数を用い、どの数の平均をとるかを見抜くことに帰着する。三角形の場合、角の和は一定なので、その平均はわかっている。相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）の場合は、対数によって積が和に変わる。そのうえで (a) と (b) では、AM–GM に代入する適切な数の組を、定数も含めて選ぶ必要がある。

解答

凹性

$f(x) = \sin x$ とすると $f''(x) = -\sin x$ である。$0 < x < \pi$ では $\sin x > 0$ なので $f''(x) < 0$ となり、$\sin x$ はそこで凹である。

$f(x) = \ln x$ とすると $f'(x) = 1/x$、$f''(x) = -1/x^2$ である。これはすべての $x > 0$ で負なので、$\ln x$ は $x > 0$ で凹である。

小問 (i)

三角形の角は $A, B, C > 0$ かつ $A + B + C = \pi$ を満たすので、それぞれ $(0, \pi)$ に属し、そこで sin は凹である。$n = 3$ としてイェンセンの不等式を用いると

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin\left(\frac{A + B + C}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

両辺に 3 を掛けて

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

となり、示された。等号が成り立つのは $A = B = C = \pi/3$、すなわち正三角形のときに限る。

小問 (ii)

$x > 0$ で凹である $f(x) = \ln x$ をとり、$x_k = t_k > 0$ とおく。イェンセンの不等式より

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln t_k \leq \ln\left(\frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}{n}\right).$$

左辺は $\frac{1}{n}\ln(t_1 t_2 \cdots t_n) = \ln \sqrt[n]{t_1 t_2 \cdots t_n}$ である。e^x は増加関数なので、不等号の向きを変えずに両辺の指数をとることができ、

$$\sqrt[n]{t_1 t_2 \cdots t_n} \leq \frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}{n}$$

を得る。等号は $t_1 = t_2 = \cdots = t_n$ のとき、かつそのときに限り成り立つ。（$n = 1$ のときは自明に等号となり、これと矛盾しない。）

(a)

考えてみよう どの 4 つの数の平均をとればよいか？

左辺は 4 項からなるので、$n = 4$ とする。相乗平均（geometric mean）から xyz が出てくる必要があり、x^4, y^4, z^4 を用いれば $\sqrt[4]{x^4 y^4 z^4} = xyz$ となる。定数 16 を 4 つ目の項とすると、$\sqrt[4]{16} = 2$ である。そこで、すべて正である $t_1 = x^4$、$t_2 = y^4$、$t_3 = z^4$、$t_4 = 16$ をとると

$$\frac{x^4 + y^4 + z^4 + 16}{4} \geq \sqrt[4]{16\, x^4 y^4 z^4} = 2xyz$$

となる。ここで 4 乗根をとる際に $x, y, z > 0$ を用いた。両辺に 4 を掛けて

$$x^4 + y^4 + z^4 + 16 \geq 8xyz$$

となり、示された。等号成立には $x^4 = y^4 = z^4 = 16$、すなわち $x = y = z = 2$ が必要である。

(b) 今度は 5 乗なので、$n=5$ とし、x^5, y^5, z^5 を数の組に含めたい。5 乗根からちょうど xyz を得るには、残りの 2 つの数の積が 1 でなければならない。自然な選び方は $t_4 = t_5 = 1$ である：

$$\frac{x^5+y^5+z^5+1+1}{5} \geq \sqrt[5]{x^5y^5z^5\cdot 1\cdot 1} = xyz.$$

整理すると、すべての正の x, y, z に対して

$$x^5+y^5+z^5-5xyz \geq -2$$

が成り立つ。

考えてみよう これで最小値が -2 であることが示されたか？

これだけでは示されていない。下界は、実際に達成されるときに限って最小値となる。AM–GM の等号は 5 つの数がすべて等しいとき、すなわち $x^5 = y^5 = z^5 = 1$、つまり $x = y = z = 1$ のときに成り立つ。このとき式の値は $1+1+1-5 = -2$ である。したがって最小値は

$$\boxed{-2}, \quad \text{達成されるのは} x = y = z = 1.$$

検算

- (i) で直角二等辺三角形をとると $1 + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2.414$ となり、$3\sqrt{3}/2 \approx 2.598$ を下回る。200 000 個の三角形を無作為に抽出しても、2.598 を超えることは一度もなかった。
- (a) で $x = y = z = 2$ のとき、両辺はともに 64 になる。
- (b) で、無作為な初期点から数値的に最小化を行うと、常に値 -2 をとる $(1,1,1)$ に収束した。また、$x = y = z = 1.1$ のとき $3(1.61051) - 5(1.331) \approx -1.82 > -2$ である。

よくある間違い

- 指数をとっても不等式が保たれるのは e^x が増加関数だからにほかならない、という点を忘れること。一言触れておくべきである。
- (b) で「≥ -2」で止めてしまい、-2 に達する x、y、z の値を示さないこと。
- x^5, y^5, z^5 に $n=3$ の AM–GM を用いること。これでは $x^5+y^5+z^5 \geq 3(xyz)^{5/3}$ となり、$5xyz$ とうまく比較できない。

STEP のその先へ

イェンセンの不等式は凸（convex）関数（あるいは凹関数）についての命題であり、その本来の居場所は解析学と確率論である。期待値（expectation）の言葉で書けば、凹関数 f に対して $\mathrm{E}[f(X)] \leq f(\mathrm{E}[X])$ となる。(a) と (b) で用いた工夫、すなわち相乗平均がうまく出てくるように定数を補うという手法は、重み付き相加平均・相乗平均の不等式（weighted AM–GM）やヘルダー（Hölder）の不等式の理論の出発点である。不等式と凸性についてさらに学ぶには、Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）を、確率論的な形については Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）を読んでみるとよい。

解答例

STEP II 2007、第 8 問

純粋数学 ・ ベクトルによるチェバの定理

STEP II 2007、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s2-q8

鍵となる考え方

平面上のすべての点は $\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ の形に書くことができ、小問 (i) はそのような点が BC 上にあるのはどのようなときかを正確に教えてくれる。すなわち、係数（coefficient）の和が 1 になるときである。したがって、ある直線が BC（あるいは CA や AB）と交わる点を求めるには、その直線上の一般の点を $\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ で表し、係数に適切な条件を課せばよい。すると各比は β と γ で表され、それらの積はきれいに約分される。

解答

以下では、$BD : DC$ のような比はすべて**符号付き**比（signed ratio）を表すものとする。すなわち $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{DC}$ のとき $BD/DC = k$ とし、D が線分（segment）BC の外側にあるときこの値は負になる。A, B, C は同一直線上にない（collinear でない）ので、$\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ は平行でなく、どちらも零ベクトルでない。よって係数を比較してよい。つまり $p\mathbf{b} + q\mathbf{c} = p'\mathbf{b} + q'\mathbf{c}$ ならば $p = p'$ かつ $q = q'$ である。

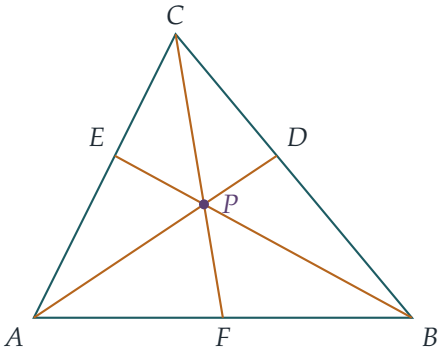
小問 (i)

$s + t = 1$ ならば

$$s\mathbf{b} + t\mathbf{c} = (1 - t)\mathbf{b} + t\mathbf{c} = \mathbf{b} + t(\mathbf{c} - \mathbf{b}),$$

であり、これは t を媒介変数（parameter）とする、B を通り方向 $\overrightarrow{BC}$ をもつ直線のベクトル方程式（vector equation）である。t がすべての実数を動くとき、X はこの直線全体を動く。したがって X の軌跡（locus）は B と C を通る（無限に延びた）直線であり、線分 BC は $0 \le t \le 1$ の部分にあたる。

逆に、係数を比較することにより、点 $\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$ が直線 BC 上にあるのは $\beta+\gamma=1$ のとき、かつそのときに限る。以後はこの判定法を用いる。特に、$\beta+\gamma\neq 1$ は P が BC 上にないことを意味し、$\beta,\gamma\neq 0$ は P が CA 上にも AB 上にもないことを意味する。



小問 (ii)

直線 AP 上の一般の点は $\lambda(\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c})=\lambda\beta\,\mathbf{b}+\lambda\gamma\,\mathbf{c}$ である。小問 (i) より、この点が BC 上にあるのはちょうど $\lambda\beta+\lambda\gamma=1$ のとき、すなわち

$$\lambda=\frac{1}{\beta+\gamma}.$$

のときである。（これには $\beta+\gamma\neq 0$ が必要である。$\beta+\gamma=0$ ならば $\overrightarrow{AP}=\beta(\mathbf{b}-\mathbf{c})$ は BC に平行となり D は存在しないので、問題文は暗に $\beta+\gamma\neq 0$ を仮定している。）よって

$$\mathbf{d}=\frac{\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}}{\beta+\gamma}.$$

である。ここで

$$\overrightarrow{BD}=\mathbf{d}-\mathbf{b}=\frac{\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}-(\beta+\gamma)\mathbf{b}}{\beta+\gamma}=\frac{\gamma}{\beta+\gamma}(\mathbf{c}-\mathbf{b}),$$
$$\overrightarrow{DC}=\mathbf{c}-\mathbf{d}=\frac{(\beta+\gamma)\mathbf{c}-\beta\mathbf{b}-\gamma\mathbf{c}}{\beta+\gamma}=\frac{\beta}{\beta+\gamma}(\mathbf{c}-\mathbf{b}).$$

どちらも同じベクトル $\mathbf{c}-\mathbf{b}$ の実数倍であるから $\beta\overrightarrow{BD}=\gamma\overrightarrow{DC}$ となり、$\beta\neq 0$ なので

$$BD:DC=\gamma:\beta,$$

が成り立つ。これが示すべきことであった。

小問 (iii)

E と F も同じ方法で求めるが、今度は対象となる直線が CA（$\mathbf{c}$ の実数倍）と AB（$\mathbf{b}$ の実数倍）である。

考えてみよう 点 $p\mathbf{b}+q\mathbf{c}$ が直線 CA 上にあるかどうかは、どのように判定できるだろうか？

直線 CA は原点 A を通り方向 $\mathbf{c}$ をもつので、その上の点はちょうど $\mathbf{c}$ の実数倍である。つまり $\mathbf{b}$ の係数が 0 でなければならない。同様に、点が AB 上にあるのは、その $\mathbf{c}$ の係数が 0 のときに限る。

E を求める。 直線 BP 上の一般の点は

$$\mathbf{b}+\mu(\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}-\mathbf{b})=\big(1-\mu(1-\beta)\big)\mathbf{b}+\mu\gamma\,\mathbf{c}.$$

である。$\mathbf{b}$ の係数を 0 とおくと $\mu=1/(1-\beta)$ を得る（$\beta\neq1$ が必要である。$\beta=1$ ならば $\overrightarrow{BP}=\gamma\mathbf{c}$ は CA に平行となり E は存在しない）。よって

$$\mathbf{e}=e\,\mathbf{c},\qquad e=\frac{\gamma}{1-\beta}.$$

である。このとき $\overrightarrow{CE}=(e-1)\mathbf{c}$、$\overrightarrow{EA}=-e\,\mathbf{c}$ であり、$\gamma\neq0$ より $e\neq0$ であるから

$$\frac{CE}{EA}=\frac{e-1}{-e}=\frac{1-e}{e}=\frac{(1-\beta-\gamma)/(1-\beta)}{\gamma/(1-\beta)}=\frac{1-\beta-\gamma}{\gamma}.$$

F を求める。 B と C の役割を入れ替える（すなわち $\mathbf{b}\leftrightarrow\mathbf{c}$ および $\beta\leftrightarrow\gamma$ と入れ替える）と、$\gamma\neq1$ のもとで、直線 CP は AB と $\mathbf{f}=f\,\mathbf{b}$（ただし $f=\beta/(1-\gamma)$）で交わる。このとき $\overrightarrow{AF}=f\,\mathbf{b}$、$\overrightarrow{FB}=(1-f)\mathbf{b}$ であり、$\beta+\gamma\neq1$ より $1-f=(1-\beta-\gamma)/(1-\gamma)\neq0$ である。よって

$$\frac{AF}{FB}=\frac{f}{1-f}=\frac{\beta}{1-\beta-\gamma}.$$

積。 中央の因数に小問 (ii) を用いると

$$\frac{AF}{FB}\times\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}=\frac{\beta}{1-\beta-\gamma}\times\frac{\gamma}{\beta}\times\frac{1-\beta-\gamma}{\gamma}=1,$$

となる。ここで $\beta\neq0$、$\gamma\neq0$、$\beta+\gamma\neq1$ であるから、約分した因数はすべて 0 でない。これが求める結果である。（これは符号付き比について成り立つので、長さそのものの比についても成り立つ。）

検算

- 重心（centroid）：$\beta=\gamma=\frac{1}{3}$ とすると P は重心になる。このとき $BD:DC=1:1$、$CE/EA=\frac{1/3}{1/3}=1$、$AF/FB=1$ であり、3 本のチェバ線（cevian）はすべて中線（median）となる。これは当然そうあるべき結果である。

- $A = (0,0)$、$B = (4,0)$、$C = (1.5,3)$、$\beta = 0.3$、$\gamma = 0.4$（上の図）とすると、$D = (2.571, 1.714)$、$E = \frac{4}{7}\mathbf{c}$、$F = (2,0)$ となり、$\frac{AF}{FB} = 1$、$\frac{BD}{DC} = \frac{4}{3}$、$\frac{CE}{EA} = \frac{3}{4}$ で、積は 1 である。
- D, E, F の式、3 つの符号付き比、およびその積を、1700 個を超えるランダムな三角形とランダムな β, γ について、三角形の外側にある点 P も含めて（分数を用いて）厳密に確かめた。

よくある間違い

- (i) の軌跡を線分 BC と答えてしまう：s と t は正に制限されていないので、軌跡は直線全体である。
- 比を逆にしてしまう：$\overrightarrow{BD}$ は $\mathbf{c}$ の係数である γ に比例するので、γ が大きいと D は C の側に引き寄せられる。
- BP と CP に沿った媒介変数が、原点からではなく B と C から測られていることを忘れる。

STEP のその先へ

小問 (iii) はチェバの定理（Ceva's theorem）であり、$(1-\beta-\gamma, \beta, \gamma)$ は三角形 ABC に関する P の**重心座標**（barycentric coordinates）である。これらは三角形 PBC, PCA, PAB の面積に比例し、3 つの比はそれらの面積の商にほかならない。重心座標はアフィン幾何（affine geometry）、すなわち直線や直線上の比は意味をもつが長さや角は意味をもたない幾何の自然な舞台であり、コンピュータグラフィックスや有限要素法（finite-element method）にも再び登場する。基底（basis）に関する座標が体系的に扱われる様子を見るには、Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）がよい。

解答例

STEP II 2007、第 9 問

力学 ・ 反発係数を伴う斜め衝突

> **STEP II 2007、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q9

鍵となる考え方

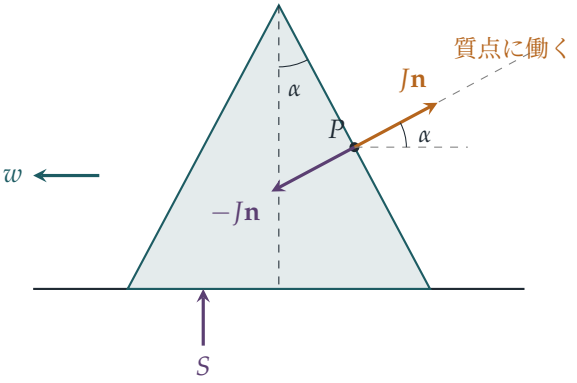
すべての面は滑らか（smooth）であるから、質点と円錐の間に働く力積（impulse）は衝突点における共通の法線（normal）の方向にのみ働き、台は鉛直方向にしか押すことができない。このことから二つのことが同時にわかる。すなわち、質点の速度のうち面に沿った成分は変化せず、質点と円錐を合わせた水平方向の運動量は保存される（conservation of momentum）。これを法線方向のニュートンの反発の法則（Newton's law of restitution）と組み合わせれば、円錐の速さが求まる。小問 (ii) は、落下する質点の速度の法線成分に小問 (i) を適用したものにすぎない。

解答

質点を点とみなし、円錐を（問題文にあるとおり）回転も鉛直方向の移動もしない剛体とみなす。したがって衝突直後、円錐はある速さ w で水平に滑る。円錐の軸と衝突点 P を含む鉛直面内で考える。P を通る母線（generator）は鉛直な軸と角 α をなすから、P における外向きの法線は水平方向と角 α をなす。単位ベクトルを

$$\mathbf{n} = (\cos\alpha,\ \sin\alpha)\ \text{（外向きの法線）}, \qquad \mathbf{t} = (\sin\alpha,\ -\cos\alpha)\ \text{（斜面に沿って下向き）},$$

とおく。ただし第 1 座標は水平方向（軸から離れる向き）、第 2 座標は鉛直上向きとする。



質点が受ける力積を $J\mathbf{n}$ $(J>0)$ とすると、円錐は $-J\mathbf{n}$ を受け、その水平成分は $J\cos\alpha$ で、P から離れる向きである。台は上向きに鉛直な力積 $S=J\sin\alpha$ を与え、これは $-J\mathbf{n}$ の下向き成分をちょうど打ち消すのに必要な大きさである。円錐が鉛直方向の速度をもたないのはこのためである。よって

$$Mw = J\cos\alpha, \tag{1}$$

であり、円錐は P から離れる向きに水平に動く。

小問 (i)

質点は速度 $-u\mathbf{n}$ で到達し、これは $\mathbf{t}$ 方向の成分をもたない。面は滑らかであるから、質点が受ける力積は純粋に法線方向であり、$\mathbf{t}$ 方向の成分を変えることはできない。したがって衝突後もその成分は 0 のままであり、質点の速度は $\mathbf{n}$ のスカラー倍となる。つまり質点は P における法線に沿って動く（外向きに動くか、円錐が十分速く遠ざかる場合には内向きのまま、より遅く動く）。

衝突後の質点の速度は $(-u+J/m)\,\mathbf{n}$ である。円錐は P から離れる向き（図では左向き）に速さ w で水平に動くから、その速度は $(-w,0)$ であり、$\mathbf{n}$ 方向の成分は $-w\cos\alpha$ である。

考えてみよう ニュートンの反発の法則は、どの方向の相対速度を比べるものか。また、円錐の寄与は何か。

反発の法則は共通の法線 $\mathbf{n}$ の方向に適用される。衝突前、$\mathbf{n}$ 方向の近づく速さは u である（円錐は静止している）。衝突後の遠ざかる速さは、質点の $\mathbf{n}$ 成分から円錐の $\mathbf{n}$ 成分を引いたものである：

$$\left(-u+\frac{J}{m}\right)-(-w\cos\alpha)=eu \quad\Longrightarrow\quad J=m\big((1+e)u-w\cos\alpha\big).$$

これを (1) に代入すると、

$$Mw = m\cos\alpha\big((1+e)u - w\cos\alpha\big) \quad\Longrightarrow\quad \boxed{w = \frac{m(1+e)u\cos\alpha}{M + m\cos^2\alpha}}.$$

同じことであるが、水平方向の運動量は保存される（台の力積は鉛直である）：$m(-u\cos\alpha) = m\big(-u + \frac{J}{m}\big)\cos\alpha - Mw$ であり、これは再び (1) である。

小問 (ii)

今度は質点が速度 $(0, -u)$ で到達する。これを分解すると、

$$(0,-u)\cdot\mathbf{n} = -u\sin\alpha, \qquad (0,-u)\cdot\mathbf{t} = u\cos\alpha.$$

接線成分 $u\cos\alpha$ は衝突の影響を受けず（やはり面が滑らかであるため）、以後の議論には関わらない。力積 $J\mathbf{n}$、式 (1)、反発の式はいずれも法線成分のみを含むからである。したがって、小問 (i) の計算は、法線方向の近づく速さ u を $u\sin\alpha$ に置き換えるだけでそのまま使える：

$$w = \frac{m(1+e)(u\sin\alpha)\cos\alpha}{M + m\cos^2\alpha} = \frac{mu(1+e)\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\cos^2\alpha},$$

となり、示すべき式が得られた。

α についての最大化。 M, m, e, u を固定したとき、$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ において $f(\alpha) = \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\cos^2\alpha}$ を最大にすればよい。

> **考えてみよう** この商を微分するのは煩雑である。式をすっきりさせる置換はないだろうか。

分子と分母を $\cos^2\alpha$ で割り、$T = \tan\alpha > 0$ とおいて $\sec^2\alpha = 1 + T^2$ を用いると、

$$f = \frac{\tan\alpha}{M\sec^2\alpha + m} = \frac{T}{MT^2 + (M+m)} = \frac{1}{MT + \dfrac{M+m}{T}}.$$

相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）により（両項とも正であるから）、

$$MT + \frac{M+m}{T} \geq 2\sqrt{M(M+m)},$$

であり、等号が成り立つのは $MT = (M+m)/T$、すなわち $T^2 = (M+m)/M$ のときに限る。よって f、したがって w はそこで最大となる。$T \mapsto \alpha$ は $(0,\infty)$ から $(0, \frac{\pi}{2})$ への全単射（bijection）であるから、これはただ一つの最大であり、

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{M+m}{M}} = \frac{M}{2M+m}, \qquad \text{よって} \qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{M}{2M+m}}$$

となる（α は鋭角であるから正の根をとる）。最大の速さは $w_{\max} = \dfrac{mu(1+e)}{2\sqrt{M(M+m)}}$ である。

検算

- $\alpha \to \frac{\pi}{2}$ とすると、円錐は平らな円板になる。鉛直に落下しても水平に押す力は生じず、$w \to 0$ となる。小問 (i) で $\alpha \to \frac{\pi}{2}$ とすると法線は鉛直になり、やはり $w \to 0$ となる。よい。
- 小問 (i) で $\alpha \to 0$（鉛直な壁）とすると $w = \dfrac{m(1+e)u}{M+m}$ となり、質量 M の自由に動けるブロックとの正面衝突でおなじみの答えになる。
- $m \ll M$ のとき、最適な角度は $\cos^2\alpha \to \frac{1}{2}$、すなわち $\alpha = 45^\circ$ となり、これは $\sin\alpha\cos\alpha$ が最大となる角度である。
- 数値で確かめると、$M = 3, m = 1, e = \frac{1}{2}, u = 4, \alpha = \frac{\pi}{6}$ のとき、小問 (ii) から $w = \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0.693$ を得る。力積を直接計算する方法（反発の式から J を求める）は、無作為に選んだパラメータに対して両方の公式と一致し、α についてのグリッド探索も最大を与える角度を裏づける。

よくある間違い

- 円錐が動くことを忘れ、遠ざかる速さが質点の速さ eu だけであるかのように反発の式を書いてしまう。円錐の速度は法線方向に成分 $w\cos\alpha$ をもつ。
- 法線方向の運動量を保存させてしまう。台の力積は $\mathbf{n}$ 方向の成分をもつので、保存されるのは**水平方向**の運動量だけである。
- 法線が鉛直方向と角 α をなすとしてしまう。鉛直方向と角 α をなすのは面のほうであり、法線は水平方向と角 α をなす。

STEP のその先へ

ここでの台は**拘束**（constraint）としてはたらいている。台は円錐から自由度（degree of freedom）を一つ取り除き、その力積はそれを実現するのに必要な大きさに自動的に決まる。大学では、これは撃力的な拘束の理論となり、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）における一般化座標（generalised coordinates）を用いると見通しよく扱える。また、法線への射影は、拘束された物体の有効質量（effective mass）の背後にある考え方と同じものである。Kleppner and Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*

（力学入門）には、2 次元における衝突と力積についての丁寧な解説がある。

解答例

STEP II 2007、第 10 問

力学 ・ 摩擦のある静力学

> **STEP II 2007、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q10

鍵となる考え方

これは静力学（statics）の問題であり、厄介な要素は重心（centre of mass）の位置ただ一つである。G が軸上のどこにあるかがわかれば、接点のまわりのモーメント（moment）をとることで垂直抗力（normal reaction）と摩擦力（friction）がともに消え、P が直接求まる。次に水平方向に力を分解すると、摩擦力の大きさは P に等しいことがわかり、あとは摩擦の法則 $|F| \leq \mu R$ によって結論が得られる。絶対値（modulus）が現れるのは、α によっては P が押す向きにも引く向きにもなりうるからである。

解答

モデル

この立体を、平らな底面（円柱の自由端）の縁の最下点である一点 A で平面に接する剛体（rigid body）とみなす。この底面の最高点を B とすると、AB は長さ $2r$ の直径で、水平と角 α をなす。はたらく力は、重心 G にはたらく重力 W、A にはたらく垂直抗力 R と摩擦力 F、そして B にはたらく水平な力 P である。

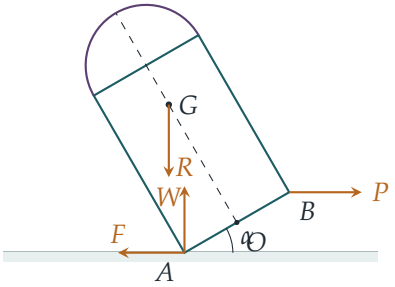
重心

距離は底面の中心 O から軸に沿って測る。円柱の体積は $3\pi r^3$ なので質量は $3\pi r^3\rho$ であり、重心は $\frac{3}{2}r$ の位置にある。半球の体積は $\frac{2}{3}\pi r^3$、密度は 3ρ なので質量は $2\pi r^3\rho$ である。半球の重心はその平らな面から $\frac{3}{8}r$ だけ先にあり、その平らな面は $3r$ の位置に

あるから、重心は $\frac{27}{8}r$ の位置にある。全質量は $5\pi r^3\rho$ であり、

$$OG = \frac{3\cdot\frac{3}{2}r + 2\cdot\frac{27}{8}r}{5} = \frac{\frac{9}{2}r + \frac{27}{4}r}{5} = \frac{9}{4}r.$$

よって G は軸上で底面から $\frac{9}{4}r$ の位置にあり、$W = 5\pi r^3\rho g$ である。



つり合い

A を原点とし、x を水平方向（A から B の真下の点に向かう向き）、y を鉛直上向きにとる。P の水平成分を X とし、これを x 方向の成分として表す。したがって X は正にも負にもなりうる。同様に、摩擦力を F として x 方向の成分で表す。

底面は A から $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ の向きに延びているので、$B = (2r\cos\alpha,\, 2r\sin\alpha)$、$O = (r\cos\alpha,\, r\sin\alpha)$ である。軸は底面に垂直で、立体の内部に向かう $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$ の向きをもつ。したがって G の水平座標は

$$x_G = r\cos\alpha - \tfrac{9}{4}r\sin\alpha.$$

である。

鉛直方向に力を分解すると $R = W$ である。水平方向に分解すると $F + X = 0$ なので、$|F| = |X|$ である。

考えてみよう どの点のまわりのモーメントをとるべきだろうか？

A のまわりである。こうすると R と F はモーメントをもたず、残るのは W と P だけになる。重力は G を通って鉛直にはたらくので、A のまわりのそのモーメントは Wx_G である（$x_G > 0$ のとき時計回り）。B にはたらく水平な力は高さ $2r\sin\alpha$ の位置にはたらくので、そのモーメントは $X\cdot 2r\sin\alpha$ である（$X < 0$ のとき反時計回り、$X > 0$ のとき時計回り）。時計回りを正とすると、

$$Wx_G + 2r\sin\alpha\, X = 0 \quad\Longrightarrow\quad X = -\frac{W\left(r\cos\alpha - \frac{9}{4}r\sin\alpha\right)}{2r\sin\alpha} = W\left(\tfrac{9}{8} - \tfrac{1}{2}\cot\alpha\right),$$

となる。ここで、$\sin\alpha$ で割ったが、これは $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ より正である。

摩擦の条件

平面は粗く、立体は A で滑らないので、$|F| \leq \mu R$ が必要である。$|F| = |X|$ と $R = W > 0$ を用いると、

$$W\left|\frac{9}{8} - \frac{1}{2}\cot\alpha\right| \leq \mu W \quad \Longrightarrow \quad \mu \geq \left|\frac{9}{8} - \frac{1}{2}\cot\alpha\right|,$$

となり、これが求める結果である。

X の符号から、P がどちら向きにはたらくかがわかる。$\tan\alpha > \frac{4}{9}$ ならば、G は A よりも B と反対側にあり、立体はそのままでは後ろ向きに倒れてしまうので、P は B を立体から離れる向きに引かなければならない。$\tan\alpha < \frac{4}{9}$ ならば、P は押さなければならない。いずれの場合も摩擦力は P と逆向きにはたらき、絶対値によって両方の場合がまとめて表される。

検算

- $\tan\alpha = \frac{4}{9}$ ならば $x_G = 0$ である。つまり G は A の真上にあり、立体はそれだけでつり合い、$P = 0$ となって摩擦力は必要ない。不等式は $\mu \geq |\frac{9}{8} - \frac{9}{8}| = 0$ となり、確かにそうなっている。
- $\alpha = 45°$ のとき、不等式は $\mu \geq \frac{5}{8}$ となる。
- 数値的に確かめると、立体を薄い円板に切り分けることで全質量 $5\pi\rho r^3$ と $OG = 2.2500r$ が得られる。また、10 000 個のランダムな α の値に対して三つのつり合いの式を直接解くと、毎回 $|F|/R$ が $|\frac{9}{8} - \frac{1}{2}\cot\alpha|$ に等しくなる。

よくある間違い

- 半球の密度が三倍であることを忘れて、その質量を $\frac{2}{3}\pi r^3\rho$ としてしまう。こうすると G の位置がずれ、定数 $\frac{9}{8}$ が変わってしまう。
- 半球の重心までの距離 $\frac{3}{8}r$ を、高さ $3r$ にある半球自身の平らな面からではなく、円柱の底面から測ってしまう。
- P の向き（あるいは摩擦力の向き）を決めつけてしまい、その結果として絶対値を落としてしまう。結果は P がどちら向きにはたらいても成り立たなければならない。

STEP のその先へ

複合体の重心を求めることは、体積積分（volume integral）$\bar{\mathbf{r}} = \int \rho\,\mathbf{r}\,\mathrm{d}V \big/ \int \rho\,\mathrm{d}V$ を離散的に映したものであり、そもそも半球の $\frac{3}{8}r$ もこの積分から導かれる。大学 1 年次の力学では、これは剛体の理論へと発展し、そこでは r^2 を $\mathbf{r}$ の代わりに用いた同じ積分によって慣性モーメント（moment of inertia）が得られる。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この二つの考え方を丁寧に展開している。

解答例

STEP II 2007、第 11 問

力学 ・ 3 次元の放物運動

> **STEP II 2007、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q11

鍵となる考え方

運動を一つの位置ベクトル（position vector）で表す。水平方向の速度は一定であり、重力の影響を受けるのは鉛直成分だけである。$\mathbf{r}(t)$ を書き下してしまえば、O からの距離は $|\mathbf{r}|$ にすぎず、最短距離は 2 次式を最小化することで求まる。最後の小問がうまくいくのは、弾丸が非常に速いため、弾丸が飛んでいる間に粒子がほとんど動かないからである。

解答

粒子を重力のみを受けて運動する質点としてモデル化し（$g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、空気抵抗（air resistance）なし）、O を原点にとる。したがって B の位置ベクトルは $50\mathbf{i}$ である。

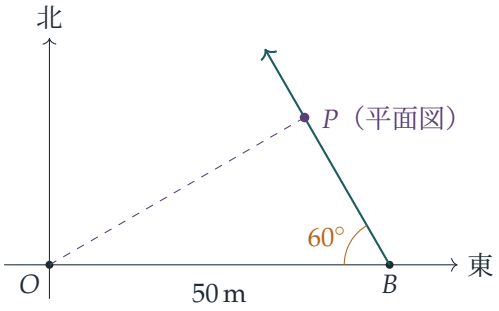
小問 (i)

初速度の成分。$\tan\alpha = \frac{1}{2}$ ならば $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$、$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ である（辺の長さが 1、2、$\sqrt{5}$ の三角形）。よって初速度は

$$\text{水平方向の速さ} 25\cdot\tfrac{2}{\sqrt{5}} = 10\sqrt{5}, \qquad \text{鉛直方向の速さ} 25\cdot\tfrac{1}{\sqrt{5}} = 5\sqrt{5}.$$

をもつ。

水平方向の向きはどちらか。その向きは直線 OB と 60° をなす。もし粒子がおおむね東向き、つまり O から遠ざかる向きに進むなら、O のそばを通過することはありえない。O の北側を通過するためには、西向きかつ北向きに戻る方向へ進まなければならない。よって水平方向の向きは $\overrightarrow{BO}$（西向き）と北側で 60° をなし、その単位ベクトル（unit vector）は $-\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$ である。



したがって水平方向の速度は

$$10\sqrt{5}\left(-\tfrac{1}{2}\mathbf{i}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}\right)=-5\sqrt{5}\,\mathbf{i}+5\sqrt{15}\,\mathbf{j},$$

であり、重力は鉛直方向にはたらくので、これは一定のままである。鉛直方向については $z=5\sqrt{5}\,t-\frac{1}{2}(10)t^2$ である。出発点 $50\mathbf{i}$ を加えると、

$$\mathbf{r}(t)=\big(50-5\sqrt{5}\,t\big)\mathbf{i}+5\sqrt{15}\,t\,\mathbf{j}+\big(5\sqrt{5}\,t-5t^2\big)\mathbf{k}.$$

O からの距離。各成分を 2 乗して足し合わせると、

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}|^2&=\big(2500-500\sqrt{5}\,t+125t^2\big)+375t^2+\big(125t^2-50\sqrt{5}\,t^3+25t^4\big)\\&=25t^4-50\sqrt{5}\,t^3+625t^2-500\sqrt{5}\,t+2500.\end{aligned}$$

これを

$$\begin{aligned}25\big(t^2-\sqrt{5}\,t+10\big)^2&=25\big(t^4+5t^2+100-2\sqrt{5}\,t^3+20t^2-20\sqrt{5}\,t\big)\\&=25t^4-50\sqrt{5}\,t^3+625t^2-500\sqrt{5}\,t+2500,\end{aligned}$$

と比べると、両者は一致する。よって $|\mathbf{r}|=5\,|t^2-\sqrt{5}\,t+10|$ である。2 次式 $t^2-\sqrt{5}\,t+10$ の判別式（discriminant）は $5-40<0$ であるから、この 2 次式は常に正であり、絶対値（modulus）を外すことができる：

$$|\mathbf{r}|=5\big(t^2-\sqrt{5}\,t+10\big)\ \text{m},$$

これが示すべきことであった。

点 P。平方完成（completing the square）すると、

$$t^2-\sqrt{5}\,t+10=\big(t-\tfrac{\sqrt{5}}{2}\big)^2+\tfrac{35}{4},$$

となるので、距離は $t=\frac{\sqrt{5}}{2}$ のとき最小となり、最短距離は $5\cdot\frac{35}{4}=\frac{175}{4}=43.75\,\text{m}$ である。$t=\frac{\sqrt{5}}{2}$ を代入すると、$\sqrt{5}\,t=\frac{5}{2}$、$t^2=\frac{5}{4}$ であるから、

$$\overrightarrow{OP}=\tfrac{75}{2}\,\mathbf{i}+\tfrac{25\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{j}+\tfrac{25}{4}\,\mathbf{k}\ \text{（単位はメートル）}.$$

$\overrightarrow{OP}$ の水平部分は、東向き成分が $\frac{75}{2}$、北向き成分が $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ である。方位角（bearing）θ は北から時計回りに測るので、

$$\tan\theta = \frac{\text{東}}{\text{北}} = \frac{75/2}{25\sqrt{3}/2} = \sqrt{3},$$

であり、両成分とも正であるから $\theta = 60^\circ$ である。すなわち、O から見た P の方位角は 060° である。

小問 (ii)

速度の鉛直成分は

$$\dot{z} = 5\sqrt{5} - 10t,$$

であり、これはちょうど $t = \frac{\sqrt{5}}{2}$ のときに 0 となる。これは粒子が P にいる時刻と同じであるから、粒子は P で最高点（高さ $\frac{25}{4}\,\mathrm{m}$）にある。

小問 (iii)

弾丸は O から P まで $350\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ で直進し（弾丸にはたらく重力は無視する）、距離 $OP = \frac{175}{4}\,\mathrm{m}$ を進む。かかる時間は

$$T = \frac{175/4}{350} = \frac{1}{8}\,\mathrm{s}.$$

である。

> **考えてみよう** この余分な $\frac{1}{8}$ 秒の後、粒子はどこにいるか。

小問 (ii) より、P における粒子の鉛直方向の速度は 0 であるから、そこでの速度は純粋に水平方向で、その大きさは $10\sqrt{5}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ である。続く T 秒間に、粒子は水平方向に $10\sqrt{5}\,T$ 移動し、$\frac{1}{2}gT^2$ だけ落下する。$T = \frac{1}{8}$ とすると、

$$\text{水平方向の移動} = \frac{10\sqrt{5}}{8} \approx 2.80\,\mathrm{m}, \qquad \text{落下} = 5 \cdot \frac{1}{64} \approx 0.08\,\mathrm{m}.$$

これらは互いに直交しているので、P からの距離は

$$\sqrt{\frac{500}{64} + \frac{25}{4096}} = \frac{5\sqrt{1281}}{64} \approx 2.80\,\mathrm{m},$$

であり、示すべきとおりおよそ 3 m である。（落下はほとんど影響しない。答えは実質的に $10\sqrt{5}/8$ である。）射手は的を外す。

検算

▶ $t = 0$ のとき、公式は $5 \cdot 10 = 50\,\mathrm{m}$ を与え、これは距離 OB である。よい。

- $|\overrightarrow{OP}|^2 = 37.5^2 + 21.65^2 + 6.25^2 = 1406.25 + 468.75 + 39.06 = 1914.06 = 43.75^2$ であるから、P の位置ベクトルは最短距離と整合している。
- $|\mathbf{r}(t)|$ を数値的に走査すると、$t \approx 1.118 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ で最小値 43.75 m が得られ、粒子を P から 0.125 s だけ進めると、隔たりは 2.796 m となる。

よくある間違い

- 水平方向の向きを $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$（$O$ から遠ざかる向き）としてしまう。この場合、粒子は O の北側を通過することがなく、距離も与えられた式にならない。
- 方位角を 30° と答えてしまう。これは東から測った角であるが、方位角は北から時計回りに測るものである。

STEP のその先へ

小問 (iii) は迎撃問題（interception problem）の初歩版である。動く標的に命中させるには、標的が**これから**いる場所を狙わなければならず、そのためには発射方向と時刻の両方について $|\mathbf{r}_{\text{標的}}(t) - \mathbf{r}_{\text{弾丸}}(t)| = 0$ を解くことになる。$|\mathbf{r}(t)|$ を最小化することは、軌道や衝突の問題における「最接近距離」（distance of closest approach）の背後にある考え方でもあり、そこでは距離を 2 乗して多項式を得るのが定石の第一手である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、この種のベクトルを用いた運動学が本格的に展開されている。

解答例

STEP II 2007、第 12 問

確率・統計 ・ 幾何分布の最大値

STEP II 2007、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s2-q12

鍵となる考え方

手順についてのやや細かい説明はいったん忘れて、それぞれのさいころを単独で見てみよう。各さいころは初めて 6 の目が出るまで投げられ、実験は 2 つのさいころのうち遅いほうがそこに達した時点で終わる。したがって投げる回数は 2 つの独立な幾何分布（geometric distribution）に従う確率変数（random variable）の最大値であり、最大値は累積確率（cumulative probability）$\mathrm{P}(\max \le r)$ を通して扱うのがもっとも簡単である。

解答

小問 (i)

1 つ目のさいころで初めて 6 の目が出るのが何回目の投げかを X とし、2 つ目のさいころについても同様に Y を定める。さいころの各回の投げは他のすべての投げと独立（independent）であるから、X と Y は独立であり、それぞれ幾何分布に従う：

$$\mathrm{P}(X = k) = q^{k-1}p, \qquad \mathrm{P}(X \le r) = 1 - \mathrm{P}(\text{最初の } r \text{ 回がすべて 6 以外}) = 1 - q^r.$$

手順はこれとどう対応するだろうか。どちらのさいころにも 6 の目が出ていない間は両方を投げ、一方に 6 の目が出たら、以後はもう一方だけを投げ続ける。いずれにせよ、各さいころはちょうど初めて 6 の目が出るまで投げられ（その後は投げられない）、両方に 6 の目が出た時点で終了する。両方が同じ回に初めて 6 の目を出す場合が、両方同時に 6 の目が出る場合にあたる。よって投げる回数は

$$N = \max(X, Y).$$

である。

考えてみよう $\mathrm{P}(N = r)$ を直接扱うのではなく、なぜ $\mathrm{P}(N \leq r)$ を扱うのだろうか。

事象 $N \leq r$ は単に「$X \leq r$ かつ $Y \leq r$」であり、独立性によってこれは積になる。一方、事象 $N = r$ は扱いにくい場合分け（一方のさいころが r 回目で終わり他方がそれより前に終わる場合、または両方が r 回目で終わる場合）に分かれてしまう。よって

$$\mathrm{P}(N \leq r) = \mathrm{P}(X \leq r)\,\mathrm{P}(Y \leq r) = (1 - q^r)^2,$$

であり、$r \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(N = r) &= \mathrm{P}(N \leq r) - \mathrm{P}(N \leq r - 1) \\
&= (1 - q^r)^2 - (1 - q^{r-1})^2 \\
&= \left[(1 - q^r) - (1 - q^{r-1})\right]\left[(1 - q^r) + (1 - q^{r-1})\right] \\
&= (q^{r-1} - q^r)(2 - q^{r-1} - q^r) \\
&= pq^{r-1}\,(2 - q^{r-1} - q^r),
\end{aligned}$$

となる。ここでは平方の差の因数分解（difference of two squares）を用い、続いて $q^{r-1} - q^r = q^{r-1}(1 - q) = pq^{r-1}$ を用いた。これが求める結果である。

期待値（expectation）を求めるため、確率を 2 つの部分に分ける：

$$\mathrm{P}(N = r) = 2pq^{r-1} - pq^{2r-2}(1 + q).$$

与えられた結果を微分する（あるいは x で割る）と、$|x| < 1$ に対して $\sum_{r \geq 1} r x^{r-1} = (1 - x)^{-2}$ が得られる。これを $x = q$ および $x = q^2$（$0 < p \leq 1$ のときどちらも 1 より小さい）に用いると

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(N) &= 2p \sum_{r=1}^{\infty} r q^{r-1} - p(1 + q) \sum_{r=1}^{\infty} r (q^2)^{r-1} \\
&= \frac{2p}{(1 - q)^2} - \frac{p(1 + q)}{(1 - q^2)^2} \\
&= \frac{2}{p} - \frac{p(1 + q)}{p^2(1 + q)^2} \\
&= \frac{2}{p} - \frac{1}{p(1 + q)} \\
&= \frac{1 + 2q}{p(1 + q)},
\end{aligned}$$

となる。ここで $1 - q = p$ および $1 - q^2 = (1 - q)(1 + q) = p(1 + q)$ を用いた。p だけで表すと（$q = 1 - p$ を代入して）

$$\mathrm{E}(N) = \frac{3 - 2p}{p(2 - p)}.$$

である。

小問 (ii)

多数回の実験では投げる回数の平均は $\mathrm{E}(N)$ に近いはずであるから、$\mathrm{E}(N) = m$ を解いて p を推定する：

$$m\,p(2-p) = 3-2p \quad \Longleftrightarrow \quad mp^2 - 2(m+1)p + 3 = 0,$$

よって

$$p = \frac{(m+1) \pm \sqrt{(m+1)^2 - 3m}}{m} = \frac{m+1 \pm \sqrt{m^2-m+1}}{m}.$$

である。

考えてみよう どちらの解を採るべきだろうか。

どの実験も少なくとも 1 回は投げるので、$m \geq 1$ である。すると（$m^2 - m = m(m-1) \geq 0$ であるから）$\sqrt{m^2-m+1} \geq 1$ となり、プラスの符号をとる解は $(m+2)/m > 1$ 以上となって、確率としてはありえない。マイナスの符号をとる解は、同じ不等式により $m/m = 1$ 以下であり、また $(m+1)^2 > m^2 - m + 1$ であるから正である。よって推定値は

$$\hat{p} = \frac{m+1-\sqrt{m^2-m+1}}{m}.$$

である。

検算

- $p = 1$ ならどの実験も 1 回で終わる：$\mathrm{E}(N) = \frac{1}{1\cdot 1} = 1$ であり、$m = 1$ のとき $\hat{p} = (2-1)/1 = 1$ となる。
- 確率の総和は 1 になる：$\sum_r \mathrm{P}(N = r)$ は項が打ち消し合って（telescoping）$\lim_{r\to\infty}(1-q^r)^2 = 1$ となる。
- 公正なさいころでは、$p = \frac{1}{6}$ のとき $\mathrm{E}(N) = \frac{8/3}{11/36} = \frac{96}{11} \approx 8.73$ となり、1 個のさいころが平均して必要とする 6 回より少し多い。これは当然そうあるべき結果である。200,000 回の実験のシミュレーションでは平均 8.71 が得られ、$\hat{p}$ の式に $m = 96/11$ を代入すると $\frac{1}{6}$ が返ってくる。

よくある間違い

- 各さいころの投げを別々に数えてしまう：2 つのさいころを同時に投げるのは 1 回の投げと数える。まさにこのために $N = \max(X, Y)$ となるのである。

- 項 $pq^{2r-2}(1+q)$ には $x=q$ ではなく $x=q^2$ での和が必要であることを忘れる。
- 小問 (ii) で、どちらが確率になりうるかを確かめずに両方の解を残してしまう。

STEP のその先へ

$\mathrm{P}(\max \le r) = \prod \mathrm{P}(X_i \le r)$ という技法は、独立な確率変数の最大値（および $\ge$ を用いれば最小値）を扱う標準的な方法であり、**順序統計量**（order statistics）の出発点である。小問 (ii) は**モーメント法**（method of moments）である。すなわち、標本平均（sample mean）を理論上の平均に一致させ、パラメータについて解く方法である。大学 1 年の統計学では、これを最尤法（maximum likelihood）と比較し、こうした推定量（estimator）がどれほど正確かを問う。確率の側面については、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）が次の一歩として良い。

解答例

STEP II 2007、第 13 問

確率・統計 ・ 誕生日問題

> **STEP II 2007、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q13

この問題は、*Beyond STEP* の第 9.9 節「**誕生日問題**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/birthday.html

鍵となる考え方

どの 2 人の客も誕生日が一致**しない**確率（probability）は $\frac{365-r}{365}$ の形の因子の積であり、積は扱いにくい。最初の小問では各因子を指数関数（exponential）に置き換える。指数関数の積は和の指数関数であり、その和は正確に計算できる。主催者の場合は、各客についての事象が独立（independent）なので、余事象（complement）の確率は 1 つのべき乗となり、同じ近似（approximation）が使える。

解答

近似式

任意の実数 x に対して

$$\mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

$x = r/n$ とおく。r は n よりはるかに小さいので x は小さく、x^2 以降の項は x に比べて無視できる。よって

$$\mathrm{e}^{-r/n} \approx 1 - \frac{r}{n} = \frac{n-r}{n},$$

となり、示すべき式が得られた。

少なくとも 2 人の客の誕生日が一致する場合

k 人の客のうち少なくとも 2 人の誕生日が一致するという事象を A とする。すべての k 人の誕生日が異なる確率 $\mathrm{P}(A')$ を求めるほうが易しい。客を 1 人ずつ考える。1 人目はどの誕生日でもよい。最初の r 人の誕生日が r 個の異なる日であるとき、$(r+1)$ 人目の客はその r 日を避けなければならず、その確率は $\frac{365-r}{365}$ である。誕生日は互いに独立で、365 日にわたって一様（uniform）に分布しているからである。これらを掛け合わせて

$$\mathrm{P}(A') = \prod_{r=0}^{k-1} \frac{365-r}{365}.$$

それほど大きくないパーティーでは、ここに現れるどの r も 365 よりはるかに小さいので、最初の小問で $n = 365$ とすれば

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A') &\approx \prod_{r=0}^{k-1} \mathrm{e}^{-r/365} = \exp\Bigl(-\frac{1}{365}\sum_{r=0}^{k-1} r\Bigr) \\ &= \exp\Bigl(-\frac{1}{365}\cdot\frac{k(k-1)}{2}\Bigr) = \mathrm{e}^{-k(k-1)/730}.\end{aligned}$$

（$r = 0$ の因子はちょうど $1 = \mathrm{e}^0$ なので、これを含めても何も変わらない。）したがって

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A') \approx 1 - \mathrm{e}^{-k(k-1)/730},$$

となり、求める結果が得られる。

> **考えてみよう** 多くの因子を一度に近似するのは心配ではないか。誤差が積み重なるかもしれない。

各因子の誤差は $(r/365)^2$ 程度であり、一方で指数そのものは $k^2/730$ 程度である。必要となる k の値（20 前後）では、$r/365$ の最大値は約 0.06 であり、指数における相対誤差（relative error）の合計はわずか数パーセントにすぎない。$k = 23$ のとき、近似値は 0.500、真の値は 0.507 である。

五分五分になる最小のパーティー

必要なのは

$$1 - \mathrm{e}^{-k(k-1)/730} \geq \tfrac{1}{2} \iff \mathrm{e}^{-k(k-1)/730} \leq \tfrac{1}{2} \iff \frac{k(k-1)}{730} \geq \ln 2,$$

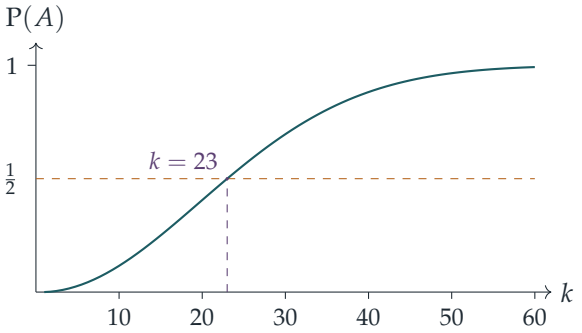
である。ここでは対数（logarithm）をとり（対数は増加関数なので不等号の向きは変わらない）、-1 を掛けた（これにより向きが逆になる）。$\ln 2 \approx \frac{253}{365}$ を用いると、条件は

$$k(k-1) \geq 730 \times \frac{253}{365} = 2 \times 253 = 506.$$

となる。$k \geq 1$ において $k(k-1)$ は k とともに増加し、

$$22 \times 21 = 462 < 506, \qquad 23 \times 22 = 506,$$

であるから、最小値は $k = 23$ である。



主催者と誕生日が一致する場合

今度は客の人数を m とする（主催者は客に含めない）。少なくとも 1 人の客が主催者と同じ誕生日であるという事象を B とする。主催者の誕生日が何日であっても、各客は独立に確率 $\frac{364}{365}$ でその日を外すので

$$\mathrm{P}(B') = \left(\frac{364}{365}\right)^m \approx \left(\mathrm{e}^{-1/365}\right)^m = \mathrm{e}^{-m/365},$$

となる。ここでは最初の小問を $n = 365$、$r = 1$ として用いた。今回は m の大きさに関係なく、$r/n = 1/365$ は本当に小さい。

必要なのは $\mathrm{P}(B) \geq \frac{1}{2}$、すなわち $\mathrm{e}^{-m/365} \leq \frac{1}{2}$ である。先ほどとまったく同様に、これは

$$\frac{m}{365} \geq \ln 2 \approx \frac{253}{365} \iff m \geq 253.$$

となる。よって客は少なくとも 253 人必要である。

考えてみよう なぜ答えは 23 よりこれほど大きいのか。

最初の問題では、どの 2 人の客の組でも一致しうるので、23 人の客からは $\binom{23}{2} = 253$ 組ができる。2 番目の問題では、客と主催者の m 組だけが数に入る。一致の機会を同じ数だけ得るには $m = 253$ が必要であり、まさにこれが両方の答えに 253 が現れる理由である。

検算

- 正確な積を計算すると、両方の答えが確かめられる。誕生日が一致する真の確率は、客が 22 人のとき 0.4757、23 人のとき 0.5073 である。$1-(364/365)^m$ の真の値は $m=252$ のとき $\frac{1}{2}$ より小さく、$m=253$ のとき 0.5005 である。
- $\frac{253}{365}=0.69315\ldots$、$\ln 2=0.69315\ldots$ であり、小数第 5 位まで一致するので、与えられた近似はどちらの答えにも影響しない。
- 23 人のパーティーを 200 000 回シミュレーションしたところ、50.7% の割合で誕生日の一致が起きた。

よくある間違い

- **特定の 2 人の客の誕生日が一致する確率を計算してしまう、あるいは各組ごとに $\frac{1}{365}$ を 1 回ずつ足してしまう。**重なりのある事象の確率は単純に足し合わせることはできない。余事象を考えればこの問題を避けられる。
- 最初の積のすべての因子に $\frac{364}{365}$ を使ってしまう。$(r+1)$ 人目の客は 1 日だけでなく r 日を避けなければならない。
- 最後の小問で主催者を客の人数に含めてしまう。主催者は別の人物なので、必要な客は 253 人である。

STEP のその先へ

ここでの発見的な考え方（heuristic）は、N 個の箱に入れた k 個の対象の間で一致が起こりやすくなるのは、k がおよそ $\sqrt{2N\ln 2}\approx 1.18\sqrt{N}$ に達したときだ、というものである。これは暗号理論（cryptography）における「誕生日攻撃（birthday attack）」の基礎となっている。誕生日攻撃は、N ビットのハッシュ（hash）の衝突（collision）を、2^N 回ではなく約 $2^{N/2}$ 回の試行で見つける。この近似の背後にはポアソン極限（Poisson limit）がある。一致する組の個数はおおよそ平均 $\binom{k}{2}/365$ のポアソン分布に従い、$\mathrm{P}(\text{一致なし})\approx \mathrm{e}^{-k(k-1)/730}$ となる。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）では、誕生日問題とそのポアソン近似が詳しく論じられている。

解答例

STEP II 2007、第 14 問

確率・統計 ・ 区分的な確率密度

STEP II 2007、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s2-q14

鍵となる考え方

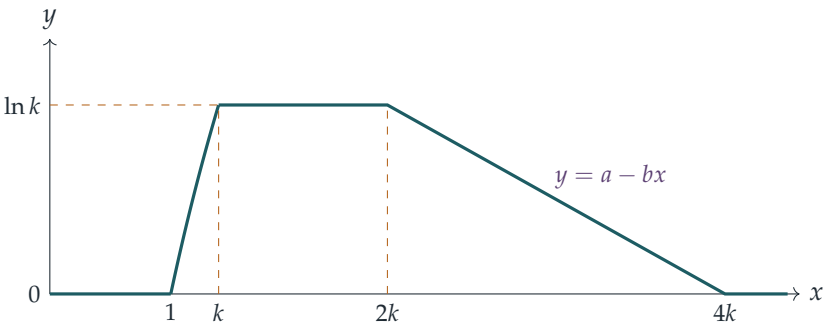
連続（continuous）という言葉が大きな役割を果たしている。区間ごとに定義された確率密度関数（probability density function）は、すべての境目でつながっていなければならず、そこからただちに a と b についての方程式が 2 本得られる。残る条件、すなわちグラフの下の面積の総和が 1 であることから、k が決まる。中央値（median）を求めるには、面積を区間ごとに足し合わせていき、2 分の 1 を超えるところを探す。

解答

以下では常に $k > 1$ とする。そうでなければ区間 $1 \leq x \leq k$ は空になってしまうし、いずれにせよ、密度関数が負にならず、かつ $x = 1$ より先で恒等的に 0 にならないためには $\ln k > 0$ が必要である。

小問 (i)

$[1, k]$ 上ではグラフは通常の対数曲線であり、$x = 1$ で 0 から始まり（したがって値が 0 の部分と連続につながる）、単調増加で上に凸（concave）である。$x = k$ で高さ $\ln k$ に達し、$x = 2k$ まで $\ln k$ の高さで一定に保たれ、その後 $x = 4k$ で 0 になるまで直線的に減少し（連続性によってまさにこうなることを以下で示す）、それ以降は 0 である。図には小問 (ii) で求める値 $k = \mathrm{e}^{1/3} \approx 1.40$ を用いており、したがって平坦部の高さは $\frac{1}{3}$ である。



小問 (ii)

連続性。 $x = k$ ではどちらの式も $\ln k$ を与えるので、新しい情報は得られない。$x = 2k$ と $x = 4k$ では、連続性から

$$a - 2bk = \ln k, \qquad a - 4bk = 0.$$

が要求される。辺々引くと $2bk = \ln k$ となるので、

$$b = \frac{\ln k}{2k}, \qquad a = 4bk = 2\ln k.$$

全確率。 面積を 3 つの部分に分ける。部分積分（integration by parts）により（$u = \ln x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$ とする）、

$$\int_1^k \ln x \,\mathrm{d}x = \Big[x \ln x - x\Big]_1^k = k\ln k - k + 1.$$

平坦部は幅 k、高さ $\ln k$ の長方形であり、面積は $k\ln k$ である。最後の部分は底辺 $4k - 2k = 2k$、高さ $\ln k$ の三角形であり、面積は $\frac{1}{2} \cdot 2k \cdot \ln k = k\ln k$ である。よって

$$1 = (k\ln k - k + 1) + k\ln k + k\ln k = 3k\ln k - k + 1,$$

であり、これを整理すると

$$k(3\ln k - 1) = 0.$$

となる。$k > 1$ より $k = 0$ はありえないので、$\ln k = \frac{1}{3}$ であり、

$$k = \mathrm{e}^{1/3} \approx 1.396, \qquad a = 2\ln k = \tfrac{2}{3}, \qquad b = \frac{\ln k}{2k} = \frac{1}{6\,\mathrm{e}^{1/3}} \approx 0.119.$$

$b > 0$ であるから、最後の部分は図のとおり確かに右下がりになっていることに注意する。

小問 (iii)

確率を累積していくことで、中央値 m がどの部分に含まれるかを調べる。$\ln k = \frac{1}{3}$ を用いると、

$$\mathrm{P}(X \le k) = k\ln k - k + 1 = 1 - \tfrac{2k}{3} \approx 0.070,$$

であり、平坦部が $k\ln k = \frac{k}{3}$ を加えるので、

$$\mathrm{P}(X \le 2k) = 1 - \tfrac{2k}{3} + \tfrac{k}{3} = 1 - \tfrac{k}{3} \approx 0.535.$$

考えてみよう 中央値はグラフのどの部分にあるか？

$0.070 < \frac{1}{2} < 0.535$ であるから、中央値は平坦部、すなわち $k \le m \le 2k$ にある。そこでは密度関数は $\frac{1}{3}$ で一定なので、

$$\mathrm{P}(X \le m) = 1 - \tfrac{2k}{3} + \tfrac{1}{3}(m-k) = \tfrac{1}{2}.$$

両辺に 3 を掛けると $3 - 2k + m - k = \frac{3}{2}$ となるので、

$$m = 3k - \tfrac{3}{2} = 3\mathrm{e}^{1/3} - \tfrac{3}{2} \approx 2.69.$$

これは、あるべきとおり、確かに $k \approx 1.40$ と $2k \approx 2.79$ の間にある。

検算

- $k = \mathrm{e}^{1/3}$、$a = \frac{2}{3}$、$b = 1/(6\mathrm{e}^{1/3})$ として密度関数を数値積分（中点則）すると、面積の総和は 1.0000000 となり、また $\int_1^{2.68684} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.5000000$ となる。
- 中央値の妥当性の確認：$2k$ より左にある確率は 2 分の 1 をわずかに超える（約 0.535）ので、中央値は $2k \approx 2.79$ の少し左にあるはずである。実際 $m \approx 2.69$ である。

よくある間違い

- $\int_1^k \ln x\,\mathrm{d}x$ の下端を忘れること。$x = 1$ における $-[x\ln x - x]$ から生じる $+1$ こそが、k についての方程式をきれいに因数分解できる形にしている。
- 台 $[1, 4k]$ の「真ん中」にあるからという理由で、中央値が右下がりの部分にあると思い込むこと。必ず先に面積を累積すること。

STEP のその先へ

ここでは密度関数を区間ごとの部分から組み立て、定数を連続性と正規化（normalisation）によって決定した。大学では、**累積分布関数**（cumulative distribution function）$F(x) = \mathrm{P}(X \le x)$ を基本的な対象として学ぶ。これは離散型・連続型を問わず、あらゆる確率変数（random variable）に対して存在し、中央値のような量は単に $F(m) = \frac{1}{2}$ の解として与えられる。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、この観点をわかりやすく展開している。

解答例

STEP III 2007、第 1 問

純粋数学 ・ 正接の和とビエトの定理

> **STEP III 2007、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q1

鍵となる考え方

角の和の正接（tangent）は、個々の角の正接の**対称な**関数（symmetric function）の比で表される。そして多項式（polynomial）の根（root）の対称関数こそ、ヴィエト（Vieta）の公式が係数（coefficient）を用いて与えてくれるものである。最後の小問では、三角方程式を $t = \tan\theta$ についての 4 次方程式（quartic）に書き換えるのがこつである。すると、その係数の対称性によって和の正接は 0 にならざるをえない。

解答

4 つの角の和の正接

和を $A + B$ と分け、$A = \theta_1 + \theta_2$、$B = \theta_3 + \theta_4$ とおくと、

$$\tan A = \frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 t_2}, \qquad \tan B = \frac{t_3 + t_4}{1 - t_3 t_4}.$$

である。次に、$\tan(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ の分子と分母に $(1 - t_1 t_2)(1 - t_3 t_4)$ を掛けると、

$$\tan(A + B) = \frac{(t_1 + t_2)(1 - t_3 t_4) + (t_3 + t_4)(1 - t_1 t_2)}{(1 - t_1 t_2)(1 - t_3 t_4) - (t_1 + t_2)(t_3 + t_4)}.$$

となる。分子は $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - (t_1 t_3 t_4 + t_2 t_3 t_4 + t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 t_4)$ であり、分母は $1 - t_1 t_2 - t_3 t_4 + t_1 t_2 t_3 t_4 - (t_1 t_3 + t_1 t_4 + t_2 t_3 + t_2 t_4)$ である。基本対称式（elementary symmetric functions）を

$$\sigma_1 = \sum t_i, \quad \sigma_2 = \sum_{i<j} t_i t_j, \quad \sigma_3 = \sum_{i<j<k} t_i t_j t_k, \quad \sigma_4 = t_1 t_2 t_3 t_4$$

と書けば、これは

$$\boxed{\tan(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{1-\sigma_2+\sigma_4}.}$$

となる。（このパターンは角が 2 つや 3 つの場合と同じである。分子には奇数次の対称式が符号を交互に変えて並び、分母には偶数次のものが並ぶ。）

係数による表示

$t_1,\dots,t_4$ が $at^4+bt^3+ct^2+dt+e=0$ の根であれば、$at^4+bt^3+ct^2+dt+e=a(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)(t-t_4)$ であり、係数を比較する（ヴィエトの公式）と

$$\sigma_1=-\frac{b}{a},\qquad \sigma_2=\frac{c}{a},\qquad \sigma_3=-\frac{d}{a},\qquad \sigma_4=\frac{e}{a}.$$

を得る。これを代入し、分子と分母に $a\neq 0$ を掛けると、

$$\boxed{\tan(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)=\frac{d-b}{a-c+e}.}$$

となる。

最後の小問

$1+\cos 2\theta=2\cos^2\theta$ であるから、方程式は

$$2p\cos^2\theta+\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=0.$$

となる。$\cos^2\theta$ で割ると（$\cos\theta=0$ という特殊な場合は無視する）、

$$2p=-(\cos\alpha+t\sin\alpha)\sec\theta,\qquad t=\tan\theta.$$

を得る。$\sec\theta$ は t の有理関数（rational function）ではないので、$\sec^2\theta=1+t^2$ を用いて両辺を 2 乗する：

$$4p^2=(\cos\alpha+t\sin\alpha)^2(1+t^2).$$

展開して、t^2 の係数に $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ を用いると、

$$\sin^2\alpha\,t^4+2\sin\alpha\cos\alpha\,t^3+t^2+2\sin\alpha\cos\alpha\,t+(\cos^2\alpha-4p^2)=0,\qquad (*)$$

となる。

考えてみよう 2 乗すると余分な解が入り込むことがある。$\tan\theta_i$ は本当に $(*)$ の 4 つの根なのだろうか？

2 乗したことにより、$(*)$ は $p\cos 2\theta-\cos(\theta-\alpha)+p=0$ の解でも満たされる。しかし θ を $\theta+\pi$ に置き換えると、$t=\tan\theta$ と $\cos^2\theta$ は変わらず、$\cos(\theta-\alpha)$ の符号だけ

が変わる。したがって $(*)$ の各実数解 t に対し、$[0,2\pi)$ において正接が t となる 2 つの角のうち、もとの方程式を満たすのはちょうど一方だけである（両方が満たすには $\cos(\theta-\alpha)=0$、したがって $p\cos^2\theta=0$ でなければならず、これは特殊な場合である）。よって $[0,2\pi)$ における解は $(*)$ の実数解と一対一（one-to-one）に対応し、与えられた 4 つの角の正接は $(*)$ の 4 つの根である。

ここで先ほどの結果を $a=\sin^2\alpha$、$b=d=2\sin\alpha\cos\alpha$、$c=1$、$e=\cos^2\alpha-4p^2$ として適用する（$a\neq 0$、すなわち $\sin\alpha\neq 0$ が必要である。そうでなければ $(*)$ は 4 次方程式にならず、これも特殊な場合である）。分子は $d-b=0$ であり、分母は

$$a-c+e=\sin^2\alpha-1+\cos^2\alpha-4p^2=-4p^2,$$

であって、これは 0 でない（$p=0$ ならば方程式は単に $\cos(\theta-\alpha)=0$ となり、解は 2 つしかない）。よって

$$\tan(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)=0,$$

であるから、ある整数 n に対して $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=n\pi$ となり、示すべきことが示された。

検算

- 4 つの角の公式で $t_3=t_4=0$ とおくと、$(t_1+t_2)/(1-t_1t_2)$ となり、おなじみの 2 つの角の公式に帰着する。
- $p=\frac{1}{2}$、$\alpha=3$ として方程式を $[0,2\pi)$ で数値的に解くと 4 つの解が得られ、その和を π で割ったものは 10^{-9} 以内の誤差で整数になる。（すべての p と α で 4 つの解が得られるわけではない。$p=\frac{1}{2}$、$\alpha=1$ では解は 2 つしかない。）4 つの解をもつ (p,α) を無作為に選んで試したところ、どれも同様の結果になった。また、両方の公式を数千通りの無作為な角と 4 次方程式で確かめた。

よくある間違い

- ヴィエトの公式での符号の誤り。1 つおきの係数 b と d にはマイナス符号がつく。
- 2 乗せずに $\cos(\theta-\alpha)$ を直接 $\tan\theta$ で表そうとすること、あるいは 2 乗したのに不要な角が紛れ込んでいないかを確かめないこと。

STEP のその先へ

和の tan を基本対称式で表すことは、ある大定理の一例である。すなわち、根についてのすべての対称多項式は係数の多項式として表せる、という定理である。これは複

素数（complex number）を用いてもきれいに説明できる。$\prod(1+\mathrm{i}t_k) = \prod \sec\theta_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum\theta_k}$ であり、その実部と虚部はそれぞれ $1-\sigma_2+\sigma_4$ と $\sigma_1-\sigma_3$ だからである。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析）はこうした幾何的な考え方を展開しており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には同じ趣旨の STEP の問題がさらに収められている。

解答例

STEP III 2007、第 2 問

純粋数学 • 二項べき級数

STEP III 2007、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s3-q2

鍵となる考え方

すべては一つの二項級数（binomial series）から導かれる。$(1-4x)^{-1/2}$ の係数がわかれば、級数を微分すると因子 n が降りてきて（$(n!)^2$ が $n!\,(n-1)!$ に変わる）、積分すると $n+1$ で割られる（$(n!)^2$ が $n!\,(n+1)!$ に変わる）。したがって、後に続く和はどれも最初の級数の導関数または積分を、$|x| < \frac{1}{4}$ の内部のうまく選んだ点で評価したものである。

解答

小問 (i)

奇数の積に、欠けている偶数 $2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)$ を掛けて割る：

$$1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2n-1)(2n)}{2\cdot 4\cdots(2n)} = \frac{(2n)!}{2^n\,(1\cdot 2\cdots n)} = \frac{(2n)!}{2^n\,n!},$$

なぜなら、n 個の偶数 $2k$ はそれぞれ因子 2 と因子 k を一つずつ与えるからである。

$|4x| < 1$、すなわち $|x| < \frac{1}{4}$ のとき、二項級数により

$$(1-4x)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}\,(-4x)^n.$$

分子は n 個の因子からなり、それぞれが負であるから、$(-1)^n\,\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}$ に等しい。$(-1)^n$ は $(-4)^n$ の符号と打ち消し合い、$4^n/2^n = 2^n$ であるから、x^n の係数は

$$\frac{2^n\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!} = \frac{2^n}{n!}\cdot\frac{(2n)!}{2^n\,n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

となる。ここで最初の結果を用いた。よって、$|x| < \frac{1}{4}$ に対して

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\, x^n,$$

が成り立ち、示すべきことが示された。

小問 (ii)

冪級数（power series）は、その収束区間（interval of convergence）の内部、ここでは $|x| < \frac{1}{4}$ において項別に微分してよい。両辺を微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-4x)^{-1/2} = -\tfrac{1}{2}(1-4x)^{-3/2}\cdot(-4) = 2(1-4x)^{-3/2},$$

一方、右辺では定数項が消え、x^n は nx^{n-1} になる。$n/(n!)^2 = 1/\big(n!\,(n-1)!\big)$ であるから、

$$2(1-4x)^{-3/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n-1)!}\, x^{n-1}.$$

x を掛けると、求めたい冪 x^n が得られる：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n-1)!}\, x^n = \frac{2x}{(1-4x)^{3/2}} \qquad (|x| < \tfrac{1}{4}).$$

ここで $x = \frac{6}{25}$ とおく。$\frac{6}{25} < \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ であるから、これは許される。このとき $1-4x = \frac{1}{25}$ であるから $(1-4x)^{3/2} = \frac{1}{125}$ となり、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n-1)!} \left(\frac{6}{25}\right)^n = 2\cdot\frac{6}{25}\cdot 125 = 60.$$

小問 (iii)

> **考えてみよう** 今度の階乗は $(n!)^2$ ではなく $(n+1)!\,n!$ である。級数にどのような操作を施せばこれが得られるだろうか。

$(n+1)! = (n+1)\,n!$ であるから、第 n 項の係数を $n+1$ で割る必要がある。x^n を積分するとちょうどそうなる：$\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$。冪級数の項別積分（term-by-term integration）もその収束区間の内部で正当であるから、$|x| < \frac{1}{4}$ に対して小問 (i) の級数を 0 から x まで積分する：

$$\int_0^x (1-4t)^{-1/2}\,\mathrm{d}t = \Big[-\tfrac{1}{2}(1-4t)^{1/2}\Big]_0^x = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2},$$

よって

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\, x^{n+1}.$$

次に、目標の和の冪を合わせる。$3^{2n} = 9^n = 9^{n+1}/9$ であるから、

$$\frac{2^{n+1}}{3^{2n}} = 9\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1},$$

したがって目標の和は、この級数の $x = \frac{2}{9}$ における値の 9 倍である。$\frac{2}{9} < \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ であるから、これは正当な値である。このとき $1 - 4x = \frac{1}{9}$、$\sqrt{1-4x} = \frac{1}{3}$ であり、

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(2n)!}{3^{2n}(n+1)!\,n!} &= 9\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1} \\ &= 9\left(\frac{1-\frac{1}{3}}{2} - \frac{2}{9}\right) = 9\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right) = 1,\end{aligned}$$

となり、示すべきことが示された。和は $n = 1$ から始まるので、先頭の項 x（定数 1 の積分）を引かなければならないことに注意せよ。

検算

- (i) で $n = 2$ とすると $1 \cdot 3 = 3$、$\frac{4!}{2^2\,2!} = 3$ である。級数は $1 + 2x + 6x^2 + 20x^3 + \cdots$ と始まり、これは 2 乗して確かめた結果と一致する：$(1 + 2x + 6x^2)^2(1 - 4x) = 1 + O(x^3)$。
- (ii) の最初の 3000 項を厳密な分数で足し合わせると 60.000… となり、(iii) の最初の 400 項は計算機の精度で 1.000… を与える。
- (iii) の最初の項（$n = 1$）は $\frac{4 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{4}{9}$ であり、すでに合計 1 のかなりの部分を占める。その後の項はおおよそ $(8/9)^n$ のように減少する。

よくある間違い

- 二項係数の符号を見失うこと：分子には負の因子が n 個あり、$(-4)^n$ にも n 個あるので、ちょうど打ち消し合う。
- $\frac{6}{25}$ と $\frac{2}{9}$ が $|x| < \frac{1}{4}$ の内部にあることの確認を忘れること。その外側では級数は発散する。
- (iii) で、定数 1 の積分から生じる x の項を忘れること。そうすると答えが 1 ではなく 3 になってしまう。

STEP のその先へ

小問 (iii) に現れる数 $\frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ はカタラン数(Catalan numbers)$1, 1, 2, 5, 14, \ldots$ であり、括弧の付け方、二分木（binary trees）をはじめ多くの構造の個数を数える。そして $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ はその母関数（generating function）である。証明なしに用いた事実、すなわち冪級数は収束半径（radius of convergence）の真に内側で項別に微分・積分できるということは、大学 1 年次の解析学（analysis）の標準的な定理である。Abbott, *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）を参照せよ。

解答例

STEP III 2007、第 3 問

純粋数学 ・ フィボナッチ数の恒等式

STEP III 2007、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s3-q3

鍵となる考え方

ここに現れる恒等式はすべて同じ方法で証明できる。添字（index）が最大の項を取り、漸化式（recurrence）$F_m = F_{m-1} + F_{m-2}$ を用いて分解するのである。これを 1 回行うと、(ii) の式はすべての添字が 1 ずつ下がった式に変わる。2 回行うと、添字が 2 ずつ下がった同じ形の式に戻る。これこそが数学的帰納法（induction）に必要なことである。(iv) の整除性（divisibility）については、$F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n+1}$ であることに注目すれば、F_{2n-1}^2 と F_{2n}^2 は F_{2n+1} で割ったときの余り（remainder）が等しいことがわかる。

解答

小問 (i)

$F_1 = F_2 = 1$ から始めて、連続する項を足していくと

$$F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \quad F_6 = 8, \quad F_7 = 13, \quad F_8 = 21.$$

小問 (ii)

すべての項が定義されるように $k \geq 1$ とする。添字が最大の項 F_{2k+3} を $F_{2k+2} + F_{2k+1}$ で置き換えると

$$\begin{aligned} F_{2k+3}F_{2k+1} - F_{2k+2}^2 &= (F_{2k+2} + F_{2k+1})F_{2k+1} - F_{2k+2}^2 \\ &= F_{2k+1}^2 + F_{2k+2}\big(F_{2k+1} - F_{2k+2}\big) \\ &= F_{2k+1}^2 - F_{2k+2}F_{2k}, \end{aligned}$$

となる。ここで、漸化式より $F_{2k+2} - F_{2k+1} = F_{2k}$ であることを用いた。これは $-F_{2k+2}F_{2k} + F_{2k+1}^2$ であり、示すべき式である。

小問 (iii)

命題 $F_{2n+1}F_{2n-1} - F_{2n}^2 = 1$ を $P(n)$ と書く。

基底段階（*base case*）。$n = 1$ のとき、$F_3F_1 - F_2^2 = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1$ であるから、$P(1)$ は成り立つ。

帰納段階（*inductive step*）。ある $k \geq 1$ について $P(k)$ が成り立つと仮定する。小問 (ii) より

$$F_{2k+3}F_{2k+1} - F_{2k+2}^2 = F_{2k+1}^2 - F_{2k+2}F_{2k}.$$

> **考えてみよう** 小問 (ii) では添字が 1 つ下がっただけである。どうすれば $P(k)$ まで戻れるだろうか？

同じ技法をもう一度用いる。今度は添字が最大の項を $F_{2k+2} = F_{2k+1} + F_{2k}$ と分解すると

$$\begin{aligned} F_{2k+1}^2 - F_{2k+2}F_{2k} &= F_{2k+1}^2 - (F_{2k+1} + F_{2k})F_{2k} \\ &= F_{2k+1}(F_{2k+1} - F_{2k}) - F_{2k}^2 \\ &= F_{2k+1}F_{2k-1} - F_{2k}^2, \end{aligned}$$

となる。ここで $F_{2k+1} - F_{2k} = F_{2k-1}$ を用いた（$2k + 1 \geq 3$ であるから成り立つ）。仮定 $P(k)$ より、これは 1 に等しい。上の 2 つの式をつなげると

$$F_{2k+3}F_{2k+1} - F_{2k+2}^2 = 1,$$

となり、これは $P(k+1)$ である。数学的帰納法により、すべての $n \geq 1$ について $P(n)$ が成り立つ。

結論の導出。 $P(n)$ を変形すると

$$F_{2n}^2 + 1 = F_{2n+1}F_{2n-1},$$

であり、F_{2n-1} は整数である（漸化式より、すべての F_m は整数である）。よって、$F_{2n}^2 + 1$ は F_{2n+1} で割り切れる。

小問 (iv)

漸化式より $F_{2n-1} = F_{2n+1} - F_{2n}$ である。両辺を 2 乗すると

$$F_{2n-1}^2 = F_{2n+1}^2 - 2F_{2n+1}F_{2n} + F_{2n}^2,$$

であるから

$$F_{2n-1}^2 + 1 = F_{2n+1}\left(F_{2n+1} - 2F_{2n}\right) + \left(F_{2n}^2 + 1\right).$$

第1項は F_{2n+1} の倍数であり（掛けられている因子は整数である）、$F_{2n}^2 + 1$ は小問 (iii) より F_{2n+1} の倍数である。したがって、$F_{2n-1}^2 + 1$ は F_{2n+1} で割り切れる。

実は商（quotient）を求めることもできる。$F_{2n}^2 + 1 = F_{2n+1}F_{2n-1}$ を用いると

$$F_{2n-1}^2 + 1 = F_{2n+1}\left(F_{2n+1} - 2F_{2n} + F_{2n-1}\right) = F_{2n+1}\left(2F_{2n-1} - F_{2n}\right),$$

であり、$n \geq 2$ のとき括弧の中は $F_{2n-1} - F_{2n-2} = F_{2n-3}$ となる。よって $F_{2n-1}^2 + 1 = F_{2n+1}F_{2n-3}$ であり、これは (iii) の恒等式（identity）の近い親戚である。

検算

$n = 3$ のとき、$F_6^2 + 1 = 65 = 13 \times 5 = F_7F_5$、$F_5^2 + 1 = 26 = 13 \times 2 = F_7F_3$ である。$n = 4$ のとき、$F_7^2 + 1 = 170 = 34 \times 5 = F_9F_5$ である。(ii) と (iii) の恒等式、2つの整除性の主張、および商が F_{2n-3} となることは、37以下のすべての n についてコンピュータで確認した。

よくある間違い

- (ii) だけで帰納法を行おうとすること。(ii) では添字が1つしか下がらず、得られる式 $F_{2k+1}^2 - F_{2k+2}F_{2k}$ はまだ仮定の形になっていない。漸化式をもう一度用いる必要がある。
- 基底段階を忘れること、あるいは誤った添字で確かめること（$n = 1$ の場合に関わるのは F_1、F_2、F_3 である）。

STEP のその先へ

小問 (iii) は、カッシーニ（Cassini）の恒等式 $F_{m+1}F_{m-1} - F_m^2 = (-1)^m$ の半分にあたる。この恒等式は行列式（determinant）からただちに導かれる。行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^m$ の成分は F_{m+1}、F_m、F_m、F_{m-1} であり、その行列式は $(-1)^m$ である。(iv) のような整除性に関する事実は、線形漸化式（linear recurrence）の整数論の出発点であり、そこでは合同式（congruence）が主役を演じる。整数論については Davenport の *The Higher Arithmetic*（初等整数論の入門書）が、行列の観点については Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数の入門書）が、次の一歩としてよいであろう。

解答例

STEP III 2007、第 4 問

純粋数学 ・ 媒介変数表示された曲線と曲率

STEP III 2007、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s3-q4

鍵となる考え方

すべては $\dot{x}$ のすっきりした式にかかっている。厄介な項 $\ln\tan\frac{1}{2}t$ を微分すると $1/\sin t$ となり、その結果 $\dot{x}$ は $a\cos^2 t/\sin t$ にまで簡単になる。$\dot{x}$ と $\dot{y}$ が得られれば、傾き（gradient）、接線（tangent）、曲率（curvature）、法線（normal）はすべて素直な座標幾何によって求まる。単位接ベクトル（unit tangent）を $(\cos t, \sin t)$ と書いておくと、最後の小問は非常に短くて済む。

解答

傾き

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\tan\frac{1}{2}t = \dfrac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}t}{\tan\frac{1}{2}t} = \dfrac{1}{2\sin\frac{1}{2}t\cos\frac{1}{2}t} = \dfrac{1}{\sin t}$ であるから、

$$\dot{x} = a\left(-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right) = a\,\frac{1-\sin^2 t}{\sin t} = \frac{a\cos^2 t}{\sin t},$$
$$\dot{y} = a\cos t.$$

を得る。$0 < t < \frac{1}{2}\pi$ ではどちらも正であるから、

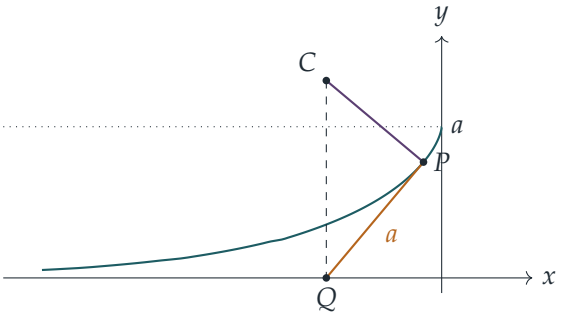
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = a\cos t\cdot\frac{\sin t}{a\cos^2 t} = \tan t,$$

となり、題意が示された。

概形

- $t \to 0^+$ のとき $\tan\frac{1}{2}t \to 0^+$ であるから、$x \to -\infty$ となり、一方 $y \to 0$ である。x 軸は漸近線（asymptote）である。
- $t \to \frac{1}{2}\pi^-$ のとき $x \to a(0+\ln 1) = 0$、$y \to a$ である。曲線は $(0,a)$ で終わり、そこでは傾き $\tan t \to \infty$ となるので、その点での接線は鉛直である。
- $\dot{x} > 0$ であるから x は t とともに増加し、傾き $\tan t$ も増加する。したがって曲線は y が 0 と a の間にあって、着実に上昇し、下に凸（concave upwards）である。

この曲線は**トラクトリックス**（tractrix）である。図には後の小問で現れる点 P、Q、C も示してある。



接線：$PQ = a$

$P = (x,y)$ における接線の傾きは $\tan t$ である。この接線は P から水平方向に $y/\tan t$ だけ戻ったところで $y = 0$ と交わるので、

$$x_Q = x - \frac{y}{\tan t} = x - \frac{a\sin t\cos t}{\sin t} = x - a\cos t.$$

である。よって $\overrightarrow{QP} = (a\cos t,\ a\sin t)$ であり、

$$PQ = \sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t} = a.$$

となる。したがって、曲線から x 軸までの接線の長さはつねに a である。（後で使うために記しておくと、$x_Q = a\ln\tan\frac{1}{2}t$ である。）

曲率半径

微分しやすいように $\dot{x} = a\left(\dfrac{1}{\sin t} - \sin t\right)$ と書くと、

$$\ddot{x} = a\left(-\frac{\cos t}{\sin^2 t} - \cos t\right), \qquad \ddot{y} = -a\sin t.$$

となる。すると

$$\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = \frac{a\cos^2 t}{\sin t}(-a\sin t) + a\cos t \cdot a\left(\frac{\cos t}{\sin^2 t} + \cos t\right)$$
$$= a^2\left(-\cos^2 t + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} + \cos^2 t\right) = a^2\cot^2 t,$$

であり、また

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2\cos^2 t\left(\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} + 1\right) = \frac{a^2\cos^2 t}{\sin^2 t} = a^2\cot^2 t.$$

である。考えている範囲では $\cot t > 0$ であるから $(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2} = a^3\cot^3 t$ であり、したがって曲率半径（radius of curvature）は

$$\rho = \frac{a^3\cot^3 t}{a^2\cot^2 t} = a\cot t,$$

となり、題意が示された。

曲率中心：CQ は鉛直

P における接線は単位ベクトル $(\cos t, \sin t)$ の向きであるから、法線は $(-\sin t, \cos t)$ またはその逆向きである。

考えてみよう 2 つの法線方向のうち、「曲線の上側」を向いているのはどちらか？

$\cos t > 0$ であるから、ベクトル $(-\sin t, \cos t)$ の y 成分は正である。曲線は下に凸であるから、P からこの向きに少し進むと曲線の上側に出る（いずれにせよ、もう一方の向きは下へ向かう）。よって曲率中心（centre of curvature）C は

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \rho(-\sin t, \cos t) = \big(x - a\cot t\sin t,\ a\sin t + a\cot t\cos t\big).$$

で与えられる。その x 座標は、接線の小問の結果より

$$x_C = x - a\cos t = x_Q$$

である。したがって C と Q は同じ x 座標をもち、CQ は y 軸に平行であり、題意が示された。（y 座標は $a\sin t + \dfrac{a\cos^2 t}{\sin t} = \dfrac{a}{\sin t}$ と簡単になるので、$C = \big(a\ln\tan\frac{1}{2}t,\ a\operatorname{cosec} t\big)$ である。）

検算

- $a = 1$、$t = \frac{5\pi}{18}$（$50°$）のとき、$P \approx (-0.1202, 0.7660)$、$Q \approx (-0.7630, 0)$ であり、$PQ = 1.0000$ となる。公式からは $C \approx (-0.7630, 1.3054)$ が得られ、これは Q の真上にある。

- a と t の 2000 組の無作為な値について、$\dot{x}$、$\ddot{x}$ を有限差分（finite differences）で求めて数値的に確かめたところ、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \tan t$、$PQ = a$、$\rho = a\cot t$、$x_C = x_Q$ が丸め誤差の範囲で一致した。
- $t \to \frac{1}{2}\pi$ のとき $\rho \to 0$ である。すなわち曲線は $(0, a)$ に近づくにつれてますます急に曲がる（y 軸に関する鏡像とはそこで尖点（cusp）をなして出会う）。$t \to 0$ のとき $\rho \to \infty$ であり、これは曲線が漸近線に沿って平らになっていくことと整合する。

よくある間違い

- $\ln\tan\frac{1}{2}t$ を微分するとき、合成関数の微分（chain rule）から出る因子 $\frac{1}{2}$ を忘れること。答えは $1/\sin t$ にならなければならない。
- $\dot{x}$ を $a(-\sin t + \operatorname{cosec} t)$ のまま簡単にしないでおくこと。$a\cos^2 t/\sin t$ という形こそが、後の小問をすべてすっきりさせるのである。
- 法線方向として $(\sin t, -\cos t)$ を用いること。これは曲線の下側を向いており、C を誤った位置に置いてしまう。

STEP のその先へ

トラクトリックスは、x 軸に沿って歩く人が長さ a の紐で重りを引きずるときに重りが描く経路であり、$PQ = a$ はまさにその性質である。点 C は曲線の**縮閉線**（evolute）、すなわち曲率中心の軌跡（locus）を描く。ここで $C = (a\ln\tan\frac{1}{2}t,\ a\operatorname{cosec} t)$ は懸垂線（catenary）上にあることがわかる。トラクトリックスをその漸近線のまわりに回転させると擬球（pseudosphere）が得られる。これは負の定曲率をもつ曲面であり、双曲幾何（hyperbolic geometry）のモデルとなる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）には、擬球についての美しい幾何学的な解説がある。

解答例

STEP III 2007、第 5 問

純粋数学 ・ 高階導関数と数学的帰納法

STEP III 2007、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s3-q5

鍵となる考え方

r と $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x$ を θ だけで表してしまえば、すべてが簡単になる。$\coth\theta = x$ から $r = 1/\sinh\theta$ が得られ、さらに $\mathrm{d}r/\mathrm{d}x = \cosh\theta$、$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = -\sinh^2\theta$ となる。すると $\cosh n\theta / r^n$ を微分したものは、ちょうど $\cosh(n+1)\theta$ の加法定理（compound-angle formula）の形になり、これによって帰納法（induction）が使えるようになる。

解答

準備

$x > 1$ であるから、$\coth\theta = x$ は $\theta > 0$ の範囲にただ一つの解をもち、したがって $\sinh\theta > 0$ である。$\coth^2\theta - 1 = \operatorname{cosech}^2\theta$ を用いると、

$$r^2 = x^2 - 1 = \coth^2\theta - 1 = \frac{1}{\sinh^2\theta}, \qquad \text{よって} \qquad r = \frac{1}{\sinh\theta},$$

となる。ここで r と $\sinh\theta$ はともに正であるから、正の平方根をとった。

二つの導関数がすべての仕事をしてくれる。$\coth\theta = x$ を x で微分すると、

$$-\operatorname{cosech}^2\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = -\sinh^2\theta = -\frac{1}{r^2}.$$

$r^2 = x^2 - 1$ を微分すると $2r\,\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = 2x$ となるから、

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{r} = \coth\theta\,\sinh\theta = \cosh\theta.$$

第1次・第2次導関数

$y = \ln r^2 = 2\ln r$ であるから、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = \frac{2\cosh\theta}{r},$$

となり、求める式が得られた。第2次導関数については、$1/r = \sinh\theta$ と書くのがもっとも見通しがよく、このとき $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\cosh\theta\sinh\theta = \sinh 2\theta$ である。合成関数の微分法（chain rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 2\cosh 2\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = -\frac{2\cosh 2\theta}{r^2},$$

となり、求める式が得られた。

第3次導関数

今度は $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -2\cosh 2\theta\sinh^2\theta$ と書き、$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = -\sinh^2\theta$ とともに積の微分法（product rule）を用いる：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} &= -2\big(2\sinh 2\theta\sinh^2\theta + 2\cosh 2\theta\sinh\theta\cosh\theta\big)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\\ &= 4\sinh^3\theta\big(\cosh 2\theta\cosh\theta + \sinh 2\theta\sinh\theta\big)\\ &= 4\sinh^3\theta\cosh 3\theta,\end{aligned}$$

ここで恒等式 $\cosh(A+B) = \cosh A\cosh B + \sinh A\sinh B$ を用いた。したがって

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} = \frac{4\cosh 3\theta}{r^3}.$$

一般の公式

$2\cosh\theta/r$、$-2\cosh 2\theta/r^2$、$4\cosh 3\theta/r^3$ という並びから、係数は $2\cdot 0!$、$-2\cdot 1!$、$2\cdot 2!$ であると見てとれる。そこで次のように予想する。

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n} = (-1)^{n-1}\frac{2\,(n-1)!\,\cosh n\theta}{r^n} \qquad (n \geq 1).$$

考えてみよう いま第3次導関数に対して行った計算を一般化すると、どのような計算になるだろうか。

それは $\cosh n\theta/r^n = \cosh n\theta\,\sinh^n\theta$ の微分である。積の微分法と合成関数の微分法に

より、$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = -\sinh^2\theta$ を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\cosh n\theta\,\sinh^n\theta\right) &= \left(n\sinh n\theta\,\sinh^n\theta + n\cosh n\theta\,\sinh^{n-1}\theta\cosh\theta\right)\left(-\sinh^2\theta\right)\\ &= -n\sinh^{n+1}\theta\left(\cosh n\theta\cosh\theta + \sinh n\theta\sinh\theta\right)\\ &= -n\sinh^{n+1}\theta\,\cosh(n+1)\theta,\end{aligned}$$

すなわち、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\cosh n\theta}{r^n}\right) = -\frac{n\cosh(n+1)\theta}{r^{n+1}}.$$

いよいよ帰納法である。$n=1$ のとき公式は成り立つ（上で求めた第 1 次導関数そのものである）。ある $n=k\geq 1$ で成り立つと仮定する。すると、上の計算を $n=k$ として用いて、

$$\frac{\mathrm{d}^{k+1}y}{\mathrm{d}x^{k+1}} = (-1)^{k-1}\,2\,(k-1)!\cdot\left(-\frac{k\cosh(k+1)\theta}{r^{k+1}}\right) = (-1)^k\,\frac{2\,k!\,\cosh(k+1)\theta}{r^{k+1}},$$

となり、これは $n=k+1$ の場合の公式である。数学的帰納法により、

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = (-1)^{n-1}\,\frac{2\,(n-1)!\,\cosh n\theta}{r^n} \quad \text{すべての} n\geq 1.}$$

（$n=2$ と $n=3$ の場合は、直接求めた結果と一致する。）

別の道筋

部分分数分解（partial fractions）を使うと、独立した導出が得られる。$y=\ln(x-1)+\ln(x+1)$ であるから、

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\left[(x-1)^{-n}+(x+1)^{-n}\right].$$

ところが $x\pm 1 = \dfrac{\cosh\theta\pm\sinh\theta}{\sinh\theta} = r\,\mathrm{e}^{\pm\theta}$ であるから、括弧の中は $r^{-n}\left(\mathrm{e}^{-n\theta}+\mathrm{e}^{n\theta}\right) = 2\cosh n\theta/r^n$ となり、同じ公式が得られる。これは置換がどこから来たのかも説明している。θ は $\ln\dfrac{x+1}{x-1}$ の半分なのである。

検算

- $x=2$ のとき：部分分数分解からは $\mathrm{d}^3y/\mathrm{d}x^3 = 2\left(1+\frac{1}{27}\right) = \frac{56}{27}\approx 2.0741$ が得られ、$\theta=\tanh^{-1}\frac{1}{2}$、$r=\sqrt{3}$ として $4\cosh 3\theta/r^3$ を計算しても同じ値になる。
- 最初の三つの導関数を、$x>1$ の範囲の無作為な 200 点において $\ln(x^2-1)$ の差分（finite differences）と照合し、また一般の公式を $n\leq 14$ について部分分数分解の形と照合した（約 10^{-14} の精度で一致）。

- 符号：$\ln(x^2-1)$ は $x>1$ で増加かつ上に凸（concave）であり、$y'>0$、$y''<0$ と合致する。

よくある間違い

- $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = +\sinh^2\theta$ と書いてしまう：$\coth\theta$ の導関数は $-\operatorname{cosech}^2\theta$ であり、このマイナス符号こそが導関数の符号を交互に変える原因である。
- 階乗（factorial）を一つずらしてしまう：第 n 次導関数には $(n-1)!$ がつく。第 1 次導関数の係数が $2 = 2\cdot 0!$ だからである。
- いくつかの場合を確かめただけで終えてしまう：「証明せよ」とある以上、一般の帰納法のステップが必要である。

STEP のその先へ

すべての導関数がこのように簡潔な閉じた形で表せることは、複素解析（complex analysis）を垣間見せてくれる。$\ln(x^2-1)$ は $x=\pm 1$ に特異点（singularities）をもち、その高次導関数はそれらまでの距離、ここでは $x\mp 1 = re^{\mp\theta}$ によって支配されている。大学 1 年の解析学（analysis）の講義では、このような公式こそが、テイラー級数（Taylor series）の剰余項（remainder）を評価し、その収束半径（radius of convergence）を求めるのに必要となる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、なぜ特異点が冪級数（power series）を支配するのかを見事に説明している。

解答例

STEP III 2007、第 6 問

純粋数学 • 複素数と円

> **STEP III 2007、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q6

鍵となる考え方

原点を中心とする半径 a の円の上では、共役（conjugation）をとることは反転（inversion）と同じである。すなわち $pp^* = a^2$ なので $p^* = a^2/p$ となる。この一つの事実によって、問題に現れるすべての共役が普通の分数に変わり、恒等式（identity）はすぐに導かれる。垂直（perpendicular）であるかどうかは、二つの弦（chord）のベクトルの比が純虚数（purely imaginary）であるかどうかで判定できる。そして恒等式により、この判定は簡単な積の条件に書き換えられる。多角形の問題では、この積の条件が漸化式（recurrence）になる。B_1 を選べば他の B_k はすべて決まってしまい、問題は、一周して B_1 に戻ってきたときにその連鎖が閉じるかどうかだけである。

解答

恒等式

P は円の上にあるので $|p| = a$ であり、$pp^* = a^2$、すなわち $p^* = a^2/p$ である。同様に $q^* = a^2/q$ である。したがって

$$p^* - q^* = \frac{a^2}{p} - \frac{a^2}{q} = \frac{a^2(q-p)}{pq} = -\frac{a^2(p-q)}{pq}.$$

$p \neq q$ であるから（また $a > 0$ より $p, q \neq 0$ であるから）これは 0 でなく、式を変形して

$$pq = -a^2 \frac{p-q}{p^* - q^*},$$

を得る。これが示すべきことであった。

垂直な弦

弦 PQ の向きは複素数 $p-q$ の向きであり、RS の向きは $r-s$ の向きである。0 でない二つの複素数が垂直であるのは、その比

$$w = \frac{p-q}{r-s}$$

が純虚数であるとき、かつそのときに限る。比の偏角（argument）が二つのなす角だからである。

> **考えてみよう** 「w は純虚数である」ということを、使える方程式にするにはどうすればよいか。

0 でない w が純虚数であるための必要十分条件は $w^* = -w$、すなわち $w/w^* = -1$ である。二つの弦それぞれに恒等式を用いると（二つ目では p, q の代わりに r, s とする）、

$$\frac{w}{w^*} = \frac{p-q}{p^*-q^*} \cdot \frac{r^*-s^*}{r-s} = \frac{-pq/a^2}{-rs/a^2} = \frac{pq}{rs}.$$

よって $PQ \perp RS$ であるための必要十分条件は $pq/rs = -1$ である。$rs \neq 0$ であるから、これは

$$pq + rs = 0.$$

を意味する。ここでの各段階はすべて逆にたどれるので、問われた以上のことが示されたことになる。すなわち、この円の弦について $PQ \perp RS \iff pq + rs = 0$ である。以下ではこの逆（converse）の向きが必要になる。

多角形の問題

点 A_k と B_k を表す複素数をそれぞれ α_k と β_k とする。前の小問（およびその逆）により、n 個の垂直条件はちょうど

$$\beta_k\beta_{k+1} = -\alpha_k\alpha_{k+1} \quad (k = 1, \ldots, n-1), \qquad \beta_n\beta_1 = -\alpha_n\alpha_1,$$

と同値である。ただし、各 B_kB_{k+1} が実際に弦となるように、隣り合う B どうしは異なるものとする。

β_1 を選ぶ。すると $\beta_{k+1} = -\alpha_k\alpha_{k+1}/\beta_k$ であるから、最初の $n-1$ 個の条件によって $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ が順に決まり、各 β_{k+1} の絶対値（modulus）は自動的に a となる。最初のいくつかを計算すると

$$\beta_2 = -\frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1}, \qquad \beta_3 = -\frac{\alpha_2\alpha_3}{\beta_2} = \frac{\alpha_3\beta_1}{\alpha_1}, \qquad \beta_4 = -\frac{\alpha_3\alpha_4}{\beta_3} = -\frac{\alpha_1\alpha_4}{\beta_1},$$

となり、簡単な帰納法（induction）により

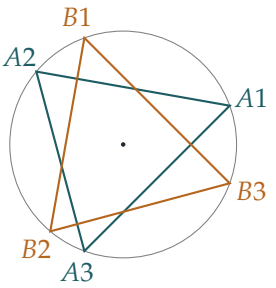
$$\beta_k = \frac{\alpha_k\beta_1}{\alpha_1} \ (k \text{ が奇数}), \qquad \beta_k = -\frac{\alpha_1\alpha_k}{\beta_1} \ (k \text{ が偶数}).$$

が得られる。（k で成り立てば、$\beta_{k+1} = -\alpha_k\alpha_{k+1}/\beta_k$ により $k+1$ ではもう一方の形が得られる。）あとはすべて、最後の条件 $\beta_n\beta_1 = -\alpha_n\alpha_1$ が成り立つかどうかにかかっている。

$n = 3$ の場合。このとき $\beta_3 = \alpha_3\beta_1/\alpha_1$ であるから、閉じる条件は

$$\frac{\alpha_3\beta_1^2}{\alpha_1} = -\alpha_3\alpha_1 \iff \beta_1^2 = -\alpha_1^2 \iff \beta_1 = \pm \mathrm{i}\,\alpha_1.$$

となる。よって B_1 の選び方は二通りしかない。$\beta_1 = \mathrm{i}\alpha_1$ とすると、公式から $\beta_2 = \mathrm{i}\alpha_2$、$\beta_3 = \mathrm{i}\alpha_3$ となる。$\beta_1 = -\mathrm{i}\alpha_1$ とすると、すべての k で $\beta_k = -\mathrm{i}\alpha_k$ となる。いずれの場合も、三角形 $B_1B_2B_3$ は三角形 $A_1A_2A_3$ を中心のまわりに直角だけ回転したものである。その頂点は互いに異なるので、どちらの選び方も実際に条件を満たす。実際、弦を 90° 回転すれば、もとの弦と垂直になるのは明らかである。



図は $\beta_1 = \mathrm{i}\alpha_1$ と選んだ場合を示している。琥珀色の三角形の各辺は、対応する青緑色の辺を 90° 回転したものである。

$n = 4$ の場合。このとき $\beta_4 = -\alpha_1\alpha_4/\beta_1$ であるから、

$$\beta_4\beta_1 = -\alpha_1\alpha_4$$

は β_1 が何であっても自動的に成り立つ。よって B_1 は円上の**どこに**選んでもよく、選び方は無限にある。例外は、隣り合う二つの B が一致してしまう有限個の位置だけである。たとえば $\beta_1 = \beta_2$ となるには $\beta_1^2 = -\alpha_1\alpha_2$ が必要であり、これで除外されるのは 2 点である。四つの一致のそれぞれが除外する点は高々 2 個なので、除外される位置は高々 8 個である。

$n > 4$ の場合。同じ計算はすべての n で成り立ち、効いてくるのは n の偶奇（parity）だけである。

- n が奇数ならば、閉じる条件は $\beta_1^2 = -\alpha_1^2$ である。選び方はちょうど二通り、$\beta_1 = \pm\mathrm{i}\alpha_1$ であり、$B_1B_2\cdots B_n$ は多角形 $A_1A_2\cdots A_n$ を中心のまわりに $\pm 90°$ 回転したものである。

- n が偶数ならば、閉じる条件は自動的に成り立つ。B_1 は、隣り合う B が一致してしまう高々 $2n$ 個の位置を除けば円上のどの点でもよく、選び方は無限にある。

検算

- $p = a$、$q = \mathrm{i}a$ としてみる。このとき $pq = \mathrm{i}a^2$ であり、$-a^2(a - \mathrm{i}a)/(a + \mathrm{i}a) = -a^2 \cdot (-\mathrm{i}) = \mathrm{i}a^2$ となって、確かに一致する。
- 互いに垂直な直径（diameter）$p = a$、$q = -a$ と $r = \mathrm{i}a$、$s = -\mathrm{i}a$ をとってみる。$pq + rs = -a^2 + a^2 = 0$ となる。
- 数値的には、恒等式と判定条件 $PQ \perp RS \iff pq + rs = 0$ を 1000 通りのランダムな配置で確かめた。$n = 3, \ldots, 9$ について、ランダムな出発点から漸化式を計算した。n が奇数のときは、B_1 を円周上で 0.1° 刻みに動かしたところ、連鎖が閉じたのは $\beta_1 = \pm\mathrm{i}\alpha_1$ の近くだけであった。n が偶数のときは毎回閉じ、すべての弦が丸め誤差の範囲で垂直であった。

よくある間違い

- 「垂直 $\Rightarrow pq + rs = 0$」だけを証明してしまう。多角形の問題では、構成した β たちが本当に垂直な弦を与えることを知るために、逆も必要である。
- 「垂直とは w が純虚数であること」を、$w \neq 0$ に触れずに $w + w^* = 0$ と書いてしまう。ここでは点が互いに異なるので $w \neq 0$ が保証されている。
- n が偶数のとき、いくつかの位置では隣り合う二つの B が一致して「弦」の向きが定まらなくなることに気づかずに、「どの B_1 でもよい」と言ってしまう。

STEP のその先へ

写像 $z \mapsto a^2/z^*$ は円 $|z| = a$ に関する**反転**であり、円上の点がこの写像で動かない（$p = a^2/p^*$）という事実こそが、この問題全体を動かしていた。反転はメビウス変換（Möbius transformations）の一つであり、メビウス変換は複素解析（complex analysis）と幾何学の最初の講義で中心的な役割を果たす。多角形の議論には**モノドロミー**（monodromy）の趣がある。ループに沿って、強制される選択の連鎖をたどり、出発点に戻ってくるかどうかを問う。そしてその答えは n の偶奇によって決まる。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析の入門書）は、反転やこうした幾何学的な考え方を見事に展開している。

解答例

STEP III 2007、第 7 問

純粋数学 ・ 置換積分

STEP III 2007、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s3-q7

鍵となる考え方

「arctan」や「π」を使うことは許されていないので、あらゆる事実は積分の中での変数変換から導かなければならない。それぞれの置換（substitution）は、被積分関数（integrand）$1/(1+u^2)$（あるいは $1/\sqrt{1-u^2}$）がそれ自身、またはもう一方の被積分関数に変わり、積分区間の端だけが変化するように選ばれている。そこで積分区間の端を比較すると t と s の値どうしの間の等式が得られ、小問 (i) の対称性（symmetry）$u \mapsto 1/u$ によって、それらの等式が p の定数倍の形に変わるのである。

解答

小問 (i)

$x > 0$ とし、$u = v^{-1}$ とおくと、$\mathrm{d}u = -v^{-2}\,\mathrm{d}v$ である。u が 0 から x まで増加するとき、v は ∞ から $1/x$ まで減少する。また

$$\frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{1+v^{-2}} = \frac{v^2}{v^2+1}.$$

したがって

$$t(x) = \int_{\infty}^{1/x} \frac{v^2}{1+v^2}\left(-\frac{1}{v^2}\right)\mathrm{d}v = \int_{1/x}^{\infty} \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v,$$

となる。ここで、負の符号を用いて積分区間の上端と下端を入れ替えた。これが求める結果である。（被積分関数は $1/v^2$ 以下であるから、この広義積分（improper integral）は収束（converge）する。）

これを x の代わりに $1/x$ に適用すると、$t(1/x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v$ を得る。これに $t(x) =$

$\int_0^x \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v$ を加えると、二つの積分区間はつながって $[0,\infty)$ となる：

$$t(x)+t(1/x)=\int_0^\infty \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v=\tfrac{1}{2}p \qquad (x>0).$$

$x=1$ とおくと $2t(1)=\frac{1}{2}p$ となる。

小問 (ii)

$u\geq 0$ のとき $0\leq y<1$ である。両辺を 2 乗すると $y^2(1+u^2)=u^2$ となるので、$u^2(1-y^2)=y^2$ であり、

$$u=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}},$$

を得る。ただし、u と y は同符号であるから正の平方根をとった。商の微分法（quotient rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{\sqrt{1-y^2}+\dfrac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}}{1-y^2}=\frac{(1-y^2)+y^2}{(1-y^2)^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{(1-y^2)^3}},$$

となり、求める式が得られる。

次に、これを $t(x)$ に代入する。$u^2=y^2/(1-y^2)$ から

$$1+u^2=\frac{1}{1-y^2},$$

を得るので、

$$\frac{1}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=(1-y^2)\cdot\frac{1}{(1-y^2)^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

写像 $u\mapsto y$ は増加関数であり（その逆関数の導関数が正であるから）、$u=0\mapsto y=0$、$u=x\mapsto y=x/\sqrt{1+x^2}$ であって、後者は 1 より小さい。よって

$$t(x)=\int_0^{x/\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y=s\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

$x=1$ とすると、小問 (i) を用いて $s\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=t(1)=\frac{1}{4}p$ となる。

小問 (iii)

$a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ とおくと、$z=\dfrac{u+a}{1-au}$ である。$0\leq u\leq a$ においては $au\leq\frac{1}{3}$ であるから、分母は正のままであり、z はそこで u の滑らかな関数である。微分すると

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}=\frac{(1-au)+a(u+a)}{(1-au)^2}=\frac{1+a^2}{(1-au)^2}.$$

考えてみよう なぜこの置換で $1/(1+u^2)$ が変わらないはずなのだろうか？

$1+z^2$ を通分して計算する。交差項 $\mp 2au$ は打ち消し合う：

$$1+z^2 = \frac{(1-au)^2+(u+a)^2}{(1-au)^2} = \frac{1+a^2u^2+u^2+a^2}{(1-au)^2} = \frac{(1+a^2)(1+u^2)}{(1-au)^2}.$$

割り算をすると

$$\frac{1}{1+z^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{1+u^2},$$

となるので、被積分関数は変わらず、積分区間の端だけが動く。（裏ではタンジェントの加法定理（addition formula）が働いているのだが、それを使う必要はない。）$u=0$ のとき $z=a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ である。$u=a$ のとき

$$z = \frac{2/\sqrt{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2} = \sqrt{3}.$$

したがって

$$t\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}.$$

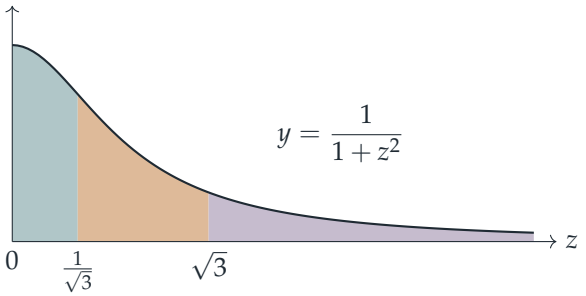
最後の段階として、区間 $[0,\infty)$ を $\frac{1}{\sqrt{3}}$ と $\sqrt{3}$ で分割する：

$$\tfrac{1}{2}p = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} + \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} + \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}.$$

第 1 項は定義により $t(\frac{1}{\sqrt{3}})$ であり、第 2 項はいま示したことにより $t(\frac{1}{\sqrt{3}})$ である。$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ として小問 (i) を用いると、第 3 項も $\int_{1/x}^{\infty}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = t(x) = t(\frac{1}{\sqrt{3}})$ となる。よって

$$3\,t\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \tfrac{1}{2}p.$$

下の図はこの三つの部分を示している：0 から ∞ までの $1/(1+z^2)$ の下の面積が、面積の等しい三つの領域に分かれる。



検算

数値的に（シンプソンの公式（Simpson's rule）を用いて）、$t(\frac{1}{\sqrt{3}}) \approx 0.5235988$、$\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} \approx 0.5235988$ であり、一方 $p \approx 3.1415927$ であるから、$3t(\frac{1}{\sqrt{3}}) \approx 1.5707963 \approx \frac{1}{2}p$ となる。同様に $s(\frac{1}{\sqrt{2}}) \approx t(1) \approx 0.7853982 \approx \frac{1}{4}p$ である。もちろん p の正体は π であり、これらの結果は $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$、$\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ を意味している。検算にはこれを使ってよいが、答案の中で使ってはならない。

よくある間違い

- $u = 1/v$ によって積分の向きが逆になることを忘れる。$\mathrm{d}u$ に現れる負の符号こそが、積分区間の端を正しい順序に戻すのである。
- 小問 (iii) で、置換をしただけで止めてしまう。$\frac{1}{\sqrt{3}}$ から $\sqrt{3}$ までの積分は等しい三つの部分のうちの一つにすぎず、$\sqrt{3}$ より先の部分には小問 (i) が必要である。
- 積分区間で $1 - au \neq 0$ であることを確認しない。ここでは $au \leq \frac{1}{3}$ であるから、この置換は正当である。

STEP のその先へ

この問題は、解析学者（analyst）が三角関数（trigonometric functions）を厳密に定義する方法を垣間見せてくれる。すなわち、$\arctan x$ を $\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ として定義し、π をその無限大での極限の 2 倍として定義して、幾何学を一切使わずに、このような置換からあらゆる性質を導くのである。小問 (iii) の置換は形を変えた tan の加法定理であり、同じ方法で $xy < 1$ のとき $t(x) + t(y) = t\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ が証明できる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）では、積分やべき級数（power series）を用いてこうした定義を確固とした基礎の上に据える方法が示されている。

解答例

STEP III 2007、第 8 問

純粋数学 ・ リッカチ方程式

> **STEP III 2007、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q8

鍵となる考え方

非線形（nonlinear）方程式 $(*)$ はリッカチ方程式（Riccati equation）である。y^2 の項があるために線形性が崩れている。y を u'/u の定数倍とおくと $y' + y^2$ は u''/u に変わり、平方の項が消えて u についての線形二階微分方程式が残る。(i) の前半では、まさにその線形方程式の解が二つ与えられるので、あとは定数を合わせるだけである。(ii) では新しい線形方程式の解が二つ必要になるが、その手がかりは、$1-x$ が $1+x$ の x を $-x$ に置き換えたものだということである。

解答

小問 (i)

a と b を求める。 $u = x$ のとき $u' = 1$、$u'' = 0$ であるから、

$$\mathrm{a}(x) + x\,\mathrm{b}(x) = 0.$$

が必要である。$u = \mathrm{e}^{-x}$ のとき $u' = -\mathrm{e}^{-x}$、$u'' = \mathrm{e}^{-x}$ であり、$\mathrm{e}^{-x} \neq 0$ で割ると

$$1 - \mathrm{a}(x) + \mathrm{b}(x) = 0.$$

を得る。第一の式から（$x \neq 0$ のとき）$\mathrm{b} = -\mathrm{a}/x$ となり、これを第二の式に代入すると $\mathrm{a}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$ となる。よって

$$\mathrm{a}(x) = \frac{x}{1+x}, \qquad \mathrm{b}(x) = -\frac{1}{1+x}.$$

（これらは $x = 0$ においても両方の条件を満たす。）この方程式は線形かつ斉次（homogeneous）であり、x と e^{-x} は互いに定数倍の関係にないので、一般解（general

solution）は

$$u = Ax + Be^{-x},$$

である。ただし A、B は任意定数である。

置換。$u \neq 0$ として $y = \dfrac{u'}{3u}$ とおく。商の微分法（quotient rule）により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u''}{3u} - \frac{(u')^2}{3u^2} = \frac{u''}{3u} - 3\left(\frac{u'}{3u}\right)^2 = \frac{u''}{3u} - 3y^2.$$

したがって $y' + 3y^2 = \dfrac{u''}{3u}$ となり、平方の項がちょうど打ち消し合う。置換に係数 3 を入れたのはこのためである。方程式 $(*)$ は

$$\frac{u''}{3u} + \frac{x}{1+x} \cdot \frac{u'}{3u} = \frac{1}{3(1+x)},$$

となり、両辺に $3u$ を掛けると

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{x}{1+x}\frac{du}{dx} - \frac{1}{1+x}u = 0,$$

が得られ、これが示すべき式である。これは、求めた a と b を用いた、この小問の冒頭の方程式にほかならない。

特殊解。よって $u = Ax + Be^{-x}$ であり、

$$y = \frac{u'}{3u} = \frac{A - Be^{-x}}{3(Ax + Be^{-x})}.$$

考えてみよう 定数は二つあるのに条件は一つしかない。これは問題だろうか？

問題ではない。u に 0 でない定数を掛けても u'/u は変わらないので、意味をもつのは比 $A : B$ だけであり、一階微分方程式であれば自由な定数はちょうど一つのはずである。$x = 0$ で $y = 0$ という条件から $A - B = 0$ を得る。このとき $B = A \neq 0$ であり（そうでなければ $u \equiv 0$ となる）、A を約分すると

$$y = \frac{1 - e^{-x}}{3(x + e^{-x})}.$$

となる。$e^{-x} \geq 1 - x$ より $x + e^{-x} \geq 1$ であるから、分母が 0 になることはない。以上で小問 (i) が完了する。

小問 (ii)

今度は y^2 の項の係数が 1 なので、$y = \dfrac{u'}{u}$ とおく。先ほどとまったく同様に

$$y' = \frac{u''}{u} - \left(\frac{u'}{u}\right)^2 = \frac{u''}{u} - y^2,$$

であるから $y' + y^2 = u''/u$ となる。方程式の両辺に u を掛けると、線形方程式

$$u'' + \frac{x}{1-x}u' - \frac{1}{1-x}u = 0.$$

が得られる。これは小問 (i) の方程式の x を $-x$ に置き換えたものである。実際、w が小問 (i) の方程式の解であるとき $v(x) = w(-x)$ とおくと、$v'(x) = -w'(-x)$、$v''(x) = w''(-x)$ であり、点 $-x$ における小問 (i) の方程式は

$$v''(x) + \frac{-x}{1-x}\big(-v'(x)\big) - \frac{1}{1-x}v(x) = 0,$$

となるが、これは新しい方程式そのものである。したがって、x と e^{-x} から解 $-x$（あるいは単に x）と e^x が得られる。直接確かめると、$u = x$ のとき $0 + \frac{x}{1-x} - \frac{x}{1-x} = 0$、$u = \mathrm{e}^x$ のとき $\mathrm{e}^x\big(1 + \frac{x}{1-x} - \frac{1}{1-x}\big) = \mathrm{e}^x(1-1) = 0$ である。ゆえに

$$u = Ax + B\mathrm{e}^x, \qquad y = \frac{u'}{u} = \frac{A + B\mathrm{e}^x}{Ax + B\mathrm{e}^x}.$$

$x = 0$ においてこれは $(A+B)/B$ であり、これが 2 に等しくなければならないので $A = B$（かつ $B \neq 0$）である。したがって

$$y = \frac{1 + \mathrm{e}^x}{x + \mathrm{e}^x}.$$

これが成り立つのは、0 を含み、$x + \mathrm{e}^x > 0$ かつ方程式が定義される区間、すなわち $x_0 < x < 1$ においてである。ここで $x_0 \approx -0.567$ は $x + \mathrm{e}^x = 0$ の解である。

検算

- $x = 0$ において小問 (ii) の答えは $2/1 = 2$ を与え、これを微分すると $y'(0) = \frac{1\cdot 1 - 2\cdot 2}{1} = -3$ となる。これは方程式の $1 - 4 - 0 = -3$ と一致する。
- $x \to \infty$ のとき、小問 (i) の答えは $\frac{1}{3x}$ のように 0 に近づく。このとき $y' \approx -\frac{1}{3x^2}$ と $3y^2 \approx \frac{1}{3x^2}$ は打ち消し合い、$\frac{x}{1+x}y \approx \frac{1}{3(1+x)}$ となるので、$(*)$ と整合する。
- 小問 (ii) の方程式を数値的に（$y(0) = 2$ からルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で）解いたところ $y(0.9) = 1.0297654\ldots$ となり、公式と小数第 10 位まで一致した。

よくある間違い

- 小問 (ii) でも係数 $\frac{1}{3}$ を残してしまう。掛ける係数は y^2 の係数に合わせなければならないので、ここでは $y = u'/u$ である。

- 一つの条件から A と B の両方を決めようとする。y に影響するのはそれらの比だけである。
- 小問 (ii) で確かめもせずに再び e^{-x} を用いる。$1-x$ での符号の変化により、これは e^{x} に変わる。

STEP のその先へ

方程式 $y' + P(x)y^2 + Q(x)y = R(x)$ はリッカチ方程式であり、置換 $y = u'/(Pu)$ によって常に線形二階微分方程式に変換される。逆に、任意の線形二階微分方程式の解の比 u'/u はリッカチ方程式を満たす。このため、これらの非線形方程式は量子力学から制御理論に至るまで、物理学のさまざまな場面に繰り返し現れるのである。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）では、この内容と線形二階微分方程式の理論（なぜ独立な二つの解から一般解が得られるのか）が扱われている。

解答例

STEP III 2007、第 9 問

力学 ・ 単振動

> **STEP III 2007、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q9

鍵となる考え方

ばね（spring）は 2 つのビーズ（bead）を同一直線に沿って互いに逆向きに等しい大きさで引く、または押す。また輪（hoop）からの抗力は半径方向を向くので、中心のまわりの全角運動量（angular momentum）は 0 のまま保たれる。したがってビーズは互いに鏡像の位置を保って動く。これにより問題は 1 つの座標に帰着し、エネルギー保存則（conservation of energy）から θ についての単振動（simple harmonic motion, SHM）が得られる。落とし穴は、θ が**鋭角**である半角だという点である。ビーズが十分に離れて直径の両端を通り過ぎると、エネルギーの式の形が変わり、運動は単振動の 2 つの弧をつなぎ合わせて組み立てなければならない。

解答

設定

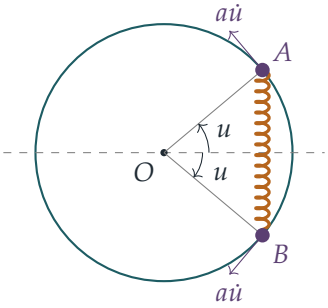
ビーズを固定された滑らかな輪の上の質点とし、ばねは軽いとみなす。ビーズにはたらく力は、重力と輪からの抗力の鉛直成分（これらは打ち消し合う）、抗力の水平成分（輪は滑らかなので半径方向を向く）、そしてばねの力である。A にはたらくばねの力と B にはたらくばねの力は大きさが等しく逆向きで、同一直線 AB に沿ってはたらくので、O を通る鉛直軸のまわりのモーメントの和は 0 である。半径方向の力はこの軸のまわりにモーメントをまったくもたない。よってこの軸のまわりの全角運動量は保存され、ビーズは静止状態から動き始めるので、その値は 0 である。

輪に沿った角を固定された 1 本の半径から測り、A と B の位置の角をそれぞれ ϕ_A、ϕ_B とする。角運動量が 0 であることは $ma^2(\dot{\phi}_A + \dot{\phi}_B) = 0$ を意味するので、$\phi_A + \phi_B$ は一

定である。基準の半径を最初の角 AOB の二等分線にとれば、すべての時刻で

$$\phi_A = u, \qquad \phi_B = -u,$$

となる。ここで u は 1 つの座標で、最初は $u = \beta$ である。各ビーズの速さは $a\dot{u}$ なので、運動エネルギーは $2 \cdot \frac{1}{2} m a^2 \dot{u}^2 = m a^2 \dot{u}^2$ である。



$0 < u \le \frac{\pi}{2}$ の間は角 AOB は $2u$ であるが、u が $\frac{\pi}{2}$ を超えるとビーズは直径の両端を通り過ぎており、角 AOB は $2\pi - 2u$ となる。よって

$$\theta = u \quad (0 < u \le \tfrac{\pi}{2}), \qquad \theta = \pi - u \quad (\tfrac{\pi}{2} \le u < \pi).$$

ビーズが $u = \beta$ で静止状態から放されることから、エネルギー保存則より

$$m a^2 \dot{u}^2 + m k^2 a^2 (\theta - \alpha)^2 = m k^2 a^2 (\beta - \alpha)^2, \qquad \text{よって} \qquad \dot{u}^2 = k^2 \left[(\alpha - \beta)^2 - (\theta - \alpha)^2 \right].$$

「圧縮されている」とは、ばねが自然長より短いことを意味する。エネルギーは $\theta = \alpha$ で最小となるので、これが自然長に対応し、長さ $2a \sin\theta$ は $(0, \frac{\pi}{2})$ で θ について増加する。したがって $0 < \beta < \alpha$ である。

$u \le \frac{\pi}{2}$ の間の運動

ここでは $\theta = u$ であり、エネルギーの式を t で微分して $2\dot{u}$ で割ると（ビーズが動いているときは常に成り立ち、さらに連続性から一般に成り立つ）

$$\ddot{\theta} = -k^2 (\theta - \alpha).$$

これは $\theta = \alpha$ を中心とする角振動数（angular frequency）k の単振動である。$\theta = \beta$ で静止状態から始まるので

$$\theta - \alpha = -(\alpha - \beta) \cos kt,$$

となり、ビーズは互いに離れていき、何も妨げるものがなければ $t = \frac{\pi}{k}$ で $\theta = 2\alpha - \beta$ に達する。すべては $2\alpha - \beta$ が $\frac{\pi}{2}$ より小さいかどうか、すなわち β と $2\alpha - \frac{\pi}{2}$ の大小関係にかかっている。この臨界値が $(0, \alpha)$ に入るのはまさに $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ だからであり、したがって以下の 3 つの場合はいずれも起こりうる。

場合 1： $2\alpha - \frac{\pi}{2} < \beta < \alpha$

このとき $2\alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$ なので、ビーズは直径の両端に達することはなく、常に $\theta = u$ であり、運動は $\theta = \beta$ と $\theta = 2\alpha - \beta$ の間の純粋な単振動である。周期は

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

場合 2： $0 < \beta < 2\alpha - \frac{\pi}{2}$

このとき θ は単振動が折り返す前に $\frac{\pi}{2}$ に達する。その時刻を t_1 とすると

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = -(\alpha - \beta)\cos kt_1, \qquad \text{よって} \qquad \cos kt_1 = -\lambda, \quad \text{ただし} \lambda = \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{\alpha - \beta}.$$

$\alpha < \frac{\pi}{2}$ かつ $\beta < 2\alpha - \frac{\pi}{2}$ なので、$0 < \lambda < 1$ である。よって

$$kt_1 = \pi - \arccos\lambda = \frac{\pi}{2} + \arcsin\lambda.$$

この瞬間、エネルギーの式から $\dot{u}^2 = k^2[(\alpha - \beta)^2 - (\frac{\pi}{2} - \alpha)^2] > 0$ となるので、ビーズはまだ互いに離れる向きに動いており、そのまま直径の両端を通り過ぎる。

考えてみよう ビーズが直径の両端を通り過ぎた後、何が起こるか。

$u \geq \frac{\pi}{2}$ では $\theta = \pi - u$ なので、エネルギーの式は

$$\dot{u}^2 = k^2\left[(\alpha - \beta)^2 - (u - (\pi - \alpha))^2\right],$$

となり、これは $u = \pi - \alpha$ を中心とする u の単振動で、角振動数はやはり k である。これは直径を通過する前の運動を $u = \frac{\pi}{2}$ に関して鏡映したものである。したがってビーズはさらに時間 t_1 かけて $u = \pi - \beta$ で静止し（ここで再び $\theta = \beta$ となるが、ビーズは今度は O の反対側にある）、その後、全行程を逆にたどって $u = \beta$ に戻る。ビーズはこのような 4 つの段階を経て出発点に戻るので、運動の周期は

$$T = 4t_1 = \frac{4}{k}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{\alpha - \beta}\right) = \frac{2}{k}\left(\pi + 2\arcsin\frac{\pi - 2\alpha}{2(\alpha - \beta)}\right).$$

（ビーズが O のどちら側にあるかを区別しない角 θ そのものは、$2t_1$ ごとに同じ値を繰り返す。）

場合 3： $\beta = 2\alpha - \frac{\pi}{2}$

このとき θ は、単振動によってビーズが静止するちょうどその時刻 $t = \frac{\pi}{k}$ に $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ に達する。このときビーズは直径の両端にあるので、ばねは AOB に沿っており、各ビーズにはたらくばねの力は半径方向を向く。つまり輪に沿った成分をもたず、輪に

沿ってはたらく力はほかにない。ビーズはつり合いの状態にあり、静止しているので、その位置にとどまる。よって

$$\beta = 2\alpha - \frac{\pi}{2}$$

が振動が起こらない値である。これは2つの周期の式とも整合している。β が下からこの値に近づくと $\lambda \to 1$ となり、場合2の周期は $\frac{4\pi}{k}$、すなわち場合1の周期の2倍に近づく。ビーズが直径の近くにますます長くとどまるようになるからである。

検算

- $k = 1$、$\alpha = \frac{3\pi}{8}$、$\beta = \frac{\pi}{8}$ とすると、$2\alpha - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$ なので場合2にあたる。このとき $\lambda = \frac{\pi/8}{\pi/4} = \frac{1}{2}$、$\arcsin\lambda = \frac{\pi}{6}$ であり、$T = 2(\pi + \frac{\pi}{3}) = \frac{8\pi}{3} \approx 8.378$ となる。
- 2つのビーズの運動方程式を数値的に解いた（エネルギーを両方のビーズの位置の関数として扱い、対称性は仮定していない）。$k = 1$、$\alpha = 1.2$、$\beta = 0.5$ のとき、ビーズは8.5162後に出発点で再び静止し、公式の値8.51622と一致した。$\beta = 1.0$（場合1）のときの周期は $6.2832 \approx 2\pi$ であった。
- 次元：k の単位は s^{-1} である（エネルギーは ma^2k^2 に角の2乗をかけたもの）。よって $\frac{2\pi}{k}$ は時間である。

よくある間違い

- 運動エネルギーを $\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$ と書いてしまうこと。2つのビーズがともに動くので、正しくは $ma^2\dot{\theta}^2$ である。因子2を落とすと、誤った角振動数 $\sqrt{2}k$ が得られる。
- 理由なしにビーズが対称に動くと仮定すること。これは O のまわりの角運動量保存から導かれるものであり、そのためには各ビーズにはたらくばねの力が同一直線 AB に沿っていることが必要である。
- θ が鋭角であることを忘れ、どの場合にも $\frac{2\pi}{k}$ と答えてしまうこと。

STEP のその先へ

保存量を用いて2粒子系を1つの座標に帰着させることは、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）の出発点である。ラグランジュ力学では対称性（ここでは配置全体を O のまわりに回転させること）から保存則が得られ、この考え方はネーター（Noether）の定理によって厳密に定式化される。場合2の運動は「二重井戸（double-well）」ポテンシャルの中の振動であり、その周期は振幅に依存し、エネルギーが中央の障壁の高さに等しくなるところで不連続に変化する。保存則と振動につい

てさらに知りたければ、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

解答例

STEP III 2007、第 10 問

力学 ・ 斜面上の放物運動

STEP III 2007、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s3-q10

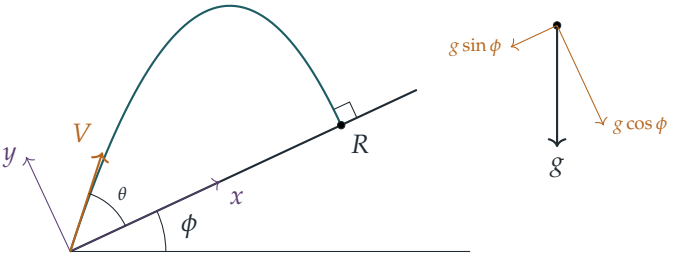
鍵となる考え方

斜面に沿う方向と斜面に垂直な方向に座標軸をとる。こうすると重力は二つの一定な加速度、すなわち斜面に沿って下向きの $g\sin\phi$ と斜面に向かう $g\cos\phi$ になる。注目すべき条件は、粒子が来た経路をそのまま引き返すということである。なめらかな（smooth）平面は自身に垂直な方向にしか押せないので、速度を反転させられるのは、粒子が平面にまっすぐ垂直に突入してくる場合に限られる。この一つの事実から両方の結果が導かれ、残りは式変形と相加相乗平均の不等式（AM–GM inequality）による最小化である。

解答

運動方程式

粒子を、空気抵抗なしに重力のみを受けて運動する質点としてモデル化する。重さ mg は鉛直下向きにはたらく。斜面に沿う方向とそれに垂直な方向に分解すると、



加速度は x 方向に $-g\sin\phi$、y 方向に $-g\cos\phi$ であり、いずれも一定である。与えられた初速度と出発点 $(0,0)$ を用いて 2 回積分すると、

$$x = Vt\cos\theta - \tfrac{1}{2}gt^2\sin\phi, \qquad y = Vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2\cos\phi.$$

経路を引き返すための条件

粒子が初めて平面に戻るのは $t > 0$ で $y = 0$ となるとき、すなわち

$$t = T = \frac{2V\sin\theta}{g\cos\phi}.$$

のときである。

> **考えてみよう** 「同じ経路を戻る」ということから、衝突について何がわかるか。

跳ね返った後も、粒子は再び一定の重力のもとで運動する。同じ放物線に沿って原点まで戻るためには、跳ね返った直後の速度が、跳ね返る直前の速度のちょうど逆向きでなければならない（フィルムを逆再生するところを想像するとよい）。平面はなめらかであるとするので、平面が粒子に与える撃力（impulse）は平面に垂直である。つまり、斜面に沿う成分 $\dot{x}$ は跳ね返りによって変化しない。この成分が反転できるのは、それが零である場合だけである。したがって粒子は平面に直角に衝突しなければならず、$t = T$ において $\dot{x} = 0$ となる。（さらに、跳ね返りによって速さを失わずに $\dot{y}$ が反転する必要があるので、衝突は完全弾性（perfectly elastic）でなければならない。問題はこれを暗黙の前提としている。）

ここで $\dot{x} = V\cos\theta - gt\sin\phi$ であるから、$\dot{x}(T) = 0$ より

$$V\cos\theta = gT\sin\phi = \frac{2V\sin\theta\sin\phi}{\cos\phi}.$$

$0 < \theta < \pi/2$ より正である $V\cos\theta$ で割ると、

$$2\tan\phi\tan\theta = 1,$$

となり、示すべき式が得られた。

到達距離

$\dot{x}(T) = 0$ から、より簡潔な形 $T = \dfrac{V\cos\theta}{g\sin\phi}$ が得られる。すると

$$\begin{aligned} R = x(T) &= V\cos\theta\cdot\frac{V\cos\theta}{g\sin\phi} - \frac{1}{2}g\sin\phi\cdot\frac{V^2\cos^2\theta}{g^2\sin^2\phi} \\ &= \frac{V^2\cos^2\theta}{g\sin\phi} - \frac{V^2\cos^2\theta}{2g\sin\phi} = \frac{V^2\cos^2\theta}{2g\sin\phi}, \end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。（同じことを言い換えると、x は $\dot{x}=0$ のとき最大になるので、着地点は、この運動で斜面上を最も高く上る点である。）

$2V^2/(gR)$ に関する恒等式

到達距離（range）の式から、

$$\frac{2V^2}{gR}=\frac{4\sin\phi}{\cos^2\theta}=4\sin\phi\,(1+\tan^2\theta).$$

$\tan\theta=\dfrac{1}{2\tan\phi}$ より $\tan^2\theta=\dfrac{\cos^2\phi}{4\sin^2\phi}$ であるから、

$$\frac{2V^2}{gR}=4\sin\phi+\frac{\cos^2\phi}{\sin\phi}=4\sin\phi+\frac{1-\sin^2\phi}{\sin\phi}=3\sin\phi+\operatorname{cosec}\phi.$$

最大の到達距離

V を固定すると、R が最大となるのは $3\sin\phi+\operatorname{cosec}\phi$ が最小となるときである。$s=\sin\phi$ とおく。$0<\phi<\pi/2$ より $0<s<1$ である。正の数 $3s$ と $1/s$ に対する相加相乗平均の不等式により、

$$3s+\frac{1}{s}\geq 2\sqrt{3s\cdot\frac{1}{s}}=2\sqrt{3},$$

であり、等号が成り立つのは $3s=1/s$、すなわち $s=1/\sqrt{3}$ のときに限る。この値は確かに $(0,1)$ に属するので、この下限は実際に存在する斜面で達成される。よって

$$\frac{2V^2}{gR}\geq 2\sqrt{3}\quad\Longrightarrow\quad R\leq\frac{V^2}{\sqrt{3}g},$$

であり、等号は $\sin\phi=1/\sqrt{3}$ のとき成り立つ。したがって、到達距離の最大値は $V^2/(\sqrt{3}g)$ である。

考えてみよう 最大となるとき、条件 $\phi+\theta<\pi/2$ は満たされているか。

満たされている。実は常に満たされる。$\tan\theta\tan\phi=\frac{1}{2}$ で、両方の角が鋭角であるから、

$$\tan(\phi+\theta)=\frac{\tan\phi+\tan\theta}{1-\tan\phi\tan\theta}=2(\tan\phi+\tan\theta)>0,$$

であり、$0<\phi+\theta<\pi$ なので、$\phi+\theta<\pi/2$ でなければならない。最大となるとき、$\sin\phi=1/\sqrt{3}$ から $\tan\phi=1/\sqrt{2}$ となり、$\tan\theta=1/\sqrt{2}$ も成り立つ。つまり最良の場合は $\theta=\phi\approx 35.3^\circ$ である。

検算

▶ 単位：V^2/g は長さであり、到達距離として妥当である。

- 極限：$\phi \to 0$ のとき $\operatorname{cosec}\phi \to \infty$ であり、$R \to 0$ となる。ほとんど水平な平面に直角に着地するには、ほぼ真上に打ち出すしかなく、到達距離はほとんどない。$\phi \to \pi/2$ のとき平面は鉛直な壁となり、$\theta \to 0$、$2V^2/(gR) \to 4$ であるから $R \to V^2/(2g)$ となる。これは壁に沿って真上に投げ上げた粒子が達する高さである。どちらも理にかなっている。
- 数値的には、$g = 9.8$、$V = 10$、$\phi = 0.7$ として運動を逐次計算すると、$x \approx 5.8561$ に着地し、公式と一致する。着地時の速度は $\dot{x} \approx 0$ であり、それを反転させると粒子は原点に戻る。ϕ について格子探索を行うと、$V = 1$ のとき最大値 $R \approx 0.05891$ が得られ、これは $1/(9.8\sqrt{3})$ に等しい。

よくある間違い

- 重力の分解を逆にしてしまう。斜面に**沿う**成分が $g\sin\phi$ で、斜面に**垂直な**成分が $g\cos\phi$ である。$\phi = 0$ で確かめるとよい。
- 粒子は「水平に」あるいは「最高点で」着地しなければならないと言ってしまう。条件は、**平面**に直角に衝突すること、すなわち傾けた座標軸で $\dot{x} = 0$ となることである。
- $\sin\phi = 1/\sqrt{3}$ が実現可能であることの確認を忘れる。相加相乗平均の不等式が与えるのは限界であり、それが最大値となるのは等号が実際に成り立ちうる場合だけである。

STEP のその先へ

経路を引き返すことができるのは、ニュートン力学の**時間反転可能性**（time-reversibility）による。位置のみに依存する力については、すべての速度を反転させると、系はそれまでの履歴をたどって戻っていく。既定の水平・鉛直方向ではなく、幾何に合わせた座標軸を選ぶことは、大学の力学で絶えず使うことになる習慣である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、この両方の考え方が展開されている。

解答例

STEP III 2007、第 11 問

力学 ・ 縁を越えて転がる運動

STEP III 2007、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s3-q11

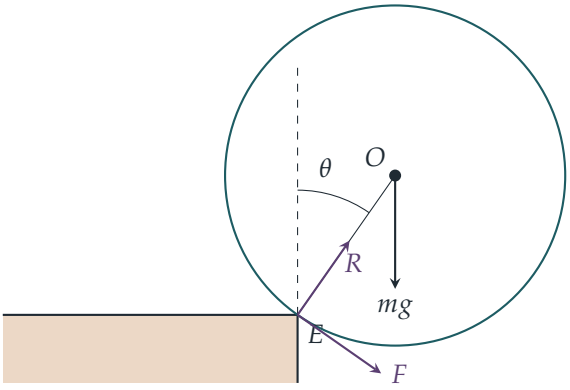
鍵となる考え方

リムが台の縁に達すると、縁は支点（pivot）としてはたらく。縁に接しているリム上の点は静止しているので、中心は縁を中心とする半径 a の円周上を動く。縁での接触力（contact force）を、半径方向の成分 R（垂直抗力（normal reaction））とリムに沿った成分 F（摩擦力（friction））に分け、それらを重心（centre of mass）の運動と比較する。この問題の要点は、質量がどこにあるかに尽きる。(i) ではすべての質量が中心にあるので、車輪は中心のまわりの慣性モーメント（moment of inertia）をもたない。(ii) では質量がリム上にあり、それこそが摩擦力を生み出す原因である。

解答

モデルと記号。リム、スポーク、輪は軽い剛体（rigid body）であり、ハブと 2 つの粒子は質点として扱う。縁上でリムと接する点を E、中心を O とし、EO が鉛直上向きとなす角を θ とする。したがって車輪が縁に到達した瞬間に $\theta = 0$ である。リムが滑らずに E と接している間、E にあるリム上の物質点は静止している。よって剛体は E のまわりを角速度（angular speed）$\dot{\theta}$ で回転し、O は E を中心とする半径 a の円周上を速さ $a\dot{\theta}$ で動く。

E での接触力は、R を EO 方向（E から離れる向き）の成分、F を EO に垂直で θ が増加する向きを正とする成分として、2 つの成分に分けられる。E は静止しているので接触力は仕事をせず、エネルギーは保存される。



ここで R は EO に沿ってはたらき、F は正の向きに描いてある。

E から距離 a にある重心 G の加速度は、運動方向に $a\ddot{\theta}$、E に向かう向きに $a\dot{\theta}^2$ の成分をもつ。物体全体にはたらく外力（重力 mg と接触力）を分解すると、

$$\text{運動方向：}\quad ma\ddot{\theta} = mg\sin\theta + F, \tag{1}$$

$$\text{向かう先}E\text{：}\quad ma\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - R. \tag{2}$$

どちらの小問でも重心は O（ハブ、あるいは 2 つの粒子の中点）にあるので、(1) と (2) はどちらの場合にも成り立つ。

小問 (i)

台の上で車輪は一定の速さ u で動くので、$\theta = 0$ で $\dot{\theta} = u/a$ である。運動エネルギーはハブのもの $\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$ だけであり、ハブは $a(1-\cos\theta)$ だけ下降しているから、

$$a^2\dot{\theta}^2 = u^2 + 2ga(1-\cos\theta).$$

時間で微分し、$2a\dot{\theta}$（$\dot{\theta} \geq u/a > 0$ より 0 でない）で割ると、

$$a\ddot{\theta} = g\sin\theta.$$

これを (1) に代入すると $F = 0$ となる。すなわち**摩擦力は 0 である**。これが示すべきことであった。

直接的な理由もある。リムとスポークは軽いので、それらにはたらく力の O のまわりのモーメントの総和は 0 でなければならない。それらの力は E での接触力と、O でハブから受ける力であり、後者は O のまわりのモーメントをもたない。接触力の O のまわりのモーメントは Fa なので、$F = 0$ である。

(2) より、垂直抗力は

$$R = mg\cos\theta - \frac{m}{a}\left(u^2 + 2ga(1-\cos\theta)\right) = mg(3\cos\theta - 2) - \frac{mu^2}{a}.$$

$\theta = 0$ でこれは $m(g - u^2/a) > 0$ となる。$u^2 < ag$ だからである。よって車輪はすぐには縁から離れない。その後 θ が増加するにつれて R は減少し、リムは $R = 0$ となるとき、すなわち

$$\cos\theta = \frac{2ag + u^2}{3ag},$$

のときに接触を失う。$u^2 < ag$ なので、この値は 1 より小さい。そのときハブが下降した距離は

$$a(1 - \cos\theta) = a \cdot \frac{3ag - 2ag - u^2}{3ag} = \frac{ag - u^2}{3g},$$

となり、示すべき結果が得られた。全体を通して $F = 0$ なので、滑らないという仮定に摩擦の助けは要らず、この解析はこの点に至るまでそのまま成り立つ。

小問 (ii)

考えてみよう 輪が E のまわりに回転している間、2 つの粒子はどこにあるか？

$\theta = 0$ では粒子を通る直径は鉛直なので、下側の粒子は接触点 E にある。その後、輪は E にある物質点、すなわちその粒子のまわりに剛体として回転するので、その粒子は E にとどまる。もう一方の粒子は直径の反対側、つまり E から距離 $2a$ だけ E ではなく EO に沿って離れた位置にとどまる。

よって E のまわりの慣性モーメントは $\frac{m}{2}(2a)^2 = 2ma^2$ である。台の上では輪は一定の速さ u で転がる（仕事をする力はない）ので、$\theta = 0$ で $\dot\theta = u/a$ である。動く方の粒子は E より $2a\cos\theta$ だけ高い位置にあり、エネルギー保存則（conservation of energy）より

$$\tfrac{1}{2}(2ma^2)\dot\theta^2 + \tfrac{m}{2}g(2a\cos\theta) = \tfrac{1}{2}(2ma^2)\frac{u^2}{a^2} + \tfrac{m}{2}g(2a), \qquad \text{よって} \qquad a^2\dot\theta^2 = u^2 + ga(1 - \cos\theta).$$

微分して $2a\dot\theta \neq 0$ で割ると $a\ddot\theta = \frac{1}{2}g\sin\theta$ を得る。すると (1) より

$$F = ma\ddot\theta - mg\sin\theta = -\tfrac{1}{2}mg\sin\theta.$$

したがって、すべての $\theta > 0$ に対して**摩擦力は 0 でない**。（その大きさは $\frac{1}{2}mg\sin\theta$ であり、O の運動方向とは逆向きにはたらく。）(i) とは異なり、今度はリムが質量をもつので、輪の回転を O の運動に追随させるには O のまわりのトルク（torque）が必要であり、それを供給できるのは摩擦だけである。

(2) より、

$$R = mg\cos\theta - \frac{m}{a}\left(u^2 + ga(1 - \cos\theta)\right) = mg(2\cos\theta - 1) - \frac{mu^2}{a}.$$

$\theta = 0$ では $R = m(g - u^2/a) > 0$ かつ $F = 0$ なので、縁を越える運動は確かに滑らずに始まる。輪が滑らずに接触を保ち続けるとすれば、R は

$$\cos\theta_1 = \frac{ag + u^2}{2ag} < 1,$$

となる点で o まで減少する。ここで $u^2 < ag$ を用いた。よって $\theta_1 > 0$ であり、そこでは $|F| = \frac{1}{2}mg\sin\theta_1 > 0$ である。

考えてみよう なぜこのことから、接触を失う前に滑りが起こるといえるのか？

摩擦係数（coefficient of friction）を μ とすると、滑らないためには $|F| \le \mu R$ が必要である。$\theta \to \theta_1$（下から近づける）とすると、$R \to 0^+$ となる一方で $|F| \to \frac{1}{2}mg\sin\theta_1 > 0$ であるから、$|F|/R \to \infty$ となる。したがって μ の値が（有限である限り）いくらであっても、R がまだ正であるうちに、$|F|$ が μR を超えなければならないような角 $\theta < \theta_1$ が存在する。よって輪は台との**接触を失う前に滑る**。

検算

- (i) で $u^2 \to ag$ とすると、下降距離は 0 に近づく。このときハブは $\theta = 0$ ですでに飛び出す寸前であり、そこでは $g = u^2/a$ である。$u \to 0$ とすると下降距離は $a/3$ となり、これは滑らかな球の頂上から静止状態で滑り始めた質点が球面を離れるという、よく知られた結果である。
- $a = 1\,\mathrm{m}$、$u = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ として運動方程式を数値的に時間発展させると、(i) では下降距離 0.1974 m が得られ、$(ag - u^2)/(3g)$ と一致する。(ii) では $\cos\theta_1 = 0.7039$ となり、$R = 0$ の直前で $|F|/R$ は 10^4 を超えた。
- (ii) の接触力を 2 つの粒子の加速度から直接（$m\ddot{\mathbf{r}}_G$ から重力を引いて）計算すると、F と R の両方が再現される。

よくある間違い

- (ii) で O のまわりの転がりの運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ を使いながら、支点のまわりの回転が始まると一方の粒子が E に固定されることを忘れる。E のまわりで考える方がすっきりする。
- 縁で力を水平方向と鉛直方向に分解してしまう。角では「法線」方向は鉛直ではなく、半径 EO の方向である。

- $F \neq 0$ というだけで「滑る」と結論してしまう。この議論には、$|F|$ が o から離れたまま $R \to 0$ となることが必要である。

STEP のその先へ

2 つの小問の対比は、質量分布に関するものである。角運動量の方程式と運動量の方程式の両方が満たされなければならないので、重心の運動が同じでも、慣性モーメントによって必要な接触力は異なる。大学の最初の力学の講義では、これは剛体の力学（rigid-body dynamics）となる。そこでは物体の運動は $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}_G$ と G のまわりのトルクの方程式によって支配され、接触の拘束条件（転がり、滑り、接触の喪失）は不等式 $R \geq 0$ と $|F| \leq \mu R$ によって判定される。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この 2 つの方程式を詳しく扱っている。

解答例

STEP III 2007、第 12 問

確率・統計 ・ ランダムな個数の和

> **STEP III 2007、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q12

鍵となる考え方

Y は項の個数が**確率的に決まる**和であるから、項数が一定の確率変数の和に対する規則をそのまま使うことはできない。ここでのこつは N で条件付けることである。$N = k$ であるとわかってしまえば、Y は k 個の独立な確率変数の通常の和であり、その平均と分散はわかっている。そのあとで N の分布について平均をとる。最初の小問で $\mathrm{E}(N)$ と $\mathrm{E}(N^2)$ を求めさせているのはこのためである。

解答

N の分布

数は一様ランダムに選ばれるものとする。したがって $k = 1, 2, \ldots, 2n-1$ に対して $\mathrm{P}(N = k) = \frac{1}{2n-1}$ である。$m = 2n-1$ として $\sum_{k=1}^{m} k = \frac{1}{2}m(m+1)$ と $\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$ を用いると、

$$\mathrm{E}(N) = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{(2n-1)(2n)}{2} = n,$$
$$\mathrm{E}(N^2) = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{(2n-1)(2n)(4n-1)}{6} = \frac{n(4n-1)}{3}.$$

（平均が n であることは対称性からも明らかである。n は $1, \ldots, 2n-1$ のちょうど真ん中である。）あとで使うために、

$$\mathrm{Var}(N) = \frac{n(4n-1)}{3} - n^2 = \frac{n^2 - n}{3} = \frac{n(n-1)}{3}.$$

を求めておく。

N による条件付け

k を固定し、$N = k$ であるとする。X_i は N と独立（independent）であるから、$N = k$ で条件付けてもそれらの分布は変わらない。よって $N = k$ のもとで $Y = X_1 + \cdots + X_k$ であり、これはそれぞれ平均 μ、分散 σ^2 をもつ k 個の独立な確率変数の和である。ゆえに

$$\mathrm{E}(Y \mid N = k) = k\mu, \qquad \mathrm{Var}(Y \mid N = k) = k\sigma^2,$$

となる。2 つ目の式では X_i の独立性を用いた（分散は足し合わされる）。したがって

$$\mathrm{E}(Y^2 \mid N = k) = \mathrm{Var}(Y \mid N = k) + \big(\mathrm{E}(Y \mid N = k)\big)^2 = k\sigma^2 + k^2\mu^2.$$

考えてみよう 条件付き期待値（conditional expectation）から通常の期待値に戻るにはどうすればよいか。

全期待値の法則（law of total expectation、分割定理（partition theorem）ともいう）による：$\mathrm{E}(g(Y,N)) = \sum_k \mathrm{P}(N = k)\,\mathrm{E}(g(Y,N) \mid N = k)$。各項の中では、$N$ は単なる数 k である。

Y の平均

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_k \mathrm{P}(N = k)\, k\mu = \mu\,\mathrm{E}(N) = n\mu,$$

となり、求める結果が得られた。

共分散

$N = k$ のもとで $YN = kY$ であるから、$\mathrm{E}(YN \mid N = k) = k \cdot k\mu = k^2\mu$ である。したがって $\mathrm{E}(YN) = \mu\,\mathrm{E}(N^2)$ であり、

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y,N) &= \mathrm{E}(YN) - \mathrm{E}(Y)\,\mathrm{E}(N) = \mu\,\mathrm{E}(N^2) - n\mu \cdot n \\ &= \mu\,\mathrm{Var}(N) = \tfrac{1}{3}n(n-1)\mu,\end{aligned}$$

となる。これが求める結果である。

Y の分散

$\mathrm{E}(Y^2 \mid N = k) = k\sigma^2 + k^2\mu^2$ を N について平均すると、

$$\mathrm{E}(Y^2) = \sigma^2\,\mathrm{E}(N) + \mu^2\,\mathrm{E}(N^2) = n\sigma^2 + \frac{n(4n-1)}{3}\mu^2.$$

ゆえに

$$\mathrm{Var}(Y) = n\sigma^2 + \frac{n(4n-1)}{3}\mu^2 - n^2\mu^2 = n\sigma^2 + \frac{n(n-1)}{3}\mu^2.$$

2 つの項には自然な意味がある。$n\sigma^2$ は試行回数を固定したときの Y のばらつきの平均であり、$\frac{1}{3}n(n-1)\mu^2 = \mu^2\,\mathrm{Var}(N)$ は試行が何回行われるかわからないことによって生じる余分なばらつきである。

検算

- $n = 1$ ならばつねに $N = 1$ であり、公式は $\mathrm{E}(Y) = \mu$、$\mathrm{Cov}(Y, N) = 0$、$\mathrm{Var}(Y) = \sigma^2$ に帰着する。単独の X_1 に対しては当然そうなるべきである。
- $\mu = 0$ ならば余分な項は消える。このとき項数は平均に影響しないので、ばらつきを増やすことも Y と相関をもつこともありえない。
- $n = 2$ とし、各 X_i は確率 $\frac{1}{2}$ ずつで 0 または 1 をとるとする。このとき $N \in \{1, 2, 3\}$ かつ $Y \mid N \sim \mathrm{B}(N, \frac{1}{2})$ であり、公式から $\mathrm{Var}(Y) = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ が得られる。$n = 1, \ldots, 6$ および X_i のいくつかの分布について、(N, Y) の同時分布を厳密に数え上げることで、この値とすべての結果を確認した。

よくある間違い

- N 自体が変動することを忘れて、$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(N)\sigma^2$ だけを書いてしまう。2 つ目の項こそが要点である。
- Y と N を独立とみなして $\mathrm{Cov}(Y, N) = 0$ としてしまう。$\mu > 0$ のときは試行が多いほど和が大きくなるので、両者には正の相関がある。

STEP のその先へ

Y は**ランダム和**（random sum、複合分布（compound distribution）ともいう）であり、分散についての結果は全分散の法則（law of total variance）$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(\mathrm{Var}(Y \mid N)) + \mathrm{Var}(\mathrm{E}(Y \mid N))$ の一例である。ここではこれが $\sigma^2\mathrm{E}(N) + \mu^2\mathrm{Var}(N)$ となる。ランダム和は保険金請求や分枝過程（branching process）のモデルとなり、確率母関数（probability generating function）を用いると $G_Y(s) = G_N(G_X(s))$ のように見事に扱える。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、ランダム和と分枝過程をこの方法で扱っている。

解答例

STEP III 2007、第 13 問

確率・統計 ・ ランダムウォークの期待値

STEP III 2007、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

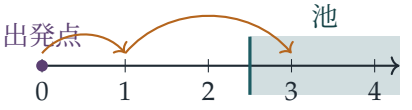
step.maths.org/questions/07-s3-q13

鍵となる考え方

0.5 m という半端な距離は、「ちょうど縁に着地する」場合についての曖昧さを取り除くためのものである。$(n-\frac{1}{2})$ m 離れた地点から出発すると、カエルが池に入るのは、跳んだ距離の合計が n **以上**になったときであり、そのときに限る。したがって問題はすべて、1 と 2 の累積和が初めて n に達する時点に帰着する。n が小さいときは可能性を書き出せばよい。一般の公式については、u_n の三つの値から三つの定数についての三つの方程式が得られる。

解答

最初の j 回の跳躍で進む距離の合計（メートル単位）を S_j とし、池に達するまでに必要な跳躍の回数を T とする。$(n-\frac{1}{2})$ m 離れた地点から出発するので、j 回跳んだ後にカエルが池の中にいるのは $S_j > n-\frac{1}{2}$ のとき、そしてそのときに限る。S_j は整数であるから、これは $S_j \geq n$ と同値である。よって $p_n(j) = \mathrm{P}(T=j)$ であり、T は $S_j \geq n$ を満たす最小の j である。



図は $n=3$（縁までの距離は 2.5 m）の場合で、「短、長」という跳躍の列を示している。この列では 2 回の跳躍で池に達する。

小問 (i)

$n = 2$ のとき、縁までの距離は 1.5 m である。最初の跳躍が長ければ（確率 q）カエルはそのまま池に入るので、$p_2(1) = q$ である。そうでなければ最初の跳躍は短く（確率 p）、カエルは縁から 0.5 m の位置にいるので、2 回目の跳躍はどちらであっても池に入る。各跳躍は独立（independent）であるから

$$p_2(2) = p \times 1 = p,$$

となり、示すべきことが得られた。（また $j \geq 3$ に対して $p_2(j) = 0$ であり、$p + q = 1$ により確率分布（probability distribution）が尽くされていることが確かめられる。）

小問 (ii)

$\frac{1}{2}$ m 離れた地点からはどの跳躍でも池に着地するので、$u_1 = 1$ である。

小問 (i) を用いると

$$u_2 = 1 \cdot p_2(1) + 2 \cdot p_2(2) = q + 2p = 2 - q.$$

$n = 3$ のときは $S_j \geq 3$ となる必要がある。

- $S_1 \leq 2$ であるから、1 回の跳躍では決して足りない。よって $p_3(1) = 0$ である。
- 2 回の跳躍で足りないのは、両方とも短い場合（$S_2 = 2$）に限られる。それ以外の組ではすべて $S_2 \geq 3$ となる。よって $p_3(2) = 1 - p^2$ である。
- 短い跳躍が 2 回続いた後、カエルは 0.5 m 離れた位置にいるので、3 回目の跳躍で必ず池に着地する。よって $p_3(3) = p^2$ である。

したがって

$$\begin{aligned} u_3 &= 2(1 - p^2) + 3p^2 = 2 + p^2 \\ &= 2 + (1 - q)^2 = 3 - 2q + q^2, \end{aligned}$$

となり、示すべきことが得られた。

考えてみよう これらの値をもっと手早く求める方法はあるだろうか。また、それはすべての n に拡張できるだろうか。

ある。最初の跳躍で条件付けすればよい。最初の跳躍の後、カエルは n が 1 または 2 だけ減った同じ状況に置かれるので、$n \geq 2$ に対して

$$u_n = 1 + p\,u_{n-1} + q\,u_{n-2}, \qquad u_0 = 0,$$

が成り立つ。ここで $u_0 = 0$ は、1.5 m の地点から最初に長い跳躍をする場合を表している。この漸化式（recurrence relation）から $u_2 = 1 + p$、$u_3 = 1 + p(1 + p) + q = 2 + p^2$ が再び得られる。小問 (iii) の形が正しい理由もここにある。特性方程式（auxiliary equation）$\lambda^2 - p\lambda - q = 0$ は $(\lambda - 1)(\lambda + q) = 0$ と因数分解でき、これが $(-q)^{n-1}$ の項を与える。そして（「+1」から生じる）重解（repeated root）1 が $B + Cn$ を説明する。

小問 (iii)

$u_n = A(-q)^{n-1} + B + Cn$ に $n = 1, 2, 3$ を代入し、小問 (ii) を用いると

$$A + B + C = 1, \tag{1}$$

$$-qA + B + 2C = 2 - q, \tag{2}$$

$$q^2A + B + 3C = 3 - 2q + q^2. \tag{3}$$

引き算して B を消去すると

$$(2) - (1): \quad -(1 + q)A + C = 1 - q, \tag{4}$$

$$(3) - (2): \quad q(1 + q)A + C = 1 - q + q^2. \tag{5}$$

次に $q \times (4) + (5)$ により A を消去すると

$$(1 + q)C = q - q^2 + 1 - q + q^2 = 1, \qquad \text{よって} \qquad C = \frac{1}{1 + q},$$

となり、示すべきことが得られた。さらに (4) より

$$(1 + q)A = \frac{1}{1 + q} - (1 - q) = \frac{1 - (1 - q^2)}{1 + q} = \frac{q^2}{1 + q}, \qquad \text{よって} \qquad A = \frac{q^2}{(1 + q)^2},$$

であり、(1) より

$$B = 1 - \frac{q^2}{(1 + q)^2} - \frac{1}{1 + q} = \frac{(1 + q)^2 - q^2 - (1 + q)}{(1 + q)^2} = \frac{q}{(1 + q)^2}.$$

以上より

$$u_n = \frac{q^2(-q)^{n-1} + q + (1 + q)n}{(1 + q)^2}.$$

n が大きい場合。 $0 \le q \le 1$ であるから、項 $A(-q)^{n-1}$ と B は有界である（いずれも大きさは高々 $\frac{1}{4}$）。一方 Cn は限りなく大きくなる。したがって n が大きいとき

$$u_n \approx Cn = \frac{n}{1 + q} = \frac{n}{p + 2q},$$

である。ここで $1 = p + q$ より $1 + q = p + 2q$ を用いた。

この結果が予想どおりである理由。 1 回の跳躍の長さの平均は $1 \cdot p + 2 \cdot q = p + 2q$ メートルである。カエルはおよそ n メートル進む必要があり、大数の法則（law of large numbers）により、N が大きいとき N 回の跳躍の長さの合計は $N(p+2q)$ に近い。よって必要な跳躍の回数は $n/(p+2q)$ に近い。この近似がよいのは、出発点の 0.5 m のずれと、最後の行き過ぎ（カエルが着地するのは縁から高々 1.5 m 先まで）が有界だからである。これらが回数に与える変化は有界な量であり、n に比べて無視できる。この有界な補正こそが $A(-q)^{n-1} + B$ の部分である。

検算

- 公式に $n = 0$ を代入すると $\left(q^2 \cdot (-1/q) + q\right)/(1+q)^2 = 0 = u_0$ となり、あるべき値と一致する。また、この公式は上の漸化式を満たす。
- $q = 0$（すべての跳躍が短い）の場合：$u_n = n$ となる。カエルはちょうど n 回の 1 m の跳躍を必要とするので、これは正しい。
- すべての跳躍の列を（分数を用いて）厳密に数え上げた結果は、$n = 1, \ldots, 12$ および p のいくつかの値について公式と一致した。$q = 0.7$、$n = 200$ でのシミュレーションでは跳躍回数の平均は 117.90 となり、公式による値 117.89、および $n/(p+2q) \approx 117.65$ と比較できる。

よくある間違い

- 「池に着地する」をちょうど $S_j = n$ となることと解釈してしまう。0.5 m のずれがあるためカエルは行き過ぎることがあり、$S_j \geq n$ となる列はすべて数に入る。
- $p_3(2) = 2pq + q^2$ と書くべきところで、長い跳躍が先に来る場合を忘れてしまう。実際には $pq + qp + q^2 = 1 - p^2$ が両方の順序を含んでいる。

STEP のその先へ

u_n についての漸化式は再生方程式（renewal equation）である。μ を 1 歩の平均の長さとするとき $u_n \sim n/\mu$ という結果は、初等再生定理（elementary renewal theorem）と呼ばれる。厳密な形はワルド（Wald）の恒等式 $\mathrm{E}(S_T) = \mu\,\mathrm{E}(T)$ から導かれる。ここでは S_T は n または $n+1$ であるから、$(1+q)u_n = n + \mathrm{P}(\text{行き過ぎる})$ となる。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、ランダムウォーク（random walk）と母関数（generating function）をこうした考え方で扱っている。

解答例

STEP III 2007、第 14 問

確率・統計 ・ 幾何的確率

STEP III 2007、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s3-q14

鍵となる考え方

すべての穴を囲む、中心を固定した最小の円（または正方形）は**最も遠い**穴によって決まる。したがって求めたいのは最大値（maximum）の分布であり、$P(\max \le r)$ は 1 回投げたときの確率の n 乗にすぎない。円板の場合、1 つの穴の O からの距離の 2 乗 R^2 は $[0,1]$ 上の一様分布（uniform distribution）に従うことがわかり、これですべてがすっきりする。正方形の場合、適切な「距離」は $\max(|x|,|y|)$ であり、これは円板上の半径とまったく同じふるまいをする。この一致のおかげで、小問 (iii) もほとんど労せずに片がつく。

解答

小問 (i)

n 個の穴の O からの距離を $R_1,\dots,R_n$ とする。投げる試行が独立（independent）なので、これらも独立である。1 回の試行と $0 \le r \le 1$ について、穴が O から距離 r 以内にあるのは、それが半径 r の円板に落ちるときであり、かつそのときに限るから、

$$P(R_i \le r) = \frac{\pi r^2}{\pi \cdot 1^2} = r^2.$$

$U_i = R_i^2$ とおく。すると $0 \le u \le 1$ に対して $P(U_i \le u) = P(R_i \le \sqrt{u}) = u$ であるから、各 U_i は$[0,1]$ **上の一様分布に従い**、U_i たちは独立である。

O を中心としすべての穴を囲む最小の円の半径は $M = \max_i R_i$、面積は $\pi M^2 = \pi \max_i U_i$ である。$V = \max_i U_i$ とおく。独立性より

$$P(V \le v) = P(U_1 \le v)\cdots P(U_n \le v) = v^n \qquad (0 \le v \le 1),$$

となるので、V の確率密度関数（density）は nv^{n-1} であり、

$$E(V) = \int_0^1 v \cdot nv^{n-1}\,\mathrm{d}v = \frac{n}{n+1}.$$

よって、n 個の穴をすべて囲む最小の円の面積の期待値（expectation）は

$$\boxed{\frac{n\pi}{n+1}}.$$

O に最も近い $n-1$ 個の穴を囲む円については、半径は **2 番目に大きい**距離であるから、面積は πW となる。ここで W は $U_1, \ldots, U_n$ のうち **2** 番目に大きいものである。

? 考えてみよう **2** 番目に大きい値の分布はどうすれば求められるか？

$W \le w$ となるのは、U_i のうち w を超えるものが高々 **1** 個のときであり、かつそのときに限る。超えるものが **1** つもない（確率 w^n）か、ちょうど **1** つだけある場合であり、後者はどれが超えるかの選び方が n 通りあるので確率は $n(1-w)w^{n-1}$ となる。よって

$$P(W \le w) = w^n + n(1-w)w^{n-1} = nw^{n-1} - (n-1)w^n.$$

微分する代わりに、$[0,1]$ に値をとる任意の確率変数（random variable）について成り立つ $E(W) = \int_0^1 P(W > w)\,\mathrm{d}w$ を用いることができる：

$$E(W) = \int_0^1 \left(1 - nw^{n-1} + (n-1)w^n\right)\mathrm{d}w = 1 - 1 + \frac{n-1}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}.$$

したがって、最も近い $n-1$ 個の穴を囲む円の面積の期待値は

$$\boxed{\frac{(n-1)\pi}{n+1}}.$$

（これはきれいなパターンに合致している。n 個の独立な一様分布の点は $[0,1]$ を、長さの期待値がどれも $\frac{1}{n+1}$ である $n+1$ 個の区間に分けるので、k 番目に小さい点の平均は $\frac{k}{n+1}$ となる。）

小問 (ii)

Q を通り盤の辺に平行な座標軸をとると、盤は $-1 \le x, y \le 1$ となる。囲む正方形は、辺が盤の辺に平行なものとする。Q を中心とし、辺の長さの半分が s である正方形は $\{|x| \le s,\ |y| \le s\}$ であるから、穴 (x, y) を含むのは $\max(|x|, |y|) \le s$ のときであり、かつそのときに限る。

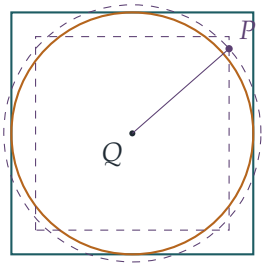
i 番目の穴について $S_i = \max(|x_i|, |y_i|)$ とおく。$0 \le s \le 1$ に対して

$$P(S_i \le s) = \frac{(2s)^2}{2^2} = s^2,$$

であり、これは小問 (i) の $P(R_i \le r) = r^2$ と同じである。囲む最小の正方形の辺の長さの半分は $\max_i S_i$、面積は $(2\max_i S_i)^2 = 4\max_i S_i^2$ である。小問 (i) とまったく同様に、S_i^2 たちは独立で $[0,1]$ 上の一様分布に従うから、その最大値の期待値は $\frac{n}{n+1}$ である。囲む最小の正方形の面積の期待値は

$$\boxed{\frac{4n}{n+1}}.$$

小問 (iii)



今度は盤が正方形であり、Q を中心としすべての穴を囲む最小の円を求めたい。穴 $P = (x, y)$ の Q からの距離は $\sqrt{x^2 + y^2}$ であり、

$$\sqrt{x^2 + y^2} \;\ge\; \max(|x|, |y|) = S,$$

が成り立ち、等号は P が座標軸上にあるときに限る。(図において、P を通る破線の円は、P を通る破線の正方形の内接円より小さくなることはない。) したがって、D を穴の Q からの距離の最大値とすると $D \ge \max_i S_i$ であり、囲む円の面積は

$$\pi D^2 \;\ge\; \pi \max_i S_i^2.$$

を満たす。小問 (ii) より、$\max_i S_i^2$ は円形の盤における $\max_i R_i^2$ とまったく同じ分布をもつから、

$$E(\pi D^2) \;\ge\; \pi\, E\big(\max_i S_i^2\big) = \frac{n\pi}{n+1},$$

となり、右辺は小問 (i) の円形の盤での答えである。この不等式は等号が成り立たない。正の確率でどの穴も座標軸上になく、そのとき $D > \max_i S_i$ となるからである。よって、正方形の盤における円の面積の期待値のほうが**大きい**。

直観的には、正方形の盤は円形の盤を含み (円板はその内接円である)、ダーツは隅のほうまで散らばるので、最も遠い穴はより遠くにある傾向がある、ということである。

検算

- $n = 1$ のとき、公式は $\frac{\pi}{2}$ と 2 を与える。一様分布に従う R^2 の平均は $\frac{1}{2}$ なので、これは正しい。$n \to \infty$ のとき面積は π と 4、すなわち盤全体に近づき、そうなるべきとおりである。
- $n = 2, 3, 5$ について 2×10^5 回の試行によるモンテカルロ・シミュレーション（Monte Carlo simulation）を行ったところ、$\frac{n\pi}{n+1}$、$\frac{(n-1)\pi}{n+1}$、$\frac{4n}{n+1}$ と有効数字（significant figures）約 3 桁で一致した。たとえば $n = 3$ では $\frac{3\pi}{4} \approx 2.3562$ に対して 2.3561 が得られた。
- 小問 (iii) については、厳密な分布の数値積分（quadrature）により、$n = 3$ のとき正方形の盤での面積の期待値は約 3.257、円板では 2.356 となった。主張どおり、前者のほうが大きい。

よくある間違い

- $E(M)$ を求めてから 2 乗してしまうこと。面積の期待値は $\pi E(M^2)$ であって、$\pi\big(E(M)\big)^2$ ではない。
- 中心からの距離が $[0, 1]$ 上の一様分布に従うとしてしまうこと。面積に比例して当たるので、一様分布に従うのは R ではなく R^2 である。外側の輪のほうが大きいのである。
- 2 番目に大きい値について、どの穴が円の外にあるかを表す因子 n を忘れること。

STEP のその先へ

標本の最大値や 2 番目に大きい値は**順序統計量**（order statistics）である。$[0, 1]$ 上の一様分布に従う n 個の独立な確率変数について、k 番目に小さいものはベータ分布（Beta distribution）に従い、その平均は $\frac{k}{n+1}$ である。小問 (iii) は**確率優越**（stochastic dominance）（カップリング（coupling））の一例である。ある確率変数がつねに別の確率変数以上であれば、その期待値も同様であり、この比較には詳しい計算を必要としない。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）、および Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）は、いずれも順序統計量と確率変数の変換を扱っている。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

2007 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

