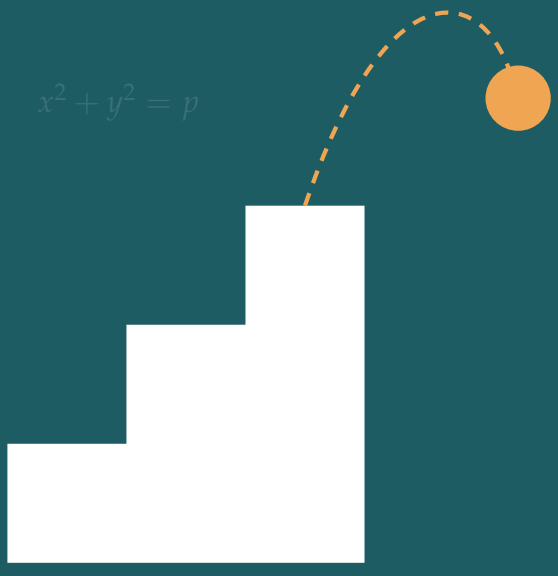
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

2006 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

2006 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

2006 年解答例

2006 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 37 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 平方の差 純粋数学 . . . 3
Q2 面積と最適化 純粋数学 . . . 6
Q3 多項式の根 純粋数学 . . . 10
Q4 正多角形の面積 純粋数学 . . . 14
Q5 置換積分 純粋数学 . . . 18
Q6 ペル方程式の変換 純粋数学 . . . 22
Q7 絶対値記号を含む積分 純粋数学 . . . 26
Q8 空間ベクトル 純粋数学 . . . 30
Q9 連結された質点 力学 . . . 34
Q10 放物運動 力学 . . . 39
Q11 弾性衝突 力学 . . . 43
Q12 条件付き確率 確率・統計 . . . 48
Q13 ポアソン混合分布 確率・統計 . . . 52
Q14 非復元抽出 確率・統計 . . . 56

STEP II

Q1 周期的な漸化式 純粋数学 . . . 60
Q3 無理数と近似 純粋数学 . . . 64
Q4 置換積分 純粋数学 . . . 68
Q5 床関数と面積 純粋数学 . . . 72
Q7 楕円の接線 純粋数学 . . . 76
Q8 ベクトルと直線 純粋数学 . . . 80
Q9 摩擦と転倒 力学 . . . 84
Q10 衝突と反発係数 力学 . . . 88

Q14 連続型確率変数 確率・統計 . . . 92

STEP III

Q1 曲線の概形 純粋数学 . . . 96
Q2 対称性を用いた定積分 純粋数学 . . . 101
Q3 べき級数の係数 純粋数学 . . . 105
Q4 関数方程式 純粋数学 . . . 109
Q5 複素数と図形 純粋数学 . . . 113
Q6 極方程式の曲線と反射 純粋数学 . . . 117
Q7 一階微分方程式 純粋数学 . . . 121
Q8 公理による微分 純粋数学 . . . 125
Q9 エネルギー保存 力学 . . . 129
Q10 角運動量保存則 力学 . . . 133
Q11 連結された系における衝突 力学 . . . 138
Q12 正規近似と期待値 確率・統計 . . . 143
Q13 幾何的確率 確率・統計 . . . 147
Q14 共分散と独立性 確率・統計 . . . 151

解答例

STEP I 2006、第 1 問

純粋数学 • 平方の差

> **STEP I 2006、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q1

鍵となる考え方

$(n+m)^2 - 33\,127 = k^2$ ならば、$33\,127 = (n+m)^2 - k^2$ は 2 つの平方数の差（difference of two squares）であるから、$(n+m-k)(n+m+k)$ と因数分解（factorise）できる。これはフェルマー（Fermat）による古くからの因数分解の技法である：$\sqrt{N}$ のすぐ上から始めて、$a^2 - N$ が平方数になるまで 1 つずつ上へ進んでいく。議論を逆にたどると、33 127 のどの因数分解からも m の値が 1 つ得られるので、m の値の個数を数えることは因数分解の個数を数えることに帰着する。

解答

n を求める

$180^2 = 32\,400$ であるから、33 127 の平方根は 180 より少し大きい。計算すると

$$182^2 = 33\,124 < 33\,127 < 33\,489 = 183^2,$$

となるので、$n = 182$ である。$33\,127 = 182^2 + 3$ であるから、これ自身は完全平方数（perfect square）ではないことに注意する。

小さな m の値

$m = 1, 2, \ldots$ を順に試す：

$$183^2 - 33\,127 = 33\,489 - 33\,127 = 362, \quad \text{平方数ではない} (19^2 = 361),$$
$$184^2 - 33\,127 = 33\,856 - 33\,127 = 729 = 27^2.$$

したがって $m = 2$ が条件を満たし、このとき $(n+m)^2 - 33\,127 = 27^2$ である。

33 127 を因数分解する

移項して平方の差を用いると、

$$33\,127 = 184^2 - 27^2 = (184-27)(184+27) = 157 \times 211,$$

となるので、$p = 157$、$q = 211$ ととることができ、どちらも 1 より大きい。

m の値がちょうど 2 つであること

どちらの因数も素数（prime）である。157 については、$13^2 = 169 > 157$ であるから素数 $2, 3, 5, 7, 11$ だけを調べればよく、いずれも 157 を割り切らない。211 については、$15^2 = 225 > 211$ であるから $2, 3, 5, 7, 11, 13$ を調べればよく、いずれも 211 を割り切らない。よって $33\,127 = 157 \times 211$ が素因数分解（prime factorisation）であり、$u \leq v$ を満たす正の整数の積 uv として 33 127 を表す方法は

$$1 \times 33\,127 \qquad \text{および} \qquad 157 \times 211.$$

に限られる。

次に、$k \geq 0$ として $(n+m)^2 - 33\,127 = k^2$ が成り立つと仮定する。$a = n + m > 0$ とおく。これは問題が想定している状況である（n から出発して上へ進む）。すると

$$(a-k)(a+k) = 33\,127.$$

となる。ここで $a + k > 0$ であるから $a - k > 0$ でもあり、また $a - k \leq a + k$ である。したがって $(a-k, a+k)$ は上の 2 組 (u, v) のいずれかでなければならず、このとき

$$a = \frac{u+v}{2}, \qquad k = \frac{v-u}{2}.$$

である。u と v はどちらも奇数であるから、これらは整数である。

> **考えてみよう** なぜ各因数分解からちょうど 1 つの m が得られるのか。また、なぜそれ以外の m が紛れ込むことはないのか。

この対応は双方向である。a と k が与えられれば、組 $(a-k, a+k)$ は 1 つの因数分解である。逆に因数分解 (u, v) が与えられれば、上の式から a と k がただ 1 通りに復元される。よって a の値（したがって $m = a - 182$ の値）は因数の組と一対一に対応（one-to-one correspondence）し、因数の組はちょうど 2 つである。

- $(u, v) = (157, 211)$ からは $a = 184$、$k = 27$ が得られ、$m = 184 - 182 = 2$ となる。これは先に求めた値である。
- $(u, v) = (1, 33\,127)$ からは $a = 16\,564$、$k = 16\,563$ が得られ、

$$m = 16\,564 - 182 = 16\,382.$$

となる。

以上より、m の値はちょうど 2 つであり、それは $m = 2$ と $m = 16\,382$ である。2 つ目の値の検算として、$16\,564^2 - 16\,563^2 = 16\,564 + 16\,563 = 33\,127$ である。

（$n + m$ が負になることも許すならば、a は -184 または $-16\,564$ でもよく、鏡像となる値 $m = -366$ と $m = -16\,746$ が得られる。問題は明らかに $n + m$ が正であることを意図している。）

検算

0 から 16 564 までのすべての m についてコンピュータで直接探索すると、$(182 + m)^2 - 33\,127$ が完全平方数となるのは $m = 2$ と $m = 16\,382$ のときだけであり、33 127 の約数はちょうど $1, 157, 211, 33\,127$ であることがわかる。手計算では、$157 \times 211 = 157 \times 200 + 157 \times 11 = 31\,400 + 1\,727 = 33\,127$ である。

よくある間違い

- 自明な因数分解 $1 \times 33\,127$ を見落とし、m の値を 1 つしか見つけられない。
- 157 と 211 が素数であることを確かめずに主張してしまう。値がちょうど 2 つであるという議論はこの事実に依存している。
- u と v の偶奇（parity）が一致することを確かめない。ここではどちらも奇数なので a と k は整数になるが、4 の倍数でない偶数に対しては、どの因数分解もうまくいかない。

STEP のその先へ

これはフェルマーの因数分解法であり、今回のように N が $\sqrt{N}$ に近い 2 つの因数をもつときにはすばやく機能する。$a^2 - N = k^2$ をちょうど満たすものではなく $a^2 \equiv k^2 \pmod{N}$ を満たすものを見つけるという同じ考え方は、汎用の因数分解アルゴリズムとして最速のものの一つである二次ふるい法（quadratic sieve）の基礎となっている。因数分解と平方の差としての表示との結びつきは、Davenport の *The Higher Arithmetic* で扱われる初等整数論（elementary number theory）への格好の入門となる。

解答例

STEP I 2006、第 2 問

純粋数学 ・ 面積と最適化

> **STEP I 2006、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q2

鍵となる考え方

つなぎとめる点の位置を、ひとつの角からの距離 x という一つの数で定め、ロープが納屋に巻きつく様子を追っていく。すると草を食べられる領域は、半円 1 つと四分円 4 つに分かれ、それらの半径はいずれも x の簡単な一次関数になる。したがって A は閉区間上の x の二次関数であり、問題のどちらの部分も、その最大値と最小値を求めることに帰着する。

解答

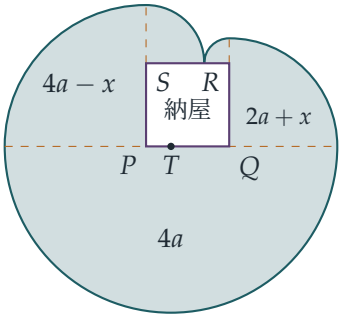
設定

納屋を $PQRS$ とし、ヤギは辺 PQ 上の点 T につながれているとする。ここで $0 \le x \le 2a$ として $PT = x$、$TQ = 2a - x$ である。対称性より、ヤギがどの辺にいるかは問題にならない。

ヤギがある点に届くのは、T からその点まで納屋を避けて進む最短経路の長さが $4a$ 以下であるときである。ロープを張ったとき、その経路は納屋の角で曲がるところを除いて直線である。T から納屋の周りを回っていくと、次のようになる。

- **PQ の前方**。直線 PQ に関して納屋と反対側にある点はすべて T から直接見通せるので、ヤギは半径 $4a$ の半円の草を食べられる。
- **PS と QR の横**。ロープが P で曲がると、残りの長さは $4a - x$ であり、辺 PS に沿って P を中心とする四分円を描く。同様に、Q では $4a - (2a - x) = 2a + x$ が残り、QR に沿って Q を中心とする四分円ができる。

▶ **納屋の裏側。** $x \leq 2a$ より $4a - x \geq 2a$ であるから、ロープは S に届き、なお $(4a - x) - 2a = 2a - x$ の余裕がある。これが辺 SR の裏側に S を中心とする四分円を描く。同様に、ロープは R に届いて $(2a + x) - 2a = x$ が残り、R を中心とする半径 x の四分円ができる。



考えてみよう 納屋の裏側の 2 つの部分が重なり、同じ草を二重に数えてしまうことはないだろうか？

S と R を中心とする四分円は、直線 SR に関して同じ側にある。それらの半径 $2a - x$ と x の和は $2a = SR$ であるから、2 つの円は SR 上の S から $2a - x$ の点でちょうど接する。したがって両者は重ならず、2 つを合わせるとヤギは辺 SR 全体に届く。ほかに重なる部分もない。半円は直線 PQ の一方の側にあり、4 つの四分円は他方の側にあって、それぞれ納屋の横または裏の自分の領域に収まっているからである。また、納屋の裏側の点に届くのは、その点が S または R から残りのロープの長さ以内にあるときであり、かつそのときに限るので、取りこぼしもない。

面積

半円と 4 つの四分円を足し合わせると

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}\pi(4a)^2 + \tfrac{1}{4}\pi\left[(4a - x)^2 + (2a + x)^2 + (2a - x)^2 + x^2\right] \\ &= 8\pi a^2 + \tfrac{1}{4}\pi\left(4x^2 - 8ax + 24a^2\right) \\ &= \pi\left(x^2 - 2ax + 14a^2\right) \\ &= \pi\left[(x - a)^2 + 13a^2\right]. \end{aligned}$$

この式は $[0, 2a]$ のすべての x で成り立つ。両端（$x = 0$ または $x = 2a$、すなわちヤギが角につながれている場合）では四分円の 1 つが 1 点に縮み、半円と半径 $4a$ の四分円がつながって円の 4 分の 3 になる。これは予想どおりである。

最大値と最小値

$0 \le x \le 2a$ では $-a \le x - a \le a$ であるから、$0 \le (x-a)^2 \le a^2$ となる。よって

$$13\pi a^2 \le A \le 14\pi a^2,$$

であり、$A \le 14\pi a^2$ が示された。右側の等号が成り立つのは $x = 0$ または $x = 2a$、すなわちヤギが角につながれているときであり、かつそのときに限る。左側の下界は $x = a$ で達成されるので、A の最小値（minimum value）は

$$A_{\min} = 13\pi a^2,$$

であり、これはヤギが辺の中点につながれているときに得られる。

検算

- 角（$x = 0$）では、半径 $4a$ の円の 4 分の 3（$12\pi a^2$）、隣の辺の反対側の角の周りにできる半径 $2a$ の四分円（πa^2）、納屋の裏側にできる半径 $2a$ の四分円（πa^2）が得られる。合計は $14\pi a^2$ であり、式と一致する。
- $a = 1$ として細かい格子上で草を食べられる面積を見積もった。各点について、納屋を回る本当の最短距離（直線、または角で曲がった折れ線）で判定した。その結果、中点では $13\pi \approx 40.841$ に対して 40.845、角では $14\pi \approx 43.982$ に対して 43.988 が得られ、ほかのつなぎとめる点でも同様に一致した。

よくある間違い

- 納屋の裏側の部分を忘れること。ロープは十分に長く、それぞれの側で 2 つの角を回り込める。
- 納屋の裏側の 2 つの部分が重なるのではないかと心配したり、無理に重なりを計算に入れたりすること。それらの半径の和はつねにちょうど $2a$ であるから、2 つの円は接するだけである。

STEP のその先へ

ぴんと張ったロープは**測地線**（geodesic）、すなわち障害物のある領域における最短経路に沿う。ここではそれが納屋の角でのみ曲がる線分からなるので、ヤギが届く点の集合は、非ユークリッド的な距離の測り方における「球」（ball）になっている。障害物を回り込む最短経路の問題は、変分法（calculus of variations）や、計算機科学に

おける経路計画（motion planning）の問題へとつながっていく。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、注意深い場合分けによって幾何の問題が簡単な代数に変わる、この種の問題がさらに収録されている。

解答例

STEP I 2006、第 3 問

純粋数学 ・ 多項式の根

> **STEP I 2006、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q3

鍵となる考え方

式ではなくグラフで考える。軸より下から始まり、最後には軸より上に出なければならない曲線は、必ず軸と交わる。また、$x = 0$ での値（定数項）を見れば、原点において曲線が軸のどちら側にあるかがわかる。3 次関数（cubic）の場合は、極値をとる点（turning points）が決め手になる。曲線が軸と 3 回交わるのは、極大値（local maximum）が軸より上にあり、かつ極小値（local minimum）が軸より下にあるときであり、またそのときに限る。

解答

小問 (i)

$f(x) = x^2 + bx + c$ とおく。このグラフは下に凸の放物線（parabola）であるから、$x \to \pm\infty$ のとき $f(x) \to +\infty$ である。$c < 0$ ならば $f(0) = c < 0$ であり、曲線は $x = 0$ において軸より下にある。

f は連続（continuous）であり、絶対値の大きい負の x に対しては正、0 においては負であるから、$(-\infty, 0)$ のどこかで軸と交わる。同様に、$(0, \infty)$ でもう一度軸と交わる。これら 2 つの根は 0 の両側にあるので、互いに異なる。2 次方程式の根は高々 2 個であるから、この方程式はちょうど 2 つの相異なる実数解をもち、一方は負、他方は正である。したがって、$c < 0$ は**十分条件**（sufficient condition）である。

しかし、これは**必要条件ではない**（not necessary）。たとえば、$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ は相異なる実数解 1 と 2 をもつが、$c = 2 > 0$ である。（必要十分条件は $b^2 > 4c$ である。$c < 0$ のときは $b^2 \geq 0 > 4c$ となるから、この条件は自動的に成り立つ。）

小問 (ii)

この方程式が相異なる 2 つの正の解をもつための必要十分条件は

$$b^2 > 4c, \qquad b < 0, \qquad c > 0.$$

であることを示す。

必要性。 根を $\alpha \neq \beta$、$\alpha, \beta > 0$ とする。このとき $x^2 + bx + c = (x-\alpha)(x-\beta)$ であるから、

$$c = \alpha\beta > 0, \qquad b = -(\alpha+\beta) < 0, \qquad b^2 - 4c = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha-\beta)^2 > 0.$$

十分性。 $b^2 > 4c$ ならば、根 α, β は相異なる実数である。その積は $c > 0$ であるから、両者は同符号である。その和は $-b > 0$ であるから、その共通の符号は正である。

考えてみよう なぜ $b < 0$ と $c > 0$ だけでは不十分なのか。

$x^2 - x + 1$ を考える。ここでは $b = -1 < 0$、$c = 1 > 0$ であるが、$b^2 - 4c = -3 < 0$ であるから、実数解はまったく存在しない。グラフで言えば、$c > 0$ は曲線が $x = 0$ で軸より上にあることを意味し、$b < 0$ は頂点（vertex）が $x = -\frac{b}{2} > 0$ にあることを意味する。さらに、頂点が軸より下にあることも必要である。頂点の高さは $c - \frac{b^2}{4}$ であり、これが負になるのは $b^2 > 4c$ のときであり、またそのときに限る。3 つの条件はいずれも欠かせない。

小問 (iii)

$g(x) = x^3 + px + q$ とおくと、$g'(x) = 3x^2 + p$ である。実数係数の 3 次方程式は重複度（multiplicity）を込めて 3 つの根をもち、実数でない根は互いに共役な複素数（complex conjugate）の組として現れる。また、どちらの場合も $g(0) = q < 0$ であることに注意する。

$p > 0$、$q < 0$ の場合。 このとき、すべての x に対して $g'(x) = 3x^2 + p > 0$ であるから、g は狭義単調増加であり、実数解をちょうど 1 つもつ。$g(0) = q < 0$ であり g は増加するから、その根は正である。残りの 2 つの根は、実数でない互いに共役な複素数の組である。

したがって、正の単根（simple root）である実数解が 1 つと、実数でない互いに共役な複素数解が 2 つある。

$p < 0$、$q < 0$ の場合。 $a > 0$ として $p = -3a^2$、すなわち $a = \sqrt{-p/3}$ とおく。このとき $g'(x) = 3(x^2 - a^2)$ であるから、g は $(-\infty, -a]$ で増加、$[-a, a]$ で減少、$[a, \infty)$ で増

加する。$x=-a$ で極大、$x=a$ で極小となり、

$$g(-a)=-a^3+3a^3+q=2a^3+q, \qquad g(a)=a^3-3a^3+q=q-2a^3.$$

である。$q<0$ であるから、極小値 $g(a)$ は負である。$[0,a]$ において g は $g(0)=q<0$ から減少するので、ここに根はない。$[a,\infty)$ において g は $g(a)<0$ から $+\infty$ まで増加するので、a より大きい根をちょうど 1 つもち、それは正である。他の実数解があるとすれば $(-\infty,-a]$ または $(-a,0)$ にあるから負であり、そのような根が存在するかどうかは極大値 $g(-a)$ の符号だけで決まる。

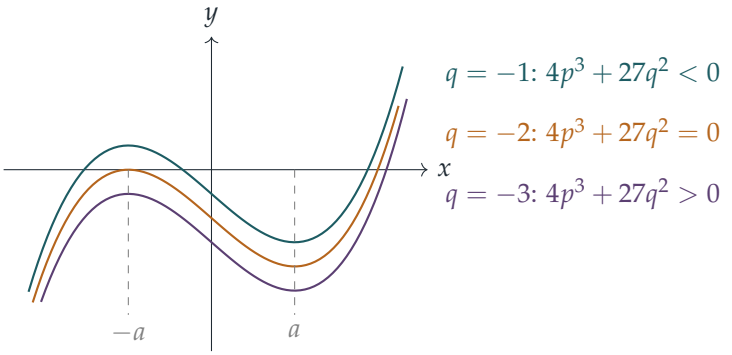
考えてみよう $g(-a)$ の符号は $4p^3+27q^2$ とどのように結びつくか。

2 つの極値を掛け合わせると、

$$g(-a)\,g(a)=(q+2a^3)(q-2a^3)=q^2-4a^6=q^2-4\left(-\frac{p}{3}\right)^3=\frac{4p^3+27q^2}{27}.$$

$g(a)<0$ であるから、$g(-a)$ の符号は $4p^3+27q^2$ の符号と**逆**である。次の 3 つの場合がある。

- $4p^3+27q^2>0$ のとき。$g(-a)<0$ であるから、$(-\infty,a]$ 全体で $g<0$ である（負の値 $g(-a)$ まで増加し、その後減少する）。実数解は正のものだけである。先ほどと同様に、正の実数解が 1 つと、実数でない互いに共役な複素数解が 2 つある。
- $4p^3+27q^2=0$ のとき。$g(-a)=0$ かつ $g'(-a)=0$ であるから、$x=-a$ は重解（repeated root）である。根の和は 0 である（x^2 の項がない）から、3 つ目の根は $2a$ である。根は $-a$、$-a$、$2a$ であり、負の 2 重解と正の単根で、すべて実数である。
- $4p^3+27q^2<0$ のとき。$g(-a)>0$ である。$x\to-\infty$ のとき $g(x)\to-\infty$ であるから、$(-\infty,-a)$ に根がある。$g(-a)>0>g(0)$ であるから、$(-a,0)$ にもう 1 つ根がある。a より大きい根と合わせて、相異なる 3 つの実数解が得られる。2 つは負、1 つは正である。



この図は、$q=-1$、-2、-3 に対する $y=x^3-3x+q$（すなわち $p=-3$、$a=1$）を示している。極大値が軸を越えて上がると、1 つだった実数解が 3 つになる。

$q<0$ のどの場合でも、正の根はちょうど 1 つである。これは根の積が $-q>0$ であることと整合する。

検算

- $p=-3$、$q=-1$ のとき $4p^3+27q^2=-108+27=-81<0$ であり、数値的には根はおよそ -1.532、-0.347、1.879 である。予想どおり、2 つが負、1 つが正である。
- $p=-3$、$q=-2$ のとき、$4p^3+27q^2=0$ であり $x^3-3x-2=(x+1)^2(x-2)$ となるから、根は $-1,-1,2$ である。
- 各場合について数千個の無作為な (p,q) に数値的な求根法を適用し、また無作為な (b,c) を (ii) の条件と照合したところ、上記の主張はすべて確認された。

よくある間違い

- (ii) で $b<0$ と $c>0$（これは根が実数で**あるならば**正であることを保証する）だけを挙げ、$b^2>4c$ を忘れる。
- (ii) で必要性だけ、あるいは十分性だけを証明する。「必要十分」には両方向が必要である。
- (iii) で、重解をもつ境界の場合 $4p^3+27q^2=0$ を忘れる。

STEP のその先へ

量 $-(4p^3+27q^2)$ は 3 次式 x^3+px+q の**判別式**（discriminant）であり、b^2-4ac のまさに類似物である。これは根どうしの差の 2 乗の積に等しいので、重解をもつときに限り 0 となり、3 つの根がすべて相異なる実数であるときに限り正となる。判別式や、根と係数の関係は、ガロア理論（Galois theory）や、どの方程式が冪根（radicals）によって解けるかという問題へとつながっていく。手始めには Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）がよい。

解答例

STEP I 2006、第 4 問

純粋数学 ・ 正多角形の面積

STEP I 2006、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

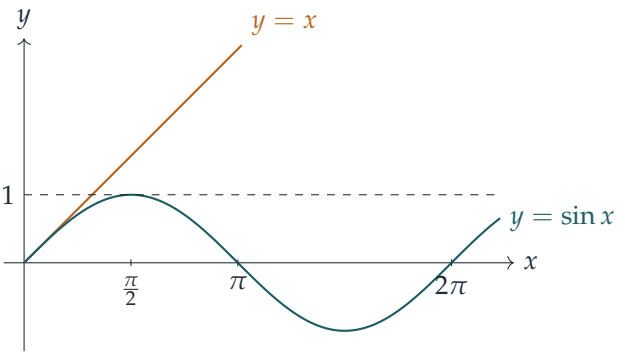
step.maths.org/questions/06-s1-q4

鍵となる考え方

直線 $y = x$ は原点における $y = \sin x$ の接線（tangent）であり、正弦曲線はその下側へと曲がって離れていく。この一枚の図から、不等式と近似（approximation）の両方が得られる。多角形については、中心で集まる n 個の合同（congruent）な二等辺三角形（isosceles triangle）に分割する。するとすべての量が半角 π/n の三角関数で表され、不等式 $\sin x < x$ こそが導関数（derivative）の符号を決めるものであることがわかる。

解答

二つのグラフ



$x = 0$ において $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x = \cos x = 1$ であるから、二つの曲線はどちらも原点を通り、そこでの傾きは 1 である。したがって $y = x$ は O における正弦曲線の接線である。

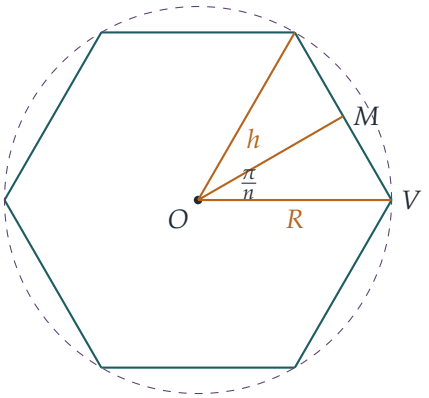
(i) $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ では正弦曲線は上に凸（concave）である（$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \sin x = -\sin x < 0$）

から、O における接線の下側にあり、$\sin x < x$ が成り立つ。（同じことであるが、$g(x) = x - \sin x$ とおくと $g(0) = 0$ であり、$0 < x < 2\pi$ で $g'(x) = 1 - \cos x > 0$ であるから、g はそこで狭義単調増加（strictly increasing）である。）$x > \frac{\pi}{2}$ では $\sin x \leq 1 < \frac{\pi}{2} < x$ である。よって、すべての $x > 0$ に対して $x > \sin x$ である。

(ii) この直線は O における接線であるから、原点の近くでは二つのグラフはほとんど区別がつかない。小さな x に対しては高さ $\sin x$ が高さ x にきわめて近いので、$\dfrac{\sin x}{x} \approx 1$ である。（より精密に述べると、$x > 0$ に対して $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ であるから、$1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin x}{x} < 1$ が成り立つ。）

多角形の面積

多角形の中心 O と各頂点（vertex）を結ぶ。これにより多角形は n 個の合同な二等辺三角形に分割され、それぞれの底辺は一辺 $s = P/n$ に等しく、O における頂角は $2\pi/n$ である。O から辺の中点（midpoint）M へ垂線（perpendicular）を下ろすと、この垂線は頂角を二等分する。



直角三角形 OMV（V は頂点）において、O における角は π/n であり、$MV = \frac{1}{2}s$ である。よって、中心から辺までの距離 $h = OM$ は

$$h = \frac{s/2}{\tan(\pi/n)} = \frac{P}{2n\tan(\pi/n)}.$$

である。n 個の三角形はそれぞれ面積 $\frac{1}{2}sh$ をもつから、多角形の面積は

$$A = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{n} \cdot \frac{P}{2n\tan(\pi/n)} = \frac{P^2}{4n\tan(\pi/n)},$$

となり、示すべき式が得られた。

面積は n とともに増加する

P を固定し、$f(n) = n\tan\dfrac{\pi}{n}$ として $A = \dfrac{P^2}{4f(n)}$ と書く。$n \geq 3$ では $f(n) > 0$ であるから、A が増加するのは f が減少するときであり、そのときに限る。積の微分法則（product rule）と合成関数の微分法則（chain rule）により、

$$f'(n) = \tan\frac{\pi}{n} + n\sec^2\frac{\pi}{n}\cdot\left(-\frac{\pi}{n^2}\right) = \tan\theta - \theta\sec^2\theta, \qquad \text{ただし} \theta = \frac{\pi}{n}.$$

考えてみよう $\tan\theta - \theta\sec^2\theta$ の符号はどのように決めればよいだろうか？

正の因数 $\sec^2\theta$ をくくり出し、$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ を用いると、

$$f'(n) = \sec^2\theta\left(\sin\theta\cos\theta - \theta\right) = \tfrac{1}{2}\sec^2\theta\left(\sin 2\theta - 2\theta\right).$$

となる。$n \geq 3$ では $0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}$ であるから $2\theta > 0$ であり、小問 (i) より $\sin 2\theta < 2\theta$ である。したがって $f'(n) < 0$ であり、

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}n} = -\frac{P^2 f'(n)}{4f(n)^2} > 0.$$

である。よって、周の長さを固定すると、n が増加するにつれて面積は増加する。

外接円との比較

多角形を含む最小の円は外接円（circumcircle）、すなわち O を中心としすべての頂点を通る円である。これより小さい円では含みきれないことを確かめるため、頂点を $V_1, \ldots, V_n$ とし、$\overrightarrow{OV_k} = \mathbf{v}_k$、$|\mathbf{v}_k| = R$ とおく。対称性より $\sum \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ であるから、$\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ を満たす任意の点 C に対して

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\mathbf{v}_k - \mathbf{c}|^2 = R^2 - \frac{2}{n}\,\mathbf{c}\cdot\sum_{k=1}^{n}\mathbf{v}_k + |\mathbf{c}|^2 = R^2 + |\mathbf{c}|^2 \geq R^2.$$

が成り立つ。よって、C からの距離が R 以上である頂点が存在し、C を中心とし多角形を含む円の半径は R 以上である。外接円の半径（circumradius）は $R = OV$ であり、同じ直角三角形から

$$\tfrac{1}{2}s = R\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad R = \frac{P}{2n\sin\theta}.$$

を得る。したがって面積の比は

$$\frac{A}{\pi R^2} = \frac{P^2}{4n\tan\theta}\cdot\frac{4n^2\sin^2\theta}{\pi P^2} = \frac{n}{\pi}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\tan\theta} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\theta} = \frac{\sin 2\theta}{2\theta},$$

である。ここで $n/\pi = 1/\theta$ を用いた。n が大きいとき $2\theta = 2\pi/n$ は小さいので、小問 (ii) によりこの比はほぼ 1 である。

検算

正方形（$n = 4$、$\theta = \pi/4$）の場合、公式は $A = P^2/16$ を与える。各辺は $P/4$ であるから、これは正しい。面積の比は $\sin(\pi/2)/(\pi/2) = 2/\pi \approx 0.637$ であり、単位円に内接する一辺 $\sqrt{2}$ の正方形と一致する。正六角形の場合、比は $3\sqrt{3}/(2\pi) \approx 0.827$ である。面積の公式は $n = 3, \ldots, 39$ について靴ひも公式（shoelace formula）と照合し、$f'(n) < 0$ は数値微分と照合した。また、比は $n = 100$ で 0.99934、$n = 1000$ で 0.9999934 となった。

よくある間違い

- 直角三角形において、半角 π/n ではなく頂角全体 $2\pi/n$ を用いてしまう。
- $\tan(\pi/n)$ を微分するときに、合成関数の微分による因数 $-\pi/n^2$ を忘れる。
- 「$\tan\theta \approx \theta$ だから」という理由で $\tan\theta < \theta\sec^2\theta$ と主張する。近似では符号は決まらない。符号を決めるのは厳密な不等式 $\sin 2\theta < 2\theta$ である。

STEP のその先へ

極限（limit）$\sin x/x \to 1$ は、$\sin x$ の導関数が $\cos x$ に等しくなることを保証する事実であり、大学初年度の解析学（analysis）の講義では、図からではなく sin の定義からこれを厳密に証明する。単調性（monotonicity）の結果は、等周不等式（isoperimetric inequality）を離散的に垣間見せるものである。等周不等式とは、与えられた長さのすべての閉曲線のうちで円が最大の面積を囲むという主張であり、多角形の面積は円の値 $P^2/(4\pi)$ に向かって増加していく。極限と導関数の厳密な扱いについては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を読んでみるとよい。

解答例

STEP I 2006、第 5 問

純粋数学 • 置換積分

STEP I 2006、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s1-q5

鍵となる考え方

どちらの被積分関数（integrand）にも扱いにくい平方根が含まれている。一次式の平方根を消すもっとも見通しのよい方法は、根号全体を新しい変数とおくことである。根号が消えれば残るのは有理関数（rational function）であり、有理関数は部分分数分解（partial fractions）によって必ず積分できる。小問 (ii) では、まず指数関数を取り除いて平方根の中身を一次式にしておくのがよく、そうすれば同じ手法が使える。

解答

小問 (i)

$x > 4$ より $2x+1 > 9$ であるから、$u = \sqrt{2x+1} > 3$ とおくことができる。$u^2 = 2x+1$ より

$$2u\,\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x, \qquad \text{よって} \qquad \mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}u,$$

であり、

$$x - 4 = \frac{u^2-1}{2} - 4 = \frac{u^2-9}{2}.$$

これらを代入すると

$$\int \frac{3}{(x-4)\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{\frac{1}{2}(u^2-9)\,u}\,u\,\mathrm{d}u = \int \frac{6}{u^2-9}\,\mathrm{d}u.$$

$\mathrm{d}x$ から出てくる因数 u が平方根をちょうど打ち消している。これこそがこの置換（substitution）がうまくいく理由である。ここで $u^2-9 = (u-3)(u+3)$ であり、

$$\frac{6}{(u-3)(u+3)} = \frac{1}{u-3} - \frac{1}{u+3},$$

が成り立つ。これは通分し直せば確かめられる。分子は $(u+3)-(u-3)=6$ となる。したがって

$$\int \frac{6}{u^2-9}\,\mathrm{d}u = \ln(u-3)-\ln(u+3)+K = \ln\left(\frac{u-3}{u+3}\right)+K,$$

である。ここで $u>3$ より $u-3$ と $u+3$ はともに正なので、絶対値記号（modulus signs）は必要ない。$u=\sqrt{2x+1}$ を戻すと

$$\int \frac{3}{(x-4)\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{2x+1}+3}\right)+K,$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

求める積分を I とする。小問 (i) にならって、平方根に名前をつけるのが自然な置換である。

$$w=\sqrt{\mathrm{e}^x+1}, \qquad w^2=\mathrm{e}^x+1.$$

すると $2w\,\mathrm{d}w=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ であるから、$\mathrm{d}x=\dfrac{2w}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}w=\dfrac{2w}{w^2-1}\,\mathrm{d}w$ となる。積分区間の端は次のように変わる。

$$x=\ln 3:\ w=\sqrt{3+1}=2, \qquad x=\ln 8:\ w=\sqrt{8+1}=3.$$

したがって

$$I=\int_2^3 \frac{2}{(w^2-1)\,w}\cdot\frac{2w}{w^2-1}\,\mathrm{d}w=\int_2^3 \frac{4}{(w^2-1)^2}\,\mathrm{d}w.$$

考えてみよう 長い計算をせずに $\dfrac{4}{(w^2-1)^2}$ を部分分数に分解するにはどうすればよいか。

簡単な分解 $\dfrac{2}{w^2-1}=\dfrac{1}{w-1}-\dfrac{1}{w+1}$ から出発し、これを 2 乗する。

$$\begin{aligned}\frac{4}{(w^2-1)^2} &= \frac{1}{(w-1)^2}-\frac{2}{(w-1)(w+1)}+\frac{1}{(w+1)^2}\\ &= \frac{1}{(w-1)^2}+\frac{1}{(w+1)^2}-\frac{1}{w-1}+\frac{1}{w+1},\end{aligned}$$

ここで、中央の項にもう一度同じ簡単な分解を用いた。これで各項はすぐに積分できる。

$$\int \frac{4}{(w^2-1)^2}\,\mathrm{d}w=-\frac{1}{w-1}-\frac{1}{w+1}-\ln\left(\frac{w-1}{w+1}\right)+C,$$

積分区間では $w \geq 2$ なので、絶対値記号は必要ない。値を計算すると

$$\begin{aligned} \text{上端} w=3: &\quad -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}-\ln\tfrac{2}{4} = -\tfrac{3}{4}+\ln 2, \\ \text{下端} w=2: &\quad -1-\tfrac{1}{3}-\ln\tfrac{1}{3} = -\tfrac{4}{3}+\ln 3. \end{aligned}$$

よって

$$I = \left(-\tfrac{3}{4}+\ln 2\right) - \left(-\tfrac{4}{3}+\ln 3\right) = \frac{7}{12}+\ln\frac{2}{3},$$

となり、これが示すべき結果である。

2 段階に分けて、まず $v = \mathrm{e}^x$ とおき（$\int_3^8 \frac{2}{v^2\sqrt{v+1}}\,\mathrm{d}v$ が得られる）、次に $w^2 = v+1$ とおいてもよい。上の一度の置換は、この 2 つを同時に行っているのである。

検算

- (i) の答えを微分する。$u = \sqrt{2x+1}$ とすると $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}$ であり、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\ln\frac{u-3}{u+3} = \frac{6}{u^2-9}$ であるから、導関数は $\frac{6}{u(u^2-9)} = \frac{3}{(x-4)\sqrt{2x+1}}$ となる。
- 数値的には $\frac{7}{12}+\ln\frac{2}{3} \approx 0.58333 - 0.40547 = 0.17787$ であり、もとの被積分関数に $[\ln 3, \ln 8]$ 上でシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると 0.177868 となって、有効数字 6 桁まで一致する。
- 符号と大きさの妥当性の確認：(ii) の被積分関数は正で、長さ $\ln\frac{8}{3} \approx 0.98$ の区間において約 0.33 から約 0.08 まで減少する。したがって 0.2 を少し下回る答えはまさに予想どおりである。

よくある間違い

- (ii) で変数を変えるときに積分区間の端を変え忘れる、あるいは w の式に x の端の値を代入してしまう。
- $\frac{4}{(w^2-1)^2}$ を $\frac{A}{(w-1)^2}+\frac{B}{(w+1)^2}$ の形だけで表そうとする。重複因数がある場合には、一次の項 $\frac{1}{w-1}$ と $\frac{1}{w+1}$ も必要である。
- (i) で $\mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}u$ ではなく $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ としてしまい、平方根が残ってしまう。

STEP のその先へ

どちらの小問も対数と有理式の項で終わるのは、一般的な定理によるものである。すべての有理関数は、部分分数分解を通じて、有理関数・対数・逆正接（inverse tangent）から組み立てられる初等的な原始関数（antiderivative）をもつ。さらに、x と $\sqrt{ax+b}$

の有理式である被積分関数は、置換 $u^2 = ax + b$ によって有理関数になる。これを二次式の平方根に拡張するとオイラー（Euler）の置換（Euler's substitutions）に行き着き、どのような積分が初等的には**計算できない**のかを問うと、リウヴィル（Liouville）の有限項による積分の理論へとつながる。積分とそれがなぜうまくいくのかについての丁寧な解説としては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を読むとよい。

解答例

STEP I 2006、第 6 問

純粋数学 • ペル方程式の変換

> **STEP I 2006、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q6

鍵となる考え方

各小問では、線形な座標変換（linear change of coordinates）によってある二次式が保たれるかどうかが問われている。素直な方法は、代入して展開し、a^2、ab、b^2 の係数を比較（compare coefficients）することである。その背後には、もっと見通しのよい描像がある。$x^2 - 2y^2$ は数 $x + y\sqrt{2}$ の「大きさ」であり、$3 + 2\sqrt{2}$（その大きさは $9 - 8 = 1$ である）を掛けてもその大きさは変わらない。このことがわかれば、(iii) の写像をどう作ればよいかがはっきりする。

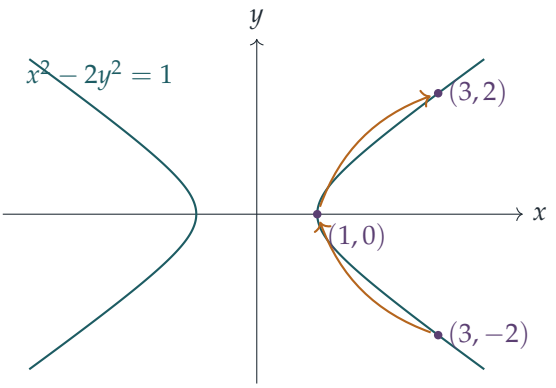
解答

小問 (i)

$a^2 - 2b^2 = 1$ と仮定する。このとき

$$\begin{aligned}(3a + 4b)^2 - 2(2a + 3b)^2 &= (9a^2 + 24ab + 16b^2) - 2(4a^2 + 12ab + 9b^2) \\ &= a^2 - 2b^2 \\ &= 1,\end{aligned}$$

であるから、$(3a + 4b,\ 2a + 3b)$ は $x^2 - 2y^2 = 1$ 上にあり、示すべきことが示された。実は最初の 2 行は、すべての a と b について成り立つ恒等式（identity）である。すなわち、この写像は曲線上だけでなく、至るところで $x^2 - 2y^2$ を保つ。



この写像は、点を右側の枝に沿って滑らせていく：$(3,-2) \mapsto (1,0) \mapsto (3,2) \mapsto (17,12) \mapsto \cdots$。

小問 (ii)

$Ma^2 - Nb^2 = 1$ と仮定する。展開すると

$$M(5a+6b)^2 - N(4a+5b)^2 = (25M-16N)a^2 + (60M-40N)ab + (36M-25N)b^2.$$

像の点が曲線上にあるのは、これが $1 = Ma^2 - Nb^2$ に等しいとき、かつそのときに限る。$Ma^2 - Nb^2$ を引くと、条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} 0 &= (24M-16N)a^2 + (60M-40N)ab + (36M-24N)b^2 \\ &= 4(3M-2N)(2a^2+5ab+3b^2) \\ &= 4(3M-2N)(2a+3b)(a+b). \end{aligned}$$

> **考えてみよう**　本当に $3M = 2N$ が必要なのだろうか。代わりにほかの因数が 0 になることはないのだろうか。

この条件は、曲線上の**すべての**点で成り立たなければならない。$M, N > 0$ のとき、曲線 $Mx^2 - Ny^2 = 1$ は無限個の点をもつ双曲線（hyperbola）である。直線 $2x+3y=0$ と $x+y=0$ はそれぞれこの曲線と高々 2 点でしか交わらないので、曲線上のほとんどの点で $(2a+3b)(a+b) \neq 0$ となる。したがって $3M-2N=0$ が必要である。逆に、$3M = 2N$ ならば条件はすべての点で成り立つ。

よって $3M = 2N$ である。このとき $2 \mid 3M$ であるから、M は偶数である。最小の選び方は $M = 2$ であり、このとき $N = 3$ となる。最後に確認すると、

$$2(5a+6b)^2 - 3(4a+5b)^2 = (50-48)a^2 + (120-120)ab + (72-75)b^2 = 2a^2 - 3b^2.$$

求める最小の正の整数は $M = 2$、$N = 3$ である。

小問 (iii)

次を満たす正の整数を求めたい。

$$(Pa+Qb)^2-3(Ra+Sb)^2=a^2-3b^2 \quad \text{任意の} a,b,$$

これが成り立てば、曲線上のすべての点の像が確かに曲線上にある。係数を比較すると

$$P^2-3R^2=1, \qquad PQ=3RS, \qquad Q^2-3S^2=-3.$$

第 1 式は、$x^2-3y^2=1$ 上の正の整数点 (P,R) を求めよということである。最小のものは $(2,1)$ なので、$P=2$、$R=1$ を試す。すると第 2 式から $Q=\frac{3}{2}S$ が得られ、第 3 式は $\frac{9}{4}S^2-3S^2=-3$、すなわち $S^2=4$ となる。よって $S=2$、$Q=3$ である：

$$P=2, \quad Q=3, \quad R=1, \quad S=2.$$

確認：$(2a+3b)^2-3(a+2b)^2=4a^2+12ab+9b^2-3a^2-12ab-12b^2=a^2-3b^2=1$。よって $(2a+3b,\ a+2b)$ は $x^2-3y^2=1$ 上にある。

考えてみよう このような写像はどこから来るのだろうか。

$(a+b\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=(2a+3b)+(a+2b)\sqrt{3}$ と書いてみる。$x+y\sqrt{3}$ のノルム（norm）x^2-3y^2 は乗法的（multiplicative）であり、$2+\sqrt{3}$ のノルムは $4-3=1$ であるから、これを掛けてもノルムは保たれる。小問 (i) も $3+2\sqrt{2}$ を用いて同じように説明できる。(ii) については $(a\sqrt{2}+b\sqrt{3})(5+2\sqrt{6})=(5a+6b)\sqrt{2}+(4a+5b)\sqrt{3}$ であり、これが (ii) に二次形式 $2x^2-3y^2$ が現れる理由である。(iii) にはほかの答えもある。$(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$ を掛けると $(7a+12b,\ 4a+7b)$ が得られる。

検算

- $x^2-3y^2=1$ 上の $(1,0)$ から始める。(iii) の写像を繰り返すと $(2,1)$、$(7,4)$、$(26,15)$、$(97,56)$ が得られ、いずれも $x^2-3y^2=1$ を満たす（例えば $26^2-3\cdot15^2=676-675=1$）。
- (ii) について、$(1/\sqrt{2},0)$ は $2x^2-3y^2=1$ 上にあり、$(5/\sqrt{2},\ 4/\sqrt{2})$ に写される。このとき $2\cdot\frac{25}{2}-3\cdot\frac{16}{2}=25-24=1$。
- $1\le M,N<30$ の範囲で、各双曲線上の実際の点を調べる総当たり探索を行うと、条件を満たす最小の組が $(2,3)$ であることが確認できる。

よくある間違い

- (ii) で、ab の係数だけを 0 とおき、そのとき a^2 と b^2 の係数がそれぞれ M と $-N$ になることを確かめない。この問題ではそうなるが、それは示さなければならない。
- 問題では曲線上の点しか与えられていないのに、根拠なしに「恒等式がすべての a, b について成り立たなければならない」と述べる。上の因数分解のような、ほかの因数が 0 になる可能性を排除する議論が必要である。

STEP のその先へ

これらはペル方程式（Pell equations）$x^2 - dy^2 = 1$ である。その整数解は、環（ring）$\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ における基本単数（fundamental unit）$x_1 + y_1\sqrt{d}$ のべきによって生成され、ここで扱った写像はそのような単数を掛ける操作である。行列の言葉でいえば、各写像は二次形式（quadratic form）を保つ 2×2 の整数行列であり、「整数直交群（integral orthogonal group）」の元である。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）には、連分数（continued fractions）を用いたペル方程式の、1 章分にわたるすばらしい解説がある。

解答例

STEP I 2006、第 7 問

純粋数学 • 絶対値記号を含む積分

STEP I 2006、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s1-q7

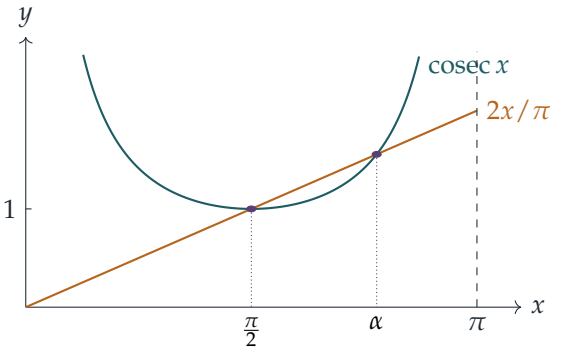
鍵となる考え方

$x\sin x = \pi/2$ を $\frac{\pi}{2}\sin x$（これは $(0,\pi)$ 上で正である）で割ると、$\operatorname{cosec} x = 2x/\pi$ となる。したがって根（root）は直線と U 字型の曲線との交点であり、直線は凸（convex）な曲線と高々 2 回しか交わらない。積分については、絶対値（modulus）を含む場合の要点はただ一つである。中身の式の符号が変わる点を見つけ、そこで積分区間を分割し、各部分を正しい符号で積分すればよい。

解答

小問 (i)：概形と根

$0 < x < \pi$ において、$\operatorname{cosec} x$ は両端で $+\infty$ に発散し、$x = \pi/2$ に関して対称で、そこで最小値 1 をとる。直線 $y = 2x/\pi$ は $(0,0)$ から $(\pi,2)$ まで伸び、cosec 曲線の底である $(\pi/2,1)$ を通る。



$(0,\pi)$ 上で $\sin x > 0$ であるから、

$$x\sin x = \frac{\pi}{2} \iff \frac{1}{\sin x} = \frac{2x}{\pi},$$

となり、根は図の交点の x 座標である。そのうち 1 つはすぐにわかる。$\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ であるから、$x = \pi/2$ が根である。

根がちょうど 2 つであることを確かめるため、$h(x) = \operatorname{cosec} x - 2x/\pi$ とおく。すると

$$h''(x) = \operatorname{cosec} x\,(\operatorname{cosec}^2 x + \cot^2 x) > 0 \quad \text{区間}(0,\pi),$$

であるから、h は狭義凸（strictly convex）であり、狭義凸関数の零点は高々 2 つである。（もし 3 つの零点 $a < b < c$ をもつとすると、b は a と c の真に間にあるのに、$h(b)$ は $(a,0)$ と $(c,0)$ を結ぶ弦の真に下ではなく、弦の上にあることになってしまう。）さて、$h'(\pi/2) = -\cot\frac{\pi}{2}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} = -\frac{2}{\pi} < 0$ であるから、h は $\pi/2$ のすぐ右側で負となる。一方、$x \to \pi^-$ のとき $h(x) \to +\infty$ である。連続性（continuity）より、h は $\pi/2 < \alpha < \pi$ を満たす零点 α をもつ。よって根はちょうど 2 つ、すなわち $\pi/2$ と α であり、α の方が大きい。

小問 (i)：積分

図（および凸性による議論）から、cosec 曲線は 2 つの根の間では直線の下にあり、α より先では直線の上にある。$\operatorname{cosec} x \lessgtr 2x/\pi$ に正の量 $\frac{\pi}{2}\sin x$ を掛けると、これは次のことを意味する。

$$x\sin x - \frac{\pi}{2} \geq 0 \text{ 区間 } \left[\tfrac{\pi}{2},\alpha\right], \qquad x\sin x - \frac{\pi}{2} \leq 0 \text{ 区間}[\alpha,\pi].$$

考えてみよう 絶対値記号はどう処理すればよいだろうか。

符号が変わる α で積分を分割し、2 つ目の部分では式の符号を反転させたものを積分する。

$u = x$、$\mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x$ として部分積分（integration by parts）を行うと、

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x - x\cos x.$$

よって $x\sin x - \pi/2$ の原始関数（antiderivative）の 1 つは

$$F(x) = \sin x - x\cos x - \frac{\pi x}{2},$$

であり、求める積分は

$$I = \left[F(x)\right]_{\pi/2}^{\alpha} - \left[F(x)\right]_{\alpha}^{\pi} = 2F(\alpha) - F\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - F(\pi).$$

となる。3 つの値は

$$F(\alpha) = \sin\alpha - \alpha\cos\alpha - \frac{\alpha\pi}{2},$$
$$F\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 - \frac{\pi^2}{4},$$
$$F(\pi) = 0 - \pi(-1) - \frac{\pi^2}{2} = \pi - \frac{\pi^2}{2}.$$

である。したがって

$$I = 2\sin\alpha - 2\alpha\cos\alpha - \alpha\pi - 1 + \frac{\pi^2}{4} - \pi + \frac{\pi^2}{2}$$
$$= 2\sin\alpha + \frac{3\pi^2}{4} - \alpha\pi - \pi - 2\alpha\cos\alpha - 1,$$

となり、これが求める結果である。

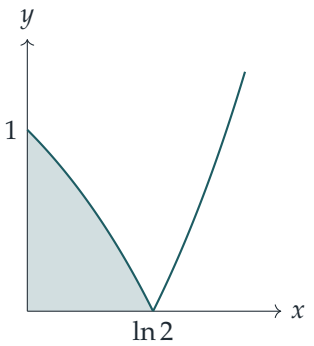
小問 (ii)

考えてみよう 2 つの絶対値記号のうち、ここで実際に効いているのはどちらだろうか。

x 軸の正の部分では $x \geq 0$ であるから $\mathrm{e}^x \geq 1$ となり、内側の絶対値は何の影響も及ぼさない。すなわち $|\mathrm{e}^x - 1| = \mathrm{e}^x - 1$ である。したがって曲線は

$$y = |\mathrm{e}^x - 2| \qquad (x \geq 0).$$

である。これは $0 \leq x \leq \ln 2$ では $2 - \mathrm{e}^x$ に等しく、$x = 0$ における $y = 1$ から $x = \ln 2$ における $y = 0$ まで減少する。また $x \geq \ln 2$ では $\mathrm{e}^x - 2$ に等しく、限りなく増加する。



よって曲線が x 軸に触れるのは $x = \ln 2$ のみであり、x 軸の正の部分、y 軸、曲線で囲まれる領域は $0 \leq x \leq \ln 2$ 上の網掛け部分だけである（$\ln 2$ より先では曲線は上昇し

て離れていき、領域は閉じない)。その面積は

$$\int_0^{\ln 2} (2 - \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \Big[2x - \mathrm{e}^x\Big]_0^{\ln 2} = (2\ln 2 - 2) - (0 - 1)$$
$$= 2\ln 2 - 1 = \ln 4 - 1,$$

となり、題意が示された。

検算

二分法 (bisection) により $\alpha \approx 2.4433$ が得られ、このとき (i) の式の値は約 0.61343 となる。$[\pi/2, \pi]$ 上で $|x\sin x - \pi/2|$ に直接シンプソンの公式 (Simpson's rule) を適用しても、小数第 14 位まで同じ値が得られる。$(0, \pi)$ 上の格子探索により、$x\sin x - \pi/2$ の符号変化はちょうど 2 回、1.5708 付近と 2.4433 付近で見つかる。(ii) では $\ln 4 - 1 \approx 0.38629$ であり、これも数値積分の結果と一致する。(i) の符号に関する簡単な確認として、答えは正でなければならないが、実際に正である。

よくある間違い

- α で分割せずに $[\pi/2, \pi]$ 全体で $x\sin x - \pi/2$ をそのまま積分してしまう。これでは符号付き面積（ここでは負）が得られるだけで、絶対値の積分にはならない。
- 直線が cosec 曲線の最小点を通り、図が接しているように見えるために、$x = \pi/2$ の根を見落とす。実際には接していない。そこでの曲線の傾きは 0、直線の傾きは $2/\pi$ であるから、両者は交差している。
- (ii) で両方の絶対値記号を残したまま、場合分けを必要以上に増やしてしまう。まず $x \geq 0$ を用いて $\mathrm{e}^x - 1$ の符号を確定させるべきである。

STEP のその先へ

根 α は閉じた形で表せないが、それでも積分をそれを用いて厳密に計算することができた。これは解析学ではよくある状況であり、ある量が公式ではなく方程式によって定まるのである。狭義凸関数が直線と高々 2 回しか交わらないという事実は、凸性から導かれる数多くの見事な帰結の 1 つである。凸性はイェンセンの不等式 (Jensen's inequality) や最適化理論の多くの土台にもなっている。Bartle and Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）では、連続性、中間値の定理、凸関数が丁寧に扱われている。

解答例

STEP I 2006、第 8 問

純粋数学 • 空間ベクトル

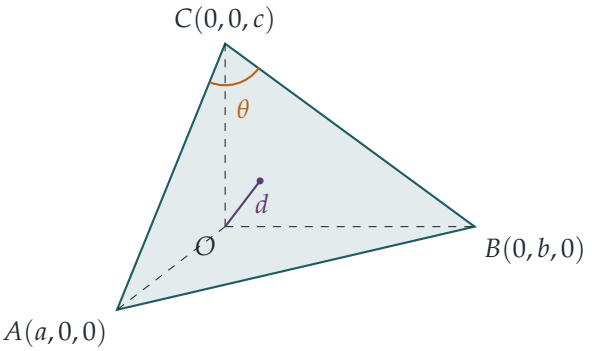
STEP I 2006、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s1-q8

鍵となる考え方

四面体（tetrahedron）$OABC$ は頂点 O において互いに垂直な 3 本の辺をもつので、OAB を底面（base）とすれば体積（volume）は容易に求まる。同じ立体を ABC を底面として見ることもでき、そのとき高さはちょうど求めたい距離 d になる。体積を 2 通りに計算すれば、ABC の面積がわかっている限り、d についての方程式が得られる。その面積は C における角から求まり、その角は内積（scalar product）によって与えられる。



解答

小問 (i)

平面 $z=0$ 上にある三角形 OAB を底面とする。OA と OB はそれぞれ x 軸、y 軸上にあるので、角 AOB は直角である。よって

$$\text{面積}OAB = \tfrac{1}{2}ab.$$

高さは C と平面 $z=0$ との距離であり、OC は z 軸上にあってこの平面に垂直であるから、それは c である。したがって

$$V = \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{2}ab \times c = \frac{abc}{6}.$$

小問 (ii)

角 ACB はベクトル（vector）$\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$ のなす角である：

$$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -c \end{pmatrix}.$$

これらの内積は $0+0+c^2 = c^2$ であり、大きさはそれぞれ $\sqrt{a^2+c^2}$ と $\sqrt{b^2+c^2}$ である。よって

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\,|\overrightarrow{CB}|} = \frac{c^2}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}},$$

となり、求める結果が得られる。

面積を求めるには $\sin\theta$ が必要である。$0<\theta<\pi$ より $\sin\theta>0$ であるから

$$\begin{aligned}\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} &= \sqrt{\frac{(a^2+c^2)(b^2+c^2)-c^4}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}} \\ &= \frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}},\end{aligned}$$

となる。$(a^2+c^2)(b^2+c^2)$ を展開すると c^4 の項が打ち消し合うからである。

> **考えてみよう** 今わかっている情報に合うのは、三角形の面積を求めるどの公式だろうか？

2 辺 CA、CB とそのなす角 θ がわかっているので、$\frac{1}{2}CA\cdot CB\sin\theta$ を用いる。厄介な平方根は打ち消し合う：

$$\text{面積}ABC = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\cdot\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

うれしいことに、答えは a、b、c について対称であり、そうでなければならない。三角形 ABC にとって、どの頂点を C と呼んだかは関係ないからである。

距離 d

今度は ABC を同じ四面体の底面とみなす。その高さは、向かい合う頂点 O から平面 ABC までの垂直距離であり、それが d である。体積はどの面を底面とするかによらないので、小問 (i) と小問 (ii) から

$$\frac{abc}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \times d, \qquad \text{よって} \qquad d = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

両辺を 2 乗して逆数をとると（すべて正である）、

$$\frac{1}{d^2} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

となる。ここで分子の各項を $a^2b^2c^2$ で割った。これが求める結果である。

検算

- $a = b = c = 1$ とする。このとき ABC は 1 辺 $\sqrt{2}$ の正三角形で、面積は $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となり、$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ と一致する。平面は $x + y + z = 1$ で、O からの距離は $1/\sqrt{3}$ であり、確かに $1/d^2 = 3$ である。
- $a = 1$、$b = c = 2$ のとき、公式から体積 $\frac{2}{3}$、面積 $\sqrt{6} \approx 2.449$、$d = 2/\sqrt{6} \approx 0.8165$ が得られ、$1/d^2 = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ となる。
- 数値的に、ランダムな 10 000 組の (a, b, c) について、体積（スカラー三重積（scalar triple product）による）、面積（外積（cross product）による）、d（垂線の足を直接求めることによる）はいずれも公式と 10^{-12} 以内で一致した。

よくある間違い

- $\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{CB}$ を組み合わせて使うこと。向きを混在させると内積の符号が反転し、θ の補角（supplement）が得られてしまう。
- 底面を ABC としたときの高さは、O からその平面に下ろした垂線であって、どの辺の長さでもないことを忘れること。

STEP のその先へ

A、B、C を通る平面は $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ であり、その法線ベクトル（normal）は $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$ である。点と平面の距離の一般公式を使えば、d は 1 行で求まる。面積の結果は 3 次元版の三平方の定理（Pythagoras theorem）、すなわちド・グアの定理（de Gua's theorem）

である：ABC の面積の 2 乗は、O において直角をなす 3 つの面の面積の 2 乗の和に等しい。実際、$\frac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$ はちょうどその和である。どちらの考え方も外積と行列式（determinant）から生まれるもので、これらは大学最初の線形代数（linear algebra）の講義の早い段階で学ぶ。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、それらに触れるのによい一冊である。

解答例

STEP I 2006、第 9 問

力学 ・ 連結された質点

STEP I 2006、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s1-q9

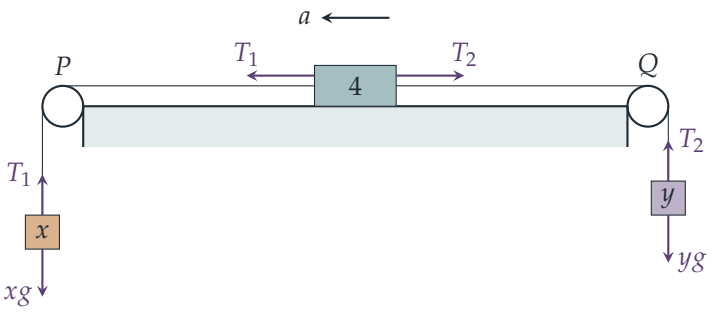
鍵となる考え方

運動は二つの段階に分かれ、各段階では加速度（acceleration）が一定である。両方の糸がつながっている間は、三つの物体からなる系全体が一体となって動き、その駆動力は吊るされた二つのおもりの重さの差である。糸が切られると、ブロックを引くのは軽い方の質点だけとなり、しかもその向きは運動と逆向きなので、ブロックは一様に減速する。糸を切った瞬間の速さが二つの段階を結びつけるものであり、束縛条件（constraint）$x + y = 6$ を用いればすべてを y で表すことができる。

解答

モデル化

ブロックと吊るされた二つのおもりを質点とみなし、糸は軽く伸び縮みしない（light and inextensible）ものとし、台と滑車（pulley）はなめらかであるとする。$x > y$ であるから、ブロックは P の方へ動き、質量 x の質点は下降し、質量 y の質点は上昇する。P にかかる糸と Q にかかる糸の張力（tension）をそれぞれ T_1、T_2 とする。



第 1 段階：両方の糸がつながっているとき

共通の加速度を a_1 とする（ブロックは P の方へ、質点 x は下向き、質点 y は上向き）。各物体についてニュートンの第 2 法則（Newton's second law）を立てると

$$\begin{aligned} xg - T_1 &= xa_1, \\ T_1 - T_2 &= 4a_1, \\ T_2 - yg &= ya_1. \end{aligned}$$

となる。辺々を加えると張力が消去される：

$$(x-y)g = (x+y+4)a_1 = 10a_1, \qquad \text{よって} \qquad a_1 = \frac{(x-y)g}{10} = \frac{(6-2y)g}{10},$$

ここで $x = 6 - y$ を用いた。$y < x$ は $y < 3$ を意味するので、これは正である。

静止状態から一定の加速度で動き始めるので、ブロックは時間 t_1 で距離 d を進み、速さ V に達する。ここで

$$d = \tfrac{1}{2}a_1 t_1^2, \qquad V^2 = 2a_1 d.$$

である。したがって

$$t_1 = \sqrt{\frac{2d}{a_1}} = \sqrt{\frac{20d}{(6-2y)g}} = \sqrt{\frac{d}{5g}}\,\frac{10}{\sqrt{6-2y}}, \qquad V = \sqrt{\frac{(6-2y)gd}{5}}.$$

第 2 段階：糸を切った後

このとき $T_1 = 0$ である。ブロックはなお速さ V で P の方へ動いており、質量 y の質点もなお速さ V で上昇している。ブロックに作用するのは Q にかかる糸だけであり、その糸はブロックを Q の方へ引き戻す。減速度（deceleration）を a_2 とすると

$$\begin{aligned} T_2 &= 4a_2 \quad (\text{ブロック}), \\ yg - T_2 &= ya_2 \quad (\text{質点 } y\text{、上昇しながら減速}), \end{aligned}$$

であるから

$$a_2 = \frac{yg}{4+y}.$$

考えてみよう 糸を切った後も Q にかかる糸がたるまないことは、どうしてわかるのか。

もし糸がたるんだとすると、質点は g で減速する一方、ブロックは速さを保つことになる。糸が張っているとすれば張力は $T_2 = 4a_2 = 4yg/(4+y) > 0$ となって矛盾がなく、共通の減速度 a_2 は g より小さい。したがって糸は実際に張ったままであり、ブロックと質点は止まるまで一体となって動く。

ブロックが静止するまでにさらにかかる時間は

$$\begin{aligned} t_2 = \frac{V}{a_2} &= \sqrt{\frac{(6-2y)gd}{5}} \cdot \frac{4+y}{yg} \\ &= \sqrt{\frac{d}{5g}}\sqrt{6-2y}\left(1+\frac{4}{y}\right), \end{aligned}$$

である。ここで $\sqrt{(6-2y)gd/5}\,/\,g = \sqrt{d/(5g)}\sqrt{6-2y}$ および $(4+y)/y = 1+4/y$ と書き直した。

全体の時間

ブロックが初めて再び静止するのは第 2 段階の終わりであるから、全体の時間は

$$t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{d}{5g}}\left[\frac{10}{\sqrt{6-2y}} + \left(1+\frac{4}{y}\right)\sqrt{6-2y}\right] = \sqrt{\frac{d}{5g}}\,\mathrm{f}(y),$$

となり、示すべき式が得られた。

f の停留値

物理的に意味のある範囲は $0 < y < 3$ である。$u = 6-2y$ とおくと $\mathrm{d}u/\mathrm{d}y = -2$ であり

$$\mathrm{f}(y) = 10u^{-1/2} + \left(1+\frac{4}{y}\right)u^{1/2}.$$

となる。第 2 項に積の微分法（product rule）を用いて微分すると

$$\begin{aligned} \mathrm{f}'(y) &= 10\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)u^{-3/2}(-2) - \frac{4}{y^2}u^{1/2} + \left(1+\frac{4}{y}\right)\tfrac{1}{2}u^{-1/2}(-2) \\ &= \frac{10}{u^{3/2}} - \frac{4u^{1/2}}{y^2} - \frac{y+4}{y\,u^{1/2}}. \end{aligned}$$

$0 < y < 3$ で正である $y^2u^{3/2}$ を掛けると、条件 $f'(y) = 0$ は

$$10y^2 - 4u^2 - (y^2 + 4y)u = 0.$$

となる。$u = 6 - 2y$ を代入すると

$$\begin{aligned} 10y^2 - 4(36 - 24y + 4y^2) - (6y^2 - 2y^3 + 24y - 8y^2) &= 0 \\ 2y^3 - 4y^2 + 72y - 144 &= 0 \\ 2(y-2)(y^2+36) &= 0. \end{aligned}$$

$y^2 + 36 > 0$ であるから、解はただ一つ

$$y = 2,$$

であり、これは $0 < y < 3$ の範囲にある（このとき $x = 4$ である）。

$y \to 0^+$ のときも $y \to 3^-$ のときも $f(y) \to \infty$ であるから、このただ一つの停留点（stationary point）が最小値を与える。$f(2) = 10/\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ であるから、静止するまでの時間の最小値は $8\sqrt{2d/(5g)}$ である。

検算

- ランダムな $y \in (0,3)$ と d に対して運動を数値的に追跡したところ（時間刻み 2×10^{-6} s）、$\sqrt{d/(5g)}\, f(y)$ が有効数字 5 桁で再現された。たとえば $g = 9.8$ として $y = 1.671$、$d = 0.581$ の場合、どちらの方法でも 1.27096 s となる。
- f の数値微分は $(0,3)$ 上でちょうど一回だけ $y = 2$ で符号を変え、$f(2) = 11.3137\ldots = 8\sqrt{2}$ である。
- 極限の場合も筋が通っている。$y \to 3$ のとき質量はほぼつり合い、$a_1 \to 0$ となって第 1 段階に無限に長い時間がかかる。$y \to 0$ のときは糸を切った後にブロックを減速させるものがないので、第 2 段階に無限に長い時間がかかる。

よくある間違い

- 第 2 段階で質量 $4 + x + y$ を用いてしまう。糸が切られた後は、質量 x の質点はもはや系の一部ではない。
- 糸を切った後も質量 y の質点が速さ V で上昇し続けていることを忘れ、第 2 段階を静止状態から始まるものとして扱ってしまう。
- $\sqrt{6 - 2y}$ を微分するときに $du/dy = -2$ を落としてしまう。

STEP のその先へ

運動を速度の連続性によってつながれたいくつかの段階に分けるという考え方は、区分的に定義された力学（piecewise-defined dynamics）の基本であり、撃力（impulsive forces）や、力をオンにしたりオフにしたりする制御問題（control problems）にも再び現れる。どの y を選べば時間が最小になるかを問うことは、力学における最適化（optimisation）の最初の味見であり、これは変分法（calculus of variations）へと発展していく（最速降下線（brachistochrone）がその古典的な例である）。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、連結された物体と束縛力を丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 2006、第 10 問

力学 ・ 放物運動

> **STEP I 2006、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q10

鍵となる考え方

軌道は放物線（parabola）であり、屋根は直線である。したがって「ちょうど接する」とは、その直線が**接線**（tangent）であることを意味する。一方を他方に代入すると x の 2 次方程式が得られ、それが重解（repeated root）をもつということである。符号の問題は、その重解がどこにあるかを考えることで決着する。最後の小問では、2 つの粒子が出会えるのは P が屋根に達する点だけであるから、Q はちょうど P が到達する瞬間にその点へ到達しなければならない。その時刻における水平方向の位置を比較すれば結果が得られる。

解答

軌道

P を、空気抵抗のない状態で重力のみを受けて自由に運動する質点（particle）としてモデル化する。初速度の成分は水平・鉛直ともに $V\cos 45^\circ = V/\sqrt{2}$ であるから、時刻 t において

$$x = \frac{Vt}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{Vt}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$t = \sqrt{2}\,x/V$ を用いて t を消去すると $\frac{1}{2}gt^2 = gx^2/V^2$ となるので、軌道は

$$y = x - \frac{gx^2}{V^2}.$$

屋根に接する条件

P が屋根に達するのは $x - gx^2/V^2 = x\tan\alpha + b$、すなわち

$$\frac{g}{V^2}\,x^2 + (\tan\alpha - 1)\,x + b = 0. \qquad (*)$$

となるところである。（横切るのではなく）接するということは、$(*)$ が重解をもつこと、すなわち判別式（discriminant）が 0 であることを意味する：

$$(\tan\alpha - 1)^2 = \frac{4gb}{V^2} \quad \Longrightarrow \quad V(\tan\alpha - 1) = \pm 2\sqrt{bg}.$$

考えてみよう どちらの符号も判別式の条件を満たす。両者を区別するものは何か。

$(*)$ の重解は

$$x_0 = -\frac{(\tan\alpha - 1)V^2}{2g} = \frac{(1 - \tan\alpha)V^2}{2g}.$$

である。粒子は x が増加する向きに運動する（$x = Vt/\sqrt{2}$ であるから）ので、屋根に接することができるのは $x_0 > 0$ のときに限られる。よって $\tan\alpha - 1 < 0$ でなければならず、$V > 0$ であるから左辺 $V(\tan\alpha - 1)$ は負である。したがって

$$V(-1 + \tan\alpha) = -2\sqrt{bg},$$

となり、示すべき式が得られた。（正の根をとると、接点は $x_0 < 0$、すなわち放物線を後ろ向きに延長した部分にあることになり、P はそこを決して通らない。）幾何学的には、屋根の傾きは初めの運動方向より緩やかでなければならない。つまり $\alpha < 45^\circ$ である。そうでなければ屋根は直線 $y = x$ より常に上にあり、放物線は $x > 0$ においてその直線より下にあるからである。

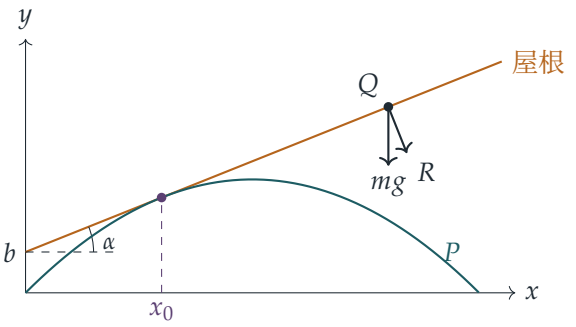
接する時刻

$x = Vt/\sqrt{2}$ であるから、接する時刻は

$$T = \frac{\sqrt{2}\,x_0}{V} = \frac{\sqrt{2}\,(1 - \tan\alpha)V}{2g} = \frac{V(1 - \tan\alpha)}{\sqrt{2}\,g}.$$

レール上の粒子

Q を、直線 $y = x\tan\alpha + b$ に沿ったなめらかなレール上の質点としてモデル化する。Q は $(0, b)$ からレールに沿って x が増加する向きに打ち出される（x が常に正である P に到達するためには、そうでなければならない）。Q にはたらく力は、重力 mg と、レールに垂直なレールからの垂直抗力（normal reaction）R である。図はこれらの力と、$x = x_0$ で屋根に接する P の軌道を示している。



摩擦はないので、レールに沿って斜面の上向きに力を分解すると

$$m\ddot{s} = -mg\sin\alpha,$$

ここで s は $(0,b)$ からレールに沿って測った Q の距離である。$t=0$ で $s=0$、$\dot{s}=U$ であるから

$$s = Ut - \tfrac{1}{2}gt^2\sin\alpha, \qquad x_Q = s\cos\alpha.$$

P は接点以外では決して屋根の上になく、Q は常に屋根の上にある。したがって、2 つの粒子が接触できるのは、時刻 T に Q がその点にあるときに限られる。このとき両粒子はともに屋根の直線上にあるので、時刻 T において x 座標が一致すれば十分である：

$$\left(UT - \tfrac{1}{2}gT^2\sin\alpha\right)\cos\alpha = \frac{VT}{\sqrt{2}}.$$

$T>0$ で割り、$gT = V(1-\tan\alpha)/\sqrt{2}$ を代入すると

$$U\cos\alpha = \frac{V}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{V(1-\tan\alpha)}{\sqrt{2}}.$$

$2\sqrt{2}$ を掛け、$\sin\alpha\cos\alpha\tan\alpha = \sin^2\alpha$ を用いると

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}\,U\cos\alpha &= 2V + V\sin\alpha\cos\alpha\,(1-\tan\alpha) \\ &= V\left(2+\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha\right), \end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。

検算

- 単位：$V(1-\tan\alpha)/g$ は速さを加速度で割ったものなので時間である。また $\sqrt{bg}$ は速さであり、$V(\tan\alpha-1)$ も速さである。
- 極限の場合 $\alpha\to 0$（平らな屋根）：$b = V^2/(4g)$ はおなじみの最高点の高さ $(V\sin 45^\circ)^2/(2g)$ であり、そこに達する時刻は $T = V/(\sqrt{2}g)$ である。また Q は

レールに沿った力を受けないので、P の水平方向の速さと一致しなければならず、$U = V/\sqrt{2}$ となる。公式はちょうどこれを与える。

- 数値的には、$g = 9.8$、$V = 10$、$\alpha = 0.3$ rad のとき接点は $x_0 \approx 3.524$ にある。ランダムな V と $\alpha < \pi/4$ に対して、導いた U を用いて Q をレールに沿って数値的に進めると、時刻 T において Q は 10^{-6} 以内の誤差で P の位置に一致し、それ以外のすべての時刻で P は屋根より下にある。

よくある間違い

- Q の加速度を $-g$ や $-g\cos\alpha$ とすること。レールに沿ってはたらくのは、重力のレール方向の成分 $g\sin\alpha$ だけである。
- U を水平方向の速さとして扱うこと。U はレールに沿った速さであるから、Q の水平方向の変位は $s\cos\alpha$ である。
- 負の根を選ぶ理由を「速さは正だから」とだけ述べること。決め手となるのは x_0 の符号（同値な言い方をすれば $\tan\alpha < 1$）である。

STEP のその先へ

接する条件は、より一般的な考え方の特別な場合である。曲線の族が到達できる領域の境界はそれらの**包絡線**（envelope）であり、それを求めることは、2 次方程式が重解をもつのはいつかを問うことに帰着する。一定の速さであらゆる方向に打ち出される物体の場合、包絡線は「安全放物線」（parabola of safety）である。Q の運動は最も単純な束縛運動（constrained motion）であり、大学 1 年次の講義では束縛をラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）によって体系的に扱う。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物運動と束縛運動の両方を丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 2006、第 11 問

力学 ・ 弾性衝突

> **STEP I 2006、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q11

鍵となる考え方

衝突を一つずつ追いかけることはできない。そもそも $A_1, \ldots, A_{n-2}$ の質量すらわからないからである。そこで、最終状態だけに注目する。最終状態を制約する事実は二つある。運動量（momentum）と運動エネルギー（kinetic energy）は、最初と最後で等しい。そして衝突がすべて終わった後では、どの粒子も前方の粒子に追いつくことはないので、最終速度は溝に沿って（広義に）増加する。各小問は、これら二つの事実がどのような最終状態を許すかについての短い議論になる。

解答

準備

粒子は摩擦なく一直線上を動く点としてモデル化し、すべての衝突は完全弾性衝突（perfectly elastic collision）であるとする。A_0 の初めの運動の向きを正とし、v_k を A_k の最終速度とする（$k = 0, 1, \ldots, n$）。A_k の質量を m_k と書くと、$m_0 = m_{n-1} = m$、$m_n = \lambda m$ である。保存則より

$$\sum_{k=0}^{n} m_k v_k = mu, \tag{M}$$

$$\sum_{k=0}^{n} m_k v_k^2 = mu^2. \tag{E}$$

粒子は溝の中で互いに追い越すことができないので、$A_0, A_1, \ldots, A_n$ の順に並んだままである。もし最後にある k について $v_k > v_{k+1}$ であれば、A_k は A_{k+1} に追いつき、も

う一度衝突が起こる。したがって、すべての衝突の後では

$$v_0 \le v_1 \le \cdots \le v_n. \tag{O}$$

特に、前向きに動いている粒子の前方に静止した粒子があってはならず、後ろ向きに動いている粒子の後方に静止した粒子があってはならない。

小問 (i)

最後に A_j だけが速度 v で動いているとする。このとき (M) と (E) から $m_j v = mu$ および $m_j v^2 = mu^2$ が得られる。辺々割ると $v = u$ となり、したがって $m_j = m$ である。

$v = u > 0$ であるから、順序条件 (O) により、A_j より前方の粒子はすべて速度が u 以上でなければならない。しかしそれらはすべて静止しているので、前方に粒子は存在せず、$A_j = A_n$ である。ところが $\lambda > 1$ より A_n の質量は $\lambda m \neq m$ である。これは矛盾であるから、最後にちょうど一つの粒子だけが動いていることはありえない。

小問 (ii)

A_{n-1} と A_n だけがそれぞれ速度 p、q で動いているとする。(M) と (E) を m で割ると

$$p + \lambda q = u, \qquad p^2 + \lambda q^2 = u^2.$$

$p = u - \lambda q$ を第 2 式に代入すると $-2\lambda uq + \lambda^2 q^2 + \lambda q^2 = 0$、すなわち

$$\lambda q\big((1+\lambda)q - 2u\big) = 0.$$

A_n は動いているので $q \neq 0$ であり、

$$q = \frac{2u}{1+\lambda}, \qquad p = u - \frac{2\lambda u}{1+\lambda} = -\frac{(\lambda-1)u}{1+\lambda} < 0.$$

よって A_{n-1} は後ろ向きに動いていることになる。しかし $n \ge 2$ なので、その後方には粒子 A_{n-2} があり、仮定よりその粒子は静止している。すると $v_{n-2} = 0 > p = v_{n-1}$ となり、(O) に矛盾する。A_{n-1} は A_{n-2} にぶつかってしまうのである。したがって、この最終状態もありえない。

小問 (iii)

ここでの主な道具は次の事実である。

補題（lemma）。運動の最後において、後ろ向きに動いている粒子が存在する。

証明。そうでないと仮定し、すべての k について $v_k \ge 0$ とする。(O) より、v_n が最大の速度である。$0 \le v_k \le v_n$ かつ $m_k > 0$ であるから、(E) の各項は $m_k v_k^2 \le v_n\, m_k v_k$ を

満たす。これらを足し合わせて (M) を用いると

$$mu^2 = \sum m_k v_k^2 \leq v_n \sum m_k v_k = v_n\, mu, \qquad \text{よって} \qquad v_n \geq u.$$

一方、(M) の各項は非負であるから、一つの項 $\lambda m v_n$ は総和以下である：

$$\lambda m v_n \leq mu, \qquad \text{よって} \qquad v_n \leq \frac{u}{\lambda} < u,$$

ここで $\lambda > 1$ と $u > 0$ を用いた。これら二つの評価は互いに矛盾する。 □

考えてみよう $A_1, \ldots, A_{n-2}$ の質量は一度も与えられていない。それでも問題にならないのはなぜか？

補題は (M)、(E)、(O) と A_n の質量しか用いていないので、他の質量が何であっても成り立つ。だからこそ、この問題はそもそも解くことができるのである。

次に、最後に A_{n-2}、A_{n-1}、A_n だけが動いているとする。

$n \geq 3$ の場合、A_{n-2} の後方に静止した粒子 A_{n-3} がある。(O) より $v_{n-2} \geq v_{n-3} = 0$ であり、さらに $v_{n-1}, v_n \geq v_{n-2} \geq 0$ である。すべての粒子の速度が ≥ 0 となるが、これは補題により禁じられる。

$n = 2$ の場合、三つの粒子は A_0、A_1、A_2 であり、これで全部である。このとき運動は完全に決まる。A_0 が A_1 に衝突すると（質量が等しいので）速度が入れ替わり、A_0 は止まって A_1 が速さ u で進む。次に A_1 が A_2 に衝突し、小問 (ii) の計算（衝突前の速度が u と 0 の場合）により、A_1 は速度 $-\frac{(\lambda-1)u}{\lambda+1}$ ではね返り、A_2 は $\frac{2u}{\lambda+1}$ で進んでいく。最後に A_1 が静止している A_0 に衝突し、ここでも質量が等しいので速度が入れ替わる。その後、A_0 は後ろ向きに動き、A_1 は静止し、A_2 は前向きに動くので、(O) が成り立ち、それ以上衝突は起こらない。A_1 は最後に静止しているので、やはり三つすべてが動いていることはありえない。

小問 (iv)

最後にちょうど二つの粒子が動いているとする。(M) より全運動量は $mu > 0$ なので、少なくとも一方は前向きに動いている。補題より、少なくとも一方は後ろ向きに動いている。したがって一方を A_i とすると $v_i < 0$ であり、他方を A_j とすると $v_j > 0$ である。

考えてみよう これら二つの粒子はどれでありうるか？

(O) より、A_i の後方にある粒子はすべて速度が $\leq v_i < 0$ なので、動いている。他に動いているのは A_j だけであり、それは前向きに動いているから、A_i の後方には何もない。すなわち $A_i = A_0$ である。同様に、A_j の前方にある粒子はすべて速度が $\geq v_j > 0$ なので、そのような粒子は存在せず、$A_j = A_n$ である。

よって A_0（質量 m）と A_n（質量 λm）がそれぞれ速度 $a < 0$、$b > 0$ で動いている。(M) と (E) は

$$a + \lambda b = u, \qquad a^2 + \lambda b^2 = u^2,$$

となり、これはまさに小問 (ii) の方程式である。$b \neq 0$ であるから

$$b = \frac{2u}{\lambda + 1}, \qquad a = -\frac{(\lambda - 1)u}{\lambda + 1}.$$

したがって、動いている二つの粒子は、速さ $\dfrac{(\lambda - 1)u}{\lambda + 1}$ で後ろ向きに動く A_0 と、速さ $\dfrac{2u}{\lambda + 1}$ で前向きに動く A_n である。

これは実際に起こりうる。小問 (iii) の $n = 2$ の場合が、ちょうどこの状態で終わるからである。

検算

- $\lambda = 3$、$u = 4$ とすると、速さは 2 と 2 である。このとき運動量は $m(-2) + 3m(2) = 4m$、エネルギーは $\frac{1}{2}m(4) + \frac{1}{2}(3m)(4) = 8m = \frac{1}{2}m(16)$ となり、正しく一致する。
- $\lambda \to 1$ とすると、A_0 の最終速さは 0 に、A_n の最終速さは u に近づく。すべての質量が等しい場合、ニュートンのゆりかご（Newton's cradle）のように、速度が列に沿って受け渡されるだけである。
- 60,000 通りのランダムな設定（n は 2 から 6、$A_1, \ldots, A_{n-2}$ の質量はランダム、λ と間隔もランダム）について、衝突の全過程をシミュレーションした。A_0 は常に後ろ向きに動いて終わり、(i)–(iii) の最終状態は一度も現れず、ちょうど二つの粒子が動いていた場合はいつも、それらは上の速さをもつ A_0 と A_n であった。

よくある間違い

- すべての衝突を追跡しようとすること。途中の粒子の質量は未知なので、解析できるのは最終状態だけである。
- 順序条件 (O) を忘れること。保存則だけでは小問 (ii) の状態は排除されない。それを排除するのは順序条件である。
- A_{n-2} が A_0 ではないと思い込むこと。$n = 2$ のときは A_{n-2} が A_0 であり、小問 (iii) には別の（短い）議論が必要になる。

STEP のその先へ

補題は二つの保存量（conserved quantities）の間の不等式である。すべての速度が非負であれば、エネルギーは（最大の速度）×（運動量）を超えることができない。このように、力学を解くことなく、保存量と順序を用いて最終状態を排除する議論は、多粒子系の研究に典型的なものである。次の一歩としては Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい。この本は衝突、重心系（centre-of-mass frame）、保存則（conservation laws）を丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 2006、第 12 問

確率・統計 ・ 条件付き確率

> **STEP I 2006、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q12

鍵となる考え方

道路が通行可能であるのは、その道路上の**すべての**区間が通行可能なときに限り、二つの町が孤立するのは、**すべての**道路が不通になったときに限る。そこで、独立性（independence）を用い、常に余事象（complement）を通して、道路ごとに考えていく。後半は、どの道路を選んだかが効いてくる条件付き確率（conditional probability）の問題である。1 区間の道路は 2 区間の道路よりも通行可能である確率が高いので、自分の道路が通行可能だとわかれば、どの道路を選んだかについての情報が得られる。これを定義 $\mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(A \cap B)/\mathrm{P}(A)$ を用い、選んだ道路で場合分けして処理する。

解答

孤立する確率

2 区間の道路を R_1, R_2、1 区間の道路を R_3 とする。また、1 つの区間が通行可能である確率を $q = 1 - p$ とおく。

2 区間の道路が通行可能であるのは、その 2 つの区間がともに通行可能であるときに限り、独立性よりその確率は $q^2 = (1-p)^2$ である。よって

$$\mathrm{P}(R_1 \text{ が不通}) = \mathrm{P}(R_2 \text{ が不通}) = 1 - (1-p)^2 = p(2-p),$$
$$\mathrm{P}(R_3 \text{ が不通}) = p.$$

3 本の道路は互いに異なる 5 つの区間からなるので、事象「R_1 が不通」「R_2 が不通」「R_3 が不通」は、独立な区間の互いに素な集合にそれぞれ依存しており、したがって独立である。オックスタウン（Oxtown）がキャムヴィル（Camville）から孤立するのは 3

本の道路がすべて不通のときに限るので、

$$\mathrm{P}(\text{孤立}) = p(2-p)\cdot p(2-p)\cdot p = p^3(2-p)^2,$$

となり、示された。

条件付き確率

道路 R_k を選ぶ事象を C_k とすると、各 k について $\mathrm{P}(C_k) = \frac{1}{3}$ であり、道路の選択は冠水とは独立である。自分の道路が通行可能である事象を O、他の 2 本の道路がともに不通である事象を B とする。求めるのは $\mathrm{P}(B \mid O) = \mathrm{P}(B \cap O)/\mathrm{P}(O)$ である。

> **考えてみよう**　独立性から、答えは単に P(他の 2 本の道路が不通) ではないのか？

どの道路を選んだかがわかっていれば、そのとおりである。しかし「他の 2 本の道路」は選択に応じて異なる組になり、さらに自分の道路が通行可能だという観察によって、短い道路 R_3 を選んだ可能性が以前より高くなる。したがって、選んだ道路で場合分けし、正しく重み付けしなければならない。まさにそれを行うのが以下の式である。

分母。道路の選択について全確率の法則（law of total probability）を用いると、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(O) &= \tfrac{1}{3}(1-p)^2 + \tfrac{1}{3}(1-p)^2 + \tfrac{1}{3}(1-p)\\ &= \tfrac{1}{3}(1-p)\big[2(1-p)+1\big] = \tfrac{1}{3}(1-p)(3-2p).\end{aligned}$$

分子。R_1 を選んだ場合、R_1 が通行可能で R_2, R_3 が不通である必要があり、道路の独立性よりその確率は $(1-p)^2\cdot p(2-p)\cdot p$ である。R_2 を選んだ場合も同じである。R_3 を選んだ場合、R_3 が通行可能で 2 区間の道路が両方とも不通である必要があり、その確率は $(1-p)\cdot p^2(2-p)^2$ である。よって

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B\cap O) &= \tfrac{1}{3}\Big[2p^2(2-p)(1-p)^2 + p^2(2-p)^2(1-p)\Big]\\ &= \tfrac{1}{3}\,p^2(1-p)(2-p)\big[2(1-p)+(2-p)\big]\\ &= \tfrac{1}{3}\,p^2(1-p)(2-p)(4-3p).\end{aligned}$$

答え。割り算をして、$p<1$ のとき 0 でない因数 $\frac{1}{3}(1-p)$ を約分すると、

$$\mathrm{P}(B \mid O) = \frac{p^2(2-p)(4-3p)}{3-2p}.$$

因数 $p, 2-p, 4-3p, 3-2p$ はいずれも 1 次式なので、これで完全に因数分解されている。

極限 $p \to 1$

$p \to 1$ のとき各因数は 1 に近づくので、

$$\mathrm{P}(B \mid O) \to \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{1} = 1.$$

これは理にかなっている。冠水がほぼ確実なとき、自分の道路が通行可能であったのは幸運な偶然であり、自分の道路とは独立に冠水する他の道路は、ほぼ確実にその幸運に恵まれていない。自分の道路が通行可能だという知識は、他の道路が通行可能かどうかについて何も教えてくれないのである。したがって、他のどの道路を選んでいても通れなかったことはほぼ確実だと考えるべきである。（$p = 1$ そのものでは条件となる事象の確率が 0 となり、条件付き確率は定義されない。意味をもつのは極限（limit）だけである。）

検算

- $p = 0$ のときは何も不通にならず、式は 0 を与える。当然そうなるべきである。
- $p = \frac{1}{2}$ のとき、式は $\frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}{2} = \frac{15}{32}$ を与える。不通区間のパターン 2^5 通りすべてと 3 通りの道路の選択すべてを厳密に数え上げても同じ値が得られ、$p = \frac{2}{3}$（このとき $\frac{32}{45}$）など他のいくつかの p の値についても同様である。
- $0 \leq p < 1$ に対して答えは常に 0 と 1 の間にある。例えば $p = 0.99$ のとき、約 0.9996 である。

よくある間違い

- 2 区間の道路が不通になる確率を、$1 - (1 - p)^2$（少なくとも 1 区間が不通）ではなく p^2（両区間とも不通）としてしまう。
- 条件付けを忘れる。他の 2 本の道路が不通である確率は、無作為に選んだ自分の道路が通行可能であるという条件の下での条件付き確率とは同じではない。
- 観察の**後で** 3 通りの選択を等しく重み付けしてしまう。等しいのは事前確率（prior probability）$\frac{1}{3}$ であって、事後確率（posterior probability）ではない。

STEP のその先へ

直列につながった区間からなる道路を並列に並べたものは、**信頼性ネットワーク**（reliability network）の最も簡単な例である。ネットワークが 2 点を連結する確率は、

一般にはパーコレーション理論（percolation theory）で研究されており、そこでは p の変化に伴う振る舞いの急激な変化が中心的なテーマとなっている。後半は姿を変えたベイズの定理（Bayes' theorem）である。「自分の道路が通行可能である」という観察によって、どの道路が選ばれたかの確率が更新されるのである。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、まさにこの精神で条件付き確率と独立性を扱っている。

解答例

STEP I 2006、第 13 問

確率・統計 ・ ポアソン混合分布

STEP I 2006、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s1-q13

鍵となる考え方

ダイヤモンドが一定の平均率で独立にばらまかれているとき、これはポアソン過程（Poisson process）であり、m キログラムのチョコレートに含まれるダイヤモンドの個数は平均 m のポアソン分布に従う。チョコレートの量そのものが確率的に決まるので、その量で条件付け（condition）を行う。すなわち、量を固定したときの答えを求め、それをさいころの目について全確率の法則（law of total probability）（および期待値に対するその仲間の法則）を用いて平均するのである。こうすると各小問は級数の和の計算に帰着する。(i) では有限和、(ii) では等比級数である。

解答

私が見つけるダイヤモンドの個数を D とする。ダイヤモンドは 1 キログラムあたり平均 1 個の割合で独立に埋め込まれているので、質量 $m\,\mathrm{kg}$ の板チョコに含まれる個数は平均 m のポアソン分布（Poisson distribution）に従う。特に、質量が $m\,\mathrm{kg}$ であるとき、

$$\mathrm{P}(D = 0) = \mathrm{e}^{-m}, \qquad \mathrm{E}(D) = m.$$

全体を通して、$100k$ グラムは $0.1k$ キログラムである。

小問 (i)

さいころの目を N とすると、$n = 1, \ldots, 6$ に対して $\mathrm{P}(N = n) = \frac{1}{6}$ である。$N = n$ のとき、私は $0.1n\,\mathrm{kg}$ を買うので、$D \mid N = n$ は平均 $0.1n$ のポアソン分布に従う。全確

率の法則により、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(D=0) &= \sum_{n=1}^{6} \mathrm{P}(N=n)\,\mathrm{P}(D=0 \mid N=n) = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{6} \mathrm{e}^{-0.1n} \\ &= \frac{1}{6}\left(\mathrm{e}^{-0.1} + \mathrm{e}^{-0.2} + \cdots + \mathrm{e}^{-0.6}\right).\end{aligned}$$

これは初項 $\mathrm{e}^{-0.1}$、公比 $\mathrm{e}^{-0.1}$、項数 6 の等比級数（geometric series）であるから、

$$\mathrm{P}(D=0) = \frac{\mathrm{e}^{-0.1}}{6}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-0.6}}{1-\mathrm{e}^{-0.1}}\right),$$

となり、示すべき式が得られた。

期待値（expectation）についても同様に条件付けを行う。

$$\mathrm{E}(D) = \sum_{n=1}^{6} \mathrm{P}(N=n)\,\mathrm{E}(D \mid N=n) = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{6} 0.1n = \frac{0.1\times 21}{6} = 0.35.$$

言い換えれば $\mathrm{E}(D) = 0.1\,\mathrm{E}(N) = 0.1\times 3.5$ であり、これが示すべきことであった。

小問 (ii)

今度は、初めて 6 が出るのが何回目の投げかを T とする。各回の投げは独立であり、$T=t$ とは 6 以外が $t-1$ 回続いた後に 6 が出ることであるから、

$$\mathrm{P}(T=t) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^{t-1}\tfrac{1}{6}, \qquad t = 1,2,3,\ldots$$

$T=t$ のとき、私は $0.1t\,\mathrm{kg}$ を買うので、$\mathrm{P}(D=0 \mid T=t) = \mathrm{e}^{-0.1t}$ である。したがって

$$\mathrm{P}(D=0) = \sum_{t=1}^{\infty}\left(\tfrac{5}{6}\right)^{t-1}\tfrac{1}{6}\,\mathrm{e}^{-0.1t} = \frac{\mathrm{e}^{-0.1}}{6}\sum_{t=1}^{\infty}\left(\tfrac{5}{6}\mathrm{e}^{-0.1}\right)^{t-1}.$$

考えてみよう なぜこの和を無限まで取ってよいのか？

これは公比 $r = \frac{5}{6}\mathrm{e}^{-0.1}$ の等比級数であり、$0<r<1$ であるから収束（converge）し、その和は $1/(1-r)$ である。よって

$$\mathrm{P}(D=0) = \frac{\mathrm{e}^{-0.1}}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{6}\mathrm{e}^{-0.1}} = \frac{\mathrm{e}^{-0.1}}{6-5\mathrm{e}^{-0.1}},$$

ここで分子と分母に 6 を掛けた。これが求める結果である。

ダイヤモンドの個数の期待値は

$$\mathrm{E}(D) = \sum_{t=1}^{\infty}\mathrm{P}(T=t)\,\mathrm{E}(D \mid T=t) = \sum_{t=1}^{\infty}\left(\tfrac{5}{6}\right)^{t-1}\tfrac{1}{6}\times 0.1t = \frac{0.1}{6}\sum_{t=1}^{\infty} t\left(\tfrac{5}{6}\right)^{t-1}.$$

ここでヒントが役に立つ。$|x| < 1$ のとき、二項展開（binomial expansion）により

$$(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} t x^{t-1}.$$

$x = \frac{5}{6}$ とすると和は $\left(1 - \frac{5}{6}\right)^{-2} = 36$ となるので、

$$\mathrm{E}(D) = \frac{0.1}{6} \times 36 = 0.6.$$

これもまた $0.1\,\mathrm{E}(T)$ に等しい。ここで $\mathrm{E}(T) = 6$ は、6 が出るまでに必要な投げの回数の平均としてよく知られた値である。

検算

- 数値的には、(i) の確率は約 0.7150、(ii) の確率は約 0.6131 である。ダイヤモンドの個数をポアソン分布として買い物客 2×10^5 人をシミュレーションしたところ、0.7151 と 0.6136 が得られ、ダイヤモンドの個数の平均は 0.350 と 0.599 であった。
- (ii) の確率は (i) の確率より小さい。これは理にかなっている。平均して 350 g ではなく 600 g を買うからである。
- どちらの期待値も、確率的に決まる倍率の平均の 0.1 倍になっている。質量が与えられたときのダイヤモンドの個数の期待値は質量について線形であるから、ダイヤモンドの個数の期待値はキログラム数の期待値に等しいのである。

よくある間違い

- ダイヤモンドが 1 個もない確率として $\mathrm{e}^{-0.35}$（あるいは $\mathrm{e}^{-0.6}$）を計算してしまう。これは平均の質量しか使っていないが、e^{-m} は m について線形ではないので、平均を取るのは e^{-m} を計算した後でなければならず、前ではない。期待値は線形であり、それゆえ $\mathrm{E}(D)$ についてはこの近道がうまくいくのである。
- グラムをキログラムに換算し忘れて、平均を $0.1n$ ではなく $100n$ としてしまう。
- $\mathrm{P}(T = t) = (\frac{5}{6})^t \frac{1}{6}$ と書いてしまう。これは 6 以外の目を 1 回多く数えている。

STEP のその先へ

ここではポアソン分布のパラメータそのものが確率変数であり、そのため D は**混合分布**（mixture distribution）となる。用いた道具、すなわち全確率の法則と塔の法則（tower law）$\mathrm{E}(D) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(D \mid T)\big)$ は、大学 1 年次の確率論の中心的な内容である。こ

のような問題は確率母関数（probability generating function）を使うと見通しよく扱える。$\mathrm{P}(D=0)$ は T の母関数に $\mathrm{e}^{-0.1}$ を代入した値である。試行の回数を確率的に定め、さらに各試行での個数も確率的に定めるという考え方は、複合分布（compound distribution）や分岐過程（branching process）へとつながっていく。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、これらすべてを扱っている。

解答例

STEP I 2006、第 14 問

確率・統計 ・ 非復元抽出

> **STEP I 2006、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q14

鍵となる考え方

赤い菓子を r 回目に取り出すということは、青い菓子を $r-1$ 回続けて取り出した後に赤い菓子を取り出すということである。復元抽出（with replacement）では毎回の取り出しが同じ条件で行われるので、確率は累乗の単純な積になる。そのうえで n を連続変数とみなし、対数を微分して n について最大化する。非復元抽出（without replacement）の場合は、菓子を**すべて**取り出すと想像するのがもっとも見通しがよい。そうすると赤い菓子はどの位置にも等しい確率で現れる。

解答

以下を通して $n \geq 0$ は整数とし、R を赤い菓子が初めて取り出される回の番号とする。

小問 (i)

取り出した菓子は袋に戻され、袋はよく振られるので、各回の取り出しは互いに独立（independent）であり、どの回でも赤い菓子が取り出される確率は $\frac{1}{n+1}$、青い菓子が取り出される確率は $\frac{n}{n+1}$ である。事象 $R=r$ は、最初の $r-1$ 回が青で r 回目が赤であることを意味するので、独立性より

$$P(R=r) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{r-1} \frac{1}{n+1} = \frac{n^{r-1}}{(n+1)^r}, \qquad r = 1, 2, 3, \ldots$$

となる（これは成功確率 $\frac{1}{n+1}$ の幾何分布（geometric distribution）である）。

ここで r を固定し、これを n の関数（function）とみなす：

$$f(n) = \frac{n^{r-1}}{(n+1)^r}.$$

$r=1$ ならば $f(n)=\frac{1}{n+1}$ であり、これは $n=0$ で最大となる（青い菓子がなければ、最初の菓子は必ず赤である）。そこで $r\geq 2$ とする。このとき $f(0)=0$ であり、$n>0$ では $f(n)>0$ であるから、n を実数変数とみなして $n>0$ の範囲で対数（logarithm）をとることができる：

$$\ln f(n)=(r-1)\ln n-r\ln(n+1),\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\ln f(n)=\frac{r-1}{n}-\frac{r}{n+1}=\frac{(r-1)-n}{n(n+1)}.$$

考えてみよう n は整数でなければならない。微分してよいのだろうか？

よい。導関数（derivative）は f が増加・減少する範囲を調べるためだけに使うからである。$n>0$ では分母 $n(n+1)$ は正なので、導関数は $0<n<r-1$ で正、$n>r-1$ で負である。したがって f は $[0,r-1]$ で狭義単調増加、$[r-1,\infty)$ で狭義単調減少である。$r-1$ 自体が整数なので、これは他のどの整数よりも大きな値を与え、隣り合う整数どうしを比較する必要はない。

よって、どの場合も（$r=1$ を含めて）確率を最大にするのは

$$n=r-1,$$

であり、最大値は $\frac{(r-1)^{r-1}}{r^r}$ である（$r=1$ のときは 1 と読む）。たとえば $r=3$ のとき、最良の袋は青い菓子が $n=2$ 個のもので、確率は $\frac{4}{27}$ となる。

小問 (ii)

今度は各回の取り出しは独立ではないが、簡単な方法が二つある。

直接積をとる方法。 $R=r$ となるには、最初の $r-1$ 回それぞれで青を取り出し、その後に赤を取り出す必要がある。これは青い菓子が十分にあるとき、すなわち $r-1\leq n$ のときにのみ可能である。それまでの取り出しがすべて青であったという条件のもとで、k 回目の取り出しは $n+2-k$ 個の菓子（そのうち 1 個が赤）の入った袋から行われる。よって

$$P(R=r)=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-r+2}{n-r+3}\cdot\frac{1}{n-r+2}.$$

各分子は次の分母と約分され、積は次のように打ち消し合って簡単になる：

$$P(R=r)=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1}, & 1\leq r\leq n+1,\\[2ex] 0, & r>n+1.\end{cases}$$

対称性を使う方法。 赤い菓子が出たところで止めても、赤い菓子がどの位置にあるかには影響しない。そこで、袋が空になるまで取り出し続けると想像する。（互いに区別

できる）菓子の並び方 $(n+1)!$ 通りはすべて同様に確からしいので、赤い菓子は $n+1$ 個の位置のどこにも等しい確率で現れる。これで同じ答えが得られる。

最大化のために r を固定する。$n < r-1$ ならば確率は 0 である。$n \geq r-1$ ならば確率は $\frac{1}{n+1}$ であり、これは n が増えると狭義単調に減少する。よって確率を最大にするのは条件を満たす最小の袋、すなわち

$$n = r-1,$$

であり、最大確率は $\frac{1}{r}$ である（$n = r-1$ のとき、赤い菓子は r 個の菓子のどれであることも同様に確からしく、それを最後に取り出すのは r 通りの同様に確からしい結果のうちの一つである）。

検算

- (i) では $\sum_{r\geq 1} P(R=r) = \frac{1}{n+1} \cdot \dfrac{1}{1-n/(n+1)} = 1$ であり、(ii) では $n+1$ 個の等しい値 $\frac{1}{n+1}$ の和は 1 である。
- (i) で $r=3$ のとき、$n=1,2,3$ はそれぞれ $\frac{1}{8}$、$\frac{4}{27} \approx 0.148$、$\frac{9}{64} \approx 0.141$ を与えるので、$n=2$ が最大である。
- (ii) については、$n \leq 6$ に対して菓子の並び方をすべて列挙して確かめた。(i) を $n=3$、$r=2$ でシミュレーションしたところ 0.188 となり、厳密値 $\frac{3}{16} = 0.1875$ と一致した。

よくある間違い

- (i) で $\left(\frac{n}{n+1}\right)^r \frac{1}{n+1}$ と書いてしまう：赤の前に来る青は $r-1$ 個だけである。
- (ii) で $r > n+1$ のとき答えが 0 になることを忘れる。まさにこのことが、「n をできるだけ小さくする」という方針が $n=0$ まで行ってしまうのを防いでいる。

STEP のその先へ

どちらの最大化も、実は**最尤推定**（maximum likelihood estimation）である。赤い菓子が初めて r 回目に現れたことは観察したが n はわからないとき、その観察結果をもっとも起こりやすくする n の値は、どちらの実験でも $n = r-1$ である。これは大学 1 年次の統計学の礎となる考え方である。(ii) の対称性による議論は**交換可能性**（exchangeability）の一例であり、これを使うと多くの非復元抽出の問題が簡単になる。

どちらの考え方も Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）で展開されている。

解答例

STEP II 2006、第 1 問

純粋数学 • 周期的な漸化式

> **STEP II 2006、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q1

鍵となる考え方

各項が次の項を決めるので、$u_{p+1} = u_1 = 2$ となった時点で数列（sequence）は周期（period）p で繰り返す。したがって (i) の各問は、いくつかの項を k の関数として計算し、多項式方程式を一つ解くことに帰着する。周期 4 の方程式は周期 1 と周期 2 の答えを因数として含んでいなければならない（周期 1 や周期 2 の数列も $u_5 = u_1$ を満たすからである）。このことを前もって知っていれば、因数分解（factorisation）は容易になる。(ii) は一行で済む帰納法（induction）と、それに続くおなじみの「漸化式（recurrence）で $n \to \infty$ とする」議論である。

解答

小問 (i)

$f(u) = k - \dfrac{36}{u}$ とおくと、$u_{n+1} = f(u_n)$ である。$u_{p+1} = u_1$ ならば、f を繰り返し適用することで $u_{p+2} = u_2$、$u_{p+3} = u_3$、…が得られるので、すべての n について $u_{n+p} = u_n$ となる。逆に、周期 p であるためには当然 $u_{p+1} = u_1 = 2$ が必要である。よって、数列がちょうど周期 p をもつのは、$u_{p+1} = 2$ であり（すべての項が定義される、すなわち決して 0 にならないとして）、かつそれより小さい周期が成り立たないときである。

(a) 数列が定数であるための必要十分条件は $u_2 = 2$、すなわち $k - 18 = 2$ である。よって $k = 20$ である。

(b) $u_2 = k - 18$ であり、

$$u_3 = k - \frac{36}{k-18} \qquad (k \neq 18).$$

$u_3 = 2$ とおくと $(k-2)(k-18) = 36$ となるので $k^2 - 20k = 0$、よって $k = 0$ または $k = 20$ である。$k = 20$ は定数数列を与え、これは周期 2 ではなく周期 1 である。$k = 0$ のとき数列は 2, −18, 2, −18, ... となり、確かに周期 2 をもつ。よって $k = 0$ である。

(c) さらに二つの項が必要である。$k \neq 18$ のとき、

$$u_3 = \frac{k(k-18) - 36}{k - 18} = \frac{k^2 - 18k - 36}{k - 18},$$

であり、さらに $k^2 - 18k - 36 \neq 0$ ならば

$$u_4 = k - \frac{36(k-18)}{k^2 - 18k - 36} = \frac{k^3 - 18k^2 - 72k + 648}{k^2 - 18k - 36}.$$

条件 $u_5 = 2$ は $k - 36/u_4 = 2$、すなわち $u_4 = \dfrac{36}{k-2}$ を意味する（ここでは $k \neq 2$ が必要である。$k = 2$ とすると $36/u_4 = 0$ となり、これは不可能である）。分母を払うと、

$$(k-2)(k^3 - 18k^2 - 72k + 648) = 36(k^2 - 18k - 36).$$

展開してすべてを左辺に集めると、

$$k^4 - 20k^3 - 36k^2 + 792k - 1296 = 36k^2 - 648k - 1296,$$
$$k^4 - 20k^3 - 72k^2 + 1440k = 0.$$

考えてみよう このような四次式（quartic）を、多くの試行錯誤なしに因数分解するにはどうすればよいか。

始める前から二つの根がわかっている。周期 1 または 2 の数列はどれも $u_5 = u_1$ を満たすので、$k = 20$ と $k = 0$ は根でなければならない。k、続いて $k - 20$ をくくり出すと、

$$k^4 - 20k^3 - 72k^2 + 1440k = k(k-20)(k^2 - 72).$$

よって $k \in \{0, 20, 6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}\}$ である。0 と 20 はそれぞれ周期 2 と周期 1 を与えるので、新しい値は $k = \pm 6\sqrt{2}$ である。

最後に、$k^2 = 72$ を用いて、$k = \pm 6\sqrt{2}$ のときすべての項が定義されることを確かめる。

- $u_2 = k - 18 \neq 0$ である。
- u_3 の分子は $k^2 - 18k - 36 = 36 - 18k$ であり、$k \neq 2$ より 0 でない。
- u_4 の分子は $k(k^2 - 72) - 18k^2 + 648 = -1296 + 648 = -648 \neq 0$ である。
- $u_5 = 2$ は構成から成り立ち、計算の途中で必要とした $k \neq 2$、$k \neq 18$ も満たされている。

$k \neq 0, 20$ であるから周期は 1 でも 2 でもない。$u_5 = u_1$ を満たし、最小周期（least period）が 1 でも 2 でもない数列は、ちょうど最小周期 4 をもつ（最小周期は 4 を割り切らなければならないからである）。よって、数列が周期 4 をもつのは $k = \pm 6\sqrt{2}$ のときである。

小問 (ii)

$k = 37$ とする。$u_n \geq 2$ を帰納法で証明する。$u_1 = 2$ より $n = 1$ のとき成り立つ。$u_n \geq 2$ ならば $u_n > 0$ であるから $0 < \dfrac{36}{u_n} \leq 18$ となり、したがって

$$u_{n+1} = 37 - \frac{36}{u_n} \geq 37 - 18 = 19 \geq 2.$$

よってすべての n について $u_n \geq 2$ であり、これが示すべきことであった。（実際には、$n \geq 2$ のすべての n について $u_n \geq 19$ である。）

> **考えてみよう** 極限（limit）の方程式は二つの根をもつ。正しいのはどちらで、それはなぜか。また、なぜ漸化式で $n \to \infty$ としてよいのか。

$u_n \to \ell$ であり、すべての u_n が $u_n \geq 2$ を満たすので、$\ell \geq 2$ である。特に $\ell \neq 0$ であるから $36/u_n \to 36/\ell$ となる。$u_{n+1} = 37 - 36/u_n$ の両辺で $n \to \infty$ とすると（左辺も ℓ に収束する）、

$$\ell = 37 - \frac{36}{\ell} \quad \Longrightarrow \quad \ell^2 - 37\ell + 36 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\ell - 1)(\ell - 36) = 0.$$

根 $\ell = 1$ は $\ell \geq 2$ により除外されるので、

$$\ell = 36.$$

検算

- $k = 6\sqrt{2} \approx 8.485$ のとき項は 2, −9.515, 12.269, 5.551, 2, … であり、$k = -6\sqrt{2}$ のとき項は 2, −26.485, −7.126, −3.433, 2, … である。どちらも四段階で元に戻る。
- 因数 $k^2 - 72$ にはすっきりした意味がある。写像（map）$u \mapsto (ku - 36)/u$ は行列（matrix）$\begin{pmatrix} k & -36 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対応し、そのトレース（trace）は k、行列式（determinant）は 36 である。その固有値（eigenvalues）は $k = 12\cos\theta$ として $6e^{\pm i\theta}$ であり、四乗が単位行列（identity）のスカラー倍になるのは $\theta = \pi/4$ または $3\pi/4$ のときである。これにより $k = \pm 6\sqrt{2}$ が得られ、$\theta = \pi/2$ からは周期 2 の $k = 0$ が得られる。
- $k = 37$ のとき：$u_2 = 19$、$u_3 \approx 35.105$、$u_4 \approx 35.975$、$u_5 \approx 35.9993$ であり、項は明らかに 1 ではなく 36 に近づいている。

よくある間違い

- (b) で $k = 0, 20$ と答えたり、(c) で四つの根すべてを答えたりすること。問題は周期 2 と周期 4 を求めており、定数数列はその意味での周期 2 をもたない。
- $\ell = 36$ に加えて $\ell = 1$ も答えてしまうこと。(ii) の前半で示した評価 $u_n \geq 2$ は、これを除外するためにある。
- $\ell \neq 0$ に触れずに $n \to \infty$ とすること。これは $36/u_n \to 36/\ell$ のために必要である。

STEP のその先へ

写像 $u \mapsto (ku - 36)/u$ はメビウス変換（Möbius transformation）であり、このような写像の合成は 2×2 行列の積に対応する。周期性が、固有値の比が 1 の冪根（root of unity）になることに帰着するのはこのためである。$k = 37$ のとき、二つの不動点（fixed point）1 と 36 は異なる振る舞いをする。36 は近くの項を引き寄せ、1 は遠ざける。このことは $|f'(\ell)| = 36/\ell^2$ からわかる。これは不動点反復と数列の収束（convergence）の理論の出発点であり、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）で厳密に扱われている。Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析）には、メビウス変換とその分類についての美しい章がある。

解答例

STEP II 2006、第 3 問

純粋数学 • 無理数と近似

> **STEP II 2006、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q3

鍵となる考え方

数 $5+\sqrt{24}$ には「共役」(conjugate) な数 $5-\sqrt{24}$ があり、両者の積は 1 である。ある数とその共役の同じ累乗を足し合わせると、根号を含む項 (surds) がすべて打ち消し合うので、その和は整数になる。共役な数は小さいので、その累乗はごく小さく、したがって大きいほうの累乗は整数のわずかに下に位置するはずである。小問 (ii) は、5 を N に置き換えた同じ議論である。

解答

小問 (i)

$a=5+\sqrt{24}$、$b=5-\sqrt{24}$ とおく。すると

$$a+b=10, \qquad ab=25-24=1,$$

であるから $b=1/a$ である。したがって求める式は a^4+b^4 である。$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ を 2 回用いると

$$a^2+b^2=10^2-2=98,$$
$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2(ab)^2=98^2-2=9602.$$

よって $a^4+\dfrac{1}{a^4}=9602$ であり、これは整数である。

不等式 (inequalities) については、$\dfrac{1}{a}=b=5-\sqrt{24}$ であったことを思い出そう。

- $b>0.1 \iff \sqrt{24}<4.9 \iff 24<24.01$ であり、これは正しい。(両辺が正なので、ここで 2 乗する操作は可逆である。)

- $b < \frac{2}{19} \iff \sqrt{24} > 5 - \frac{2}{19} = \frac{93}{19} \iff 24 \cdot 19^2 > 93^2 \iff 8664 > 8649$ であり、これは正しい。
- $\frac{2}{19} < 0.11 \iff 2 < 2.09$ であり、これは正しい。

よって $0.1 < \dfrac{1}{5+\sqrt{24}} < \dfrac{2}{19} < 0.11$ である。

考えてみよう これらの評価から、a^4 を小数第 4 位までどのように確定できるだろうか。

最初の結果から $a^4 = 9602 - b^4$ である。正の数についての不等式 $0.1 < b < 0.11$ の各辺を 4 乗すると

$$0.0001 < b^4 < 0.11^4 = 0.00014641,$$

となり、したがって

$$9601.99985359 < a^4 < 9601.9999.$$

この区間内のすべての数は 9601.99985 と 9601.9999 の間にあるので、四捨五入すると

$$\left(5+\sqrt{24}\right)^4 = 9601.9999 \quad \text{（小数第 4 位まで）。}$$

となる。（より鋭い評価 $b < \frac{2}{19}$ からは $b^4 < \frac{16}{130321} \approx 0.000123$ が得られる。これはここでは必要ないが、$\frac{2}{19}$ がどこから来たのかを示している。検算を参照のこと。）

小問 (ii)

$A = N + \sqrt{N^2-1}$、$B = N - \sqrt{N^2-1}$ とおく。$N \geq 2$ なので、どちらも実数である。先ほどと同様に

$$A + B = 2N, \qquad AB = N^2 - (N^2 - 1) = 1.$$

ステップ 1：$A^k + B^k$ は整数である。 両方の累乗を二項定理（binomial theorem）で展開する。$\sqrt{N^2-1}$ の偶数乗を含む項は整数であり、両方の展開に同じ形で現れる。奇数乗を含む項は符号が逆になって現れ、打ち消し合う。よって、すべての正の整数 k に対して $S_k = A^k + B^k$ は整数である。（別解として、A と B は $x^2 - 2Nx + 1 = 0$ の解であるから、$S_0 = 2$、$S_1 = 2N$ のもとで $S_k = 2NS_{k-1} - S_{k-2}$ が成り立ち、帰納法（induction）によって整数であることがわかる。）

ステップ 2：B は小さい。 $0 < B < \dfrac{1}{2N - \frac{1}{2}}$ であることを示す。$B = 1/A$ かつ $A > 0$ であるから、これは

$$A > 2N - \tfrac{1}{2} \iff \sqrt{N^2-1} > N - \tfrac{1}{2}.$$

と同値である。（$N \geq 2$ なので）両辺は正であるから、2 乗してよい：

$$N^2 - 1 > N^2 - N + \tfrac{1}{4} \iff N > \tfrac{5}{4},$$

これは $N \geq 2$ なので成り立つ。よって $0 < B < \left(2N - \frac{1}{2}\right)^{-1}$ であり、（すべて正なので）各辺を k 乗すると

$$0 < B^k < \left(2N - \tfrac{1}{2}\right)^{-k}.$$

ステップ 3：結論。 $A^k = S_k - B^k$ であるから、A^k は整数 S_k からちょうど B^k だけ離れたところにある。A^k に最も近い整数は、少なくとも S_k と同じくらい A^k に近い（実際には、$B^k < \frac{1}{2}$ なのでそれは S_k そのものである）。したがって

$$\left|A^k - (\text{最も近い整数})\right| \leq B^k < \left(2N - \tfrac{1}{2}\right)^{-k},$$

となり、これが求める結果である。

検算

- 数値的には $(5 + \sqrt{24})^4 \approx 9601.999896$ であり、これは求めた区間内にあって、四捨五入すると 9601.9999 になる。
- $N = 5$ のとき、小問 (ii) から $(2N - \frac{1}{2})^{-1} = \frac{1}{9.5} = \frac{2}{19}$ が得られる。これは小問 (i) の評価とちょうど一致する。つまり小問 (i) は、$N = 5$、$k = 4$ の場合が姿を変えて現れたものである。
- $N = 2$、$k = 1$ のとき：$2 + \sqrt{3} \approx 3.732$ は 4 から約 0.268 離れており、$(3.5)^{-1} \approx 0.286$ なので、評価は成り立つ。コンピュータで N は 1000 まで、k は 24 まで確認した。

よくある間違い

- 両辺が正であることに触れずに $\sqrt{N^2 - 1} > N - \frac{1}{2}$ を 2 乗してしまう。
- $a^4 \approx 9602.0000$ と書いてしまう。この値は 9602 より 0.0001 から 0.00015 の間だけ小さく、それだけで小数第 4 位が変わってしまう。
- $N = 1$ の場合が除外されているのには理由があることを忘れる。このときは $B = 1$ となり、議論が成り立たなくなる。

STEP のその先へ

$5 + \sqrt{24}$ のような数は、環（ring）$\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ の単数（units）である。すなわち、同じ形の逆元 $5 - \sqrt{24}$ をもち、その累乗によってペル方程式（Pell equation）$x^2 - 24y^2 = 1$ のすべての解が得られる。このような単数の累乗はどんどん整数に近づいていく。これはピゾ数（Pisot numbers）の理論への一つの入り口であり、ピゾ数の累乗も同じよう

に整数に近い振る舞いをする。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（整数論の入門書）は、ペル方程式と連分数（continued fractions）を見事に扱っている。

解答例

STEP II 2006、第 4 問

純粋数学 • 置換積分

STEP II 2006、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s2-q4

鍵となる考え方

置換（substitution）$x = \pi - t$ を行うと、$\sin x$ は変わらないが、因子 x は $\pi - t$ に変わる。そのため、もとの積分が右辺に再び現れ、方程式のようにそれについて解くことができる。これにより、扱いにくい因子 x が完全に消える。その後は、問題中のどの積分も $\sin x$ の関数に $\sin x$（または $\cos x$）を掛けたものとなり、置換 $u = \cos x$ または $u = \sin x$ によって計算が完了する。本当に頭を使うのは、小問 (ii) と (iii) を、恒等式（identity）が適用できる形にどう持ち込むかに気づく部分である。

解答

恒等式

$I = \int_0^\pi x f(\sin x)\,\mathrm{d}x$ とおく。$x = \pi - t$ とおくと $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$ であり、$x = 0$ のとき $t = \pi$、$x = \pi$ のとき $t = 0$ である。$\sin(\pi - t) = \sin t$ であるから、

$$\begin{aligned} I &= \int_\pi^0 (\pi - t) f(\sin t)\,(-\mathrm{d}t) = \int_0^\pi (\pi - t) f(\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= \pi \int_0^\pi f(\sin t)\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi t f(\sin t)\,\mathrm{d}t = \pi \int_0^\pi f(\sin x)\,\mathrm{d}x - I, \end{aligned}$$

となる。積分変数の名前は何でもよいからである。したがって $2I = \pi \int_0^\pi f(\sin x)\,\mathrm{d}x$ であり、これが示すべき結果である：

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^\pi f(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

小問 (i)

ここでは $f(\sin x) = \dfrac{\sin x}{3+\sin^2 x}$ であるから、恒等式より

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi J, \qquad J = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

$3+\sin^2 x = 4-\cos^2 x$ と書き、$u = \cos x$、$\mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$ と置換する。u は 1 から -1 まで動く：

$$J = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{4-u^2}.$$

部分分数分解（partial fractions）により $\dfrac{1}{4-u^2} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2-u}+\dfrac{1}{2+u}\right)$ であるから、

$$J = \frac{1}{4}\left[\ln\frac{2+u}{2-u}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left(\ln 3 - \ln\tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{1}{2}\ln 3.$$

（$[-1,1]$ 上で $2\pm u$ はともに正なので、絶対値（modulus）の記号は不要である。）したがって

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\ln 3.$$

小問 (ii)

考えてみよう 恒等式が使えるのは $[0,\pi]$ だけである。$[\pi,2\pi]$ はどう扱えばよいか。

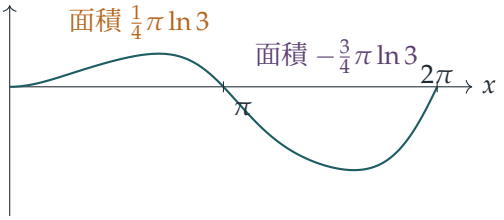
積分区間を π で分け、後半部分を $x = \pi + t$ によって $[0,\pi]$ に戻す。すると $\sin x = -\sin t$、$\sin^2 x = \sin^2 t$ であるから、

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= -\int_0^{\pi} \frac{(\pi+t)\sin t}{3+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = -\pi J - \int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{3+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\tfrac{1}{2}\pi\ln 3 - \tfrac{1}{4}\pi\ln 3 = -\tfrac{3}{4}\pi\ln 3,\end{aligned}$$

となる。ここで $J = \frac{1}{2}\ln 3$ と小問 (i) の結果を用いた。小問 (i) の $[0,\pi]$ 上の積分を加えると、

$$\int_0^{2\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\ln 3 - \frac{3\pi}{4}\ln 3 = -\frac{\pi}{2}\ln 3.$$

答えが負になる理由は図を見るとわかる。被積分関数（integrand）は前半と後半で同じ形をしているが、$[\pi,2\pi]$ ではより大きな x の値で重み付けされている。



小問 (iii)

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$ であり、$[0,\pi]$ 上で $\sin x \geq 0$ であるから、

$$|\sin 2x| = 2\sin x\,|\cos x| = 2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x},$$

となり、これは $\sin x$ だけの関数である。

考えてみよう ここに現れるのが $\cos x$ ではなく $|\cos x|$ であることが、なぜ重要なのか。

$[0,\pi]$ 上では、$\cos x$ は $\sin x$ の関数ではない。実際、$\sin(\pi - x) = \sin x$ である一方で $\cos(\pi - x) = -\cos x$ となる。しかし $|\cos x| = \sqrt{1-\sin^2 x}$ は $\sin x$ の関数である。したがって、絶対値こそが恒等式の適用を可能にしているのである：

$$\int_0^\pi \frac{x|\sin 2x|}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi\int_0^\pi \frac{|\sin 2x|}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

新しい被積分関数は $x \mapsto \pi - x$ で不変なので、$[0,\pi]$ 上の積分は $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上の積分の 2 倍である。この区間では $\cos x \geq 0$ であり、絶対値を外すことができる：

$$\int_0^\pi \frac{|\sin 2x|}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x\cos x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\Big[\ln(3+\sin^2 x)\Big]_0^{\pi/2} = 2\ln\tfrac{4}{3},$$

分子が分母の導関数になっているからである。したがって

$$\int_0^\pi \frac{x|\sin 2x|}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi\cdot 2\ln\tfrac{4}{3} = \pi\ln\frac{4}{3}.$$

検算

- シンプソンの公式（Simpson's rule）による数値計算では、(i) が 0.86285、(ii) が -1.72570、(iii) が 0.90378 となり、それぞれ $\frac{1}{4}\pi\ln 3$、$-\frac{1}{2}\pi\ln 3$、$\pi\ln\frac{4}{3}$ と一致する。
- (ii) の答えは (i) の答えのちょうど -2 倍である。これは π で分けて考えると説明がつく。前半と後半はそれぞれ $\frac{1}{4}\pi\ln 3$ と $-\frac{3}{4}\pi\ln 3$ である。
- 恒等式の簡単な確認：$f \equiv 1$ とすると、両辺はともに $\frac{1}{2}\pi^2$ に等しい。

よくある間違い

- $[0, 2\pi]$ 上で類似の「恒等式」を使ってしまうこと。そうすると $\pi \int_0^{2\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = 0$ が得られてしまう。この証明には $\sin(2\pi - t) = \sin t$ が必要だが、これは誤りである。
- (iii) で、$[0, \pi]$ 全体にわたって $|\sin 2x| = 2\sin x \cos x$ と書いてしまうこと。そうすると内側の積分が 0 になってしまう。

STEP のその先へ

積分を再び現れさせてそれについて解く手法や、$x \mapsto \pi - x$ のような対称性の利用は、解析学（analysis）において、また初等的な原始関数（antiderivative）をもたない定積分（definite integral）の計算において、標準的な道具である。これらはフーリエ級数（Fourier series）へとつながる。フーリエ級数では、x と三角関数の積を 1 周期にわたって積分したものが基本的な対象となる。この種の議論についてさらに知りたければ Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）を、積分の厳密な理論については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学を理解する）を参照するとよい。

解答例

STEP II 2006、第 5 問

純粋数学 ・ 床関数と面積

STEP II 2006、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s2-q5

鍵となる考え方

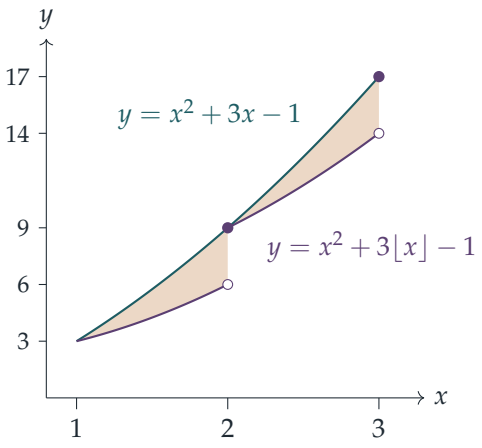
連続する 2 つの整数の間 $k \le x < k+1$ では、床関数（floor function）は一定で、その値は k である。したがって、このような長さ 1 の各区間上では、ぎざぎざの曲線もふつうの滑らかな曲線であり、面積は長さ 1 の区間ごとの帯の和に分けられる。$[k, k+1]$ 上の帯の面積を k の関数として求め、それを $k = 1, 2, \ldots, n-1$ について足し合わせればよい。

解答

以下では一貫して $f(x) = x^2 + 3x - 1$ と書く。$1 \le x \le 3$ において、この関数は $f(1) = 3$ から $f(2) = 9$ を経て $f(3) = 17$ まで増加する。また $x \ge 1$ では $f'(x) = 2x + 3 > 0$ であるから、すべての $x \ge 1$ で増加関数である。

小問 (i)

2 つ目の曲線は $y = x^2 + 3\lfloor x \rfloor - 1$ である。$[1, 2)$ 上では $\lfloor x \rfloor = 1$ であるから、これは $y = x^2 + 2$ であり、3 から 6 に向かって増加する。$[2, 3)$ 上では $\lfloor x \rfloor = 2$ であるから、これは $y = x^2 + 5$ であり、9 から 14 に向かって増加する。そして $x = 3$ では値は 17 である。各部分は放物線（parabola）$y = f(x)$ を下に平行移動したものであり、2 つの曲線はすべての整数で交わる。



2 つの曲線の縦方向の差は

$$(x^2 + 3x - 1) - (x^2 + 3\lfloor x \rfloor - 1) = 3\big(x - \lfloor x \rfloor\big) \geq 0,$$

であるから、1 つ目の曲線が 2 つ目の曲線より下にくることはない。k を整数とすると、区間 $[k, k+1]$ 上でこの差は、ただ 1 点 $x = k+1$ を除いて $3(x-k)$ であり、その 1 点は積分に影響しない。よって $[k, k+1]$ 上の帯の面積は

$$\int_k^{k+1} 3(x-k)\,\mathrm{d}x = \Big[\tfrac{3}{2}(x-k)^2\Big]_k^{k+1} = \tfrac{3}{2},$$

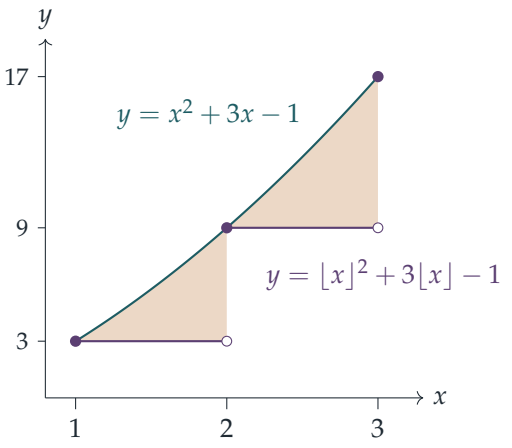
であり、どの k についても同じである。区間 $1 \leq x \leq n$ は長さ 1 の $n-1$ 個の区間 $[1,2], [2,3], \ldots, [n-1, n]$ からなるので、2 つの曲線の間の面積は

$$\tfrac{3}{2}(n-1).$$

である。

小問 (ii)

今度は 2 つ目の曲線は $y = f(\lfloor x \rfloor)$ であり、これは階段関数（step function）である。すなわち $[1,2)$ 上で $y = f(1) = 3$、$[2,3)$ 上で $y = f(2) = 9$、そして $x = 3$ で $y = f(3) = 17$ となる。各段は整数のところで放物線上から始まり、右へ水平にのびている。



考えてみよう どちらの曲線が上にあり、それはずっと上にあり続けるだろうか？

f は $x \geq 1$ で増加し、かつ $\lfloor x \rfloor \leq x$ であるから、$1 \leq x \leq n$ 全体で $f(\lfloor x \rfloor) \leq f(x)$ が成り立つ。したがって放物線が常に上にあり、面積は単に $f(x) - f(\lfloor x \rfloor)$ の積分であって、符号の変化を気にする必要はない。

$k \geq 1$ を整数とすると、$[k, k+1]$ 上で段の高さは $f(k)$ である（ここでもただ1点 $x = k+1$ は無視する）。$0 \leq t \leq 1$ として $x = k + t$ と置換すると、

$$\begin{aligned} f(k+t) - f(k) &= (k+t)^2 + 3(k+t) - 1 - (k^2 + 3k - 1) \\ &= 2kt + t^2 + 3t, \end{aligned}$$

となるので、$[k, k+1]$ 上の帯の面積は

$$\int_0^1 (2kt + t^2 + 3t)\,\mathrm{d}t = k + \tfrac{1}{3} + \tfrac{3}{2} = k + \tfrac{11}{6}.$$

である。小問 (i) と異なり、今度は放物線の傾きが急になっていくため、帯は k とともに大きくなる。帯を $k = 1, 2, \ldots, n-1$ について足し合わせ、$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}n(n-1)$ を用いると、

$$\begin{aligned} \text{面積} &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(k + \tfrac{11}{6}\right) = \tfrac{1}{2}n(n-1) + \tfrac{11}{6}(n-1) \\ &= \tfrac{1}{6}(n-1)(3n+11), \end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。

検算

▶ $n = 1$ のときは領域がまったく存在せず、どちらの答えも 0 を与える。

- $n = 2$ のとき、小問 (ii) の答えは $\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 17 = \frac{17}{6}$ である。直接計算すると $\int_1^2 (x^2 + 3x - 4)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{3} + \frac{9}{2} - 4 = \frac{17}{6}$ となる。
- $n = 2, \ldots, 7$ について差を中点則（midpoint rule）で数値積分すると、$\frac{3}{2}(n-1)$ および $\frac{1}{6}(n-1)(3n+11)$ と小数第 4 位まで一致した。たとえば小問 (ii) で $n = 4$ とすると 11.5 となる。

よくある間違い

- 帯を $n-1$ 個ではなく n 個と数えてしまう。区間 $[1, n]$ には長さ 1 の区間は $n-1$ 個しか含まれない。
- 小問 (ii) で、k とすべきところを $\int_0^1 2kt\,\mathrm{d}t = 2k$ としてしまう。
- 先に整数のところで区間を分けずに、区間全体にわたって $\lfloor x \rfloor$ を x であるかのように積分してしまう（あるいは無視してしまう）。

STEP のその先へ

小問 (ii) は、曲線の下の面積と、その下に収まる長方形の「階段」の面積とを比べている。これはまさに、刻み幅 1 の下リーマン和（lower Riemann sum）である。大学最初の解析学（analysis）の講義では、刻みを細かくしていくときにこのような下和と上和を挟み込むことで積分を**定義**する。$\lfloor x \rfloor$ のように跳びのある関数も、その跳びが孤立した点であるため、やはり積分可能（integrable）である。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、リーマン（Riemann）積分について非常に読みやすい解説を与えている。

解答例

STEP II 2006、第 7 問

純粋数学 • 楕円の接線

STEP II 2006、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s2-q7

鍵となる考え方

接線（tangent）は、「x^2 を xx_0 に、y^2 を yy_0 に置き換える」という形から求めるのが最も速く、陰関数微分（implicit differentiation）を用いても同じ結果が得られる。作図の部分では、Q の座標と直線 PQ の方程式を計算し、それを一般の点における接線と比較すればよい。問題文の $\tan(\alpha/2) = k$ という言葉は強いヒントである。これは、$\cot\alpha$ と $\operatorname{cosec}\alpha$ を $t = \tan(\alpha/2)$ を用いて表せ、ということを示している。

解答

接線

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の両辺を x について陰関数微分すると

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0, \qquad \text{よって} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

点 $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$ において、$\sin\alpha \neq 0$ のとき（そうでなければ接線は鉛直となり、与えられた方程式は意味をなさない）、傾き（gradient）は

$$-\frac{b^2 a\cos\alpha}{a^2 b\sin\alpha} = -\frac{b\cot\alpha}{a}.$$

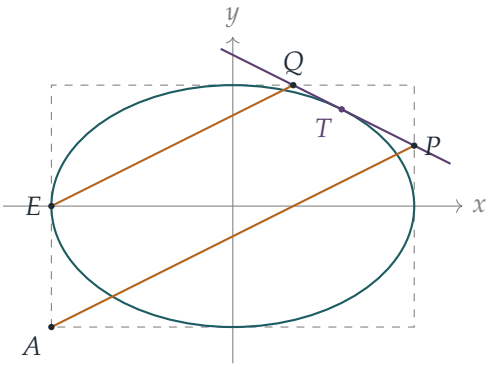
したがって接線は

$$\begin{aligned} y - b\sin\alpha &= -\frac{b\cot\alpha}{a}(x - a\cos\alpha) \\ \implies \quad y &= -\frac{b\cot\alpha}{a}x + b\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + b\sin\alpha = -\frac{b\cot\alpha}{a}x + \frac{b(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}{\sin\alpha}, \end{aligned}$$

すなわち $y = -\dfrac{b\cot\alpha}{a}\,x + b\operatorname{cosec}\alpha$ となり、示すべき式が得られた。

作図

$a = 3$、$b = 2$、$k = \frac{1}{2}$ の場合の図を示す。楕円（ellipse）は、頂点が $(\pm a, \pm b)$ である長方形の内側にある。A は左下の頂点、E は左辺の中点であり、P は右辺上、Q は上辺上にある。



直線 AP は $(-a, -b)$ と (a, kb) を結ぶので、その傾きは

$$\frac{kb-(-b)}{a-(-a)} = \frac{(1+k)b}{2a}.$$

$E(-a, 0)$ を通りこれに平行な直線は $y = \dfrac{(1+k)b}{2a}(x+a)$ である。$y = b$ とおくと $x + a = \dfrac{2a}{1+k}$ となるので

$$Q = \left(\frac{a(1-k)}{1+k},\ b\right).$$

次に、PQ の傾きは

$$\frac{b-kb}{\dfrac{a(1-k)}{1+k} - a} = \frac{b(1-k)}{\dfrac{-2ak}{1+k}} = -\frac{b(1-k^2)}{2ak},$$

であり、$k \neq 0$ であるからこの計算は問題ない。点 $P(a, kb)$ を用いると、直線 PQ は

$$y = kb - \frac{b(1-k^2)}{2ak}(x-a) = -\frac{b(1-k^2)}{2ak}\,x + \frac{2k^2b + b(1-k^2)}{2k},$$

となるので

$$PQ: \qquad y = -\frac{b}{a}\cdot\frac{1-k^2}{2k}\,x + b\cdot\frac{1+k^2}{2k}.$$

考えてみよう これが楕円上のある点における接線であることは、どうすればわかるだろうか？

上で求めた $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$ における接線と比較する。$\cot\alpha = \dfrac{1-k^2}{2k}$ かつ $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1+k^2}{2k}$ となる α が必要である。これはまさに t 公式（t-formulae）である。$t = \tan(\alpha/2)$ とおくと

$$\tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad \sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \text{よって} \qquad \cot\alpha = \frac{1-t^2}{2t}, \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1+t^2}{2t}.$$

$0 < k < 1$ であるから、$\alpha = 2\arctan k$ と選ぶことができる。これは $(0, \frac{\pi}{2})$ に属するので、$\sin\alpha \neq 0$ かつ $\tan(\alpha/2) = k$ である。$t = k$ とすると、二つの式は PQ の傾きと切片（intercept）の両方に一致する。よって PQ は直線 $y = -\frac{b\cot\alpha}{a}x + b\operatorname{cosec}\alpha$ であり、これは $\tan(\alpha/2) = k$ を満たす点 $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$ における楕円の接線である。これが示すべきことであった。

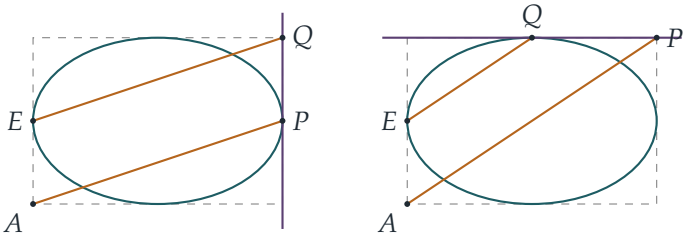
座標で表すと、接点（point of contact）は $T = \left(\dfrac{a(1-k^2)}{1+k^2}, \dfrac{2kb}{1+k^2}\right)$ である。

$k = 0$ と $k = 1$ の場合

上の計算では k で割っており、また接線の公式には $\sin\alpha \neq 0$ が必要であるので、作図を直接やり直す。

$k = 0$. このとき $P = (a, 0)$ であり、AP の傾きは $\frac{b}{2a}$ である。E を通りこれに平行な直線は $y = \frac{b}{2a}(x + a)$ であり、$y = b$ と $x = a$ で交わるので $Q = (a, b)$ となる。すると PQ は鉛直な直線 $x = a$ である。これは $\alpha = 0$ に対応する点 $(a, 0)$ における楕円の接線であり、$\tan(0/2) = 0 = k$ である。したがって、接線を $y = mx + c$ の形に書けないにもかかわらず、結果は**依然として**成り立つ。

$k = 1$. このとき $P = (a, b)$ であり、AP は長方形の対角線で、傾きは $\frac{b}{a}$ である。E を通りこれに平行な直線は $y = \frac{b}{a}(x + a)$ であり、$y = b$ と $x = 0$ で交わるので $Q = (0, b)$ となる。すると PQ は水平な直線 $y = b$ であり、楕円の最上点 $(0, b)$ における接線である。これは $\alpha = \frac{\pi}{2}$ に対応する点であり、$\tan(\pi/4) = 1 = k$ である。よってこの場合も結果は成り立つ（しかも公式もそのまま使える。$\cot\frac{\pi}{2} = 0$、$\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2} = 1$ から $y = b$ が得られる）。



検算

- $a=3$、$b=2$、$k=\frac{1}{2}$ とする。このとき $Q=(1,2)$ であり、PQ は $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ である。また $\tan\alpha=\frac{4}{3}$ であるから $\cos\alpha=\frac{3}{5}$、$\sin\alpha=\frac{4}{5}$ となり、$T=(\frac{9}{5},\frac{8}{5})$ である。この点は PQ 上にあり（$-\frac{9}{10}+\frac{5}{2}=\frac{8}{5}$）、そこでの傾きは $-\frac{b^2x}{a^2y}=-\frac{4\cdot 9/5}{9\cdot 8/5}=-\frac{1}{2}$ である。
- PQ を楕円の方程式に代入すると、重解（repeated root）をもつ二次方程式が得られるはずである。このことと、Q および PQ の式を、ランダムに選んだ a、b、k の千通りの組について数値的に確かめた。
- $k\to 0^+$ のとき $T\to(a,0)$ であり、$k\to 1^-$ のとき $T\to(0,b)$ である。これは二つの端の場合と一致する。

よくある間違い

- PQ の傾きの符号を間違える。分母 $\frac{a(1-k)}{1+k}-a$ は負である。
- $\operatorname{cosec}0$ が定義されないことを理由に、$k=0$ では結果が成り立たないと述べてしまう。破綻するのは**公式**であって、幾何的な事実ではない。PQ は依然として $\alpha=0$ における接線である。

STEP のその先へ

置換 $t=\tan(\alpha/2)$ は、楕円の有理パラメータ表示（rational parametrisation）$\left(a\frac{1-t^2}{1+t^2},\,b\frac{2t}{1+t^2}\right)$ を与える。これは、三角関数の積分を有理関数の積分に変換したり、すべてのピタゴラス数（Pythagorean triples）を求めたりするのと同じ考え方である。すべての二次曲線（conic）はこのように有理的にパラメータ表示でき、ここで扱ったような、平行線と交点だけから組み立てられる作図は、射影幾何学（projective geometry）の主題である。これが整数論（number theory）とどう結びつくかを初めて知るには、Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）を読んでみるとよい。

解答例

STEP II 2006、第 8 問

純粋数学 • ベクトルと直線

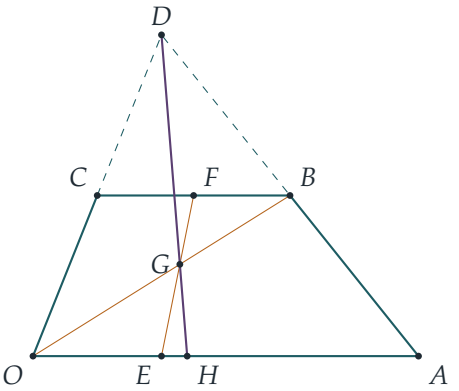
STEP II 2006、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s2-q8

鍵となる考え方

この問題に現れる点はすべて 2 直線の交点として定義されているので、問題全体は一つの決まった手順で進む。すなわち、各直線を最初の小問で求めた形に書き、二つの式を等しいとおいて、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{c}$ の係数を比較する（comparing coefficients）。この比較が正当なのは、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{c}$ が平行（parallel）でないため、ベクトルを $p\mathbf{a} + q\mathbf{c}$ の形に表す方法がただ一通りしかないからである。



解答

直線の方程式

位置ベクトル（position vector）が $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ である 2 点を通る直線は、$\mathbf{x}$ を通り方向 $\mathbf{y}-\mathbf{x}$ をもつので、その上の点は

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + \alpha(\mathbf{y}-\mathbf{x}) = (1-\alpha)\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y},$$

で与えられる。ここで α はすべての実数を動く。$\alpha = 0$ のとき $\mathbf{x}$、$\alpha = 1$ のとき $\mathbf{y}$ となり、係数の和はつねに 1 であることに注意する。これが求める形である。

以下を通じて、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{c}$ は平行でない（もし平行なら O, A, C が同一直線上（collinear）にあり、台形（trapezium）ができない）。したがって、$p\mathbf{a} + q\mathbf{c} = p'\mathbf{a} + q'\mathbf{c}$ ならば $p = p'$ かつ $q = q'$ である。

小問 (i)

CB は OA に平行なので、ベクトル $\overrightarrow{CB}$ は $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ のスカラー倍（scalar multiple）である。これを $\lambda\mathbf{a}$ とおく。すると

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \mathbf{c} + \lambda\mathbf{a}.$$

$OABC$ を順にたどると、$\overrightarrow{CB}$ は $\overrightarrow{OA}$ と同じ向きを向くので $\lambda > 0$ であり、また $CB < OA$ より $\lambda < 1$ である。よって $0 < \lambda < 1$ であり、とくに $\lambda \neq 1$ である。このことは後で必要になる。

小問 (ii)

E と F。これらは比からただちに得られる。

$$\mathbf{e} = \tfrac{1}{3}\mathbf{a}, \qquad \mathbf{f} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{b}) = \tfrac{1}{2}\lambda\mathbf{a} + \mathbf{c}.$$

D。直線 OC 上の点は $\mu\mathbf{c}$ である。直線 AB 上の点は

$$(1-\beta)\mathbf{a} + \beta(\lambda\mathbf{a} + \mathbf{c}) = (1-\beta+\beta\lambda)\mathbf{a} + \beta\mathbf{c}.$$

である。D においてこれらは一致する。係数を比較すると $\beta = \mu$ かつ $1-\beta(1-\lambda) = 0$ となるので、$\beta = \dfrac{1}{1-\lambda}$ である（$\lambda \neq 1$ なので問題ない）。したがって

$$\mathbf{d} = \frac{1}{1-\lambda}\,\mathbf{c}.$$

$\frac{1}{1-\lambda} > 1$ なので、D は確かに OC を C の先へ延長した部分にあり、そうなるべきとおりである。

G。OB 上の点は $t(\lambda\mathbf{a}+\mathbf{c})$ である。EF 上の点は

$$(1-s)\tfrac{1}{3}\mathbf{a}+s\big(\tfrac{1}{2}\lambda\mathbf{a}+\mathbf{c}\big)=\big(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}s+\tfrac{1}{2}\lambda s\big)\mathbf{a}+s\mathbf{c}.$$

である。$\mathbf{c}$ の係数を比較すると $s=t$ となり、次に $\mathbf{a}$ の係数から

$$\lambda t=\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}t+\tfrac{1}{2}\lambda t \quad\Longrightarrow\quad t\Big(\frac{3\lambda+2}{6}\Big)=\frac{1}{3} \quad\Longrightarrow\quad t=\frac{2}{3\lambda+2}.$$

を得る。よって

$$\mathbf{g}=\frac{2}{3\lambda+2}\,(\lambda\mathbf{a}+\mathbf{c}).$$

H。直線 DG 上の点は

$$(1-k)\mathbf{d}+k\mathbf{g}=\frac{2k\lambda}{3\lambda+2}\,\mathbf{a}+\Big(\frac{1-k}{1-\lambda}+\frac{2k}{3\lambda+2}\Big)\mathbf{c}.$$

である。

考えてみよう この直線上の点のうち、OA 上にある点はどのようにして選び出せばよいか。

直線 OA 上の点は $\mathbf{a}$ だけの倍数なので、$\mathbf{c}$ の係数が 0 になればよい。$(1-\lambda)(3\lambda+2)$ を掛けると

$$\begin{aligned}(1-k)(3\lambda+2)+2k(1-\lambda)&=0\\ (3\lambda+2)-k\big(3\lambda+2-2+2\lambda\big)&=0\\ k&=\frac{3\lambda+2}{5\lambda}.\end{aligned}$$

このとき $\mathbf{a}$ の係数は

$$\frac{2\lambda}{3\lambda+2}\cdot\frac{3\lambda+2}{5\lambda}=\frac{2}{5},\qquad\text{よって}\qquad\mathbf{h}=\tfrac{2}{5}\,\mathbf{a}.$$

となる。答えをまとめると

$$\mathbf{d}=\frac{\mathbf{c}}{1-\lambda},\quad\mathbf{e}=\tfrac{1}{3}\mathbf{a},\quad\mathbf{f}=\tfrac{1}{2}\lambda\mathbf{a}+\mathbf{c},\quad\mathbf{g}=\frac{2(\lambda\mathbf{a}+\mathbf{c})}{3\lambda+2},\quad\mathbf{h}=\tfrac{2}{5}\mathbf{a}.$$

$OH=\frac{2}{5}OA$ かつ $HA=\frac{3}{5}OA$ なので、台形の形によらず

$$OH:HA=2:3,$$

である。

検算

- $\mathbf{a} = (6,0)$, $\mathbf{c} = (1,2.5)$, $\lambda = \frac{1}{2}$ とする（図の場合）。公式から $D = (2,5)$, $G \approx (2.286, 1.429)$, $H = (2.4,0)$ が得られる。D から G への傾きは $-3.571/0.286 = -12.5$ であり、D から H への傾き $-5/0.4$ も同じ値である。よって D, G, H は確かに同一直線上にある。
- H の答えは λ, $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$ によらない。コンピュータで 2000 個のランダムな台形について作図全体を厳密な有理数演算で繰り返したところ、毎回 $OH : HA = 2 : 3$ となった。
- $\lambda \to 1$ のとき辺 OC と AB は平行になり、$\mathbf{d} = \mathbf{c}/(1-\lambda)$ は無限遠へ飛んでいく。これはそうなるべきとおりである。

よくある間違い

- 異なる 2 直線に同じパラメータ（parameter）の文字を使ってしまう。等しいとおく前に、各直線にそれぞれ別のパラメータが必要である。
- なぜ許されるのかを述べずに係数を比較してしまう。係数比較がうまくいくのは、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{c}$ が平行でないからである。
- $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{c}$ と書いてしまう。$\mathbf{a}$ に平行なのは $\overrightarrow{AB}$ ではなく $\overrightarrow{CB}$ である。

STEP のその先へ

答え $2 : 3$ が台形の形によらないのは、各段階で用いているのが直線、交点、直線上の比だけであり、アフィン写像（affine map、線形写像（linear map）に平行移動（translation）を続けたもの）はこれらをすべて保つからである。したがって、台形を都合のよい台形、たとえば $OABC$ で C が O の真上にあるようなものに写し、そこで計算してもよい。これが**アフィン幾何学**（affine geometry）の考え方である。また、係数の形 $(1-\alpha)\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ は重心座標（barycentric coordinates）の出発点である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は線形写像と座標を扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* にはこのような形式のベクトル幾何の問題がさらに収められている。

解答例

STEP II 2006、第 9 問

力学 ・ 摩擦と転倒

STEP II 2006、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

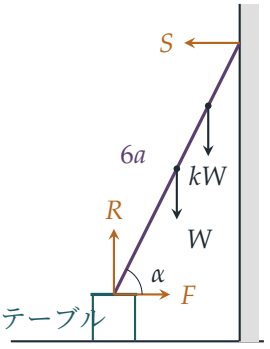
step.maths.org/questions/06-s2-q9

鍵となる考え方

はしごとテーブルを、はしごの下端での接触によって結ばれた二つの別々の物体として扱う。はしごだけを考えると、その下端での垂直抗力と摩擦力が求まり、これらはペンキ職人がどの高さにいるかによって変わる。次にニュートン（Newton）の第三法則により、同じ大きさで向きが逆の力がテーブルに働く。テーブルについては二つのしきい値を比べる。すなわち、テーブルを滑らせる押す力と、遠い側の脚のまわりのモーメントが、テーブルにかかる重さのモーメントを上回るような押す力である。

解答

はしごを一様な棒（uniform rod）、ペンキ職人を質点（particle）、壁をなめらか（smooth）とし、テーブルを天板の高さが a の剛体（rigid body）とみなす（天板の厚さは無視する）。$\alpha = \arctan 2$ とおくと、$\tan\alpha = 2$、$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$、$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ である。ペンキ職人ははしごの下端からはしごに沿って距離 x の位置に立つとし、$0 \le x \le 6a$ とする。



小問 (i)

はしごに働く力は、中点に働く自身の重さ W、ペンキ職人の重さ kW、なめらかな壁からの水平な抗力 S、そして下端に働く上向きの垂直抗力（normal reaction）R と壁に向かう向きの摩擦力（friction）F である。（摩擦力は壁に向かう向きでなければならない。S とつり合うことのできる水平な力はこれだけだからである。）

鉛直方向と水平方向の力のつり合いより

$$R = (k+1)W, \qquad F = S.$$

はしごの下端のまわりのモーメント（moment）を考える。上端は下端より $6a\sin\alpha$ だけ高く、二つの重さはそれぞれ水平距離 $3a\cos\alpha$ と $x\cos\alpha$ の位置に働くので、

$$S \cdot 6a\sin\alpha = W \cdot 3a\cos\alpha + kW \cdot x\cos\alpha.$$

両辺を $6a\sin\alpha$ で割り、$\cot\alpha = \frac{1}{2}$ を用いると

$$F = S = \frac{W}{12}\left(3 + \frac{kx}{a}\right).$$

これは x について増加するので、必要な摩擦力が最大になるのはペンキ職人が一番上、すなわち $x = 6a$ にいるときである：

$$F_{\max} = \frac{(3+6k)W}{12} = \frac{(2k+1)W}{4}.$$

得られる摩擦力の最大値は

$$\tfrac{1}{2}R = \frac{(k+1)W}{2} = \frac{(2k+2)W}{4}.$$

$2k+1 < 2k+2$ であるから、ペンキ職人のどの位置についても、またどの k についても $F \le F_{\max} < \frac{1}{2}R$ が成り立つ。したがって、テーブルが固定されていれば、ペンキ職人がどれほど高く立ってもはしごは決して滑らない。これが示すべきことであった。

小問 (ii)

ここでは $k = 9$ なので $R = 10W$ であり、

$$F = \frac{W}{4}\left(1 + \frac{3x}{a}\right),$$

これは $x = 0$ での $\frac{1}{4}W$ から $x = 6a$ での $\frac{19}{4}W$ まで増加する。小問 (i) の結果はそのまま成り立つので、はしごがテーブルの天板の上で滑ることはない。

ニュートンの第三法則により、はしごはテーブルの天板の中心を、下向きの力 $R = 10W$ と、壁から離れる向きの水平な力 F で押す。テーブルにはさらに自身の重さ $2W$ が中心に働き、地面は脚に垂直抗力と摩擦力を及ぼす。

考えてみよう 天板の中心を水平に押す力によって、どうしてテーブルが傾くのだろうか。

押す力 F は高さ a に働くので、壁から遠い側の 2 本の脚の下端のまわりにモーメントをもつ。テーブルが傾くとすれば、それはこれらの脚の先端を結ぶ直線のまわりに回転する。脚は一辺 $\frac{1}{2}a$ の正方形の頂点にあるので、この直線はテーブルの中心から水平距離 $\frac{1}{4}a$ のところにある。

傾く場合。遠い側の脚の先端を結ぶ直線のまわりでは、地面が遠い側の脚に及ぼす力はモーメントをもたず、どの脚に働く地面の摩擦力もモーメントをもたない（地面の高さに働くからである）。中心に働く下向きの力 $10W + 2W = 12W$ は、復元モーメント $12W \cdot \frac{1}{4}a = 3Wa$ をもつ。押す力 F は転倒モーメント Fa をもつ。この直線のまわりのモーメントを考えると、壁に近い側の 2 本の脚に働く垂直抗力（の合計）N_1 は

$$N_1 \cdot \tfrac{1}{2}a = 3Wa - Fa,$$

を満たすので、$N_1 \geq 0$ となるのはちょうど $F \leq 3W$ のときである。テーブルが傾き始めるのは $N_1 = 0$ のとき、すなわち

$$\frac{W}{4}\left(1 + \frac{3x}{a}\right) = 3W \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{11a}{3}.$$

のときである。

滑る場合。テーブルについて鉛直方向の力のつり合いを考えると、地面からの垂直抗力の合計は $12W$ なので、得られる摩擦力の合計の最大値は $\frac{1}{3} \cdot 12W = 4W$ である。水平方向の力のつり合いより、必要な摩擦力は F である。よって、テーブルが滑り始めるのは

$$\frac{W}{4}\left(1 + \frac{3x}{a}\right) = 4W \quad \Longleftrightarrow \quad x = 5a.$$

のときである。

どちらの値もはしごの長さ $6a$ の範囲内にあり、F はペンキ職人が登るにつれて単調に増加する。F は $4W$ に達する（$x = 5a$）前に $3W$ に達する（$x = \frac{11}{3}a$）。したがって**テーブルが先に傾く**。これが起こるのは、ペンキ職人がはしごに沿って $\frac{11}{3}a$ の位置、すなわち天板から高さ $\frac{11}{3}a \sin\alpha = \frac{22a}{3\sqrt{5}} \approx 3.28a$ のところにいるときである。その瞬間に地面で必要な摩擦力はわずか $3W$ であり、得られる最大値 $4W$ より小さいので、テーブルは滑っていない。

検算

- はしごにペンキ職人がいないとき（$x = 0$）、$F = \frac{1}{4}W$ であり、近い側の脚は $N_1 = \frac{11}{2}W$、遠い側の脚は $\frac{13}{2}W$ を支える。押す力が壁から離れる向きなので、遠い

側の脚がわずかに多くを支えるのは当然である。

- コンピュータで多くの k と x の値について力を計算した。(i) では、必要な摩擦力と得られる摩擦力の比の最大値は 1 をわずかに下回る（上端でのその値は $\frac{2k+1}{2k+2}$ である）。(ii) では、近い側の脚の垂直抗力が $x \approx 3.667a$ で 0 になり、地面の摩擦力が $x = 5a$ で限界に達することが確かめられる。

よくある間違い

- 傾きの回転軸を、中心から距離 $\frac{1}{2}a$ にあるテーブルの端にとってしまう。天板の一辺が $\frac{1}{2}a$ なので、半分の幅は $\frac{1}{4}a$ である。
- テーブルを押す力が地面の高さではなく、脚の上端である高さ a に働くことを忘れる。押す力に転倒モーメントを与えるのはこの高さである。
- テーブルに働く地面からの垂直抗力を求めるときに、はしごとペンキ職人の $10W$ を入れ忘れる。テーブル自身の重さ $2W$ だけでは足りない。

STEP のその先へ

この問題は、剛体の系が、滑るか倒れるかという競合する仕方でどのように破綻しうるかを扱っている。その方法は、それぞれのしきい値を求め、荷重がどちらに先に達するかを調べることである。技術者は同じ考え方を擁壁、クレーン、積み重ねた荷物に適用しており、静力学（statics）の講義ではこれが仮想仕事の原理（principle of virtual work）へとつながっていく。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体のつり合いと摩擦を丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 2006、第 10 問

力学 ・ 衝突と反発係数

> **STEP II 2006、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q10

鍵となる考え方

各衝突は 2 本の方程式で解ける問題である。直線方向の運動量保存（conservation of momentum）と、ニュートン（Newton）の反発の法則（law of restitution）、すなわち「遠ざかる速さは近づく速さの e 倍に等しい」という法則である。まず A–B の衝突を解き、次に B の新しい速度を B–C の衝突に代入する。A と B の 2 回目の衝突が起こるのは、B の後ろにいる A が、B が C に衝突した後の B よりも前向きに速く動いているとき、まさにそのときである。そうすると小問 (ii) は、一定の速度で動く物体どうしの追いかけ問題になる。

解答

A、B、C を、滑らかな（smooth）面上の一直線上を動く質点（particle）としてモデル化する。したがって衝突の間を除けば水平方向の力ははたらかない。A が打ち出される向きを正の向きとする。以下の速度はすべて符号付きである。

小問 (i)

A と B の衝突。衝突直後の A と B の速度をそれぞれ v_A、v_B とする。運動量保存と反発の法則（$e = \frac{1}{2}$）から

$$mv_A + km\,v_B = mu, \qquad v_B - v_A = \tfrac{1}{2}u.$$

$v_A = v_B - \frac{1}{2}u$ を第 1 式に代入すると $(1+k)v_B = \frac{3}{2}u$ となるので、

$$v_B = \frac{3u}{2(1+k)}, \qquad v_A = v_B - \frac{u}{2} = \frac{(2-k)\,u}{2(1+k)}.$$

$v_B > 0$ であるから、B は確かに C に向かって進む。また $v_A < v_B$ であるから、B が C に達する前に A が B に追いつくことはない。

B と C の衝突。衝突直後の B と C の速度をそれぞれ w_B、w_C とする。$e = \frac{1}{4}$ であるから

$$km\,w_B + 3m\,w_C = km\,v_B, \qquad w_C - w_B = \tfrac{1}{4}v_B.$$

$w_C = w_B + \frac{1}{4}v_B$ を代入すると $(k+3)w_B = \left(k - \frac{3}{4}\right)v_B$ となるので、

$$w_B = \frac{(4k-3)\,v_B}{4(k+3)} = \frac{3(4k-3)\,u}{8(1+k)(k+3)}.$$

また $w_C > w_B$ であるから、B と C は離れていき、二度と出会わない。この衝突の後は、A と B が出会うまで（出会うとすれば）、A にも B にも何もはたらかない。

考えてみよう A と B が再び衝突するための条件は、正確には何か？

B が C に衝突した後は、A も B も一定の速度で動き、A は B の後ろ（B より負の側）にいる。両者の間隔が縮まるのは $v_A > w_B$ のときであり、かつそのときに限る。そしてその場合、間隔は有限時間で 0 になる。$v_A \le w_B$ ならば間隔は決して減少しない。この 1 つの不等式で、符号のあらゆる場合が尽くされる。たとえば A が後ろ向きに動いていても、B がそれよりさらに速く後ろ向きに動いていれば、やはり B が A に追いつく。これも $v_A > w_B$ である。

したがって、必要な条件は

$$\frac{(2-k)u}{2(1+k)} > \frac{3(4k-3)u}{8(1+k)(k+3)}.$$

$k > 0$ より正である $8(1+k)(k+3)/u$ を両辺に掛けると、同値な不等式

$$\begin{aligned} 4(2-k)(k+3) &> 3(4k-3) \\ 24 - 4k - 4k^2 &> 12k - 9 \\ 4k^2 + 16k - 33 &< 0 \\ (2k-3)(2k+11) &< 0. \end{aligned}$$

を得る。$2k + 11 > 0$ であるから、これは $2k - 3 < 0$ と同値である。k は質量比なので $k > 0$ である。よって、A と B が 2 回目に衝突するのは、ちょうど

$$0 < k < \tfrac{3}{2}.$$

のときである。$k = \frac{3}{2}$ のときは $v_A = w_B = \frac{u}{10}$ となる。このとき両者は同じ速さで並んで進み、実際に再び出会うことはないので、端点は除かれる。

小問 (ii)

$k = 1$ のとき、上の式から

$$v_A = \frac{u}{4}, \qquad v_B = \frac{3u}{4}, \qquad w_B = \frac{3u}{64}, \qquad w_C = \frac{15u}{64}.$$

を得る。A と B が最初に衝突する位置（すなわち B の出発点）を原点とし、時刻 t をその衝突から測る。

B–C の衝突まで。 B は C までの距離 d を速さ $\frac{3}{4}u$ で進むので、かかる時間は

$$t_1 = \frac{d}{3u/4} = \frac{4d}{3u}.$$

この間に A は $\frac{u}{4} \cdot \frac{4d}{3u} = \frac{d}{3}$ だけ進む。よって A は $\frac{d}{3}$、B は d の位置にあり、間隔は $\frac{2d}{3}$ である。

追いかけ。 今度は A が速さ $\frac{u}{4} = \frac{16u}{64}$、$B$ が速さ $\frac{3u}{64}$ で動くので、A は相対速度 $\frac{13u}{64}$ で間隔を詰める。かかる時間は

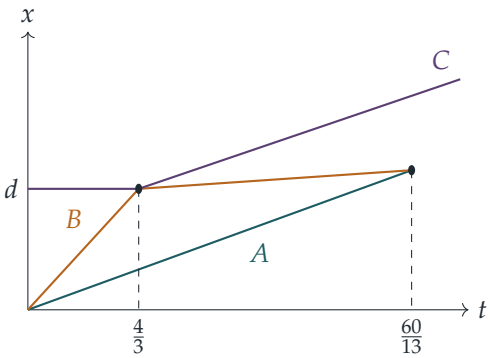
$$t_2 = \frac{2d/3}{13u/64} = \frac{128d}{39u}.$$

合計。 A–B の 2 回の衝突の間の時間は

$$t_1 + t_2 = \frac{4d}{3u} + \frac{128d}{39u} = \frac{52d + 128d}{39u} = \frac{180d}{39u} = \frac{60d}{13u},$$

となり、示すべき結果が得られた。

下の位置–時間グラフは、$u = d = 1$ のときの運動を表している。A と B のグラフは $t = \frac{60}{13}$ で再び交わる。



検算

- 運動量：$k = 1$ のとき、1 回目の衝突の後は $m \cdot \frac{u}{4} + m \cdot \frac{3u}{4} = mu$、2 回目の衝突の後は $m \cdot \frac{3u}{64} + 3m \cdot \frac{15u}{64} = \frac{48}{64}mu = m \cdot \frac{3u}{4}$ である。どちらも釣り合っている。

- 境界 $k = \frac{3}{2}$：v_A と w_B はどちらも $\frac{u}{10}$ となり、これが臨界値であることが確かめられる。
- 妥当性の確認：k が大きいとき、A は後ろ向きに跳ね返り（$v_A < 0$）、B は前向きに進み続けるので、明らかに 2 回目の衝突はない。これは求めた範囲と一致する。
- 10^5 個のランダムな有理数 k について、$v_A > w_B$ となるのがちょうど $k < \frac{3}{2}$ のときであることを数値的に確かめた。また $u = d = 1$ として時間刻みのシミュレーションを行うと、2 回目の衝突は $t \approx 4.6154$ で起こり、$\frac{60}{13} \approx 4.6154$ と一致した。

よくある間違い

- 反発の法則で、符号付きの速度ではなく速さを使ってしまう。符号付きの速度を使えば、遠ざかる速さは「前の物体の速度から後ろの物体の速度を引いたもの」となり、v_A の符号は自動的に正しく扱われる。
- 条件の一部として $v_A > 0$ を要求してしまう。原理的には、A が後ろ向きに動いていても B に追いつかれることがありうる（$w_B < v_A$ の場合）。正しい条件は $v_A > w_B$ ただ 1 つである。
- (ii) で、追いかけの時間を B の速度が変わった瞬間からではなく 1 回目の衝突から測ってしまい、A がすでに進んでいる $\frac{d}{3}$ の先行分を見落とす。

STEP のその先へ

運動量保存と反発の法則を合わせると、どの衝突も、衝突前の速度から衝突後の速度への線形写像（linear map）になる。ニュートンのゆりかご（Newton's cradle）や、2 つのブロックと壁の間の衝突回数を数える有名な問題のような衝突の連鎖は、これらの写像を合成することで調べられる。大学 1 年の力学では、これが重心系（centre-of-mass frame）へとつながる。重心系では反発の法則は相対速度の単純な定数倍となり、さらに 2 次元や 3 次元での衝突へと進んでいく。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、衝突と重心系をわかりやすく扱っている。

解答例

STEP II 2006、第 14 問

確率・統計 ・ 連続型確率変数

STEP II 2006、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s2-q14

鍵となる考え方

この問題全体は、ただ一つの原始関数（antiderivative）にかかっている。分母 $x\ln x$ は $\ln x$ に x を掛けたものであり、$1/x$ は $\ln x$ の導関数であるから、被積分関数（integrand）は $g(x)=\ln x$ として $g'(x)/g(x)$ の形をしている。したがって

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln|\ln x| + C.$$

あとは各小問で「確率の総和は 1」を用い、符号と、密度（density）が実際に 0 でない範囲に注意を払えばよい。

解答

グラフの概形

$x>0$、$x\neq 1$ に対して $y=\dfrac{1}{x\ln x}$ とおく。

符号。$x>0$ であるから、y の符号は $\ln x$ の符号と一致する。すなわち $0<x<1$ では $y<0$、$x>1$ では $y>0$ である。曲線は座標軸と交わらない。

端での振る舞い。

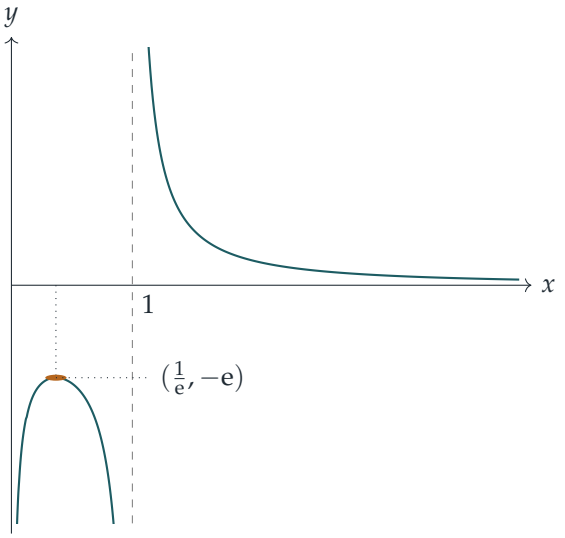
- $x\to 0^+$ のとき：問題文より $x\ln x\to 0$ であり、そこでは $x\ln x<0$ であるから、$y\to-\infty$ となる。
- $x\to 1$ のとき：$x\ln x\to 0$ であり、左側からは負、右側からは正であるから、$x\to 1^-$ のとき $y\to-\infty$、$x\to 1^+$ のとき $y\to+\infty$ となる。直線 $x=1$ は垂直な漸近線（asymptote）である。

► $x \to \infty$ のとき：$x\ln x \to \infty$ であるから $y \to 0^+$ となり、x 軸が漸近線である。

極値。商の微分法（quotient rule）（あるいは合成関数の微分法（chain rule））により

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\ln x + 1}{(x\ln x)^2}$$

であり、これが 0 になるのは $\ln x = -1$、すなわち $x = 1/\mathrm{e}$ のときに限る。このとき $y = \dfrac{1}{(1/\mathrm{e})(-1)} = -\mathrm{e}$ である。$0 < x < 1/\mathrm{e}$ では $\ln x + 1 < 0$ であるから y は増加し、$x > 1/\mathrm{e}$（ただし $x \neq 1$）では減少する。よって $(1/\mathrm{e}, -\mathrm{e})$ は左側の枝の極大点（local maximum）であり、右側の枝は $+\infty$ から 0 まで単調に減少する。



小問 (i)

ここでは $a = \frac{1}{4}$、$b = \frac{1}{2}$ であり、どちらも $x\ln x < 0$ となる区間 $(0,1)$ に属する。上の原始関数を用いると

$$\begin{aligned}\int_{1/4}^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} &= \Big[\ln|\ln x|\Big]_{1/4}^{1/2} = \ln|\ln\tfrac{1}{2}| - \ln|\ln\tfrac{1}{4}| \\ &= \ln(\ln 2) - \ln(2\ln 2) = -\ln 2.\end{aligned}$$

確率の総和は 1 でなければならないから、$\lambda\cdot(-\ln 2) = 1$ であり、

$$\lambda = -\frac{1}{\ln 2}$$

を得る。負の符号はまさに必要なものである。$[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ 上では $x\ln x < 0$ であるから、そこで f が非負になるためには λ は負でなければならない。

小問 (ii)

$\lambda = 1$ のとき密度は非負でなければならないから、区間 $[a, b]$ は $x \ln x > 0$ となる範囲になければならない。$b > a > 1$ であるから実際そうなっている。このとき $\ln a, \ln b > 0$ であり、

$$1 = \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \ln(\ln b) - \ln(\ln a) = \ln \frac{\ln b}{\ln a}.$$

よって $\dfrac{\ln b}{\ln a} = \mathrm{e}$、すなわち $\ln b = \mathrm{e} \ln a = \ln\left(a^{\mathrm{e}}\right)$ であり、ln は単射（one-to-one）であるから $b = a^{\mathrm{e}}$ となり、示すべきことが示された。

小問 (iii)

$a = \mathrm{e}$ のとき、小問 (ii) より $b = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$ である。$1 < \frac{3}{2} < 2 < \mathrm{e}$ であるから、区間 $[\mathrm{e}^{3/2}, \mathrm{e}^2]$ 全体が $[a, b] = [\mathrm{e}, \mathrm{e}^{\mathrm{e}}]$ に含まれる。したがって

$$\mathrm{P}(\mathrm{e}^{3/2} \le X \le \mathrm{e}^2) = \Big[\ln(\ln x)\Big]_{\mathrm{e}^{3/2}}^{\mathrm{e}^2} = \ln 2 - \ln \tfrac{3}{2} = \ln \tfrac{4}{3}.$$

これを分数で表すために、マクローリン級数（Maclaurin series）$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots$ に $t = \frac{1}{3}$ を代入し、4 項までとる：

$$\ln \tfrac{4}{3} \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{18} + \frac{1}{81} - \frac{1}{324} = \frac{108 - 18 + 4 - 1}{324} = \frac{93}{324} = \frac{31}{108}.$$

考えてみよう 4 項で打ち切るのが妥当だと、どうしてわかるのだろうか？

この級数は符号が交互に変わり、項の絶対値は減少していくので、4 項で打ち切ったときの誤差は第 5 項 $\frac{1}{5 \cdot 3^5} = \frac{1}{1215} < 0.001$ より小さい。よって $\mathrm{P} = \ln \frac{4}{3} \approx \frac{31}{108}$ となり、示すべきことが示された。

小問 (iv)

今度は $a = \mathrm{e}^{1/2}$ であるから、小問 (ii) より

$$b = a^{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}/2}.$$

考えてみよう 積分する前に、密度が実際に 0 でないのはどこだろうか？

$\mathrm{e} < 3$ であるから $\mathrm{e}/2 < \frac{3}{2}$ であり、$b = \mathrm{e}^{\mathrm{e}/2} < \mathrm{e}^{3/2}$ となる。区間 $[\mathrm{e}^{3/2}, \mathrm{e}^2]$ は完全に b より右側にあり、そこでは $\mathrm{f}(x) = 0$ である。したがって

$$\mathrm{P}(\mathrm{e}^{3/2} \le X \le \mathrm{e}^2) = 0.$$

（何も考えずに $1/(x \ln x)$ を $\mathrm{e}^{3/2}$ から e^2 まで積分すると再び $\ln \frac{4}{3}$ が得られるが、これは誤りである。）

検算

- 数値的には $\mathrm{e}^{-1} \approx 0.368$ であり、$(0,1)$ 上で y を調べると、そこで最大値 $\approx -2.718 = -\mathrm{e}$ をとる。
- シンプソンの公式（Simpson's rule）により $\int_{1/4}^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} \approx -0.6931 = -\ln 2$ が得られるので、$\lambda \approx -1.4427$ である。
- $a > 1$ のいくつかの値（たとえば $a = 2$、$a = 7.3$）に対して、$\int_a^{a^{\mathrm{e}}} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$ は 1.0000 となる。
- $\ln \frac{4}{3} \approx 0.28768$、$\frac{31}{108} \approx 0.28704$ であり、両者の差は 0.0007 以内である。
- (iv) では $b = \mathrm{e}^{\mathrm{e}/2} \approx 3.89$ であるのに対し、$\mathrm{e}^{3/2} \approx 4.48$ である。

よくある間違い

- $\ln x < 0$ である小問 (i) で $\ln(\ln x)$ と書いてしまう。原始関数には絶対値が必要であり、$\ln|\ln x|$ とすべきである。
- $\lambda = \frac{1}{\ln 2}$ と答えてしまう。λ が正だと「密度」が負になってしまう。
- 小問 (iv) で、$[\mathrm{e}^{3/2}, \mathrm{e}^2]$ が台（support）$[a,b]$ に含まれるかを確かめずに積分してしまう。

STEP のその先へ

置換（substitution）$u = \ln x$ により、この密度は $[\ln a, \ln b]$ 上の $1/u$ に変わり、条件 $b = a^{\mathrm{e}}$ は $\int_{\ln a}^{\ln b} \frac{\mathrm{d}u}{u} = 1$ にほかならない。このような確率変数（random variable）の変換（ここでは $U = \ln X$）は大学 1 年の確率論の中心的な道具であり、確率変数の関数の密度は合成関数の微分法から求められる。同じ関数 $1/(x \ln x)$ は解析学でもよく知られている。$\sum 1/(n \ln n)$ は、項が 0 に収束するにもかかわらず、この積分との比較によって発散（diverges）するのである。確率変数の変換については Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）を参照せよ。

解答例

STEP III 2006、第 1 問

純粋数学 ・ 曲線の概形

> **STEP III 2006、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q1

鍵となる考え方

まず割り算を行う。曲線を直線と小さな補正項の和として書けば、斜めの漸近線（oblique asymptote）が得られ、曲線がその漸近線のどちら側にあるかがわかり、さらに導関数（derivative）も計算しやすくなる。導関数はいたるところで 2 より大きいことがわかり、この一つの事実が解の個数を数える各小問の大部分を片づけてくれる。各方程式は「曲線 = 簡単なもの」の形に変形でき、あとは傾きを比べればよい。

解答

曲線

$2x^3 - 10x = 2x(x^2 - 4) - 2x$ であるから、

$$y = \frac{2x(x^2-5)}{x^2-4} = 2x - \frac{2x}{x^2-4}.$$

ここからただちに読み取れる性質がいくつかある。

- y は**奇関数**（odd function）であるから、曲線は原点のまわりに 2 回の回転対称性（rotational symmetry）をもつ。
- 曲線は $x = 0$ および $x = \pm\sqrt{5}$ で x 軸と交わる。
- **漸近線**。分母は $x = \pm 2$ で 0 になる（そこでの分子は $\pm 4 \cdot (-1) \cdot 2 \neq 0$）から、$x = 2$ と $x = -2$ は鉛直漸近線（vertical asymptote）である。$|x| \to \infty$ のとき補正項は $2x/(x^2-4) \to 0$ となるから、$y = 2x$ は斜めの漸近線である。
- **漸近線のどちら側にあるか**。$y - 2x = -2x/(x^2-4)$ である。$x > 2$ ではこれは負

である（曲線は $y = 2x$ のすぐ下にある）。$x < -2$ では正である（すぐ上にある）。$0 < x < 2$ では正、$-2 < x < 0$ では負である。

- **$x = \pm 2$ の近くでの振る舞い**。$x \to 2^+$ のとき $-2x/(x^2-4) \to -\infty$ であり、$x \to 2^-$ のとき $+\infty$ に発散する。奇関数であることから、$x \to -2^-$ のとき $y \to +\infty$、$x \to -2^+$ のとき $y \to -\infty$ である。

割り算した形を微分すると、

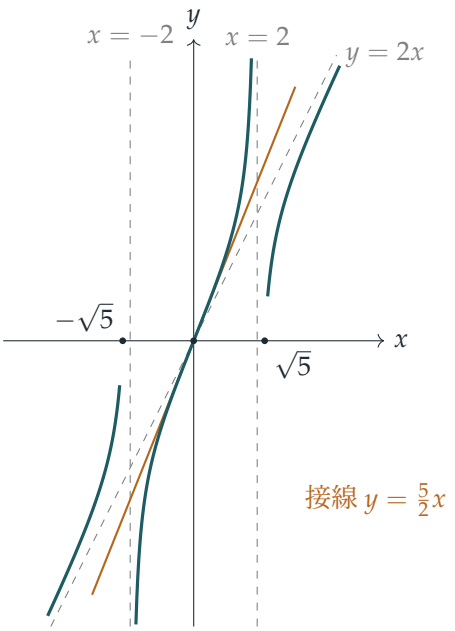
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2 - \frac{2(x^2-4) - 2x \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = 2 + \frac{2(x^2+4)}{(x^2-4)^2}.$$

したがって、$x \neq \pm 2$ であるすべての x について $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x > 2$ である。よって停留点（stationary point）は存在せず、3 つの区間 $x < -2$、$-2 < x < 2$、$x > 2$ のそれぞれにおいて曲線は狭義単調増加（strictly increasing）であり、$-\infty$ から $+\infty$ まで増加する。

原点における接線。$x = 0$ における傾きは $2 + 8/16 = \frac{5}{2}$ であるから、接線は $y = \frac{5}{2}x$ である。もう一度微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{4x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

となり、これは $x = 0$ でのみ 0 になり、そこで符号を変える。すなわち原点は変曲点（point of inflection）である。$0 < x < 2$ では第 2 次導関数は正である（分子も分母も負）から、中央の枝はそこで下に凸（convex）であり、接線 $y = \frac{5}{2}x$ の**上側**にある。$-2 < x < 0$ では上に凸（concave）であり、接線の下側にある。



まとめ。漸近線は $x = 2$、$x = -2$ および $y = 2x$ であり、原点における接線は $y = \frac{5}{2}x$ である。

以下の各小問では、$x = \pm 2$ は決して解にならない（そこでは左辺が 0 でなく、右辺が 0 である）。したがって $x^2 - 4$ で割ってよく、曲線と別のグラフとの交点の個数を数えればよい。

小問 (i)

$\frac{3}{2}(x^2 - 4)$ で割ると、方程式は

$$\frac{2x(x^2 - 5)}{x^2 - 4} = \frac{2}{3}(x + 3)$$

となる。よって、曲線と傾き $\frac{2}{3}$ の直線 $y = \frac{2}{3}x + 2$ との交点を求めればよい。

> **考えてみよう** 傾きが 2 より小さい直線が各枝とちょうど 1 回ずつ交わるのはなぜか。

曲線の y から直線の y を引いたものを $h(x)$ とおく。各枝の上で $h'(x) > 2 - \frac{2}{3} > 0$ であるから、h は狭義単調増加であり、零点は高々 1 つである。鉛直漸近線側の端では、y と同様に $h \to \pm\infty$ となる（直線の値は有限にとどまる）。外側の端では $h \approx 2x - \frac{2}{3}x = \frac{4}{3}x$ であり、これは $x \to -\infty$ のとき $-\infty$ に、$x \to +\infty$ のとき $+\infty$ に発散する。よって 3 つの枝のそれぞれにおいて h は $-\infty$ から $+\infty$ まで動き、中間値の定理（intermediate value theorem）により、ちょうど 1 回だけ 0 になる。

したがって、方程式 (i) は **3 つ**の実数解をもつ。（実際、これは 3 次方程式 $2x^3 - 3x^2 - 11x + 12 = 0$ であり、$x = 1$ がその解の一つである。）

小問 (ii)

$2(x^2 - 4)$ で割ると、$y = \frac{5}{2}x - 1$ との交点を求めればよいことになる。これは原点における接線を 1 だけ下に平行移動したものである。今度は傾きが 2 を超えるので、(i) の議論はもはや使えず、枝ごとに調べる。

- $x > 2$：曲線は $y = 2x$ の下側にある。一方、直線は $\frac{5}{2}x - 1 - 2x = \frac{1}{2}x - 1 > 0$ を満たすから、$y = 2x$ の上側にある。交点はない。
- $x < -2$：曲線は $y = 2x$ の上側にあり、直線は $\frac{1}{2}x - 1 < 0$ よりその下側にある。交点はない。
- $0 \le x < 2$：曲線は（下に凸であることから）接線 $y = \frac{5}{2}x$ 上またはその上側にあり、接線は直線より上にある。交点はない。

- $-2 < x < 0$：$x \to -2^+$ のとき曲線は $-\infty$ に発散し、直線は -6 に近づく。$x = 0$ では曲線の値は 0 で、直線の値 -1 より上にある。よって少なくとも 1 回は交わる。ここでは $y'' < 0$ であるから y' は $(-2, 0)$ 上で減少し、$y' > y'(0) = \frac{5}{2}$ となる。したがって「曲線から直線を引いた差」は狭義単調増加であり、交点はただ一つである。

したがって、方程式 (ii) は -2 と 0 の間にある**ただ 1 つ**の実数解をもつ。(3 次方程式としては $x^3 - 2x^2 + 8 = 0$ であり、その極値 8 と $\frac{184}{27}$ がともに正であることから、実数解がただ 1 つであることが確かめられる。その解は $x \approx -1.51$ 付近にある。)

小問 (iii)

$(x^2 - 4)^2$ で割ると

$$\left(\frac{2x(x^2 - 5)}{x^2 - 4}\right)^2 = x^2 + 1$$

となる。よって、曲線と直角双曲線 (rectangular hyperbola) $y^2 - x^2 = 1$ との交点、すなわち $y = \sqrt{x^2 + 1}$ (上の枝) または $y = -\sqrt{x^2 + 1}$ (下の枝) との交点を求めればよい。

考えてみよう 対称性を使って手間を半分にできないか。

できる。写像 $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ は曲線をそれ自身に移し (奇関数だから)、双曲線の 2 つの枝を入れ替える。よって下の枝との交点は上の枝との交点と 1 対 1 に対応し、後者だけを数えればよい。

$u(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ とおく。すると $|u'(x)| = |x|/\sqrt{x^2 + 1} < 1$ であるから、差 $y - u$ の導関数は曲線の各枝の上で $2 - 1 = 1 > 0$ より大きく、各枝からは高々 1 つの交点しか得られない。次に端の様子を調べる。

- $-2 < x < 2$：$y - u$ は $-\infty$ から $+\infty$ まで動く。解は 1 つ。
- $x > 2$：$x \to 2^+$ のとき $y - u \to -\infty$ であり、$x \to \infty$ のとき $y - u \approx 2x - x \to +\infty$ である。解は 1 つ。
- $x < -2$：$x \to -\infty$ のとき $y - u \approx 2x - |x| = 3x \to -\infty$ であり、$x \to -2^-$ のとき $y - u \to +\infty$ である。解は 1 つ。

よって、曲線は上の枝と 3 回交わり、対称性により下の枝とも 3 回交わる。2 つの枝には共有点がない ($u \geq 1$) から、これら 6 つの点の x 座標はすべて異なり、方程式 (iii) は **6 つ**の実数解をもつ。これは 6 次の多項式方程式 (すなわち $3x^6 - 33x^4 + 92x^2 - 16 = 0$) であるから、その解はすべて実数である。

検算

- $x = 0$ の近くでは $y \approx 2x(-5)/(-4) = \frac{5}{2}x$ であり、接線と一致する。
- $x = 1000$ では $y - 2x \approx -0.002$ である。予想どおり、小さな負の値である。
- もとの方程式について符号の変化を数値的に探索すると、(i) では解 $x \approx -2.212,\ 1,\ 2.713$、(ii) では $x \approx -1.510$ のみ、(iii) では $x \approx \pm 0.431,\ \pm 2.155,\ \pm 2.484$ が見つかる。

よくある間違い

- $x^2 - 4$ で割る前に、$x = \pm 2$ が解でないことの確認を忘れる。
- (iii) で、$y = \sqrt{x^2 + 1}$ との交点だけを数え、負の平方根を見落とす。
- (ii) で、(i) と同じように「傾きの急な直線だから各枝に解が 1 つずつ」と思い込む。傾きが 2 を超える場合、外側の枝には別の議論が必要である。

STEP のその先へ

ここでの解の個数の数え方は、中間値の定理と単調性（monotonicity）を組み合わせたものである。すなわち、$-\infty$ から $+\infty$ まで動く連続な狭義単調増加関数は、ちょうど 1 つの零点をもつ。大学 1 年の解析学（analysis）の講義では、これらの事実はどちらも実数の完備性（completeness）から丁寧に証明され、同じ論法が「奇数次の実係数多項式は実数解をもつ」といった結果の土台となっている。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、この内容を見事に展開している。

解答例

STEP III 2006、第 2 問

純粋数学 • 対称性を用いた定積分

STEP III 2006、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s3-q2

鍵となる考え方

区間 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ は対称であるから、θ を $-\theta$ に置き換えると I のもう一つの表示が得られる。二つを足し合わせると、分母にある厄介な $\sin\theta$ が消える。すべてを $\tan\theta$ で書き直すと、積分 I と J は同じ分母をもち、両者をうまく組み合わせると被積分関数（integrand）がちょうど 1 になる。全体を通して $\cos 2\alpha$ の符号に注意しておくこと。最後の小問で変わるのはまさにこの符号である。

解答

$s = \sin 2\alpha$、$c = \cos 2\alpha$ とおく。すると $s^2 + c^2 = 1$ である。考える α の二つの範囲（$\alpha \neq \frac{1}{4}\pi$）のいずれにおいても $0 < s < 1$ であるから、$1 \mp s\sin\theta \geq 1 - s > 0$ となる。したがって I の被積分関数は区間全体で連続である。

小問 (i)

$\theta = -\phi$ と置換（substitution）すると、$\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$ であり、積分の上端と下端が入れ替わる。$\cos^2(-\phi) = \cos^2\phi$、$\sin(-\phi) = -\sin\phi$ であるから、

$$I = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\phi}{1 + \sin\phi\, s}\,(-\mathrm{d}\phi) = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\phi}{1 + s\sin\phi}\,\mathrm{d}\phi,$$

となり、（ϕ を θ と書き直せば）これが一つ目の結果である。

I の二つの表示を足し合わせると、

$$2I = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2\theta \left(\frac{1}{1 - s\sin\theta} + \frac{1}{1 + s\sin\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2\cos^2\theta}{1 - s^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

ここで分子と分母を $\cos^2\theta$（区間の内部では 0 でない）で割ると、

$$\frac{2\cos^2\theta}{1-s^2\sin^2\theta} = \frac{2}{\sec^2\theta - s^2\tan^2\theta} = \frac{2}{1+\tan^2\theta\,(1-s^2)} = \frac{2}{1+c^2\tan^2\theta},$$

となる。ここで $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$ と $1-\sin^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha$ を用いた。よって

$$2I = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2}{1+\tan^2\theta\cos^2 2\alpha}\,\mathrm{d}\theta,$$

となり、示すべき式が得られた。（$\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ ではこの被積分関数は 0 に近づくので、端点で問題は生じない。）

小問 (ii)

分子に $\sec^2\theta$ があることから、$t = \tan\theta$、$\mathrm{d}t = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$ と置換するのが自然である。θ が $-\frac{1}{2}\pi$ から $\frac{1}{2}\pi$ まで動くとき、t は実数直線全体を動く。

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+c^2t^2}.$$

$0 < \alpha < \frac{1}{4}\pi$ より $0 < 2\alpha < \frac{1}{2}\pi$ であるから、$c > 0$ である。$u = ct$ とおくと、

$$J = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{c}\Big[\arctan u\Big]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{c} = \pi\sec 2\alpha.$$

小問 (iii)

小問 (i) より $I = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+c^2\tan^2\theta}$ であり、これは J と同じ分母をもつ。したがって

$$s^2I + c^2J = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{s^2+c^2\sec^2\theta}{1+c^2\tan^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

考えてみよう なぜこの特定の組み合わせを考えると簡単になるのだろうか。

分子を見てみよう。$s^2 + c^2\sec^2\theta = s^2 + c^2 + c^2\tan^2\theta = 1 + c^2\tan^2\theta$ である。これはちょうど分母に等しいので、被積分関数は 1 となり、

$$s^2I + c^2J = \pi.$$

小問 (ii) の $J = \pi/c$ を用いると、

$$s^2I = \pi - \pi c = \pi(1-c) \quad\Longrightarrow\quad I = \frac{\pi(1-c)}{1-c^2} = \frac{\pi}{1+c},$$

となる。ここで $s^2 = 1-c^2 = (1-c)(1+c)$ を用い、$1-c \neq 0$（$c < 1$ より）で約分した。最後に $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$ であるから、

$$I = \frac{\pi}{2\cos^2\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi\sec^2\alpha. \qquad \checkmark$$

小問 (iv)

今度は $\frac{1}{4}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ であるから、$\frac{1}{2}\pi < 2\alpha < \pi$ である。依然として $0 < s < 1$ であるが、今度は $c < 0$ となる。小問 (i) では $s^2 + c^2 = 1$ しか用いていないので、その結果はそのまま成り立ち、小問 (iii) の恒等式 $s^2 I + c^2 J = \pi$ も成り立つ。変わるのは小問 (ii) だけである。

考えてみよう 小問 (ii) では、正確にはどこで $\alpha < \frac{1}{4}\pi$ を用いたのだろうか。

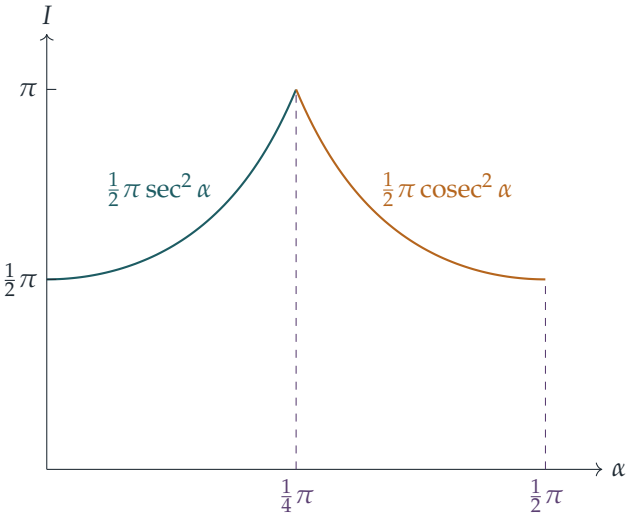
置換 $u = ct$ においてである。$c < 0$ ならば u の積分範囲は $+\infty$ から $-\infty$ となり、これを入れ替えて元に戻すと負の符号が出る。つまり $J = \pi/|c| = -\pi/c$ である。（こうでなければならない。J は正の関数の積分であるから、負の数 $\pi \sec 2\alpha$ に等しくなることはありえない。）すると

$$s^2 I = \pi - c^2\Big(-\frac{\pi}{c}\Big) = \pi(1+c) \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{\pi(1+c)}{(1-c)(1+c)} = \frac{\pi}{1-c},$$

となる。ここで $1 + c \neq 0$（$c > -1$ より）で約分した。$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$ であるから、

$$I = \frac{\pi}{2\sin^2\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{cosec}^2\alpha \qquad \big(\tfrac{1}{4}\pi < \alpha < \tfrac{1}{2}\pi\big).$$

手早く確かめる方法もある。I は $\sin 2\alpha$ を通してのみ α に依存し、$\sin 2(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \sin 2\alpha$ である。よって $I(\alpha) = I(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \frac{1}{2}\pi \sec^2(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \frac{1}{2}\pi \operatorname{cosec}^2\alpha$ となる。I のグラフは $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ に関して対称であり、そこでは二つの式はともに π を与える。



検算

- $\alpha = \frac{1}{4}\pi$（$c = 0$）のとき、小問 (i) の 2I の形の被積分関数は 2 となり、$I = \pi$ を与える。これは二つの式のどちらとも一致する。
- $\alpha \to 0$ のとき $I \to \int \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\pi$ となり、$\frac{1}{2}\pi \sec^2 0$ と一致する。
- 数値的に（元の積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用して）調べると、$\alpha = 0.5$ では $I \approx 2.039595$ となり、$\frac{1}{2}\pi \sec^2 0.5$ に等しい。また $\alpha = 1.1$ では $I \approx 1.977709 = \frac{1}{2}\pi \operatorname{cosec}^2 1.1$ となる。調べたすべての場合で、$s^2 I + c^2 J$ は 3.141593 となった。

よくある間違い

- 小問 (iv) でも $J = \pi \sec 2\alpha$ と書いてしまうこと。この範囲ではこれは負であり、正の関数の積分としてはありえない。
- 置換 $t = \tan\theta$ によって有限区間が実数直線全体に移り、積分範囲が $\pm\infty$ になることを忘れること。

STEP のその先へ

小問 (i) の工夫、すなわち $f(\theta)$ と $f(-\theta)$ の平均をとることは、関数を偶関数部分と奇関数部分（even and odd parts）に分解する考え方の出発点である。対称な区間上で積分すると、偶関数部分だけが残る。$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の有理関数を一周期にわたって積分することは、複素解析（complex analysis）の最初の講義における周回積分（contour integration）、すなわち留数定理（residue theorem）の古典的な応用であり、そこではこのような結果がわずか数行で得られる。Needham, *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）を参照されたい。

解答例

STEP III 2006、第 3 問

純粋数学 ・ べき級数の係数

> **STEP III 2006、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q3

鍵となる考え方

$\tan x$ を何度も微分する必要はまったくない。三角関数の恒等式（identity）はそれぞれこれらの関数のうち二つを結びつけるので、それは係数どうしの関係に置き換わる。x^n の係数を比較（comparing coefficients）すれば、三つの級数（series）はすべてただ一つの数列 b_n によって決まる。そのうえでピタゴラスの恒等式 $\cot^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x$ から b_n が満たすべき方程式が得られ、それを一つずつ解いていけばよい。

解答

小問 (i)

0 の近くである関数に収束（converge）する冪級数（power series）は、その関数のマクローリン級数（Maclaurin series）にほかならないので、$a_n = \tan^{(n)}(0)/n!$ である。さて、tan は奇関数（odd function）である：$\tan(-x) = -\tan x$。奇関数を微分すると偶関数（even function）になり、偶関数を微分すると奇関数になる。したがって tan の偶数階の導関数（derivative）はすべて奇関数であり、奇関数は 0 において値が零になる。よって偶数の n に対して $\tan^{(n)}(0) = 0$ であり、したがって偶数の n に対して $a_n = 0$ である。言い換えれば、この級数には x の奇数乗の項しか現れない。同じ議論が、やはり奇関数である $\cot x - \frac{1}{x} = \sum b_n x^n$ にも当てはまり、偶数の n に対して $b_n = 0$ となる。このことは後で示す関係式からも得られる。

恒等式を示すには、全体を $\sin x \cos x$ で通分する：

$$\cot x - \tan x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\cot 2x.$$

ここで $0 < x < \frac{1}{4}\pi$ とする。すると $2x$ も $(0, \frac{1}{2}\pi)$ に属するので、$\cot 2x$ に対して、$2x$ を x の代わりに用いた級数を使うことができる：

$$2\cot 2x = 2\left(\frac{1}{2x} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n 2^n x^n\right) = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} b_n x^n.$$

恒等式の左辺は

$$\cot x - \tan x = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n) x^n.$$

である。$\frac{1}{x}$ の項は打ち消し合い、x が $(0, \frac{1}{4}\pi)$ のどこにあっても等しい二つの冪級数が残る。

考えてみよう 二つの無限級数の係数を比較してよいのはなぜか？

二つの冪級数がある区間全体で同じ和をもつならば、それらの係数は一致する。実際、差をとると、その差は区間全体で零になる冪級数である。するとその導関数もすべてそこで零であり、$x \to 0^+$ とすればすべての係数が零であることがわかる。したがって

$$b_n - a_n = 2^{n+1} b_n, \qquad \text{すなわち} \qquad a_n = (1 - 2^{n+1})\, b_n,$$

となり、題意の式が示された。$1 - 2^{n+1} \neq 0$ なので $b_n = a_n/(1 - 2^{n+1})$ であり、$a_n = 0$ のとき、すなわち n が偶数のときには常に $b_n = 0$ となる。

小問 (ii)

同様に、

$$\cot x + \tan x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\operatorname{cosec} 2x.$$

$0 < x < \frac{1}{4}\pi$ のとき、cosec の級数において $2x$ を x の代わりに用いると

$$2\operatorname{cosec} 2x = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} c_n x^n, \qquad \cot x + \tan x = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + a_n) x^n.$$

係数を比較すると $b_n + a_n = 2^{n+1} c_n$ が得られる。小問 (i) の $a_n = (1 - 2^{n+1}) b_n$ を代入すると、

$$2^{n+1} c_n = (2 - 2^{n+1})\, b_n \quad \Longrightarrow \quad c_n = \frac{2 - 2^{n+1}}{2^{n+1}}\, b_n = (2^{-n} - 1)\, b_n,$$

となり、これが求める結果である。特に、偶数の n に対して $c_n = 0$ でもある。

小問 (iii)

$\cot x$ と $\operatorname{cosec} x$ の級数に x を掛けると、

$$1 + x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = x\cot x, \qquad 1 + x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x\operatorname{cosec} x.$$

よって、示すべき等式は $x^2\cot^2 x + x^2 = x^2\operatorname{cosec}^2 x$ ということである。これは x^2 を恒等式 $\cot^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x$ の両辺に掛けたものであり、この恒等式は $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ を $\sin^2 x$ で割れば得られる。これで証明された。

次に展開する。添字が偶数の b_n と c_n は零なので、

$$x\cot x = 1 + b_1x^2 + b_3x^4 + \cdots, \qquad x\operatorname{cosec} x = 1 + c_1x^2 + c_3x^4 + \cdots,$$

となり、等式は次のようになる。

$$\left(1 + b_1x^2 + b_3x^4 + \cdots\right)^2 + x^2 = \left(1 + c_1x^2 + c_3x^4 + \cdots\right)^2.$$

平方を展開すると、

$$1 + (2b_1 + 1)x^2 + (2b_3 + b_1^2)x^4 + \cdots = 1 + 2c_1x^2 + (2c_3 + c_1^2)x^4 + \cdots.$$

小問 (ii) より $c_1 = (\frac{1}{2} - 1)b_1 = -\frac{1}{2}b_1$、$c_3 = (\frac{1}{8} - 1)b_3 = -\frac{7}{8}b_3$ である。

x^2 の係数：

$$2b_1 + 1 = 2c_1 = -b_1 \quad \Longrightarrow \quad b_1 = -\tfrac{1}{3}.$$

すると小問 (i) より $a_1 = (1 - 2^2)b_1 = (-3)(-\frac{1}{3}) = 1$ となり、題意のとおりである。

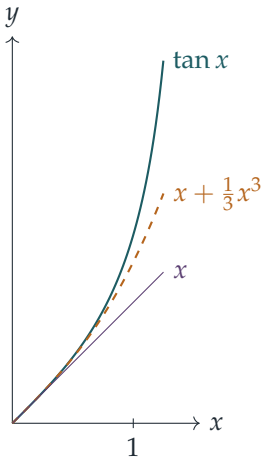
x^4 の係数：$b_1 = -\frac{1}{3}$、$c_1 = \frac{1}{6}$ とすると、

$$2b_3 + \tfrac{1}{9} = -\tfrac{7}{4}b_3 + \tfrac{1}{36} \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{15}{4}\,b_3 = -\tfrac{3}{36} = -\tfrac{1}{12} \quad \Longrightarrow \quad b_3 = -\tfrac{1}{45}.$$

よって

$$a_3 = (1 - 2^4)\,b_3 = (-15)\left(-\tfrac{1}{45}\right) = \tfrac{1}{3}.$$

したがって $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ である。



検算

- $x = 0.3$ のとき $\tan 0.3 \approx 0.309336$ であり、$0.3 + \frac{1}{3}(0.3)^3 = 0.309$ である。差は約 3×10^{-4} で、これは次の項 $\frac{2}{15}x^5$ の大きさである。
- 値 $b_1 = -\frac{1}{3}$ はよく知られた $\cot x \approx \frac{1}{x} - \frac{x}{3}$ と一致する。また $c_1 = \frac{1}{6}$ は $\operatorname{cosec} x \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{6}$ と一致し、これは $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ から導ける。
- sin と cos の級数の割り算によって、n が 48 以下のすべての場合について三つの関係式を厳密に（有理数演算で）確認した。また、$(0,1)$ 内のランダムな点で部分和（partial sums）が tan、cot、cosec と一致することも確認した。

よくある間違い

- $\frac{1}{x}$ の項を忘れたまま係数を比較してしまう。これらの項は打ち消し合うが、それは因子 2 が $2\cot 2x$ と $2\operatorname{cosec} 2x$ に付いているからにほかならない。
- 小問 (iii) で平方を展開するときに $b_0 = b_2 = 0$ を忘れる。b_0 を残すと x の奇数乗の余計な項が現れ、それらの係数が消えることを別に示さなければならなくなる。
- $c_3 = -\frac{7}{8}b_3$ の符号や 2 の冪を間違える。$2^{-3} - 1 = -\frac{7}{8}$ であることに注意する。

STEP のその先へ

この方法をさらに高次まで進めると、係数はベルヌーイ数（Bernoulli numbers）B_{2k} であることがわかる：$x\cot x = \sum_k (-1)^k 2^{2k} B_{2k}\, x^{2k}/(2k)!$。そして小問 (i) の因子 $1 - 2^{n+1}$ から、$\tan x$ の係数の一般公式が得られる。$\tan x$ の級数が $|x| = \frac{1}{2}\pi$ で収束しなくなるのはなぜだろうか？その答えは複素解析（complex analysis）が与える：冪級数は関数が発散する最も近い点まで収束し、tan の場合それは $\pm\frac{1}{2}\pi$ にある極（pole）である。Needham の *Visual Complex Analysis* はこれを見事に説明しており、Abbott の *Understanding Analysis* は冪級数の項ごとの比較を厳密に扱っている。

解答例

STEP III 2006、第 4 問

純粋数学 ・ 関数方程式

STEP III 2006、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s3-q4

鍵となる考え方

冒頭の恒等式（identity）はコーシー（Cauchy）の関数方程式（functional equation）である。$y = x$ とおくと、x における f の値と $2x$ における値の関係が得られ、その関係式を n 回微分して $x = 0$ とおくと、マクローリン係数（Maclaurin coefficient）のほとんどすべてが消える。後に続く各小問は、姿を変えた同じ方程式である。変数変換（change of variable）（対数、指数関数、正接）によって新しい恒等式は $(*)$ に戻るので、すでに得た答えを利用できる。

解答

基本となる方程式

$(*)$ において $y = x$ とおくと $\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(2x)$、すなわち

$$2\mathrm{f}(x) \equiv \mathrm{f}(2x).$$

これは x についての恒等式であるから、両辺を微分してよい。合成関数の微分法（chain rule）により、$\mathrm{f}(2x)$ を 1 回微分するごとに因数 2 が出てくるので、n 回微分すると

$$2\mathrm{f}^{(n)}(x) \equiv 2^n \mathrm{f}^{(n)}(2x).$$

$x = 0$ とおくと $(2 - 2^n)\,\mathrm{f}^{(n)}(0) = 0$ を得る。$n = 2$ のとき、これは $-2\mathrm{f}''(0) = 0$ となるから、求めるとおり $\mathrm{f}''(0) = 0$ である。

同じ議論は $n \neq 1$ であるすべての場合に成り立つ。因数 $2 - 2^n$ が 0 になるのは $n = 1$ のときに限るので、

$$\mathrm{f}(0) = 0 \quad \text{かつ} \quad \mathrm{f}^{(n)}(0) = 0 \ \text{任意の} n \geq 2.$$

($n = 0$ の場合は単に $2f(0) = f(0)$ である。) マクローリン級数 (Maclaurin series) のうち、1 次の項だけが残る：

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \tfrac{1}{2!}f''(0)\,x^2 + \cdots = kx, \qquad k = f'(0).$$

逆に $kx + ky = k(x + y)$ であるから、このような関数はすべて条件を満たす。$(*)$ の最も一般的な解 (一般解 (general solution)) は $f(x) = kx$ である。ただし k は任意の定数である。

小問 (i)

対数 (logarithm) をとるには $g > 0$ が必要なので、まず符号を調べる。$x = y = \frac{1}{2}s$ とおくと $g(s) = \left(g(\frac{1}{2}s)\right)^2 \geq 0$ を得る。ある a について $g(a) = 0$ ならば、すべての x について

$$g(x) = g(a)\,g(x - a) = 0,$$

となるので $g \equiv 0$ であり、これは確かに恒等式を満たす。そうでなければ、すべての x について $g(x) > 0$ であり、$G = \ln g$ はいたるところで定義される。$g(x)g(y) = g(x + y)$ の対数をとると

$$G(x) + G(y) = G(x + y),$$

となり、これはまさに $(*)$ である。よって $G(x) = kx$ であり、

$$g(x) = e^{kx}$$

(k は定数) を得る。$e^{kx}e^{ky} = e^{k(x+y)}$ であるから、これが条件を満たすことは明らかである。自明な解 (trivial solution) $g \equiv 0$ を除けば、これらが解のすべてである。

小問 (ii)

正の数 x はどれも、ただ 1 つの実数 u、すなわち $u = \ln x$ を用いて e^u と表される。したがって $x = e^u$、$y = e^v$ と書くことができ、u と v はすべての実数を動く。このとき $xy = e^{u+v}$ であり、恒等式は

$$H(u) + H(v) = h(e^u) + h(e^v) = h(e^{u+v}) = H(u + v)$$

(すべての実数 u, v について) となる。これは再び $(*)$ であるから、$H(u) = ku$ である。$u = \ln x$ であるから

$$h(x) = k \ln x \qquad (x > 0),$$

であり、$\ln x + \ln y = \ln(xy)$ であるから、これは条件を満たす。

小問 (iii)

式 $\dfrac{x+y}{1-xy}$ は、姿を変えた正接の加法定理（tangent addition formula）である。$u, v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ として $x = \tan u$、$y = \tan v$ とおく。すなわち $u = \arctan x$、$v = \arctan y$ である。すると

$$z = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} = \tan(u+v).$$

$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上で $\mathrm{T}(u) = \mathrm{t}(\tan u)$ と定義する。$u+v$ もまた $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に属するときはいつでも、恒等式から

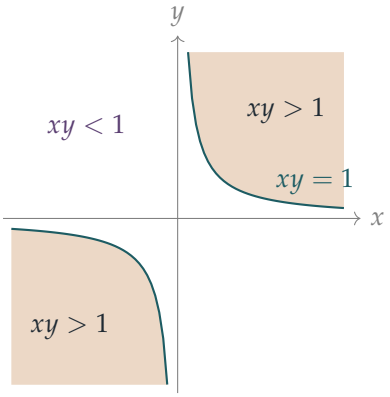
$$\mathrm{T}(u) + \mathrm{T}(v) = \mathrm{t}(x) + \mathrm{t}(y) = \mathrm{t}\big(\tan(u+v)\big) = \mathrm{T}(u+v).$$

考えてみよう　$(*)$ に対する議論では、**すべての** x と y についての恒等式を用いた。u、v、$u+v$ が $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に属する場合にしか恒等式がわかっていないときでも、その議論は通用するだろうか？

通用する。マクローリン展開による議論は 0 の近くしか見ていない。$|u| < \frac{\pi}{4}$ ならば $v = u$ とおいてよく（このとき $|2u| < \frac{\pi}{2}$）、0 の近くで $2\mathrm{T}(u) = \mathrm{T}(2u)$ を得る。$u = 0$ において n 回微分すると、先ほどとまったく同様に $(2 - 2^n)\mathrm{T}^{(n)}(0) = 0$ となるので、$\mathrm{T}(u) = ku$ である。$u = \arctan x$ であるから

$$\mathrm{t}(x) = k \arctan x.$$

これは実際にどのような x と y について成り立つのだろうか。$xy < 1$ ならば $u+v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ である。u と v が異符号のときは、これは自動的に成り立つ。ともに正のときは、$\tan u \tan v < 1$ は $\tan v < \cot u = \tan(\frac{\pi}{2} - u)$ を意味するので $u + v < \frac{\pi}{2}$ となり、ともに負の場合も対称性により同様である。したがって $\arctan x + \arctan y = \arctan z$ であり、恒等式が成り立つ。しかし $xy > 1$ ならば $u+v$ は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ の外にあり、このとき $\arctan z = u + v \mp \pi$ となる。たとえば $x = y = 2$ のとき $z = -\frac{4}{3}$ であり、$2\arctan 2 - \arctan(-\frac{4}{3}) = \pi$ である。



よって $\mathrm{t}(x) = k \arctan x$ は、$xy < 1$ を満たすすべての組、すなわち図で原点を含む領域において恒等式を満たす。これが問題の意図する答えである。網かけ部分の領域 $xy > 1$ では、両辺は $\pm k\pi$ だけずれる。$xy \neq 1$ を満たす文字どおりすべての組について恒等式を要求するならば、$k = 0$ だけが残り、解は $\mathrm{t} \equiv 0$ のみとなる。

検算

- 小問 (iii) について、恒等式を y で偏微分してから $y = 0$ とおく。$\partial z/\partial y = (1 + x^2)/(1 - xy)^2$ であり、$y = 0$ ではこれは $1 + x^2$ となるので、$\mathrm{t}'(0) = \mathrm{t}'(x)(1 + x^2)$ を得る。よって $\mathrm{t}'(x) = k/(1 + x^2)$ であり、$\mathrm{t}(0) = 0$ とあわせて積分すると $k \arctan x$ となる。同じ方法を $(*)$ に用いると、ただちに $\mathrm{f}'(x) = \mathrm{f}'(0)$ が得られる。
- 4 つの答えすべてを、それぞれ 10^4 組の無作為な組で数値的に確かめた。小問 (iii) では、$k \arctan x$ は $xy < 1$ を満たす約 5×10^4 組の無作為な組のすべてで恒等式を満たし、$xy > 1$ を満たすすべての組では、ずれの大きさがちょうど $k\pi$ であった。

よくある間違い

- 定数項を忘れる：$\mathrm{f}(0) = 0$ は $n = 0$ の場合から得られるので、答えは kx であり、$kx + c$ ではない。
- $\mathrm{g} > 0$ を確かめずに $\ln \mathrm{g}$ をとる。零関数は小問 (i) の正真正銘の解である。
- $\arctan x + \arctan y = \arctan \dfrac{x + y}{1 - xy}$ が常に成り立つと思い込む。これには $xy < 1$ が必要である。

STEP のその先へ

マクローリン級数をもつという仮定がなくても、コーシーの方程式 $(*)$ はずっと少ない仮定で解ける。f が単に連続（continuous）であれば（あるいはある区間で有界（bounded）であるだけでも）、有理数（rational number）q に対する $\mathrm{f}(q) = q\,\mathrm{f}(1)$ から出発して、やはり $\mathrm{f}(x) = kx$ が導かれる。しかし選択公理（axiom of choice）を用いると、線形でない奇妙な解を構成することができ、そのグラフは平面内で稠密（dense）になる。小問 (i) はまた、指数関数（exponential function）が加法から乗法への連続な準同型（homomorphism）として本質的にただ 1 つであることも示しており、この考え方は群論（group theory）の至るところに再び現れる。この種の連続性や稠密性の議論が丁寧に展開されている様子を見るには、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）がよい。

解答例

STEP III 2006、第 5 問

純粋数学 ・ 複素数と図形

STEP III 2006、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s3-q5

鍵となる考え方

三角形が正三角形（equilateral triangle）であるのは、ある頂点から見て、一つの辺が別の辺を 60° 回転させたものになっているとき、かつそのときに限る。複素数（complex numbers）では、この回転は $e^{\pm i\pi/3}$ を掛けることにあたり、この二つの数はちょうど $t^2 - t + 1 = 0$ の解である。原点を一つの頂点に移すと、対称な式はまさにこの二次式（quadratic）になる。その後、三次方程式（cubic）の部分は解と係数の関係（Vieta's formulae）で処理でき、最後の部分は $z \mapsto pw + q$ が図形を回転、拡大縮小、平行移動するだけだという観察に帰着する。

解答

正三角形の条件

頂点 α から出る二辺を $u = \beta - \alpha$、$v = \gamma - \alpha$ とおく。三点は相異なるので、$u \neq 0$、$v \neq 0$、$u \neq v$ である。まず、

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta = \tfrac{1}{2}\left[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2\right],$$

が成り立つことは、右辺を展開すればわかる。ここで $\alpha - \beta = -u$、$\gamma - \alpha = v$、$\beta - \gamma = u - v$ であるから、括弧の中は $u^2 + (u - v)^2 + v^2 = 2(u^2 - uv + v^2)$ となる。したがって

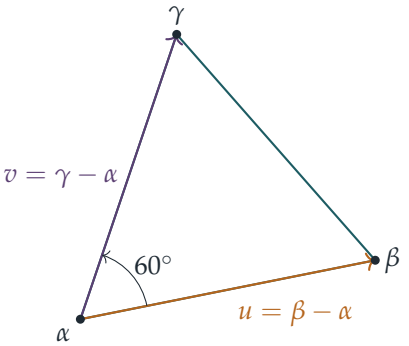
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta = u^2 - uv + v^2 = u^2\left(t^2 - t + 1\right), \qquad t = \frac{v}{u}.$$

$u \neq 0$ であるから、この式が消えるのは $t^2 - t + 1 = 0$ のとき、かつそのときに限る。すなわち

$$t = \frac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/3}.$$

考えてみよう なぜ $\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/3}$ が、三角形が正三角形であることをちょうど表しているのだろうか。

v/u の絶対値（modulus）は $|\gamma - \alpha|/|\beta - \alpha|$ であり、その偏角（argument）は α における辺 $\alpha\beta$ から辺 $\alpha\gamma$ への角である。よって $v/u = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/3}$ は、α から出る二辺の長さが等しく、そのなす角が $60°$ であることを意味する。このような二等辺三角形（isosceles triangle）の底角は $\frac{1}{2}(180° - 60°) = 60°$ であるから、正三角形である。逆に、三角形が正三角形ならば $|v| = |u|$ であり、α における角は $60°$ で、向きに応じてどちらかの方向に回転しているので、$v/u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ または $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$ となる。



以上より、相異なる三点が（どちらの順序であれ）正三角形をなすのは、この式が零となるとき、かつそのときに限る。これが示すべきことであった。

三次方程式

$(*)$ の解を α, β, γ とする。解と係数の関係より、$\alpha + \beta + \gamma = -a$、$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b$ である。よって

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &= a^2 - 3b.\end{aligned}$$

最初の結果より、（相異なる）解が正三角形をなすのは $a^2 - 3b = 0$、すなわち $a^2 = 3b$ のとき、かつそのときに限る。

一つ注意がある。最初の結果は三点が相異なることを必要とする。二つの解が一致する場合、たとえば $\alpha = \beta$ のとき、式は $(\gamma - \alpha)^2$ となるので、これが消えるのは三つ

の解がすべて等しいときに限る。したがって、重解をもちながら $a^2 = 3b$ となるのは三重解（triple root）の場合、すなわち $z^3 + az^2 + bz + c = (z + \frac{a}{3})^3$ であり、さらに $c = a^3/27$ も成り立つ場合だけである。この一点からなる退化した「三角形」を除けば、$a^2 = 3b$ がちょうど求める条件である。

変換

$(*)$ に $z = pw + q$ を代入し、$p^3 \neq 0$ で割ると

$$w^3 + \frac{3q + a}{p}\, w^2 + \frac{3q^2 + 2aq + b}{p^2}\, w + \frac{q^3 + aq^2 + bq + c}{p^3} = 0.$$

よって

$$A = \frac{3q + a}{p}, \qquad B = \frac{3q^2 + 2aq + b}{p^2},$$

であり、したがって

$$A^2 - 3B = \frac{(9q^2 + 6aq + a^2) - (9q^2 + 6aq + 3b)}{p^2} = \frac{a^2 - 3b}{p^2}.$$

$(*)$ の解が正三角形をなすならば、それらは相異なり $a^2 = 3b$ であるから、$A^2 = 3B$ となる。$(**)$ の解は、$(*)$ の解 z に対する $w = (z - q)/p$ である。$p \neq 0$ よりこの写像は一対一（one-to-one）であるから、これらの解も相異なる。前の結果より、$(**)$ の解は正三角形をなす。

幾何学的には、これは驚くことではない。$w = (z - q)/p$ は $-q$ だけ平行移動し、$-\arg p$ だけ回転し、$1/|p|$ 倍に拡大縮小する変換であり、いずれも正三角形を崩さない。最初の部分の言葉でいえば、各辺が p で割られるので、比 v/u は変わらない。

検算

- 1 の三乗根 $1, \omega, \omega^2$ は正三角形をなし、$z^3 - 1 = 0$ の解であって、$a = b = 0$ であるから $a^2 = 3b$ が成り立つ。
- $\alpha = 0$、$\beta = 1$、$\gamma = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ のとき、式は $1 + \gamma^2 - \gamma$ となり、$\gamma = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ は $t^2 - t + 1$ の根であるから、これは零である。
- 1000 組のランダムな三つ組に対する数値計算により、それらを解とする三次方程式について $\sum \alpha^2 - \sum \alpha\beta = a^2 - 3b$ が確認された。同じ計算により、$A^2 - 3B = (a^2 - 3b)/p^2$ であること、およびランダムな p、q のもとで正三角形をなす解が正三角形のままであることも確認された。

よくある間違い

- 一方の向きしか確かめないこと。$e^{i\pi/3}$ と $e^{-i\pi/3}$ の両方が現れ、「必要十分」を示すには両方が必要である。
- u^2 で割ることができるのは $u \neq 0$（三点が相異なること）のおかげであることを忘れること。
- 代入の際に B を誤ること。w の係数は、三乗から出る $3q^2$、二乗から出る $2aq$、そして b を集めたものを、すべて p^2 で割ったものである。

STEP のその先へ

写像 $z \mapsto pz + q$ は平面の向きを保つ相似変換（direct similarities）である。比 $(\gamma - \alpha)/(\beta - \alpha)$ や $a^2 - 3b$ が零であることのように、これらの変換で変わらない量は**不変量**（invariants）とよばれ、幾何学と代数学の中心的な概念である。式 $a^2 - 3b$ は、$f(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ としたとき、（定数倍を除いて）f' の判別式（discriminant）である。これは Marden の定理（Marden's theorem）という美しい事実につながる。すなわち、f' の根は、f の根がなす三角形の各辺にその中点で接する楕円（ellipse）の焦点（foci）である。正三角形の場合、この楕円は円となり、その二つの焦点は f' の重根に一致する。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、まさにこの精神で複素数の幾何学を展開している。

解答例

STEP III 2006、第 6 問

純粋数学 ・ 極方程式の曲線と反射

STEP III 2006、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s3-q6

鍵となる考え方

勾配の公式は、$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ に連鎖律（chain rule）を適用しただけのものである。鏡については、極（pole）を O に置き、始線（initial line）を L に沿ってとる。すると点 P で反射した光線は動径に沿ってまっすぐ戻っていくので、その向きは θ だけで決まる。反射の法則（law of reflection）によれば、法線（normal）は二つの光線のなす角を二等分するので、法線（したがって接線（tangent））は θ によって決定される。これにより幾何の問題が $r(\theta)$ についての変数分離形の微分方程式（separable differential equation）に帰着される。

解答

極座標における勾配

$r = r(\theta)$ で与えられる曲線の直交座標は $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ であり、r は θ の関数である。積の微分法（product rule）により θ で微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta.$$

連鎖律により、$\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta \neq 0$ であるところでは

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\tan\theta + r}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} - r\tan\theta},$$

となる。ここで分子と分母を $\cos\theta$ で割った（$\cos\theta \neq 0$ のとき許される）。これが求める勾配である。

割る前の形も残しておく価値がある。ベクトル

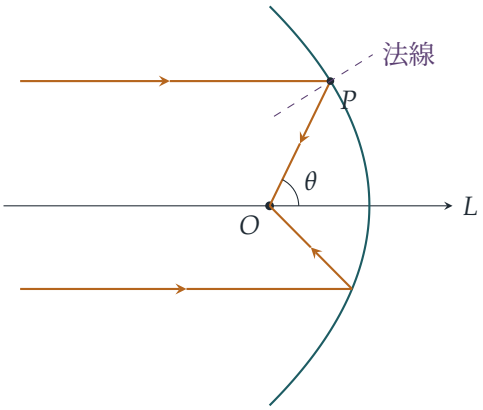
$$\mathbf{t} = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta,\ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta\right)$$

は、$\tan\theta$ や勾配が定義されない点も含めて、曲線上のすべての点で接線の向きを向いている。

鏡

L を含む任意の平面 Π をとり、P を鏡と Π の交わりの上の点とする。P への入射光線は L に平行なので Π に含まれる。反射光線は L 上の点 O を通るので、これも Π に含まれる。反射の法則より、P における法線も二つの光線を含む平面上にあるので、法線は Π に含まれ、P における交線の接線は Π 内でそれに垂直な直線である。したがってすべては平面 Π の中で起こり、2 次元で考えればよい。

Π において、O を極とし始線を L に沿ってとる極座標（polar coordinates）を用いる。向きは、入射光が $\theta = 0$ の向き（図では左から右）に進むように定める。P を (r, θ) とし、$-\pi < \theta < \pi$ とする。（$\theta = \pi$ の点は O の後ろ側の L 上にあり、そこでは光線は鏡を必要とせずにまっすぐ O を通過する。）



法線の向き。 P において、光線に沿って P から離れる向きの二つの単位ベクトルをとる：

$\mathbf{a} = (-1, 0)$（入射光線を逆にたどる向き），　　$\mathbf{b} = (-\cos\theta, -\sin\theta)$（$O$ へ向かう向き）.

法線は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ と等しい角をなすので、それらのなす角の二等分線（bisector）に沿っており、その向きは $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ の向きである（二つの単位ベクトルが作るひし形（rhombus）の対角線は、それらのなす角を二等分する）。ここで

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = -(1 + \cos\theta,\ \sin\theta) = -2\cos\tfrac{\theta}{2}\left(\cos\tfrac{\theta}{2},\ \sin\tfrac{\theta}{2}\right),$$

である。ただし $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ と $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ を用いた。$-\pi < \theta < \pi$ より $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ なので、これは零ではなく、P における法線は

$$\mathbf{n} = \left(\cos\tfrac{\theta}{2},\ \sin\tfrac{\theta}{2}\right):$$

の向きである。すなわち、法線は L と角 $\frac{\theta}{2}$ をなす。

考えてみよう 勾配の公式を接線の勾配と等しいとおくだけではいけないのはなぜか？

それでもよい。接線は $\mathbf{n}$ に垂直なので、その勾配は $-\cot\frac{\theta}{2}$ であり、これを極座標の公式と等しいとおいて分母を払うと、下と同じ方程式が得られる。しかしその方法では $\tan\theta$、$\cot\frac{\theta}{2}$ および公式の分母で割ることになるので、$\theta = 0$ や $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ で破綻する。接ベクトル $\mathbf{t}$ を使えば、そうした問題をすべて回避できる。

微分方程式。 接線は法線に垂直なので $\mathbf{t}\cdot\mathbf{n} = 0$ である：

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\left(\cos\theta\cos\tfrac{\theta}{2} + \sin\theta\sin\tfrac{\theta}{2}\right) + r\left(\cos\theta\sin\tfrac{\theta}{2} - \sin\theta\cos\tfrac{\theta}{2}\right) = 0.$$

加法定理（compound-angle formulae）により、括弧内はそれぞれ $\cos\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) = \cos\frac{\theta}{2}$ および $\sin\left(\frac{\theta}{2} - \theta\right) = -\sin\frac{\theta}{2}$ である。よって

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\tfrac{\theta}{2} = r\sin\tfrac{\theta}{2}, \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \tan\tfrac{\theta}{2},$$

となる。ここで $r\cos\frac{\theta}{2}$ で割ったが、$P \neq O$ かつ $-\pi < \theta < \pi$ なのでこれは正である。

方程式を解く。 この方程式は変数分離形である。θ について積分し、$\int \tan\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = -2\ln\cos\frac{\theta}{2}$（$\cos\frac{\theta}{2} > 0$ なので成り立つ）に注意すると、

$$\ln r = -2\ln\cos\tfrac{\theta}{2} + C \quad\Longrightarrow\quad r\cos^2\tfrac{\theta}{2} = k,$$

を得る。ここで $k = \mathrm{e}^C > 0$ は曲線に沿って一定である（曲線は区間 $-\pi < \theta < \pi$ 上の連結な一つの部分 $r = r(\theta)$ である）。$2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1+\cos\theta$ を用いると、

$$r(1+\cos\theta) = 2k.$$

直交座標への変換。 $x = r\cos\theta$ と $r = \sqrt{x^2+y^2}$ を用いると、これは $\sqrt{x^2+y^2} = 2k - x$ となる。両辺を 2 乗すると（$2k - x = r \geq 0$ なので両辺とも非負である）、

$$x^2 + y^2 = 4k^2 - 4kx + x^2 \qquad\Longrightarrow\qquad y^2 = 4k(k-x).$$

これは軸（axis）が L、頂点（vertex）が $(k, 0)$、焦点（focus）が原点 O の放物線（parabola）であり、入射光の来る側に向かって開いている。Π は L を含む任意の平面であったから、鏡はそのようなすべての平面と放物線で交わる。これで示された。■

検算

- 逆にたどる：$y^2 = 4k(k-x)$ 上では法線は $(4k, 2y)$ の向きであり、向き $(1,0)$ をこの法線に関して反射させると O を通る光線が得られる。$k = 1.3$ としてランダムな 10^4 個の点で数値的にこれを確かめ、また $r = 2k/(1+\cos\theta)$ が $r'/r = \tan\frac{\theta}{2}$ を満たすことを差分（finite differences）で確かめた。
- 勾配の公式は、ランダムな曲線 $r(\theta)$ の差分による勾配と約 10^{-8} の精度で一致した。
- $\theta = 0$ では法線は L に沿い、接線は L に垂直である。これは頂点 $(k,0)$ であり、そこでは L に沿った光線がまっすぐ反射して O を通る。

よくある間違い

- 法線として外角の二等分線（external bisector）$\mathbf{a} - \mathbf{b}$ を用いてしまう。この向きは二つの光線と等しい角ではなく補角（supplementary angles）をなし、$r'/r = -\cot\frac{\theta}{2}$ を導く。その解 $r(1-\cos\theta) = 2k$ は逆向きの放物線であり、反対方向から来る光を集める。
- 問題が 2 次元に帰着する理由の説明を忘れる：法線は L と P を含む平面上になければならず、そうでなければ交線が我々の用いた接線をもつとは限らない。
- 両辺が非負であることに触れずに $\sqrt{x^2+y^2} = 2k - x$ を 2 乗してしまう。

STEP のその先へ

この鏡は回転放物面（paraboloid of revolution）であり、ここで証明した性質は姿を変えた焦点・準線（directrix）の性質である：$r(1+\cos\theta) = 2k$ は、O からの距離が直線 $x = 2k$ からの距離に等しいことを述べている。衛星放送用アンテナ、自動車のヘッドライト、反射望遠鏡が回転放物面の形をしているのはこのためである。より一般に、2 次曲線（conics）はすべて極座標で $r(1+e\cos\theta) = \ell$ の形に表され、これはまさにニュートン（Newton）による惑星軌道の解に現れる形である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、これを逆 2 乗則（inverse-square law）から導いている。

解答例

STEP III 2006、第 7 問

純粋数学 ・ 一階微分方程式

STEP III 2006、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s3-q7

鍵となる考え方

どちらの微分方程式（differential equation）も $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ についての二次方程式（quadratic）になっている。いきなり微分方程式として取り組むのではなく、それぞれの二次方程式を導関数（derivative）について解く。すると方程式は二つの通常の一階微分方程式に分かれる。双曲線関数の恒等式（hyperbolic identities）を使うと根が簡単な形にまとまり、$x = 0$ における条件によってどちらの根をたどればよいかが決まる。

解答

小問 (i)

解の公式（quadratic formula）により、

$$u = -\sinh x \pm \sqrt{\sinh^2 x + 1} = -\sinh x \pm \cosh x,$$

である。ここで $\sinh^2 x + 1 = \cosh^2 x$ かつ $\cosh x > 0$ を用いた。$\cosh x + \sinh x = \mathrm{e}^x$ と $\cosh x - \sinh x = \mathrm{e}^{-x}$ を使うと、二つの根は

$$u = \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{または} \qquad u = -\mathrm{e}^x.$$

となる。

この微分方程式は、上の二次方程式で $u = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ としたものである。したがって、すべての x において

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{または} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{e}^x.$$

が成り立たなければならない。一つ目の根はつねに正、二つ目の根はつねに負であるから、両者が一致することはない。よって導関数が連続な解は、一方の根から他方の

根へ飛び移ることができず、$x = 0$ における条件 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x > 0$ により、全域で一つ目の根が選ばれる。積分すると $y = -\mathrm{e}^{-x} + c$ であり、$x = 0$ で $y = 0$ であることから $c = 1$ となる。すなわち

$$y = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

である。

小問 (ii)

$p = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ とおく。$\sinh y = 0$、すなわち $y = 0$ のとき、方程式は $2p = 0$ となる。これが $y \equiv 0$ が解となる理由であり、問題文で除外するよう指示されている解である。$y \neq 0$ のところでは、解の公式により

$$p = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \sinh^2 y}}{\sinh y} = \frac{-1 \pm \cosh y}{\sinh y}.$$

となる。半角の公式（half-angle formulae）$\cosh y - 1 = 2\sinh^2 \frac{y}{2}$、$\cosh y + 1 = 2\cosh^2 \frac{y}{2}$、$\sinh y = 2\sinh \frac{y}{2} \cosh \frac{y}{2}$ を用いると、二つの根は

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tanh \frac{y}{2} \qquad \text{または} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\coth \frac{y}{2}.$$

となる。両者の積は -1 であるのに対し、根が等しければ積は $\tanh^2 \frac{y}{2} \geq 0$ となるはずなので、これらが一致することはない。

考えてみよう 二つの方程式のうち、恒等的に 0 ではない原点を通る解を与えうるのはどちらか。

一つ目の方程式 $y' = \tanh \frac{y}{2}$ は解 $y \equiv 0$ をもつ。右辺は y の滑らかな関数であるから、$(0,0)$ を通る解はこれだけであり、これはまた自明な解（trivial solution）である。二つ目の方程式は $y = 0$ で特異であり、そこでは $|\mathrm{d}y/\mathrm{d}x| \to \infty$ となるので、その解曲線は鉛直な接線をもって $y = 0$ と交わることができる。求めるのはこちらである。変数分離（separation of variables）により、

$$\int \tanh \frac{y}{2} \, \mathrm{d}y = -\int \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad 2\ln \cosh \frac{y}{2} = -x + C.$$

$x = 0$ で $y = 0$ とおくと $C = 0$ であるから、$\cosh^2 \frac{y}{2} = \mathrm{e}^{-x}$ となる。$\cosh y = 2\cosh^2 \frac{y}{2} - 1$ であるから、

$$\cosh y = 2\mathrm{e}^{-x} - 1.$$

である。これは直接確かめることができる。微分すると $\sinh y \, y' = -2\mathrm{e}^{-x} = -(\cosh y + 1)$ となり、これはまさに $y' = -\coth \frac{y}{2}$ である。これは y の正負どちらに対しても成り立つので、上半分と下半分を合わせた曲線全体が解となる。$\cosh y \geq 1$ であるから、曲線は $x \leq 0$ の範囲にのみ存在する。また曲線は x 軸に関して対称である。原点の近くでは $1 + \frac{1}{2}y^2 \approx 1 - 2x$ であるから、そこで曲線は放物線 $y^2 = -4x$ のように見える。

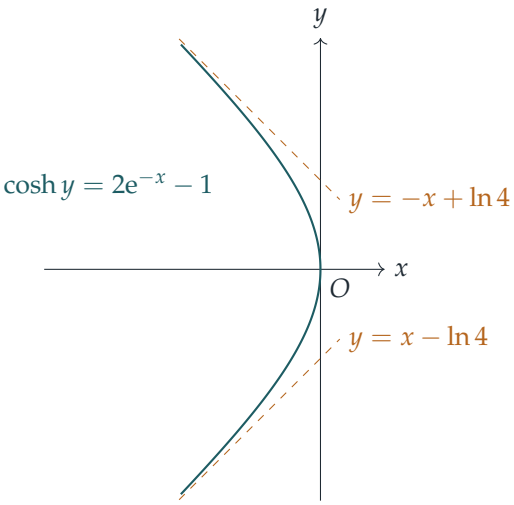
漸近線（asymptote）。 $x \to -\infty$ のとき $\cosh y \to \infty$ であるから、$|y| \to \infty$ となる。$w = 2\mathrm{e}^{-x} - 1$ とおくと、

$$|y| = \operatorname{arcosh} w = \ln\bigl(w + \sqrt{w^2 - 1}\bigr),$$

であるから、

$$|y| - (-x + \ln 4) = \ln \frac{w + \sqrt{w^2 - 1}}{4\mathrm{e}^{-x}} = \ln\Bigl(\frac{w}{4\mathrm{e}^{-x}}\Bigl(1 + \sqrt{1 - w^{-2}}\Bigr)\Bigr).$$

となる。$x \to -\infty$ のとき $w/(4\mathrm{e}^{-x}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{x} \to \frac{1}{2}$ かつ $1 + \sqrt{1 - w^{-2}} \to 2$ であるから、対数の中身は 1 に収束し、差は 0 に収束する。したがって曲線の上半分は $y = -x + \ln 4$ に近づき、対称性により下半分は $y = -(-x + \ln 4)$ に近づく。よって漸近線は $y = \pm(-x + \ln 4)$ であり、題意が示された。（$x \to 0^-$ のとき曲線は有界にとどまるので、漸近線はこれらだけである。）



検算

- (i) において、$y = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ は $y' = \mathrm{e}^{-x}$ を満たし、$\mathrm{e}^{-2x} + 2\mathrm{e}^{-x}\sinh x - 1 = \mathrm{e}^{-2x} + (1 - \mathrm{e}^{-2x}) - 1 = 0$ となる。
- (ii) において、$y' = -\coth\frac{y}{2}$ を原点の近くから $x = -6$ まで数値的に追っていくと $y \approx 7.38505$ となり、$\operatorname{arcosh}(2\mathrm{e}^{6} - 1)$ と一致する。$x = -10$ では、曲線と $-x + \ln 4$ の差はおよそ 2×10^{-5} である。

よくある間違い

- (i) で根 $-\sinh x - \cosh x = -\mathrm{e}^{x}$ を選んでしまう。この根では $x = 0$ における導関数が負になる。
- (ii) で、$y = 0$ において「振る舞いがよい」という理由で $y' = \tanh \frac{y}{2}$ を選んでしまう。原点を通る解としては $y \equiv 0$ しか得られない。
- 曲線の下半分を忘れる。下半分は $y < 0$ の部分であり、二本目の漸近線を得るのに必要である。

STEP のその先へ

これらのように y' について線形でない方程式は、**陰的な一階微分方程式**（first-order implicit equation）とよばれる。y' について解くと、方程式はいくつかの分枝に分かれる。小問 (ii) は、解の一意性（uniqueness）が成り立たない場合があることも示している。$y = 0$ において右辺 $-\coth \frac{y}{2}$ はリプシッツ連続（Lipschitz）ではなく、そのために $y \equiv 0$ と同じ点から自明でない解が出発できるのである。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）では、存在と一意性の定理と、それらが適用できる条件が扱われている。

解答例

STEP III 2006、第 8 問

純粋数学 ・ 公理による微分

STEP III 2006、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s3-q8

鍵となる考え方

4 つの規則は、ふだん使っている微分（differentiation）の性質そのものである。すなわち線形性（linearity）と積の法則（product rule）、そして x を「微分すると」1 になるというただ一つの事実である。すべての多項式（polynomial）は数 1 と文字 x から掛け算と足し算によって組み立てられるので、$\triangle$ が 1 と x に何をするかがわかれば、それ以外のところで $\triangle$ に自由の余地は残らない。積の法則を $x \cdot x^n$ に適用するとべき乗についての帰納法（induction）が得られ、あとは線形性で仕上がる。

解答

以下では、「規則 (i)」から「規則 (iv)」は、与えられた順に並べた 4 つの定義規則を指す。

定数

まず定数多項式 1 を考える。$1 = 1 \cdot 1$ であるから、$f(x) = g(x) = 1$ として規則 (iv) を用いると

$$\triangle 1 = \triangle(1 \cdot 1) = 1 \cdot \triangle 1 + 1 \cdot \triangle 1 = 2\triangle 1.$$

両辺から $\triangle 1$ を引くと $\triangle 1 = 0$（零多項式）が得られる。

? **考えてみよう** なぜ単に「導関数と同じように、定数の $\triangle$ は 0 である」と言ってはいけないのか？

$\triangle$ が導関数であることは、まだわかっていないからである。それこそが最後の小問で

証明を求められていることである。使ってよいのは4つの規則だけであり、そのどれも定数について直接には述べていない。うまい工夫は、1がそれ自身の2乗であることで、そのため積の法則により $\triangle 1$ はそれ自身の2倍に等しくならざるをえない。

次に $f(x) = \lambda$ を任意の定数とする。このとき $\lambda = \lambda \cdot 1$ であるから、規則 (iii) により

$$\triangle\lambda = \triangle(\lambda \cdot 1) = \lambda \triangle 1 = \lambda \cdot 0 = 0.$$

よって、次数0のすべての多項式に対して $\triangle f(x) = 0$ であり、示すべきことが示された。

2乗と3乗

$x^2 = x \cdot x$ と書いて規則 (iv)、続いて規則 (i) を用いると

$$\triangle x^2 = x \triangle x + x \triangle x = x \cdot 1 + x \cdot 1 = 2x.$$

$x^3 = x \cdot x^2$ と書いて規則 (iv)、続いていま求めた結果と規則 (i) を用いると

$$\triangle x^3 = x \triangle x^2 + x^2 \triangle x = x \cdot 2x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

一般の多項式

ステップ1：x のべき乗。数学的帰納法により

$$\triangle x^n = n\, x^{n-1} \qquad \text{任意の整数} n \geq 1$$

を証明する。$n = 1$ のとき、これは $\triangle x = 1$ を意味し、規則 (i) そのものである。ある $n = k \geq 1$ で成り立つと仮定する。$x^{k+1} = x \cdot x^k$ であるから、規則 (iv) により

$$\begin{aligned} \triangle x^{k+1} &= x \triangle x^k + x^k \triangle x \\ &= x \cdot k\, x^{k-1} + x^k \cdot 1 \\ &= (k+1)\, x^k, \end{aligned}$$

ここで2行目では帰納法の仮定（induction hypothesis）と規則 (i) を用いた。よって $n = k+1$ でも成り立ち、帰納法によりすべての $n \geq 1$ で成り立つ。$n = 0$ のときは $x^0 = 1$ であり、$\triangle 1 = 0$ をすでに示したので、これは $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 1 = 0$ と一致する。したがって、すべての $n \geq 0$ に対して

$$\triangle x^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, x^n.$$

ステップ2：多くの項の和。規則 (ii) は2つの多項式について述べたものであるが、任意の有限個に拡張できる。$\triangle(f_1 + \cdots + f_m) = \triangle f_1 + \cdots + \triangle f_m$ ならば、2つの多項式 $f_1 + \cdots + f_m$ と f_{m+1} に規則 (ii) を適用して

$$\triangle(f_1 + \cdots + f_{m+1}) = \triangle(f_1 + \cdots + f_m) + \triangle f_{m+1} = \triangle f_1 + \cdots + \triangle f_{m+1},$$

を得る。よって m についての帰納法により、任意の個数の項について成り立つ。

ステップ 3：まとめる。 任意の多項式は、定数 a_k を用いて $h(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ と書ける。このとき

$$\begin{aligned}
\triangle h(x) &= \sum_{k=0}^{n} \triangle\left(a_k x^k\right) && \text{規則 (ii)（ステップ 2 で拡張したもの）による} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \triangle x^k && \text{規則 (iii) による} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\, a_k\, x^{k-1} && \text{ステップ 1 による（}k = 0 \text{ の項は 0）} \\
&= \frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x},
\end{aligned}$$

最後の行は多項式の通常の導関数である。これはすべての多項式 $h(x)$ について成り立つので、$\triangle h(x) \equiv \dfrac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}$ であり、示すべきことが示された。

検算

通常の微分が 4 つの規則をすべて満たすことは心強い。これにより、規則どうしは矛盾しておらず、$\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ はまさに述べられた種類の演算であることがわかる。積の法則を公式と照らし合わせて確かめることもできる。$f = x^2$、$g = x^3$ とすると、規則 (iv) により $x^2 \cdot 3x^2 + x^3 \cdot 2x = 5x^4$ となり、これは $\triangle x^5$ である。コンピュータ上で、規則だけを用いて（ステップ 1 からステップ 3 のように）$\triangle$ を構成し、次数 9 以下の 2000 個のランダムな多項式について導関数と厳密に比較した。たとえば $\triangle\left(\frac{1}{2}x^4 - 3x + 7\right) = 2x^3 - 3$ であり、これは数値的な差分商（difference quotient）とも一致する。$\triangle$ はこうして確かめられた。

よくある間違い

- 「導関数だから」という理由で $\triangle(\text{定数}) = 0$ と断定すること。これは最終的な答えを前提としている。規則から導かなければならない。
- 長い和に対して、断りなく規則 (ii) を用いること。規則 (ii) は 2 つの多項式について述べたものなので、より多くの項に対しては帰納法による一文が必要である。
- どこでどの規則を用いたかを述べないこと。問題文ではこれを明示的に求めている。

STEP のその先へ

線形性と積の法則を満たす演算は**導分**（derivation）とよばれる。ここでの議論は、多項式上の導分が x における値によって完全に決まることを示している。もし代わりにある多項式 p について $\triangle x = p(x)$ であるならば、同じ証明により $\triangle h = p(x)\,h'(x)$ が得られる。極限をまったく使わずに微分を代数的に定義できるという考え方は、抽象代数学（abstract algebra）や微分幾何学（differential geometry）において中心的なものである。微分幾何学では、ベクトル場（vector field）とはまさに関数上の導分のことである。代数的に扱われる多項式環（polynomial ring）に出会うには、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）がよい出発点である。

解答例

STEP III 2006、第 9 問

力学 ・ エネルギー保存

STEP III 2006、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

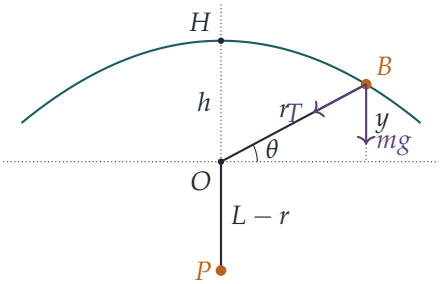
step.maths.org/questions/06-s3-q9

鍵となる考え方

糸の長さは一定なので、ビーズ（bead）が O から遠ざかった分だけ、質点 P は同じ量だけ上昇する。これにより二つの位置エネルギー（potential energy）が結びつき、その合計は $y + r$ のみに依存する。「あらゆる位置で釣り合い（equilibrium）にある」とは、位置エネルギーに特別な位置がないということであるから、位置エネルギーは針金に沿って一定でなければならない。一定であることがわかれば、エネルギー保存則（energy conservation）により運動エネルギー（kinetic energy）の総和は決して変化しない。あとはビーズの速さを極座標（polar coordinates）で書き表すだけである。

解答

モデル化。 P と B は質量 m の質点とする。糸は軽く伸び縮みせず、輪（ring）と針金は滑らかであるから、糸の張力（tension）は正味の仕事をせず、針金からの垂直抗力（normal reaction）も仕事をしない。O を原点とし、x を水平方向、y を鉛直上向きにとり、糸の長さを L とする。



針金の形

O から B までの糸の長さは r であるから、長さ OP は $L-r$ であり、P は O より距離 $L-r$ だけ下にある。O を通る水平面を位置エネルギーの基準にとると、位置エネルギーの総和は

$$U = mgy - mg(L-r) = mg(y+r) - mgL.$$

である。この系の自由度（degree of freedom）は 1（針金上のビーズの位置）であり、釣り合いの位置は針金に沿った U の停留点（stationary point）である。あらゆる位置が釣り合いの位置であるならば、針金に沿ったいたるところで $\mathrm{d}U/\mathrm{d}s = 0$ となる（s は弧長（arc length））。よって U は針金に沿って一定である。したがって $y+r$ は一定である。

H ではビーズは O の真上の高さ h にあるから、そこでは $y = h$ かつ $r = h$ であり、定数は $2h$ である。よって針金の方程式は

$$y + r = 2h,$$

となり、示すべきことが示された。（直交座標で表すと、$x^2 + y^2 = (2h-y)^2$ から $y = h - x^2/(4h)$ が得られる。これは図のように O を焦点（focus）とする放物線（parabola）である。釣り合いを直接確かめることもできる。P は釣り合っているので張力は mg であり、BO 方向の mg と下向きの mg の合力はこれら二方向のなす角を二等分する。これは放物線の反射の性質（reflection property）により、まさにその点における放物線の法線の方向である。）

θ の変化率

針金上では $y = 2h - r$ であるから、

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2h}{r} - 1.$$

これを時間で微分すると、

$$\cos\theta\,\dot{\theta} = -\frac{2h\dot{r}}{r^2}.$$

$\theta = \arcsin(y/r)$ は $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ に属するので $\cos\theta \geq 0$ であり、

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{2h-r}{r}\right)^2} = \frac{\sqrt{r^2 - (2h-r)^2}}{r} = \frac{\sqrt{4rh - 4h^2}}{r} = \frac{2\sqrt{rh-h^2}}{r}.$$

ビーズが H を離れた後は $r > h$ である（$r = 2h - y$ であり、H 以外では $y < h$ だからである）。よって $\cos\theta \neq 0$ であり、割り算をしてよい。

$$\dot{\theta} = -\frac{2h\dot{r}}{r^2} \cdot \frac{r}{2\sqrt{rh-h^2}} = -\frac{h\dot{r}}{r\sqrt{rh-h^2}},$$

これが求める結果である。

P の速さ

考えてみよう なぜ運動エネルギーの総和は $\frac{1}{2}mV^2$ のまま保たれなければならないのか。

系に仕事をする力は、重力と（内力である）糸の張力だけである。張力は正味の仕事をしない。糸は伸び縮みせず輪は滑らかなので、張力が B にする仕事と P にする仕事は打ち消し合うからである。針金は滑らかなので、その抗力は仕事をしない。よって運動エネルギーと位置エネルギーの和は保存される。ところが、いま示したように位置エネルギー U はこの針金に沿って**一定**であるから、運動エネルギーも一定である。

最初、ビーズは H にあり、そこで r は最小値 h をとる（y がそこで最大となるからである）。よって最初は $\dot{r}=0$ であり、速さが $|\dot{r}|$ である P は静止した状態から動き始める。したがって最初の運動エネルギーは $\frac{1}{2}mV^2$ である。

O を中心とする極座標では、ビーズの速さの 2 乗は $\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2$ である。$\dot{\theta}$ についての結果を用いると、

$$r^2\dot{\theta}^2=\frac{h^2\dot{r}^2}{rh-h^2}=\frac{h\dot{r}^2}{r-h},\qquad \text{よって}\qquad v_B^2=\dot{r}^2\left(1+\frac{h}{r-h}\right)=\frac{r\dot{r}^2}{r-h}.$$

運動エネルギーの保存から、$\frac{1}{2}m$ を約すと

$$\frac{r\dot{r}^2}{r-h}+\dot{r}^2=V^2\quad\Longrightarrow\quad \dot{r}^2\,\frac{2r-h}{r-h}=V^2.$$

$r>h$ であるから $r-h$ と $2r-h$ はともに正であり、P の速さは

$$|\dot{r}|=V\left(\frac{r-h}{2r-h}\right)^{\frac{1}{2}},$$

となり、示すべきことが示された。

検算

- H では $r=h$ であり、公式は 0 を与える。P は静止状態から動き始めるので正しい。
- $r\to\infty$ のとき、P の速さは $V/\sqrt{2}$ に近づく。遠方ではビーズはほぼ動径方向に動くので、B と P の速さはほぼ等しくなり、運動エネルギーを等分する。
- 数値的に、$h=1$、$V=2$ として、$y=1-\frac{1}{4}x^2$ に沿ったビーズの運動方程式を（RK4 で）数値的に解き進め、$\dot{\theta}$ と $\dot{r}$ の差分による値を公式と比較した。$r\approx 4.043$ において P の速さは 1.31064 であり、$2\sqrt{3.043/7.087}$ と有効数字 6 桁まで一致した。

よくある間違い

- P の位置エネルギーを $+mg(L-r)$ としてしまう。P は O の下にあるので、その高さは $-(L-r)$ である。
- P も動くことを忘れて、$\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mV^2$ と書いてしまう。
- $\cos\theta$ が H でのみ 0 になることに触れずに、$\cos\theta$ で割ってしまう。

STEP のその先へ

系がいたるところで「中立」釣り合い（neutral equilibrium）となる曲線を求めることは、釣り合いの位置は位置エネルギーの停留点であるという原理の小さな一例である。この原理はラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）へとつながっていく。そこでは、糸や針金のような拘束（constraint）は、うまい座標を選ぶことで初めから組み込まれる。ここでは一つの座標 r がその役割を果たし、エネルギー保存則が第一積分（first integral）となっている。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このような考え方でエネルギーを用いる方法と極座標を扱っている。

解答例

STEP III 2006、第 10 問

力学 ・ 角運動量保存則

STEP III 2006、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s3-q10

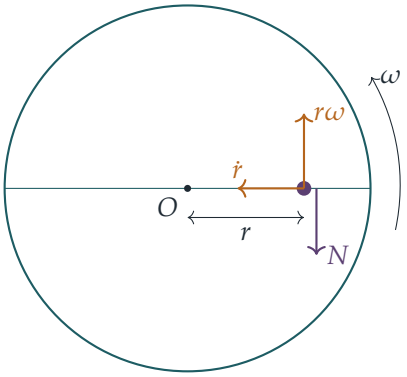
鍵となる考え方

円板と粒子からなる系には、軸のまわりに回転させるような外力は何も作用せず、なめらかな溝は全体として仕事をしない。したがって、軸のまわりの角運動量（angular momentum）と運動エネルギー（kinetic energy）という二つの保存則（conservation law）が成り立つ。これらにより ω と $\dot{r}$ が r だけの関数として表され、V、Ω、a、k を結ぶ一見奇妙な条件は、エネルギーの式をきれいにまとめるために置かれている。$\dot{r}$ を $\dot{\theta} = \omega$ で割ると時間が消え、軌道についての変数分離形（separable）の方程式が残る。

解答

モデル化

粒子は質量 m の質点（point mass）とみなし、溝はなめらかであるとする。すると粒子にはたらく水平方向の力は、溝に垂直な抗力（reaction）N だけである。円板は固定された鉛直な軸のまわりを自由に回転するので、軸受けは軸のまわりにトルク（torque）を及ぼさない。重力と鉛直方向の抗力はいずれも鉛直であり、関与しない。円板が回転した角を θ とすると $\omega = \dot{\theta}$ であり、粒子の軸からの距離を r とする。粒子は溝の中にとどまるので、その速度は溝に沿った成分 $\dot{r}$ と、溝に垂直な成分 $r\omega$ をもつ。



角速度

抗力 N は粒子に、$-N$ は円板に同じ点で作用するので、軸のまわりのそれらのモーメントは打ち消し合う。軸のまわりの外部トルクがないので、軸のまわりの全角運動量は一定である。円板の寄与は $mk^2\omega$ であり、粒子の寄与は $mr\cdot r\omega = mr^2\omega$ である（モーメントをもつのは速度の横方向成分だけである）。$t=0$ における全角運動量は $m(k^2+a^2)\Omega$ であるから、

$$(k^2+r^2)\,\omega = (k^2+a^2)\,\Omega, \qquad \text{すなわち} \qquad \omega = \frac{\Omega(k^2+a^2)}{k^2+r^2},$$

となり、これが第一の結果である。

動径方向の速さ

考えてみよう 粒子が動いている間、溝は粒子を横から押している。それなのに、なぜエネルギーは保存されるのか。

抗力 N は溝に垂直である。粒子と、それに接している円板上の点とは、溝に垂直な速度成分がともに $r\omega$ で等しい。両者の違いは溝に沿った滑りの速度 $\dot r$ だけであり、これは N に垂直である。よって N が粒子にする仕事は、$-N$ が円板にする仕事とちょうど打ち消し合う。軸の軸受けは仕事をしないので、全運動エネルギーは一定である。

共通因数 $\frac{1}{2}m$ を約すと、エネルギー保存則から

$$k^2\omega^2 + \dot r^2 + r^2\omega^2 = k^2\Omega^2 + V^2 + a^2\Omega^2.$$

を得る。ここで右辺に与えられた条件 $V^2 = \Omega^2a^2(k^2+a^2)/k^2$ を用いると、

$$(k^2+a^2)\Omega^2 + \frac{\Omega^2a^2(k^2+a^2)}{k^2} = \frac{\Omega^2(k^2+a^2)(k^2+a^2)}{k^2} = \frac{\Omega^2(k^2+a^2)^2}{k^2}.$$

となる。左辺については、第一の結果より $(k^2+r^2)\omega^2 = \Omega^2(k^2+a^2)^2/(k^2+r^2)$ であ

る。したがって

$$\begin{aligned}\dot{r}^2 &= \Omega^2(k^2+a^2)^2\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2+r^2}\right)\\ &= \frac{\Omega^2 r^2(k^2+a^2)^2}{k^2(k^2+r^2)},\end{aligned}$$

となり、求める式が得られた。

軌道の方程式

粒子が軸に向かって動いている間は $\dot{r}<0$ であるから、負の平方根をとって

$$\dot{r} = -\frac{\Omega r(k^2+a^2)}{k\sqrt{k^2+r^2}}.$$

である。$\omega=\dot{\theta}>0$ であるから、連鎖律（chain rule）$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \dot{r}\Big/\dot{\theta} = \dot{r}/\omega$ を用いることができ、

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{\Omega r(k^2+a^2)}{k\sqrt{k^2+r^2}}\cdot\frac{k^2+r^2}{\Omega(k^2+a^2)} = -\frac{r\sqrt{k^2+r^2}}{k},$$

となる。よって $k\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -r(k^2+r^2)^{1/2}$ であり、求める式が得られた。

r を求める

$u=k/r$ とおくと $u>0$ である。このとき

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{k}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{k}{r^2}\cdot\frac{r\sqrt{k^2+r^2}}{k} = \sqrt{\frac{k^2}{r^2}+1} = \sqrt{1+u^2}.$$

これは変数分離できて、

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = \int\mathrm{d}\theta \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{arsinh}u = \theta+\alpha$$

となる。ここで α はある定数である。よって $k/r=\sinh(\theta+\alpha)$、すなわち

$$r\sinh(\theta+\alpha) = k.$$

である。$t=0$ では $\theta=0$ かつ $r=a$ であるから $\sinh\alpha = k/a$ となり、求める結果が得られた。

粒子は決して軸に到達しない

> **考えてみよう** $r = k/\sinh(\theta+\alpha)$ は決して 0 にならないが、θ が有限の時間で無限大になることはありうるだろうか。

ありえない。$r^2 \geq 0$ であるから、第一の結果より $\omega \leq \Omega(k^2+a^2)/k^2$ であり、したがって $\theta \leq \Omega(k^2+a^2)t/k^2$ は任意の有限の時刻 t において有限である。ゆえに、どの時刻においても $r = k/\sinh(\theta+\alpha) > 0$ である。

公式が成り立ち続けること、すなわち粒子が軸に向かって動き続けることも確認しておく必要がある。$\dot{r}^2$ の式より、$\dot{r}$ が 0 になりうるのは $r = 0$ のときだけである。よって $r > 0$ である間は $\dot{r}$ は最初の負の符号を保ち、上の議論はすべての $t > 0$ に対して適用できる。粒子は渦を巻きながら軸にどこまでも近づき、$r \to 0$ となるのは $\theta \to \infty$ のときに限られるが、決して軸には到達しない。

検算

- $r = a$ のとき、$\dot{r}^2$ の式は $\Omega^2 a^2(k^2+a^2)/k^2 = V^2$ を与え、初期条件と一致する。
- $k = a = \Omega = 1$（したがって $V = \sqrt{2}$）として、運動方程式 $\ddot{r} = r\omega^2$ および $(k^2+r^2)\omega =$ 一定を数値的に積分した。円板が $\theta \approx 4.4170$ だけ回転したところで粒子は $r = 0.01$ に達し、$\operatorname{arsinh} 100 - \operatorname{arsinh} 1 \approx 5.2983 - 0.8814 = 4.4169$ と一致する。計算の全過程を通して、エネルギー、$\dot{r}^2$、$r\sinh(\theta+\alpha) = k$ はいずれも約 10^{-11} の精度で成り立っていた。

よくある間違い

- 粒子自身の角運動量 $mr^2\omega$、あるいはその横方向の運動エネルギー $\frac{1}{2}mr^2\omega^2$ を忘れる。
- $\dot{r}$ に正の平方根をとってしまい、$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ の符号を誤る。
- θ が有限の時刻では有限にとどまることに触れずに、$r \neq 0$ だけから「決して軸に到達しない」と結論する。

STEP のその先へ

粒子には動径方向の力が何もはたらかないのに、円板とともに回転する回転座標系（rotating frame）から見ると、外側へ押し出されているように見える。それが

$\ddot{r} = r\omega^2$ における遠心力（centrifugal force）の項であり、横からの抗力 N はコリオリ力（Coriolis force）とつり合っている。大学の力学では、このような問題をラグランジュ（Lagrange）の方法（Lagrangian methods）で扱う。角 θ はエネルギーの式に現れないので、それに共役な運動量（conjugate momentum）、ここでは角運動量が自動的に保存される。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、回転座標系と角運動量をちょうどよい水準で扱っている。

解答例

STEP III 2006、第 11 問

力学 ・ 連結された系における衝突

> **STEP III 2006、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q11

鍵となる考え方

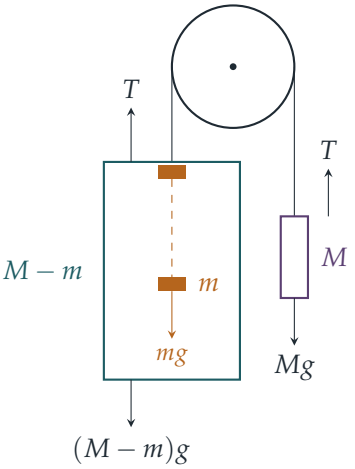
タイルが外れると、エレベーター（lift）は釣り合いおもり（counterweight）より軽くなるので、タイルが落下する間にエレベーターは上昇し始める。したがってタイルは、**エレベーターに対して**高さ h を進まなければならない。衝突については、エレベーターと釣り合いおもりを、床を通してタイルとつながった質量 $2M - m$ の一つの物体とみなす。ケーブルの撃力（impulse）に関して与えられた条件こそが、この物体とタイルについて運動量型の保存則を書くことを可能にするのである。この「運動量」は衝突の直前に 0 になることがわかり、そのおかげでエネルギーの収支が非常にすっきりする。

解答

エレベーター、釣り合いおもり、タイルを（鉛直方向の運動について）質点（particle）とみなし、ケーブルは軽く伸びない（inextensible）もの、滑車（pulley）はなめらかなものとしてモデル化する。タイルが外れる前、系は静止しているので、タイルを**含めた**エレベーターが釣り合いおもりと釣り合っている。すなわち、エレベーターの質量はタイル込みで M、タイルなしで $M - m$ である。

落下

エレベーターとタイルについては上向きを正とする。ケーブルは伸びないので、エレベーターが速さ u、加速度 a で上に動くとき、釣り合いおもりは同じ速さと加速度で下に動く。張力（tension）を T とする。



エレベーター（上向き）と釣り合いおもり（下向き）にニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（second law）を適用すると

$$(M-m)a = T-(M-m)g, \qquad Ma = Mg - T.$$

を得る。辺々を加えると $(2M-m)a = mg$ となるので

$$a = \frac{mg}{2M-m}.$$

である。タイルは下向きの加速度 g で自由落下（free fall）する（ガイドはなめらかで、ほかに何も触れていない）。したがってエレベーターに対して、タイルは下向きに

$$g + a = g + \frac{mg}{2M-m} = \frac{2Mg}{2M-m},$$

の加速度をもち、エレベーターに対して静止した状態から動き始める。時間 t の後に床に達するとすると $\frac{1}{2}(g+a)t^2 = h$ であるから

$$t^2 = \frac{(2M-m)h}{Mg}.$$

となる。その瞬間のタイルの速さは

$$v = gt = \sqrt{g^2 \cdot \frac{(2M-m)h}{Mg}} = \sqrt{\frac{(2M-m)gh}{M}},$$

であり、これが示すべきことであった。このときエレベーター（と釣り合いおもり）の速さは

$$U = at = \frac{m}{2M-m}\,gt = \frac{mv}{2M-m}.$$

である。この間にエレベーターは $\frac{1}{2}at^2 = \frac{mh}{2M} < h$ だけ上昇するので、滑車までの距離に関する条件により、エレベーターが先に滑車に達することはない。

衝突

床がタイルに及ぼす撃力（上向き）を J とし、ケーブルの張力による撃力を I とする。与えられた条件により、I はエレベーターと釣り合いおもりに対して同じ大きさをもつ（どちらにも上向きにはたらく）。瞬間的な衝突の間、重力は撃力を与えない。衝突直後のタイルの速度を w（上向き）、エレベーターの速度を U'（上向き）とすると、釣り合いおもりの下向きの速度も U' である。このとき

$$\begin{aligned} \text{タイル:} \quad & m\big(w-(-v)\big) = J, \\ \text{エレベーター:} \quad & (M-m)(U'-U) = I-J, \\ \text{釣り合いおもり（下向き）:} \quad & M(U'-U) = -I. \end{aligned}$$

が成り立つ。3 式をすべて加えると J と I が消去されて

$$mw + (2M-m)U' = -mv + (2M-m)U.$$

となる。

> **考えてみよう** 「下向き」を正とする釣り合いおもりの式を、ほかの式に加えてよいのはなぜか？

ケーブルがあるので、「釣り合いおもりが下がる」ことと「エレベーターが上がる」ことは同じ座標で表される。ここで示したのは、組み合わせ $mw + (2M-m)U'$（タイルの上向きの運動量（momentum）に、ケーブルに沿って測ったエレベーターと釣り合いおもりの運動量を加えたもの）が衝突によって変わらないということである。撃力が等しいという条件はここで使われる。この条件がなければ I は打ち消し合わない。

ここで鍵となる観察をする。$U = \dfrac{mv}{2M-m}$ であるから、右辺は $-mv + mv = 0$ である。よって

$$mw + (2M-m)U' = 0 = -mv + (2M-m)U.$$

床におけるニュートンの反発の法則（Newton's experimental law）によれば、遠ざかる速さは近づく速さの e 倍である：

$$w - U' = e\big(U-(-v)\big) = e(U+v).$$

衝突前と衝突後の速度はどちらも同じ「運動量ゼロ」の式を満たすので、組 (w, U') と $(-v, U)$ はいずれも $(2M-m,\ -m)$ の定数倍である。反発の式によってその倍率が決まり、$w = ev$、$U' = -eU$ となる。（検算：$mev - (2M-m)eU = e(mv - mv) = 0$ であり、$w - U' = e(v+U)$ である。）

エネルギーの損失

衝突の直前、運動エネルギー（kinetic energy）は

$$\tfrac{1}{2}mv^2+\tfrac{1}{2}(2M-m)U^2=\tfrac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{m}{2M-m}\right)=\frac{Mmv^2}{2M-m}=mgh,$$

である。ここで $U=\frac{mv}{2M-m}$、続いて $v^2=\frac{(2M-m)gh}{M}$ を用いた。衝突の直後には、すべての速度が $\pm e$ 倍されているので、運動エネルギーは $e^2\,mgh$ である。衝突は瞬間的なので、その間に位置エネルギー（potential energy）は変化せず、系のエネルギーの損失は

$$mgh-e^2mgh=mgh(1-e^2),$$

となり、これが示すべきことであった。

コメント

答えは M にまったく依存しない。これは、**固定された**エレベーターの中でタイルが高さ h を落下し、反発係数（coefficient of restitution）e で跳ね返った場合の損失とちょうど同じである。これは納得のいく結果である。衝突の直前、系の運動エネルギーは mgh であり、これは単に解放された位置エネルギーにほかならない（タイルとエレベーターは h の隙間を詰め、エレベーターの上昇は釣り合いおもりの下降とちょうど釣り合う）。さらに、ケーブルに沿った「運動量」がゼロなので、この衝突は運動量ゼロの座標系（zero-momentum frame）から見た衝突のようにふるまい、その座標系では常に運動エネルギーの $1-e^2$ の割合が失われる。特に、$e=0$ ならば運動エネルギーはすべて失われて系全体が静止し、$e=1$ ならば何も失われない。

検算

- $M=5$、$m=2$、$h=3$、$g=10$、$e=\frac{1}{3}$ とする。このとき $v^2=48$、$U^2=3$ であり、衝突前の運動エネルギーは $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 48+\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3=60=mgh$、損失は $60\cdot\frac{8}{9}=\frac{160}{3}$ である。
- M、m、h、e をランダムに 200 通り選び、運動を数値的に追跡する（タイルは自由落下、エレベーターは $\frac{mg}{2M-m}$ で上向きに加速）と、衝突の速さ v、エレベーターの速さ U、損失 $mgh(1-e^2)$ が再現される。
- $m\to 0$ のとき、エレベーターはほとんど動かず $v\to\sqrt{2gh}$ となり、当然ながら自由落下の速さに一致する。
- 張力による撃力 $I=M(U-U')=M(1+e)U$ は正なので、衝突の間ケーブルはたるまない。

よくある間違い

- タイルが落ちた後もエレベーターの質量を M として扱うこと。そうすると何も加速せず、タイルの速さは $\sqrt{2gh}$ になってしまう。
- 床がタイルを迎えに上がってくるので、地面に対するタイルの落下距離が h より小さいことを忘れること。
- タイルとエレベーターだけに運動量保存則を適用し、ケーブルを通してエレベーターとつながっている釣り合いおもりを忘れること。

STEP のその先へ

衝突において保存される量は通常の運動量ではなく、ケーブルの位置を表す一つの座標に共役な運動量である。これは一般化座標（generalised coordinates）とラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）への最初の入り口である。全運動量がゼロの衝突ではちょうど $1 - e^2$ の割合の運動エネルギーが失われるという事実は、衝突理論全体を貫く重心系（centre-of-mass frame）の考え方である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、重心系における運動量と、連結された物体の系の両方を丁寧に扱っている。

解答例

STEP III 2006、第 12 問

確率・統計 ・ 正規近似と期待値

> **STEP III 2006、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q12

鍵となる考え方

追加のバスの価値は、平均して稼ぐ額にとどまる。したがって、会社が検討すべき免許料は、1 年あたりの追加利益の**期待値**（expected value）以下である。既存のバスだけで足りる日には追加のバスは何も稼がず、また座席数 32 を超えて乗客を運ぶこともできない。そこで、「切り詰められた」確率変数（random variable）の期待値が必要となる。数値は、正規近似（normal approximation）のもとで、従来の輸送能力と新しい輸送能力がちょうど分布のきりのよい点に来るように選ばれている。

解答

モデルの設定

1 回の到着において、1024 人の観光客のうちバスターミナルへ案内される人数を X とする。各観光客はそこへ確率 $\frac{1}{2}$ で向かい、観光客どうしは互いに独立（independent）に案内されると仮定する。このとき

$$X \sim \mathrm{B}\left(1024, \tfrac{1}{2}\right), \qquad \mathrm{E}(X) = 512, \qquad \mathrm{Var}(X) = 1024 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = 256.$$

n が大きく $p = \frac{1}{2}$ であるから、正規近似 $X \approx \mathrm{N}(512, 16^2)$ を用い、$Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ として $X = 512 + 16Z$ と書く。指示に従い、連続性補正（continuity correction）は行わない。

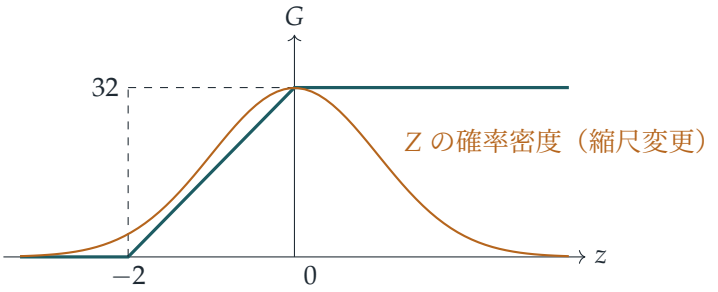
15 台のバスは $15 \times 32 = 480$ 人の乗客を運べるので、1 回の到着における現在の利益は $£\min(X, 480)$ である。16 台目のバスを加えると輸送能力は 512 となり、利益は

£ $\min(X, 512)$ となる。したがって、1 回の到着における追加利益は

$$G = \min(X,512) - \min(X,480) = \begin{cases} 0, & X \le 480, \\ X - 480, & 480 \le X \le 512, \\ 32, & X \ge 512. \end{cases}$$

である。Z で表すと、2 つの折れ点は $X = 480 \iff Z = -2$ と $X = 512 \iff Z = 0$ であり、中間の範囲では $X - 480 = 32 + 16Z$ である。よって

$$G = \begin{cases} 0, & Z \le -2, \\ 32 + 16Z, & -2 \le Z \le 0, \\ 32, & Z \ge 0. \end{cases}$$



追加利益の期待値

$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$ を標準正規分布の確率密度関数（probability density function）とする。期待値を 3 つの範囲に分けると

$$\mathrm{E}(G) = 32\,\mathrm{P}(Z \ge 0) + \int_{-2}^{0} (32 + 16z)\,\phi(z)\,\mathrm{d}z.$$

第 1 項は $32 \times \frac{1}{2} = 16$ である。積分のうち定数部分は、対称性 $\Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$ を用いて

$$32 \int_{-2}^{0} \phi(z)\,\mathrm{d}z = 32\big(\Phi(0) - \Phi(-2)\big) = 32\big(\tfrac{1}{2} - (1 - \Phi(2))\big) = 32\Phi(2) - 16,$$

となる。

考えてみよう 数表を使わずに $z\,\phi(z)$ を積分するにはどうすればよいか。

確率密度関数を微分すると $\phi'(z) = -z\,\phi(z)$ である。よって $z\,\phi(z)$ は厳密な原始関数（antiderivative）$-\phi(z)$ をもち、

$$16 \int_{-2}^{0} z\,\phi(z)\,\mathrm{d}z = 16\big[-\phi(z)\big]_{-2}^{0} = -16\big(\phi(0) - \phi(2)\big) = -\frac{16}{\sqrt{2\pi}}\big(1 - e^{-2}\big).$$

（これは負であり、そうあるべきである。範囲全体で $z < 0$ だからである。）

3 つの部分を足し合わせると、16 が打ち消し合う：

$$\mathrm{E}(G) = 16 + \big(32\Phi(2) - 16\big) - \frac{16}{\sqrt{2\pi}}\big(1 - \mathrm{e}^{-2}\big) = 32\Phi(2) - \frac{16}{\sqrt{2\pi}}\big(1 - \mathrm{e}^{-2}\big).$$

免許料

1 年に 50 回の到着があるので、期待値の線形性（linearity of expectation）により、16 台目のバスによる 1 年あたりの追加利益の期待値は

$$50\,\mathrm{E}(G) = 1600\,\Phi(2) - \frac{800}{\sqrt{2\pi}}\big(1 - \mathrm{e}^{-2}\big) \text{ ポンド.}$$

である。これより大きな免許料を支払えば会社は平均して損失を被り、これより小さな免許料であれば期待値の意味で利益が残る。したがって、これが（正規近似を用いているので近似的に）検討に値する年間免許料の最大値であり、求める結果である。数値ではおよそ £1288 である。

検算

- 妥当な範囲の確認：追加のバスは 1 回の運行あたり 0 から 32 の間を稼ぐので、年間の値は 0 と 1600 の間になければならない。得られた値 $1600 \times 0.97725 - 319.15 \times 0.86466 \approx 1287.6$ は確かにこの範囲にある。
- 厳密な計算：$\min(k, 512) - \min(k, 480)$ を厳密な $\mathrm{B}(1024, \frac{1}{2})$ の確率で重み付けして足し合わせ、50 倍すると 1287.69 となり、正規近似の値 1287.64 と 6 ペンス以内で一致する。

よくある間違い

- 追加利益を $32\,\mathrm{P}(X > 480)$ としてしまうこと。これは、新しいバスが必要なときには常に満席になるとみなしていることになる。バスの乗客が 480 人から 512 人の間の日には、新しいバスは一部しか埋まらない。
- $\int_{-2}^{0} z\phi(z)\,\mathrm{d}z$ における符号の誤り。被積分関数が負なので、答えは負でなければならない。

STEP のその先へ

量 $\mathrm{E}\big(\min(X,c)\big)$ は在庫 c をもつ新聞売り子の期待販売数であり、c を選ぶ「新聞売り子問題」（newsvendor problem）はオペレーションズ・リサーチ（operations research）の古典的な問題である。同じ切り詰められた利得 $\min(\max(X-a,0),b-a)$ は、金融数学では「コール・スプレッド」（call spread）と呼ばれる。$\phi'(z)=-z\phi(z)$ という技法は、切断正規分布（truncated normal distribution）のモーメントの理論の出発点である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、二項分布の正規近似や、確率変数の関数の期待値を扱っている。

解答例

STEP III 2006、第 13 問

確率・統計 ・ 幾何的確率

STEP III 2006、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s3-q13

鍵となる考え方

周はまったく性質の異なる二つの部分、すなわち長さ π の弧と長さ 2 の直径からなる。そこで、各点がどちらの部分に落ちるかで条件づける（condition）。三つの場合のいずれでも、三角形の面積は頂点 C を中心にとった $\frac{1}{2}ab\sin C$ という簡単な式で表され、条件付き期待値（conditional expectation）は短い積分で求まる。最後に全期待値の法則（law of total expectation）によって、各部分を組み合わせる。

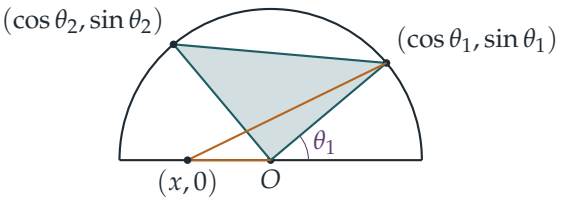
解答

設定

直径の中心 O を原点に置き、直径を x 軸上の $(-1,0)$ から $(1,0)$ までとし、弧は上半平面にあるものとする。「周上に無作為に」とは、全長 $\pi+2$ の境界全体に沿って、長さに関して一様に分布している（uniformly distributed）という意味である。したがって各点は独立に（independently）

- 確率 $\dfrac{\pi}{\pi+2}$ で弧上にあり、そのとき θ を $[0,\pi]$ 上の一様分布として $(\cos\theta,\sin\theta)$ と表される。
- 確率 $\dfrac{2}{\pi+2}$ で直径上にあり、そのとき x を $[-1,1]$ 上の一様分布として $(x,0)$ と表される。

（単位円では弧の長さが角度に等しいので、弧上で長さに関して一様であることは、角度に関して一様であることと同じである。）



二点のうち直径上にあるものの個数を D とする。二点の独立性を用いると、$D = 2$、1、0 となる確率はそれぞれ

$$\frac{4}{(\pi+2)^2}, \qquad \frac{2\cdot 2\pi}{(\pi+2)^2} = \frac{4\pi}{(\pi+2)^2}, \qquad \frac{\pi^2}{(\pi+2)^2},$$

である（中央の場合の因子 2 は、どちらの点が直径上にあるかを数えている）。どの場合も三角形は O を頂点にもつので、その面積は $\frac{1}{2}\,|OP|\,|OQ|\sin\angle POQ$ である。

二点とも直径上にある場合

三つの頂点がすべて一直線上にあるので、三角形は退化して（degenerate）おり $A = 0$ である。よって $\mathrm{E}(A \mid D = 2) = 0$ である。

一点が弧上、一点が直径上にある場合

二点を $P = (\cos\theta, \sin\theta)$、$R = (x, 0)$ とする。このとき $|OP| = 1$、$|OR| = |x|$ であり、底辺 OR は直径上にあって、P はその上方の高さ $\sin\theta \geq 0$ の位置にあるから

$$A = \tfrac{1}{2}\,|x|\sin\theta.$$

x と θ は独立なので

$$\mathrm{E}(A \mid D = 1) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}|x|\,\mathrm{E}(\sin\theta) = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|x|\,\mathrm{d}x\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2\pi}.$$

二点とも弧上にある場合

このとき $P = (\cos\theta_1, \sin\theta_1)$、$Q = (\cos\theta_2, \sin\theta_2)$ であり、θ_1, θ_2 は独立で $[0, \pi]$ 上の一様分布に従う。二つの半径の長さはともに 1 で、角 POQ は $|\theta_1 - \theta_2|$ であるから

$$A = \tfrac{1}{2}\,|\sin(\theta_1 - \theta_2)|.$$

考えてみよう $\mathrm{E}|\sin(\theta_1 - \theta_2)|$ を求めるのに、$\theta_1 - \theta_2$ の分布は必要だろうか？

必要ない。まず θ_2 で条件づければよい。θ_2 を固定すると、θ_1 が $[0, \pi]$ を動くとき、角 $\theta_1 - \theta_2$ は長さ π の区間を動く。関数 $|\sin u|$ は周期 π をもつので、長さ π のどの区間

で積分しても、$[0,\pi]$ での積分と等しい：

$$\int_0^{\pi} |\sin(\theta_1-\theta_2)|\,\mathrm{d}\theta_1 = \int_0^{\pi} \sin u\,\mathrm{d}u = 2.$$

したがって θ_2 の値によらず $\mathrm{E}\big(|\sin(\theta_1-\theta_2)| \,\big|\, \theta_2\big) = 2/\pi$ であり、ゆえに

$$\mathrm{E}(A \mid D=0) = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi}.$$

まとめ

全期待値の法則により

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(A) &= \frac{4}{(\pi+2)^2}\cdot 0 + \frac{4\pi}{(\pi+2)^2}\cdot\frac{1}{2\pi} + \frac{\pi^2}{(\pi+2)^2}\cdot\frac{1}{\pi}\\ &= \frac{2+\pi}{(\pi+2)^2} = \frac{1}{2+\pi},\end{aligned}$$

となり、これは求める $(2+\pi)^{-1}$ である。

検算

- 三つの場合の確率の和 $\dfrac{4+4\pi+\pi^2}{(\pi+2)^2}$ は 1 になる。
- 各条件付き期待値は、その場合に取りうる面積の最大値以下である：$\frac{1}{\pi}\approx 0.318 \le \frac{1}{2}$（二つの半径が直角をなすとき）、$\frac{1}{2\pi}\approx 0.159 \le \frac{1}{2}$。
- 10^6 組の点によるモンテカルロ・シミュレーション（Monte Carlo simulation）では $\mathrm{E}(A)\approx 0.1943$ が得られ、$1/(2+\pi)\approx 0.1945$ とよく一致した。また数値積分（quadrature）により、条件付きの値 $1/\pi$ と $1/(2\pi)$ も確認された。

よくある間違い

- 各点が弧上にあるか直径上にあるかを、それぞれ確率 $\frac{1}{2}$ として選んでしまう。「周上に無作為に」とは、各部分をその長さで重みづけることである。
- $\mathrm{P}(D=1)$ の因子 2 を忘れる。どちらの点が直径上にあってもよい。
- 絶対値をつけずに $A=\frac{1}{2}\sin(\theta_1-\theta_2)$ と書いてしまう。こうすると対称性により期待値が 0 になる。

STEP のその先へ

これは**幾何確率**（geometric probability）の小さな一例であり、その古典的な例にはビュフォン（Buffon）の針やベルトラン（Bertrand）の逆説がある。ベルトランの逆説は、「無作為に」という言葉をなぜきちんと定めなければならないかを示しており、ここではまさに周に沿った長さを測度とすることでそれを行った。ここで活躍した道具、すなわち分割で条件づけて平均をとること（全期待値の法則）は、大学 1 年次の確率論の中心にある。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、これをよく扱っている。

解答例

STEP III 2006、第 14 問

確率・統計 ・ 共分散と独立性

STEP III 2006、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s3-q14

鍵となる考え方

ここでの議論はすべて二つの事実に基づいている。期待値（expectation）は線形であること、そして独立（independent）な確率変数については積の期待値が期待値の積に等しいことである。分散（variance）は $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - [\mathrm{E}(Y)]^2$ から求まるので、必要になるのは期待値だけである。二つの確率変数が独立でないことを示すには、独立性から導かれる帰結のうち成り立たないものを一つ見つければ十分であり、最も確かめやすいのは $\mathrm{E}(UV) = \mathrm{E}(U)\,\mathrm{E}(V)$ である。

解答

二つの事実

任意の確率変数と定数 a, b に対して

$$\mathrm{E}(aX_1 + bX_2) = a\,\mathrm{E}(X_1) + b\,\mathrm{E}(X_2),$$

が成り立ち、さらに X_1 と X_2 が独立ならば

$$\mathrm{E}(X_1X_2) = \mathrm{E}(X_1)\,\mathrm{E}(X_2).$$

が成り立つ。二つ目の事実は確率変数の関数にも適用できる。X_1, X_2 が独立ならば、X_1^2 と X_2、X_1 と X_2^2、X_1^2 と X_2^2 もそれぞれ独立である。また $\mathrm{E}(X_i^2) = \sigma_i^2 + \mu_i^2$ も用いる。これは $\mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{E}(X_i^2) - \mu_i^2$ を変形しただけのものである。

周の長さと面積

周の長さは $P = 2X_1 + 2X_2$、面積は $A = X_1X_2$ である。線形性と独立性により

$$\mathrm{E}(P) = 2(\mu_1 + \mu_2), \qquad \mathrm{E}(A) = \mu_1\mu_2.$$

P の分散は $\mathrm{E}(P^2)$ から求める。

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(P^2) &= 4\,\mathrm{E}(X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2)\\ &= 4\big(\sigma_1^2 + \mu_1^2 + 2\mu_1\mu_2 + \sigma_2^2 + \mu_2^2\big)\\ &= 4(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + 4(\mu_1 + \mu_2)^2,\end{aligned}$$

ここで線形性と $\mathrm{E}(X_1X_2) = \mu_1\mu_2$ を用いた。$[\mathrm{E}(P)]^2 = 4(\mu_1 + \mu_2)^2$ を引くと

$$\mathrm{Var}(P) = 4(\sigma_1^2 + \sigma_2^2), \qquad \text{よって} P \text{の標準偏差は} 2\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

A については、X_1^2 と X_2^2 が独立であるから

$$\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{E}(X_1^2)\,\mathrm{E}(X_2^2) = (\sigma_1^2 + \mu_1^2)(\sigma_2^2 + \mu_2^2),$$

であり、$\mu_1^2\mu_2^2$ を引くと

$$\mathrm{Var}(A) = \sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2,$$

が残る。したがって A の標準偏差（standard deviation）は

$$\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2}.$$

である。

P と A は独立でない

P と A が独立ならば $\mathrm{E}(PA) = \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A)$ が成り立つはずである。ところで $PA = 2X_1^2X_2 + 2X_1X_2^2$ であるから、線形性と X_1, X_2 の独立性により

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(PA) &= 2(\sigma_1^2 + \mu_1^2)\mu_2 + 2\mu_1(\sigma_2^2 + \mu_2^2)\\ &= 2(\mu_1 + \mu_2)\mu_1\mu_2 + 2(\mu_2\sigma_1^2 + \mu_1\sigma_2^2)\\ &= \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A) + 2(\mu_2\sigma_1^2 + \mu_1\sigma_2^2).\end{aligned}$$

縦の長さと横の長さは正であるから $\mu_1, \mu_2 > 0$ であり、また $\sigma_1, \sigma_2 \neq 0$ であるから、余分な項 $2(\mu_2\sigma_1^2 + \mu_1\sigma_2^2)$ は真に正である。よって $\mathrm{E}(PA) \neq \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A)$ となり、P と A は独立でない。

確率変数 $Z = P - \alpha A$

ここでも、Z と A が独立ならば $\mathrm{E}(ZA) = \mathrm{E}(Z)\,\mathrm{E}(A)$ が成り立たなければならない。線形性により

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(ZA) - \mathrm{E}(Z)\,\mathrm{E}(A) &= \big[\mathrm{E}(PA) - \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A)\big] - \alpha\big[\mathrm{E}(A^2) - [\mathrm{E}(A)]^2\big] \\ &= 2(\mu_2\sigma_1^2 + \mu_1\sigma_2^2) - \alpha\big(\mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2\big),\end{aligned}$$

ここで上の二つの結果を用いた。α に掛かっている括弧は $\mathrm{Var}(A)$ であり、これは正である（$\sigma_1^2\sigma_2^2 > 0$ を含む）。したがってこの式が 0 になる α の値はちょうど一つであり、それは

$$\alpha_0 = \frac{2(\mu_1\sigma_2^2 + \mu_2\sigma_1^2)}{\mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2}.$$

である。$\alpha \neq \alpha_0$ ならば $\mathrm{E}(ZA) \neq \mathrm{E}(Z)\,\mathrm{E}(A)$ であるから、Z と A は独立でない。これが示すべきことであった。

考えてみよう $\alpha = \alpha_0$ ならば Z と A は独立であるといえるだろうか？

いえない。共分散が 0 であることは独立性の帰結ではあるが、独立性を保証するものではない。$\alpha = \alpha_0$ のとき、この判定法からは何の情報も得られないので、別の議論が必要になる。最後の小問では、ある具体的な場合にはそのときも独立性が成り立たないことを示す。

最後の小問

ここでは $\mu_1 = \mu_2 = 2, \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$ であるから

$$\alpha_0 = \frac{2(2+2)}{4+4+1} = \frac{8}{9}.$$

前の小問により、$\alpha \neq \frac{8}{9}$ であるどの α についても Z と A は独立でない。すべての α を一度に扱える議論のために、同様に確からしい四つの結果を列挙する。

(X_1, X_2)	A	P	$Z = P - \alpha A$
$(1,1)$	1	4	$4 - \alpha$
$(1,3), (3,1)$	3	8	$8 - 3\alpha$
$(3,3)$	9	12	$12 - 9\alpha$

鍵となる観察は、P、したがって Z が A によって完全に決まるということである。$z = 4 - \alpha$ とおく。$A = 1$ であることがわかれば $Z = z$ が確定するので

$$\mathrm{P}(Z = z,\ A = 1) = \mathrm{P}(A = 1) = \tfrac{1}{4}.$$

独立であるためには、これが $\mathrm{P}(Z=z)\,\mathrm{P}(A=1)$ に等しくなければならない。すなわち $\mathrm{P}(Z=z)=1$ であり、Z はすべての結果において値 $4-\alpha$ をとらなければならない。そのためには $8-3\alpha=4-\alpha$、すなわち $\alpha=2$ が必要であり、さらに $12-9\alpha=4-\alpha$、すなわち $\alpha=1$ も必要である。これらが同時に成り立つことはないので $\mathrm{P}(Z=z)<1$ であり、独立性は成り立たない。

よって、α がどのような値であっても Z と A は独立でない。たとえば $\alpha=\frac{8}{9}$ のとき、Z の値は $\frac{28}{9}, \frac{16}{3}, 4$ であり、$\mathrm{P}(Z=\frac{28}{9}, A=1)=\frac{1}{4}$ であるのに対して $\mathrm{P}(Z=\frac{28}{9})\,\mathrm{P}(A=1)=\frac{1}{16}$ である。

検算

- ばらつきがない場合（$\sigma_1=\sigma_2=0$）、二つの標準偏差はどちらも 0 になり、当然そうあるべき結果になっている。
- 最後の小問では、公式から $\mathrm{Var}(A)=1+4+4=9$ である。直接計算すると、A は値 $1,3,9$ をそれぞれ確率 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ でとるので、$\mathrm{E}(A)=4, \mathrm{E}(A^2)=25$ となり、分散は 9 である。
- 一般の平均・分散・共分散の公式を、ランダムに生成した 200 個の離散分布に対して分数を用いて厳密に検証した。また、α_0 において $\mathrm{E}(ZA)=\mathrm{E}(Z)\mathrm{E}(A)$ となること、最後の小問で $\alpha_0=\frac{8}{9}$ となること、そしてそこで $\alpha=\frac{8}{9}$ およびその他 500 個の α の値に対して Z と A が独立でないことも確認した。

よくある間違い

- $\mathrm{E}(X_1^2)=\mu_1^2$ と書いてしまうこと。分散の項 σ_1^2 こそが、$\mathrm{Var}(A)$ と共分散を 0 でないものにしている。
- $\alpha=\alpha_0$ のとき Z と A は独立であると結論してしまうこと。共分散が 0 であっても独立であるとは限らない。
- $\mu_2\sigma_1^2+\mu_1\sigma_2^2\neq 0$ である理由を述べ忘れること。打ち消し合いが起こらないのは、長さが正だからである。

STEP のその先へ

量 $\mathrm{E}(UV)-\mathrm{E}(U)\mathrm{E}(V)$ は共分散(covariance)であり、特別な値 α_0 は $\mathrm{Cov}(P,A)/\mathrm{Var}(A)$、すなわち P の A への最小二乗回帰（least-squares regression）の傾きである。$\alpha=\alpha_0$ と選ぶと残差 Z は A と無相関（uncorrelated）になるが、A と独立にはならない。同

時に正規分布に従う（jointly normal）確率変数では二つの概念は一致し、これが正規分布が非常に扱いやすい理由の一つである。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、共分散・相関・独立性を丁寧に扱っている。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

2006 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.