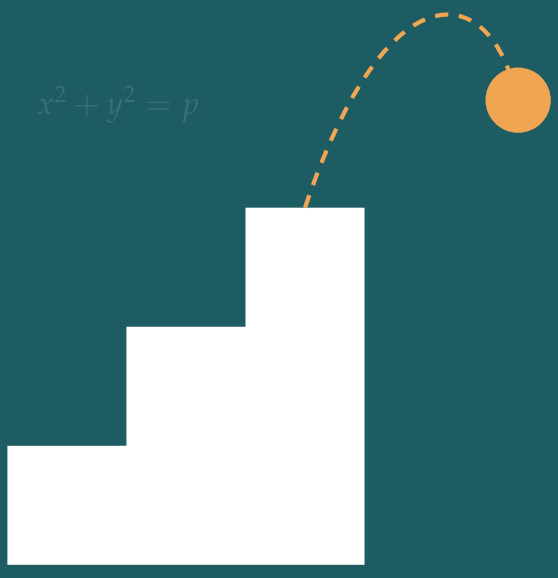
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

2005 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

2005 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

2005 年解答例

2005 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 42 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 各位の数の和の数え上げ 純粋数学 . . . 3
Q2 放物線の接線と法線 純粋数学 . . . 7
Q3 分数方程式 純粋数学 . . . 11
Q4 倍角の公式 純粋数学 . . . 14
Q5 累乗の積分 純粋数学 . . . 18
Q6 アポロニウスの円 純粋数学 . . . 22
Q7 望遠鏡型の積 純粋数学 . . . 26
Q8 一階微分方程式 純粋数学 . . . 29
Q9 剛体のつり合い 力学 . . . 33
Q10 衝突と反発係数 力学 . . . 37
Q11 ベクトルによる運動学 力学 . . . 41
Q12 ベン図による評価 確率・統計 . . . 46
Q13 対称な分布 確率・統計 . . . 50
Q14 混合型確率変数 確率・統計 . . . 54

STEP II

Q1 多項式と停留点 純粋数学 . . . 58
Q2 オイラーのトーシェント関数 純粋数学 . . . 62
Q3 部分積分 純粋数学 . . . 66
Q4 逆正接関数の恒等式 純粋数学 . . . 70
Q5 内接円と外接円 純粋数学 . . . 74
Q6 二項級数の和 純粋数学 . . . 78
Q7 ベクトルと円運動 純粋数学 . . . 82
Q8 変数分離形の微分方程式 純粋数学 . . . 86

Q9 斜面上の摩擦 力学 91
Q10 放物体の衝突 力学 96
Q11 斜面上の摩擦 力学 99
Q12 ベイズの定理 確率・統計 103
Q13 ポアソン分布と二項分布 確率・統計 107
Q14 混合分布 確率・統計 111

STEP III

Q1 三角方程式とグラフ 純粋数学 115
Q2 変数分離形の微分方程式 純粋数学 120
Q3 2次関数の合成 純粋数学 124
Q4 非線形漸化式 純粋数学 128
Q5 放物線の共通接線 純粋数学 132
Q6 3次方程式を解く 純粋数学 136
Q7 置換積分 純粋数学 140
Q8 複素数と円 純粋数学 144
Q9 衝突と反発係数 力学 148
Q10 ゴムひもと摩擦 力学 152
Q11 剛体のつり合い 力学 157
Q12 不偏推定量の結合 確率・統計 162
Q13 幾何分布 確率・統計 166
Q14 連続型確率変数 確率・統計 170

解答例

STEP I 2005、第 1 問

純粋数学 ・ 各位の数の和の数え上げ

> **STEP I 2005、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q1

鍵となる考え方

5 桁の数の各位の数字の和（digit sum）は最大で $9 \times 5 = 45$ であり、問われている 2 つの和はいずれもこれに近い。そこで、数字そのものを数えるのではなく、各数字が 9 に**どれだけ足りないか**を数える。この不足分（shortfall）は小さな非負の数であり、その合計も小さな一定の値になる。これを数えるのは易しく、場合分けで列挙してもよいし、「星と棒」（stars and bars）の方法を使ってもよい。

解答

数を $d_1d_2d_3d_4d_5$ と書く。ただし $d_1 \in \{1,\dots,9\}$（最高位は 0 でない）、$d_2,\dots,d_5 \in \{0,\dots,9\}$ である。

$$e_i = 9 - d_i \qquad (i = 1,\dots,5),$$

とおき、これを第 i 桁の**不足分**とよぶ。各 e_i は $0 \le e_i \le 9$ を満たす整数であり（$d_1 \ge 1$ より $e_1 \le 8$ でもある）、

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 45 - (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5).$$

が成り立つ。異なる数からは異なる組 $(e_1,\dots,e_5)$ が得られ、逆も成り立つので、各位の数字の和が S である数を数えることは、合計が $45 - S$ となる不足分の順序付きの組を数えることと同じである。

小問 (i)

各位の数字の和が 43 であることは、不足分の合計が $45 - 43 = 2$ であることを意味する。2 を非負の部分に分ける方法は 2 通りしかない。

- **1 つの数字が 2 だけ不足し、残りの不足は 0**。1 つの数字が 7 で、残りの 4 つが 9 である。7 は 5 つの位置のどこにあってもよいので、5 個の数 $(79999, 97999, \ldots, 99997)$ がある。
- **2 つの数字がそれぞれ 1 ずつ不足し、残りの不足は 0**。2 つの数字が 8 で、残りの 3 つが 9 である。5 つの位置のうちどの 2 つに 8 を置くかを選ぶので、$\binom{5}{2} = 10$ 個の数（$88999, 89899, \ldots, 99988$）がある。

どの数字も 7 以上なので、最高位が 0 になることはなく、これらはすべて確かに 5 桁の数である。2 つの場合は重複せず、すべての可能性を尽くしているので、各位の数字の和が 43 である 5 桁の数は

$$5 + 10 = 15$$

個であり、題意が示された。

小問 (ii)

今度は不足分の合計が $45 - 39 = 6$ でなければならない。$6 \leq 8$ なので、どの不足分も上限を超えることはない。実際、$e_1 \leq 6 \leq 8$ より $d_1 \geq 3$ が保たれ、$e_i \leq 6 \leq 9$ より他の数字も 3 以上 9 以下に保たれる。したがって、

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = 6, \qquad e_i \geq 0 \text{ は整数.}$$

の順序付きの解の個数を求めればよい。

> ? **考えてみよう** すべてを列挙せずに、これらを数えるにはどうすればよいか？

6 個の星を一列に並べ、4 本の棒で 5 つのグループに仕切ることを考える。

$$\star\star\,|\,|\,\star\,|\,\star\star\star\,| \quad \text{は次を表す} \quad (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) = (2, 0, 1, 3, 0).$$

6 個の星と 4 本の棒の並べ方はそれぞれちょうど 1 つの解を与え、どの解もちょうど 1 つの並べ方から得られる。並べ方は 10 か所のうちどの 4 か所に棒を置くかを選べば決まるので、解の個数は

$$\binom{10}{4} = 210.$$

である。よって、各位の数字の和が 39 である 5 桁の数は **210** 個ある。

小問 (i) のように場合分けで数えたいなら、6 を高々 5 個の正の部分に分ける方法を列挙し、それぞれの並べ方を数えればよい。

不足分	個数	不足分	個数
6	5	$3,2,1$	$5\cdot 4\cdot 3 = 60$
$5,1$	$5\cdot 4 = 20$	$3,1,1,1$	$5\cdot 4 = 20$
$4,2$	$5\cdot 4 = 20$	$2,2,2$	$\binom{5}{2} = 10$
$4,1,1$	$5\cdot \binom{4}{2} = 30$	$2,2,1,1$	$\binom{5}{2}\binom{3}{2} = 30$
$3,3$	$\binom{5}{2} = 10$	$2,1,1,1,1$	5

合計は $5+20+20+30+10+60+20+10+30+5 = 210$ であり、星と棒の結果と一致する。（6 の分割（partition）$1,1,1,1,1,1$ には 6 つの数字が必要なので、これは現れない。）

検算

- 星と棒の方法で小問 (i) も再現できる。不足分の合計が 2 ならば $\binom{6}{4} = 15$ となる。
- 極端な場合も正しく働く。不足分の合計が 0 ならば $\binom{4}{4} = 1$ 個（99999）、不足分の合計が 1 ならば $\binom{5}{4} = 5$ 個である。
- 90 000 個の 5 桁の数すべてをコンピュータで調べると、各位の数字の和が 43 のものはちょうど 15 個、39 のものはちょうど 210 個であり、場合ごとの内訳も上の表のとおりである。

よくある間違い

- $\{8,8,9,9,9\}$ を 1 個の数、あるいは 5 個の数として数えてしまう。数字の並び順は区別されるので、並べ方は $\binom{5}{2} = 10$ 通りである。
- 最高位の確認を忘れる。ここではどの数字も 3 以上なので最高位が 0 になることはないが、各位の数字の和がもっと小さい場合（たとえば 20）には星と棒の方法では数えすぎになり、$d_1 = 0$ となる場合や 9 を超える数字を含む場合を除かなければならない。

STEP のその先へ

n を k 個の非負整数の順序付きの和として表す方法の数は $\binom{n+k-1}{k-1}$ であり、これは $(1+x+x^2+\cdots)^k$ における x^n の係数に等しい。各数字を 9 以下に制限すると、これは $(1+x+\cdots+x^9)^k$ に置き換わり、上限による打ち切りは包除原理（inclusion–exclusion principle）によって処理される。こうした母関数（generating function）の方法は大学 1

年の組合せ論（combinatorics）の定番である。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）や Davenport の *The Higher Arithmetic*（高等整数論）は、数字や数え上げの問題をさらに探究するのによい出発点である。

解答例

STEP I 2005、第 2 問

純粋数学 ・ 放物線の接線と法線

> **STEP I 2005、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q2

鍵となる考え方

放物線（parabola）$y^2 = 4x$ を $(t^2, 2t)$ によってパラメータ表示（parametrisation）すると、すべての接線（tangent）と法線（normal）が x と y についての短い一次方程式になる。したがって交点を求めることは、二つの一次の連立方程式を解くことにすぎない。焦点（focus）$(1, 0)$ が PQ 上にあるという条件は、p と q の間の一つのすっきりした関係式に変わり、まさにその関係式こそが P と Q における接線を直交させるのである。そこまでくれば、長方形はほとんどひとりでに描き上がる。

解答

接線と点 R

点 $(t^2, 2t)$ において $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t$、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2$ であるから、そこでの C の傾きは $\dfrac{2}{2t} = \dfrac{1}{t}$ である（$t \neq 0$ なので問題ない）。よって P における接線は

$$y - 2p = \frac{1}{p}\,(x - p^2) \quad \Longleftrightarrow \quad py = x + p^2,$$

であり、同様に Q における接線は $qy = x + q^2$ である。辺々引くと

$$(p - q)\,y = p^2 - q^2 = (p - q)(p + q),$$

となり、$p \neq q$ であるから $p - q$ で割ることができて $y = p + q$ を得る。すると $x = py - p^2 = p(p + q) - p^2 = pq$ である。したがって

$$R = (pq,\ p + q),$$

となり、示すべきことが示された。

法線と点 S

$(t^2, 2t)$ における法線は接線に垂直なので、傾きは $-t$ である。P における法線は

$$y - 2p = -p\,(x - p^2) \quad \Longleftrightarrow \quad px + y = 2p + p^3,$$

であり、Q における法線は $qx + y = 2q + q^3$ である。辺々引くと

$$(p - q)\,x = 2(p - q) + (p^3 - q^3) = (p - q)\big(2 + p^2 + pq + q^2\big),$$

となるので、再び $p - q \neq 0$ で割って

$$x = p^2 + pq + q^2 + 2, \qquad y = 2p + p^3 - px = -p^2q - pq^2 = -pq\,(p + q).$$

を得る。これらは任意の p と q について成り立つ。ここで追加の条件を用いる。

$(1, 0)$ が PQ 上にあるという条件を用いる

弦 PQ の傾きは

$$\frac{2p - 2q}{p^2 - q^2} = \frac{2}{p + q}$$

である（$p + q \neq 0$ のとき）。よってその方程式は $y - 2p = \dfrac{2}{p + q}(x - p^2)$ であり、整理すると

$$(p + q)\,y = 2x + 2pq.$$

となる。この形は $p + q = 0$ の場合も含んでおり、そのときは P と Q を通る鉛直な直線 $x = -pq = p^2$ を与える。$(x, y) = (1, 0)$ を代入すると $0 = 2 + 2pq$ となるので

$$pq = -1.$$

である。これを S の座標に代入すると

$$S = \big(p^2 + q^2 + 2 + pq,\ -pq(p + q)\big) = \big(p^2 + q^2 + 1,\ p + q\big),$$

となり、示すべきことが示された。また、このとき $R = (-1,\, p + q)$ となり、これは準線（directrix）である直線 $x = -1$ 上にあることにも注意しよう。

$PSQR$ が長方形であること

> **考えてみよう** 与えられた四点が長方形をなすことを証明する、最もすっきりした方法は何か。

よい方針は、まず平行四辺形（parallelogram）であること（対角線が互いに他を二等分すること）を示し、次に一つの角が直角であることを示すことである。

平行四辺形であること。 $PSQR$ において対角線は PQ と SR である。$pq = -1$ を用いると

$$R + S = \left(pq + p^2 + q^2 + 1,\ 2(p+q)\right) = \left(p^2 + q^2,\ 2p + 2q\right) = P + Q,$$

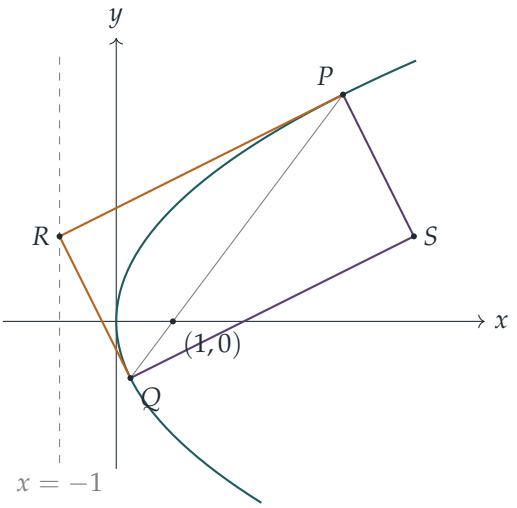
であるから、RS の中点は PQ の中点に一致する。対角線が互いに他を二等分するので、$PSQR$ は平行四辺形である。しかもこれは退化したものではなく、本物の平行四辺形である。実際、P、R、Q は同一直線上にない。なぜなら R は両方の接線上にあり、放物線上の異なる二点における接線はただ一度しか交わらず、どちらの接線ももう一方の接点を通らないからである。

直角があること。 辺 RP と RQ はそれぞれ P と Q における接線上にあり、傾きは $\frac{1}{p}$ と $\frac{1}{q}$ である。その積は

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{pq} = -1,$$

であるから、二本の接線は直交し、角 PRQ は直角である。

一つの角が直角である平行四辺形は長方形（rectangle）であるから、$PSQR$ は長方形である。（同値な言い方をすれば、各法線はそれ自身の接線に垂直なので P と Q における角は直角であり、R における直角と合わせると、四つ目の角も直角でなければならない。）



図は $p = 2$、$q = -\frac{1}{2}$ の場合を示している。接線は琥珀色、法線はプラム色、焦点弦（focal chord）PQ は灰色で描いてある。

検算

$p = 2$、$q = -\frac{1}{2}$ とすると $pq = -1$ である。このとき $P = (4,4)$、$Q = (\frac{1}{4}, -1)$ であり、これらを通る直線 $y - 4 = \frac{4}{3}(x - 4)$ は確かに $(1,0)$ を通る。公式からは $R = (-1, \frac{3}{2})$、$S = (\frac{21}{4}, \frac{3}{2})$ が得られる。直接確かめると、$\overrightarrow{RP} = (5, \frac{5}{2})$ と $\overrightarrow{QS} = (5, \frac{5}{2})$ は等しく、$\overrightarrow{RQ} = (\frac{5}{4}, -\frac{5}{2})$ と $\overrightarrow{RP}$ の内積（dot product）は $\frac{25}{4} - \frac{25}{4} = 0$ である。よって $PSQR$ は確かに長方形である。さらに、p と q をおよそ二千通り無作為に選び、厳密な分数計算ですべての座標の公式を確かめた。

よくある間違い

- なぜ許されるのかを述べずに $p - q$ で割ってしまうこと。問題文で $p \neq q$ が与えられているのは、まさにそれができるようにするためである。
- 一つの頂点で隣り合う辺が直交することだけを示すこと。それだけでは長方形にはならない。平行四辺形であることと一つの直角、または三つの頂点での直角のどちらかが必要である。
- S において $pq = -1$ を用いるのを忘れること。一般の法線どうしの交点は $\left(p^2 + pq + q^2 + 2,\ -pq(p+q)\right)$ であり、焦点弦の場合に限って与えられた形に簡単になる。

STEP のその先へ

焦点を通る弦を**焦点弦**といい、この問題はそれについての古典的な二つの事実を証明している。すなわち、焦点弦の両端における接線は直交し、しかも準線上で交わる。どちらも円錐曲線（conic）に対する極と極線（poles and polars）の理論の特別な場合であり、そこでは準線は焦点の極線となる。射影幾何学（projective geometry）を用いると、このような結果はほとんど自明になる。この精神で円錐曲線のパラメータ表示による方法を探究するには、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* がよい出発点である。

解答例

STEP I 2005、第 3 問

純粋数学 ・ 分数方程式

> **STEP I 2005、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q3

鍵となる考え方

両辺に $(x-a)(x-b)$ を掛けて、それぞれの方程式を多項式（polynomial）の方程式に直し、その実数解（real root）の個数を数える。注意を要するのは、分母を払うことによって、もとの方程式では許されない「解」$x=a$ や $x=b$ が原理的には紛れ込みうるという点であり、そのようなことが決して起こらないことを確かめなければならない。小問 (ii) では、2 次方程式が重解（repeated root）をもつのはちょうど判別式（discriminant）がゼロのときであり、そこから条件が得られる。

解答

小問 (i)

$x \neq a, b$ のとき $(x-a)(x-b)$ を掛けてよく、方程式は次と同値である。

$$\begin{aligned} x(x-b)+x(x-a) &= (x-a)(x-b) \\ 2x^2-(a+b)x &= x^2-(a+b)x+ab \\ x^2 &= ab. \end{aligned}$$

a と b は同符号なので $ab>0$ であり、したがってこの方程式は相異なる 2 つの実数解 $x=\sqrt{ab}$ と $x=-\sqrt{ab}$ をもつ。

これらが許される値であることも確かめておく必要がある。もし $x=a$ が解であれば $a^2=ab$ となり、$a\neq 0$ よりこれは $a=b$ を意味するが、これは成り立たない。同様に $x=b$ も解ではない。よって 2 つの解はいずれも本当の解であり、方程式はちょうど 2 つの相異なる実数解 $x=\pm\sqrt{ab}$ をもつ。

小問 (ii)

ここでも $x \neq a, b$ のとき $(x-a)(x-b)$ を掛けると

$$2x^2 - (a+b)x = (1+c)\big(x^2 - (a+b)x + ab\big),$$

となり、整理すると

$$q(x) \equiv (1-c)x^2 + c(a+b)x - (1+c)ab = 0.$$

を得る。$c \neq 1$ なので最高次の係数（leading coefficient）は0でなく、これは確かに2次方程式である。

> **考えてみよう** q の解のどれかが a や b になってしまい、捨てなければならないということはありうるだろうか。

代入して確かめてみる。

$$q(a) = (1-c)a^2 + c(a+b)a - (1+c)ab = a^2 - ab = a(a-b),$$
$$q(b) = b^2 - ab = b(b-a)$$

（c を含む項は打ち消し合う）。a, b は0でなく互いに異なるので、どちらも0ではない。よって a と b が q の解になることはない。これは、q のどの実数解ももとの方程式の解であり、その逆も成り立つことを意味する。

q の判別式は

$$\begin{aligned}\Delta &= c^2(a+b)^2 + 4(1-c)(1+c)ab \\ &= c^2\big[(a+b)^2 - 4ab\big] + 4ab \\ &= c^2(a-b)^2 + 4ab.\end{aligned}$$

である。$c^2 = -\dfrac{4ab}{(a-b)^2}$ ならば（$a \neq b$ なので $(a-b)^2$ で割ってよい）、$\Delta = 0$ となる。このとき2次方程式はちょうど1つの（重解である）実数解

$$x = -\frac{c(a+b)}{2(1-c)},$$

をもち、上の確認によりこの解は a でも b でもない。よって、方程式は求めるとおりちょうど1つの実数解をもつ。（実際には逆（converse）も成り立つ。$\Delta > 0$ ならば解は2つ、$\Delta < 0$ ならば解は存在しないので、この条件は必要条件でもある。）

条件の書き換え。 通分すると

$$1 - \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = \frac{(a-b)^2 - (a+b)^2}{(a-b)^2} = \frac{-4ab}{(a-b)^2},$$

となるので、条件は求めるとおり $c^2 = 1 - \left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2$ である。

$0 < c^2 \leq 1$ **を導く。** 平方 $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$ は非負であるから、2 番目の形から $c^2 \leq 1$ が得られる。1 番目の形からは $c^2 = -4ab/(a-b)^2$ が得られる。$ab \neq 0$ なのでこれは 0 でなく、実数 c に対して $c^2 \geq 0$ であるから、$c^2 > 0$ となる。（このことから $ab < 0$、すなわち a と b が異符号であることもわかり、小問 (i) とも整合する。）以上より、条件が成り立ちうるのは $0 < c^2 \leq 1$ のときに限られる。

上限の値は実際にとられる。$c^2 = 1$ となるのはちょうど $a + b = 0$ のときであり、そのとき（$c \neq 1$ なので）$c = -1$ である。

検算

- $a = 4, b = -1$ とする。このとき $c^2 = 16/25$ であり、$c = \frac{4}{5}$ を選ぶ。重解は $x = -\frac{4}{5} \cdot 3/(2 \cdot \frac{1}{5}) = -6$ であり、実際に $\frac{-6}{-10} + \frac{-6}{-5} = 0.6 + 1.2 = 1.8 = 1 + c$ が成り立つ。
- 極端な場合 $a = 1, b = -1, c = -1$ では $\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} = 0$、すなわち $2x^2 = 0$ となり、解は $x = 0$ の 1 つだけである。
- 小問 (i) で $a = 1, b = 4$ とすると $x = \pm 2$ となり、$\frac{2}{1} + \frac{2}{-2} = 1$ および $\frac{-2}{-3} + \frac{-2}{-6} = 1$ が成り立つ。

よくある間違い

- 分母を払った後、解が a や b でないことの確認を忘れる。この問題では結果的に問題は生じないが、それを示す必要がある。
- c^2 の項をまとめずに判別式を展開してしまう。$(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$ と書くことで、条件がすっきりと現れる。
- $c^2 > 0$ ではなく $c^2 \geq 0$ と主張してしまう。強い不等号は $ab \neq 0$ から得られる。

STEP のその先へ

左辺は有理関数（rational function）であり、「そのグラフは水平な直線 $y = 1 + c$ と何回交わるか」という問いは、その値域（range）に関する問いである。ここで得られた条件は、この関数の極値（turning-point value）、すなわち水平な直線がグラフにちょうど接する高さを選び出している。多項式がいつ重解をもつかを問うことは判別式へ、さらに一般には終結式（resultant）へとつながり、これらは大学 1 年の代数学に登場する。この種の問題をさらに解きたい人は、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* を参照するとよい。

解答例

STEP I 2005、第 4 問

純粋数学 • 倍角の公式

> **STEP I 2005、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q4

鍵となる考え方

どちらの小問も倍角（multiple angles）に関する問題である。(i) で実際に判断が必要なのは $\sin\theta$ の符号だけであり、それは与えられた範囲によって決まる。あとは 2 倍角の公式と 3 倍角の公式（double- and triple-angle formulae）が仕事をしてくれる。(ii) では $\tan 3\theta$ を $\tan(2\theta+\theta)$ として組み立てる。すると「これを用いて（hence）」の部分は $t=\tan\theta$ についての三次方程式（cubic）に帰着する。STEP の問題に現れる三次方程式には、ほぼ必ず見つけやすい解があり、どの解を残すべきかは θ の範囲が教えてくれる。

解答

小問 (i)

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ であるから、

$$\sin^2\theta=1-\tfrac{9}{25}=\tfrac{16}{25}, \qquad \text{よって} \qquad \sin\theta=\pm\tfrac{4}{5}.$$

$\frac{3\pi}{2}\le\theta\le 2\pi$ のとき、θ は第 4 象限（fourth quadrant）にあり、そこでは $\sin\theta\le 0$ である。したがって $\sin\theta=-\frac{4}{5}$ であり、

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\left(-\tfrac{4}{5}\right)\left(\tfrac{3}{5}\right)=-\frac{24}{25},$$

となって、示すべき式が得られた。

$\cos 3\theta$ を求めるには3倍角の公式が必要である。$c = \cos\theta$、$s = \sin\theta$ とおくと、

$$\begin{aligned}\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta) &= \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta \\ &= (2c^2 - 1)c - 2s^2 c \\ &= (2c^2 - 1)c - 2(1 - c^2)c \\ &= 4c^3 - 3c.\end{aligned}$$

$c = \frac{3}{5}$ を代入すると、

$$\cos 3\theta = 4 \cdot \frac{27}{125} - \frac{9}{5} = \frac{108 - 225}{125} = -\frac{117}{125}.$$

（ここでは $\sin\theta$ の符号は関係しない。$\cos 3\theta$ は $\cos\theta$ だけで決まるからである。）

小問 (ii)

恒等式。$t = \tan\theta$ とおく。2倍角の公式より $\tan 2\theta = \dfrac{2t}{1 - t^2}$ であり、加法定理（addition formula）より

$$\tan 3\theta = \tan(2\theta + \theta) = \frac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1 - \tan 2\theta \tan\theta} = \frac{\dfrac{2t}{1 - t^2} + t}{1 - \dfrac{2t^2}{1 - t^2}}.$$

分子と分母に $1 - t^2$ を掛けると、

$$\tan 3\theta = \frac{2t + t(1 - t^2)}{(1 - t^2) - 2t^2} = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2},$$

となり、これが求める恒等式（identity）である。この導出には $\tan 2\theta$ が存在すること、すなわち $t^2 \neq 1$ が必要である。$t = \pm 1$ のときは直接確かめられる。たとえば $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき、右辺は $\frac{3-1}{1-3} = -1 = \tan\frac{3\pi}{4}$ であり、$t = -1$ の場合は符号を反転させれば同様である。

$\tan 3\theta = \frac{11}{2}$ **を解く**。恒等式より、

$$\frac{3t - t^3}{1 - 3t^2} = \frac{11}{2} \quad \Longrightarrow \quad 6t - 2t^3 = 11 - 33t^2 \quad \Longrightarrow \quad 2t^3 - 33t^2 - 6t + 11 = 0.$$

分母を払ってよいのは、ここでは $1 - 3t^2 \neq 0$ だからである。もしこれが0なら、$\tan 3\theta$ は定義されず、$\frac{11}{2}$ にはなりえない。

考えてみよう $2t^3 - 33t^2 - 6t + 11$ の根はどうやって見つければよいだろうか？

既約分数で表した有理数解（rational root）p/q は、p が 11 の約数、q が 2 の約数でなければならない。したがって $\pm1, \pm11, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{11}{2}$ だけを試せばよい。$t = \frac{1}{2}$ を試すと、

$$2 \cdot \tfrac{1}{8} - 33 \cdot \tfrac{1}{4} - 3 + 11 = \tfrac{1}{4} - \tfrac{33}{4} + 8 = 0.$$

よって $2t - 1$ は因数であり、係数を比較すると

$$2t^3 - 33t^2 - 6t + 11 = (2t - 1)(t^2 - 16t - 11).$$

この二次式の根は $t = 8 \pm \sqrt{64 + 11} = 8 \pm 5\sqrt{3}$ である。したがって候補は次の 3 つである。

$$t = \tfrac{1}{2}, \qquad t = 8 + 5\sqrt{3} \approx 16.66, \qquad t = 8 - 5\sqrt{3} \approx -0.66.$$

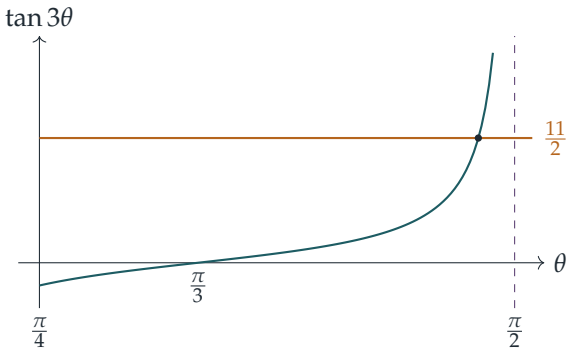
これらは、$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ に属する角のうち、その 3 倍の正接が $\frac{11}{2}$ となる 3 つの角に対応している。

ここで範囲を用いる。tan は $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ で増加し、$\tan\frac{\pi}{4} = 1$ であるから、$t \geq 1$ でなければならない（$\theta = \frac{\pi}{2}$ そのものは、そこで $\tan\theta$ が定義されないので除かれる）。条件を満たす候補は 1 つだけである。

$$\tan\theta = 8 + 5\sqrt{3}.$$

残りの 2 つは三次方程式の正真正銘の解であるが、範囲外の角に対応する。実際、$\frac{1}{2} < 1$ であり、$8 - 5\sqrt{3} < 0$ である。

グラフを見ると、解がちょうど 1 つであることが確かめられる。θ が $\frac{\pi}{4}$ から $\frac{\pi}{2}$ まで動くとき、3θ は $\frac{3\pi}{4}$ から $\frac{3\pi}{2}$ まで動き、その区間で $\tan 3\theta$ は -1 から $+\infty$ まで連続的に増加する。したがって $\frac{11}{2}$ とちょうど 1 回だけ交わる。



検算

- (i) では $\theta = 2\pi - \arccos\frac{3}{5} \approx 5.3559$ であり、電卓で計算すると $\sin 2\theta = -0.96$、$\cos 3\theta = -0.936 = -\frac{117}{125}$ となる。

- (ii) では $\theta = \arctan(8+5\sqrt{3}) \approx 1.5108$ であり、これは $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$ と $\frac{\pi}{2} \approx 1.571$ の間にあり、$\tan 3\theta \approx 5.5000$ となる。
- 恒等式の簡単な確認：$\theta = \frac{\pi}{12}$ のとき $t = 2-\sqrt{3}$ であり、右辺を整理すると $1 = \tan\frac{\pi}{4}$ となる。

よくある間違い

- (i) で $\sin\theta = +\frac{4}{5}$ としてしまうこと。これでは $\sin 2\theta$ の符号が逆になる。
- (ii) で、最初に見つけた解だからという理由で $t = \frac{1}{2}$ で止まってしまうこと。これは三次方程式の解ではあるが、$\arctan\frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$ である。

STEP のその先へ

三次方程式が 3 つの解をもったのは、$\tan 3\theta = \frac{11}{2}$ が $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ において、$\frac{\pi}{3}$ ずつ離れた 3 つの解 θ をもつからである。同じ仕組みを逆向きに使うのが、三次方程式の古典的な三角関数による解法（trigonometric solution of cubics）である。さらに一般に、ド・モアブル（de Moivre）の定理を用いると、$\tan n\theta$ は $\tan\theta$ の多項式の比として表され、その多項式の根は等間隔に並んだ角の正接になる。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は、倍角の公式がなぜ $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$ からこれほど自然に導かれるのかを示している。

解答例

STEP I 2005、第 5 問

純粋数学 ・ 累乗の積分

STEP I 2005、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s1-q5

鍵となる考え方

$x+1$ のべきは合成関数の微分法の逆（reverse chain rule）により $\int (x+1)^n \,\mathrm{d}x = \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}$ と積分できるが、例外が一つある。$n=-1$ のとき、答えは対数（logarithm）になるのである。したがって、ここでの場合分け（case split）はすべて「べき指数が -1 になるのはいつか」という問いから生じる。(ii) では、余分な因数 x を $x=(x+1)-1$ と書いて取り除く。すると単純なべきが二つ残り、そのため m の例外的な値は**二つ**になる。

解答

小問 (i)

$k \neq 0$ ならば、べき指数 $k-1$ は -1 ではないから、

$$\int_0^1 (x+1)^{k-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x+1)^k}{k}\right]_0^1 = \frac{2^k-1}{k}.$$

$k=0$ ならば、被積分関数（integrand）は $\frac{1}{x+1}$ であり、$[0,1]$ 上で $x+1>0$ であるから、

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(x+1)\Big]_0^1 = \ln 2.$$

考えてみよう $k \neq 0$ のときの答えが、$k=0$ のときの答えと関係するのはなぜだろうか。

k が 0 から少しだけ動いても、**被積分関数**はほとんど変わらないからである。$0 \leq x \leq 1$

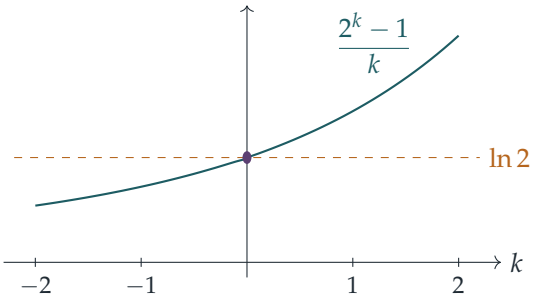
に対して

$$\left|(x+1)^{k-1}-(x+1)^{-1}\right| = \frac{\left|(x+1)^k-1\right|}{x+1} \le \left|2^k-1\right|,$$

が成り立つ。$1 \le x+1 \le 2$ より $(x+1)^k$ は 1 と 2^k の間にあるからである。長さ 1 の区間で積分すると、二つの積分の差は高々 $|2^k-1|$ であり、これは $k \to 0$ のとき 0 に収束する。よって、$k \approx 0$（かつ $k \neq 0$）に対して

$$\frac{2^k-1}{k} = \int_0^1 (x+1)^{k-1}\,\mathrm{d}x \approx \int_0^1 (x+1)^{-1}\,\mathrm{d}x = \ln 2,$$

となり、求める結果が得られる。言い換えれば、$k \neq 0$ に対する式は $k=0$ に「穴」をもち、$k=0$ の積分がその穴をちょうど埋めるのである。



小問 (ii)

$x = (x+1)-1$ と書くと、

$$x(x+1)^m = (x+1)^{m+1} - (x+1)^m.$$

各項は $x+1$ のべきであり、それを積分して対数が現れるのは、ちょうどそのべき指数が -1 のときである。それは $m+1=-1$ または $m=-1$ のときに起こるから、場合は $m=-1$、$m=-2$、およびそれ以外である。

一般の場合、 $m \neq -1, -2$。

$$\int_0^1 x(x+1)^m\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x+1)^{m+2}}{m+2} - \frac{(x+1)^{m+1}}{m+1}\right]_0^1 = \frac{2^{m+2}-1}{m+2} - \frac{2^{m+1}-1}{m+1}.$$

通分すると分子は

$$(m+1)\left(2^{m+2}-1\right) - (m+2)\left(2^{m+1}-1\right) = 2^{m+1}\left(2(m+1)-(m+2)\right)+1 = m\,2^{m+1}+1,$$

となるから、

$$\int_0^1 x(x+1)^m\,\mathrm{d}x = \frac{m\,2^{m+1}+1}{(m+1)(m+2)}, \qquad m \neq -1, -2.$$

$m = -1$ の場合。

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x = \Big[x - \ln(x+1)\Big]_0^1 = 1 - \ln 2.$$

$m = -2$ の場合。

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) \mathrm{d}x = \left[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1}\right]_0^1 = \ln 2 + \tfrac{1}{2} - 1 = \ln 2 - \tfrac{1}{2}.$$

考えてみよう 一般の式は $m = -1$ と $m = -2$ で $0/0$ になる。これは矛盾だろうか。

そうではない。これはまた小問 (i) と同じ状況である。$m = -1$ では分子は $-1 \cdot 2^0 + 1 = 0$、$m = -2$ では $-2 \cdot 2^{-1} + 1 = 0$ となるので、式はそこで誤っているのではなく定義されないだけである。そして小問 (i) と同様に、その極限値（limiting value）が特別な場合の答え（$1 - \ln 2 \approx 0.307$ および $\ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0.193$）になっている。

検算

- $m = 0$：$\int_0^1 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ であり、式からは $\frac{0+1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ が得られる。$m = 1$ のとき：$\int_0^1 (x^2 + x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ であり、式からは $\frac{4+1}{6}$ が得られる。
- 数値的には、$k = 10^{-4}$ とすると $\frac{2^k - 1}{k} \approx 0.693171$ となり、$\ln 2 \approx 0.693147$ と比べられる。
- 多くの k と m の値（$m = -1, -2$ を含む）について、すべての積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると、10^{-9} の精度で式と一致する。一般の式に $m = -1 \pm 10^{-5}$ を代入すると $0.30685\ldots$ となり、$1 - \ln 2$ と一致する。

よくある間違い

- $k = 0$ に対して $\frac{(x+1)^0}{0}$ と書いてしまう。あるいは、(ii) では m の例外的な値が一つではなく**二つ**あることを見落とす。
- (ii) で部分積分（integration by parts）を行い、$m = -1$ のときにそれが破綻することに気づかないまま $m + 1$ で割ってしまう。
- $m = -2$ の場合に、$\int (x+1)^{-2} \,\mathrm{d}x = -(x+1)^{-1}$ の符号を間違える。

STEP のその先へ

(i) での推論は $\lim_{k\to 0} \frac{2^k-1}{k} = \ln 2$ を意味しており、これは $k = 0$ における 2^k の微分係数（derivative）である。ここで使った一般的な事実は、被積分関数が**一様に**収束するならば、その積分も収束するというものである。これは大学 1 年次の解析学（analysis）の中心的な定理であり、一様性がなければ成り立たない。同じ考え方によって、$n \to -1$ のとき $\int x^n \, \mathrm{d}x$ が $\ln x$ に「なる」理由も説明できる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、一様収束（uniform convergence）と積分を丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 2005、第 6 問

純粋数学 • アポロニウスの円

STEP I 2005、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s1-q6

鍵となる考え方

$AP = 2BP$ のような条件には平方根が含まれるので、まず両辺を 2 乗する。距離の 2 乗は多項式であり、しかも $x^2 + y^2$ の項は両辺で同じ係数をもつ。これが軌跡（locus）が円になる理由である。小問 (ii) では、x 軸上の一般の 2 点について同じことを行う。すると、$x^2 + y^2 + px + q = 0$ の形の 2 つの方程式が同じ円を表すのは、p と q がそれぞれ一致するときであり、かつそのときに限る。係数比較（comparing coefficients）により k^2 の 2 通りの表し方が得られ、k を消去すると両方の結果が得られる。

解答

小問 (i)

どちらの長さも非負であるから、$AP = 2BP$ は $AP^2 = 4BP^2$ と同値である：

$$(x-5)^2 + (y-16)^2 = 4\left[(x+4)^2 + (y-4)^2\right].$$

展開すると、

$$x^2 - 10x + y^2 - 32y + 281 = 4x^2 + 32x + 4y^2 - 32y + 128.$$

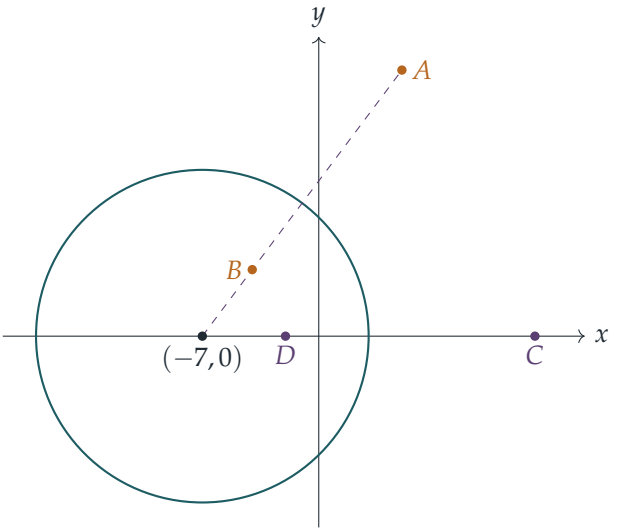
y の項は打ち消し合い、すべてを右辺に集めると

$$3x^2 + 42x + 3y^2 - 153 = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad x^2 + 14x + y^2 - 51 = 0.$$

平方完成（completing the square）すると $x^2 + 14x = (x+7)^2 - 49$ であるから、

$$(x+7)^2 + y^2 = 100,$$

となり、示すべき式が得られた。軌跡は中心 $(-7, 0)$、半径 10 の円である。



（点 $C = (13, 0)$ と $D = (-2, 0)$ は、小問 (ii) における $k = 2$ の場合の組の一例である。A、B と中心も同一直線上にあることに注意しよう。）

小問 (ii)

先ほどと同様に、$QC = kQD$ は $QC^2 = k^2 QD^2$ と同値である。$Q = (x, y)$ とおくと、

$$(x-a)^2 + y^2 = k^2\left[(x-b)^2 + y^2\right].$$

項を右辺に集めると、

$$(k^2-1)(x^2+y^2) - 2(k^2 b - a)x + (k^2 b^2 - a^2) = 0.$$

$k > 1$ より $k^2 - 1 \neq 0$ であるから、これで割ることができる：

$$x^2 + y^2 - \frac{2(k^2 b - a)}{k^2 - 1}\,x + \frac{k^2 b^2 - a^2}{k^2 - 1} = 0.$$

? **考えてみよう** なぜ $x^2 + 14x + y^2 - 51 = 0$ と係数を比較してよいのだろうか？

方程式 $x^2 + y^2 + px + q = 0$ は $(x + \frac{1}{2}p)^2 + y^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$ と書き直せる。これが中心 $(-7, 0)$、半径 10 の円であるならば、中心の条件から $p = 14$ が、半径の条件から $\frac{1}{4}p^2 - q = 100$ が導かれ、したがって $q = -51$ である。円の中心と半径はただ 1 つに定まるので、2 つの方程式の p も q も一致しなければならない。

x の係数を比較すると：

$$\frac{k^2 b - a}{k^2 - 1} = -7 \implies k^2 b - a = -7k^2 + 7 \implies k^2(b+7) = a + 7.$$

定数項を比較すると：

$$\frac{k^2b^2-a^2}{k^2-1}=-51 \implies k^2b^2-a^2=-51k^2+51 \implies k^2(b^2+51)=a^2+51.$$

ここで $b^2+51>0$ であり、また $b+7\neq 0$ である。実際、$b=-7$ ならば 1 つ目の式から $a=-7=b$ となるが、これは除外されている。よって両者で割ることができ、k^2 の 2 通りの表し方が得られる：

$$\frac{a+7}{b+7}=k^2=\frac{a^2+51}{b^2+51},$$

これが 1 つ目の結果である。

2 つ目の結果を示すために、分母を払う：

$$(a+7)(b^2+51)=(b+7)(a^2+51).$$

展開すると、定数 357 が両辺で打ち消し合い、次の式が残る：

$$ab^2+51a+7b^2=a^2b+51b+7a^2.$$

各項に $a-b$ が現れるように項をまとめる：

$$\begin{aligned}0&=(a^2b-ab^2)-51(a-b)+7(a^2-b^2)\\&=(a-b)\big[ab-51+7(a+b)\big].\end{aligned}$$

$a\neq b$ であるから $a-b$ で割ることができ、

$ab+7a+7b=51$, よって $ab+7a+7b+49=100$, すなわち $(a+7)(b+7)=100$,

となり、示すべき式が得られた。

検算

- $b=-2$ としてみる。このとき $b+7=5$ であるから $a+7=20$、$a=13$ となり、$k^2=20/5=4$ である。点 $(3,0)$ は円上にあり、$QC=10=2\times 5=2\,QD$ である。点 $(-17,0)$ も円上にあり、$QC=30=2\times 15$ である。
- 小問 (i) において、点 $(3,0)$ では $AP=\sqrt{4+256}=\sqrt{260}$、$BP=\sqrt{49+16}=\sqrt{65}$ であり、確かに $\sqrt{260}=2\sqrt{65}$ である。
- さらに、$(a+7)(b+7)=100$ を満たす多くの組について、円上のランダムな点が $QC=kQD$ を満たすこと、そして 1 つ目の結果を満たす $a\neq b$ のすべての組が 2 つ目の結果も満たすことを数値的に確認した。

よくある間違い

- k^2-1 で割る前に係数を比較してしまうこと。2 つの方程式は全体の定数倍の違いを除いて一致すればよいのである。
- $b+7$ が 0 でないことを確かめずにそれで割ってしまうこと。
- 因数 $a-b$ を見落とすこと。これこそが、問題文が除外している自明な解 $a=b$ に対応している。

STEP のその先へ

2 つの定点からの距離の比が一定値 $k \neq 1$ である点の軌跡は**アポロニウスの円**（circle of Apollonius）である。結果 $(a+7)(b+7)=100$ は、M を中心、r を半径とするとき、C と D が中心から見て同じ側にあり、$MC \cdot MD = r^2$ を満たすことを意味している。すなわち、C と D はこの円に関する**反転の対称点**（inverse points）である。（A と B も同様である：$MA=20$、$MB=5$。）円に関する反転は、幾何学においても、複素解析（complex analysis）においても強力な道具である。複素解析では、反転は写像 $z \mapsto 1/\bar{z}$ にあたる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）に見事な解説がある。

解答例

STEP I 2005、第 7 問

純粋数学 • 望遠鏡型の積

> **STEP I 2005、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q7

鍵となる考え方

3 つの積はいずれも**次々に打ち消し合う**（telescope）。各因数を比 $g(r+1)/g(r)$ の形、あるいはそのような比の積の形に書けば、ほとんどすべてが約分されて消え、最初と最後の値だけが残る。小問 (i) と (ii) はこの仕組みを示す準備運動である。小問 (iii) では、三角関数の因数が実はそのような比になっていることを見抜くのが仕事である。共通の分母 $\sin\frac{(2r-1)\pi}{n}$ で通分すると、分子は加法定理（compound angle formula）による正弦の形になる。

解答

小問 (i)

積を書き下すと

$$\prod_{r=1}^{n}\frac{r+1}{r}=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}.$$

各分子が次の因数の分母と約分されるので、最後の分子と最初の分母だけが残る：

$$\prod_{r=1}^{n}\frac{r+1}{r}=\frac{n+1}{1}=n+1.$$

小問 (ii)

分子を $r^2-1=(r-1)(r+1)$ と因数分解し、各因数を 2 つに分ける：

$$\frac{r^2-1}{r^2}=\frac{r-1}{r}\times\frac{r+1}{r}.$$

積の積は因数全体の積であるから、2 つの系列を別々に扱ってよい（ここで $n \geq 2$ である）：

$$\prod_{r=2}^{n} \frac{r-1}{r} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n},$$
$$\prod_{r=2}^{n} \frac{r+1}{r} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

どちらも小問 (i) とまったく同じように打ち消し合う。これらを掛け合わせると

$$\prod_{r=2}^{n} \frac{r^2-1}{r^2} = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

小問 (iii)

$\alpha = \dfrac{2\pi}{n}$、$\beta_r = \dfrac{(2r-1)\pi}{n}$ とおく。すると第 r 因数は $\cos\alpha + \sin\alpha \cot\beta_r$ である。

考えてみよう $\cos\alpha + \sin\alpha\cot\beta$ は、どのようにすれば似た形の 2 つのものの比になるだろうか？

$\cot\beta = \cos\beta/\sin\beta$ と書いて通分する。すると分子は加法定理の展開式そのものになる：

$$\cos\alpha + \sin\alpha \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}.$$

これには $\sin\beta_r \neq 0$ が必要であり、n が偶数であるという条件を使うのはまさにここである。$\sin\beta_r = 0$ となるのは $(2r-1)/n$ が整数である場合に限られる。しかし $2r-1$ は奇数で n は偶数であるから、奇数が n の倍数になることはない。したがってすべての因数が定義され、以下に現れる分母はすべて 0 でない。

さて $\alpha + \beta_r = \dfrac{2\pi + (2r-1)\pi}{n} = \dfrac{(2r+1)\pi}{n} = \beta_{r+1}$ であるから

$$\cos\alpha + \sin\alpha\cot\beta_r = \frac{\sin\beta_{r+1}}{\sin\beta_r}.$$

これは $g(r) = \sin\beta_r$ とした小問 (i) とちょうど同じ形である。積は次々に打ち消し合う：

$$\prod_{r=1}^{n} \frac{\sin\beta_{r+1}}{\sin\beta_r} = \frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1} \times \frac{\sin\beta_3}{\sin\beta_2} \times \cdots \times \frac{\sin\beta_{n+1}}{\sin\beta_n}$$
$$= \frac{\sin\beta_{n+1}}{\sin\beta_1} = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

sin は周期 2π をもつので分子は分母に等しく、

$$\prod_{r=1}^{n}\left(\cos\tfrac{2\pi}{n} + \sin\tfrac{2\pi}{n}\cot\tfrac{(2r-1)\pi}{n}\right) = 1.$$

検算

- 小問 (i) で $n = 3$ のとき：$2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 4 = n + 1$。
- 小問 (ii) で $n = 2$ のとき：因数は 1 つだけで $\frac{3}{4}$ であり、$\frac{n+1}{2n} = \frac{3}{4}$ である。$n \to \infty$ とすると積は $\frac{1}{2}$ に近づく。これはよく知られた無限積（infinite product）である。
- 小問 (iii) で $n = 4$ のとき：$\cos\frac{\pi}{2} = 0$、$\sin\frac{\pi}{2} = 1$ であるから、因数は $\cot\frac{\pi}{4}$、$\cot\frac{3\pi}{4}$、$\cot\frac{5\pi}{4}$、$\cot\frac{7\pi}{4}$、すなわち 1、-1、1、-1 であり、積は 1 である。また、60 以下のすべての偶数 n について、積が（10^{-8} 以内の誤差で）1 に等しいことを数値的にも確かめた。
- n が奇数ならば、$r = \frac{n+1}{2}$ の因数に $\cot\pi$ が現れ、これは定義されない。条件が課されている理由はこれである。

よくある間違い

- 小問 (ii) で、打ち消しを $r = 1$ から始めてしまう：下端は 2 なので、最初の因数は $\frac{1}{2}$ と $\frac{3}{2}$ である。
- 小問 (iii) で、$\sin\frac{(2n+1)\pi}{n} \big/ \sin\frac{\pi}{n}$ で止めてしまい、周期性（periodicity）を使って 1 に簡約しない。
- 「n が偶数」という条件をどこで使うのかを説明しない。この条件こそが、すべての余接（cotangent）とすべての分母をきちんと定義されたものにしている。

STEP のその先へ

このように打ち消し合う積は、部分分数分解（partial fractions）で出会う、次々に打ち消し合う和の乗法版である。対数（logarithm）をとると一方が他方に移る。小問 (ii) は無限積 $\prod_{r\geq 2}(1 - 1/r^2) = \frac{1}{2}$ の有限版である。このような無限積や、オイラー（Euler）の積

$$\sin\pi x = \pi x \prod_{r\geq 1}\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right),$$

は、大学最初の解析学(analysis)の講義で本格的に学ぶ。そこでは積の収束(convergence)は対数の和の収束を通して定義される。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、そのために必要となる収束の考え方を身につけるのによい本である。

解答例

STEP I 2005、第 8 問

純粋数学 ・ 一階微分方程式

> **STEP I 2005、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q8

鍵となる考え方

冒頭の恒等式（identity）は、$2xy\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ky^2 + (\text{ある}x\text{だけの式})$ という形の方程式を見抜くための処方箋である。方程式がこの形になれば、置換（substitution）$y^2 = x^k f(x)$ によって y^2 の項が打ち消し合い、$f'(x)$ が x の関数に等しいという式が残るので、あとはそれを積分するだけである。必要な作業は、k を選ぶことと、小問 (ii) で左辺が $2xy\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ になるように全体を割ることだけである。

解答

恒等式

$y^2 = x^k f(x)$ を x について陰関数微分（implicit differentiation）し、右辺には積の微分法則（product rule）を用いる：

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = kx^{k-1}f(x) + x^k\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.$$

両辺に x を掛けると、

$$2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = k\,x^k f(x) + x^{k+1}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = ky^2 + x^{k+1}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},$$

となる。ここで $x^k f(x) = y^2$ を用いた。これが求める結果である。

小問 (i)

$k=1$ として $y^2=xf(x)$ とおくと、恒等式より $2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2+x^2f'(x)$ である。与えられた方程式と比べると y^2 の項は一致するので、方程式が成り立つのはちょうど

$$x^2f'(x)=x^2-1, \qquad \text{すなわち、} \qquad f'(x)=1-\frac{1}{x^2} \quad (x\neq 0).$$

のときである。積分すると $f(x)=x+\dfrac{1}{x}+c$ となるので、

$$y^2=xf(x)=x^2+cx+1.$$

$x=1$ のとき $y=2$ という条件から $4=1+c+1$ となり、$c=2$ であるから

$$y^2=x^2+2x+1=(x+1)^2.$$

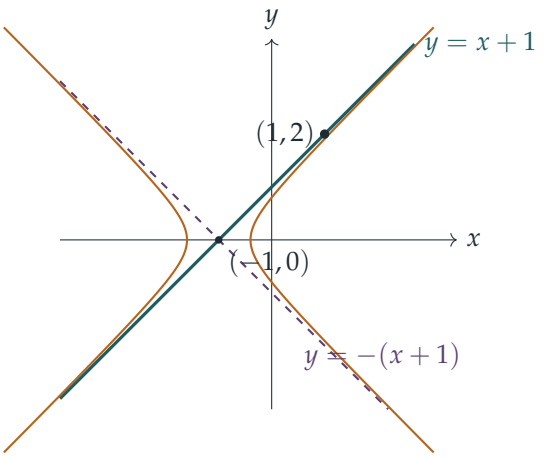
よって $y=x+1$ または $y=-(x+1)$ である。このうち $(1,2)$ を通るのは $y=x+1$ だけなので、解は

$$y=x+1.$$

である。(代入して確かめると、$2x(x+1)\cdot 1=2x^2+2x$ かつ $(x+1)^2+x^2-1=2x^2+2x$ であるから、途中で割り算をした $x=0$ も含め、すべての x で方程式を満たす。)

考えてみよう 答えが単に $y=x+1$ であるとき、「幾何学的に説明せよ」は何を求めているのだろうか。

解曲線は直線である。すなわち、$(-1,0)$ と $(0,1)$ を通る傾き 1 の直線であり、x 軸と 45° の角をなす。これがなぜ少々意外なのかを述べておく価値がある。一般解（general solution）$y^2-x^2-cx=1$ は円錐曲線（conic）の族である。平方完成（completing the square）をすると $y^2-(x+\frac{c}{2})^2=1-\frac{c^2}{4}$ となり、これは $(-\frac{c}{2},0)$ を中心とし、$y=\pm(x+\frac{c}{2})$ を漸近線（asymptote）とする直角双曲線（rectangular hyperbola）である。初期条件（initial condition）は $c=2$ を選び出すが、これは右辺が零となり、双曲線が自身の漸近線の組 $y=\pm(x+1)$ に退化（degenerate）する場合である。我々の解は、その組のうちの $y=x+1$ という分枝である。



実線が解であり、破線は $y^2=(x+1)^2$ のもう一方の半分である。琥珀色の曲線は、族のうち退化していないものの概形を描いたもので、このような 2 直線を漸近線として近づいていく直角双曲線である。

小問 (ii)

恒等式を使うには左辺に $2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ が必要なので、方程式を x で割る（$\ln x$ の項があるので $x>0$ でなければならず、この割り算は問題ない）：

$$2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y^2+\frac{2\ln x}{x}.$$

y^2 の係数は -1 であるから、$k=-1$、すなわち $y^2=f(x)/x$ とおく。すると $x^{k+1}=x^0=1$ であり、恒等式は $2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y^2+f'(x)$ となる。比較すると、

$$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x)^2=\frac{2\ln x}{x}$ であるから、$f(x)=(\ln x)^2+c$ が得られ、したがって

$$y^2=\frac{(\ln x)^2+c}{x}.$$

$x=1$ で $y=1$ であるから $1=(0+c)/1$ となり、$c=1$ である。$x=1$ で $y=1>0$ であり、しかも y は決して零にならない（分子 $1+(\ln x)^2$ は 1 以上である）ので、正の平方根をとって、解は

$$y=\sqrt{\frac{1+(\ln x)^2}{x}},\qquad x>0.$$

である。

検算

- (i) では、上で見たように直線 $y = x + 1$ を方程式に直接代入して確かめられる。また、$(1, 2)$ から方程式を数値的に積分する（ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta））と、$x = 2$ で $y = 3.000$、$x = 5$ で $y = 6.000$ となる。
- (ii) では、$y^2 = (1 + (\ln x)^2)/x$ から $y(3) \approx 0.8577$、$y(0.2) \approx 4.2369$ が得られる。$(1, 1)$ から微分方程式（differential equation）を数値積分すると、小数点以下何桁にもわたって一致する。
- 恒等式そのもの：$k = 0$ を試してみよ。このとき恒等式は $2xy\,y' = xf'$ に帰着し、これは $(y^2)' = f'$ に x を掛けたものにすぎない。

よくある間違い

- (ii) で、習慣的に $k = 1$ を使ってしまうこと。x で割った後の y^2 の項の符号によって $k = -1$ が定まるのである。
- (ii) で x で割るのを忘れ、$2x^2 y\,y'$ を恒等式に合わせようとしてしまうこと。
- (i) の答えを $y^2 = (x + 1)^2$ のままにして、$(1, 2)$ を通る分枝を選ばないこと。

STEP のその先へ

ここでの置換は、標準的な技法を姿を変えて用いたものである。$u = y^2$ とおくと、$2xy\,y' = ky^2 + g(x)$ は**線形**（linear）方程式 $xu' - ku = g(x)$ になり、x^{-k} がその積分因子（integrating factor）である。べき乗の置換によって線形になる方程式はベルヌーイ方程式（Bernoulli equations）と呼ばれ、大学の常微分方程式（ODE）の講義で最初に出会う非線形方程式の一つである。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）では、積分因子や完全微分方程式（exact equations）と並べてこれらが扱われている。

解答例

STEP I 2005、第 9 問

力学 ・ 剛体のつり合い

> **STEP I 2005、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q9

鍵となる考え方

すべては一つの未知数、すなわち一様でない棒の重心（centre of mass）G がどこにあるかにかかっている。最初の二つの設定はいずれも、その位置を用いて T を表す式を与えるので、それらを等置すれば G と T が同時に決まる。その後の傾いた設定は、剛体（rigid body）の標準的な問題である。未知の接触力がはたらく点のまわりのモーメント（moment）をとり、次に力を分解（resolve）すればよい。

解答

棒を剛体とみなし、その重さ W はすべて重心 G にはたらくものとする。また糸は軽く、伸び縮みしない（inextensible）ものとする。$AG = x$ とおくと、$GB = 3l - x$ である。

G の位置を求め、$5T = 2W$ を示す

両端を糸でつるす場合。B のまわりのモーメントをとると、B における未知の張力（tension）が消える。

$$T \cdot 3l = W(3l - x).$$

A から距離 l の点に支点を置き、B を糸でつるす場合。支点（pivot）を P とすると、$PB = 2l$ である。P のまわりのモーメントをとると、支点における未知の抗力が消える。B の糸が棒を支えるためには、G は P に関して B の側になければならない。よって $PG = x - l$ であり、

$$T \cdot 2l = W(x - l).$$

T を消去する（第 1 式を 2 倍、第 2 式を 3 倍して比較する）と、

$$2W(3l - x) = 3W(x - l) \quad \Longrightarrow \quad 9l = 5x \quad \Longrightarrow \quad x = \tfrac{9}{5}l.$$

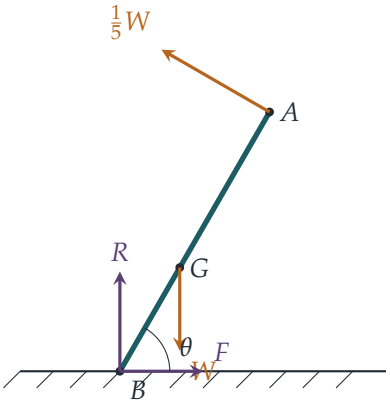
すると第 2 式から $2lT = W \cdot \frac{4}{5}l$ となるので $T = \frac{2}{5}W$、すなわち

$$5T = 2W,$$

となり、示すべき式が得られた。$x = \frac{9}{5}l > l$ であり、これは G が支点より先にあるという仮定と合っていることに注意する。したがって G は B から距離 $GB = 3l - \frac{9}{5}l = \frac{6}{5}l$ の位置にある。

地面に置かれた棒

今度は B が粗い地面の上にあり、棒は水平と角 θ をなし、A の糸は棒に垂直で張力は $\frac{1}{2}T = \frac{1}{5}W$ である。B には上向きの垂直抗力（normal reaction）R と、地面に沿った摩擦力（friction）F がはたらく。



B のまわりのモーメント。これにより R と F が消える。糸の力は B から距離 $3l$ の点で棒に垂直にはたらくので、そのモーメントは $\frac{1}{5}W \cdot 3l$ である。重さは棒に沿って距離 $\frac{6}{5}l$ の点に鉛直にはたらくので、B からその作用線までの垂直距離は $\frac{6}{5}l\cos\theta$ である。よって

$$\tfrac{1}{5}W \cdot 3l = W \cdot \tfrac{6}{5}l\cos\theta \quad \Longrightarrow \quad \cos\theta = \tfrac{1}{2},$$

したがって $\theta = 60°$（すなわち $\frac{\pi}{3}$）である。

考えてみよう 糸の張力の各成分はどちら向きか。

棒は水平と角 θ をなし、糸は棒と直角をなすので、糸は**鉛直**と角 θ をなす。したがって張力 $\frac{1}{5}W$ の鉛直成分は $\frac{1}{5}W\cos\theta$（上向き）、水平成分は $\frac{1}{5}W\sin\theta$ であり、水平成分

は A の側から離れて B の向こう側を向く。摩擦力はこの水平方向の引きとつり合わなければならないので、図のように B において A の側に向かってはたらく。

鉛直方向に分解すると：

$$R + \tfrac{1}{5}W\cos 60^\circ = W \quad \Longrightarrow \quad R = W - \tfrac{1}{10}W = \tfrac{9}{10}W.$$

水平方向に分解すると：

$$F = \tfrac{1}{5}W\sin 60^\circ = \tfrac{\sqrt{3}}{10}W.$$

棒が滑らないための条件は $F \le \mu R$、すなわち

$$\mu \ge \frac{F}{R} = \frac{\sqrt{3}/10}{9/10} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

よって滑りを防ぐ最小の摩擦係数（coefficient of friction）は $\mu = \dfrac{\sqrt{3}}{9} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}} \approx 0.192$ である（等号のとき、棒は限界のつり合い（limiting equilibrium）にある）。

検算

- $x = \frac{9}{5}l$ のとき、2 本の糸の設定からは $T = W \cdot \frac{6/5}{3} = \frac{2}{5}W$、支点の設定からは $T = W \cdot \frac{4/5}{2} = \frac{2}{5}W$ が得られ、当然ながら一致する。
- 傾いた位置で A のまわりのモーメントもとると（$W = l = 1$、$\theta = 60^\circ$、$R = 0.9$、$F \approx 0.1732$ として）、合モーメントはやはり零となり、R と F をまとめて確かめられる。
- 数値的には $\mu_{\min} = \sqrt{3}/9 \approx 0.19245$ であり、力のベクトルを組み立てて三つのつり合いの式をすべて確かめることで、コンピュータでも確認した。

よくある間違い

- 重さのモーメントの腕の長さに $\frac{6}{5}l\sin\theta$ を用いること。B から重さの作用線までの水平距離は $\frac{6}{5}l\cos\theta$ である。
- 棒に垂直な糸に鉛直成分があることを忘れて、$R = W$ としてしまうこと。こうすると $\mu = \sqrt{3}/10$ となり、小さすぎる。
- 棒が一様であると仮定して、G を中点に置いてしまうこと。前半の要点はまさに G の位置を求めることにある。

STEP のその先へ

つり合いの測定から重心の位置を求めることは、ある強力な考え方の静的な形である。すなわち、ある点のまわりの力の系のモーメントは、ただ一つの合力（resultant）を除いて、その系を決定する。大学ではこれが剛体の静力学（statics）、さらに動力学（dynamics）の学習へと発展し、そこでは重心と慣性モーメント（moment of inertia）が物体の運動を支配する二つの量となる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、トルク（torque）と剛体を扱っており、この種のより難しい問題が豊富に収められている。

解答例

STEP I 2005、第 10 問

力学 ・ 衝突と反発係数

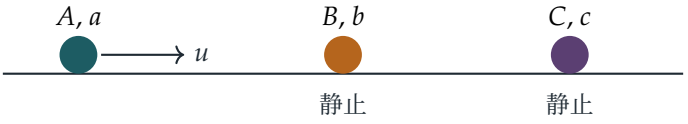
> **STEP I 2005、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q10

鍵となる考え方

各衝突（collision）は二つの滑らかな（smooth）質点（particle）の直接衝突であるから、そこから二つの方程式が得られる。すなわち、直線方向の運動量保存則（conservation of momentum）と、ニュートン（Newton）の実験則（Newton's experimental law）（遠ざかる速さ $= e\times$ 近づく速さ）である。一般の二質点についてこれらを一度解いておけば、得られた公式を二回目の衝突にもそのまま使える。特別な場合については、本当の問題は二回の衝突で話が終わるかどうかである。求めるのは最終的な速度であるから、どの質点も前方の質点に追いつかないことを確かめなければならない。

解答

A, B, C を滑らかな面上の一直線に沿って運動する質点とみなす。したがって水平方向の外力ははたらかず、各衝突において直線方向の運動量は保存される。u の向きを正とする。B との衝突後の A の速度を p、C との衝突後の B の速度を q とおく。



一回目の衝突：v を求める

衝突前、A の速度は u で B は静止している。衝突後の速度はそれぞれ p と v である。運動量保存則とニュートンの実験則より

$$au = ap + bv, \qquad v - p = eu.$$

$p = v - eu$ を第一式に代入すると $au = av - aeu + bv$ となるから

$$v = \frac{a(1+e)u}{a+b}, \qquad p = v - eu = \frac{(a-eb)u}{a+b}.$$

$v > 0$ であるから、B は確かに C に向かって動く。

二回目の衝突：w を求める

これは、B（質量 b、速さ v）が C（質量 c、静止）に衝突するという同じ状況である。したがって、上の公式で $a \to b, b \to c, u \to v$ と置き換えればよい：

$$w = \frac{b(1+e)v}{b+c}, \qquad q = \frac{(b-ec)v}{b+c}.$$

v を代入すると

$$w = \frac{b(1+e)}{b+c} \cdot \frac{a(1+e)u}{a+b} = \frac{abu(1+e)^2}{(a+b)(b+c)},$$

となり、示すべき式が得られた。

この二回の衝突の後、速度は p, q, w である。さらに衝突が起こるのは $p > q$（A が B に追いつく）または $q > w$（B が C に追いつく）の場合に限られる。ニュートンの実験則より $q - w = -ev < 0$ であるから後者は決して起こらず、p と q を比較するだけでよい。

> **考えてみよう** なぜ二回の衝突で止めて p, q, w を答えとしてはいけないのだろうか。

問題が求めているのは**最終的な**速度だからである。もしその後も A が B より速く動いていれば、A は再び B に衝突し、すべてが変わってしまう。したがって、それぞれの場合に $p \le q$ を確かめなければならない。

小問 (i)

ここでは $a = eb$ かつ $b = ec$ である（質量は正であるから $e > 0$）。このとき $a - eb = 0$ かつ $b - ec = 0$ であるから

$$p = 0, \qquad q = 0.$$

w については $a + b = b(1+e)$ と $b + c = b + b/e = b(1+e)/e$ を用いて

$$w = \frac{eb \cdot b\,u(1+e)^2}{b(1+e) \cdot b(1+e)/e} = e^2 u.$$

A と B はともに静止し、C は遠ざかるので、これ以上の衝突は起こらない。最終的な速度は

$$A:\ 0, \qquad B:\ 0, \qquad C:\ e^2 u.$$

各衝突で運動量のすべてが次の質点に受け渡される。後ろの質点ほど軽いニュートンのゆりかご（Newton's cradle）のようなものである。

小問 (ii)

今度は $b = ea$ かつ $c = eb = e^2a$ である。このとき

$$v = \frac{a(1+e)u}{a(1+e)} = u, \qquad p = \frac{(a-e^2a)u}{a(1+e)} = (1-e)u,$$

ここで $1-e^2 = (1-e)(1+e)$ を用いた。二回目の衝突では質量 b, c の比が a, b の比と等しく、しかも B は速さ u で到達するので、これは一回目の衝突の完全な複製である：

$$w = u, \qquad q = (1-e)u.$$

（直接計算すると $w = \dfrac{a \cdot ea \cdot u(1+e)^2}{a(1+e) \cdot ea(1+e)} = u$ である。）

ここで $p = q$ であるから A が B に追いつくことはない。また $e > 0$ のとき $q = (1-e)u < u = w$ であるから、B が C に追いつくこともない。最終的な速度は

$$A:\ (1-e)u, \qquad B:\ (1-e)u, \qquad C:\ u,$$

であり、いずれも A のはじめの運動の向きである。

検算

- (ii) の運動量：$a(1-e)u + ea(1-e)u + e^2a\,u = au$。(i) では：$c \cdot e^2u = e^2c\,u = au$。
- (ii) で $e = 1$（完全弾性（perfectly elastic））とすると、A と B は最終的に静止し、C は u で動き去る。運動エネルギー（kinetic energy）が保存されるには $\frac{1}{2}au^2 = \frac{1}{2}cu^2$、すなわち $c = a$ が必要であり、これはまさに $e = 1$ のときの $c = e^2a$ である。
- 数値例：$e = \frac{1}{2}$、質量 $1, 2, 4$、$u = 1$（小問 (i)）のとき、最終的な速度は $0, 0, \frac{1}{4}$ である。質量 $4, 2, 1$（小問 (ii)）では $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$ となる。これらの値、および v と w の一般の公式は、数千組のランダムな質量と e の値について、その後の衝突もシミュレーションしたうえで厳密な算術により確認した。

よくある間違い

- ニュートンの実験則で速度を逆向きに書いてしまうこと。正しくは、衝突後の（前方の質点の速度 − 後方の質点の速度）$= e \times$ 衝突前の（後方 − 前方）である。
- A が再び B に追いつくかどうかを確かめずに、二回の衝突後の速度を答えてしまうこと。

STEP のその先へ

衝突の連鎖は、運動量やエネルギーが物質中をどのように伝わるかを表す最も単純なモデルであり、小問 (i) の質量比は**すべての**運動量が最後の質点に集まるように選ばれている。質量の並びを逆にして、重いものを軽いものの後ろに置き、e を 1 に近くすると、最後の質点は最初の質点よりも速く動く。これは、大きなボールの上に小さなボールを載せて一緒に落とすと、小さなボールが高く跳ね上がるおもちゃの原理である。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は重心系（centre-of-mass frame）を用いて衝突を扱っており、そうすると v や w のような公式はほとんど自明になる。

解答例

STEP I 2005、第 11 問

力学 ・ ベクトルによる運動学

> **STEP I 2005、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q11

鍵となる考え方

この問題はすべて、2 つのベクトル $\mathbf{r}$ と $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ が互いにどのような位置関係にあるかを問うものである。垂直（perpendicular）であるとはスカラー積（scalar product）$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$ が零であることであり、平行（parallel）であるとは「外積」型の組合せ $xv_y - yv_x$ が零であることである。$\sin 2t = 2\sin t \cos t$ および $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ と書き直せば、どちらの式もきれいに簡単になる。距離と概形については、すべてを $\cos t$ で表すか、あるいは t を完全に消去するのが得策である。

解答

$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ とおく。ここで

$$x = \sin 2t = 2\sin t \cos t, \qquad y = 2\cos t, \qquad 0 \le t < 2\pi.$$

微分すると、速度（velocity）は

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (2\cos 2t)\,\mathbf{i} - (2\sin t)\,\mathbf{j}.$$

小問 (i)

粒子が原点にあるのは $x = 0$ かつ $y = 0$ のときである。条件 $y = 0$ は $\cos t = 0$ を意味するから、与えられた範囲では $t = \frac{\pi}{2}$ または $t = \frac{3\pi}{2}$ である。これらの時刻ではいずれも自動的に $x = 2\sin t \cos t = 0$ となる。よって粒子が原点にあるのはちょうどこの 2 つの時刻 $t = \frac{\pi}{2}$ と $t = \frac{3\pi}{2}$ であり、それ以外の時刻にはない。これが示すべきことであった。

小問 (ii)

速度が変位（displacement）に垂直であるのは $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}=0$ のときである（ただし「垂直」が意味をもつように、両ベクトルとも零でないとする）。いま

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} &= 2\sin 2t\cos 2t - 4\sin t\cos t\\ &= 2\sin 2t\cos 2t - 2\sin 2t\\ &= 2\sin 2t\,(\cos 2t-1)\\ &= -4\sin 2t\,\sin^2 t,\end{aligned}$$

ここで $\cos 2t-1=-2\sin^2 t$ を用いた。これが零になるのは $\sin 2t=0$ または $\sin t=0$ のとき、すなわち

$$t=0,\ \tfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \tfrac{3\pi}{2}.$$

のときである。

考えてみよう $t=\frac{\pi}{2}$ と $t=\frac{3\pi}{2}$ は本当にこのリストに入れてよいだろうか？

よくない。小問 (i) より、これらの時刻では $\mathbf{r}=\mathbf{0}$ であり、零ベクトル（zero vector）は向きをもたないので、意味のある形で何かに垂直であることはできない。スカラー積が零になるのは自明な理由によるものである。$t=0$ では $\mathbf{r}=2\mathbf{j}$、$\mathbf{v}=2\mathbf{i}$ であり、$t=\pi$ では $\mathbf{r}=-2\mathbf{j}$、$\mathbf{v}=2\mathbf{i}$ である。これらは正真正銘、互いに垂直な零でないベクトルである。よって速度が変位に垂直になるのは

$$t=0 \quad \text{と} \quad t=\pi.$$

のときである。

小問 (iii)

まず、$\mathbf{v}$ は決して零にならない。$\mathbf{v}=\mathbf{0}$ となるには $\sin t=0$ が必要だが、そのとき $\cos 2t=1-2\sin^2 t=1\neq 0$ となるからである。

零でない 2 つのベクトル (x,y) と (v_x,v_y) が平行であるのは、ちょうど $xv_y-yv_x=0$ のときである。ここでは

$$\begin{aligned}xv_y-yv_x &= \sin 2t\,(-2\sin t)-2\cos t\,(2\cos 2t)\\ &= -4\sin^2 t\cos t-4\cos t\,(1-2\sin^2 t)\\ &= -4\cos t\,(1-\sin^2 t)\\ &= -4\cos^3 t.\end{aligned}$$

これが零になるのは $\cos t = 0$ のときに限られ、小問 (i) より、それは粒子が原点にあるときに限られる。したがって粒子が原点から離れているときはつねに $\cos t \neq 0$ であり、この組合せは零でなく、速度は変位に平行でない。以上で証明が完了する。

小問 (iv)

$c = \cos^2 t$ とおくと、$0 \leq c \leq 1$ である。このとき

$$|\mathbf{r}|^2 = \sin^2 2t + 4\cos^2 t = 4\sin^2 t \cos^2 t + 4\cos^2 t = 4c(1-c) + 4c = 4c(2-c).$$

2 次式 $4c(2-c)$ は $c = 1$ に頂点をもち、$[0,1]$ で増加するので、この区間での最大値は $c = 1$ でとり、$|\mathbf{r}|^2 = 4$ となる。したがって原点からの距離の最大値は

$$|\mathbf{r}|_{\max} = 2,$$

であり、これは $\cos^2 t = 1$ のとき、すなわち $t = 0$ と $t = \pi$ において、点 $(0, \pm 2)$ でとられる。これらがちょうど小問 (ii) で求めた時刻であることは心強い。距離が最大となる点では、速度の動径成分（radial component）が零にならなければならないからである。

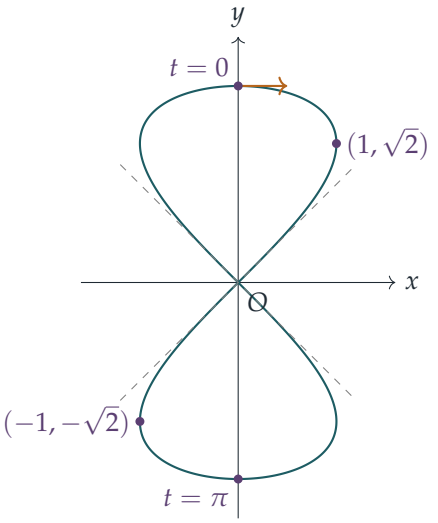
概形を描くために t を消去する。$x = y\sin t$ かつ $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \frac{1}{4}y^2$ であるから

$$x^2 = y^2\left(1 - \frac{y^2}{4}\right), \qquad \text{すなわち} \qquad 4x^2 = y^2(4 - y^2).$$

概形に書き込むべき特徴をいくつか挙げる。

- 曲線は両軸に関して対称であり、$-2 \leq y \leq 2$ である。
- $|x| = |\sin 2t| \leq 1$ であり、$y = \pm\sqrt{2}$ のとき $|x| = 1$ となる。
- 原点の近くでは $4x^2 \approx 4y^2$ であるから、曲線はそこで直線 $y = \pm x$ に沿って自分自身と交わる。これは $t = \frac{\pi}{2}$ での速度 $-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ および $t = \frac{3\pi}{2}$ での速度 $-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ と一致する。
- 小問 (ii) で示したとおり、$(0, \pm 2)$ では軌道は水平である。

t を追っていくと、粒子は $(0,2)$ から $+\mathbf{i}$ の向きに動き始め、上側のループの右側を下って原点に至り、下側のループを（左側から先に）回って再び原点に戻り、最後に上側のループの左側を上っていく。軌道は 8 の字曲線（figure of eight）である。



検算

- $t = \frac{\pi}{4}$ のとき：$\mathbf{r} = \mathbf{i} + \sqrt{2}\,\mathbf{j}$ であり、これは $4x^2 = 4 = y^2(4 - y^2) = 2 \cdot 2$ を満たす。また $|\mathbf{r}| = \sqrt{3} < 2$ であり、$4c(2 - c) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = 3$ と一致する。
- $[0, 2\pi)$ 上で t を細かくとって調べると、距離の最大値は 2.000 であり、距離がほぼ零になるのは $t \approx 1.57$ と 4.71 のときだけである。また、無作為に選んだ時刻で恒等式 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = -4 \sin 2t \sin^2 t$ と $xv_y - yv_x = -4\cos^3 t$ が成り立つことも確認できる。速さの最小値はおよそ 1.32 であるから、$\mathbf{v}$ は決して零にならない。

よくある間違い

- 小問 (ii) で $t = \frac{\pi}{2}$ と $\frac{3\pi}{2}$ を挙げてしまうこと。そこでスカラー積が零になるのは $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ だからにすぎない。
- 小問 (iii) で、$\mathbf{v}$ が決して零にならないことの確認を忘れること。速度が零であれば、あらゆるものに「平行」になってしまう。
- ループを左右に並べて描くこと。y は $[-2, 2]$ の範囲を動くが x は $[-1, 1]$ の範囲しか動かないので、8 の字は縦に立ち、ループは原点の上と下にある。

STEP のその先へ

量 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{r}|^2$ と xv_y-yv_x は、それぞれ運動の動径部分と、原点のまわりの（単位質量あたりの）角運動量（angular momentum）である。極座標（polar coordinates）では後者は $r^2\dot{\theta}$ となる。小問 (iii) は、角運動量が零になるのは原点においてだけであり、したがって粒子が O に向かって、あるいは O から真っすぐ遠ざかるように動くことは決してない、ということを述べている。曲線そのものは Gerono のレムニスケート（lemniscate of Gerono）であり、古典的な 8 の字曲線の数多くの例の 1 つである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、まさにこの精神で極座標と角運動量を展開している。

解答例

STEP I 2005、第 12 問

確率・統計 ・ ベン図による評価

STEP I 2005、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s1-q12

鍵となる考え方

「どのような値の範囲なら矛盾がないか」という形の問題は、各領域の値が未知であるが、そのすべてが**非負**（non-negative）でなければならないようなベン図（Venn diagram）についての問題である。すべての領域を、できるだけ少ない自由な未知数で表す。そうすれば、「この領域 ≥ 0」という各条件が一つの評価式となり、それらの評価式を合わせると範囲が得られる。小問 (ii) では、数え上げの議論（三つの単独の確率を足し合わせるとき、各魔法使いが何回数えられるか）により、個々の領域を求めなくても「ちょうど 2 つ」の確率が得られる。

解答

小問 (i)

ホビットがパイプを吸うという事象を S、帽子をかぶるという事象を H とする。$t = \mathrm{P}(S \cap H)$ とおく。ベン図の四つの領域は

$$\mathrm{P}(S \cap H) = t, \qquad \mathrm{P}(S \cap H') = 0.7 - t,$$
$$\mathrm{P}(S' \cap H) = 0.4 - t, \qquad \mathrm{P}(S' \cap H') = 1 - (0.7 + 0.4 - t) = t - 0.1.$$

である。四つすべてを非負にする t の選び方はどれも正しい確率分布（probability distribution）を与え、逆も成り立つ。実際に効いてくる条件は $t \geq 0.1$（最後の領域から）と $t \leq 0.4$（三つ目の領域から）であり、残りの条件はこれらから従う。よって $0.1 \leq t \leq 0.4$ であり、$p = 0.7 - t$ であるから

$$0.3 \leq p \leq 0.6.$$

両端の値はともに実現される。$p = 0.6$ となるのは、帽子をかぶるパイプ愛好者ができるだけ少ないとき（すべてのホビットが二つのうち少なくとも一方をする場合）であり、$p = 0.3$ となるのは、帽子をかぶる者が全員パイプを吸うときである。

小問 (ii)：ちょうど 2 つ

魔法使いが帽子、マント、指輪を身につけるという事象をそれぞれ H, C, R とする。魔法使いが三つの品物のうちちょうど 1 つ、ちょうど 2 つを身につける確率をそれぞれ a, b とする。一つも身につけない確率は 0.05、ちょうど 3 つ身につける確率は 0.1 とわかっているので

$$0.05 + a + b + 0.1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad a + b = 0.85.$$

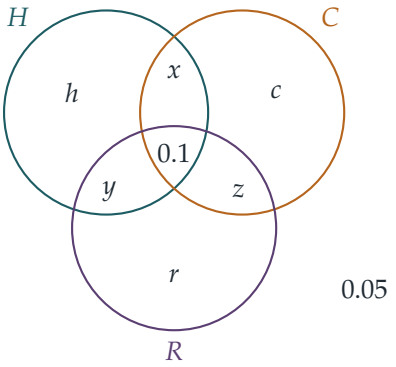
次に、与えられた三つの確率を足す：$\mathrm{P}(H) + \mathrm{P}(C) + \mathrm{P}(R) = 0.7 + 0.8 + 0.4 = 1.9$。この和において、ちょうど k 個の品物を身につける魔法使いは k 回数えられるので

$$a + 2b + 3(0.1) = 1.9 \quad \Longrightarrow \quad a + 2b = 1.6.$$

辺々引くと $b = 0.75$（そして $a = 0.1$）を得る。魔法使いが品物のうちちょうど 2 つを身につける確率は $\frac{3}{4}$ である。

小問 (ii)：q の範囲

図のように内側の七つの領域に名前をつける。ちょうど 1 つの品物に対応する領域を h, c, r、ちょうど 2 つに対応する領域を x, y, z とし、中央は 0.1、外側は 0.05 である。



H, C, R の合計と、ここまでの小問 (ii) の結果から

$$h + x + y = 0.6, \qquad c + x + z = 0.7,$$
$$r + y + z = 0.3, \qquad x + y + z = 0.75.$$

最後の式を用いて、最初の三つの式それぞれから二つの変数の組を消去すると

$$h = z - 0.15, \qquad c = y - 0.05, \qquad r = x - 0.45.$$

（検算として、$h+c+r = 0.75-0.65 = 0.1 = a$ である。）したがって、分布全体は $x+y+z=0.75$ を満たす x, y, z によって決まり、それが正しい分布となるのは、六つの領域がすべて非負であるとき、かつそのときに限る：

$$x \geq 0.45, \qquad y \geq 0.05, \qquad z \geq 0.15.$$

考えてみよう x はどこまで大きくなれるか。

$x = 0.75 - y - z$ かつ $y+z \geq 0.05+0.15 = 0.2$ であるから $x \leq 0.55$ を得る。等号は $y = 0.05, z = 0.15$ のときに成り立つ。最小値 $x = 0.45$ は、たとえば $y = 0.1, z = 0.2$ のときに実現される。y と z は連続的に動かせるので、その間のすべての値も実現される。よって

$$0.45 \leq x \leq 0.55.$$

最後に、マントを身につけているときに帽子をかぶり指輪をしていないというのは、ちょうど領域 x にあたるので

$$q = \mathrm{P}(H \cap R' \mid C) = \frac{\mathrm{P}(H \cap C \cap R')}{\mathrm{P}(C)} = \frac{x}{0.8'} \qquad \text{より} \qquad \frac{9}{16} \leq q \leq \frac{11}{16}.$$

検算

- 端の場合 $x = 0.55, y = 0.05, z = 0.15$ では $h = 0, c = 0, r = 0.1$ となる。八つの領域の和は 1 であり、要求どおり $\mathrm{P}(H) = 0.7, \mathrm{P}(C) = 0.8, \mathrm{P}(R) = 0.4$ を与える。
- データと矛盾しない八つの領域の値の割り当てを、0.01 刻みですべて列挙した。どの割り当てでも $x+y+z = 0.75$ であり、q は 0.5625 から 0.6875 までの値をとる。同様に (i) では、p は 0.3 から 0.6 までの値をとる。

よくある間違い

- (i) で「どちらでもない」領域を忘れ、下限を $t \geq 0.1$ ではなく $t \geq 0$ としてしまう。すると上限が誤って $p \leq 0.7$ となる。
- (ii) で $\mathrm{P}(C) = 0.8$ ではなく 1 で割ってしまう。「マントを身につけているとき」という条件によって分母が変わるのである。
- H, C, R を独立（independent）とみなしてしまう。問題文にはそのようなことは一切書かれておらず、実際 $\mathrm{P}(H \cap C \cap R) = 0.1 \neq 0.7 \times 0.8 \times 0.4$ である。

STEP のその先へ

未知の確率について線形な量の範囲を、線形の等式と非負条件のもとで求めることは、小さな**線形計画問題**（linear programme）である。最大値・最小値は必ず実行可能領域（feasible region）の頂点でとられる。今回の極値が、いくつかの領域を 0 とおくことで得られたのはこのためである。同じ考え方から、小問 (i) で用いたフレシェ（Fréchet）の不等式（Fréchet bounds）$\max(0, \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 1) \leq \mathrm{P}(A \cap B) \leq \min(\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B))$ が得られる。包除原理（inclusion–exclusion）と条件付き確率（conditional probability）についてさらに学ぶには、Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）を読むとよい。

解答例

STEP I 2005、第 13 問

確率・統計 ・ 対称な分布

> **STEP I 2005、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q13

鍵となる考え方

分布（distribution）の形については、2 つの累積確率（cumulative probability）と対称性（symmetry）以外に何も与えられていない。したがって、すべてをこれらから組み立てなければならない。μ に関する対称性からは、さらに 2 つの事実がただちに得られる。すなわち、確率の半分ずつが μ の両側にあること、そして $\mu - k\sigma$ より下の裾の確率が $\mu + k\sigma$ より上の裾の確率に等しいことである。小問 (ii) での工夫は、登場する容量（495, 500, 505 ml）がいずれも、どちらかの種類の牛乳にとって μ、$\mu \pm \frac{1}{2}\sigma$、$\mu + \sigma$ のいずれかに位置していることに気づく点にある。

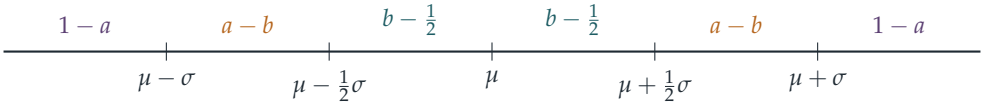
解答

X は容量を表すモデルなので、全体を通して連続（continuous）確率変数として扱う。したがって 1 点での確率は 0 であり、$<$ と書いても $\leq$ と書いても違いはない。

μ に関する対称性より、任意の k に対して $\mathrm{P}(X \leq \mu) = \frac{1}{2}$ および $\mathrm{P}(X \leq \mu - k\sigma) = \mathrm{P}(X \geq \mu + k\sigma)$ が成り立つ。特に

$$\mathrm{P}\left(X \leq \mu - \tfrac{1}{2}\sigma\right) = 1 - b, \qquad \mathrm{P}\left(X \leq \mu - \sigma\right) = 1 - a.$$

μ から σ を単位として測った各区間の確率を書き留めておくと見通しがよい。



たとえば $\mathrm{P}(\mu < X \leq \mu + \frac{1}{2}\sigma) = b - \frac{1}{2}$、$\mathrm{P}(\mu + \frac{1}{2}\sigma < X \leq \mu + \sigma) = a - b$ である。左側

の区間は対称性から従う。

小問 (i)

累積確率の差をとって、

$$\mathrm{P}\left(\mu-\tfrac{1}{2}\sigma \le X \le \mu+\sigma\right) = \mathrm{P}(X \le \mu+\sigma) - \mathrm{P}\left(X < \mu-\tfrac{1}{2}\sigma\right) = a-(1-b) = a+b-1.$$

条件付き確率（conditional probability）については、分子の事象は $\{\mu-\frac{1}{2}\sigma \le X \le \mu+\frac{1}{2}\sigma\}$ であり、その確率は $b-(1-b)=2b-1$ である。一方、$\mathrm{P}(X \ge \mu-\frac{1}{2}\sigma) = 1-(1-b)=b$ である。よって

$$\mathrm{P}\left(X \le \mu+\tfrac{1}{2}\sigma \mid X \ge \mu-\tfrac{1}{2}\sigma\right) = \frac{2b-1}{b}.$$

小問 (ii)(a)

紙パックが無脂肪乳（skimmed milk）である事象を S、全乳（full-fat milk）である事象を F とすると、$\mathrm{P}(S)=0.6$、$\mathrm{P}(F)=0.4$ である。容量（ml）を V とする。

> **考えてみよう** それぞれの種類の牛乳にとって、500 ml と 505 ml は σ を単位としてどこに位置するか。

無脂肪乳（$\mu=500, \sigma=10$）では、500 は μ、505 は $\mu+\frac{1}{2}\sigma$ である。全乳（$\mu=495$, $\sigma=10$）では、500 は $\mu+\frac{1}{2}\sigma$、505 は $\mu+\sigma$ である。区間の確率を読み取ると、

$$\mathrm{P}(V<505 \mid S)=b, \qquad \mathrm{P}(500<V<505 \mid S)=b-\tfrac{1}{2},$$
$$\mathrm{P}(V<505 \mid F)=a, \qquad \mathrm{P}(500<V<505 \mid F)=a-b.$$

全確率の法則（law of total probability）より、

$$\mathrm{P}(V<505) = 0.6b+0.4a,$$
$$\mathrm{P}(500<V<505) = 0.6\left(b-\tfrac{1}{2}\right)+0.4(a-b) = 0.4a+0.2b-0.3.$$

「500 ml より多く 505 ml より少ない」という事象が求めたい共通部分であるから、

$$\mathrm{P}(V>500 \mid V<505) = \frac{0.4a+0.2b-0.3}{0.4a+0.6b} = \frac{4a+2b-3}{4a+6b}.$$

小問 (ii)(b)

無作為に選んだ紙パックが非常に多数あれば、観測された割合は対応する確率の推定値となる。1 つ目の情報は $\mathrm{P}(V \le 505)=0.7$ ということであり、小問 (a) の計算によれば

$$0.6b+0.4a=0.7, \quad \text{すなわち} \quad 4a+6b=7. \tag{1}$$

考えてみよう それぞれの種類の牛乳について、$\mathrm{P}(V \geq 495)$ はいくらか。

無脂肪乳では 495 は $\mu - \frac{1}{2}\sigma$ なので、$\mathrm{P}(V \geq 495 \mid S) = b$ である（これは小問 (i) の分母であった）。全乳では 495 は μ なので、対称性より $\mathrm{P}(V \geq 495 \mid F) = \frac{1}{2}$ である。ベイズ（Bayes）の定理（Bayes' theorem）より、

$$\mathrm{P}(F \mid V \geq 495) = \frac{0.4 \times \frac{1}{2}}{0.6b + 0.4 \times \frac{1}{2}} = \frac{0.2}{0.6b + 0.2}.$$

これを $\frac{1}{3}$ に等しいとおくと $0.6b + 0.2 = 0.6$ となり、$b = \frac{2}{3}$ である。すると (1) より $4a = 7 - 4 = 3$ となるので、

$$a \approx \tfrac{3}{4}, \qquad b \approx \tfrac{2}{3}.$$

観測された割合は真の確率を近似するにすぎないので、これらはあくまで推定値である。

検算

- 推定値は妥当である。$\mu < \mu + \frac{1}{2}\sigma < \mu + \sigma$ であるから $\frac{1}{2} < b < a < 1$ でなければならず、実際そうなっている。
- 代入して確かめると、$0.6 \cdot \frac{2}{3} + 0.4 \cdot \frac{3}{4} = 0.4 + 0.3 = 0.7$、また $0.2/(0.4 + 0.2) = \frac{1}{3}$ である。
- 正規分布（Normal distribution）では $a \approx 0.841$、$b \approx 0.691$ であり、これらを用いると小問 (i) の値は 0.533 と 0.553 になる。（正規分布でない）ラプラス（Laplace）分布から 10^5 個以上の標本をシミュレーションしたところ、小問 (i) と (ii)(a) のすべての式と一致した。たとえば (ii)(a) では、式の値 0.2515 に対して 0.2518 が得られた。

よくある間違い

- $1 - b$ とすべきところを $\mathrm{P}(X \leq \mu - \frac{1}{2}\sigma) = b$ と書いてしまう。対称性で折り返されるのは **裾の確率**であって、累積確率ではない。
- 2 種類の牛乳の平均（mean）が異なることを忘れる。そのため、同じ容量（たとえば 500 ml）でも、平均から何標準偏差（standard deviation）離れているかはそれぞれで異なる。
- 両方の種類について $\mathrm{P}(V \geq 495) = b$ を使ってしまう。全乳では 495 ml は平均である。

STEP のその先へ

この問題の要点は、分布がまったくわからなくても、対称性と全確率の法則だけでかなり先まで進めるということである。ここでの 2 つの母集団の混合は単純な**混合モデル**（mixture model）であり、小問 (ii)(b) はそのパラメータをデータから推定することの初歩版である。分布によらない関連する結果として、分散（variance）だけを用いて $\mathrm{P}(|X-\mu| \geq k\sigma)$ を上から評価するチェビシェフ（Chebyshev）の不等式（Chebyshev's inequality）がある。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）、または Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）を参照せよ。

解答例

STEP I 2005、第 14 問

確率・統計 ・ 混合型確率変数

STEP I 2005、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s1-q14

鍵となる考え方

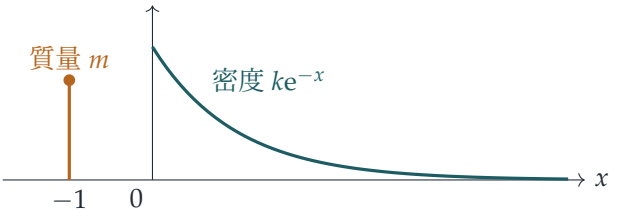
X は**混合型**の確率変数（mixed random variable）である。すなわち、1 点 -1 に集中した確率の塊と、$[0,\infty)$ 上に連続的に広がった部分とから成る。これを扱うには、あらゆる計算を 2 つの部分に分ければよい。$X=-1$ から来る離散的な項と、$[0,\infty)$ 上の確率密度関数（probability density function）に関する積分の和である。連続部分が指数分布（exponential distribution）を定数倍したものにすぎないことに気づけば、積分のほとんどはすでに知っているものになる。

解答

与えられた累積確率を微分すると、X の連続部分の確率密度関数は

$$f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}k(1-\mathrm{e}^{-x})=k\mathrm{e}^{-x},\qquad x\geq 0.$$

となる。したがって X は次のような姿をしている。-1 に質量 m の点質量（point mass）があり、$[0,\infty)$ 上に曲線 $k\mathrm{e}^{-x}$ がある。



小問 (i)

確率の総和は 1 である。$x \to \infty$ とすると $\mathrm{P}(X \geq 0) = k(1-0) = k$ であるから、

$$m + k = 1, \qquad \text{すなわち} \qquad k = 1 - m.$$

($m \geq 0$ は確率であり、かつ $m < \frac{1}{2}$ であるから $k > \frac{1}{2} > 0$ となり、確率密度関数は確かに正である。)

小問 (ii)

2 つの部分に分けると、

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= (-1)\cdot m + \int_0^\infty x\,(1-m)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -m + (1-m)\cdot 1 = 1 - 2m,\end{aligned}$$

となる。ここで $\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$ を用いた（部分積分（integration by parts）を行うか、パラメータ 1 の指数分布の平均であると見抜けばよい)。これが求める結果である。

小問 (iii)

分散（*variance*)。同様に、$\int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 2$（部分積分を 2 回行う）を用いると、

$$\mathrm{E}(X^2) = (-1)^2\cdot m + (1-m)\cdot 2 = 2 - m.$$

よって

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 = 2 - m - (1-2m)^2 \\ &= 1 + 3m - 4m^2 = (1-m)(1+4m).\end{aligned}$$

> **考えてみよう** 中央値が -1 になったり、-1 と 0 の間のどこかにあったりすることはありうるだろうか？

中央値（*median*)。ありえない。X は $(-1, 0)$ の値を決してとらず、また $\mathrm{P}(X \leq -1) = m < \frac{1}{2}$ であるから、点質量だけでは確率の半分に届かない。条件 $m < \frac{1}{2}$ が使われるのはまさにこの箇所である。したがって中央値 M は $M \geq 0$ かつ $\mathrm{P}(X \leq M) = \frac{1}{2}$ を満たす。

$$\begin{aligned}m + (1-m)(1-\mathrm{e}^{-M}) &= \tfrac{1}{2} \\ 1 - (1-m)\mathrm{e}^{-M} &= \tfrac{1}{2} \\ \mathrm{e}^{-M} &= \frac{1}{2(1-m)}.\end{aligned}$$

ゆえに

$$M = \ln\big(2(1-m)\big) = \ln(2-2m).$$

整合性の確認として、$0 \le m < \frac{1}{2}$ から $1 < 2-2m \le 2$ が得られるので $M > 0$ であり、確かにそうなっているべきとおりである。分布は $[0,\infty)$ 上で連続であるから、この M は $\mathrm{P}(X \ge M) = \frac{1}{2}$ も満たし、中央値は一意に定まる。

小問 (iv)

$X = -1$ のとき $|X|^{1/2} = 1$ であり、$X \ge 0$ のとき $|X|^{1/2} = \sqrt{X}$ である。よって

$$\mathrm{E}\big(|X|^{1/2}\big) = 1 \cdot m + (1-m)\int_0^\infty \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

考えてみよう $\int_0^\infty \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ を、与えられた積分にどうやって変形すればよいだろうか？

与えられた積分には e^{-y^2} が含まれているので、$x = y^2$（$y \ge 0$）と置換することが示唆される。このとき $\sqrt{x} = y$、$\mathrm{d}x = 2y\,\mathrm{d}y$ であり、積分範囲の 0 と ∞ は変わらない。

$$\int_0^\infty \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty y\,\mathrm{e}^{-y^2}\,2y\,\mathrm{d}y = 2\int_0^\infty y^2\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = 2\cdot\tfrac{1}{4}\sqrt{\pi} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

よって

$$\mathrm{E}\big(|X|^{1/2}\big) = m + \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,(1-m).$$

検算

- $m = 0$ のとき、X はちょうどパラメータ 1 の指数分布に従う。上の公式から平均 1、分散 1、中央値 $\ln 2$、$\mathrm{E}(\sqrt{X}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \Gamma(\frac{3}{2})$ が得られ、いずれもよく知られた値に一致する。
- $m \to \frac{1}{2}$ のとき中央値は $\ln 1 = 0$ に近づく。これは理にかなっている。確率の半分が -1 にあるので、中央値は連続部分の下端まで滑り落ちるのである。
- $m = 0.3$ として 4×10^5 個の標本でシミュレーションを行ったところ、平均 0.402（公式では 0.4）、分散 1.551（公式では 1.54）、中央値 0.336（公式では $\ln 1.4 \approx 0.336$）、$\mathrm{E}(|X|^{1/2}) \approx 0.922$（公式では 0.920）となった。

よくある間違い

- $\mathrm{E}(X^2)$ や $\mathrm{E}(|X|^{1/2})$ で点質量を忘れること。$(-1)^2 = |-1|^{1/2} = 1$ であるから、その寄与は $-m$ ではなく $+m$ である。

- 中央値を求めるのに $(1-m)(1-\mathrm{e}^{-M}) = \frac{1}{2}$ を解いてしまうこと。これは -1 にすでに蓄積されている確率 m を無視している。
- 変数変換の際に $\mathrm{d}x$ を $2y\,\mathrm{d}y$ に直し忘れること。そうすると $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ではなく $\frac{1}{4}\sqrt{\pi}$ が得られてしまう。

STEP のその先へ

点質量と確率密度が混ざった分布は、実際の場面でよく現れる（保険金請求額は、ある確率で 0 となり、それ以外のときは連続的な値をとる）。大学では、期待値を分布関数（distribution function）に関する積分 $\mathrm{E}(g(X)) = \int g(x)\,\mathrm{d}F(x)$ として書くことで、これらを統一的に扱う。この書き方は離散型・連続型・混合型の場合を一度にまとめて扱える。小問 (iv) の積分はガンマ関数（Gamma function）の値 $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ である。次の一歩としては、Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）がよい。

解答例

STEP II 2005、第 1 問

純粋数学 ・ 多項式と停留点

STEP II 2005、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s2-q1

鍵となる考え方

$P(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ の形の関数を積の微分法（product rule）で微分すると $\big(P'(x)-2xP(x)\big)\mathrm{e}^{-x^2}$ となり、e^{-x^2} は決して 0 にならないから、停留点（stationary point）はちょうど多項式（polynomial）$P'(x)-2xP(x)$ の実数解である。したがって後半は逆向きの問題になる。すなわち、$P'-2xP$ をどのような多項式にしたいかをまず決め、そこから係数比較（comparing coefficients）によって P へと遡ればよい。

解答

前半

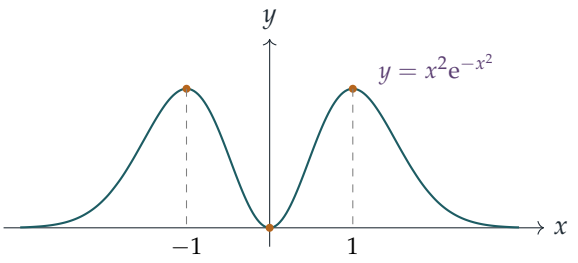
積の微分法により、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\mathrm{e}^{-x^2}\right)=2x\,\mathrm{e}^{-x^2}+x^2\cdot(-2x)\,\mathrm{e}^{-x^2}=2x\big(1-x^2\big)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

すべての x に対して $\mathrm{e}^{-x^2}>0$ であるから、これが 0 になるのはちょうど $x(1-x^2)=0$ のとき、すなわち

$$x=0,\qquad x=1,\qquad x=-1$$

のときである。



グラフは原点で極小となり、$x = \pm 1$ で高さ e^{-1} の極大をとる。

後半

任意の多項式 P に対して

$$\frac{d}{dx}\left(P(x)e^{-x^2}\right) = \left(P'(x) - 2xP(x)\right)e^{-x^2},$$

が成り立つから、やはり $e^{-x^2} > 0$ により、導関数が o になるのはちょうど $P'(x) - 2xP(x) = 0$ となるところである。前半もこの型に当てはまっている。実際、$P(x) = x^2$ からは $P' - 2xP = -2x(x^2 - 1)$ が得られた。そこで

$$P'(x) - 2xP(x) = -2x\left(x^2 - a^2\right)\left(x^2 - b^2\right), \qquad (*)$$

を目標とする。この右辺の実数解は 0、$\pm a$、$\pm b$ のみである。a と b は相異なる正の数であるから、これらは 5 つの**相異なる**値である。

> **考えてみよう**　P の次数はいくつにすべきか。また、なぜ偶数乗の項だけを含むべきなのか。

P の次数（degree）が n、主係数（leading coefficient）が c ならば、P' の次数は $n - 1$ であるから、$P' - 2xP$ は次数 $n + 1$、主係数 $-2c$ となる。$(*)$ の右辺は次数 5、主係数 -2 であるから、$n = 4$ かつ $c = 1$ でなければならない。さらに、右辺は奇関数（odd function）である。P が偶関数ならば P' と $2xP$ はともに奇関数となるから、

$$P(x) = x^4 + \beta x^2 + \gamma.$$

とおいてみるのが自然である。このとき $P'(x) = 4x^3 + 2\beta x$ であり、

$$\begin{aligned} P'(x) - 2xP(x) &= 4x^3 + 2\beta x - 2x^5 - 2\beta x^3 - 2\gamma x \\ &= -2x^5 + (4 - 2\beta)x^3 + (2\beta - 2\gamma)x, \end{aligned}$$

となる。一方、$(*)$ の右辺を展開すると

$$-2x^5 + 2\left(a^2 + b^2\right)x^3 - 2a^2b^2x.$$

となる。x^3 の係数と x の係数を比較すると、

$$\begin{aligned} 4-2\beta &= 2\left(a^2+b^2\right) && \Longrightarrow \quad \beta = 2-a^2-b^2, \\ 2\beta-2\gamma &= -2a^2b^2 && \Longrightarrow \quad \gamma = \beta+a^2b^2 = a^2b^2-a^2-b^2+2. \end{aligned}$$

よって、条件を満たす多項式の一つは

$$\boxed{P(x) = x^4 + \left(2-a^2-b^2\right)x^2 + a^2b^2 - a^2 - b^2 + 2.}$$

である。このように選べば $(*)$ は恒等的に（identically）成り立つから、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\mathrm{e}^{-x^2}\right) = -2x\left(x^2-a^2\right)\left(x^2-b^2\right)\mathrm{e}^{-x^2},$$

となり、これは $x=0$、$x=\pm a$、$x=\pm b$ で o になり、$\mathrm{e}^{-x^2} \neq 0$ であるから、それ以外の x では o にならない。P の o でない定数倍も同様に条件を満たす。

検算

- $a=1$、$b=2$ とすると $P(x) = x^4-3x^2+1$ であり、$P' - 2xP = 4x^3 - 6x - 2x^5 + 6x^3 - 2x = -2x^5 + 10x^3 - 8x = -2x(x^2-1)(x^2-4)$ となって、求める形になっている。
- 数値的に確かめると、$a=0.7$、$b=1.9$ のとき、$P(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ の導関数は $[-5,5]$ 上で $x = 0, \pm 0.7, \pm 1.9$ の付近でのみ符号を変える。また、無作為に選んだ数千組の (a,b,x) についても公式が正しいことを確認した。
- 発見的に $b \to 0$ としてみると、$P \to x^4 + (2-a^2)x^2 + 2 - a^2$ となり、導関数は $-2x^3(x^2-a^2)\mathrm{e}^{-x^2}$ となって、0 と $\pm b$ の解が一つに合わさる。

よくある間違い

- 合成関数の微分法（chain rule）による因子を忘れる。e^{-x^2} の導関数は $-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$ であり、e^{-x^2} ではない。
- 5 つの解に合わせて P の次数を 5 と推測してしまう。$P\mathrm{e}^{-x^2}$ を微分すると次数が 1 つ上がるから、P の次数は 4 である。
- ほかに停留点がない理由を述べない。これには $\mathrm{e}^{-x^2} \neq 0$ であることと、5 次式（quintic）がこれらの解しかもたないことが必要である。

STEP のその先へ

写像 $P \mapsto P' - 2xP$ は多項式全体の上の線形作用素（linear operator）であり、$(*)$ を解くことは、積分因子（integrating factor）e^{-x^2} をもつ 1 階線形微分方程式（first-order linear differential equation）を解くことにほかならない。H を多項式として $H(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ の形をした関数を考えると、エルミート（Hermite）多項式（Hermite polynomials）に行き着く。これは確率論（正規分布（normal distribution））や量子調和振動子（quantum harmonic oscillator）に現れる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『初等微分方程式』）では、積分因子とエルミートの方程式が扱われている。

解答例

STEP II 2005、第 2 問

純粋数学 ・ オイラーのトーシェント関数

STEP II 2005、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s2-q2

鍵となる考え方

すべては N を素因数分解（prime factorisation）の形で書くことから導かれる。各因子 $\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{p-1}{p}$ は分母に p をもつが、N にはそれを約分する p が少なくとも 1 つは必ず含まれている。$\mathrm{f}(N)$ を素数冪（prime power）ごとの積として書き表してしまえば、$\mathrm{f}(m)\mathrm{f}(n)$ と $\mathrm{f}(mn)$ がどのようなときに一致するかが正確にわかる。それは m と n が共通の素因数をもつかどうかで決まるのである。

解答

小問 (i)

(a) $12=2^2\cdot 3$ を割り切る素数は 2 と 3 であるから、

$$\mathrm{f}(12)=12\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=12\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=4.$$

$180=2^2\cdot 3^2\cdot 5$ を割り切る素数は 2、3、5 であるから、

$$\mathrm{f}(180)=180\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=48.$$

(b) $N=1$ のときは素因数が存在せず、積は空積（empty product）となるので $\mathrm{f}(1)=1$ である。$N\geq 2$ のときは

$$N=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k},$$

と書く。ここで p_i は N を割り切る相異なる素数であり、すべての $a_i\geq 1$ である。こ

のとき

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(N) &= p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k} \cdot \frac{p_1 - 1}{p_1} \cdots \frac{p_k - 1}{p_k} \\ &= p_1^{a_1 - 1}(p_1 - 1)\, p_2^{a_2 - 1}(p_2 - 1) \cdots p_k^{a_k - 1}(p_k - 1). \end{aligned}$$

各 $a_i \geq 1$ であるから、指数 $a_i - 1$ はすべて非負整数であり、したがって各因子 $p_i^{a_i - 1}(p_i - 1)$ は正の整数である。ゆえに、すべての N について $\mathrm{f}(N)$ は整数である。この問題の残りの部分では、次の公式

$$\mathrm{f}(N) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i - 1}(p_i - 1), \qquad (*)$$

を用いる。

小問 (ii)

(a) これは偽である。$m = n = 2$ とする。このとき $\mathrm{f}(2) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ であるから $\mathrm{f}(2)\mathrm{f}(2) = 1$ となるが、$\mathrm{f}(4) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ である。

問題は、因子 $\left(1 - \frac{1}{2}\right)$ が左辺には 2 回現れるのに右辺には 1 回しか現れないことにある。2 は 4 の素因数として 1 回しか数えられないからである。

(b) これは真である。p と q が相異なる素数ならば、$\mathrm{f}(p) = p\left(1 - \frac{1}{p}\right) = p - 1$ であり、同様に $\mathrm{f}(q) = q - 1$ である。pq を割り切る素数はちょうど p と q であり、これらは異なるから、

$$\mathrm{f}(pq) = pq\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right) = (p-1)(q-1) = \mathrm{f}(p)\mathrm{f}(q).$$

(c) 主張は、$\mathrm{f}(p)\mathrm{f}(q) = \mathrm{f}(pq)$ が成り立つのは p と q が相異なる素数のときに限る、すなわちこの等式が成り立てば p と q は必ず相異なる素数になる、というものである。これは偽である。$p = 3$、$q = 4$ とする。等式が意味をもつためにこれらが素数である必要はない。このとき

$$\mathrm{f}(3)\mathrm{f}(4) = 2 \cdot 2 = 4 = \mathrm{f}(12),$$

が小問 (i)(a) より成り立つが、4 は素数ではない。（さらに簡単な例は $p = 1$ である。すべての q について $\mathrm{f}(1)\mathrm{f}(q) = \mathrm{f}(q)$ となるからである。）

> **考えてみよう** 素数であることでないとすれば、等式を成り立たせている本当の理由は何だろうか。

重要なのは、p と q が共通の素因数をもたないことである。$\gcd(m, n) = 1$ ならば、m に含まれる素数冪と n に含まれる素数冪は互いに異なるので、mn の素因数分解は 2 つの素因数分解を単に並べたものになり、$(*)$ より $\mathrm{f}(mn) = \mathrm{f}(m)\mathrm{f}(n)$ が得られる。あ

る素数 r が両方を割り切るならば、因子 $\left(1-\frac{1}{r}\right)$ は $\mathrm{f}(m)\mathrm{f}(n)$ には2回現れるが $\mathrm{f}(mn)$ には1回しか現れないので、$\mathrm{f}(m)\mathrm{f}(n) < \mathrm{f}(mn)$ となる。したがって、等式が成り立つのはちょうど $\gcd(m,n)=1$ のときであり、3、4 は素数の組ではない互いに素（coprime）な組の一例にすぎない。

一方、小問 (ii) 全体を通じて p と q が素数を表すと読むならば、(c) は $p=q$ となりうるかどうかだけを問うていることになり、その答えは否である。$\mathrm{f}(p)^2=(p-1)^2$ であるのに対し $\mathrm{f}(p^2)=p(p-1)$ であり、$p-1\neq p$ であるからこれらは決して等しくならない。この読み方のもとでは (c) は真である。上の反例（counterexample）を伴う一般的な読み方のほうが、より自然である。

小問 (iii)

$(*)$ より、素数冪については

$$\mathrm{f}(p^m)=p^{m-1}(p-1).$$

である。目標の数を素因数分解すると、$14641=121^2=11^4$ であるから $146410=10\times 14641=2\cdot 5\cdot 11^4$ となる。これはすでに $p=11$ とした $p^{m-1}(p-1)$ の形をしている。実際 $11^4\cdot 10=11^4(11-1)$ であるから $m-1=4$ である。ゆえに

$$p=11,\quad m=5:\qquad \mathrm{f}(11^5)=11^4\cdot 10=146410.$$

実はこれが唯一の答えである。$m\geq 2$ ならば p は 146410 を割り切るので、$p\in\{2,5,11\}$ である。$p=2$ とすると $2^{m-1}=146410$ となるが、146410 は奇数の素因数をもつので不可能である。$p=5$ とすると $4\cdot 5^{m-1}=146410$ となるが、146410 は4で割り切れないので不可能である。残るのは $p=11$ であり、このとき $m=5$ となる。$m=1$ ならば $p=146411$ が素数でなければならないが、$146411=41\times 3571$ である。

検算

- この関数はオイラー（Euler）のトーシェント関数（totient function）である。すなわち $\mathrm{f}(N)$ は $\{1,\ldots,N\}$ に含まれる整数のうち N と互いに素なものの個数を数える。たとえば $N=12$ に対しては、そのような4つの数は $1,5,7,11$ である。コンピュータにより、すべての $N<2000$ について、積の公式がこの個数と一致し、かつ整数になることが確かめられた。
- 問題文中の例では $\mathrm{f}(80)=80\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}=32=2^3(2-1)\cdot 5^0(5-1)$ であり、これは $(*)$ と一致する。
- コンピュータで $m,n\leq 400$ の無作為な組を20000個調べたところ、$\mathrm{f}(m)\mathrm{f}(n)=$

$f(mn)$ となるのはちょうど $\gcd(m,n) = 1$ のときであった。また、すべての素数 $p \leq 146411$ を探索したところ、(iii) の解は $(p,m) = (11,5)$ のみであった。

よくある間違い

- 積の中に同じ素数を2回以上含めてしまうこと。$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ に対しては、因子は5個ではなく3個である。
- 「のときに限り（only if）」を「ならば（if）」と取り違えること。小問 (b) は「ならば」の向きであり、小問 (c) はその逆（converse）であって、別の命題である。
- (iii) で $14641 = 11^4$ に気づかないこと。$11^2 = 121$ かつ $121^2 = 14641$ であることに気づくか、パスカルの三角形（Pascal's triangle）の行 $1,4,6,4,1$ であると見抜けば、すぐに見つかる。

STEP のその先へ

この関数はオイラーのトーシェント関数 φ であり、小問 (ii) の事実は、これが**乗法的**（multiplicative）であることを述べている。すなわち、一般には成り立たないものの、$\gcd(m,n) = 1$ のときには常に $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ が成り立つ。この関数はオイラーの定理（Euler's theorem）、すなわち n と互いに素な a に対する $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ に現れる。この定理はフェルマー（Fermat）の小定理（Fermat's little theorem）を一般化したものであり、RSA 暗号（RSA encryption）の基礎となっている。群論（group theory）では、$\varphi(n)$ は n を法とする単数群（group of units）の位数（order）である。Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、これらすべてを見事に展開している。

解答例

STEP II 2005、第 3 問

純粋数学 ・ 部分積分

STEP II 2005、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s2-q3

鍵となる考え方

まず微分する。$\sin x - x\cos x$ の導関数（derivative）は符号が一目でわかる形にまとまり、そこからグラフの概形と y の範囲が一度に得られる。二つの積分は部分積分（integration by parts）による定型的な計算であり、2 乗の項には倍角の公式（double-angle formulae）を用いる。最後の不等式は二つの積分を比較して得られる。0 と 1 の間にある数は、その 2 乗以上である。

解答

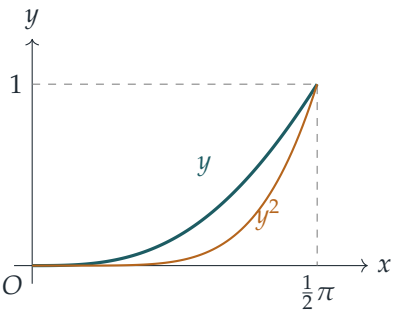
概形と範囲

積の微分法（product rule）を用いて微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos x - (\cos x - x\sin x) = x\sin x.$$

$0 < x \leq \frac{1}{2}\pi$ では x と $\sin x$ はともに正であるから、y は $[0, \frac{1}{2}\pi]$ において狭義単調増加（strictly increasing）である。したがって最小値は $y(0) = 0 - 0 = 0$、最大値は $y(\frac{1}{2}\pi) = 1 - \frac{1}{2}\pi \cdot 0 = 1$ である。ゆえに $0 \leq y \leq 1$ であり、さらに $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ では $0 < y < 1$ が成り立つ。

形については、$(0, \frac{1}{2}\pi]$ において $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \sin x + x\cos x > 0$ であるから、曲線は全体にわたって下に凸である。原点での傾きは 0 である。マクローリン級数（Maclaurin series）を用いると $y = \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) - x\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) + \cdots = \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ となるので、曲線は 3 次関数のように非常に平らに原点から立ち上がる。$x = \frac{1}{2}\pi$ での傾きは $\frac{1}{2}\pi$ である。



最後の部分の鍵となるので、琥珀色の曲線 y^2 もあわせて示してある。

小問 (i)

$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x$ が必要である。$u = x$、$\mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x$ として部分積分すると、

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x = \Big[x\sin x\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi - 1.$$

$\int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = 1$ であるから、

$$\int_0^{\pi/2} y\,\mathrm{d}x = 1 - \left(\tfrac{1}{2}\pi - 1\right) = 2 - \frac{\pi}{2},$$

となり、求める結果が得られる。

小問 (ii)

展開して、$2\sin x\cos x = \sin 2x$ と $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ を用いると、

$$y^2 = \sin^2 x - 2x\sin x\cos x + x^2\cos^2 x = \sin^2 x - x\sin 2x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x^2\cos 2x,$$

となる。四つの項を順に扱う。

まず、$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ であり、$\sin 2x$ は両端で 0 になるので、

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \Big[\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

次に、$u = x$、$\mathrm{d}v = \sin 2x\,\mathrm{d}x$ として部分積分し、$\cos\pi = -1$ を用いると、

$$\int_0^{\pi/2} x\sin 2x\,\mathrm{d}x = \Big[-\tfrac{1}{2}x\cos 2x\Big]_0^{\pi/2} + \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}.$$

3 番目は $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\pi\right)^3 = \dfrac{\pi^3}{48}$ である。

最後に、$u = x^2$、$\mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x$ として部分積分する。境界項 $\left[\frac{1}{2}x^2 \sin 2x\right]_0^{\pi/2}$ は 0 であり、残る積分はいま求めたものである：

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos 2x\,\mathrm{d}x = 0 - \int_0^{\pi/2} x \sin 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4},$$

よって最後の項の寄与は $\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{8}\pi$ である。

四つの項を足し合わせると、

$$\int_0^{\pi/2} y^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8},$$

となり、求める結果が得られる。

結論の導出

考えてみよう 二つの積分から、どうすれば π に関する不等式が得られるだろうか。

被積分関数（integrand）どうしを比較する。$0 \le y \le 1$ であるから、区間全体で $y - y^2 = y(1-y) \ge 0$ である。さらに、$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ では $0 < y < 1$ を示したので、そこでは $y(1-y) > 0$ である。非負であり、ある開区間上で狭義に正である連続関数（continuous function）の積分は、狭義に正である。したがって

$$\int_0^{\pi/2} y^2\,\mathrm{d}x < \int_0^{\pi/2} y\,\mathrm{d}x, \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} < 2 - \frac{\pi}{2}.$$

48 を掛ける（正の数なので不等号の向きは変わらない）と、

$$\pi^3 - 6\pi < 96 - 24\pi, \qquad \text{よって} \qquad \pi^3 + 18\pi < 96.$$

これが求める結果である。

検算

- 数値的には $2 - \frac{1}{2}\pi \approx 0.4292$、$\frac{1}{48}\pi^3 - \frac{1}{8}\pi \approx 0.2533$ である。元の被積分関数にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると、小数第 12 位まで同じ値が得られる。$0 \le y \le 1$ であるから当然だが、どちらも 0 と $\frac{1}{2}\pi \approx 1.571$ の間にある。
- 2 番目の積分は 1 番目より小さい。これは y^2 のグラフが y の下にあることから予想されるとおりである。
- $\pi \approx 3.1416$ とすると $\pi^3 + 18\pi \approx 31.006 + 56.549 = 87.55$ であり、96 を十分に下回る。

よくある間違い

- $\int x \sin 2x \, \mathrm{d}x$ の境界項の符号を間違える。$x = \frac{1}{2}\pi$ では $\cos 2x = \cos \pi = -1$ であるから、$-\frac{1}{2}x \cos 2x$ は $+\frac{1}{4}\pi$ となる。
- 最後の段階で $\leq$ しか主張しない。狭義の不等式を得るには、単に ≥ 0 ではなく、どこかで $y(1-y) > 0$ であることが必要である。
- $y \leq 1$ である理由を述べ忘れる。y が増加関数であるという事実なしに、$y(\frac{1}{2}\pi) = 1$ を知っているだけでは不十分である。

STEP のその先へ

最後の段階は、ある大きな考え方の小さな例である。関数どうしの不等式を積分すると数どうしの不等式が得られ、関数をうまく選べば π のような定数を挟み込むことができる。同じ戦略により、$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} \, \mathrm{d}x > 0$ から $\frac{22}{7} > \pi$ を導く有名な証明が得られ、さらに本格的なものとしては、π が無理数（irrational）であることのニーヴン（Niven）による証明がある。解析学（analysis）の最初の講義では、連続かつ非負で、どこかで正となる関数の積分は正であることを厳密に証明する。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、これがきちんと示される様子を見るのに親しみやすい本である。

解答例

STEP II 2005、第 4 問

純粋数学 ・ 逆正接関数の恒等式

STEP II 2005、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s2-q4

鍵となる考え方

逆正接（inverse tangent）の和は、両辺の正接をとり、$\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ を用いて扱う。条件 $bc = a^2 + 1$ は、まさに分母を分子と打ち消し合う形に因数分解（factorise）させるためのものである。そこから先は構造の問題である。最初の結果は一つの逆正接を二つに**分割する**規則であり、4 項の恒等式はその規則を木（tree）の各段で一度ずつ、計 2 回適用したものである。数値の部分では、逆向きにたどって、どのような分割がその四つの数を生み出したのかを求めればよい。

解答

最初の恒等式

$A = \arctan\frac{1}{a+b}$、$B = \arctan\frac{1}{a+c}$ とおく。$a, b, c > 0$ であるから $\frac{1}{a+b}$ と $\frac{1}{a+c}$ はともに正であり、したがって $A, B \in (0, \frac{\pi}{2})$、$A + B \in (0, \pi)$ である。$bc = a^2 + 1$ を用いると、

$$\begin{aligned}(a+b)(a+c) - 1 &= a^2 + ab + ac + bc - 1 \\ &= 2a^2 + ab + ac = a(2a + b + c).\end{aligned}$$

よって加法定理（addition formula）により、

$$\begin{aligned}\tan(A+B) &= \frac{\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{a+c}}{1 - \dfrac{1}{(a+b)(a+c)}} = \frac{(a+c)+(a+b)}{(a+b)(a+c) - 1} \\ &= \frac{2a+b+c}{a(2a+b+c)} = \frac{1}{a},\end{aligned}$$

ここで $2a+b+c>0$ であるから約分してよい。

考えてみよう $\tan(A+B)=\frac{1}{a}$ から本当に $A+B=\arctan\frac{1}{a}$ が得られるだろうか。

自動的には得られない。tan は周期 (period) π をもつので、$A+B$ が arctan の値域である $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ に入っていることを確かめる必要がある。$A+B\in(0,\pi)$ であることはわかっている。また $(a+b)(a+c)-1=a(2a+b+c)>0$ であるから $\tan A\tan B<1$ となり、加法定理の分母は正である。分子も正なので $\tan(A+B)>0$ となり、$A+B\in[\frac{\pi}{2},\pi)$ の可能性は排除される（実際、$\tan(A+B)$ は $\frac{\pi}{2}$ で定義されず、$(\frac{\pi}{2},\pi)$ では負である)。したがって $A+B\in(0,\frac{\pi}{2})$ であり、$\arctan\frac{1}{a}$ はこの区間で正接が $\frac{1}{a}$ となる唯一の角であるから、

$$\arctan\frac{1}{a+b}+\arctan\frac{1}{a+c}=\arctan\frac{1}{a}.\qquad\blacksquare$$

4 項の恒等式

最初の恒等式を 3 回適用する。いずれの場合も、関わる三つの数はすべて正である。

- $a=p+q$、$b=s$、$c=t$ とすると、条件は $st=(p+q)^2+1$ であり、これは与えられているので、
$$\arctan\frac{1}{p+q+s}+\arctan\frac{1}{p+q+t}=\arctan\frac{1}{p+q}.$$
- $a=p+r$、$b=u$、$c=v$ とすると、条件 $uv=(p+r)^2+1$ は与えられているので、
$$\arctan\frac{1}{p+r+u}+\arctan\frac{1}{p+r+v}=\arctan\frac{1}{p+r}.$$
- $a=p$、$b=q$、$c=r$ とすると、条件 $qr=p^2+1$ は与えられているので、
$$\arctan\frac{1}{p+q}+\arctan\frac{1}{p+r}=\arctan\frac{1}{p}.$$

最初の 2 式を加えて 3 番目の式を用いると、四つの逆正接の和は $\arctan\frac{1}{p}$ となり、示すべきことが得られた。$\blacksquare$

数値の恒等式

$p=7$ が必要なので $qr=50$ である。q と r を当て推量するのではなく、四つの数から逆向きにたどる。13 と 21 が最初の恒等式を 1 回用いたときの組 $a+b$、$a+c$ であるとすると、$b=13-a$、$c=21-a$ であり、$bc=a^2+1$ から

$$(13-a)(21-a)=a^2+1\iff 273-34a=1\iff a=8.$$

同様に、82 と 187 が組であるとすると、

$$(82-a)(187-a) = a^2+1 \iff 15334 - 269a = 1 \iff a = 57.$$

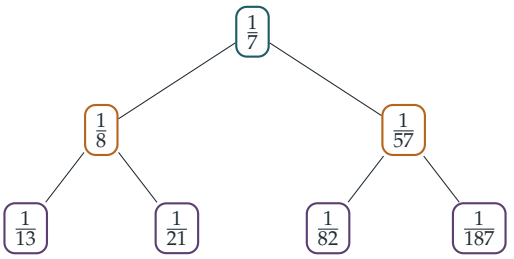
そこで $p+q=8$、$p+r=57$、すなわち $q=1$、$r=50$ を試す。すると $s=13-8=5$、$t=21-8=13$、$u=82-57=25$、$v=187-57=130$ となる。七つの数はすべて正であり、三つの条件も成り立つ：

$$qr = 50 = 7^2+1, \qquad st = 65 = 8^2+1, \qquad uv = 3250 = 57^2+1.$$

これらの値では $p+q+s=13$、$p+q+t=21$、$p+r+u=82$、$p+r+v=187$ であるから、4 項の恒等式により

$$\arctan\frac{1}{13} + \arctan\frac{1}{21} + \arctan\frac{1}{82} + \arctan\frac{1}{187} = \arctan\frac{1}{7}. \qquad \blacksquare$$

下の木は $\arctan\frac{1}{7}$ がどのように分割されるかを示している。



各節点の逆正接は、その子の逆正接の和である：$1\cdot 50 = 7^2+1$、$5\cdot 13 = 8^2+1$、$25\cdot 130 = 57^2+1$。

検算

- 数値的には、最後の恒等式の両辺はともに 0.1418970546… である。
- 分数で厳密に計算すると、$\frac{1}{13}, \frac{1}{21}$ に対する $\tan(A+B)$ は $\frac{34}{272} = \frac{1}{8}$、$\frac{1}{82}, \frac{1}{187}$ に対しては $\frac{269}{15333} = \frac{1}{57}$、$\frac{1}{8}, \frac{1}{57}$ に対しては $\frac{65}{455} = \frac{1}{7}$ である。
- 最初の恒等式の特別な場合：$a=1$、$b=1$、$c=2$ とすると、有名な $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ が得られる。

よくある間違い

- $A+B$ が $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に入ることを確かめずに、$\tan(A+B) = \frac{1}{a}$ から $A+B = \arctan\frac{1}{a}$ と結論してしまう。

- 50、65、3250 の因数分解をやみくもに探してしまう。組 13, 21 から逆向きにたどれば、1 行で $a = 8$ が求まる。

STEP のその先へ

このような恒等式の背後には、$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$ のようなマチン（Machin）型の公式がある。x が小さいとき $\arctan x$ は速く収束する級数をもつので、これらの公式は何世紀にもわたって手計算で π を求めるのに使われてきた。これらを最もすっきりと理解する方法は複素数（complex numbers）を通して見ることである。$\arctan\frac{1}{n}$ は $n + \mathrm{i}$ の偏角（argument）であるから、逆正接を加えることはガウス整数（Gaussian integers）を掛け合わせることに対応し、条件 $bc = a^2 + 1$ は $a^2 + 1 = (a + \mathrm{i})(a - \mathrm{i})$ という因数分解が姿を変えたものにほかならない。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）はこの乗法の幾何学的な見方を展開しており、Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は二つの平方数の和を扱っている。

解答例

STEP II 2005、第 5 問

純粋数学 ・ 内接円と外接円

STEP II 2005、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s2-q5

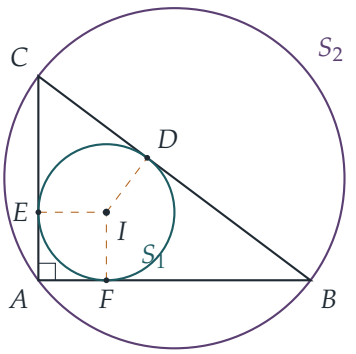
鍵となる考え方

円の外部の点からその円に引いた 2 本の接線（tangent）の長さは等しい。これを各頂点に当てはめると、三角形の各辺は 2 つの接線の長さに分かれ、直角の頂点ではその 2 つの接線の長さがちょうど r になる。これにより r の式はほとんどすぐに得られる。面積比については、直角があることから斜辺（hypotenuse）が S_2 の直径（diameter）であることがわかり、ピタゴラスの定理（Pythagoras' theorem）を使うとすべてを $b+c$ と a だけで表せる。q が現れるのはこのためである。

解答

内接円の半径

S_1 の中心を I とし、S_1 が BC、CA、AB とそれぞれ D、E、F で接するとする。



半径は接線と直交するので、$IE \perp AC$ かつ $IF \perp AB$ である。A における直角と合わ

せると、$AEIF$ は隣り合う 2 辺が $IE = IF = r$ の長方形となるので、これは正方形であり、

$$AE = AF = r.$$

外部の点から引いた接線の長さは等しいので、$BF = BD$、$CE = CD$ である。よって

$$c = AF + FB = r + BD, \qquad b = AE + EC = r + CD, \qquad a = BD + DC.$$

はじめの 2 式を足して 3 番目の式を引くと

$$b + c - a = 2r + BD + CD - (BD + DC) = 2r,$$

となり、示すべき式が得られた。

面積比

$\angle BAC = 90^\circ$ であるから、半円の円周角の定理（angle in a semicircle theorem）の逆により、BC は外接円（circumcircle）S_2 の直径である。したがって S_2 の半径は $\frac{1}{2}a$、面積は $\frac{1}{4}\pi a^2$ である。

S_1 と三角形の間の領域は、三角形から S_1 の円板を取り除いたものなので、その面積は $\frac{1}{2}bc - \pi r^2$ である。したがって

$$R = \frac{\frac{1}{2}bc - \pi r^2}{\frac{1}{4}\pi a^2}, \qquad \text{よって} \qquad \pi R = \frac{2bc - 4\pi r^2}{a^2} = \frac{2bc}{a^2} - \pi\,\frac{(b + c - a)^2}{a^2},$$

ここで $2r = b + c - a$ を用いた。

考えてみよう $2bc/a^2$ を q だけを含む式に変えるにはどうすればよいか。

ピタゴラスの定理より $b^2 + c^2 = a^2$ であるから、$2bc = (b + c)^2 - (b^2 + c^2) = (b + c)^2 - a^2$ となる。a^2 で割ると

$$\frac{2bc}{a^2} = q^2 - 1, \qquad \frac{(b + c - a)^2}{a^2} = \left(\frac{b + c}{a} - 1\right)^2 = (q - 1)^2.$$

よって

$$\begin{aligned} \pi R &= q^2 - 1 - \pi(q^2 - 2q + 1) \\ &= -(\pi - 1)q^2 + 2\pi q - (\pi + 1), \end{aligned}$$

となり、求める結果が得られた。

R の上界

右辺は q の2次式で、最高次の係数 $-(\pi-1)$ は負であるから、平方完成（completing the square）する。

$$\begin{aligned}\pi R &= -(\pi-1)\left(q^2 - \frac{2\pi}{\pi-1}\,q\right) - (\pi+1)\\ &= -(\pi-1)\left(q - \frac{\pi}{\pi-1}\right)^2 + \frac{\pi^2}{\pi-1} - (\pi+1)\\ &= -(\pi-1)\left(q - \frac{\pi}{\pi-1}\right)^2 + \frac{\pi^2-(\pi^2-1)}{\pi-1}\\ &= \frac{1}{\pi-1} - (\pi-1)\left(q - \frac{\pi}{\pi-1}\right)^2.\end{aligned}$$

$\pi-1>0$ より2乗の項は引かれるので、すべての実数 q に対して $\pi R \le \dfrac{1}{\pi-1}$ であり、$\pi>0$ で割ると

$$R \le \frac{1}{\pi(\pi-1)}.$$

これが導くよう求められていた不等式である。

この上界が実際には達成されないことにも注意しておく価値がある。等号が成り立つには $q=\pi/(\pi-1)\approx 1.467$ が必要だが、直角三角形（right-angled triangle）では $(b+c)^2 = a^2+2bc \le a^2+(b^2+c^2) = 2a^2$（相加・相乗平均の不等式（AM–GM）より $2bc \le b^2+c^2$）であるから、$q \le \sqrt{2} \approx 1.414$ となる。R が最大になるのは直角二等辺三角形（isosceles triangle）、すなわち $q=\sqrt{2}$ のときで、$R = (2\sqrt{2}\,\pi - 3\pi + 1)/\pi \approx 0.1467$ となり、上界 $1/(\pi(\pi-1)) \approx 0.1486$ をわずかに下回る。

検算

辺の長さが 3–4–5 の三角形（$b=4$、$c=3$、$a=5$）では、公式から $r=1$ が得られる。実際、面積 6 を半周長（semi-perimeter）6 で割ると 1 であり、これは標準的な公式 $r=$ 面積$/s$ に一致する。このとき $R=(6-\pi)/(\frac{25}{4}\pi)\approx 0.14558$ であり、2次式に $q=1.4$ を代入しても同じ値が得られる。10^5 個の直角三角形を無作為に選んで調べたところ、πR の恒等式はすべての場合に成り立ち、0.14674 を超える R は見つからなかった。これは上界 0.14863 と整合している。

よくある間違い

- S_2 の半径が a ではなく $\frac{1}{2}a$ であることを忘れる。斜辺は**直径**である。
- $b^2+c^2=a^2$ を用いて $2bc=(b+c)^2-a^2$ と書く代わりに、$2bc/a^2$ を直接展開しようとする。

- $q = \pi/(\pi - 1)$ が実現可能かどうかを確かめずに、上界が達成されると主張する。実際には達成されないが、問題が求めているのは不等式だけである。

STEP のその先へ

一般の三角形の内接円（incircle）と外接円は、それらの中心間の距離 d についてのオイラー（Euler）の公式 $d^2 = R_2(R_2 - 2r)$ によって結びついている。ここで R_2 は外接円の半径である。この公式から $R_2 \geq 2r$ が導かれ、等号が成り立つのは正三角形のときに限る。このような結果や、図形の族の上で比を最適化するという考え方は、幾何的不等式（geometric inequalities）の研究へとつながっていく。Coxeter と Greitzer の *Geometry Revisited*（『幾何学再入門』）は次の一歩として素晴らしい本であり、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（無料、CC BY）には STEP 形式の演習問題がさらに収められている。

解答例

STEP II 2005、第 6 問

純粋数学 • 二項級数の和

> **STEP II 2005、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q6

鍵となる考え方

ここに現れる和はいずれも、ある特定の x における冪級数（power series）の値である。したがって、なすべきことは、それがどの関数から来ているかを見抜くことである。小問 (i) での工夫は、n と n^2 を、先ほど書き出した係数そのものである 1、$n+1$、$(n+1)(n+2)$ の組合せとして書き直すことである。小問 (ii) でも、$(1-x)^{-1/2}$ と $(1-x)^{-3/2}$ の係数がどのような関係にあるかに気づけば、同じ考え方が通用する。

解答

小問 (i)

負の整数乗に対する二項定理（binomial theorem）（$|x|<1$ で成り立つ）により、$n \geq 0$ に対する x^n の係数は

$$(1-x)^{-1}: \quad 1, \qquad (1-x)^{-2}: \quad n+1, \qquad (1-x)^{-3}: \quad \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

である。たとえば、$(1-x)^{-3}$ における係数は $\dfrac{(-3)(-4)\cdots(-3-n+1)}{n!}(-1)^n = \dfrac{3\cdot 4\cdots(n+2)}{n!} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ である。

一つ目の和。 $n=(n+1)-1$ であるから、$|x|<1$ のとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}.$$

となる（右辺の二つの級数はともに収束（converge）するので、和を分けてよい）。

$n=0$ の項は 0 であるから、$x=\frac{1}{2}$ とおくと

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,2^{-n} = 4-2 = 2.$$

を得る。

二つ目の和。 n^2 を $(n+1)(n+2)$、$n+1$、1 の組合せとして表したい。$(n+1)(n+2) = n^2+3n+2$ であるから

$$n^2 = (n+1)(n+2) - 3(n+1) + 1.$$

である。よって、$|x|<1$ のとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x},$$

となる。ここで係数 2 が現れるのは、$(1-x)^{-3}$ における係数が $(n+1)(n+2)$ の**半分**だからである。やはり $n=0$ の項は消え、$x=\frac{1}{2}$ では

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\,2^{-n} = 2\cdot 8 - 3\cdot 4 + 2 = 6.$$

となる。

小問 (ii)

指数 $-\frac{1}{2}$ の二項定理により、$(1-x)^{-1/2}$ における x^n の係数は

$$\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-1}{2})}{n!}(-1)^n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\,n!}.$$

である。

考えてみよう 奇数の積を階乗に直すにはどうすればよいか。

抜けている偶数を補えばよい。$(2n)! = \big(1\cdot 3\cdots(2n-1)\big)\big(2\cdot 4\cdots 2n\big)$ であり、$2\cdot 4\cdots 2n = 2^n n!$ である。したがって $1\cdot 3\cdots(2n-1) = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$ となり、係数は

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n n!\cdot 2^n n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{2^{2n}}.$$

である。これは $n=0$ のときにも成り立つ（空積であり、$a_0=1$）。よって $|x|<1$ のとき

$$(1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{x^n}{2^{2n}},$$

となり、示すべき式が得られた。

一つ目の和。 求める和は $x = \frac{1}{3}$ における $\sum a_n x^n$ であり、この値は展開が成り立つ区間の内部にある。したがって、その値は

$$\left(1 - \tfrac{1}{3}\right)^{-1/2} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

である。

二つ目の和。 今度は $\sum n a_n x^n$ が必要である。小問 (i) と同じ発想で、$n a_n$ を既知の級数と結びつける。上とまったく同様にして、$(1-x)^{-3/2}$ における x^m の係数は

$$b_m = \frac{3 \cdot 5 \cdots (2m+1)}{2^m\, m!} = (2m+1)\, a_m.$$

である。a_n の式から、隣り合う係数の比は $a_n / a_{n-1} = \dfrac{(2n)(2n-1)}{n^2 \cdot 4} = \dfrac{2n-1}{2n}$ であるから、$n \geq 1$ に対して

$$n\, a_n = \tfrac{1}{2}(2n-1)\, a_{n-1} = \tfrac{1}{2}\, b_{n-1}.$$

が成り立つ。したがって、$|x| < 1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^{n-1} = \frac{x}{2}(1-x)^{-3/2}.$$

となる（同じことだが、$(1-x)^{-1/2}$ の級数を項別微分（term-by-term differentiation）し、x を掛けてもよい。項別微分は収束区間の内部では許される）。$x = \frac{1}{3}$ では

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,(2n)!}{(n!)^2\, 2^{2n}\, 3^n} = \frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{8}.$$

となる。

検算

- $\sum n 2^{-n}$ の最初のいくつかの項は $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \cdots$ であり、4 項までで既に 1.625 となり、少しずつ 2 に近づいていく。$\sum n^2 2^{-n}$ の 200 項までの部分和は、小数点以下何桁にもわたって 6 と一致する。
- 数値的には $\sqrt{6}/2 \approx 1.224745$、$\sqrt{6}/8 \approx 0.306186$ であり、小問 (ii) の二つの級数の部分和はいずれも小数点以下 12 桁まで一致する。
- 一般項の簡単な確認：$n = 1$ のとき $a_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ であり、これはおなじみの展開 $(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots$ の係数である。

よくある間違い

- $(1-x)^{-3}$ の係数にある $\frac{1}{2}$ を忘れること。そうすると $\sum n^2 2^{-n}$ が $8 - 12 + 2 = -2$ となるが、正の項の和としてこれはあり得ない。

- $(1-x)^{-2}$ の級数の係数を $n+1$ ではなく n から始めてしまうこと。正しい級数は $1+2x+3x^2+\cdots$ である。
- 最後の和で x を一つ落とすこと。$\sum na_n x^{n-1}$ は導関数であるが、求める和は $\sum na_n x^n$ である。

STEP のその先へ

ここで行った操作（級数をいくつかの部分に分けること、項別に微分すること）が正当化されるのは、冪級数がその収束半径（radius of convergence）の内部で絶対収束（absolute convergence）し、そこで項別微分できるからである。これを丁寧に証明することは、解析学（analysis）の最初の講義の標準的な内容である。係数 $\binom{2n}{n}/4^n$ は確率論にも現れ、単純ランダムウォーク（simple random walk）が $2n$ ステップ後に出発点に戻っている確率に等しい。解析学については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照のこと。

解答例

STEP II 2005、第 7 問

純粋数学 ・ ベクトルと円運動

STEP II 2005、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s2-q7

鍵となる考え方

どの位置ベクトル（position vector）も cos(角) $\mathbf{a}$ + sin(角) $\mathbf{b}$ の形をしており、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が垂直で長さが等しいとき、これは $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の張る平面内の円を描く。$|OP|$ と $|OQ|$ が一定であることがわかれば、角 POQ は内積（scalar product）からすぐに求まり、積和の公式（product-to-sum formulae）によって一つのコサインにまとめられる。最後の小問は、二周期分にわたる一つのコサインについての不等式に帰着する。

解答

小問 (i)

P と Q の位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{p}$、$\mathbf{q}$ と書く。

P については $\mathbf{p} = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$ であるから、$|\mathbf{p}| = 1$ であり、$\mathbf{p}$ は xy 平面内にある。したがって P は平面 $z = 0$ 内の中心 O、半径 1 の円周上を、上から（z 軸の正の側から）見て反時計回りに、一定の角速度（angular speed）1（したがって速さ 1）で動く。P は $(1,0,0)$ から出発し、t が 0 から 2π まで動く間にちょうど一周する。

Q については、$s = t + \frac{1}{4}\pi$ とおき、

$$\mathbf{a} = \tfrac{3}{2}\mathbf{i} + \tfrac{3\sqrt{3}}{2}\mathbf{k}, \qquad \mathbf{b} = 3\mathbf{j}, \qquad \text{とすると} \qquad \mathbf{q} = \cos s\,\mathbf{a} + \sin s\,\mathbf{b}.$$

ここで $|\mathbf{a}|^2 = \frac{9}{4} + \frac{27}{4} = 9$、$|\mathbf{b}|^2 = 9$、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ である。よって

$$|\mathbf{q}|^2 = 9\cos^2 s + 9\sin^2 s + 2\cos s \sin s\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = 9,$$

であり、$\mathbf{q}$ はつねに O を通り $\mathbf{a}$ と $\mathbf{j}$ で張られる平面内にある。この平面は y 軸と方向

$\mathbf{i}+\sqrt{3}\mathbf{k}$ を含むので、その方程式は $z=\sqrt{3}x$ である。その法線ベクトル $-\sqrt{3}\mathbf{i}+\mathbf{k}$ が $\mathbf{k}$ となす角は $\arccos\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\pi$ である。

したがって Q は、y 軸を含み P の円の平面に対して $60°$ 傾いた平面 $z=\sqrt{3}x$ 内の、中心 O、半径 3 の円周上を動く。Q もまた角速度 1（速さ 3）で一周し、$\mathbf{a}$ の方向から $\mathbf{j}$ の方向へと回転する。その位相はつねに P より $\frac{1}{4}\pi$ だけ進んでいる。すなわち $t=0$ において Q は $\mathbf{a}$ から角 $\frac{1}{4}\pi$ の位置、$\frac{3}{2\sqrt{2}}(1,\,2,\,\sqrt{3})$ にある。

小問 (ii)

$|\mathbf{p}|=1$、$|\mathbf{q}|=3$ であるから、

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{3}=\frac{\frac{3}{2}\cos t\cos s+3\sin t\sin s}{3}=\tfrac{1}{2}\cos t\cos s+\sin t\sin s,$$

ただし $s=t+\frac{1}{4}\pi$ である。$t+s=2t+\frac{1}{4}\pi$、$s-t=\frac{1}{4}\pi$ として積和の公式を用いると

$$\cos t\cos s=\tfrac{1}{2}\big[\cos(2t+\tfrac{1}{4}\pi)+\cos\tfrac{1}{4}\pi\big],$$
$$\sin t\sin s=\tfrac{1}{2}\big[\cos\tfrac{1}{4}\pi-\cos(2t+\tfrac{1}{4}\pi)\big].$$

$C=\cos(2t+\frac{1}{4}\pi)$ とおき、$\cos\frac{1}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}$ を用いると

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\tfrac{1}{4}\big(C+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\big)+\tfrac{1}{2}\big(\tfrac{\sqrt{2}}{2}-C\big)\\&=\tfrac{\sqrt{2}}{8}+\tfrac{\sqrt{2}}{4}-\tfrac{1}{4}C=\tfrac{3\sqrt{2}}{8}-\tfrac{1}{4}\cos(2t+\tfrac{1}{4}\pi),\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (iii)

> **考えてみよう** $\theta\geq\frac{1}{4}\pi$ を $\cos\theta$ についての条件に言い換えるにはどうすればよいか。

コサインは $[0,\pi]$ 上で狭義単調減少（strictly decreasing）であり、θ も $\frac{1}{4}\pi$ もこの区間に属するので、

$$\theta\geq\tfrac{1}{4}\pi\iff\cos\theta\leq\cos\tfrac{1}{4}\pi=\tfrac{\sqrt{2}}{2}=\tfrac{4\sqrt{2}}{8}.$$

小問 (ii) より、これは

$$\tfrac{3\sqrt{2}}{8}-\tfrac{1}{4}\cos(2t+\tfrac{1}{4}\pi)\leq\tfrac{4\sqrt{2}}{8}\iff\cos(2t+\tfrac{1}{4}\pi)\geq-\tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

と同値である。$u=2t+\frac{1}{4}\pi$ とおく。t が $[0,2\pi]$ を動くとき、u は長さ 4π の区間 $[\frac{1}{4}\pi,\frac{17}{4}\pi]$ を動く。これは $\cos u$ のちょうど二周期分である。各周期において、$\cos u<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ とな

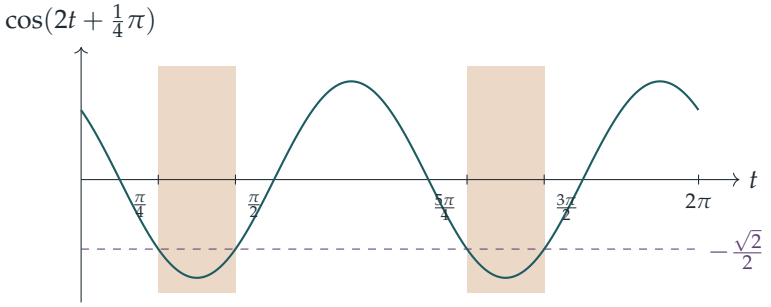
るのはちょうど長さ $\frac{1}{2}\pi$ の開区間（2π を法として $\frac{3}{4}\pi$ と $\frac{5}{4}\pi$ の間）である。ここで条件を満たさない値は

$$u \in (\tfrac{3}{4}\pi, \tfrac{5}{4}\pi) \cup (\tfrac{11}{4}\pi, \tfrac{13}{4}\pi) \iff t \in (\tfrac{1}{4}\pi, \tfrac{1}{2}\pi) \cup (\tfrac{5}{4}\pi, \tfrac{3}{2}\pi),$$

であり、いずれも t について長さ $\frac{1}{4}\pi$ である。したがって $\theta < \frac{1}{4}\pi$ となる時間の合計は $\frac{1}{2}\pi$ であり、$\theta \geq \frac{1}{4}\pi$ となる時間の合計は

$$2\pi - \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{3}{2}\pi,$$

となり、示すべきことが得られた。



網掛けの帯は、曲線が $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ より下に沈む部分、すなわち $\theta < \frac{1}{4}\pi$ となる部分である。

検算

- $t = 0$ のとき：$\mathbf{p} = \mathbf{i}$、$\mathbf{q} = \frac{3}{2\sqrt{2}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k})$ であるから、直接計算すると $\cos\theta = \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ である。公式からは $\frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ が得られる。両者は一致する。
- $\cos\theta$ は $\frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{4} \approx 0.280$ と $\frac{3\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{4} \approx 0.780$ の間にあるので、θ が 0 になることはない。これは納得できる。$\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$ が平行になりうるのは二つの平面が交わる y 軸上だけであるが、P がその軸上にあるのは $t = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$ のとき、Q がその軸上にあるのは $t = \frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$ のときだからである。
- $[0, 2\pi]$ 内の二百万点で t を標本化し、ベクトルから直接 θ を計算すると、$\theta \geq \frac{1}{4}\pi$ となる時間の合計は 4.712389 となり、$\frac{3}{2}\pi \approx 4.712389$ と一致する。

よくある間違い

- $|\mathbf{p}||\mathbf{q}| = 3$ で割るのを忘れる。あるいは、$\mathbf{i}$ と $\mathbf{j}$ の係数が異なるからといって $|\mathbf{q}|$ が変化すると思い込む。

- 不等号の向きを逆にする。コサインは $[0, \pi]$ 上で減少するので、$\theta \geq \frac{1}{4}\pi$ は $\cos\theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ を意味する。
- $\cos(2t + \frac{1}{4}\pi)$ の一周期分しか数えない。$2t$ があるため、t が一周する間にこれは二周する。

STEP のその先へ

原点を中心とする任意の円は、$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ かつ $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ として $\cos s\,\mathbf{a} + \sin s\,\mathbf{b}$ と書ける。これらの条件を外すと楕円（ellipse）が得られ、一般には単位円の線形写像（linear map）による像となる。このように曲線を捉え、動くベクトルどうしのなす角を内積で測ることは、大学一年で学ぶ線形代数（linear algebra）やベクトル解析（vector calculus）の出発点である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、これらの考え方をわかりやすく展開している。

解答例

STEP II 2005、第 8 問

純粋数学 ・ 変数分離形の微分方程式

STEP II 2005、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s2-q8

鍵となる考え方

この方程式は変数分離形（separable）である。y への依存はすべて 1 つの因子 y^2 にまとまっているので、それで割ると $\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ が得られ、これは $-1/y$ の導関数（derivative）である。x についての積分は置換（substitution）$u = 1 + x^2$ で計算できる。奇数乗 x^3 が、u に必要な $x\,\mathrm{d}x$ を供給してくれるからである。2 つ目の曲線については、右辺が z^3 であって y^2 ではないことに注意する。このとき注目すべき量は $1/z^2$ であり、これは $1/y$ とまったく同じ方程式を満たすことがわかる。

解答

y を求める

C 上では $y(0) = 1 > 0$ であり、$x \geq 0$ において方程式の右辺は決して負にならないので、y は決して減少しない。よって常に $y \geq 1$ であり、y^2 で割ってよい：

$$\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^3}{(1+x^2)^{5/2}} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{x^3}{(1+x^2)^{5/2}}.$$

積分については $u = 1 + x^2$ とおく。すると $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ であり、$x^3\,\mathrm{d}x = x^2 \cdot x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(u-1)\,\mathrm{d}u$ となるので：

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{(1+x^2)^{5/2}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \left(u^{-3/2} - u^{-5/2}\right)\mathrm{d}u = -u^{-1/2} + \tfrac{1}{3}u^{-3/2} + \text{定数} \\ &= -\frac{3u-1}{3u^{3/2}} + \text{定数} = -\frac{2+3x^2}{3(1+x^2)^{3/2}} + \text{定数}.\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{1}{y} = \frac{2+3x^2}{3(1+x^2)^{3/2}} + k$$

が、ある定数 k に対して成り立つ。$x=0$ とおくと $1 = \frac{2}{3} + k$ となるので $k = \frac{1}{3}$ であり、求める結果が得られる：

$$\frac{1}{y} = \frac{2+3x^2}{3(1+x^2)^{3/2}} + \frac{1}{3}.$$

x が大きいとき

支配的な冪をくくり出す。分子からは $3x^2$ を、$(1+x^2)^{3/2}$ からは x^3 をくくり出すと：

$$\frac{2+3x^2}{3(1+x^2)^{3/2}} = \frac{3x^2\left(1+\frac{2}{3x^2}\right)}{3x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}} = \frac{1}{x}\left(1+\frac{2}{3x^2}\right)\left(1-\frac{3}{2x^2}+\cdots\right) = \frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

ここで二項展開（binomial expansion）を用いた。x が大きいとき $1/x^2 < 1$ なので、これは妥当である。よって

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{3}+\frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{3}\left(1+\frac{3}{x}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right),$$

であり、$(1+t)^{-1} = 1-t+O(t^2)$ を用いて逆数をとると、

$$y = 3\left(1-\frac{3}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \approx 3-\frac{9}{x},$$

となり、題意が示された。

> **考えてみよう** なぜ $\frac{2}{3x^2}$ や $-\frac{3}{2x^2}$ の項は捨ててよいのに、$\frac{1}{x}$ は捨ててはいけないのか？

目標の $3-\frac{9}{x}$ は $\frac{1}{x}$ のオーダーまで正確である。$1/y$ において、補正項は $\frac{1}{x}$ よりさらに $\frac{1}{x^2}$ 倍だけ小さいので、y には $\frac{1}{x^2}$ 以上のオーダーでしか影響しない。$-\frac{9}{x}$ を生み出すのは、$\frac{1}{x}$ の項そのものである。

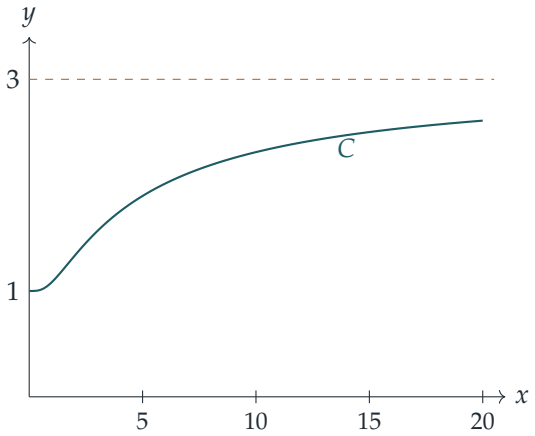
C の概形

ここで曲線の特徴をまとめる。

- $y(0)=1$ であり、$x=0$ で $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$ である。原点の近くでは $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \approx x^3$ なので $y \approx 1+\frac{1}{4}x^4$ となる。つまり曲線は非常に平らに始まる。
- $x>0$ では傾きは真に正なので、y は増加する。
- $1/y$ の第 1 項は正なので $1/y > \frac{1}{3}$ であり、すべての x に対して $1 \le y < 3$ となる。曲線が発散することはない。

▶ $x \to \infty$ のとき $y \to 3$ であり、$3 - \frac{9}{x}$ のように下から近づく。その近づき方は遅く、$y(10) \approx 2.31$ である。

曲線は下に凸（concave up）の状態で始まり、その後 $y = 3$ に向かって平らになっていくので、変曲点（point of inflection）をもたなければならない。



z の曲線

$z \neq 0$ であるところでは z^3 で割ることができる。$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(z^{-2}\right) = -2z^{-3}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ であるから、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{z^2}\right) = -\frac{2}{z^3}\cdot\frac{x^3z^3}{2(1+x^2)^{5/2}} = -\frac{x^3}{(1+x^2)^{5/2}},$$

となり、これはまさに $1/y$ が満たす方程式である。どちらの曲線でも $x = 0$ において $1/z^2 = 1$ であり、これは $1/y$ と同じ値である。よって

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{y}, \qquad \text{すなわち} \qquad z^2 = y.$$

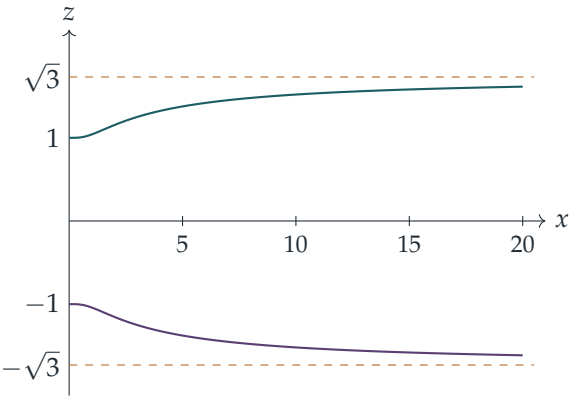
これにより、z が決して 0 に達しないことも確かめられ、割り算が正当化される。$z \neq 0$ である間は $z^2 = y \geq 1$ なので、z は 0 に近づくことができない。したがって連続性（continuity）により、z は最初の符号を保ち、2 つの曲線は次のようになる：

$$z = \sqrt{y} \quad (z(0) = 1), \qquad z = -\sqrt{y} \quad (z(0) = -1).$$

上側の曲線は 1 から $\sqrt{3}$ に向かって上昇し、やはり平らに始まる（今度は $z \approx 1 + \frac{1}{8}x^4$）。また x が大きいとき

$$z = \sqrt{3}\left(1 - \frac{3}{x} + \cdots\right)^{1/2} \approx \sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2x}.$$

下側の曲線は、これを x 軸に関して折り返したものである。すなわち -1 から漸近線（asymptote）$z = -\sqrt{3}$ に向かって下降する。



考えてみよう $z(0) = -1$ の曲線が、もう一方の曲線を平行移動したり、何らかの変換をしたりした単なるコピーではないのはなぜか？

この方程式は z について奇である。すなわち z を $-z$ に置き換えると、両辺がともに -1 倍になる。よって $z(x)$ が解ならば $-z(x)$ も解であり、-1 から始まる解は $+1$ から始まる解の折り返しである。これは $z = \pm\sqrt{y}$ と合致する。

検算

- 答えを微分する。$1/y = u^{-1/2} - \frac{1}{3}u^{-3/2} + \frac{1}{3}$ とすると、$\mathrm{d}(1/y)/\mathrm{d}x = 2x\left(-\frac{1}{2}u^{-3/2} + \frac{1}{2}u^{-5/2}\right) = -x^3u^{-5/2}$ となり、必要な式が得られる。
- もとの方程式の数値解（ルンゲ＝クッタ法、Runge–Kutta）は $y(1) = 1.08391$、$y(5) = 1.89777$ を与え、公式と有効数字 10 桁以上で一致する。z の方程式を数値的に解くと $z(5) = \pm 1.37759 = \pm\sqrt{y(5)}$ となる。
- $x = 100$ のとき公式は $y = 2.9126$ を与え、これに対して $3 - \frac{9}{x} = 2.91$ である。差は約 $27/x^2$ であり、$O(1/x^2)$ の誤差と整合する。

よくある間違い

- 負号を落とす：$\int y^{-2}\,\mathrm{d}y = -y^{-1}$。
- $3 - \frac{9}{x}$ が 3 に「近く見える」ので、$y \to 3$ は速いと結論してしまう。$x = 10$ でも、曲線はまだ約 2.3 にすぎない。
- 両方の曲線について $z = \sqrt{y}$ と書いてしまう。あるいは、z が符号を変えられない理由を説明し損なう。

STEP のその先へ

どちらの方程式も $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f(x)\,y^n$ の形をしており、これは**ベルヌーイの微分方程式**（Bernoulli equation）の特別な場合である。この方程式は置換 $w = y^{1-n}$ によって常に線形方程式に帰着される。私たちが用いたのはまさにこの置換、すなわち $w = 1/y$ と $w = 1/z^2$ である。「同じ方程式、同じ初期値、ゆえに同じ関数」という論法は、1 階微分方程式に対する解の存在と一意性の定理（existence and uniqueness theorem、ピカール＝リンデレフ（Picard–Lindelöf）の定理）の一例である。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は、その両方を扱っている。

解答例

STEP II 2005、第 9 問

力学 ・ 斜面上の摩擦

> **STEP II 2005、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q9

鍵となる考え方

2 つの質点を別々に扱う。A には外から加える力がないので、A の運動方程式から、糸が与えるべき張力（tension）が決まる。自由度はすべて、B に加える力 P の**向き**にある。P を傾けると B にはたらく垂直抗力（normal reaction）が変わり、したがって B にはたらく摩擦力（friction）も変わる。P を斜面から離れる向きに傾けると、斜面に沿う成分の一部が無駄になるが、摩擦力が変化する。最適な傾きは、この 2 つの効果がつり合うところにある。結局、最大化すべき式は $a\cos\theta + b\sin\theta$ の形になる。

解答

A と B を質点（particle）とみなし、糸は軽く伸び縮みしない（light and inextensible）ものとして、ℓ に沿って張られているとする。P は ℓ を含む鉛直面内ではたらくとする。斜面を横切る向きの P の成分は何の役にも立たないからである。ここで

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

に注意する。したがって $\mu_B = \tan 30^\circ$ であり、B 単独ではちょうどすべり出す直前の状態にある。また $\mu_A = \frac{1}{2}\tan 30^\circ$ なので、A 単独ではすべってしまう。

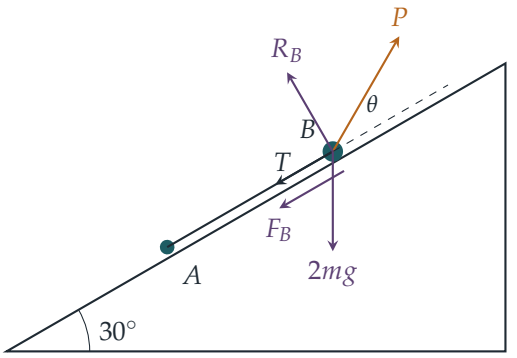
質点 A。斜面に垂直な方向に力を分解すると $R_A = mg\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$ であるから、A にはたらく摩擦力の最大値は

$$\mu_A R_A = \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}mg = \frac{1}{4}mg.$$

である。重力の斜面下向きの成分は $mg\sin 30^\circ = \frac{1}{2}mg$ である。

質点 B。P が ℓ の上向きの方向となす角を、斜面から離れる向きに測って θ とする（θ

が負のときは、P が B を斜面に押しつけることを意味する)。張力を T とする。



図では、小問 (i) の場合と同じく、摩擦力 F_B が斜面下向きにはたらくように描いてある。斜面に垂直な方向について

$$R_B + P\sin\theta = 2mg\cos 30^\circ \quad \Longrightarrow \quad R_B = \sqrt{3}\,mg - P\sin\theta.$$

したがって、B にはたらきうる摩擦力の最大値は

$$\mu_B R_B = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\,mg - P\sin\theta\right) = mg - \tfrac{1}{\sqrt{3}}P\sin\theta.$$

である。B にはたらく重力の斜面下向きの成分は $2mg\sin 30^\circ = mg$ である。

小問 (i)

質点が ℓ に沿って上向きに動くためには、それぞれにはたらく摩擦力は斜面下向きである。P が最小のとき、両方の質点がちょうど動き出す直前にあるので、どちらの摩擦力も最大摩擦力（limiting friction）に達している。

A が上向きに動くには、糸が重力の成分と摩擦力に打ち勝たなければならない：

$$T = \tfrac{1}{2}mg + \tfrac{1}{4}mg = \tfrac{3}{4}mg.$$

B については、斜面に沿う方向で、P の成分が T、重力の成分、最大摩擦力に打ち勝たなければならない：

$$P\cos\theta = \tfrac{3}{4}mg + mg + \left(mg - \tfrac{1}{\sqrt{3}}P\sin\theta\right),$$

$$P\left(\cos\theta + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right) = \tfrac{11}{4}mg.$$

考えてみよう P を斜面から離れる向きに傾けると、P の斜面に沿う成分は小さくなるのに、なぜそれが有利にはたらくのだろうか。

B をわずかに持ち上げると R_B が小さくなり、したがって P が打ち勝つべき摩擦力も小さくなる。小さな傾き θ に対して、$\cos\theta$ は $1-\frac{1}{2}\theta^2$ 程度しか減らないが、$\sin\theta$ は θ 程度で増える。そのため、はじめのうちは摩擦力が減る効果のほうが勝つ。最適な角を求めるために

$$\cos\theta+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta=\tfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\tfrac{1}{2}\sin\theta\right)=\tfrac{2}{\sqrt{3}}\cos(\theta-30^\circ).$$

と変形する。これは高々 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ であり、等号が成り立つのは $\theta=30^\circ$ のときに限る。P にこの係数を掛けたものが $\frac{11}{4}mg$ に等しくなければならないので、P はこの係数が最大のとき最小になる：

$$P_{\min}=\tfrac{11}{4}mg\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}=\tfrac{11}{8}\sqrt{3}\,mg,$$

これが求める結果である。B が斜面から離れないことを確かめておく必要がある：

$$R_B=\sqrt{3}\,mg-\tfrac{11}{8}\sqrt{3}\,mg\cdot\tfrac{1}{2}=\tfrac{5}{16}\sqrt{3}\,mg>0.$$

よって P は ℓ を含む鉛直面内で、ℓ に対して斜面から離れる側に 30° の向きにはたらく。すなわち、**水平から上向きに 60° の向き**に、斜面の上方へ引くようにはたらく（斜面となす最適な角が $\arctan\mu_B$、すなわち B に対する摩擦角（angle of friction）であることに注意しよう）。

小問 (ii)

今度は P は系が斜面をすべり落ちるのを止めればよいので、各質点にはたらく摩擦力は斜面上向きである。P がなければ、A は単独では静止していられない。重力の成分 $\frac{1}{2}mg$ が最大摩擦力 $\frac{1}{4}mg$ を上回るからである。したがって、糸が A を引き止めなければならない：

$$T\geq\tfrac{1}{2}mg-\tfrac{1}{4}mg=\tfrac{1}{4}mg.$$

特に、糸はたるまずに張っていなければならない。B がすべり落ちないためには、斜面上向きの力が T と重力の成分につり合えなければならない：

$$P\cos\theta+\left(mg-\tfrac{1}{\sqrt{3}}P\sin\theta\right)\geq T+mg.$$

左辺は T によらないので、P が最小になるのは張力が最小の $T=\frac{1}{4}mg$ のときである。このとき

$$P\left(\cos\theta-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right)\geq\tfrac{1}{4}mg.$$

ここで $\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos(\theta+30^\circ)\leq\frac{2}{\sqrt{3}}$ であり、等号は $\theta=-30^\circ$ のとき成り立つ。今回の最適な向きは B を斜面に**押しつける**向きであり、これにより R_B が大きくなって、B を支える摩擦力も大きくなる。よって大きさの最小値は

$$P_{\min}=\tfrac{1}{4}mg\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}=\tfrac{1}{8}\sqrt{3}\,mg.$$

である。この力は ℓ の上向きの方向から下側に 30° の向きにはたらく。ℓ は 30° の傾きで上っているので、この向きは水平であり、B を斜面のほうへ水平に押す力である。この値のとき、A と B はともに極限つり合い（limiting equilibrium）の状態にあり、$T = \frac{1}{4}mg$ である。

検算

- $m = g = 1$ として数値的に確かめた。鉛直面内の P のあらゆる向きについて走査し、各向きに対する P の最小値を二分法（bisection）で求めた。(i) では最小値は $2.3816 \approx \frac{11}{8}\sqrt{3}$ で、斜面に対して 30.0° の向きであった。(ii) では $0.2165 \approx \frac{1}{8}\sqrt{3}$ で、-30.0°、すなわち水平の向きであった。また、(ii) の最小値において系全体のつり合いが実際に成り立つことも確認した。
- P が斜面に沿う場合（$\theta = 0$）の (i) の力の総計：$P = \frac{1}{2}mg + \frac{1}{4}mg + mg + mg = \frac{11}{4}mg \approx 2.75mg$ が必要である。これは $2.38mg$ より大きく、当然そうなるべき結果である。
- P が斜面に沿う場合の (ii) では、系に必要な力は $\frac{3}{2}mg - \frac{1}{4}mg - mg = \frac{1}{4}mg$ である。水平に押すほうが $\frac{\sqrt{3}}{8}mg \approx 0.217mg$ で済み、より効率がよい。

よくある間違い

- P が斜面に沿ってはたらくと思い込むこと。問題が求めているのは**大きさ**の最小値なので、向きは自由に選べる。
- $P\sin\theta$ が R_B を変え、したがって B にはたらく最大摩擦力も変えることを忘れること。
- (ii) で、(i) と同じ摩擦力の向きをそのまま使うこと。すべり落ちることが問題になる場合、摩擦力は斜面上向きにはたらく。

STEP のその先へ

2 つの小問はどちらも同じ原理に基づいている。摩擦に逆らう最も効率のよい力は、運動の方向と摩擦角 $\lambda = \arctan\mu$ をなす。(i) ではその力は斜面から離れる向きに傾き、(ii) では斜面に押しつける向きに傾く。これは、垂直抗力と最大摩擦力が合わさって、法線と角 λ をなす 1 つの「全抗力（total reaction）」になるからである。この全抗力で考えると、多くの摩擦の問題が力の三角形（triangle of forces）の幾何に帰着する。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、摩擦と束縛

運動を大学 1 年生のレベルで丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 2005、第 10 問

力学 ・ 放物体の衝突

STEP II 2005、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s2-q10

鍵となる考え方

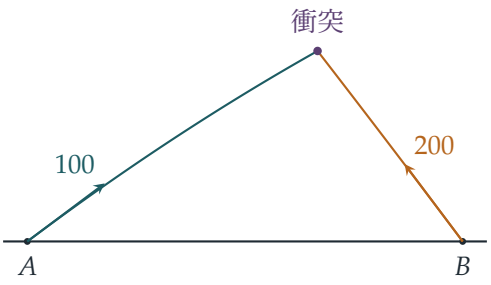
2 発のミサイルはどちらも放物運動をする物体（projectile）なので、任意の時刻における各ミサイルの位置を書き下すことができる。衝突（collision）とは、2 つの位置が同じ時刻に一致することである。これにより、衝突時刻と T の 2 つを未知数とする 2 つの方程式（水平方向と鉛直方向）が得られる。水平方向の方程式は 1 次なので、これを用いて衝突時刻を消去（eliminate）でき、鉛直方向の方程式は T についての 2 次方程式（quadratic equation）になる。そのうえで、どちらの解（root）が物理的に意味をもつかを判断しなければならない。

解答

設定

2 発のミサイルをどちらも、空気抵抗（air resistance）を受けずに重力のみのもとで自由に運動する質点（particle）としてモデル化する。A を原点とし、AB に沿って x 軸をとり（したがって B は $x = 180$ にある）、鉛直上向きに y 軸をとる。時刻 t は 1 発目のミサイルの発射から秒単位で測る。

1 発目のミサイルについて、$\sin\alpha = \frac{3}{5}$ から $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ であり、初速度の成分は $100 \cdot \frac{4}{5} = 80$ と $100 \cdot \frac{3}{5} = 60$ である。2 発目については、$\sin\beta = \frac{4}{5}$ から $\cos\beta = \frac{3}{5}$ である。これは A に向かって進むので、成分は $-200 \cdot \frac{3}{5} = -120$ と $200 \cdot \frac{4}{5} = 160$ である。



$s = t - T$ を 2 発目の発射からの経過時間とする。このとき、両方が飛行中である間は

$$\begin{aligned} &1\text{ 発目のミサイル：} \quad x = 80t, && y = 60t - 5t^2, \\ &2\text{ 発目のミサイル：} \quad x = 180 - 120s, && y = 160s - 5s^2. \end{aligned}$$

衝突

衝突時には x 座標が一致するので

$$80t = 180 - 120(t - T) \quad \Longrightarrow \quad 200t = 180 + 120T \quad \Longrightarrow \quad t = 0.9 + 0.6T,$$

であり、したがって $s = t - T = 0.9 - 0.4T$ である。

y 座標も一致するので $60t - 5t^2 = 160s - 5s^2$、すなわち $t - s = T$ を用いて

$$60t - 160s = 5(t^2 - s^2) = 5(t - s)(t + s) = 5T(t + s),$$

となる。t と s の式を代入すると

$$\begin{aligned} 60t - 160s &= 60(0.9 + 0.6T) - 160(0.9 - 0.4T) = 100T - 90, \\ 5T(t + s) &= 5T(1.8 + 0.2T) = 9T + T^2. \end{aligned}$$

これらを等しいとおくと

$$T^2 - 91T + 90 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (T - 1)(T - 90) = 0,$$

となるので、$T = 1$ または $T = 90$ である。

考えてみよう　どちらの解も方程式を満たす。なぜ $T = 90$ は答えになりえないのだろうか。

$T = 90$ のとき $s = 0.9 - 36 = -35.1$ となる。これは「衝突」が 2 発目のミサイルの発射より 35.1 秒前に起こることを意味する。（さらにその位置は地面よりはるか下である。方程式は実際の飛行の範囲を越えて延長された放物線を表しているのである。）

したがって、この解は物理的ではない。そもそも 1 発目のミサイルが空中にあるのは $2 \cdot 60/10 = 12$ 秒間なので、それよりずっと前に着地しているはずである。

$T = 1$ のとき $t = 1.5$、$s = 0.5 > 0$ となり、両方のミサイルが飛行中である。高さは $60(1.5) - 5(1.5)^2 = 78.75$ と $160(0.5) - 5(0.5)^2 = 78.75$ でどちらも正であり、両ミサイルとも $x = 120$ にある。よって

$$T = 1 \text{ 秒}.$$

検算

$T = 1$ を代入し直すと、$t = 1.5\,\mathrm{s}$ において両ミサイルは $(120, 78.75)$ メートルの位置にあり、これは厳密な分数計算でも確かめた。発射の遅れを $1\,\mathrm{s}$ として両方の運動を数値的に時間刻みで追うと、ミサイル間の距離は $t = 1.5\,\mathrm{s}$ で実質的に 0 まで減少する。妥当性の確認として、衝突位置 $x = 120$ は A と B の間にあり、そこでの 1 発目のミサイルの鉛直方向の速度は $60 - 15 = 45\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ なので、まだ上昇中である。

よくある間違い

- 両方のミサイルに同じ時間変数を用いてしまう。2 発目のミサイルの飛行時間は t ではなく $t - T$ である。
- 2 発目のミサイルが x 軸の負の向きに進むことを忘れる。
- $t - T > 0$ を確認せずに $T = 90$ を残してしまう。

STEP のその先へ

これをもっと鮮やかに見る方法がある。両ミサイルは同じ加速度 g をもつので、両方が飛行中になれば、その**相対速度**（relative velocity）は一定であり、互いに相手が直線運動をしているように見える。衝突が起こるのは、ちょうどその相対速度が時刻 T における両者を結ぶ直線に沿った向きをもつときであり、これを式に書くと同じ 2 次方程式が得られる。このように自由落下する座標系（freely falling frame）に移ることは、アインシュタイン（Einstein）の等価原理（equivalence principle）への第一歩である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、相対運動と非慣性系（non-inertial frame）を丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 2005、第 11 問

力学 ・ 斜面上の摩擦

STEP II 2005、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

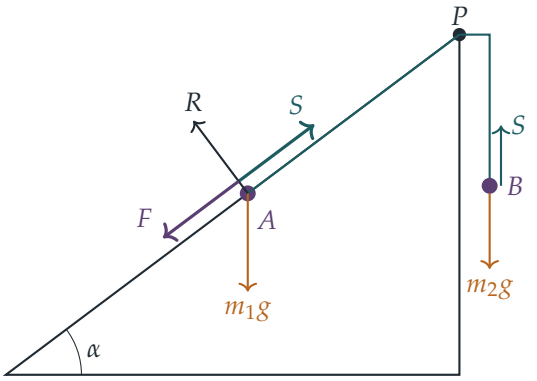
step.maths.org/questions/05-s2-q11

鍵となる考え方

$\tan\alpha = \frac{3}{4}$ より 3–4–5 の直角三角形が得られるので、$\sin\alpha = \frac{3}{5}$、$\cos\alpha = \frac{4}{5}$ であり、A にはたらくすべての力は $m_1 g$ のきれいな倍数になる。すると A の運動は、加速度が一定である三つの段階に分かれる。糸に引かれて上る段階、自由に滑り上がる段階、そして滑り落ちる段階である。後の二つの段階の間で摩擦力（friction）の向きが変わり、この問題の微妙な点はそこに隠れている。

解答

A と B を質点（particle）、糸を軽くて伸びないもの、滑車をなめらかなものとしてモデル化する。したがって張力（tension）S は両側で等しい。$\alpha = \arctan\frac{3}{4}$ とおくと、$\sin\alpha = \frac{3}{5}$、$\cos\alpha = \frac{4}{5}$ である。



糸が張っている間の加速度

斜面に垂直な方向には A は加速度をもたないので、

$R = m_1 g\cos\alpha = \frac{4}{5}m_1 g,$　　であり、最大摩擦力（limiting friction）は　　$\mu R = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}m_1 g = \frac{2}{5}m_1 g.$

まず、系が動くことを確かめる。もし B が下降するなら、A は斜面を上ることになり、重力の斜面方向の成分 $\frac{3}{5}m_1 g$ と、高々 $\frac{2}{5}m_1 g$ の摩擦力がそれを妨げる。その合計は高々 $m_1 g$ である。逆向きに引くのは B の重力 $m_2 g$ であり、$m_2 > m_1$ なので、摩擦力では系を静止させておけない。したがって B は下降し、A は斜面を上り、A にはたらく摩擦力は最大摩擦力となって斜面に沿って下向きにはたらく。

共通の加速度を a とする。A（斜面に沿って上向き）と B（下向き）についてニュートンの運動の第二法則（Newton's second law）を用いると、

$$m_1 a = S - \tfrac{3}{5}m_1 g - \tfrac{2}{5}m_1 g = S - m_1 g,$$
$$m_2 a = m_2 g - S.$$

辺々を加えると $(m_1 + m_2)a = (m_2 - m_1)g$ となるので、

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\, g,$$

であり、これが示すべきことであった。$a = kg$ と書くと便利である。ここで $k = \dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}$ であり、$0 < k < 1$ である。

最高点に達する時刻

時刻 T において、A は速さ $u = aT = kgT$ で斜面を上っており、それまでに $\frac{1}{2}kgT^2$ だけ進んでいる。

糸が切れると S はなくなる。A はまだ斜面を上っているので、摩擦力は依然として斜面に沿って下向きにはたらき、斜面下向きの力の合計は $\frac{3}{5}m_1 g + \frac{2}{5}m_1 g = m_1 g$ である。したがって A はちょうど g で減速し、さらに時間

$$\frac{u}{g} = kT.$$

が経過した後に静止する。よって A は、放してから時刻

$$T + kT = (1+k)T = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\, T$$

に最高点に達する。（A が滑車に達することはないと与えられているので、この段階が途中で打ち切られることはない。）この段階で A はさらに $\dfrac{u^2}{2g} = \frac{1}{2}k^2 gT^2$ だけ進むので、放した点から斜面に沿って上った距離の合計は

$$d = \tfrac{1}{2}kgT^2 + \tfrac{1}{2}k^2 gT^2 = \tfrac{1}{2}k(1+k)gT^2.$$

である。

考えてみよう A が止まった後、そこにとどまるだろうか？

摩擦力で支えられる場合に限り、とどまる。重力の斜面下向きの成分は $\frac{3}{5}m_1g$ であるが、摩擦力は高々 $\frac{2}{5}m_1g$ しか与えられない。同値な言い方をすれば、$\tan\alpha = \frac{3}{4} > \frac{1}{2} = \mu$ である。したがって A は滑り落ち、今度は摩擦力は斜面に沿って**上向き**にはたらく。斜面下向きの合力は $\frac{3}{5}m_1g - \frac{2}{5}m_1g = \frac{1}{5}m_1g$ なので、A は斜面に沿って $\frac{1}{5}g$ の加速度で下る。これは上るときの減速よりずっと穏やかである。

質量の比

最高点で静止した状態から、A は時間 t_d をかけて距離 d を滑り戻り、放した点に戻る。ここで

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{5}g\,t_d^2 = d = \tfrac{1}{2}k(1+k)gT^2, \qquad \text{so} \qquad t_d^2 = 5k(1+k)T^2.$$

である。t_d は最高点に達する時刻 $(1+k)T$ に等しいと与えられている。両辺を 2 乗すると、これは

$$(1+k)^2T^2 = 5k(1+k)T^2.$$

を意味する。正である $(1+k)T^2$ で割ると $1+k=5k$ となり、$k=\frac{1}{4}$ を得る。T が消えたことに注意せよ。このため、糸がいつ切れても等式が成り立ち、しかも k がただ一つに定まるのである。すると

$$\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1} = \frac{1}{4} \iff 4m_2-4m_1 = m_2+m_1 \iff 3m_2 = 5m_1,$$

よって

$$m_1 : m_2 = 3 : 5.$$

検算

- 極限の場合：$m_2 \to m_1$ ならば $k \to 0$ であり、最高点に達する時刻は T に近づく（失うべき速さがほとんどない）。$m_2 \gg m_1$ ならば $k \to 1$ であり、A は引かれていたのと同じ時間だけ惰性で進む。速さ gT に達してから g で減速するのだから、これは予想どおりである。
- $m_1=3$、$m_2=5$、$T=1\,\mathrm{s}$ とすると $k=\frac{1}{4}$ である。最高点に達するのは 1.25 s で、$d=\frac{5}{32}g$ であり、下りにかかる時間は $\sqrt{2d/(g/5)} = \sqrt{25/16} = 1.25\,\mathrm{s}$ である。三つの段階すべてを逐次的に数値シミュレーションしたところ、T のいくつかの値について、どちらの時間も 1.250 s となった。

よくある間違い

- A が滑り戻り始めるときに摩擦力の向きが逆になることを忘れ、下向きの加速度として $\frac{1}{5}g$ ではなく g（あるいは $\frac{3}{5}g$）を用いてしまう。
- 下りの距離を、放した点からではなく、糸が切れた点からだけ測ってしまう。
- A が実際に滑り戻ることを確かめない。これには $\tan\alpha > \mu$ が必要である。

STEP のその先へ

摩擦力は、運動の状態に依存する力の典型例である。速度に応じて向きが切り替わり、物体が静止している間はその大きさに上限がある。このため運動は区分的になり、段階ごとに異なる運動方程式が成り立つ。同じ考え方が、きしむ蝶番や地震の断層のようなスティック・スリップ現象（stick–slip phenomena）を支配している。Kleppner and Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、大学 1 年の物理学が求める丁寧さで、摩擦と束縛運動を扱っている。

解答例

STEP II 2005、第 12 問

確率・統計 ・ ベイズの定理

STEP II 2005、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s2-q12

鍵となる考え方

これは、公平な硬貨を事前分布（prior）とするベイズの定理（Bayes' theorem）である。硬貨が公平であるから、回答が与えられたときに表である確率が $\frac{1}{2}$ になるのは、硬貨が表であっても裏であっても、その回答が**同じ確率で起こる**（equally likely）とき、かつそのときに限る。したがって各小問では、二つの尤度（likelihood）$\mathrm{P}(\text{回答} \mid H)$ と $\mathrm{P}(\text{回答} \mid T)$ を比べればよく、それらを求めるにはどちらの双子がオンラインであるかで条件付けをすればよい。

解答

硬貨が表である事象、裏である事象をそれぞれ H、T とすると、$\mathrm{P}(H) = \mathrm{P}(T) = \frac{1}{2}$ である。Anna がオンラインである事象を A、Bella がオンラインである事象を B とし、$\mathrm{P}(A) = p$、$\mathrm{P}(B) = q = 1 - p$ とする。誰がオンラインであるかは硬貨とは無関係であるから、A と B は H と独立（independent）である。小問 (ii) と (iii) では、硬貨は一度だけ投げられ、二通の電子メールはどちらも同じ双子、すなわちこちらがメールを書いたときにオンラインであった方が答えるものと解釈する（もう一つの解釈については最後の注意を参照のこと）。

一つの回答が正直である全体の確率を $t = ap + bq$ とおく。

回答の任意の記録 E に対して、$\mathrm{P}(H) = \mathrm{P}(T)$ のもとでベイズの定理より

$$\mathrm{P}(H \mid E) = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{P}(E \mid H)}{\frac{1}{2}\mathrm{P}(E \mid H) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(E \mid T)} = \frac{\mathrm{P}(E \mid H)}{\mathrm{P}(E \mid H) + \mathrm{P}(E \mid T)}.$$

これが $\frac{1}{2}$ に等しいのは、$\mathrm{P}(E \mid H) = \mathrm{P}(E \mid T)$ のとき、かつそのときに限る。この一つ

の観察が仕事の大部分を担う。

小問 (i)

回答が「はい」である事象を Y とする。硬貨が表ならば、「はい」は真実である。誰がオンラインかで条件付けると、

$$\mathrm{P}(Y \mid H) = pa + qb = t.$$

硬貨が裏ならば、「はい」は嘘であるから、

$$\mathrm{P}(Y \mid T) = p(1-a) + q(1-b) = (p+q) - (ap+bq) = 1 - t.$$

よって

$$\mathrm{P}(H \mid Y) = \frac{t}{t + (1-t)} = t = ap + bq.$$

したがって $\mathrm{P}(H \mid Y) = \frac{1}{2}$ となるのは $ap + bq = \frac{1}{2}$ のとき、すなわち $2(ap+bq) = 1$ のとき、かつそのときに限る。これが示すべきことであった。

小問 (ii)

「はい」の次に「いいえ」が返ってくる事象を E とする。Anna がオンラインであるとしよう。彼女の二つの回答は独立であり、硬貨がどちらの面を出していても、ちょうど一方が真実である：

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(E \mid H \cap A) &= a(1-a) && \text{（正直な「はい」、次に嘘）,} \\ \mathrm{P}(E \mid T \cap A) &= (1-a)a && \text{（嘘、次に正直な「いいえ」）.} \end{aligned}$$

これらは等しい。同様に $\mathrm{P}(E \mid H \cap B) = b(1-b) = \mathrm{P}(E \mid T \cap B)$ である。したがって

$$\mathrm{P}(E \mid H) = pa(1-a) + qb(1-b) = \mathrm{P}(E \mid T),$$

となり、上の観察により、p、a、b の値によらず $\mathrm{P}(H \mid E) = \frac{1}{2}$ である。

考えてみよう なぜここでは何の条件もなしに、ちょうど $\frac{1}{2}$ が得られるのだろうか。

矛盾する回答は、硬貨がどちらの面を出していても、双子が一度は真実を言い、一度は嘘をついたことを意味する。その組合せは表のもとでも裏のもとでも同じ確率で起こるので、硬貨については何の情報ももたらさず、事前確率 $\frac{1}{2}$ がそのまま残るのである。

小問 (iii)

今度は「はい」の次に「はい」が返ってくる事象を E とする。表ならば二つの回答はどちらも真実であり、裏ならばどちらも嘘である。誰がオンラインかで条件付けると、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E \mid H) &= pa^2 + qb^2,\\ \mathrm{P}(E \mid T) &= p(1-a)^2 + q(1-b)^2.\end{aligned}$$

差をとり、$(1-a)^2 = 1 - 2a + a^2$ を用いると、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E \mid H) - \mathrm{P}(E \mid T) &= p\big(a^2 - (1-a)^2\big) + q\big(b^2 - (1-b)^2\big)\\ &= p(2a-1) + q(2b-1)\\ &= 2(ap+bq) - (p+q)\\ &= 2(ap+bq) - 1.\end{aligned}$$

よって $2(ap+bq) = 1$ ならば二つの尤度は等しく、$\mathrm{P}(H \mid E) = \frac{1}{2}$ となる。これが示すべきことであった。

(実際には、この計算はそれ以上のことを示している。尤度の差はちょうど $2(ap+bq)-1$ であるから、$\mathrm{P}(H \mid E) = \frac{1}{2}$ が成り立つのは $2(ap+bq) = 1$ のとき、**かつそのときに限る**。これは小問 (i) と同じ条件である。)

注意：もう一つの解釈

そうではなく、電子メールごとに、たまたまオンラインである双子が独立に新しく選ばれるとすると、各回答はそれぞれ独立に確率 t で正直である。このとき (ii) では $\mathrm{P}(E \mid H) = t(1-t) = \mathrm{P}(E \mid T)$ となり、(iii) では $\mathrm{P}(E \mid H) = t^2$、$\mathrm{P}(E \mid T) = (1-t)^2$ となって、これらは $t = \frac{1}{2}$ のとき等しい。結論は同じである。

検算

- 双子がどちらも常に正直である（$a = b = 1$）ならば $t = 1 \neq \frac{1}{2}$ であり、(i) では「はい」によって表であることが確実になる：$\mathrm{P}(H \mid Y) = t = 1$。このとき (ii) のような矛盾する回答は起こりえず、これは $a(1-a) = b(1-b) = 0$ と整合する。
- $p = 0.3$、$a = 0.8$、$b = \frac{0.5-0.24}{0.7} \approx 0.371$（したがって $2(ap+bq) = 1$）として、同じ双子が答えるモデルで 2×10^5 回のシミュレーションを行ったところ、$\mathrm{P}(H \mid$ はい、はい$) \approx 0.496$ が得られた。また、数千組の無作為な (p, a, b) について分数による厳密な数え上げを行い、両方の解釈で三つの結果すべてを確認した。
- $p = \frac{1}{2}$、$a = b = 0.9$ のときは条件が成り立たず、二つの「はい」によって $\mathrm{P}(H \mid E) = \frac{81}{82}$ となり、$\frac{1}{2}$ からかけ離れる。したがって (iii) の条件は本当に重要である。

よくある間違い

- 根拠を示さずに $\mathrm{P}(Y \mid T) = 1 - \mathrm{P}(Y \mid H)$ と書くこと。ここではたまたま正しいが、それは裏のもとでの「はい」が嘘であるからにすぎない。そのことを明記すべきである。
- (iii) で、同じ双子が両方に答えると仮定しながら、二つの回答をそれぞれ確率 t で正直な独立の回答として扱うこと。双子が与えられたもとでは独立であるが、無条件では独立ではない。どちらの回答も誰がオンラインかに依存するからである。

STEP のその先へ

ここにある唯一の原理は、事後オッズ（posterior odds）は事前オッズに尤度比（likelihood ratio）を掛けたものに等しい、というものである。すなわち、どちらの仮説のもとでも同じ確率で起こる証拠からは何もわからない。同じ双子が答えるモデルは単純な**混合**（mixture）モデルである。回答は隠れた変数（誰がオンラインか）が与えられたもとでは独立だが、全体としては従属している。これは隠れ変数モデルやベイズモデルの核心にある考え方である。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）には、まさにこの精神に沿った、条件付けとベイズの規則についての優れた解説がある。

解答例

STEP II 2005、第 13 問

確率・統計　・　ポアソン分布と二項分布

> **STEP II 2005、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q13

鍵となる考え方

抽出した各ページについて、誤りが 2 個未満であるか否かのどちらかであり、各ページは互いに独立（independent）にふるまう。したがって Y は n 回の独立な試行における成功の回数を数えており、二項分布（binomial distribution）に従う。それ以降はすべて λ が小さいときに何が起こるかという問題であり、そのための道具は $\mathrm{e}^{-\lambda}$（あるいは $\ln(1+\lambda)$）のマクローリン展開（Maclaurin series）である。打ち消し合わずに残る最初の項だけを残せばよい。

解答

Y の分布

ある特定のページ上の誤りの個数を X とすると、$X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ である。$X \leq 1$ のとき、そのページを**良い**ページとよぶことにする。このとき

$$\mathrm{P}(\text{良い}) = \mathrm{P}(X=0) + \mathrm{P}(X=1) = \mathrm{e}^{-\lambda} + \lambda\mathrm{e}^{-\lambda} = (1+\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda} = p.$$

標本は n 枚の異なるページからなる。異なるページ上の誤りの個数は互いに独立で、いずれも同じポアソン分布（Poisson distribution）$\mathrm{Po}(\lambda)$ に従う。よって、どの n ページを選んでも、事象「ページ j は良い」は互いに独立であり、それぞれの確率は p である。（条件 $n \ll N$ は、抽出元のページが十分たくさんあることを保証しているにすぎない。独立性はモデルから得られるものであり、この条件は独立性には必要ない。）

したがって Y は、成功確率 p の独立な試行を n 回行ったときの成功回数である。特定の k 枚の良いページと $n-k$ 枚の悪いページの組が現れる確率は $p^k q^{n-k}$ であり、どの

k ページが良いかの選び方は $\binom{n}{k}$ 通りあるから、

$$\mathrm{P}(Y=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k},\qquad k=0,1,\ldots,n,$$

ただし $p=(1+\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda}$、$q=1-p$ であり、これが示すべきことであった。すなわち $Y\sim \mathrm{B}(n,p)$ である。

小問 (i)

$\mathrm{e}^{-\lambda}=1-\lambda+\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{1}{6}\lambda^3+\cdots$ と展開し、$1+\lambda$ を掛けると

$$\begin{aligned}p=(1+\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda}&=\left(1-\lambda+\tfrac{1}{2}\lambda^2-\tfrac{1}{6}\lambda^3+\cdots\right)+\left(\lambda-\lambda^2+\tfrac{1}{2}\lambda^3-\cdots\right)\\&=1-\tfrac{1}{2}\lambda^2+\tfrac{1}{3}\lambda^3-\cdots.\end{aligned}$$

λ の項が打ち消し合うので、λ が小さいとき

$$q=1-p=\tfrac{1}{2}\lambda^2-\tfrac{1}{3}\lambda^3+\cdots\approx\tfrac{1}{2}\lambda^2$$

となる。無視した項は $\frac{1}{2}\lambda^2$ に比べて λ 程度の因子だけ小さいからである。

> **考えてみよう** $\mathrm{e}^{-\lambda}$ の最初の項から想像されるように $q\approx\lambda$ とならないのはなぜか？

$\mathrm{e}^{-\lambda}$ から出る $-\lambda$ が、$1+\lambda$ を掛けたことで生じる $+\lambda$ とちょうど打ち消し合うからである。ページが悪いのは誤りが 2 個以上あるときに限り、$\mathrm{P}(X\geq 2)\approx\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{2}\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\approx\frac{1}{2}\lambda^2$ である。これは (i) を別の方法で確かめるよい検証になっている。

小問 (ii)

$\mathrm{P}(Y=n)=p^n$ であり、$p^n\geq 1-\lambda$ を満たす最大の n を求めればよい。（$0<\lambda<1$ のとき）両辺は正であり、ln は増加関数なので、これは

$$n\ln p\geq\ln(1-\lambda).$$

と同値である。ここで $\ln p=\ln(1+\lambda)-\lambda=\left(\lambda-\frac{1}{2}\lambda^2+\cdots\right)-\lambda\approx-\frac{1}{2}\lambda^2$ であり、$\ln(1-\lambda)\approx-\lambda$ である。$\ln p<0$ なので、これで割ると不等号の向きが逆になる：

$$n\leq\frac{\ln(1-\lambda)}{\ln p}\approx\frac{-\lambda}{-\frac{1}{2}\lambda^2}=\frac{2}{\lambda}.$$

よって、そのような最大の n はおよそ $2/\lambda$ である。

(i) を用いて同じことを示すこともできる：$p^n=(1-q)^n\approx 1-nq\approx 1-\frac{1}{2}n\lambda^2$ であり、$1-\frac{1}{2}n\lambda^2\geq 1-\lambda$ となるのはちょうど $n\leq 2/\lambda$ のときである。$(1-q)^n\approx 1-nq$ という近似には nq が小さいことが必要だが、ここでは $nq\approx\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{2}\lambda^2=\lambda$ であり小さいので、この近似は自己無撞着である。

小問 (iii)

$Y > 1$ ならば $Y > 0$ であるから、条件付き確率（conditional probability）は

$$\mathrm{P}(Y > 1 \mid Y > 0) = \frac{\mathrm{P}(Y > 1)}{\mathrm{P}(Y > 0)} = \frac{\mathrm{P}(Y > 0) - \mathrm{P}(Y = 1)}{\mathrm{P}(Y > 0)} = 1 - \frac{npq^{n-1}}{1 - q^n}.$$

（ここで $n \geq 2$ が効いている。これにより $Y > 1$ は起こりうる事象となり、べき q^{n-1} は少なくとも q となる。）次に n を固定して λ を小さくする。このとき $q \approx \frac{1}{2}\lambda^2$ は小さいので、$p \approx 1$ かつ $1 - q^n \approx 1$ となり、

$$\mathrm{P}(Y > 1 \mid Y > 0) \approx 1 - nq^{n-1} \approx 1 - n\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)^{n-1},$$

を得る。最後の段階では (i) を用いた。これが求める結果である。

検算

- $\lambda = 0.8$ として、$n = 5$ ページのポアソン標本を 200,000 回シミュレーションしたところ、$Y = 0, \ldots, 5$ の相対度数は $\mathrm{B}(5, p)$ と 0.002 以内で一致した。
- $\lambda = 0.01$ のとき、$q = 4.967 \times 10^{-5}$ であり、$\frac{1}{2}\lambda^2 = 5 \times 10^{-5}$ と比べてよく合う。
- $\lambda = 0.01$ のとき、$p^n \geq 0.99$ を満たす最大の n の正確な値は 202 であり、$2/\lambda = 200$ と比べてよく合う。（各級数でもう 1 項多く残すと $2/\lambda + \frac{7}{3}$ となるので、$2/\lambda$ が大きくなっても誤差は有界にとどまる。）
- $\lambda = 0.01$、$n = 3$ のとき、正確な値は $1 - \mathrm{P}(Y > 1 \mid Y > 0) = 7.40 \times 10^{-9}$ であり、$3(\lambda^2/2)^2 = 7.5 \times 10^{-9}$ と比べてよく合う。

よくある間違い

- 「誤りが 2 個未満」を $X = 0$ のみ、あるいは $X \leq 2$ と解釈してしまう。
- $(1 + \lambda)\mathrm{e}^{-\lambda}$ の展開を 1 次の項で打ち切り、$q \approx 0$ と結論してしまう。残る最初の項は 2 次の項である。
- (ii) で $\ln p < 0$ で割るときに、不等号の向きを逆にし忘れる。

STEP のその先へ

小問 (ii) は漸近解析（asymptotic analysis）の一例である。条件は積 $n\lambda^2$ によって支配されるので、n の自然なスケールは $1/\lambda$ であり、p^n のような量は $\mathrm{e}^{-n\lambda^2/2}$ のようにふ

るまう。同じ考え方が、二項分布のポアソン近似や、確率論における多くの「まれな事象」の極限の根底にある。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、これらの極限定理を丁寧に展開している。

解答例

STEP II 2005、第 14 問

確率・統計 ・ 混合分布

STEP II 2005、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s2-q14

鍵となる考え方

この密度関数（density）は、すでによく知っている二つの密度関数、すなわち標準正規分布（standard normal distribution）と $[0,\lambda]$ 上の一様分布（uniform distribution）の重み付き混合である。したがって f の積分はすべて正規分布の部分と一様分布の部分に分かれ、それぞれの部分は標準的な事実（全確率が 1 であること、平均（mean）、$\mathrm{E}(X^2)$）から読み取ることができ、難しい積分計算をする必要はない。そのうえで分散（variance）は $\mathrm{E}(X^2)-\mu^2$ から求まる。

解答

定数 k、平均、分散

ϕ と g はどちらも確率密度関数（probability density function）であるから、それぞれ実数全体で積分すると 1 になる。よって

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = k\,[1+\lambda\cdot 1] \quad\Longrightarrow\quad k=\frac{1}{1+\lambda}.$$

平均については、二つの成分の平均を用いる。標準正規分布の平均は 0 であり、$[0,\lambda]$ 上の一様密度 g の平均は $\frac{1}{2}\lambda$ である。ゆえに

$$\mu=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = k\left[\int x\phi(x)\,\mathrm{d}x+\lambda\int xg(x)\,\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{1+\lambda}\left[0+\lambda\cdot\frac{\lambda}{2}\right]=\frac{\lambda^2}{2(1+\lambda)}.$$

同様に、標準正規分布では $\int x^2\phi(x)\,\mathrm{d}x=1$ であり（平均が 0 なので、これはその分散である）、また

$$\int x^2 g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} x^2\,\mathrm{d}x=\frac{\lambda^2}{3}.$$

よって

$$\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{1+\lambda}\left[1 + \lambda \cdot \frac{\lambda^2}{3}\right] = \frac{3+\lambda^3}{3(1+\lambda)}.$$

考えてみよう なぜ $\mathrm{E}(X^2)$ はこのように分けられるのに、分散は分けられないのだろうか？

期待値は積分であり、積分は線形であるから、f が各成分の密度関数の重み付き和であるのと同じ重みで、$\mathrm{E}(X^2)$ は各成分の 2 次モーメント（second moment）の重み付き和になる。分散は線形ではない（μ^2 を含む）ので、まず 2 次モーメントを合成し、そのあとで μ^2 を引かなければならない。そうすると

$$\begin{aligned}\sigma^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2 &= \frac{3+\lambda^3}{3(1+\lambda)} - \frac{\lambda^4}{4(1+\lambda)^2} \\ &= \frac{4(3+\lambda^3)(1+\lambda) - 3\lambda^4}{12(1+\lambda)^2} \\ &= \frac{12+12\lambda+4\lambda^3+4\lambda^4-3\lambda^4}{12(1+\lambda)^2} = \frac{\lambda^4+4\lambda^3+12\lambda+12}{12(1+\lambda)^2},\end{aligned}$$

となり、求める結果が得られる。

$\lambda = 2$ の場合

このとき $k = \frac{1}{3}$ であり、$[0,2]$ 上で $\lambda g(x) = 1$ であるから

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\phi(x) & x < 0 \text{ または} x > 2, \\ \frac{1}{3}\big(\phi(x)+1\big) & 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

また

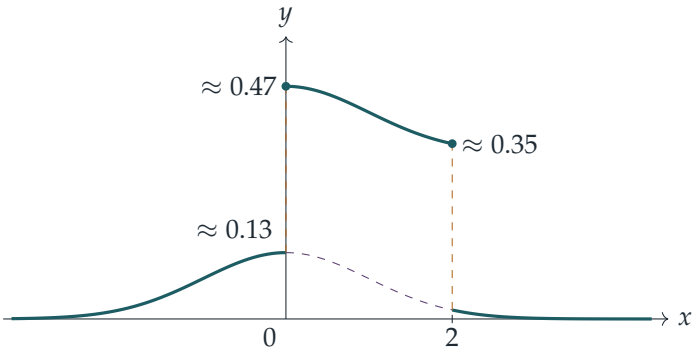
$$\mu = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \qquad \sigma^2 = \frac{16+32+24+12}{12\cdot 9} = \frac{84}{108} = \frac{7}{9}, \qquad \sigma = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

小問 (i)

この曲線は、標準正規分布の釣鐘型曲線を 3 分の 1 倍したものを、区間 $[0,2]$ 上で $\frac{1}{3}$ だけ持ち上げたものである。したがって $x = 0$ で上向きに、$x = 2$ で下向きに跳び、跳びの高さはいずれも $\frac{1}{3}$ である。$\phi(0) = 1/\sqrt{2\pi} \approx 0.399$ および $\phi(2) \approx 0.054$ を用いると、次のようになる。

- 0 のすぐ左では $f \approx 0.133$、0 のすぐ右では $f \approx 0.466$（最大値）である。
- 2 のすぐ左では $f \approx 0.351$、2 のすぐ右では $f \approx 0.018$ である。
- $[0,2]$ 上では、曲線は正規分布の曲線の形に沿って減少する。

▶ $x \to \pm\infty$ のとき $f \to 0$ であり、いたるところで $f > 0$ である。



$[0,2]$ 上のプラム色の破線は比較のために示した $\frac{1}{3}\phi(x)$ であり、実線が $y = f(x)$ である。（縦方向の目盛りは引き伸ばしてある。）

小問 (ii)

$F(x) = \mathrm{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ とおく。$\frac{1}{3}\phi$ を積分すると $\frac{1}{3}\Phi$ となり、$[0,2]$ 上の追加分 $\frac{1}{3}$ は、$[0,2]$ のうち x より左にある部分の長さの $\frac{1}{3}$ 倍だけ寄与する。よって

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\Phi(x) & x < 0, \\ \frac{1}{3}\big(\Phi(x) + x\big) & 0 \le x \le 2, \\ \frac{1}{3}\big(\Phi(x) + 2\big) & x > 2. \end{cases}$$

各部分は $x = 0$ と $x = 2$ で一致する。これは当然であり（点質量（point mass）がなければ累積分布関数（CDF）は連続である）、また $x \to \infty$ のとき $F(x) \to \frac{1}{3}(1+2) = 1$ となる。

小問 (iii)

ここで $\mu + 2\sigma = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{7} \approx 2.43$ であり、これは 2 より大きいので、そこでは F の最後の場合の式を用いる。X は連続型であるから

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(0 < X < \mu + 2\sigma) &= F\big(\tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}\sqrt{7}\big) - F(0) \\ &= \tfrac{1}{3}\big(\Phi(\tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}\sqrt{7}) + 2\big) - \tfrac{1}{3}\Phi(0) \\ &= \tfrac{1}{3}\big(0.9921 + 2 - 0.5\big) = \frac{2.4921}{3} = 0.8307. \end{aligned}$$

検算

- $\lambda \to 0$ とすると一様分布の部分は消える。公式からは $\mu \to 0$ および $\sigma^2 \to \frac{12}{12} = 1$ が得られ、当然そうあるべきように標準正規分布の値と一致する。
- $\lambda = 2$ のとき、全分散の公式（law of total variance、下記参照）を使うと別の方法で同じ答えが得られる。各成分の重みは $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$、分散は $1, \frac{1}{3}$、平均は $0, 1$ である。分散の平均は $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$、平均の分散は $\frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$ であり、合計は $\frac{7}{9}$ となる。
- $\lambda = 0.5, 1, 2, 3.7$ について f を数値積分（中点則（midpoint rule）、0 と λ で区間を分割）したところ、全確率 1、平均、分散の公式が 10^{-6} より良い精度で再現された。$\lambda = 2$ では $\mu = 0.6667$ および $\sigma^2 = 0.7778$ が得られた。
- $\Phi(2.4305)$ を直接計算すると、問題文の 0.9921 ではなく 0.99246 となり、確率は 0.8307 ではなく 0.8308 となる。このわずかな違いは問題文で与えられた値によるものであり、解答ではその値を用いるべきである。

よくある間違い

- 係数 $k = \frac{1}{3}$ を忘れ、全確率が 3 になってしまう。
- 分散を $k[1 + \lambda \cdot \frac{\lambda^2}{12}]$ と計算する、つまり各成分の分散を合成してしまう。混合分布の分散は線形には合成できない。線形に合成できるのは 2 次モーメントである。
- f を連続な曲線として描いてしまう。実際には $x = 0$ と $x = \lambda$ で跳びがある。

STEP のその先へ

総和が 1 となる重み $w_i \geq 0$ を用いた $\sum_i w_i f_i(x)$ という形の密度関数は**混合分布**（mixture distribution）である。これは、確率 w_i で成分 i を選び、そのあと f_i から標本を取り出すことに相当する。ここでの重みは $\frac{1}{1+\lambda}$ と $\frac{\lambda}{1+\lambda}$ である。混合分布の分散は、姿を変えた全分散の公式にほかならない。すなわち、各成分の分散の平均に、各成分の平均の分散を加えたものである。混合分布は、統計学や機械学習（machine learning）におけるクラスタリング（clustering）手法の基礎となっている。Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）は、条件付き期待値（conditional expectation）と全分散の公式をわかりやすく解説している。

解答例

STEP III 2005、第 1 問

純粋数学 ・ 三角方程式とグラフ

STEP III 2005、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s3-q1

鍵となる考え方

sin(何か) = cos(別の何か) という形の方程式はすべて、$\cos B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$ を用いることで、二つの**引数**（argument）についての主張に書き換えられる。これを $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$ に適用すると、$\sin x \mp \cos x$ が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍に等しくなければならないことになるが、$|\sin x \pm \cos x|$ の上界を調べると、この値は小さすぎてそこまで届かないことがわかる。グラフの概形は、内側の引数が短い区間の上しか動かないとき、外側の関数がそれに何をするかを考えれば得られる。

解答

方程式 $\sin A = \cos B$

$\cos B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$ であるから、$C = \frac{\pi}{2} - B$ として $\sin A = \sin C$ の一般解（general solution）を求めればよい。正弦関数は各周期（period）2π の中で $[-1, 1]$ の各値をちょうど 2 回、C と $\pi - C$ でとる（値が ± 1 のときはこの二つは一致する）。よって

$$\sin A = \sin C \iff A = C + 2k\pi \text{ または } A = \pi - C + 2k\pi \quad \text{ある整数} k.$$

$C = \frac{\pi}{2} - B$ を代入すると

$$A = \tfrac{\pi}{2} - B + 2k\pi = (4k+1)\tfrac{\pi}{2} - B,$$
$$\text{または} \quad A = \pi - \tfrac{\pi}{2} + B + 2k\pi = (4k+1)\tfrac{\pi}{2} + B.$$

したがって、$\sin A = \cos B$ となるのは、ある整数 n について $A = (4n+1)\frac{\pi}{2} \pm B$ となるとき、かつそのときに限る。上の各段階はすべて「必要十分」であるから、

両方向が示されている。（「十分」の方向を直接確かめるなら、周期 2π を用いて $\sin\big((4n+1)\frac{\pi}{2} \pm B\big) = \sin\big(\frac{\pi}{2} \pm B\big) = \cos B$ となる。）

上界と方程式 $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$

加法定理（compound angle formula）を用いると

$$\sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\Big(\sin x \cos\tfrac{\pi}{4} \pm \cos x \sin\tfrac{\pi}{4}\Big) = \sqrt{2}\sin\big(x \pm \tfrac{\pi}{4}\big),$$

であり、任意の θ について $|\sin\theta| \le 1$ であるから、すべての x について $|\sin x \pm \cos x| \le \sqrt{2}$ が成り立つ。これが示すべきことであった。

次に、ある x について $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$ が成り立つと仮定する。最初の結果を $A = \sin x$、$B = \cos x$ として用いると、ある整数 n が存在して

$$\sin x = (4n+1)\tfrac{\pi}{2} \pm \cos x, \qquad \text{すなわち} \qquad \sin x \mp \cos x = (4n+1)\tfrac{\pi}{2}.$$

考えてみよう 右辺が小さくなりえないのはなぜか。

$4n+1$ は奇数なので決して 0 にならず、$|4n+1| \ge 1$ である。よって右辺の絶対値は少なくとも $\frac{\pi}{2} \approx 1.571$ である。一方、左辺の絶対値は高々 $\sqrt{2} \approx 1.414$ である。$\sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$ であるから（両辺を 2 乗すると、$\pi^2 > 9 > 8$ より $2 < \frac{\pi^2}{4}$）、これは不可能である。ゆえに $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$ は解をもたない。

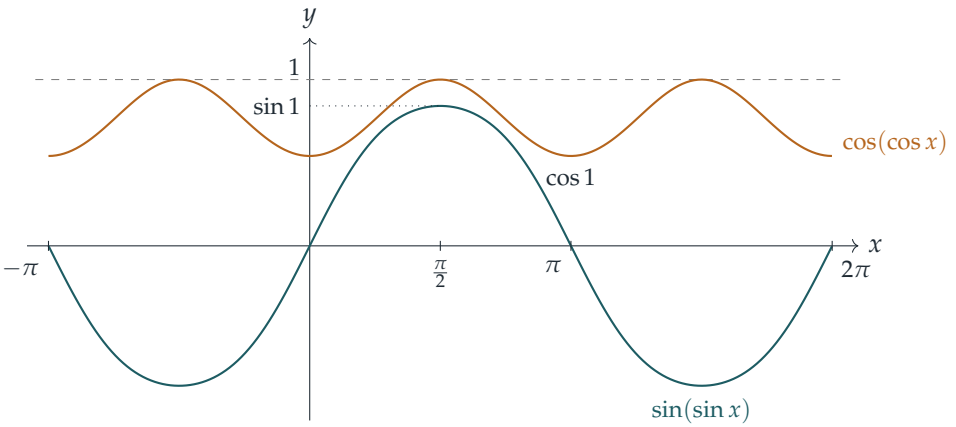
$y = \sin(\sin x)$ と $y = \cos(\cos x)$ のグラフ

$y = \sin(\sin x)$。内側の関数 $\sin x$ は $[-1, 1]$ 上を動き、その区間で sin は増加関数である（$[-1,1] \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ だからである）。よって $\sin(\sin x)$ は $\sin x$ が増加・減少するのとちょうど同じところで増加・減少する。すなわち、周期は 2π で、奇関数（odd function）であり、$x = n\pi$ で 0 となり、$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ で最大値 $\sin 1 \approx 0.841$、$x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ で最小値 $-\sin 1$ をとる。傾き（gradient）$\cos x \cos(\sin x)$ は原点で 1 に等しい。グラフは、少し平たくなった正弦曲線のように見える。

$y = \cos(\cos x)$。$\cos(-u) = \cos u$ かつ $\cos(x+\pi) = -\cos x$ であるから、$\cos(\cos(x+\pi)) = \cos(\cos x)$ となる。すなわちグラフは周期 π をもち、偶関数（even function）である。$[-1,1]$ 上で $\cos u$ は $u = 0$ で最大（$= 1$）、$u = \pm 1$ で最小（$= \cos 1 \approx 0.540$）となる。よって $\cos(\cos x)$ は $\cos x = 0$ となるところ、つまり $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ で極大値 1 をとり、$\cos x = \pm 1$ となるところ、つまり $x = n\pi$ で極小値 $\cos 1$ をとる。値はつねに 0.54 と 1 の間にある。

前の小問より二つの曲線は決して交わらない。さらに $\cos(\cos 0) = \cos 1 > 0 = \sin(\sin 0)$ であるから、連続性（continuity）により、余弦の曲線はいたるところで正弦

の曲線より真に上にある。二つの曲線が最も近づくのは $x \approx 0.88$ 付近（差は約 0.107）で、そこでは $\sin(\sin x)$ はほぼ頂点にあり、$\cos(\cos x)$ はまだ上昇中である。



$y = \sin(2\sin x)$ のグラフ

これもまた周期 2π の奇関数で、$x = n\pi$ に零点をもつ。よって $0 \le x \le \pi$ の範囲を理解すれば十分であり、この範囲でグラフは $x = \frac{\pi}{2}$ に関して対称である（$\sin(\pi - x) = \sin x$ だからである）。

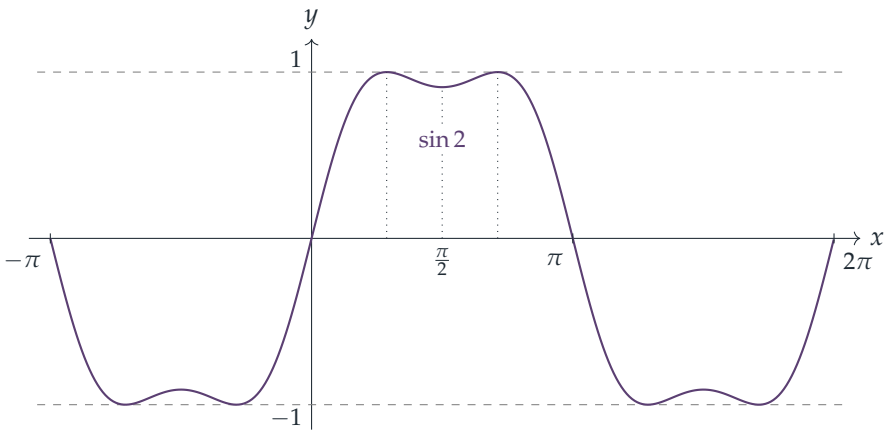
今度の違いは、この区間で内側の引数 $u = 2\sin x$ が $[0, 2]$ 上を動き、しかも $2 > \frac{\pi}{2}$ であることである。したがって、x が 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで増加するとき、

- $\sin x$ が $\frac{\pi}{4}$ まで増加する間、すなわち $x = \arcsin\frac{\pi}{4} \approx 0.903$ までに、u は 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで増加する。その間に $y = \sin u$ は 0 から最大値 1 まで増加する。
- u はさらに $\frac{\pi}{2}$ から 2 まで進み、そこでは $\sin u$ は減少するので、y は $x = \frac{\pi}{2}$ で $\sin 2 \approx 0.909$ まで下がる。

対称性により、y は $x = \pi - \arcsin\frac{\pi}{4} \approx 2.238$ で再び 1 まで上がり、$x = \pi$ で 0 まで下がる。導関数（derivative）で確かめると

$$\frac{dy}{dx} = 2\cos x \cos(2\sin x),$$

となり、これが 0 になるのは $\cos x = 0$ のとき（$\frac{\pi}{2}$ における極小）か、$2\sin x = \pm\frac{\pi}{2}$ のとき（最大値 1）に限られる。原点での傾きは 2 である。$[\pi, 2\pi]$ では図が反転する。すなわち、最小値 -1 が二つあり、その間の $x = \frac{3\pi}{2}$ で極大値 $-\sin 2$ をとる。正弦曲線の各山が、浅いくぼみをもつラクダのこぶのような形に変わったのである。



検算

- $B = 0.3$、$n = 1$ とする。$A = \frac{5\pi}{2} - 0.3$ とすると $\sin A = \cos 0.3 \approx 0.9553$ となり、確かに成り立つ。
- 1 周期にわたる細かい格子点上で $\cos(\cos x) - \sin(\sin x)$ を計算すると、最小値は約 0.107（$x \approx 0.878$ 付近）で、決して 0 にならない。これにより、二つの曲線が交わらないことが確認できる。
- $\sin(2\sin x)$ について $[0, \pi]$ を数値的に調べると、停留点（turning point）はちょうど三つ見つかる。$x \approx 0.903$ と 2.238 における最大値 1、および $\frac{\pi}{2}$ における極小値 $\sin 2 \approx 0.909$ である。

よくある間違い

- $A = \frac{\pi}{2} - B + 2n\pi$ だけを書き、$\sin(\pi - C) = \sin C$ から生じるもう一つの解の族 $A = \frac{\pi}{2} + B + 2n\pi$ を忘れてしまう。
- $n = 0$ が許されることを忘れ、$|4n + 1| \geq 5$ の場合だけを調べてしまう。決定的なのは $\frac{\pi}{2}$ そのものとの比較である。
- $\sin(2\sin x)$ を高さ 1 の単なる正弦曲線として描いてしまう。$2 > \frac{\pi}{2}$ であるため、内側の引数が正弦の頂点を通り越し、それが $x = \frac{\pi}{2}$ でのくぼみを生む。

STEP のその先へ

ここでのグラフはすべて合成（composition）に関するものである。$f(g(x))$ の形は、g の値域が f のグラフのどの部分を覆うかによって決まる。この考えを繰り返す（$\sin(\sin(\sin x))$ など）と、不動点（fixed point）や反復写像の力学系（dynamics of iterated maps）へとつながる。そこでは、$f(f(\cdots f(x)))$ がいつ落ち着くのかが問われる。両辺がとりうる値の範囲を比較するという不等式の議論は、解析学（analysis）全体を通して用いられる手法の簡単な例である。そうした議論が厳密になされる様子を見るには、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門の教科書）がよい。

解答例

STEP III 2005、第 2 問

純粋数学 ・ 変数分離形の微分方程式

STEP III 2005、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s3-q2

鍵となる考え方

この微分方程式（differential equation）は変数分離形（separable）であり、積分すると対数が現れ、それらをまとめると与えられた形になる。距離の問題では、距離そのものではなく距離の 2 乗 $D = x^2 + y^2$ を最小化すれば、平方根を扱わずに済む。曲線上では y^2 が x の関数として明示的に表されるので、D は x だけの関数となり、その導関数（derivative）はきれいに因数分解できる。どの停留点（stationary point）が現れるかは、c と a^2 の大小関係によって決まる。

解答

一般解

（$y \neq 0$ のとき）変数を分離すると、

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\int \frac{x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = -\tfrac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + k,$$

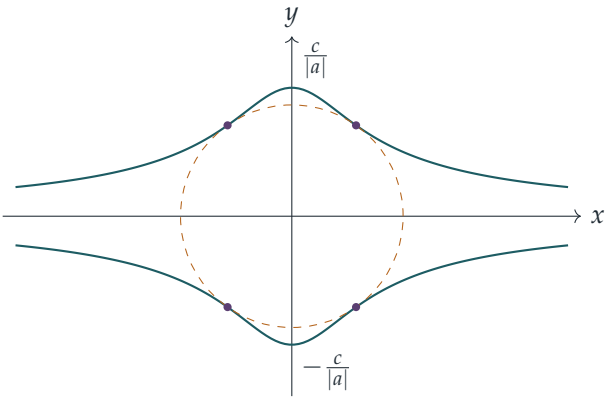
となる。ここで k は定数である。$a \neq 0$ より、すべての x に対して $x^2 + a^2 > 0$ であるから、右辺の対数はいたるところで定義されることに注意する。両辺を 2 倍して指数をとると、

$$y^2 = \frac{\mathrm{e}^{2k}}{x^2+a^2}, \qquad \text{よって} \qquad y^2(x^2+a^2) = c^2,$$

となる。ただし $c^2 = \mathrm{e}^{2k}$ である。y で割ったときに失われた解 $y = 0$ は $c = 0$ の場合にあたるので、c は確かに任意定数である。明示的に書けば、一般解（general solution）は $y = c/\sqrt{x^2+a^2}$ であり、c の符号はどちらでもよい。曲線の方程式には c^2 しか現れないので、以下では $c > 0$ とする。

曲線の概形

曲線 $y^2(x^2+a^2)=c^2$ は 2 つの枝（branch）$y=\pm c/\sqrt{x^2+a^2}$ からなる。この曲線は両方の座標軸に関して対称であり（x^2 と y^2 しか現れないため）、x 軸とは決して交わらない。上側の枝では、x^2+a^2 が最小のとき y は最大となり、$x=0$ で最大値 $c/|a|$ をとる。$|x|\to\infty$ のとき $y\approx\pm c/|x|\to 0$ であるから、x 軸は漸近線（asymptote）である。図は $a=1$、$c=2$ の場合を、小問 (ii) で求める円とともに示したものである。



x^2+y^2 の導関数

$D=x^2+y^2$ とおく。微分方程式を用い、さらに $y^2=c^2/(x^2+a^2)$ を用いると、

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x}=2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x-\frac{2xy^2}{x^2+a^2}=2x\left(1-\frac{c^2}{(x^2+a^2)^2}\right).$$

これは y^2 しか含まないので、どちらの枝でも成り立つ。積の微分法（product rule）を用いてもう一度微分し、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+a^2)^{-2}=-4x(x^2+a^2)^{-3}$ を使うと、

$$\frac{\mathrm{d}^2D}{\mathrm{d}x^2}=2\left(1-\frac{c^2}{(x^2+a^2)^2}\right)+2x\cdot\frac{4c^2x}{(x^2+a^2)^3}=2\left(1-\frac{c^2}{(x^2+a^2)^2}\right)+\frac{8c^2x^2}{(x^2+a^2)^3},$$

となり、示すべき式が得られる。

D の停留点は、$x=0$ または $(x^2+a^2)^2=c^2$ となる点である。$x^2+a^2>0$ かつ $c>0$ であるから、2 つ目の条件は $x^2+a^2=c$、すなわち $x^2=c-a^2$ を意味する。

小問 (i)

$0<c<a^2$ とする。すべての x に対して $x^2+a^2\geq a^2>c$ であるから $(x^2+a^2)^2>c^2$ となり、$\mathrm{d}D/\mathrm{d}x$ の括弧の中は正である。したがって $\mathrm{d}D/\mathrm{d}x$ は x と同符号であり、D は $x<0$ で減少し、$x>0$ で増加する。よって D は $x=0$ で**大域的な**最小値（global

minimum）をとり、それ以外の点では最小とならない。（実際、そこでの第2次導関数（second derivative）は $2(1-c^2/a^4)>0$ であり、これと矛盾しない。）

$x=0$ では $y^2=c^2/a^2$ であるから、最も近い点は

$$\left(0,\ \pm\frac{c}{a}\right),$$

であり、原点からの距離は $c/|a|$ である。これが求める結果である。

小問 (ii)

次に $c>a^2$ とする。停留点は $x=0$ と $x=\pm\sqrt{c-a^2}$ の3つである。

考えてみよう $x=0$ は依然として最も近い点だろうか？

そうではない。$x=0$ における第2次導関数は $2(1-c^2/a^4)$ であり、$c>a^2>0$ より $c^2>a^4$ となるので、これは負である。したがって $x=0$ は今度は D の極大点（local maximum）となる。$x^2=c-a^2$ では $x^2+a^2=c$ であるから括弧の中は0となり、

$$\frac{\mathrm{d}^2D}{\mathrm{d}x^2}=\frac{8c^2(c-a^2)}{c^3}=\frac{8(c-a^2)}{c}>0,$$

となって、極小（local minimum）を与える。これらが大域的な最小であることを確かめるために、$\mathrm{d}D/\mathrm{d}x$ の符号を調べる。$x>0$ のとき、括弧の中は $x^2<c-a^2$ で負、$x^2>c-a^2$ で正であるから、$x\geq 0$ の範囲で関数 D は $x=\sqrt{c-a^2}$ まで減少し、その後は増加する。よって $x\geq 0$ において D は $x=\sqrt{c-a^2}$ で最小となり、対称性から $x\leq 0$ においては $x=-\sqrt{c-a^2}$ で最小となる。

これらの点では $y^2=c^2/(x^2+a^2)=c^2/c=c$ である。したがって、曲線上で原点に最も近い点は

$$\left(\pm\sqrt{c-a^2},\ \pm\sqrt{c}\right)$$

（符号の4通りの組合せすべて）の4点であり、原点からの距離は $\sqrt{2c-a^2}$ である。

確認として、$x=0$ における距離の2乗は c^2/a^2 であり、

$$\frac{c^2}{a^2}-(2c-a^2)=\frac{(c-a^2)^2}{a^2}>0,$$

であるから、y 軸上の点のほうが確かに遠い。

検算

- $y=c/\sqrt{x^2+a^2}$ を微分方程式に代入すると成り立つ：$y'=-cx(x^2+a^2)^{-3/2}=-xy/(x^2+a^2)$。

- $a = 1$、$c = 2$ として $x^2 + 4/(x^2+1)$ をしらみつぶしに調べると、$x = \pm 1 = \pm\sqrt{c - a^2}$ で最小値 $3 = 2c - a^2$ をとり、そのとき $y^2 = 2 = c$ となる。これらが図の 4 つの点であり、そこで半径 $\sqrt{3}$ の破線の円が曲線に接している。
- $c = a^2$ のとき 2 つの答えは一致する：$\sqrt{c - a^2} = 0$ かつ $\sqrt{c} = c/|a| = |a|$ となり、4 つの点は $(0, \pm|a|)$ に合流する。

よくある間違い

- 「$\mathrm{d}D/\mathrm{d}x = 0$ かつ $\mathrm{d}^2D/\mathrm{d}x^2 > 0$」から、その点で距離が**最小**になると結論してしまう。これからわかるのは極小であることだけであり、大域的な最小かどうかは $\mathrm{d}D/\mathrm{d}x$ の符号によって決まる。
- 下側の枝を忘れ、小問 (ii) で 4 点ではなく 2 点しか答えない。
- $x^2 + a^2 = \pm c$ と書いてしまう：$x^2 + a^2 > 0$ であるから、負の方はありえない。

STEP のその先へ

$y^2(x^2 + a^2) = c^2$ という条件のもとで $x^2 + y^2$ を最小化することは、条件付き最適化（constrained optimisation）の問題である。大学では、一方の変数について解くことなくこのような問題を扱うラグランジュの未定乗数法（Lagrange multipliers）を学ぶ。最も近い点では曲線の法線（normal）が動径の方向を向いており、それが破線の円が曲線に接する理由である。c が a^2 を超えるとき、$x = 0$ にあった 1 つの最小点が 2 つに分かれる様子は、**熊手型分岐**（pitchfork bifurcation）の簡単な例である。変数分離形の方程式とその解曲線についてさらに知りたければ、Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）を参照するとよい。

解答例

STEP III 2005、第 3 問

純粋数学 • 2 次関数の合成

> **STEP III 2005、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q3

鍵となる考え方

モニック（monic）な 2 次式を 2 つ合成（compose）すると、係数どうしが互いに結びついたモニックな 4 次式（quartic）が得られる。4 つのパラメータ p, q, r, s から 4 つの係数 a, b, c, d を作らなければならないが、p と s はそのうち 2 つの係数において $2s + p$ という組合せでしか現れないので、1 つの関係式が成り立たなければならない。2 つ目の形も、実は同じことを姿を変えて述べたものにすぎない。**外側の** 2 次式について平方完成（completing the square）を行うと、$\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$ は（平方） − （定数）の形になる。まさにこの形のおかげで、最後の 4 次方程式を 2 次方程式の解の公式（quadratic formula）だけで解くことができるのである。

解答

2 次式の合成

f の x に $\mathrm{g}(x)$ を代入すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(\mathrm{g}(x)) &= (x^2 + rx + s)^2 + p(x^2 + rx + s) + q \\ &= x^4 + 2rx^3 + (r^2 + 2s + p)x^2 + r(2s + p)x + (s^2 + ps + q).\end{aligned}$$

よって、すべての x に対して $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = \mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$ が成り立つのは、ちょうど

$$a = 2r, \qquad b = r^2 + (2s + p), \qquad c = r(2s + p), \qquad d = s^2 + ps + q.$$

が成り立つときである。

必要性（necessity）。このような p,q,r,s が存在するならば、$r=\frac{1}{2}a$ かつ $2s+p=b-r^2=b-\frac{1}{4}a^2$ であるから、

$$c=\tfrac{1}{2}a\big(b-\tfrac{1}{4}a^2\big),\qquad \text{すなわち}\qquad a^3-4ab+8c=0.$$

十分性（sufficiency）。逆に、$a^3-4ab+8c=0$ と仮定する。$r=\frac{1}{2}a$ とし、s は任意に（たとえば $s=0$ と）とり、さらに $p=b-\frac{1}{4}a^2-2s$、$q=d-s^2-ps$ とおく。1 番目、2 番目、4 番目の等式は作り方から成り立ち、3 番目の等式は $c=\frac{1}{2}a(b-\frac{1}{4}a^2)$ となるが、これは条件を変形したものにほかならない。q は定数項にしか現れないので、d には何の制約も課されないことに注意しよう。

したがって、求める必要十分条件（necessary and sufficient condition）は

$$\boxed{a^3-4ab+8c=0}$$

である（d は任意）。

$(x^2+vx+w)^2-k$ の形

考えてみよう $\mathrm{g}^2+p\,\mathrm{g}+q$ のような和を、1 つの平方から定数を引いた形に書き直すにはどうすればよいか？

$\mathrm{g}(x)$ を 1 つの変数とみなして、g について平方完成する：

$$\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))=\big(\mathrm{g}(x)+\tfrac{1}{2}p\big)^2+q-\tfrac{1}{4}p^2=\big(x^2+rx+s+\tfrac{1}{2}p\big)^2-\big(\tfrac{1}{4}p^2-q\big).$$

これで両方向を証明できる。

条件が成り立つならば、前半の結果から、4 次式が $\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$ に等しくなるような p,q,r,s が存在し、上の式から、それは

$$v=r,\qquad w=s+\tfrac{1}{2}p,\qquad k=\tfrac{1}{4}p^2-q.$$

として $(x^2+vx+w)^2-k$ に等しい。

逆に、$(x^2+vx+w)^2-k$ はそれ自体、$\mathrm{g}(x)=x^2+vx+w$、$\mathrm{f}(x)=x^2-k$（すなわち $p=0$、$q=-k$、$r=v$、$s=w$）とした $\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$ である。よって前半の必要性の議論により、条件 $a^3-4ab+8c=0$ が成り立たなければならない。

以上で「必要十分（if and only if）」の証明が完了する。実際に使う際には値を具体的に求めておくと便利である。展開すると

$$(x^2+vx+w)^2-k=x^4+2vx^3+(v^2+2w)x^2+2vw\,x+(w^2-k),$$

であるから、

$$v=\tfrac{1}{2}a,\qquad w=\tfrac{1}{2}\big(b-\tfrac{1}{4}a^2\big)=\tfrac{1}{8}(4b-a^2),\qquad k=w^2-d,$$

とすればよく、このとき x の係数は $2vw = \frac{1}{2}a(b - \frac{1}{4}a^2)$ となり、これが c に等しくなるのはちょうど条件が成り立つときである。

4次方程式を解く

ここでは $a = -4$、$b = 10$、$c = -12$、$d = 4$ であり、

$$a^3 - 4ab + 8c = -64 + 160 - 96 = 0,$$

であるから、この方法が使える。公式から

$$v = -2, \qquad w = \tfrac{1}{8}(40 - 16) = 3, \qquad k = 3^2 - 4 = 5,$$

が得られ、実際 $(x^2 - 2x + 3)^2 - 5 = x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 4$ である（念のため一度展開して確かめる価値がある）。方程式は

$$(x^2 - 2x + 3)^2 = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x + 3 = \sqrt{5} \text{ または } x^2 - 2x + 3 = -\sqrt{5}.$$

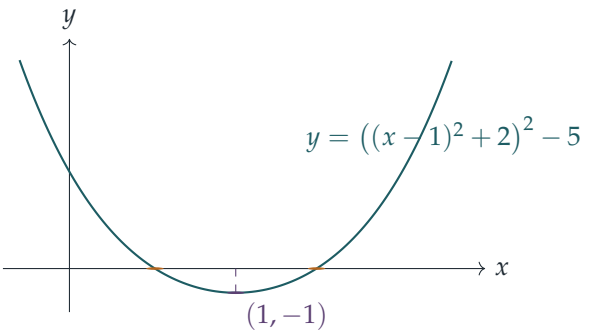
となる。$x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$ と書くと：

- $(x - 1)^2 = \sqrt{5} - 2$。$\sqrt{5} > 2$ であるから右辺は正であり、2つの実数解（real roots）$x = 1 \pm \sqrt{\sqrt{5} - 2}$ が得られる。
- $(x - 1)^2 = -2 - \sqrt{5} < 0$ であり、共役な複素数解の組（complex pair）$x = 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ が得られる。

よって解は

$$\boxed{x = 1 \pm \sqrt{\sqrt{5} - 2}, \qquad x = 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{2 + \sqrt{5}}}$$

であり、実数であるのは最初の組だけである（問題が実数解を求めていると読むならば、この2つが答えである）。



グラフは $x = 1$ に関して対称であり（$(x - 1)^2$ のみに依存するため）、$x = 1$ で最小値 $2^2 - 5 = -1$ をとるので、軸とちょうど2回交わる。

検算

- 数値的には $1 \pm \sqrt{\sqrt{5}-2} \approx 1.4859$ および 0.5141 であり、いずれを $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 4$ に代入しても 10^{-14} の誤差の範囲で 0 になる。$1 \pm 2.0582\,\mathrm{i}$ についても同様である。
- 解の和：4 つの解の和は $4 = -a$ となり、当然そうなるべき値になっている。
- 自分で合成を作って試してみよう。たとえば $\mathrm{f}(x) = x^2 + x$、$\mathrm{g}(x) = x^2 + 2x$ とすると $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x$ が得られ、$a^3 - 4ab + 8c = 64 - 80 + 16 = 0$ となる。

よくある間違い

- d に関する条件を含めてしまうこと。定数項は q（または k）を使って常に合わせられるので、d は自由である。
- 「必要十分」の一方向しか証明しないこと。$(x^2 + vx + w)^2 - k$ がそれ自体 $\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$ の形であることに気づけば、逆は 1 行で示せる。
- 実数解を求めたところで止めてしまい、もう一方の因数から共役な複素数解の組が得られることに気づかないこと。

STEP のその先へ

条件 $a^3 - 4ab + 8c = 0$ にはすっきりした意味がある。$x = y - \frac{1}{4}a$ と置換すると 3 次の項が消えるが、この条件は、そうして得られる **3 次の項を消去した** 4 次式（depressed quartic）に y の項がないこと、つまりそれが y^2 の 2 次式であることをちょうど意味している。これはフェラーリ（Ferrari）による 4 次方程式の一般解法の出発点であり、より広くは、多項式がいつ合成として分解できるかという問題の出発点でもある。この問題はガロア理論（Galois theory）へとつながっていく。どのような多項式方程式が冪根によって解ける（solvable by radicals）のか、その背後にある代数を知るには、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）がよい入門書である。

解答例

STEP III 2005、第 4 問

純粋数学 • 非線形漸化式

> **STEP III 2005、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q4

鍵となる考え方

この漸化式（recurrence）は線形（linear）ではないが、本質的には連続する項の比（ratio）についての式である。$u_{n+1} = \rho\, u_n$ と書くと、漸化式は次の比が $k - \rho$ であることを述べている。したがって比は和が k である二つの値の間を行き来し、それ以外のことはすべてここから導かれる。三つの特別な場合は、この二つの比に関する条件となる。

解答

帰納法による証明

$r = \frac{b}{a}$ とおく。漸化式の両辺を（それが零でないとき）u_{n+1} で割ると

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = k - \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

となるので、連続する項の比はそれぞれ、k から直前の比を引いたものである。最初の比は $u_2/u_1 = r$ であるから、次の比は

$$c = k - \frac{b}{a} = \frac{ka - b}{a}.$$

となるはずである。$b \neq ka$ であるから $c \neq 0$ であることに注意する。また $b \neq 0$ であるから $r \neq 0$ である。これらを合わせると、すべての項が零でないことが保たれ、零で割ることは決して起こらない。

$P(n)$ を「$u_{2n-1} \neq 0$ かつ $u_{2n} = r\, u_{2n-1}$」という命題とする。$u_1 = a \neq 0$ かつ $u_2 = b = ra$ であるから、$P(1)$ は成り立つ。

ある $n \geq 1$ に対して $P(n)$ が成り立つと仮定する。このとき $u_{2n} = ru_{2n-1} \neq 0$ であり、漸化式より

$$u_{2n+1} = \frac{u_{2n}}{u_{2n-1}}\left(ku_{2n-1} - u_{2n}\right) = r\,(k-r)\,u_{2n-1} = (k-r)\,u_{2n} = c\,u_{2n},$$

が得られる。これが求める二つ目の関係式である。よって $u_{2n+1} \neq 0$ であり、

$$u_{2n+2} = \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}}\left(ku_{2n} - u_{2n+1}\right) = c\,(k-c)\,u_{2n} = (k-c)\,u_{2n+1} = r\,u_{2n+1},$$

となる。ここで $k - c = r$ を用いた。これは $P(n+1)$ にほかならない。数学的帰納法（induction）により、すべての $n \geq 1$ に対して

$$u_{2n} = \frac{b}{a}\,u_{2n-1}, \qquad u_{2n+1} = c\,u_{2n}, \qquad c = k - \frac{b}{a}.$$

が成り立つ。

考えてみよう なぜ帰納法の命題に「$u_{2n-1} \neq 0$」を含めるのだろうか。

漸化式は u_n で割っているので、どの項も零でない場合にしか数列は意味をもたない。零でないことを帰納法の中で一緒に運んでいくことで、公式を証明するのと同時に、各項が定義されることも証明できる。条件 $b \neq 0$ と $b \neq ka$ の両方が使われるのはここである。

一般項

二つ進むと c を掛け、次に $\frac{b}{a}$ を掛けることになるので、$u_{2n+1} = \frac{bc}{a}\,u_{2n-1}$ である。奇数番目の項は初項 a、公比（common ratio）$\frac{bc}{a}$ の等比数列（geometric progression）をなし、偶数番目の各項はその直前の奇数番目の項の $\frac{b}{a}$ 倍である。したがって一般項（closed form）は

$$u_{2n-1} = a\left(\frac{bc}{a}\right)^{n-1} = \frac{b^{n-1}c^{n-1}}{a^{n-2}}, \qquad u_{2n} = b\left(\frac{bc}{a}\right)^{n-1} = \frac{b^n c^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

である。

小問 (i)

連続する項の比は $\frac{b}{a}, c, \frac{b}{a}, c, \ldots$ と交互に現れるので、数列が等比数列となるのは $c = \frac{b}{a}$、すなわち $k - \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$ のとき、かつそのときに限る。すなわち

$$ka = 2b.$$

である。このとき公比は $\frac{b}{a}$ である。$b \neq 0$ のとき $ka = 2b \neq b$ であるから、これは $b \neq ka$ と矛盾しない。

小問 (ii)

一般項より、すべての n に対して $u_{n+2} = \frac{bc}{a}\,u_n$ である。よって、すべての n に対して $u_{n+2} = u_n$ となるのは $\frac{bc}{a} = 1$、すなわち $b(ka - b) = a^2$ のとき、かつそのときに限る。すなわち

$$kab = a^2 + b^2.$$

である。このとき数列は $a, b, a, b, \ldots$ となる。周期（period）がちょうど 2 であること（定数列でないこと）を求めるなら、さらに $a \neq b$ が必要である。$a = b$ ならば条件は $k = 2$ となり、すべての項が a に等しくなる。

小問 (iii)

同様に $u_{n+4} = \left(\frac{bc}{a}\right)^2 u_n$ であるから、すべての n に対して $u_{n+4} = u_n$ となるのは $\left(\frac{bc}{a}\right)^2 = 1$、すなわち $\frac{bc}{a} = \pm 1$ のとき、かつそのときに限る。値 $+1$ は小問 (ii) の場合であり、周期は 2（または 1）である。周期がちょうど 4 となるには $\frac{bc}{a} = -1$、すなわち $b(ka - b) = -a^2$ が必要である。すなわち

$$kab = b^2 - a^2.$$

である。このとき数列は a, b, $-a$, $-b$, a, b, $\ldots$ となる。$a \neq 0$ であるから $-a \neq a$ であり、したがって周期は確かに 4 であって、それより短くはない。

(ii) と (iii) のいずれにおいても、条件 $b \neq ka$ は自動的に成り立つ。どちらの条件に $b = ka$ を代入しても $a^2 = 0$ となり、これはあり得ないからである。

検算

$a = 1$、$b = 2$ として試してみる。$k = 4$（小問 (i)）のとき、漸化式からは $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ が得られる。$k = \frac{5}{2}$（小問 (ii)）のときは $1, 2, 1, 2, \ldots$ が得られる。$k = \frac{3}{2}$（小問 (iii)）のときは $1, 2, -1, -2, 1, 2, \ldots$ が得られる。さらに、a、b、k をランダムに約 2000 通り選び、漸化式を有理数の厳密な演算で計算した。すべてが一般項と一致し、数列が等比数列、周期 2、周期 4 となるのは、上の条件が成り立つときちょうどそのときであった。

よくある間違い

- 漸化式が u_n で割っているのに、どの項も決して零にならない理由を述べ忘れる。
- (iii) の答えとして $\frac{bc}{a} = \pm 1$ を挙げてしまう。$+1$ の場合は周期が 2 である。
- (ii) で、$a = b$、$k = 2$ のとき定数列になることに気づかない。

STEP のその先へ

置き換え $\rho_n = u_{n+1}/u_n$ によって、この非線形の漸化式は一階の写像 $\rho \mapsto k - \rho$ に変わる。この写像は対合（involution）である。すなわち、二回適用すると元に戻る。比において周期が 2 になるのはこのためである。非線形の漸化式や微分方程式を簡単にするために変数変換（change of variables）を行うのは、大学一年で学ぶ標準的な手法であり、写像の周期軌道（periodic orbit）の研究は離散力学系（discrete dynamical systems）の出発点である。この趣旨の問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（『数学の発展的問題』）を参照するとよい。

解答例

STEP III 2005、第 5 問

純粋数学 • 放物線の共通接線

STEP III 2005、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s3-q5

鍵となる考え方

接線を接点で区別するのではなく、傾きで区別する。放物線には各傾き m の接線がちょうど 1 本ずつあり、最初の小問によってその y 切片（y-intercept）がわかる。2 つの放物線が傾き m の接線を共有するのは、これら 2 つの切片が一致するときであり、かつそのときに限る。したがって、共通接線（common tangent）の本数を数えることは、ただ 1 つの方程式の解 m の個数を数えることに帰着する。この方程式は、$a_1 \neq a_2$ のときは 2 次方程式、$a_1 = a_2$ のときは 1 次方程式である。

解答

傾き m の接線

$y = ax^2 + bx + c$ の傾きは $2ax + b$ である。$a \neq 0$ であるから、これが m に等しくなる点はちょうど 1 つ、$x_0 = \dfrac{m-b}{2a}$ であり、そのとき $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ である。この点における接線（tangent）は $y - y_0 = m(x - x_0)$、すなわち $y - mx = y_0 - mx_0$ である。$m = 2ax_0 + b$ を用いると、

$$\begin{aligned} y_0 - mx_0 &= ax_0^2 + bx_0 + c - (2ax_0 + b)x_0 \\ &= c - ax_0^2 = c - a \cdot \frac{(m-b)^2}{4a^2} = c - \frac{(m-b)^2}{4a}, \end{aligned}$$

となる。よって、P における接線は $y - mx = c - \dfrac{(m-b)^2}{4a}$ であり、示すべきことが示された。

共通接線をもつための条件

最初の小問より、各曲線には傾き m の接線がちょうど 1 本ずつあり、それらは

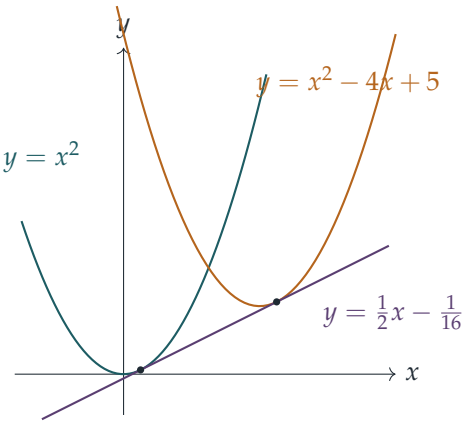
$$y = mx + k_1, \quad k_1 = c_1 - \frac{(m-b_1)^2}{4a_1}, \qquad \text{および} \qquad y = mx + k_2, \quad k_2 = c_2 - \frac{(m-b_2)^2}{4a_2}.$$

である。傾きの等しい 2 直線が一致するのは切片が等しいときであり、かつそのときに限るから、2 曲線が傾き m の共通接線をもつための必要十分条件は $k_1 = k_2$ である。$4a_1a_2 \neq 0$ を掛けると（方程式が成り立つかどうかは変わらない）、

$$\begin{aligned} 4a_1a_2(k_2 - k_1) &= 4a_1a_2(c_2 - c_1) - a_1(m-b_2)^2 + a_2(m-b_1)^2 \\ &= (a_2 - a_1)m^2 + 2(a_1b_2 - a_2b_1)m + 4a_1a_2(c_2 - c_1) + a_2b_1^2 - a_1b_2^2. \end{aligned}$$

となる。したがって、傾き m の共通接線が存在するための必要十分条件はこの式が 0 になることであり、これが求める条件である。この条件の左辺を $Q(m)$ とおく。

$Q(m) = 0$ の各解 m はちょうど 1 本の共通接線を与え、異なる解は異なる直線を与える（傾きが異なるからである）。よって、**共通接線の本数は $Q(m) = 0$ の相異なる実数解の個数に等しい**。また、どちらの曲線も鉛直な接線をもたないので、共通接線が鉛直になることはないことにも注意しておく。



$a_1 = a_2$ かつ $b_1 \neq b_2$ である 2 つの放物線は、共通接線をちょうど 1 本もつ。この図ではその傾きは $\frac{1}{2}$ である。

$a_1 \neq a_2$ の場合

このとき Q は m についての真の 2 次式であるから、相異なる実数解がちょうど 1 つであるための必要十分条件は、判別式（discriminant）が 0 であることである。判別式は

$$\Delta = 4(a_1b_2 - a_2b_1)^2 - 4(a_2 - a_1)\left(4a_1a_2(c_2 - c_1) + a_2b_1^2 - a_1b_2^2\right).$$

である。c を含まない項はきれいに整理できる：

$$\begin{aligned}&(a_1b_2-a_2b_1)^2-(a_2-a_1)(a_2b_1^2-a_1b_2^2)\\&=\left(a_1^2b_2^2-2a_1a_2b_1b_2+a_2^2b_1^2\right)-\left(a_2^2b_1^2-a_1a_2b_2^2-a_1a_2b_1^2+a_1^2b_2^2\right)\\&=a_1a_2\left(b_1^2-2b_1b_2+b_2^2\right)=a_1a_2(b_1-b_2)^2.\end{aligned}$$

したがって

$$\Delta=4a_1a_2\Big[(b_1-b_2)^2-4(a_1-a_2)(c_1-c_2)\Big],$$

であり、$a_1a_2\neq0$ であるから、共通接線がちょうど1本であるための必要十分条件は

$$(b_1-b_2)^2=4(a_1-a_2)(c_1-c_2). \qquad (*)$$

である。

考えてみよう 2曲線が**接する**とは正確にはどういうことか。また、それをどのように方程式に置き換えられるか。

2曲線が接するとは、ある点で交わり、かつその点で傾きが等しいことである。2つの2次式の差を

$$d(x)=(a_1-a_2)x^2+(b_1-b_2)x+(c_1-c_2),$$

とおく。2曲線が x_0 で交わるのは $d(x_0)=0$ のときであり、そこで傾きが等しいのは $d'(x_0)=0$ のときである。よって、2曲線が接するための必要十分条件は、d が $d'(x_0)=0$ を満たす解 x_0、すなわち重解（repeated root）をもつことである。$a_1\neq a_2$ であるから d は2次式であり、d が重解をもつのは判別式 $(b_1-b_2)^2-4(a_1-a_2)(c_1-c_2)$ が0のときであり、かつそのときに限る。これはまさに条件 $(*)$ である。

以上より、$a_1\neq a_2$ のとき、2曲線が共通接線をちょうど1本もつことと $(*)$ が成り立つことは同値であり、さらにそれは2曲線が接することと同値である。　（このとき、ただ1本の共通接線は当然ながら接点における接線である。）

$a_1=a_2$ の場合

共通の値を a と書く。Q の m^2 の項は消え、$a\neq0$ で割ると、条件は

$$2(b_2-b_1)m+4a(c_2-c_1)+(b_1-b_2)(b_1+b_2)=0.$$

となる。

- $b_1\neq b_2$ ならば、この1次方程式はただ1つの解

$$m=\frac{b_1+b_2}{2}-\frac{2a(c_2-c_1)}{b_2-b_1},$$

をもつので、共通接線はちょうど1本である。

- $b_1 = b_2$ ならば、条件は $4a(c_2 - c_1) = 0$ に帰着する。$c_1 \neq c_2$ ならば共通接線は 1 本も存在しない（一方の曲線は他方を鉛直方向に平行移動したものであり、各傾きの接線は平行で互いに異なる）。$c_1 = c_2$ ならば 2 曲線は一致し、すべての接線が共通接線となるので、共通接線は無数に存在する。

よって、$a_1 = a_2$ のとき、2 曲線が共通接線をちょうど 1 本もつための必要十分条件は $b_1 \neq b_2$ である。

検算

$y = x^2$ と $y = -x^2 + 2x - \frac{1}{2}$ については、差が $2(x - \frac{1}{2})^2$ であるから、2 曲線は $x = \frac{1}{2}$ で接する。このとき $Q(m) = -2m^2 + 4m - 2 = -2(m-1)^2$ であり、ただ 1 つの解 $m = 1$ は $y = x^2$ の $x = \frac{1}{2}$ における傾きに一致する。図示した $y = x^2$ と $y = x^2 - 4x + 5$ の組については、公式から $m = -2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$ が得られ、2 本の接線の切片はいずれも $-\frac{1}{16}$ となる。さらに、恒等式 $Q(m) = 4a_1a_2(k_2 - k_1)$ と判別式の整理についても、数千組の無作為な係数に対して厳密な計算で確かめた。

よくある間違い

- $Q = 0$ が重解をもつことが 2 曲線が接することを「意味する」と、理由を説明せずに主張してしまう。両者のつながりは**別の** 2 次式 $d(x)$ を経由しており、それらを結びつけるのが判別式についての恒等式である。
- $a_1 = a_2$ の場合に、$b_1 = b_2$、$c_1 = c_2$ という場合分け（2 曲線が一致し、共通接線が無数に存在する）を忘れたり、答えを「$b_1 \neq b_2$ または $c_1 \neq c_2$」としてしまったりする。

STEP のその先へ

曲線を点の集まりとしてではなく接線の族として記述するという考え方は、射影幾何学における**双対性**（duality）の考え方である。2 次曲線の接線 $y = mx + k$ は m と k の間にそれ自身の 2 次の関係式を満たし、一般の位置にある 2 つの 2 次曲線は、4 点で交わるのとちょうど同じように、4 本の共通接線をもつ。軸が鉛直な 2 つの放物線では、無限遠直線が両方に接し、4 本のうち 2 本分を占めてしまう。通常の共通接線が高々 2 本しか残らないのはこのためである。この種の問題をさらに解いてみたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* に挑戦してみるとよい。

解答例

STEP III 2005、第 6 問

純粋数学 • 3 次方程式を解く

STEP III 2005、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s3-q6

鍵となる考え方

恒等式 $4\cosh^3 y - 3\cosh y = \cosh 3y$ は、x を適切な定数倍に置き換えれば、x^2 の項をもたない 3 次式（depressed cubic）$x^3 - 3bx$ とまったく同じ形をしている。したがって、x^2 の項のない 3 次方程式は、3 倍角の公式（triple-angle formula）に当てはめることで解くことができ、さらに arcosh を対数で表すことで、双曲線関数（hyperbolic function）による答えを 3 乗根の形に戻すことができる。1 つの解がわかれば、因数分解によって残りの 2 つの解を与える 2 次方程式が得られ、1 の 3 乗根（cube roots of unity）を用いるとそれらがすっきりと整理される。

解答

双曲線関数による解

$x = 2a\cosh\frac{1}{3}T$ とおく。すると

$$\begin{aligned} x^3 - 3a^2x &= 8a^3\cosh^3\tfrac{1}{3}T - 6a^3\cosh\tfrac{1}{3}T \\ &= 2a^3\left(4\cosh^3\tfrac{1}{3}T - 3\cosh\tfrac{1}{3}T\right) \\ &= 2a^3\cosh T, \end{aligned}$$

となる。ここで、与えられた恒等式を $y = \frac{1}{3}T$ として用いた。よって $2a\cosh\frac{1}{3}T$ は方程式を満たし、題意は示された。

$x^3 - 3bx = 2c$ の 1 つの解

まず $c > 0$ の場合を考える。$b > 0$ であるから $a = \sqrt{b} > 0$ ととることができ、このとき $3a^2 = 3b$ である。あとは $2a^3 \cosh T = 2c$、すなわち

$$\cosh T = \frac{c}{b^{3/2}}.$$

となればよい。そのためには $c/b^{3/2} \geq 1$ が必要であり、まさにここで条件が使われる。$c > 0$ のもとで $c^2 \geq b^3$ ならば $c \geq b^{3/2}$ である。よって

$$T = \operatorname{arcosh} \frac{c}{b^{3/2}} = \ln\left(\frac{c}{b^{3/2}} + \sqrt{\frac{c^2}{b^3} - 1} \right) = \ln \frac{c + \sqrt{c^2 - b^3}}{b^{3/2}}.$$

ととることができる。したがって

$$e^{T/3} = \frac{(c + \sqrt{c^2 - b^3})^{1/3}}{b^{1/2}} = \frac{u}{\sqrt{b}}, \qquad e^{-T/3} = \frac{\sqrt{b}}{u},$$

であり、前半の結果から 1 つの解は

$$2\sqrt{b} \cosh \tfrac{1}{3} T = \sqrt{b} \left(\frac{u}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{u} \right) = u + \frac{b}{u}.$$

である。

> **考えてみよう** $c < 0$ の場合はどうなるか。このとき $c/b^{3/2} \leq -1$ となり、cosh がその値をとるような実数 T は存在しない。

x を $-x$ に置き換える。すると方程式は $x^3 - 3bx = -2c$ となり、$-c > 0$ であるから、いま扱った場合により、$u' = (-c + \sqrt{c^2 - b^3})^{1/3}$ として解 $u' + b/u'$ をもつ。したがって $-(u' + b/u')$ はもとの方程式の解である。ここで

$$u^3 u'^3 = \left(\sqrt{c^2 - b^3} + c\right)\left(\sqrt{c^2 - b^3} - c\right) = (c^2 - b^3) - c^2 = -b^3,$$

であるから、実数の 3 乗根をとれば $u' = -b/u$ となり、$-(u' + b/u') = u + b/u$ である。よって、c の符号によらずこの公式が成り立つ。(なお、$b > 0$ のとき $\sqrt{c^2 - b^3} < |c|$ であるから、どちらの場合も $u \neq 0$ である。)

残りの 2 つの解

$r = u + \frac{b}{u}$ とおく。r は解であるから $x - r$ は因数であり、

$$x^3 - 3bx - 2c = (x - r)(x^2 + rx + q) = x^3 + (q - r^2)x - rq$$

の係数を比較すると (x^2 の項は自動的に消える)、$q = r^2 - 3b$ でなければならない。展開すると

$$q = u^2 + 2b + \frac{b^2}{u^2} - 3b = u^2 + \frac{b^2}{u^2} - b,$$

となるので、残りの2つの解は

$$x^2 + \left(u + \frac{b}{u}\right)x + u^2 + \frac{b^2}{u^2} - b = 0,$$

を満たし、題意は示された。（整合性の確認として、定数項も一致する。実際 $rq = u^3 + b^3/u^3$ であり、分母を有理化すると $b^3/u^3 = b^3/(c + \sqrt{c^2 - b^3}) = c - \sqrt{c^2 - b^3}$ となるので、$rq = 2c$ である。）

この2次方程式を解くために $v = b/u$ とおくと、$uv = b$ であり、2次方程式は

$$x^2 + (u + v)x + (u^2 - uv + v^2) = 0.$$

となる。ここで $\omega^3 = 1$ かつ $1 + \omega + \omega^2 = 0$ である。$x_1 = \omega u + \omega^2 v$ と $x_2 = \omega^2 u + \omega v$ を試すと

$$x_1 + x_2 = (\omega + \omega^2)(u + v) = -(u + v),$$
$$x_1 x_2 = \omega^3 u^2 + \omega^2 uv + \omega^4 uv + \omega^3 v^2 = u^2 + (\omega^2 + \omega)uv + v^2 = u^2 - uv + v^2.$$

となる。これらはこの2次方程式の2解の和と積に一致するので、その解は

$$x = \omega u + \omega^2 \frac{b}{u} \qquad \text{および} \qquad x = \omega^2 u + \omega \frac{b}{u}.$$

である。$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$、$\omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ であるから、これらは $-\frac{1}{2}\left(u + \frac{b}{u}\right) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\left(u - \frac{b}{u}\right)\mathrm{i}$ と書くこともできる。

$x^3 - 6x = 6$ を解く

これは $b = 2$、$c = 3$ とした $x^3 - 3bx = 2c$ であり、$c^2 = 9 \geq 8 = b^3 > 0$ であるから、これまでの結果が使える。このとき

$$u = \left(3 + \sqrt{9 - 8}\right)^{1/3} = 4^{1/3} = 2^{2/3}, \qquad \frac{b}{u} = \frac{2}{2^{2/3}} = 2^{1/3}.$$

である。よって解は

$$x = 2^{2/3} + 2^{1/3}, \qquad x = -\tfrac{1}{2}\left(2^{2/3} + 2^{1/3}\right) \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(2^{2/3} - 2^{1/3}\right)\mathrm{i},$$

であり、複素数の組は $\omega\, 2^{2/3} + \omega^2\, 2^{1/3}$ とその共役複素数である。

検算

- 実数解は $2^{2/3} + 2^{1/3} \approx 2.847322$ であり、$2.847322^3 - 6(2.847322) \approx 23.083930 - 17.083932 \approx 6.0000$ となる。

- 3 つの解の和は 0 になるはずである（x^2 の項がないため）。実際 $(u+v)-(u+v)=0$ である。解の積は 6 になるはずであり、実際 $r(u^2-uv+v^2)=u^3+v^3=4+2=6$ である。
- $c^2=b^3$ ならば $u=\sqrt{b}=b/u$ となり、2 つの複素数解はどちらも $-\sqrt{b}$、すなわち重解になる。このことは $x^3-3bx-2b^{3/2}=(x-2\sqrt{b})(x+\sqrt{b})^2$ からも確かめられる。

よくある間違い

- $\cosh T \geq 1$ であることを忘れること。双曲線関数による議論がそのまま使えるのは $c>0$ の場合だけであり、$c<0$ の場合には置き換え $x \to -x$ が必要である。
- 複素数解を $\omega u+\omega\frac{b}{u}$ と書いてしまうこと。2 つの 3 乗根の積は b に等しいままでなければならないので、ω の累乗どうしの積は 1 でなければならない。

STEP のその先へ

これは 3 次方程式に対するカルダノ（Cardano）の公式であり、u^3 が 2 次方程式の解であるような $u+b/u$ という形こそ、16 世紀に最初にこの公式が発見されたときの形である。$c^2<b^3$ のときは、3 つの解がすべて実数であるにもかかわらず平方根の中が負になり（「還元不能の場合」（irreducible case））、そこでは三角関数による形 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ がその役割を引き継ぐ。一般の 5 次方程式に対してこの種の公式が存在しない理由を明らかにするのがガロア理論（Galois theory）であり、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）はその入り口として好適である。

解答例

STEP III 2005、第 7 問

純粋数学 • 置換積分

> **STEP III 2005、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q7

鍵となる考え方

冒頭の結果が述べているのは、被積分関数（integrand）の中に隠れている x^m という因子は、被積分関数の外側に $\frac{1}{x}$ という因子が単独で付いている限り、ひとつの新しい変数 $u = x^m$ として扱える、ということである。したがって、それぞれの積分について分母から x を 1 つくくり出し、残るべき乗 x^m と関数 f が何であるかを読み取り、代わりにはるかに易しい u の積分を計算すればよい。

解答

一般的な結果

$\mathrm{F}'(u) = \dfrac{1}{u\,\mathrm{f}(u)}$ が与えられている。$\mathrm{F}(x^m)$ を合成関数の微分法（chain rule）で微分すると（任意の実数 m に対して x^m が意味をもつよう $x > 0$ とする）、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{F}(x^m) = \mathrm{F}'(x^m)\cdot m x^{m-1} = \frac{m x^{m-1}}{x^m\,\mathrm{f}(x^m)} = \frac{m}{x\,\mathrm{f}(x^m)}.$$

よって $\mathrm{F}(x^m)$ は $\dfrac{m}{x\,\mathrm{f}(x^m)}$ の原始関数（antiderivative）であり、これはまさに求める結果である：

$$\int \frac{m}{x\,\mathrm{f}(x^m)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(x^m) + c.$$

言い換えれば、これは置換 $u = x^m$、$\mathrm{d}u = m x^{m-1}\,\mathrm{d}x$ を逆向きに読んだものである。以下では m で割るので、条件 $m \neq 0$ が重要になる。

実際には次の形で用いる。

$$\int \frac{1}{x\,\mathrm{f}(x^m)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m}\,\mathrm{F}(x^m) + c. \qquad (*)$$

小問 (i)

x を 1 つくくり出すと、

$$\frac{1}{x^n - x} = \frac{1}{x\,(x^{n-1} - 1)}.$$

これは $m = n - 1$、$\mathrm{f}(u) = u - 1$ とした $(*)$ の形である。$n \neq 1$ が必要である。$n = 1$ のときは分母 $x^n - x$ が恒等的に 0 となり、求めるべき積分は存在しない。

次に、$\dfrac{1}{u(u-1)}$ の原始関数 F が必要である。部分分数分解（partial fractions）により

$$\frac{1}{u(u-1)} = \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}, \qquad \text{よって} \qquad \mathrm{F}(u) = \ln|u-1| - \ln|u| = \ln\left|\frac{u-1}{u}\right|.$$

$(*)$ に $u = x^{n-1}$ を代入すると：

$$\boxed{\int \frac{1}{x^n - x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\ln\left|\frac{x^{n-1}-1}{x^{n-1}}\right| + c, \qquad n \neq 1.}$$

絶対値記号があるので、この式は被積分関数が定義される任意の区間で成り立つ（たとえば $x > 1$ だけでなく $0 < x < 1$ でも成り立ち、n が整数のときは $x < 0$ でも成り立つ）。

小問 (ii)

ここでは平方根から x をくくり出す際に少し注意が必要である。x^n がすべての n に対して定義され、かつ $\sqrt{x^2} = x$ となる $x > 0$ で考える。すると

$$\sqrt{x^n + x^2} = \sqrt{x^2\,(x^{n-2} + 1)} = x\sqrt{1 + x^{n-2}},$$

となるので、被積分関数は

$$\frac{1}{x\sqrt{1 + x^{n-2}}},$$

であり、これは $m = n - 2$、$\mathrm{f}(u) = \sqrt{1+u}$ とした $(*)$ の形である。

考えてみよう　$n = 2$ のときはどうなるか？

このとき $m = 0$ となり、一般的な結果は適用できない。しかし直接計算すれば積分は易しい。被積分関数は $\dfrac{1}{\sqrt{2x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,x}$ なので、

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln x + c \qquad (n = 2).$$

$n \neq 2$ のときは、$u = x^{n-2} > 0$ として $\mathrm{F}(u) = \displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u$ が必要である。$t = \sqrt{1+u}$ と置換すると、$u = t^2 - 1$、$\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$、$t > 1$ であり、

$$\int \frac{1}{u\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u = \int \frac{2t}{(t^2-1)\,t}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right),$$

となる。$t > 1$ なので絶対値は不要である。これはきれいに整理できる。分子と分母に $t-1$ を掛け、$t^2 - 1 = u$ を用いると、

$$\frac{t-1}{t+1} = \frac{(t-1)^2}{t^2-1} = \frac{\left(\sqrt{1+u}-1\right)^2}{u}, \qquad \text{よって} \qquad \mathrm{F}(u) = 2\ln\left(\sqrt{1+u}-1\right) - \ln u.$$

ここで $m = n-2$ として $(*)$ に $u = x^{n-2}$ を代入する。項 $-\ln u$ は $-(n-2)\ln x$ となり、$m = n-2$ で割ると $-\ln x$ になる：

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^n + x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n-2}\ln\left(\sqrt{1+x^{n-2}}-1\right) - \ln x + c, \qquad n \neq 2,\ x > 0.}$$

同値な形として、答えは $\dfrac{1}{n-2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^{n-2}}-1}{\sqrt{1+x^{n-2}}+1}\right) + c$ とも書ける。どちらの形でもよい。

検算

- 答えを微分して戻す。(i) で $n = 2$ とすると、公式は $\ln|x-1| - \ln|x|$ を与え、その導関数は $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2-x}$ であり、確かに正しい。
- (i) で $n = 3$ とすると、公式から $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^3 - x} = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{32}{27} \approx 0.084950$ が得られ、シンプソンの公式（Simpson's rule）による値と一致する。
- (ii) で $n = 3$ とすると、公式から $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3 + x^2}} = \ln\frac{3+2\sqrt{2}}{3} \approx 0.664135$ が得られ、これも数値積分と一致する。また、負の値や整数でない値も含め、多くの n について両方の公式を検証した。

よくある間違い

- 因子 $\frac{1}{m}$ を忘れること。一般的な結果では分子に m があるが、ここでの被積分関数にはないので、m で割らなければならない。
- 断りなしに $\sqrt{x^2} = x$ と書くこと。これは $x \geq 0$ のときにしか成り立たない。$x < 0$ のときは $-x$（あるいは $|x|$）である。
- $m = 0$ となる例外的な値、すなわち (i) の $n = 1$ と (ii) の $n = 2$ を見落とすこと。

STEP のその先へ

冒頭の結果は、置換積分法（substitution rule）を反対側から見たものである。置換積分とは合成関数の微分法を逆向きに使うことにほかならず、解析学（analysis）の最初の講義では、関係する関数に対する注意深い仮定のもとで、まさにそのようにして証明される。(ii) のような多項式の平方根を含む積分からは、そもそもどの積分が初等関数（elementary functions）で表せるのか、という問いが生まれる。たとえば $\int \mathrm{d}x/\sqrt{1+x^4}$ は初等関数では表せない。微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）と置換積分の厳密な扱いについては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照のこと。

解答例

STEP III 2005、第 8 問

純粋数学 ・ 複素数と円

STEP III 2005、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s3-q8

鍵となる考え方

アルガン図（Argand diagram）におけるあらゆる長さは、$|z|^2 = zz^*$ を用いて代数の式に書き換えることができる。最初の恒等式が得られれば、直角はピタゴラスの定理（Pythagoras' theorem）に帰着し、接線（tangent）は接線と半径（radius）のなす直角に帰着する。こうして「OA が円に接する」という条件はただ一つの方程式となり、それによって半径の 2 乗が $cc^* - aa^*$ と定まる。その後は、「P が円上にある」ことも「P' が円上にある」ことも、同じ方程式に帰着するのである。

解答

恒等式と直角

$|z|^2 = zz^*$ であり、共役（conjugate）をとる操作は差を保つから、

$$\begin{aligned} |a-c|^2 &= (a-c)(a-c)^* = (a-c)(a^*-c^*) \\ &= aa^* + cc^* - ac^* - ca^*, \end{aligned}$$

となり、求める式が得られた。

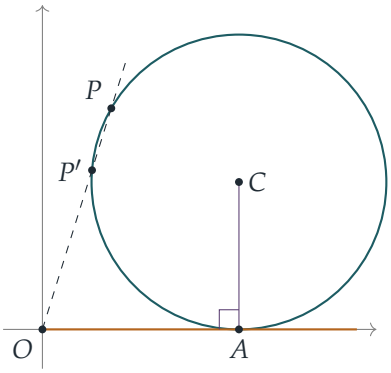
三角形 OAC の辺の長さは $OA = |a|$、$OC = |c|$、$AC = |a-c|$ であり、a、c は 0 でなく互いに異なるから、いずれも 0 ではない。ピタゴラスの定理とその逆（converse）により、A における角が直角であることは $OC^2 = OA^2 + AC^2$ と同値であり、すなわち

$$cc^* = aa^* + \left(aa^* + cc^* - ac^* - ca^*\right) \iff 2aa^* = ac^* + ca^*.$$

と同値である。ここでの各段階はすべて逆にたどれるので、「同値」が成り立つ。

（ピタゴラスの定理の逆は、退化した（degenerate）「三角形」の場合も排除している。もし O、A、C が一直線上にある（collinear）ならば、3 つの長さのうち 1 つが他の 2 つの和に等しくなるが、3 つの長さがすべて正のとき、これは $OC^2 = OA^2 + AC^2$ と両立し得ない。）

接する円



接線は接点において半径と垂直である。したがって OA が A で接することは、角 OAC が直角であることを意味し、前半の結果より

$$2aa^* = ac^* + ca^*. \qquad (*)$$

が成り立つ。半径 r は、$(*)$ を用いると $r^2 = |a-c|^2 = aa^* + cc^* - (ac^* + ca^*) = cc^* - aa^*$ を満たす。（これは再びピタゴラスの定理 $r^2 = OC^2 - OA^2$ にほかならない。）

$k = bb^* > 0$、$s = abc^* + a^*b^*c$ とおく。すると

$$|ab-c|^2 = (ab-c)(a^*b^*-c^*) = aa^*k - s + cc^*,$$
$$\left|\frac{a}{b^*} - c\right|^2 = \left(\frac{a}{b^*} - c\right)\left(\frac{a^*}{b} - c^*\right) = \frac{aa^*}{k} - \frac{ac^*}{b^*} - \frac{a^*c}{b} + cc^*.$$

である。2 つ目の式に $k = bb^*$ を掛けると

$$k\left|\frac{a}{b^*} - c\right|^2 = aa^* - s + k\,cc^*. \qquad (**)$$

を得る。

P が円上にある場合。 $|ab-c|^2 = cc^* - aa^*$ が成り立つことは、

$$aa^*k - s + cc^* = cc^* - aa^* \iff aa^*(k+1) = s.$$

と同値である。

P' が円上にある場合。 $|a/b^* - c|^2 = cc^* - aa^*$ が成り立つことは、（$k \neq 0$ を掛けて $(**)$ を用いると）

$$aa^* - s + k\,cc^* = k\,cc^* - k\,aa^* \iff aa^*(k+1) = s.$$

と同値である。2 つの条件は一致するので、P が円上にあることと P' が円上にあることは同値である。

逆の主張

ここで接するという仮定を外す。円の中心が C で、円が A を通るとすると、$r^2 = |a-c|^2 = aa^* + cc^* - ac^* - ca^*$ である。さらに、$k = bb^* \neq 1$ として、ab と a/b^* がともにこの円上にあるとする。同じ展開を用いると

$$\begin{aligned} aa^*k - s + cc^* &= r^2, \\ aa^* - s + k\,cc^* &= kr^2 \qquad (\text{（}(**)\text{ より）}). \end{aligned}$$

となる。第 1 式から第 2 式を引くと s が消去される：

$$(k-1)\,aa^* - (k-1)\,cc^* = (1-k)\,r^2.$$

考えてみよう なぜ問題文では $bb^* \neq 1$ という条件が課されているのだろうか。

もし $bb^* = 1$ ならば $b^* = 1/b$ であるから $a/b^* = ab$ となり、2 点は一致してしまう。このとき「2 点がともに円上にある」というのはただ一つの条件にすぎず、接することを導くには到底足りない。代数の計算では、これはまさに $k - 1 \neq 0$ で割る段階にあたる：

$$r^2 = cc^* - aa^*.$$

これを $r^2 = aa^* + cc^* - ac^* - ca^*$ と比較すると $2aa^* = ac^* + ca^*$ を得る。前半の結果より、角 OAC は直角である。よって OA は円周上の点 A において半径 CA と垂直であり、これは OA が円の接線であることを意味する。

検算

- この結果の背後には、きれいな幾何学的理由がある。$\dfrac{a}{b^*} = \dfrac{ab}{bb^*}$ であるから、点 P' は P を正の実数 $1/|b|^2$ 倍したものである。したがって O、P、P' は一直線上にあり、$OP \cdot OP' = |a|^2 = OA^2$ が成り立つ。これはまさに方べきの定理（tangent–secant theorem）である（図を参照）。

- 数値で確かめるため、$a = 2$、$c = 2 + 1.5\mathrm{i}$（したがって $r^2 = 2.25 = |c|^2 - |a|^2$）とし、円上の点 $P = 0.701 + 2.25\mathrm{i}$ をとる。すると $b = P/2$、$P' = a/b^* \approx 0.505 + 1.620\mathrm{i}$ であり、$|P' - c|^2 \approx 2.250$ となる。
- コンピュータで、ランダムな a、b、c に対して恒等式と接する場合を確認した。また、$|b| \neq 1$ のもとで接しない円を 1000 個ランダムにとったところ、どの場合も P が円上にあると P' は円上にならなかった。

よくある間違い

- $(a - c)^* = a^* - c^*$ は正しく書けたのに、$|a - c|^2$ を $(a - c)^2$ と展開してしまう。絶対値（modulus）の 2 乗には共役が必要である。
- 逆の証明において、最初から接すること（したがって $r^2 = cc^* - aa^*$）を仮定してしまう。それこそが証明すべきことである。$r = |a - c|$ だけから出発すること。
- $1 - bb^*$ が 0 でない理由を述べずに、それで割ってしまう。

STEP のその先へ

$|a|^2/(ab)^* = aa^*/(a^*b^*) = a/b^*$ であるから、点 P' は写像 $z \mapsto |a|^2/z^*$ による P の像である。この写像は円 $|z| = |a|$ に関する**反転**（inversion）であり、各点を、O から出る同じ半直線上で距離が $|a|^2/OP$ である点に移す。この問題は、反転の円と直交する（orthogonal）円がそれ自身に移されることを示している。反転と、それが生成するメビウス変換（Möbius transformations）は、大学 1 年次の複素解析（complex analysis）と幾何学の中心的な題材である。Needham の *Visual Complex Analysis*（『視覚的複素解析』）には、一章を丸ごと費やした見事な解説がある。

解答例

STEP III 2005、第 9 問

力学 ・ 衝突と反発係数

STEP III 2005、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

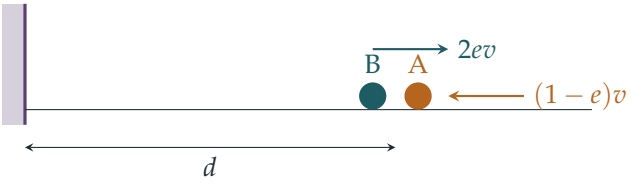
step.maths.org/questions/05-s3-q9

鍵となる考え方

質量は奇妙に見えるが、最初の衝突で非常にすっきりした答えが得られるように選ばれている。2 回目の衝突まで求めたら、その直前の速度を最初の衝突の直前の速度と比べてみよう。それらは同じものに、それぞれ e を掛けたものになっている。衝突の法則は速度について線形（linear）であるから、以後の出来事はすべて縮小された規模で繰り返され、それによって以降のすべての衝突が一挙にわかる。

解答

A と B を滑らかな水平な直線上の質点としてモデル化し、各衝突でニュートンの反発の法則（Newton's experimental law）を用いる。**壁に向かう向き**を正とし、距離は壁から測る。



（図は最初の衝突の直前の瞬間を示しており、2 つの質点を少し離して描いている。）

最初の衝突

衝突後の A と B の速度（壁に向かう向きを正とする）を v_A, v_B とする。衝突前、A の速度は $(1-e)v$、B の速度は $-2ev$ である。

運動量保存則（conservation of momentum）より

$$\begin{aligned} 4em\,v_A + (1-e)^2 m\,v_B &= 4em(1-e)v - (1-e)^2 m\cdot 2ev \\ &= 2e(1-e)v\big[2-(1-e)\big]m = 2e(1-e)(1+e)v\,m. \end{aligned}$$

近づく速さは $(1-e)v + 2ev = (1+e)v$ であるから、ニュートンの法則より

$$v_B - v_A = e(1+e)v.$$

$v_B = v_A + e(1+e)v$ を運動量の式に代入し、m で割ると

$$\big[4e+(1-e)^2\big]v_A = 2e(1-e)(1+e)v - (1-e)^2 e(1+e)v = e(1-e)(1+e)v\big[2-(1-e)\big].$$

$4e+(1-e)^2 = (1+e)^2$ であるから、右辺は $e(1-e)(1+e)^2 v$ となり、したがって

$$v_A = e(1-e)v, \qquad v_B = e(1-e)v + e(1+e)v = 2ev.$$

どちらも正である。すなわち、衝突後 **A は速さ** $e(1-e)v$ **で壁に向かって進み、B は速さ** $2ev$ **で壁に向かって進む**。

2 回目の衝突

B のほうが速いので、B は A を引き離し、時間 $t_1 = d/(2ev)$ の後に壁に達する。その間に A は $e(1-e)v\cdot\frac{d}{2ev} = \frac{1}{2}(1-e)d$ 進むので、A は壁から距離

$$d - \tfrac{1}{2}(1-e)d = \tfrac{1}{2}(1+e)d$$

の位置にある。B は速さ $e\cdot 2ev = 2e^2 v$ で跳ね返り、今度は壁から遠ざかる向きに動く。一方 A は依然として速さ $e(1-e)v$ で壁に向かっている。両者は互いに近づいており、その接近の速さは $e(1-e)v + 2e^2 v = e(1+e)v > 0$ であるから、必ず再び出会う（B が両者の間にあるので、A が壁に達するより前に出会う）。それに要する時間は

$$t_2 = \frac{\frac{1}{2}(1+e)d}{e(1+e)v} = \frac{d}{2ev},$$

であり、その間に B は壁から $2e^2 v\cdot\frac{d}{2ev} = ed$ 進む。よって **2 回目の衝突が壁から距離** de **の位置で起こる**。これが示すべきことであった。

その後の衝突

考えてみよう　同じ計算をすべてやり直すことなく、さらに衝突が起こることをどのように導けるだろうか。

2回目の衝突の直前の状態を見てみよう。Aは速さ $e(1-e)v$ で壁に向かって動き、Bは速さ $2e^2v = 2e(ev)$ で壁から遠ざかっている。これはちょうど、初期状態において v を ev に、d を de に置き換えたものである（質量と e は変わらない）。上で行ったことはすべて任意の $v > 0, d > 0$ について成り立つので、同じ議論が (v,d) の代わりに (ev,de) に対しても適用できる。すなわち、3回目の衝突が距離 $(de)e = de^2$ の位置で起こり、その直前の状態は初期状態で (e^2v, de^2) としたものになる。数学的帰納法（induction）により、すべての n に対して第 $(n+1)$ 回目の衝突が起こるので、衝突は限りなく続く。

第 n 回目の衝突の直前の状態は、初期状態において v と d をそれぞれ $e^{n-1}v$ と de^{n-1} に置き換えたものであるから、

第 n 回目の衝突は壁から距離 de^{n-1} の位置で起こる。

2つ目の部分より、ある衝突から次の衝突までの時間は $t_1 + t_2 = d/(ev)$ である。第 n 回目の衝突から始めると、これは

$$\frac{de^{n-1}}{e \cdot e^{n-1}v} = \frac{d}{ev},$$

となり、n によらない。よって、相続く衝突の間の時間はすべて等しく、$d/(ev)$ である。距離と速さはどちらも1周期ごとに e 倍に縮み、時間においてはこの2つの効果が打ち消し合うのである。

検算

- 最初の衝突における運動量：$e = \frac{1}{2}, m = v = 1$ とすると、質量は2と $\frac{1}{4}$ である。衝突前は $2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$、衝突後は $2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$ である。相対速度は $\frac{3}{2}$ から $\frac{3}{4}$ へと、e 倍になっている。
- e, v, d, m を無作為に200通り選び、それぞれについて8回の衝突まで運動を（分数を用いて）厳密にシミュレーションした。すべての衝突は de^{n-1} の位置で起こり、間隔はすべて $d/(ev)$ であった。$e = \frac{1}{2}, v = d = 1$ のとき、衝突は時刻 $0, 2, 4, 6$、距離 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ で起こる。

よくある間違い

- 符号の取り違え：Bは最初、壁から**遠ざかる**向きに動いているので、我々の取り決めではその初速度は負である。
- 壁との衝突でも反発係数が e であることを忘れること。Bが壁を離れる速さは $2ev$ ではなく $2e^2v$ である。

- スケーリングに気づかずに、2 回目の衝突を力ずくで計算し直すこと。それでも解けるが、はるかに長くなり、規則性を見落としやすい。

STEP のその先へ

ここでの推論は線形性と**自己相似性**（self-similarity）を用いている。すべての速度に同じ定数を掛けても衝突の方程式は変わらないので、定数倍を除いて自分自身を再現する状態は限りなく繰り返される。同じ考え方は、無限回跳ねるボールの解析や、より一般には次元解析（dimensional analysis）の根底にもある。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、衝突と運動量をこのような丁寧さで扱っている。

解答例

STEP III 2005、第 10 問

力学 ・ ゴムひもと摩擦

STEP III 2005、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s3-q10

鍵となる考え方

すべては一つの変数、すなわち中心間の距離 d で決まる。ゴムバンドの長さは d によって定まるので、その張力（tension）と蓄えられるエネルギーは d の簡単な関数である。そこからエネルギー（弾性エネルギー（elastic energy）と摩擦（friction）がする仕事の比較）によって円板がどこで止まるかがわかり、さらにバンドの引く力と最大摩擦力（limiting friction）を比べることで、止まったまま静止し続けるかどうかがわかる。

解答

二つの円板は同一であり、バンドは軽い弾性体で接触はなめらかであり、円板が滑っている間は摩擦力の大きさが μmg であるとモデル化する。対称性より、二つの円板はつねに反対向きに等しい距離だけ動くので、バンドの直線部分は平行に保たれる。

d の関数としてのバンド。 中心間の距離が d のとき、バンドは各円板のちょうど半周に沿い、さらに長さ d の二本の直線部分に沿う。したがってバンドの長さは $2\pi r + 2d$ であり、伸び（extension）は $x = 2d$ である。フックの法則（Hooke's law）より、弾性率（modulus）$\lambda = \frac{\pi mg}{12}$、自然長（natural length）$2\pi r$ を用いて

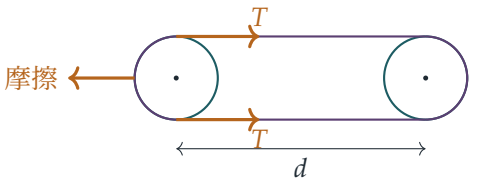
$$T = \frac{\lambda x}{2\pi r} = \frac{\pi mg}{12} \cdot \frac{2d}{2\pi r} = \frac{mg\,d}{12r}, \qquad E = \frac{\lambda x^2}{2 \cdot 2\pi r} = \frac{mg\,d^2}{12r}.$$

接触はなめらかなので、張力はバンド全体で等しい。各円板は二本の直線部分によって引かれ、それらはどちらも中心を結ぶ直線に平行で、もう一方の円板の方を向いて

いる。したがって各円板にはたらく引く力の合力（resultant）は

$$P = 2T = \frac{mg\,d}{6r}.$$

である。



図は上から見たもので、左側の円板がもう一方の円板に向かって滑っている間にはたらく水平方向の力を示している。重力と垂直抗力（normal reaction）は鉛直方向で、互いに打ち消し合う。

放した瞬間は $d = 6r$ なので、$E_0 = 3mgr$、$P = mg$ である。接触するときは $d = 2r$ なので、$E = \frac{1}{3}mgr$ である。

円板が近づく間のエネルギー。 円板が $d = 6r$ から内側に動く間、それぞれは摩擦 μmg に逆らって距離 $\frac{1}{2}(6r - d)$ だけ動く。したがって摩擦に逆らってする仕事の合計は $\mu mg(6r - d)$ である。よって運動エネルギー（kinetic energy）の合計は

$$\begin{aligned} K(d) &= 3mgr - \frac{mg\,d^2}{12r} - \mu mg(6r - d) \\ &= mg\,(6r - d)\left(\frac{6r + d}{12r} - \mu\right), \end{aligned}$$

となる。ここで $3r - \frac{d^2}{12r} = \frac{(6r-d)(6r+d)}{12r}$ を用いた。

小問 (i)

動き出す条件。 放した瞬間、各円板を引く力は $P = mg$ であり、摩擦は最大でも μmg しか与えられない。したがって円板が滑り始めるのは $mg > \mu mg$、すなわち $\mu < 1$ のとき、かつそのときに限る。

止まる条件。 $\mu < 1$ とする。$d < 6r$ において $K(d)$ が 0 になるのは $\frac{6r+d}{12r} = \mu$ のとき、すなわち

$$d^* = 12\mu r - 6r.$$

のときだけである。d が $6r$ から減少するとき、第二の因子 $\frac{6r+d}{12r} - \mu$ は $1 - \mu > 0$ から始まって減少するので、d が d^* に達するまで $K > 0$ である。円板が衝突する前に静止

するのは、接触する前に d^* に達するとき、すなわち $2r < d^* < 6r$ のとき、かつそのときに限る：

$$8r < 12\mu r < 12r \iff \tfrac{2}{3} < \mu < 1.$$

$\mu \le \frac{2}{3}$ ならば $K(2r) \ge 0$ であり、円板は先に互いに到達する（$\mu = \frac{2}{3}$ のときは速さ 0 でちょうど接するように到達するが、これは「衝突する前に」静止したことにはならない）。

考えてみよう 円板が d^* で止まったあと、バンドが再び円板を動かすことはないだろうか？

d^* において引く力は $P = \frac{mg\,d^*}{6r} = (2\mu - 1)mg$ である。$\mu < 1$ なのでこれは最大摩擦力 μmg より小さく、静止摩擦（static friction）が円板を支え、円板は静止したままである。二つの条件を合わせると、円板が滑り始め、かつ衝突する前に静止するための必要十分条件は $\frac{2}{3} < \mu < 1$ である。 ■

小問 (ii)

円板が少なくとも一回衝突するならば、近づくときの式が成り立ったまま、内向きに動きながら初めて $d = 2r$ に達しなければならない。したがって最初の衝突の直前の運動エネルギーの合計は

$$K(2r) = mg\,(4r)\left(\frac{8r}{12r} - \mu\right) = 4mgr\left(\tfrac{2}{3} - \mu\right) = \tfrac{4}{3}mgr(2 - 3\mu),$$

であり、題意が示された（これが正となるのはちょうど $\mu < \frac{2}{3}$ のときであり、小問 (i) と整合している）。

小問 (iii)

まず、$\mu^2 < \frac{4}{9}$ より $\mu < \frac{2}{3}$ なので、小問 (i), (ii) より円板は確かに衝突する。運動エネルギーの半分が失われるので、円板は運動エネルギーの合計

$$K_1 = \tfrac{2}{3}mgr(2 - 3\mu).$$

をもって $d = 2r$ から跳ね返る。

ここから円板は互いに離れていく。バンドの力も摩擦もともにもう一方の円板の方を向いてはたらくので、各円板は減速する。間隔が $2r$ から d まで増える間に、弾性エネルギーは $\frac{mg(d^2-4r^2)}{12r}$ だけ増加し、摩擦に逆らってする仕事は $\mu mg(d - 2r)$ であるから

$$K(d) = K_1 - \frac{mg(d^2 - 4r^2)}{12r} - \mu mg(d - 2r).$$

となる。これは d について狭義単調減少なので、ちょうど一度だけ 0 になり、そのときの間隔 d_1 で円板は静止する。$d_1 = 2r + u$ とおき、$\frac{12r}{mg}$ を掛けると

$$u^2 + 4r(1+3\mu)\,u - 8r^2(2-3\mu) = 0.$$

を得る。正の解をとり、判別式（discriminant）を $(1+3\mu)^2 + 2(2-3\mu) = 9\mu^2 + 5$ と整理すると

$$u = 2r\left(\sqrt{9\mu^2+5} - (1+3\mu)\right), \qquad d_1 = 2r\left(\sqrt{9\mu^2+5} - 3\mu\right).$$

となる（$2r < d_1 \le 6r$ であることが確かめられるので、バンドは張ったままであり、エネルギーの式はそのまま使える）。

考えてみよう 円板は d_1 で一瞬静止する。そこにとどまるかどうかを決めるのは何か？

バンドの引く力が最大摩擦力を超えなければ、円板は静止したままである：

$$\frac{mg\,d_1}{6r} \le \mu mg \iff \sqrt{9\mu^2+5} - 3\mu \le 3\mu \iff 9\mu^2 + 5 \le 36\mu^2 \iff \mu^2 \ge \tfrac{5}{27},$$

ここで両辺は正なので、2 乗してよい。したがって $\frac{5}{27} < \mu^2 < \frac{4}{9}$ ならば、円板は衝突して跳ね返り、単調に減速して d_1 で静止し、その後は静止摩擦によってずっとそこに保たれる。よって最初の衝突のあと、円板はちょうど一回だけ静止する。 ■

検算

- $\mu = \frac{2}{3}$ のとき、小問 (i) の停止位置 $d^* = 12\mu r - 6r$ も小問 (ii) の運動エネルギーも「速さ 0 で $d = 2r$ に到達する」ことを与えるので、二つの小問は境界で一致する。
- $\mu = 0.5$（小問 (iii) の範囲内）のとき：$K(2r) = \frac{2}{3}mgr$、$K_1 = \frac{1}{3}mgr$、$d_1 = 2r(\sqrt{7.25} - 1.5) \approx 2.385r$ である。そこでの引く力は $\approx 0.397mg < 0.5mg$ なので、円板はその場にとどまる。運動を一歩ずつ追う数値シミュレーションによってこれらすべてが再現され、さらにいくつかの $\mu \in (\frac{2}{3}, 1)$ について停止位置 $d^* = 12\mu r - 6r$ も再現された。$\mu^2 < \frac{5}{27}$（例えば $\mu = 0.42$）では、予測どおり、円板が止まったあとに再び動き出すことが示された。

よくある間違い

- 伸びを $2d$ ではなく d としてしまう：直線部分は二本とも伸びている。
- 各円板に張力を一本分しか用いない：バンドは各円板を**二本**の部分で引くので、$2T$ となる。

- 止まったあとに円板が静止し続けるかを確かめ忘れる。「速さが 0」であることと「ずっと静止している」ことは異なる条件である。

STEP のその先へ

摩擦があるため、この系は区分的（piecewise）な系になる。速度の符号が変わるたびに運動方程式が変わり、加えられた力が摩擦のしきい値を下回るところでは「張り付いた」状態が現れる。このような系（スティック・スリップ運動（stick–slip motion））は、大学 1 年の力学で相平面（phase-plane）の方法を用いて調べられる。μ が小さいときには、エネルギーを失いながら衝突を繰り返すことで、有限の時間内に無限回の跳ね返りが起こる。これは考えてみる価値がある。エネルギーを用いた方法と摩擦についてさらに知りたければ、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

解答例

STEP III 2005、第 11 問

力学 ・ 剛体のつり合い

> **STEP III 2005、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q11

鍵となる考え方

軸と棒は固定された水平軸のまわりを回転する剛体（rigid body）をなすので、ただ一つの角 θ ですべてが記述でき、エネルギーを用いるのが自然である。ポテンシャルエネルギー（potential energy）は角が $\frac{2}{3}\pi$ ずつ異なる三つの余弦の和である。これらをまとめると $A\cos\theta + B\sin\theta$ という一つの式になり、これは姿を変えた一つの余弦波にほかならない。この形に書き直してしまえば、平衡点、その安定性、そして最高点を越えるのに必要なエネルギーはすべて読み取れる。

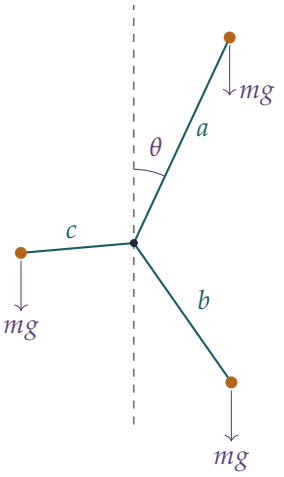
解答

エネルギー

各粒子は軽い剛体棒に取り付けられた質点とみなし、軸受けはなめらかでエネルギーは失われないとする。図のように、角はすべて鉛直上向きから時計回りに測る。すると長さ a, b, c の棒は鉛直上向きとそれぞれ $\theta, \theta + \frac{2}{3}\pi, \theta + \frac{4}{3}\pi$ の角をなすので、各粒子の軸からの高さは

$$a\cos\theta, \qquad b\cos\left(\theta + \tfrac{2}{3}\pi\right), \qquad c\cos\left(\theta + \tfrac{4}{3}\pi\right)$$

である。



$\cos\frac{2}{3}\pi = \cos\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}$、$\sin\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$、$\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ を用いると

$$\cos\left(\theta + \tfrac{2}{3}\pi\right) = -\tfrac{1}{2}\cos\theta - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta, \qquad \cos\left(\theta + \tfrac{4}{3}\pi\right) = -\tfrac{1}{2}\cos\theta + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta.$$

軸の位置をポテンシャルエネルギーの基準にとると

$$\begin{aligned} V &= mg\left[a\cos\theta + b\cos\left(\theta + \tfrac{2}{3}\pi\right) + c\cos\left(\theta + \tfrac{4}{3}\pi\right)\right] \\ &= mg\left[\tfrac{1}{2}(2a - b - c)\cos\theta - \tfrac{\sqrt{3}}{2}(b - c)\sin\theta\right]. \end{aligned}$$

各粒子は角速度（angular velocity）$\dot\theta$ で軸のまわりの円周上を運動するので、速さはそれぞれ $a\dot\theta, b\dot\theta, c\dot\theta$ である。棒は軽いので、全エネルギーは

$$E = \tfrac{1}{2}m\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\dot\theta^2 + \tfrac{1}{2}mg\left[(2a - b - c)\cos\theta - \sqrt{3}\,(b - c)\sin\theta\right].$$

平衡

系が平衡（equilibrium）にあるのは $\mathrm{d}V/\mathrm{d}\theta = 0$ となるところ、すなわち

$$-\tfrac{1}{2}mg\left[(2a - b - c)\sin\theta + \sqrt{3}\,(b - c)\cos\theta\right] = 0.$$

となるところである。$a > b$ かつ $a > c$ であるから $2a - b - c > 0$ である。よって平衡点では $\cos\theta \neq 0$ である。実際、$\cos\theta = 0$ ならば $\sin\theta = \pm 1$ であり、括弧内は $\pm(2a - b - c) \neq 0$ となってしまう。$\cos\theta$ で割ると

$$\tan\theta = -\frac{(b - c)\sqrt{3}}{2a - b - c},$$

となり、示すべき式が得られる。この議論は逆にもたどれる。すなわち、この方程式を満たす任意の θ は $\mathrm{d}V/\mathrm{d}\theta = 0$ を満たす。したがって平衡点はこの方程式の解とちょうど一致する。

平衡点はちょうど二つであり、どちらが安定か

正接関数は周期（period）π をもち、定義される長さ π の各区間で各実数値をちょうど一度ずつとる。よってこの方程式は $0 \le \theta < 2\pi$ にちょうど二つの解をもち、それらは π だけ異なる。これが二つの平衡位置である。

安定性を調べるため、V を一つの余弦で表す。

$$A = \tfrac{1}{2}(2a - b - c), \qquad B = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}(b - c),$$

とおくと $V = mg(A\cos\theta + B\sin\theta)$ である。このとき

$$\begin{aligned} 4(A^2 + B^2) &= (2a - b - c)^2 + 3(b - c)^2 \\ &= 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab - 4bc - 4ca \\ &= 2\left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right] = 4R^2, \end{aligned}$$

であるから $A^2 + B^2 = R^2$ であり、長さはすべて異なるので $R > 0$ である。$\cos\alpha = A/R$、$\sin\alpha = B/R$ となる α をとる。$A > 0$、$B < 0$ であるから $-\frac{1}{2}\pi < \alpha < 0$ である。すると

$$V = mgR\cos(\theta - \alpha).$$

二つの平衡点は、$V = mgR$ が最大となる $\theta = \alpha$ と、$V = -mgR$ が最小となる $\theta = \alpha + \pi$ である。

考えてみよう V が最小であることが、なぜ安定であることを意味するのか。

ここで $V''(\theta) = -mgR\cos(\theta - \alpha)$ である。$\theta = \alpha + \pi$ ではこれは $mgR > 0$ であり、わずかな変位によってポテンシャルエネルギーは増加する。全エネルギーが一定なので系は遠くまで離れることができず、この位置のまわりで振動する。$\theta = \alpha$ では $V'' = -mgR < 0$ である。わずかな変位によって V は減少し、運動エネルギー（kinetic energy）が増えて、系は離れていく。したがって安定（stable）な平衡点は $\theta = \alpha + \pi$、すなわち $\frac{1}{2}\pi < \theta < \pi$ を満たし $\cos\theta < 0$ かつ $\sin\theta > 0$ となるほうである。この位置では最も長い棒 a は水平より下を向き、鉛直下向きと角 $|\alpha|$ をなす。もう一方の平衡点、すなわち $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$ で棒 a が水平より上にあるほうは不安定である。

完全な回転

軸受けはなめらかで重力は保存力（conservative force）であるから、エネルギーは保存される。$I = m(a^2 + b^2 + c^2)$ とおくと

$$\tfrac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgR\cos(\theta - \alpha) = E.$$

完全な回転をするには、系はすべての角を通過しなければならず、とくに V が最大値 mgR をとる $\theta = \alpha$ を越えなければならない。いたるところで $\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \ge 0$ であるから、そ

のためには $E \geq mgR$ が必要である。$V = -mgR$ となる安定な位置 $\theta = \alpha + \pi$ を系が通過するときの角速度を ω とする。すると $E = \frac{1}{2}I\omega^2 - mgR$ であり、条件は

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 - mgR \geq mgR \quad \Longleftrightarrow \quad \omega^2 \geq \frac{4mgR}{I} = \frac{4gR}{a^2+b^2+c^2}.$$

となる。よって系は少なくとも $\sqrt{4gR/(a^2+b^2+c^2)}$ の角速度で安定な平衡点を通過しなければならず、示すべきことが示された。

(等号が成り立つ境界の場合、系は不安定な平衡点へとゆっくり近づき、そこに達するのに無限の時間がかかる。厳密には、完全な一回転には ω がこの値より真に大きいことが必要である。ただし問題が求めているのは必要条件としての下限だけである。)

検算

- $a = b = c$ ならば $R = 0$ かつ $V \equiv 0$ である。三つの等しい質量はどの位置でもつり合い(重心(centre of mass)が軸上にある)、どんなにわずかな回転でも一周する。これは下限が 0 に近づくことと合致する。
- $b = c$ ならば、正接の条件から $\tan\theta = 0$ となる。対称性から、長い棒は真上(不安定)か真下(安定)を向く。
- 数値計算により、ランダムに選んだ長さについて、V の形、恒等式 $A^2 + B^2 = R^2$、そして平衡点がちょうど二つあり安定性が述べたとおりであることが確かめられる。$a = 3, b = 2, c = 0.5, g = 9.81$ のとき、臨界速度は $2.5406\ \mathrm{rad\,s^{-1}}$ である。運動方程式(equation of motion)を数値的に追うと、この値より 2% 小さいと系は引き返し、2% 大きいと一周することがわかる。

よくある間違い

- 図とは逆向きに棒を $\theta - \frac{2}{3}\pi$ と $\theta + \frac{2}{3}\pi$ に置いてしまうと、$\sin\theta$ の項の符号が反転し、それに伴って正接の条件の符号も反転する。
- $\cos\theta = 0$ が平衡点になりえないこと、したがって $\cos\theta$ で割っても何も失われないことに触れずに「解は二つ」と結論してしまう。
- 運動エネルギーを $\frac{1}{2}m(a+b+c)^2\dot{\theta}^2$ などとしてしまう。各粒子はそれぞれ自分の速さ $r\dot{\theta}$ をもつので、慣性モーメント(moment of inertia)は $m(a^2+b^2+c^2)$ である。

STEP のその先へ

この系は複振り子（compound pendulum）、すなわち固定軸のまわりの剛体である。そのエネルギーは慣性モーメントと重心の位置だけで決まり、ここでは重心は軸から距離 $R/3$ のところにある。$\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + V(\theta) = E$ を $(\theta, \dot{\theta})$ 相平面（phase plane）上の曲線として捉え、セパラトリクス（separatrix）の内側では振動、外側では回転となるという描像は、大学 1 年の力学の中心的な考え方である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の回転と、この種の問題に対するエネルギー法を扱っている。

解答例

STEP III 2005、第 12 問

確率・統計 ・ 不偏推定量の結合

STEP III 2005、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s3-q12

鍵となる考え方

すべては、独立（independent）な確率変数（random variable）の線形結合（linear combination）に関する二つの事実に基づいている。期待値（expectation）は足し合わせることができ、分散（variance）は係数の 2 乗を掛けて足し合わせることができる。真のラップタイムが**どのような値であっても**期待値が正しい値になることを要求すると、係数を比較することになり、各条件は定数に関する方程式に変わる。こうして X はレースタイムの妥当な推定値となり、Y は二つの計時方法の食い違いから未知の σ を推定する手段となる。

解答

真のラップタイムを $\mu_1, \ldots, \mu_4$、真のレースタイムを $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$ とする。

$$S = T_1 + T_2 + T_3 + T_4.$$

とおく。このとき $\mathrm{E}(S) = \mu_1 + \cdots + \mu_4 = \mu$ であり、$T_1, \ldots, T_4$ は独立である（計時係はそれぞれ独立である）から、$\mathrm{Var}(S) = 4\sigma^2$ である。また $\mathrm{E}(T) = \mu$、$\mathrm{Var}(T) = \sigma^2$ であり、S は他の 4 人の計時係のみに依存するので、T は S と独立である。

X を求める

$X = aT + bS$ に対して

$$\mathrm{E}(X) = a\mu + b\mu = (a+b)\mu.$$

これは真のラップタイムがどのような値であっても μ に等しくなければならないので、特にある $\mu \neq 0$ についても成り立つ。よって

$$a + b = 1.$$

T と S の独立性より

$$\mathrm{Var}(X) = a^2\,\mathrm{Var}(T) + b^2\,\mathrm{Var}(S) = \sigma^2\left(a^2 + 4b^2\right) = \sigma^2\left(a^2 + 4(1-a)^2\right).$$

2 次式 $a^2 + 4(1-a)^2 = 5a^2 - 8a + 4$ は最高次の係数が正であるから、導関数 $10a - 8$ が 0 となる $a = \frac{4}{5}$ で最小となる（平方完成（completing the square）すると $5a^2 - 8a + 4 = 5\left(a - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}$ である）。したがって $a = \frac{4}{5}$、$b = \frac{1}{5}$ であり、

$$X = \tfrac{4}{5}T + \tfrac{1}{5}(T_1 + T_2 + T_3 + T_4), \qquad \mathrm{Var}(X) = \tfrac{4}{5}\sigma^2.$$

これは理にかなっている。T は S の 4 倍信頼できる（分散は $4\sigma^2$ に対して σ^2）ので、4 倍の重みが与えられるのである。

Y を求める

$Y = cT + dS$ に対して、$\mathrm{E}(Y^2) = \mathrm{Var}(Y) + \big(\mathrm{E}(Y)\big)^2$ を用いると

$$\mathrm{E}(Y^2) = \sigma^2(c^2 + 4d^2) + (c+d)^2\mu^2.$$

考えてみよう 真のラップタイムがどのような値であっても、これが σ^2 に等しくなるにはどうすればよいか？

定数 c、d は μ に依存してはならないが、μ は任意の正の数をとりうる。この式は $\sigma^2(c^2 + 4d^2)$ に μ^2 の定数倍を加えたものであるから、μ が変化しても σ^2 に等しいままであるためには、μ^2 の係数が 0 でなければならない。すなわち $(c+d)^2 = 0$ であり、$d = -c$ となる。このとき $\sigma^2(c^2 + 4c^2) = \sigma^2$、すなわち $c^2 = \frac{1}{5}$ が必要である。$c = 1/\sqrt{5}$ をとると

$$Y = \frac{T - (T_1 + T_2 + T_3 + T_4)}{\sqrt{5}}$$

となる（逆の符号をとると $-Y$ が得られるが、問題になるのは Y^2 だけなので、これでも同様にうまくいく）。つまり Y は二つの計時の食い違いを測るものであり、その期待値は 0 で、その 2 乗は σ^2 の不偏推定量（unbiased estimator）である。

このレースの場合

$T = 220$、$S = 220.5$ のとき

$$X = \tfrac{4}{5}(220) + \tfrac{1}{5}(220.5) = 176 + 44.1 = 220.1,$$
$$Y = \frac{220 - 220.5}{\sqrt{5}} = -\frac{0.5}{\sqrt{5}}, \qquad Y^2 = \frac{0.25}{5} = 0.05.$$

よって $\sigma^2 \approx 0.05$ と推定され、したがって

$$\mathrm{Var}(X) = \tfrac{4}{5}\sigma^2 \approx \tfrac{4}{5}(0.05) = 0.04, \qquad \text{標準偏差：} X \approx 0.2 \text{ 秒.}$$

となる。ゆえに真のレースタイムの推定値は 220.1 ± 0.2 秒である。すなわち、両側に標準偏差（standard deviation）1 つ分をとると、真のタイムはおおよそ区間

$$[219.9,\ 220.3] \text{ 秒,}$$

にある。より高い確信を得たければ、両側に標準偏差 2 つ分をとって $[219.7,\ 220.5]$ 秒とすればよい。誤差が正規分布（normal distribution）に従う場合、これはおよそ 95% 区間となる。ただし、σ^2 はただ一つの Y^2 の値から推定したものなので、区間の幅そのものも大まかな推定値にすぎないことに注意せよ。

検算

- $a = \frac{4}{5}$ のとき、$\mathrm{Var}(X) = \frac{4}{5}\sigma^2$ は $\mathrm{Var}(T) = \sigma^2$ と $\mathrm{Var}(S) = 4\sigma^2$ のどちらよりも小さい。これは二つの独立な測定を組み合わせることで達成されるべき結果である。
- $X = 220.1$ は二つの測定値の間にあり、より信頼できる方である $T = 220$ にずっと近い。
- 200 000 回のレース（$\sigma = 0.7$）のシミュレーションでは、X の平均は真のタイムとの差が 0.001 以内であり、$\mathrm{Var}(X) \approx 0.393$（理論値 $\frac{4}{5}(0.49) = 0.392$）、$Y^2$ の平均は 0.491（理論値 $\sigma^2 = 0.49$）であった。

よくある間違い

- $\mathrm{Var}(S) = \sigma^2$ や $16\sigma^2$ としてしまうこと。正しくは $4\sigma^2$ で、四つの独立な分散の和である。
- $\mathrm{E}(Y^2)$ における $(\mathrm{E}\,Y)^2$ の項を忘れること。この項こそが $d = -c$ を導くのである。
- $\frac{4}{5}$ 倍せずに、$Y^2 = 0.05$ をそのまま X の分散として用いること。

STEP のその先へ

X は二つの推定値の線形結合のうち、分散が最小となる不偏なものである。一般的な規則は、独立な各推定値にその分散の逆数で重みをつけることであり、これはメタ分析（meta-analysis）における逆分散重み付け（inverse-variance weighting）や、最小二乗法（least squares）に関するガウス＝マルコフの定理（Gauss–Markov theorem）の基

礎となっている。Y^2 は σ^2 の不偏推定量であり、除数を $n-1$ とする標本分散（sample variance）と同様である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は和の期待値と分散を丁寧に扱っており、推定量と信頼区間（confidence interval）については統計学の最初の講義で本格的に取り上げられる。

解答例

STEP III 2005、第 13 問

確率・統計 ・ 幾何分布

> **STEP III 2005、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q13

鍵となる考え方

$w+1$ から n までのカードはまったく何の働きもしない。賞金も生まず、ゲームを終わらせることもない。したがって小問 (i) では、これらのカードを単に無視し、$0, 1, \ldots, w$ を示す引きだけに注目すればよい。そのような引きはそれぞれ、等確率の $w+1$ 個の数からの公平な選択であり、獲得総額は幾何分布に従う確率変数（geometric random variable）となる。小問 (ii) では引きがもはや独立（independent）ではないので、獲得総額を、賞金を生むカード 1 枚ごとに 1 つずつの指示変数（indicator）の和に分解し、期待値の線形性（linearity of expectation）を用いる。

解答

$0, 1, \ldots, w$ のいずれかを示す引きを**有効**な引き、$w+1, \ldots, n$ のいずれかを示す引きを**無効**な引きとよぶことにする。

小問 (i)

2 つの事象の確率が等しい理由。無効な引きは何も変えない。プレイヤーは何も受け取らず、ゲームはそのまま続く。したがってプレイヤーの獲得総額は有効な引きの列だけで決まる。すなわち、0 でない有効な引きはそれぞれ £1 をもたらし、0 を示す最初の有効な引きでゲームが終わる。よって、プレイヤーの獲得額がちょうど £3 となるのは、有効な引きのうち最初の 3 回が 0 でない数を示し、4 回目が 0 を示すときであり、かつそのときに限る。これらは同じ事象であるから、確率も等しい。

（各引きは独立に確率 $\frac{w+1}{n+1} > 0$ で有効となるので、確率 1 で有効な引きは無限回起こ

り、とくに 1 回目、2 回目、3 回目、4 回目の有効な引きが存在する。ゲームは確率 1 で終了する。）

考えてみよう それ以前に何が起こったかにかかわらず、各有効な引きが $0,1,\ldots,w$ のどれを示すのも等確率であるのはなぜか。

カードは毎回戻されるので、各引きは独立であり、それぞれ $\{0,1,\ldots,n\}$ 上の一様分布（uniform distribution）に従う。ある引きが有効であるという条件のもとでは、その引きは $\{0,1,\ldots,w\}$ 上で一様である。これらの $w+1$ 通りの結果はもともと等確率だったからである。引きが独立であることから、連続する有効な引きの値も互いに独立である。したがって各有効な引きは、他の引きとは独立に、確率 $\frac{1}{w+1}$ で 0 となり、確率 $\frac{w}{w+1}$ で 0 でない値となる。

よって

$$P(\text{獲得額がちょうど£3}) = \left(\frac{w}{w+1}\right)^3 \cdot \frac{1}{w+1} = \frac{w^3}{(w+1)^4},$$

となり、示すべきことが得られた。

一般の r。3 を r に置き換えてまったく同じ議論をすれば（最初の r 回の有効な引きが 0 でなく、$(r+1)$ 回目が 0）、

$$P(\text{獲得額がちょうど£}r) = \frac{w^r}{(w+1)^{r+1}}, \qquad r = 0,1,2,\ldots$$

を得る。$q = \frac{w}{w+1}$ とおくと、これは $(1-q)q^r$ であり、幾何分布である。これらの確率の和は当然 1 となる。

獲得総額の期待値。獲得総額（ポンド単位）を X とする。$|q| < 1$ に対して $\sum_{r\geq 0} q^r = \frac{1}{1-q}$ を微分し q を掛けると、$\sum_{r\geq 0} rq^r = \frac{q}{(1-q)^2}$ を得る。よって

$$E(X) = \sum_{r=0}^{\infty} r(1-q)q^r = (1-q)\cdot\frac{q}{(1-q)^2} = \frac{q}{1-q} = \frac{w/(w+1)}{1/(w+1)} = w.$$

獲得総額の期待値は £w である。

小問 (ii)

今度はカードを戻さないので、このゲームは、カードの束を一様ランダムな順序にシャッフルし、0 が現れるまでカードを順にめくっていくことと同じである。プレイヤーは、この順序において 0 のカードより前に来るカード $1,\ldots,w$ の 1 枚ごとに £1 を受け取る（0 より前のカードはすべて引かれ、後のカードは 1 枚も引かれない）。

$k = 1,\ldots,w$ に対し、カード k がカード 0 より前に来るとき $I_k = 1$、そうでないとき $I_k = 0$ とする。獲得総額は $Y = I_1 + I_2 + \cdots + I_w$ である。

考えてみよう I_k は独立ではない。それは問題になるだろうか。

問題にならない。どのような従属関係があっても、和の期待値は期待値の和に等しい。したがって必要なのは $P(I_k = 1)$ だけである。一様ランダムな順序において、カード k と 0 の位置を入れ替える操作は、k が 0 より前にある順序と 0 が k より前にある順序との間の全単射（bijection）であるから、両者は等確率であり、$P(I_k = 1) = \frac{1}{2}$ となる。よって

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{w} E(I_k) = \sum_{k=1}^{w} \tfrac{1}{2} = \frac{w}{2},$$

となり、これは小問 (i) における獲得額の期待値 w のちょうど半分である。以上で示された。

検算

- $w = n$（0 でないカードがすべて賞金を生む）で戻さない場合、カード 0 の位置は $1, \ldots, n+1$ 上で一様であるから、その前にあるカードの枚数の平均は $\frac{n}{2}$ であり、$\frac{w}{2}$ と一致する。
- 戻す場合で $w = 1$ のとき、各有効な引きは 0 と 1 の間の公平なコイン投げであるから、$P(X = r) = 2^{-(r+1)}$ かつ $E(X) = 1$ であり、$w^r/(w+1)^{r+1}$ および $E(X) = w$ と一致する。
- $n = 5, w = 2$ で 2×10^5 回のゲームをシミュレーションしたところ、$\frac{8}{81} \approx 0.0988$ に対して $P(X = 3) \approx 0.0995$、2 に対して平均獲得額 1.995 を得た。小さな束（たとえば $n = 5, w = 3$）についてすべての順序を正確に数え上げると、戻さない場合の平均は $\frac{3}{2} = \frac{w}{2}$ となる。

よくある間違い

- 引きが 0 となる確率として $\frac{1}{n+1}$ を用いること。これは 1 回の引きあたりの確率であるが、その間に無効な引きが何回でも起こりうる。有効な引きで条件づけることで、すっきりした $\frac{1}{w+1}$ が得られるのである。
- $r = 0$ を忘れること。最初の有効な引きが 0 であることもあり、その場合は何も獲得できない。その確率は $\frac{1}{w+1}$ である。
- 小問 (ii) で獲得額の分布全体を求めようとすること。それは必要ない。指示変数と線形性を使えば 2 行で片づく。

STEP のその先へ

無効な引きを無視することは、**間引き**（thinning）、すなわち興味深いことが起こる時刻だけに注目して過程を見ることの一例である。この考え方は、マルコフ連鎖（Markov chain）における「ジャンプ連鎖」（jump chain）や、ポアソン過程（Poisson process）で再び登場する。個数を指示変数の和として表し、指示変数が従属していても期待値の線形性を用いることは、大学 1 年次の確率論と組合せ論で最も役に立つ技法の 1 つである。どちらの考え方も、Blitzstein と Hwang による *Introduction to Probability*（確率論入門）や、Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論：入門）で展開されている。

解答例

STEP III 2005、第 14 問

確率・統計 ・ 連続型確率変数

> **STEP III 2005、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q14

鍵となる考え方

ここでの議論はすべて、引用してよいとされている一つの積分に基づいている。したがって、作業の中心は各積分にどの m と n が必要かを見抜くことにある。置換（substitution）$x = k^2/u$ は、被積分関数（integrand）の形を変えずに区間 $[0, k]$ と $[k, \infty)$ を入れ替える。この対称性から中央値（median）がただちに定まる。時間 $T = s/V$ についても、同じ逆数の置換によって、T が V とまったく同じ族の確率密度関数（probability density function）をもち、k が s/k に置き換わっただけであることがわかる。そうなれば、中央値と平均は V についての結果からそのまま読み取れる。

解答

定数 C

与えられた結果で $m = a$、$n = 2a$ とする。a は正の整数であり $2a \geq a$ であるから、これは許される。このとき $n + 2 = 2a + 2$、$n - m + 1 = a + 1$ であるから、

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{(x+k)^{2a+2}}\,\mathrm{d}x = \frac{a!\,a!}{(2a+1)!\,k^{a+1}}.$$

確率密度関数をその定義域全体で積分すると 1 になるので、

$$1 = Ck^{a+1} \cdot \frac{a!\,a!}{(2a+1)!\,k^{a+1}} \qquad \Longrightarrow \qquad C = \frac{(2a+1)!}{a!\,a!},$$

となり、示すべき式が得られた。

置換と中央値

左辺の積分において $x = k^2/u$ とおくと、$\mathrm{d}x = -\dfrac{k^2}{u^2}\,\mathrm{d}u$ である。x が 0 から v まで動くとき、u は ∞ から k^2/v まで減少する。また

$$x + k = \frac{k^2}{u} + k = \frac{k(u+k)}{u},$$

であるから、

$$\frac{x^a}{(x+k)^{2a+2}} = \frac{k^{2a}/u^a}{k^{2a+2}(u+k)^{2a+2}/u^{2a+2}} = \frac{u^{a+2}}{k^2\,(u+k)^{2a+2}}.$$

$\mathrm{d}x$ を掛けると k^2/u^2 が打ち消され、負号によって積分の上端と下端が入れ替わる：

$$\int_0^v \frac{x^a}{(x+k)^{2a+2}}\,\mathrm{d}x = \int_\infty^{k^2/v} \frac{u^a}{(u+k)^{2a+2}}\,(-\mathrm{d}u) = \int_{k^2/v}^\infty \frac{u^a}{(u+k)^{2a+2}}\,\mathrm{d}u,$$

これが示すべき恒等式である。

考えてみよう v をどの値にとれば、この恒等式が中央値について何かを語るだろうか。

$v = k$ とすると、$k^2/v = k$ にもなる。両辺に Ck^{a+1} を掛けると、恒等式は次のようになる。

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(V < k) &= \int_0^k \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_k^\infty \mathrm{f}(u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{P}(V > k).\end{aligned}$$

V は連続型であるから $\mathrm{P}(V = k) = 0$ であり、この二つの確率の和は 1 である。よってそれぞれ $\frac{1}{2}$ であり、V の中央値は k である。

V の期待値

$$\mathrm{E}(V) = Ck^{a+1}\int_0^\infty \frac{x^{a+1}}{(x+k)^{2a+2}}\,\mathrm{d}x.$$

今度は $m = a+1$、$n = 2a$ とする。これには $2a \geq a+1$ が必要であるが、$a \geq 1$ よりこれは成り立つ。このとき $n - m + 1 = a$ であり、

$$\mathrm{E}(V) = \frac{(2a+1)!}{a!\,a!}\,k^{a+1}\cdot\frac{(a+1)!\,(a-1)!}{(2a+1)!\,k^a} = k\cdot\frac{(a+1)!}{a!}\cdot\frac{(a-1)!}{a!} = \frac{(a+1)k}{a}.$$

となる。これが期待値（expected value）である。

T の分布

速さは正であるから、$t > 0$ のとき、不等号の向きを変えずに両辺に $V/t > 0$ を掛けることができる：

$$T < t \iff \frac{s}{V} < t \iff V > \frac{s}{t}.$$

したがって

$$\mathrm{P}(T < t) = \mathrm{P}\Big(V > \frac{s}{t}\Big) = \int_{s/t}^{\infty} \frac{Ck^{a+1}x^a}{(x+k)^{2a+2}}\,\mathrm{d}x, \qquad (*)$$

となり、示すべき式が得られた。

次に、$(*)$ において $u = s/x$ と置換する。すると $x = s/u$、$\mathrm{d}x = -\dfrac{s}{u^2}\,\mathrm{d}u$ である。x が s/t から ∞ まで動くとき、u は t から 0 まで減少する。$x + k = (s + ku)/u$ であるから、

$$\mathrm{P}(T < t) = \int_0^t Ck^{a+1}\,\frac{s^a/u^a}{(s+ku)^{2a+2}/u^{2a+2}} \cdot \frac{s}{u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^t \frac{Ck^{a+1}s^{a+1}\,u^a}{(s+ku)^{2a+2}}\,\mathrm{d}u.$$

これはすべての $t > 0$ について成り立ち、また $t \le 0$ のとき $\mathrm{P}(T < t) = 0$ である。よって t で微分すると T の確率密度関数が得られる：

$$\mathrm{g}(t) = \frac{Ck^{a+1}s^{a+1}\,t^a}{(s+kt)^{2a+2}} \qquad (t > 0).$$

これを f と比較するため、分母から k^{2a+2} をくくり出し、$K = s/k$ とおく：

$$\mathrm{g}(t) = \frac{C\,(s/k)^{a+1}\,t^a}{(t+s/k)^{2a+2}} = \frac{CK^{a+1}t^a}{(t+K)^{2a+2}}.$$

これはまさに確率密度関数 f の k を $K = s/k$ に置き換えたものである。よって T は V と同じ分布族（family of distributions）に属する。

中央値と平均

T はパラメータ $K = s/k$ をもつ同じ形の分布に従うので、先の結果がそのまま適用できる：

$$\text{中央値} T = \frac{s}{k}, \qquad \mathrm{E}(T) = \frac{(a+1)}{a} \cdot \frac{s}{k}.$$

したがって、時間の中央値と速さの中央値の積は

$$\frac{s}{k} \cdot k = s,$$

であり、主張どおり距離に等しい。時間の期待値と速さの期待値の積は

$$\mathrm{E}(T)\,\mathrm{E}(V) = \frac{(a+1)s}{ak} \cdot \frac{(a+1)k}{a} = s\Big(1 + \frac{1}{a}\Big)^2 > s,$$

である。ここで、a は正の整数であるから $1 + 1/a > 1$ となることを用いた。以上で問題は完結する。

検算

- $a = 1$、$k = 1$ のとき $C = 3!/1 = 6$ であり、$6x/(x+1)^4$ を $[0,\infty)$ で数値積分（numerical integration）すると 1.000000 となる。$[0,1]$ で積分すると 0.500000 となり、中央値が確かめられる。
- $a = 2$、$k = 0.7$ などいくつかの組について数値積分すると、$\mathrm{E}(V) = 1.05000 = \frac{3}{2}(0.7)$ が得られる。$s = 3.2$ とすると $\mathrm{E}(T)\mathrm{E}(V) = 7.20000 = 3.2 \times \frac{9}{4}$ となる。
- $a = 2$、$k = s = 1$ として 2×10^5 個の速さをシミュレーションすると、速さの中央値 × 時間の中央値 ≈ 1.000001 となったが、速さの平均は ≈ 1.504（理論値：1.5）であった。
- 中央値の積が s に等しいことは、式を使わなくてもわかる。$T = s/V$ は V の減少関数であるから、T の中央値は s を V の中央値で割ったものになる。

よくある間違い

- 与えられた積分を引用するときに $n \geq m$ の確認を忘れること。$\mathrm{E}(V)$ については $a \geq 1$ が必要であり、これこそ a が正の整数でなければならない理由である。より高次の積率（moment）では、いずれこの公式は使えなくなり、実際 $\mathrm{E}(V^{a+1})$ は無限大になる。
- T の確率密度関数を求めるために $(*)$ を微分するとき、因子 s/t^2（合成関数の微分法、chain rule）を落とすこと。
- $\mathrm{E}(s/V) = s/\mathrm{E}(V)$ と思い込むこと。最後の小問の要点は、まさにこれが誤りであるということにある。

STEP のその先へ

最後の不等式はイェンセンの不等式（Jensen's inequality）の一例である。$v > 0$ において $1/v$ は凸（convex）であるから $\mathrm{E}(1/V) \geq 1/\mathrm{E}(V)$ が成り立ち、等号は V が定数のときに限る。これに対して中央値は、任意の単調関数（monotonic function）でそのまま移される。置換 $V/(V+k)$ によって V は $\frac{1}{2}$ に関して対称なベータ分布（Beta distribution）$\mathrm{Beta}(a+1, a+1)$ に従う確率変数に変わり、これも中央値が k である理由を理解するもう一つの方法である。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）は、イェンセンの不等式、変数変換、ベータ分布族をたいへん読みやすく解説している。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

2005 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

