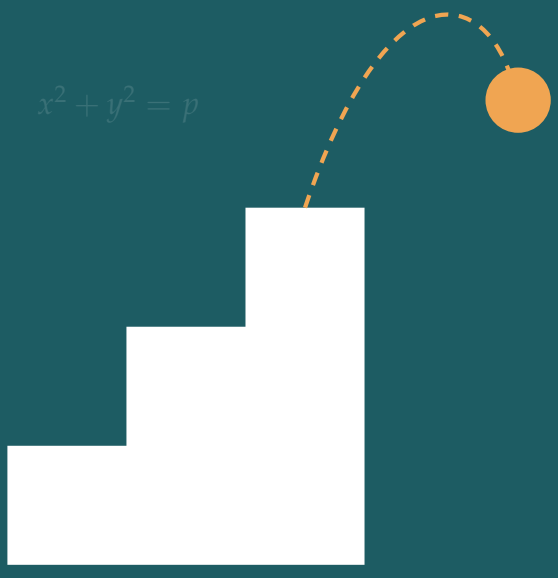
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

2004 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

2004 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

2004 年解答例

2004 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 42 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 無理数と立方根 純粋数学 3

Q2 床関数の積分 純粋数学 7

Q3 二変数多項式の因数分解 純粋数学 11

Q4 置換積分 純粋数学 15

Q5 5 を法とする剰余 純粋数学 19

Q6 ベクトルと三角形 純粋数学 23

Q7 母関数 純粋数学 27

Q8 単調数列と数学的帰納法 純粋数学 31

Q9 放物運動 力学 35

Q10 等加速度運動 力学 39

Q11 摩擦と蝶番付きのはしご 力学 43

Q12 ベイズの定理 確率・統計 47

Q13 一様分布の最大値 確率・統計 51

Q14 並べ方の数え上げ 確率・統計 55

STEP II

Q1 根号を含む方程式 純粋数学 58

Q2 2 次不等式 純粋数学 62

Q3 曲線の概形 純粋数学 66

Q4 図形における最適化 純粋数学 71

Q5 積分方程式 純粋数学 76

Q6 ベクトルの分解 純粋数学 79

Q7 二分法 純粋数学 83

Q8 微分方程式の比較 純粋数学 87

Q9 重心 力学 91
Q10 斜面上の摩擦 力学 95
Q11 仕事率と抵抗 力学 99
Q12 連続分布 確率・統計 103
Q13 最適停止 確率・統計 108
Q14 包除原理 確率・統計 112

STEP III

Q1 双曲線関数の積分 純粋数学 117
Q2 漸近線と曲線の概形 純粋数学 121
Q3 凸性と級数の評価 純粋数学 126
Q4 接する円と級数 純粋数学 130
Q5 三角方程式 純粋数学 135
Q6 漸化式 純粋数学 139
Q7 漸化式による積分 純粋数学 143
Q8 微分方程式 純粋数学 147
Q9 力のモーメントと摩擦 力学 151
Q10 弾性ひもと単振動 力学 156
Q11 2 物体の反発 力学 160
Q12 指示変数と完全順列 確率・統計 164
Q13 幾何分布 確率・統計 168
Q14 仮説検定の誤り 確率・統計 172

解答例

STEP I 2004、第 1 問

純粋数学 ・ 無理数と立方根

> **STEP I 2004、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q1

鍵となる考え方

a, b を整数として $a + b\sqrt{n}$ の形をした数は、小さな数の体系のようにふるまう。すなわち、この形の数を二つ掛け合わせると再び同じ形の数が得られ、またこの形の二つの数が等しいのは、有理数部分（rational part）どうしが一致し、かつ $\sqrt{n}$ の部分どうしが一致するときであり、そのときに限る。小問 (i) はこのような数の 3 乗を計算する準備運動である。小問 (ii) では、部分ごとに比較することでこの過程を逆にたどる。小問 (iii) は x^3 についての二次方程式（quadratic）であり、その解はちょうど (ii) で求めた 3 乗の値になっていることがわかる。

解答

小問 (i)

二項定理（binomial theorem）により、$(2\sqrt{5})^2 = 20$ および $(2\sqrt{5})^3 = 40\sqrt{5}$ を用いると、

$$\begin{aligned}\left(3 + 2\sqrt{5}\right)^3 &= 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot 2\sqrt{5} + 3 \cdot 3 \cdot 20 + 40\sqrt{5} \\ &= 27 + 54\sqrt{5} + 180 + 40\sqrt{5} \\ &= 207 + 94\sqrt{5}.\end{aligned}$$

よって $a = 207, b = 94$ である。

小問 (ii)

$\sqrt{5}$ を $\sqrt{2}$ に置き換えて同様に展開すると、任意の c, d に対して

$$\begin{aligned}\left(c - d\sqrt{2}\right)^3 &= c^3 - 3c^2d\sqrt{2} + 3c \cdot 2d^2 - 2d^3\sqrt{2} \\ &= \left(c^3 + 6cd^2\right) - \left(3c^2d + 2d^3\right)\sqrt{2}.\end{aligned}$$

実数の立方根（cube root）はただ一つであるから、$(c - d\sqrt{2})^3 = 99 - 70\sqrt{2}$ となればよい。

> **考えてみよう** なぜ有理数部分と $\sqrt{2}$ の部分を別々に比較してよいのだろうか。

p, q, r, s を整数として $p + q\sqrt{2} = r + s\sqrt{2}$ かつ $q \neq s$ であるとすると、$\sqrt{2} = (p - r)/(s - q)$ は有理数となってしまうが、これは誤りである。したがって $q = s$ であり、このとき $p = r$ となる。ゆえに

$$c^3 + 6cd^2 = 99, \qquad 3c^2d + 2d^3 = 70.$$

が成り立てばよい。c と d は正であるから、第 1 式より $c^3 < 99$ でなければならず、$c \leq 4$ である。$6cd^2 = 99 - c^3$ にそれぞれの値を代入して調べると、

- $c = 1$：$6d^2 = 98$ となり、整数解はない。
- $c = 2$：$12d^2 = 91$ となり、解はない。
- $c = 3$：$18d^2 = 72$ となり、$d = 2$ である。
- $c = 4$：$24d^2 = 35$ となり、解はない。

候補は $c = 3, d = 2$ のみであり、これは第 2 式も満たす：$3 \cdot 9 \cdot 2 + 2 \cdot 8 = 54 + 16 = 70$。したがって

$$\sqrt[3]{99 - 70\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}, \qquad c = 3,\ d = 2.$$

（符号の確認として、$2\sqrt{2} \approx 2.83 < 3$ より $3 - 2\sqrt{2}$ は正であり、$99 - 70\sqrt{2} \approx 0.005$ が正であることと合っている。）

小問 (iii)

$y = x^3$ とおく。方程式は $y^2 - 198y + 1 = 0$ となるので、

$$y = \frac{198 \pm \sqrt{198^2 - 4}}{2} = 99 \pm \sqrt{99^2 - 1} = 99 \pm \sqrt{9800} = 99 \pm 70\sqrt{2},$$

ここで $9800 = 4900 \cdot 2$ を用いた。どちらの値も正の実数である。

小問 (ii) より $99-70\sqrt{2}=(3-2\sqrt{2})^3$ である。もう一方の解については、二次方程式の二つの解の積が 1 であることに注目すると、

$$99+70\sqrt{2}=\frac{1}{99-70\sqrt{2}}=\frac{1}{(3-2\sqrt{2})^3}=\left(3+2\sqrt{2}\right)^3,$$

となる。ここで $(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})=9-8=1$ を用いた。（あるいは、小問 (ii) の展開式で d の符号を変えれば、$(3+2\sqrt{2})^3=99+70\sqrt{2}$ が直接得られる。）

どの実数もただ一つの実数の立方根をもつので、y の各値に対して実数 x がちょうど一つずつ定まる。二つの実数解は

$$x=3-2\sqrt{2}\qquad \text{および}\qquad x=3+2\sqrt{2}.$$

である。この六次方程式（sextic）の残りの四つの解は複素数（complex number）であり、それぞれの y の残りの立方根である。

検算

- 数値的に、$(3+2\sqrt{5})^3\approx 417.19$ であり、$207+94\sqrt{5}\approx 417.19$ である。
- $3+2\sqrt{2}\approx 5.8284$ であり、この値における x^6-198x^3+1 は丸め誤差の範囲でゼロになる。$3-2\sqrt{2}\approx 0.1716$ においても同様である。
- (iii) の二つの答えの積は、当然そうなるべきとおり 1 である。方程式を x^6 で割ると $1/x$ についての同じ方程式が得られるので、x が解ならば $1/x$ も解である。

よくある間違い

- 展開するとき、$(d\sqrt{2})^3=2\sqrt{2}\,d^3$ であって $\sqrt{2}\,d^3$ ではないことを忘れる。
- 第 1 式から $c=3, d=2$ を求めたものの、第 2 式を確かめない。
- (iii) で六つの「解」を答える。正の数の立方根のうち実数であるものは一つだけである。

STEP のその先へ

a,b を整数とする数 $a+b\sqrt{2}$ 全体の集合は環（ring）をなし、$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ と書かれる。$3+2\sqrt{2}$ はこの環の**単数**（unit）である。すなわち、同じ環の中に逆元 $3-2\sqrt{2}$ をもつ。このような単数はペル方程式（Pell's equation）$a^2-2b^2=\pm 1$ と結びついており（$99^2-2\cdot 70^2=1$ に注意）、$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ のすべての単数は $\pm(1+\sqrt{2})^n$ の形をしている。

さらに詳しくは、Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等整数論』）や、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（『環・体・群』）を参照されたい。

解答例

STEP I 2004、第 2 問

純粋数学 ・ 床関数の積分

> **STEP I 2004、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q2

鍵となる考え方

関数 $[x]$ は各区間 $r \le x < r+1$ 上で一定であるから、これを用いて作られる関数はすべて階段関数（step function）である。階段関数の積分（integral）は長方形の面積を足し合わせることにほかならない。すなわち、$[0, a]$ を整数の点で分割すれば、各単位区間上で被積分関数は定数になる。a が整数でない場合に新たに現れるのは、最後の幅の狭い長方形だけである。

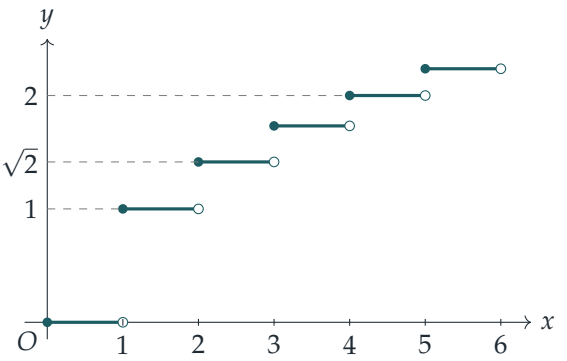
解答

小問 (i)

$x \ge 0$ に対して $r = [x]$ とおく。すると r は非負整数であり、$r \le x < r+1$ であるから、この区間上で

$$y = \sqrt{[x]} = \sqrt{r}.$$

したがってグラフは階段状になる。すなわち、$[0,1)$ 上で $y = 0$、$[1,2)$ 上で $y = 1$、$[2,3)$ 上で $y = \sqrt{2}$、以下同様である。$[x]$ はちょうど各整数のところで跳ね上がるので、各段は左端点を含み（黒丸）、右端点は含まない（白丸）。$\sqrt{r+1} - \sqrt{r} = 1/(\sqrt{r+1} + \sqrt{r})$ は減少するから、段の上がり幅はしだいに小さくなる。$x < 0$ では $[x] \le -1$ となるので $\sqrt{[x]}$ は定義されず、グラフは $x \ge 0$ の範囲にのみ存在する。



次に a を正の整数とする。積分区間を整数 $1, 2, \ldots, a-1$ で分割すると

$$\int_0^a \sqrt{[x]}\,\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{a-1} \int_r^{r+1} \sqrt{[x]}\,\mathrm{d}x.$$

$r \le x < r+1$ 上で被積分関数は定数 $\sqrt{r}$ に等しい。（ただ一点 $x = r+1$ では異なる値をとるが、関数の値を一点で変えても積分の値は変わらない。）よって各部分は幅 1、高さ $\sqrt{r}$ の長方形の面積であり、

$$\int_r^{r+1} \sqrt{[x]}\,\mathrm{d}x = \sqrt{r}, \qquad \text{したがって} \qquad \int_0^a \sqrt{[x]}\,\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{a-1} \sqrt{r}$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

$2^{[x]}$ についても全く同じ議論が成り立つ。この関数は $r \le x < r+1$ 上で 2^r に等しい。正の整数 a に対して

$$\int_0^a 2^{[x]}\,\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{a-1} \int_r^{r+1} 2^r\,\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{a-1} 2^r = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{a-1}.$$

これは初項 1、公比 2、項数 a の等比級数（geometric series）であるから、その和は

$$\frac{2^a - 1}{2 - 1} = 2^a - 1$$

であり、これが求める結果である。

小問 (iii)

次に $a > 0$ を整数でない数とし、$n = [a]$ とおく。すると n は $n < a < n+1$ かつ $n \ge 0$ を満たす整数である。

考えてみよう 積分が単位長方形の和でなくなるのはどこからか？

$x = n$ までは小問 (ii) と全く同じである。残りの部分は $n \le x \le a$ であり、これは一つの段の内部にある幅 $a - n$ の帯で、そこでは $[x] = n$ である。（$n = 0$ のときは最初の部分が空で、寄与は $2^0 - 1 = 0$ となるから、同じ式が成り立つ。）したがって

$$\begin{aligned}\int_0^a 2^{[x]}\,\mathrm{d}x &= \int_0^n 2^{[x]}\,\mathrm{d}x + \int_n^a 2^n\,\mathrm{d}x \\ &= \left(2^n - 1\right) + (a-n)\,2^n \\ &= 2^{[a]}\left(1 + a - [a]\right) - 1.\end{aligned}$$

検算

- $0 < a < 1$ ならば $[a] = 0$ であり、公式は $1 \cdot (1+a) - 1 = a$ を与える。被積分関数は $[0, a]$ 上で 1 であるから、これは正しい。
- a が下から整数 m に近づくとき、$[a] = m - 1$ であり、公式の値は $2^{m-1} \cdot 2 - 1 = 2^m - 1$ に近づき、小問 (ii) と一致する。よって積分は a の連続関数（continuous function）である。有界な関数の積分は、上端の関数として必ず連続になるので、これは当然である。
- 数値的には、$a = 2.5$ のとき公式は $4 \times 1.5 - 1 = 5$ を与え、中点則による積分の数値計算でも 5.000 となる。小問 (i) で $a = 5$ とすると、両辺はともに $0 + 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 \approx 6.1463$ である。

よくある間違い

- $r = 0$ から $a - 1$ までではなく、$r = 1$ から a までの和をとってしまう。$[r, r+1)$ 上での高さは $\sqrt{r}$、すなわち**左端**での値である。
- 小問 (iii) で端の部分の帯を忘れる、あるいはその幅を $a - [a]$ ではなく 1 としてしまう。
- 段と段を縦線でつないで描いたり、両端を黒丸で描いたりする。床関数（floor function）は整数の点で連続ではない。

STEP のその先へ

階段関数を長方形の和として積分することは、まさに大学でリーマン（Riemann）積分を構成する方法そのものである。まず階段関数に対して積分を定義し、次に一般の

関数を上下から階段関数で挟み込むのである。小問 (i) はまた、和と積分を比較する手法の第一歩でもあり、これにより $\sum_{r=1}^{n} \sqrt{r} \approx \frac{2}{3} n^{3/2}$ のような評価が得られる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、この方法でリーマン積分を展開している。

解答例

STEP I 2004、第 3 問

純粋数学 ・ 二変数多項式の因数分解

> **STEP I 2004、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q3

鍵となる考え方

2 変数の多項式（polynomial）は、そのうち**一方**の変数についての多項式で、係数にもう一方の変数を含むものとみなすことができる。x についての多項式とみなしても、因数定理（factor theorem）はそのまま成り立ち、多項式の割り算もそのまま使え、x についての 2 次式は判別式（discriminant）が完全平方（perfect square）であればやはり因数分解できる。小問 (ii) では x についての最高次の係数（leading coefficient）そのものが y の 1 次式になっており、これは y だけを含む因数が一つあることを示唆している。

解答

小問 (i)

式 $(*)$ を x の累乗ごとに整理する：

$$P(x) = x^3 + (2y-5)x^2 + (y^2 - 8y + 6)x + (6y - 3y^2).$$

$x = 3$ を代入すると、

$$\begin{aligned} P(3) &= 27 + 9(2y-5) + 3(y^2 - 8y + 6) + 6y - 3y^2 \\ &= (27 - 45 + 18) + (18y - 24y + 6y) + (3y^2 - 3y^2) = 0 \end{aligned}$$

がすべての y について成り立つ。よって因数定理により $x - 3$ は因数であり、示すべきことが示された。

もう一方の因数を求めるために、$P(x) = (x-3)(x^2 + px + q)$ とおく。ここで p と q は y に依存してよい。右辺を展開すると $x^3 + (p-3)x^2 + (q-3p)x - 3q$ となり、係数

を比較すると次のようになる：

$$x^2: \quad p-3=2y-5, \qquad \text{よって} p=2y-2,$$
$$x^0: \quad -3q=6y-3y^2, \qquad \text{よって} q=y^2-2y,$$

また x の係数も確かに合っている：$q-3p=y^2-8y+6$ となり、そうなるべきとおりである。したがって2次の因数は

$$x^2+(2y-2)x+y^2-2y=(x^2+2xy+y^2)-2(x+y)=(x+y)(x+y-2).$$

である。

考えてみよう この2次式が因数分解できることに、どうやって気づいたのか？

項 $x^2+2xy+y^2$ は完全平方 $(x+y)^2$ であり、残りの項 $-2x-2y$ は $x+y$ の倍数である。（このまとめ方がすぐに思いつかなくても、x についての判別式は $(2y-2)^2-4(y^2-2y)=4$ で完全平方なので、解は $x=-y+1\pm1$、すなわち $x=-y$ と $x=2-y$ である。）したがって

$$(*)=(x-3)(x+y)(x+y-2),$$

となり、$a=1, b=0, c=1, d=-2$ である（あるいは二つの因数を入れ替えて $a=1, b=-2, c=1, d=0$ としてもよい）。

小問 (ii)

この式を Q とおき、再び x の累乗ごとに整理する：

$$Q=(y+2)x^2+(12-4y-5y^2)x+(6y^3-y^2-21y+10).$$

x^2 の係数は $y+2$ である。Q が三つの1次因数の積であれば、x^2 の項はそのうち二つの因数の x の部分から生じるので、$y+2$ が式全体を割り切るかどうかを調べるのは自然である。$y=-2$ とおくと

$$12+8-20=0, \qquad -48-4+42+10=0,$$

となり、残りの二つの係数はともに $y=-2$ で0になる。よって（y についての）因数定理により、どちらも $y+2$ で割り切れる：

$$12-4y-5y^2=-(5y^2+4y-12)=-(y+2)(5y-6),$$
$$6y^3-y^2-21y+10=(y+2)(6y^2-13y+5).$$

さらに $6y^2-13y+5=(2y-1)(3y-5)$ である。ゆえに

$$Q=(y+2)\left[x^2-(5y-6)x+(2y-1)(3y-5)\right].$$

考えてみよう 括弧の中は因数分解できるか。また、それはどうすればわかるか？

x についての判別式は

$$(5y-6)^2-4(2y-1)(3y-5)=25y^2-60y+36-(24y^2-52y+20)$$
$$=y^2-8y+16=(y-4)^2,$$

で完全平方なので、因数分解できる。もっと手早く見るなら、$(2y-1)+(3y-5)=5y-6$ なので、積が $(2y-1)(3y-5)$、和が $5y-6$ となる二つの数は $2y-1$ と $3y-5$ であり、解は $x=2y-1$ と $x=3y-5$ である。したがって

$$Q=(y+2)(x-2y+1)(x-3y+5).$$

検算

- 小問 (i) で $x=y=1$ とおく：$(*)$ は $1-5+2+1-8-3+6+6=0$ となり、$(1-3)(2)(0)=0$ である。$x=2, y=1$ のとき：$(*)$ は $8-20+8+2-16-3+12+6=-3$ となり、$(-1)(3)(1)=-3$ である。
- 小問 (ii) で $x=y=0$ とおく：$Q=10$ であり、$(2)(1)(5)=10$ である。$x=1, y=1$ のとき：$Q=6-1-21+2+12-4+1-5+10=0$ であり、確かに $x-2y+1=0$ である。
- 二つの因数分解を、ランダムに選んだ 2000 個の点 (x,y) で厳密な有理数演算により確かめたところ、すべて一致した。

よくある間違い

- 式を x についての多項式として扱いながら、「定数」項とは x を含まない部分すべてであること、つまり小問 (i) では $6y-3y^2$ であることを忘れる。
- 小問 (ii) で、k を数として解 $x=k$ を探そうとする：$x-k$ の形の因数は存在しない。最初に見つけるべきなのは、x を含まない因数 $y+2$ である。
- $-(5y^2+4y-12)$ を $y+2$ で割るときの符号の誤り。展開して確かめること。

STEP のその先へ

多変数の多項式は環（ring）をなし、$\mathbb{Z}[x,y]$ は $(\mathbb{Z}[y])[x]$、すなわち係数が y の多項式であるような x の多項式全体とみなすことができる。これはまさに本問で行ったこと

であり、因数定理や割り算がそのまま使えるのはこのためである。これらの環では一意分解（unique factorisation）が成り立つ（ガウス（Gauss）の補題）ので、ここで求めた因数分解は、順序と符号の違いを除いてただ一通りである。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）はこうした考え方を展開している。

解答例

STEP I 2004、第 4 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP I 2004、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q4

鍵となる考え方

$\sqrt{x^2-1}$ を見たら、恒等式（identity）$\sec^2 t - 1 = \tan^2 t$ を思い浮かべるとよい。$x = \sec t$ とおくと平方根は $\tan t$ になり、しかも $\mathrm{d}x = \sec t \tan t \, \mathrm{d}t$ であるから、この $\tan t$ も約分されて消える。小問 (ii) と (iii) は見た目が異なるが、根号の中を平方完成（completing the square）すると、どちらも $u = x + 2$ として同じ形 $\sqrt{u^2 - a^2}$ になり、根号の外にある因数 $x + 2$ がちょうど置換に必要なものになっている。

解答

導関数

$\sec t = (\cos t)^{-1}$ と書き、合成関数の微分法（chain rule）を用いると、

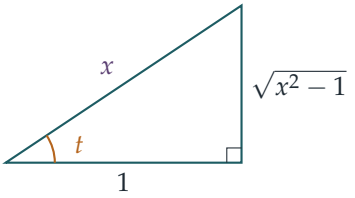
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sec t = -(\cos t)^{-2} \cdot (-\sin t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t} = \sec t \tan t.$$

小問 (i)

$x = \sec t$ とおくと、$\mathrm{d}x = \sec t \tan t \, \mathrm{d}t$ である。$x = \sqrt{2}$ のとき $\cos t = 1/\sqrt{2}$ より $t = \frac{\pi}{4}$、$x = 2$ のとき $\cos t = \frac{1}{2}$ より $t = \frac{\pi}{3}$ である。t が $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ にあるとき $\tan t > 0$ であるから、

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\sec^2 t - 1} = \sqrt{\tan^2 t} = \tan t$$

となる（絶対値記号は必要ない）。下の三角形も同じことを表している。斜辺が x、隣辺が 1 であるから、対辺は $\sqrt{x^2-1}$ である。



積分は次のようになる。

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec t\tan t}{\sec^3 t\,\tan t}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \tfrac{1}{2}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\sin 2t\right]_{\pi/4}^{\pi/3} \\ &= \left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right) - \left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}-2}{8} + \frac{\pi}{24},\end{aligned}$$

ここで $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$、$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$、$\sin\frac{\pi}{2} = 1$ を用いた。これが求める結果である。

小問 (ii)

考えてみよう 小問 (ii) には $\sqrt{x^2-1}$ が含まれていない。小問 (i) はどのように役立つだろうか？

根号の中を展開して平方完成する。

$$(x+1)(x+3) = x^2+4x+3 = (x+2)^2 - 1.$$

よって $u = x+2$（$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$）とおくと、積分は

$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,\mathrm{d}u.$$

となる。被積分関数（integrand）は $u^2 > 1$ のときに限り定義される。まず $u > 1$（すなわち $x > -1$）の場合を考え、$0 < t < \frac{\pi}{2}$ として $u = \sec t$ とおくと、$\tan t > 0$ であり $\sqrt{u^2-1} = \tan t$ となる。このとき

$$\int \frac{\sec t\tan t}{\sec t\,\tan t}\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t = t + C,$$

であり、$\sec t = u$ であるから $t = \operatorname{arcsec} u$（同値な表し方として $\arccos(1/u)$）である。したがって、$x > -1$ において

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{(x+1)(x+3)}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arcsec}(x+2) + C.$$

念のため付け加えると、被積分関数は $x < -3$ でも定義され、そこでは $u < -1$ である。この範囲では $v > 1$ として $u = -v$ とおく。すると $\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,\mathrm{d}u$ は $\dfrac{1}{(-v)\sqrt{v^2-1}}(-\mathrm{d}v) = \dfrac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\,\mathrm{d}v$ となり、その積分は $\operatorname{arcsec} v$ である。両方の場合をまとめると

$$\operatorname{arcsec}|x+2| + C = \arccos\frac{1}{|x+2|} + C,$$

となる。ただし、2 つの区間で定数は異なってもよい。

小問 (iii)

再び平方完成する。

$$x^2 + 4x - 5 = (x+2)^2 - 9,$$

よって $u = x+2$ とおくと、$\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-9}}\,\mathrm{d}u$ を求めればよい。今度の自然な置換は $u = 3\sec t$ であり、これは $u^2 - 9 = 9\tan^2 t$ となるように選んだものである。$u > 3$（すなわち $x > 1$）のときは $0 < t < \frac{\pi}{2}$ ととれば、$\sqrt{u^2-9} = 3\tan t$、$\mathrm{d}u = 3\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$ である。このとき

$$\int \frac{3\sec t\tan t}{3\sec t\cdot 3\tan t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{3}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{3} + C,$$

であり、$\sec t = u/3$ である。したがって、$x > 1$ において

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x-5}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\operatorname{arcsec}\frac{x+2}{3} + C.$$

小問 (ii) とまったく同様に、$x < -5$（$u < -3$）の場合は $u = -v$ とおけば扱え、両方の区間は $\frac{1}{3}\operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{3}|x+2|\right) + C$ でまとめて表される。

検算

- 小問 (i) の積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると 0.0974060… となり、$\frac{1}{8}(\sqrt{3}-2) + \frac{\pi}{24}$ と一致する。
- 答えを微分してみる。$u > 1$ において $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\operatorname{arcsec} u = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}$ である（$u = \sec t$ とおき、最初に求めた導関数を用いればよい）。例えば、小問 (ii) の被積分関数の $\int_0^3$ は数値的に 0.322241 であり、$\operatorname{arcsec} 5 - \operatorname{arcsec} 2 = \arccos\frac{1}{5} - \frac{\pi}{3}$ と一致する。
- 小問 (iii) は小問 (ii) を拡大・縮小したものになっているはずである。$u = 3w$ とおくと $\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-9}} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}w}{w\sqrt{w^2-1}}$ となり、これが因数 $\frac{1}{3}$ の理由である。

よくある間違い

- 小問 (i) で積分区間を変換し忘れる、あるいは上端と下端を逆にしてしまう。$\sec t = \sqrt{2}$ からは $t = \frac{\pi}{4}$ が得られ、$\frac{\pi}{3}$ ではない。
- 用いる範囲で $\tan t$ の符号を確かめずに $\sqrt{\tan^2 t} = \tan t$ と書いてしまう。
- 小問 (iii) で $u = 3\sec t$ ではなく $u = \sec t$ と置換してしまい、簡単にする恒等式のない $\sqrt{\sec^2 t - 9}$ が残る。

STEP のその先へ

逆正割関数（inverse secant）は、ある一族の一員である。置換 $x = a\sin t$、$a\tan t$、$a\sec t$（あるいはその双曲線関数版である $a\sinh t$、$a\cosh t$）はそれぞれ $\sqrt{a^2 - x^2}$、$\sqrt{a^2 + x^2}$、$\sqrt{x^2 - a^2}$ を扱いやすくし、平方完成によって任意の $\sqrt{\text{二次式}}$ はこれらのいずれかに帰着される。符号や、原始関数（antiderivative）がどの区間で定義されるかに払うべき注意は、解析学（analysis）の講義で積分がどのように厳密に扱われるかを初めて垣間見るものである。Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は置換積分の定理をきちんと扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には、この趣旨の STEP の積分問題がさらに収められている。

解答例

STEP I 2004、第 5 問

純粋数学 ・ 5 を法とする剰余

> **STEP I 2004、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q5

鍵となる考え方

5 つの等差数列（arithmetic progression）は、正の整数を 5 で割った余りによって分類している。各類の一般項（general term）が $5n-3$ のような形で書ければ、展開して 5 をくくり出すことで、和や平方がどの類に入るかを追跡できる。これにより平方数がどこに入りうるかの全体像が得られ、2 つの不可能性の証明はどちらもそこから従う。右辺は、左辺が決して入りえない類に属しているのである。

解答

一般項

各数列の公差（common difference）は 5 なので、$n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して第 n 項は

$$A:\ 5n-4, \qquad B:\ 5n-3, \qquad C:\ 5n-2, \qquad D:\ 5n-1, \qquad E:\ 5n.$$

である（$n=1$ を代入すると、それぞれ最初に挙げられた項になることが確かめられる）。よって、正の整数が A、B、C、D、E に属するのは、それぞれ余りが 1、2、3、4、0 となるとき、そしてそのときに限る（5 で割ったときの余りである）。

B の項と C の項の和

B の任意の項 $5m-3$ と C の任意の項 $5n-2$ をとる。ただし $m, n \geq 1$ とする。このとき

$$(5m-3)+(5n-2) = 5m+5n-5 = 5(m+n-1).$$

$m+n-1 \geq 1$ は正の整数なので、これは E の第 $(m+n-1)$ 項であり、題意が示された。

B と C の項の平方

B の項 $5m-3$ に対して

$$\begin{aligned}(5m-3)^2 &= 25m^2-30m+9\\ &= 5(5m^2-6m+2)-1.\end{aligned}$$

ここで $k=5m^2-6m+2$ は整数であり、すべての $m \geq 1$ に対して $k=5m^2-6m+2=m(5m-6)+2 \geq 1$ である（$m=1$ のとき値は 1 であり、$m \geq 2$ のときは m と $5m-6$ がともに正である）。よって $(5m-3)^2=5k-1$ は D の第 k 項である。B の項の平方はすべて D に属する。

C についての同様の主張は、**C のすべての項の平方もまた D の項である**、というものである。実際、C の項 $5m-2$ に対して

$$\begin{aligned}(5m-2)^2 &= 25m^2-20m+4\\ &= 5(5m^2-4m+1)-1,\end{aligned}$$

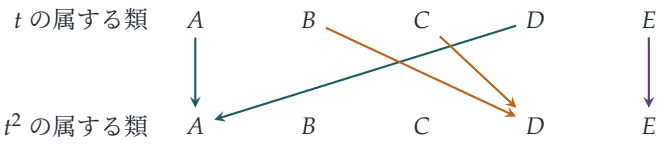
であり、$m \geq 1$ のとき $k=5m^2-4m+1=m(5m-4)+1 \geq 2$ である。よって $(5m-2)^2$ は D の第 k 項である。

考えてみよう A、D、E の項の平方はどこに属するか？

小問 (i) と (ii) でこれが必要になるので、残りの 3 つの類も同じように調べておく価値がある：

$$\begin{aligned}(5m-4)^2 &= 25m^2-40m+16 = 5(5m^2-8m+4)-4 && (A \text{ に属する}),\\ (5m-1)^2 &= 25m^2-10m+1 = 5(5m^2-2m+1)-4 && (A \text{ に属する}),\\ (5m)^2 &= 5(5m^2) && (E \text{ に属する}).\end{aligned}$$

括弧内は $m \geq 1$ のとき正の整数である（たとえば $5m^2-8m+4=m(5m-8)+4 \geq 1$、また $5m^2-2m+1 \geq 4$）。よって平方をとると、各類は次のように移る：



特に、**B や C に属する完全平方数（*perfect square*）は存在しない**。正の平方数はすべて A、D、E のいずれかに属する。

小問 (i)

正の整数 x と y が $x^2+5y=243\,723$ を満たすと仮定する。$243\,723=5\times 48\,744+3$ なので、右辺は C の項 $5\times 48\,745-2$ である。すると

$$x^2=243\,723-5y=5(48\,745-y)-2.$$

これは正である（x^2 だからである）ので、$48\,745-y$ は正の整数であり、x^2 は C の項となる。しかし、C に属する平方数は存在しないことをすでに示した。この矛盾（contradiction）により、そのような正の整数 x と y は存在しない。

小問 (ii)

4 乗数（fourth power）は平方数の平方である。平方数 x^2 は A、D、E のいずれかに属し、A または D の項を平方すると A の項になり、E の項を平方すると E の項になる。よって任意の正の整数 x に対して

x^4 が属するのはA またはE, すなわち x^4 の余りは1 または0 である。ただし割る数は5.

y^4 についても同じことが成り立つので、$2y^4$ の余りは 2 または 0 である。足し合わせると、x^4+2y^4 を 5 で割った余りは、次のいずれかの余りに等しい。

$$1+2=3,\qquad 1+0=1,\qquad 0+2=2,\qquad 0+0=0,$$

よって x^4+2y^4 は C、A、B、E のいずれかに属し、D には**決して**属さない。

> ? **考えてみよう** なぜ余りをそのまま足してよいのか？

$x^4=5a+r$、$2y^4=5b+s$ とすると $x^4+2y^4=5(a+b)+(r+s)$ なので、和と $r+s$ の差は 5 の倍数であり、和は $r+s$ と同じ類に属する。これはまさに、上で $B+C$ について行った計算を一般の形にしたものである。

さて、$26\,081\,974=5\times 5\,216\,395-1$ は一の位が 4 なので、D の項である。したがって、どのような正の整数 x と y に対しても、これが x^4+2y^4 に等しくなることはなく、題意が示された。

検算

- 小さな場合：$2^2=4$、$7^2=49$、$12^2=144$ はいずれも一の位が 4 または 9 なので D に属する。$3^2=9$、$8^2=64$、$13^2=169$ も同様である。
- 4 乗数：$1, 16, 81, 256, 625, 1296$ はいずれも一の位が 1、6、5 のいずれかなので、A または E に属する。

- $x \leq \sqrt{243\,723} \approx 493.7$ の範囲でコンピュータ探索を行っても、$243\,723 - x^2$ が 5 の正の倍数となる x は見つからない。また、$x^4 < 26\,081\,974$（したがって $x \leq 71$）を満たすすべての x について探索しても、$2y^4 = 26\,081\,974 - x^4$ となる y は見つからない。

よくある間違い

- E の一般項を $5n + 5$、A の一般項を $5n + 1$ と書くのは構わないが、その場合 n は 0 から始まる。2 つの流儀を混同すると、項が 1 つずれてしまう。
- 小問 (i) で、$x^2 > 0$ であることを使って $48\,745 - y$ が**正の**整数であると示すのを忘れる。数列には正の整数しか含まれないので、これがないと x^2 が C の項であるとは限らない。
- 小問 (ii) で x^4 だけを扱い、係数 2 によって y^4 の余りが 1 から 2 に移ることを忘れる。

STEP のその先へ

5 つの数列は 5 を法とする剰余類（residue classes modulo 5）であり、この問題全体は $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ における算術である。そこでの平方は $0, 1, 4$（**平方剰余**（quadratic residues））であり、4 乗は $0, 1$ である。これは、$5 \nmid a$ のとき $a^4 \equiv 1 \pmod 5$ が成り立つというフェルマーの小定理（Fermat's little theorem）の一例である。ディオファントス方程式（Diophantine equation）を、うまく選んだ数を法として考えることは、解が存在しないことを証明するための最初の道具である。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic* は、合同式（congruences）と平方剰余を見事に展開している。

解答例

STEP I 2004、第 6 問

純粋数学 ・ ベクトルと三角形

> **STEP I 2004、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q6

鍵となる考え方

x 座標と y 座標を別々に扱うのではなく、位置ベクトル（position vector）を用いる。$\mathbf{a} = (p_1, q_1)$, $\mathbf{b} = (p_2, q_2)$, $\mathbf{c} = (p_3, q_3)$ とおけば、H の位置ベクトルは $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ である。すると問題に現れるどの直線も短いベクトル表示をもち、「直角に交わる」は「内積（scalar product）が 0 である」に置き換わる。現れる内積は平方の差（difference of two squares）$(\mathbf{c} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b})$ であり、後半はこれに尽きる。

解答

A, B, C は一直線上にない（collinear でない）と仮定し、真の三角形をなすものとする（そうでなければ前半の直線どうしが一致することがあり、交点がただ一つに定まらない）。

中線は一点で交わる

BC, CA, AB の中点（midpoint）をそれぞれ L, M, N とし、その位置ベクトルを

$$\mathbf{l} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}), \qquad \mathbf{m} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}), \qquad \mathbf{n} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

とする。直線 AL 上の一般の点は

$$\mathbf{a} + s(\mathbf{l} - \mathbf{a}) = (1 - s)\,\mathbf{a} + \tfrac{s}{2}\,\mathbf{b} + \tfrac{s}{2}\,\mathbf{c},$$

であり、直線 BM 上の一般の点は

$$\mathbf{b} + t(\mathbf{m} - \mathbf{b}) = \tfrac{t}{2}\,\mathbf{a} + (1 - t)\,\mathbf{b} + \tfrac{t}{2}\,\mathbf{c}.$$

である。**a**, **b**, **c** の係数がそれぞれ一致すれば、二つの式は等しい。すなわち $1-s=\frac{t}{2}$, $\frac{s}{2}=1-t$, $\frac{s}{2}=\frac{t}{2}$ である。最後の式から $s=t$ が得られ、これを $1-s=\frac{s}{2}$ に代入すると $s=t=\frac{2}{3}$ となり、これは三つの式をすべて満たす。よって二つの直線はともに、位置ベクトルが

$$\mathbf{g}=\tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}), \qquad \text{すなわち} \qquad G=\left(\tfrac{p_1+p_2+p_3}{3},\ \tfrac{q_1+q_2+q_3}{3}\right).$$

である点 G を通る。

考えてみよう 係数比較によってある共通点が見つかった。それが唯一の交点であるとなぜわかるのか。

異なる二直線が交わる点は高々一つなので、AL と BM が異なる直線であることを示せばよい。もし同じ直線であれば、それは A, B, L を含み、したがって直線 BL 全体、すなわち直線 BC を含む。すると A は BC 上にあることになり、仮定に反する。よって G はただ一つの交点である。

三本目の中線（median）CN については、点 $\mathbf{c}+u(\mathbf{n}-\mathbf{c})$ で $u=\frac{2}{3}$ とすると

$$\mathbf{c}+\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{2}\mathbf{a}+\tfrac{1}{2}\mathbf{b}-\mathbf{c}\right)=\tfrac{1}{3}\mathbf{a}+\tfrac{1}{3}\mathbf{b}+\tfrac{1}{3}\mathbf{c}=\mathbf{g}.$$

となる。よって G は C と AB の中点を結ぶ直線上にあり、これが示すべきことであった。（毎回 $\frac{2}{3}$ という値が現れることは、重心（centroid）G が各中線を頂点から 3 分の 2 の位置にあることを意味している。）

H における垂直性

点 H の位置ベクトルは $\mathbf{h}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ なので

$$\overrightarrow{AH}=\mathbf{h}-\mathbf{a}=\mathbf{b}+\mathbf{c}, \qquad \overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}.$$

である。直線 AH が BC と直角に交わるならば、これらの方向ベクトルの内積は 0 である：

$$0=(\mathbf{c}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{b})=\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}-\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=(p_3^2+q_3^2)-(p_2^2+q_2^2),$$

ここで交差項 $\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}$ と $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ は、内積が交換法則を満たす（commutative）ため打ち消し合う。したがって

$$p_2^2+q_2^2=p_3^2+q_3^2,$$

であり、これが求める結果である。言葉で言えば、B と C は原点 O から等距離にある。

まったく同様に、$\overrightarrow{BH}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$, $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}-\mathbf{a}$ なので、BH が AC と直角に交わるならば $(\mathbf{c}+\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$ であり、

$$p_1^2+q_1^2=p_3^2+q_3^2.$$

が得られる。

三本目の垂線

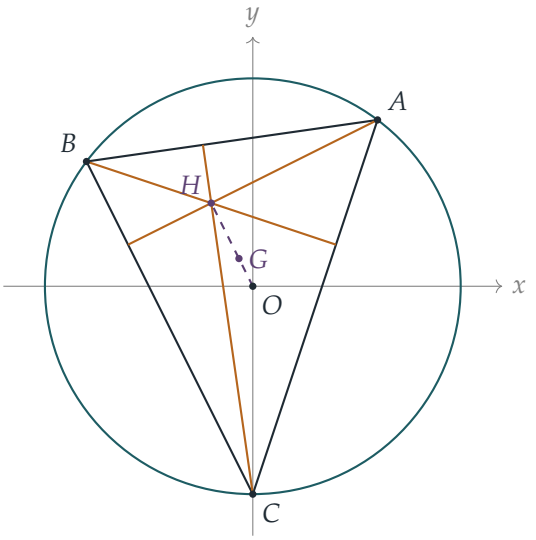
二つの垂直条件がともに成り立つとする。上の二つの結果を合わせると

$$p_1^2 + q_1^2 = p_3^2 + q_3^2 = p_2^2 + q_2^2, \qquad \text{よって} \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}.$$

である。ここで $\overrightarrow{CH} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ であり、

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB} = (\mathbf{b}+\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 0.$$

となる。よって CH は AB に垂直である（ただし CH が真の直線となるよう $H \neq C$ とする。$H = C$ ならばこの主張は中身をもたない）。以上で導出が完了する。



図は最後の小問の状況を表している。A, B, C は原点 O を中心とする円周上にあり、三本の垂線（altitude、琥珀色）はすべて H を通り、O, G, H は $\mathbf{h} = 3\mathbf{g}$ を満たして一直線上にある。

検算

- $A = (3,4), B = (-4,3), C = (0,-5)$ とすると、いずれも O からの距離は 5 である。このとき $H = (-1,2)$ であり、$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = (-4)(4) + (-2)(-8) = 0$ となる。残り二つの内積も 0 である。重心は $G = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ であり、H の 3 分の 1 になっている。
- 数値的にも、整数座標の頂点をもつ約 2000 個の無作為な三角形について、二本の中線の交点を分数で厳密に計算すると常に $\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$ となり、三本目の中線上にあった。また、O を中心とする円に内接する 1000 個の無作為な三角形について、H に関する三つの内積はすべて 0 になった。

よくある間違い

- 二本の中線が G を通ることを示しながら、それらが同じ直線になりえない理由を述べないこと。A, B, C が一直線上にないことに触れる一文で片がつく。
- $\overrightarrow{OH} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ を AH の方向として用いること。方向は $\mathbf{h} - \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ である。
- この結果がすべての三角形について成り立つと考えること。仮定によって O は A, B, C から等距離になる。一般の原点に対しては、H は垂心（orthocentre）ではない。

STEP のその先へ

最後の小問は、三角形の三本の垂線が一点で交わる（concurrent）ことを証明している。原点を外心（circumcentre）O（頂点から等距離にある点）にとれば、点 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ は三本すべての上にある。さらに $\mathbf{h} = 3\mathbf{g}$ であるから、外心・重心・垂心が一直線上、すなわち**オイラー線**（Euler line）上にあり、$OG : GH = 1 : 2$ であることも示される。座標によらない恒等式が仕事をしてくれるこのベクトル流の幾何学は、大学 1 年次の線形代数（linear algebra）で幾何を扱うときのやり方そのものである。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）がこれを展開しており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には STEP 形式の演習がさらに載っている。

解答例

STEP I 2004、第 7 問

純粋数学 ・ 母関数

> **STEP I 2004、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q7

鍵となる考え方

線形漸化式（linear recurrence）とべき級数（power series）は、同じ対象を二通りに記述したものである。級数に $1-7x+10x^2$ を掛けると、各係数 a_n が a_{n-1} および a_{n-2} と同じ位置に並ぶので、漸化式によって積のほとんどすべての係数が 0 になる。残るのは多項式であり、したがって f は有理関数（rational function）である。あとは部分分数分解（partial fractions）と等比級数（geometric series）によって a_n が直接求まる。小問 (ii) も、与えられた値から p と q を求めてしまえば、同じ仕組みで解ける。

解答

小問 (i)

$|x| < \frac{1}{5}$ のとき級数は収束（converge）するので、x のべきを掛けたり、級数どうしを項別に足したりしてよい：

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n, \\ -7x\,\mathrm{f}(x) &= -7a_0 x - \sum_{n=2}^{\infty} 7a_{n-1} x^n, \\ 10x^2\mathrm{f}(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} 10a_{n-2} x^n. \end{aligned}$$

（2 行目と 3 行目では、すべての和が $n \geq 2$ の x^n についての和になるように添字を付け替えている。）これらを足すと、

$$\mathrm{f}(x) - 7x\,\mathrm{f}(x) + 10x^2\mathrm{f}(x) = a_0 + (a_1 - 7a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2}\right) x^n.$$

漸化式により和の中の括弧はすべて 0 であり、また $a_0 = 2$、$a_1 - 7a_0 = 7 - 14 = -7$ である。よって

$$(1 - 7x + 10x^2)\,\mathrm{f}(x) = 2 - 7x.$$

ここで $1 - 7x + 10x^2 = (1 - 2x)(1 - 5x)$ であり、これは $|x| < \frac{1}{5}$ で 0 にならないので、両辺を割ってよい：

$$\mathrm{f}(x) = \frac{2 - 7x}{(1 - 2x)(1 - 5x)}.$$

分子は二つの因数の和 $(1 - 5x) + (1 - 2x) = 2 - 7x$ であるから、

$$\mathrm{f}(x) = \frac{(1 - 5x) + (1 - 2x)}{(1 - 2x)(1 - 5x)} = \frac{1}{1 - 2x} + \frac{1}{1 - 5x},$$

となり、示すべき式が得られた。

$|x| < \frac{1}{5}$ のとき $|2x| < 1$ かつ $|5x| < 1$ であるから、二つの分数はいずれも収束する等比級数の和である：

$$\mathrm{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^n + 5^n\right) x^n.$$

考えてみよう なぜここで a_n を読み取ることができるのか？

区間 $|x| < \frac{1}{5}$ のすべての x で一致する二つのべき級数が得られている。べき級数は 0 の近くでの値によって決まる。実際、その係数は $a_n = \mathrm{f}^{(n)}(0)/n!$ として復元できる。したがって係数どうしは一致しなければならず、

$$a_n = 2^n + 5^n \quad \text{すべての} n \geq 0.$$

が成り立つ。（簡単な確認として、$a_0 = 1 + 1 = 2$、$a_1 = 2 + 5 = 7$ である。）

小問 (ii)

まず p と q を求める必要がある。漸化式に $n = 2$ と $n = 3$ を代入すると：

$$b_2 = pb_1 + qb_0 : \quad 40 = 10p + 5q, \quad \text{よって} 2p + q = 8;$$
$$b_3 = pb_2 + qb_1 : \quad 100 = 40p + 10q, \quad \text{よって} 4p + q = 10.$$

辺々引くと $2p = 2$ となるので、$p = 1$、$q = 6$ である。漸化式は $b_n = b_{n-1} + 6b_{n-2}$ となる。

小問 (i) とまったく同様に、$1 - x - 6x^2$ を掛けると x^2 以降のすべての係数が消える：

$$(1 - x - 6x^2)\,\mathrm{g}(x) = b_0 + (b_1 - b_0)x = 5 + 5x.$$

$1-x-6x^2=(1-3x)(1+2x)$ であり、これは $|x|<\frac{1}{3}$ で 0 にならないので、

$$\mathrm{g}(x)=\frac{5+5x}{(1-3x)(1+2x)}=\frac{A}{1-3x}+\frac{B}{1+2x},$$

ただし $5+5x=A(1+2x)+B(1-3x)$ である。$x=\frac{1}{3}$ を代入すると $\frac{20}{3}=\frac{5}{3}A$ より $A=4$、$x=-\frac{1}{2}$ を代入すると $\frac{5}{2}=\frac{5}{2}B$ より $B=1$ である。したがって

$$\mathrm{g}(x)=\frac{4}{1-3x}+\frac{1}{1+2x}.$$

$|x|<\frac{1}{3}$ のとき $|3x|<1$ かつ $|2x|<1$ であるから、両方を等比級数として展開すると、

$$\mathrm{g}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(4\cdot 3^n+(-2)^n\right)x^n,$$

となり、先ほどと同様に係数を比較して、

$$b_n=4\cdot 3^n+(-2)^n.$$

を得る。

検算

得られた公式は与えられた値を再現する：$4+1=5$、$12-2=10$、$36+4=40$、$108-8=100$。漸化式から $n=39$ まで a_n と b_n を計算すると、2^n+5^n および $4\cdot 3^n+(-2)^n$ と完全に一致する。数値的には、$x=0.1$ において級数の部分和は f について 3.25、g について 6.547619… となり、$\frac{1}{0.8}+\frac{1}{0.5}=3.25$ および $\frac{4}{0.7}+\frac{1}{1.2}=\frac{275}{42}$ と一致する。

よくある間違い

- 漸化式が $n=2$ からしか成り立たないことを忘れること。積の x^0 の項と x^1 の項は別に計算しなければならず、それらが分子を与える。
- 小問 (ii) で、p と q が未知のまま漸化式を使ったり、分子を $b_0+(b_1-pb_0)x$ ではなく b_0+b_1x と書いたりすること。
- $1-x-6x^2$ を因数分解するときに符号を誤り、3^n と $(-2)^n$ ではなく 3^n と 2^n を導いてしまうこと。

STEP のその先へ

級数 f は数列 (a_n) の**母関数**（generating function）と呼ばれ、この方法は定数係数の任意の線形漸化式に対して使える。分母は常に漸化式から組み立てられ、その因

数が「特性根」（characteristic roots、ここでは 2 と 5）を与える。母関数は組合せ論（combinatorics）や確率論における中心的な道具であり、確率論では確率母関数（probability generating function）によって確率変数（random variable）の和が積に変換される。「等しいべき級数は等しい係数をもつ」という段階は、解析学（analysis）の最初の講義できちんと正当化される。べき級数とその一意性（uniqueness）については、Abbott, *Understanding Analysis* を参照するとよい。

解答例

STEP I 2004、第 8 問

純粋数学 ・ 単調数列と数学的帰納法

STEP I 2004、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/04-s1-q8

鍵となる考え方

数列が増加することを示すには、差 $t_{n+1} - t_n$ を t_n の関数として調べればよい。どちらの小問でもこの差は因数分解でき、その因数はちょうど漸化式（recurrence relation）の不動点（fixed point）2 と 3（$t_{n+1} = t_n$ となる値）に対応している。したがって差の符号は t_n が 2 と 3 に対してどこにあるかだけで決まり、本当になすべき仕事は、すべての項が適切な範囲にとどまることを数学的帰納法（induction）で示すことである。

解答

小問 (i)

任意の n に対して

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2 + 6}{5} - x_n = \frac{x_n^2 - 5x_n + 6}{5} = \frac{(x_n - 2)(x_n - 3)}{5}.$$

$x_n > 3$ ならば両方の因数が正であるから $x_{n+1} - x_n > 0$、すなわち $x_{n+1} > x_n$ である。

残るのは**すべての**項が 3 より大きいことの確認であり、これを帰納法で示す。$n = 0$ のとき、$x_n > 3$ は仮定より成り立つ。$x_n > 3$ と仮定する。上の計算により $x_{n+1} > x_n > 3$ であるから、$x_{n+1} > 3$ も成り立つ。よってすべての $n \geq 0$ に対して $x_n > 3$ であり、したがってすべての $n \geq 0$ に対して $x_{n+1} > x_n$ となる。すなわち、この数列は狭義単調増加（strictly increasing）である。

? **考えてみよう** なぜ $x_1 > x_0$ を示すだけでは不十分なのか。

不等式 $x_{n+1} > x_n$ は $x_n > 3$ から導いたものなので、最初の一歩だけでなく各段階でそ

の条件が必要である。ここではそれが自動的に得られる。3 より大きいところから増加すれば、3 より大きいままだからである。（ちょうど $x_0 = 3$ から始めると定数列になるので、狭義の不等式であることが重要である。）

小問 (ii)

まず、$2 < y_n < 3$ ならば $y_n > 0$ であるから、$y_{n+1} = 5 - 6/y_n$ は定義されることに注意する。このような y_n に対して

$$y_{n+1} - y_n = 5 - \frac{6}{y_n} - y_n = -\frac{y_n^2 - 5y_n + 6}{y_n} = \frac{(y_n - 2)(3 - y_n)}{y_n},$$

であり、$y_n - 2 > 0$、$3 - y_n > 0$、$y_n > 0$ よりこれは正である。したがって $2 < y_n < 3$ **であるならば** $y_{n+1} > y_n$ である。

小問 (i) と同様に、すべての項がこの区間にあることを示さなければならない。今回はそれが自動的には成り立たない。増加する数列は 3 を飛び越えてしまうかもしれないからである。そこで 3 からの距離を調べる。

$$3 - y_{n+1} = 3 - 5 + \frac{6}{y_n} = \frac{6 - 2y_n}{y_n} = \frac{2(3 - y_n)}{y_n}.$$

? **考えてみよう** 数列が決して 3 を飛び越えないことは、どうすればわかるか。

上の式は、$y_n > 0$ であれば $3 - y_{n+1}$ が $3 - y_n$ と同じ符号をもつことを示している。よって 3 より小さい項の次の項は、必ず 3 より小さい。

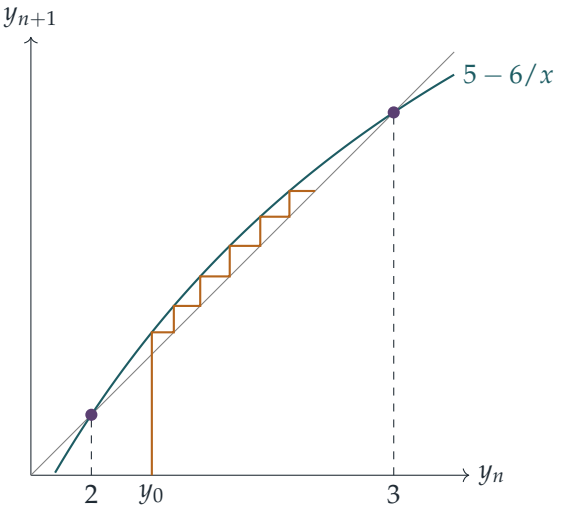
いよいよ帰納法である。主張：すべての $n \geq 0$ に対して $2 < y_n < 3$ である。$n = 0$ のときは仮定より成り立つ。$2 < y_n < 3$ と仮定する。このとき

- 差の計算により $y_{n+1} > y_n > 2$ である。
- $3 - y_n > 0$ かつ $y_n > 0$ より $3 - y_{n+1} = 2(3 - y_n)/y_n > 0$ であるから、$y_{n+1} < 3$ である。

したがって $2 < y_{n+1} < 3$ となり、帰納法が完成する。

すべての n に対して $2 < y_n < 3$ であるから、差の計算は各段階で適用でき、すべての $n \geq 0$ に対して $y_{n+1} > y_n$ となる。この数列は狭義単調増加でありながら、すべての n に対して $y_n < 3$ であり、これが示すべきことであった。

蜘蛛の巣図（cobweb diagram）を見ると、何が起きているかがわかる。曲線 $y = 5 - 6/x$ は直線 $y = x$ と $x = 2$ および $x = 3$ で交わり、その間では直線より上にあって、反復の値は 3 に達することなく 3 に向かって上っていく。



検算

- 不動点では漸化式は定数列を与える。実際 $(3^2+6)/5=3$、$5-6/3=3$、$5-6/2=2$ であり、因数 $(t-2)(t-3)$ と一致する。
- $y_0=2.5$ から始めると $y_1=2.6$、$y_2\approx 2.692$、$y_3\approx 2.771$ となり、増加しかつ 3 より小さい。200 ステップ後には y_n は 3 との差が 10^{-15} 以内になる。$x_0=3.1$ から始めると $x_1=3.122$、$x_2\approx 3.149$ となり、増加している。
- コンピュータを用いて、数百個のランダムな初期値について両方の帰納法を厳密な分数で検証し、さらに x_0 が 3 よりわずかに小さいと $x_1<x_0$ となることを確認した。よって条件 $x_0>3$ は必要である。

よくある間違い

- $x_n>3$ という仮定のもとで $x_{n+1}>x_n$ を示したところで終えてしまい、すべての項が 3 より大きいことを帰納法で証明しない。
- 小問 (ii) で $y_{n+1}<3$ を証明しても、帰納法を続けるには $y_{n+1}>2$ も必要であることを忘れる（これは $y_{n+1}>y_n$ から従う）。
- $y_n>0$ であることに触れずに、不等式の両辺に y_n を掛ける。

STEP のその先へ

小問 (ii) の数列は有界な増加数列であり、解析学の**単調収束定理**（monotone convergence theorem）によれば、このような数列は必ず収束（converge）する。極限 L はいずれも $L = 5 - 6/L$ を満たすので、ここでは $y_n \to 3$ である。小問 (i) では、有限の極限があればそれは 3 より大きい不動点でなければならないが、そのようなものは存在しないので、数列は限りなく増加する。反復が不動点に引き寄せられるか、それとも不動点から遠ざけられるかは、その点における写像の傾きで決まり、これが離散力学系（discrete dynamical system）の理論の出発点である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門）は単調収束を丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 2004、第 9 問

力学 ・ 放物運動

> **STEP I 2004、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q9

鍵となる考え方

前半は、「最高点では鉛直方向の速度が 0 になる」という標準的な計算である。トンネルの問題では、速さ u は与えられていないが、自由に選べるわけでもない。θ を決めると、軌道が P を通るという条件によって u が定まる。そこで u を消去し、最高点の高さを θ だけの関数として（$t = \tan\theta$ を用いて表すのがよい）書き表し、それが天井より低くなるのはどのようなときかを調べる。答えは t についての 2 次不等式（quadratic inequality）として得られる。

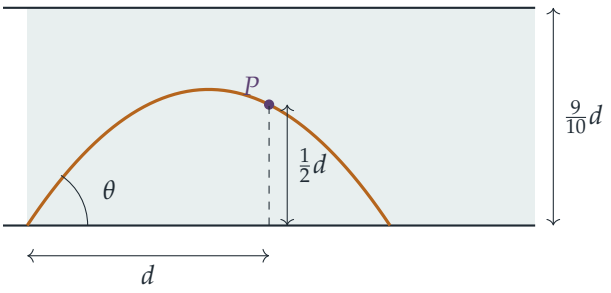
解答

最高点の高さ

粒子を、空気抵抗のない状態で重力のみを受けて自由に運動する質点とみなす。投射点を原点とし、x 軸を水平方向、y 軸を鉛直上向きにとる。速度の鉛直成分は初め $u\sin\theta$ であり、一定の加速度 $-g$ を受ける。最高点では鉛直方向の速度が 0 になるので、鉛直方向に $v^2 = v_0^2 + 2as$ を用いると、

$$0 = u^2\sin^2\theta - 2gH, \qquad \text{よって} \qquad H = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}.$$

トンネル



粒子の軌道（trajectory）は、$x = uT\cos\theta$ と $y = uT\sin\theta - \frac{1}{2}gT^2$ から時刻 T を消去して得られる。

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta} = xt - \frac{gx^2(1+t^2)}{2u^2},$$

ここで $t = \tan\theta$ とおき、$\sec^2\theta = 1 + t^2$ を用いた。

P を通る条件。 $x = d$、$y = \frac{1}{2}d$ を代入して d で割ると、

$$\frac{1}{2} = t - \frac{gd(1+t^2)}{2u^2}, \qquad \text{よって} \qquad \frac{gd(1+t^2)}{2u^2} = t - \frac{1}{2}.$$

左辺は正であるから、$t > \frac{1}{2}$ でなければならない。（これは納得のいく結果である。粒子は θ の方向へ動き出し、重力は軌道を下向きに曲げるだけなので、P に到達できるのは、P へ向かう傾き $\frac{1}{2}$ の直線より上に向けて投げた場合に限られる。）このような各 θ に対して、条件を満たす速さはただ一つ存在し、

$$u^2 = \frac{gd(1+t^2)}{2t-1}.$$

考えてみよう 問題では u の値が与えられていない。それなのに、なぜ条件が θ だけで表せるのだろうか。

速さは自分で選べるものではないからである。θ を固定すると、「P を通る」という条件によって u が定まる。したがって、最高点の高さは実際には θ だけの関数である。

天井に当たらない条件。 H の式に $\sin^2\theta = \dfrac{t^2}{1+t^2}$ を用いると、

$$H = \frac{u^2}{2g}\cdot\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{d(1+t^2)}{2(2t-1)}\cdot\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{dt^2}{2(2t-1)}.$$

粒子が天井に当たらないのは、ちょうど $H < \frac{9}{10}d$ のときである。$2t-1>0$ であるから、不等号の向きを変えずに両辺に $10(2t-1)/d$ を掛けることができる。

$$\begin{aligned}\frac{dt^2}{2(2t-1)} < \frac{9d}{10} &\iff 5t^2 < 9(2t-1)\\ &\iff 5t^2-18t+9<0\\ &\iff (5t-3)(t-3)<0\\ &\iff \tfrac{3}{5}<t<3.\end{aligned}$$

この区間のすべての t は $t>\frac{1}{2}$ を満たすので、先の条件は新たな制約を加えない。$t=\frac{3}{5}$ または $t=3$ のときは粒子がちょうど天井に触れるので、これらは除外される。天井には決して当たらないので、粒子は床まで落下し、トンネルの中に着地する。

最後に、θ は 0 と $\frac{\pi}{2}$ の間にあり、この範囲で tan は増加関数であるから、

$$\arctan\tfrac{3}{5}<\theta<\arctan 3,$$

となり、示すべきことが得られた。

検算

- $t=3$ のとき $H=\dfrac{9d}{2\cdot 5}=\frac{9}{10}d$、$t=\frac{3}{5}$ のとき $H=\dfrac{(9/25)d}{2\cdot(1/5)}=\frac{9}{10}d$ である。どちらの端点でも粒子は天井をかすめる。これは予想どおりである。
- $t\to\frac{1}{2}^{+}$ のとき、必要な速さは $u\to\infty$ となり、$H\to\infty$ となる。粒子は P へ向かう直線にほぼ沿って進むので、非常に速くなければならず、その後非常に高くまで上昇する。
- 数値的に、$d=3$、$g=9.8$ として 10^5 個の角度を無作為に選んで検証した。それぞれについて u を求め、軌道が P を通ることを確かめたうえで、$H<\frac{9}{10}d$ となるのはちょうど $0.5404<\theta<1.2490$（すなわちラジアンで表した $\arctan 0.6$ と $\arctan 3$ の間）のときであることを確認した。また、逐次的なシミュレーションによって $H=u^2\sin^2\theta/(2g)$ も確かめた。

よくある間違い

- u を独立した未知数として扱い、行き詰まってしまう。u は P での条件を用いて消去しなければならない。
- 不等式の両辺に $2t-1$ を掛ける前に、その符号を確認し忘れる。

- P が天井より下にあることだけを確認してしまう。軌道の最高点はふつう P より後にあるので、問題になるのは最高点の高さである。

STEP のその先へ

軌道を $\tan\theta$ を用いて表すと、放物運動（projectile motion）の問題が t についての 2 次式の問題に変わる。同じ工夫によって、与えられた速さをもつすべての軌道の「包絡線」（envelope、軌道全体を囲む放物線）を求めることができ、また標的に命中させるための 2 通りの角度も得られる。この問題のように、一部のパラメータが制約によって定まり、残りが許される領域をなすような問題は、最適化（optimisation）や変分法（calculus of variations）へとつながっていく。この種の力学を学ぶ次の一歩としては、Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）が優れている。

解答例

STEP I 2004、第 10 問

力学 ・ 等加速度運動

STEP I 2004、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

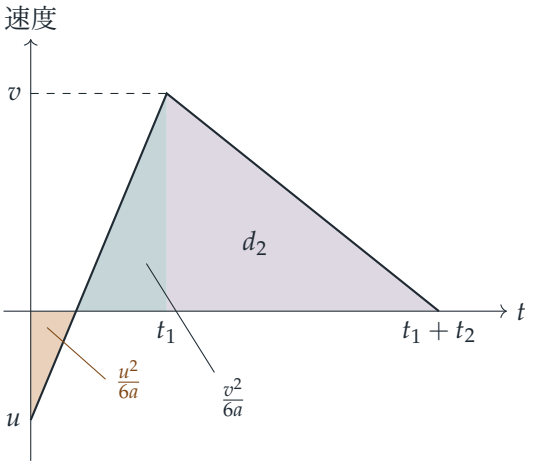
step.maths.org/questions/04-s1-q10

鍵となる考え方

ここで扱う運動はすべて等加速度運動（constant acceleration）なので、$v^2 = u^2 + 2as$ と $v = u + at$ だけですべて片がつく。唯一の落とし穴は**距離**（distance）という語である。$u < 0$ のとき、粒子はまず後ろ向きに動き、いったん止まり、それから前向きに加速する。したがって距離 d_1 は単一の変位（displacement）ではなく、二つの部分の和になる。速度–時間グラフ（velocity–time graph）を描くとこのことがはっきりする。距離はグラフと時間軸の間の面積の総和であり、軸より下にある面積も正として数える。

解答

最終速度 v の向きを正の向きとする。第 1 段階では加速度は $+3a$ である（速度を u から $v > u$ まで増加させる）。第 2 段階では加速度は $-a$ であり、速度が 0 になるまで続く。全体を通じて $a > 0$ とする。



このグラフは $u < 0$ の場合を示している。軸より下の小さな三角形が後ろ向きの移動にあたる。

第 2 段階（両方の場合に共通）。 速さ v から減速度（deceleration）a で静止するまで、粒子は一度も向きを変えないので、

$$0 = v^2 - 2ad_2 \quad \Longrightarrow \quad d_2 = \frac{v^2}{2a}.$$

小問 (i)

$u > 0$ ならば、速度は u から v まで増加し、つねに正である。よって距離は変位に等しい：

$$v^2 = u^2 + 2(3a)d_1 \quad \Longrightarrow \quad d_1 = \frac{v^2 - u^2}{6a}.$$

したがって、$u^2 > 0$ より

$$3d_1 = \frac{v^2 - u^2}{2a} < \frac{v^2}{2a} = d_2,$$

となる。ゆえに、示すべきとおり $3d_1 < d_2$ である。

小問 (ii)

今度は $u < 0$ であり、第 1 段階は二つに分かれる。

考えてみよう なぜ再び $v^2 = u^2 + 6ad_1$ を使うだけではいけないのか？

この公式が与えるのは**変位** $\frac{v^2-u^2}{6a}$ である。しかし粒子はまず後ろ向きに動く。加速度 $3a$ のもとで、粒子は速さ $|u|$ から静止まで減速し、その間に $\frac{u^2}{6a}$ だけ進む（$0 = u^2 - 2(3a)s$

より)。その後、静止状態から v まで加速し、$\frac{v^2}{6a}$ だけ進む。距離はこれらの和である：

$$d_1 = \frac{u^2+v^2}{6a}, \qquad \text{よって} \qquad 3d_1 = \frac{u^2+v^2}{2a}.$$

$d_2 = \frac{v^2}{2a}$ および $2d_2 = \frac{2v^2}{2a}$ と比べると、

- $u \neq 0$ より、$3d_1 - d_2 = \dfrac{u^2}{2a} > 0$；
- $v > |u|$ より、$2d_2 - 3d_1 = \dfrac{v^2-u^2}{2a} > 0$。

したがって、示すべきとおり $d_2 < 3d_1 < 2d_2$ である。

平均の速さ

時間は向きに左右されない。第 1 段階では速度が割合 $3a$ で $v-u$ だけ変化し、第 2 段階では割合 a で v だけ変化するので、u の符号によらず

$$t_1 = \frac{v-u}{3a}, \qquad t_2 = \frac{v}{a}, \qquad t_1 + t_2 = \frac{4v-u}{3a},$$

である。

$u > 0$ の場合。全距離は $\frac{v^2-u^2}{6a} + \frac{3v^2}{6a} = \frac{4v^2-u^2}{6a}$ なので、平均の速さ（average speed）は

$$S_+ = \frac{4v^2-u^2}{6a} \cdot \frac{3a}{4v-u} = \frac{4v^2-u^2}{2(4v-u)}.$$

$u < 0$ の場合。$0 < w < v$ として $u = -w$ とおく。全距離は $\frac{v^2+w^2}{6a} + \frac{3v^2}{6a} = \frac{4v^2+w^2}{6a}$、時間は $\frac{4v+w}{3a}$ なので、

$$S_- = \frac{4v^2+w^2}{2(4v+w)}.$$

これらを比べるために、それぞれを $\frac{1}{2}v$ と比較する：

$$S_+ - \tfrac{1}{2}v = \frac{4v^2-u^2-v(4v-u)}{2(4v-u)} = \frac{u(v-u)}{2(4v-u)},$$

$$S_- - \tfrac{1}{2}v = \frac{4v^2+w^2-v(4v+w)}{2(4v+w)} = -\frac{w(v-w)}{2(4v+w)}.$$

第 1 の場合は $0 < u < v$ なので、第 1 式は分子も分母も正であり、$S_+ > \frac{1}{2}v$ となる。第 2 の場合は $0 < w < v$ なので、第 2 式は負であり、$S_- < \frac{1}{2}v$ となる。したがって

$$S_- < \tfrac{1}{2}v < S_+,$$

であり、示すべきとおり $u > 0$ のときのほうが平均の速さは大きい。これは二つの場合で $|u|$ の値が等しいときに限らず、任意の値について成り立つことに注意しよう。$\frac{1}{2}v$ は、同じ v と a をもつすべての $u > 0$ の運動と、すべての $u < 0$ の運動とを分け隔てているのである。

検算

- $v = 2$、$a = 1$ とする。$u = 1$ のとき：$d_1 = \frac{1}{2}$、$d_2 = 2$ なので $3d_1 = 1.5 < 2$ であり、時間は $\frac{7}{3}$ だから $S_+ = \frac{2.5}{7/3} \approx 1.071 > 1$ となる。$u = -1$ のとき：$d_1 = \frac{5}{6}$ なので $2 < 3d_1 = 2.5 < 4$ であり、時間は 3 だから $S_- = \frac{17/6}{3} \approx 0.944 < 1$ となる。運動を一歩ずつ数値シミュレーションしても、これらの値が再現される。
- 極限：$u \to 0$ または $|u| \to v$ のとき、どちらの平均の速さも $\frac{1}{2}v$ に近づく。これは静止から出発して止まるだけの単純な運動の平均の速さである。また、許される範囲の端では不等式が等式になる：両方の小問で $u \to 0$ のとき $3d_1 \to d_2$ となり、小問 (ii) で $u \to -v$ のとき $3d_1 \to 2d_2$ となる。

よくある間違い

- 小問 (ii) で $d_1 = \frac{v^2 - u^2}{6a}$ を使ってしまう。これは変位であり、これを使うと再び $3d_1 < d_2$ が得られてしまい、示すべきことと矛盾する。
- $u < 0$ のときは時間も分けて考える必要があると思ってしまう。その必要はない。$v = u + 3at_1$ は折り返し点をまたいでそのまま成り立つ。

STEP のその先へ

変位と距離の違いは、$\int v\,\mathrm{d}t$ と $\int |v|\,\mathrm{d}t$ の違いである。後者は経路の弧長（arc length）であり、自動車の走行距離計が測っているのはこの量である。大学の力学では、弧長は曲がった軌道を記述するための自然なパラメータとなり、そこから加速度の接線成分と法線成分（tangential and normal components）が導かれる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このような流れで運動学（kinematics）を展開している。

解答例

STEP I 2004、第 11 問

力学 ・ 摩擦と蝶番付きのはしご

> **STEP I 2004、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q11

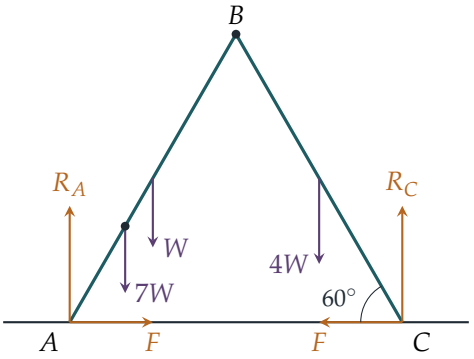
鍵となる考え方

どちらかが滑り出す前は骨組み全体がつり合い（equilibrium）の状態にあるので、二つの垂直抗力（normal reaction）は系全体から求められ、摩擦力（friction）ははしご一本だけを考えれば求められる（ちょうつがいのまわりのモーメントをとれば、未知のちょうつがいの力は消える）。水平方向の外力は二つの摩擦力だけなので、その大きさは等しい。垂直抗力が小さいほうの脚では比 F/R が大きくなる必要があり、先に滑るのはその脚である。

解答

各はしごを長さ $2a$ の一様な棒（uniform rod）、B のちょうつがい（hinge）をなめらか、塗装工を質点（particle）としてモデル化する。$AB = BC$ かつ $\angle ABC = 60^\circ$ であるから、三角形 ABC は正三角形（equilateral triangle）である。よって $AC = 2a$ であり、各はしごは地面と 60° をなす。このとき B は各脚から水平距離 a、地面からの高さ $a\sqrt{3}$ の位置にある。

塗装工が AB の 3 分の 1 の位置まで登ったとき、彼女は A から水平距離 $\frac{1}{3}a$ の位置にいる。AB の中点は A から $\frac{1}{2}a$、BC の中点は A から $\frac{3}{2}a$ の位置にある。



垂直抗力

A、C における垂直抗力をそれぞれ R_A、R_C とする。系全体について鉛直方向の力のつり合いを考えると

$$R_A + R_C = W + 4W + 7W = 12W.$$

系全体について A のまわりのモーメント（moment）をとると（ちょうつがいの力は内力なので現れない）

$$R_C \cdot 2a = W \cdot \tfrac{1}{2}a + 7W \cdot \tfrac{1}{3}a + 4W \cdot \tfrac{3}{2}a = \tfrac{53}{6}Wa,$$

よって

$$R_C = \tfrac{53}{12}W, \qquad R_A = 12W - \tfrac{53}{12}W = \tfrac{91}{12}W.$$

摩擦力

脚は外側に開こうとするので、各脚における摩擦力は内向きにはたらく。系全体について水平方向の力のつり合いを考えると、水平方向の外力は摩擦力だけなので、両者の大きさは等しい。これを F とおく。

F を求めるには、はしご一本だけを考える必要がある。塗装工の乗っていない BC をとり、未知のちょうつがいの力が消えるように B のまわりのモーメントをとる。B のまわりで、抗力 R_C の腕の長さ（lever arm）は a、重さ $4W$ の腕の長さは $\frac{1}{2}a$、摩擦力 F（水平で、地面の高さにはたらく）の腕の長さは $a\sqrt{3}$ である。重さと F は BC を一方向に回し、R_C はその逆向きに回すので

$$R_C \cdot a = 4W \cdot \tfrac{1}{2}a + F \cdot a\sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad F = \frac{R_C - 2W}{\sqrt{3}} = \frac{29W}{12\sqrt{3}}.$$

確認として、AB について B のまわりで同じ計算をすると $R_A \cdot a = W \cdot \frac{1}{2}a + 7W \cdot \frac{2}{3}a + Fa\sqrt{3}$ となり、$F\sqrt{3} = \frac{91}{12}W - \frac{31}{6}W = \frac{29}{12}W$ を得るので、一致する。

どちらのはしごが滑るか

考えてみよう 摩擦力は両脚で等しいのに、どちらが先に滑るかはどうすればわかるだろうか。

ある脚が滑り出す直前の状態にあるのは、必要な摩擦力がその点の垂直抗力の μ 倍に等しくなるときである。両脚とも同じ F を必要とするので、垂直抗力が小さいほうの脚ほど大きな比を必要とする。

$$\frac{F}{R_A} = \frac{29}{91\sqrt{3}} \approx 0.184, \qquad \frac{F}{R_C} = \frac{29}{53\sqrt{3}} \approx 0.316.$$

したがって C が先に限界摩擦（limiting friction）に達する。塗装工が乗っているのは AB であるにもかかわらず、滑るのは**重いほうのはしご** BC なのである。彼女の重さは A を地面にしっかりと押しつけるが、C にかかる荷重はずっと小さい。

それより前に何も滑っていないことも確かめておく必要がある。彼女が全長の割合 t の位置まで登ったとすると、同様の計算により $R_C = (\frac{13}{4} + \frac{7}{2}t)W$、$F\sqrt{3} = R_C - 2W = (\frac{5}{4} + \frac{7}{2}t)W$ となるので

$$\frac{F}{R_C} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{5}{4} + \frac{7}{2}t}{\frac{13}{4} + \frac{7}{2}t} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{2}{\frac{13}{4} + \frac{7}{2}t}\right),$$

これは t について増加する。同様に F/R_A も t について増加する（分子は増加し、分母 $R_A = 12W - R_C$ は減少する）。よって必要な比は彼女が登るにつれて単調に大きくなり、最初の滑りが起こるのは、ちょうど $t = \frac{1}{3}$ において F/R_C が μ に達するときである。ゆえに

$$\mu = \frac{29}{53\sqrt{3}} = \frac{29\sqrt{3}}{159} \approx 0.316.$$

検算

- AB についての B のまわりのモーメントは、BC についての B のまわりのモーメントと同じ F を与える（上で示した）ので、抗力の値は整合している。
- 塗装工がまったくいなければ、BC のほうが重いので R_C は R_A より大きいはずである。実際、このとき A のまわりのモーメントから $R_C = \frac{13}{4}W$、$R_A = \frac{7}{4}W$ が得られ、和は $5W$ となる。
- $R_A = R_C$ となるのは $t = \frac{11}{14}$ のときである。それを超えて初めて AB が滑る側になるので、$t = \frac{1}{3}$ では滑るのは BC でなければならない。
- 数値的に、座標からすべての力を計算し直し（両方のはしごについて B のまわりのモーメントも確認し）てみると、$\mu \approx 0.31591$ となる。

よくある間違い

- 塗装工が乗っているはしごが滑ると思い込むこと。彼女の重さは A における垂直抗力を増やし、その脚をより安定させる。
- はしご一本について脚のまわりのモーメントをとってしまい、未知のちょうつがいの力を持ち込むこと。はしご一本について B のまわりのモーメントをとれば、これを避けられる。
- ちょうつがいのまわりでの摩擦力の腕の長さが $a\sqrt{3}$（B の高さ）であることを忘れること。

STEP のその先へ

これは、部材を連結した構造物の静力学（statics）における基本的な戦略である。まず構造物全体を考えて外部からの抗力を求め、次に連結点で切り離して、一つの部材が担わなければならない力を求めるのである。どの接触点が先に破綻するかという問いは、骨組み構造（frame）の解析や仮想仕事の原理（principle of virtual work）へとつながっていく。後者では、拘束条件と矛盾しない微小な変位を考えることによってつり合いを求める。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の静力学と摩擦を丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 2004、第 12 問

確率・統計 ・ ベイズの定理

> **STEP I 2004、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q12

鍵となる考え方

グループ 1 から取り出した標本からは、チップがグループ 1 に入っているという条件のもとでそれが機械 A で作られた条件付き確率（conditional probability）がおおよそわかる。そこで、ベイズの定理（Bayes' theorem）を用いてこの条件付き確率を λ、p、q で表し、観測された割合と等しいとおいて λ について解く。選別に誤りがある場合に変わるのは、各機械のチップがグループ 1 に入る確率だけであり、解法はまったく同じである。

解答

工場の生産品から無作為にチップを 1 個選ぶ。それが機械 A で作られたという事象を A とし（したがって $\mathrm{P}(A) = \lambda$、$\mathrm{P}(A') = 1 - \lambda$ である）、それが完全品であるという事象を P、それがグループ 1 に入れられるという事象を G とする。問題文より $\mathrm{P}(P \mid A) = p$、$\mathrm{P}(P \mid A') = q$ である。

グループ 1 から無作為に取り出したチップとは、生産品から無作為に取り出したチップに G という条件をつけたものである。標本は大きいので、観測された割合 $\frac{2}{5}$ は $\mathrm{P}(A \mid G)$ のよい推定値であり、λ の推定値は $\mathrm{P}(A \mid G)$ をちょうど $\frac{2}{5}$ にする値である。

選別が完全な場合

このとき G は P と同じ事象である。ベイズの定理により、

$$\mathrm{P}(A \mid P) = \frac{\mathrm{P}(P \mid A)\,\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(P \mid A)\,\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(P \mid A')\,\mathrm{P}(A')} = \frac{\lambda p}{\lambda p + (1-\lambda)q}.$$

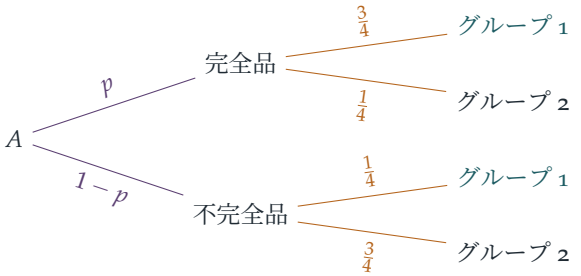
これを $\frac{2}{5}$ と等しいとおき、分母を払う（分母は正である）と、

$$5\lambda p = 2\lambda p + 2(1-\lambda)q$$
$$3\lambda p + 2\lambda q = 2q$$
$$\lambda = \frac{2q}{3p+2q},$$

となる。$3p+2q>0$ であるから、これが求める推定値である。

選別に誤りがある場合

このとき、チップがグループ 1 に入るのは、完全品で正しく選別される場合か、不完全品で誤って選別される場合のどちらかである。選別の誤りは、チップをどちらの機械が作ったかとは独立に起こると仮定する。つまり、チップが完全品かどうかが与えられれば、その選別のされ方は機械によらない。下の樹形図は機械 A のチップについての枝を示したものである。機械 B については p を q に置き換えればよい。



グループ 1 に至る 2 本の枝を足し合わせると、

$$\mathrm{P}(G \mid A) = \tfrac{3}{4}p + \tfrac{1}{4}(1-p) = \frac{1+2p}{4}, \qquad \mathrm{P}(G \mid A') = \tfrac{3}{4}q + \tfrac{1}{4}(1-q) = \frac{1+2q}{4}.$$

よって、再びベイズの定理により（因子 $\frac{1}{4}$ は約分される）、

$$\mathrm{P}(A \mid G) = \frac{\lambda(1+2p)}{\lambda(1+2p)+(1-\lambda)(1+2q)}.$$

考えてみよう 証拠は変わったのか？　$\frac{2}{5}$ をそのまま使ってよいのか？

よい。標本は実際にグループ 1 から取り出されたものであり、その $\frac{2}{5}$ は実際に機械 A で作られたものである。変わったのは、チップがどのようにしてグループ 1 に入った

かについてのモデルだけである。そこで、$\mathrm{P}(A \mid G)$ の新しい式を $\frac{2}{5}$ と等しいとおく。

$$\begin{aligned} 5\lambda(1+2p) &= 2\lambda(1+2p) + 2(1-\lambda)(1+2q) \\ \lambda\big[3(1+2p) + 2(1+2q)\big] &= 2(1+2q) \\ \lambda &= \frac{2(1+2q)}{5+6p+4q}. \end{aligned}$$

これが λ の新しい推定値である。これは、最初の答えにおいて p と q を、グループ 1 に入る新しい確率 $\frac{1+2p}{4}$ と $\frac{1+2q}{4}$ に置き換えたものになっていることに注意しよう。

検算

- $p = q$ ならば、品質によって 2 台の機械を区別することはできないので、グループ 1 は生産の割合をそのまま反映し、λ は $\frac{2}{5}$ になるはずである。実際、どちらの式もこの値を与える：$\frac{2p}{5p} = \frac{2}{5}$、$\frac{2(1+2p)}{5+10p} = \frac{2}{5}$。
- どちらの推定値も、分子が正で分母より小さいので、0 と 1 の間（両端を含まない）にある。
- $\lambda = 0.3$、$p = 0.6$、$q = 0.8$ として、選別に誤りがある場合の 4×10^5 個のチップのシミュレーションを行ったところ、グループ 1 のうち機械 A のものの割合は 0.2667 となり、公式による値 0.2661 とよく合った。シミュレーションで得た割合から公式を逆に解くと、$\lambda \approx 0.301$ が復元された。

よくある間違い

- $\frac{2}{5}$ を、条件付き確率 $\mathrm{P}(A \mid G)$ ではなく、$\mathrm{P}(G \mid A)$ や λp と等しいとおいてしまう。
- 後半で、誤ってグループ 1 に入れられた不完全品を忘れてしまう。つまり、$\frac{3}{4}p$ だけを用いてしまう。

STEP のその先へ

観測データに「ちょうど合う」ようにパラメータの値を選ぶ方法は**モーメント法**（method of moments）とよばれる。この問題では、それは大学の最初の統計学の講義で学ぶ最尤推定（maximum likelihood estimation）と一致する。誤りのある選別機は、測定誤差（誤分類、misclassification）の簡単なモデルである。これは医学検査において実際に重要な問題であり、偽陽性（false positive）と偽陰性（false negative）は、まさにこのようにして観測される割合を歪める。ベイズの定理と条件付けについてさら

に学ぶには、Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）を参照するとよい。

解答例

STEP I 2004、第 13 問

確率・統計　・　一様分布の最大値

STEP I 2004、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/04-s1-q13

鍵となる考え方

独立（independent）ないくつかの数の最大値が x 以下になるのは、それらがすべて x 以下であるとき、かつそのときに限る。これにより扱いにくい「最大値」が同じ確率の積に変わり、X の分布関数（distribution function）が 1 行で求まる。残りはすべてここから導かれる。微分すれば確率密度関数（density）と期待値（expectation）が得られ、分布関数を 0.05 と等しいとおけば検定（test）の臨界値（critical value）が求まる。

解答

小問 (i)

3 つの数を U_1, U_2, U_3 とする。これらは独立で、それぞれ $[0,1]$ 上の一様分布（uniform distribution）に従うので、$0 \le x \le 1$ に対して $\mathrm{P}(U_i \le x) = x$ である。$X = \max(U_1, U_2, U_3)$ であるから、

$$X \le x \iff U_1 \le x,\ U_2 \le x \text{ かつ} U_3 \le x.$$

独立性より、

$$F(x) = \mathrm{P}(X \le x) = x^3 \qquad (0 \le x \le 1).$$

特に $\mathrm{P}(X \le 0.8) = 0.8^3 = 0.512$ となり、題意が示された。

微分すると、X の確率密度関数は $[0,1]$ 上で $f(x) = F'(x) = 3x^2$ となるので、

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^1 x \cdot 3x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{3}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{3}{4}.$$

これは妥当な結果である。3 つの数のうち最大のものは、1 つの数の平均 $\frac{1}{2}$ よりかなり大きいはずだからである。

小問 (ii)

今度は独立な N 個の数があり、それぞれ $[0, a]$ 上の一様分布に従うので、$0 \le x \le a$ に対して $\mathrm{P}(U_i \le x) = x/a$ である。同じ議論により

$$\mathrm{P}(X \le x) = \left(\frac{x}{a}\right)^N \qquad (0 \le x \le a),$$

が得られ、$x \ge a$ に対しては $\mathrm{P}(X \le x) = 1$ である。X は連続型確率変数なので、$\mathrm{P}(X < x)$ も同じ値になる。

臨界値。 この検定は $x < c$ のとき H_0 を棄却する。有意水準（significance level）5% とは、H_0 が正しいとき（$a = 1$）に棄却する確率が 0.05 であることを意味する。

$$\mathrm{P}(X < c \mid a = 1) = c^N = 0.05, \qquad \text{よって} \qquad c = 0.05^{1/N}.$$

x の値が小さいことは $a < 1$ を支持する証拠となる。棄却域（rejection region）が $x < c$ となるのはこのためである。

> **?** **考えてみよう** 「$x \le 0.8$ ならば常に棄却される」という条件は、N についてのどのような不等式になるか？

$x \le 0.8$ がすべて棄却されるのは、そのような x がどれも c より小さいとき、すなわち $0.8 < c$ のとき、かつそのときに限る。$t \mapsto t^N$ は $t > 0$ で増加関数であるから、これは次と同値である。

$$0.8^N < c^N = 0.05.$$

したがって、$0.8^N < 0.05$ を満たす最小の整数 N を求めればよい。（N が大きくなると c は 1 に近づいていくので、N が大きいほど検定は棄却しやすくなることに注意する。）

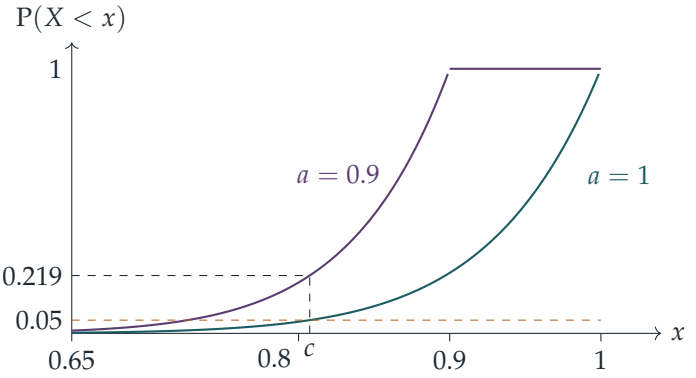
$2^{10} \approx 10^3$ を用いる。 $0.8 = 2^3/10$ と書けば、$0.8^N = 2^{3N}/10^N$ である。

- $N = 13$: $0.8^{13} = \dfrac{2^{39}}{10^{13}} = \dfrac{2^9 \cdot 2^{30}}{10^{13}} \approx \dfrac{512 \times 10^9}{10^{13}} = 0.0512 > 0.05.$
- $N = 14$: $0.8^{14} = \dfrac{2^{42}}{10^{14}} = \dfrac{2^2 \cdot 2^{40}}{10^{14}} \approx \dfrac{4 \times 10^{12}}{10^{14}} = 0.04 < 0.05.$

0.8^N は N が増えると減少するので、$N \le 13$ はすべて条件を満たさない。よって最小値は

$$N = 14.$$

である。（$2^{10} = 1024$ であるから、この近似は 2 の累乗をわずかに小さく見積もっている。真の値 $0.8^{13} \approx 0.0550$ と $0.8^{14} \approx 0.0440$ を用いても同じ結論が得られる。）



$N = 14$ のとき、臨界値は $c = 0.05^{1/14} \approx 0.807$ であり、0.8 をわずかに上回る。

$a = 0.8$ の場合。 すべての数は $[0, 0.8]$ に含まれるので、必ず $X \leq 0.8 < c$ となる。帰無仮説（null hypothesis）は確率 1 で棄却される。

$a = 0.9$ の場合。 このとき $c \approx 0.807 < 0.9$ であるから、

$$\mathrm{P}(\text{棄却}) = \mathrm{P}(X < c \mid a = 0.9) = \left(\frac{c}{0.9}\right)^{14} = \frac{c^{14}}{0.9^{14}} = \frac{0.05}{0.9^{14}}.$$

ここで $0.9^2 = 0.81$、$0.9^4 = 0.6561$、$0.9^8 \approx 0.4305$ であり、したがって $0.9^{14} = 0.9^8 \cdot 0.9^4 \cdot 0.9^2 \approx 0.2288$ である。ゆえに

$$\mathrm{P}(\text{棄却} \mid a = 0.9) = \frac{0.05}{0.9^{14}} \approx 0.219.$$

つまり、14 個の観測値があっても、a が 1 ではなく 0.9 であることをこの検定はたいてい見抜けない。

検算

- モンテカルロ・シミュレーション（Monte Carlo simulation、2×10^5 回の試行）では、小問 (i) について $\mathrm{P}(X \leq 0.8) \approx 0.512$、$\mathrm{E}(X) \approx 0.750$ が得られた。
- 一般に、$[0, 1]$ 上の一様分布に従う n 個の数の最大値の平均は $\frac{n}{n+1}$ である。$n = 1$ のときこれは当然 $\frac{1}{2}$ となり、$n = 3$ のときは $\frac{3}{4}$ となる。
- $N = 14$、$c = 0.05^{1/14}$ のとき、シミュレーションによる棄却率は $a = 1$ のとき約 0.0505（検定のサイズ（size））、$a = 0.9$ のとき約 0.218 であり、$0.05/0.9^{14} = 0.2186$ と一致した。

よくある間違い

- 0.8^N の代わりに $1 - 0.8^N$ を用いること。最大値が**小さい**確率は積 0.8^N であり、その余事象の確率ではない。
- $a = 0.9$ での棄却確率を $(0.8/0.9)^{14}$ とすること。検定は $x < c$ のときに棄却するのであり、c は 0.8 ではない。
- 0.0512 が「ほぼ 0.05 である」として $N = 13$ で止めてしまうこと。必要なのは 0.05 より真に小さいことである。

STEP のその先へ

最大値は**順序統計量**（order statistic）の一つであり、$[0, a]$ 上の一様分布では a に対する**十分統計量**（sufficient statistic）となる。すなわち、標本が a について持つ情報をすべて含んでいる。真の a の関数として見た棄却確率は、その検定の**検出力関数**（power function）と呼ばれる。ここでは $a \leq 1$ に対して $\min\{1, 0.05/a^N\}$ であり、統計学者は検出力関数を比較することで検定を選ぶ。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は最大値と最小値の分布を扱っており、Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）は順序統計量を詳しく扱っている。

解答例

STEP I 2004、第 14 問

確率・統計　・　並べ方の数え上げ

STEP I 2004、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/04-s1-q14

鍵となる考え方

箱の中身を硬貨 1 枚ずつ取り出して、すべてを 1 列に並べるところを想像する。海賊たちはこの列を 2 枚の鉛の硬貨のところで切り分けているにすぎない。1 人目の海賊は最初の鉛の硬貨より前にある金貨を、2 人目は 2 枚の鉛の硬貨の間にある金貨を、3 人目は 2 枚目の鉛の硬貨より後にある金貨を受け取る。硬貨の並び方はどれも等しく起こりやすいので、すべては 2 枚の鉛の硬貨がどの位置に来うるかを数えることに帰着する。

解答

実際には 3 人目の海賊は残りをまとめて取るだけであるが、$n+2$ 枚の硬貨がすべて無作為な順序で取り出されると考える。こう考えても、誰がどの硬貨を受け取るかは変わらない。取り出しは無作為であるから、鉛の硬貨 2 枚の位置を（$n+2$ 個の位置から）選ぶ $\binom{n+2}{2}$ 通りの選び方はどれも等確率である。

1 人目、2 人目、3 人目の海賊が受け取る金貨の枚数をそれぞれ A、B、C とする。このとき $A+B+C=n$ であり、硬貨の列は次のようになる。



ここで、金貨は琥珀色、鉛の硬貨は紫色で表している。鉛の硬貨の位置によって (A,B,C) が定まり、$A+B+C=n$ を満たす非負整数の組はどれも、ちょうど 1 通りの位置の選び方から得られる。したがって、$\binom{n+2}{2}=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 個の組 (A,B,C)

はすべて等確率である。

小問 (i)

1 人目の海賊が金貨を 1 枚も得られないのは、$A = 0$ のとき、すなわち最初に取り出される硬貨が鉛であるときに限る。$n+2$ 枚の硬貨はどれも等しい確率で最初に取り出されるので、その確率（probability）は $\frac{2}{n+2}$ である。よって

$$\mathrm{P}(A \geq 1) = 1 - \frac{2}{n+2} = \frac{n}{n+2}.$$

（数え上げても同じ答えが得られる。$A = 0$ のとき $B + C = n$ となり、その解は $n+1$ 個あるので、$(n+1)/\frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{2}{n+2}$ である。）

小問 (ii)

考えてみよう 2 人目の海賊は無作為な時点から取り出し始める。本当に 1 人目より不利ではないのだろうか。

そのとおり、不利ではない。$B = 0$ となる組を数える。このとき $A + C = n$ であり、その解は小問 (i) とまったく同じく $n+1$ 個ある。よって

$$\mathrm{P}(B \geq 1) = 1 - \frac{n+1}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2}.$$

実際、組 (A, B, C) はすべて等確率であるから、3 人の取り分は**交換可能**（exchangeable）である。すなわち、3 人目も含めてどの海賊も、金貨を少なくとも 1 枚得る確率は同じ $\frac{n}{n+2}$ である。

小問 (iii)

A、B、C がすべて 1 以上である必要がある。$A = A' + 1$、$B = B' + 1$、$C = C' + 1$ とおく。すると、求める組は $A' + B' + C' = n - 3$ の非負整数解に対応する。星と棒（stars and bars）の方法により、そのような解は $\binom{n-1}{2}$ 個ある。これは直接にもわかる。隣り合う金貨の間にある $n-1$ 個の隙間から、鉛の硬貨を置く 2 か所を選べばよいからである。よって、$n \geq 1$ のとき

$$\mathrm{P}(A \geq 1,\ B \geq 1,\ C \geq 1) = \frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{n+2}{2}} = \frac{(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)}.$$

これは $n = 1$ と $n = 2$ のとき 0 となり、当然そうでなければならない。金貨が 3 枚未満なら、3 人の海賊が全員金貨を得ることはできないからである。（$n = 0$ のときは確率は自明に 0 である。$\binom{n-1}{2}$ は存在しない隙間を数えることになるので、この場合には公式は適用できない。）

検算

- $n = 1$ のとき、硬貨の並びは GLL、LGL、LLG であり、すべて等確率である。1 人目の海賊が金貨を得るのは GLL のときだけで、その確率は $\frac{1}{3} = \frac{1}{1+2}$ である。2 人目が金貨を得るのは LGL のときだけで、これも $\frac{1}{3}$ である。
- $n = 3$ のとき、条件を満たす並びは $\binom{5}{2} = 10$ 通りのうち GLGLG の 1 通りだけであり、公式は $\frac{2\cdot 1}{4\cdot 5} = \frac{1}{10}$ を与える。
- $n = 1, \ldots, 14$ について厳密に数え上げた結果は、3 つの公式すべてと一致する。$n = 5$ の箱 2×10^5 個のシミュレーションでは 0.715、0.714、0.286 が得られ、理論値 $\frac{5}{7} \approx 0.714$、$\frac{5}{7}$、$\frac{12}{42} = \frac{2}{7} \approx 0.286$ と一致した。

よくある間違い

- 2 人目の海賊の取り出しを、満杯の箱から新たに始めるものとして扱うこと。2 人目に残る金貨の枚数は、1 人目の結果によって変わる。
- 小問 (iii) で $\mathrm{P}(A \geq 1)$、$\mathrm{P}(B \geq 1)$、$\mathrm{P}(C \geq 1)$ を掛け合わせること。取り分の和は n でなければならないので、これらは独立（independent）ではない。

STEP のその先へ

鉛の硬貨の位置と $A + B + C = n$ の解との対応は、「星と棒」の全単射（bijection）である。これは、無作為に置いた目印の間の隙間が交換可能であることを示している。連続版、すなわち棒の上に一様に点を落とす場合を考えると、一様間隔（uniform spacings）の理論やディリクレ分布（Dirichlet distribution）につながり、この種の順序統計量（order statistics）は大学 1 年の確率論のいたるところに現れる。Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）は、この数え上げとそれに伴う対称性の議論を非常によく扱っている。

解答例

STEP II 2004、第 1 問

純粋数学 • 根号を含む方程式

> **STEP II 2004、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q1

鍵となる考え方

どの方程式にも $\sqrt{x}$ と $\sqrt{3x^2+1}$ が含まれているので、$t=\sqrt{x}$（ただし $t\geq 0$）とおいて前者を多項式（polynomial）に直す。次に残った平方根だけを一方の辺に分離し、1 回だけ 2 乗する。結果は t の 4 次方程式（quartic）となり、$t=0$ と $t=1$ がつねに解になるので容易に因数分解（factorise）できる。本当の作業は最後にある。2 乗によって無縁解（false root）が紛れ込むことがあるので、2 乗した辺が負でなかった解だけを残すのである。

解答

3 つの方程式はいずれも、$\sqrt{x}$ が実数であるために $x\geq 0$ を必要とする。そこで $t\geq 0$ として $x=t^2$ とおく。すると $\sqrt{x}=t$、$3x^2+1=3t^4+1$ である。

2 乗する操作は一方向にしか成り立たない。実数 A, B に対して

$$\sqrt{A}=B \iff A=B^2 \text{ かつ} B\geq 0.$$

したがって、2 乗した後には各解において右辺が負でないことを確かめなければならない。

小問 (i)

平方根を分離すると

$$\sqrt{3t^4+1}=2t^2-t+1.$$

右辺はつねに正である。実際、判別式（discriminant）は $1-8<0$ であり、最高次の係数（leading coefficient）は正である。よってここでは 2 乗しても何も失われず、2 乗

した方程式の解はすべて本当の解である。2 乗すると

$$3t^4+1=(2t^2-t+1)^2=4t^4-4t^3+5t^2-2t+1,$$
$$0=t^4-4t^3+5t^2-2t=t\,(t^3-4t^2+5t-2).$$

この 3 次式（cubic）は $t=1$ で 0 になる（$1-4+5-2=0$ だからである）。因数 $t-1$ で割ると

$$t^3-4t^2+5t-2=(t-1)(t^2-3t+2)=(t-1)^2(t-2).$$

よって $t\,(t-1)^2(t-2)=0$ となり、$t=0,1,2$ を得る。3 つとも負でないので

$$x=0,\quad x=1,\quad x=4.$$

検算として、$x=4$ のとき $\sqrt{49}+2-8-1=0$ となる。

小問 (ii)

今度は

$$\sqrt{3t^4+1}=-t^2+2t+1.$$

2 乗すると

$$3t^4+1=(-t^2+2t+1)^2=t^4-4t^3+2t^2+4t+1,$$
$$0=2t^4+4t^3-2t^2-4t=2t\,(t^3+2t^2-t-2).$$

3 次式の項を $t^2(t+2)-(t+2)$ とまとめると

$$2t\,(t+2)(t-1)(t+1)=0.$$

$t\geq 0$ であるから、残るのは $t=0$ と $t=1$ だけである。そこでの右辺 $-t^2+2t+1$ の値はそれぞれ 1 と 2 で、どちらも正であるから、両方とも本当の解である：

$$x=0,\quad x=1.$$

小問 (iii)

今回は

$$\sqrt{3t^4+1}=t^2+2t-1.$$

2 乗すると

$$3t^4+1=(t^2+2t-1)^2=t^4+4t^3+2t^2-4t+1,$$
$$0=2t^4-4t^3-2t^2+4t=2t\,(t^3-2t^2-t+2).$$

3 次式を $t^2(t-2)-(t-2)$ とまとめると

$$2t\,(t-2)(t-1)(t+1)=0.$$

負でない解は $t=0,1,2$ である。

考えてみよう これら 3 つの値はすべて元の方程式を満たすだろうか？

満たさない。$t=0$ のとき右辺 t^2+2t-1 は -1 となるが、平方根が負になることはない。よって $t=0$ は 2 乗によって紛れ込んだ無縁解である。（直接確かめると、$x=0$ のとき (iii) の左辺は $1-0-0+1=2\neq 0$ である。）$t=1$ と $t=2$ のとき右辺は 2 と 7 で、どちらも正であるから、これらは本当の解である。したがって

$$x=1,\quad x=4.$$

(ii) と (iii) の間にはうまい関係がある。t を $-t$ に置き換えると $-t^2+2t+1$ は $-(t^2+2t-1)$ になり、2 乗するとマイナス符号は消える。よって (iii) の 2 乗した方程式は、(ii) の 2 乗した方程式の t を $-t$ に置き換えたものであり、その解 $0,\pm1,2$ は (ii) の解 $0,\pm1,-2$ の符号を反転したものになっている。

検算

各答えを元の方程式に代入する。たとえば (iii) に $x=4$ を代入すると $\sqrt{49}-4-4+1=0$ となる。$0\le x\le 50$ の範囲で各左辺を細かく数値的に調べたが、ほかに零点は見つからなかった。(i) では左辺は $x=1$ で符号を変えずに 0 に接しており、これは重複因数 $(t-1)^2$ と合致している。

よくある間違い

- 2 乗する辺の符号を確かめ忘れ、(iii) で $x=0$ を残してしまう。
- t（あるいは $\sqrt{x}$）で割ってしまい、(i) と (ii) で解 $x=0$ を失う。
- 一方の辺に平方根が 2 つ残ったまま 2 乗する。先に $\sqrt{3x^2+1}$ を分離し、1 回の 2 乗で平方根が消えるようにすること。

STEP のその先へ

写像 $A\mapsto A^2$ は $\mathbb{R}$ 上で単射（injective）ではないので、両辺を 2 乗して得られるのは含意であって、同値（equivalence）ではない。どの変形が逆にたどれるかを把握して

おくことは、方程式を注意深く解くときに欠かせない習慣であり、解析学では、関数がいつ、どの定義域（domain）で逆関数（inverse）をもつかという問題になる。Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は、この点を丁寧に解説している。

解答例

STEP II 2004、第 2 問

純粋数学 • 2 次不等式

STEP II 2004、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/04-s2-q2

鍵となる考え方

扱いにくいのは絶対値（modulus）だけであり、それは $t = |x|$ とおけば消える。$x^2 = |x|^2$ であるから、不等式は t についての普通の二次不等式（quadratic inequality）に、条件 $t \geq 0$ が加わったものになる。あとは平方完成（completing the square）するか、判別式（discriminant）を調べれば、すべてがわかる。t の許される区間一つひとつから、原点の両側に一つずつ、**二つの** x の区間が得られる。

解答

以下つねに $t = |x| \geq 0$ とおく。$x^2 = t^2$ であるから、不等式 $(*)$ はちょうど次のことを意味する。

$$q(t) = t^2 - \alpha t + 2 < 0, \qquad t = |x| \geq 0.$$

$|\alpha| < 2\sqrt{2}$ のとき解をもたないこと

平方完成すると

$$q(t) = \left(t - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + 2 - \frac{\alpha^2}{4}.$$

$|\alpha| < 2\sqrt{2}$ ならば $\alpha^2 < 8$ であるから、$2 - \frac{\alpha^2}{4} > 0$ である。平方の項は決して負にならないので、**すべての**実数 t に対して $q(t) > 0$ であり、特に $t = |x|$ に対してもそうである。したがって、すべての x に対して $x^2 - \alpha|x| + 2 > 0$ となり、$(*)$ を満たす x の値は存在しない。

$\alpha = 3$ の場合

このとき $q(t) = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$ であり、これが負になるのはちょうど $1 < t < 2$ のときである。よって $(*)$ が成り立つのは $1 < |x| < 2$ のとき、かつそのときに限り、解の集合は

$$\{x : -2 < x < -1\} \cup \{x : 1 < x < 2\}.$$

である。

長さの和 S

$\alpha > 2\sqrt{2}$ とする。すると $\alpha^2 > 8$ であるから、q は相異なる二つの実数解

$$t_1 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 8}}{2}, \qquad t_2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 8}}{2},$$

をもち、q の最高次の係数（leading coefficient）は正であるから、$q(t) < 0$ となるのはちょうど $t_1 < t < t_2$ のときである。

> **考えてみよう** 区間 $t_1 < t < t_2$ の一部が負の t の範囲にかかっている心配はないだろうか？

その心配はない。二つの解の積は $t_1 t_2 = 2 > 0$、和は $t_1 + t_2 = \alpha > 0$ であるから、どちらも正である。したがって区間 (t_1, t_2) 全体が $t > 0$ に含まれ、そこに属する t の値はすべて、実際に $|x|$ がとりうる値である。

よって $(*)$ が成り立つのは $t_1 < |x| < t_2$ のとき、かつそのときに限る。すなわち

$$-t_2 < x < -t_1 \qquad \text{または} \qquad t_1 < x < t_2.$$

である。これらは（$t_1 > 0$ であるから）共通部分をもたない二つの区間であり、どちらも長さは $t_2 - t_1 = \sqrt{\alpha^2 - 8}$ である。したがって

$$S = 2\sqrt{\alpha^2 - 8}.$$

$\alpha^2 - 8 < \alpha^2$ かつ $\alpha > 0$ であるから、正の平方根をとると $\sqrt{\alpha^2 - 8} < \alpha$ となり、

$$S < 2\alpha,$$

が示された。

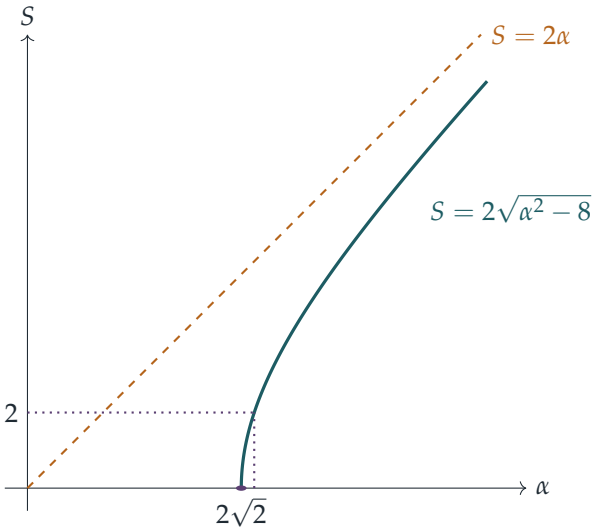
S を α の関数として描いたグラフ

関数 $S = 2\sqrt{\alpha^2 - 8}$ は $\alpha > 2\sqrt{2}$ で定義される（$\alpha \le 2\sqrt{2}$ のときは区間がまったく存在しない。$\alpha = 2\sqrt{2}$ では $q(t) = (t - \sqrt{2})^2 \ge 0$ となり、$\alpha \le 0$ のときはつねにすべての $t \ge 0$ に対して $q(t) \ge 2$ となる）。主な特徴は次のとおりである。

- $\alpha \to 2\sqrt{2}^{+}$ のとき $S \to 0$ であり、$\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha} = \dfrac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2-8}}$ はそこで無限大に発散する。つまり曲線は点 $(2\sqrt{2}, 0)$ から鉛直な接線（vertical tangent）をもって始まる。
- S は増加関数であり、$\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}\alpha^2} = -\dfrac{16}{(\alpha^2-8)^{3/2}} < 0$ であるから、曲線は上に凸（concave）である。
- 直線 $S = 2\alpha$ は漸近線（asymptote）であり、曲線は下側からこれに近づく。実際、$(2\alpha - S)(2\alpha + S) = 4\alpha^2 - 4(\alpha^2-8) = 32$ であるから

$$2\alpha - S = \frac{32}{2\alpha + S} \to 0 \quad \text{極限} \alpha \to \infty.$$

実は $\frac{\alpha^2}{8} - \frac{S^2}{32} = 1$ が成り立つので、このグラフは漸近線 $S = 2\alpha$ をもつ双曲線（hyperbola）の 4 分の 1 である。



検算

- $\alpha = 3$ のとき公式は $S = 2\sqrt{1} = 2$ を与え、それぞれ長さ 1 の二つの区間 $(-2, -1)$ と $(1, 2)$ に一致する（グラフ上の $\alpha = 3$ における点線の点）。
- $\alpha = 5$ のとき $S = 2\sqrt{17} \approx 8.246$ である。$[-20, 20]$ の中で $x^2 - 5|x| + 2 < 0$ となる x の集合を数値的に測ると同じ値が得られ、$2\alpha = 10$ を十分下回っている。
- α が大きいとき $2\alpha - S \approx 8/\alpha$ である。$\alpha = 100$ ではその差は $0.0800\ldots$ となる。

よくある間違い

- $|x|$ の各区間から x の区間が二つずつ得られることを忘れ、$S = \sqrt{\alpha^2 - 8}$ としてしまう。
- $\alpha = 3$ の答えを $1 < x < 2$ だけにして、負の側の半分を落としてしまう。
- t についての二つの解がともに正であることを確かめずに判別式を使ってしまう。$\alpha < 0$ のときは、判別式の条件は同じでも解が負になるので、解はまったく存在しない。

STEP のその先へ

関数 $x \mapsto x^2 - \alpha|x| + 2$ は偶関数（even function）であるから、その解の集合は対称であり、長さ S はこの関数が負になる集合の**測度**（measure）である。不等式で定められた集合の大きさを測ることは、大学 2 年次の解析学で学ぶ測度論（measure theory）とルベーグ積分（Lebesgue integration）の出発点である。ここで用いた極限、導関数、不等式の丁寧な扱いについては、Abbott, *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）を読むとよい。

解答例

STEP II 2004、第 3 問

純粋数学 • 曲線の概形

> **STEP II 2004、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q3

鍵となる考え方

すべては一つの曲線から始まる。C については、導関数（derivative）を完全に因数分解（factorise）する。重なった因数 $(x-2)$ は微分しても残り、残りの部分は二次式（quadratic）になる。他の二つの曲線は一から調べるのではなく、C をもとに組み立てる。(i) では $y=\pm\sqrt{f(x)}$ を考え、(ii) では f に x^2 を代入する。f が正になる範囲、f が単根（simple root）をもつ場所、重根（repeated root）をもつ場所を把握しておくこと。それらの細部が曲線の形を決める。

解答

$f(x)=x(x+1)(x-2)^4$ とおく。すなわち C は $y=f(x)$ である。

C の停留点

積の微分法（product rule）により、共通因数 $(x-2)^3$ をくくり出すと

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+1)(x-2)^4+4x(x+1)(x-2)^3 \\ &= (x-2)^3\left[(2x+1)(x-2)+4x^2+4x\right] \\ &= (x-2)^3(6x^2+x-2) \\ &= (x-2)^3(3x+2)(2x-1). \end{aligned}$$

よって停留点（stationary point）は $x=-\frac{2}{3}$、$x=\frac{1}{2}$、$x=2$ にあり、

$$f\left(-\tfrac{2}{3}\right)=\left(-\tfrac{2}{3}\right)\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(-\tfrac{8}{3}\right)^4=-\frac{8192}{729}, \qquad f\left(\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\left(-\tfrac{3}{2}\right)^4=\frac{243}{64}, \qquad f(2)=0.$$

これらを分類するために、f' の各因数の符号を調べる。

	$x<-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}<x<\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<x<2$	$x>2$
$(x-2)^3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(3x+2)(2x-1)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

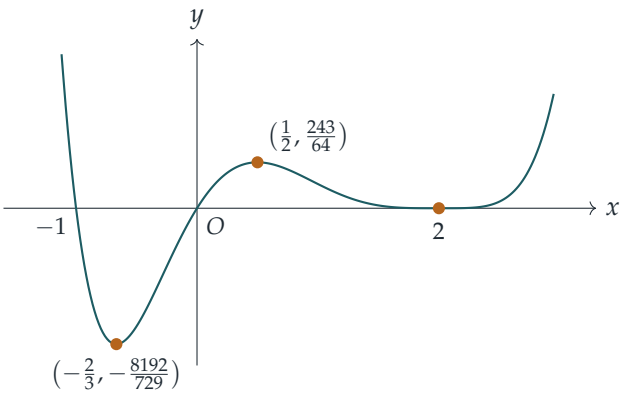
したがって

- $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{8192}{729}\right)$ は極小（minimum）である（f' が $-$ から $+$ に変わる）。
- $\left(\frac{1}{2}, \frac{243}{64}\right)$ は極大（maximum）である（f' が $+$ から $-$ に変わる）。
- $(2,0)$ は極小である（f' が $-$ から $+$ に変わる）。

最後のものは微分を使わなくても明らかである。$x=2$ の近くでは $x(x+1)>0$ かつ $(x-2)^4 \geq 0$ なので、$f(x)\geq 0$ となる。

C の概形

曲線は $x=-1$ と $x=0$ で x 軸と交わり（単根であり、傾きは $f'(-1)=-81$、$f'(0)=16$）、$x=2$ で x 軸に接する。$x=2$ の近くでは $f(x)\approx 2\cdot 3\,(x-2)^4 = 6(x-2)^4$ なので、曲線はそこで非常に平らになる。f は主係数（leading coefficient）が正の 6 次多項式であるから、$x\to\pm\infty$ のとき $y\to+\infty$ である。図の縦軸は縮めて描いてある。



小問 (i)

今度は $y^2=f(x)$ なので、$y=\pm\sqrt{f(x)}$ である。形は次の三つの事実で決まる。

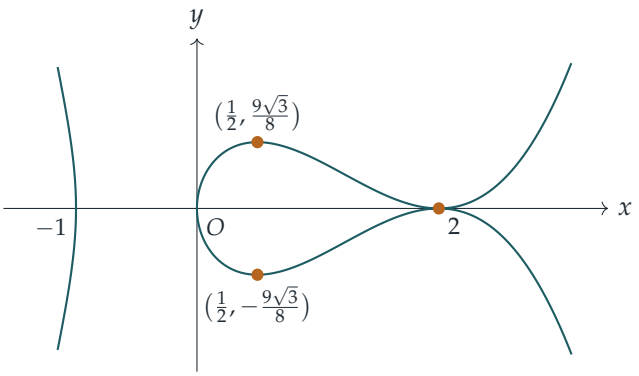
- **曲線が存在する範囲。** $f(x)\geq 0$ が必要であり、C から、これは $x\leq -1$ または $x\geq 0$ を意味する。$-1<x<0$ では曲線は存在しない。

- **対称性。** y を $-y$ に置き換えても方程式は変わらないので、曲線は x 軸に関して対称（symmetric）である。上半分 $y = \sqrt{f(x)} = (x-2)^2\sqrt{x(x+1)}$ を描き、それを折り返せば十分である。
- **停留点。** $f > 0$ のとき $y = \sqrt{f}$ に対して $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f'/(2\sqrt{f})$ であるから、上半分が停留するのは、ちょうど $f' = 0$ かつ $f > 0$ となるところである。残るのは $x = \frac{1}{2}$ のみであり（点 $x = -\frac{2}{3}$ は定義域の外にある）、上半分では $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{243/64}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{9\sqrt{3}}{8}\right)$ で極大、下半分では $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9\sqrt{3}}{8}\right)$ で極小となる。

考えてみよう $f = 0$ となる $(-1,0)$、$(0,0)$、$(2,0)$ では何が起こるか？

$x = 0$ のような**単根**では $f(x) \approx 16x$ なので、原点の近くで $y^2 \approx 16x$ となる。これは横向きの放物線であり、曲線は**鉛直な**接線（tangent）をもって軸を横切る。$x = -1$ でも同様で、そこでは $y^2 \approx 81(-1-x)$ である。**重根** $x = 2$ では $y^2 \approx 6(x-2)^4$ なので、$y \approx \pm\sqrt{6}\,(x-2)^2$ となる。これは軸の上と下にある二本の放物線状の弧であり、どちらも $(2,0)$ で x 軸に接する。したがって上半分と下半分はそこで共通の水平な接線をもって出会い、$(2,0)$ で上半分は極小、下半分は極大となる。

$|x|$ が大きいとき $y \approx \pm|x|^3$ である。よって曲線は、$(0,0)$ から $(2,0)$ までの閉じたループが $(2,0)$ でくびれ、そこから右へ開いていく二本の枝へと続く部分と、それとは別に $(-1,0)$ を通り左へ開いていく部分からなる。



小問 (ii)

ここでは $y = x^2(x^2+1)(x^2-2)^4 = f(x^2)$ である。二つの観察で大部分が片づく。

- x は x^2 の形でしか現れないので、曲線は y 軸に関して対称である。
- x が $[0,\infty)$ を動くとき、$u = x^2$ は $[0,\infty)$ を増加しながら動く。よって $x \geq 0$ の部分の曲線は、C の $x \geq 0$ の部分を媒介変数を取り替えて（re-parametrised）表したものである。特に、いたるところで $y \geq 0$ であり、C の x が負の部分（その極小を含

む）はまったく関係しない。

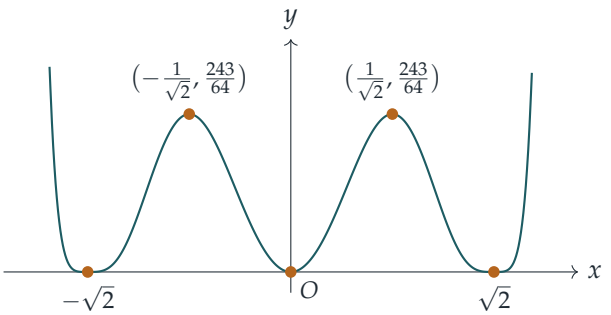
合成関数の微分法（chain rule）により

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x\,f'(x^2) = 2x\,(x^2-2)^3(3x^2+2)(2x^2-1),$$

であり、これは $x=0$、$x^2=\frac{1}{2}$、$x^2=2$ のときに 0 となる（因数 $3x^2+2$ は決して 0 にならない）。$u \geq 0$ において、f は 0 から $u=\frac{1}{2}$ での極大まで増加し、$u=2$ で 0 まで減少し、その後はどこまでも増加する。そして $x \geq 0$ では $u=x^2$ はこの順序を保つ。よって停留点は次のとおりである。

- $(0,0)$ で極小であり、そこでは $y \approx 16x^2$ である。
- $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{243}{64}\right)$ で極大である。
- $(\pm\sqrt{2}, 0)$ で極小であり、曲線はそこで非常に平らに軸に接する。実際 $y \approx 384\,(x \mp \sqrt{2})^4$ である。

$|x|$ が大きいとき $y \approx x^{12}$ であり、非常に急激に増加する。



検算

導関数の簡単な確認として、$x=0$ では $f(x) = x(x+1)(x-2)^4 \approx 16x$ であり、確かに $f'(0) = (-8)(2)(-1) = 16$ となる。数値的な確認により、f' の因数分解が無作為に選んだ点での有限差分（finite-difference）による導関数の値と一致すること、$f(-\frac{2}{3}) \approx -11.237$、$f(\frac{1}{2}) = 3.796875$ であること、そして $[0,2]$ における $\sqrt{f}$ の最大値が $x=0.5$ での $1.94856\ldots = \frac{9\sqrt{3}}{8}$ であることがわかる。(ii) については、予想どおり $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ は $x \approx \pm 0.707$ と ± 1.414（および 0）で符号を変える。

よくある間違い

- 微分する前に f を展開してしまうこと。そうすると f' は因数の見えない五次式（quintic）になる。$(x-2)^3$ を外に出したままにしておけば、解くべきものは二次式だけになる。
- (i) で、$(0,0)$ や $(-1,0)$ に尖点（cusp）や角を描いてしまうこと。f の単根では、$y^2 = f(x)$ の接線は鉛直である。
- (ii) で、C の $x = -\frac{2}{3}$ における極小をそのまま写してしまうこと。$x^2 \geq 0$ なので、使われるのは C の $x \geq 0$ の部分だけであり、y が負になることはない。

STEP のその先へ

f の根の近くでの $y^2 = f(x)$ のふるまいは、代数曲線（algebraic curves）の特異点（singular points）の研究の出発点である。単根からは鉛直な接線をもつ滑らかな点が得られ、重根からは $(2,0)$ のように二本の枝が出会う場所が得られる。f が三次式のとき、曲線 $y^2 = f(x)$ は**楕円曲線**（*elliptic curves*）であり、現代の数論（number theory）において中心的な役割を果たす。曲線の概形を描くことの土台となる微積分（単調性（monotonicity）、導関数の符号、合成関数の微分法）の丁寧な扱いについては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門の教科書）を参照せよ。

解答例

STEP II 2004、第 4 問

純粋数学 ・ 図形における最適化

STEP II 2004、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

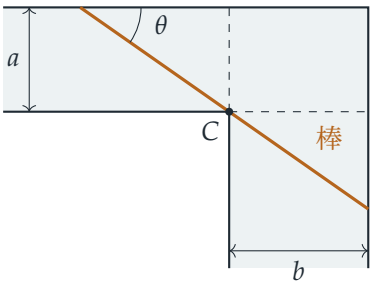
step.maths.org/questions/04-s2-q4

鍵となる考え方

どのように動かしても、棒（あるいはテーブル）は一方の廊下に沿った向きから他方の廊下に沿った向きへと回転しなければならないので、ある瞬間にはその間のどの角度 θ も壁となす。角度を固定すると、使える長さが最大になるのは内側の角にちょうど接する直線に沿う場合であり、その長さは直角三角形を用いて容易に計算できる。したがって、物体が角を曲がれるのは、その長さがすべての角度にわたるこれらの長さの**最小値**以下であるときに限られ、その最小値は微分法によって求められる。

解答

以下では一貫して、外側の角を原点に置き、外側の壁を $y = 0$（幅 a の廊下で、左へ延びる）と $x = 0$（幅 b の廊下で、下へ延びる）に沿わせる。このとき内側の角は $C = (-b, -a)$ である。



小問 (i)

ある瞬間に、棒が a の廊下の壁と鋭角（acute angle）θ をなし、図のように外側の壁 $y = 0$ から外側の壁 $x = 0$ に向かって下り勾配になっているとする。

角度 θ における最長の線分。 C を通り角度 θ をなす直線を考える。C から壁 $y = 0$ までは鉛直方向に a だけ上がるので、その部分の長さは $a\operatorname{cosec}\theta$ である。C から壁 $x = 0$ までは水平方向に b だけ進むので、その部分の長さは $b\sec\theta$ である。よって、この直線の二つの外側の壁の間にある弦（chord）の長さは

$$f(\theta) = a\operatorname{cosec}\theta + b\sec\theta.$$

である。一方の廊下から他方の廊下へと延びる角度 θ の他の直線は、いずれも C より外側を通らなければならない（そうでなければ内側の壁を突き抜けてしまう）。そのような直線は二つの外側の壁とともに、より小さな相似（similar）な直角三角形を切り取るので、外側の壁の間にあるその弦は $f(\theta)$ より短い。また、この瞬間に棒が完全に a の廊下の中にあるならば、棒は幅 a の帯に収まるので $L\sin\theta \le a$ であり、$L \le a\operatorname{cosec}\theta < f(\theta)$ を得る。同様に、完全に b の廊下の中にあるならば $L \le b\sec\theta < f(\theta)$ である。いずれの場合も

$$L \le f(\theta) \quad \text{棒が通過する各角度 } \theta \text{ について。}$$

が成り立つ。棒が第一の廊下に沿った向きから第二の廊下に沿った向きへと回転するとき、θ は 0 の近くから $\frac{1}{2}\pi$ の近くまで連続的に変化するので、その間のすべての値をとる。したがって**すべての** $\theta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ に対して $L \le f(\theta)$ であり、すなわち L は f の最小値以下である。

f の最小化。 微分すると

$$f'(\theta) = -\frac{a\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{b\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{b\sin^3\theta - a\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}.$$

となる。これが 0 になるのはちょうど $\tan^3\theta = a/b$ のときであり、$(0, \frac{1}{2}\pi)$ において tan は増加関数であるから、この方程式はその区間にただ一つの解 α をもつ。f' の符号は $b\tan^3\theta - a$ の符号と一致し、α より前では負、後では正であるから、α で最小となる。（また、両端で $f \to \infty$ である。）$L \le f(\theta)$ において $\theta = \alpha$ とすると

$$L \le a\operatorname{cosec}\alpha + b\sec\alpha, \qquad \tan^3\alpha = \frac{a}{b},$$

を得る。これが示すべきことであった。

小問 (ii)

今度はテーブルの長辺が棒の役割を果たす。内側の長辺は角度 θ の直線上にあり、外側の長辺はそれと平行で、外側の角の方へ距離 w だけ寄った直線上にある。外側にあるテーブルの二つの頂点は、どちらも外側の壁の内側になければならない。

外側の辺に沿って使える長さ。外側の角 O からの距離が d である角度 θ の直線は、O のところに直角三角形を切り取る。この三角形の斜辺は c（壁の間の弦）、二辺は $c\cos\theta$ と $c\sin\theta$、O からの高さは d である。面積の 2 倍は $c\cos\theta\cdot c\sin\theta$ とも $c\,d$ とも表せるので

$$c=\frac{d}{\sin\theta\cos\theta}=2d\operatorname{cosec}2\theta.$$

である。弦の長さは O からの距離に比例する。したがって、直線を（O に向かって）w だけ内側へ動かすと、その弦は $2w\operatorname{cosec}2\theta$ だけ短くなる。

> **考えてみよう** なぜ外側の長辺は、C を通る直線から w だけ内側にある直線上で、外側の壁の間に収まらなければならないのか。

内側の長辺は内側の角を越えることができないので、C を通る直線上かそれより外側にある。すると外側の長辺は、少なくとも w だけさらに外側にある直線上にあり、その弦は高々 $f(\theta)-2w\operatorname{cosec}2\theta$ である。（二つの短辺は外側の頂点から長辺に垂直に内側へ延び、廊下の中に収まるので、これ以上の制約は生じない。）逆にテーブル全体が a の廊下の中にあるならば、帯を横切る方向の高さは $l\sin\theta+w\cos\theta\le a$ である。これから得られる評価 $l\le(a-w\cos\theta)\operatorname{cosec}\theta$ は、$w<b$ であるから、下の $g(\theta)$ より $(b-w\sin\theta)\sec\theta>0$ だけ小さい。b の廊下の場合も同様である。よって小問 (i) とまったく同じく、通り抜けられるためにはすべての $\theta\in(0,\frac{1}{2}\pi)$ に対して $l\le g(\theta)$ が必要である。ただし

$$g(\theta)=a\operatorname{cosec}\theta+b\sec\theta-2w\operatorname{cosec}2\theta.$$

である。（テーブルは両方の廊下より幅が狭く、$w<a$ かつ $w<b$ でなければならない。さもなければ廊下に沿って進むことすらできない。）

g の最小化。 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\operatorname{cosec}2\theta=-\dfrac{2\cos2\theta}{\sin^2 2\theta}$ であるから

$$g'(\theta)=-\frac{a\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{b\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{4w\cos2\theta}{\sin^2 2\theta}.$$

である。これに $\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{1}{4}\sin^2 2\theta>0$ を掛ける。すると $g'(\theta)=0$ となるのはちょうど

$$-a\cos^3\theta+b\sin^3\theta+w\cos2\theta=0,\qquad\text{すなわち}\qquad w\cos2\theta=\cos^3\theta\,(a-b\tan^3\theta).$$

のときである。$\cos2\theta=\cos^2\theta\,(1-\tan^2\theta)$ と書き、$\cos^2\theta$ で割る。もし $\theta=\frac{1}{4}\pi$ ならば方程式は $0=\frac{1}{2\sqrt{2}}(a-b)$ となるが、$a\ne b$ であるからこれは起こりえない。よって停留点（stationary point）では $\tan^2\theta\ne1$ であり、$1-\tan^2\theta$ で割って

$$w=\left(\frac{a-b\tan^3\theta}{1-\tan^2\theta}\right)\cos\theta.$$

を得る。$\theta\to0^+$ のとき、$w<a$ であるから $g(\theta)\approx(a-w)/\theta\to+\infty$ である。同様に、$w<b$ であるから $\theta\to\frac{1}{2}\pi^-$ のとき $g\to+\infty$ である。よって連続関数（continuous

function）g は区間の内部の点で最小値をとり、そこでは $g' = 0$ である。この点を β とすると、β は上の方程式を満たす。$l \leq g(\theta)$ において $\theta = \beta$ とすると

$$l \leq a \operatorname{cosec} \beta + b \sec \beta - 2w \operatorname{cosec} 2\beta,$$

を得る。これが示すべきことであった。（実際には、この方程式の**どの**根 β に対しても $l \leq \min g \leq g(\beta)$ であるから、どの根を指すかは問題にならない。）

検算

- 小問 (ii) で $w = 0$ とすると $\tan^3 \beta = a/b$ と小問 (i) の評価が得られ、期待どおりである。
- 小問 (i) では $\sin \alpha = a^{1/3}/\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}$、$\cos \alpha = b^{1/3}/\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}$ であるから、評価は $\left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{3/2}$ となる。$a = 1$、$b = 8$ のとき、これは $5^{3/2} \approx 11.18$ であり、f の最小値を数値的に探索した結果と一致する。
- $a \neq b$ と $w < \min(a, b)$ を無作為に数百組選び、g の最小値を総当たりで求め、最小値を与える角度が β の方程式を満たすことを確かめた。また、弦の長さも座標から直接確認した。

よくある間違い

- f を最小化するのではなく最大化してしまう。棒は**最も厳しい**角度を切り抜けなければならないので、評価は使える長さの最小値である。
- テーブルの**内側**の辺が外側の壁によって制限されると考えてしまう。締めつけられるのは外側の辺、すなわち外側の角に w だけ近い直線上にある辺である。
- $1 - \tan^2 \beta$ で割る際に、それには $a \neq b$ が必要であることに気づかない。

STEP のその先へ

小問 (i) は古典的な「角を曲がるはしご」の問題であり、その答え $\left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{3/2}$ はアステロイド（astroid）と関係している。内側の角を通る直線たちが包絡線（envelope）を描くのである。小問 (ii) は**動くソファ問題**（moving sofa problem）の小さな特別な場合である。これは、幅 1 の直角の曲がり角を運んで曲がることのできる図形のうち、面積が最大のものはどのような形かを問う問題である。1966 年に Leo Moser によって提起され、その歴史の大半において完全な解決を拒み続けてきた。この趣旨の、幾何と微積分が出会う問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*

（高度な数学の問題集）に挑戦するとよい。

解答例

STEP II 2004、第 5 問

純粋数学 • 積分方程式

STEP II 2004、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/04-s2-q5

鍵となる考え方

未知の関数（function）が積分の中に入っているので一見恐ろしく見えるが、加法定理（compound-angle formula）で $\sin(x+t)$ を展開すれば話は変わる。すると t は積分の外に出て、積分の中に残るのは二つの定まった数である。したがって f は t に $\sin t$ と $\cos t$ の一次結合を加えたものでなければならず、問題全体は二つの連立一次方程式から二つの定数を求めることに帰着する。前半の二つの積分は、まさにその方程式に必要なものである。

解答

二つの積分

$u = x$、$\mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x$ として部分積分（integration by parts）を行うと、

$$\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-x\cos x\Big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x = (-\pi\cos\pi - 0) + \Big[\sin x\Big]_0^\pi = \pi.$$

同様に、$u = x$、$\mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x$ とすると、

$$\int_0^\pi x\cos x\,\mathrm{d}x = \Big[x\sin x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = 0 - \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = -(1+1) = -2.$$

また、$[0,\pi]$ 上の三つの標準的な積分も必要になる。

$$\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\pi \sin x\cos x\,\mathrm{d}x = 0.$$

最初の二つは $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ と $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ から従う。$\cos 2x$ を一周期にわたって積分すると o になるからである。三つ目は同じ理由で $\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2x\,\mathrm{d}x = 0$ となる。

f の形

$\sin(x+t) = \sin x\cos t + \cos x\sin t$ と展開する。積分は x について行うので、$\sin t$ と $\cos t$ は定数であり、積分の外に出せる。

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(t) &= t + \int_0^\pi \mathrm{f}(x)\big(\cos x\sin t + \sin x\cos t\big)\,\mathrm{d}x \\ &= t + \sin t\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x + \cos t\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= t + A\sin t + B\cos t,\end{aligned}$$

ここで A と B は与えられた二つの積分である。これらは t に依存しないので、真に定数である。これが求める形である。

A と B を求める

> **考えてみよう** f がわからないのに、どうやって A と B を求めればよいのだろうか？

わかっているのはその形、すなわち $\mathrm{f}(x) = x + A\sin x + B\cos x$ である。これを $(*)$ に代入し直すと、積分は A と B を用いて計算できるものになり、両辺を比較すればそれらについての方程式が得られる。

上で求めた $\sin(x+t)$ の展開を用いて、$(*)$ の右辺に代入すると、

$$t + \sin t\int_0^\pi (x + A\sin x + B\cos x)\cos x\,\mathrm{d}x + \cos t\int_0^\pi (x + A\sin x + B\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x.$$

先に求めた積分を用いると、

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (x + A\sin x + B\cos x)\cos x\,\mathrm{d}x &= -2 + A\cdot 0 + B\cdot\frac{\pi}{2} = -2 + \frac{\pi}{2}B, \\ \int_0^\pi (x + A\sin x + B\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x &= \pi + A\cdot\frac{\pi}{2} + B\cdot 0 = \pi + \frac{\pi}{2}A.\end{aligned}$$

よって $(*)$ は、すべての t に対して

$$t + A\sin t + B\cos t = t + \left(-2 + \frac{\pi}{2}B\right)\sin t + \left(\pi + \frac{\pi}{2}A\right)\cos t.$$

が成り立つことを意味する。$\sin t$ と $\cos t$ の係数を比較すると（この恒等式はすべての t で成り立つので、これは正当である。$t = \frac{\pi}{2}$、次いで $t = 0$ を代入すれば各係数が取り出せる）、

$$A = -2 + \frac{\pi}{2}B, \qquad B = \pi + \frac{\pi}{2}A.$$

を得る。第二式を第一式に代入すると、

$$A = -2 + \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{4}A \quad\Longrightarrow\quad A\left(1 - \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^2}{2} - 2, \quad \text{すなわち} \quad A\cdot\frac{4-\pi^2}{4} = -\frac{4-\pi^2}{2}.$$

$\pi^2 \neq 4$ であるから $4-\pi^2$ で割ってよく、$A=-2$ を得る。すると $B=\pi+\frac{\pi}{2}(-2)=0$ である。したがって

$$A=-2, \qquad B=0, \qquad \text{ゆえに} \qquad \mathrm{f}(t)=t-2\sin t.$$

検算

答えを A と B の定義に直接照らして確かめる。$\mathrm{f}(x)=x-2\sin x$ のとき、

$$\int_0^{\pi} \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x = -2-2\cdot 0=-2=A, \qquad \int_0^{\pi} \mathrm{f}(x)\sin x\,\mathrm{d}x = \pi-2\cdot\frac{\pi}{2}=0=B.$$

数値的には、シンプソンの公式（Simpson's rule）により $\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x \approx 3.14159$、$\int_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x \approx -2.00000$ が得られる。また、$\mathrm{f}(t)=t-2\sin t$ として $(*)$ の右辺を無作為に選んだ 50 個の t の値で計算したところ、いずれの場合も 10^{-9} 以内の誤差で $\mathrm{f}(t)$ と一致した。

よくある間違い

- $\int_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x$ の負号を忘れる。境界項は消え、$-\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=-2$ となる。
- どちらの積分が $\sin t$ に掛かるかを取り違える。$\sin(x+t)$ のうち $\cos x\sin t$ の部分から $A\sin t$ が生じ、$A=\int \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x$ であって、$\int \mathrm{f}(x)\sin x\,\mathrm{d}x$ ではない。
- $1-\frac{\pi^2}{4}$ が 0 でないことに触れずにそれで割ってしまう。

STEP のその先へ

方程式 $(*)$ は**第二種フレドホルム積分方程式**（Fredholm integral equation of the second kind）である。その核 $\sin(x+t)=\sin x\cos t+\cos x\sin t$ は、x の関数と t の関数の積の有限和（「退化核」（degenerate kernel）または「分離核」（separable kernel））であり、まさにそのために問題が 2×2 の連立一次方程式に帰着するのである。条件 $\pi^2\neq 4$ は、この連立方程式の行列式（determinant）が 0 でないことを述べている。もし 0 であれば、解が存在しないか無数に存在することになり、これは正則でない（特異な）行列（singular matrix）の積分方程式版である。この背後にある線形代数については、Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照せよ。

解答例

STEP II 2004、第 6 問

純粋数学 ・ ベクトルの分解

> **STEP II 2004、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q6

鍵となる考え方

ベクトルを $\mathbf{a}$ に平行な部分と $\mathbf{a}$ に垂直な部分に分けることは、射影（projection）にほかならない。$\mathbf{a}$ は単位ベクトル（unit vector）なので、任意のベクトル $\mathbf{v}$ のその方向の成分は $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{a}$ である。後半は、同じ考え方を 1 次元上げたものである。ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{q}$ は Π 内の互いに垂直な方向であり、$\mathbf{R}$ が 3 つ目の垂直な方向を与える。したがって、各方向へ順に射影してもよいし、未知の係数倍を置いて内積（dot product）で垂直条件を課してもよい。ここでは後者で解き、前者を検算に用いる。

解答

ベクトル $\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$

$\mathbf{p}$ は $\mathbf{a}$ に平行なので、$\mathbf{p}=\lambda\mathbf{a}$ とおく。すると

$$\mathbf{q}=\mathbf{a}+\mathbf{b}-\lambda\mathbf{a}=(1-\lambda)\mathbf{a}+\mathbf{b},$$

となる。$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が Π 内にあるので、これは自動的に Π 内にある。$\mathbf{q}$ が $\mathbf{a}$ に垂直であるためには

$$0=\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}=(1-\lambda)\,|\mathbf{a}|^2+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(1-\lambda)+3,$$

が必要である。ここで $|\mathbf{a}|=1$ と $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=3$ を用いた。よって $\lambda=4$ であり、

$$\boxed{\mathbf{p}=4\mathbf{a},\qquad \mathbf{q}=\mathbf{b}-3\mathbf{a}.}$$

実際、$\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}=3-3=0$ であり、$\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ である。（同じことだが、$\mathbf{p}$ は射影 $\big((\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}\big)\mathbf{a}=4\mathbf{a}$ である。）

ベクトル P、Q、R

まず、後で必要になる事実をいくつか確認する。$|\mathbf{b}| = 5$ より

$$|\mathbf{q}|^2 = |\mathbf{b}|^2 - 6\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + 9|\mathbf{a}|^2 = 25 - 18 + 9 = 16,$$

なので $|\mathbf{q}| = 4$ である。特に $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ なので $\mathbf{b}$ は $\mathbf{a}$ に平行でなく、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は平面 Π を張る（span）。

$\mathbf{P} = \alpha\mathbf{a}$、$\mathbf{Q} = \beta\mathbf{q} = \beta(\mathbf{b} - 3\mathbf{a})$ とおく。すると $\mathbf{R}$ は必然的に次のようになる。

$$\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - \alpha\mathbf{a} - \beta(\mathbf{b} - 3\mathbf{a}) = \mathbf{c} + u\,\mathbf{a} + v\,\mathbf{b}, \qquad \text{ただし} u = 1 - \alpha + 3\beta,\ v = 1 - \beta.$$

考えてみよう 「$\mathbf{R}$ が Π に垂直である」ことを、どのように方程式に翻訳すればよいか？

ベクトルが平面に垂直であるのは、その平面内の平行でない 2 つのベクトルの両方に垂直であるとき、かつそのときに限る。$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ がそのような組であることは先ほど見た。よって条件は $\mathbf{R}\cdot\mathbf{a} = 0$ かつ $\mathbf{R}\cdot\mathbf{b} = 0$ である。$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = -2$、$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 2$、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 3$、$|\mathbf{a}|^2 = 1$、$|\mathbf{b}|^2 = 25$ を用いると、

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{a} = -2 + u + 3v = 0,$$
$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{b} = 2 + 3u + 25v = 0.$$

第 1 式から $u = 2 - 3v$ が得られる。これを第 2 式に代入すると $8 + 16v = 0$ となるので、

$$v = -\tfrac{1}{2}, \qquad u = \tfrac{7}{2}.$$

すると $\beta = 1 - v = \tfrac{3}{2}$、$\alpha = 1 + 3\beta - u = 1 + \tfrac{9}{2} - \tfrac{7}{2} = 2$ である。したがって

$$\boxed{\mathbf{P} = 2\mathbf{a}, \qquad \mathbf{Q} = \tfrac{3}{2}(\mathbf{b} - 3\mathbf{a}), \qquad \mathbf{R} = \mathbf{c} + \tfrac{7}{2}\mathbf{a} - \tfrac{1}{2}\mathbf{b}.}$$

これらを加えると、$\mathbf{a}$ の係数は $2 - \tfrac{9}{2} + \tfrac{7}{2} = 1$、$\mathbf{b}$ の係数は $\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2} = 1$、$\mathbf{c}$ の係数は 1 となるので、求めるとおり $\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ が成り立つ。

最後に、$\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ である。もし零ベクトルならば $\mathbf{c} = \tfrac{1}{2}\mathbf{b} - \tfrac{7}{2}\mathbf{a}$ が Π 内にあることになり、$\mathbf{c}$ は Π に平行でないという仮定に反する。この仮定こそが、$\mathbf{R}$ を真の法線ベクトル（normal vector）にしているのである。

別の見方：互いに垂直な軸への射影

単位ベクトル $\mathbf{a}$、$\hat{\mathbf{q}} = \frac{1}{4}(\mathbf{b} - 3\mathbf{a})$ と、Π の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ は正規直交系（orthonormal set）をなす。よって $\mathbf{P}$ と $\mathbf{Q}$ は、$\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ の最初の 2 つへの射影である。

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = 1 + 3 - 2 = 2, \qquad \text{よって} \mathbf{P} = 2\mathbf{a};$$
$$\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{q}} = \tfrac{1}{4}\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{q}\right) = \tfrac{1}{4}(0 + 16 + 8) = 6, \qquad \text{よって} \mathbf{Q} = 6\hat{\mathbf{q}} = \tfrac{3}{2}(\mathbf{b} - 3\mathbf{a}),$$

ここで $\mathbf{b}\cdot\mathbf{q} = 25 - 9 = 16$ と $\mathbf{c}\cdot\mathbf{q} = 2 + 6 = 8$ を用いた。残りの $\mathbf{R}$ は、$\mathbf{c}$ の Π に垂直な成分である。これは上の答えと一致する。

検算

- 直接計算：$\mathbf{R}\cdot\mathbf{a} = -2 + \frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 0$ であり、$\mathbf{R}\cdot\mathbf{b} = 2 + \frac{21}{2} - \frac{25}{2} = 0$ である。
- 具体例：$\mathbf{a} = \mathbf{i}$、$\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$、$\mathbf{c} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ とおくと、与えられた条件をすべて満たす。このとき $\mathbf{q} = 4\mathbf{j}$、$\mathbf{P} = 2\mathbf{i}$、$\mathbf{Q} = 6\mathbf{j}$、$\mathbf{R} = \mathbf{k}$ であり、これらの和は $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$ となる。
- 条件を満たし、向きをランダムにとった 2000 通りの配置でも公式を検証した。どの場合も $\mathbf{q}\cdot\mathbf{a} = 0$、$|\mathbf{q}| = 4$ であり、$\mathbf{R}$ は Π に垂直で、3 つのベクトルの和は $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ となった。いずれも誤差 10^{-9} 以内である。

よくある間違い

- $\mathbf{p} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a} = 3\mathbf{a}$ としてしまう。これは $\mathbf{b}$ だけの射影である。必要なのは $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ の射影であり、それは $4\mathbf{a}$ である。
- $\mathbf{R}\cdot\mathbf{a} = 0$ だけを課してしまう。平面に垂直であるためには、独立な 2 つの条件が必要である。
- $\mathbf{P} = \mathbf{p}$、$\mathbf{Q} = \mathbf{q}$ と思い込む。$\mathbf{c}$ 自身が Π 内の成分をもつので、$\mathbf{c}$ を加えると平面内の成分も変わる。

STEP のその先へ

これはグラム・シュミットの直交化法（Gram–Schmidt process）の縮小版である。$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ から互いに垂直な方向 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b} - 3\mathbf{a}$、$\mathbf{c} + \frac{7}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$ を作り、それらに沿ってベクトルを分解したのである。同じ手順は任意の次元で使える。これは直交射影（orthogonal projection）、最小二乗法（least-squares fitting）、行列の QR 分解（QR factorisation）の

基礎となっている。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、これらすべてを展開している。

解答例

STEP II 2004、第 7 問

純粋数学 ・ 二分法

> **STEP II 2004、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q7

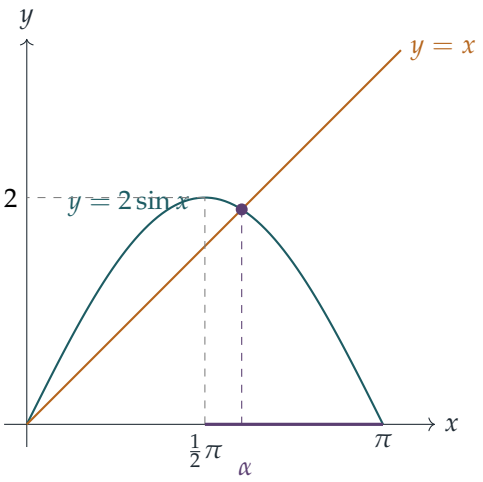
鍵となる考え方

$2\sin x - x = 0$ の根（root）とは、曲線 $y = 2\sin x$ と直線 $y = x$ が交わる点のことである。したがって、グラフを用いる部分は 1 本の正弦曲線と 1 本の直線の話である。二分法（bisection）の各段階は、毎回ひとつの問いに帰着する。すなわち、中点において $2\sin c$ は c より大きいか小さいか、という問いである。半角の公式（half-angle formula）を使うと、$\frac{5}{8}\pi$ と $\frac{9}{16}\pi$ の正弦は入れ子になった平方根で表され、2 つの正の数をその 2 乗どうしで比べれば、計算は与えられた近似値だけで済む。

解答

I_0 にちょうど 1 つの根があること

$\mathrm{f}(x) = 0 \iff 2\sin x = x$ であるから、根は $y = 2\sin x$ と $y = x$ の交点の x 座標である。



$[\frac{1}{2}\pi, \pi]$ において、

- $x = \frac{1}{2}\pi$ では曲線の高さは 2、直線の高さは $\frac{1}{2}\pi < 2$（$\pi < 4$ より）であるから、曲線は直線より上にある。
- $x = \pi$ では曲線の高さは 0、直線の高さは $\pi > 0$ であるから、曲線は直線より下にある。
- 曲線 $y = 2\sin x$ はこの区間で減少し、直線 $y = x$ は増加する。

どちらのグラフも連続（continuous）であるから、曲線はこの区間のどこかで直線と交わらなければならない。さらに、一方は下がり他方は上がるので、曲線がいったん直線より下に来れば、再び上に戻ることはない。よって両者はちょうど 1 回交わり、$\mathrm{f}(x) = 0$ は I_0 にちょうど 1 つの根 α をもつ。f を用いて言えば、$\mathrm{f}(\frac{1}{2}\pi) = 2 - \frac{1}{2}\pi > 0$、$\mathrm{f}(\pi) = -\pi < 0$ であり、f はそこで狭義単調減少（strictly decreasing）である。

以下の二分法の各段階では、f の符号が変わる側の半分を残す。$\mathrm{f}(\frac{1}{2}\pi) > 0$ であるから、すべては $\mathrm{f}(c_n)$ の符号で決まる。$\mathrm{f}(c_n) < 0$ ならば根は c_n の左にあり、$\mathrm{f}(c_n) > 0$ ならば右にある。

I_1 を求める

ここで $c_0 = \frac{3}{4}\pi$ であり、

$$\mathrm{f}(\tfrac{3}{4}\pi) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{3}{4}\pi \approx 1.4 - \tfrac{3}{4}\sqrt{10}.$$

$\sqrt{10} > 3$ であるから $\frac{3}{4}\sqrt{10} > 2.25 > 1.4$ となり、$\mathrm{f}(c_0) < 0$ である。$\mathrm{f}(a_0) > 0$ と合わせて $\mathrm{f}(a_0)\mathrm{f}(c_0) < 0$ となるので、

$$I_1 = [\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{3}{4}\pi].$$

I_2 を求める

次に $c_1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + \frac{3}{4}\pi) = \frac{5}{8}\pi$ であり、$2\sin\frac{5}{8}\pi - \frac{5}{8}\pi$ の符号を調べる必要がある。

考えてみよう 電卓を使わずに $\sin\frac{5}{8}\pi$ を求めるにはどうすればよいか。

$\sin\frac{5}{8}\pi = \sin(\pi - \frac{5}{8}\pi) = \sin\frac{3}{8}\pi = \cos\frac{1}{8}\pi$ を用い、さらに倍角の公式（double-angle formula）$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ に $\theta = \frac{1}{8}\pi$ を代入すると、

$$4\cos^2\tfrac{1}{8}\pi = 2\big(1 + \cos\tfrac{1}{4}\pi\big) = 2 + \sqrt{2}.$$

よって $(2\sin\frac{5}{8}\pi)^2 = 2 + \sqrt{2}$ である。$2\sin\frac{5}{8}\pi$ と $\frac{5}{8}\pi$ はともに正であるから、2 乗どうしを比べてよい。

$$(2\sin\tfrac{5}{8}\pi)^2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3.4, \qquad (\tfrac{5}{8}\pi)^2 \approx \tfrac{25}{64}\cdot 10 = \tfrac{250}{64} \approx 3.9.$$

したがって $2\sin\frac{5}{8}\pi < \frac{5}{8}\pi$、すなわち $\mathrm{f}(c_1) < 0$ である。ここでも $\mathrm{f}(a_1) = \mathrm{f}(\frac{1}{2}\pi) > 0$ であるから $\mathrm{f}(a_1)\mathrm{f}(c_1) < 0$ となり、

$$I_2 = [\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{5}{8}\pi],$$

となって、示すべきことが得られた。

I_3 を求める

次に $c_2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + \frac{5}{8}\pi) = \frac{9}{16}\pi$ である。先と同様に $\sin\frac{9}{16}\pi = \sin\frac{7}{16}\pi = \cos\frac{1}{16}\pi$ であり、倍角の公式に $\theta = \frac{1}{16}\pi$ を代入すると

$$(2\sin\tfrac{9}{16}\pi)^2 = 4\cos^2\tfrac{1}{16}\pi = 2\big(1 + \cos\tfrac{1}{8}\pi\big) = 2 + 2\cos\tfrac{1}{8}\pi = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

が得られる。ここで前の段階で求めた $2\cos\frac{1}{8}\pi = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ を用いた。$\sqrt{2} \approx 1.4$ とすると $\sqrt{2+\sqrt{2}} \approx \sqrt{3.4} > 1.8$（$1.8^2 = 3.24$ より）であるから、

$$(2\sin\tfrac{9}{16}\pi)^2 > 3.8, \qquad (\tfrac{9}{16}\pi)^2 \approx \tfrac{81}{256}\cdot 10 = \tfrac{810}{256} < 3.2.$$

よって $2\sin\frac{9}{16}\pi > \frac{9}{16}\pi$、すなわち $\mathrm{f}(c_2) > 0$ である。今回は $\mathrm{f}(a_2)\mathrm{f}(c_2) > 0$ であり、一方 $\mathrm{f}(c_2)\mathrm{f}(b_2) = \mathrm{f}(\frac{9}{16}\pi)\,\mathrm{f}(\frac{5}{8}\pi) < 0$ である。したがって

$$I_3 = [\tfrac{9}{16}\pi, \tfrac{5}{8}\pi].$$

ここでの近似は安全である。各中点において比べている 2 つの量の差はおよそ 0.5 以上あり、$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7$ や $\pi \approx \sqrt{10}$ による誤差よりはるかに大きい。

検算

- 二分法を数値的に実行すると同じ区間が得られ、根は $\alpha \approx 1.8955$ であって、$\frac{9}{16}\pi \approx 1.767$ と $\frac{5}{8}\pi \approx 1.963$ の間にある。
- 正確な値は近似値と一致する。$f(\frac{3}{4}\pi) \approx -0.942$、$f(\frac{5}{8}\pi) \approx -0.116$、$f(\frac{9}{16}\pi) \approx 0.194$ である。
- 各区間の長さは直前の区間の半分になっている。$\frac{1}{2}\pi$、$\frac{1}{4}\pi$、$\frac{1}{8}\pi$、$\frac{1}{16}\pi$ である。

よくある間違い

- 符号の変化を示すだけで、根が *1 つだけ*である理由を説明しないこと。符号の変化だけでは少なくとも 1 つの根があることしかわからない。一意性には、一方が減少し他方が増加するという議論が必要である。
- 両者がともに正であることを先に確認せずに、2 乗して $2\sin c$ と c を比較すること。

STEP のその先へ

符号の変化による議論は中間値の定理（intermediate value theorem）であり、大学の解析学（analysis）の講義で最初に出会う大きな定理のひとつである。その証明には実数の完備性（completeness）が必要であり、二分法は本質的にその証明をアルゴリズムとして実行したものである。二分法は必ず収束（converge）するが、その速さは遅い（1 段階につき 2 進法で 1 桁）。ニュートン–ラフソン法（Newton–Raphson method）などの方法ははるかに速く収束するが、失敗することもある。そのため、数値解析（numerical analysis）の大部分は安全性と速さの兼ね合いをめぐるものである。理論については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照されたい。

解答例

STEP II 2004、第 8 問

純粋数学 • 微分方程式の比較

STEP II 2004、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/04-s2-q8

鍵となる考え方

$0 \le x < 1$ である間は右辺が正なので、x は t とともに増加し、方程式を逆向きにみることができる。すなわち t は x の関数となり、0 から高さ x まで上るのにかかる時間を表す。どの高さでも傾き（gradient）が大きければ、どの高さにもより早く到達する。したがって、右辺どうしの間に与えられた不等式（inequality）から、3 つのグラフの上下関係がただちに決まる。そうすると、$x = 1$ まで上るのに有限の時間がかかるか無限の時間がかかるかは、広義積分（improper integral）が収束（converge）するかどうかという問題になる。

解答

以下、指数（exponent）が n のときの解を $x_n(t)$ と書く。$t = 0$ では $x = 0$ であり、どの n に対しても傾きは $(1-0)^{1/n} = 1$ である。したがって、すべての曲線は直線 $x = t$ に沿って原点から出発する。$0 \le x < 1$ である間は傾きが真に正なので x は増加し、

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{(1-x^n)^{1/n}}, \qquad \text{よって} \qquad t_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^n)^{1/n}}$$

は、$0 \le x < 1$ に対して、解が高さ x に達する時刻である。

小問 (i)

$n = 1$ のとき、方程式は $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 - x$ である。変数分離（separation of variables）すると（解に沿って $1 - x > 0$ なので問題ない）、

$$t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{1-\xi} = -\ln(1-x), \qquad \text{よって} \qquad x = 1 - \mathrm{e}^{-t}.$$

グラフは原点から傾き 1 で出発し、つねに増加し、上に凸（concave）であり（傾き e^{-t} は減少する）、$t \to \infty$ のとき漸近線（asymptote）$x = 1$ に近づくが、決して到達しない。実際、$x \to 1$ のとき $t_1(x) = -\ln(1-x) \to \infty$ である。下の図でいちばん下の曲線がこれを表している。

小問 (ii)

不等式。 $0 < x < 1$ のとき $1 - x$ と $(1-x^2)^{1/2}$ はともに正なので、この不等式は両辺を 2 乗して得られる不等式と同値である：

$$(1-x)^2 < 1 - x^2 \iff 1 - 2x + x^2 < 1 - x^2 \iff 2x^2 < 2x \iff x < 1,$$

ただし最後の段階では $2x > 0$ で割った。$x < 1$ は正しいので、$1 - x < (1-x^2)^{1/2}$ も成り立つ。

概形。 $(0,1)$ 内のすべての高さ x において、$n = 2$ の曲線は $n = 1$ の曲線より傾きが急である。したがって、$0 < x < 1$ に対して

$$t_2(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^2)^{1/2}} < \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{1-\xi} = t_1(x),$$

が成り立つ。左辺の被積分関数（integrand）は $(0, x]$ 上で真に小さいからである。よって $n = 2$ の解はどの高さにも真に早く到達し、どちらの解も増加するので、各時刻 $t > 0$（ただし $x_2 < 1$ である間）において $n = 2$ の曲線は $n = 1$ の曲線の真に上側にある。どちらも傾き 1 で原点を出発するので、原点の近くでは非常に近く、t が大きくなるにつれて離れていく。

> **考えてみよう** 2 つの曲線は原点で同じ傾きをもつ。なぜ $n = 1$ の曲線が後からこっそり上に出ることはできないのだろうか？

上に出るためには、ある高さ x で $n = 2$ の曲線に追いつく、すなわち同じ時刻に x に達する必要がある。しかし、すべての $x \in (0,1)$ に対して $t_2(x) < t_1(x)$ であり、遅いほうはつねに真に遅れて到達する。（同じことだが、2 つの曲線が同じ高さにあるところではつねに $n = 2$ のほうが傾きが急なので、追い越されることはありえない。）

解く。 $0 \le y < \frac{1}{2}\pi$ として $x = \sin y$ とおき、$t = 0$ で $y = 0$ とする。すると $\cos y > 0$ なので $(1-x^2)^{1/2} = (\cos^2 y)^{1/2} = \cos y$ となり、方程式は次のようになる。

$$\cos y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos y \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1 \quad \Longrightarrow \quad y = t,$$

ここで $t = 0$ で $y = 0$ であることを用いた。よって解は

$$x = \sin t \qquad \text{ただし} 0 \le t < \tfrac{1}{2}\pi.$$

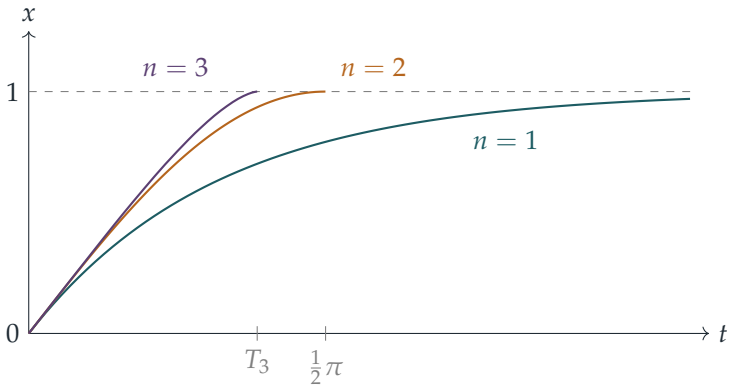
である。これは $t_2(x) = \arcsin x$ と一致する。$n = 1$ の場合とは異なり、解は有限の時間で $x = 1$ に達し、その時刻は $t = \frac{1}{2}\pi$ である。そこには傾き $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$ で到達し、直線 $x = 1$ に接する。

小問 (iii)

$(0,1)$ 上で与えられた不等式 $(1-x^2)^{1/2} < (1-x^3)^{1/3}$ を先ほどとまったく同様に用いると、$n = 3$ の曲線はどの高さでも $n = 2$ の曲線より傾きが急であるから、

$$t_3(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^3)^{1/3}} < \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^2)^{1/2}} = \arcsin x \qquad (0 < x < 1).$$

よって $n = 3$ の曲線もほかと同様に傾き 1 で原点を出発し、$t > 0$ では $x = \sin t$ の真に上側にある。その傾き $(1-x^3)^{1/3}$ は $x \to 1$ のとき 0 まで下がるので、この曲線も直線 $x = 1$ に達するところで平らになる。



$t = \frac{1}{2}\pi$ より前に $x = 1$ に達すること。概形から、$n = 3$ の曲線は $\sin t$ より上にあり、こちらは $\frac{1}{2}\pi$ で 1 に達する。したがって $n = 3$ の曲線は遅くともその時刻までに 1 に達するはずである。真に早いことを示すために、積分の比較において $x \to 1$ とする。$x = 1$ に達するまでの時間は

$$T_3 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^3)^{1/3}}.$$

である。この広義積分は収束する。実際、$[0,1]$ 上で $1-\xi^3 = (1-\xi)(1+\xi+\xi^2) \geq 1-\xi$ なので被積分関数は $(1-\xi)^{-1/3}$ 以下であり、その $[0,1]$ 上の積分は $\frac{3}{2}$ である。さらに、被積分関数は $(0,1)$ 上で $(1-\xi^2)^{-1/2}$ より真に小さいので、

$$T_3 < \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^2)^{1/2}} = \Big[\arcsin\xi\Big]_0^1 = \tfrac{1}{2}\pi.$$

となる。よって、求めるとおり、$n = 3$ の解は時刻 $T_3 < \frac{1}{2}\pi$ で $x = 1$ に達する。（いったん到達すると、傾きは 0 で負にはなりえないので、$x = 1$ にとどまる。）

検算

- 代入して確かめる：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1-\mathrm{e}^{-t}) = \mathrm{e}^{-t} = 1-x$ であり、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin t = \cos t = (1-\sin^2 t)^{1/2}$ が $0 \le t \le \frac{1}{2}\pi$ に対して成り立つ。各方程式のルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）による数値解も、これらの式と一致する。
- 数値的には $T_3 \approx 1.2092$ であり、$\frac{1}{2}\pi \approx 1.5708$ より十分小さい。実際、正確には $T_3 = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ であり（下記参照）、小数第 7 位まで一致する。
- 高さ $x = 0.9$ での 3 つの時刻は $-\ln 0.1 \approx 2.30$、$\arcsin 0.9 \approx 1.12$、$t_3(0.9) \approx 0.98$ であり、予想どおりの順序になっている。

よくある間違い

- 比較しているのが同じ時刻ではなく**同じ高さにおける**傾きであることに触れずに、「傾きが大きいので曲線が高い」と論じること。t を x の関数とみなすことで、議論が正当なものになる。
- なぜ $\cos y \ge 0$ なのかを述べずに $(1-\sin^2 y)^{1/2} = \cos y$ と書くこと。これには $0 \le y \le \frac{1}{2}\pi$ が必要である。
- $x = \sin t$ を $t = \frac{1}{2}\pi$ を越えて延長すること。そこでは減少してしまうが、方程式から $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t \ge 0$ でなければならない。

STEP のその先へ

解が有限の時間で $x = 1$ に達し、その後ずっと $x = 1$ にとどまるのは、$(1-x^n)^{1/n}$ が $x = 1$ でリプシッツ連続（Lipschitz continuous）でないからである。まさにここで、微分方程式（differential equation）の解の一意性定理（uniqueness theorem）が成り立たなくなる（$n = 2$ のとき、$x = 1$ と $x = \sin t$ はともに $(\frac{1}{2}\pi, 1)$ を通る）。到達時刻はベータ関数（Beta function）で表される。$u = \xi^n$ と置換すると $T_n = \frac{1}{n}B(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}) = \dfrac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$ となり、これは $n = 2$ のとき $\frac{1}{2}\pi$、$n = 3$ のとき $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ であり、$n \to \infty$ のとき減少しながら 1 に近づく。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations* では、解の存在と一意性、および解の比較が論じられている。

解答例

STEP II 2004、第 9 問

力学 ・ 重心

> **STEP II 2004、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q9

鍵となる考え方

曲面を下にして置かれた半球（hemisphere）は、球面上の一点で平面に接している。球の法線（normal）は常に球の中心を通る。したがって垂直抗力（reaction）は底面の中心 O を通る鉛直線に沿ってはたらき、釣り合い（equilibrium）の状態では、そこに置かれている物体全体の重心（centre of gravity）も同じ鉛直線上になければならない。すると問題の各小問は、どれも「重心を求め、それが O の真下に来るまで傾ける」というだけのことになる。物体に固定した座標を用いれば、これは容易である。

解答

モデルと釣り合いの条件

半球を、水平面とただ一点 C で接する剛体（rigid body）とみなし、質点（particle）を縁に固定された点質量とみなす。はたらく力は重力と C における接触力（contact force）だけである。C は球面上にあるから、C における法線は O を通り、平面は水平であるからこの法線は鉛直である。よって C は O の真下にあり、物体がどのように転がっても O の高さは r のままである。

釣り合いの状態では接触力が全重力と釣り合わなければならないので、接触力は鉛直であり（摩擦（friction）はない）、重力と同じ直線に沿ってはたらく。したがって次が成り立つ。

釣り合いの状態では、系の重心は O を通る鉛直線上にある。

物体は底面の曲面側を下にして置かれているので、重心は O より下にある。

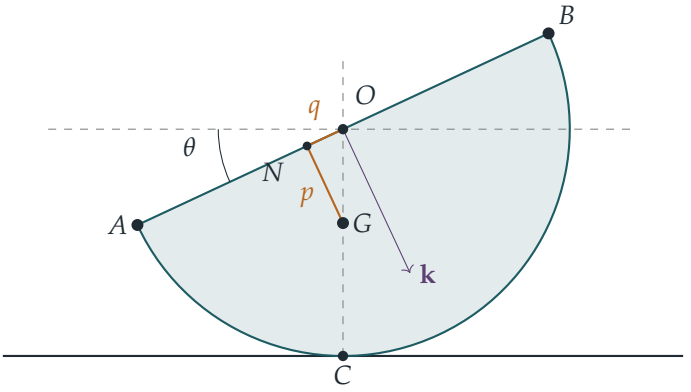
物体に固定した座標と初めの位置

物体に固定された、互いに垂直な二つの単位ベクトルをとる。$\mathbf{k}$ は対称軸（axis of symmetry）に沿って O から曲面の側へ向かうベクトル、$\mathbf{e}$ は底面内のベクトルとする。G は底面からの距離が p、O からの距離が $\sqrt{p^2+q^2}$ であるから、G から底面に下ろした垂線の足 N は O から距離 q の位置にある。$\mathbf{e}$ を O から N へ向かう向きにとると、

$$\overrightarrow{OG} = p\,\mathbf{k} + q\,\mathbf{e}.$$

となる。

底面は $\mathbf{k}$ に垂直であるから、底面が水平面となす角は、$\mathbf{k}$ が鉛直方向となす角に等しい。初めの位置では $\overrightarrow{OG}$ が鉛直下向きであるから、この角 θ は $\tan\theta = q/p$ を満たす。



縁のどの点が最も低いか。縁上の点の O からの位置は $r(\cos\phi\,\mathbf{e} + \sin\phi\,\mathbf{f})$ と表せる。ここで $\mathbf{f}$ は両者に垂直な第三の単位ベクトルである。この点の O からの深さは、下向きの単位ベクトル $(p\mathbf{k}+q\mathbf{e})/\sqrt{p^2+q^2}$ 方向の成分、すなわち

$$\frac{rq\cos\phi}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

であり、これは $\phi = 0$ のとき最大となる（$q > 0$ とする。$q = 0$ ならば底面は水平で、最も低い点はただ一つには定まらない）。よって

$$\overrightarrow{OA} = r\,\mathbf{e}, \qquad \overrightarrow{OB} = -r\,\mathbf{e}.$$

言葉で言えば、A は軸に関して G と同じ側、O と G を通る鉛直面内にあり、問題全体はこの平面内で完結する。

質点が点 A にある場合

半球と質点を合わせた重心 G_A は

$$(M+m)\,\overrightarrow{OG_A} = M(p\,\mathbf{k} + q\,\mathbf{e}) + mr\,\mathbf{e} = Mp\,\mathbf{k} + (Mq + mr)\,\mathbf{e}.$$

で与えられる。新しい釣り合いの位置では $\overrightarrow{OG_A}$ が鉛直であるから、θ の場合とまったく同様に、$\mathbf{k}$ と鉛直方向のなす角（これは底面と水平面のなす角である）は、$\overrightarrow{OG_A}$ と $\mathbf{k}$ のなす角に等しい。

$$\tan\alpha = \frac{Mq+mr}{Mp}, \qquad \text{よって} \qquad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{Mq+mr}{Mp}\right).$$

予想どおり、A に加わった重さが A をさらに引き下げ、$\alpha > \theta$ となる。

考えてみよう 底面の傾きの角が、$\overrightarrow{OG_A}$ と軸のなす角になるのはなぜか。

底面は軸 $\mathbf{k}$ に垂直であり、水平面は鉛直方向に垂直である。二直線の組をともに直角だけ回転させても、そのなす角は変わらないので、底面と水平面のなす角は $\mathbf{k}$ と鉛直方向のなす角に等しい。釣り合いの状態では O を通る鉛直線は直線 OG_A であり、その $\mathbf{k}$ 方向と $\mathbf{e}$ 方向の成分は（$M+m$ で割った後で）Mp と $Mq+mr$ である。この直線が $\mathbf{k}$ となす角の正接は、これらの比である。

質点が点 B にある場合

今度は質点が $-r\,\mathbf{e}$ にあるので、新しい重心 G_B は

$$(M+m)\,\overrightarrow{OG_B} = Mp\,\mathbf{k} + (Mq-mr)\,\mathbf{e}, \qquad \text{となり} \qquad \tan\beta = \frac{Mq-mr}{Mp}.$$

を満たす。m は小さいので $mr < Mq$ であり、$\overrightarrow{OG_B}$ は依然として軸に関して以前と同じ側にあり、底面は同じ向きに、より小さい角 β だけ傾く。

二つの位置のなす角

加法定理（compound-angle formula）により、

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\dfrac{2mr}{Mp}}{1+\dfrac{(Mq+mr)(Mq-mr)}{M^2p^2}}$$

$$= \frac{2mMrp}{M^2p^2+M^2q^2-m^2r^2} = \frac{2mMrp}{M^2\left(p^2+q^2\right)-m^2r^2},$$

となる。ここで三番目の段階では分子と分母に M^2p^2 を掛けた。これが求める結果である。

検算

- $q=0$ の場合（たとえば一様な半球）、二つの位置は互いに鏡像であり、$\tan\alpha = mr/(Mp)$、$\beta=-\alpha$ となる。このとき公式は $t=mr/(Mp)$ として $\tan 2\alpha = 2t/(1-t^2)$

を与え、これは 2 倍角の公式（double-angle formula）であって、当然そうなるべきものである。

- $m \to 0$ とすると、α と β はともに θ に近づき、右辺は 0 に近づく。
- $M = 1$、$m = 0.1$、$r = 1$、$p = \frac{3}{8}$、$q = \frac{1}{8}$ とすると $\tan\alpha = 0.6$、$\tan\beta = \frac{1}{15}$ となるので、$\alpha \approx 30.96°$、$\beta \approx 3.81°$ である。結果の両辺はともに $\frac{20}{39} \approx 0.5128$ に等しい。また、無作為に選んだ 2000 組の値について、重心の高さを最小化することで釣り合いの角を数値的に求めたところ、$\tan\alpha$ と $\tan\beta$ の公式と 10^{-13} 以内の精度で一致した。

よくある間違い

- G を、O の真下ではなく**初めの位置での接点**の真下に置いてしまう。接点は物体が転がるにつれて動く。常にその真上にあるのは O である。
- A を軸の反対側にとってしまう。縁の最も低い点は G と同じ側にあり、だからこそ A にある質点は傾きを**大きくする**のである。
- $mr > Mq$ のときにも β を正として扱ってしまう。このとき底面は逆向きに傾き、公式は β を負として数える場合にのみ成り立つ。m が小さいという条件は、この場合を除外するためのものである。

STEP のその先へ

ここで用いた原理は、重力とただ一つの接触力のもとで釣り合っている剛体の質量中心（centre of mass）は、その接触力の作用線上にある、というものである。言い換えれば、質量中心の高さは停留値をとっており、物体を転がしたときのその高さを調べれば、釣り合いが安定（stable）かどうかも判定できる。これは、大学 1 年の力学で揺れたり転がったりする物体について展開される、安定性のエネルギー法（energy method）の出発点である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このような考え方で質量中心と剛体の釣り合いを扱っている。

解答例

STEP II 2004、第 10 問

力学 ・ 斜面上の摩擦

STEP II 2004、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/04-s2-q10

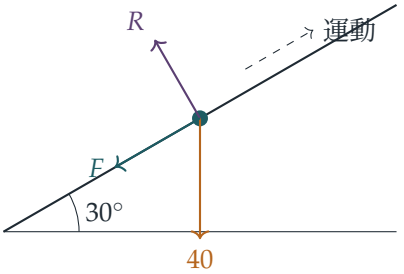
鍵となる考え方

摩擦（friction）は常に運動を妨げる向きにはたらくので、斜面を上る粒子と下る粒子とでは加速度（acceleration）が異なる。まず二つの加速度を求めよう。数値は、それらがとてもきれいな値になるように選ばれている。そのうえで、P は上って止まり、引き返して下ってきて、まだ上っている途中の Q と出会う。両者の位置を「最高点から下に測った距離」として書くと、衝突の方程式は平方の差（difference of two squares）の形になる。

（印刷された問題には小問 (i) に誤植があり、衝突時刻の式中の「b」は T が正しい。）

解答

各粒子を粗い斜面（rough plane）上の質点としてモデル化し、位置 x を A から ℓ に沿って上向きに測り、斜面を上る向きを正とする。



斜面に垂直な方向には加速度がないので、垂直抗力（normal reaction）は

$$R = 4 \cdot 10 \cos 30^\circ = 20\sqrt{3}\ \mathrm{N},$$

であり、各粒子は滑っているので、摩擦力は限界摩擦力（limiting friction）である：

$$F = \mu R = \frac{1}{5\sqrt{3}} \cdot 20\sqrt{3} = 4\,\mathrm{N}.$$

重力の斜面下向きの成分は $40\sin 30^\circ = 20\,\mathrm{N}$ である。

上っているとき：摩擦力は斜面下向きにはたらくので $4a = -(20+4)$ となり、減速度（deceleration）は $6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ である。

下っているとき：摩擦力は斜面上向きにはたらくので、斜面下向きの加速度は $(20-4)/4 = 4\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ である。

$20 > 4$ であるから、静止した粒子はそのまま静止し続けることはない。限界摩擦力では粒子を支えきれず、粒子は滑り落ちる。

小問 (i)

P の運動。上りでは $v = 6 - 6t$ であるから、P は $t = 1$ で止まり、それまでに $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 = 3\,\mathrm{m}$ 進む。$0 \le t \le 1$ では $x_P = 6t - 3t^2 = 3 - 3(1-t)^2$ である。その後 P は $x = 3$ から静止状態で加速度 4 で滑り下りるので、

$$x_P = 3 - 2(t-1)^2 \qquad (t \ge 1),$$

であり、これは P が A に戻るまで、すなわち $2(t-1)^2 = 3$ となる $t = 1 + \sqrt{3/2}$ まで成り立つ。

Q の運動。T だけずらしたまったく同じ運動である。$u = t - T$ とおくと、

$$x_Q = 6u - 3u^2 = 3 - 3(1-u)^2 \qquad (0 \le u \le 1).$$

考えてみよう 両方がまだ上っている間に衝突することはありうるか？

ありえない。両方が上っている間、Q は P が T 秒前にたどった経路をそのままたどり、その経路に沿って x は増加するので、P が常に前にいる。両者が出会えるのは P が折り返した後、すなわち $t \ge 1$ のときに限られる。また、Q が先に自身の最高点（$u = 1$ における $x = 3$）に達することもない。そのときまでに P はすでに $x = 3$ を離れ、それより下にいるからである。したがって、衝突の時点で P は下っており、Q は上っている。

衝突。P が折り返してからの時間を $\tau = t - 1 \ge 0$ とおく。すると $1 - u = 1 - (t - T) = T - \tau$ であり、$x_P = x_Q$ より

$$2\tau^2 = 3(T - \tau)^2.$$

τ と $T - \tau = 1 - u$ はどちらも非負である（後者は Q がまだ上っているから）ので、正

の平方根をとってよい：

$$\sqrt{2}\,\tau = \sqrt{3}\,(T-\tau)$$
$$\tau = \frac{\sqrt{3}\,T}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})\,T = (3-\sqrt{6})\,T,$$

ここで $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 1$ を用いて有理化（rationalising）した。よって衝突は P が打ち出されてから

$$t = (3-\sqrt{6})\,T + 1$$

秒後に起こり、題意は示された。

あとは T に関する条件がどこで使われるかを確かめればよい。この時刻は P が A に戻る前でなければならないので、$\tau < \sqrt{3/2}$ が必要である：

$$(3-\sqrt{6})\,T < \sqrt{\tfrac{3}{2}} \iff T < \frac{\sqrt{3/2}\,(3+\sqrt{6})}{3} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} + \tfrac{\sqrt{9}}{3} = 1+\sqrt{\tfrac{3}{2}},$$

ここで $\sqrt{3/2}\cdot\sqrt{6} = 3$ を用いた。これはまさに与えられた条件である。（同じ不等式により $t \geq T$ も保証され、Q がすでに打ち出されていることがわかる：$(3-\sqrt{6})T+1 \geq T \iff T \leq 1/(\sqrt{6}-2) = 1+\sqrt{3/2}$。）

小問 (ii)

$T = 1+\sqrt{2/3}$ のとき、

$$\tau = (3-\sqrt{6})\left(1+\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) = 3-\sqrt{6}+3\sqrt{\tfrac{2}{3}}-\sqrt{6}\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 3-\sqrt{6}+\sqrt{6}-2 = 1,$$

であるから、衝突は $t = 2$ で起こる。この T の値は $1+\sqrt{3/2}$ より小さいので、小問 (i) の結果が適用できる。

摩擦力の大きさは一定の 4 N で、常に運動を妨げる向きにはたらくので、摩擦によって失われるエネルギーは、摩擦力と滑った総距離の積である。

- P は 3 m 上り、その後 $2\tau^2 = 2$ m 下る。合計 5 m である。
- Q はまだ折り返しておらず、P と同じ点、すなわち $x = 3-2 = 1$ にいる。Q が滑った距離は 1 m である。

よって失われるエネルギーは

$$4\times(5+1) = 24\,\text{J}.$$

検算

エネルギー収支によってこれを確かめられる。はじめの運動エネルギー（kinetic energy）は $2\times\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6^2 = 144\,\text{J}$ である。$t = 2$ において、P の速さは $4\times 1 = 4$（運動エ

ネルギー 32 J）であり、Q は $u = 1 - \sqrt{2/3}$ で速さ $6(1-u) = 6\sqrt{2/3}$ なので $v^2 = 24$（運動エネルギー 48 J）である。両者とも斜面に沿って 1 m 上にあり、高さは $\frac{1}{2}$ m 高いので、位置エネルギー（potential energy）は $2 \times 4 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 40$ J 増加している。そして $144 - 32 - 48 - 40 = 24$ J となる。また、$T < 1 + \sqrt{3/2}$ を満たすランダムな T について両粒子の運動を逐次的に数値シミュレーションしたところ、衝突時刻は $(3 - \sqrt{6})T + 1$ と一致し（たとえば $T \approx 1.816$ のとき ≈ 2.000）、摩擦によって失われたエネルギーは 24.000 J であった。

よくある間違い

- P の下りでも上りと同じ加速度を使ってしまう。摩擦力の向きが逆になるので、加速度は 6 ではなく 4 である。
- Q にはたらく摩擦を忘れる。Q も滑っており、その 1 m 分が 4 J に寄与する。
- $2\tau^2 = 3(T-\tau)^2$ で誤った平方根をとる。符号は $\tau \geq 0$ と $T - \tau \geq 0$ によって決まる。

STEP のその先へ

摩擦は非保存力（non-conservative force）の最も簡単な例である。摩擦がする仕事は端点だけでなく経路に依存する。だからこそ、変位ではなく滑った総距離が必要だったのである。ある系では力学的エネルギー（mechanical energy）が保存され、別の系では保存されないのはこのためであり、この考え方は大学 1 年次の力学の講義で、線積分（line integral）とポテンシャル（potential）を用いて厳密に定式化される。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（『力学入門』）は、仕事、保存力、摩擦を丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 2004、第 11 問

力学 ・ 仕事率と抵抗

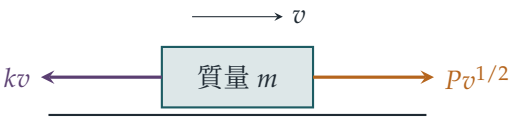
> **STEP II 2004、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q11

鍵となる考え方

仕事率（power）は力と速さの積である。したがって、全出力 $Pv^{3/2}$ で動いている機関は $Pv^{1/2}$ の力で列車を押す。ニュートン（Newton）の運動の第 2 法則から $\sqrt{v}$ を含む微分方程式（differential equation）が得られる。置換 $u = \sqrt{v}$ によって、これはすぐに解ける 1 階線形微分方程式（linear first-order equation）になる。機関を止めた後はそれぞれの速さが指数関数的に減衰する。小問 (iii) の要点は、二つの減衰率を比べることである。

解答

各列車を、まっすぐな水平の線路上を動く質点としてモデル化する。機関が全出力で動いている間、線路に沿ってはたらく力は駆動力と抵抗 kv である。



機関が速さ v で仕事率 H を出すとき、その駆動力は H/v である。よって全出力のとき、A にはたらく駆動力は $Pv^{3/2}/v = Pv^{1/2}$ であり、B にはたらく駆動力は $2Pv^{1/2}$ である。

小問 (i)

A について、線路方向の運動の第 2 法則から

$$m\frac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}t} = Pv_A^{1/2} - kv_A.$$

$u = v_A^{1/2}$ とおくと、$v_A = u^2$ かつ $\dfrac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}t} = 2u\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ である。すると

$$2mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Pu - ku^2, \qquad \text{よって} \qquad 2m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = P - ku,$$

となる。ここで u で割ったが、列車は常に動いている（$u > 0$）のでこれは許される。これは線形（かつ変数分離形（separable））である：

$$\int \frac{2m\,\mathrm{d}u}{P - ku} = \int \mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad -\frac{2m}{k}\ln(P - ku) = t + \text{定数},$$

したがって、ある定数 C を用いて $P - ku = Ce^{-kt/2m}$ となる。（u が非常に小さい最初の時点で $P - ku > 0$ であり、解は平衡（equilibrium）$u = P/k$ に決して到達しないので、正のままである。）

> **考えてみよう** 「非常に低速でのろのろ進んでいる」という条件から何がわかるか。

これは初期条件（initial condition）を与えている。$t = 0$ での速さは正である（したがって u で割ってよかった）が、無視できるほど小さいので、$t = 0$ で $u = 0$ とする。すると $C = P$ であり、

$$u = \frac{P}{k}\left(1 - e^{-kt/2m}\right), \qquad \text{よって} \qquad v_A = \frac{P^2\left(1 - e^{-kt/2m}\right)^2}{k^2},$$

となり、求める式が得られた。（もし列車がちょうど静止していたら、駆動力がまったくないので、$v \equiv 0$ ももとの方程式を満たしてしまう。問題文で列車がすでにゆっくり動いているとしているのはこのためである。）

B についての方程式は $2m\dfrac{\mathrm{d}v_B}{\mathrm{d}t} = 2Pv_B^{1/2} - kv_B$ である。同じ置換により $4m\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2P - ku$ となり、これは A の方程式で P を $2P$ に、m を $2m$ に置き換えたものである。よって

$$v_B = \frac{4P^2\left(1 - e^{-kt/4m}\right)^2}{k^2}.$$

小問 (ii)

二つの速さはともに正なので、$9v_A = 4v_B$ は $3\sqrt{v_A} = 2\sqrt{v_B}$ と同値である。$x = e^{-kt/4m}$ とおくと、$e^{-kt/2m} = x^2$ であり、$t > 0$ のとき $0 < x < 1$ である。条件は

$$\frac{3P}{k}\left(1 - x^2\right) = \frac{4P}{k}(1 - x) \quad \Longrightarrow \quad 3(1 - x)(1 + x) = 4(1 - x).$$

となる。$x \neq 1$ なので $1-x$ で割ってよく、$3+3x=4$、すなわち $x=\frac{1}{3}$（つまり $t=\frac{4m}{k}\ln 3$）を得る。このとき $1-x^2=\frac{8}{9}$、$1-x=\frac{2}{3}$ なので

$$v_A=\frac{64P^2}{81k^2},\qquad v_B=\frac{16P^2}{9k^2}.$$

簡単な確認として、$9v_A=\frac{64P^2}{9k^2}=4v_B$ である。

小問 (iii)

機関を止めた瞬間から時間 τ を測り、その瞬間の速さを $V_A=\frac{64P^2}{81k^2}$、$V_B=\frac{16P^2}{9k^2}$ とする。このとき抵抗だけがはたらくので

$$m\frac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}\tau}=-kv_A,\qquad 2m\frac{\mathrm{d}v_B}{\mathrm{d}\tau}=-kv_B,$$

よって

$$v_A=V_A\,\mathrm{e}^{-k\tau/m},\qquad v_B=V_B\,\mathrm{e}^{-k\tau/2m}.$$

重いほうの列車 B は半分の指数減衰率で速さを失うので、v_B を 2 乗すれば指数関数が一致する：

$$v_B^2=V_B^2\,\mathrm{e}^{-k\tau/m}=\frac{V_B^2}{V_A}\,v_A.$$

最後に

$$\frac{V_B^2}{V_A}=\frac{256P^4}{81k^4}\cdot\frac{81k^2}{64P^2}=\frac{4P^2}{k^2},$$

であるから $v_B^2=\dfrac{4P^2}{k^2}v_A$、すなわちその後のすべての時刻で $k^2v_B^2=4P^2v_A$ が成り立ち、求める結果が得られた。

検算

- $t\to\infty$ のとき $v_A\to P^2/k^2$ であり、これは駆動力 $Pv^{1/2}$ が抵抗 kv と等しくなる速さである。同様に $v_B\to 4P^2/k^2$ であり、これは $2Pv^{1/2}=kv$ となる速さである。
- t が小さいとき $v_A\approx P^2t^2/(4m^2)$、$v_B\approx P^2t^2/(4m^2)$ である。つまり二つの列車は並んで動き出す。どちらも単位質量あたりの駆動力が $Pv^{1/2}/m$ なので、当然そうなるはずである。
- $m=1.7$、$P=2.3$、$k=0.9$ として、二つの運動方程式を非常に小さな初速から数値的に（ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta）で）解き進めたところ、小問 (i) の式と約 10^{-5} の精度で一致した。$9v_A=4v_B$ となる瞬間には $\mathrm{e}^{-kt/4m}=0.33333$、$v_A=5.1602$、$v_B=11.6104$ となり、機関を止めてさらに解き進めても $k^2v_B^2$ は $4P^2v_A$ と等しいままであった（たとえば 2 秒後にはどちらも 37.8739）。

よくある間違い

- $Pv^{3/2}$ を力として使ってしまう。これは仕事率であり、力は仕事率を速さで割ったものである。
- 小問 (ii) の条件が $x = \mathrm{e}^{-kt/4m}$ の 2 次方程式であり、$x = \frac{1}{3}$ のほかに根 $x = 1$（すなわち両方の速さが 0 である $t = 0$）をもつことを忘れる。

STEP のその先へ

置換 $u = \sqrt{v}$ は、ベルヌーイ型微分方程式（Bernoulli equation）$y' + p(t)y = q(t)y^n$ の解法の特別な場合である。この方程式では $u = y^{1-n}$ とおくと必ず線形方程式が得られる。列車がちょうど静止している場合についての注意は、解の一意性（uniqueness）の理論への最初の入り口である。$\sqrt{v}$ は $v = 0$ で傾きが無限大になるので、この方程式は $v = 0$ から出発する解を二つ以上もつ。このことはピカール・リンデレーフの定理（Picard–Lindelöf theorem）によって説明される。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は両方の話題を扱っている。仕事率と抵抗の力学については、Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

解答例

STEP II 2004、第 12 問

確率・統計 ・ 連続分布

STEP II 2004、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/04-s2-q12

鍵となる考え方

すべては一つの原始関数（antiderivative）から導かれる。xe^{-ax^2} は、定数倍を除けば e^{-ax^2} の導関数（derivative）である。これにより正規化定数（normalising constant）と累積分布関数（cumulative distribution function）の閉じた形が得られ、中央値（median）は一つの指数方程式を解くだけで求まる。最頻値（mode）は曲線が頂点をとる点である。ただし、その頂点が $[0,1]$ の内部にある場合に限る。そうでなければ、密度（density）は $x=1$ においてもまだ増加している。条件付き確率（conditional probability）は、m と h における累積分布関数の値だけで求められる。

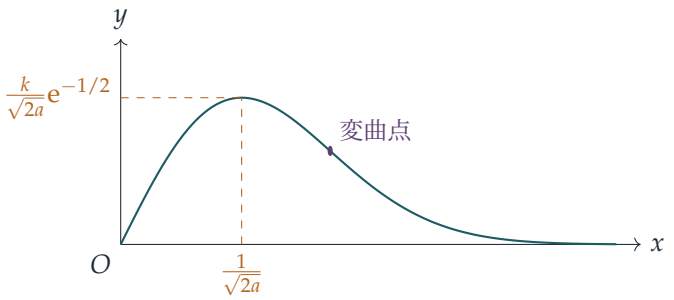
解答

概形

$x \geq 0$ に対して $g(x) = kxe^{-ax^2}$ とおく。このとき $g(0)=0$ であり、$x>0$ で $g(x)>0$ である。また積の微分法（product rule）により

$$g'(x) = ke^{-ax^2}\left(1-2ax^2\right),$$

となり、これは $0 \leq x < 1/\sqrt{2a}$ で正、それ以降で負である。よって g は原点から（そこでの傾きは k）増加し、$x = 1/\sqrt{2a}$ でただ一つの極大値 $y = \dfrac{k}{\sqrt{2a}}e^{-1/2}$ をとり、その後減少する。$x \to \infty$ のとき指数関数が一次の因子に勝つので $y \to 0$ となり、x 軸が漸近線（asymptote）である。（もう一度微分すると、$x = \sqrt{3/(2a)}$ に変曲点（point of inflection）があり、そこで曲線は上に凸（concave）から下に凸（convex）に変わることがわかる。）



定数 k

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{-ax^2} = -2axe^{-ax^2}$ であるから、$0 \le t \le 1$ に対して

$$\int_0^t kxe^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{k}{2a}e^{-ax^2}\right]_0^t = \frac{k}{2a}\left(1 - e^{-at^2}\right).$$

全確率は 1 であるから、$t = 1$ とすると $\dfrac{k}{2a}(1 - e^{-a}) = 1$、すなわち

$$k = \frac{2a}{1 - e^{-a}},$$

となり、題意が示された。（$a > 0$ より分母は正である。）これを代入し直すと、$[0,1]$ 上の累積分布関数は

$$F(t) = P(X \le t) = \frac{1 - e^{-at^2}}{1 - e^{-a}}.$$

最頻値

密度は先ほど概形を描いた曲線を $x = 1$ で切り取ったものである。概形から、$[0,1]$ 上で密度が最大となるのは、極大点が区間内にあればその点であり、そうでなければ右端である。

- $a > \frac{1}{2}$ ならば $2a > 1$ であるから $1/\sqrt{2a} < 1$ である。頂点は区間の内部にあり、$m = \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$ である。
- $a < \frac{1}{2}$ ならば $1/\sqrt{2a} > 1$ であるから、$[0,1)$ 全体で $f'(x) > 0$ である。密度は区間全体で増加し、$m = 1$ である。

（$a = \frac{1}{2}$ のときは、どちらの式でも $m = 1$ となる。）

中央値

中央値 h は $F(h)=\frac{1}{2}$ を満たす：

$$1-\mathrm{e}^{-ah^2}=\tfrac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-a}\right) \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{e}^{-ah^2}=\frac{1+\mathrm{e}^{-a}}{2}.$$

対数をとり、$h>0$ を用いると

$$h=\sqrt{\frac{1}{a}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-a}}\right)}.$$

$1+\mathrm{e}^{-a}<2$ より対数は正であるから、これは実数である。

$h>m$ となるのはいつか

$a\le\frac{1}{2}$ ならば $m=1$ であり、$h<1$（確率の半分は h より下にあり、1 より上には何もない）であるから $h<m$ である。したがって $h>m$ となりうるのは $a>\frac{1}{2}$ のときだけであり、そのとき $m=1/\sqrt{2a}$ である。2 乗どうしを比較すると（どちらも正である）、

$$\begin{aligned} h>m &\iff \frac{1}{a}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-a}}\right)>\frac{1}{2a} \iff \ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-a}}\right)>\frac{1}{2} \\ &\iff \frac{2}{1+\mathrm{e}^{-a}}>\mathrm{e}^{1/2} \iff 1+\mathrm{e}^{-a}<2\mathrm{e}^{-1/2} \\ &\iff \mathrm{e}^{-a}<2\mathrm{e}^{-1/2}-1 \iff a>-\ln\left(2\mathrm{e}^{-1/2}-1\right). \end{aligned}$$

最初の段階では $a>0$ を掛け、3 番目では exp が増加関数であること、最後では ln が増加関数であることを用いた。最後の段階では $2\mathrm{e}^{-1/2}-1>0$ も必要であるが、これは $\mathrm{e}^{1/2}<2$（$\mathrm{e}<4$ による）から成り立つ。

考えてみよう 上の同値変形の連鎖は $a>\frac{1}{2}$ を仮定していた。結果にはこれを追加の条件として加える必要はないのか？

必要はない。だからこそ次の小問でそれを示させているのである。以下で $c=-\ln\left(2\mathrm{e}^{-1/2}-1\right)$ が $\frac{1}{2}$ より大きいことを示す。よって $a>c$ ならば自動的に $a>\frac{1}{2}$ となり、$m=1/\sqrt{2a}$ の式が適用でき、上の連鎖から $h>m$ が従う。$a\le\frac{1}{2}$ の場合と合わせて、$h>m$ となるのはちょうど $a>c$ のときであることが示された。

定数は $\frac{1}{2}$ より大きい

ln は増加関数であるから

$$-\ln\left(2\mathrm{e}^{-1/2}-1\right)>\tfrac{1}{2} \iff 2\mathrm{e}^{-1/2}-1<\mathrm{e}^{-1/2} \iff \mathrm{e}^{-1/2}<1,$$

であり、最後の不等式は正しい。（数値的には $c\approx 1.546$ である。）

条件付き確率

$a > c$ とする。このとき $m < h$ であるから、事象 $\{X > m\} \cap \{X < h\}$ は事象 $\{m < X < h\}$ に等しい。$P(X < h) = \frac{1}{2}$ であるから

$$P(X > m \mid X < h) = \frac{P(m < X < h)}{P(X < h)} = \frac{F(h) - F(m)}{\frac{1}{2}} = 1 - 2F(m).$$

$m = 1/\sqrt{2a}$ のとき $am^2 = \frac{1}{2}$ であるから、$F(m) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-1/2}}{1 - \mathrm{e}^{-a}}$ である。したがって

$$P(X > m \mid X < h) = \frac{(1 - \mathrm{e}^{-a}) - 2(1 - \mathrm{e}^{-1/2})}{1 - \mathrm{e}^{-a}} = \frac{2\mathrm{e}^{-1/2} - \mathrm{e}^{-a} - 1}{1 - \mathrm{e}^{-a}},$$

となり、題意が示された。

検算

- $a = c$ のとき分子 $2\mathrm{e}^{-1/2} - \mathrm{e}^{-a} - 1$ はちょうど 0 となり、そこで $m = h$ となることと合致する。また $a > c$ では正であり、確率として当然そうあるべきである。
- $a \to \infty$ のとき答えは $2\mathrm{e}^{-1/2} - 1 \approx 0.213$ に近づき、これは 1 より小さい。
- $a = 2.5$ のとき：$k \approx 5.447$、$m \approx 0.447$、$h \approx 0.496$ であり、密度を数値積分すると $P(X > m \mid X < h) \approx 0.1427$ となって、公式と一致する。$a = 1$ のときは $m \approx 0.707 > h \approx 0.616$ となり、$1 < c$ と整合する。

よくある間違い

- どの場合にも $m = 1/\sqrt{2a}$ と答えてしまう：$a < \frac{1}{2}$ のとき極大点は $x = 1$ より先にあり、そこでは密度は 0 である。
- F の中の k は $F(1) = 1$ となるように正規化した値でなければならないことを忘れる。
- $P(X > m \mid X < h) = P(X > m)/P(X < h)$ と書いてしまう：分子は**両方の**事象が起こる確率でなければならない。

STEP のその先へ

この密度は切断レイリー分布（truncated Rayleigh distribution）である。$x = 1$ での切断がなければ、$k = 2a$ としたときの $kx\mathrm{e}^{-ax^2}$ は、二つの座標が独立（independent）な正規分布（normal distribution）に従う確率変数である点の、原点からの距離の分布で

ある。平均（mean）、中央値、最頻値を比較し、切断によってそれらがどのようにずれるかを調べることは、最初の統計学の講義で繰り返し現れるテーマである。連続確率変数（continuous random variable）とその密度関数・分布関数についてさらに学ぶには、Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）がよい出発点である。

解答例

STEP II 2004、第 13 問

確率・統計 ・ 最適停止

> **STEP II 2004、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q13

鍵となる考え方

1 回ずつの取り出しに注目して考える。白球を n 個無事に集めた時点で、もう 1 回取り出すと £1 が加わるか、手元の £n がすべて失われるかのどちらかである。したがって、その 1 回がもたらす効果の期待値（expected value）は簡単に書き下せる。目標を N 個としたときの報酬の総額の期待値が増えるのは、追加の 1 回による利得の期待値が正であるときであり、かつそのときに限る。よって最良の目標は、その利得がまだ非負である最後の個数である。

解答

以下では $1 \le r < b$ を仮定する。すなわち赤球も白球も少なくとも 1 個ずつある。($r = 0$ ならば、すべての球を取り出せばよい。)

次の 1 回で得られる利得の期待値

最初の n 回の取り出しがすべて白であったとする。袋には $b-n$ 個の球、すなわち赤球 r 個と白球 $b-n-r$ 個が残っており、次にどの球が出るのも同様に確からしい（白球が残っているためには $n \le b-r-1$ が必要である。いずれにせよ $b-n \ge r \ge 1$ である)。

- 確率 $\dfrac{b-n-r}{b-n}$ で球は白であり、報酬は £n から £$(n+1)$ になる。利得は $+1$ である。
- 確率 $\dfrac{r}{b-n}$ で球は赤であり、本来得られたはずの £n を失う。利得は $-n$ である。

したがって、次の 1 回による利得の期待値は

$$G_n = \frac{(b-n-r)\cdot 1 + r\cdot(-n)}{b-n} = \frac{b-r-n(r+1)}{b-n}.$$

である。分母は正であるから、$G_n = 0$ となるのは $b-r = n(r+1)$ のとき、すなわち

$$n = \frac{b-r}{r+1},$$

のときであり、かつそのときに限る。これが示すべきことであった。さらに役立つこととして、$n < \dfrac{b-r}{r+1}$ のとき $G_n > 0$、$n > \dfrac{b-r}{r+1}$ のとき $G_n < 0$ である。

最良の球の個数

最初の N 回の取り出しがすべて白である確率を P_N とし、N 個の球を取り出すことを目標としたときの報酬の総額の期待値を E_N とする。その N 個がすべて白ならば £N を得て、そうでなければ何も得られないので、

$$E_N = NP_N.$$

である。

> **考えてみよう** 1 回の取り出しによる利得の期待値は、報酬の総額の期待値 E_N とどう関係しているか。

目標を N とする場合と $N+1$ とする場合を比べる。二つの方針に違いが生じるのは最初の N 個がすべて白である場合だけであり（そうでなければ、どちらの方針でもすでに負けている）、これは確率 P_N で起こる。そしてその場合、追加の 1 回は期待値 G_N の分だけ報酬を変化させる。よって

$$E_{N+1} - E_N = P_N G_N = P_N \frac{b-r-N(r+1)}{b-N}.$$

である。（$P_{N+1} = P_N \cdot \frac{b-r-N}{b-N}$ から直接確かめることもできる。）

$N \le b-r$ のとき $P_N > 0$ であるから、$E_{N+1} - E_N$ の符号は $b-r-N(r+1)$ の符号と一致する。$k = N+1$ とおくと、これは

$$(b+1) - k(r+1).$$

の符号である。$m = \dfrac{b+1}{r+1}$ とおく。すると、$k < m$ のとき $E_k > E_{k-1}$、$k = m$ のとき $E_k = E_{k-1}$、$k > m$ のとき $E_k < E_{k-1}$ である。したがって数列 $E_0, E_1, E_2, \ldots$ は、少なくとも $k-1 \le b-r$ の範囲では、$E_{\lfloor m \rfloor}$ まで狭義に増加し（m が整数ならば $E_{m-1} = E_m$ と等しくなる）、その後は狭義に減少する。それより先では $P_N = 0$ かつ $E_N = 0$ であり、これより良くなることはない。

$\lfloor m \rfloor$ が意味のある目標であること、すなわち $\lfloor m \rfloor \le b - r$ を確かめておく。$b = r + 1$ ならば $m = \frac{r+2}{r+1}$ であるから $\lfloor m \rfloor = 1 = b - r$ である。$b \ge r + 2$ ならば

$$(b - r)(r + 1) - (b + 1) = r(b - r - 1) - 1 \ge r - 1 \ge 0,$$

であるから $m \le b - r$ となる。いずれの場合も、E_N の最大値は

$$n = \left\lfloor \frac{b+1}{r+1} \right\rfloor,$$

すなわち $\frac{b+1}{r+1}$ の整数部分（integer part）において達成される。これが示すべきことであった。

この目標は、どのような停止規則（stopping rule）と比べても最良である。続けるかどうかを決める前に彼女が知りうるのは、これまでの球がすべて白であったということだけである（そうでなければゲームは終わっている）。したがって、どの規則も前もって個数 N を一つ選ぶことに帰着する。

$r = 1$ の場合

赤球が 1 個のとき、最初の N 回で赤球を避けられるのは、赤球が最後の $b - N$ 個の位置のいずれかにあるときであり、かつそのときに限る。どの位置も同様に確からしいので、

$$P_N = \frac{b - N}{b}, \qquad E_N = \frac{N(b - N)}{b}.$$

である。最良の目標は $n = \left\lfloor \frac{b+1}{2} \right\rfloor$ である。

b が偶数のとき。 このとき $\frac{b+1}{2} = \frac{b}{2} + \frac{1}{2}$ であるから $n = \frac{b}{2}$ であり、

$$E_n = \frac{\frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2}}{b} = \frac{b}{4}.$$

となる。報酬の総額の期待値は £$\frac{1}{4}b$ であり、これが示すべきことであった。

b が奇数のとき。 このとき $n = \frac{b+1}{2}$ であるから $b - n = \frac{b-1}{2}$ であり、

$$E_n = \frac{\frac{b+1}{2} \cdot \frac{b-1}{2}}{b} = \frac{b^2 - 1}{4b}.$$

となる。報酬の総額の期待値は £$\dfrac{b^2 - 1}{4b}$ である。（この場合 $m = \frac{b+1}{2}$ は整数なので、対称な式 $N(b - N)/b$ からわかるように、$\frac{b-1}{2}$ 個を目標としても同じ値が得られる。）

検算

- $r = 1$ のとき、$E_N = N(b - N)/b$ は N について上に凸の放物線であり、頂点は $N = b/2$ にある。これは二つの答えと整合する。b が偶数ならば頂点でちょうど $b/4$ となり、b が奇数ならばそれよりわずかに小さい $\frac{b}{4} - \frac{1}{4b}$ となる。

- $b = 7$、$r = 2$ とすると、公式から $n = \lfloor 8/3 \rfloor = 2$ が得られ、直接計算すると $E_0, \ldots, E_5 = 0,\ \frac{5}{7},\ \frac{20}{21},\ \frac{6}{7},\ \frac{4}{7},\ \frac{5}{21}$ となって $N = 2$ で最大になる。これは球の並べ方 7! 通りをすべて数え上げて確認した。また、$b \le 24$ のすべての場合について、n の公式を最適停止の完全な計算と照合した。
- $b = 9$、$r = 1$ のとき答えは $\frac{80}{36} = \frac{20}{9} \approx 2.22$ であり、$\frac{9}{4}$ をわずかに下回る。

よくある間違い

- 赤球が出るとすでに集めた £n を失うことを忘れ、利得の期待値を単に $\frac{b-n-r}{b-n}$ と書いてしまう。
- 「すでに n 個取り出した」ことと「目標が n 個」であることを混同する。利得 G_n は $n = \frac{b-r}{r+1}$ で 0 になる。だからこそ最良の**目標**はそれより 1 大きい $\frac{b-r}{r+1} + 1 = \frac{b+1}{r+1}$ となるのである。
- $\frac{b+1}{r+1}$ が整数のときに値が等しくなることを見落とす。このときは n と $n-1$ の両方が最適である。

STEP のその先へ

これは小さな**最適停止**（optimal stopping）問題であり、ここでの議論は「1 段先読み」の規則、すなわち「もう 1 段進んだときの利得の期待値が負になったら直ちに止める」という規則である。この規則は、問題が**単調**（monotone）であるとき、つまり一度続けることが不利に見えたらその後もずっと不利であるときには常に最適である。ここでは G_n が n について減少しているので、まさにその状況になっている。同じ考え方は、大学 1・2 年次の確率論で学ぶ秘書問題（secretary problem）やマルチンゲール（martingale）の手法へとつながる。その背後にある条件付き期待値（conditional expectation）の道具立てを身につけるには、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）がよい出発点である。

解答例

STEP II 2004、第 14 問

確率・統計 ・ 包除原理

> **STEP II 2004、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q14

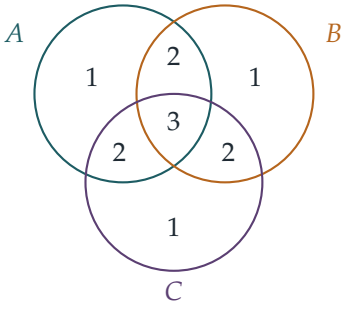
鍵となる考え方

包除原理（inclusion–exclusion principle）は数え方の補正である。$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$ と足し合わせると重なりの部分を余分に数えてしまうので、2 つずつの積事象の項と 3 つの積事象の項によってその数を正しく直すのである。プディングの問題では**余事象**（complement）を考えるほうがはるかに扱いやすい。E_i をプディング i が空である事象とする。**いずれかの**プディングが空である確率は和事象（union）の確率であり、これはまさに包除原理が扱うものである。しかも E_i たちの積事象（intersection）の確率はどれも非常に簡単である。

解答

包除原理の公式

$A \cup B \cup C$ をベン図（Venn diagram）の互いに素（disjoint）な 7 つの領域に分ける。いくつかの領域をまるごと合わせてできる事象の確率は、それらの領域の確率の和である。したがって、右辺で各領域がちょうど 1 回ずつ数えられていることを確かめれば十分である。



図中の数は、各領域が A、B、C のうちいくつに含まれるかを表している。3 つの事象のうちちょうど k 個に含まれる領域を考える。ただし $k = 1$、2、3 である。

- この領域は、項 $\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B), \mathrm{P}(C)$ のうち k 個に現れる。
- この領域は、2 つずつの積事象のうち $\binom{k}{2}$ 個に現れる。たとえば $A \cap B$ に含まれるのは、A と B の両方に含まれるとき、かつそのときに限るからである。
- この領域が 3 つの積事象に現れるのは $k = 3$ のときだけであり、すなわち $\binom{k}{3}$ 回である。

よって、この領域が差し引きで数えられる回数は

$$k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} = \begin{cases} 1 - 0 + 0 = 1 & (k = 1), \\ 2 - 1 + 0 = 1 & (k = 2), \\ 3 - 3 + 1 = 1 & (k = 3). \end{cases}$$

である。$A \cup B \cup C$ のどの領域もちょうど 1 回ずつ数えられ、和事象の外の領域は一度も数えられない。したがって右辺は $\mathrm{P}(A \cup B \cup C)$ に等しい。

（同じことであるが、2 つの事象についての規則 $\mathrm{P}(X \cup Y) = \mathrm{P}(X) + \mathrm{P}(Y) - \mathrm{P}(X \cap Y)$ を $X = A \cup B$、$Y = C$ に適用し、さらに $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ にも適用してもよい。）

どのプディングにも少なくとも 1 枚の 6 ペンス硬貨が入る

モデル。よくかき混ぜてから等分するということは、各 6 ペンス硬貨（sixpence）がプディング 1、2、3 のそれぞれにそれぞれ確率 $\frac{1}{3}$ で入り、しかも他の硬貨とは独立（independent）であるということである。$r \geq 1$ とする。

E_i をプディング i に 6 ペンス硬貨が 1 枚も入っていない事象とする。

- E_1 が起こるのは、r 枚の硬貨のどれもがプディング 1 を避けるときである。各硬貨がそうなる確率は $\frac{2}{3}$ なので、独立性より $\mathrm{P}(E_1) = \left(\frac{2}{3}\right)^r$ であり、E_2、E_3 についても同様である。

- $E_1 \cap E_2$ が起こるのは、すべての硬貨がプディング 3 に入るときなので、$\mathrm{P}(E_1 \cap E_2) = \left(\frac{1}{3}\right)^r$ であり、他の組についても同様である。
- $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ が起こるには 3 つのプディングがすべて空でなければならないが、$r \geq 1$ なのでこれは不可能である。よってその確率は 0 である。

包除原理より、少なくとも 1 つのプディングが空である確率は

$$p_r = \mathrm{P}(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 3\left(\tfrac{2}{3}\right)^r - 3\left(\tfrac{1}{3}\right)^r.$$

である。どのプディングにも少なくとも 1 枚の硬貨が入る確率はその余事象の確率であり、

$$1 - 3\left(\tfrac{2}{3}\right)^r + 3\left(\tfrac{1}{3}\right)^r = \frac{3^r - 3\cdot 2^r + 3}{3^r}.$$

となる。

少なくとも 6 枚の 6 ペンス硬貨

$p_r < \frac{1}{3}$ となる r の値を求めればよい。直接計算すると

$$p_5 = \frac{3\cdot 32 - 3}{243} = \frac{93}{243} = \frac{31}{81} > \frac{27}{81} = \frac{1}{3}, \qquad p_6 = \frac{3\cdot 64 - 3}{729} = \frac{189}{729} = \frac{7}{27} < \frac{9}{27} = \frac{1}{3}.$$

である。これより小さい r ではうまくいかないことを確かめるため、p_r が減少することを示す。$r \geq 1$ に対して

$$p_{r+1} - p_r = 3\left(\tfrac{2}{3}\right)^r\left(\tfrac{2}{3} - 1\right) - 3\left(\tfrac{1}{3}\right)^r\left(\tfrac{1}{3} - 1\right) = -\left(\tfrac{2}{3}\right)^r + 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^r = \left(\tfrac{1}{3}\right)^r(2 - 2^r),$$

であり、これは $r = 1$ のとき 0、$r \geq 2$ のとき負である。よって $p_1 = p_2 \geq p_3 \geq p_4 \geq p_5 = \frac{31}{81}$ であり、$r \leq 5$ のすべての r について $p_r > \frac{1}{3}$ となる。（$r = 0$ のときは、どのプディングも確実に空である。）したがって、いずれかのプディングに硬貨が入っていない確率が $\frac{1}{3}$ を下回るのは $r \geq 6$ のときに限る。さらに p_r は減少し続けるので、$r \geq 6$ のすべての r について実際に $p_r \leq p_6 < \frac{1}{3}$ となる。よって、題意のとおり、料理人は 6 枚以上の 6 ペンス硬貨を使わなければならない。

各プディングに 2 枚ずつ

ここで $r = 6$ とする。T を各プディングにちょうど 2 枚ずつ硬貨が入る事象、S を各プディングに少なくとも 1 枚の硬貨が入る事象とする。前の小問より

$$\mathrm{P}(S) = 1 - p_6 = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}.$$

である。6 枚の（区別できる）硬貨をプディングに振り分ける方法は $3^6 = 729$ 通りあり、これらは同様に確からしい。各プディングに 2 枚ずつ入る方法の数は、6 個のものをラベル付きの 3 つの組に 2 個ずつ分ける方法の数であり、$\frac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90$ である。よって $\mathrm{P}(T) = \frac{90}{729} = \frac{10}{81}$ となる。

考えてみよう なぜ $\mathrm{P}(T \cap S)$ は単に $\mathrm{P}(T)$ になるのか。

どのプディングにも 2 枚ずつ硬貨が入っていれば、当然どのプディングにも少なくとも 1 枚は入っているので、$T \subseteq S$ であり $T \cap S = T$ である。したがって条件付き確率（conditional probability）は

$$\mathrm{P}(T \mid S) = \frac{\mathrm{P}(T)}{\mathrm{P}(S)} = \frac{10/81}{20/27} = \frac{10}{81} \cdot \frac{27}{20} = \frac{1}{6}.$$

である。

検算

$r = 1$ と $r = 2$ のとき、公式はどのプディングにも硬貨が入る確率として 0 を与えるが、これは正しい。3 個未満の硬貨で 3 つのプディングを満たすことはできないからである。$r = 3$ のとき公式は $\frac{27-24+3}{27} = \frac{2}{9}$ を与え、これは直接数えた $3!/3^3 = 6/27$ と一致する。$r \leq 9$ について 3^r 通りの振り分けをすべて正確に数え上げると公式と一致し、$p_5 = \frac{31}{81} \approx 0.383$ および $p_6 = \frac{7}{27} \approx 0.259$ が確認でき、最終的な答え $\frac{1}{6} \approx 0.167$ も得られる（200 000 個のプディングのシミュレーションでは 0.166 となった）。

よくある間違い

- 6 ペンス硬貨を区別できないものとして扱い、$6 = a + b + c$ と表す 28 通りの方法を同様に確からしいとして数えること。実際にはそうではない。$(2,2,2)$ は 90 通りの起こり方があるのに対し、$(6,0,0)$ は 1 通りしかない。
- $r = 6$ と $r = 5$ だけを調べること。「6 枚以上使わなければならない」を示すには、それより小さいすべての r でうまくいかないことも必要であり、だからこそ単調性（monotonicity）を示す段階が重要なのである。
- 3 つの積事象が空であることを忘れること、あるいは説明なしにその確率を $(0)^r$ としてしまうこと。

STEP のその先へ

n 個の事象に対する一般の包除原理は、すべての k 個の積事象についての交代和を用いるもので、$\sum_{j\geq 1}(-1)^{j-1}\binom{k}{j} = 1$ を使えば、上と全く同じ数え上げの議論で証明できる。これを n 個のプディングに適用すると**全射**（surjection）の個数が数えられ、第 2 種スターリング数（Stirling numbers of the second kind）や、古典的なクーポンコレク

ター問題（coupon-collector problem）につながる。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、包除原理とこうした占有問題が展開されている。

解答例

STEP III 2004、第 1 問

純粋数学 ・ 双曲線関数の積分

STEP III 2004、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/04-s3-q1

鍵となる考え方

どちらの被積分関数（integrand）も、双曲線関数（hyperbolic function）と、もう一方の双曲線関数から作られた式との積になっている。そして $\sinh x\,\mathrm{d}x$ と $\cosh x\,\mathrm{d}x$ は、それぞれちょうど $\cosh x$ と $\sinh x$ の微分（differential）である。したがって置換（substitution）$c = \cosh x$ および $s = \sinh x$ によって、これらは有理関数の積分（rational integral）に帰着する。一方は部分分数分解（partial fractions）を、もう一方は逆正接関数（arctangent）を必要とする。「これを用いて」（hence）の部分で決定的なのは、$2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$ であるから、二つの分母が同じ関数だという観察である。

解答

一つ目の積分

$c = \cosh x$ とおくと $\mathrm{d}c = \sinh x\,\mathrm{d}x$ であり、積分区間の端 $x = 0$ と $x = a$ はそれぞれ $c = 1$ と $c = \cosh a$ になる。よって

$$\int_0^a \frac{\sinh x}{2\cosh^2 x - 1}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\cosh a} \frac{\mathrm{d}c}{2c^2 - 1}.$$

分母は $(\sqrt{2}\,c - 1)(\sqrt{2}\,c + 1)$ と因数分解でき、

$$\frac{1}{(\sqrt{2}\,c - 1)(\sqrt{2}\,c + 1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,c - 1} - \frac{1}{\sqrt{2}\,c + 1}\right),$$

となる。これは通分して確かめられる。分子は $\frac{1}{2}\big((\sqrt{2}c + 1) - (\sqrt{2}c - 1)\big) = 1$ である。各項を積分すると対数になり、合成関数の微分法（chain rule）から余分な因子 $1/\sqrt{2}$

がつく。$c \geq 1$ では $\sqrt{2}c \pm 1$ はどちらも正なので、絶対値記号（modulus signs）は不要である：

$$\int_1^{\cosh a} \frac{\mathrm{d}c}{2c^2-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[\ln(\sqrt{2}\,c-1) - \ln(\sqrt{2}\,c+1)\Big]_1^{\cosh a}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}\cosh a - 1}{\sqrt{2}\cosh a + 1}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right).$$

$-\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ であるから、これはまさに求める結果である。

二つ目の積分

次に $s = \sinh x$ とおくと $\mathrm{d}s = \cosh x\,\mathrm{d}x$ であり、積分区間の端は $s = 0$ と $s = \sinh a$ になる：

$$\int_0^a \frac{\cosh x}{1+2\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sinh a} \frac{\mathrm{d}s}{1+(\sqrt{2}\,s)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\arctan(\sqrt{2}\,s)\Big]_0^{\sinh a}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\big(\sqrt{2}\sinh a\big).$$

広義積分

考えてみよう 二つの被積分関数の分母は見かけが異なる。どうすれば引き算できるだろうか。

$\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ を用いると

$$2\cosh^2 x - 1 = 2 + 2\sinh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x,$$

となるので、二つの分母は一致し、

$$\int_0^a \frac{\cosh x - \sinh x}{1+2\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\sinh a) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}\cosh a - 1}{\sqrt{2}\cosh a + 1}\right)$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right).$$

ここで $a \to \infty$ とする。$\sinh a \to \infty$ であるから $\arctan(\sqrt{2}\sinh a) \to \frac{\pi}{2}$ である。また $\cosh a \to \infty$ であるから

$$\frac{\sqrt{2}\cosh a - 1}{\sqrt{2}\cosh a + 1} = \frac{1 - 1/(\sqrt{2}\cosh a)}{1 + 1/(\sqrt{2}\cosh a)} \to 1,$$

となり、ln の 1 における連続性（continuity）より、その対数は 0 に近づく。三つの項はすべて有限の極限をもつので、広義積分（infinite integral）は収束（converge）し、

$$\int_0^\infty \frac{\cosh x - \sinh x}{1+2\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right),$$

となって、求める結果が得られる。

最後の積分

> **考えてみよう** $\cosh x - \sinh x$ と $1 + 2\sinh^2 x$ は、e^x を用いて表すとどうなるだろうか。

$u = e^x$ とおくと $\cosh x - \sinh x = e^{-x} = 1/u$ であり、倍角公式（double-angle formula）を用いると

$$1 + 2\sinh^2 x = \cosh 2x = \frac{u^2 + u^{-2}}{2} = \frac{u^4 + 1}{2u^2}.$$

また $\mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x$ より $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/u$ であり、積分区間の端 $x = 0$、$x \to \infty$ は $u = 1$、$u \to \infty$ になる。したがって

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\cosh x - \sinh x}{1 + 2\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^\infty \frac{1}{u} \cdot \frac{2u^2}{1 + u^4} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= 2\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^4}.\end{aligned}$$

前の結果を半分にすると

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^4} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}\right).$$

これは整理できる。$\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = (\sqrt{2}+1)^2$ であるから、対数は $2\ln(1+\sqrt{2})$ となり、

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^4} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} \approx 0.2437.$$

検算

- $a = 0$ のとき、一つ目の公式は $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = 0$ を与える。長さ 0 の区間上の積分としては当然の値である。
- 最終的な答えは正であり、$\int_1^\infty u^{-4}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}$ より小さい。$1 + u^4 > u^4$ であるから、これは妥当である。
- $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}$ にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると（$u = 1/t$ とおくと $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ になる）、0.243748 が得られ、公式と小数第 12 位まで一致する。x に関する広義積分を数値的に確かめると 0.487495 となり、これのちょうど 2 倍である。

よくある間違い

- $\frac{1}{\sqrt{2}c \pm 1}$ や $\frac{1}{1+2s^2}$ を積分するときに出てくる因子 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ を忘れる。
- 置換するときに積分区間の端を変えない、あるいは答えを c や s で表したままにしてしまう。
- 最後の部分で $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/u$ を忘れる。すると $2u/(1+u^4)$ となり、発散（divergent）する積分になってしまう。

STEP のその先へ

最終結果は、ある古典的な結果の一部である。$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ であり、置換 $u \mapsto 1/u$ によって $[0,1]$ 上と $[1,\infty)$ 上の部分はそれぞれ $\int_0^1 \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ と $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ になることがわかる。これらの和と差は初等的（elementary）に求められる。大学 1 年の講義では、周回積分（contour integration）と留数（residue）を用いたより鮮やかな方法にも出会うだろう。この方法を使えば $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$ が一気に求まる。この考え方を学ぶには、Needham の *Visual Complex Analysis*（『ビジュアル複素解析』）がすばらしい入口である。

解答例

STEP III 2004、第 2 問

純粋数学 • 漸近線と曲線の概形

> **STEP III 2004、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q2

鍵となる考え方

$f(x)$ を、直線 $y = x - 4$ と補正項の和として書く。補正項は分子が完全平方式なので、ある 1 点で**二重に** 0 になる。この二重の零点こそが、接する（tangency）ということの意味そのものである。$f(x) = 0$ の根を求めるには分母を払えばよい。すると二乗の差（difference of two squares）が現れ、ただちに因数分解できる。

解答

以下では一貫して

$$f(x) = (x-4) - \frac{16(2x+1)^2}{x^2(x-4)}.$$

と書く。

小問 (i)

分母は $x = 0$ と $x = 4$ で 0 になる。分子 $16(2x+1)^2$ はそのどちらでも 0 でないので、鉛直漸近線（vertical asymptote）は

$$x = 0 \qquad \text{および} \qquad x = 4.$$

である。$|x|$ が大きいとき、この分数は分子が 2 次式、分母が 3 次式である：

$$\frac{16(2x+1)^2}{x^2(x-4)} = \frac{64x^2+64x+16}{x^3-4x^2} \approx \frac{64}{x} \to 0 \quad \text{ただし} x \to \pm\infty,$$

したがって $f(x) - (x-4) \to 0$ であり、斜めの漸近線（oblique asymptote）は

$$y = x - 4.$$

である。

? **考えてみよう** 漸近線が同時に接線にもなりうるのはなぜだろうか。

漸近線は遠方でのふるまいを記述するにすぎないので、その直線が有限のある点で曲線に接することを妨げるものは何もない。直線と曲線の交点を求めるために $\mathrm{f}(x) = x - 4$ とおく：

$$\mathrm{f}(x) - (x-4) = -\frac{16(2x+1)^2}{x^2(x-4)} = 0 \iff x = -\tfrac{1}{2}.$$

因数 $(2x+1)$ が二乗されているので、$x = -\frac{1}{2}$ は $\mathrm{f}(x) - (x-4) = 0$ の**重解**（double root）である。これは、直線がそこで曲線に接することを意味する。直接確かめるために、$h(x) = -16/\left(x^2(x-4)\right)$ として $D(x) = \mathrm{f}(x) - (x-4) = (2x+1)^2 h(x)$ とおく。関数 h は $x = -\frac{1}{2}$ の近くで微分可能なので

$$D'(x) = 4(2x+1)h(x) + (2x+1)^2 h'(x),$$

であり、これは $x = -\frac{1}{2}$ で 0 となる。よって $\mathrm{f}'(-\frac{1}{2}) = 1$ であり、これは漸近線の傾きに等しい。また $\mathrm{f}(-\frac{1}{2}) = -\frac{9}{2}$ であり、この点は $y = x - 4$ 上にある。以上より、斜めの漸近線は点 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ における曲線の接線（tangent）である。

小問 (ii)

すべてを共通の分母 $x^2(x-4)$ でまとめる：

$$\mathrm{f}(x) = \frac{x^2(x-4)^2 - 16(2x+1)^2}{x^2(x-4)} = \frac{\left[x(x-4)\right]^2 - \left[4(2x+1)\right]^2}{x^2(x-4)}.$$

分子は二乗の差である：

$$\begin{aligned}\left[x^2 - 4x - 4(2x+1)\right]\left[x^2 - 4x + 4(2x+1)\right] &= (x^2 - 12x - 4)(x^2 + 4x + 4) \\ &= (x^2 - 12x - 4)(x+2)^2.\end{aligned}$$

したがって

$$\mathrm{f}(x) = \frac{(x+2)^2(x^2 - 12x - 4)}{x^2(x-4)}.$$

因数 $(x+2)^2$ から、$x = -2$ が $\mathrm{f}(x) = 0$ の重解であることがわかる。また $x = -2$ は分母の零点ではないので、条件を満たしている。残りの 2 つの根は $x^2 - 12x - 4 = 0$ から得られる：

$$x = 6 \pm 2\sqrt{10} \approx 12.32,\ -0.32.$$

小問 (iii)

グラフの概形を描くのに必要な特徴をまとめる。

$x=0$ の近く。 $x\to 0$ のとき $\mathrm{f}(x)\approx -\dfrac{16}{x^2\cdot(-4)}=\dfrac{4}{x^2}$ なので、両側から $\mathrm{f}(x)\to+\infty$ となる。

$x=4$ の近く。 $x\to 4$ のとき $\mathrm{f}(x)\approx -\dfrac{16\cdot 81}{16(x-4)}=-\dfrac{81}{x-4}$ である。よって $x\to 4^-$ のとき $\mathrm{f}(x)\to+\infty$、$x\to 4^+$ のとき $\mathrm{f}(x)\to-\infty$ となる。

斜めの漸近線のどちら側にあるか。 $\mathrm{f}(x)-(x-4)=-16(2x+1)^2/\big(x^2(x-4)\big)$ である。これは $x<4$ では（$x=0$ と $x=-\frac{1}{2}$ を除いて）正、$x>4$ では負である。したがって曲線は、$x=4$ の左側では $y=x-4$ より上にあって $x=-\frac{1}{2}$ でのみこれに接し、右側では下にある。

f の符号。 因数分解した形において、因数 $(x+2)^2$ と x^2 は決して負にならない。よって f の符号は $(x^2-12x-4)/(x-4)$ の符号に一致する：

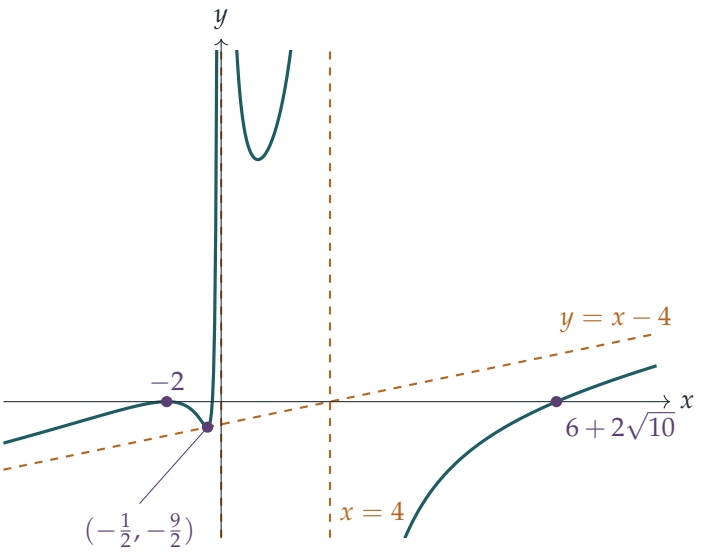
- $x<6-2\sqrt{10}$ のとき（ただし $\mathrm{f}(-2)=0$ を除く）および $4<x<6+2\sqrt{10}$ のとき $\mathrm{f}<0$；
- $6-2\sqrt{10}<x<4$ のとき（$x\neq 0$）および $x>6+2\sqrt{10}$ のとき $\mathrm{f}>0$。

曲線は $x=-2$ の両側で負のままであり、そこで x 軸に接するので、$(-2,0)$ は極大点（local maximum）である。

極値点。 極値点（turning point）は STEP の概形図には必要ないが、求めておくとより正確な図になる。微分すると

$$\mathrm{f}'(x)=1+\frac{16(2x+1)(2x^2+3x-8)}{x^3(x-4)^2}.$$

を得る。区間 $(-2,\,6-2\sqrt{10})$ では、曲線は高さ 0 から始まって高さ 0 で終わり、その間では負なので、そこに極小点をもつ。数値的には、この極小点はおよそ $(-0.51,\,-4.50)$ にあり、接点のすぐ左である。区間 $(0,4)$ では、曲線は両端で $+\infty$ に発散するので、ここにも極小点がありおよそ $(1.35,\,42.7)$ にある。$\mathrm{f}'(x)=0$ の分母を払うと $(x+2)(x^4-10x^3+100x^2-72x-64)=0$ となる。この 4 次式はちょうどこの 2 つの実数解をもつので、ほかに極値点はない。特に、f は $x>4$ 全体で増加する。



この図は縮尺どおりに描かれているため、$x = -2$ と $x \approx -0.32$ の間のくぼみは浅く見える。そこでの最低点は軸からおよそ 4.5 下にあるにすぎず、曲線は $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ で漸近線に接している。

検算

- $\mathrm{f}(-\frac{1}{2}) = -\frac{9}{2} - 0 = -\frac{9}{2}$ であり、これは $y = x - 4$ 上にある。$x = -\frac{1}{2}$ における数値微分の値は 1.000 となる。
- $(x+2)^2(x^2 - 12x - 4)$ を展開して $x^2(x-4)^2 - 16(2x+1)^2$ と比べると、どちらも $x^4 - 8x^3 - 48x^2 - 64x - 16$ となる。
- $\mathrm{f}(1000) - (1000 - 4) \approx -0.064 \approx -64/1000$ であり、$64/x$ による見積もりのとおりである。

よくある間違い

- x^2 があるために、$x = 0$ の近くで曲線が**両側で** $+\infty$ に発散することを見落とす。2 本の鉛直漸近線はふるまいが異なる。
- 直線が曲線と交わることだけを示して、接することを証明したつもりになる。傾きが一致すること、あるいは同値なこととして重解であることも示す必要がある。
- 小問 (ii) で二乗の差に気づかず、4 次の分子を展開してから根を見つけようとする。

STEP のその先へ

直線が曲線と「重解」で交わるのは、ちょうど接するときである。これは**交点の重複度**（multiplicity of intersection）という考え方であり、代数幾何学（algebraic geometry）の基礎をなし、2 つの曲線が何回交わるかについてのベズー（Bézout）の定理などの結果につながる。有理関数（rational function）は無限遠ではその多項式部分で近似され、剰余の大きさ（ここでは $64/x$）は曲線がどれだけ速く漸近線に近づくかを教えてくれる。これは漸近展開（asymptotic expansion）への最初の入り口である。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この種のグラフの概形を描く問題がさらに収められている。

解答例

STEP III 2004、第 3 問

純粋数学 ・ 凸性と級数の評価

STEP III 2004、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/04-s3-q3

鍵となる考え方

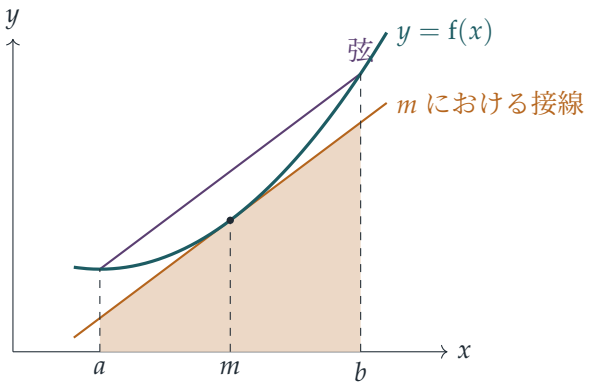
$f'' > 0$ ならば、曲線は上に向かって曲がっている。したがって曲線はすべての接線（tangent line）より上にあり、すべての弦（chord）より下にある。中点における接線と、端から端までの弦は、それぞれ面積が簡単に書き下せる台形（trapezium）を切り取り、この二つの面積が積分を挟み込む。$[n-1, n]$ 上で $f(x) = 1/x^2$ とすると、積分は隣り合う項が打ち消し合う形（telescoping）になる。そこで不等式を n について足し合わせると、$\sum 1/n^2$ の評価が得られる。

解答

積分に対する二つの評価

$m = \frac{1}{2}(a+b)$ とおく。$[a, b]$ 上で $f'' > 0$ であるから、傾き f' は狭義単調増加であり、曲線は凸（convex）である。ここから二つの事実が得られる。

- **曲線は m における接線より上にある。** $t(x) = f(m) + f'(m)(x-m)$、$g = f - t$ とおく。すると $g(m) = g'(m) = 0$ かつ $g'' = f'' > 0$ であるから、g' は増加する。よって m の左側では $g' < 0$、右側では $g' > 0$ となり、g は m で狭義の最小値 0 をとる。したがって $x \neq m$ に対して $f(x) > t(x)$ である。
- **曲線は弦より下にある。** $c(x)$ を $(a, f(a))$ と $(b, f(b))$ を通る直線とし、$h = f - c$ とおく。すると $h(a) = h(b) = 0$ かつ $h'' > 0$ である。もし h が (a, b) の内部で ≥ 0 となる値をとるならば、そこで $h'' \leq 0$ となる最大値をもつことになるが、これは不可能である。よって $a < x < b$ に対して $f(x) < c(x)$ である。



次に $[a,b]$ 上で面積を比較する。接線の下の部分は幅 $b-a$ の台形である。その平均の高さは中点における t の高さ $t(m)=\mathrm{f}(m)$ であるから、面積は $(b-a)\,\mathrm{f}(m)$ である（網掛け部分）。弦の下の部分は平行な辺が $\mathrm{f}(a)$ と $\mathrm{f}(b)$ の台形であるから、面積は $(b-a)\frac{1}{2}\big(\mathrm{f}(a)+\mathrm{f}(b)\big)$ である。曲線は孤立した点を除いて二つの直線の厳密に間にある。よって

$$(b-a)\,\mathrm{f}\Big(\frac{a+b}{2}\Big) < \int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x < (b-a)\,\frac{\mathrm{f}(a)+\mathrm{f}(b)}{2}.$$

（図では f が正の場合を描いている。この議論は実際には $\int(\mathrm{f}-t)>0$ と $\int(c-\mathrm{f})>0$ についてのものなので、f の符号は関係ない。）

a、b、f の選び方

中央の項 $\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$ は $\big[-\frac{1}{x}\big]_{n-1}^{n}$ の形に見えるので、$\mathrm{f}(x)=1/x^2$、$a=n-1$、$b=n$ とする。すると $b-a=1$ であり、$n-1\geq 1>0$ であるから $[n-1,n]$ 上で $\mathrm{f}''(x)=6/x^4>0$ である。また

$$\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n},\qquad \mathrm{f}\Big(\frac{2n-1}{2}\Big)=\frac{4}{(2n-1)^2},$$

であるから、前半の結果より

$$\frac{4}{(2n-1)^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}<\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n-1)^2}\Big)\qquad (n\geq 2),$$

が得られ、これが示すべきことであった。

1 に対する二つの評価の導出

$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ とおく。$n\geq 2$ に対して $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$ であり、これらの項は打ち消し合うので、この級数は収束（converge）する。$n=2,3,\ldots,N$ に対する不等式を足し合わせる。中央の項は打ち消し合って $1-\frac{1}{N}$ となり、これは 1 に近づく。

考えてみよう $N \to \infty$ とすると、厳密な不等式はふつう $\leq$ になってしまう。どうすれば厳密なままにできるだろうか？

差に注目する。各 $n \geq 2$ に対して、差 $d_n = \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) - \frac{4}{(2n-1)^2}$ は正である。よって差の無限和は少なくとも初項 $d_2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18} > 0$ 以上である。ここに現れる級数はすべて収束するので項ごとに和をとってよく、和の差は厳密に正である。右側の不等式についても同じ議論が成り立つ。

左側では、$n = 2, 3, 4, \ldots$ に対して $2n - 1 = 3, 5, 7, \ldots$ であるから

$$4\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right) < 1.$$

右側では

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2}\right) = \frac{1}{2}(S-1) + \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + (S-1),$$

であるから

$$1 < \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right).$$

奇数の平方との比較

左辺の級数を、奇数番目の項とそれに続く偶数番目の項の連続する組にまとめる。$k \geq 2$ に対して、$2k > 2k - 1 > 0$ であるから

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{(2k)^2}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{(2k-1)^2}\right) = \frac{1}{(2k-1)^2},$$

が成り立つ。$k = 2, 3, 4, \ldots$ とすると、左辺の組は $(3^2, 4^2)$、$(5^2, 6^2), \ldots$ となり、全体として $\frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}, \ldots$ の各項をちょうど一度ずつ用いる。（すべての項が正であり級数が収束するので、このようにまとめてよい。）右辺は $\frac{1}{3^2}, \frac{1}{5^2}, \ldots$ である。先ほどと同様に厳密性を保ったまま k について和をとると

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots\right) < \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots.$$

S に対する評価

下からの評価。 右側の不等式より $1 < \frac{1}{2} + (S-1)$ であるから、$S > \frac{3}{2}$ である。

上からの評価。 $T = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = S - 1 - \frac{1}{4}$ とおく。最後の比較と左側の不等式を組み合わせると

$$\frac{1}{2}T < \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots < \frac{1}{4},$$

となるので、$T < \frac{1}{2}$ である。よって $S = 1 + \frac{1}{4} + T < \frac{7}{4}$ である。以上をまとめると

$$\frac{3}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{7}{4}.$$

検算

- 真の値は $S = \pi^2/6 \approx 1.6449$ であり、$(1.5, 1.75)$ の中にある。
- 数値的には $4\sum_{k\geq 2}(2k-1)^{-2} = 4(\pi^2/8 - 1) \approx 0.935 < 1$、$\frac{1}{2} + (S-1) \approx 1.145 > 1$ である。
- 比較については $\frac{1}{2}T \approx 0.197 < 0.234 \approx \sum_{k\geq 2}(2k-1)^{-2}$ である。
- $n = 2$ を試すと $\frac{4}{9} \approx 0.444 < \frac{1}{2} < \frac{5}{8} = 0.625$ となる。$2 \leq n \leq 2000$ について厳密な分数で確かめると、三つの不等式がすべて成り立つことが確認できる。

よくある間違い

- 抜けている $\frac{1}{4}$ を忘れること。括弧内は $\frac{1}{3^2}$ から始まるので、$T = S - \frac{5}{4}$ であって $S - 1$ ではない。$S - 1$ を用いると、$S < \frac{3}{2}$ という誤った主張が導かれてしまう。
- 不等式の向きを逆にすること。上に向かって曲がる曲線では、接線（中点）による見積もりは小さすぎ、弦（台形）による見積もりは大きすぎる。
- 無限和に移行する際、「$<$」が極限をとっても保たれる理由を述べずに、黙ってそのまま使うこと。

STEP のその先へ

二つの評価は中点則（midpoint rule）と台形則（trapezium rule）である。凸性からそれぞれがどちら向きに誤差をもつかがわかり、テイラーの定理（Taylor's theorem）から両方の誤差が $(b-a)^3$ のように小さくなることがわかる。厳密な値 $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ は、オイラー（Euler）によるバーゼル問題（Basel problem）の解である。大学の最初の解析学（analysis）の講義では、これをフーリエ級数（Fourier series）を用いて証明する。また、「極限における厳密な不等式」の議論も厳密に扱う。Abbott の *Understanding Analysis* は、級数の収束と凸関数の両方を扱っている。

解答例

STEP III 2004、第 4 問

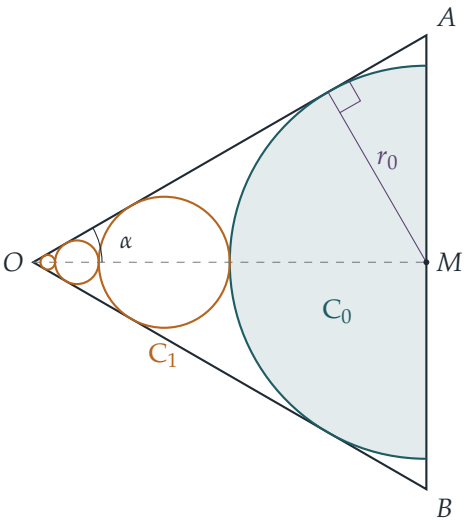
純粋数学 ・ 接する円と級数

> **STEP III 2004、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q4

鍵となる考え方

OA と OB の両方に接する（touch）円の中心はすべて角 AOB の二等分線（bisector）上にあり、その中心の O からの距離は半径によって決まる。O における角が α の直角三角形を考えると、距離 $= r/\sin\alpha$ となるのである。「2 つの円が接する」という条件をこれらの距離の方程式として書くと、隣り合う半径どうしが結びつき、半径は等比数列（geometric progression）をなすことがわかる。すると面積は等比級数（geometric series）をなし、最後の小問は 1 変数の最大化（maximisation）の問題（あるいは α の値をうまく選ぶ問題）になる。

解答



半径の比

M を AB の中点とする。$OA = OB$ であるから、直線 OM は角 AOB を二等分し、AB に垂直である。角 AOM と角 BOM はいずれも α である。

直線 OA と OB の両方に接する半径 r の円を任意にとる。その中心は 2 直線から等距離にあるので、二等分線 OM 上にある。中心を P とし、円が OA に点 T で接するとすると、$PT \perp OA$、$PT = r$ であり、角 $POT = \alpha$ であるから、直角三角形 OTP において

$$OP = \frac{r}{\sin\alpha}.$$

これは C_0（中心 M）にも、すべての C_n にも当てはまる。O から C_n の中心までの距離を $d_n = r_n / \sin\alpha$ と書く。

C_{n+1} は C_n と O の間の隅に収まっている（この円は辺 OA と OB そのものに接し、その延長に接するのではないから、角の内側で、しかも C_n から見て O の側になければならない）。外接（touch externally）する 2 つの円の中心間の距離は $r_n + r_{n+1}$ であり、ここでは両方の中心が OM 上にあるから、

$$d_n - d_{n+1} = r_n + r_{n+1}.$$

$d_n = r_n / \sin\alpha$ を代入し、両辺に $\sin\alpha$ を掛けると、

$$r_n - r_{n+1} = (r_n + r_{n+1})\sin\alpha$$
$$r_n(1 - \sin\alpha) = r_{n+1}(1 + \sin\alpha),$$

したがって

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha},$$

となり、示すべき式が得られた。これは $n = 0$ のときにも成り立つ。C_1 は半円の弧の部分に接し、その部分は C_0 のうち O に面した半分だからである。

面積の総和

$k = \dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$ とおく。$0 < \sin\alpha < 1$ であるから $0 < k < 1$ であり、$r_n = k^n r_0$ である。半円の面積は $\frac{1}{2}\pi r_0^2$、C_n の面積は $\pi k^{2n} r_0^2$ である。級数 $\sum_{n\geq 1} k^{2n}$ は公比 $k^2 < 1$ の等比級数であるから、$k^2/(1-k^2)$ に収束（converge）する。よって

$$S = \pi r_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{k^2}{1-k^2}\right).$$

ここで

$$1-k^2 = \frac{(1+\sin\alpha)^2 - (1-\sin\alpha)^2}{(1+\sin\alpha)^2} = \frac{4\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)^2}, \qquad \text{よって} \qquad \frac{k^2}{1-k^2} = \frac{(1-\sin\alpha)^2}{4\sin\alpha}.$$

ゆえに

$$S = \pi r_0^2 \frac{2\sin\alpha + 1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha}{4\sin\alpha} = \frac{1+\sin^2\alpha}{4\sin\alpha}\,\pi r_0^2,$$

となり、求める結果が得られた。

三角形との比較

最初の小問より $OM = d_0 = r_0/\sin\alpha$ である。直角三角形 OMA において $AM = OM\tan\alpha$ であるから、三角形 OAB の面積は

$$T = OM \cdot AM = OM^2 \tan\alpha = \frac{r_0^2}{\sin^2\alpha} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{r_0^2}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

（半円は確かに底辺上に収まる：$r_0 = OM\sin\alpha < OM\tan\alpha = AM$。）割り算すると、

$$\frac{S}{T} = \frac{\pi}{4}(1+\sin^2\alpha)\cos\alpha.$$

考えてみよう α としてどの値を試すべきだろうか？

$\alpha \to 0$ のとき比は $\pi/4 \approx 0.785$ に近づき、0.8 にわずかに届かない。したがって非常に細い三角形ではうまくいかない。自然な最初の試みは O における角を直角にすること、すなわち $\alpha = \pi/4$ である。このとき $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$、$\cos\alpha = 1/\sqrt{2}$ であるから、

$$\frac{S}{T} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}.$$

これが $\frac{4}{5}$ を超えるのは、ちょうど $15\pi > 32\sqrt{2}$ のときである。両辺は正であるから 2 乗してよく、条件は $225\pi^2 > 2048$、すなわち $\pi^2 > 9.102\ldots$ となる。$\pi > 3.1$ より $\pi^2 > 9.61$ であるから、この不等式は成り立つ。ゆえに $\alpha = \pi/4$ のとき（さらに連続性（continuity）により $\pi/4$ に近いすべての α について）、円は三角形の 5 分の 4 より多くを覆う。

参考までに述べておくと、最良の α は $c = \cos\alpha$ として $f(c) = (2 - c^2)c$ を最大化すれば得られる。$f'(c) = 2 - 3c^2 = 0$ より $\cos\alpha = \sqrt{2/3}$、すなわち $\sin\alpha = 1/\sqrt{3}$ であり、比の最大値は $\pi\sqrt{6}/9 \approx 0.855$ である。

検算

- $\alpha \to \pi/2$ のとき三角形はつぶれて $k \to 0$ となる。円 C_n は消え、$S \to \frac{1}{2}\pi r_0^2$ となって、$\frac{1+1}{4}\pi r_0^2$ と一致する。
- $\alpha = \pi/6$ のとき $k = \frac{1}{3}$ であり、$S = \pi r_0^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1/9}{8/9}\right) = \frac{5}{8}\pi r_0^2$ となる。公式からは $\frac{1+1/4}{2}\pi r_0^2 = \frac{5}{8}\pi r_0^2$ が得られる。
- 数値的にも、ランダムな α に対して接する条件から直接 3000 個の円を構成すると、両方の公式が約 10^{-15} の精度で再現され、$\alpha = \pi/4$ における比は 0.8330 となる。

よくある間違い

- C_0 を円全体として数えてしまうこと。これは半円であり、そのために $\frac{1}{2}$ が現れるのである。
- $d_n + d_{n+1} = r_n + r_{n+1}$ や $d_n - d_{n+1} = r_n - r_{n+1}$ を使ってしまうこと。円どうしは外接しており、両方の中心は O から見て同じ側にある。
- 最後の小問で小さな α を試すこと。そこでは比は $\pi/4 < \frac{4}{5}$ に近づく。

STEP のその先へ

この円の列は、O を中心とし倍率 k の 1 つの相似拡大（dilation、enlargement）によって生成される。この写像は隅の領域を自分自身に写し、各円を次の円に写す。このような自己相似な配置は、フラクタル（fractal）や、アポロニウス（Apollonius）の円充填（Apollonian circle packing）へとつながっていく。円充填では、互いに接する円の曲率（curvature）がデカルト（Descartes）の円定理（Descartes' circle theorem）に従う。円を直線に変える変換である反転（inversion）を用いると、このような接する円の問題の多くが易しくなる。Needham の *Visual Complex Analysis*（複素解析を視覚

的に解説した本）は、これを見事に扱っている。

解答例

STEP III 2004、第 5 問

純粋数学 ・ 三角方程式

STEP III 2004、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/04-s3-q5

鍵となる考え方

2 つのコサインが等しくなるのは、それらの角が符号と 2π の整数倍の違いを除いて一致するとき、かつそのときに限る。タンジェントに移ると、θ と $\theta+\pi$ を区別する情報が失われるので、含意は一方向にしか成り立たない。これが反例（counterexample）の要点である。小問 (i) と (ii) では、$a\cos x + b\sin x$ を $R\cos(x-\alpha)$ の形に直し、最初の結果を用いて $\tan x$ を $\tan\omega$ で表し、さらに角の大きさを用いて正しい象限（quadrant）を選ぶ。

解答

最初の結果

$\cos(x-\alpha)=\cos\beta$ ならば、コサインは偶関数で周期（period）2π をもつので、ある整数 n について $x-\alpha=\pm\beta+2n\pi$ となる。よって

$$x=\alpha+\beta+2n\pi \quad \text{または} \quad x=\alpha-\beta+2n\pi.$$

tan は周期 π をもち、したがって当然周期 2π ももつので、これより $\tan x=\tan(\alpha+\beta)$ または $\tan x=\tan(\alpha-\beta)$ が得られる（これらのタンジェントが定義される限り）。

逆（converse）が成り立たないのは、tan は周期 π をもつが cos はそうではないからである。$\alpha=\beta=0$、$x=\pi$ とする。すると $\tan x=0=\tan(\alpha+\beta)$ であるが、

$$\cos(x-\alpha)=\cos\pi=-1\neq 1=\cos\beta.$$

一般に、$x=\alpha+\beta+\pi$ とすると $\cos(x-\alpha)=-\cos\beta$ となる。

ω についての2つの事実が役に立つ。$\tan\omega = \frac{4}{3}$ より、$\cos\omega = \frac{3}{5}$、$\sin\omega = \frac{4}{5}$ である。また $\frac{4}{3} > 1$ より、$\frac{\pi}{4} < \omega < \frac{\pi}{2}$ である。

小問 (i)

ここでは $\sqrt{1^2+7^2} = 5\sqrt{2}$ なので、$5\sqrt{2}$ で割ると

$$\tfrac{1}{5\sqrt{2}}\cos x - \tfrac{7}{5\sqrt{2}}\sin x = \tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\cos\varphi = \frac{1}{5\sqrt{2}}$、$\sin\varphi = \frac{7}{5\sqrt{2}}$ を満たす鋭角を φ とすると、$\tan\varphi = 7$ である。方程式は

$$\cos(x+\varphi) = \cos\tfrac{\pi}{4},$$

となり、これは $\alpha = -\varphi$、$\beta = \frac{\pi}{4}$ とした最初の結果にあたる。$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$ を用いると

$$\tan(\alpha+\beta) = \tan\left(\tfrac{\pi}{4} - \varphi\right) = \frac{1-7}{1+7} = -\frac{3}{4},$$
$$\tan(\alpha-\beta) = -\tan\left(\varphi + \tfrac{\pi}{4}\right) = -\frac{7+1}{1-7} = \frac{4}{3}.$$

考えてみよう これらのタンジェントの値はそれぞれ $[0, 2\pi]$ 内の2つの角に対応するが、方程式はそこに解を2つしかもたない。それはどの2つか？

反例が示したように、タンジェントだけではこれを決められないので、$x = \alpha \pm \beta + 2n\pi$ に戻り、$\alpha \pm \beta$ が実際にどこにあるかを調べる。$\tan\varphi = 7 > 1$ より、$\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ である。

- $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} - \varphi$ は $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ にあり、タンジェントは $-\frac{3}{4}$ である。ここで $\tan(\frac{\pi}{2} - \omega) = \cot\omega = \frac{3}{4}$ であり、$\frac{\pi}{2} - \omega \in (0, \frac{\pi}{4})$ である。よって $\alpha + \beta = \omega - \frac{\pi}{2}$ であり、2π を加えると $x = \frac{3\pi}{2} + \omega$ を得る。
- $\alpha - \beta = -\varphi - \frac{\pi}{4}$ は $(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})$ にあり、タンジェントは $\frac{4}{3}$ である。角 $\omega - \pi$ もこの区間にあり、タンジェントは $\frac{4}{3}$ である。タンジェントは、漸近線を含まない長さ π 未満の区間上で一対一であるから、$\alpha - \beta = \omega - \pi$ である。2π を加えると $x = \pi + \omega$ を得る。

$0 < \omega < \frac{\pi}{2}$ であるから、どちらの値も $[0, 2\pi]$ に含まれ、他の n を選んでもこの範囲の値は得られない。したがって

$$x = \pi + \omega \quad \text{または} \quad x = \tfrac{3\pi}{2} + \omega.$$

確認のため、$x = \pi + \omega$ では $\cos x - 7\sin x = -\frac{3}{5} + \frac{28}{5} = 5$ となり、$x = \frac{3\pi}{2} + \omega$ では $\cos x = \sin\omega$、$\sin x = -\cos\omega$ であるから $\frac{4}{5} + \frac{21}{5} = 5$ となる。

小問 (ii)

ここでは $\sqrt{2^2+11^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$ なので

$$\frac{2}{5\sqrt{5}}\cos x+\frac{11}{5\sqrt{5}}\sin x=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$\cos\alpha=\frac{2}{5\sqrt{5}}$、$\sin\alpha=\frac{11}{5\sqrt{5}}$ を満たす鋭角を α とすると、$\tan\alpha=\frac{11}{2}$ である。$\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ を満たす鋭角を β とすると、$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$、$\tan\beta=\frac{1}{2}$ である。方程式は $\cos(x-\alpha)=\cos\beta$ となり、

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\frac{11}{2}-\frac{1}{2}}{1+\frac{11}{4}}=\frac{5}{15/4}=\frac{4}{3},$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{11}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{11}{4}}=\frac{6}{-7/4}=-\frac{24}{7}.$$

2 つ目の値は $\tan 2\omega$ に等しい。実際、

$$\tan 2\omega=\frac{2\cdot\frac{4}{3}}{1-\frac{16}{9}}=\frac{8/3}{-7/9}=-\frac{24}{7}.$$

再び角の位置を定める。α と β はどちらも鋭角であるから、

- $\alpha-\beta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ でタンジェントは $\frac{4}{3}$ であるから、$\alpha-\beta=\omega$ である。
- $\alpha+\beta\in(0,\pi)$ でタンジェントは負であるから、$(\frac{\pi}{2},\pi)$ にある。$\frac{\pi}{4}<\omega<\frac{\pi}{2}$ より、角 2ω も $(\frac{\pi}{2},\pi)$ にあり、同じタンジェントをもつので、$\alpha+\beta=2\omega$ である。

ω と 2ω はともに $[0,2\pi]$ に含まれ、$\pm2\pi$ を加えるとその外に出る。よって解は

$$x=\omega\quad\text{および}\quad x=2\omega,$$

であり、題意のとおり一方の解はもう一方の 2 倍である。直接確かめると、$x=\omega$ では $\frac{6}{5}+\frac{44}{5}=10$ となる。$x=2\omega$ では $\cos 2\omega=\frac{9-16}{25}=-\frac{7}{25}$、$\sin 2\omega=\frac{24}{25}$ であるから、$-\frac{14}{25}+\frac{264}{25}=10$ となる。

検算

- $5<5\sqrt{2}$ かつ $10<5\sqrt{5}$ であり、右辺は $-R$ と R の間に厳密に含まれるので、各方程式は $[0,2\pi]$ にちょうど 2 つの解をもつはずである。
- 数値的には $\omega\approx0.9273$ である。符号変化による探索を行うと、(i) では解 4.0689 と 5.6397 が得られ、これらは $\pi+\omega$ と $\frac{3\pi}{2}+\omega$ である。(ii) では 0.9273 と 1.8546 が得られ、これらは ω と 2ω である。

よくある間違い

- $\tan x = \frac{4}{3}$ または $\tan x = -\frac{3}{4}$ を解いて、$[0, 2\pi]$ 内の 4 つの角をすべて挙げてしまうこと。そのうち 2 つは、まさに反例が示す理由により余分な解である。
- (i) で φ の符号を誤ること。たとえば $\cos x - 7\sin x$ に対して $\cos(x + \varphi)$ ではなく $\cos(x - \varphi)$ と書いてしまう。

STEP のその先へ

ここでの難しさは、tan が単射（injective）でないことにある。そのため「$\tan x = \tan y$」からわかるのは、π を法とした x だけである。複素解析（complex analysis）では、同じ問題が偏角（argument）や $\log z$ の分枝（branch）の定義に現れ、そこでは角は 2π の整数倍の違いを除いてしか定まらない。その枠組みでは $a\cos x + b\sin x = \mathrm{Re}\left((a - \mathrm{i}b)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)$ であり、R と α は単に $a + \mathrm{i}b$ の絶対値（modulus）と偏角にほかならない。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、この幾何学的な見方を見事に展開している。

解答例

STEP III 2004、第 6 問

純粋数学 ・ 漸化式

STEP III 2004、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/04-s3-q6

鍵となる考え方

式 F_n は、隣り合う項の組ごとに定まる量であり、冒頭の恒等式は、ある組から次の組に移るときにこの量が変わらないのはどのような場合かを正確に教えてくれる。(i) の漸化式（recurrence）では第 2 の因数が 0 になるので、F_n は不変量（invariant）であり、その初期値だけを求めればよい。(ii) はこの議論を逆にたどる。F_n が一定ならば積は 0 でなければならず、したがって各段階で二つの因数のどちらかが 0 となる。こうして各段階で選択の余地が生じ、うまく選ぶことで周期（period）4 の数列が得られるのである。

解答

恒等式

両方の項を書き出すと、w_{n-1}^2 の項は打ち消し合う。

$$\begin{aligned} F_n - F_{n-1} &= \left(w_n^2 + w_{n-1}^2 - 4w_n w_{n-1}\right) - \left(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 - 4w_{n-1}w_{n-2}\right) \\ &= \left(w_n^2 - w_{n-2}^2\right) - 4w_{n-1}\left(w_n - w_{n-2}\right) \\ &= (w_n - w_{n-2})(w_n + w_{n-2}) - 4w_{n-1}(w_n - w_{n-2}) \\ &= (w_n - w_{n-2})(w_n + w_{n-2} - 4w_{n-1}), \end{aligned}$$

これは $n \geq 2$ で成り立つ（w_{n-2} が存在する必要があるため）。以上で示された。

もう一つ、全体を通して役に立つ事実を述べておく。F_n は w_n と w_{n-1} について対称（symmetric）である。すなわち、両者を入れ替えても $w_n^2 + w_{n-1}^2 - 4w_n w_{n-1}$ は変わらない。

小問 (i)

$w_n = u_n$ とし、対応する量を F_n とする。$n \geq 2$ に対して漸化式より $u_n + u_{n-2} - 4u_{n-1} = 0$ であるから、恒等式の第 2 の因数は 0 であり、

$$F_n = F_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

よって、すべての $n \geq 1$ に対して $F_n = F_1$ であり、

$$F_1 = u_1^2 + u_0^2 - 4u_1u_0 = 4 + 1 - 8 = -3.$$

したがって $u_n^2 + u_{n-1}^2 - 4u_nu_{n-1} = -3$、すなわち、すべての $n \geq 1$ に対して $u_n^2 + u_{n-1}^2 = 4u_nu_{n-1} - 3$ が成り立つ。以上で示された。（数列は $1, 2, 7, 26, 97, \ldots$ と続く。）

小問 (ii)(a)

$(*)$ に $n = 1$ と $v_0 = 1$ を代入すると、

$$v_1^2 + 1 = 4v_1 - 3 \iff v_1^2 - 4v_1 + 4 = 0 \iff (v_1 - 2)^2 = 0,$$

よって $v_1 = 2$ である。これは重解（repeated root）なので、ここには選択の余地はない。

次に $w_n = v_n$ とする。条件 $(*)$ は、まさにすべての $n \geq 1$ に対して $F_n = -3$ であることを意味する。したがって $n \geq 2$ では F_n と F_{n-1} はともに -3 であり、恒等式から

$$0 = F_n - F_{n-1} = (v_n - v_{n-2})(v_n + v_{n-2} - 4v_{n-1}).$$

二つの実数の積が 0 になるのはどちらかが 0 のときに限るから、$v_n = v_{n-2}$ または $v_n = 4v_{n-1} - v_{n-2}$ である。以上で示された。

> **考えてみよう** これで全部だろうか。二つの選択肢はどちらも本当に条件を満たす次の項を与えるのだろうか。

そのとおりである。v_{n-1} を固定すると、条件 $(*)$ は $x = v_n$ についての二次方程式 $x^2 - 4v_{n-1}x + (v_{n-1}^2 + 3) = 0$ である。F は対称であり $F_{n-1} = -3$ であるから、$x = v_{n-2}$ はその解である。二つの解の和は $4v_{n-1}$ なので、もう一方の解は $4v_{n-1} - v_{n-2}$ である。つまり、(a) の二つの選択肢はちょうどこの二つの解にあたる。各段階でどちらを選んでもよく、得られる数列は常に $(*)$ を満たす。（$n = 1$ のように二つの解が一致する場合は、選択肢は一つしかない。）

小問 (ii)(b)

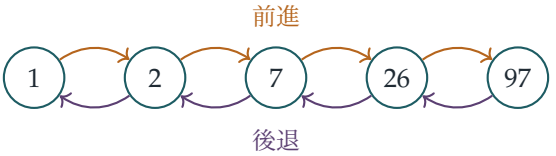
ここでは $v_0 = 1$ であり、条件どおりである。また、隣り合う項の組 (v_{n-1}, v_n) はすべて $(1,2)$ か $(2,1)$ のいずれかである。F は対称なので、どちらの場合も

$$v_n^2 + v_{n-1}^2 - 4v_n v_{n-1} = 1 + 4 - 8 = -3,$$

となり、すべての $n \geq 1$ に対して $(*)$ が成り立つ。(a) の言葉でいえば、この数列は常に $v_n = v_{n-2}$ の選択肢をとっている。

小問 (ii)(c)

$v_0 = 1$、$v_1 = 2$ である。(a) より、それ以降の各項は、二つ前の項（「後退」）か、$4\times$（直前の項）$-$（その一つ前の項）（「前進」）のいずれかである。$(1,2)$ から前進すると 7 が得られ、さらに 26、97 と続く。これは数列 u_n である。後退は直前の前進を取り消す。



したがって、この数列はこの鎖の上を 1 から出発して毎回隣の数へ移動していく歩みである。1 の隣は一つしかないので、1 を訪れた直後には必ず 2 へ進む。

$v_0 = 1$ で周期 4 にするには、$v_4 = 1$ でなければならない。(b) の周期 2 の数列は 1 と 2 の間を往復するだけである。新しいものを得るには、もう一歩先へ進めばよい。

$$v_0 = 1, \quad v_1 = 2, \quad v_2 = 4\cdot 2 - 1 = 7, \quad v_3 = v_1 = 2, \quad v_4 = v_2 \text{ または } 4\cdot 2 - 7 = 1.$$

$v_4 = 1$ を選び、以後これを繰り返すと、

$$v_n = \begin{cases} 1 & n \equiv 0 \pmod 4, \\ 2 & n \text{ が奇数}, \\ 7 & n \equiv 2 \pmod 4, \end{cases} \qquad \text{すなわち} \quad 1,2,7,2,1,2,7,2,\ldots$$

$(*)$ を直接確かめよう。隣り合う項の組はすべて $(1,2)$、$(2,7)$、$(7,2)$、$(2,1)$ のいずれかである。対称性より、確かめるべきは

$$1 + 4 - 8 = -3 \quad \text{および} \quad 4 + 49 - 56 = -3,$$

だけであり、どちらも成り立つ。よって $(*)$ はすべての $n \geq 1$ に対して成り立ち、この数列は周期 4 をもつ（$v_2 \neq v_0$ なので周期 2 ではない）。

実は、ちょうど周期 4 となる答えはこれだけである。1, 2 の後、歩みは $v_4 = 1$ とならなければならないので、7 に到達できるのは v_2 のときだけであり、そこからすぐに引き返さなければならない。

検算

- $n = 40$ まで u_n を計算し、毎回 $u_n^2 + u_{n-1}^2 - 4u_n u_{n-1} = -3$ となることを確かめよ。たとえば $(26, 97)$ では $676 + 9409 - 10088 = -3$ である。
- 冒頭の恒等式を、数千組のランダムな整数の三つ組で試してみよ。
- 1, 2 から始めて、(a) で許される数列を v_8 まですべて書き出せ。全体を通して $v_{k+4} = v_k$ となるのは $1, 2, 1, 2, \ldots$ と $1, 2, 7, 2, \ldots$ だけである。

よくある間違い

- (ii) で理由を述べずに $F_n - F_{n-1} = 0$ と結論すること。その理由は、$(*)$ によってすべての F_n が -3 に等しくなるからである。
- v_1 が一意に定まることを見落とすこと。二次方程式は重解 2 をもつので、場合分けは不要である。
- (c) で一周期分の組だけを確かめ、「折り返し」の組 $(v_3, v_4) = (2, 1)$ を忘れること。

STEP のその先へ

量 F_n はこの漸化式の**不変量**、つまり力学におけるエネルギーのような保存量である。方程式 $x^2 + y^2 - 4xy = -3$ は、マルコフ（Markov）型（あるいはペル（Pell）型）のディオファントス方程式（Diophantine equation）である。二次方程式の一方の解をもう一方の解に取り替える操作 $x \mapsto 4y - x$ は、古典的な「ヴィエタ・ジャンピング（Vieta jumping）」の手法であり、最小の解からすべての整数解を生成する。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等整数論』）では、ペル方程式と、漸化式によるその解が扱われている。

解答例

STEP III 2004、第 7 問

純粋数学 ・ 漸化式による積分

STEP III 2004、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/04-s3-q7

鍵となる考え方

I_{n+1} の被積分関数（integrand）は、I_n の被積分関数に $\frac{t}{t+1}$ を掛けたものである。したがって、この一つの因子を評価すれば、隣り合う積分どうしを結ぶ不等式が得られる。部分積分（integration by parts）を用いると両者を結ぶ厳密な関係式も得られ、この不等式と等式を並べることで I_n 単独の評価を絞り出すことができる。厳密な関係式は次々と打ち消し合って（telescoping）I_1 まで下りていき、I_1 はよく知っている対数である。こうしてすべてが、誤差項（error term）を制御できる $\ln 2$ の級数（series）に変わるのである。

解答

不等式 $I_{n+1} < \frac{1}{2} I_n$

$0 \le t \le 1$ において

$$\frac{t}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1},$$

であり、これは t について増加するので、最大値は $\frac{1}{2}$ であり、それをとるのは $t = 1$ のときに限る。ここで I_{n+1} の被積分関数を

$$\frac{t^n}{(t+1)^{n+1}} = \frac{t}{t+1} \cdot \frac{t^{n-1}}{(t+1)^n}.$$

と書く。よって

$$\frac{1}{2} I_n - I_{n+1} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{t+1} \right) \frac{t^{n-1}}{(t+1)^n} \, \mathrm{d}t.$$

である。この被積分関数は連続で、負になることはなく、$0 < t < 1$ では真に正である（そこでは二つの因子がともに正である）。したがってこの積分は真に正であり、

$I_{n+1} < \frac{1}{2} I_n$ が成り立つ。

考えてみよう $\frac{t}{t+1}$ は実際に $\frac{1}{2}$ に達するのに、なぜ不等式は等号なしで成り立つのだろうか？

$\frac{1}{2}$ に達するのはただ一点 $t = 1$ においてだけである。連続で負でない関数が区間全体で正であれば、その積分は正である。したがって、一点で等号が成り立っても何の影響もない。

漸化式

$u = t^n$、$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (t+1)^{-(n+1)}$ として I_{n+1} を部分積分する。このとき $v = -\dfrac{1}{n(t+1)^n}$ である（$n \geq 1$ なのでこれは正しい）。

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \Big[-\frac{t^n}{n(t+1)^n}\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{nt^{n-1}}{n(t+1)^n}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{n\,2^n} + I_n, \end{aligned}$$

括弧内の値は $t = 1$ で $-\frac{1}{n2^n}$、$t = 0$ で 0 だからである。これが求める漸化式（recurrence）である。

I_n の評価

漸化式を不等式に代入すると

$$I_n - \frac{1}{n\,2^n} = I_{n+1} < \frac{1}{2} I_n \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} I_n < \frac{1}{n\,2^n} \quad \Longrightarrow \quad I_n < \frac{1}{n\,2^{n-1}}.$$

を得る。

$\ln 2$ の級数

まず

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \big[\ln(t+1)\big]_0^1 = \ln 2.$$

である。漸化式より、各 $r \geq 1$ に対して $I_r - I_{r+1} = \dfrac{1}{r\,2^r}$ が成り立つ。これらを $r = 1, \ldots, n$ について足し合わせると、左辺は次々と打ち消し合って

$$I_1 - I_{n+1} = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r\,2^r}, \qquad \text{よって} \qquad \ln 2 = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r\,2^r} + I_{n+1}.$$

となる。

評価 $\frac{2}{3} < \ln 2 < \frac{17}{24}$

剰余項（remainder）について二つの事実がある。一つは $I_{n+1} > 0$ であること（被積分関数が $(0,1]$ で正だから）、もう一つは、上の評価で n を $n+1$ に置き換えて得られる $I_{n+1} < \dfrac{1}{(n+1)2^n}$ である。したがって、すべての n に対して

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r\,2^r} < \ln 2 < \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r\,2^r} + \frac{1}{(n+1)2^n}.$$

が成り立つ。部分和（partial sum）は

$$\tfrac{1}{2}, \qquad \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{5}{8}, \qquad \tfrac{5}{8} + \tfrac{1}{24} = \tfrac{16}{24} = \tfrac{2}{3}.$$

である。

考えてみよう それぞれの評価に、どの n を用いればよいだろうか？

それぞれ異なる値を用いる。下からの評価には $n = 3$ をとれば $\ln 2 > \frac{2}{3}$ である。上からの評価には $n = 2$ をとる。このとき誤差の上界は $\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{12}$ であり、

$$\ln 2 < \tfrac{5}{8} + \tfrac{1}{12} = \tfrac{15}{24} + \tfrac{2}{24} = \tfrac{17}{24}.$$

となる。以上を合わせて、求める $\frac{2}{3} < \ln 2 < \frac{17}{24}$ が得られる。

検算

数値的には $\ln 2 \approx 0.6931$ であり、確かに $\frac{2}{3} \approx 0.6667$ と $\frac{17}{24} \approx 0.7083$ の間にある。シンプソン（Simpson）の公式（Simpson's rule）によれば $I_3 \approx 0.0681$ であり、上界 $\frac{1}{12} \approx 0.0833$ を十分に下回っている。実際 $\frac{5}{8} + 0.0681 = 0.6931$ である。また、n が 24 までの場合について、漸化式と二つの不等式を数値的に確かめた。

よくある間違い

- 二つの評価に同じ n を用いてしまう。$n = 3$ とすると上からの評価は $\frac{2}{3} + \frac{1}{32} = \frac{67}{96}$ となり、これは正しく、より精密でもあるが、問われている $\frac{17}{24}$ ではない。
- 部分積分で境界項の符号を誤る。v は負である。
- $I_{n+1} > 0$ である理由を述べ忘れる。等号なしの下からの評価にはこれが必要である。

STEP のその先へ

これは級数 $\ln 2 = \sum_{r\geq 1} \frac{1}{r2^r}$ であり、$-\ln(1-x) = \sum x^r/r$ に $x = \frac{1}{2}$ を代入したものに、n 項までで打ち切ったときの剰余項の明示的な評価を添えたものである。剰余項を積分で評価するというのは、まさに積分形の剰余項をもつテイラー（Taylor）の定理（Taylor's theorem）の仕組みそのものであり、大学 1 年次の解析学の定番である。冪級数（power series）とその剰余項の理論については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を参照されたい。

解答例

STEP III 2004、第 8 問

純粋数学 ・ 微分方程式

> **STEP III 2004、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q8

鍵となる考え方

$1/y$ の項があるため、この方程式は y について線形（linear）ではない。しかし両辺に y を掛けると、$y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ は y^2 の導関数（derivative）の半分になり、$1/y$ の項は単なる x の関数になる。したがって $u = y^2$ を用いて表すと方程式は線形になり（ベルヌーイ型（Bernoulli type）の方程式）、あとは積分因子（integrating factor）で解き切ることができる。得られる 3 つの曲線は 2 次曲線（conic）であり、それらが何であるかを見抜けば概形を描くのは容易である。

解答

置換

$u = y^2$ とおく。合成関数の微分法（chain rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y\left(f(x)\,y + \frac{g(x)}{y}\right) = 2f(x)\,y^2 + 2g(x).$$

y^2 を u で置き換えると、

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - 2f(x)\,u = 2g(x),$$

となり、これは u について線形である。すなわち u と $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ はいずれも 1 次でしか現れず、その係数は x のみに依存する。これが示すべきことであった。

方程式を解く

ここでは $f(x) = \frac{1}{x}$、$g(x) = -1$ であるから、線形方程式は

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{2}{x}u = -2.$$

となる。積分因子は $\exp\left(-\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{e}^{-2\ln|x|} = \dfrac{1}{x^2}$ である。両辺にこれを掛けると、

$$\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{2}{x^3}u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2}.$$

積分すると、定数 C を用いて $\dfrac{u}{x^2} = \dfrac{2}{x} + C$ となるので、一般解（general solution）は

$$y^2 = 2x + Cx^2.$$

である。（もとの方程式は $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ を必要とするので、各解は 0 を含まず $2x + Cx^2 > 0$ を満たす x の区間上で定義され、その区間全体で y の符号は一定である。）

3 つの曲線

3 点はいずれも $x > 0$ かつ $y > 0$ を満たすので、各解曲線は、$y^2 = 2x + Cx^2$ のうち $y > 0$ の部分で、その点を含む正の x の区間上にあるものである。

$(1,1)$ **を通るもの：** $1 = 2 + C$ より $C = -1$ であり、$y^2 = 2x - x^2$ となる。平方完成すると、

$$(x-1)^2 + y^2 = 1,$$

となり、中心 $(1,0)$、半径 1 の円である。解曲線は上半円 $y = \sqrt{2x - x^2}$（$0 < x < 2$）である。

$(2,2)$ **を通るもの：** $4 = 4 + 4C$ より $C = 0$ であり、$y^2 = 2x$ となる。これは頂点が原点、軸が x 軸の放物線である。解曲線は $y = \sqrt{2x}$（$x > 0$）である。

$(4,4)$ **を通るもの：** $16 = 8 + 16C$ より $C = \frac{1}{2}$ であり、$y^2 = 2x + \frac{1}{2}x^2$ となる。平方完成すると $\frac{1}{2}(x+2)^2 - y^2 = 2$、すなわち

$$\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1,$$

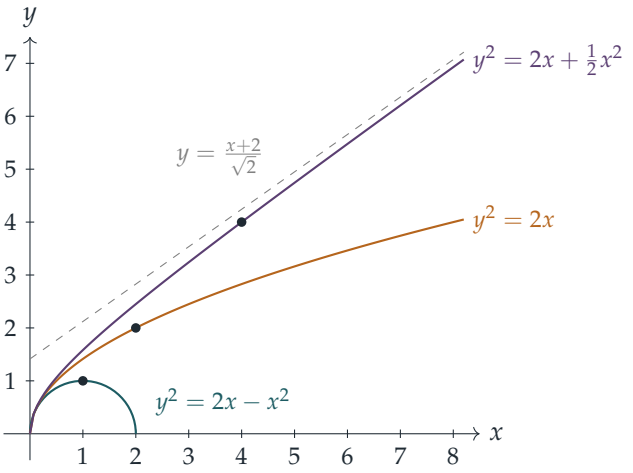
となり、中心 $(-2,0)$、頂点 $(0,0)$ と $(-4,0)$、漸近線（asymptote）$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(x+2)$ の双曲線（hyperbola）である。解曲線は右側の枝の上半分 $y = \sqrt{2x + \frac{1}{2}x^2}$（$x > 0$）である。

考えてみよう なぜ双曲線の左側の枝や、下半分を含めないのだろうか？

微分方程式の解は、ある区間上で微分可能であり、その区間上で方程式を満たさなければならない。そして方程式は $x=0$ または $y=0$ のとき定義されない。$(4,4)$ から左へ進むと曲線は $(0,0)$ に達し、そこでは両方の条件が破れるので、その先へ延長することはできない。左側の枝（$x \le -4$ の部分）や下半分も $y^2 = 2x + \frac{1}{2}x^2$ を満たすが、それらは別の解であって、$(4,4)$ を通る解ではない。

概形

3 つの曲線はいずれも原点から鉛直な接線をもって出発し（$x=0$ の近くではどれも $y \approx \sqrt{2x}$ のようにふるまう）、与えられた点での傾きはそれぞれ $\frac{1}{1} - \frac{1}{1} = 0$、$\frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$、$\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ である。x が大きくなると、円は $(2,0)$ へ下りてきて、放物線は $\sqrt{x}$ のように増加し、双曲線は漸近線 $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+2)$ に近づく。$x>0$ に対して $2x - x^2 < 2x < 2x + \frac{1}{2}x^2$ であるから、円は放物線の下にあり、放物線は双曲線の下にある。



検算

- 代入して確かめる：$y^2 = 2x + Cx^2$ ならば $2yy' = 2 + 2Cx$ より $y' = \frac{1+Cx}{y}$ であり、一方 $\frac{y}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y^2 - x}{xy} = \frac{x + Cx^2}{xy} = \frac{1+Cx}{y}$ である。両者は一致する。
- もとの方程式を $(4,4)$ から $x=8$ まで数値的に（ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で）解き進めると $y \approx 6.92820$ となり、$\sqrt{16+32} = \sqrt{48}$ と一致する。$(1,1)$ および $(2,2)$ から同様に計算すると、半円および放物線と約 10^{-12} の精度で一致する。

よくある間違い

- 積分因子を x^{-2} ではなく x^2 としてしまう。u の係数は $-\frac{2}{x}$ なので、指数は $-2\ln x$ である。
- $\frac{du}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$ の係数 2 を落とし、$y^2 = x + Cx^2$ を導いてしまう。これは代入による検算で破綻する。
- 円全体、放物線の上下両方、あるいは双曲線の両方の枝を「解曲線」として描いてしまう。

STEP のその先へ

ここで用いた技法は、任意の**ベルヌーイの微分方程式**（Bernoulli equation）$y' = f(x)y + g(x)y^n$ に対して有効である。置換 $u = y^{1-n}$ によって常に線形になる（ここでは $n = -1$ なので $u = y^2$）。$x = 0$ や $y = 0$ で必要となった注意は、解の存在と一意性の定理（existence and uniqueness theorem）の最初の姿である。すなわち、右辺が行儀よくふるまう各点を通る解はちょうど 1 つ存在し、曲線族が交わりうるのはそうでない点に限られる。実際、ここで得た曲線はすべて原点で交わっている。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）では、ベルヌーイの微分方程式とこの定理が扱われている。

解答例

STEP III 2004、第 9 問

力学 ・ 力のモーメントと摩擦

STEP III 2004、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/04-s3-q9

鍵となる考え方

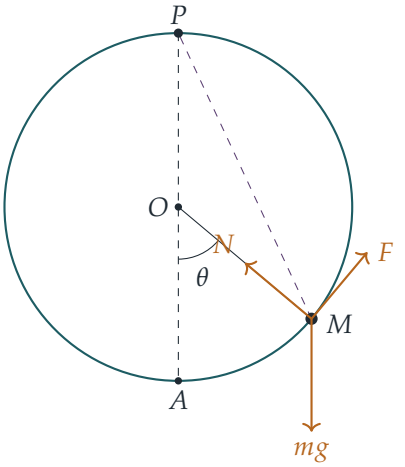
輪の重力は軸の真下にある O を通って作用するので、P のまわりのモーメント（moment）をもたない。輪にはたらく他の力は（軸からの反力を除けば）ネズミからの接触力だけであるから、輪が静止したままでいるのは、その接触力の P のまわりのモーメントが 0 であるとき、すなわちその作用線（line of action）が P を通るときにちょうど限られる。すべては、ネズミの接触力が MP の向きを向くことができるのはいつか、と問うことから導かれる。一度は速さについて、もう一度は摩擦の限界について問うのである。

解答

モデル

ネズミを質量 m の質点、輪を P を通るなめらかな水平軸のまわりに自由に回転する剛体の輪（rigid ring）とみなす（輪の質量は結果に影響しないことがわかる）。$\theta = \angle AOM$ とおき、鉛直下向きから測るものとし、ネズミは θ が増加する向きに走るとする。輪が静止している間、ネズミは O を中心とする半径 a の固定された円周上を一定の速さ u で運動する。

ネズミにはたらく力は、重力 mg、輪から O に向かう垂直抗力（normal reaction）N、そして接線方向の摩擦力（friction）F である。F は θ が増加する向き（輪を上る向き）を正にとる。



ネズミについて、接線方向（速さが一定なので接線方向の加速度はない）と半径方向（O に向かう加速度 u^2/a）に力を分解すると、

$$F = mg\sin\theta,$$
$$N - mg\cos\theta = \frac{mu^2}{a}.$$

輪が釣り合うのはいつか

ニュートン（Newton）の第 3 法則（third law）により、ネズミは輪を、ネズミにはたらく接触力（N と F）と大きさが等しく向きが反対の力で押す。輪の重力は P の鉛直下方にある O に作用し、軸からの反力は P に作用するので、どちらも P のまわりのモーメントをもたない。したがって、輪が POA を鉛直に保ったまま釣り合うための必要十分条件は、接触力の P のまわりのモーメントが 0 であること、すなわちその作用線が P を通ることである。

三角形 OPM は二等辺三角形（isosceles triangle）（$OP = OM = a$）で $\angle POM = \pi - \theta$ であるから、$\angle OMP = \frac{1}{2}\theta$ である。よって直線 MP は半径 MO と角 $\frac{1}{2}\theta$ をなし、θ が増加する向きに傾いている。したがって、ネズミにはたらく接触力が MP の向きを向くのは、ちょうど

$$\frac{F}{N} = \tan\tfrac{1}{2}\theta. \qquad (*)$$

のときである。（同じことだが、P のまわりのモーメントを直接計算すると、ネズミが輪に及ぼす力のモーメントは $a\left[N\sin\theta - F(1+\cos\theta)\right]$ であり、$\sin\theta/(1+\cos\theta) = \tan\frac{1}{2}\theta$ である。）

考えてみよう これを u についての条件にするにはどうすればよいか。

運動方程式（equations of motion）を用いる。ネズミにはたらく接触力は、質量と加速度の積から重力を引いたものである：

$$\mathbf{R} = m \cdot \frac{u^2}{a}\,\widehat{MO} + mg\,\widehat{\text{上}}.$$

一方 $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP} = a\,\widehat{MO} + a\,\widehat{\text{上}}$ であり、係数は等しい。よって、すべての θ に対して $\mathbf{R}$ が MP に平行となるための必要十分条件は $u^2/a = g$、すなわち

$$u = \sqrt{ag}.$$

である。代数的に確かめると、$u^2 = ag$ のとき運動方程式から $F = mg\sin\theta$、$N = mg(1+\cos\theta)$ が得られるので、

$$\frac{F}{N} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta} = \tan\tfrac{1}{2}\theta,$$

となり、これは $(*)$ である。一般の速さでは P のまわりのモーメントは $m\sin\theta\,(u^2 - ag)$ となり、これがあらゆる位置で 0 になるのは $u^2 = ag$ のときに限る。よって、輪が実際にこの摩擦力を供給できるならば、ネズミは速さ $\sqrt{ag}$ で走ることで、求められているとおり輪を釣り合いの状態に保つことができる。次にその点を調べる。

摩擦の限界

ネズミの足が滑らずに輪をとらえていられるのは $|F| \le \mu N$ である間だけである。$u = \sqrt{ag}$ のもとで、$\cos\frac{1}{2}\theta > 0$ となる下側の部分 $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$ では、この条件は

$$\tan\tfrac{1}{2}|\theta| \le \mu \quad\Longleftrightarrow\quad |\theta| \le 2\arctan\mu.$$

となる。よって $\angle AOM = 2\arctan\mu$ に達するまではすべてうまくいく。（この点が輪の下半分にあるのは $\mu < 1$ のときに限る。$\mu \ge 1$ ならばネズミはそこに達することはない。）

この点を越えると、どのように速さを選んでも役に立たない。釣り合いには $F/N = \tan\frac{1}{2}\theta > \mu$ が必要であるが、摩擦はそれを与えられない。任意の速さと $|F| \le \mu N$ を満たす任意の摩擦力に対して、ネズミが輪に及ぼす力の P のまわりのモーメントは

$$a\big[N\sin\theta - F(1+\cos\theta)\big] \;\ge\; aN(1+\cos\theta)\big(\tan\tfrac{1}{2}\theta - \mu\big) > 0.$$

となる。

何が起こるか

ネズミが $\angle AOM = 2\arctan\mu$ を越えると、もはや十分に強く輪をとらえていられない。足が滑り、摩擦力は限界値 μN になり、ネズミは速さを保てずに後ろへ滑り始め

る。このときネズミが輪に及ぼす接触力は P の脇を通るので、0 でないモーメントをもち、輪はもはや釣り合わない。輪は P のまわりに回転し始める。上のモーメントの向きは、ネズミが押す垂直方向の力が弱まった摩擦力に勝る向きであるので、輪は A がネズミの側、すなわちネズミが走っていた向きへ動くように振れる。それ以降の運動はもはや単純な釣り合いの描像ではなく、ネズミが輪の上を滑る一方で輪が P のまわりに振れる運動となる。

検算

- $\theta = 0$ のときネズミは A にあり、接触力 $N = 2mg$ は鉛直で P を通り、摩擦は必要ない。予想どおりである。
- 速さ $\sqrt{ag}$ は速さの次元をもち、μ にも輪の質量にもよらず、垂直抗力を $mg(1+\cos\theta)$ とする。これは下半分のどこでも正である。
- $\mu = 0.5$ のとき臨界角は $2\arctan 0.5 \approx 0.927\,\text{rad} \approx 53.1^\circ$ である。そこでは $\sin\theta = 0.8$、$1+\cos\theta = 1.6$ であるから、$F/N = 0.5 = \mu$ がちょうど成り立つ。$u^2 = ag$ として無作為な位置で P のまわりのモーメントを数値的に確かめたところ、$10^{-15}mga$ の範囲内で 0 となった。

よくある間違い

- P ではなく O のまわりのモーメントをとること。輪は P を支点として回転するのであり、垂直抗力（O を通る）は P のまわりにモーメントをもつ。
- N の向心（centripetal）項を忘れること。そうすると $N = mg\cos\theta$ となり、誤った摩擦の条件が得られる。
- ネズミが単に「落ちる」と主張すること。下半分では常に $N > 0$ である。破綻するのは接触ではなく、足のグリップである。

STEP のその先へ

ここでの見事な事実は、物体が支点のまわりで釣り合うのは、他の力の合力が支点を通るときにちょうど限られるということである。「作用線が P を通る」という議論が、1 ページ分の力の分解に取って代わる。後半は連成系（coupled systems）への最初の入門であり、そこでは滑る接触を通じて一方の物体の運動が他方の物体の運動に影響を及ぼす。滑り始めた後の運動を解析するには、輪の慣性モーメント（moment of inertia）と剛体の回転（rigid-body rotation）の完全な方程式が必要になる。Kleppner

と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、固定軸のまわりのトルク（torque）と摩擦に制限された運動の両方を、このような流儀で扱っている。

解答例

STEP III 2004、第 10 問

力学 ・ 弾性ひもと単振動

STEP III 2004、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

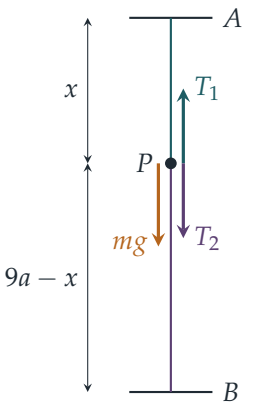
step.maths.org/questions/04-s3-q10

鍵となる考え方

各糸がフックの法則（Hooke's law）に従うのはピンと張っている（taut）間だけなので、運動はどの糸が張っているかによっていくつかの段階に分かれる。各段階で加速度は $7a - x$ の定数倍となるので、粒子は $x = 7a$ を中心とする単振動（simple harmonic motion）を行うが、ω は段階ごとに異なる。第 1 段階の終わりの時刻と速さを求め、それを用いて第 2 段階を始める。

解答

P を質点とみなし、糸は軽く、伸びているときはフックの法則に従い、たるんでいる（slack）ときは力を及ぼさないものとしてモデル化する。A から下向きに測った $x = AP$ をとると $PB = 9a - x$ であり、下向きを正とする。



運動方程式

$x > 6a$ のとき糸 AP は $x - 6a$ だけ伸びているので、P を上向きに引くその張力は

$$T_1 = \frac{6mg(x-6a)}{6a} = \frac{mg(x-6a)}{a}.$$

である。$x < 7a$ のとき糸 BP は $(9a - x) - 2a = 7a - x$ だけ伸びているので、P を下向きに B の方へ引くその張力は

$$T_2 = \frac{6mg(7a-x)}{2a} = \frac{3mg(7a-x)}{a},$$

であり、BP がたるむ $x \geq 7a$ では $T_2 = 0$ である。

$6a < x < 7a$ のとき、両方の糸が張っており、下向きにニュートン（Newton）の第二法則を適用すると

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - \frac{mg(x-6a)}{a} + \frac{3mg(7a-x)}{a} \\ &= \frac{mg}{a}\left(a - x + 6a + 21a - 3x\right) = \frac{mg}{a}(28a - 4x), \end{aligned}$$

となるので、題意のとおり $\ddot{x} = \dfrac{4g}{a}(7a - x)$ である。

$7a < x < 9a$ のとき、張っているのは AP だけなので

$$m\ddot{x} = mg - \frac{mg(x-6a)}{a} = \frac{mg}{a}(7a - x),$$

となり、題意のとおり $\ddot{x} = \dfrac{g}{a}(7a - x)$ を得る。

B に到達するまでの時間

第 1 段階：$6a \leq x \leq 7a$。$y = x - 7a$ とおく。すると $\omega_1^2 = 4g/a$ として $\ddot{y} = -\omega_1^2 y$ となり、これは $x = 7a$ を中心とする単振動である。$y = -a$ で静止した状態から始めると

$$x = 7a - a\cos\omega_1 t, \qquad \dot{x} = a\omega_1 \sin\omega_1 t.$$

を得る。$x = 6a$ で静止した状態から出発すると、粒子は下向きに加速する（そこでは $\ddot{x} > 0$ だからである）。よって x は $6a$ から増加し、$x = 7a$ となるまでこの段階にとどまる。これが起こるのは $\cos\omega_1 t = 0$ のときであり、最初は $\omega_1 t = \pi/2$ のときである。したがって要する時間は

$$t_1 = \frac{\pi}{2\omega_1} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{a}{g}},$$

であり、このとき粒子は速さ $a\omega_1 = 2\sqrt{ag}$ で下向きに運動している。

考えてみよう $x = 7a$ で方程式が変わる。この先どう進めればよいだろうか？

位置と速度は $x = 7a$ で連続なので、第 1 段階の終わりの状態が第 2 段階の初期条件となる。そこで時計をリセットする。

第 2 段階：$7a \le x \le 9a$。今度は $\omega_2^2 = g/a$ として $\ddot{y} = -\omega_2^2 y$ であり、中心 $y = 0$ から速さ $2\sqrt{ag}$ で出発する。よって、$x = 7a$ となってからの時間を τ とすると

$$x = 7a + \frac{2\sqrt{ag}}{\omega_2}\sin\omega_2\tau = 7a + 2a\sin\omega_2\tau.$$

である。振幅（amplitude）はちょうど $2a$ なので、粒子が点 B である $x = 9a$ に到達するのは $\sin\omega_2\tau = 1$ のときであり、最初は $\omega_2\tau = \pi/2$ のときである。その瞬間 $\dot{x} = 2\sqrt{ag}\cos\omega_2\tau = 0$ なので、粒子は速さゼロで B に到着する。この段階に要する時間は

$$t_2 = \frac{\pi}{2\omega_2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

である。

したがって、粒子が B に到達するまでの時間は

$$t_1 + t_2 = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{a}{g}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} = \frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

である。

検算

エネルギーを考えると、P がちょうど静止した状態で B に到達することが確かめられる。BP が a だけ伸びている出発時と、AP が $3a$ だけ伸びている B への到着時を比べる。弾性エネルギー（elastic energy）は $\frac{6mg\,a^2}{2\cdot 2a} = \frac{3}{2}mga$ から $\frac{6mg\,(3a)^2}{2\cdot 6a} = \frac{9}{2}mga$ へと変化する。増加分は $3mga$ であり、これは $3a$ 落下する間に失われる重力による位置エネルギーにちょうど等しいので、B での運動エネルギーはゼロである。数値的には、$a = 0.7$、$g = 9.8$ として、$x = 6a$ で静止した状態から完全な運動方程式を数値的に解き進めると、$t \approx 0.2099$ で $x = 7a$ となり、$t \approx 0.6297$ で最下点 $x = 9a$ に達する。一方 $\frac{3\pi}{4}\sqrt{a/g} = 0.6297$ である。

よくある間違い

- $x > 7a$ でも T_2 を用いてしまう。糸は押すことができないので、BP が $2a$ より短くなれば力を及ぼさない。
- 運動全体で ω_1 を用いてしまう。あるいは、第 2 段階の単振動を、第 1 段階から引き継いだ速さ $2\sqrt{ag}$ で始め直すのを忘れる。

- 振幅 $2a$ によって P が本当に B まで達することを確かめずに、第 2 段階を 4 分の 1 周期（period）とみなしてしまう。

STEP のその先へ

これは区分線形振動子（piecewise-linear oscillator）である。復元力は線形だが、ばね定数（剛性）が $x = 7a$ で変化する。それぞれの側が独自の位相平面（phase plane）上の楕円をもち、軌道は糸がたるむ点でつながった 2 つの異なる楕円の弧から成る。跳ねるボールから衝突振動子に至るまで、このような系は非線形力学（nonlinear dynamics）の標準的な出発点である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、振動とエネルギーを用いた解法を詳しく扱っている。

解答例

STEP III 2004、第 11 問

力学 ・ 2 物体の反発

> **STEP III 2004、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q11

この問題は、*Beyond STEP* の第 10.6 節「二体が一体になる」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch10/two-body.html

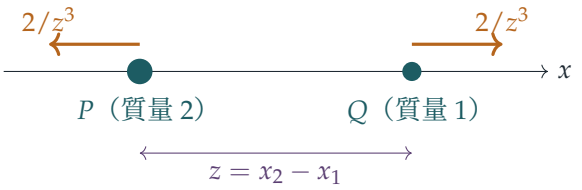
鍵となる考え方

互いに押し合う 2 つの粒子からは 2 本の運動方程式（equations of motion）が得られ、それらをうまく 2 通りに組み合わせることですべてが片づく。差 $x_2 - x_1$ をとると間隔 z についての 1 本の方程式が得られ、これは $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$ の技法によって一度積分できる（実はこれはエネルギー保存（energy conservation）にほかならない）。重み付きの和 $2x_1 + x_2$ は重心（centre of mass）の 3 倍であり、力は内力（internal forces）であるから、これには正味の力がまったくはたらかない。

解答

z の方程式

P と Q を直線上の質点としてモデル化し、x は P から Q に向かう向きに増加するものとする（$x_2 > x_1$ だからである）。斥力は P を負の向きに、Q を正の向きに押し、その大きさはどちらも $2/z^3$ である。



各粒子についてニュートン（Newton）の運動の第 2 法則を用いると

$$2\ddot{x}_1 = -\frac{2}{z^3}, \qquad \ddot{x}_2 = \frac{2}{z^3}.$$

よって $\ddot{x}_1 = -1/z^3$ であり、引き算すると

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{z^3},$$

となり、求める式が得られる。

z を求める

まず初期条件を確認する。$t = 0$ で $z = 1$ である。P は Q に向かって、すなわち正の向きに動くので $\dot{x}_1 = 1$、一方 $\dot{x}_2 = 0$ である。したがって $t = 0$ で $v = \dot{z} = 0 - 1 = -1$ であり、間隔は縮まりつつある。

$\ddot{z} = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$ とおくと、方程式は

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = \frac{3}{z^3} \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{1}{2}v^2 = -\frac{3}{2z^2} + C.$$

となる。$z = 1$ で $v^2 = 1$ であるから $\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + C$、よって $C = 2$ である。したがって

$$v^2 = 4 - \frac{3}{z^2}, \qquad \text{すなわち} \qquad z^2\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 4z^2 - 3.$$

左辺は $\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(z^2)/\mathrm{d}t\right)^2$ であり、これは $u = \sqrt{4z^2 - 3} \geq 0$ とおくことを示唆している。すると $u^2 = 4z^2 - 3$ より $u\,\dot{u} = 4z\dot{z}$ であり、上の方程式は $(z\dot{z})^2 = u^2$、すなわち $z\dot{z} = \pm u$ を意味する。よって

$$\dot{u} = \frac{4z\dot{z}}{u} = \pm 4.$$

初めは $u = 1$ かつ $z\dot{z} = -1 < 0$ であるから、負号をとって $u = 1 - 4t$ となる。

考えてみよう　u が 0 に達すると何が起こるか。$\dot{z}$ の符号は負のままか。

負のままではない。$t = \frac{1}{4}$ で $u = 0$ となるので、$z = \sqrt{3}/2$、$v = 0$ であり、粒子はこの瞬間に最も接近している。そこでは $\ddot{z} = 3/z^3 > 0$ なので z は増加に転じ、$\dot{z}$ は正になって正号の側に移る。こうして $t \geq \frac{1}{4}$ では $u = 4t - 1$ となる（$t = \frac{1}{4}$ で連続である）。どちらの場合も $u^2 = (4t - 1)^2$ であるから、すべての $t \geq 0$ に対して

$$4z^2 - 3 = 16t^2 - 8t + 1 \quad \Longrightarrow \quad z^2 = 4t^2 - 2t + 1,$$

であり、$z > 0$ より

$$z = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}.$$

これが求める結果である。($4t^2 - 2t + 1 = 4(t - \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{4} > 0$ であるから、平方根はつねに定義されることに注意する。)

x_1 と x_2 を求める

2 本の運動方程式から

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(2x_1 + x_2) = 2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^3} = 0.$$

これは運動量保存 (conservation of momentum) であり、2 つの力は大きさが等しく向きが逆である。したがって $2x_1 + x_2$ は t の 1 次式である。$t = 0$ でその値は $2 \cdot 0 + 1 = 1$、変化率は $2\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 2 \cdot 1 + 0 = 2$ である。よって

$$2x_1 + x_2 = 2t + 1, \qquad x_2 - x_1 = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}.$$

第 1 式から第 2 式を引くと $3x_1$ が得られ、第 1 式に第 2 式の 2 倍を足すと $3x_2$ が得られる:

$$x_1 = \frac{2t + 1 - \sqrt{4t^2 - 2t + 1}}{3}, \qquad x_2 = \frac{2t + 1 + 2\sqrt{4t^2 - 2t + 1}}{3}.$$

検算

- $t = 0$ ではこれらは $x_1 = 0$、$x_2 = 1$ を与える。微分すると $\dot{x}_1(0) = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{1}{2} \cdot (-2)\right) = 1$、$\dot{x}_2(0) = \frac{1}{3}(2 - 2) = 0$ となり、条件どおりである。
- z へのより速い道筋:$w = z^2$ とおくと $\ddot{w} = 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 2\left(4 - 3/z^2\right) + 6/z^2 = 8$ であるから、$w(0) = 1$ と $\dot{w}(0) = 2z\dot{z} = -2$ より $w = 4t^2 - 2t + 1$ となる。この方法なら符号の心配をまったくせずに済む。
- $t \to \infty$ のとき $z \approx 2t - \frac{1}{2}$ であるから、$x_1 \to \frac{1}{2}$、$\dot{x}_2 \to 2$ となる。つまり P は最終的に静止し、Q が運動量のすべて ($1 \times 2 = 2 \times 1$) とエネルギーのすべてを担う。ポテンシャルエネルギー (potential energy) は $1/z^2$ であるから、初めのエネルギーは $1 + 1 = 2$、最後のエネルギーは $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 = 2$ である。
- もとの方程式を数値的に (ルンゲ=クッタ法 (Runge–Kutta)、刻み幅 10^{-4}) $t = 5$ まで解くと、x_1、x_2、z の式と 10^{-11} 以内で一致し、最接近距離は $z = 0.8660\ldots = \sqrt{3}/2$ となる。

よくある間違い

- $\dot{z}(0) = +1$ としてしまう。P は Q に向かって動いているので、間隔は縮まっている。
- すべての時刻で $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t = -\sqrt{4 - 3/z^2}$ と書き、$t = \frac{1}{4}$ での折り返し点を見落とす。
- P の方程式で質量 2 を忘れ、$\ddot{z} = 4/z^3$ としてしまう。

STEP のその先へ

これは二体問題（two-body problem）の縮図である。重心は等速で運動し、相対座標は**換算質量**（reduced mass）$m_1 m_2/(m_1 + m_2) = \frac{2}{3}$ をもつ 1 つの粒子が同じ力を受けるかのようにふるまう。実際 $\frac{2}{3}\ddot{z} = 2/z^3$ である。同じ分解によって、惑星の運動は 1 つの軌道の問題に帰着される。逆 3 乗の力（inverse-cube force）もまた特別である。z^2 がちょうど t の 2 次式になるのは、共形力学（conformal mechanics）で研究される $1/z^2$ ポテンシャルの隠れた対称性によるものである。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、換算質量と二体運動を丁寧に扱っている。

解答例

STEP III 2004、第 12 問

確率・統計 ・ 指示変数と完全順列

STEP III 2004、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/04-s3-q12

鍵となる考え方

個数を指示変数（indicator variable）の和として表すことは、確率論で最も役に立つ手法の一つである。指示変数の期待値（expectation）は確率そのものなので、$\mathrm{E}(N)$ はただちに求まる。一方、分散（variance）を求めるには各組の間の共分散（covariance）が必要であり、シャツは独立（independent）に割り当てられるわけではないから、これらは小さいが 0 ではない。N の平均と分散がともに 1 に等しいとわかれば、パラメータ 1 のポアソン分布（Poisson distribution）が、まず試すべき自然なモデルとなる。

解答

一つの指示変数 C_1

シャツの割り当て方 $m!$ 通りはすべて同様に確からしいので、シャツ 1 は m 人の選手のどの人にも等しい確率で渡る。したがって $\mathrm{P}(C_1 = 1) = \frac{1}{m}$ であり、C_1 のとる値は 0 と 1 のみであるから、

$$\mathrm{E}(C_1) = 1 \cdot \mathrm{P}(C_1 = 1) = \frac{1}{m},$$

となり、題意が示された。また $C_1^2 = C_1$（$0^2 = 0$ かつ $1^2 = 1$ だから）なので $\mathrm{E}(C_1^2) = \frac{1}{m}$ も成り立ち、

$$\mathrm{Var}(C_1) = \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2} = \frac{m-1}{m^2}.$$

C_1 と C_2 の共分散

ここでは $m \geq 2$ が必要である。積 C_1C_2 は、選手 1 と 2 がともに自分のシャツを着ているときにちょうど 1 となり、それ以外では 0 となる。選手 1 がシャツ 1 を着ている

という条件のもとでは、残りの $m-1$ 枚のシャツが他の $m-1$ 人の選手に無作為に配られるので、選手 2 がシャツ 2 を受け取る確率は $\frac{1}{m-1}$ である。よって

$$\mathrm{E}(C_1C_2) = \mathrm{P}(C_1 = 1,\, C_2 = 1) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m-1},$$

であり、

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(C_1, C_2) &= \mathrm{E}(C_1C_2) - \mathrm{E}(C_1)\,\mathrm{E}(C_2) = \frac{1}{m(m-1)} - \frac{1}{m^2} \\ &= \frac{m-(m-1)}{m^2(m-1)} = \frac{1}{m^2(m-1)}.\end{aligned}$$

これは正である。選手 1 が正しいシャツを着ているとわかれば、選手 2 にとっての候補から間違ったシャツが 1 枚取り除かれるので、その確率がわずかに上がるのである。

考えてみよう なぜ共分散は 0 にならないのか。各選手のシャツは別々に選ばれるのではないのか。

そうではない。シャツは各選手に 1 枚ずつ割り当てられるので、選手 1 が何を受け取るかが、他の全員に残るシャツに影響する。C_i は**従属**（dependent）しており、まさにそのために $\mathrm{Var}(N)$ には共分散の項を含めなければならない。

N の平均と分散

対称性（symmetry）により、どの C_i も C_1 と同じ分布をもち、$i \neq j$ であるどの組 C_i, C_j も C_1, C_2 と同じ同時分布をもつ（選手とシャツの番号を同時に付け替えても、無作為な割り当ては変わらない）。独立性を必要としない期待値の線形性（linearity of expectation）により、

$$\mathrm{E}(N) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}(C_i) = m \cdot \frac{1}{m} = 1.$$

和の分散を求めるには、すべての分散と、$i \neq j$ である順序対すべてにわたる共分散を足し合わせる。順序対は $m(m-1)$ 個ある。

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(N) &= \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Var}(C_i) + \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}(C_i, C_j) \\ &= m \cdot \frac{m-1}{m^2} + m(m-1) \cdot \frac{1}{m^2(m-1)} \\ &= \frac{m-1}{m} + \frac{1}{m} = 1.\end{aligned}$$

よって $\mathrm{E}(N) = \mathrm{Var}(N) = 1$ となり、題意が示された。（$m = 1$ のときは常に $N = 1$ となるので $\mathrm{Var}(N) = 0$ である。共分散の計算ですでに必要だったように、この問題は暗に $m \geq 2$ を仮定している。）

どの近似を用いるか

正規近似（Normal approximation）は、m の値にかかわらず不適切である。N がとるのは整数値 $0, 1, 2, \ldots$ のみであり、平均が 1、標準偏差（standard deviation）が 1 なので、確率のほぼすべてが $0, 1, 2, 3$ の 3 つか 4 つの値に集中している。分布は平均よりわずか標準偏差 1 つ分下の 0 で打ち切られているので、右に強く歪んで（skewed）いる。一方、$\mathrm{N}(1, 1)$ 分布は対称であり、N が決してとりえない $-\frac{1}{2}$ より下の範囲に、連続性補正（continuity correction）を行ってもなお無視できない確率（約 7%）を割り当ててしまう。決定的なのは、m を大きくしても改善されないことである。平均と分散はどの m に対しても 1 のままなので、分布の形が広がって釣鐘型になることは決してない。

これに対し、ポアソン近似は妥当である。N は多数の m 個の事象のうち「成功」したものの個数を数えており、各事象の確率は小さな値 $\frac{1}{m}$ であり、しかもこれらの事象の従属性は弱い（共分散 $\frac{1}{m^2(m-1)}$ はごく小さい）。これはまさに、個数が近似的にポアソン分布に従う状況である。さらに、ポアソン分布に従う確率変数は平均と分散が等しく、N はちょうどこの性質をもつので、$\mathrm{Po}(1)$ が自然な選択となる。

$m = 4$ の場合

同様に確からしい割り当ては $4! = 24$ 通りある。割り当てを選手 $1, 2, 3, 4$ が着るシャツの番号の列として書くと、誰も自分のシャツを着ていないものは

$$2143, \quad 2341, \quad 2413, \quad 3142, \quad 3412,$$
$$3421, \quad 4123, \quad 4312, \quad 4321.$$

である。（系統的に列挙するには、選手 1 のシャツが 2、3、4 のいずれかであり、それぞれの場合について残りの決め方がちょうど 3 通りあるので、$3 \times 3 = 9$ となる。）したがって

$$\mathrm{P}(N = 0) = \frac{9}{24} = \frac{3}{8} = 0.375.$$

パラメータ 1 のポアソン近似では $\mathrm{P}(N = 0) \approx \mathrm{e}^{-1}$ となる。$\mathrm{e} \approx 2.72$ を用いると、

$$\mathrm{e}^{-1} \approx \frac{100}{272} = \frac{25}{68}.$$

真の値を基準とした相対誤差（relative error）は

$$\frac{\frac{3}{8} - \frac{25}{68}}{\frac{3}{8}} = 1 - \frac{25}{68} \cdot \frac{8}{3} = 1 - \frac{200}{204} = \frac{1}{51} \approx 0.0196,$$

であり、主張どおり約 2% である。（代わりに近似値を基準として誤差を測ると $\frac{1}{50}$、ちょうど 2% となる。いずれにせよ、これほど小さな m でこの一致は驚くほどよい。）

検算

- $m = 2$ のとき、起こりうるのは両方とも正しい（$N = 2$）か両方とも間違っている（$N = 0$）かのみで、それぞれ確率 $\frac{1}{2}$ である。平均は 1、分散は 1 となり、正しい。
- $m = 2, \ldots, 7$ についてすべての置換（permutation）を計算機で数え上げたところ、$\mathrm{E}(C_1) = \frac{1}{m}$、$\mathrm{Var}(C_1) = \frac{m-1}{m^2}$、$\mathrm{Cov}(C_1, C_2) = \frac{1}{m^2(m-1)}$、$\mathrm{E}(N) = \mathrm{Var}(N) = 1$ が厳密に成り立つことが確認された。また 4 個の対象の完全順列（derangement）は 9 個見つかり、$\mathrm{P}(N = 0) = 0.375$ と $1/2.72 \approx 0.3676$ の比較となった。
- $N = m - 1$ は起こりえないことに注意せよ。1 人を除く全員が正しいシャツを着ていれば、最後の 1 人も正しいシャツを着ていることになる。これも N が正規分布からほど遠いことを示すしるしである。

よくある間違い

- C_i を独立として扱うこと。そうすると 1 ではなく $\mathrm{Var}(N) = \frac{m-1}{m}$ となってしまう。
- 共分散の項を $m(m-1)$ 個ではなく $\binom{m}{2}$ 個しか数えないこと。すなわち $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$ における係数 2 を忘れること。
- 完全順列を不注意に列挙すること。系統的に数える（3×3）ことで数え落としを防げる。

STEP のその先へ

これは古典的な「マッチング問題」、すなわち完全順列の問題である。包除原理（inclusion–exclusion）を用いると $\mathrm{P}(N = 0) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!}$ が示され、これは極めて速く e^{-1} に近づく。実際、$m \to \infty$ のとき N は $\mathrm{Po}(1)$ に分布収束（converges in distribution）する。多数のまれで弱く従属した事象の個数はほぼポアソン分布に従うという、より一般的な原理は、Chen–Stein 法（Chen–Stein method）によって厳密に定式化される。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）は、指示変数とマッチング問題を繰り返し登場する例として用いている。

解答例

STEP III 2004、第 13 問

確率・統計 ・ 幾何分布

STEP III 2004、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/04-s3-q13

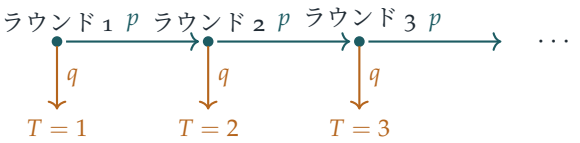
鍵となる考え方

競技全体のことはいったん忘れて、1 人の競技者だけを追ってみる。その競技者が脱落するラウンドは幾何分布に従う確率変数（geometric random variable）であり、3 人の競技者の脱落ラウンドは互いに独立（independent）である。すると、どの小問も 3 つの独立な幾何分布の確率変数に関する問題になる。大賞が授与されるかどうかは、**最も遅い**脱落ラウンドが重なっているかどうかだけで決まることがわかる。したがって最後の小問は、最初の 2 つの小問をあわせた事象の余事象（complement）になる。

解答

$q = 1 - p$ とおき、$0 < p < 1$ と仮定する。競技者 j $(j = 1, 2, 3)$ について、その競技者が失敗するラウンドを T_j とする。ラウンド k で失敗するのは、ラウンド $1, \ldots, k-1$ を通過し、そのうえでラウンド k で失敗するときであり、そのときに限るから、

$$\mathrm{P}(T_j = k) = p^{k-1}q, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$



各ラウンドの通過・失敗は独立に決まり、競技者どうしも独立に行動するので、T_1, T_2, T_3 は独立である。また、次のことにも注意しておく。

$$\mathrm{P}(T_j \leq r - 1) = 1 - \mathrm{P}(\text{ラウンドを通過} 1, \ldots, r-1) = 1 - p^{r-1}.$$

小問 (i)

独立性より、3 人全員がラウンド k で脱落する確率は $(p^{k-1}q)^3$ である。これを k について和をとると、公比 $p^3 < 1$ の等比級数（geometric series）となり、

$$\mathrm{P}(T_1 = T_2 = T_3) = \sum_{k=1}^{\infty} q^3 p^{3(k-1)} = \frac{q^3}{1-p^3} = \frac{(1-p)^2}{1+p+p^2}.$$

小問 (ii)

先に脱落する競技者の選び方は 3 通りある。選び方を 1 つ固定すると、残りの 2 人がともにラウンド r で失敗する確率は $(p^{r-1}q)^2$ であり、先に脱落する 1 人が r より前のいずれかのラウンドで失敗する確率は $1-p^{r-1}$ である。選び方が異なればこれらの事象は互いに排反（disjoint）であるから、

$$\mathrm{P}(\text{2 人がラウンド}r\text{, 残りはそれ以前}) = 3p^{2r-2}q^2\left(1-p^{r-1}\right).$$

小問 (iii)

> **考えてみよう** 大賞が授与されるのは、T_1, T_2, T_3 を用いて言えば、正確にはどのようなときか。

T_j の最大値（maximum）をとる競技者がただ 1 人であるとし、たとえば $T_3 > T_1, T_2$ として、$m = \max(T_1, T_2)$ とおく。ラウンド m の時点で競技者 3 はまだ残っており、このラウンドを通過する。そのラウンドに残っている他の競技者はみな $T_j = m$ であるから、このラウンドで失敗する。よって競技者 3 はラウンド m で賞を獲得する。

逆に、最大値が共有されているとし、たとえば $T_2 = T_3 = M \geq T_1$ とする。ラウンド M より前では、2 と 3 はともに残っていて、どちらも各ラウンドを通過するので、生き残りがただ 1 人になるラウンドは存在しない。ラウンド M では残っている全員が失敗するので、生き残りは 1 人もいない。よって賞は授与されない。

したがって、賞が**授与されない**のは、上位 2 つの脱落ラウンドが等しいとき、かつそのときに限る。すなわち、3 つすべてが等しい場合（小問 (i)）か、2 つがあるラウンド r で等しく、残りの 1 つがそれより前である場合である。後者の場合は $r \geq 2$ が必要であり、これは小問 (ii) の事象である。小問 (ii) の結果を $r \geq 2$ について足し合わせ、

$s = r-1$ とおくと、

$$\sum_{r=2}^{\infty} 3q^2p^{2r-2}\left(1-p^{r-1}\right) = 3q^2\sum_{s=1}^{\infty}\left(p^{2s}-p^{3s}\right) = 3q^2\left(\frac{p^2}{1-p^2}-\frac{p^3}{1-p^3}\right)$$
$$= 3q^2\,\frac{p^2(1-p^3)-p^3(1-p^2)}{(1-p^2)(1-p^3)} = 3q^2\,\frac{p^2(1-p)}{(1-p^2)(1-p^3)}$$
$$= \frac{3p^2q^2}{(1+p)(1-p^3)}.$$

これに小問 (i) の結果を加え、$1-p^3 = q(1+p+p^2)$ を用いると、

$$\mathrm{P}(\text{賞なし}) = \frac{q^3(1+p)+3p^2q^2}{(1+p)(1-p^3)} = \frac{q^2(1+2p^2)}{(1+p)(1-p^3)} = \frac{(1-p)(1+2p^2)}{(1+p)(1+p+p^2)}.$$

$(1+p)(1+p+p^2) = 1+2p+2p^2+p^3$、$(1-p)(1+2p^2) = 1-p+2p^2-2p^3$ であるから、その差は $3p+3p^3$ である。したがって

$$\mathrm{P}(\text{大賞が授与される}) = \frac{3p(1+p^2)}{(1+p)(1+p+p^2)}.$$

検算

- $p \to 0$ のとき全員がラウンド 1 で失敗し、(iii) の答えは 0 に近づく。$p \to 1$ のとき同着は起こりにくくなり、答えは $\frac{3\cdot2}{2\cdot3} = 1$ に近づく。
- 直接考えると、賞が授与されるのは 1 つの T_j が他の 2 つより大きいときであるから、その確率は $3\sum_k p^{k-1}q\,(1-p^{k-1})^2$ である。$p = \frac{1}{2}$ として厳密に和を計算すると $\frac{5}{7} \approx 0.714$ となり、$\frac{3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{4}} = \frac{5}{7}$ と一致する。
- 競技そのもののシミュレーション（simulation）（$p = 0.6$ で 2×10^5 回試行）では、77.9% の試行で賞が授与された。公式の値は 0.7806 である。

よくある間違い

- 小問 (ii) で、どの競技者が先に脱落するかの選び方を表す因子 3 を掛け忘れる。
- 賞が授与されるには、最後の 2 人が異なるラウンドで脱落する必要があると考えてしまう。2 人がラウンド m で同時に脱落し、3 人目がそのラウンドを通過すれば、3 人目はやはり賞を獲得する。賞を妨げるのは**最上位**での同着だけである。

STEP のその先へ

この問題は、独立な幾何分布の確率変数の最大値と、それがただ 1 つに定まるかどうかに関するものである。競技者が n 人のとき、最上位で同着が起こる確率は $n \to \infty$ としても極限に収束（converge）しない。この確率は $\log n$ に応じてごくわずかに振動するのであり、これはリーダー選挙（leader election）などのアルゴリズムの解析（analysis of algorithms）でよく知られた意外な事実である。ここで用いた手法、すなわち 1 つの変数で条件付け（conditioning）を行うことと等比級数の和をとることは、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）で詳しく扱われている。

解答例

STEP III 2004、第 14 問

確率・統計 ・ 仮説検定の誤り

STEP III 2004、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/04-s3-q14

鍵となる考え方

どちらの仮説（hypothesis）のもとでも $\overline{X}$ の中心は同じ μ であり、両者の違いは $\overline{X}$ の散らばり具合だけである。したがって、H_0 に反する証拠となるのは、$\overline{X}$ が μ から左右どちらかの側に**大きく離れた**値をとることであり、これはまさに対称な両側の棄却域（rejection region）が検出するものである。その後は、それぞれの仮説のもとで一度ずつ $\overline{X}$ を標準化（standardise）するだけで、すべてが片づく。

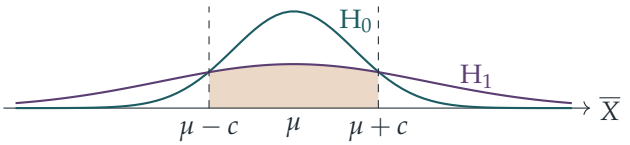
解答

なぜ両側検定なのか

$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ であり標本の値は互いに独立であるから、標本平均（sample mean）は

$$\overline{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu,\ \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

を満たす。どちらの仮説のもとでも $\overline{X}$ の中心は既知の値 μ であり、唯一の違いは、H_1 のもとではその標準偏差（standard deviation）$\sigma_1/\sqrt{n}$ が $\sigma_0/\sqrt{n}$ より大きいという点である。μ に近い $\overline{X}$ の値は相対的に H_0 のもとで起こりやすく、μ から遠い値は相対的に H_1 のもとで起こりやすい（幅の広い曲線のほうが裾が厚い。図を参照）。どちらの分布も μ に関して対称であるから、$\overline{X}$ が大きな値をとることは、同じだけ小さな値をとることと比べて H_1 を支持する証拠として強いわけではない。よって自然な検定は、$|\overline{X} - \mu|$ がどちらの向きにであれ大きいときに H_0 を棄却するものであり、対称性から受容域（acceptance interval）は μ を中心とすべきである。すなわち、$\mu - c < \overline{X} < \mu + c$ のとき H_0 を受容する。ここで片側検定（one-sided test）を用いるのは誤りである。散らばりが大きいことを示す証拠の半分を無視することになるからである。



網掛けの部分の面積（H_1 が真であるにもかかわらず H_0 を受容する確率）が β であり、破線の外側にあるティール色の曲線の下の面積が α である。

c を求める

H_0 のもとで、$Z = \dfrac{\sqrt{n}\,(\overline{X} - \mu)}{\sigma_0}$ は標準正規分布（standard normal distribution）に従う。$|\overline{X} - \mu| \geq c$、すなわち $|Z| \geq c\sqrt{n}/\sigma_0$ のとき H_1 を採択する。標準正規分布の対称性により、

$$\alpha = \mathrm{P}\left(|Z| \geq \frac{c\sqrt{n}}{\sigma_0}\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{c\sqrt{n}}{\sigma_0}\right)\right), \qquad \text{よって} \qquad \Phi\left(\frac{c\sqrt{n}}{\sigma_0}\right) = 1 - \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Φ は狭義単調増加であるから、これは $c\sqrt{n}/\sigma_0 = z_\alpha$ を意味し、したがって

$$c = \frac{z_\alpha\,\sigma_0}{\sqrt{n}}.$$

である。

β は n によらない

H_1 のもとで、$W = \dfrac{\sqrt{n}\,(\overline{X} - \mu)}{\sigma_1}$ は標準正規分布に従い、

$$\beta = \mathrm{P}(|\overline{X} - \mu| < c) = \mathrm{P}\left(|W| < \frac{c\sqrt{n}}{\sigma_1}\right) = \mathrm{P}\left(|W| < \frac{z_\alpha\sigma_0}{\sigma_1}\right)$$
$$= 2\,\Phi\left(\frac{z_\alpha\sigma_0}{\sigma_1}\right) - 1,$$

となる。ここで、前の部分で得た $c\sqrt{n} = z_\alpha\sigma_0$ を代入した。c に含まれる $\sqrt{n}$ が標準化で現れる $\sqrt{n}$ と打ち消し合うので、β は α と σ_0/σ_1 のみに依存し、n にはよらない。

考えてみよう 標本が大きいほど、検定はよくなるはずではないのか？

通常はそのとおりである。n が大きくなるにつれて、二つの標本分布が互いに離れていくからである。ところがここでは決して離れない。どちらも中心は μ であり、n を大きくすると**両方の**標準偏差が同じ因子 $\sqrt{n}$ で縮むだけである。図全体が単に拡大縮小されるだけなので、面積 α と β は変わらない。標本平均は分散（variance）を検定するための統計量（statistic）としては不適切であり、個々の値がもつ散らばりについての情報を捨ててしまうのである。

比 σ_1/σ_0 の最小値

$r = \sigma_1/\sigma_0 > 1$ とおく。

条件 $\alpha < 0.05$。これは $\Phi(z_\alpha) = 1 - \frac{1}{2}\alpha > 0.975 \approx \Phi(1.960)$ を意味するので、Φ が増加関数であることから $z_\alpha > 1.960$ である。

条件 $\beta < 0.05$。これは $2\Phi(z_\alpha/r) - 1 < 0.05$、すなわち $\Phi(z_\alpha/r) < 0.525 \approx \Phi(0.063)$ を意味するので、$z_\alpha/r < 0.063$、つまり

$$r > \frac{z_\alpha}{0.063}.$$

である。両者を合わせると、$r > z_\alpha/0.063 > 1.960/0.063$ が必要である。逆に、$r > 1.960/0.063$ ならば、z_α を 1.960 よりわずかに大きく、かつ $z_\alpha < 0.063\,r$ となるように選べるので、両方の条件が成り立つ。よって比は

$$\frac{1.960}{0.063} \approx 31.1,$$

を超えなければならず、σ_1/σ_0 の最小値はおよそ 31 である。標本の大きさにかかわらず、標本平均がこれほど確実に二つを見分けるには、標準偏差がおよそ 30 倍も異なっていなければならないのである。

検算

- $\mu = 3$、$\sigma_0 = 1$、$\sigma_1 = 2.5$、$\alpha = 0.1$、$n = 1, 4, 9, 25$ としてシミュレーションを行ったところ、H_0 のもとでの棄却率はいずれも約 0.10 となり、H_1 のもとでの受容率はどの n でも約 0.489 となって、$2\Phi(1.645/2.5) - 1 \approx 0.489$ と一致した。
- $r = 1.960/0.063$ かつちょうど $\alpha = 0.05$ のとき、$\beta = 2\Phi(0.063) - 1 \approx 0.050$ となり、予想どおり境界上にある。Φ の逆関数の正確な値を用いると $r \approx 31.3$ となるので、答え 31 は与えられた数表の値の丸めの影響を受けない。
- 妥当性の確認：$\sigma_1 = \sigma_0$ ならば $\beta = 2\Phi(z_\alpha) - 1 = 1 - \alpha$ となる。二つの仮説が一致するときには、当然こうならなければならない。

よくある間違い

- $\overline{X} > \mu + c$ のような片側の棄却域を用いること。H_1 のもとでも平均は動かないので、一方の裾をひいきする理由はない。
- 棄却域が両側に裾をもつことを忘れて、$\alpha = 1 - \Phi(c\sqrt{n}/\sigma_0)$ と書いてしまうこと。
- r についての不等式の向きを逆にしてしまうこと。β を小さくするには z_α/r が小さくなければならず、したがって r は大きくなければならない。

STEP のその先へ

この問題は、二種類の誤りの間のトレードオフと、検定統計量の選び方がなぜ重要なのかを示している。ネイマン–ピアソンの補題（Neyman–Pearson lemma）によれば、最も検出力の高い検定は二つの仮説のもとでの尤度（likelihood）を比較するものである。ここではそれにより統計量 $\sum(X_i - \mu)^2$ が導かれ、その χ^2_n 分布は、$\overline{X}$ とは異なり、n が大きくなるにつれて実際に二つの仮説を分離する。これらの考え方への読みやすい入門書としては、Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）、あるいは Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論への招待）を参照されたい。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

2004 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

