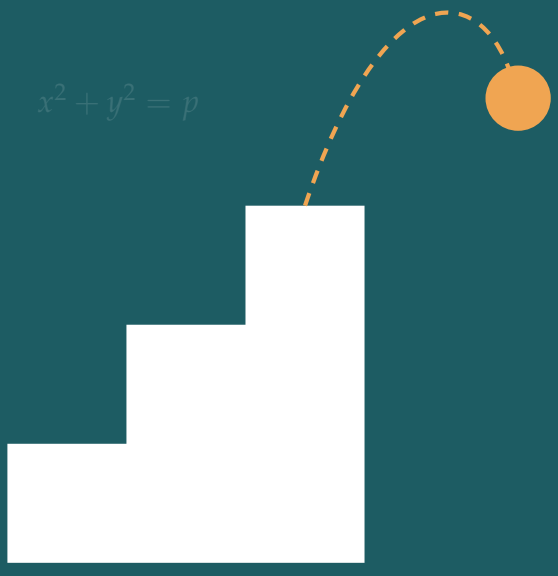
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

2003 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

2003 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

2003 年解答例

2003 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 42 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 累乗の和 純粋数学 . . . 3
Q2 代数的恒等式 純粋数学 . . . 7
Q3 半角を用いた三角方程式 純粋数学 . . . 11
Q4 三角不等式（三角関数） 純粋数学 . . . 15
Q5 二項級数 純粋数学 . . . 19
Q6 部分分数分解による積分 純粋数学 . . . 23
Q7 数字と整除性 純粋数学 . . . 26
Q8 ロジスティック微分方程式 純粋数学 . . . 30
Q9 点を通る放物運動 力学 . . . 34
Q10 薄板の質量中心 力学 . . . 38
Q11 斜面上での衝突 力学 . . . 42
Q12 積の期待値 確率・統計 . . . 46
Q13 幾何分布の期待値 確率・統計 . . . 49
Q14 ポアソン分布 確率・統計 . . . 53

STEP II

Q1 連立 1 次方程式 純粋数学 . . . 56
Q2 逆三角関数 純粋数学 . . . 60
Q3 無理数と数学的帰納法 純粋数学 . . . 64
Q4 弓形の面積 純粋数学 . . . 67
Q5 ベクトルと直線 純粋数学 . . . 71
Q6 関数の反復合成と積分 純粋数学 . . . 75
Q7 広義積分と級数 純粋数学 . . . 79
Q8 変数分離形の微分方程式 純粋数学 . . . 83

Q9 最大摩擦力でのつり合い 力学 87
Q10 摩擦のある束縛運動 力学 91
Q11 放物運動 力学 95
Q12 分枝過程 確率・統計 99
Q13 切断ポアソン分布 確率・統計 103
Q14 仮説検定の誤り 確率・統計 107

STEP III

Q1 逆双曲線関数による積分 純粋数学 111
Q2 二項級数 純粋数学 115
Q3 曲線の概形 純粋数学 119
Q4 媒介変数表示された曲線の接線 純粋数学 123
Q5 3次方程式の解 純粋数学 127
Q6 望遠鏡型の三角関数の和 純粋数学 132
Q7 シムソン線 純粋数学 136
Q8 一階微分方程式 純粋数学 140
Q9 つり合いの安定性 力学 144
Q10 変化する加速度 力学 148
Q11 迎撃の運動学 力学 152
Q12 指数分布に従う待ち時間 確率・統計 156
Q13 吸収マルコフ連鎖 確率・統計 160
Q14 確率母関数 確率・統計 164

解答例

STEP I 2003、第 1 問

純粋数学 ・ 累乗の和

> **STEP I 2003、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q1

鍵となる考え方

答えの形、すなわち係数が未知である n の多項式（polynomial）であることは問題文で与えられているので、残る仕事はその係数を決定することだけである。すべての n で成り立つ多項式の恒等式（identity）は、当然いくつかの都合のよい n の値でも成り立ち、各値から一次方程式が一つずつ得られる。和を負の添字から始めるのは意図的な工夫である。これにより $n=-1$ や $n=-2$ のような小さな値を使えるようになり、方程式がうまく対称的な形になる。

解答

問題文では r が和をとる変数としても係数としても使われている。この衝突を避けるため、和の変数を k と書き、p,q,r,s および a,b,c,d,e は係数のために残しておく。

平方の和

$S(n)=\sum_{k=-1}^{n} k^2$ とおくと、

$$S(n)=pn^3+qn^2+rn+s.$$

$k=-1$ から始まる和はすべての $n\geq -1$ に対して意味をもち、

$$S(-1)=1,\qquad S(0)=1+0=1,\qquad S(1)=1+0+1=2,\qquad S(2)=1+0+1+4=6.$$

である。与えられた形に $n = -1, 0, 1, 2$ を代入すると、次の四つの方程式が得られる。

$$-p + q - r + s = 1, \tag{1}$$
$$s = 1, \tag{2}$$
$$p + q + r + s = 2, \tag{3}$$
$$8p + 4q + 2r + s = 6. \tag{4}$$

(2) より $s = 1$ であるから、(1) と (3) はそれぞれ $-p + q - r = 0$、$p + q + r = 1$ となる。これらを加えると $2q = 1$ となるので $q = \frac{1}{2}$ であり、したがって $p + r = \frac{1}{2}$ である。方程式 (4) は

$$8p + 2 + 2r + 1 = 6 \quad \Longrightarrow \quad 8p + 2r = 3 \quad \Longrightarrow \quad 6p + 2(p + r) = 3,$$

となるので $6p = 2$ であり、$p = \frac{1}{3}$、$r = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ を得る。ゆえに

$$\sum_{k=-1}^{n} k^2 = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n + 1.$$

考えてみよう 問題が求めているのは $k = 0$ からの和であるが、ここで求めたのは $k = -1$ からの和である。両者はどう違うか。

両者の違いは $k = -1$ の項、すなわち $(-1)^2 = 1$ だけである。よって

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n = \tfrac{1}{6}n\left(2n^2 + 3n + 1\right) = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

となり、求める結果が得られた。

立方の和

次に $T(n) = \sum_{k=-2}^{n} k^3 = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$ とおく。未知数が五つあるので、$n = -2, -1, 0, 1, 2$ の五つの値を用いる。

$$T(-2) = -8, \quad T(-1) = -9, \quad T(0) = -9, \quad T(1) = -8, \quad T(2) = 0.$$

これより

$$16a - 8b + 4c - 2d + e = -8, \tag{5}$$
$$a - b + c - d + e = -9, \tag{6}$$
$$e = -9, \tag{7}$$
$$a + b + c + d + e = -8, \tag{8}$$
$$16a + 8b + 4c + 2d + e = 0. \tag{9}$$

を得る。(7) より $e=-9$ である。方程式は $\pm n$ で対になっているので、各対の和と差をとるのが得策である。そうすると偶数次の項と奇数次の項が分離する。

$e=-9$ を用いると、(6) と (8) はそれぞれ $a-b+c-d=0$、$a+b+c+d=1$ となる。和と差をとると

$$a+c=\tfrac{1}{2}, \qquad b+d=\tfrac{1}{2}.$$

同様に、(5) と (9) はそれぞれ $16a-8b+4c-2d=1$、$16a+8b+4c+2d=9$ となる。和と差をとると

$$32a+8c=10, \qquad 16b+4d=8,$$

すなわち $16a+4c=5$、$4b+d=2$ である。$c=\frac{1}{2}-a$ を代入すると $12a+2=5$ となるので、$a=\frac{1}{4}$、$c=\frac{1}{4}$ である。$d=\frac{1}{2}-b$ を代入すると $3b+\frac{1}{2}=2$ となるので、$b=\frac{1}{2}$、$d=0$ である。ゆえに

$$\sum_{k=-2}^{n} k^3=\tfrac{1}{4}n^4+\tfrac{1}{2}n^3+\tfrac{1}{4}n^2-9.$$

$k=-2$ からの和は、$k=0$ からの和に比べて余分な項 $(-2)^3+(-1)^3=-9$ を含むので、9 を加えると

$$\sum_{k=0}^{n} k^3=\tfrac{1}{4}n^4+\tfrac{1}{2}n^3+\tfrac{1}{4}n^2=\tfrac{1}{4}n^2\left(n^2+2n+1\right)=\tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2,$$

となり、求める結果が得られた。

検算

$n=10$ のとき、公式からは $\frac{1}{6}\cdot 10\cdot 11\cdot 21=385$ と $\frac{1}{4}\cdot 100\cdot 121=3025$ が得られ、$0^2+1^2+\cdots+10^2$ と $0^3+1^3+\cdots+10^3$ を直接計算しても同じ値になる。また、$3025=55^2=(0+1+\cdots+10)^2$ であることにも注目しよう。最初の n 個の立方の和は、最初の n 個の整数の和の平方に等しいのである。さらに、両方の公式が 0 から 59 までのすべての n で厳密に成り立つことをコンピュータで確認した。

よくある間違い

- 計算した和から問題が求める和へ移るときに、$k=-1$ の項（あるいは $k=-2$ と $k=-1$ の項）を忘れてしまう。$(-2)^3+(-1)^3=-9$ であって、$+9$ ではないことに注意せよ。
- 立方の和で n の値を四つしか使わずに済ませようとする。未知数が五つあれば方程式も五つ必要である。

- 係数 r と、問題文中の和の変数 r を混同する。どちらか一方の名前を付け替えれば誤りを防げる。

STEP のその先へ

なぜ答えが次数の一つ高い多項式であると仮定してよいのだろうか。それは、$m+1$ 次の多項式の差分 $P(n)-P(n-1)$ は m 次になるので、差分が n^m となる多項式を常に解として求めることができるからである。これが**差分法**（calculus of finite differences）の出発点であり、一般の場合に現れる係数はベルヌーイ数（Bernoulli numbers）によって支配される（ファウルハーバーの公式（Faulhaber's formula））。ここで用いた、いくつかの点での値から多項式を決定する方法は**多項式補間**（polynomial interpolation）であり、数値解析においてラグランジュ補間（Lagrange interpolation）として再び登場する。この種の問題をさらに解きたい場合は、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を参照せよ。

解答例

STEP I 2003、第 2 問

純粋数学 ・ 代数的恒等式

STEP I 2003、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/03-s1-q2

鍵となる考え方

受験者の答えが正しいのは、それが方程式を満たすときであり、かつそのときに限る。そこで、その答えを代入して分母を払う。すると各小問は、与えられた数に関する多項式（polynomial）の条件に帰着する。前半では、その条件は 0 でない実数に対しては決して 0 にならない二次形式（quadratic form）である。後半では、それは見事に因数分解（factorise）できる三次式であり、その因数がちょうど問題に現れる三つの等式になっている。

解答

前半の問題

以下では、a と b は 0 でない実数とする。受験者の答えが正しいのは、$x = a + b$ が方程式を満たすときであり、かつそのときに限る。そもそもこれが意味をもつためには $a + b \neq 0$ でなければならず、そのうえで

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}.$$

が成り立つ必要がある。0 でない $ab(a+b)$ を両辺に掛けると、これは

$$ab = (a+b)^2, \qquad \text{すなわち} \qquad a^2 + ab + b^2 = 0.$$

と同値である。平方完成（completing the square）すると

$$a^2 + ab + b^2 = \left(a + \tfrac{1}{2}b\right)^2 + \tfrac{3}{4}b^2.$$

となる。両項とも実数の平方であるからいずれも ≥ 0 であり、さらに $b \neq 0$ より第 2 項は正である。したがって、任意の実数 a と 0 でない任意の実数 b に対して $a^2 + ab + b^2 > 0$ であり、この条件が成り立つことは決してない。

($a + b = 0$ の場合、受験者の「答え」$x = 0$ は方程式の中で意味をもたないので、この場合も事情は変わらない。) よって、$x = a + b$ が正しくなるような a と b の値は存在しない。これが示すべきことであった。

後半の問題

今度は a、b、c は 0 でないとする。答え $x = a + b + c$ が正しいのは、$a + b + c \neq 0$ かつ

$$\frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ca + ab}{abc}.$$

が成り立つとき、かつそのときに限る (if and only if)。両辺に $abc(a + b + c) \neq 0$ を掛けると、これは

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc = 0. \qquad (*)$$

と同値である。

考えてみよう $(*)$ の左辺が因数分解できることには、どうすれば気づけるだろうか。

示すべき結果から、因数 $a + b$、$b + c$、$c + a$ が現れることが予想される。そのうち一つを試してみよう。$b = -a$ とおく。すると $a + b + c = c$、$ab + bc + ca = -a^2 - ac + ca = -a^2$ となるので、左辺は $c(-a^2) - (-a^2 c) = 0$ となる。よって $a + b$ は因数であり、対称性 (symmetry) から $b + c$ と $c + a$ も因数である。左辺の次数は 3 であるから、左辺は $(a + b)(b + c)(c + a)$ の定数倍である。$a^2 b$ の係数を比較すると (両辺とも 1 である)、その定数は 1 であることがわかる。あるいは、両辺を展開してもよい。

$$\begin{aligned}(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc &= a^2 b + a^2 c + b^2 a + b^2 c + c^2 a + c^2 b + 3abc - abc \\ &= a^2 b + a^2 c + b^2 a + b^2 c + c^2 a + c^2 b + 2abc \\ &= (a + b)(b + c)(c + a).\end{aligned}$$

したがって $(*)$ は

$$(a + b)(b + c)(c + a) = 0.$$

と同じである。

では、両方向を証明しよう。

答えが正しい場合。 このとき $a + b + c \neq 0$ かつ $(*)$ が成り立つので、$(a + b)(b + c)(c + a) = 0$ である。数の積が 0 になるのはいずれかの因数が 0 のときに限るから、$a + b = 0$、$b + c = 0$、$c + a = 0$ のうち少なくとも一つが成り立つ。

逆 (*converse*) **に**、これらのうち少なくとも一つが成り立つとする。対称性より $a+b=0$ としてよい。すると $a+b+c=c\neq 0$ であるから、受験者の答えはきちんとした o でない数であり、$(*)$ の因数分解した形が成り立つ。方程式から $(*)$ への変形は可逆であった（o でない数 $abc(a+b+c)$ を掛けただけである）から、$x=a+b+c$ は方程式を満たす。これは直接確かめることもできる。$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a}=0$ であるから、方程式は $\frac{1}{x}=\frac{1}{c}$ となり、その解は $x=c=a+b+c$ である。

以上より、受験者の答えが正しいのは、$a+b=0$、$b+c=0$、$c+a=0$ のうち少なくとも一つが成り立つとき、かつそのときに限る。 ■

この議論では、a、b、c が実数であることを一度も使っていない点に注意しよう。因数分解は代数的な恒等式（identity）であるから、この結果は o でない複素数（complex numbers）に対しても成り立つ。これに対して前半では、a と b が実数であることが本当に必要である。複素数の範囲では、$a^2+ab+b^2=0$ には $b=a\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ のような解が存在する。

検算

- $a=2$、$b=-2$、$c=5$ とすると、$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$ かつ $a+b+c=5$ であるから、受験者は正しい。
- $a=b=c=1$ とすると、正しい答えは $x=\frac{1}{3}$ であるが、受験者は 3 と答える。実際、$(a+b)(b+c)(c+a)=8\neq 0$ である。
- $(a+b)(b+c)(c+a)$ を $a=1$、$b=2$、$c=3$ で計算すると $3\cdot 5\cdot 4=60$ となり、一方 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=6\cdot 11-6=60$ である。
- $|n|\leq 6$ かつ $d\in\{1,2,3\}$ であるような o でない有理数（rational number）n/d からなる 17 576 個のすべての三つ組について、厳密な分数計算を用いて両方向を網羅的に検証したところ、例外は見つからなかった。

よくある間違い

- $a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab$ と書いて止まってしまうこと。これでは正であることは示せない。平方完成すれば示せる。
- 後半で一方向しか証明しないこと。「かつそのときに限る」には両方向が必要であり、逆を示す際には $a+b+c\neq 0$ を確認しなければならない。
- 両辺に掛ける前に $abc(a+b+c)$ が o でないことを確認し忘れること。この確認こそが変形を可逆にしている。

STEP のその先へ

式 $(a+b)(b+c)(c+a)$ は対称多項式（symmetric polynomial）であり、$e_1 = a+b+c$、$e_2 = ab+bc+ca$、$e_3 = abc$ とおいたときの恒等式 $(a+b)(b+c)(c+a) = e_1e_2 - e_3$ は、対称式の基本定理（fundamental theorem of symmetric polynomials）、すなわち「任意の対称多項式はこれらの基本対称式（elementary symmetric polynomials）の多項式で表せる」という定理の一例である。同じ e_1、e_2、e_3 は、符号を除けば a、b、c を解とする三次方程式の係数であり、それゆえ方程式論（theory of equations）の至るところに現れる。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）はこうした観点から多項式環（polynomial ring）を論じており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には、因数分解を見抜く STEP の演習がさらに収められている。

解答例

STEP I 2003、第 3 問

純粋数学 ・ 半角を用いた三角方程式

> **STEP I 2003、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q3

鍵となる考え方

各小問では、$\frac{1}{2}\theta$ の関数と θ の同じ関数とを比較している。そこで倍角の公式（double-angle formula）を用いて、すべてを半角（half-angle）で表す。すると各方程式は、ただ一つの量（$\sin\frac{1}{2}\theta$、$\tan\frac{1}{2}\theta$ または $\cos\frac{1}{2}\theta$）についての多項式（polynomial）の方程式となり、因数分解（factorise）するか二次方程式（quadratic equation）として解くことができる。注意すべき点は、半角の関数が実際にとりうる値の範囲と、関数が定義される範囲を見失わないことだけである。

解答

小問 (i)

$\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$ を用いると、方程式 $2\sin\frac{1}{2}\theta = \sin\theta$ は

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta - 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta = 0, \qquad \text{すなわち、} \qquad 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\left(1-\cos\tfrac{1}{2}\theta\right) = 0.$$

と同値である。よって、この方程式が成り立つのは $\sin\frac{1}{2}\theta = 0$ または $\cos\frac{1}{2}\theta = 1$ のとき、かつそのときに限る。

ところが $\cos\frac{1}{2}\theta = 1$ ならば $\sin^2\frac{1}{2}\theta = 1 - \cos^2\frac{1}{2}\theta = 0$ であるから、いずれにせよ $\sin\frac{1}{2}\theta = 0$ となる。したがって二つ目の場合は一つ目の場合に含まれ、

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta = \sin\theta \iff \sin\tfrac{1}{2}\theta = 0$$

が示された。（言い換えれば、解はちょうど整数 n を用いて $\theta = 2n\pi$ と表されるものである。）

小問 (ii)

$t = \tan\frac{1}{2}\theta$ とおく。方程式が意味をもつには $\tan\frac{1}{2}\theta$ と $\tan\theta$ がともに定義されている必要があるので、$\cos\frac{1}{2}\theta \neq 0$ かつ $\cos\theta \neq 0$ である。$\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ であるから、二つ目の条件は $t^2 \neq 1$ を意味する。これらの制限のもとで $\tan\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$ であり、方程式は

$$2t = \frac{2t}{1-t^2}.$$

となる。0 でない $1-t^2$ を両辺に掛けると $2t - 2t^3 = 2t$ となるので、$t^3 = 0$、すなわち $t = 0$ である。

> **考えてみよう** $1-t^2$ を両辺に掛けてよいのか。また、それによって解を失ったり、余分な解が生じたりしていないか。

0 でない量を掛ける操作は逆にたどれるので、二つの正接がともに定義される範囲において、t についての方程式は $t = 0$ とちょうど同値である。逆に $t = 0$ のとき $\tan\theta = 0$ かつ $\tan\frac{1}{2}\theta = 0$ となり、両辺はともに 0 である。

さて、$\tan\frac{1}{2}\theta = 0$ となるのはちょうど $\frac{1}{2}\theta = n\pi$ のときである。よって解は

$$\theta = 2n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

であり、小問 (i) と同じ集合になる。

小問 (iii)

$c = \cos\frac{1}{2}\theta$ とおく。$\cos\theta = 2\cos^2\frac{1}{2}\theta - 1 = 2c^2 - 1$ を用いると、方程式 $2\cos\frac{1}{2}\theta = \cos\theta$ は

$$2c = 2c^2 - 1 \iff 2c^2 - 2c - 1 = 0 \iff c = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

と同値である。c は余弦であるから $-1 \leq c \leq 1$ である。解 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}) \approx 1.37$ は大きすぎるが、$\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}) \approx -0.37$ は適する。よって、方程式が成り立つのは

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta = \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}) = -\cos\phi,$$

のとき、かつそのときに限る。ここで ϕ は問題文で定義されたものである。$0 < \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) < 1$ であり、cos は $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上で 1 から 0 まで減少するので、この ϕ は存在し、しかもただ一つである。

> **考えてみよう** $\cos\frac{1}{2}\theta = -\cos\phi$ を、与えられた形にどう変形すればよいか。

$-\cos\phi = \cos(\pi - \phi)$ と書く。$\cos x = \cos\alpha$ の一般解（general solution）は $x = 2m\pi \pm \alpha$ であるから、

$$\tfrac{1}{2}\theta = 2m\pi \pm (\pi - \phi) \qquad \text{すなわち、} \qquad \theta = 4m\pi \pm (2\pi - 2\phi), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

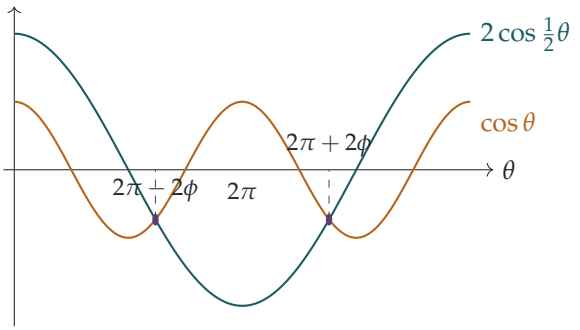
となる。二つの符号を別々に考える。

- $+$ の符号のとき：$n = m$ として $\theta = 4m\pi + 2\pi - 2\phi = (4n+2)\pi - 2\phi$ である。
- $-$ の符号のとき：$n = m - 1$ として $\theta = 4m\pi - 2\pi + 2\phi = \big(4(m-1) + 2\big)\pi + 2\phi = (4n+2)\pi + 2\phi$ である。

m がすべての整数を動くとき、いずれの場合も n はすべての整数を動く。したがって

$$2\cos\tfrac{1}{2}\theta = \cos\theta \iff \theta = (4n+2)\pi \pm 2\phi \quad \text{（ある整数）} \; n.$$

である。どの段階も同値変形であったから、両方向が証明された。逆を直接確かめておくと、$\theta = (4n+2)\pi \pm 2\phi$ ならば $\cos\tfrac{1}{2}\theta = \cos\big((2n+1)\pi \pm \phi\big) = -\cos\phi = c$ であり、これは $2c = 2c^2 - 1$ を満たす。



$2\cos\tfrac{1}{2}\theta$ の 1 周期分 $0 \le \theta \le 4\pi$ において、二つの曲線は 2 回交わり、その交点は $2\cos\tfrac{1}{2}\theta$ が最小値 -2 をとる $\theta = 2\pi$ に関して対称である。

検算

- 数値的には $\cos\phi \approx 0.3660$ から $\phi \approx 1.1961$ となるので、(iii) の最初の正の解は $2\pi - 2\phi \approx 3.8911$ である。そこでは $2\cos\tfrac{1}{2}\theta \approx -0.7321$、$\cos\theta \approx -0.7321$ となり、確かに一致する。$[-6\pi, 6\pi]$ 上で $2\cos\tfrac{1}{2}\theta - \cos\theta$ の根を探索すると、この範囲にある $(4n+2)\pi \pm 2\phi$ の 6 個の値がちょうど見つかった。
- (ii) についても極（pole）を避けて同様に探索したところ、根は 2π の倍数にしか見つからなかった。
- (i) と (ii) の妥当性の確認：$\theta = \pi$ は $2\sin\tfrac{1}{2}\pi = 2 \neq 0 = \sin\pi$ であるから (i) を満たさず、また (ii) では $\tan\tfrac{1}{2}\pi$ が定義されないので定義域（domain）の外にある。

よくある間違い

- (i) で、$\sin\frac{1}{2}\theta$ が 0 になりうることに触れずに約分してしまう。あるいは、$\cos\frac{1}{2}\theta = 1$ がすでに含まれていることに気づかず、別の解の族として挙げてしまう。
- (ii) で、分母を払う前に、$\tan\theta$ や $\tan\frac{1}{2}\theta$ が定義されない点を θ が避けなければならないことを忘れる。
- (iii) で、1 より大きい解 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$ を残してしまう。あるいは、$4m\pi \pm (2\pi - 2\phi)$ を $(4n+2)\pi \pm 2\phi$ の形に直す際に $\pm$ の扱いを誤る。

STEP のその先へ

各小問では、半角のただ一つの関数で置き換えることによって方程式を解いており、これにより三角方程式が代数方程式に変わる。(ii) の置換 $t = \tan\frac{1}{2}\theta$ はとりわけ強力である。これは $\sin\theta$、$\cos\theta$、$\tan\theta$ を t の有理関数（rational function）として表すので、大学 1 年の微分積分学で $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の任意の有理関数を積分するのに用いられる。幾何学的には、これは単位円（unit circle）を有理点によってパラメータ表示（parametrise）するものである。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* には、これらの考え方を用いた STEP 形式の演習問題がさらに収められている。

解答例

STEP I 2003、第 4 問

純粋数学 ・ 三角不等式（三角関数）

> **STEP I 2003、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q4

鍵となる考え方

両辺に $\cos\theta$ を掛けたくなるところだが、$\cos\theta$ は $[0, 2\pi)$ において符号が変わり、負の数を掛けると不等式（inequality）の向きが逆になる。そこで $\cos\theta > 0$ の場合と $\cos\theta < 0$ の場合に場合分け（case analysis）する。$1 + \sin\theta$ は決して負にならないので、一方の場合は自明であることがわかる。もう一方の場合は、$\sin\theta - \cos\theta$ を $R\sin(\theta - \alpha)$ の形に合成（harmonic form）すれば、正弦についての一つの不等式に帰着する。

解答

$f(\theta) = \dfrac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$ とおく。以下つねに $0 \le \theta < 2\pi$ かつ $\theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ とする。

場合 1：$\cos\theta < 0$、すなわち $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ のとき

$\sin\theta \ge -1$ であるから、分子（numerator）$1 + \sin\theta$ は 0 以上であり、分母（denominator）は負である。よって $f(\theta) \le 0 < 1$ である。

$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ に属する**すべての** θ が不等式を満たす。

場合 2：$\cos\theta > 0$、すなわち $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ または $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ のとき

正の数 $\cos\theta$ を掛けても不等式の向きは変わらないので、

$$f(\theta) \le 1 \iff 1 + \sin\theta \le \cos\theta \iff \sin\theta - \cos\theta \le -1.$$

ここで $\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ であるから、条件は

$$\sin\left(\theta - \tfrac{\pi}{4}\right) \le -\tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

となる。

考えてみよう $\phi = \theta - \frac{\pi}{4}$ のどの値を調べればよいか？

この場合に許される二つの範囲だけを調べればよい。

- $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ ならば $-\frac{\pi}{4} \le \phi < \frac{\pi}{4}$ である。この区間で $\sin\phi$ は増加し、$\sin\phi \ge \sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ であって、等号は $\phi = -\frac{\pi}{4}$ のときに限り成り立つ。よってここでの解は $\theta = 0$ のみである。（確認：$f(0) = 1/1 = 1$ であり、等号が成り立つ。）
- $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ならば $\frac{5\pi}{4} < \phi < \frac{7\pi}{4}$ である。$\sin\phi$ は両端で $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ に等しく、その間の $\phi = \frac{3\pi}{2}$ で -1 まで下がるので、この開区間（open interval）では $\sin\phi < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。よって $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ に属する**すべての** θ が解である。

まとめ

$\theta = \frac{3\pi}{2}$ では $\cos\theta = 0$ となるので、この値は除外される。二つの場合を合わせると、不等式が成り立つのはちょうど

$$\theta = 0 \qquad \text{または} \qquad \tfrac{\pi}{2} < \theta < \tfrac{3\pi}{2} \qquad \text{または} \qquad \tfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi.$$

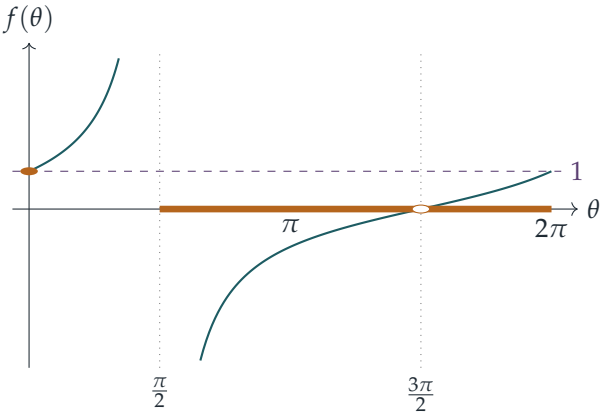
のときである。

より鮮やかな見方

$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$、$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$、$1 = \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}$ を用いると、

$$f(\theta) = \frac{\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1 + \tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan\frac{\theta}{2}} = \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

となる。ここで共通因数を約分したが、$\cos\theta \neq 0$ であるからこの因数は 0 でない。（$\theta = \pi$ では中央の式は定義されないが、最初の式と最後の式はそこでも等しい。）θ が $[0, 2\pi)$ を動くとき、$\psi = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}$ は $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ を動く。$\tan\psi$ のグラフを見れば、$\tan\psi \le 1$ となるのは $\psi = \frac{\pi}{4}$ のときと $\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{5\pi}{4}$ のときに限ることがすぐにわかる。$\psi = \pi$（すなわち $\theta = \frac{3\pi}{2}$）を除けば、これは先ほどと同じ答えである。



解集合（琥珀色）は、曲線が破線 $f = 1$ 上またはその下にある部分である。$\theta = \frac{3\pi}{2}$ の穴に注意せよ。そこでは $f(\theta) \to 0$ であるが、f は定義されていない。

検算

- $\theta = 0$：$f(0) = 1$ であり、境界上にある。0 より少し大きいところでは分子は 1 を超え、分母は 1 未満であるから $f > 1$ となる。これにより $\theta = 0$ が孤立した解（isolated solution）であることが確かめられる。
- $\theta = \frac{7\pi}{4}$：$f = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) / \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414 \leq 1$。よい。
- $\theta = \pi$：$f = 1/(-1) = -1 \leq 1$。よい。
- $[0, 2\pi)$ 内のランダムな θ を 2×10^5 個試したところ、上で述べた解集合と完全に一致した。$\theta = \frac{3\pi}{2}$ の近くでは $f \approx 5 \times 10^{-5}$ となり、$f \to 0$ と整合している。

よくある間違い

- 場合分けをせずに $\cos\theta$ を両辺に掛けてしまうこと。こうするとあらゆる範囲で $1 + \sin\theta \leq \cos\theta$ となり、区間 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 全体を誤って捨ててしまう。
- 孤立した解 $\theta = 0$ を忘れること。問題では $\theta = 0$ が許されており、等号の場合も含まれる。
- $\theta = \frac{3\pi}{2}$ を含めてしまうこと。そこでは式は $\frac{0}{0}$ となるので、極限（limit）は 0 であっても、式自体は定義されない。

STEP のその先へ

ここでの教訓は、不等式が保たれるのは**増加的な**操作、すなわち正の数を掛けること、増加関数（increasing function）を施すことなどに限られる、ということである。このことに気を配るのは、実解析（real analysis）の日常的な仕事である。$\theta = \frac{3\pi}{2}$ における除去可能な特異点（removable singularity）、つまり f が極限をもつのに値をもたない点も、実解析のもう一つのテーマである。連続性（continuity）とは、極限と値が一致することにほかならない。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、これら二つの考え方を丁寧に、かつ読みやすく展開している。

解答例

STEP I 2003、第 5 問

純粋数学 ・ 二項級数

STEP I 2003、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/03-s1-q5

鍵となる考え方

どの二項展開（binomial expansion）においても、一般項（general term）を書き下し、それが含む x の指数を追跡すればよい。定数項（constant term）とは、その指数が 0 となる項である。小問 (ii) では展開が有限ではないので、まず支配的な因数をくくり出す。$|x|$ が大きいときはそれは x^6 であり、残りは $3/x$ の級数となる。$|x|$ が小さいときは $3x^5$ であり、残りは $x/3$ の級数となる。そのうえで、x のどのような累乗が現れうるかを調べれば、すべてが決着する。

解答

小問 (i)

$(2x + x^{-2})^6$ の一般項は

$$\binom{6}{r}(2x)^{6-r}\left(x^{-2}\right)^r = \binom{6}{r}2^{6-r}x^{6-3r}, \qquad r = 0, 1, \ldots, 6.$$

である。これが x を含まないのはちょうど $6 - 3r = 0$、すなわち $r = 2$ のときであり、そのとき項は

$$\binom{6}{2}2^4 = 15 \times 16 = 240,$$

となり、示すべき結果が得られる。

同様に、$(ax^3 + bx^{-2})^{5n}$ の一般項は

$$\binom{5n}{r}\left(ax^3\right)^{5n-r}\left(bx^{-2}\right)^r = \binom{5n}{r}a^{5n-r}b^r\, x^{15n-5r}.$$

である。x の指数が 0 となるのは $15n = 5r$ のとき、すなわち $r = 3n$ のときである（これは $0 \le r \le 5n$ を満たす）。したがって、x を含まない項は

$$\binom{5n}{3n} a^{2n} b^{3n} = \frac{(5n)!}{(2n)!\,(3n)!}\, a^{2n} b^{3n}.$$

である。

小問 (ii)

$|x|$ **が大きい場合**。因数 x^6 をくくり出すと

$$f(x) = \left(x^6(1 + 3/x)\right)^{1/2} = x^3\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{1/2},$$

となる。ここでは問題の意図に従って $(x^6)^{1/2} = x^3$ とした（厳密にはこれは $|x|^3$ である。下の注を参照）。$|x| > 3$ のとき $|3/x| < 1$ であるから、$u = 3/x$ とおいた $(1+u)^{1/2}$ の二項級数（binomial series）は収束（converge）する：

$$(1+u)^{1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{8}u^2 + \tfrac{1}{16}u^3 - \tfrac{5}{128}u^4 + \cdots,$$

ここで u^3 の係数は

$$\binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!} = \frac{3/8}{6} = \frac{1}{16}.$$

である。級数に x^3 を掛けると、項 $\binom{1/2}{k}3^k x^{-k}$ は $\binom{1/2}{k}3^k x^{3-k}$ となるので、定数になるのは $k = 3$ のみである：

$$f(x) = x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{9}{8}x + \frac{1}{16}\cdot 27 - \frac{405}{128x} + \cdots,$$

よって x を含まない項は $\frac{27}{16}$ であり、示すべき結果が得られる。

考えてみよう $x < -3$ のときはどうなるか？

平方根は非負の根を意味し、$(x^6)^{1/2} = |x|^3$ であって、これは $x < 0$ のとき $-x^3$ に等しい。したがって $x < -3$ では展開のすべての項の符号が反転し、定数項は $-\frac{27}{16}$ となる。示すべき結果 $\frac{27}{16}$ は $x > 3$ に対してはまさに正しい。$x < -3$ に対しては、$(x^6)^{1/2}$ を x^3 と読めば成り立ち、これが問題の意図であることは明らかである。

$|x|$ **が小さい場合**。このとき括弧内の支配的な項は $3x^5$ であるから、代わりにこれをくくり出す：

$$x^6 + 3x^5 = 3x^5\left(1 + \frac{x}{3}\right).$$

$f(x)$ が実数であるためには $x^5(x+3) \ge 0$ が必要である。$|x| < 3$ のとき因数 $x+3$ は正であるから、$x \ge 0$ が必要となる（$-3 < x < 0$ では、f はそもそも実関数として定

義されない)。$0 < x < 3$ に対して

$$f(x) = \sqrt{3}\,x^{5/2}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{1/2} = \sqrt{3}\,x^{5/2}\sum_{k\geq 0}\binom{1/2}{k}\frac{x^k}{3^k},$$

であり、$|x/3| < 1$ であるからこの級数は収束する。すべての項は

$$x^{5/2+k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

の定数倍であり、$\frac{5}{2}+k$ は決して整数にならないので、特に 0 にもならない。したがって、$|x| < 3$ における $f(x)$ の x の累乗による展開には、x を含まない項は存在しない($x = 0$ そのものでは $f(0) = 0$ である)。

検算

- 正の大きな x に対して、$f(x) - \left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{8}x\right)$ は $\frac{27}{16} = 1.6875$ に近づくはずである。$x = 1000$ のとき電卓では 1.68434 となり、その差は級数の次の項 $-\frac{405}{128x} \approx -0.00316$ で説明がつく。
- 0 の近くでは $f(x) \approx \sqrt{3}\,x^{5/2}$ である。$x = 0.01$ のとき $f(0.01) = \sqrt{10^{-12} + 3\times 10^{-10}} \approx 1.734 \times 10^{-5}$ であり、$\sqrt{3}\times 10^{-5}$ に近く、0 でない定数に近づいているわけでは決してない。
- 一般の公式について、$n = 1$、$a = b = 1$ とすると $\binom{5}{3} = 10$ となり、これは $(x^3 + x^{-2})^5$ の定数項である。直接展開すれば確かめられる。

よくある間違い

- 一般項の指数を逆に書き、例えば $(2x)^r(x^{-2})^{6-r}$ としたうえで、r と二項係数(binomial coefficient)の対応を取り違える。どちらの番号づけでも、一貫していれば問題ない。
- $\binom{1/2}{3}$ の符号を誤る。負の因数が二つ $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)$ あるので、正になる。
- 小さい x に対して $(x^6 + 3x^5)^{1/2}$ を x^6 をくくり出して展開する。これでは $3/x$ の級数となり、$|x| < 3$ では発散(diverge)してしまう。

STEP のその先へ

f の二つの展開は異なる領域で成り立ち、どの因数をくくり出すかによって、どの領域の展開が得られるかが決まる。これは関数を異なる点のまわりで展開するという考

え方であり、複素解析（complex analysis）におけるローラン級数（Laurent series）やピュイズー級数（Puiseux series、ここでの $x^{5/2+k}$ のような分数べきによる展開）へとつながる。$x < -3$ で符号の問題を引き起こした平方根の分枝（branch）も、複素解析の中心的なテーマである。Needham の *Visual Complex Analysis* は、その両方を図を用いて説明している。

解答例

STEP I 2003、第 6 問

純粋数学 ・ 部分分数分解による積分

> **STEP I 2003、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q6

鍵となる考え方

どちらの 2 次式も因数分解できるので、自然な道具は部分分数分解（partial fractions）である。「場合分け」が生じるのは、二つの 1 次因数が一致する瞬間である。そのとき部分分数分解は使えなくなり、代わりに完全平方式の逆数を積分することになる。小問 (ii) に取りかかる前に、二つの 2 次式をよく見比べてほしい。単純な変数の平行移動によって、一方がもう一方に変わるのである。

解答

小問 (i)

$2 \times a = 2a$ かつ $2 + a = a + 2$ であるから、この 2 次式は次のように因数分解できる。

$$x^2 + (a+2)x + 2a = (x+2)(x+a).$$

$a > 0$ であるから、$0 \le x \le 1$ において二つの因数はともに正である。したがって被積分関数（integrand）は区間全体で連続（continuous）であり、すべての $a > 0$ に対して積分が存在する。二つの因数が等しくなるのはちょうど $a = 2$ のときであり、これが場合分けの境目となる。

$a \neq 2$ の場合。二つの因数は異なり、

$$\frac{1}{(x+2)(x+a)} = \frac{1}{a-2}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+a}\right),$$

が成り立つ。これは通分して確かめられる。分子は $(x+a) - (x+2) = a - 2$ となる。

$[0,1]$ 上で $x+2$ と $x+a$ はともに正であるから、対数に絶対値記号は不要である。

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)(x+a)} &= \frac{1}{a-2}\Big[\ln(x+2)-\ln(x+a)\Big]_0^1\\ &= \frac{1}{a-2}\Big(\ln 3-\ln(1+a)-\ln 2+\ln a\Big)\\ &= \frac{1}{a-2}\ln\left(\frac{3a}{2(a+1)}\right).\end{aligned}$$

考えてみよう $0<a<2$ のとき、係数 $\frac{1}{a-2}$ は負である。被積分関数が正である以上、答えは正でなければならないが、それでも答えは正になっているだろうか？

なっている。$\dfrac{3a}{2(a+1)}<1 \iff 3a<2a+2 \iff a<2$ であるから、$0<a<2$ のとき対数も負となり、商は正になる。同様に $a>2$ のときは両方とも正である。すべての部分を正の形で書きたければ、$0<a<2$ に対する答えを $\dfrac{1}{2-a}\ln\left(\dfrac{2(a+1)}{3a}\right)$ と書けばよい。これは同じ値である。

$a=2$ の場合。 このとき被積分関数は $(x+2)^{-2}$ であり、

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2} = \left[-\frac{1}{x+2}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

小問 (ii)

ここでの 2 次式は $u^2+au+a-1=(u+1)(u+a-1)$ であるが、同じ計算を繰り返す前に $u=x+1$ と置換してみよう。

$$(x+1)^2+a(x+1)+a-1 = x^2+(a+2)x+2a.$$

これはまさに小問 (i) の 2 次式である。また $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$ であり、$u=1,2$ は $x=0,1$ に対応する。よって

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+au+a-1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+(a+2)x+2a},$$

となり、答えは小問 (i) と同じである。

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+au+a-1} = \begin{cases}\dfrac{1}{a-2}\ln\left(\dfrac{3a}{2(a+1)}\right), & a\neq 2,\\ \dfrac{1}{6}, & a=2.\end{cases}$$

直接計算することもできる。$[1,2]$ 上では $u+1>0$ かつ $u+a-1\geq a>0$ であるから、被積分関数はやはり連続であり、二つの因数が一致するのはちょうど $a-1=1$、すなわち $a=2$ のときである。部分分数分解により $\frac{1}{a-2}\left[\ln\frac{u+1}{u+a-1}\right]_1^2 = \frac{1}{a-2}\left(\ln\frac{3}{a+1}-\ln\frac{2}{a}\right)$ が得られ、これは同じ式である。

検算

- $a = 2$ **における連続性**。$a \to 2$ のとき対数は $\ln 1 = 0$ に近づくので、公式は $0/0$ の形になる。その極限（limit）は $a = 2$ における $\ln 3a - \ln(2a + 2)$ の微分係数（derivative）、すなわち $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ であり、特別な場合の値と一致する。二つの場合は、あるべき姿どおり滑らかにつながっている。
- **特別な値**。$a = 1$ のとき、(i) の被積分関数は $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$ であり、公式は $-\ln\frac{3}{4} = \ln\frac{4}{3} \approx 0.2877$ を与える。
- **数値的検証**。$a = 1$、$a = 2$、0 や 2 に近い a、および 20 以下のランダムな 200 個の a の値について、両方の積分にシンプソン（Simpson）の公式を適用すると、公式と 10^{-10} より高い精度で一致する。

よくある間違い

- 部分分数の係数 $\frac{1}{a-2}$ が定義されない $a = 2$ の場合を忘れる。
- 部分分数の符号を逆にしてしまう。通分して確かめること。
- $0 < a < 2$ と $a > 2$ を本質的に異なる答えとして扱う。符号に注意を払えば、一つの公式で両方を表せる。

STEP のその先へ

$a = 2$ における振る舞いは、除去可能特異点（removable singularity）の小さな例である。すなわち、ある点で定義されていないように見えるが、その点での極限がちょうど積分の値に等しくなる公式である。解析学では、パラメータに依存する積分がそのパラメータについて連続（あるいは微分可能）となるのはどのようなときかを学ぶ。それによって、二つの場合が一致しなければならなかった理由が説明される。Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は、極限、連続性、リーマン積分を丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 2003、第 7 問

純粋数学 ・ 数字と整除性

> **STEP I 2003、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q7

鍵となる考え方

$N = 100a + 10b + c$ と書いて $S = N$ とおくと、3 つの数字（digit）についての方程式が 1 つ得られる。これを

$$99a + (10b - b^2) = c^3 - c,$$

とまとめると、最初の段落で示した 2 つの事実がそのまま当てはまる。すなわち、b の項は 0 と 25 の間に収まり、$99a$ と $c^3 - c$ はどちらも 3 の倍数である。1 つ目の事実から、$c^3 - c$ は 99 の倍数のすぐ上になければならない。2 つ目の事実によって、b のとりうる値が絞られる。その後は、手で調べるべき場合がわずかに残るだけである。

解答

2 つの準備的な事実

平方完成（completing the square）すると、

$$10k - k^2 = 25 - (5 - k)^2.$$

$(5-k)^2 \geq 0$ であるから、$10k - k^2 \leq 25$ が得られる。また $0 \leq k \leq 9$ より $-4 \leq 5 - k \leq 5$ であるから、$(5-k)^2 \leq 25$ となり、したがって $10k - k^2 \geq 0$ である。（0 での等号は $k = 0$ のとき、25 での等号は $k = 5$ のときに成り立つ。）

次に、$k-1$、k、$k+1$ は連続する 3 つの整数であるから、そのうちちょうど 1 つが 3 の倍数である。よって、それらの積 $k(k-1)(k+1)$ は 3 で割り切れる。（これは $0 \leq k \leq 9$ に限らず、すべての整数 k について成り立つ。）

数を求める

$N = 100a + 10b + c$ とし、各位の数字は $1 \leq a \leq 9$（$N \geq 100$ であるから）および $0 \leq b, c \leq 9$ を満たすとする。このとき $S = a + b^2 + c^3$ であり、

$$\begin{aligned} S = N &\iff a + b^2 + c^3 = 100a + 10b + c \\ &\iff 99a + (10b - b^2) = c^3 - c = (c-1)c(c+1). \qquad (*) \end{aligned}$$

考えてみよう なぜ $10b - b^2$ を $99a$ と同じ辺に置くのか？

それは、この組み合わせこそ、先ほど評価の仕方を学んだものだからである。$t = 10b - b^2$ とおくと、1 つ目の事実から $0 \leq t \leq 25$ であり、一方 $99a$ は 25 よりずっと大きい 99 の倍数である。したがって $(*)$ は、$c^3 - c$ が 99 の倍数に小さな「余り」t を加えたものであることを述べており、これによって状況はすぐに決まってしまう。

b を絞り込む。 2 つ目の事実より、3 は $c^3 - c = (c-1)c(c+1)$ を割り切り、また 3 は $99a$ を割り切る。よって $(*)$ より、3 は $t = b(10 - b)$ を割り切る。$10 - b \equiv 1 - b \pmod 3$ であるから、これには $b \equiv 0$ または $b \equiv 1 \pmod 3$ が必要である。可能性は

b	0	1	3	4	6	7	9
$t = 10b - b^2$	0	9	21	24	24	21	9

であり、したがって $t \in \{0, 9, 21, 24\}$ である。（$b = 2, 5, 8$ のときは $t = 16, 25, 16$ となり、いずれも 3 で割り切れない。）

c を絞り込む。 $a \geq 1$ かつ $t \geq 0$ であるから、$(*)$ より $c^3 - c \geq 99$ である。$c^3 - c$ の値は

c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$c^3 - c$	0	0	6	24	60	120	210	336	504	720

であるから、$c \geq 5$ である。

場合分け。 各 $c \geq 5$ について、範囲 $[c^3 - c - 25,\ c^3 - c]$ に入る倍数 $99a$（ただし $1 \leq a \leq 9$）が必要であり、さらに $t = c^3 - c - 99a$ が $0, 9, 21, 24$ のいずれかでなければならない。

- $c = 5$：$c^3 - c = 120$。$[95, 120]$ に入る 99 の倍数は 99 のみであり、$a = 1$、$t = 21$ となるので、$b = 3$ または $b = 7$ である。これより $N = 135$ と $N = 175$ が得られる。
- $c = 6$：$c^3 - c = 210$。$[185, 210]$ に入る 99 の倍数は 198 のみであり、$a = 2$、$t = 12$ となる。しかし 12 は $0, 9, 21, 24$ のいずれでもない（実際、$10b - b^2 = 12$ は整数解をもたない）。解はない。
- $c = 7$：$c^3 - c = 336$。近くの倍数は 297 と 396 であり、どちらも $[311, 336]$ に入らない。解はない。

- $c = 8$：$c^3 - c = 504$。$[479, 504]$ に入る 99 の倍数は 495 のみであり、$a = 5$、$t = 9$ となるので、$b = 1$ または $b = 9$ である。これより $N = 518$ と $N = 598$ が得られる。
- $c = 9$：$c^3 - c = 720$。近くの倍数は 693 と 792 であり、どちらも $[695, 720]$ に入らない。解はない。

以上の各段階はすべて逆にたどれるので、これら 4 つは確かに $S = N$ を満たす。直接確かめると、

$$135 : 1 + 3^2 + 5^3 = 1 + 9 + 125 = 135, \quad 175 : 1 + 7^2 + 5^3 = 1 + 49 + 125 = 175,$$
$$518 : 5 + 1^2 + 8^3 = 5 + 1 + 512 = 518, \quad 598 : 5 + 9^2 + 8^3 = 5 + 81 + 512 = 598.$$

よって、$S = N$ を満たす数はちょうど

$$N = 135, \quad 175, \quad 518, \quad 598.$$

である。

検算

3 桁の数 900 個すべてについて $a + b^2 + c^3$ を計算する総当たり探索を行うと、ちょうど 135、175、518、598 が見つかり、場合分けの結果と一致する。構造に関するうまい検算もある。各組において、2 つの b の値の和は 10 になっている（$3 + 7$ と $1 + 9$）。これは必然である。なぜなら、b を $10 - b$ に置き換えても $t = 10b - b^2$ は変わらないからである。

よくある間違い

- $a \geq 1$ を忘れ、000 や 001 のような 3 桁の数でない「解」を認めてしまう。
- 与えられた a と c に対して b を 1 つ見つけたところで止めてしまう。$t(b) = t(10 - b)$ であるから、解は対になって現れる。
- 3 で割り切れることだけを使い、評価 $0 \leq t \leq 25$ を使わない。各 c に対して可能な a を高々 1 つに絞るのは、この評価である。

STEP のその先へ

自分自身の各位の数字のべき乗から作った和に等しい数は、古典的な数学パズルの題材である（アームストロング数、あるいは「ナルシシスト数」（narcissistic numbers）と呼ばれる $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$ のような数が最もよく知られた族である）。その根底に

ある本格的な考え方は、ここで用いたものと同じである。すなわち、各辺の大きさを評価して探索を有限にし、次に合同式（congruence）を使ってそれを刈り込むのである。大きさの評価と剰余演算（modular arithmetic）を組み合わせるこの方法は、多くのディオファントス方程式（Diophantine equation）の解法の原動力となっている。Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等整数論』）は、合同式とその応用への優れた入門書である。

解答例

STEP I 2003、第 8 問

純粋数学 ・ ロジスティック微分方程式

STEP I 2003、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/03-s1-q8

鍵となる考え方

「A が B に変化する速さ」を導関数（derivative）に翻訳する。これは B の体積が増加する速さである。$x = 1 - y$ であるから、y だけについての変数分離形（separable variables）の微分方程式（differential equation）が得られ、部分分数分解（partial fractions）によって積分が完了する。最後の小問は、$x = 1 - y$ の式が 0 に到達しうるかどうかを問うものであり、その答えは指数関数が決して無限大にならないという事実に基づいている。

解答

方程式を立てる

B の体積は yV であり、V は一定である。A は速さ $kVxy$ で B に変化するので、B の体積はその速さで増加する：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(yV) = kVxy \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = kxy = ky(1-y),$$

ここでは V で割り、$x = 1 - y$ を用いた。（同じことであるが、A の体積はこの速さで減少する：$V\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -kVxy$。$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ であるから、これは同じ内容を表している。）

方程式を解く

初めに $x > 0$ かつ $y > 0$ であるから、$0 < y < 1$ である。$0 < y < 1$ である間は $y(1-y)$ で割って変数を分離できる：

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(1-y)} = \int k \,\mathrm{d}t.$$

部分分数分解により $\dfrac{1}{y(1-y)} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{1-y}$ であるから、

$$\ln y - \ln(1-y) = kt + c,$$
$$\ln \frac{y}{1-y} = kt + c,$$

となる。ここで y と $1-y$ がともに正であることを用いたので、絶対値記号は不要である。両辺の指数をとり、$D = \mathrm{e}^c$ とおくと、

$$\frac{y}{1-y} = D\mathrm{e}^{kt}.$$

すると $y = D\mathrm{e}^{kt} - yD\mathrm{e}^{kt}$ であるから $y\left(1 + D\mathrm{e}^{kt}\right) = D\mathrm{e}^{kt}$ となり、

$$y = \frac{D\mathrm{e}^{kt}}{1 + D\mathrm{e}^{kt}},$$

が示すべき式として得られる。$t = 0$ を代入すると、x_0 と y_0 を初期値として $D = \dfrac{y_0}{1-y_0} = \dfrac{y_0}{x_0}$ であることがわかる。特に $D > 0$ である。

> **考えてみよう** 積分を行うために $0 < y < 1$ を仮定した。これがすべての時刻で成り立ち続けることは、どうすればわかるだろうか。

成り立たないと仮定し、y が初めて 0 または 1 に達する時刻を T とする。$0 \le t < T$ では上の計算が有効であるから、そこでは y は先の式で与えられる。y は連続であるから、$y(T)$ は $t \to T$ のときの式の極限、すなわち $D\mathrm{e}^{kT}/(1 + D\mathrm{e}^{kT})$ に等しい。$D > 0$ であるからこれは 0 と 1 の間に厳密に含まれ、矛盾である。したがってすべての t で $0 < y < 1$ であり、式はすべての t で成り立つ。

A が完全に変化することはあるか

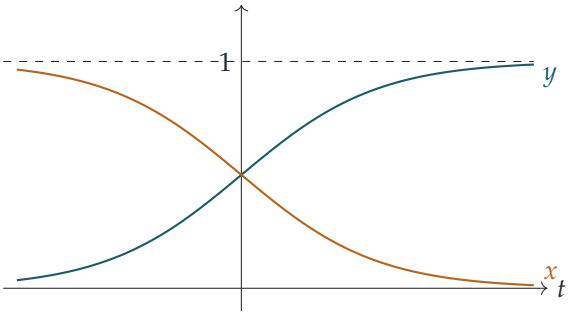
ない。式より

$$x = 1 - y = \frac{1}{1 + D\mathrm{e}^{kt}},$$

であり、$D\mathrm{e}^{kt}$ はすべての t で有限であるから、どの時刻でも $x > 0$ である。つまり A は常にいくらか残っている。しかし $t \to \infty$ のとき（$k > 0$ かつ $D > 0$ であるから）

$De^{kt} \to \infty$ となり、$x \to 0$、$y \to 1$ となる。変化は完了にいくらでも近づくが、有限の時間で完了することはない。

これは物理的にも納得がいく。反応速度 $kVxy$ は残っている A の量に比例するので、A が少なくなるにつれて反応は遅くなるのである。



この概形（$D = k = 1$ の場合）は、1 に近づく y の S 字型のロジスティック曲線（logistic curve）と、0 に近づく x の曲線を示している。どちらも極限値に到達することはない。

検算

- 答えを微分する：$u = De^{kt}$ とおくと $y = u/(1+u)$ であり、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = ku/(1+u)^2 = ky(1-y)$ となって、確かに成り立つ。
- $D = k = 1$（つまり等しい体積から始める場合）のとき、式は $t = \ln 3$ で $y = \frac{3}{4}$ を与える。また、k と初期値を無作為に 200 通り選んで方程式を数値的に時間発展させたところ、式との誤差は 10^{-12} 以内で一致し、x は終始正のままであった。

よくある間違い

- 「極限で $y = 1$」を「ある時刻で $y = 1$」と取り違えること。$t \to \infty$ のときの極限は、有限のどの時刻でも達成されない。
- $\ln(y/(1-y))$ の段階で $0 < y < 1$ が必要であることを忘れる、あるいはその条件が保たれ続ける理由を述べないこと。

STEP のその先へ

方程式 $\dot{y} = ky(1-y)$ はロジスティック方程式（logistic equation）であり、資源によって制限される成長を表す標準的なモデルである。ここで $y = 0$ と $y = 1$ は平衡解

（equilibrium solutions）であり、微分方程式の解の一意性定理（uniqueness theorem）によれば、他のどの解もこれらと交わったり接したりすることはない。これを使えば最後の小問をより鮮やかに片づけられる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『常微分方程式入門』）では、ロジスティック方程式とこの種の安定性解析が詳しく論じられている。

解答例

STEP I 2003、第 9 問

力学 ・ 点を通る放物運動

STEP I 2003、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

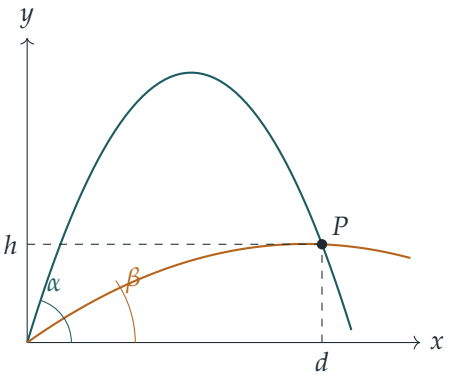
step.maths.org/questions/03-s1-q9

鍵となる考え方

水平方向と鉛直方向の変位を書き下し、時間を消去して、$\sec^2\theta$ を $1+\tan^2\theta$ で置き換える。すると軌道（trajectory）の方程式は $T=\tan\theta$ についての 2 次方程式（quadratic）になる。そこから先はすべてこの 2 次方程式の話である。角が 2 つあるということは異なる 2 つの実数解をもつということなので、判別式（discriminant）を調べればよい。また $\alpha+\beta$ は、$\tan(\alpha+\beta)$ の公式を通じて、解の和と積によって決まる。

解答

質点は重力のみを受けて自由に運動する（空気抵抗（air resistance）はない）とモデル化し、投射点を原点、P に向かう水平方向を x 軸、鉛直上向きを y 軸とする。すると P は点 (d,h) であり、$d>0$ である。$h>0$、すなわち P が投射点より上にあるとする。$h\le 0$ の場合については最後に改めて触れる。



T の 2 次方程式

水平方向の速度は一定値 $V\cos\theta$ であり、鉛直方向の運動は一定の加速度 $-g$ をもつので、時刻 t において

$$x = Vt\cos\theta, \qquad y = Vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

質点は時刻 $t = d/(V\cos\theta)$ に $x = d$ に達する（質点は P に向かって進むので、ここで $\cos\theta > 0$ である）。これを y に代入して $y = h$ とおくと、

$$h = d\tan\theta - \frac{gd^2}{2V^2\cos^2\theta} = dT - \frac{gd^2}{2V^2}\left(1 + T^2\right),$$

となる。ここで $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ を用いた。両辺に $\dfrac{2V^2}{gd^2} = \dfrac{2k}{d}$ を掛けると、

$$\frac{2kh}{d} = 2kT - \left(1 + T^2\right), \qquad \text{すなわち、} \qquad T^2 - 2kT + \frac{2kh}{d} + 1 = 0,$$

となり、題意が示された。

異なる 2 つの角

与えられた V（したがって与えられた k）に対して、可能な投射角は、正接がこの 2 次方程式の解となるような $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ である。tan はこの区間で狭義単調増加（strictly increasing）であるから、異なる実数解 T は異なる角を与える。よって、2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもてばよく、それは判別式が正であるときに限る：

$$4k^2 - 4\left(\frac{2kh}{d} + 1\right) > 0 \iff k^2d^2 - 2h(kd) - d^2 > 0 \iff (kd - h)^2 > h^2 + d^2,$$

ここでは $d^2 > 0$ を掛け、さらに kd について平方完成（completing the square）した。

> **考えてみよう** 不等式を 2 乗すると誤りが生じうるのに、なぜ与えられた条件から $(kd - h)^2 > h^2 + d^2$ が導かれるのか？

$kd > h + \sqrt{h^2 + d^2}$ ならば、$kd - h > \sqrt{h^2 + d^2} > 0$ である。両辺が正なので、2 乗しても不等号の向きは保たれる：$(kd - h)^2 > h^2 + d^2$。よって判別式は正であり、異なる 2 つの解 T、したがって異なる 2 つの投射角が存在する。

（逆（converse）も成り立つ。$(kd - h)^2 > h^2 + d^2$ となるもう一つの場合は $kd < h - \sqrt{h^2 + d^2}$ であるが、$\sqrt{h^2 + d^2} > |h|$ より右辺は負であり、一方 $kd = V^2/g > 0$ である。したがって、2 つの角が可能となるのは $kd > h + \sqrt{h^2 + d^2}$ のときちょうどそのときに限る。）

2 つの角はどちらも確かに水平より上向きである。解の和は $2k > 0$、積は $1 + 2kh/d > 0$（$h > 0$ より）なので、どちらの解も正である。

角の和

$\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を 2 つの解とする。2 次方程式より、

$$\tan\alpha+\tan\beta=2k,\qquad \tan\alpha\tan\beta=1+\frac{2kh}{d}.$$

積は 1 ではない（$kh/d\neq 0$ より）ので、$\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}$ であり、加法定理（compound-angle formula）が使える：

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2k}{-2kh/d}=-\frac{d}{h}.$$

k が消えていることに注意しよう。角の和は速さによらないのである。

> **考えてみよう** $\tan(\alpha+\beta)=-d/h$ には無数の解がある。$\alpha+\beta$ はそのうちのどれか？

$\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$ を示したので、$0<\alpha+\beta<\pi$ である。さらに $\tan(\alpha+\beta)<0$ なので、$\alpha+\beta$ は $(\frac{\pi}{2},\pi)$ にある。$\arctan(d/h)\in(0,\frac{\pi}{2})$ かつ $\tan(\pi-u)=-\tan u$ であるから、$(\frac{\pi}{2},\pi)$ にあって正接が $-d/h$ となる唯一の角は $\pi-\arctan(d/h)$ である。したがって

$$\alpha+\beta=\pi-\arctan\left(\frac{d}{h}\right),$$

となり、題意が示された。

これをうまく見る方法がある。$\arctan(d/h)$ は OP と鉛直上向きとのなす角なので、P の仰角（angle of elevation）を γ とすると $\pi-\arctan(d/h)=\frac{\pi}{2}+\gamma$ である。すると $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma}{2}$ となる。つまり、2 つの投射方向は、OP と鉛直線とのなす角の二等分線に関して対称なのである。

検算

- $h=0$（目標が同じ高さにある）のとき、公式は $\alpha+\beta=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ を与える。これは、同じ射程（range）を与える、おなじみの余角の組である。
- $d=3$、$h=4$、$k=4$ とする。このとき $kd=12>4+5$ であり、解は $T=4\pm\sqrt{13/3}$ で、$\alpha\approx 1.4078$、$\beta\approx 1.0903$ となる。よって $\alpha+\beta\approx 2.4981$ であり、これは $\pi-\arctan(0.75)\approx 2.4981$ に等しい。
- 数千組のランダムな d、h、k について、2 つの角それぞれでの飛行を数値シミュレーションすると、軌道は (d,h) を通り、条件と角の和の両方が確かめられる。

よくある間違い

- $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$ を忘れてしまい、T の 2 次方程式にたどり着けない。

- $\alpha+\beta=\arctan(-d/h)=-\arctan(d/h)$ と書いてしまう。これは負である。逆正接（inverse tangent）は $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ の角しか返さないので、$\alpha+\beta$ の範囲を用いて正しい分枝（branch）を選ばなければならない。
- $h<0$（目標が投射点より下にある）の場合を不注意に扱う。このときは一方の解が負になりうるので、一般に正しい主張は $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+\arctan(h/d)$ である。これが問題の形と一致するのは $h>0$ のときに限る。

STEP のその先へ

2 つの角が一致する境界の場合 $kd=h+\sqrt{h^2+d^2}$ は、速さ V でのすべての軌道の**包絡線**（envelope）、すなわち「安全放物線」（parabola of safety）$y=\dfrac{V^2}{2g}-\dfrac{gx^2}{2V^2}$ を描く。その内側の点には 2 通りの方法で、その上の点には 1 通りの方法で到達でき、外側の点には到達できない。曲線族の包絡線は、方程式とそのパラメータについての導関数を連立させて解くことで求められ、微分方程式や光学でも再び登場する。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物運動や束縛運動をこのような丁寧さで展開している。

解答例

STEP I 2003、第 10 問

力学 ・ 薄板の質量中心

> **STEP I 2003、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q10

鍵となる考え方

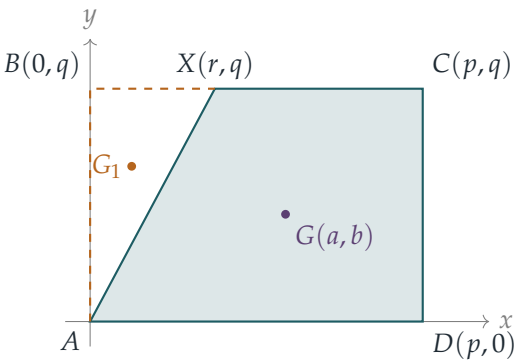
一部を切り取った図形は**引き算**で扱うのがよい。すなわち、各軸に関する長方形のモーメント（moment）は、台形（trapezium）のモーメントと三角形のモーメントの和に等しく、質量は面積に比例する。つり下げについては、一点から自由につり下げられた薄板（lamina）は、重心（centre of gravity）がその点の真下に来る位置で静止する。したがって直線 AG は鉛直になる。すると 45° という条件は、a と b の間のきわめて簡単な関係に帰着する。

解答

薄板は一様で薄いものとしてモデル化する。したがって、どの部分の質量もその面積に比例し、三角形の重心はその図心（centroid、すなわち頂点の平均）にある。

重心

与えられた座標軸のもとで $A = (0,0)$、$D = (p,0)$、$C = (p,q)$ であり、したがって $B = (0,q)$ である。X は BC 上にあって $BX = r$ であるから、$X = (r,q)$ である。ただし $0 \leq r \leq p$ である。



3 つの部分は次のとおりである。

- 長方形 $ABCD$：面積 pq、重心 $(\frac{p}{2}, \frac{q}{2})$。
- 三角形 ABX（取り除く部分）：面積 $\frac{1}{2}qr$、重心 G_1 は $(0,0)$、$(0,q)$、(r,q) の平均であり、$(\frac{r}{3}, \frac{2q}{3})$ である。
- 残る台形 $AXCD$：面積 $pq - \frac{1}{2}qr = \frac{1}{2}q(2p-r)$、重心 $G = (a,b)$。

各軸に関する長方形のモーメントは、その 2 つの部分のモーメントの和である。y 軸に関するモーメントをとる（つまり x 座標を比較する）と、

$$pq \cdot \frac{p}{2} = \frac{qr}{2} \cdot \frac{r}{3} + \frac{q(2p-r)}{2}\, a.$$

両辺を $\frac{q}{2}$ で割ると $p^2 = \frac{r^2}{3} + (2p-r)a$ となり、$2p - r \geq p > 0$ であるからこれで割ってよい。よって

$$a = \frac{3p^2 - r^2}{3(2p-r)}.$$

同様に、x 軸に関して

$$pq \cdot \frac{q}{2} = \frac{qr}{2} \cdot \frac{2q}{3} + \frac{q(2p-r)}{2}\, b,$$

であるから $pq = \frac{2qr}{3} + (2p-r)b$ となり、

$$b = \frac{q(3p-2r)}{3(2p-r)}.$$

簡単な検算として、$r = 0$（何も切り取らない）とすると $a = \frac{p}{2}$、$b = \frac{q}{2}$ となり、長方形の中心が得られる。

A からつり下げる

薄板が A から自由につり下げられて平衡（equilibrium）にあるとき、薄板にはたらく力は 2 つだけである。G を通る重力と、A における抗力である。つり合っている 2 力は同一直線上にはたらかなければならないので、G は A の鉛直真下にある。

考えてみよう 「AD は水平から下向きに 45° をなす」という条件は、どのようにして a と b の方程式になるだろうか。

AG は鉛直であり、AD は水平と 45° をなすから、AD は AG とも 45° をなす。すなわち、角 GAD は 45° である。いまの座標軸では AD は x 軸の正の部分であり、$G = (a, b)$ は $a, b > 0$ を満たす（台形の内部にあるから）。よって $\tan\angle GAD = b/a$ である。したがって $b/a = 1$、すなわち

$$a = b.$$

上の式を用い、共通の正の分母 $3(2p - r)$ を払うと、

$$\begin{aligned} & 3p^2 - r^2 = q(3p - 2r) \\ \iff \quad & r^2 - 2qr + 3pq - 3p^2 = 0. \end{aligned}$$

2 次方程式の解の公式（quadratic formula）により、

$$r = q \pm \sqrt{q^2 - (3pq - 3p^2)} = q \pm \sqrt{q^2 - 3pq + 3p^2}.$$

根号の中は $(q - \frac{3}{2}p)^2 + \frac{3}{4}p^2 > 0$ であるから、2 つの解はともに実数で相異なる。$s = \sqrt{q^2 - 3pq + 3p^2} > 0$ とおく。

符号の選択。 X は長さ p の辺 BC 上にあるので、$0 \le r \le p$ でなければならない。解 $q + s$ はつねに p より大きいことを示す。

- $q \ge p$ ならば、$s > 0$ であるから $q + s > q \ge p$ である。
- $q < p$ ならば、$p - q > 0$ であり、

  $$s^2 - (p - q)^2 = (q^2 - 3pq + 3p^2) - (p^2 - 2pq + q^2) = 2p^2 - pq = p(2p - q) > 0,$$

  である。$q < p < 2p$ だからである。よって $s > p - q$ であり、したがって $q + s > p$ である。

いずれの場合も、プラスの符号をとると X は C を越えて薄板の外に出てしまうので、不適である。したがって

$$r = q - \sqrt{q^2 - 3pq + 3p^2},$$

となり、示すべき式が得られた。

補足しておくと、この解が実際に $[0, p]$ に属するのは、ちょうど $p \le q \le 2p$ のときである。実際、$q - s \ge 0 \iff q^2 \ge s^2 \iff 3p(q - p) \ge 0 \iff q \ge p$ であり、また（$q > p$ のとき）$q - s \le p \iff (q - p)^2 \le s^2 \iff p(2p - q) \ge 0 \iff q \le 2p$ である。したがって、問題の状況はこのような形の場合にしか起こらない。これは直観と

も合っている。切り取りのない正方形（$q = p$、$r = 0$）は頂点からつり下げると対角線が鉛直になり、反対の極端な場合（$q = 2p$、$r = p$）には図形は直角三角形 ACD となり、その重心 $(\frac{2p}{3}, \frac{q}{3})$ もやはり $a = b$ を満たす。

検算

- $r = 0$ とおくと長方形の中心 $(\frac{p}{2}, \frac{q}{2})$ が得られ、$r = p$ とおくと三角形 ACD の重心 $(\frac{2p}{3}, \frac{q}{3})$ が得られる。
- $p = 1$、$q = 1.5$ のとき、公式から $r = 1.5 - \sqrt{0.75} \approx 0.634$ となり、このとき $a = b \approx 0.634$ であるから、確かに AG は AD と $45°$ をなす。もう一方の解 ≈ 2.37 は $p = 1$ を超える。
- 重心の公式については、ランダムに選んだ何千組もの p, q, r について、一般の多角形の重心公式とも照合した。

よくある間違い

- 三角形の重心を $(\frac{r}{3}, \frac{q}{3})$ としてしまう。三角形の頂点のうち 2 つは高さ q にあるので、重心の高さは $\frac{2q}{3}$ である。
- 三角形のモーメントを引くべきところで足してしまう。台形は長方形から三角形を引いたものである。
- 「r は小さくなければならない」という曖昧な理由でプラスの符号を捨ててしまう。本当の理由は $r \leq p$ であり、それには $q \geq p$ かどうかで場合分けした短い議論が必要である。

STEP のその先へ

引き算による質量中心（centre of mass）の計算は、$\iint x \, \mathrm{d}A / \iint \mathrm{d}A$ を計算することの離散版であり、大学では同じ考え方に二重積分（double integrals）を用いて、密度が一様でない薄板や立体について出会うことになる。つり下げの条件は、ある一般原理の最も簡単な場合である。すなわち、一点を支点とする剛体（rigid body）は、質量中心が支点の真下にあるとき、つまり位置エネルギー（potential energy）が最小となるときに安定平衡（stable equilibrium）にある。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、質量中心と剛体のつり合いを丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 2003、第 11 問

力学 ・ 斜面上での衝突

> **STEP I 2003、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q11

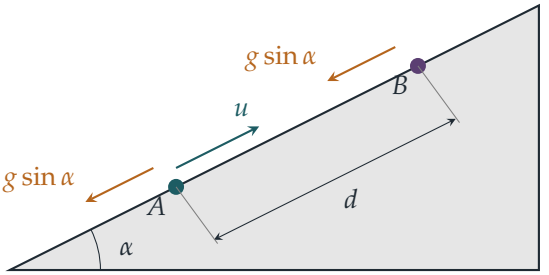
鍵となる考え方

滑らかな（smooth）斜面上では、どの粒子も速度によらず、最大傾斜線（line of greatest slope）に沿って下向きに同じ加速度 $g\sin\alpha$ をもつ。したがって重力は 2 つの粒子の**相対運動**（relative motion）を変えることができない。一方の粒子から見ると、もう一方は等速度で運動する。このおかげで衝突の時刻は容易に求まり、面倒な運動学の計算をせずに衝突時の相対速度もわかる。衝突による運動エネルギーの損失はこの相対速度だけで決まる。α、g、d がすべて答えから消えるのはそのためである。

解答

モデル

2 つの粒子を、A と B を通る最大傾斜線に沿って運動する質点（point mass）として扱う。斜面は滑らかなので、各粒子にはたらく力は重力と垂直抗力（normal reaction）だけである。斜面に垂直な方向に力を分解すると、垂直抗力は $mg\cos\alpha$ とつり合う。斜面に沿った方向に分解すると、各粒子は斜面下向きに加速度 $g\sin\alpha$ をもつ。A から斜面に沿って上向きに測った距離を x とする。



衝突の時刻

$a = g\sin\alpha$ とおく。斜面上向きを正とすると、A から出発する粒子（P とよぶ）と B から出発する粒子（Q とよぶ）の位置は

$$x_P = ut - \tfrac{1}{2}at^2,$$
$$x_Q = d - \tfrac{1}{2}at^2.$$

である。両者の間隔は

$$x_Q - x_P = d - ut,$$

となる。$\frac{1}{2}at^2$ の項が打ち消し合うからである。間隔は d から一定の割合で縮まり、ちょうど

$$t = \frac{d}{u},$$

のときに 0 になる。これが示すべきことであった。この打ち消し合いこそが鍵となる考え方のはたらきである。2 つの粒子は同じように斜面を落ちていくので、効いてくるのは最初の相対的な速さ u だけなのである。

運動エネルギーの損失

$t = d/u$ における斜面上向きの速度は

$$v_P = u - \frac{ad}{u}, \qquad v_Q = -\frac{ad}{u}.$$

である。簡単のため $w = ad/u$ とおく。すると $v_P = u - w$、$v_Q = -w$ であり、P は相対的な速さ $v_P - v_Q = u$ で Q に近づく。

> **考えてみよう**　重力がはたらいているのに、なぜ運動量保存則（conservation of momentum）を使ってよいのだろうか？

衝突は瞬間的に起こる。衝突のごく短い時間の間、有限の大きさの重力と垂直抗力が与える力積（impulse）は、粒子どうしの間にはたらく大きな力積に比べて無視できる。したがって衝突において、斜面に沿った方向の運動量は保存される。

衝突後の斜面上向きの速度を v'_P、v'_Q とする。質量が等しいので、運動量保存則より

$$v'_P + v'_Q = v_P + v_Q = u - 2w. \tag{1}$$

が成り立つ。ニュートン（Newton）の実験法則（Newton's experimental law）により、遠ざかる速さは近づく速さの e 倍である：

$$v'_Q - v'_P = e(v_P - v_Q) = eu. \tag{2}$$

v'_P と v'_Q を個別に求める代わりに、恒等式

$$p^2 + q^2 = \tfrac{1}{2}\left[(p+q)^2 + (p-q)^2\right].$$

を用いる。これを衝突の前後に適用すると、運動エネルギー（kinetic energy）の総和は

$$\text{衝突前の運動エネルギー} = \tfrac{1}{2}m\left(v_P^2 + v_Q^2\right) = \tfrac{1}{4}m\left[(u-2w)^2 + u^2\right],$$
$$\text{衝突後の運動エネルギー} = \tfrac{1}{2}m\left(v_P'^2 + v_Q'^2\right) = \tfrac{1}{4}m\left[(u-2w)^2 + e^2u^2\right],$$

となる。ここで衝突後の和と差には (1) と (2) を用いた。和の項は両者で等しいので

$$\text{運動エネルギーの損失} = \tfrac{1}{4}mu^2 - \tfrac{1}{4}me^2u^2 = \tfrac{1}{4}mu^2\left(1 - e^2\right),$$

となり、求める結果が得られた。

考えてみよう $(u-2w)^2$ の項は物理的に何を表し、なぜ変化しないのだろうか？

$v_P + v_Q$ の半分は重心（centre of mass）の速度である。項 $\frac{1}{4}m(u-2w)^2$ は、全質量 $2m$ がその速度で運動するときの運動エネルギーであり、運動量保存則によって一定に保たれる。失われうるのは重心に対する相対運動の運動エネルギーだけであり、それは相対的な速さ、すなわち衝突前の u と衝突後の eu だけで決まる。

検算

- $e = 1$（完全弾性（perfectly elastic））ならば損失は 0 であり、当然そうなるべき結果である。$e = 0$ ならば衝突後に 2 つの粒子は一体となって運動し、損失は相対運動の運動エネルギー全体である $\frac{1}{4}mu^2$ になる。
- $\alpha = 0$ ならば斜面は水平で、Q は静止したままであり、P は時間 d/u 後に速さ u で Q に達する。これも結果と一致する。
- 数値で確かめる。$\alpha = 30°$、$g = 9.8$、$d = 2$、$u = 4$、$e = \frac{1}{2}$、$m = 1$ とすると、$t = 0.5$ における速度は 1.55 と -2.45 である。衝突後はそれぞれ -1.45 と 0.55 になり、運動エネルギーは 4.2025 から 1.2025 に減る。損失は 3 で、これは $\frac{1}{4}\cdot 16 \cdot \frac{3}{4}$ に等しい。運動を数値的に追跡した 1000 通りのランダムな検証でも一致した。

よくある間違い

- 衝突時の Q の速度を 0 としてしまう。P が減速してきたのと同じく、Q も時間 d/u の間斜面を滑り下りてきている。
- ニュートンの法則で符号を間違える。2 つの速度を同じ正の向きで書き、そのうえで遠ざかる速さ $= e \times$ 近づく速さとすること。
- v'_P と v'_Q を完全に求めてから 4 つの平方を展開してしまう。それでも解けるが、和と差の恒等式を使えば計算のほとんどを省ける。

STEP のその先へ

どちらの小問も、重心系への変換の例になっている。一様な重力場はすべての粒子に同じ加速度を与えるので、相対運動からは完全に消える。また、どんな系の運動エネルギーも、重心の運動エネルギーと重心に対する相対運動の運動エネルギーの和に分解される（ケーニッヒの定理（König's theorem））。2 体問題では後者は $\frac{1}{2}\mu v_{\text{rel}}^2$ であり、$\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ は換算質量（reduced mass）で、ここでは $\frac{1}{2}m$ である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この 2 つの考え方を丁寧に展開している。

解答例

STEP I 2003、第 12 問

確率・統計 ・ 積の期待値

> **STEP I 2003、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q12

鍵となる考え方

期待値（expected value）は、等しい確率で起こるすべての結果にわたる（値 × 確率）の和である。したがって、どちらの小問も、数の順序対を列挙してその積を足し合わせることに帰着する。二重和 $\sum_r \sum_s rs$ は $\left(\sum r\right)^2$ と因数分解でき、小問 (i) はこれに尽きる。小問 (ii) で変わるのは、$r = s$ となる対がもはや起こり得ないという点だけなので、同じ二重和から対角成分を取り除けばよい。

解答

1 個目の玉の数を X、2 個目の玉の数を Y とする。

小問 (i)

1 個目の玉は袋に戻されるので、2 回目は再び玉がすべてそろった袋から取り出され、1 回目の結果には依存しない。よって、任意の $r, s \in \{1, \ldots, n\}$ に対して

$$\mathrm{P}(X = r,\ Y = s) = \mathrm{P}(X = r)\,\mathrm{P}(Y = s) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}.$$

このような順序対 (r, s) は n^2 個あり、それぞれ積 rs を与えるので、期待値の定義より

$$\mathrm{E}(XY) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} rs\,\mathrm{P}(X = r,\ Y = s) = \frac{1}{n^2} \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} rs,$$

となる。これが説明を求められていた式である。

これを簡単にするために、r は s に依存しないので内側の和の外に出せることに注意

する：

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} rs = \sum_{r=1}^{n} r\Big(\sum_{s=1}^{n} s\Big) = \Big(\sum_{r=1}^{n} r\Big)^2 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

したがって

$$\mathrm{E}(XY) = \frac{(n+1)^2}{4}.$$

（同じことであるが、X と Y は独立（independent）なので、$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ である。）

小問 (ii)

玉を 2 個取り出すためには $n \geq 2$ が必要である。今度は 1 個目の玉を戻さないので、起こり得る結果は $r \neq s$ を満たす順序対 (r, s) である。このような対に対して

$$\mathrm{P}(X = r,\ Y = s) = \mathrm{P}(X = r)\,\mathrm{P}(Y = s \mid X = r) = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1},$$

となる。玉 r が取り除かれた後、2 個目の玉は残りの $n-1$ 個のどれもが等しい確率で出るからである。このような対は $n(n-1)$ 個あってすべて同様に確からしく、$r = s$ となる対の確率は 0 である。よって

$$\mathrm{E}(XY) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{r\neq s} rs.$$

考えてみよう $r \neq s$ となる対だけにわたって rs を足し合わせるにはどうすればよいか？

小問 (i) で求めた**すべての**対にわたる和をとり、そこから $r\cdot r = r^2$ を与える対角項 $r = s$ を引けばよい：

$$\sum_{r\neq s} rs = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} rs - \sum_{r=1}^{n} r^2 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

共通因数 $\frac{1}{12}n(n+1)$ をくくり出すと

$$\begin{aligned}\sum_{r\neq s} rs &= \tfrac{1}{12}n(n+1)\big[3n(n+1) - 2(2n+1)\big]\\ &= \tfrac{1}{12}n(n+1)\big(3n^2 - n - 2\big)\\ &= \tfrac{1}{12}n(n+1)(n-1)(3n+2).\end{aligned}$$

$n \geq 2$ より 0 でない $n(n-1)$ で割ると

$$\mathrm{E}(XY) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12},$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

$n = 3$ とする。復元抽出（with replacement）では、9 個の積の平均は $\frac{1}{9}(1+2+3)^2 = 4$ であり、$\frac{(3+1)^2}{4} = 4$ と一致する。非復元抽出（without replacement）では、順序を考えない対 $\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$ が積 $2,3,6$ を与え、その平均は $\frac{11}{3}$ であり、$\frac{4\cdot 11}{12} = \frac{11}{3}$ と一致する。$n = 2$ のとき、非復元抽出で得られる積は 2 のみであり、公式は $\frac{3\cdot 8}{12} = 2$ を与える。さらに、12 以下のすべての n について、正確な数え上げによって両方の公式を確認した。

二つの答えを比べることも、よい妥当性の確認になる：

$$\frac{(n+1)(3n+2)}{12} - \frac{(n+1)^2}{4} = -\frac{n+1}{12} < 0.$$

非復元抽出のほうが答えが小さい。これは納得がいく。$n \cdot n$ のような大きな対角成分の積が失われているからである。

よくある間違い

- 小問 (ii) で n^2 で割ってしまう。起こり得る順序対は $n(n-1)$ 個しかなく、それぞれの確率は $\frac{1}{n(n-1)}$ である。
- 和には順序を考えない対を使い、個数には順序対を使う（あるいはその逆）。順序を考えない対にわたって和をとると、和と個数がともに半分になるので比は変わらないが、両者を混同すると 2 倍ずれる。
- 小問 (ii) で $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$ と書いてしまう。これには独立性が必要であり、玉を戻さない場合 X と Y は独立ではない。

STEP のその先へ

ここで求めた差は、ちょうど共分散（covariance）$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = -\frac{n+1}{12}$ である。これが負になるのは、1 個目の数が大きいと、2 個目の数が大きくなる可能性がわずかに下がるからである。このような共分散は、非復元抽出における和の分散を求めるのに必要となるものであり、そこから超幾何分布（hypergeometric distribution）の分散や、標本調査で用いられる「有限母集団修正」（finite population correction）へとつながっていく。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）では、まさにこの種の共分散と指示変数（indicator）の手法が展開されている。

解答例

STEP I 2003、第 13 問

確率・統計 ・ 幾何分布の期待値

> **STEP I 2003、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q13

鍵となる考え方

前半では、各チームのゴール数ではなく**失敗**の回数を数える。各チームが 5 本ずつ蹴り終えた時点で両チームが同点であるのは、失敗の回数が等しいときであり、そのときに限る。期待値については、サドンデス（sudden death）の段階が 2 本 1 組の「ラウンド」で進み、各ラウンドが同じ確率で PK 戦（shoot-out）を終わらせる独立な試行であることに注目する。したがってラウンド数は幾何分布（geometric distribution）に従い、キック数の期待値は「必ず蹴る 10 本」と「追加の本数に、それが必要になる確率を掛けたもの」の和に分解される。

解答

モデルの意図どおり、すべてのキックは互いに独立であり、チーム A は常に確率 p_A で、チーム B は常に確率 p_B で得点すると仮定する。$q_A = 1 - p_A$、$q_B = 1 - p_B$ とおく。

10 本終了時に同点である確率 α

チーム A が最初の 5 本のうち失敗する本数を X、チーム B が失敗する本数を Y とする。各チームの 5 本のキックは失敗確率の等しい独立な試行であるから

$$X \sim \mathrm{B}(5, q_A), \qquad Y \sim \mathrm{B}(5, q_B),$$

であり、両チームのキックが独立であるから X と Y も独立である。

チーム A のゴール数は $5 - X$、チーム B のゴール数は $5 - Y$ であるから、同点となるのは $X = Y$ のときであり、そのときに限る。$i = 0, 1, \ldots, 5$ に対する事象 $\{X = Y = i\}$

は互いに排反であるから

$$\begin{aligned}\alpha = \mathrm{P}(X=Y) &= \sum_{i=0}^{5} \mathrm{P}(X=i)\,\mathrm{P}(Y=i)\\ &= \sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} q_A^i p_A^{5-i} \binom{5}{i} q_B^i p_B^{5-i}\\ &= \sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i}^2 (1-p_A)^i (1-p_B)^i\, p_A^{5-i} p_B^{5-i},\end{aligned}$$

となり、これが求める式である。（代わりにゴール数を数え、両チームとも $5-i$ ゴールとしても、$\binom{5}{i} = \binom{5}{5-i}$ であるから同じ和が得られる。）

キック数の期待値

10 本終了時にまだ同点であれば、サドンデスの段階は**ラウンド**ごとに進む。各ラウンドでは A が 1 本、B が 1 本蹴る。2 本のうちちょうど 1 本が決まったときにそのラウンドで決着がつき、その確率は

$$p_A q_B + q_A p_B = p_A(1-p_B) + p_B(1-p_A) = p_A + p_B - 2p_A p_B = \beta.$$

である。そうでなければ（両方とも決めるか、両方とも外せば）次のラウンドが行われる。$\beta > 0$ である必要があり、つまり、どのラウンドでも決着がつき得ない自明な場合 $p_A = p_B = 0$ および $p_A = p_B = 1$ は除外する。

考えてみよう なぜ PK 戦はラウンドの途中で終わることがないのか。

ルールでは、一方が得点し他方が得点していないとき、両チームは同じ本数を蹴り終えていなければならない。A が外しても、B は自分のキックを蹴らなければならない（B も外すかもしれない）。したがってサドンデスのキックは常に 2 本 1 組であり、総数は $10 + 2R$ となる。ここで R は行われたラウンド数である（最初の 10 本で決着がつけば $R = 0$）。

サドンデスに入ったという条件のもとでは、各ラウンドは確率 β で決着がつく独立な試行であるから、R は幾何分布に従う：

$$\mathrm{P}(R = k \mid 10\text{本終了時に同点}) = (1-\beta)^{k-1}\beta, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

その平均は

$$\mathrm{E}(R \mid 10\text{本終了時に同点}) = \sum_{k=1}^{\infty} k\beta(1-\beta)^{k-1} = \beta \cdot \frac{1}{\big(1-(1-\beta)\big)^2} = \frac{1}{\beta},$$

である。ここで $|x| < 1$ に対する $\sum_{k\geq 1} k x^{k-1} = (1-x)^{-2}$ を用いた。$0 < \beta \leq 1$ であるからこれは適用できる。

最初の 10 本で決着がつけば $R = 0$ である。10 本終了時に同点かどうかで条件付けると

$$\mathrm{E}(R) = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} + (1-\alpha)\cdot 0 = \frac{\alpha}{\beta}.$$

よって、キック数の期待値は

$$\mathrm{E}(10 + 2R) = 10 + \frac{2\alpha}{\beta},$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

- 互角のチームで $p_A = p_B = \frac{1}{2}$ の場合：ヴァンデルモンドの恒等式（Vandermonde's identity）により $\sum_i \binom{5}{i}^2 = \binom{10}{5} = 252$ であるから、$\alpha = 252/2^{10} = \frac{63}{256}$、また $\beta = \frac{1}{2}$ である。キック数の期待値は $10 + \frac{63}{64} = \frac{703}{64} \approx 10.98$ となる。
- 一方のチームが完璧で他方がまったく決められない場合（$p_A = 1$、$p_B = 0$）、$\alpha = 0$ となる（残り得るのは $i = 0$ の項だけであり、それは $p_B^5 = 0$ を含む）。したがってキックはちょうど 10 本であり、常識と合致する。
- α の式を最初の 10 本の全 2^{10} 通りの結果の直接列挙と照合し、$10 + 2\alpha/\beta$ を 2×10^5 回の PK 戦のシミュレーションと照合した。$p_A = \frac{3}{4}$、$p_B = \frac{2}{3}$ のとき、公式は 11.264、シミュレーションは 11.25 を与えた。

よくある間違い

- β を A がラウンドに勝つ確率 $p_A(1 - p_B)$ としてしまう。PK 戦はどちらか一方のチームがラウンドに勝てば終わる。
- サドンデスが起こるのは確率 α のときだけであることを忘れ、答えを $10 + 2/\beta$ としてしまう。
- サドンデスの 1 段階あたりのキックを 2 本ではなく 1 本と数えてしまう。

STEP のその先へ

$\mathrm{E}(R) = \alpha\,\mathrm{E}(R \mid \text{同点}) + (1-\alpha)\,\mathrm{E}(R \mid \text{同点でない})$ という段階は全期待値の法則（law of total expectation）であり、大学 1 年の確率論で最も有用な道具の一つである。また、サドンデスの段階は吸収状態（absorbing state）をもつ単純なマルコフ連鎖（Markov chain）でもあり、ここでの「吸収までの期待時間」の計算はランダムウォーク（random

walk）や破産問題（gambler's ruin）へと一般化される。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、条件付き期待値とこれらの連鎖の両方を扱っている。

解答例

STEP I 2003、第 14 問

確率・統計　・　ポアソン分布

> **STEP I 2003、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q14

鍵となる考え方

Jane が会う友人の人数は、電話をかけてきた友人の人数そのものではなく、その人数を 2 で打ち切ったものである。打ち切った変数で問題になるのは三つの場合だけである。誰も電話をかけてこない場合、ちょうど一人がかけてくる場合、二人以上がかけてくる場合である。したがって、ポアソン分布（Poisson distribution）の級数全体を和として計算する必要はない。$P(0)$ と $P(1)$ さえ求めれば、「二人以上」の確率は残りの確率として得られる。新しい友人については、その友人が電話をかけてくるかどうかで条件付け（conditioning）を行う。

解答

もとからの友人

ある日に電話をかけてくる友人の人数を N とする。すると $N \sim \mathrm{Po}(2)$ であり、

$$P(N=k) = \frac{\mathrm{e}^{-2}2^k}{k!}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

である。Jane が会う友人の人数は $S = \min(N,2)$ である。すなわち、$N=0$ のとき $S=0$、$N=1$ のとき $S=1$、$N \geq 2$ のとき $S=2$ である。ここで

$$P(N=0) = \mathrm{e}^{-2}, \qquad P(N=1) = 2\mathrm{e}^{-2}, \qquad P(N \geq 2) = 1 - 3\mathrm{e}^{-2},$$

であるから、

$$\mathrm{E}(S) = 0 \cdot \mathrm{e}^{-2} + 1 \cdot 2\mathrm{e}^{-2} + 2\left(1 - 3\mathrm{e}^{-2}\right) = 2 - 4\mathrm{e}^{-2},$$

となり、求める結果が得られた。

同じ計算をもっとすっきり書く方法があり、以下でも再び用いる。$\{0,1,2,\dots\}$ に値をとる任意の確率変数（random variable）X に対して

$$\mathrm{E}\big(\min(X,2)\big) = 2 - 2P(X=0) - P(X=1),$$

が成り立つ。なぜなら、$\min(X,2)$ は $X=0$ のとき 2 より 2 だけ小さく、$X=1$ のとき 1 だけ小さく、それ以外のときは 2 に等しいからである。$X=N$ とすると、再び $2-2\mathrm{e}^{-2}-2\mathrm{e}^{-2}$ が得られる。

新しい友人が加わった場合

新しい友人が電話をかけてくるとき $B=1$、そうでないとき $B=0$ とする。すると $P(B=1)=p$ である。問題文により、B は N と独立（independent）である。電話をかけてくる人数の合計は $M=N+B$ となり、Jane が会う友人の人数は $\min(M,2)$ である。

> **考えてみよう** M の分布全体が必要だろうか？

必要ない。上の恒等式により、$P(M=0)$ と $P(M=1)$ だけがあればよい。独立性を用いて確率を掛け合わせると、

$$P(M=0) = P(N=0)\,P(B=0) = (1-p)\mathrm{e}^{-2},$$
$$P(M=1) = P(N=1)\,P(B=0) + P(N=0)\,P(B=1) = 2(1-p)\mathrm{e}^{-2} + p\,\mathrm{e}^{-2}.$$

よって

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\big(\min(M,2)\big) &= 2 - 2(1-p)\mathrm{e}^{-2} - 2(1-p)\mathrm{e}^{-2} - p\,\mathrm{e}^{-2} \\ &= 2 - (4-3p)\mathrm{e}^{-2}.\end{aligned}$$

別解として、B で条件付けてもよい。新しい友人が電話をかけてこない場合（確率 $1-p$）、平均は先ほどと同じく $2-4\mathrm{e}^{-2}$ である。電話をかけてくる場合（確率 p）、Jane が会う人数は $\min(N+1,2)$ であり、これは $N=0$ のとき 1、それ以外のとき 2 であるから、その平均は $\mathrm{e}^{-2}+2(1-\mathrm{e}^{-2}) = 2-\mathrm{e}^{-2}$ である。したがって平均は

$$(1-p)(2-4\mathrm{e}^{-2}) + p(2-\mathrm{e}^{-2}) = 2-(4-3p)\mathrm{e}^{-2}.$$

となる。以上より、Jane が一日に会う友人の人数は平均して $2-(4-3p)\mathrm{e}^{-2}$ 人となり、$3p\,\mathrm{e}^{-2}$ だけ増加する。

検算

- $p=0$ のとき、新しい友人は決して電話をかけてこないので、$2-4\mathrm{e}^{-2} \approx 1.4587$ に戻る。

- $p = 1$ のとき、$2 - e^{-2} \approx 1.8647$ となり、これは当然そうあるべきとおり $\min(N+1, 2)$ の平均に一致する。
- 答えは p について増加し、常に 2 より小さい。これは理にかなっている。
- 正確な分布に対して $\min(k+b, 2)$ の和をとった場合も、$p = 0.3$ として 4×10^5 日分のシミュレーションを行った場合も、どちらも約 1.580 となり、$2 - 3.1e^{-2}$ と一致する。

よくある間違い

- 二人という上限を忘れて、$E(N) = 2$ や $2 + p$ と答えてしまう。
- $N + B$ をポアソン分布に従うものとして扱ってしまう。ベルヌーイ（Bernoulli）変数はポアソン分布に従わないので、その和もポアソン分布には従わない。
- ちょうど一人が電話をかけてくる二通りの場合（もとからの友人一人がかけてきて新しい友人はかけてこない場合と、もとからの友人は誰もかけてこず新しい友人がかけてくる場合）のうち、一方を見落としてしまう。

STEP のその先へ

恒等式 $E(\min(X, 2)) = P(X \geq 1) + P(X \geq 2)$ は、非負整数値をとる確率変数に対する裾和公式（tail-sum formula）$E(X) = \sum_{k \geq 1} P(X \geq k)$ の特別な場合である。これは生存関数（survival function）を積分することの離散版である。このような打ち切られた期待値（expectation）は、待ち行列（queueing）モデルや在庫（inventory）モデルに現れ、処理能力に限りがあるときにサービスを受ける客の人数の期待値を与える。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、ここで用いた二つの道具である裾和公式と条件付き期待値（conditional expectation）が扱われている。

解答例

STEP II 2003、第 1 問

純粋数学 ・ 連立 1 次方程式

> **STEP II 2003、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q1

鍵となる考え方

未知数 x は常に ax の形でしか現れず、y はどの方程式でも係数 -1 で現れる。したがって隣り合う方程式どうしを引くと y は完全に消え、得られる二つの差の式は左辺が同じになる。そのため、連立方程式（system of equations）が解をもつ（consistent）のは b がただ一つの値をとるときに限られ、解をもつ場合には自由なパラメータ（parameter）が一つ残る。問題の残りの部分は、そのパラメータをうまく選ぶことに尽きる。

解答

方程式に (1), (2), (3) と番号をつける。(2) から (1) を、(3) から (2) を引くと

$$ax - 2z = 4, \tag{A}$$

$$ax - 2z = b - 7. \tag{B}$$

を得る。連立方程式の解はどれも (A) と (B) の両方を満たすから、解が存在しうるのは $4 = b - 7$、すなわち $b = 11$ のときだけである。これは a の値によらず成り立つ。

小問 (i)

$a = 0$ のとき、方程式は $-y - z = 3$, $-y - 3z = 7$, $-y - 5z = b$ となり、x はまったく現れない。

解が存在するならば、上の注意により $b = 11$ である。

逆に $b = 11$ とする。このとき (A) は $-2z = 4$ となるので $z = -2$ であり、(1) から

$y = -3 - z = -1$ を得る。$y = -1, z = -2$ を三つの方程式すべてに代入して確かめると

$$1 + 2 = 3, \qquad 1 + 6 = 7, \qquad 1 + 10 = 11 = b,$$

となるので、(x が何であっても) 解が得られる。よって、方程式が解をもつのは $b = 11$ のとき、かつそのときに限る。

小問 (ii)

今度は $a \neq 0$ かつ $b = 11$ とする。$z = \lambda$ とおく。(A) から $ax = 4 + 2\lambda$ であり、$a \neq 0$ なので両辺を a で割ることができて

$$x = \frac{4 + 2\lambda}{a}.$$

となる。すると (1) から $y = ax - z - 3 = 4 + 2\lambda - \lambda - 3 = 1 + \lambda$ を得る。

これらの値は (1) と (2) だけを使って求めたので、(3) も満たすことを確かめなければならない：

$$3ax - y - 5z = 3(4 + 2\lambda) - (1 + \lambda) - 5\lambda = 12 + 6\lambda - 1 - 6\lambda = 11 = b.$$

したがって、任意の数 λ に対して

$$x = \frac{4 + 2\lambda}{a}, \qquad y = 1 + \lambda, \qquad z = \lambda$$

は $z = \lambda$ を満たす解であり、これが求めるものである。(実はこれらが解の**すべて**である。どの解についても z はある値 λ をとり、上の計算により x と y は決まってしまうからである。)

考えてみよう なぜ方程式 (3) を別に確かめなければならないのだろうか。

x と y を求めるのに使ったのは (1) と (2)（(1) と (A) の形で）である。三つの未知数に関する三つの方程式は、自動的につじつまが合うわけではなく、b が関わってくるのはまさに (3) である。$b = 11$ が使われるのはこの確認の部分である。

小問 (iii)

$a = 2$ のとき、小問 (ii) により解はすべて $(x, y, z) = (2 + \lambda, 1 + \lambda, \lambda)$ と表される。このとき

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (2 + \lambda)^2 + (1 + \lambda)^2 + \lambda^2 \\ &= 3\lambda^2 + 6\lambda + 5 \\ &= 3(\lambda + 1)^2 + 2, \end{aligned}$$

であり、これが最小値 2 をとるのはちょうど $\lambda = -1$ のときである。よって求める解は

$$x = 1, \qquad y = 0, \qquad z = -1.$$

である。幾何学的には、解全体は方向 $(1,1,1)$ の直線をなし、ここで求めているのはその直線上で原点に最も近い点である。実際 $(1,0,-1)\cdot(1,1,1) = 0$ なので、この点の位置ベクトル（position vector）は直線に垂直であり、当然そうなるべきである。

小問 (iv)

冒頭の注意により b は 11 でなければならない。$a = 0$ ならば、小問 (i) により $y = -1$, $z = -2$ となり、$y^2 + z^2 = 5$ で大きすぎる。よって $a \neq 0$ であり、小問 (ii) により解は $x = (4 + 2\lambda)/a, y = 1 + \lambda, z = \lambda$ である。

> **考えてみよう** y と z が小さいままで、どうして x を非常に大きくできるのだろうか。

a が現れるのは $x = (4 + 2\lambda)/a$ の中だけである。λ を選ぶと y と z が定まり、そのうえで a を十分小さくとれば x をいくらでも大きくできる。

$y^2 + z^2 = (1 + \lambda)^2 + \lambda^2 = 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 < 1$、すなわち $2\lambda(\lambda + 1) < 0$、すなわち $-1 < \lambda < 0$ が必要である。$\lambda = -\frac{1}{2}$ とすると、$y = \frac{1}{2}, z = -\frac{1}{2}$ で $y^2 + z^2 = \frac{1}{2} < 1$ となり、一方 $x = 3/a$ である。

$$a = 10^{-6}$$

と選べば $x = 3 \times 10^6 > 10^6$ となる。したがって $a = 10^{-6}$（ただし $b = 11$）とすればよい。

より一般に、$-1 < \lambda < 0$ のとき $2 < 4 + 2\lambda < 4$ であるから、条件を満たす解が存在するのはちょうど $0 < a < 4 \times 10^{-6}$ のときである。a が負のときは $x < 0$ となるので条件を満たさない。

検算

- $a = 2, (x,y,z) = (1,0,-1)$ を元の方程式に代入すると、$2 - 0 + 1 = 3, 4 - 0 + 3 = 7, 6 - 0 + 5 = 11$ となる。
- 小問 (iv) について、$a = 10^{-6}, (x,y,z) = (3 \times 10^6, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ のとき、$3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3, 6 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 7, 9 - \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 11$ となる。
- 無作為に選んだ数百組の a と λ について、小問 (ii) の式が三つの方程式すべてを満たすことを厳密な分数計算で確かめた。また、λ についての格子探索により、小問 (iii) で $\lambda = -1$ のとき最小値 2 をとることも確認した。

よくある間違い

- 二つの方程式から x と y を求め、三つ目の方程式の確認を忘れる。
- 小問 (iv) で、y と z は「両方同時には小さくできない」として不可能だと決めつける。実際にはできる。$y - z = 1$ から導かれるのは $y^2 + z^2 \geq \frac{1}{2}$ だけである。

STEP のその先へ

これは線形代数における階数（rank）と解の存在（consistency）への最初の入り口である。ここでの係数行列（coefficient matrix）は正則でない（singular）（その行は $r_1 - 2r_2 + r_3 = 0$ を満たす）ので、右辺が同じ関係式を満たすかどうかに応じて、連立方程式は解をまったくもたないか、直線一本分の解をもつかのどちらかになる。小問 (iv) は、正則に近い行列ではなく特異に近い（nearly singular）連立方程式が数値計算でなぜ危険なのかも示している。わずかな係数 a が莫大な解を生み出してしまうのである。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、小問 (iii) のような最小ノルム解（least-norm solution）も含めて、これらすべてを扱っている。

解答例

STEP II 2003、第 2 問

純粋数学 ・ 逆三角関数

> **STEP II 2003、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q2

鍵となる考え方

式 $a\cos\theta + b\sin\theta$ は、つねに 1 つのコサイン $R\cos(\theta - \alpha)$ の形に書き直せる。そうすると方程式は arccos に関する主張に変わり、一方で α そのものは arctan で表される。したがって、きれいな解 θ が見つかれば、π についての恒等式（identity）は「$\theta = (\theta - \alpha) + \alpha$」を書き換えたものにすぎない。本当に注意が必要なのは、それぞれの角が、用いる逆関数（inverse function）の値域（range）に入っているかを確かめる点だけである。

解答

第 1 の恒等式

$(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ に含まれるわかりやすい角を試してみる。$\theta = \frac{1}{3}\pi$ とすると

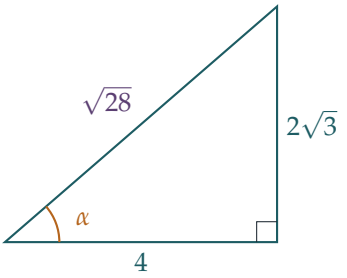
$$4\cos\tfrac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}\,\sin\tfrac{\pi}{3} = 4\cdot\tfrac{1}{2} + 2\sqrt{3}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = 2 + 3 = 5,$$

となるので、$\theta = \frac{1}{3}\pi$ は解であり、しかも $\frac{1}{4}\pi < \frac{1}{3}\pi < \frac{1}{2}\pi$ である。

次に、左辺を $R\cos(\theta - \alpha) = R\cos\theta\cos\alpha + R\sin\theta\sin\alpha$ の形に書く。係数を比較すると

$$R\cos\alpha = 4, \qquad R\sin\alpha = 2\sqrt{3},$$

であるから、$R^2 = 16 + 12 = 28$ より $R = \sqrt{28}$ であり、$\tan\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。$\cos\alpha$ と $\sin\alpha$ はともに正なので、α は鋭角にとってよく、$\alpha = \arctan(\sqrt{3}/2)$ となる。



したがって、方程式は

$$\sqrt{28}\cos(\theta-\alpha)=5,\qquad \text{すなわち}\qquad \cos(\theta-\alpha)=\frac{5}{\sqrt{28}},$$

となり、これは $\theta=\frac{1}{3}\pi$ で成り立つ。

考えてみよう ただちに $\frac{1}{3}\pi-\alpha=\arccos(5/\sqrt{28})$ と結論してよいだろうか？

そうとは限らない。$\cos x=c$ には多くの解があり、$\arccos c$ はそのうち $[0,\pi]$ に属するものだけである。よって、$\frac{1}{3}\pi-\alpha$ が $[0,\pi]$ に属することを確かめなければならない。tan は $(0,\frac{1}{2}\pi)$ で単調増加（increasing）であり、$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}<\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{3}$ であるから、$0<\alpha<\frac{1}{3}\pi$ が成り立つ。ゆえに

$$0<\tfrac{1}{3}\pi-\alpha<\tfrac{1}{3}\pi\le\pi,$$

であり、$\frac{1}{3}\pi-\alpha=\arccos(5/\sqrt{28})$ となる。移項して 3 倍すると

$$\pi=3\arccos(5/\sqrt{28})+3\alpha=3\arccos(5/\sqrt{28})+3\arctan(\sqrt{3}/2),$$

となり、示すべき式が得られた。

第 2 の恒等式

同じ考え方をなぞる。示したいのは $\frac{1}{4}\pi=\arcsin(7\sqrt{2}/10)-\arctan(3/4)$ であるから、$\beta=\arctan(3/4)$ とおいて $\sin(\frac{1}{4}\pi+\beta)$ を調べる。

$0<\frac{3}{4}$ であるから β は鋭角であり、3–4–5 の直角三角形から $\sin\beta=\frac{3}{5}$、$\cos\beta=\frac{4}{5}$ である。すると、加法定理（addition formula）により

$$\begin{aligned}\sin\left(\tfrac{1}{4}\pi+\beta\right)&=\sin\tfrac{\pi}{4}\cos\beta+\cos\tfrac{\pi}{4}\sin\beta\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\right)=\frac{7}{5\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}.\end{aligned}$$

考えてみよう $\frac{1}{4}\pi+\beta$ は本当に arcsin が返す角だろうか？

arcsin の値域は $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ なので、$\frac{1}{4}\pi+\beta$ がその中に入っている必要がある。$\tan\beta = \frac{3}{4} < 1 = \tan\frac{\pi}{4}$ であり、tan は $(0, \frac{1}{2}\pi)$ で単調増加であるから、$0 < \beta < \frac{1}{4}\pi$ となる。よって

$$\frac{1}{4}\pi < \frac{1}{4}\pi+\beta < \frac{1}{2}\pi.$$

ゆえに $\arcsin(7\sqrt{2}/10) = \frac{1}{4}\pi + \arctan(3/4)$ であり、4 倍して移項すると

$$\pi = 4\arcsin(7\sqrt{2}/10) - 4\arctan(3/4),$$

となる。これが求める結果である。

検算

数値的には、$\arctan(\sqrt{3}/2) \approx 0.713724$、$\arccos(5/\sqrt{28}) \approx 0.333473$ であり、その和は $1.047198 \approx \pi/3$、その 3 倍は 3.141593 である。第 2 の恒等式については、$\arcsin(7\sqrt{2}/10) \approx 1.428899$、$\arctan(3/4) \approx 0.643501$ であり、その差は $0.785398 \approx \pi/4$ である。また、ざっと調べると、$\frac{1}{3}\pi$ が $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ における方程式の唯一の解であることもわかる。その付近にあるもう 1 つの解 $\alpha - \arccos(5/\sqrt{28}) \approx 0.380$ は $\frac{1}{4}\pi$ より小さい。

よくある間違い

- $x \in [0, \pi]$ を確かめずに $\arccos(\cos x) = x$ と書いてしまう（あるいは $x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ を確かめずに $\arcsin(\sin x) = x$ と書いてしまう）。厳密さに対する配点はまさにこの部分にある。
- $\tan\alpha$ の分子と分母を逆にしてしまう。$R\cos\alpha = 4$、$R\sin\alpha = 2\sqrt{3}$ から得られるのは $\tan\alpha = 2\sqrt{3}/4$ であって、$4/(2\sqrt{3})$ ではない。

STEP のその先へ

π を逆正接の組合せで表す恒等式は、$\frac{1}{4}\pi = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$ のようなマチン（Machin）型の公式の基礎である。x が小さいとき $\arctan x$ の級数（series）は速く収束（converge）するため、これらの公式は π を多くの桁まで計算するのに用いられてきた。これらを見通しよく理解するには複素数（complex number）を使うとよい。$\arctan(b/a)$ は $a+b\mathrm{i}$ の偏角（argument）であるから、逆正接を足し合わせることは複

素数を掛け合わせることに対応する。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、この幾何学的な見方を見事に展開している。

解答例

STEP II 2003、第 3 問

純粋数学 • 無理数と数学的帰納法

STEP II 2003、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/03-s2-q3

鍵となる考え方

無理数（irrational number）であるという性質は「〜でない」という性質なので、自然な道具は対偶（contrapositive）である。すなわち、無理数の立方根が無理数であることを示す代わりに、立方根が有理数（rational number）ならばもとの数そのものも有理数でなければならないことを示す。この一つの事実が数学的帰納法（induction）を動かす原動力になる。なぜなら、各 u_{n+1} は u_n の立方根だからである。最後の小問では、$u_n \to 1$ に注目し、数列全体を整数だけずらす。こうしても各項は無理数のままである。

解答

無理数の立方根

x を実数とし、$y = \sqrt[3]{x}$ をその実数の立方根とする。したがって $y^3 = x$ である。対偶、すなわち「y が有理数ならば x は有理数である」を証明する。

p, q を整数、$q \neq 0$ として $y = \dfrac{p}{q}$ と仮定する。このとき

$$x = y^3 = \frac{p^3}{q^3},$$

であり、p^3 と q^3 は整数で $q^3 \neq 0$ である。よって x は二つの整数の比、すなわち有理数である。

したがって、有理数の立方根は有理数からしか生じない。同値な言い方をすれば、x が無理数ならば $\sqrt[3]{x}$ は有理数になりえず、ゆえに無理数である。これが証明すべきこと

であった。

考えてみよう なぜ命題を直接攻めないのか？

直接的な方針では「x は整数の比ではない」から出発することになるが、これでは具体的に計算する材料が何もない。対偶なら「$y = p/q$」から出発するので、扱える整数が手に入り、証明は一行で済む。仮定が何かが有理数で**ない**と述べているときは、対偶や背理法（proof by contradiction）を試してみる価値がある。

数学的帰納法

$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n$ であるから、指数法則（laws of indices）により

$$u_{n+1} = 5^{1/3^{n+1}} = \left(5^{1/3^n}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{u_n}.$$

となる。よって各項は一つ前の項の立方根である。

基底段階。 $u_1 = 5^{1/3} = \sqrt[3]{5}$ であり、これは無理数であると与えられている。

帰納段階。 ある正の整数 k について u_k が無理数であると仮定する。このとき $u_{k+1} = \sqrt[3]{u_k}$ は無理数の立方根であるから、最初の小問により無理数である。

ゆえに、数学的帰納法により、すべての正の整数 n について u_n は無理数である。

m に収束する数列

まず u_n の極限を求める。対数をとると

$$\ln u_n = \frac{\ln 5}{3^n} \to 0 \quad \text{ただし} n \to \infty,$$

であり、指数関数は連続（continuous）であるから、$u_n = \mathrm{e}^{\ln u_n} \to \mathrm{e}^0 = 1$ となる。また $\ln u_n > 0$ であるから、すべての n について $u_n > 1$ であり、各項は 1 に向かって減少する：

$$u_1 \approx 1.710, \quad u_2 \approx 1.196, \quad u_3 \approx 1.061, \quad u_4 \approx 1.020, \ldots$$

考えてみよう 無理数であることを損なわずに、極限を 1 から m へ移すにはどうすればよいか？

無理数に整数を加えると無理数になる。実際、a が整数で $u + a = r$ が有理数であったとすると、有理数どうしの差は有理数であるから、$u = r - a$ も有理数になってしまう。

そこで、与えられた整数 m に対して

$$a_n = u_n + m - 1 = 5^{1/3^n} + m - 1.$$

と定める。$m-1$ は整数で u_n は無理数であるから、各 a_n は無理数であり、

$$a_n \to 1 + m - 1 = m \quad \text{ただし} n \to \infty.$$

となる。よって (a_n) は m に収束する無理数の無限数列である。これは $m = 0$ を含むすべての整数 m に対して成り立つ。

（もう一つの自然な選択である $m\,u_n$ も無理数で m に収束するが、それは $m \neq 0$ のときに限る。$m = 0$ のときは各項が 0 となり、これは有理数である。$m-1$ だけずらす方が安全な解答であるのはこのためである。）

検算

- 数値的に $u_2^3 \approx 1.19581^3 \approx 1.70998 \approx u_1$ であり、$u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n}$ が確かめられる。
- $m = 4$ のとき、$a_1 \approx 4.710$、$a_2 \approx 4.196$、$a_3 \approx 4.061$ であり、a_{20} は小数第 8 位を超えて 4 と一致する。
- 差 $a_n - m = u_n - 1$ は正でおよそ $\ln 5/3^n$ であるから、一段階ごとにおよそ 3 分の 1 に縮む。

よくある間違い

- 逆（converse）、すなわち「無理数の 3 乗は無理数である」を証明してしまうこと。これは偽である：$\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$。
- $m = 0$ のときに破綻することに気づかずに $m\,u_n$ を用いること。
- $u_n \to 1$ であることの根拠を述べ忘れること。「指数が 0 に近づく」だけでなく、連続性について一言添えるか、上の対数による議論が必要である。

STEP のその先へ

この問題は、無理数が実数直線において**稠密**（dense）であることを示している。すなわち、すべての整数だけでなく、すべての実数が無理数の極限となる（有理数 $q_n \to x$ を用いて $q_n + \sqrt{2}/n$ を試してみよ）。有理数もまた稠密であるが、ある精密な意味では、無理数は有理数よりもはるかに多い。有理数は可算（countable）であるが、実数はそうではないのである。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、その最初の数章で稠密性、可算性、数列の極限を見事に扱っている。

解答例

STEP II 2003、第 4 問

純粋数学 ・ 弓形の面積

STEP II 2003、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/03-s2-q4

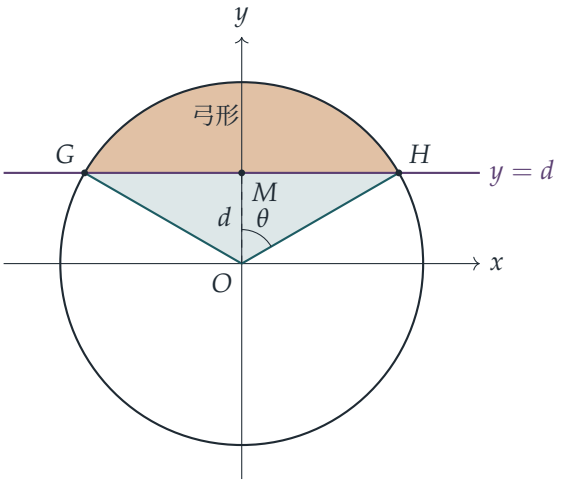
鍵となる考え方

小さい方の弓形（minor segment）は扇形（sector）から三角形を取り除いたものなので、最初の結果は単に「扇形から三角形を引いたもの」である。残りの部分については、$(*)$ における数 d が実は**円の中心から直線までの垂直距離**（*perpendicular distance*）であることに注目する。図を平行移動しても回転しても面積は変わらないので、どの場合も $(*)$ をそのまま用い、d をその距離で置き換えればよい。作業はすべて距離の計算に集約される。

解答

基本となる結果

直線は円と 2 点で交わるので、$0 < d < R$ である。$x^2 + y^2 = R^2$ に $y = d$ を代入すると $x = \pm\sqrt{R^2 - d^2}$ となるから、$G = \left(-\sqrt{R^2 - d^2}, d\right)$、$H = \left(\sqrt{R^2 - d^2}, d\right)$ である。$M = (0, d)$ を GH の中点とし、$\theta = \angle MOH$ とおく。



直角三角形 OMH において、斜辺は $OH = R$、隣辺は $OM = d$ であるから $\cos\theta = d/R$ である。$0 < d/R < 1$ なので $\theta = \arccos(d/R)$ かつ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であり、対称性から $\angle GOH = 2\theta < \pi$ である。

中心角 2θ の扇形 OGH の面積は

$$\tfrac{1}{2}R^2(2\theta) = R^2 \arccos\left(\frac{d}{R}\right).$$

である。三角形 OGH は底辺 $GH = 2\sqrt{R^2 - d^2}$、高さ $OM = d$ であるから、その面積は $d\sqrt{R^2 - d^2}$ である。$2\theta < \pi$ なので、中心 O は GH に関して劣弧と反対側にあり、扇形はちょうど三角形と小さい方の弓形を合わせたものになる。したがって

$$\text{小さい方の弓形の面積} = R^2 \arccos\left(\frac{d}{R}\right) - d\sqrt{R^2 - d^2},$$

となり、これが $(*)$ である。

考えてみよう 幾何学的に見て、$(*)$ の d は実際には何を表しているか。

この議論では座標軸をまったく使っていない。使ったのは半径 R と、中心から弦（chord）までの距離 $OM = d$ だけである。図全体を平行移動や回転しても、この二つは保たれ、面積も保たれる。よって、半径 R の任意の円と、中心からの垂直距離が p（$0 \le p < R$）である任意の直線に対して、小さい方の弓形の面積は

$$R^2 \arccos\left(\frac{p}{R}\right) - p\sqrt{R^2 - p^2}. \qquad (\dagger)$$

である。（$p = 0$ のとき直線は直径であり、二つの部分は等しい半円となるが、$(\dagger)$ は正しく $\frac{1}{2}\pi R^2$ を与える。）各小問では p を求め、それを $(\dagger)$ に代入する。

小問 (i)

中心は (a,b) で、直線 $y=c$ は水平であるから、中心から直線までの距離は $p=|c-b|$ である。d を $|c-b|$ で置き換えると

$$R^2\arccos\left(\frac{|c-b|}{R}\right)-|c-b|\sqrt{R^2-(c-b)^2}.$$

となる。絶対値（modulus）が重要である。c は b より小さいこともありうる。

小問 (ii)

ここでは中心は O である。O から $y=mx+c$ までの距離が必要となる。直線が x 軸となす角を α とすると $\tan\alpha=m$ であり、直線は y 軸と $C=(0,c)$ で交わるとする。O から直線に垂線を下ろし、その足を F とする。OC（鉛直）と OF（直線に垂直）のなす角は、水平線と直線のなす角、すなわち α に等しい。よって直角三角形 OFC において

$$p=OF=|c|\,|\cos\alpha|=\frac{|c|}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{|c|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

である。（これは直線 $mx-y+c=0$ と点 $(0,0)$ に対するおなじみの公式 $|Ax_0+By_0+C|/\sqrt{A^2+B^2}$ にほかならない。）すると

$$\sqrt{R^2-p^2}=\sqrt{R^2-\frac{c^2}{1+m^2}}=\frac{\sqrt{R^2(1+m^2)-c^2}}{\sqrt{1+m^2}},$$

であるから、小さい方の弓形の面積は

$$R^2\arccos\left(\frac{|c|}{R\sqrt{1+m^2}}\right)-\frac{|c|\sqrt{R^2(1+m^2)-c^2}}{1+m^2}.$$

である。直線が円と交わるのはちょうど $c^2<R^2(1+m^2)$ のときなので、平方根は実数である。

小問 (iii)

$X=x-a$、$Y=y-b$ とおいて原点を中心に移す。円は $X^2+Y^2=R^2$ となり、直線は

$$Y+b=m(X+a)+c \quad\Longleftrightarrow\quad Y=mX+k, \qquad k=c+ma-b.$$

となる。これは小問 (ii) で c を k に置き換えたものであり、平行移動で面積は変わらない。よって $p=|c+ma-b|/\sqrt{1+m^2}$ であり、小さい方の弓形の面積は

$$R^2\arccos\left(\frac{|c+ma-b|}{R\sqrt{1+m^2}}\right)-\frac{|c+ma-b|\sqrt{R^2(1+m^2)-(c+ma-b)^2}}{1+m^2}.$$

である。$m=0$ とおけば小問 (i) が、$a=b=0$ とおけば小問 (ii) が得られる。

考えてみよう 小問 (i) で、絶対値を付けずに単に $c-b$ と書いてはいけないのはなぜか。

$c<b$ ならば $(c-b)/R$ は負となり、arccos は $\frac{\pi}{2}$ より大きい角 $\pi-\theta$ を返し、第 2 項の符号が変わる。式は $R^2(\pi-\theta)+p\sqrt{R^2-p^2}$ となり、これは小さい方ではなく**大きい方**の弓形（major segment）の面積である。

検算

- $R=2$、$d=1$ とすると $\theta=\frac{\pi}{3}$ となり、$(*)$ は $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\approx 2.4567$ を与える。これは当然ながら円板の半分（$2\pi\approx 6.28$）より小さい。
- $d\to R$ のとき面積は 0 に近づき、$d=0$ のとき $\frac{1}{2}\pi R^2$ に等しい。
- 4 つの公式すべてを、数百組のランダムな円と直線について、弦の長さを直接数値積分した結果と照合した。一致の誤差は 2×10^{-6} 以内であった。

よくある間違い

- 絶対値を付け忘れる。符号付き距離を使うと、中心が直線の「間違った」側にあるときには大きい方の弓形の面積が得られてしまう。
- 小問 (ii) と (iii) で、垂直距離 $|c|/\sqrt{1+m^2}$ の代わりに鉛直方向の差 $|c|$ を使ってしまう。
- 扇形の面積に $\frac{1}{2}R^2\theta$ を使ってしまう。中心角は θ ではなく 2θ であることを忘れている。

STEP のその先へ

この問題は、面積が**等長変換**（*isometry*）、すなわち平面の平行移動・回転・鏡映によって変わらないという事実に基づいている。大学 1 年の講義では、これは等長変換のヤコビアン（Jacobian determinant）の絶対値が 1 であるという主張になり、そのため二重積分の変数変換公式によって面積は変わらない。等長変換と、それによって保たれる量を分類することは、幾何学や群論（group theory）への良い入り口である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）では、回転行列（rotation matrix）と、面積の拡大率としての行列式（determinant）が扱われている。

解答例

STEP II 2003、第 5 問

純粋数学 ・ ベクトルと直線

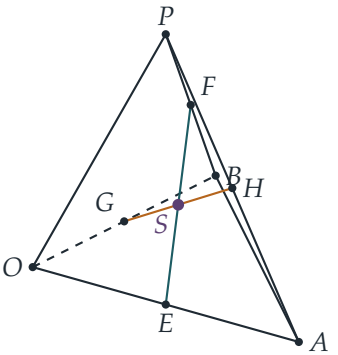
STEP II 2003、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/03-s2-q5

鍵となる考え方

4 つの中点（midpoint）を書き出し、各直線を「点 + パラメータ（parameter）× 方向」の形に表して、等しいとおく。3 次元空間の 2 直線は通常交わらないので、要点は 2 つの未知パラメータに関する 3 つの成分方程式が両立する（consistent）ことを示すところにある。**k** 成分を見るとすぐに決着がつく。幾何的には、O、A、B、P は四面体（tetrahedron）をなし、EF と GH はそれぞれ一組の対辺の中点どうしを結んでいる。このことから、2 直線は 4 頂点の「平均」で交わると予想される。



解答

直線 EF と GH は交わる

$\mathbf{p} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$ とおく。各中点の位置ベクトル（position vector）は

$$\mathbf{e} = \tfrac{1}{2}a\mathbf{i}, \qquad \mathbf{f} = \tfrac{1}{2}\big(l\mathbf{i} + (b+m)\mathbf{j} + n\mathbf{k}\big),$$
$$\mathbf{g} = \tfrac{1}{2}b\mathbf{j}, \qquad \mathbf{h} = \tfrac{1}{2}\big((a+l)\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}\big)$$

である。EF 上の一般の点は $\mathbf{e} + s(\mathbf{f} - \mathbf{e})$、$GH$ 上の一般の点は $\mathbf{g} + t(\mathbf{h} - \mathbf{g})$ と表せる。2分の1の係数を払うために両方を2倍すると、

$$2\big(\mathbf{e} + s(\mathbf{f} - \mathbf{e})\big) = \big(a + s(l-a)\big)\mathbf{i} + s(b+m)\mathbf{j} + sn\,\mathbf{k},$$
$$2\big(\mathbf{g} + t(\mathbf{h} - \mathbf{g})\big) = t(a+l)\mathbf{i} + \big(b + t(m-b)\big)\mathbf{j} + tn\,\mathbf{k}.$$

2直線が交わるための必要十分条件（if and only if）は、これらを等しくする s と t の値が存在することである。したがって、次の3つがすべて成り立つ必要がある。

$$\mathbf{i}: \quad a + s(l-a) = t(a+l),$$
$$\mathbf{j}: \quad s(b+m) = b + t(m-b),$$
$$\mathbf{k}: \quad sn = tn.$$

考えてみよう 未知数2つに対して方程式が3つある。そもそもなぜ解をもつはずなのだろうか。

一般には解をもたない。だからこそ空間内の2直線は通常交わらないのである。ここでは方程式のうち2つを解き、残りの1つも成り立つことを確かめる。$n \neq 0$ であるから、$\mathbf{k}$ の方程式より $s = t$ を得る。すると $\mathbf{i}$ の方程式は $a + sl - sa = sa + sl$ となり、$a = 2sa$ である。$a \neq 0$ より $s = \frac{1}{2}$ を得る。最後に、$s = t = \frac{1}{2}$ のとき $\mathbf{j}$ の方程式は

$$\tfrac{1}{2}(b+m) = b + \tfrac{1}{2}(m-b) = \tfrac{1}{2}(b+m),$$

となり、これは成り立つ。よって $s = t = \frac{1}{2}$ のとき3つの方程式はすべて成り立ち、題意のとおり直線 EF と GH は交わる。

交点は EF の中点（GH の中点でもある）であり、

$$\mathbf{s} = \tfrac{1}{4}\big((a+l)\mathbf{i} + (b+m)\mathbf{j} + n\mathbf{k}\big) = \tfrac{1}{4}\big(\mathbf{0} + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + \mathbf{p}\big),$$

これは O、A、B、P の位置ベクトルの平均である。

点 T

S は DT の中点であるから $\mathbf{s} = \frac{1}{2}(\mathbf{d} + \mathbf{t})$ であり、したがって $\mathbf{t} = 2\mathbf{s} - \mathbf{d}$ となる。すなわち

$$\mathbf{t} = \tfrac{1}{2}(a+l)\,\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}(b+m)\,\mathbf{j} + \big(\tfrac{1}{2}n - d\big)\mathbf{k}.$$

平面 OAB は O を含み、ベクトル $a\mathbf{i}$ と $b\mathbf{j}$ を含む。a と b は零でないので、これらはそれぞれ x 軸、y 軸の方向を向いており、平面 OAB は平面 $z=0$ である。よって T がこの平面上にあるのは、その $\mathbf{k}$ 成分が消えるとき、すなわち $\frac{1}{2}n-d=0$ のとき、かつそのときに限る。ゆえに

$$d=\tfrac{1}{2}n.$$

$n\neq 0$ であるからこれは零でなく、条件 $d\neq 0$ と矛盾しない。

検算

- $a=2$、$b=4$、$\mathbf{p}=(2,0,4)$ とする。このとき $E=(1,0,0)$、$F=(1,2,2)$、$G=(0,2,0)$、$H=(2,0,2)$ である。EF と GH の中点はともに $(1,1,1)$ であり、これは $\frac{1}{4}\big((0,0,0)+(2,0,0)+(0,4,0)+(2,0,4)\big)$ に等しい。
- $d=2=\frac{1}{2}n$ とすると $T=2(1,1,1)-(0,0,2)=(2,2,0)$ であり、これは $z=0$ 上にある。
- コンピュータを用い、a,b,l,m,n,d を無作為に選んだ 20 000 通りについて厳密な有理数演算で確認したところ、2 直線は $s=t=\frac{1}{2}$ において上で求めた点で交わり、また T が平面 OAB 上にある（スカラー三重積（scalar triple product）が零になる）のは $d=\frac{1}{2}n$ のとき、かつそのときに限ることが確かめられた。

よくある間違い

- 最初から同じパラメータを用いて 2 直線を等しいとおくこと。それは答え $s=t$ を仮定していることになるが、ここではこれは $\mathbf{k}$ の方程式から導かれるものである。
- 成分方程式のうち 2 つを解いたところで止めてしまうこと。空間内の 2 直線が交わることを示すには、3 つ目の方程式も確かめる必要がある。
- $a\neq 0$ と $n\neq 0$ をどこで用いたかを書き忘れること。これらがあるからこそ、割り算をして s と t を求めることができるのである。

STEP のその先へ

任意の四面体において、対辺の中点どうしを結ぶ 3 本の線分（**双中線**（bimedian））は、すべて 4 頂点の平均である重心（centroid）を通り、そこでそれぞれ二等分される。これは三角形の中線（median）が重心で交わることの 3 次元版であり、点を重み付き平均として考える発想、すなわち重心座標（barycentric coordinates）やアフィン座標（affine coordinates）の背後にある考え方への入り口でもある。ストラング（Strang）の

Introduction to Linear Algebra（線形代数入門）は、ここで用いたベクトルと連立一次方程式の観点を展開しており、未知数より方程式の個数が多い連立方程式がどのようなときに解をもつかについても扱っている。

解答例

STEP II 2003、第 6 問

純粋数学 ・ 関数の反復合成と積分

> **STEP II 2003、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q6

鍵となる考え方

f をもう一度適用するということは、「1 を引き、負になった部分を軸の上へ折り返す」ということである。ある区間で値が 0 と 1 の間にあるグラフにこれを施すと、その区間の部分は帯 $0 \le y \le 1$ の中で単に上下が反転し、一方で長くまっすぐな腕の部分には歯がひとつ増える。こうしてグラフはジグザグ、すなわち三角波（triangle wave）になる。このことが見えれば、最後の小問の二つの積分はどちらも、同じ形の周期を足し合わせるだけのものになる。

解答

グラフの概形

すべては次の二つの事実から導かれる。

漸化式（*recurrence*）。 $g_{n+1} = f \circ g_n$ であるから、$g_{n+1}(x) = |g_n(x) - 1|$ である。すなわち、g_n のグラフを 1 だけ下へ平行移動し、x 軸より下にある部分を折り返せばよい。

対称性（*symmetry*）。$f(2-x) = |1-x| = f(x)$ であるから、$n \ge 2$ に対して $g_n(2-x) = g_{n-1}\big(f(2-x)\big) = g_{n-1}\big(f(x)\big) = g_n(x)$ が成り立ち、$n = 1$ のときは直接確かめられる。よって、どの g_n も直線 $x = 1$ に関して対称であり、$x \ge 1$ の部分を調べれば十分である。

まず $g_1(x) = |x - 1|$ は、頂点が $(1, 0)$ の V 字形である。

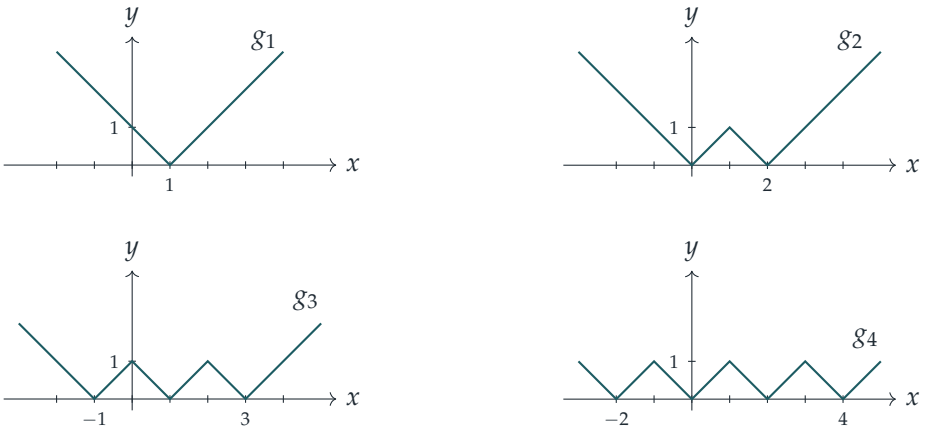
g_2 について：$[0, 2]$ では $0 \le g_1 \le 1$ であるから $g_2 = 1 - |x - 1|$ となる。これは $x = 1$ で 1 まで上がり、$x = 0$ と $x = 2$ で 0 まで下がるテント形である。$x \ge 2$ では $g_2 = x - 2$

であり、対称性より $x \leq 0$ では $g_2 = -x$ である。よって g_2 は W 字形である。

その後の各段階でも同じことが起こる。ジグザグの部分（値は $[0,1]$ に入る）は上下が反転し、まっすぐな腕 $x-n$ は $|x-n-1|$ となって、$[n, n+1]$ 上に（対称性により $[1-n, 2-n]$ 上にも）歯がひとつ加わる。x から最も近い偶数までの距離を $d_{\text{even}}(x)$、最も近い奇数までの距離を $d_{\text{odd}}(x)$ と書くと、次が得られる。

$$g_n(x) = \begin{cases} 2-n-x, & x \leq 2-n, \\ d_{\text{even}}(x)(n \text{ が偶数のとき}),\ d_{\text{odd}}(x)(n \text{ が奇数のとき}), & 2-n \leq x \leq n, \\ x-n, & x \geq n. \end{cases}$$

これは漸化式から数学的帰納法（induction）によって示される。すべての実数 x について $d_{\text{even}} + d_{\text{odd}} = 1$ である（連続する二つの整数の間では、二つの距離は t と $1-t$ になる）から、「1 からジグザグを引く」操作は偶奇を入れ替える。また $[n, n+1]$ 上の新しい部分 $n+1-x$ は、ちょうど $n+1$ までの距離であり、$n+1$ は新しい偶奇をもつ最も近い整数である。左側については $x=1$ に関する対称性から従う。



言葉で述べると次のようになる。g_3 は $-1, 1, 3$ に零点をもち、0 と 2 で高さ 1 の山をもち、腕は $y = -1-x$ と $y = x-3$ である。g_4 は $-2, 0, 2, 4$ に零点をもち、$-1, 1, 3$ で高さ 1 の山をもち、腕は $y = -2-x$ と $y = x-4$ である。四つのグラフはいずれも $x=1$ に関して対称である。

積分

n を偶数とする。$n \geq 2$ であるから、区間 $[0, n]$ は $[2-n, n]$ に含まれ、その上で $g_n(x) = d_{\text{even}}(x)$ である。

考えてみよう なぜ $[0,2]$ 上で積分すれば十分なのだろうか。

二つの関数はどちらも周期（period）2 をもつ。2 だけずらすと偶数は偶数に移るから $d_{\text{even}}(x+2) = d_{\text{even}}(x)$ であり、また $\left|\sin\frac{\pi(x+2)}{2}\right| = \left|-\sin\frac{\pi x}{2}\right| = h(x)$ である。n は偶数なので、$[0,n]$ はちょうど $\frac{n}{2}$ 個の完全な周期 $[0,2],[2,4],\ldots,[n-2,n]$ からなる。よって $[0,n]$ 上の各積分は、$[0,2]$ 上の積分の $\frac{n}{2}$ 倍である。

$[0,2]$ 上で g_n はテント形 $1-|x-1|$、すなわち底辺 2、高さ 1 の三角形であるから、

$$\int_0^2 g_n(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 = 1.$$

$[0,2]$ 上では $\frac{\pi x}{2} \in [0,\pi]$ であるから $\sin\frac{\pi x}{2} \geq 0$ となり、絶対値（modulus）を外せる。

$$\int_0^2 h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\Big]_0^2 = \frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

したがって

$$\int_0^n \big(h(x)-g_n(x)\big)\,\mathrm{d}x = \frac{n}{2}\Big(\frac{4}{\pi}-1\Big) = \frac{2n}{\pi}-\frac{n}{2},$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

- 値をひとつ選んで手で反復してみる。$g_4(-1)$ は $-1\to 2\to 1\to 0\to 1$ となるので $g_4(-1)=1$ であり、概形図のとおり山になっている。
- $4/\pi \approx 1.27 > 1$ であるから答えは正である。正弦曲線の山は、同じ底辺と高さをもつ直線の辺のテントよりも外側に膨らんでおり、二つのグラフの図と合っている。
- 数値的には、$n=2$ のときシンプソンの公式（Simpson's rule）で 0.273240 が得られ、$\frac{4}{\pi}-1 \approx 0.273240$ と一致する。$n=4,6,8,10$ についても同様に一致する。

よくある間違い

- 左側を忘れること。$n\geq 3$ になると、$x<0$ の部分のグラフは直線ではない。対称性 $g_n(2-x)=g_n(x)$ を使うのが、正しく描く最も手早い方法である。
- 絶対値をつけずに $\sin\frac{\pi x}{2}$ を $[0,n]$ 上で積分してしまうこと。そうすると偶数の n に対して $\frac{2n}{\pi}$ ではなく 0 になってしまう。

STEP のその先へ

単純な写像を反復し、グラフがどうなるかを観察することは、離散力学系（discrete dynamical systems）の出発点である。ここではジグザグが三角波に落ち着くが、これ

と密接に関係する「テント写像（tent map）」はカオス（chaos）の古典的な例である。また、h と三角波の比較はフーリエ級数（Fourier series）へとつながる。フーリエ級数では三角波を正弦と余弦の和として表し、|sin| はその最初の例のひとつである。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）には、フーリエ級数への読みやすい入門がある。

解答例

STEP II 2003、第 7 問

純粋数学 ・ 広義積分と級数

> **STEP II 2003、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q7

鍵となる考え方

$\ln x \times$ (累乗x) の形の被積分関数（integrand）は、部分積分（integration by parts）にうってつけである。対数を微分すれば、対数が消えるからである。これで最初の積分は処理できる。問題の残りの部分では、厳密な値 $2/(n^2\mathrm{e})$ を逆向きに用いる。すなわち、$1/n^2$ を積分として**表す**のである。そのうえで、すべての積分の下端を同じ場所にそろえる。これは各積分を大きくすることしかない。そして、積分の中で等比級数（geometric series）の和を求める。

解答

積分

$a > 1$ かつ $n > 0$ に対して

$$I_n(a) = \int_a^\infty \frac{\ln x}{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

とおく。$u = \ln x$、$\mathrm{d}v = x^{-n-1}\,\mathrm{d}x$ として部分積分を行うと、$v = -\frac{1}{n}x^{-n}$ である（ここで $n \neq 0$ を用いる）。区間 $[a, X]$ 上で

$$\begin{aligned}\int_a^X \frac{\ln x}{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\ln x}{nx^n}\right]_a^X + \frac{1}{n}\int_a^X x^{-n-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\ln a}{na^n} - \frac{\ln X}{nX^n} + \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{a^n} - \frac{1}{X^n}\right).\end{aligned}$$

ここで $X \to \infty$ とする。$n > 0$ より $X^{-n} \to 0$ である。もう一方の項については、$Y = X^n$ とおくと $\ln X = \frac{1}{n}\ln Y$ であり、

$$\frac{\ln X}{X^n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\ln Y}{Y} \to 0,$$

となる。$X \to \infty$ のとき $Y \to \infty$ であり、$(\ln Y)/Y \to 0$ は仮定してよいからである。（ここで単に $(\ln X)/X \to 0$ を引用することはできない。$0 < n < 1$ のとき、X^n は X よりもゆっくり増加するからである。）したがって積分は収束（converge）し、

$$I_n(a) = \frac{\ln a}{na^n} + \frac{1}{n^2 a^n}.$$

である。$a = \mathrm{e}^{1/n}$ のとき $a^n = \mathrm{e}$、$\ln a = 1/n$ であるから、

$$I_n\left(\mathrm{e}^{1/n}\right) = \frac{1}{n^2\mathrm{e}} + \frac{1}{n^2\mathrm{e}} = \frac{2}{n^2\mathrm{e}},$$

となり、これが求める結果である。

2 つの積分の比較

$1 < a < b$ ならば

$$I_n(a) - I_n(b) = \int_a^b \frac{\ln x}{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

である。$x > 1$ に対して $\ln x > 0$ かつ $x^{n+1} > 0$ であるから、被積分関数は $[a, b]$ 上で真に正である。また被積分関数は連続であり、$b > a$ であるから、この積分は真に正である。よって $I_n(b) < I_n(a)$ である。下端を右へ動かすと、正の面積の一部を捨てることになるのである。

不等式

最初の部分より、すべての正の整数 n に対して

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\mathrm{e}}{2}\, I_n\left(\mathrm{e}^{1/n}\right).$$

である。

> **考えてみよう** 和の各項では下端 $\mathrm{e}^{1/n}$ がそれぞれ異なるが、右辺では下端は $\mathrm{e}^{1/N}$ ただ 1 つである。一方から他方へはどのように移ればよいか。

$1 \le n \le N$ とする。このとき $1/N \le 1/n$ であるから、$1 < \mathrm{e}^{1/N} \le \mathrm{e}^{1/n}$ である。$n < N$ のときはこの不等式は等号を含まず、2 番目の部分（$a = \mathrm{e}^{1/N}$、$b = \mathrm{e}^{1/n}$ とする）より

$$I_n\left(\mathrm{e}^{1/n}\right) < I_n\left(\mathrm{e}^{1/N}\right);$$

が成り立つ。$n = N$ のときは両辺は等しい。$n = 1, \ldots, N$ にわたって足し合わせると、$N > 1$ より少なくとも 1 つの項（たとえば $n = 1$）で $n < N$ となるから、和についても不等号は等号を含まない：

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\mathrm{e}}{2} \sum_{n=1}^{N} I_n\left(\mathrm{e}^{1/n}\right) < \frac{\mathrm{e}}{2} \sum_{n=1}^{N} I_n\left(\mathrm{e}^{1/N}\right).$$

$N > 1$ が必要となるのはこの箇所である。$N = 1$ であれば両辺は等しくなってしまう。

あとは積分を足し合わせればよい。同じ範囲での収束する積分の有限和は、和の積分に等しいから、

$$\sum_{n=1}^{N} I_n\left(\mathrm{e}^{1/N}\right) = \int_{\mathrm{e}^{1/N}}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} x^{-(n+1)}\right) \ln x \,\mathrm{d}x.$$

である。括弧の中は、初項 x^{-2}、公比 $x^{-1} \neq 1$（$x > 1$ より）、項数 N の等比級数であり、

$$\sum_{n=1}^{N} x^{-(n+1)} = \frac{x^{-2}\left(1 - x^{-N}\right)}{1 - x^{-1}} = \frac{1 - x^{-N}}{x^2 - x},$$

となる（分子と分母に x^2 を掛けた）。したがって

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} < \frac{\mathrm{e}}{2} \int_{\mathrm{e}^{1/N}}^{\infty} \left(\frac{1 - x^{-N}}{x^2 - x}\right) \ln x \,\mathrm{d}x,$$

となり、示すべき不等式が得られた。

検算

- $I_n(a)$ の式を a で微分してみよ。微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）が要求するとおり、被積分関数に負号をつけた $-\ln a / a^{n+1}$ が得られるはずである。
- 数値的に確かめる。置換 $x = \mathrm{e}^u$ により、最後の部分の積分は $\int_{1/N}^{\infty} u(1 - \mathrm{e}^{-Nu})/(\mathrm{e}^u - 1)\,\mathrm{d}u$ となる。$N = 2$ のとき右辺は約 1.4865 であり、これに対し左辺は $1 + \frac{1}{4} = 1.25$ である。$N = 10$ のとき右辺は約 2.0579 であり、左辺は 1.5498 である。
- $N \to \infty$ のとき右辺は $\frac{\mathrm{e}}{2} \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 - x}\,\mathrm{d}x$ に近づき、置換 $x = 1/t$ によりこれは $\frac{\mathrm{e}}{2} \int_0^1 \frac{-\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} \approx 2.236$ となる。これは当然そうあるべきとおり、$\pi^2/6 \approx 1.645$ を余裕をもって上回っている。

よくある間違い

- $(\ln X)/X^n$ を消すのに $(\ln X)/X \to 0$ を直接用いること。これは $n \geq 1$ のときには通用するが、結果はすべての $n > 0$ について主張されている。
- 下端を逆向きに動かすこと。$\mathrm{e}^{1/N}$ は $\mathrm{e}^{1/n}$ たちの中で**最小**であるから、どの積分も大きくなる。
- 理由を述べずに等号を含まない不等式を主張すること。$n = N$ の項では等号が成り立つので、等号が成り立たないのは $n < N$ の項があるためであり、そのような項は $N > 1$ だから存在するのである。

STEP のその先へ

数を積分として表し、積分記号の下で和をとるというのは、解析学（analysis）における定番の手法である。極限をとると $\sum 1/n^2 = \int_0^1 \frac{-\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$ が得られ、これは $\pi^2/6$ に至る道筋の 1 つである。$N \to \infty$ とすることは、無限和と広義積分（improper integral）を入れ替えることにあたる。この入れ替えには正当化が必要であり、それは単調収束定理（monotone convergence theorem）や優収束定理（dominated convergence theorem）によってなされる。これらの定理は、解析学や測度論（measure theory）の最初の講義で学ぶことになる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、こうした入れ替えがなぜ失敗しうるのか、そしていつ安全なのかを知るのに親しみやすい一冊である。

解答例

STEP II 2003、第 8 問

純粋数学 ・ 変数分離形の微分方程式

STEP II 2003、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/03-s2-q8

鍵となる考え方

この方程式は一階（first order）の変数分離形（separable）である。すなわち $\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ が t の有理関数（rational function）に等しい。2 次式を $t+1$ で割ると、その関数は多項式と簡単な分数の和に分かれ、それぞれはすぐに積分できる。さらに停留点（stationary points）は、解を微分するまでもなく微分方程式（differential equation）そのものから直ちに得られる。$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$ となるのは、ちょうど 2 次式 t^2-3t+2 が 0 になるところである。

解答

y を求める

多項式の割り算（polynomial division）により

$$\frac{t^2-3t+2}{t+1}=t-4+\frac{6}{t+1},$$

を得る。実際、$(t+1)(t-4)+6=t^2-3t-4+6=t^2-3t+2$ である。

解は $y=A>0$ から出発しなければならない。もし y がどこかで 0 になれば、この線形方程式の解の一意性（uniqueness）により、それは恒等的に 0 である解となり、$y(0)=A$ に矛盾する。したがって（係数が定義される $t>-1$ 上で）つねに $y>0$ であり、y で割ってよい：

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-k\left(t-4+\frac{6}{t+1}\right).$$

0 から t まで積分し、$\ln 1 = 0$ を用いると、

$$\ln \frac{y}{A} = -k\left(\frac{t^2}{2} - 4t + 6\ln(t+1)\right),$$

となるので、

$$\boxed{y = A\,(t+1)^{-6k}\,\mathrm{e}^{-k(t^2/2-4t)} = A\,(t+1)^{-6k}\,\mathrm{e}^{k(8t-t^2)/2}}.$$

停留値

微分方程式より

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -k\,\frac{(t-1)(t-2)}{t+1}\,y.$$

$k \neq 0$ と仮定する（そうでなければ $y \equiv A$ であり、すべての点が停留点となる）。$y > 0$ かつ $t+1 > 0$ であるから、導関数が 0 になるのは $t = 1$ と $t = 2$ のときに限られ、いずれも単根であるから、それぞれの点で符号が変わる。よって停留値（stationary values）はちょうど二つある：

$$y(1) = A \cdot 2^{-6k}\,\mathrm{e}^{-k(1/2-4)} = A \cdot 2^{-6k}\,\mathrm{e}^{7k/2},$$
$$y(2) = A \cdot 3^{-6k}\,\mathrm{e}^{-k(2-8)} = A \cdot 3^{-6k}\,\mathrm{e}^{6k}.$$

その比は

$$\frac{y(1)}{y(2)} = \frac{3^{6k}}{2^{6k}}\,\mathrm{e}^{7k/2-6k} = \left(\frac{3}{2}\right)^{6k}\mathrm{e}^{-5k/2},$$

であり、示すべきことが得られた。

考えてみよう 二つの停留値のうち、大きいのはどちらか。

対数をとると

$$\ln \frac{y(1)}{y(2)} = k\left(6\ln\tfrac{3}{2} - \tfrac{5}{2}\right),$$

であり、$6\ln 1.5 \approx 2.433 < 2.5$ であるから、括弧内は負である（およそ -0.067）。したがって $k > 0$ のとき $y(1) < y(2)$、$k < 0$ のとき $y(1) > y(2)$ である。差は小さいので、グラフのうねりは穏やかである。同様に

$$\ln \frac{y(1)}{A} = k\left(\tfrac{7}{2} - 6\ln 2\right) \approx -0.659k, \qquad \ln \frac{y(2)}{A} = k(6 - 6\ln 3) \approx -0.592k,$$

であるから、$k > 0$ のとき二つの停留値はともに A より小さく、$k < 0$ のときともに A より大きい。

$t \to +\infty$ のときの振る舞い

次のように書く：

$$\ln \frac{y}{A} = -k\left(\frac{t^2}{2} - 4t + 6\ln(t+1)\right).$$

$t \to \infty$ のとき括弧内は $+\infty$ に発散し、その主要項は $\frac{1}{2}t^2$ である（ln の項ははるかにゆっくり増加する）。したがって：

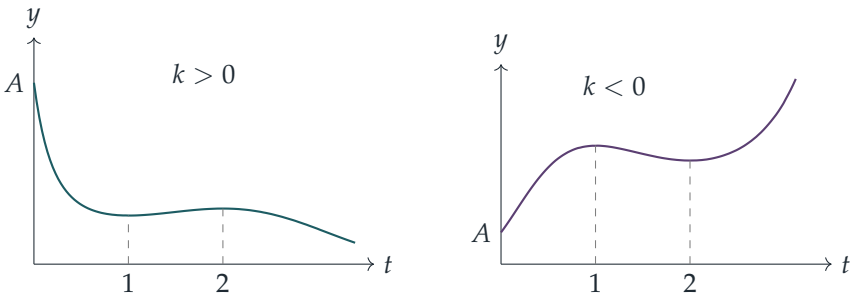
- $k > 0$ ならば $\ln(y/A) \to -\infty$ であるから、$y \to 0$ となる（$\mathrm{e}^{-kt^2/2}$ のように非常に速く）。
- $k < 0$ ならば $\ln(y/A) \to +\infty$ であるから、$y \to \infty$ となる（$\mathrm{e}^{|k|t^2/2}$ のように）。

グラフの概形

$t > 0$ において、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ の符号は $-k(t-1)(t-2)$ の符号に等しい。

- $k > 0$：y は $(0,1)$ 上で A から減少して $t = 1$ で極小値（local minimum）をとり、増加して $t = 2$ で極大値（local maximum）をとり（それでも A より小さい）、その後 0 に向かって減少する。
- $k < 0$：y は A から増加して $t = 1$ で極大値をとり、減少して $t = 2$ で極小値をとり（それでも A より大きい）、その後限りなく増加する。

下のグラフは $A = 1$、$k = \pm 2$ として正確に描いたものである。



検算

- $t = 0$ のとき、公式は $A \cdot 1 \cdot \mathrm{e}^0 = A$ を与える。$\ln y = \ln A - 6k\ln(t+1) - k(t^2/2 - 4t)$ を微分すると $\frac{y'}{y} = -\frac{6k}{t+1} - k(t-4)$ となり、これをまとめ直すと元の方程式に戻る。
- 数値的に、$A = 1.5$、$k = \pm 2$ として微分方程式を 1 ステップずつ積分する（ルンゲ＝クッタ法、Runge–Kutta）と、$t = 3$ において公式の値が有効数字 8 桁まで再現される。$k = 2$ のとき比 $y(1)/y(2)$ は 0.8742 であり、$(1.5)^{12}\mathrm{e}^{-5}$ と一致する。

よくある間違い

- 割り算を間違える：余りは 6 であって 2 ではない。$t+1$ を掛け戻して確かめよ。

- 比を逆にする：求めるのは $y(1)/y(2)$ であり、指数の符号のせいでうっかり $y(2)/y(1)$ を求めてしまいやすい。
- 二つの極値点（turning points）を A の反対側に描いてしまう：先の計算により、$k > 0$ のときはどちらも A より下、$k < 0$ のときはどちらも A より上にある。

STEP のその先へ

この方程式は線形（linear）$y' + p(t)y = 0$ であり、その解 $A\exp\left(-\int_0^t p\right)$ は積分因子法（integrating-factor method）の最も簡単な場合である。また、常微分方程式（ODE）の最初の講義で出会う一般的な原理の例にもなっている。すなわち、解を求めなくても、方程式から直接定性的な性質（停留点、解の符号、増加や減衰）を読み取れることが多い、ということである。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）は、ここで y が決して 0 にならないことを示すのに用いた一意性定理も含めて、これら両方の考え方を展開している。

解答例

STEP II 2003、第 9 問

力学 ・ 最大摩擦力でのつり合い

> **STEP II 2003、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q9

鍵となる考え方

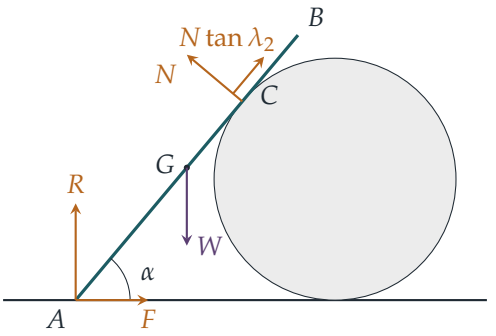
摩擦係数（coefficient of friction）が $\tan\lambda_1$ と $\tan\lambda_2$ の形で与えられているので、自然な道具は**全反力**（total reaction、垂直抗力と摩擦力を一つの力にまとめたもの）である。摩擦が限界に達しているとき、全反力は法線と摩擦角（angle of friction）λ をなす。すると棒には向きのわかった三つの力だけが働くことになり、水平方向と鉛直方向に分解すれば、二つの未知の大きさについての二つの方程式が得られる。本当に考えるべきことは、それぞれの摩擦力がどちら向きに働くかを決めることだけである。

解答

モデルと摩擦の向き

棒を一様な剛体の棒、円柱を固定されたものとして扱う。棒は円柱に接線に沿って接しているので、C における垂直抗力（normal reaction）は棒に垂直である。円柱は A から見て水平の正の向きの側にあるとする。このとき棒に働く力は次のとおりである。

- 重さ W。中点 G に鉛直下向きに働く。
- A において：鉛直上向きの垂直抗力 R と、床に沿った摩擦力（friction）F。
- C において：棒に垂直で、上向きかつ A の側へ戻る向きの垂直抗力 N と、棒に沿った摩擦力。



考えてみよう A と C で摩擦はどちら向きに働くか。棒が逆向きに滑り出す直前ということはありえないか。

両方の接触を保ったまま棒が動ける仕方は一通りしかない。A が床に沿って滑ると角 α が変わり、棒は円柱の上を滑る。A が円柱から遠ざかると棒は下がり（つまり α は減少し）、C にある棒の点は円柱に対して棒に沿って**下向きに**滑る。A が円柱に近づく場合は、すべてが逆になる。

後者の場合、A における摩擦は円柱から遠ざかる向きに、C における摩擦は棒に沿って下向きに働くことになる。すると水平方向の三つの力（A における摩擦、N の水平成分、C における摩擦の水平成分）がすべて円柱から遠ざかる向きになり、水平方向のつり合いは不可能である。したがって極限つり合い（limiting equilibrium）において棒は滑り落ちる直前にあり、A で棒に働く摩擦は円柱に**向かう**向き、C における摩擦は棒に沿って**上向き**に働く。図に描いたとおりである。

全反力

A における全反力を S、C における全反力を T とする。どちらの接触でも摩擦は限界に達しているので、

- $F = R\tan\lambda_1$ であるから、S は鉛直上向きと角 λ_1 をなし、円柱の側へ傾いている。
- 棒は水平と角 α をなすので、C における法線は鉛直上向きと角 α をなし、A の側へ傾いている。棒に沿って上向きの摩擦は、T を λ_2 だけ鉛直の側へ戻す。よって T は、円柱から遠い側で測って、鉛直上向きと角 $\alpha - \lambda_2$ をなす。

棒について力を分解すると、

$$\begin{aligned} &\text{水平方向：} && S\sin\lambda_1 = T\sin(\alpha-\lambda_2), \\ &\text{鉛直方向：} && S\cos\lambda_1 + T\cos(\alpha-\lambda_2) = W. \end{aligned}$$

T を消去するために、第 1 式に $\cos(\alpha-\lambda_2)$ を、第 2 式に $\sin(\alpha-\lambda_2)$ を掛け、第 2 式から第 1 式を引く。

$$S\left[\cos\lambda_1\sin(\alpha-\lambda_2)+\sin\lambda_1\cos(\alpha-\lambda_2)\right]=W\sin(\alpha-\lambda_2),$$
$$S\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)=W\sin(\alpha-\lambda_2),$$

ここで sin の加法定理（addition formula）を用いた。$\alpha\neq\lambda_2-\lambda_1$ と与えられているので、$\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)\neq 0$ である（角はすべて鋭角なので、$\alpha+\lambda_1-\lambda_2$ は $-\frac{\pi}{2}$ と π の間に厳密に含まれる）。よって割り算ができて、

$$S=\frac{W\sin(\alpha-\lambda_2)}{\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)}.$$

A における摩擦力は S の水平成分、すなわち $F=S\sin\lambda_1$ であるから、

$$F=\frac{W\sin\lambda_1\,\sin(\alpha-\lambda_2)}{\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)},$$

となり、示すべき式が得られた。同様にして、$T=W\sin\lambda_1/\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)$ である。

考えてみよう 一度もモーメントをとらなかった。怪しくはないか。

この問題では問題ない。二つの未知の大きさを求めるには、二方向への分解で十分である。A のまわりのモーメント（moment）をとると（S も、棒に沿って働く C における摩擦も、A のまわりのモーメントをもたない）、$N=T\cos\lambda_2$ として $N\cdot AC=W\cdot AG\cos\alpha$ が得られる。これからわかるのは、極限つり合いのために C がどこになければならないかということだけである。

$$\frac{AC}{AB}=\frac{\cos\alpha\,\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)}{2\sin\lambda_1\cos\lambda_2}.$$

与えられた条件 $AC>CB$ は、摩擦力を求めるのには必要ない。物理的には $S>0$ かつ $T>0$ も必要であり、これはちょうど $\alpha>\lambda_2$ のときに成り立つ。λ_2 より緩やかな角度で円柱に立てかけられた棒が、円柱を滑り落ちる直前にあることはありえない。

検算

- 床がなめらかな場合、$\lambda_1=0$：公式は $F=0$ を与え、当然そうなるべきである。
- $\alpha=\lambda_2$：このとき T は鉛直で、それだけで棒を支え、$F=0$ となる。これは棒がかろうじて円柱に立てかけていられる境界の角度である。
- 数値的に、$\lambda_1=0.3$、$\lambda_2=0.5$、$\alpha=1.0$（ラジアン）として、成分の方程式を R と N について直接解くと $F\approx 0.1975W$ となり、公式と一致する。この場合、A のまわりのモーメントから C は棒の約 0.75 の位置にあり、$AC>CB$ と矛盾しない。

よくある間違い

- C における抗力を鉛直、あるいは円柱の「てっぺん」に垂直だと考えてしまう。抗力は共通接線（common tangent）に垂直であり、共通接線とは棒そのものである。
- 摩擦の向きを確かめずに選んでしまう。誤った組合せでは、水平方向のつり合いが不可能になる。
- C における全反力を逆向きに傾けてしまう。すると $\alpha - \lambda_2$ の代わりに $\alpha + \lambda_2$ が現れる。

STEP のその先へ

全反力を法線に対して角 λ をなすものとしてとらえる考え方は、**摩擦円錐**（cone of friction）の背後にある発想である。接触が保たれるのは、全反力が法線のまわりの半頂角 λ の円錐の内側にとどまっている間である。三つの力の場合には、それらの作用線（line of action）が一点を通らなければならないので、多くの静力学（statics）の問題が幾何の問題になる。粗い接触が複数あり、どの順序で滑るかが重要になる問題は、剛体の静力学へのよい入門となる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、摩擦と剛体のつり合いを丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 2003、第 10 問

力学 ・ 摩擦のある束縛運動

STEP II 2003、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/03-s2-q10

鍵となる考え方

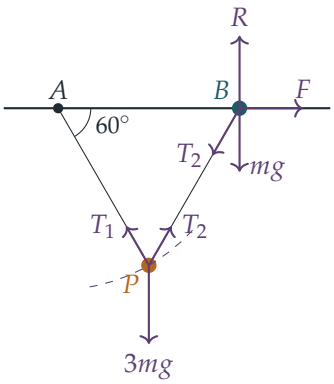
最初の状態では $AP = PB = AB = \ell$ であるから、APB は正三角形（equilateral triangle）である。AP はたるまないので、P は A を中心とする円周上を動く。すべては静止状態から始まるので向心（centripetal）項は現れず、P の初期加速度はその円の接線（tangent）方向を向かなければならない。これで加速度の向きが決まる。また、P はつねに AB を底辺とする二等辺三角形（isosceles triangle）の頂点にあるので、P の水平方向の位置はつねに B の位置の半分である。最後の小問では、B と P のそれぞれについてニュートン（Newton）の第二法則（second law）を書き下す。P について加速度の方向（AP に垂直な方向）に力を分解（resolve）すれば、AP の張力（tension）は一切現れない。

解答

B と P を質点（particle）とみなし、糸は軽くて伸び縮みしない（inextensible）ものとしてモデル化する。糸の両側の部分はいずれもたるまない。A を原点とし、針金を x 軸に沿ってとり、B は最初 $(\ell, 0)$ にあるとする。角 PAB を θ とおく。$AP = PB = \ell$ であるから、

$$B = (2\ell\cos\theta,\, 0), \qquad P = (\ell\cos\theta,\, -\ell\sin\theta),$$

であり、最初は $\theta = \frac{\pi}{3}$ である。



P の加速度の向き

$AP = \ell$ は一定なので、P は A を中心とする半径 ℓ の円（図の破線）の上を動く。円周上の点の加速度は、中心に向かう成分 $\ell\dot{\theta}^2$ と接線方向の成分 $\ell\ddot{\theta}$ からなる。系は静止状態から放されるので、最初は $\dot{\theta} = 0$ である。したがって P の初期加速度は接線方向、すなわち AP に垂直な方向を向く。

AP は水平と 60° の角をなすので、AP に垂直な方向は水平と 30° の角をなす。加速度の大きさを a とすると

$$a_1 = a\cos 30^\circ = \tfrac{\sqrt{3}}{2}a, \qquad a_2 = a\sin 30^\circ = \tfrac{1}{2}a,$$

であり、よって $a_1 = \sqrt{3}\,a_2$ となって、示すべき結果が得られる。

θ を用いて表すと次のようになる。P の位置を微分して $\dot{\theta} = 0$ とおくと、初期加速度は $\ell\ddot{\theta}(-\sin\theta, -\cos\theta)$ となる。$\ddot{\theta} > 0$ のとき、P は下向きかつ A に近づく向きに動く。その大きさは $a = \ell\ddot{\theta}$ である。

B の加速度

P は AB の垂直二等分線（perpendicular bisector）上にあるので、B の x 座標はつねに P の x 座標のちょうど 2 倍である。これを 2 回微分すると、B の加速度はつねに P の水平方向の加速度の 2 倍であることがわかる。したがって B の初期加速度は大きさ $2a_1$ で A に向かう向きであり、示すべき結果が得られる。

> **考えてみよう** B が A に向かって動くといえるのはなぜか。また、摩擦はどちら向きにはたらくか。

P が落下するにつれて θ は増加するので、$x_B = 2\ell\cos\theta$ は減少する。よって B は A に向かって滑り、B にはたらく摩擦（friction）は A から遠ざかる向き（x 軸の正の向き）にはたらく。ここでは B が実際に動くと仮定している。問題文が摩擦を滑っている間

の値である $\frac{\sqrt{3}}{6}R$ として与えていることから、このことが確かめられる。

初期加速度の大きさ

AP と PB の張力をそれぞれ T_1、T_2 とする。B にはたらく垂直抗力（normal reaction）を R、摩擦を $F = \frac{\sqrt{3}}{6}R$ とする。P の初期加速度の大きさを a と書くと $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ であり、B の加速度は A に向かって $2a_1 = \sqrt{3}\,a$ である。

ビーズ B。糸 BP は B を水平より 60° 下向きに、A に近づく向きに引く。B には鉛直方向の加速度がないので、鉛直方向に分解すると

$$R = mg + \tfrac{\sqrt{3}}{2}T_2.$$

を得る。A に向かう向きを正として水平方向に分解すると

$$m(\sqrt{3}\,a) = \tfrac{1}{2}T_2 - \tfrac{\sqrt{3}}{6}\left(mg + \tfrac{\sqrt{3}}{2}T_2\right) = \tfrac{1}{4}T_2 - \tfrac{\sqrt{3}}{6}mg,$$

となるので

$$T_2 = 4\sqrt{3}\,ma + \tfrac{2\sqrt{3}}{3}mg. \tag{1}$$

質点 P。P の加速度の方向、すなわち水平より 30° 下向きで A に近づく方向に分解する。この方向は AP に垂直なので、T_1 は寄与しない。重力 $3mg$ はこの方向と 60° の角をなすので、寄与は $3mg\cos 60^\circ = \frac{3}{2}mg$ である。張力 T_2 は PB に沿って、水平より 60° 上向きで A から遠ざかる向きにはたらく。これは加速度の方向と 150° の角をなすので、寄与は $T_2\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}T_2$ である。よって

$$3ma = \tfrac{3}{2}mg - \tfrac{\sqrt{3}}{2}T_2. \tag{2}$$

(1) を (2) に代入すると

$$\begin{aligned} 3ma &= \tfrac{3}{2}mg - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(4\sqrt{3}\,ma + \tfrac{2\sqrt{3}}{3}mg\right) = \tfrac{3}{2}mg - 6ma - mg, \\ 9ma &= \tfrac{1}{2}mg, \end{aligned}$$

となるので、P の初期加速度の大きさは

$$a = \frac{g}{18},$$

であり、示すべき結果が得られた。

この答えは矛盾がない。(1) より $T_2 = \frac{8\sqrt{3}}{9}mg > 0$ であるから、糸 PB はたるんでいない。また $R = \frac{7}{3}mg > 0$ である。P について水平方向に分解すると $T_1 = T_2 + 6ma_1 = \frac{19\sqrt{3}}{18}mg > 0$ となるので、AP もたるんでいない。

検算

- 用いなかった P の鉛直方向の式：$\frac{\sqrt{3}}{2}(T_1+T_2)-3mg=\frac{35}{12}mg-3mg=-\frac{1}{12}mg$。これは本来そうあるべきとおり $-3ma_2=-3m\cdot\frac{g}{36}$ に等しい。
- 数値的に、B と P の位置を微分して $a_1/a_2\approx 1.7320508$ および $a_B/a_1=2$ を得た。次に $g=9.81$ として、3 つの力の方程式を T_1、T_2、$\ddot{\theta}$ について解いた。その結果 $|a|=0.545=g/18$ となり、$T_2/mg\approx 1.5396$、$R/mg\approx 2.3333$ であった。
- 摩擦がなければ、(1) は $T_2=2\sqrt{3}\,ma$ となり、(2) から $6ma=\frac{3}{2}mg$、すなわち $a=g/4$ が得られる。摩擦は運動を遅くするはずであり、実際 $g/18<g/4$ である。

よくある間違い

- 向心項を含めてしまう。放した瞬間は $\dot{\theta}=0$ なので、加速度は純粋に接線方向である。
- T_2 が B を下向きに引き、そのため R が、したがって摩擦が大きくなることを忘れる。$R=mg$ とすると誤った答えになる。
- P について水平方向と鉛直方向に分解する。この方法でも解けるが、T_1 が入り込み、式がもう 1 本必要になる。AP に垂直な方向に分解すれば、これを消去できる。

STEP のその先へ

これは自由度（degree of freedom）1 の拘束された系である。すべてがただ 1 つの角 θ によって決まる。位置を θ で表して微分することは、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）の第一歩である。ラグランジュ力学では、T_1 のような拘束力（constraint force）は、方向をうまく選ぶ工夫によってではなく、系統的に消去される。摩擦はこの枠組みにうまく収まらない。このような問題がニュートン力学的な手法の良い練習になる理由の 1 つはここにある。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、拘束された運動や一様でない円運動を丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 2003、第 11 問

力学 ・ 放物運動

STEP II 2003、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

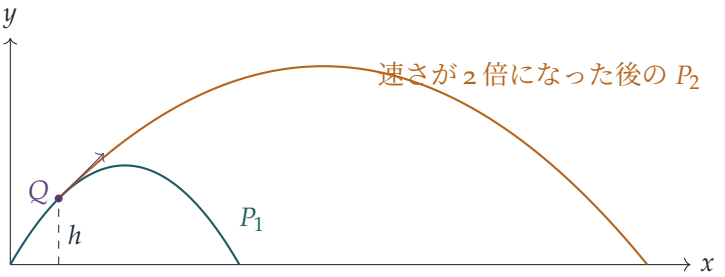
step.maths.org/questions/03-s2-q11

鍵となる考え方

速度の水平成分と鉛直成分を別々に扱う。運動の向きが水平と 45° をなすのは、ちょうど二つの成分が等しくなるときであり、そこから最初の時刻が直ちに求まる。速さが 2 倍になっても向きは変わらないので、両方の成分がともに 2 倍になる。残りの飛行は、既知の高さから始まる新たな放物運動（projectile motion）の問題となる。

解答

各粒子を、空気抵抗がなく重力のみを受けて運動する質点の投射体としてモデル化する。$s = \sin\alpha$、$c = \cos\alpha$ とおく。$\alpha > 45°$ であるから $s > c > 0$ である。



この図では $\alpha = 60°$ としている。両方の粒子は、運動の向きが初めて水平と 45° をなす点 Q までは青緑色の経路をたどる。その後、P_2 は琥珀色の経路をたどる。

P_1 の飛行時間

時刻 t における鉛直方向の変位は $y = Vs\,t - \frac{1}{2}gt^2 = t\left(Vs - \frac{1}{2}gt\right)$ である。これが再びゼロになるのは

$$T_1 = \frac{2V\sin\alpha}{g}.$$

のときである。

最初に 45° となる瞬間

時刻 t における速度の成分は

$$\dot{x} = Vc, \qquad \dot{y} = Vs - gt.$$

である。水平成分は決して変化しない。発射の時点では $\dot{y} = Vs > Vc = \dot{x}$ であるから、運動の向きは 45° より急である。$\dot{y}$ が減少するにつれて角度は小さくなり、粒子がまだ上昇している間の $\dot{y} = \dot{x}$ となるときに初めて 45° となる：

$$Vs - gt_1 = Vc \quad\Longrightarrow\quad t_1 = \frac{V(s-c)}{g}.$$

（下降中の $\dot{y} = -Vc$ となるときにも運動の向きは再び 45° をなすが、それはもっと後である。）$\frac{1}{2}T_1 = Vs/g$ であるから

$$t_1 = \frac{Vs}{g}\left(1 - \frac{c}{s}\right) = \tfrac{1}{2}(1 - \cot\alpha)\,T_1,$$

となり、示すべき式が得られた。

P_2 の飛行

時刻 t_1 までは、P_2 は P_1 とまったく同じように運動する。t_1 において速度の両成分はともに Vc に等しく、高さは

$$\begin{aligned} h = Vs\,t_1 - \tfrac{1}{2}gt_1^2 &= \frac{V^2}{g}\left[s(s-c) - \tfrac{1}{2}(s-c)^2\right] \\ &= \frac{V^2}{2g}(s-c)\left[2s - (s-c)\right] = \frac{V^2}{2g}\,(s^2 - c^2). \end{aligned}$$

である。$s > c$ であるから、これは正である。

> **考えてみよう** 「速さが 2 倍になる」ことは、速度の各成分にどのような影響を与えるか。

速さは変わるが向きは変わらないので、速度ベクトル（velocity vector）全体が 2 倍される。両成分はともに $2Vc$ となる。すなわち粒子は、高さ h から水平より 45° 上向きに、速さ $2\sqrt{2}\,Vc$ で飛び出す。

速さが 2 倍になってから P_2 が着地するまでの時間を τ とする。Q から上向きに鉛直方向の変位を測ると、着地とは変位が $-h$ となることである：

$$2Vc\,\tau - \tfrac{1}{2}g\tau^2 = -\frac{V^2}{2g}(s^2 - c^2).$$

両辺に $-2/g$ を掛け、無次元量 u を用いて $\tau = (V/g)u$ と書くと

$$u^2 - 4cu - (s^2 - c^2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 2c \pm \sqrt{4c^2 + s^2 - c^2} = 2c \pm \sqrt{s^2 + 3c^2}.$$

となる。解の積は $-(s^2 - c^2) < 0$ であるから、一方の解は負である。$\tau > 0$ が必要なので、正の符号をとる：

$$\tau = \frac{V}{g}\left(2c + \sqrt{s^2 + 3c^2}\right).$$

したがって

$$T_2 = t_1 + \tau = \frac{V}{g}\left(s - c + 2c + \sqrt{s^2 + 3c^2}\right) = \frac{V}{g}\left(s + c + \sqrt{s^2 + 3c^2}\right).$$

である。$\frac{1}{2}T_1 = Vs/g$ で割り、$\sqrt{s^2 + 3c^2}/s = \sqrt{1 + 3c^2/s^2}$（$s > 0$ であるから成り立つ）を用いると

$$\frac{2T_2}{T_1} = \frac{s + c + \sqrt{s^2 + 3c^2}}{s} = 1 + \cot\alpha + \sqrt{1 + 3\cot^2\alpha},$$

となり、これが示すべき結果である。

検算

- $\alpha \to 90^\circ$ のとき $\cot\alpha \to 0$ であり、比は 2 に近づく。これは理にかなっている。このとき 45° となる瞬間は飛行の最高点であり、そこでは速さがゼロなので、2 倍にしても何も変わらず $T_2 = T_1$ となる。
- $\alpha = 45^\circ$（境界の場合）では、速さが 2 倍になるのは発射の瞬間なので、P_2 は単に $2V$ で投射されることになり、$T_2 = 2T_1$ である。公式は $1 + 1 + 2 = 4$ を与え、一致する。
- $\alpha = 60^\circ$ のとき、$t_1/T_1 = \frac{1}{2}(1 - 1/\sqrt{3}) \approx 0.2113$ であり、$2T_2/T_1 = 1 + 1/\sqrt{3} + \sqrt{2} \approx 2.9916$ である。α と V を無作為に 2000 通り選んで P_2 の飛行を逐次的に数値シミュレーションしたところ、T_2 の公式と一致した。

よくある間違い

- 鉛直成分だけ、あるいは水平成分だけを 2 倍にしてしまう。向きは変わらないので、両方とも 2 倍になる。

- P_2 の運動を、高さ h からではなく地面の高さから再開させてしまう。
- 符号を確かめずに τ として負の解をとってしまう。

STEP のその先へ

速度の瞬間的な変化は**力積**（impulse）である。すなわち、非常に大きな力が非常に短い時間だけ働くものである。大学 1 年の力学では、衝突、ロケットの噴射、蹴りなどを力積として扱う。軌道をいくつかの部分に分け、それらを力積でつなぐというのは、まさに軌道変更の計画の立て方そのものであり、そこではエンジンの短い噴射によって宇宙船をある円錐曲線軌道から別の円錐曲線軌道へと移す。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、力積と運動量を丁寧に展開しており、この種の問題を数多く収録している。

解答例

STEP II 2003、第 12 問

確率・統計 ・ 分枝過程

STEP II 2003、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/03-s2-q12

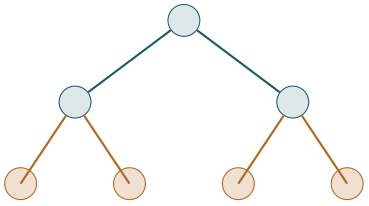
この問題は、*Beyond STEP* の第 12.15 節「**絶滅か爆発か**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/branching.html

鍵となる考え方

これは分枝過程（branching process）である。各世代は前の世代から作られ、どの粒子もそれぞれ独立（independent）に分裂する。すべてを支えているのは、m 個の粒子がそれぞれ独立に $\mathrm{B}(2, p)$ に従う個数の子を生むとき、その合計は $\mathrm{B}(2m, p)$ に従う、というただ一つの事実である。そこで、確率についても期待値についても、前の世代の大きさで条件づけて考える。

解答

モデルの意図どおり、異なる粒子はそれぞれ互いに独立に、また過去とも独立に崩壊すると仮定する。$0 < t < T$ の間に存在するただ一つの粒子について $X_0 = 1$ とおく。$t = nT$ において、存在している X_{n-1} 個の粒子はそれぞれ自分の子に置き換わるので、X_n は第 $n-1$ 世代の子の総数である。



図は $X_1 = 2$ の場合を示している。このとき 2 個の粒子は合わせて最大 4 個の子をもち、4 個の可能な子はそれぞれ独立に確率 p で生まれる。

同時確率

$X_1 \sim \mathrm{B}(2, p)$ であるから、$\mathrm{P}(X_1 = 2) = p^2$ である。$X_1 = 2$ のもとでは、2 個の粒子がそれぞれ独立に $\mathrm{B}(2, p)$ に従う個数の子を生むので、X_2 は成功確率 p の独立な 4 回の試行における成功回数である。すなわち $X_2 \mid X_1 = 2 \sim \mathrm{B}(4, p)$ である。したがって

$$\mathrm{P}(X_1 = 2 \text{ かつ} X_2 = 2) = \mathrm{P}(X_1 = 2)\,\mathrm{P}(X_2 = 2 \mid X_1 = 2) = p^2 \cdot \binom{4}{2} p^2 q^2 = 6p^4 q^2,$$

となり、示すべき式が得られた。

条件付き確率

条件付き確率（conditional probability）の定義を使うには $\mathrm{P}(X_2 = 2)$ が必要である。これを X_1 で条件づけて求める。

- $X_1 = 0$ ならば個体群は絶滅しているので、$X_2 = 0$ である。
- $X_1 = 1$（確率 $2pq$）ならば、$X_2 \sim \mathrm{B}(2, p)$ であり、$\mathrm{P}(X_2 = 2 \mid X_1 = 1) = p^2$ である。
- $X_1 = 2$ ならば、その寄与は先ほど求めた $6p^4 q^2$ である。

よって

$$\mathrm{P}(X_2 = 2) = 2pq \cdot p^2 + 6p^4 q^2 = 2p^3 q\,(1 + 3pq),$$

であり、したがって $0 < p < 1$ のとき

$$\mathrm{P}(X_1 = 2 \mid X_2 = 2) = \frac{6p^4 q^2}{2p^3 q(1 + 3pq)} = \frac{3pq}{1 + 3pq}.$$

これを $\frac{9}{25}$ に等しいとおくと $75pq = 9 + 27pq$ となるので、$48pq = 9$、すなわち $pq = \frac{3}{16}$ である。$q = 1 - p$ を用いると、これは

$$p^2 - p + \tfrac{3}{16} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(p - \tfrac{1}{4}\right)\left(p - \tfrac{3}{4}\right) = 0,$$

となるので、$p = \frac{1}{4}$ または $p = \frac{3}{4}$ である。（$p = 0$ と $p = 1$ の場合は除かれる。$p = 0$ のときは事象 $X_2 = 2$ が起こりえず、$p = 1$ のときは条件付き確率が 0 になるからである。）

考えてみよう なぜ p の二つの値が同じ答えを与えるのだろうか。

条件付き確率は $pq = p(1-p)$ を通してのみ p に依存しており、pq は p を $1-p$ に置き換えても変わらない。したがって解は $p, 1-p$ という組で現れるはずであり、ここではそれが $\frac{1}{4}$ と $\frac{3}{4}$ である。

期待値

$X_{n-1} = m$ とする。この m 個の粒子はそれぞれ平均 $\mathrm{E}(X) = 2p$ 個の子を生むので、次の世代の大きさの期待値（expectation）は $2pm$ である。

$$\mathrm{E}(X_n \mid X_{n-1} = m) = 2pm.$$

m のとりうる値について平均をとると（全期待値の法則（law of total expectation））、

$$\mathrm{E}(X_n) = \sum_m \mathrm{P}(X_{n-1} = m)\, 2pm = 2p\,\mathrm{E}(X_{n-1}).$$

言葉で言えば、ある区間に存在するどの粒子も、次の区間に平均 $2p$ 個の粒子をもたらすということである。$\mathrm{E}(X_1) = 2p$（あるいは $\mathrm{E}(X_0) = 1$）であるから、この漸化式から等比数列（geometric sequence）が得られる。

$$\mathrm{E}(X_n) = (2p)^n.$$

極限

$p = \frac{1}{4}$ のとき、$0 < \frac{1}{2} < 1$ であるから、$n \to \infty$ において $\mathrm{E}(X_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ となる。

$p = \frac{3}{4}$ のとき、$\frac{3}{2} > 1$ であるから、$\mathrm{E}(X_n) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \to +\infty$ となる。

このように、条件付き確率の上では区別のつかない p の二つの値が、長期的にはまったく異なる振る舞いをもたらす。平均的に見ると、個体群は $p = \frac{1}{4}$ のときは消えていき、$p = \frac{3}{4}$ のときは爆発的に増える。

検算

- $p = \frac{3}{4}$ のとき $6p^4q^2 = \frac{243}{2048} \approx 0.1187$ であり、2 世代の個体群を 10^6 回シミュレーションしたところ 0.1186 が得られた。
- $p = \frac{1}{4}$ のとき $pq = \frac{3}{16}$ なので $3pq = \frac{9}{16}$ であり、$\dfrac{9/16}{25/16} = \frac{9}{25}$ となって、確かに正しい。

- いくつかの p について $X_1, \ldots, X_5$ の正確な分布（各世代は前の世代が与えられたもとで $\mathrm{B}(2m, p)$）を計算すると、平均はちょうど $(2p)^n$ となる。

よくある間違い

- $\mathrm{P}(X_2 = 2)$ を求めるときに、$X_1 = 1, X_2 = 2$ という経路を忘れること。$X_1 = 0$ を経由する経路は正しく寄与が 0 である。
- $X_2 \mid X_1 = 2$ を、独立な二つのコピーの和である $\mathrm{B}(4, p)$ ではなく、$2 \times \mathrm{B}(2, p)$（1 個の粒子の子の数の 2 倍）とみなしてしまうこと。

STEP のその先へ

これはゴルトン（Galton）＝ワトソン（Watson）分枝過程であり、もともとは姓が途絶える理由を説明するために研究されたものである。子の数の平均 $\mu = 2p$ がすべてを決める。$\mu \leq 1$ ならば個体群は確率 1 で絶滅し、$\mu > 1$ ならば正の確率で永遠に存続する。$p = \frac{3}{4}$ の場合でも、個体群は確率 $\frac{1}{9}$ で絶滅する。この値は確率母関数（probability generating function）から得られる方程式 $s = (q + ps)^2$ の最小の解である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、この問題から直接つながる形で、母関数を用いて分枝過程を扱っている。

解答例

STEP II 2003、第 13 問

確率・統計 ・ 切断ポアソン分布

STEP II 2003、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/03-s2-q13

鍵となる考え方

これはポアソン分布（Poisson distribution）から値 0 を取り除き、残りの確率を総和が 1 のままになるように拡大したものである。したがって、必要な和はいずれも $k = 0$ の項が欠けたポアソン分布の和である。しかも平均（mean）と分散（variance）については、$k = 0$ の項はもともと何の寄与もしない。そこで、よく知られたポアソン分布の事実 $\sum k\,p_k = \lambda$ と $\sum k^2 p_k = \lambda + \lambda^2$ を借りてきて、単に A を掛ければよい。

解答

定数 A

通常の $\mathrm{Po}(\lambda)$ の確率を $p_k = \dfrac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}$ と書く。$\sum_{k\ge 0} \lambda^k/k! = \mathrm{e}^{\lambda}$ であるから、

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda} - 1\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

確率 $\mathrm{P}(X = k) = A p_k$ の総和は 1 でなければならないので、$A(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}) = 1$、すなわち

$$A = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda})^{-1},$$

となり、示すべき式が得られた。なお、$\lambda > 0$ のとき $0 < 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} < 1$ であるから $A > 1$ である。余った確率 p_0 が $k \ge 1$ の値に分配されたわけである。

平均

$\sum k\,p_k$ の $k=0$ の項はゼロであるから、

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\,p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k\,p_k = \lambda,$$

これは $\mathrm{Po}(\lambda)$ の平均である。（直接計算すると $\sum_{k\geq 1} k\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}/k! = \lambda \sum_{k\geq 1} \lambda^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda}/(k-1)! = \lambda$ となる。）したがって

$$\mu = \mathrm{E}(X) = A\lambda = \frac{\lambda}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}.$$

分散

同様に、$\sum k^2 p_k$ の $k=0$ の項はゼロであり、$\mathrm{Po}(\lambda)$ については $\mathrm{E}(Y^2) = \mathrm{Var}(Y) + (\mathrm{E}\,Y)^2 = \lambda + \lambda^2$ が成り立つ。この事実を引用したくなければ、$k^2 = k(k-1)+k$ と書けばよい。

$$\sum_{k\geq 2} k(k-1)\frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!} = \lambda^2 \sum_{k\geq 2} \frac{\lambda^{k-2}\mathrm{e}^{-\lambda}}{(k-2)!} = \lambda^2, \qquad \text{よって} \qquad \sum_{k\geq 1} k^2 p_k = \lambda^2 + \lambda.$$

したがって

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X^2) &= A\lambda(1+\lambda) = \mu(1+\lambda), \\ \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - \mu^2 = \mu(1+\lambda) - \mu^2 = \mu(1-\mu+\lambda), \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

不等式

考えてみよう 狭義の不等式 $\mu < 1+\lambda$ はどこから得られるだろうか？

分散からである。X は $1,2,3,\ldots$ のすべての値を正の確率でとるので定数ではない。そして、定数でない確率変数（random variable）の分散は真に正である（$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\big((X-\mu)^2\big)$ であり、$(X-\mu)^2 > 0$ となる確率が正であるから）。よって

$$\mu(1-\mu+\lambda) > 0.$$

$\mu > 0$ であるから（正の値をとる確率変数の平均であるから）、μ で割って $1-\mu+\lambda > 0$、すなわち $\mu < 1+\lambda$ を得る。

下からの評価については、$\mu = A\lambda$ で $A > 1$ かつ $\lambda > 0$ であるから、$\mu > \lambda$ である。以上を合わせて

$$\lambda < \mu < 1+\lambda.$$

$\lambda = 100$ のときの正規近似

ここで e^{-100} は天文学的に小さい（約 4×10^{-44}）ので、実用上のどんな精度においても

$$\mu = \frac{100}{1 - \mathrm{e}^{-100}} \approx 100, \qquad \mathrm{Var}(X) = \mu(101 - \mu) \approx 100 \times 1 = 100.$$

そこで X を $Y \sim \mathrm{N}(100, 10^2)$ で近似する。X は整数値をとるので、連続性補正（continuity correction）を用いる。事象 $X = 100$ は $99.5 < Y < 100.5$ に対応する。$Z = (Y - 100)/10$ によって標準化すると、

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X = 100) &\approx \mathrm{P}(-0.05 < Z < 0.05) \\ &= 2\Phi(0.05) - 1 \\ &\approx 2(0.51994) - 1 = 0.0399, \end{aligned}$$

よって、小数第 2 位までで $\mathrm{P}(X = 100) \approx 0.04$ である。

検算

- $\lambda \to 0$ のとき、$\mu = \lambda/(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}) \to 1$ であり、分散は $\to 0$ となる。ほぼすべての確率が $k = 1$ に集中するので、これは当然である。また、不等式 $\lambda < \mu < 1 + \lambda$ が μ を 1 に向けて挟み込むことをも合致する。
- 多数のランダムな λ について級数を数値的に足し合わせると、A、μ、$\mu(1 - \mu + \lambda)$ が計算機の精度で再現される。
- $\lambda = 100$ のとき、厳密な確率は $\dfrac{100^{100}\mathrm{e}^{-100}}{100!\,(1 - \mathrm{e}^{-100})} \approx 0.03986$ であり、正規近似（normal approximation）の値は 0.03988 である。どちらも四捨五入すると 0.04 になる。

よくある間違い

- 連続性補正を忘れて $\mathrm{P}(Y = 100) = 0$ と計算してしまうこと、あるいは根拠なく確率密度の値を用いること。
- $\mu \leq 1 + \lambda$ しか証明しないこと。狭義の不等式を示すには、X が定数でないという観察が必要である。
- $\mu > 0$ であることに触れずに μ で割ること。

STEP のその先へ

X は**零切断ポアソン分布**（zero-truncated Poisson distribution）であり、統計学者はこれを、個数がゼロという観測が起こりえない場合に用いる（たとえば、検問所を通過する車の乗員数である。乗員がゼロの車はない）。正規近似がうまくいくのは、Po(100) に従う変数が 100 個の独立な Po(1) 変数の和であり、中心極限定理（central limit theorem）が適用できるからである。このスケールでは切断の影響は見えない。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、この問題の前半と後半それぞれの背後にある母関数（generating function）と中心極限定理が扱われている。

解答例

STEP II 2003、第 14 問

確率・統計　・　仮説検定の誤り

> **STEP II 2003、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q14

鍵となる考え方

最初の 6 が出るまでに必要な投げる回数は幾何分布（geometric distribution）に従い、その裾（tail）は驚くほど簡単な形をしている。すなわち、「M 回より多く投げる」という事象は、単に「最初の M 回がすべて失敗する」という事象にほかならない。したがって、2 つの誤りの確率はどちらも純粋な M 乗の形になり、両者から M を消去するには対数をとればよい。

解答

2 つの誤りの確率

各回の投げは独立（independent）であり、どの回も同じ確率 p で 6 が出るとモデル化する。このとき、最初の 6 が出る回までを含めた投げる回数 X は

$$X > M \iff \text{最初の } M \text{ 回のどれも 6 でない}, \qquad \text{ゆえに} \qquad \mathrm{P}(X > M) = (1-p)^M,$$

を満たす。ここで各回の投げの独立性を用いた。（幾何級数 $\sum p(1-p)^{k-1}$ の和を計算する必要はない。事象を直接考えるほうが早い。）

この検定は、ちょうど $X > M$ のときに H_1 を採択する。したがって、実際には $p = B$ であるときに H_1 を採択する確率 α は

$$\alpha = (1-B)^M,$$

であり、実際には $p = A$ であるときに H_0 を採択する（すなわち $X \le M$ となる）確率 β は

$$\beta = 1 - \mathrm{P}(X > M \mid p = A) = 1 - (1-A)^M.$$

である。

M の消去

$(1-A)^M$ を $\alpha=(1-B)^M$ の累乗として表したい。$0<B<1$ であるから $\ln(1-B)$ は定義され、かつ 0 ではない。そこで α の対数をとると

$$M=\frac{\ln\alpha}{\ln(1-B)}.$$

を得る。すると

$$(1-A)^M=\mathrm{e}^{M\ln(1-A)}=\exp\left(\frac{\ln(1-A)}{\ln(1-B)}\ln\alpha\right)=\alpha^K,\qquad \text{ただし}\quad K=\frac{\ln(1-A)}{\ln(1-B)}.$$

である。よって

$$\beta=1-\alpha^K,\qquad K=\frac{\ln(1-A)}{\ln(1-B)},$$

となり、求められていたとおり、K は A と B のみに依存し、M には依存しない。

考えてみよう K の大きさについて何がいえるだろうか。

$0<A<B<1$ より $1>1-A>1-B>0$ であるから、2 つの対数はどちらも負であり、$\ln(1-B)<\ln(1-A)<0$ である。割り算をすると、K は正であって

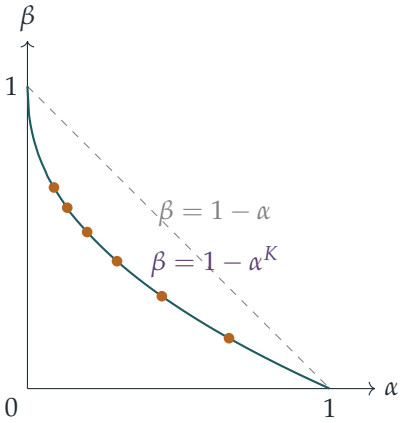
$$0<K<1.$$

となる。これがグラフの形を決定づける。

α に対する β のグラフ

M が $1,2,3,\ldots$ と動くとき、$\alpha=(1-B)^M$ は $(0,1)$ の値をとりながら 0 に向かって減少していく。厳密にはグラフは点の列であり、それらはすべて曲線 $\beta=1-\alpha^K, 0\le\alpha\le1$ の上にある。この曲線について次のことがいえる。

- 点 $(0,1)$ と $(1,0)$ を通る。
- $\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}=-K\alpha^{K-1}<0$ であるから、α が増加すると β は減少する。つまり、一方の誤りを起こりにくくすると、もう一方の誤りが起こりやすくなる。
- $K-1<0$ であるから、$\alpha\to0^+$ のとき傾きは $-\infty$ に発散し（曲線は $(0,1)$ から垂直に出発する）、$\alpha=1$ では傾きは -1 と 0 の間にある $-K$ に等しい。
- $\dfrac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}\alpha^2}=K(1-K)\alpha^{K-2}>0$ であるから、曲線は下に凸（convex）である。
- $0<\alpha<1$ かつ $0<K<1$ のとき $\alpha^K>\alpha$ であるから、$\beta<1-\alpha$ である。すなわち、曲線は $(0,1)$ と $(1,0)$ を結ぶ線分より下にある。



曲線は $A = \frac{1}{6}, B = \frac{1}{3}$（したがって $K \approx 0.45$）の場合について描いたものであり、$M = 1, \ldots, 6$ に対応する点を記してある。M を増やすと、点は左上へ移動する。

検算

- $A = \frac{1}{6}, B = \frac{1}{3}, M = 4$ とする。直接計算すると $\alpha = (\frac{2}{3})^4 \approx 0.1975$、$\beta = 1 - (\frac{5}{6})^4 \approx 0.5177$ である。$K = \ln \frac{5}{6} / \ln \frac{2}{3} \approx 0.4497$ とすると、$1 - \alpha^K \approx 0.5177$ ともなり一致する。この検定を 2×10^5 回実行したシミュレーションでは、0.198 と 0.518 が得られた。
- 極端な場合も妥当な振る舞いをする。A が B に近ければ $K \approx 1$ かつ $\beta \approx 1 - \alpha$ となり、この検定は投げた結果を無視してでたらめに決めるのとほとんど変わらない。A が非常に小さければ $K \approx 0$ となり、どんな妥当な α に対しても β を小さくできる。

よくある間違い

- どちらの仮説がどちらかを取り違えること。ここでは H_0 が**大きいほうの**値 B であるから、6 が出るまで長く待つことは H_0 に反する証拠となる。
- K の分子と分母を逆にして $\ln(1 - B) / \ln(1 - A)$ としてしまうこと。これは 1 より大きい。$\beta < 1 - \alpha$（まともな検定ならあてずっぽうより優れている）という確認をすれば、この誤りに気づける。

STEP のその先へ

α に対する β の曲線は、2 種類の誤りの間のトレードオフ曲線であり、統計学や機械学習の至るところで用いられる ROC 曲線（ROC curve）と密接に関係している。ネイマン–ピアソンの補題（Neyman–Pearson lemma）によれば、今回のような 2 つの単純仮説に対しては、尤度比（likelihood ratio）に基づく検定が、各 α に対して可能な限り最小の β を与える。ここでは尤度比が X について単調であるから、「X が大きいときに H_0 を棄却する」という検定は実際に最適である。これらの考え方についてさらに学ぶには、基礎として Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）を読み、その後、数理統計学の入門的な講義や教科書に進むとよい。

解答例

STEP III 2003、第 1 問

純粋数学 ・ 逆双曲線関数による積分

STEP III 2003、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/03-s3-q1

鍵となる考え方

最初の二つの結果は、連鎖律（chain rule）を丁寧に用いる計算である。そこから得られる有用なものは一つの「型」である。すなわち、各逆関数（inverse function）の導関数は $\dfrac{\text{定数}}{(\text{一次式})\sqrt{\text{一次式}}}$ という形をしており、これはまさに二つの被積分関数（integrand）の形そのものである。そこで各積分について、この型に合うように a と b を選ぶ。どちらの公式を使うかは、根号の外にある括弧が教えてくれる。それが大きいほうの定数をもつ $x+b$ ならば arcsin を、小さいほうの定数をもつ $x+a$ ならば arcosh を用いる。

解答

二つの導関数

$y = \dfrac{x+a}{x+b}$ とおく。商の微分法（quotient rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(x+b)-(x+a)}{(x+b)^2} = \frac{b-a}{(x+b)^2}.$$

$x+a>0$ かつ $x+b>0$ であるから $y>0$ であり、また $b>a$ より分子は分母より小さいので $0<y<1$ となり、そこで $\arcsin y$ は微分可能（differentiable）である。次に、平方の差の公式（difference of two squares）を用いると

$$1-y^2 = \frac{(x+b)^2-(x+a)^2}{(x+b)^2} = \frac{(b-a)(2x+a+b)}{(x+b)^2},$$

となる。$x+b>0$ であるから $(x+b)^2$ の平方根は $x+b$ そのものであり、したがって

$$\sqrt{1-y^2} = \frac{\sqrt{b-a}\,\sqrt{a+b+2x}}{x+b}.$$

連鎖律により、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin\left(\frac{x+a}{x+b}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x+b}{\sqrt{b-a}\,\sqrt{a+b+2x}}\cdot\frac{b-a}{(x+b)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{b-a}}{(x+b)\sqrt{a+b+2x}},$$

となる。ここで $(b-a)/\sqrt{b-a} = \sqrt{b-a}$ を用いた。これが求める結果である。

arcosh については、$z = \dfrac{x+b}{x+a}$ とおく。$x+b > x+a > 0$ であるから、ここでは $z > 1$ である。すると

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)^2} = -\frac{b-a}{(x+a)^2}, \qquad z^2-1 = \frac{(b-a)(2x+a+b)}{(x+a)^2}.$$

$x+a > 0$ であるから $\sqrt{z^2-1} = \sqrt{b-a}\,\sqrt{a+b+2x}\,/(x+a)$ であり、したがって

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcosh}\left(\frac{x+b}{x+a}\right) = \frac{x+a}{\sqrt{b-a}\,\sqrt{a+b+2x}}\cdot\left(-\frac{b-a}{(x+a)^2}\right) = -\frac{\sqrt{b-a}}{(x+a)\sqrt{a+b+2x}}.$$

二つの結果はほとんど同じに見える。違いは符号と、どちらの括弧が根号の外にあるかである。

考えてみよう arcsin の計算で実際に使った仮定（hypotheses）はどれか？

$\sqrt{(x+b)^2}$ を簡単にするために $x+b > 0$ が必要であり、また $1-y^2 > 0$ が必要であった。因数分解した形から、$b > a$ のもとで $1-y^2 > 0$ が成り立つのはちょうど $a+b+2x > 0$ のときである。$x+a > 0$ そのものは一度も使っていない。したがって arcsin の公式は、$x+a$ が負であっても、$x+b > 0$ かつ $a+b+2x > 0$ であれば成り立つ。その場合 y は $(-1, 0]$ にある。このことが (ii) で重要になる。

小問 (i)

根号の外にある括弧は $x+1$ であるから、これを arcosh の公式の $x+a$ に合わせることを試みる。$\sqrt{x+3} = \sqrt{2x+6}\,/\sqrt{2}$ と書くと、$a = 1$ に加えて $a+b = 6$ が必要となる。これより $b = 5$ であり、$b-a = 4$ である。これらの値のもとで、仮定 $x+a > 0$、$x+b > 0$、$b > a$ はすべて $x > -1$ で成り立ち、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcosh}\left(\frac{x+5}{x+1}\right) = -\frac{2}{(x+1)\sqrt{2x+6}} = -\frac{\sqrt{2}}{(x+1)\sqrt{x+3}}.$$

$-\sqrt{2}$ で割ると、

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+3}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcosh}\left(\frac{x+5}{x+1}\right) + C.$$

小問 (ii)

今度は外にある括弧が $x+3$ であるから、これを arcsin の公式の $x+b$ に合わせる。すなわち $b=3$ である。根号の中では $a+b+2x=2(x+1)$ が必要なので、$a+b=2$、$a=-1$ となる。すると $b-a=4$ であり、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin\left(\frac{x-1}{x+3}\right)=\frac{2}{(x+3)\sqrt{2x+2}}=\frac{\sqrt{2}}{(x+3)\sqrt{x+1}}.$$

考えてみよう $a=-1$ のとき、仮定 $x+a>0$ は $x>1$ を要求する。それでも答えは範囲 $x>-1$ 全体で成り立つだろうか？

成り立つ。上で見たように、arcsin の公式に必要なのは $x+b>0$ と $a+b+2x>0$ だけである。ここではそれらは $x+3>0$ と $2x+2>0$ であり、どちらもすべての $x>-1$ で成り立つ。この範囲で $(x-1)/(x+3)$ は -1 から 1 に向かって増加するので、arcsin は定義される。よって $x>-1$ において

$$\int\frac{1}{(x+3)\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{x-1}{x+3}\right)+C.$$

別解：置換

どちらの積分も、根号の中の式を $x+c$ として $u=\sqrt{x+c}$ と置換（substitution）すれば解ける。このとき $\mathrm{d}x=2u\,\mathrm{d}u$ となるからである。(ii) では $u=\sqrt{x+1}$ とおくと、積分は $\int\frac{2}{u^2+2}\,\mathrm{d}u=\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{(x+1)/2}\right)+C$ となる。これは先の答えと定数 $-\pi/(2\sqrt{2})$ だけしか違わない。(i) では $u=\sqrt{x+3}$ とおくと $\int\frac{2}{u^2-2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2}}\right|+C$ が得られる。これはまさに arcosh による答えを対数で書いたものである。

検算

- 答えを微分して戻してみる。たとえば $x=0$ で $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x-1}{x+3}$ の導関数は $\frac{1}{3}$ になるはずであり、上の式からは $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot3\cdot1}=\frac{1}{3}$ が得られる。
- 数値的には、シンプソンの公式（Simpson's rule）により $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x+3}}\approx0.374543$、$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x+3)\sqrt{x+1}}\approx0.240301$ である。どちらの値も原始関数（antiderivative）から得られる値と 10^{-12} より高い精度で一致する。この一致は、(ii) で $x+a<0$ となる範囲 $-1<x<1$ の内部である $x=-0.9$ まで下がる区間でも成り立つ。
- 符号：(i) の被積分関数は正なので、その積分は増加関数であるはずである。実際、答えはそうなっている。x が増加すると $\frac{x+5}{x+1}$ は減少するので、その arcosh に負号をつけたものは増加するからである。

よくある間違い

- 括弧と公式の対応を取り違える。(i) で根号の外にある $x+1$ は**小さいほうの**定数をもつので $x+a$ でなければならず、arcsin ではなく arcosh を使うことになる。
- $\sqrt{x+3}$ を $\sqrt{2x+6}/\sqrt{2}$ と書くことから生じる因子 $\sqrt{2}$ を忘れる。
- arcosh の導関数の負号を落とす。この負号は $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x < 0$ から生じる。

STEP のその先へ

(ii) の二つの答え、すなわち arcsin によるものと arctan によるものは、定数だけ異なる。これが保証されるのは、**区間**上で同じ導関数をもつ二つの関数は定数だけ異なるからであり、これは平均値の定理（mean value theorem）の帰結である。二つの離れた部分からなる集合上では、それぞれの部分で定数が異なることもありうる。(i) に対数が現れるのも偶然ではない。逆双曲線関数（inverse hyperbolic functions）は姿を変えた対数であり、だからこそ $1/\sqrt{\text{二次式}}$ の積分は逆三角関数（inverse trigonometric functions）か対数のどちらかを与えるのである。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門）は平均値の定理を丁寧に証明しており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策問題集）にはこの種の積分がさらに収められている。

解答例

STEP III 2003、第 2 問

純粋数学 ・ 二項級数

> **STEP III 2003、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q2

鍵となる考え方

中心二項係数（central binomial coefficient）$\binom{2r}{r}$ は、負の半整数乗に対する二項級数（binomial series）の中に隠れている。最初の恒等式によって $(2r)!$ を奇数の因数と偶数の因数に分けると、$(1-p)^{-1/2}$ における p^r の係数はちょうど $\binom{2r}{r}/4^r$ であることがわかる。すると、それぞれの和は姿を変えた二項級数にほかならず、あとは p（および (ii) では適切な指数）を選ぶだけである。

解答

恒等式

$(2r)!$ の因数を奇数のものと偶数のものに分ける：

$$(2r)! = \big[1 \times 3 \times \cdots \times (2r-1)\big] \times \big[2 \times 4 \times \cdots \times 2r\big].$$

r 個の偶数の因数はそれぞれ $1, 2, \ldots, r$ のいずれかの 2 倍であるから、2 つ目の括弧は $2^r\, r!$ である。よって

$$\binom{2r}{r} = \frac{(2r)!}{r!\,r!} = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2r-1) \times 2^r\, r!}{r!\,r!} = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2r-1)}{r!} \times 2^r,$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (i)

$|p| < 1$ のとき、二項級数により

$$\begin{aligned}(1-p)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)(-p) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-p)^2 \\ &\quad + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(-p)^3 + \cdots \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}p + \tfrac{3}{8}p^2 + \tfrac{5}{16}p^3 + \cdots .\end{aligned}$$

である。

一般項も同じパターンに従う。p^r の係数には、因数 $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$ に由来する負号が r 個、さらに $(-p)^r$ に由来する負号が r 個あるので、これらは打ち消し合い、

$$\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{2r-1}{2}}{r!}\,p^r = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2r-1)}{2^r\,r!}\,p^r.$$

が残る。

> **考えてみよう** これは $\binom{2r}{r}$ とどう結びつくか。

恒等式より $\dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2r-1)}{r!} = \dfrac{\binom{2r}{r}}{2^r}$ である。したがって p^r の係数は $\binom{2r}{r}/4^r$ であり、これは $r=0$ のときも両辺が 1 となるので成り立つ。ゆえに

$$(1-p)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{2r}{r}\left(\frac{p}{4}\right)^r \qquad (|p|<1).$$

求めたい和では $(p/4)^r = 1/8^r$ であるから、$p = \frac{1}{2}$ とする。これは収束区間（interval of convergence）の内部にある。すると

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\binom{2r}{r}}{8^r} = \left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

小問 (ii)

余分な因数 $2r+1$ は、指数をもう 1 つ進めて $(1-p)^{-3/2}$ を考えることを示唆している。$|p| < 1$ のとき、その二項級数における p^r の係数は、先ほどと同様に符号が打ち消し合って

$$\begin{aligned}\frac{\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}\times\cdots\times\frac{2r+1}{2}}{r!} &= \frac{3\times 5\times\cdots\times(2r+1)}{2^r\,r!} \\ &= (2r+1)\,\frac{1\times 3\times\cdots\times(2r-1)}{2^r\,r!} = \frac{(2r+1)\binom{2r}{r}}{4^r},\end{aligned}$$

となる。ここで $3\times5\times\cdots\times(2r+1)=(2r+1)\times\left[1\times3\times\cdots\times(2r-1)\right]$ を用い、そのうえで (i) とまったく同様に恒等式を用いた。($r=0$ のときは両端とも 1 に等しい。) よって

$$(1-p)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)\binom{2r}{r}\left(\frac{p}{4}\right)^r\qquad(|p|<1).$$

今度は $p/4=\frac{1}{5}$、すなわち $p=\frac{4}{5}$ とすればよく、これもまた $|p|<1$ を満たす。ゆえに

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2r+1)\binom{2r}{r}}{5^r}=\left(1-\tfrac{4}{5}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left(\tfrac{1}{5}\right)^{-\frac{3}{2}}=5^{\frac{3}{2}}=\left(\sqrt{5}\right)^3,$$

となり、示すべき式が得られた。

別解として、$|x|<\frac{1}{4}$ に対して $f(x)=\sum\binom{2r}{r}x^r=(1-4x)^{-1/2}$ とおく。べき級数 (power series) をその収束区間の内部で項別微分 (term-by-term differentiation) すると、$\sum r\binom{2r}{r}x^r=xf'(x)=2x(1-4x)^{-3/2}$ であるから、

$$\sum(2r+1)\binom{2r}{r}x^r=4x(1-4x)^{-\frac{3}{2}}+(1-4x)^{-\frac{1}{2}}=(1-4x)^{-\frac{3}{2}},$$

となり、$x=\frac{1}{5}$ とすれば同じ答えが得られる。

検算

- (i) の最初の数項は $1+\frac{2}{8}+\frac{6}{64}+\frac{20}{512}\approx1.371$ であり、すでに $\sqrt{2}\approx1.414$ に近い。200 項まで加えると 1.41421356… となる。
- (ii) の級数はより緩やかに収束する (項の比は $\frac{4}{5}$ に近づく) が、400 項まで加えると 11.18033988… となり、$5\sqrt{5}\approx11.1803$ と一致する。
- $r=0,1,2,3$ に対する係数 $\binom{2r}{r}/4^r$ は $1,\frac{1}{2},\frac{3}{8},\frac{5}{16}$ であり、直接求めた 4 つの項と一致する。

よくある間違い

- 符号を見失うこと。係数に含まれる r 個の負の因数と、$(-p)^r$ に由来する $(-1)^r$ は必ず打ち消し合うので、係数はすべて正である。
- 選んだ p が $|p|<1$ を満たすことの確認を忘れること。これが成り立たなければ、級数がその関数に収束するとは限らない。
- (ii) で、p を変えて再び $(1-p)^{-1/2}$ を用いること。因数 $2r+1$ はその級数だけからは出てこない。

STEP のその先へ

関数 $\sum \binom{2r}{r} x^r = (1-4x)^{-1/2}$ は中心二項係数の母関数（generating function）であり、組合せ論（combinatorics）における標準的な道具である。たとえば、これを 2 乗すると $\sum_r 4^r x^r$ が得られ、これにより $\sum_k \binom{2k}{k}\binom{2r-2k}{r-k} = 4^r$ が証明される。項別微分の正当化や、べき級数がどこで収束するかを正確に知ることは、大学 1 年次の解析学（analysis）の話題である。べき級数については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を、級数に関する STEP の演習をさらに積みたければ Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）を参照のこと。

解答例

STEP III 2003、第 3 問

純粋数学 ・ 曲線の概形

STEP III 2003、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/03-s3-q3

鍵となる考え方

$u=(1+x)^m$ と $v=(1-x)^m$ とおく。すると $\mathrm{f}=(u-v)/(u+v)$ であり、$u'v-uv'$ が共通因数 $(1-x^2)^{m-1}$ をもつので、商の微分法（quotient rule）を使うと見事に簡単になる。この導関数（derivative）は決して負にならず、それだけで $y=\mathrm{f}(x)$ の形状のほとんどがわかる。逆数の曲線については隠れた対称性がある。x を $1/x$ に置き換えると f が 1/f に変わるのである。

解答

分母は決して零にならない

ある実数 x に対して $(1+x)^m+(1-x)^m=0$ であると仮定する。

m が偶数ならば、両方の項は非負なので、どちらもゼロでなければならない。それには $x=-1$ と $x=1$ が同時に成り立つ必要があり、これは不可能である。

m が奇数ならば、$(1+x)^m=-(1-x)^m=(x-1)^m$ である。m が奇数のとき写像 $t\mapsto t^m$ は $\mathbb{R}$ 上で狭義単調増加（strictly increasing）なので単射（one-to-one）であり、$1+x=x-1$、すなわち $1=-1$ となる。これは矛盾である。

したがって、すべての実数 x に対して $(1+x)^m+(1-x)^m\neq 0$ であり、f は $\mathbb{R}$ 全体で定義され、微分可能（differentiable）である。

導関数

$u=(1+x)^m$、$v=(1-x)^m$ とすると、$u'=m(1+x)^{m-1}$、$v'=-m(1-x)^{m-1}$ である。商の微分法により、

$$\mathrm{f}'(x)=\frac{(u'-v')(u+v)-(u-v)(u'+v')}{(u+v)^2}=\frac{2(u'v-uv')}{(u+v)^2}.$$

分子は次のように簡単になる。

$$\begin{aligned}u'v-uv' &= m(1+x)^{m-1}(1-x)^m+m(1+x)^m(1-x)^{m-1}\\ &= m(1+x)^{m-1}(1-x)^{m-1}\big[(1-x)+(1+x)\big]\\ &= 2m(1-x^2)^{m-1}.\end{aligned}$$

したがって

$$\mathrm{f}'(x)=\frac{4m\,(1-x^2)^{m-1}}{\big[(1+x)^m+(1-x)^m\big]^2}.$$

$m=5$ の場合：曲線 $y=\mathrm{f}(x)$

二項定理（binomial theorem）で展開すると、分子では偶数乗の項が、分母では奇数乗の項が打ち消し合う。

$$\mathrm{f}(x)=\frac{2(5x+10x^3+x^5)}{2(1+10x^2+5x^4)}=\frac{x(x^4+10x^2+5)}{5x^4+10x^2+1},\qquad \mathrm{f}'(x)=\frac{20(1-x^2)^4}{\big[(1+x)^5+(1-x)^5\big]^2}.$$

ここから曲線の特徴を読み取る。

- **対称性。** $\mathrm{f}(-x)=-\mathrm{f}(x)$ なので、曲線は原点に関して回転対称（rotational symmetry）である。曲線は $(0,0)$ を傾き $\mathrm{f}'(0)=20/2^2=5$ で通る。
- **単調性（*monotonic*）。** すべての x に対して $\mathrm{f}'(x)\geq 0$ であり、等号が成り立つのは $x=\pm1$ のときに限る。よって f はいたるところで増加する。$x=\pm1$ では停留点（stationary point）をもつが、$(1-x^2)^4$ は符号を変えないので、これらは極値点（turning point）ではなく変曲点（point of inflection）である。それらは $(1,1)$ と $(-1,-1)$ にある。$(1-x)^5$ または $(1+x)^5$ の項が消えて、$\mathrm{f}=\pm1$ が残るからである。
- **$|x|$ が大きいとき。** $\mathrm{f}(x)\approx x/5$ である。より正確には

  $$\mathrm{f}(x)-\frac{x}{5}=\frac{x(40x^2+24)}{5(5x^4+10x^2+1)},$$

  であり、これは $|x|\to\infty$ のとき 0 に近づく。よって $y=x/5$ は斜めの漸近線（oblique asymptote）である。曲線は $x>0$ ではその上側に、$x<0$ ではその下側にある。

考えてみよう $\mathrm{f}(x)$ の大きさが 1 より大きいのはどこで、小さいのはどこか。

f は増加関数で $\mathrm{f}(\pm 1) = \pm 1$ なので、$|x| < 1$ では $|\mathrm{f}(x)| < 1$、$|x| > 1$ では $|\mathrm{f}(x)| > 1$ である。これは逆数を考えるときに重要になる。（$|x| < 1$ のとき、$x = \tanh t$ とおくと $(1+x)/(1-x) = \mathrm{e}^{2t}$ となり、f の分子と分母を $(1-x)^5$ で割ると $\mathrm{f}(\tanh t) = \tanh 5t$ がわかる。これは -1 と 1 の間の S 字形を見る別の方法である。）

曲線 $y = 1/\mathrm{f}(x)$

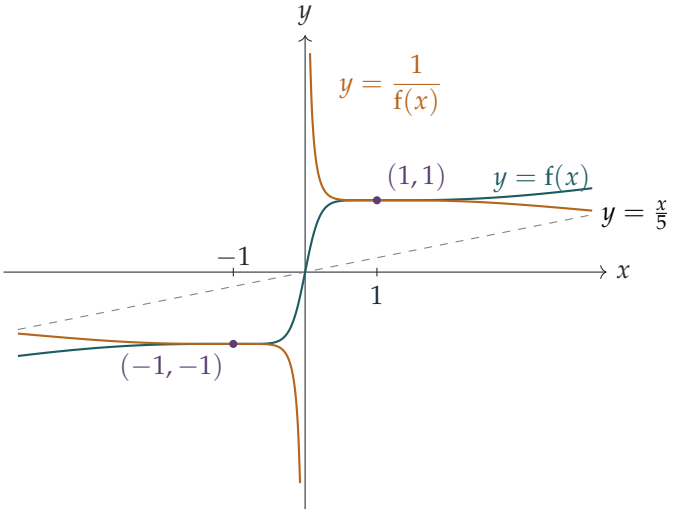
x を $1/x$ に置き換え、分子と分母に x^5 を掛けると

$$\mathrm{f}(1/x) = \frac{(x+1)^5 - (x-1)^5}{(x+1)^5 + (x-1)^5} = \frac{(1+x)^5 + (1-x)^5}{(1+x)^5 - (1-x)^5} = \frac{1}{\mathrm{f}(x)},$$

が得られる。ここで $(x-1)^5 = -(1-x)^5$ を用いた。よって $y = 1/\mathrm{f}(x)$ は曲線 $y = \mathrm{f}(1/x)$ であり、その特徴は f の特徴から導かれる。

- 奇関数（odd function）であり、f の唯一の零点である $x = 0$ では定義されない。0 の近くでは $1/\mathrm{f}(x) \approx 1/(5x)$ なので、y 軸は鉛直漸近線（vertical asymptote）であり、$x \to 0^+$ のとき $y \to +\infty$、$x \to 0^-$ のとき $y \to -\infty$ である。
- その導関数は $-\mathrm{f}'(x)/\mathrm{f}(x)^2 \leq 0$ なので、$x > 0$ と $x < 0$ のそれぞれで減少する。$(1,1)$ と $(-1,-1)$ では停留点かつ変曲点となる点をもつ。
- $|x| \to \infty$ のとき $1/\mathrm{f}(x) \approx 5/x \to 0$ なので、x 軸は漸近線である。曲線は $x > 0$ ではその上側に、$x < 0$ ではその下側にある。

2 つの曲線が交わるのは $\mathrm{f}(x)^2 = 1$ となるところ、すなわち $(1,1)$ と $(-1,-1)$ だけである。どちらの曲線もそこで水平なので、交差するのではなく接する。



検算

- $m = 1$ とすると、公式から $\mathrm{f}'(x) = 4/2^2 = 1$ となり、実際 $\mathrm{f}(x) = 2x/2 = x$ である。
- 数値的には $\mathrm{f}(1000)/1000 \approx 0.2000016$ であり、漸近線 $y = x/5$ と整合する。中心差分（central difference）による数値微分は、$m = 1, \ldots, 8$ について無作為に選んだ点で f' の公式と一致する。
- $\mathrm{f}(\tanh t) = \tanh 5t$ と $\mathrm{f}(1/x) = 1/\mathrm{f}(x)$ は、どちらも無作為に選んだ点で 10^{-9} の精度で成り立つことが確かめられる。

よくある間違い

- $x = \pm 1$ を極大点や極小点（maxima or minima）と呼んでしまう。導関数はそこでゼロに触れるが符号を変えないので、これらは停留点かつ変曲点である。
- 斜めの漸近線を見落とす。f は 5 次式を 4 次式で割ったものなので、一定値に落ち着くのではなく $x/5$ のように増大する。
- $y = 1/\mathrm{f}(x)$ が $(\pm 1, \pm 1)$ で $y = \mathrm{f}(x)$ と交差するように描いてしまう。どちらの曲線もそこで平らなので、両者は接する。

STEP のその先へ

置換 $x = \tanh t$ により、f は $\tanh t$ を用いて $\tanh 5t$ を表す公式であることがわかる。これは $\tan 5\theta$ の倍角公式（multiple-angle formula）の双曲線関数版である。このように見ると、f は 5 倍写像と共役（conjugate）な有理写像（rational map）である。このような写像と、反復（iteration）したときのその振る舞いは、複素力学系（complex dynamics）の出発点の一つである。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ビジュアル複素解析』）は、こうした有理関数が複素平面全体にどのように作用するかを見るのに素晴らしい本である。

解答例

STEP III 2003、第 4 問

純粋数学 ・ 媒介変数表示された曲線の接線

STEP III 2003、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/03-s3-q4

鍵となる考え方

直線とこの曲線の交点は、媒介変数（parameter）についての**三次式**（cubic）が 0 となるところである。接線は t に重根（double root）を与えるので、解の和からただちに第三の解 T がわかる。すると T の式は tan の倍角の公式（double-angle formula）とそっくりの形をしており、$t = \tan\theta$ とおくことが示唆される。こうすると写像 $t \mapsto T$ は角度に関する単純な一次写像となり、その反復は容易である。

解答

T の式

$y = t + t^3$ は t について狭義単調増加であるから、異なる媒介変数の値は異なる点を与える。したがって、曲線上の点と媒介変数の値は一対一に対応する。

微分すると $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t$、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1 + 3t^2$ であるから、$t \neq 0$ のとき、t における接線（tangent）の傾きは

$$m = \frac{1 + 3t^2}{2t}.$$

である（$t \neq 0$ なので接線は鉛直ではない）。その方程式は $y - (t + t^3) = m(x - t^2)$ である。媒介変数 s の点がこの直線上にあるのは、ちょうど

$$s + s^3 - (t + t^3) = m(s^2 - t^2), \qquad \text{すなわち} \qquad f(s) \equiv s^3 - ms^2 + s - \left(t + t^3 - mt^2\right) = 0.$$

となるときである。明らかに $f(t) = 0$ であり、m の選び方から $f'(t) = 3t^2 - 2mt + 1 = 0$ である。よって $s = t$ はこの三次方程式の（少なくとも）重根であり、ある実数 T を

用いて解は t, t, T と表される。$s^3 - ms^2 + \ldots$ の解の和は m であるから、

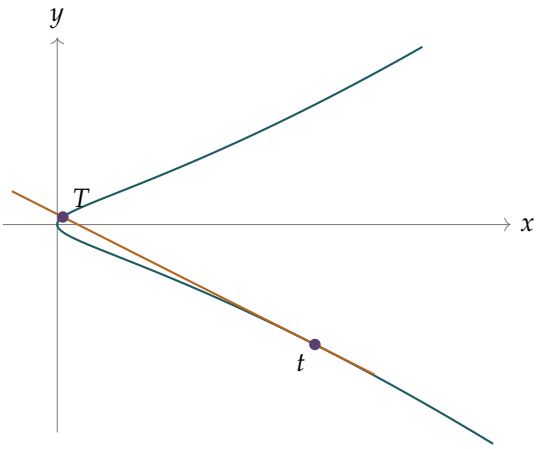
$$2t + T = \frac{1+3t^2}{2t}$$
$$T = \frac{1+3t^2-4t^2}{2t} = \frac{1-t^2}{2t}.$$

この解 T が、直線が曲線と交わりうる唯一の他の点である。

接線が曲線と**再び**交わるのは $T \neq t$ のときに限る。ここで

$$T = t \iff 1 - t^2 = 2t^2 \iff 3t^2 = 1,$$

であるから、$3t^2 \neq 1$ が必要である（$3t^2 = 1$ のときは解 t が三重根となり、接線は曲線と一度しか接しない。これらは変曲点（points of inflection）である）。以上で両方の結果が示された。



$t_0 = \tan\frac{7}{18}\pi$ から始まる数列

$t = \tan\theta$ とおく。倍角の公式により

$$T = \frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta} = \frac{1}{\tan 2\theta} = \cot 2\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right).$$

である。よって $t_i = \tan\theta_i$ ならば $\theta_{i+1} = \frac{\pi}{2} - 2\theta_i$ ととることができる。tan は周期（period）π をもち、長さ π の任意の区間上で（$\frac{\pi}{2}$ の奇数倍を除いて）一対一であるから、二つの媒介変数の値が等しいのは、対応する角の差が π の倍数であるときに限る。

考えてみよう 反復を始める前に、次の点が存在するためには各 t_i について何を確かめなければならないだろうか。

この構成には、各段階で $t_i \neq 0$ かつ $3t_i^2 \neq 1$ であること、すなわち θ_i が $\frac{\pi}{2}$ の倍数でなく、かつ $\pm\frac{\pi}{6}$ に π の倍数を加えたものでもないことが必要である。$\frac{\pi}{18}$ を単位として表せば、18 を法として $0, \pm 3, \pm 9$ を避けなければならない。

$\theta_0 = \frac{7\pi}{18}$ から始めると、

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{9\pi}{18} - \frac{14\pi}{18} = -\frac{5\pi}{18},\\ \theta_2 &= \frac{9\pi}{18} + \frac{10\pi}{18} = \frac{19\pi}{18} \equiv \frac{\pi}{18} \pmod{\pi},\\ \theta_3 &= \frac{9\pi}{18} - \frac{2\pi}{18} = \frac{7\pi}{18}.\end{aligned}$$

$7, -5, 1$ はいずれも禁止された値ではないので、すべての段階が有効である。したがって $t_3 = \tan\frac{7\pi}{18} = t_0$ となり、$P_3 = P_0$ である。一方、$\theta_1 - \theta_0 = -\frac{12\pi}{18}$ は π の倍数ではないので、$t_1 = \tan(-\frac{5\pi}{18}) < 0 < t_0$ であり、$P_1 \neq P_0$ である。三つの点の媒介変数は $\tan 70^\circ$、$-\tan 50^\circ$、$\tan 10^\circ$ である。

二つ目の初期値

$g(\theta) = \frac{\pi}{2} - 2\theta$ とおく。反復すると

$$g^2(\theta) = -\frac{\pi}{2} + 4\theta, \qquad g^3(\theta) = \frac{3\pi}{2} - 8\theta.$$

となる。よって $P_3 = P_0$ となるのは $\frac{3\pi}{2} - 8\theta \equiv \theta \pmod{\pi}$、すなわち $9\theta \equiv \frac{3\pi}{2} \pmod{\pi}$ のときに限り、これより

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{9} = \frac{(3+2k)\pi}{18}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

を得る。同様に、$P_1 = P_0$ となるのは $3\theta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$、すなわち $\theta = \frac{(3+6j)\pi}{18}$ のときに限る。これらはちょうど $3 + 2k \equiv 3, 9, 15 \pmod{18}$ の場合であり、$t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ を与えるか、有限の t をまったく与えないので、いずれにせよ除外される。

残るのは、π を法として $\theta \in \{\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}\}$ である。$t_0 > 0$ であるためには $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ が必要であり、$\tan\frac{\pi}{18}$、$\tan\frac{5\pi}{18}$、そして与えられた $\tan\frac{7\pi}{18}$ を得る。$\tan\frac{\pi}{18}$ は上の周期における P_2 にすぎない。本当に新しい周期を与える値は

$$t_0 = \tan\frac{5\pi}{18} \ (= \tan 50^\circ),$$

であり、$\theta_0 = \frac{5\pi}{18}$、$\theta_1 = -\frac{\pi}{18}$、$\theta_2 = \frac{11\pi}{18}$、$\theta_3 = \frac{9\pi}{18} - \frac{22\pi}{18} = -\frac{13\pi}{18} \equiv \frac{5\pi}{18}$ となる。$5, -1, 11$ はいずれも禁止された値ではなく、$t_1 = -\tan 10^\circ \neq t_0$ である。$\tan\frac{5\pi}{18}$ と $\tan\frac{\pi}{18}$ のどちらも問いの答えとなる。

考えてみよう 角度を「π を法として」扱ってよいのはなぜだろうか。

用いているのは $t = \tan\theta$ だけであり、$\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$ だからである。θ_i に π を加えると $g(\theta_i)$ は 2π だけ変わるが、これは t_{i+1} を変えない。したがって、媒介変数の数列全体は π を法とした θ_0 のみによって決まる。

検算

- $t = -1$ とすると $T = 0$ となる。$(1, -2)$ における接線の傾きは -2 であり、確かに原点を通る。
- 数値的に、$t_0 = \tan 70^\circ \approx 2.747477$ からは $t_1 \approx -1.191754$、$t_2 \approx 0.176327$、$t_3 \approx 2.747477$ が得られる。同様に $\tan 50^\circ \approx 1.191754 \to -0.176327 \to -2.747477 \to 1.191754$ である。
- ランダムな t に対して三次方程式を数値的に解いてもう一つの交点を求めると、$T = (1 - t^2)/(2t)$ と一致する。

よくある間違い

- 弦（chord）の傾きを求めて等置したあと、因数 $T - t$ で約分するのを忘れる。解の和に関するヴィエト（Vieta）の公式（解と係数の関係）を使えば、この問題はまったく生じない。
- t に関する写像を小数で直接反復してしまい、正確な周期が見えなくなる。$P_3 = P_0$ を厳密に示せるのは、置換 $t = \tan\theta$ のおかげである。
- 二つ目の値として $\tan\frac{\pi}{6}$ を答える。このときは $T = t$ となり、次の点がそもそも存在しない。

STEP のその先へ

弦と接線による構成は楕円曲線（elliptic curves）の理論の核心であり、そこでは同じ「第三の交点」の規則によって三次曲線上の点全体が群（group）をなす。ここでの曲線 $y^2 = x(1+x)^2$ は特異三次曲線（singular cubic）であり（$(-1, 0)$ に孤立点（isolated point）をもつ）、置換 $t = \tan\theta$ によって、接線写像の正体が角の二倍化であることがわかる。周期が円を九等分することから現れるのはこのためである。Silverman and Tate, *Rational Points on Elliptic Curves*（楕円曲線上の有理点）は、この内容を学部レベルで見事に展開している。

解答例

STEP III 2003、第 5 問

純粋数学 • 3 次方程式の解

> **STEP III 2003、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q5

鍵となる考え方

グラフを見て根を数える。最高次の係数（leading coefficient）が正の二次式（quadratic）のグラフが x 軸と 2 回交わるのは、その最小値が軸より下にあるときであり、またそのときに限る。最高次の係数が正の三次式（cubic）のグラフが 3 回交わるのは、その極大値が軸より上にあり、極小値が軸より下にあるときであり、またそのときに限る。すべての根（root）を正にするには、極値をとる点（turning point）が y 軸のどちら側にあるか、そして曲線が y 軸と交わる点での符号に注目する。最後の方程式は、平行移動した三次式の場合が姿を変えたものである。立方完成（completing the cube）によってその形に直せばよい。

解答

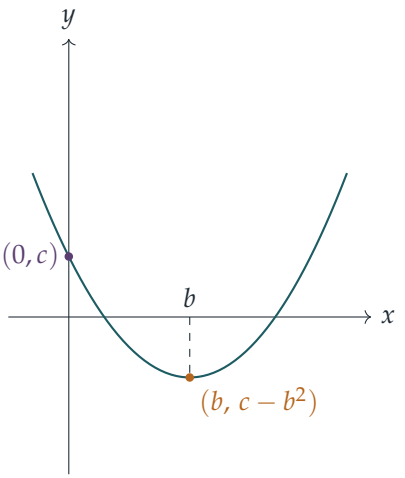
二次式

平方完成（completing the square）すると

$$y = x^2 - 2bx + c = (x-b)^2 + c - b^2,$$

となるので、極値をとる点（最小値）は $(b,\ c-b^2)$ である。

相異なる 2 つの実数解をもつとき、曲線は $x = b$ に関して対称な $\cup$ 字型の放物線で、その頂点は x 軸より下にある。曲線は y 軸と $(0, c)$ で交わる。



相異なる2つの実数解。この放物線の最高次の係数は正なので、$x \to \pm\infty$ のとき $y \to +\infty$ であり、その最小値は $c - b^2$ である。$c - b^2 < 0$ ならば、曲線は $x = b$ の両側で軸の下に沈んでから再び上がるので、2回交わる。$c - b^2 = 0$ ならば曲線は軸にちょうど接し（重根（repeated root））、$c - b^2 > 0$ ならば軸と決して交わらない。したがって条件は

$$b^2 > c.$$

である。

相異なる2つの正の解。条件は

$$b^2 > c, \qquad b > 0, \qquad c > 0.$$

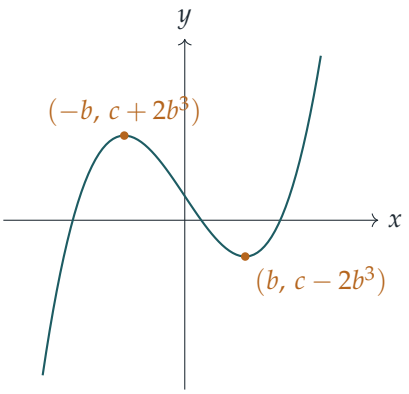
であると主張する。**必要性（necessary）：**根 α, β は $\alpha + \beta = 2b$ および $\alpha\beta = c$ を満たし、両方が正ならばこれらはともに正である。**十分性（sufficient）：**$b^2 > c$ ならば根は2つあり、$x = b$ の両側に1つずつある。$b > 0$ なので、右側の根は正である。左側の根は曲線が減少する区間にある。曲線は $x = 0$ で正（高さ $c > 0$）であり、$x = b > 0$ で負であるから、この根は0と b の間に厳密に含まれ、やはり正である。

三次式

$y = x^3 - 3b^2x + c$ について $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 - 3b^2 = 3(x - b)(x + b)$ であり、これは $x = \pm b$ で0になる。代入すると

$$x = -b:\ y = -b^3 + 3b^3 + c = c + 2b^3, \qquad x = b:\ y = b^3 - 3b^3 + c = c - 2b^3.$$

$b > 0$ なので、極値をとる点は $(-b,\ c + 2b^3)$ における極大と $(b,\ c - 2b^3)$ における極小である。実際、導関数は $x < -b$ で正、その間で負、$x > b$ で正である。



曲線は $-\infty$ から極大まで上がり、極小まで下がり、それから $+\infty$ まで上がる。そしてこの 3 つの部分のそれぞれで狭義単調（strictly monotonic）である。したがって、各部分に 1 つずつ根をもち、相異なる 3 つの根をもつのは、極大値が軸より上にあり極小値が軸より下にあるときであり、またそのときに限る：

$$c+2b^3>0 \text{ かつ } c-2b^3<0, \qquad \text{すなわち} \qquad -2b^3<c<2b^3.$$

どちらかの極値が 0 ならば重根が生じ、両方が同じ符号（厳密に正または負）ならば実数解は 1 つしかない。よって $|c|<2b^3$ が必要十分条件である。

平行移動した三次式の相異なる 3 つの正の根

曲線 $y=(x-a)^3-3b^2(x-a)+c$ は、前の曲線を右に a だけ平行移動（translation）したものである（引き続き $b>0$ とする）。したがって、この曲線が相異なる 3 つの実数解をもつのは $|c|<2b^3$ のときであり、またそのときに限る。そのとき極大は $x=a-b$、極小は $x=a+b$ にあり、根 $x_1<x_2<x_3$ は

$$x_1<a-b<x_2<a+b<x_3.$$

を満たす。3 つすべてが正であるのは、最小の根 x_1 が正であるときであり、またそのときに限る。曲線が y 軸と交わる高さを

$$y(0)=(-a)^3-3b^2(-a)+c=c-a^3+3ab^2$$

と書く。条件は

$$|c|<2b^3, \qquad a>b, \qquad c<a^3-3ab^2.$$

であると主張する。

考えてみよう　なぜ「$y(0)<0$」だけでは、3 つの根すべてを原点の右側に置くのに十分でないのだろうか？

y は x_2 と x_3 の間でも負だからである。$x=0$ での値が負であることは、原点が真ん中の根と最大の根の間にあることを意味しているかもしれない。0 が曲線の最初の上昇部分、つまり極大の左側にあることも知る必要がある。それが $a>b$ の役割である。

必要性。相異なる 3 つの正の根があるとする。すると前の部分より $|c|<2b^3$ である。また $0<x_1<a-b$ なので $a>b$ である。最後に、y は $(-\infty, a-b]$ で狭義単調増加で $y(x_1)=0$ であり、$0<x_1$ だから $y(0)<0$ である。これより $c<a^3-3ab^2$ が得られる。

十分性。3 つの条件がすべて成り立つとする。相異なる 3 つの実数解があり、$0<a-b$ なので、0 は y が狭義単調増加である $(-\infty, a-b]$ に含まれる。$y(0)<0=y(x_1)$ であるから $0<x_1$ となり、したがって 3 つの根はすべて正である。

よって、この方程式が相異なる 3 つの正の根をもつのは

$$a>b \quad \text{かつ} \quad -2b^3<c<\min\bigl(2b^3,\ a^3-3ab^2\bigr).$$

のときであり、またそのときに限る。($a>b>0$ のとき $a^3-3ab^2+2b^3=(a-b)^2(a+2b)>0$ なので、c に対するこれらの範囲は矛盾しない。)

最後の方程式

2 で割り、立方完成する。$(x-a)^3$ の x^2 の項は $-3ax^2$ なので、$3a=\frac{9}{2}$、すなわち $a=\frac{3}{2}$ とする必要がある。$x=t+\frac{3}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned} x^3-\tfrac{9}{2}x^2+\tfrac{7}{2}x-\tfrac{1}{2} &= t^3+\bigl(\tfrac{27}{4}-\tfrac{27}{2}+\tfrac{7}{2}\bigr)t+\bigl(\tfrac{27}{8}-\tfrac{81}{8}+\tfrac{21}{4}-\tfrac{1}{2}\bigr) \\ &= t^3-\tfrac{13}{4}t-2, \end{aligned}$$

となる。ここで t^2 の項は a の選び方により打ち消し合う。したがって

$$2x^3-9x^2+7x-1=0 \iff \bigl(x-\tfrac{3}{2}\bigr)^3-3b^2\bigl(x-\tfrac{3}{2}\bigr)+c=0, \qquad a=\tfrac{3}{2},\ b^2=\tfrac{13}{12},\ c=-2,$$

であり、$b=\sqrt{13/12}>0$ である。では 3 つの条件を確かめよう。

- $|c|<2b^3$：これは $2<2b^3$、すなわち $b^2>1$ ということであり、$b^2=\frac{13}{12}>1$ なので成り立つ。
- $a>b$：両方とも正で、$a^2=\frac{9}{4}=\frac{27}{12}>\frac{13}{12}=b^2$ である。
- $c<a^3-3ab^2$：ここで $a^3-3ab^2=a(a^2-3b^2)=\frac{3}{2}\bigl(\frac{9}{4}-\frac{13}{4}\bigr)=-\frac{3}{2}$ であり、$-2<-\frac{3}{2}$ である。

3 つすべてが成り立つので、$2x^3-9x^2+7x-1=0$ は、示すべきとおり相異なる 3 つの正の根をもつ。

検算

- 符号の変化（sign change）によって最終的な答えを直接確かめられる。$p(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x - 1$ とすると、$p(0) = -1$、$p(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$、$p(1) = -1$、$p(3) = -7$、$p(4) = 11$ である。したがって根は $(0, \frac{1}{2})$、$(\frac{1}{2}, 1)$、$(3, 4)$ にある。数値的には 0.185、0.760、3.555 である。
- 値 $y(0) = c - a^3 + 3ab^2 = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ は、当然そうなるべきとおり、モニック（monic）な三次式 $x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}$ の定数項と一致する。
- (a, b, c) を何千通りも無作為に選んで試したところ、毎回上に述べた条件と一致した。

よくある間違い

- 正であることの条件として $y(0) < 0$ だけ（あるいは $a > b$ だけ）を使ってしまう。両方が必要である。$y(0) < 0$ は、原点が大きい方の 2 つの根の間にあるときにも成り立つ。
- $|c| \leq 2b^3$ で等号が成り立つと重根が生じるので、「相異なる 3 つの根」ではなくなることを忘れる。
- 平行移動の向きを逆にしてしまう。$x - a$ で表された曲線は、元の曲線を**右に** a だけ動かしたものである。

STEP のその先へ

どんな三次式も、ここでしたように平行移動によって「還元」形（depressed form）$t^3 + pt + q$ に直すことができる。すると相異なる 3 つの実数解をもつのは、$4p^3 + 27q^2 < 0$ のときであり、またそのときに限る。$p = -3b^2$、$q = c$ とすれば、これは上で求めた条件 $c^2 < 4b^6$ になる。量 $-(4p^3 + 27q^2)$ は**判別式**（discriminant）であり、三次方程式がどのように解かれたか（カルダノ（Cardano）の公式）、そしてやがてはガロア理論（Galois theory）へと至る物語の出発点である。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は、その理論へ向かう次の一歩として良い本である。

解答例

STEP III 2003、第 6 問

純粋数学 ・ 望遠鏡型の三角関数の和

STEP III 2003、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/03-s3-q6

鍵となる考え方

角が等間隔で増えていく余弦の和は、そのままでは扱いにくい。しかし各項に $2\sin\frac{1}{2}\theta$ を掛けると、それぞれの余弦が二つの正弦の**差**に変わり、和は打ち消し合って縮む（telescoping）。残るのは二つの正弦の差であり、これは和積公式（factor formula）によって積に直せる。積を零とおく方程式は解きやすい。ただ一つ注意すべきなのは、掛けた $\sin\frac{1}{2}\theta$ 自身が零になりうることである。

解答

恒等式

$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B$ において $A=r\theta$、$B=\frac{1}{2}\theta$ とおくと、

$$\sin\left(r+\tfrac{1}{2}\right)\theta-\sin\left(r-\tfrac{1}{2}\right)\theta=2\cos r\theta\,\sin\tfrac{1}{2}\theta,$$

となり、これが求める恒等式（identity）である。

級数の和

$$S(\theta)=\sum_{r=a}^{b-1}\cos r\theta.$$

とおく。$2\sin\frac{1}{2}\theta$ を掛け、a から $b-1$ までの各 r について恒等式を用いると、

$$\begin{aligned}2\sin\tfrac{1}{2}\theta\,S(\theta)&=\sum_{r=a}^{b-1}\left[\sin\left(r+\tfrac{1}{2}\right)\theta-\sin\left(r-\tfrac{1}{2}\right)\theta\right]\\&=\sin\left(b-\tfrac{1}{2}\right)\theta-\sin\left(a-\tfrac{1}{2}\right)\theta,\end{aligned}$$

となる。各 $\sin\left(r+\frac{1}{2}\right)\theta$ が次の項の $-\sin\left((r+1)-\frac{1}{2}\right)\theta$ と打ち消し合い、最後の項の上端と最初の項の下端だけが残るからである。

次に $\sin P-\sin Q=2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$ を、$\frac{P+Q}{2}=\frac{1}{2}(a+b-1)\theta$、$\frac{P-Q}{2}=\frac{1}{2}(b-a)\theta$ として用いると、

$$\sin\tfrac{1}{2}\theta\ S(\theta)=\cos\tfrac{1}{2}(a+b-1)\theta\ \sin\tfrac{1}{2}(b-a)\theta. \qquad (*)$$

$S(\theta)=0$ を解く

考えてみよう $(*)$ をそのまま $\sin\frac{1}{2}\theta$ で割ってよいだろうか？

割ってよいのは $\sin\frac{1}{2}\theta\neq 0$ のとき、すなわち θ が 2π の倍数でないときに限る。そこで、まずそのような値を処理しておく。整数 m に対して $\theta=2m\pi$ ならば、すべての項 $\cos r\theta$ が 1 に等しいので、$S(\theta)=b-a\geq 2$ である。したがって、これらの値は決して解にならない。

それ以外のすべての θ では $\sin\frac{1}{2}\theta\neq 0$ であり、$(*)$ より

$$S(\theta)=0 \iff \cos\tfrac{1}{2}(a+b-1)\theta=0 \text{ または } \sin\tfrac{1}{2}(b-a)\theta=0.$$

- $\cos\frac{1}{2}(a+b-1)\theta=0$ となるのは、ちょうど $\frac{1}{2}(a+b-1)\theta=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ のとき、すなわち
$$\theta=\frac{(2k+1)\pi}{a+b-1},\qquad k\in\mathbb{Z}.$$
のときである（$a+b-1\geq 3$ なので、零で割っているわけではないことに注意）。これらはいずれも 2π の倍数ではない。もしそうなら $2k+1=2m(a+b-1)$ となり、奇数が偶数に等しいことになってしまう。よって、これらはすべて解である。
- $\sin\frac{1}{2}(b-a)\theta=0$ となるのは、ちょうど $\frac{1}{2}(b-a)\theta=k\pi$ のとき、すなわち
$$\theta=\frac{2k\pi}{b-a},\qquad k\in\mathbb{Z}.$$
のときである。これが 2π の倍数になるのは、ちょうど $b-a$ が k を割り切るときであり、そのような値が解にならないことはすでに見た。したがって、それらは除外しなければならない。

考えてみよう $(*)$ は成り立っているように見えるのに、なぜ二つ目の族から 2π の倍数を取り除かなければならないのだろうか？

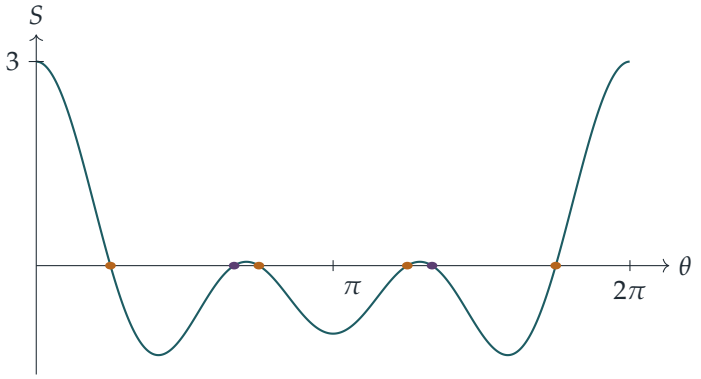
$\theta=2m\pi$ では、S が何であっても $(*)$ の両辺はともに零になるので、そこでは $(*)$ は S について何も教えてくれない。これは $\sin\frac{1}{2}\theta$ を両辺に掛けたことで生じた見せかけの手がかりだったのである。$b-a\geq 2$ であるから、二つ目の族にも $\theta=2\pi/(b-a)$ のような本物の解がちゃんと含まれている。

以上をまとめると、解はちょうど

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{a+b-1} \ (k \in \mathbb{Z}) \qquad \text{または} \qquad \theta = \frac{2k\pi}{b-a} \ (k \in \mathbb{Z},\ b-a \nmid k).$$

である。二つの族は重なることがある。しかし両方に属する値も一つの解にすぎないので、差し支えはない。

たとえば $a=1$、$b=4$ のとき、方程式は $\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta=0$ となる。$(0,2\pi)$ における根は、一つ目の族から $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$、二つ目の族から $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ である。$S=3$ となる $\theta=0$ と $\theta=2\pi$ が除かれていることに注意しよう。



曲線 $S=\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta$。琥珀色の根は余弦の因数から、プラム色の根は正弦の因数から生じる。

検算

- $a=1$、$b=4$ のとき、$\theta=\frac{\pi}{4}$ では $\frac{\sqrt{2}}{2}+0-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$、$\theta=\frac{2\pi}{3}$ では $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=0$ となる。
- 数値的に、多くの組 a,b について、無作為に選んだ θ で $(*)$ が成り立つ。$1\le a\le 6$、$a+2\le b\le 11$ のすべてについて、$(0,6\pi)$ 上で S を細かく走査すると、公式が与える根がちょうど見つかり、それ以外の根は見つからない。たとえば $a=1$、$b=3$ のとき、根 $\theta=13\pi/3\approx 13.6136$ は一つ目の族から得られる。

よくある間違い

- 確認せずに $(*)$ を $\sin\frac{1}{2}\theta$ で割り、$\theta=2m\pi$ を解に含めてしまう。そこでは $S=b-a\neq 0$ である。

- 打ち消し合う和の端の項を間違える。最後の余弦は $\cos(b-1)\theta$ なので、端の項は $\sin\left(b-\frac{1}{2}\right)\theta$ と $\sin\left(a-\frac{1}{2}\right)\theta$ である。
- 問題はすべての解を求めているのに、$[0, 2\pi)$ のような一つの区間内の解だけを答える。

STEP のその先へ

$\sum \cos r\theta$ の閉じた式は、$e^{i\theta}$ の等比級数（geometric series）の実部である。$a = -n$、$b = n+1$ とおくと、**ディリクレ核**（Dirichlet kernel）$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta / \sin\frac{1}{2}\theta$ が得られる。これはフーリエ級数（Fourier series）の理論、そしてその収束（convergence）の問題の核心にあるものである。このような三角関数の和が $e^{i\theta}$ を用いるとなぜ簡単になるのかを知るには、Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）がよい。

解答例

STEP III 2003、第 7 問

純粋数学 ・ シムソン線

> **STEP III 2003、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q7

鍵となる考え方

垂線の足（foot of the perpendicular）は、P から直線の法線（normal）に沿って進み、直線にぶつかるところとして求められる。そこで $N = P + \lambda(\text{法線})$ とおき、λ について解く。後半では、s と t に関する条件は 2 つの傾き（gradient）の積が -1 に等しいという形をしており、これは PA と PB が垂直であることを意味する。この条件を円の方程式に書き直すと、まさにそれによって共線性（collinearity）の確認が一気に片づく。

解答

N の座標

直線 AB の方程式は $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$、すなわち

$$bx + ay = ab.$$

である。この直線の法線ベクトル（normal vector）は (b, a) であるから、P から下ろした垂線の足 N は、ある λ を用いて

$$N = (s + \lambda b,\ t + \lambda a)$$

の形に書ける。N は AB 上にあるので、

$$b(s + \lambda b) + a(t + \lambda a) = ab \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{ab - bs - at}{a^2 + b^2}.$$

したがって

$$x = s + \lambda b = \frac{s(a^2+b^2) + ab^2 - b^2 s - abt}{a^2+b^2} = \frac{ab^2 - abt + a^2 s}{a^2+b^2} = \frac{ab^2 - a(bt-as)}{a^2+b^2},$$
$$y = t + \lambda a = \frac{t(a^2+b^2) + a^2 b - abs - a^2 t}{a^2+b^2} = \frac{a^2 b + b^2 t - abs}{a^2+b^2} = \frac{a^2 b + b(bt-as)}{a^2+b^2},$$

となり、求める結果が得られた。

N は XY 上にある

まず、条件が何を意味するかを確認する。条件が意味をもつためには $s \neq 0$ かつ $s \neq a$ が必要であり、さらに積が 0 ではなく -1 であることから $t \neq 0$ かつ $t \neq b$ も必要である。展開すると

$$t(t-b) = -s(s-a) \quad \Longleftrightarrow \quad s^2 + t^2 = as + bt. \qquad (*)$$

となる。

さて、$X = (s, 0)$、$Y = (0, t)$ である。$s \neq 0$ かつ $t \neq 0$ であるから、これらは原点以外の異なる 2 点であり、直線 XY は

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = 1, \qquad \text{すなわち} \qquad tx + sy = st.$$

である。よって、N の座標について $tx + sy = st$ が成り立つことを示せばよい。

> **考えてみよう** 代入してうまくいくことを祈るべきか、それとも計算をすっきり整理する方法があるだろうか。

式を短くするために $k = bt - as$ とおく。上の式を用いると、

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(tx+sy) &= t(ab^2 - ak) + s(a^2 b + bk) \\ &= ab^2 t + a^2 bs + k(bs - at).\end{aligned}$$

最後の積はきれいに展開できる：

$$k(bs-at) = (bt-as)(bs-at) = b^2 st - abt^2 - abs^2 + a^2 st = (a^2+b^2)st - ab(s^2+t^2).$$

したがって

$$(a^2+b^2)(tx+sy) = (a^2+b^2)st + ab\big(as + bt - s^2 - t^2\big).$$

これはすべての P について成り立つ。$(*)$ より括弧の中は 0 であるから $tx + sy = st$ となり、N は直線 XY 上にある。

幾何学的な解釈

PB の傾きは $\dfrac{t-b}{s}$、PA の傾きは $\dfrac{t}{s-a}$ であるから、条件は $PA \perp PB$、すなわち角 APB が直角であることを表す。同値な言い方をすれば、$(*)$ は

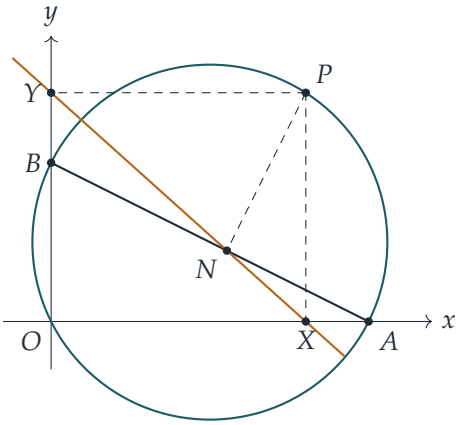
$$\left(s-\tfrac{a}{2}\right)^2+\left(t-\tfrac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4},$$

であり、P は AB を直径（diameter）とする円上にある。角 AOB も直角であるから、この円は O を通る。つまりこれは**三角形 OAB の外接円**（*circumcircle*）である。

点 X、Y、N は、P から三角形の 3 辺 OA、OB、AB に下ろした垂線の足である。したがって、この結果は次のことを述べている：

P が三角形の外接円上にあるならば、P から 3 辺（必要なら延長する）に下ろした垂線の足は同一直線上にある。

これは**シムソン線**（Simson line）の定理であり、ここでは直角を原点に置いた直角三角形の場合について証明したことになる。



$a=4$、$b=2$ の場合：P は O、A、B を通る円上にあり、直線 XY（琥珀色）は N を通る。

検算

- $P=O$、すなわち $s=t=0$ とおくと、式から $N=\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$ が得られる。これは $bx+ay=ab$ 上にあり、かつ O を通り AB に垂直な直線 $y=\frac{a}{b}x$ 上にもあり、期待どおりである。
- $a=4$、$b=2$ とし、円上の点 $P=(2+\sqrt{5}\cos 1,\ 1+\sqrt{5}\sin 1)\approx(3.208,2.882)$ をとると、式から $N\approx(2.214,0.893)$ が得られ、$\frac{2.214}{3.208}+\frac{0.893}{2.882}\approx 0.690+0.310=1$ となる

ので、N は XY 上にある。

- 恒等式 $(a^2+b^2)(tx+sy-st) = ab(as+bt-s^2-t^2)$ からは逆（converse）も得られる：座標軸上にない P について、N が XY 上にあるのは P が円上にある場合に限る。

よくある間違い

- AB の法線として (a,b) を用いてしまう。AB の方向は $(-a,b)$ であるから、法線は (b,a) である。
- すべてを一度に展開して計算に溺れてしまう。与えられた答えが示唆しているように $bt-as$ を 1 つの文字としてまとめれば、計算は数行で済む。
- 「角 APB は直角である」で止めてしまう。問題が求めている解釈はシムソン線である：X、Y、N は三角形 OAB の 3 辺に下ろした垂線の足である。

STEP のその先へ

シムソン線は任意の三角形について成り立ち、総合的証明（synthetic proof）では円に内接する四角形（cyclic quadrilateral）と同じ弧に対する円周角が等しいことを用いる。その逆も成り立ち、さらに P が外接円を一周するとき、シムソン線の包絡線（envelope）はデルトイド（deltoid、シュタイナー（Steiner）の内サイクロイド（hypocycloid））を描く。座標や複素数を用いる方法を使えば、こうした結果は機械的に導ける。Needham の *Visual Complex Analysis*（複素解析を視覚的に扱った本）は複素数が円の幾何をいかに見事に扱えるかを示しており、コクセター（Coxeter）と Greitzer の *Geometry Revisited*（初等幾何の再訪）はシムソン線をはじめ、古典的な三角形の幾何を幅広く扱っている。

解答例

STEP III 2003、第 8 問

純粋数学 ・ 一階微分方程式

STEP III 2003、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/03-s3-q8

鍵となる考え方

小問 (i) は陰関数微分（implicit differentiation）の問題であるが、実際にはある工夫の例題になっている。曲線族 $(y+ax)^n(y+bx)=c$ の傾きは、x と y の二つの一次式の比になるのである。小問 (ii) ではこの工夫を逆向きに用いる。一般の曲線族を微分して、傾きを a、b、n で表し、それが与えられた方程式と一致するようにこれらを選ぶ。一致すれば、その式はすべての解曲線（solution curve）に沿って一定となり、その「一定である」という関係こそが一般解（general solution）となる。

解答

小問 (i)

$(y+2x)^3(y-4x)=c$ を、積の微分法（product rule）と合成関数の微分法（chain rule）を用いて x で微分する。$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ を y' と書くと、

$$3(y+2x)^2(y'+2)(y-4x)+(y+2x)^3(y'-4)=0.$$

$y+2x\neq 0$ である点では、$(y+2x)^2$ で割ることができて、

$$3(y'+2)(y-4x)+(y+2x)(y'-4)=0.$$

y' を含む項をまとめると、

$$y'\left[3(y-4x)+(y+2x)\right]=-6(y-4x)+4(y+2x),$$
$$y'(4y-10x)=32x-2y,$$

となり、分子と分母を 2 で割ると、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{16x - y}{2y - 5x},$$

となって、示すべき式が得られる。（直線 $y = -2x$ 上では曲線は $c = 0$ のものであり、そこでもこの式は正しい傾き -2 を与える。）

小問 (ii)

y を x の関数として、$F = (y + ax)^n(y + bx)$ とおく。小問 (i) とまったく同様にして、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} &= n(y + ax)^{n-1}(y' + a)(y + bx) + (y + ax)^n(y' + b)\\ &= (y + ax)^{n-1}\Big[y'\big((n + 1)y + (nb + a)x\big) + (na + b)y + (n + 1)ab\,x\Big].\end{aligned}$$

したがって、$y = -ax$ 上を除けば、F が曲線に沿って一定であるのは、ちょうど

$$y' = -\frac{(na + b)y + (n + 1)ab\,x}{(n + 1)y + (nb + a)x}. \qquad (*)$$

が成り立つときである。（小問 (i) は $a = 2$、$b = -4$、$n = 3$ の場合であり、このとき $(32x - 2y)/(4y - 10x)$ が得られる。）

考えてみよう 分数の書き方はいくらでもあるのに、$(*)$ と $\dfrac{10x - 4y}{3x - y}$ をどのように一致させればよいだろうか？

分数は分子と分母に同じ数を掛けても変わらないので、二つの式は共通因数の違いを除いてしか一致させられない。目標の式を $-(4y - 10x)/(y - 3x)$ と書き、分母の y の係数がそろうように、分子と分母に $k = n + 1$ を掛ける。すると次の条件が必要になる。

$$na + b = -4(n + 1), \qquad (n + 1)ab = 10(n + 1), \qquad nb + a = -3(n + 1).$$

$n + 1 \neq 0$ であるから（$n = -1$ ならば $(*)$ の分母に y の項がない）、中央の式から $ab = 10$ が得られる。両端の二式を足すと $(n + 1)(a + b) = -7(n + 1)$ となるので、$a + b = -7$ である。よって a と b は $t^2 + 7t + 10 = 0$ の解、すなわち -2 と -5 である。両端の二式を引くと、

$$(n - 1)(a - b) = -(n + 1).$$

- $a = -5$、$b = -2$ のとき：$-3(n - 1) = -(n + 1)$ より $n = 2$。
- $a = -2$、$b = -5$ のとき：$3(n - 1) = -(n + 1)$ より $n = \frac{1}{2}$。

$(y-2x)^{1/2}(y-5x)=c$ を二乗すると $(y-5x)^2(y-2x)=c^2$ となるので、どちらの選び方も同じ曲線を表している。平方根を避けるため、$n=2$ を採用する。

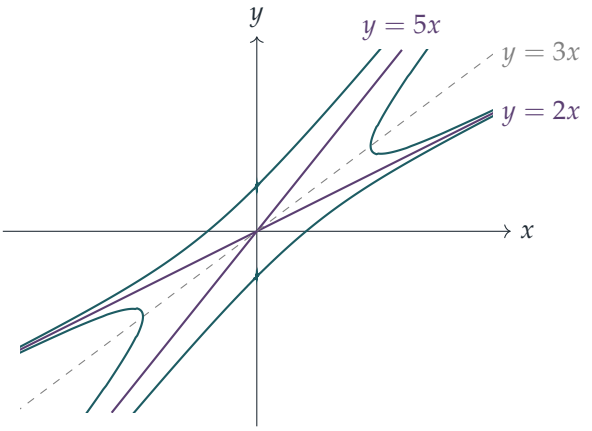
念のため、直接確かめておく。$G=(y-5x)^2(y-2x)$ とすると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x} &= (y-5x)\big[2(y'-5)(y-2x)+(y-5x)(y'-2)\big]\\ &= (y-5x)\big[3y'(y-3x)-12y+30x\big]\\ &= 3(y-5x)\big[y'(y-3x)-(4y-10x)\big].\end{aligned}$$

y が微分方程式（differential equation）を満たすならば $y'(y-3x)=4y-10x$ であるから、括弧の中は 0 となり、$\mathrm{d}G/\mathrm{d}x=0$ である。よって G はすべての解曲線上で一定であり、一般解は

$$\boxed{(y-5x)^2(y-2x)=C}$$

である。ただし C は任意定数である。$C=0$ の場合は直線 $y=5x$ と $y=2x$ になる。これらはどちらも実際に解である。$y=2x$ 上では右辺は $2x/x=2$ であり、$y=5x$ 上では $(-10x)/(-2x)=5$ となる。また、どの曲線も、方程式が定義されない直線 $y=3x$ と交わるところで鉛直な接線（vertical tangent）をもつ。



曲線 $(y-5x)^2(y-2x)=\pm1$（ティール）と、$C=0$ に対応する直線の解（プラム）。二直線の間にある枝は、破線 $y=3x$ と交わるところで鉛直な接線をもつ。

小問 (ii) の別解

右辺は y/x のみに依存するので、置換（substitution）$y=vx$ でも解ける。これにより

$$x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{(v-2)(v-5)}{3-v},$$

が得られ、変数分離（separation of variables）と部分分数分解（partial fractions）を用いると $\ln|x| = -\frac{1}{3}\ln|v-2| - \frac{2}{3}\ln|v-5| +$ 定数 となり、これを整理すると同じ答えになる。問題文の方法を使えば、部分分数分解を避けることができる。

検算

- 小問 (i) は $(*)$ の検算にもなっている。$(*)$ に $a=2$、$b=-4$、$n=3$ を代入すると、そこで求めた傾きが再現される。
- 点 $(1,0)$ において、方程式は傾き $10/3$ を与える。そこで $(y-5x)^2(y-2x) = C$ を陰関数微分すると $(-5)\big[2(y'-5)(-2) + (-5)(y'-2)\big] = 0$ となるので、$-9y' + 30 = 0$ より $y' = 10/3$ である。
- 数値的にも、ランダムに選んだ 50 個の出発点から、ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で微分方程式を数値的に解き進めた。どの経路に沿っても、$(y-5x)^2(y-2x)$ の値は約 10^{-13} の精度で一定に保たれた。

よくある間違い

- 共通因数を考えずに、$(*)$ の係数を $10x-4y$ と $3x-y$ に直接一致させてしまい、矛盾する方程式を得る。
- 答えを $(y-2x)^{1/2}(y-5x) = c$ のままにして、それが同じ曲線族であることに気づかない。また、符号に注意しないと $y < 2x$ となる解も失われる。
- $C=0$ が許されることを忘れ、直線の解 $y=2x$ と $y=5x$ を落とす。

STEP のその先へ

ここで扱った方程式は**同次形**（homogeneous）である。すなわち、右辺が y/x のみに依存する。解に沿って一定となる関数 $G(x,y)$ を探すという考え方は、**完全微分方程式**（exact equations）や**積分因子**（integrating factors）の背後にある考え方である。力学では、同じ考え方がエネルギーのような保存量（conserved quantities）を探すことにあたる。どちらも Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）の初めのほうで扱われている。

解答例

STEP III 2003、第 9 問

力学 ・ つり合いの安定性

> **STEP III 2003、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q9

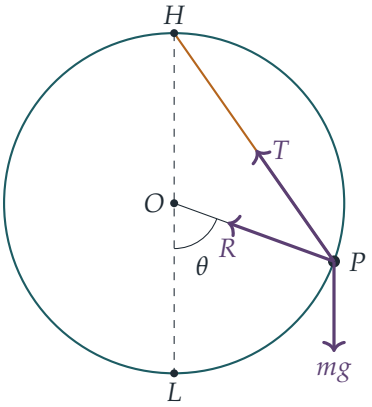
鍵となる考え方

針金は滑らか（smooth）なので、その抗力（reaction）は常に半径方向にはたらき、仕事をしない。したがって、すべては**接線方向**（tangential）で起こる。張力（tension）と重力を接線方向に分解すれば、$\ddot{\theta}$ についての方程式が一つ得られ、そこから平衡（equilibrium）と微小振動（small oscillations）の両方がわかる。必要な角はすべて二等辺三角形（isosceles triangle）OHP の幾何から得られる。

解答

設定

P を滑らかな針金上の質点としてモデル化する。したがって針金からの抗力 R は PO の方向にはたらく。糸は軽く、フックの法則（Hooke's law）に従う。$0 < \theta < \pi$ とし、P は鉛直な直径 LH の一方の側にあるとする。



$OH = OP = a$ であるから、三角形 OHP は $\angle HOP = \pi - \theta$ の二等辺三角形であり、その底角は

$$\angle OHP = \angle OPH = \tfrac{1}{2}\theta, \qquad HP = 2a\cos\tfrac{1}{2}\theta.$$

となる。糸が張っているのは $HP > a$、すなわち $\cos\frac{1}{2}\theta > \frac{1}{2}$ のときであり、このときフックの法則より

$$T = \frac{\alpha mg}{a}\left(2a\cos\tfrac{1}{2}\theta - a\right) = \alpha mg\left(2\cos\tfrac{1}{2}\theta - 1\right).$$

である。

次に、P における接線に沿って、θ が増加する向き（H に向かう向き）に力を分解する。糸は PO と角 $\frac{1}{2}\theta$ をなすので、この接線とは角 $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\theta$ をなし、その接線成分は $T\sin\frac{1}{2}\theta$ である。重力の接線成分は $-mg\sin\theta$ であり、R の接線成分はない。接線方向の加速度は $a\ddot{\theta}$ であるから、

$$\begin{aligned} ma\ddot{\theta} &= T\sin\tfrac{1}{2}\theta - mg\sin\theta \\ &= mg\left[\alpha\left(2\cos\tfrac{1}{2}\theta - 1\right)\sin\tfrac{1}{2}\theta - 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta\right], \end{aligned}$$

となり、糸が張っている間は

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{a}\sin\tfrac{1}{2}\theta\left[2(\alpha - 1)\cos\tfrac{1}{2}\theta - \alpha\right]. \qquad (*)$$

が成り立つ。（エネルギー $\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta + \frac{1}{2}\alpha mga(2\cos\frac{1}{2}\theta - 1)^2$ を微分しても同じ方程式が得られる。）

平衡位置

平衡状態では $\ddot{\theta} = 0$ である。$0 < \theta < \pi$ では $\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$ であるから、

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta = \frac{\alpha}{2(\alpha - 1)},$$

が必要であり、$\alpha > 1$ なのでこれは意味をもつ。これが $0 < \theta < \pi$ を与えるためには $0 < \cos\frac{1}{2}\theta < 1$ が必要である。この値は正であり、

$$\frac{\alpha}{2(\alpha-1)} < 1 \iff \alpha < 2\alpha - 2 \iff \alpha > 2.$$

である。また、$(*)$ が仮定しているとおり、そこで糸が張っている必要もある。$\dfrac{\alpha}{2(\alpha-1)} > \dfrac{1}{2} \iff \alpha > \alpha - 1$ であり、これは常に成り立つ。よって、$\alpha > 2$ ならば $0 < \theta < \pi$ を満たす平衡位置が存在する。これが示すべきことであった。

考えてみよう 平衡位置で糸がたるんでいたらどうなるか。

その場合、接線成分をもつのは重力だけになり、$-mg\sin\theta = 0$ は $0 < \theta < \pi$ の範囲に解をもたない。だからこそ、求めた平衡位置で $\cos\frac{1}{2}\theta > \frac{1}{2}$ が自動的に成り立つことが重要なのである。

$\alpha = 2 + \sqrt{2}$ のときの微小振動

このとき

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta = \frac{2+\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

であるから、平衡位置は $\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{4}\pi$、すなわち $\theta = \frac{1}{2}\pi$ であり、P は O と同じ高さにある。$\theta = \frac{1}{2}\pi + \phi$ とおくと $\ddot{\theta} = \ddot{\phi}$ である。$(*)$ を $\ddot{\theta} = \frac{g}{a}f(\theta)$ と書く。ここで $f(\frac{1}{2}\pi) = 0$ である。ϕ が小さいとき

$$f(\tfrac{1}{2}\pi + \phi) \approx f'(\tfrac{1}{2}\pi)\,\phi.$$

である。$(*)$ の角括弧の部分は $\theta = \frac{1}{2}\pi$ で 0 になるので、積の微分法則（product rule）を用いると一つの項だけが残る。

$$f'(\tfrac{1}{2}\pi) = \sin\tfrac{1}{4}\pi \cdot \left[-2(\alpha-1)\cdot\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{4}\pi\right] = -(\alpha-1)\sin^2\tfrac{1}{4}\pi = -\frac{\alpha-1}{2} = -\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

したがって、ϕ が小さいとき

$$\ddot{\phi} \approx -\frac{g(\sqrt{2}+1)}{2a}\,\phi$$

となり、示すべきことが示された。

最後の小問

ϕ の係数は負であるから、小さな変位を与えると質点は $\theta = \frac{1}{2}\pi$ のまわりで（近似的に）単振動（simple harmonic motion）をする。すなわち、この平衡は安定（stable）である。角振動数（angular frequency）は $\omega = \sqrt{g(\sqrt{2}+1)/(2a)}$ であるから、周期（period）は

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{(\sqrt{2}+1)g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2(\sqrt{2}-1)a}{g}},$$

である。また、エネルギーが保存されるので振幅（amplitude）は小さいままである（針金は滑らかで糸は弾性的であるから、エネルギーを散逸させるものは何もない）。

検算

- $\alpha = 2$ のとき、平衡位置の式は $\cos\frac{1}{2}\theta = 1$、すなわち $\theta = 0$ を与える。平衡位置が最下点と一致することになり、条件 $\alpha > 2$ と整合する。
- $\alpha \to \infty$ のとき $\cos\frac{1}{2}\theta \to \frac{1}{2}$ であるから、$\theta \to \frac{2}{3}\pi$、$HP \to a$ となる。非常に硬い糸はほとんど伸びないということである。
- $a = 1.3\,\mathrm{m}$、$g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ として、$\phi = 0.01$ から完全な方程式 $(*)$ を数値的に解き進めると、周期は約 $2.0819\,\mathrm{s}$ となり、$2\pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)a/g} \approx 2.0818\,\mathrm{s}$ と一致する。

よくある間違い

- $HP = 2a\sin\frac{1}{2}\theta$ としてしまう。これは弦（chord）LP であって HP ではない。三角形 OHP の O における角は $\pi - \theta$ である。
- 平衡位置で糸が張っていることの確認を忘れる。たるんだ糸には張力がはたらかない。
- 接線方向ではなく半径方向に分解してしまう。半径方向の方程式には未知の抗力 R が入り込み、$\ddot{\theta}$ については何も教えてくれない。

STEP のその先へ

平衡位置のまわりで線形化（linearising）して $\ddot{\phi} \approx f'(\theta_0)\,\phi$ とすることは、あらゆる力学系（dynamical system）の安定性を調べる際の標準的な第一歩である。$f'(\theta_0)$ の符号（位置エネルギー（potential energy）でいえば同値的に $V''(\theta_0)$ の符号）によって、振動するか、それとも離れていってしまうかが決まる。大学 1 年次の講義では、これが非線形常微分方程式（nonlinear ODEs）の相平面解析（phase-plane analysis）へと発展する。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、安定な平衡位置のまわりの微小振動を位置エネルギーを用いて非常にわかりやすく扱っている。

解答例

STEP III 2003、第 10 問

力学 ・ 変化する加速度

STEP III 2003、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/03-s3-q10

鍵となる考え方

加速度（acceleration）$kx\dot{x}$ は時間についての完全な導関数（exact derivative）になっている。実際、それは $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$ である。したがって、ただちに一度積分して一階の微分方程式（first-order equation）$\dot{x} = \frac{1}{2}kx^2 + C$ が得られ、これは変数分離（separation of variables）によって解ける。すべてを決めるのは定数 C の符号である。定数が正ならば逆正接関数（arctangent）が現れ（解は発散する）、負ならば部分分数分解（partial fractions）と対数が現れる（解はある値に落ち着く）。

解答

粒子は x 軸上を $\ddot{x} = kx\dot{x}$ に従って運動するものとして扱う。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2) = 2x\dot{x}$ であるから、運動方程式（equation of motion）は

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}kx^2\right), \qquad \text{よって} \qquad \dot{x} = \tfrac{1}{2}kx^2 + C$$

となる。ここで定数を C とした。$t = 0$ において $x = d$、$\dot{x} = U$ であるから $C = U - \frac{1}{2}kd^2$ であり、

$$\dot{x} = \tfrac{1}{2}k\left(x^2 - d^2\right) + U. \qquad (*)$$

小問 (i)

$U = kd^2$ のとき、式 $(*)$ は

$$\dot{x} = \tfrac{1}{2}k\left(x^2 + d^2\right).$$

となる。右辺はつねに正であるから、変数を分離してよい：

$$\int_d^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2+d^2} = \int_0^t \tfrac{1}{2}k\,\mathrm{d}s \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{d}\Big[\arctan\frac{x}{d} - \arctan 1\Big] = \tfrac{1}{2}kt.$$

$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ であるから $\arctan(x/d) = \frac{1}{2}dkt + \frac{\pi}{4}$ となり、よって

$$x = d\tan\Big(\frac{dkt}{2} + \frac{\pi}{4}\Big).$$

これは tan の引数が $\frac{\pi}{2}$ より小さい間は成り立つ（逆正接関数の値域は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ である）。t が 0 から増加すると、引数は $\frac{\pi}{4}$ から増加し、

$$\frac{dkt}{2} = \frac{\pi}{4}, \qquad \text{すなわち} \qquad t = \frac{\pi}{2dk}.$$

のときに $\frac{\pi}{2}$ に達する。$\theta \to \frac{\pi}{2}$（下から近づく）のとき $\tan\theta \to +\infty$ であり、かつ $d > 0$ であるから、$t \to \frac{\pi}{2dk}$ のとき $x \to \infty$ となり、題意が示された。粒子は有限の時間で無限遠に到達する。

小問 (ii)

今度は $U < 0$ であるから $C = U - \frac{1}{2}kd^2 < 0$ である。$a > 0$ として $C = -\frac{1}{2}ka^2$ とおく。すなわち

$$a = \sqrt{d^2 - \frac{2U}{k}}, \qquad \text{とおくと} \qquad \dot{x} = \tfrac{1}{2}k\big(x^2 - a^2\big).$$

$U < 0$ かつ $k > 0$ であるから、$a > d > 0$ が成り立つ。

> **考えてみよう** 部分分数分解から出てくる対数として、$\ln\frac{x-a}{x+a}$ と $\ln\frac{a-x}{a+x}$ のどちらを使うべきだろうか。

それは x がどの範囲にあるかによる。定数解（constant solution）$x = \pm a$ は $\dot{x} = 0$ となるところである。初期値 $x = d$ は $-a$ と a の真に間にあり、そこから出発した解は定数解 $x = \pm a$ を横切ることができない（このような一階方程式の二つの解が交わることはない）。したがって、すべての時刻で $-a < x < a$ である。この範囲では $\dot{x} < 0$ であるから x は減少し、量 $a - x$ と $a + x$ はともに正である。

$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\Big(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\Big)$ を用いて変数を分離すると、

$$\frac{1}{2a}\Big[\ln\frac{a-u}{a+u}\Big]_d^x = \tfrac{1}{2}kt \quad\Longrightarrow\quad \frac{a-x}{a+x} = A\,\mathrm{e}^{akt}, \qquad \text{ただし} A = \frac{a-d}{a+d}.$$

$a > d > 0$ であるから $0 < A < 1$ であることに注意する。x について解くと、

$$x = a\,\frac{1 - A\mathrm{e}^{akt}}{1 + A\mathrm{e}^{akt}}, \qquad a = \sqrt{d^2 - \frac{2U}{k}}, \quad A = \frac{a-d}{a+d}.$$

これはすべての $t \geq 0$ に対して定義される（分母は正である）。同値な形として、$\ln A = -2\operatorname{artanh}(d/a)$ であるから、$x = a\tanh\left(\operatorname{artanh}(d/a) - \frac{1}{2}akt\right)$ と書くこともできる。

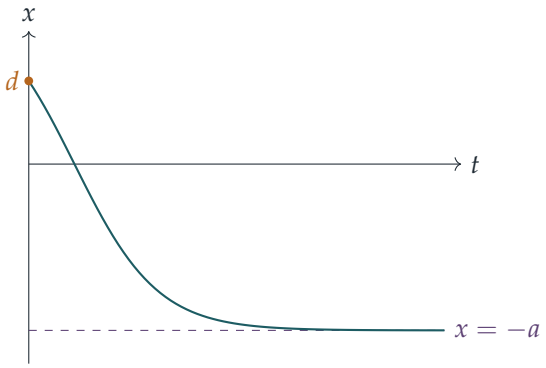
$t \to \infty$ のとき、$A > 0$ かつ $ak > 0$ であるから $Ae^{akt} \to \infty$ である。分母と分子を Ae^{akt} で割ると、

$$x = a\,\frac{A^{-1}e^{-akt} - 1}{A^{-1}e^{-akt} + 1} \longrightarrow -a.$$

よって x は極限

$$-a = -\sqrt{d^2 - \frac{2U}{k}}\,.$$

に収束（converge）する。（この極限には k も含まれる。d と U を固定して k を変えると極限も変わるので、d と U だけで表すことはできない。）



このグラフ（$d = 1$、$a = 2$、$k = 1$ の場合を描いたもの）は、粒子が負の速度で d から出発し、原点を通過して、しだいにゆっくりと $-a$ に近づいていく様子を示している。

検算

- 小問 (i) では、$t = 0$ とすると $x = d\tan\frac{\pi}{4} = d$ となり、微分すると $\dot{x} = \frac{1}{2}kd^2\sec^2\frac{\pi}{4} = kd^2 = U$ となる。
- 小問 (ii) では、$t = 0$ とすると $x = a\frac{1-A}{1+A} = d$ となる。$U \to 0^-$ のとき $a \to d$ かつ $A \to 0$ となるので、x は d にとどまる。これは正しい。$x = d$、$\dot{x} = 0$ のとき加速度は 0 になるからである。
- 数値的にも、ランダムな k、d、U に対して $\ddot{x} = kx\dot{x}$ をルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で解いたところ、二つの公式とは 10^{-6} よりよい精度で一致した。たとえば $k = 1$、$d = 1$、$U = -1.5$ のとき $a = 2$ であり、数値計算による x は -2.000000 に落ち着く。

よくある間違い

- 絶対値をつけずに $\ln \frac{x-a}{x+a}$ を使ってしまう。$|x| < a$ のとき、これは負の数の対数になってしまう。
- 極限として正の平方根をとってしまう。x は d から減少するので、極限は $+a$ ではなく $-a$ である。
- 加速度を $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ と書いて $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = kxv$ を得たあと、$v \neq 0$ に言及せずに v で割ってしまう。ここではそれでもうまくいくが、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ を直接積分すればこの問題を避けられる。

STEP のその先へ

小問 (i) は**有限時間爆発**（finite-time blow-up）の小さな例である。f が線形より速く（ここでは 2 次で）増大する方程式 $\dot{x} = f(x)$ は、解を有限時間で無限大に飛ばしてしまうことがあり、したがって解がすべての t に対して存在するとは限らない。小問 (ii) はもう一つの振る舞いを示している。定数解 $x = \pm a$ は平衡点（equilibrium）であり、$-a$ は安定（stable）、$+a$ は不安定（unstable）である。そして相直線（phase line）の図を描けば、積分をする前に極限を予測できる。これら二つの考え方は、解が交わらないことを保証する一意性定理（uniqueness theorem）とともに、Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）で扱われている。

解答例

STEP III 2003、第 11 問

力学 ・ 迎撃の運動学

STEP III 2003、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/03-s3-q11

鍵となる考え方

運動のことはいったん忘れて、衝突が起こるはずのただ一点について考える。その瞬間、A、B と衝突点は三角形をなし、その 3 辺は d、P が進んだ距離、Q が進んだ距離であり、B における角は方位によって定まる。すると余弦定理（cosine rule）から方程式が 1 つ得られ、進んだ距離をどちらも時刻を用いて表すと、それは二次方程式（quadratic equation）になる。こうして、衝突が可能かどうかは、その二次方程式が正の解をもつかどうかという問題に帰着する。

解答

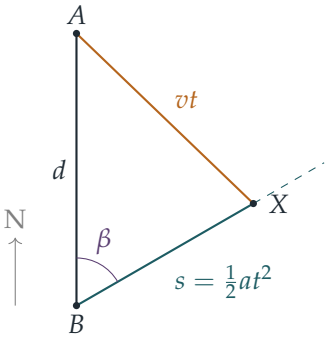
P と Q を、水平面内を運動する質点（particle）としてモデル化する。方位（bearing）は北から時計回りに測り、$v > 0$ とする。

衝突の方程式

時刻 $t > 0$ に、点 X で Q が P に衝突したとする。それまでに P は静止状態から出発し、一定の直線に沿って一定の加速度 a で動いているから、

$$BX = s = \tfrac{1}{2}at^2,$$

であり、Q は一定の速さで直線上を動いているから $AX = vt$ である。



B から A への向きは真北であり、B から X への向きは方位 β であるから、角 ABX は β である（$\beta > 180^\circ$ のときは $360^\circ - \beta$ となるが、余弦の値は同じである）。三角形 ABX に余弦定理を用いると

$$v^2t^2 = d^2 + s^2 - 2ds\cos\beta.$$

を得る。（$\beta = 0$ または 180° のときは「三角形」はつぶれてしまうが、この方程式はやはり成り立ち、$(vt)^2 = (d \mp s)^2$ となる。）$t^2 = 2s/a$ であるから左辺は $2v^2s/a$ であり、整理すると

$$s^2 - 2\left(d\cos\beta + \frac{v^2}{a}\right)s + d^2 = 0. \qquad (*)$$

逆に、$(*)$ が解 $s > 0$ をもつとき、$t = \sqrt{2s/a}$ とおき、その時刻における P の位置を X とする。このとき $(*)$ はまさに $AX = vt$ であることを述べており、また $AX > 0$ である。よって Q を A から X に向けて発射すれば、それは時刻 t に X に到達し、P も同時にそこへ到達するので、衝突する。したがって

$$\text{適切な向きが存在する} \iff (*) \text{ が次の正の解をもつ：} s.$$

必要条件

$k = d\cos\beta + v^2/a$ とおくと、$(*)$ は $s^2 - 2ks + d^2 = 0$ となる。

考えてみよう　この二次方程式が実数解をもつことは確かに必要だが、それで十分だろうか。解について、ほかに何を知っておく必要があるだろうか。

s は進んだ距離であるから、解は正でなければならない。解の積は $d^2 > 0$ であるから 2 つの解は同符号であり、その和は $2k$ である。よって、正の解が存在するのは、判別式（discriminant）が 0 以上であり、かつ $k > 0$ であるときに限る：

$$k^2 \geq d^2 \quad \text{かつ} \quad k > 0 \iff k \geq d.$$

（$k > 0$ ならば、$d > 0$ より $k^2 \geq d^2$ は $k \geq d$ と同値である。また $k \geq d$ ならば必然的に $k > 0$ である。）

よって、Q が P に衝突できるならば

$$d\cos\beta + \frac{v^2}{a} \geq d, \qquad \text{すなわち} \qquad v^2 \geq ad(1-\cos\beta),$$

となり、これが求める結果である。

P が距離 d だけ動く前に衝突させる

次に $v^2 > ad(1-\cos\beta)$ とすると、$k > d > 0$ である。このとき判別式 $4(k^2-d^2)$ は正であり、$(*)$ は異なる 2 つの解 $s_1 < s_2$ をもつ。解の和 $2k$ と積 d^2 がともに正であるから、両方とも正である。これらは異なり、かつ

$$s_1 s_2 = d^2,$$

を満たすから、両方が d 以上になることも、両方が d 以下になることもない。よって

$$s_1 < d < s_2.$$

である。具体的には $s_1 = k - \sqrt{k^2-d^2}$ である。

上で示した逆の議論により、P の経路上で B から距離 s_1 の点 X_1 に向けて Q を発射すれば、Q は時刻 $t_1 = \sqrt{2s_1/a}$ に P に衝突し、その瞬間に P は $s_1 < d$ しか動いていない。よって、P が距離 d だけ動く前に Q が P に衝突するように狙いを定めることができ、これが示すべきことであった。

検算

- $\beta = 0$ とする：P は A に向かってまっすぐ進むので、v の値によらず両者は必ず出会う。条件は $v^2 \geq 0$ となり、これは常に成り立つ。このとき $(*)$ は $s^2 - 2(d+v^2/a)s + d^2 = 0$ となり、小さいほうの解は d より小さい。すなわち、常識が示すとおり、P が A に到達する前に両者は出会う。
- $a = d = 1$、$\beta = 90°$（つまり P は真東に進む）、$v^2 = 2 > 1 = ad(1-\cos\beta)$ とする。このとき $(*)$ は $s^2 - 4s + 1 = 0$ となるから、$s_1 = 2 - \sqrt{3} \approx 0.268 < 1$ である。$t_1 = \sqrt{2s_1}$ において $s_1^2 + 1 = 2t_1^2$ が成り立つので、衝突点は確かに A から距離 vt_1 のところにある。a、d、β、v の多数のランダムな値で数値的に確かめたところ、$s_1 < d$ での衝突が確認でき、また $v^2 < ad(1-\cos\beta)$ のときは P が常に A から vt より遠くにあることも確認できた。
- 境界の場合 $v^2 = ad(1-\cos\beta)$ では $k = d$ となり、重解 $s = d$ を得る。すなわち、衝突が起こりうるのは P がちょうど d だけ進んだときに限られる。最後の部分で狭義の不等式が必要なのはこのためである。

よくある間違い

- 判別式が 0 以上であることだけを要求すること。それでは $|k| \geq d$ となり、$k \leq -d$ も許してしまう。このとき 2 つの解はともに負であり、衝突は起こらない。
- 余弦定理で誤った角を用いること。B における角は BA（真北）と BX（方位 β）のなす角であるから、$180^\circ - \beta$ ではなく β そのものである。
- 最後の部分で必要条件だけを証明すること。X_1 に向けて狙えば実際に衝突することも示さなければならず、それが逆の議論である。

STEP のその先へ

これは追跡・迎撃問題（pursuit-and-interception problem）である。ここでは標的の経路があらかじめわかっており、迎撃する側は直線上を動くので、問題は出会う時刻に関する 1 つの方程式に帰着する。ミサイルの誘導や、追う側が常に標的のほうへ向きを変え続ける「追跡曲線」（pursuit curve）では、代わりに微分方程式（differential equation）が現れる。まず出会う点を固定し、誰がそこに間に合うように到達できるかを問うという習慣は、大学 1 年の力学における標準的な道具である。Kleppner and Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、相対運動の運動学を丁寧に展開している。

解答例

STEP III 2003、第 12 問

確率・統計 ・ 指数分布に従う待ち時間

STEP III 2003、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/03-s3-q12

鍵となる考え方

任意の区間における中断の回数がポアソン分布（Poisson distribution）に従うならば、「次の中断まで t 分より長くかかる」という事象は「次の t 分間に中断が**一度も**起こらない」という事象と同じであり、これによって離散分布が連続分布に変わる。すなわち、待ち時間は指数分布（exponential distribution）に従う。さらに、中断と中断の間の間隔は次々に独立（independent）であるから、長い間隔を探すことは独立な試行（trials）の列となり、各試行は「成功」（30 分以上の間隔）か「失敗」のいずれかである。あとは幾何分布（geometric distribution）と条件付き期待値（conditional expectation）が片づけてくれる。

解答

T の分布

中断は平均して 10 分に 1 回起こるので、その率は 1 分あたり $\frac{1}{10}$ であり、t 分間の中断の回数は平均 $\frac{t}{10}$ のポアソン分布に従う。

たった今起こった中断の時点から時間を計り始める。次の中断までの時間 T が t 以上となるのは、次の t 分間に中断が起こらないときであり、かつそのときに限るから、

$$\mathrm{P}(T \geq t) = \mathrm{P}(\text{中断なし、時間}t) = \mathrm{e}^{-t/10}.$$

したがって、$t \geq 0$ に対して、作業時間が t 分未満となる確率は

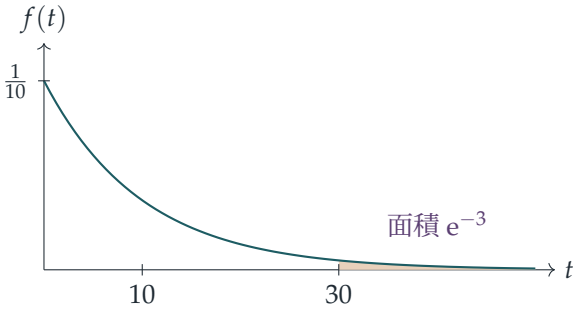
$$\mathrm{P}(T < t) = 1 - \mathrm{e}^{-t/10}.$$

これが T の累積分布関数（cumulative distribution function）$F(t)$ である（$t < 0$ に対

しては $F(t) = 0$)。微分すると

$$f(t) = F'(t) = \tfrac{1}{10}\,\mathrm{e}^{-t/10} \quad (t \geq 0), \qquad f(t) = 0 \quad (t < 0).$$

よって T は平均 10 分の指数分布に従う。



中断の回数の期待値

この過程には記憶がない（重なり合わない区間におけるポアソン分布の回数は互いに独立である）ので、中断が起こるたびに、次の中断までの時間はそれ以前のすべてとは独立に、T と同じ分布で新たに始まる。したがって、次々の間隔 $T_1, T_2, \ldots$ は独立で、それぞれ T と同じ分布に従う。

30 分以上の間隔を**長い**間隔とよぶことにする。各間隔は他とは独立に、確率

$$p = \mathrm{P}(T \geq 30) = \mathrm{e}^{-30/10} = \mathrm{e}^{-3},$$

で長い間隔となる。最初の長い間隔より前に起こる中断の回数を N とする（たった今起こった中断は数えない）。短い間隔はどれも中断で終わり、最初の長い間隔が中断のない 30 分間となるので、N は最初の長い間隔より前の短い間隔の個数である。したがって

$$\mathrm{P}(N = n) = (1-p)^n p, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

考えてみよう 1 ではなく 0 から始まるこの幾何分布の平均は、どのようにして求めればよいだろうか？

$|x| < 1$ のとき、幾何級数（geometric series）$\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$ を微分すると $\sum_{n\geq 1} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ が得られる。$x = 1-p$ とおくと

$$\mathrm{E}(N) = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^n p = p(1-p)\cdot\frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p}.$$

（あるいは、$N+1$ は最初の成功までの（その成功を含む）試行回数であり、その平均

は $\frac{1}{p}$ である。）$p = \mathrm{e}^{-3}$ とすると

$$\mathrm{E}(N) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-3}}{\mathrm{e}^{-3}} = \mathrm{e}^{3} - 1,$$

となり、求める結果が得られる。

短い間隔の長さの期待値

求めたいのは $\mathrm{E}(T \mid T < 30)$ である。$T < 30$ という条件のもとでの T の条件付き確率密度（density）は $0 \le t < 30$ において $f(t)/\mathrm{P}(T < 30)$ であるから、

$$\mathrm{E}(T \mid T < 30) = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-3}} \int_0^{30} \frac{t}{10}\, \mathrm{e}^{-t/10}\, \mathrm{d}t.$$

$u = t$、$\mathrm{d}v = \frac{1}{10}\mathrm{e}^{-t/10}\,\mathrm{d}t$ とおいて部分積分（integration by parts）を行う。このとき $v = -\mathrm{e}^{-t/10}$ であるから、

$$\begin{aligned}\int_0^{30} \frac{t}{10}\, \mathrm{e}^{-t/10}\, \mathrm{d}t &= \Big[-t\, \mathrm{e}^{-t/10} \Big]_0^{30} + \int_0^{30} \mathrm{e}^{-t/10}\, \mathrm{d}t \\ &= -30\, \mathrm{e}^{-3} + 10\big(1 - \mathrm{e}^{-3}\big) \\ &= 10 - 40\, \mathrm{e}^{-3}.\end{aligned}$$

したがって、分子と分母に e^{3} を掛けると

$$\mathrm{E}(T \mid T < 30) = \frac{10 - 40\, \mathrm{e}^{-3}}{1 - \mathrm{e}^{-3}} = \frac{10\, \mathrm{e}^{3} - 40}{\mathrm{e}^{3} - 1} \text{ 分} \approx 8.43 \text{ 分}.$$

これが 10 より少し小さいのは納得がいく。長い間隔を除外したからである。

待ち時間の期待値

中断のない 30 分間が始まるまでの待ち時間は、N 個の短い間隔の和である。$N = n$ という条件のもとでは、これらは n 個の独立な間隔で、それぞれ 30 分より短いという条件が課されているから、$N = n$ のもとでの待ち時間の期待値は $n\,\mathrm{E}(T \mid T < 30)$ である。N について平均をとると

$$\mathrm{E}(\text{待ち時間}) = \mathrm{E}(N)\, \mathrm{E}(T \mid T < 30) = (\mathrm{e}^{3} - 1) \cdot \frac{10\, \mathrm{e}^{3} - 40}{\mathrm{e}^{3} - 1} = 10\, \mathrm{e}^{3} - 40 \text{ 分},$$

となり、これは約 161 分、すなわち 2 時間 41 分である。（答案を**書き終える**までの時間を求めたいなら、30 分そのものを加えればよい：$10\, \mathrm{e}^{3} - 10 \approx 191$ 分。）

検算

- $\int_0^{\infty} \frac{1}{10}\mathrm{e}^{-t/10}\,\mathrm{d}t = 1$ であるから f は確かに確率密度であり、その平均は 10 で、「平均して 10 分に 1 回」と一致する。

- 条件をつけない場合、$\mathrm{E}(T) = 10$ は $\mathrm{P}(T < 30)\,\mathrm{E}(T \mid T < 30) + \mathrm{P}(T \geq 30)\,\mathrm{E}(T \mid T \geq 30)$ と分解できるはずである。無記憶性（memorylessness）により $\mathrm{E}(T \mid T \geq 30) = 40$ であり、実際 $(10 - 40\mathrm{e}^{-3}) + 40\mathrm{e}^{-3} = 10$ となる。
- この過程を 200 000 回シミュレーションしたところ、中断の回数の平均は 19.1（$\mathrm{e}^3 - 1 \approx 19.09$ に対して）、待ち時間の平均は 161.1 分（$10\mathrm{e}^3 - 40 \approx 160.86$ に対して）であった。

よくある間違い

- $\mathrm{E}(N) = \frac{1}{p} = \mathrm{e}^3$ を用いること。これは長い間隔まで数えてしまっているが、長い間隔は 30 分間が始まる前に中断が起こらずに終わる。
- 待ち時間を求めるのに、$\mathrm{E}(N)$ に条件なしの平均 10 を掛けること。待ち時間を構成する間隔は短いことがわかっているので、その平均は 10 ではなく $\mathrm{E}(T \mid T < 30)$ である。

STEP のその先へ

中断は**ポアソン過程**（Poisson process）をなしており、間隔が独立な指数分布に従うという結果は、その定義的な性質の一つである。最後の段階 $\mathrm{E}(\text{全}N\text{ 項の和}) = \mathrm{E}(N) \times \mathrm{E}(\text{各項})$ は、**ワルドの等式**（Wald's identity）と密接に関連する条件付けの議論である。これらを合わせると、大学 1、2 年次の確率論の講義で学ぶ再生理論（renewal theory）や待ち行列モデル（queueing models）へとつながっていく。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、ポアソン過程と条件付き期待値をちょうどよい水準で扱っている。

解答例

STEP III 2003、第 13 問

確率・統計 ・ 吸収マルコフ連鎖

STEP III 2003、問 13

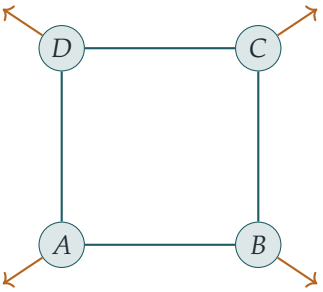
先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/03-s3-q13

鍵となる考え方

これは「第一歩解析（first-step analysis）」である。ウサギが次に何をするかで条件付けると、ある部屋から出発したときの確率が、そこから移動できる部屋から出発したときの確率で表される。こうして 4 つの連立一次方程式が得られ、正方形の対称性（対角線 AC に関する鏡映で B と D が入れ替わる）によって計算量が減る。最後の小問では、C に入ることを失敗とみなすように変更した巣穴に同じ手法を適用し、そのうえで条件付き確率（conditional probability）の定義を用いる。

解答



地上へのトンネル

以下では一貫して、各移動はウサギの過去とは独立に、それぞれ確率 $\frac{1}{3}$ で選ばれるものとする（ウサギがどの部屋に「いることになって」も、各移動が「同様に確からしい」という問題文をこのように解釈する）。ウサギが最終的に A のトンネルから出る事象を E_A と書く。

小問 (i)

ウサギが A にいるとし、次の移動で条件付ける。

- 確率 $\frac{1}{3}$ でただちに A のトンネルを上り、E_A が起こる。
- 確率 $\frac{1}{3}$ で B へ走る。このときウサギは B にいて、今後の移動はそこへどのように来たかに依存しないので、最終的に A から出る確率は p_B である。
- 確率 $\frac{1}{3}$ で D へ走り、同様にその後の確率は p_D である。

全確率の法則（law of total probability）により、

$$p_A = \tfrac{1}{3}\cdot 1 + \tfrac{1}{3}p_B + \tfrac{1}{3}p_D,$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

他の部屋から同じ議論をすると、さらに 3 つの方程式が得られる。唯一の違いは、B、C、D のトンネルから出ると E_A は**起こらなかった**ことになるので、その分岐の寄与は $\frac{1}{3}\cdot 0$ となる点である：

$$\begin{aligned} p_B &= \tfrac{1}{3}p_A + \tfrac{1}{3}p_C, \\ p_C &= \tfrac{1}{3}p_B + \tfrac{1}{3}p_D, \\ p_D &= \tfrac{1}{3}p_A + \tfrac{1}{3}p_C. \end{aligned}$$

p_B と p_D の方程式は右辺が等しいので、$p_B = p_D$ である。この共通の値を b とおく（これは AC に関する鏡映対称性である）。すると

$$p_A = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}b, \qquad p_C = \tfrac{2}{3}b,$$

であり、これを p_B の方程式に代入すると、

$$b = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}b + \tfrac{2}{3}b\right) = \tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{9}b \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{5}{9}b = \tfrac{1}{9} \quad\Longrightarrow\quad b = \tfrac{1}{5}.$$

したがって

$$p_A = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{15} = \frac{7}{15}, \qquad \text{また} \qquad p_B = p_D = \tfrac{1}{5},\ p_C = \tfrac{2}{15}.$$

考えてみよう そもそもウサギが外に出ることはどうしてわかるのか。それがわからなければ、これらの方程式が本当に確率を決定するとはいえないのではないか。

各ステップでウサギは確率 $\frac{1}{3}$ で外に出るので、n ステップ後にまだ地下にいる確率は $(\frac{2}{3})^n \to 0$ である。すなわち、ウサギは確率 1 で外に出る。また、4 つの連立一次方程式の解はただ 1 つである（選択の余地なく解けた）ので、上で求めた値がまさに求める確率である。

小問 (iii)

ウサギが一度も C を訪れない事象を N とする。求めるものは

$$\mathrm{P}(N \mid E_A) = \frac{\mathrm{P}(N \cap E_A)}{\mathrm{P}(E_A)},$$

であり、ウサギは A から出発するので、分母は $p_A = \frac{7}{15}$ である。

分子については、ウサギが現在それぞれ A、B、D にいる（そしてまだ C を訪れていない）とき、**一度も C に入らずに** A のトンネルから出る確率を q_A、q_B、q_D とする。第一歩解析は前とまったく同様に機能するが、今度は C への移動を失敗とみなす：

$$\begin{aligned} q_A &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}q_B + \tfrac{1}{3}q_D, \\ q_B &= \tfrac{1}{3}q_A + \tfrac{1}{3}\cdot 0 + \tfrac{1}{3}\cdot 0, \end{aligned}$$

なぜなら、B からウサギは A へ走って戻るか、C へ走り込む（失敗）か、違うトンネルから出る（失敗）かのいずれかだからである。対称性より $q_D = q_B = \frac{1}{3}q_A$ なので、

$$q_A = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{9}q_A \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{7}{9}q_A = \tfrac{1}{3} \quad\Longrightarrow\quad q_A = \tfrac{3}{7}.$$

したがって

$$\mathrm{P}(N \mid E_A) = \frac{3/7}{7/15} = \frac{45}{49}.$$

検算

- 4 つの値 p_A, p_B, p_C, p_D は、各部屋から出発して A から出る確率である。対称性より、これらは A から出発してそれぞれ A、B、C、D から出る確率でもあるので、和は 1 でなければならない。実際、$\frac{7}{15} + \frac{3}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} = 1$ である。
- $p_A > p_B = p_D > p_C$ となっており、これは当然である。ウサギが A から遠い所から出発するほど、A から出る可能性は低くなる。
- (iii) の答えは 1 に近い。A から出るウサギは、たいていごく短い道のりの後にそうしたのである。4×10^5 匹のウサギのシミュレーションでは、p_A について 0.469、条件付き確率について 0.918 が得られ、$\frac{7}{15} \approx 0.467$ および $\frac{45}{49} \approx 0.918$ と一致した。

よくある間違い

- p_B、p_C、p_D の方程式に「今すぐ出る」の項 $\frac{1}{3}$ を含めてしまう。A 以外のトンネルから出る場合の寄与は 0 である。
- (iii) の答えとして $q_A = \frac{3}{7}$ を答えてしまう。これは $\mathrm{P}(N \cap E_A)$ であり、問題が求めているのは条件付き確率なので、さらに p_A で割る必要がある。

STEP のその先へ

ウサギの動きは**マルコフ連鎖**（Markov chain）である。すなわち、次の移動は現在いる場所のみに依存する。地上は**吸収状態**（absorbing state）であり、p_A, p_B, p_C, p_D は**吸収確率**（absorption probabilities）である。第一歩解析によって、吸収確率は常に連立一次方程式に帰着される。同じ考え方で、吸収までの期待時間や破産問題（gambler's ruin）の確率など、多くのものが求められる。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、マルコフ連鎖を初めて学ぶのによい解説を含んでいる。

解答例

STEP III 2003、第 14 問

確率・統計 ・ 確率母関数

> **STEP III 2003、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q14

鍵となる考え方

独立（independent）な得点の和の確率母関数（probability generating function, pgf）は、それぞれの確率母関数の積である。したがって、**どのようなサイコロが同じ合計の分布を与えるか**という問題は、**多項式を二つの因数にどう分けられるか**という問題に帰着する。すべてを既約（irreducible）な因数に因数分解（factorise）し、それらの因数を二つのサイコロに振り分けることで、可能な目の付け替えを読み取ることができる。

解答

最初の部分

X を通常の公平なサイコロの出る目とする。$1,\dots,6$ のそれぞれの確率は $\frac{1}{6}$ であるから、

$$G_X(t) = \mathrm{E}\left(t^X\right) = \tfrac{1}{6}\left(t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6\right) = \tfrac{1}{6}\,t\left(1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5\right).$$

括弧内を因数分解するには、項を二つずつ組にし、さらに 3 乗の差を用いる。

$$1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 = (1+t) + t^2(1+t) + t^4(1+t) = (1+t)(1+t^2+t^4),$$
$$1 + t^2 + t^4 = (1+t^2)^2 - t^2 = (1+t+t^2)(1-t+t^2).$$

よって

$$G_X(t) = \tfrac{1}{6}\,t\,(1+t)(1-t+t^2)(1+t+t^2).$$

X_1 と X_2 を独立に振った二つのサイコロの出る目とすると、t^{X_1} と t^{X_2} は独立であるから $\mathrm{E}\left(t^{X_1+X_2}\right) = \mathrm{E}\left(t^{X_1}\right)\mathrm{E}\left(t^{X_2}\right)$ であり、

$$G_{X_1+X_2}(t) = G_X(t)^2 = \frac{1}{36}\,t^2(1+t)^2(1-t+t^2)^2(1+t+t^2)^2,$$

となる。これが求める形である。

第 2 の部分

Y と Z を、それぞれ目が $1,2,2,3,3,4$ と $1,3,4,5,6,8$ であるサイコロの出る目とする。各面を数えると

$$G_Y(t) = \tfrac{1}{6}\left(t+2t^2+2t^3+t^4\right),$$
$$G_Z(t) = \tfrac{1}{6}\left(t+t^3+t^4+t^5+t^6+t^8\right).$$

Y について：$1+2t+2t^2+t^3 = (1+t)(1+t+t^2)$ であり、これは展開すれば確かめられる。よって

$$G_Y(t) = \tfrac{1}{6}\,t\,(1+t)(1+t+t^2).$$

Z については、最初の部分から得られる積 $(1+t)(1-t+t^2) = 1+t^3$ と $(1+t+t^2)(1-t+t^2) = 1+t^2+t^4$ が役に立つ。すると

$$(1+t^3)(1+t^2+t^4) = 1+t^2+t^3+t^4+t^5+t^7,$$

であり、これに t を掛けるとちょうど $t+t^3+t^4+t^5+t^6+t^8$ になる。したがって

$$G_Z(t) = \tfrac{1}{6}\,t\,(1+t)(1+t+t^2)(1-t+t^2)^2.$$

独立に振るので、

$$G_{Y+Z}(t) = G_Y(t)G_Z(t) = \frac{1}{36}\,t^2(1+t)^2(1-t+t^2)^2(1+t+t^2)^2 = G_{X_1+X_2}(t).$$

多項式として等しい二つの確率母関数は係数も等しく、t^n の係数は合計が n となる確率である。よって、これらのサイコロでも通常のサイコロ二つの場合でも、どの合計も同じ確率で現れる。

最後の部分

通常の 4 面サイコロの確率母関数は

$$\tfrac{1}{4}\left(t+t^2+t^3+t^4\right) = \tfrac{1}{4}\,t\,(1+t)(1+t^2),$$

であるから、その二つの合計に対する目標の確率母関数は

$$\frac{1}{16}\,t^2(1+t)^2(1+t^2)^2.$$

である。新しい二つのサイコロの確率母関数を $\frac{1}{4}f(t)$、$\frac{1}{4}g(t)$ とする。f における t^n の係数は目が n である面の個数であるから、f と g は係数が非負整数の多項式で、$f(1)=g(1)=4$ を満たす。また、どの目も正の整数であるから $f(0)=g(0)=0$ である。求めるべきは

$$f(t)\,g(t)=t^2(1+t)^2(1+t^2)^2.$$

である。

考えてみよう なぜ f は同じ因数 t、$1+t$、$1+t^2$ のみから構成されなければならないのか？

因数 t と $1+t$ は 1 次式であり、$1+t^2$ は実数解をもたないので、三つとも実数上で既約である。多項式は（定数倍を除いて）既約因数への分解が一意的であるから、右辺の任意の因数は

$$f(t)=c\,t^k(1+t)^a(1+t^2)^b,\qquad g(t)=\tfrac{1}{c}\,t^{2-k}(1+t)^{2-a}(1+t^2)^{2-b},$$

の形である。ただし $0\le k,a,b\le 2$、定数 $c>0$ である。

ここで f と g に関する条件を一つずつ用いる。

- **定数 c。** f の最低次の係数は c であり、g のそれは $1/c$ である。どちらも面の個数なので正の整数であり、これより $c=1$ が強制される。
- **t の指数。** $f(0)=0$ より $k\ge 1$、$g(0)=0$ より $2-k\ge 1$ が必要である。よって $k=1$ であり、各サイコロはちょうど一つの因数 t をもつ。
- **4 つの面。** $f(1)=2^a\cdot 2^b=4$ より $a+b=2$ となり、このとき $g(1)=2^{2-a}2^{2-b}=4$ は自動的に成り立つ。

したがって (a,b) は $(2,0)$、$(1,1)$、$(0,2)$ のいずれかであり、g はその残りを取る。二つのサイコロを入れ替えても同じ組になるので、場合は二つである。

- 両方とも $(a,b)=(1,1)$ の場合：$f=g=t(1+t)(1+t^2)=t+t^2+t^3+t^4$ であり、通常の組 $1,2,3,4$ と $1,2,3,4$ である。
- $(a,b)=(2,0)$ と $(0,2)$ の場合：

  $$f(t)=t(1+t)^2=t+2t^2+t^3,\qquad g(t)=t(1+t^2)^2=t+2t^3+t^5,$$

  これは目が $1,2,2,3$ と $1,3,3,5$ のサイコロである。

どちらの場合も、二つの多項式は係数が非負整数でその和が 4 であるから、確かにサイコロを表しており、作り方から正しい確率母関数を与える。

よって、目の付け方は通常の組と、組 $\{1,2,2,3\}$、$\{1,3,3,5\}$ のみである。

検算

通常でない 4 面サイコロの組について合計を列挙すると、同様に確からしい 16 通りの和は $2,4,4,6,\ 3,5,5,7,\ 3,5,5,7,\ 4,6,6,8$ であり、合計 $2,\ldots,8$ の度数は $1,2,3,4,3,2,1$ となって、通常のサイコロ二つの場合とまったく同じである。上のどの確率母関数でも $t=1$ を代入すると 1 になり、各因数分解の手早い確認になる。目が 1 から 7 までの 4 面サイコロのすべての組をコンピュータで探索すると、ちょうど上の二つの組が見つかる。また、$1,2,2,3,3,4$ と $1,3,4,5,6,8$ のサイコロの合計は通常の分布と完全に一致する（たとえば、どちらの場合も $\mathrm{P}(\text{合計}=7)=\frac{6}{36}$ である）。

よくある間違い

- 定数 c を忘れること：一方のサイコロが因数 2 を、もう一方が因数 $\frac{1}{2}$ をもつことができない理由が必要である。両方のサイコロで最低次の係数が正の整数であることが、その理由である。
- $k=0$ や $k=2$ を許してしまうこと。その場合、一方のサイコロに目が 0 の面ができてしまい、これは正の整数ではない。
- $(1-t+t^2)$ を複素数の 1 次因数に分解したままにすること。実数上ではこれは既約であり、因数を振り分けるにはその形が必要である。

STEP のその先へ

ここで現れた 6 面サイコロの組は**シッカーマンのサイコロ**（*Sicherman dice*）であり、同じ方法によって、これが正の目をもつ通常でない 6 面サイコロの唯一の組であることが示される。この議論は多項式の一意分解（unique factorisation）に基づいており、これは環と体（rings and fields）の最初の講義で、算術の基本定理（fundamental theorem of arithmetic）の多項式版として学ぶことになる。また、母関数は多くの難しい数え上げの問題を代数の問題に変える。両方の考え方については、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）、および Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）を参照せよ。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

2003 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

