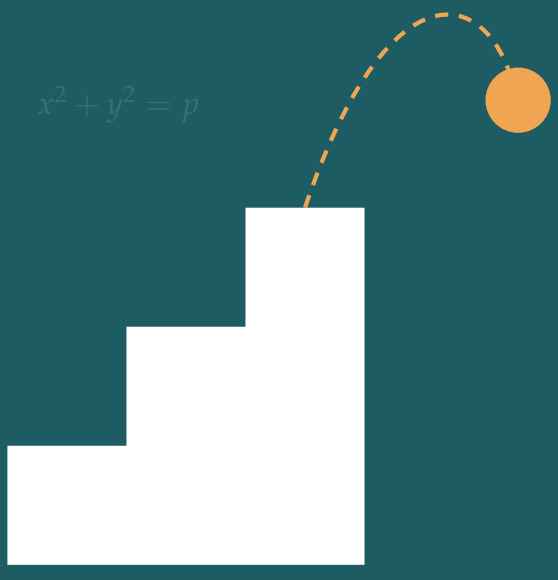
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

2002 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

2002 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

2002 年解答例

2002 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 42 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 円と楕円 純粋数学 . . . 3
Q2 曲線の概形 純粋数学 . . . 6
Q3 微分による不等式 純粋数学 . . . 10
Q4 接線と不等式 純粋数学 . . . 14
Q5 多項式の整数解 純粋数学 . . . 18
Q6 角錐の幾何 純粋数学 . . . 21
Q7 三角関数の積分 純粋数学 . . . 25
Q8 複利のローン 純粋数学 . . . 29
Q9 斜面上での転倒 力学 . . . 33
Q10 弾性衝突 力学 . . . 38
Q11 斜め弾性衝突 力学 . . . 42
Q12 幾何的確率 確率・統計 . . . 46
Q13 条件付き期待値 確率・統計 . . . 50
Q14 確率における等比級数 確率・統計 . . . 54

STEP II

Q1 置換積分 純粋数学 . . . 57
Q2 相反方程式 純粋数学 . . . 61
Q3 フェルマー数と素数 純粋数学 . . . 65
Q4 積分から導く不等式 純粋数学 . . . 69
Q5 ロジスティック写像の反復 純粋数学 . . . 73
Q6 斜面内の直線 純粋数学 . . . 77
Q7 ベクトルと直線 純粋数学 . . . 81
Q8 一階微分方程式 純粋数学 . . . 85

Q9 放物運動 力学 89
Q10 運動学と最適化 力学 93
Q11 摩擦と限界つり合い 力学 97
Q12 正規近似とポアソン近似 確率・統計 101
Q13 変換された分布関数 確率・統計 105
Q14 混合分布とベイズの定理 確率・統計 109

STEP III

Q1 広義積分と体積 純粋数学 113
Q2 逆正接関数の級数 純粋数学 116
Q3 曲線の概形 純粋数学 120
Q4 ディオファントス不等式 純粋数学 124
Q5 四次方程式の因数分解 純粋数学 128
Q6 非線形微分方程式 純粋数学 132
Q7 座標幾何の恒等式 純粋数学 136
Q8 トレミーの定理 純粋数学 140
Q9 質量中心と転倒 力学 144
Q10 摩擦のある回転 力学 149
Q11 壁との斜め衝突 力学 153
Q12 条件付けによる期待値 確率・統計 158
Q13 指数分布の最小値 確率・統計 162
Q14 分散と共分散 確率・統計 165

解答例

STEP I 2002、第 1 問

純粋数学 ・ 円と楕円

> **STEP I 2002、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q1

鍵となる考え方

まず、2 つの楕円（ellipse）が実際にどこで交わるかを求める。どちらの方程式も y を y^2 の形でしか含まないので、y^2 を消去すると x の 2 次方程式（quadratic equation）が残る。その結果、2 つの楕円はちょうど 2 つの実の点で交わることがわかる。与えられた 2 点を通る円の中心はその 2 点の垂直二等分線（perpendicular bisector）上にあり、これによって円の方程式は 1 パラメータの族（one-parameter family）に絞り込まれる。

解答

交点を求める

展開すると、2 つの楕円は

$$x^2 + 4x + 2y^2 = 14,$$
$$9x^2 - 18x + 16y^2 = 16.$$

となる。第 1 式を 8 倍して第 2 式を引くと、y^2 が消える：

$$8x^2 + 32x - 9x^2 + 18x = 112 - 16 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 50x + 96 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-2)(x-48) = 0.$$

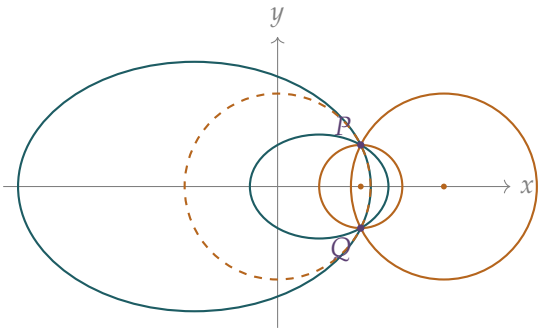
考えてみよう なぜ両方の解をそのまま採用してはいけないのか？

それぞれの解について、y が実数になるかを確かめなければならない。第 1 の楕円より、$2y^2 = 14 - x^2 - 4x$ である。

- $x = 48$：$2y^2 = 14 - 2304 - 192 < 0$ となるので、実の点は存在しない。（そもそも第 1 の楕円は $-2 - 3\sqrt{2} \le x \le -2 + 3\sqrt{2}$ の範囲にしかない。）

▶ $x=2$：$2y^2=14-4-8=2$ となるので、$y=\pm1$ である。

したがって、2 つの楕円はちょうど 2 点 $P=(2,1)$ と $Q=(2,-1)$ で交わる。（どちらも第 2 の方程式も満たす：$9+16=25$。）



図は、2 つの楕円（ティール）と、P と Q を通る円のうち中心が $(0,0)$、$(2,0)$、$(4,0)$ である 3 つの円（アンバー）を示している。

P と Q を通る円

P と Q を通る任意の円の中心は 2 点から等距離にあるので、PQ の垂直二等分線上にある。線分 PQ は鉛直で、中点は $(2,0)$ であるから、その垂直二等分線は x 軸である。よって、中心はある実数 a を用いて $(a,0)$ と表され、半径は

$$r^2=(2-a)^2+1^2.$$

で与えられる。したがって円の方程式は

$$\begin{aligned}(x-a)^2+y^2&=(2-a)^2+1\\ x^2-2ax+a^2+y^2&=4-4a+a^2+1\\ x^2-2ax+y^2&=5-4a,\end{aligned}$$

となり、これが求める形である。

逆に、任意の実数 a に対してこの方程式は中心 $(a,0)$、半径 $\sqrt{(a-2)^2+1}>0$ の真の円を表し、$4-4a+1=5-4a$ であるから $(2,\pm1)$ を通る。よって、この族は交点を通る円全体のなす集合とちょうど一致する。

? **考えてみよう** 2 つの方程式の 1 次結合をとるという、よく使う手法ではどうなるのか？

7×（第 1 式）−（第 2 式）という結合をとると x^2 と y^2 の係数が等しくなり、$x^2-23x+y^2+41=0$ が得られる。これは我々の族の $a=\frac{23}{2}$ の場合である。しかし、これは 1 つ

の円にすぎない。2 つの方程式の 1 次結合は、4 つの（複素数の）共有点すべてを通る円錐曲線（conic）を表す。その中には $x = 48$ をもつ 2 つの非実の点も含まれる。一方、円は 2 つの実の点さえ通ればよい。これが、ここで直接的な方法が必要となる理由である。

検算

- $a = 2$ とすると $x^2 - 4x + y^2 = -3$、すなわち $(x-2)^2 + y^2 = 1$ となる。これは PQ を直径とする円であり、期待どおりである。
- $a = 0$ とすると $x^2 + y^2 = 5$ となり、実際 $2^2 + 1^2 = 5$ である。
- $-6 \le x \le 6$ の範囲で両方の楕円上にある点を数値的に探索すると、$x = 2$ しか見つからない。$(2,1)$ における楕円の法線（normal）はそれぞれ $(8,4)$ と $(18,32)$ の方向であり、これらは平行でないので、2 つの楕円はそこで接しているのではなく、確かに交差している。

よくある間違い

- y が実数になるかを確かめずに $x = 48$ を残してしまう。
- 楕円の方程式の 1 次結合から 1 つの円を求めただけで終わりにしてしまう。問題は交点を通る**任意の**円について問うている。

STEP のその先へ

2 つの円錐曲線の結合 $\lambda E_1 + \mu E_2 = 0$ は**束**（pencil）と呼ばれる。これは、複素射影平面（complex projective plane）において数えた 4 つの共有点を通る円錐曲線全体からなる。この問題は、それらの点の一部が非実である場合があること、そして円が特別な存在であること（すべての円は、2 つの固定された複素の「無限遠円点」（circular points at infinity）を通る）を、うまく思い出させてくれる。これらの考え方は射影幾何学（projective geometry）と代数幾何学（algebraic geometry）に属する。この観点から平面曲線や円錐曲線を親しみやすく紹介した入門書として Reid の *Undergraduate Algebraic Geometry*（学部生のための代数幾何学）があり、また Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には STEP 形式の演習問題がさらに収められている。

解答例

STEP I 2002、第 2 問

純粋数学 • 曲線の概形

> **STEP I 2002、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q2

鍵となる考え方

多項式（polynomial）$x^m(x-1)^n$ は $x=0$ と $x=1$ で値が零になるので、その間のどこかで増減が入れ替わらなければならない。積の微分法（product rule）で微分し、**共通因数をすべてくくり出す**。すると導関数は、符号がすぐに読み取れる単純な因数に分かれる。グラフの概形全体を支配するのは偶奇（parity）である。べき指数が偶数か奇数かによって、曲線が軸に接するのか軸を横切るのか、そして軸のどちら側にあるのかが決まる。

解答

停留点

積の微分法により、

$$\begin{aligned} \mathrm{f}'(x) &= mx^{m-1}(x-1)^n + nx^m(x-1)^{n-1} \\ &= x^{m-1}(x-1)^{n-1}\big[m(x-1)+nx\big] \\ &= x^{m-1}(x-1)^{n-1}\big[(m+n)x-m\big]. \end{aligned}$$

よって $\mathrm{f}'(x)=0$ となるのは、ちょうど $x=0$、$x=1$、または

$$x = x_0 = \frac{m}{m+n}.$$

のときである。$m,n>0$ より $0<m<m+n$ であるから、$0<x_0<1$ となる。これが求める停留点（stationary point）である。（$m,n\geq 2$ なので、べき指数 $m-1$ と $n-1$ は 1 以上であり、$x=0$ と $x=1$ も停留点である。これはグラフをかくときに必要になる。）

停留点の種類

$g(x) = x^{m-1}(x-1)^{n-1}$、$h(x) = (m+n)x - m$ とおいて、$\mathrm{f}'(x) = g(x)\,h(x)$ と書く。すると

$$\mathrm{f}''(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = g'(x)h(x) + (m+n)g(x).$$

考えてみよう g を本当にすべて微分する必要があるだろうか？

その必要はない。x_0 では $h(x_0) = 0$ であるから、g' が何であっても第 1 項は消える：

$$\mathrm{f}''(x_0) = (m+n)\,x_0^{m-1}\,(x_0-1)^{n-1}.$$

ここで $m+n > 0$ かつ $x_0^{m-1} > 0$ であるが、$x_0 - 1 < 0$ である。よって $\mathrm{f}''(x_0)$ は零ではなく、その符号は $(-1)^{n-1}$ の符号に等しい：

- n が偶数ならば $n-1$ は奇数であり、$\mathrm{f}''(x_0) < 0$ となって x_0 は**極大**（maximum）である；
- n が奇数ならば $n-1$ は偶数であり、$\mathrm{f}''(x_0) > 0$ となって x_0 は**極小**（minimum）である。

$\mathrm{f}''(x_0) \neq 0$ であるから、第 2 次導関数判定法（second-derivative test）で結論が確定する。これが示すべきことであった。

グラフの概形

4 つの場合は m と n の偶奇によって分かれる。それぞれの概形をかくために、次の事実をまとめておく。

f の符号。 $x > 1$ では両方の因数が正であるから、$\mathrm{f} > 0$ である。$0 < x < 1$ では $x^m > 0$ であり、$(x-1)^n$ の符号は $(-1)^n$ の符号に等しい。$x < 0$ では、符号は $(-1)^m(-1)^n = (-1)^{m+n}$ である。

根の近くでのふるまい。 $x = 0$ の近くでは $\mathrm{f}(x) \approx (-1)^n x^m$ である。m が偶数ならば、f は 0 の両側で同じ符号をとるので、曲線はそこで軸に接する（転回点（turning point））。m が奇数ならば f は符号を変え、しかも $\mathrm{f}'(0) = 0$ であるから、曲線は軸を水平に横切る（停留変曲点（stationary point of inflection））。$x = 1$ においても、n について同じ議論が成り立つ。

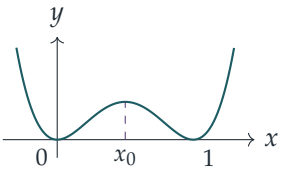
両端。 $|x|$ が大きいとき $\mathrm{f}(x)$ は x^{m+n} のようにふるまうので、$x \to +\infty$ のとき $\mathrm{f} \to +\infty$ である。$x \to -\infty$ のときは、$m+n$ が偶数ならば $\mathrm{f} \to +\infty$、$m+n$ が奇数ならば $\mathrm{f} \to -\infty$ である。

ほかに停留点はない。 停留点は $x = 0$、x_0、$x = 1$ のみである。

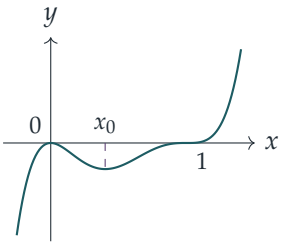
これらを合わせると：

- m **が偶数、**n **が偶数：**いたるところで $f \geq 0$ である。0 と 1 で軸上に極小をもち、x_0 で極大をもつ。W 字形になる。
- m **が偶数、**n **が奇数：**曲線は $-\infty$ から上昇して 0 で下から軸に接し（極大）、x_0 の極小まで下降し、その後 1 で停留変曲点を通過して上昇し、$+\infty$ へ向かう。
- m **が奇数、**n **が偶数：**曲線は $-\infty$ から上昇して 0 で停留変曲点を通過し、x_0 の極大に至り、下降して 1 で軸に接し（極小）、その後上昇して $+\infty$ へ向かう。
- m **が奇数、**n **が奇数：**曲線は $+\infty$ から下降して 0 で停留変曲点を通過し、x_0 の極小に至り、再び上昇して 1 で停留変曲点を通過し、$+\infty$ へ向かう。

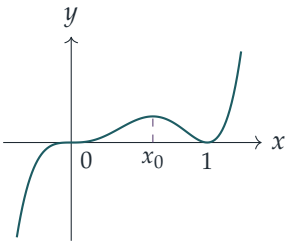
下の図は最も小さい場合 $(m,n) = (2,2),(2,3),(3,2),(3,3)$ を用いており、縦軸の縮尺はそれぞれ異なる。x_0 における値は小さく、$\frac{1}{16}$、$-\frac{108}{3125}$、$\frac{108}{3125}$、$-\frac{1}{64}$ である。



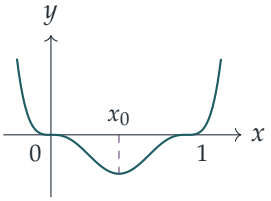
m が偶数、n が偶数



m が偶数、n が奇数



m が奇数、n が偶数



m が奇数、n が奇数

検算

- $m = n = 2$ とすると、$f(x) = \big(x(x-1)\big)^2$ は $x = \frac{1}{2}$ に関して対称であり、$x_0 = \frac{1}{2}$ は確かに極大で、その値は $\frac{1}{16}$ である。
- 置換 $x \mapsto 1-x$ により、$x^m(x-1)^n$ は $(-1)^{m+n}x^n(x-1)^m$ に変わる。よって m と n を入れ替えると、グラフは直線 $x = \frac{1}{2}$ に関して折り返される（$m+n$ が奇数なら

ば、さらに x 軸に関しても折り返される）。偶奇の異なる 2 つの場合の概形が互いに鏡像になっているのはこのためである。

- $2 \le m, n \le 8$ のすべてについて、f′ を数値微分と、$\mathrm{f}''(x_0)$ の符号を差分と照合した。たとえば $(m,n) = (2,3)$ のとき、$\mathrm{f}''\left(\frac{2}{5}\right) = 5 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{25} = 0.72 > 0$ であり、予想どおり極小である。

よくある間違い

- $\mathrm{f}''(x)$ をすべて展開してしまう。x_0 では因数 $(m+n)x - m$ が零になるので、残るのは 1 つの項だけである。
- $x = 0$ と $x = 1$ も停留点であること（$m, n \ge 2$ だから）を忘れ、そこで曲線が軸を斜めに横切るようにかいてしまう。
- $x < 0$ での符号を間違える。符号は $m + n$ によって決まり、m だけでは決まらない。

STEP のその先へ

重複度（multiplicity）k の根の近くでは、多項式の局所的な形は $c(x-a)^k$ のようになり、k の偶奇によって接するか横切るかが決まる。これはテイラー（Taylor）の定理（Taylor's theorem）と、停留点に対する高階導関数判定法（higher-derivative test）への第一歩である。すなわち、停留点において最初に零でない導関数の階数が k であるとき、k が偶数ならばその点は転回点であり、k が奇数ならば変曲点（inflection）である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、これらの考え方を厳密な基礎の上に据えている。

解答例

STEP I 2002、第 3 問

純粋数学 ・ 微分による不等式

> **STEP I 2002、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q3

鍵となる考え方

2 つの平方根（square root）を $\sqrt{P}$ と $\sqrt{Q}$ とおく。根号の中身どうしはうまく結びついており、$P+Q=a^2+b^2$ は一定で、さらにそれぞれの導関数（derivative）は大きさが等しく符号が逆である。このため $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta$ はきれいに因数分解でき、その符号はただ 1 つの三角関数の因子で決まる。y の最大値と最小値がわかれば、二重不等式（double inequality）は単に「最小値 $\le y \le$ 最大値」ということにすぎず、両端の大小が正しい順になっていることは最初の小問が保証してくれる。

解答

最初の不等式

展開すると

$$2a^2+2b^2-(a+b)^2 = a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2 \ge 0,$$

となるので $(a+b)^2 \le 2a^2+2b^2$ であり、等号が成り立つのはちょうど $a=b$ のときである。

停留点

$c=\cos\theta$、$s=\sin\theta$ とおき、

$$P=a^2c^2+b^2s^2, \qquad Q=a^2s^2+b^2c^2, \qquad y=\sqrt{P}+\sqrt{Q}.$$

とする。まず 2 つの特別な場合を考える。$a^2=b^2$ ならば、すべての θ に対して $P=Q=a^2$ であるから $y=2|a|$ は定数であり、すべての点が（自明に）停留点と

なる。この場合はいったん脇に置く。$a=0$ または $b=0$（ただし両方ではない）ならば、ある θ で P または Q が 0 になり、そこで y は微分可能（differentiable）でない。この場合は最後に扱う。そこで当面は $ab\neq 0$ かつ $a^2\neq b^2$ と仮定する。このとき $P\geq \min(a^2,b^2)(c^2+s^2)>0$ であり、同様に $Q>0$ であるから、y はいたるところで微分可能である。

微分すると

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}=-2a^2cs+2b^2sc=(b^2-a^2)\sin 2\theta,\qquad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\theta}=(a^2-b^2)\sin 2\theta.$$

したがって

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}=\frac{(b^2-a^2)\sin 2\theta}{2\sqrt{P}}-\frac{(b^2-a^2)\sin 2\theta}{2\sqrt{Q}}=\frac{(b^2-a^2)\sin 2\theta\left(\sqrt{Q}-\sqrt{P}\right)}{2\sqrt{PQ}}.$$

$\sqrt{Q}-\sqrt{P}$ の符号を調べるために有理化（rationalise）する：

$$\sqrt{Q}-\sqrt{P}=\frac{Q-P}{\sqrt{Q}+\sqrt{P}},\qquad Q-P=(a^2-b^2)(s^2-c^2)=(b^2-a^2)\cos 2\theta.$$

これを代入し、$2\sin 2\theta\cos 2\theta=\sin 4\theta$ を用いると

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}=\frac{(a^2-b^2)^2\sin 4\theta}{4\sqrt{PQ}\left(\sqrt{P}+\sqrt{Q}\right)}.$$

考えてみよう わざわざ $\sqrt{Q}-\sqrt{P}$ を有理化する価値があるのはなぜだろうか？

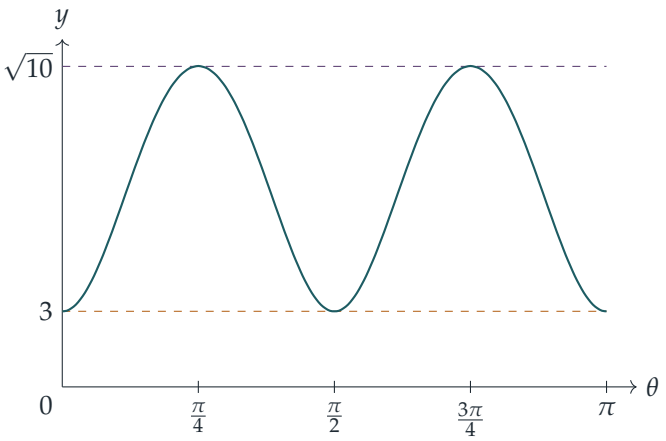
そうすることで、$\sin 4\theta$ 以外のすべてが正であることが一目でわかるからである。実際、$(a^2-b^2)^2>0$ であり、P、Q も正である。よって $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta$ の符号は $\sin 4\theta$ の符号とちょうど一致し、これによって停留点（stationary point）の位置とその種類の両方がわかる。

停留点は $\sin 4\theta=0$ となる点、すなわち整数 n に対して $\theta=\frac{1}{4}n\pi$ となる点である。

- n が偶数のとき、$\theta=\frac{1}{2}k\pi$ であるから $\{c^2,s^2\}=\{1,0\}$、$\{P,Q\}=\{a^2,b^2\}$ である。このとき $y=|a|+|b|$ である（$\sqrt{a^2}=|a|$ であることに注意）。
- n が奇数のとき、$\theta=\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}k\pi$ であるから $c^2=s^2=\frac{1}{2}$、$P=Q=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ である。このとき $y=2\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}=\sqrt{2a^2+2b^2}$ である。

停留点の種類。 θ が増加しながら $\frac{1}{2}k\pi$ を通過するとき、$\sin 4\theta$ は負から正に変わるので、y は減少から増加に転じる。よってこれらの点は**極小**（minimum）である。θ が増加しながら $\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}k\pi$ を通過するとき、$\sin 4\theta$ は正から負に変わるので、これらの点は**極大**（maximum）である。

下の図は $a = 2$、$b = 1$ の場合を、縦軸方向を拡大して描いたものである。y は 3 と $\sqrt{10} \approx 3.162$ の間を周期 $\frac{1}{2}\pi$ で振動する。



最後の不等式

θ を $\theta + \frac{1}{2}\pi$ に置き換えると c^2 と s^2 が入れ替わり、したがって P と Q が入れ替わるので、y は周期（period）$\frac{1}{2}\pi$ をもつ。1 周期 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ において、y は $[0, \frac{1}{4}\pi]$ で増加し $[\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ で減少する（$\sin 4\theta$ の符号による）。よって最小値は両端でとる $|a| + |b|$、最大値は $\frac{1}{4}\pi$ でとる $\sqrt{2a^2 + 2b^2}$ である。周期性より、これらはすべての θ に対する最小値と最大値でもあるから

$$|a| + |b| \ \leq \ y \ \leq \ \sqrt{2a^2 + 2b^2}.$$

この 2 つの評価は矛盾しない。最初の小問を $|a|$ と $|b|$ に適用すると $(|a| + |b|)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ が得られるので、下界は確かに上界を超えない。

脇に置いた場合。 $a^2 = b^2$ ならば $y = 2|a|$ であり、一方 $|a| + |b| = 2|a|$、$\sqrt{2a^2 + 2b^2} = \sqrt{4a^2} = 2|a|$ であるから、不等式はすべて等号で成り立つ。$b = 0$ ならば $y = |a|\big(|\cos\theta| + |\sin\theta|\big)$ である。各項は 1 以下であるから $|\cos\theta| + |\sin\theta| \geq \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ であり、また最初の小問より $(|\cos\theta| + |\sin\theta|)^2 \leq 2$ である。よって $|a| \leq y \leq \sqrt{2}\,|a|$ となり、これは求める不等式である。$a = 0$ の場合は a と b を入れ替えれば同様であり、$a = b = 0$ の場合は自明である。以上により、すべての a、b、θ に対して結果が証明された。 ■

検算

- $a = 2$、$b = 1$ のとき、$y(0) = 2 + 1 = 3$、$y(\frac{1}{4}\pi) = 2\sqrt{5/2} = \sqrt{10} \approx 3.1623$ である。多数の θ について y を数値的に調べても、値はこの 2 つの間に収まる。

- 導関数の式は、無作為に選んだ a、b、θ において、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta$ の差分近似（finite-difference estimate）と約 10^{-9} の精度で一致する。
- $a = b$ のとき両方の評価は $2|a|$ に一致し、定数である y と合致する。

よくある間違い

- $\sqrt{a^2} = a$ と書いてしまうこと。最小値は $|a| + |b|$ であり、答えに絶対値（modulus）が現れるのはこのためである。
- $\sin 2\theta = 0$ で止まってしまい、$\sqrt{P} = \sqrt{Q}$ となる $\frac{1}{4}\pi$ の奇数倍の点にある停留点を見落とすこと。
- 根拠を示さずに極大や極小と判定すること。$\sin 4\theta$ の符号を使えば 1 行で根拠が示せる。

STEP のその先へ

幾何学的には、$\sqrt{P}$ は楕円（ellipse）$x = a\cos\phi$、$y = b\sin\phi$ の中心からその上の点までの距離であり、$\sqrt{Q}$ はパラメータを 4 分の 1 周だけ進めた点までの距離である。したがってこの問題は、これら 2 つの「共役」半径（conjugate radii）が一定の総量 $a^2 + b^2$ をどのように分け合うかを問うている。また 2 つの評価は、ベクトル (a, b) の ℓ^1 ノルム（norm）と（定数倍した）ℓ^2 ノルムでもあり、このようにノルムを比較することは大学 1 年次の解析学（analysis）や線形代数（linear algebra）で日常的に使われる道具である。導関数を用いて不等式を証明する方法についてさらに知りたければ、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照するとよい。

解答例

STEP I 2002、第 4 問

純粋数学 ・ 接線と不等式

> **STEP I 2002、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q4

鍵となる考え方

$(0,1)$ を通り、その先で曲線に接する直線は、その 2 点の間では曲線の下になければならない。曲線はそこで上に凸（concave）であり、その後平らになっていくからである。直線の下の領域は台形（trapezium）であり、それを y 軸のまわりに回転させると円柱（cylinder）と円錐（cone）が得られるので、その面積と体積は微積分を使わずに容易に求められる。それらを曲線の下の正確な面積および体積と比較することで、2 つの不等式が得られる。

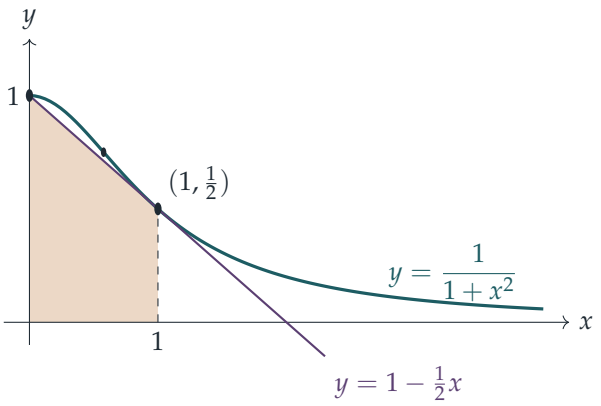
解答

概形

$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ とおく。このとき $f(0) = 1$、$f(x) > 0$ であり、$x \to \infty$ のとき $f(x) \to 0$ であるから、x 軸は漸近線（asymptote）である。微分すると

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \qquad f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

よって $f'(0) = 0$（曲線は $(0,1)$ で水平に始まる）であり、$x > 0$ では $f'(x) < 0$ であるから、曲線は常に減少する。また、$0 \le x < 1/\sqrt{3}$ では $f''(x) < 0$、$x > 1/\sqrt{3}$ では $f''(x) > 0$ であるから、$\left(1/\sqrt{3}, \frac{3}{4}\right)$ に変曲点（point of inflection）がある。曲線は y 軸の近くでは上に凸（下向きに曲がる）であり、それより遠くでは下に凸（convex）である。



影をつけた台形は、$0 \le x \le 1$ における直線の下の領域であり、曲線の下の領域の内部にある。

直線

直線は $(0, f(0)) = (0,1)$ を通るので、ある傾き（gradient）m を用いて $y = 1 + mx$ と表せる。この直線が $x = a > 0$ で接する（tangent）とする。そこでは 2 つの条件が成り立たなければならない。

曲線と交わる： $1 + ma = \dfrac{1}{1+a^2}$ であるから $ma = -\dfrac{a^2}{1+a^2}$ であり、$a \neq 0$ より

$$m = -\frac{a}{1+a^2}.$$

曲線と同じ傾きをもつ： $m = f'(a) = -\dfrac{2a}{(1+a^2)^2}$。

これらを等しいとおき、$-a/(1+a^2)$ で割る（$a > 0$ なので許される）と $1 = \dfrac{2}{1+a^2}$ となるから、$a^2 = 1$ であり、$a > 0$ より $a = 1$ である。このとき $m = -\frac{1}{2}$ であり、直線は

$$y = 1 - \tfrac{1}{2}x,$$

で、曲線と $(1, \frac{1}{2})$ で接する。

他に交点がないこと

直線から曲線を引く：

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{1+x^2} = \frac{(2-x)(1+x^2) - 2}{2(1+x^2)} = \frac{-x^3 + 2x^2 - x}{2(1+x^2)} = -\frac{x(x-1)^2}{2(1+x^2)}.$$

これが 0 になるのは $x = 0$ または $x = 1$ のときに限る。したがって直線は曲線と $x = 0$ および接点 $x = 1$ で交わり（重複因数 $(x-1)^2$ は接することの代数的な現れである）、それ以外では交わらない。$x \ge 0$ の範囲でも、実は負の x でも交わらない。

ここから、次に必要なことも読み取れる。$x > 0$ かつ $x \neq 1$ のとき、この式は真に負であるから

$$0 < 1 - \tfrac{1}{2}x < \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{ただし} 0 < x < 1. \tag{$*$}$$

（左側の不等式は、$[0,1]$ 上で $1 - \frac{1}{2}x \geq \frac{1}{2}$ であることから成り立つ。）よって $[0,1]$ 上では、端点を除いて直線は曲線の真に下にあり、概形の図のとおりである。

$\pi > 3$

$(*)$ を $[0,1]$ で積分する。2 つの関数は連続であり、開区間上で曲線は直線の真に上にあるので、不等式は積分しても狭義のまま保たれる：

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x > \int_0^1 \Big(1 - \frac{x}{2}\Big)\mathrm{d}x.$$

左辺は $\frac{\pi}{4}$ である（$\big[\arctan x\big]_0^1$ に等しい）。右辺は、平行な 2 辺が 1 と $\frac{1}{2}$、幅が 1 である影つきの台形の面積なので、$\frac{1}{2}\big(1 + \frac{1}{2}\big) = \frac{3}{4}$ である。よって $\frac{\pi}{4} > \frac{3}{4}$、すなわち

$$\pi > 3.$$

$\ln 2 > 2/3$

次に、同じ 2 つの領域（$0 \leq x \leq 1$ の部分）を y 軸のまわりに 2π だけ回転させる。$(*)$ より台形は曲線の下の領域の内部にあるので、その回転体ももう一方の回転体の内部にあり、体積は小さい。

考えてみよう 曲線が x の式で y として与えられているとき、y 軸のまわりの回転体の体積（volume of revolution）はどのように求めればよいか。

円筒殻法（cylindrical shells）を用いる。x における幅 δx、高さ y の細い帯は、体積がおよそ $2\pi x\, y\, \delta x$ の円筒殻を描くので、体積は $\int_0^1 2\pi x\, y\, \mathrm{d}x$ である。（あるいは水平に切ってもよい。「検算」を参照。）

曲線については

$$V_{\text{曲線}} = \int_0^1 \frac{2\pi x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi\big[\ln(1+x^2)\big]_0^1 = \pi \ln 2,$$

となる。分子 $2x$ が分母の導関数だからである。

直線については、立体は半径 1、高さ $\frac{1}{2}$ の円柱（台形のうち $y = \frac{1}{2}$ より下の部分から生じる）の上に、半径 1、高さ $\frac{1}{2}$ の円錐（その上の三角形から生じる）が載ったものである。よって

$$V_{\text{直線}} = \pi \cdot 1^2 \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot \tfrac{1}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

円筒殻法による確認：$\int_0^1 2\pi x\left(1-\frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x = 2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right) = \frac{2\pi}{3}$。

被積分関数 $2\pi x\left(\frac{1}{1+x^2}-1+\frac{x}{2}\right)$ は連続であり、$(*)$ より $[0,1]$ 上で非負、$(0,1)$ 上で真に正であるから、$V_{\text{curve}} > V_{\text{line}}$ である：

$$\pi \ln 2 > \frac{2\pi}{3} \quad\Longrightarrow\quad \ln 2 > \frac{2}{3},$$

これが示すべきことであった。

検算

- 数値的には $\pi/4 \approx 0.7854 > 0.75$、$\ln 2 \approx 0.6931 > 0.6667$ であり、どちらの不等式も正しく、しかもどちらもそれほど余裕があるわけではない。
- 代わりに水平に切る場合：$\frac{1}{2} \le y \le 1$ では曲線上で $x^2 = \frac{1}{y} - 1$ であるから、体積は円柱 $\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2}$ と $\int_{1/2}^1 \pi\left(\frac{1}{y}-1\right)\mathrm{d}y = \pi\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$ の和であり、やはり $\pi \ln 2$ となる。
- 因数分解の簡単な確認：$x = 2$ では直線は 0、曲線は $\frac{1}{5}$ を与え、差は $-\frac{1}{5}$ である。公式からは $-\frac{2\cdot 1}{2\cdot 5} = -\frac{1}{5}$ となる。

よくある間違い

- 一般の点における接線を求めたものの、それが $(0,1)$ を通るという条件を忘れる（またはその逆）。a を決定するには両方の条件が必要である。
- 「$\ge$」で止まってしまう。狭義の不等式を得るには、ある区間上で直線が曲線の真に下にあることが必要であり、それを保証するのが因数 $x(x-1)^2$ である。
- 誤って x 軸のまわりに回転させてしまう。その場合は $\int \pi y^2\,\mathrm{d}x$ となり、異なる値が得られる。

STEP のその先へ

この議論は比較原理（comparison principle）である：区間上で $g \le h$ であり、どこかで狭義の不等式が成り立ち、両者が連続ならば、$\int g < \int h$ となる。「どこかで狭義に」を厳密にすることは、積分を上限和と下限和によって定義する最初の解析学の講義における典型的な演習問題である。単純な図形の面積によって π を評価する方法はアルキメデス（Archimedes）にさかのぼり、この問題のはるかに精密な版（たとえば $\int_0^1 x^4(1-x)^4/(1+x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{22}{7} - \pi$）は調べてみる価値がある。解析学については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を読んでみるとよい。

解答例

STEP I 2002、第 5 問

純粋数学 • 多項式の整数解

> **STEP I 2002、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q5

鍵となる考え方

一次因数（linear factor）の積として書かれた多項式（polynomial）は、特別な点での値を求めやすい。$x = 0$、$x = 1$、$x = -1$ を代入すると、因数分解された形はそれぞれ k_i、$k_i + 1$、$k_i - 1$ の積になり、一方で展開された形は係数の和を与える。四次式（quartic）の場合、これらの値は決まった整数であり、根（root）が整数であることから、各 $k_i \pm 1$ はある既知の数の約数（divisor）でなければならない。これらの数を素因数分解すると、可能性はほとんど残らない。

解答

3 つの恒等式

$f(x)$ の 2 つの表示は同じ多項式であるから、すべての x の値で一致する。

$x = 0$ を代入する。展開された形では、他のすべての項が因数 x を含むので $f(0) = a_n$ となる。因数分解された形では $f(0) = k_1 k_2 \cdots k_n$ となる。よって

$$k_1 k_2 \cdots k_n = a_n.$$

$x = 1$ を代入する。x のすべての累乗が 1 になるので、展開された形は $f(1) = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を与え、因数分解された形は $(1 + k_1)(1 + k_2) \cdots (1 + k_n)$ を与える。よって

$$(k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_n + 1) = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

となり、示すべき式が得られた。

$x = -1$ を代入する。因数分解された形は $(k_1 - 1)(k_2 - 1) \cdots (k_n - 1)$ を与える。展開

された形では、項 $a_j x^{n-j}$ は（$(-1)^{-j} = (-1)^j$ を用いて）$(-1)^{n-j}a_j = (-1)^n(-1)^j a_j$ となるので、

$$(k_1 - 1)(k_2 - 1)\cdots(k_n - 1) = (-1)^n\big(1 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n\big).$$

n が偶数のときは、これは単に $1 - a_1 + a_2 - \cdots + a_n$ である。n が奇数のときは、すべての符号が反転する。

四次式

四次式を $f(x) = (x + k_1)(x + k_2)(x + k_3)(x + k_4)$ と書く。すると根は $-k_1, \ldots, -k_4$ であり、これらは整数である。$n = 4$ として恒等式を用いると、

$$\begin{aligned} k_1k_2k_3k_4 &= 576 = 2^6 \cdot 3^2, \\ (k_1 + 1)(k_2 + 1)(k_3 + 1)(k_4 + 1) &= 1 + 22 + 172 + 552 + 576 = 1323 = 3^3 \cdot 7^2, \\ (k_1 - 1)(k_2 - 1)(k_3 - 1)(k_4 - 1) &= 1 - 22 + 172 - 552 + 576 = 175 = 5^2 \cdot 7. \end{aligned}$$

各 k_i は 2 以上である。すべての係数が正であるから、$x \geq 0$ であるすべての x に対して $f(x) > 0$ である。したがってすべての根は負であり、各 k_i は正の整数である。さらに、どの k_i も 1 に等しくはない。もし等しければ、3 番目の積は 175 ではなく 0 になってしまうからである。よって各 i について $k_i \geq 2$ であり、$k_i - 1$ と $k_i + 1$ はすべて正の整数である。

考えてみよう 3 つの積から、k_i の候補の短いリストをどのように作ればよいか？

各 $k_i - 1$ は 175 の正の約数であり、各 $k_i + 1$ は 1323 の正の約数である。175 の約数は $1, 5, 7, 25, 35, 175$ であるから、

$$k_i \in \{2, 6, 8, 26, 36, 176\}, \qquad k_i + 1 \in \{3, 7, 9, 27, 37, 177\}.$$

これらの $k_i + 1$ の値のうち、$1323 = 3^3 \cdot 7^2$ を割り切るのは $3, 7, 9, 27$ だけである（37 は素数（prime）であり、$177 = 3 \cdot 59$ であるから）。よって各 k_i は $2, 6, 8, 26$ のいずれかであり、各 $k_i + 1$ は $3, 7, 9, 27$ のいずれかである。

ここで積 $\prod(k_i + 1) = 3^3 \cdot 7^2$ に注目する。

- 因数 7^2 は 7 に等しい因数からしか生じないので、$k_i + 1$ のうちちょうど 2 つが 7 に等しい。すなわち k_i のうち 2 つは 6 である。
- 残りの 2 つの因数は $\{3, 9, 27\}$ に属する 3 の累乗で、積が $3^3 = 27$ である。それぞれ 3 以上であるから 27 は不可能であり（相方が 1 になってしまう）、可能なのは 3×9 だけである。よって残りの k_i は 2 と 8 である。

したがって $\{k_1, k_2, k_3, k_4\} = \{2, 6, 6, 8\}$ である。1 番目の積で確かめると、$2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 = 576$ となり、確かに成り立つ。展開しても確認できる：

$$(x+2)(x+8) = x^2 + 10x + 16, \qquad (x+6)^2 = x^2 + 12x + 36,$$

および

$$(x^2 + 10x + 16)(x^2 + 12x + 36) = x^4 + 22x^3 + 172x^2 + 552x + 576.$$

よって根は

$$x = -2, \quad x = -6 \text{（重根）}, \quad x = -8.$$

である。

検算

- k_i の和は $2 + 6 + 6 + 8 = 22$ であり、x^3 の係数と一致する。
- $f(-6) = 1296 - 4752 + 6192 - 3312 + 576 = 0$ であり、さらに $f'(x) = 4x^3 + 66x^2 + 344x + 552$ も $x = -6$ で 0 になる。これにより -6 が二重根（double root）であることが確かめられる。
- 恒等式の簡単な数値テスト：$f(x) = (x+2)(x-3) = x^2 - x - 6$ に対して、$(2-1)(-3-1) = -4$ および $1 - (-1) + (-6) = -4$ が得られる。

よくある間違い

- $x = -1$ の結果で符号を誤る。n が奇数のときは因数 $(-1)^n$ が効いてくる。
- 重根（repeated root）が許されることを忘れる。1323 の中に 7^2 があると分かった時点で、k_i のうち 2 つは等しくなければならない。
- すべての $k_i \geq 2$ であることを先に示さずに、正の約数だけを列挙する。この段階こそが、すべての $k_i \pm 1$ を正にしているのである。

STEP のその先へ

ここでの恒等式は、多項式の係数を根の基本対称式（elementary symmetric functions）として表す、解と係数の関係（ヴィエトの公式、Vieta's formulae）の特別な場合である。約数を用いた議論は、有理根定理（rational root theorem）や、整数係数多項式の因数分解に関するガウス（Gauss）の補題（Gauss's lemma）の親戚であり、これらは環（ring）に関する最初の講義で学ぶ。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（『環・体・群』）は、これらの考え方を丁寧に展開している。

解答例

STEP I 2002、第 6 問

純粋数学 ・ 角錐の幾何

STEP I 2002、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

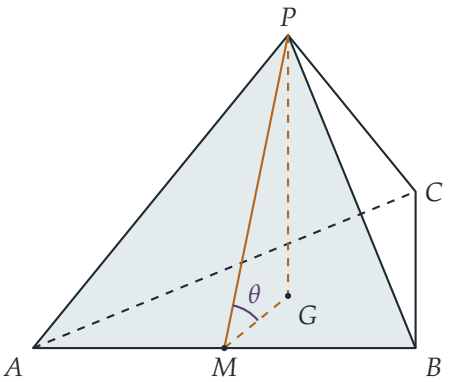
step.maths.org/questions/02-s1-q6

鍵となる考え方

対称性（symmetry）により、頂点（apex）は正三角形（equilateral triangle）の底面の中心の真上にある。したがって高さは三平方の定理（Pythagoras' theorem）を一度使えば求まる。体積がわかれば、新しい高さを直接求める必要はない。どの面を下にして置いても体積は変わらないので、$V = \frac{1}{3} \times (\text{新しい底面の面積}) \times h$ が成り立つ。最後の小問の角は、共通の辺に沿って交わる二つの面のなす角であり、それを最もすっきり捉えるには、頂点を通りその辺に垂直な断面（cross-section）を考えればよい。

解答

底面を ABC、その辺の長さを a とし、頂点を P として $PA = PB = PC = b$ とする。G を ABC の中心、M を AB の中点とする。



体積

底面からの P の高さを H とし、P から下ろした垂線の足（foot of the perpendicular）を F とする。直角三角形 PFA, PFB, PFC は辺 $PF = H$ を共有し、斜辺（hypotenuse）はいずれも b であるから、

$$FA = FB = FC = \sqrt{b^2 - H^2}.$$

よって F は三つの頂点から等距離にある。すなわち F は ABC の外心（circumcentre）であり、正三角形ではそれは中心 G に一致する。ABC の中線（median）の長さは $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ であり、G はその中線を頂点の側から $2:1$ に分ける点にあるので、$GA = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a}{\sqrt{3}}$ である。三角形 PGA に三平方の定理を用いると、

$$H^2 = b^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{3b^2 - a^2}{3}.$$

底面の面積は $\frac{1}{2}a^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ であるから、

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{12}\, a^2 \left(3b^2 - a^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

となり、示すべき式が得られた。（このような形の角錐（pyramid）が存在するのは $3b^2 > a^2$ のときに限られ、それはちょうどこの値が正の実数となるときである。）

新しい高さ

今度は面 PAB を下にして置く。この面は $PA = PB = b, AB = a$ の二等辺三角形（isosceles triangle）なので、PM は AB に垂直であり、三角形 PMA に三平方の定理を用いると、

$$PM^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4b^2 - a^2}{4}, \qquad \text{三角形の面積} PAB = \frac{1}{2}\, a \cdot PM = \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}.$$

考えてみよう h を求めるのに、新しい最上部の頂点の位置を本当に求める必要があるだろうか。

その必要はない。立体そのものは変わっていないので体積は依然として V であり、体積の公式はどの面を底面としても、その面に垂直に測った高さを用いれば成り立つ。よって

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2} \cdot h.$$

前の小問の結果と等置すると、

$$\frac{a}{12}\sqrt{4b^2 - a^2}\, h = \frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2 - a^2} \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{a\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{4b^2 - a^2}},$$

であり、両辺を2乗すると

$$h^2 = \frac{a^2(3b^2 - a^2)}{4b^2 - a^2},$$

となって、示すべき式が得られた。ここで $4b^2 > 3b^2 > a^2$ であるから $4b^2 - a^2 > 0$ である。

正三角形の面の角

新しい置き方では地面は PAB を含む平面であり、正三角形の面 ABC は辺 AB に沿ってこれと交わる。二つの平面のなす角とは、それぞれの平面内で共通の辺上の同じ点からその辺に垂直に引いた二直線のなす角である。点 M において、面 PAB 内の直線 MP は（PAB が二等辺三角形なので）AB に垂直であり、面 ABC 内の直線 MC は（ABC が正三角形なので）AB に垂直である。また G は MC 上にある。よって求める角は $\theta = \angle PMC = \angle PMG$ である。

PG は底面全体に垂直であるから、三角形 PMG は G を直角とする直角三角形である。また GM は中線の3分の1であり、$GM = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ である。したがって

$$\tan\theta = \frac{PG}{GM} = \frac{\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{a} = \frac{2\sqrt{3b^2 - a^2}}{a},$$

となり、正三角形と水平面のなす角は

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3b^2 - a^2}}{a}\right).$$

G は底面の内部にあるのでこの角は鋭角であり、確かに平面のなす角そのものであって、その補角（supplement）ではない。

新しい高さを用いても同じ結果が得られる。頂点 C は地面から高さ h の位置にあり、面に沿って辺 AB から距離 $MC = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ のところにあるので、$\sin\theta = h \big/ \frac{\sqrt{3}}{2}a$ であり、

$$\sin\theta = \frac{2\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{3(4b^2 - a^2)}}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{3(4b^2 - a^2)}},$$

となる。これらは上で求めた $\tan\theta$ の値と一致する。

検算

正四面体（regular tetrahedron）の場合、すなわち $a = b = 1$ のとき、公式から $V = \frac{\sqrt{2}}{12}$、$h^2 = \frac{2}{3}$（対称性から当然であるが、もとの高さと同じ）、$\cos\theta = \frac{1}{3}$ が得られる。最後のものは、よく知られた正四面体の二面角（dihedral angle）$\theta \approx 70.53^\circ$ である。$b \to a/\sqrt{3}$ とすると角錐は平たくつぶれて $\theta \to 0$ となり、$b \to \infty$ とすると細長いとが

った形になって $\theta \to 90^\circ$ となる。また、20,000 組の無作為な (a, b) について座標を用いて角錐を構成し、V をスカラー三重積から、h を C から平面 PAB までの距離として、θ を法線ベクトルから計算した。三つともおよそ 10^{-13} の精度で公式と一致した。たとえば $a = 2, b = 3$ のとき $h \approx 1.6956, \theta \approx 78.22^\circ$ である。

よくある間違い

- GA を中線の半分としてしまう、あるいは外接円の半径（circumradius）$\frac{a}{\sqrt{3}}$ が必要なところで内接円の半径（inradius）$\frac{a}{2\sqrt{3}}$ を使ってしまう（最後の小問ではその逆）。
- 面と地面のなす角を、AC や PC のような共通の辺に垂直でない直線を使って測ってしまう。

STEP のその先へ

異なる面を底面として同じ体積を計算することは、体積が立体の切り方や向きによらないという考え方を初めて垣間見る機会である。大学 1 年次の講義では、四面体の体積は $\frac{1}{6}|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$、すなわちスカラー三重積（scalar triple product）（3×3 の行列式（determinant））として表され、面のなす角はそれらの法線ベクトル（normal vector）のなす角として求められる。上の数値による検算もこの方法で行った。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）では、行列式を体積として展開している。

解答例

STEP I 2002、第 7 問

純粋数学 ・ 三角関数の積分

> **STEP I 2002、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q7

鍵となる考え方

I も J も単独では扱いにくそうに見えるが、その和と差はどちらも扱いやすい。両者を足すと分子に分母（denominator）そのものが現れるので、被積分関数（integrand）は 1 になる。両者を引くと分子に分母の**導関数**（derivative）が現れるので、積分は対数（logarithm）になる。後半の二つの積分でも、同じ工夫をより一般的な形で用いる。すなわち、分子（numerator）を「分母の定数倍」と「分母の導関数の定数倍」の和に分解するのである。

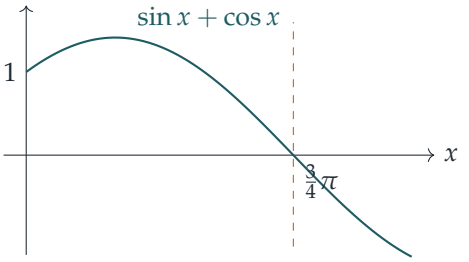
解答

主結果

まず、なぜ a に制限があるのかを確認しておく。

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\,\sin\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right),$$

と書けるので、これは $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ で正であり、初めて零になるのは $x = \frac{3}{4}\pi$ においてである。したがって $0 \le a < \frac{3}{4}\pi$ ならば、分母は $[0, a]$ 全体で正である。このとき二つの積分はどちらもまったく普通の積分であり、以下に現れる対数の中身も正の数である。



二つの積分を足すと、

$$I + J = \int_0^a \frac{\cos x + \sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^a 1\,\mathrm{d}x = a.$$

引くと、

$$I - J = \int_0^a \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x.$$

分子 $\cos x - \sin x$ はちょうど分母 $\sin x + \cos x$ の導関数であるから、被積分関数は $f'(x)/f(x)$ の形をしており、しかも $[0, a]$ 上で $f > 0$ である。よって

$$I - J = \Big[\ln(\sin x + \cos x)\Big]_0^a = \ln(\sin a + \cos a) - \ln 1 = \ln(\sin a + \cos a).$$

二つの結果を足すと

$$2I = a + \ln(\sin a + \cos a),$$

となり、示すべき式が得られた。（おまけとして、引けば $2J = a - \ln(\sin a + \cos a)$ も得られる。）

小問 (i)

$p, q > 0$ であり、$\sin x$ と $\cos x$ はともに $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上で非負かつ同時に零になることはないので、分母 $D(x) = p\sin x + q\cos x$ はこの区間で正である。その導関数は $D'(x) = p\cos x - q\sin x$ である。

考えてみよう 分母に係数 p と q がついているとき、「$I + J$ と $I - J$ を考える」という方法をどう一般化すればよいだろうか？

先ほど和と差がうまくいったのは、分子を足すと分母になり、引くと分母の導関数になったからである。そこで今度は、次を満たす定数 A と B を探す。

$$\cos x = A\,(p\sin x + q\cos x) + B\,(p\cos x - q\sin x) \qquad \text{すべての実数} x.$$

$\sin x$ と $\cos x$ の係数を比較（comparing coefficients）すると、

$$pA - qB = 0, \qquad qA + pB = 1.$$

第1式から $B = pA/q$ を得る。これを第2式に代入すると $qA + p^2A/q = 1$ となるので、

$$A = \frac{q}{p^2+q^2}, \qquad B = \frac{p}{p^2+q^2}.$$

これで積分は、易しい部分と対数になる部分に分かれる。

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{p\sin x + q\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \left(A + B\,\frac{D'(x)}{D(x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}A + B\Big[\ln D(x)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}A + B\ln\frac{p}{q},\end{aligned}$$

ここで $D(\frac{\pi}{2}) = p$ と $D(0) = q$ を用いた。これらはともに正である。したがって

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{p\sin x + q\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{\frac{1}{2}\pi q + p\ln(p/q)}{p^2+q^2}.$$

小問 (ii)

今度は分母が $D(x) = 3\sin x + 4\cos x + 25$ であり、$D'(x) = 3\cos x - 4\sin x$ である。$|3\sin x + 4\cos x| \le 5 < 25$ であるから、分母は正である。D に定数25が含まれているので、定数項も一致させなければならない。そこで次を満たす A と B を探す。

$$\cos x + 4 = A\,(3\sin x + 4\cos x + 25) + B\,(3\cos x - 4\sin x).$$

係数を比較すると、

$$\sin x:\ 3A - 4B = 0, \qquad \cos x:\ 4A + 3B = 1, \qquad \text{定数項}:\ 25A = 4.$$

最初の二式から $A = \frac{4}{25}$、$B = \frac{3}{25}$ を得る。すると定数項の式 $25\cdot\frac{4}{25} = 4$ も満たされる。方程式が三つで未知数が二つしかないのだから、これは自動的に成り立つことではない。分子の「+4」は、うまくいくように選ばれていたのである。よって

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x + 4}{3\sin x + 4\cos x + 25}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{4}{25} + \frac{3}{25}\,\frac{D'(x)}{D(x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{25}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{3}{25}\Big[\ln D(x)\Big]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2\pi}{25} + \frac{3}{25}\ln\frac{28}{29},\end{aligned}$$

ここで $D(\frac{\pi}{2}) = 3 + 25 = 28$、$D(0) = 4 + 25 = 29$ を用いた。

検算

- $p = q = 1$ のとき、小問 (i) の結果は $a = \frac{\pi}{2}$ における主結果と一致するはずである。主結果からは $2I = \frac{\pi}{2} + \ln 1$、すなわち $I = \frac{\pi}{4}$ が得られる。公式からは $\frac{\pi/2+0}{2} = \frac{\pi}{4}$ が得られる。一致している。

- $a \to \frac{3}{4}\pi$ のとき $\ln(\sin a + \cos a) \to -\infty$ となる。これは、分母が零になる直前では $\cos x < 0$ であるため、I の被積分関数が絶対値の大きな負の値をとることと整合している。
- 数値的には、小問 (ii) の値は $\frac{2\pi}{25} + \frac{3}{25}\ln\frac{28}{29} \approx 0.247116$ であり、この積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用した結果と小数第 12 位まで一致する。また主結果は a の、小問 (i) は p と q の、それぞれ 200 通りの無作為な値について数値積分（quadrature）の結果と一致する。

よくある間違い

- 小問 (i) で $\ln(p/q)$ ではなく $\ln(q/p)$ としてしまう。上端 $\frac{\pi}{2}$ で残るのは sin の項であり、値は p になる。
- 小問 (ii) で定数項を忘れ、$\sin x$ と $\cos x$ の係数だけを一致させてしまう。たまたまうまくいくが、それを仮定するのではなく確かめるべきである。

STEP のその先へ

分子を「分母の A 倍と、その導関数の B 倍の和」として書くことは、ささやかな線形代数（linear algebra）である。関数 $\sin x$ と $\cos x$ は 2 次元の空間を張り、$p^2 + q^2 \neq 0$ であれば D と D' はその空間のもう一つの基底（basis）をなす。展開に適した基底を見つけるという同じ考え方は、部分分数分解（partial fractions）や、微分方程式（differential equations）に対する未定係数法（method of undetermined coefficients）の根底にもある。これらは大学 1 年次の数学的手法（methods）の講義で出会うことになる。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* には、この種の対称性を利用した工夫で解ける積分がさらに収められている。

解答例

STEP I 2002、第 8 問

純粋数学 ・ 複利のローン

> **STEP I 2002、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q8

鍵となる考え方

1 年間に起こることを書き下す。負債は $1+\alpha$ 倍に増え、その後に返済額が差し引かれる。この 1 ステップの漸化式（recurrence relation）を繰り返し展開すると、各返済 R_k は n 年目の終わりには $(1+\alpha)^{n-k}R_k$ の「価値」をもつことがわかる。その分の利息が積み上がるのを防いだからである。残りはすべて等比級数（geometric series）である。最後の近似では、二項定理（binomial theorem）によって $1+\alpha$ のべきを展開し、必要十分な数の項だけを残す。

解答

C_{n+1} の一般式

k 年目の終わりに利息が加わると負債 C_k は $(1+\alpha)C_k$ となり、その後 R_k が返済される。残ったものが $k+1$ 年目の初めの負債である：

$$C_{k+1} = (1+\alpha)C_k - R_k.$$

これを繰り返し適用すると、

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= (1+\alpha)C_n - R_n \\ &= (1+\alpha)^2 C_{n-1} - (1+\alpha)R_{n-1} - R_n \\ &\vdots \\ &= (1+\alpha)^n C_1 - (1+\alpha)^{n-1}R_1 - (1+\alpha)^{n-2}R_2 - \cdots - R_n, \end{aligned}$$

となる。よって $C_1 = C$ であるから、

$$\boxed{C_{n+1} = (1+\alpha)^n C - \sum_{k=1}^{n} (1+\alpha)^{n-k} R_k}.$$

（これを厳密にするには、$n = 1$ のとき成り立つこと、すなわち $C_2 = (1+\alpha)C - R_1$ であることを確かめ、さらに n で成り立つならば $1+\alpha$ を掛けて R_{n+1} を引くことで $n+1$ でも成り立つことを確かめればよい。）

返済額 $R_k = (1+\alpha)^k r$ の場合

ローンを N 年で完済するとは、$C_{N+1} = 0$ となることである。$R_k = (1+\alpha)^k r$ のとき、和のすべての項は等しい：

$$(1+\alpha)^{N-k} R_k = (1+\alpha)^{N-k}(1+\alpha)^k r = (1+\alpha)^N r.$$

したがって

$$0 = C_{N+1} = (1+\alpha)^N C - N(1+\alpha)^N r = (1+\alpha)^N (C - Nr).$$

$(1+\alpha)^N \neq 0$ であるから $C = Nr$、すなわち $r = C/N$ が得られ、題意が示された。

これは理にかなっている。k 回目の返済は「現在の貨幣価値で」C/N であり、それが k 年分の利息で増えたものである。したがって全体として、元本 C とそれに対するちょうどの利息を返済することになる。

均等返済 R の場合

今度はすべての k について $R_k = R$ であり、$C_{N+1} = 0$ から

$$(1+\alpha)^N C = R \sum_{k=1}^{N} (1+\alpha)^{N-k} = R\big(1 + (1+\alpha) + \cdots + (1+\alpha)^{N-1}\big).$$

括弧の中は初項 1、公比 $1+\alpha$、項数 N の等比級数である。よって（$\alpha > 0$ より公比は 1 でないので）その値は

$$\frac{(1+\alpha)^N - 1}{(1+\alpha) - 1} = \frac{(1+\alpha)^N - 1}{\alpha}.$$

ゆえに $(1+\alpha)^N C = R\,\dfrac{(1+\alpha)^N - 1}{\alpha}$ であり、整理すると

$$\frac{R}{C} = \frac{\alpha(1+\alpha)^N}{(1+\alpha)^N - 1},$$

となり、求める結果が得られる。

$\alpha = \frac{1}{50}, N = 4$ の場合

考えてみよう　二項展開の項をいくつ残すべきか。また、なぜ分子は分母よりも少ない項で済むのか。

分母 $(1+\alpha)^4-1$ は α の 1 次から始まるが、分子 $\alpha(1+\alpha)^4$ は 1 から始まる式に α を掛けたものである。したがって α を 1 つ約分すると、分子は $(1+\alpha)^4$、分母は $\big((1+\alpha)^4-1\big)/\alpha$ となる。両者を α の 1 次まで正しく求めるには、分子では $(1+\alpha)^4\approx 1+4\alpha$ でよいが、分母では $(1+\alpha)^4\approx 1+4\alpha+6\alpha^2$ が必要である（$6\alpha^2$ は α で割ると 6α になる）。よって

$$\frac{R}{C}=\frac{(1+\alpha)^4}{\big((1+\alpha)^4-1\big)/\alpha}=\frac{1+4\alpha+6\alpha^2+\dots}{4+6\alpha+4\alpha^2+\alpha^3}\approx\frac{1+4\alpha}{4+6\alpha}.$$

$\alpha=\frac{1}{50}$ とすると、

$$\frac{R}{C}\approx\frac{1+\frac{4}{50}}{4+\frac{6}{50}}=\frac{54}{206}=\frac{27}{103},$$

となり、題意が示された。省いた項の相対的な大きさはおよそ α^2 程度であり、ここでは 1 パーセントにも満たない。

検算

- $N=1$ のとき、公式は $R/C=1+\alpha$ を与える。C を借りて、1 年分の利息とともに返済するということであり、正しい。
- $\alpha\to 0$ のとき $(1+\alpha)^N-1\approx N\alpha$ であるから $R/C\to 1/N$ となる。利息がなければ毎年 C/N を返済すればよいだけである。これは $r=C/N$ とも一致する。
- 正確な値は $R/C=\dfrac{6765201}{25760050}\approx 0.26262$ であり、一方 $27/103\approx 0.26214$ である。両者の差はおよそ 0.2% である。$R=0.26262\,C$ として負債を 1 年ずつ追っていくと、4 年後には（丸め誤差を除いて）残債はなくなる。

よくある間違い

- 和の指数を間違える。R_k は k 年目の終わりに支払われるので、それ以降に免れる利息は $n-k+1$ 年分ではなく $n-k$ 年分である。
- 分母でも $(1+\alpha)^4\approx 1+4\alpha$ と近似してしまう。これでは $R/C\approx 27/100$ となり、より粗い答えで、求める値と一致しない。

STEP のその先へ

量 $\sum(1+\alpha)^{-k}R_k$ は返済の**現在価値**（present value）であり、ローンが完済されるのは、返済の現在価値が借入額にちょうど等しくなるときである。R の公式は標準的な年金（住宅ローン）の公式（annuity formula）である。$C_{k+1} = (1+\alpha)C_k - R_k$ のような漸化式は 1 階線形差分方程式（first-order linear difference equation）であり、微分方程式 $y' = \alpha y - R(t)$ の離散版にあたる。そして同じ「積分因子」（integrating factor）の考え方で解くことができる。このように代数とモデル化を組み合わせた問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）を参照するとよい。

解答例

STEP I 2002、第 9 問

力学 ・ 斜面上での転倒

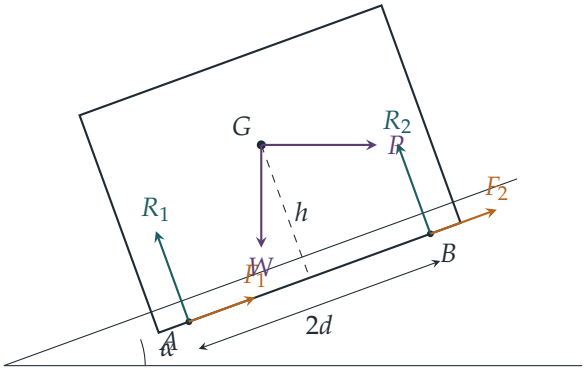
> **STEP I 2002、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q9

鍵となる考え方

トラックはつり合い（equilibrium）の状態にある剛体（rigid body）なので、斜面に沿った方向の力の分解、斜面に垂直な方向の力の分解、そしてモーメント（moments）のつり合いという 3 つの式が得られる。G のまわりのモーメントをとるのがうまい選び方である。重力と P はどちらも G を通るので式から消え、車輪にはたらく力だけが残るからである。この 1 つの式が垂直抗力の差と摩擦力の合計を結びつけ、ほとんどすべての仕事をしてくれる。そうすれば「転倒しない」とは、単にどちらの垂直抗力も負にならないということになる。

解答

トラックを、車輪が斜面上の 2 点 A（低い側）と B（高い側）で接し、その間隔が $2d$ である剛体としてモデル化する。A における垂直抗力（normal reaction）を R_1、B における垂直抗力を R_2 とし、摩擦力（frictional force）を F_1、F_2 とする。摩擦力はどちらも斜面に沿って**上向き**を正とする（どちらかが負になることもありうる）。摩擦は滑りを防ぐのに十分大きいと仮定する。問題にしているのは転倒だけである。図のように P は水平で斜面の方を向いているので、斜面に沿って上向きの成分 $P\cos\alpha$ と、斜面に押しつける向きの成分 $P\sin\alpha$ をもつ。



斜面に垂直な方向と斜面に沿った方向（斜面を上る向きを正とする）に力を分解すると、

$$R_1 + R_2 = W\cos\alpha + P\sin\alpha, \tag{1}$$

$$F_1 + F_2 = W\sin\alpha - P\cos\alpha. \tag{2}$$

次に G のまわりのモーメントをとる。重力と P は G を通って作用するので、寄与しない。各垂直抗力は G から垂直距離 d のところに作用し、各摩擦力は斜面に沿って G から垂直距離 h のところに作用する。反時計回りを正とすると（図のように斜面は右に向かって上がっているとする）、R_2 はトラックを G のまわりに反時計回りに回し、R_1 は時計回りに回す。また、斜面に沿って上向きで G より下に作用する摩擦力は反時計回りに回す。したがって

$$d(R_2 - R_1) + h(F_1 + F_2) = 0. \tag{3}$$

小問 (i)

$R_1 = R_2$ ならば、式 (3) は $h(F_1 + F_2) = 0$ となる。$h > 0$ であるから $F_1 + F_2 = 0$ が得られる。すなわち、摩擦力の和は 0 であり、示すべきことが示された。

（(2) より、これが起こるのはちょうど $P = W\tan\alpha$ のときである。このとき P の斜面を上る向きの成分が重力の斜面を下る向きの成分とちょうどつり合うので、斜面は正味の摩擦力をまったく与える必要がない。）

小問 (ii)

(2) を (3) に代入すると

$$R_2 - R_1 = \frac{h}{d}(P\cos\alpha - W\sin\alpha),$$

となり、これを (1) と組み合わせると

$$2R_1 = W\cos\alpha + P\sin\alpha - \frac{h}{d}(P\cos\alpha - W\sin\alpha),$$
$$2R_2 = W\cos\alpha + P\sin\alpha + \frac{h}{d}(P\cos\alpha - W\sin\alpha).$$

考えてみよう 「転倒しない」とは、これらの式の言葉ではどういう意味だろうか。

地面は車輪を押すことはできるが、引くことはできない。したがって、各垂直抗力は $R \geq 0$ を満たさなければならない。もし R_2 の式が負になったとすると、高い側の車輪を押さえつけておく必要があることになる。実際にはその車輪は浮き上がり、トラックは A のまわりに回転する。同様に、$R_1 < 0$ は B のまわりの回転を意味する。よって、トラックが倒れずにいるのは、ちょうど $R_1 \geq 0$ かつ $R_2 \geq 0$ のときである。

以下では一貫して $\frac{d}{h} = \tan\beta$（$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$）とおき、$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ とする。

高い側の車輪が浮かない条件（$R_2 \geq 0$）。 $2R_2 \geq 0$ の両辺に $d/h > 0$ を掛けると

$$\tan\beta\,(W\cos\alpha + P\sin\alpha) + P\cos\alpha - W\sin\alpha \geq 0.$$

両辺に $\cos\beta > 0$ を掛けて項を整理すると

$$P(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \geq W(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta),$$

すなわち

$$P\cos(\alpha - \beta) \geq W\sin(\alpha - \beta).$$

$-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$ であるから $\cos(\alpha - \beta) > 0$ であり、不等号の向きを変えずにこれで割ることができる：

$$P \geq W\tan(\alpha - \beta).$$

低い側の車輪が浮かない条件（$R_1 \geq 0$）。 同様に、$2R_1 \geq 0$ から

$$\tan\beta\,(W\cos\alpha + P\sin\alpha) - P\cos\alpha + W\sin\alpha \geq 0,$$

が得られ、両辺に $\cos\beta > 0$ を掛けると

$$P(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \leq W(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta),$$

すなわち

$$P\cos(\alpha + \beta) \leq W\sin(\alpha + \beta).$$

$\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$ であれば（問題に示された答えは暗にこれを仮定している。そうでなければ $\tan(\alpha+\beta)$ は負になるか定義されないからである）、$\cos(\alpha+\beta)>0$ であり、これで割ると

$$P \le W\tan(\alpha+\beta).$$

一方、$\alpha+\beta\ge\frac{\pi}{2}$ のときは、$P\ge 0$ に対して左辺は ≤ 0 であり、右辺は正である。したがって、斜面の方を向いた水平な押す力をどれほど大きくしても、トラックが高い側の車輪を軸にして転倒することはない。

2 つの条件を合わせると、トラックが転倒しないための必要十分条件は

$$W\tan(\alpha-\beta) \le P \le W\tan(\alpha+\beta),$$

であり、これが求める結果である。押す力が小さすぎるとトラックは A のまわりに斜面の下側へ倒れ、大きすぎると B のまわりに斜面の上側へ押し倒される。

検算

- **幾何的な見方。** 重力と P を合成すると、G を通る 1 つの力になり、その向きは鉛直方向と角 θ（$\tan\theta = P/W$）をなす。この合力（resultant）が車輪の接点を通るとき、トラックはまさに転倒しようとしている。直線 GA は斜面の法線と角 β をなし、法線は鉛直方向と角 α をなすので、合力は $\theta=\alpha-\beta$ のとき A を通り、$\theta=\alpha+\beta$ のとき B を通る。これらはちょうど 2 つの端点になっている。
- **斜面がない場合。** $\alpha=0$ とすると条件は $|P|\le Wd/h$ となる。これは、水平な地面に置かれた箱が高さ h のところを横から押されても倒れないための、おなじみの条件である。
- **数値。** $W=3$、$\alpha=0.4$、$d=1$、$h=1.5$ とすると、区間は $-0.571\le P\le 4.551$ となる。20 000 個のランダムな設定について $R_1, R_2\ge 0$ を直接調べて区間と照らし合わせたところ、完全に一致し、下端では $R_2=0$、上端では $R_1=0$ となった。

よくある間違い

- G ではなく車輪のまわりのモーメントをとること。それでも解けるが、重力と P のうでの長さが扱いにくくなり、符号の誤りが入り込みやすい。
- 摩擦力が G のまわりにモーメントをもつことを忘れること。摩擦力は斜面上、すなわち G から距離 h だけ下で作用しており、答えに h が現れるのはまさにここからである。

- $\cos(\alpha \pm \beta)$ の符号を確かめずにそれで割ること。不等号の向きを決めるのはこの符号である。

STEP のその先へ

車輪と地面の間の摩擦は**不静定**（statically indeterminate）である。つり合いの条件で決まるのは $F_1 + F_2$ だけであり、F_1 と F_2 を個別に決めることは決してできない。その配分を求めるには、タイヤがどのように変形するかのモデルが必要になる。技術者は、厳密に必要な数より多くの支点をもつ構造物で、この問題にいつも出会っている。上の幾何的な検算は、**合力の作用線**（line of action of the resultant）と支持多角形（support polygon）という考え方であり、歩行ロボットや積み重ねたブロックの安定性の根底にもある。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の静力学を丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 2002、第 10 問

力学 ・ 弾性衝突

> **STEP I 2002、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q10

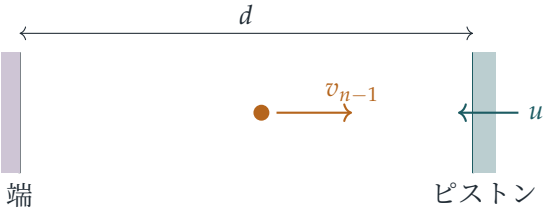
この問題は、*Beyond STEP* の第 10.4 節「**分子とピストン**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch10/piston.html

鍵となる考え方

粒子よりはるかに重い壁との完全弾性衝突（perfectly elastic collision）では**相対速度**（relative velocity）が反転するので、ピストン（piston）の座標系で考えるのが最も簡単である。その座標系では、粒子は静止した壁で単に跳ね返るだけである。したがって、ピストンで跳ね返るたびに速さは $2u$ だけ増え、固定された端で跳ね返っても何も変わらない。距離については、ピストンとの 2 回の衝突の間に粒子とピストンが合わせて一定の型の長さを進むことに注目すると、d_{n+1} を d_n で表す 1 次方程式が 1 つ得られる。

解答

空気を粒子、ピストンを衝突の影響を受けずに一定の速さ u で動く壁、シリンダーの端を固定された壁としてモデル化する。運動はすべて軸に沿っているので、シリンダーの端からピストンへ向かう向きを正とする。



速さ

粒子が速さ w でピストンに近づくとする。ピストンの速度は $-u$ なので、ピストンに対する粒子の相対速度は（ピストンへ向かって）$w+u$ である。はね返されない壁との完全弾性衝突では、$e=1$ としたニュートン（Newton）の反発の法則（Newton's experimental law）により相対速度が反転するので、衝突後のピストンに対する粒子の相対速度は $-(w+u)$ となる。このとき実際の速度は

$$-u-(w+u)=-(w+2u),$$

であるから、粒子は速さ $w+2u$ でピストンから離れる。

シリンダーの固定された端では、壁が静止しているので同じ法則により速度が反転するだけであり、速さは変わらない。したがって、ピストンとの連続する衝突の間、粒子の速さは一定のままである。

最初の衝突の前、粒子は速さ v でピストンへ向かって動いているので、$v_1=v+2u$ である。n 回目の衝突の直後、粒子の速さは v_n である。粒子は速さを変えずに端で跳ね返り、速さ v_n で再びピストンに出会い、$v_{n+1}=v_n+2u$ で離れる。数学的帰納法（induction）により

$$v_n=v+2nu,$$

となり、示すべき式が得られた。

距離

n 回目と $(n+1)$ 回目の衝突の間（時間 t_n）に、ピストンは速さ u で内側へ動くので

$$d_n-d_{n+1}=u\,t_n.$$

同じ時間に、一定の速さ v_n で動く粒子は、ピストンから端まで（端はピストンがあった位置から d_n の距離にあるので、距離 d_n）進み、そしてピストンまで戻る（ピストンの現在の位置までなので、距離 d_{n+1}）。したがって

$$d_n+d_{n+1}=v_nt_n.$$

考えてみよう t_n はどうすれば消去できるだろうか？

一方の式を他方の式で割る。$t_n>0$ であるから

$$\frac{d_n+d_{n+1}}{d_n-d_{n+1}}=\frac{v_n}{u}.$$

分母を払うと $ud_n+ud_{n+1}=v_nd_n-v_nd_{n+1}$ となるので

$$(v_n+u)\,d_{n+1}=(v_n-u)\,d_n.$$

$v_n = v + 2nu$ より $v_n - u = v + (2n-1)u$、$v_n + u = v + (2n+1)u$ であるから

$$d_{n+1} = \frac{v + (2n-1)u}{v + (2n+1)u}\, d_n,$$

となり、示すべき結果が得られた。

d_n の式

漸化式（recurrence）を繰り返し用いると

$$d_n = d_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{v + (2k-1)u}{v + (2k+1)u} = d_1 \cdot \frac{v+u}{v+3u} \cdot \frac{v+3u}{v+5u} \cdots \frac{v + (2n-3)u}{v + (2n-1)u}.$$

この積は次々に打ち消し合う（telescope）。各分母が次の分子と約分され、

$$d_n = \frac{v+u}{v + (2n-1)u}\, d_1.$$

が残る。これは $n = 1$ のときも成り立ち、そのときは $d_1 = d_1$ となる。

$v = u$ の場合

$v = u$ とおくと

$$d_n = \frac{2u}{2nu}\, d_1 = \frac{d_1}{n}.$$

すると、$ut_n = d_n - d_{n+1}$ より

$$ut_n = \frac{d_1}{n} - \frac{d_1}{n+1} = \frac{d_1}{n(n+1)},$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

- $u = 0$ のとき、ピストンは固定された壁である。式からすべての n について $v_n = v$、$d_n = d_1$ が得られ、当然そうなるべき結果と一致する。
- $u = 1$、$v = 3$、$d_1 = 75$ とする。式から $d_2 = 50$、$d_3 = 37.5$、$d_4 = 30$、速さ $5, 7, 9, 11$ が予測される。跳ね返りを（有理数演算で）1 段階ずつ厳密にシミュレーションすると、まさにこれらの値が得られ、u、v および初期位置を無作為に 200 通り選んでも同様に一致する。
- $v = u$ のとき、$\sum ut_n = d_1 \sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = d_1$ である。すなわち、ピストンは合計でちょうど d_1 進んでシリンダーの端に達し、これは $d_n = d_1/n \to 0$ と矛盾しない。

よくある間違い

- $d_n - d_{n+1}$ の使い方を誤ること。たとえば粒子の往復距離を $2d_n$ としてしまう誤りである。その間にピストンは動いているので、帰りの距離は d_{n+1} にすぎない。
- 1 回の衝突ごとに $2u$ ではなく u を加えてしまうこと。相対速度が反転するので、粒子の速度の変化は、ピストンによって加わる接近の速さの 2 倍になる。

STEP のその先へ

1 回の衝突ごとに粒子の速さは一定量だけ変化するが、隙間が狭まるにつれて衝突の頻度は増し、n が大きいとき積 $v_n d_n$ はほぼ一定に保たれる（ここでは n が大きいとき $v_n d_n \approx (v+u)d_1$）。このようにゆっくり変化する保存量を**断熱不変量**（adiabatic invariant）という。多数の分子について平均をとると、これによって気体を急速に圧縮すると温まる理由が説明される。1 次元でゆっくり圧縮する場合、$T \propto 1/L^2$ となる。衝突と座標系について次に学ぶには、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい。

解答例

STEP I 2002、第 11 問

力学 ・ 斜め弾性衝突

STEP I 2002、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

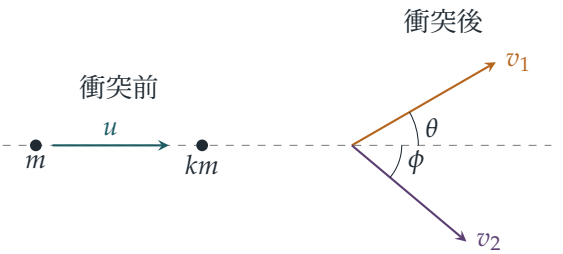
step.maths.org/questions/02-s1-q11

鍵となる考え方

衝突からは 2 つの保存則が得られる。運動量（momentum）の保存（運動量はベクトルなので、成分ごとに 2 本の方程式になる）と、エネルギーが失われないことによる運動エネルギー（kinetic energy）の保存である。2 本の運動量の方程式は衝突後の未知の速さについて線形であるから、これらを解いて速さを角度で表すことができる。それをエネルギーの方程式に代入すれば速さはすべて消え、角度と k だけの関係式が残る。

解答

P_1 と P_2 を平面内を運動する質点（particle）としてモデル化し、衝突の間には外力がはたらかないものとする。P_1 が速さ $u > 0$ で x 軸に沿って近づくとし、衝突後の速さを v_1（P_1 の速さで、軸の上側に角 θ の向き）と v_2（P_2 の速さで、軸の下側に角 ϕ の向き）とする。ただし $0 < \theta < \pi$ かつ $0 < \phi < \pi$ である。



恒等式

もとの運動の方向とそれに垂直な方向について運動量保存則を用いると、(m を約して)

$$v_1\cos\theta + kv_2\cos\phi = u,$$
$$v_1\sin\theta - kv_2\sin\phi = 0,$$

を得る。ここで負号がつくのは、P_2 が軸の反対側へ動いていくからである。運動エネルギー保存則からは、$\frac{1}{2}m$ を約して

$$v_1^2 + kv_2^2 = u^2. \qquad (*)$$

を得る。

運動量の方程式は、2 つの未知数 v_1 と kv_2 についての 2 本の線形方程式である。第 1 式に $\sin\phi$ を、第 2 式に $\cos\phi$ を掛けて加えると、kv_2 の項が消えて

$$v_1(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi) = u\sin\phi, \qquad \text{よって} \qquad v_1 = \frac{u\sin\phi}{\sin(\theta+\phi)}.$$

となる。同様に、第 1 式に $\sin\theta$ を、第 2 式に $\cos\theta$ を掛けて引くと

$$kv_2 = \frac{u\sin\theta}{\sin(\theta+\phi)}.$$

を得る。

考えてみよう $\sin(\theta+\phi)$ で割ってよいのだろうか。

$\theta+\phi \neq \pi$ であることが必要である(この和は 0 より大きく 2π より小さい)。もし $\theta+\phi=\pi$ ならば、$\sin\phi=\sin\theta$ かつ $\cos\phi=-\cos\theta$ である。すると第 2 の運動量の方程式は $(v_1-kv_2)\sin\theta=0$ となり、$\sin\theta\neq 0$ であるから $v_1=kv_2$ である。このとき第 1 式は $(v_1-kv_2)\cos\theta=u$ となり、$0=u$ が得られるが、これは不可能である。したがって $\sin(\theta+\phi)\neq 0$ であり、割り算は問題ない。

次に、kv_2^2 を $(kv_2)^2/k$ と書いて $(*)$ に代入すると

$$\frac{u^2\sin^2\phi}{\sin^2(\theta+\phi)} + \frac{u^2\sin^2\theta}{k\sin^2(\theta+\phi)} = u^2.$$

となる。両辺に $k\sin^2(\theta+\phi)/u^2$(これは 0 でない)を掛けると

$$\sin^2\theta + k\sin^2\phi = k\sin^2(\theta+\phi),$$

となり、示すべき式が得られた。

(幾何学的には、運動量の方程式は、運動量 mv_1、kmv_2、mu が角 ϕ、θ、$\pi-(\theta+\phi)$ をもつ三角形をなすことを述べており、上の 2 つの式はその三角形における正弦定理(sine rule)にほかならない。)

経路が直角をなす場合

経路が直角をなすならば $\theta+\phi=\frac{\pi}{2}$ であるから、$\sin^2(\theta+\phi)=1$ かつ $\sin\theta=\cos\phi$ である。恒等式は

$$\cos^2\phi+k\sin^2\phi=k, \qquad \text{すなわち} \qquad \cos^2\phi=k(1-\sin^2\phi)=k\cos^2\phi.$$

となる。ここで $\cos\phi\neq 0$ である。そうでなければ $\phi=\frac{\pi}{2}$ となり、すると $\theta=0$ となるが、問題文により θ は 0 でないからである。$\cos^2\phi$ で割ると $k=1$ が得られ、示すべきことが示された。

検算

- スヌーカーでおなじみの事実として、等しい質量の物体が、一方が静止している状態で弾性衝突（elastic collision）すると、両者は直角をなす方向に動いていく。ここで得た結果はその逆（converse）である。
- 数値例：$k=2$、$\phi=30^\circ$ とする。その直線に沿ったなめらかな弾性衝突により、P_2 は速さ $\frac{2}{3}u\cos 30^\circ$ で動き出し、P_1 は $\theta=90^\circ$ の向きに動く。恒等式の両辺はともに $\frac{3}{2}$ に等しい。
- さらに、2×10^5 回のランダムな弾性衝突（k、u、衝突の方向をランダムに選んだもの）をシミュレーションした。恒等式および v_1 と kv_2 の 2 つの公式は、誤差 10^{-12} 以内で成り立った。

よくある間違い

- 垂直方向の運動量の方程式を $v_1\sin\theta+kv_2\sin\phi=0$ と書いてしまうこと。2 つの質点は互いに反対側へ動いていくので、成分の符号は逆になる。
- エネルギーの方程式の k を書き忘れること、あるいは最後の段階で $\cos\phi\neq 0$ である理由を述べ忘れること。

STEP のその先へ

重心（centre of mass）とともに動く座標系では、弾性衝突は 2 つの速度の大きさを保ったまま向きを回転させるだけである。ここで現れた角度の関係はすべて、起こりうる結果がなすこの円を実験室系（laboratory frame）に写し戻すことから得られる。この見方は、ビリヤードの球から素粒子物理学まで、散乱（scattering）を扱う標準的な方法である。素粒子物理学では、測定された散乱角を用いて衝突する粒子の質量比を

求める。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、重心系による衝突の扱いを丁寧に展開している。

解答例

STEP I 2002、第 12 問

確率・統計 ・ 幾何的確率

STEP I 2002、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/02-s1-q12

鍵となる考え方

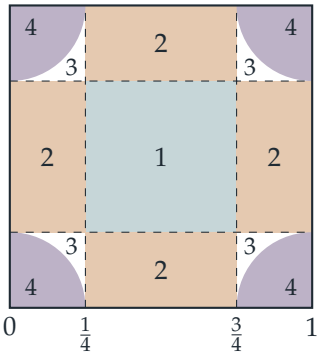
格子は同じ形の繰り返しなので、「蹄を無作為に置く」とは、蹄の中心が 1 つの単位正方形上に一様分布（uniformly distributed）することにほかならない。蹄が何個の正方形にかかるかは、中心がその正方形の辺や頂点にどれだけ近いかだけで決まる。したがって各答えは正方形内のある領域に対応し、その確率（probability）はその領域の面積である。4 つの確率が求まれば、あとはそれらとその平均を、ハリーが実際に出した答えと比べればよい。

解答

ハリーの答えの分布

蹄の中心 C が単位正方形 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 内にあるとする。ハリーが蹄を無作為に置くならば、格子の周期性（periodicity）により C はこの正方形上に一様分布する。よって C がある領域に入る確率はその領域の面積に等しい。一部でも覆われる正方形の個数を N とする。

蹄の半径は $\frac{1}{4}$ で、これは $\frac{1}{2}$ より小さいので、蹄がまたぐ縦の格子線は高々 1 本、横の格子線も高々 1 本である。蹄が縦の線をまたぐのは $x < \frac{1}{4}$ または $x > \frac{3}{4}$ のときであり、またそのときに限る。横の線をまたぐのは $y < \frac{1}{4}$ または $y > \frac{3}{4}$ のときであり、またそのときに限る。（線からの距離がちょうど $\frac{1}{4}$ となる位置の集合は面積が 0 なので、無視してよい。）



事象「縦の線をまたぐ」と「横の線をまたぐ」の確率はいずれも $\frac{1}{2}$ であり、x と y は互いに独立な一様座標なので、この 2 つの事象は独立（independent）である。よって次のようになる。

- 蹄がどの線もまたがないとき $N=1$ である。このとき C は 1 辺 $\frac{1}{2}$ の中央の正方形内にあるので、$\mathrm{P}(N=1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ である。
- ちょうど 1 本の線をまたぐとき $N=2$ であり、$\mathrm{P}(N=2)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ である。
- 縦横それぞれ 1 本ずつの線をまたぐとき、C は 1 辺 $\frac{1}{4}$ の 4 つの隅の正方形のいずれかにあり、その確率の合計は $\frac{1}{4}$ である。2 本の線は格子の頂点で交わり、蹄がその頂点のまわりの 4 つの正方形すべてに一部でもかかるのは、蹄がその頂点自体を覆うとき、かつそのときに限る。

考えてみよう　隅の正方形において、答えが格子の頂点までの距離で決まるのはなぜか。

原点に最も近い隅の正方形、すなわち $0<x<\frac{1}{4}$ かつ $0<y<\frac{1}{4}$ の部分を考える。蹄は C を含む正方形、その左隣の正方形、その下の正方形には必ずかかる。対角方向の正方形 $x<0, y<0$ の中で C に最も近い点は原点であり、C からの距離は $\sqrt{x^2+y^2}$ である。したがって蹄がこの正方形にかかるのは $\sqrt{x^2+y^2}<\frac{1}{4}$ のとき、かつそのときに限る。よって C が格子の頂点から $\frac{1}{4}$ 以内にあれば $N=4$、そうでなければ $N=3$ である。

単位正方形の点のうち、その頂点のいずれかから $\frac{1}{4}$ 以内にあるものは、半径 $\frac{1}{4}$ の 4 つの四分円をなし、その面積の合計は $\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{\pi}{16}$ である。ゆえに

$$\mathrm{P}(N=1)=\frac{1}{4},\qquad \mathrm{P}(N=2)=\frac{1}{2},\qquad \mathrm{P}(N=3)=\frac{1}{4}-\frac{\pi}{16},\qquad \mathrm{P}(N=4)=\frac{\pi}{16}.$$

これまでの証拠は無作為な馬と矛盾しないか

正しい答えが $4 \div 4 = 1$ のとき、無作為な馬が正解する確率は $\mathrm{P}(N = 1) = \frac{1}{4}$ である。正しい答えが $2 + 2 = 4$ のとき、正解する確率は $\mathrm{P}(N = 4) = \frac{\pi}{16} \approx 0.196$ である。これらは観測された正答率とちょうど一致する。したがって、証拠は「ハリーは単に蹄を無作為に置いているだけだ」という私の疑いとまったく矛盾しない。

答えの期待値と新しい馬

ハリーが蹄を無作為に置くならば、その答えは問題に依存しないので、答えの期待値（expected value）は単に $\mathrm{E}(N)$ である（正しい答えが同じ頻度で現れることは関係しない）。

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N) &= 1 \cdot \tfrac{1}{4} + 2 \cdot \tfrac{1}{2} + 3\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{\pi}{16}\right) + 4 \cdot \tfrac{\pi}{16} \\ &= \tfrac{1}{4} + 1 + \tfrac{3}{4} + \tfrac{\pi}{16} \\ &= 2 + \tfrac{\pi}{16} \approx 2.20.\end{aligned}$$

観測された平均 2 を、2 つの仮説と比べてみる。

- **ハリーが正しく計算している場合。** 正しい答えは $1, 2, 3, 4$ が同じ頻度で現れるので、平均は $\frac{5}{2}$ になるはずである。平均 2 はこれをかなり下回っているので、ハリーは確実に多くの問題で間違えている。実際、1 つの誤答が真の値を下回る量は高々 3 であり、平均の不足分は $\frac{1}{2}$ なので、少なくとも $\frac{1}{6}$ の答えは間違っていなければならない。
- **ハリーが無作為な場合。** 平均は $2 + \frac{\pi}{16} \approx 2.20$ に近くなるはずである。1 回の答えの分散（variance）は $\mathrm{E}(N^2) - \mathrm{E}(N)^2 = \frac{9}{2} + \frac{7\pi}{16} - \left(2 + \frac{\pi}{16}\right)^2 \approx 1.05$ なので、n 問にわたる平均の標準偏差（standard deviation）はおよそ $1.02/\sqrt{n}$ である。「多くの」問題（たとえば $n = 400$ とすると標準偏差はおよそ 0.05）では、平均 2 は期待値より標準偏差の約 4 倍も低く、偶然そうなることはきわめて考えにくい。

したがって、多くの問題にわたる平均 2 は、蹄を無作為に置く馬にとってさえ低すぎる。ハリーは、軽く踏んでいるのか、正方形の中央を狙っているのか、小さな答えを好む傾向があるようだ。いずれにせよ、ハリーは計算などしておらず、無作為な馬よりも成績が悪い。そう、新しい馬を迎えるときである（ただし、できれば算数のできる馬を）。

検算

- 4 つの確率の和は $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{16}=1$ となり、また $\mathrm{P}(N=3)=\frac{1}{4}-\frac{\pi}{16}\approx 0.054$ は当然ながら正である。
- 蹄を無作為に 400 000 回置き、中心から距離 $\frac{1}{4}$ 以内にある正方形を数えるシミュレーションを行うと、相対度数（relative frequency）は 0.2495, 0.4990, 0.0547, 0.1968、平均は 2.199 となった。理論値は $2+\frac{\pi}{16}\approx 2.196$ である。
- 妥当性の確認：蹄がごく小さければ答えはほとんど常に 1 となり、平均は 1 に近づく。蹄が大きいほど答えは大きくなり、今回の値はその中間にある。

よくある間違い

- 蹄が 2 本の格子線をまたげば必ず 4 つの正方形にかかると思い込むこと。実際には 2 本の線が交わる頂点まで届く必要があり、これが π が現れる理由である。
- 平均 2 が「2.5 より小さい」ことを無作為性の証拠とみなすこと。無作為な場合に予測される値は約 2.2 なので、平均のばらつきも考慮したうえで、その値と比較しなければならない。

STEP のその先へ

これは**幾何的確率**（geometric probability）の問題である。点がある領域上に一様に分布するとき、確率は面積で表される。同じ考え方からビュフォンの針（Buffon's needle）の問題も解け、その答えにもやはり π が現れることはよく知られている。最後の部分は仮説検定（hypothesis testing）の初歩であり、中心極限定理（central limit theorem）を用いて、観測された平均がモデルのもとでありうるものかどうかを判断している。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、連続一様分布と、この種の議論の背後にある極限定理の両方を扱っている。

解答例

STEP I 2002、第 13 問

確率・統計 ・ 条件付き期待値

> **STEP I 2002、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q13

鍵となる考え方

組 (U, V) としてありうるものは 6 通りしかないので、すべては同時確率（joint probability）の小さな表と、各場合についてのちょっとした代数に帰着する。2 次方程式については、U^2 が高々 1 であるため、V の符号だけですべてが決まる。3 次方程式については、係数が U と V を使って妙に入り組んだ形をしている。これは因数分解（factorisation）できることを強く示唆しており、実際に因数分解できれば根はそのまま読み取れる。

解答

まず同時分布（joint distribution）を作る。$\mathrm{P}(U = u, V = v) = \mathrm{P}(U = u)\,\mathrm{P}(V = v \mid U = u)$ であり、各 u について $\mathrm{P}(U = u) = \frac{1}{3}$ であるから、

	$U = 1$	$U = 0$	$U = -1$
$V = 1$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$
$V = -1$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$

となる。6 つの値の和は、当然そうあるべきとおり 1 である。

小問 (i)

$x^2 + Ux + V = 0$ の 2 つの根がともに実数となるのは、判別式（discriminant）が非負、すなわち $U^2 - 4V \geq 0$ のときであり、かつそのときに限る。

▶ $V = -1$ ならば、判別式は $U^2 + 4 > 0$ であるから、U が何であっても根は実数（し

かも相異なる）である。

- $V=1$ ならば、$U^2 \leq 1$ であるから判別式は $U^2-4 \leq 1-4<0$ となる。よって根が実数になることはない。

したがって、2つの根がともに実数となるのは $V=-1$ のとき、かつそのときに限り、

$$\mathrm{P}(\text{2つの根がともに実数}) = \mathrm{P}(V=-1) = \tfrac{2}{9}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{9} = \tfrac{4+3+2}{18} = \tfrac{1}{2},$$

となって、示すべきことが示された。

小問 (ii)

小問 (i) より、「2つの根がともに実数」という条件で条件付けることは、$V=-1$ で条件付けることと同じである。表の下の行を $\mathrm{P}(V=-1)=\frac{1}{2}$ で割ると、条件付き確率（conditional probability）

$$\mathrm{P}(U=1 \mid V=-1)=\tfrac{4}{9}, \qquad \mathrm{P}(U=0 \mid V=-1)=\tfrac{1}{3}, \qquad \mathrm{P}(U=-1 \mid V=-1)=\tfrac{2}{9}.$$

が得られる。

> **考えてみよう** なぜここで単に $\mathrm{P}(U=u)=\frac{1}{3}$ を使ってはいけないのだろうか。

U と V は独立（independent）ではないからである。$V=-1$ であることがわかると、$U=1$ である可能性が高まる（$U=1$ のとき $V=-1$ となる確率は $\frac{2}{3}$ だからである）。求めたい期待値は条件付きのものなので、重みは条件付き確率でなければならない。

$V=-1$ のとき方程式は $x^2+Ux-1=0$ であり、その大きい方の根は

$$R = \frac{-U+\sqrt{U^2+4}}{2}.$$

である。よって $U=1$ のとき $R=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$、$U=0$ のとき $R=1$、$U=-1$ のとき $R=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ となる。したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(R \mid \text{根が実数}) &= \tfrac{4}{9}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\tfrac{1}{3}\cdot 1+\tfrac{2}{9}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}\\ &= \frac{4\sqrt{5}-4+6+2\sqrt{5}+2}{18}\\ &= \frac{6\sqrt{5}+4}{18} = \frac{3\sqrt{5}+2}{9}.\end{aligned}$$

小問 (iii)

定数項が U であることから、因数 $(x+U)$ があるのではないかと考えられる。実際、

$$\begin{aligned}(x+U)(x^2-2Vx+1) &= x^3-2Vx^2+x+Ux^2-2UVx+U\\ &= x^3+(U-2V)x^2+(1-2UV)x+U,\end{aligned}$$

となり、これは与えられた 3 次式そのものである。よって根は $x=-U$ と、$x^2-2Vx+1=0$ の根である。$V=\pm1$ より $V^2=1$ であるから、この 2 次方程式の判別式は $4V^2-4=0$ である。よって重根（repeated root）$x=V$ をもち、3 次方程式は

$$(x+U)(x-V)^2=0,$$

となって、根は $-U$、V、V である。

3 つの根がすべて正となるのは、$-U>0$ かつ $V>0$、すなわち $U=-1$ かつ $V=1$ のとき、かつそのときに限る。（$U=0$ のときは根の 1 つが 0 となり、これは正ではない。）表より、

$$\mathrm{P}(\text{すべての根が正})=\mathrm{P}(U=-1,\,V=1)=\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3}=\tfrac{2}{9}.$$

検算

- 条件付き確率 $\frac{4}{9},\frac{1}{3},\frac{2}{9}$ の和は 1 である。
- (ii) の答えは約 0.967 である。これは大きい方の根としてありうる最小の値 $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\approx0.618$ と最大の値 $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\approx1.618$ の間になければならず、さらに最も小さい根が最も大きい重みをもつので、中央の値 1 より小さくなるはずである。実際そうなっている。
- (iii) で $U=-1$、$V=1$ とすると、3 次式は $x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$ となり、根は $1,1,1$ ですべて正である。$U=1$、$V=1$ とすると $x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$ となり、負の根 -1 をもつ。
- 3 つの答えはすべて、6 通りの場合を分数で厳密に数え上げることと、各場合について 3 次方程式の根を数値的に求めることによって確認した。

よくある間違い

- (ii) で条件なしの重み $\frac{1}{3}$ を使ってしまうこと。この場合、答えは $\frac{1}{3}\left(\sqrt{5}+1\right)\approx1.079$ となってしまう。
- (iii) で $U=0$ を数えてしまうこと。根 0 は正ではない。

- 因数分解を探さずに、判別式や符号の変化を使って 3 次方程式を解析しようとすること。

STEP のその先へ

この問題の核心は条件付き期待値（conditional expectation）$\mathrm{E}(X \mid A)$ であり、これは条件付き確率で重みをつけ直すことによって計算される。大学では、この考え方は、それ自体が 1 つの確率変数（random variable）である条件付き期待値 $\mathrm{E}(X \mid Y)$ へと発展し、さらに塔の法則（tower law）$\mathrm{E}\big(\mathrm{E}(X \mid Y)\big) = \mathrm{E}(X)$ へとつながる。この法則によって、多くの難しい期待値の計算が易しくなる。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、この内容をわかりやすく展開している。

解答例

STEP I 2002、第 14 問

確率・統計 ・ 確率における等比級数

STEP I 2002、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/02-s1-q14

鍵となる考え方

入力する番号の総数で条件付け（conditioning）を行う。その数を固定すれば、警報が鳴ってから私がお金を手にするまでの時間も定まるので、警察が先に到着する確率はその時間 t に対して単に $1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$ となる。これを試行回数について平均すれば答えが得られる。どちらの方法でも、この平均は $q=\mathrm{e}^{-\lambda/r}$ を公比とする等比級数（geometric series）になるので、早い段階で q に名前をつけておくとよい。

解答

順番に入力する場合

リスト $1,2,\ldots,n$ における私の番号の位置を K とする。このとき K は私が行う試行の回数であり、$k=1,\ldots,n$ に対して $P(K=k)=\frac{1}{n}$ である。

$K=k$ と仮定する。私は 1 分あたり r 個の割合で番号を入力するので、続けて入力される番号の間隔は $1/r$ 分である。時刻は最初の番号を入力した時点から測る。

- $k=1$ ならば最初の番号が正しいので、誤った番号は一度も入力されず、警察が呼ばれることはない。警察が先に到着する確率は $0=1-\mathrm{e}^{0}$ である。
- $k\geq 2$ ならば最初の番号は誤りなので、警報は時刻 0 に鳴り、正しい番号は k 番目で、時刻 $(k-1)/r$ に入力される。警察が $t=(k-1)/r$ 分以内に到着すれば、私がお金を手にする前に警察が着くことになり、その確率は $1-\mathrm{e}^{-\lambda(k-1)/r}$ である。

したがって式 $1-\mathrm{e}^{-\lambda(k-1)/r}$ は $k=1$ を含むすべての k に対して成り立つ。私がお金を手にする前に警察が到着するという事象を A とする。全確率の法則（law of total

probability）により

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(K=k)\,P(A \mid K=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda(k-1)/r}}{n},$$

となり、求める式が得られた。

これを簡単にするため、$q = \mathrm{e}^{-\lambda/r}$ とおく。$\lambda, r > 0$ より $0 < q < 1$ であり、$\mathrm{e}^{-\lambda(k-1)/r} = q^{k-1}$ である。よって

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = 1 - \frac{1-q^n}{n(1-q)} \\ &= 1 - \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda n/r}}{n\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda/r}\right)}, \end{aligned}$$

となる。ここで等比級数の和を用いたが、$q \neq 1$ であるからこれは正当である。

無作為に入力する場合

今度は各試行で、それまでの試行とは独立（independently）に、$1, \ldots, n$ から一様（uniformly）に選んだ新しい番号を入力する（私は何を試したかを覚えていない）。したがって各試行は、互いに独立に、確率 $\frac{1}{n}$ で正しい番号となる。正しい番号を入力する試行までを含めた試行回数を N とすると、N は幾何分布（geometric distribution）に従う：

$$P(N=k) = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

考えてみよう 番号が重複しうる場合にも、時間に関する議論はそのまま通用するだろうか？

通用する。警察が呼ばれるのは最初に誤った番号を入力したときであり、$N = k \geq 2$ ならばそれはまさに最初の試行、すなわち時刻 0 である。お金が出てくるのは k 回目の試行、すなわち時刻 $(k-1)/r$ である。重複によって変わるのは N の分布だけで、時間は変わらない。よって前と全く同様に $P(A \mid N=k) = 1 - q^{k-1}$ であり、これは $k = 1$ のときも正しい。

$p = \frac{n-1}{n}$ とおく。すると

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} p^{k-1}\left(1 - q^{k-1}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} (pq)^{k-1} \\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-p} - \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-pq}. \end{aligned}$$

$0 \leq p < 1$ かつ $0 < pq < 1$ よりどちらの級数も収束（converge）するので、和を分けてよい。第 1 項は $\frac{1}{n}\cdot n = 1$ であり、これは N が確実に有限であることをそのまま述べ

ている。第 2 項については

$$n(1-pq) = n-(n-1)q,$$

であるから

$$P(A) = 1 - \frac{1}{n-(n-1)\mathrm{e}^{-\lambda/r}},$$

となり、求める式が得られた。

検算

- $n = 1$ のときは誤った番号が入力されることはなく、どちらの式も 0 を与える。前者は $1-q^1 = 1-q$ となるから、後者は分母が 1 となるからである。
- $\lambda \to \infty$（警察が即座に到着する）のとき $q \to 0$ となり、どちらの答えも $1-\frac{1}{n}$ に近づく。これは最初の試行が誤りである確率であり、当然そうなるべき値である。
- 無作為に入力するほうが不利なはずである。$n = 5$、$\lambda = 0.7$、$r = 3$ とすると、順番に入力した場合は 0.3382、無作為に入力した場合は 0.4543 となる。それぞれ 2×10^5 回の試行でシミュレーションを行ったところ、0.339 と 0.456 が得られた。

よくある間違い

- 時刻 $(k-1)/r$ の代わりに k/r を使ってしまう。時間は最初の（誤った）番号から測り始めるので、k 番目の番号はそこから $k-1$ 個の間隔の後に来る。
- 無作為の場合に、各 k に確率 $\frac{1}{n}$ を割り当ててしまう、あるいは和を n で打ち切ってしまう。重複が許されるので、N は幾何分布に従い、上限はない。

STEP のその先へ

ここでの警察の到着時刻は指数分布（exponential distribution）に従う確率変数（random variable）であり、この計算は確率変数 X に対する $P(T < X)$ を、X で条件付けして求めたものである。X が幾何分布に従うとき、$E\left(q^X\right)$ は X の確率母関数（probability generating function）の q における値であるため、答えはきれいな閉じた形になる。実際、どちらの答えも $1-E\left(q^{N-1}\right)$ である。母関数と指数分布は大学 1 年次の確率論の中心的な題材である。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、その両方をよく扱っている。

解答例

STEP II 2002、第 1 問

純粋数学 ・ 置換積分

STEP II 2002、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/02-s2-q1

鍵となる考え方

倍角の公式（double-angle formula）により $1-\cos 2\theta$ は $2\sin^2\theta$ に変わり、$\operatorname{cosec}^2\theta$ は見ただけで積分できる式である。誘導として与えられている置換（substitution）$x=\sin 2\theta$ は、$\sqrt{1-x^2}$ が $\cos 2\theta$ になるように仕組まれており、これによって第 2 の積分は第 1 の積分に帰着される。最後の積分については、積分区間の端 1 と $2/\sqrt{3}$ がそれぞれ 1 と $\sqrt{3}/2$ の逆数（reciprocal）になっていることから、$y=1/x$ を試すべきだと強く示唆される。

解答

第 1 の積分

$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$ であるから $1-\cos 2\theta = 2\sin^2\theta$ であり、これは $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ 上で正なので、被積分関数（integrand）はこの区間で問題なく定義される。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\cot\theta) = -\operatorname{cosec}^2\theta$ を用いると、

$$\begin{aligned}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{1-\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \operatorname{cosec}^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\Big[-\cot\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{2}\left(\cot\tfrac{\pi}{6} - \cot\tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2},\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

第 2 の積分

$x = \sin 2\theta$ とおくと $\mathrm{d}x = 2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta$ である。$\theta = \frac{1}{6}\pi$ のとき $x = \sin\frac{1}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$、$\theta = \frac{1}{4}\pi$ のとき $x = \sin\frac{1}{2}\pi = 1$ であり、θ が $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ を動くとき、x は $\frac{\sqrt{3}}{2}$ から 1 まで単調に増加する。

> **考えてみよう** $\sqrt{1-x^2}$ は $\cos 2\theta$ に等しいのか、それとも $-\cos 2\theta$ に等しいのか。

$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\cos^2 2\theta} = |\cos 2\theta|$ である。いま考えている範囲では $2\theta \in [\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ であり、そこでは $\cos 2\theta \geq 0$ なので $\sqrt{1-x^2} = \cos 2\theta$ となる。したがって

$$\int_{\sqrt{3}/2}^{1} \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{2\cos 2\theta}{1-\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

第 1 の積分を利用するために、分子を分母を用いて表す。

$$\frac{\cos 2\theta}{1-\cos 2\theta} = \frac{1-(1-\cos 2\theta)}{1-\cos 2\theta} = \frac{1}{1-\cos 2\theta} - 1.$$

よって、第 1 の結果を用いると

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}/2}^{1} \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= 2\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{1-\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta - 2\int_{\pi/6}^{\pi/4} 1\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{6},\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

最後の積分

$y = 1/x$ とおくと $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x/x^2$ である。$y = 1$ のとき $x = 1$、$y = 2/\sqrt{3}$ のとき $x = \sqrt{3}/2$ である。この範囲では $x > 0$ なので

$$\sqrt{y^2-1} = \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$y\left(y - \sqrt{y^2-1}\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}.$$

> **考えてみよう** $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x/x^2$ から出てくる負の符号はどこへ行くのか。

この置換によって積分区間の上端と下端の大小が逆転し、それを入れ替えて元に戻す

ことで負の符号が吸収される。

$$\begin{aligned}\int_1^{2/\sqrt{3}} \frac{1}{y\left(y-\sqrt{y^2-1}\right)}\,\mathrm{d}y &= \int_1^{\sqrt{3}/2} \frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\sqrt{3}/2}^{1} \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{3}-1-\frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

x^2 の因子がちょうど打ち消し合う。分母に余分な因子 y が入れてあったのはこのためである。

検算

- 第 2・第 3 の積分の被積分関数はどちらも正なので、答えは正でなければならない。実際、$\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{6} \approx 0.73205 - 0.52360 = 0.20845$ である。
- 3 つの積分それぞれにシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると、第 1 の積分は $0.366025\ldots$（$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$ と一致）、第 2・第 3 の積分は $0.208452\ldots$（$\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{6}$ と一致）となる。
- 大まかな見積もり：第 2 の積分では区間の長さが $1-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.134$ であり、被積分関数は 2（$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき）から 1（$x=1$ のとき）まで減少するので、積分の値は 0.134 と 0.268 の間にあるはずである。実際にそうなっている。

よくある間違い

- 範囲内での $\cos 2\theta$ の符号を確かめずに $\sqrt{1-\sin^2 2\theta} = \cos 2\theta$ と書いてしまう。
- 積分区間の変更を忘れる、あるいは $y = 1/x$ によって上端と下端が逆転するときに負の符号を落としてしまう。
- $\left[-\cot\theta\right]$ を $\cot\frac{\pi}{4} - \cot\frac{\pi}{6}$ と計算してしまう。これでは絶対値は正しいが符号が逆になる。

STEP のその先へ

最後の小問は、一般的な原理の小さな例である。すなわち、置換とは変数変換であり、ある積分をそっくり別の積分に写すことができる。そして積分区間の端が互いに逆数になっていることに気づけば、$y = 1/x$ がうまくいくという信頼できる手がかりになる。大学最初の解析学（analysis）の講義では、置換積分は連鎖律（chain rule）と微積

分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）から厳密に正当化され、その際、置換が単調（monotonic）であり被積分関数が連続（continuous）である範囲に注意を払う。これはまさに、ここで確認した条件である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）には、こうした式変形の背後にある理論がわかりやすく解説されている。

解答例

STEP II 2002、第 2 問

純粋数学 ・ 相反方程式

> **STEP II 2002、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q2

鍵となる考え方

係数（coefficient）を外側から内側へ順に見ていく。1 と 1、次に 5 と -5、そして中央に 4 がある。係数が対ごとに一致するか符号が反転しているということは、z の中央のべきで割ると $z^k + z^{-k}$ と $z^k - z^{-k}$ の組合せだけが残るということであり、これらはいずれも $w = z - z^{-1}$ の多項式（polynomial）として表せる。これにより次数（degree）は半分になる。8 次方程式も同じ構造をもち、次数を下げるとその結果が再び同じ構造をもつことがわかる。したがって、この技法を 2 回用いることになる。

解答

四次方程式

定数項が 1 なので $z = 0$ は根ではない。よって z^2 で割ることができる：

$$z^2 + 5z + 4 - 5z^{-1} + z^{-2} = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad \left(z^2 + z^{-2}\right) + 5\left(z - z^{-1}\right) + 4 = 0.$$

$w = z - z^{-1}$ とおくと $w^2 = z^2 - 2 + z^{-2}$ であるから、$z^2 + z^{-2} = w^2 + 2$ となる。これを代入すると

$$(w^2 + 2) + 5w + 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad w^2 + 5w + 6 = 0,$$

となり、求める式が得られる。これは $(w + 2)(w + 3) = 0$ と因数分解できるので、$w = -2$ または $w = -3$ である。

z に戻すために、$z - z^{-1} = w$ の両辺に z を掛けると

$$z^2 - wz - 1 = 0.$$

- $w=-2$ のとき：$z^2+2z-1=0$ より $z=-1\pm\sqrt{2}$。
- $w=-3$ のとき：$z^2+3z-1=0$ より $z=\frac{1}{2}\left(-3\pm\sqrt{13}\right)$。

これら 4 つの相異なる値が四次方程式（quartic）の根である：

$$z=-1\pm\sqrt{2},\qquad z=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}.$$

8 次方程式

ここでも $z=0$ は根ではないので、z^4 で割り、係数を中央に関して対称に組にする：

$$2\left(z^4+z^{-4}\right)-3\left(z^3-z^{-3}\right)-12\left(z^2+z^{-2}\right)+12\left(z-z^{-1}\right)+22=0.$$

（組を確認しておく：z^8 と z^0 の係数はともに 2、z^7 の係数は -3 で z^1 の係数は $+3$、z^6 と z^2 の係数はともに -12、z^5 の係数は 12 で z^3 の係数は -12 である。）

各括弧を $w=z-z^{-1}$ で表す必要がある。$z^2+z^{-2}=w^2+2$ はすでに得ている。3 乗すると

$$w^3=z^3-3z+3z^{-1}-z^{-3}\quad\Longrightarrow\quad z^3-z^{-3}=w^3+3w,$$

であり、z^2+z^{-2} を 2 乗すると

$$z^4+z^{-4}=\left(z^2+z^{-2}\right)^2-2=(w^2+2)^2-2=w^4+4w^2+2.$$

これらを代入すると

$$\begin{aligned}0&=2(w^4+4w^2+2)-3(w^3+3w)-12(w^2+2)+12w+22\\&=2w^4-3w^3-4w^2+3w+2.\end{aligned}$$

考えてみよう w の四次方程式が残った。これで何か得をしたのだろうか？

得をしている。係数 2, −3, −4, 3, 2 を見てみよう。これは先ほどとまったく同じパターン（外側の組は等しく、その内側の組は符号が逆）をもっているので、同じ技法が一段下でも使える。$w=0$ は根ではないので、w^2 で割ると

$$2\left(w^2+w^{-2}\right)-3\left(w-w^{-1}\right)-4=0.$$

$v=w-w^{-1}$ とおくと $w^2+w^{-2}=v^2+2$ であるから

$$2(v^2+2)-3v-4=0\quad\Longleftrightarrow\quad 2v^2-3v=0\quad\Longleftrightarrow\quad v(2v-3)=0.$$

よって $v=0$ または $v=\frac{3}{2}$ である。ここから $w^2-vw-1=0$ を用いて順に戻していく：

- $v = 0$ のとき：$w^2 = 1$ より $w = \pm 1$。
- $v = \frac{3}{2}$ のとき：$2w^2 - 3w - 2 = 0$、すなわち $(2w+1)(w-2) = 0$ より $w = 2$ または $w = -\frac{1}{2}$。

最後にもう一度、$z^2 - wz - 1 = 0$ を用いて戻す：

- $w = 1$ のとき：$z^2 - z - 1 = 0$ より $z = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$。
- $w = -1$ のとき：$z^2 + z - 1 = 0$ より $z = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)$。
- $w = 2$ のとき：$z^2 - 2z - 1 = 0$ より $z = 1 \pm \sqrt{2}$。
- $w = -\frac{1}{2}$ のとき：$2z^2 + z - 2 = 0$ より $z = \frac{1}{4}\left(-1 \pm \sqrt{17}\right)$。

各二次方程式 $z^2 - wz - 1 = 0$ の判別式（discriminant）は $w^2 + 4 > 0$ であるから、これらの根はすべて実数であり、8 つの値は相異なる。8 次の多項式の根は高々 8 個なので、これらがすべての根である：

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \qquad z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \qquad z = 1 \pm \sqrt{2}, \qquad z = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

検算

- $z^2 - wz - 1 = 0$ から得られる根の組はいずれも積が -1 であり、これで計算をすばやく確認できる。たとえば $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = -1$ である。
- 8 次方程式の根の和は $\frac{3}{2}$（z^7 の係数を z^8 の係数で割って符号を変えたもの）になるはずである。4 つの組の寄与は $1 - 1 + 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ であり、一致する。
- 数値的に確かめると、$z = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{17}) \approx 0.7808$ を代入した 8 次多項式の値は 10^{-9} 以内で 0 になる。残りの 7 つの根や四次方程式の 4 つの根についても同様である。

よくある間違い

- $z^3 - z^{-3} = w^3$ と書いてしまうこと。交差項から余分な $3w$ が生じる。
- w の四次方程式で止まってしまい、係数が同じ対称性をもつことに気づかずに試行錯誤で因数分解しようとすること。
- w（あるいは v）の値だけを答えて、z に戻すのを忘れること。

STEP のその先へ

係数を逆順に読んでも同じになる（あるいは符号の交代を除いて同じになる）多項式は、**相反多項式**（reciprocal polynomial）あるいは**回文多項式**（palindromic polynomial）とよばれる。その根は $z \mapsto 1/z$ または $z \mapsto -1/z$ で結ばれた組として現れ、ここで用いた置換はまさにこの対称性によって可能になる次数下げである。ガロア理論（Galois theory）の言葉でいえば、これは方程式が根のある変換群のもとで不変であるという観察であり、そのため、より小さな方程式の塔を通じて段階的に解くことができる。ここで起きたこと、すなわち 8 次、4 次、2 次という流れはまさにそれである。こうした考え方の発展を見るには、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）がよい。

解答例

STEP II 2002、第 3 問

純粋数学 ・ フェルマー数と素数

> **STEP II 2002、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q3

この問題は、*Beyond STEP* の第 1.1 節「素数を生み出す工場」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch01/fermat-numbers.html

鍵となる考え方

$F_k - 2 = 2^{2^k} - 1$ と書く。これに $F_k = 2^{2^k} + 1$ を掛けると平方の差（difference of two squares）が現れ、それこそが帰納法（induction）に必要な一歩である。積の公式が得られれば、2 つのフェルマー数（Fermat number）の公約数（common factor）は必ず 2 を割り切る。フェルマー数はすべて奇数であるから、その公約数は 1 しかありえない。

解答

最初の 4 つのフェルマー数

$2^0 = 1$、$2^1 = 2$、$2^2 = 4$、$2^3 = 8$ であるから、

$$F_0 = 2^1 + 1 = 3, \qquad F_1 = 2^2 + 1 = 5, \qquad F_2 = 2^4 + 1 = 17, \qquad F_3 = 2^8 + 1 = 257.$$

次に、k の最初の 3 つの値について $(*)$ を確かめる。

$$\begin{aligned} k = 1: &\quad F_0 = 3 = 5 - 2 = F_1 - 2, \\ k = 2: &\quad F_0 F_1 = 15 = 17 - 2 = F_2 - 2, \\ k = 3: &\quad F_0 F_1 F_2 = 15 \times 17 = 255 = 257 - 2 = F_3 - 2. \end{aligned}$$

すべての $k \geq 1$ に対する $(*)$ の証明

k に関する数学的帰納法を用いる。$k = 1$ の場合は上で示した。

ある $k \geq 1$ に対して $(*)$ が成り立つ、すなわち $F_0F_1 \cdots F_{k-1} = F_k - 2$ であると仮定する。このとき

$$\begin{aligned} F_0F_1 \cdots F_{k-1}F_k &= (F_k - 2)\, F_k \\ &= \left(2^{2^k} - 1\right)\left(2^{2^k} + 1\right) \\ &= \left(2^{2^k}\right)^2 - 1 \\ &= 2^{2 \cdot 2^k} - 1 = 2^{2^{k+1}} - 1 \\ &= F_{k+1} - 2. \end{aligned}$$

よって $(*)$ は $k+1$ に対しても成り立ち、数学的帰納法により、すべての $k \geq 1$ に対して成り立つ。

考えてみよう なぜ $\left(2^{2^k}\right)^2$ は $2^{2^{k+1}}$ に等しく、$2^{2^{2k}}$ などにはならないのか？

累乗を2乗すると指数は2倍になる：$\left(2^a\right)^2 = 2^{2a}$。ここで $a = 2^k$ であり、$2a = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ である。帰納法の段階でやるべきことの大半は、このように積み重なった指数を注意深く扱うことである。

どの2つのフェルマー数も共通の因数をもたない

相異なる2つのフェルマー数 F_m と F_n（$m < n$）をとる。このとき $n \geq 1$ であり、F_m は $k = n$ とした $(*)$ における因数 $F_0, \ldots, F_{n-1}$ の1つである。よって

$$F_n - 2 = F_m \times (\text{整数}),$$

となり、F_m は $F_n - 2$ を割り切る。

ここで、正の整数 d が F_m と F_n の両方を割り切ると仮定する。$d \mid F_m$ かつ $F_m \mid F_n - 2$ であるから、$d \mid F_n - 2$ である。d は F_n も割り切るので、その差も割り切る：

$$d \mid F_n - (F_n - 2) = 2,$$

したがって $d = 1$ または $d = 2$ である。しかし $F_m = 2^{2^m} + 1$ は偶数に1を加えたものなので奇数である（$2^m \geq 1$ に注意）。よって $d \neq 2$ であり、ゆえに $d = 1$ である。以上より、どの2つのフェルマー数も1より大きい公約数をもたない。

素数は無限に存在する

各 F_n は 3 以上であるから、少なくとも 1 つの素因数（prime factor）をもつ。そのうちの 1 つを選び、p_n とおく。これにより、各 $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して素数が 1 つずつ得られる。

> **考えてみよう** 相異なる 2 つのフェルマー数から同じ素数が得られることはないのか？

ない。もし $m \neq n$ で $p_m = p_n$ ならば、その素数は F_m と F_n の両方を割り切る。すると 1 より大きい公約数となるが、これは前の小問で否定されている。よって素数 $p_0, p_1, p_2, \ldots$ はすべて相異なる。フェルマー数は無限に存在するから、相異なる素数も無限に存在する。

F_n 自体が素数である必要はまったくなかったことに注意しよう。必要だったのは、各フェルマー数が、他のどのフェルマー数とも共有しない**何らかの**素因数をもつことだけである。

検算

- $k = 4$ のときの $(*)$：$255 \times 257 = 65535 = 65537 - 2 = F_4 - 2$。また、12 までのすべての k について、$(*)$ をコンピュータで厳密に確かめた。
- $F_0, \ldots, F_5$ の最小の素因数は $3, 5, 17, 257, 65537, 641$ であり、議論が予言するとおりすべて相異なる。$F_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$ は、素数でない最初のフェルマー数である。
- $0 \leq m < n \leq 10$ のすべてについて $\gcd(F_m, F_n) = 1$ であることを数値的に確認した。

よくある間違い

- 2^{2^n} を $(2^2)^n = 4^n$ と読んでしまう。指数は 2^n であるから、$F_3 = 2^8 + 1$ であり、$4^3 + 1$ ではない。
- $d \mid 2$ を導いたあと、$d = 2$ を除外し忘れる。議論を完結させるのは、フェルマー数が奇数であるという事実である。
- すべてのフェルマー数が素数であると思い込む。最後の小問はこの仮定なしで成り立つし、そもそもこれは誤りである（$641 \mid F_5$）。

STEP のその先へ

この証明はポリア（Pólya）によるものである。これは素数の無限性を示す一連の証明の仲間である。いずれの証明も、どの2つも互いに素（pairwise coprime）な整数からなる無限数列を構成し、各項がそれぞれ新しい素数をもたらす。ユークリッド（Euclid）の証明も同じように読むことができる。フェルマー数は整数論の講義で再び登場する。ガウス（Gauss）は、正 n 角形（regular n-gon）が定規とコンパスで作図できるのは、n が 2 の累乗と相異なるフェルマー素数（Fermat prime）の積との積であるときであり、かつそのときに限ることを示した。また、F_4 より先のフェルマー素数は1つも知られていない。さらに学ぶには、Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）を読むとよい。

解答例

STEP II 2002、第 4 問

純粋数学 ・ 積分から導く不等式

> **STEP II 2002、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q4

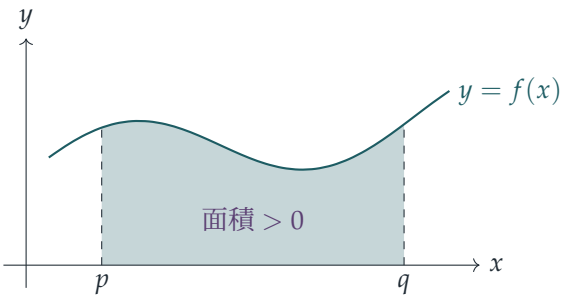
鍵となる考え方

$a > 0$ かつ $b^2 < 4ac$ を満たす 2 次式（quadratic）$as^2 - bs + c$ は実数解をもたず、最高次の係数（leading coefficient）が正であるから、**すべての**実数 s に対して正である。s に何を代入しても（x でも $\sin x$ でも $1/x$ でも）、得られる関数は正であり、したがって任意の区間におけるその積分は正である。あとは各小問ごとに、積分の結果が求める不等式に現れる数そのものになるように、代入するものと区間を選べばよい。

解答

最初の図

積分 $\int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x$ は、$x = p$ から $x = q$ までの、曲線 $y = f(x)$ と x 軸の間の符号付き面積（signed area）である。軸より上の面積は正、下の面積は負として数える。$p < x < q$ の全体で $f(x) > 0$ ならば、そこでは曲線全体が軸より上にあるので、その領域に負の部分はなく、しかも本当に（0 でない）面積をもつ。よって積分は真に正である。（この問題に現れる関数はすべて連続（continuous）なので、面積はきちんと定義される。）



すべての小問で使う事実

$a > 0$ かつ $b^2 < 4ac$ として、$g(s) = as^2 - bs + c$ とおく。平方完成（completing the square）すると

$$g(s) = a\left(s - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

$a > 0$ より第 1 項は 0 以上であり、$4ac - b^2 > 0$ かつ $a > 0$ より第 2 項は真に正である。したがって、すべての実数 s に対して $g(s) > 0$ である。

小問 (i)

$f(x) = ax^2 - bx + c = g(x)$ とおくと、これはすべての x に対して正である。積分区間は好きに選んでよく、$[0,1]$ をとると最も簡単な数が得られる：

$$0 < \int_0^1 (ax^2 - bx + c)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c.$$

両辺に 6 を掛けると $2a - 3b + 6c > 0$、すなわち $3b < 2a + 6c$ となり、示すべき不等式が得られる。

小問 (ii)

今度は $f(x) = a\sin^2 x - b\sin x + c = g(\sin x)$ である。g はすべての実数において正であるから、当然 $\sin x$ においても正であり、すべての x に対して $f(x) > 0$ となる。

考えてみよう どの区間で積分すればよいだろうか？

目標の不等式では、π が a と c には掛かっているが b には掛かっていない。$[0, \frac{\pi}{2}]$ では、$\int \sin x\,\mathrm{d}x = 1$ には π が現れないが、$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ と $\int 1\,\mathrm{d}x$ には現れる。$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ を用いると

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = 1.$$

したがって

$$0 < \int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a\pi}{4} - b + \frac{c\pi}{2}.$$

両辺に 4 を掛けると $a\pi + 2c\pi - 4b > 0$、すなわち $4b < (a + 2c)\pi$ となり、示すべき不等式が得られる。

小問 (iii)

考えてみよう 積分すると $\ln(q/p)$、$\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$、$q-p$ を与える関数は何だろうか？

これらは $\int_p^q \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$、$\int_p^q \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$、$\int_p^q 1\,\mathrm{d}x$ である。そこで

$$f(x)=\frac{a}{x^2}-\frac{b}{x}+c=g\left(\frac{1}{x}\right),$$

とおく。この関数は $x>0$ で定義されて連続であり、g がいたるところで正であるから、そこで正である。$q>p>0$ より区間 $[p,q]$ は $x=0$ を含まないので

$$\begin{aligned}0<\int_p^q\left(\frac{a}{x^2}-\frac{b}{x}+c\right)\mathrm{d}x&=\left[-\frac{a}{x}-b\ln x+cx\right]_p^q\\&=a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-b\ln\frac{q}{p}+c(q-p).\end{aligned}$$

整理すると $b\ln(q/p)<a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+c(q-p)$ となり、示すべき不等式が得られる。（条件 $p>0$ により、両方の対数が定義された状態で $\ln q-\ln p=\ln(q/p)$ と書くこともできる。）

検算

$a=b=c=1$ とすると $b^2=1<4=4ac$ である。このとき (i) は $3<8$、(ii) は $4<3\pi\approx 9.42$、(iii) は $p=1$、$q=2$ として $\ln 2\approx 0.693<\frac{1}{2}+1=1.5$ を主張する。いずれも成り立つ。さらに、条件を満たす 20 000 組の無作為な (a,b,c)（b^2 が $4ac$ よりわずかに小さい場合を含む）について 3 つの不等式をすべて確かめ、各積分の値をシンプソンの公式（Simpson's rule）で確認した。なお、条件がなければ不等式は成り立たないことがある：$a=1$、$b=10$、$c=1$ では $30>8$ となり、(i) が成り立たない。

よくある間違い

- $f>0$ であることの根拠を述べ忘れる。条件 $a>0$ と $b^2<4ac$ こそが 2 次式を正にするものであり、このことは明記しなければならない。
- (ii) で、$\frac{\pi}{4}$ とすべきところを $\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$ としてしまう。
- (iii) で、$p>0$ によって（f が定義されない）$x=0$ が区間から除かれることに触れない。

STEP のその先へ

「正の連続関数の積分は正である」という原理は、大学の最初の解析学（analysis）の講義でリーマン積分（Riemann integral）について証明される基本的な性質の一つである。これは線形性（linearity）とあわせて、多くの古典的な不等式の源となっている。その中には積分形のコーシー・シュワルツの不等式（Cauchy–Schwarz inequality）も含まれ、これは平方 $(f+tg)^2 \geq 0$ を積分し、ここと同じ判別式（discriminant）の議論を用いることで得られる。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、この観点から積分を丁寧に展開している。

解答例

STEP II 2002、第 5 問

純粋数学 ・ ロジスティック写像の反復

STEP II 2002、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/02-s2-q5

鍵となる考え方

すべては放物線（parabola）$y = kx(1-x)$ にかかっている。この関数の $[0,1]$ における最大値は $x = \frac{1}{2}$ でとる $\frac{k}{4}$ である。これだけで小問 (i) は数学的帰納法（induction）により解決する。小問 (ii) と (iii) では、それぞれ不動点（fixed point）と周期 2 の点（points of period two）を求める。(iii) の要点は、x_1 を b を用いて $x_1 = ka(1-a) = ab$ と表すことである。すると $x_2 = a$ は b についての三次方程式（cubic）になり、その三次方程式には明らかな解が一つあって、それはちょうど (ii) の不動点にあたる。

解答

小問 (i)

n についての数学的帰納法を用いる。$n = 0$ の場合は仮定により成り立つ。$0 < x_n < 1$ と仮定する。このとき $x_n > 0$ かつ $1 - x_n > 0$ であるから、$x_n(1-x_n) > 0$ である。平方完成（completing the square）すると

$$x_n(1-x_n) = \tfrac{1}{4} - \left(x_n - \tfrac{1}{2}\right)^2 \leq \tfrac{1}{4}.$$

$0 < k < 4$ であるから、両辺に k を掛けても不等号の向きは変わらず、

$$0 < x_{n+1} = kx_n(1-x_n) \leq \tfrac{k}{4} < 1.$$

よって $0 < x_{n+1} < 1$ であり、数学的帰納法によりすべての n について $0 < x_n < 1$ が成り立つ。それぞれの仮定がどこで使われたかに注意せよ。下からの評価には $k > 0$ を、上からの評価には $k < 4$ を用いている。

小問 (ii)

数列が定数となるには $x_1 = x_0$、すなわち $a = ka(1-a)$ であればよい。$a \neq 0$ であるから両辺を a で割って $1 = k(1-a)$ を得る。さらに $a \neq 1$ であるから $1-a$ で割ることができ、

$$k = \frac{1}{1-a}.$$

逆に、この k に対しては $x_1 = a$ となり、したがってそれ以降の項もすべて a である。

小問 (iii)

$b = k(1-a)$ とおくと

$$x_1 = ka(1-a) = ab.$$

$x_2 = a$ ならば数列は周期 2 で繰り返すので、条件全体は $x_2 = a$ のみである：

$$k\,(ab)(1-ab) = a.$$

$a \neq 0$ で割って $kb(1-ab) = 1$ を得る。$a \neq 1$ であるから $k = \dfrac{b}{1-a}$ と書けて、

$$\frac{b^2(1-ab)}{1-a} = 1 \quad \Longrightarrow \quad b^2 - ab^3 = 1-a \quad \Longrightarrow \quad ab^3 - b^2 + (1-a) = 0,$$

これが求める結果である。

> **考えてみよう** この三次方程式のどの解が見つけられるだろうか。また、その解は何を意味するだろうか。

$b = 1$ を代入すると $a - 1 + 1 - a = 0$ となるので、$b = 1$ は解である。しかし $b = 1$ は $k(1-a) = 1$ を意味し、これは小問 (ii) の不動点である。このとき $x_1 = ab = a$ となる。したがって、追加の条件 $x_1 \neq a$、すなわち $ab \neq a$ は、ちょうど $b \neq 1$ と同値である。因数 $b-1$ をくくり出すと

$$ab^3 - b^2 + (1-a) = (b-1)\big(ab^2 + (a-1)b + (a-1)\big),$$

となる。これは展開すれば確かめられる。よって b は

$$ab^2 - (1-a)b - (1-a) = 0$$

の 1 以外の解でなければならない。$a \neq 0$ であるから、これは確かに二次方程式（quadratic）であり、

$$b = \frac{(1-a) \pm \sqrt{(1-a)^2 + 4a(1-a)}}{2a} = \frac{(1-a) \pm \sqrt{(1-a)(1+3a)}}{2a}.$$

実数解をもつためには $(1-a)(1+3a) \geq 0$、すなわち $-\frac{1}{3} \leq a \leq 1$ が必要である。$a \neq 0, 1$ と合わせると、$-\frac{1}{3} \leq a < 1$、$a \neq 0$ が残る。a がそれ以外の値のときは、条件を満たす実数 k は存在しない。

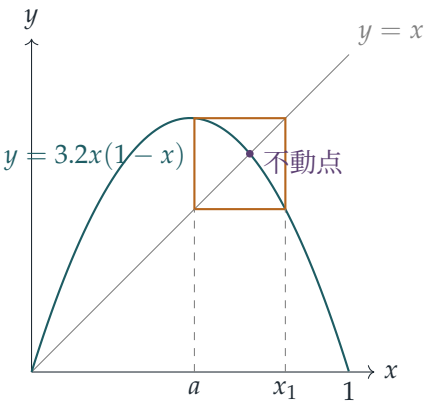
この範囲では $1-a > 0$ であるから、$1-a$ で割り、$\sqrt{(1-a)(1+3a)}/(1-a) = \sqrt{(1+3a)/(1-a)}$ を用いると、$k = b/(1-a)$ はすっきりした形になる：

$$\boxed{k = \frac{1}{2a}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1+3a}{1-a}}\right), \qquad -\tfrac{1}{3} \leq a < 1,\ a \neq 0.}$$

最後に一つ確認しておくべきことがある。どちらの値も除外すべき解 $b = 1$ でないことを確かめなければならない。この二次方程式が $b = 1$ を解にもつのは $a + (a-1) + (a-1) = 0$、すなわち $a = \frac{2}{3}$ のときに限る。このとき $\sqrt{(1+3a)/(1-a)} = 3$ であり、二つの値は $k = 3$（これは $b = 1$、すなわち不動点であるから除外される）と $k = -\frac{3}{2}$ である。したがって：

- $a = \frac{2}{3}$ のとき、可能なのは $k = -\frac{3}{2}$ のみである；
- $a = -\frac{1}{3}$ のとき、二つの符号は一致して $k = -\frac{3}{2}$ となる；
- それ以外の許される a については、どちらの符号も真の 2 周期軌道を与える。

下の図は、$k = 3.2$ の場合のそのような周期軌道の一つを示している。軌道（orbit）は $a \approx 0.513$ と $x_1 \approx 0.800$ の間を行き来し、放物線と直線 $y = x$ の間に正方形を描く。



検算

- $a = 0.7$ とする。公式から $k \approx 3.0104$ または $k \approx -1.5818$ を得る。$k \approx 3.0104$ とすると $x_1 \approx 0.6322$、さらに $x_2 \approx 0.7000$ となるので、軌道は確かに周期 2 をもつ。

- $a = \frac{2}{3}$ のとき、$k = 3$ とすると $x_1 = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ となり、予想どおり不動点である。$k = -\frac{3}{2}$ とすると $x_1 = -\frac{1}{3}$、$x_2 = -\frac{3}{2} \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ となり、真の 2 周期軌道である。
- 数値的に、無作為に選んだ数千個の $a \in [-\frac{1}{3}, 1)$ について、どちらの符号でも $x_2 = a$ が成り立った。この区間の外の a については、k を走査しても不動点 $k = 1/(1-a)$ 以外の解は見つからなかった。

よくある間違い

- 三次方程式が不動点に対応する解を含んでいるはずだということを忘れる。解 $b = 1$ に気づくことこそが、この三次方程式を易しくする鍵である。
- 実数条件 $-\frac{1}{3} \le a < 1$ を書き落とす。あるいは、$a = \frac{2}{3}$ のとき k の二つの値のうち一方が不動点であり、捨てなければならないことに気づかない。
- (i) で $x_{n+1} \le \frac{1}{4}k$ だけを示し、$k < 4$ であるからこれが 1 より真に小さいことを述べない。

STEP のその先へ

これはロジスティック写像（logistic map）であり、単純な規則がきわめて豊かな振る舞いを生み出す典型例である。通常の範囲 $0 < k \le 4$ の k に対して、ここで求めた 2 周期軌道が存在するのはちょうど $k > 3$ のときである。$k = 3$ で不動点は安定性（stability）を失い、二つの点に分裂する。これが最初の**周期倍分岐**（*period-doubling bifurcation*）である。その後も周期倍分岐が続き、それが起こる k の値は等比数列的に（ファイゲンバウム（Feigenbaum）定数で決まる比率で）密集していき、やがて写像はカオス的（chaotic）になる。Strogatz の *Nonlinear Dynamics and Chaos*（非線形力学とカオス）は、この話の全体を大学 1 年生の水準で語っている。

解答例

STEP II 2002、第 6 問

純粋数学 ・ 斜面内の直線

> **STEP II 2002、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q6

鍵となる考え方

すべては斜面（inclined plane）に関するひとつの事実にもとづく。平面内の直線が最大傾斜線（line of greatest slope）と角 ψ をなすとき、その直線が水平面となす角 γ は

$$\sin\gamma = \cos\psi \sin\beta,$$

を満たす。ここで β は最大傾斜線の傾斜角である。これさえ得られれば、問題中の各直線からそれぞれ三角方程式がひとつずつ得られ、l_1 と l_3 が垂直であることから余弦が正弦に変わる。あとは単なる代数計算である。

解答

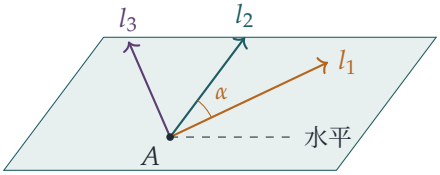
斜面内の直線の傾き

A を原点とし、z 軸が鉛直になるように座標軸をとる。$\mathbf{h}$ を P 内にある水平な単位ベクトルとし、$\mathbf{u}$ を、P 内で $\mathbf{h}$ に垂直な最大傾斜線 l_2 に沿って上向きの単位ベクトルとする。l_2 は水平面と角 β をなすから、次のようにとってよい。

$$\mathbf{h} = (1,0,0), \qquad \mathbf{u} = (0,\cos\beta,\sin\beta).$$

P 内にあり、角 ψ を $\mathbf{u}$ との間になす単位ベクトルは $\mathbf{d} = \cos\psi\,\mathbf{u} + \sin\psi\,\mathbf{h}$ である。$\mathbf{u}$ と $\mathbf{h}$ は正規直交（orthonormal）であり、P を張る（span）からである。その鉛直成分は $\cos\psi\sin\beta$ である。単位方向ベクトルが $\mathbf{d}$ である直線と水平面のなす角を γ とすると $\sin\gamma = |$鉛直成分：$\mathbf{d}|$ であるから、

$$\sin\gamma = |\cos\psi|\,\sin\beta. \qquad (*)$$



最初の配置

P 内で、直線 l_1 は l_2 と鋭角（acute angle）α をなし、水平面となす角は $\pi/6$ である。$(*)$ より

$$\cos\alpha \sin\beta = \sin\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2},$$

となり、示すべき式が得られる（ここで $\cos\alpha > 0$ である。α は鋭角だからである）。

? **考えてみよう** l_3 と l_2 のなす角はいくらか？

3 本の直線はすべて同じ平面 P 内にあり、A を通る。$l_3 \perp l_1$ であるから、l_3 の方向は l_1 の方向を P 内で直角だけ回転させたものであり、したがって l_3 は l_2 と角 $\alpha \pm \frac{\pi}{2}$ をなす（符号はどちら向きに回転させるかで決まるが、どちらでもかまわない）。いずれの場合も $|\cos(\alpha \pm \frac{\pi}{2})| = \sin\alpha$ となる。α は鋭角だからである。よって $(*)$ を l_3 に適用すると

$$\sin\alpha \sin\beta = \sin\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

2 つの結果をそれぞれ 2 乗して加えると

$$\sin^2\beta\,(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}, \qquad \text{よって} \qquad \sin^2\beta = \tfrac{3}{4}.$$

直線と水平面のなす角 β は $[0, \frac{\pi}{2}]$ に属するから、$\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$、すなわち $\beta = \pi/3$ であり、これが示すべきことであった。（念のため述べておくと、2 つの式を辺々割ると $\tan\alpha = \sqrt{2}$ が得られ、これは確かに鋭角を与えるので、このような配置は実際に存在する。）

回転後の配置

平面は変わらないので、l_2 も $\beta = \pi/3$ も変わらない。今度は l_1 が l_2 と鋭角 θ をなし、先ほどとまったく同様に l_3 は角 $\theta \pm \frac{\pi}{2}$ をなす。$(*)$ を、$\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ として各直線に適用すると：

$$\sin\phi = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,$$
$$\sin 2\phi = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta.$$

2ϕ は水平面とのなす角であるから $0 \le 2\phi \le \frac{\pi}{2}$ であり、また $\phi \neq 0$ である。$\cos\theta > 0$ だからである。よって $\sin\phi > 0$ であり、第 2 式を第 1 式で割ってよい。

$$\tan\theta = \frac{\sin 2\phi}{\sin\phi} = \frac{2\sin\phi\cos\phi}{\sin\phi} = 2\cos\phi.$$

$t = \tan^2\theta$ とおくと、$\cos^2\phi = t/4$、$\sin^2\phi = 1 - t/4$ である。θ を消去するために、$\cos^2\theta = 1/(1+\tan^2\theta)$ を第 1 式を 2 乗したものに用いると

$$1 - \frac{t}{4} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1+t} \quad\Longrightarrow\quad (4-t)(1+t) = 3 \quad\Longrightarrow\quad t^2 - 3t - 1 = 0.$$

よって $t = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{13}\right)$ である。$t = \tan^2\theta \ge 0$ かつ $\sqrt{13} > 3$ であるから、正の符号をとらなければならない。

$$\tan^2\theta = \frac{3+\sqrt{13}}{2},$$

これが示すべき結果である。

この解は実際に実現可能である。実際、$\cos^2\phi = t/4 \approx 0.826$ となるので $\phi \approx 24.7^\circ$、$2\phi \approx 49.4^\circ < 90^\circ$ であり、$\theta \approx 61.2^\circ$ は鋭角である。

検算

- 最初の配置では、$\tan\alpha = \sqrt{2}$ から $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$、$\sin\alpha = \sqrt{2/3}$ であり、$\sin\beta = \sqrt{3}/2$ とあわせると 2 つの積は $\frac{1}{2}$ と $1/\sqrt{2}$ となって、確かに正しい値になる。
- 数値的には、$\tan^2\theta \approx 3.3028$ より $\tan\theta \approx 1.8174$、$\theta \approx 61.18^\circ$ である。すると $\sin\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta \approx 0.4175$ から $\phi \approx 24.68^\circ$ となり、$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \approx 0.7589 \approx \sin(49.35^\circ) = \sin 2\phi$ である。
- $(*)$ の極限的な場合：$\psi = 0$ のときは l_2 そのもの（角 β）、$\psi = \frac{\pi}{2}$ のときは水平な直線（角 0）を与える。

よくある間違い

- $\tan\gamma = \cos\psi\tan\beta$ を、$\sin\gamma = \cos\psi\sin\beta$ の代わりに用いてしまう。正接の式が正しいのは ψ を水平面への投影図（平面図）で測った場合に限られるが、ここでの α と θ は P 内で測った角である。
- 負の解 $\frac{1}{2}(3-\sqrt{13})$ を除外し忘れる。2 乗した量が負になることはありえない。

STEP のその先へ

式 $(*)$ の正体は内積（dot product）である。直線が水平面となす角の正弦は、その単位ベクトルの鉛直方向の成分であり、そのベクトルを平面の正規直交基底で表すことですべてが片づく。平面を正規直交ベクトルの張る空間として、角を内積として捉えることは、大学 1 年で学ぶ線形代数（linear algebra）と回転の幾何学の出発点である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra* は、これらの考え方を丁寧に展開している。

解答例

STEP II 2002、第 7 問

純粋数学 ・ ベクトルと直線

> **STEP II 2002、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q7

鍵となる考え方

ここで扱うものはすべて内積（dot product）である。原点を通り単位方向ベクトル $\mathbf{u}$ をもつ直線が m_1 と $\pi/4$ の角をなすのは、$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{d}_1| = |\mathbf{d}_1|\cos\frac{\pi}{4}$ のときであり、しかもそのときに限る。これにより前半は連立方程式（simultaneous equations）に帰着する。後半では、「垂直（perpendicular）」とは内積が 0 になることであり、空間内の 2 直線が交わるのは、それらが同一平面上（coplanar）にあり、かつ平行（parallel）でない場合に限る。同一平面上にあることは、スカラー三重積（scalar triple product）が 0 になることで表される。ひねりは、同一平面上にある場合が実は平行な場合になってしまう点にある。

解答

直線 m_3 と m_4

$\mathbf{d}_1 = \mathbf{i}+\mathbf{j}$、$\mathbf{d}_2 = \mathbf{i}+\mathbf{k}$ とおく。どちらも長さは $\sqrt{2}$ である。$\mathbf{u} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ を、O を通る直線の方向の単位ベクトル（unit vector）とする。2 直線のなす角はそれらのなす鋭角（acute angle）であるから、条件は

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{d}_1| = \sqrt{2}\cos\tfrac{\pi}{4} = 1, \qquad |\mathbf{u}\cdot\mathbf{d}_2| = 1,$$

すなわち $a+b = \pm 1$ かつ $a+c = \pm 1$ である。$\mathbf{u}$ を $-\mathbf{u}$ に置き換えても同じ直線を表し、両方の符号が反転するので、場合は 2 通りしかない。

符号が同じ場合：$a+b=1$、$a+c=1$。このとき $b=c=1-a$ であり、$a^2+b^2+c^2=1$ より

$$a^2+2(1-a)^2 = 1 \iff 3a^2-4a+1=0 \iff (3a-1)(a-1)=0.$$

よって $a=1$ のとき $\mathbf{u}=\mathbf{i}$、$a=\frac{1}{3}$ のとき $\mathbf{u}=\frac{1}{3}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k})$ である。

符号が異なる場合：$a+b=1$、$a+c=-1$。このとき $b=1-a$、$c=-1-a$ であり、$a^2+(1-a)^2+(1+a)^2=1$ より $3a^2+2=1$ となるが、これは実数解をもたない。

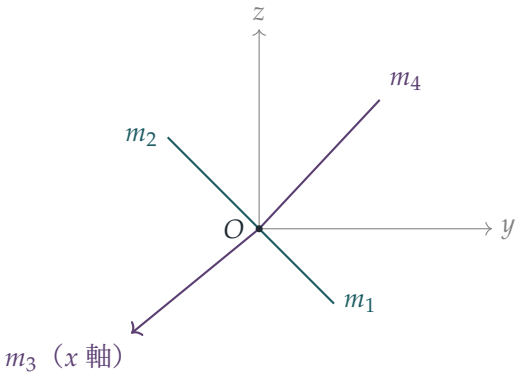
したがって、2 直線の方向は

$$m_3:\ \mathbf{i}, \qquad m_4:\ \mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$$

である（ラベルは入れ替えてもよい）。単位ベクトル $\mathbf{e}_3=\mathbf{i}$、$\mathbf{e}_4=\frac{1}{3}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k})$ を用いると

$$\cos\theta=\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_4=\tfrac{1}{3},$$

となる。これは正であるから、これが鋭角のほうであり、その余弦は $\frac{1}{3}$ である。



点の設定

A は m_1 上にあって O からの距離が $\lambda\sqrt{2}$ であるから、$\pm\lambda(1,1,0)$ である。座標が非負であることから、$\lambda\geq 0$ として $A=\lambda(1,1,0)$ ととることになる（$\lambda\sqrt{2}$ は距離であるから、以下を通して $\lambda\geq 0$ としてよい）。同様に $B=\lambda(1,0,1)$ である。m_3、m_4 上の座標が非負である単位点は $(1,0,0)$ と $\frac{1}{3}(1,2,2)$ である。

このうちどちらが P でどちらが Q になるかは、m_3 と m_4 のラベルの付け方による。しかしこれは問題にならない。鏡映（reflection）$(x,y,z)\mapsto(x,z,y)$ は A と B を入れ替え、$(1,0,0)$ と $\frac{1}{3}(1,2,2)$ をともに動かさないので、一方のラベル付けによる配置をもう一方に移す（その際、直線 AQ と BP の役割が入れ替わる）。垂直であることと交わることは鏡映で保たれるので、

$$A=(\lambda,\lambda,0),\quad B=(\lambda,0,\lambda),\quad P=(1,0,0),\quad Q=\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3}\right).$$

とすれば十分である。このとき

$$\overrightarrow{AQ}=\left(\tfrac{1}{3}-\lambda,\ \tfrac{2}{3}-\lambda,\ \tfrac{2}{3}\right), \qquad \overrightarrow{BP}=(1-\lambda,\ 0,\ -\lambda).$$

小問 (i)

AQ が BP に垂直であるのは、$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ のとき、かつそのときに限る：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BP} &= \left(\tfrac{1}{3}-\lambda\right)(1-\lambda)+0-\tfrac{2}{3}\lambda \\ &= \lambda^2-\tfrac{4}{3}\lambda+\tfrac{1}{3}-\tfrac{2}{3}\lambda=\lambda^2-2\lambda+\tfrac{1}{3}.\end{aligned}$$

これが 0 になるのは $(\lambda-1)^2=\frac{2}{3}$ のとき、すなわち

$$\lambda=1\pm\sqrt{\tfrac{2}{3}}=1\pm\tfrac{\sqrt{6}}{3}.$$

のときである。どちらの値も正であり（$\sqrt{6}<3$ であるから）、ともに非負の条件を満たす。また、この 2 次方程式にほかの解はない。よって、$AQ\perp BP$ となる λ の値はちょうど 2 つであり、題意は示された。

小問 (ii)

> **考えてみよう** 3 次元空間内の 2 直線が交わるかどうかは、どのように調べればよいだろうか。

相異なる 2 直線が交わるための必要十分条件は、それらが共通の平面上にあり、かつ平行でないことである。直線 AQ と BP が共通の平面上にあるのは、4 点 A、B、P、Q が同一平面上にあるとき、かつそのときに限り、これは $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{AQ}$ のスカラー三重積が 0 になるとき、かつそのときに限る。

ここで $\overrightarrow{AB}=(0,-\lambda,\lambda)$、$\overrightarrow{AP}=(1-\lambda,-\lambda,0)$ であるから、

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 0 & -\lambda & \lambda \\ 1-\lambda & -\lambda & 0 \\ \frac{1}{3}-\lambda & \frac{2}{3}-\lambda & \frac{2}{3}\end{vmatrix} &= \lambda\cdot\tfrac{2}{3}(1-\lambda)+\lambda\left[(1-\lambda)\left(\tfrac{2}{3}-\lambda\right)+\lambda\left(\tfrac{1}{3}-\lambda\right)\right] \\ &= \lambda\left[\tfrac{2}{3}-\tfrac{2}{3}\lambda+\tfrac{2}{3}-\tfrac{4}{3}\lambda\right]=2\lambda\left(\tfrac{2}{3}-\lambda\right),\end{aligned}$$

となる（第 1 行に沿って展開した）。したがって $\lambda\neq0$ のとき、2 直線が交わりうるのは $\lambda=\frac{2}{3}$ の場合に限られる。

ところが $\lambda=\frac{2}{3}$ のとき、

$$\overrightarrow{AQ}=\left(-\tfrac{1}{3},\,0,\,\tfrac{2}{3}\right),\qquad \overrightarrow{BP}=\left(\tfrac{1}{3},\,0,\,-\tfrac{2}{3}\right)=-\overrightarrow{AQ},$$

であるから、2 直線は平行である。また $\overrightarrow{BA}=\left(0,\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$ は $\overrightarrow{BP}$ の実数倍ではないので A は BP 上になく、2 直線は同一の直線ではない。相異なる平行な 2 直線は決して交わらない。

よって、0 でないすべての λ について直線 AQ と BP は交わらず、題意は示された。（$\lambda = 0$ のときは $A = B = O$ となり、2 直線は O で交わる。問題がこの場合を除外しているのはそのためである。）

検算

- $\mathbf{i}$ が $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ と $\pi/4$ の角をなすことは見ればわかる。これは 2 次方程式の 1 つ目の解として安心できる確認である。
- $\lambda = 1 + \sqrt{2/3} \approx 1.8165$ において内積 $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BP}$ を数値計算すると 0 になり（誤差 10^{-16} の範囲で）、$\lambda \approx 0.1835$ においても同様である。
- $\lambda = 0.001, 0.002, \ldots, 5$ について（また P と Q のもう一方のラベル付けについても）直線 AQ と BP の最短距離を計算すると、決して 0 にはならない。0 に近づくのは $\lambda \to 0$ のときだけである。

よくある間違い

- $a + b = 1$、$a + c = -1$ の場合を忘れること。この場合からは何も得られないが、それを確かめて除外する必要がある。
- 「$\lambda = \frac{2}{3}$ のときスカラー三重積が 0 になるので、2 直線は交わる」で止めてしまうこと。同一平面上の 2 直線は平行であることもあり、ここではまさにそうなっている。

STEP のその先へ

スカラー三重積は 3×3 の行列式（determinant）であり、それが 0 になることは 3 つのベクトルが一次従属（linearly dependent）であることを意味する。ねじれの位置（skew）にある 2 直線の最短距離 $|\overrightarrow{AB} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})| / |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ も、同じ部品から組み立てられている。大学 1 年次の線形代数（linear algebra）の講義では、これらの考え方は行列式、階数（rank）、部分空間（subspace）の幾何を通して統一的に扱われる。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（『線形代数入門』）は、3 次元の図を豊富に用いてこの内容を展開している。

解答例

STEP II 2002、第 8 問

純粋数学 ・ 一階微分方程式

STEP II 2002、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/02-s2-q8

鍵となる考え方

どちらの方程式も、考えうる最も単純な一階線形微分方程式（first-order linear equation）$y' = p(x)\,y$ である。したがって、p が一つの式で与えられる区間（interval）上では、解は定数と $\exp\left(\int p\,\mathrm{d}x\right)$ の積になる。注意すべき点は、問題が $x = 0$ で分かれていることである。両側にそれぞれ別の任意定数が現れる。一方の側の定数は与えられた y の値で決まり、もう一方の側の定数は、二つの部分が $x = 0$ でつながるという要請だけで決まる。前半はまさにこの手順の予行演習であり、後半では絶対値（absolute value）の中にこの構造が隠れている。

解答

最初の方程式の組

$x < 0$ では、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y$ から、ある定数 A を用いて $y = A\mathrm{e}^{-x}$ となる。（これ以外に解がないことは、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\mathrm{e}^{x}\right) = \mathrm{e}^{x}(y' + y) = 0$ より $y\mathrm{e}^{x}$ が区間 $x < 0$ 上で定数であることからわかる。）$x = -1$ で $y = a$ という条件から $A\mathrm{e} = a$ となるので、

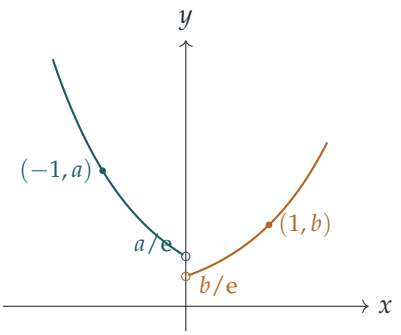
$$y = a\,\mathrm{e}^{-x-1} \qquad (x < 0).$$

同様に、$x > 0$ では $y = B\mathrm{e}^{x}$ であり、$x = 1$ で $y = b$ という条件から $B = b/\mathrm{e}$ となるので、

$$y = b\,\mathrm{e}^{x-1} \qquad (x > 0).$$

$x \to 0^{-}$ のとき $y \to a/\mathrm{e}$、$x \to 0^{+}$ のとき $y \to b/\mathrm{e}$ である。一般にこれらは異なり、曲線は y 軸のところで跳ぶ。下の図は $a, b > 0$ かつ $a > b$ の典型的な場合を示している。

左側は減衰する指数関数で、軸に近づくにつれて下がっていく。右側は増加する指数関数である。白丸は二つの（異なる）極限値を表している。



跳びがないのは、二つの極限が一致する $a/\mathrm{e} = b/\mathrm{e}$ のとき、すなわち

$$a = b.$$

のとき、かつそのときに限る。このとき曲線は $y = a\,\mathrm{e}^{|x|-1}$ となり、$x = 0$ に角をもつ左右対称の「V」字のような曲線である。

$|\mathrm{e}^x - 1|$ を含む方程式

$\mathrm{e}^x > 1$ となるのは $x > 0$ のとき、かつそのときに限るので、

$$|\mathrm{e}^x - 1| = \begin{cases} \mathrm{e}^x - 1, & x \geq 0, \\ 1 - \mathrm{e}^x, & x < 0. \end{cases}$$

したがって、方程式は先ほどと同じように、二つの通常の線形方程式に分かれる。

$x > 0$ の場合： $y' = (\mathrm{e}^x - 1)y$ である。$\mathrm{e}^x - 1$ の原始関数（antiderivative）の一つは $\mathrm{e}^x - x$ なので、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\,\mathrm{e}^{-(\mathrm{e}^x - x)}\right) = 0$ となり、

$$y = C\exp(\mathrm{e}^x - x).$$

$x = 1$ で $y = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$ なので、$C\,\mathrm{e}^{\mathrm{e}-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$ となり、$C = \mathrm{e}$ を得る。よって

$$y = \exp(\mathrm{e}^x - x + 1) \qquad (x \geq 0).$$

$x < 0$ の場合： $y' = (1 - \mathrm{e}^x)y$ である。$1 - \mathrm{e}^x$ の原始関数の一つは $x - \mathrm{e}^x$ なので、

$$y = D\exp(x - \mathrm{e}^x).$$

考えてみよう $x<0$ の範囲には与えられた値がない。では何が D を決めるのか。

$x=0$ での連続性（continuity）が決める。右側からは $y\to \exp(1-0+1)=\mathrm{e}^2$ であり、左側からは $y\to D\exp(0-1)=D/\mathrm{e}$ である。これらを等しいとおくと $D=\mathrm{e}^3$ となるので、

$$y=\exp(x-\mathrm{e}^x+3)\qquad (x<0).$$

二つを合わせると、

$$y=\begin{cases}\exp(\mathrm{e}^x-x+1), & x\geq 0,\\ \exp(x-\mathrm{e}^x+3), & x<0.\end{cases}$$

今回は $x=0$ に角すらないことに注意しよう。どちらの式からも $y'(0)=0$ が得られ、これは $|\mathrm{e}^0-1|y=0$ と一致する。$y>0$ かつ $|\mathrm{e}^x-1|\geq 0$ なので、解はいたるところで増加し、$x=0$ に停留変曲点（stationary point of inflection）をもつ。そこでの値は $y=\mathrm{e}^2$ である。

極限

(i) $x>0$ に対して、

$$y\exp(-\mathrm{e}^x)=\exp(\mathrm{e}^x-x+1-\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^{1-x}\to 0\quad \text{ただし}x\to+\infty.$$

よって極限は 0 である。因子 $\exp(-\mathrm{e}^x)$ が二重指数的（double-exponential）な増加をちょうど打ち消し、減衰する e^{1-x} が残る。

(ii) $x<0$ に対して、

$$y\,\mathrm{e}^{-x}=\exp(x-\mathrm{e}^x+3-x)=\exp(3-\mathrm{e}^x)\to \mathrm{e}^3\quad \text{ただし}x\to-\infty,$$

である。なぜなら $\mathrm{e}^x\to 0$ だからである。よって極限は e^3 である。言い換えれば、x が負で絶対値が大きいとき、解は $\mathrm{e}^3\mathrm{e}^x$ のようにふるまう。これは予想どおりである。そこでは $|\mathrm{e}^x-1|\approx 1$ であり、方程式はほぼ $y'=y$ となるからである。

検算

- 答えを微分すると、$x>0$ では $y'=(\mathrm{e}^x-1)y$、$x<0$ では $y'=(1-\mathrm{e}^x)y$ となる。$x=1$ では $\exp(\mathrm{e}-1+1)=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$ である。
- 数値的に、ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）を用いて方程式を $y(1)=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}\approx 15.154$ から $x=0$ まで逆向きに進めると $y(0)\approx 7.38906=\mathrm{e}^2$ が得られ、さらに $x=-5$ まで続けると、有効数字 6 桁で $\exp(x-\mathrm{e}^x+3)$ と一致する。

- 極限 (ii) については、$x = -10$ で $ye^{-x} \approx 20.0846$ となり、$e^3 \approx 20.0855$ に近い。(i) については、$x = 10$ で $e^{1-x} \approx 1.2 \times 10^{-4}$ である。

よくある間違い

- $x = 1$ での条件を使って、$x = 0$ の**両側**の定数を決めてしまう。二つの区間は別々の問題であり、左側の定数は連続性からのみ決まる。
- 絶対値を外して、すべての x に対して $y' = (e^x - 1)y$ を解いてしまう。これでは $x < 0$ での曲線が誤りとなり、(ii) の極限も誤りとなる。
- $\int (e^x - 1)\,dx = e^x - x$ と正しく書いたのに、続けて $\exp(e^x - x) = e^{e^x}/x$ としてしまう（正しくは $e^{e^x}e^{-x}$ である）。

STEP のその先へ

方程式 $y' = |e^x - 1|\,y$ の係数は、$x = 0$ で連続であるが微分可能ではない。$y' = f(x, y)$ に対する解の存在と一意性の定理（existence and uniqueness theorem）（ピカール＝リンデレーフの定理（Picard–Lindelöf））は、f が x について連続であり、y についてリプシッツ連続（Lipschitz）であることしか必要としない。そのため、この場合は一つの条件だけで実数直線全体での解が決まり、0 での連続性は自動的に成り立つ。前半では右辺そのものが $x = 0$ で跳ぶので、部分どうしをつなぐために追加の条件が必要だったのである。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）では、一階微分方程式に対するこうした存在と一意性の問題が論じられている。

解答例

STEP II 2002、第 9 問

力学 ・ 放物運動

STEP II 2002、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

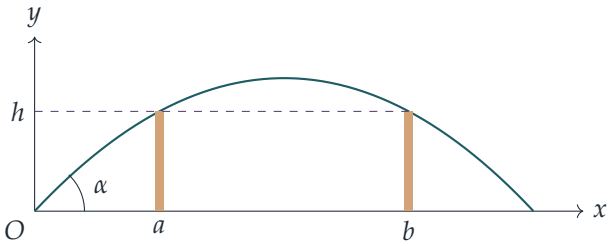
step.maths.org/questions/02-s2-q9

鍵となる考え方

軌道（path）の方程式を、y を x の関数として書き下す。「両方の壁のすぐ上をかすめて通過する」とは、軌道が二つの壁の頂点を通るということであり、したがって方程式 $y = h$ の解はちょうど $x = a$ と $x = b$ である。これは解がわかっている二次方程式（quadratic）であり、解と係数の関係（sum and product of roots）と比べれば、すべてが一度に得られる。第二の部分は、あとは二つの公式を h について微分（differentiate）するだけの問題である。

解答

粒子を重力のみを受けて運動する質点としてモデル化し（空気抵抗（air resistance）は無視する）、O を原点、x を水平方向、y を鉛直上向きにとる。図が意図しているとおり、$0 < a < b$、$h > 0$、$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を仮定する。



$\tan\alpha$ と V を求める

初速度の成分を $V\cos\alpha$ と $V\sin\alpha$ とすると、時刻 t において

$$x = Vt\cos\alpha, \qquad y = Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$t = x/(V\cos\alpha)$ を代入して t を消去すると、軌道は

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2V^2\cos^2\alpha} = x\tan\alpha - kx^2, \qquad \text{ただし} k = \frac{g\sec^2\alpha}{2V^2} = \frac{g(1+\tan^2\alpha)}{2V^2} > 0.$$

粒子はそれぞれの壁をすれすれで越えるので、軌道は頂点 (a,h) と (b,h) を通る。よって a と b は

$$x\tan\alpha - kx^2 = h, \qquad \text{すなわち、} \qquad kx^2 - x\tan\alpha + h = 0.$$

の解である。これは（$k \neq 0$ より）x の二次方程式なので解は高々二つであり、したがってその解はちょうど a と b である。解と係数の関係と比べると、

$$a + b = \frac{\tan\alpha}{k}, \qquad ab = \frac{h}{k}.$$

二つ目の式から $k = h/(ab)$ が得られ、これを一つ目の式に用いると

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{h(a+b)}{ab}.}$$

最後に、k の定義から

$$\begin{aligned}\frac{2V^2}{g} = \frac{1+\tan^2\alpha}{k} &= \frac{ab}{h}\left(1 + \frac{h^2(a+b)^2}{a^2b^2}\right)\\ &= \frac{ab}{h} + \frac{(a+b)^2h}{ab},\end{aligned}$$

となり、題意が示された。

（これらの値のもとで軌道は $y = \dfrac{h}{ab}x(a+b-x)$ となり、$x = a$ と $x = b$ で h に等しいことが一目でわかる点にも注目しておくとよい。）

壁を高くする

二つ目の粒子も、同じ距離 a と b にある、高さが $h + \delta h$ となった両方の壁をすれすれで越える。したがって、上の公式は h、α、V をそれぞれ $h+\delta h$、$\alpha+\delta\alpha$、$V+\delta V$ に置き換えても成り立つ：

$$\tan\alpha = \frac{a+b}{ab}h, \qquad \frac{2V^2}{g} = \frac{ab}{h} + \frac{(a+b)^2}{ab}h.$$

どちらも（a、b を固定すれば）h だけの関数であるから、小さな変化に対しては $\delta(\text{量}) \approx \dfrac{\mathrm{d}(\text{量})}{\mathrm{d}h}\delta h$ を用いてよい。

角度。 $\tan\alpha = \frac{a+b}{ab}h$ を h について微分すると $\sec^2\alpha\,\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}h} = \dfrac{a+b}{ab}$ となるので、

$$\sec^2\alpha\,\delta\alpha \approx \frac{a+b}{ab}\,\delta h.$$

$\sec^2\alpha > 0$、$a, b > 0$、$\delta h > 0$ であるから右辺は正であり、よって $\delta\alpha > 0$ である。すなわち、粒子はより急な角度で投げなければならない。

> **考えてみよう**　「≈」は一次（first-order）の近似にすぎない。これから本当に $\delta\alpha$ の符号を結論づけてよいのだろうか？

よい。しかも、実は近似をまったく使わずに結論できる。$\tan\alpha$ の式は h について一次式なので、厳密に $\tan(\alpha+\delta\alpha) - \tan\alpha = \frac{a+b}{ab}\,\delta h > 0$ が成り立つ。tan は $(0, \frac{\pi}{2})$ で狭義単調増加であるから、これより $\alpha + \delta\alpha > \alpha$、すなわち $\delta\alpha > 0$ が従う。

速さ。 $\dfrac{2V^2}{g}$ を h について微分すると、

$$\frac{4V}{g}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h} = -\frac{ab}{h^2} + \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(a+b)^2}{abh^2}\left(h^2 - \frac{a^2b^2}{(a+b)^2}\right),$$

したがって

$$\delta V \approx \frac{g(a+b)^2}{4Vabh^2}\left(h - \frac{ab}{a+b}\right)\left(h + \frac{ab}{a+b}\right)\delta h.$$

$h - \frac{ab}{a+b}$ 以外の因数はすべて正である（$V, a, b, h, \delta h > 0$ より）。よって δV の符号は $h - \frac{ab}{a+b}$ の符号と一致し、$h > ab/(a+b)$ ならば正、$h < ab/(a+b)$ ならば負であり、題意が示された。（この導関数は $h = ab/(a+b)$ 以外では 0 でないので、δh が十分小さければ、一次の項によって符号が本当に定まる。）

解釈。 $\tan\alpha = h(a+b)/(ab)$ と比べると、条件 $h > ab/(a+b)$ はちょうど $\tan\alpha > 1$、すなわち $\alpha > 45°$ と同じである。h の関数として見ると、$2V^2/g$ は $p/h + qh$ の形をしており、これは $h = \sqrt{p/q} = ab/(a+b)$ のとき最小となる。このとき $\alpha = 45°$、$2V^2/g = 2(a+b)$ である。つまり、投げる角度がすでに 45° より急ならば、壁を高くするとより大きな速さが必要になる。角度がそれより緩やかならば、壁を高くする（そして投げる角度を 45° に向けて急にする）と、必要な速さはむしろ小さくなる。

検算

- $a = 3\,\mathrm{m}$、$b = 7\,\mathrm{m}$、$h = 2.5\,\mathrm{m}$ とする。このとき $\tan\alpha = 25/21$、$2V^2/g = 8.4 + 11.90\ldots = 20.30\ldots\,\mathrm{m}$ である。これらの値を用いて運動を数値的に追跡すると、粒子は $x = 3$ と $x = 7$ の両方で（10^{-11} の精度で）高さ $2.5\,\mathrm{m}$ にある。

- 対称性：答えは a と b について対称であり、そうでなければならない。軌道は $x = \frac{1}{2}(a+b)$ に関して対称な放物線だからである。
- 単位：ab/h と $(a+b)^2h/(ab)$ は長さであり、$2V^2/g$ と一致する。また $\tan\alpha$ は無次元（dimensionless）である。
- $h = ab/(a+b)$ のとき $\alpha = 45°$、$2V^2/g = 2(a+b)$ となる。$a = 3$、$b = 7$ ではこれは 20 m であり、上の 20.30 m よりわずかに小さく、これが最小値であることと整合する。

よくある間違い

- 二つの壁についてそれぞれ方程式を立て、それを力ずくで連立して解くこと。それでも解けるが、解と係数の関係を使えば二行で済む。
- k を V に戻すときに $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$ を忘れること。
- $2V^2/g$ の導関数を因数分解せずに δV の符号を述べること。すっきりした条件は、$h > 0$ のもとでの $h^2 > a^2b^2/(a+b)^2$ から得られる。

STEP のその先へ

第二の部分はちょっとした感度分析（sensitivity analysis）である。写像 $h \mapsto (\alpha, V)$ をある解のまわりで線形化し、出力がどのように反応するかを読み取ったのである。線形化（linearisation）と、それに関連する軌道族の包絡線（envelope）の考え方（与えられた速さで到達可能なすべての点を囲む「安全放物線（parabola of safety）」）は、大学一年生の力学や微積分の講義で標準的に扱われる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物運動とこうした近似の技法を丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 2002、第 10 問

力学 ・ 運動学と最適化

> **STEP II 2002、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q10

鍵となる考え方

総距離が決まっているので、レースの所要時間 T と切り替えの時刻 t はただ一つの方程式で結びついている。分母を払うとこれは t の二次方程式（quadratic）になり、時間 T が実現可能であるのはこの二次方程式が実数解をもつときに限る。判別式（discriminant）の条件から、微積分を使わずに T の最小値が直接得られる。後半では、二人の走者の位置を時刻の関数として求めれば、両者の距離は区分的（piecewise）な二次関数となるので、通常の方法で最大化すればよい。

解答

以下、距離の単位は km、時間の単位は時間とし、$42\frac{3}{8} = \frac{339}{8}$ である。

レース時間の最小値

第一の走者は最初の t 時間で $13t$ 進み、残りの $T-t$ 時間で $\left(14+\frac{2t}{T}\right)(T-t)$ 進む。したがって

$$13t + \left(14+\frac{2t}{T}\right)(T-t) = \frac{339}{8}.$$

展開すると $13t + 14T - 14t + 2t - \dfrac{2t^2}{T} = \dfrac{339}{8}$、すなわち

$$t + 14T - \frac{2t^2}{T} = \frac{339}{8}.$$

$T > 0$ を掛けて t の累乗ごとに整理すると

$$2t^2 - Tt + \left(\frac{339}{8}T - 14T^2\right) = 0. \qquad (*)$$

考えてみよう 求めたいのは最小の T であるが、T は t の関数として与えられてはいない。そもそもどのような T の値が可能なのかを、どうすれば判定できるだろうか。

T の値が実現されるのは $(*)$ が実数解 t をもつときに限るので、その判別式は非負でなければならない：

$$T^2 - 8\left(\frac{339}{8}T - 14T^2\right) \geq 0 \iff 113T^2 - 339T \geq 0 \iff 113T(T-3) \geq 0.$$

$T > 0$ であるから、$T \geq 3$ が従う。

この下限は実際に達成される。$T = 3$ のとき判別式は 0 となり、$(*)$ は

$$2t^2 - 3t + \left(\frac{1017}{8} - 126\right) = 2t^2 - 3t + \frac{9}{8} = 2\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 = 0,$$

となるので、$t = \frac{3}{4}$ である。これは 0 と T の間にあるので、実際に実行可能なレース計画である。すなわち、速さ 13 で 45 分走り、残りの $2\frac{1}{4}$ 時間を速さ $14 + \frac{2(3/4)}{3} = 14.5$ で走る。実際、$13 \cdot \frac{3}{4} + 14.5 \cdot \frac{9}{4} = 9.75 + 32.625 = 42.375$ である。以上より、T のとりうる最小値は 3 であり、題意が示された。

（同値な方法として、$(*)$ を陰関数微分（implicit differentiation）して $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0$ とおくと $T = 4t$ が得られ、これを代入し戻すと $T = 3$ となる。判別式による議論には、3 が単なる停留値（stationary value）ではなく大域的最小値（global minimum）であることまで証明できるという利点がある。）

二人の距離の最大値

スタートからの経過時間を τ とする。第二の走者の速さはある定数 k を用いて $16 - k\tau$ と表されるので、走った距離は

$$s_2(\tau) = 16\tau - \tfrac{1}{2}k\tau^2.$$

3 時間でゴールすることから $48 - \frac{9}{2}k = \frac{339}{8}$ となり、$\frac{9}{2}k = \frac{45}{8}$、よって $k = \frac{5}{4}$ である。したがって $s_2 = 16\tau - \frac{5}{8}\tau^2$ であり、速さは 16 から 12.25 まで減少し、常に正である。

第一の走者も 3 時間かかるので、前半の結果から $t = \frac{3}{4}$ である。この走者の走った距離は

$$s_1(\tau) = \begin{cases} 13\tau, & 0 \leq \tau \leq \frac{3}{4}, \\ \frac{39}{4} + \frac{29}{2}\left(\tau - \frac{3}{4}\right), & \frac{3}{4} \leq \tau \leq 3. \end{cases}$$

$d = s_2 - s_1$ とおく。第二の走者のほうが最初は速いので、$d \geq 0$ となることが予想される。

$0 \le \tau \le \frac{3}{4}$ **のとき：**$d = 3\tau - \frac{5}{8}\tau^2$ であり、$\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}\tau} = 3 - \frac{5}{4}\tau > 0$ である。よって d はこの区間で増加し、$d\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{4} - \frac{45}{128} = \frac{243}{128}$ に達する。

$\frac{3}{4} \le \tau \le 3$ **のとき：**

$$d = 16\tau - \tfrac{5}{8}\tau^2 - \tfrac{39}{4} - \tfrac{29}{2}\tau + \tfrac{87}{8} = \tfrac{1}{8}\left(9 + 12\tau - 5\tau^2\right) = \tfrac{1}{8}(3-\tau)(3+5\tau).$$

これは上に凸な放物線で、頂点は $\tau = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$ にあり、これは $\left[\frac{3}{4}, 3\right]$ の内部にある。（同値な見方として、差が広がらなくなるのは二人の速さが等しくなるとき、すなわち $16 - \frac{5}{4}\tau = 14.5$ のときである。）そこでは

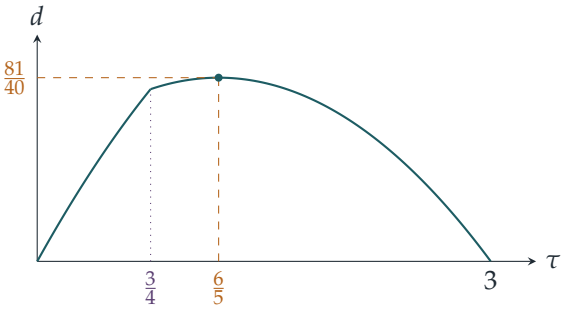
$$d\left(\tfrac{6}{5}\right) = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{9}{5} \cdot 9 = \tfrac{81}{40}.$$

因数分解した形から、この区間全体で $d \ge 0$ であり、当然ながらゴールで 0 まで減少することがわかる。

二つの区間を比べると、$\frac{81}{40} = 2.025 > \frac{243}{128} \approx 1.898$ である。よって二人の走者の距離の最大値は

$$\boxed{\tfrac{81}{40}\ \mathrm{km} = 2.025\ \mathrm{km}},$$

であり、これはレース開始から 1.2 時間（72 分）後に、第二の走者が先行している状態で達成される。



検算

- 二人とも $\tau = 3$ でゴールし、式からも当然 $d(3) = 0$ となる。
- 後半の区間での最大値は、ちょうど二人の速さが等しくなる（ともに 14.5）ときに生じる。これは差が広がらなくなるための自然な条件である。
- 数値的確認：t の細かい格子上で T についての二次方程式を解くと、T の最小値は $t = 0.75$ において 3.000 となる。また $[0, 3]$ 内の 300 000 個の時刻で d を計算すると、$\tau = 1.2$ において最大値 2.025 をとり、全体を通じて $d \ge 0$ である。

よくある間違い

- 第一の走者の最短時間の計画を使う際に、「走行時間が 3 時間」という条件こそが $t = \frac{3}{4}$ を定めていることに気づかない。
- 折れ目 $\tau = \frac{3}{4}$ だけで最大値を考えてしまう。切り替えの後も差は広がり続ける。第二の走者は $\tau = \frac{6}{5}$ までは 14.5 より速いからである。
- 第二の走者の距離を $16\tau - k\tau^2$ と書いてしまい、一次関数的に減少する速さを積分したときに出る $\frac{1}{2}$ を忘れる。

STEP のその先へ

前半は、$F(t, T) = 0$ によって陰的に与えられた制約のもとでの最適化問題である。「どのような T に対して解 t が存在するか」と問うことは、陰関数定理（implicit function theorem）や、より一般にはラグランジュ（Lagrange）の未定乗数法（Lagrange multipliers）の背後にある考え方である。最適点では制約の等位曲線（level curve）上で $\partial F/\partial t = 0$ となり、これはまさにここでの重解（double root）の条件である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は運動学（kinematics）を一貫して微積分を用いて扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には STEP 形式の最適化問題がさらに収められている。

解答例

STEP II 2002、第 11 問

力学 ・ 摩擦と限界つり合い

> **STEP II 2002、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q11

鍵となる考え方

最初の部分は重心（centre of mass）を求める積分をそのまま計算するだけであり、置換（substitution）$t = x/l$ を用いれば一行で済む。はしご（ladder）の部分では、「両端で限界状態にある」という条件により、4 つの接触力がすべてただ 1 つの未知数の定数倍で表される。したがって 2 方向に力を分解し、A のまわりのモーメント（moment）をとれば、ただちに $\tan\theta$ が得られる。最後の部分ではもう 1 つ考え方が必要である。棒は立てる角度が急であるほど安定するので、「$\theta < \pi/4$ のすべての θ で滑る」ということは、限界角が $\pi/4$ 以上であることを意味する。

解答

重心

B から距離 x の位置にある長さ δx の微小部分の重さは $\alpha W l^{-1}(x/l)^{\alpha-1}\,\delta x$ である。$t = x/l$（したがって $\mathrm{d}x = l\,\mathrm{d}t$）とおくと、全体の重さは

$$\int_0^l \frac{\alpha W}{l}\left(\frac{x}{l}\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}x = \alpha W\int_0^1 t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t = W,$$

となり、当然そうなるべき値である（$\alpha > 0$ であるからこの積分は収束（converge）する）。B のまわりの重力のモーメントは

$$\int_0^l x\,\frac{\alpha W}{l}\left(\frac{x}{l}\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}x = \alpha W l\int_0^1 t^{\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha W l}{\alpha+1}.$$

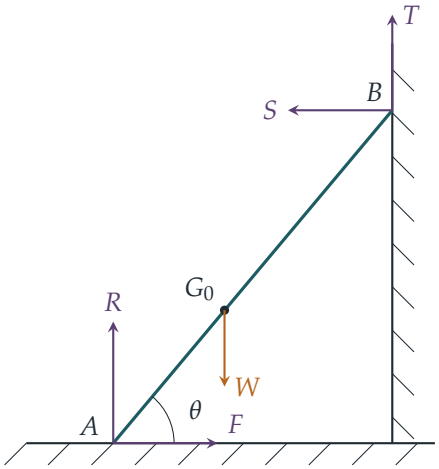
これを W で割ると、重心 G_0 は B から距離 $\alpha l/(\alpha+1)$ の位置にあり、求める結果が得られる。よって重心は A から

$$d = l - \frac{\alpha l}{\alpha+1} = \frac{l}{\alpha+1}$$

の距離にある。A のまわりのモーメントを考える際にはこちらを用いる。

両端での限界つり合い

棒を剛体の棒（rigid rod）とみなし、A と B はともに粗い接触であるとする。棒が滑るとき、A は壁から遠ざかり、B は下に動く。したがって摩擦力（friction）は A では壁に向かう向きに、B では上向きにはたらく。床が A において及ぼす垂直抗力（normal reaction）を R、摩擦力を F とし、壁が B において及ぼす垂直抗力を S、摩擦力を T とする。重力は A から距離 $l/(\alpha+1)$ の点 G_0 にはたらく。



水平方向と鉛直方向に力を分解し、さらに A のまわりのモーメントをとる（重力は A から水平距離 $d\cos\theta$ の位置にはたらき、B は高さ $l\sin\theta$、水平距離 $l\cos\theta$ の位置にある）と、

$$F = S,$$
$$R + T = W,$$
$$S\,l\sin\theta + T\,l\cos\theta = W\,\frac{l}{\alpha+1}\cos\theta.$$

両端で限界状態にあるということは、$F = \mu R$ かつ $T = \mu S$ を意味する。すると $S = F = \mu R$、$T = \mu S = \mu^2 R$ であり、鉛直方向の式から

$$R(1+\mu^2) = W, \qquad \text{よって} \qquad S = \frac{\mu W}{1+\mu^2}, \quad T = \frac{\mu^2 W}{1+\mu^2}.$$

モーメントの式を $l\cos\theta$ で割って代入すると、

$$\frac{\mu W}{1+\mu^2}\tan\theta+\frac{\mu^2 W}{1+\mu^2}=\frac{W}{1+\alpha}\quad\Longrightarrow\quad \mu\tan\theta=\frac{1+\mu^2}{1+\alpha}-\mu^2=\frac{1-\alpha\mu^2}{1+\alpha},$$

すなわち

$$\tan\theta=\frac{1-\alpha\mu^2}{(1+\alpha)\mu},$$

となり、求める結果が得られる。この角を θ_0 とし、$t_0=\tan\theta_0$ とおく。

μ の最大値

考えてみよう　なぜ「$\theta<\pi/4$ のすべての θ で滑る」という条件が、θ_0 に関する条件に言い換えられるのだろうか。

つり合いが可能であるのは $\tan\theta\geq t_0$ のときであり、かつそのときに限ることを示す。$t=\tan\theta$、$k=1/(1+\alpha)$ とおくと、モーメントの式は $St+T=kW$ となる。摩擦の法則は $F\leq\mu R$ および $|T|\leq\mu S$ である。

必要性（*necessity*）。$T\leq\mu S$ と $S=F\leq\mu R=\mu(W-T)$ から $T\leq\mu^2(W-T)$ が得られるので、$T\leq\mu^2 W/(1+\mu^2)$ である。また $S\leq\mu(W-T)$ であるから、

$$kW=St+T\leq\mu t(W-T)+T=\mu tW+(1-\mu t)T.$$

$\mu t<1$ のとき、T に関する上の評価を用いると $kW\leq W(\mu t+\mu^2)/(1+\mu^2)$ となり、これを整理すると $t\geq t_0$ が得られる。$\mu t\geq 1$ のときは、$\mu t_0=(1-\alpha\mu^2)/(1+\alpha)<1$ であるから、いずれにせよ $t\geq 1/\mu>t_0$ である。どちらの場合も、つり合っていれば $t\geq t_0$ でなければならない。

十分性（*sufficiency*）。$t\geq t_0$（かつ $t>0$）であるとする。壁の摩擦を限界状態 $T=\mu S$ とし、モーメントの式から $S=kW/(t+\mu)$、さらに $F=S$、$R=W-T$ とおく。残る条件は $S\leq\mu R$ だけであり、これは $S(1+\mu^2)\leq\mu W$、すなわち $k(1+\mu^2)\leq\mu(t+\mu)$ と同値で、ちょうど $t\geq t_0$ にほかならない。（このとき $R>0$ も成り立つ。）

したがって、棒が角 θ で滑るのは $\tan\theta<t_0$ のときであり、かつそのときに限る。「$\theta<\pi/4$ のすべての θ で滑る」とは $t_0\geq 1$ を意味する。実際、$t_0\geq 1$ ならば $\theta<\pi/4$ を満たすすべての θ について $\tan\theta<1\leq t_0$ であり、$t_0<1$ ならば $\max(t_0,0)<\tan\theta<1$ を満たす角はいずれも $\pi/4$ より小さいにもかかわらずつり合っている。

$\alpha=\frac{3}{2}$ のとき、

$$t_0=\frac{1-\frac{3}{2}\mu^2}{\frac{5}{2}\mu}=\frac{2-3\mu^2}{5\mu}\geq 1\iff 3\mu^2+5\mu-2\leq 0\iff(3\mu-1)(\mu+2)\leq 0,$$

ここで $5\mu > 0$ を掛けた。$\mu + 2 > 0$ であるから、これが成り立つのはちょうど $\mu \leq \frac{1}{3}$ のときである。とりうる最大値は

$$\mu = \tfrac{1}{3}.$$

検算

- $\alpha = 1$ のとき棒は一様であり、公式は $\tan\theta = (1-\mu^2)/(2\mu)$ となる。これは両端の摩擦係数が等しい一様なはしごについてよく知られた結果である。
- $\mu = \frac{1}{3}$、$\alpha = \frac{3}{2}$ のとき、$t_0 = (2 - \frac{1}{3})/\frac{5}{3} = 1$ がちょうど成り立つので、限界角は $\pi/4$ である。数値的には、$\mu = 0.332$ のとき $t_0 \approx 1.004$、$\mu = 0.334$ のとき $t_0 \approx 0.996$ となる。
- $\alpha \to \infty$ のとき質量は B に集中し（$d \to 0$）、任意の $\mu > 0$ に対して $\tan\theta$ は負になる。つまり棒はどんな角度でも立っていられる。このとき重力はほぼ壁の位置にはたらくので、これは理にかなっている。

よくある間違い

- モーメントの式で $\alpha l/(\alpha+1)$ を A からの距離として用いてしまう。この値は B から測った距離である。
- 壁の摩擦力を下向きにとってしまう。棒が滑るとき B は下に滑るので、B において棒にはたらく摩擦力は上向きである。
- 最後の不等式の向きを逆にしてしまう。棒は**急な**ほど安定するので、「$\pi/4$ より小さい角で滑る」ためには $\tan\theta_0 \geq 1$ が必要であり、μ が最大のとき θ_0 はちょうど $\pi/4$ になる。

STEP のその先へ

上で行った必要性と十分性の議論は、実は小さな**線形計画法**（linear programming）の問題である。摩擦の法則は許容される力全体の凸（convex）な領域を定め、モーメントの式が表す直線がその領域と交わるときにつり合いが可能となる。この問題のように、つり合いの式だけでは力が決まらない不静定（statically indeterminate）な問題は、大学 1 年次の力学や工学で定番の題材である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、摩擦、トルク、剛体のつり合いをこのような丁寧さで扱っている。

解答例

STEP II 2002、第 12 問

確率・統計 ・ 正規近似とポアソン近似

> **STEP II 2002、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q12

鍵となる考え方

この問題には、3 層のランダム性が入れ子になって積み重なっている。1 枚の硬貨の中での表の回数、1 日の中での硬貨、そして 1 週間の中での日である。各層は二項分布（binomial distribution）に従う個数であり、その「成功」確率は 1 つ下の層から与えられる。与えられた式は、最下層を連続性補正（continuity correction）つきの正規分布（normal distribution）で近似し、中間層をポアソン分布（Poisson distribution）で、さらに正規分布で近似し、最上層は厳密な二項分布のまま残すことで組み立てられている。3 つの層が見えてしまえば、やるべきことは、式の中の各表式がどの近似から生じたのかを特定し、そのうえで与えられた数値に対してそれぞれの近似が妥当かどうかを問うことである。

解答

1 日における 1 枚の硬貨

ある 1 日とある 1 枚の硬貨を固定する。その硬貨を M 回投げたときの表の回数を X とする。各回の投げは独立（independent）で、表の出る確率はいずれも p であるから

$$X \sim \mathrm{B}(M, p), \qquad \mathrm{E}(X) = Mp, \qquad \mathrm{Var}(X) = Mp(1-p).$$

M が大きいとき、X を正規確率変数 $X' \sim \mathrm{N}\big(Mp,\, Mp(1-p)\big)$ で近似する。X は整数値をとるので、「表が m 回未満」とは $X \le m-1$ のことであり、連続性補正を施すとこれは $X' < m - \frac{1}{2}$ となる。よって

$$r = \mathrm{P}(X < m) = \mathrm{P}(X \le m-1) \approx \Phi\left(\frac{m - \frac{1}{2} - Mp}{\sqrt{Mp(1-p)}}\right) = \Phi\left(\frac{2m - 1 - 2Mp}{2\sqrt{Mp(1-p)}}\right).$$

問題文と比べると、これは $h \approx Lr$ であることを意味している。

1 日におけるすべての硬貨

その日に表が m 回未満となる硬貨の枚数（L 枚のうち）を Y とする。各硬貨は独立に投げられ、どれも同じように振る舞うので、各硬貨は独立に確率 r で「成功」し、

$$Y \sim \mathrm{B}(L,r), \qquad \mathrm{E}(Y) = Lr = h, \qquad \mathrm{Var}(Y) = Lr(1-r) = h(1-r).$$

考えてみよう q の式では分母に $\sqrt{h}$ がある。標準偏差（standard deviation）が $\sqrt{h(1-r)}$ ではなく $\sqrt{h}$ なのはなぜか。

この式は r が小さい場合を想定して作られている。すなわち、1 枚の硬貨にとって表が m 回未満となるのはまれな事象であり、一方で L は大きい。この状況では $1-r \approx 1$ なので分散（variance）はほぼ平均に等しく、これはまさにポアソン近似 $Y \approx \mathrm{Po}(h)$ が成り立つ状況である。さらに h もある程度大きければ、$\mathrm{Po}(h)$ はさらに $\mathrm{N}(h,h)$ で近似できる。（同じことだが、$\mathrm{B}(L,r)$ を直接正規分布で近似し、$1-r$ を 1 に置き換えてもよい。）

そこで $Y' \sim \mathrm{N}(h,h)$ をとる。「l 枚より多い」とは $Y \geq l+1$ のことであり、連続性補正を施すと $Y' > l + \frac{1}{2}$ となる。したがって

$$q = \mathrm{P}(Y > l) \approx 1 - \Phi\left(\frac{l+\frac{1}{2}-h}{\sqrt{h}}\right) = \Phi\left(\frac{h-l-\frac{1}{2}}{\sqrt{h}}\right) = \Phi\left(\frac{2h-2l-1}{2\sqrt{h}}\right),$$

ここで標準正規分布の対称性 $1-\Phi(z) = \Phi(-z)$ を用いた。これが与えられた q である。

すべての日

その日の硬貨のうち表が m 回未満となるものが l 枚より多いとき、その日を**よい日**と呼ぶ。どの日もよい日となる確率は同じ q であり、異なる日は異なる投げに関わるので、各日は独立である。したがって K 日のうちのよい日の数は $\mathrm{B}(K,q)$ に従い、

$$\mathrm{P}(\text{よい日がちょうど } k \text{ 日}) = \binom{K}{k} q^k (1-q)^{K-k},$$

ただし q は上のように近似する。これが求める結果である。

数値の場合

ここでは $Mp = 60$、$Mp(1-p) = 24$ であるから

$$\frac{2m-1-2Mp}{2\sqrt{Mp(1-p)}} = \frac{96-1-120}{2\sqrt{24}} = \frac{-25}{9.798} \approx -2.55,$$

となり、$r \approx \Phi(-2.55) \approx 0.0054$、$h = 500r \approx 2.68$ を得る。すると

$$\frac{2h - 2l - 1}{2\sqrt{h}} \approx \frac{5.36 - 9}{3.27} \approx -1.11, \qquad q \approx \Phi(-1.11) \approx 0.133,$$

であり、近似式は $\binom{7}{2} q^2 (1-q)^5 \approx 21 \times 0.0178 \times 0.490 \approx 0.18$ を与える。

考えてみよう どの近似も標準的なものである。そのうち、信頼できる条件の外で使っているものはどれか。

3 つの層を順に見ていく。

- **最上層**。$\mathrm{B}(7, q)$ の段階は（q を与えれば）厳密なので、それ自体は誤差を生まない。しかし $k = 2$ なので、q の誤差を 2 乗して増幅する。
- **最下層**。$M = 100$ で $Mp = 60$、$M(1-p) = 40$ であれば、二項分布の正規近似が通常用いられる範囲に十分入っている。しかしここではそれを裾の 2.55 標準偏差の位置で使い、約 0.005 という確率を求めている。正規近似は分布の主要部分では**絶対誤差**（absolute error）の意味で良い近似であるが、裾ではその**相対誤差**（relative error）が大きくなりうる。とくに $p \neq \frac{1}{2}$ のため二項分布は歪んでいる。r の相対誤差はすべてそのまま $h = Lr$ に伝わり、しかも q は h に敏感である。
- **中間層**。$\mathrm{B}(500, r)$ を $\mathrm{Po}(h)$ で置き換えるのは非常に良い近似である。r はごく小さく L は大きいからである。しかし、続いて $h \approx 2.7$ の $\mathrm{Po}(h)$ を正規分布で近似することは正当化できない。平均が 3 未満のポアソン分布は著しく歪んでおり、通常の目安では平均が少なくともおよそ 10（15 や 20 とする人もいる）必要とされる。

したがって、この近似が正確であるとは期待できない。疑わしいのは、$\mathrm{B}(100, 0.6)$ の裾に対する正規近似と、平均の小さいポアソン分布に対する正規近似の 2 段階である。

実際、r の厳密な値は $\mathrm{P}(X \leq 47) \approx 0.00576$ で、正規近似による推定値より約 7% 大きい。よって h は約 2.88 となるべきであり、そのとき厳密な $\mathrm{P}(Y > 4)$ は 0.133 ではなく約 0.165 となる。最終的な確率は 0.18 ではなく約 0.23 である。（この特定の数値では、$\mathrm{Po}(2.68)$ の正規近似はたまたまポアソン分布そのものとほぼ同じ裾確率を与え、0.133 に対して 0.134 である。したがって誤差の大部分は最下層で生じている。しかし、この幸運を前もって当てにすることはできなかったはずである。）

検算

- 連続性補正の向きは正しい。「m 未満」は $X \leq m - 1$ なので $m - \frac{1}{2}$ で止め、「l より多い」は $Y \geq l + 1$ なので $l + \frac{1}{2}$ から始める。与えられた式にはちょうど $2m - 1$ と $2l + 1$ が現れている。

- 数値的には、$\Phi(-2.5516) = 0.005362$、$h = 2.681$、$q = \Phi(-1.1108) = 0.1333$ であり、0.1825 を得る。二項分布の厳密な和を用いると $r = 0.005761$、$q = 0.1645$（2×10^4 日分のシミュレーションでも 0.164 となり確認できた）であり、最終的な答えは 0.2314 となる。

よくある間違い

- $m - \frac{1}{2}$ の代わりに m を（あるいは $l + \frac{1}{2}$ の代わりに l を）使うこと。そうすると式が一致しない。
- $\sqrt{h(1-r)}$ を使ってしまい、$\sqrt{h}$ にたどり着けなくなること。問題の式で因子 $1 - r$ が落ちているのは、実質的にポアソン近似を用いているからであり、そのことを明記すべきである。
- 「$Mp > 5$ かつ $M(1-p) > 5$」だけで精度を判断すること。この目安は分布の中心部分についてのものであり、0.005 という裾確率についてのものではない。

STEP のその先へ

この問題は、近似を連鎖させたときに誤差がどのように伝わるか、そして裾における絶対誤差と相対誤差の違いを扱っている。大学では、中心極限定理（central limit theorem）はベリー–エッセンの定理（Berry–Esseen theorem）によって精密化される。この定理は正規近似の絶対誤差を評価するものである。裾確率には別の道具が必要であり、たとえばチェルノフ限界（Chernoff bounds）や大偏差理論（large-deviation theory）は、裾確率がどれほど速く小さくなるかを記述する。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）は、ポアソン近似と正規近似、およびチェルノフ型の不等式をわかりやすく扱っている。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は良い副読本である。

解答例

STEP II 2002、第 13 問

確率・統計　・　変換された分布関数

STEP II 2002、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/02-s2-q13

鍵となる考え方

力学の分野に置かれてはいるが、これは分布関数（distribution function）の変換に関する確率の問題である。すべては一つの公式に帰着する。G を微分すると $G'(y) = f(y) \cdot \dfrac{2}{(2-F(y))^2}$ となる。ここで $f = F'$ は X の確率密度関数（density）である。つまり、Y の確率密度関数は、X の確率密度関数に $\frac{1}{2}$ と 2 の間に収まる重みを掛けたものである。これが得られれば、Y に関する各期待値（expectation）は X の確率密度関数に $[\frac{1}{2}, 2]$ 内の重みを掛けたものの積分となり、被積分関数を比較することで不等式が導かれる。条件 $a > 0$ は、被積分関数を非負にするためのものである。

解答

G の性質

問題の意図に従い、X は $[a, b]$ 上で確率密度関数 $f(y) = F'(y) \geq 0$ をもち、X の確率はすべて $[a, b]$ に集中していると仮定する。

$F(a) = 0$ かつ $F(b) = 1$ であるから、

$$G(a) = \frac{0}{2-0} = 0, \qquad G(b) = \frac{1}{2-1} = 1.$$

商の微分法（quotient rule）により、

$$G'(y) = \frac{F'(y)\big(2 - F(y)\big) - F(y)\big(-F'(y)\big)}{(2-F(y))^2} = \frac{2F'(y)}{(2-F(y))^2}.$$

分布関数は単調非減少であるから $F'(y) \geq 0$ であり、分子は非負である。分母は $2 - F(y) \geq 1$ の 2 乗であるから正である。よって $G'(y) \geq 0$ である。

評価については、F は分布関数であるから $0 \le F(y) \le 1$ である。したがって

$$1 \le 2 - F(y) \le 2 \quad \Longrightarrow \quad 1 \le (2 - F(y))^2 \le 4 \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{1}{2} \le \frac{2}{(2 - F(y))^2} \le 2,$$

となる。ここで、すべての量が正であるから 2 乗しても不等号の向きは保たれ、逆数をとると向きが反転し、さらに 2 を掛けて尺度を変えている。これが求める二重不等式である。

以上の $G(a) = 0$、$G(b) = 1$、および G が単調非減少であることから、G は $[a, b]$ 上の正真正銘の分布関数であり、確率変数 Y は意味をもつ。その確率密度関数は

$$g(y) = G'(y) = w(y)\, f(y), \qquad \text{ただし} w(y) = \frac{2}{(2 - F(y))^2} \in \left[\tfrac{1}{2}, 2\right].$$

$\mathrm{E}(Y)$ の評価

考えてみよう 不等式 $\frac{1}{2} \le w(y) \le 2$ に $yf(y)$ を掛けても不等号の向きが保たれるのはなぜか。

それは $[a, b]$ 上で $yf(y) \ge 0$ だからである。実際、$f(y) \ge 0$ であり、$y \ge a > 0$ である。仮定 $a > 0$ が使われるのはまさにこの箇所である。よって

$$\tfrac{1}{2}\, yf(y) \le y\, w(y) f(y) \le 2\, yf(y) \qquad \text{ただし} a \le y \le b,$$

であり、$[a, b]$ 上で積分しても不等式は保たれる。

$$\tfrac{1}{2} \int_a^b yf(y)\, \mathrm{d}y \;\le\; \int_a^b y\, g(y)\, \mathrm{d}y \;\le\; 2 \int_a^b yf(y)\, \mathrm{d}y,$$

すなわち

$$\tfrac{1}{2}\, \mathrm{E}(X) \le \mathrm{E}(Y) \le 2\, \mathrm{E}(X),$$

となり、示すべきことが得られた。

$\mathrm{Var}(Y)$ の評価

同様に、$y^2 f(y) \ge 0$ である（これには $f \ge 0$ だけが必要である）から、$w(y) \le 2$ にこれを掛けて積分すると

$$\mathrm{E}(Y^2) = \int_a^b y^2\, w(y) f(y)\, \mathrm{d}y \le 2 \int_a^b y^2 f(y)\, \mathrm{d}y = 2\, \mathrm{E}(X^2).$$

引かれる項については、$(\mathrm{E}(Y))^2$ の**下からの**評価が必要である。前の小問より $\mathrm{E}(Y) \ge \frac{1}{2}\mathrm{E}(X)$ であり、$X \ge a > 0$ より $\mathrm{E}(X) > 0$ である。両辺とも正であるから、2 乗しても問題ない。

$$(\mathrm{E}(Y))^2 \ge \tfrac{1}{4}(\mathrm{E}(X))^2.$$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{E}(Y^2) - (\mathrm{E}(Y))^2 \\ &\le 2\,\mathrm{E}(X^2) - \tfrac{1}{4}(\mathrm{E}(X))^2 \\ &= 2\big(\mathrm{Var}(X) + (\mathrm{E}(X))^2\big) - \tfrac{1}{4}(\mathrm{E}(X))^2 \\ &= 2\,\mathrm{Var}(X) + \tfrac{7}{4}(\mathrm{E}(X))^2,\end{aligned}$$

となる。3 行目では $\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + (\mathrm{E}(X))^2$ を用いた。これが求める分散（variance）の評価である。

検算

X を $[1,3]$ 上の一様分布（uniform distribution）に従う確率変数とすると、$F(y) = \frac{1}{2}(y-1)$、$\mathrm{E}(X) = 2$ である。$Y \ge 1$ であるから $\mathrm{E}(Y) = 1 + \int_1^3 (1 - G(y))\,\mathrm{d}y$ であり、$u = F(y)$ と置換すると

$$\mathrm{E}(Y) = 1 + 2\int_0^1 \frac{2(1-u)}{2-u}\,\mathrm{d}u = 1 + 4(1 - \ln 2) \approx 2.227,$$

となり、1 と 4 の間に十分収まっている。直観的には、w は F が小さいところでは小さく、F が 1 に近いところでは大きいので、Y は区間の上側に偏り、この例では $\mathrm{E}(Y) > \mathrm{E}(X)$ となる。また、ランダムな区間上のランダムなべき乗型分布 300 個について、$\frac{1}{2}\mathrm{E}(X) \le \mathrm{E}(Y) \le 2\mathrm{E}(X)$ と分散の評価がともに成り立つことを数値的に確かめた。観測された比 $\mathrm{E}(Y)/\mathrm{E}(X)$ はおよそ 0.92 から 1.31 の間にあった。

よくある間違い

- $a > 0$ がなぜ重要かを忘れること。X が負の値をとりうるなら、$yf(y)$ が負になりうるので、それを掛けると不等号の向きが反転してしまう。
- $\mathrm{E}(Y) \le 2\mathrm{E}(X)$ を使って $\mathrm{Var}(Y)$ を評価すること。項 $(\mathrm{E}(Y))^2$ は引かれるので、必要なのは上からの評価ではなく下からの評価である。
- $(y-\mu)^2$ を g で積分して $\mathrm{Var}(Y)$ と $\mathrm{Var}(X)$ を直接比較しようとすること。二つの分散は異なる平均を用いるので、代わりに $\mathrm{E}(Y^2)$ を扱うべきである。

STEP のその先へ

$g = wf$ と書くことは、測度の変換（change of measure）の簡単な例である。新しい分布は古い分布に関する密度（**尤度比**（likelihood ratio）、あるいはラドン＝ニコディ

ム（Radon–Nikodym）導関数）をもち、その比に対する評価はそのまま期待値の評価に移る。この考え方は、統計学における重点サンプリング（importance sampling）や、金融数学で用いられる確率測度の変換の基礎となっている。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、分布関数、確率密度関数、期待値を、この話題をさらに進めるのにちょうどよい水準で扱っている。

解答例

STEP II 2002、第 14 問

確率・統計 ・ 混合分布とベイズの定理

STEP II 2002、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/02-s2-q14

鍵となる考え方

これは二段階の試行である。まず地域が一つ選ばれ、次にその地域で事故が起こる。したがって、地域で条件付けをすればよい。全期待値の法則（law of total expectation）から平均が、全確率の法則（law of total probability）から分布が得られ、最後にベイズの定理（Bayes' theorem）を使って問いの向きを逆にする。一つの地域での事故の件数はポアソン分布（Poisson distribution）でモデル化する。問題文には平均しか与えられていないからであり、示すべき式に現れる $\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k/k!$ という形がこのモデルの正しさを裏づけている。

解答

設定

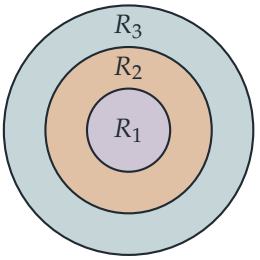
選ばれた地域の番号を S とし、R_n における事故件数の平均を $\lambda_n = 2 - \frac{n}{N}$ とする。地域 R_n は半径 $n-1$ と n の円環（annulus）であるから、その面積は

$$\pi n^2 - \pi(n-1)^2 = \pi(2n-1).$$

である。島全体の面積は πN^2 である（確認として、$\sum_{n=1}^{N}(2n-1) = N^2$ となる）。よって

$$\mathrm{P}(S=n) = \frac{2n-1}{N^2}, \qquad n = 1, \ldots, N.$$

$S = n$ のもとで、X を平均 λ_n のポアソン分布に従うものとしてモデル化する。すべての n について $\lambda_n \geq 1 > 0$ であるから、これらのポアソン分布はいずれも意味をもつ。



面積 $R_n = \pi(2n-1)$

長期的な平均

大数の法則（law of large numbers）により、長期的に見た 1 日あたりの記録件数の平均は $\mathrm{E}(X)$ である。地域で条件付けをすると

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_{n=1}^{N} \mathrm{P}(S=n)\,\mathrm{E}(X \mid S=n) = \sum_{n=1}^{N} \frac{2n-1}{N^2}\Big(2-\frac{n}{N}\Big)\\ &= 2\sum_{n=1}^{N}\frac{2n-1}{N^2} \;-\; \frac{1}{N^3}\sum_{n=1}^{N}(2n^2-n)\\ &= 2-\frac{1}{N^3}\Big(\frac{N(N+1)(2N+1)}{3}-\frac{N(N+1)}{2}\Big).\end{aligned}$$

を得る。最初の和は、選ばれる確率の合計が 1 であるから 1 となる。括弧の中では、与えられた $\sum n^2$ の公式と $\sum n = \frac{1}{2}N(N+1)$ を用いた。$\frac{1}{6}N(N+1)$ をくくり出すと $2(2N+1)-3 = 4N-1$ が残るので、

$$\mathrm{E}(X) = 2-\frac{(N+1)(4N-1)}{6N^2} = 2-\frac{1}{6}\Big(1+\frac{1}{N}\Big)\Big(4-\frac{1}{N}\Big),$$

となる。ここでは N^2 を $N\cdot N$ として二つの因数に分けた。これが求める結果である。

X の分布

全確率の法則により、$k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して

$$\mathrm{P}(X=k) = \sum_{n=1}^{N}\mathrm{P}(S=n)\,\mathrm{P}(X=k \mid S=n) = \sum_{n=1}^{N}\frac{2n-1}{N^2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_n}\lambda_n^k}{k!}.$$

である。ここで各部分を N を用いて書き直す。

$$\lambda_n^k = \Big(\frac{2N-n}{N}\Big)^k = N^{-k}(2N-n)^k, \qquad \mathrm{e}^{-\lambda_n} = \mathrm{e}^{-2+n/N} = \mathrm{e}^{-2}\,\mathrm{e}^{n/N}.$$

因数 e^{-2}、N^{-2}、N^{-k}、$1/k!$ は n によらないので、和の外に出せる。

$$\mathrm{P}(X=k) = \frac{\mathrm{e}^{-2}N^{-k-2}}{k!}\sum_{n=1}^{N}(2n-1)(2N-n)^k\,\mathrm{e}^{n/N},$$

これで示された。

$N=3$、事故 2 件の場合

求めたいのは $\mathrm{P}(S=2 \mid X=2)$ である。ベイズの定理により

$$\mathrm{P}(S=2 \mid X=2)=\frac{\mathrm{P}(S=2)\,\mathrm{P}(X=2 \mid S=2)}{\mathrm{P}(X=2)}.$$

考えてみよう $\mathrm{P}(X=2)$ をすべて計算する必要があるだろうか？

その必要はない。分子は $\mathrm{P}(X=2)$ を表す和の $n=2$ の項にほかならない。したがって共通因数 $\mathrm{e}^{-2}N^{-k-2}/k!$ は約分され、求める確率は $\sum(2n-1)(2N-n)^k\mathrm{e}^{n/N}$ の $n=2$ の項を和全体で割ったものになる。

$N=3$、$k=2$ のとき、各項 $(2n-1)(6-n)^2\mathrm{e}^{n/3}$ は

$$n=1:\ 1\cdot 25\,\mathrm{e}^{1/3},\qquad n=2:\ 3\cdot 16\,\mathrm{e}^{2/3}=48\,\mathrm{e}^{2/3},\qquad n=3:\ 5\cdot 9\,\mathrm{e}=45\,\mathrm{e}.$$

である。よって、分母と分子を $\mathrm{e}^{2/3}$ で割ると

$$\mathrm{P}(S=2 \mid X=2)=\frac{48\,\mathrm{e}^{2/3}}{25\,\mathrm{e}^{1/3}+48\,\mathrm{e}^{2/3}+45\,\mathrm{e}}=\frac{48}{48+45\,\mathrm{e}^{1/3}+25\,\mathrm{e}^{-1/3}},$$

となり、これが求める結果である。

検算

- $N=1$ のときは平均 1 の地域が一つだけであり、公式は $2-\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 3=1$ を与える。$N\to\infty$ のとき平均は $2-\frac{4}{6}=\frac{4}{3}$ に近づく。これは $\int_0^1 2x(2-x)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$ と一致する。ここで、一様に選んだ点の相対半径 x の密度は $2x$ である。
- $N=3$ のとき平均は $\frac{32}{27}\approx 1.185$ である。4×10^5 日分のシミュレーション（円板内に一様な点を選び、次にポアソン分布に従う件数を生成する）では平均 1.182 が得られた。また $\mathrm{P}(X=2)\approx 0.209$（厳密値 0.2094）が得られ、事故 2 件の日のうち R_2 で起きたものの割合は 0.372 となった。最終的な答えの値は 0.3729 である。
- 分布の公式を k について足し合わせると、試したすべての N について全確率が 1 となる。

よくある間違い

- 地域を面積 $2n-1$ に比例する確率ではなく、等しい確率 $1/N$ で選んでしまう。
- ポアソン分布の**平均**を平均し、X がその平均をもつポアソン分布に従うと主張してしまう。ポアソン分布の混合はポアソン分布ではない。このように単純に平均操作を通り抜けられるのは期待値だけである。

STEP のその先へ

変数 X は**混合分布**（mixture distribution）に従う。地域は隠れ変数（hidden variable）の役割を果たし、最後の小問はそれについてのベイズ推論（Bayesian inference）を行っている。上の二つ目の間違いは全分散の法則（law of total variance）$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(\mathrm{Var}(X \mid S)) + \mathrm{Var}(\mathrm{E}(X \mid S))$ によって説明できる。この法則から、混合分布は同じ平均をもつ単一のポアソン分布よりも常に散らばりが大きいことがわかる。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、条件付き期待値（conditional expectation）とこうした混合分布をよく扱っている。

解答例

STEP III 2002、第 1 問

純粋数学 ・ 広義積分と体積

STEP III 2002、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

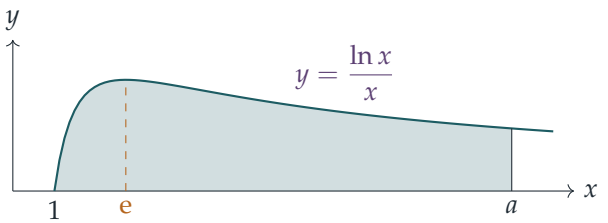
step.maths.org/questions/02-s3-q1

鍵となる考え方

$\frac{1}{x}$ が $\ln x$ の導関数（derivative）であることに気づけば、どちらの積分も易しくなる。面積の被積分関数（integrand）は「ある関数とその導関数の積」なので、見ただけで積分できる。体積の被積分関数 $(\ln x)^2/x^2$ には x の累乗が残っているので、部分積分（integration by parts）を 2 回行い、そのたびに $\ln x$ の累乗を微分して次数を下げる。興味深いのは 2 つの極限の対比である。曲線はちょうど面積が限りなく大きくなる程度にゆっくりと減衰するが、それを 2 乗すると、体積が一定の値に落ち着く程度に速く減衰するのである。

解答

$x \geq 1$ では $\ln x \geq 0$ であるから、曲線は x 軸上またはその上側にあり、面積は単に積分そのものである。曲線は $(1,0)$ から出発し、$x = \mathrm{e}$ で最大となり（そこで $y' = (1-\ln x)/x^2 = 0$）、その後ゆっくりと軸に近づいていく。



面積

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}(\ln x)^2\right) = \dfrac{\ln x}{x}$ であるから、

$$A(a) = \int_1^a \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^a = \tfrac{1}{2}(\ln a)^2,$$

となる。ここで $\ln 1 = 0$ を用いた。（同じことであるが、$u = \ln x$、$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x/x$ と置換すれば $\int_0^{\ln a} u\,\mathrm{d}u$ が得られる。）

$a \to \infty$ のとき $\ln a \to \infty$ であるから、$A(a) \to \infty$ となる。すなわち、増え方は非常にゆっくりではあるが、面積は有界でない。

体積

x 軸のまわりに回転させると、体積は $V(a) = \pi \displaystyle\int_1^a y^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_1^a \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$ である。

$u = (\ln x)^2$、$\mathrm{d}v = x^{-2}\,\mathrm{d}x$ として部分積分する。このとき $\mathrm{d}u = \frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$、$v = -\frac{1}{x}$ であるから、

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{(\ln x)^2}{x} + 2\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

$u = \ln x$、$\mathrm{d}v = x^{-2}\,\mathrm{d}x$ として同じことをもう一度行うと、

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}.$$

これらを合わせると、

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{(\ln x)^2 + 2\ln x + 2}{x} + C.$$

$x = 1$ では括弧の中は $0 + 0 + 2$ であるから、下端からの寄与は $-(-2) = +2$ となり、

$$V(a) = \pi\left(2 - \frac{(\ln a)^2 + 2\ln a + 2}{a}\right).$$

考えてみよう $(\ln a)^2/a$ の分子も分母も無限大に発散するのに、これが 0 に収束することはどうしてわかるのだろうか。

対数は正のどんな累乗よりもゆっくり増加する。これを厳密にするために、すべての $t > 0$ に対して $\ln t < t$ が成り立つことから出発する（直線 $y = t$ は $y = \ln t$ の上側にある。差 $t - \ln t$ は $t = 1$ で最小値 1 をとる）。$t = a^{1/4}$ とおくと $\frac{1}{4}\ln a < a^{1/4}$、すなわち $\ln a < 4a^{1/4}$ が得られる。よって $a > 1$ のとき、

$$0 < \frac{(\ln a)^2}{a} < \frac{16\,a^{1/2}}{a} = \frac{16}{\sqrt{a}} \to 0, \qquad 0 < \frac{\ln a}{a} < \frac{4}{a^{3/4}} \to 0,$$

であり、もちろん $2/a \to 0$ である。したがって $V(a)$ の中の分数は 0 に収束し、

$$V(a) \to 2\pi \quad \text{ただし} a \to \infty.$$

となる。被積分関数は正であるから $V(a)$ は a について増加する。したがって体積は 2π に向かって単調に増加するが、決して 2π に達することはない。回転させる領域の面積は無限大であるにもかかわらず、この立体の体積は有限なのである。

検算

- $a = 1$ のとき、どちらの公式も当然そうあるべきとおり 0 を与える：$A(1) = 0$、$V(1) = \pi(2 - 2) = 0$。
- $-\big((\ln x)^2 + 2\ln x + 2\big)/x$ を微分すると $(\ln x)^2/x^2$ に戻る（$2\ln x$ の項と 2 の項は、括弧の中身の導関数と打ち消し合う）。
- 数値的には、$\pi \int_1^{10} (\ln x)^2/x^2 \,\mathrm{d}x$ にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると 2.54247 となり、公式と一致する。また $x = \mathrm{e}^t$ とおくと、無限遠までの体積は $\pi \int_0^{\infty} t^2 \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$ となり、これを数値計算すると $6.283185\ldots = 2\pi$ となる。

よくある間違い

- 下端を忘れること。$\ln 1 = 0$ により $x = 1$ ではほとんどの項が消えるが、定数項 $-2/x$ は消えず、これが極限値 2π のすべてを担っている。
- 何の理由も示さずに $(\ln a)^2/a \to 0$ と主張すること。$\ln a < 4a^{1/4}$ のような 1 行の比較で十分である。

STEP のその先へ

これは「ガブリエルのラッパ」(Gabriel's horn、$y = 1/x$ を回転させたもの)の親戚である。ガブリエルのラッパは体積が有限で表面積が無限大の立体であるが、ここでは平面領域の面積さえ無限大である。置換 $x = \mathrm{e}^t$ によって体積は $\pi \int_0^{\infty} t^2 \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t = \pi\,\Gamma(3) = 2!\,\pi$ となる。これはガンマ関数（gamma function）$\Gamma(n+1) = n!$ との最初の出会いである。広義積分（improper integral）や「対数は累乗に負ける」といった比較をきちんと意味づけることは、大学 1 年の解析学の中心的な話題である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、それについて読むのによい本である。

解答例

STEP III 2002、第 2 問

純粋数学 ・ 逆正接関数の級数

STEP III 2002、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/02-s3-q2

鍵となる考え方

最初の結果は、正接の加法定理（tangent addition formula）を姿を変えて述べたものにすぎない。本当に必要な作業は、両辺がともに tan が単射（one-to-one）となる同じ区間に属する角であることを確かめることだけである。この公式が得られれば、帰納法（induction）はそれを 1 回適用し、少し因数分解するだけで済む。最後の和については、$r^2 - r + 1$ が $r^2 + r + 1$ の r を 1 つずらしたものにほかならないことに気づくのが要点である。したがって、新しい級数（series）は元の級数の先頭に項を 1 つ加えたものになる。

解答

加法定理

$A = \arctan a$、$B = \arctan b$ とおく。このとき $\tan A = a$、$\tan B = b$ であり、

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{a + b}{1 - ab},$$

が成り立つ。$ab < 1$ であるから、この式は意味をもつ。これにより、$A + B$ と $\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$ の正接が等しいことがわかる。しかし、tan は周期 π をもつので、これだけでは両者が等しいとはいえない。そこで、両方の角が tan が単射となる 1 つの区間に属することを示す必要がある。

考えてみよう なぜ $\tan(A + B) = \frac{a+b}{1-ab}$ で証明が終わりにならないのだろうか。

証明が終わらないのは、arctan の値が $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ の範囲にしかないからである。$A + B$

もこの範囲にあることを確かめなければならない。

- $0 < a < 1$ であり、arctan は増加関数であるから、$0 < A < \frac{\pi}{4}$ である。同様に $0 < B < \frac{\pi}{4}$ であるから、$0 < A + B < \frac{\pi}{2}$ となる。
- $a + b > 0$ かつ $1 - ab > 0$ であるから、分数 $\frac{a+b}{1-ab}$ は正である。よって、その arctan も $(0, \frac{\pi}{2})$ に属する。

関数 tan は $(0, \frac{\pi}{2})$ で狭義単調増加（strictly increasing）であり、したがって単射である。ゆえに、この区間で正接が等しい 2 つの角は等しく、

$$\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right). \qquad \checkmark$$

が得られる。

数学的帰納法

$S_n = \sum_{r=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{r^2+r+1}\right)$ とおく。示すべきことは $S_n = \arctan\left(\frac{n}{n+2}\right)$ である。

基底段階。 $n = 1$ のとき、両辺はともに $\arctan\frac{1}{3}$ である。

帰納段階。 ある $n \geq 1$ に対して $S_n = \arctan\left(\frac{n}{n+2}\right)$ が成り立つと仮定する。次の項について

$$(n+1)^2 + (n+1) + 1 = n^2 + 3n + 3,$$

であるから、

$$S_{n+1} = \arctan\left(\frac{n}{n+2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right).$$

となる。2 つの引数はともに 0 より大きく 1 より小さいので、$a = \frac{n}{n+2}$、$b = \frac{1}{n^2+3n+3}$ として加法定理が適用できる。$\frac{a+b}{1-ab}$ の分子と分母に $(n+2)(n^2+3n+3)$ を掛けると

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{1-ab} &= \frac{n(n^2+3n+3)+(n+2)}{(n+2)(n^2+3n+3)-n} \\ &= \frac{n^3+3n^2+4n+2}{n^3+5n^2+8n+6}.\end{aligned}$$

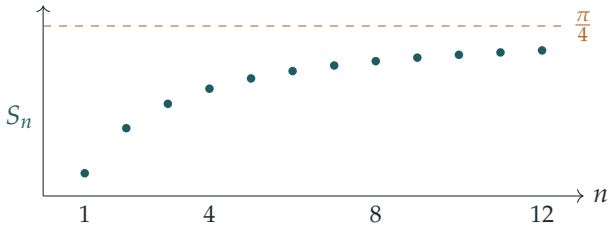
を得る。2 つの 3 次式はともにある負の整数で 0 になる。分子は $n = -1$ で、分母は $n = -3$ で 0 となる。因数分解すると

$$\frac{a+b}{1-ab} = \frac{(n+1)(n^2+2n+2)}{(n+3)(n^2+2n+2)} = \frac{n+1}{n+3},$$

となる。ここで $n^2 + 2n + 2 = (n+1)^2 + 1 > 0$ であるから約分してよい。よって $S_{n+1} = \arctan\left(\frac{n+1}{(n+1)+2}\right)$ であり、これは $n+1$ のときの主張である。数学的帰納法により、すべての $n \geq 1$ について結果が成り立つ。✓

無限和。$n \to \infty$ のとき $\frac{n}{n+2} \to 1$ である。arctan は連続（continuous）であるから、

$$\sum_{r=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{r^2+r+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \arctan\left(\frac{n}{n+2}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$



最後の和

$s = r - 1$ とおく。すると

$$r^2 - r + 1 = (s+1)^2 - (s+1) + 1 = s^2 + s + 1.$$

である。r が $1, 2, 3, \ldots$ を動くとき、s は $0, 1, 2, \ldots$ を動く。$s = 0$ の項は $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ であり、残りの項（$s \geq 1$）はちょうど先ほど和を求めた級数になる。したがって

$$\sum_{r=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{r^2-r+1}\right) = \arctan 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}. \qquad \checkmark$$

である。最初の級数が収束（converge）するので 2 番目の級数も収束し、したがって第 1 項を切り離すことは正当である。

検算

- $n = 2$ のとき、$\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}$ の正接は $\frac{10/21}{20/21} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ であり、公式が予測するとおりである。
- 数値的には $S_{2000} \approx 0.784898$ であり、$\arctan\frac{2000}{2002}$ とは 10^{-12} の精度で一致する。一方 $\frac{\pi}{4} \approx 0.785398$ である。
- 2 番目の級数を $r = 10^6$ まで足すと $1.5707953\ldots$ となり、$\frac{\pi}{2}$ との差は 10^{-6} 以内である。これは n 項までの差 $\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{n-1}{n+1} = \arctan\frac{1}{n} \approx \frac{1}{n}$ と合っている。

よくある間違い

- 「両辺の tan が等しい」で止めてしまうこと。値域についての議論がなければ証明は不完全である。（たとえば $a = b = 2$ のとき公式は成り立たない。左辺は正であるが、$\arctan(-\frac{4}{3})$ は負である。）

- 帰納段階で公式を使う前に、2 つの引数がともに $(0,1)$ に属することの確認を忘れること。
- 最後の和を再び $\frac{\pi}{4}$ と書いてしまうこと。ずらし $r \mapsto r-1$ によって、先頭に余分な項 $\arctan 1$ が加わる。

STEP のその先へ

帰納法にはもっと鮮やかな別解がある。$\frac{1}{r^2+r+1} = \frac{(r+1)-r}{1+r(r+1)}$ であるから、各項は $\arctan(r+1) - \arctan r$ に等しい。したがって和は**次々に打ち消し合って**（telescoping）$\arctan(n+1) - \frac{\pi}{4}$ となり、これは減法定理により $\arctan \frac{n}{n+2}$ に等しい。打ち消し合いの構造を見抜くことや、部分和（partial sums）の極限を連続性によって正当化することは、大学初年度の解析学の講義で日常的に使われる道具である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は級数と連続性を丁寧に扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）にはこの種の STEP 形式の演習がさらに収められている。

解答例

STEP III 2002、第 3 問

純粋数学 • 曲線の概形

> **STEP III 2002、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s3-q3

鍵となる考え方

すべてはグラフの形から導かれる。グラフは $x = b$ において下向きの鉛直な接線（vertical tangent）をもって出発し、ただ一つの最小値（minimum）まで下がったのち、限りなく増加する。出発点の高さと最小値の高さがわかれば、$\mathrm{f}(x) = c$ の解の個数を数えることは、高さ c の水平線を引いて曲線と何回交わるかを見るだけのことになる。二つの数値的な方程式は、その c^2 の値がこれらの範囲の境界や内部に位置する特別な場合である。

解答

グラフ

左端では $\mathrm{f}(b) = a\sqrt{b}$ である。$x > b$ に対して微分すると

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-b}}.$$

$x \to b^+$ のとき第 2 項は $-\infty$ に発散するので、曲線は点 $(b, a\sqrt{b})$ から真下に向かって出発する（鉛直な接線）。

二つの平方根はともに正であるから

$$\mathrm{f}'(x) < 0 \iff a\sqrt{x-b} < \sqrt{x} \iff a^2(x-b) < x \iff x < \frac{a^2 b}{a^2-1},$$

ここで最後の変形では $a^2 - 1 > 0$ を用いた。よって f は $[b, x_0]$ で狭義単調減少（strictly decreasing）、$[x_0, \infty)$ で狭義単調増加（strictly increasing）である。ただし

$$x_0 = \frac{a^2 b}{a^2-1}.$$

最小となる点では $x_0 - b = \dfrac{b}{a^2-1}$ であるから

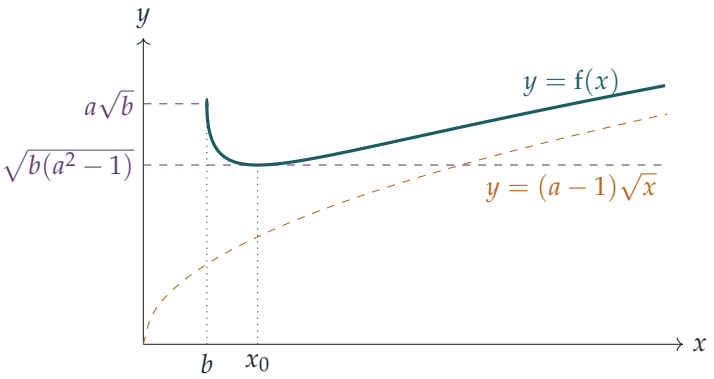
$$\mathrm{f}(x_0) = a\cdot\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a^2-1}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2-1}} = \frac{(a^2-1)\sqrt{b}}{\sqrt{a^2-1}} = \sqrt{b(a^2-1)}.$$

x が大きいとき、有理化（rationalising）すると

$$\mathrm{f}(x) = (a-1)\sqrt{x} + \left(\sqrt{x} - \sqrt{x-b}\right) = (a-1)\sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{x}+\sqrt{x-b}},$$

となる。したがって $a > 1$ より $\mathrm{f}(x) \to \infty$ であり、曲線は $y = (a-1)\sqrt{x}$ のすぐ上にあって、$x \to \infty$ のときこれに近づく。

最後に、出発点の高さは最小値より高い。実際 $a^2b > (a^2-1)b$ であるから $a\sqrt{b} > \sqrt{b(a^2-1)}$ である。



解の個数を数える

最小値を $m = \sqrt{b(a^2-1)}$、出発点での値を $M = a\sqrt{b}$ とおくと $0 < m < M$ である。二つの単調（monotonic）な部分のそれぞれにおいて f は連続（continuous）かつ狭義単調であるから、値域の各値をちょうど 1 回ずつとる。

- $[b, x_0]$ 上では、f は $[m, M]$ の各値をちょうど 1 回ずつとる。
- $[x_0, \infty)$ 上では、f は $[m, \infty)$ の各値をちょうど 1 回ずつとる。

二つの部分が共有するのは点 x_0 のみであり、そこでの値は m である。

すべての $x \geq b$ に対して $\mathrm{f}(x) \geq m$ であるから、$c < m$ のとき方程式 $\mathrm{f}(x) = c$ は解をもたない。$c > 0$ のもとでこれは $c^2 < m^2$ と同値であり、すなわち

$$c^2 < b(a^2-1) \quad \Longrightarrow \quad \text{解なし},$$

これが示すべきことであった。残りの場合については次のとおりである。

考えてみよう なぜ $c^2 = a^2 b$ のとき解は1個ではなく2個なのか？

$c = M$ のとき、左側の部分からは端点 $x = b$ そのものが解として得られる。定義域（domain）は $x = b$ を含むので、これは正当な解である。右側の部分からは、さらに先にもう一つの解が得られる。左側の部分から解が得られなくなるのは $c > M$ のときに限る。したがって $c > 0$ のとき、

- $c^2 = b(a^2 - 1)$ のとき（水平線が最小点に接し、解は $x = x_0$ のみ）、または $c^2 > a^2 b$ のとき（その高さまで届くのは増加する枝だけ）、**解はちょうど1個**である。
- $b(a^2 - 1) < c^2 \leq a^2 b$ のとき（各枝に1個ずつ）、**解はちょうど2個**である。

小問 (i)

ここでは $a = 3, b = 2, c = 4$ であるから $b(a^2 - 1) = 16 = c^2$ となる。水平線は最小点に接し、解はちょうど1個で

$$x = x_0 = \frac{9 \cdot 2}{8} = \frac{9}{4}.$$

実際 $3 \cdot \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$ である。直接解くこともできる。$3\sqrt{x} - 4 = \sqrt{x - 2}$ と変形して両辺を2乗すると $8x - 24\sqrt{x} + 18 = 0$、すなわち $(2\sqrt{x} - 3)^2 = 0$ を得る。この重解（repeated root）は、接すること（tangency）を代数的に表したものである。

小問 (ii)

ここでは $a = 3, b = 3, c = 5$ であるから $b(a^2 - 1) = 24 < 25 = c^2 < 27 = a^2 b$ となり、解はちょうど2個である。それらを求めるため、方程式を $3\sqrt{x} - 5 = \sqrt{x - 3}$ と書き、両辺を2乗する。

$$9x - 30\sqrt{x} + 25 = x - 3 \quad \Longrightarrow \quad 4x - 15\sqrt{x} + 14 = 0.$$

$\sqrt{x}$ についての2次方程式とみると $(\sqrt{x} - 2)(4\sqrt{x} - 7) = 0$ であるから $\sqrt{x} = 2$ または $\sqrt{x} = \frac{7}{4}$ となり、

$$x = 4 \qquad \text{または} \qquad x = \frac{49}{16}.$$

2乗すると見かけの解（spurious roots）が生じうるので、両方をもとの方程式で確かめる。どちらも $x \geq 3$ を満たし（$\frac{49}{16} = 3.0625$ である）、

$$3 \cdot 2 - \sqrt{1} = 5, \qquad 3 \cdot \frac{7}{4} - \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{21}{4} - \frac{1}{4} = 5.$$

よって両方とも真の解であり、解の個数が2個であることと一致する。予想どおり、$x_0 = \frac{27}{8} = 3.375$ の両側に1個ずつある。

検算

- $a = \frac{3}{2}, b = 2$（図の場合）のとき、$x_0 = \frac{18}{5}$ であり、$\mathrm{f}(\frac{18}{5}) = \frac{3}{2}\sqrt{3.6} - \sqrt{1.6} = \sqrt{2.5} \approx 1.581$ は $\mathrm{f}(2) = \frac{3}{2}\sqrt{2} \approx 2.121$ より小さい。
- ランダムに選んだ 200 組の (a, b) について、細かい格子上で f を数値的に調べたところ、x_0 で最小値 $\sqrt{b(a^2-1)}$ をとることが確認でき、$y = c$ との交わりを数えると、c^2 の三つの範囲でそれぞれ解は 0 個、2 個、1 個となった。
- (i) で重解が得られたことは、c^2 がちょうど $b(a^2-1)$ に一致することと整合する。(ii) では $c^2 = 25$ は 24 と 27 の間に真に含まれ、実際に 2 個の解が見つかった。

よくある間違い

- $c^2 = a^2 b$ を「解が 1 個」の場合に入れてしまうこと。$x = b$ は定義域に含まれるので、解として数える。
- 2 乗したあとに確認をしないこと。ここでは両方の解が残るが、それぞれについて $3\sqrt{x} - 5 \geq 0$ と $x \geq 3$ を確かめなければならない。
- $\mathrm{f} \to \infty$ となるのは $a > 1$ のおかげであることを忘れること。$a \leq 1$ ならば最小値は存在せず、様子はまったく異なる。

STEP のその先へ

解の個数を数える議論は、解析学の二つの事実に基づいている。区間上の連続関数は、両端での値の間にあるすべての値をとること（中間値の定理（intermediate value theorem））と、狭義単調な関数は各値を高々 1 回しかとらないことである。この二つを合わせると、グラフの概形が証明に変わる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は両者を丁寧に展開し、なぜ連続性こそがまさに必要な仮定なのかを示している。

解答例

STEP III 2002、第 4 問

純粋数学 ・ ディオファントス不等式

> **STEP III 2002、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s3-q4

鍵となる考え方

方程式 $x^3+x^2=y^3-y^2$ では、急速に増加する量と、$-y^2$ によって増加を抑えられた量とが競い合っている。そのため y は x を「追い越す」必要があるが、その差は 1 未満にとどまる。この 2 つの不等式（inequality）によって y は x と $x+1$ の間に厳密に挟み込まれ、その隙間に入る整数（integer）は存在しない。最後の小問では、追加の解は 0 または負の値からしか生じ得ない。さらに、(m,n) を $(-n,-m)$ に置き換えるという巧妙な対称性（symmetry）を用いれば、場合分けが半分で済む。

解答

1 つ目の結果

$x,y>0$ かつ $x^3+x^2=y^3-y^2$ とし、背理法（proof by contradiction）のために $x\geq y$ と仮定する。正の実数上では 3 乗も 2 乗も単調増加（increasing）であるから、

$$x^3+x^2\geq y^3+y^2>y^3-y^2,$$

となる。ここで狭義の不等号の部分には $y^2>0$ を用いた。これは方程式に矛盾するので、$x<y$ である。

2 つ目の結果

次に $0<x\leq y-1$ とする。すると $y\geq x+1>1$ である。$f(t)=t^3-t^2$ とおく。このとき $t>\frac{2}{3}$ に対して $f'(t)=3t^2-2t=t(3t-2)>0$ であるから、f は $[1,\infty)$ 上で単調

増加である。$y \geq x+1$ であり、どちらもこの区間に属するので、

$$\begin{aligned} y^3 - y^2 = f(y) \geq f(x+1) &= (x+1)^2\big((x+1)-1\big) \\ &= x(x+1)^2 = x^3 + 2x^2 + x \\ &= (x^3 + x^2) + (x^2 + x) \\ &> x^3 + x^2, \end{aligned}$$

が成り立つ。$x > 0$ のとき $x^2 + x > 0$ だからである。よって、求める通り $x^3 + x^2 < y^3 - y^2$ である。

2つの結果を合わせると、正の x に対して、$x^3 + x^2 = y^3 - y^2$ を満たす任意の正の y は

$$x < y < x+1.$$

を満たすことがわかる。

正の整数の組は存在しない

正の整数 a, b が $a^3 - b^3 = a^2 + b^2$ を満たすと仮定する。右辺は正であるから、$a^3 > b^3$ であり $a > b$ である。式を変形すると

$$b^3 + b^2 = a^3 - a^2,$$

となり、これは上の方程式で $x = b, y = a$（どちらも正）としたものである。よって $b < a < b+1$ である。

考えてみよう 整数であることは実際どこで使われているだろうか？

ここだけである。すなわち、b と $b+1$ の間に厳密に挟まれる整数は存在しない。言い換えれば、a, b が整数で $a > b$ ならば $a \geq b+1$、つまり $0 < b \leq a-1$ が導かれ、すると2つ目の結果から $b^3 + b^2 < a^3 - a^2$ となって方程式に矛盾する。よって、そのような正の整数の組は存在しない。（実数の範囲では解はいくらでもあり、各 $x > 0$ に対して $y \in (x, x+1)$ が1つずつ存在する。整数はそれらをすべて素通りしてしまうのである。）

すべての整数の組

次に、

$$m^3 - n^3 = m^2 + n^2. \qquad (*)$$

を満たすすべての整数 m, n を求めたい。2つの観察によって手間が省ける。

- (m, n) が解ならば、$(-n, -m)$ も解である。実際、$(-n)^3 - (-m)^3 = m^3 - n^3$ であり、2乗の和は変わらない。

- $(*)$ の右辺は非負であるから、$m^3 \geq n^3$、すなわち $m \geq n$ である。等号が成り立つのは $m^2 + n^2 = 0$、すなわち $m = n = 0$ のときに限る。

一方が 0 の場合。 $n = 0$ ならば $m^3 = m^2$ であるから、$m = 0$ または $m = 1$ である。$m = 0$ ならば $-n^3 = n^2$ であるから、$n = 0$ または $n = -1$ である。これより $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,-1)$ が得られる（最後のものは、$(1,0)$ を対称性で移したものである）。

両方とも正の場合。 前の小問により不可能である。

両方とも負の場合。 このとき $-n$ と $-m$ はともに正であり、$(-n,-m)$ は両成分が正の解となってしまうが、これは不可能である。

符号が異なる場合。 $m > n$ であるから $m > 0 > n$ である。$p \geq 1$ として $n = -p$ とおく。すると $(*)$ は

$$m^3 + p^3 = m^2 + p^2, \qquad \text{すなわち} \qquad m^2(m-1) + p^2(p-1) = 0.$$

となる。正の整数に対しては 2 つの項はともに ≥ 0 であるから、どちらも 0 でなければならず、$m = p = 1$ が導かれる。これより $(1,-1)$ が得られ、実際 $1 - (-1) = 2 = 1 + 1$ である。

以上より、$m^3 - n^3 = m^2 + n^2$ の整数解 (m,n) はちょうど

$$(m,n) = (0,0), \quad (1,0), \quad (0,-1), \quad (1,-1).$$

である。「組」が自明な組を除く意味であれば、$(0,0)$ を除けばよい。

検算

各組は手計算で確かめられる。$(1,0)$ については $1 - 0 = 1 = 1 + 0$、$(0,-1)$ については $0 - (-1) = 1 = 0 + 1$、$(1,-1)$ については $2 = 2$ である。$|m|, |n| \leq 300$ のすべてについてコンピュータで探索すると、ちょうどこの 4 つの解が見つかる。1 つ目と 2 つ目の結果の確認として、ランダムな $x > 0$ に対して $y^3 - y^2 = x^3 + x^2$ を数値的に解くと、常に $x < y < x + 1$ となった。たとえば $x = 1$ のとき $y \approx 1.696$ である。

よくある間違い

- 最後の小問で、0 と負の整数を忘れること。解はすべてそこにある。
- 2 つの整数のどちらが「先」かを勝手に決めつけること。ここでは 3 乗の差が正であるから、大きい方の数が先に来なければならない。そのことを明記すること。
- 2 つ目の結果を、$t \geq 1$ で $t^3 - t^2$ が単調増加であることに触れずに、単に「展開」す

るだけで証明しようとすること。$f(y) \geq f(x+1)$ という段階にはこの事実が必要である。

STEP のその先へ

「実数解が連続する 2 つの整数の間に厳密に閉じ込められるので、整数解は存在しない」という論法は、ディオファントス方程式（Diophantine equation）の研究における標準的な道具であり、整数を変数とする多項式の方程式に対してまず試すべきことであることが多い。このように解を評価することは、そうした方程式の多くが有限個の解しかもたないことを証明する方法でもあり、その解は有限回の探索で見つけることができる。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等整数論』）は、この種の整数論へのすばらしい入門書である。

解答例

STEP III 2002、第 5 問

純粋数学 ・ 四次方程式の因数分解

STEP III 2002、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/02-s3-q5

鍵となる考え方

2 次式が完全平方式の定数倍となるのは、その判別式（discriminant）が 0 となるとき、かつそのときに限る。これが前半のすべてであり、残りの部分を動かす原動力でもある。2 次式の平方から 4 次式を引いたものが完全平方式の定数倍となるように t を選べれば、4 次式は 2 **つの平方の差**（difference of two squares）となり、ただちに因数分解できる。これは 4 次方程式に対するフェラーリ（Ferrari）の古典的な解法であり、4 次式の問題を t についての 3 次式の問題に置き換えるものである。

解答

2 次式の条件

$p \neq 0$ と仮定する。平方完成（completing the square）すると、

$$px^2 + qx + r = p\left(x + \frac{q}{2p}\right)^2 + r - \frac{q^2}{4p}.$$

これがある h に対して $p(x+h)^2$ の形になるのは、定数 $r - \frac{q^2}{4p}$ が 0 のとき、かつそのときに限る。すなわち

$$q^2 = 4pr,$$

のときであり、このとき $h = \frac{q}{2p}$ である。（逆に、$p(x+h)^2 = px^2 + 2phx + ph^2$ を展開すると $q^2 = 4p^2h^2 = 4pr$ が得られるので、この条件は十分条件であるだけでなく必要条件でもある。）$p = 0$ の場合、可能なのは $q = r = 0$ のみである。このときも条件 $q^2 = 4pr$ から $q = 0$ は導かれるが、さらに $r = 0$ も必要となる。

t の方程式

展開すると、

$$\left(x^2+\tfrac{1}{2}bx+t\right)^2 = x^4+bx^3+\left(\tfrac{1}{4}b^2+2t\right)x^2+btx+t^2.$$

$\frac{1}{2}b$ を選んだのは、まさに 4 次式を引いたときに x^3 の項が打ち消し合う（x^4 の項も打ち消し合う）ようにするためである。

$$\left(x^2+\tfrac{1}{2}bx+t\right)^2-\left(x^4+bx^3+cx^2+dx+e\right) = \left(\tfrac{1}{4}b^2+2t-c\right)x^2+(bt-d)x+\left(t^2-e\right).$$

これは $p=\frac{1}{4}b^2+2t-c$、$q=bt-d$、$r=t^2-e$ とした 2 次式であり、これを完全平方式の定数倍（すなわち $k=p$）である $k(x+h)^2$ に等しくしたい。前半の結果より、t は

$$(bt-d)^2 = 4\left(\tfrac{1}{4}b^2+2t-c\right)\left(t^2-e\right).$$

を満たさなければならない。これは t についての 3 次方程式（cubic equation）である（右辺の t^3 の項の係数は 8 であり、左辺は t について 2 次にすぎない）。したがって、少なくとも 1 つの実数解を必ずもつ。

4 次式の因数分解

ここでは $b=6$、$c=9$、$d=-2$、$e=-7$ であるから、

$$\tfrac{1}{4}b^2+2t-c = 2t, \qquad bt-d = 6t+2, \qquad t^2-e = t^2+7.$$

t の方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned}(6t+2)^2 &= 8t\left(t^2+7\right)\\ 36t^2+24t+4 &= 8t^3+56t\\ 0 &= 2t^3-9t^2+8t-1.\end{aligned}$$

考えてみよう　この 3 次方程式の解を素早く見つけるにはどうすればよいか。

まず小さな値を試してみる。係数の和は $2-9+8-1=0$ であるから、$t=1$ は解である。どの解を用いてもよい。それぞれの解が正しい因数分解を与えるからである。最も簡単な解からは最も簡単な因数分解が得られる。

$t=1$ のとき、差は

$$2x^2+8x+8 = 2(x+2)^2,$$

となるので、$k=2$、$h=2$ であり、実際 $8^2=4\cdot 2\cdot 8$ が成り立つ。よって

$$\left(x^2+3x+1\right)^2-\left(x^4+6x^3+9x^2-2x-7\right) = 2(x+2)^2,$$

すなわち

$$x^4+6x^3+9x^2-2x-7=\left(x^2+3x+1\right)^2-\left(\sqrt{2}\,(x+2)\right)^2.$$

これは2つの平方の差であるから、

$$\begin{aligned}x^4+6x^3+9x^2-2x-7&=\left(x^2+3x+1-\sqrt{2}(x+2)\right)\left(x^2+3x+1+\sqrt{2}(x+2)\right)\\&=\left(x^2+(3-\sqrt{2})x+1-2\sqrt{2}\right)\left(x^2+(3+\sqrt{2})x+1+2\sqrt{2}\right).\end{aligned}$$

$k=2>0$ であるからその平方根は実数であり、したがってこれらは求めるとおり、実数係数の2つの2次因数である。

3次方程式の残りの2つの解 $t=\frac{1}{4}\left(7\pm\sqrt{41}\right)$ は $2t^2-7t+1=0$ から得られ、これらも $k=2t>0$ を満たす。これらは、4次式の4つの（実数の）解を組み合わせて実数係数の2次因数をつくる、残り2通りの方法を与える。しかしその係数はずっと煩雑であり、そのため $t=1$ を用いるのがよいのである。

検算

- 展開して確かめる。2つの因数の積の x^3 の係数は $(3-\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})=6$、定数項は $(1-2\sqrt{2})(1+2\sqrt{2})=1-8=-7$ であり、どちらも正しい。
- $x=1$ のとき4次式の値は $1+6+9-2-7=7$ であり、因数分解からは $(5-\sqrt{2}-2\sqrt{2})(5+\sqrt{2}+2\sqrt{2})=25-18=7$ が得られる。
- 各因数の判別式は $7+2\sqrt{2}\approx 9.83$ と $7-2\sqrt{2}\approx 4.17$ でどちらも正であるから、4次式は4つの実数解をもつ。これは3次方程式の3つの解すべてが実数係数の因数分解を与えることと整合する。また、ランダムに選んだ200個の点で因数分解を数値的にも確認した。

よくある間違い

- $(x^2+\frac{1}{2}bx+t)^2$ の x^2 の係数を誤る。$(\frac{1}{2}bx)^2$ だけでなく交差項 $2\cdot x^2\cdot t$ も寄与するので、正しくは $\frac{1}{4}b^2+2t$ である。
- 判別式の条件を $q^2=pr$ と書いてしまう。あるいは、k が最高次の係数 $\frac{1}{4}b^2+2t-c$ であり、実数係数の因数分解のためにはこれが正でなければならないことを忘れる。

STEP のその先へ

t についての 3 次方程式は 3 **次分解方程式**（resolvent cubic）と呼ばれ、これが 16 世紀のフェラーリの解法である。すべての 4 次方程式は 3 次方程式に帰着され、その 3 次方程式はカルダノ（Cardano）の公式で解ける。この方法がうまくいく深い理由、そして一般の 5 次方程式にはこのような公式が存在しない理由は、多項式の根がどのように置換されうるかを研究するガロア理論（Galois theory）に属する。体と多項式の代数への最初の手引きとしては、Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を読んでみるとよい。

解答例

STEP III 2002、第 6 問

純粋数学 ・ 非線形微分方程式

STEP III 2002、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/02-s3-q6

鍵となる考え方

4 乗があるせいで方程式は手ごわく見えるが、$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ はちょうど y^2 の導関数（derivative）の半分である。そこで $u = y^2 - 1$ と置換（substitution）する。すると方程式は u と u' だけの方程式に帰着し、平方根をとれば変数分離（separation of variables）できる。注意が必要なのは符号だけである。u の符号によって平面は帯状領域 $|y| < 1$ と領域 $|y| > 1$ に分かれ、それぞれから異なる曲線族が得られる。

解答

$u = y^2 - 1$ とおくと、$u' = 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ であり、$y^4\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}u'\right)^4$ となる。よって方程式は

$$\frac{1}{16}(u')^4 = u^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (u')^2 = 4|u|,$$

となる。ここで両辺の非負の平方根をとった（$(u')^2$ と $4|u|$ はどちらも非負なので、何も失われない）。

まず、解曲線は決して $y = 0$ と交わらないことに注意する。そこでは元の方程式の左辺は 0 だが、右辺は 1 だからである。したがって、与えられたどちらの点を通る解でも、常に $y > 0$ である。

考えてみよう u' の符号をどちらにとるかを気にせずに、$(u')^2 = 4u$ を解くにはどうすればよいか。

$u > 0$ となるところでは、$v = \sqrt{u} > 0$ として $u = v^2$ と書ける。すると $u' = 2vv'$ なので、$(u')^2 = 4u$ は $4v^2(v')^2 = 4v^2$、すなわち $(v')^2 = 1$ となる。v' は連続で決して零にならないから符号は一定であり、$v' = \pm 1$、したがってある定数 a を用いて $v = \pm(x - a)$

となる。いずれの場合も

$$u = v^2 = (x-a)^2.$$

である。符号のあいまいさは2乗することで単に消えてしまう。$u < 0$ の場合は、$u = -v^2$ として同じ議論を行えばよい。

小問 (i)：$(0, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ を通る解

ここでは $y^2 = \frac{3}{4} < 1$ なので、この点の近くでは $u < 0$、すなわち $|y| < 1$ である。$v > 0$ として $1 - y^2 = -u = v^2$ と書くと、$(u')^2 = -4u$ から上と全く同様に $(v')^2 = 1$ が得られるので、$1 - y^2 = (x-a)^2$、すなわち

$$(x-a)^2 + y^2 = 1 :$$

となる。これは中心が x 軸上にある半径1の円である。$x = 0$ では $a^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ が必要なので、$a = \pm\frac{1}{2}$ である。$y > 0$ であるから、$(0, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ を通る解曲線は上半円

$$y = \sqrt{1 - \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2} \qquad \text{および} \qquad y = \sqrt{1 - \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2}.$$

である。直接確かめておく。$(x-a)^2 + y^2 = 1$ 上で陰関数微分（implicit differentiation）を行うと $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -(x-a)$ となるので、$y^4\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^4 = (x-a)^4 = (1-y^2)^2 = (y^2-1)^2$ である。✓

小問 (ii)：$(0, \frac{1}{2}\sqrt{5})$ を通る解

今度は $y^2 = \frac{5}{4} > 1$ なので $u > 0$ であり、上の議論から $y^2 - 1 = (x-a)^2$、すなわち

$$y^2 - (x-a)^2 = 1 :$$

が得られる。これは中心 $(a, 0)$ の直角双曲線（rectangular hyperbola）である。$x = 0$ では $a^2 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$ なので、やはり $a = \pm\frac{1}{2}$ であり、$y > 0$ より解曲線は上側の枝

$$y = \sqrt{1 + \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2} \qquad \text{および} \qquad y = \sqrt{1 + \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2},$$

である。これらはすべての x で定義される。直接確かめると、$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x - a$ なので、左辺は $(x-a)^4 = (y^2-1)^2$ である。✓

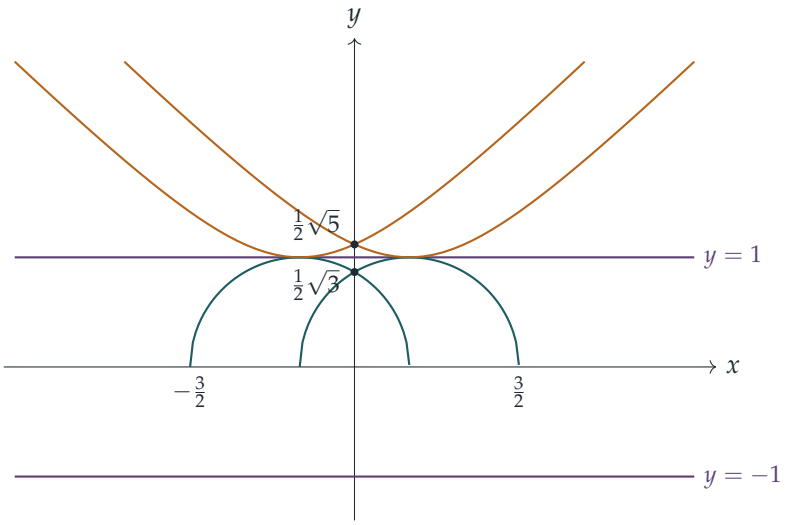
直線 $y = \pm 1$

すべての x で $y = 1$ または $y = -1$ ならば、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ なので左辺は0である。また $y^2 - 1 = 0$ なので、右辺も0である。よって両直線はともに解である。

考えてみよう これらの直線は、円や双曲線とどのような関係にあるか。

各円 $(x-a)^2+y^2=1$ と各双曲線 $y^2-(x-a)^2=1$ は、いずれも点 $(a,1)$ において傾き零で $y=1$ に接する（同様に、点 $(a,-1)$ において $y=-1$ に接する）。したがって $y=\pm1$ は両方の曲線族の**包絡線**（envelope）であり、どちらの族にも属さない。これらは $u=0$ から生じるもので、v で割る操作によって除外されていたのである。その帰結として、$y=1$ 上の点を通る解は一意的ではない。たとえば、$(0,\frac{1}{2}\sqrt{3})$ から $a=\frac{1}{2}$ の円をたどってその頂点 $(\frac{1}{2},1)$ まで上り、そこから $y=1$ に沿って進み、さらに $x\geq b$ で双曲線 $y=\sqrt{1+(x-b)^2}$ を上っていく（$b\geq\frac{1}{2}$ は任意）と、十分に滑らかな（傾きが連続な）曲線が得られ、それはいたるところで方程式を満たす。上の 4 本の曲線は与えられた点を通る「基本的な」解であり、それらの点を通る他のすべての解は、これらの曲線、$y=1$、および $y=1$ に接するさらに別の円や双曲線の断片をつなぎ合わせて作られる。

概形



半円（青緑色）は中心 $(\pm\frac{1}{2},0)$、半径 1 であり、$x=\pm\frac{1}{2}\pm1$ で x 軸と垂直に交わり、$x=\pm\frac{1}{2}$ で $y=1$ に接する。双曲線の枝（琥珀色）は同じ 2 点で $y=1$ に接し、漸近線（asymptote）$y=\pm(x\mp\frac{1}{2})$ をもつ。すなわち $|x|$ と同程度に増大する。各組は y 軸に関して互いに対称であり、各組の 2 曲線は y 軸上の与えられた点で交わる。

検算

- $a=\frac{1}{2}$ の円上の点 $(0,\frac{1}{2}\sqrt{3})$ において、$y'=-(x-a)/y=1/\sqrt{3}$ なので、左辺は $\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{16}$、右辺は $(\frac{3}{4}-1)^2=\frac{1}{16}$ である。
- $(0,\frac{1}{2}\sqrt{5})$ から正の符号をとって $y'=\pm\sqrt{|y^2-1|}/y$ を数値積分すると $y(1.5)=$

2.2360680 となり、$a = -\frac{1}{2}$ の双曲線上の値 $\sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$ と一致する。

よくある間違い

- 両方の領域で平方根を $(u')^2 = 4u$ ととってしまうこと。$|y| < 1$ ではこれは実数解をもたず、円が失われる。
- 各段階で平方根の一方の符号だけを残し、その結果、各点を通る曲線を 2 本ではなく 1 本しか見つけられないこと。
- $y = \pm 1$ は族のすべての曲線に接しているにもかかわらず、どちらの族にも属さないことを忘れること。

STEP のその先へ

直線 $y = \pm 1$ は**特異解**（singular solution）である。すなわち、一般解の包絡線であって、定数 a をどのように選んでも得られないものである。特異解は、一階微分方程式（first-order differential equation）に対する一意性定理（uniqueness theorem）、すなわちピカール–リンデレーフ（Picard–Lindelöf）の定理が成り立たなくなるところにちょうど現れる。$\sqrt{|y^2-1|}$ は $y = \pm 1$ でリプシッツ連続（Lipschitz continuous）でなく、そのために解がそこで分岐しうるのである。この種の包絡線は、y' について線形でない一階微分方程式に典型的に見られる（クレロー（Clairaut）の方程式がその古典的な例である）。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）では、解の存在と一意性、そしてそれが破れる場合について論じられている。

解答例

STEP III 2002、第 7 問

純粋数学 ・ 座標幾何の恒等式

STEP III 2002、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/02-s3-q7

鍵となる考え方

式 $s^2 + b^2 - a^2$ には見覚えがあるはずである。これは $OA = s$、$OB = b$ である三角形 OAB に余弦定理（cosine rule）を用いたときに現れる式である。したがって、最初の恒等式は、実のところ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta$ に関する冒頭の結果を、OB が座標軸となす二つの角に適用したものにほかならない。その後、二つ目の恒等式は一つ目の恒等式の上に組み立てられる純粋な代数計算であり、不等式は二つの平方の和がそれぞれの平方以上であることから自然に導かれる。

解答

角に関する結果

まず $\alpha + \beta = \frac{1}{2}\pi$ と仮定する。このとき $\cos\beta = \cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \sin\alpha$ であるから、

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

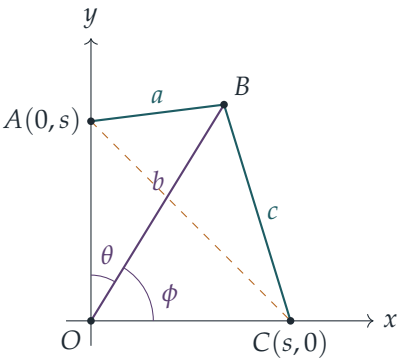
逆（converse）に、$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$ と仮定する。このとき $\cos^2\beta = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$ である。α と β はともに鋭角（acute）であるから $\cos\beta > 0$ かつ $\sin\alpha > 0$ であり、正の平方根をとると

$$\cos\beta = \sin\alpha = \cos(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha).$$

ここで β と $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ はともに区間 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ に属し、この区間で余弦は狭義単調減少であるから、各値をただ一度しかとらない。よって $\beta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$、すなわち $\alpha + \beta = \frac{1}{2}\pi$ である。これで「必要十分条件」（if and only if）であることが示された。

一つ目の恒等式

$\theta = \angle AOB$、$\phi = \angle BOC$ とおく。



三角形 OAB（辺 $OA = s$、$OB = b$、$AB = a$）と三角形 OCB（辺 $OC = s$、$OB = b$、$CB = c$）に余弦定理を用いると

$$\cos\theta = \frac{s^2 + b^2 - a^2}{2sb}, \qquad \cos\phi = \frac{s^2 + b^2 - c^2}{2sb}.$$

B は第 1 象限の内部（開集合）にあるから、半直線 OB は y 軸の正の部分（OA の向き）と x 軸の正の部分（OC の向き）の厳密に間にある。よって θ と ϕ はともに鋭角であり、$\theta + \phi = \frac{1}{2}\pi$ である。上で示した「only if」の向きにより $\cos^2\theta + \cos^2\phi = 1$、すなわち

$$\frac{(s^2 + b^2 - a^2)^2}{4s^2b^2} + \frac{(s^2 + b^2 - c^2)^2}{4s^2b^2} = 1.$$

両辺に $4s^2b^2$ を掛けると、一つ目の恒等式が得られる。

$$(s^2 + b^2 - a^2)^2 + (s^2 + b^2 - c^2)^2 = 4s^2b^2.$$

（直接確かめるには、$B = (x, y)$ とおけばよい。このとき $a^2 = x^2 + (y - s)^2$、$b^2 = x^2 + y^2$、$c^2 = (x - s)^2 + y^2$ であるから、$s^2 + b^2 - a^2 = 2sy$、$s^2 + b^2 - c^2 = 2sx$ となり、左辺は $4s^2(x^2 + y^2) = 4s^2b^2$ である。）

二つ目の恒等式

代数計算を見通しよくするために、

$$P = s^2 + b^2 - a^2, \qquad Q = s^2 + b^2 - c^2, \qquad S = s^2 + b^2, \qquad D = s^2 - b^2,$$

とおく。すると $a^2 = S - P$、$c^2 = S - Q$ である。一つ目の恒等式は $P^2 + Q^2 = 4s^2b^2$ を意味する。$4s^2b^2 = (s^2 + b^2)^2 - (s^2 - b^2)^2 = S^2 - D^2$ であるから、これは

$$D^2 = S^2 - P^2 - Q^2. \qquad (\dagger)$$

と書き直せる。さて $a^2+c^2=2S-P-Q$ であり、$2s^2=S+D$、$2b^2=S-D$ であるから、

$$2s^2-a^2-c^2=(P+Q-S)+D, \qquad 2b^2-a^2-c^2=(P+Q-S)-D.$$

考えてみよう $(P+Q-S)\pm D$ というこの分け方には、なぜ意味があるのだろうか。

それは $(u+D)^2+(u-D)^2=2u^2+2D^2$ となるからである。交差項が打ち消し合い、D は D^2 の形でしか現れなくなる。そして (†) により、これを P、Q、S だけを含む式で置き換えられる。$u=P+Q-S$ とおくと

$$\begin{aligned}
&(2s^2-a^2-c^2)^2+(2b^2-a^2-c^2)^2\\
&\quad=2(P+Q-S)^2+2D^2\\
&\quad=2(P^2+Q^2+S^2+2PQ-2PS-2QS)+2(S^2-P^2-Q^2)\\
&\quad=4S^2-4PS-4QS+4PQ\\
&\quad=4(S-P)(S-Q)\\
&\quad=4a^2c^2,
\end{aligned}$$

ここで2行目に (†) を用いた。これが二つ目の恒等式である。

不等式

二つ目の恒等式の左辺の二つの平方はともに0以上であるから、

$$(2b^2-a^2-c^2)^2\le 4a^2c^2, \qquad \text{よって} \qquad |2b^2-a^2-c^2|\le 2ac,$$

ここで0以上の平方根をとった（$a,c>0$ に注意する）。これは

$$-2ac\le 2b^2-a^2-c^2\le 2ac,$$

を意味し、すなわち

$$a^2-2ac+c^2\le 2b^2\le a^2+2ac+c^2,$$

であり、これは $(a-c)^2\le 2b^2\le(a+c)^2$ にほかならない。以上で示された。

等号が成り立つのは、ちょうど $2s^2=a^2+c^2$ のときである。$AC^2=2s^2$ であるから、ピタゴラス（Pythagoras）の定理の逆により、これは $\angle ABC$ が直角であること、すなわち B が AC を直径とする円上にあることを意味する。

検算

- $s=2$、$B=(1,3)$ とする。このとき $a^2=2$、$b^2=c^2=10$ である。一つ目の恒等式は $12^2+4^2=160=4\cdot4\cdot10$、二つ目の恒等式は $(-4)^2+8^2=80=4\cdot2\cdot10$ となり、不等式は $3.06\leq20\leq20.94$ となる。
- 点 $B=(s,s)$ は正方形の 4 番目の頂点であるから、$\angle ABC$ は直角であり、$a=c=s$、$b=s\sqrt{2}$ である。このとき $2b^2=4s^2=(a+c)^2$ となり、等号の場合にあたる。
- 2×10^5 個の点 B で三つの結果すべてを無作為に検証したところ、成り立たない例は一つもなかった。

よくある間違い

- 逆を示す際に鋭角という条件を落としてしまうこと。この条件がなければ、$\cos^2\beta=\sin^2\alpha$ から $\beta=\frac{1}{2}\pi-\alpha$ は導かれない（たとえば $\beta=\frac{1}{2}\pi+\alpha$ でも成り立つ）。
- 一つ目の恒等式を使わずに、二つ目の恒等式を a,b,c,s で力ずくで展開すること。不可能ではないが、項を落としやすい。S、D による置き換えを使えば計算を制御できる。
- $(2b^2-a^2-c^2)^2\leq4a^2c^2$ の平方根を絶対値なしでとってしまい、不等式の片側しか得られないこと。

STEP のその先へ

量 $2b^2-a^2-c^2$ は $2s(x+y-s)$ に等しく、これは三角形 ABC の面積の ±4 倍である。したがって二つ目の恒等式は、余弦定理と面積の公式 $\frac{1}{2}ac\sin B$ を $\cos^2B+\sin^2B=1$ に組み合わせたものである。また上界はトレミー（Ptolemy）の不等式の特別な場合でもある。任意の 4 点に対して $OB\cdot AC\leq OA\cdot BC+OC\cdot AB$ が成り立ち、等号は円に内接する四角形（cyclic quadrilateral）のときに成り立つ。ここではこれが $bs\sqrt{2}\leq s(a+c)$ となる。このような距離の間の関係は、距離空間（metric space）や距離幾何学（distance geometry）の研究へとつながっていく。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（『数学の発展問題』）には、この趣旨の問題がさらに収められている。

解答例

STEP III 2002、第 8 問

純粋数学 ・ トレミーの定理

STEP III 2002、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/02-s3-q8

鍵となる考え方

単位円（unit circle）上の 2 点の差は、「平均」の角を括り出すと見事に因数分解できる：$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)/2}\left(e^{i(\alpha-\beta)/2} - e^{-i(\alpha-\beta)/2}\right)$ であり、括弧の中は正弦の 2i 倍である。これにより、すべての弦（chord）の絶対値（modulus）と偏角（argument）が一度に得られる。最後の小問では、偏角の等しい 2 つの複素数は同じ向きを指すので、それらの絶対値は単純に足し合わされる。あとは 3 つの積を結びつける代数的な恒等式さえあればよい。

解答

$u_1 - u_2$ の偏角

$u_k = e^{i\theta_k}$ とおく。因数 $e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$ を括り出すと、

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}\left(e^{i(\theta_1-\theta_2)/2} - e^{-i(\theta_1-\theta_2)/2}\right) \\ &= e^{i(\theta_1+\theta_2)/2} \cdot 2i \sin\tfrac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) \\ &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) \cdot (-i)\, e^{i(\theta_1+\theta_2)/2} \\ &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)\, e^{i(\theta_1+\theta_2-\pi)/2}, \end{aligned}$$

となる。最後の行では $-i = e^{-i\pi/2}$ を用いた。

考えてみよう なぜこの式から偏角を直接読み取れるのか。また、なぜ正弦を $\sin\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)$ ではなく $\sin\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)$ の形で書く必要があるのか。

$re^{i\phi}$ の形の数が（2π の整数倍を除いて）偏角 ϕ をもつのは、$r > 0$ のときに限る。こ

こでは $0 < \theta_2 - \theta_1 < 2\pi$ であるから $0 < \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) < \pi$ となり、正弦は真に正である。逆向きに書くと正弦は負になり、偏角は π だけずれてしまう。

したがって $|u_1 - u_2| = 2\sin\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)$ であり、$\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2 - \pi)$ は $u_1 - u_2$ の偏角の 1 つである。arg を $(-\pi, \pi]$ における主値（principal value）とする。$-\pi < \theta_1 < \theta_2 < \pi$ であるから、

$$-\tfrac{3\pi}{2} < \tfrac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2 - \pi) < \tfrac{\pi}{2}.$$

この値が $-\pi$ より大きければ、それはすでに偏角の主値である（$n = 0$）。そうでなければ値は $(-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$ にあり、2π を加えれば範囲内に入る（$n = 1$）。よって

$$\arg(u_1 - u_2) = \tfrac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2 - \pi) + 2n\pi, \qquad n = 0 \text{ または} 1,$$

となり、示すべきことが示された。

2 つの積の偏角は等しい

上の議論で u_1, u_2 について用いたのは、$\theta_1 < \theta_2$ であることと、どちらも $(-\pi, \pi)$ に属することだけである。したがって任意の $j < k$ に対して、

$$\begin{aligned} u_j - u_k &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta_k - \theta_j)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_j + \theta_k - \pi)/2}, \\ u_k - u_j = -(u_j - u_k) &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta_k - \theta_j)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_j + \theta_k + \pi)/2}, \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ を用いた。いずれの場合も前にかかる実数の因数は正である。$j < k$ に対して $s_{jk} = \sin\frac{1}{2}(\theta_k - \theta_j) > 0$ とおき、$\Sigma = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$ とおく。掛け合わせると（偏角は足し合わされる）、

$$\begin{aligned} (u_1 - u_2)(u_4 - u_3) &= 4s_{12}s_{34}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\theta_1 + \theta_2 - \pi) + (\theta_3 + \theta_4 + \pi)]/2} = 4s_{12}s_{34}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}, \\ (u_1 - u_4)(u_3 - u_2) &= 4s_{14}s_{23}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\theta_1 + \theta_4 - \pi) + (\theta_2 + \theta_3 + \pi)]/2} = 4s_{14}s_{23}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}. \end{aligned}$$

どちらも $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}$ の正の実数倍であるから、それぞれ 2π の整数倍を除いて偏角 $\frac{1}{2}\Sigma$ をもつ。したがって、それらの偏角の主値の差は 2π の整数倍にしかなり得ない：

$$\arg\big((u_1 - u_2)(u_4 - u_3)\big) = \arg\big((u_1 - u_4)(u_3 - u_2)\big) + 2n\pi$$

がある整数 n について成り立つ。（実際には $n = 0$ である。差が 2π の整数倍である 2 つの主値は等しくなければならないからである。しかし、問われているのはこの弱い主張だけである。）

最後の小問

3 つの積を

$$A = (u_1 - u_2)(u_4 - u_3), \qquad B = (u_1 - u_4)(u_3 - u_2), \qquad C = (u_1 - u_3)(u_4 - u_2).$$

とおく。展開すると、

$$\begin{aligned} A + B &= (u_1u_4 - u_1u_3 - u_2u_4 + u_2u_3) + (u_1u_3 - u_1u_2 - u_3u_4 + u_2u_4) \\ &= u_1u_4 + u_2u_3 - u_1u_2 - u_3u_4, \\ C &= u_1u_4 - u_1u_2 - u_3u_4 + u_2u_3, \end{aligned}$$

となるので、$A + B = C$ である。これは純粋に代数的な事実であり、任意の 4 つの複素数について成り立つ。

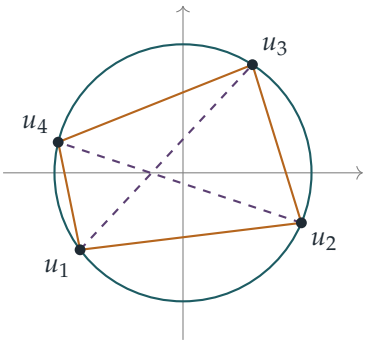
ここで前の小問の結果を用いる：$a = 4s_{12}s_{34} > 0$、$b = 4s_{14}s_{23} > 0$ として $A = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}$、$B = b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}$ である。すると $|A| = a$、$|B| = b$ であり、

$$|C| = |A + B| = \left|(a + b)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}\right| = a + b = |A| + |B|,$$

となる。$a + b > 0$ かつ $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}| = 1$ だからである。すなわち、

$$|(u_1 - u_2)(u_4 - u_3)| + |(u_1 - u_4)(u_3 - u_2)| = |(u_1 - u_3)(u_4 - u_2)|.$$

要点は、三角不等式（triangle inequality）$|A + B| \le |A| + |B|$ が等号になるのは A と B がちょうど同じ向きを指すときであり、それこそが中間の小問で示したことだという点である。



幾何学的には、$|u_j - u_k|$ は弦の長さであり、偏角が増加していくことから、$u_1u_2u_3u_4$ は頂点がこの順に並んだ、円に内接（inscribed）する四角形である。この恒等式は、対辺どうしの積の和が対角線（破線）の積に等しいことを述べている。これがトレミー（Ptolemy）の定理である。

検算

- 正方形の場合：$\theta_k = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$。各辺は $\sqrt{2}$、各対角線は 2 であり、確かに $2 + 2 = 4$ となる。

- $\theta = (-2.5, -0.4, 1.0, 2.9)$ とすると、$|A| \approx 2.8223$、$|B| \approx 1.1013$、$|C| \approx 3.9236 = |A| + |B|$ となる。
- θ_k を順序づけてランダムに 2×10^5 通り選んだところ、$\arg(u_1 - u_2)$ の公式は毎回 $n = 0$ または 1 で成り立ち（どちらの値も現れる）、恒等式は誤差 2×10^{-15} 以内で成り立った。

よくある間違い

- $u_1 - u_2 = 2\mathrm{i} \sin \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)/2}$ と書き、正弦が負であることを忘れて偏角を $\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2 + \pi)$ と読み取ってしまう。
- $u_4 - u_3$ を $u_3 - u_4$ と同じ偏角をもつかのように扱ってしまう。差の順序を逆にすると、偏角に π が加わる。
- 理由を述べずに $|A| + |B| = |A + B|$ と主張してしまう。これには A と B の偏角が等しいことが必要である。

STEP のその先へ

トレミーの定理には逆があり、さらに一般的な形もある：平面上の任意の 4 点について $|A| + |B| \geq |C|$ が成り立ち（これは $A + B = C$ に三角不等式を適用しただけである）、等号が成り立つのは 4 点がこの順に円または直線上に並ぶときに限る。この背後には**複比**（cross-ratio）$\frac{(u_1-u_2)(u_3-u_4)}{(u_1-u_4)(u_3-u_2)}$ がある。複比は 4 点が同一円周上にある（concyclic）ときにちょうど実数となり、メビウス（Möbius）変換で保たれる。これは大学 1 年次の複素解析と幾何学における中心的な対象である。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、これらの考え方を見事な図とともに展開している。

解答例

STEP III 2002、第 9 問

力学 ・ 質量中心と転倒

> **STEP III 2002、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s3-q9

鍵となる考え方

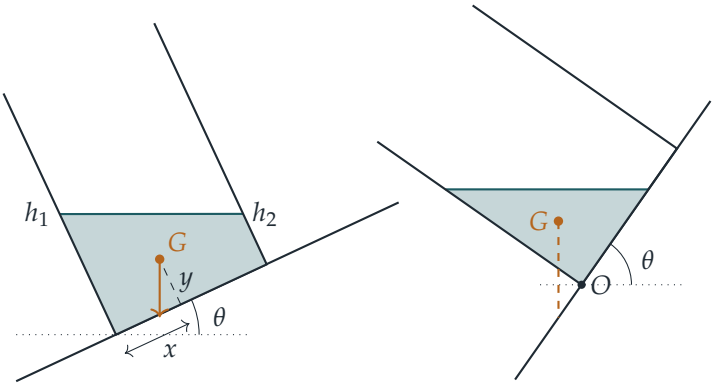
流体の自由表面（free surface）は水平であるから、（角 θ だけ傾いた）容器に固定した座標で見ると、底面に対して角 θ で傾いた直線になる。したがって、流体の断面（cross-section）は、表面が両側の壁に達する場合は台形（trapezium）、上側の壁に達する前に底面に達する場合は直角三角形となる。重心（centre of mass）を求めることは、二次元の図心（centroid）の計算に帰着する。転倒（toppling）については、容器は軽いので、すべては流体の重心を通る鉛直線が斜面とどこで交わるかによって決まる。

解答

設定

容器は壁の厚さが無視できる軽い角柱（prism）、流体は容器に対して静止している一様な連続体、斜面は滑りを防ぐのに十分粗いものとしてモデル化する。底面の水平な辺に垂直な鉛直断面はどれも同じであり、流体は一様であるから、流体の重心は一つの断面の図心である。その断面の幅は a、面積は $ka^3/a = ka^2$ である。

下側の側壁から底面に沿って（斜面の上向きに）X をとり、底面に垂直に Y をとる。X が増えるにつれて底面は水平面に対して角 θ で上がっていくので、水平な表面は底面に対して角 θ で下がっていく。すなわち、底面からの表面の高さは X が 1 増えるごとに $\tan\theta$ だけ減る。幅全体での高さの減少量を $d = a\tan\theta$ とおく。



左図は $k > \frac{1}{2}\tan\theta$ の場合（流体が両方の壁に接している）、右図は $k < \frac{1}{2}\tan\theta$ かつ $\theta > 45°$ の場合であり、後者では G を通る鉛直線が底面を外れる。

$k > \frac{1}{2}\tan\theta$ の場合

下側の壁と上側の壁での深さをそれぞれ h_1、h_2 とする。このとき $h_1 - h_2 = d$ であり、台形の面積は $\frac{1}{2}a(h_1 + h_2) = ka^2$ であるから $h_1 + h_2 = 2ka$ である。よって

$$h_2 = ka - \tfrac{1}{2}d = a\big(k - \tfrac{1}{2}\tan\theta\big),$$

となり、これが正となるのはちょうど $k > \frac{1}{2}\tan\theta$ のときである。したがって、これは表面が両方の壁に達する場合である。

台形を、$a \times h_2$ の長方形と、その上に乗る、直角をはさむ辺が a（$Y = h_2$ に沿う）と d（下側の壁に沿って上向き）の直角三角形とに分ける。

- 長方形：面積 ah_2、図心 $\big(\frac{1}{2}a,\ \frac{1}{2}h_2\big)$。
- 三角形：頂点は $(0, h_2)$、(a, h_2)、$(0, h_2 + d)$ であるから、面積は $\frac{1}{2}ad$、図心（頂点の平均）は $\big(\frac{1}{3}a,\ h_2 + \frac{1}{3}d\big)$。

全面積を ka^2 として、下側の壁のまわりのモーメント（moment）をとると

$$ka^2\,x = ah_2 \cdot \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}ad \cdot \tfrac{1}{3}a \quad\Longrightarrow\quad kx = \tfrac{1}{2}h_2 + \tfrac{1}{6}d = \tfrac{1}{2}ka - \tfrac{1}{4}d + \tfrac{1}{6}d = \tfrac{1}{2}ka - \tfrac{1}{12}d.$$

ka で割り、$d = a\tan\theta$ を用いると

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{2} - \frac{\tan\theta}{12k}.$$

底面のまわりのモーメントをとると

$$ka^2\,y = ah_2 \cdot \tfrac{1}{2}h_2 + \tfrac{1}{2}ad\big(h_2 + \tfrac{1}{3}d\big),$$
$$ka\,y = \tfrac{1}{2}h_2^2 + \tfrac{1}{2}dh_2 + \tfrac{1}{6}d^2 = \tfrac{1}{2}h_2(h_2 + d) + \tfrac{1}{6}d^2.$$

ここで $h_2 = ka - \frac{1}{2}d$、$h_2 + d = ka + \frac{1}{2}d$ であるから $h_2(h_2 + d) = k^2a^2 - \frac{1}{4}d^2$ となり

$$ka\,y = \tfrac{1}{2}k^2a^2 - \tfrac{1}{8}d^2 + \tfrac{1}{6}d^2 = \tfrac{1}{2}k^2a^2 + \tfrac{1}{24}d^2.$$

ka^2 で割ると

$$\frac{y}{a} = \frac{k}{2} + \frac{\tan^2\theta}{24k},$$

となり、求める結果が得られる。

$k < \frac{1}{2}\tan\theta$ の場合

このとき h_2 は負になってしまうので、表面は下側の壁から距離 $b < a$ のところで底面と交わり、流体の断面は、直角をはさむ辺が底面に沿う b と下側の壁に沿う h の直角三角形になる。表面の傾きから $h = b\tan\theta$、面積から $\frac{1}{2}bh = ka^2$ である。よって $b^2\tan\theta = 2ka^2$ となり

$$b = a\sqrt{\frac{2k}{\tan\theta}}, \qquad h = a\sqrt{2k\tan\theta}.$$

（実際、$b < a$ となるのはまさに $2k < \tan\theta$ だからである。容器は十分高いので、h は問題を生じない。）三角形の図心は直角をはさむ各辺に沿って 3 分の 1 の位置にあるから

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2k}{\tan\theta}} = \frac{1}{3}\sqrt{2k\cot\theta}, \qquad \frac{y}{a} = \frac{1}{3}\sqrt{2k\tan\theta}.$$

$k = \frac{1}{2}\tan\theta$ では、どちらの組の公式も $x/a = \frac{1}{3}$、$y/a = \frac{1}{3}\tan\theta$ を与えるので、二つの場合はつながっている。

転倒

考えてみよう 手を離した瞬間に容器が倒れるかどうかは、何によって決まるか？

容器は軽いので、重さは流体の重さだけであり、それは重心 G を通って鉛直に作用する。斜面が押すことができるのは底面だけなので、垂直抗力（normal reaction）は底面上のどこか、下側の辺 O と上側の辺の間に作用する。G を通る鉛直線が O よりも斜面の下側で斜面と交わるならば、重力は O のまわりに、このような抗力では釣り合わせることのできないモーメントをもち、容器は O のまわりに回転する。すなわち転倒する。

O を原点とし、斜面の上向きに x、斜面に垂直に y をとる。この座標軸で鉛直下向きの方向の成分は $(-\sin\theta, -\cos\theta)$ であるから、$G = (x, y)$ から鉛直線に沿って距離 $y\sec\theta$ だけ下ると、斜面上の点

$$x - y\tan\theta.$$

に達する。したがって、$x < y\tan\theta$ ならば容器は転倒する。

$k < \frac{1}{2}$ かつ $\theta > 45°$ と仮定する。このとき $\tan\theta > 1 > 2k$ であるから $k < \frac{1}{2}\tan\theta$ となり、三角形の場合にあたる。このとき

$$y\tan\theta - x = \frac{a}{3}\left(\sqrt{2k\tan\theta}\,\tan\theta - \sqrt{\frac{2k}{\tan\theta}}\right) = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{2k}{\tan\theta}}\left(\tan^2\theta - 1\right) > 0,$$

である。$\tan\theta > 1$ だからである。よって $x < y\tan\theta$ であり、G を通る鉛直線は下側の辺よりも下を通るので、$k < \frac{1}{2}$ の値によらず容器は転倒する。（三角形の場合、同じ計算から $\theta < 45°$ ならば容器は安定であることがわかるので、そこではちょうど $45°$ が境目である。）これが求める結果である。条件 $k < \frac{1}{2}$ は、$\theta > 45°$ のときに三角形の場合になることを保証するためのものである。

検算

- $\theta = 0$ のとき、第一の場合は $x = \frac{1}{2}a$、$y = \frac{1}{2}ka$ を与え、これは深さ ka の流体の塊の中心である。
- 二つの場合は $k = \frac{1}{2}\tan\theta$ で一致し、そこでは台形が三角形に退化する。
- 数値による確認：300 組の無作為な (k, θ) について流体の領域を直接積分したところ、（$a = 1$ として）どちらの組の公式とも誤差 1.4×10^{-6} 以内で一致した。例えば $\theta = 55°$、$k = 0.3$ のとき $x \approx 0.216a$、$y \approx 0.309a$ であり、$y\tan\theta \approx 0.441a > x$ となるので転倒する。

よくある間違い

- 表面を底面と平行に描いたり、逆向きに傾けて描いたりすること。流体は**下側の**壁に寄って溜まる。
- 容器が軽いことを忘れて、容器の重さを加えてしまうこと。全体の重心は流体の重心である。
- G を通る鉛直線を、下側の辺 O ではなく底面の中央と比べて判定してしまうこと。

STEP のその先へ

「重心を通る鉛直線は底面と交わるか？」という判定は、安定性解析（stability analysis）の最も単純な例である。水に浮かぶ船も同じように扱われるが、その場合、浮力（buoyancy）は押しのけられた水の重心を通って作用し、その点は船が傾くにつれて

移動する。ここからメタセンター（metacentre）という概念が生まれる。運動する流体（手を離した後に揺れ動く流体）は、流体力学（fluid dynamics）におけるはるかに難しい問題である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体（rigid body）の釣り合いと軸のまわりの回転を丁寧に扱っている。

解答例

STEP III 2002、第 10 問

力学 ・ 摩擦のある回転

STEP III 2002、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/02-s3-q10

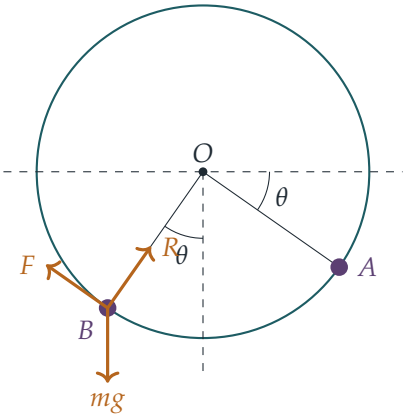
鍵となる考え方

2 番目の質点が滑らない限り、それは円柱とともに動くので、系全体は固定軸のまわりに回転する剛体（rigid body）とみなせる。すなわち、半径 a の位置に、互いに 4 分の 1 回転だけ離れた 2 つの等しい質量があるものである。このとき、エネルギー（または軸のまわりの力のモーメント（moments））を用いれば、運動は 1 行で求まる。滑りが始まる時点を求めるには、固定されていない質点だけを取り出して考え、面に沿う方向と面に垂直な方向にニュートンの第 2 法則（Newton's second law）を用いて、その質点に必要な摩擦力（friction）F と垂直抗力（normal reaction）R を求める。F が初めて μR に達したときに質点は滑る。

解答

設定

2 つの質点はどちらも軽い円柱上の質点として扱い、軸はなめらかであるとする。O を軸、A を固定された質点、B を固定されていない質点とする。静止状態から放すと A が下がるので、円柱は（図では時計回りに）回転し、B を A と反対側の側面に沿って持ち上げる。角 θ だけ回転した後、OA は水平から下向きに角 θ をなし、OB は反対側で鉛直下向きと角 θ をなす。



運動方程式

B が滑らない間は、2 つの質点はともに角速度（angular speed）$\dot\theta$ で半径 a の円周上を動き、円柱自身には質量がない。O の高さを位置エネルギー（potential energy）の基準とすると、A の高さは $-a\sin\theta$、B の高さは $-a\cos\theta$ である。系は $\theta = 0$ で静止状態から動き始め、なめらかな軸は仕事をしない。また、B と円柱の間の摩擦力は、相対運動がないので正味の仕事をしない。したがって、力学的エネルギーは保存される：

$$2\cdot\tfrac{1}{2}ma^2\dot\theta^2 - mga\sin\theta - mga\cos\theta = -mga,$$

すなわち

$$\dot\theta^2 = \frac{g}{a}(\sin\theta + \cos\theta - 1). \qquad (*)$$

これを時間で微分し、$2\dot\theta$（運動が始まった後は 0 でない）で割ると

$$\ddot\theta = \frac{g}{2a}(\cos\theta - \sin\theta),$$

となり、求める式が得られる。同じことを O のまわりの力のモーメントで考えることもできる。A にはたらく重力は回転の向きに $mga\cos\theta$ のモーメントをもち、B にはたらく重力は回転と逆向きに $mga\sin\theta$ のモーメントをもち、慣性モーメント（moment of inertia）は $2ma^2$ である。

B はいつ滑るか

次に B だけを考える。B にはたらく力は、重力 mg、O に向かう垂直抗力 R、面に沿う摩擦力 F である。F は B の運動の向き（側面を上る向き）を正とする。B は半径 a の円周上を動くので、O に向かう加速度 $a\dot\theta^2$ と、運動の向きの加速度 $a\ddot\theta$ をもつ。重力は、O から真っすぐ遠ざかる向きに成分 $mg\cos\theta$、運動と逆向きに成分 $mg\sin\theta$ をも

つ。したがって

$$\text{中心方向}O: \quad R - mg\cos\theta = ma\dot{\theta}^2,$$
$$\text{運動の向き}: \quad F - mg\sin\theta = ma\ddot{\theta}.$$

$(*)$ と運動方程式を用いると

$$R = mg\cos\theta + mg(\sin\theta + \cos\theta - 1) = mg\,(2\cos\theta + \sin\theta - 1),$$
$$F = mg\sin\theta + \tfrac{1}{2}mg(\cos\theta - \sin\theta) = \tfrac{1}{2}mg\,(\sin\theta + \cos\theta).$$

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ ではどちらも正である。($2\cos\theta \ge 1$ を用いると、$0 < \theta \le \frac{\pi}{3}$ に対して $2\cos\theta + \sin\theta - 1 \ge \sin\theta > 0$ となるので $R > 0$ であり、また $\theta = 0$ では $R = mg$ である。) よって B は面に接したままであり、摩擦力は B を側面に沿って押し上げる向きにはたらく。質点は $F \le \mu R$ である限り滑らない。すなわち

$$\rho(\theta) = \frac{F}{R} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{2(2\cos\theta + \sin\theta - 1)} \le \mu.$$

である限り滑らない。$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$、$\cos\theta = \frac{1}{2}$ となる $\theta = \frac{\pi}{3}$ では

$$\rho\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} = \mu.$$

考えてみよう なぜ質点はこれより前に滑り始めることがないのだろうか。

すべての $0 \le \theta < \frac{\pi}{3}$ に対して $\rho(\theta) < \mu$ であることを示す必要がある。$N = \sin\theta + \cos\theta$、$D = 2\cos\theta + \sin\theta - 1$ とおく。すると

$$N'D - ND' = (\cos\theta - \sin\theta)(2\cos\theta + \sin\theta - 1) - (\sin\theta + \cos\theta)(\cos\theta - 2\sin\theta)$$
$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta + \sin\theta - \cos\theta = 1 + \sin\theta - \cos\theta,$$

であり、これは $0 < \theta < \pi$ で正である。$[0, \frac{\pi}{3}]$ 上で $D > 0$ であるから、そこでは $\rho' = (N'D - ND')/(2D^2) > 0$ となり、ρ は $\rho(0) = \frac{1}{2}$ から狭義単調増加する。したがって、ρ は $\theta = \frac{\pi}{3}$ でちょうど μ に達するまで μ より小さいままである。また、$(*)$ より $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ では $\dot{\theta}^2 > 0$ であるから、円柱は実際に回転し続けてこの角度に達する。

よって、2 番目の質点は円柱が 60° 回転したときに滑り始める。これが示すべきことであった。

検算

- $\theta = 0$ のとき：B は最下点で静止しているが、$F = \frac{1}{2}mg \ne 0$ である。これは正しい。A にはたらく重力が円柱を回そうとしており、摩擦力は B を円柱とともに加速さ

せなければならないからである。実際、そこでは $F = ma\ddot{\theta} = \frac{1}{2}mg$ であり、B にはまだ速さがないので $R = mg$ である。

- $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき $\ddot{\theta} = 0$ であり、角速度は最大となる。これは、2 つの重力の O のまわりのモーメントがつり合うときに予想されるとおりである。
- 数値的に運動方程式を積分し、B にはたらく接触力をその加速度から直接計算すると、R と F の式が再現され、F/R は 60.00° で初めて $(3+\sqrt{3})/6 \approx 0.7887$ に達する。

よくある間違い

- 円柱の慣性モーメントを含めてしまう：円柱は軽いので、慣性モーメント $2ma^2$ に寄与するのは 2 つの質点だけである。
- B の接線加速度（tangential acceleration）$a\ddot{\theta}$ を忘れる：そうすると $F = mg\sin\theta$ となり、誤った角度が得られる。
- 60° で $F = \mu R$ となることだけを確かめ、それ以前には F/R がより小さかったことを示さない。

STEP のその先へ

これは自由度（degree of freedom）1 の系である。すなわち、拘束（constraint）（滑らないという条件）を課すと、ただ 1 つの座標 θ ですべてが記述され、エネルギーから運動が直接得られる。拘束力はその後で求められ、拘束に必要な力が面の供給できる力を超えたときに拘束が破れる。これは球面から質点が離れる問題と同じ論理であり、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）では、これはラグランジュの未定乗数（Lagrange multipliers）を用いて体系化される。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このような考え方で剛体の回転と拘束力を展開している。

解答例

STEP III 2002、第 11 問

力学 ・ 壁との斜め衝突

> **STEP III 2002、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s3-q11

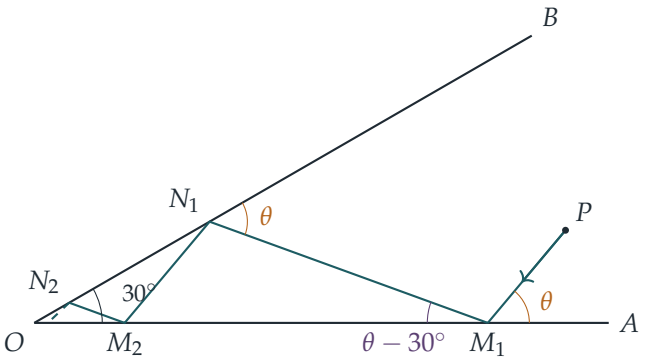
この問題は、*Beyond STEP* の第 10.5 節「**有限時間に無限回の跳ね返り**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch10/zeno-wedge.html

鍵となる考え方

なめらかな壁では、力積（impulse）は壁に垂直にはたらく。したがって、速度の壁に沿った成分はそのまま保たれ、壁に垂直な成分だけが e 倍される。これを三角形 OM_1N_1 の角と組み合わせると、前半は一つの三角方程式に帰着する。後半では、衝突のたびに運動が縮小された形でくり返される。各区間は短くなっていくが、粒子も遅くなっていくので、足し合わせるべきは距離ではなく**時間**である。その和は等比級数（geometric series）になる。

解答

粒子は、なめらかな水平面上を動く質点としてモデル化する。したがって、衝突と衝突の間は一定の速さで直線運動をする。壁はなめらかであり、各衝突は反発係数（coefficient of restitution）e のニュートンの反発の法則（Newton's experimental law）に従う。



e と v_1/u_1 を求める

角 $PM_1A = \theta$ であるから、粒子は O の方へ向かって、壁と角 θ をなす向きに進んで M_1 に達する。衝突の直前、速度の成分は

$u_1\cos\theta$ 壁に沿った成分（O へ向かう向き），　　$u_1\sin\theta$ 壁に垂直な成分（壁に向かう向き）．

である。壁はなめらかなので、粒子が受ける力積は OA に垂直である。よって

壁に沿った成分：$u_1\cos\theta$（変化しない），

垂直な成分：$e\,u_1\sin\theta$（向きが逆になり e 倍される）．

となる。したがって、粒子は依然として O の方へ向かいながら、壁と角 φ をなす向きに M_1 を離れる。ここで

$$\tan\varphi = \frac{e\,u_1\sin\theta}{u_1\cos\theta} = e\tan\theta, \qquad v_1\cos\varphi = u_1\cos\theta. \tag{$*$}$$

である。

次に、三角形 OM_1N_1 の幾何から φ を求める。点 O, N_1, B は一直線上にあり、角 $M_1N_1B = \theta$ であるから、角 $ON_1M_1 = 180° - \theta$ である。O における角は $30°$ なので

$$\varphi = \angle OM_1N_1 = 180° - 30° - (180° - \theta) = \theta - 30°.$$

となる。φ が正であるためには $\theta > 30°$ が必要であり、この配置では暗にそれが仮定されている。すると $(*)$ から

$$\boxed{e = \frac{\tan(\theta - 30°)}{\tan\theta}}$$

および

$$\boxed{\frac{v_1}{u_1} = \frac{\cos\theta}{\cos(\theta - 30°)} = \frac{2}{\sqrt{3} + \tan\theta}},$$

が得られる。最後の形は $\cos(\theta-30^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta$ と展開して得られる。好みに応じて $e=\dfrac{\sqrt{3}\tan\theta-1}{\tan\theta\,(\sqrt{3}+\tan\theta)}$ と書いてもよい。$0<\theta-30^\circ<\theta<90^\circ$ であるから $0<e<1$ となり、問題の要求どおりである。

有限時間で O に到達すること

粒子は O の方へ向かいながら、壁 OB と角 θ をなす向きに N_1 に到達する（角 $M_1N_1B=\theta$ だからである）。これは、二つの壁の役割を入れ替えれば M_1 における状況とまったく同じである。したがって同じ計算が当てはまり、粒子は N_1O と角 $\theta-30^\circ$ をなす向きにはね返り、その速さは

$$r=\frac{\cos\theta}{\cos(\theta-30^\circ)}.$$

倍になる。

考えてみよう 粒子は再び角 θ で M_2 に到達し、本当に同じパターンがくり返されるのだろうか。

そのとおりである。三角形 ON_1M_2 において、O における角は 30°、N_1 における角は $\theta-30^\circ$ である。よって角 $OM_2N_1=180^\circ-\theta$ となり、これは角 $N_1M_2A=\theta$ を意味する。数学的帰納法（induction）により、どの衝突も壁と角 θ をなして起こる。どの区間も壁と角 $\theta-30^\circ$ をなして壁を離れる。そして三角形 OM_nN_n, ON_nM_{n+1} はすべて角 $30^\circ, \theta-30^\circ, 180^\circ-\theta$ をもつので、互いに相似（similar）である。

長さ。 三角形 OM_1N_1 における正弦定理（sine rule）により

$$\frac{ON_1}{\sin(\theta-30^\circ)}=\frac{OM_1}{\sin(180^\circ-\theta)}=\frac{M_1N_1}{\sin30^\circ}.$$

である。したがって、新しい三角形はどれも直前の三角形を

$$k=\frac{ON_1}{OM_1}=\frac{\sin(\theta-30^\circ)}{\sin\theta}.$$

倍に縮小したものである。区間 M_1N_1, N_1M_2, $M_2N_2,\ldots$ を順に区間 $1,2,3,\ldots$ とよぶ。区間 n の長さは ℓ_1k^{n-1} である。ここで $\ell_1=M_1N_1=\dfrac{OM_1}{2\sin\theta}$ である。

速さ。 区間 n は一定の速さ v_1r^{n-1} で進む。

時間。 したがって、区間 n を進むのにかかる時間は

$$\tau_n=\frac{\ell_1k^{n-1}}{v_1r^{n-1}}=\frac{\ell_1}{v_1}q^{n-1},\qquad q=\frac{k}{r}=\frac{\sin(\theta-30^\circ)\cos(\theta-30^\circ)}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sin(2\theta-60^\circ)}{\sin2\theta}.$$

である。

考えてみよう 区間の長さは等比数列的に縮んでいくが、粒子も遅くなっていく。なぜそれだけでは決着しないのだろうか。

足し合わせるのは時間であり、時間の比 q は区間の縮み方（k）と粒子の減速の仕方（r）を比べたものである。必要なのは $q<1$ である。そこで $30^\circ<\theta<60^\circ$ と仮定する。すると

$$0^\circ<2\theta-60^\circ<60^\circ \;\Rightarrow\; \sin(2\theta-60^\circ)<\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \qquad 60^\circ<2\theta<120^\circ \;\Rightarrow\; \sin 2\theta>\tfrac{\sqrt{3}}{2},$$

であるから $0<q<1$ となる。このとき、全体の時間は収束（convergent）する等比級数で表される：

$$T=\frac{PM_1}{u_1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ell_1}{v_1}q^{n-1}=\frac{PM_1}{u_1}+\frac{\ell_1}{v_1(1-q)}.$$

これは有限である。簡単にするために $\sin 2\theta-\sin(2\theta-60^\circ)=2\cos(2\theta-30^\circ)\sin 30^\circ$ を用いると、$1-q=\dfrac{\cos(2\theta-30^\circ)}{\sin 2\theta}$ が得られる。すると、M_1 以降にかかる時間は

$$\frac{\ell_1}{v_1(1-q)}=\frac{OM_1\cos(\theta-30^\circ)}{u_1\cos(2\theta-30^\circ)},$$

となり、$30^\circ<\theta<60^\circ$ において正かつ有限である。

最後に、粒子が実際に O に到達することを確かめる。n 回目の衝突の後、粒子と O の距離は OM_1k^n であり、$0<k<1$ であるから $OM_1k^n\to 0$ である。一つの区間を進む間、粒子と O の距離は、その区間の両端と O の距離のうち大きい方以下である。したがって $t\to T$ のとき粒子と O の距離は 0 に近づく。すなわち、粒子は無限回の衝突の後、有限の時刻 T に O に到達する。 ■

検算

- $\theta=45^\circ$ のとき：$e=\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}\approx 0.268$、$v_1/u_1=\sqrt{3}-1\approx 0.732$、そして $q=\sin 30^\circ/\sin 90^\circ=\frac{1}{2}$ であるから、各区間にかかる時間は直前の区間の半分である。$OM_1=u_1=1$ とすると、M_1 から O までの時間は $\cos 15^\circ/\cos 60^\circ=2\cos 15^\circ\approx 1.932$ である。衝突を一つずつ追うシミュレーション（60 回の衝突）では 1.931852 となり、一致する。
- $\theta=60^\circ$ のとき：$q=1$ であるから、どの区間にも同じ時間がかかり、合計は無限大になる。$\theta>60^\circ$ では $q>1$ である。したがって 60° はちょうど境界であり、T の式はそこで $\cos(2\theta-30^\circ)=\cos 90^\circ=0$ によって発散する。
- $\theta\to 30^{\circ+}$ のとき $e\to 0$ である。粒子はほとんどはね返らず、ほぼまっすぐ O へすべっていく。予想どおりである。

よくある間違い

- 三角形の扱いを誤る：角 M_1N_1B は N_1 における**外角**であるから、内角は $180^\circ - \theta$ であり、M_1 におけるはね返りの角は $\theta + 30^\circ$ ではなく $\theta - 30^\circ$ である。
- 距離 $OM_n \to 0$ であるというだけで、粒子が O に到達すると論じてしまう。無限個の区間があるので、**時間**の級数が収束することが必要であり、しかも粒子は衝突のたびに遅くなる。
- 衝突の際に接線方向の成分の向きを逆にしてしまう。なめらかな壁では、法線方向の成分だけが変化する。

STEP のその先へ

有限時間内に無限回の衝突が起こることを**ゼノン現象**（Zeno behaviour）という。よく知られた例は、$e < 1$ で床の上をはずむボールであり、ここではくさび形の壁が床の役割を果たしている。なめらかな運動と突然の跳びが混在する「ハイブリッド」系（hybrid systems）を研究する数学者は、ゼノン時刻の後に何が起こるかを定めなければならない。粉体（granular materials）では、同じ効果が**非弾性崩壊**（inelastic collapse）とよばれ、シミュレーションにおいて実際に大きな問題を引き起こす。衝突と力積を大学 1 年生のレベルで丁寧に扱ったものとしては、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照のこと。

解答例

STEP III 2002、第 12 問

確率・統計 ・ 条件付けによる期待値

STEP III 2002、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/02-s3-q12

鍵となる考え方

ゲームがどう始まるかで条件付け（conditioning）を行う。どのゲームも H、TH、TT のいずれかで始まる。はじめの二つの場合には何も役に立つことは起きておらず（裏の連続が途切れている）、ゲームは単に最初からやり直しになるので、残りの長さの期待値（expectation）は再び E である。この「再生」（renewal）の考え方から E についての一次方程式が得られ、これを解けばよい。同じ考え方を、最初の表がいつ出るかで場合分けする形にすれば、r 回の裏の場合も扱える。

解答

以下を通じて、p は表が出る確率、$q = 1 - p$ は裏が出る確率とし、各回の投げは独立であるとする。$0 < p < 1$ を仮定する。これによりゲームは確率 1 で終了し、以下に現れる期待値はすべて有限である。

E の方程式の説明

最初の 1 回または 2 回の投げに注目する。次のうちちょうど一つが起こる。

- **最初に H**（確率 p）。投げを 1 回使い、進行中の裏の連続はない。各回の投げは独立なので、残りのゲームはゲーム全体の新しいコピーであり、その長さの期待値は E である。全体の期待値は $1 + E$。
- **T のあと H**（確率 qp）。投げを 2 回使い、やはり表が裏の連続を打ち消したので、ゲームは最初からやり直しになる。全体の期待値は $2 + E$。
- **T のあと T**（確率 q^2）。ゲームはちょうど 2 回の投げで終わる。

これら三つの場合は互いに排反で、すべての場合を尽くしている（確率の和は $p+qp+q^2=p+q=1$）。全期待値の法則（law of total expectation）により

$$E=p(1+E)+(1-p)p(2+E)+2(1-p)^2,$$

となり、これが与えられた方程式である。

E を求める

E を含む項をまとめると

$$E\,(1-p-qp)=p+2qp+2q^2.$$

左辺では $1-p-qp=q-qp=q(1-p)=q^2$ である。右辺では $p+2q(p+q)=p+2q=1+q$ である。$q\neq 0$ より

$$E=\frac{1+q}{q^2}=\frac{2-p}{(1-p)^2}.$$

賞金の期待値

W を表の回数の期待値、すなわちポンド単位での賞金の期待値とする。同じ三つの場合を用いる。H のあとでは £1 を得てゲームはやり直しになる。TH のあとでもやはり £1 を得てゲームはやり直しになる。TT のあとでは何も得られず、ゲームは終わる。したがって

$$W=p(1+W)+qp(1+W)+q^2\cdot 0.$$

考えてみよう TH の場合に W ではなく $1+W$ となるのはなぜか？

この場合の 2 回目の投げは表**である**から、ゲームがやり直しになる前に £1 を得ている。これを忘れるのが、ここで最も間違えやすい点である。

項をまとめると $W(1-p-qp)=p(1+q)$ となるので、$Wq^2=p(1+q)$ であり、

$$W=\frac{p(1+q)}{q^2}=\frac{p(2-p)}{(1-p)^2}\ \text{ポンド}.$$

$W=pE$ となっていることに注意しよう。ゲームが止まる時点は投げの結果に依存するにもかかわらず、平均すると投げのうち割合 p が表なのである。

裏が r 回続くまでのゲーム

今度は、裏が r 回続いたときにゲームが止まる場合の投げの回数の期待値を E とする。最初の表で条件付けする。最初の r 回がすべて裏であるか、または $0\leq j\leq r-1$ を満たすある j について最初の表が $j+1$ 回目に出るかのいずれかである。

- **j 回の裏のあと表**（確率 $q^j p$）。投げを $j+1$ 回使い、裏の連続は途切れ、ゲームはやり直しになる。全体の期待値は $j+1+E$。
- **r 回の裏**（確率 q^r）。ゲームはちょうど r 回の投げで終わる。

したがって

$$E = \sum_{j=0}^{r-1} q^j p\,(j+1+E) + rq^r.$$

右辺の E の係数は、$1-q=p$ より $p\sum_{j=0}^{r-1} q^j = p\cdot\dfrac{1-q^r}{1-q} = 1-q^r$ である。これを左辺に移項すると

$$q^r E = p\sum_{j=0}^{r-1}(j+1)q^j + rq^r. \qquad (*)$$

考えてみよう 公式集なしで $\sum(j+1)q^j$ をどう計算するか？

$S = \sum_{j=0}^{r-1}(j+1)q^j = 1+2q+3q^2+\cdots+rq^{r-1}$ とおき、$qS = q+2q^2+\cdots+(r-1)q^{r-1}+rq^r$ を引くと

$$(1-q)S = 1+q+q^2+\cdots+q^{r-1}-rq^r = \frac{1-q^r}{p} - rq^r.$$

よって $pS = \dfrac{1-q^r}{p} - rq^r$ であり、これを $(*)$ に代入すると rq^r の項が打ち消し合う。

$$q^r E = \frac{1-q^r}{p} - rq^r + rq^r = \frac{1-q^r}{p}.$$

したがって

$$E = \frac{1-q^r}{pq^r},$$

となり、示すべき式が得られた。$r=2$ のとき、これは $\dfrac{(1-q)(1+q)}{pq^2} = \dfrac{1+q}{q^2}$ となり、最初のゲームの結果と一致する。

検算

- 公平な硬貨 $p=q=\frac{1}{2}$ の場合、最初のゲームは平均 $E = \frac{3/2}{1/4} = 6$ 回続き、賞金は $W = £3$ であり、当然そうあるべきように E の半分になっている。
- $r=1$ の場合、ゲームは最初の裏で止まるので、長さは平均 $1/q$ の幾何分布（geometric distribution）に従う。公式は $\dfrac{1-q}{pq} = \dfrac{1}{q}$ を与える。

- $q \to 0$（ほとんどすべての投げが表）のとき、E と W はともに発散する。当然そうなるべきである。
- $r = 1, \ldots, 7$ といくつかの p の値について、「現在 k 回の裏が続いている」という状態の連鎖を分数で厳密に解き、これらの公式を確認した。$p = 0.4$ で 2×10^5 回のゲームをシミュレーションしたところ、$r = 2$ では投げの回数の平均が 4.438（理論値 4.444）、賞金が £1.772（理論値 £1.778）であり、$r = 3$ では投げの回数が 9.074 の理論値に対して 9.076 であった。

よくある間違い

- 賞金の方程式で $qp(1 + W)$ の代わりに qpW と書いてしまうこと。これは誤った答え p/q^2 を与える。
- 最初の 1 回の投げだけで条件付けすること。T が 1 回出ただけではゲームはやり直しに**ならない**。連続する裏のうち 1 回分がすでに確保されているからである。与えられた方程式が 2 回先まで見ているのはこのためである。

STEP のその先へ

「表が出れば、その後はちょうど最初と同じに見える」という議論は、マルコフ連鎖（Markov chain）に対する**再生**法あるいは**一歩目**（first-step）解析と呼ばれる方法であり、一般に到達時間（hitting time）の期待値はこのようにして計算される。$W = pE$ というきれいな事実はワルド（Wald）の等式の一例である。すなわち、N が停止時刻（stopping time）であれば、独立同分布（independent, identically distributed）な項を確率的な個数 N だけ足した和の期待値は、$\mathbb{E}[N]$ と 1 項の平均の積に等しい。どちらについても、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）や Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）で読むことができる。

解答例

STEP III 2002、第 13 問

確率・統計 ・ 指数分布の最小値

STEP III 2002、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/02-s3-q13

鍵となる考え方

「少なくとも一方が x より小さい」は「両方とも x 以上である」の余事象（complement）であり、後者の確率は独立性（independence）によって積に分解される。指数分布（exponential distribution）の裾の確率は $\mathrm{P}(X_i \geq x) = \mathrm{e}^{-\lambda_i x}$ ととても単純なので、その積もまた指数分布の裾の確率になる。最小値に関する証明はこれに尽きる。バスの問題はその直接の応用である。次のバスまでの待ち時間は、2 つの指数分布に従う間隔のうち小さいほうなのである。

解答

一方または両方が x より小さい確率

まず、1 つの指数分布に従う確率変数の裾の確率を求める。$x \geq 0$ のとき、

$$\mathrm{P}(X_i \geq x) = \int_x^\infty \lambda_i \mathrm{e}^{-\lambda_i t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda_i t}\right]_x^\infty = \mathrm{e}^{-\lambda_i x}.$$

$X_1 < x$ または $X_2 < x$（または両方）であるという事象を E とする。その余事象は、$X_1 \geq x$ と $X_2 \geq x$ が**両方とも**成り立つという事象である。X_1 と X_2 は独立であるから、

$$\mathrm{P}(X_1 \geq x \text{ かつ} X_2 \geq x) = \mathrm{P}(X_1 \geq x)\,\mathrm{P}(X_2 \geq x) = \mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\mathrm{e}^{-\lambda_2 x},$$

よって、$x \geq 0$ のとき

$$\boxed{\mathrm{P}(E) = 1 - \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}.}$$

（$x < 0$ のときは、どちらの変数も負の値をとらないので、確率は 0 である。）

考えてみよう なぜ単に $\mathrm{P}(X_1 < x)$ と $\mathrm{P}(X_2 < x)$ を足してはいけないのか？

2つの事象は重なり合っているからである。両方が同時に x より小さくなることがあり、単に足すとその場合を二重に数えてしまう。包除原理（inclusion–exclusion）を使って $(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x})+(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 x})-(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x})(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 x})$ と計算することもでき、整理すれば同じ答えになるが、余事象を考えるほうが速い。

最小値は指数分布に従う

$X=\min(X_1, X_2)$ とおく。2つの数のうち小さいほうが x より小さいのは、少なくとも一方が x より小さいときであり、かつそのときに限る。したがって $\{X<x\}$ は上の事象 E にほかならない。よって X の分布関数（distribution function）は

$$F(x)=\mathrm{P}(X\le x)=1-\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} \qquad (x\ge 0),$$

であり、$x<0$ のときは $F(x)=0$ である。（連続型確率変数では $\mathrm{P}(X<x)=\mathrm{P}(X\le x)$ である。）微分すると、X の確率密度関数（density）は

$$f(x)=F'(x)=(\lambda_1+\lambda_2)\,\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} \qquad (0\le x<\infty),$$

となり、これはパラメータ（parameter）$\lambda_1+\lambda_2$ の指数分布の確率密度関数である。よって X は指数分布に従う。これが示すべきことであった。

バス

パラメータ λ の指数分布の平均（mean）は、部分積分（integration by parts）により $\int_0^\infty t\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1/\lambda$ である。時間を分単位で測ると、平均間隔15分と30分からパラメータは

$$\lambda_A=\tfrac{1}{15}, \qquad \lambda_B=\tfrac{1}{30}.$$

となる。各路線のバスはちょうど出発したところなので、次の路線Aのバスまでの時間は路線Aのバスの間隔 T_A そのものであり、路線Bについても同様に T_B である。これらは独立で、それぞれパラメータ λ_A、λ_B の指数分布に従う。どちらの路線でもカレッジに行けるので、待ち時間は $W=\min(T_A, T_B)$ であり、いま証明した結果より W はパラメータ

$$\lambda_A+\lambda_B=\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{30}=\tfrac{1}{10}.$$

の指数分布に従う。中央値（median）m は $\mathrm{P}(W\le m)=\frac{1}{2}$ を満たすので、

$$1-\mathrm{e}^{-m/10}=\tfrac{1}{2} \iff \mathrm{e}^{-m/10}=\tfrac{1}{2} \iff m=10\ln 2.$$

$\ln 2\approx 0.693$ であるから、待ち時間の中央値は $m\approx 6.93$ 分であり、約7分である。これが示すべきことであった。

検算

- $\lambda_2 \to 0$（路線 B のバスがほとんど来ない）とすると、答えは $1 - e^{-\lambda_1 x}$ となり、X_1 の分布そのものになる。当然そうなるべきである。
- 平均待ち時間は 10 分であり、各路線の平均 15 分や 30 分のどちらよりも短い。また中央値 $10 \ln 2$ は平均より小さく、右に裾の長い分布（right-skewed distribution）ではふつうそうなる。
- 平均 15 と 30 の独立な指数分布に従う間隔の組を 2×10^5 組シミュレーションしたところ、最小値の中央値は約 6.91 分となった。理論値は $10 \ln 2 = 6.931\ldots$ である。

よくある間違い

- 平均をそのままパラメータとして使ってしまう。平均 15 の指数分布では $\lambda = \frac{1}{15}$ であり、15 ではない。
- 2 つの確率を $P(X_1 < x) + P(X_2 < x)$ と足してしまう。これは二重に数えており、1 を超えることもある。
- 各路線の中央値を平均したり、路線 A だけの中央値（$15 \ln 2 \approx 10.4$）をとったりする。路線が 2 つあることで待ち時間は短くなるのである。

STEP のその先へ

バスの間隔が指数分布に従うということは、バスが**ポアソン過程**（Poisson process）に従って到着するということであり、ここでの結果は、独立な 2 つのポアソン過程を合わせると、到着率がそれぞれの到着率の和であるような別のポアソン過程が得られることを述べている。無記憶性（memoryless property）$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$ とあわせて、これは待ち行列理論（queueing theory）や連続時間マルコフ連鎖（continuous-time Markov chains）の基礎であり、大学 1 年の確率論の講義で学ぶ内容である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、指数分布に従う確率変数とポアソン過程を扱っている。

解答例

STEP III 2002、第 14 問

確率・統計 ・ 分散と共分散

> **STEP III 2002、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s3-q14

鍵となる考え方

分散（variance）の恒等式は、分散の定義を期待値の線形性（linearity of expectation）を用いて展開したものにすぎない。チェスの部分は見た目以上に巧妙である。$\mathrm{E}(WL)$ を直接計算することは一度もない。その代わりに、$W+L$ の分散は二項分布（binomial distribution）からわかり、$\mathrm{Var}(W)$ と $\mathrm{Var}(L)$ も二項分布からわかる。そして、いま証明したばかりの恒等式が共分散（covariance）をただで与えてくれるのである。

解答

分散の恒等式

$\mu_X = \mathrm{E}(X)$、$\mu_Y = \mathrm{E}(Y)$ とおく。次の定義

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\big[(X-\mu_X)^2\big], \qquad \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}\big[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big],$$

および期待値の線形性 $\mathrm{E}(aU+bV) = a\,\mathrm{E}(U) + b\,\mathrm{E}(V)$ を用いる。線形性は、離散確率変数（discrete random variable）の場合、和 $\sum (au+bv)\,\mathrm{P}(U=u, V=v)$ を二つの和に分け、それぞれでもう一方の変数について和をとってしまえば得られる。

線形性より $\mathrm{E}(X+Y) = \mu_X + \mu_Y$ であるから、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X+Y) &= \mathrm{E}\big[\big((X-\mu_X)+(Y-\mu_Y)\big)^2\big] \\
&= \mathrm{E}\big[(X-\mu_X)^2 + (Y-\mu_Y)^2 + 2(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big] \\
&= \mathrm{E}\big[(X-\mu_X)^2\big] + \mathrm{E}\big[(Y-\mu_Y)^2\big] + 2\,\mathrm{E}\big[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big] \\
&= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y),
\end{aligned}$$

となる。ここで 3 行目では再び線形性を用いた。これが求める結果である。独立性（independence）はまったく必要なかったことに注意せよ。この恒等式は任意の X と Y について成り立つ。

小問 (i)

どの対局も勝ち、負け、引き分けのいずれかであるから、何が起ころうと $W + L + D = m$ である。常に同じ値をとる確率変数はその平均に等しいので、その分散は $\mathrm{E}\big[(m-m)^2\big] = 0$ である。

小問 (ii)

勝ちまたは負けで終わった対局を**決着局**と呼ぶことにする。各対局が決着局となる確率は $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ であり、対局どうしは独立で、対局数は一定の m である。したがって、決着局の数 $W + L$ は、成功確率の等しい m 回の独立な試行における成功回数を数えたものであり、

$$W + L \sim \mathrm{B}\big(m, \tfrac{2}{3}\big).$$

相関係数

まったく同様に、W はそれぞれ確率 $\frac{1}{3}$ で勝ちとなる m 回の独立な試行における勝ちの回数を数えたものであるから $W \sim \mathrm{B}(m, \frac{1}{3})$ であり、同様に $L \sim \mathrm{B}(m, \frac{1}{3})$ である。二項分布の分散の公式 $\mathrm{Var} = np(1-p)$ を用いると、

$$\mathrm{Var}(W) = \mathrm{Var}(L) = m \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} = \frac{2m}{9}, \qquad \mathrm{Var}(W + L) = m \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{3} = \frac{2m}{9}.$$

考えてみよう $\mathrm{E}(WL)$ を計算せずに、どうすれば $\mathrm{Cov}(W, L)$ を求められるだろうか。

恒等式を逆向きに使えばよい。$X = W$、$Y = L$ とすると、

$$\frac{2m}{9} = \frac{2m}{9} + \frac{2m}{9} + 2\,\mathrm{Cov}(W, L), \qquad \text{よって} \qquad \mathrm{Cov}(W, L) = -\frac{m}{9}.$$

したがって、$m \geq 1$（分散が 0 でないため）のとき、相関係数（correlation）は

$$\frac{\mathrm{Cov}(W, L)}{\sqrt{\mathrm{Var}(W)\,\mathrm{Var}(L)}} = \frac{-m/9}{2m/9} = -\frac{1}{2}.$$

答えは m によらない。また負であるのは当然である。対局数が一定なので、勝ちが多いほど負けの入る余地は少なくなる。

小問 (i) からは別の道筋も得られる。恒等式を 2 回適用すると、$\mathrm{Var}(W + L + D)$ は三つの分散の和に、三つの組ごとの共分散の和の 2 倍を加えたものになる。対称性より

三つの共分散はすべてある値 c に等しいので、$0 = 3 \cdot \frac{2m}{9} + 6c$ となり、やはり $c = -\frac{m}{9}$ を得る。

検算

- $m = 1$ とする。このとき W と L は指示変数（indicator）で、$\mathrm{E}(W) = \mathrm{E}(L) = \frac{1}{3}$ かつ常に $WL = 0$ であるから、$\mathrm{Cov}(W, L) = 0 - \frac{1}{9} = -\frac{1}{9}$ となり、$-m/9$ と一致する。
- 二つの道筋（小問 (ii) を経由するものと小問 (i) を経由するもの）の結果は一致する。
- $m = 1, \ldots, 7$ について 3^m 通りの結果をすべて厳密に数え上げると、いずれの場合も $\mathrm{Var}(W) = 2m/9$、$\mathrm{Cov}(W, L) = -m/9$ であり、相関係数はちょうど $-\frac{1}{2}$ となる。

よくある間違い

- **対局**が独立だから W と L も独立だと思い込むこと。実際には独立ではない。D とともに一定の合計を分け合っているからである。
- $\mathrm{Var}(W + L) = \mathrm{Var}(W) + \mathrm{Var}(L) = 4m/9$ としてしまうこと。これは共分散の項を忘れており、二項分布から得られる答え $2m/9$ と矛盾する。

STEP のその先へ

(W, L, D) は**多項分布**（multinomial distribution）に従う。これは、1 回の試行の結果が 3 通り以上ある場合への二項分布の自然な一般化である。一般に、各結果の確率が $p_1, \ldots, p_k$ のとき、回数 N_i と N_j の共分散は $-mp_ip_j$、相関係数は $-\sqrt{p_ip_j / \big((1-p_i)(1-p_j)\big)}$ であり、ここではこれが $-\frac{1}{2}$ を与える。共分散行列（covariance matrix）や共分散の双線形性（bilinearity）については、Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）や、Blitzstein と Hwang による *Introduction to Probability*（確率論入門）で詳しく論じられている。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

2002 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

