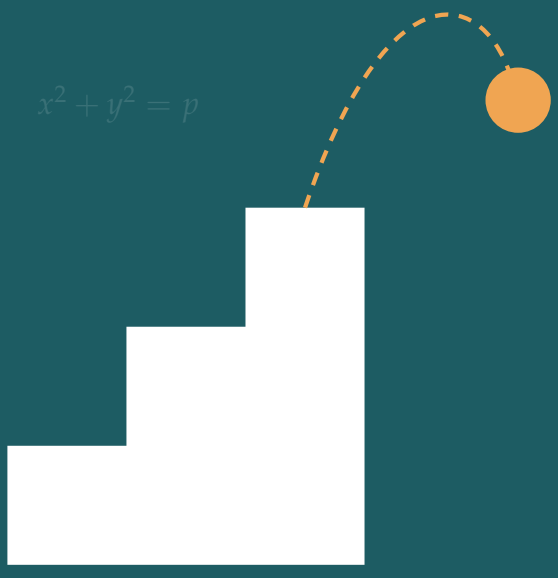
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

2001 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

2001 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

2001 年解答例

2001 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 42 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 幾何的不等式 純粋数学 . . . 3
Q2 代数的不等式 純粋数学 . . . 7
Q3 3次方程式と判別式 純粋数学 . . . 11
Q4 逆三角関数を含む方程式 純粋数学 . . . 15
Q5 積分記号下の微分 純粋数学 . . . 19
Q6 回転面 純粋数学 . . . 22
Q7 凹性と微分方程式 純粋数学 . . . 26
Q8 2階線形方程式 純粋数学 . . . 31
Q9 迎撃と相対速度 力学 . . . 35
Q10 放物運動の飛行時間 力学 . . . 39
Q11 弾性ひもとエネルギー 力学 . . . 43
Q12 樹形図 確率・統計 . . . 47
Q13 条件付きポアソン分布 確率・統計 . . . 51
Q14 ランダムな順列 確率・統計 . . . 54

STEP II

Q1 二項近似 純粋数学 . . . 58
Q2 整数部分の和 純粋数学 . . . 61
Q3 ユークリッド幾何 純粋数学 . . . 65
Q4 倍角を含む方程式 純粋数学 . . . 69
Q5 停留点と積分 純粋数学 . . . 73
Q6 置換積分 純粋数学 . . . 77
Q7 複素数と回転 純粋数学 . . . 81
Q8 周期関数と常微分方程式 純粋数学 . . . 85

Q9 速度の 2 乗に比例する空気抵抗 力学 . . . 89
Q10 衝突と反発係数 力学 . . . 93
Q11 放物運動 力学 . . . 97
Q12 ポアソン近似 確率・統計 . . . 101
Q13 連続分布と推定 確率・統計 . . . 104
Q14 最小分散推定量 確率・統計 . . . 108

STEP III

Q1 マクローリン級数 純粋数学 . . . 112
Q2 双曲線関数による置換と面積 純粋数学 . . . 117
Q3 2 次方程式の解 純粋数学 . . . 121
Q4 逆三角関数 純粋数学 . . . 125
Q5 放物線の法線 純粋数学 . . . 130
Q6 ベクトルと三角形の中心 純粋数学 . . . 134
Q7 直交軌道 純粋数学 . . . 139
Q8 複素平面上の軌跡 純粋数学 . . . 144
Q9 摩擦と単振動 力学 . . . 149
Q10 相対速度 力学 . . . 153
Q11 回転エネルギーの保存 力学 . . . 157
Q12 指示変数による期待値 確率・統計 . . . 161
Q13 硬貨の表裏の列のゲーム 確率・統計 . . . 164
Q14 不偏分散 確率・統計 . . . 169

解答例

STEP I 2001、第 1 問

純粋数学 ・ 幾何的不等式

> **STEP I 2001、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q1

鍵となる考え方

正方形の相異なる 3 辺上にある 3 点は、必ず向かい合う 1 組の辺を使い、残りの 1 辺はその 2 辺をつなぐ辺になる。正方形に座標を入れ、各点が 0 以上 1 以下の自由なパラメータを 1 つだけもつようにする。そのうえで背理法（proof by contradiction）で論じる。三角形の 3 辺がすべて上界より長いとすると、各辺の長さの条件がそれぞれ 1 つのパラメータを締めつけ、それらを合わせると 1 点が正方形からはみ出してしまうのである。

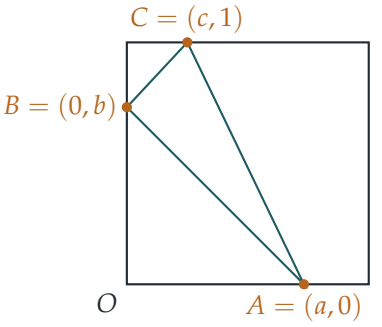
解答

長さの単位は cm とする。辺は 4 本で、3 点はそれぞれ異なる辺上にあるから、3 点が乗らない辺はちょうど 1 本である。したがって、2 点は向かい合う 1 組の辺上にあり、残りの 1 点はその両方に隣り合う辺上にある。正方形が $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ となるように座標軸をとり、

$$A = (a, 0)\text{（下の辺上）}, \qquad B = (0, b)\text{（左の辺上）}, \qquad C = (c, 1)\text{（上の辺上）},$$

とする。ただし $a, b, c \in [0, 1]$ である。（正方形を回転・反転しても長さは変わらないので、これで一般性を失わない（without loss of generality）。）このとき

$$AB^2 = a^2 + b^2, \qquad BC^2 = c^2 + (1-b)^2, \qquad CA^2 = (c-a)^2 + 1.$$



$k = \sqrt{6} - \sqrt{2}, t = 2 - \sqrt{3}$ とおく。次の 2 つのちょっとした事実によって、数値の扱いがうまくいく。

$$k^2 = 8 - 2\sqrt{12} = 8 - 4\sqrt{3}, \qquad t^2 = 7 - 4\sqrt{3}, \qquad \text{よって} \qquad k^2 - 1 = t^2.$$

また $2t = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$ であるから $\sqrt{2t} = \sqrt{3} - 1$ であり、したがって

$$\sqrt{2t} + t = (\sqrt{3} - 1) + (2 - \sqrt{3}) = 1.$$

背理法の仮定として、三角形の 3 辺がすべて k より長いとする。正方形を直線 $y = \frac{1}{2}$ に関して折り返す対称性（これにより A と C の役割、および a と c の役割が入れ替わる）から、$c \geq a$ と仮定してよい。

$BC > k$ **から**。 $c \leq 1$ であるから

$$k^2 < BC^2 = c^2 + (1 - b)^2 \leq 1 + (1 - b)^2,$$

よって $(1 - b)^2 > k^2 - 1 = t^2$ である。$1 - b \geq 0$ かつ $t > 0$ であるから $1 - b > t$、すなわち $0 \leq b < 1 - t$ を得る。

$AB > k$ **から**。 $0 \leq b < 1 - t$ より $b^2 < (1 - t)^2$ であるから

$$a^2 > k^2 - b^2 > k^2 - (1 - t)^2 = (1 + t^2) - (1 - 2t + t^2) = 2t.$$

$a \geq 0$ であるから $a > \sqrt{2t} = \sqrt{3} - 1$ を得る。

考えてみよう a の範囲は絞り込めた。3 つ目の辺 CA からは何がわかるだろうか？

辺 CA は正方形を下から上へ横切るので、縦方向の長さは 1 であり、残りの長さは横方向で稼がなければならない。

$CA > k$ **から**。 $(c - a)^2 + 1 > k^2$ より $(c - a)^2 > t^2$ であり、$c \geq a$ であるから $c - a > t$ となる。よって

$$c > a + t > \sqrt{2t} + t = 1.$$

しかし C は上の辺上にあるので $c \le 1$ である。この矛盾により、3 辺がすべて k より長いことはありえない。すなわち、三角形 ABC の少なくとも 1 辺の長さは $(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ cm 以下であり、題意は示された。

上界は達成される

$c = 1, a = b = \sqrt{3}-1$、すなわち $A = (\sqrt{3}-1, 0), B = (0, \sqrt{3}-1), C = (1,1)$ のとき、上の不等式はすべて等号に近づく限界の状態になる。このとき

$$AB^2 = 2(\sqrt{3}-1)^2 = 8-4\sqrt{3}, \qquad BC^2 = CA^2 = 1+(2-\sqrt{3})^2 = 8-4\sqrt{3},$$

であるから、ABC は 1 辺がちょうど k の正三角形（equilateral triangle）である（C は頂点にあるが、上の辺上にあるものとみなす）。したがって $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ は最良の定数である。三角関数で表せば $k = \sec 15^\circ$ であり、これは単位正方形に収まる最大の正三角形で、正方形の辺に対して 15° 傾いている。

検算

- $k = \sqrt{6}-\sqrt{2} \approx 1.0353$ は正方形の 1 辺より少しだけ大きく、これは妥当である。3 辺それぞれに頂点をもつ三角形は、すべての辺を 1 より長くできるが、それはほんのわずかである。
- $(a,b,c) \in [0,1]^3$ の組を 2×10^6 個ランダムに探索したところ、最短辺は 1.0337 を超えることがなく、k を下回った。上の正三角形の例では、3 辺とも機械精度で 1.03528 に等しい。
- $\sec 15^\circ = 4/(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = \sqrt{6}-\sqrt{2}$ であり、正三角形の図と一致する。

よくある間違い

- 証明なしに、三角形が正三角形である、あるいは 1 つの頂点が正方形の角にあると仮定してしまう。極値をとる場合は答えを示唆するが、あらゆる配置に対して不等式を証明したことにはならない。
- 設定の正当化を忘れる。構造上の鍵となる事実は、相異なる 3 辺には必ず向かい合う 1 組の辺が含まれるということである。
- $(1-b)^2 > t^2$ や $(c-a)^2 > t^2$ の平方根をとるときに、どちらの符号を考えているかを述べない。

STEP のその先へ

これは小さなマックス・ミン（max–min）問題である。配置全体からなるコンパクト（compact）な集合上で最短辺を最大化しており、極値をとる配置ではすべての制約が同時に等しくなる。これは最適化（optimisation）やゲーム理論（game theory）に一貫して現れるパターンである。$[0,1]^3$ は有界閉集合であり、最短辺は連続関数（continuous function）であるから、最大値は必ず存在する。これは解析学（analysis）の最初の講義で証明される事実である（最大値・最小値の定理（extreme value theorem））。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）はこの内容をよく扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（『数学の発展問題』）には同じ趣向の STEP の幾何の問題がさらに収められている。

解答例

STEP I 2001、第 2 問

純粋数学 • 代数的不等式

> **STEP I 2001、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q2

鍵となる考え方

不等式（inequality）では、符号のわからないものを両辺に掛けることはできない。そこで (i) で安全なのは、すべてを一方の辺に集めて因数分解（factorise）することである。そうすれば答えは符号図（sign diagram）から読み取れる。(ii) では平方根（square root）があるので 2 乗したくなるが、それが正当なのは両辺が非負であるとわかっている場合に限る。この条件を見失わないことが、この問題のすべてである。

解答

小問 (i)

x は負である可能性があるので、x を掛けることはできない。代わりに、$x \neq 0$ より真に正である x^2 を掛ける。こうすれば不等号の向きは変わらない：

$$\begin{aligned} 1+2x-x^2 > \frac{2}{x} &\iff x^2+2x^3-x^4 > 2x \\ &\iff 0 > x^4-2x^3-x^2+2x \\ &\iff x\left(x^3-2x^2-x+2\right) < 0. \end{aligned}$$

この 3 次式（cubic）は項をまとめることで因数分解できる：

$$x^3-2x^2-x+2 = x^2(x-2)-(x-2) = (x-2)(x^2-1) = (x-2)(x-1)(x+1).$$

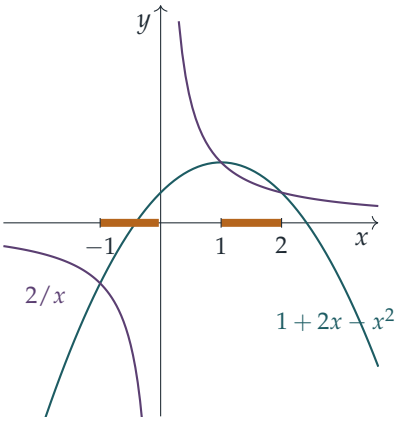
したがって、求める条件は

$$(x+1)\,x\,(x-1)(x-2) < 0.$$

である。これは最高次の係数（leading coefficient）が正で、4つの単根（simple root）$-1,0,1,2$ をもつ4次式（quartic）なので、x が各根を通過するたびに符号が入れ替わる。すなわち、$x>2$ では正、$(1,2)$ 上では負、$(0,1)$ 上では正、$(-1,0)$ 上では負、$x<-1$ では正である。根そのものでは値は0となり、<0 を満たさない（そもそも $x=0$ は除外されている）。よって

$$\boxed{-1<x<0 \quad \text{または} \quad 1<x<2.}$$

図もこれと一致する。放物線（parabola）$y=1+2x-x^2$ が双曲線（hyperbola）$y=2/x$ より上にあるのは、ちょうど交点 $x=-1$、1、2 の間であり、負の側では双曲線が $x=0$ で $-\infty$ へ落ち込むところまでに限られる。



小問 (ii)

まず、$x\geq -\frac{10}{3}$ ならば $3x+10\geq 0$ であるとともに $x+4\geq \frac{2}{3}>0$ でもあるので、2つの平方根はつねに定義されていることに注意する。

両辺はともに非負であり、$a,b\geq 0$ に対しては $a>b \iff a^2>b^2$ が成り立つ。したがって、解を増やしたり失ったりすることなく2乗してよい：

$$\begin{aligned}\sqrt{3x+10}>2+\sqrt{x+4} &\iff 3x+10>4+4\sqrt{x+4}+(x+4)\\ &\iff 2x+2>4\sqrt{x+4}\\ &\iff x+1>2\sqrt{x+4}.\end{aligned}$$

考えてみよう もう一度そのまま2乗してよいだろうか？

すぐにはできない。右辺 $2\sqrt{x+4}$ は正であるが、$x+1$ は負になりうる。その場合、2乗すると偽の不等式が真の不等式に変わってしまうおそれがある。そこで場合分けをする。

- $x+1 \leq 0$ のとき、左辺は高々 0 であるのに対し、右辺は真に正である。よって不等式は成り立たない。
- $x+1 > 0$ のとき、両辺はともに正なので、2 乗する操作はやはり可逆である：

$$\begin{aligned} x+1 > 2\sqrt{x+4} &\iff x^2+2x+1 > 4x+16 \\ &\iff x^2-2x-15 > 0 \\ &\iff (x-5)(x+3) > 0, \end{aligned}$$

これが成り立つのは $x > 5$ または $x < -3$ のときである。$x > -1$ と合わせると、残るのは $x > 5$ である。

したがって

$$\boxed{x > 5.}$$

検算

- $x = 5$ のとき、$\sqrt{25} = 5$ かつ $2+\sqrt{9} = 5$ なので等号が成り立つ。境界では当然そうなるはずである。$x = 12$ のとき、$\sqrt{46} \approx 6.78 > 2+4 = 6$。$x = 0$ のとき、$\sqrt{10} \approx 3.16 < 4$。
- (i) では、$x = 1.5$ のとき $1.75 > 1.33$、$x = -0.5$ のとき $-0.25 > -4$ となり、どちらも真である。$x = 0.5$ のときは $1.75 < 4$ となり、偽である。
- コンピュータで、それぞれの不等式を 2×10^5 個の無作為な点と、各境界から 10^{-6} 以内の点で検証したところ、上の答えと食い違う点は見つからなかった。

よくある間違い

- (i) で $x > 0$ と $x < 0$ に場合分けせずに x を掛けてしまう。これでは区間 $(-1, 0)$ を落としたり、そこで答えを逆にしてしまったりする。
- $x+1 > 0$ を要求せずに $x+1 > 2\sqrt{x+4}$ を 2 乗してしまう。すると見かけ上の区間 $-\frac{10}{3} \leq x < -3$ が出てくる。もとの不等式に $x = -3.2$ を代入してみれば、成り立たないことがわかる（$\sqrt{0.4} \approx 0.63 < 2+\sqrt{0.8}$）。

STEP のその先へ

(ii) の原理、すなわちある操作が不等式を保つのは、それが関係する値の範囲で増加関数（increasing function）であるときに限るという考え方は、解析学で不等式を扱う

方法の出発点である。$t \mapsto t^2$ は $[0, \infty)$ 上では増加であるが、$\mathbb{R}$ 上ではそうではない。積の符号図は、連続関数（continuous function）はゼロを通過することによってしか符号を変えられないという事実、すなわち中間値の定理（intermediate value theorem）へと一般化される。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、この両方を丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 2001、第 3 問

純粋数学 ・ 3 次方程式と判別式

> **STEP I 2001、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q3

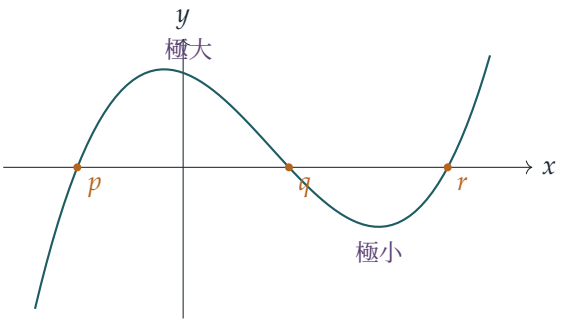
鍵となる考え方

相異なる 3 つの実数解をもつ 3 次関数（cubic）は、隣り合う解の間で必ず増減が入れ替わる。したがって、その導関数（derivative）である 2 次関数は相異なる 2 つの実数解をもつ。「相異なる 2 つの実数解をもつ」ことを「判別式（discriminant）が正」と言い換えれば、最初の不等式が得られる。後半では、与えられた積は 3 次式であり、その係数がちょうど示すべき不等式に現れる量になっている。そのため、前半の結果（あるいは平方完成（completing the square））を使えば示せる。

解答

グラフの概形

展開すると $f(x) = x^3 - (p+q+r)x^2 + \ldots$ であるから、$x \to \infty$ のとき $f(x) \to +\infty$、$x \to -\infty$ のとき $f(x) \to -\infty$ である。グラフが x 軸と交わるのは p、q、r だけであり、どの解も単解（simple root）なので、f はそれぞれの点で符号を変える。すなわち、$x < p$ で $f < 0$、(p,q) で $f > 0$、(q,r) で $f < 0$、$x > r$ で $f > 0$ である。よって、p と q の間のどこかに極大（local maximum）があり、q と r の間のどこかに極小（local minimum）がある。y 切片は $f(0) = -pqr$ である。



（図は $p<0<q<r$ の場合を描いたものである。解がどこにあっても形は同じであり、変わるのは y 軸の位置だけである。）

1つ目の不等式

完全に展開すると

$$f(x)=x^3-(p+q+r)x^2+(qr+rp+pq)x-pqr,$$

となるから

$$f'(x)=3x^2-2(p+q+r)x+(qr+rp+pq).$$

である。$f(p)=f(q)=0$ であるから、ロルの定理（Rolle's theorem）により、p と q の間（端点を除く）に f' の解が存在する。同様に、q と r の間（端点を除く）にも解が存在する。これらの区間は重ならないので、2次方程式 $f'(x)=0$ は**相異なる2つの実数解**をもつ。（ロルの定理を使わない場合：$f'(p)=(p-q)(p-r)>0$、$f'(q)=(q-p)(q-r)<0$、$f'(r)=(r-p)(r-q)>0$ であるから、f' はそれぞれの区間で符号を変える。）

2次方程式が相異なる2つの実数解をもつのは、判別式が正であるときであり、かつそのときに限る。よって

$$4(p+q+r)^2-12(qr+rp+pq)>0, \qquad \text{すなわち} \qquad (p+q+r)^2>3(qr+rp+pq),$$

となり、示された。

2つ目の不等式

展開すると

$$(x^2+gx+h)(x-k)=x^3+(g-k)x^2+(h-gk)x-hk.$$

である。これを f の展開式と比べる。この3次式が解 p,q,r をもつならば

$$p+q+r=-(g-k), \qquad qr+rp+pq=h-gk,$$

であるから、示すべき不等式 $(g-k)^2 > 3(h-gk)$ は、この 3 次式の解に対する 1 つ目の不等式そのものである。

十分条件（*sufficient condition*）であること。 $g^2 > 4h$ と仮定する。このとき x^2+gx+h は相異なる 2 つの実数解 $\alpha < \beta$ をもち、3 次式は実数解 α、β、k をもつ。k がどちらとも異なれば、3 つの解は相異なるので、前半の結果からただちに $(g-k)^2 > 3(h-gk)$ が得られる。

> **考えてみよう** k がたまたま α または β に等しく、解が相異ならない場合はどうなるか？

前半では $p < q < r$ を仮定していたので、もう少し議論が必要である。恒等式（identity）

$$(p+q+r)^2 - 3(qr+rp+pq) = \tfrac{1}{2}\left[(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2\right]$$

により、左辺は $p=q=r$ でない限り正である。$\alpha \neq \beta$ であるから、3 つの解がすべて等しくなることはない。よって、この場合も不等式は成り立つ。

解をまったく使わない直接的な方法もある。展開すると

$$(g-k)^2 - 3(h-gk) = g^2+gk+k^2-3h = \left(k+\tfrac{1}{2}g\right)^2 + \tfrac{3}{4}\left(g^2-4h\right),$$

となり、$g^2 > 4h$ のとき、これは平方と正の量の和であるから正である。いずれの方法でも、$g^2 > 4h$ は十分条件である。

必要条件（*necessary condition*）ではないこと。 $g^2 \leq 4h$ でありながら不等式が成り立つような値を見つければよい。$g=0$、$h=1$、$k=2$ とする。このとき $g^2 = 0 \leq 4 = 4h$ であるが

$$(g-k)^2 = 4 > 3 = 3(h-gk).$$

となる。よって、$g^2 > 4h$ でなくても不等式は成り立ちうるので、この条件は必要条件ではない。

> **考えてみよう** 前半では 3 つの実数解が必要だったのに、なぜこのようなことが起こるのか？

前半で実際に必要だったのは、$f'(x) = 0$ が相異なる 2 つの実数解をもつことだけであり、これはより弱い条件である。ここでの 3 次式 $(x^2+1)(x-2) = x^3-2x^2+x-2$ は実数解を 1 つしかもたないが、$f'(x) = 3x^2-4x+1 = (3x-1)(x-1)$ であるから、停留点（stationary point）を 2 つもつ。不等式 $(g-k)^2 > 3(h-gk)$ が意味するのは、ちょうど 3 次関数が相異なる極大と極小をもつということであり、グラフが x 軸と 3 回交わるかどうかは関係ない。

検算

- $p,q,r = 0,1,2$ のとき、$(p+q+r)^2 = 9 > 6 = 3(qr+rp+pq)$ であり、$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ の解は $1 \pm 1/\sqrt{3}$ で、一方は $(0,1)$ に、もう一方は $(1,2)$ にある。
- 平方完成の式から、不等式の境界が最良であることがわかる。$g = 2$、$h = 1$（したがって $g^2 = 4h$）、$k = -1$ とすると $(g-k)^2 = 9 = 3(h-gk)$ となり、厳密な不等号ではなく等号が成り立つ。これは3つの解がすべて等しい3次式 $(x+1)^3$ である。
- 2つの恒等式と2つの不等式を、それぞれ20 000個の無作為な有理数の場合について、さらに例 $g = 0$、$h = 1$、$k = 2$（$4 > 3$ となる）について、コンピュータで厳密に確かめた。

よくある間違い

- 3次関数のグラフを上下逆に描いてしまう。x^3 の係数は $+1$ であるから、グラフは右に行くほど上がる。
- k が $x^2 + gx + h$ の解になっている場合を忘れる。この場合、前半の結果はそのままでは適用できない。
- $g^2 \leq 4h$ を満たす1つの例で不等式が成り立つことだけを示し、それを「十分条件」と呼んでしまう。1つの例で示せるのは**必要条件でない**ことであり、十分条件であることを示すには、すべての g、h、k に対する証明が必要である。

STEP のその先へ

量 $(p+q+r)^2 - 3(qr+rp+pq)$ は、定数倍を除けば導関数の判別式であり、解の**対称式**（symmetric function）である。このような式はすべて係数を用いて表すことができ、だからこそ不等式を解についての条件から g、h、k についての条件へと書き換えることができたのである。3次式の本来の判別式 $\prod(p-q)^2$ は、3つの解がすべて実数であるかどうかを決定する。この問題で使ったのは、そのより弱い親戚である。対称式と判別式はガロア（Galois）理論（Galois theory）へとつながっていく。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は、学び始めるのによい一冊である。

解答例

STEP I 2001、第 4 問

純粋数学 • 逆三角関数を含む方程式

> **STEP I 2001、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q4

鍵となる考え方

3 倍角の公式（triple-angle formula）は tan の加法定理（addition formula）からただちに得られる。その後はすべてがひとつの事実にかかっている。すなわち、tan は周期（period）π で繰り返すので、$\tan 3\varphi = \tan 3\theta$ ならば、φ は θ と $\pi/3$ の任意の整数倍だけ異なりうる、ということである。(i) と (ii) における本当の作業は、$\cos^{-1}$ と $\tan^{-1}$ の値域（range）をきちんと把握することであり、それによって無数にある角のうちどれが許されるかが決まる。

解答

3 倍角の公式

$t = \tan\theta$ とおく。加法定理より $\tan 2\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$ であり、さらに

$$\tan 3\theta = \tan(2\theta+\theta) = \frac{\tan 2\theta + t}{1 - t\tan 2\theta} = \frac{\dfrac{2t}{1-t^2} + t}{1 - \dfrac{2t^2}{1-t^2}}$$

$$= \frac{2t + t(1-t^2)}{(1-t^2) - 2t^2} = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$$

となる。ここで分母と分子に $1-t^2$ を掛けた。これが求める公式である。（この式は両辺がともに定義されるときには常に成り立つ。）

$\tan 3\theta$ の値

$\cos\theta = 2/\sqrt{5}$ かつ $0 < \theta < \pi/2$ であるから $\sin\theta > 0$ であり、

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \tfrac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2}.$$

（3 辺が $1, 2, \sqrt{5}$ の直角三角形を思い浮かべるとよい。）$t = \frac{1}{2}$ を代入すると

$$\tan 3\theta = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{8}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{11/8}{1/4} = \frac{11}{2},$$

となり、題意が示された。

後で重要になるのは、θ がかなり小さいということである。実際、$\tan\theta = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$ であるから $0 < \theta < \pi/6$ であり、したがって $0 < 3\theta < \pi/2$ である。

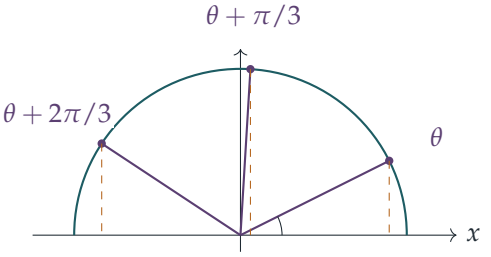
小問 (i)

$\varphi = \cos^{-1} x$ とおくと、$0 \le \varphi \le \pi$ かつ $x = \cos\varphi$ である。方程式は $\tan 3\varphi = \frac{11}{2} = \tan 3\theta$ ということを述べている。tan は周期 π をもち、長さ π の各区間で各値をちょうど 1 回ずつとるから、

$$3\varphi = 3\theta + k\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi = \theta + \frac{k\pi}{3}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

考えてみよう これらの角のうち、実際に許されるものはいくつあるか？

$0 \le \varphi \le \pi$ でなければならない。$0 < \theta < \pi/6$ であるから、$k = 0, 1, 2$ に対しては $\varphi = \theta,\ \theta + \frac{\pi}{3},\ \theta + \frac{2\pi}{3}$ となり、いずれも $(0, \pi)$ の内部にある。一方、$k = 3$ のときは $\varphi > \pi$、$k = -1$ のときは $\varphi < 0$ となる。よって解はちょうど 3 つである。



3 つの x の値は、これらの角の余弦（破線の足）である。$\cos\theta = 2/\sqrt{5}, \sin\theta = 1/\sqrt{5}$

と加法定理を用いると、

$$x_1 = \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}},$$
$$x_2 = \cos\theta\cos\tfrac{\pi}{3} - \sin\theta\sin\tfrac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}},$$
$$x_3 = \cos\theta\cos\tfrac{2\pi}{3} - \sin\theta\sin\tfrac{2\pi}{3} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}.$$

これらの角のどれについても 3φ は $\pi/2$ の奇数倍にはならない（各 3φ は $3\theta + k\pi$ の形であり、$0 < 3\theta < \pi/2$ である）ので、どの場合も $\tan 3\varphi$ は定義される。(i) の解は

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad x = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}, \qquad x = -\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}.$$

である。（分母を有理化すると、それぞれ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$、$\frac{(2-\sqrt{3})\sqrt{5}}{10}$、$-\frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{5}}{10}$ となる。）

別解。 3 倍角の公式に $T = \tan\varphi$ を代入すると $2(3T - T^3) = 11(1 - 3T^2)$、すなわち

$$2T^3 - 33T^2 - 6T + 11 = 0.$$

を得る。$T = \frac{1}{2}$ が解であることはわかっているので、因数分解すると $(2T-1)(T^2 - 16T - 11) = 0$ となり、$T = \frac{1}{2}$ または $T = 8 \pm 5\sqrt{3}$ である。このとき $x = \cos\varphi = \pm 1/\sqrt{1+T^2}$ であり、符号は T の符号と一致する（T が正なら φ は鋭角、負なら鈍角である）。これにより同じ 3 つの答えが得られる。また、$1 + (8+5\sqrt{3})^2 = 140 + 80\sqrt{3} = 1/x_2^2$ となることは、よい検算になる。

小問 (ii)

$\psi = \frac{1}{3}\tan^{-1} y$ とおく。$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} y < \frac{\pi}{2}$ であるから、$-\frac{\pi}{6} < \psi < \frac{\pi}{6}$ である。

考えてみよう 条件 $\cos\psi = 2/\sqrt{5}$ から得られる角は 1 つか、それとも 2 つか？

$(-\pi/6, \pi/6)$ 上で cos は偶関数（even function）であるから、$\cos\psi = 2/\sqrt{5} = \cos\theta$ より $\psi = \theta$ または $\psi = -\theta$ であり、$0 < \theta < \pi/6$ であるから、どちらも許される範囲にある。（これ以外の解はない。$[0, \pi/6)$ 上で関数 cos は狭義単調減少（strictly decreasing）であるから、そこで値 $2/\sqrt{5}$ をとるのは 1 回だけであり、$(-\pi/6, 0]$ 上でも同様である。）

よって $\tan^{-1} y = \pm 3\theta$ である。$0 < 3\theta < \pi/2$ であるから、$\pm 3\theta$ はどちらも確かに $\tan^{-1}$ の値としてとりうるものであり、

$$y = \tan(\pm 3\theta) = \pm\frac{11}{2}.$$

となる。(ii) の解は $y = \frac{11}{2}$ と $y = -\frac{11}{2}$ である。

検算

- $\theta = \cos^{-1}(2/\sqrt{5}) \approx 0.4636$ であるから、$3\theta \approx 1.3909$ であり、$\tan 3\theta \approx 5.5000$ となる。
- $x_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \approx 0.05992$、$x_3 \approx -0.83451$ である。電卓で計算すると、いずれについても $\tan(3\cos^{-1} x) \approx 5.5$ となり、$[-1,1]$ を細かく数値的に走査すると、解はちょうど 3 つ見つかる。
- $\cos\left(\frac{1}{3}\tan^{-1}(\pm 5.5)\right) = \cos(\pm 0.4636) \approx 0.8944 = 2/\sqrt{5}$ である。

よくある間違い

- (i) で $x = 2/\sqrt{5}$ だけを答えてしまう。tan が π ごとに繰り返すことを忘れているのであり、3φ のとりうる値は $[0, 3\pi]$ に 3 つある。
- (ii) で $y = 11/2$ だけを答えてしまう。cos は偶関数なので、$\psi = -\theta$ も条件を満たす。
- 範囲を確認しない。答えは $\theta < \pi/6$ であることに依存しており、だからこそ (i) で $\theta + 2\pi/3$ が許され、(ii) で 3θ が $\tan^{-1}$ の値域に入るのである。

STEP のその先へ

逆三角関数（inverse trigonometric functions）は、1 対 1（one-to-one）でない関数の逆関数をとるという問題に初めて触れる場である。そこでは**主枝**（principal branch）を選ぶのであり、このような方程式は、実はどの枝の上にいるかという問題なのである。複素解析（complex analysis）では $\log z$ や $z^{1/3}$ について同じ問題が現れ、原点の周りを一周するとある枝から次の枝へと移る。これは、ここで $2\pi/3$ を θ に加えることとまったく同じである。Needham の *Visual Complex Analysis*（図で見る複素解析）は、図を用いて枝を見事に説明している。

解答例

STEP I 2001、第 5 問

純粋数学 ・ 積分記号下の微分

> **STEP I 2001、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q5

鍵となる考え方

(i) と (ii) の積分はどちらも直接計算できる。(ii) は置換（substitution）$u = 1 + tx$ を行えばよい。本当に大切なのは最後の注意である。(ii) の被積分関数（integrand）は (i) の被積分関数をパラメータ（parameter）t で微分したものであり、答えどうしも同じ関係にある。つまり、積分の内側でパラメータ t について微分する操作は、x について積分する操作と交換できるように見える。これをもう一度行い、$t = 1$ とおけば予想（conjecture）が得られる。

解答

以下では常に $t > 0$ かつ $0 \le x \le 1$ であるから、$1 + tx \ge 1 > 0$ となり、どの被積分関数も発散しない。

小問 (i)

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+tx)^{-1} = -t(1+tx)^{-2}$ であるから、$(1+tx)^{-2}$ の原始関数（antiderivative）の一つは $-\dfrac{1}{t(1+tx)}$ である（ここで $t \neq 0$ を用いた）。よって

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+tx)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{t(1+tx)}\right]_0^1 = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{1+t}\right) = \frac{1}{t}\cdot\frac{t}{1+t} = \frac{1}{1+t},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

分子に x があるため直接計算するのは面倒なので、$u = 1 + tx$ とおく。すると $x = \dfrac{u-1}{t}$、$\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{t}$ であり、積分区間 $x = 0, 1$ は $u = 1, 1+t$ に変わる：

$$\int_0^1 \frac{-2x}{(1+tx)^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{t^2}\int_1^{1+t} \frac{u-1}{u^3}\,\mathrm{d}u = -\frac{2}{t^2}\int_1^{1+t} \left(u^{-2} - u^{-3}\right)\mathrm{d}u$$
$$= -\frac{2}{t^2}\left[-\frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2}\right]_1^{1+t} = -\frac{2}{t^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+t} + \frac{1}{2(1+t)^2}\right).$$

考えてみよう すべてを通分して展開せずに、かっこの中を整理するにはどうすればよいか？

$w = \dfrac{1}{1+t}$ とおくと、かっこの中は $\frac{1}{2} - w + \frac{1}{2}w^2 = \frac{1}{2}(1-w)^2$ となり、完全平方式である。さらに $1 - w = \dfrac{t}{1+t}$ であるから、

$$\int_0^1 \frac{-2x}{(1+tx)^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{t^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{(1+t)^2} = -\frac{1}{(1+t)^2},$$

となり、これが求める結果である。

予想

x を固定し、被積分関数を t の関数とみなす：

$$\frac{\partial}{\partial t}(1+tx)^{-2} = -2x(1+tx)^{-3}.$$

したがって、(ii) の答えが (i) の答えの導関数であるのとちょうど同じように、(ii) の被積分関数は (i) の被積分関数を t で微分したものである。このことから次の法則が示唆される。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 f(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}x.$$

これをもう一度適用すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-2x(1+tx)^{-3}\right) = 6x^2(1+tx)^{-4}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-(1+t)^{-2}\right) = 2(1+t)^{-3},$$

となるので、$t > 0$ に対して

$$\int_0^1 \frac{6x^2}{(1+tx)^4}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(1+t)^3}.$$

が成り立つと予想される。$t = 1$ とおくと、予想される値は

$$\int_0^1 \frac{6x^2}{(1+x)^4}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

である。

検算

- $t \to 0$ のとき、(i) の被積分関数は 1 に近づき、答え $\frac{1}{1+t}$ も 1 に近づく。(ii) では被積分関数は $-2x$ に近づき、その積分は -1 であって、$-\frac{1}{(1+t)^2} \to -1$ と一致する。
- 予想を確かめることは求められていないが、すぐにできる。$u = 1 + x$ とおくと、積分は $6\int_1^2 (u^{-2} - 2u^{-3} + u^{-4})\,\mathrm{d}u = 6\left[-\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{3u^3}\right]_1^2 = 6\left(-\frac{7}{24} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}$ となる。
- シンプソンの公式（Simpson's rule）を用いると最後の積分の値は 0.250000 となり、25 個の異なる t の値について $\frac{2}{(1+t)^3}$ と小数第 9 位まで一致する。

よくある間違い

- (ii) で $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/t$ から生じる因子 $\frac{1}{t}$ を忘れること。$\frac{1}{t}$ の因子は**二つ**あり、一つは x から、もう一つは $\mathrm{d}x$ から生じる。
- 置換したあと、積分区間を $u = 1$ と $u = 1 + t$ に変更し忘れること。
- $-(1+t)^{-2}$ を微分して $-2(1+t)^{-3}$ としてしまうこと。二つの負号は打ち消し合うので、予想される値は正である（被積分関数が正なので、当然そうでなければならない）。

STEP のその先へ

ここで予想した法則は**積分記号下の微分**（differentiation under the integral sign）であり、ライプニッツ（Leibniz）の法則とも呼ばれる。f と $\partial f/\partial t$ が閉長方形上で連続ならばこの法則が成り立つというのは実解析の定理であり、ここでは $0 \le x \le 1$ かつ $a > 0$ である任意の区間 $[a, b]$ 内の t に対してその条件が満たされている。この議論を繰り返すと、すべての n に対して $\int_0^1 \frac{x^n}{(1+tx)^{n+2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)(1+t)^{n+1}}$ が得られる。ファインマン（Richard Feynman）がこの技法を用いて、他の方法では手に負えなかった積分を計算したことはよく知られている。極限・微分・積分の順序交換の背後にある理論については、Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）を参照のこと。

解答例

STEP I 2001、第 6 問

純粋数学 ・ 回転面

> **STEP I 2001、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q6

この問題は、*Beyond STEP* の第 4.8 節「**球形のパンを切る**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch04/spherical-loaf.html

鍵となる考え方

半円（semicircle）$y = \sqrt{a^2 - x^2}$ を x 軸のまわりに回転させて球（sphere）をつくる。表面積（surface area）の公式における被積分関数（integrand）$y\sqrt{1 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2}$ は実は**定数**になるので、どのスライスのクラスト（皮）もその厚さだけで決まり、スライスの位置にはよらない。後半では、ヒントの積分範囲 $-a$ から $-a + t$ が示唆するように一方の端からスライスを食べていくので、残る部分は球冠（spherical cap）となる。比 V/A は球冠の厚さの二次式（quadratic）となり、その最大値を求めればよい。

解答

クラストはスライスの枚数に比例する

パンの半径を a、中心を原点とする。このときパンの表面は

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad -a \le x \le a,$$

を x 軸のまわりに回転させて得られる。微分すると、$|x| < a$ において $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\dfrac{x}{y}$ であるから、$x^2 + y^2 = a^2$ と $y > 0$ を用いて

$$y\left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = y\left(\frac{y^2 + x^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} = y \cdot \frac{a}{y} = a,$$

となる。したがって、平面 $x = x_1$ と $x = x_2$（ただし $-a \le x_1 < x_2 \le a$）の間にある球の曲面部分の面積は

$$2\pi \int_{x_1}^{x_2} a \, \mathrm{d}x = 2\pi a \, (x_2 - x_1).$$

である。（被積分関数が定義されないのは端点 $x = \pm a$ のみであり、そこでも有界であるから、この積分に問題はない。）

さて、パンを N 枚のスライスに切り、各スライスの厚さを $h = 2a/N$ とする。どのスライスも、どこにあっても、ちょうど面積 $2\pi ah$ のクラストをもつ。よって n 枚のスライスが残っていれば、その位置がどうであっても、残っているクラストは

$$A = n \cdot 2\pi ah,$$

であり、これは残っているスライスの枚数 n に比例する。これが示すべきことであった。（これはアルキメデス（Archimedes）による古い結果である。すなわち、球とその外接円柱（circumscribing cylinder）は、任意の 2 つの平行な平面の間で等しい面積をもつ。）

クラスティであるための条件

スライスは一方の端から食べていくので、何枚か食べた後に残るパンは、$0 < t \le 2a$ を満たすある t について $x = -a$ から $x = -a + t$ までの球冠である。前半の結果から $A = 2\pi at$ である。体積については $u = x + a$ と置換すると $y^2 = a^2 - x^2 = (a - x)(a + x) = (2a - u)u$ となるので、

$$V = \pi \int_{-a}^{-a+t} (a^2 - x^2) \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^t (2au - u^2) \, \mathrm{d}u = \pi\left(at^2 - \frac{t^3}{3}\right).$$

である。したがって

$$\frac{V}{A} = \frac{\pi t^2 \left(a - \frac{t}{3}\right)}{2\pi at} = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{6a} =: f(t).$$

考えてみよう この比はどれだけ食べたかによって変わる。気にしなければならないのはどの t の値だろうか？

条件は**何枚**食べた後でも成り立たなければならないので、f の最大値が必要である。平方完成（completing the square）すると

$$f(t) = \frac{3a}{8} - \frac{1}{6a}\left(t - \frac{3a}{2}\right)^2,$$

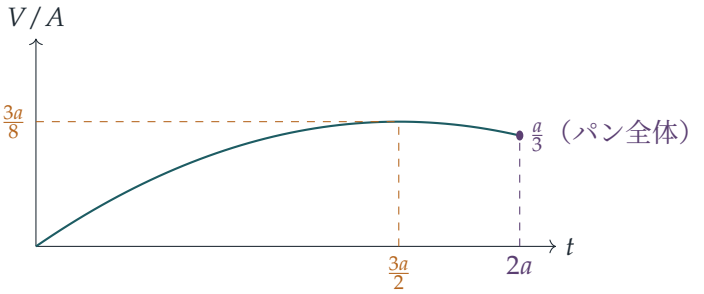
となるので、f は $t = \frac{3a}{2}$（これは $(0, 2a]$ に含まれる）で最大となり、最大値は $\frac{3a}{8}$ である。

$t = \frac{3}{2}a$ は実際に実現されるだろうか？たとえばパンを 4 枚に切って 1 枚食べれば（あるいは $4m$ 枚に切って m 枚食べれば）実現される。平行に切ったパンとしてクラステ

ィと呼ばれるためには、そのような切り方についても規定を満たさなければならないので、

$$\frac{3a}{8} < 1, \qquad \text{すなわち、} \qquad a < \frac{8}{3} = 2\tfrac{2}{3} \text{ メートル,}$$

が必要であり、これが示すべきことであった。逆に $a < \frac{8}{3}$ ならば、すべての t に対して $f(t) \le \frac{3a}{8} < 1$ となるので、どのように切ってもそのパンはクラスティである。



図は $a = 2$ のときの $f(t)$ を示している。比はパンの中央に向かうにつれて増加し、その後減少する。向こう側の端の近くでは、クラストは多く加わるがパンの中身はわずかしか加わらないからである。

検算

- パン全体について、$t = 2a$ とすると $f(2a) = a - \frac{2a}{3} = \frac{a}{3}$ となり、$\frac{4}{3}\pi a^3/(4\pi a^2)$ と一致する。
- $a = \frac{8}{3}$ とし、4 枚に切る。残りが 1,2,3,4 枚のとき比は $\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, 1, \frac{8}{9}$ であるから、1 枚食べた後の比はちょうど 1 となり、狭義の不等式をぎりぎり満たさない。
- 数値的には、無作為に選んだスライスについて面積の公式を数値積分（quadrature）すると $2\pi a(x_2 - x_1)$ が再現された。また $a = 2.66$ のとき、200 枚までのどの切り方でも比は 1 未満に保たれた。

よくある間違い

- パン全体だけを考えること。$a/3 < 1$ からは $a < 3$ が得られるが、これは必要条件ではあるもののはるかに弱い。最も厳しいのは、パンの幅の 4 分の 1 を食べたときである。
- 平らな切り口をクラストに含めること。クラストはもとの曲面部分だけであり、与えられた公式が測っているのもそれである。

STEP のその先へ

被積分関数が定数になることは、アルキメデスの帽子箱定理（hat-box theorem）にほかならない。すなわち、球をその外接円柱へ横向きに射影すると面積が保たれる。球面上で一様に選んだ点の高さが一様分布に従うのはこのためであり、この事実は確率論や物理学で絶えず用いられる。このような面積分（surface integral）や、写像が面積を保つのはどのような場合かといった話題は、ベクトル解析（vector calculus）の最初の講義で扱われる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ビジュアル複素解析』）には、球面の関連する写像についての美しい幾何学的な議論がある。

解答例

STEP I 2001、第 7 問

純粋数学 • 凹性と微分方程式

> **STEP I 2001、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q7

鍵となる考え方

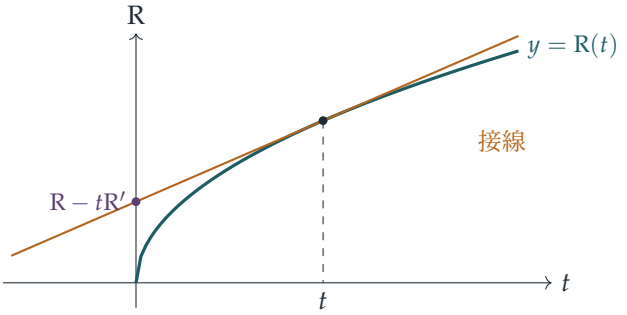
3 つの条件は、R が原点から出発し、増加し、下向きに曲がることを述べている。つまり、そのグラフは凹（concave）である。凹なグラフはその各点における接線（tangent）の下側にあり、このただ一つの幾何学的事実から (i) の不等式が得られる。$H = R'/R$ は $\ln R$ の導関数（derivative）であるから、(ii) と (iii) は変数分離形の微分方程式（separable differential equation）になる。R を具体的に求めたら、それを条件に照らして調べる。(i) の不等式を使えば、モデルを手早く棄却できる。

解答

まず、全体を通して用いる事実を確認しておく。$R(0) = 0$ であり、$t > 0$ で R は狭義単調増加であるから、$t > 0$ に対して $R(t) > 0$ である。したがって、$t > 0$ に対して $H(t)$ は定義され、$H(t) > 0$ である。

小問 (i)

グラフは原点を通り、傾きは正で、t が増加するにつれて傾きは減少する。



$t > 0$ を固定する。時刻 t におけるグラフの接線の傾きは $\mathrm{R}'(t)$ であるから、この接線は縦軸と高さ

$$\mathrm{R}(t) - t\,\mathrm{R}'(t).$$

で交わる。図によれば、この切片は正である。原点を通る曲線が接線の下側にあるからである。これを厳密にするため、$[0, t]$ 上の R に平均値の定理（mean value theorem）を適用する。すると、$0 < c < t$ を満たすある c が存在して

$$\mathrm{R}(t) - \mathrm{R}(0) = t\,\mathrm{R}'(c), \qquad \text{よって} \qquad \mathrm{R}(t) = t\,\mathrm{R}'(c).$$

となる。$\mathrm{R}'' < 0$ であるから関数 R' は狭義単調減少であり、$c < t$ より $\mathrm{R}'(c) > \mathrm{R}'(t)$ である。ゆえに

$$\mathrm{R}(t) > t\,\mathrm{R}'(t),$$

であり、これはまさに接線の切片が原点より上にあるという主張である。$\mathrm{R}'(t) > 0$ で割ると

$$t < \frac{\mathrm{R}(t)}{\mathrm{R}'(t)} = \frac{1}{\mathrm{H}(t)},$$

となり、示すべき不等式が得られた。

（同値な言い方をすれば、接線は t 軸と $t - 1/\mathrm{H}(t)$ で交わり、これは負である。宇宙論（cosmology）では $1/\mathrm{H}$ は「ハッブル時間」（Hubble time）と呼ばれ、この結果は、減速するどのモデルにおいても宇宙の年齢はハッブル時間より小さいことを意味している。）

小問 (ii)

$t > 0$ では $\mathrm{R} > 0$ であるから

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \mathrm{R}(t) = \frac{\mathrm{R}'(t)}{\mathrm{R}(t)} = \frac{a}{t}.$$

と書ける。積分すると $\ln \mathrm{R} = a \ln t + C$ となるので

$$\mathrm{R}(t) = k\,t^a \qquad (t > 0),$$

である。ただし $k = \mathrm{e}^C > 0$ である。

次に、$k > 0$ と $t^a > 0$ を用いて条件を調べる。

- $\mathrm{R}'(t) = kat^{a-1}$ であり、これが $t > 0$ で正となるのは $a > 0$ のとき、かつそのときに限る。
- $\mathrm{R}''(t) = ka(a-1)t^{a-2}$ である。$a > 0$ のもとで、これが負となるのは $a < 1$ のとき、かつそのときに限る。
- $a > 0$ ならば $t \to 0^+$ のとき $kt^a \to 0$ であるから、$\mathrm{R}(0) = 0$ と矛盾しない。（$a \leq 0$ の場合はいずれにせよ成り立たない。kt^a は $k \neq 0$ に収束するか、発散するからである。）

したがって、条件 $(*)$ が成り立つのはちょうど

$$0 < a < 1.$$

のときである。これは小問 (i) と整合する。実際、そこでの $t < 1/\mathrm{H} = t/a$ から $a < 1$ が従う。

小問 (iii)

今度は $\mathrm{H}(t) = b/t^2$ である。まず、（冒頭の注意より）$t > 0$ に対して $\mathrm{H}(t) > 0$ であるから、$b > 0$ でなければならない。$b \leq 0$ ならば、それで話は終わりである。

そこで $b > 0$ と仮定する。小問 (i) より、すべての $t > 0$ が

$$t < \frac{1}{\mathrm{H}(t)} = \frac{t^2}{b}, \qquad \text{すなわち} \qquad t > b$$

を満たさなければならない（$t > 0$ で割り、$b > 0$ を掛けた）。しかしこれは $0 < t \leq b$ を満たすすべての t で成り立たない。よって、$(*)$ と矛盾しない b の値は存在しない。

考えてみよう このように小問 (i) を使ってよいのだろうか。

よい。小問 (i) では、$(*)$ を満たす**任意の**関数について、すべての $t > 0$ で $t < 1/\mathrm{H}(t)$ が成り立つことを証明した。したがって、提案された H がたった一つの t でもこの不等式を破るなら、その H をもつどの関数も $(*)$ を満たし得ない。これは背理法（proof by contradiction）による証明である。

直接確かめるには、(ii) と同様に方程式を解けばよい。$\ln \mathrm{R} = -b/t + C$ であるから、

$k > 0$ として $\mathrm{R}(t) = k\,\mathrm{e}^{-b/t}$ となる。すると

$$\mathrm{R}'(t) = \frac{kb}{t^2}\,\mathrm{e}^{-b/t},$$
$$\mathrm{R}''(t) = kb\,\mathrm{e}^{-b/t}\left(\frac{b}{t^4} - \frac{2}{t^3}\right) = \frac{kb\,\mathrm{e}^{-b/t}}{t^4}\,(b - 2t).$$

である。$b > 0$ のとき、$\mathrm{R}' > 0$ であり、$t \to 0^+$ のとき $\mathrm{R}(t) \to 0$ であるから、最初の 2 つの条件は成り立つ。しかし $0 < t < b/2$ では $\mathrm{R}''(t) > 0$ であるから、原点の近くでグラフは逆向きに曲がっており、$(*)$ は成り立たない。

検算

- (ii) で $a = \frac{1}{2}$ とすると $\mathrm{R} = k\sqrt{t}$ となり、図の形になる。増加かつ凹であり、$t < 1/\mathrm{H} = 2t$ である。$a = 1$ とすると原点を通る直線となり、ちょうど $t = 1/\mathrm{H}$ が成り立つ。これは (i) の境界の場合である。
- (iii) で $b = 1$、$k = 1$ とすると、数値的に $\mathrm{R}''(0.25) \approx 2.34 > 0$ であり、また $1/\mathrm{H}(0.5) = 0.25 < 0.5$ である。いずれも $(*)$ を破っている。

コンピュータにより、いくつかの凹な試験関数で (i) を、有限差分（finite differences）によって (ii) と (iii) の解と導関数の式を、さらに $t = b/2$ における R'' の符号の変化を確認した。

よくある間違い

- (i) で、図だけを根拠に論じること。「曲線は接線の下側にある」には理由が必要である。すなわち、平均値の定理と、R' が減少することである。
- (ii) で、$\mathrm{R}' > 0$ のために（そして $\mathrm{R}(0) = 0$ のために）$a > 0$ が必要であることを忘れ、$a < 1$ だけを答えること。
- (iii) で、凹性が大きな t で破れると主張すること。$b - 2t$ の符号を見れば、破れるのは小さな t においてであることがわかる。

STEP のその先へ

小問 (i) は、凸関数（convex function）と凹関数に関する中心的な事実の特別な場合である。すなわち、微分可能な関数が凹であることは、そのグラフがすべての接線の下側にあることと同値である。これはイェンセン（Jensen）の不等式や、最適化（optimisation）の理論の多くの土台となっている。平均値の定理を用いた議論は、大学

1 年次の解析学（analysis）の標準的な内容である。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照せよ。実際の宇宙論では、$a = \frac{2}{3}$ は物質優勢（matter-dominated）のアインシュタイン–ド・ジッター宇宙（Einstein–de Sitter universe）に対応し、その宇宙の年齢はハッブル時間の 3 分の 2 である。

解答例

STEP I 2001、第 8 問

純粋数学 • 2 階線形方程式

> **STEP I 2001、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q8

鍵となる考え方

既知の解をそれぞれ方程式に代入すると、各 x の値において、二つの未知関数 $p(x)$ と $q(x)$ を結ぶ方程式が一つ得られる。解が二つあれば二元の連立一次方程式（simultaneous linear equations）が得られるので、二つの数を求めるときとまったく同じように p と q について解けばよい。最後の小問では、中間の小問で示した線形性（linearity）により、与えられた二つの解をそれらのより簡単な一次結合に置き換えることができ、さらに三角関数の恒等式（trigonometric identities）を使うとその一次結合は非常に簡単になる。

解答

p と q を求める

$y = x$ のとき $y' = 1$、$y'' = 0$ であるから、$(*)$ に代入すると

$$p(x) + x\,q(x) = 0. \tag{1}$$

を得る。$y = 1 - x^2$ のとき $y' = -2x$、$y'' = -2$ であるから

$$-2 - 2x\,p(x) + (1 - x^2)\,q(x) = 0. \tag{2}$$

となる。(1) より $p(x) = -x\,q(x)$ である。これを (2) に代入すると

$$-2 + 2x^2 q(x) + (1 - x^2)q(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (1 + x^2)\,q(x) = 2.$$

$1 + x^2 > 0$ であるから両辺をこれで割ってよく、$q(x) = 2(1 + x^2)^{-1}$ を得る。すると (1) より $p(x) = -x\,q(x) = -2x(1 + x^2)^{-1}$ となり、示すべき結果が得られた。（x で割

る操作は一度も行っていないので、この結果は $x = 0$ を含むすべての実数 x で成り立つ。)

任意の一次結合 $ax + b(1 - x^2)$ は解である

$L[y] = y'' + p\,y' + q\,y$ とおく。微分は線形であるから、a, b を定数として $y = ay_1 + by_2$ とすると

$$\begin{aligned} L[ay_1 + by_2] &= a\big(y_1'' + p\,y_1' + q\,y_1\big) + b\big(y_2'' + p\,y_2' + q\,y_2\big) \\ &= a\,L[y_1] + b\,L[y_2]. \end{aligned}$$

となる。$y_1 = x$、$y_2 = 1 - x^2$ とすると、$L[y_1]$ と $L[y_2]$ はどちらも 0 である(これがそれらが $(*)$ を満たすということの意味である)。よって、任意の定数 a と b に対して $L[ax + b(1 - x^2)] = 0$ が成り立つ。直接確かめたいのであれば、$y = ax + b(1 - x^2)$ について $y' = a - 2bx$、$y'' = -2b$ であり、

$$\begin{aligned} y'' + p\,y' + q\,y &= -2b - \frac{2x(a - 2bx)}{1 + x^2} + \frac{2\big(ax + b - bx^2\big)}{1 + x^2} \\ &= \frac{-2b(1 + x^2) - 2ax + 4bx^2 + 2ax + 2b - 2bx^2}{1 + x^2} = 0. \end{aligned}$$

となる。

最後の小問

いま述べた議論では、特定の p と q の性質は何も使っていない。つまり、$(*)$ の形の**どのような**方程式についても、二つの解の一次結合 $ay_1 + by_2$ はやはり解になる。したがって、$\cos^2(\frac{1}{2}x^2)$ と $\sin^2(\frac{1}{2}x^2)$ がともに $(*)$ を満たすならば、それらの和と差

$$\cos^2(\tfrac{1}{2}x^2) + \sin^2(\tfrac{1}{2}x^2) = 1, \qquad \cos^2(\tfrac{1}{2}x^2) - \sin^2(\tfrac{1}{2}x^2) = \cos(x^2),$$

も $(*)$ を満たす。ここでは $\theta = \frac{1}{2}x^2$ として $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ と $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$ を用いた。

> **考えてみよう** 与えられた関数の代わりに 1 と $\cos(x^2)$ を扱ってよいのはなぜだろうか。

この置き換えは逆にたどることができるからである。与えられた関数は $\frac{1}{2}\big(1 + \cos x^2\big)$ と $\frac{1}{2}\big(1 - \cos x^2\big)$ であるから、p と q がこの二つをともに解とするのは、1 と $\cos(x^2)$ をともに解とするときであり、かつそのときに限る。失われる情報は何もなく、しかも導関数の計算はずっと簡単になる。

解 $y = 1$。このとき $y' = y'' = 0$ であるから、$(*)$ は $q(x) \cdot 1 = 0$ となり、

$$q(x) = 0.$$

を得る。

解 $y = \cos(x^2)$。合成関数の微分法（chain rule）により $y' = -2x\sin(x^2)$ であり、積の微分法（product rule）により

$$y'' = -2\sin(x^2) - 4x^2\cos(x^2).$$

である。$q = 0$ のもとで、$(*)$ は

$$-2\sin(x^2) - 4x^2\cos(x^2) - 2x\sin(x^2)\,p(x) = 0.$$

となる。$x\sin(x^2) \neq 0$ となる点では割り算ができて、

$$p(x) = -\frac{\sin(x^2) + 2x^2\cos(x^2)}{x\sin(x^2)} = -\frac{1}{x} - 2x\cot(x^2).$$

を得る。よって $p(x) = -\dfrac{1}{x} - 2x\cot(x^2)$、$q(x) = 0$ である。

$x\sin(x^2) = 0$ となる点（すなわち $x = 0$ および $x = \pm\sqrt{n\pi}$）では p の係数が 0 になるので、方程式はそこでの p について何も教えてくれない。実際、求めた p はこれらの点で発散する。これは計算間違いではない。このような点では与えられた二つの関数の導関数がともに 0 になるので、それらが $(*)$ の形の性質のよい方程式の二つの「独立な」解であることはありえず、p はそこで特異（singular）にならざるをえないのである。

検算

- 最初の小問の独立な検算として、二つの解の**ロンスキアン**（Wronskian）$W = y_1y_2' - y_2y_1'$ は $W' = -pW$ を満たす。$y_1 = x$、$y_2 = 1 - x^2$ とすると $W = -2x^2 - (1 - x^2) = -(1 + x^2)$ となるので、$-p = W'/W = 2x/(1 + x^2)$ であり、求めた p と一致する。最後の小問では、解 1 と $\cos(x^2)$ から $W = -2x\sin(x^2)$ が得られ、やはり $W'/W = 1/x + 2x\cot(x^2) = -p$ となる。
- 数値的には、$x = 0.9$ において、与えられた二つの関数を、導関数を有限差分（finite differences）で計算したうえで $(*)$ に代入すると、$p(0.9) \approx -2.82465$、$q(0.9) \approx 0$ でなければならないことがわかり、$-1/0.9 - 1.8\cot(0.81) \approx -2.82465$ と一致する。

よくある間違い

- $\cos^2(\frac{1}{2}x^2)$ をそのまま 2 回微分して、式変形の途中で迷子になる。まず 2 倍角の公式（double-angle identities）を使い、それから微分すること。

- (1) を x で割って $q = -p/x$ とする。これでもうまくいくが、その場合は $x = 0$ を別に扱わなければならない。代わりに p を消去すればこの問題は避けられる。
- 最後の小問で、p の式がどこで有効であるかを述べ忘れる。

STEP のその先へ

この問題は 2 階線形微分方程式（second-order linear differential equations）の理論を垣間見せてくれる。解全体は 2 次元のベクトル空間（vector space）をなし、任意の二つの独立な（independent）解によって方程式が決まり、ロンスキアンは（アーベル（Abel）の公式 $W' = -pW$ とともに）独立性を測る尺度となる。ここでの $x = \pm\sqrt{n\pi}$ のようにロンスキアンが 0 になる点は、まさに係数が特異にならざるをえない点である。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）では、これらすべてが丁寧に展開されている。

解答例

STEP I 2001、第 9 問

力学 ・ 迎撃と相対速度

> **STEP I 2001、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q9

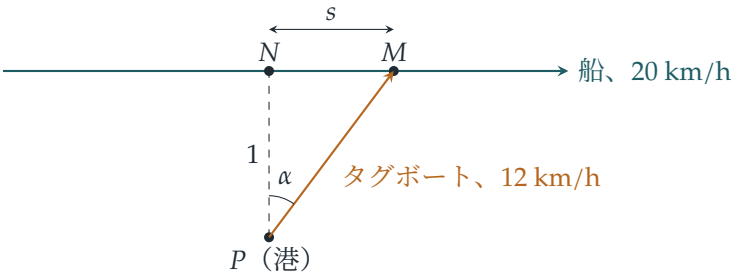
鍵となる考え方

出発をできるだけ遅らせるには、タグボートは全速力で一直線に進まなければならない。したがって実質的に選べるのは、船の航路上のどこで落ち合うかだけである。落ち合う地点の候補それぞれについて、タグボートが間に合うための最も遅い出発時刻を求める。次に、その出発時刻を落ち合う地点について最大化する。設定さえ正しくできれば、これは一変数の最適化（optimisation）問題である。

解答

設定

船とタグボートを質点（particle）とみなす。港 P を原点に置き、船は直線 $y = 1$ 上を x 軸の正の向きに進むとする（距離の単位は km、時間の単位は時間）。P から航路に下ろした垂線の足（foot of the perpendicular）は $N = (0, 1)$ であり、これは船が港に最も近づく点である。



点 $M=(s,1)$ で落ち合うとする。航路上の船の位置は時刻の一次関数（linear function）であるから、船が M に到達する時刻は

$$t_M=\frac{s-c}{20},$$

である。ここで c は船の出発位置によって決まる定数である。（船はまだ近づいている途中なので、c は今後必要となるどの落ち合う位置よりも小さい。）

考えてみよう なぜタグボートは全速力で一直線に進まなければならないのか。

タグボートが時刻 T に出発して時刻 t_M に M にいるとすると、少なくとも直線距離 $PM=\sqrt{s^2+1}$ を時速 12 km 以下で進んだことになるので、$t_M-T\geq\sqrt{s^2+1}/12$ である。等号は、M に向かって最高速度でまっすぐ進むときに成り立つ。それより遅かったり、遠回りしたりすれば、より早く出発しなければならなくなる。

よって、M で落ち合うことができる最も遅い出発時刻は

$$T(s)=\frac{s-c}{20}-\frac{\sqrt{s^2+1}}{12},$$

であり、すべての s にわたる $T(s)$ の最大値を求めればよい。

出発時刻の最大化

微分すると

$$T'(s)=\frac{1}{20}-\frac{s}{12\sqrt{s^2+1}}.$$

$T'(s)=0$ とおくと

$$\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}.$$

これには $s>0$ が必要である。両辺を 2 乗すると $25s^2=9(s^2+1)$ となるので、$s^2=\frac{9}{16}$、すなわち $s=\frac{3}{4}$ である。

これは極大値であり、しかも最大値（大域的最大値、global maximum）である。実際、$\sqrt{s^2+1}$ は凸（convex）であるから、T（一次関数から凸関数を引いたもの）は凹（concave）である。同じことだが、$\dfrac{s}{\sqrt{s^2+1}}$ は s について増加するので、$s<\frac{3}{4}$ では $T'(s)>0$、$s>\frac{3}{4}$ では $T'(s)<0$ となる。定数 c が消えていることに注意しよう。落ち合う地点は船の出発位置によらないのである。

したがってタグボートは N の $\frac{3}{4}$ km 先で船と落ち合い、その移動距離は

$$PM=\sqrt{\tfrac{9}{16}+1}=\sqrt{\tfrac{25}{16}}\quad\Longrightarrow\quad\boxed{PM=\tfrac{5}{4}\text{ km}=1.25\text{ km}.}$$

である。タグボートが海上にいる時間は $\frac{5/4}{12}=\frac{5}{48}$ 時間、すなわち $6\frac{1}{4}$ 分である。

幾何学的な解釈

タグボートの進行方向は PN と角 α をなし、$\sin\alpha = \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{3}{5}$ である。つまり $\sin\alpha$ は速さの比 12/20 に等しい。タグボートの速度は $(7.2, 9.6)$ であり、船に対する相対速度（relative velocity）は $(7.2-20, 9.6) = (-12.8, 9.6)$ である。両者の内積（dot product）は $-92.16 + 92.16 = 0$ である。臨界の出発時刻では、タグボートの速度は船に対する相対速度と垂直になる。これは、より遅い追跡者がぎりぎりで迎撃に成功するための標準的な条件である。

検算

- 落ち合う地点の細かい格子上で総当たり探索（brute-force search）を行うと、船の出発位置をいくつ変えても、$T(s)$ の最大値は常に $s = 0.75$ でとられ、タグボートの移動距離は 1.25 km となる。
- 最も遅い出発時刻から進行方向 $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ で運動を数値的に追跡すると、タグボートは船に到達する。わずか 0.002 時間遅れて出発すると、どの進行方向をとっても船の 20 m 以内には近づけない。
- 妥当性の確認：もしタグボートが船と同じ速さなら、$\sin\alpha$ は 1 となり、落ち合う地点は無限の彼方へ遠ざかる。同じ速さのタグボートはいつまでも船を追いかけ続けられるのだから、これは理にかなっている。

よくある間違い

- 船が港に最も近づく点 N で落ち合うとしてしまう（タグボートの移動距離 1 km）。これはタグボートの**移動距離**を最小にするが、出発時刻を最大にするわけではない。少し先まで進めば、船がそこまで航行する必要があるぶん、タグボートは時間を稼げるのである。
- $s/20$ の項を入れずに、タグボートの所要時間 $\sqrt{s^2+1}/12$ を最小化してしまう。最大化すべき量は出発時刻であり、それには両方の船が関わっている。

STEP のその先へ

到着時刻の差を最大化することは、最適制御（optimal control）問題や追跡問題（pursuit problem）の小さな例である。速さの比の条件 $\sin\alpha = 12/20$ は、超音速機の後方にできるマッハ円錐（Mach cone）と同じ幾何である。円錐の半頂角の正弦は音速と機体の速さの比であり、ここでの遅いタグボートは、速い音源を追いかける音の役割を演

じている。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は相対速度と座標系を丁寧に扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には、力学における STEP 形式の最適化問題がさらに収められている。

解答例

STEP I 2001、第 10 問

力学 ・ 放物運動の飛行時間

> **STEP I 2001、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q10

鍵となる考え方

選択を二つに分けて考える。仰角（elevation）によって飛行時間（time of flight）と水平到達距離（range）の両方が決まり、方向は砲を中心とする円周上のどこに砲弾が落ちるかを決めるだけである。したがって、砲弾が線路に命中しうるのは、水平到達距離が d 以上であるときに限られる。飛行時間は仰角とともに増加するが、45° を超えると水平到達距離は減少する。そこで、水平到達距離がちょうど d に減るまで仰角を上げていけばよい。

解答

与えられた仰角に対する飛行時間と水平到達距離

砲弾を、重力のみを受けて運動する（空気抵抗（air resistance）はない）質点（particle）としてモデル化する。砲弾は地表から発射され、平原に着地するものとする。仰角を α とし、$0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ とする。速度の鉛直成分は $v\sin\alpha$、水平成分は $v\cos\alpha$ である。

鉛直方向について、時刻 t における高さは $vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$ であり、これが再び零になるのは

$$T = \frac{2v\sin\alpha}{g}.$$

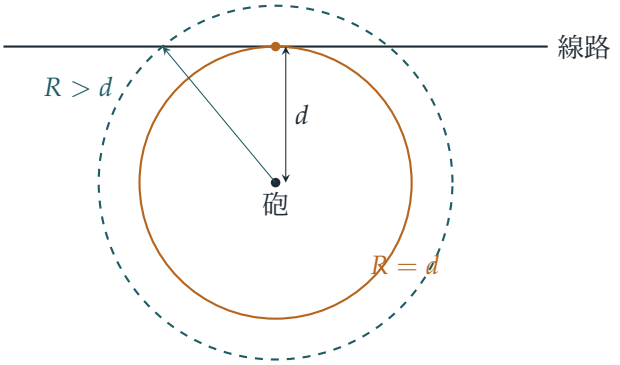
のときである。その間に砲弾が水平方向に進む距離は

$$R = v\cos\alpha \cdot \frac{2v\sin\alpha}{g} = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g}.$$

である。

砲弾が線路に命中しうるのはいつか

仰角を固定して砲の向きを変えると、着地点は砲を中心とする半径 R の円周上を動く。線路上で砲に最も近い点までの距離は d であり、線路上の他の点はすべてそれより遠い。したがって、円が線路と交わるための必要十分条件は $R \geq d$ である。$R = d$ のとき円は線路にちょうど接し、砲は最も近い点、すなわち線路に垂直な方向に真っすぐ向けなければならない。



（上から見た図である。破線の円はより低い仰角の場合で、線路と 2 点で交わる。実線の円は最適な仰角の場合で、線路にちょうど届く。）

よって、仰角 α で線路に命中させられるのは、ちょうど

$$\sin 2\alpha \geq \frac{gd}{v^2}.$$

が成り立つときである。$k = gd/v^2$ とおく。$v^2 > gd$ が与えられているので $0 < k < 1$ であり、条件を満たす仰角が存在する。（最大の水平到達距離は 45° のときの v^2/g であるから、この条件は単に線路が射程内にあることを述べている。）

飛行時間の最大化

$T = 2v\sin\alpha/g$ であり、$\sin\alpha$ は $(0, \frac{\pi}{2}]$ で増加するから、T を最大にするには、許される範囲で**最大の** α を選べばよい。

$0 < 2\alpha \leq \pi$ のとき、条件 $\sin 2\alpha \geq k$ が成り立つのは、ちょうど

$$\arcsin k \leq 2\alpha \leq \pi - \arcsin k.$$

のときである。したがって、許される最大の仰角は $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin k$ であり、これは 45° より大きい。この仰角では $\sin 2\alpha = k$ であり、2α は $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ にあるので $\cos 2\alpha$ は負である：

$$\cos 2\alpha = -\sqrt{1 - k^2}.$$

考えてみよう 線路上の遠く離れた点を狙えば、砲弾はより遠くまで飛ぶのだから、そのほうがよいのではないか？

そうではない。より遠くまで飛ばすには**より大きな**水平到達距離が必要であり、45° より上ではそれは**より低い**仰角を意味し、したがって飛行時間は短くなる。飛行時間は仰角だけで決まるので、最善なのは線路に届く範囲で最も急な射撃である。その水平到達距離はちょうど d であるから、砲弾は砲から線路に下ろした垂線の足に着地する。

ここで T を 2 乗し、$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$ を用いると

$$\begin{aligned} g^2T^2 &= 4v^2\sin^2\alpha \\ &= 2v^2\left(1-\cos 2\alpha\right) \\ &= 2v^2 + 2v^2\sqrt{1-\frac{g^2d^2}{v^4}} \\ &= 2v^2 + 2\left(v^4 - g^2d^2\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

となる。ただし、v^2 を根号の中に入れた（$v^2 > 0$ なのでこれは許される）。これが求める結果である。

検算

- $d \to 0$ のとき、公式から $g^2T^2 \to 4v^2$、すなわち $T \to 2v/g$ が得られる。これは真上に発射する場合であり、可能な最長の飛行である。線路が砲のすぐそばを通る場合として正しい。
- $v^2 = gd$ のとき、線路はぎりぎり射程内にある。可能な射撃は 45° のものだけであり、公式は $g^2T^2 = 2v^2$ を与える。これは $T = 2v\sin 45°/g = \sqrt{2}\,v/g$ と一致する。
- 数値的に、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$d = 100\,\mathrm{m}$、$v = 40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ とすると、最適な仰角は約 71.1° であり、公式は $T \approx 7.72\,\mathrm{s}$ を与える。運動を数値的に刻んで追跡しても同じ時間が得られ、砲弾は線路上に着地する。あらゆる仰角についての総当たり探索も、数百のランダムな場合で公式と一致する。

よくある間違い

- 小さいほうの解 $\alpha = \frac{1}{2}\arcsin k$ を取ってしまう。この射撃でも線路には命中するが、飛行時間は最長ではなく**最短**になる。実質的には $\cos 2\alpha$ の符号を取り違えていることになる。
- 最初から、砲弾は線路上の最も近い点に着地しなければならないと仮定してしま

う。結果的にそれは正しいが、上で述べた議論が必要である。すなわち、他のどの点もより大きな水平到達距離を必要とし、したがってより低い仰角を必要とする。

STEP のその先へ

これは小さな制約付き最適化（constrained optimisation）の問題である。ある制約（線路に届くこと）のもとで一つの量（飛行時間）を最大化するものであり、最適解は許される範囲の境界上にある。大学 1 年次の力学や最適化の講義では、ラグランジュの未定乗数法（Lagrange multipliers）のような、このための一般的な道具に出会うだろう。また、関連する考え方として、すべての軌道の**包絡線**（envelope）（「安全放物線」（parabola of safety））がある。これは砲が到達しうるすべての点の境界を与えるものである。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物運動や質点の力学の理解を深めるのに適した一冊である。

解答例

STEP I 2001、第 11 問

力学 ・ 弾性ひもとエネルギー

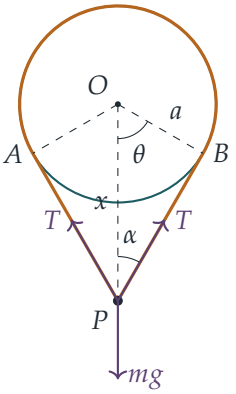
> **STEP I 2001、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q11

鍵となる考え方

質点がバンドを下に引くと、バンドはその長さの大部分で円柱に接したまま、両側で**接線方向に**（tangentially）円柱から離れ、質点まで真っすぐに張られる。したがって、すべては円の外部の点から引いた 2 本の接線の幾何に帰着する。円柱はなめらかなので、張力（tension）はバンド全体を通じて等しく、**全体の**伸び（extension）を用いたフックの法則（Hooke's law）によって張力が求まる。そのうえで、小問 (i) はエネルギーの問題（質点は最下点で一瞬静止する）であり、小問 (ii) は力の問題（速さが最大となるのは加速度が 0 のとき）である。

解答

質点を質点（point mass）として、バンドを軽い弾性体（フックの法則に従う）として、円柱をなめらかなものとしてモデル化する。断面の中心を O とし、質点 P が O の下方距離 x の位置にあるとする。ただし $x \geq a$ である。バンドは点 A と点 B で円から離れ、PA と PB は接線である。



幾何と張力

三角形 OAP は A で直角である（接線は半径に垂直である）から、

$$PA = PB = \sqrt{x^2 - a^2}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{x}, \qquad \sin\alpha = \frac{a}{x},$$

が成り立つ。ここで $\theta = \angle AOP$、$\alpha = \angle APO$ であり、後者はバンドの直線部分がそれぞれ鉛直方向となす角である。バンドは、P に最も近い中心角 2θ の弧 AB を除くすべての部分で円に接しているので、その長さは

$$L = (2\pi a - 2a\theta) + 2\sqrt{x^2 - a^2}.$$

である。自然長は $2\pi a$ なので、伸びは

$$e(x) = 2\left(\sqrt{x^2 - a^2} - a\theta\right), \qquad \theta = \arccos\frac{a}{x}.$$

となる。円柱はなめらかなので、バンドに沿って摩擦ははたらかず、張力 T は全体で等しい。フックの法則により $T = \dfrac{\lambda e}{2\pi a}$ である。

$x = 2a$ のとき $\cos\theta = \frac{1}{2}$ なので、$\theta = \frac{\pi}{3}$、$\alpha = \frac{\pi}{6}$、$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{3}\,a$ である。よって

$$e(2a) = 2\left(\sqrt{3}\,a - \frac{\pi a}{3}\right) = \frac{2a}{3}\left(3\sqrt{3} - \pi\right).$$

小問 (i)

放した瞬間、質点は円柱の最下部 $x = a$ にあり、バンドは伸びておらず、質点は静止している。$x = 2a$ で質点は再び静止する（それ以上は落下しない）ので、どちらの時点でも運動エネルギーは 0 である。円柱はなめらかなのでエネルギーは失われず、重力による位置エネルギーの減少量は弾性エネルギーの増加量に等しい。質点が落下した距離は $2a - a = a$ であり、自然長 $2\pi a$、伸び e のバンドの弾性エネルギーは $\dfrac{\lambda e^2}{2 \cdot 2\pi a}$

である。したがって

$$mga = \frac{\lambda}{4\pi a} \cdot \frac{4a^2}{9}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)^2 = \frac{\lambda a\left(3\sqrt{3}-\pi\right)^2}{9\pi},$$

となり、これより

$$\lambda = \frac{9\pi mg}{\left(3\sqrt{3}-\pi\right)^2},$$

が得られ、題意が示された。

考えてみよう バンドの一部が円柱に巻きついているのに、バンド全体に弾性エネルギーの公式を用いてよいのだろうか。

よい。円柱はなめらかなので、巻きついている部分もそうでない部分も、張力、したがって単位長さあたりの伸びはバンド全体で等しい。バンドは自然長 $2\pi a$、全体の伸び e の 1 本の弾性ひもとまったく同じようにふるまい、公式 $\lambda e^2/(2l)$ が表しているのはまさにそれである。

小問 (ii)

速さが最大となるのは加速度が 0 のとき、すなわち質点にはたらく合力が 0 のときである。水平方向については、対称性により 2 つの張力がつり合う。P において鉛直方向に分解すると、

$$2T\cos\alpha = mg.$$

$x = 2a$ では $\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ なので $\sqrt{3}\,T = mg$ となり、$T = \dfrac{mg}{\sqrt{3}}$ を得る。上で求めた伸びを用いてフックの法則を適用すると、

$$T = \frac{\lambda}{2\pi a} \cdot \frac{2a}{3}\left(3\sqrt{3}-\pi\right) = \frac{\lambda\left(3\sqrt{3}-\pi\right)}{3\pi}.$$

T についての 2 つの式を等置すると、

$$\lambda = \frac{3\pi mg}{\sqrt{3}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)} = \frac{\sqrt{3}\,\pi mg}{3\sqrt{3}-\pi}.$$

考えてみよう これが単なる停留点ではなく、速さの最大であることはどうしてわかるのだろうか。

x が増加すると、e は増加し（バンドの各直線部分が伸びる速さは、弧 $a\theta$ が縮む速さより大きい）、$\cos\alpha = \sqrt{1-a^2/x^2}$ も増加する。したがって上向きの力 $2T\cos\alpha$ は 0 から単調に増加する。下向きの正味の力は $x = 2a$ より上では正、下では負であるから、質点は $x = 2a$ までは加速し、その後は減速する。

検算

- 見事な整合性の確認：L を微分すると $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-a^2}} - \dfrac{2a^2}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \dfrac{2\sqrt{x^2-a^2}}{x} = 2\cos\alpha$ となる。よって弾性エネルギーの変化率 $T\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}$ は上向きの力 $2T\cos\alpha$ に等しい。(i) のエネルギーによる方法と (ii) の力による方法は一致する。
- 数値的には、(i) で $\lambda \approx 6.70\,mg$、(ii) で $\lambda \approx 2.65\,mg$ である。(ii) のバンドのほうが弱いのは理にかなっている。(ii) では質点は $x = 2a$ でまだ運動しており、そこを通り過ぎていくのに対し、(i) ではより硬いバンドがすでに質点を静止させているからである。
- 運動方程式 $m\ddot{x} = mg - 2T\cos\alpha$ を $x = a$ での静止状態から数値的に解き進めると、1 つ目の λ の値では最下点が $x = 2.0000a$ となり、2 つ目の値では速さの最大が $x = 2.0000a$ で得られる。

よくある間違い

- バンドの一部が円柱から離れることを忘れる：伸びは 2 つの直線部分の長さだけではなく、$2\sqrt{x^2-a^2}$ から失われた弧 $2a\theta$ を**引いたもの**である。
- 落下距離を放した点からではなく円柱の軸から測ってしまう：質点が落下する距離は a であり、$2a$ ではない。
- 鉛直方向に分解するときに $\cos\alpha$ ではなく $\sin\alpha$ を用いてしまう。α は鉛直方向から測った角であり、$\sin\alpha = a/x$ である。

STEP のその先へ

d(弾性エネルギー)/dx が復元力に等しいという確認は、仮想仕事の原理（principle of virtual work）の一例である。すなわち、保存系においては、任意の方向の力は、その方向への位置エネルギーの変化率に負号をつけたものに等しい。系を 1 つの座標とその位置エネルギーによって記述するというこの視点は、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）の出発点であり、大学の力学の講義の 1 年目か 2 年目で出会うことになる。エネルギー、力、ポテンシャルについての丁寧な解説としては、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を読んでみるとよい。

解答例

STEP I 2001、第 12 問

確率・統計 ・ 樹形図

> **STEP I 2001、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q12

鍵となる考え方

すべては**誰が何を知っているか**を注意深く追跡することにかかっている。ある生徒が「ある人がうわさを聞いた」と知っているのは、その人から聞いた場合か、自分がその人に伝えた場合に限られる。誰も、自分がうわさをどこから聞いたかは伝えない。各段階で各生徒の知識を記録していけば、樹形図（tree diagram）は小さくなる。どの分岐も 2 人のうちどちらかを選ぶものなので、経路は 8 本しかなく、しかもそれらはすべて等しく起こりやすいことがわかる。

解答

設定

4 人の生徒を A, B, C, D と書く。どの段階においても、生徒 X が「うわさを聞いた」と**知っている**人は次のとおりである：X 自身、X にうわさを伝えた人、そして X がうわさを伝えた相手。X がうわさを聞くと、X はこの集合の外にいる人の中から一様ランダムに（uniformly at random）1 人を選ぶ。その集合がすでに 4 人全員を含んでいれば、うわさは X で止まる。

最初に A が C に伝えているので、A は $\{A, C\}$ を知っており、C も $\{A, C\}$ を知っている。

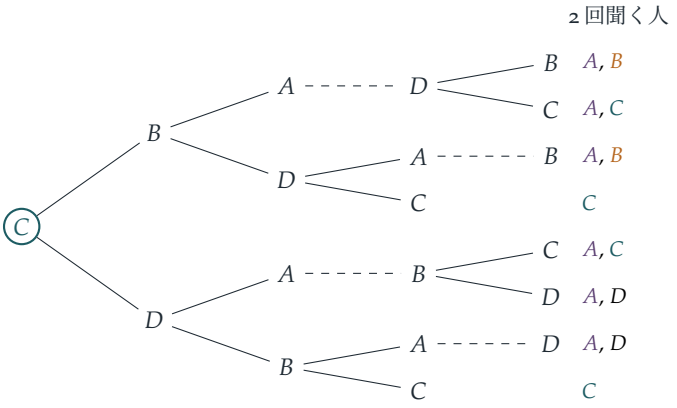
樹形図

C は A を除外し、B または D にそれぞれ確率（probability）$\frac{1}{2}$ で伝える。まず枝 $C \to B$ を考える。このとき C は $\{A, B, C\}$ を知っており、B は $\{B, C\}$ を知っている（A は含

まれない。C はうわさの出どころを言わなかったからである）。したがって B は A または D にそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で伝える。

- $B \to A$。アーサー（Arthur）はいまや $\{A, B, C\}$ を知っているので、D に伝えるしかなく、その後アーサーは全員が聞いたことを知る。D は $\{A, D\}$ しか知らないので、D は B または C にそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で伝える。どちらの場合も、聞いた人の集合は完成する。B はすでに $\{A, B, C\}$ を知っており、C も同様であって、どちらも新たに D のことを知るからである。よってうわさは止まる。
- $B \to D$。このとき B は $\{B, C, D\}$ を、D は $\{B, D\}$ を知っているので、D は A または C に伝える。
  - $D \to C$：C はすでに $\{A, B, C\}$ を知っており、新たに D のことを知るので、うわさは止まる。アーサーが再びうわさを聞くことはない。
  - $D \to A$：アーサーは $\{A, C, D\}$ を知っているので B に伝え、B はそれで 4 人全員を知ることになる。うわさは止まる。

枝 $C \to D$ は、B と D の役割を入れ替えれば同じである。以下に樹形図全体を示す。強制される手（確率 1）は破線で示し、それ以外のすべての枝の確率は $\frac{1}{2}$ である。



葉に至る各経路には、確率 $\frac{1}{2}$ の選択がちょうど 3 回含まれる（強制される手は因子 1 を与えるだけである）。したがって 8 通りの結果はそれぞれ確率 $\frac{1}{8}$ をもつ。右側のラベルは、その経路でうわさを 2 回聞く人を示している。（どの経路でも、1 人の生徒がうわさを聞くのは高々 2 回である。）

考えてみよう C から聞いたばかりの B は、なぜアーサーがうわさを聞いたことを知らないのか。

C は誰から聞いたかを言わないからである。B が推論できるのは、C がうわさを聞いたということだけである。これがうわさを続かせる要因である。実際、枝 $C \to B \to A$

では、アーサーはすでに知っていることを伝えられる。

アーサーが再び聞く

アーサーは、2 本の短い経路 $C \to B \to D \to C$ と $C \to D \to B \to C$ を除くすべての経路でうわさを再び聞く。よって

$$\mathrm{P}(\text{アーサーが再び聞く}) = 1 - 2 \times \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{4},$$

となり、示すべきことが得られた。

バーサとチャンドラ

バーサ（Bertha）が 2 回聞くのは経路 $C \to B \to A \to D \to B$ と $C \to B \to D \to A \to B$ の場合に限られるので、

$$\mathrm{P}(\text{バーサが 2 回聞く}) = \tfrac{2}{8} = \tfrac{1}{4}.$$

チャンドラ（Chandra）は 4 本の経路で 2 回聞く。樹形図の上半分と下半分にそれぞれ 2 本ずつ（$C \to B \to A \to D \to C$、$C \to B \to D \to C$、$C \to D \to A \to B \to C$ および $C \to D \to B \to C$）あるので、

$$\mathrm{P}(\text{チャンドラが 2 回聞く}) = \tfrac{4}{8} = \tfrac{1}{2}.$$

チャンドラがバーサよりも再びうわさを聞きやすいのは、チャンドラが早い段階で聞いたからである。連鎖の後のほうで伝えられた人々はチャンドラが聞いたことを知らないので、チャンドラは最後まで伝える相手の候補であり続ける。

検算

B と D の対称性から、デリラ（Delilah）が 2 回聞く確率も $\frac{1}{4}$ になるはずであり、実際に樹形図にはそのような経路が 2 本ある。結果の総和も正しい。等確率の葉が 8 つあり、確率の合計は 1 である。この過程をコンピュータで厳密に数え上げると $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ が得られ、200 000 回のうわさのシミュレーションでは 0.750, 0.250, 0.501 となった。

よくある間違い

- 聞いた人が、連鎖をさかのぼった全員のことを知っているとしてしまう。伝わるのは伝えた人が誰かということだけであり、完全な知識があればうわさがアーサーに戻ってくることは決してない。
- 伝えた人も何かを知るということを忘れる。Y に伝えた後、X は Y が聞いたことを知っている。これがアーサーの手を強制するのである。

- アーサーが再び聞いた時点で樹形図を打ち切ってしまう。バーサとチャンドラについて考えるには、その後の枝が必要である。

STEP のその先へ

このうわさは 4 人の生徒の上のランダムウォーク（random walk）であり、その規則は履歴に依存する。ここではその履歴を各生徒の知識として記録した。次の一歩が現在の状態だけに依存するよう状態を十分に豊かにとれば、これは**マルコフ連鎖**（Markov chain）になる。マルコフ連鎖は確率過程の入門講義の中心的な対象であり、うわさや感染症のモデルはその古典的な応用例である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、まさにちょうどよい水準でマルコフ連鎖を扱っている。

解答例

STEP I 2001、第 13 問

確率・統計 ・ 条件付きポアソン分布

> **STEP I 2001、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q13

鍵となる考え方

割れた皿の総数で条件付け(conditioning)をすると、ポアソン分布(Poisson distribution)の問題が二項分布（binomial distribution）の問題に変わる。4 人の学生がそれぞれ独立（independent）に同じ割合で皿を割るならば、割れた皿の総数がわかった時点で、割れた各皿は他の皿とは独立に、4 人のうちの誰が割ったものである確率も等しい。したがって、割れた皿のうち数学者が割った枚数は二項分布に従い、未知の λ は消えてしまう。

解答

設定

数学者が割った皿の枚数を M とし、他の 3 人の学生が割った皿の総数を R とする。問題文より、各学生が割る枚数は他の学生とは独立に $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従う。よって $M \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ であり、R は独立な 3 つの $\mathrm{Po}(\lambda)$ 確率変数の和であるから $\mathrm{Po}(3\lambda)$ に従う。また、R は他の 3 人の学生のみに依存するので、M と R は独立である。総数は $T = M + R \sim \mathrm{Po}(4\lambda)$ である。

> **考えてみよう** 独立なポアソン確率変数の和が再びポアソン分布に従うのはなぜか？

独立な $X \sim \mathrm{Po}(\alpha)$ と $Y \sim \mathrm{Po}(\beta)$ について、n の分け方すべてにわたって和をとると

$$\mathrm{P}(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha}\alpha^k}{k!} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\beta}\beta^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} = \frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)}(\alpha+\beta)^n}{n!},$$

となる。最後の等号は二項定理（binomial theorem）による。よって $X+Y \sim \mathrm{Po}(\alpha+\beta)$ である。これを 2 回適用すると $R \sim \mathrm{Po}(3\lambda)$ が得られ、さらにもう 1 回適用すると $T \sim \mathrm{Po}(4\lambda)$ が得られる。

M の条件付き分布

$m = 0, 1, \ldots, 5$ に対して、事象 $\{M = m,\ T = 5\}$ は $\{M = m,\ R = 5-m\}$ と同じである。M と R の独立性より

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(M = m \mid T = 5) &= \frac{\mathrm{P}(M = m)\,\mathrm{P}(R = 5-m)}{\mathrm{P}(T = 5)} \\
&= \frac{\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^m}{m!} \cdot \dfrac{\mathrm{e}^{-3\lambda}(3\lambda)^{5-m}}{(5-m)!}}{\dfrac{\mathrm{e}^{-4\lambda}(4\lambda)^5}{5!}} \\
&= \frac{5!}{m!\,(5-m)!} \cdot \frac{3^{5-m}}{4^5} = \binom{5}{m}\left(\tfrac{1}{4}\right)^m \left(\tfrac{3}{4}\right)^{5-m}.
\end{aligned}$$

指数関数は約分され、λ のべきもすべて約分される（分子と分母にともに λ^5 がある）。よって $T = 5$ という条件のもとで、λ の値にかかわらず $M \sim \mathrm{B}(5, \frac{1}{4})$ となる。

答え

$m = 3, 4, 5$ に対する二項分布の確率を足し合わせると

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(M \geq 3 \mid T = 5) &= \binom{5}{3}\frac{3^2}{4^5} + \binom{5}{4}\frac{3}{4^5} + \binom{5}{5}\frac{1}{4^5} \\
&= \frac{10 \times 9 + 5 \times 3 + 1}{1024} = \frac{106}{1024} = \frac{53}{512}.
\end{aligned}$$

よって、5 枚の皿のうち 3 枚以上を数学者が割った確率は $\dfrac{53}{512} \approx 0.104$ である。

検算

- 6 つの条件付き確率 $\binom{5}{m}3^{5-m}/4^5$ の和は $(1+3)^5/4^5 = 1$ であり、確かにそうなるべき値になっている。
- 対称性（symmetry）：同じ議論により、5 枚の皿のうち各学生が割った枚数の期待値（expected value）は $5 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ であり、4 人分を合計すると 5 になる。
- $\lambda = 0.3, 1, 2.7$ および 5 について、4 つのポアソン分布から（5 回の破損を 4 人の学生に割り振るすべての方法にわたって和をとって）$\mathrm{P}(M \geq 3 \mid T = 5)$ を直接計算したところ、いずれの場合も $0.103515625 = 53/512$ が得られた。また、皿洗い 4×10^5

回分のシミュレーションを行ったところ、ちょうど 5 枚が割れた回の中での割合はおよそ 0.105 であった。

よくある間違い

- 答えに λ が残ってしまう。これは必ず約分されるはずであり、残るならば条件付けのどこかで誤っている。
- $\mathrm{P}(M+R=5)$ で割っているのに、R を $\mathrm{Po}(3\lambda)$ ではなく $\mathrm{Po}(\lambda)$ として扱ってしまう。これでは学生が 2 人しかいないことになる。
- 二項係数（binomial coefficient）を忘れる、あるいは事象を「3 枚以上」ではなく「ちょうど 3 枚」として扱ってしまう。

STEP のその先へ

これは次の一般的な事実の小さな例である：$X_1,\ldots,X_k$ がそれぞれ平均 $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ の独立なポアソン確率変数であるとき、それらの和が n であるという条件のもとで、ベクトル $(X_1,\ldots,X_k)$ は確率 $\lambda_i/\sum\lambda_j$ の多項分布（multinomial distribution）に従う。逆向きに読むと、$\mathrm{Po}(\mu)$ に従う個数の事象のそれぞれに、k 種類のうちの 1 つのラベルを独立に付けるとき、各種類の個数は独立なポアソン確率変数になる、ということである。この「ポアソン分割（Poisson splitting）」は、ポアソン過程（Poisson process）の研究における基本的な道具である。Blitzstein と Hwang による *Introduction to Probability*（確率論入門）では、両方向について多くの例とともに論じられている。

解答例

STEP I 2001、第 14 問

確率・統計 ・ ランダムな順列

> **STEP I 2001、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q14

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.12 節「**いつ探すのをやめるか**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/secretary.html

鍵となる考え方

面接の順序全体を考えるのではなく、**特定の候補者がどこに位置するか**だけを考える。最初の n 人の中で最良の者が全体の最良であるのは、最上位の候補者が最初に面接される n 人の中にいるときであり、そのときに限る。そして対称性（symmetry）により、最上位の候補者は N 個の位置のどこにも等しい確率でいる。小問 (ii) では場合をもう一つ加えるか、うまく余事象（complement）を使えばよい。

解答

候補者に順位でラベルを付け、候補者 1 が全体で最良、候補者 2 が二番目に良い者、以下同様とする。$N!$ 通りの順序はすべて同様に確からしいので、どの候補者もどの位置に来る確率も等しく、最初の n 回の面接で会う候補者の集合は、大きさ n の $\binom{N}{n}$ 個の部分集合のどれである確率も等しい。以下を通して $1 \le n \le N$ とする。

小問 (i)

候補者 1 が最初に面接される n 人の中にいるという事象を A とする。A が起これば、候補者 1 は確かに最初の n 人の中で最良である。起こらなければ、最初の n 人の中で最良の者は候補者 1 より劣る誰かである。したがって、求める事象はちょうど A である。

候補者 1 は N 個の位置のそれぞれに等しい確率でおり、そのうち n 個が最初の n 個に含まれるので、

$$\mathrm{P}(\text{最初の}n\text{ 人の中の最良が全体の最良}) = \frac{n}{N}.$$

小問 (ii)

ここでは二番目に良い候補者が存在するように $N \geq 2$ とする。最初の n 人の中で最良の者が全体で最良または二番目であるための必要十分条件は、次のいずれかが成り立つことである。

- 候補者 1 が最初の n 人の中にいる（事象 A）。
- 候補者 1 は最初の n 人の中に**いない**が、候補者 2 はいる。

考えてみよう 二番目の場合、最初の n 人の中で最良の者が候補者 2 であり、さらに良い誰かではないとなぜわかるのか？

候補者 2 より良い候補者は候補者 1 だけであり、この場合その候補者は早い段階で面接されていない。逆に、1 も 2 も最初の n 人の中にいなければ、最初の n 人の中で最良の者の順位は 3 以下である。したがって、上の二つの場合を合わせたものがちょうど求める事象であり、しかもこれらは互いに排反（mutually exclusive）である。

一つ目の場合の確率は小問 (i) より $\frac{n}{N}$ である。二つ目については、$\mathrm{P}(A') = \frac{N-n}{N}$ であり、候補者 1 が最後の $N-n$ 個の位置のどれかにいるという条件の下で、候補者 2 は残りの $N-1$ 個の位置のどこにも等しい確率でいて、そのうち n 個が最初の n 個に含まれる。よって

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{最初の}n\text{ 人の中の最良が全体で一番目または二番目}) &= \frac{n}{N} + \frac{N-n}{N}\cdot\frac{n}{N-1} \\ &= \frac{n\left[(N-1)+(N-n)\right]}{N(N-1)} \\ &= \frac{n(2N-n-1)}{N(N-1)}.\end{aligned}$$

別解として、余事象を使うこともできる。この事象が起こらないのは、早い段階の n 人がすべて順位 3 から N までの $N-2$ 人の候補者から選ばれるときであり、その確率は

$$\frac{\binom{N-2}{n}}{\binom{N}{n}} = \frac{(N-n)(N-n-1)}{N(N-1)},$$

である。そして $N(N-1)-(N-n)(N-n-1) = 2Nn-n^2-n = n(2N-n-1)$ となり、同じ答えが得られる。

$N = 4$、$n = 2$ の場合

公式から、(i) は $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$、(ii) は $\frac{2 \cdot 5}{4 \cdot 3} = \frac{5}{6}$ となる。

起こりうる場合を書き出すにあたり、最初に面接される二人が**誰であるか**だけが問題であることに注意する。$\binom{4}{2} = 6$ 組のペアはそれぞれ、24 通りの順序のうちちょうど $2! \times 2! = 4$ 通りから生じる（最初の二人を並べ、次に残りの二人を並べる）ので、六つのペアは同様に確からしい。

最初に面接される二人	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{2,3\}$	$\{2,4\}$	$\{3,4\}$
その中の最良	1	1	1	2	2	3

最初の二人の中で最良の者が全体の最良であるのは 6 通り中 3 通りで確率は $\frac{1}{2}$、全体で最良または二番目であるのは 6 通り中 5 通りで確率は $\frac{5}{6}$ である。どちらも公式と一致する。

検算

- $n = N$ のとき：全員に会うので、どちらの確率も 1 になるはずである。実際、$\frac{N}{N} = 1$ かつ $\frac{N(N-1)}{N(N-1)} = 1$ である。
- $n = 1$ のとき：最初の候補者は一様（uniformly）にランダムな一人なので、(ii) は $\frac{2}{N}$ になるはずである。公式は $\frac{2N-2}{N(N-1)} = \frac{2}{N}$ を与える。
- $2N - n - 1 \geq N - 1$ であるから、(ii) の答えは (i) の答え以上である。
- $N \leq 7$ とすべての n について $N!$ 通りの順序をすべて数え上げ（enumeration）た結果は、二つの公式と完全に一致する（例えば $N = 5$、$n = 2$ では $\frac{2}{5}$ と $\frac{7}{10}$ となる）。

よくある間違い

- (ii) で、「全体で二番目」が数に入るのは全体の最良が最初の n 人の中に**いない**ときだけであることを忘れる。単に $\frac{n}{N} + \frac{n}{N}$ と足すと重複して数えてしまう。
- 候補者 1 の位置で条件付け（conditioning）をした後に、候補者 2 について $\frac{n}{N}$ を使ってしまう。候補者 1 の位置が決まれば、残る位置は $N - 1$ 個しかない。

STEP のその先へ

これは有名な**秘書問題**（secretary problem）の設定である。各候補者をその場で採用するか不採用にするかを決めなければならないとき、最善の戦略は最初の n 人を見送

り、その後それら全員より良い最初の候補者を採用することである。小問 (i) の議論を拡張すると、最適な n はおよそ N/e であり、成功確率は約 $1/e$ であることが示される。ここで用いた対称性の議論（「どの候補者もどこにでも等しい確率でいる」）は、ランダム置換（random permutations）の研究の出発点である。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）には、このような対称性の議論についての優れた解説がある。

解答例

STEP II 2001、第 1 問

純粋数学 ・ 二項近似

> **STEP II 2001、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q1

鍵となる考え方

$(1-x)^{1/2}$ の二項級数（binomial series）は x が小さいとき速く収束（converge）するので、最初の数項だけで非常によい有理数による近似（rational approximation）が得られる。工夫すべきは x の選び方である。$1-x$ が「平方数と、平方根を求めたい数との積を、10 の累乗で割ったもの」になるようにしたい。そうすれば $1-x$ の平方根は、求めたい平方根の簡単な定数倍になる。$99 = 9 \times 11$ および $9999 = 9 \times 1111$ であるから、選ぶべき値はほとんど自然に決まる。

解答

2 次の近似

$|x| < 1$ で成り立つ二項展開（binomial expansion）により、

$$\begin{aligned}(1-x)^{1/2} &= 1 + \tfrac{1}{2}(-x) + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}(-x)^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}(-x)^3 + \cdots \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x^3 - \cdots .\end{aligned}$$

したがって x が小さいとき、

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

誤差（error）を求めるのに必要な、最初に無視した項 $-\frac{1}{16}x^3$ もあわせて求まった。実は第 2 項以降はすべて負である（$n \geq 1$ のとき積 $\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdots(\frac{1}{2}-n+1)$ には負の因数が $n-1$ 個あり、$(-x)^n$ が $(-1)^n$ を与えるので、全体として負の符号が一つ残る）。よって $0 < x < 1$ のとき、この 2 次式は過大評価（overestimate）となる。

小問 (i)

$x = \frac{1}{100}$ とすると、

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{\frac{99}{100}} = \frac{\sqrt{9\times 11}}{10} = \frac{3\sqrt{11}}{10}, \qquad \text{よって} \qquad \sqrt{11} = \frac{10}{3}\sqrt{1-\tfrac{1}{100}}.$$

2 次の近似を用いると、

$$\begin{aligned}\sqrt{11} &\approx \frac{10}{3}\left(1-\frac{1}{200}-\frac{1}{80\,000}\right) = \frac{10}{3}\cdot\frac{80\,000-400-1}{80\,000}\\ &= \frac{10}{3}\cdot\frac{79\,599}{80\,000} = \frac{79\,599}{24\,000},\end{aligned}$$

となり、題意が示された。

> **考えてみよう** 最初に無視した項は $-\frac{1}{16}x^3$ である。これが $\sqrt{11}$ の誤差だろうか？

そうではない。これは $\sqrt{1-x}$ に対する近似の誤差であり、そのあと $\frac{10}{3}$ を掛けている。したがって $\sqrt{11}$ の誤差はおよそ

$$\frac{10}{3}\times\frac{1}{16}\left(\frac{1}{100}\right)^3 = \frac{10}{48\times 10^6} = \frac{1}{4\,800\,000} \approx 2.08\times 10^{-7}.$$

よって有効数字（significant figure）1 桁で誤差は 2×10^{-7} であり、$\frac{79\,599}{24\,000}$ は $\sqrt{11}$ よりわずかに大きい。

小問 (ii)

小問 (i) と同じ工夫を用いる。$1111\times 9 = 9999 = 10^4 - 1$ であるから、$x = \frac{1}{10\,000}$ とすると、

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{\frac{9999}{10\,000}} = \frac{3\sqrt{1111}}{100}, \qquad \text{よって} \qquad \sqrt{1111} = \frac{100}{3}\sqrt{1-\tfrac{1}{10\,000}}.$$

すると

$$\begin{aligned}\sqrt{1111} &\approx \frac{100}{3}\left(1-\frac{1}{20\,000}-\frac{1}{8\times 10^8}\right) = \frac{100}{3}\cdot\frac{800\,000\,000-40\,000-1}{8\times 10^8}\\ &= \frac{100}{3}\cdot\frac{799\,959\,999}{8\times 10^8} = \frac{799\,959\,999}{24\,000\,000} = \frac{266\,653\,333}{8\,000\,000},\end{aligned}$$

となる。ここで最後の段階では因数 3 で約分した（799 959 999 の各位の数字の和（digit sum）は 75 であり、3 で割り切れる）。

誤差は、最初に無視した項のおよそ $\frac{100}{3}$ 倍である：

$$\frac{100}{3}\times\frac{1}{16}\left(\frac{1}{10^4}\right)^3 = \frac{100}{48\times 10^{12}} \approx 2.08\times 10^{-12},$$

これは問題の要求どおり、およそ 2×10^{-12} である。よって適切な有理数は

$$\sqrt{1111} \approx \frac{266\,653\,333}{8\,000\,000} \left(= \frac{799\,959\,999}{24\,000\,000}\right).$$

検算

- $79\,599/24\,000 = 3.316625$ であり、一方 $\sqrt{11} = 3.31662479\ldots$ である。差は 2.096×10^{-7} で、見積もり 2.08×10^{-7} と合致し、近似値が大きすぎることも確かめられる。
- $266\,653\,333/8\,000\,000 = 33.331666625$ であり、一方 $\sqrt{1111} = 33.33166662291\ldots$ である。差を高い精度で正確に計算すると 2.0835×10^{-12} となった。
- 小問 (ii) で見積もりの精度が上がるのは、次に無視した項 $-\frac{5}{128}x^4$ が、x が小さいほど x^3 の項に比べて相対的に小さくなるからである。

よくある間違い

- 無視した項に $\frac{10}{3}$（または $\frac{100}{3}$）を掛け忘れ、誤差を 10 倍または 100 倍小さく求めてしまう。
- x^2 の係数の符号を誤る。$(-x)^2$ があるので、この項は $\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}x^2 = -\frac{1}{8}x^2$ であり、$+\frac{1}{8}x^2$ ではない。
- $1 - x$ が「1111 を 10 の累乗で割ったもの」になるような x を試してしまう。そのような値は小さくないので、級数の収束が遅すぎて役に立たない。

STEP のその先へ

誤差が「最初に無視した項とほぼ等しい」という主張は、テイラー（Taylor）の定理（Taylor's theorem）とラグランジュ（Lagrange）の剰余項（Lagrange form of the remainder）を用いて厳密にできる。これは $(0, x)$ 内の未知の点を含む形で、誤差を正確に表す式を与える。そこから、単なる見積もりではなく、確かな上界と下界が得られる。このような誤差評価を厳密にすることは、解析学（analysis）の最初の講義の標準的な内容である。Abbott, *Understanding Analysis* を参照のこと。

解答例

STEP II 2001、第 2 問

純粋数学 ・ 整数部分の和

> **STEP II 2001、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q2

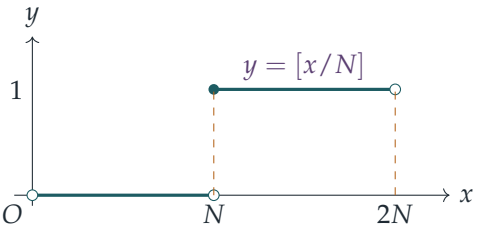
鍵となる考え方

一見扱いにくい指数（exponent）$[k/N]$ は、k が 1 から $2N$ まで動くとき 3 つの値しかとらず、グラフを描けばどこで値が跳ぶかが正確にわかる。それがわかれば、符号 $(-1)^{[k/N]}$ は k の 3 つのブロックそれぞれの上で一定となるので、各和はブロックごとに等差数列の和（arithmetic series）（小問 (i)）または等比級数（geometric series）（小問 (ii)）に分かれる。注意が必要なのはブロックの端点だけである。

解答

グラフの概形

$0 < x < N$ のとき $0 < x/N < 1$ であるから $[x/N] = 0$ である。$N \le x < 2N$ のとき $1 \le x/N < 2$ であるから $[x/N] = 1$ である。グラフは階段状になる。値の跳びは $x = N$ で起こり、そこでは関数はすでに値 1 をとる。また右端 $x = 2N$ は含まれない（そこでの値は 2 になる）。



黒丸の点は含まれ、白丸の点は含まれない。

和を求めるには整数値 $k = 1, 2, \ldots, 2N$ を考えればよい。グラフから読み取ると（端点 $k = 2N$ も加えて）次のようになる。

$$[k/N] = \begin{cases} 0, & 1 \le k \le N-1, \\ 1, & N \le k \le 2N-1, \\ 2, & k = 2N. \end{cases}$$

したがって $(-1)^{[k/N]}$ は、$k \le N-1$ では $+1$、$N \le k \le 2N-1$ では -1、そして最後の 1 項 $k = 2N$ では再び $+1$ である。（$N = 1$ のときは最初のブロックは空であるが、空和（empty sum）は 0 なので、以下の式はすべてそのまま成り立つ。）

考えてみよう なぜ単純に「最初の N 項の符号は $+$、次の N 項の符号は $-$」と言ってはいけないのだろうか？

値の跳びがちょうど N の倍数のところにあるからである。$k = N$ の項ではすでに $[k/N] = 1$ であり、最後の項 $k = 2N$ では $[k/N] = 2$ なので、この項は正になる。この 2 つの端点を正しく扱うことこそが、この問題のすべてである。

小問 (i)

3 つのブロックに分けると、

$$\sum_{k=1}^{2N} (-1)^{[k/N]} k = \sum_{k=1}^{N-1} k \; - \sum_{k=N}^{2N-1} k \; + \; 2N.$$

最初の和は $\frac{1}{2}(N-1)N$ である。2 番目の和は N から $2N-1$ までの N 項からなるので、N に初項と末項の平均を掛けたものに等しく、$\frac{1}{2}N(3N-1)$ である。よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2N} (-1)^{[k/N]} k &= \tfrac{1}{2}\left(N^2 - N\right) - \tfrac{1}{2}\left(3N^2 - N\right) + 2N \\ &= -N^2 + 2N = 2N - N^2, \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

同じように分けると

$$S_N = \sum_{k=1}^{N-1} 2^{-k} \; - \sum_{k=N}^{2N-1} 2^{-k} \; + \; 2^{-2N}.$$

どちらの和も公比 $\frac{1}{2}$ の等比級数である。$\sum_{k=a}^{b} 2^{-k} = 2^{-a}\left(1-2^{-(b-a+1)}\right)\big/\frac{1}{2} = 2^{1-a}-2^{-b}$ を用いると、

$$\sum_{k=1}^{N-1} 2^{-k} = 1 - 2^{1-N},$$
$$\sum_{k=N}^{2N-1} 2^{-k} = 2^{1-N} - 2^{1-2N}.$$

したがって

$$\begin{aligned} S_N &= 1 - 2^{1-N} - 2^{1-N} + 2^{1-2N} + 2^{-2N} \\ &= 1 - 4\cdot 2^{-N} + 3\cdot 2^{-2N}. \end{aligned}$$

$t = 2^{-N}$ とおくと、これは $1-4t+3t^2$ となり、きれいに因数分解できる。

$$\boxed{S_N = 1 - \frac{4}{2^N} + \frac{3}{4^N} = \left(1-\frac{1}{2^N}\right)\left(1-\frac{3}{2^N}\right).}$$

$N \to \infty$ のとき $2^{-N} \to 0$、$4^{-N} \to 0$ であるから、

$$\lim_{N\to\infty} S_N = 1.$$

これは納得のいく結果である。N が大きくなると、正のブロック $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$ は長くなってその和は 1 に近づき、一方で負のブロックはずっと先から始まるので、その合計はおよそ 2^{1-N} であり無視できるほど小さい。

検算

- $N=1$：項は $[1]=1$ の $k=1$ と、$[2]=2$ の $k=2$ である。小問 (i) は $-1+2=1=2-1$ を与え、小問 (ii) は $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$ を与え、$(1-\frac{1}{2})(1-\frac{3}{2})=-\frac{1}{4}$ と一致する。
- $N=2$：$k=1,2,3,4$ に対する符号は $+,-,-,+$ である。このとき $1-2-3+4=0=4-4$、$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{3}{16}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}$ である。
- 1 から 59 までのすべての N について、両方の公式を分数を用いて厳密に確かめた。例えば $S_{50} \approx 0.999\,999\,999\,999\,996$ である。

よくある間違い

- $k=N$ を正のブロックに入れてしまう、あるいは最後の項 $k=2N$ の指数が 2 であり、したがって正であることを忘れる。
- $\sum_{k=N}^{2N-1}$ の項数を数え間違える。項数は N であり、$N-1$ ではない。

STEP のその先へ

整数部分（integer part）を表す関数、すなわち床関数（floor function）は整数論の至るところに現れる。典型的な例はルジャンドル（Legendre）の公式で、$n!$ を割り切る素数 p の最大のべき指数は $\sum_{j\geq 1}[n/p^j]$ であることを述べている。また小問 (ii) のように符号のパターンがブロックごとに変わる和は、級数の項の並べ替えやまとめ方への穏やかな入門にもなっており、これは解析学（analysis）の講義で厳密に扱われる。Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、床関数が活躍する様子を見るのに格好の一冊である。

解答例

STEP II 2001、第 3 問

純粋数学 ・ ユークリッド幾何

> **STEP II 2001、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q3

鍵となる考え方

直方体（cuboid）を座標空間に置き、1 つの頂点を原点に、辺を座標軸に沿わせる。すると各頂点の位置ベクトル（position vector）はすぐにわかり、対角線（diagonal）はそれらの差にすぎず、対角線どうしのなす角は内積（scalar product）からただちに求まる。体積（volume）と表面積（surface area）の比は λ の簡単な有理関数（rational function）であり、最後の小問では R に関する条件を λ に関する条件に書き換えることで、2 つの結果を結びつける。

解答

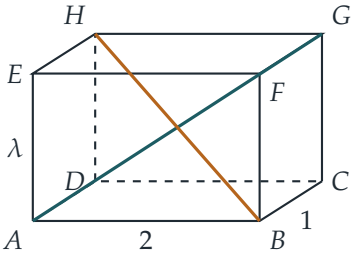
対角線のなす角

辺 AE, BF, CG, DH は面に垂直であるから、頂点における角はすべて直角である。したがって A を原点とし、AB, AD, AE に沿って座標軸をとることができる：

$$A = (0,0,0), \quad B = (2,0,0), \quad C = (2,1,0), \quad D = (0,1,0),$$

上面は下面を λ だけ持ち上げたものであるから、

$$E = (0,0,\lambda), \quad F = (2,0,\lambda), \quad G = (2,1,\lambda), \quad H = (0,1,\lambda).$$



2本の対角線の方向ベクトル（direction vector）は

$$\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix},$$

であり、長さはいずれも $\sqrt{5+\lambda^2}$ である。また

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH} = -4 + 1 + \lambda^2 = \lambda^2 - 3.$$

これら2つのベクトルのなす角を θ とすると、

$$\cos\theta = \frac{\lambda^2 - 3}{5 + \lambda^2}.$$

考えてみよう 絶対値（modulus）の記号はどこから出てくるのだろうか？

交わる2直線は2つの角 θ と $\pi - \theta$ をなし、その余弦は互いに符号が逆である。鋭角（acute angle）のほう（$\lambda^2 = 3$ のときは直角）は余弦が負でないほうであるから、

$$\cos\alpha = |\cos\theta| = \left|\frac{3 - \lambda^2}{5 + \lambda^2}\right|,$$

となり、示すべき式が得られた。

比 R

体積は $2 \times 1 \times \lambda = 2\lambda$ である。表面は、面積がそれぞれ $2 \times 1, 2 \times \lambda, 1 \times \lambda$ である面が2枚ずつからなるので、表面積は $2(2 + 3\lambda)$ である。よって

$$R = \frac{2\lambda}{2(2 + 3\lambda)} = \frac{\lambda}{2 + 3\lambda}.$$

$\lambda > 0$ より分母は正であり、

$$R < \tfrac{1}{3} \iff 3\lambda < 2 + 3\lambda \iff 0 < 2,$$

これは正しい。したがって、とりうるすべての λ について $R < \frac{1}{3}$ である。（$\lambda \to \infty$ のとき $R \to \frac{1}{3}$ となるので、この評価はこれ以上改善できない。）

最後の小問

ここでも $2+3\lambda>0$ であるから、両辺に掛けてよい：

$$R \geq \tfrac{1}{4} \iff 4\lambda \geq 2+3\lambda \iff \lambda \geq 2.$$

そこで $\lambda \geq 2$ と仮定する。すると $\lambda^2 \geq 4 > 3$ より $\lambda^2 - 3 > 0$ であるから、絶対値を外せる：

$$\cos\alpha = \frac{\lambda^2-3}{\lambda^2+5} = 1 - \frac{8}{\lambda^2+5}.$$

このように書くと、λ^2 が増加すると $\cos\alpha$ も増加することがわかる。$\lambda^2 \geq 4$ のとき $\lambda^2+5 \geq 9$ であるから、

$$\cos\alpha \geq 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}.$$

α と $\arccos\frac{1}{9}$ はともに $[0, \frac{\pi}{2}]$ に属し、この区間で余弦は狭義単調減少であるから、$\cos\alpha \geq \frac{1}{9}$ より

$$\alpha \leq \arccos\tfrac{1}{9},$$

が得られ、これが示すべきことであった。等号が成り立つのは $\lambda = 2$、すなわち $R = \frac{1}{4}$ のときであり、かつそのときに限る。

検算

- $\lambda^2 = 3$ のとき、公式は $\cos\alpha = 0$ を与える。確認：$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH} = -4+1+3 = 0$ であり、確かに対角線は垂直である。
- $\lambda \to \infty$ のとき、直方体は細長く背の高い角柱になり、2 本の対角線はどちらもほぼ鉛直になるので $\alpha \to 0$ となるはずである。公式は $\cos\alpha \to 1$ を与え、期待どおりである。
- $\lambda = 2$ のとき：体積は 4、表面積は $2(2+4+2) = 16$ であるから $R = \frac{1}{4}$ であり、$\cos\alpha = \frac{1}{9}$ より $\alpha \approx 83.6^\circ$ である。λ の値を 10^5 個ランダムにとった数値検証により、角の公式、$R < \frac{1}{3}$、および $R \geq \frac{1}{4}$ のときは常に $\alpha \leq \arccos\frac{1}{9}$ となることが確かめられた。

よくある間違い

- 絶対値を忘れる：$\lambda^2 < 3$ のとき、ベクトル $\overrightarrow{AG}$ と $\overrightarrow{BH}$ のなす角は鈍角（obtuse angle）であり、鋭角はその補角（supplement）である。
- 最後の不等式の向きを誤る：$[0, \frac{\pi}{2}]$ では余弦は減少するので、余弦が**大きい**ほど角は**小さい**。

STEP のその先へ

図形を座標空間に置き、内積を使って角を求めるのはベクトル幾何の基本的な道具であり、大学1年の線形代数（linear algebra）の講義では、任意の次元の一般の内積（inner product）へと一般化される。$\mathbb{R}^n$ の2つのベクトルのなす角は $\cos\theta = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}/(|\mathbf{u}||\mathbf{v}|)$ によって**定義**され、この値が $[-1,1]$ に収まることはコーシー＝シュワルツの不等式（Cauchy–Schwarz inequality）によって保証される。よい演習問題として、n 次元の単位立方体の長い対角線が各辺となす角の余弦は $1/\sqrt{n}$ であり、したがって n が大きくなるにつれてその角は直角に近づくことを示してみるとよい。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、これらの考え方をわかりやすく展開している。

解答例

STEP II 2001、第 4 問

純粋数学 ・ 倍角を含む方程式

STEP II 2001、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/01-s2-q4

鍵となる考え方

f のどの項も因数 $\sin x$ をもつ。実際 $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ であり、ヒントは $\sin 3x$ についても同じことを与えている。$\sin x$ をくくり出すと $\cos x$ の二次式（quadratic）が残り、P, Q, R に関する条件はまさに「この二次式の判別式（discriminant）が負である」ということである。後半は同じ関数で $P = 1, Q = 1, R = -1$ とし、x を $2nx$ に置き換えたものである。今度は二次式が実数解をもつので、許された範囲の上端にどの解がもっとも近いかを見つけることが仕事になる。

解答

前半の結果

$c = \cos x$ とおく。$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ と、$\sin 3x$ について与えられた恒等式（identity）を用いると、

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) &= P\sin x + 2Q\sin x\cos x + R\sin x\,(4\cos^2 x - 1) \\ &= \sin x\left(4Rc^2 + 2Qc + (P - R)\right). \end{aligned}$$

よって $\mathrm{f}(x) = 0$ となるのは、$\sin x = 0$ または $4Rc^2 + 2Qc + (P - R) = 0$ のとき、かつそのときに限る。

まず $R \neq 0$ である。もし $R = 0$ なら条件は $Q^2 < 0$ となり、これは不可能だからである。したがって括弧内は c の真の二次式であり、その判別式は仮定により

$$(2Q)^2 - 4\cdot 4R\,(P - R) = 4\big(Q^2 - 4R(P - R)\big) < 0$$

である。判別式が負の実係数二次式は実数解をもたないので、括弧内はどんな実数 c

に対しても 0 にならず、特に $c = \cos x$ に対しても 0 にならない。ゆえに $\mathrm{f}(x) = 0$ ならば $\sin x = 0$、すなわち m を整数として $x = m\pi$ である。逆に、$x = m\pi$ はすべて f の零点であるから、これらがちょうど零点全体であり、示すべきことが示された。

g の最大の解

$y = 2nx$ とおく。すると $\mathrm{g}(x) = \sin y + \sin 2y - \sin 3y$ であり、これは $P = 1, Q = 1, R = -1$ としたときの $\mathrm{f}(y)$ である。このとき $Q^2 = 1$ は $4R(P - R) = -8$ より小さくないので、前半の結果は適用できず、二次式は実数解をもつ。$c = \cos y$ とすると、上の因数分解（factorisation）により

$$\mathrm{g}(x) = \sin y\,(-4c^2 + 2c + 2) = -2\sin y\,(2c + 1)(c - 1).$$

よって $\mathrm{g}(x) = 0$ となるのは

$$\sin y = 0, \qquad \cos y = 1, \qquad \text{または} \qquad \cos y = -\tfrac{1}{2}.$$

のとき、かつそのときに限る。$\cos y = 1$ の場合はすでに $\sin y = 0$ に含まれている。したがって y に関する解は

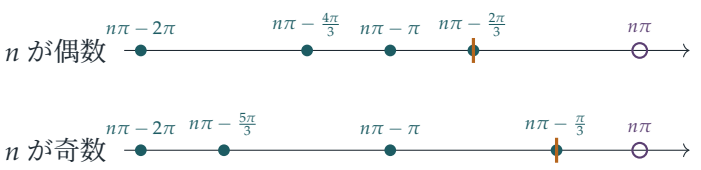
$$y = k\pi \quad \text{または} \quad y = 2k\pi \pm \tfrac{2\pi}{3} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

である。各周期（period）$[2k\pi, 2k\pi + 2\pi)$ の中で、解は $2k\pi$ に 0, $\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$ を加えた位置にある。

範囲 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ は $0 < y < n\pi$ となり、右端 $y = n\pi$ 自体は解であるが除外される。そこで $n\pi$ より真に小さい最大の解を求めればよく、問題になるのは $n\pi$ がその周期の中でどの位置にあるかだけである。

考えてみよう なぜ n の偶奇（parity）が問題になるのか？

解の並び方は π ごとではなく 2π ごとに繰り返す。n が偶数なら $n\pi$ は 2π の倍数であり、n が奇数なら $n\pi$ は π の奇数倍である。この二つの場合で、$n\pi$ のすぐ下にある解の間隔が異なる。



（$n\pi$ より下の最後の 2π の範囲における、y で表した g の解を縮尺どおりに描いたもの。白丸は除外される端点を、琥珀色の目盛りは最大の解を示す。）

n が偶数のとき。このとき $k = \frac{n}{2} \geq 1$ として $n\pi = 2k\pi$ であり、その下の最後の周期にある解は、$n\pi$ から測って

$$n\pi - 2\pi, \quad n\pi - \tfrac{4\pi}{3}, \quad n\pi - \pi, \quad n\pi - \tfrac{2\pi}{3}.$$

である。このうち最後のものは $2(k-1)\pi + \frac{4\pi}{3}$ であり、その余弦が $-\frac{1}{2}$ なので解である。$\left(n\pi - \frac{2\pi}{3}, n\pi\right)$ には解がない。そこには π の倍数は存在せず、また $\cos y = -\frac{1}{2}$ となるには $y \equiv \frac{2\pi}{3}$ または $\frac{4\pi}{3} \pmod{2\pi}$ が必要であるが、ここでは y は 2π を法として $\frac{4\pi}{3}$ と 2π の間に真に含まれるからである。また $n \geq 2$ より $n\pi - \frac{2\pi}{3} > 0$ である。よって最大の解は $y = n\pi - \frac{2\pi}{3}$ であり、

$$x = \frac{y}{2n} = \frac{(3n-2)\pi}{6n} \qquad (n \text{ が偶数}).$$

n が奇数のとき。このとき $k = \frac{n-1}{2} \geq 0$ として $n\pi = 2k\pi + \pi$ である。$2k\pi = n\pi - \pi$ から始まる周期の中で測ると、$n\pi$ より下の解はずれ 0 と $\frac{2\pi}{3}$ の位置にあるので、候補は $n\pi - \pi$ と $n\pi - \frac{\pi}{3}$ である。区間 $\left(n\pi - \frac{\pi}{3}, n\pi\right)$ は、2π を法として y が $\frac{2\pi}{3}$ と π の間に真に含まれることに対応し、そこには解がない。また $n\pi - \frac{\pi}{3} \geq \frac{2\pi}{3} > 0$ である。よって最大の解は $y = n\pi - \frac{\pi}{3}$ であり、

$$x = \frac{(3n-1)\pi}{6n} \qquad (n \text{ が奇数}).$$

検算

$n = 1$ のとき、$(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上で $g(x) = \sin 2x + \sin 4x - \sin 6x$ である。公式は $x = \frac{\pi}{3}$ を与え、実際 $\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3} - \sin 2\pi = 0$ である。$n = 2$ のときも公式は $\frac{\pi}{3}$ を与える（$y = \frac{4\pi}{3}$）。$n \to \infty$ のとき、どちらの公式も $\frac{1}{2}\pi$ に近づく。解が密集していくのだから、そうなるはずである。$n = 1, \ldots, 12$ について、細かい格子上で g を数値的に調べた。予測された値（たとえば $n = 3$ のとき $x = \frac{4\pi}{9} \approx 1.3963$）はどれも解であり、その値と $\frac{1}{2}\pi$ の間で g の符号は一定である。前半については、$Q^2 < 4R(P-R)$ を満たすランダムな三つ組 2000 個について、括弧内はいずれも $[-1, 1]$ 上に零点をもたなかった。

よくある間違い

- $x = \frac{1}{2}\pi$ そのものを答えてしまう。これはどの n に対しても g の解であるが、開区間（open interval）の外にある。
- $\sin y = 0$ から来る解を忘れ、$\cos y = -\frac{1}{2}$ だけを残してしまう。n が偶数のとき、$y = n\pi - \pi$ は最大ではないが解である。

- $\cos y = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ だけを書き、$\frac{4\pi}{3}$ の系列を見落とす。これでは n が偶数のときに誤った答えになる。

STEP のその先へ

この因数分解がうまくいくのは、$\sin mx / \sin x$ がつねに $\cos x$ の多項式だからである。これは第二種チェビシェフ多項式（Chebyshev polynomials of the second kind）$U_{m-1}(\cos x)$ にほかならない。したがって任意の有限の正弦級数 $\sum a_m \sin mx$ は $\sin x$ と $\cos x$ の多項式との積であり、その零点を数えることは $[-1, 1]$ における多項式の根を数えることに帰着する。この考え方は近似理論（approximation theory）やフーリエ解析（Fourier analysis）の多くの部分の土台となっている。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、e^{ix} を通して倍角の公式を眺める見事な視点を与えてくれる。

解答例

STEP II 2001、第 5 問

純粋数学 ・ 停留点と積分

STEP II 2001、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/01-s2-q5

鍵となる考え方

停留点（stationary point）は勾配（gradient）から直接求まる。停留点は $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ となる点であり、その種類は勾配の符号がどう変化するかで決まる。指数関数（exponential）の因子はつねに正なので、この符号は多項式の因子 $x(1-x^2)$ だけで決まり、これは二つの曲線で共通である。高さについては、一つ目の勾配は厳密に積分できる（$u = x^2$ に気づけばよい）。二つ目はそうはいかないが、その値は必要なく、二つの積分を比較するだけでよい。

解答

曲線 C_1

すべての x について $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$ であるから、勾配がゼロになるのは $x(1-x^2) = x(1-x)(1+x) = 0$ のとき、すなわち $x = -1, 0, 1$ のときに限る。また、勾配の符号は $x(1-x)(1+x)$ の符号と一致する：

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ の符号	$+$	$-$	$+$	$-$

$x = 0$ で勾配は負から正に変わるので、原点（これは曲線上にある）は極小点（minimum）である。$x = 1$ では正から負に変わるので、これは極大点（maximum）である。同様に $x = -1$ も極大点である。

高さを求めるために積分する。曲線は原点を通るので、

$$y = \int_0^x t(1-t^2)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

考えてみよう $t(1-t^2)\mathrm{e}^{-t^2}$ はどう積分すればよいか？

t^2 の関数の隣に因子 t があることから、$u=t^2$, $\mathrm{d}u=2t\,\mathrm{d}t$ とおくことを考える：

$$y=\tfrac{1}{2}\int_0^{x^2}(1-u)\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

ここで $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(u\mathrm{e}^{-u}\right)=\mathrm{e}^{-u}-u\mathrm{e}^{-u}=(1-u)\mathrm{e}^{-u}$ であることに注意する（部分積分（integration by parts）でも同じ結果が得られる）。したがって

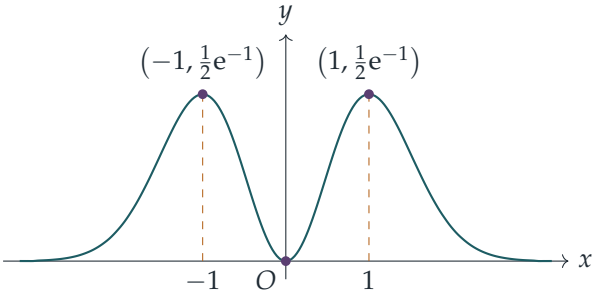
$$y=\tfrac{1}{2}\left[u\,\mathrm{e}^{-u}\right]_0^{x^2}=\tfrac{1}{2}\,x^2\mathrm{e}^{-x^2}.$$

$x=1$ のとき $y=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$ となるので、極大点は $\left(1,\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}\right)$ であり、題意が示された。y は x の偶関数（even function）であるから、もう一つの停留点は極大点

$$\left(-1,\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}\right).$$

である。

概形のスケッチ。$y=\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x^2}$ から次のことがわかる。曲線は y 軸に関して対称であり、$y\geq 0$ で、等号は原点でのみ成り立つ。また、指数関数の減衰は x^2 の増加より速いので、$x\to\pm\infty$ のとき $y\to 0$ である。したがって曲線は「ふたこぶ」の形をしている。原点で x 軸に接し、$x=\pm1$ で等しい二つの極大値（高さ $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}\approx 0.18$）まで上がり、その後両側で x 軸に向かって減衰していく。（下図では縦方向を拡大している。）



曲線 C_2

ここでもすべての x について $\mathrm{e}^{-x^3}>0$ であるから、勾配がゼロになるのはちょうど $x=-1,0,1$ のときであり、その符号は $x(1-x)(1+x)$ の符号と一致するので、符号表は先ほどとまったく同じになる。したがって原点（仮定より曲線上にある）は極小点であり、$x=1$ の停留点は極大点である。（$x=-1$ の停留点も極大点であるが、これは問われていない。）

その高さは

$$k = \int_0^1 x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^3}\,\mathrm{d}x.$$

である。これは初等的な原始関数（antiderivative）をもたないので、代わりに C_1 の積分と比較する。その値は $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$ であることがわかっている。

考えてみよう k の値を求めずに、k と $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$ を比較するにはどうすればよいか？

被積分関数（integrand）どうしを比較する。$0 < x < 1$ のとき $x^3 < x^2$ である（$x < 1$ の両辺に $x^2 > 0$ を掛ける）。よって $-x^3 > -x^2$ であり、e^t は増加関数であるから $\mathrm{e}^{-x^3} > \mathrm{e}^{-x^2}$ となる。また、この範囲では $x(1-x^2) > 0$ であるから、これを掛けても不等号の向きは変わらない：

$$x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^3} > x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2} \qquad \text{ただし} 0 < x < 1.$$

二つの被積分関数はともに $[0,1]$ で連続であり、開区間では不等式が厳密に（等号なしで）成り立つので、$[0,1]$ で積分すると厳密な不等式が得られる：

$$k = \int_0^1 x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^3}\,\mathrm{d}x > \int_0^1 x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1},$$

最後の等号は、上で求めた $x = 1$ における C_1 の高さによる。したがって極大点は $(1,k)$ であり、$k > \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$ が成り立つ。これで題意が示された。

検算

$\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x^2}$ を積の微分法（product rule）で微分すると $x\mathrm{e}^{-x^2} - x^3\mathrm{e}^{-x^2} = x(1-x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$ となり、$x = 0$ で値は 0 であるから、C_1 の式は正しい。第二次導関数（second derivative）によっても分類が確かめられる：どちらの曲線についても $y''(0) = 1 > 0$ かつ $y''(1) = -2\mathrm{e}^{-1} < 0$ である。シンプソンの公式（Simpson's rule）で数値計算すると $k \approx 0.2034$ となり、一方 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} \approx 0.1839$ である。

よくある間違い

- 積分定数（constant of integration）を忘れる。これを定めるのは「原点を通る」という条件であり、高さを求めるうえで重要である。
- $x(1-x^2)$ が $(0,1)$ で正であることに触れずに、$\mathrm{e}^{-x^3} > \mathrm{e}^{-x^2}$ だから $k > \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$ であると主張する。負の因子を掛けると不等号の向きは逆になってしまう。

- $x^3 < x^2$ が「すべての x について」成り立つと言ってしまう。これが成り立つのは $x < 1, x \neq 0$ のときだけであり、だからこそ区間 $[0,1]$ がまさに必要なものなのである。

STEP のその先へ

第二の部分は比較による議論（comparison argument）である。書き下すことのできない解について、書き下せる解と比較することで情報を得るのである。この考え方は微分方程式（differential equation）の理論全体を貫いており、そこでは比較定理（comparison theorem）によって扱いにくい方程式の解がより単純な方程式の解で評価される。また解析学（analysis）でも同様で、積分の単調性（monotonicity）は基本的な道具である。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）は、公式に頼らずに解について定性的にどれだけのことが言えるかを知るのによい本である。

解答例

STEP II 2001、第 6 問

純粋数学 • 置換積分

STEP II 2001、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/01-s2-q6

鍵となる考え方

一見扱いにくそうな $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ は、実は $\frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x$ が姿を変えたものにすぎない。これは正接の減法定理（tangent subtraction formula）を逆向きに読んだものである。このことに気づけば、小問 (i) は部分積分（integration by parts）によってちょうど最初の積分に帰着する。小問 (ii) は無関係に見えるが、写像 $y = \frac{1-x}{1+x}$ は 0 と 1 を入れ替え、しかも自分自身が逆写像（inverse）になっている。したがって、この置換（substitution）を行えば (ii) は (i) に戻る。

解答

最初の積分

x^4 を $1 + x^2$ で割る（あるいは $x^4 = (x^4 - 1) + 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) + 1$ と書く）と

$$\frac{x^4}{1+x^2} = x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}.$$

を得る。よって

$$\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x + \tan^{-1} x\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3},$$

となり、題意が示された。

小問 (i)

$\theta = \tan^{-1} x$ とおくと、$0 \le x \le 1$ のとき $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ である。減法定理により

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\theta}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\theta} = \frac{1-x}{1+x}.$$

考えてみよう $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{1-x}{1+x}$ から、本当に $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{\pi}{4} - \theta$ と書いてよいだろうか？

それが許されるのは、$\frac{\pi}{4} - \theta$ が $\tan^{-1}$ の値域（range）$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ に入っているときに限る。いまの場合 $0 \le \frac{\pi}{4} - \theta \le \frac{\pi}{4}$ なので条件は満たされ、積分区間全体で

$$\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x.$$

が成り立つ。

したがって

$$\int_0^1 x^3 \tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^3 \tan^{-1} x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{16} - J,$$

である。ここで $J = \int_0^1 x^3 \tan^{-1} x\,\mathrm{d}x$ とした。$u = \tan^{-1} x$、$\mathrm{d}v = x^3\,\mathrm{d}x$（したがって $v = \frac{1}{4}x^4$、$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$）として部分積分すると、最初の結果を用いて

$$\begin{aligned} J &= \left[\tfrac{1}{4}x^4 \tan^{-1} x\right]_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

となる。よって

$$\int_0^1 x^3 \tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{6}.$$

小問 (ii)

考えてみよう 奇妙な重み $\frac{(1-y)^3}{(1+y)^5}$ はどこから来たのだろうか？

これは、同じ変換のもとで $x^3\,\mathrm{d}x$ が変化した結果である。$y = \frac{1-x}{1+x}$ と置換する。これを解くと $x = \frac{1-y}{1+y}$ となる。すなわち、この写像は自分自身の逆写像であり、$x = 0$ を $y = 1$ に、$x = 1$ を $y = 0$ に移す。このとき

$$1 - y = \frac{2x}{1+x}, \qquad 1 + y = \frac{2}{1+x}, \qquad \mathrm{d}y = -\frac{2}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x,$$

であるから

$$\frac{(1-y)^3}{(1+y)^5}\,\mathrm{d}y = \frac{8x^3}{(1+x)^3}\cdot\frac{(1+x)^5}{32}\cdot\left(-\frac{2}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{x^3}{2}\,\mathrm{d}x,$$

となり、また $\tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ である。負号は積分の上端と下端を入れ替えることで吸収される（y が 0 から 1 まで動くとき、x は 1 から 0 まで動く）。小問 (i) により

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(1-y)^3}{(1+y)^5}\tan^{-1}y\,\mathrm{d}y &= \int_1^0\left(-\frac{x^3}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x^3\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{16}-\frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{32}-\frac{1}{12}\end{aligned}$$

を得る。

検算

- どちらの答えも、当然そうあるべきように正である（各被積分関数は $[0,1]$ 上で非負である）：$\frac{\pi}{16}-\frac{1}{6}\approx 0.02968$、$\frac{\pi}{32}-\frac{1}{12}\approx 0.01484$。元の被積分関数にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると、小数第 12 位まで一致する。
- (ii) の答えはちょうど (i) の答えの半分である。このことは、式変形を始める前に数値的に確かめておくことができる。
- 恒等式に $x=0$ を代入すると $\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$、$x=1$ を代入すると $\tan^{-1}0=0$ となる。いずれも $\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}x$ と一致する。

よくある間違い

- (ii) で $\mathrm{d}y$ を書き忘れたり、符号の扱いを誤ったりすること。因子 $-\frac{2}{(1+x)^2}$ の負号と、上端・下端の入れ替えによる負号とが互いに打ち消し合うのである。
- 値域を確認せずに $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}x$ と書くこと。$x<-1$ のときはこれは誤りである（π だけずれる）。

STEP のその先へ

置換 $y=\frac{1-x}{1+x}$ はメビウス変換（Möbius transformation）、すなわち $\frac{ax+b}{cx+d}$ の形の写像である。これらの写像は合成（composition）に関して群（group）をなし、今回の写像は位数（order）2 の元である。同じ技法を対称性と組み合わせると、有名な結果 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\ln 2$ が得られる。次にぜひ挑戦してみる価値がある。メビウス変換は複素解析（complex analysis）において中心的な役割を果たす。Needham の *Visual*

Complex Analysis（『ヴィジュアル複素解析』）は、これらの変換を幾何学的に美しく解説している。

解答例

STEP II 2001、第 7 問

純粋数学 • 複素数と回転

STEP II 2001、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/01-s2-q7

鍵となる考え方

正多角形（regular polygon）の周に沿って歩くと、どの辺も同じ長さであり、各頂点では同じ**外角**（exterior angle）だけ向きを変える。複素平面（Argand diagram）において角 θ だけ向きを変えることは $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ を掛けることにあたるので、各辺は直前の辺に一定の複素数を掛けたものになる。頂点がわかれば中心は垂直二等分線（perpendicular bisector）から求まり、回転（rotation）は $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ をもう一度掛けるだけである。

解答

Q と S を求める

各頂点における内角（interior angle）は $5\pi/6$ であるから、各頂点で進行方向は外角 $\pi - 5\pi/6 = \pi/6$ だけ回る。多角形は上半平面（upper half-plane）にあり、O から P へ実軸の正の向きに進み始めるので、向きの変え方は**反時計回り**でなければならない（P で時計回りに曲がると Q が実軸より下に来てしまう）。

$\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ とおく。辺 $\overrightarrow{OP}$ は複素数 2 であり、以降の各辺は直前の辺に ω を掛けたもの（同じ長さで、$\pi/6$ だけ回したもの）である。よって

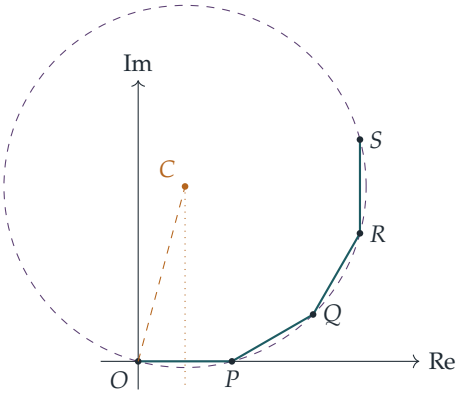
$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= 2\omega = \sqrt{3} + \mathrm{i},\\ \overrightarrow{QR} &= 2\omega^2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i},\\ \overrightarrow{RS} &= 2\omega^3 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = 2\mathrm{i}.\end{aligned}$$

これらを足し合わせると、

$$\begin{aligned} Q &= 2 + (\sqrt{3} + \mathrm{i}) = 2 + \sqrt{3} + \mathrm{i}, \\ R &= Q + 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i} = (3 + \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})\mathrm{i}, \\ S &= R + 2\mathrm{i} = (3 + \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3})\mathrm{i}. \end{aligned}$$

1 行目が求める Q の値であり、

$$S = (3 + \sqrt{3})(1 + \mathrm{i}).$$



中心 C

O, P, Q を通る円は正十二角形全体の外接円（circumcircle）であるから、C は多角形の中心である。C は O と $P = 2$ から等距離にあるので、垂直二等分線 $\mathrm{Re}\, z = 1$ 上にある。そこで $C = 1 + h\mathrm{i}$ とおく。C は O と Q からも等距離にあるから、

$$\begin{aligned} |C|^2 = |C - Q|^2 &\iff 1 + h^2 = (1 + \sqrt{3})^2 + (h - 1)^2 \\ &\iff 1 + h^2 = 4 + 2\sqrt{3} + h^2 - 2h + 1 \\ &\iff 2h = 4 + 2\sqrt{3}, \end{aligned}$$

よって $h = 2 + \sqrt{3}$ であり、$C = 1 + (2 + \sqrt{3})\mathrm{i}$ は第 1 象限にある。

考えてみよう C の偏角を正確に求めるといくらか？

$\tan(\arg C) = 2 + \sqrt{3}$ となる角が必要である。ここで

$$\tan \tfrac{5\pi}{12} = \tan\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{6}\right) = \frac{1 + 1/\sqrt{3}}{1 - 1/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2} = 2 + \sqrt{3},$$

であり、C は第 1 象限にあるので、偏角（argument）は $\arg C = 5\pi/12$ である。（幾何学的に見ると、三角形 OCP は C における頂角が $2\pi/12$ の二等辺三角形（isosceles triangle）であるから、底角は $\frac{1}{2}(\pi - \pi/6) = 5\pi/12$ となる。）

回転

O のまわりに角 θ だけ反時計回りに回転することは、すべての点に $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ を掛けることであるから、C の偏角は $5\pi/12+\theta$ になる。C が実軸上に来るためには $5\pi/12+\theta$ が π の整数倍でなければならない。最小の正の θ は

$$\theta=\pi-\tfrac{5\pi}{12}=\tfrac{7\pi}{12},$$

であり、このとき C は実軸の**負の部分**に来る。

次に S を極形式（modulus–argument form）で表す。$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ であるから、$S=(3+\sqrt{3})\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}=(3\sqrt{2}+\sqrt{6})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ である。S の移動後の位置は

$$\begin{aligned}S'=S\,\mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/12}&=(3\sqrt{2}+\sqrt{6})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3\pi/12+7\pi/12)}=(3\sqrt{2}+\sqrt{6})\,\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/6}\\&=(3\sqrt{2}+\sqrt{6})\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)=-\tfrac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\mathrm{i}),\end{aligned}$$

となり、題意が示された。

検算

- $|C|^2=1+(2+\sqrt{3})^2=8+4\sqrt{3}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$ であり、$|C-S|^2=(2+\sqrt{3})^2+1$ も同じ値なので、S は確かに同じ円周上にある。
- $|S'|=3\sqrt{2}+\sqrt{6}=|S|$ であり、回転で保たれるべき性質が成り立っている。
- 数値的には $S\approx 4.732+4.732\mathrm{i}$、$S'\approx -5.7956+3.3461\mathrm{i}$ である。コンピュータにより、すべての辺の長さ、$5\pi/6$ の角、そして $7\pi/12$ が C を実軸上に移す最初の反時計回りの角であることが確認された。

よくある間違い

- 外角 $\pi/6$ ではなく内角 $5\pi/6$ だけ向きを変えてしまう。
- $-5\pi/12$（時計回り）や $\pi/2-5\pi/12$ だけ回転させてしまう。回転は反時計回りであり、C が最初に実軸に達するのは負の部分である。

STEP のその先へ

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ を掛けることを回転とみなすのは、複素関数を幾何学的な変換として捉える第一歩である。$z\mapsto az+b$ によって平面のあらゆる回転・拡大・平行移動が得られ、これらは群（group）をなす。正多角形の頂点は等比数列の和（geometric sum）

$2(1+\omega+\cdots+\omega^{k-1})$ で表され、1 の累乗根（roots of unity）へとつながる。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は、この幾何学的な視点を見事に展開している。

解答例

STEP II 2001、第 8 問

純粋数学 ・ 周期関数と常微分方程式

> **STEP II 2001、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q8

鍵となる考え方

周期（period）が 1 の関数は、長さ 1 のどの区間でも同じ形をしているので、そのような区間上の積分はどれも同じ値になる。したがって、x が 1 増えるたびに F は同じ量 $F(1)$ だけ増える。最後の小問の微分方程式は 1 階線形（first order linear）なので、積分因子（integrating factor）を用いると解は $-F(x)$ の指数関数の形になり、残りは $F(1)$ が正であることから従う。

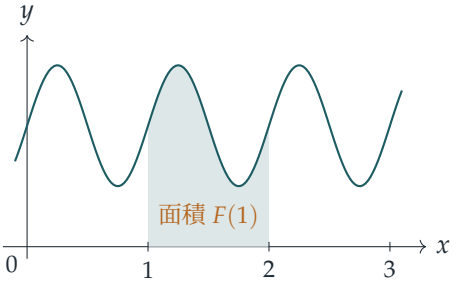
解答

小問 (i)

次のようにとる。

$$f(x) = 2 + \sin(2\pi x).$$

sin は周期 2π をもつので $\sin(2\pi(x+1)) = \sin(2\pi x + 2\pi) = \sin(2\pi x)$ であり、よって $f(x+1) = f(x)$ である。また $\sin(2\pi x) \geq -1$ なので、すべての x に対して $f(x) \geq 1 > 0$ である。（$f(x) = 1$ のような定数関数でもよいが、面白みに欠ける。）



グラフの下にある幅 1 の帯はどれも同じ面積をもつ。小問 (ii) の内容はこれに尽きる。

小問 (ii)

$G(x) = F(x+1) - F(x)$ と定義する。第 1 項に連鎖律（chain rule）を用いて微分すると、f の周期性より、すべての x に対して

$$G'(x) = f(x+1) - f(x) = 0$$

となる。よって G は定数であり、$F(0) = 0$ だから、その値は $G(0) = F(1) - F(0) = F(1)$ である。すなわち

$$F(x+1) = F(x) + F(1) \quad \text{すべての} x.$$

が成り立つ。ここで n に関する数学的帰納法（induction）を用いる。$n = 1$ のとき、主張 $F(1) = 1 \cdot F(1)$ は自明に成り立つ。ある正の整数 k に対して $F(k) = kF(1)$ が成り立つとすると、上の式で $x = k$ とおいて

$$F(k+1) = F(k) + F(1) = kF(1) + F(1) = (k+1)F(1).$$

を得る。したがって、すべての正の整数 n に対して $F(n) = nF(1)$ が成り立つ。これが示すべきことであった。

（同じことだが、f が連続ならば $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ であり、$F(n)$ は $[k, k+1]$ 上の n 個の積分の和となる。置換 $t \mapsto t + k$ を行えば、そのそれぞれは $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ に等しい。上の議論は、そもそも F を積分として書く必要を避けている。）

小問 (iii)

この方程式は y について線形であり、積分因子は $\mathrm{e}^{\int f\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{F(x)}$ である。ここで F が登場する。実際、積の微分法（product rule）と $F' = f$ より

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\,\mathrm{e}^{F(x)}\right) = \mathrm{e}^{F(x)}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f(x)\,y\right) = 0.$$

となる。よって $y\,\mathrm{e}^{F(x)}$ は定数である。$x = 0$ においてこれは $1 \cdot \mathrm{e}^{F(0)} = 1$ に等しいので

$$y = \mathrm{e}^{-F(x)}.$$

である。小問 (ii) より、各正の整数 n に対して

$$y(n) = \mathrm{e}^{-F(n)} = \mathrm{e}^{-nF(1)} = \left(\mathrm{e}^{-F(1)}\right)^n.$$

となる。

考えてみよう $F(1) > 0$ であることはどうしてわかるのか。$F(1)$ について直接は何も与えられていない。

すべての x に対して $F'(x) = f(x) > 0$ なので、F は狭義単調増加（strictly increasing）であり、したがって $F(1) > F(0) = 0$ である。（積分で考えたいなら、$F(1)$ は 0 から 1 までの正の曲線の下の面積である。）

ゆえに $0 < \mathrm{e}^{-F(1)} < 1$ であり、$0 < r < 1$ を満たす定数 r に対しては $n \to \infty$ のとき $r^n \to 0$ となる。よって $n \to \infty$ のとき $y(n) \to 0$ であり、これが示すべきことであった。

ここで主張しているのは整数上での極限だけであることに注意しよう。整数と整数の間では y ははさみうちにされる。F は増加関数なので y は減少関数であり、実際には x がすべての実数値をとりながら $x \to \infty$ となるときにも $y(x) \to 0$ が成り立つ。

検算

$f(x) = 2 + \sin(2\pi x)$ のとき、正弦関数は 1 周期にわたって積分すると 0 になるので、$F(1) = \int_0^1 (2 + \sin 2\pi t)\,\mathrm{d}t = 2$ である。シンプソンの公式（Simpson's rule）により、$F(2), F(3), F(5), F(7)$ は 10^{-12} より高い精度でそれぞれ $4, 6, 10, 14$ に等しいことが確かめられる。$y(0) = 1$ から微分方程式を数値的に解き進めると（4 次のルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method））、$y(1) \approx 0.135335 = \mathrm{e}^{-2}$ および $y(4) \approx 3.3546 \times 10^{-4} = \mathrm{e}^{-8}$ が得られ、$\mathrm{e}^{-nF(1)}$ と一致する。さらに、対称性の低い例 $f(x) = \mathrm{e}^{\cos 2\pi x} + 0.1$ について、整数でない x においても $F(x+1) - F(x) = F(1)$ が成り立つことを確かめた。

よくある間違い

- $[k, k+1]$ 上の面積が $[0, 1]$ 上の面積に等しい理由を示さずに、周期性から $F(n) = nF(1)$ は「自明」であると書いてしまう。関数 $G(x) = F(x+1) - F(x)$ か置換積分が必要である。
- $F(1) > 0$ の根拠を示し忘れる。これがなければ、$\mathrm{e}^{-nF(1)}$ は 1 のままかもしれないし、発散するかもしれない。
- 積分因子の符号を誤り、減衰するどころか増大する $y = \mathrm{e}^{F(x)}$ にたどり着いてしまう。

STEP のその先へ

これは**フロケ理論**（Floquet theory）の最も簡単な場合である。周期的な係数をもつ線形微分方程式では、1 周期後の解は初期値に一定の因子（ここでは $e^{-F(1)}$）を掛けたものになるので、長期的な振る舞いはその因子が 1 より小さいか大きいかで決まる。数の代わりに行列を用いた同じ考え方によって、支点を上下に揺さぶられる振り子の安定性が説明される。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）は、線形方程式と積分因子を丁寧に扱っており、次の一歩として好適である。

解答例

STEP II 2001、第 9 問

力学 ・ 速度の 2 乗に比例する空気抵抗

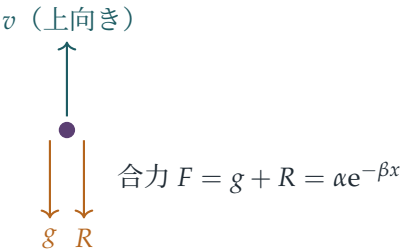
> **STEP II 2001、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q9

鍵となる考え方

力は**時間**ではなく**高さ**の関数として与えられているので、自然な道具は仕事とエネルギーの原理（work–energy principle）である。すなわち、上昇の間に F に逆らってなされる仕事は、失われた運動エネルギー（kinetic energy）にちょうど等しい。これにより $\mathrm{e}^{-\beta x}$ が v^2 と結びつき、その結果から空気抵抗（air resistance）が速さだけに依存することがわかる。速さによる抵抗の法則がわかれば、下降の運動は v^2 に関する標準的な微分方程式（differential equation）になる。

解答

モデル化。 粒子の質量は単位質量であり、鉛直線上を運動する。上昇中は、重力と空気抵抗がともに運動と逆向き、すなわち下向きにはたらくので、合力 F（大きさ $\alpha\mathrm{e}^{-\beta x}$）は下向きにはたらく。投射点から上向きに x をとる。



消費されるエネルギー

高さ x に達するまでに消費されるエネルギーは、F に逆らってなされる仕事である。

$$\int_0^x \alpha \mathrm{e}^{-\beta s}\,\mathrm{d}s = \frac{\alpha}{\beta}\left(1-\mathrm{e}^{-\beta x}\right).$$

このエネルギーは粒子の運動エネルギーから供給されるので、仕事とエネルギーの原理により（単位質量）

$$\tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{2}v^2 = \frac{\alpha}{\beta}\left(1-\mathrm{e}^{-\beta x}\right). \qquad (*)$$

（同じことであるが、ニュートン（Newton）の運動の第二法則を $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\alpha\mathrm{e}^{-\beta x}$ の形に書き、$x=0, v=u$ から積分しても同じ式が得られる。）

速さで表した力

$(*)$ に β を掛けて整理すると、

$$\alpha - \alpha\mathrm{e}^{-\beta x} = \tfrac{1}{2}\beta u^2 - \tfrac{1}{2}\beta v^2 \quad\Longrightarrow\quad F = \alpha\mathrm{e}^{-\beta x} = \tfrac{1}{2}\beta v^2 + \alpha - \tfrac{1}{2}\beta u^2,$$

となり、求める式が得られる。

考えてみよう なぜ $\alpha = \frac{1}{2}\beta u^2 + g$ でなければならないのか。問題文にはそれを強制するものは何もないように見える。

F を二つの部分に分ける：$F = g + R$、ただし R は空気抵抗である。すると

$$R = F - g = \tfrac{1}{2}\beta v^2 + \left(\alpha - \tfrac{1}{2}\beta u^2 - g\right).$$

したがって抵抗は速さだけの関数であり、v^2 の項と定数の和である。空気抵抗は空気中を運動することによって生じるので、粒子が一瞬静止する最高点では o にならなければならない。そこで $v=0$ とおくと $R=0$ となるから、$F=g$（重力のみがはたらく）であり、

$$\alpha - \tfrac{1}{2}\beta u^2 = g, \qquad \text{すなわち、} \qquad \alpha = \tfrac{1}{2}\beta u^2 + g.$$

よって定数項は o であり、抵抗の法則は単に

$$R = \tfrac{1}{2}\beta v^2.$$

となる。（参考までに、最高点は $\alpha\mathrm{e}^{-\beta x} = g$ となる点であり、その高さは $\frac{1}{\beta}\ln(\alpha/g)$ である。）

下降の運動

運動の向きによらず同じ抵抗の法則 $R = \frac{1}{2}\beta v^2$ が成り立つと仮定する。下降中、抵抗は運動に逆らって**上向き**にはたらき、重力は引き続き下向きにはたらく。最高点から

下向きに測った距離を y、下向きの速さを v とし、$y=0$ で $v=0$ とする。ニュートンの運動の第二法則（単位質量）を下向きに立てると

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = g - \tfrac{1}{2}\beta v^2.$$

$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(v^2)$ であるから、$w=v^2$ とおくと

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y} = 2g - \beta w, \qquad w=0 \text{ となるのは} y=0.$$

これは定数係数の線形微分方程式（linear with constant coefficients）である（あるいは変数分離（separation of variables）してもよい）。その解は

$$w = \frac{2g}{\beta}\left(1-\mathrm{e}^{-\beta y}\right),$$

であり、確かに $w(0)=0$ および $w' = 2g\mathrm{e}^{-\beta y} = 2g-\beta w$ を満たす。したがって、最高点から距離 y だけ下の点における空気抵抗は

$$R = \tfrac{1}{2}\beta v^2 = g\left(1-\mathrm{e}^{-\beta y}\right).$$

である。

検算

$y\to\infty$ のとき $R\to g$ となる。すなわち粒子は終端速度（terminal speed）$\sqrt{2g/\beta}$ に近づき、そこでは抵抗と重力がつり合う。$y=0$ では $R=0$ であり、静止しているのだから当然である。上昇中、$x=0$ では公式から $F=\alpha=g+\frac{1}{2}\beta u^2$ となり、これは重力と速さ u における抵抗の和である。数値的には、$g=9.8, \beta=0.1, u=20$（したがって $\alpha=29.8$）として、ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で運動方程式を数値的に解くと、上昇中の $F=\alpha\mathrm{e}^{-\beta x}$ と下降中の $R=g(1-\mathrm{e}^{-\beta y})$ がおよそ 10^{-12} の精度で再現され、粒子は高さ ≈ 11.12 で最高点に達し、$\frac{1}{\beta}\ln(\alpha/g)$ と一致する。

よくある間違い

- F を空気抵抗だけだと考えてしまう。F は**合力**であるから、R を得るには重力を差し引かなければならない。
- 下降中も抵抗の符号を同じままにしてしまう。抵抗は常に運動を妨げる向きにはたらくので、下降中は上向きにはたらき、方程式は $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = g-\frac{1}{2}\beta v^2$ となる。
- v を用いて、あるいは u と α を用いて答えてしまう。問題が求めているのは、y、g、β のみで表した R である。

STEP のその先へ

二次抵抗（quadratic drag）$R \propto v^2$ は、空気中を高速で運動する物体に対する現実的なモデルであり、この問題は巧妙な技法を示している。すなわち、時間に関する v の方程式は線形ではないにもかかわらず、距離に関する v^2 の方程式は**線形**になるのである。大学の力学では、上昇してから下降する問題が非対称であることも扱う。粒子は u より小さい速さで出発点に戻り、下降には上昇よりも長い時間がかかる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、速度に依存する力と終端速度が詳しく論じられている。

解答例

STEP II 2001、第 10 問

力学 ・ 衝突と反発係数

STEP II 2001、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/01-s2-q10

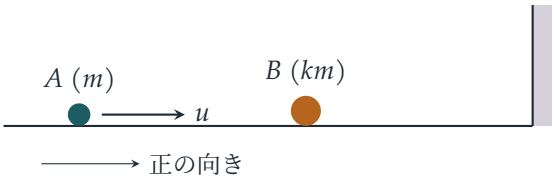
鍵となる考え方

これは 2 回の衝突と 1 回の「追いかけっこ」の問題である。最初の衝突は、運動量保存則（conservation of momentum）とニュートン（Newton）の反発の法則（Newton's experimental law）という標準的な 2 式で処理できる。B が壁ではね返った後に問うべきことはただ一つ、戻ってくる B が A と出会えるかどうかである。それが起こるのは、壁へ向かう向きの A の速度が B の速度より大きいとき、かつそのときに限る。この条件が k に関する不等式になる。エネルギーの部分では、運動エネルギー（kinetic energy）を k の関数として表し、$mu^2/27$ と比較する。その比較は完全平方式（perfect square）に帰着することがわかる。

解答

2 回目の衝突

A と B をなめらかな面上の質点（particle）としてモデル化する。したがって水平方向の力積（impulse）は衝突によるものだけである。A から壁へ向かう向きを正とする。最初の衝突の直後の A, B の速度をそれぞれ v_A, v_B とする。



最初の衝突。 運動量が保存され、遠ざかる速さは近づく速さの e_1 倍である：

$$mv_A + km\,v_B = mu,$$
$$v_B - v_A = e_1 u.$$

第 2 式の k 倍を第 1 式に加えると $(1+k)v_B = (1+e_1)u$ を得る。よって

$$v_B = \frac{(1+e_1)u}{1+k}, \qquad v_A = v_B - e_1 u = \frac{(1-ke_1)u}{1+k}.$$

$v_B > 0$ であるから、B は壁に向かって進み続ける。A は $1-ke_1$ の符号に応じて、前進している場合も、静止している場合も、後退している場合もありうる。

壁。 B は速さ v_B で壁に当たり、速さ $e_2 v_B$ ではね返るので、その速度は $-e_2 v_B$ となる。その間、A は一定の速度 v_A で動き続ける。なお、$v_A < v_B$（差は $e_1 u > 0$）であり、しかも A は B の後ろから出発するので、A が先に壁に到達することはない。

考えてみよう はね返った後、A と B は同じ向きに動いているかもしれない。両者が出会うかどうかはどのように判定すればよいだろうか？

はね返った後、B は A と壁の間にあり、どちらの質点にもほかに何も作用しない。したがって両者の間隔が縮まるのは、A の速度が B の速度より大きいとき、かつそのときに限る（if and only if）：

$$v_A > -e_2 v_B \iff v_A + e_2 v_B > 0.$$

$v_A > 0$ ならば、両者は互いに近づく向きに動いている。$v_A \le 0$ ならば B が A を追いかける形になり、より速い場合に限り追いつく。この一つの不等式で両方の場合が扱える。代入し、正の量 $(1+k)/u$ を掛けると

$$1 - ke_1 + e_2(1+e_1) > 0 \iff k < \frac{1+e_2(1+e_1)}{e_1},$$

を得る。ここで最後の段階では $e_1 > 0$ で割った。よって、この不等式が成り立てば 2 回目の衝突が起こり、題意は示された。（等号が成り立つ場合は、A と B は同じ速度で動き去り、決して出会わない。）

運動エネルギー

$e_1 = \frac{1}{3}, e_2 = \frac{1}{2}$ のとき、

$$v_A = \frac{(3-k)u}{3(1+k)}, \qquad e_2 v_B = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{4}{3}u}{1+k} = \frac{2u}{3(1+k)}.$$

B がはね返った直後、A の速さは依然として $|v_A|$ であり、B の速さは $e_2 v_B$ である。よって運動エネルギーの総和は

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}mv_A^2 + \tfrac{1}{2}km\,(e_2 v_B)^2 \\ &= \frac{mu^2}{18(1+k)^2}\Big[(3-k)^2 + 4k\Big] = \frac{mu^2\,(k^2-2k+9)}{18(1+k)^2}. \end{aligned}$$

次に、共通の分母 $54(1+k)^2$ を用いて $mu^2/27$ と比較する：

$$\begin{aligned} T - \frac{mu^2}{27} &= \frac{mu^2}{54(1+k)^2}\Big[3(k^2-2k+9) - 2(1+k)^2\Big] \\ &= \frac{mu^2}{54(1+k)^2}\,(k^2-10k+25) = \frac{mu^2\,(k-5)^2}{54(1+k)^2}. \end{aligned}$$

考えてみよう　平方は決して負にならないのに、条件 $k<5$ は何のためにあるのだろうか？

右辺は決して負にならず、0 になるのは $k=5$ のときに限る。よって $k<5$ のとき $(k-5)^2>0$ であり、したがって

$$T > \frac{mu^2}{27},$$

となり、題意は示された。値 5 は偶然ではない。これらの係数では、前半で求めた上限は $\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\right)\Big/\frac{1}{3}=5$ である。つまり $k<5$ はまさに 2 回目の衝突が起こる条件である。$k=5$ のとき、はね返った後の両質点はともに速度 $-u/9$ で動き、エネルギーはちょうど $mu^2/27$ となる。

検算

- $e_1=1, k=1$ とする（質量が等しく、完全弾性衝突（perfectly elastic）の場合）。すると $v_A=0, v_B=u$ となり、おなじみの速度の交換が起こる。上限は $k<1+2e_2$ となり、$e_2>0$ であれば $k=1$ はこれを満たす。つまり、戻ってくる B は静止している A に必ず衝突する。
- $k=5$ のとき、式から $v_A=-\frac{u}{9}$ および $-e_2 v_B=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2u}{9}=-\frac{u}{9}$ が得られ、主張どおり速度は等しい。
- 数値的に、k を 0.001 から 4.999 まで動かして厳密な分数で計算すると、比 $T\big/(mu^2/27)$ の最小値は $k=5$ 付近で 1.00000001 であり、常に 1 より大きい。20 000 組の三つ組 (k,e_1,e_2) によるランダムなテストでも、この不等式とはね返り後の速度の直接比較とで結果が食い違う例は見つからなかった。

よくある間違い

- $v_A > 0$ を要求してしまう。A が後退していても B に追いつかれることはありうる。正しい条件は、はね返り後の二つの速度を比較するものである。
- 壁が B の向きを逆にすることを忘れる。その速度は $e_2 v_B$ ではなく $-e_2 v_B$ になる。
- エネルギーの計算で、壁に当たる前の B の速さを使ってしまう。問題が求めているのははね返った直後のエネルギーなので、B の速さは $e_2 v_B$ である。

STEP のその先へ

ニュートンの反発の法則は、衝突の際に生じる短く激しい変形の間に起こることを表すモデルである。反発係数（coefficient of restitution）は、相対運動の運動エネルギーがどれだけ失われるかを要約したものである。大学 1 年次の力学の講義では、衝突はしばしば重心系（centre-of-mass frame）で解析される。この座標系では、衝突は単に相対速度の向きを逆にして e 倍するだけであり、失われるエネルギーは $\frac{1}{2}\mu(1-e^2)w^2$ である。ここで μ は換算質量（reduced mass）、w は近づく速さである。Kleppner and Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、これらの考え方を丁寧に展開している。

解答例

STEP II 2001、第 11 問

力学 ・ 放物運動

STEP II 2001、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

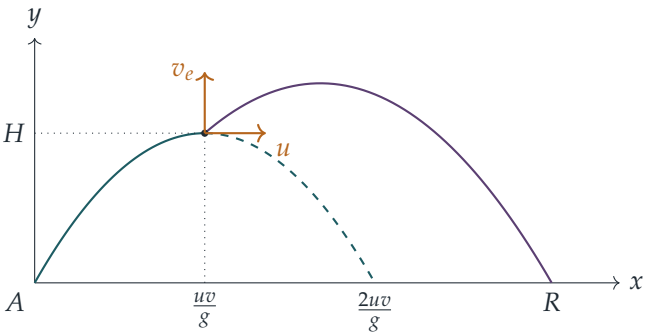
step.maths.org/questions/01-s2-q11

鍵となる考え方

飛行を爆発の時点で二つに分ける。爆発の前は通常の放物運動（projectile motion）であり、最高点は鉛直方向の速度がゼロになる点である。爆発の後、破片 P はその高さから速度 (u, v_e) で打ち出された新たな放物体とみなせるので、着地までの時間は二次方程式（quadratic equation）から求まる。後半では、到達距離（range）が v_e の増加関数（increasing function）であることから、「$R > D$」は「v_e が、ちょうど $R = D$ となる値を超える」という条件に言い換えられる。

解答

ミサイルと破片 P を、重力のみを受けて運動する質点（particle）としてモデル化し、地面は水平とする。A を原点とし、x を水平方向、y を鉛直上向きにとる。



破線は爆発がなかった場合にミサイルが着地したであろう軌道であり、紫の曲線は P の軌道である。

P の到達距離

爆発まで。鉛直方向の速度は $v - gt$ であり、これは $t_1 = v/g$ でゼロになる。その瞬間までにミサイルが水平方向に進んだ距離は

$$x_1 = ut_1 = \frac{uv}{g},$$

であり、その高さは、最終的な鉛直方向の速さがゼロであることと $v^2 = 2gH$ から

$$H = \frac{v^2}{2g}.$$

である。

爆発の後。破片 P は高さ H から、水平方向の速度 u、鉛直上向きの速度 v_e で運動を始める。爆発の時点から時間 t を測ると、その高さは

$$y = H + v_e t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

である。P は $y = 0$ のときに着地するので

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - v_e t - \frac{v^2}{2g} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g^2t^2 - 2gv_e t - v^2 = 0.$$

となる。これを gt についての二次方程式とみなすと

$$gt = v_e \pm \sqrt{v_e^2 + v^2}.$$

を得る。二つの解の積は $-v^2 < 0$ であるから、一方の解は負である。この解は、放物線が爆発より**前**に地面と交わる時刻を表しており、ここでは無関係である。したがって、爆発後の飛行時間は

$$t_2 = \frac{v_e + \sqrt{v_e^2 + v^2}}{g}.$$

である。水平方向の速度は終始 u のままなので、水平方向の総距離は

$$R = \frac{uv}{g} + ut_2 = \frac{u}{g}\left(v + v_e + \sqrt{v_e^2 + v^2}\right),$$

すなわち

$$\frac{gR}{u} = v + v_e + \sqrt{v_e^2 + v^2},$$

となり、示すべき式が得られた。

$R > D$ となる条件

$$f(v_e) = v_e + \sqrt{v_e^2 + v^2}, \qquad k = \frac{gD}{u} - v = \frac{gD - uv}{u}.$$

とおく。このとき $R > D$ は $f(v_e) > k$ と同値である。$D > 2uv/g$ より $gD > 2uv$ であるから、$k > v > 0$ が成り立つ。

考えてみよう なぜ $R = D$ となる v_e の値をただ一つ求めれば十分なのだろうか。

それは f が狭義単調増加（strictly increasing）だからである。実際、

$$f'(v_e) = 1 + \frac{v_e}{\sqrt{v_e^2 + v^2}} > 0,$$

である。$v \neq 0$ のとき $|v_e| < \sqrt{v_e^2 + v^2}$ となるからである。（物理的には、上向きに強く打ち出すほど P は長く空中にとどまる。）よって $f(v_e^*) = k$ ならば、$f(v_e) > k$ となるのはちょうど $v_e > v_e^*$ のときである。

v_e^* を求めるため、$\sqrt{v_e^2 + v^2} = k - v_e$ を解く。両辺を 2 乗すると

$$v_e^2 + v^2 = k^2 - 2kv_e + v_e^2 \quad \Longrightarrow \quad v_e^* = \frac{k^2 - v^2}{2k} = \frac{(k-v)(k+v)}{2k}.$$

を得る。2 乗によって偽の解が紛れ込む可能性があるので、$k - v_e^* \geq 0$ を確かめておく。実際 $k - v_e^* = \dfrac{k^2 + v^2}{2k} > 0$ であるから、v_e^* は確かに $f(v_e^*) = k$ を満たす。
ここで k を代入する。

$$k - v = \frac{gD - 2uv}{u}, \qquad k + v = \frac{gD}{u}, \qquad 2k = \frac{2(gD - uv)}{u},$$

であるから

$$v_e^* = \frac{(gD - 2uv)\, gD/u^2}{2(gD - uv)/u} = \frac{gD}{2u}\left(\frac{gD - 2uv}{gD - uv}\right).$$

となる。以上より、f は増加関数であるから

$$v_e > \frac{gD}{2u}\left(\frac{gD - 2uv}{gD - uv}\right),$$

ならば $R > D$ となり、これが求める条件である。実は、この議論からこの条件が必要条件でもあることがわかる。また、$k > v$ より $v_e^* > 0$ であるから、実際に上向きの打ち出しが必要であることに注意する。

検算

- $v_e = 0$ のとき、公式は $gR/u = 2v$、すなわち $R = 2uv/g$ を与える。これは爆発しない放物体の通常の到達距離であり、当然そうなるべきものである。問題が $D > 2uv/g$ を仮定しているのもこのためで、そうでなければ打ち出しは必要ない。
- $u = v = 10$、$g = 10$、$D = 30$ とすると、しきい値は $v_e^* = \frac{300}{20} \cdot \frac{100}{200} = 7.5$ であり、このとき $gR/u = 10 + 7.5 + 12.5 = 30$ となるので、ちょうど $R = 30 = D$ である。

- 二段階の飛行を数値的に逐次シミュレーションしたところ、到達距離の公式と約 10^{-9} の精度で一致し、10^5 個のランダムな場合について、$R > D$ となるのがちょうど $v_e > v_e^*$ のときであることが確認された。

よくある間違い

- 爆発前に進んだ水平距離 uv/g を忘れ、R を A からではなく爆発地点の真下から測ってしまう。
- 最高点から着地までの時間を再び v/g としてしまい、新たな上向きの速度 v_e を無視する。
- 右辺が非負であることを確かめずに $\sqrt{v_e^2 + v^2} = k - v_e$ を 2 乗する、あるいは、等号となる一つの値がなぜ不等式に置き換わるのかを説明しない。

STEP のその先へ

爆発は系全体の運動量（momentum）を保存するので、二つの破片の重心（centre of mass）は、P がそうでないにもかかわらず、もとの放物線に沿って運動を続ける。内力は重心の運動を変えられないというこの原理は、大学 1 年の力学の講義でロケットの運動や衝突を扱う際の出発点となる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、その両方を丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 2001、第 12 問

確率・統計 ・ ポアソン近似

> **STEP II 2001、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q12

鍵となる考え方

共同購入グループ（syndicate）は当たりくじをちょうど 1 枚持つことが保証されているので、すべては当選番号を選んだ**ほかの**購入者が何人いるかにかかっている。その人数は試行回数が非常に大きく成功確率が非常に小さい二項分布（binomial distribution）に従い、これはまさにポアソン分布（Poisson distribution）による近似が効く状況である。このとき取り分の期待値（expectation）は W と $1/(1+X)$ の期待値の積となり、その和は $k+1$ を階乗（factorial）に取り込むことで閉じた形で計算できる。

解答

設定

共同購入グループは N 枚のくじを買ったので、ほかの購入者が買ったくじは $3.8N - N = 2.8N$ 枚である。グループ以外のくじのうち当選番号が書かれたものの枚数を X とする。

グループ以外の購入者はそれぞれ、ほかの購入者とも抽選とも独立に、一様ランダムに番号を選ぶ。したがって当選番号が何であっても、その各くじは独立に確率 $1/N$ で当選番号と一致する。よって

$$X \sim \mathrm{B}\left(2.8N,\ \tfrac{1}{N}\right).$$

N は非常に大きいので、平均 $2.8N \cdot \frac{1}{N} = 2.8$ を一定に保ったまま $2.8N$ は大きく $1/N$

は小さい。ゆえに X は近似的に平均 $\lambda = 2.8$ のポアソン分布に従う：

$$\mathrm{P}(X = k) \approx \frac{\mathrm{e}^{-2.8}\,(2.8)^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

共同購入グループは各番号のくじをちょうど 1 枚ずつ持っているので、常に当たりくじをちょうど 1 枚持っており、当たりくじの総数は $T = 1 + X$ である。

当たりくじの枚数として最も起こりやすい値

$p_k = \mathrm{P}(X = k)$ とおく。隣り合う確率を比べると

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{\lambda}{k} = \frac{2.8}{k},$$

であり、これは $k \le 2$ のとき 1 より大きく、$k \ge 3$ のとき 1 より小さい。よって $p_0 < p_1 < p_2$ かつ $p_2 > p_3 > p_4 > \cdots$ であり、X の最も起こりやすい値は 2 である。（正確な二項分布でも同じことが成り立つ。その場合 $p_k/p_{k-1} = \frac{(2.8N - k + 1)}{k(N-1)}$ であり、これが 1 を超えるのはちょうど $k < 2.8 + \frac{1}{N}$ のときである。）

したがって、当たりくじの枚数として最も起こりやすい値は

$$T = 1 + 2 = 3.$$

純損失の期待値

賞金は $T = 1 + X$ 枚の当たりくじで等分され、共同購入グループはそのうち 1 枚を持つので、受け取る額は $\dfrac{W}{1+X}$ である。グループは £N を支払ったので、純損失は

$$L = N - \frac{W}{1+X}, \qquad \text{かつ} \qquad \mathrm{E}(L) = N - W\,\mathrm{E}\!\left(\frac{1}{1+X}\right).$$

考えてみよう $\sum \frac{1}{k+1} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ はどのように和を求めればよいか？

要点は $(k+1)\cdot k! = (k+1)!$ であり、厄介な因子 $\frac{1}{k+1}$ が階乗に吸収されることである。λ を掛けて割ると、和は 1 項だけ欠けたポアソン級数になる：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\!\left(\frac{1}{1+X}\right) &\approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda} - 1\right) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda},\end{aligned}$$

ここで $j = k + 1$ とおき、$\sum_{j \ge 0} \lambda^j / j! = \mathrm{e}^{\lambda}$ を用いて、値が 1 である $j = 0$ の項を取り除いた。

$\lambda = 2.8 = \frac{14}{5}$ のとき、これは $\frac{5}{14}\left(1 - \mathrm{e}^{-2.8}\right)$ となるので

$$\mathrm{E}(L) \approx N - \frac{5\left(1 - \mathrm{e}^{-2.8}\right)}{14} W,$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

- 同じ工夫は正確な二項分布 $X \sim \mathrm{B}(n, p)$ にも使える：$\mathrm{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \dfrac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$ であり、$np = \lambda$ を保って $n \to \infty$ とするとこれは $(1 - \mathrm{e}^{-\lambda})/\lambda$ に近づく。$N = 1000$ のとき正確な値は 0.33536 であり、ポアソン近似の値 $\frac{5}{14}(1 - \mathrm{e}^{-2.8}) \approx 0.33542$ と比べられる。
- $N = 200$ で 10^5 回の抽選をシミュレーションしたところ、取り分の平均は $0.335W$ となり、当たりくじ 3 枚が最も頻繁に起こる結果であった。
- 極限の場合：ほかに誰も参加しなければ（$\lambda \to 0$）、$(1 - \mathrm{e}^{-\lambda})/\lambda \to 1$ となり、共同購入グループは賞金をすべて受け取る。当然そうなるべきである。

よくある間違い

- ほかの購入者のくじの枚数として $2.8N$ ではなく $3.8N$ を使ってしまうこと。共同購入グループ自身のくじはランダムではなく、当たりくじをちょうど 1 枚もたらす。
- $\mathrm{E}\left(\frac{W}{1+X}\right) = \frac{W}{1+\mathrm{E}(X)} = \frac{W}{3.8}$ と書いてしまうこと。期待値は非線形な関数の中に入れることはできない。実際 $\frac{1}{3.8} \approx 0.263$ は 0.335 より明らかに小さい（$1/(1+x)$ は凸（convex）なので、イェンセンの不等式（Jensen's inequality）によりこれより大きくはなりえない）。

STEP のその先へ

$\mathrm{B}(n, \lambda/n)$ を $\mathrm{Po}(\lambda)$ で近似することは「少数の法則（law of rare events）」と呼ばれ、大学 1 年の講義では確率、あるいは確率母関数（probability generating function）が収束することを示してこれを証明する。$\mathrm{E}\left(1/(1+X)\right)$ の計算は実は母関数の積分 $\int_0^1 G_X(s)\,\mathrm{d}s$ であり、平均や分散の計算にとどまらない母関数の見事な応用である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、この両方の考え方を扱っている。

解答例

STEP II 2001、第 13 問

確率・統計 ・ 連続分布と推定

STEP II 2001、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/01-s2-q13

鍵となる考え方

生存関数（survival function）$\mathrm{P}(T > t)$ が直接与えられているので、中央値（median）はこれを $\frac{1}{2}$ に等しいとおけば求まり、平均（mean）は微分して密度を求めてから積分すれば得られる。実験からは標本中央値（sample median）（小さい順に並べた 9 個の寿命のうち 5 番目）と標本平均（sample mean）が得られ、これらを公式に当てはめると α と k についての 2 つの方程式が得られる。一方を他方で割ると k が消え、α だけの方程式が残る。最後の確率は条件付き確率（conditional probability）であり、そこには嬉しい驚きが待っている。

解答

中央値と平均

$t \geq 0$ に対して $S(t) = \mathrm{P}(T > t) = (1+kt)^{-\alpha}$ とおく。これが 1 から 0 へ減少するためには $k > 0$ でなければならない。

中央値。 中央値 M は $\mathrm{P}(T > M) = \frac{1}{2}$ を満たすので、

$$(1+kM)^{\alpha} = 2 \quad \Longrightarrow \quad 1 + kM = 2^{1/\alpha} \quad \Longrightarrow \quad M = \frac{2^{1/\alpha} - 1}{k}.$$

平均。 累積分布関数（cumulative distribution function）は $F(t) = 1 - (1+kt)^{-\alpha}$ であるから、確率密度関数（probability density function）は

$$f(t) = F'(t) = \alpha k\,(1+kt)^{-\alpha-1}, \qquad t \geq 0.$$

である。そこで、$u = t$、$\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = \alpha k(1+kt)^{-\alpha-1}$ とし、したがって $v = -(1+kt)^{-\alpha}$

として部分積分（integration by parts）を行うと、

$$m = \int_0^\infty t\,\alpha k(1+kt)^{-\alpha-1}\,\mathrm{d}t = \Big[-t(1+kt)^{-\alpha}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty (1+kt)^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$$
$$= 0 + \left[-\frac{(1+kt)^{1-\alpha}}{k(\alpha-1)}\right]_0^\infty = \frac{1}{k(\alpha-1)}.$$

無限大での 2 つの極限はいずれも $\alpha > 1$ を用いている。すなわち、$t(1+kt)^{-\alpha}$ は $t^{1-\alpha}/k^\alpha \to 0$ のように振る舞い、また $(1+kt)^{1-\alpha} \to 0$ である。（$\alpha \le 1$ ならば平均は無限大になる。問題が $\alpha > 1$ を課しているのはこのためである。）よって

$$M = \frac{2^{1/\alpha}-1}{k}, \qquad m = \frac{1}{k(\alpha-1)}.$$

α と k の推定

電球が 9 個あるとき、5 番目の故障は、小さい順に並べた 9 個の寿命のちょうど真ん中にあたる。つまりこれは**標本中央値**である。そこで $M \approx 1000$ と推定し、標本平均から $m \approx 2400$ と推定する。

> **考えてみよう** 方程式が 2 つ、未知数が 2 つあるが、k はその両方に現れる。どうすれば α だけを取り出せるだろうか。

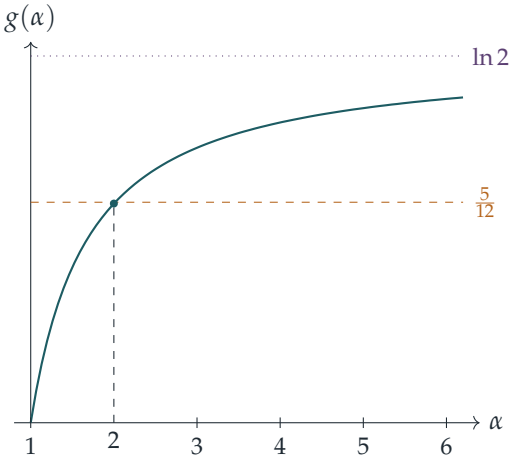
割り算をすればよい。M も m も $1/k$ に比例するので、k は約分されて消える。すると

$$\frac{M}{m} = \left(2^{1/\alpha}-1\right)(\alpha-1) \approx \frac{1000}{2400} = \frac{5}{12} \approx 0.4167.$$

を得る。左辺を $g(\alpha)$ とおく。$\alpha = 2$ のとき

$$g(2) = \left(\sqrt{2}-1\right)(2-1) = \sqrt{2}-1 \approx 0.4142,$$

であり、これは 5/12 との差が 0.003 以内である。これ以外の値がこれほどよく合うことはないことを見るために、$g(1.9) \approx 0.396$、$g(2.1) \approx 0.430$ であることに注意すると、値 5/12 はこの 2 つの間にある。実際、g は $g(1) = 0$ から、$\alpha \to \infty$ のとき $\ln 2 \approx 0.693$ に向かって単調に増加する（グラフを参照）。したがって g が値 5/12 をとるのは、2 をわずかに上回る α でのただ一度だけである。ゆえに $\alpha \approx 2$ である。



ここで $\alpha = 2$ をどちらかの公式に代入する。平均の式からは

$$k = \frac{1}{m(\alpha - 1)} \approx \frac{1}{2400},$$

となり、中央値の式からは $k = (\sqrt{2} - 1)/1000 \approx 4.14 \times 10^{-4}$ となる。両者はよく一致しており、

$$k \approx 4.2 \times 10^{-4} (1\text{時間あたり}).$$

である。

条件付き確率

M 時間もち、さらに $m - M$ 時間もった電球は、合計で m 時間もったことになる。$m > M$ であるから、事象 $\{T > m\}$ は $\{T > M\}$ に含まれ、したがって

$$\mathrm{P}(T > m \mid T > M) = \frac{\mathrm{P}(T > m)}{\mathrm{P}(T > M)} = \frac{(1 + km)^{-\alpha}}{1/2} = \frac{2}{(1 + km)^{\alpha}}.$$

である。（厳密には、電球は M 時間の時点でまだ点灯していることが確認されたのである。寿命が連続型であれば、$T \geq M$ と $T > M$ の確率は等しい。）ここで驚くべきことに、k が何であっても $km = 1/(\alpha - 1)$ がちょうど成り立つので、$1 + km = \alpha/(\alpha - 1)$ となり、

$$\mathrm{P}(T > m \mid T > M) = 2\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^{\alpha}.$$

を得る。$\alpha = 2$ のとき、これは $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ である。よって求める確率の推定値は

$$\mathrm{P}(\text{さらに} m - M \text{時間もつ}) \approx \tfrac{1}{2}.$$

である。この最後の段階では、k の推定値はまったく必要ない。

検算

- 中央値において $S(M) = (2^{1/\alpha})^{-\alpha} = \frac{1}{2}$ であり、確かにそうなっている。ランダムに選んだ $\alpha > 1$ と $k > 0$ について $S(t)$ を $[0, \infty)$ 上で数値積分すると、$m = 1/(k(\alpha - 1))$ が再現される（非負の確率変数については $\mathrm{E}(T) = \int_0^\infty \mathrm{P}(T > t)\,\mathrm{d}t$ が成り立つことを思い出そう。これはまさに上の計算に現れた 2 つ目の積分である）。
- $g(\alpha) = 5/12$ を正確に解くと $\alpha \approx 2.015$ となり、このとき条件付き確率は $2(1 - 1/\alpha)^\alpha \approx 0.502$ である。したがって $\alpha = 2$ に丸めても、ほとんど何も失われない。
- $\alpha = 2$、$k = 1/2400$ として 400 000 個の寿命をシミュレーションしたところ（U を $(0,1)$ 上の一様分布として $T = (U^{-1/2} - 1)/k$ とした）、$\mathrm{P}(T > m \mid T > M) \approx 0.501$ を得た。

よくある間違い

- $\mathrm{P}(T > t)$ を累積分布関数とみなし、マイナス符号をつけずに微分してしまい、負の「密度」を得てしまう。
- 電球が時刻 M で新品に戻ったかのように、$\mathrm{P}(T > m - M)$ を答えてしまう。この分布は無記憶性（memoryless）をもたない（無記憶性をもつのは指数分布（exponential distribution）だけである）ので、条件 $T > M$ が効いてくる。
- 5 番目の故障を、中央値ではなく平均の推定値として使ってしまう。

STEP のその先へ

これはパレート（Pareto）型分布（ロマックス分布（Lomax distribution））であり、寿命や所得の標準的なモデルである。この分布は裾が重く（heavy tail）、$\mathrm{E}(T^r)$ が有限になるのは $r < \alpha$ のときに限られる。ここで行ったのは**積率法**（method of moments）である（厳密には、分位点（quantile）1 つとモーメント（moment）1 つを一致させている）。すなわち、モデルの要約統計量が標本の要約統計量に等しくなるようにパラメータを選ぶのである。大学 1 年次の統計学では、これを最尤法（maximum likelihood）と比較し、わずか 9 個の電球からの推定がどれほど正確なのかを問う。比 $\mathrm{P}(T > s + t \mid T > s)$ は信頼性理論（reliability theory）で用いられる生存関数である。ここではこれが s とともに**増加**するので、古い電球のほうが新しい電球よりも点灯し続ける可能性が高い。次の一歩としては、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）がよい。

解答例

STEP II 2001、第 14 問

確率・統計 ・ 最小分散推定量

> **STEP II 2001、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q14

鍵となる考え方

T は独立な 2 つのベルヌーイ変数（Bernoulli variable）の重み付き結合であるから、その平均と分散は、期待値の線形性（linearity of expectation）と、独立な X, Y に対する法則 $\operatorname{Var}(aX + cY) = a^2 \operatorname{Var}(X) + c^2 \operatorname{Var}(Y)$ からただちに求まる。重みは、λ が何であっても平均が p になるように選ばれている。すなわち T は p の**不偏推定量**（unbiased estimator）であり、この問題はその中で最良のものを求めているのである。最後の部分では、中心極限定理（central limit theorem）によって $\overline{T}$ は近似的に正規分布に従い、平均が一定の正規変数は分散が最小のときに最も集中する。

解答

T の平均と分散

ここで X と Y はベルヌーイ変数であり、

$$\mathrm{E}(X) = p, \quad \operatorname{Var}(X) = p(1-p), \qquad \mathrm{E}(Y) = 2p, \quad \operatorname{Var}(Y) = 2p(1-2p).$$

である。（確率 q で値 1 をとり、それ以外では 0 をとる変数については、$\mathrm{E} = q$ かつ $\mathrm{E}(\cdot^2) = q$ であるから、分散は $q - q^2 = q(1-q)$ である。）期待値の線形性により、

$$\mathrm{E}(T) = \lambda p + \tfrac{1}{2}(1-\lambda)\cdot 2p = \lambda p + (1-\lambda)p = p,$$

となり、求める結果が得られる。硬貨は独立であるから X と Y は独立であり、したがって共分散（covariance）の項は現れず、

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(T) &= \lambda^2 \operatorname{Var}(X) + \tfrac{1}{4}(1-\lambda)^2 \operatorname{Var}(Y) \\ &= \lambda^2 p(1-p) + \tfrac{1}{2}(1-\lambda)^2 p(1-2p).\end{aligned}$$

となる。

分散の最小化

$V(\lambda) = \mathrm{Var}(T)$ とおく。これは λ の 2 次式で、最高次の係数 $p(1-p) + \frac{1}{2}p(1-2p)$ は正である（$0 < p < \frac{1}{2}$ より両項とも正）。したがって最小値はただ 1 つで、それは $V'(\lambda) = 0$ となるところでとられる：

$$V'(\lambda) = 2\lambda p(1-p) - (1-\lambda)p(1-2p) = 0.$$

$p > 0$ で割り、λ を含む項をまとめると、

$$\lambda\big[2(1-p) + (1-2p)\big] = 1 - 2p \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{1-2p}{3-4p},$$

となり、これは問題文で与えられた値である。（ここで $3 - 4p > 1 > 0$ であるから、0 で割ることにはならない。）

最小値そのものも後で必要になる。$a = p(1-p)$, $c = \frac{1}{2}p(1-2p)$ とおくと $V = a\lambda^2 + c(1-\lambda)^2$ であり、これは $\lambda = c/(a+c)$（上の値に一致する）で最小となって、

$$V_{\min} = a\Big(\frac{c}{a+c}\Big)^2 + c\Big(\frac{a}{a+c}\Big)^2 = \frac{ac(a+c)}{(a+c)^2} = \frac{ac}{a+c}.$$

を得る。ここで $a + c = \frac{1}{2}p\big[2(1-p) + (1-2p)\big] = \frac{1}{2}p(3-4p)$, $ac = \frac{1}{2}p^2(1-p)(1-2p)$ であるから、

$$V_{\min} = \frac{p(1-p)(1-2p)}{3-4p}.$$

である。

n 回の投げの平均

n 回の投げにおける T の値を $T_1, \ldots, T_n$ とする。これらは独立で、いずれも平均 p、分散 $V(\lambda)$ をもつ。よって

$$\mathrm{E}(\overline{T}) = p, \qquad \mathrm{Var}(\overline{T}) = \frac{V(\lambda)}{n}.$$

である。

> **考えてみよう** T は 4 つの値しかとらない。なぜ $\overline{T}$ を正規分布に従うものとして扱ってよいのか。

$\overline{T}$ は有限の分散をもつ独立同分布（independent, identically distributed）な n 個の変数の平均であり、しかも $n > 30$ は十分大きいので、中心極限定理により、1 つの

T の分布の形がどうであれ、$\overline{T}$ は近似的に $\mathrm{N}\big(p,\, V(\lambda)/n\big)$ に従う。$\sigma_\lambda = \sqrt{V(\lambda)/n}$, $Z = (\overline{T} - p)/\sigma_\lambda \approx \mathrm{N}(0,1)$ とおくと、

$$\mathrm{P}\big(|\overline{T} - p| < b\big) = \mathrm{P}\Big(|Z| < \frac{b}{\sigma_\lambda}\Big) \approx \Phi\Big(\frac{b}{\sigma_\lambda}\Big) - \Phi\Big(-\frac{b}{\sigma_\lambda}\Big) = 2\Phi\Big(\frac{b}{\sigma_\lambda}\Big) - 1,$$

となる。ここで対称性 $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ を用いた。

$b > 0$ は固定されており Φ は狭義単調増加であるから、この値は b/σ_λ が最大のとき、すなわち σ_λ が最小のときに最大となり、それは $V(\lambda)$ が最小となるときである。それが起こるのは $\lambda = (1-2p)/(3-4p)$ のときで、このとき

$$\sigma_\lambda^2 = \frac{V_{\min}}{n} = \frac{p(1-p)(1-2p)}{(3-4p)n} = s^2.$$

である。したがって、λ を動かしたときの $\mathrm{P}\big(|\overline{T} - p| < b\big)$ の最大値は近似的に $2\Phi(b/s) - 1$ であり、求める結果が得られた。

検算

- $\lambda = 1$ のとき $T = X$ であり、公式は $\mathrm{Var}(T) = p(1-p)$ を与える。$\lambda = 0$ のとき $T = \frac{1}{2}Y$ であり、公式は $\frac{1}{4}\cdot 2p(1-2p)$ を与える。どちらも正しい。
- $V_{\min}$ はこのどちらよりも小さい。実際、それは $p(1-p)$ の $\frac{1-2p}{3-4p} < 1$ 倍である。2 枚の硬貨を組み合わせるほうが、どちらか一方だけを使うよりも優れている。
- 数値で確かめる。$p = 0.3$, $n = 100$, $b = 0.03$ とすると、最良の λ は $\frac{2}{9}$、$s \approx 0.0216$ であり、$2\Phi(b/s) - 1 \approx 0.835$ となる。100 回の投げを 40 000 回繰り返すシミュレーションでは 0.836 が得られ、一方 $\lambda = 1$（硬貨 A のみ）ではおよそ 0.487 にとどまった。

よくある間違い

- $\mathrm{Var}(\frac{1}{2}(1-\lambda)Y) = \frac{1}{2}(1-\lambda)\,\mathrm{Var}(Y)$ と書いてしまうこと。定数は 2 乗されて分散の外に出る。
- 分散を最小化するとなぜ確率が最大になるのか、その**理由**を述べ忘れること。それには Φ が増加関数であることと、すべての λ に対して $\overline{T}$ の平均が p であることが必要である。

STEP のその先へ

これは推定理論（estimation theory）への最初の入り口である。p のすべての不偏推定量 $\lambda X + \frac{1}{2}(1-\lambda)Y$ の中から、分散が最小のものを見つけたのである。答えは各観測値にその分散に反比例する重みを与えるもので、これは統計学において精度の異なる測定値を組み合わせる際に使われる規則（逆分散重み付け、inverse-variance weighting）と同じである。また最小値 $ac/(a+c)$ は、「並列抵抗」の公式 $1/V_{\min} = 1/a + 1/c$ になっている。最後のステップの背後にある中心極限定理については、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）が扱っている。

解答例

STEP III 2001、第 1 問

純粋数学 ・ マクローリン級数

> **STEP III 2001、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q1

鍵となる考え方

関数 $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ は $\sinh^{-1} x$ であり、その 1 階導関数（first derivative）は関数そのものよりはるかに単純である。その導関数を 2 乗すると平方根を含まない関係式 $(x^2+1)(y')^2 = 1$ が得られ、これを微分すると漸化式（recurrence）の $n = 0$ の場合が得られる。さらに微分するたびに漸化式は 1 段ずつ上がっていく。これはまさに数学的帰納法（induction）に必要なことである。$x = 0$ では x の項が消え、漸化式は $y^{(n+2)}(0)$ を $y^{(n)}(0)$ に直接結びつけるので、マクローリン級数（Maclaurin series）の係数はほとんど労せずにすべて求まる。

解答

導関数

$s = \sqrt{x^2+1}$ とおくと、$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{s}$ である。$s > \sqrt{x^2} = |x|$ であるから、すべての実数 x に対して $x + s > 0$ となり、対数はいたるところで定義されることに注意する。合成関数の微分法（chain rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x+s}\left(1 + \frac{x}{s}\right) = \frac{1}{x+s} \cdot \frac{s+x}{s} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

となり、示すべき式が得られた。

数学的帰納法

$P(n)$ を次の命題とする。

$$(x^2+1)\,y^{(n+2)} + (2n+1)\,x\,y^{(n+1)} + n^2\,y^{(n)} = 0 \quad \text{すべての実数} x.$$

基底段階、$n=0$。 $(x^2+1)y''+xy'=0$ を示せばよい。前半の結果から $(x^2+1)(y')^2=1$ である。これを x で微分すると、

$$2x(y')^2+(x^2+1)\cdot 2y'y''=0.$$

$y'=1/\sqrt{x^2+1}$ は決して 0 にならないので $2y'$ で割ることができ、$(x^2+1)y''+xy'=0$ を得る。これが $P(0)$ である。（あるいは、$y'=(x^2+1)^{-1/2}$ を直接微分してもよい。$y''=-x(x^2+1)^{-3/2}$ であるから、$(x^2+1)y''=-x(x^2+1)^{-1/2}=-xy'$ となる。）

帰納段階。 ある $k\geq 0$ に対して $P(k)$ が成り立つと仮定する。

$$(x^2+1)\,y^{(k+2)}+(2k+1)\,x\,y^{(k+1)}+k^2\,y^{(k)}=0.$$

これはすべての x について成り立つので、微分してよい。はじめの 2 項に積の微分法（product rule）を用いると、

$$2x\,y^{(k+2)}+(x^2+1)\,y^{(k+3)}+(2k+1)\,y^{(k+1)}+(2k+1)\,x\,y^{(k+2)}+k^2\,y^{(k+1)}=0.$$

項を整理すると、

$$(x^2+1)\,y^{(k+3)}+(2k+3)\,x\,y^{(k+2)}+(k^2+2k+1)\,y^{(k+1)}=0,$$

となり、$2k+3=2(k+1)+1$ かつ $k^2+2k+1=(k+1)^2$ であるから、これはまさに $P(k+1)$ である。

? 考えてみよう $y^{(k+2)}$ の係数がちょうど 2 だけ増えるのはなぜか？

第 1 項の (x^2+1) を微分すると $2x\,y^{(k+2)}$ が生じ、これが第 2 項から来る $(2k+1)x\,y^{(k+2)}$ に加わる。同様に、第 2 項の x を微分して生じる $(2k+1)$ が k^2 に加わり、k^2+2k+1 は完全平方式になる。この漸化式は、自分自身を再生産するようにできているのである。

$P(0)$ が成り立ち、すべての $k\geq 0$ に対して $P(k)\Rightarrow P(k+1)$ であるから、数学的帰納法によりすべての $n\geq 0$ に対して $P(n)$ が成り立つ。

マクローリン級数

$P(n)$ に $x=0$ を代入する。中央の項が消えて、

$$y^{(n+2)}(0)=-n^2\,y^{(n)}(0)\qquad (n\geq 0).$$

が残る。初期値が 2 つ必要である。$y(0)=\ln(0+1)=0$ と $y'(0)=1/\sqrt{1}=1$ である。

偶数階の導関数。 $y(0)=0$ から、漸化式により $y''(0)=0$、次に $y^{(4)}(0)=0$、以下同様となり、偶数階の導関数はすべて 0 で値 0 をとる。（これは y が奇関数

（odd function）であることからも従う。$\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=1$ であるから、$y(-x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ となる。）

奇数階の導関数。 $y'(0)=1$ から始めると、

$$\begin{aligned} y'''(0) &= -1^2\cdot y'(0) = -1, \\ y^{(5)}(0) &= -3^2\cdot y'''(0) = 9, \\ y^{(7)}(0) &= -5^2\cdot y^{(5)}(0) = -225. \end{aligned}$$

考えてみよう $y'''(0)$ から $y^{(5)}(0)$ を得るのは n がいくつのときか？

$n+2=5$ として $y^{(n+2)}$ を得るには $n=3$ が必要なので、係数は -5^2 ではなく $-3^2=-9$ である。係数には**低いほうの**導関数の階数を用いる。

したがって、マクローリン級数 $y=\sum y^{(k)}(0)\,x^k/k!$ は

$$\begin{aligned} y &= x+\frac{-1}{3!}x^3+\frac{9}{5!}x^5+\frac{-225}{7!}x^7+\cdots \\ &= x-\frac{x^3}{6}+\frac{9}{120}x^5-\frac{225}{5040}x^7+\cdots \\ &= x-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}-\frac{5x^7}{112}+\cdots, \end{aligned}$$

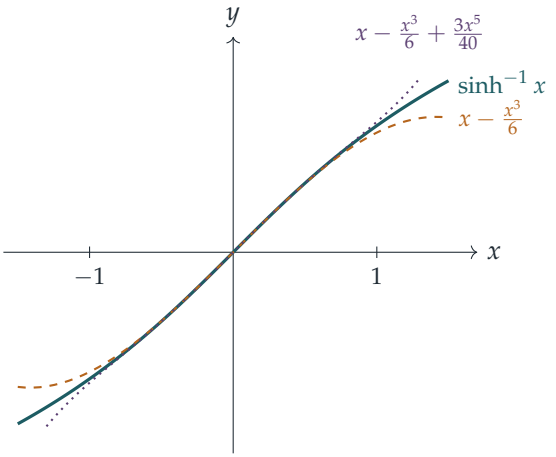
となり、示すべき形で始まる。そして、次の 0 でない項は

$$-\frac{5x^7}{112}.$$

である。

別の方法。 二項級数（binomial series）$(1+x^2)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4-\frac{5}{16}x^6+\cdots$ を $y(0)=0$ として項別に積分すると（$|x|<1$ で有効）、$x-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5-\frac{5}{112}x^7+\cdots$ が得られ、結果は一致する。

下の図は、部分和（partial sums）が原点付近では $y=\sinh^{-1}x$ にぴったり寄り添い、原点から離れると交互に上回ったり下回ったりする様子を示している。



検算

- $x = 0.1$ のとき $\ln\left(0.1 + \sqrt{1.01}\right) = 0.0998340789$ であり、$x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} = 0.0998340789$ も同じ値になる。差は約 3×10^{-11} で、これは次の（x^9 の）項の大きさである。
- $n = 0$ の場合は $x = 1$ で簡単に確かめられる。$y' = 1/\sqrt{2}$、$y'' = -1/(2\sqrt{2})$ であるから、$2y'' + y' = 0$ となる。
- 0 における奇数階の導関数の値は $1, -1, 9, -225$、すなわち $(-1)^m \left(1 \cdot 3 \cdots (2m-1)\right)^2$ である。気づいておきたい、美しい規則性である。

よくある間違い

- $y^{(n+2)}(0) = -n^2 y^{(n)}(0)$ で n を取り違え、係数を $-1, -9, -25$ ではなく $-9, -25, -49$ としてしまう。
- $k!$ で割るのを忘れる。x^7 の係数は -225 ではなく $-225/5040$ である。
- 帰納段階で、$x^2 + 1$ の微分から生じる $2x\, y^{(k+2)}$ を見落とす。

STEP のその先へ

テイラー級数（Taylor series）が役に立つのは収束する範囲においてだけであり、この級数が収束するのは、$\sinh^{-1} x$ が実数直線全体で完全に滑らかであるにもかかわらず、ちょうど $|x| \leq 1$ の範囲である。その理由は複素平面（complex plane）にある。$1/\sqrt{1+z^2}$ は原点から距離 1 の点 $z = \pm \mathrm{i}$ で発散し、その距離が収束半径（radius

of convergence）なのである。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析入門）はこのことを見事に解説している。テイラー（Taylor）の定理とその剰余項（remainder）について実変数の立場からの話は、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照されたい。

解答例

STEP III 2001、第 2 問

純粋数学 ・ 双曲線関数による置換と面積

STEP III 2001、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/01-s3-q2

鍵となる考え方

2 つの不等式はどちらも「直角双曲線（rectangular hyperbola）に類する曲線の片側にとどまる」ことを表している。そこでまず、2 本の双曲線を描き、それらの交点を求めることになる。領域は有界で、4 重の対称性をもつ部分であることがわかり、その面積は $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,\mathrm{d}x$ の形の積分 2 つで表される。これらはまさに双曲線関数による置換（hyperbolic substitution）で扱いやすくなる積分であり、前半の小問は、そこで現れる $\cosh^{-1}$（および $\sinh^{-1}$）の値を対数に書き直すために置かれている。

解答

$\cosh^{-1} x$ の対数による表示

$x \geq 1$ とし、$y = \cosh^{-1} x$ とおく。これは定義により、$\cosh y = x$ を満たす**非負の**数である。このとき

$$x = \frac{\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{2y} - 2x\,\mathrm{e}^{y} + 1 = 0,$$

となり、これは e^{y} についての二次方程式（quadratic equation）であるから

$$\mathrm{e}^{y} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

? **考えてみよう** どちらの符号をとるべきか。それはなぜか。

2 つの解の積は 1（二次方程式の定数項）であり、プラスの符号の解は 1 以上である。したがってマイナスの符号の解は 1 以下であり、これは $y \leq 0$ を与えてしまう。$y \geq 0$ であるから、プラスの符号をとらなければならない（$x = 1$ のときは、いずれにせよ 2

つの解は一致する)。よって

$$\cosh^{-1} x = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2 - 1}\bigr),$$

となり、示された。$x = \sinh y$ としてまったく同じ議論を行うと $\mathrm{e}^{2y} - 2x\,\mathrm{e}^{y} - 1 = 0$ が得られる。今度は2つの解の積が -1 なので、正であるのはプラスの解だけであり、$\sinh^{-1} x = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2 + 1}\bigr)$ となる。以下ではこの両方を用いる。

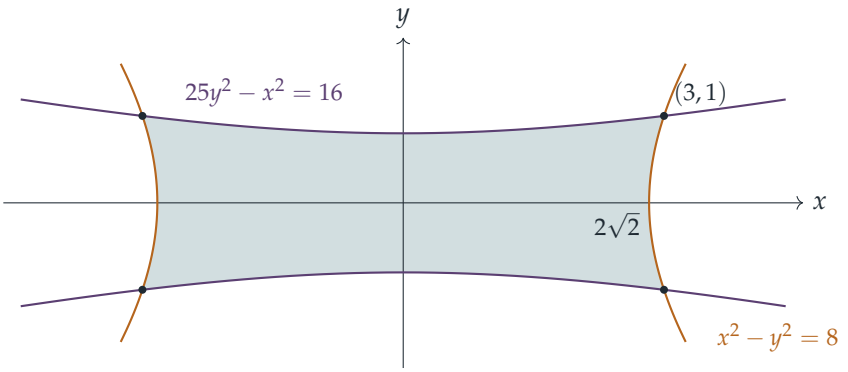
領域

不等式を次のように書き直す。

$$x^2 - y^2 \le 8 \qquad \text{かつ} \qquad 25y^2 - x^2 \le 16.$$

曲線 $x^2 - y^2 = 8$ は、$(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ を通り左右に開く2つの枝をもつ双曲線(hyperbola)である。1つ目の不等式は、この2つの枝の**間**にとどまること、すなわち $|x| \le \sqrt{y^2 + 8}$ を表す。曲線 $25y^2 - x^2 = 16$ は、$(0, \pm\frac{4}{5})$ を通り上下に開く2つの枝をもつ双曲線である。2つ目の不等式は、これらの枝の間にとどまること、すなわち $|y| \le \frac{1}{5}\sqrt{x^2 + 16}$ を表す。

2曲線が交わるのは $x^2 = y^2 + 8$ かつ $25y^2 = x^2 + 16 = y^2 + 24$ のときであるから、$y^2 = 1$、$x^2 = 9$ となり、交点は4点 $(\pm 3, \pm 1)$ である。



この領域(網掛け部分)は有界である。実際、(x, y) が領域に属するならば $x^2 \le y^2 + 8 \le \frac{1}{25}(x^2 + 16) + 8$ であるから $x^2 \le 9$ となり、さらに $y^2 \le \frac{25}{25} = 1$ となる。2つの不等式はどちらも $x \mapsto -x$ および $y \mapsto -y$ で変わらないので、領域は両座標軸に関して対称であり、その面積は第1象限にある部分の面積 A の4倍である。

第1象限では、縦に切って考える。

- $0 \le x \le 2\sqrt{2}$ のときは $x^2 - 8 \le 0 \le y^2$ なので1つ目の不等式は自動的に成り立ち、y は0から $\frac{1}{5}\sqrt{x^2 + 16}$ まで動く。

▶ $2\sqrt{2} \leq x \leq 3$ のときは、y は $\sqrt{x^2-8}$ から $\frac{1}{5}\sqrt{x^2+16}$ まで動く（交点の計算から、下側の曲線が上側の曲線より下にあるのは、ちょうど $x^2 \leq 9$ のときである）。

したがって

$$A = \frac{1}{5}\int_0^3 \sqrt{x^2+16}\,\mathrm{d}x \;-\; \int_{2\sqrt{2}}^3 \sqrt{x^2-8}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{5}I_1 - I_2.$$

第 1 の積分

$x = 4\sinh s$ と置換すると、$\mathrm{d}x = 4\cosh s\,\mathrm{d}s$、$\sqrt{x^2+16} = 4\cosh s$ である（$\cosh s > 0$ なので正）。積分区間の端は $s = 0$ と $s = S = \sinh^{-1}\frac{3}{4} = \ln\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right) = \ln 2$ である。$\cosh^2 s = \frac{1}{2}(\cosh 2s + 1)$ を用いると

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^S 16\cosh^2 s\,\mathrm{d}s = \int_0^S 8(\cosh 2s + 1)\,\mathrm{d}s = \Big[\,8\sinh s\cosh s + 8s\,\Big]_0^S \\ &= 8\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{4} + 8\ln 2 = \tfrac{15}{2} + 8\ln 2, \end{aligned}$$

となる。ここで $\sinh S = \frac{3}{4}$、$\cosh S = \sqrt{1+\frac{9}{16}} = \frac{5}{4}$ を用いた。

第 2 の積分

$t \geq 0$ として $x = 2\sqrt{2}\cosh t$ と置換すると、$\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}\sinh t\,\mathrm{d}t$、$\sqrt{x^2-8} = 2\sqrt{2}\sinh t$ である（$t \geq 0$ なので正）。積分区間の端は $t = 0$ と

$$t = T = \cosh^{-1}\frac{3}{2\sqrt{2}} = \ln\left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{9}{8}-1}\right) = \ln\frac{4}{2\sqrt{2}} = \ln\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\ln 2,$$

である（前半の小問による）。$\sinh^2 t = \frac{1}{2}(\cosh 2t - 1)$ を用いると

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^T 8\sinh^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^T 4(\cosh 2t - 1)\,\mathrm{d}t = \Big[\,4\sinh t\cosh t - 4t\,\Big]_0^T \\ &= 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}} - 2\ln 2 = \tfrac{3}{2} - 2\ln 2, \end{aligned}$$

となる。ここで $\cosh T = \frac{3}{2\sqrt{2}}$、$\sinh T = \sqrt{\frac{9}{8}-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ を用いた。

まとめる

$$A = \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{15}{2} + 8\ln 2\right) - \left(\tfrac{3}{2} - 2\ln 2\right) = \tfrac{3}{2} + \tfrac{8}{5}\ln 2 - \tfrac{3}{2} + 2\ln 2 = \tfrac{18}{5}\ln 2.$$

代数的な部分はちょうど打ち消し合い、全体の面積は

$$4A = \frac{72}{5}\ln 2,$$

となり、示された。

検算

- $\frac{72}{5}\ln 2 \approx 9.981$ である。2つの積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると $I_1 \approx 13.0452$、$I_2 \approx 0.11371$ となり、$\frac{15}{2} + 8\ln 2$ および $\frac{3}{2} - 2\ln 2$ と一致する。また、細かい格子点のうち両方の不等式を満たすものを単純に数えると、面積はおよそ 9.98 となる。
- 大きさの妥当性の確認：領域は面積 12 の長方形 $[-3,3] \times [-1,1]$ に含まれ、その長方形の四隅から細い部分が欠けているだけなので、面積が 10 をわずかに下回るのは妥当である。
- $\cosh^{-1} 1 = \ln 1 = 0$ であり、当然そうなるべき値になっている。

よくある間違い

- 不等式を双曲線の「外側」と読んでしまうこと。$y^2 \geq x^2 - 8$ は $x^2 - y^2 = 8$ の2つの枝の**間**の領域であり、y 軸を含む。
- 1つ目の不等式が効いてくるのは $x > 2\sqrt{2}$ のときだけであることを忘れ、$\int_0^3 \sqrt{x^2-8}\,\mathrm{d}x$ を引いてしまうこと。この積分はそもそも実数にならない。
- $\mathrm{e}^y = x \pm \sqrt{x^2-1}$ でマイナスの符号をとってしまうこと。これは $-\cosh^{-1} x$ を与える。

STEP のその先へ

$\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$ と $\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x$ という2つの型の積分が双曲線関数による置換で処理できるのは、$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ が $x = a\sin\theta$ で処理できるのと同じ理由による。すなわち、恒等式 $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ が平方根を取り除いてくれるのである。実は、双曲線関数は**面積**を測っている。$(\cosh t, \sinh t)$ におけるパラメータ t は単位双曲線（unit hyperbola）の扇形の面積の2倍であり、これはちょうど θ が円の扇形の面積の2倍であるのと同様である。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）にはこの種の問題がさらに多く収められている。また、Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）では、指数関数や対数関数、ひいては双曲線関数がどのように厳密な基礎の上に築かれるかが示されている。

解答例

STEP III 2001、第 3 問

純粋数学 ・ 2 次方程式の解

STEP III 2001、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/01-s3-q3

鍵となる考え方

根（roots）についての条件を、係数（coefficients）についての条件に言い換える。根を α と β とすると $\alpha+\beta=b$ かつ $\alpha\beta=c$ であり、根が実数となるかどうかは判別式（discriminant）からわかる。小問 (ii) では、$f(x)=x^2-bx+c$ のグラフで考えるほうが易しい。2 つの根がともに -1 と 1 の間に（端点を含まずに）あるのは、放物線（parabola）が ±1 で正の値をとり、かつその頂点（vertex）がその間にあるとき、かつそのときに限る。

解答

以下では一貫して $f(x)=x^2-bx+c$ とおき、根が実数のときはそれらを $\alpha\le\beta$ と表す。すると

$$\alpha+\beta=b,\qquad \alpha\beta=c,\qquad \alpha,\beta=\tfrac{1}{2}\left(b\mp\sqrt{b^2-4c}\right).$$

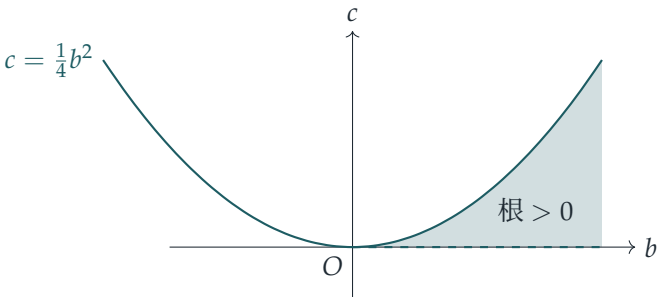
重根（repeated root）は、等しい 2 つの実数解として数える。

小問 (i)

($\Rightarrow$) 根が実数かつ正であると仮定する。根が実数であるためには $b^2-4c\ge0$ が必要である。さらに、2 つの根はともに正なので、$b=\alpha+\beta>0$ かつ $c=\alpha\beta>0$ である。これらを合わせると $b>0$ かつ $b^2\ge4c>0$ が得られる。

($\Leftarrow$) $b>0$ かつ $b^2\ge4c>0$ と仮定する。$b^2-4c\ge0$ なので、根は実数である。$\alpha\beta=c>0$ なので、根は 0 でなく、同符号である。$\alpha+\beta=b>0$ なので、その共通の符号は負ではありえない。よって 2 つの根はともに正である。

以上で同値性（equivalence）が示された。b-c 平面において、この条件は $b>0$ かつ $0<c\le\frac{1}{4}b^2$ を表す。すなわち、第1象限のうち、b 軸の正の部分と放物線 $c=\frac{1}{4}b^2$ に挟まれた領域である。放物線上の点は含まれ（重根 $\frac{1}{2}b>0$）、b 軸上の点は除かれる（そこでは $c=0$ であり、根の一方が 0 となる）。



実線の曲線（$b>0$ の部分）は領域に含まれる。b 軸上の破線部分と原点は含まれない。

小問 (ii)

2つの根がともに実数で、$-1<\alpha\le\beta<1$ となることが必要である。根が実数であるという前提のもとで、これが成り立つのは

$$f(1)=1-b+c>0,\qquad f(-1)=1+b+c>0,\qquad -1<\tfrac{1}{2}b<1.$$

のとき、かつそのときに限る（if and only if）ことを示す。

($\Rightarrow$) $-1<\alpha\le\beta<1$ ならば、各括弧が正なので $f(1)=(1-\alpha)(1-\beta)>0$ かつ $f(-1)=(1+\alpha)(1+\beta)>0$ である。また $\frac{1}{2}b=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ は $(-1,1)$ 内の2数の平均なので、$(-1,1)$ に属する。

($\Leftarrow$) $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ が ≤ 0 となるのはちょうど $[\alpha,\beta]$ 上なので、条件 $f(1)>0$ は1が $[\alpha,\beta]$ に属さないことを意味する。よって $1<\alpha$ または $1>\beta$ である。頂点 $\frac{1}{2}b$ は $[\alpha,\beta]$ に属し、$\frac{1}{2}b<1$ なので $\alpha\le\frac{1}{2}b<1$ となる。これにより $1<\alpha$ は否定されるから、$\beta<1$ である。同様に、$f(-1)>0$ と $\frac{1}{2}b>-1$ から $\alpha>-1$ が得られる。

考えてみよう なぜ $f(1)>0$ と $f(-1)>0$ だけでは不十分なのだろうか？

2つの根が区間の同じ側にある可能性があるからである。たとえば $x^2-5x+6=0$ の根は2と3であるが、$f(\pm1)>0$ が成り立つ。根を両方とも区間の一方の端より外に置くのではなく、-1 と1の間に置くのは、頂点の条件 $|b|<2$ の働きである。

これらを実数条件 $b^2\ge 4c$ と合わせると、求める領域は

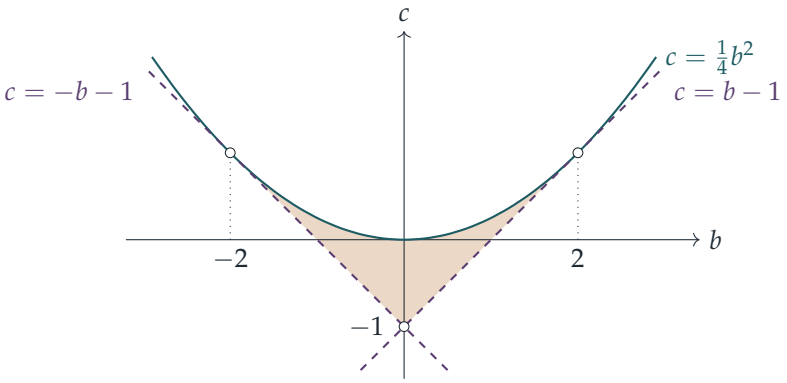
$$|b|<2,\qquad c>b-1,\qquad c>-b-1,\qquad c\le\tfrac{1}{4}b^2,$$

すなわち $|b| < 2$ かつ $|b| - 1 < c \leq \frac{1}{4}b^2$ である。

図を描くために、直線と放物線の位置関係を調べる。

$$\tfrac{1}{4}b^2 - (b-1) = \tfrac{1}{4}(b-2)^2 \geq 0,$$

であるから、直線 $c = b - 1$ は放物線の下側にあり、$(2,1)$ でのみ放物線に接する。したがってこれはその点における接線（tangent）である。対称性（$b \mapsto -b$）により、$c = -b - 1$ は $(-2,1)$ における接線である。2 直線は $(0,-1)$ で交わる。求める領域は、これら 2 本の接線と、2 つの接点の間の放物線の弧で囲まれた曲線三角形である。



放物線のうち $|b| < 2$ の弧は含まれる（$|\frac{1}{2}b| < 1$ を満たす重根 $\frac{1}{2}b$）。2 本の破線の接線部分は除かれる。そこでは根の一方が ± 1 となるからである。3 つの角 $(\pm 2, 1)$ と $(0,-1)$ も除かれる。

検算

- $(b,c) = (0,-\frac{1}{4})$ は小問 (ii) の領域の内部にあり、根は $\pm\frac{1}{2}$ である。$(b,c) = (0,-1)$ は除かれる角であり、根はちょうど ± 1 である。
- $(b,c) = (2.7, 1.8)$ は $c > |b| - 1$ と $c \leq \frac{1}{4}b^2$ を満たすが、$|b| > 2$ である。その根は 1.2 と 1.5 なので、頂点の条件によって正しく除外されている。
- 2 つの領域を数値的にも確かめた。すべての境界曲線上の点を含む 115 000 個を超える有理点 (b,c) において、正確な根と上で述べた条件とを比較したところ、食い違いは 1 つもなかった。

よくある間違い

- 小問 (ii) で頂点の条件 $|b| < 2$ を忘れること。そうすると、$|b| = 2$ より外側で各接線と放物線の間にある細い部分が誤って加わってしまう。

- 境界の扱いを誤ること。放物線はどちらの小問でも含まれるが、(i) の b 軸と (ii) の接線は含まれない。

STEP のその先へ

$f(\pm 1)$ と頂点に関する条件は、「多項式のすべての根が与えられた領域内にあるのはどのようなときか」という一般的な問いの小さな例である。単位円板の場合には、この問いにはシューア・コーン判定法（Schur–Cohn test）が答える。左半平面の場合にはラウス・フルビッツの安定判別法（Routh–Hurwitz criterion）があり、制御工学の技術者はこれを用いてシステムが安定かどうかを判定する。小問 (ii) は、特性根（characteristic roots）が実数である場合の漸化式（recurrence）$u_{n+2} = bu_{n+1} - cu_n$ の安定領域にちょうど一致する。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この趣旨の問題がさらに収められている。

解答例

STEP III 2001、第 4 問

純粋数学 ・ 逆三角関数

> **STEP III 2001、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q4

鍵となる考え方

式 $\dfrac{2x}{1+x^2}$ を見て思い当たることがあるはずである。これは $x=\tan\theta$ としたときの $\sin 2\theta$ に対する「t 公式」(t-formula) である。置換 (substitution) $x=\tan\theta$ を行うと、この式の $\sin^{-1}$ は $\sin^{-1}(\sin 2\theta)$ となり、問題全体は「$\sin^{-1}(\sin\phi)$ が本当に ϕ に戻るのはどのようなときか」という問いに帰着する。その答えは ϕ が主値の範囲 (principal range) $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ に属するかどうかで決まり、$x=\pm 1$ で場合分けが生じるのはまさにこのためである。

解答

小問 (i)

まず $g(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ の基本的な性質を調べる。

- 分母は決して 0 にならないので、g はすべての点で定義され、連続 (continuous) である。
- $g(-x)=-g(x)$ であるから、g は奇関数 (odd function) であり、そのグラフは原点に関して回転対称である。
- $g(0)=0$ であり、$g(x)$ は x と同符号である。また、分母は x^2 のように増大し、分子は x のようにしか増大しないので、$x\to\pm\infty$ のとき $g(x)\to 0$ である。したがって x 軸は漸近線 (asymptote) であり、$x\to\infty$ のときは上から、$x\to-\infty$ のときは下から近づく。

商の微分法（quotient rule）により、

$$g'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

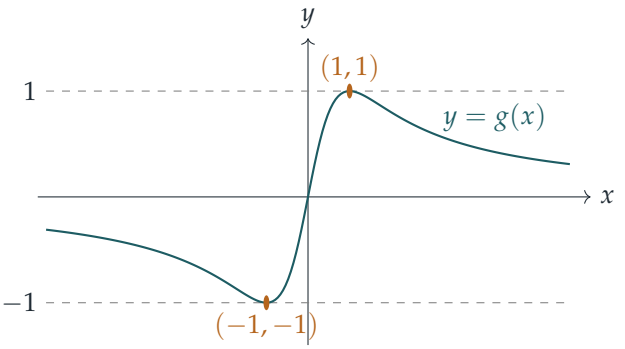
これが 0 となるのは $x = \pm 1$ のときだけである。$|x| < 1$ では正、$|x| > 1$ では負であるから、$x = 1$ で極大値 $g(1) = 1$ をとり、$x = -1$ で極小値 $g(-1) = -1$ をとる。原点における傾きは $g'(0) = 2$ である。

これらの極値が最大値・最小値でもあることは、微分を使わずに確かめられる。

$$1 - g(x) = \frac{(1-x)^2}{1+x^2} \geq 0, \qquad 1 + g(x) = \frac{(1+x)^2}{1+x^2} \geq 0,$$

よって、すべての x に対して $-1 \leq g(x) \leq 1$ であり、等号が成り立つのは $x = \mp 1$ のときに限る。g は連続で値 -1 と 1 をとるので、（中間値の定理（intermediate value theorem）により）その間のすべての値をとる。したがって

$$\text{関数} g \text{ の値域は} -1 \leq g(x) \leq 1.$$



小問 (ii)

小問 (i) より、$\frac{2x}{1+x^2}$ はつねに $\sin^{-1}$ の定義域である $[-1, 1]$ に属するので、f はすべての実数 x に対して定義される。

$\theta = \tan^{-1} x$ とおくと、$-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$ を満たす $x = \tan\theta$ が成り立つ。このとき

$$\frac{2x}{1+x^2} = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{2\tan\theta}{\sec^2\theta} = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta,$$

であるから、

$$f(x) = \sin^{-1}(\sin 2\theta).$$

考えてみよう $\sin^{-1}(\sin 2\theta)$ は単に 2θ ではないのか？

そうなるのは、2θ が $\sin^{-1}$ の値域（range）、すなわち $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ に属するときだけである。定義により、$\sin^{-1} y$ はこの区間内で正弦が y となる**ただ一つの**角である。したがって $f(x)$ を求めるには、$[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ 内で 2θ と同じ正弦をもつ角を見つけなければならない。

$-1 \le x \le 1$ の場合。 tan は $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ で増加するので、これは $-\frac{1}{4}\pi \le \theta \le \frac{1}{4}\pi$ を意味し、よって $-\frac{1}{2}\pi \le 2\theta \le \frac{1}{2}\pi$ である。このとき 2θ 自身が、主値の範囲内で正弦が $\sin 2\theta$ となる角であるから、

$$f(x) = 2\theta = 2\tan^{-1} x \qquad (-1 \le x \le 1).$$

$x \ge 1$ の場合。 このとき $\frac{1}{4}\pi \le \theta < \frac{1}{2}\pi$ であるから $\frac{1}{2}\pi \le 2\theta < \pi$ となり、主値の範囲の外にある。しかし

$$\sin(\pi - 2\theta) = \sin 2\theta \qquad \text{かつ} \qquad 0 < \pi - 2\theta \le \tfrac{1}{2}\pi,$$

であるから、$\pi - 2\theta$ が主値の範囲内で正しい正弦をもつ角である。したがって

$$f(x) = \pi - 2\theta = \pi - 2\tan^{-1} x \qquad (x \ge 1).$$

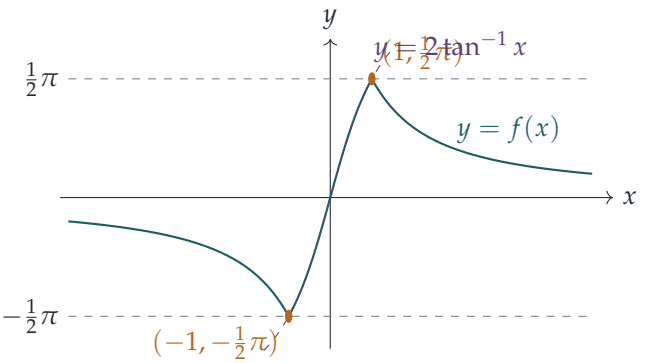
$x = 1$ ではどちらの式も $\frac{1}{2}\pi$ を与え、当然そうなるべきである。これで「示せ」と問われた内容の証明が完了した。

グラフを描くには $x \le -1$ の場合も必要である。g は奇関数であり $\sin^{-1}$ も奇関数であるから、f も奇関数となり、$x \le -1$ に対して $f(x) = -f(-x) = -\pi - 2\tan^{-1} x$ である。（同じことだが、そこでは $-\pi < 2\theta \le -\frac{1}{2}\pi$ であり、$-\pi - 2\theta$ が $[-\frac{1}{2}\pi, 0)$ 内で同じ正弦をもつ角である。）

グラフの形。

- $[-1, 1]$ 上では、$f(x) = 2\tan^{-1} x$ は $-\frac{1}{2}\pi$ から $\frac{1}{2}\pi$ まで増加し、原点を傾き 2 で通る。
- $x \ge 1$ では、$f(x) = \pi - 2\tan^{-1} x$ は $\frac{1}{2}\pi$ から減少し、$x \to \infty$ のとき上から $\pi - 2 \cdot \frac{1}{2}\pi = 0$ に近づく。奇関数であることから、$x \le -1$ では $-\frac{1}{2}\pi$ から増加し、$x \to -\infty$ のとき下から 0 に近づく。よって、ここでも x 軸が漸近線となる。
- 傾きは $|x| < 1$ では $\dfrac{2}{1+x^2}$、$|x| > 1$ では $-\dfrac{2}{1+x^2}$ である。$x = 1$ では傾きが $+1$ から -1 へと跳び（$x = -1$ でも同様）、グラフは $(\pm 1, \pm\frac{1}{2}\pi)$ で尖った角をもつ。すなわち f はそこで連続であるが微分可能（differentiable）ではない。

この角は合成関数の微分法（chain rule）から直接確かめられる。$f'(x) = g'(x)/\sqrt{1 - g(x)^2}$ であり、小問 (i) より $1 - g^2 = (1-x^2)^2/(1+x^2)^2$ であったから、その平方根は $|1-x^2|/(1+x^2)$ である。よって $f'(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\,|1-x^2|} = \pm\dfrac{2}{1+x^2}$ であり、符号は $1 - x^2$ の符号と一致する。



破線の曲線は、$2\tan^{-1} x$ を $x = 1$ を越えて延長したものである。これは $\frac{1}{2}\pi$ より上へ上がってしまうが、$\sin^{-1}$ の値がそうなることは決してない。そのため f は代わりに下へ「折り返す」のである。

検算

- $x = \sqrt{3}$ のとき：$g(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから $f(\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\pi$ である。一方、公式からは $\pi - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi$ が得られる。一致する。
- $x = 10$ のとき：$f(10) = \sin^{-1}(20/101) \approx 0.19934$ であり、$\pi - 2\tan^{-1} 10 \approx 0.19934$ である。コンピュータで $[-1, 1]$、$[1, 10^4]$、$[-10^4, -1]$ のそれぞれから 10^5 個の x の値を無作為に選んで検証したところ、10^{-7} の精度で一致し、$x = 1$ における片側の傾きは $+1$ と -1 になった。
- もし f がいたるところで $2\tan^{-1} x$ であれば、大きな x に対してほぼ π に達してしまうが、これは $\sin^{-1}$ の値としてはあり得ない。折り返しによってこの矛盾が解消される。

よくある間違い

- 2θ が $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ に属することを確かめずに $\sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta$ と書いてしまう。
- $x = 1$ で f のグラフを滑らかな丸い山として描いてしまう。$\sqrt{1 - g^2}$ には $1 - x^2$ ではなく $|1 - x^2|$ が現れるので、グラフはそこで角をもつ。
- $x \to \pm\infty$ のとき f が（$\pm\pi$ ではなく）0 に近づくことを忘れてしまう。

STEP のその先へ

逆三角関数は、**分枝**（branch）を選ぶことの最初の例である。sin は一対一（one-to-one）ではないので、逆関数をとる前に定義域を制限しなければならず、そのため $\sin^{-1}(\sin\phi) = \phi$ のような恒等式はその分枝の上でしか成り立たない。同じ問題は複素解析（complex analysis）で中心的な役割を果たし、そこでは $\log z$ や $z^{1/2}$ に分枝切断（branch cut）が必要になる。また、$x = 1$ における角は、滑らかな部分をつなぎ合わせて作られた関数が、ある点で連続であるが微分可能でないという好例でもある。分枝や多価関数について図を豊富に用いて学ぶには Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析入門）を、連続性と微分可能性については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照するとよい。

解答例

STEP III 2001、第 5 問

純粋数学 ・ 放物線の法線

> **STEP III 2001、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q5

鍵となる考え方

定点 (h,k) を通る法線（normal）はどれかという問いは、パラメータ（parameter）t についての 3 次方程式（cubic）が実数解をいくつもつかという問いに帰着する。この 3 次式には t^2 の項がないので、最初の小問に現れる t^3+pt+q とまったく同じ形をしている。実数解の個数が変わるのは 2 つの解が合わさって重解（repeated root）になるときだけである。したがって「法線が 1 本」と「法線が 3 本」の境目は、この 3 次方程式が重解をもつところである。その境目こそが求める軌跡（locus）である。

解答

3 次方程式

$f(x)=x^3+px+q$ とおく。$p\geq 0$ のとき、すべての x に対して $f'(x)=3x^2+p\geq 0$ であり、$f'(x)=0$ となりうるのは高々 1 点 $x=0$ だけである（それも $p=0$ のときに限る）。よって f は $\mathbb{R}$ 上で狭義単調増加（strictly increasing）である。実際、$x_1<x_2$ ならば $f(x_2)-f(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f'(x)\,\mathrm{d}x>0$ である。被積分関数は非負であり、0 になるのは高々 1 点だからである。

また、$x\to-\infty$ のとき $f(x)\to-\infty$、$x\to+\infty$ のとき $f(x)\to+\infty$ である。f は連続なので、どこかで値 0 をとり、狭義単調増加であるからそれは一度だけである。よって実数解はちょうど 1 つである。

(h,k) を通る法線

C 上で $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \dfrac{2a}{2at} = \dfrac{1}{t}$ であるから、パラメータ t の点における法線の傾き（gradient）は $-t$ である。（これは $t=0$ でも成り立つ。そこでは接線（tangent）が鉛直で、法線は x 軸である。）法線の方程式は

$$y - 2at = -t\,(x - at^2), \qquad \text{すなわち} \qquad y + tx = 2at + at^3.$$

である。これが (h,k) を通るのは $k + th = 2at + at^3$ のとき、かつそのときに限る。すなわち

$$\boxed{at^3 + (2a-h)\,t - k = 0} \qquad \text{または、正の数で割って} a > 0, \qquad t^3 + \frac{2a-h}{a}\,t - \frac{k}{a} = 0.$$

考えてみよう 異なる 2 つの t の値が同じ法線を与え、解の個数を数えると法線を重複して数えてしまうことはないだろうか。

そのようなことはない。t における法線の傾きは $-t$ なので、異なる t の値は傾きの異なる法線を与え、それらは異なる直線である。よって (h,k) を通る法線の本数は、この 3 次方程式の相異なる実数解の個数にちょうど等しい。

$h \le 2a$ ならば係数 $p = \dfrac{2a-h}{a}$ は ≥ 0 であるから、最初の小問よりこの 3 次方程式の実数解はちょうど 1 つである。したがって、(h,k) を通る C の法線はちょうど 1 本であり、示すべきことが示された。

法線がちょうど 2 本となる点の軌跡

3 次方程式を $P = \dfrac{2a-h}{a}$、$Q = -\dfrac{k}{a}$ として $t^3 + Pt + Q = 0$ と書く。実係数の 3 次方程式の実数解は、重複度（multiplicity）を込めて数えると 1 個または 3 個である。よって、相異なる実数解を**ちょうど 2 個**もつのは、重解 s と、それとは異なる単根（simple root）をもつとき、かつそのときに限る。

t^2 の項がないので解の和は 0 であり、単根は $-2s$ である。$-2s \ne s$ となるために $s \ne 0$ が必要である。係数を比較すると

$$t^3 + Pt + Q = (t-s)^2(t+2s) = t^3 - 3s^2t + 2s^3,$$

であるから、$P = -3s^2$、$Q = 2s^3$ である。もとの変数に戻すと

$$h = 2a + 3as^2, \qquad k = -2as^3, \qquad s \ne 0.$$

s を消去するために、$(h-2a)^3 = 27a^3s^6$ および $k^2 = 4a^2s^6$ に注意すると、$4(h-2a)^3 = 108a^3s^6 = 27a\,k^2$ を得る。

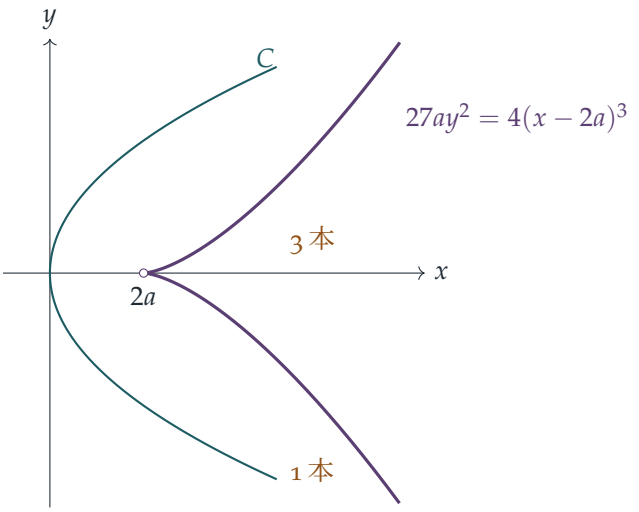
逆に、$(h,k) \neq (2a,0)$ として $27ak^2 = 4(h-2a)^3$ が成り立つとする。このとき $h-2a \geq 0$ であり、実際には $h > 2a$ である（$h = 2a$ ならば $k = 0$ となるから）。$2as^3 = -k$ を満たす実数を s とする。すると $4a^2s^6 = k^2 = \frac{4}{27a}(h-2a)^3$ より $(h-2a)^3 = (3as^2)^3$ となり、したがって $h-2a = 3as^2$ である。よって (h,k) は $s \neq 0$ として上の形に表され、そこを通る法線はちょうど2本である。（同値な言い方をすれば、これは重解条件 $4P^3 + 27Q^2 = 0$ である。）

点 $(2a,0)$ そのものは除かれる。そこでは $P = Q = 0$ で、3次方程式は3重解をもつ $t^3 = 0$ となり、そこを通る法線は1本（x 軸）だけである。

したがって求める軌跡は

$$\boxed{27a\,y^2 = 4\,(x-2a)^3}, \qquad \text{ただし次の点を除く：} (2a,0).$$

である。これは $(2a,0)$ に尖点（cusp）をもつ半3次放物線（semicubical parabola）であり、x 軸に関して対称で、$x \geq 2a$ の範囲にあり、$y = \pm\dfrac{2}{3\sqrt{3a}}(x-2a)^{3/2}$ と表される。その内側（$2a$ より先の x 軸の正の部分を含む領域）では3次方程式は相異なる3つの実数解をもつので、各点を3本の法線が通る。外側では法線は1本だけである。



図は $a = 1$ の場合である。白丸は除かれる尖点を表し、ラベルは各領域の点を通る法線の本数を表す。

検算

- $a = 1$、$s = 1$ とすると点 $(5,-2)$ が得られる。3次方程式は $t^3 - 3t + 2 = (t-1)^2(t+2)$ であり、$(1,2)$ と $(4,-4)$ における法線はともに $(5,-2)$ を通る。実際、$t = 1$ におけ

る法線は $y+x=3$、$t=-2$ における法線は $y-2x=-12$ である。どちらも $(5,-2)$ を含み、また $27\cdot 4=108=4\cdot 27$ である。

- $(5,0.1)$（$a=1$）では $4P^3+27Q^2=-108+0.27<0$ となり、法線は 3 本である。$(5,4)$ では $-108+432>0$ となり、法線は 1 本である。これは図と一致する。
- 法線の方程式と、実数解が 1 つであるという主張を、数百のランダムな場合について数値的に確かめた。

よくある間違い

- 尖点 $(2a,0)$ を除き忘れる。そこでも方程式は満たされるが、法線は 1 本しかない。
- $p\geq 0$ のとき $f'(x)>0$ であると主張してしまう。$p=0$ のとき $f'(0)=0$ なので、それでも f が狭義単調増加であるという、少し強い議論が必要である。
- 法線の傾きを $-t$ ではなく $1/t$（接線の傾き）と書いてしまう。

STEP のその先へ

この軌跡は放物線の**縮閉線**（evolute）である。すなわち、曲率中心（centre of curvature）が描く曲線であり、また法線の包絡線（envelope）でもある。縮閉線を横切ると、その点から引ける法線の本数が 2 だけ変化する。これはカタストロフィー理論（catastrophe theory）や 3 次式の判別式（discriminant）の背後にある考え方の最初の例である。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には、この趣旨の STEP の問題がさらに収められている。Bruce と Giblin の *Curves and Singularities*（曲線と特異点）では、縮閉線と包絡線が本格的に展開されている。

解答例

STEP III 2001、第 6 問

純粋数学 ・ ベクトルと三角形の中心

STEP III 2001、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/01-s3-q6

鍵となる考え方

すべては平面の法線ベクトル（normal vector）$\mathbf{n} = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ によって決まる。点 $\mathbf{r}$ が平面上にあるのは、ちょうど $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = 1$ となるときであり、また O と M から下ろした垂線（perpendicular）はどちらも $\mathbf{n}$ の方向に伸びる。垂心（orthocentre）と外心（circumcentre）は、3 次元幾何の 2 つの事実から導かれる。1 つは OA, OB, OC が互いに垂直であること、もう 1 つは M が OA, OB, OC を辺とする直方体の中心であり、したがって O, A, B, C から等距離にあることである。最後の小問では、2 本の垂線が平行なので、相似な三角形の組（あるいは 1 行のベクトル計算）で残りが片づく。

解答

以下では、a, b, c はいずれも 0 でないとする（そうでなければ平面は 3 本の座標軸すべてと交わらない）。したがって

$$A = (a, 0, 0), \qquad B = (0, b, 0), \qquad C = (0, 0, c),$$

であり、$S = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = |\mathbf{n}|^2 > 0$ とおく。

重心

直線 OM 上の点は $t\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}c\right)$ と表せる。これを平面の方程式に代入すると $\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t = 1$ となるので $t = \frac{2}{3}$ であり、交点は

$$G = \left(\tfrac{1}{3}a, \tfrac{1}{3}b, \tfrac{1}{3}c\right) = \tfrac{1}{3}(A + B + C),$$

である。これは三角形 ABC の重心（centroid）である。後のために、$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$ であることに注意しておく。

O からの垂線：垂心

O からの垂線は直線 $\lambda\mathbf{n}$ である。これが平面と交わるのは $\lambda\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$、すなわち $\lambda = 1/S$ のときであり、交点は

$$H = \frac{1}{S}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right).$$

である。$AH \perp BC$ を示す。$\overrightarrow{BC} = (0, -b, c)$ を用いると

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = \left(\frac{1}{aS} - a\right)\cdot 0 + \frac{1}{bS}\cdot(-b) + \frac{1}{cS}\cdot c = -\frac{1}{S} + \frac{1}{S} = 0.$$

考えてみよう この内積（dot product）が 0 になったのは、たまたまそうなっただけなのだろうか。それとも、そうならざるを得ない理由があるのだろうか？

理由はある。BC は平面上にあるので、法線 OH に垂直である。また BC は yz 平面上にあるので、x 軸に沿う OA にも垂直である。平行でない 2 直線 OA と OH の両方に垂直な直線は、平面 OAH 全体に垂直であり、特に AH に垂直である。

文字を入れ替えて同じ議論を行えば、$BH \perp CA$ および $CH \perp AB$ が得られる。H は三角形の平面上にあるので、$AH \perp BC$ は H が A から対辺に下ろした垂線（altitude）上にあることを意味し、残りの 2 本の垂線についても同様である。よって H は三角形 ABC の垂心である。

M からの垂線：外心

M からの垂線は $M + \mu\mathbf{n}$ である。これが平面と交わるのは $\frac{3}{2} + \mu S = 1$ のとき、すなわち $\mu = -\dfrac{1}{2S}$ のときであり、交点は

$$P = M - \frac{1}{2S}\,\mathbf{n}.$$

である。さて、M は O, A, B, C の 4 点すべてから等距離にある。たとえば

$$MA^2 = \left(\tfrac{1}{2}a - a\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}b\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}c\right)^2 = \tfrac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right),$$

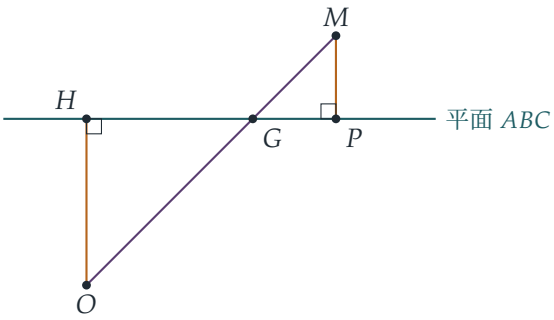
であり、MB^2, MC^2（および MO^2）も対称性により同じ値になる。MP は平面に垂直で、PA は平面上にあるので、三角形 MPA は P で直角となる。よってピタゴラスの定理（Pythagoras' theorem）より

$$PA^2 = MA^2 - MP^2,$$

であり、同様に $PB^2 = MB^2 - MP^2$, $PC^2 = MC^2 - MP^2$ である。右辺はすべて等しいので $PA = PB = PC$ である。平面上で3頂点から等距離にある点は外心だけであるから、P は三角形 ABC の外心である。

最後の小問

垂線 OH と MP はどちらも $\mathbf{n}$ に平行なので、O, H, M, P は同一平面上にあり、直線 OM は三角形の平面と G で交わる。また、$O \cdot \mathbf{n} = 0 < 1$ かつ $M \cdot \mathbf{n} = \frac{3}{2} > 1$ であるから、O と M は三角形の平面に関して互いに反対側にある。これら4点を通る断面は次のとおりである。



三角形 OHG と MPG は、それぞれ H と P で直角をもち、G における対頂角が等しいので相似であり、その相似比は $OG : GM = 2 : 1$ である。したがって $HG : GP = 2 : 1$ であり、G は線分 HP 上にある。

同じ結論はベクトルから直接得られる。$H = \dfrac{1}{S}\mathbf{n}$, $P = M - \dfrac{1}{2S}\mathbf{n}$, $G = \frac{2}{3}M$ とすると

$$\tfrac{1}{3}(H + 2P) = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{S}\mathbf{n} + 2M - \tfrac{1}{S}\mathbf{n}\right) = \tfrac{2}{3}M = G.$$

よって、G は垂心 H から外心 P への線分上にあり、それを $HG : GP = 2 : 1$ の比に分ける。これが示すべきことであった。（三角形が正三角形ならば $H = P = G$ であり、示すべきことは何もない。）

考えてみよう これで**すべての**三角形について結果が証明されたのだろうか？

そうとは言えない。この議論が適用できるためには、三角形が上の形の三角形 ABC のいずれかと合同でなければならない。このとき辺は $BC^2 = b^2 + c^2$, $CA^2 = c^2 + a^2$, $AB^2 = a^2 + b^2$ を満たすので

$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2a^2 > 0,$$

であり、B と C においても同様である。余弦定理（cosine rule）より、すべての角は鋭角である。逆に、任意の鋭角三角形はこの形で実現できる。実際、これら3つの方程

式を a^2, b^2, c^2 について解けば、それらはすべて正となる。したがって、この方法で証明できるのは鋭角三角形の場合である。直角三角形や鈍角三角形も含め、すべての場合を扱える平面上の短い議論を示しておく。外心を原点に置くと、頂点 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ はすべて同じ長さをもつ。$\mathbf{h} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ とおくと

$$(\mathbf{h} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{c}|^2 = 0,$$

となるので、$\mathbf{h}$ は $\mathbf{a}$ から下ろした垂線上にあり、対称性より残りの 2 本の垂線上にもある。すなわち、これが垂心である。重心は $\frac{1}{3}\mathbf{h} = \frac{1}{3}(\mathbf{h} + 2 \cdot \mathbf{0})$ であり、これは同じ 2 : 1 の主張にほかならない。

検算

$a = 1, b = c = 2$ とすると、$S = \frac{3}{2}$ である。このとき $H = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $P = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right)$, $G = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ であり、いずれも $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 1$ を満たす。$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ および $PA^2 = PB^2 = PC^2 = \frac{25}{12}$ であること、さらに $\frac{1}{3}(H + 2P) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = G$ であることも確かめられる。また、正負両方の符号をとる a, b, c を無作為に 3000 通り選び、これらの事実をすべて厳密な算術で確認した。

よくある間違い

- $AH \perp BC$ だけを示して終わってしまう。3 本の垂線すべてを扱うか、「対称性より」とはっきり述べる必要がある。また、H が三角形の平面上にあることも述べなければならない。平面外の点では、$AH \perp BC$ であっても垂線上にないことがありうる。
- 比を逆にしてしまう。重心から垂心までの距離は、重心から外心までの距離の 2 倍である。
- 「hence（したがって）」以下の部分がすべての三角形を扱えると主張してしまう。上で示したとおり、この方法が届くのは鋭角三角形だけである。

STEP のその先へ

垂心、重心、外心を通る直線は**オイラー線**（Euler line）と呼ばれ、オイラー（Euler）の名にちなむ。（外心を原点としたときの）$\mathbf{h} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ という事実は九点円（nine-point circle）の出発点となる。九点円の中心もオイラー線上にあり、H と外心のちょうど中点に位置する。平面図形を単純な 3 次元図形の切り口とみなす工夫は、幾何学で繰り返し現れる考え方である。コクセター（Coxeter）の *Introduction to Geometry*（幾何学

入門）と、Coxeter と Greitzer の *Geometry Revisited*（幾何学再入門）は、どちらもオイラー線と九点円を見事に扱っている。

解答例

STEP III 2001、第 7 問

純粋数学 • 直交軌道

STEP III 2001、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/01-s3-q7

鍵となる考え方

この微分方程式（differential equation）は変数分離形（separable）なので、解けば曲線族が何であるかがそのままわかる。直交する曲線については、接線（tangent）が垂直であることは、傾き（gradient）の積が -1 になることを意味する。これにより 2 つ目の変数分離形の方程式が得られ、それを積分すると最初にグラフを描いた関数が現れる。最初のグラフは、最後の曲線をほとんど手間をかけずに描けるようにするためのものである。

解答

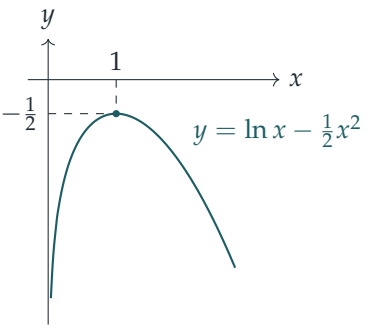
$\ln x - \frac{1}{2}x^2$ のグラフ

$x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x^2$ を考える。このとき

$$f'(x) = \frac{1}{x} - x = \frac{1 - x^2}{x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 < 0.$$

$x > 0$ における停留点（stationary point）は $x = 1$ のみであり、そこで $f(1) = -\frac{1}{2}$ である。至るところで $f'' < 0$ であるから、これは極大であり、グラフは全体で上に凸（concave）である。したがって、すべての $x > 0$ に対して $f(x) \leq -\frac{1}{2} < 0$ であり、グラフは x 軸と交わらない。

定義域（domain）の両端では、$x \to 0^+$ のとき $f(x) \to -\infty$（$\ln x \to -\infty$ だから）なので、y 軸は垂直な漸近線（asymptote）である。また、$\frac{1}{2}x^2$ は $\ln x$ よりはるかに速く増大するので、$x \to \infty$ のときも $f(x) \to -\infty$ である。



放物線の族

定数関数 $y = 0$ は解である。それ以外の場合は、方程式が定義されない $x = \pm 1$ を除いたところで変数を分離する：

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = \ln|x^2-1| + c.$$

よって $|y| = \mathrm{e}^c\,|x^2-1|$ である。符号を定数に含め、$y = 0$ も合わせると、解は

$$y = A(x^2-1), \qquad A \text{ は定数.}$$

逆に、このような曲線はどれも方程式を満たす。実際、

$$y' = 2Ax = \frac{2x \cdot A(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{2xy}{x^2-1}.$$

$A \neq 0$ のとき、各曲線は放物線（parabola）である。$(1,0)$ と $(-1,0)$ では $x^2-1=0$ となるので、放物線はこの 2 点を通る。傾き $2Ax$ が 0 になるのは $x = 0$ のときだけなので、頂点（vertex）は $(0,-A)$ であり、これは y 軸上にある。これが求める曲線族である。

直交する曲線

$x \neq \pm 1$ かつ $y \neq 0$ である点 (x,y) をとる。この点を通る族の放物線はちょうど 1 つ、すなわち $A = y/(x^2-1)$ のものであり、その点での傾きは $\dfrac{2xy}{x^2-1}$ である。求める曲線がその放物線と直角に交わるためには、2 つの傾きの積が -1 でなければならない。よって曲線は次を満たす必要がある。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x^2-1}{2xy} = \frac{1-x^2}{2xy}.$$

考えてみよう 傾きを求めるのに、式 $y = A(x^2 - 1)$ ではなく放物線族の微分方程式を用いてよいのはなぜか。

微分方程式は、(x, y) を通る族の曲線の傾きを、A に一切触れずに x と y だけで与える。直交する曲線はその各点で異なる放物線と交わるのだから、これこそまさに必要なものである。

再び変数を分離すると、

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} - x \quad \Longrightarrow \quad y^2 = \ln x - \tfrac{1}{2}x^2 + C,$$

となる。ただし曲線は $(1,1)$ を通るので $x > 0$ とした。右辺は $f(x) + C$ であり、最初にグラフを描いた関数である。$(1,1)$ では $1 = 0 - \frac{1}{2} + C$ となる必要があるから $C = \frac{3}{2}$ であり、曲線は

$$\boxed{y^2 = \ln x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}} \qquad \text{すなわち} \qquad y^2 = f(x) + \tfrac{3}{2}.$$

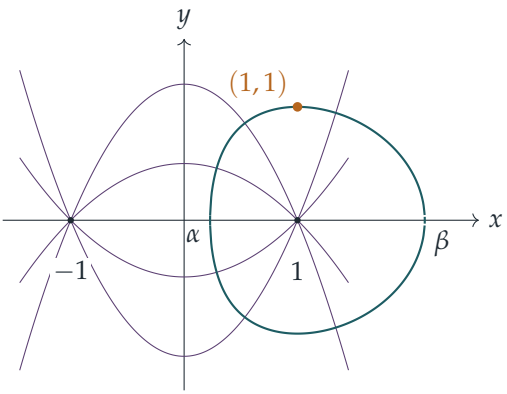
厳密には、$(1,1)$ を通る微分方程式の解は上半分 $y = \sqrt{f(x) + \frac{3}{2}}$ である。これを x 軸に関して折り返したものもすべての放物線と直交するので、自然な答えは閉曲線全体である。

曲線のグラフ

実数の点が存在するには $f(x) \geq -\frac{3}{2}$ が必要である。最初のグラフから、f は $-\infty$ から増加して $x = 1$ で最大値 $-\frac{1}{2}$ をとり、再び $-\infty$ へと減少する。よって $f(x) = -\frac{3}{2}$ は $\alpha \in (0,1)$ となる解と $\beta > 1$ となる解をちょうど 1 つずつもつ。数値的には $\alpha \approx 0.229$、$\beta \approx 2.123$ である。したがって、

- 曲線は帯状領域 $\alpha \leq x \leq \beta$ に含まれ、x 軸に関して対称である。
- y^2 は $x = 1$ で最大値 1 をとり、点 $(1, \pm 1)$ が得られる。そこでは接線は水平である。
- $(\alpha, 0)$ と $(\beta, 0)$ では $y^2 = 0$ である一方 $\mathrm{d}(y^2)/\mathrm{d}x = f'(x) \neq 0$ なので、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ は無限大となり、接線は垂直である。

よって曲線は左右非対称な閉じた卵形であり、左側では急に立ち上がり、右側ではより緩やかに下がっていく。比較のため、いくつかの放物線も描き込んである。



$x < 0$ も許して $\ln x$ を $\ln|x|$ に置き換えれば、同じ計算から左半平面にある鏡像の卵形も得られる。その卵形は $(1,1)$ を通らないので、答えには含まれない。

検算

- $(1,1)$ における曲線の傾きは $\frac{1-1}{2} = 0$ である。どの放物線も直線 $x = 1$ とは $(1,0)$ でしか交わらないので、$(1,1)$ そのものを通る放物線は存在しない。$x = 1$ の近くでは放物線はほぼ垂直であり、曲線の接線が水平であることと整合する。
- 数値的に確かめると、$x = 0.5$ において曲線は $y = \sqrt{\ln 0.5 - 0.125 + 1.5} \approx 0.826$、傾き $\frac{0.75}{2(0.5)(0.826)} \approx 0.908$ である。その点を通る放物線の傾きは $\frac{2(0.5)(0.826)}{-0.75} \approx -1.101$ であり、$0.908 \times (-1.101) \approx -1$ となる。
- 卵形上の数千個の無作為な点で直交性を確認し、二分法（bisection）により解 $\alpha \approx 0.2291$ と $\beta \approx 2.1226$ を計算した。

よくある間違い

- 一般の点 (x,y) を通る族の曲線の傾きではなく、特定の A に対する $2Ax$ のように、ある 1 つの固定された放物線の傾きを用いてしまう。
- $y^2 = f(x) + \frac{3}{2}$ には $f(x) \geq -\frac{3}{2}$ が必要であることを忘れ、閉じた卵形ではなく有界でない曲線を描いてしまう。

STEP のその先へ

与えられた曲線族と直角に交わる曲線族を求めることは、**直交軌道**（orthogonal trajectories）の問題である。物理学では、これらは静電気学や 2 次元の流体の流れな

どにおける力線（field lines）と等電位線（equipotentials）として現れる。解析的な（analytic）複素関数の実部と虚部は常にこのような 2 つの族を与え、これは等角写像（conformal mapping）への入口の 1 つとなっている。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『常微分方程式入門』）は変数分離形の方程式と直交軌道を扱っている。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は複素変数の観点からの描像を示している。

解答例

STEP III 2001、第 8 問

純粋数学 • 複素平面上の軌跡

STEP III 2001、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/01-s3-q8

鍵となる考え方

$z = x + \mathrm{i}y$ とおいて展開すると、(i) の二つの方程式はどちらも同じ円に帰着する。(ii) の偏角（argument）の条件については、$\frac{z-2}{z}$ を具体的に計算する。偏角が $\frac{\pi}{4}$ であるとは「実部（real part）と虚部（imaginary part）が等しく、しかもどちらも正である」ということであり、これは再びその円に不等式が一つ加わったものになる。(iii) では、円を表す式のうち計算が最もすっきりするものに $z = 2/w$ を代入する。(i) の二つ目の式は、まさにこの目的のために用意されている。

解答

小問 (i)

$z = x + \mathrm{i}y$ とおく。一つ目の方程式は

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \iff x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0.$$

となる。二つ目は

$$\begin{aligned} & (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2\left[(x-1)^2 + y^2\right] \\ \iff\ & x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 2x^2 + 2y^2 - 4x + 2 \\ \iff\ & 0 = x^2 + y^2 - 2x - 2y. \end{aligned}$$

となる。各段階は可逆であるから、二つの方程式はいずれも $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ と同値であり、同じ軌跡（locus）を表す。この軌跡は中心 $1 + \mathrm{i}$、半径 $\sqrt{2}$ の円である。この円は 0、2、2i（および $2 + 2\mathrm{i}$）を通り、最も低い点は $1 + (1 - \sqrt{2})\mathrm{i}$ で、実軸のわずかに下にある。

小問 (ii)

$z \neq 0$ のとき、

$$\frac{z-2}{z} = \frac{(z-2)\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x^2+y^2-2x+2\mathrm{i}y}{x^2+y^2},$$

である。なぜなら $(z-2)\bar{z} = |z|^2 - 2\bar{z} = x^2+y^2-2x+2\mathrm{i}y$ だからである。

考えてみよう $\arg(\text{何か}) = \frac{\pi}{4}$ は、その実部と虚部について正確には何を述べているか。

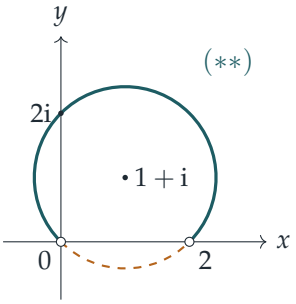
o でない複素数 $a+\mathrm{i}b$ の偏角が $\frac{\pi}{4}$ となるのは、それが半直線 $a = b > 0$ 上にあるときであり、かつそのときに限る。等しいというだけでは不十分である。$a = b < 0$ ならば偏角は $-\frac{3\pi}{4}$ となる。分母 x^2+y^2 は正であるから、$(**)$ が成り立つための必要十分条件は

$$x^2+y^2-2x = 2y \quad \text{かつ} \quad 2y > 0,$$

である。すなわち、z が (i) の円上にあって $y > 0$ を満たすことである。条件 $y > 0$ により、商が定義されない $z = 0$ と、商が o になって偏角をもたない $z = 2$ は自動的に除外される。

したがって $(**)$ は、円のうち実軸より上にある部分を表す。すなわち、0 から 2i と $2+2\mathrm{i}$ を経て 2 に至る優弧（major arc）であり、両端点は除く。実軸より下にある短い弧では、偏角は $-\frac{3\pi}{4}$ となる。

これは図形的な考察とも合っている。$\arg\frac{z-2}{z}$ は、点 z から 0 と 2 へ引いた二本の弦（chord）のなす角である。0 と 2 を結ぶ弦は中心 $1+\mathrm{i}$ に対して直角をなすから、中心角と円周角の定理（angle-at-the-centre theorem）により、優弧上のすべての点に対して $\frac{\pi}{4}$ の角をなす。



円全体が $(*)$ である。実線の弧（端点 0 と 2 は除く）が $(**)$ であり、破線の弧は $(**)$ に含まれない。

小問 (iii)

$w = 2/z$ であるから $z \neq 0$ かつ $z = 2/w$ である。円の二つ目の表し方 $|z-(1-\mathrm{i})|^2 = 2|z-1|^2$ を用いる。代入すると

$$z-1 = \frac{2-w}{w}, \qquad z-(1-\mathrm{i}) = \frac{2-(1-\mathrm{i})w}{w} = \frac{(1-\mathrm{i})\big[(1+\mathrm{i})-w\big]}{w},$$

となる。ここで $\frac{2}{1-\mathrm{i}} = 1+\mathrm{i}$ を用いた。$|1-\mathrm{i}|^2 = 2$ であるから、方程式は

$$\frac{2\,|w-(1+\mathrm{i})|^2}{|w|^2} = \frac{2\,|w-2|^2}{|w|^2} \iff |w-(1+\mathrm{i})| = |w-2|.$$

となる。よって w は $1+\mathrm{i}$ と 2 から等距離にあり、軌跡はこの二点を結ぶ線分の垂直二等分線（perpendicular bisector）である。線分の中点は $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ であり、線分の方向は $1-\mathrm{i}$ であるから、垂直二等分線の方向は $1+\mathrm{i}$ である。$w = u+\mathrm{i}v$ とおくと、軌跡は直線

$$v = u-1.$$

である。この直線上のすべての点が実際に現れる。直線上の各 w は、0 がこの直線上にないから o でなく、そのとき $z = 2/w$ は上の可逆な変形により $(*)$ を満たす。円上の点で像をもたないのは $z = 0$ だけであり、この点は「無限遠に送られる」。予想どおり、原点を通る円は $w = 2/z$ によって直線に写される。

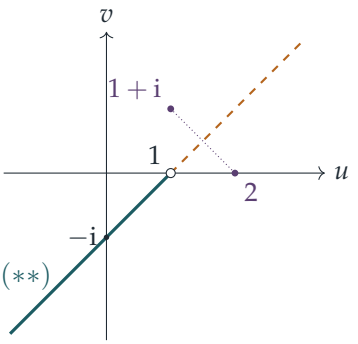
$(**)$ に対応する部分については、

$$\frac{z-2}{z} = 1-\frac{2}{z} = 1-w,$$

に注意すると、$(**)$ は $\arg(1-w) = \frac{\pi}{4}$、すなわち $r>0$ として $1-w = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ となる。したがって

$$w = 1-\frac{r}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i}), \qquad r>0,$$

であり、これは直線 $v = u-1$ のうち、$w=1$（除く）を始点として左下へ延びる半直線（half-line）である。すなわち $u<1$、言い換えれば $v<0$ を満たす点の全体である。これは (ii) と整合している。実際 $\operatorname{Im} w = -2y/|z|^2$ であるから、$y>0$ は $v<0$ に対応する。たとえば $z = 2\mathrm{i}$ は $w = -\mathrm{i}$ に写され、$z=2$ は除外される端点 $w=1$ に写される。



直線 $v = u - 1$ 全体が $(*)$ の像である。実線の半直線（$u < 1$、$w = 1$ は除く）が $(**)$ の像である。点線の線分は、この直線が二等分する二点を結んでいる。

検算

- $z = 2\mathrm{i}$ は円上にあり、実軸より上にある。$\frac{2\mathrm{i}-2}{2\mathrm{i}} = 1 + \mathrm{i}$ であり、その偏角は $\frac{\pi}{4}$ である。像 $w = -\mathrm{i}$ は $v = u - 1$ を満たし、$u < 1$ である。
- 円の最も高い点 $z = 1 + (1 + \sqrt{2})\mathrm{i}$ は $w \approx 0.2929 - 0.7071\mathrm{i}$ に写され、確かに $0.2929 - 1 = -0.7071$ である。
- 実軸より下の点 $z = 1 + (1 - \sqrt{2})\mathrm{i}$ では $\arg \frac{z-2}{z} = -\frac{3\pi}{4}$ となる。その像は $u > 1$ を満たし、直線のもう一方の半分にある。

よくある間違い

- $\arg Z = \frac{\pi}{4}$ を単に $\mathrm{Re}\, Z = \mathrm{Im}\, Z$ とみなし、円全体が答えだと主張してしまう。実部と虚部がともに正であることも必要である。
- (ii) で $z = 0$ と $z = 2$ を、あるいは (iii) で $w = 1$ を除外し忘れる。
- 円の像はまた円になると思い込む。$w = 2/z$ のもとでは、原点を通る円は直線に写される。

STEP のその先へ

写像 $w = 2/z$ はメビウス変換（Möbius transformation）である。この種の写像は円と直線を円と直線に写し、円が直線に写されるのは、その円が無限遠に送られる点を通るときであり、かつそのときに限る。ここでは弧の端点 0 と 2 がそれぞれ ∞ と 1 に写される。これらの端点が張る角を測る商 $\frac{z-2}{z-0}$ は $1 - w$、すなわち像の点から 1 への

向きとなる。(ii) の弧が (iii) で半直線になるのはこのためである。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、この図形的な見方を見事に展開している。

解答例

STEP III 2001、第 9 問

力学 ・ 摩擦と単振動

STEP III 2001、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/01-s3-q9

鍵となる考え方

2 本の梁は水平と角 α をなす直線に沿って d だけ離れているので、板は角 α で傾いて置かれる。板が滑るにつれて、その重さの負担は B_1 から B_2 へ移っていき、2 つの垂直抗力（normal reaction）は重心（centre of gravity）の位置に対して線形に変化する。2 つの摩擦係数（coefficient of friction）が異なるので、摩擦力の合計も線形に変化する。変位に比例する復元力（restoring force）が働くということは、運動が単振動（simple harmonic motion）であることを意味する。条件 $\mu_1 + \mu_2 = 2\tan\alpha$ は、まさにその振動の中心を 2 本の梁のちょうど中間に置く条件である。

解答

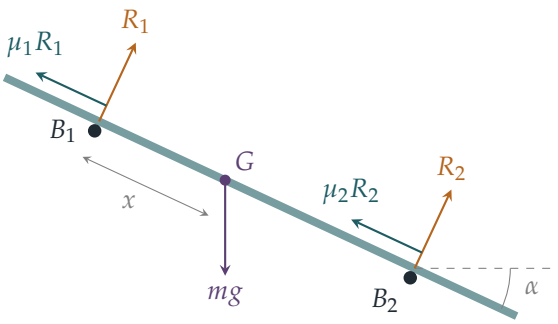
モデル

板を質量 m の剛体（rigid body）の棒とみなし、2 本の梁（点とみなす）の両方に接し続けるものとする。B_1 から B_2 への線分の長さは

$$\sqrt{d^2\sin^2\alpha + d^2\cos^2\alpha} = d$$

であり、水平と角 α をなす。よって板はこの直線に沿って置かれ、B_1 から B_2 へ向かって下り坂になっている。重心 G の B_1 からの距離を、板に沿って斜面の下向きに測って x とする。すると放した瞬間に $x = 0$ であり、$x = d$ のとき G は B_2 の真上にある。

$0 \le x \le d$ である間、G は 2 本の梁の間にある。働く力は、G に働く重力 mg、B_1、B_2 において板に垂直に働く垂直抗力 R_1、R_2、そして板が斜面を下っている間は斜面の上向きに働く摩擦力 $\mu_1 R_1$ と $\mu_2 R_2$ である。



垂直抗力

板は自身に垂直な方向には動かないので、板に垂直な方向に力を分解すると

$$R_1 + R_2 = mg\cos\alpha.$$

また板は回転もしないので、G のまわりの力のモーメント（moment）を考えると（重力と 2 つの摩擦力は G を通る直線上または板に沿って働くので、モーメントをもたない）

$$R_1 x = R_2(d - x).$$

この 2 式を解くと

$$R_1 = \frac{mg\cos\alpha\,(d-x)}{d}, \qquad R_2 = \frac{mg\cos\alpha\,x}{d}.$$

$0 \le x \le d$ ではどちらも 0 以上なので、板は確かに 2 本の梁の両方に接したままである。

運動方程式

板が斜面を下っている間、斜面に沿って下向きに力を分解すると、運動方程式（equation of motion）は

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg\sin\alpha - \mu_1 R_1 - \mu_2 R_2 \\ &= mg\cos\alpha\left[\tan\alpha - \mu_1 - \frac{(\mu_2-\mu_1)x}{d}\right]. \end{aligned}$$

ここで与えられた条件を用いる。$\mu_1 + \mu_2 = 2\tan\alpha$ より $\tan\alpha - \mu_1 = \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1)$ である。したがって

$$\ddot{x} = -\omega^2\left(x - \tfrac{1}{2}d\right), \qquad \text{ここで} \qquad \omega^2 = \frac{g(\mu_2-\mu_1)\cos\alpha}{d} > 0,$$

であり、この不等式は $\mu_2 > \mu_1$ かつ $\cos\alpha > 0$ であることから成り立つ。

考えてみよう 板は本当に動き出すだろうか。また、摩擦力は常に斜面の上向きに働いているだろうか。

$x=0$ において $\ddot{x}=\frac{1}{2}\omega^2 d>0$ であるから、板は確かに斜面を滑り下り始める。上の方程式は $x=\frac{1}{2}d$ を中心とする単振動の方程式であり、$t=0$ で $x=0$、$\dot{x}=0$ という条件のもとでの解は

$$x=\tfrac{1}{2}d\,(1-\cos\omega t),\qquad \dot{x}=\tfrac{1}{2}d\,\omega\sin\omega t.$$

$0<t<\pi/\omega$ では $\dot{x}>0$ なので、板はこの間ずっと斜面を下っており、摩擦力が斜面の上向きに働くという仮定は正しかった。また、この間ずっと $0\le x\le d$ であるから、G は 2 本の梁の間にとどまり、R_1、R_2 の式も有効なままである。

静止に至る

速度が初めて再び 0 になるのは $\omega t=\pi$ のときであり、そのとき $x=\frac{1}{2}d(1-\cos\pi)=d$ となる。つまり重心は B_2 の真上にある。この瞬間 $R_1=0$、$R_2=mg\cos\alpha$ であるから、板は B_2 だけに支えられている。板はそのまま静止し続ける。なぜなら、B_2 における摩擦力は最大で $\mu_2 mg\cos\alpha$ まで働くことができ、一方で重力の斜面下向きの成分は $mg\sin\alpha$ であり、

$$\mu_2=\tfrac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)+\tfrac{1}{2}(\mu_2-\mu_1)>\tfrac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)=\tan\alpha.$$

となるからである。よって板は、時間

$$\frac{\pi}{\omega}=\pi\left(\frac{d}{g(\mu_2-\mu_1)\cos\alpha}\right)^{\frac{1}{2}},$$

の後に、重心が B_2 の真上にある状態で静止する。これが示すべきことであった。

検算

- $\mu_2-\mu_1$ が小さければ、板はほとんど減速せず、時間は公式が示すとおり長くなる。このときそれぞれの μ は $\tan\alpha$ に近いので、合力はいたるところで 0 に近い。
- ランダムに選んだ α、d、μ_1（$\mu_2=2\tan\alpha-\mu_1$ とする）について運動方程式を数値的に時間発展させ、速度が初めて 0 に戻った時点で止めた。たとえば $\alpha=0.7$、$d=2$、$\mu_1=0.3$、$g=9.8$ のとき、予測される時間は約 1.56 秒である。どの場合も、停止時刻と停止位置は π/ω および $x=d$ と（相対誤差で）10^{-5} 以内で一致した。

よくある間違い

- $R_1 = R_2 = \frac{1}{2}mg\cos\alpha$ としてしまうこと。垂直抗力は G の位置によって変わり、その依存性こそが振動を生み出している。
- 「速度が 0 になる」ところで終えてしまい、その後板が静止し続けることを確かめないこと。$\mu_2 \geq \tan\alpha$ であることを示す必要がある。

STEP のその先へ

この運動は、荷重によって変化する摩擦力が「ばね」の役割を果たす振動子の半周期分である。摩擦力が位置や速度に依存する系は豊かな振る舞いを示し、きしむ蝶番や弓で弾くバイオリンの弦の背後にあるスティック・スリップ振動（stick–slip oscillations）もその一例である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、摩擦、剛体のつり合い、単振動を丁寧に扱っている。

解答例

STEP III 2001、第 10 問

力学 ・ 相対速度

> **STEP III 2001、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q10

鍵となる考え方

相対速度（relative velocity）は差である。C に対する A の相対速度は $\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}$ である。二つの条件をいずれも内積（dot product）で書き表すと、すべてを中点 $\frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$ から測ることになり、二つの条件は平方の差（difference of two squares）の形になる。幾何学的に読めば、これらの方程式は円と直線を表しており、速度が二つあるという個数はそこから生じる。

解答

条件

船は海面という水平な平面上を動く質点として扱う。したがって、速度はすべて 2 次元ベクトルである。C に対する A と B の相対速度は

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{u}, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{u}.$$

である。大きさが等しく、かつ垂直であるという条件は

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}|^2 = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}|^2 \qquad \text{かつ} \qquad (\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}) = 0.$$

を意味する。

二つの方程式

次のようにおく。

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2), \qquad \mathbf{d} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2).$$

すると $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{d}$、$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) - \mathbf{d}$ であるから、

$$\mathbf{a} = \mathbf{d} - \mathbf{w}, \qquad \mathbf{b} = -\mathbf{d} - \mathbf{w}.$$

となる。$\mathbf{w} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{w}$ を用いて、それぞれの条件を展開する。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -(\mathbf{d} - \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{d} + \mathbf{w}) = |\mathbf{w}|^2 - |\mathbf{d}|^2,$$
$$|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{d}|^2 - 2\mathbf{d} \cdot \mathbf{w} + |\mathbf{w}|^2) - (|\mathbf{d}|^2 + 2\mathbf{d} \cdot \mathbf{w} + |\mathbf{w}|^2) = -4\,\mathbf{w} \cdot \mathbf{d}.$$

よって、垂直であるという条件 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ はちょうど $|\mathbf{w}|^2 = |\mathbf{d}|^2$ ということであり、これは

$$\left|\mathbf{u} - \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\right|^2 = \left|\tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\right|^2,$$

である。また、大きさが等しいという条件 $|\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{b}|^2$ はちょうど $\mathbf{w} \cdot \mathbf{d} = 0$ ということであり、これは（2 を掛けて）

$$\left(\mathbf{u} - \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\right) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = 0.$$

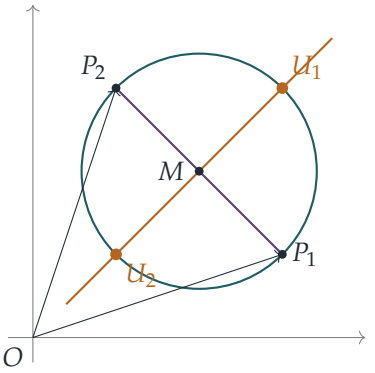
である。これらが求める二つの方程式である。上の各段階はすべて恒等式であったから、議論は逆向きにもたどれる。すなわち、二つの方程式が成り立つのは、二つの条件が成り立つときかつそのときに限る。

C の速度が二つある理由

速度を共通の原点からの位置ベクトルとして描き、$\mathbf{v}_1$、$\mathbf{v}_2$、$\mathbf{u}$ の先端をそれぞれ P_1、P_2、U とし、P_1P_2 の中点を M とする。

考えてみよう それぞれの方程式は、点 U がどこにありうるかについて何を述べているか。

第 1 の方程式は、U が M から距離 $\frac{1}{2}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ にあること、すなわち U が P_1P_2 を直径とする円の上にあることを述べている。第 2 の方程式は、MU が P_1P_2 に垂直である（または $U = M$ である）こと、すなわち U が P_1P_2 の垂直二等分線（perpendicular bisector）の上にあることを述べている。



平面上では、半径が正の円の中心を通る直線は、その円とちょうど 2 点、すなわちある直径の両端で交わる。半径は $\frac{1}{2}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ であり、これが正であるのはまさに $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$ だからである。したがって、C の速度としてありうるものはちょうど二つであり、

$$\mathbf{u} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \pm \tfrac{1}{2}\,\mathbf{d}^{\perp},$$

である。ここで $\mathbf{d}^{\perp}$ は $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ を直角だけ回転させたものである。（$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ ならば円は 1 点 M に縮み、そのとき二つの相対速度はともに零となるので、条件は意味のあることを何も述べない。）図において、直角 P_1UP_2 は半円に対する円周角であり、U が垂直二等分線上にあるので $UP_1 = UP_2$ である。

最後の部分

今度は $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = k$ かつ $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ であり、$k > 0$ とする（垂直であることは零でないベクトルについてのみ意味をもつ）。このとき $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ は垂直で零でないから平面を張り、$\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$ と書ける。

第 2 の方程式は、$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ と $|\mathbf{v}_1|^2 = |\mathbf{v}_2|^2$ を用いると

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \tfrac{1}{2}\left(|\mathbf{v}_1|^2 - |\mathbf{v}_2|^2\right) = 0, \qquad \text{よって} \qquad \alpha k^2 - \beta k^2 = 0,$$

を与え、したがって $\beta = \alpha$ である。第 1 の方程式は展開すると

$$|\mathbf{u}|^2 - \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \tfrac{1}{4}|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|^2 = \tfrac{1}{4}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2.$$

となる。$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ であるから、$|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|^2$ と $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2$ はいずれも $2k^2$ に等しい。よってこれらは打ち消し合い、$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$ となる。$\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$ とすると、これは

$$2\alpha^2 k^2 = 2\alpha k^2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha(\alpha - 1) = 0.$$

である。よって $\alpha = 0$ であって $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ となるか、$\alpha = 1$ であって $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ となる。ゆえに、$\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ならば $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ であり、これで示された。

これは物理的にも納得がいく。C が静止していれば、相対速度は $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ そのものであり、これらはすでに条件を満たしている。$\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ ならば、相対速度は $-\mathbf{v}_2$ と $-\mathbf{v}_1$ であり、これらもやはり長さが等しく垂直である。

検算

図と同じく $\mathbf{v}_1 = (3,1)$、$\mathbf{v}_2 = (1,3)$ とする。公式から $\mathbf{u} = (2,2) \pm (1,1)$、すなわち $(3,3)$ または $(1,1)$ を得る。$\mathbf{u} = (3,3)$ のとき相対速度は $(0,-2)$ と $(-2,0)$ であり、$(1,1)$ のときは $(2,0)$ と $(0,2)$ である。どちらの組も長さが等しく垂直である。コンピュータで 10^4 組のランダムな $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ を調べたところ、二つの恒等式と二つの解が確認された。また、長さが等しく垂直なランダムな組 10^3 組について、解がちょうど $\mathbf{0}$ と $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ であることが確かめられた。

よくある間違い

- C に対する A の相対速度を $\mathbf{u} - \mathbf{v}_1$ と書いてしまう。この問題の条件には符号は影響しないが、相対速度の問題の多くでは符号が重要になる。
- 速度がちょうど二つである理由を述べ忘れる。この個数は、平面で考えていること（3 次元では解は円全体をなす）と、半径が零でないことに依存している。

STEP のその先へ

$\mathbf{u}$ から $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$ に移ることは基準系の変換（change of reference frame）であり、すべての速度を同じベクトルだけずらしても相対速度が変わらないという事実はガリレイ不変性（Galilean invariance）とよばれ、古典力学の出発点である。ここで用いた、速度を点として描く「速度図（velocity diagram）」の見方は、衝突や追跡の問題も幾何学の問題に変えてくれる。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、相対運動と基準系を丁寧に展開している。

解答例

STEP III 2001、第 11 問

力学 ・ 回転エネルギーの保存

STEP III 2001、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/01-s3-q11

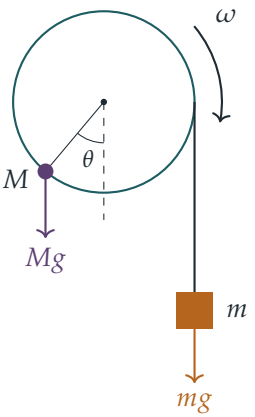
鍵となる考え方

すべてがなめらか（smooth）である（軸には摩擦がなく、糸は軽い）ので、力学的エネルギー（mechanical energy）は保存される。したがって、エネルギーの式を一つ立てるだけで、張力（tension）や力を考えることなく ω を θ の関数として表せる。円柱が止まるのは、ちょうど ω^2 が 0 になるときである。よって後半の問いは、θ の一つの関数についての問題になる。つまり、つり下げられた質点の位置エネルギー（potential energy）の減少が、常に粒子の位置エネルギーの増加を上回っていなければならない。式を整理すると、これは m/M と $(1-\cos\theta)/\theta$ の最大値との比較になり、素直な最大化の問題である。

解答

角速度

m と M を質点とみなし、糸は軽く伸び縮みしない（inextensible）もので円柱上を滑らないとし、軸はなめらかであるとする。円柱が m を下降させる向きに角 θ だけ回転したとし、$\omega = \dot{\theta}$ とおく。



円柱が θ だけ回転したとき、長さ $a\theta$ の糸がほどけているので、m は $a\theta$ だけ落下しており、速さ $a\omega$ で運動している。粒子 M は円周上にあるので速さ $a\omega$ で運動する。M ははじめ軸より a だけ下にあり、現在は軸より $a\cos\theta$ だけ下にあるので、$a(1-\cos\theta)$ だけ上昇している。

運動エネルギー（kinetic energy）は

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2+\tfrac{1}{2}M(a\omega)^2+\tfrac{1}{2}m(a\omega)^2=\tfrac{1}{2}\big(I+(M+m)a^2\big)\omega^2.$$

である。なめらかな軸は仕事をせず、糸は軽く伸び縮みしないので、エネルギーを損失なく伝える。よって、運動エネルギーの増加は位置エネルギーの正味の減少に等しい：

$$\tfrac{1}{2}\big(I+(M+m)a^2\big)\omega^2=mga\theta-Mga(1-\cos\theta),$$

これより

$$\boxed{\omega^2=\frac{2ga\big(m\theta-M(1-\cos\theta)\big)}{I+(M+m)a^2}}\qquad\text{かつ}\qquad\omega=\sqrt{\frac{2ga\big(m\theta-M(1-\cos\theta)\big)}{I+(M+m)a^2}}.$$

を得る。

モデル化に関して一点確認しておくべきことがある。それは、糸がたるまずに張ったままでなければならないということである。エネルギーの式を時間で微分すると $\big(I+(M+m)a^2\big)\ddot{\theta}=ga(m-M\sin\theta)$ が得られ、張力は $T=m(g-a\ddot{\theta})$ である。ここで $a\ddot{\theta}<g$ は $a^2(m-M\sin\theta)<I+(M+m)a^2$、すなわち $-Ma^2\sin\theta<I+Ma^2$ と同値であり、これは常に成り立つ。よって常に $T>0$ であり、エネルギーの式はすべての θ に対して有効である。

決して止まらないこと

はじめ $\ddot{\theta}=gam/(I+(M+m)a^2)>0$ であるから、円柱は確かに選んだ向きに回り始める。ω は連続なので、符号を変えるには 0 を通過するしかない。したがって、すべ

ての $\theta > 0$ に対して $\omega^2 > 0$ であれば、円柱は永久に回り続ける。$k = m/M$ とおくと、ω^2 の式から、これが起こるのはちょうど

$$k\theta > 1 - \cos\theta \quad \text{すべての}\theta > 0, \qquad \text{すなわち} \qquad k > h(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{\theta} \quad \text{すべての}\theta > 0.$$

のときである。よって、$\theta > 0$ における h の最大値が必要になる。

停留点（stationary point）。

$$h'(\theta) = \frac{\theta\sin\theta - (1-\cos\theta)}{\theta^2}.$$

である。$\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$ および $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$ を用いると

$$h'(\theta) = \frac{2\sin\frac{1}{2}\theta\left(\theta\cos\frac{1}{2}\theta - \sin\frac{1}{2}\theta\right)}{\theta^2}.$$

となる。$0 < \theta < \pi$ では $\sin\frac{1}{2}\theta$ と $\cos\frac{1}{2}\theta$ はともに正であるから、$h'(\theta)$ の符号は $\theta - \tan\frac{1}{2}\theta$ の符号と一致する。$u(\theta) = \tan\frac{1}{2}\theta - \theta$ とおく。すると $u(0) = 0$ であり、$u'(\theta) = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}\theta - 1$ は 0 の近くで負、$u''(\theta) = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}\theta\tan\frac{1}{2}\theta > 0$ であるから、u は $[0,\pi)$ で凸（convex）である。u はいったん 0 より小さくなり、その後 $\theta \to \pi$ のとき $+\infty$ に発散する。凸関数が 0 と交わるのは高々 2 回であるから、u は $(0,\pi)$ にちょうど一つの零点をもち、それが α である。よって h は $(0,\alpha)$ で増加し、(α,π) で減少する。

> **考えてみよう** 最大となるところでの h の値はいくらか。また、それより大きい θ ではどうなるか。

$\theta = \alpha$ では h' の分子が 0 になるので、$1-\cos\alpha = \alpha\sin\alpha$ であり、したがって

$$h(\alpha) = \frac{1-\cos\alpha}{\alpha} = \sin\alpha.$$

である。$\pi \le \theta \le 2\pi$ では $\sin\frac{1}{2}\theta \ge 0$ かつ $\cos\frac{1}{2}\theta \le 0$ であるから、$\theta\cos\frac{1}{2}\theta - \sin\frac{1}{2}\theta \le 0$ となり $h' \le 0$ である。すなわち h は 2π まで減少し続けるので、$(\alpha, 2\pi]$ で $h < \sin\alpha$ である。$\theta > 2\pi$ では $h(\theta) \le 2/\theta < 1/\pi$ である。最後に、$u(\frac{3}{4}\pi) = \tan\frac{3}{8}\pi - \frac{3}{4}\pi \approx 2.414 - 2.356 > 0$ かつ $u(\frac{2}{3}\pi) = \sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi < 0$ であるから $\frac{2}{3}\pi < \alpha < \frac{3}{4}\pi$ となり、$\sin\alpha > \sin\frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\pi}$ を得る。よって $\sin\alpha$ は $\theta > 0$ における h の最大値であり、それをとるのは $\theta = \alpha$ のときに限る。

結論。$m/M > \sin\alpha$ ならば、すべての $\theta > 0$ に対して

$$m\theta - M(1-\cos\theta) = M\theta\big(k - h(\theta)\big) \ge M\theta(k - \sin\alpha) > 0,$$

となる。したがって、すべての $\theta > 0$ に対して $\omega^2 > 0$ であり、円柱は止まることなく回転する。これが示すべきことであった。

（逆に、$m/M < \sin\alpha$ ならば $\theta = \alpha$ で $\omega^2 < 0$ となるので、ω はそれより前に 0 に達し、円柱は止まって逆向きに戻る。境界の場合 $m/M = \sin\alpha$ では、系は平衡位置 $\theta = \alpha$ にじわじわと近づくが、決してそこに到達しない。）

検算

- $M = 0$ のとき、公式は $\omega^2 = 2gma\theta/(I + ma^2)$ を与える。これは滑車から糸がほどけながら質点が落下するときの標準的な結果である。ω^2 は一次関数的に増加し、角加速度が一定の場合と一致する。
- $\alpha = \tan\frac{1}{2}\alpha$ を二分法（bisection）で解くと $\alpha \approx 2.3311$（約 133.6°）、$\sin\alpha \approx 0.7246$ となる。$0 < \theta < 100$ の範囲で $(1-\cos\theta)/\theta$ を数値的に探索しても、同じ最大値 0.7246 が得られる。
- ランダムな I, a, M, m に対して運動方程式を数値的に解き進めると ω^2 の公式が再現され、$m/M = 0.735$ では円柱は決して止まらず、$m/M = 0.715$ では止まる。

よくある間違い

- M または m の運動エネルギーを忘れること。どちらも速さ $a\omega$ で運動するので、実効的な慣性モーメント（moment of inertia）は $I + (M+m)a^2$ である。
- M の高さを誤ること。M は $a\sin\theta$ ではなく $a(1-\cos\theta)$ だけ上昇する。
- h が α で極大（local maximum）をとることだけを示し、それより大きいすべての θ で h がより小さいことを確かめないこと。

STEP のその先へ

これはポテンシャル中の 1 自由度（one degree of freedom）の運動である：$\frac{1}{2}J\omega^2 + V(\theta) = 0$、ただし $V(\theta) = Mga(1-\cos\theta) - mga\theta$ であり、これは傾いた「洗濯板」型ポテンシャル（washboard potential）である。静止状態から出発した場合、運動が限りなく進み続けるのは、すべての $\theta > 0$ に対して V が出発時の値より小さいままであるときに限る。同じ描像は、物理学における強制振り子（driven pendulum）やジョセフソン接合（Josephson junction）も記述する。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この種のエネルギー図を扱っている。

解答例

STEP III 2001、第 12 問

確率・統計 ・ 指示変数による期待値

STEP III 2001、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/01-s3-q12

鍵となる考え方

小問 (i) では、黒玉の個数の分布（distribution）を求めようとしてはいけない。個数を黒玉 1 個ごとの指示変数（indicator）に分解し、期待値の線形性（linearity of expectation）を用いるのである。袋が空になるまで非復元抽出（without replacement）を続けることは、すべての玉を無作為に並べることにほかならないので、各指示変数の確率は対称性（symmetry）の議論に帰着する。小問 (ii) では白玉が取り出されるまで袋の中身は変わらないので、各白玉までの待ち時間は幾何分布（geometric distribution）に従う。そして問題文の「これを用いて（hence）」の部分は、白玉が 1 個取り除かれると白玉が 1 個少ない同じ状況に戻る、ということに気づけば解ける。

解答

小問 (i)

袋が空になるまで取り出しを続けると考える。どの取り出しも無作為であり、玉は戻されないので、$b+w$ 個の玉が取り出される順序はそれらの一様ランダムな並び（uniformly random ordering）である。最後の白玉が取り出されるまでに取り出された黒玉とは、この並びにおいて最後の白玉より前にある黒玉にちょうど一致する。

黒玉に $1, 2, \ldots, b$ と番号をつけ、黒玉 j が最後の白玉より前に取り出されるとき $I_j = 1$、そうでないとき $I_j = 0$ とする。最後の白玉が取り出されたときまでに取り出された黒玉の個数を N とすると、

$$N = I_1 + I_2 + \cdots + I_b, \qquad \text{したがって} \qquad \mathrm{E}(N) = \sum_{j=1}^{b} \mathrm{P}(I_j = 1)$$

が期待値の線形性より成り立つ（これには I_j どうしの独立性（independence）は必要ない）。

考えてみよう 黒玉 j がすべての白玉より後に来る確率はいくらか。

黒玉 j と w 個の白玉からなる $w+1$ 個の玉だけに注目する。すべての玉の一様ランダムな並びにおいて、これら $w+1$ 個の相対的な順序もまた一様ランダムであるから、黒玉 j はそれらの中の $w+1$ 個の位置のどれにも等しい確率で来る。黒玉 j がこの組の中で最後になる確率は $\frac{1}{w+1}$ であり、これはちょうど事象 $I_j = 0$ である。よって

$$\mathrm{P}(I_j = 1) = 1 - \frac{1}{w+1} = \frac{w}{w+1},$$

であり、

$$\boxed{\mathrm{E}(N) = \frac{bw}{w+1}.}$$

小問 (ii)

今度は黒玉は袋に戻されるので、白玉が取り出されるまで袋の中には常に黒玉 b 個と白玉 w 個が入っている。毎回中身が同じであるから、各取り出しは以前の取り出しとは独立に、確率 $p = \frac{b}{b+w}$ で黒、確率 $q = \frac{w}{b+w}$ で白となる。

最初の白玉が出るまでに黒玉を取り出す回数を X とする。$X = n$ とは黒が n 回続いた後に白が出ることであるから、

$$\mathrm{P}(X = n) = p^n q, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$b = 0$ ならば $X = 0$ であり結果は自明なので、$b \geq 1$ とする。このとき $0 < p < 1$ であり、$|x| < 1$ に対して $\sum_{n\geq 1} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$（幾何級数（geometric series）を微分して得られる）を用いると、

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n p^n q = pq \sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1} = \frac{pq}{(1-p)^2} = \frac{p}{q} = \frac{b/(b+w)}{w/(b+w)} = \frac{b}{w},$$

となる。ここで $1 - p = q$ を用いた。これが求める結果である。

最後の白玉については、黒玉を取り出す総回数を $X_w + X_{w-1} + \cdots + X_1$ と書く。ここで X_k は袋の中にちょうど k 個の白玉があるあいだに黒玉を取り出す回数である。白玉が k 個残っているあいだ、袋には黒玉 b 個と白玉 k 個が入っているので、この段階は w を k に置き換えた「最初の白玉」の問題にほかならず、いま示した結果から $\mathrm{E}(X_k) = \frac{b}{k}$ を得る。期待値の線形性より、最後の白玉が取り出されるまでに黒玉を取り出す回数の期待値は

$$\boxed{\sum_{k=1}^{w} \frac{b}{k} = b\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{w}\right).}$$

検算

$w = 1$ のときは、どちらの小問も直接確かめやすい。(i) では、1 個しかない白玉より前に各黒玉が来る確率は $\frac{1}{2}$ なので $\frac{b}{2}$ となり、$\frac{bw}{w+1}$ と一致する。(ii) では段階は 1 つだけであり、和はちょうど $\frac{b}{1} = b$ である。(i) で $w \to \infty$ とすると、ほとんどすべての黒玉が最後の白玉より前に出てくるはずであり、実際 $\frac{bw}{w+1} \to b$ となる。

(i) については、$b \leq 4$、$w \leq 4$ のすべての場合についてあらゆる並びを列挙して確かめた。$b = 3$、$w = 4$ のときはちょうど $\frac{12}{5}$ となる。(ii) については、$b = 3$、$w = 4$ で 2×10^5 回のシミュレーションを行ったところ、平均はおよそ 6.245 であり、$3\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{25}{4} = 6.25$ とよく合う。

よくある間違い

- (i) で、取り出される黒玉どうしが互いに独立であると仮定してしまう。期待値の線形性には独立性が不要であり、だからこそ指示変数がこれほど有効なのである。
- (ii) で、白玉を取り出す回も数に含める幾何分布を用いてしまう。すると $\frac{1}{q} = \frac{b+w}{w}$ となり、答えより 1 だけ大きくなる。
- 最後の部分で、すべての段階の分母に $b + w$ を用いてしまう。袋の中の白玉の個数は段階ごとに 1 個ずつ減っていく。

STEP のその先へ

後半の問題は、姿を変えたクーポン収集問題（coupon collector's problem）である。各段階の幾何分布に従う待ち時間を足し合わせると調和和（harmonic sum）が現れ、これは $\ln w$ のように増大する。小問 (i) のように個数を指示変数の和として書く方法は、確率論で最も強力な手法の一つであり、ランダムな置換（random permutation）における不動点（fixed point）、記録（record）、巡回（cycle）の個数の期待値を計算するときに再び出会うことになる。Blitzstein と Hwang による *Introduction to Probability*（確率論入門）には、これら両方の考え方の例が数多く載っている。

解答例

STEP III 2001、第 13 問

確率・統計 ・ 硬貨の表裏の列のゲーム

STEP III 2001、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/01-s3-q13

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.8 節「**ペニーのゲーム**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/penney.html

鍵となる考え方

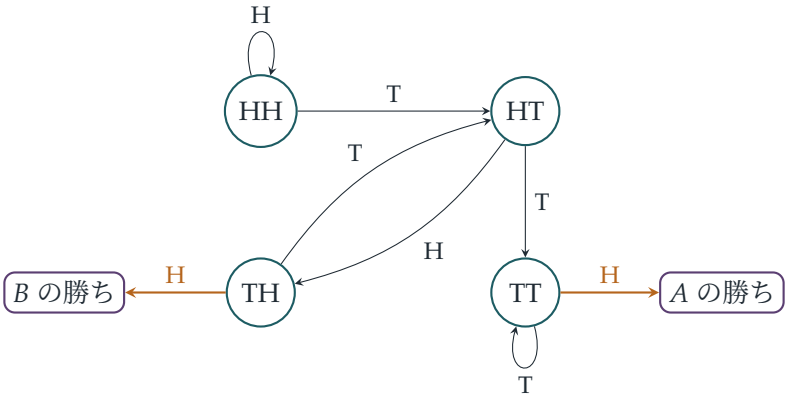
どちらの目標の列も長さが 3 なので、3 回目の投げより前に勝つ者はいない。そしてそれ以降、今後の展開に関係するのは**直前の 2 回の結果**だけである。したがって「状態」（state）は HH、HT、TH、TT の 4 つしかなく、次の 1 回の結果で条件付ける（conditioning）と、このゲームは各状態からの勝つ確率についての小さな連立一次方程式（system of linear equations）に帰着する。小問 (ii) と (iii) も同じ方法で解けるが、4 つのゲームのうち 2 つでは短い直接的な議論のほうが早い。

解答

以下を通じて、各回の投げは独立（independent）であり、それぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で H または T が出るものとする。少なくとも 2 回投げてまだ誰も勝っていないとき、次の 1 回の結果と直前の 2 回の結果によって、その時点で誰かが勝つかどうか、そして勝たない場合には新しい直前の 2 回の結果が決まる。それより前の結果は関係しない。各目標の列は長さが 3 しかないからである。よって、ある時点から勝つ確率は直前の 2 回の結果だけで決まり、それはその 2 回が新しいゲームの最初の 2 回であった場合の確率と等しい。

小問 (i)

最初の 2 回が XY であるという条件のもとで、A（TTH）が B（THH）に勝つ確率を p_{XY} とする。次の図は、次の 1 回の結果によって状態がどのように移るかを示している。



$p_{\mathrm{TT}} = 1$ となる理由。直前の 2 回が TT であるとする。確率 1 でいずれ表が出る（n 回続けて裏が出る確率は $2^{-n} \to 0$ である）。表が出るまではすべて裏なので、THH は現れ得ない。また、最初の表の直前には少なくとも 2 回の裏があるので、その表で TTH が完成する。よって A は確実に勝つ。すなわち $p_{\mathrm{TT}} = 1$ である。

$p_{\mathrm{HT}} = \frac{1}{2}p_{\mathrm{TH}} + \frac{1}{2}p_{\mathrm{TT}}$ となる理由。HT の後では、HTH も HTT も目標の列ではないので、3 回目で勝つ者はいない。3 回目が H（確率 $\frac{1}{2}$）なら直前の 2 回は TH となり、T なら TT となる。3 回目の結果で条件付け、直前の 2 回だけが重要であるという先の注意を用いると、

$$p_{\mathrm{HT}} = \tfrac{1}{2}p_{\mathrm{TH}} + \tfrac{1}{2}p_{\mathrm{TT}}.$$

残りの 2 つの状態。TH の後では、表が出れば THH となって B が勝ち、裏が出れば HT が残る。HH の後では、表が出れば HH が残り、裏が出れば HT が残る（また、ここでは HHH、HHT は目標ではない）。よって

$$p_{\mathrm{TH}} = \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{2}p_{\mathrm{HT}}, \qquad p_{\mathrm{HH}} = \tfrac{1}{2}p_{\mathrm{HH}} + \tfrac{1}{2}p_{\mathrm{HT}}.$$

2 番目の式から $p_{\mathrm{HH}} = p_{\mathrm{HT}}$ を得る。$p_{\mathrm{TH}} = \frac{1}{2}p_{\mathrm{HT}}$ と $p_{\mathrm{TT}} = 1$ を p_{HT} の式に代入すると、

$$p_{\mathrm{HT}} = \tfrac{1}{4}p_{\mathrm{HT}} + \tfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{3}{4}p_{\mathrm{HT}} = \tfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad p_{\mathrm{HT}} = \tfrac{2}{3}.$$

したがって $p_{\mathrm{HH}} = p_{\mathrm{HT}} = \frac{2}{3}$ であり、$p_{\mathrm{TH}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ となって、示すべきことが得られた。

考えてみよう たとえば TH が実際には 5 回目と 6 回目に現れたとき、TH を最初の 2 回であるかのようにみなしてゲームを「再スタート」してよいのはなぜか。

ゲームの今後は、今後の投げの結果と直前の 2 回の結果だけで決まるからである。まだ完成していない TTH や THH の出現は、すでに投げた結果のうち高々直前の 2 回しか使えない。それ以前の履歴はどちらの列の役にも立たず、今後の投げはそれと独立である。

全体の確率。最初の 2 回で勝つ者はおらず、4 通りの組はそれぞれ確率 $\frac{1}{4}$ をもつ。全確率の公式（law of total probability）より、

$$\mathrm{P}(A\text{ が勝つ}) = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{3}+1\right) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{8}{3} = \tfrac{2}{3}.$$

小問 (ii)

今度は B が THH、C が HHT をもつ。ここでは直接的な議論が最もすっきりする。

最初の 2 回が *HH* の場合、C が勝つ。その後の最初の裏（確率 1 で出る）の直前には HH があるので HHT が完成し、それまでの投げはすべて表なので、THH は現れ得ない。

それ以外の場合、最初の 2 回の中に裏がある。確率 1 でパターン HH はいずれ現れる。その最初の出現を考える。それは 1 回目から始まるのではないので、その直前の投げが存在し、それは H ではない（もし H ならもっと前に HH があることになる）ので T である。よって最初の HH は THH を完成させる。一方、HHT はそれより前には現れ得ない。それにはもっと前の HH が必要だからである。よって B が勝つ。

したがって、最初の 2 回が HH でない限り B が勝つ：

$$\mathrm{P}(B\text{ が勝つ}) = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}.$$

小問 (iii)

C（*HHT*）対 D（*HTT*）。直前の 2 回が XY のときに C が勝つ確率を q_{XY} とする。HH からは、(ii) と同じ理由で C が確実に勝つ。最初の裏で HHT が完成し、HTT には HT の後の裏が必要であるが、それが先に来ることはない。よって $q_{\mathrm{HH}} = 1$ である。他の各状態で次の 1 回の結果で条件付けると：

HT:	T なら HTT（D の勝ち）、H なら TH：	$q_{\mathrm{HT}} = \frac{1}{2}q_{\mathrm{TH}}$,
TH:	H なら HH、T なら HT：	$q_{\mathrm{TH}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}q_{\mathrm{HT}}$,
TT:	H なら TH、T なら TT：	$q_{\mathrm{TT}} = \frac{1}{2}q_{\mathrm{TH}} + \frac{1}{2}q_{\mathrm{TT}}$.

最後の式から $q_{\mathrm{TT}} = q_{\mathrm{TH}}$ を得る。1 番目の式を 2 番目に代入すると $q_{\mathrm{TH}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}q_{\mathrm{TH}}$ となるので、$q_{\mathrm{TH}} = \frac{2}{3}$、$q_{\mathrm{TT}} = \frac{2}{3}$、$q_{\mathrm{HT}} = \frac{1}{3}$ である。よって

$$\mathrm{P}(C \text{ が勝つ}) = \tfrac{1}{4}\left(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{8}{3} = \tfrac{2}{3} > \tfrac{1}{2},$$

となり、C のほうが D より勝つ可能性が高い。

D（*HTT*）対 A（*TTH*）。これは小問 (ii) で H と T を入れ替えたものである。最初の 2 回が TT なら A が勝つ。最初の表で TTH が完成し、HTT には表の後に裏が 2 回続くことが必要であるが、それはその最初の表より前には起こり得ない。それ以外の場合、最初の 2 回の中に表がある。確率 1 でパターン TT はいずれ現れる。その最初の出現は 1 回目から始まるのではなく、その直前の投げは T ではあり得ない（もっと前に TT があることになる）ので H であり、最初の TT は HTT を完成させる。TTH はそれより前には現れ得ない。それにはもっと前の TT が必要だからである。よって D が勝ち、

$$\mathrm{P}(D \text{ が勝つ}) = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4} > \tfrac{1}{2}.$$

したがって D のほうが A より勝つ可能性が高い。

> **考えてみよう** A は B に勝ち、B は C に勝ち、C は D に勝ち、D は A に勝つ。なぜこのようなことが起こり得るのか。

「勝つ可能性がより高い」という関係は推移的（transitive）ではないので、矛盾はない。4 人のプレイヤーは循環をなしており、それぞれのゲームで A、B、C、D が勝つ確率は $\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$ である。後から選ぶ者は、常に先に選んだ者の列に勝つ列を選ぶことができる。

検算

- 小問 (i) で代入して確かめる：$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{2}{3} = p_{\mathrm{HT}}$、また $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = p_{\mathrm{TH}}$ である。
- 状態を用いる方法は小問 (ii) と D–A のゲームにも使える。B 対 C では、HH、HT、TH、TT からの B の勝つ確率は $0, 1, 1, 1$ であり、その平均は $\frac{3}{4}$ となる。
- 各組み合わせについて 200 000 回のゲームをシミュレーションしたところ、勝ちの相対度数は 0.664、0.752、0.666、0.749 であり、厳密な値 $\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$ とよく合った。

よくある間違い

- ゲームが 3 回目で終わり得ることを忘れる。たとえば、TH の後に H が出れば B が即座に勝つことに気づかず、$p_{\mathrm{TH}} = \frac{1}{2}p_{\mathrm{HH}} + \frac{1}{2}p_{\mathrm{HT}}$ と書いてしまう。

- 最初の 2 回の各組が確率 $\frac{1}{4}$ をもつこと、そして 3 回目より前には誰も勝てないことを述べずに、4 つの状態の確率を平均してしまう。

STEP のその先へ

これはペニーのゲーム（Penney's game）であり、非推移的（non-transitive）な確率の有名な例である。状態を用いる方法は吸収マルコフ連鎖（absorbing Markov chain）の理論そのものであり、そこでは吸収確率がまさにここで解いたような連立一次方程式を満たす。さらに、任意の 2 つの列の間の勝ち目を与える閉じた公式さえあり、それがコンウェイ（Conway）の「リーディング数」（leading numbers）のアルゴリズムである。これはマルチンゲール（martingale）を用いて証明できる。マルコフ連鎖と第一段解析（first-step analysis）については、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）、あるいは Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率入門）を参照されたい。

解答例

STEP III 2001、第 14 問

確率・統計 ・ 不偏分散

> **STEP III 2001、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q14

鍵となる考え方

ここでの議論はすべて一つの事実にかかっている。「標本の分散」は除数 $n = 2$ を用いるので母分散（population variance）を過小評価し、それを 2 倍することでその偏りが正される、ということである。2 つの値に対しては標本平均（sample mean）は中点であるから、各値は標本平均から差のちょうど半分だけ離れている。これにより V はただ一つの差 $X_1 - X_2$ の関数となり、最後の確率は正方形 $[0, a]^2$ の中の面積となる。

解答

X の分散

X の確率密度関数（density）は $[0, a]$ 上で $f(x) = \frac{1}{a}$ である。対称性より $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2}a$ であり、

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^a \frac{x^2}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{3}.$$

したがって

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12},$$

となり、示すべき式が得られた。

標本分散

標本（sample）X_1, X_2 に対して標本平均は $\bar{X} = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$ であり、標本の分散（variance）はそこからの偏差の 2 乗の平均である：

$$V = \tfrac{1}{2}\big[(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2\big].$$

ここで $X_1 - \bar{X} = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)$、$X_2 - \bar{X} = -\frac{1}{2}(X_1 - X_2)$ であるから、偏差の 2 乗はどちらも $\frac{1}{4}(X_1 - X_2)^2$ に等しい。よって

$$V = \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \tfrac{1}{4}(X_1 - X_2)^2 = \tfrac{1}{4}(X_1 - X_2)^2,$$

となり、これは与えられた形である。

考えてみよう 2 重積分を使わずに $\mathrm{E}\big((X_1 - X_2)^2\big)$ を求めるにはどうすればよいか。

X_1 と X_2 は同じ分布に従うので $\mathrm{E}(X_1 - X_2) = 0$ であり、したがって $\mathrm{E}\big((X_1 - X_2)^2\big) = \mathrm{Var}(X_1 - X_2)$ である。X_1 と X_2 は独立（independent）であるから、それらの分散は足し合わせられる（$\mathrm{Var}(-X_2) = \mathrm{Var}(X_2)$ なので、マイナス符号は影響しない）：

$$\mathrm{Var}(X_1 - X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) = \frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{6}.$$

したがって

$$\mathrm{E}(2V) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}\big((X_1 - X_2)^2\big) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{12} = \mathrm{Var}(X).$$

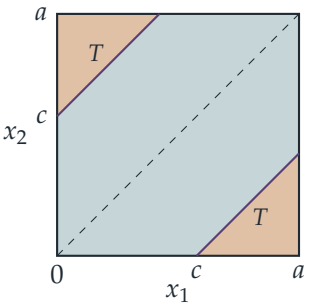
$2V$ の期待値（expected value）は、a の値によらず、それが推定する量に等しい。よって $2V$ は X の分散の不偏推定量（unbiased estimator）である。（これに対して $\mathrm{E}(V) = \frac{a^2}{24}$ であり、真の分散の半分にすぎない。）

確率

$V \geq 0$ かつ $\frac{1}{12}a^2 > 0$ であるから、平方根をとってよい：

$$V < \frac{a^2}{12} \iff (X_1 - X_2)^2 < \frac{a^2}{3} \iff |X_1 - X_2| < \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

X_1 と X_2 は独立で、それぞれが一様分布（uniform distribution）に従うので、組 (X_1, X_2) は正方形 $[0, a]^2$ 上で一様に分布する。したがって求める確率は、正方形の面積のうち帯状領域 $|x_1 - x_2| < c$ に含まれる部分の割合である。ただし $c = a/\sqrt{3} < a$ とする。



余事象（complement）は、影をつけた隅の 2 つの三角形 T からなる。それぞれは等しい 2 辺の長さが $a-c$ の直角二等辺三角形である。その面積の合計は $2\cdot\frac{1}{2}(a-c)^2=(a-c)^2$ であるから、

$$\mathrm{P}\left(V<\frac{a^2}{12}\right)=1-\frac{(a-c)^2}{a^2}=1-\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=1-\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}.$$

すなわち、正確な確率は

$$\mathrm{P}\left(V<\frac{a^2}{12}\right)=\frac{2\sqrt{3}-1}{3}.$$

である。$\sqrt{3}\approx 1.732$ とすると、これは $\frac{2.464}{3}\approx 0.821$ であり、有効数字 1 桁で確率は 0.8 である。

検算

- 答えは a に依存しないが、これは当然である。X を定数倍すると、V と $\frac{1}{12}a^2$ はどちらもその定数の 2 乗倍になるからである。
- $a=3$ として 4×10^5 組をシミュレーションしたところ、$2V$ の平均は 0.751（目標値 0.75）、$V<\frac{1}{12}a^2$ となる割合は 0.821 となり、$\frac{1}{3}(2\sqrt{3}-1)=0.8214$ と一致した。
- 妥当性の確認：確率は $(0,1)$ に入っている。また、$\frac{1}{12}a^2$ を $\frac{1}{4}a^2$（V のとりうる最大値）に置き換えると $c=a$ となり、公式 $1-(1-c/a)^2$ は 1 を与える。

よくある間違い

- 「標本の分散」に除数 $n-1$ を用いること。そうすると $\frac{1}{2}(X_1-X_2)^2$ となり、問題に書かれた $\frac{1}{4}(X_1-X_2)^2$ にはならない。この問題では除数 n が求められている。
- 絶対値を忘れ、2 つの三角形のうち一方しか数えないこと（その場合、確率は $\frac{1}{2}$ 未満になってしまう）。
- $\mathrm{Var}(X_1-X_2)=\mathrm{Var}(X_1)-\mathrm{Var}(X_2)=0$ と書くこと。

STEP のその先へ

ここでの結果は、ある一般的な定理の $n=2$ の場合である。分散 σ^2 の分布からとった大きさ n の任意の標本に対して、$\sum(X_i-\bar{X})^2$ の平均は $(n-1)\sigma^2$ である。除数 $n-1$（ベッセルの補正（Bessel's correction））が不偏推定量を与えるのはこのためである。大学 1 年の統計学では、さらに、どの不偏推定量が最小の分散をもつかという問題へと進む。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）、および Blitzstein

と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）は、どちらもここで用いたスタイルで和の期待値と分散を扱っている。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

2001 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

