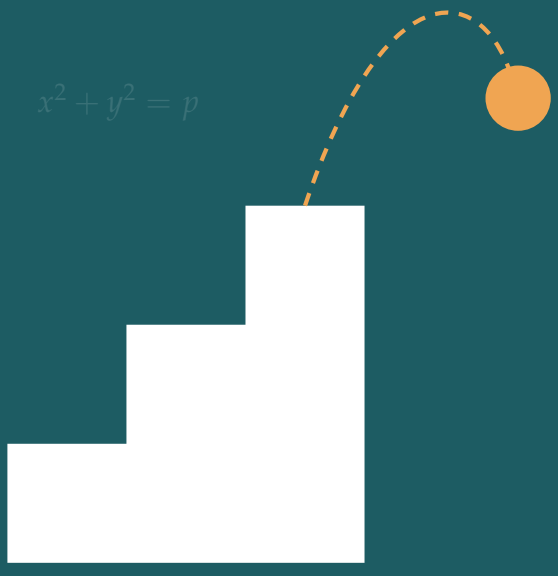
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

2000 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

2000 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

2000 年解答例

2000 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 42 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 対数と最高位の数字 純粋数学 . . . 3
Q2 二項展開の係数 純粋数学 . . . 7
Q3 階段関数の積分 純粋数学 . . . 11
Q4 積分の評価 純粋数学 . . . 15
Q5 空間ベクトル 純粋数学 . . . 19
Q6 直線で囲まれた領域 純粋数学 . . . 23
Q7 導関数の評価 純粋数学 . . . 27
Q8 絶対値の積分 純粋数学 . . . 30
Q9 加速度系における放物運動 力学 . . . 34
Q10 衝突と反発係数 力学 . . . 38
Q11 梯子の摩擦とつり合い 力学 . . . 42
Q12 幾何分布 確率・統計 . . . 46
Q13 条件付き確率 確率・統計 . . . 49
Q14 一様分布の積率 確率・統計 . . . 52

STEP II

Q1 エジプト分数 純粋数学 . . . 55
Q2 多項式の重解 純粋数学 . . . 60
Q3 誤差の伝播 純粋数学 . . . 64
Q4 偏角と逆正接関数の恒等式 純粋数学 . . . 68
Q5 最小二乗近似 純粋数学 . . . 72
Q6 半角の置換 純粋数学 . . . 76
Q7 直線と円錐 純粋数学 . . . 80
Q8 変数分離形の微分方程式 純粋数学 . . . 84

Q9 空気抵抗を受ける運動 力学 87
Q10 連結した滑車系 力学 91
Q11 弾性ひもと単振動 力学 95
Q12 正規確率変数の和 確率・統計 99
Q13 捕獲再捕獲法による推定 確率・統計 103
Q14 中央値の分布 確率・統計 107

STEP III

Q1 双曲線の接線 純粋数学 111
Q2 置換積分 純粋数学 116
Q3 複素数と図形 純粋数学 120
Q4 分数関数のグラフ 純粋数学 124
Q5 線形変換 純粋数学 130
Q6 四次多項式の因数分解 純粋数学 134
Q7 不等式と極限 純粋数学 138
Q8 漸化式 純粋数学 142
Q9 斜め弾性衝突 力学 146
Q10 最大摩擦力でのつり合い 力学 150
Q11 粗い支点まわりの回転 力学 154
Q12 ポアソン近似 確率・統計 158
Q13 確率母関数 確率・統計 162
Q14 共分散と独立性 確率・統計 166

解答例

STEP I 2000、第 1 問

純粋数学 ・ 対数と最高位の数字

> **STEP I 2000、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q1

鍵となる考え方

大きな数 N の最上位の数字（leading digit）は、$\log_{10} N$ の **小数部分**（fractional part）だけで完全に決まる。k を整数、$0 \le f < 1$ として $\log_{10} N = k + f$ と書けば $N = 10^f \times 10^k$ であり、N の最初の数字が d となるのはちょうど $\log_{10} d \le f < \log_{10}(d+1)$ のときである。したがって必要なのは数字 1 から 9 の対数だけであり、それらは $\log_{10} 2$ と $\log_{10} 3$ から得られる。あとは、丸め誤差（rounding error）をどこまで許容できるかに注意深く目を配ればよい。

解答

以下、log は $\log_{10}$ を表す。区間 $[0,1)$ は、ありうる最上位の数字ごとに一つずつ、九つの部分に分かれる：



小数部分 f が d と書かれた部分に入れば、最上位の数字は d である。

小問 (i)

$5 = 10/2$ かつ $6 = 2 \times 3$ であるから、

$$\log 5 = 1 - \log 2 = 1 - 0.301029996 = 0.698970004 \approx 0.699,$$
$$\log 6 = \log 2 + \log 3 = 0.301029996 + 0.477121255 = 0.778151251 \approx 0.778,$$

である（いずれも小数第三位まで）。

次に

$$\log 3^{100} = 100\log 3 = 47.7121255.$$

与えられた $\log 3$ の値の誤差は 5×10^{-10} 以内であるから、この値の誤差は 5×10^{-8} 以内である。したがって確かに $47.712 < \log 3^{100} < 47.713$ である。これを

$$\log\left(5\times10^{47}\right) = 47+\log 5 \approx 47.699 \quad \text{および} \quad \log\left(6\times10^{47}\right) = 47+\log 6 \approx 47.778$$

と比較すると、

$$\log\left(5\times10^{47}\right) < \log 3^{100} < \log\left(6\times10^{47}\right)$$

を得る。余裕（約 0.013 と 0.066）はどんな丸め誤差よりもはるかに大きく、また log は狭義単調増加（strictly increasing）であるから、

$$5\times10^{47} < 3^{100} < 6\times10^{47}$$

が示された。よって 3^{100} は $5.\ldots\times10^{47}$ の形であり、最初の数字は $\boxed{5}$ である（また 48 桁である）。

小問 (ii)

$\log 2 = 0.301029996$ を用いて同じ考え方を使う。この値の誤差は高々 5×10^{-10} である。10^n 倍するとその誤差も 10^n 倍になるので、小数部分が数直線の一つの部分の内側に余裕をもって収まっていることを確かめなければならない。

2^{1000}. $\log 2^{1000} = 301.029996$ であり、誤差は高々 5×10^{-7} である。小数部分は約 0.030 で、$\log 1 = 0$ と $\log 2 \approx 0.301$ の間にあるから、$2^{1000} = 1.\ldots\times10^{301}$ であり、最初の数字は $\boxed{1}$ である。

$2^{10\,000}$. $\log 2^{10\,000} = 3010.29996$ であり、誤差は高々 5×10^{-6} である。小数部分は 0.299955 と 0.299965 の間にある。

> **?** **考えてみよう** 小数部分 0.29996 は $\log 2 = 0.30103$ に非常に近い。最初の数字が 2 でないと言い切れるだろうか？

言い切れる。差は $0.30103 - 0.29996 \approx 0.0011$ であり、これは起こりうる最大の誤差 5×10^{-6} の二百倍以上である。したがって小数部分は確かに $\log 2$ より小さく、$10^{3010} < 2^{10\,000} < 2\times10^{3010}$ である。（同じことだが、$2^{10\,000} < 2\times10^{3010}$ は $2^{9999} < 10^{3010}$、すなわち $\log 2 < 3010/9999 = 0.3010301\ldots$ を意味し、これは正しい。）最初の数字は $\boxed{1}$ である。

$2^{100\,000}$．$\log 2^{100\,000} = 30102.9996$ であり、誤差は高々 5×10^{-5} であるから、小数部分は 0.99955 と 0.99965 の間にある。これが数直線のどの部分に入るかを知る必要があるが、一番上の部分は

$$\log 9 = 2\log 3 = 0.954242510.$$

から始まる。$0.954 < 0.99955$ かつ $0.99965 < 1$ であるから、$9 \times 10^{30102} < 2^{100\,000} < 10^{30103}$ を得て、最初の数字は $\boxed{9}$ である。

> **考えてみよう** 誤差によって小数部分が 1 を超え、この数が $1.\ldots \times 10^{30103}$ になってしまうことはないのだろうか？

そうなるのは $100\,000 \log 2$ の真の値が 30103 以上である場合に限られるが、それにはこの値に 0.0004 の誤差が必要であり、これは最大誤差 5×10^{-5} の八倍にあたる。したがって最初の数字は 9 であり、$2^{100\,000}$ は 30 103 桁である。

検算

コンピュータによる厳密な整数演算で、すべてが確認できる：3^{100} は 48 桁で 515… から始まり、2^{1000} は 107… から始まり（302 桁）、$2^{10\,000}$ は 199… から始まり（3011 桁）、$2^{100\,000}$ は 999… から始まる（30 103 桁）。手法の簡単な妥当性確認として、$\log 2^{10} = 3.0103$ の小数部分は $0.0103 < \log 2$ であり、$2^{10} = 1024$ と合致する。

よくある間違い

- 最初の数字を対数の整数部分から読み取ってしまう。整数部分からわかるのは桁数（整数部分より一つ多い）だけであり、最上位の数字は小数部分に宿っている。
- $100\,000$ 倍すると $\log 2$ の丸め誤差も同じだけ倍になることを忘れる。ここでは小数第九位まででちょうど足りるのであり、その理由を述べておく価値がある。
- $f = 0.9996 \approx 1$ を見て、数字は 1 だと結論してしまう。小数部分が 1 のすぐ下にあるということは、その数が十の累乗のすぐ下にあるということであり、したがって 9 から始まる。

STEP のその先へ

2^n の最上位の数字は $n \log 2$ の小数部分によって支配される。$\log 2$ は無理数（irrational）であるから、これらの小数部分は $[0, 1)$ において**一様分布**（equidistributed）する（ワイル（Weyl）の一様分布定理）。したがって、2 の累乗のうち数字 d で始まるものの

割合は $\log(1+1/d)$ に収束（converge）する。これがベンフォードの法則（Benford's law）であり、2 の累乗の約 30% は 1 で始まる。無理性と近似という側面については、ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（高等算術）がすばらしい読み物である。

解答例

STEP I 2000、第 2 問

純粋数学 ・ 二項展開の係数

> **STEP I 2000、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q2

鍵となる考え方

分数の項を含む 2 つの二項式を展開してから、指数が一致する項を探すのは煩雑である。先に x の負の冪をくくり出し、各括弧を単一の x の冪（x^6 または x^2）についての多項式（polynomial）にしておくほうがはるかに見通しがよい。すると、因数分解（factorisation）$x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$ のおかげで、2 つ目の積は 1 つ目の積が姿を変えたものにすぎないことがわかり、「これを用いて（hence）」の部分はほとんど手間がかからない。

解答

1 つ目の展開

各括弧から x の最も低い冪をくくり出すと、

$$\left(x^4 - \frac{1}{x^2}\right)^5 = \left(\frac{x^6 - 1}{x^2}\right)^5 = x^{-10}\,(x^6 - 1)^5,$$
$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^6 = \left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)^6 = x^{-6}\,(x^2 - 1)^6.$$

よって式全体は $x^{-16}P(x)$ である。ただし

$$P(x) = (x^6 - 1)^5\,(x^2 - 1)^6.$$

したがって、もとの展開における x^n の係数（coefficient）は、多項式 $P(x)$ における x^{n+16} の係数に等しい。

二項定理（binomial theorem）により

$$(x^6-1)^5=\sum_{j=0}^{5}\binom{5}{j}(-1)^{5-j}x^{6j},\qquad (x^2-1)^6=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(-1)^{6-k}x^{2k},$$

であるから、$P(x)$ における x^m の係数は、$6j+2k=m$、$0\le j\le 5$、$0\le k\le 6$ を満たすすべての組についての

$$\binom{5}{j}(-1)^{5-j}\binom{6}{k}(-1)^{6-k}$$

の和である。

x^{-12} の係数。 $m=-12+16=4$、すなわち $6j+2k=4$ となる組が必要である。$6j\le 4$ より $j=0$ に限られるので、組は $(j,k)=(0,2)$ のみであり、

$$\binom{5}{0}(-1)^5\cdot\binom{6}{2}(-1)^4=(-1)(15)=-15,$$

となって、示すべき値が得られる。

x^2 の係数。 今度は $m=2+16=18$ であるから $6j+2k=18$、すなわち $k\le 6$ のもとで $3j+k=9$ である。これより $j=1,2,3$ が許される。

(j,k)	$(x^6-1)^5$ から	$(x^2-1)^6$ から	積
$(3,0)$	$\binom{5}{3}(-1)^2=10$	$\binom{6}{0}(-1)^6=1$	10
$(2,3)$	$\binom{5}{2}(-1)^3=-10$	$\binom{6}{3}(-1)^3=-20$	200
$(1,6)$	$\binom{5}{1}(-1)^4=5$	$\binom{6}{6}(-1)^0=1$	5

よって x^2 の係数は $10+200+5=215$ である。

考えてみよう なぜ $j=0$ や $j=4$ は x^{18} に寄与しないのか？

$j=0$ なら $k=9$、$j=4$ なら $k=-3$ が必要になるが、どちらも $0\le k\le 6$ の範囲にない。ここでは組を見落としたり、存在しない組を加えたりしやすいので、可能性を系統的に書き出すとよい。

2つ目の展開

考えてみよう x^4+x^2+1 は前半とどう関係しているのか？

x^6-1 を x^2 についての立方の差（difference of cubes）とみたときの、もう一方の因数である。

$$x^6-1=(x^2)^3-1=(x^2-1)(x^4+x^2+1).$$

$(x^2-1)^{11}$ を $(x^2-1)^5(x^2-1)^6$ と分けると、

$$(x^2-1)^{11}(x^4+x^2+1)^5 = \left[(x^2-1)(x^4+x^2+1)\right]^5(x^2-1)^6 = (x^6-1)^5(x^2-1)^6 = P(x).$$

よって 2 つ目の展開はちょうど $P(x)$ であり、これは 1 つ目の展開の x^{16} 倍である。

x^4 の係数。 これは $P(x)$ における x^4 の係数であり、すでに上で求めている（1 つ目の展開における x^{-12} に対応していた）。その値は -15 である。

x^{38} の係数。 これは $6j+2k=38$、すなわち $j\le 5$、$k\le 6$ のもとで $3j+k=19$ に対応する。$k\le 6$ より $3j\ge 13$ が必要なので $j=5$、$k=4$ であり、

$$\binom{5}{5}(-1)^0\cdot\binom{6}{4}(-1)^2 = 15.$$

よって x^{38} の係数は 15 である。

数え上げをせずにこれを見るうまい方法がある。P の次数（degree）は $30+12=42$ であり、x を $1/x$ に置き換えると

$$x^{42}P(1/x) = (1-x^6)^5(1-x^2)^6 = (-1)^{11}P(x) = -P(x).$$

係数を比較すると、P における x^{42-m} の係数は x^m の係数の符号を反転したものである。$m=4$ とすれば、x^{38} の係数は $-(-15)=15$ となり、一致する。

検算

- $P(x)$ に $x=1$ を代入すると 0 になるので、P の係数をすべて足すと 0 になる。完全に展開した場合には、これが手早い確認になる。
- 2 つの積をいずれもコンピュータで（係数のリストとして）厳密に展開した。1 つ目では x^{-12} の係数が -15、x^2 の係数が 215、2 つ目では x^4 の係数が -15、x^{38} の係数が 15 となり、さらに 2 つ目の積の次数が 42 であって 1 つ目の x^{16} 倍に等しいことも確かめた。
- もとの式を x のランダムな有理数値で評価すると、計算した展開と厳密に一致する。

よくある間違い

- 符号の誤り：選んだ冪が x^{6j} と x^{2k} のとき、項の符号は $(-1)^{5-j}(-1)^{6-k} = -(-1)^{j+k}$ であって、$(-1)^{j+k}$ ではない。誤った方を使うと、すべての答えの符号が反転する。

- x^2 の係数で $(1,6)$ や $(3,0)$ の項を忘れ、200 や 205 としてしまう。
- 因数分解に気づかずに $(x^2-1)^{11}(x^4+x^2+1)^5$ を直接展開する：不可能ではないが、長く、間違えやすい。

STEP のその先へ

和の積を 1 つの和として書き、x のある冪を取り出すという考え方は、**母関数**（generating functions）の背後にある発想である。積の係数は、各部分から合計をつくる方法の数を数えており、これはまさに上で組 (j,k) を数えたのと同じことである。対称性 $x^{42}P(1/x) = -P(x)$ は、P が（反）**回文的**（palindromic）な多項式であることを述べている。このような多項式は円分多項式（cyclotomic polynomials）や 1 の冪根（roots of unity）の研究に現れ、x^6-1 はその最初の例である。この趣旨の問題をさらに解きたければ、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* がよい次の一歩であり、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は多項式の因数分解をきちんと扱っている。

解答例

STEP I 2000、第 3 問

純粋数学 ・ 階段関数の積分

STEP I 2000、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/00-s1-q3

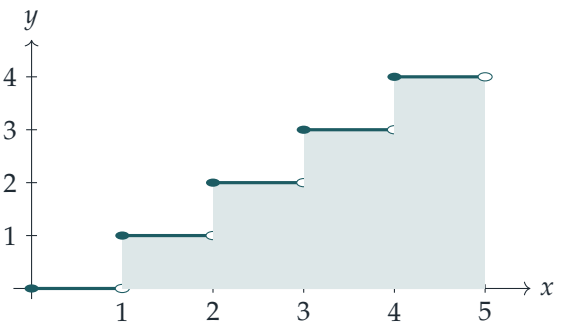
鍵となる考え方

どんな量であれ、その整数部分（integer part）をとったものは階段関数（step function）である。すなわち、区間上では一定の値をとり、そこで 1 だけ跳ね上がる。したがって積分は長方形の面積の和にすぎず、本当に必要な作業は各段がどこで始まりどこで終わるかを求めることだけである。$[e^x]$ の場合、跳びが起こるのは e^x が整数を通過するところ、すなわち $x = \ln k$ においてであり、こうして得られる対数の和はきれいに打ち消し合う（telescoping）。

解答

$y = [x]$ のグラフ

各区間 $k \le x < k+1$（k は整数）上では $[x] = k$ である。よってグラフは長さ 1 の水平な線分からなる階段であり、各線分の左端は黒丸（その値をとる）、右端は白丸（そこで関数が 1 だけ跳ね上がる）となる。



積分は網掛け部分の面積であり、これは幅 1、高さ $0,1,2,3,4$ の長方形からなる（$x=1,2,3,4$ という個々の点での値は面積に影響しない）。よって

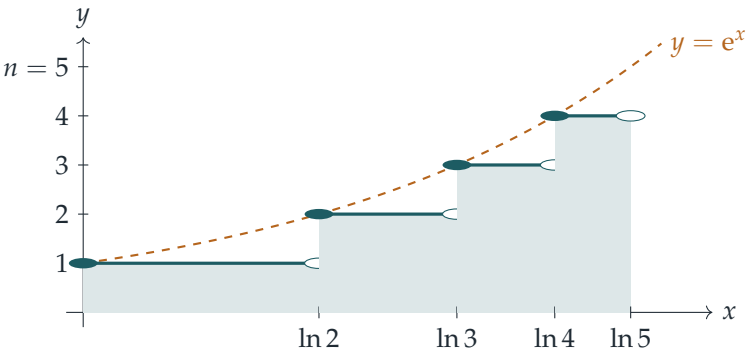
$$\int_0^5 [x]\,\mathrm{d}x = 0+1+2+3+4 = 10.$$

$y=[\mathrm{e}^x]$ のグラフ

$0 \le x < \ln n$ のとき $1 \le \mathrm{e}^x < n$ である。e^x は増加関数であるから、$k=1,2,\dots,n-1$ に対して

$$[\mathrm{e}^x]=k \iff k \le \mathrm{e}^x < k+1 \iff \ln k \le x < \ln(k+1),$$

が成り立つ。よってグラフはやはり高さ 1 ずつの段をもつ階段であるが、今度は x が増えるにつれて段が短くなっていく。高さ k の段の幅は $\ln(k+1)-\ln k = \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ である。図は $n=5$ の場合であり、曲線 $y=\mathrm{e}^x$ を破線で示している。階段は各段の左端で曲線に接している。



積分

長方形の面積、すなわち高さ k と幅 $\ln(k+1)-\ln k$ の積を足し合わせると

$$\int_0^{\ln n} [\mathrm{e}^x]\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1} k\big(\ln(k+1)-\ln k\big) = \sum_{k=1}^{n-1} k\ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} k\ln k.$$

考えてみよう 二つの和を打ち消し合わせるにはどうすればよいか？

各 $\ln j$ は両方の和に、異なる係数で現れる。第 1 の和で $j=k+1$ と置き換えると、両

者の項がそろう。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} k\ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} k\ln k &= \sum_{j=2}^{n}(j-1)\ln j - \sum_{j=1}^{n-1} j\ln j \\ &= (n-1)\ln n + \sum_{j=2}^{n-1}\big((j-1)-j\big)\ln j - 1\cdot\ln 1 \\ &= (n-1)\ln n - \sum_{j=2}^{n-1}\ln j.\end{aligned}$$

ここでは第 1 の和から $j=n$ の項を、第 2 の和から $j=1$ の項を取り出した（後者は $\ln 1 = 0$ より 0 に等しい）。さて $\sum_{j=2}^{n-1}\ln j = \ln\big((n-1)!\big)$ であり、$(n-1)\ln n = n\ln n - \ln n$ であるから

$$\int_0^{\ln n} [\mathrm{e}^x]\,\mathrm{d}x = n\ln n - \big(\ln n + \ln((n-1)!)\big) = n\ln n - \ln(n!),$$

となり、示すべき式が得られた。（$n=1$ のときは積分区間の長さが 0 であり、両辺とも 0 である。）

図による証明（発展）

幅 $\ln n$、高さ n の長方形の面積は $n\ln n$ である。そのうち階段の上側にある部分は、高さ 1 の水平な帯からなる。$m=1,\ldots,n$ に対して、高さ $m-1$ と m の間の帯は $x=0$ から $x=\ln m$ まで延びている。なぜなら $[\mathrm{e}^x] < m$ となるのはちょうど $x < \ln m$ のときだからである。この帯の面積は $\ln m$ であるから、段の上側の領域の面積は $\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n = \ln(n!)$ となる。これを $n\ln n$ から引けば、再び同じ結果が得られる。これは x ではなく y について積分することの離散版である。

検算

$n=2$ のとき、階段は高さ 1、幅 $\ln 2$ の長方形一つだけであり、公式は $2\ln 2 - \ln 2 = \ln 2$ を与える。$n=4$ のとき公式は $4\ln 4 - \ln 24 \approx 2.3671$ を与える。$\int_0^{\ln 4}[\mathrm{e}^x]\,\mathrm{d}x$ を中点則（midpoint rule）で数値計算すると小数第 5 位まで一致し、8 以下のすべての n についても同様である。また、段は曲線の下にあるから、答えは $\int_0^{\ln n}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = n-1$ より小さくなければならない。実際 $n=4$ のとき $2.37 < 3$ である。

よくある間違い

- 高さ k の段の幅を、$\ln(k+1)-\ln k$ ではなく（前半の設問をそのまま真似て）1 としてしまう。

- 階段を高さ 0 から始めてしまう。$0 \leq x < \ln n$ 上では $e^x \geq 1$ であるから、最も低い段の高さは 1 である。
- 添字のずらし方を誤って $(n-1)\ln n$ の項を落としてしまう、あるいはこの項を $\ln((n-1)!)$ とまとめて $\ln(n!)$ にしなければならないことに気づかない。

STEP のその先へ

段は $y = e^x$ の下にあるから、積分は $n-1$ より小さく、これを整理すると $\ln(n!) > n\ln n - n + 1$ となる。同様にして段を上から評価すると、スターリングの公式（Stirling's formula）$\ln(n!) \approx n\ln n - n$ へと至る。これは解析学（analysis）、確率論（probability）、組合せ論（combinatorics）における重要な評価である。また、長方形の和から帯の和への切り替えは「部分和分（summation by parts）」の一例であり、これは部分積分（integration by parts）の離散版にあたる。階段関数の積分を厳密な基礎の上に置くための次の一歩としては、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）がよい。

解答例

STEP I 2000、第 4 問

純粋数学 • 積分の評価

STEP I 2000、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/00-s1-q4

鍵となる考え方

$1/(x^2+1)^4$ を初等的な方法で積分（integration）するのは容易ではない。そこでこの問題では、被積分関数を二つの部分に分ける。一つは厳密な導関数（exact derivative）の形をしていてそのまま積分できる項、もう一つは小さな残りの項である。小問 (ii) でこの分割を作り、小問 (i) で残りの項の評価を与える。積分を評価する（bound）には、ふつう被積分関数を評価し、それに区間の長さを掛ける。

解答

小問 (i)

$f(x) = \dfrac{x^6}{(x^2+1)^4}$ とおく。f は x^2 のみに依存するので $t = x^2$ とおくと、x と同様に t も $[0,1]$ を動き、$f = g(t)$ となる。ここで

$$g(t) = \frac{t^3}{(1+t)^4}.$$

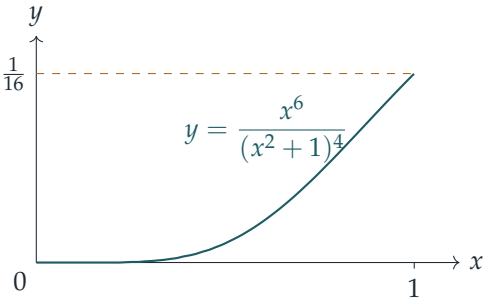
商の微分法（quotient rule）により、

$$g'(t) = \frac{3t^2(1+t)^4 - 4t^3(1+t)^3}{(1+t)^8} = \frac{t^2\big(3(1+t) - 4t\big)}{(1+t)^5} = \frac{t^2(3-t)}{(1+t)^5}.$$

$0 < t \leq 1$ ではすべての因数が正である（特に $3 - t \geq 2$）から $g'(t) > 0$ であり、g は $[0,1]$ 上で狭義単調増加（strictly increasing）である。したがって最大値は $t = 1$、すなわち $x = 1$ でとり、

$$f(1) = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16},$$

となって、示すべき結果が得られる。また、全体で $f(x) \geq 0$ であり、最小値は $f(0) = 0$ である。



小問 (ii)

括弧内の式を商の微分法で微分する。$N = Ax^5 + Bx^3 + Cx$ とおき、分母 $(x^2+1)^3$ の導関数が $6x(x^2+1)^2$ であることに注意すると、因数 $(x^2+1)^2$ が一つ約分されて

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{N}{(x^2+1)^3}\right) = \frac{(5Ax^4+3Bx^2+C)(x^2+1) - 6x(Ax^5+Bx^3+Cx)}{(x^2+1)^4}.$$

分子を展開して x の累乗ごとにまとめると、

$$\begin{aligned} &5Ax^6 + 5Ax^4 + 3Bx^4 + 3Bx^2 + Cx^2 + C - 6Ax^6 - 6Bx^4 - 6Cx^2 \\ &\quad = -Ax^6 + (5A-3B)x^4 + (3B-5C)x^2 + C. \end{aligned}$$

これですべての項の分母が $(x^2+1)^4$ になったので、恒等式（identity）がすべての x について成り立つのは、分子が多項式として一致するとき、かつそのときに限る。

$$(D-A)x^6 + (5A-3B)x^4 + (3B-5C)x^2 + C = 1.$$

低次の項から係数を比較する（comparing coefficients）と、$C = 1$、次に $3B = 5C = 5$、次に $5A = 3B = 5$、さらに $D = A$ を得る。よって

$$A = 1, \qquad B = \tfrac{5}{3}, \qquad C = 1, \qquad D = 1.$$

小問 (iii)

小問 (ii) の恒等式を $[0,1]$ 上で積分する。右辺の第 1 項は厳密な導関数なので

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^4} &= \left[\frac{x^5 + \frac{5}{3}x^3 + x}{(x^2+1)^3}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^6}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1+\frac{5}{3}+1}{8} - 0 + J = \frac{11}{24} + J, \end{aligned}$$

ここで $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^6}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x$ である。

考えてみよう J を実際に計算せずに評価するにはどうすればよいか？

小問 (i) より、J の被積分関数は $0 \le f(x) \le \frac{1}{16}$ を $[0,1]$ 内のすべての x に対して満たす。この不等式を長さ 1 の区間で積分すると

$$0 \le J \le \frac{1}{16} \times 1 = \frac{1}{16}.$$

各辺に $\frac{11}{24}$ を加えると

$$\frac{11}{24} \le \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^4} \le \frac{11}{24} + \frac{1}{16},$$

となり、示すべき結果が得られる。（f は連続であり、区間全体でどちらの限界値にも等しくはならないので、実際には両方の不等式は狭義の不等号で成り立つが、問題が求めているのは $\le$ だけである。）

検算

- 小問 (ii) の恒等式に $x = 0$ を代入すると、導関数の項は $C = 1$ となり、D の項は消えるので $1 = 1$ を得る。$x = 1$ では導関数の分子が $-1+0+0+1 = 0$ となるので、恒等式は $\frac{1}{16} = \frac{D}{16}$ となり、$D = 1$ と整合する。
- 数値的には、シンプソンの公式（Simpson's rule）により $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^4} \approx 0.47460$ となり、$\frac{11}{24} \approx 0.45833$ と $\frac{11}{24} + \frac{1}{16} \approx 0.52083$ の間に余裕をもって収まる。残りの項 $J \approx 0.01627$ は $\frac{1}{16}$ よりずっと小さいが、これは f が $x = 1$ の近く以外ではごく小さいからである。

よくある間違い

- 商の微分法で共通因数 $(x^2+1)^2$ を約分し忘れること。そうすると分母が $(x^2+1)^6$ のまま残り、係数比較が煩雑になる。
- 小問 (i) で、$x = 1$ が停留点または端点であることだけを確かめること。端点での値が最大であると分かるには、f が増加関数であることを示す（あるいはすべての候補を比較する）必要がある。

STEP のその先へ

置換 $x = \tan\theta$ により、この積分は $\int_0^{\pi/4} \cos^6\theta \, \mathrm{d}\theta$ に変わり、これは漸化式（reduction formula）を用いて厳密に計算できる。その値は $\frac{11}{48} + \frac{5\pi}{64}$ であり、先の数値的な見積もりと一致する。被積分関数を「厳密な導関数と小さな何か」に分けることは漸化式の背後にある考え方であり、被積分関数を評価することで積分を評価するのは実解析（real analysis）の基本的な評価である。Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は、こうした評価を丁寧に展開している。

解答例

STEP I 2000、第 5 問

純粋数学 ・ 空間ベクトル

> **STEP I 2000、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q5

鍵となる考え方

すべては傾いた平面（inclined plane）の中で起こるので、その平面内に互いに垂直な 2 つの単位ベクトル（unit vector）をとる。一方は最大傾斜線（line of greatest slope）に沿ってまっすぐ上向きに、もう一方は水平にとる。すると Arthur と Bertha の位置はこれらの簡単な一次結合で表され、和積公式（sum-to-product formulae）を使えば差はすぐに整理できる。鉛直線とのなす角については、平面内の 2 つの方向それぞれが鉛直方向に対してどう位置しているかがわかればよく、そこで θ が入ってくる。

解答

設定

O を通る最も急な線に沿って上向きの単位ベクトルを $\mathbf{e}$ とし、平面内で $\mathbf{e}$ に垂直で、2 人がいる側を向く単位ベクトルを $\mathbf{f}$ とする。$\mathbf{f}$ は最大傾斜線に垂直なので水平である。鉛直上向きの単位ベクトルを $\mathbf{k}$ とする。このとき

$$\mathbf{e}\cdot\mathbf{k}=\sin\theta,\qquad \mathbf{f}\cdot\mathbf{k}=0,\qquad \mathbf{e}\cdot\mathbf{f}=0.$$

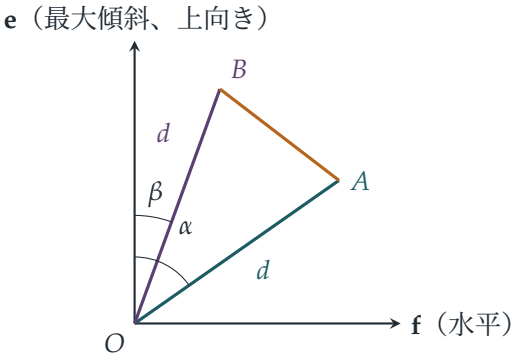
が成り立つ。（1 つ目は、$\mathbf{e}$ が水平面と角 θ をなし、したがって $\mathbf{k}$ と角 $\frac{\pi}{2}-\theta$ をなすことから従う。）

2 人は同じ速さで歩くので、Arthur が距離 d だけ歩いたとき、Bertha も距離 d だけ歩いている。O に対する 2 人の位置は

$$\mathbf{a}=d(\cos\alpha\,\mathbf{e}+\sin\alpha\,\mathbf{f}),\qquad \mathbf{b}=d(\cos\beta\,\mathbf{e}+\sin\beta\,\mathbf{f}).$$

である。最も急な線に対して同じ側を上り方向に歩くということは、$0\le\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$ を

意味する。



図は傾いた平面そのものを正面から見て描いたものである。

2人の間の距離

和積公式を用いると

$$\begin{aligned}\mathbf{a}-\mathbf{b} &= d\big[(\cos\alpha-\cos\beta)\,\mathbf{e}+(\sin\alpha-\sin\beta)\,\mathbf{f}\big]\\ &= d\big[-2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\mathbf{e}+2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\mathbf{f}\big]\\ &= 2d\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\big[-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\mathbf{e}+\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\mathbf{f}\big].\end{aligned}$$

となる。$s=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ とおく。$\mathbf{e}$ と $\mathbf{f}$ は互いに垂直な単位ベクトルであり、$\sin^2 s+\cos^2 s=1$ であるから、ベクトル $\mathbf{u}=-\sin s\,\mathbf{e}+\cos s\,\mathbf{f}$ は単位ベクトルである。したがって

$$AB=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=2d\left|\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\right|,$$

となり、求める結果が得られた。（幾何的に見れば、OAB は等しい2辺が d、頂角が $|\alpha-\beta|$ の二等辺三角形（isosceles triangle）であり、O から垂線を下ろしても同じ答えが得られる。）

鉛直線とのなす角

$\alpha\neq\beta$ のとき、$0<|\alpha-\beta|<\frac{\pi}{2}$ より $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\neq 0$ なので $A\neq B$ であり、直線 AB はきちんと定まる。上の計算から、この直線は単位ベクトル $\mathbf{u}$ に平行であり、同じことだが $\mathbf{v}=-\mathbf{u}=\sin s\,\mathbf{e}-\cos s\,\mathbf{f}$ に平行である。

考えてみよう 直線には2つの向きがある。鉛直線と比べるべきなのはどちらの向きだろうか？

直線と鉛直線のなす角は鋭角（acute angle）または直角であるから、直線に沿った向きのうち上向き、少なくとも下向きでないほうを用いる。ここで

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{k} = \sin s\,(\mathbf{e}\cdot\mathbf{k}) - \cos s\,(\mathbf{f}\cdot\mathbf{k}) = \sin\theta\sin s.$$

である。$0 \le s < \frac{\pi}{2}$ かつ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ なので、これは 0 以上であり、$\mathbf{v}$ が上向きの方向である。$\mathbf{v}$ と $\mathbf{k}$ はともに単位ベクトルなので、両者のなす角 ϕ は

$$\cos\phi = \mathbf{v}\cdot\mathbf{k} = \sin\theta\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),$$

を満たし、これが求める結果である。この値が d によらないことに注意しよう。2 人が歩くにつれて、直線 AB は自分自身に平行なまま移動するのである。

検算

- Arthur が水平に歩き（$\alpha = \frac{\pi}{2}$、境界の場合）、Bertha がまっすぐ上に歩く（$\beta = 0$）とすると、$AB = 2d\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,d$ となる。これは長さ d の互いに垂直な 2 つの道についてのピタゴラス（Pythagoras）の定理にほかならない。$\theta = 30°$、$d = 1$ として座標を使うと $A = (1,0,0)$、$B = (0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ となるので、B から A への鉛直方向の落差は距離 $\sqrt{2}$ に対して $\frac{1}{2}$ である。よって $\cos\phi = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0.354$ となり、$\sin 30°\sin 45°$ と一致し、$\phi \approx 69.3°$ である。
- 平面が水平（$\theta = 0$）ならば $\cos\phi = 0$ となる。直線は水平であり、当然そうあるべきである。
- 本物の 3 次元座標で θ、α、β、d を 10^5 通りランダムに選んでコンピュータで確かめたところ、どちらの公式とも 10^{-12} 以内で一致した。

よくある間違い

- 空間における鉛直線とのなす角ではなく、平面内で AB と最も急な線とのなす角を測ってしまう。答えには θ が現れなければならない。
- 絶対値を忘れる。$\beta > \alpha$ のとき $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ は負になるが、距離は負にならない。
- AB に沿って下向きの方向をとり、$\cos\phi = -\sin\theta\sin s$ としてしまう。直線と鉛直線のなす角が鈍角になることはない。

STEP のその先へ

ここでの方法は、問題に適した正規直交基底（orthonormal basis）を選び（平面内の 2 つのベクトルをとり、それらを周囲の空間の鉛直方向と関係づける）、長さや角度を内

積（dot product）から読み取るというものである。大学1年の線形代数（linear algebra）の講義では、これは基底の変換（change of basis）と正射影（orthogonal projection）の考え方になる。$\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}$ は $\mathbf{v}$ の鉛直方向への正射影の長さである。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、幾何をふんだんに使いながらこれらの考え方を丁寧に展開している。

解答例

STEP I 2000、第 6 問

純粋数学 • 直線で囲まれた領域

> **STEP I 2000、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q6

鍵となる考え方

x と y の 2 次式が 2 つの 1 次因数に因数分解（factorise）できるとき、その式は 2 本の直線の組を表す。2 つの因数の積が正となるのは両因数が同符号のときちょうどであり、負となるのは異符号のときである。したがって各不等式は、交わる 2 直線にはさまれた、向かい合う一対の「くさび形」領域を選び出す。両方の領域を同じ座標軸上に描いてしまえば、共通の点を見つけるのは見るだけの問題である。

解答

1 つ目の因数分解と領域

右辺を展開すると

$$\begin{aligned}(x-y+2)(x+y-1) &= x^2+xy-x-xy-y^2+y+2x+2y-2\\ &= x^2-y^2+x+3y-2,\end{aligned}$$

となり、求める式が得られる。よって 1 つ目の不等式は、両辺から 2 を引くと

$$(x-y+2)(x+y-1) > 0.$$

となる。境界は 2 直線

$$L_1:\ y = x+2, \qquad L_2:\ y = 1-x,$$

からなる。これらの傾き（gradient）は 1 と -1 であり、$x+2 = 1-x$ となるところ、すなわち $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ で交わる。

積が正となるのは、両因数が同符号のときである。

- ともに正：$y < x+2$ かつ $y > 1-x$、すなわち L_1 の下側かつ L_2 の上側。これは交点の**右側**のくさび形である（たとえば $(5,0)$ を含む）。
- ともに負：$y > x+2$ かつ $y < 1-x$、すなわち L_1 の上側かつ L_2 の下側。これは交点の**左側**のくさび形である（$(-5,0)$ を含む）。

よって求める領域は、直線 $y = x+2$ と $y = 1-x$ にはさまれた左右の向かい合う一対のくさび形であり、直線そのものは含まない（直線上では積は 0 であり、> 0 ではない）。簡単な確認をしておく。原点では式の値は $-2 < 0$ であり、原点は下側のくさび形にあるので、正しく除外されている。

2 つ目の領域

> **考えてみよう** こちらも因数分解できるとなぜわかるのか。また、因数はどのような形になるはずか。

2 次の項 $x^2 - 4y^2 = (x+2y)(x-2y)$ から、次の形を試してみる。

$$x^2 - 4y^2 + 3x - 2y + 2 = (x+2y+a)(x-2y+b).$$

右辺を展開すると $x^2 - 4y^2 + (a+b)x + (2b-2a)y + ab$ となる。係数を比較すると $a+b = 3$ かつ $b-a = -1$ であるから $a = 2$、$b = 1$ であり、このとき定数項 $ab = 2$ も一致する。よって、2 つ目の不等式の両辺に 2 を加えると

$$x^2 - 4y^2 + 3x - 2y < -2 \iff (x+2y+2)(x-2y+1) < 0.$$

となる。境界の直線は

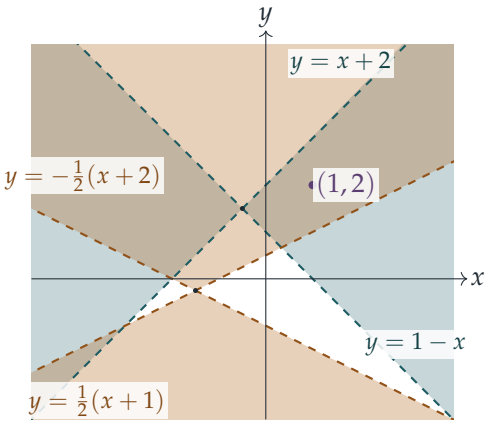
$$L_3 : y = -\tfrac{1}{2}(x+2), \qquad L_4 : y = \tfrac{1}{2}(x+1),$$

であり、傾きは $-\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{2}$、$-x-2 = x+1$ となるところ、すなわち $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ で交わる。

今度は両因数が**異符号**である必要がある。

- $x+2y+2 > 0$ かつ $x-2y+1 < 0$：$y > -\frac{1}{2}(x+2)$ かつ $y > \frac{1}{2}(x+1)$、すなわち両直線の上側。これは**上側**のくさび形である（$(0,5)$ を含む）。
- $x+2y+2 < 0$ かつ $x-2y+1 > 0$：両直線の下側。これは**下側**のくさび形である（$(0,-5)$ を含む）。

よって 2 つ目の領域は、直線 L_3 と L_4 にはさまれた上下の向かい合う一対のくさび形であり、やはり境界は含まない。



図では 1 つ目の領域を青緑色（左右のくさび形）、2 つ目の領域を琥珀色（上下のくさび形）で塗っており、色の濃く重なった部分が両方の不等式を満たす部分である。破線は含まない。

両方の領域に属する点

2 組のくさび形は確かに重なっている。右側の青緑色のくさび形は傾き ± 1 の 2 直線の間で右へ広がっており、一方、上側の琥珀色のくさび形は、傾き $\pm\frac{1}{2}$ のより緩やかな 2 直線の両方より上にあるすべての点を含む。$x > -\frac{1}{2}$ では、青緑色のくさび形の上の縁 $y = x + 2$ は直線 $y = \frac{1}{2}(x+1)$ より速く増加するので、両者の間には余地がある。

たとえば $(x, y) = (1, 2)$ をとる。このとき

$$x^2 - y^2 + x + 3y = 1 - 4 + 1 + 6 = 4 > 2$$

かつ

$$x^2 - 4y^2 + 3x - 2y = 1 - 16 + 3 - 4 = -16 < -2,$$

であるから、$(1, 2)$ は両方の不等式を満たす。（因数で確かめると、$(x - y + 2)(x + y - 1) = 1 \cdot 2 > 0$ かつ $(x + 2y + 2)(x - 2y + 1) = 7 \cdot (-2) < 0$ である。）

検算

- それぞれの因数分解は適当な点で確かめられる。$(3, 1)$ では $x^2 - y^2 + x + 3y - 2 = 12$、$(x - y + 2)(x + y - 1) = 4 \cdot 3 = 12$ であり、同じ点で $x^2 - 4y^2 + 3x - 2y + 2 = 14$、$(x + 2y + 2)(x - 2y + 1) = 7 \cdot 2 = 14$ である。
- 各くさび形から 1 点ずつ試す。たとえば $(0, -5)$ では $x^2 - 4y^2 + 3x - 2y = -90 < -2$ となり、下側の琥珀色のくさび形が 2 つ目の領域に属することが確かめられる。

- $[-10, 10]^2$ 内の 200 000 個の乱数点で数値的に確認したところ、不等式と上のくさび形による記述との間に食い違いは見られなかった。

よくある間違い

- 違う組のくさび形を塗ってしまう。「上側」「下側」に頼るのではなく、必ず 1 点（原点がいちばん簡単である）で試すこと。
- 定数を移項するときに -2 や $+2$ を忘れる。1 つ目の不等式は $(x - y + 2)(x + y - 1) > 0$、2 つ目は $(x + 2y + 2)(x - 2y + 1) < 0$ である。
- 境界の直線を実線で描いてしまう。不等式は等号を含まない（strict）ので、直線は除外される。

STEP のその先へ

2 変数の 2 次式 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ は 2 次曲線（conic）を定める。それが 2 つの 1 次因数に因数分解できるとき、その 2 次曲線は**退化している**（degenerate）といい、2 直線の組となる。これが起こるのは、係数からつくられるある 3×3 行列式（determinant）が 0 になるときちょうどである。2 次形式（quadratic form）の符号の様子（ここでは $x^2 - y^2$ と $x^2 - 4y^2$ で、どちらも不定符号（indefinite））は、大学 1 年の線形代数で対称行列（symmetric matrix）とその固有値（eigenvalue）を通して学ぶ。これを知るには、ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）がよい。

解答例

STEP I 2000、第 7 問

純粋数学 • 導関数の評価

> **STEP I 2000、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q7

鍵となる考え方

微分すると、条件 $\mathrm{f}'(x) \geq 0$ は「a は x のある関数以上である」という形になる。したがって、すべてはその関数の**最大値**にかかっている。この関数は x^2 だけに依存し、置換 $u = 1 + x^2$ を行うと $1/u$ の 2 次式になる。あとは平方完成（completing the square）によって最大値が得られ、それがどこでとられるかも正確にわかる。

解答

導関数

商の微分法（quotient rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^3}{1+x^2}\right) = \frac{3x^2(1+x^2) - x^3 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(1+x^2)^2},$$

であるから、

$$\mathrm{f}'(x) = a - g(x), \qquad \text{ただし} g(x) = \frac{x^2(x^2+3)}{(1+x^2)^2}.$$

よって、すべての x に対して $\mathrm{f}'(x) \geq 0$ となるのは、すべての x に対して $a \geq g(x)$ となるとき、かつそのときに限る。したがって g の最大値を求めればよい。

g の最大値

$u = 1 + x^2$ とおくと、$u \geq 1$ かつ $x^2 = u - 1$ である。このとき

$$g = \frac{(u-1)(u+2)}{u^2} = \frac{u^2 + u - 2}{u^2} = 1 + \frac{1}{u} - \frac{2}{u^2}.$$

考えてみよう これを u ではなく $1/u$ を用いて表すのがよいのはなぜか。

$s = 1/u$ を用いると $g = 1 + s - 2s^2$ となり、これは単なる 2 次式である。2 次式の最大値は平方完成から得られ、微積分は必要ない：

$$1 + s - 2s^2 = \frac{9}{8} - 2\left(s - \frac{1}{4}\right)^2.$$

平方は決して負にならないので、すべての x に対して $g \leq \frac{9}{8}$ であり、等号は $s = \frac{1}{4}$、すなわち $u = 4$、$x = \pm\sqrt{3}$ のときに限り成り立つ。

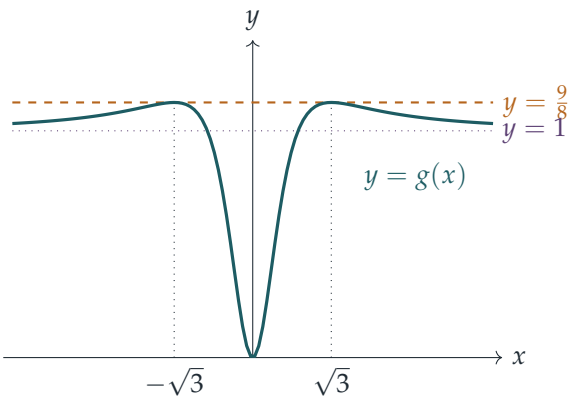
これを x を用いた式に戻すと（$s - \frac{1}{4} = \frac{3-x^2}{4(1+x^2)}$ を用いる）、導関数についてのすっきりした恒等式が得られる：

$$\mathrm{f}'(x) = \left(a - \frac{9}{8}\right) + \frac{(3-x^2)^2}{8(1+x^2)^2}.$$

結論

$a \geq \frac{9}{8}$ ならば、第 1 項の括弧は非負であり、第 2 項は平方を正の量で割ったものなので、これも非負である。したがって、求めるとおり、すべての x に対して $\mathrm{f}'(x) \geq 0$ である。

定数 $\frac{9}{8}$ は最良でもある：$a < \frac{9}{8}$ ならば $\mathrm{f}'(\sqrt{3}) = a - \frac{9}{8} < 0$ となるからである。$a = \frac{9}{8}$ のとき、f' が 0 になるのは $x = \pm\sqrt{3}$ のみなので、f はやはり狭義単調増加であり、停留点である変曲点（stationary point of inflection）を 2 つもつ。



g のグラフは 0 から上昇し、極限値 1 を超えて、$x = \pm\sqrt{3}$ で最大値 $\frac{9}{8}$ に達したのち、再び 1 に向かって下がっていく。導関数 $\mathrm{f}'(x)$ は、直線 $y = a$ がこの曲線よりどれだけ上にあるかを表す高さである。

検算

- $x = \sqrt{3}$ のとき：$g = \dfrac{3 \cdot 6}{4^2} = \dfrac{18}{16} = \dfrac{9}{8}$。✓
- $x \to \infty$ のとき $g \to 1 < \frac{9}{8}$ である。これは理にかなっている。$\frac{x^3}{1+x^2}$ は x が大きいとき x のようにふるまうので、その傾きは 1 に近づくからである。
- 数値的に確かめると、$a = \frac{9}{8}$ のとき、$[-100, 100]$ 上の刻み幅 0.001 の格子点における $\mathrm{f}'(x)$ の最小値は約 2×10^{-10} である（実質的に 0 で、$x \approx \pm\sqrt{3}$ においてとる）。$a = 1.1$ のときは $\mathrm{f}'(\sqrt{3}) = -0.025 < 0$ となる。

よくある間違い

- g の無限遠での極限値 1 を最大値とみなしてしまう。曲線は極限値を超えるので、答えは 1 ではなく $\frac{9}{8}$ になる。
- g を直接微分して、計算の中で迷子になる。置換 $s = 1/(1+x^2)$ を使えば、1 行の平方完成で済む。

STEP のその先へ

ここでは「すべての x に対して」という主張が、**上限**（supremum）を求める問題に帰着された：至るところで $\mathrm{f}' \geq 0$ となるのは、$a \geq \sup g$ のとき、かつそのときに限る。g が無限遠で極限をもつにもかかわらず、有限の点で最大となるという事実は、極限が必ずしも上界にはならないことへのよい戒めである。解析学（analysis）では、導関数が非負の関数は増加関数であることを（平均値の定理（Mean Value Theorem）を用いて）証明する。だからこそ、この問題は本当は f が単調（monotonic）かどうかを問うものなのである。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、これらの考え方を丁寧に展開している。

解答例

STEP I 2000、第 8 問

純粋数学 • 絶対値の積分

STEP I 2000、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/00-s1-q8

鍵となる考え方

積分の中に絶対値（modulus）記号があるときは、絶対値の中の式の符号が変わる点を求めて処理する。符号が変わる点で区切られた各区間では、$|f|$ は f か $-f$ のどちらかであるから、そこで積分範囲を分割し、通常の関数として積分すればよい。本当に手間がかかるのは零点を求める部分だけである。$x\mathrm{e}^x$ については見ればわかり、3 次式は因数分解によって、$\sin x + \cos x$ は一つの正弦波の形に書き直すことによって求める。

解答

最初の積分

すべての x に対して $\mathrm{e}^x > 0$ であるから、$x\mathrm{e}^x$ の符号は x の符号と一致する。したがって、$[-1,0]$ 上では $x\mathrm{e}^x \le 0$ であり $|x\mathrm{e}^x| = -x\mathrm{e}^x$、一方 $[0,1]$ 上では $x\mathrm{e}^x \ge 0$ であり $|x\mathrm{e}^x| = x\mathrm{e}^x$ である。積分範囲を 0 で分割すると、

$$\int_{-1}^{1} |x\mathrm{e}^x|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (-x\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x,$$

となり、これが求める等式である。

値を計算するには、$u = x$、$\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$ として部分積分（integration by parts）を行う。

$$\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x-1)\mathrm{e}^x + c.$$

よって

$$\int_{-1}^{0} xe^x\,dx = \left[(x-1)e^x\right]_{-1}^{0} = -1-(-2e^{-1}) = \frac{2}{e}-1,$$
$$\int_{0}^{1} xe^x\,dx = \left[(x-1)e^x\right]_{0}^{1} = 0-(-1) = 1.$$

このうち一つ目は負である（そこでは被積分関数が負なので、当然そうなるはずである）。したがって

$$\int_{-1}^{1} |xe^x|\,dx = \left(1-\frac{2}{e}\right)+1 = 2-\frac{2}{e}.$$

小問 (i)

$p(x) = x^3-2x^2-x+2$ とおく。項をまとめると、

$$p(x) = x^2(x-2)-(x-2) = (x-2)(x^2-1) = (x+1)(x-1)(x-2).$$

$[0,4]$ における零点は $x=1$ と $x=2$ のみである。最高次の係数が正で、単根 $-1,1,2$ をもつ 3 次関数は、-1 と 1 の間で正、1 と 2 の間で負、2 より先で正である。したがって

$$|p(x)| = \begin{cases} p(x), & 0 \le x \le 1, \\ -p(x), & 1 \le x \le 2, \\ p(x), & 2 \le x \le 4. \end{cases}$$

原始関数（antiderivative）として

$$F(x) = \tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{2}{3}x^3-\tfrac{1}{2}x^2+2x,$$

をとる。このとき

$$F(0) = 0, \qquad F(1) = \tfrac{1}{4}-\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{2}+2 = \tfrac{13}{12},$$
$$F(2) = 4-\tfrac{16}{3}-2+4 = \tfrac{2}{3}, \qquad F(4) = 64-\tfrac{128}{3}-8+8 = \tfrac{64}{3}.$$

考えてみよう なぜ $F(4)-F(0)$ を計算して、その絶対値をとるだけではいけないのだろうか。

絶対値は答えではなく被積分関数に対して適用しなければならないからである。$[1,2]$ 上ではこの 3 次関数は負であり、$F(4)-F(0)$ ではその部分の面積が加えられるのではなく引かれてしまう。そこで三つの部分を別々に扱う。

$$\begin{aligned}\int_{0}^{4} |p(x)|\,dx &= \big(F(1)-F(0)\big)-\big(F(2)-F(1)\big)+\big(F(4)-F(2)\big)\\ &= \tfrac{13}{12}-\big(\tfrac{2}{3}-\tfrac{13}{12}\big)+\big(\tfrac{64}{3}-\tfrac{2}{3}\big)\\ &= \tfrac{13}{12}+\tfrac{5}{12}+\tfrac{62}{3} = \tfrac{3}{2}+\tfrac{62}{3} = \frac{133}{6}.\end{aligned}$$

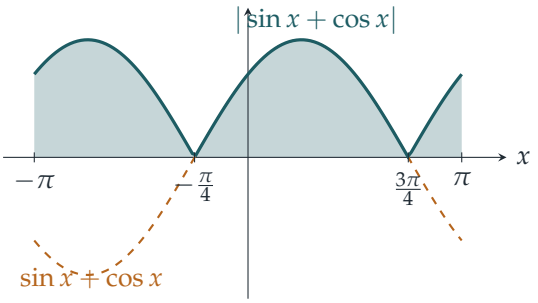
各括弧の値は、あるべき通りすべて正である。$\frac{13}{12}$、$\frac{5}{12}$、$\frac{62}{3}$ が三つの部分それぞれの面積である。（比較のために述べると、$F(4)-F(0)=\frac{64}{3}$ であり、これは $2\times\frac{5}{12}$ だけ小さい。）

小問 (ii)

$\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)$ を用いると、

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\,\sin\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right).$$

これは $[-\pi,\pi]$ において $x=-\frac{\pi}{4}$ と $x=\frac{3\pi}{4}$ で 0 になる。$[-\pi,-\frac{\pi}{4}]$ 上と $[\frac{3\pi}{4},\pi]$ 上では負であり、その間では正である。



先ほどと同様に三つの部分に分けることもできるが、もっと手際のよい方法がある。$u=x+\frac{\pi}{4}$ と置換すると、

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x+\cos x|\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int_{-3\pi/4}^{5\pi/4}|\sin u|\,\mathrm{d}u.$$

関数 $|\sin u|$ は周期（period）π をもち、新しい積分範囲の長さは 2π であるから、ちょうど 2 周期分を覆う。周期関数を整数個の周期にわたって積分した値は、どこから始めるかによらないので、

$$\sqrt{2}\int_{-3\pi/4}^{5\pi/4}|\sin u|\,\mathrm{d}u=\sqrt{2}\times 2\int_{0}^{\pi}\sin u\,\mathrm{d}u=\sqrt{2}\times 2\times 2=4\sqrt{2}.$$

直接分割する方法を好むなら、$G(x)=\sin x-\cos x$ は $\sin x+\cos x$ の原始関数であり、$G(-\pi)=1$、$G(-\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2}$、$G(\frac{3\pi}{4})=\sqrt{2}$、$G(\pi)=1$ である。三つの面積は $1+\sqrt{2}$、$2\sqrt{2}$、$\sqrt{2}-1$ であり、その和は $4\sqrt{2}$ となる。

検算

- 各部分（被積分関数が滑らかな区間）にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると、最初の積分について 1.264241 . . . が得られ、$2-2/\mathrm{e}\approx 1.264241$ と一致する。

- (i) については、数値積分により 22.16667 が得られ、$\frac{133}{6}$ と一致する。また、これは $F(4) - F(0) = \frac{64}{3} \approx 21.33$ よりわずかに大きいが、絶対値によって小さな負の面積が正の面積に変わるのだから、そうなるはずである。
- (ii) については、数値積分により 5.656854 が得られ、$4\sqrt{2}$ と一致する。妥当性の確認として、$|\sin x + \cos x|$ は $\sqrt{2}|\sin x|$ と同じ形をしており、その平均値は $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ であるから、$2\pi \times \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 4\sqrt{2}$ となる。

よくある間違い

- 符号が変わる点をまたいでそのまま積分し、最後に絶対値をとってしまう。これでは負の領域をすべて少なく数えてしまう。
- (i) で $x = 1$ の根を見落とす。常に完全に因数分解するか、少なくとも因数定理（factor theorem）を用いて小さな整数の根を確かめること。
- $\left[(x-1)\mathrm{e}^x\right]_{-1}^{0}$ での符号の誤り。$x = -1$ での値は $-2\mathrm{e}^{-1}$ であるから、これを引くと $2/\mathrm{e}$ を加えることになる。

STEP のその先へ

積分 $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ は、曲線と軸の間の面積の総和である。大学では、これは f の L^1 ノルム（L^1 norm）として再び現れる。これは関数の大きさや、二つの関数の間の距離を測る方法の一つである。f が積分可能ならば $|f|$ も積分可能であること、そして $\left|\int f\right| \le \int |f|$ が成り立つことを証明するのは、実解析（real analysis）の初期の標準的な演習問題である。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、リーマン積分（Riemann integral）をこの両方を証明できるほど丁寧に展開している。

解答例

STEP I 2000、第 9 問

力学 ・ 加速度系における放物運動

> **STEP I 2000、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q9

鍵となる考え方

到達距離（range）は**客車の中で**測るので、客車に固定した座標系（frame）で考える。客車は北向きに加速度（acceleration）a で加速しているから、床に対する砲弾の加速度は、下向きの g に南向きの a を加えたものになる。南向きはちょうど大砲が発射する向きである。運動は依然として一定の加速度をもつ放物運動（projectile motion）であり、水平方向の項が一つ加わるだけである。到達距離を 2θ を用いて表してしまえば、その最大化は一行の微分で済む。

解答

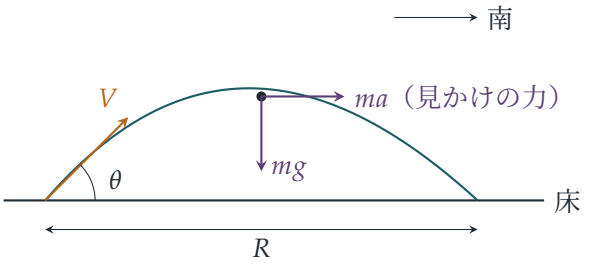
客車内での到達距離

砲弾を質点（particle）とみなし、空気抵抗（air resistance）は無視する。砲弾は床の高さから発射されて床に落ち、客車は砲弾が車内に着地するのに十分な長さをもつと仮定する。x 軸を水平に南向き（発射方向）に、y 軸を鉛直上向きにとり、いずれも客車に対して測る。

地面に固定した座標系では、砲弾の加速度は下向きに g で、水平方向の加速度はない。客車の加速度は北向きに a である。よって、**客車に対する**砲弾の加速度は

$$\ddot{x} = 0 - (-a) = a, \qquad \ddot{y} = -g.$$

となる。同じことであるが、客車の座標系では、質量 m の砲弾に重力に加えて南向きの見かけの力（apparent force）ma がはたらく。



客車に対する初速度は、南向きに $V\cos\theta$、上向きに $V\sin\theta$ であるから、

$$x = Vt\cos\theta + \tfrac{1}{2}at^2, \qquad y = Vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

鉛直方向の運動は a の影響を受けない。砲弾は $t > 0$ で $y = 0$ となるとき、すなわち $T = \dfrac{2V\sin\theta}{g}$ で着地する。したがって、客車内での到達距離は

$$\begin{aligned} R = x(T) &= \frac{2V^2\sin\theta\cos\theta}{g} + \frac{a}{2}\cdot\frac{4V^2\sin^2\theta}{g^2} \\ &= \frac{V^2}{g}\left(\sin 2\theta + \frac{a}{g}(1-\cos 2\theta)\right), \end{aligned}$$

である。ここで $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ と $2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$ を用いた。

到達距離の最大化

θ で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta} = \frac{2V^2}{g}\left(\cos 2\theta + \frac{a}{g}\sin 2\theta\right),$$

となり、これが 0 になるのは

$$\boxed{\tan 2\theta = -\frac{g}{a}.}$$

のときである。

考えてみよう 正接が負？　どこかで間違えたのだろうか？

そうではない。$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき $0 < 2\theta < \pi$ であり、$\tan 2\theta < 0$ は単に 2θ が $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ にあること、つまり $\theta > \frac{\pi}{4}$ であることを意味する。これは理にかなっている。余分な押し a は砲弾が空中にある間ずっとはたらくので、45° より少し高く撃って滞空時間を稼ぐほうが得なのである。$a = 0$ なら $\cos 2\theta = 0$ となり、おなじみの $\theta = \frac{\pi}{4}$ が得られる。

これが最大値であることを確かめるために、$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ として $\tan\varphi = \dfrac{a}{g}$ とおく。すると

$$\sin 2\theta - \frac{a}{g}\cos 2\theta = \frac{\sin(2\theta - \varphi)}{\cos\varphi}, \qquad \text{よって} \qquad R = \frac{V^2}{g}\left(\frac{\sin(2\theta-\varphi)}{\cos\varphi} + \frac{a}{g}\right).$$

これが最大になるのは $2\theta - \varphi = \frac{\pi}{2}$、すなわち $2\theta = \frac{\pi}{2} + \varphi$ のときであり、これは $\tan 2\theta = -g/a$ の $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ における解である。よって最適な角度は厳密に

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arctan\frac{a}{g},$$

であり、$\cos\varphi = g/\sqrt{g^2+a^2}$ であるから、最大到達距離は厳密に

$$R_{\max} = \frac{V^2}{g}\left(\frac{\sqrt{g^2+a^2}}{g} + \frac{a}{g}\right) = \frac{V^2}{g^2}\left(a + \sqrt{g^2+a^2}\right).$$

となる。

a が小さい場合

u が小さいとき、$\arctan u = u + O(u^3)$ である。$u = a/g$ とすると

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{g} + O\left(\frac{a^3}{g^3}\right)\right) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{a}{2g},$$

となり、求める結果が得られる。到達距離については、$\sqrt{g^2+a^2} = g\sqrt{1+a^2/g^2} = g + O(a^2/g)$ であるから

$$R_{\max} = \frac{V^2}{g^2}\left(a + g + O(a^2/g)\right) \approx \frac{V^2}{g} + \frac{V^2 a}{g^2},$$

となり、これが二つ目の求める結果である。どちらの近似も a/g について一次（first order）まで正しく、無視した項は $(a/g)^2$ 以下の大きさである。

$\tan 2\theta$ のまま扱いたければ、$2\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ とおけばよい。すると $\tan 2\theta = -\cot\varepsilon \approx -1/\varepsilon$ であるから $\varepsilon \approx a/g$ となる。$\sin 2\theta = \cos\varepsilon \approx 1$ と $\cos 2\theta = -\sin\varepsilon \approx -\varepsilon$ を R に代入すると、一次までで $R \approx \frac{V^2}{g}\left(1 + \frac{a}{g}\right)$ が得られる。

検算

- $a = 0$：公式は $\theta = \frac{\pi}{4}$ と $R_{\max} = V^2/g$ に帰着し、水平な地面での標準的な結果と一致する。
- 次元（dimensions）：a/g は無次元で、V^2/g は長さであり、そうなるべきとおりである。
- 数値的に、$V = 7$、$g = 9.8$、$a = 1.3$ として地面の座標系で運動を刻みながら計算し、客車の位置を差し引くと、R の公式が再現される（例えば $\theta = 0.7$ で $R \approx 5.478$）。いくつかの無作為な a について θ を総当たりで探索すると、最大値は $\tan 2\theta = -g/a$ のところで見つかり、$R_{\max}$ は $\frac{V^2}{g^2}(a + \sqrt{g^2+a^2})$ と有効数字（significant figures）10 桁まで一致した。$a = 0.05$ のとき、厳密な最適角 $0.787949\ldots$ は $\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2g}$ と小数第 7 位まで一致する。

よくある間違い

- a の符号を間違える。客車は砲弾の発射方向とは**逆向きに**加速するので、床に対して砲弾は南向きに速さを増す。項 $\frac{1}{2}aT^2$ は引くのではなく足すのである。
- 到達距離を客車内ではなく地面で測ってしまう。問題が求めているのは客車の床に沿った距離である。
- 電卓で $2\theta = \arctan(-g/a)$ とすると負の角が得られてしまう。正しい解は $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ にある。

STEP のその先へ

加速する座標系で考え、見かけの力 $-m\mathbf{a}$ を加えるのは、**慣性力**（fictitious force）の最も簡単な例である。回転座標系では、同じようにして遠心力（centrifugal force）とコリオリ（Coriolis）の力が現れる。ここでは見かけの力によって「有効重力」（effective gravity）が傾き、その大きさが $\sqrt{g^2+a^2}$ になるだけである。これは答えに $\sqrt{g^2+a^2}$ が現れる理由の一つの見方である。非慣性系（non-inertial frame）については Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）にわかりやすく書かれている。

解答例

STEP I 2000、第 10 問

力学 ・ 衝突と反発係数

STEP I 2000、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/00-s1-q10

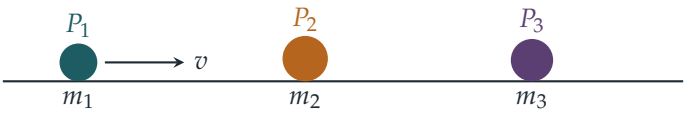
鍵となる考え方

各衝突からは二つの方程式が得られる。運動量保存則（conservation of momentum）とニュートン（Newton）の反発の法則（law of restitution）である。本問では結果の一部がすでにわかっている（P_1 は静止し、P_3 は速さ v で動き出す）ので、速度について解くのではなく、未知の係数について解く。衝突が可能であるための条件は、反発係数（coefficient of restitution）に対する唯一の物理的制約 $0 \leq e \leq 1$ から得られる。そして最終的なエネルギーはただ一つの自由な質量 m_2 の関数となるので、これらの条件が許す区間でそれを最適化すればよい。

解答

モデル

三つの物体を、なめらかな台の上を一直線上に運動する質点として扱う。すると水平方向の外力ははたらかないので、各衝突において運動量は保存される。P_1 のはじめの運動の向きを正の向きとする。



一回目の衝突

P_2 が速度 u で動き出すとする。P_1 は静止するので、

$$\text{運動量：}\quad m_1 v = m_2 u \quad\Longrightarrow\quad u = \frac{m_1 v}{m_2},$$

$$\text{反発：}\quad u - 0 = e(v - 0) \quad\Longrightarrow\quad e = \frac{u}{v} = \frac{m_1}{m_2}.$$

二回目の衝突

次に P_2 が速さ u で静止している P_3 に衝突する。衝突後の P_2 の速度を w とする。P_3 の速度は v と与えられている。運動量保存より

$$m_2 u = m_2 w + m_3 v \quad\Longrightarrow\quad m_1 v = m_2 w + m_3 v \quad\Longrightarrow\quad w = \frac{(m_1 - m_3)v}{m_2},$$

となる。ここで一回目の衝突から得た $m_2 u = m_1 v$ を用いた。反発の法則（遠ざかる速さ $= e' \times$ 近づく速さ）より

$$v - w = e' u.$$

w と u を代入し、両辺に m_2/v（これは 0 でない）を掛けると

$$m_2 - (m_1 - m_3) = e' m_1 \quad\Longrightarrow\quad e' = \frac{m_2 + m_3 - m_1}{m_1},$$

となり、求める結果が得られる。

このような衝突はいつ可能か

反発係数はつねに 0 以上 1 以下である。$0 \le e' \le 1$ を用い、$m_1 > 0$ を掛けると

$$0 \le m_2 + m_3 - m_1 \le m_1 \quad\Longleftrightarrow\quad m_1 \le m_2 + m_3 \le 2m_1,$$

となり、これが問われている不等式である。したがって、これは衝突が可能であるための必要条件である。

考えてみよう すべての制約を使っただろうか。e についてはどうか。

$0 \le e \le 1$ も必要である。$e = m_1/m_2$ なので、これは $m_2 \ge m_1$ のときに限り成り立つ。この条件は示すよう求められた結果には含まれていない（実際、この条件があれば左側の不等式 $m_2 + m_3 \ge m_1$ は自動的に成り立つ）が、最後の小問では重要になる。以上をまとめると、衝突が可能であるのは

$$m_1 \le m_2 \le 2m_1 - m_3.$$

のときに限る。この区間が空でないためには $m_3 \le m_1$ が必要である。このとき $w = (m_1 - m_3)v/m_2 \ge 0$ なので、二回目の衝突の後 P_2 は前向きに動き続ける（ま

たは静止する）ので、静止している P_1 に戻ってきて衝突することはない。また $v - w = e'u \geq 0$ なので、P_2 が P_3 に再び追いつくこともない。したがって衝突はこの二回だけである。

最終的なエネルギー

最終的に P_1 は静止し、P_2 の速度は w、P_3 の速度は v であるから、最終的な運動エネルギー（kinetic energy）は

$$E = \tfrac{1}{2}m_2w^2 + \tfrac{1}{2}m_3v^2 = \frac{(m_1 - m_3)^2v^2}{2m_2} + \tfrac{1}{2}m_3v^2.$$

である。m_1、m_3、v を固定すると、変化できるのは m_2 だけであり、その範囲は $m_1 \leq m_2 \leq 2m_1 - m_3$ である。第一項は 0 以上の定数を m_2 で割ったものなので、E は m_2 の減少関数である（$m_1 = m_3$ のときは定数となるが、そのとき区間はそもそも一点 $m_2 = m_1$ のみである）。

エネルギーが最大となるのは $m_2 = m_1$ のとき（一回目の衝突が完全弾性衝突（perfectly elastic）、すなわち $e = 1$）であり、

$$E_{\max} = \frac{(m_1 - m_3)^2v^2}{2m_1} + \frac{m_3v^2}{2} = \frac{(m_1^2 - m_1m_3 + m_3^2)\,v^2}{2m_1}.$$

エネルギーが最小となるのは $m_2 = 2m_1 - m_3$ のとき（二回目の衝突が完全弾性衝突、すなわち $e' = 1$）であり、

$$E_{\min} = \frac{(m_1 - m_3)^2v^2}{2(2m_1 - m_3)} + \frac{m_3v^2}{2} = \frac{(m_1^2 - 2m_1m_3 + m_3^2 + 2m_1m_3 - m_3^2)v^2}{2(2m_1 - m_3)} = \frac{m_1^2v^2}{2(2m_1 - m_3)}.$$

検算

- 衝突によってエネルギーが増えることはないので、$E_{\max} \leq \frac{1}{2}m_1v^2$ でなければならない。これは $m_1^2 - m_1m_3 + m_3^2 \leq m_1^2$、すなわち $m_3(m_3 - m_1) \leq 0$ であり、$m_3 \leq m_1$ より成り立つ。
- $E_{\max} - E_{\min} = \dfrac{(m_1 - m_3)^3v^2}{2m_1(2m_1 - m_3)} \geq 0$ であることが確かめられる。また $m_1 = m_3$ のときは二つの答えはともに $\frac{1}{2}m_1v^2$ に等しい（このとき $m_2 = m_1$ であり、両方の衝突が弾性衝突でエネルギーは失われない）。
- 数値例として $m_1 = 2$、$m_3 = 1$、$v = 1$ とすると、はじめのエネルギーは 1、$E_{\max} = \frac{3}{4}$、$E_{\min} = \frac{2}{3}$ である。m_2 を $[2,3]$ の範囲で動かして厳密な計算を行うと、これらの最大値・最小値が再現され、さらにその範囲全体で $e, e' \in [0,1]$ が成り立ち、範囲外では成り立たないことが確認できる。

よくある間違い

- （e' だけから得た）$m_1 - m_3 \leq m_2 \leq 2m_1 - m_3$ の範囲で最適化してしまう。こうすると、はじめのエネルギーすべてである $\frac{1}{2}m_1v^2$ が「最大値」として得られるが、それを与える m_2 の値では $e = m_1/m_2 > 1$ となり、ありえない。
- 反発の法則を逆にしてしまう。e 倍の**近づく**速さに等しいのは、**遠ざかる**速さである。

STEP のその先へ

本問の型、すなわち各制約がパラメータの許される区間を切り出し、その区間で単調（monotonic）な関数を最適化するという型は、制約付き最適化（constrained optimisation）の最も簡単な場合であり、これは線形計画法（linear programming）やラグランジュの未定乗数法（Lagrange multipliers）へと発展していく。物理の側面では、衝突は重心系（centre-of-mass frame）で考えるとはるかに見通しがよくなる。重心系では反発係数はすべての速度を単に $-e$ 倍するだけであり、失われるエネルギーは μ を換算質量（reduced mass）として $\frac{1}{2}\mu(1-e^2) \times$ (相対速度)^2 となる。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、衝突についてこの見方を展開している。

解答例

STEP I 2000、第 11 問

力学 ・ 梯子の摩擦とつり合い

> **STEP I 2000、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q11

鍵となる考え方

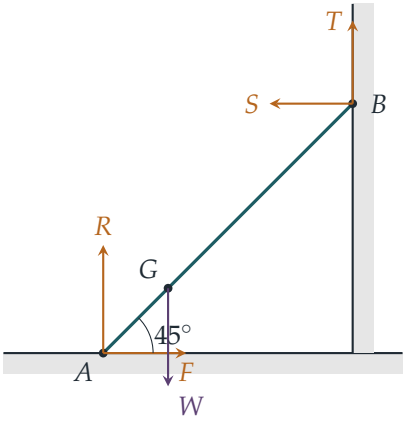
これは両端に摩擦（friction）がはたらくはしごの問題である。「A と B の両方で限界（limiting）」という条件により、各摩擦力はすべて垂直抗力（normal reaction）で表されるので、2 つの力の分解（resolving）の式から 4 つの接触力がすべて決まる。すると力のモーメント（moment）の式は条件として 1 つ余分になる。たまたま成り立つか、成り立たないかのどちらかである。前半では、それが成り立たないことを示す。後半では、追加した質量の位置を、それを成り立たせるための未知数として用いる。

解答

モデルと方程式

棒を剛体（rigid body）の棒とみなし、その重さ $W = 5g\,\mathrm{N}$ が G にはたらくとする。A（床）と B（壁）での接触はどちらも粗い。はたらく力は次のとおりである。

- A において：上向きの垂直抗力 R と水平方向の摩擦力 F。
- B において：壁から離れる向きの水平な垂直抗力 S と鉛直方向の摩擦力 T（上向きを正とするので、$T < 0$ なら下向きを意味する）。
- G において下向きにはたらく重さ W。



水平方向の力は F と S だけであり、$S \geq 0$ は棒を壁から押し離す向きにはたらく。したがって F は壁に向かう向きにはたらかなければならず、

$$F = S. \tag{1}$$

鉛直方向に分解すると、

$$R + T = W. \tag{2}$$

A のまわりのモーメントを考えるために、$AB = 0.81$、$c = \cos 45^\circ = \sin 45^\circ$ とおく。このとき B は A から水平距離 $0.81c$、高さ $0.81c$ の位置にあり、G は A から水平距離 $0.21c$ の位置にある。時計回りと反時計回りのモーメントをとると、

$$S\,(0.81c) + T\,(0.81c) = W\,(0.21c),$$

となり、c を約すと

$$0.81\,(S + T) = 0.21\,W. \tag{3}$$

ここで 45° が役に立っている。因数 c がすべての項から約されるのである。

両端で同時に限界摩擦にはなりえない

両端で摩擦が限界（限界摩擦（limiting friction））であると仮定する。すると $F = 0.2R$ かつ $|T| = 1.0\,S = S$ である。

> **考えてみよう**　B での摩擦が限界のとき、その摩擦はどちら向きにはたらくか。

自然に考えられるのは、A が壁から離れる向きに動き、B が下にすべり落ちようとしている場合であり、このとき $T = +S$ となる。念のため両方の符号を確かめる。

$T = S$ の場合。 (1) より $S = F = 0.2R$ であり、(2) から $R + 0.2R = W$ を得る。よって $R = \frac{5}{6}W$、$S = T = \frac{1}{6}W$ である。このとき (3) の左辺は

$$0.81\left(\tfrac{1}{6}W + \tfrac{1}{6}W\right) = 0.27\,W \neq 0.21\,W.$$

となる。よってモーメントの式は成り立たない。

$T = -S$ の場合。 (3) の左辺は 0 となるが、右辺は $0.21W > 0$ であり、これはありえない。

いずれの場合も棒は釣り合い（equilibrium）の状態にありえない。したがって、A と B の両方で摩擦が限界になることはない。これで示された。

（限界でない場合には釣り合いは確かに可能である。たとえば $T = S = \frac{7}{54}W$ は (3) を満たし、$R = \frac{47}{54}W$ を与え、$F = S \leq 0.2R$ となる。）

P に質量を加える

$AP = x\,\mathrm{m}$ とする。追加の重さも $W = 5g\,\mathrm{N}$ であり、P にはたらくので、重さの合計は $2W$ となる。式 (1) と (2) は

$$F = S, \qquad R + T = 2W,$$

となり、A のまわりのモーメントの式には項 $W\,(xc)$ が加わる。c を約すと

$$0.81\,(S + T) = 0.21\,W + x\,W. \tag{4}$$

となる。今度は両端で摩擦が限界である。$T = -S$ の場合はやはりありえない。そのとき (4) の左辺は 0 だが右辺は正だからである。よって $T = S$ かつ $F = 0.2R$ であり、したがって

$$S = 0.2R, \qquad R + 0.2R = 2W \quad \Longrightarrow \quad R = \tfrac{5}{3}W, \quad S = T = \tfrac{1}{3}W.$$

これを (4) に代入すると

$$0.81 \times \tfrac{2}{3}\,W = 0.54\,W = 0.21\,W + x\,W,$$

となるので、$x = 0.33$ である。よって

$$AP = 0.33\,\mathrm{m}.$$

これは 0 と 0.81 の間にあるので、P は棒の上にある。P は G より先（さらに中点より先）にあるので、追加の質量によって全体の重心（centre of gravity）は棒の上の方へ移る。これは、はしごをすべりやすくする方向にはたらく。

検算

- P に質量がある場合、W を単位とした力は $R = \frac{5}{3}$、$F = S = T = \frac{1}{3}$ である。このとき $F/R = 0.2$、$T/S = 1$ なので、どちらも限界である。鉛直方向では $\frac{5}{3} + \frac{1}{3} = 2$ であり、モーメントからは $0.81 \times \frac{2}{3} = 0.54 = 0.21 + 0.33$ を得る。
- 全体の重心は A から $\frac{1}{2}(0.21 + 0.33) = 0.27\,\mathrm{m}$ の位置にある。これは前半で両端が限界摩擦となるために必要だった位置（$0.21W$ に対する $0.27W$）にちょうど一致する。摩擦係数（coefficient of friction）が同じで、重さの合計が 2 倍になっただけなので、これは理にかなっている。
- 質量と g は全体を通して約されるので、答えはそれらによらない。$g = 9.8$ と実際の 45° のモーメントを用いて数値を代入すると、残差は 10^{-15} 程度になる。

よくある間違い

- A での摩擦の向きを逆にとってしまう。水平方向の力は他に S しかないので、F は壁に向かう向きでなければならない。
- B での摩擦が鉛直方向であることを忘れてしまう。この摩擦は鉛直方向の分解に現れ、R を重さの合計より小さくする。
- G の代わりに棒の中点を用いてしまう。この棒は一様ではない。

STEP のその先へ

平面内の剛体からは 3 つの釣り合いの式が得られるので、未知の接触力が 4 つある問題は**不静定**（statically indeterminate）である。剛体の静力学だけでは、摩擦が両端にどのように分担されるかはわからない。「両端で限界」という条件を課すと式が 2 つ加わり、系は過剰決定となる。前半に解が存在しないのは、まさにこのためである。工学では、接触部の弾性をモデル化することによって不静定性を解消する。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の静力学と摩擦を大学 1 年生の水準で丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 2000、第 12 問

確率・統計 ・ 幾何分布

> **STEP I 2000、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q12

鍵となる考え方

どの場合も、**それまでの試行がすべて失敗したという条件のもとで、次の試行が成功する確率はいくらか**を考える。そして、最初の $n-1$ 回の失敗の確率と、第 n 回の成功の確率を掛け合わせる。3 つの規則からは、まったく異なる形の答えが得られる。条件付き確率（conditional probability）が増えていくもの、最初から一定であるもの、そして 1 回目の後に初めて一定になるものである。

以下では、必要な試行回数を N とし、$n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して $\mathrm{P}(N = n)$ を求める。扉に合う鍵を**正しい鍵**とよぶ。

解答

小問 (i)

この場合は同じ鍵を二度と使わないので、一様（uniformly）にランダムな順序で鍵を試していることになる。対称性（symmetry）により、正しい鍵はその順序の k 個の位置のどれにも等しい確率で現れる。したがって

$$\mathrm{P}(N = n) = \frac{1}{k} \quad \text{for } n = 1, 2, \ldots, k, \qquad \mathrm{P}(N = n) = 0 \text{ for } n > k.$$

対称性による議論があまりに鮮やかすぎて納得しにくいなら、代わりに条件付き確率を掛け合わせればよい。j 回失敗した後には、まだ試していない鍵が $k - j$ 本残っていて、そのうち 1 本が正しい鍵である。よって $1 \le n \le k$ に対して

$$\mathrm{P}(N = n) = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k-2}{k-1} \cdots \frac{k-n+1}{k-n+2} \cdot \frac{1}{k-n+1} = \frac{1}{k},$$

となる。積の因子が次々に打ち消し合う（telescoping）からである。

小問 (ii)

今度は各試行が k 本すべての鍵からの新たな独立（independent）な選択なので、それまでに何が起きたかにかかわらず、各試行は確率 $\frac{1}{k}$ で成功する。ちょうど n 回の試行が必要になるには、最初の $n-1$ 回が失敗し、第 n 回が成功しなければならない：

$$\mathrm{P}(N=n)=\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n-1}\frac{1}{k},\qquad n=1,2,3,\ldots$$

これはパラメータ $\frac{1}{k}$ の幾何分布（geometric distribution）であり、n に上限はない。

小問 (iii)

1 回目の試行は確率 $\frac{1}{k}$ で成功するので、$\mathrm{P}(N=1)=\frac{1}{k}$ である。

次に、第 m 回の試行（ある $m\geq 1$ について）が失敗したとする。このとき、第 m 回に試した鍵は誤った鍵である。第 $m+1$ 回では、残りの $k-1$ 本から一様に選ぶ。

> **考えてみよう** 第 m 回より前の経緯は、第 $m+1$ 回で成功する確率に影響するだろうか。

影響しない。重要なのはどの鍵が除外されたかだけであり、それは常に**誤った**鍵である。したがって、選択肢となる $k-1$ 本の鍵には常に正しい鍵が含まれ、それまでに何が起きたかにかかわらず、第 $m+1$ 回の試行は確率 $\frac{1}{k-1}$ で成功し、確率 $\frac{k-2}{k-1}$ で失敗する。

よって $n\geq 2$ のとき、1 回目の試行が失敗し（確率 $\frac{k-1}{k}$）、第 $2,\ldots,n-1$ 回の試行が失敗し（それぞれ確率 $\frac{k-2}{k-1}$）、第 n 回の試行が成功する（確率 $\frac{1}{k-1}$）。したがって

$$\mathrm{P}(N=n)=\frac{k-1}{k}\left(\frac{k-2}{k-1}\right)^{n-2}\frac{1}{k-1}=\frac{1}{k}\left(\frac{k-2}{k-1}\right)^{n-2},\qquad n\geq 2,$$

であり、これに $\mathrm{P}(N=1)=\frac{1}{k}$ が加わる。

興味深いことに、$\mathrm{P}(N=2)=\frac{1}{k}$ でもあり、小問 (i) と同じである。（$k=2$ のときは、規則により鍵を交互に使うことになるので、N は 1 または 2 で、それぞれの確率は $\frac{1}{2}$ である。0^0 を 1 と解釈すれば、公式もこの結果を与える。）

検算

- どの分布も総和が 1 になる。(iii) では $\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\sum_{j\geq 0}\left(\frac{k-2}{k-1}\right)^j=\frac{1}{k}+\frac{1}{k}(k-1)=1$。
- 平均（mean）も妥当な値になる：(i) では $\frac{k+1}{2}$、(ii) では k、(iii) では $1+\frac{(k-1)^2}{k}$ である。直前の鍵を繰り返さないことは (ii) に比べて少しは役に立つが、どの鍵も繰り返さない場合に比べるとその効果はずっと小さい。

- $k = 2, \ldots, 5$ および $n \leq 7$ について、選択のあらゆる列を分数で数え上げることにより、3 つの公式すべてを厳密に確かめた。また、$k = 5$ として (iii) を 2×10^5 回試行するシミュレーションを行ったところ、$\mathrm{P}(N = 3) \approx 0.1496$ となり、厳密な値 $\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = 0.15$ とよく一致した。

よくある間違い

- (iii) で、1 回目の試行にも $\frac{k-2}{k-1}$ を使ってしまう。1 回目の選択は k 本すべての鍵から行うので、最初の因子は $\frac{k-1}{k}$ である。
- (i) で、$n > k$ のとき $\mathrm{P}(N = n) = 0$ であることを書き忘れる。
- (iii) で、除外される鍵が正しい鍵である可能性があると考えてしまう。除外されるのは、常に直前に失敗した鍵だけである。

STEP のその先へ

小問 (iii) は小さな**マルコフ連鎖**（Markov chain）である。次に何が起こるかは、これまでの経緯全体ではなく、現在の状態（state）（ここでは最後にどの鍵を試したか）だけで決まる。過去を無関係にしてくれる状態を見抜くことは、マルコフ連鎖の理論における中心的な技法であり、これによって煩雑な条件付き確率が単純な積に変わる。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、まさにこの水準でマルコフ連鎖を導入している。

解答例

STEP I 2000、第 13 問

確率・統計 ・ 条件付き確率

> **STEP I 2000、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q13

鍵となる考え方

すべては、両親それぞれから受け継ぐ遺伝子を一つずつ追跡することに帰着する。(i) では、AB の両親から生まれる子はそれぞれ同じ小さな確率で AA または BB となり、4 人の子は互いに独立（independent）であるから、並び方を数えて掛ければよい。(ii) は「逆向き」の条件付き確率（conditional probability）である。結果（子）がわかっていて、その原因（父親）を知りたいのである。これはベイズの定理（Bayes' theorem）であり、父親のとりうる 3 つの遺伝子型（genotype）についての樹形図（tree diagram）を描くと整理できる。

解答

小問 (i)

両親はともに AB であるから、それぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で A または B を子に伝え、両親は互いに独立にふるまう。1 人の子について、

$$\mathrm{P}(AA) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}(BB) = \tfrac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}(AB) = \tfrac{1}{2},$$

である。ただし最後のものは両方の順序（母親から A、父親から B を受け継ぐ場合と、その逆の場合）を数えている。

異なる子どうしは互いに独立に遺伝子を受け継ぐ。AA が 2 人、BB が 2 人となる 4 人の子の特定の並び、たとえば AA, AA, BB, BB の確率は $\left(\frac{1}{4}\right)^4$ である。4 人の子のうちどの 2 人が AA であるかを選ぶ方法は $\binom{4}{2} = 6$ 通りある。よって

$$\mathrm{P}(\text{2 人が}AA\text{、2 人が}BB) = 6 \times \left(\tfrac{1}{4}\right)^4 = \frac{6}{256} = \frac{3}{128},$$

となり、題意が示された。

小問 (ii)

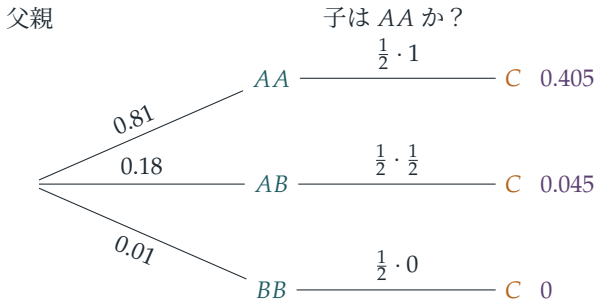
父親が AA、AB、BB であるという事象をそれぞれ F_{AA}、F_{AB}、F_{BB} とし、私が AA であるという事象を C とする。父親は母親の遺伝子型とは独立に選ばれた集団の無作為な一員であるとみなす。したがって

$$\mathrm{P}(F_{AA}) = 0.81, \qquad \mathrm{P}(F_{AB}) = 0.18, \qquad \mathrm{P}(F_{BB}) = 0.01.$$

考えてみよう なぜ 0.18 がそのまま答えにならないのだろうか。

追加の情報、すなわち私が AA であるという情報があるからである。これにより父親が BB である可能性は完全に排除され、また AA の父親は必ず A を伝えるので、父親が AA である可能性は高くなる。したがって C を条件としなければならない。

私が AA であるためには、母親から A、父親から A を受け継ぐ必要がある。母親は AB であるから、父親が誰であっても確率 $\frac{1}{2}$ で A を伝える。父親は遺伝子型に応じて確率 1、$\frac{1}{2}$、0 で A を伝える。樹形図は次のとおりである。



全確率の法則（law of total probability）により、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(C) &= 0.81 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1 + 0.18 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} + 0.01 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 0 \\ &= 0.405 + 0.045 + 0 = 0.45.\end{aligned}$$

次に、ベイズの定理により、

$$\mathrm{P}(F_{AB} \mid C) = \frac{\mathrm{P}(F_{AB})\,\mathrm{P}(C \mid F_{AB})}{\mathrm{P}(C)} = \frac{0.045}{0.45} = \frac{1}{10}.$$

よって、父親が AB である確率は $\frac{1}{10}$ である。

検算

- (i) において、4 人の子の遺伝子型の個数についての確率の総和は 1 になるはずである。因子 $\binom{4}{2}$ は $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)^4$ の多項展開（multinomial expansion）に現れるものと同じであり、$3/128 \approx 0.0234$ はその項の一つである。8 個の遺伝子の受け継ぎ方 2^8 通りをすべて正確に数え上げると $3/128$ が得られる。
- (ii) において、答えは事前確率（prior）0.18 から 0.1 に下がっている。BB の父親が排除され、AA の父親が有利になるのだから、そうなるべきである。10^6 家族のシミュレーションでは 0.0998 が得られた。

よくある間違い

- (i) で因子 $\binom{4}{2} = 6$ を忘れて $1/256$ としてしまう。
- (ii) で 0.18 と答えてしまう、あるいは $\mathrm{P}(F_{AB} \mid C)$ ではなく $\mathrm{P}(C \mid F_{AB}) = \frac{1}{4}$ を計算してしまう。
- 母親の因子 $\frac{1}{2}$ を一部の枝でだけ書き落とす。この因子は最終的に約分されて消えるが、それは一貫して用いた場合に限られる。

STEP のその先へ

集団における割合 81%、18%、1% は、$p = 0.9$、$q = 0.1$ としたときの p^2、$2pq$、q^2 である。これはハーディ・ワインベルク平衡（Hardy–Weinberg equilibrium）であり、無作為交配のもとでは世代から世代へと保たれる。観測された結果から隠れた原因を推論することはベイズ統計学（Bayesian statistics）の核心であり、同じ計算が遺伝カウンセリングや親子鑑定の基礎となっている。Blitzstein と Hwang による *Introduction to Probability*（確率論入門）は、条件付けとベイズの定理を、本問のような多くの例とともに丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 2000、第 14 問

確率・統計 ・ 一様分布の積率

> **STEP I 2000、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q14

鍵となる考え方

ここで現れる量はすべて一様分布（uniform distribution）のモーメント（moment）であり、$[-1,1]$ 上の X のモーメントは簡単に求まる。奇数次のものは対称性により 0 となり、偶数次のものは $1/(k+1)$ である。$Z = Y - X$ については、Z の分布そのものはまったく必要ない。$(Y-X)^2$ と $(Y-X)^4$ を二項展開し、独立性（independence）を用いれば、すべての期待値はすでに知っているモーメントの積になる。

解答

X のモーメント

X は $[-1,1]$ 上で確率密度 $\frac{1}{2}$ をもつので、整数 k に対して

$$\mathrm{E}(X^k) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^k \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & k \text{ が奇数（被積分関数が奇関数）}, \\ \dfrac{1}{k+1}, & k \text{ が偶数}. \end{cases}$$

特に $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X^3) = 0$、$\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{3}$、$\mathrm{E}(X^4) = \frac{1}{5}$ である。したがって

$$\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{3}, \qquad \mathrm{Var}(X^2) = \mathrm{E}(X^4) - \big(\mathrm{E}(X^2)\big)^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}.$$

Y も同じ分布に従うので、同じモーメントをもつ。

Z^2 の平均

展開すると $Z^2 = Y^2 - 2XY + X^2$ である。X と Y は独立なので $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = 0$ となり、

$$\mathrm{E}(Z^2) = \frac{1}{3} - 0 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Z^2 の分散

$\mathrm{E}(Z^4)$ が必要である。二項定理（binomial theorem）により

$$Z^4 = (Y - X)^4 = Y^4 - 4Y^3X + 6Y^2X^2 - 4YX^3 + X^4.$$

考えてみよう Y^3X の期待値を本当に $\mathrm{E}(Y^3)\,\mathrm{E}(X)$ としてよいのだろうか？

よい。X と Y が独立であれば、Y^3 と X のようにそれぞれの関数どうしも独立であり、独立な確率変数の積の期待値は期待値の積に等しいからである。中間にある二つの交差項はいずれも X または Y の奇数乗を含むので、その期待値は 0 である。したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z^4) &= \mathrm{E}(Y^4) + 6\,\mathrm{E}(Y^2)\,\mathrm{E}(X^2) + \mathrm{E}(X^4)\\ &= \frac{1}{5} + 6\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{15}.\end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{Var}(Z^2) = \mathrm{E}(Z^4) - \big(\mathrm{E}(Z^2)\big)^2 = \frac{16}{15} - \frac{4}{9} = \frac{48-20}{45} = \frac{28}{45}.$$

$\frac{28}{45} = 7 \times \frac{4}{45}$ であるから $\mathrm{Var}(Z^2) = 7\,\mathrm{Var}(X^2)$ となり、示すべきことが得られた。

検算

- Z は $[-2,2]$ 上で三角形の確率密度 $f(z) = \frac{1}{4}(2 - |z|)$ をもつ。直接計算すると $\mathrm{E}(Z^4) = 2\int_0^2 \frac{1}{4}z^4(2-z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left(\frac{64}{5} - \frac{32}{3}\right) = \frac{16}{15}$ となり、展開による結果と一致する。
- $\mathrm{E}(Z) = 0$ であるから、$\mathrm{E}(Z^2) = \mathrm{Var}(Y - X) = \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ である。
- (X, Y) の組を百万個生成したシミュレーションでは $\mathrm{Var}(X^2) \approx 0.0889$、$\mathrm{Var}(Z^2) \approx 0.623$ となり、理論値 $4/45 \approx 0.0889$、$28/45 \approx 0.622$ とよく合う。

よくある間違い

- $\mathrm{Var}(Z^2) = \mathrm{Var}(Y^2) + \mathrm{Var}(X^2)$ と書いてしまうこと。これは Z^2 の中の項 $-2XY$ を無視している。この項は平均が 0 であるが、$4\,\mathrm{Var}(XY) = \frac{4}{9} = \frac{20}{45}$ だけ寄与する。この間違いをすると $\frac{28}{45}$ ではなく $\frac{8}{45}$ が得られてしまう。

- Y^2X^2 の項の二項係数 6 を忘れること。
- $[-1,1]$ 上の確率密度を $\frac{1}{2}$ ではなく 1 としてしまうこと。こうするとすべてのモーメントが 2 倍になる。

STEP のその先へ

量 $\mathrm{E}(X^k)$ は X のモーメントであり、独立な確率変数の和を扱う巧みな方法がモーメント母関数（moment generating function）$M_X(t) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX})$ である。これについては $M_{Y-X}(t) = M_Y(t)M_X(-t)$ が成り立つ。この積を t のべき級数（power series）として展開すれば、Z のすべてのモーメントが一度に得られる。モーメント母関数と特性関数（characteristic function）は大学最初の確率論の講義で中心的な役割を果たし、中心極限定理（central limit theorem）の証明における主要な道具となる。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、これらをわかりやすく展開している。

解答例

STEP II 2000、第 1 問

純粋数学 • エジプト分数

> **STEP II 2000、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q1

鍵となる考え方

2 つの例には共通のパターンがある。1 つ目の分母は N より 1 大きく、2 つ目の分母は N とその数の積である。一意性を示す部分では、分母を払って「長方形を完成させる」（completing the rectangle）ことにより、$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{N}$ を、積が N^2 に等しい 2 つの整数の積の形に変形する。素数の 2 乗の因数分解（factorisation）はごくわずかしかないので、a と b の候補もごくわずかであり、それらを単純に列挙すればよい。

解答

一般的な結果

$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ と $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$ において、分母は $N+1$ と $N(N+1)$ である（$6=2\times3$、$12=3\times4$ だからである）。そこで次のように予想する。

$$\frac{1}{N}=\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N(N+1)}.$$

これを証明するには、右辺を通分すればよい。

$$\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N(N+1)}=\frac{N+1}{N(N+1)}=\frac{1}{N}.$$

どちらの分母も 1 より大きい整数なので、両方の項は単位分数（unit fraction）である。また $N>1$ のとき $N(N+1)>N+1$ なので、2 つは相異なる。したがって、すべての単位分数は相異なる 2 つの単位分数の和として表せる。

N が素数のときの一意性

$\frac{1}{N} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ の両辺に abN を掛けると $ab = Nb + Na$、すなわち

$$ab - Na - Nb = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad ab - Na - Nb + N^2 = N^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (a-N)(b-N) = N^2.$$

を得る。各段階は可逆である（a、b、N は 0 でないから）ので、$(*)$ の解はちょうど $(a-N)(b-N) = N^2$ の解と一致する。

考えてみよう $a - N$ と $b - N$ がともに負になることはありうるか？

ありえない。$\frac{1}{b} > 0$ なので $\frac{1}{a} < \frac{1}{N}$ であり、よって $a > N$ である。同様に $b > N$ である。したがって $a - N$ と $b - N$ は積が N^2 となる**正の**整数である。（注意しておく価値がある。これがなければ、組 $(-1, -N^2)$ も除外すべき因数分解として残ってしまう。）

ここで $N = p$ を素数（prime）とする。p^2 の正の約数（divisor）は 1、p、p^2 のみなので、組 $(a-p, b-p)$ は次のいずれかでなければならない。

$$(1,\, p^2), \qquad (p,\, p), \qquad (p^2,\, 1).$$

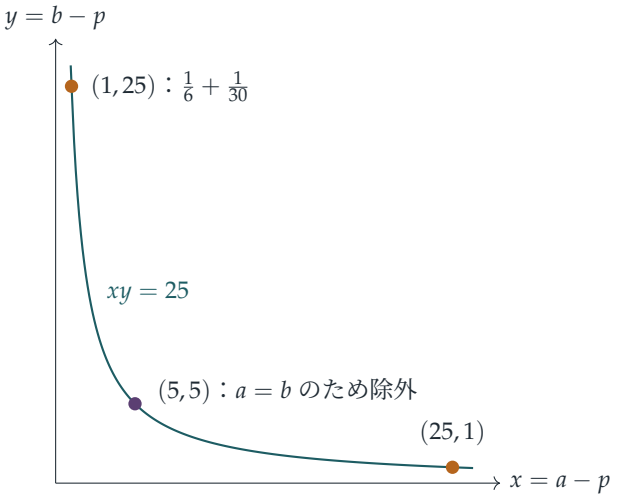
- (p, p) からは $a = b = 2p$、すなわち $\frac{1}{p} = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p}$ が得られる。2 つの単位分数は相異なっていないので、これは除外される。
- $(1, p^2)$ からは $a = p + 1$、$b = p^2 + p = p(p+1)$ が得られ、これは上で求めた表し方である。$(p^2, 1)$ は同じ組を逆の順に並べたものである。

したがって、2 つの項の順序を除けば、表し方は

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p(p+1)},$$

のみであり、題意が示された。

その理由は図を見るとわかる。$x = a - p$、$y = b - p$ とおくと、解は第 1 象限にある双曲線（hyperbola）$xy = p^2$ 上の格子点（lattice point）である。ここでは $p = 5$ としている。



$2/N$ の形の分数

次に、$N = p$ を奇素数として $\frac{2}{N} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ とする。両辺に abp を掛けると $2ab = pa + pb$ を得る。長方形を完成させるために、まず 2 を掛ける。

$$4ab - 2pa - 2pb = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4ab - 2pa - 2pb + p^2 = p^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (2a - p)(2b - p) = p^2.$$

考えてみよう 因数分解の前に、なぜ 2 を掛けるのか？

$2ab - pa - pb$ を直接因数分解しようとすると $(a - \frac{p}{2})$ のような項が必要になり、これは整数ではない。2 を掛けておけばすべてが整数のまま保たれるので、因数 $2a - p$ と $2b - p$ は整数となり、整除性を利用できる。

先ほどと同様に $\frac{1}{a} < \frac{2}{p}$ なので $2a > p$ であり、$2a - p > 0$ である。同様に $2b - p > 0$ である。p^2 の正の約数は 1、p、p^2 なので、$(2a - p, 2b - p)$ は次のいずれかである。

$$(1,\ p^2), \qquad (p,\ p), \qquad (p^2,\ 1).$$

- (p, p) からは $a = b = p$、すなわち $\frac{2}{p} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p}$ が得られる。相異なっていないので除外される。
- $(1, p^2)$ からは
$$a = \frac{p+1}{2}, \qquad b = \frac{p^2 + p}{2} = \frac{p(p+1)}{2}.$$
が得られる。p は奇数なので $p + 1$ は偶数であり、どちらも整数である。$p \geq 3$ なので $a \geq 2$ であり、どちらも 1 より大きい。また $b = pa > a$ なので、2 つは相異なる。$(p^2, 1)$ の場合は同じ組を逆の順に並べたものである。

直接確かめると、

$$\frac{2}{p+1}+\frac{2}{p(p+1)}=\frac{2(p+1)}{p(p+1)}=\frac{2}{p}.$$

となる。したがって $\frac{2}{p}$ は相異なる 2 つの単位分数の和として表すことができ、（順序を除いて）表し方は

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{\frac{1}{2}(p+1)}+\frac{1}{\frac{1}{2}p(p+1)},$$

のみである。これで最後の結果が証明された。

検算

- $p=3$：$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$。$p=5$：$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$。$p=7$：$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$。
- $N<300$ のすべてについてコンピュータで探索したところ、すべての素数 N について $\frac{1}{N}$ の表し方はちょうど 1 通り、すべての奇素数 N について $\frac{2}{N}$ の表し方はちょうど 1 通りであり、上の公式と一致した。
- 素数であることは本当に重要である。$N=6$ の場合は 4 通りあり、たとえば $\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$ である。これらは因数分解 $36=1\times36=2\times18=3\times12=4\times9$ にそれぞれ対応している（組 6×6 からは $a=b$ が得られる）。
- $p>2$ である理由：$p=2$ のとき、$\frac{2}{2}=1$ は相異なる $a,b>1$ を用いて $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ の形に表すことはできず、実際 $(p+1)/2$ は整数ではない。

よくある間違い

- $a-N>0$ と $b-N>0$ を示し忘れ、その結果 N^2 の負の因数分解を見落とすこと。
- 等しい単位分数を与える因数分解 $N\times N$ を除外しないこと。
- $2/N$ の場合に、$\frac{1}{2}(p+1)$ が整数であることを確かめないこと（ここがまさに $p\neq2$ が使われる箇所である）。

STEP のその先へ

分数を相異なる単位分数の和として書き表すことは古代エジプト人にまでさかのぼり、「エジプト式分数」（Egyptian fractions）には今なお未解決問題がある。エルデシュ–シュトラウス予想（Erdős–Straus conjecture）は、$N\geq2$ に対して $\frac{4}{N}$ は常に 3 つの単位分数の和として表せると主張するが、誰も証明できていない。$xy-Nx-Ny=0$

を $(x-N)(y-N) = N^2$ に変形する技法はディオファントス方程式（Diophantine equation）の標準的な道具であり、解の個数を数えることは約数の個数を数えることに帰着する。ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（高等算術）は、約数と素数の世界へ進む次の一歩として素晴らしい本である。

解答例

STEP II 2000、第 2 問

純粋数学 • 多項式の重解

> **STEP II 2000、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q2

鍵となる考え方

重複する因数（factor）は微分（differentiation）しても残るが、そのたびに指数が 1 つずつ下がる。したがって、4 乗の因数 $(x-a)^4$ があれば、p とその第 1 次から第 3 次までの導関数（derivative）はすべて a で 0 になる。この六次式（sextic）では、第 3 次導関数はただの三次式（cubic）であり、その根から a の候補がごくわずかに絞られる。それらを順に調べ、最後に k を決める。k は微分した瞬間に消えてしまうからである。

解答

最初の結果

$(x-a)^2$ が因数であると仮定する。すなわち、ある多項式（polynomial）q を用いて $\mathrm{p}(x) = (x-a)^2\,\mathrm{q}(x)$ と書ける。積の微分法（product rule）により、

$$\mathrm{p}'(x) = 2(x-a)\,\mathrm{q}(x) + (x-a)^2\,\mathrm{q}'(x) = (x-a)\big[\,2\mathrm{q}(x) + (x-a)\mathrm{q}'(x)\,\big].$$

$x = a$ を代入すると $\mathrm{p}'(a) = 0$ となり、示すべきことが得られた。

対応する結果

同じ計算はどの指数に対しても成り立つ。$m \geq 1$ かつ g が多項式であって $\mathrm{f}(x) = (x-a)^m\,\mathrm{g}(x)$ ならば、

$$\mathrm{f}'(x) = (x-a)^{m-1}\big[\,m\,\mathrm{g}(x) + (x-a)\,\mathrm{g}'(x)\,\big],$$

であり、括弧の中はやはり多項式である。よって、$(x-a)^m$ が f を割り切るならば、$(x-a)^{m-1}$ は f' を割り切る。

いま、$(x-a)^4$ が $\mathrm{p}(x)$ の因数であるとする。この事実を 3 回用いると、

$(x-a)^3$ は次を割り切る：$\mathrm{p}'(x)$,　　$(x-a)^2$ は次を割り切る：$\mathrm{p}''(x)$,　　$(x-a)$ は次を割り切る：p

$(x-a)^4$ が $\mathrm{p}(x)$ 自身を割り切ることとあわせて、$x=a$ とおくと

$$\mathrm{p}(a)=\mathrm{p}'(a)=\mathrm{p}''(a)=\mathrm{p}'''(a)=0.$$

k を求める

$\mathrm{p}(x)=x^6+4x^5-5x^4-40x^3-40x^2+32x+k$ とする。3 回微分すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{p}'(x)&=6x^5+20x^4-20x^3-120x^2-80x+32,\\ \mathrm{p}''(x)&=30x^4+80x^3-60x^2-240x-80=10\,(3x^4+8x^3-6x^2-24x-8),\\ \mathrm{p}'''(x)&=120x^3+240x^2-120x-240=120\,(x^3+2x^2-x-2).\end{aligned}$$

考えてみよう 4 つの条件のうち、どれを最初に使うべきだろうか。

最も解きやすいものを使う。定数 k は p''' からは消えており、しかも p''' はただの三次式で、項をまとめることで因数分解できる：

$$x^3+2x^2-x-2=x^2(x+2)-(x+2)=(x+2)(x-1)(x+1).$$

よって対応する結果により、a は -2、1、-1 のいずれかでなければならない。それぞれを p'' で調べる：

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{10}\mathrm{p}''(1)&=3+8-6-24-8=-27\neq 0,\\ \tfrac{1}{10}\mathrm{p}''(-1)&=3-8-6+24-8=5\neq 0,\\ \tfrac{1}{10}\mathrm{p}''(-2)&=48-64-24+48-8=0.\end{aligned}$$

残るのは $a=-2$ だけである。これは p' の条件も満たす：

$$\mathrm{p}'(-2)=-192+320+160-480+160+32=0.$$

最後に、$\mathrm{p}(-2)=0$ から k が定まる：

$$\mathrm{p}(-2)=64-128-80+320-160-64+k=k-48=0,\qquad \text{よって}\qquad \boxed{k=48}.$$

考えてみよう ここまでは**必要**条件（necessary condition）しか使っていない。$k=48$ のとき、$(x+2)^4$ が本当に因数であることはどうすればわかるだろうか。

実は、4つの条件 $\mathrm{p}(a) = \mathrm{p}'(a) = \mathrm{p}''(a) = \mathrm{p}'''(a) = 0$ から $(x-a)^4$ が因数であることが導かれる（多項式に対するテイラー（Taylor）の定理による）。しかし最も手早い確認は、実際に展開してみることである。$(x+2)^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$ であるから、商（quotient）は定数項が $48/16 = 3$ のモニック（monic）な二次式でなければならない。x^5 の係数を比較すると $x^2 - 4x + 3$ が得られ、実際に

$$(x+2)^4(x^2 - 4x + 3) = x^6 + 4x^5 - 5x^4 - 40x^3 - 40x^2 + 32x + 48.$$

したがって、$k = 48$ のとき

$$x^6 + 4x^5 - 5x^4 - 40x^3 - 40x^2 + 32x + 48 = (x+2)^4(x-1)(x-3),$$

となり、因数は $a = -2$ として求める形をしている。

検算

- $(x+2)^4(x-1)(x-3)$ をすべて展開する。どの係数も与えられた多項式と一致し、定数項は $16 \times 3 = 48$ である。
- 係数の和を調べる。$\mathrm{p}(1) = 1 + 4 - 5 - 40 - 40 + 32 + 48 = 0$ であり、$(x-1)$ が因数なのでこうならなければならない。
- コンピュータで、ランダムな多項式 $(x-a)^4\mathrm{q}(x)$ について一般的な結果を確かめ、p''' の根 $-2, \pm 1$ を求めて p'' が -2 でのみ0になることを確認し、$k = 48$ を得た。

よくある間違い

- $\mathrm{p}(a) = 0$ や $\mathrm{p}'(a) = 0$ から始めてしまう。これらは五次式（quintic）や k そのものを含み、なかなか先に進めない。次数の最も低い導関数から始めること。
- p''' の根を見つけたところで止めてしまう。候補 $a = \pm 1$ は p''' の根ではあるが、p'' の根ではない。
- 対応する結果を「$\mathrm{p}'''(a) = 0$」とだけ述べてしまう。$\mathrm{p}(a) = \mathrm{p}'(a) = \mathrm{p}''(a) = \mathrm{p}'''(a) = 0$ という条件の組全体として述べ、それを証明すること。

STEP のその先へ

逆（converse）も成り立つ。すなわち、$(x-a)^m$ が p を割り切るのは、p とその第 $m-1$ 次までの導関数が a ですべて0になるとき、かつそのときに限る。これは、多項式が a のまわりでの自分自身のテイラー展開に等しいからである。大学1年の代数の講義で

は、同じ考え方で根の**重複度**（multiplicity）が定義される。また、これは重根（repeated root）の判定法も与える。ユークリッド（Euclid）の互除法（Euclid's algorithm）で $\gcd(p, p')$ を計算すればよい。素数を法とする整数のような体（field）の上では、形式的導関数（formal derivative）は意外な振る舞いをする。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）がこの話題を展開している。

解答例

STEP II 2000、第 3 問

純粋数学 ・ 誤差の伝播

> **STEP II 2000、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q3

鍵となる考え方

余弦定理（cosine rule）により a^2 は b, c, A を用いて正確に表される。したがってこの問題の要点は、これらをそれぞれわずかに動かしたときに a がどう変化するかにある。各要素を微小量について 1 次まで展開し、微小量どうしの積を捨て、最後に $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ を用いて平方根をとる。範囲については、η が独立な誤差の線形結合（linear combination）であることに注目する。各項を都合のよい符号で極端な値まで押しやったとき、それは最大となる。

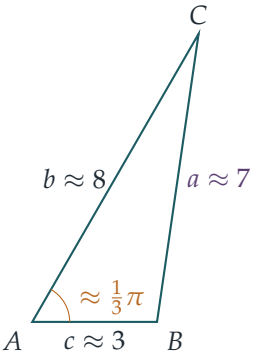
解答

a の近似

摂動を加える前の値 $b = 8, c = 3, A = \frac{1}{3}\pi$ に対して、余弦定理より

$$a^2 = 64 + 9 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \tfrac{1}{2} = 49,$$

であるから $a = 7$ である。これが主要項の由来である。



次に摂動（perturbation）を加える。以下を通して、「≈」は $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ について 1 次の項を残し、ϵ_1^2 や $\epsilon_2\epsilon_3$ のような 2 次以上の項をすべて捨てることを意味する。すると

$$\begin{aligned} b^2 &= 64 + 16\epsilon_1 + \epsilon_1^2 \approx 64 + 16\epsilon_1, \\ c^2 &= 9 + 6\epsilon_2 + \epsilon_2^2 \approx 9 + 6\epsilon_2, \\ bc &= 24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_2 \approx 24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2. \end{aligned}$$

となる。角については、加法定理（compound-angle formula）と微小角の近似 $\cos\epsilon_3 \approx 1$, $\sin\epsilon_3 \approx \epsilon_3$ により

$$\cos A = \cos\tfrac{1}{3}\pi\cos\epsilon_3 - \sin\tfrac{1}{3}\pi\sin\epsilon_3 \approx \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\epsilon_3.$$

を得る。（$\cos\epsilon_3 \approx 1$ の誤差は ϵ_3^2 の程度なので、この次数では確かに無視できる。）展開し、再び微小量どうしの積を捨てると

$$2bc\cos A \approx 2\big(24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2\big)\Big(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\epsilon_3\Big) \approx 24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2 - 24\sqrt{3}\,\epsilon_3.$$

となる。これらを余弦定理に代入すると

$$\begin{aligned} a^2 &\approx (64 + 16\epsilon_1) + (9 + 6\epsilon_2) - (24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2 - 24\sqrt{3}\,\epsilon_3) \\ &= 49 + 13\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + 24\sqrt{3}\,\epsilon_3. \end{aligned}$$

である。$\delta = 13\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + 24\sqrt{3}\,\epsilon_3$ とおくと、これは微小量である。$a > 0$ であるから

$$a = \sqrt{49 + \delta} = 7\Big(1 + \frac{\delta}{49}\Big)^{1/2} \approx 7\Big(1 + \frac{\delta}{98}\Big) = 7 + \frac{\delta}{14},$$

となる。ここで、微小な x に対する二項展開（binomial expansion）$(1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ を用いた。よって $a \approx 7 + \eta$ であり、

$$\eta = \frac{13\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + 24\sqrt{3}\,\epsilon_3}{14},$$

となる。これが求める結果である。

考えてみよう 積を手で展開せずに済ませることはできなかっただろうか。

できる。$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ を微分すると $2a\,\delta a = (2b - 2c\cos A)\,\delta b + (2c - 2b\cos A)\,\delta c + 2bc\sin A\,\delta A$ を得る。$a = 7, b = 8, c = 3, A = \frac{1}{3}\pi$ においてこれは $14\,\delta a = 13\,\delta b - 2\,\delta c + 24\sqrt{3}\,\delta A$ となり、1 行で同じ答えが得られる。どちらの方法も、要するに 1 次のテイラー展開（Taylor expansion）にすぎない。

η の範囲

ϵ_2 の上界は問題用紙に $4\cdot 9\times 10^{-2}$ と印刷されているが、これは小数点を高い位置に書く旧式の表記であり、$|\epsilon_2| \le 4.9\times 10^{-2}$ を意味する。

3 つの誤差は独立に変化するので、三角不等式（triangle inequality）より

$$|\eta| \le \frac{13|\epsilon_1| + 2|\epsilon_2| + 24\sqrt{3}\,|\epsilon_3|}{14} \le \frac{13\times 2\times 10^{-3} + 2\times 4.9\times 10^{-2} + 24\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times 10^{-3}}{14}.$$

である。分子は $0.026 + 0.098 + 0.072 = 0.196$ であるから

$$|\eta| \le \frac{0.196}{14} = 0.014.$$

となる。この上界は実際に達成される。$\epsilon_1 = 2\times 10^{-3}, \epsilon_2 = -4.9\times 10^{-2}, \epsilon_3 = \sqrt{3}\times 10^{-3}$ とすると η のすべての項が正かつ最大となり、$\eta = 0.014$ を得る。3 つの符号をすべて反転すれば $\eta = -0.014$ となる。η は誤差の連続な（実際には線形な）関数であり、許される誤差の集合は直方体であるから、その間のすべての値もとる。したがって範囲は

$$-0.014 \le \eta \le 0.014,$$

である。すなわち、a はおよそ 7 ± 0.014 の範囲にある。

検算

- 誤差がすべてゼロのとき、三角形の辺は 8, 3, 7 で 60° の角をもち、確かに $64 + 9 - 24 = 49$ である。
- 上の極端な誤差をとって余弦定理を正確に用いると $a \approx 7.0141$ および $a \approx 6.9861$ が得られ、7 ± 0.014 にきわめて近い。わずかなずれは、捨てた 2 次の項によるものである。
- 数値的に求めると、基準値における a の A についての偏導関数（partial derivative）は $2.9692\ldots = 24\sqrt{3}/14$ であり、予想どおりである。

よくある間違い

- 最後の平方根を忘れる。$a^2 \approx 49 + \delta$ から得られるのは $a \approx 7 + \delta/14$ であって、$7 + \delta$ ではない。
- 最大値を求めるのに 3 つの誤差をすべて正にとってしまう。ϵ_2 は負号つきで入るので、η を大きくするには負でなければならない。
- $4 \cdot 9 \times 10^{-2}$ を 36×10^{-2} と読んでしまう。長さ 3 の辺に対して、これはまったく小さな誤差ではない。

STEP のその先へ

これは全微分（total differential）による誤差伝播（error propagation）である。多変数関数 f に対して $\delta f \approx \sum(\partial f/\partial x_i)\,\delta x_i$ であり、最悪の場合は $\sum |\partial f/\partial x_i|\,|\delta x_i|$ となる。大学 1 年次の講義では、これは多変数のテイラーの定理（Taylor's theorem）となり、2 次の剰余項に対する明示的な評価によって、「$\approx$」がどれほど良い近似なのかが正確にわかる。実験科学者は、独立な偶然誤差に対しては、代わりに二乗和の平方根の規則（root-sum-of-squares rule）をよく用いる。Bartle と Sherbert による *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は、剰余項つきのテイラーの定理を丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 2000、第 4 問

純粋数学 ・ 偏角と逆正接関数の恒等式

STEP II 2000、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/00-s2-q4

鍵となる考え方

最初の二つの結果は、複素数（complex number）を掛け合わせるとその偏角（argument）が足し合わされる、ということを述べている。したがって、「逆正接（arctangent）の和 $= \pi/4$」という形の等式は、実は $5-\mathrm{i}$ や $1+\mathrm{i}$ のようなガウス整数（Gaussian integer）の積についての主張なのである。$a > 0$ である各因数 $a+b\mathrm{i}$ は角 $\arctan(b/a)$ を与え、$\pi/4$ は直線 $y = x$ 上にある任意の数の偏角である。なすべきことは、慎重に展開し、そのうえで角が 2π の倍数の違いを除いて等しいだけでなく、本当に等しいことを確かめることである。

解答

積の公式とド・モアブルの定理

展開して $\mathrm{i}^2 = -1$ を用いると、

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi) &= (\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + \mathrm{i}(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi)\\ &= \cos(\theta+\phi) + \mathrm{i}\sin(\theta+\phi),\end{aligned}$$

となる。ここで $\cos(A+B)$ と $\sin(A+B)$ の加法定理（compound-angle formulae）を用いた。

二つ目の結果は n についての数学的帰納法（induction）で示す。$n = 1$ のとき、両辺はともに $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ である。$n = k$ のとき結果が成り立つと仮定する。すると

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{k+1} &= (\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta)(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)\\ &= \cos(k\theta+\theta) + \mathrm{i}\sin(k\theta+\theta),\end{aligned}$$

となる。ここでは帰納法の仮定（induction hypothesis）を用い、続いて $\phi = k\theta$ として積の公式を用いた。よって $n = k+1$ のときも結果は成り立ち、したがってすべての正の整数 n について成り立つ。

$\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ を $\operatorname{cis}\theta$ と書くと便利である。すると、$\operatorname{cis}\theta\operatorname{cis}\phi = \operatorname{cis}(\theta+\phi)$ および $(\operatorname{cis}\theta)^n = \operatorname{cis} n\theta$ が示されたことになる。

角についての事実

$a > 0$ かつ b が実数ならば、

$$a + b\mathrm{i} = \sqrt{a^2+b^2}\,\operatorname{cis}\big(\arctan(b/a)\big),$$

が成り立つ。なぜなら、角 $\alpha = \arctan(b/a)$ は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に属するので $\cos\alpha > 0$ であり、さらに $\tan\alpha = b/a$ である。これらから $\cos\alpha = a/\sqrt{a^2+b^2}$ および $\sin\alpha = b/\sqrt{a^2+b^2}$ が導かれるからである。

また、$R, R' > 0$ として $R\operatorname{cis}S = R'\operatorname{cis}T$ ならば、絶対値（modulus）をとると $R = R'$ となるので、$\cos S = \cos T$ かつ $\sin S = \sin T$ であり、したがって $S - T$ は 2π の倍数である。

一つ目の等式

$\alpha = \arctan\frac{1}{5}$ とおく。すると $5 - \mathrm{i} = \sqrt{26}\operatorname{cis}(-\alpha)$ かつ $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$ であるから、上の結果より

$$(5-\mathrm{i})^2(1+\mathrm{i}) = 26\sqrt{2}\,\operatorname{cis}\big(\tfrac{\pi}{4} - 2\alpha\big).$$

一方、直接展開すると

$$(5-\mathrm{i})^2 = 24 - 10\mathrm{i}, \qquad (24-10\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 24 + 24\mathrm{i} - 10\mathrm{i} + 10 = 34 + 14\mathrm{i},$$

であり、$\beta = \arctan\frac{14}{34} = \arctan\frac{7}{17}$ として $34 + 14\mathrm{i} = \sqrt{1352}\operatorname{cis}\beta$ である。両者を比べると、$\frac{\pi}{4} - 2\alpha$ と β の差は 2π の倍数である。

> **考えてみよう** その 2π の倍数が 0 であることは、どうしてわかるのだろうか？

両方の角の範囲を絞り込む。$0 < \frac{1}{5} < 1$ であるから $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ であり、したがって $-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} - 2\alpha < \frac{\pi}{4}$ である。また $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ である。$(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ に属する二つの角の差は 2π より小さいので、その倍数は 0 であり、$\beta = \frac{\pi}{4} - 2\alpha$ となる。すなわち

$$\arctan\tfrac{7}{17} + 2\arctan\tfrac{1}{5} = \frac{\pi}{4},$$

が示された。

二つ目の等式

同じ考え方から、偏角が左辺に一致するはずの $(4+\mathrm{i})^3(20+\mathrm{i})(1985+\mathrm{i})$ を調べればよいとわかる。順に掛けていくと、

$$\begin{aligned}(4+\mathrm{i})^2 &= 15+8\mathrm{i},\\ (4+\mathrm{i})^3 &= (15+8\mathrm{i})(4+\mathrm{i}) = 52+47\mathrm{i},\\ (4+\mathrm{i})^3(20+\mathrm{i}) &= (52+47\mathrm{i})(20+\mathrm{i}) = 993+992\mathrm{i}.\end{aligned}$$

これはすでに直線 $y=x$ に非常に近く、最後の因数で仕上がる。

$$\begin{aligned}(993+992\mathrm{i})(1985+\mathrm{i}) &= (993\times 1985-992)+(993+992\times 1985)\mathrm{i}\\ &= 1970113+1970113\,\mathrm{i} = 1970113\sqrt{2}\,\operatorname{cis}\tfrac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

(1985 がどこから来たのか疑問に思ったなら、$(993+992\mathrm{i})(a+\mathrm{i})$ の実部と虚部が等しくなるように要請すると $993a-992=992a+993$ となり、$a=1985$ が得られる。)

ここで $p=\arctan\frac{1}{4}$、$q=\arctan\frac{1}{20}$、$r=\arctan\frac{1}{1985}$ とおく。角についての事実により、$4+\mathrm{i}$、$20+\mathrm{i}$、$1985+\mathrm{i}$ はそれぞれ $\operatorname{cis}p$、$\operatorname{cis}q$、$\operatorname{cis}r$ の正の実数倍であるから、その積は $\operatorname{cis}(3p+q+r)$ の正の実数倍である。上の式と比べると、$3p+q+r-\frac{\pi}{4}$ は 2π の倍数である。

p,q,r はいずれも正接が $(0,1)$ に属するので $(0,\frac{\pi}{4})$ に属し、したがって $0<3p+q+r<\frac{5\pi}{4}$ である。よって $3p+q+r$ と $\frac{\pi}{4}$ の差は 2π より小さく、その倍数は 0 であり、

$$3\arctan\tfrac{1}{4}+\arctan\tfrac{1}{20}+\arctan\tfrac{1}{1985}=\frac{\pi}{4}.$$

検算

絶対値は一致しなければならない。実際、$|34+14\mathrm{i}|^2=1156+196=1352=26^2\times 2$ であり、そのとおりになっている。二つ目の積については、$17^3\times 401\times(1985^2+1)$ が 2×1970113^2 に等しくなるはずであり、実際に等しい。数値的にも、電卓で計算すると両方の左辺は $0.785398163\ldots=\pi/4$ となる。たとえば $\arctan\frac{7}{17}\approx 0.390607$ であり、$\frac{\pi}{4}-2\arctan\frac{1}{5}\approx 0.390607$ である。

よくある間違い

- $2\pi k$ の差の可能性を排除せずに、複素数が等しいことから角が等しいと結論してしまう。範囲についての議論は、証明の本質的な一部である。
- $(5-\mathrm{i})^2$ における符号の誤り。これは $24-10\mathrm{i}$ であり、$5-\mathrm{i}$ は $-\arctan\frac{1}{5}$ を与える。そのために、逆正接が反対側の辺に正の符号で現れるのである。

▶ 大きな積での計算間違い。上で行ったように、絶対値で検算するとよい。

STEP のその先へ

このような等式はマチン型公式（Machin-type formulae）と呼ばれる。ジョン・マチン（John Machin）の公式 $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$ は、$(5+\mathrm{i})^4(239-\mathrm{i})$ から同じ方法で得られるものであり、1706 年に π を小数点以下 100 桁まで計算するのに用いられた。その背後にある構造はガウス整数環 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ の算術であり、そこではガウス素数（Gaussian primes）への素因数分解の一意性（unique factorisation）によって、どのような等式が存在しうるかが説明される。回転としての乗法の幾何学については Needham, *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）を、ガウス整数については Davenport, *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）を読むとよい。

解答例

STEP II 2000、第 5 問

純粋数学 ・ 最小二乗近似

> **STEP II 2000、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q5

鍵となる考え方

平方を展開すれば、最小化すべき量は λ の 2 次式にすぎず、その係数は定数（f を含む積分）である。平方完成（completing the square）を行えば、最適な λ と最小の誤差が一度に得られる。正弦関数の例では、n が大きいとき $\sin(\pi x/n)$ が原点を通るほぼ直線であることが要点であり、小さい角に対する近似（small-angle approximations）によってこれを厳密に扱うことができる。

解答

λ の最適な値

次のようにおく。

$$J = \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad K = \int_0^1 \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x.$$

これらは λ によらない定数である。平方を展開し、$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ を用いると、

$$\begin{aligned} I(\lambda) = \int_0^1 \big(f(x) - \lambda x\big)^2\,\mathrm{d}x &= K - 2\lambda J + \tfrac{1}{3}\lambda^2 \\ &= \tfrac{1}{3}\big(\lambda - 3J\big)^2 + K - 3J^2. \end{aligned}$$

2 乗の項は決して負にならず、$\lambda = 3J$ のときに限り 0 となる。したがって $I(\lambda)$ が最小となるのはちょうど

$$\lambda = 3\int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x,$$

のときであり、これが示すべきことであった。（同値な方法として、$I'(\lambda) = -2J + \frac{2}{3}\lambda = 0$ から $\lambda = 3J$ が得られ、$I''(\lambda) = \frac{2}{3} > 0$ により最小値であることが確かめられる。）

残差

R^2 は I の最小値であり、平方完成の式からそれは $K - 3J^2$ である。$J = \lambda/3$ より $3J^2 = \frac{1}{3}\lambda^2$ となるので、

$$R^2 = \int_0^1 \big(f(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x - \tfrac{1}{3}\lambda^2,$$

が示された。（微分によって λ を求めた場合は、$K - 2\lambda J + \frac{1}{3}\lambda^2$ に $J = \lambda/3$ を代入すれば $K - \frac{2}{3}\lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda^2$ となり、同じ結果を得る。）

$f(x) = \sin(\pi x/n)$ の場合

計算を見やすくするため $a = \pi/n$ とおく。すると $f(x) = \sin ax$ であり、$n \to \infty$ のとき $a \to 0$ である。$u = x$、$\mathrm{d}v = \sin ax\,\mathrm{d}x$ として部分積分（integration by parts）を行うと、

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \sin ax \,\mathrm{d}x &= \Big[-\frac{x\cos ax}{a}\Big]_0^1 + \frac{1}{a}\int_0^1 \cos ax \,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\cos a}{a} + \frac{\sin a}{a^2},\end{aligned}$$

よって

$$\lambda = \frac{3(\sin a - a\cos a)}{a^2}.$$

> **考えてみよう** $\sin\theta$ の近似として単に $\sin\theta \approx \theta$ とするのではなく、θ^3 の項が必要なのはなぜだろうか。

$\sin a \approx a$ と $\cos a \approx 1$ だけを用いると、分子は $a - a = 0$ となり、何もわからない。主要項どうしが打ち消し合い、答えは次の次数に現れるのである。ヒントにある二つの近似をともに用いると、

$$\sin a - a\cos a \approx \Big(a - \tfrac{1}{6}a^3\Big) - a\Big(1 - \tfrac{1}{2}a^2\Big) = \tfrac{1}{3}a^3,$$

したがって、n が大きいとき

$$\lambda \approx \frac{3\cdot\frac{1}{3}a^3}{a^2} = a = \frac{\pi}{n}$$

となる。これが結果 (i) である。

(ii) には K も必要である。$\sin^2 ax = \frac{1}{2}(1 - \cos 2ax)$ を用いると、

$$K = \int_0^1 \sin^2 ax \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{\sin 2a}{4a}.$$

$n \to \infty$ のとき $a \to 0$ かつ $\dfrac{\sin 2a}{2a} \to 1$ であるから、$K \to \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ である。また $\lambda \approx \pi/n$ より $\lambda \to 0$ である。ゆえに

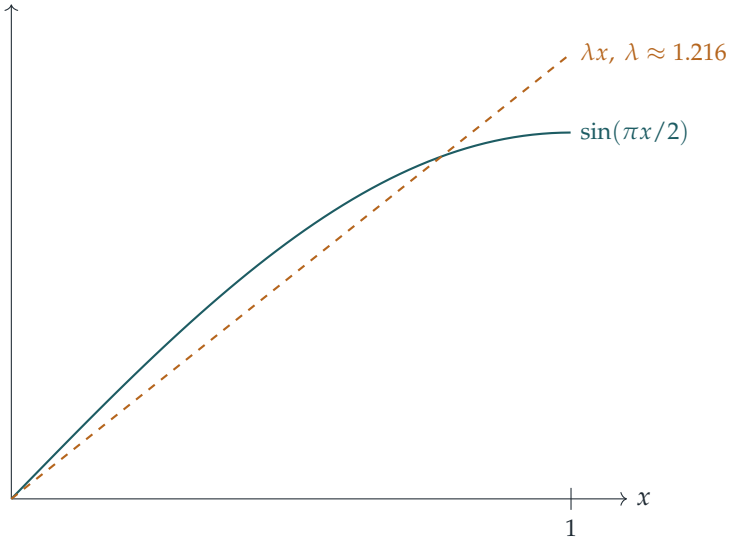
$$R^2 = K - \tfrac{1}{3}\lambda^2 \to 0 - 0 = 0,$$

であり、$R \geq 0$ であるから $\lim_{n\to\infty} R = 0$ を得る。これが結果 (ii) である。

実際には、打ち消し合いはこれよりはるかに強い。$\sin 2a \approx 2a - \frac{4}{3}a^3$ を用いると $K \approx \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}a^2\right) = \frac{1}{3}a^2$ となり、$\frac{1}{3}\lambda^2 \approx \frac{1}{3}a^2$ でもある。したがって R^2 は単に小さいだけではなく、f 自身の大きさである K と比べても小さい。直線が f のほぼすべてをとらえているのである。

これらの結果が予想される理由

$0 \leq x \leq 1$ において角 $\pi x/n$ は 0 と π/n の間にあり、n が大きければこれは小さい。よって区間全体で $\sin(\pi x/n) \approx \pi x/n$ であり、この関数自体が $\lambda = \pi/n$ とした 1 次関数 λx にきわめて近い。したがって最もよく当てはまる直線の傾きは π/n に近いはずであり、当てはまりは本質的に完全になっていくので、残差は 0 に収束（converge）するはずである。下図から、$n = 2$ の場合でさえ曲線が直線からそれほど離れていないことがわかる。



検算

- はじめから $f(x) = cx$ であれば、$\lambda = 3c\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = c$ かつ $R^2 = \frac{1}{3}c^2 - \frac{1}{3}c^2 = 0$ となり、当然そうあるべき結果である。
- 数値的には、$n = 10$ のとき厳密な式から $\lambda = 0.31107$ が得られ、これに対して $\pi/10 = 0.31416$ である。$n = 100$ のときは比 $\lambda/(\pi/n)$ が 0.99990 となる。
- $n = 10$ のとき、数値積分（quadrature）により $R^2 \approx 6.0 \times 10^{-7}$ であり、一方 $K \approx 0.032$ であるから、残差は f と比べて確かにきわめて小さい。

よくある間違い

- $\sin a \approx a$、$\cos a \approx 1$ で止めてしまい、$\lambda \approx 0$ を得ること。正しいが役に立たない。3 次の項を残すこと。
- $\lambda = 3\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$ の 3 が $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ に由来することを忘れること。

STEP のその先へ

これは最小二乗近似（least-squares approximation）であり、その本質は幾何学である。$[0,1]$ 上の関数を、「内積」（dot product）$\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg\,\mathrm{d}x$ をもつベクトルとみなす。すると λx は x が張る直線への f の正射影（orthogonal projection）であり、$R^2 = K - \frac{1}{3}\lambda^2$ はピタゴラス（Pythagoras）の定理にほかならない。展開をもう一段進めると $R^2 \approx a^6/1575$ が示され、これは x^3 の項から x 方向の成分を取り除く射影に由来する。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）では射影と最小二乗法が展開されており、同じ考え方はフーリエ級数（Fourier series）へとつながっていく。

解答例

STEP II 2000、第 6 問

純粋数学 • 半角の置換

> **STEP II 2000、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q6

鍵となる考え方

置換（substitution）$t = \tan\frac{1}{2}\theta$ は、$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の任意の有理関数（rational function）を t の有理関数に変える。この問題では、その結果は 2 を 2 次式で割った形になる。平方完成（completing the square）を行うと逆正接（arctangent）が現れ、前半の第 3 の恒等式（identity）は、上端における逆正接を簡単にするのにちょうど必要なものである。2 つ目の積分は、新たに積分計算をしなくても、対称性（symmetry）によって 1 つ目の積分から導かれる。

解答

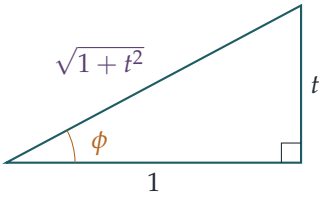
3 つの恒等式

$\phi = \frac{1}{2}\theta$ とおくと、$t = \tan\phi$ かつ $1 + t^2 = \sec^2\phi$ である。倍角の公式（double-angle formulae）により、

$$\sin\theta = 2\sin\phi\cos\phi = 2\tan\phi\cos^2\phi = \frac{2\tan\phi}{\sec^2\phi} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos\theta = \cos^2\phi - \sin^2\phi = \cos^2\phi\,(1 - \tan^2\phi) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

（これらは $\tan\frac{1}{2}\theta$ が定義される限り、すなわち $\cos\frac{1}{2}\theta \neq 0$ である限り成り立つ。）下の図のように、直角をはさむ 2 辺が 1 と t で角が ϕ である直角三角形を考えると、これらを覚えやすい。



第 3 の恒等式については、$\sin\theta \neq 0$ のとき、$1+\cos\theta = 2\cos^2\phi$ と $\sin\theta = 2\sin\phi\cos\phi$ を用いると、

$$\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2\cos^2\phi}{2\sin\phi\cos\phi} = \cot\phi = \tan\left(\tfrac{1}{2}\pi - \phi\right) = \tan\left(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\theta\right),$$

となる。ここで、余角（complementary angles）の関係 $\cot\phi = \tan(\frac{1}{2}\pi - \phi)$ を用いた。以上で 3 つの恒等式がすべて示された。

1 つ目の積分

$t = \tan\frac{1}{2}\theta$ とすると $\theta = 2\arctan t$ であるから、

$$\mathrm{d}\theta = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

$\theta = 0$ のとき $t = 0$、$\theta = \frac{1}{2}\pi$ のとき $t = \tan\frac{1}{4}\pi = 1$ である。$c = \cos\alpha$、$s = \sin\alpha$ とおく。$0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ より、どちらも正である。すると

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+c\sin\theta} = \int_0^1 \frac{1}{1+\dfrac{2ct}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2}{t^2+2ct+1}\,\mathrm{d}t.$$

平方完成し、$1-c^2 = s^2$ を用いると、

$$t^2+2ct+1 = (t+c)^2 + s^2.$$

$s > 0$ であるから、よく知られた積分 $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+s^2} = \frac{1}{s}\arctan\frac{u}{s}$ により、

$$\int_0^1 \frac{2}{(t+c)^2+s^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{s}\left[\arctan\frac{t+c}{s}\right]_0^1 = \frac{2}{s}\left(\arctan\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} - \arctan\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right).$$

考えてみよう $\arctan\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ はどのように簡単にできるか。

ここで前半の結果が真価を発揮する。第 3 の恒等式（θ を α に置き換えたもの）により、$\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha)$ である。ただし、arctan と tan を打ち消し合わせる前に、その角が arctan の値域 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ に入っていることを確かめなければならない。$0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ より $\frac{1}{4}\pi < \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\pi$ であるから、確かに

$$\arctan\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha.$$

同様に、$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha = \tan\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right)$ であり $0 < \frac{1}{2}\pi - \alpha < \frac{1}{2}\pi$ であるから、$\arctan\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}\pi - \alpha$ である。したがって

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\alpha\sin\theta} = \frac{2}{\sin\alpha}\left(\left(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha\right) - \left(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha\right)\right) = \frac{2}{\sin\alpha}\cdot\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{\sin\alpha},$$

となり、求める結果が得られた。

2 つ目の積分

$\theta = \frac{1}{2}\pi - u$ と置換する。すると $\cos\theta = \sin u$、$\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}u$ であり、積分区間の端 $0, \frac{1}{2}\pi$ が入れ替わることでマイナス符号が打ち消される：

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin\alpha\cos\theta} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+\sin\alpha\sin u}.$$

次に $\beta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$ とおく。すると $\sin\alpha = \cos\beta$ かつ $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$ であるから、いま証明した結果を α の代わりに β として適用できる：

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+\cos\beta\sin u} = \frac{\beta}{\sin\beta}.$$

$\sin\beta = \cos\alpha$ であるから、$0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ に対して

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin\alpha\cos\theta} = \frac{\frac{1}{2}\pi - \alpha}{\cos\alpha}.$$

が結論される。

検算

- $\alpha \to 0$ のとき $\cos\alpha \to 1$ であり、1 つ目の積分は $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin\theta} = 1$ に近づくはずである（置換すると $\int_0^1 \frac{2}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = 1$ が得られる）。実際、$\alpha/\sin\alpha \to 1$ である。
- $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ のとき被積分関数（integrand）は 1 に近づくので、1 つ目の積分は $\frac{1}{2}\pi$ に近づくはずであり、これは $\frac{\pi/2}{1}$ と一致する。2 つ目の積分も同様に $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ のとき 1 に近づき、$\frac{\frac{1}{2}\pi - \alpha}{\cos\alpha} \to 1$ と整合する。
- 数値的にも確かめられる。$\alpha = \frac{1}{4}\pi$ のとき、シンプソンの公式（Simpson's rule）により 1 つ目の積分は 1.110721 となり、$\frac{\pi\sqrt{2}}{4} \approx 1.110721$ と一致する。$\alpha = \frac{1}{3}\pi$ のとき、2 つ目の積分は $1.047198 \approx \frac{1}{3}\pi$ となり、公式の予想どおりである。

よくある間違い

- $\mathrm{d}\theta$ から生じる因子 $\frac{2}{1+t^2}$ や、新しい積分区間の端 0 と 1 を忘れる。

- x が $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ に入っていることを確かめずに $\arctan(\tan x) = x$ と書く。この問題では、条件 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ こそがこれを正当化している。
- $\theta \mapsto \frac{1}{2}\pi - \theta$ と $\alpha \mapsto \frac{1}{2}\pi - \alpha$ を利用せず、2 つ目の積分のために積分計算を一からやり直す。

STEP のその先へ

$t = \tan\frac{1}{2}\theta$ による置換（ワイエルシュトラス（Weierstrass）置換（Weierstrass substitution）と呼ばれることもある）がうまくいくのは、点 $(\cos\theta, \sin\theta) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ が単位円（unit circle）の有理パラメータ表示（rational parametrisation）になっているからである。t を有理数にとると、すべてのピタゴラス数（Pythagorean triple）が得られる。大学では、$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ の形の積分は、ふつう代わりに $z = e^{i\theta}$ とおいて留数定理（residue theorem）を用いて計算する。これにより、計算は単位円の内部にある極（pole）を求める問題に帰着される。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、この考え方への美しい入門書である。

解答例

STEP II 2000、第 7 問

純粋数学 ・ 直線と円錐

> **STEP II 2000、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q7

鍵となる考え方

何よりも先に、$\mathbf{s}$ の長さを求めよう。$\cos\theta \pm \sqrt{3}$ の項は、交差項（cross terms）が打ち消し合って $\cos^2\theta + \sin^2\theta$ が現れるように仕組まれている。そのため $|\mathbf{s}|$ は θ にまったく依存しない。あとはすべてスカラー積（scalar product）から導かれる。また、組み合わせ $s_x - s_z$ も θ を含まない。これは m の方向を直接指し示しており、最後の小問で平面 $x - z =$ 定数 が現れる理由もこれで説明できる。

解答

l と一般の直線のなす角

簡単のため $c_\theta = \cos\theta$ と書く。$\mathbf{s}$ の長さは

$$\begin{aligned} |\mathbf{s}|^2 &= (c_\theta + \sqrt{3})^2 + 2\sin^2\theta + (c_\theta - \sqrt{3})^2 \\ &= 2c_\theta^2 + 6 + 2\sin^2\theta = 8, \end{aligned}$$

である。$\pm 2\sqrt{3}\,c_\theta$ の交差項が打ち消し合うからである。よって、すべての θ に対して $|\mathbf{s}| = 2\sqrt{2}$ である。

$\mathbf{d} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ とおく。すると

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{d} = a(c_\theta + \sqrt{3}) + \sqrt{2}\,b\sin\theta + c(c_\theta - \sqrt{3}) = (a+c)\cos\theta + \sqrt{2}\,b\sin\theta + \sqrt{3}\,(a-c).$$

となる。したがって、2 直線のなす角 ϕ は

$$\cos\phi = \frac{(a+c)\cos\theta + \sqrt{2}\,b\sin\theta + \sqrt{3}\,(a-c)}{2\sqrt{2}\,\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

を満たす。直線には特定の向きがないので、鋭角（acute angle）のほうを求めたい場合は右辺の絶対値をとればよい。

直線 m

$\cos\phi$ が θ によらないような方向 $\mathbf{d}$ を求めたい。分子を見ると、θ への依存がなくなるのはちょうど $a+c=0$ かつ $b=0$ のときである。そこで $\mathbf{d}=\mathbf{i}-\mathbf{k}$（$a=1, b=0, c=-1$）を試すと

$$\cos\phi = \frac{\sqrt{3}\cdot 2}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

となる。これは正なので ϕ はすでに鋭角であり、すべての θ に対して $\phi=\pi/6$ である。よって、原点を通る直線

$$m: \quad \mathbf{r}=\mu(\mathbf{i}-\mathbf{k})$$

が求める条件を満たす。θ が変化すると、l は m を軸とし半頂角（semi-vertical angle）$\pi/6$ の円錐（cone）を描く。

P が描く円

l 上では $x-z=\lambda(s_x-s_z)=\lambda\big((c_\theta+\sqrt{3})-(c_\theta-\sqrt{3})\big)=2\sqrt{3}\lambda$ である。これを $4\sqrt{3}$ とおくと、θ の値にかかわらず $\lambda=2$ となるので

$$\overrightarrow{OP}=2\mathbf{s}=(2\cos\theta+2\sqrt{3})\,\mathbf{i}+2\sqrt{2}\sin\theta\,\mathbf{j}+(2\cos\theta-2\sqrt{3})\,\mathbf{k}.$$

である。直線 m は $\mu-(-\mu)=4\sqrt{3}$、すなわち $\mu=2\sqrt{3}$ のところで平面と交わり、その交点 C は

$$\overrightarrow{OC}=2\sqrt{3}\,\mathbf{i}-2\sqrt{3}\,\mathbf{k}.$$

で与えられる。

> ? **考えてみよう** なぜ C が中心の候補として自然なのだろうか。

平面 $x-z=4\sqrt{3}$ の法線（normal）は $\mathbf{i}-\mathbf{k}$ であり、これは m の方向である。つまり m は円錐の軸であり、平面に垂直である。そして、どんな円錐も軸に垂直な平面で切ると、軸がその平面と交わる点を中心とする円が得られる。ここではこれを直接確かめる：

$$\overrightarrow{CP}=2\cos\theta\,\mathbf{i}+2\sqrt{2}\sin\theta\,\mathbf{j}+2\cos\theta\,\mathbf{k}, \qquad |\overrightarrow{CP}|^2=4\cos^2\theta+8\sin^2\theta+4\cos^2\theta=8.$$

よって、P のどの位置も平面上にあり、その平面上の定点 C からの距離は $2\sqrt{2}$ である。言い換えれば、P は平面上の中心 C、半径 $2\sqrt{2}$ の円の上にあり、C は m 上にある。

P が実際に円全体を描くことを確かめるために、

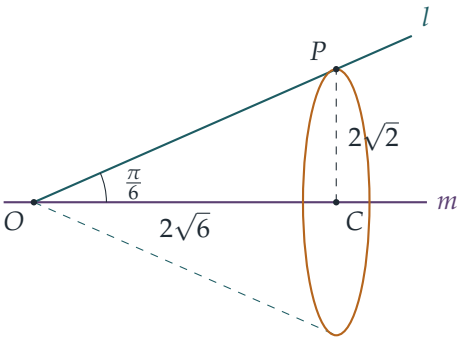
$$\overrightarrow{CP}=2\sqrt{2}\,(\cos\theta\,\mathbf{u}+\sin\theta\,\mathbf{v}), \qquad \mathbf{u}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{k}), \quad \mathbf{v}=\mathbf{j}.$$

と書く。ここで $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ は互いに垂直な単位ベクトル（unit vector）であり、どちらも $\mathbf{i}-\mathbf{k}$ に垂直なので、平面に沿った向きをもつ。θ が 0 から 2π まで動くと、P は円をちょうど 1 周する。半径は

$$\boxed{2\sqrt{2}}.$$

である。

半径を求めるもっと手早い方法もある。$|OP| = 2|\mathbf{s}| = 4\sqrt{2}$、$|OC| = 2\sqrt{6}$ であり、OC は平面に垂直なので、ピタゴラスの定理（Pythagoras' theorem）により $CP = \sqrt{32-24} = 2\sqrt{2}$ となる。同じことだが、$CP = OC\tan\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{6}/\sqrt{3}$ としてもよい。



検算

- $\theta = 0$ のとき $\mathbf{s} = (1+\sqrt{3}, 0, 1-\sqrt{3})$ であり、$|\mathbf{s}|^2 = (4+2\sqrt{3})+(4-2\sqrt{3}) = 8$、$\mathbf{s}\cdot(\mathbf{i}-\mathbf{k}) = 2\sqrt{3}$ となって、$\cos\phi = \sqrt{3}/2$ が得られる。
- 半径を求める 2 通りの方法は一致する：$\sqrt{(4\sqrt{2})^2-(2\sqrt{6})^2} = \sqrt{8}$ および $2\sqrt{6}\tan\frac{\pi}{6} = \sqrt{8} \approx 2.828$。
- 数値的に、20 000 個のランダムな θ（一般の公式についてはランダムな a, b, c も）に対して、m とのなす角は $\pi/6$ に等しく、P は平面上にあり、$|CP| = 2.8284\ldots$ であることが、いずれも誤差 10^{-15} 以内で確かめられる。

よくある間違い

- $|\mathbf{s}|$ で割るのを忘れる、あるいは $\mathbf{s}$ を単位ベクトルだと思い込む。その長さは $2\sqrt{2}$ である。
- P が O を中心とする球面（sphere）上にあること（すなわち $|OP| = 4\sqrt{2}$）だけを示して終わる。球面を平面で切れば円になるが、その中心がなぜ m 上の点 C なの

かを述べる必要がある。その理由は、OC が平面に垂直だからである。

STEP のその先へ

直線 l は直円錐を描く。円錐を平面で切ることこそ、円錐曲線（conic sections）という名前の由来である。軸に垂直な平面で切れば円が得られ、平面を傾ければ楕円（ellipse）、放物線（parabola）、双曲線（hyperbola）が得られる。大学 1 年の講義では、この円錐を二次曲面（quadric surface）$(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2 = |\mathbf{r}|^2\cos^2\alpha$ として記述し、対称行列（symmetric matrix）の固有値（eigenvalue）を用いてこのような曲面を分類する。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）でこの内容が扱われている。

解答例

STEP II 2000、第 8 問

純粋数学 • 変数分離形の微分方程式

STEP II 2000、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/00-s2-q8

鍵となる考え方

どちらの方程式も変数分離形（separable）である。すなわち、x への依存と y への依存が積の形で現れるので、y を含むものをすべて一方の辺に、x を含むものをすべてもう一方の辺に集めることができる。x 側はどれも $x\,\mathrm{e}^{ax^2}$ の形をしており、x が x^2 の導関数（derivative）の（定数倍である）ため、すぐに積分できる。小問 (ii) では $(y+3)$ の指数を自分で選ぶことができ、y の増大の仕方がちょうど e^{3x^2} に一致するように選ぶのである。

解答

小問 (i)

$x=0$ で $y=6$ であるから、出発点の近くでは $y+3>0$ であり、$(y+3)^{1/2}$ で割ってよい：

$$(y+3)^{-1/2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -4x\,\mathrm{e}^{-x^2}.$$

両辺を x で積分し、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-x^2} = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$ を用いると、

$$2(y+3)^{1/2} = 2\mathrm{e}^{-x^2} + C.$$

$x=0$、$y=6$ を代入すると $2\cdot 3 = 2 + C$ となるので、$C=4$ であり、

$$(y+3)^{1/2} = \mathrm{e}^{-x^2} + 2.$$

右辺は常に 2 以上であるから、これは正当な（正の）平方根であり、$y+3$ が 0 に達することはない。したがって、上で行った割り算はすべての $x \geq 0$ について正当化され

る。両辺を 2 乗して、

$$\boxed{y = \left(2 + \mathrm{e}^{-x^2}\right)^2 - 3 = 1 + 4\mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^{-2x^2}}.$$

$x \to \infty$ のとき $\mathrm{e}^{-x^2} \to 0$ かつ $\mathrm{e}^{-2x^2} \to 0$ であるから、求められているとおり $y \to 1$ となる。

小問 (ii)

ここでの方程式は

$$(y+3)^{k-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\,\mathrm{e}^{6x^2}.$$

である。一般の（整数とは限らない）指数が意味をもつためには $y+3 > 0$ が必要である。$x > 0$ では $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} > 0$ なので y は増加し、したがって $y+3$ は最初に正であれば正のままである。$k \neq 0$ のとき、積分すると

$$\frac{(y+3)^k}{k} = \frac{\mathrm{e}^{6x^2}}{12} + C, \qquad \text{よって} \qquad (y+3)^k = \frac{k}{12}\,\mathrm{e}^{6x^2} + kC.$$

考えてみよう どの k を試すべきだろうか？

$k > 0$ ならば、x が大きいとき定数は無視でき、$y + 3 \approx (k/12)^{1/k}\,\mathrm{e}^{6x^2/k}$ となる。y が e^{3x^2} のように増大してほしいので、$6/k = 3$、すなわち $k = 2$ でなければならない。（それ以外の $k > 0$ では、$\mathrm{e}^{-3x^2}y$ は 0 または ∞ に向かう。）

そこで $k = 2$ とする。このとき方程式は $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\,\mathrm{e}^{6x^2}/(y+3)$ となり、その解は

$$(y+3)^2 = \frac{\mathrm{e}^{6x^2}}{6} + D,$$

である。ここで $D = (y_0+3)^2 - \frac{1}{6}$ であり、y_0 は $x = 0$ における y の値である。右辺は $(y_0+3)^2 > 0$ から増加していくので正のままであり、解はすべての $x \geq 0$ に対して存在する：

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{6}\mathrm{e}^{6x^2} + D} - 3.$$

e^{-3x^2} を掛け、根号の中では $\mathrm{e}^{-3x^2} = \sqrt{\mathrm{e}^{-6x^2}}$ として取り込むと、

$$\mathrm{e}^{-3x^2}y = \sqrt{\tfrac{1}{6} + D\,\mathrm{e}^{-6x^2}} - 3\mathrm{e}^{-3x^2} \longrightarrow \sqrt{\tfrac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

となる（$x \to \infty$）。二つの指数関数がいずれも 0 に向かうからである。よって $k = 2$ のとき、極限は

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-3x^2}y = \frac{1}{\sqrt{6}}},$$

であり、これは初期値によらない。定数 D は答えから消えており、だからこそ問題文では「任意の解」と言えるのである。

$k = 2$ のときは、$(y+3)^{-1}$ という累乗は $y < -3$ に対しても意味をもつ。その枝では $y+3 = -\sqrt{\frac{1}{6}e^{6x^2} + D}$ であり、同じ議論により極限は $-1/\sqrt{6}$ となる。意図された答えは、$y > -3$ である解に対する $1/\sqrt{6}$ である。

検算

- (i) で $x = 0$ とすると $y = (2+1)^2 - 3 = 6$ であり、$y = (2+e^{-x^2})^2 - 3$ を微分すると $-4xe^{-x^2}(2+e^{-x^2}) = -4xe^{-x^2}(y+3)^{1/2}$ となる。
- 両方の方程式を数値的に（ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta）で）解き進めた結果は、公式と一致する。たとえば (i) では $y(2) \approx 1.07360$ であり、(ii) では $y_0 = 6$ から出発すると $e^{-12}y(2) \approx 0.408230$ となって、すでに $1/\sqrt{6} \approx 0.408248$ に近い。

よくある間違い

- 積分定数（constant of integration）を 2 乗した後まで書き忘れたり、$y = 6$ を誤った式に当てはめたりすること。
- $x\,e^{6x^2}$ の積分を $e^{6x^2}/12$ ではなく $e^{6x^2}/6$ としてしまうこと。これは k には影響しないが、極限は変わってしまう。

STEP のその先へ

小問 (ii) はささやかな漸近解析（asymptotic analysis）の例である。積分定数は増大する項に圧倒されてしまうので、初期値を気にすることなく、x が大きいときに解がどう振る舞うかを求めることができた。解のどの性質が初期条件（initial conditions）に依存しないかを問うことは、微分方程式（differential equations）の定性的理論の中心にある。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）は、変数分離形の方程式と、このような長時間挙動を扱っている。

解答例

STEP II 2000、第 9 問

力学 ・ 空気抵抗を受ける運動

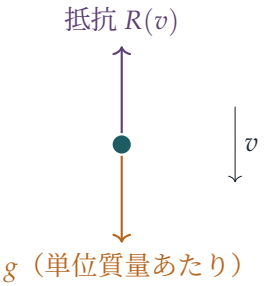
> **STEP II 2000、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q9

鍵となる考え方

どちらの降下者も、速さだけに依存する抵抗を受けながらニュートン（Newton）の運動の第 2 法則に従うので、v と t についての 1 階の微分方程式（differential equation）が得られ、これは変数分離（separation of variables）できる。「速さが決して到達しない」という結果は終端速度（terminal speed）、すなわち抵抗がちょうど重力とつり合う速さから得られる。解はこの値に向かって少しずつ近づくが、有限の時間で到達することはない。カレンの場合は、無次元（dimensionless）の速さ $u = kv/g$ を用いて書き直すと、2 次式がきれいに因数分解できる。

解答

各降下者を、静止状態から鉛直に落下する質点とみなし、重力加速度 g は下向きに一定とする。下向きの速さを $v \geq 0$ とし、t は飛び降りた瞬間から測る。単位質量あたりにはたらく力は、下向きの重力 g と上向きの空気抵抗であるから、ニュートンの第 2 法則により $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - (\text{単位質量あたりの抵抗})$ となる。



ジェーンの速さの上界

ジェーンの運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - kv = k\Big(\frac{g}{k} - v\Big).$$

である。はじめ $v = 0 < g/k$ である。$v < g/k$ である間は $g/k - v > 0$ で割ることができ、変数を分離して

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}w}{g/k - w} = \int_0^t k\,\mathrm{d}s \quad \Longrightarrow \quad -\ln\Big(1 - \frac{kv}{g}\Big) = kt,$$

を得る。よって

$$v = \frac{g}{k}\big(1 - \mathrm{e}^{-kt}\big).$$

である。右辺は有限のすべての t に対して g/k より小さく、これは割り算に用いた条件そのものであるから、この式はすべての $t \geq 0$ で成り立つ。$\mathrm{e}^{-kt} > 0$ なので、すべての t に対して $v < g/k$ である。したがって、ジェーンの速さは $t \to \infty$ のとき g/k に近づくが、決して到達しない。

カレンの速さの上界

カレンの運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - kv - \frac{2k^2}{g}v^2.$$

である。無次元の速さ $u = kv/g$ を導入する。すると右辺は

$$g\big(1 - u - 2u^2\big) = g(1 - 2u)(1 + u), \qquad \text{であり} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{g}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = k(1 - 2u)(1 + u).$$

となる。加速度が 0 になるのは $u = \frac{1}{2}$ のとき（根 $u = -1$ は物理的な速さではない）、すなわち $v = g/(2k)$ のときである。これがカレンの終端速度である。

はじめ $u = 0 < \frac{1}{2}$ である。$0 \leq u < \frac{1}{2}$ である間は 2 つの因数はともに正であるから、変数分離ができる。部分分数（partial fractions）に分解すると

$$\frac{1}{(1 - 2u)(1 + u)} = \frac{2/3}{1 - 2u} + \frac{1/3}{1 + u},$$

となり、これは $1 = A(1 + u) + B(1 - 2u)$ に $u = -1$ と $u = \frac{1}{2}$ を代入すれば確かめられる。したがって

$$kt = \int_0^u \Big(\frac{2/3}{1 - 2w} + \frac{1/3}{1 + w}\Big)\mathrm{d}w = \frac{1}{3}\Big[-\ln(1 - 2w) + \ln(1 + w)\Big]_0^u = \frac{1}{3}\ln\frac{1 + u}{1 - 2u}.$$

である。$\dfrac{1 + u}{1 - 2u} = \mathrm{e}^{3kt}$ を変形すると

$$u = \frac{\mathrm{e}^{3kt} - 1}{2\mathrm{e}^{3kt} + 1} = \frac{1}{2} - \frac{3/2}{2\mathrm{e}^{3kt} + 1} < \frac{1}{2}.$$

を得る。先ほどと同じ理由でこの式はすべての $t \geq 0$ で成り立つから、カレンの速さは

$$v < \frac{g}{2k} \quad \text{すべての時刻} t.$$

を満たす。これが対応する結果である。彼女の速さは $g/(2k)$ に近づくが、決して到達しない。

ジェーンが $g/(3k)$ に達するまでの時間

ジェーンの解に $v = g/(3k)$ を代入すると $1 - \mathrm{e}^{-kt} = \frac{1}{3}$ となるので、$\mathrm{e}^{-kt} = \frac{2}{3}$ であり

$$t = \frac{1}{k} \ln \frac{3}{2},$$

となって、示すべき結果が得られる。

カレンが $g/(3k)$ に達するまでの時間

> **考えてみよう** t を用いた u の式が必要だろうか。それとも、もっと早い方法があるだろうか。

早い方法は、すでに得ている u を用いた t の式を使うことである。速さ $g/(3k)$ は $u = \frac{1}{3}$ を意味し、これは $\frac{1}{2}$ より小さいので、彼女はこの速さに到達する。このとき

$$\frac{1+u}{1-2u} = \frac{4/3}{1/3} = 4, \qquad \text{よって} \qquad t = \frac{1}{3k} \ln 4 = \frac{2}{3k} \ln 2.$$

である。

検算

- 正のどの速さにおいても、カレンはジェーンより大きな抵抗を受けるので、同じ速さに達するまでにより長い時間がかかるはずである。実際、$\frac{2}{3} \ln 2 \approx 0.462$ は $\ln \frac{3}{2} \approx 0.405$ より大きい。
- t が小さいとき、どちらの式も $v \approx gt$ を与える。これは抵抗のない自由落下であり、当然そうなるべきである。$u = (\mathrm{e}^{3kt} - 1)/(2\mathrm{e}^{3kt} + 1) \approx 3kt/3 = kt$ と展開すると $v \approx gt$ が得られる。
- 両方の方程式を静止状態から数値的に解いた（ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta）、$g = 9.8$、$k = 0.7$）。速さはそれぞれ g/k と $g/(2k)$ である 14 と 7 を下回り続け、速さ $g/(3k)$ には $t \approx 0.5792$ と $t \approx 0.6601$ で到達した。これらは $k^{-1} \ln \frac{3}{2}$ および $\frac{2}{3k} \ln 2$ と約 10^{-9} の精度で一致する。

よくある間違い

- 加速度が正であることだけから「速さは決して g/k に到達しない」と論じること。それでわかるのは速さが増加することだけで、g/k より小さいままであることは示せない。陽な解を求めるか、終端速度に達するまでの時間が無限大であることを論証する必要がある。
- $\ln(1-2u)$ の項の符号を間違えること。$\frac{1}{1-2u}$ を積分すると $-\frac{1}{2}\ln(1-2u)$ となる。

STEP のその先へ

どちらの方程式も自励的（autonomous）、すなわち $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = f(v)$ の形である。終端速度はこのような方程式の安定平衡点（stable equilibrium）である。常微分方程式の一意性定理（uniqueness theorem）により、f が滑らかであれば、解が有限の時間で平衡点に到達することはないことが示される。これが 2 つの上界の背後にある一般的な理由である。カレンの方程式はリッカチ方程式（Riccati equation）であり、同じロジスティック（logistic）型のふるまいは個体数モデルにも現れる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）は自励的な方程式とその平衡点を扱っており、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は抵抗を受ける運動を論じている。

解答例

STEP II 2000、第 10 問

力学 ・ 連結した滑車系

STEP II 2000、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

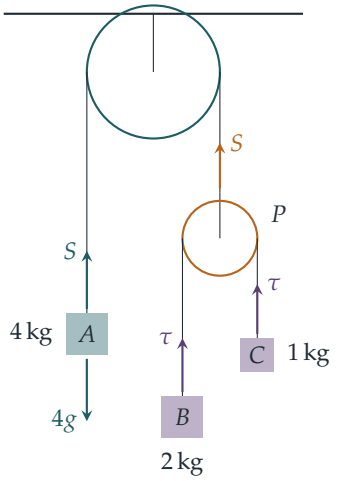
step.maths.org/questions/00-s2-q10

鍵となる考え方

これは二重アトウッドの器械（double Atwood machine）である。A を押さえている間は第 2 の滑車（pulley）は固定されており、B、C は通常のアトウッドの器械（Atwood machine）をなす。A を放すと第 2 の滑車も動き出すので、見通しよく解くには、B と C の運動を**その滑車に対する相対的な運動**として測り、さらに軽い滑車にはたらく力の合力は 0 であるという事実を用いるのがよい。すなわち、滑車の上側の糸は、下側の糸の張力（tension）のちょうど 2 倍の力で引くのである。

解答

粒子を質点（point mass）、糸を軽くて伸び縮みしない（inextensible）もの、2 つの滑車をなめらかで軽いものとしてモデル化する。第 2 の滑車を P とよぶ。加速度（acceleration）はすべて**下向き**を正とし、A を通る糸の張力を S、BC の糸の張力を τ と書き、g の単位は $\mathrm{m\,s^{-2}}$ とする。



P は軽いので、P にはたらく力の合力は 0 でなければならない（そうでなければ加速度が無限大になってしまう）。P は上向きに S で引かれ、両側で下向きに τ ずつ引かれるから、常に

$$S = 2\tau$$

が成り立つ。

第 1 段階：A を押さえている間

A が静止しているとき、固定滑車にかかる糸は動かないので、P も固定されている。このとき B と C は通常のアトウッドの器械であり、B が下向きに加速度 a で動けば、C は上向きに加速度 a で動く。ニュートンの第 2 法則（Newton's second law）より

$$2a = 2g - \tau, \qquad 1 \cdot a = \tau - g.$$

辺々を加えると $3a = g$ となるので

$$a = \tfrac{1}{3}g, \qquad \tau = \tfrac{4}{3}g.$$

よって B は下向きに、C は上向きに、それぞれ $\frac{1}{3}g\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ の加速度で動く。

この段階の終わり（$t = T$）において、B は下向きに、C は上向きに、いずれも速さ $\frac{1}{3}gT$ で動いており、B は $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}g\,T^2 = \frac{1}{6}gT^2$ だけ落下している。この間、A と P は静止したままである。

第 2 段階：すべてが自由に動く

A の加速度を a_A（下向き）とする。固定滑車にかかる糸の長さは一定なので、P の加速度は $-a_A$ である。つまり P は、A が下がるのと同じ速さで上がる。

考えてみよう　B と C がつり下がっている滑車そのものが加速しているとき、B と C の加速度はどのように記述すればよいか。

P に対して見れば、糸 BC は固定されたアトウッドの器械の場合とまったく同じようにふるまう。すなわち、B が P に対して下向きに加速度 r で動けば、C は P に対して上向きに加速度 r で動く。これに P 自身の加速度を加えて

$$a_B = -a_A + r, \qquad a_C = -a_A - r.$$

ここで、$S = 2\tau$ を用いて各粒子についてニュートンの第 2 法則を書く（下向きを正とする）：

$$\begin{aligned} A:&\quad 4a_A = 4g - 2\tau,\\ B:&\quad 2(-a_A + r) = 2g - \tau,\\ C:&\quad 1(-a_A - r) = g - \tau. \end{aligned}$$

A の式から $\tau = 2g - 2a_A$ である。これを B の式に代入すると $-2a_A + 2r = 2a_A$ となり、$r = 2a_A$ を得る。これらを両方とも C の式に代入すると

$$-3a_A = g - (2g - 2a_A) = -g + 2a_A \quad \Longrightarrow \quad a_A = \tfrac{1}{5}g.$$

したがって $r = \frac{2}{5}g$、$\tau = \frac{8}{5}g$、$S = \frac{16}{5}g$ であり、

$a_A = \frac{1}{5}g$（下向き），　$a_B = -\frac{1}{5}g + \frac{2}{5}g = \frac{1}{5}g$（下向き），　$a_C = -\frac{1}{5}g - \frac{2}{5}g = -\frac{3}{5}g$,

となるので、C は**上向き**に $\frac{3}{5}g\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ の加速度で動く。

これらはいずれも一定であり、A を放した瞬間に不連続に変化するものはない。A と P は静止状態から動き出し、B、C は速さ $\frac{1}{3}gT$ を保っている。

A の速さ

第 1 段階で B は $\frac{1}{6}gT^2$ だけ動いたので、残りの距離は

$$0.6\,gT^2 - \tfrac{1}{6}gT^2 = \tfrac{3}{5}gT^2 - \tfrac{1}{6}gT^2 = \tfrac{13}{30}gT^2$$

である。第 2 段階で B は下向きの速度 $\frac{1}{3}gT$ から出発し、下向きの加速度 $\frac{1}{5}g$ をもつので、速度は正のままであり、移動距離は変位（displacement）に等しい。これに時間 t を要するとすれば、$s = ut + \frac{1}{2}at^2$ より

$$\tfrac{1}{3}gT\,t + \tfrac{1}{10}gt^2 = \tfrac{13}{30}gT^2.$$

$t = kT$ とおき、両辺に $30/(gT^2)$ を掛けると

$$3k^2 + 10k - 13 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (k-1)(3k+13) = 0.$$

$t > 0$ より $k = 1$ であり、第 2 段階はちょうど T 秒間続く。A はこの段階を静止状態から加速度 $\frac{1}{5}g$ で始めたので、そのときの速さは

$$v_A = \tfrac{1}{5}g \cdot T = \tfrac{gT}{5}\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

検算

- 求めた値で各運動方程式が成り立つ。A については $4 \cdot \frac{1}{5}g = 4g - \frac{16}{5}g$、$C$ については $-\frac{3}{5}g = g - \frac{8}{5}g$ である。
- 別の方法による確認：糸の条件から $y_C = $ 定数 $- 2y_A - y_B$（下向きの位置）が成り立ち、2 つの自由な座標 y_A、y_B を用いてエネルギーの方法で解いても、同じく $a_A = a_B = \frac{1}{5}g$、$a_C = -\frac{3}{5}g$ が得られる。
- $g = 9.8$、$T = 1.7$ として運動を数値的に追跡すると、$t = 3.400$（すなわち $2T$）で B は $0.6gT^2$ だけ移動しており、そのとき A の速さは $3.332 = gT/5$ である。
- 重さの合計は $7g$ であるが、固定滑車が支えるのは $2S = \frac{32}{5}g$ だけで $7g$ より小さい。したがって第 2 段階では系の重心（centre of mass）が下向きに加速するはずであり、実際そうなっている。

よくある間違い

- 第 2 段階でも P を固定されているものとして扱い、B と C に $\pm\frac{1}{3}g$ をそのまま使ってしまう。
- 軽い滑車では $S = 2\tau$ となることを忘れる、あるいは滑車に質量の項を与えてしまう。
- すでに進んだ $\frac{1}{6}gT^2$ を差し引かずに、$0.6gT^2$ 全体を第 2 段階の距離としてしまう。

STEP のその先へ

2 つ目の検算のように、糸による束縛条件（constraint）を自動的に満たす位置座標を選ぶことは、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）の出発点である。運動エネルギー（kinetic energy）と位置エネルギー（potential energy）を自由な座標で表せば、張力を一切持ち出すことなく運動方程式が導かれる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、滑車のような束縛のある系を丁寧に扱っており、次に読む本として適している。

解答例

STEP II 2000、第 11 問

力学 ・ 弾性ひもと単振動

STEP II 2000、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/00-s2-q11

鍵となる考え方

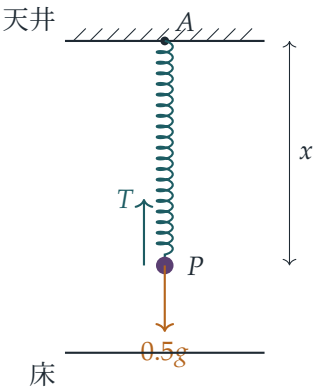
2 つの定性的な主張は、エネルギーを使えばすぐに片づく。放した瞬間に蓄えられている弾性エネルギー（elastic energy）と、自然長（natural length）に達するため、および天井に達するために必要な重力による位置エネルギーとを比べればよい。時間については、運動を 2 つの段階に分ける。糸がぴんと張っている間、質点はその平衡位置（equilibrium position）を中心とする単振動（simple harmonic motion）を行い、糸がたるんでからは重力のみを受けて自由に運動する。戻りの行程は上りの行程を逆向きにたどったものなので、上りにかかる時間を 2 倍すればよい。

解答

P をフックの法則（Hooke's law）に従う軽い弾性糸につながれた質点とみなし、空気抵抗はないものとする。A から下向きに測った P の距離を x（単位はメートル）とする。$x > 1.5$ のとき糸は張っており、そのとき伸びは $x - 1.5$、張力（tension）は

$$T = \frac{\lambda}{l}(x - 1.5) = \frac{5g}{1.5}(x - 1.5) = \frac{10g}{3}(x - 1.5).$$

である。部屋の高さは 2.5 m なので、P は $x = 2$ から、伸び 0.5 m の状態で出発する。



糸がたるむこと

放した瞬間に蓄えられている弾性エネルギーは

$$\frac{\lambda e^2}{2l} = \frac{5g\,(0.5)^2}{2(1.5)} = \frac{5g}{12}\,\text{J}.$$

である。糸が自然長に達するには、P は 0.5 m 上昇しなければならず、位置エネルギー（potential energy）が $0.5g \times 0.5 = \frac{g}{4}$ J 増加する。$\frac{5g}{12} > \frac{g}{4}$ であるから、P はまだ上向きに運動している状態で $x = 1.5$ に達し、そのときの運動エネルギー（kinetic energy）は

$$\tfrac{1}{2}(0.5)v^2 = \frac{5g}{12} - \frac{g}{4} = \frac{g}{6}, \qquad \text{よって} \qquad v^2 = \frac{2g}{3}.$$

である。したがって P は糸が自然長となる点より上へ通り過ぎ、糸はたるむ。

P は天井に届かない

天井に届くためには、P は出発点から 2 m 上昇しなければならず、位置エネルギーが $0.5g \times 2 = g$ J 増加する。利用できるエネルギーは放した瞬間に糸に蓄えられていた $\frac{5g}{12}$ J がすべてであり（糸がたるめば糸は何も蓄えない）、$\frac{5g}{12} < g$ である。よって P は天井に届かない。

より詳しく述べると、糸がたるんだ後の P は速さ v で鉛直に運動する放物体であるから、さらに $\dfrac{v^2}{2g} = \dfrac{1}{3}$ m 上昇する。最高点は $x = 1.5 - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$ であり、天井よりまだ $\frac{7}{6}$ m 下である。

糸が張っている間の単振動

$x > 1.5$ のとき、ニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（下向きを正とする）より

$$0.5\,\ddot{x} = 0.5g - \frac{10g}{3}(x - 1.5).$$

を得る。平衡位置は右辺が 0 となるところであり、$x - 1.5 = 0.15$、すなわち $x = 1.65$ である。平衡位置から下向きの変位を $y = x - 1.65$ とおく。すると

$$\ddot{y} = 2g - \frac{20g}{3}(y + 0.15) = -\frac{20g}{3}y,$$

となり、これは $\omega^2 = \dfrac{20g}{3}$ の、$y = 0$ を中心とする単振動である。求められているとおり、これは糸に張力がはたらいている限り成り立つ。

戻るまでの時間

P は $y = 2 - 1.65 = 0.35$ で静止した状態から出発するので、糸が張っている間は

$$y = 0.35\cos\omega t.$$

である。糸がたるむのは $x = 1.5$、すなわち $y = -0.15$ のときである。よって、これが初めて起こる時刻 t_1 は

$$\cos\omega t_1 = -\frac{0.15}{0.35} = -\frac{3}{7}.$$

を満たす。

> **考えてみよう** $\cos\omega t_1 = -\frac{3}{7}$ のどの解が求めるものか。また、それを arccos を用いてどう表すか。

t が 0 から増加するとき ωt も 0 から増加し、$\cos\omega t$ が初めて $-\frac{3}{7}$ に達するのは ωt が $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ にあるときである。$\arccos\frac{3}{7} \in (0, \frac{\pi}{2})$ かつ $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ であるから、その値は $\omega t_1 = \pi - \arccos\frac{3}{7}$ である。したがって

$$t_1 = \frac{1}{\omega}\left(\pi - \arccos\tfrac{3}{7}\right) = \left(\frac{3}{20g}\right)^{1/2}\left(\pi - \arccos\tfrac{3}{7}\right).$$

（確認として、このときの速さは $\omega\sqrt{0.35^2 - 0.15^2} = \sqrt{\frac{20g}{3} \times 0.1} = \sqrt{\frac{2g}{3}}$ であり、エネルギーによる計算と一致する。）

糸がたるんでいる間、P は重力のみを受けて運動する。P は速さ $v = \sqrt{2g/3}$ で上向きに $x = 1.5$ を離れ、同じ速さで下向きに $x = 1.5$ に戻ってくる。それまでの時間は

$$t_2 = \frac{2v}{g} = \frac{2}{g}\sqrt{\frac{2g}{3}} = \left(\frac{8}{3g}\right)^{1/2}.$$

である。

位置のみに依存する力のもとでの運動は可逆（reversible）である。離れたときと同じ速さで $x = 1.5$ において糸が張る領域に再び入った P は、単振動の段階を逆向きにた

どり、さらに t_1 をかけて元の位置 $y = 0.35$ で静止する。全体の時間は

$$\begin{aligned} 2t_1 + t_2 &= 2\left(\frac{3}{20g}\right)^{1/2}(\pi - \arccos\tfrac{3}{7}) + \left(\frac{8}{3g}\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{8}{3g}\right)^{1/2} + \left(\frac{3}{5g}\right)^{1/2}(\pi - \arccos\tfrac{3}{7})\,, \end{aligned}$$

である。ここで $2\sqrt{3/(20g)} = \sqrt{12/(20g)} = \sqrt{3/(5g)}$ を用いた。これが求める結果である。

検算

- 自然長における速さを求める 2 つの方法（エネルギーによる方法と、単振動の $v^2 = \omega^2(a^2 - y^2)$ による方法）は、どちらも $v^2 = \frac{2g}{3}$ を与える。
- $g = 9.8$ とすると、この式は約 1.0199 s を与える。運動方程式（equation of motion）を数値的に 1 ステップずつ解くと（$x < 1.5$ のときは張力を 0 とする）、出発点で再び静止するまでの時間は同じ値となり、最高点は天井より $\frac{7}{6}$ m 下となる。
- たるむ段階がなければ、単振動の周期は $2\pi/\omega \approx 0.77$ s となる。ここでの $2t_1 \approx 0.50$ s はこれより小さく、振動の一部しか行われないのだから、そうなるべきである。

よくある間違い

- 単振動の中心を平衡位置ではなく自然長の位置としてしまう。重力によって、中心は伸び 0.15 m の位置にずれる。
- $\omega t_1 = \arccos(-\frac{3}{7})$ としたうえで、これが $\pi - \arccos\frac{3}{7}$ であることに気づかない。
- 戻りの行程を忘れる。求められている時間は上りとそして戻りを含むので、両方の段階を 2 倍する必要がある。

STEP のその先へ

これは区分的に定義された力学系（piecewise-defined dynamical system）、すなわち「非滑らかな」（non-smooth）力学系である。領域ごとに異なる運動方程式が成り立ち、解は境界において位置と速度を一致させることによってつなぎ合わされる。同じ考え方は、弾むボール、衝突、スイッチング回路などを支配しており、ここで用いた可逆性の議論は、保存系（conservative system）における時間反転対称性（time-reversal symmetry）を初めて垣間見るものである。さらに学ぶには、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

解答例

STEP II 2000、第 12 問

確率・統計 ・ 正規確率変数の和

> **STEP II 2000、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q12

鍵となる考え方

ヘンリーが遅刻するのは、移動時間の**合計**が 0900 までの持ち時間を超えるときであり、またそのときに限る。そこで各経路について、互いに独立（independent）な 2 つの正規分布（normal distribution）に従う所要時間を足し合わせ、1 つの正規確率変数にまとめる。標準化（standardising）によって「遅刻する」は「標準正規分布（standard normal distribution）に従う変数がある値を超える」と言い換えられ、Φ が増加関数であることから、数表を用いずに 2 つの経路を比較できる。残りは全確率の法則（law of total probability）とベイズの定理（Bayes' theorem）である。

解答

2 つの経路の比較

各経路において、列車での移動とその後の移動は独立であると仮定する。

キングス・クロス。列車の所要時間を $X_1 \sim N(55, 25)$、その後の所要時間を $Y_1 \sim N(30, 144)$ とする。これらは独立な正規確率変数なので、その和も正規分布に従い、平均と分散（variance）はそれぞれ足し合わされる：

$$T_1 = X_1 + Y_1 \sim N(85,\ 169), \qquad \text{標準偏差13.}$$

列車は 0715 に発車するので、ヘンリーの持ち時間は 105 分であり、$T_1 > 105$ のとき遅刻する。$Z \sim N(0,1)$ とすると、

$$\mathrm{P}(\text{遅刻} \mid \text{キングス・クロス}) = \mathrm{P}\left(Z > \frac{105-85}{13}\right) = 1 - \Phi\left(\tfrac{20}{13}\right) = A.$$

リバプール・ストリート。同様に、$X_2 \sim N(65,16)$ と $Y_2 \sim N(25,9)$ は独立で $T_2 = X_2 + Y_2$ であるから、

$$T_2 \sim N(90,\,25), \qquad \text{標準偏差5.}$$

こちらの列車は 0720 に発車するので持ち時間は 100 分であり、

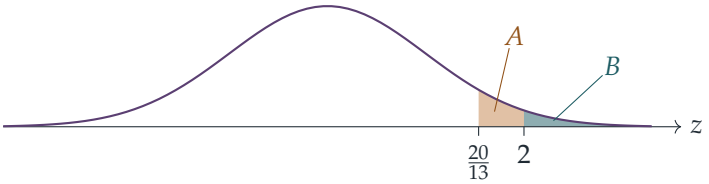
$$\mathrm{P}(\text{遅刻} \mid \text{リバプール・ストリート}) = \mathrm{P}\left(Z > \frac{100-90}{5}\right) = 1 - \Phi(2) = B.$$

考えてみよう 数表を使わずに A と B を比較するにはどうすればよいか？

Φ は正の確率密度をもつ累積分布関数（cumulative distribution function）なので、狭義単調増加である。$\frac{20}{13} < \frac{26}{13} = 2$ より $\Phi(\frac{20}{13}) < \Phi(2)$ となり、したがって

$$A = 1 - \Phi\left(\tfrac{20}{13}\right) > 1 - \Phi(2) = B.$$

よって、題意のとおり、キングス・クロス発の列車に乗るほうがヘンリーは遅刻しやすい。（興味深いことに、この経路は平均的には**速い**。それでも不利になるのは、キングス・クロスからの地下鉄区間のばらつきが非常に大きいためである。）



標準正規分布の曲線の裾の部分に色を付けたもの：A は色の付いた部分全体の面積、B は 2 より右側の濃い部分の面積である。

遅刻回数の期待値

1 回の通勤について、ヘンリーがキングス・クロス発の列車に乗る事象を K とし、$\mathrm{P}(K) = p$ とする。また遅刻する事象を D とする。全確率の法則により、

$$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(D \mid K)\,\mathrm{P}(K) + \mathrm{P}(D \mid K')\,\mathrm{P}(K') = pA + (1-p)B.$$

M 回の通勤が互いに独立であると仮定すると、遅刻回数はパラメータ M と $\mathrm{P}(D)$ の二項分布（binomial distribution）に従うので、

$$L = M(pA + (1-p)B) = M(B + p(A-B)).$$

$A - B > 0$ かつ $0 \le p \le 1$ より、式 $B + p(A-B)$ は p について増加し、$p = 0$ のとき B、$p = 1$ のとき A となる。したがって、p のとりうるすべての値に対して

$$BM \le L \le AM,$$

が成り立ち、左側の等号は $p = 0$ のときに限り、右側の等号は $p = 1$ のときに限り成立する。言葉で言えば、L/M は A と B の加重平均（weighted average）なので、両者の間になければならない。

p の推定

遅刻したときのうちキングス・クロス発の列車に乗っていた割合は $\mathrm{P}(K \mid D)$ の推定値であり、M が大きいので、観測された $\frac{3}{5}$ をこの確率に等しいとみなす。ベイズの定理により、

$$\mathrm{P}(K \mid D) = \frac{\mathrm{P}(D \mid K)\,\mathrm{P}(K)}{\mathrm{P}(D)} = \frac{pA}{pA + (1-p)B}.$$

これを $\frac{3}{5}$ に等しいとおくと：

$$5pA = 3pA + 3(1-p)B$$
$$2pA + 3pB = 3B,$$

よって推定値は

$$\hat{p} = \frac{3B}{2A + 3B}.$$

検算

- 数値的には $A \approx 0.0620$、$B \approx 0.0228$ であり、キングス・クロス経由では約 6%、リバプール・ストリート経由では約 2% の割合で遅刻する。各経路について 4×10^5 回の通勤をシミュレーションしたところ、小数第 3 位まで一致した。
- これらの値を用いると $\hat{p} \approx 0.355$ である。代入し直すと $pA/(pA + (1-p)B) = 0.6$ がちょうど成り立ち、この p で全過程をシミュレーションしたところ、遅刻のうち約 60% がキングス・クロス経由であった。
- 最後の答えの妥当性の確認：もし 2 つの経路の信頼性が等しければ（$A = B$）、遅刻の内訳は列車の選び方のみを反映するので、その $\frac{3}{5}$ がキングス・クロス経由であれば $p = \frac{3}{5}$ となるはずである。実際、公式は $3B/5B = \frac{3}{5}$ を与える。キングス・クロスは信頼性の低い経路なので、遅刻した日の中では実際より多く現れる。したがって p は $\frac{3}{5}$ より小さくなければならず、実際そうなっている。

よくある間違い

- 分散ではなく標準偏差（standard deviation）を足してしまう：キングス・クロス経由の合計時間の分散は $25 + 144 = 169$ なので、標準偏差は 13 であり、$5 + 12 = 17$ ではない。

- 両方の列車に同じ 105 分の持ち時間を使ってしまう：リバプール・ストリート発の列車は 5 分遅く発車する。
- いきなり $p = \frac{3}{5}$ としてしまう。$\frac{3}{5}$ は $\mathrm{P}(K \mid D)$ であって $\mathrm{P}(K)$ ではなく、2 つの経路の信頼性が等しくないため両者は異なる。

STEP のその先へ

ここで現れた 2 つの考え方は、大学初年次の確率論の講義を通じて繰り返し登場する。独立な正規確率変数の和が正規分布に従うという事実は、積率母関数（moment generating function）を用いると最もすっきりと証明でき、また中心極限定理（central limit theorem）の土台となる正規分布族の安定性の特別な場合でもある。最後の小問は統計的推測（statistical inference）の縮図である：ある結果（遅刻）を観測し、ベイズの定理を用いて隠れた原因（列車の選択）を推測したのである。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）はこの両方を扱っており、Blitzstein と Hwang による *Introduction to Probability*（確率論入門）には、まさにこの種のベイズの問題がさらに数多く収録されている。

解答例

STEP II 2000、第 13 問

確率・統計 ・ 捕獲再捕獲法による推定

STEP II 2000、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/00-s2-q13

この問題は、*Beyond STEP* の第 13.2 節「ハタネズミを数える」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch13/voles.html

鍵となる考え方

これは捕獲再捕獲法（capture–recapture）の問題である。2 回目の標本は N 匹のハタネズミから無作為に選んだ 200 匹であり、そのうち 200 匹に印が付いているので、標本中の印付きハタネズミの数は超幾何分布（hypergeometric distribution）に従う。p_N が最大となる場所を求めるには、微分してはいけない（N の階乗（factorial）は、簡単な意味では微分できない）。その代わりに、比 p_N/p_{N-1} を通して隣り合う項を比較する。この比ではほとんどすべてが約分される。最後の恒等式は労せずして得られる。3 回目の標本についての確率の和は 1 にならなければならないからである。

解答

確率 p_N

2 回目の標本を、N 匹のハタネズミから 200 匹を選ぶこととしてモデル化し、大きさ 200 のどの部分集合も同様に確からしいとする。そのような部分集合は $\binom{N}{200}$ 個ある。N 匹のうち 200 匹には印があり、$N-200$ 匹には印がない。印付きのハタネズミをちょうど 11 匹含む標本は、印付きのものから 11 匹、印のないものから 189 匹を選ぶこ

とにあたるので、

$$p_N = \frac{\binom{200}{11}\binom{N-200}{189}}{\binom{N}{200}}.$$

N を含む 2 つの二項係数（binomial coefficient）を階乗で書くと、

$$\begin{aligned} p_N &= \binom{200}{11} \cdot \frac{(N-200)!}{189!\,(N-389)!} \cdot \frac{200!\,(N-200)!}{N!} \\ &= k\,\frac{((N-200)!)^2}{N!\,(N-389)!}, \qquad \text{ただし} k = \binom{200}{11}\frac{200!}{189!}, \end{aligned}$$

であり、k は N によらない。これが求める形である。（ここでは $N \geq 389$ が必要である。2 つの標本を合わせると、$200 + 189 = 389$ 匹の異なるハタネズミが含まれるからである。）

p_N の最大化

$N \geq 390$ に対して、p_N を p_{N-1} で割る。$(N-200)! = (N-200)\,(N-201)!$、$N! = N\,(N-1)!$、$(N-389)! = (N-389)\,(N-390)!$ を用いると、次の部分を除いてすべて約分される。

$$\frac{p_N}{p_{N-1}} = \frac{(N-200)^2}{N(N-389)}.$$

分子も分母も正なので、

$$\begin{aligned} p_N > p_{N-1} &\iff (N-200)^2 > N(N-389) \\ &\iff N^2 - 400N + 40000 > N^2 - 389N \\ &\iff 40000 > 11N \\ &\iff N < 3636.\overline{36}. \end{aligned}$$

考えてみよう このことから、数列 $p_{389}, p_{390}, \ldots$ の形について何がわかるか？

$390 \leq N \leq 3636$ では比は 1 より大きいので、数列は p_{3636} まで狭義単調に増加する。$N \geq 3637$ では比は 1 より小さい（等号が成り立つには $11N = 40000$ でなければならないが、これは整数解をもたない）ので、数列はそこから先は狭義単調に減少する。よって p_N はただ 1 つの最大値をとり、それは

$$N = 3636.$$

のときである。これは $\frac{200\times200}{11}$ の整数部分である。標本中の印付きの割合 $\frac{11}{200}$ が、母集団中の印付きの割合 $\frac{200}{N}$ に一致するはずだと考えれば、こう推測できるであろう。

3 回目の標本

母集団の大きさを、いま求めた推定値 3636 とする。2 回目の放獣の後、印付きのハタネズミは最初の 200 匹と新たに印を付けた 189 匹なので、389 匹が印付き、$3636-389=3247$ 匹が印なしである。先ほどとまったく同様に考えると、大きさ 200 の無作為標本がちょうど j 匹の印付きハタネズミを含む確率は

$$\frac{\binom{389}{j}\binom{3247}{200-j}}{\binom{3636}{200}}, \qquad j=0,1,\ldots,200.$$

である。$389\geq 200$ かつ $3247\geq 200$ なので、0 から 200 までのどの j も起こりうり、これらで起こりうる結果がすべて尽くされる。これらは互いに排反なので、確率の和は 1 である。

$$\sum_{j=0}^{200}\frac{\binom{389}{j}\binom{3247}{200-j}}{\binom{3636}{200}}=1.$$

両辺に $\binom{3636}{200}$ を掛けると

$$\sum_{j=0}^{200}\binom{389}{j}\binom{3247}{200-j}=\binom{3636}{200},$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

- 整数の二項係数を用いて p_N を厳密に計算すると、N のいくつかの値（たとえば 389、1000、5000）で階乗の公式と一致する。また、$389\leq N<20000$ の範囲で探索すると、最大値は $N=3636$ でとられる。
- 転換点では $p_{3636}/p_{3635}=3436^2/(3636\times 3246)\approx 1.0003>1$ であるが、$p_{3637}/p_{3636}<1$ である。
- 最後の恒等式の両辺を整数として厳密に計算すると、等しくなる。また、当然ながら $389+3247=3636$ であることに注意せよ。

よくある間違い

- N を連続変数とみなして微分してしまうこと。代わりに隣り合う項の比を用い、不等式を厳密に判定すること。

- 2 回目の放獣の後に印が付いているのは 200 匹ではなく 389 匹であることを忘れること。
- 「$N = 3636.36$ で最大」と答えること。母集団の大きさは整数でなければならず、隣り合うどちらの整数で大きくなるかを確かめるべきである。

STEP のその先へ

観測されたデータが最も起こりやすくなるようにパラメータの値を選ぶ方法は**最尤法**（maximum likelihood）とよばれ、大学 1 年次の統計学の中心的な考え方である。ここでは、捕獲再捕獲法に対するリンカーン–ピーターセン推定量（Lincoln–Petersen estimator）が得られる。最後の恒等式はヴァンデルモンドの恒等式（Vandermonde's identity）であり、ここで用いた論法、すなわち同じものを 2 通りに数える方法は、組合せ論における強力な手法である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、超幾何分布とこの種の論法が扱われている。

解答例

STEP II 2000、第 14 問

確率・統計 ・ 中央値の分布

STEP II 2000、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/00-s2-q14

この問題は、*Beyond STEP* の第 13.4 節「平均か中央値か？」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch13/mean-or-median.html

鍵となる考え方

中央値（median）の確率密度関数（density）は $y^r(1-y)^s$ という形の多項式なので、与えられた積分ですべてが片づく。まず正規化定数（normalising constant）を求めるのに一度使い、次に y の指数を 1 だけ、さらに 2 だけ上げて、1 次と 2 次のモーメント（moment）を求めるのに使う。最後の小問では、Y と $\bar{X}$ はともに $\frac{1}{2}$ を中心としており、正規分布（normal distribution）の場合、中心から一定の距離以内に入る確率は標準偏差（standard deviation）だけで決まる。散らばりの小さい確率変数のほうが勝つのである。

解答

定数 k

確率密度関数は積分すると 1 にならなければならない。与えられた結果を $r = s = n$ として用いると、

$$1 = \int_0^1 ky^n(1-y)^n \,\mathrm{d}y = k\,\frac{n!\,n!}{(2n+1)!}, \qquad \text{よって} \qquad k = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2},$$

となり、示すべき式が得られる。

平均

確率密度関数は $y = \frac{1}{2}$ に関して対称である（y を $1-y$ に置き換えても変わらない）から、$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{2}$ である。これを積分で確かめるには、$r = n+1$、$s = n$ とすればよい：

$$\mathrm{E}(Y) = k\int_0^1 y^{n+1}(1-y)^n \,\mathrm{d}y = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\cdot\frac{(n+1)!\,n!}{(2n+2)!} = \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2}.$$

分散

次に $r = n+2$、$s = n$ とする：

$$\mathrm{E}(Y^2) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\cdot\frac{(n+2)!\,n!}{(2n+3)!} = \frac{(n+2)(n+1)}{(2n+3)(2n+2)} = \frac{n+2}{2(2n+3)}.$$

したがって

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{n+2}{2(2n+3)} - \frac{1}{4} = \frac{2(n+2)-(2n+3)}{4(2n+3)} = \frac{1}{4(2n+3)}.$$

中央値と平均の比較

各 X_i は $[0,1]$ 上の一様分布（uniform distribution）に従うので、$\mathrm{E}(X_i) = \frac{1}{2}$、$\mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{12}$ である。X_i は互いに独立（independent）であるから、

$$\mathrm{E}(\bar{X}) = \tfrac{1}{2}, \qquad \mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{(2n+1)^2}\cdot(2n+1)\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{12(2n+1)}.$$

考えてみよう どちらの確率変数も $\frac{1}{2}$ を中心としている。中心から $d/\sqrt{n}$ 以内に入る確率がどちらのほうが大きいかを、ただ一つの数で決めるとしたら、それは何か？

標準偏差である。n が大きいとき、$Y \sim \mathrm{N}(\frac{1}{2}, \sigma_Y^2)$、$\bar{X} \sim \mathrm{N}(\frac{1}{2}, \sigma_X^2)$ とみなしてよい。$W \sim \mathrm{N}(\frac{1}{2}, \sigma^2)$ かつ $c > 0$ ならば、標準正規分布の分布関数（distribution function）を Φ と書くと、

$$\mathrm{P}\left(|W - \tfrac{1}{2}| < c\right) = \mathrm{P}\left(|Z| < \frac{c}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - 1,$$

となる。ここで $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ である。Φ は狭義単調増加であるから、これは σ の狭義**単調減少**関数である。よって $c = d/\sqrt{n}$ とすると、示すべき不等式が成り立つのは $\sigma_Y > \sigma_X$、すなわち $\mathrm{Var}(Y) > \mathrm{Var}(\bar{X})$ のときであり、かつそのときに限る：

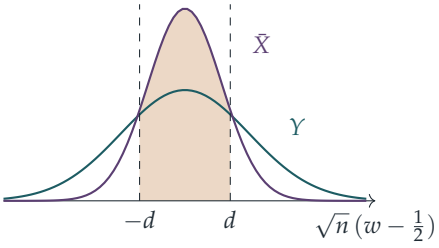
$$\begin{aligned}\frac{1}{4(2n+3)} > \frac{1}{12(2n+1)} &\iff 12(2n+1) > 4(2n+3)\\ &\iff 24n + 12 > 8n + 12\\ &\iff n > 0.\end{aligned}$$

これはすべての $n \geq 1$ で成り立つ。したがって、正規近似（normal approximation）が妥当となるほど n が大きければ、正の数 d が何であっても、Y についての確率は $\bar{X}$ についての確率より真に小さい。以上で証明が完了する。

その差がどれほどかを見るために、標準化（standardise）する：

$$\frac{d/\sqrt{n}}{\sigma_Y} = 2d\sqrt{\frac{2n+3}{n}} \to 2\sqrt{2}\,d, \qquad \frac{d/\sqrt{n}}{\sigma_X} = d\sqrt{\frac{12(2n+1)}{n}} \to 2\sqrt{6}\,d.$$

漸近的には、平均の標準偏差は $\sqrt{3}$ 倍だけ小さい。



図は、二つの極限の確率密度関数を $\sqrt{n}\,(w-\frac{1}{2})$ のスケールで示したものである。幅の狭いほうの曲線（平均）は、中心付近のどの帯においても、より多くの確率を含む。

検算

- $n = 0$ のとき：一つの一様確率変数の「中央値」は X_1 そのものであり、実際に公式から $k = 1$、$\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{12}$ という一様分布の分散が得られ、あるべき結果と一致する。
- 二つの分散は $n = 0$ のときともに $\frac{1}{12}$ に等しく、$n \geq 1$ では異なる値になる。これは上の不等式 $n > 0$ と合っている。
- $n = 50$（101 個の一様確率変数）でシミュレーションを行うと、$\mathrm{Var}(Y) \approx 0.00243$ となり、$1/412 \approx 0.00243$ と一致した。$d = 0.3$ とすると $\mathrm{P}(|Y - \frac{1}{2}| < d/\sqrt{n}) \approx 0.607$、$\mathrm{P}(|\bar{X} - \frac{1}{2}| < d/\sqrt{n}) \approx 0.859$ となり、正規近似による値 0.611 と 0.860 に近かった。

よくある間違い

- $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{12}$ と書いてしまう。あるいは、分母に $(2n+1)^2$ が現れてから $2n+1$ 倍するのではなく、$2n+1$ で一度だけ割ってしまう。
- 向きを取り違える：分散が**大きい**ほど、中心付近に入る確率は**小さく**なる。
- $\mathrm{E}(Y^2)$ には $r = 2n$ ではなく $r = n+2$ を使うことを忘れる。

STEP のその先へ

中央値の確率密度関数はベータ分布（Beta distribution）Beta$(n+1, n+1)$ であり、与えられた積分はベータ関数（Beta function）である。いま行った比較は**漸近相対効率**（asymptotic relative efficiency）という考え方そのものである。一様分布のデータでは、標本平均（sample mean）は中央値の 3 分の 1 の分散で中心を推定するが、裾の重い（heavy-tailed）分布のデータでは中央値のほうが勝ることもある。順序統計量（order statistics）とベータ関数については、Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）によくまとめられている。

解答例

STEP III 2000、第 1 問

純粋数学 ・ 双曲線の接線

STEP III 2000、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/00-s3-q1

鍵となる考え方

2 つの曲線はどちらも原点を中心とする直角双曲線（rectangular hyperbola）であり、どちらも半回転（half-turn）$(x, y) \mapsto (-x, -y)$ によって変わらない。この対称性から Q はただちに得られる。接線については、連立方程式を力ずくで解くのではなく、提示された点が両方の直線上にあることを、$ab = 1$ と $a^2 - b^2 = 2$ という 2 つの事実を使って**確かめる**のがうまい方法である。4 つの点が求まれば、原点のまわりの 4 分の 1 回転によって正方形になる理由が説明できる。

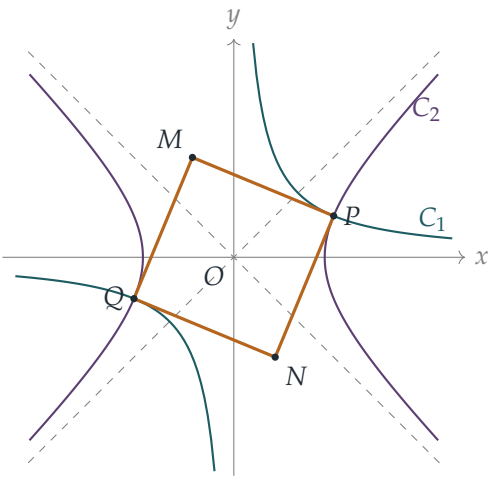
解答

概形

C_1、すなわち $xy = 1$ は、第 1 象限と第 3 象限にあるおなじみの直角双曲線であり、座標軸を漸近線（asymptote）とする。

C_2、すなわち $x^2 - y^2 = 2$ は、x 軸と $(\pm\sqrt{2}, 0)$ で交わり、y 軸とは決して交わらない（交わるとすれば $-y^2 = 2$ が必要になる）。$y^2 = x^2 - 2$ と書くと、$|y| < |x|$ であり、$|x|$ が大きいとき $y \approx \pm x$ となることがわかるので、その漸近線は $y = \pm x$ である。これは C_1 を原点のまわりに 45° 回転させた（そして $\sqrt{2}$ 倍に拡大した）ものであり、枝は左右に開いている。

2 つの曲線はどこで交わるか。$xy = 1 > 0$ であるから、共有点はすべて第 1 象限か第 3 象限にある。$y = 1/x$ を C_2 に代入すると $x^4 - 2x^2 - 1 = 0$ となるので、$x^2 = 1 + \sqrt{2}$ である（もう一方の解 $1 - \sqrt{2}$ は負である）。したがって交点はちょうど 2 つあり、それぞれの象限に 1 つずつある。



図では C_1 を青緑色、C_2 を紫色で示し、C_2 の漸近線 $y = \pm x$ を破線で示している。琥珀色の正方形 $PMQN$ が、これから求めるものである。

点 Q

(x, y) を $(-x, -y)$ に置き換えても、xy と $x^2 - y^2$ はどちらも変わらない。したがって (a, b) が両方の曲線上にあれば、$(-a, -b)$ も両方の曲線上にある。交点は 2 つしかないので、

$$Q = (-a, -b).$$

以下では、P が両方の曲線上にあるという 2 つの事実

$$ab = 1, \qquad a^2 - b^2 = 2.$$

を一貫して用いる。

接線

C_1 について、$xy = 1$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると $y + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ となるので、C_1 上の点 (p, q) における傾きは $-q/p$ である。そこでの接線（tangent）は $p(y - q) = -q(x - p)$、すなわち

$$qx + py = 2pq = 2.$$

である。C_2 について、$x^2 - y^2 = 2$ を微分すると $2x - 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ となるので、(p, q) における傾きは p/q である。接線は $q(y - q) = p(x - p)$、すなわち

$$px - qy = p^2 - q^2 = 2.$$

である（どちらの形も、傾きが垂直になる点でも成り立つ。これらは単に、曲線の勾配ベクトルと (x,y) との内積をとったものにすぎない）。$P=(a,b)$ と $Q=(-a,-b)$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
\text{接線、}C_1\text{ 上の点}P:&\quad bx+ay=2,\\
\text{接線、}C_2\text{ 上の点}Q:&\quad -ax+by=2,\\
\text{接線、}C_2\text{ 上の点}P:&\quad ax-by=2,\\
\text{接線、}C_1\text{ 上の点}Q:&\quad -bx-ay=2.
\end{aligned}$$

点 M

M は最初の 2 直線の交点である。$(x,y)=(-b,a)$ を試すと、

$$\begin{aligned}
bx+ay&=-b^2+a^2=2,\\
-ax+by&=ab+ab=2ab=2.
\end{aligned}$$

したがって $(-b,a)$ は両方の直線上にある。係数の行列式（determinant）は $b\cdot b-a\cdot(-a)=a^2+b^2\neq 0$ であるから 2 直線は平行ではなく、ちょうど 1 点で交わる。よって

$$M=(-b,a),$$

であり、これが示すべきことであった。

考えてみよう 与えられた答えを確かめるのは、それを解いて求めるよりも弱いのではないか？

ここではそうではない。平行でない 2 直線はちょうど 1 点で交わるので、両方の直線上にある点はどれも、まさにその交点である。直接解いてもよいが、その場合も結局は $ab=1$ と $a^2-b^2=2$ を使って答えを整理しなければならない。

点 N

同様に、N は $ax-by=2$ と $-bx-ay=2$ の交点である。点 $(b,-a)$ を代入すると

$$ab+ab=2,\qquad -b^2+a^2=2,$$

となり、行列式は $a(-a)-(-b)(-b)=-(a^2+b^2)\neq 0$ である。よって

$$N=(b,-a).$$

***PMQN* は正方形である**

4 つの位置ベクトル（position vector）を見てみよう。

$$P=(a,b),\quad M=(-b,a),\quad Q=(-a,-b),\quad N=(b,-a).$$

O のまわりの反時計回りの 90° 回転（rotation）は (x, y) を $(-y, x)$ に移す。したがってこの回転は $P \to M \to Q \to N \to P$ と移す。これですでに答えは見えているが、ここでは直接的な議論を与えよう。

- 対角線 PQ と MN の中点はどちらも O であるから、2 本の対角線は互いに他を二等分し、$PMQN$ は平行四辺形（parallelogram）である。
- 対角線の長さはどちらも $2\sqrt{a^2+b^2}$ であるから、2 本は等しく、この平行四辺形は長方形である。
- $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM} = a(-b) + b(a) = 0$ であるから、対角線は直交し、この長方形はひし形（rhombus）である。

長方形でありかつひし形でもある四角形は正方形である。頂点の順序も正しい。P、M、Q、N は O のまわりに 4 分の 1 回転ずつ順に並んでいるので、$PMQN$ は自己交差することなく正方形を一周する。よって $PMQN$ は正方形である。 ■

その 1 辺の長さの 2 乗は $|PM|^2 = (a+b)^2 + (b-a)^2 = 2(a^2+b^2)$ である。$a^2 = 1+\sqrt{2}$、$b^2 = 1/a^2 = \sqrt{2}-1$ より、これは $4\sqrt{2}$ となる。

検算

- 数値的には $a = \sqrt{1+\sqrt{2}} \approx 1.5538$、$b \approx 0.6436$ である。接線どうしの交点を数値的に求めると $M \approx (-0.6436, 1.5538)$、$N \approx (0.6436, -1.5538)$ となり、主張どおりである。4 辺はすべて $2.3784 \approx \sqrt{4\sqrt{2}}$ となり、隣り合う辺は直交する。
- P の偏角は $\arctan(b/a) = \arctan(\sqrt{2}-1) = 22.5°$ であり、これは C_1 の漸近線 $y=0$ と C_2 の漸近線 $y=x$ のちょうど中間である。したがって正方形は 22.5° 傾いており、概形の図のとおりである。

よくある間違い

- C_2 の接線を $px+qy=2$ と書いてしまう。マイナス符号は重要であり、それがあるからこそ計算がうまくいく。
- 鏡映対称性を当て推量して $Q=(b,a)$ や $(-b,-a)$ とする。直線 $y=x$ に関する鏡映は C_1 を保つが C_2 は保たない。両方を保つのは O のまわりの半回転だけである。
- 4 辺が等しいことだけを示す。それではひし形であることしかわからない。直角（あるいは対角線が等しいこと）も必要である。

STEP のその先へ

ここで用いた接線の公式 $qx + py = 2$ と $px - qy = 2$ は、円錐曲線（conic）$\mathbf{x}^{\mathsf{T}} A\mathbf{x} = c$ の $\mathbf{p}$ における接線は $\mathbf{p}^{\mathsf{T}} A\mathbf{x} = c$ である、という一般的な規則の例である。大学 1 年の二次形式（quadratic form）の講義では、回転によって A を対角化（diagonalise）することを学ぶ。それこそが、$xy = 1$ と $x^2 - y^2 = 2$ が 45° 回転させただけの同じ曲線である理由である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は二次形式と回転をわかりやすく扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には STEP 形式の座標幾何の問題がさらに収められている。

解答例

STEP III 2000、第 2 問

純粋数学 ・ 置換積分

STEP III 2000、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/00-s3-q2

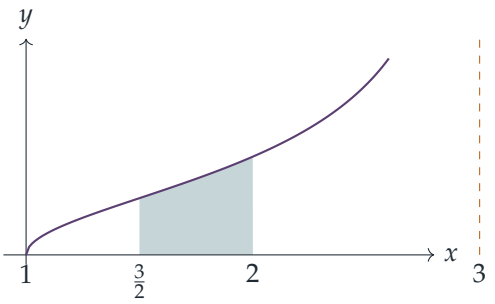
鍵となる考え方

$(x-1)/(3-x)$ のような商の平方根を見たら、半角の公式（half-angle formulae）を使えという合図である。$x = 2 - \cos\theta$ とおくと、分子は $1 - \cos\theta$、分母は $1 + \cos\theta$ となり、その比は完全平方 $\tan^2\frac{\theta}{2}$ になる。一般の結果については、同じ計算をやり直す必要はない。一次の変数変換（change of variable）によって a から b までの区間は 1 から 3 までの区間に移り、一般の積分は最初の積分の定数倍になる。

解答

最初の積分

被積分関数（integrand）は $1 \le x < 3$ で定義されており、積分範囲 $\frac{3}{2} \le x \le 2$ はその中に含まれる。下図の網かけ部分の面積が求める積分である。



$x = 2 - \cos\theta$ とおくと、$\mathrm{d}x = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$ である。$x = \frac{3}{2}$ のとき $\cos\theta = \frac{1}{2}$、$x = 2$ のとき

$\cos\theta = 0$ であるから、θ は $\frac{\pi}{3}$ から $\frac{\pi}{2}$ まで動かすことにする。このとき

$$x - 1 = 1 - \cos\theta = 2\sin^2\tfrac{\theta}{2}, \qquad 3 - x = 1 + \cos\theta = 2\cos^2\tfrac{\theta}{2},$$

であるから

$$\left(\frac{x-1}{3-x}\right)^{\frac{1}{2}} = \left|\tan\tfrac{\theta}{2}\right| = \tan\tfrac{\theta}{2},$$

となる。ここで、この範囲では $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ なので、正接は正であることを用いた。

考えてみよう 被積分関数が $\tan\frac{\theta}{2}\sin\theta$ になったとき、正接の積分を避けるにはどうすればよいか。

$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ と書く。すると余弦が約分される：

$$\tan\tfrac{\theta}{2}\,\sin\theta = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} \cdot 2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2} = 2\sin^2\tfrac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta.$$

したがって

$$\begin{aligned}\int_{3/2}^{2}\left(\frac{x-1}{3-x}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x &= \int_{\pi/3}^{\pi/2}(1-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \Big[\theta - \sin\theta\Big]_{\pi/3}^{\pi/2} \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\pi + 3\sqrt{3} - 6}{6}.\end{aligned}$$

一般の積分

最初の積分は $a = 1$、$b = 3$ の場合であり、このとき $p = \frac{3+3}{4} = \frac{3}{2}$、$q = \frac{1+3}{2} = 2$ である。そこで、$u = 1$ を $x = a$ に、$u = 3$ を $x = b$ に移す一次の置換（substitution）を探す：

$$x = a + \tfrac{1}{2}(b-a)(u-1), \qquad \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(b-a)\,\mathrm{d}u.$$

このとき

$$x - a = \tfrac{1}{2}(b-a)(u-1), \qquad b - x = (b-a) - \tfrac{1}{2}(b-a)(u-1) = \tfrac{1}{2}(b-a)(3-u),$$

であり、$b - a \neq 0$ であるから共通因数が約分できる：

$$\frac{x-a}{b-x} = \frac{u-1}{3-u}.$$

積分の上端・下端については、$u = \frac{3}{2}$ のとき $x = a + \frac{1}{4}(b-a) = \frac{3a+b}{4} = p$、$u = 2$ のとき $x = a + \frac{1}{2}(b-a) = \frac{a+b}{2} = q$ となる。$b - a > 0$ であるからこの置換は増加であり、

上端と下端の順序は保たれる。よって、最初の結果を用いて

$$\int_p^q \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\int_{3/2}^{2}\left(\frac{u-1}{3-u}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u$$
$$= \frac{b-a}{2}\cdot\frac{\pi+3\sqrt{3}-6}{6} = \frac{(b-a)(\pi+3\sqrt{3}-6)}{12},$$

を得る。これが示すべきことであった。

（同じことであるが、直接 $x = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\cos\theta$ と置換してもよい。積分範囲はやはり $\frac{\pi}{3}$ から $\frac{\pi}{2}$ であり、計算は因数 $\frac{b-a}{2}$ が余分につくだけで同じである。）

検算

- 数値的には $\frac{1}{6}(\pi+3\sqrt{3}-6) \approx 0.38962$ である。もとの被積分関数に $[\frac{3}{2},2]$ 上でシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると、小数第10位まで同じ値が得られる。
- 妥当性：被積分関数は長さ $\frac{1}{2}$ の区間で $\sqrt{1/3} \approx 0.577$ から1まで増加するので、面積はおよそ0.29と0.5の間になければならない。実際そうなっている。
- 一般の公式は、負の a を含む $a<b$ の無作為な20通りの選び方について、シンプソンの公式と一致した。
- スケーリング：区間 $[a,b]$ を k 倍に引き伸ばしても被積分関数の値は変わらないが、$[p,q]$ は k 倍に引き伸ばされる。したがって答えは $b-a$ に比例しなければならず、実際そうなっている。

よくある間違い

- $\mathrm{d}x = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$ を忘れ、$\tan\frac{\theta}{2}$ だけを θ について積分しようとする。
- 積分範囲を $\theta = -\frac{\pi}{3}$ や $\frac{5\pi}{3}$ としてしまう。どのように選ぶにしても、θ は $\sin\theta>0$ かつ $\tan\frac{\theta}{2}>0$ となる範囲を通って $\frac{\pi}{3}$ から $\frac{\pi}{2}$ まで増加しなければならない。
- 一般の場合に $\mathrm{d}x$ から出る因数 $\frac{1}{2}(b-a)$ を落とし、分母が12ではなく6になってしまう。

STEP のその先へ

後半の小問は、定積分（definite integral）がアフィンな変数変換（affine change of variable）のもとで予測どおりに変換されることを示している。このような量が a と b に長さ $b-a$ を通してのみ依存するのはこのためである。被積分関数そのものはベータ

関数（beta function）型の被積分関数である。区間全体では $\int_a^b \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{1/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(b-a)$ であり、関数 $\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t$ は確率論と解析学のいたるところに現れる。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）では、これらはベータ分布（Beta distribution）の正規化定数（normalising constant）として登場する。Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は置換積分の法則を丁寧に証明している。

解答例

STEP III 2000、第 3 問

純粋数学 ・ 複素数と図形

> **STEP III 2000、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q3

この問題は、*Beyond STEP* の第 5.6 節「フェルマー点」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch05/fermat-point.html

鍵となる考え方

複素数平面（Argand plane）において、ベクトルを 60° 回転（rotation）させることは $\alpha = e^{i\pi/3}$ を掛けることにほかならない。したがって、与えられた辺の上に立てた正三角形（equilateral triangle）の第三の頂点は一行で書き下せる。その後はすべて、恒等式 $1 + \alpha^2 = \alpha$ と、$\alpha^3 = -1$ のようなその仲間から導かれる。これらによって頂点の式は非常に簡単な形にまとまり、その形が見えれば最後の小問はほぼ明らかである。

解答

恒等式

$\alpha^2 = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ であるから、

$$1 + \alpha^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \alpha.$$

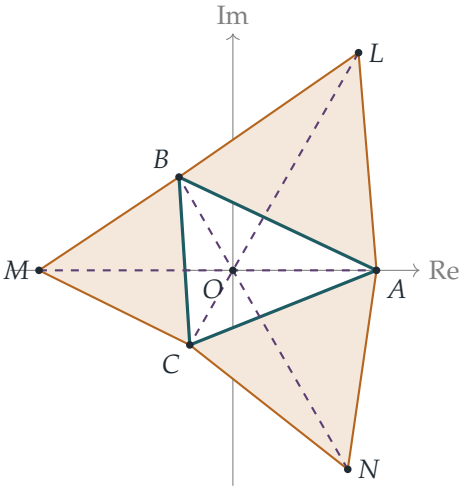
次の帰結もあわせて用いる。

- $\alpha^3 = e^{i\pi} = -1$。
- $1 - \alpha = -\alpha^2$（恒等式を変形したもの）。
- $\alpha^2 - \alpha = -1$（これも変形したもの）。
- $\alpha + \bar{\alpha} = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$ より、$1 - \alpha = \bar{\alpha} = e^{-i\pi/3}$。

最後の式は、$1-\alpha$ を掛けると**時計回り**に 60° 回転することを意味している。

三角形 ABC

$A=p$ は正の実軸上にあり、$B=q\alpha^2=q\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$ は偏角 120° の半直線上に、$C=-r\alpha=r\,\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3}$ は偏角 240° の半直線上にある。つまり 3 つの頂点は、O から互いに 120° ずつ離れた 3 本の半直線上の、O からの距離 p,q,r の位置にある。原点は三角形の内部にあり、$A\to B\to C$ は**反時計回り**である。下の図は $p=2$、$q=1.5$、$r=1.2$ の場合で、外側に立てた三角形もあわせて描いてある。



頂点 N、L、M

XYZ が時計回りに名前をつけた正三角形であれば、X から回っていくと、辺 XZ は辺 XY を X を中心に時計回りに 60° 回転したものである。よって

$$Z-X=(Y-X)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}=(Y-X)(1-\alpha),\qquad \text{すなわち}\qquad Z=\alpha X+(1-\alpha)Y.$$

考えてみよう　「時計回り」だと、なぜ新しい三角形が ABC の**外側**にできるのか。

$A\to B\to C$ は反時計回りなので、C は向きのついた辺 AB の左側にある。AB を A を中心に時計回りに回すと右側へ振れるので、L は AB に関して C と反対側にある。他の 2 辺についても同様であり、図とも一致する。

N（三角形 CAN なので $X=C$、$Y=A$）：

$$N=\alpha(-r\alpha)+(1-\alpha)p=(1-\alpha)p-\alpha^2 r,$$

これが示すべき式である。$1-\alpha=-\alpha^2$ を用いると、これは $N=-\alpha^2(p+r)$ と整理できる。

L（三角形 ABL なので $X=A$、$Y=B$）：

$$L=\alpha p+(1-\alpha)q\alpha^2=\alpha p+q(\alpha^2-\alpha^3)=\alpha p+q(1+\alpha^2)=(p+q)\alpha,$$

ここで $\alpha^3=-1$、続いて $1+\alpha^2=\alpha$ を用いた。

M（三角形 BCM なので $X=B$、$Y=C$）：

$$M=\alpha\cdot q\alpha^2+(1-\alpha)(-r\alpha)=q\alpha^3+r(\alpha^2-\alpha)=-q-r=-(q+r),$$

ここで $\alpha^3=-1$ と $\alpha^2-\alpha=-1$ を用いた。

したがって、与えられた N の形と同じ書き方をすれば

$$L=\alpha p+\alpha q,\qquad M=-q-r,\qquad N=(1-\alpha)p-\alpha^2 r.$$

3本の直線

ここで、各組の2点を絶対値1の複素数の正の倍数として見てみよう。

$$\begin{aligned} L&=(p+q)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}, & C&=-r\alpha=r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\cdot(-1),\\ M&=(q+r)\cdot(-1), & A&=p\cdot 1,\\ N&=(p+r)\cdot(-\alpha^2), & B&=q\,\alpha^2. \end{aligned}$$

どの組でも、2点は絶対値1のある複素数 u（それぞれ $u=\alpha$、$u=1$、$u=\alpha^2$）に対して u と $-u$ の正の実数倍になっている。よって2点は O を通る同一直線上にあり、しかも O に関して**反対側**にある。ゆえに直線 LC、MA、NB はいずれも原点を通り、実際、原点は各線分上にある。さらに、2点が O に関して反対側にあるので、各線分の長さは O からの距離の和に等しい。

$$LC=(p+q)+r,\qquad MA=(q+r)+p,\qquad NB=(p+r)+q,$$

これらはすべて $p+q+r$ に等しく、示すべきことが示された。

検算

$p=1$、$q=2$、$r=3$ とすると、公式から $L=3\alpha\approx 1.5+2.598\mathrm{i}$、$M=-5$、$N=-4\alpha^2\approx 2-3.464\mathrm{i}$ が得られる。$|L-A|=|L-B|=|A-B|=\sqrt{7}$ を計算すれば、ABL が正三角形であることが確かめられる。コンピュータで、$\pm 60^\circ$ の2通りの回転から各三角形

を直接作り、時計回りのほうを選んで、p, q, r の 10 000 通りのランダムな値について、3 つの公式、O での共点性、共通の長さ $p+q+r$ を確認した。面白い特別な場合として、$p=q=r$ のとき三角形 ABC は O を中心とする正三角形になり、図形は予想どおり 3 回対称性をもつ。

よくある間違い

- 回転の向きを誤り、$\bar{\alpha}=1-\alpha$ ではなく α を掛けてしまう。すると L、M、N が三角形の内側に来てしまい、与えられた N の形は出てこない。
- O が各直線上にあることだけを示し、長さを求めるにはさらに O が端点の**間**にある必要があることを忘れる。これは実数倍の符号によって決まる。

STEP のその先へ

これはナポレオン（Napoleon）の配置の特別な場合である。**任意の**三角形の各辺の外側に正三角形を立てると、直線 AM、BN、CL は 1 点（フェルマー点（Fermat point））で交わり、しかもそれらの長さは等しい。フェルマー点は 3 頂点までの距離の和を最小にする点であり、ここではそれが O で、各辺を O から見込む角は 120° である。複素数は回転を掛け算に変える。だからこそ、このような証明は短い代数計算になるのである。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、この幾何学的な見方を見事に展開している。

解答例

STEP III 2000、第 4 問

純粋数学 ・ 分数関数のグラフ

> **STEP III 2000、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q4

鍵となる考え方

$f(x) = x + c$ とおいて分母を払うと、3 次（cubic）の項は打ち消し合い、x の 2 **次式**（quadratic）が残る。したがって直線が曲線と交わるかどうかは判別式（discriminant）の符号に帰着し、しかもその判別式自体が c の 2 次式であるから、判別式の判別式を考えることになる。グラフの概形については、f を 1 次式の部分と部分分数（partial fractions）に分解すればすべてがわかる。すなわち、漸近線（asymptote）、曲線が漸近線のどちら側にあるか、そして斜めの漸近線（oblique asymptote）と交わる点である。

解答

直線と曲線の交わり

$x \neq \pm 1$ のとき、方程式 $f(x) = x + c$ は

$$x(x-2)(x-a) = (x+c)(x^2-1).$$

と同値である。展開すると $x^3 - (a+2)x^2 + 2ax = x^3 + cx^2 - x - c$ となる。x^3 の項は打ち消し合い、

$$q(x) \equiv (a+2+c)x^2 - (2a+1)x - c = 0. \qquad (*)$$

が残る。よって、直線が曲線と交わるのは、$(*)$ が $x = \pm 1$ 以外の実数解をもつときであり、かつそのときに限る。

? **考えてみよう** $(*)$ の解が、除外された値 $x = \pm 1$ のいずれかになることはありうるか？

代入すると、$q(1) = (a+2+c) - (2a+1) - c = 1-a$ および $q(-1) = (a+2+c) + (2a+1) - c = 3(a+1)$ である。どちらも c によらないので、$x = 1$ が解になるのは $a = 1$ のときに限り、$x = -1$ が解になるのは $a = -1$ のときに限る。$|a| \neq 1$ ならば、$(*)$ のすべての実数解が本当の交点を与える。

$a+2+c = 0$ の場合。このとき $(*)$ は 1 次方程式 $-(2a+1)x + (a+2) = 0$ になる。$|a| > 1$ ならば $2a+1 \neq 0$ であるから、解 $x = \frac{a+2}{2a+1}$ が存在する。

$a+2+c \neq 0$ の場合。このとき $(*)$ は本当の 2 次方程式であり、その判別式は

$$D(c) = (2a+1)^2 + 4c(a+2+c) = 4c^2 + 4(a+2)c + (2a+1)^2.$$

である。D を、最高次の係数が正である c の 2 次式とみなす。その判別式は

$$\begin{aligned} 16(a+2)^2 - 16(2a+1)^2 &= 16\big[(a+2) - (2a+1)\big]\big[(a+2) + (2a+1)\big] \\ &= 16(1-a)\cdot 3(1+a) = 48(1-a^2). \end{aligned}$$

である。

$|a| > 1$ ならば、これは負であるから、すべての c に対して $D(c) > 0$ となる。このとき $(*)$ は異なる 2 つの実数解をもち、どちらも ± 1 には等しくない。1 次方程式の場合と合わせて、直線 $y = x + c$ はすべての c に対して曲線と交わる。

$|a| = 1$ ならば、すべての c に対して $D(c) \geq 0$ であるから、$(*)$ は依然として常に実数解をもつ。これが主張の代数的な中身である。しかしこの場合、曲線そのものが退化する。因数が約分され、曲線は 1 点が欠けた双曲線（hyperbola）になるのである。たとえば $a = 1$ のとき $f(x) = x - 3 + \frac{3}{x+1}$（$x \neq 1$）となり、直線 $y = x - 3$（その漸近線）はこの曲線と交わらない。$(*)$ においてこれは $c = -3$ にあたり、そのときの唯一の解は除外された $x = 1$ である。よって $|a| = 1$ のときは、これらの例外的な c の値を除いて主張が成り立ち、$|a| > 1$ のときは例外なく成り立つ。

$|a| < 1$ ならば、2 次式 $D(c)$ は 2 つの実数解をもち、その 2 解の間（両端を除く）で負になる。具体的には、2 解の中点 $c = -\frac{1}{2}(a+2)$ を選べばよい。

$$D\big(-\tfrac{1}{2}(a+2)\big) = (a+2)^2 - 2(a+2)^2 + (2a+1)^2 = 3(a^2-1) < 0.$$

この c に対して $a+2+c = \frac{1}{2}(a+2) \neq 0$（$a > -1$ より）であるから、$(*)$ は判別式が負の本当の 2 次方程式であり、実数解をもたない。したがって、直線 $y = x - \frac{1}{2}(a+2)$ は曲線と交わらず、示すべきことが示された。

斜めの漸近線

$x^3 - (a+2)x^2 + 2ax$ を $x^2 - 1$ で割ると

$$f(x) = x - (a+2) + \frac{(2a+1)x - (a+2)}{x^2 - 1}.$$

となる。$x \to \pm\infty$ のとき分数の部分は 0 に近づくので、斜めの漸近線は

$$y = x - a - 2.$$

である。グラフを描くには、分数を部分分数に分解しておくと便利である。

$$f(x) = x - (a+2) + \frac{a-1}{2(x-1)} + \frac{3(a+1)}{2(x+1)}.$$

これですべてがわかる。

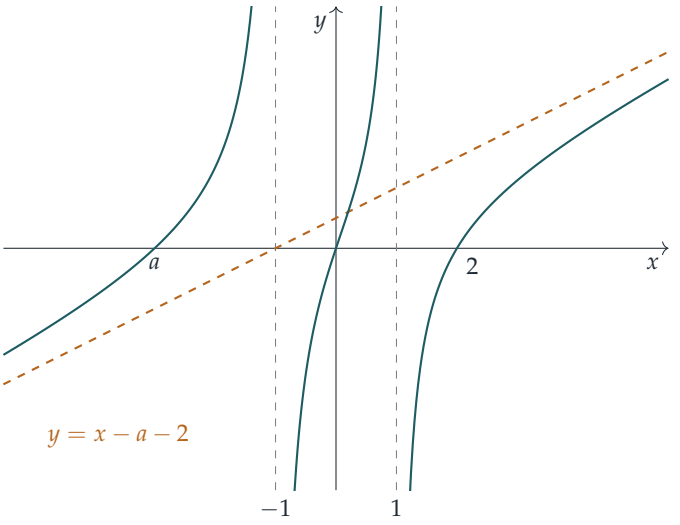
- 零点は $x = 0,\ 2,\ a$ であり、鉛直漸近線（vertical asymptote）は $x = \pm 1$ である。
- 曲線が斜めの漸近線と交わるのは $(2a+1)x = a+2$ となる点、すなわち $x_0 = \frac{a+2}{2a+1}$ のみである（これは再び $(*)$ の 1 次方程式の場合である）。
- $|x|$ が大きいとき、差 $f(x) - (x-a-2)$ は $\frac{2a+1}{x}$ のようにふるまう。どちらの場合も $2a+1 < 0$ であるから、曲線は $x \to +\infty$ のとき漸近線の**下側**に、$x \to -\infty$ のとき漸近線の**上側**にある。
- 係数 $\frac{a-1}{2}$ と $\frac{3(a+1)}{2}$ が、$x = 1$ と $x = -1$ のそれぞれの両側でのふるまいを決める。

場合 (i)：$a < -1$

2 つの係数はともに負である：$\frac{a-1}{2} < 0$ かつ $\frac{3(a+1)}{2} < 0$。よって $x \to 1^-$ または $x \to -1^-$ のとき $f(x) \to +\infty$ であり、$x \to 1^+$ または $x \to -1^+$ のとき $f(x) \to -\infty$ である。さらに

$$f'(x) = 1 - \frac{a-1}{2(x-1)^2} - \frac{3(a+1)}{2(x+1)^2} > 0,$$

である。引かれている 2 つの項がともに負だからである。したがって f は 3 つの分枝のそれぞれで増加し、極値をとる点（turning point）はまったくない。交点は $x_0 + 1 = \frac{3(a+1)}{2a+1} > 0$ および $x_0 - 1 = \frac{1-a}{2a+1} < 0$ を満たすので、$-1 < x_0 < 1$ である。すなわち、曲線は中央の分枝で漸近線と交わる。零点は $a < -1$（左の分枝）、0（中央）、2（右）にある。



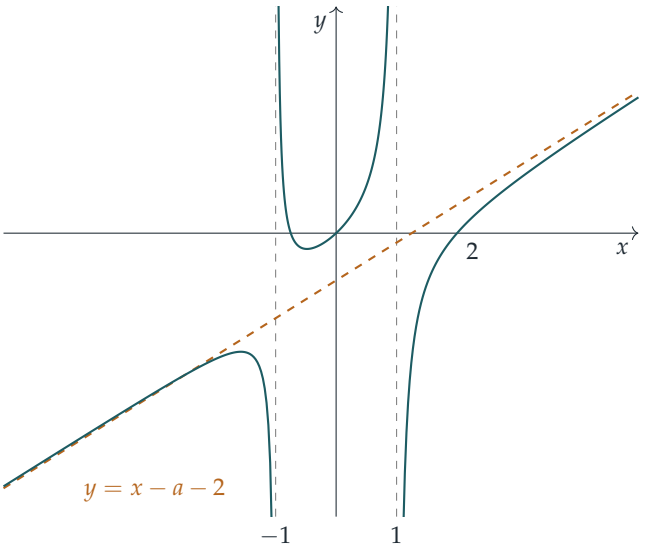
（$a=-3$ の場合の図。このとき漸近線は $y=x+1$、$x_0=\frac{1}{5}$ である。）

場合 (ii)：$-1<a<-\frac{1}{2}$

今度は $\frac{a-1}{2}<0$ だが $\frac{3(a+1)}{2}>0$ である。$x=1$ の近くでのふるまいは先ほどと同じ（左から $+\infty$、右から $-\infty$）だが、$x=-1$ の近くでは逆転する。すなわち $x\to-1^-$ のとき $f(x)\to-\infty$、$x\to-1^+$ のとき $f(x)\to+\infty$ である。また $x_0+1=\frac{3(a+1)}{2a+1}<0$ であるから $x_0<-1$、つまり交点は左の分枝にある。零点 a と 0 はともに $(-1,0)$ に含まれる。

考えてみよう 求めることは要求されていないが、極値をとる点はどこになければならないか？

左の分枝では、曲線は $-\infty$ から漸近線の上側を上ってきて、x_0 で漸近線と交わり、$x\to-1^-$ のとき $-\infty$ へ下っていく。よって極大点をもつ。この分枝には零点がない（3 つの零点はすべて >-1）ので、分枝全体が x 軸の下側にある。中央の分枝では両端で $f\to+\infty$ となり、a と 0 の間で軸の下にもぐり、それ以外では正であるから、a と 0 の間に極小点がある。右の分枝では、$x>1$ に対して $\frac{3(a+1)}{2(x+1)^2}<\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}<1$ であるから $f'(x)>0$ となる。すなわち曲線は $-\infty$ から上って $x=2$ を通り、下側から漸近線に近づく。



($a = -\frac{3}{4}$ の場合の図。漸近線は $y = x - \frac{5}{4}$、交点は $x_0 = -\frac{5}{2}$ であり、$-\frac{3}{4}$ と 0 の間で軸の下にわずかにもぐる。)

検算

- $a = 0$、$c = -1$（我々の選んだ $c = -\frac{1}{2}(a+2)$）のとき、$(*)$ は $x^2 - x + 1 = 0$ となり、その判別式は -3 である。予想どおり交点はない。
- $a = -3$ のとき、$f(-1.1) \approx 30.9$、$f(-0.9) \approx -28.8$ であり、場合 (i) で $x \to -1^{\mp}$ について求めた符号と一致する。$a = -\frac{3}{4}$ のときは $f(-1.1) \approx -5.7$、$f(-0.9) \approx 2.1$ であり、場合 (ii) の逆転したふるまいと一致する。
- 各範囲のいくつかの a について f' の符号の変化を数値的に数えると、場合 (i) では極値をとる点がなく、場合 (ii) では左と中央の分枝にちょうど 1 つずつあることが確かめられる。

よくある間違い

- $(*)$ の解 $x = \pm 1$ は交点ではないことを忘れる。$|a| = 1$ のときにうまくいかなくなるのはまさにこの点である。
- $a + 2 + c = 0$ の場合を見落とす。このとき $(*)$ は 1 次方程式であり、判別式による議論は使えない。
- 場合 (ii) で鉛直漸近線 $x = -1$ のどちら側かを取り違える。そこでは $a + 1$ の符号

によって図が変わる。

STEP のその先へ

$|a| < 1$ のとき、$D(c)$ の 2 つの解は曲線に接する直線 $y = x + c$ を与え、その間にある直線は曲線と交わらない。a が ± 1 を横切ると、これらの接線が現れたり消えたりし、曲線の形が変わる。零点が鉛直漸近線を通過し、その両脇でのふるまいが逆転するのである。曲線の族の定性的な形がパラメータとともにどう変化するかを調べることは、分岐理論（bifurcation theory）の出発点であり、大学 1 年次の微分方程式（differential equations）の講義で出会う。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）を参照せよ。この種のグラフを描く練習をさらに積むには、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）が非常に優れている。

解答例

STEP III 2000、第 5 問

純粋数学 ・ 線形変換

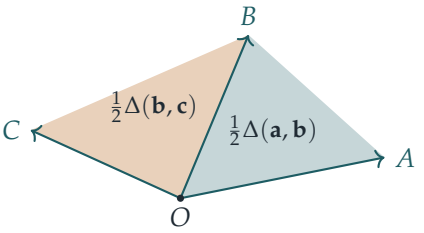
STEP III 2000、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/00-s3-q5

鍵となる考え方

$\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b})$ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ を列とする行列の行列式（determinant）であり、したがって三角形 OAB の符号付き面積（signed area）の 2 倍に等しい。また、これが 0 でないのは $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が平行（parallel）でないときに限る。線形写像（linear map）は、このような面積をすべて同じ倍率、すなわちその行列式倍する。この一つの事実から、必要性（necessity）はただちに従う。十分性（sufficiency）については、(ii) の恒等式（identity）が $\mathbf{c}$ を Δ だけを用いて $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ で表すので、$\mathbf{M}$ が A と B によって決まってしまえば、C の行き先に選択の余地はない。



解答

以下を通して、$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ を列とする 2×2 行列を $[\mathbf{u}\ \mathbf{v}]$ と書く。すると

$$\Delta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = u_1v_2 - u_2v_1 = \det[\mathbf{u}\ \mathbf{v}].$$

零でない $\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$ に対して、$\Delta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$ となるのは $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ が平行であるときに限る。行列式が 0 になるのは、一方の列が他方の列の定数倍であるときにちょうど限られるからである。よって、$\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b})$、$\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c})$、$\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a})$、$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})$、$\Delta(\mathbf{q},\mathbf{r})$、$\Delta(\mathbf{r},\mathbf{p})$ の六つはすべ

て 0 でない。

さらに二つの事実を繰り返し用いる。（列ごとに見て）$\mathbf{M}[\mathbf{u}\ \mathbf{v}] = [\mathbf{Mu}\ \ \mathbf{Mv}]$ であり、行列式は積を保つから、

$$\Delta(\mathbf{Mu}, \mathbf{Mv}) = \det \mathbf{M}\, \Delta(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \qquad (*)$$

また、$\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = -\Delta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ である。

小問 (i)

求めたいのは $\mathbf{Ma} = \mathbf{p}$ かつ $\mathbf{Mb} = \mathbf{q}$ であり、これらをまとめると

$$\mathbf{M}\,[\mathbf{a}\ \mathbf{b}] = [\mathbf{p}\ \mathbf{q}].$$

$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は平行でないから $\det[\mathbf{a}\ \mathbf{b}] = \Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$ であり、$[\mathbf{a}\ \mathbf{b}]$ は逆行列をもつ（invertible）。したがって

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}\ \mathbf{q}]\,[\mathbf{a}\ \mathbf{b}]^{-1} = \frac{1}{\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b})} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

が条件を満たす。実際、右から逆行列を掛けることができるので、このような行列はこの $\mathbf{M}$ **ただ一つ**である。行列式をとると $\det \mathbf{M} = \Delta(\mathbf{p}, \mathbf{q})/\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ であり、これは 0 でない。

小問 (ii)：恒等式

左辺の第 1 成分（component）をとると

$$\begin{aligned}&(a_1b_2 - a_2b_1)c_1 + (c_1a_2 - c_2a_1)b_1 + (b_1c_2 - b_2c_1)a_1 \\ &\quad = a_1b_2c_1 - a_2b_1c_1 + a_2b_1c_1 - a_1b_1c_2 + a_1b_1c_2 - a_1b_2c_1 = 0,\end{aligned}$$

となる。六つの項が二つずつ打ち消し合うからである。第 2 成分は、Δ の外にある $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ の添字をすべて 1 から 2 に変えた同じ計算である：

$$\begin{aligned}&(a_1b_2 - a_2b_1)c_2 + (c_1a_2 - c_2a_1)b_2 + (b_1c_2 - b_2c_1)a_2 \\ &\quad = a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2 + a_2b_2c_1 - a_1b_2c_2 + a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 = 0.\end{aligned}$$

よって

$$\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b})\,\mathbf{c} + \Delta(\mathbf{c}, \mathbf{a})\,\mathbf{b} + \Delta(\mathbf{b}, \mathbf{c})\,\mathbf{a} = \mathbf{0}, \qquad (1)$$

が示された。この恒等式は**任意の**三つのベクトルについて成り立つので、$\mathbf{p}$、$\mathbf{q}$、$\mathbf{r}$ についても成り立つ：

$$\Delta(\mathbf{p}, \mathbf{q})\,\mathbf{r} + \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{p})\,\mathbf{q} + \Delta(\mathbf{q}, \mathbf{r})\,\mathbf{p} = \mathbf{0}. \qquad (2)$$

考えてみよう 比の条件は、等式として正確には何を述べているのか？

Δ はすべて 0 でないから、条件 $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}) : \Delta(\mathbf{b},\mathbf{c}) : \Delta(\mathbf{c},\mathbf{a}) = \Delta(\mathbf{p},\mathbf{q}) : \Delta(\mathbf{q},\mathbf{r}) : \Delta(\mathbf{r},\mathbf{p})$ は、ある一つの数 $k \neq 0$ が存在して

$$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q}) = k\,\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}), \qquad \Delta(\mathbf{q},\mathbf{r}) = k\,\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c}), \qquad \Delta(\mathbf{r},\mathbf{p}) = k\,\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a}). \tag{3}$$

となることを意味する。言葉でいえば、三角形 OPQ、OQR、ORP の三つの符号付き面積は、三角形 OAB、OBC、OCA の面積をすべて同じ倍率で拡大したものである。

小問 (ii)：必要性

$\mathbf{Ma} = \mathbf{p}$、$\mathbf{Mb} = \mathbf{q}$、$\mathbf{Mc} = \mathbf{r}$ と仮定する。$(*)$ より

$$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \det\mathbf{M}\,\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}), \quad \Delta(\mathbf{q},\mathbf{r}) = \det\mathbf{M}\,\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c}), \quad \Delta(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \det\mathbf{M}\,\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a}).$$

これは $k = \det\mathbf{M}$ とした (3) であり、$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q}) \neq 0$ であるから $k \neq 0$ である。よって比は等しい。

小問 (ii)：十分性

次に、ある $k \neq 0$ について (3) が成り立つと仮定する。小問 (i) より、$\mathbf{Ma} = \mathbf{p}$ かつ $\mathbf{Mb} = \mathbf{q}$ を満たす行列 $\mathbf{M}$ が存在する。示すべきことは、この同じ $\mathbf{M}$ が $\mathbf{c}$ も $\mathbf{r}$ に移すことである。

(1) に $\mathbf{M}$ を作用させる。行列の積は線形であり、Δ はただの数であるから

$$\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b})\,\mathbf{Mc} = -\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a})\,\mathbf{q} - \Delta(\mathbf{b},\mathbf{c})\,\mathbf{p}.$$

両辺に k を掛け、各項に (3) を用いると

$$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\mathbf{Mc} = -\Delta(\mathbf{r},\mathbf{p})\,\mathbf{q} - \Delta(\mathbf{q},\mathbf{r})\,\mathbf{p}.$$

(2) より、右辺は $\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\mathbf{r}$ に等しい。よって

$$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\mathbf{Mc} = \Delta(\mathbf{p},\mathbf{q})\,\mathbf{r},$$

であり、（$\mathbf{p}$、$\mathbf{q}$ は平行でないので）$\Delta(\mathbf{p},\mathbf{q}) \neq 0$ であるから、$\mathbf{Mc} = \mathbf{r}$ である。したがって P、Q、R は $\mathbf{M}$ による A、B、C の像である。

必要性と十分性を合わせて、比の条件が必要十分条件であることが証明された。

検算

- $\mathbf{a} = \binom{1}{0}$、$\mathbf{b} = \binom{0}{1}$、$\mathbf{c} = \binom{1}{1}$ として試す。すると $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 1$、$\Delta(\mathbf{b},\mathbf{c}) = -1$、$\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a}) = -1$ であり、(1) は $\binom{1}{1} - \binom{0}{1} - \binom{1}{0} = \mathbf{0}$ となる。$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ とすると $\mathbf{p} = \binom{2}{0}$、$\mathbf{q} = \binom{1}{3}$、$\mathbf{r} = \binom{3}{3}$ が得られ、三つの Δ は 6、-6、-6 である。これも比は $1 : -1 : -1$ であり、$k = 6 = \det \mathbf{M}$ となっている。
- 数値的には、20,000 組の整数のランダムな三つ組について、厳密な分数計算を用いて恒等式を確かめた。どの二つのベクトルも平行でない約 17,700 組について、小問 (i) から $\mathbf{M}$ を構成し、必要性を確認するとともに、$\mathbf{Mc} = \mathbf{r}$ となるのは (3) が成り立つときにちょうど限られることを確認した。

よくある間違い

- Δ が 0 でないことを述べずに、比の条件を分数の等式一つとして書いてしまう。どの二つのベクトルも平行でないという仮定は、まさにすべての割り算を正当なものにするために置かれている。
- 必要性だけを証明してしまう。本当の中身は十分性である。行列は一次独立な二つのベクトルへの作用で決まってしまうので、条件が三つ目の像を強制しなければならない。
- Δ の中の順序による符号の誤り。$\Delta(\mathbf{a},\mathbf{c}) = -\Delta(\mathbf{c},\mathbf{a})$ であるから、$\mathbf{b},\mathbf{c}$ の次に $\mathbf{c},\mathbf{a}$ という巡回的な順序が重要である。

STEP のその先へ

恒等式 (1) は、姿を変えたクラメルの公式（Cramer's rule）である。これは基底（basis）$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ に関する $\mathbf{c}$ の座標を行列式の比として与える。線形写像はあらゆる符号付き面積を $\det \mathbf{M}$ 倍するという事実 $(*)$ は、行列式の幾何学的な定義であり、二重積分（double integral）の変数変換（change of variables）に現れるヤコビアン（Jacobian）の因子の背後にあるものである。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、これら両方の考え方を展開している。

解答例

STEP III 2000、第 6 問

純粋数学 • 四次多項式の因数分解

> **STEP III 2000、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q6

鍵となる考え方

係数を比較する（comparing coefficients）と、因数分解（factorisation）は p, q, r と a, b, c を結ぶ 3 つの方程式に帰着する。a だけの方程式を得るには b と c を消去（eliminate）しなければならないが、恒等式（identity）$4bc = (b+c)^2 - (b-c)^2$ がまさにその役割を果たす。$b+c$ と $b-c$ こそが自然に現れる組合せだからである。最後の 4 次式（quartic）については、まず y^3 の項を取り除く必要があり、それは平行移動（shift）$y = x + k$ によって実現できる。

解答

p、q、r を求める

右辺を展開すると

$$(x^2 - ax + b)(x^2 + ax + c) = x^4 + (b + c - a^2)x^2 + a(b-c)x + bc,$$

となる。ここで x^3 の項 $ax^3 - ax^3$ は打ち消し合う。係数を比較して

$$p = b + c - a^2, \qquad q = a(b-c), \qquad r = bc.$$

a^2 が満たす 3 次方程式

$u = a^2$ とおく。第 1 式から $b + c = p + u$ である。

$a \neq 0$ ならば、第 2 式から $b - c = q/a$ であるので $(b-c)^2 = q^2/u$ となる。すると

$$4bc = (b+c)^2 - (b-c)^2 \quad \Longrightarrow \quad 4r = (p+u)^2 - \frac{q^2}{u}.$$

両辺に $u \neq 0$ を掛けて

$$4ru = u(u^2 + 2pu + p^2) - q^2 \quad \Longrightarrow \quad u^3 + 2pu^2 + (p^2 - 4r)u - q^2 = 0,$$

となるので、$u = a^2$ はこの 3 次方程式（cubic）の解である。

$a = 0$ ならば $q = a(b - c) = 0$ であり、このとき 3 次式のすべての項が $u = 0$ で 0 になるので、$u = a^2 = 0$ は解である。したがって、いずれの場合も a^2 は解であり、示すべきことが示された。

考えてみよう p、q、r が何であっても、$u \geq 0$ を満たす解が必ず存在するのはなぜか。

この 3 次式を $f(u)$ とおく。$u = 0$ では $f(0) = -q^2 \leq 0$ であり、最高次の項が u^3 であるから、$u \to +\infty$ のとき $f(u) \to +\infty$ となる。$q = 0$ ならば $u = 0$ そのものが解である。そうでなければ $f(0) < 0$ であり、ある大きな U に対して $f(U) > 0$ となるので、f は連続（continuous）であることから、中間値の定理（intermediate value theorem）により 0 と U の間（両端を除く）に解が存在する。いずれにせよ、負でない解が存在する。

このことが重要なのは、$a = \sqrt{u}$ が実数である必要があるからである。負でない解からは常に実数の a が得られるので、x^3 の項をもたない実係数の 4 次式はすべて、与えられた形の 2 つの実係数 2 次式に分解できる。（$u > 0$ ならば、$b + c = p + u$ と $b - c = q/\sqrt{u}$ から b と c を求めることができる。）

$p = -1, q = -6, r = 15$ の場合

このとき $p^2 - 4r = 1 - 60 = -59$ であるから、3 次方程式は

$$u^3 - 2u^2 - 59u - 36 = 0.$$

となる。$u = 9$ のとき $729 - 162 - 531 - 36 = 0$ であるから、$u = 9$ は解である。（割り算をすると $(u - 9)(u^2 + 7u + 4)$ となり、2 次の因数は 2 つの負の解をもつので、負でない解は $u = 9$ のみである。）

4 次式の因数分解

与えられた 4 次式には y^3 の項があるので、平行移動によってこれを取り除く。解の和は 8 であるから、その平均は 2 であり、$y = x + 2$ とおく。各項を展開すると

$$\begin{aligned}(x+2)^4 &= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16,\\ -8(x+2)^3 &= -8x^3 - 48x^2 - 96x - 64,\\ 23(x+2)^2 &= 23x^2 + 92x + 92,\\ -34(x+2) &= -34x - 68,\end{aligned}$$

となり、これらと 39 を足し合わせて

$$y^4 - 8y^3 + 23y^2 - 34y + 39 = x^4 - x^2 - 6x + 15.$$

を得る。これはちょうど $p = -1, q = -6, r = 15$ の場合であり、この場合が登場した理由はここにある。

$u = a^2 = 9$ とし、$a = 3$ をとる。すると

$$b + c = p + a^2 = 8, \qquad b - c = \frac{q}{a} = -2,$$

であるから、$b = 3$、$c = 5$ となる。確認として $bc = 15 = r$ である。よって

$$x^4 - x^2 - 6x + 15 = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 3x + 5).$$

最後に $x = y - 2$ を代入すると

$$\begin{aligned}x^2 - 3x + 3 &= (y^2 - 4y + 4) - (3y - 6) + 3 = y^2 - 7y + 13,\\ x^2 + 3x + 5 &= (y^2 - 4y + 4) + (3y - 6) + 5 = y^2 - y + 3.\end{aligned}$$

したがって

$$y^4 - 8y^3 + 23y^2 - 34y + 39 = (y^2 - 7y + 13)(y^2 - y + 3).$$

代わりに $a = -3$ をとると b と c が入れ替わり、同じ 2 つの因数が逆の順序で得られる。

検算

- 答えを展開する：$(y^2 - 7y + 13)(y^2 - y + 3) = y^4 - 8y^3 + (3 + 7 + 13)y^2 - (21 + 13)y + 39$ となり、一致する。
- $y = 1$ を代入する：4 次式は $1 - 8 + 23 - 34 + 39 = 21$ であり、因数からは $7 \times 3 = 21$ が得られる。

- 2 つの 2 次因数の判別式（discriminant）はともに負（-3 と -11）であるから、どちらも実数の範囲ではこれ以上分解できず、4 次式は実数解をもたない。これは $y = 1$ で正の値をとることと整合する。

また、p, q, r の公式と 3 次方程式を a, b, c の無作為な有理数の選び方 2000 通りで検証し、無作為な (p, q, r) 2000 組について二分法（bisection）で負でない解を求めた。

よくある間違い

- $a = 0$ の場合を扱わずに、a で割って $b - c = q/a$ を得てしまう。
- 「3 次方程式は必ず実数解をもつ」と論じること。これは正しいが、その解が負でないことは示していない。肝心なのは $f(0) = -q^2$ の符号である。
- 最後に x から y へ戻す代入を忘れる。

STEP のその先へ

これは本質的に、一般の 4 次方程式を解くためのデカルト（Descartes）の方法（およびフェラーリ（Ferrari）の方法）である。すなわち、3 次の項を平行移動で消し、補助的な 3 次方程式である**分解 3 次式**（resolvent cubic）を解くことで、2 つの 2 次式に因数分解するのである。3 次方程式に対するカルダーノ（Cardano）の公式と組み合わせると、すべての 4 次方程式が冪根によって解ける（solvable by radicals）ことがわかる。なぜこれが 4 次で止まり、一般の 5 次方程式にはそのような公式が存在しないのかを扱うのが、ガロア（Galois）理論である。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は、学び始めるのによい本である。

解答例

STEP III 2000、第 7 問

純粋数学 ・ 不等式と極限

STEP III 2000、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/00-s3-q7

鍵となる考え方

2 つの不等式はどちらも、積をすでによく知っているものと比較することから得られる。$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ を二項定理（binomial theorem）で展開すると、$\frac{1}{r!}$ とよく似ていて、それより少しだけ小さい項が現れる。積 $\mathrm{P}(n)$ については、相加・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）を使うと、n 個の因数の積をそれらの平均の n 乗に置き換えられる。因数は $1+\frac{1}{2^k}$ であり、その平均は $1+\frac{1}{n}$ をわずかに下回る。これが前半の結果にそのままつながる。

解答

評価 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e}$

二項定理により、

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{1}{n^r} = \sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{n^r}.$$

2 つ目の分数は r 個の因数の積

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{n^r} = 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right),$$

であり、$0 \le j \le r-1 \le n-1$ であるから、各因数は $(0,1]$ に属する。したがってこの積は 1 以下であり、展開の各項は $\frac{1}{r!}$ 以下である。よって

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!} < \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!} = \mathrm{e},$$

が成り立つ。ここで最後の不等式が等号を含まないのは、省かれた項 $\frac{1}{(n+1)!}, \frac{1}{(n+2)!}, \dots$ がすべて正だからである。これはすべての正の整数 n について成り立つ。

評価 $\mathrm{P}(n) < \mathrm{e}$

$\mathrm{P}(n) = a_1 a_2 \cdots a_n$、$a_k = \dfrac{2^k+1}{2^k} = 1 + \dfrac{1}{2^k}$ とおく。これらはすべて正であるから、相加・相乗平均の不等式が使える。相加平均は

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n}\left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = 1 + \frac{1-2^{-n}}{n},$$

である。ここで等比級数（geometric series）の和 $\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - 2^{-n}$ を用いた。$1 - 2^{-n} < 1$ であるから、この平均は $1 + \frac{1}{n}$ より真に小さい。よって相加・相乗平均の不等式から

$$\mathrm{P}(n)^{1/n} \leq 1 + \frac{1-2^{-n}}{n} < 1 + \frac{1}{n}.$$

両辺とも正であるから、n 乗しても不等式は保たれる：

$$\mathrm{P}(n) < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e},$$

ただし 2 つ目の不等式には前半の結果を用いた。これはすべての正の整数 n について成り立つ。

考えてみよう 等号を含まない不等式はどこから来たのか？　相加・相乗平均の不等式からは $\leq$ しか得られない。

不等式が真に成り立つのは $1 - 2^{-n} < 1$ のおかげであり、相加・相乗平均の不等式によるものではない。実際、$n \geq 2$ のときは因数 a_k がすべて異なるので、相加・相乗平均の不等式そのものも等号なしで成り立つ。しかし $n = 1$ のときは因数が 1 つしかなく、相加・相乗平均の不等式は等式になる（$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$）。一方、$1 + \frac{1-2^{-n}}{n} < 1 + \frac{1}{n}$ という段階はどの場合にも等号なしで成り立つので、この議論はすべての n を扱えている。

極限

各因数 $a_{n+1} = 1 + 2^{-(n+1)}$ は 1 より大きいので、$\mathrm{P}(n+1) = a_{n+1}\mathrm{P}(n) > \mathrm{P}(n)$ である。したがって数列 $\mathrm{P}(n)$ は狭義単調増加（strictly increasing）であり、e によって上に有界（bounded above）である。上に有界な単調増加数列は収束（converge）するので、$\mathrm{P}(n)$ はある極限（limit）L に近づく。

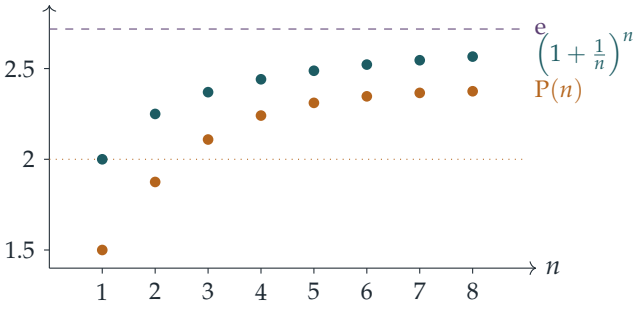
上からの評価：すべての n について $\mathrm{P}(n) < \mathrm{e}$ であるから、極限は $L \leq \mathrm{e}$ をみたす。（極限をとって保たれるのは等号を含む不等式だけである。$<$ ではなく $\leq$ となるのはそのためである。）

下からの評価のために、いくつかの項を計算する：

$$\mathrm{P}(1) = \frac{3}{2}, \qquad \mathrm{P}(2) = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4} = \frac{15}{8}, \qquad \mathrm{P}(3) = \frac{15}{8}\cdot\frac{9}{8} = \frac{135}{64} > \frac{128}{64} = 2.$$

数列は単調増加であるから、$L \geq \mathrm{P}(4) > \mathrm{P}(3) > 2$ である。以上をあわせて

$$2 < L \leq \mathrm{e}.$$



検算

- $n = 1$ のとき：$(1+1)^1 = 2 < \mathrm{e}$ かつ $\mathrm{P}(1) = 1.5 < 2$ である。$n = 4$ のとき：$\mathrm{P}(4) = \frac{2295}{1024} \approx 2.241 < \left(\frac{5}{4}\right)^4 \approx 2.441$ である。
- 積を数値的に計算すると、$\mathrm{P}(n)$ は $L \approx 2.3842$ に落ち着く（$n = 60$ までに小数点以下何桁にもわたって一定になる）。これは 2 と $\mathrm{e} \approx 2.7183$ の間に余裕をもって収まっている。

よくある間違い

- 各 $\mathrm{P}(n) < \mathrm{e}$ であるというだけで $L < \mathrm{e}$ と主張してしまう。等号を含まない不等式は極限で等式になりうるので、導かれるのは $L \leq \mathrm{e}$ だけである。（ここでは実際に $L < \mathrm{e}$ が成り立つが、それには別の議論が必要である。）
- ある n について $\mathrm{P}(n) > 2$ を示しながら、数列が単調増加であることを述べ忘れる。その評価を L に受け渡すのは単調増加性である。
- a_k が正であることを確かめずに相加・相乗平均の不等式を使う。

STEP のその先へ

「単調増加で上に有界であるから収束する」という段階は単調収束定理（monotone convergence theorem）であり、これは実数の完備性（completeness）と同値である。

これを基本原理から証明することは、大学の解析学（analysis）の講義で最初に扱う事柄の一つである。対数（logarithm）をとると $\mathrm{P}(n)$ は級数 $\sum \ln\left(1+2^{-k}\right)$ に変わり、これは $\sum 2^{-k}$ との比較によって収束する。これが無限積（infinite product）を調べる標準的な方法である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、この 2 つの考え方を見事に扱っている。

解答例

STEP III 2000、第 8 問

純粋数学 • 漸化式

STEP III 2000、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/00-s3-q8

鍵となる考え方

定義の規則は非線形（non-linear）で割り算を含むので、そのままでは扱いにくい。うまい手は、これを積の形 $a_n a_{n-2} - a_{n-1}^2 = 1$ に書き直すことである。これは、連続する三つの項からなるある組み合わせが常に 1 であることを述べている。同じ事実を一つ先の段階でも書き、二つの式を引き算すると、非線形の規則が線形（linear）の規則に変わる。漸化式（recurrence）が線形になれば、一般項（closed form）は二階線形漸化式の標準的な手法で求まる。すなわち、特性二次方程式（auxiliary quadratic）の根を求め、次に二つの初期値を合わせればよい。

解答

準備：数列がきちんと定義されること

各段階で a_{n-2} で割るので、どの項もゼロにならないことを確かめておくべきである。実際には、すべての項が正である。$a_0 = a_1 = 1 > 0$ である。a_{n-1} と a_{n-2} が正ならば、$1 + a_{n-1}^2 > 0$ かつ $a_{n-2} > 0$ なので、$a_n > 0$ である。数学的帰納法（induction）により、すべての n について $a_n > 0$ である。最初のいくつかの項は次のとおりである。

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1+1}{1} = 2, \quad a_3 = \frac{1+4}{1} = 5, \quad a_4 = \frac{1+25}{2} = 13.$$

線形漸化式

定義の両辺に a_{n-2} を掛けると、すべての $n \geq 2$ について

$$a_n a_{n-2} = 1 + a_{n-1}^2. \qquad (*)$$

を得る。$P(k)$ を命題 $a_k = 3a_{k-1} - a_{k-2}$ とする。k に関する帰納法により、すべての $k \geq 2$ について $P(k)$ を証明する。

基底（base case）。$a_2 = 2$ かつ $3a_1 - a_0 = 3 - 1 = 2$ なので、$P(2)$ は正しい。

帰納段階（inductive step）。ある $k \geq 2$ について $P(k)$ が正しい、すなわち

$$a_k + a_{k-2} = 3a_{k-1}$$

であると仮定する。$a_{k+1} = 3a_k - a_{k-1}$ を示せばよい。定義より、$a_{k+1} = (1 + a_k^2)/a_{k-1}$ である。分子にある扱いにくい 1 を、$n = k$ のときの $(*)$、すなわち $1 = a_k a_{k-2} - a_{k-1}^2$ を使って置き換えるのがポイントである。

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{a_k a_{k-2} - a_{k-1}^2 + a_k^2}{a_{k-1}} \\ &= \frac{a_k\,(a_k + a_{k-2}) - a_{k-1}^2}{a_{k-1}} \\ &= \frac{a_k \cdot 3a_{k-1} - a_{k-1}^2}{a_{k-1}} && \text{根拠は} P(k) \\ &= 3a_k - a_{k-1} && \text{理由は} a_{k-1} > 0. \end{aligned}$$

よって $P(k+1)$ は正しい。帰納法により、すべての $n \geq 2$ について $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$ である。

考えてみよう 帰納法の仮定はどこで使われたか。また、$n = k$ のときの $(*)$ を使ってよいのはなぜか。

仮定が使われたのは一度だけで、$a_k + a_{k-2}$ を $3a_{k-1}$ に置き換えるところである。この括弧が現れたのは、1 を $a_k a_{k-2} - a_{k-1}^2$ に取り替えたからにほかならない。$(*)$ を使うのに仮定はまったく必要ない。これは a_k の定義を展開しただけのものであり、すべての $k \geq 2$ について成り立つ。言い換えれば、量 $a_n a_{n-2} - a_{n-1}^2$ はどの段階でも同じであり、それこそが線形の関係を先へと運んでいくのである。

一般項

$\beta = \alpha^{-1}$ とおく。$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ なので、

$$\beta = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \qquad \text{よって} \qquad \alpha + \beta = \sqrt{5}, \quad \alpha\beta = 1.$$

したがって

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 5 - 2 = 3, \qquad \alpha^2\beta^2 = 1,$$

であるから、α^2 と β^2 はこの漸化式の特性方程式（auxiliary equation）$x^2 - 3x + 1 = 0$ の二つの根である。（具体的には、それらは $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ である。）

ここで、$n \geq 1$ について

$$b_n = \frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{\sqrt{5}}.$$

と定める。b_n が a_n と最初の二項が等しく、同じ漸化式に従うことを確かめて、$b_n = a_n$ を示す。

漸化式に従うこと。x が $x^2 = 3x - 1$ の根ならば、両辺に x^{n-2} を掛けて $x^n = 3x^{n-1} - x^{n-2}$ を得る。（$\alpha\beta = 1$ を用いると）$\alpha^{2n-1} = \beta\,(\alpha^2)^n$ なので、$x = \alpha^2$ として両辺に β を掛けると

$$\alpha^{2n-1} = 3\alpha^{2n-3} - \alpha^{2n-5}.$$

を得る。同様に、$x = \beta^2$ として α を掛けると、$\beta^{2n-1} = 3\beta^{2n-3} - \beta^{2n-5}$ を得る。これらを足して $\sqrt{5}$ で割ると

$$b_n = 3b_{n-1} - b_{n-2} \qquad (n \geq 3).$$

初期値が一致すること。

$$b_1 = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = a_1,$$
$$b_2 = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\sqrt{5}} = \frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5} - 3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2 = a_2.$$

結論。(a_n) と (b_n) はどちらも $n \geq 3$ について $u_n = 3u_{n-1} - u_{n-2}$ を満たし、$n = 1$ と $n = 2$ で一致する。このような漸化式は各項をその直前の二項から決定するので、（強い）帰納法（strong induction）により、すべての $n \geq 1$ について $a_n = b_n$ である。すなわち

$$a_n = \frac{\alpha^{2n-1} + \alpha^{-(2n-1)}}{\sqrt{5}} \qquad (n \geq 1),$$

となり、示すべきことが示された。

考えてみよう 比較を $n = 0$ ではなく $n = 1$ から始めるのはなぜか。

$n = 3$ での a_n の線形漸化式には a_2 と a_1 が関わるので、$n \geq 1$ については b_1 と b_2 を合わせれば十分である。実は、この公式は $n = 0$ でも成り立つ。$b_0 = (\alpha^{-1} + \alpha)/\sqrt{5} = 1 = a_0$ である。したがって、どちらから始めても何も失われない。

検算

- 項は $1, 1, 2, 5, 13, 34, 89, 233, \ldots$ であり、これはフィボナッチ数（Fibonacci numbers）$F_1, F_3, F_5, \ldots$ である（ただし $a_0 = 1 = F_{-1}$）。各項は直前の項の三倍からさらにその前の項を引いたものである：$3 \cdot 13 - 5 = 34$。

- $(*)$ を直接確かめる：$34 \cdot 5 - 13^2 = 170 - 169 = 1$。
- 数値的には $a_{10} = 4181$ であり、$(\alpha^{19} + \alpha^{-19})/\sqrt{5} \approx 4181.000$ である。項 $\alpha^{-19}/\sqrt{5}$ はごく小さいので、a_n は $\alpha^{2n-1}/\sqrt{5}$ に最も近い整数である。
- 元の規則から $n = 39$ まで数列を厳密に計算すると、毎回線形漸化式を満たす整数が得られ、一般項と一致する。

よくある間違い

- $a_k = 3a_{k-1} - a_{k-2}$ を $(1 + a_k^2)/a_{k-1}$ に代入して展開することで、$a_{k+1} = 3a_k - a_{k-1}$ を証明しようとすること。これでは式が煩雑になるだけである。1 は一つ前の段階の定義を使って置き換えなければならない。
- 定義が a_{n-2} で割っていることを忘れること。完全な解答では、項が正であることに触れ、割り算と最後の a_{k-1} の約分が正当であることを示す。
- b_n が漸化式を満たすことだけを確かめ、**二つの**初期値を合わせないこと。二階漸化式には両方が必要である。

STEP のその先へ

定数 $a_n a_{n-2} - a_{n-1}^2$ は、フィボナッチ数に関するカッシーニ（Cassini）の恒等式（Cassini's identity）$F_{m+1}F_{m-1} - F_m^2 = (-1)^m$ の一例である。ここでは奇数番目の添字しか現れないので、符号は常に $+1$ である。より一般に、任意の二階線形漸化式について、$u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2$ は各段階で一定の倍率で変化する（これは 2×2 の行列式（determinant）であり、行列式は積を保つからである）。この数列のように、意外にも常に整数を生み出す有理式の漸化式は、「ソモス数列」（Somos sequences）やローラン現象（Laurent phenomenon）の研究と結びついている。フィボナッチ型の数列や連分数（continued fractions）の整数論については（α が黄金比（golden ratio）であることに注意）、ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）が素晴らしい読み物である。

解答例

STEP III 2000、第 9 問

力学 ・ 斜め弾性衝突

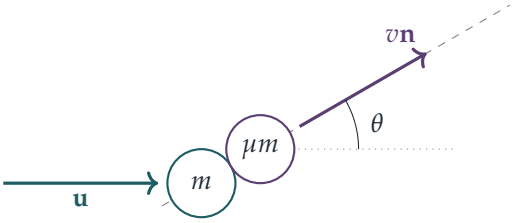
> **STEP III 2000、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q9

鍵となる考え方

円板はなめらか（smooth）なので、衝突の間に両者の間にはたらく力は中心線（line of centres）に沿った力だけである。したがって、はじめ静止している円板はその直線に沿って動き出す。つまり $\mathbf{n}$ こそが中心線の方向である。その速度を $v\mathbf{n}$ とおき、運動量保存則（conservation of momentum、ベクトルの等式である）を用いてもう一方の円板の速度を求め、そのうえで運動エネルギー保存則（conservation of kinetic energy）によって v を決定する。小問 (ii) はエネルギーの等式をもう一つ立てるだけであり、不等式は余弦が 1 以下であることを要請することから得られる。

解答

円板を、なめらかな水平面上のなめらかな質点としてモデル化する。したがって、円板どうしの間にも、円板と面の間にも摩擦はない。$\mathbf{u}$ と $\mathbf{n}$ のなす角を θ とし、$u = |\mathbf{u}|$ とおく。すると $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u\cos\theta$ である。



衝突の瞬間、中心線（破線）は $\mathbf{n}$ の方向を向いており、$\mathbf{u}$ の方向（点線）と角 θ をなす。この図は模式図にすぎず、式の計算には必要ない。

小問 (i)

質量 μm の円板ははじめ静止しており、衝突の間にこれにはたらく水平方向の力は、もう一方の円板からの接触力だけである。この力は中心線に沿ってはたらく。この円板は $\mathbf{n}$ の方向に動き出すので、衝突後の速度はある速さ $v > 0$ を用いて $v\mathbf{n}$ と表せる。

質量 m の円板の衝突後の速度を $\mathbf{w}$ とする。運動量保存則より

$$m\mathbf{u} = m\mathbf{w} + \mu m v\,\mathbf{n} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{w} = \mathbf{u} - \mu v\,\mathbf{n}.$$

衝突は完全弾性衝突（perfectly elastic collision）なので、運動エネルギーは保存される：

$$\tfrac{1}{2}m\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \tfrac{1}{2}m\,\mathbf{w}\cdot\mathbf{w} + \tfrac{1}{2}\mu m v^2.$$

$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$ を用いると

$$\mathbf{w}\cdot\mathbf{w} = (\mathbf{u} - \mu v\mathbf{n})\cdot(\mathbf{u} - \mu v\mathbf{n}) = u^2 - 2\mu v\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} + \mu^2 v^2.$$

これを代入し、$\frac{1}{2}m$ と u^2 を消去すると

$$0 = -2\mu v\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} + \mu^2 v^2 + \mu v^2 = \mu v\big((1+\mu)v - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\big).$$

ここで $\mu > 0$ であり、衝突された円板は実際に動くので $v \neq 0$ である。よって μv で割ることができ、

$$v = \frac{2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{1+\mu},$$

を得る。これが求める速さである。副産物として、$v > 0$ から $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} > 0$ がわかるので、$0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$ である。

> **考えてみよう** なぜここではニュートンの実験法則（Newton's experimental law、反発の法則）を使う必要がないのだろうか。

使うこともできる。$e = 1$ のとき、相対速度の $\mathbf{n}$ 方向の成分は向きが逆になり、$\mathbf{n}$ に垂直な成分は円板がなめらかなので変化しない。しかし「完全弾性」とは運動エネルギーが保存されるという意味であり、そのただ一つのスカラーの等式と運動量保存則だけで、すでに v は決まってしまう。上の計算はこれとまったく同値であり、成分に分ける手間を省いている。

小問 (ii)

衝突後の運動エネルギーの総和は、はじめの $\frac{1}{2}mu^2$ に等しい。二つの円板がこれを等分するならば、それぞれが $\frac{1}{4}mu^2$ をもつので、衝突された円板について

$$\tfrac{1}{2}\mu m v^2 = \tfrac{1}{4}mu^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \mu v^2 = \tfrac{1}{2}u^2.$$

小問 (i) の結果に $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = u\cos\theta$ を用いると $v = \dfrac{2u\cos\theta}{1+\mu}$ であるから

$$\frac{4\mu u^2\cos^2\theta}{(1+\mu)^2} = \frac{u^2}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \cos^2\theta = \frac{(1+\mu)^2}{8\mu}.$$

（小問 (i) の最後で示したように）$\cos\theta > 0$ なので、正の平方根をとって

$$\cos\theta = \frac{1+\mu}{2\sqrt{2\mu}}.$$

このような角が存在するためには $\cos\theta \le 1$、すなわち $\cos^2\theta \le 1$ でなければならない：

$$\frac{(1+\mu)^2}{8\mu} \le 1 \iff (1+\mu)^2 \le 8\mu \qquad \text{（両辺に}8\mu > 0\text{ を掛けた）}$$
$$\iff \mu^2 - 6\mu + 1 \le 0.$$

2次式 $\mu^2 - 6\mu + 1$ の根は $\mu = 3 \pm \sqrt{9-1} = 3 \pm \sqrt{8}$ であり、この式が負または零となるのはちょうど二つの根の間である。したがって

$$3 - \sqrt{8} \le \mu \le 3 + \sqrt{8},$$

となり、示すべきことが示された。（下限は正であり $3 - \sqrt{8} \approx 0.172$ なので、$\mu > 0$ と矛盾しない。）逆に、この範囲のどの μ に対しても、公式は $(0, 1]$ に属する正当な余弦の値を与えるので、エネルギーの等分は実際に可能である。範囲の両端では $\theta = 0$ であり、これは正面衝突（head-on collision）である。

検算

- 正面衝突の場合：$\mathbf{n}$ が $\mathbf{u}$ に平行ならば、小問 (i) から $v = 2u/(1+\mu)$ となり、これはおなじみの1次元の弾性衝突の結果である。$\mu = 1$ のときは $v = u$ となる。スヌーカー（snooker）でよく見るように、動いていた円板は止まり、その運動をすべて相手に渡す。
- 質量が等しい場合、$\mu = 1$：小問 (ii) から $\cos\theta = 2/(2\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$、すなわち $\theta = 45^\circ$ となる。これは、質量の等しいなめらかな円板は弾性衝突の後に互いに直角の方向へ動き出すという古典的な事実と合致する。さらにエネルギーが等しいことから二つの速さも等しくなり、それぞれが $\mathbf{u}$ と 45° をなす。
- 数値的には、なめらかな弾性衝突（撃力（impulse）は $\mathbf{n}$ 方向）を無作為に10 000回シミュレーションし、運動量とエネルギーの保存、および小問 (i) の速さを確認した。また μ が 0.172 と 5.83 の間にあるとき、小問 (ii) で求めた角において運動エネルギーが等しくなることも確認した。たとえば $\mu = 0.1$ とすると $\cos^2\theta = 1.51 > 1$ となり、これは不可能である。

よくある間違い

- $\mathbf{u}$ と $\mathbf{n}$ を平行として扱ってしまう。この衝突は斜め衝突（oblique collision）であり、相手に伝わるのは中心線方向の成分 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}$ だけである。
- v が零でない理由を述べずに v で割ってしまう（$v=0$ はエネルギーの等式の「衝突しない」解である）。
- $\cos\theta$ について負の平方根を除外し忘れる。

STEP のその先へ

衝突された粒子の速度を撃力の方向に沿って書き、そのうえで運動量とエネルギーを用いるという手法は、物理学における弾性散乱（elastic scattering）の核心である。これが最も見通しよく表れるのは重心系（centre-of-mass frame）においてであり、そこでは弾性衝突は二つの速度の大きさを変えずに向きを回転させるだけである。すると小問 (ii) の角の範囲は、実験室系（lab frame）においてどの角が実現可能かという主張に言い換えられる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、両方の座標系における衝突を非常にわかりやすく扱っている。

解答例

STEP III 2000、第 10 問

力学 ・ 最大摩擦力でのつり合い

STEP III 2000、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/00-s3-q10

鍵となる考え方

まず幾何から始める。距離 $\sqrt{3}a$ と a は、梁が地面と特別な角度で交わるように選ばれており、それによって問題に現れるすべての向きが決まる。次に、未知の力が消える 2 点のまわりで力のモーメント（moments）をとる。蝶番（hinge）X のまわりでは、梁の式には球からの垂直抗力（normal reaction）しか現れない。球からの摩擦力（friction）は梁そのものに沿ってはたらくからである。球の中心のまわりでは、2 つの摩擦力以外のすべての力が中心を通るので、2 つの摩擦力は等しくなければならない。

解答

モデルと幾何

梁を一様な棒（uniform rod）とみなし、球を一様な剛体（rigid body）とみなして、その重力は中心 C にはたらくとする。どちらの接触も粗い。球が地面に接する点を O とすると、$OX = \sqrt{3}a$、$OC = a$ であり、OC は鉛直である。

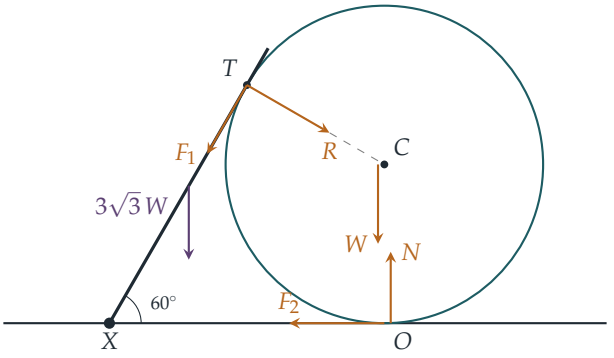
梁は点 T で球に接しており、そこで球の接線（tangent）になっている。地面は X から引いたもう一方の接線である。直角三角形 XOC において、

$$\tan\angle OXC = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \text{よって} \qquad \angle OXC = 30^\circ.$$

X から引いた 2 本の接線は直線 XC に関して対称なので、梁は地面と角 $2 \times 30^\circ = 60^\circ$ をなす。1 点から引いた接線の長さは等しいので、$XT = XO = \sqrt{3}a$ である。$\sqrt{3}a < 2a$ であるから、接点は確かに梁の上にあり、梁の中点より少し先に位置する。

半径 CT は梁に垂直である。したがって、T における垂直抗力は水平と 30° をなし、T

における摩擦力は梁に沿って、水平と 60° の向きにはたらく。



琥珀色の矢印は球にはたらく力である。梁には R と F_1 が逆向きにはたらき、さらに中点（X から距離 a）に重力 $3\sqrt{3}\,W$ が、蝶番には未知の反力がはたらく。

摩擦力の向きは仮定してある。球に対して、F_1 は梁に沿って X の方へ下向きにはたらき、F_2 は地面に沿って X の方へはたらくとする。仮定が誤っていれば、その力は負の値として求まる。

梁：X のまわりのモーメント

蝶番の反力は X にはたらくので、X のまわりのモーメントをもたない。球からの摩擦力は梁に沿ってはたらき、梁の直線は X を通るので、これもモーメントをもたない。垂直抗力 R は距離 $XT = \sqrt{3}\,a$ の位置で梁に垂直にはたらく。重力は X から水平距離 $a\cos 60^\circ = \frac{1}{2}a$ の位置にはたらく。よって

$$R \cdot \sqrt{3}\,a = 3\sqrt{3}\,W \cdot \tfrac{1}{2}a, \qquad \text{よって} \qquad R = \tfrac{3}{2}W.$$

球：C のまわりのモーメント

力 R、W、N はいずれも C を通る（垂直抗力は半径に沿ってはたらく）。2 つの摩擦力は接線方向で、それぞれ C から距離 a のところにある。T における F_1 は球を C のまわりに一方の向きに回そうとし、O における F_2 は逆向きに回そうとするので、

$$F_1 a = F_2 a, \qquad \text{よって} \qquad F_1 = F_2.$$

この共通の値を F とおく。

考えてみよう　2 つの摩擦力について他に何もわかっていない段階で、なぜそれらが等しいと確信できるのか。

球は平衡（equilibrium）にあるので、任意の点のまわりのモーメントの総和は 0 である。中心を選ぶのがうまい方法である。重力と 2 つの垂直抗力はすべて中心を通るので、残るのは摩擦力だけであり、それらの腕の長さはともに a で等しい。

球：力の分解

水平方向について、X から遠ざかる向きを正とする（力の分解（resolving））。R の成分は $R\cos 30^\circ$、F_1 の成分は $-F\cos 60^\circ$、F_2 の寄与は $-F$ である。よって

$$\frac{\sqrt{3}}{2}R = \frac{1}{2}F + F = \frac{3}{2}F, \qquad \text{よって} \qquad F = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}W.$$

これは正なので、仮定した摩擦力の向きは正しかった。鉛直方向については、R は成分 $R\sin 30^\circ$ で下向きに押し、F_1 は成分 $F\sin 60^\circ$ で下向きに引く。よって

$$N = W + \tfrac{1}{2}R + \tfrac{\sqrt{3}}{2}F = W + \tfrac{3}{4}W + \tfrac{3}{4}W = \tfrac{5}{2}W.$$

摩擦係数

球は両方の接点で今にもすべり出そうとしているので、どちらの摩擦も極限摩擦（limiting friction）である。すなわち $F_1 = \mu_1 R$、$F_2 = \mu_2 N$ である。したがって、摩擦係数（coefficient of friction）は

$$\mu_1 = \frac{F}{R} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}W}{\frac{3}{2}W} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \mu_2 = \frac{F}{N} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}W}{\frac{5}{2}W} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

検算

- 座標を用いた数値検算（$a = 1.3$、$W = 2$）により、T が球面上にあり、CT が梁に垂直であることを確かめた。球の 3 つの平衡方程式を直接解くと $R = 1.5W$、$F_1 = F_2 \approx 0.8660W$、$N = 2.5W$ となり、$\mu_1 \approx 0.5774 = 1/\sqrt{3}$、$\mu_2 \approx 0.3464 = \sqrt{3}/5$ を得た。
- 独立な方程式による確認：球について O のまわりのモーメントをとる。このとき N、F_2、W はモーメントをもたない。R の作用線は C を通るので、そのモーメントは高さ a における水平成分のモーメント、すなわち $\frac{\sqrt{3}}{2}R\,a$ に等しい。O のまわりの F_1 のモーメントは計算すると $\frac{3}{2}aF$ となる。これらを等しいとおくと、C のまわりのモーメントの式を使わずに、再び $F = R/\sqrt{3}$ が得られる。
- どちらの係数も 1 より小さく、通常の粗い接触として物理的に妥当である。

よくある間違い

- 梁の角度を 60° ではなく 30°（XC の角度）としてしまう。
- N を求めるときに F_1 の鉛直成分を忘れる。すると $N = \frac{7}{4}W$ となり、誤った μ_2 が得られる。
- 球からの摩擦力を、X のまわりの梁のモーメントの式に含めてしまう。この力は梁に沿ってはたらくので、X のまわりのモーメントは 0 である。

STEP のその先へ

平面内の剛体は 3 つの自由度（degrees of freedom）をもつので、3 つの独立な平衡方程式が得られる。ここでは球に 5 つの未知の接触力があり、梁から R が得られることでその数が減る。さらに 2 つの「極限摩擦」の条件によって、問題は解ける連立方程式になる。このように方程式の数と未知数の数を比べ、系が不静定（statically indeterminate）になる場合を見抜くことは、構造力学（structural mechanics）の出発点である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の静力学とトルク（torque）を丁寧に扱っている。

解答例

STEP III 2000、第 11 問

力学 ・ 粗い支点まわりの回転

STEP III 2000、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/00-s3-q11

鍵となる考え方

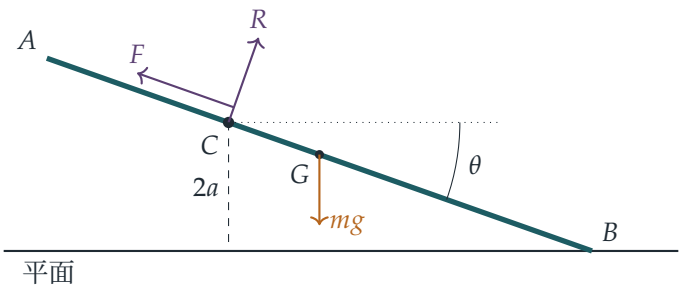
滑りが起こらない限り、棒は梁の上の点 C を中心に回転するだけなので、固定軸（fixed axis）のまわりに回転する剛体（rigid body）である。エネルギーから角速度（angular speed）が、モーメントの式から角加速度（angular acceleration）が得られる。次に、重心（centre of mass）に対するニュートン（Newton）の第二法則を棒に沿った方向と棒に垂直な方向に分解すれば、梁が与えなければならない摩擦力（friction）と垂直抗力（normal reaction）がわかる。摩擦力が垂直抗力の μ 倍以内にとどまっている間は滑りは起こらない。そして、この条件が B が平面に達するまでずっと成り立つ必要がある。

解答

モデルと幾何

棒を一様な剛体の棒、梁を固定された細く粗い線としてモデル化する。したがって梁は C において一つの接触力を及ぼし、それは棒に垂直な垂直抗力 R と、棒に沿った摩擦力 F からなる。

重心 G は中点であり、A から $4.5a$ の位置にある。$AC = 3a$ であるから、G は C に対して B の側にあり、$CG = \frac{3}{2}a$、$CB = 6a$ である。よって重力は C のまわりにモーメントをもち、棒は B が下がる向きに傾く。棒が回転した角を θ とし、棒が水平と角 θ をなすようにする。



B が平面に達するのは B が $2a$ だけ下がったとき、すなわち $6a\sin\theta = 2a$ となるとき、つまり

$$\sin\theta = \tfrac{1}{3}, \qquad \tan\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

のときである。

C のまわりの回転

C のまわりの慣性モーメント（moment of inertia）は、平行軸の定理（parallel axes theorem）により

$$I_C = \tfrac{1}{12}m(9a)^2 + m\left(\tfrac{3}{2}a\right)^2 = \tfrac{27}{4}ma^2 + \tfrac{9}{4}ma^2 = 9ma^2.$$

である。滑りがない間は C は固定されており、接触力は仕事をしない。G は $\frac{3}{2}a\sin\theta$ だけ下がっているので、（静止状態から始まる）エネルギー保存則（conservation of energy）により

$$\tfrac{1}{2}(9ma^2)\dot{\theta}^2 = mg\cdot\tfrac{3}{2}a\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \dot{\theta}^2 = \frac{g\sin\theta}{3a}.$$

となる。C のまわりのモーメントをとると（モーメントをもつのは重力だけである）、

$$9ma^2\,\ddot{\theta} = mg\cdot\tfrac{3}{2}a\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad \ddot{\theta} = \frac{g\cos\theta}{6a}.$$

（エネルギーの式を t で微分しても同じ結果が得られ、よい検算になる。）

接触力

G は C を中心とする半径 $\frac{3}{2}a$ の円周上を動くので、その加速度は、棒に沿って C へ向かう成分 $\frac{3}{2}a\dot{\theta}^2$ と、棒に垂直で θ が増加する向き（棒を横切って下向き）の成分 $\frac{3}{2}a\ddot{\theta}$ をもつ。

考えてみよう　摩擦力はどちら向きにはたらくか。また、なぜ単に $mg\sin\theta$ にはならないのか。

重力の棒に沿って下向きの成分 $mg\sin\theta$ は、棒を B の方向へ梁から引きずり出そうとする。さらに G には C へ向かう向心力（centripetal force）が必要である。これらはどちらも摩擦力によって与えられなければならないので、摩擦力は棒に沿って上向き、つまり A の方へはたらく。G の加速度について C へ向かう向きを正として、棒に沿った方向に分解すると

$$F - mg\sin\theta = m\cdot\tfrac{3}{2}a\dot{\theta}^2 = m\cdot\tfrac{3}{2}a\cdot\frac{g\sin\theta}{3a} = \tfrac{1}{2}mg\sin\theta,$$

したがって

$$F = \tfrac{3}{2}mg\sin\theta.$$

である。棒に垂直な方向に、G が加速している向きに分解すると

$$mg\cos\theta - R = m\cdot\tfrac{3}{2}a\ddot{\theta} = m\cdot\tfrac{3}{2}a\cdot\frac{g\cos\theta}{6a} = \tfrac{1}{4}mg\cos\theta,$$

したがって

$$R = \tfrac{3}{4}mg\cos\theta,$$

であり、これは常に正なので、棒は梁と接触したままである。

滑らない条件

$F \le \mu R$ である限り、棒は C で滑らない。すなわち

$$\frac{F}{R} = \frac{\frac{3}{2}mg\sin\theta}{\frac{3}{4}mg\cos\theta} = 2\tan\theta \le \mu.$$

比 $2\tan\theta$ は手を放した時点の 0 から θ とともに増加するので、この条件が最も厳しくなるのは最後の瞬間、すなわち B がちょうど平面に達するときである。そのとき $\tan\theta = 1/(2\sqrt{2})$ であるから、

$$\mu \ge 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

が必要である。よって μ の最小値は

$$\boxed{\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707.}$$

である。ちょうどこの値のとき、摩擦力が限界に達するのは B が平面に当たる瞬間だけであり、これより小さい μ では、それより前に滑りが始まる。

検算

- 手を放した時点では $\dot{\theta} = 0$ なので $F = 0$、$R = \frac{3}{4}mg$ である。G が $\frac{3}{2}a\ddot{\theta} = \frac{1}{4}g$ で下向きに加速し始めるため、梁が支えるのは重さ全体より小さい。これはおなじみの「手を放した板は軽く感じる」という効果である。

- 単位：F と R はどちらも mg の定数倍であり、μ は無次元量である。そうでなければならない。
- 方程式 $\ddot{\theta} = g\cos\theta/(6a)$ を静止状態から数値的に解き進め、G の加速度を差分で計算し、ニュートンの第二法則から F と R を求め直した。それらは $\frac{3}{2}mg\sin\theta$ および $\frac{3}{4}mg\cos\theta$ と一致し、F/R は単調に増加して $\sin\theta = \frac{1}{3}$ のとき $0.7071\ldots = 1/\sqrt{2}$ に達する。

よくある間違い

- 中心のまわりのモーメントをとったり、平行軸の項を忘れたりすること。$I_C = 9ma^2$ であって、$\frac{27}{4}ma^2$ ではない。
- 問題を静力学（statics）として扱い、$F = mg\sin\theta$、$R = mg\cos\theta$ とすること。これでは $\mu \geq \tan\theta$ となってしまう。G の向心加速度と接線加速度の両方が力を変えるのである。
- 摩擦の条件を、条件が最も厳しくなる点ではなく、$F = 0$ である手を放した時点でしか確かめないこと。

STEP のその先へ

この問題は、束縛力（constraint forces）を伴う剛体の力学への最初の入り口である。エネルギーとモーメントから運動を求め、そのあとで初めて重心に対するニュートンの法則を用いて、束縛が与えなければならない力を逆算した。同じ手順（運動を解き、それから束縛が必要な力を実際に与えられるかを確かめる）によって、はしごがいつ滑り始めるか、倒れる鉛筆がいつ机から離れるか、ビーズがいつ針金から外れるかが決まる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、固定軸のまわりの回転、およびトルク（torque）と重心の運動との関係を丁寧に展開している。

解答例

STEP III 2000、第 12 問

確率・統計 ・ ポアソン近似

> **STEP III 2000、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q12

鍵となる考え方

自分の券が当たっているとわかってしまえば、残る偶然性は他のプレイヤーの券だけである。他のプレイヤーはそれぞれ独立に確率 $\frac{1}{N}$ で当選番号と一致するので、**他の**当選者の人数は二項分布（binomial distribution）に従う。プレイヤーが多く成功確率が小さいとき、この二項分布はポアソン分布（Poisson distribution）に近く、与えられた極限 $\left(1-\frac{a}{n}\right)^n \approx \mathrm{e}^{-a}$ こそがこの近似を成り立たせるものである。

解答

厳密な確率

自分が当たり券を持っているとする。他の $2N-1$ 人のプレイヤーのうち当選番号も持っている人数を X とすると、当選者の総数は $W = 1 + X$ である。

機械は各プレイヤーの番号を一様に、他の全員の番号とは独立に、また抽選とも独立に選ぶ。したがって、当選番号（それが何であれ）と自分の券が与えられたとき、他の $2N-1$ 人はそれぞれ互いに独立に確率 $\frac{1}{N}$ でそれと一致する。よって

$$X \sim \mathrm{B}\left(2N-1,\ \tfrac{1}{N}\right).$$

当選者が 3 人以下であることは $X \le 2$ を意味するので、厳密な確率は

$$\mathrm{P}(W \le 3) = \sum_{k=0}^{2} \binom{2N-1}{k} \left(\frac{1}{N}\right)^k \left(1-\frac{1}{N}\right)^{2N-1-k}.$$

すべて書き出すと、これは

$$\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2N-1} + \frac{2N-1}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2N-2} + \frac{(2N-1)(2N-2)}{2N^2}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2N-3}.$$

近似

固定した各 $k \in \{0,1,2\}$ について、累乗を次のように分ける。

$$\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2N-1-k} = \left[\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N}\right]^{2}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{-(1+k)}.$$

与えられた事実を $a=1$、$n=N$ として用いると、角括弧の中はおよそ e^{-1} である。最後の因子は 1 に非常に近い数の固定された小さな累乗なので、およそ 1 である。よって各累乗はおよそ e^{-2} である。

二項係数については、k は高々 2 で N は大きいので

$$\binom{2N-1}{k}\frac{1}{N^k} = \frac{(2N-1)(2N-2)\cdots(2N-k)}{k!\,N^k} \approx \frac{(2N)^k}{k!\,N^k} = \frac{2^k}{k!}.$$

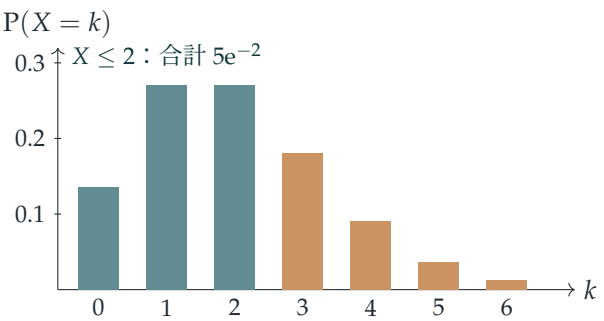
これらを合わせると、$k=0,1,2$ の項はそれぞれおよそ e^{-2}、$2\mathrm{e}^{-2}$、$2\mathrm{e}^{-2}$ となるので

$$\mathrm{P}(W \le 3) \approx \mathrm{e}^{-2}\left(1+2+\frac{2^2}{2!}\right) = 5\mathrm{e}^{-2} \approx 0.677 \approx \frac{2}{3},$$

ここで $\mathrm{e}^2 \approx 7.39$ を用いた。これが求める結果である。

考えてみよう なぜ X は平均 2 のポアソン変数のように振る舞うのだろうか。

上の計算は、二項分布の標準的なポアソン極限である。試行回数 $2N-1$ は大きく、成功確率 $\frac{1}{N}$ は小さく、その積は 2 に近いまま保たれる。このような状況では $\lambda = np$ として $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \to \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k/k!$ が成り立ち、ここでは $\lambda \to 2$ である。



X の極限分布は平均 2 のポアソン分布である。青緑色の棒（$X \le 2$、すなわち当選者が全部で 3 人以下）は全体のおよそ 3 分の 2 を占める。

プレイヤーが自分で番号を選ぶ場合

プレイヤーが番号を選ぶ場合、番号はもはや一様ではない。人は誕生日（31 までの数）、ラッキーナンバー、規則的な並びを好むからである。プレイヤーが番号 i を確

率 p_i（$\sum p_i = 1$）で選び、当選番号は依然として一様に抽選されるとしよう。このとき、自分が当選したという条件のもとで、自分の番号が i である確率は $p_i \cdot \frac{1}{N}$ に比例し、すなわち p_i である。したがって、人気のある番号は当たり券の中に多く現れることになる。自分の番号が i のとき、他の当選者の人数は $\mathrm{B}(2N-1, p_i)$ に従い、その平均は $(2N-1)p_i$ である。i について平均をとると、他の当選者の人数の期待値は

$$(2N-1)\sum_i p_i^2 \;\geq\; (2N-1)\cdot\frac{1}{N},$$

となる。これはコーシー（Cauchy）・シュワルツ（Schwarz）の不等式（Cauchy–Schwarz inequality）$(\sum p_i)^2 \leq N\sum p_i^2$ による。等号はすべての $p_i = \frac{1}{N}$ のときに限り成り立つ。したがって、番号の選び方が一様でないと、平均的には当選を分け合う人が増え、当選者が 3 人以下である確率は通常**減少する**。（人気のない番号を意図的に選ぶ一人のプレイヤーは平均より有利になるが、プレイヤー全体としては不利になる。）

当選者数の期待値

$X \sim \mathrm{B}\left(2N-1, \frac{1}{N}\right)$ であるから、その平均は $np = (2N-1)\cdot\frac{1}{N}$ である。（同じことだが、X を他のプレイヤー一人ひとりに対応する $2N-1$ 個の指示変数（indicator variable）の和として書けば、それぞれの平均は $\frac{1}{N}$ である。）したがって

$$\mathrm{E}(W) = 1 + \mathrm{E}(X) = 1 + \frac{2N-1}{N} = 3 - \frac{1}{N} = 3 - N^{-1},$$

となり、求める結果が得られた。これは近似ではなく厳密な値であることに注意しよう。

検算

- $N = 2$ および $N = 3$ について、$2N$ 人のプレイヤーへの番号の割り当てと当選番号をすべて数え上げると、二項分布の式とちょうど一致し、期待値もちょうど $3 - \frac{1}{N}$ となる。
- 厳密な確率は $N = 10$ で 0.7054、$N = 100$ で 0.6794、$N = 10\,000$ で 0.6767 であり、$5\mathrm{e}^{-2} = 0.67668$ に近づいていく。
- $N = 50$ のシミュレーション（10^5 週分）では、厳密値 0.682 に対して 0.683 が得られ、当選者数の平均は $3 - \frac{1}{50} = 2.98$ に対して 2.981 であった。
- $N = 10$ で、番号の半分が残りの半分の 2 倍人気がある場合、確率は 0.705 から 0.641 に下がり、当選者数の期待値は 2.9 から 3.11 に上がる。

よくある間違い

- 試行回数を $2N-1$ ではなく $2N$ とすること。自分の券が当たっていることはすでにわかっているので、偶然に左右されるのは他のプレイヤーだけである。試行回数を $2N$ とすると、期待値は $3-\frac{1}{N}$ ではなく $1+2=3$ になってしまう。
- 条件なしの平均を使うこと。すべての週を通じた当選者数の期待値は $2N\cdot\frac{1}{N}=2$ であるが、自分が当選していると知ることで確実な当選者が 1 人加わり、残りは他の $2N-1$ 人となる。
- $k=2$ の項を忘れること、あるいはそれを $\frac{1}{2!}$ を付けずに 2^2e^{-2} と書くこと。

STEP のその先へ

ここでの近似は少数の法則（law of rare events）である。すなわち、試行回数が多く成功確率が小さい二項分布はポアソン分布に収束（converge）する。最後の小問は、検査のパラドックス（inspection paradox）、あるいはサイズバイアス抽出（size-biased sampling）に関わっている。自分の券が当たったという条件を付けると混み合った番号が選ばれやすくなり、それが条件付き平均が 2 ではなく 3 になる理由である。どちらの考え方も、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）や、Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率入門）でよく扱われている。

解答例

STEP III 2000、第 13 問

確率・統計 ・ 確率母関数

STEP III 2000、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/00-s3-q13

鍵となる考え方

どちらの確率変数（random variable）も、「裾」の事象、すなわち「累積」の事象を通して扱うのが最も簡単である。最初の 6 が r 回目より後に出るのは、最初の r 回の投げのすべてにおいて**どの**さいころも 6 を出さないときであり、かつそのときに限る。最後の 6 が r 回目までに出ているのは、**各**さいころがすでに 6 を出しているときであり、かつそのときに限る。これらはいずれも独立な事象の共通部分であるから、その確率は積で表され、連続する値の差をとれば分布が得られる。最初の 6 に関する確率変数が幾何分布（geometric distribution）に従うと分かれば、それに関することはすべてすぐに求まる。

解答

以下では、さいころは互いに独立に振る舞い、また各回の投げも互いに独立であると仮定する。1 個のさいころについて、さいころ i が初めて 6 を出す回の番号を X_i とおくと、

$$\mathrm{P}(X_i > r) = q^r \qquad (r = 0, 1, 2, \dots),$$

である。$X_i > r$ は 6 以外が r 回続くことを意味するからである。このとき $R = \min_i X_i$、$S = \max_i X_i$ である。

最初の 6

事象 $R > r$ は、最初の r 回のうちに n 個のさいころのどれも 6 を出していないこと、すなわち nr 回の個々の投げがすべて 6 以外であったことを表す。独立性により、

$$\mathrm{P}(R > r) = q^{nr}.$$

したがって、$r \geq 1$ に対して

$$\mathrm{P}(R = r) = \mathrm{P}(R > r-1) - \mathrm{P}(R > r) = q^{n(r-1)} - q^{nr} = q^{nr}\left(q^{-n} - 1\right),$$

となり、これが求める結果である。

$Q = q^n$ とおくと、これは $\mathrm{P}(R = r) = Q^{r-1}(1-Q)$ と書ける。すなわち R は幾何分布に従い、さいころ全体を 1 回投げることが確率 $1-Q$ で「成功」（少なくとも 1 個が 6）となる。よって確率母関数（probability generating function）は等比級数となる：

$$\begin{aligned} G_R(t) = \sum_{r=1}^{\infty} t^r Q^{r-1}(1-Q) &= (1-Q)\,t \sum_{r=1}^{\infty} (Qt)^{r-1} \\ &= \frac{(1-q^n)\,t}{1-q^n t}, \end{aligned}$$

これは $|t| < q^{-n}$（特に $t = 1$ の近く）で成り立つ。

平均を求めるため、商の微分法（quotient rule）により微分すると、

$$G_R'(t) = (1-q^n)\,\frac{(1-q^n t) + q^n t}{(1-q^n t)^2} = \frac{1-q^n}{(1-q^n t)^2},$$

となるので、

$$\mathrm{E}(R) = G_R'(1) = \frac{1}{1-q^n}.$$

$n = 2$、$p = \frac{1}{6}$ のとき $q^2 = \frac{25}{36}$ であるから、$\mathrm{E}(R) = 1 \big/ \frac{11}{36} = \frac{36}{11}$ となり、求める結果を得る。

最後の 6

事象 $S \leq r$ は、最初の r 回のうちのどこかで、すべてのさいころが 6 を出していることを表す。1 個のさいころについてこの確率は $1-q^r$ であり、さいころは互いに独立であるから、

$$\mathrm{P}(S \leq r) = (1-q^r)^n.$$

連続する値の差をとると、$r \geq 1$ に対して

$$\mathrm{P}(S = r) = \mathrm{P}(S \leq r) - \mathrm{P}(S \leq r-1) = \left(1-q^r\right)^n - \left(1-q^{r-1}\right)^n,$$

となり、求める結果を得る。（$r = 1$ のとき第 2 項は $0^n = 0$ となり、正しい。）

考えてみよう $t^r\left[(1-q^r)^2-(1-q^{r-1})^2\right]$ の和をとるのは煩雑に見える。どうすれば等比級数に帰着できるだろうか？

$n=2$ のとき、平方を展開すると

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(S=r) &= \left(1-2q^r+q^{2r}\right)-\left(1-2q^{r-1}+q^{2r-2}\right)\\ &= 2q^{r-1}(1-q)-q^{2(r-1)}(1-q^2)\\ &= 2p\,q^{r-1}-(1-q^2)\,(q^2)^{r-1}.\end{aligned}$$

各項は幾何分布（の定数倍）であるから、

$$G_S(t)=\sum_{r=1}^{\infty}t^r\,\mathrm{P}(S=r)=\frac{2pt}{1-qt}-\frac{(1-q^2)\,t}{1-q^2t}.$$

これは理にかなっている。$S=X_1+X_2-R$ であるから、その分布は「パラメータ p の幾何分布の 2 倍から R の分布を引いたもの」になるのである。整理するために、全体を $(1-qt)(1-q^2t)$ で通分し、$1-q^2=p(1+q)$ を用いると、

$$\begin{aligned}2p(1-q^2t)-p(1+q)(1-qt) &= p\left[2-2q^2t-1-q+qt+q^2t\right]\\ &= p\left[(1-q)+qt(1-q)\right]=p^2(1+qt).\end{aligned}$$

したがって

$$G_S(t)=\frac{p^2\,t\,(1+qt)}{(1-qt)(1-q^2t)}.$$

確認として、$G_S(1)=\dfrac{p^2(1+q)}{p\cdot p(1+q)}=1$ である。

平均を求めるには、分解した形を微分するのが最も簡単である。各部分は幾何分布の確率母関数であり、その 1 における導関数は、係数倍された平均となるからである。$\dfrac{(1-a)t}{1-at}$ の $t=1$ における微分係数は $\dfrac{1}{1-a}$ である（上の G_R の場合とまったく同じ）から、

$$\mathrm{E}(S)=G_S'(1)=2\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{1-q^2}=\frac{2(1+q)-1}{p(1+q)}=\frac{1+2q}{p(1+q)}.$$

$p=\frac{1}{6}$、$q=\frac{5}{6}$ のとき、

$$\mathrm{E}(S)=12-\frac{36}{11}=\frac{96}{11}\approx 8.73.$$

検算

- $\mathrm{E}(R)+\mathrm{E}(S)=\frac{36}{11}+\frac{96}{11}=12=\mathrm{E}(X_1)+\mathrm{E}(X_2)$ である。$\min+\max=X_1+X_2$ であるから、当然こうならなければならない。

- $n = 1$ のとき最初の 6 と最後の 6 は一致し、G_R は 1 個のさいころの幾何分布の確率母関数 $pt/(1-qt)$ に帰着する。
- さいころの組 2×10^5 組についてモンテカルロ・シミュレーション（Monte Carlo simulation）を行ったところ、標本平均は 3.274 と 8.709 となり、理論値 $\frac{36}{11} \approx 3.273$ と $\frac{96}{11} \approx 8.727$ とよく合った。また、G_S の級数を数値的に和をとって計算すると、いくつかの t の値で閉じた形と一致した。

よくある間違い

- $\mathrm{P}(S = r)$ を「あるさいころが r 回目に初めて 6 を出し、他のさいころはそれより前に出した」として書き、両方のさいころが同じ回に初めて 6 を出す場合を見落とすこと。$\mathrm{P}(S \leq r)$ を用いれば、この問題は完全に避けられる。
- 分解した形ではなく、整理した G_S を微分すること。正しくはあるが、計算量がはるかに多く、誤りの機会も多い。

STEP のその先へ

R と S は独立な確率変数の最小値と最大値であり、**順序統計量**（order statistics）の最も簡単な例である。$\mathrm{P}(\min > r)$ と $\mathrm{P}(\max \leq r)$ を用いる手法は、どんな分布に対しても有効である。無記憶性（memoryless property）をもつ幾何分布は指数分布（exponential distribution）の離散版であり、連続極限では、n 個の指数分布に従う確率変数の最大値の期待値は調和和 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$（に平均を掛けたもの）となる。これはクーポン収集問題（coupon collector's problem）における重要な一歩である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、母関数とこれらの考え方が詳しく扱われている。

解答例

STEP III 2000、第 14 問

確率・統計 ・ 共分散と独立性

STEP III 2000、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/00-s3-q14

鍵となる考え方

欠けている 4 つ目の確率を埋めてから、$\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ を項ごとに書き出す。すべては 1 つの因数 $a - pq$ と、決して 0 にならない式との積にまとまる。そして $a = pq$ とは、まさに左上のセルが積に分解される（因数分解できる）という主張にほかならない。2×2 の表では、1 つのセルが積に分解されれば、周辺の和の条件によって残りの 3 つのセルも同様に分解される。値が 3 つになると自由度が増え、対称な表によってこの結び付きが断ち切られる。

解答

恒等式

4 つの確率の和は 1 であるから、

$$\mathrm{P}(X = x_2, Y = y_2) = 1 - a - (q - a) - (p - a) = 1 - p - q + a.$$

行と列に沿って足し合わせると、周辺分布（marginal distribution）が得られる：

$$\mathrm{P}(X = x_1) = a + (q - a) = q, \qquad \mathrm{P}(Y = y_1) = a + (p - a) = p,$$

したがって $\mathrm{P}(X = x_2) = 1 - q$、$\mathrm{P}(Y = y_2) = 1 - p$ である。これが p と q の本当の意味である。

	y_1	y_2	
x_1	a	$q-a$	q
x_2	$p-a$	$1-p-q+a$	$1-q$
	p	$1-p$	

ここで

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY) &= a\,x_1y_1 + (q-a)\,x_1y_2 + (p-a)\,x_2y_1 + (1-p-q+a)\,x_2y_2,\\ \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) &= \big(qx_1 + (1-q)x_2\big)\big(py_1 + (1-p)y_2\big)\\ &= pq\,x_1y_1 + q(1-p)\,x_1y_2 + p(1-q)\,x_2y_1 + (1-p)(1-q)\,x_2y_2.\end{aligned}$$

係数ごとに引き算すると、

$$\begin{aligned}x_1y_1 :&\quad a - pq,\\ x_1y_2 :&\quad (q-a) - (q-pq) = -(a-pq),\\ x_2y_1 :&\quad (p-a) - (p-pq) = -(a-pq),\\ x_2y_2 :&\quad (1-p-q+a) - (1-p-q+pq) = a-pq.\end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = (a-pq)(x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2) = (a-pq)(x_1-x_2)(y_1-y_2).$$

したがって $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ ならば左辺は 0 であり、$(a-pq)(x_1-x_2)(y_1-y_2) = 0$ となる。これが示すべきことであった。

独立性

それぞれが相異なる 2 つの値をとる確率変数（random variable）の組は、適当な a, p, q を用いて上の形の同時分布表（joint table）をもつ（各セルに名前を付ければよい）。$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ ならば上の積は 0 である。$x_1 \neq x_2$ かつ $y_1 \neq y_2$ であるから後ろの 2 つの因数は 0 でなく、ゆえに $a = pq$ である。

> **考えてみよう**　これで 1 つのセルが積に分解されることがわかった。なぜそれで残りの 3 つも決まるのだろうか？

それは、他の各セルが「周辺確率から既知のセルを引いたもの」になっているからで

ある：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(X = x_1, Y = y_2) = q - pq = q(1-p) = \mathrm{P}(X = x_1)\,\mathrm{P}(Y = y_2),\\
&\mathrm{P}(X = x_2, Y = y_1) = p - pq = p(1-q) = \mathrm{P}(X = x_2)\,\mathrm{P}(Y = y_1),\\
&\mathrm{P}(X = x_2, Y = y_2) = 1 - p - q + pq = (1-p)(1-q) = \mathrm{P}(X = x_2)\,\mathrm{P}(Y = y_2).
\end{aligned}$$

すべてのセルが周辺確率の積になっているので、X と Y は独立（independent）である。（逆に、独立ならば $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ が成り立つことはよく知られているので、2 値の確率変数についてはこの 2 つの条件は同値である。）

3 値の例

A と B はいずれも $\{-1, 0, 1\}$ 上の一様分布（uniform distribution）に従うから $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 0$ である。したがって、どの行の和もどの列の和も $\frac{1}{3}$ で、$\mathrm{E}(AB) = 0$ となるが、すべてのセルが $\frac{1}{9}$ に等しいわけではないような表を作ればよい。対称な選び方がうまくいく：

	$B=-1$	$B=0$	$B=1$
$A=-1$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
$A=0$	0	$\frac{1}{3}$	0
$A=1$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$

各行・各列の和は $\frac{1}{3}$ であるから、A と B はそれぞれ $-1, 0, 1$ を確率 $\frac{1}{3}$ でとる。積 ab が 0 でないのは四隅のみであり、

$$\mathrm{E}(AB) = \tfrac{1}{6}(1) + \tfrac{1}{6}(-1) + \tfrac{1}{6}(-1) + \tfrac{1}{6}(1) = 0 = \mathrm{E}(A)\mathrm{E}(B).$$

しかし $\mathrm{P}(A = 0, B = 0) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{9} = \mathrm{P}(A = 0)\,\mathrm{P}(B = 0)$ であるから、A と B は独立ではない。言葉で言えば、$B = 0$ となるのはちょうど $A = 0$ のときであり、それ以外のときは A の値によらず B は等確率で ± 1 をとる。

検算

- $X = Y$、$x_1 = y_1 = 1$、$x_2 = y_2 = 0$ としてみる。このとき $a = p = q$ であり、恒等式は $\mathrm{Var}(X) = p - p^2$ を与える。これはベルヌーイ（Bernoulli）変数として正しい。
- この恒等式は多項式の恒等式として成り立つ。x_i, y_i, a, p, q を無作為に 2000 通り選び、有理数演算で厳密に確かめた。同じ計算で 3 値の表も確認した：周辺確率はすべて $\frac{1}{3}$、$\mathrm{E}(AB) = 0$、$\mathrm{P}(A = 0, B = 0) = \frac{1}{3}$ である。

よくある間違い

- $a = pq$ を示したところで止めてしまう。独立性には**すべての**セルが積に分解されることが必要なので、残りの 3 つも（手短にでよいから）確かめる必要がある。
- $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)$ で割ってよい理由を書き忘れる。値が相異なるので、これは 0 でない。
- 最後の小問で $B = A^2$ や $B = |A|$ を答えてしまう。これらは共分散が 0 で独立でない例ではあるが、B が -1 をとることがないので、要求された周辺分布をもたない。

STEP のその先へ

量 $\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ は共分散（covariance）であり、この問題は「無相関（uncorrelated）」が「独立」よりも弱い条件であることを示している。ただし 2 値の（指示変数（indicator）のような）確率変数は例外であり、その場合は恒等式によってすべてが 2 つの指示変数の共分散に帰着する。今後出会う関連した事実として、同時正規分布（jointly normal）に従う確率変数については、共分散が 0 ならば独立であることが成り立つ。さらに学ぶには、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）や、Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率入門）を参照するとよい。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

2000 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.