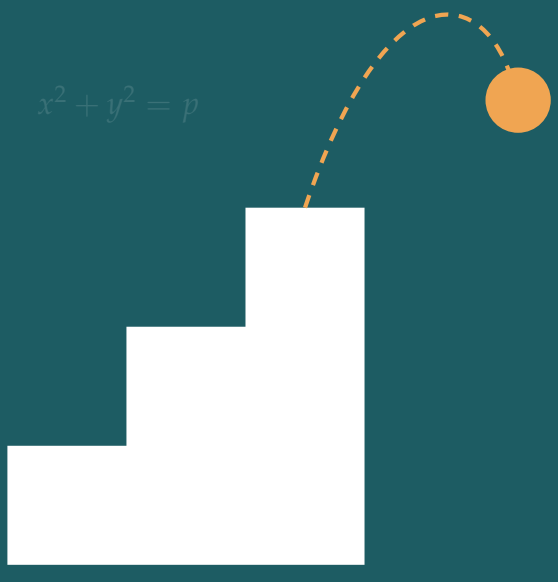
STEP 対策 · 大学の数学

# Beyond STEP

## STEP I, II と III

1999 年解答例



KEITH McNULTY

# Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

1999 年解答例

Keith McNulty

**Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問**

**1999 年解答例**

1999 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 42 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

# 目次

## STEP I


Q1 互いに素な整数の数え上げ 純粋数学 . . . 3
Q2 軌跡と重心 純粋数学 . . . 6
Q3 巡回的な連立方程式 純粋数学 . . . 9
Q4 絶対値を含む領域 純粋数学 . . . 13
Q5 小さな角の近似 純粋数学 . . . 18
Q6 二次式の極値 純粋数学 . . . 22
Q7 2 階の微分方程式 純粋数学 . . . 26
Q8 調和級数の評価 純粋数学 . . . 30
Q9 等速運動の運動学 力学 . . . 34
Q10 単振動 力学 . . . 38
Q11 重力による円運動 力学 . . . 42
Q12 いかさまサイコロの不等式 確率・統計 . . . 46
Q13 指示変数 確率・統計 . . . 50
Q14 条件付き確率 確率・統計 . . . 53


## STEP II


Q1 大きな数の比較 純粋数学 . . . 56
Q2 二次式の判別式 純粋数学 . . . 60
Q3 数学的帰納法 純粋数学 . . . 64
Q4 二項係数の恒等式 純粋数学 . . . 68
Q5 三角方程式 純粋数学 . . . 72
Q6 置換積分 純粋数学 . . . 76
Q7 曲線の概形 純粋数学 . . . 80
Q8 三角級数 純粋数学 . . . 85

Q9 変化する力による運動 力学 89
Q10 繰り返される衝突 力学 94
Q11 放物運動と動く標的 力学 98
Q12 ベイズの定理 確率・統計 102
Q13 連続型確率変数 確率・統計 106
Q14 最適停止 確率・統計 110

## STEP III

Q1 3次方程式の解 純粋数学 114
Q2 実数解の個数 純粋数学 118
Q3 リーマン和と極限 純粋数学 122
Q4 オイラーの公式と多面体 純粋数学 126
Q5 フィボナッチ数の恒等式と帰納法 純粋数学 130
Q6 媒介変数表示された曲線と面積 純粋数学 133
Q7 群と同型 純粋数学 137
Q8 区分的な微分方程式 純粋数学 141
Q9 ニュートンの球殻定理 力学 145
Q10 落下する鎖の力積 力学 150
Q11 剛体の回転 力学 154
Q12 離散同時分布 確率・統計 158
Q13 連続な事前分布をもつベイズ推論 確率・統計 161
Q14 条件付けによる期待値 確率・統計 164

解答例

# STEP I 1999、第 1 問

純粋数学 ・ 互いに素な整数の数え上げ

> **STEP I 1999、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q1

## 鍵となる考え方

2 や 5 で割り切れる（divisible）かどうかは最後の桁だけで決まり、3 や 7 で割り切れるかどうかは 21 を法とする剰余（remainder modulo 21）だけで決まる。したがって、求める整数はブロックごとに一定のパターンで繰り返し現れるので、数え上げは 1 つのブロックを数えて掛け算するだけで済む。平均については、対称性（symmetry）を使うのが要点である。$n$ が集合に属するならその「相方」$N-n$ も集合に属するので、数は中点を挟んでペアに分かれる。

## 解答

### 小問 1：100 万未満で、2 でも 5 でも割り切れない整数

「2 でも 5 でも割り切れない」とは、どちらでも割り切れないという意味である。整数が 2 または 5 で割り切れるのは、最後の桁が $0,2,4,5,6$ または 8 のとき、かつそのときに限る。よって、最後の桁が 1、3、7、9 のいずれかである整数を数えればよい。

整数 $0,1,\ldots,999\,999$ は、連続する 10 個の整数 $10k, 10k+1,\ldots,10k+9$ からなる 100 000 個のブロックに分かれ、各ブロックには求める整数がちょうど 4 個ずつ含まれる。したがって個数は

$$4\times 100\,000 = 400\,000.$$

である（包除原理（inclusion–exclusion）を使っても同じ結果 $10^6-\frac{1}{2}10^6-\frac{1}{5}10^6+\frac{1}{10}10^6=400\,000$ が得られる）。

平均を求めるために、このような $n$ のそれぞれを $10^6-n$ と組にする。$n$ の最後の桁が $1,3,7,9$ ならば、$10^6-n$ の最後の桁はそれぞれ $9,7,3,1$ であり、また $n\neq 0$ だから

$0 < 10^6 - n < 10^6$ である。よって $n \mapsto 10^6 - n$ はこの集合をそれ自身に写し、しかもそれ自身が自分の逆写像（inverse）である。$n = 500\,000$ は偶数なので、この写像は不動点（fixed point）をもたない。したがって集合は和が $10^6$ である $200\,000$ 組のペアに分かれる。総和は $200\,000 \times 10^6$ であり、平均は

$$\frac{200\,000 \times 10^6}{400\,000} = 500\,000.$$

である。

### 小問 2：4179 未満で、3 でも 7 でも割り切れない整数

4179 という数は注意深く選ばれている：

$$4179 = 3 \times 1393 = 3 \times 7 \times 199 = 21 \times 199.$$

$n$ が 3 または 7 で割り切れるかどうかは、$n$ を 21 で割った余りだけで決まる。余り $0, 1, \ldots, 20$ のうち、3 の倍数は $0, 3, \ldots, 18$（7 個）、7 の倍数は $0, 7, 14$（3 個）であり、0 は両方で数えられている。よって $21 - 7 - 3 + 1 = 12$ 個の余りがどちらでも割り切れない：

$$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 10,\ 11,\ 13,\ 16,\ 17,\ 19,\ 20.$$

整数 $0, 1, \ldots, 4178$ は、21 個からなる完全なブロックちょうど 199 個で構成されるので、個数は

$$12 \times 199 = 2388.$$

である。検算として包除原理を使うと $4179 - 1393 - 597 + 199 = 2388$ となる。

> **考えてみよう** ここでは数が十進法の桁とは何の関係もないのに、なぜ対称性の工夫がやはり使えるのだろうか。

鍵は 21 が 4179 を割り切ることである。このとき $4179 - n \equiv -n \pmod 3$ かつ $\pmod 7$ なので、$3 \mid 4179 - n$ であることと $3 \mid n$ であることは同値であり、7 についても同様である。また $n = 0$ は除かれる（あらゆる数で割り切れるから）ので、集合に属するどの $n$ も $1 \le n \le 4178$ を満たし、このとき $1 \le 4179 - n \le 4178$ も成り立つ。よって $n \mapsto 4179 - n$ はこの集合をそれ自身に写す。4179 は奇数なので、この写像は不動点をもたない。したがって 2388 個の整数は和がそれぞれ 4179 である 1194 組のペアをなし、平均は

$$\frac{1194 \times 4179}{2388} = \frac{4179}{2} = 2089\tfrac{1}{2}.$$

である。

## 検算

コンピュータですべての整数を調べると、個数 400 000 と 2388、および平均 500 000 と 2089.5 が正確に確認できる。小さな場合を手計算で確かめることもできる。21 未満では、上に挙げた 12 個の余りの和は $126 = 12 \times \frac{21}{2}$ なので、その平均は $10.5 = \frac{21}{2}$ となり、ペアにする議論の予測とぴったり一致する。

## よくある間違い

- 「2 でも 5 でも割り切れない」を「両方では割り切れない」、すなわち 10 で割り切れない、と読んでしまう。そう読むと 900 000 個になってしまう。
- 包除原理で、21 の倍数（または 10 の倍数）を足し戻すのを忘れる。これらは 2 回引かれているからである。
- 集合が対称であることを確かめずに、平均は範囲の中点に違いないと思い込む。ここでうまくいくのは、10 が $10^6$ を割り切り、21 が 4179 を割り切るからにすぎない。

## STEP のその先へ

$1, \ldots, m$ のうち $m$ と互いに素（coprime）な整数の個数は、オイラー（Euler）のトーシェント関数（Euler's totient function）$\varphi(m)$ である。ここでは $\varphi(10) = 4$、$\varphi(21) = 12$ であり、求めた個数は $\varphi(10^6) = 400\,000$ と $199\,\varphi(21)$ である。ペア $n \leftrightarrow m - n$ を考えると、$m > 2$ のとき $m$ と互いに素な整数の和は常に $\frac{1}{2} m\,\varphi(m)$ となることがわかる。これは $m$ を法とする整数の算術への第一歩となる事実である。さらに学ぶには、Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）が格好の一冊である。

解答例

# STEP I 1999、第 2 問

純粋数学 ・ 軌跡と重心

> **STEP I 1999、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q2

## 鍵となる考え方

条件を書き下して展開すると、$x^2$ と $y^2$ の係数がともに 3 で、$xy$ の項がない式が得られる。これは円であることの目印である。平方完成（completing the square）をすれば中心の位置がわかり、1 次の項にちょうど $x_1 + x_2 + x_3$ が現れるので、重心（centroid）が自然に登場する。$a^2$ に対する制約は、「半径の 2 乗」が負になってよいのはどのようなときかを問えば、おのずと導かれる。

## 解答

### 軌跡

$P = (x, y)$ を軌跡（locus）上の点とし、$i = 1, 2, 3$ に対して $A_i = (x_i, y_i)$ とおく。条件は

$$\sum_{i=1}^{3} \left[ (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right] = a^2.$$

である。これを展開し、$x_1 + x_2 + x_3 = 3\bar{x}$ および $y_1 + y_2 + y_3 = 3\bar{y}$ を用いると

$$3x^2 - 6\bar{x}\,x + 3y^2 - 6\bar{y}\,y + \sum_i (x_i^2 + y_i^2) = a^2.$$

となる。これが軌跡の方程式である。これが何を表すかを見るために、3 で割って平方完成すると

$$(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 = \frac{a^2 - \sum_i (x_i^2 + y_i^2) + 3\bar{x}^2 + 3\bar{y}^2}{3}.$$

を得る。分子はきれいに整理できる。$\sum_i x_i = 3\bar{x}$ であるから

$$\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i x_i^2 - 2\bar{x} \cdot 3\bar{x} + 3\bar{x}^2 = \sum_i x_i^2 - 3\bar{x}^2,$$

であり、$y$ についても同様である。そこで、3 点からその重心 $G=(\bar{x},\bar{y})$ までの距離の 2 乗の和を

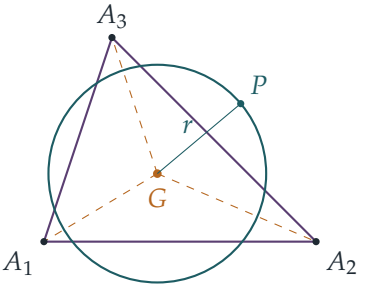
$$S=\sum_{i=1}^{3}\left[(x_i-\bar{x})^2+(y_i-\bar{y})^2\right]$$

とおけば、軌跡は

$$\boxed{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2=\frac{a^2-S}{3}}.$$

となる。

**解釈**。$a^2>S$ のとき、これは 3 点の重心 $G$ を中心とし、半径 $\sqrt{(a^2-S)/3}$ の円である。$a^2$ を変化させると、$G$ を中心とする同心円（concentric circles）の族が得られる。境界の場合 $a^2=S$ では、「円」は 1 点 $G$ に縮退する。




### $a^2$ が $S$ より小さくなり得ない理由

**考えてみよう**　枠で囲んだ方程式の右辺が負であるとは、どういうことか。

左辺 $(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2$ は実数の 2 乗の和であるから、決して負にならない。$a^2<S$ ならば右辺は負となり、方程式を満たす実数の点 $(x,y)$ は存在しない。すなわち軌跡は空集合である。したがって、点が題意のように動くことがそもそも可能であるためには、$a^2\geq S$ でなければならない。

同じ計算を逆向きに読むと、見通しがよくなる。実際に示したのは、すべての点 $P$ に対して成り立つ恒等式（identity）

$$PA_1^2+PA_2^2+PA_3^2=3\,PG^2+S.$$

である。$PG^2\geq 0$ であるから、和 $PA_1^2+PA_2^2+PA_3^2$ はつねに $S$ 以上であり、等号が成り立つのは $P=G$ のときに限る。言い換えれば、重心は 3 点までの距離の 2 乗の和を最小にする点であり、その最小値は $S$ である。この最小値より小さい一定の和 $a^2$ はあり得ない。

## 検算

- $A_1 = (0,0)$、$A_2 = (4,0)$、$A_3 = (1,3)$ とすると、$G = (\frac{5}{3}, 1)$ であり、$S = \frac{34}{9} + \frac{58}{9} + \frac{40}{9} = \frac{44}{3}$ である。$P = G$ における距離の 2 乗の和はちょうど $\frac{44}{3} \approx 14.67$ である。$P = (0,0)$ では和は $0 + 16 + 10 = 26$ であり、$3PG^2 + S = 3 \cdot \frac{34}{9} + \frac{44}{3} = 26$ となって、恒等式の予言どおりである。
- もう一つ便利な形として $S = \frac{1}{3}\left(A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_3A_1^2\right)$ がある。上の例では辺の長さの 2 乗は 16、18、10 であり、やはり $\frac{44}{3}$ を得る。
- 無作為に選んだ 2000 組の 3 点について、分数を用いて恒等式を厳密に確かめた。また、円上の点で和が $a^2$ となること、および和の最小値が $S$ であり、それが $G$ で達成されることを数値的に確認した。

## よくある間違い

- 半径を $\sqrt{\left(a^2 - \sum(x_i^2 + y_i^2)\right)/3 + \bar{x}^2 + \bar{y}^2}$ のままにして、$S$ を用いた形に気づかないこと。そうすると最後の部分の見通しが非常に悪くなる。
- 退化（degenerate）した場合 $a^2 = S$ を忘れること。このとき軌跡は円ではなく 1 点である。

## STEP のその先へ

恒等式 $\sum PA_i^2 = 3PG^2 + \sum GA_i^2$ は、慣性モーメント（moment of inertia）に関する平行軸の定理（parallel axis theorem）の一つの形である。また統計学では、平方和を「群間」と「群内」の部分に分解することにあたる。平均は偏差の 2 乗の和を最小にする値であり、これこそが最小二乗法（least squares）によるあてはめがうまくいく根本的な理由である。線形代数においては、これは姿を変えたピタゴラス（Pythagoras）の定理である。なぜなら、$G$ から $P$ へのベクトル（vector）は、和が零になる偏差 $A_i - G$ と（適切な意味で）直交（orthogonal）するからである。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）では、最小二乗法をこの射影（projection）の観点から展開している。

解答例

# STEP I 1999、第 3 問

純粋数学 ・ 巡回的な連立方程式

> **STEP I 1999、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q3

## 鍵となる考え方

各方程式は $f(x) = 1 + 1/x$ として $x_k = f(x_{k+1})$ という形をしており、連立方程式全体は一周して閉じたループをなす。隣り合う項の差は単純な規則に従う。すなわち、各差は次の差を 1 より大きい二つの数の積で割ったものである。したがって、ループを一周する間に差は縮むことしかできない。出発点に戻ってくるのだから、差はすべて 0 でなければならない。

以下を通して、添字は巡回的（cyclic）に読む。つまり $x_{n+1}$ は $x_1$ を、$x_{n+2}$ は $x_2$ を意味する。すると連立方程式のどの式も、ただ一つの形

$$x_k = 1 + \frac{1}{x_{k+1}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

で表される。

## 解答

### 小問 (i)

$x_k$ はすべて正であるから、すべての $k$ について $1/x_{k+1} > 0$ である。よって

$$x_k = 1 + \frac{1}{x_{k+1}} > 1 \qquad \text{ただし} k = 1, 2, \ldots, n,$$

であり、添字を巡回的に読んでいるので、これは $x_1, \ldots, x_n$ のすべてを尽くしている（最後のものは $x_n = 1 + 1/x_1$ である）。ゆえに $x_1, x_2, \ldots, x_n > 1$ である。

**小問 (ii)**

第 1 式から第 2 式を引くと

$$x_1 - x_2 = \left(1 + \frac{1}{x_2}\right) - \left(1 + \frac{1}{x_3}\right) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} = \frac{x_3 - x_2}{x_2 x_3} = -\frac{x_2 - x_3}{x_2 x_3},$$

となり、これが求める結果である。用いたのは $x_1 = 1 + 1/x_2$ と $x_2 = 1 + 1/x_3$ だけである（さらに $n \geq 3$ であるから、$x_3$ は別の変数である）。連続する任意の二つの式に対してまったく同じ計算を行えば、すべての $k$ について

$$x_k - x_{k+1} = -\frac{x_{k+1} - x_{k+2}}{x_{k+1} x_{k+2}} \qquad \text{(添字は巡回的)}.$$

が得られる。

**小問 (iii)**

隣り合う項の差を $d_k = x_k - x_{k+1}$ と書く。したがって $d_n = x_n - x_1$ である。(ii) の一般形は $d_k = -d_{k+1}/(x_{k+1}x_{k+2})$ となる。絶対値（absolute value）をとり、小問 (i) から $x_{k+1}x_{k+2} > 1$ であることを用いると

$$|d_k| = \frac{|d_{k+1}|}{x_{k+1}x_{k+2}} \leq |d_{k+1}|,$$

であり、$d_{k+1} \neq 0$ のときはつねに**狭義の**不等式（strict inequality）が成り立つ。これらをループに沿ってつなげると

$$|d_1| \leq |d_2| \leq |d_3| \leq \cdots \leq |d_n| \leq |d_1|.$$

両端は同じものであるから、この連鎖の不等式はすべて等号で成り立つ。特に $|d_1| = |d_2|$ である。ところが $d_2 \neq 0$ ならば狭義に $|d_1| < |d_2|$ となるはずだから、$d_2 = 0$ である。すると $|d_k|$ はすべて $|d_2|$ に等しいので、すべて 0 である。

**考えてみよう** 連立方程式が $x_n = 1 + 1/x_1$ によって閉じていることを、正確にはどこで使っただろうか。

使ったのは連鎖の最後の一つ $|d_n| \leq |d_1|$ だけであり、これは $x_n = 1 + 1/x_1$ から得られる。これがなければ、差は $k$ が増えるにつれて単に大きくなっていってもかまわない。実際、閉じていない連鎖 $x_1, \ldots, x_n$ は定数である必要はない。出発点に戻ってくることこそが、縮小がまったく起こらないことを強いるのである。

よって、すべての $k$ について $x_k = x_{k+1}$、すなわち $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ である。

### $x_1$ の値

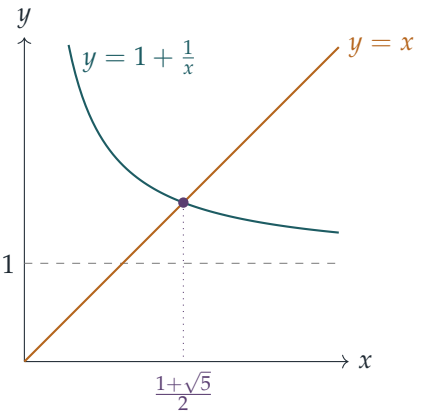
共通の値を $x$ とおく。どの式も $x = 1 + 1/x$ となるので

$$x^2 - x - 1 = 0, \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

小問 (i) より $x > 1$ であるから負の解は除かれ、

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

逆に、すべての $x_k$ をこの値とおけば $n$ 個の式すべてが実際に満たされるので、この連立方程式は確かにこの解をもち、(iii) により他の解はもたない。幾何学的には、$x$ は曲線 $y = 1 + 1/x$ と直線 $y = x$ の交点である。




## 検算

- $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180$ とすると $1 + 1/x \approx 1 + 0.6180 = 1.6180$ となり、確かに成り立つ。
- (ii) の恒等式は、閉じていない任意の連鎖で確かめられる。$x_3 = 2$ とすると $x_2 = \frac{3}{2}$、$x_1 = \frac{5}{3}$ である。このとき $x_1 - x_2 = \frac{1}{6}$ であり、$-(x_2 - x_3)/(x_2 x_3) = \frac{1/2}{3} = \frac{1}{6}$ である。
- ループを一周すると、$f(x) = 1 + 1/x$ として $x_1 = f^n(x_1)$ となる。$n = 3, \ldots, 11$ について区間 $(0, 20)$ で $f^n(x) - x$ を数値的に調べると、符号の変化は $x \approx 1.618$ の一か所だけであり、他に解がないことが確認できる。

## よくある間違い

- $|d_1| \leq |d_2|$ だけから (iii) を証明しようとする。一段階だけでは差が大きくならないことしか言えない。ループを一周して $|d_1|$ に戻ってくる必要がある。
- $x_k$ がすべて等しいと仮定してから $x_1$ を求める。それを正当化するのが小問 (iii) であり、そのためには小問 (i) から得られる狭義の不等式 $x_{k+1}x_{k+2} > 1$ が必要である。
- 負である $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ を除くのを忘れる。

## STEP のその先へ

この問題の核心は、$|f(a) - f(b)| = |a-b|/(ab)$ であるから、$f(x) = 1 + 1/x$ が $x > 1$ において点どうしを近づけるという点にある。このような写像を**縮小写像**（contraction）といい、バナッハ（Banach）の不動点定理（Banach fixed-point theorem）によれば、完備（complete）な空間上の縮小写像はただ一つの不動点（fixed point）をもち、どこから出発しても反復はその点に収束（converge）する。ここで $x = 1$ から反復すると、連続するフィボナッチ（Fibonacci）数の比 $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$ が得られ、黄金比（golden ratio）の連分数（continued fraction）$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}$ が得られる。解析学については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を読むとよい。連分数については Davenport, *The Higher Arithmetic*（初等整数論）を読むとよい。

解答例

# STEP I 1999、第 4 問

純粋数学 ・ 絶対値を含む領域

**STEP I 1999、問 4**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/99-s1-q4

## 鍵となる考え方

絶対値記号（modulus signs）は平面をいくつかの領域に分け、各領域ではそれぞれの括弧の中身の符号が一定になる。そのため各領域において、条件は通常の一次不等式（最後の小問では双曲線（hyperbola）に関する不等式）になる。もう一つ大きく時間を節約できるのが、対称性（symmetry）と平行移動（translation）である。$|x|$ と $|y|$ を含む集合は両方の座標軸に関して対称になるので、一つの象限（quadrant）だけで考えて折り返せばよい。また、$x$ を $x-1$ で置き換えると、図形はそのまま右へ 1 だけ平行移動する。

## 解答

### 小問 (i)

$x$ を $-x$ に、あるいは $y$ を $-y$ に置き換えても集合は変わらないので、この集合は両方の座標軸に関して対称である。第 1 象限（$x \geq 0, y \geq 0$）では、条件は単に $x+y \leq 1$ となり、これは頂点 $(0,0), (1,0), (0,1)$ をもつ三角形である。これを両方の軸に関して折り返すと四つの三角形が得られ、それらを合わせると一つの頂点を下にして立った正方形になる。その頂点は

$$(1,0), \quad (0,1), \quad (-1,0), \quad (0,-1).$$

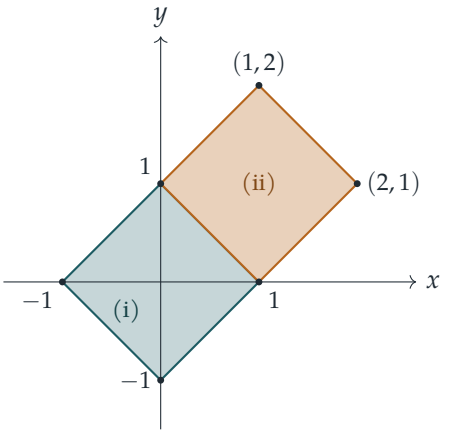
である。言い換えると、これは四つの半平面（half-plane）$\pm x \pm y \leq 1$ の共通部分である。境界も含まれ（不等式は $\leq$ である）、面積は 2 である。

**小問 (ii)**

$X = x - 1, Y = y - 1$ とおく。すると条件は $|X| + |Y| \leq 1$ となり、これは $(X, Y)$ 座標における小問 (i) そのものである。したがって、この集合は小問 (i) の正方形を $(1,1)$ だけ平行移動したものであり、中心は $(1,1)$、頂点は

$$(2,1), \quad (1,2), \quad (0,1), \quad (1,0),$$

で、直線 $x + y = 1, x + y = 3, y = x + 1, y = x - 1$ で囲まれている。この正方形は $(1,0)$ と $(0,1)$ で両方の座標軸に接する。




**小問 (iii)**

ここでも平行移動する。$X = x - 1, Y = y + 1$ とおくと、条件は

$$|X| \leq 1 + |Y|.$$

となる。これは $X$ 軸と $Y$ 軸の両方に関して、すなわち直線 $x = 1$ と $y = -1$ に関して対称である。象限 $X \geq 0, Y \geq 0$ では条件は $X \leq 1 + Y$ となり、これは $(1,0)$ を通る傾き 1 の直線 $X = 1 + Y$ より左側のすべての点を表す。折り返して考えると、この集合は二つの開いたくさび形の領域**を除いた**すべての点からなる。

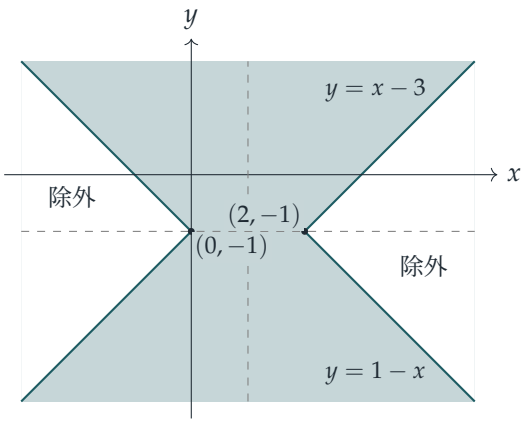
- 右側の $X > 1 + |Y|$：頂点が $(X, Y) = (1,0)$ で右に開き、$Y = \pm(X - 1)$ で囲まれた直角のくさび形の領域；
- 左側の $X < -1 - |Y|$：その鏡像で、頂点が $(-1,0)$ で左に開いた領域。

**考えてみよう** この集合は、(i) や (ii) のように有界（bounded）であろうか？

有界ではない。マイナス記号がすべてを変えてしまう。$|Y|$ を大きくすると条件は**より満たしやすく**なるので、固定した各 $Y$ に対して許される $X$ は区間 $-1 - |Y| \leq X \leq 1 + |Y|$

をなし、この区間は $|Y|$ が大きくなるにつれて広がる。特に、鉛直な直線 $X=0$（すなわち $x=1$）全体がこの集合に含まれる。

$x,y$ 座標に戻すと、頂点は $(2,-1)$ と $(0,-1)$ である。除かれる右側のくさび形は $x>2+|y+1|$ であり、$x\geq 2$ における半直線 $y=x-3$ と $y=1-x$ で囲まれる。除かれる左側のくさび形は $x<-|y+1|$ であり、$x\leq 0$ における $y=x-1$ と $y=-1-x$ で囲まれる。境界の直線そのものは集合に含まれる。直線 $y=-1$ 上では、集合はちょうど線分 $0\leq x\leq 2$ であり、ここが最も幅の狭いところである。




破線 $x=1$ と $y=-1$ が対称軸である。

**小問 (iv)**

$Y=y-2$ とおくと、条件は $|x|\,|Y|\leq 1$ となる。これは $x$ 軸と直線 $Y=0$（すなわち $y=2$）の両方に関して対称である。象限 $x\geq 0, Y\geq 0$ では次のようになる。

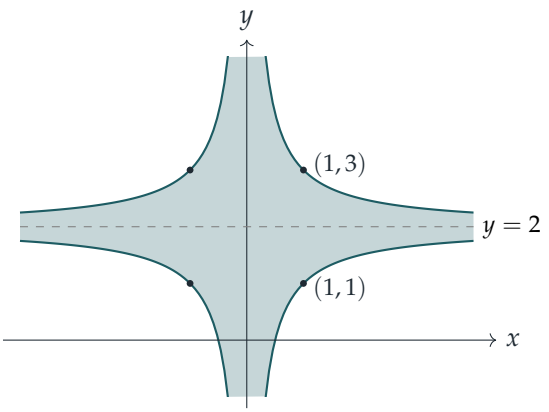
- $x=0$ ならば、条件はすべての $Y$ に対して成り立つので、$y$ 軸全体が集合に含まれる；
- $x>0$ ならば $x$ で割ってよく、条件は $0\leq Y\leq 1/x$ となる。これは双曲線 $Y=1/x$ の下側の領域である。

二つの対称軸に関して折り返すと、集合は

$$x=0,\quad \text{または}\quad 2-\frac{1}{|x|}\leq y\leq 2+\frac{1}{|x|}\ \ (x\neq 0),$$

となり、双曲線 $(y-2)x=\pm 1$ の四本の枝に挟まれた領域である。この集合は $y$ 軸全体と直線 $y=2$ 全体を含み、これらは境界曲線の漸近線（asymptote）である。形は $(0,2)$ を中心とする太いプラス記号のようである。「正方形」$|x|\leq 1, |y-2|\leq 1$ の角は境界上の点 $(\pm 1,1)$ と $(\pm 1,3)$ にあり、$|x|\to\infty$ のとき腕は $y=2$ に向かって細くなり、

$|y| \to \infty$ のとき縦の腕は $y$ 軸に向かって細くなる。この集合は有界ではない（しかも興味深いことに、面積は無限大である）。




## 検算

- いくつかの点を元の不等式で確かめる。(iii) では、$(1, 100)$ は $0 - 101 \leq 1$ を与えるので集合に含まれ（有界でないことが確認できる）、一方 $(2.01, -1)$ は $1.01 > 1$ を与え、右側の頂点のすぐ外側にある。(iv) では、$(2, 2.5)$ は $2 \times 0.5 = 1$ を与えるので境界上にあり、$(2, 2.51)$ はすぐ外側にある。
- (i) では、四つの三角形の面積はそれぞれ $\frac{1}{2}$ なので、正方形の面積は 2 である。格子点を数えると 2.002 が得られる。
- 各小問について $[-6, 6]^2$ 内の無作為な点 400,000 個を調べ、元の不等式と我々の記述（半平面、除かれるくさび形、あるいは $|y - 2| \leq 1/|x|$）を比較したところ、食い違いは一つもなかった。

## よくある間違い

- (ii) と (iii) で、平行移動の向きを逆にしてしまう。$|x - 1|$ は図形を $x = +1$ へ、$|y + 1|$ は図形を $y = -1$ へ移す。
- (iii) で、(i) からの類推で有界なひし形を描いてしまう。マイナス記号によって $|y + 1|$ の役割が逆転し、集合は有界でなくなる。
- (iv) で、$x = 0$ の場合を別に扱わずに $|x|$ で割ってしまい、$y$ 軸全体が集合に含まれるという事実を見落とす。

## STEP のその先へ

(i) の集合は「タクシー」ノルム（norm）$\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$ に関する単位球（unit ball）であり、(ii) は $(1,1)$ を中心とする半径 1 の球である。ノルムが異なれば単位球の形も異なる（通常の距離では円、$\max(|x|,|y|)$ では辺が水平な正方形）。解析学（analysis）や距離空間（metric space）の最初の講義では、$\mathbb{R}^2$ 上ではこれらのノルムがすべて同じ収束（convergence）と連続性（continuity）の概念を定めることを学ぶ。Bartle と Sherbert による *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は、こうした考え方に触れるのに良い本である。

解答例

# STEP I 1999、第 5 問

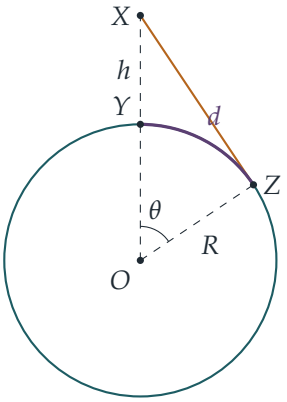
純粋数学 • 小さな角の近似

> **STEP I 1999、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q5

## 鍵となる考え方

「ちょうど地平線上に見える」とは、$Z$ から $X$ への視線が地球をかすめることを意味する。したがってこの視線は $Z$ における接線（tangent）であり、半径 $OZ$ に垂直である。これにより中心 $O$ を頂点にもつ直角三角形ができ、弧（arc）$YZ$ の長さは $O$ における角の $R$ 倍となる。二つの近似（approximation）は、この角が小さい場合と、直角に近い場合をそれぞれ考えることから得られる。

## 解答




### 小問 (i)

地球の中心を $O$ とし、$\theta = \angle YOZ$ とおく。$X$ は $Y$ の真上にあるから、3 点 $O, Y, X$ は同一直線上にあり、$OX = R + h$ である。$X$ は $Z$ からちょうど見えるので、直線 $ZX$

は $Z$ で地球に接し、半径 $OZ$ に垂直である。直角三角形 $OZX$ において

$$\cos\theta = \frac{OZ}{OX} = \frac{R}{R+h}.$$

半径 $R$ の円で中心角 $\theta$ に対する弧 $YZ$ の長さは $R\theta$ であるから

$$d = R\arccos\left(\frac{R}{R+h}\right).$$

ここで $0 < R/(R+h) < 1$ であるから、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ である。

### 小問 (ii)

$h$ が $R$ に比べて小さいとき、$\cos\theta = R/(R+h)$ は 1 に近いので $\theta$ は小さく、$\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ を用いてよい。また

$$\frac{R}{R+h} = 1 - \frac{h}{R+h} \approx 1 - \frac{h}{R},$$

である。$R + h \approx R$ だからである。両者を等しいとおくと

$$1 - \tfrac{1}{2}\theta^2 \approx 1 - \frac{h}{R} \quad\Longrightarrow\quad \theta^2 \approx \frac{2h}{R} \quad\Longrightarrow\quad \theta \approx \sqrt{\frac{2h}{R}},$$

となる。ただし $\theta > 0$ より正の平方根をとった。よって

$$d = R\theta \approx R\sqrt{\frac{2h}{R}} = \sqrt{2}\,(Rh)^{1/2},$$

であり、これは $k = \sqrt{2}$ とした求める形である。

### 小問 (iii)

今度は $R/(R+h)$ が小さいので、$\cos\theta$ は 0 に近く、$\theta$ は小さいのではなく $\frac{\pi}{2}$ に近い。与えられた近似は小さい角に対してしか使えないので、実際に小さい角のほうを測ることにする。

> **考えてみよう** ここで小さいのはどの角か。また、その角にはどの近似が使えるか。

$\theta = \frac{\pi}{2} - \phi$ とおく。ここで $\phi = \angle OXZ$ は衛星における角であり、衛星が遠くにあるとき小さい。すると $\cos\theta = \sin\phi$ であるから

$$\sin\phi = \frac{R}{R+h}.$$

答えには $R^2/h$ の項が含まれるので、これを $R/h$ について 2 次まで求める必要がある。$R/h < 1$ であるから二項展開（binomial expansion）が使えて

$$\frac{R}{R+h} = \frac{R}{h}\left(1 + \frac{R}{h}\right)^{-1} = \frac{R}{h} - \frac{R^2}{h^2} + \cdots.$$

$\sin\phi \approx \phi$ を用いると

$$\phi \approx \frac{R}{h} - \frac{R^2}{h^2}.$$

したがって

$$\begin{aligned} d = R\theta &= R\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \\ &\approx \frac{\pi}{2}R - \frac{R^2}{h} + \frac{R^3}{h^2}. \end{aligned}$$

最後の項は $R^2/h$ よりさらに $R/h$ 倍だけ小さいので、これを無視すると

$$d \approx \frac{\pi}{2}R - \frac{R^2}{h},$$

が得られる。これは $a = \frac{\pi}{2}, b = -1$ とした求める形である。

この次数までであれば $\sin\phi \approx \phi$ を用いても問題ない。この近似の誤差はおよそ $\frac{1}{6}\phi^3$ であり、これは $R^3/h^3$ のオーダーなので、$d$ には $R^4/h^3$ のオーダーでしか影響しないからである。

## 検算

- 極限が妥当である。$h \to 0$ のとき $d \to 0$ となる。$h \to \infty$ のとき $d \to \frac{\pi}{2}R$ となり、これは地球を 4 分の 1 周する長さである。非常に遠くにある衛星からはほぼ半球（hemisphere）全体が見えるということである。項 $-R^2/h$ は負なので、$d$ は下から $\frac{\pi}{2}R$ に近づく。$\theta < \frac{\pi}{2}$ であるから、そうでなければならない。
- 数値で確かめると、$R = 1, h = 10^{-4}$ のとき、厳密な $d$ を $\sqrt{2Rh}$ で割った値は 0.99996 である。$h = 1, R = 0.01$ のとき、厳密な $d$ と $\frac{\pi}{2}R - R^2/h$ の差は $9.9 \times 10^{-7}$ であり、予想どおりおよそ $R^3/h^2$ である。
- 半径 6370 km の地球の上空 300 km にある衛星では、厳密な $d$ は約 1918 km であり、$\sqrt{2Rh}$ によると 1955 km となる。

## よくある間違い

- 小問 (iii) で $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ を使ってしまう。そこでは $\theta$ は $\frac{\pi}{2}$ に近く、小さくない。
- 小問 (iii) で $R/(R+h)$ を 1 次までしか展開しない。すると $R^2/h$ の項が失われ、誤った $b$ が得られる。

## STEP のその先へ

どちらの小問も漸近展開（asymptotic expansion）である。厳密な $d$ を小さなパラメータ $h/R$ または $R/h$ のべきで展開し、誤差を評価しながら指定された次数までの項を残している。「$\approx$」をランダウの記号（big-$O$ notation）と剰余項つきのテイラーの定理（Taylor's theorem with remainder）を用いて厳密にすることは、大学 1 年次の解析学で扱う話題である。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照するとよい。Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（発展的な数学の問題集）には、この種の近似に関する STEP の演習がさらに収められている。

解答例

# STEP I 1999、第 6 問

純粋数学 ・ 二次式の極値

> **STEP I 1999、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q6

## 鍵となる考え方

閉区間（closed interval）上の直線は、その端点で最大値・最小値をとり、どちらの端点がどちらを与えるかは傾き（gradient）の符号だけで決まる。$c > 0$ の二次関数（quadratic）では、グラフは $\cup$ 字形の放物線（parabola）になる。最大値はやはり端点でとるが、最小値は**頂点（*vertex*）が区間内にあれば**頂点でとり、そうでなければ頂点に近い方の端点でとる。したがって、問題全体は頂点 $x = -b/(2c)$ が $[-10, 10]$ に対してどこに位置するかという問いに帰着する。

## 解答

### 小問 (i)

$f(x) = bx + a$ とおくと、$f(10) = a + 10b$、$f(-10) = a - 10b$ である。

- $b > 0$ のとき、$f$ は狭義単調増加（strictly increasing）であるから、最小値は $f(-10) = a - 10b$（$x = -10$ のとき）、最大値は $f(10) = a + 10b$（$x = 10$ のとき）である。
- $b = 0$ のとき、すべての $x$ に対して $f(x) = a$ であるから、最大値と最小値はともに $a$ である。
- $b < 0$ のとき、$f$ は狭義単調減少であるから、最大値は $f(-10) = a - 10b$（$x = -10$ のとき）、最小値は $f(10) = a + 10b$（$x = 10$ のとき）である。

三つの場合はすべて次のようにまとめられる。

$$\text{最大値} = a + 10|b|, \qquad \text{最小値} = a - 10|b|.$$

**小問 (ii)**

$c \geq 0$ として $g(x) = cx^2 + bx + a$ とおく。$c = 0$ ならばこれは小問 (i) そのものであり、答えは上と同じく $a \pm 10|b|$ である。以下では $c > 0$ とし、平方完成（completing the square）を行う。

$$g(x) = c\left(x + \frac{b}{2c}\right)^2 + a - \frac{b^2}{4c}.$$

グラフは頂点が $x_0 = -\dfrac{b}{2c}$ にある $\cup$ 字形の放物線であり、$g$ は**すべての**実数 $x$ にわたる最小値をここでとる。また、$g$ は $x < x_0$ で減少し、$x > x_0$ で増加する。端点での値は

$$g(10) = a + 100c + 10b, \qquad g(-10) = a + 100c - 10b.$$

である。

**最大値**。

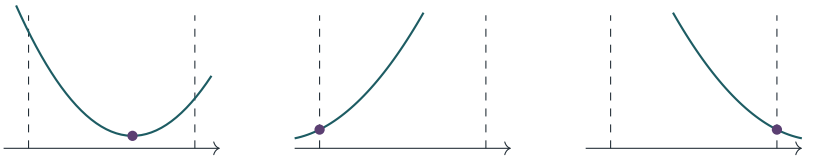
> **考えてみよう** 頂点がどこにあっても、区間上での $g$ の最大値が必ずいずれかの端点でとられるのはなぜか。

$c > 0$ であるから、$g(x)$ は距離 $|x - x_0|$ を通してのみ $x$ に依存し、その距離が大きくなるほど増加する。$[-10, 10]$ 上で距離 $|x - x_0|$ が最大になるのはいずれかの端点（$x_0$ から遠い方）である。よって最大値は $g(10)$ と $g(-10)$ の大きい方であり、両者の差は $g(10) - g(-10) = 20b$ である。したがって、

- $b > 0$ ならば、最大値は $a + 100c + 10b$ であり、$x = 10$ でとる。
- $b < 0$ ならば、最大値は $a + 100c - 10b$ であり、$x = -10$ でとる。
- $b = 0$ ならば、最大値は $a + 100c$ であり、両端点でとる。

いずれの場合も 最大値 $= a + 100c + 10|b|$ である。これは $c = 0$ のときにも成り立つ。

**最小値**。 ここでは $x_0$ の位置が問題になる。頂点が区間内にあるのは、ちょうど $-10 \leq -\frac{b}{2c} \leq 10$ のとき、すなわち（$2c > 0$ を掛けて）$-20c \leq b \leq 20c$、つまり $|b| \leq 20c$ のときである。




破線は $x = \pm 10$ であり、点は区間上での最小値を表す。

- $|b| \le 20c$（**頂点が区間内にある場合**）。最小値は全体での最小値

$$a - \frac{b^2}{4c}, \quad \text{ただし} x = -\frac{b}{2c}.$$

である。

- $b > 20c$（**頂点が左側、$x_0 < -10$ の場合**）。$[-10, 10]$ 上では $x > x_0$ であるから、$g$ はそこで増加し、最小値は $g(-10) = a + 100c - 10b$ であり、$x = -10$ でとる。
- $b < -20c$（**頂点が右側、$x_0 > 10$ の場合**）。このとき $g$ は区間全体で減少するから、最小値は $g(10) = a + 100c + 10b$ であり、$x = 10$ でとる。

区間外の二つの場合をまとめると、$|b| > 20c$ のとき 最小値 $= a + 100c - 10|b|$ となる。

? **考えてみよう** 境界 $|b| = 20c$ ではどうなるか。そこで二つの式は食い違わないか。

食い違わない。$b = 20c$ ならば $a - \frac{b^2}{4c} = a - 100c$ であり、$a + 100c - 10b = a - 100c$ でもある。このとき頂点はちょうど $x = -10$ にあるからである。$b = -20c$ の場合も同様である。したがって $b$ が $\pm 20c$ をまたぐとき答えは連続的に変化し、境界をどちらの場合に含めても構わない。

**まとめ**。 $-10 \le x \le 10$ かつ $c \ge 0$ のとき、

$$\text{最大値} = a + 100c + 10|b|, \qquad \text{最小値} = \begin{cases} a - \dfrac{b^2}{4c}, & c > 0 \text{ かつ} |b| \le 20c, \\ a + 100c - 10|b|, & |b| > 20c, \\ a, & b = c = 0. \end{cases}$$

$c = 0$、$b \ne 0$ の場合は $|b| > 20c = 0$ に含まれ、小問 (i) の結果に戻る。

## 検算

- $g(x) = x^2 + 4x + 1$ とする。$|b| = 4 \leq 20$ であるから、最小値は $x = -2$ における $1 - 4 = -3$、最大値は $x = 10$ における $1 + 100 + 40 = 141$ である。直接代入しても一致する。
- $g(x) = x^2 + 30x$ とする。$b = 30 > 20$ であるから、頂点 $x = -15$ は区間外にあり、最小値は $g(-10) = 100 - 300 = -200$ である。実際 $g(-10) = -200$ であり、$g$ は $[-10, 10]$ 上で増加する。
- 簡単なコンピュータ検証として、$c = 0$ や境界 $|b| = 20c$ を含む 1000 組のランダムな $(a, b, c)$ について、$[-10, 10]$ 内の 401 点での総当たり探索（有理数による厳密計算）と公式を比較した。すべての場合で一致した。

## よくある間違い

- 頂点が $[-10, 10]$ 内にあるかを確かめずに、$a - \frac{b^2}{4c}$ を最小値として答えてしまう。
- $c = 0$ の場合（頂点がなく、$c$ で割ることもできない）や $b = c = 0$ の場合を忘れる。
- 頂点が区間外にあるとき、どちらの端点が最小値を与えるかを取り違える。最小値を与えるのは頂点に**近い方**の端点である。

## STEP のその先へ

この問題の背後にあるのは最大値・最小値定理（Extreme Value Theorem）である。有界閉区間上の連続関数（continuous function）は最大値と最小値をとり、それらは端点か区間内部の停留点（stationary point）のいずれかでとられる。$c \geq 0$ の $cx^2 + bx + a$ のような凸関数（convex function）が端点で最大値をとるという観察は、凸最適化（convex optimisation）の第一歩であり、凸最適化は現代の応用数学の多くを支えている。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は最大値・最小値定理を丁寧に証明している。

解答例

# STEP I 1999、第 7 問

純粋数学 • 2 階の微分方程式

> **STEP I 1999、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q7

## 鍵となる考え方

関数 $\sin(k\sin^{-1}x)$ を 2 回微分するのは厄介に見えるが、$x=\sin\theta$ とおいて $y=\sin k\theta$ と書けば扱いやすくなる。1 回微分した式に $\sqrt{1-x^2}$ を掛けてからもう一度微分すると、計算が短くて済む。最後の部分の要点は、1 点における値と傾きが与えられた 2 階微分方程式（second-order differential equation）の解はただ一つしかない、ということである。したがって、求めた多項式は**必ず** $\sin(3\sin^{-1}x)$ に一致する。

## 解答

### 微分方程式

$-1<x<1$ において $y=\sin(k\sin^{-1}x)$ とする。$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^{-1}x=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を用いて連鎖律（chain rule）により

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{k\cos(k\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}},\qquad\text{したがって}\qquad\sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=k\cos(k\sin^{-1}x).$$

この 2 番目の形を $x$ で微分する（左辺には積の微分法（product rule）、右辺には連鎖律を用いる）：

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{k^2\sin(k\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{k^2y}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$-1<x<1$ では 0 でない $\sqrt{1-x^2}$ を両辺に掛けると

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+k^2y=0,$$

となり、これは求める $(*)$ である。

### $k = 3$ のときの 3 次式の解

$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ とおく。$x = 0$ で $y = 0$ という条件から $D = 0$、$x = 0$ で $\frac{dy}{dx} = 3$ という条件から $C = 3$ である。ここで

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \qquad y'' = 6Ax + 2B,$$

であり、$k^2 = 9$ として $(*)$ に代入すると

$$(1 - x^2)(6Ax + 2B) - x(3Ax^2 + 2Bx + C) + 9(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 0.$$

これはすべての $x$ について成り立たなければならないので、係数を比較する（comparing coefficients）：

$$\begin{aligned} x^3 &: \quad -6A - 3A + 9A = 0 \text{ （任意の } A \text{ で成立）}, \\ x^2 &: \quad -2B - 2B + 9B = 5B = 0, \\ x^1 &: \quad 6A - C + 9C = 6A + 8C = 0, \\ x^0 &: \quad 2B + 9D = 0. \end{aligned}$$

よって $B = 0$（$D = 0$ と矛盾しない）であり、$6A = -8C = -24$ から $A = -4$ を得る。求める解は

$$y = 3x - 4x^3.$$

### $\sin 3\theta$ を表す

**考えてみよう** 同じ方程式の解が 2 つある：$\sin(3\sin^{-1} x)$ と $3x - 4x^3$ である。なぜこれらは同じ関数でなければならないのか？

どちらも $k = 3$ のときの $(*)$ を満たし、どちらも $x = 0$ において同じ条件を満たす。多項式のほうはそうなるように作った。$y = \sin(3\sin^{-1} x)$ については $y(0) = \sin 0 = 0$ であり、上で求めた 1 階導関数から $y'(0) = 3\cos 0/1 = 3$ である。

$-1 < x < 1$ では $1 - x^2 \neq 0$ で $(*)$ を割ってよい。すると $y'' = \dfrac{xy' - 9y}{1 - x^2}$ となる。これは連続な係数をもつ 2 階線形微分方程式（linear second-order equation）であり、このような方程式で $x = 0$ における $y$ と $y'$ の値を与えた解はちょうど一つ存在する。（$x = 0$ から少しずつ進んでいく様子を思い浮かべるとよい。方程式は $y$ と $y'$ から $y''$ を決めるので、初期値がすべてを決定する。）したがって

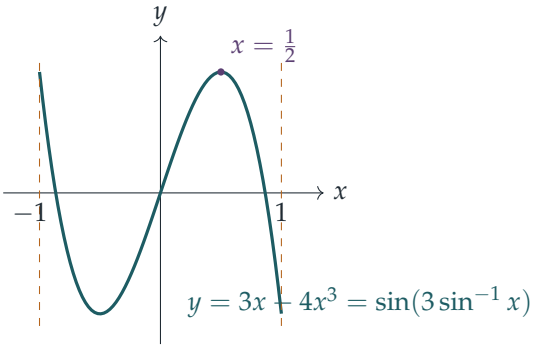
$$\sin(3\sin^{-1} x) = 3x - 4x^3 \qquad \text{、ただし } -1 < x < 1,$$

であり、連続性から $x = \pm 1$ でも成り立つ。

ここで $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ として $x = \sin\theta$ とおくと $\sin^{-1} x = \theta$ であるから

$$\boxed{\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.}$$

これは $|\theta| \le \frac{\pi}{2}$ に限らず、すべての $\theta$ について成り立つ。両辺とも周期（period）$2\pi$ をもつ。$\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$ のときは $\varphi = \pi - \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ とおく。すると $\sin\varphi = \sin\theta$ かつ $\sin 3\varphi = \sin(3\pi - 3\theta) = \sin 3\theta$ であるから、$\varphi$ についての恒等式から $\theta$ についての恒等式が得られる。




このグラフは、おなじみの曲線 $\sin 3\theta$ を $x = \sin\theta$ を通して見たものである。$\theta$ が $-\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}$ まで動くとき、$3\theta$ は 1 周期半ぶんの振動をなぞる。そのため $x = \pm\frac{1}{2}$（$3\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ となる点）に 2 つの極値点（turning points）が現れる。

## 検算

- $\theta = \frac{\pi}{2}$：$\sin\frac{3\pi}{2} = -1$ かつ $3 - 4 = -1$。　$\theta = \frac{\pi}{6}$：$\sin\frac{\pi}{2} = 1$ かつ $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$。
- 数値的には、$\theta = 0.7$ で $\sin 2.1 = 0.86321$、$3(0.64422) - 4(0.64422)^3 = 0.86321$ となる。
- 同じ恒等式は $\sin(2\theta + \theta)$ と 2 倍角の公式（double-angle formulae）からも導ける。これはよい独立した検算になる。

## よくある間違い

- $\dfrac{k\cos(k\sin^{-1} x)}{\sqrt{1-x^2}}$ を商の微分法（quotient rule）でそのまま微分する。正しいが、計算が煩雑になる。先に平方根を払っておくほうがはるかにすっきりする。
- 3 次式が $\sin(3\sin^{-1} x)$ に等しい**理由**を述べ忘れる。同じ方程式を満たすだけでは不十分で、2 つの解が $y(0)$ と $y'(0)$ も共有していなければならない。

## STEP のその先へ

方程式 $(*)$ はチェビシェフ（Chebyshev）の微分方程式である。$k = n$ が整数のときは多項式の解をもち、$\cos(n \cos^{-1} x)$ はチェビシェフ多項式（Chebyshev polynomial）$T_n(x)$ である。これは数値近似において中心的な役割を果たす。ここで用いた一意性定理（uniqueness theorem、ピカール–リンデレーフの定理（Picard–Lindelöf theorem））は、大学 1 年次の微分方程式の講義で証明される。このような方程式に対するべき級数（power series）による解法は、Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）で扱われている。

解答例

# STEP I 1999、第 8 問

純粋数学 • 調和級数の評価

**STEP I 1999、問 8**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/99-s1-q8

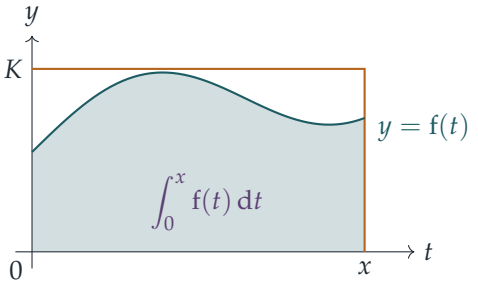
## 鍵となる考え方

積分（integral）は面積であるから、曲線を長方形の中に閉じ込めれば、その面積は 0 と長方形の面積の間に閉じ込められる。指定された被積分関数（integrand）は部分分数分解（partial fractions）によって分解でき、その積分はちょうど $\ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \frac{1}{n}$ になる。そして被積分関数の上下からの評価が求める不等式を与える。その後はすべてが次々に打ち消し合う（telescoping）。$n$ について和をとると、対数の連鎖は $\ln N$ になり、逆数の差の連鎖はほとんど何も残らない。

## 解答

### 積分を評価する

$0 \leq t \leq x$ における $y = \mathrm{f}(t)$ のグラフを描く。$0 \leq \mathrm{f}(t) \leq K$ であるから、曲線全体は $(0,0)$ と $(x,K)$ を頂点とする長方形の内部にあり、$t$ 軸上またはその上側にある。




積分は曲線の下の網かけ部分の面積である。曲線は決して軸より下に行かないから、

この面積は負にはならない。また、この領域は長方形の内部にあるから、面積は長方形の面積 $Kx$ を超えない。よって

$$0 \leq \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t \leq Kx.$$

### $\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$ に関する不等式

$n > 1$ とする。$0 \leq t \leq 1$ のとき $n - t \geq n - 1 > 0$ であるから、被積分関数は定義されている。これを部分分数に分解すると

$$\frac{t}{n(n-t)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n-(n-t)}{n-t} = \frac{1}{n-t} - \frac{1}{n},$$

となるので

$$\int_0^1 \frac{t}{n(n-t)}\,\mathrm{d}t = \left[-\ln(n-t) - \frac{t}{n}\right]_0^1 = \ln n - \ln(n-1) - \frac{1}{n} = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \frac{1}{n}.$$

次に、$[0,1]$ 上で被積分関数を評価する。分子 $t$ は非負で分母 $n(n-t)$ は正であるから、被積分関数は 0 以上である。$t$ が 0 から 1 まで増加するとき、分子は大きくなり正の分母は小さくなるから、被積分関数は増加し、その最大値は $t = 1$ でとる：

$$0 \leq \frac{t}{n(n-t)} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

最初の結果を $x = 1$、$K = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ として用いると

$$0 \leq \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

となり、求める不等式が得られる。

### $n = 2$ から $N$ までの和

$n = 2, 3, \ldots, N$（ただし $N \geq 2$）について不等式を足し合わせる。対数は次々に打ち消し合う。実際

$$\sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = \ln\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{N}{N-1}\right) = \ln N,$$

であり、右辺も同様である：

$$\sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right) = 1 - \frac{1}{N}.$$

したがって

$$0 \leq \ln N - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \leq 1 - \frac{1}{N} \leq 1.$$

（$N = 1$ のときは和は空であり $\ln 1 = 0$ であるから、このときも主張は成り立つ。）

**考えてみよう** この二重不等式のどちらの半分が調和級数（harmonic series）の発散を示し、どちらの半分が上界を与えるだろうか？

左半分は和が $\ln N$ **以下**であることを、右半分は和が $\ln N - 1$ **以上**であることを述べている。発散を示すには下界が必要なので、右半分を用いる。

### 発散

$\ln N - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \leq 1$ から $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \geq \ln N - 1$ が得られ、$n = 1$ の項を加えると

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq \ln N.$$

$N \to \infty$ のとき $\ln N \to \infty$ であるから、和も無限大に発散（diverge）する。

### $N < 10^{30}$ のときの評価

今度は左半分を用いる。$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \leq \ln N$ であるから

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq 1 + \ln N.$$

$2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$ であるから、両辺を 10 乗すると $10^{30} < 2^{100}$ が得られる。よって $N < 10^{30}$ ならば $N < 2^{100}$ であり、ln は増加関数であるから

$$\ln N < 100 \ln 2 < 100,$$

となる。ここで $\ln 2 < 1$ を用いた。これは $2 < \mathrm{e}$ から成り立つ。ゆえに

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq 1 + \ln N < 101.$$

## 検算

- $\int_0^1 \frac{t}{n(n-t)}\,\mathrm{d}t$ にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用した値は、$n > 1$ の多くの値について $\ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \frac{1}{n}$ と一致する。例えば $n = 2$ のとき、どちらも $\ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0.193$ となり、これは 0 と $\frac{1}{2}$ の間にある。
- $2 \times 10^5$ 以下のすべての $N$ について、$\ln N - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n}$ は $[0, 1]$ に含まれる。$N = 2 \times 10^5$ のとき、その値は約 0.4228 であり、$1 - \gamma \approx 0.4228$ に近い。ここで $\gamma$ はオイラー（Euler）の定数である。
- この評価にはかなり余裕がある。$1 + 30 \ln 10 \approx 70.1$ であり、実際には $\sum_{n=1}^{10^{30}} \frac{1}{n} \approx 69.65$ である。調和級数は発散するが、きわめてゆっくりと発散するのである。

## よくある間違い

- 二重不等式の誤った側を用いること。発散を示すには和の**下界**が必要であり、最後の小問では**上界**が必要である。
- $n = 1$ の項を忘れること。不等式は $\sum_{n=2}^{N}$ についてのものであるが、結論は $\sum_{n=1}^{N}$ についてのものである。
- 被積分関数の最大値が $t = 1$ でとられることの根拠を示さないこと。増加関数であると述べる（あるいは単に $t \leq 1$ かつ $n - t \geq n - 1$ であると述べる）だけで十分である。

## STEP のその先へ

量 $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln N$ は減少し、かつ下に有界であるから、収束（converge）する。その極限がオイラーの定数 $\gamma \approx 0.5772$ であり、$\gamma$ が有理数（rational）であるかどうかはいまだに誰にもわかっていない。ここで行ったように和と積分を比較する方法は**積分判定法**（integral test）と呼ばれ、大学 1 年目の解析学（analysis）の講義で級数について最初に学ぶ道具の一つである。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、これが厳密に定式化される様子を見るのによい本である。

解答例

# STEP I 1999、第 9 問

力学 ・ 等速運動の運動学

**STEP I 1999、問 9**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

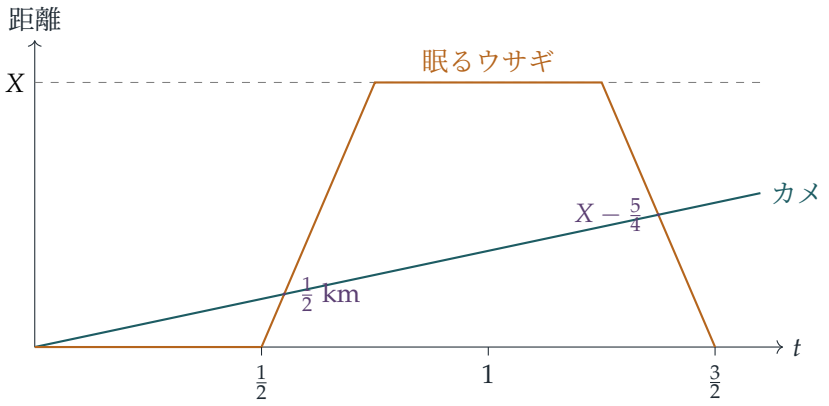
step.maths.org/questions/99-s1-q9

## 鍵となる考え方

すべての運動は一定の速さで行われるので、どの移動時間も単に距離を速さで割ったものである。2 匹が出会うたびに、両者は同じ時刻に同じ場所にいる。そこで、それぞれについて時計の時刻を書き出し、両者を等しいとおく。2 回の出会いから、$v$ と $V$ についての 2 つの方程式が得られる。$1/v$ と $1/V$（1 キロメートルあたりの時間）を用いると、方程式は線形（linear）のままである。

## 解答

2 匹はどちらも同じ直線コースに沿って一定の速さで動くとモデル化し、折り返しにかかる時間は無視する。時刻 $t$ はスタートから時間（hour）単位で測る。距離–時間グラフ（distance–time graph）の略図（最後に求める $X$ の値で描いたもの）に、用いる 2 つの交点を示す。



### 1 回目の出会い

カメはスタートから $\frac{1}{2}$ km の地点に時刻 $\dfrac{1/2}{v}$ に到達する。ウサギは $t=\frac{1}{2}$ に出発し、同じ地点に時刻 $\frac{1}{2}+\dfrac{1/2}{V}$ に到達する。2 匹はそこに同時にいるので、

$$\frac{1}{2v}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2V},\qquad \text{すなわち}\qquad \frac{1}{v}=1+\frac{1}{V}. \tag{1}$$

### 2 回目の出会い

ウサギは時刻 $\frac{1}{2}+\dfrac{X}{V}$ に野菜畑に到達し、30 分眠って、$1+\dfrac{X}{V}$ に出発する。その後 $\frac{5}{4}$ km 走って戻るので、カメと出会う時刻は

$$1+\frac{X}{V}+\frac{5}{4V}=1+\frac{X+\frac{5}{4}}{V}.$$

である。カメはまだ往路の途中で、スタートから $X-\frac{5}{4}$ km の地点にいるので、$\dfrac{X-\frac{5}{4}}{v}$ 時間歩いてきたことになる。2 つの時刻を等しいとおくと、

$$\frac{X-\frac{5}{4}}{v}=1+\frac{X+\frac{5}{4}}{V}. \tag{2}$$

**考えてみよう** 方程式が 2 つ、未知数が 2 つあるが、(2) では $1/v$ に $X$ が掛かっている。どうすれば $V$ だけを取り出せるだろうか？

(1) を (2) に代入する。すると $X/V$ の項が打ち消し合い、そのおかげで $V$ がきれいに求まる。

$$\begin{aligned}\left(X-\tfrac{5}{4}\right)\left(1+\frac{1}{V}\right)&=1+\frac{X+\frac{5}{4}}{V}\\ X-\tfrac{5}{4}+\frac{X-\frac{5}{4}}{V}&=1+\frac{X+\frac{5}{4}}{V}\\ X-\tfrac{9}{4}&=\frac{5/2}{V}.\end{aligned}$$

したがって

$$V=\frac{5/2}{X-\frac{9}{4}}=\frac{10}{4X-9},$$

となり、示すべき式が得られた。（これが正の速さであるためには $X>\frac{9}{4}$ が必要であり、このことを最後の部分のために覚えておく。）

次に (1) から、

$$\frac{1}{v}=1+\frac{4X-9}{10}=\frac{4X+1}{10},\qquad \text{よって}\qquad v=\frac{10}{4X+1}.$$

### $X$ を求める

ウサギは $1+\dfrac{X}{V}$ に畑を出発し、家に帰るのにさらに $\dfrac{X}{V}$ 時間かかるので、ゴールするのは $1+\dfrac{2X}{V}$ である。これを $\frac{3}{2}$ と等しいとおくと $\dfrac{2X}{V}=\frac{1}{2}$ となり、$V=4X$ である。したがって

$$\begin{aligned} 4X &= \frac{10}{4X-9} \\ 16X^2-36X-10 &= 0 \\ 8X^2-18X-5 &= 0 \\ (2X-5)(4X+1) &= 0. \end{aligned}$$

解 $X=-\frac{1}{4}$ は距離としてありえない（そもそも $X>\frac{9}{4}$ が必要である）ので、

$$X=\tfrac{5}{2}\text{ km}.$$

この値のとき、ウサギの速さは $V=10\,\text{km/h}$、カメの速さは $v=\frac{10}{11}\,\text{km/h}$ である。

## 検算

$X=\frac{5}{2}$、$V=10$、$v=\frac{10}{11}$ を物語に戻して確かめる。カメは $t=0.55$ に $\frac{1}{2}\,\text{km}$ の地点に到達し、ウサギは $t=0.5$ に出発してそこまで $0.05\,\text{h}$ かかる。よって 2 匹は出会う。ウサギは $t=0.75$ に畑に到達し、$t=1.25$ に出発する。畑から $1.25\,\text{km}$（スタートから $1.25\,\text{km}$）の地点に到達するのは $t=1.375$ であり、カメが $1.25\,\text{km}$ の地点に到達するのは $1.25\times1.1=1.375$ である。よって 2 匹は再び出会う。ウサギが家に着くのは $1.25+0.25=1.5$ である。$X>\frac{9}{4}$ を満たす任意の値を $V$ と $v$ の式に代入して競走を再現しても、ちょうど正しい場所で出会うことが確かめられる。

## よくある間違い

- ウサギの時計の時刻を書くときに、30 分の睡眠のうちどちらか、特に畑での睡眠を忘れる。
- 2 回目の出会いの地点を、野菜畑からではなく**スタート**から $\frac{5}{4}\,\text{km}$ の地点とする。
- 二次方程式（quadratic equation）の解を両方とも残してしまう。負の距離は理由を添えて捨てなければならない。

## STEP のその先へ

上のような距離–時間グラフを用いると、文章題は直線がどこで交わるかという問題に変わる。これはどの力学（mechanics）の講義でも運動学（kinematics）の出発点となる考え方である。ここでは速さの逆数（reciprocal）（**ペース**（pace））を用いることで方程式が線形になった。問題を線形化するような変数を選ぶことは、応用数学の至るところで繰り返し現れる手法である。これらの考え方から発展する大学 1 年生向けの運動の扱いについては、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を読んでみるとよい。

解答例

# STEP I 1999、第 10 問

力学 ・ 単振動

> **STEP I 1999、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q10

## 鍵となる考え方

質点はばねを $AP$ と $PB$ の 2 本のばねに分ける。どちらのばねも、ばね全体と同じ弾性率（modulus of elasticity）$\lambda$ をもつ（弾性率は材料の性質だからである）が、自然長（natural length）はそれぞれ $a$ と $b$ である。各部分についてのフックの法則（Hooke's law）を、上端から質点までの距離というただ 1 つの座標で書き表すと、運動方程式（equation of motion）はその座標について 1 次式になることがわかる。座標の係数から周期（period）が求まるので、あとはそれが何に依存し、何に依存しないかを調べればよい。

## 解答

### モデル

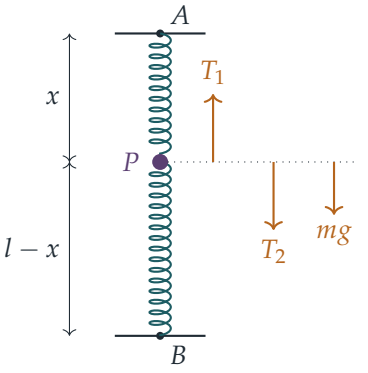
質点の質量を $m$ とする。ばねは軽いので、各部分の張力（tension）はその部分のどこでも等しく、ばねは伸び（extension）と圧縮（compression）のどちらについてもフックの法則に従う（これは糸ではなくばねなので、引くだけでなく押すこともできる）。まず $A$ が上端であるとする。時刻 $t$ における質点の $A$ からの下向きの距離を $x$ とすると、$AP = x$、$PB = l - x$ である。

$AP$ の自然長は $a$、$PB$ の自然長は $b$ であるから、フックの法則により

$$T_1 = \frac{\lambda(x-a)}{a}, \qquad T_2 = \frac{\lambda(l-x-b)}{b},$$

となる。ここで $T_1$ は $AP$ の張力、$T_2$ は $PB$ の張力である。張力が正であれば、その部分は質点をその部分の固定端の方へ引く。負の値であれば、その部分は圧縮されていて質点を押し返す。いずれの場合もこの式は正しい符号付きの力を与えるので、どの

部分が伸びているかを前もって知る必要はない。




**単振動**

質点にはたらく力を下向きに分解すると、重力 $mg$、上向きの張力 $T_1$、下向きの張力 $T_2$ であるから

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - \frac{\lambda(x-a)}{a} + \frac{\lambda(l-x-b)}{b} \\ &= mg + \lambda - \frac{\lambda x}{a} + \frac{\lambda l}{b} - \frac{\lambda x}{b} - \lambda \\ &= mg + \frac{\lambda l}{b} - \lambda\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)x. \end{aligned}$$

定数 $\pm\lambda$ は打ち消し合い、右辺は傾きが負の $x$ の 1 次関数である。

$$\omega^2 = \frac{\lambda}{m}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{\lambda(a+b)}{mab}, \qquad x_0 = \frac{mg + \lambda l/b}{\lambda(a+b)/(ab)} = \frac{a(mgb+\lambda l)}{\lambda(a+b)}.$$

とおく。すると運動方程式は

$$\ddot{x} = -\omega^2(x - x_0),$$

となるので、$X = x - x_0$（平衡位置（equilibrium position）$x_0$ からの変位）とおけば $\ddot{X} = -\omega^2 X$ である。これは $x = x_0$ を中心とする単振動（simple harmonic motion）の方程式であり、その周期は

$$\boxed{\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mab}{\lambda(a+b)}}}$$

である。これで最初の結果が示された。

> **考えてみよう**　一方の部分が圧縮されると、運動は単振動でなくなるのではないか？

弾性**糸**であればそうなる。糸の張力の式は、糸が伸びている間しか成り立たないからである。ばねは圧縮されているときも同じフックの法則の式に従うので、上の 1 つの

方程式は運動全体を通して成り立ち（ただしコイルが密着しない限りにおいて）、$l$ や振幅（amplitude）を制限する必要はない。

### $l$ と向きによらないこと

長さ $l$ は $x_0$ にしか現れない。$l$ を変えると振動の中心は移動するが、$\omega$、したがって周期は変わらない。

代わりに $B$ が上にある場合は、2 つの部分の役割を入れ替えれば同じ計算がそのまま使える。すなわち上の部分の自然長が $b$、下の部分の自然長が $a$ となる。これは全体を通して $a$ と $b$ を入れ替えるだけのことである。周期は $ab$ と $a+b$ を通してしか $a$ と $b$ に依存せず、これらはどちらも対称なので、周期は変わらない。（平衡位置は変わる。重力によって伸ばされるのが、自然長 $a$ の部分ではなく自然長 $b$ の部分になるからである。）

したがって、$l$ の値によらず、またどちらの端が上であっても、周期は $2\pi\sqrt{mab/(\lambda(a+b))}$ であり、題意は示された。

## 検算

- 質点の両側にある 2 本のばねは**並列**にはたらく。ばね定数（stiffness）$\lambda/a$ と $\lambda/b$ が足し合わされて $\lambda(a+b)/(ab)$ となり、上の $\omega^2$ と一致する。
- 極限の場合 $b \to \infty$：下の部分は非常に弱くなり、自然長 $a$ の 1 本のばねにつながれた質点に帰着して、周期は $2\pi\sqrt{ma/\lambda}$ となる。
- 単位：$\lambda$ は力なので、$ma/\lambda$ の単位は $\mathrm{kg\,m/N} = \mathrm{s}^2$ である。
- 数値的には、$m=1$、$\lambda=50$、$a=1$、$b=2$ のとき、公式は周期 0.72552 を与える。$l=2$、3、4.5 の場合（両方の部分が圧縮される場合を含む）について、どちらの端を上にしても、完全な運動方程式を数値的に解くと有効数字 5 桁まで同じ周期が得られ、定数を無作為に多数選んだ場合も $10^{-5}$ 以内で一致する。

## よくある間違い

- 各部分の弾性率として $\lambda a/(a+b)$ などを用いること。各部分の弾性率は依然として $\lambda$ であり、変わるのはばね定数 $\lambda/(\text{自然長})$ のほうである。
- 下側の張力の符号を間違えること。伸びている $PB$ は質点を $B$ の方へ、すなわち**下向き**に引く。
- 向きに関する部分の議論を忘れること。両端を入れ替えると $a$ と $b$ が入れ替わるこ

と、そして周期がそれらについて対称であることを述べる必要がある。

## STEP のその先へ

系をばねに分けてばね定数を足し合わせることは、連成振動子（coupled oscillators）への第一歩である。ばねに沿って複数の質点があると運動方程式は線形な連立方程式となり、とりうる振動数はある行列の固有値（eigenvalues）として与えられる（これが「基準振動」（normal modes）である）。非常に小さな質点を多数並べた極限では、ばねや棒を伝わる縦波（longitudinal waves）の波動方程式（wave equation）が得られる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、振動と基準振動を扱っている。

解答例

# STEP I 1999、第 11 問

力学 ・ 重力による円運動

> **STEP I 1999、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q11

この問題は、*Beyond STEP* の第 10.8 節「**三角形をなす三つの星**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch10/three-stars.html

## 鍵となる考え方

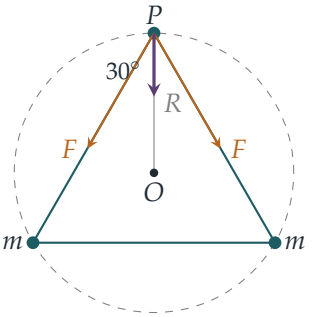
運動を推測し、それを確かめる。三角形がその中心のまわりを剛体的に回転するならば、各星は円運動をするので、中心に向かってちょうど $m\omega^2 R$ の合力が必要である。対称性から、ほかの星から各星にはたらく万有引力（gravitational force）の合力は中心をまっすぐ向く。したがって、その大きさを $m\omega^2 R$ と等しくおいて $\omega$ を読み取ればよい。中心に星を置くと、大きさのわかった内向きの引力がもう一つ加わる。

## 解答

星を、互いの引力のみを受けて運動する質点（particle）とみなす。$O$ を質量中心（centre of mass）とする。等しい質量が三つの場合、これは三角形の重心（centroid）であり、各頂点からの距離は

$$R = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

である。




### 三つの星

上の頂点にある星を $P$ とする。ほかの二つの星はそれぞれ、大きさ

$$F = \frac{\gamma m^2}{a^2},$$

の力で $P$ を引き、その向きは三角形の辺に沿っている。$PO$ は $P$ における $60^\circ$ の角を二等分するので、$P$ を通る各辺は $PO$ と $30^\circ$ の角をなす。$PO$ に平行な方向と垂直な方向に力を分解する（resolve）と、

- $PO$ に垂直な方向では、二つの成分は大きさが等しく向きが逆なので打ち消し合う。
- $PO$ に沿った方向では、合力は $O$ に向かって $2F\cos 30^\circ = \sqrt{3}\,\dfrac{\gamma m^2}{a^2}$ である。

対称性により、ほかの二つの星も同じ状況にある。

次に、三角形が $O$ のまわりを角速度（angular velocity）$\omega$ で剛体的に回転すると仮定する。このとき各星は半径 $R$ の円を一定の速さ $R\omega$ で運動するので、$O$ に向かう加速度 $R\omega^2$ が必要である。$O$ に向かう方向にニュートン（Newton）の運動の第 2 法則を適用すると

$$m\,\frac{a}{\sqrt{3}}\,\omega^2 = \sqrt{3}\,\frac{\gamma m^2}{a^2} \quad\Longrightarrow\quad \omega^2 = \frac{3\gamma m}{a^3}.$$

を得る。

**考えてみよう**　これによって、ある一瞬に力がつり合うというだけでなく、この運動が**実現可能**であることが示されるのはなぜか。

星を各頂点に置き、$OP$ に垂直で大きさ $R\omega$ の速度を、すべて同じ回転の向きに与えて運動を始める。配置が $O$ を中心とする一辺 $a$ の正三角形（equilateral triangle）であり続ける限り、各星にはたらく力は、角速度 $\omega$ の円運動に必要な大きさと向きをちょうどもつ。したがって、剛体的に回転する三角形は、どの瞬間においてもすべての星の運動方程式（equation of motion）を満たす。ゆえにこれはこの系の本当の運動であり、

その初期条件から導かれる解そのものである。全運動量は 0 なので、当然ながら $O$ は動かない。以上より、各星は質量中心のまわりを角速度 $(3\gamma m/a^3)^{1/2}$ で公転できる。

### 中心に四つ目の星を加える

$O$ に質量 $\lambda m$ の星を置く。質量中心は依然として $O$ である。外側の三つの星は中心の星を、互いに 120° をなす等しい大きさの力で引くので、合力は 0 である。したがって、外側の三つが対称な配置を保つ限り、中心の星は $O$ に静止したままである。

外側の各星には、$O$ に向かう大きさ

$$\frac{\gamma(\lambda m)m}{R^2} = \frac{3\gamma\lambda m^2}{a^2},$$

の引力が新たに加わる。ここで $R^2 = a^2/3$ を用いた。この追加の力は $PO$ に沿ってはたらくので、内向きの合力にそのまま加わる。$O$ に向かう方向の運動方程式は

$$m\,\frac{a}{\sqrt{3}}\,\omega^2 = \sqrt{3}\,\frac{\gamma m^2}{a^2} + 3\lambda\,\frac{\gamma m^2}{a^2}$$

$$\omega^2 = \frac{3\gamma m}{a^3} + \frac{3\sqrt{3}\,\lambda\gamma m}{a^3} = \frac{3\gamma m}{a^3}(1+\sqrt{3}\,\lambda).$$

となる。前と同じ議論により、この剛体的な回転は本当の運動である。よって、四つ目の星が中心に静止している状態で、外側の三つはそのまわりを角速度

$$\omega = \left(\frac{3\gamma m\,(1+\sqrt{3}\,\lambda)}{a^3}\right)^{1/2}.$$

で公転できる。

## 検算

- $\lambda = 0$ とおくと、当然ながら最初の答えに戻る。
- 次元（dimensions）：$\gamma m/r^2$ は加速度なので、$\gamma m/a^3$ の単位は 時間$^{-2}$ であり、$\omega^2$ の単位として正しい。
- $\lambda$ が非常に大きいとき、外側の星どうしはほとんど影響を及ぼし合わない。このとき外側の星は中心の質量だけのまわりを $\omega^2 \approx \gamma\lambda m/R^3 = 3\sqrt{3}\,\gamma\lambda m/a^3$ で公転し、これは支配的な項と一致する。
- 完全な運動方程式を（$\gamma = m = a = 1$ として）数値的に積分した。予測された円運動の速度から始めると、$\lambda = 0$、1、2.5 のいずれの場合も、星は 3 回公転したのちに相対誤差 $10^{-7}$ 未満で出発点に戻った。たとえば $\lambda = 1$ のとき $\omega^2 = 3(1+\sqrt{3}) \approx 8.196$ である。

## よくある間違い

- 円の半径や中心の星までの距離として、$R = a/\sqrt{3}$ ではなく $a$ を用いてしまう。
- 大きさ $F$ の二つの引力が $PO$ と $30°$ をなすことを忘れ、$2F$ と足してしまう。
- 中心の星が動かない理由、すなわちそれにはたらく三つの引力が打ち消し合うことを述べ忘れる。

## STEP のその先へ

これは三体問題（three-body problem）におけるラグランジュ（Lagrange）の正三角形解の特別な場合である。この解は、回転する正三角形の頂点に置かれた**任意の**三つの質量に対して成り立つ。同じ考え方からラグランジュ点（Lagrange points）$L_4$ と $L_5$ が得られ、そこではトロヤ群小惑星（Trojan asteroids）が木星と同じ軌道を共有している。このような配置が**安定**（stable）かどうかはより深い問題であり、回転する解のまわりで運動方程式を線形化する（linearise）ことによって答えられる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このレベルで中心力（central force）と軌道を丁寧に扱っている。

解答例

# STEP I 1999、第 12 問

確率・統計 ・ いかさまサイコロの不等式

> **STEP I 1999、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q12

この問題は、*Beyond STEP* の第 9.13 節「いかさまサイコロ」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/loaded-dice.html

## 鍵となる考え方

最初の行の不等式（inequality）こそが、この問題全体を動かす原動力である。もしすべての目の和が等確率で出るとすると、2 つの「隅」の和 2 と 12 によって、それぞれ確率の積が $\frac{1}{11}$ に定まってしまう。すると和 7 の確率には 2 つの交差項が含まれ、その和は $c\,(x + x^{-1})$ の形になる。不等式により、この和は大きすぎることになるのである。小問 (ii) は同じ考え方を別の形で用いたものである。すなわち、平方和はすべてが等しいときに最小となる。

## 解答

### 小問 (i)

**不等式。** $x > 0$ のとき平方根をとることができ、

$$x + x^{-1} - 2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0,$$

であるから $x + x^{-1} \geq 2$ が成り立ち、等号は $\sqrt{x} = 1/\sqrt{x}$、すなわち $x = 1$ のときに限り成立する。（同じことだが、$(x-1)^2 \geq 0$ に正の数 $x^{-1}$ を掛けてもよい。）

**さいころ。** $2 \leq s \leq 12$ に対し、目の和が $s$ となる確率を $p_s$ とする。2 つのさいころは独立（independent）であるから、組（1 つ目が $i$、2 つ目が $j$）の確率は $q_i r_j$ である。下

の表は、必要な和がどの組から得られるかを示している。

| | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | $q_4$ | $q_5$ | $q_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_1$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $r_2$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $r_3$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $r_4$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $r_5$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| $r_6$ | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

和 2：1 マス
和 12：1 マス
和 7：6 マス

和 2 は $(1,1)$ からのみ、和 12 は $(6,6)$ からのみ生じるので、

$$p_2 = q_1 r_1, \qquad p_{12} = q_6 r_6.$$

である。和 7 は $(1,6)$ と $(6,1)$ を含む 6 つの組から生じる。6 つの項はすべて非負であるから、

$$p_7 = q_1 r_6 + q_2 r_5 + \cdots + q_6 r_1 \ \geq \ q_1 r_6 + q_6 r_1.$$

が成り立つ。

ここで背理法（proof by contradiction）により、11 通りの和がすべて等確率で出ると仮定する。これらは起こりうるすべての場合を尽くしているので、それぞれの確率は $\frac{1}{11}$ である。すると $q_1 r_1 = \frac{1}{11}$ かつ $q_6 r_6 = \frac{1}{11}$ となる。特に $q_1, r_1, q_6, r_6$ はいずれも 0 ではないので、$r_1 = \dfrac{1}{11q_1}$、$r_6 = \dfrac{1}{11q_6}$ と書ける。これを代入すると、いま証明した不等式により

$$\begin{aligned} p_7 \ \geq \ q_1 r_6 + q_6 r_1 &= \frac{q_1}{11q_6} + \frac{q_6}{11q_1} = \frac{1}{11}\left(x + x^{-1}\right), \qquad \text{ただし} x = \frac{q_1}{q_6} > 0, \\ &\geq \frac{2}{11} \end{aligned}$$

となる。しかし $p_7 = \frac{1}{11} < \frac{2}{11}$ であり、矛盾する。したがって、2 つのさいころにどのような細工（loaded）をしても、和 $2, 3, \ldots, 12$ がすべて等確率になることはありえない。

**考えてみよう** $q_1$ と $q_6$ が 0 でないことを確認するのは、なぜ重要だったのか。

$q_1$ と $q_6$ で割ったうえ、不等式 $x + x^{-1} \geq 2$ には $x > 0$ が必要だからである。積 $q_1 r_1$ と $q_6 r_6$ がいずれも $\frac{1}{11} \neq 0$ に等しいことから、どちらも保証される。この手順を省くと議論に穴が生じる。一般には、1 の目がまったく出ないさいころも十分ありうるのである。

### 小問 (ii)

1 つ目のさいころを 2 回投げて同じ目が出る事象を $S$ とする。2 回の投げは独立であるから、両方とも $j$ が出る確率は $q_j^2$ であり、これら 6 つの事象は互いに排反（disjoint）

である。よって

$$\mathrm{P}(S) = q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_6^2.$$

である。$q_j \geq 0$ かつ $\sum q_j = 1$ という条件のもとで、この値がどこまで小さくなりうるかを求めたい。さいころが公平なものからどれだけずれているかを測る平方和を展開すると、

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{j=1}^{6} \left(q_j - \tfrac{1}{6}\right)^2 &= \sum_{j=1}^{6} q_j^2 - \tfrac{1}{3}\sum_{j=1}^{6} q_j + 6 \cdot \tfrac{1}{36} \\ &= \sum_{j=1}^{6} q_j^2 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} = \mathrm{P}(S) - \tfrac{1}{6}. \end{aligned}$$

となる。したがって $\mathrm{P}(S) \geq \frac{1}{6}$ であり、等号が成り立つのはすべての $q_j = \frac{1}{6}$ のとき、すなわち公平なさいころのときに限る。

> **考えてみよう** 1/36 はどこから来たのか。また、それはなぜ見せかけの手がかりなのか。

$\frac{1}{36}$ は、公平なさいころで 6 のゾロ目のような**特定の** 1 組が出る確率である。「同じ目が出る」にはそのような組が 6 つ含まれるので、公平なさいころではその確率は $6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$ であり、さいころに細工をするとこの確率は増えることしかない。

よって答えは**否**である。$q_j$ の値がどうであっても、2 つの目が同じになる確率は少なくとも $\frac{1}{6}$ であり、これは $\frac{1}{36}$ よりはるかに大きい。

## 検算

- 公平なさいころの場合：$p_2 = p_{12} = \frac{1}{36}$ であるが $p_7 = \frac{6}{36}$ であり、結果が予言するとおり明らかに等しくない。
- 細工されたさいころの組を無作為に 20,000 組とって数値的に探索したが、11 通りの和がすべて $\frac{1}{11}$ との差 0.05 以内に収まる例は一度もなかった。また分数を用いた厳密な確認でも、毎回 $p_7 \geq q_1 r_6 + q_6 r_1$ が成り立った。
- $(q_1, \ldots, q_6) = (0.1, 0.2, 0.3, 0.15, 0.15, 0.1)$ のさいころでは $\mathrm{P}(S) = 0.195 \geq \frac{1}{6}$ となる。2 回投げを 200,000 回シミュレーションしたところ 0.194 が得られた。

## よくある間違い

- 2 つのさいころが同一である（$q_i = r_i$）と仮定してしまうこと。問題文では異なる細工が許されており、上の議論でも両者が一致する必要はない。

- $p_7 = q_1 r_6 + q_6 r_1$ と書いてしまうこと。項はあと 4 つある。必要なのは不等式だけなので捨ててよいが、その理由（$q_i r_j \geq 0$）は述べること。
- 小問 (ii) で $\sum q_j^2 \geq \frac{1}{36}$ と答えてしまうこと、あるいは「同じ」が 6 通りの結果のどれでもよいことを忘れること。

## STEP のその先へ

小問 (ii) は $\sum q_j^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum q_j\right)^2$ という主張であり、コーシー＝シュワルツの不等式（Cauchy–Schwarz inequality）の特別な場合である。量 $\sum q_j^2$ は**衝突確率**（collision probability）と呼ばれ、情報理論（information theory）やハッシュ法（hashing）の解析に現れる。小問 (i) は母関数（generating function）に関する古典的な結果である。2 つのさいころの目の和の確率母関数（probability generating function）は $Q(t)R(t)$ であり、うまい別証明として次のものがある。和が一様であれば、$1 + t + \cdots + t^{10}$ は定数と 2 つの 5 次の実係数多項式の積でなければならず、そのそれぞれは実数解をもつ。ところが $1 + t + \cdots + t^{10} = (t^{11} - 1)/(t - 1)$ は実数解をもたない。この種の母関数については、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）で展開されている。

解答例

# STEP I 1999、第 13 問

確率・統計 ・ 指示変数

> **STEP I 1999、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q13

## 鍵となる考え方

まとまり（unit）の個数を直接数えるのではない。代わりに**隙間**（gap）を数えるのである。まとまりの個数は、隣り合う磁石が離れている箇所の個数より 1 だけ多い。隙間ができるかどうかは、隣り合う 2 つの磁石が同じ向きかどうかだけで決まり、これら $N-1$ 個の事象は、実は公平な硬貨投げを独立に繰り返したものになっている。したがって隙間の個数は二項分布（binomial distribution）に従い、期待値（expectation）も分散（variance）もただちに求まる。

## 解答

### モデルを立てる

「無作為に置く」とは、各磁石がどちら向きになるのも等確率であり、他の磁石とは独立（independent）であることと解釈する。N 極が右側にある磁石（SN）を $A$ **型**、N 極が左側にある磁石（NS）を $B$ **型**と呼ぶ。左から順に読んだ型を $X_1, \ldots, X_N$ とする。

隣り合う 2 つの磁石を見る。向かい合う端は、1 つ目の磁石の右端と 2 つ目の磁石の左端である。

- 同じ型（A の次に A）のとき：向かい合う端は N と S で、異なる極なので**くっつく**。（B の次に B の場合も、S と N で同様である。）
- 異なる型（A の次に B）のとき：向かい合う端は N と N なので**離れる**。（B の次に A の場合は S と S になる。）




よって、磁石 $i$ と磁石 $i+1$ の間に隙間ができるのは、ちょうど $X_i \neq X_{i+1}$ のときである。$i = 1, \ldots, N-1$ に対して

$$G_i = \begin{cases} 1 & X_i \neq X_{i+1} \text{ のとき（隙間）}, \\ 0 & X_i = X_{i+1} \text{ のとき（くっつく）}. \end{cases}$$

と定める。隙間が 1 つあるごとに列は 1 つ多くの部分に分かれるので、別々のまとまりの個数は

$$U = 1 + G_1 + G_2 + \cdots + G_{N-1}.$$

である。

### 隙間の分布

各 $G_i$ は確率 $\frac{1}{2}$ で 1 となる。$X_i$ が何であっても、$X_{i+1}$ がそれと異なる確率は $\frac{1}{2}$ だからである。

> **考えてみよう** 事象「$i$ に隙間がある」と「$i+1$ に隙間がある」はどちらも磁石 $i+1$ に関わっている。$G_i$ は本当に独立なのだろうか？

隣り合う $G$ が磁石を共有しているにもかかわらず、実際に独立である。1 つ目の磁石の型 $X_1$ を固定する。すると、列 $G_1, \ldots, G_{N-1}$ によって $X_2, X_3, \ldots, X_N$ が 1 つずつ決まる（$G_i = 0$ ならば $X_{i+1}$ は $X_i$ と等しく、$G_i = 1$ ならばもう一方の型である）。逆に、型の列から $G$ が決まる。したがって、$X_1$ がどちらの値であっても、等確率な $2^{N-1}$ 通りの $(X_2, \ldots, X_N)$ の選び方は、$2^{N-1}$ 通りの可能な列 $(G_1, \ldots, G_{N-1})$ と 1 対 1 に対応する。ゆえに隙間のどの列も確率 $1/2^{N-1}$ をもつ。これはまさに、$G_i$ が独立で、それぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で 0 または 1 をとることを意味している。

よって $G_1 + \cdots + G_{N-1} \sim \mathrm{B}\left(N-1, \frac{1}{2}\right)$ である。

### 期待値と分散

$\mathrm{B}(n, p)$ に従う確率変数の平均は $np$、分散は $np(1-p)$ である。$n = N-1$、$p = \frac{1}{2}$ とし、定数 1 を加えると平均はずれるが分散は変わらないことに注意すれば、

$$\mathrm{E}(U) = 1 + \tfrac{1}{2}(N-1) = \frac{N+1}{2},$$
$$\mathrm{Var}(U) = (N-1) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \frac{N-1}{4}.$$

を得る。

二項分布の結果を引用したくなければ、次のようにすればよい。$\mathrm{E}(G_i) = \frac{1}{2}$ であり、$G_i^2 = G_i$ より $\mathrm{Var}(G_i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ である。期待値の線形性（linearity of expectation）から平均が得られ、独立性により $N-1$ 個の分散を足し合わせることができる。

## 検算

- $N = 1$：磁石が 1 つならつねに 1 つのまとまりであり、公式からも平均 1、分散 0 が得られる。
- $N = 2$：2 つの磁石はそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で 1 個または 2 個のまとまりになるので、平均は $\frac{3}{2}$、分散は $\frac{5}{2} - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$ であり、予測どおりである。
- $N \le 12$ について $2^N$ 通りのすべての配置を厳密に数え上げたところ、$\frac{N+1}{2}$ と $\frac{N-1}{4}$ が正確に再現された。また $N = 20$ のシミュレーションでは、平均は約 10.5、分散は約 4.73 であった（予測値は 10.5 と 4.75）。

## よくある間違い

- **同じ**向きの 2 つの磁石が反発すると考えてしまう。それらは異なる極どうし（N と S）で向かい合うので、引き合ってくっつく。
- 独立性を示さずに分散を足し合わせる。ここでは独立性は成り立つが、隣り合う隙間が磁石を共有しているので自明ではない。
- 隙間を $N-1$ 個ではなく $N$ 個と数えて $\mathrm{Var}(U) = \frac{N}{4}$ と書いてしまう。あるいは、平均で余分な 1 を忘れる。

## STEP のその先へ

まとまりの個数を、その間の境界の個数によって数えるのは、**指示変数**（indicator variable）の方法であり、確率論で最も役に立つ道具の 1 つである。個数を 0–1 変数の和として書き、期待値の線形性を使う。これには独立性はまったく必要ない。ここで $U$ は、2 種類の記号からなる無作為な列における**連**（run）の個数を数えている。連の個数は、統計学における Wald–Wolfowitz の連検定（runs test）の基礎であり、この検定は列が無作為に見えるかどうかを調べるものである。指示変数とその分散についてさらに知りたければ、Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）を参照されたい。

解答例

# STEP I 1999、第 14 問

確率・統計 ・ 条件付き確率

**STEP I 1999、問 14**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/99-s1-q14

## 鍵となる考え方

連続確率変数（continuous random variable）は、離散的な（discrete）確率変数を設定するためだけに登場している。確率密度関数（probability density function）を、得点 4, 3, 2, 1 を取る 4 つの確率に直してしまえば、小問 (i) は 1 行で済む期待値（expectation）の計算である。小問 (ii) は条件付き確率（conditional probability）の問題であり、合計がちょうど 3 にならなければならないので、勝つ方法はごくわずかしかなく、すべて書き出すことができる。

## 解答

### 小問 (i)

$0 \le a \le b \le 1$ に対して

$$\mathrm{P}(a \le X < b) = \int_a^b 2x \,\mathrm{d}x = b^2 - a^2.$$

（連続確率変数では、端点を含めるか含めないかは結果に影響しない。）1 本のダーツによる得点を $S$ とする。すると

$$\mathrm{P}(S=4) = \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 - 0 = \tfrac{1}{16}, \qquad \mathrm{P}(S=3) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = \tfrac{3}{16},$$

$$\mathrm{P}(S=2) = \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{5}{16}, \qquad \mathrm{P}(S=1) = 1 - \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 = \tfrac{7}{16}.$$

これらの和は当然 1 になる。外側の輪ほど当たりやすいことに注意せよ。中心から遠いところほど面積が大きいので、密度 $2x$ は $x$ とともに増加するのである。

よって

$$\mathrm{E}(S) = 4\cdot\tfrac{1}{16} + 3\cdot\tfrac{3}{16} + 2\cdot\tfrac{5}{16} + 1\cdot\tfrac{7}{16} = \frac{4+9+10+7}{16} = \frac{30}{16} = \frac{15}{8},$$

となり、示すべき結果が得られた。

### 小問 (ii)

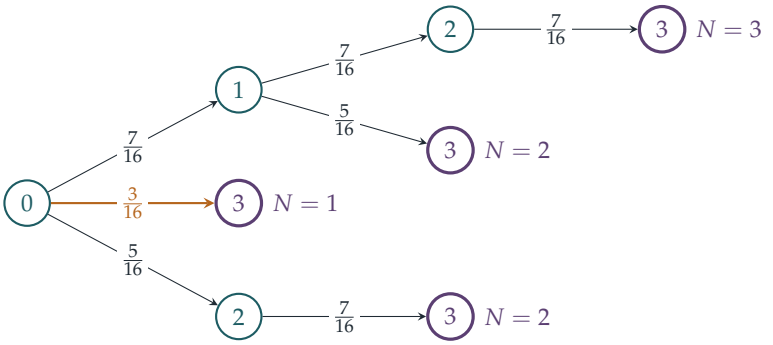
各投てきは独立（independent）であり、それぞれ上の $S$ と同じ分布に従うと仮定する。私が勝つという事象（event）を $W$、ゲームでの投てき回数を $N$ とする。

**考えてみよう** どのような得点の列が勝ちにつながるか？

私が勝つのは、途中の合計が一度も超えることなく 3 に達するときであり、そのときに限る。どの得点も 1 以上なので、合計は毎回少なくとも 1 ずつ増え、ゲームは高々 3 回の投てきで終わる。勝ちのゲームとは、和がちょうど 3 になる正の得点の列である。（合計が 3 未満の間だけ投げ続けるので、そのような列はどれも実際に完結したゲームになっている。）そのような列は次の 4 つしかない。

$$(3), \qquad (1,2), \qquad (2,1), \qquad (1,1,1).$$

得点 4 は一度も現れない。それが出た時点で合計が 3 を超えてしまうからである。




この樹形図は、勝ち（紫の丸で囲んだもの）で終わる各経路に沿った途中の合計を示しており、各投てきの確率を書き添えてある。

独立性により、各列の確率はその列の得点の確率の積である。

$$\mathrm{P}(W\cap N=1) = \mathrm{P}(3) = \tfrac{3}{16} = \tfrac{768}{4096},$$
$$\mathrm{P}(W\cap N=2) = \mathrm{P}(1,2)+\mathrm{P}(2,1) = 2\cdot\tfrac{7}{16}\cdot\tfrac{5}{16} = \tfrac{70}{256} = \tfrac{1120}{4096},$$
$$\mathrm{P}(W\cap N=3) = \mathrm{P}(1,1,1) = \left(\tfrac{7}{16}\right)^3 = \tfrac{343}{4096}.$$

これら 3 つの事象は互いに排反（disjoint）であり、合わせると $W$ になるので

$$\mathrm{P}(W) = \frac{768 + 1120 + 343}{4096} = \frac{2231}{4096}.$$

したがって

$$\mathrm{P}(N = 3 \mid W) = \frac{\mathrm{P}(W \cap N = 3)}{\mathrm{P}(W)} = \frac{343/4096}{2231/4096} = \frac{343}{2231},$$

となり、示すべき結果が得られた。

## 検算

- 4 つの得点の確率 $\frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}$ の和は 1 である。これらが 16 を分母とする奇数になっているのは、$(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$ だからである。
- 目標の値 $343 = 7^3$ を見れば、3 回の投てきでの勝ちは $(1,1,1)$ でなければならないことがすぐにわかり、設定の正しさが確かめられる。
- $10^6$ 回のゲームをコンピュータでシミュレーションしたところ、$\mathrm{P}(W) \approx 0.5452$（正確な値は 0.5447）、$\mathrm{P}(N = 3 \mid W) \approx 0.1535$（正確な値は $343/2231 \approx 0.1537$）となった。

## よくある間違い

- 各得点の範囲が等しい確率で起こるとみなしてしまう。確率は密度関数を積分して得られるのであり、区間の幅から得られるのではない。
- $(1,2)$ は数えたのに $(2,1)$ を忘れてしまい、$\mathrm{P}(W) = \frac{1671}{4096}$ としてしまう。
- $\mathrm{P}(W)$ で割らずに、$\mathrm{P}(N = 3 \text{ かつ} W) = \frac{343}{4096}$ を答えてしまう。

## STEP のその先へ

小問 (ii) は小さなマルコフ連鎖（Markov chain）である。状態は途中の合計であり、3 と「バースト（超過）」が吸収状態（absorbing state）である。目標の値が大きくなると、経路を書き出すのは現実的でなくなる。そこで、合計 $t$ から勝つ確率を $w_t$ と書くと、漸化式（recurrence）$w_t = \sum_s \mathrm{P}(S = s)\, w_{t+s}$ が得られる。この第一歩解析（first-step analysis）は、大学 1 年次の確率論における重要な道具である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、ランダムウォーク（random walk）とマルコフ連鎖を扱う中でこれを解説している。

解答例

# STEP II 1999、第 1 問

純粋数学 ・ 大きな数の比較

> **STEP II 1999、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q1

## 鍵となる考え方

これらの数は大きすぎて直接比較することはできず、その対数（logarithm）でさえまだ大きすぎる。突破口は $\log_{10}$ を 2 回とることである。$x$、$y$、$z$ はいずれも 10 の累乗であるから、二重対数（double logarithm）はどれも 100、$x$、$y$ の短い和になり、それらは容易に比較できる。$\log_{10}$ は単調増加（increasing）であるから、二重対数を比較すればもとの数を比較したことになる。

## 解答

以下では $\log_{10}$ を log と書き、

$$L(a) = \log(\log a).$$

とおく。関数 $t \mapsto \log t$ は狭義単調増加（strictly increasing）であるから、$a, b > 10$ を満たす数（このとき $\log a, \log b > 1 > 0$）に対して、$a < b$ となるのは $L(a) < L(b)$ となるときであり、かつそのときに限る。用いる基本的な事実は

$$\log x = 100, \qquad \log y = x = 10^{100}, \qquad \log z = y = 10^{x}.$$

である。

### 小問 (i)

スターリング（Stirling）の近似（Stirling's approximation）で $n = x$ とし、$\log_{10}$ をとると、

$$\begin{aligned}\log a_1 &\approx \log\sqrt{2\pi} + \left(x+\tfrac{1}{2}\right)\log x - x\log \mathrm{e}\\ &= 100x - x\log \mathrm{e} + 50 + \log\sqrt{2\pi}\\ &= x\,(100 - \log \mathrm{e}) + 50.4\ldots.\end{aligned}$$

ここで $\log \mathrm{e} \approx 0.434$ であり、定数 $50.4\ldots$ は $x = 10^{100}$ に比べればまったく無視できる。したがって

$$\log a_1 \approx 99.566 \times 10^{100}, \qquad L(a_1) \approx 100 + \log 99.566 \approx 100 + 1.998 = 101.998\ldots \approx 102,$$

となり、示すべきことが得られた。

### 小問 (ii)

それぞれの数について $\log a_i$ を求め、次に $L(a_i)$ を求める。

- $a_2 = x^y$: $\log a_2 = y\log x = 100y$ であるから、$L(a_2) = 2 + \log y = x + 2$。
- $a_3 = y^x$: $\log a_3 = x\log y = x^2 = 10^{200}$ であるから、$L(a_3) = 200$。
- $a_4 = z^x$: $\log a_4 = x\log z = xy$ であるから、$L(a_4) = \log x + \log y = x + 100$。
- $a_5 = \mathrm{e}^{xyz}$: $\log a_5 = xyz\log \mathrm{e}$ であるから、

  $$L(a_5) = 100 + x + y + \log(\log \mathrm{e}) \approx y + x + 99.64,$$

  となる。ここで $\log(\log \mathrm{e}) = \log 0.434\ldots \approx -0.36$ を用いた。
- $a_6 = z^{1/y}$: $\log a_6 = \frac{1}{y}\log z = 1$ であるから、ちょうど $a_6 = 10$ である。
- $a_7 = y^{z/x}$: $\log a_7 = \frac{z}{x}\log y = \frac{z}{x}\cdot x = z$ であるから、$L(a_7) = \log z = y$。

小問 (i) で得た $L(a_1) \approx 102$ と合わせると、二重対数は

$$\underbrace{0}_{a_6},\ \underbrace{102}_{a_1},\ \underbrace{200}_{a_3},\ \underbrace{x+2}_{a_2},\ \underbrace{x+100}_{a_4},\ \underbrace{y}_{a_7},\ \underbrace{y+x+99.6}_{a_5}.$$

となる。

**考えてみよう** 小問 (i) では $a_1$ の近似値しか得られていない。それで $a_1$ の位置を決めるのに十分だろうか？

十分であり、しかもスターリングの公式すら必要ない。$x!$ の $x$ 個の因数はどれも $x$ 以下であるから $x! \le x^x$ となり、$\log a_1 \le x \log x = 10^{102}$ である。よって $L(a_1) \le 102 < 200 = L(a_3)$ が得られる。また $a_1 = x! > 10 = a_6$ は明らかである。したがって $a_6 < a_1 < a_3$ が厳密に成り立つ。

残りの比較を一つずつ正当化しよう。

- $a_3 < a_2$: $200 < 10^{100} + 2$。
- $a_2 < a_4$: $x + 2 < x + 100$。
- $a_4 < a_7$: $x + 100 < y = 10^x$ を示せばよい。$t \ge 3$ を満たすすべての $t$ に対して $10^t > t + 100$ であり、ここでは $t = x = 10^{100}$ であるから、これはとてつもない余裕をもって成り立つ。
- $a_7 < a_5$: $x + 99.6 > 0$ であるから $y < y + x + 99.6$。(直接示すと：$\log a_5 = z \cdot xy \log \mathrm{e}$ かつ $xy \log \mathrm{e} > 1$ であるから、$\log a_5 > z = \log a_7$。)

$a_6$ 以外の数はすべて 10 より大きいので $L$ の単調性（monotonicity）が使え、大きさの順序は

$$a_6 < a_1 < a_3 < a_2 < a_4 < a_7 < a_5.$$

となる。

## 検算

小問 (i) については、$n = 10^2, 10^3, 10^5, 10^8$ に対して、スターリングの公式を（対数ガンマ関数 (log-gamma function) を用いて求めた）正確な $\log_{10} n!$ と比較した。$a_1$ に対する二重対数の式は $10^{-6}$ 以内の誤差で一致し、$n = 10^{100}$ に対しては 101.998 を与える。小問 (ii) については、$y = 10^x$ を整数として正確に保持できる $k = 2, 3, 4$ に対して $x = 10^k$ とおき、計算全体をやり直した。毎回同じ順序 $a_6 < a_1 < a_3 < a_2 < a_4 < a_7 < a_5$ が得られるので、この結果は数 100 の大きさに依存しない。

## よくある間違い

- 対数を 1 回だけとって比較し、行き詰まってしまう：$\log a_7 = z$ と $\log a_4 = xy$ はまだ大きすぎて一目では比較できない。もう一度対数をとること。
- $\mathrm{e}^{xyz}$ を底 10 に変換するときに因数 $\log \mathrm{e}$ を忘れる。ここではほとんど影響しないが、$L(a_5)$ は約 0.36 ずれる。
- $a_6$ が単に 10 であり、すべての中で最小であることを見落とす。

## STEP のその先へ

反復対数（iterated logarithm）や指数のタワー（towers of exponents）は、解析学や計算機科学において増大の度合いを測る道具である。たとえば反復対数 $\log^* n$ はある種のアルゴリズムの実行時間に現れ、「タワー」関数はラムゼー理論（Ramsey theory）における結果の上界を与える。スターリングの公式そのものは漸近級数（asymptotic series）の初項であり、それを丁寧に証明することは大学 1 年次の解析学の古典的な演習問題である。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、ここに関わる極限や不等式に慣れるのに適した本である。

解答例

# STEP II 1999、第 2 問

純粋数学 ・ 二次式の判別式

> **STEP II 1999、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q2

## 鍵となる考え方

すべては $(*)$ の判別式（discriminant）にかかっている。$x$ の係数に因数 2 が含まれているので、判別式の 4 分の 1 である $\frac{1}{4}(b^2-4ac)$ がとりわけ簡潔な形になり、しかもそれは $n$ の二次式（quadratic）になる。こうして各小問は、今度は $n$ を変数とするもう一つの二次式の符号についての問題に帰着する。

## 解答

以下では常に $pn^2+q \geq 0$ を仮定する。これにより平方根は実数となり、$(*)$ は実数係数の通常の二次方程式になる（$q>0$ または $q \geq 0$ である小問 (i) と (iii) では、この条件は自動的に成り立つ）。$a=n$、$b=2\sqrt{pn^2+q}$、$c=rn+s$ とおくと、この方程式が実数解をもつのは $b^2-4ac \geq 0$ のとき、すなわち $\frac{1}{4}b^2-ac \geq 0$ のときであり、かつそのときに限る。ここで

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}b^2-ac &= (pn^2+q)-n(rn+s)\\ &= (p-r)n^2-sn+q.\end{aligned}$$

$f(n)=(p-r)n^2-sn+q$ とおく。すると

$$(*) \text{ は実数解をもたない} \iff f(n)<0.$$

### 小問 (i)

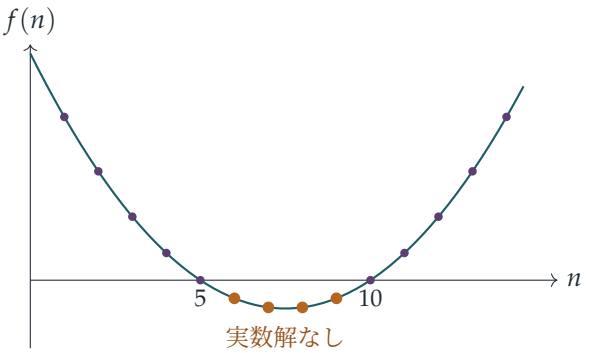
このとき $p-r=1$ であるから

$$f(n)=n^2-15n+50=(n-5)(n-10).$$

これが負になるのは $5 < n < 10$ のときであり、かつそのときに限る。$n$ は正の整数なので、$(*)$ が実数解をもたないのはちょうど

$$n \in \{6,7,8,9\}.$$

のときである。$n = 5$ と $n = 10$ では $f(n) = 0$ となり、実数の重解（repeated root）をもつので、これらの値は除かれる。




**小問 (ii)**

今度は $p < r$ であるから、$f$ の最高次の係数（leading coefficient）$p - r$ は負である。$f$ を実数変数 $t$ の二次関数とみなす：

$$f(t) = (p-r)t^2 - st + q.$$

その判別式は

$$s^2 - 4(p-r)q,$$

であり、仮定 $4q(p-r) > s^2$ よりこれは負である。

**考えてみよう** $f$ の判別式が負であることから、なぜ $f(n)$ の符号について何かがわかるのだろうか。

判別式が負の二次関数は実数の零点をもたないので、そのグラフは軸と交わらず、すべての実数 $t$ に対して一定の符号を保つ。最高次の係数が負であればグラフは上に凸な放物線なので、その符号は負である。平方完成（completing the square）によって具体的に書けば

$$f(t) = (p-r)\left(t - \frac{s}{2(p-r)}\right)^2 + \frac{4q(p-r) - s^2}{4(p-r)},$$

となり、どちらの項も負または零である。第 1 項は $p - r < 0$ だからであり、第 2 項は分子が正で分母が負だからである。第 2 項は真に負なので、すべての実数 $t$ に対して $f(t) < 0$ となる。

特に、すべての正の整数 $n$ に対して $f(n) < 0$ であるから、$(*)$ はどの $n$ の値に対しても実数解をもたない。これが示すべきことであった。

なお、仮定からは必然的に $q < 0$ が導かれることに注意しよう。$p - r < 0$ かつ $4q(p-r) > s^2 \geq 0$ であるから、$q$ は負でなければならない。したがって $n$ が小さいときには $pn^2 + q$ は実際に負になりうるので、平方根が実数であるという前提がここでは重要になる（虚数の係数を許すと $x = 0$ が解になりうる。$p = 1$、$r = 2$、$s = -2$、$q = -10$、$n = 1$ で試してみよ）。

### 小問 (iii)

今度は $n = 1$、$p - r = 1$、$q = s^2/8 \geq 0$ であるから $p + q > 0$ となり、係数は実数である。このとき

$$f(1) = 1 - s + \frac{s^2}{8} = \frac{s^2 - 8s + 8}{8}.$$

実数解をもつための必要十分条件は $f(1) \geq 0$、すなわち

$$s^2 - 8s + 8 \geq 0.$$

である。$s^2 - 8s + 8 = 0$ の解は

$$s = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 32}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{2},$$

であるから、$s^2 - 8s + 8 = \big(s - (4 - 2\sqrt{2})\big)\big(s - (4 + 2\sqrt{2})\big)$ となる。この積が非負になるのは、$s$ が二つの解の間の開区間の外にあるときであり、かつそのときに限る。よって $(*)$ が実数解をもつための必要十分条件は

$$s \leq 4 - 2\sqrt{2} \quad \text{または} \quad s \geq 4 + 2\sqrt{2},$$

であり、これが示すべきことであった。どの段階も逆にたどれるので、「必要十分」の両方向が得られる。二つの端点では解は重解になる。

## 検算

- (i) で $n = 7$ とすると、$\frac{1}{4}b^2 = 3 \cdot 49 + 50 = 197$、$ac = 7 \cdot 29 = 203$ であるから $\frac{1}{4}b^2 - ac = -6 < 0$ となる。$n = 11$ とすると $413 - 11 \cdot 37 = 6 > 0$ となる。
- (iii) では $4 - 2\sqrt{2} \approx 1.1716$、$4 + 2\sqrt{2} \approx 6.8284$ である。$s = 4$ とすると $f(1) = 1 - 4 + 2 = -1 < 0$ となり、予想どおり二つの値の間に入っている。
- コンピュータを用いて、(i) については $n$ を 1 から 199 まで調べ、(ii) については約 5 百万件のランダムなケースを、(iii) については $10^5$ 個のランダムな $s$ の値を検証した。いずれも上の結果と一致した。

## よくある間違い

- (i) で $n = 5$ と $n = 10$ を含めてしまう。そこでは判別式が零になるので、（重解の）実数解が存在する。
- (ii) で、$n$ が大きいときに $f(n) < 0$ となることだけを確かめてしまう。判別式の条件の要点は、小さい $n$ も含めて $f$ が**いたるところで**負になるということである。
- $x$ の係数にある因数 2 を忘れ、判別式の中で $4(pn^2 + q)$ を誤った位置に置いてしまう。

## STEP のその先へ

ここで用いた手法、すなわちパラメータを新たな変数とみなし、それについての二次式の符号を調べるという手法は、多項式の根がその係数にどのように依存するかを研究する入り口である。大学では、これは高次多項式の判別式へとつながり、さらに二次形式（quadratic form）$at^2 + bt + c$ が負定値（negative definite）であるのは $a < 0$ かつ $b^2 < 4ac$ のときであり、かつそのときに限るという考え方へとつながる。これと同じ判定法を 2 変数に対して用いると、多変数関数の停留点（stationary point）を分類することができる。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の上級問題集）には、判別式を用いた丁寧な議論に基づく STEP の問題がほかにもたくさん収められている。

解答例

# STEP II 1999、第 3 問

純粋数学 ・ 数学的帰納法

**STEP II 1999、問 3**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/99-s2-q3

## 鍵となる考え方

$\mathrm{e}^{-x^3}$ を毎回一から何度も微分してはいけない。そうではなく、第 $n$ 次導関数（$n$th derivative）を $\mathrm{e}^{-x^3}S_n(x)$ と書き、それをもう一度微分するのである。こうすると $S_{n+1}$ を $S_n$ と $S_n'$ に結びつける漸化式（recurrence）が得られ、問題のすべての部分がこの一つの関係式から導かれる。すなわち、具体的な多項式、帰納法、次数と最高次の係数、そして最後の不等式である。

## 解答

### 漸化式

定義により、

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\mathrm{e}^{-x^3}\right) = \mathrm{e}^{-x^3}S_n(x).$$

積の微分法（product rule）を用いてもう一度微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left(\mathrm{e}^{-x^3}\right) = \mathrm{e}^{-x^3}S_n'(x) - 3x^2\mathrm{e}^{-x^3}S_n(x),$$

となり、両辺に $\mathrm{e}^{x^3}$ を掛けると

$$\boxed{S_{n+1}(x) = S_n'(x) - 3x^2S_n(x).}$$

を得る。これはすべての $n \geq 0$ で成り立つ。ここで $S_0(x) = 1$ である（第 0 次導関数は関数そのものである）。

### $S_2$ と $S_3$

$S_0 = 1$ から、漸化式により $S_1 = 0 - 3x^2 = -3x^2$ となる。これは直接確かめることもできる。次に

$$S_2 = S_1' - 3x^2 S_1 = -6x - 3x^2(-3x^2) = 9x^4 - 6x,$$

となり、求める結果が得られた。もう一度漸化式を用いると、

$$\begin{aligned} S_3 &= S_2' - 3x^2 S_2 = (36x^3 - 6) - 3x^2(9x^4 - 6x) \\ &= 36x^3 - 6 - 27x^6 + 18x^3, \end{aligned}$$

であるから、

$$S_3(x) = -27x^6 + 54x^3 - 6.$$

### 帰納法

より強い主張を証明する。そうしても余分な手間はかからず、次の問いにも同時に答えられるからである。

$P(n)$：$S_n(x)$ は次数 $2n$ の多項式であり、その最高次の係数は $(-3)^n$ である。

**初期段階。** $S_1(x) = -3x^2$ は次数 2、最高次の係数は $-3 = (-3)^1$ であるから、$P(1)$ は成り立つ。（$S_0 = 1$ であるから、$P(0)$ も成り立つ。）

**帰納段階。** $P(k)$ が成り立つと仮定する。すなわち

$$S_k(x) = (-3)^k x^{2k} + (\text{次の値より低い次数の項：} 2k).$$

多項式の導関数は多項式であり、$3x^2 S_k$ も多項式であるから、$S_{k+1} = S_k' - 3x^2 S_k$ は多項式である。その次数（degree）を調べるため、二つの部分を別々に見る。

- $S_k'$ の次数は高々 $2k - 1$ である。
- $-3x^2 S_k(x) = -3(-3)^k x^{2k+2} + (\text{低次の項}) = (-3)^{k+1} x^{2k+2} + \cdots$.

> **考えてみよう** $S_k'$ が $-3x^2 S_k$ の最高次の項を打ち消すことはあり得るだろうか？

あり得ない。$S_k'$ の次数は高々 $2k - 1$ であり、$2k + 2$ よりずっと小さいので、$x^{2k+2}$ の項には影響しない。したがって $S_{k+1}$ の次数はちょうど $2k + 2 = 2(k + 1)$ であり、最高次の係数（leading coefficient）は $(-3)^{k+1}$（0 でない）である。これが $P(k + 1)$ である。

数学的帰納法（induction）により、すべての $n \geq 1$ について $P(n)$ が成り立つ。よって $S_n(x)$ は次数 $2n$ の多項式（polynomial）であり、$x^{2n}$ の係数は $(-3)^n$ である。これは $S_2$（$9 = (-3)^2$、次数 4）および $S_3$（$-27 = (-3)^3$、次数 6）と一致する。

**最後の部分**

$S_n'(a) = 0$ と仮定する。漸化式に $x = a$ を代入すると、導関数の項が消える。

$$S_{n+1}(a) = S_n'(a) - 3a^2 S_n(a) = -3a^2 S_n(a).$$

したがって

$$S_n(a)\, S_{n+1}(a) = -3a^2 \big(S_n(a)\big)^2 \leq 0,$$

である。$a^2 \geq 0$ かつ $\big(S_n(a)\big)^2 \geq 0$ だからである。等号が成り立つのは、$a = 0$ または $S_n(a) = 0$ のとき、かつそのときに限る。以上で証明が完了した。

## 検算

- 最高次の項：$S_3$ は $(-3)^3 x^6 = -27x^6$ で始まるはずであり、実際そうなっている。
- $S_3$ の定数項：$x = 0$ の近くで $\mathrm{e}^{-x^3} = 1 - x^3 + \cdots$ であるから、0 における第 3 次導関数は $-3! = -6$ である。これは $S_3(0) = -6$ と一致する。
- 停留点（stationary point）：$S_3'(x) = -162x^5 + 162x^2$ は $x = 1$ で 0 になる。そこで $S_3(1) = 21$、$S_4(1) = -3 \cdot 21 = -63$ であるから、積は $-1323 \leq 0$ となる。
- さらに、無作為に選んだ 30 個の有理数点 $a$ において、$S_0, \ldots, S_9$ を $\mathrm{e}^{-(a+h)^3}$ の厳密なテイラー級数（Taylor series）と照合し、$[-4, 4]$ 内にある $S_1, \ldots, S_8$ のすべての停留点で不等式（inequality）を確かめた。

## よくある間違い

- 次数がちょうど $2n + 2$ になる理由を述べ忘れること。最高次の係数が 0 でないこと、そして $S_k'$ がそれを打ち消せないことが必要である。だからこそ、帰納法の仮定（inductive hypothesis）に最高次の係数を含めておくことが役に立つのである。
- 「$S_n$ は多項式である」ことだけを証明し、次数はパターンから推測してしまうこと。問題は、次数を帰納法の議論そのものから導くよう求めている。

## STEP のその先へ

ここで現れた多項式は、エルミート（Hermite）多項式（Hermite polynomials）の親戚である。エルミート多項式は $\mathrm{e}^{-x^2}$ に同じ技法を用いて定義される（「ロドリゲスの公式（Rodrigues formula）」）。エルミート多項式は今回のものと同様の漸化式を満たし、確率論や量子調和振動子（quantum harmonic oscillator）に登場する。最後の不等

式は、このような漸化式が、多項式の族全体について零点や極値点（turning points）の位置をどのように支配するかを垣間見せるものである。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）では、級数解（series solutions）の章でエルミートの方程式が扱われている。

解答例

# STEP II 1999、第 4 問

純粋数学 ・ 二項係数の恒等式

**STEP II 1999、問 4**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/99-s2-q4

## 鍵となる考え方

二つの多項式が恒等的に等しい（identically equal）とき、$x$ の各べきの係数（coefficient）は一致する。そこで、$x^n$ の係数が求めたい和になるような二つの二項展開（binomial expansion）の積を選び、同じ係数をその積のより簡単な形から計算する。本当に選ぶべきなのは、どの二つの因数を掛け合わせるかということだけである。一方の因数で $x$ を $-x$ に置き換えると (i) の符号が現れ、一方の因数を微分すると (ii) の余分な $t$ が現れる。

## 解答

### 最初の結果

二項定理（binomial theorem）により、

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r.$$

これを二つ掛け合わせる。$x^n$ の項は、$0 \le s \le n$ を満たすある $s$ について、一つ目の括弧から $x^s$ を、二つ目の括弧から $x^{n-s}$ を取ることで得られる。よって $(1+x)^n(1+x)^n$ における $x^n$ の係数は

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}\binom{n}{n-s} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}^2,$$

である。ここで、階乗による式から明らかな対称性 $\binom{n}{n-s} = \binom{n}{s}$ を用いた。恒等式（identity）のもう一方の辺では、$(1+x)^{2n}$ における $x^n$ の係数は $\binom{2n}{n}$ である。二つの

多項式は恒等的に等しいので、$x^n$ の係数は等しい：

$$\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}^2=\binom{2n}{n}.$$

**小問 (i)**

符号が交互に変わる必要があるので、一つ目の因数を $(1-x)^n=\sum_r\binom{n}{r}(-1)^r x^r$ に置き換え、恒等式

$$(1-x)^n(1+x)^n\equiv(1-x^2)^n.$$

を用いる。先ほどと同様に、左辺の $x^n$ の項は一つ目の括弧の $x^s$ と二つ目の括弧の $x^{n-s}$ から得られるので、$x^n$ の係数は

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}\binom{n}{n-s}=\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}^2.$$

である。右辺の

$$(1-x^2)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^{2k}$$

は $x$ の偶数乗のみを含む。$n$ は偶数なので、$x^n$ は確かに現れる。それは $2k=n$、すなわち $k=n/2$ のときであり、その係数は $(-1)^{n/2}\binom{n}{n/2}$ である。係数を比較して、

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}^2=(-1)^{n/2}\binom{n}{n/2},$$

となり、示すべき式が得られた。（同じ議論により、$n$ が奇数のときはこの和が 0 となることもわかる。そのとき $(1-x^2)^n$ には $x^n$ の項がないからである。）

**小問 (ii)**

> ? **考えてみよう** $\binom{n}{t}$ の隣に因数 $t$ を出現させるにはどうすればよいか？

微分（differentiation）がそれを実現する：$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^t=t\,x^{t-1}$。二項展開を微分すると

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{t=1}^{n}t\binom{n}{t}x^{t-1}.$$

が得られる。これに $(1+x)^n=\sum_u\binom{n}{u}x^u$ を掛け、恒等式

$$n(1+x)^{n-1}(1+x)^n\equiv n(1+x)^{2n-1}.$$

を用いる。左辺において、$x^{n-1}$ の項は一つ目の括弧の $t\binom{n}{t}x^{t-1}$ と二つ目の括弧の $\binom{n}{n-t}x^{n-t}$ の積から得られるので、$x^{n-1}$ の係数は

$$\sum_{t=1}^{n}t\binom{n}{t}\binom{n}{n-t}=\sum_{t=1}^{n}t\binom{n}{t}^2.$$

である。右辺では、$n(1+x)^{2n-1}$ における $x^{n-1}$ の係数は $n\binom{2n-1}{n-1}$ である。最後に、

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{2n}{n}\cdot\frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,n!} = 2\binom{2n-1}{n-1},$$

であるから、係数を比較して 2 倍すると、

$$\sum_{t=1}^{n} 2t\binom{n}{t}^2 = 2n\binom{2n-1}{n-1} = n\binom{2n}{n}.$$

**別解**：対称性を用いた鮮やかな議論がある。$t$ を $n-t$ に置き換え、$\binom{n}{n-t} = \binom{n}{t}$ を用いると、$\sum_{t=0}^{n} t\binom{n}{t}^2 = \sum_{t=0}^{n}(n-t)\binom{n}{t}^2$ がわかる。同じ和に対するこの二つの表示を足し合わせると、最初の結果により

$$\sum_{t=0}^{n} 2t\binom{n}{t}^2 = n\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}^2 = n\binom{2n}{n}$$

が得られ、$t=0$ の項は 0 である。

## 検算

$n=4$ をとる。このときパスカルの三角形（Pascal's triangle）の行は $1,4,6,4,1$ である。すると $1+16+36+16+1 = 70 = \binom{8}{4}$ であり、交代和は $1-16+36-16+1 = 6 = (-1)^2\binom{4}{2}$、さらに $2(1\cdot 16 + 2\cdot 36 + 3\cdot 16 + 4\cdot 1) = 280 = 4\times 70$ である。また、39 以下のすべての $n$ について、三つの恒等式がすべて正確に成り立つことも確かめた。

## よくある間違い

- 小問 (i) で右辺が偶数乗のみを含むことを忘れること。$n$ が偶数であることこそが、$x^n$ を出現させるのである。
- 小問 (ii) で比較するべきを間違えること。微分すると指数が一つ下がるので、必要なのは $x^n$ ではなく $x^{n-1}$ である。

## STEP のその先へ

最初の恒等式はヴァンデルモンドの恒等式（Vandermonde's identity）$\sum_s \binom{m}{s}\binom{n}{k-s} = \binom{m+n}{k}$ の特別な場合であり、これには数え上げによる証明もある：$m$ 人の女性と $n$ 人の男性から $k$ 人を選ぶとき、女性を何人選ぶかで場合分けすればよい。多項式を数列の記録装置として用いるのは**母関数**（generating functions）の方法であり、組合せ論（combinatorics）や確率論における中心的な道具である。Grimmett と Welsh による

*Probability: An Introduction*（確率論入門）は全編を通して母関数を用いており、Siklos による *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）にはこの種の問題がさらに収められている。

解答例

# STEP II 1999、第 5 問

純粋数学 ・ 三角方程式

> **STEP II 1999、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q5

## 鍵となる考え方

自然な方針は二つある。一つは $\cos\alpha$ を未知数とする方法である。$\sin\alpha$ を一方の辺に分離して両辺を 2 乗し、$\sin^2 + \cos^2 = 1$ を用いると、$\cos\alpha$ についての二次方程式（quadratic equation）が得られる。もう一つは、$5\cos x + 12\sin x$ を一つの余弦 $13\cos(x-\beta)$ にまとめる方法であり（三角関数の合成）、これによって二次方程式の二つの解がどちらも実際に現れることもわかる。最後の部分については、余弦は $[0,\pi]$ で減少（decreasing）するので、$\alpha < \frac{3}{4}\pi$ は $\cos\alpha$ についての主張に言い換えられる。したがって、問題は二つの無理数（surd）の大小比較に帰着する。

## 解答

### $\cos\alpha$ の二つの値

$c = \cos\alpha$ とおく。与えられた方程式から $12\sin\alpha = 7 - 5c$ である。両辺を 2 乗し、$\sin^2\alpha = 1 - c^2$ を用いると、

$$144(1-c^2) = 49 - 70c + 25c^2,$$
$$169c^2 - 70c - 95 = 0.$$

解の公式（quadratic formula）により、

$$c = \frac{70 \pm \sqrt{70^2 + 4\cdot 169\cdot 95}}{2\cdot 169} = \frac{70 \pm \sqrt{69120}}{338}.$$

$69120 = 576\times 120 = 24^2\times 120$ であるから、$\sqrt{69120} = 24\sqrt{120}$ である。よって

$$\cos\alpha = \frac{35 - 12\sqrt{120}}{169} \qquad \text{または} \qquad \cos\alpha = \frac{35 + 12\sqrt{120}}{169},$$

となり、これが求める結果である。もう一方の値は $\dfrac{35+12\sqrt{120}}{169}$ である。

> **考えてみよう** 2 乗すると、偽の解が紛れ込むことがある。二つの値は、どちらも本当に元の方程式の解から得られるのだろうか。

どちらも実際に得られる。その理由は、一つの余弦にまとめた形を見るとわかる。$\cos\beta = \frac{5}{13}$、$\sin\beta = \frac{12}{13}$ を満たす鋭角（acute angle）を $\beta$ とする。すると

$$5\cos x + 12\sin x = 13\cos(x-\beta),$$

であるから、方程式は $\cos(x-\beta) = \frac{7}{13}$ と同値である。$\cos\gamma = \frac{7}{13}$ を満たす鋭角を $\gamma$ とすると、$\sin\gamma = \frac{\sqrt{169-49}}{13} = \frac{\sqrt{120}}{13}$ である。解は $x = \beta \pm \gamma + 2k\pi$ であり、

$$\cos(\beta\pm\gamma) = \cos\beta\cos\gamma \mp \sin\beta\sin\gamma = \frac{35\mp 12\sqrt{120}}{169}.$$

したがって、どちらの符号も本物の解を与える。$\alpha = \beta+\gamma$ がマイナスの符号に、$\alpha = \beta-\gamma$ がプラスの符号に対応する。

### 第 2 象限にある解

$\frac{1}{2}\pi < \alpha < \pi$ と仮定する。このとき $\cos\alpha < 0$ である。$\sqrt{120} > 10$ より $35+12\sqrt{120} > 0$ であるから、この解は除外される。また $12\sqrt{120} > 120 > 35$ であるから、もう一方の解は負である。よって

$$\cos\alpha = \frac{35-12\sqrt{120}}{169}.$$

余弦は $[0,\pi]$ で狭義単調減少である。$\alpha$ と $\frac{3}{4}\pi$ はどちらもこの区間に含まれるので、

$$\alpha < \tfrac{3}{4}\pi \iff \cos\alpha > \cos\tfrac{3}{4}\pi = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

したがって、$\dfrac{12\sqrt{120}-35}{169} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$、すなわち $12\sqrt{120}-35 < \dfrac{169}{\sqrt{2}}$ を示せばよい。

> **考えてみよう** 電卓を使わずに、また負かもしれない量を 2 乗することなく、これらの無理数をどう比較すればよいだろうか。

まず $\sqrt{120}$ を大まかに上から評価する。$120 < 121$ より $\sqrt{120} < 11$ であるから、

$$12\sqrt{120} - 35 < 132 - 35 = 97.$$

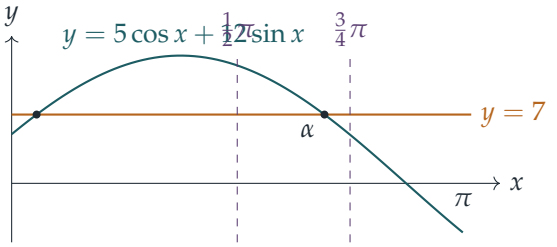
あとは $97 < \dfrac{169}{\sqrt{2}}$、すなわち $97\sqrt{2} < 169$ を示せば十分である。両辺はともに正なので、これは両辺の 2 乗についての不等式（inequality）と同値である：

$$2\times 97^2 = 18\,818 < 28\,561 = 169^2,$$

これは正しい。以上をまとめると、

$$\cos\alpha = -\frac{12\sqrt{120}-35}{169} > -\frac{97}{169} > -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\tfrac{3}{4}\pi,$$

であり、余弦は $[0,\pi]$ で減少するから、$\alpha < \frac{3}{4}\pi$ が示された。




## 検算

- 数値的には、$[0,2\pi)$ における解は $x \approx 0.1738$ と $x \approx 2.1782$ である。それぞれの余弦は 0.98493 と $-0.57073$ であり、$(35 \pm 12\sqrt{120})/169$ と一致する。
- 第 2 象限の解は 2.1782 であり、グラフからもわかるように $\frac{3}{4}\pi \approx 2.3562$ より小さい。余裕は十分にある：$\cos\alpha \approx -0.571$ に対して $-1/\sqrt{2} \approx -0.707$ である。大まかな評価 $\sqrt{120} < 11$ で足りるのはこのためである。
- 二次方程式の確認として、二つの解の積は $-\frac{95}{169}$、和は $\frac{70}{169}$ である。

## よくある間違い

- 符号を確かめずに不等式を 2 乗してしまう。ここでは $12\sqrt{120}-35$ と $169/\sqrt{2}$ はどちらも正であるが、その理由は明記すべきである。
- 余弦が $[0,\pi]$ で**減少する**ために不等号の向きが逆になることを忘れる：$\alpha < \frac{3}{4}\pi$ は $\cos\alpha > -\frac{1}{\sqrt{2}}$ に対応する。
- 第 2 象限において正の解が除外される理由を説明しない。

## STEP のその先へ

最後の部分は、厳密な評価（rigorous estimation）の小さな練習問題である。扱いにくい量をより簡単な上界で置き換え、それでも余裕が残ることを確かめる。これは解析学（analysis）における多くの不等式の証明の進め方そのものである。余弦の値から角

へと移る段階では、狭義単調（strictly monotonic）な関数は大小関係を保つ（あるいは逆転させる）という事実を用いている。これは、解析学の最初の講義で学ぶ逆関数（inverse function）の背後にある考え方である。不等式を用いた丁寧な証明についてさらに知りたければ、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照するとよい。

解答例

# STEP II 1999、第 6 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP II 1999、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q6

## 鍵となる考え方

分数式 $\frac{ax+b}{cx+d}$ の導関数（derivative）は、定数を $(cx+d)^2$ で割った形になる。したがって、被積分関数（integrand）が $\frac{1}{(x+3)^2}$ と $\frac{x+1}{x+3}$ または $\frac{x+2}{x+3}$ の関数との積になっているときは、その分数式を新しい変数として置換すれば $\frac{1}{(x+3)^2}$ は完全に吸収され、残るのはせいぜい $\int \ln y \, \mathrm{d}y$ である。残りの 2 つの積分は、対数法則から導かれる。

## 解答

### 導関数

商の微分法（quotient rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$$

分子の $x$ の項は打ち消し合い、定数が残る。これこそが、この問題全体を成り立たせている点である。

### 1 つ目の積分

$y = \dfrac{x+1}{x+3}$ とおく。これは $a=1$、$b=1$、$c=1$、$d=3$ とした $(*)$ の形であるから、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3-1}{(x+3)^2} = \frac{2}{(x+3)^2}, \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^2} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}y.$$

$x=0$ のとき $y=\frac{1}{3}$、$x=1$ のとき $y=\frac{1}{2}$ である。$\int \ln y\,\mathrm{d}y = y\ln y - y$（$u=\ln y$ とする部分積分（integration by parts））を用いると、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2}\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{1/3}^{1/2}\ln y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\Big[y\ln y - y\Big]_{1/3}^{1/2}\\ &= \frac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\ln 2 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\ln 3 + \tfrac{1}{3}\right)\\ &= \frac{1}{6}\ln 3 - \frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{12},\end{aligned}$$

ただし $\ln\frac{1}{2} = -\ln 2$ と $\ln\frac{1}{3} = -\ln 3$ を用いた。これが求める結果である。この積分を $I_1$ とよぶ。

### 対になる積分

> **考えてみよう**　$x^2+3x+2$ は、いま用いた置換とどのような関係があるだろうか。

これは $(x+1)(x+2)$ と因数分解できるので、

$$\frac{x^2+3x+2}{(x+3)^2} = \frac{x+1}{x+3}\cdot\frac{x+2}{x+3} \qquad \text{かつ} \qquad \frac{x+1}{x+2} = \frac{x+1}{x+3}\Big/\frac{x+2}{x+3}.$$

したがって、残りの 2 つの積分に現れる対数はすべて、$\ln\frac{x+1}{x+3}$ と $\ln\frac{x+2}{x+3}$ の和と差で表される（$0\le x\le 1$ においてこれらの分数はすべて正である）。よって、もう 1 つ次の積分が必要になる。

$$J = \int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2}\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)\mathrm{d}x.$$

$y = \dfrac{x+2}{x+3}$ とおく。今度は $a=1$、$b=2$、$c=1$、$d=3$ であるから $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{(x+3)^2}$ となり、積分区間は $y=\frac{2}{3}$ から $y=\frac{3}{4}$ になる。

$$\begin{aligned}J &= \int_{2/3}^{3/4}\ln y\,\mathrm{d}y = \Big[y\ln y - y\Big]_{2/3}^{3/4}\\ &= \tfrac{3}{4}(\ln 3 - 2\ln 2) - \tfrac{3}{4} - \tfrac{2}{3}(\ln 2 - \ln 3) + \tfrac{2}{3}\\ &= \frac{17}{12}\ln 3 - \frac{13}{6}\ln 2 - \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

### 残りの 2 つの積分

$\ln\frac{x^2+3x+2}{(x+3)^2} = \ln\frac{x+1}{x+3} + \ln\frac{x+2}{x+3}$ であるから、2 つ目の積分は

$$\begin{aligned}I_1 + J &= \left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{17}{12}\right)\ln 3 - \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{13}{6}\right)\ln 2 - \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{12}\\ &= \frac{19}{12}\ln 3 - \frac{29}{12}\ln 2 - \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

$\ln\frac{x+1}{x+2} = \ln\frac{x+1}{x+3} - \ln\frac{x+2}{x+3}$ であるから、3 つ目の積分は

$$\begin{aligned} I_1 - J &= \left(\tfrac{1}{6} - \tfrac{17}{12}\right)\ln 3 - \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{13}{6}\right)\ln 2 \\ &= \frac{23}{12}\ln 2 - \frac{5}{4}\ln 3, \end{aligned}$$

となる。ここで定数項 $-\frac{1}{12}$ は打ち消し合っている。

## 検算

- $[0,1]$ でシンプソンの公式（Simpson's rule）を用いると $I_1 \approx -0.07352$、$J \approx -0.02878$ となり、2 つ目と 3 つ目の積分は $\approx -0.10230$ と $-0.04473$ となる。いずれも厳密な値と小数第 10 位まで一致する。
- 大まかな評価：$\int_0^1 (x+3)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}$ であり、$\ln\frac{x+1}{x+2}$ は $\ln\frac{1}{2} \approx -0.69$ と $\ln\frac{2}{3} \approx -0.41$ の間にある。よって 3 つ目の積分はおよそ $-0.058$ と $-0.034$ の間になければならず、実際 $-0.0447$ はその間にある。
- $[0,1]$ においてどの被積分関数も負である（対数の中の分数はいずれも 1 より小さい）から、3 つの答えはすべて負になるはずであり、実際そうなっている。

## よくある間違い

- 1 つ目の置換で係数 $\frac{1}{2}$ を忘れること。そこでは $ad - bc = 2$ であるが、2 つ目では 1 である。
- 積分区間を変えないこと、すなわち置換した後も $x$ の区間 0 と 1 のままにしてしまうこと。
- $\frac{x+1}{x+2}$ に対して新たな置換を試みること。それでもうまくいくが、$(x+3)^{-2}$ を $y$ で表すと煩雑な式になる。対数を分解するほうがはるかに速い。

## STEP のその先へ

$ad - bc \neq 0$ を満たす $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ の形の写像は**メビウス変換**（Möbius transformations）とよばれる。2 つのメビウス変換の合成は $2 \times 2$ 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の積に対応し、$ad - bc$ はその行列式（determinant）である。これが導関数に $ad - bc$ が現れる理由である。複素解析（complex analysis）において、メビウス変換はちょうど拡張された複素平面（extended plane）の等角な全単射（conformal bijections）であり、円と直線を円と直

線に移す。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）には、メビウス変換についての見事な章がある。

解答例

# STEP II 1999、第 7 問

純粋数学 • 曲線の概形

> **STEP II 1999、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q7

## 鍵となる考え方

微分して全体を通分すると、分子はほとんど完全に消えてしまう。2 次の項はすべて打ち消し合い、1 次の因数がただ一つ残るので、停留点（stationary point）はただちに決まる。グラフの概形を描くには、根号の中を平方完成（complete the square）する。そうすると、曲線がどこに存在するか、$|x|$ が大きいときにどう振る舞うかがわかり、さらに $a = 1$ のときには平方根が絶対値（modulus）になって、曲線が 2 つの直角双曲線（rectangular hyperbola）の一部に分かれることもわかる。

## 解答

$Q(x) = x^2 - 2x + a = (x-1)^2 + (a-1)$ とおく。

### $a > 1$ のとき停留点はちょうど 1 つである

$a > 1$ ならば、すべての $x$ について $Q(x) \geq a - 1 > 0$ であるから、曲線はすべての実数 $x$ で定義され、しかも微分可能である。$y = xQ^{-1/2}$、$Q'(x) = 2x - 2$ であるから、積の微分法（product rule）により

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= Q^{-1/2} - \tfrac{1}{2}x(2x-2)Q^{-3/2} = \frac{Q - x(x-1)}{Q^{3/2}} \\ &= \frac{x^2 - 2x + a - x^2 + x}{Q^{3/2}} = \frac{a - x}{(x^2 - 2x + a)^{3/2}}.\end{aligned}$$

分母はすべての $x$ で正かつ有限であるから、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$ となるのは $x = a$ のときに限る。したがって $C$ の停留点はちょうど 1 つであり、それは

$$x = a, \qquad y = \frac{a}{\sqrt{a^2 - a}} = \sqrt{\frac{a}{a-1}},$$

の点である。これが示すべきことであった。$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ の符号は $a - x$ の符号と一致するので、曲線は $x < a$ で増加し、$x > a$ で減少する。よってこの点は極大点（maximum）である。

**考えてみよう** $a > 1$ はどこで使われたか。

2 か所である。第一に、$a > 1$ により至るところで $Q > 0$ となるので、曲線に途切れはなく、導関数が存在しない点もない。第二に、$Q(a) = a^2 - a > 0$ であるから、$x = a$ は確かに曲線上の点になる。$a = 1$ のときは、停留点の候補 $x = a = 1$ がちょうど $Q = 0$ となる点であり、これが小問 (ii) で問題となる点である。

さらに 2 つの事実が、どちらの概形を描くのにも役立つ。$|x|$ が大きいとき $\sqrt{Q} = |x|\sqrt{1 - 2/x + a/x^2} \approx |x|$ であるから、

$$y \to 1 \text{、ただし} x \to +\infty, \qquad y \to -1 \text{、ただし} x \to -\infty.$$

となる。また、$y$ の符号は $x$ の符号と一致し、曲線は原点を傾き $a/a^{3/2} = 1/\sqrt{a}$ で通る。

**小問 (i)：$a = 2$**

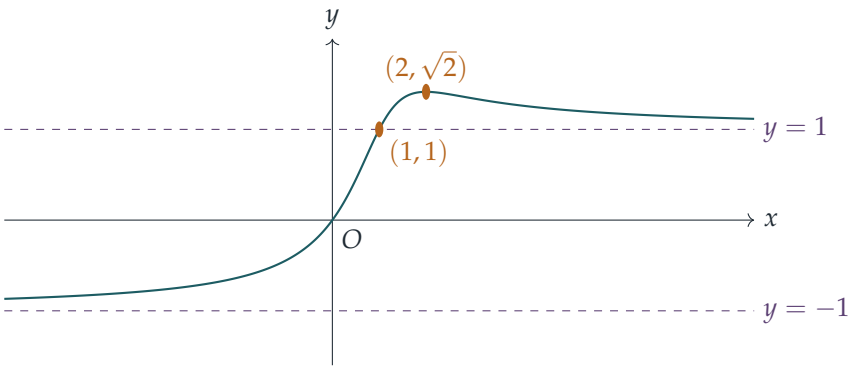
このとき $y = \dfrac{x}{\sqrt{(x-1)^2 + 1}}$ であり、すべての $x$ で定義され、次のことが成り立つ。

- $(2, \sqrt{2})$ で極大となり、$x < 2$ で増加、$x > 2$ で減少する。
- 原点を通り、そこでの傾きは $1/\sqrt{2}$ である。
- 水平な漸近線（asymptote）$y = 1$（$x \to \infty$ のとき）と $y = -1$（$x \to -\infty$ のとき）をもつ。

曲線はそれぞれの漸近線のどちら側にあるだろうか。$y = \pm 1$ とおいて両辺を 2 乗すると $x^2 = x^2 - 2x + 2$ となり、$x = 1$ を得る。$y$ の符号は $x$ の符号と一致するので、適するのは $y = +1$ だけである。したがって曲線は $y = 1$ とただ 1 回、$(1, 1)$ で交わる。すべての $x > 1$ で曲線は $y = 1$ より上にあり、極大点を過ぎたあと上側から漸近線に近づいていく。一方、曲線は $y = -1$ とは交わらないので、常に $y = -1$ より上にあり、$x$ が $-\infty$ から増加するにつれて $y = -1$ から離れて上昇していく。

（さらに詳しく調べたければ、もう一度微分すると $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = (2x^2 - 7x + 4)/Q^{5/2}$ となるので、$x = \frac{1}{4}(7 \pm \sqrt{17})$、すなわちおよそ $x \approx 0.72$ と $x \approx 2.78$ に変曲点（point of

inflection）がある。概形を描くのにこれらは必要ないが、グラフの形の理由を説明してくれる。）




**小問 (ii)：** $a = 1$

このとき $Q = (x-1)^2$ であるから $x = 1$ は除かれる。また、平方根は正の方をとるので

$$\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|.$$

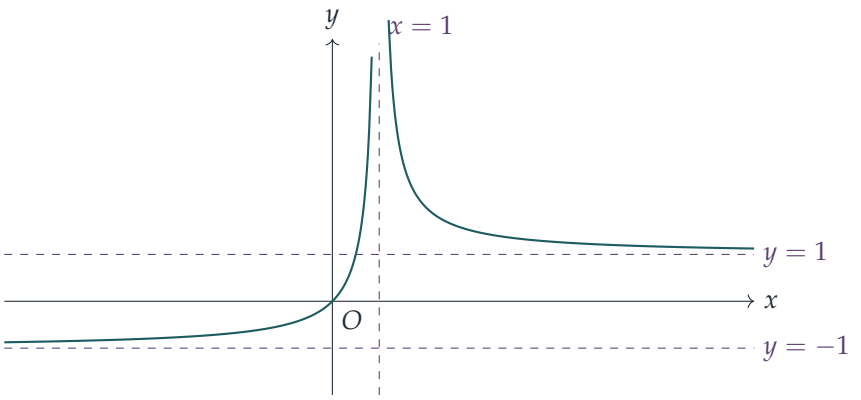
である。よって

$$y = \frac{x}{|x-1|} = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} = -1 + \dfrac{1}{1-x}, & x < 1, \\ \dfrac{x}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}, & x > 1. \end{cases}$$

それぞれの枝は、$x = 1$ を中心とする直角双曲線の一部である。

- $x < 1$ のとき：$y$ は増加する（導関数は $1/(1-x)^2 > 0$）。$-1$（$x \to -\infty$ のとき上側から近づく）から出発し、原点を傾き 1 で通過して、$x \to 1^-$ のとき $+\infty$ に発散する。
- $x > 1$ のとき：$y$ は減少する（導関数は $-1/(x-1)^2 < 0$）。$x \to 1^+$ のとき $+\infty$ であり、そこから 1 に向かって下がっていく（$x \to \infty$ のとき上側から近づく）。

直線 $x = 1$ は鉛直な漸近線であり、その**両側**で $y \to +\infty$ となる（分子は 1 に近く、分母は小さな正の数である）。停留点は存在しない。$a > 1$ の曲線がもっていた高さ $\sqrt{a/(a-1)}$ の極大点は、$a \to 1^+$ のとき無限遠へ押しやられてしまったのである。一般の公式もこれと合致する。実際、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = (1-x)/|x-1|^3$ は決して 0 にならない。




## 検算

- 数値的に、導関数の公式 $(a-x)/Q^{3/2}$ は数千個の無作為な点で差分（finite difference）による導関数と一致し、$a>1$ のいくつかの値について符号を走査すると、符号の変化はちょうど 1 回だけ見つかる。
- $a=2$ のとき：$y(2)=2/\sqrt{2}=\sqrt{2}\approx 1.414$、$y(1)=1$ であり、$y(10^6)\approx 1.000001$、$y(-10^6)\approx -0.999999$ となる。これにより、漸近線にどちら側から近づくかが確認できる。
- $a=1$ のとき：$y(0.999)\approx 999$、$y(1.001)\approx 1001$ であり、主張どおりどちらも大きな正の数である。
- $a\to\infty$ のとき、極大値 $\sqrt{a/(a-1)}$ は 1 に近づく。これは妥当である。$a$ が非常に大きいと、原点付近で曲線はほぼ $x/\sqrt{a}$ となり、山は平たくなる。

## よくある間違い

- 小問 (ii) で $\sqrt{(x-1)^2}=x-1$ と書いてしまうこと。そうすると至るところで $y=x/(x-1)$ となり、左側の枝を誤る。その誤った枝は $x\to-\infty$ のとき $+1$ に近づき、$x\to 1^-$ のとき $-\infty$ に発散することになってしまう。
- 曲線の両端に漸近線 $y=1$ を与えてしまうこと。$\sqrt{x^2}=|x|$ であるから、$x\to-\infty$ のときの極限は $-1$ である。
- $a>1$ のとき分母が決して 0 にならないことを示し忘れること。それがなければ、「分子が 0 になるのは $x=a$ のときだけである」と言っても、停留点がちょうど 1 つであることの証明にはまだならない。

## STEP のその先へ

ここで扱った曲線の族は、$a = 1$ を境に突然その性質を変える。極大点を 1 つもつ滑らかな曲線が、鉛直な漸近線をもつ 2 つの離れた枝に変わるのである。曲線の族の定性的な形がパラメータにどう依存するかを調べることは、分岐理論（bifurcation theory）の出発点である。また、$\sqrt{x^2} = |x|$ や $x \to \pm\infty$ のときの極限に払う注意は、まさに大学 1 年の解析学で厳密に扱われる注意そのものである。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、極限や連続性がきちんと扱われる様子を見るのに親しみやすい本である。

解答例

# STEP II 1999、第 8 問

純粋数学 ・ 三角級数

> **STEP II 1999、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q8

## 鍵となる考え方

$\sin k\theta$ に $2\sin\frac{1}{2}\theta$ を掛けると、積和公式（product-to-sum formula）によって二つの余弦の差に変わり、和は隣り合う項が次々に打ち消し合う形（telescoping）になる。その後は、どちらの小問も $\theta$ をうまく選ぶことが要点である。$\theta = \pi/n$ とおくと、扱いにくい余弦 $\cos(n+\frac{1}{2})\theta$ は $\cos\frac{1}{2}\theta$ の単純な定数倍になる。(ii) では、半角の公式（half-angle formula）により $\sin^2$ が余弦に変わり、和 $\sum k\cos k\theta$ はちょうど $(*)$ を微分して得られるものである。

## 解答

### $(*)$ の証明

右辺が意味をもつように、$\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$ と仮定する。恒等式（identity）$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$ に $A = k\theta$、$B = \frac{1}{2}\theta$ を代入すると

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\sin k\theta = \cos\left(k-\tfrac{1}{2}\right)\theta - \cos\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\theta.$$

を得る。これを $k=0$ から $n$ まで加えると、第 $k$ 行で引かれる $\cos(k+\frac{1}{2})\theta$ は第 $k+1$ 行で再び足されるので、最初と最後の項だけが残る。

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta = \cos\left(-\tfrac{1}{2}\theta\right) - \cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta = \cos\tfrac{1}{2}\theta - \cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta,$$

ここで余弦が偶関数（even function）であることを用いた。両辺を $2\sin\frac{1}{2}\theta$ で割れば $(*)$ が得られる。

**小問 (i)**

$\theta = \pi/n$（ただし $n \geq 1$）とおくと、$\sin\frac{1}{2}\theta = \sin\frac{\pi}{2n} \neq 0$ である。このとき

$$\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta = \cos\left(\pi + \tfrac{\pi}{2n}\right) = -\cos\tfrac{\pi}{2n},$$

であるから、$(*)$ の分子は $2\cos\frac{\pi}{2n}$ となり、

$$\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{2\cos\frac{\pi}{2n}}{2\sin\frac{\pi}{2n}} = \cot\frac{\pi}{2n}.$$

となる。これは厳密な値である。$n$ が大きいとき $\frac{\pi}{2n}$ は小さいので、$\cos\frac{\pi}{2n} \approx 1$、$\sin\frac{\pi}{2n} \approx \frac{\pi}{2n}$ であり、

$$\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \approx \frac{1}{\pi/(2n)} = \frac{2n}{\pi}.$$

を得る。

**小問 (ii)**

倍角の公式（double-angle formula）より $\sin^2\frac{k\pi}{2n} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{k\pi}{n}\right)$ であるから、$\theta = \pi/n$ として

$$\sum_{k=0}^{n} k\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k\cos k\theta = \frac{n(n+1)}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k\cos k\theta. \qquad (1)$$

となる。$\sum k\cos k\theta$ を求めるために、$(*)$ を $\theta$ について微分する。左辺はちょうどこの和になる。まず右辺を

$$\frac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}\theta - \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}.$$

と分ける。$S = \sin\frac{1}{2}\theta$、$c = \cos\frac{1}{2}\theta$ とおく。第 1 項を微分すると $-\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}\theta = -\frac{1}{4S^2}$ となる。商の微分法（quotient rule）により、第 2 項を微分すると

$$\frac{(n+\frac{1}{2})\sin(n+\frac{1}{2})\theta \cdot 2S + \cos(n+\frac{1}{2})\theta \cdot c}{4S^2}.$$

となる。したがって

$$\sum_{k=0}^{n} k\cos k\theta = \frac{-1 + (2n+1)S\sin(n+\frac{1}{2})\theta + c\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{4S^2}.$$

である。

**考えてみよう** なぜ $\theta = \pi/n$ を代入するのは微分の後であって、前ではないのか。

恒等式 $(*)$ はすべての $\theta$（ただし $\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$）について成り立つので、微分してよい。先に $\theta = \pi/n$ と固定してしまうと、一つの数が得られるだけで、微分するものが何もなくなる。導関数を $\theta$ についての恒等式として得てしまえば、好きな値を代入できる。

ここで $\theta = \pi/n$ とする。(i) と同様に $(n+\frac{1}{2})\theta = \pi + \frac{1}{2}\theta$ であるから、$\sin(n+\frac{1}{2})\theta = -S$、$\cos(n+\frac{1}{2})\theta = -c$ である。よって

$$\sum_{k=0}^{n} k\cos\frac{k\pi}{n} = \frac{-1-(2n+1)S^2-c^2}{4S^2} = \frac{-2-2nS^2}{4S^2} = -\frac{1}{2S^2} - \frac{n}{2},$$

となる。ここで $c^2 = 1-S^2$ を用いた。これを (1) に代入すると

$$\sum_{k=0}^{n} k\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{4} + \frac{1}{4S^2} = \frac{n(n+2)}{4} + \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{2n}}.$$

を得る。これは厳密な値である。$n$ が大きいとき $\sin\frac{\pi}{2n} \approx \frac{\pi}{2n}$ であるから $\frac{1}{4\sin^2(\pi/2n)} \approx \frac{n^2}{\pi^2}$ であり、また $\frac{n(n+2)}{4} = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}$ の第 2 項は $n^2$ に比べて無視できる。したがって

$$\sum_{k=0}^{n} k\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \approx \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}\right)n^2,$$

となり、示すべきことが示された。

## 検算

- (ii) で $n = 1$ のとき：和は $0 + 1\cdot\sin^2\frac{\pi}{2} = 1$ であり、厳密な公式は $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$ を与える。
- (i) で $n = 2$ のとき：和は $0+1+0 = 1$ であり、$\cot\frac{\pi}{4} = 1$ である。
- 数値的には、$n = 1000$ のとき (i) の和は $636.6192\ldots$ で、$2n/\pi = 636.6198\ldots$ と比べられる。(ii) の和は $351\,821.3$ で、$(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2})n^2$ との差は 0.15% 以内である。(ii) の相対誤差（relative error）は、無視した $\frac{n}{2}$ の項のために $1/n$ のように小さくなっていく。

## よくある間違い

- $\cos(\pi + x) = \cos x$ と書いてしまうこと。正しくは $-\cos x$ であり、この符号こそが (i) で分子を 2 倍にしている。
- (ii) で $\frac{1}{2}\sum k = \frac{n(n+1)}{4}$ の項を忘れること。この項が $\frac{1}{4}n^2$ をもたらす。

## STEP のその先へ

小問 (i) は姿を変えたリーマン（Riemann）和（Riemann sum）である。$\frac{\pi}{n}\sum \sin\frac{k\pi}{n} \to \int_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = 2$ であり、これはまさに $\sum \approx 2n/\pi$ という主張そのものである。同様に、(ii) は $\frac{1}{n^2}\sum k\sin^2\frac{k\pi}{2n} \to \int_0^1 x\sin^2\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}$ を述べている。同じ打ち消し合いの技法を $\sum\cos k\theta$ に適用すると、フーリエ解析（Fourier analysis）におけるディリクレ（Dirichlet）核（Dirichlet kernel）が得られる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、リーマン和とフーリエ級数（Fourier series）を丁寧に扱っている。

解答例

# STEP II 1999、第 9 問

力学 ・ 変化する力による運動

> **STEP II 1999、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q9

## 鍵となる考え方

加速度（acceleration）は距離 $x$ のみに依存し、時刻には依存しない。したがって用いるべき道具は $\ddot{x} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ である。これにより運動方程式（equation of motion）は、そのまま積分して $v^2$ を $x$ の関数として求められる形になる（姿を変えたエネルギー方程式（energy equation）である）。あとはすべて、$v^2$ がどこで 0 になるかを問うことに尽きる。そこが破片（fragment）が止まって引き返す地点である。

## 解答

各破片を、定点 $G$ を通る直線上を運動する質点（particle）としてモデル化し、$x$ を $G$ からの距離、$v = \dot{x}$ をその速度とする。速度は $G$ から遠ざかる向きを正とする。初めは $x = 0$ かつ $v = u > 0$ である。加速度は $G$ に向かう向きなので、この約束のもとでは負である。

### 小問 (i)

$x < R$ では $\ddot{x} = -k_1 x^3$ であり、$\ddot{x} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ と書くと

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -k_1 x^3.$$

変数分離（separation of variables）を行い、出発点（$x = 0$、$v = u$）から積分すると

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}u^2 = -\tfrac{1}{4}k_1 x^4, \qquad \text{よって} \qquad v^2 = u^2 - \tfrac{1}{2}k_1 x^4 \quad (x < R).$$

破片が外向きに動いている間は $v = \sqrt{u^2 - \tfrac{1}{2}k_1 x^4}$ である。

**小問 (ii)**

$2a^2 = k_1R^4$ とおくと、(i) の式は $v^2 = u^2 - a^2(x/R)^4$ となる。$x$ が 0 から増加するにつれて $v^2$ は減少し、次の点で o に達する。

$$x_0 = \left(\frac{2u^2}{k_1}\right)^{1/4}.$$

$u < a$ ならば $2u^2 < 2a^2 = k_1R^4$ であるから、$x_0 < R$ である。

**考えてみよう** $x_0$ で速さは o になるが、それがなぜ破片がそれより先へ進まないことを意味するのだろうか？

$x_0$ において破片は瞬間的に静止するが、そこでの加速度は $-k_1x_0^3 \neq 0$ であり、$G$ の向きを向いている。したがって釣り合い（equilibrium）の状態にはなく、$G$ に向かって引き返し始める。実際、$x$ が $x_0$ を超えることは決してない。もし超えれば、(i) の式から $v^2 < 0$ となってしまうからである。破片が到達する最も遠い点は $x_0 < R$ であり、したがって破片が $G$ から距離 $R$ に達することはない。これで示された。

**小問 (iii)**

まず、$u \geq b$ である破片は確かに $R$ に到達する。定義から

$$b^2 = \tfrac{1}{2}k_1R^4 + \frac{2k_2}{3R^3} = a^2 + \frac{2k_2}{3R^3} > a^2,$$

であるから、$x \leq R$ に対して小問 (i) より

$$v^2 = u^2 - \tfrac{1}{2}k_1x^4 \geq u^2 - a^2 \geq b^2 - a^2 = \frac{2k_2}{3R^3} > 0.$$

特に、破片は $v_R^2 = u^2 - \frac{1}{2}k_1R^4 = u^2 - a^2$ で $x = R$ に到達する。

$x \geq R$ では運動方程式は $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -k_2x^{-4}$ である。$x = R$ から積分すると

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_R^2 = \frac{k_2}{3}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{R^3}\right),$$

よって

$$\begin{aligned} v^2 &= u^2 - \tfrac{1}{2}k_1R^4 - \frac{2k_2}{3R^3} + \frac{2k_2}{3x^3} \\ &= u^2 - b^2 + \frac{2k_2}{3x^3} \qquad (x \geq R). \end{aligned}$$

$b$ がこのように定義されていたのは、まさにこの組合せのためである。$b^2$ は、$G$ から無限遠へ脱出するのに $\frac{1}{2}v^2$ で測って必要な「費用」の総額なのである。

$u \geq b$ ならば $u^2 - b^2 \geq 0$ かつ $\frac{2k_2}{3x^3} > 0$ であるから、すべての $x \geq R$ に対して $v^2 > 0$ である（これは境界の場合 $u = b$ も含む）。$x \leq R$ での評価と合わせると、破片が到達しうるあらゆる距離で $v^2$ は真に正である。

速度 $v$ は時間について連続であり、$u > 0$ から始まる。負になるためには 0 を通過しなければならず、そのためにはある位置で $v^2 = 0$ となる必要があるが、それが決して起こらないことをいま示した。したがって $v > 0$ が常に成り立つ。すなわち、爆発の瞬間から破片は常に $G$ から遠ざかる向きに動いている。（$v^2 \geq 2k_2/(3x^3)$ であるから、破片は進み続け、$x \to \infty$ となる。）

### 小問 (iv)

今度は $a < u < b$ とする。$u > a$ であるから、(iii) の議論により $[0, R]$ 上で $v^2 \geq u^2 - a^2 > 0$ であり、破片は外向きに動いたまま $R$ に到達する。$R$ より先では

$$v^2 = \frac{2k_2}{3x^3} - (b^2 - u^2),$$

であり、今度は $b^2 - u^2 > 0$ である。これは $x$ の増加とともに減少し、次のとき o となる。

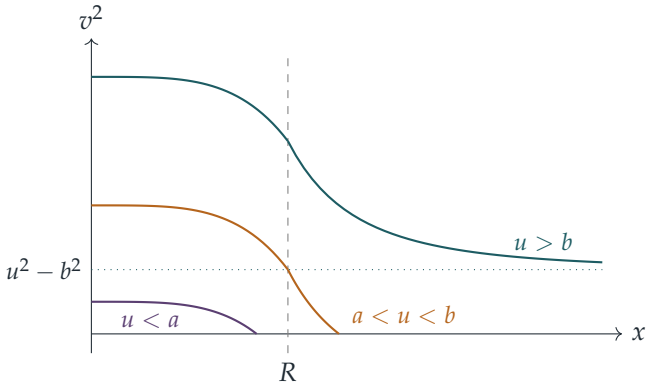
$$x^3 = \frac{2k_2}{3(b^2 - u^2)}.$$

この点は確かに領域 $x \geq R$ にある。実際、$u > a$ より $b^2 - u^2 < b^2 - a^2 = \frac{2k_2}{3R^3}$ であるから、$x^3 > R^3$ となる。(ii) と同様に、破片はそこで $G$ に向かう o でない加速度 $-k_2 x^{-4}$ をもって止まり、それより先へは進めない。進めば $v^2$ が負になってしまうからである。$G$ からの最大距離は

$$\boxed{x_{\max} = \left(\frac{2k_2}{3(b^2 - u^2)}\right)^{1/3}}$$

である。

下図は、$k_1 = 2$、$k_2 = 3$、$R = 1$（したがって $a^2 = 1$、$b^2 = 3$）の場合に、3 種類の初速について $v^2$ を $x$ に対してプロットしたものである。各破片は、その曲線が横軸と交わるところまで進む。




## 検算

- $k_1 = 2$、$k_2 = 3$、$R = 1$ とすると $a = 1$、$b = \sqrt{3}$ である。$u = \sqrt{2}$ に対して公式は $x_{\max} = (2 \cdot 3/(3 \cdot 1))^{1/3} = 2^{1/3} \approx 1.26$ を与え、これは $R$ をわずかに超えたところであり、そうなるべきである。
- $u \to a^+$ のとき $b^2 - u^2 \to 2k_2/(3R^3)$ であり、$x_{\max} \to R$ となる。$u \to b^-$ のとき $x_{\max} \to \infty$ となる。どちらも境界において小問 (ii) および (iii) と一致する。
- 運動を数値的に追跡すると（ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）、$k_1$、$k_2$、$R$ の無作為な選び方 12 通り）、$v^2$ の式、$u < a$ のときの折り返し点 $(2u^2/k_1)^{1/4}$、(iv) の $x_{\max}$ の値が誤差 0.1% 以内で再現され、$u \geq b$ のときには逆行はまったく起こらない。

## よくある間違い

- 第 2 段階を、$v_R^2 = u^2 - \frac{1}{2}k_1 R^4$ として $x = R$ から積分するのではなく、$x = 0$ から積分してしまう。力の法則は $R$ で変わるので、積分定数も変わる。
- 符号を落とす。加速度は $G$ に向かうので、$v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ は $k_1 x^3$ または $k_2 x^{-4}$ の**マイナス**である。
- (iii) で $x \geq R$ だけを確かめ、$R$ の内側でも $v$ が正のままでなければならないことを忘れる。

## STEP のその先へ

$V'(x)$ を加速度の符号を反転したものとすると、量 $\frac{1}{2}v^2 + V(x)$ は、位置のみに依存する任意の力について保存される（conserved）。$V$ をプロットすると（「ポテンシャルの井戸（potential well）」）、どの運動が有界でどの運動が脱出するかが一目でわかり、$b$ はこの井戸に対する脱出速度（escape speed）にほかならない。同じ推論により実際の重力における脱出速度が得られ、またこれは非線形振動子（nonlinear oscillator）の相平面解析（phase-plane analysis）の出発点でもある。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、このようなエネルギー図が詳しく展開されている。

解答例

# STEP II 1999、第 10 問

力学 ・ 繰り返される衝突

> **STEP II 1999、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q10

## 鍵となる考え方

この連鎖における衝突はどれも同じ形をしている。質量 $\mu$、速さ $u$ で動く粒子が、静止している質量 $q\mu$ の粒子に衝突するのである。したがって、最初の衝突の計算を尺度を変えて用いれば、**すべての**衝突を記述できる。各粒子の最終速度がわかれば、追加の衝突が起こるかどうかという問題は、隣り合う粒子の最終速度を比較することに帰着する。さらに $q = e$ のときには速度が非常に簡単になるので、エネルギーの損失は単なる等比級数（geometric series）になる。

## 解答

### 最初の衝突

粒子を直線上を動く質点（point mass）とみなし、$P_1$ から $P_2$ へ向かう向きを正とする。衝突直後の $P_1$ と $P_2$ の速度をそれぞれ $v_1$、$v_2$ とする。運動量保存則（conservation of momentum）とニュートン（Newton）の反発の法則（law of restitution）より

$$mV = mv_1 + qm\,v_2,$$
$$v_2 - v_1 = eV.$$

が成り立つ。$v_2 = v_1 + eV$ を第 1 式に代入すると $V = v_1 + qv_1 + qeV$ となるので、

$$v_1 = \left(\frac{1-eq}{1+q}\right)V, \qquad v_2 = v_1 + eV = \frac{1-eq+e+eq}{1+q}\,V = \left(\frac{1+e}{1+q}\right)V,$$

となり、これが求める結果である。

### すべての衝突は同じ形をしている

次のようにおく。

$$\alpha = \frac{1-eq}{1+q}, \qquad \beta = \frac{1+e}{1+q}.$$

上の計算では $m$ の実際の値をどこにも用いていない。すなわち、質量 $\mu$ の粒子が速度 $u$ で静止している質量 $q\mu$ の粒子に衝突すると、衝突後の速度は $\alpha u$ となり、相手を速度 $\beta u$ で送り出す。各 $P_{k+1}$ の質量は $P_k$ の $q$ 倍であるから、$P_{k+1}$ がまだ静止している限り、このことは $P_k$ が $P_{k+1}$ に衝突する場合に当てはまる。

### $q \le e$ のとき衝突はちょうど $N-1$ 回である

$q \le e$ と仮定する。すると $eq \le e^2 < 1$ であるから $\alpha > 0$ であり、また $\beta > 0$ である。

連鎖を順に追っていく。$P_1$ が $P_2$ に衝突し、$P_1$ の速度は $\alpha V$、$P_2$ の速度は $\beta V$ となる。$\beta V > 0$ であるから、$P_2$ は静止している $P_3$ に向かって動き、これに衝突する。その結果、$P_2$ の速度は $\alpha\beta V$、$P_3$ の速度は $\beta^2 V$ となる。同様に続けると、$P_k$ は静止している $P_{k+1}$ に速度 $u_k = \beta^{k-1}V > 0$ で到達するので、隣り合う各組の間で 1 回ずつ衝突が起こる。したがって衝突は少なくとも $N-1$ 回ある。これらの衝突の後の速度は

$$w_k = \alpha\beta^{k-1}V \quad (1 \le k \le N-1), \qquad w_N = \beta^{N-1}V.$$

である。これらはすべて正であるから、すべての粒子が同じ向きに動く。

> **考えてみよう**　$P_k$ が $P_{k+1}$ に再び追いつくことがないのはなぜか？

衝突後、$P_k$ はそれ以降一定の速度 $w_k$ で動く。その後に接触しうる相手は $P_{k+1}$ か $P_{k-1}$ だけだからである。一方、$P_{k+1}$ は $P_{k+2}$ に衝突するまでは速度 $u_{k+1} = \beta^k V$ で動き、その後は $w_{k+1}$ で動く（$k+1 = N$ ならば、前者の速度のまま永遠に動く）。$P_k$ と $P_{k+1}$ の間隔が縮まりうるのは $P_k$ の方が速く動いている場合に限られる。そして次が成り立つ。

- $\beta^k V > \alpha\beta^{k-1}V$ は $\beta > \alpha$、すなわち $1+e > 1-eq$ と同値であり、これは正しいので、$u_{k+1} > w_k$ である。
- $k \le N-2$ のとき、$w_{k+1}/w_k = \beta = \dfrac{1+e}{1+q} \ge 1$ であり、これはまさに $q \le e$ であることによるので、$w_{k+1} \ge w_k$ である。
- $k = N-1$ のとき、$w_N/w_{N-1} = \beta/\alpha > 1$ であるから、$w_N > w_{N-1}$ である。

したがって、衝突後に $P_{k+1}$ が $P_k$ より遅くなることはなく、両者の間隔は決して縮まらない。（$q = e$ のときは $w_{k+1} = w_k$ となり、間隔は一定に保たれるが、詰まることはない。）これは隣り合うすべての組について成り立つので、それ以上の衝突は起こらず、衝突はちょうど $N-1$ 回である。

ここで $q \le e$ が効いてくる。$q > e$ ならば $\beta < 1$ となり、各粒子は最終的に後ろの粒子より遅くなるので、連鎖が自分自身に追いつき、さらに衝突が生じる。

### $q = e$ のときに失われる運動エネルギー

いま $q = e$ であるから

$$\beta = \frac{1+e}{1+e} = 1, \qquad \alpha = \frac{1-e^2}{1+e} = 1-e.$$

である。どの粒子も速さ $V$ で衝突される。衝突後、$P_1, \dots, P_{N-1}$ は $(1-e)V$ で、$P_N$ は $V$ で動く。$P_k$ の質量は $e^{k-1}m$ であるから、最終的な運動エネルギー（kinetic energy）は

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=1}^{N-1} \tfrac{1}{2} e^{k-1} m (1-e)^2 V^2 + \tfrac{1}{2} e^{N-1} m V^2 \\ &= \tfrac{1}{2} m V^2 \left[ (1-e)^2 \cdot \frac{1-e^{N-1}}{1-e} + e^{N-1} \right] \\ &= \tfrac{1}{2} m V^2 \left[ (1-e)(1-e^{N-1}) + e^{N-1} \right], \end{aligned}$$

となる。ここで等比級数の和 $1 + e + \cdots + e^{N-2} = \dfrac{1-e^{N-1}}{1-e}$ を用いた。最初の運動エネルギーは $\frac{1}{2}mV^2$ であるから、損失は

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} m V^2 - T &= \tfrac{1}{2} m V^2 \left[ (1-e^{N-1}) - (1-e)(1-e^{N-1}) \right] \\ &= \tfrac{1}{2} m e \left( 1 - e^{N-1} \right) V^2, \end{aligned}$$

であり、これが求める結果である。

## 検算

- **衝突ごとに。** $q = e$ のとき、$P_k$ が $P_{k+1}$ に衝突すると、$P_k$ の速度は $V$ から $(1-e)V$ に、$P_{k+1}$ の速度は 0 から $V$ に変わり、失われるエネルギーは $\frac{1}{2}e^{k-1}mV^2\left[1-(1-e)^2-e\right] = \frac{1}{2}m(1-e)e^kV^2$ である。$k = 1, \dots, N-1$ について和をとると $\frac{1}{2}m(1-e)V^2 \cdot e\,\dfrac{1-e^{N-1}}{1-e}$ となり、同じ答えが得られる。
- **極限。** $e \to 0$ のとき損失は 0 に近づく。実際、$q = e \to 0$ のとき後続の粒子の質量は無視できる。$N = 2$ のとき公式は $\frac{1}{2}me(1-e)V^2$ を与え、これは 1 回の衝突を直接計算した結果と一致する。
- **数値計算。** ランダムな $N \le 12$、ランダムな間隔、ランダムな $q \le e$ について運動を事象ごとにシミュレーションしたところ、衝突は常にちょうど $N-1$ 回であ

った。$N = 5$、$q = e = \frac{1}{2}$、$m = V = 1$ のとき、シミュレーションによる損失は $0.234375 = \frac{15}{64}$ であり、$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{16}\right)$ と一致した。

## よくある間違い

- 最初の $N - 1$ 回の衝突が起こることだけを確かめてしまう。「ちょうど」と言うためには、後になってどの粒子も前の粒子に追いつかないことの論証も必要である。
- $P_k$ の最終速度を、両者の衝突**直後**における $P_{k+1}$ の速度（$\beta u_k$）と比較してしまう。正しくは、$P_{k+2}$ に衝突して減速した後の最終速度と比較しなければならない。
- 反発の法則で符号を間違える。接近の速さの $e$ 倍に等しいのは、離れる速さ $v_2 - v_1$ である。

## STEP のその先へ

運動量を 1 つずつ受け渡していく質量の連鎖は、粒状物質（granular material）の中を伝わる衝撃の 1 次元モデルである。この問題の $q < 1$ の場合のように質量が一定の割合で減少していく連鎖は、衝撃を分散させて吸収する方法として物理学者によって研究されている。エネルギーの計算を整理し直すうまい方法として、**換算質量**（reduced mass）$\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ を用いるものがある。1 回の衝突で失われるエネルギーは $\frac{1}{2}\mu(1 - e^2)w^2$ であり、ここで $w$ は接近の速さである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は重心系（centre-of-mass frame）で衝突を論じており、そこではこのような結果が見通しよく理解できる。

解答例

# STEP II 1999、第 11 問

力学 ・ 放物運動と動く標的

**STEP II 1999、問 11**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/99-s2-q11

## 鍵となる考え方

標的は円周上にとどまるので、砲弾は水平面上の $O$ からちょうど距離 $R$ の点に着弾しなければならない。また、砲はいつでも標的がこれから来る位置の方向へ旋回させることができる。したがって、すべては一つの放物体（projectile）に関する二つの事実、すなわちその到達距離（range）と飛行時間（time of flight）に帰着する。回転角は $\beta = \omega T$ であり、$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ を用いて $\alpha$ を消去すると四次方程式（quartic）が得られる。最後の部分は、解と係数の関係（Vieta's formulas）と円の弦（chord）の問題になる。

## 解答

砲弾を重力のみを受けて運動する質点（particle）としてモデル化する（空気抵抗（air resistance）は無視する）。砲弾は円を含む水平面上の $O$ から発射され、$0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ とする。

### 小問 1：$V^2 < gR$ の場合

（発射面内で）地面に沿った軸と鉛直上向きの軸をとる。時刻 $t$ において

$$x = Vt\cos\alpha, \qquad y = Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

砲弾が水平面に戻る（$y = 0$、$t > 0$）のは

$$T = \frac{2V\sin\alpha}{g}, \qquad \text{のときで、水平距離は} \qquad x(T) = \frac{2V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{V^2\sin 2\alpha}{g}.$$

である。$\sin 2\alpha \leq 1$ であるから、どの鉛直面で発射しても、砲弾は $O$ から $V^2/g$ より遠くには着弾しない。標的は常に水平面上で $O$ から距離 $R$ の位置にあるので、命中するためには $R \leq V^2/g$、すなわち $V^2 \geq gR$ が必要である。よって $V^2 < gR$ ならば砲弾は決して標的に命中しない。これが示すべきことであった。

### 小問 2：$\beta$ の方程式

ここで $V^2 > gR$ とする。砲弾は時刻 $T$、距離 $R$ で標的に命中するので

$$T = \frac{2V\sin\alpha}{g}, \qquad R = \frac{2V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

標的は一定の角速度 $\omega$ で回転するので $\beta = \omega T$ であり、これより

$$\sin\alpha = \frac{g\beta}{2V\omega}.$$

を得る。これを到達距離の式に代入すると

$$\cos\alpha = \frac{gR}{2V^2\sin\alpha} = \frac{gR}{2V^2}\cdot\frac{2V\omega}{g\beta} = \frac{R\omega}{V\beta}.$$

となる。ここで $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ より

$$\frac{g^2\beta^2}{4V^2\omega^2} + \frac{R^2\omega^2}{V^2\beta^2} = 1,$$

であり、両辺に $4V^2\omega^2\beta^2$ を掛けると

$$g^2\beta^4 - 4\omega^2V^2\beta^2 + 4R^2\omega^4 = 0,$$

となる。これが求める方程式である。

> **考えてみよう**　なぜ値はちょうど二つなのか。最大四つになったり、一つもなかったりしないのはなぜか。

$\beta^2$ についての二次方程式とみると、その判別式（discriminant）は

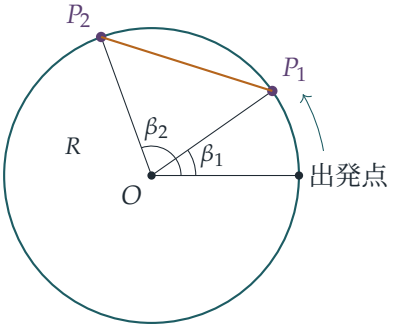
$$16\omega^4V^4 - 16g^2R^2\omega^4 = 16\omega^4\left(V^4 - g^2R^2\right) > 0,$$

である。$V^2 > gR$ だからである。よって $\beta^2$ の相異なる実数値が二つ存在する。それらの和 $4\omega^2V^2/g^2$ と積 $4R^2\omega^4/g^2$ はともに正であるから、$\beta^2$ の二つの値はいずれも正である。角 $\beta = \omega T$ は正であるから、$\beta^2$ の各値に対して $\beta$ はちょうど一つ定まり、候補はちょうど二つ $\beta_1 < \beta_2$ となる。

それぞれの候補は実際に命中を与える。どちらの解についても、数 $g\beta/(2V\omega)$ と $R\omega/(V\beta)$ は正であり、（方程式より）それらの平方の和は 1 であるから、これらを正

弦・余弦とする $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ が存在する。その仰角（elevation）で、標的が $\beta$ だけ回転した後に到達する点を通る鉛直面内に発射すれば、飛行時間は $\beta/\omega$、到達距離は $R$ となり、砲弾は標的に当たる。よって $\beta$ のとりうる値はちょうど二つである。（これらは、到達距離 $R$ を与える互いに余角の関係にある二つの仰角 $\alpha$ と $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ に対応する。）

**小問 3：距離 $P_1P_2$**




二つの着弾点はいずれも円周上にあり、発射の瞬間の標的の位置から反時計回りに測って角 $\beta_1$ と $\beta_2$ の位置にある。よって角 $P_1OP_2$ は $\beta_2 - \beta_1$ であり（必要なら $2\pi$ を法として簡約するが、弦には影響しない）、二等辺三角形（isosceles triangle）$OP_1P_2$ から

$$P_1P_2 = 2R\left|\sin\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}\right|.$$

を得る。$\beta^2$ についての二次方程式から

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = \frac{4\omega^2V^2}{g^2}, \qquad \beta_1^2\beta_2^2 = \frac{4R^2\omega^4}{g^2},$$

であり、$\beta_1, \beta_2 > 0$ であるから正の平方根をとってよい：$\beta_1\beta_2 = 2R\omega^2/g$。したがって

$$\begin{aligned}(\beta_2 - \beta_1)^2 &= \beta_1^2 + \beta_2^2 - 2\beta_1\beta_2 \\ &= \frac{4\omega^2V^2}{g^2} - \frac{4R\omega^2}{g} = \frac{4\omega^2}{g^2}\left(V^2 - Rg\right),\end{aligned}$$

となり、$\beta_2 - \beta_1 = \dfrac{2\omega}{g}\sqrt{V^2 - Rg}$ である。よって

$$P_1P_2 = 2R\sin\left(\frac{\omega}{g}\sqrt{V^2 - Rg}\right),$$

が示された。（厳密には、正弦が非負であること、すなわち $\frac{\omega}{g}\sqrt{V^2 - Rg} \le \pi$ が必要である。そうでない場合、距離はこの式の絶対値となる。）

## 検算

- $V^2 \to gR^+$ のとき二つの仰角はともに 45° に近づくので、$P_1$ と $P_2$ は一致するはずである。実際、公式は 0 に近づく。
- $\beta_1\beta_2 = 2R\omega^2/g$ を直接確かめる：$\beta_1\beta_2 = (2V\omega/g)^2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2$ であり、$\alpha_2 = \frac{1}{2}\pi - \alpha_1$ とするとこれは $(2V\omega/g)^2 \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 = (4V^2\omega^2/g^2)(gR/2V^2)$ となり、期待どおりである。
- 数値的に、$g = 9.8$、$R = 10$、$V = 14$、$\omega = 0.3$（SI 単位）として二つの軌道を逐次計算すると、弦の長さは約 5.97 m となり、$20\sin\left(0.3\sqrt{98}/9.8\right) \approx 5.969$ と一致する。

## よくある間違い

- 砲をどの鉛直面にも向けられることを忘れること。最初の小問は到達距離だけの問題であり、標的がたまたまどこにあるかは関係ない。
- $\beta_1\beta_2$ が正である理由を述べずに $\beta_1^2\beta_2^2$ の平方根をとること。
- $P_1P_2 = R(\beta_2 - \beta_1)$ と書くこと。これは弧長（arc length）であって、直線距離ではない。

## STEP のその先へ

動く標的に命中させることは、小さな**追跡**（pursuit）あるいは**迎撃**（interception）の問題である。まず命中の時刻を求め、次に照準を求める。二つの方程式からパラメータを消去して多項式を得て、それを解かずに係数から必要な情報を読み取るという手法は、大学で絶えず使うことになる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物運動や回転運動をこのような丁寧さで扱っている。

解答例

# STEP II 1999、第 12 問

確率・統計 ・ ベイズの定理

> **STEP II 1999、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q12

## 鍵となる考え方

これはパラメータを残したままのベイズの定理（Bayes' theorem）である。全確率の公式（law of total probability）によって $\mathrm{P}(S)$ を求めてしまえば、2 つの条件付き確率（conditional probability）はどちらも $p$ の簡単な有理関数（rational function）になり、許される区間上でそれぞれ単調（monotonic）である。したがって、各検査員の手順における「最大値」は区間 $0 \le p \le \frac{1}{3}$ の端にあり、興味深いのは、それがただ 1 回の観測から推定することについて何を語っているかという点である。

## 解答

### 条件付き確率

無作為に選んだチップがそれぞれ $A$、$B$、$C$ によって製造されたという事象を $A$、$B$、$C$ とし、そのチップが良品であるという事象を $S$ とする。これら 3 つの事象は標本空間（sample space）を分割（partition）し、

$$\mathrm{P}(A) = 2p, \quad \mathrm{P}(B) = p, \quad \mathrm{P}(C) = 1 - 3p,$$
$$\mathrm{P}(S \mid A) = \tfrac{7}{10}, \quad \mathrm{P}(S \mid B) = \tfrac{8}{10}, \quad \mathrm{P}(S \mid C) = \tfrac{9}{10}.$$

である。全確率の公式により、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(S) &= 2p \cdot \tfrac{7}{10} + p \cdot \tfrac{8}{10} + (1 - 3p) \cdot \tfrac{9}{10} \\ &= \tfrac{1}{10}\left(14p + 8p + 9 - 27p\right) = \tfrac{1}{10}(9 - 5p).\end{aligned}$$

$0 \le p \le \frac{1}{3}$ の範囲全体で $9 - 5p > 0$ であるから、これで割ってよいことに注意する。ベイズの定理により、

$$\mathrm{P}(A \mid S) = \frac{\mathrm{P}(S \mid A)\,\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(S)} = \frac{\frac{14p}{10}}{\frac{9-5p}{10}} = \frac{14p}{9-5p},$$

であり、同様に

$$\mathrm{P}(C \mid S) = \frac{\frac{9}{10}(1-3p)}{\frac{1}{10}(9-5p)} = \frac{9(1-3p)}{9-5p} = \frac{9-27p}{9-5p}.$$

である。

### 1 人目の検査員の推定値

$p$ が 0 から $\frac{1}{3}$ まで増加するとき、分子 $14p$ は増加し、正の分母 $9-5p$ は減少するので、$\mathrm{P}(A \mid S)$ は狭義単調増加である。（同じことだが、その導関数は $126/(9-5p)^2 > 0$ である。）したがって最大値は右端 $p = \frac{1}{3}$ でとり、その値は

$$\frac{14/3}{9-5/3} = \frac{14/3}{22/3} = \frac{7}{11}.$$

である。よって 1 人目の検査員の推定値は $\hat{p} = \frac{1}{3}$ である。

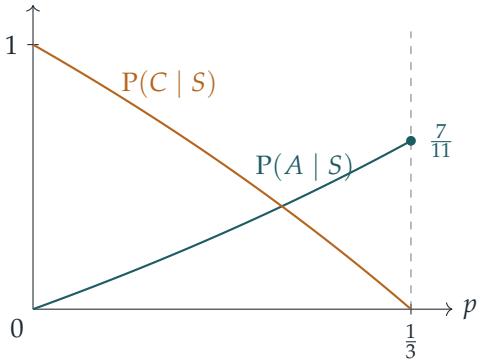
### 2 人目の検査員の推定値

> **考えてみよう** $\mathrm{P}(C \mid S)$ は増加するか、それとも減少するか。$p$ が大きくなると、分子も分母もともに減少する。

分子と分母が同じ向きに動くときは答えをそのまま読み取ることはできないので、商の微分法（quotient rule）を用いて微分する：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{9-27p}{9-5p} = \frac{-27(9-5p)+5(9-27p)}{(9-5p)^2} = \frac{-243+135p+45-135p}{(9-5p)^2} = \frac{-198}{(9-5p)^2} < 0.$$

よって $\mathrm{P}(C \mid S)$ は $[0, \frac{1}{3}]$ 上で狭義単調減少であり、最大値は $p = 0$ でとり、その値は 1 である。2 人目の検査員の推定値は $\hat{p} = 0$ である。




### コメント

2 人の検査員は、同等に妥当な 1 回ずつの観測に同じ方法を適用しているのに、許される範囲の正反対の両端にたどり着く。すなわち $\hat{p} = \frac{1}{3}$（$C$ 製のチップは 1 つもない）と $\hat{p} = 0$（すべてのチップが $C$ 製）である。どちらの推定値も単に「自分のチップの製造元ができるだけ多くなるような $p$ の値」であり、標本が 1 つしかなければ必然的にそうなる。2 人目の推定値は 1 人目の検査員のチップによって否定されさえする。$p = 0$ は $A$ がチップを 1 つも製造しないことを意味するからである。どちらの推定値も信用できない。1 回の観測では $p$ を推定するには情報が少なすぎ、より大きな標本（各製造元ごとの個数を伴うもの）が必要である。

また、チップが良品であることはほとんど何の役割も果たしていないことにも注目する価値がある。「良品であり、かつ $A$ 製である」ことの尤度（likelihood）は $\frac{7}{10} \cdot 2p$ であり、これは $2p$ 自身と同じ場所で最大になる。係数 $\frac{7}{10}$ は $p$ に依存しないからである。

## 検算

- $p = 0$ のときはすべてのチップが $C$ 製なので、$\mathrm{P}(C \mid S)$ は 1、$\mathrm{P}(A \mid S)$ は 0 となるはずである。どちらの式もこれと一致する。
- 同様に $\mathrm{P}(B \mid S) = 8p/(9 - 5p)$ であり、3 つの条件付き確率の和は

$$\frac{14p + 8p + 9 - 27p}{9 - 5p} = 1.$$

  となる。
- $p = 0.2$ のとき、式からは $\mathrm{P}(A \mid S) = 0.35$、$\mathrm{P}(C \mid S) = 0.45$ が得られる。400 000 個のチップのシミュレーションでは 0.3505 と 0.4505 が得られた。

## よくある間違い

- 導関数を 0 とおいて極値を探すこと。極値は存在しない。どちらの最大値も $[0, \frac{1}{3}]$ の端点でとる。
- $\mathrm{P}(C \mid S)$ には慎重な議論が必要であることを忘れること。分子も分母もともに減少するので、「分子が小さくなる」だけでは不十分である。

## STEP のその先へ

2 人の検査員はどちらも、実質的には最尤推定（maximum likelihood estimation）を行っている。すなわち、自分が観測したことが最も起こりやすくなるようなパラメータの値を選んでいるのである。観測が 1 回だけだと、最尤推定値はしばしばパラメータ空間（parameter space）の境界に落ちる。これは、最尤推定がうまく機能するには十分なデータが必要であることへの警告である。ベイズ主義者（Bayesian）であれば、代わりに $p$ に事前分布（prior distribution）を置き、チップを 1 つ観測するごとにそれを更新するだろう。そうすれば、1 回の観測からこのような極端な結論が導かれることは避けられる。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）は、この両方の立場を論じている。

解答例

# STEP II 1999、第 13 問

確率・統計 ・ 連続型確率変数

**STEP II 1999、問 13**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/99-s2-q13

## 鍵となる考え方

力学の分野に分類されてはいるが、これは連続確率変数（continuous random variable）に関する問題である。**短いほうの**破片が単純な分布に従うことに気づけば、すべてが易しくなる。折れる点が棒に沿って一様に分布するならば、短いほうの破片の長さは全長の $[0, \frac{1}{2}]$ 上の一様分布（uniform distribution）に従う。比 $R$ は短いほうの破片の長さの増加関数であるから、「$R < r$」は短いほうの破片だけについての条件に書き換えられる。これにより分布関数（distribution function）が得られ、それを微分すれば密度が得られる。

## 解答

### $R$ の分布

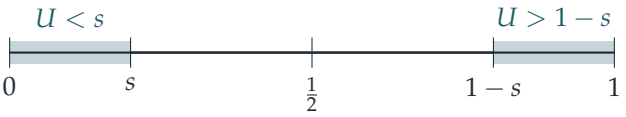
棒の長さを 1 とする。比は単位によらないからである。折れる点を一方の端から距離 $U$ の位置とし、$U$ は $[0,1]$ 上の一様分布に従うとする。2 つの破片の長さは $U$ と $1-U$ であるから、短いほうの長さは

$$S = \min(U, 1-U),$$

であり、長いほうの長さは $1-S$ である。このとき $0 \le S \le \frac{1}{2}$ であり、

$$R = \frac{S}{1-S}.$$

$0 \le s \le \frac{1}{2}$ に対して、事象 $S < s$ が起こるのは、ちょうど $U < s$ または $U > 1-s$ となるときである。これらは互いに交わらない 2 つの区間で、長さの合計は $2s$ であるから、$\mathrm{P}(S < s) = 2s$ となる。すなわち、$S$ は $[0, \frac{1}{2}]$ 上の一様分布に従う。




次に $0 \le r \le 1$ とする。関数 $s \mapsto \dfrac{s}{1-s}$ は $[0, \frac{1}{2}]$ 上で狭義単調増加である（導関数は $1/(1-s)^2 > 0$）から、不等式を次のように変形できる。

$$R < r \iff \frac{S}{1-S} < r \iff S < r(1-S) \iff S < \frac{r}{1+r},$$

ここで $1 - S \ge \frac{1}{2} > 0$ であるから、両辺に $1 - S$ を掛けても問題ない。$0 \le r \le 1$ のとき値 $\dfrac{r}{1+r}$ は $[0, \frac{1}{2}]$ に属するので、

$$\boxed{\mathrm{P}(R < r) = \frac{2r}{1+r} \qquad (0 \le r \le 1).}$$

短いほうの破片が長いほうより長くなることはないから、$R$ はつねに $[0,1]$ に属する。よって $r \le 0$ のとき $\mathrm{P}(R < r) = 0$、$r \ge 1$ のとき $\mathrm{P}(R < r) = 1$ であり、これは $r = 1$ における公式の値 1 と一致する。

**考えてみよう** なぜ $R = U/(1-U)$ として $U$ を直接扱わないのか？

それが正しいのは $U \le \frac{1}{2}$ のときだけである。$U > \frac{1}{2}$ のときは短いほうの破片は $1 - U$ であり、$R = (1-U)/U$ となる。この 2 つの場合に分けて考えることもでき、対称性からそれぞれが $\frac{r}{1+r}$ ずつ寄与する。$S$ に移って考えれば、この場合分けの処理を一度で済ませられるのである。

### 密度、平均、分散

分布関数 $F(r) = \dfrac{2r}{1+r} = 2 - \dfrac{2}{1+r}$ を $(0,1)$ 上で微分すると、確率密度関数（probability density function）

$$f(r) = \frac{2}{(1+r)^2} \quad (0 \le r \le 1), \qquad f(r) = 0\text{（それ以外）}.$$

が得られる。検算として、$\int_0^1 f(r)\,\mathrm{d}r = F(1) - F(0) = 1$ である。

平均（mean）を求めるために、$r = (1+r) - 1$ と書く。

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(R) &= \int_0^1 \frac{2r}{(1+r)^2}\,\mathrm{d}r = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{1+r} - \frac{1}{(1+r)^2}\right)\mathrm{d}r \\ &= 2\left[\ln(1+r) + \frac{1}{1+r}\right]_0^1 = 2\left(\ln 2 + \tfrac{1}{2} - 1\right) \\ &= 2\ln 2 - 1 \approx 0.386.\end{aligned}$$

2 次のモーメント（second moment）を求めるために、$r^2 = (1+r)^2 - 2(1+r) + 1$ と書くと、

$$\frac{r^2}{(1+r)^2} = 1 - \frac{2}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2}.$$

となる。すると

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(R^2) &= 2\int_0^1 \left(1 - \frac{2}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2}\right) \mathrm{d}r = 2\Big[r - 2\ln(1+r) - \frac{1}{1+r}\Big]_0^1 \\ &= 2\left(1 - 2\ln 2 - \tfrac{1}{2} + 1\right) = 3 - 4\ln 2.\end{aligned}$$

したがって、分散（variance）は

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(R) &= \mathrm{E}(R^2) - \big(\mathrm{E}(R)\big)^2 = 3 - 4\ln 2 - \big(4(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 1\big) \\ &= 2 - 4(\ln 2)^2 \approx 0.0782.\end{aligned}$$

$\ln 2$ の 1 次の項が打ち消し合い、このすっきりした形が残る。

## 検算

- $r = 1$ のとき確率は 1 であり、当然そうなるべきである。$r = \frac{1}{2}$ のときは $\frac{2}{3}$ である。長いほうの破片が短いほうの 2 倍より長くなるのは、ちょうど折れる点が棒の両端の 3 分の 1 ずつの部分に入るときであり、その長さの合計は $\frac{2}{3}$ である。
- 平均 0.386 は 0 と 1 の間にあり、しかも $\frac{1}{2}$ より小さい。これは、密度が $r = 0$ での 2 から $r = 1$ での $\frac{1}{2}$ まで減少することと整合する。
- $10^6$ 回の無作為な折り取りをシミュレーションしたところ、標本平均は 0.3862、標本分散は 0.0783 となった。理論値は $2\ln 2 - 1 = 0.38629$ と $2 - 4(\ln 2)^2 = 0.07819$ である。

## よくある間違い

- すべての $U$ に対して $R = U/(1-U)$ とすること。この量は 1 を超えることがあるので、短いほうと長いほうの比にはならない。
- 折れる点がどちらの端の近くにもなりうることを忘れて、$\mathrm{P}(R < r) = \frac{r}{1+r}$ としてしまうこと。
- 短いほうの破片の平均 $\frac{1}{4}$ を使って $\mathrm{E}(R) = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$ とすること。一般に $\mathrm{E}\big(g(S)\big) \neq g\big(\mathrm{E}(S)\big)$ である。

## STEP のその先へ

ここで用いた方法は、確率変数を変換するための標準的な「分布関数法（distribution function technique）」である。$g$ が増加関数で $Y = g(X)$ ならば $F_Y(y) = F_X\left(g^{-1}(y)\right)$ であり、これを微分すると変数変換の公式（change-of-variables formula）$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\mathrm{d}g^{-1}/\mathrm{d}y\right|$ が得られる。同じ考え方は、順序統計量（order statistics）や、3 つの破片で三角形が作れる確率を問うような古典的な「折れた棒の問題（broken-stick problem）」へとつながっていく。連続確率変数の変換について学ぶには、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）がよい。

解答例

# STEP II 1999、第 14 問

確率・統計 ・ 最適停止

> **STEP II 1999、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q14

## 鍵となる考え方

サイコロには記憶がない。もう一度投げると決めたときはいつでも、同じゲームのまさに最初の状態に戻るのであるから、その時点から先に望みうる最善の結果は同じ数 $V$、すなわちゲーム全体の最大の期待得点（expected score）である。これにより、各回の投げの後の判断は単純な比較になる。今の目が $V$ を上回るならそれを確定し、そうでなければもう一度投げればよい。これを式に書くと $V$ についての方程式が一つ得られ、それを解けば値と戦略（strategy）の両方がわかる。

## 解答

### 設定

1 の目が出た投げを**強制終了**と呼ぶことにする。このときゲームはそこで終わり、得点は 1 である。それ以外の目 $x \in \{2,3,4,5,6\}$ が出た後は、やめる（得点 $x$）か続けるかを選ぶ。得点はすべて 1 以上 6 以下であるから、どの戦略の期待得点も $[1,6]$ に属する。

$$V = \text{どの戦略でも達成しうる期待得点の最大値}$$

とおく（厳密には、すべての戦略にわたる最小上界（least upper bound）である。これが実際に達成されることは後でわかる）。

### 得点 4 を与える戦略

「**4、5、6 のいずれかが出たらすぐにやめる**」（もちろん 1 が出たときも終わる）という戦略を考える。その期待得点を $E$ とする。最初の投げで条件付け（conditioning）を

行う。それぞれ確率 $\frac{1}{6}$ で 1,4,5,6 が出て、ゲームはその目を得点として終わる。確率 $\frac{2}{6}$ で 2 または 3 が出る。このときはもう一度投げ、サイコロには記憶がないので、そこからの期待得点は再び $E$ である。したがって

$$E = \tfrac{1}{6}(1+4+5+6) + \tfrac{2}{6}E \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{4}{6}E = \tfrac{16}{6} \quad \Longrightarrow \quad E = 4.$$

(やめることなく $n$ 回投げる確率は $(\frac{1}{3})^n \to 0$ であるから、ゲームは確率 1 で終わる。)
よって $V \geq 4$ である。

### 4 を上回る戦略は存在しない

任意の戦略をとる。それはこれまでの投げの履歴全体に依存していてもよい。その最初の投げの目 $x$ に注目する。

- $x = 1$ ならば得点は 1 である。
- $x \geq 2$ で戦略がやめるならば、得点は $x$ である。
- $x \geq 2$ で戦略が続けるならば、それ以降の振る舞いは、新しく始めた同じゲームに対する何らかの戦略にすぎない（それまでの投げはそれ以降の投げに影響しない)。したがって、そこからの期待得点は高々 $V$ である。

いずれの場合も、$x \geq 2$ のもとでの期待得点は高々 $\max(x, V)$ である。よって、どの戦略の期待得点も高々

$$g(V) = \tfrac{1}{6}\Big(1 + \sum_{x=2}^{6} \max(x, V)\Big),$$

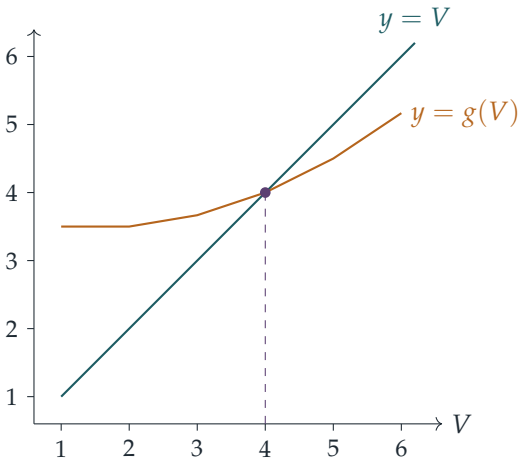
であり、戦略全体にわたる最小上界をとれば $V \leq g(V)$ を得る。

**考えてみよう** 不等式 $V \leq g(V)$ からどのようにして $V$ が決まるか。

$h(V) = g(V) - V$ を考える。各項 $\max(x, V)$ は $V$ が増加するとき変化率 0 または 1 で増加し、そのような項は五つしかないので、$g$ の増加率は高々 $\frac{5}{6}$ である。よって $h$ は狭義単調減少である。$V = 4$ では

$$g(4) = \tfrac{1}{6}(1+4+4+4+4+5+6) = \tfrac{24}{6} = 4,$$

であるから $h(4) = 0$ となり、$V > 4$ を満たすすべての $V$ に対して $h(V) < 0$ である。$h(V) \geq 0$ であるから、$V \leq 4$ でなければならない。




### 結論

二つの部分を合わせると $V = 4$ である。すなわち、最大の期待得点は 4 であり、それは 4、5、6 が出たらやめ、2 または 3 が出たらもう一度投げることで達成される。これはまさに「出た目が $V$ 以上ならやめる」という規則である。2 や 3 は続けた場合に期待される 4 より悪く、5 や 6 はそれより良い。

4 は引き分けである。4 でやめれば 4 が得られ、続けても期待得点は 4 である。したがって「5 または 6 のときだけやめる」も同じく最善である。実際、同様の条件付けにより

$$E' = \tfrac{1}{6}(1+5+6) + \tfrac{3}{6}E' \quad \Longrightarrow \quad E' = 4.$$

これ以外の規則はすべて真に劣る。たとえば 3 以上でやめると $\frac{1+3+4+5+6}{5} = \frac{19}{5}$ であり、6 のときだけやめると $\frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}$ である。

## 検算

「1 および集合 $S$ に属する目でやめる」という任意の規則に対する便利な近道がある。各回の投げはどれも同じ確率でゲームを終わらせ、終わったときの目は $\{1\} \cup S$ のどの目も同様に確からしいので、期待得点はそれらの目の平均である。$S = \{4,5,6\}$ ならば $\frac{16}{4} = 4$、$S = \{5,6\}$ ならば $\frac{12}{3} = 4$ である。このような規則 32 通りすべてを正確に調べたところ、4 を与えるのはこの二つだけであり、次に良いのは $\frac{19}{5}$ であった。4 以上でやめるゲームを 400 000 回シミュレーションしたところ、平均は 3.998 であった。

## よくある間違い

- 1 回の投げの平均である 3.5 を、続けることの価値として用いてしまう。続けた場合にはさらにもう一度投げるという選択肢が残るので、その価値は 3.5 より大きい。したがって、「4 以上でやめる」ことは 3.5 との比較では正当化されない。
- 1 が出たら強制終了であることを忘れ、あたかも危険なしに何度でも投げられるかのように続けた場合の価値を書いてしまう。
- しきい値型の戦略だけを調べ、履歴に依存するもっと巧妙な規則がそれより良くならない理由を説明しない。上の無記憶性（memorylessness）による議論は、すべての戦略を扱っている。

## STEP のその先へ

これは**最適停止**（optimal stopping）の小さな例であり、方程式 $V = g(V)$ は**ベルマン方程式**（Bellman equation）、すなわち動的計画法（dynamic programming）やマルコフ決定過程（Markov decision processes）の基本的な道具である。同じ推論によって、金融におけるアメリカン・オプション（American options）の価格付けが行われ、有名な秘書問題（secretary problem）も解かれる。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）はここで用いた条件付けの議論を扱っており、Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率入門）には同じ趣向の問題が数多く収められている。

解答例

# STEP III 1999、第 1 問

純粋数学 • 3 次方程式の解

> **STEP III 1999、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q1

## 鍵となる考え方

ここでの議論はすべて解と係数の関係（Vieta's formulas）から導かれる。3 次方程式（cubic）$x^3 - px^2 + qx - r = 0$ の解（roots）を $\alpha, \beta, \gamma$ とすると、

$$\alpha + \beta + \gamma = p, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q, \qquad \alpha\beta\gamma = r.$$

等比数列（geometric progression）は中央の項を中心に**乗法的に**並んでいるので、積 $r$ と比 $q/p$ によって中央の解が特定される。一方、等差数列（arithmetic progression）は中央の項を中心に**加法的に**並んでいるので、こちらは和 $p$ によって中央の解が特定される。

## 解答

### 小問 (i)

解が $a/k$、$a$、$ak$ であるとする。$a/k$ が意味をもつためには $k \neq 0$ でなければならない。また、解の積は $r \neq 0$ であるから、$a \neq 0$ でもある。解と係数の関係より

$$\begin{aligned} p &= \frac{a}{k} + a + ak = a\left(\frac{1}{k} + 1 + k\right), \\ q &= \frac{a}{k} \cdot a + a \cdot ak + \frac{a}{k} \cdot ak = a^2\left(\frac{1}{k} + 1 + k\right), \\ r &= \frac{a}{k} \cdot a \cdot ak = a^3. \end{aligned}$$

$p$ と $q$ には同じ括弧の式が現れる。$p \neq 0$ であるからこの式は o でなく、したがって割り算ができて

$$\frac{q}{p} = a.$$

よって $q/p$ は解（中央の解）である。このとき $q = ap$ であるから、

$$q^3 = a^3p^3 = rp^3, \qquad \text{すなわち} \qquad q^3 - rp^3 = 0,$$

となり、示すべきことが得られた。

### 小問 (ii)

次に $r = q^3/p^3$ と仮定し、$a = q/p$ とおくと $r = a^3$ である。3 次方程式に $x = a$ を代入し、$pa^2 = q^2/p = qa$ を用いると

$$a^3 - pa^2 + qa - r = a^3 - qa + qa - a^3 = 0,$$

となるので、$q/p$ は解である。

$r \neq 0$ より $q \neq 0$ であり、したがって $a \neq 0$ である。残りの 2 つの解を $\beta$、$\gamma$ とおく。3 つの解の積は $r$ であるから、$a \neq 0$ で割ることにより

$$a\beta\gamma = r = a^3 \quad \Longrightarrow \quad \beta\gamma = a^2 = \left(\frac{q}{p}\right)^2,$$

を得る。

> **考えてみよう** $\beta\gamma = a^2$ から、どのようにして $a/k$、$a$、$ak$ の形にもち込めばよいだろうか？

$k$ をうまく選ぶ必要がある。$\beta\gamma = a^2 \neq 0$ であるから、$\beta$ も $\gamma$ も 0 ではない。$k = \gamma/a$ と定めると、$\gamma = ak$ かつ $k \neq 0$ である。このとき

$$\beta = \frac{a^2}{\gamma} = \frac{a^2}{ak} = \frac{a}{k}.$$

よって解は $a/k$、$a$、$ak$ であり、それぞれ直前の解に $k$ を掛けて得られる。すなわち、これらは等比数列をなす。（$\beta$ と $\gamma$ が実数でない場合には、公比 $k$ は複素数になることもある。この議論では解が実数であることを必要としない。）

小問 (i) と (ii) を合わせると、$p \neq 0$ かつ $r \neq 0$ のとき、解が等比数列をなすための必要十分条件は $q^3 = rp^3$ であることがわかる。

### 小問 (iii)

**必要性。** 解が $b - d$、$b$、$b + d$ であるとする。これらの和は $3b = p$ であるから、中央の解は $b = p/3$ である。3 次方程式に $x = p/3$ を代入して 27 を掛けると

$$p^3 - 3p^3 + 9pq - 27r = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2p^3 - 9pq + 27r = 0.$$

**十分性。** 逆に、$2p^3 - 9pq + 27r = 0$ と仮定する。上の議論を逆にたどれば、$p/3$ は解である。すると残りの 2 つの解の和は $p - p/3 = 2p/3$ となるので、ある（複素数の場合もある）$d$ を用いてそれらを $p/3 - d$、$p/3 + d$ と書くことができる。3 つの解 $p/3 - d$、$p/3$、$p/3 + d$ は等差数列をなす。

したがって、求める必要十分条件（necessary and sufficient condition）は

$$\boxed{2p^3 - 9pq + 27r = 0}.$$

## 検算

- 解が $1, 2, 4$（等比数列）のとき、$p = 7$、$q = 14$、$r = 8$ である。このとき $q/p = 2$ は中央の解であり、$q^3 = 2744 = 8 \cdot 343 = rp^3$ が成り立つ。
- 解が $1, 2, 3$（等差数列）のとき、$p = 6$、$q = 11$、$r = 6$ であり、$2 \cdot 216 - 9 \cdot 66 + 27 \cdot 6 = 432 - 594 + 162 = 0$ となる。等比数列 $1, 2, 4$ では $686 - 882 + 216 = 20 \neq 0$ となり、当然そうなるべき結果である。
- さらに、複素数解をもつものも含めて数千個のランダムな 3 次方程式で 3 つの小問すべてを数値的に検証した。いずれも $10^{-11}$ 以内の誤差で一致した。

## よくある間違い

- $1/k + 1 + k$ が 0 でない理由を述べずにこれで割ってしまう。これは $p/a$ に等しく、$p \neq 0$ であるから 0 でない。
- 小問 (ii) で、$q/p$ が解であることと $\beta\gamma = (q/p)^2$ であることだけを示し、公比を具体的に示さないまま等比数列であると主張してしまう。
- 小問 (iii) で、一方向だけを証明してしまう。「必要十分」というからには両方向が必要である。

## STEP のその先へ

解と係数の関係は、多項式の係数がその解の**基本対称式**（elementary symmetric functions）であることを述べている。古典的な定理によれば、解についての任意の対称式（symmetric polynomial）はこれらを用いて表すことができる。これはガロア理論（Galois theory）の出発点であり、ガロア理論は多項式の解がどのようなときに冪根（radicals）によって求められるかを説明する。ちなみに、置換 $x = y + p/3$ によって 3 次方程式から $x^2$ の項が消え、その結果得られる 2 次の項のない 3 次方程式

（depressed cubic）の定数項は $2p^3 - 9pq + 27r$ の定数倍になる。これらの考え方がどこへつながっていくかを知るには、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）がよい。

解答例

# STEP III 1999、第 2 問

純粋数学 • 実数解の個数

> **STEP III 1999、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q2

## 鍵となる考え方

小問 (i) では、導関数（derivative）が完全平方式（perfect square）と $\mathrm{e}^x$ の積に因数分解されるので、関数は決して減少せず、実際には狭義単調増加（strictly increasing）である。小問 (ii) では、新しい関数の導関数がちょうど $(1+x^2)\mathrm{e}^x = k$ のときに 0 になる。これは小問 (i) の方程式にほかならない。このことから、新しい関数はただ一つの極値点（turning point）、すなわち最小点をもつことがわかる。あとはすべて $x \to -\infty$ のときの振る舞いにかかっており、そこでは $\tan^{-1} x \to -\frac{\pi}{2}$ となる。数 $2/\pi$ はここから現れるのである。

## 解答

### 小問 (i)

積の微分法（product rule）により、

$$\mathrm{f}'(x) = 2x\,\mathrm{e}^x + (1+x^2)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\left(x^2+2x+1\right) = \mathrm{e}^x(1+x)^2.$$

$\mathrm{e}^x > 0$ かつ $(1+x)^2 \geq 0$ であるから、すべての $x$ に対して $\mathrm{f}'(x) \geq 0$ であり、題意が示された。等号は $x = -1$ のときに限り成り立つ。

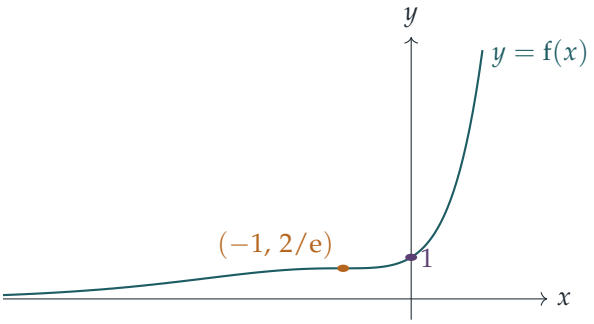
> **考えてみよう** $\mathrm{f}'(-1) = 0$ であるのに、f は本当に狭義単調増加なのだろうか？

その通りである。$a < b$ ならば $\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a) = \int_a^b \mathrm{f}'(x)\,\mathrm{d}x$ であり、被積分関数（integrand）は連続かつ非負で、$[a,b]$ 上で 0 となる点は高々一つしかないから、この積分は真に正である。停留点（stationary point）が一つあるだけでは、関数の増加は妨げられない。

ここで $x = -1$ は停留点であると同時に変曲点（point of inflection）でもあり、その両側で $f'$ は正である。

概形を描くには、次のことを押さえておけばよい。

- 二つの因数はともに正であるから、すべての $x$ に対して $f(x) > 0$ である。
- $f(0) = 1$ であり、変曲点は $(-1, 2/e) \approx (-1, 0.74)$ である。
- $x \to \infty$ のとき $f(x) \to \infty$ である。
- $x \to -\infty$ のとき $f(x) \to 0$ である。$e^x$ は、どんな多項式が増大するよりも速く減衰するからである（$x^2 e^x \to 0$）。したがって、$x$ 軸の負の部分は漸近線（asymptote）である。




さて、f は連続かつ狭義単調増加であり、$x \to -\infty$ のとき $f(x) \to 0$、$x \to \infty$ のとき $f(x) \to \infty$ である。よって中間値の定理（intermediate value theorem）より、この関数は $(0, \infty)$ のすべての値をとり、狭義単調増加であることから、それぞれの値をちょうど一回だけとる。また $f > 0$ であるから、$\leq 0$ の値をとることはない。したがって、$(1 + x^2)e^x = k$ は $k > 0$ のときちょうど一つの実数解（real root）をもち、$k \leq 0$ のときは実数解をもたない。 ■

**小問 (ii)**

次のようにおく。

$$g(x) = e^x - 1 - k \tan^{-1} x.$$

まず直ちに $g(0) = 1 - 1 - 0 = 0$ であるから、$x = 0$ はつねに解である。次に、

$$g'(x) = e^x - \frac{k}{1 + x^2} = \frac{(1 + x^2)e^x - k}{1 + x^2} = \frac{f(x) - k}{1 + x^2}.$$

どちらの場合も $k > 0$ であるから、小問 (i) により $f(a) = k$ を満たす数 $a$ がちょうど一つ存在する。f は狭義単調増加であるから、$x < a$ では $f(x) < k$、$x > a$ では $f(x) > k$

である。よって

$$\mathrm{g}'(x) < 0 \text{ ただし} x < a, \qquad \mathrm{g}'(x) > 0 \text{ ただし} x > a.$$

したがって、g は $(-\infty, a]$ で狭義単調減少（strictly decreasing）、$[a, \infty)$ で狭義単調増加であり、$x = a$ でただ一つの最小値をとる。特に、g の解は $a$ の両側にそれぞれ高々一つずつしかなく、全部で高々二つである。

**$a$ はどこにあるか？** どちらの場合も $k < 1 = \mathrm{f}(0)$ であるから $\mathrm{f}(a) = k < \mathrm{f}(0)$ となり、$a < 0$ を得る。すると $x = 0$ は増加する区間 $[a, \infty)$ に含まれる。これはその区間におけるただ一つの解であり、

$$\mathrm{g}(a) < \mathrm{g}(0) = 0.$$

残るのは、g が $(-\infty, a)$ にも解をもつかどうかを判定することである。

**$x \to -\infty$ のときの振る舞い。** $\mathrm{e}^x \to 0$ かつ $\tan^{-1} x \to -\frac{\pi}{2}$ であるから、

$$\mathrm{g}(x) \to -1 + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\left(k - \frac{2}{\pi}\right) \quad \text{ただし} x \to -\infty.$$

この極限を $L$ とおく。g は $(-\infty, a]$ で狭義単調減少であるから、そこでの g の値はすべて $L$ より真に小さい。これを確かめるため、$x \le a$ と任意の $x' < x$ をとる。$y < x'$ ならばつねに $\mathrm{g}(y) > \mathrm{g}(x')$ であるから、$y \to -\infty$ とすると $L \ge \mathrm{g}(x')$ を得る。よって $\mathrm{g}(x) < \mathrm{g}(x') \le L$ である。

**(a) $0 < k \le 2/\pi$ の場合。** このとき $L \le 0$ であるから、すべての $x \le a$ に対して $\mathrm{g}(x) < L \le 0$ である。$a$ より左に解はなく、方程式は**ちょうど一つの実数解**をもつ。それは $x = 0$ である。

**(b) $2/\pi < k < 1$ の場合。** このとき $L > 0$ であるから、負の方向に十分大きい $x$ に対して $\mathrm{g}(x) > 0$ であり、一方で $\mathrm{g}(a) < 0$ である。中間値の定理により $(-\infty, a)$ に解が存在し、g は狭義単調減少であるから、そこでの解はそれ一つだけである。$x = 0$ と合わせて、方程式は**ちょうど二つの実数解**をもつ。すなわち、一つの負の解（$a$ より小さい）と $x = 0$ である。

**?** **考えてみよう** 境界の場合 $k = 2/\pi$ が (a) に含まれるのはなぜか？

$k = 2/\pi$ のとき、左側の極限はちょうど $L = 0$ である。減少する部分は下から 0 に近づくが、決してそこに到達しないので、二つ目の解は現れない。これを決定づけるのは狭義の単調性である。

## 検算

- 無作為に選んだ点で f を数値的に微分すると $e^x(1+x)^2$ と一致し、また $f(-1) = 2/e \approx 0.736$ である。
- g の符号変化を、$[-200, 10]$ 上の細かい格子で数えた。$k = 0.05, 0.3, 0.5, 0.6$ および $2/\pi \approx 0.6366$ では解は一つ、$k = 0.65, 0.7, 0.8, 0.9, 0.99$ では解は二つであった。$k = 0.65$ では、$L = 0.65 \cdot \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0.021$ が非常に小さいため、負の解はかなり遠く（$x \approx -31$ 付近）にある。
- 最小点は $k = 0.7$ のとき $a \approx -1.81$ であり、$k \to 1^-$ のとき $a \to 0^-$ となる。これは整合的である。実際、$k = 1$ のとき $g'(0) = 0$ となり、$x = 0$ は重解（double root）になる。

## よくある間違い

- $x = 0$ がつねに解であることを忘れ、$-\infty$ での符号変化から生じる解だけを数えてしまう。
- $x \to -\infty$ のとき $\tan^{-1} x \to -\infty$ とみなしてしまう。実際には有界であり、$-\frac{\pi}{2}$ に近づく。
- $f'(-1) = 0$ から、f は $x = -1$ で極値をとると結論づけてしまう。

## STEP のその先へ

ここでの議論は、実解析（real analysis）の標準的な手法の好例である。区間上で連続かつ狭義単調な関数は、その区間に高々一つしか零点をもたず、零点をもつかどうかは中間値の定理（無限遠での極限と組み合わせて用いる）によってわかる。関数の極値点を求め、極値点と両端で符号を調べることによって解の個数を数えるという考え方は、ロルの定理（Rolle's theorem）とその帰結の背後にあるものである。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、連続性、中間値の定理、平均値の定理（mean value theorem）を丁寧に展開している。

解答例

# STEP III 1999、第 3 問

純粋数学 ・ リーマン和と極限

> **STEP III 1999、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q3

## 鍵となる考え方

式 $\frac{1}{n}\sum f(1+m/n)$ は、$[1,2]$ の上に立つ幅 $\frac{1}{n}$ の細い長方形 $n$ 個の面積の合計である。長方形を細くしていくと、それらは曲線の下の面積をちょうど埋め尽くす。残りの二つの極限（limit）も、実は同じ図が姿を変えたものにすぎない。やるべきことは、因数 $\frac{1}{n}$ をくくり出し、各項を $m/n$ だけの関数として書くことである。

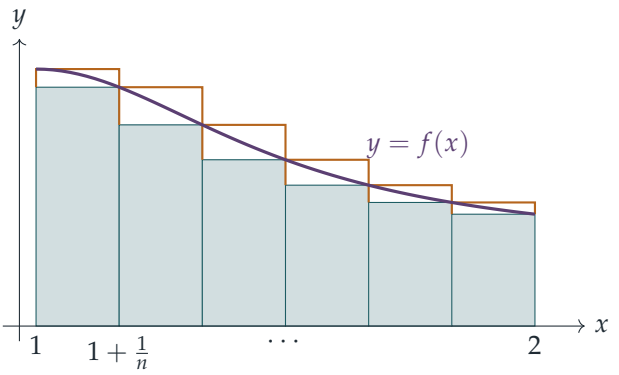
## 解答

### 極限の公式

$[1,2]$ を幅 $\frac{1}{n}$ の $n$ 個の帯に分ける。$m$ 番目の帯は $\left[1+\frac{m-1}{n}, 1+\frac{m}{n}\right]$ である。その上に、帯の右端における $f$ の値 $f(1+m/n)$ を高さとする長方形を立てる。その面積は $\frac{1}{n}f(1+m/n)$ であるから、

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(1+m/n)$$

は長方形の面積の合計である。




図は減少関数（decreasing function）$f$ の場合である。網掛けした（ティール色の）長方形は右端の高さを用いているので、曲線の下にある。その上に描いた琥珀色の階段は、左端の高さを用いた場合に得られる長方形を表しており、こちらは曲線の上にある。したがって

$$S_n \;\le\; \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \;\le\; S_n + (\text{琥珀色の部分の面積の合計}).$$

ここで、琥珀色の部分をすべて横にずらして、幅 $\frac{1}{n}$ の一本の柱にまとめてみる。高さは次々に打ち消し合う（telescope）ので、積み上がった高さの合計は $f(1)-f(2)$ となる。よって

$$0 \;\le\; \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x - S_n \;\le\; \frac{f(1)-f(2)}{n} \;\longrightarrow\; 0 \quad \text{ただし} n\to\infty,$$

となり、$S_n \to \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ である。増加関数 $f$ の場合も、不等号の向きを逆にすれば同様に示せる。また、まともな関数（たとえば連続（continuous）かつ区分的に単調（piecewise monotonic）な関数）であれば、有限個の単調な部分に切り分けることができ、各部分の誤差は $\frac{1}{n}$ のオーダーである。以上により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(1+m/n) = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

が正当化される。

**極限** $\ln 2$

? **考えてみよう**　$\dfrac{1}{n+m}$ を $\dfrac{1}{n}f(1+m/n)$ の形に見せるにはどうすればよいか。

分母から因数 $n$ をくくり出す：

$$\frac{1}{n+m} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+m/n} = \frac{1}{n}f(1+m/n) \qquad \text{ただし} f(x)=\frac{1}{x}.$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{1+m/n}$$
$$=\int_1^2\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln 2-\ln 1=\ln 2,$$

となり、示すべきことが得られた。（ここで $f$ は減少関数なので、図による議論がそのまま当てはまる。さらに、和が $\ln 2-\frac{1}{2n}$ と $\ln 2$ の間にあることまでわかる。）

**最後の極限**

$m$ 番目の項は $\dfrac{n}{n^2+m^2}$（$m=1,\ldots,n$）である。分子と分母を $n^2$ で割ると

$$\frac{n}{n^2+m^2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+(m/n)^2}.$$

公式は $f$ を $x=1+m/n$ で評価するので、これに合わせるには $f(x)=\dfrac{1}{1+(x-1)^2}$ とすればよい。このとき $f(1+m/n)=\dfrac{1}{1+(m/n)^2}$ となる。この $f$ は $[1,2]$ で減少する。したがって

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{n}{n^2+m^2}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{1+(x-1)^2}=\Big[\tan^{-1}(x-1)\Big]_1^2$$
$$=\tan^{-1}1-\tan^{-1}0=\frac{\pi}{4}.$$

（同じことだが、置換 $u=x-1$ を行えば $\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ が得られる。）

## 検算

和は直接計算できる。$n=1000$ のとき、二番目の和は 0.69290 で $\ln 2\approx 0.69315$ と比べられ、三番目の和は 0.78515 で $\pi/4\approx 0.78540$ と比べられる。どちらの場合も不足分は約 $\frac{1}{4000}$ であり、図から得た上界 $\frac{f(1)-f(2)}{n}=\frac{1}{2000}$ の範囲内に収まっている。また、どちらの和も極限よりわずかに小さくなっており、右端の高さを用いた減少関数 $f$ の場合として当然の結果である。

## よくある間違い

- 三番目の極限を $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ と書いてしまう。公式は $f$ を $m/n$ ではなく $1+m/n$ で評価するので、1 だけのずれを $f$ の中に組み込まなければならない。
- 最後の項（$m=n$）が $\frac{n}{2n^2}$ であり、これが $\frac{1}{n}f(2)$ に一致することを忘れる。和は $n+1$ 個の点ではなく、$n$ 個の右端点すべてにわたってとられる。

## STEP のその先へ

これらはリーマン和（Riemann sum）であり、図による議論はリーマン積分（Riemann integral）の定義の種となるものである。関数が可積分（integrable）であるとは、上限和と下限和（upper and lower sums）を挟み込んで一致させられることであり、閉区間上の連続関数はすべてこの性質をもつ。同じ考え方は逆向きにも使え、和を積分に置き換えて評価することができる。たとえば $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ が収束することの証明がその例である。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）には、リーマン積分についてのとても読みやすい章がある。

解答例

# STEP III 1999、第 4 問

純粋数学 ・ オイラーの公式と多面体

> **STEP III 1999、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q4

この問題は、*Beyond STEP* の第 7.9 節「**正多面体はただ五つ**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch07/platonic-solids.html

## 鍵となる考え方

辺の数を 2 通りの方法で数える。1 つは面をめぐって数える方法、もう 1 つは頂点をめぐって数える方法である。どちらの数え方でも $E$ が $F$（または $V$）で表され、それらをオイラー（Euler）の公式に代入すると $F$ についての方程式が 1 つだけ残る。その後の分類全体は、ただ 1 つの観察に帰着する。すなわち $F$ は正であるから $h$ も正でなければならず、これを満たす整数の組 $(m, n)$ はごくわずかしか残らない。

## 解答

### $F$ の式の導出

各面は $m$ 角形であるから、$m$ 本の辺をもつ。すべての面をめぐって辺を数えると $mF$ となる。しかし各辺はちょうど 2 つの面の境界になっているので、この数え方ではどの辺も 2 回ずつ数えられている：

$$mF = 2E.$$

同様に、各頂点には $n$ 本の辺が集まるので、頂点ごとに辺を数えると $nV$ となる。各辺はちょうど 2 つの端点をもつので、こちらもどの辺も 2 回ずつ数えている：

$$nV = 2E.$$

よって $E=\frac{1}{2}mF$、$V=\frac{2E}{n}=\frac{mF}{n}$ である。これを $V-E+F=2$ に代入すると

$$\frac{mF}{n}-\frac{mF}{2}+F=2$$
$$F\,(2m-mn+2n)=4n \qquad \text{（両辺に } 2n \text{ を掛けた）.}$$

ここで与えられた $h$ を展開すると

$$4-(n-2)(m-2)=4-(mn-2m-2n+4)=2m+2n-mn,$$

となり、これはちょうど上の括弧の中身である。よって $Fh=4n$ である。$F$ と $n$ は正であるから $h\neq 0$ であり、両辺を割ることができる：

$$F=\frac{4n}{h}, \qquad h=4-(n-2)(m-2),$$

これが示すべき式である。

### 正多面体はちょうど 5 つしかない

**考えてみよう** 公式からではなく幾何学から、$m$ と $n$ にどのような制約がつくか。

多角形は少なくとも 3 つの辺をもつので $m\geq 3$ である。立体の頂点では少なくとも 3 つの面が集まらなければならない。2 つの面だけが角で接していると、立体の角ではなく平らなひだになってしまうからである。よって $n\geq 3$ でもある。したがって $m-2\geq 1$ かつ $n-2\geq 1$ である。

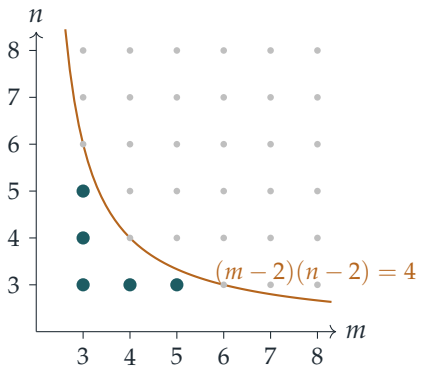
$F>0$ かつ $4n>0$ であるから、公式により $h>0$、すなわち

$$(m-2)(n-2)<4.$$

でなければならない。したがって 2 つの正の整数 $m-2$ と $n-2$ の積は 1、2、3 のいずれかであり、$h=3$、2、1 となる。可能な因数分解は次のものに限られる：

- $(m-2)(n-2)=1$：$m=n=3$ であり、$h=3$；
- $(m-2)(n-2)=2$：$(m,n)=(3,4)$ または $(4,3)$ であり、$h=2$；
- $(m-2)(n-2)=3$：$(m,n)=(3,5)$ または $(5,3)$ であり、$h=1$。

図も同じことを示している。$m,n\geq 3$ を満たす格子点のうち、双曲線（hyperbola）$(m-2)(n-2)=4$ の真に内側にあるものがそれである。




それぞれの組について、$F = 4n/h$、$E = \frac{1}{2}mF$、$V = mF/n$ である：

| | $m$ | $n$ | $h$ | $V$ | $E$ | $F$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 正四面体 | 3 | 3 | 3 | 4 | 6 | 4 |
| 正八面体 | 3 | 4 | 2 | 6 | 12 | 8 |
| 立方体 | 4 | 3 | 2 | 8 | 12 | 6 |
| 正二十面体 | 3 | 5 | 1 | 12 | 30 | 20 |
| 正十二面体 | 5 | 3 | 1 | 20 | 30 | 12 |

たとえば正二十面体（icosahedron）では $F = 4 \cdot 5/1 = 20$、$E = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 20 = 30$、$V = 3 \cdot 20/5 = 12$ である。

したがって $(m, n)$ の組合せは多くとも 5 通りしかありえない。表に挙げたおなじみの 5 つのプラトンの立体（Platonic solids）が示すとおり、そのそれぞれが実際に存在する。よって正多面体（regular polyhedron）はちょうど 5 つである。

## 検算

- どの行も $V - E + F = 2$ を満たしている。正十二面体では $20 - 30 + 12 = 2$ である。
- 立方体では $V = 8$、$E = 12$、$F = 6$ となり、これはサイコロで実際に数えて確かめられる。
- $m$ と $n$ を入れ替えると $V$ と $F$ が入れ替わり、$E$ は変わらない（立方体と正八面体、正十二面体と正二十面体）。これが双対性（duality）である。各面の中心に頂点を置けばよい。
- 独立な検算：各頂点での角欠損（angle deficit）$2\pi - n\pi(m-2)/m$ は正でなければならず、$V$ 個の頂点すべてにわたる総和は $4\pi$ になる（デカルト（Descartes）の定理）。これは 5 つすべてで成り立ち、また $3 \le m, n < 200$ の範囲をコンピュータで探索しても、$h > 0$ となる組はほかに見つからなかった。

## よくある間違い

- 辺を数えるときに因子 2 を忘れること。各辺は 2 つの面に属し、2 つの端をもつ。
- $n \geq 3$ である理由を述べないこと。この条件がなければ、$n = 2$ のときどの $m$ に対しても $h = 4$ となり、「解」が無数に出てしまう。
- 数え上げだけから「ちょうど 5 つ」と結論すること。この議論が示すのは**多くとも** 5 つであることにすぎない。各場合が存在することを示すには、実際の立体が必要である。

## STEP のその先へ

オイラーの公式は位相幾何学（topology）の出発点である。数 $V - E + F$（**オイラー標数**（Euler characteristic））は、曲面を面に分割するどのような方法についても同じ値をとる。そのため球面では 2、トーラスでは 0、などとなる。同じ議論をトーラス上で繰り返すと、正方形の格子のような「正則」なタイル張りが無数に得られる。また、5 つの立体の対称性の群は、初めて学ぶ群論（group theory）の講義でも中心的な例となる。読みやすい解説としては Richeson, *Euler's Gem*（オイラーの公式をめぐる一般向けの本）を読むとよい。Armstrong, *Basic Topology*（位相幾何学の入門書）はこれらの考え方をさらに先へ進めている。

解答例

# STEP III 1999、第 5 問

純粋数学 ・ フィボナッチ数の恒等式と帰納法

**STEP III 1999、問 5**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/99-s3-q5

## 鍵となる考え方

これはフィボナッチ数列（Fibonacci sequence）を $u_n = F_{n+1}$ となるようにずらしたものである。最初の恒等式（identity）については、$u_{n+2}$ と $u_{n-1}$ をともに中央の組 $u_{n+1}$ と $u_n$ で表す。すると交差項が打ち消し合う。倍数公式（doubling formulae）については、二つの主張を**同時に**帰納法（induction）で証明する。漸化式（recurrence）を通じて、それぞれが互いを支えているからである。最初の恒等式は、奇数の場合を仕上げるのにちょうど必要な道具となる。

## 解答

### 最初の恒等式

$n \geq 1$ を固定する。このとき $u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}$ はすべて定義されている。漸化式より

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \qquad \text{かつ} \qquad u_{n-1} = u_{n+1} - u_n,$$

が成り立つ。後者は $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ から得られる。両辺を 2 乗して加えると

$$\begin{aligned} u_{n+2}^2 + u_{n-1}^2 &= \left(u_{n+1}^2 + 2u_{n+1}u_n + u_n^2\right) + \left(u_{n+1}^2 - 2u_{n+1}u_n + u_n^2\right) \\ &= 2\left(u_{n+1}^2 + u_n^2\right), \end{aligned}$$

となり、これが求める恒等式である。

### 倍数公式

$P(n)$ を、

$$u_{2n} = u_n^2 + u_{n-1}^2 \qquad \text{かつ} \qquad u_{2n+1} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2.$$

がともに成り立つという主張とする。最初のいくつかの項は $u_0, u_1, \cdots = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ である。

**基底段階（base case）**。$n = 1$ のとき、$u_2 = 2 = 1^2 + 1^2 = u_1^2 + u_0^2$ であり、$u_3 = 3 = 2^2 - 1^2 = u_2^2 - u_0^2$ である。よって $P(1)$ は成り立つ。

> **考えてみよう** なぜ二つの公式を一つずつではなく、同時に証明するのだろうか。

漸化式から $u_{2n+2}$ を得るには $u_{2n+1}$ と $u_{2n}$ が必要なので、$n+1$ における偶数項の公式には、$n$ における**両方の**公式が必要となる。さらに $n+1$ における奇数項の公式には、$n+1$ における偶数項の公式も必要となる。どちらの主張も、単独では先へ進めることができないのである。

**帰納段階（inductive step）**。ある $n \geq 1$ に対して $P(n)$ が成り立つと仮定する。

**偶数番目の項。**漸化式、続いて $P(n)$ を用いると

$$\begin{aligned} u_{2n+2} &= u_{2n+1} + u_{2n} \\ &= \left(u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2\right) + \left(u_n^2 + u_{n-1}^2\right) \\ &= u_{n+1}^2 + u_n^2, \end{aligned}$$

となる。これは偶数項の公式で $n$ を $n+1$ に置き換えたものである。

**奇数番目の項。**漸化式、いま証明した式、および $P(n)$ を用いると

$$\begin{aligned} u_{2n+3} &= u_{2n+2} + u_{2n+1} \\ &= \left(u_{n+1}^2 + u_n^2\right) + \left(u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2\right) \\ &= 2u_{n+1}^2 + u_n^2 - u_{n-1}^2. \end{aligned}$$

となる。これが $u_{n+2}^2 - u_n^2$ に等しいことを示したいのであり、ここで最初の恒等式が登場する。$n \geq 1$ であるから、恒等式より $u_{n+2}^2 = 2u_{n+1}^2 + 2u_n^2 - u_{n-1}^2$ が成り立ち、したがって

$$u_{n+2}^2 - u_n^2 = 2u_{n+1}^2 + u_n^2 - u_{n-1}^2 = u_{2n+3}.$$

である。$2(n+1)+1 = 2n+3$ かつ $(n+1) \pm 1 = n+2,\ n$ であるから、これは奇数項の公式で $n$ を $n+1$ に置き換えたものである。

よって $P(n)$ ならば $P(n+1)$ である。基底段階と合わせて、帰納法によりすべての正の整数 $n$ に対して $P(n)$ が成り立つ。

## 検算

$n=5$で試してみよう。$u_{10}=89$であり、$u_5^2+u_4^2=64+25=89$である。また$u_{11}=144$であり、$u_6^2-u_4^2=169-25=144$である。最初の恒等式はすべての$n\le 299$について、二つの倍数公式はすべての$n\le 189$について、厳密な整数演算で確認した。また$u_{n+1}^2-u_{n-1}^2=(u_{n+1}-u_{n-1})(u_{n+1}+u_{n-1})=u_n(u_{n+1}+u_{n-1})$であることにも注意しておこう。これは奇数番目の項を表す便利な別形である。

## よくある間違い

- 偶数項の公式だけで帰納法を行うこと。帰納段階で$u_{2n+1}$が必要になるため、行き詰まってしまう。
- $u_{-1}$が定義されていない$n=0$で最初の恒等式を用いること。帰納段階では、$n\ge 1$の場合にしかこれを用いていない。
- 添字が通常のフィボナッチ数からずれている（$u_0=u_1=1$）ことを忘れ、誤った値で基底段階を確認すること。

## STEP のその先へ

倍数公式を使えば、$N$を繰り返し半分にしていくことで、およそ$\log_2 N$回の手順で$u_N$を計算できる。これが「高速倍加法（fast doubling）」であり、繰り返し二乗法（fast exponentiation）の親戚にあたる。その背後には行列の恒等式$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}F_{n+1}&F_n\\F_n&F_{n-1}\end{pmatrix}$があり、この行列を2乗すると二つの公式が一度に得られる。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）はこの行列の累乗と固有値（eigenvalues）を通してフィボナッチ数を扱っており、ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（高等整数論）の連分数（continued fractions）の章では、隣り合うフィボナッチ数の比が黄金比（golden ratio）の近似分数（convergents）として再び現れる。

解答例

# STEP III 1999、第 6 問

純粋数学 ・ 媒介変数表示された曲線と面積

> **STEP III 1999、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q6

## 鍵となる考え方

この方程式は $\left(x^{1/n}\right)^2 + \left(y^{1/n}\right)^2 = \left(a^{1/n}\right)^2$ ということであり、姿を変えた円である。そこで、円の場合とまったく同じように $x^{1/n} = a^{1/n}\cos t$、$y^{1/n} = a^{1/n}\sin t$ とおき、それから $n$ 乗する。$n$ が奇数（odd）であるおかげで負の数の実数の $n$ 乗根がとれるので、この曲線は四つの象限（quadrant）すべてにわたって存在する。

## 解答

### パラメータ表示

$n$ は奇数なので、どの実数 $x$ もちょうど一つの実数の $n$ 乗根 $x^{1/n}$ をもち、その符号は $x$ と同じである。また $x^{2/n}$ は $\left(x^{1/n}\right)^2$ を意味する。$X = x^{1/n}$、$Y = y^{1/n}$、$R = a^{1/n} > 0$ とおくと、方程式 $(*)$ は

$$X^2 + Y^2 = R^2,$$

となる。これは半径 $R$ の円であり、$X = R\cos t$、$Y = R\sin t$ とパラメータ表示（parametrisation）できる。$n$ 乗する操作は（$n$ が奇数なので）$\mathbb{R}$ の全単射（bijection）であり、これにより

$$\boxed{x = a\cos^n t, \qquad y = a\sin^n t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.}$$

を得る。円上のすべての点 $(X, Y)$ がこのように表されるので、曲線上のすべての点もこのように表される。

**考えてみよう** なぜこれが単に曲線を「何らかの」向きにたどるのではなく、反時計回りにたどるといえるのか。

写像 $(X,Y)\mapsto(X^n,Y^n)$ は各座標の符号を保つので、各象限をそれ自身に移す。$t$ が 0 から $2\pi$ まで動くとき、点 $(R\cos t, R\sin t)$ は円を反時計回り（anticlockwise）に一周し、$x$ 軸の正の部分、第 1 象限、$y$ 軸の正の部分、第 2 象限、……をこの順に通る。その像 $(x,y)$ も同じ軸と象限を同じ順に通るので、やはり原点のまわりを反時計回りに一周する。（たとえば第 1 象限内では、$x=a\cos^n t$ は $a$ から 0 へ減少し、$y=a\sin^n t$ は 0 から $a$ へ増加する。）$n=1$ のときは、これはおなじみの円 $x=a\cos t$、$y=a\sin t$ にほかならない。

### $n=3$ のときの概形

このとき $x=a\cos^3 t$、$y=a\sin^3 t$ であり、曲線は $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ である。

**対称性**（*symmetry*）。方程式は $x\mapsto -x$、$y\mapsto -y$、および $x$ と $y$ の入れ替えによって変わらない。よって曲線は両座標軸と直線 $y=\pm x$ に関して対称であり、第 1 象限 $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ だけを調べればよい。

**切片**（*intercept*）。$t=0$ では点 $(a,0)$ に、$t=\frac{\pi}{2}$ では点 $(0,a)$ にある。対称性より、曲線が座標軸と交わるのは $(\pm a,0)$ と $(0,\pm a)$ のみである。直線 $y=x$ 上（$t=\frac{\pi}{4}$）では点 $\left(\frac{a}{2\sqrt{2}},\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)$ にあり、各軸方向にわずか約 $0.35a$ しか進んでいない。

**傾き**（*gradient*）。

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-3a\cos^2 t\sin t,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=3a\sin^2 t\cos t,$$

であるから、$0<t<\frac{\pi}{2}$ において

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\tan t.$$

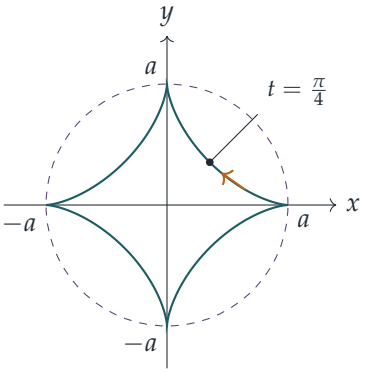
これは $t\to 0$ のとき 0 であり、$t\to\frac{\pi}{2}$ のとき $-\infty$ に発散する。よって曲線は $(a,0)$ では $x$ 軸に接して（tangent）到達し、$(0,a)$ では $y$ 軸に接して到達する。$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ と $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ はともに $t=0$ と $t=\frac{\pi}{2}$ で 0 になる。第 1 象限の弧と、それを折り返した第 4 象限の弧は $(a,0)$ で出会い、そこで両方とも $x$ 軸に接しているので、二つの弧は鋭くとがった点で合わさる。この曲線は四点 $(\pm a,0)$、$(0,\pm a)$ に**尖点**（cusp）をもつ。

**凹凸**（*concavity*）。$-\tan t$ を $x$ で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t}=\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}>0\quad\text{ただし}0<t<\tfrac{\pi}{2}.$$

よって第 1 象限の弧は下に凸（convex）である。つまり円のように外側へふくらむのではなく、原点のほうへ内側に曲がっている。この弧は弦（chord）$x+y=a$ の下側にある。実際 $\cos^3 t+\sin^3 t\le\cos^2 t+\sin^2 t=1$ であり、等号は尖点でのみ成り立つ。

以上をまとめると、四つの角をもつ星形（**アステロイド**（astroid））が得られる。下図では比較のため、半径 $a$ の円を破線で示している。




### $n = 3$ のときの面積

上で求めた導関数を用いると

$$\begin{aligned} x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t\cos t + a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t\sin t \\ &= 3a^2\sin^2 t\cos^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= 3a^2\sin^2 t\cos^2 t = \tfrac{3}{4}a^2\sin^2 2t. \end{aligned}$$

$\sin^2 2t = \frac{1}{2}(1 - \cos 4t)$ であり、$\cos 4t$ の $[0, 2\pi]$ 上の積分は 0 であるから

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\,\mathrm{d}t = \pi.$$

したがって

$$A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3a^2}{4}\cdot\pi = \boxed{\frac{3\pi a^2}{8}}.$$

曲線が反時計回りにたどられるので、この公式は正の面積を与える。最初の小問で向きが重要だったのはこのためである。

## 検算

- アステロイドは面積 $2a^2$ のひし形 $|x| + |y| \le a$ の内部にあるので、答えは $2a^2$ より小さくなければならない。実際 $\frac{3\pi}{8}a^2 \approx 1.178a^2$ である。
- 公式を使わない検算として、$a = 1$ として $4\int_0^a \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{3/2}\mathrm{d}x$ を数値計算すると 1.178097… となり、$3\pi/8 = 1.1780972\ldots$ と一致する。
- $n = 1$ の場合に同じ方法を用いると $x\dot{y} - y\dot{x} = a^2$、$A = \pi a^2$ となり、当然ながら円の面積が得られる。

## よくある間違い

- 負の $x$ がなぜ許されるのかを説明せずに $x = a\cos^n t$ と書いてしまう。$n$ が奇数であることこそが、$x < 0$ に対して $x^{2/n}$ に意味を与え（そしてパラメータ表示が曲線全体を表すことを保証し）ているのである。
- 曲線を、つぶれた円のように外側へふくらんだ形に描いてしまう。第 2 次導関数から、曲線は内側へ曲がり、座標軸上に鋭い尖点をもつことがわかる。
- $[0, \frac{\pi}{2}]$ だけで積分して 4 倍し忘れる、あるいは $-y\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ で符号を誤る（最終的に両方の項は正になる）。

## STEP のその先へ

この面積公式は**グリーンの定理**（Green's theorem）の特別な場合である。グリーンの定理は、領域上の積分をその境界に沿った積分に変換するものである。これは、境界をなぞることで面積を測る機械式の器具であるプラニメータ（planimeter）の原理でもある。また、$|x|^p + |y|^p = 1$ のような曲線は、解析学（analysis）や線形代数（linear algebra）で出会う $\ell^p$ ノルム（norm）の「単位円」を与える。アステロイドは $p = \frac{2}{3}$ の場合であり、これは凸ではないのでノルムを与えない。さらにアステロイドは、半径が 4 倍の円の内側を転がる円の上の一点が描く軌跡としても現れる。この種の問題をもっと解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を参照するとよい。

解答例

# STEP III 1999、第 7 問

純粋数学 ・ 群と同型

> **STEP III 1999、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q7

## 鍵となる考え方

式 $x+y+axy$ はほとんど積の形をしている。$a$ を掛けて 1 を加えると

$$1+a(x*y)=1+ax+ay+a^2xy=(1+ax)(1+ay),$$

となる。したがって変数変換（change of variable）$X=1+ax$ のもとでは、演算（operation）$*$ は姿を変えた通常の乗法にすぎない。群（group）のあらゆる性質は乗法の対応する性質から導かれ、取り除かなければならない唯一の数は $X=0$ に対応する数である。

## 解答

以下を通じて $\phi(x)=1+ax$ とおく。$a\neq 0$ であるから、$\phi$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への全単射（bijection）であり、したがって二つの実数 $u,v$ が等しいのは $\phi(u)=\phi(v)$ のときであり、かつそのときに限る。上の恒等式は次のように書ける。

$$\phi(x*y)=\phi(x)\,\phi(y)\qquad \text{任意の実数}x,y. \tag{†}$$

### 結合法則

両辺それぞれに (†) を 2 回用いると

$$\phi\big((x*y)*z\big)=\phi(x*y)\,\phi(z)=\phi(x)\,\phi(y)\,\phi(z),$$
$$\phi\big(x*(y*z)\big)=\phi(x)\,\phi(y*z)=\phi(x)\,\phi(y)\,\phi(z).$$

実数の乗法は結合的であるからこれらは等しく、$\phi$ は単射（one-to-one）であるから $(x*y)*z=x*(y*z)$ が成り立つ。よって $*$ は結合法則（associativity）を満たす。

（直接確かめたい場合は、$(x*y)*z$ と $x*(y*z)$ がともに対称式 $x+y+z+a(xy+yz+zx)+a^2xyz$ に展開されることを見ればよい。）

## 群

**考えてみよう** どの数を取り除かなければならないか。また、なぜ $\mathbb{R}$ 全体のままではいけないのか。

$\phi$ のもとで、数 $x=-\frac{1}{a}$ は $\phi(x)=0$ に対応し、0 には乗法の逆数がない。具体的には、任意の実数 $y$ に対して

$$\left(-\tfrac{1}{a}\right)*y=-\tfrac{1}{a}+y-y=-\tfrac{1}{a},$$

となるので、$-\frac{1}{a}$ はすべてを吸収してしまい、何と演算しても単位元になることはない。そこで

$$G=\mathbb{R}\setminus\left\{-\tfrac{1}{a}\right\},$$

とする。これはちょうど $\phi(x)\neq 0$ を満たす $x$ 全体の集合である。四つの公理（axioms）を確かめる。

**演算について閉じていること**（*closure*）。 $x,y\in G$ ならば $\phi(x)\neq 0$ かつ $\phi(y)\neq 0$ であるから、(†) より $\phi(x*y)=\phi(x)\phi(y)\neq 0$ である。ゆえに $x*y\neq -\frac{1}{a}$ であり、$x*y$ は明らかに実数であるから $x*y\in G$ である。

**結合法則**。これはすべての実数について上で示したので、特に $G$ の元についても成り立つ。

**単位元**（*identity*）。すべての $x$ について $x*0=x+0+0=x$ かつ $0*x=x$ であり、$\phi(0)=1\neq 0$ より $0\in G$ である。よって 0 が単位元である。（これは乗法の単位元である $\phi(0)=1$ と対応している。）

**逆元**（*inverses*）。 $x\in G$ が与えられたとき、$x*y=0$、すなわち $x+y(1+ax)=0$ を満たす $y$ を求めたい。$1+ax\neq 0$ であるから割り算ができて

$$x^{-1}=\frac{-x}{1+ax}.$$

を得る。これは $G$ に属する。なぜなら

$$\phi\left(\frac{-x}{1+ax}\right)=1-\frac{ax}{1+ax}=\frac{1}{1+ax}\neq 0,$$

だからである。また、$*$ は可換である（$x*y=y*x$ は式から明らか）ので、$x^{-1}*x=0$ も成り立つ。

四つの公理がすべて成り立つので、$(G,*)$ は群（実際にはアーベル群（abelian group））であり、除外される数は $-\frac{1}{a}$ である。

### 位数 2 の部分群

0 でない実数のなす乗法群は部分群（subgroup）$\{1,-1\}$ をもつ。これを $\phi$ で引き戻す。$\phi(x)=1$ からは $x=0$ が、$\phi(x)=-1$ からは $x=-\frac{2}{a}$ が得られる。そこで

$$H=\left\{0,\,-\tfrac{2}{a}\right\}.$$

を考える。これらは $G$ の異なる二つの元である（$a\neq 0$ より $-\frac{2}{a}\neq 0$ かつ $-\frac{2}{a}\neq -\frac{1}{a}$）。直接計算すると

$$\left(-\tfrac{2}{a}\right)*\left(-\tfrac{2}{a}\right)=-\tfrac{4}{a}+a\cdot\tfrac{4}{a^2}=0,$$

であり、$0*0=0$、$0*\left(-\frac{2}{a}\right)=-\frac{2}{a}$ である。よって $H$ は演算について閉じており、単位元を含み、各元は自分自身の逆元である。ゆえに $H$ はちょうど 2 個の元をもつ $(G,*)$ の部分群である。

実はこれが唯一のものである。位数（order）2 の群は $h*h=e$ かつ $h\neq e$ を満たす $\{e,h\}$ という形であり、$h*h=0$ は $h(2+ah)=0$ を意味するので、$h=-\frac{2}{a}$ となる。

## 検算

$a=1$ とする。このとき $x*y=x+y+xy=(1+x)(1+y)-1$ であり、除外される数は $-1$、位数 2 の部分群は $\{0,-2\}$ である。実際 $(-2)*(-2)=-4+4=0$ となる。また $2*3=11$ であり、(†) の予言どおり $(1+2)(1+3)=12=1+11$ である。コンピュータを用いて、$a,x,y,z$ を約 5000 通り無作為に選び、厳密な有理数演算により、恒等式 (†)、結合法則、$G$ における閉性、単位元 0、逆元の公式、および $\{0,-\frac{2}{a}\}$ の閉性を確認した。

## よくある間違い

- 逆元 $\frac{-x}{1+ax}$ 自身が $G$ に属すること、あるいは $x*y$ が除外される数に決して等しくならないことの確認を忘れる。ちょうど 1 点だけを取り除くことを正当化するのは、閉性の公理である。
- 部分群として $\{0\}$ や $\{0,-\frac{1}{a}\}$ を答えてしまう。前者は元が 1 個しかなく、$-\frac{1}{a}$ はそもそも $G$ に属さない。

## STEP のその先へ

写像 $\phi(x)=1+ax$ は $(G,*)$ から群 $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\times)$ への**同型写像**（isomorphism）である。すなわち、一方の演算をもう一方の演算に移す全単射である。同型写像を見つけ

てしまえば、構造に関するあらゆる事実がそのまま移ってくる。$\times$ において位数 2 の元が $-1$ だけであるのと同様に、$(G, *)$ が位数 2 の元をちょうど一つもつのはこのためである。同型写像、そして二つの群が見かけは違っても「同じ」でありうるという考え方は、抽象代数学（abstract algebra）の最初の講義の中心をなす。これについて読むには Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）がよい出発点である。

解答例

# STEP III 1999、第 8 問

純粋数学 ・ 区分的な微分方程式

> **STEP III 1999、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q8

## 鍵となる考え方

各区間において、この方程式は振動数が一定の単振動（simple harmonic motion）を表すので、その区間での一般解（general solution）は $\cos nx$ と $\sin nx$ の一次結合である。必要な作業は解をつなぎ合わせることだけである。連続性の条件によって、各区間における $y$ と $y'$ の初期値（starting values）は前の区間の終点での値から定まる。区間の長さはすべて $2\pi$ であるから、初期値は毎回同じになり、数学的帰納法（induction）で証明できる規則性が現れる。

## 解答

### 小問 (i)

$0 < x < 2\pi$ では $n = 1$ であるから $y'' + y = 0$ であり、その一般解は

$$y = A\cos x + B\sin x.$$

である。$y$ と $y'$ は $x = 0$ で連続であるから、条件 $y(0) = 0$ と $y'(0) = 1$ はこの解に適用できる。すなわち $y(0) = A = 0$、$y'(0) = B = 1$ である。したがって

$$y = \sin x \qquad (0 \le x \le 2\pi).$$

右端では $y(2\pi) = \sin 2\pi = 0$、$y'(2\pi) = \cos 2\pi = 1$ である。

### 小問 (ii)

$2\pi < x < 4\pi$ では $n = 2$ であるから $y'' + 4y = 0$ であり、

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

である。$x = 2\pi$ における $y$ と $y'$ の連続性により、この解はそこで $y = 0$、$y' = 1$ でなければならない。これは小問 (i) の終点で求めた値である。$\cos 4\pi = 1$、$\sin 4\pi = 0$ であるから

$$y(2\pi) = A = 0, \qquad y'(2\pi) = 2B\cos 4\pi = 2B = 1,$$

となり、$B = \frac{1}{2}$ である。よって $2\pi \le x \le 4\pi$ で $y = \frac{1}{2}\sin 2x$ となり、示すべきことが得られた。

ここでも $y(4\pi) = \frac{1}{2}\sin 8\pi = 0$、$y'(4\pi) = \cos 8\pi = 1$ となることに注意しよう。次の区間はまったく同じ値から始まるのである。このことから次の主張が予想される。

**主張.** すべての正の整数 $n$ に対して

$$y = \frac{1}{n}\sin nx \qquad \text{ただし} 2(n-1)\pi \le x \le 2n\pi.$$

**数学的帰納法による証明.** $n = 1$ の場合は小問 (i) である。$n = k$ のとき主張が成り立つと仮定する。$x = 2k\pi$ において、直前の区間の解から

$$y = \frac{1}{k}\sin(2k^2\pi) = 0, \qquad y' = \cos(2k^2\pi) = 1,$$

が得られる。$2k^2\pi$ は $2\pi$ の整数倍だからである。$2k\pi < x < 2(k+1)\pi$ では方程式は $y'' + (k+1)^2 y = 0$ であるから

$$y = A\cos(k+1)x + B\sin(k+1)x.$$

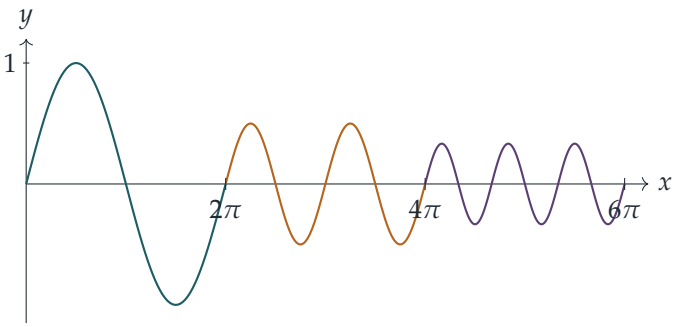
**考えてみよう** 左端 $x = 2k\pi$ において、$\cos(k+1)x$ と $\sin(k+1)x$ の値はいくらか。

そこでは $(k+1)x = 2k(k+1)\pi$ であり、これも $2\pi$ の整数倍であるから、余弦は 1、正弦は 0 である。したがって $x = 2k\pi$ における $y$ と $y'$ の連続性から

$$A = 0, \qquad (k+1)B = 1,$$

が得られ、$2k\pi \le x \le 2(k+1)\pi$ で $y = \dfrac{1}{k+1}\sin(k+1)x$ となる。これは $n = k+1$ の場合の主張であり、数学的帰納法により、すべての $n \ge 1$ について主張が成り立つ。□

よって、$2(n-1)\pi \le x \le 2n\pi$ のとき $y(x) = \dfrac{1}{n}\sin nx$ である。（各つなぎ目 $x = 2n\pi$ では、隣り合う二つの式がどちらも $y = 0$ を与えるので、曖昧さは生じない。）




**小問 (iii)**

小問 (ii) の結果を用いると、第 $n$ 区間において

$$\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} y^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} \sin^2 nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n^2}\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} (1-\cos 2nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n^2}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{n^2},$$

となる。$\sin 2nx$ は積分の上端・下端のどちらでも 0 になる（各端は $\pi$ の倍数であり、$2n$ は整数である）ので、余弦の項の積分は 0 になるからである。

最初の $N$ 個の区間を足し合わせると

$$\int_0^{2N\pi} y^2\,\mathrm{d}x = \pi\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}.$$

無限区間の積分（広義積分、improper integral）は、$X\to\infty$ のときの $\int_0^X y^2\,\mathrm{d}x$ の極限である。$y^2\geq 0$ であるから、これは $X$ の増加関数である。また $2(N-1)\pi \leq X \leq 2N\pi$ のとき、その値は $2(N-1)\pi$ での値と $2N\pi$ での値の間にある。級数は収束（converges）するので、$N\to\infty$ のとき、これら二つの値はどちらも $\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ に近づく。したがって

$$\int_0^{\infty} y^2\,\mathrm{d}x = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

となり、示すべきことが得られた。

## 検算

- 各部分 $\frac{1}{n}\sin nx$ は $y''=-n^2y$ を満たし、$y=0$、$y'=1$ から始まって $y=0$、$y'=1$ で終わる。よって各部分は値と傾きの両方において滑らかにつながる。
- 微分方程式を数値的に（4 次のルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で）最初の六つの区間にわたって解くと、$10^{-10}$ 以内の誤差で $\frac{1}{n}\sin nx$ が再現され、$12\pi$ までの $y^2$ の積分は 4.685336 となり、$\pi(1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{36})$ と一致する。

- オイラー（Euler）の結果 $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ を用いると、積分の値は $\pi^3/6 \approx 5.168$ となる。

## よくある間違い

- 初期条件（initial conditions）を、各区間の左端 $x = 2(n-1)\pi$ ではなく、すべての区間で $x = 0$ において適用してしまう。この問題でたまたま正しい答えが得られるのは、始点が $2\pi$ の倍数だからにすぎず、そのことは明記しなければならない。
- $y' = nB\cos nx$ であることを忘れる。この因子 $n$ こそが振幅 $\frac{1}{n}$ を生み出すのである。
- 極限が存在する理由を述べずに、積分を無限和として書いてしまう。$y^2$ が非負であることを使えば、これは容易に示せる。

## STEP のその先へ

これは区分的に定数な係数（piecewise-constant coefficients）をもつ微分方程式の簡単な例であり、決まった時刻に硬さが切り替わるばねのモデルとなる種類の方程式である。各切り替えの時点で $y''$ は不連続に跳ぶが、解そのものは連続かつ微分可能なままである。最終的な答え $\pi^3/6$ は、微分方程式をバーゼル問題（Basel problem）の和 $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ に結びつけている。この和は、大学のフーリエ級数（Fourier series）の講義で、パーセバルの定理（Parseval's theorem）を用いて初めて証明されることが多い。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）は、2 階線形微分方程式とフーリエ級数の両方を扱っている。

解答例

# STEP III 1999、第 9 問

力学 ・ ニュートンの球殻定理

> **STEP III 1999、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q9

この問題は、*Beyond STEP* の第 10.7 節「**球殻の内部の重力**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch10/shell-theorem.html

## 鍵となる考え方

広がりをもつ物体による重力（gravity）は、その小さな部分のそれぞれが及ぼす引力のベクトル和である。円環（ring）の場合は、対称性がほとんどの仕事をしてくれる。円環の反対側にある部分どうしは互いの横向きの引力を打ち消し合い、しかもどの部分も質点から同じ距離にあるので、単純な成分が一つだけ残る。球殻（shell）の場合は、質点を通る直線を軸とする円環に球殻を薄く切り分け、それぞれの切片に円環の結果を用い、切片を積分によって足し合わせる。うまく選んだ置換（substitution）によって、その積分は 0 に帰着する。

## 解答

### 円環

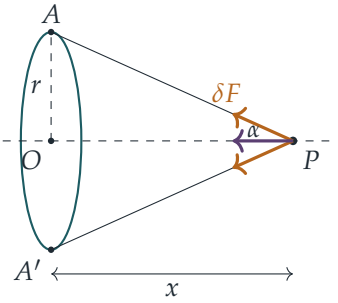
円環を質量 $m$ の一様で細い円とし、質点を中心 $O$ から距離 $x$ の軸上の点 $P$ にある単位質量の点とする。$P$、$O$ と円環上の点がつくる直角三角形に三平方の定理（Pythagoras' theorem）を用いると、円環上のすべての点は $P$ から同じ距離

$$d = \sqrt{x^2 + r^2}$$

にある。

**向き。**円環上の点 $A$ にある小さな要素と、直径の反対側の点 $A'$ にある等しい要素を

組にする。これらは $P$ から同じ距離 $d$ にあるので、$PA$ 方向と $PA'$ 方向に同じ大きさで引く。この二直線は軸に関して互いに対称であるから、軸に垂直な成分は打ち消し合い、軸方向の成分は足し合わされて、どちらも $P$ から $O$ に向かう。円環全体はこのような組からなるので、質点にはたらく合力は軸方向で、円環の中心に向かう。




**大きさ。**質量 $\delta m$ の要素は $PA$ 方向に大きさ $G\,\delta m/d^2$ の力で引く。$PA$ と軸 $PO$ のなす角を $\alpha$ とすると $\cos\alpha = x/d$ であるから、$O$ に向かう成分は

$$\frac{G\,\delta m}{d^2}\cdot\frac{x}{d} = \frac{Gx\,\delta m}{(x^2+r^2)^{3/2}}.$$

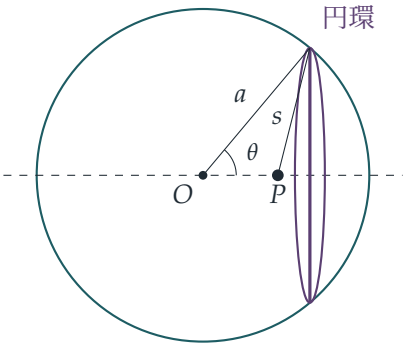
である。$\delta m$ にかかる係数はどの要素についても同じなので、円環全体で和をとると $\delta m$ が $m$ に置き換わるだけである：

$$F = \frac{Gmx}{(x^2+r^2)^{3/2}},$$

これは中心に向かう向きであり、示すべきことが示された。$P$ が円環の反対側にある場合は、$x$ を $|x|$ に置き換えればこれが成り立つ。次の部分では $x$ を符号付きの距離として用いるが、そのとき符号付きの $x$ による公式は力の符号付き成分を正しく与える。

### 球殻

球殻の中心を $O$、半径を $a$、質量を $M$ とすると、その面密度（surface density）は $M/(4\pi a^2)$ である。質点を $OP = b < a$ となる点 $P$ に置く。$b = 0$ ならば、$O$ から見てどの方向も同等で、球殻上の反対側の点どうしの引力が打ち消し合うので、力は 0 である。以下では $0 < b < a$ とし、直線 $OP$ を軸として、その上の距離を $O$ から $P$ の向きに測る。




$OP$ に垂直な平面で球殻を薄い円環に切り分ける。極角 $\theta$ と $\theta+\delta\theta$（$O$ において $OP$ の向きから測る）の間にある円環は、半径 $a\sin\theta$、中心が軸上の位置 $a\cos\theta$、幅 $a\,\delta\theta$ である。その質量は

$$\delta M = \frac{M}{4\pi a^2}\cdot 2\pi a\sin\theta\cdot a\,\delta\theta = \tfrac{1}{2}M\sin\theta\,\delta\theta.$$

である。この円環の中心は $P$ から符号付き距離 $a\cos\theta-b$ の位置にある。円環の結果より、この円環が $P$ を引く力は軸方向であり、その正の向き（$O$ から遠ざかり $P$ を通る向き）の成分は

$$\frac{G\,\delta M\,(a\cos\theta-b)}{\big((a\cos\theta-b)^2+a^2\sin^2\theta\big)^{3/2}} = \frac{G\,\delta M\,(a\cos\theta-b)}{(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^{3/2}}.$$

である。この符号の取り方はどちらの場合にも正しい。$a\cos\theta>b$ のとき円環は $P$ の先にあり正の向きに引き、$a\cos\theta<b$ のときは逆向きに引く。どの円環も同じ軸に沿って引くので、合力は $OP$ 方向であり、その成分は

$$F = \frac{GM}{2}\int_0^{\pi}\frac{(a\cos\theta-b)\sin\theta}{(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^{3/2}}\,\mathrm{d}\theta.$$

である。

**?　考えてみよう**　分母を扱いやすくするには、どのような置換をすればよいか。

量 $a^2+b^2-2ab\cos\theta$ は、余弦定理（cosine rule）により、$P$ から円環までの距離 $s$（図で $s$ と記した線分）の 2 乗である。そこで

$$s^2 = a^2+b^2-2ab\cos\theta, \qquad 2s\,\mathrm{d}s = 2ab\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

と置換する。$\theta$ が 0 から $\pi$ まで動くとき、$s$ は $a-b$ から $a+b$ まで増加する（$b<a$ なので正である）。また

$$a\cos\theta-b = \frac{a^2+b^2-s^2}{2b}-b = \frac{a^2-b^2-s^2}{2b}.$$

である。$\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \dfrac{s\,\mathrm{d}s}{ab}$ を用いると

$$F = \frac{GM}{2}\int_{a-b}^{a+b} \frac{a^2-b^2-s^2}{2b}\cdot\frac{1}{s^3}\cdot\frac{s}{ab}\,\mathrm{d}s = \frac{GM}{4ab^2}\int_{a-b}^{a+b}\left(\frac{a^2-b^2}{s^2}-1\right)\mathrm{d}s$$
$$= \frac{GM}{4ab^2}\left[-\frac{a^2-b^2}{s}-s\right]_{a-b}^{a+b}.$$

となる。$s = a+b$ において括弧内は $-(a-b)-(a+b) = -2a$、$s = a-b$ において $-(a+b)-(a-b) = -2a$ である。これらは等しいので

$$F = \frac{GM}{4ab^2}\big(-2a-(-2a)\big) = 0.$$

となる。力は $OP$ 方向で、その $OP$ 方向の成分が 0 であるから、質点は球殻による重力を受けない。以上で示された。

## 検算

- 円環：$x = 0$ では力は 0 であり（質点は中心にあり、引力はつり合う）、$x \gg r$ では $Gm/x^2$ に近づく。これは全質量が $O$ に集まっている場合と同じである。
- 球殻の外側：代わりに $b > a$ とすると、下端は $s = b-a$ となり、そこで括弧内は $(a+b)-(b-a) = 2a$ である。すると $F = \frac{GM}{4ab^2}(-4a) = -GM/b^2$ となり、全質量が中心にあるかのように $O$ に向かう引力となる。これはニュートン（Newton）のもう一つの殻定理であり、積分が正しいことを示すよい兆候である。
- 数値的には、円環上の 2000 個の質点について和をとると、公式が小数点以下 10 桁まで再現された。$\theta$ についての積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると、いくつかの無作為な $b < a$ に対して約 $10^{-15}$ となり、$a = 2$、$b = 1.3$、$GM = 1$ として $2\times10^5$ 個の無作為な点からなるモンテカルロ法（Monte Carlo method）による球殻では、典型的な尺度 $GM/a^2 = 0.25$ に対して $10^{-3}$ 未満の力となった。

## よくある間違い

- 円環の質量要素を $M\,\delta\theta/\pi$ とすること。$\theta = \pi/2$ 付近の円環ほど大きいので、質量は $\delta\theta$ ではなく $\sin\theta\,\delta\theta$ に比例する。
- 円環の公式で $|a\cos\theta - b|$ を用いること。$P$ の両側にある円環は逆向きに引き合い、その打ち消し合いこそが要点である。
- $s$ の積分範囲を誤ること。$P$ は内部にあるので、$\theta = 0$ での距離は $b-a$ ではなく $a-b$ である。

## STEP のその先へ

これはニュートンの殻定理（shell theorem）であり、重力に関するガウス（Gauss）の法則（Gauss's law）を使ったより鮮やかな証明がある。任意の閉曲面を通る重力場の流束（flux）は内部の質量に比例するので、対称性により、中空の球殻の内部では場が 0 でなければならない。同じ数学からポテンシャル（potential）も得られ、球殻の内部でポテンシャルが一定であるという事実は、大学 1 年のベクトル解析（vector calculus）で学ぶ調和関数（harmonic function）の初期の例である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、殻定理と重力ポテンシャルを丁寧に扱っている。

解答例

# STEP III 1999、第 10 問

力学 ・ 落下する鎖の力積

> **STEP III 1999、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q10

## 鍵となる考え方

鎖が崩れ落ちていく間、まだぶら下がっている部分は自由落下（free fall）の状態にある。重力以外にそれを引くものは何もないのである。したがって、各輪はそれぞれの初めの位置からただ落ちるだけであり、輪ごとに異なるのはその落下の高さだけである。台は各輪を止めるために、輪 1 つにつき 1 回の力積（impulse）を与える。これらを足し合わせると平方根の和が得られ、$n$ が大きいとき、これは $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ に対するリーマン和（Riemann sum）である。

## 解答

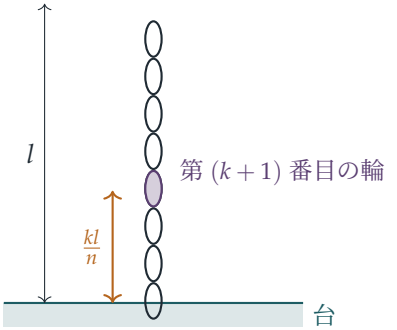
### モデル

各輪の質量は $\frac{m}{n}$、長さは $\frac{l}{n}$ である。輪はなめらかで、鎖は完全にしなやかであるから、押す力を伝えることはできない。各輪を質点とみなし、台に達した瞬間に静止させられる（衝突は非弾性（inelastic）である）ものとして扱う。

> ? **考えてみよう** その下の輪が台によって止められているのに、なぜ鎖のぶら下がっている部分は自由落下しているのだろうか。

鎖を放したとき、張力（tension）がなければどの輪も加速度 $g$ をもつ。そして張力が 0 のまま落下する鎖という状況には矛盾がない。すべての輪が一緒に動き、伸びることなく接したままでいるからである。台は輪を上向きに押して止めるが、しなやかな鎖はその押す力を上の輪へ伝えることができない。また、輪はなめらかなので、輪どうしの間に摩擦もない。したがって、まだ空中にある輪には重力以外の力ははたらか

ず、各輪は着地するまで自由に落下する。




### 第 $(k+1)$ 番目の輪

第 $(k+1)$ 番目の輪の下には $k$ 個の輪があり、その長さの合計は $\frac{kl}{n}$ である。下端はちょうど台に触れているので、第 $(k+1)$ 番目の輪は台に達するまでに距離 $\frac{kl}{n}$ だけ落下する。静止状態から自由落下するので、到達時の速さは $v^2 = 2gs$ から次のように求まる。

$$v_k = \sqrt{\frac{2gkl}{n}}.$$

その後この輪は静止させられるので、運動量（momentum）の変化の大きさは

$$\frac{m}{n}\sqrt{\frac{2gkl}{n}} = \frac{m}{n}\sqrt{2gl}\,\sqrt{\frac{k}{n}},$$

であり、向きは上向きである（輪は下向きの運動量 $\frac{m}{n}v_k$ を失う）。$k = 0$ のときこれは 0 である。いちばん下の輪は初めから台に触れているからである。

### 力積の総和

ニュートン（Newton）の第三法則により、台が第 $(k+1)$ 番目の輪から受ける力積は、その輪の運動量の変化と大きさが等しく、向きは下向きである。輪には $k+1 = 1, 2, \ldots, n$ と番号が付いているので、衝突によって台が受ける力積の総和は

$$J = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m}{n}\sqrt{\frac{2gkl}{n}} = m\sqrt{2gl}\ \cdot\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}}.$$

である。

**?** **考えてみよう**　$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k/n}$ はどの積分の近似になっているだろうか。

これは、幅 $\frac{1}{n}$ の $n$ 個の長方形の面積の和であり、その高さは $[0,1]$ を分けた各小区間の左端 $x = 0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ における $\sqrt{x}$ の値である。したがって $n$ が大きいとき

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}} \approx \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3},$$

となり、それゆえ

$$J \approx \tfrac{2}{3}\, m\sqrt{2gl},$$

が成り立つ。これが示すべきことであった。

この近似の精度を調べてみよう。$\sqrt{x}$ は増加関数であるから、小区間 $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ 上では左端の高さ $\sqrt{k/n}$ は曲線より下にあり、$[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ 上では曲線より上にある。各小区間について足し合わせると

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \;\le\; \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}} \;\le\; \int_0^{1} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x, \quad \text{すなわち} \quad \tfrac{2}{3}\Big(1-\tfrac{1}{n}\Big)^{3/2} \le \frac{J}{m\sqrt{2gl}} \le \tfrac{2}{3}.$$

を得る。上下の評価はともに $\frac{2}{3}$ に収束するので、相対誤差（relative error）は高々 $\frac{3}{2n}$ 程度である。

## 検算

- 単位：$m\sqrt{gl}$ は質量 × 速さであり、運動量である。力積はそうでなければならない。
- 数値で確かめる。$m = 2$、$l = 3$、$g = 9.8$ とすると $\frac{2}{3}m\sqrt{2gl} \approx 10.224$ である。一方、正確な和は $n = 10$ で 9.363、$n = 100$ で 10.144、$n = 1000$ で 10.216 である。比は 1 に近づき、常に上の評価の範囲内にある。
- 最後に着地する輪はほぼ長さ $l$ 全体を落下し、その速さは $\sqrt{2gl}$ に近い。もし質量のすべてがこの速さで到達するなら、力積は $m\sqrt{2gl}$ になるはずである。ほとんどの輪はそれより短い距離しか落下しないので、答えがこの値のいくらかの割合になるのは理にかなっている。

## よくある間違い

- 第 $(k+1)$ 番目の輪の落下距離を $\frac{(k+1)l}{n}$ としてしまう。その下にある輪は $k$ 個だけである。
- すでに台の上に積もっている鎖の、一定の重さを含めてしまう。問題が求めているのは衝突による力積だけである。

## STEP のその先へ

すべての輪は時間 $\sqrt{2l/g}$ のうちに着地するので、衝突だけで台に加わる平均の力は $\frac{2}{3}m\sqrt{2gl}/\sqrt{2l/g} = \frac{2}{3}mg$ である。実際には、各瞬間の衝撃力はすでに台の上にある鎖

の重さのちょうど 2 倍であり、台の下に置いたはかりの目盛りは、最後の輪が着地する瞬間に $3mg$ まで上昇する。このように質量が連続的に増えたり減ったりする問題（落下する鎖、ロケット、雨粒など）は、ニュートンの第二法則の可変質量（variable mass）の形を用いて扱われる。丁寧な取り扱いについては、Kleppner and Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照のこと。

解答例

# STEP III 1999、第 11 問

力学 ・ 剛体の回転

**STEP III 1999、問 11**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/99-s3-q11

## 鍵となる考え方

輪が台の縁に乗った後は、輪は固定点のまわりに回転する剛体（rigid body）となるので、二つの方程式ですべてが片づく。エネルギー保存則（conservation of energy）から任意の角度における角速度（angular speed）が得られ、中心についてのニュートン（Newton）の第二法則を回転の中心方向に分解すると垂直抗力（normal reaction）が得られる。この垂直抗力が 0 になったときに接触が失われる。最初の部分で求める慣性モーメント（moment of inertia）は、まさにエネルギーの式に必要なものである。

## 解答

### 慣性モーメント

薄い輪のどの微小部分も中心 $C$ から距離 $a$ のところにあるので、$C$ を通り輪の面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは

$$I_C = \sum \delta m\, a^2 = ma^2.$$

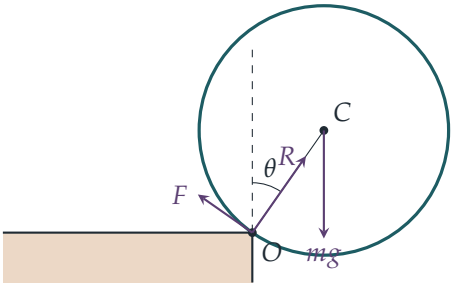
である。円周上の点 $O$ は $C$ から距離 $a$ にあり、新しい軸はもとの軸に平行であるから、平行軸の定理（parallel axis theorem）により

$$I_O = I_C + ma^2 = 2ma^2.$$

となる。

## 縁を越えて転がる

輪を一様な剛体の環とし、台の縁を固定点 $O$ とみなす。どちらの面も粗く、摩擦（friction）は十分に大きくて輪は決して滑らないと仮定する。すなわち、台の上では輪は転がり、縁を越えるときは滑らずに $O$ のまわりに回転する。$OC$ が鉛直上向きとなす角を $\theta$ とし、輪が縁に達した瞬間に $\theta = 0$ となるようにする。また $\omega = \dot{\theta}$ と書く。




**考えてみよう** 輪が縁に達した瞬間、$O$ のまわりの輪の角速度はいくらか。

速さ $v$ で滑らずに転がる輪の角速度は $v/a$ であり、各瞬間における輪の運動は接触点のまわりの回転である。輪が縁に達した瞬間、接触点はまさに $O$ であり、輪はそのまま $O$ のまわりに回転し続ける。輪は接触を失わないので、衝突は起こらない。よって $\theta = 0$ のとき $\omega = v/a$ である。

**エネルギー**。輪が $O$ と接触している間、$O$ にはたらく力は仕事をしない（作用点が静止している）ので、力学的エネルギーは保存される。中心は $a - a\cos\theta$ だけ下がっているので

$$\tfrac{1}{2}(2ma^2)\,\omega^2 = \tfrac{1}{2}(2ma^2)\left(\frac{v}{a}\right)^2 + mga(1-\cos\theta), \qquad \text{すなわち} \qquad a\omega^2 = \frac{v^2}{a} + g(1-\cos\theta).$$

となる。

**回転の中心方向**。中心 $C$ は $O$ を中心とする半径 $a$ の円周上を動くので、その加速度は $C$ から $O$ へ向かう成分 $a\omega^2$ をもつ。輪にはたらく力は、重力 $mg$、$OC$ に沿った垂直抗力 $R$（$O$ から遠ざかる向きに押す）、そして $OC$ に垂直な摩擦力 $F$ であり、摩擦力は $OC$ 方向の成分をもたない。$CO$ 方向に分解すると

$$mg\cos\theta - R = ma\omega^2.$$

エネルギーの式を代入すると

$$R = mg\cos\theta - \frac{mv^2}{a} - mg(1-\cos\theta) = mg(2\cos\theta - 1) - \frac{mv^2}{a}.$$

これは $\theta$ の増加とともに減少し、輪は $R$ が初めて 0 になったときに縁との接触を失う。それが起こるのは

$$2g\cos\theta = g + \frac{v^2}{a}, \qquad \text{すなわち} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2} + \frac{v^2}{2ag},$$

のときであり、これが示すべきことであった。

**考えてみよう** これはすべての $v$ に対して意味をもつだろうか。

$\theta = 0$ では $R = m(g - v^2/a)$ であり、これが正となるのは $v^2 < ag$ のときに限る。これは、輪が縁を越えて転がるときにただちに接触を失わないための条件であり、問題ではこれが仮定されている。そしてこれは右辺が 1 より小さくなるための条件とちょうど一致するので、条件を満たす角 $\theta$ が存在する。

念のため、$I_O\ddot{\theta} = mga\sin\theta$ を用いて $OC$ に垂直な方向に分解すると、$\ddot{\theta} = g\sin\theta/(2a)$ および $F = \frac{1}{2}mg\sin\theta$ が得られる。これは滑りを防ぐために縁が与えなければならない摩擦力であり、両方の面が粗くなければならないのはこのためである。

## 検算

- $v \to 0$ のとき、輪は縁から単に倒れ落ち、$\cos\theta = \frac{1}{2}$、すなわち $\theta = 60°$ で接触を失う。$v^2 \to ag$ のとき $\theta \to 0$ であり、輪は縁にかろうじて触れるだけである。どちらの極限も理にかなっている。
- 数値的には、$a = 0.6\,\mathrm{m}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$v = 1.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ として、$\dot{\theta} = v/a$ から出発して $g\cos\theta = a\dot{\theta}^2$ となるまで $\ddot{\theta} = g\sin\theta/(2a)$ を数値的に進めると $\cos\theta \approx 0.69132$ となり、$\frac{1}{2} + v^2/(2ag) = 0.69133$ と一致する。

## よくある間違い

- エネルギーの式で $I_C = ma^2$ を用いること、あるいは $\frac{1}{2}I_O\omega^2$ に加えて並進運動エネルギー（translational kinetic energy）の項を別に足してしまうこと。$O$ のまわりの回転には、すでに中心の運動が含まれている。
- 初めの運動エネルギーを忘れること。そうすると、すべての $v$ に対して $\cos\theta = \frac{1}{2}$ となってしまう。

## STEP のその先へ

縁から転がり落ちる運動は、典型的な**片側拘束**（unilateral constraint）の例である。縁は押すことはできても引くことはできないので、運動方程式が成り立つのは、それが予測する抗力が非負である間だけである。球面から滑り落ちる質点や、太鼓橋を越える自動車も同じ考え方で扱われる。大学 1 年次の講義では、剛体の力学や平行軸の定理・垂直軸の定理（perpendicular axis theorem）とともにこれを学ぶ。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、これらすべてを丁寧に扱っている。

解答例

# STEP III 1999、第 12 問

確率・統計 ・ 離散同時分布

> **STEP III 1999、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q12

## 鍵となる考え方

同時確率（joint probability）は $j$ と $k$ に主として $j+k$ を通じて依存するので、項を合計 $n=j+k$ ごとにまとめる。残るのは $\sum_j \frac{1}{j!(n-j)!}$ であり、これは姿を変えた二項係数の和である。実際、$n!$ を掛ければ $\sum_j \binom{n}{j} = 2^n$ となる。その後は、どの小問も指数級数（exponential series）の計算になる。

## 解答

### 小問 (i)

$n \geq 1$ とする。事象 $\{X+Y=n\}$ は、$j=0,1,\ldots,n$ に対する事象 $\{X=j,\ Y=n-j\}$ の互いに排反な和（disjoint union）である。これらのそれぞれにおいて $j+k=n$ であるから、

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X+Y=n) &= \sum_{j=0}^{n} \mathrm{e}^{-1}\frac{n\lambda^n}{j!\,(n-j)!} = \mathrm{e}^{-1}\frac{n\lambda^n}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} \\ &= \mathrm{e}^{-1}\frac{n\lambda^n 2^n}{n!} = \frac{\mathrm{e}^{-1}(2\lambda)^n}{(n-1)!}, \end{aligned}$$

となる。ここで、二項定理（binomial theorem）による $\sum_j \binom{n}{j} = (1+1)^n = 2^n$ と、$n \geq 1$ に対する $n/n! = 1/(n-1)!$ を用いた。

念のため述べておくと、因子 $j+k$ があるため $\mathrm{P}(X+Y=0) = \mathrm{P}(X=0,\ Y=0) = 0$ である。

### 小問 (ii)

すべての $n \geq 0$ にわたる確率 $\mathrm{P}(X+Y=n)$ の和は 1 でなければならない。$n=0$ の項は 0 であるから、

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1}(2\lambda)^n}{(n-1)!} = \mathrm{e}^{-1}(2\lambda) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2\lambda)^m}{m!} = \mathrm{e}^{-1}\, 2\lambda\, \mathrm{e}^{2\lambda},$$

となる。ここで $m = n-1$ とおき、指数級数 $\sum_m t^m/m! = \mathrm{e}^t$ を用いた。よって、求めるとおり $2\lambda\, \mathrm{e}^{2\lambda-1} = 1$ である。

### 小問 (iii)

$g(x) = 2x\, \mathrm{e}^{2x-1}$ とおく。積の微分法（product rule）により、

$$g'(x) = 2\mathrm{e}^{2x-1} + 4x\, \mathrm{e}^{2x-1} = 2(1+2x)\, \mathrm{e}^{2x-1}.$$

$x > 0$ のとき $1+2x$ と $\mathrm{e}^{2x-1}$ はともに正であるから、$g'(x) > 0$ であり、$g$ は $x > 0$ で狭義単調増加（strictly increasing）である。

**考えてみよう** なぜ「増加する」ことから「解は高々 1 つ」が導かれるのか？

$0 < x_1 < x_2$ ならば $g(x_1) < g(x_2)$ であるから、$g$ が異なる 2 点で値 1 をとることはない。$\lambda > 0$ であるから、(ii) で得た方程式 $g(\lambda) = 1$ の解は高々 1 つである。

そこで、指数を 0 にする自然な候補 $x = \frac{1}{2}$ を試すと、$g(\frac{1}{2}) = 1 \cdot \mathrm{e}^0 = 1$ となる。したがって $\frac{1}{2}$ は解であり、一意性によりこれが唯一の解である：

$$\lambda = \tfrac{1}{2}.$$

この値のもとで、小問 (i) の結果は $n \geq 1$ に対して $\mathrm{P}(X+Y=n) = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{(n-1)!}$ となる。

### 小問 (iv)

$X+Y$ は $n \geq 1$ の値のみをとり、その確率は先ほど求めたとおりであるから、

$$\mathrm{E}\left(2^{X+Y}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{\mathrm{e}^{-1}}{(n-1)!} = 2\mathrm{e}^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{m!} = 2\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^2 = 2\mathrm{e},$$

となる。ここでも $m = n-1$ とおき、指数級数を用いた（この級数は収束するので、期待値（expectation）は有限である）。

## 検算

- $\lambda = \frac{1}{2}$ のとき、(i) の式は $X + Y - 1$ が平均 1 のポアソン分布（Poisson distribution）に従うことを示している。その確率 $\mathrm{e}^{-1}/m!$ の和は確かに 1 であり、(ii) と整合する。
- $j + k < 60$ の範囲で同時確率を数値的に足し合わせると合計は 1.000000 となり、$2^{j+k}\,\mathrm{P}(X = j, Y = k)$ を足し合わせると 5.436564 となって、$2\mathrm{e} \approx 5.436564$ と一致する。
- (iv) の簡単な妥当性確認：$N \sim \mathrm{Po}(1)$ として $2^{X+Y} = 2 \cdot 2^N$ であり、ポアソン分布に従う確率変数では $\mathrm{E}(s^N) = \mathrm{e}^{s-1}$ であるから、答えは $2\mathrm{e}^1$ となる。

## よくある間違い

- $n/n! = 1/(n-1)!$ を忘れ、(ii) の級数の中に扱いにくい因子 $n$ が残ってしまう。
- $n = 0$ の項を 0 でないものとして扱う。因子 $j + k$ によってこの項は消え、まさにそのために和は $n = 1$ から始まる。
- (iii) で、$\lambda = \frac{1}{2}$ が解であることだけを示す。ほかに解がないことを示すには、単調性（monotonicity）も必要である。

## STEP のその先へ

量 $\mathrm{E}(s^{X+Y})$ は $X + Y$ の**確率母関数**（probability generating function）であり、ここではそれを $s = 2$ で評価している。母関数は確率の和をべき級数に変換するもので、大学の最初の確率論の講義では、分布を特定したり積率（moments）を求めたりするための標準的な道具である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）には、母関数とポアソン分布についての明快な解説がある。

解答例

# STEP III 1999、第 13 問

確率・統計　・　連続な事前分布をもつベイズ推論

> **STEP III 1999、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q13

## 鍵となる考え方

ランダムさは二段階になっている。まず自分の取り分の大きさ $X$ が決まり、次に干しぶどうがどこに入るかが決まる。$X = x$ という**条件のもとで**考える（条件付け、conditioning）と、各干しぶどうはほかの干しぶどうとは独立に確率 $x$ で自分の取り分に入るので、干しぶどうの個数は二項分布（binomial distribution）に従う。そうすれば、小問 (i) は全期待値の法則（law of total expectation）であり、小問 (ii) は事前分布（prior）が連続な場合のベイズの定理（Bayes' theorem）である。

## 解答

まず $A$ を求める。確率密度関数（density）は積分すると 1 にならなければならないから、

$$\int_0^1 Ax\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad A = 2,$$

よって $X$ は $[0,1]$ 上で密度関数 $\mathrm{f}(x) = 2x$ をもつ。

自分の取り分に入る干しぶどうの個数を $N$ とする。「無作為に配置される」を自然な形でモデル化する。すなわち、各干しぶどうの位置はケーキ全体にわたって一様に分布し、ほかの干しぶどうの位置とも、自分が取るケーキの量とも独立であるとする。ケーキの割合 $x$ を取るならば、各干しぶどうはほかとは独立に確率 $x$ で自分の取り分に入るので、

$$N \mid (X = x) \sim \mathrm{B}(4, x).$$

### 小問 (i)

$X = x$ のとき、二項分布の平均は $\mathrm{E}(N \mid X = x) = 4x$ である。これを $X$ について平均すると（全期待値の法則）、

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N) &= \int_0^1 \mathrm{E}(N \mid X = x)\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 4x \cdot 2x\,\mathrm{d}x \\ &= 8\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

同じことだが、$\mathrm{E}(X) = \frac{2}{3}$ を用いて $\mathrm{E}(N) = 4\,\mathrm{E}(X)$ としてもよい。自分の取り分に入る干しぶどうの個数の期待値は $\frac{8}{3}$ である。

### 小問 (ii)

求めたいのは $\mathrm{P}(X > \frac{1}{2} \mid N = 4)$ である。$X = x$ のとき、4 個の干しぶどうがすべて自分の取り分に入る確率は $x^4$ である。

> **考えてみよう** $X$ が連続で $\mathrm{P}(X = x) = 0$ であるとき、ベイズの定理はどのように使えばよいだろうか？

ベイズの定理における和を、密度関数に関する積分に置き換える。取り分の大きさの微小区間 $[x, x + \mathrm{d}x]$ の確率は $2x\,\mathrm{d}x$ であり、その区間のもとで 4 個すべてが入る確率は $x^4$ である。これを区間全体にわたって足し合わせると、

$$\mathrm{P}(N = 4) = \int_0^1 x^4 \cdot 2x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x^5\,\mathrm{d}x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

同様に、$x > \frac{1}{2}$ である区間だけを残すと、

$$\mathrm{P}\left(X > \tfrac{1}{2} \text{ かつ} N = 4\right) = \int_{1/2}^1 2x^5\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{64}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{63}{64}.$$

したがって

$$\mathrm{P}\left(X > \tfrac{1}{2} \mid N = 4\right) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{63}{64}}{\frac{1}{3}} = \frac{63}{64}.$$

別の見方もできる。$N = 4$ のもとでの $X$ の条件付き密度関数は $x^4 \cdot 2x$ に比例するので、$[0, 1]$ 上で $6x^5$ となる。その分布関数（distribution function）は $x^6$ であり、$1 - (\frac{1}{2})^6 = \frac{63}{64}$ を得る。

## 検算

- (ii) の答えは 1 に非常に近いが、これは納得できる。干しぶどうをすべて見つけたことは、大きな一切れを取ったことの強い証拠である。事前確率 $\mathrm{P}(X > \frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ が $\frac{63}{64} \approx 0.984$ まで引き上げられたのである。

- $\frac{8}{3}$ は 0 と 4 の間にあり、しかも 2 より大きい。密度関数 $2x$ は大きな取り分のほうに偏っているので、そうなるはずである。
- 試行回数 $10^6$ のモンテカルロ・シミュレーション（Monte Carlo simulation）（$U$ を一様分布として $X = \sqrt{U}$ とおくと密度関数 $2x$ をもつので、それから 4 個の干しぶどうを配置する）では、$\mathrm{E}(N) \approx 2.667$、$\mathrm{P}(N = 4) \approx 0.333$、条件付き確率 $\approx 0.9846$ となり、$\frac{63}{64} = 0.984375$ とよく一致した。

## よくある間違い

- $A$ を求め忘れる、あるいは $A = 1$ としてしまう。すると f は密度関数ではなくなり、(i) の期待値が正しく求まらない（ただし (ii) では $A$ は約分されて消える）。
- $\mathrm{P}(X > \frac{1}{2} \mid N = 4)$ の代わりに $\mathrm{P}(N = 4 \mid X > \frac{1}{2})$ を計算してしまう。条件付けの向きが逆である。
- 積分の代わりに $(\frac{1}{2})^4$ を用いてしまう。取り分の大きさはランダムなので、ある一つの値を代入するのではなく、$x^4$ を密度関数について平均しなければならない。

## STEP のその先へ

これはベイズ推論（Bayesian inference）の縮図である。密度関数 $2x$ は未知の割合に対する**事前分布**、二項分布は**尤度**（likelihood）、$6x^5$ は**事後分布**（posterior）である。事前分布も事後分布もベータ分布（beta distribution）であり、これは二項データに対する共役事前分布（conjugate prior）の一例である。同じ計算がラプラス（Laplace）の継起の法則（rule of succession）の基礎にもなっている。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）は、ベータ・二項分布の話や連続確率変数による条件付けをたいへんわかりやすく扱っている。

解答例

# STEP III 1999、第 14 問

確率・統計 ・ 条件付けによる期待値

**STEP III 1999、問 14**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/99-s3-q14

## 鍵となる考え方

H1 では賞金は最初の成功がいつ起こるかだけで決まるので、期待値（expectation）は有限の等差・等比型の和（arithmetico-geometric sum）$\sum r\,p\,q^{r-1}$ となる。このような和を求める定番の方法は、和から和の $q$ 倍を引くことである。H2 では手番の回数 $N$ で条件付け（conditioning）を行い、H1 の答えをポアソン分布（Poisson distribution）について平均する。そのために必要なのはポアソン分布に関する和 $\sum \lambda^n x^n/n!$ と $\sum n\lambda^n x^n/n!$ だけであり、どちらも指数関数の級数（exponential series）から得られる。

## 解答

### ゲーム H1

彼女の賞金を $W$（ポンド）とする。各手番は独立であり、それぞれ確率 $p$ で成功する。最初の成功が手番 $r$ で起こるのは、最初の $r-1$ 回の手番がすべて失敗し、手番 $r$ が成功するとき、かつそのときに限るので、

$$\mathrm{P}(W=r) = q^{r-1}p \qquad (1 \le r \le n),$$

であり、それ以外の場合は $W=0$ で、これは期待値に何も寄与しない。よって

$$\mathrm{E}(W) = p\,S, \qquad \text{ただし} S = \sum_{r=1}^{n} r\,q^{r-1} = 1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1}.$$

$q$ を掛けて引き、$q$ の同じ累乗をそろえると、

$$\begin{aligned} S - qS &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} - nq^n \\ &= \frac{1-q^n}{1-q} - nq^n, \end{aligned}$$

となる。ここで等比級数（geometric series）の和の公式を用いたが、$q \neq 1$ であるからこれは正当である。$1-q=p$ であるから $S=\dfrac{1-q^n}{p^2}-\dfrac{nq^n}{p}$ を得て、したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(W)=pS&=\frac{1-q^n-npq^n}{p}=\frac{1-q^n-n(1-q)q^n}{p}\\&=p^{-1}\left[1+nq^{n+1}-(n+1)q^n\right],\end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。

### ゲーム H2

許される手番の回数を $N\sim\mathrm{Po}(\lambda)$ とすると、$\mathrm{P}(N=n)=\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n/n!$ である。

$$g(n)=p^{-1}\left[1+nq^{n+1}-(n+1)q^n\right].$$

とおく。$N=n\geq 1$ のとき、彼女は手番 $n$ 回の H1 を行うので、賞金の期待値は $g(n)$ である。$N=0$ のときは何も得られない。全期待値の法則（law of total expectation）により（$N$ で条件付けて）、

$$\mathrm{E}(W)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}(N=n)\,g(n).$$

> **考えてみよう** $g(n)$ の三つの部分は、$n=0$ から始まる完全なポアソン分布の和として扱うほうが簡単になるであろう。和を $n=0$ から始めてよいだろうか？

よい。$g(0)=p^{-1}[1+0-1]=0$ であり、これは $N=0$ のとき賞金がゼロであることと一致する。したがって

$$\mathrm{E}(W)=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\left[1+nq^{n+1}-nq^n-q^n\right].$$

第 1 項の和は 1 である。確率の総和は 1 だからである。残りの項については、すべての実数 $x$ に対して成り立つ次の二つの級数が必要である。

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda x)^n}{n!}&=\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x},\\\sum_{n=0}^{\infty}n\,\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda x)^n}{n!}&=\lambda x\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}=\lambda x\,\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x}.\end{aligned}$$

$x=q$ とおき、$\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda q}=\mathrm{e}^{-\lambda(1-q)}=\mathrm{e}^{-\lambda p}$ に注意する。すると

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\,q^n=\mathrm{e}^{-\lambda p},\qquad\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\,nq^n=\lambda q\,\mathrm{e}^{-\lambda p}.$$

項 $nq^{n+1}$ は $nq^n$ の $q$ 倍であるから、その寄与は $\lambda q^2 \mathrm{e}^{-\lambda p}$ である。以上をまとめると、

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(W) &= \frac{1}{p}\left[1 + \lambda q^2 \mathrm{e}^{-\lambda p} - \lambda q\,\mathrm{e}^{-\lambda p} - \mathrm{e}^{-\lambda p}\right] \\ &= \frac{1}{p}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda p}\right) + \frac{\lambda q(q-1)}{p}\,\mathrm{e}^{-\lambda p} \\ &= \frac{1}{p}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda p}\right) - \lambda q\,\mathrm{e}^{-\lambda p},\end{aligned}$$

となる。最後の段階では $q - 1 = -p$ を用いた。これが求める式（単位はポンド）である。

## 検算

- H1 で $n = 1$ のとき、公式は $p^{-1}[1 + q^2 - 2q] = p^{-1}(1-q)^2 = p$ を与える。彼女は確率 $p$ で £1 を得るのだから、これは正しい。
- H1 で $n \to \infty$ とすると $q^n \to 0$ かつ $nq^n \to 0$ であるから、期待値は幾何分布（geometric distribution）の平均 $1/p$ に近づく。同様に、H2 も $\lambda \to \infty$ のとき $1/p$ に近づく。
- $\lambda$ が小さいとき、指数関数を展開すると $\lambda - \frac{1}{2}\lambda^2 p - \lambda q + O(\lambda^2) = \lambda p + O(\lambda^2)$ となる。これは納得できる。彼女はほとんどの場合、手番が 0 回か 1 回であり、$\mathrm{P}(N = 1) \approx \lambda$ だからである。
- 数値的には、$n \le 14$ について H1 の公式は直接計算した和と（分数を用いて）完全に一致した。H2 の公式は打ち切ったポアソン分布の和と一致し、$\lambda = 2$、$p = 0.4$ として $4 \times 10^5$ 回のゲームをシミュレーションしたところ 0.836 となり、公式の値 0.837 とよく合った。

## よくある間違い

- $S - qS$ の最後の項を間違える。和 $S$ は $nq^{n-1}$ で終わるので、$qS$ を引くと $-nq^n$ が残る。
- $\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda q}$ が $\mathrm{e}^{-\lambda p}$ に簡約されることを見落とし、式変形の中で迷子になる。

## STEP のその先へ

H2 で用いた和 $\sum \mathrm{P}(N = n)\,x^n$ は**確率母関数**（probability generating function）$G_N(x) = \mathrm{E}(x^N)$ の値であり、$\sum n\,\mathrm{P}(N = n)\,x^n = xG'_N(x)$ が成り立つ。ポアソン分布に従う確率

変数では $G_N(x) = \mathrm{e}^{\lambda(x-1)}$ である。母関数は、試行回数が確率的に決まる場合の条件付けとともに、大学 1 年次の確率論の中心的な道具であり、たとえば確率変数の個数が確率的な和（random sum）や分枝過程（branching process）の研究で用いられる。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、その両方をわかりやすく扱っている。

# Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

**1999 年解答例.** 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

**beyondstep.keithmcnulty.org**

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.