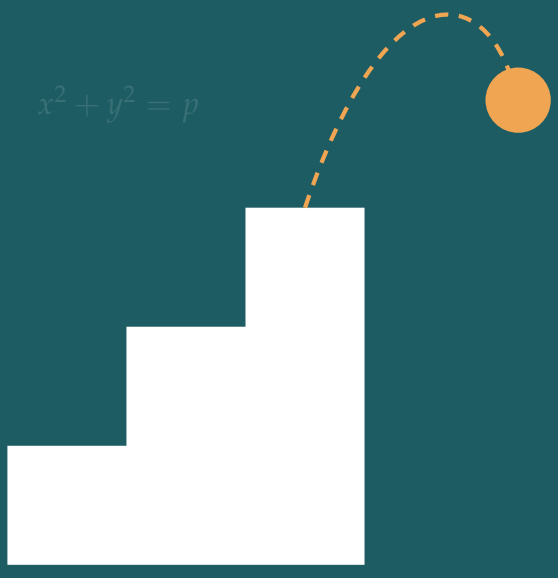
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

1998 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

1998 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

1998 年解答例

1998 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 42 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 数字のパターンの数え上げ 純粋数学 . . . 3
Q2 置換積分 純粋数学 . . . 6
Q3 真偽を判定する証明 純粋数学 . . . 9
Q4 制約付き最適化 純粋数学 . . . 13
Q5 複素数と回転 純粋数学 . . . 17
Q6 三角関数の漸化式 純粋数学 . . . 20
Q7 等比級数 純粋数学 . . . 23
Q8 2 階の微分方程式 純粋数学 . . . 26
Q9 振り子の衝突 力学 . . . 29
Q10 放物運動 力学 . . . 33
Q11 滑車にかけた連結質点 力学 . . . 36
Q12 数え上げと独立性 確率・統計 . . . 40
Q13 復元抽出 確率・統計 . . . 44
Q14 幾何的確率 確率・統計 . . . 47

STEP II

Q1 ディオファントス方程式と偶奇性 純粋数学 . . . 51
Q2 二項級数による近似 純粋数学 . . . 54
Q3 望遠鏡型級数 純粋数学 . . . 57
Q4 部分積分 純粋数学 . . . 60
Q5 複素数の三角不等式 純粋数学 . . . 63
Q6 サイクロイドと法線 純粋数学 . . . 67
Q7 導関数による不等式 純粋数学 . . . 71
Q8 ベクトルと図形 純粋数学 . . . 75

Q9 骨組構造の静力学 力学 79
Q10 動く楔上の質点 力学 83
Q11 放物運動 力学 88
Q12 ベイズの定理 確率・統計 92
Q13 指数分布 確率・統計 95
Q14 二項分布とポアソン分布の期待値 確率・統計 99

STEP III

Q1 曲線の概形 純粋数学 102
Q2 ベータ積分の漸化式 純粋数学 106
Q3 線形漸化式 純粋数学 109
Q4 正葉曲線 純粋数学 113
Q5 行列の指数関数 純粋数学 117
Q6 多面体の体積 純粋数学 121
Q7 曲線の概形と積分 純粋数学 125
Q8 ベクトルと球面 純粋数学 129
Q9 慣性モーメント 力学 133
Q10 斜め衝突 力学 137
Q11 大振幅の振り子 力学 141
Q12 ネットワークの信頼性 確率・統計 145
Q13 最尤推定 確率・統計 149
Q14 不偏推定量 確率・統計 153

解答例

STEP I 1998、第 1 問

純粋数学 ・ 数字のパターンの数え上げ

> **STEP I 1998、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q1

鍵となる考え方

数を書き並べようとしてはいけない。代わりに、まず**どの** 2 つの数字が現れるかを選び、次にその両方を使う 5 桁の文字列を数える。唯一の落とし穴は、数が 0 で始まることはできないという点である。そこで、2 つの数字の一方が 0 であるかどうかで場合分け（case analysis）して数える。また、範囲の両端を確認することも忘れてはならない。

解答

10 000 から 99 999 までの整数はどれもちょうど 5 桁であり、先頭の数字は 0 でない。範囲内に残る整数は 100 000 の 1 つだけであり、これは最後に扱う。

5 桁の数がちょうど 2 種類の数字を含むのは、すべての桁の数字がある組 $\{a,b\}$ から取られ、かつ a と b の両方が実際に現れるときである。そのような数はそれぞれ自分の組を一意に定めるので、組ごとに数えて足し合わせればよい。

場合 1：どちらの数字も 0 でない

$1,2,\ldots,9$ から異なる 2 つの数字を選ぶ方法は $\binom{9}{2} = 36$ 通り（組合せ（combination））である。組 $\{a,b\}$ を固定すると、5 つの位置はそれぞれ a か b のどちらかであり、$2^5 = 32$ 個の文字列ができる。このうち 2 つ（$aaaaa$ と $bbbbb$）は 1 種類の数字しか使わないので、両方を使うものは $32 - 2 = 30$ 個である。これらはどれも 0 で始まらないので、30 個すべてが正真正銘の 5 桁の数である。この場合の個数は

$$36 \times 30 = 1080.$$

考えてみよう 組 $\{0, a\}$ をまったく同じ方法で扱えないのはなぜか。

0 と a から作られる 32 個の文字列のうち半分は 0 で始まり、それらは 5 桁の数ではないからである（たとえば $0a0aa$ は実際には 4 桁の数である）。したがって、数える前に先頭の数字を固定しなければならない。

場合 2：一方の数字が 0 である

もう一方の数字 a は $1, \ldots, 9$ のいずれでもよく、9 通りの選び方がある。先頭の数字は 0 にできないので、a でなければならない。残りの 4 つの位置はそれぞれ 0 か a のどちらかであり、$2^4 = 16$ 通りの可能性がある。このうちちょうど 1 つ、$aaaa$ は 0 を含まず、異なる数字が 1 種類しか残らない。したがって各 a について $16 - 1 = 15$ 個の数があり、この場合の個数は

$$9 \times 15 = 135.$$

端点 100 000

範囲は両端を含み、100 000 は数字 1 と 0 だけを使うので、これも数に入る。

合計

$$1080 + 135 + 1 = 1216.$$

よって、そのような整数は **1216** 個である。

検算

- 10 000 から 100 000 までのすべての整数を調べ、桁の数字の集合の要素数が 2 であるものを数えるコンピュータによる検証では 1216 が得られる。内訳も確認できる。0 を含まないものが 1080 個、含むものが 135 個、それに 100 000 である。
- 手で書き出せる小さな場合に同じ方法を試してみよう。2 桁の数に対しては $\binom{9}{2}(2^2 - 2) + 9(2^1 - 1) = 72 + 9 = 81$ となる。これは直接数えた結果と一致する。2 桁の数は 90 個あり、そこからゾロ目（repdigit）$11, 22, \ldots, 99$ の 9 個を引けばよい。

よくある間違い

- 100 000 を忘れて 1215 とする。「両端を含む」範囲では、必ず端点を確認すること。
- $\binom{10}{2} \times 30 = 1350$ と数える。これには 0 で始まる数が含まれてしまう。

- 場合 2 で 1 ではなく 2 を引く。先頭の数字を a と固定した時点で、すべてが 0 の文字列はすでに除外されている。

STEP のその先へ

$\{a, b\}$ 上のすべての文字列から 1 種類の数字だけの文字列を引くという技法は、包除原理（inclusion–exclusion principle）の最も単純な場合である。一般に、与えられた k 個の記号を**すべて**使う長さ n の文字列の個数は $\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n$ であり、これは第 2 種スターリング数（Stirling number of the second kind）の $k!$ 倍である。このような個数は組合せ論や確率論のいたるところに現れ、たとえばクーポン収集問題（coupon collector problem）にも登場する。この種の数え上げをさらに学びたければ、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）や、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）にある組合せ論の問題に挑戦するとよい。

解答例

STEP I 1998、第 2 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP I 1998、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q2

鍵となる考え方

扱いにくい式 $(x^2+1)^{1/2}+x$ が f の中に入っているので、この式全体を t とおくのが自然な一手である。意外なのは、この置換（substitution）が容易に逆に解けることである。根号を一方の辺に分離してから両辺を 2 乗すると x^2 の項が消え、x が t の簡単な関数として表される。最初の恒等式（identity）が得られれば、2 つ目の積分は $\mathrm{f}(t)=t^{-3}$ とした特別な場合にすぎない。

解答

変数変換

次のようにおく。

$$t=(x^2+1)^{1/2}+x.$$

x が 0 から ∞ まで動くとき、$(x^2+1)^{1/2}$ と x はどちらも増加するので、t は狭義単調増加（strictly increasing）であり、$x=0$ のとき $t=1$ から始まり、$x\to\infty$ のとき ∞ に発散する。したがって、この置換は $[0,\infty)$ から $[1,\infty)$ への一対一（one-to-one）の写像であり、新しい積分区間の端は 1 と ∞ である。

> ? **考えてみよう** x を t で表し直すにはどうすればよいか。

平方根を分離して 2 乗する。$t-x=(x^2+1)^{1/2}$ より

$$t^2-2tx+x^2=x^2+1 \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{t^2-1}{2t}=\frac{1}{2}\left(t-t^{-1}\right),$$

が得られる。ここで $t\geq 1$ なので t で割ってよい。（2 乗すると余分な解が紛れ込むこ

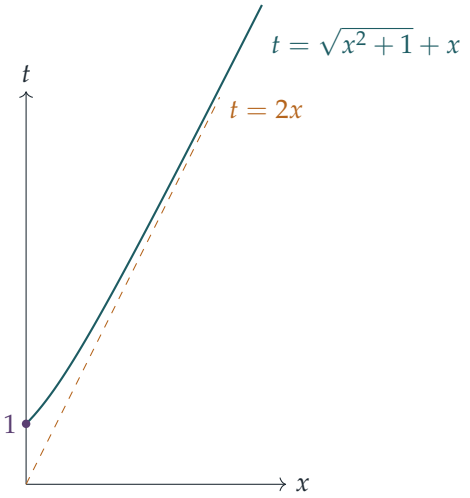
とがあるが、ここでは $t - x = (t + t^{-1})/2 > 0$ なので、2 乗した根号の値は確かに正である。）微分すると

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}(1 + t^{-2}).$$

よって

$$\int_0^\infty \mathrm{f}\big((x^2+1)^{1/2} + x\big)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \mathrm{f}(t) \cdot \frac{1}{2}(1+t^{-2})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^\infty (1+t^{-2})\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t,$$

となり、これが求める恒等式である。



この図から、t は 1 から着実に増加しており、値域のどの部分も 2 度覆われることはないとわかる。

最後の小問

$\mathrm{f}(t) = t^{-3}$ とする。恒等式の左辺はちょうど求めたい積分になるので

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \big((x^2+1)^{1/2} + x\big)^{-3}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_1^\infty \big(t^{-3} + t^{-5}\big)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\Big[-\tfrac{1}{2}t^{-2} - \tfrac{1}{4}t^{-4}\Big]_1^\infty \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\Big) = \frac{3}{8},\end{aligned}$$

となり、題意が示された。t^{-3} と t^{-5} は $[1,\infty)$ 上で積分可能なので、どちらの広義積分（improper integral）も収束（convergence）する。

考えてみよう　この置換をもっとすっきりと理解する方法はあるだろうか。

ある。$x = \sinh\theta$ とおけばよい。すると $(x^2+1)^{1/2} = \cosh\theta$ なので $t = \cosh\theta + \sinh\theta = \mathrm{e}^{\theta}$ となる。先ほどの式 $x = \frac{1}{2}(t - t^{-1})$ は、実は $\sinh\theta = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\theta} - \mathrm{e}^{-\theta})$ が姿を変えたものにほかならない。

検算

- $x = 0$ のとき $t = 1$ であり、$x = \frac{1}{2}(1-1) = 0$ となるので、逆の式と一致する。$x = \frac{3}{4}$ のとき $t = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 2$ であり、$\frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ となる。
- x が大きいとき $t \approx 2x$ なので、最後の小問の被積分関数（integrand）は $(2x)^{-3}$ のように振る舞い、積分は確かに収束する。
- 数値的には、もとの積分にシンプソン（Simpson）の公式を適用すると 0.375000 となり、$\frac{3}{8}$ と一致する。最初の小問の恒等式も、$\mathrm{f}(t) = \mathrm{e}^{-t}$（両辺とも 0.258187）と $\mathrm{f}(t) = 1/(1+t^4)$（両辺とも 0.188387）について数値的に確かめられる。

よくある間違い

- 積分区間の端を変え忘れること。下端は $t = 0$ ではなく $t = 1$ になる。
- $\mathrm{d}t$ を x で表してから x を消去するのに苦労すること。先に x を t で表し、それを微分するほうがはるかに簡単である。

STEP のその先へ

この恒等式は単調（monotonic）な写像による変数変換についての主張であり、解析学では、広義積分の場合には $[0, X]$ 上の積分の極限をとることでこれが正当化される。この置換そのものは sinh の逆関数（inverse function）である。すなわち $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \operatorname{arsinh} x$ であり、このために t が $\mathrm{e}^{\operatorname{arsinh} x}$ となるのである。広義積分と置換積分の厳密な扱いについては、Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）を参照するとよい。

解答例

STEP I 1998、第 3 問

純粋数学 ・ 真偽を判定する証明

> **STEP I 1998、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q3

鍵となる考え方

小問ごとに必要な道具が異なり、まず各主張が真か偽かを見極めることが最初の仕事である。「真」であれば、すべての場合を尽くす証明が必要である。「偽」であれば、反例（counterexample）を一つ挙げるか、条件を満たす対象が存在し得ないことを示す議論を与えればよい。(i) は対数（logarithm）をとることで、(ii) はうまく選んだ θ の値一つで、(iii) は θ が大きいときの多項式（polynomial）の振る舞いで、(iv) は完全平方（perfect square）で決着がつく。

解答

小問 (i)：真

$a > 0$ であるから、$a = \mathrm{e}^{\ln a}$ と書ける。すると

$$a^{\ln b} = \left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^{\ln b} = \mathrm{e}^{\ln a \,\ln b},$$
$$b^{\ln a} = \left(\mathrm{e}^{\ln b}\right)^{\ln a} = \mathrm{e}^{\ln b \,\ln a}.$$

乗法は可換であるから指数は等しく、したがってすべての $a, b > 0$ に対して $a^{\ln b} = b^{\ln a}$ が成り立つ。（同値な言い方をすれば、両辺はともに正で、対数がどちらも $\ln a \ln b$ に等しい。）

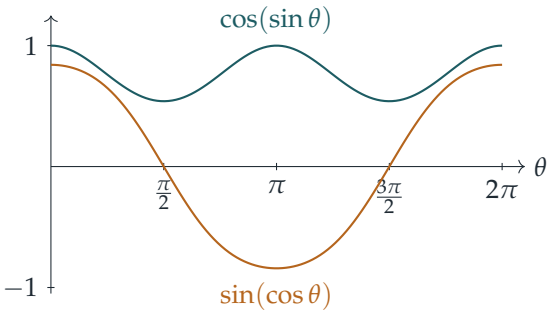
小問 (ii)：偽

反例は一つで十分である。$\theta = 0$ とすると

$$\cos(\sin 0) = \cos 0 = 1, \qquad \sin(\cos 0) = \sin 1.$$

$0 < 1 < \frac{\pi}{2}$ であるから $0 < \sin 1 < 1$（実際 $\sin 1 \approx 0.841$）であり、両辺は一致しない。よってこの主張は偽である。

実は両辺は**決して**等しくならない。グラフを見ると、$\cos(\sin\theta)$ は常に $\sin(\cos\theta)$ より上にある。



これを証明するには（問題を解くうえでは不要であるが）、$\sin(\cos\theta) \le \sin|\cos\theta| = \cos\left(\frac{\pi}{2} - |\cos\theta|\right)$ および $\cos(\sin\theta) = \cos|\sin\theta|$ に注目する。$|\sin\theta|$ と $\frac{\pi}{2} - |\cos\theta|$ はともに余弦が減少する区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ に属し、さらに $|\sin\theta| + |\cos\theta| \le \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$ であるから $|\sin\theta| < \frac{\pi}{2} - |\cos\theta|$ である。したがって、すべての θ に対して $\cos(\sin\theta) > \sin(\cos\theta)$ が成り立つ。

小問 (iii)：偽

P を任意の多項式とする。ある実数 θ に対して $|\mathrm{P}(\theta) - \cos\theta| > 10^{-6}$ となることを、二つの場合に分けて示す。

P が定数の場合。 $\mathrm{P}(\theta) = c$ とする。$\cos\theta$ がそれぞれ 1 と -1 になる $\theta = 0$ と $\theta = \pi$ を用いると、三角不等式（triangle inequality）より

$$|c-1| + |c+1| \ge |(c+1) - (c-1)| = 2,$$

となる。よって $|c-1|, |c+1|$ の少なくとも一方は 1 以上であり、これは 10^{-6} よりはるかに大きい。

P が $n \ge 1$ 次の場合。 $a_n \ne 0$ として $\mathrm{P}(\theta) = a_n\theta^n + \cdots + a_0$ とする。$\theta \ne 0$ のとき

$$\mathrm{P}(\theta) = a_n\theta^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n\theta} + \cdots + \frac{a_0}{a_n\theta^n}\right),$$

であり、$\theta \to \infty$ のとき括弧の中は 1 に近づき、一方で $|a_n\theta^n| \to \infty$ である。よって $|\mathrm{P}(\theta)| \to \infty$ となり、$|\mathrm{P}(\theta)| > 2$ を満たす θ を選ぶことができる。その θ に対しては、$|\cos\theta| \le 1$ より

$$|\mathrm{P}(\theta) - \cos\theta| \ge |\mathrm{P}(\theta)| - |\cos\theta| > 2 - 1 = 1 > 10^{-6}.$$

いずれの場合も不等式はどこかで成り立たなくなるので、そのような多項式は存在しない。

> **考えてみよう**　しかし、$\cos\theta$ のマクローリン級数（Maclaurin series）は多項式のような和であり、いくらでも近づけることができる。それを途中で打ち切ったものではなぜうまくいかないのだろうか。

マクローリン級数を途中で打ち切ったものは、十分多くの項をとれば、固定された任意の有界区間上では確かに $\cos\theta$ との差が 10^{-6} 以内に**収まる**。しかしこの主張が求めているのは、**すべての実数** θ に対して通用する一つの多項式である。定数でない多項式はいずれ $\pm\infty$ へ発散してしまうのに対し、$\cos\theta$ は $[-1,1]$ に閉じ込められたままである。主張を偽にしているのは「すべての実数 θ に対して」という一句なのである。

小問 (iv)：真

$x>0$ のとき

$$x^4+3+x^{-4}-5=x^4-2+x^{-4}=\left(x^2-x^{-2}\right)^2\geq 0,$$

である。実数の平方は非負だからである。したがって、すべての $x>0$ に対して $x^4+3+x^{-4}\geq 5$ が成り立ち、等号が成り立つのは $x^2=x^{-2}$、すなわち $x=1$ のときに限る。（別解として、相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）より $x^4+x^{-4}\geq 2\sqrt{x^4\cdot x^{-4}}=2$ が得られる。）

まとめ：(i) 真、(ii) 偽、(iii) 偽、(iv) 真。

検算

- (i)：$a=2, b=3$ のとき、$2^{\ln 3}$ と $3^{\ln 2}$ はともに約 2.141 である。無作為に選んだ正の a,b についても、相対誤差約 10^{-15} の範囲で一致した。
- (ii)：θ を一周期にわたって標本抽出したところ、$\cos(\sin\theta)-\sin(\cos\theta)$ は約 0.107 を下回ることがなかった。
- (iii)：cos の 20 次のマクローリン多項式は $\theta=1$ では正確であるが、$\theta=10$ では約 7.5、$\theta=30$ では約 10^{11} ずれる。
- (iv)：細かい格子点上で調べると、x^4+3+x^{-4} の最小値は $x=1$ における 5 である。

よくある間違い

- いくつかの値を確かめただけで偽の主張を「証明」してしまったり、式変形の誤りによって真の主張を「反証」してしまったりする。書き始める前に、各小問が真か偽かを見極めること。
- (iii) で定数多項式を忘れる。「無限大に発散する」という議論には次数が 1 以上であることが必要である。
- (iii) でテイラー級数（Taylor series）を、どこでも通用する多項式として持ち出す。実際には通用しない。

STEP のその先へ

小問 (iii) は、ワイエルシュトラス（Weierstrass）の近似定理（Weierstrass approximation theorem）と対照をなす。この定理によれば、任意の**有界閉**区間上で、すべての連続関数は多項式によって望むだけの精度で一様に近似できる。実数直線全体での一様近似が不可能なのは、まさに上で述べた増大の議論のためである。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）では、ワイエルシュトラスの定理と一様収束（uniform convergence）が論じられている。

解答例

STEP I 1998、第 4 問

純粋数学 ・ 制約付き最適化

> **STEP I 1998、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q4

鍵となる考え方

円に内接する（inscribed）長方形では対角線が直径になるので、辺 a と b はピタゴラスの定理（Pythagoras' theorem）によって結びつけられ、a^2+b^2 は一定である。すると問題はすべて、a^2+b^2 を一定に保ったときに $a+b$、a^2+b^2、a^3+b^3 がどう振る舞うかという問いに帰着する。$n=2$ の場合が分かれ目である。それより小さいときは正方形が最良であり、ちょうどその値ではすべてが同じ値をとり、それより大きいときは正方形が最下位になる。

解答

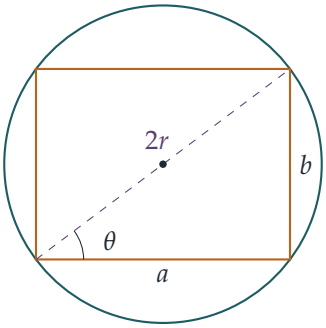
円の半径を r とし、長方形の辺を $a,b>0$ とする。長方形の各角は直角なので、直径を見込む角である（半円に対する円周角）。したがって各対角線は直径であり、

$$a^2+b^2=(2r)^2=4r^2.$$

逆に、$a^2+b^2=4r^2$ を満たす任意の $a,b>0$ に対して、頂点がすべて円周上にあるように円に収まる長方形が得られる。そこで次のようにおくと便利である。

$$a=2r\cos\theta,\qquad b=2r\sin\theta,\qquad 0<\theta<\tfrac{\pi}{2},$$

ここで θ は対角線と長さ a の辺のなす角である。



周長

周長（perimeter）は $P = 2(a+b)$ である。$(a-b)^2 \geq 0$ より $2ab \leq a^2 + b^2$ であるから、

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 2(a^2+b^2) = 8r^2,$$

であり、等号が成り立つのは $a = b$ のとき、かつそのときに限る。$a + b > 0$ なので、これより $a + b \leq 2\sqrt{2}\,r$、すなわち

$$P \leq 4\sqrt{2}\,r,$$

が得られ、値 $4\sqrt{2}\,r$ はちょうど $a = b = \sqrt{2}\,r$ のときに達成される。よって周長が最大の長方形は正方形であり、題意は示された。

$n = 2$ の場合

4 辺の 2 乗の和は

$$2(a^2+b^2) = 8r^2,$$

であり、長方形によらない。したがって内接する長方形はすべて同じ値を与える。どれかを選ぶ理由はなく、特に正方形が他より優れているわけでもない。

$n = 3$ の場合

次に $S = 2(a^3+b^3)$ を考える。各辺は直径より短いので $0 < a < 2r$ かつ $0 < b < 2r$ であり、$a^3 < 2r\,a^2$、$b^3 < 2r\,b^2$ が成り立つ。辺々加えると

$$S = 2(a^3+b^3) < 2 \cdot 2r(a^2+b^2) = 16r^3.$$

一方、$\theta \to 0$ のとき（$a \to 2r$、$b \to 0$ となる細長い長方形）、$S \to 2(2r)^3 = 16r^3$ である。したがって S はいくらでも $16r^3$ に近づけられるが、決して到達しない。つまり**S を最大にする長方形は存在しない**。$16r^3$ を達成する唯一の「図形」は、直径を 2 回なぞった退化した（degenerate）ものであり、これは長方形ではない。

考えてみよう では、正方形はどうなったのだろうか？

正方形は最良から最悪へと転じたのである。$f(\theta) = \cos^3\theta + \sin^3\theta$ とおくと $S = 16r^3 f(\theta)$ であり、

$$f'(\theta) = -3\cos^2\theta\sin\theta + 3\sin^2\theta\cos\theta = 3\sin\theta\cos\theta\,(\sin\theta - \cos\theta).$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ において因数 $\sin\theta\cos\theta$ は正であり、$\sin\theta - \cos\theta$ は $\theta < \frac{\pi}{4}$ で負、$\theta > \frac{\pi}{4}$ で正である。よって f は減少したのち増加し、正方形（$\theta = \frac{\pi}{4}$）が**最小値**

$$S_{\min} = 16r^3\left(2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 8\sqrt{2}\,r^3.$$

を与える。まとめると、$n = 3$ のとき S の値は区間 $[8\sqrt{2}\,r^3,\ 16r^3)$ を埋め尽くす。正方形が最小を与え、最大を与える長方形は存在しない。

同じことはすべての $n > 2$ について起こる。$\cos\theta$ と $\sin\theta$ はともに 0 と 1 の間に厳密に収まるので、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ において $\cos^n\theta + \sin^n\theta < \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ が成り立ち、上限 $2(2r)^n$ には長方形を押しつぶすことでしか近づけない。

検算

- $r = 1.7$ として θ を $(0, \frac{\pi}{2})$ の範囲で数値的に走査した。周長は $\theta = \frac{\pi}{4}$ で最大値 $4\sqrt{2}\,r \approx 9.617$ をとる。2 乗の和は常に $8r^2 = 23.12$ である。3 乗の和は $16r^3 \approx 78.61$ 付近から正方形での $8\sqrt{2}\,r^3 \approx 55.58$ まで減少したのち再び増加し、78.61 には決して達しない。
- 簡単な確認：単位円に内接する $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ の正方形の周長は $4\sqrt{2} \approx 5.66$ であるが、1.9×0.62 の長方形（ほぼ直径）の周長は約 5.04 である。

よくある間違い

- $n = 3$ のときの最大値は「$\theta = 0$ で」$16r^3$ である、と述べてしまう。それは線分であって長方形ではないので、最大値は存在しない。そのことを明言し、厳密な不等式を正当化しなければならない。
- $n = 3$ のときに停留点（stationary point）$\theta = \frac{\pi}{4}$ を見つけ、その性質を確かめずに最大値と呼んでしまう。

STEP のその先へ

$n = 3$ の場合は、**上限**（supremum）と**最大値**（maximum）の違いに初めて触れる例である。開区間上の連続関数は上限・下限に到達するとは限らない。最大値・最小値定理（extreme value theorem）が有界閉区間を要求するのはまさにこのためである。$n = 2$ での切り替わりは、異なる p について $\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p}$ を比較するべき平均不等式（power-mean inequalities）の一例である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、上限と最大値・最小値定理を丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 1998、第 5 問

純粋数学 ・ 複素数と回転

> **STEP I 1998、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q5

鍵となる考え方

どちらの小問も、複素数（complex number）の代数に計算を任せるという発想に基づいている。小問 (i) では、正六角形（regular hexagon）のある頂点から次の頂点へ移ることは中心のまわりの 60° の回転（rotation）であり、原点のまわりの回転は絶対値（modulus）1 の複素数を掛けることにほかならない。そこで Q を基準にして考える。小問 (ii) では、複素数が実数であるのはその虚部（imaginary part）が 0 であるときに限るので、各分母を実数化（realise the denominator）し、虚部を 0 とおく。

解答

小問 (i)

中心を基準にして考える。Q から A へのベクトルは

$$A - Q = (10 + 2i) - (4 + 6i) = 6 - 4i.$$

である。正六角形の 6 つの頂点は Q を中心とする円周上に等間隔に並んでいるので、角 AQB は $360^\circ/6 = 60^\circ$ であり、QB の長さは QA の長さに等しい。**時計回り**に進むことは -60° だけ回転すること、すなわち

$$\mathrm{e}^{-i\pi/3} = \cos\tfrac{\pi}{3} - i\sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,i.$$

を掛けることである。

? **考えてみよう** なぜ A そのものではなく $A - Q$ に掛けるのだろうか？

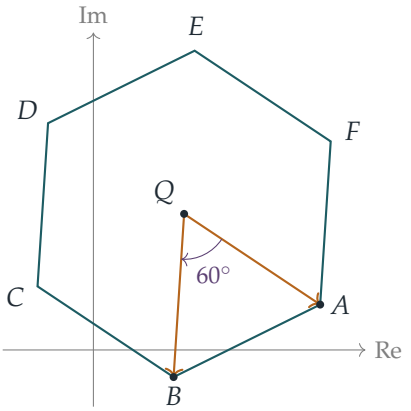
$e^{-i\pi/3}$ を掛けると**原点**のまわりに回転する。Q のまわりに回転するには、Q を原点へ移し（Q を引き）、回転してから、元へ戻す（Q を足す）。したがって

$$\begin{aligned} B - Q &= (6-4i)\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) \\ &= 3 - 3\sqrt{3}\,i - 2i + 2\sqrt{3}\,i^2 \\ &= (3-2\sqrt{3}) - (2+3\sqrt{3})\,i, \end{aligned}$$

であり、$Q = 4+6i$ を加えると

$$\boxed{B = (7-2\sqrt{3}) + (4-3\sqrt{3})\,i} \approx 3.536 - 1.196\,i.$$

を得る。



図から向きが正しいことが確かめられる。Q の右下にある A から時計回りに進むと、次の頂点は Q のほぼ真下にあり、求めた B もそうなっている。

小問 (ii)

$(1+ki)(1-ki) = 1+k^2$ を用いて、分母と分子に共役複素数（conjugate）を掛け、各分母を実数化する：

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}, \qquad \frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{5}, \qquad \frac{1}{1+3i} = \frac{1-3i}{10}.$$

a、b、c は実数なので、式全体の虚部は

$$-\frac{a}{2} - \frac{2b}{5} - \frac{3c}{10} = -\frac{5a+4b+3c}{10}.$$

である。式が実数となるのはこの虚部が 0 のときに限るので、求める条件は

$$\boxed{5a+4b+3c=0}.$$

である。（$-5a-4b-3c=0$ のように、0 でない整数倍をしたものも同じ条件である。）実際、虚部を正確に求めたので、この条件は十分条件（sufficient condition）であり、かつ必要条件（necessary condition）でもある。

検算

- 小問 (i) において、$|A-Q| = |6-4i| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ である。求めた B について $|B-Q|^2 = (3-2\sqrt{3})^2 + (2+3\sqrt{3})^2 = 21 - 12\sqrt{3} + 31 + 12\sqrt{3} = 52$ となるので、B は正しい円周上にある。また数値的にも $|B-A| \approx 7.211 = |A-Q|$ であり、QAB が正三角形（equilateral triangle）であることと合っている。
- 小問 (ii) において、$a = 3$、$b = 0$、$c = -5$（$5a + 4b + 3c = 0$ を満たす）を試すと $\frac{3(1-i)}{2} - \frac{5(1-3i)}{10} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) i = 1$ となり、確かに実数である。
- $c = -(5a+4b)/3$ を満たす無作為な 3 つ組 10 000 個について数値的に確かめたところ、虚部はすべて 0 であった。

よくある間違い

- 反時計回りに回転する（$e^{i\pi/3}$ を掛ける）と $(7 + 2\sqrt{3}) + (4 + 3\sqrt{3})i$ となるが、これは頂点 F であって B ではない。
- A を Q のまわりではなく原点のまわりに回転してしまう。
- 小問 (ii) で**実部**を 0 とおいてしまう。あるいは、このように虚部を読み取るには a、b、c が実数でなければならないことを忘れる。

STEP のその先へ

$e^{i\theta}$ を掛けることは回転であり、写像 $z \mapsto \alpha z + \beta$ は回転と拡大を行った後に平行移動（translation）を施すものである。これらは、複素解析（complex analysis）の最初の講義で学ぶメビウス変換（Möbius transformation）の最も簡単な例である。原点を中心とする正多角形の頂点が 1 の累乗根（roots of unity）の z_0 倍であるという事実は、代数学と幾何学の多くの話題の出発点となる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、複素数の乗法をこのように幾何学的に捉える見方を見事に展開している。

解答例

STEP I 1998、第 6 問

純粋数学 ・ 三角関数の漸化式

> **STEP I 1998、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q6

鍵となる考え方

漸化式（recurrence）の各段階では、ある量と余弦（cosine）の平均をとっている。半角の公式（half-angle identity）$\frac{1}{2}(1+\cos\theta) = \cos^2\frac{\theta}{2}$ を使うと、その平均は完全平方になる。そして b_{n+1} の式にある平方根が、その平方を再び取り除く。各項が直前の項を因数として含んでいることに気づけば、一般の規則は容易に推測でき、その確認は数学的帰納法（induction）の帰納段階そのものである。

解答

以下では常に $0 < x < \frac{\pi}{2}$ とする。したがって $k \geq 1$ のとき、どの角 $x/2^k$ も $(0, \frac{\pi}{4})$ に含まれ、その余弦は正である。b_{n+1} の定義における平方根は正の方をとるものとする。

a_2 と b_2 を求める

$1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ を用いると、

$$a_2 = \tfrac{1}{2}(\cos x + 1) = \cos^2\frac{x}{2}, \qquad b_2 = \left(a_2 b_1\right)^{1/2} = \left(\cos^2\frac{x}{2}\right)^{1/2} = \cos\frac{x}{2},$$

となる。最後の等号では $\cos\frac{x}{2} > 0$ を用いた。

a_3 と b_3 を求める

共通因数 $\cos\frac{x}{2}$ をくくり出し、今度は $\theta = \frac{x}{2}$ として再び半角の公式を用いると、

$$a_3 = \tfrac{1}{2}\left(\cos^2\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = \cos\frac{x}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right) = \cos\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{4}.$$

次に、

$$b_3 = (a_3 b_2)^{1/2} = \left(\cos^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{4}\right)^{1/2} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4},$$

である。ここで、二つの余弦がともに正であることを用いた。これらが求める二つの式である。

一般の規則

ここまでの項を比べると、

$$b_2 = \cos\frac{x}{2}, \quad b_3 = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}, \qquad a_2 = b_2\cos\frac{x}{2}, \quad a_3 = b_3\cos\frac{x}{4}.$$

b は一つ進むごとに、角を半分にした余弦が一つ増える。また各 a は、対応する b にその最後の余弦をもう一度掛けたものである。そこで、$n \geq 2$ に対して次のように推測する。

$$b_n = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}} = \prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{x}{2^k},$$

$$a_n = b_n\cos\frac{x}{2^{n-1}} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-2}}\cos^2\frac{x}{2^{n-1}}.$$

考えてみよう 推測した式が漸化式を満たすことを確かめるには、正確には何を確認すればよいだろうか？

確認すべきことは二つである。推測が初期値と一致すること、そして a_n と b_n について式が成り立つならば、漸化式から a_{n+1} と b_{n+1} についての式が得られることである。この二つを合わせると、数学的帰納法により、すべての $n \geq 2$ について式が成り立つことがわかる。

初期値。 $n = 2$ のとき、推測した式は $b_2 = \cos\frac{x}{2}$ および $a_2 = \cos^2\frac{x}{2}$ を与え、これは上で求めたものと一致する。

帰納段階。 ある $n \geq 2$ について式が成り立つと仮定する。$\theta = x/2^{n-1}$ とおくと、$x/2^n = \theta/2$ である。このとき

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + b_n) = b_n \cdot \tfrac{1}{2}\left(1 + \cos\theta\right) = b_n\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

b_{n+1} についての推測は $b_n\cos\frac{\theta}{2}$（角 $x/2^n$ の余弦が一つ増えたもの）であるから、これは $a_{n+1} = b_{n+1}\cos\frac{x}{2^n}$ を意味し、a_{n+1} について推測した形になっている。次に、

$$b_{n+1} = (a_{n+1}b_n)^{1/2} = \left(b_n^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{1/2} = b_n\cos\frac{x}{2^n} = \prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k},$$

である。ここで正の平方根をとったが、b_n と $\cos\frac{x}{2^n}$ はともに正なので、これは正当である。これは b_{n+1} について推測した形であるから、漸化式の二つの等式はともに満たされ、すべての $n \geq 2$ について式が成り立つ。

実は、空積（empty product）を 1 と定めれば、これらの式は $b_1 = 1$ および $a_1 = \cos x$ も与えるので、$n = 1$ から成り立つ。

検算

- $x = \frac{\pi}{3}$ とする。漸化式を直接計算すると $a_3 \approx 0.808013$、$b_3 \approx 0.836516$ となり、$\cos\frac{\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{12}$ と $\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12}$ も同じ値を与える。
- $(0, \frac{\pi}{2})$ 内の無作為な 2000 個の x について、$n = 24$ まで漸化式と積の公式を比較したところ、誤差 10^{-15} 以内で一致した。
- $x \to 0$ のとき、どの余弦も 1 に近づき、a_1 と b_1 も 1 に近づく。したがってすべての項が 1 に近づき、これは当然の結果である。

よくある間違い

- $\cos\theta > 0$ である理由を述べずに $\sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta$ と書くこと。ここでは、どの角も $(0, \frac{\pi}{4})$ に含まれるので成り立つ。
- $n = 2$ と 3 から規則を推測しただけで終えてしまうこと。問題は漸化式を満たすことの確認を求めているので、帰納段階が必要である。

STEP のその先へ

b_n に $\sin\frac{x}{2^{n-1}}$ を掛け、$2\sin\phi\cos\phi = \sin 2\phi$ を繰り返し用いると、$b_n = \dfrac{\sin x}{2^{n-1}\sin(x/2^{n-1})}$ が得られる。これは $n \to \infty$ のとき $\dfrac{\sin x}{x}$ に収束（converge）する（$x = 1$ のとき、漸化式は数十回の反復で 0.841471 を与える）。$x = \frac{\pi}{2}$ とすると、$2/\pi$ に対するヴィエト（Viète）の無限積（infinite product）が得られる。この「算術平均をとってから幾何平均をとる」という手続きは、ガウス（Gauss）の算術幾何平均（arithmetic–geometric mean）の親戚であり、数列が収束することを証明し、その極限を求める最初の例としてよいものである。数列の極限についての丁寧な扱いについては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照されたい。

解答例

STEP I 1998、第 7 問

純粋数学 ・ 等比級数

> **STEP I 1998、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q7

鍵となる考え方

残高を 1 年ごとに追いかけようとしてはいけない。その代わりに、それぞれの預け入れを別々に追うのである。£a の 1 回の預け入れが銀行で k 年分の利息を受けると £ar^k に増え、その合計は等比級数（geometric series）になる。引き出しについては、同じ考え方を逆向きに使う。各引き出しは、引き出されるまで利息を生み続けてきた初期残高の一部によってまかなわれるのであり、したがって価値をある 1 つの時点で比較するのである。

解答

据え置き期間後の金額

ρ% の利息により、各年の終わりに残高は $r = 1 + \frac{\rho}{100}$ 倍になる。

預け入れの年に $1, 2, \ldots, m$ と番号をつける。第 k 年の初めに行った預け入れは、第 $k, k+1, \ldots, m$ 年の終わりに利息を受け、その回数は $m - k + 1$ 回である。よって第 m 年の終わりにその価値は ar^{m-k+1} となる。k について足し合わせると、第 m 年の終わりの残高は

$$\begin{aligned} a\left(r^m + r^{m-1} + \cdots + r\right) &= ar\left(1 + r + \cdots + r^{m-1}\right) \\ &= ar\,\frac{r^m - 1}{r - 1}, \end{aligned}$$

である。ここで等比級数の和の公式を用いた（$\rho > 0$ であるから $r \neq 1$ である）。

続く l 年間は入金も出金もないので、これはさらに l 回 r 倍される。したがって期間の

終わりの総額は

$$£a\,\frac{r^{l+1}(r^m-1)}{r-1},$$

となり、求める結果が得られた。この金額を P とおく。

引き出し

最初の引き出しは据え置き期間の直後の年の初めに行われ、それは残高が P である時点である。k 回目の引き出しの直後の残高を B_k とする。すると

$$B_1 = P - b, \qquad B_k = rB_{k-1} - b \quad (k = 2, \ldots, n),$$

が成り立つ。引き出しと引き出しの間に、お金は 1 年分の利息を受けるからである。この漸化式（recurrence）をほどいていくと、

$$\begin{aligned} B_n &= r^{n-1}P - b\left(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + r + 1\right) \\ &= r^{n-1}P - b\,\frac{r^n - 1}{r-1}. \end{aligned}$$

考えてみよう P にかかる因子が r^n ではなく r^{n-1} であるのはなぜか？

1 回目と n 回目の引き出しの間には年末が $n-1$ 回しかないので、お金が利息を受けるのは $n-1$ 回である。最後の引き出しの後に支払われる利息は関係ない。その時点で口座は空だからである。同様に、j 番目の引き出し（最後から数え、最後のものを $j = 0$ とする）は、n 回目の引き出しまでに r^j 倍される。

n 回目の引き出しの後に口座は空になるので、$B_n = 0$ である。これより

$$r^{n-1}P = b\,\frac{r^n - 1}{r-1}.$$

P を代入すると

$$a\,\frac{r^{l+n}(r^m-1)}{r-1} = b\,\frac{r^n-1}{r-1},$$

となり、したがって

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{r^n - 1}{r^{l+n}\,(r^m - 1)}}$$

この等式を理解する同値な方法として、「現在価値（present value）」をとる方法がある。最初の引き出しの時点で測ると、k 回目の引き出しの価値は b/r^{k-1} であり、これらの価値の合計は P に等しくなければならない：

$$P = b\left(1 + r^{-1} + \cdots + r^{-(n-1)}\right).$$

検算

- $m = n$ ならば答えは $a/b = r^{-(l+n)}$ と簡単になり、$b = ar^{l+n}$ である。これは理にかなっている。k 回目の預け入れと k 回目の引き出しを組にすると、両者のちょうど $m + l = l + n$ 年離れているので、各預け入れがちょうど 1 回の引き出しをまかなうのである。
- $r \to 1$（利息なし）のとき $\dfrac{r^n - 1}{r^m - 1} \to \dfrac{n}{m}$ であるから $a/b \to n/m$、すなわち $ma = nb$ となる。入れたお金と出したお金が等しい。
- $\rho = 5$、$m = n = 10$、$l = 5$、$a = 1000$ のとき、1 年ごとのシミュレーションにより $P \approx 16855.58$ が得られる。公式からは $a/b = 1.05^{-15} \approx 0.48102$、よって $b \approx 2078.93$ となり、この b を用いるとシミュレーション上の口座はちょうど 0 で終わる。さらに、r、l、m、n を無作為に選んだ 500 通りについて、分数を用いた計算機による計算でも両方の公式が厳密に確かめられる。

よくある間違い

- 最初の和で r^{m+1} の代わりに r^m を得てしまう。預け入れは各年の**初め**に行われるので、最後の預け入れでさえ 1 年分の利息を受ける。
- $r^{n-1}P$ の代わりに r^nP と書いてしまう。第 n 年の終わりの利息は、口座が空になった後に来る。

STEP のその先へ

これは年金（annuity）の数学である。支払いを共通の日付に割り引いて（現在価値）比較することは、保険数理（actuarial mathematics）と金融数学の基本原理である。漸化式 $B_k = rB_{k-1} - b$ は 1 階線形差分方程式（first-order linear difference equation）である。その解は特定の定数と r^k の定数倍との和であり、これは 1 階線形微分方程式（first-order linear differential equation）の解き方とまさに対応している。この類似は、大学 1 年次の差分方程式と微分方程式の講義で取り上げられる。この種の問題をさらに知りたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）を参照するとよい。

解答例

STEP I 1998、第 8 問

純粋数学 • 2 階の微分方程式

> **STEP I 1998、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q8

鍵となる考え方

流体力学の装いをまとってはいるが、これは純粋な微分方程式（differential equation）の問題である。左辺は導関数の導関数になっているので、2 回積分すればよい。その際、途中で r で割ると定数が対数に変わることに注意する。軸上で速度が有限であるという物理的な要請によって定数の一方が決まり、壁面での滑りなし条件（no-slip condition）によってもう一方が決まる。

解答

一般解

方程式に r を掛けると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = -kr.$$

となる。r について 1 回積分すると

$$r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\tfrac{1}{2}kr^2 + A,$$

となる。ここで A は定数である。両辺を r で割る（管の内部で軸から離れたところでは $r > 0$ なので問題ない）と

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\tfrac{1}{2}kr + \frac{A}{r}.$$

となる。もう一度積分し、$r > 0$ であるから $\ln|r|$ ではなく $\ln r$ を用いると

$$\boxed{v = -\tfrac{1}{4}kr^2 + A\ln r + B}$$

を得る。ここで A と B は任意定数である。2 階の方程式であるから、定数が 2 つ現れるのは予想どおりである。

軸の近くでの振る舞い

$r \to 0^+$ のとき、項 $-\frac{1}{4}kr^2$ と B は有界である（それぞれ 0 と B に近づく）が、$\ln r \to -\infty$ である。したがって $A \neq 0$ ならば、$A \ln r$ は（A の符号に応じて）$-\infty$ または $+\infty$ に発散し、ゆえに $|v| \to \infty$ となる。これを避ける唯一の方法は $A = 0$ とすることであり、このとき $v \to B$ となって有限である。

考えてみよう なぜ $A = 0$ でなければならないのだろうか？

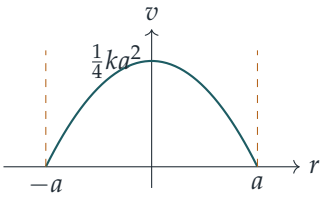
軸 $r = 0$ は流体の内部にあるので、そこでの速さは有限でなければならない。現実の流体が管の中心に沿って無限に速く流れることはない。$\ln r$ を含む解は $r > 0$ において方程式のれっきとした解であるが、この状況では物理的に受け入れられない。（軸が流体に含まれない、同軸の 2 つの円筒の間の流れであれば、この解も許される。）

速度分布

$A = 0$ のとき $v = B - \frac{1}{4}kr^2$ である。$r = a$ で $v = 0$ という条件から $B = \frac{1}{4}ka^2$ となるので

$$\boxed{v = \tfrac{1}{4}k\left(a^2 - r^2\right).}$$

である。速度分布は放物線であり、速さは軸上で最大値 $\frac{1}{4}ka^2$ をとり、壁面で 0 まで減少する。



（図は直径に沿った断面を示しており、壁面を破線で表している。）

流量

与えられた公式に代入すると

$$F = 2\pi \int_0^a r \cdot \tfrac{1}{4}k\left(a^2 - r^2\right) \mathrm{d}r = \frac{\pi k}{2} \int_0^a \left(a^2 r - r^3\right) \mathrm{d}r$$
$$= \frac{\pi k}{2}\left[\frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{\pi k}{2} \cdot \frac{a^4}{4},$$

となるので

$$\boxed{F = \frac{\pi k a^4}{8}.}$$

である。

検算

- $v = \frac{1}{4}k(a^2 - r^2)$ を元の式に代入する。$r\,v' = -\frac{1}{2}kr^2$ であり、その導関数は $-kr$、これを r で割ると $-k$ となって、確かに成り立つ。
- 平均の速さは $F/(\pi a^2) = \frac{1}{8}ka^2$ であり、最大の速さ $\frac{1}{4}ka^2$ のちょうど半分である。これは放物線状の速度分布についてよく知られた性質である。
- 数値的には、$k = 2$、$a = 1$ のときシンプソンの公式（Simpson's rule）により $F \approx 0.785398$ となり、$\pi/4$ と一致する。

よくある間違い

- 1 回目の積分で積分定数を忘れること。これにより $A \ln r$ の項が失われ、問題文の「ただし〜でない限り」の部分が意味をなさなくなる。
- $-kr$ を積分して $-\frac{1}{2}kr^2$ を得たあと、もう一度積分する前に r で割るのを忘れること。
- F の積分の中の因子 r を落とすこと。半径 r の薄い円環を通る流量は、定数ではなく、その円周 $2\pi r$ に比例する。

STEP のその先へ

作用素 $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)$ は、r のみの関数に対する円柱座標でのラプラシアン（Laplacian）∇^2 である。したがってこの問題は、実はポアソン方程式（Poisson's equation）$\nabla^2 v = -k$ にほかならない。$\ln r$ を含む解は、点電荷の $1/r$ ポテンシャルの 2 次元版にあたる。結果 $F \propto a^4$ はポアズイユの法則（Poiseuille's law）である。管の半径を半分にすると流量は 16 分の 1 になってしまう。動脈が狭くなることがこれほど重大なのはこのためである。微分方程式の側面については、Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）を参照するとよい。

解答例

STEP I 1998、第 9 問

力学 ・ 振り子の衝突

> **STEP I 1998、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q9

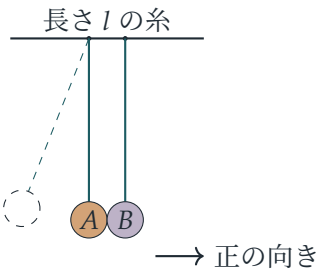
鍵となる考え方

変位はごく小さいので、各球は単振り子（simple pendulum）として単振動（simple harmonic motion）をし、その周期（period）$2\pi\sqrt{l/g}$ は振幅（amplitude）にも速さにもよらない。2 つの振り子は長さが等しいので、最下点での衝突の後には、どんな場合でも両球は半周期後の同じ瞬間に、速度の向きが反転した状態で最下点に戻ってくる。2 回目の衝突がいつどこで起こるかがわかれば、あとは各衝突ごとに運動量の式とニュートンの実験則を 2 行書くだけである。

解答

モデル

A と B を、同じ長さ l の軽く伸び縮みしない糸につるされた質量 m の質点とみなし、空気抵抗は無視する。また衝突は瞬間的であり、撃力（impulse）は水平な中心線（line of centres）に沿ってはたらくものとする。1 回目の衝突における A の運動の向き（A から B へ向かう向き）を正の向きとし、$\omega = \sqrt{g/l}$ とおく。



すべての衝突が最下点で起こる理由

微小振動では、各球は振幅によらず角振動数（angular frequency）ω の単振動をする。したがって、速さ v で最下点を離れた球の水平変位は $\frac{v}{\omega}\sin\omega t$ であり、時間 π/ω（半周期）後には速度 $-v$ で最下点に戻っている。これはどんな v についても成り立つ。

1 回目の衝突は最下点で起こる。B はそこで静止してつり下がっており、A は速さ u でそこに到達するからである。ある衝突が最下点で起こり、その直後の A と B の速度が $p \le q$ であったとする（衝突直後に互いに近づく向きに動くことはありえない）。最下点から測ると、その時刻 t 後の 2 球の間隔は

$$\frac{q}{\omega}\sin\omega t - \frac{p}{\omega}\sin\omega t = \frac{q-p}{\omega}\sin\omega t,$$

であり、これは $0 < t < \pi/\omega$ では正、$t = \pi/\omega$ で 0 となる。よって 2 球がそれより早く出会うことはなく、両方が最下点に戻ったちょうどその瞬間に再び出会う。これがヒントの意味するところである。2 つの振り子は周期が等しいので、つねにそろって最下点に戻ってくるのである。数学的帰納法（induction）により、すべての衝突は最下点で起こり、連続する衝突の間隔は半周期である。

1 回目の衝突

1 回目の衝突直後の A と B の速度をそれぞれ v_A、v_B とする。運動量保存（conservation of momentum）（最下点では糸の張力は鉛直なので、水平方向の撃力を与えない）とニュートンの実験則（Newton's experimental law）より

$$mv_A + mv_B = mu,$$
$$v_B - v_A = eu.$$

辺々加えたり引いたりして、

$$v_A = \tfrac{1}{2}u(1-e), \qquad v_B = \tfrac{1}{2}u(1+e).$$

どちらも ≥ 0 なので、両球とも B の側へ振れていく（$e = 1$ のときは、A はその場で止まり、最下点につり下がったままとなる）。

考えてみよう 2 回目の衝突の直前の速度はどうなっているか？

半周期後、各球は速度の向きが反転した状態で最下点に戻っている。A の速度は $-\frac{1}{2}u(1-e)$、B の速度は $-\frac{1}{2}u(1+e)$ である。B のほうが速いので、B が A に後ろから追いつく。A に対する B の接近の速さは $\frac{1}{2}u(1+e) - \frac{1}{2}u(1-e) = eu$ である。

2 回目の衝突

2 回目の衝突直後の A と B の速度をそれぞれ w_A、w_B とする。運動量保存より

$$mw_A + mw_B = -\tfrac{1}{2}mu(1-e) - \tfrac{1}{2}mu(1+e) = -mu,$$

であり、ニュートンの実験則（遠ざかる速さは近づく速さ eu の e 倍）より

$$w_B - w_A = e \cdot eu = e^2u.$$

辺々引いたり加えたりして、

$$w_A = -\tfrac{1}{2}u(1+e^2), \qquad w_B = -\tfrac{1}{2}u(1-e^2).$$

したがって、2 回目の衝突の直後、A の速さは $\frac{1}{2}u(1+e^2)$ となり、これが示すべきことであった。また B の速さは $\frac{1}{2}u(1-e^2)$ であり、両球とも、A が最初に放された側へ向かって動いている。

検算

- 完全弾性衝突（perfectly elastic）$e = 1$ の場合：最終的に A の速さは u、B は静止する。これは正しい。1 回目の衝突の後 A は止まり、B が速さ u を得る。そして B が速さ u で戻ってきて、それをすべて A に返すからである。
- $e = 0$ の場合：両方の速さが $\frac{1}{2}u$ となる。2 球は実質的に一体となり、1 回目の衝突の後は速さ $\frac{1}{2}u$ でいっしょに動くので、これも正しい。
- 2 回目の衝突後の運動量は $-\frac{1}{2}mu(1+e^2) - \frac{1}{2}mu(1-e^2) = -mu$ であり、最初の mu と逆向きになっている。
- $l = 1\,\mathrm{m}$、初期角度 $0.01\,\mathrm{rad}$ として、実際の（非線形の）振り子 2 つをシミュレーションした。2 回目の衝突は 1 回目の衝突から 1.0001 半周期後に、最下点から $3 \times 10^{-6}\,\mathrm{rad}$ 以内で起こり、$e = 0.7$ のときの衝突後の速さは $0.745u$ と $0.255u$ で、$\frac{1}{2}(1+e^2)$ および $\frac{1}{2}(1-e^2)$ と一致した。

よくある間違い

- 2 回目の衝突の前に両方の速度が反転していることを忘れ、B が静止した A に衝突するものとして扱ってしまう。
- 2 回目の衝突で、$e \cdot$(近づく速さ) の代わりに eu を使ってしまう。ここでは近づく速さがたまたま eu なので、遠ざかる速さは e^2u となる。

- 衝突が最下点で起こるのは「球がそこにつり下がっているから」だと述べてしまう。本当の理由は周期が振幅によらないことであり、だからこそ球を引き寄せる量は小さくなければならないのである。

STEP のその先へ

等時性（isochronism、周期が振幅によらないこと）は、振り子については近似的にしか成り立たない。振れ幅が大きくなると周期は長くなり、その厳密な値は楕円積分（elliptic integral）で与えられる。そうなると衝突は最下点からずれていくことになる。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、振り子と衝突の両方が丁寧に扱われている。

解答例

STEP I 1998、第 10 問

力学 ・ 放物運動

> **STEP I 1998、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q10

鍵となる考え方

投射角（angle of projection）はわからないし、求める必要もない。答えは v、r、t だけで表されるからである。そこで、角を消去する関係式を探す。最もすっきりした方法はベクトルで考えることである。時刻 t における粒子の着地点は、初速度の t 倍に、重力による落下分 $\frac{1}{2}gt^2$ を加えたものである。これら三つのベクトルは直角三角形をなし、あとはピタゴラス（Pythagoras）の定理（三平方の定理）が片づけてくれる。

解答

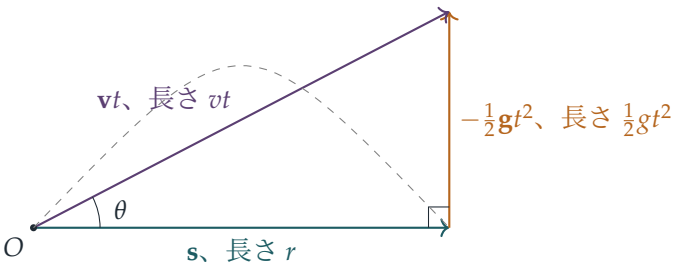
土の各粒子を、重力のみを受けて自由に運動する質点（point particle）としてモデル化する（空気抵抗（air resistance）は無視する）。粒子は地表にある爆発の中心 O から出発する。真上に飛んだ粒子は O に着地するので、$r > 0$ とし、水平面から測った投射角 θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たすとしてよい。

着地時刻

加速度 $\mathbf{g}$（鉛直下向き）が一定のとき、時刻 t における変位は

$$\mathbf{s} = \mathbf{v}t + \tfrac{1}{2}\mathbf{g}t^2,$$

である。ここで $\mathbf{v}$ は大きさ v の初速度である。着地時刻において、$\mathbf{s}$ は長さ r の水平なベクトルである。移項すると $\mathbf{v}t = \mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2$ となり、これは長さ r の水平なベクトルと、長さ $\frac{1}{2}gt^2$ の鉛直（上向き）のベクトルの和である。



この二つは直交しているので、ピタゴラスの定理より

$$v^2t^2 = r^2 + \left(\tfrac{1}{2}gt^2\right)^2 = r^2 + \tfrac{1}{4}g^2t^4.$$

両辺に g^2 を掛け、$u = \frac{1}{2}g^2t^2$ とおくと（このとき $u^2 = \frac{1}{4}g^4t^4$、$g^2v^2t^2 = 2v^2u$ である）、これは

$$u^2 - 2v^2u + g^2r^2 = 0,$$

となり、u の二次方程式（quadratic equation）である。その解は

$$\tfrac{1}{2}g^2t^2 = u = v^2 \pm \sqrt{v^4 - g^2r^2},$$

であり、これが求める結果である。

考えてみよう ベクトルを使わないとしたら、どうやって θ を消去すればよいだろうか。

成分を使えばよい。水平方向には $r = vt\cos\theta$ である。鉛直方向には、地表に着地するということから $0 = vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$ であり、よって（$t \neq 0$ なので）$vt\sin\theta = \frac{1}{2}gt^2$ となる。これらを 2 乗して加え、$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を用いると、まさに $v^2t^2 = r^2 + \frac{1}{4}g^2t^4$ が再び得られる。ベクトルによる図は、この計算を三角形として描いたものにすぎない。

二つの解がともに実数となるのは $v^4 \geq g^2r^2$、すなわち $r \leq v^2/g$ のときに限る。これはおなじみの最大到達距離（maximum range）である。$r < v^2/g$ のとき二つの解はともに正であり（積は $g^2r^2 > 0$、和は $2v^2 > 0$）、したがって着地時刻は二つある。一方は急角度の投射、もう一方は浅い角度の投射に対応する。$t = 2v\sin\theta/g$ は θ について増加するので、$+$ の符号は急な軌道（trajectory）$\theta > \frac{\pi}{4}$ に、$-$ の符号は平らな軌道に対応する。

最高点の高さ

飛行は対称である。鉛直方向の速度 $v\sin\theta - gt'$ は、飛行のちょうど中間である $t' = \frac{1}{2}t$ で 0 になる。最高点から、粒子は（鉛直方向には）静止状態から時間 $\frac{1}{2}t$ だけ落下する

ので、最高点の高さは

$$H = \tfrac{1}{2}g\left(\tfrac{1}{2}t\right)^2 = \tfrac{1}{8}gt^2 = \frac{1}{4g}\cdot\tfrac{1}{2}g^2t^2.$$

である。前半の結果を用いると

$$H = \frac{v^2 \pm \sqrt{v^4 - g^2r^2}}{4g},$$

となる。ここで $+$ の符号は急な軌道に、$-$ の符号は平らな軌道に対応する（$r < v^2/g$ のときは両方とも起こりうる。$r = v^2/g$ のときは両者が一致し、$H = v^2/(4g)$ となる）。

検算

- 鉛直投射：$r = 0$ とすると $\frac{1}{2}g^2t^2 = 2v^2$ となり、$t = 2v/g$、$H = v^2/(2g)$ であって、正しい。もう一方の解 $t = 0$、$H = 0$ は、地面すれすれに沿った投射である。
- 二つの高さの和は $v^2/(2g)$ である。これは当然である。二つの軌道は互いに余角 θ と $\frac{\pi}{2} - \theta$ をなし、$\frac{v^2\sin^2\theta}{2g} + \frac{v^2\cos^2\theta}{2g} = \frac{v^2}{2g}$ となるからである。
- 数値的に、$g = 9.8$、$v = 20$、$\theta = 1$ ラジアンとして運動を逐次計算すると、$t \approx 3.4346$、$H \approx 14.450$ を得る。$+$ の符号の公式からは 3.4346 と 14.450 が得られる。余角の場合は $-$ の符号と一致する（$t \approx 2.2053$、$H \approx 5.958$）。

よくある間違い

- 高さを一つしか答えないこと。同じ速さの粒子は二つの異なる経路で同じ点に到達しうるので、$\pm$ は H にまで引き継がれる。
- H を θ で表したところで止めてしまうこと。問題は v、r、g だけで表すことを求めているので、前半と結びつける $H = \frac{1}{8}gt^2$ を使うのが効率的である。

STEP のその先へ

t^2 についての二次方程式は、「軌道の包絡線（envelope of trajectories）」の時間領域版である。$v^4 = g^2r^2$ を満たす点（および地表を離れると回転放物面（paraboloid）$z = \frac{v^2}{2g} - \frac{gr^2}{2v^2}$）は、土が到達しうる領域の境界を表し、その内部のすべての点にはちょうど二つの軌道が当たる。曲線族の包絡線は、大学 1 年次の講義における偏微分（partial differentiation）のよい応用例である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物運動とベクトルによる運動学をちょうどよい水準で扱っている。

解答例

STEP I 1998、第 11 問

力学 ・ 滑車にかけた連結質点

> **STEP I 1998、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q11

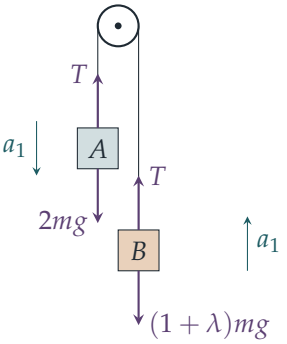
鍵となる考え方

1 回の往復は 2 つの段階からなり、各段階では質量が一定なので加速度（acceleration）も一定であり、$s = \frac{1}{2}at^2$ が使える。下りでは、水で満たされたバケツが鉱石入りのバケツより重く、2 つのバケツは 1 つのアトウッドの器械（Atwood machine）として動く。上りに戻るときは、バケツ A は空で質量がないので、B を引き止めるものは何もない。B は単に自由落下（free fall）する。後半では、「非常に長い時間のうちに最も多くの鉱石を引き上げる」とは「1 周期あたりの鉱石の量を 1 周期の時間で割ったものを最大にする」という意味である。

解答

1 周期の時間

モデル：バケツとその中身は質点、鎖は軽くて伸びず、滑車は小さく、なめらかで軽いとする。したがって張力（tension）T は鎖の両端で等しく、2 つのバケツは同じ速さで動く。A が最上部にあるとき B は最下部にある（鎖の長さは l）ので、各段階で各バケツは距離 l だけ動く。



段階 1：A が下降する。 バケツ A は質量 $2m$ の水を運び、バケツ B の全質量は $m+\lambda m=(1+\lambda)m$ である。共通の加速度を a_1 とする（A は下向き、B は上向き）。各バケツにニュートン（Newton）の第二法則（Newton's second law）を適用すると

$$\begin{aligned} A\,(\text{下向き}):&\quad 2mg-T=2ma_1,\\ B\,(\text{上向き}):&\quad T-(1+\lambda)mg=(1+\lambda)ma_1. \end{aligned}$$

辺々を加えると T が消去されて

$$(1-\lambda)mg=(3+\lambda)ma_1 \quad\Longrightarrow\quad a_1=\frac{(1-\lambda)g}{3+\lambda},$$

となる。$\lambda<1$ よりこれは正であり、確かに A は下降する。静止状態から一定の加速度で距離 l を進むので $l=\frac{1}{2}a_1t_1^2$ であり、

$$t_1=\sqrt{\frac{2l}{a_1}}=\sqrt{\frac{2l}{g}}\sqrt{\frac{3+\lambda}{1-\lambda}}.$$

考えてみよう 段階 2 ではバケツ A の質量はまったくない。鎖の張力はいくらか。

段階 2：B が下降する。 このとき A は空なので質量は 0 であり、B の質量は m である。質量のないバケツ A について、ニュートンの法則は $T-0\cdot g=0\cdot a$ となるので $T=0$ である。質量をもつものに何もつながっていない軽い鎖は、何も引っ張ることができない。したがって B は静止状態から加速度 g で距離 l を自由落下し、$l=\frac{1}{2}gt_2^2$ より

$$t_2=\sqrt{\frac{2l}{g}}.$$

（質量 0 と m に対するアトウッドの器械の公式からも同じ答えが得られる：$a=\frac{m-0}{m+0}g=g$。）この段階の終わりに、A は初めて最上部に戻る。

合計。 A を最上部で放してから初めて最上部に戻るまでの時間は

$$\boxed{t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2l}{g}}\left(1 + \sqrt{\frac{3+\lambda}{1-\lambda}}\right) = \sqrt{\frac{2l}{g}}\,\frac{(1-\lambda)^{1/2} + (3+\lambda)^{1/2}}{(1-\lambda)^{1/2}}}$$

引き上げる鉱石の最大化

1 周期の時間を $\tau(\lambda) = t_1 + t_2$ と書く。各周期で質量 λm の鉱石が引き上げられ、この過程はまったく同じように繰り返される。長い時間 S の間には $\lfloor S/\tau \rfloor$ 回の完全な周期があるので、引き上げられる鉱石は $\lambda m\,(S/\tau - 1)$ 以上 $\lambda m\, S/\tau$ 以下である。S が τ に比べて非常に大きいとき、半端な周期の分は無視でき、引き上げられる鉱石は実質的に

$$\frac{\lambda m S}{\tau(\lambda)} = mS\sqrt{\frac{g}{2l}}\,\frac{\lambda(1-\lambda)^{1/2}}{(1-\lambda)^{1/2} + (3+\lambda)^{1/2}} = mS\sqrt{\frac{g}{2l}}\,\mathrm{f}(\lambda).$$

である。係数 $mS\sqrt{g/2l}$ は λ によらないので、$\mathrm{f}(\lambda)$ ができるだけ大きくなるように $\lambda \in (0,1)$ を選べばよい。

> **考えてみよう** 最適な λ が端点ではなく停留点でなければならないのはなぜか。

$(0,1)$ では $1-\lambda > 0$ かつ $3+\lambda > 0$ であり分母も正なので、関数 f は $(0,1)$ で微分可能（differentiable）である。また f は $(0,1)$ で正であり、両端で 0 に近づく。$\lambda \to 0$ のときは因子 λ が 0 になり（鉱石が運ばれない）、$\lambda \to 1$ のときは因子 $(1-\lambda)^{1/2}$ が 0 になる（バケツがほぼつり合い、段階 1 に非常に長い時間がかかる）。したがって f の最大値は内点でとられ、微分可能な関数が内点で最大となるとき、そこでの導関数は 0 である。よって最適な λ は、求めるとおり $\mathrm{f}'(\lambda) = 0$ を満たす停留点（stationary point）である。

検算

- 極限の場合：$\lambda \to 1$ のとき、段階 1 のバケツの質量は $2m$ と $2m$ になるので $a_1 \to 0$、$t_1 \to \infty$ となり、公式と一致する。
- $\lambda \to 0$ のとき $a_1 = g/3$ となり、質量 $2m$ と m に対する通常のアトウッドの器械の値になる。
- 数値的に、$g = 9.8$ としてランダムな λ と l について運動を時間刻みで計算したところ、公式と一致した。たとえば $\lambda = 0.504$、$l = 26.9$ のとき周期は 8.568 s である。f を数値的に最大化すると $\lambda \approx 0.704$ が得られ、長い時間の中で完全な周期の数を数えても同じ最適な λ が得られる。

よくある間違い

- バケツ B 自体の質量 m を忘れて、段階 1 で $(1+\lambda)m$ の代わりに λm を使ってしまう。
- 段階 2 を何らかの張力のあるアトウッドの器械として扱ってしまう。A に質量がないので、B は自由落下する。
- 単位時間あたりの鉱石ではなく、1 周期あたりの鉱石 λm を最大化してしまう。荷が重いほど周期は遅くなる。

STEP のその先へ

率（1 周期あたりの産出量を 1 周期の時間で割ったもの）を最適化するという考え方は、確率論における **再生報酬定理**（renewal–reward theorem）の背後にある考え方である。そこでは周期の長さが確率的であっても、長期的な報酬率はやはり 1 周期あたりの報酬の平均を周期の長さの平均で割ったものになる。ここでの力学は等加速度運動であり、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、これを質点系の本格的な扱いへと発展させている。

解答例

STEP I 1998、第 12 問

確率・統計 ・ 数え上げと独立性

STEP I 1998、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/98-s1-q12

鍵となる考え方

ここで行うことはすべて数え上げである。解が全部でいくつあるか、そして X が与えられた値に等しい解がいくつあるかがわかれば、各確率（probability）は二つの個数の比になる。独立性（independence）については、極端な場合を調べるのが最も手早い判定法である。すなわち、同時確率（joint probability）が周辺確率（marginal probability）の積に等しくなりえないような値の組を一つ見つければよい。最後の小問では、「XYZ が 5 で割り切れる」とは「X, Y, Z の少なくとも一つが 5 で割り切れる」ということであり、これは包除原理（inclusion–exclusion）を用いるべき場面である。

解答

解の個数を数える

$X = x$ を固定すると（ただし $0 \le x \le 20$）、Y は $0, 1, \ldots, 20 - x$ のいずれの値もとることができ、そのとき $Z = 20 - x - Y$ は一意に定まり、しかも非負である。したがって $X = x$ となる解はちょうど $21 - x$ 個あり、解の総数は

$$N = \sum_{x=0}^{20} (21 - x) = 21 + 20 + \cdots + 1 = \frac{21 \cdot 22}{2} = 231.$$

である（これは「星と棒」（stars and bars）による数え方 $\binom{22}{2}$ に一致する。20 個の星と 2 本の棒を一列に並べればよい）。各解の確率は $1/231$ であり、

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{21 - x}{231}, \qquad x = 0, 1, \ldots, 20.$$

となる。対称性により、Y（および Z）も同じ分布に従う。

X と Y は独立か

独立ではない。$X = 20$ と $Y = 20$ を考える。それぞれの事象は単独では起こりうる：

$$\mathrm{P}(X = 20) = \mathrm{P}(Y = 20) = \frac{1}{231} > 0,$$

しかし $X + Y \leq 20$ であるから、両者が同時に起こることはない。よって

$$\mathrm{P}(X = 20,\ Y = 20) = 0 \neq \frac{1}{231^2} = \mathrm{P}(X = 20)\,\mathrm{P}(Y = 20),$$

であり、X と Y は独立ではない。直観的には、X の値が大きいと Y の入る余地が少なくなるということである。

> **考えてみよう**　「$X + Y \leq 20$ だから明らかに従属である」と言うだけでは不十分なのだろうか。

そのような制約に着目するのは正しい直観である。しかし独立性は確率についての厳密な主張であるから、その正当化には $\mathrm{P}(X = x, Y = y) \neq \mathrm{P}(X = x)\mathrm{P}(Y = y)$ となる値の組を一つ示す必要がある。反例（counterexample）は一つあれば十分であり、極端な組 $(20, 20)$ を選べば計算は自明になる。

X が 5 で割り切れる場合

範囲内にある 5 の倍数は $X = 0, 5, 10, 15, 20$ であり、それぞれ $21, 16, 11, 6, 1$ 個の解がある。よって

$$\mathrm{P}(5 \mid X) = \frac{21 + 16 + 11 + 6 + 1}{231} = \frac{55}{231} = \frac{5}{21},$$

となり、示すべきことが得られた。

XYZ が 5 で割り切れる場合

5 は素数（prime）であるから、$5 \mid XYZ$ となるのは、5 が X、Y、Z の少なくとも一つを割り切るときであり、かつそのときに限る（0 も 5 で割り切れることに注意せよ）。A、B、C をそれぞれ X、Y、Z が 5 で割り切れる解の集合とする。前の小問より $|A| = |B| = |C| = 55$ である。

$A \cap B$ について：$a, b \geq 0$ かつ $a + b \leq 4$ として $X = 5a$、$Y = 5b$ と書く。このような組の個数は $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ である。そのいずれにおいても $Z = 20 - 5a - 5b$ もまた 5 の倍数となるので、

$$|A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap A| = |A \cap B \cap C| = 15.$$

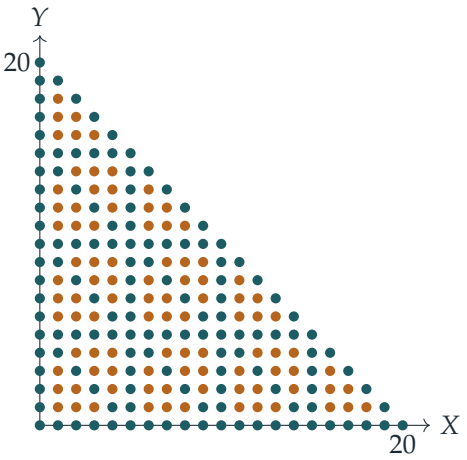
包除原理により

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= 3 \cdot 55 - 3 \cdot 15 + 15 \\ &= 135,\end{aligned}$$

であり、したがって

$$\mathrm{P}(5 \mid XYZ) = \frac{135}{231} = \frac{45}{77}.$$

下の図は、解を $X + Y \leq 20$ を満たす格子点（lattice points）(X, Y) として表したものである。ティール色の点は直線 $X = 5k$、$Y = 5k$、$X + Y = 20 - 5k$（すなわち $Z = 5k$）のいずれかの上にあり、琥珀色の点は X, Y, Z のどれも 5 の倍数でない 96 個の解である。



検算

- 余事象（complement）、すなわち X, Y, Z のどれも 5 の倍数でない解は $231 - 135 = 96$ 個あるはずである。これは図の琥珀色の点である。231 個の解すべてをコンピュータで列挙し、厳密な分数で計算すると、96、$|A \cap B| = 15$、5/21、$135/231 = 45/77 \approx 0.584$ が確かめられる。
- 5/21 の妥当性の確認：X が 5 で割り切れる確率は 1/5 よりやや大きい。これは X の小さい値ほど起こりやすく、とくに $X = 0$ が最も起こりやすいからである。

よくある間違い

- 0 が 5 で割り切れることを忘れる。$X = 0$ を除くと 5/21 ではなく 34/231 になってしまう。

- $3 \times \frac{5}{21}$ と足し合わせてしまい、重なりを何度も数える。ここでは重なりが大きい。二つの変数が 5 の倍数ならば、残りの一つも必ず 5 の倍数になるからである。
- 積の法則が成り立たない具体的な値の組を示さずに、従属性を論じる。

STEP のその先へ

解を一様に（uniformly）無作為に選ぶことは、20 の三つの部分への無作為な**組成**（composition）を選ぶことである。20 を総和 n に置き換えて n を大きくしていくと、$(X/n, Y/n)$ は三角形上の一様分布に近づく。これはディリクレ分布（Dirichlet distribution）の最も簡単な場合である。包除原理は「少なくとも一つ」という事象を扱うための標準的な道具であり、完全順列（derangements）やオイラー（Euler）のトーシェント関数（totient function）でも再び登場する。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、数え上げと独立性の両方の考え方を扱っている。

解答例

STEP I 1998、第 13 問

確率・統計 ・ 復元抽出

> **STEP I 1998、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q13

鍵となる考え方

これは条件付き確率（conditional probability）の問題である。条件となる事象は「n 回の取り出しでちょうど 1 個のドロップ（pastille）を食べた」であり、これをそのドロップを**いつ**食べたかによって分割する。袋の中身が変わるのは赤を食べた瞬間だけなので、分割した各部分は単純な確率の積になる。それらを足し合わせると等比級数（geometric series）となり、そこから 2 つの n 乗の差が現れるのである。

解答

最初のドロップの個数を $N = r + b$ とおく。$r \geq 1$ かつ $b \geq 1$ と仮定する（$b = 0$ かつ $n \geq 2$ ならば、ちょうど 1 個だけ食べることは不可能であり、条件とする事象が存在しない）。

各回の取り出しにおける袋の状態。 赤でないドロップは袋に戻されるので、袋が変化するのは赤を食べたときだけである。赤を食べる前、袋には N 個のドロップが入っており、そのうち b 個が赤でない。食べた後は $N - 1$ 個が入っており、赤でないものは依然として b 個である。毎回取り出す前に袋をよく振るので、各回の取り出しはその時点で袋に入っているものからの新たな一様（uniform）な選択であり、したがって 1 回ごとの確率を掛け合わせることができる。

食べた時点による分割。 $k = 1, 2, \ldots, n$ に対し、n 回の取り出しで食べた唯一のドロップが k 回目に食べられたという事象を E_k とする。このとき、$1, \ldots, k-1$ 回目は満杯の袋から赤でないものを取り出し、k 回目は満杯の袋から赤を取り出し、$k+1, \ldots, n$ 回

目は 1 個減った袋から赤でないものを取り出す：

$$\mathrm{P}(E_k) = \left(\frac{b}{N}\right)^{k-1} \frac{r}{N} \left(\frac{b}{N-1}\right)^{n-k} = \frac{r\,b^{n-1}}{N^k\,(N-1)^{n-k}}.$$

事象 $E_1, \ldots, E_n$ は互いに排反（disjoint）であり、それらの和事象（union）はちょうど 1 個のドロップを食べたという事象 E である。よって

$$\mathrm{P}(E) = r\,b^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{N^k (N-1)^{n-k}} = \frac{r\,b^{n-1}}{N^n (N-1)^n} \sum_{k=1}^{n} N^{n-k} (N-1)^k,$$

ここで各項の分子と分母に $N^n(N-1)^n$ を掛けた。

? **考えてみよう** $\sum_{k=1}^{n} N^{n-k}(N-1)^k$ はどのように計算すればよいか。

これは初項 $N^{n-1}(N-1)$、公比 $\frac{N-1}{N}$ の等比級数である。さらに手早く済ませるには、おなじみの因数分解（factorisation）

$$x^n - y^n = (x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}\right)$$

において $x = N$、$y = N-1$ とすれば $x - y = 1$ となるので

$$\sum_{k=1}^{n} N^{n-k}(N-1)^k = (N-1) \sum_{j=0}^{n-1} N^{n-1-j}(N-1)^j = (N-1)\left(N^n - (N-1)^n\right).$$

したがって

$$\mathrm{P}(E) = \frac{r\,b^{n-1}\left(N^n - (N-1)^n\right)}{N^n (N-1)^{n-1}}.$$

条件付き確率。　「最後の回に食べ、しかも 1 個だけ食べた」という事象は E_n であり、$\mathrm{P}(E_n) = \dfrac{r\,b^{n-1}}{N^n}$ である。$E_n \subseteq E$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E_n \mid E) = \frac{\mathrm{P}(E_n)}{\mathrm{P}(E)} &= \frac{r\,b^{n-1}}{N^n} \cdot \frac{N^n (N-1)^{n-1}}{r\,b^{n-1}\left(N^n - (N-1)^n\right)} \\ &= \frac{(N-1)^{n-1}}{N^n - (N-1)^n} = \frac{(r+b-1)^{n-1}}{(r+b)^n - (r+b-1)^n},\end{aligned}$$

となり、求める結果が得られた。

r と b は、その合計を除いて完全に消えることに注意しよう。実は、この計算からはさらに多くのことがわかる。E が与えられたとき、ドロップが k 回目に食べられた確率は $\left(\frac{N-1}{N}\right)^k$ に比例するので、早い回ほど遅い回より**起こりやすい**のである。これは納得できる。早く食べれば、赤でないものの割合が大きい袋が残り、その後「もう赤が出ない」という状態が続く確率が高くなるからである。

検算

- $n = 1$：公式は $\dfrac{1}{N-(N-1)} = 1$ を与える。取り出しは 1 回だけでそれが最後の回なので、正しい。
- $n = 2$：公式は $\dfrac{N-1}{2N-1}$ を与え、これは $\frac{1}{2}$ よりわずかに小さい。早い回のほうが少し起こりやすいことと整合している。
- $r = 3$、$b = 5$、$n = 4$ のとき、公式は $343/1695 \approx 0.2024$ を与える。4 回の取り出しがすべて同様に確からしいとした場合の値は $\frac{1}{4}$ である。4×10^5 回のシミュレーションでは 0.2028 となった。また、袋の状態を追跡しながらすべての取り出し列を厳密に数え上げたところ、$1 \le r, b \le 4$ および $1 \le n \le 8$ のすべてについて公式が正確に再現された。

よくある間違い

- 赤を食べた後の赤でないものの取り出しに b/N を用いてしまう。袋の中のドロップは $N-1$ 個になっており、これこそがこの問題の要点である。全体を通して b/N を用いると、どの E_k も同じ確率になり、答えは $1/n$ になってしまう。
- 条件付けを忘れる：$\mathrm{P}(E_n) = rb^{n-1}/N^n$ だけでは答えにならない。ちょうど 1 個のドロップを食べたことが与えられているからである。

STEP のその先へ

ここでの袋は単純なマルコフ連鎖（Markov chain）である。その状態は残っている赤の個数であり、状態が 1 つ下がる確率は現在の状態だけに依存する。このような連鎖の最終状態を条件として、それがたどった経路について問うという考え方は、「隠れマルコフモデル（hidden Markov models）」や、過去の履歴についてのベイズ推論（Bayesian inference）の根底にある考え方である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、条件付き確率とマルコフ連鎖をちょうどこの水準で扱っており、Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率入門）には同じ趣旨の問題が数多く収録されている。

解答例

STEP I 1998、第 14 問

確率・統計 ・ 幾何的確率

> **STEP I 1998、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q14

鍵となる考え方

硬貨がどこに落ちたかについての情報は、すべてその**中心**がどこに落ちたかに集約される。盤面は規則的な模様をしているので、中心は 2×2 の正方形 1 つの上に一様分布（uniformly distributed）するとみなしてよい。すると、それぞれの結果はその正方形内の領域に対応する。「線をまたぐ」や「交点を覆う」という条件を、中心から線や頂点までの距離に関する条件に書き換えれば、確率は面積になる。その面積は a の二次関数（quadratic）であり、これを最大化すればよい。

解答

税が 2 倍になる確率

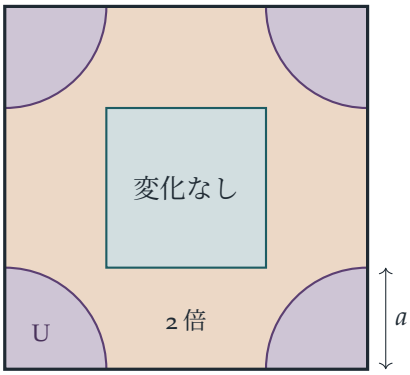
硬貨の中心は、格子の正方形の 1 つに一様ランダムに落ちるとモデル化する。盤面は十分大きいので端の影響（edge effects）は無視でき、どの正方形も同じに見える。この正方形が $[0,2] \times [0,2]$ となり、格子線がその辺に沿うように座標を設定する。

中心から最も近い縦線までの距離を U、最も近い横線までの距離を V とする。x 座標は $[0,2]$ 上の一様分布に従うので、$U = \min(x, 2-x)$ は $[0,1]$ 上の一様分布に従う。同様に V も $[0,1]$ 上の一様分布に従い、x と y が独立（independent）であるから U と V も独立である。したがって (U,V) は単位正方形 $[0,1]^2$ 上に一様に分布し、確率はこの正方形内の面積にほかならない。

- 硬貨がどの線もまたがないのは、ちょうど $U > a$ かつ $V > a$ のときである。その確率は $(1-a)^2$ である。

▶ 硬貨が交点を覆うのは、正方形の最も近い頂点が中心から距離 a 以内にあるとき、すなわち $U^2 + V^2 < a^2$ のときである。$a < 1$ なので、この四分円は $[0,1]^2$ の内部に完全に収まり、確率は $\frac{1}{4}\pi a^2$ となる。

この 2 つの事象は排反（disjoint）である。硬貨が交点を覆うならば、その交点を通る線を必ずまたいでいるからである。（硬貨がちょうど線に接するような境界の場合は確率 0 なので、$<$ と $\leq$ のどちらを用いても構わない。）



図は 1 つの正方形内における中心の取りうる位置を示している。青緑の部分（どの線もまたがない）と紫の部分（交点を覆う。1 つの頂点に U と記した）では税は変わらず、琥珀色の部分では税が 2 倍になる。

よって、税が 2 倍になる確率は

$$\begin{aligned} p(a) &= 1 - (1-a)^2 - \tfrac{1}{4}\pi a^2 \\ &= 2a - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) a^2. \end{aligned}$$

である。

税の最大化

税収を最大にするには、2 倍になる確率をできるだけ大きくしたいので、$0 < a < 1$ の範囲で $p(a)$ を最大化する。これは最高次の係数（leading coefficient）が負の二次関数であり、

$$p'(a) = 2 - 2\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) a = 0 \iff a = \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)^{-1}.$$

となる。この値は $\frac{4}{4+\pi} \approx 0.560$ であり、確かに $(0,1)$ に含まれる。さらに $p''(a) < 0$ であるから、これが最大値を与える。これで示すべきことが示された。この値を a^* と書くと $(1 + \frac{\pi}{4})a^{*2} = a^*$ が成り立つので、最大値は

$$p_{\max} = 2a^* - a^* = a^* = \frac{4}{4+\pi}.$$

である。

n 年後の税の期待値

> **考えてみよう**　毎年の増加倍率の期待値が $2p$ ではなく $1+p$ になるのはなぜか。

税が 2 倍にならない年には税はそのまま据え置かれるので、0 倍ではなく 1 倍される。k 年目の倍率を M_k とすると、確率 p で $M_k = 2$、確率 $1-p$ で $M_k = 1$ である。したがって

$$\mathrm{E}(M_k) = 2p + (1-p) = 1 + p = 1 + \frac{4}{4+\pi} = \frac{8+\pi}{4+\pi}.$$

となる。毎年の投げ方は互いに独立であると仮定する。n 年後の税は（1 から始めて）ヤク 1 頭あたり $T_n = M_1 M_2 \cdots M_n$ スリヒング（Slihings）であり、独立な確率変数（random variable）の積の期待値（expectation）はそれぞれの期待値の積に等しいから、

$$\mathrm{E}(T_n) = \mathrm{E}(M_1)\,\mathrm{E}(M_2)\cdots\mathrm{E}(M_n) = \left(\frac{8+\pi}{4+\pi}\right)^n,$$

となり、示すべきことが示された。

検算

- $a \to 0$ のとき硬貨はほとんど線に触れず、$a = 1$ のときは必ず線をまたぐので、$p(1) = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.215$ は頂点の円板を避ける確率になる。どちらも公式と一致し、最大値はその間にある。
- 400 000 個のランダムな中心を用いたシミュレーションでは、$a = 0.56$ において $p \approx 0.5620$ となり、公式の値 0.5601 と比べて妥当である。a を細かく探索すると、最大値をとるのは $a \approx 0.5601 = 4/(4+\pi)$ である。
- $p = 4/(4+\pi)$ として毎年の倍増をシミュレーションすると、3 年後の税の平均は約 3.805 となり、$\left(\frac{8+\pi}{4+\pi}\right)^3 \approx 3.797$ と比べて妥当である。

よくある間違い

- 「交点を覆う」面積を「線をまたがない」面積から引いてしまったり、二重に数えたりする。2 つの事象は排反であり、どちらも 1 から引く。
- 各頂点で円板全体の面積 πa^2 を用い、そのうち正方形内にあるのは四分の一だけであること（言い換えれば、各頂点の円板は 4 つの正方形で共有されていること）

を忘れる。

- 2 倍にならない年には税が変わらないことを忘れて、税の期待値を $(2p)^n$ と書いてしまう。

STEP のその先へ

これはビュフォン（Buffon）の針の問題（Buffon's needle problem）の親戚である。ランダムに置かれた物体を基本領域（fundamental region）内のランダムな点に帰着させ、確率を面積として扱う。この考え方は**幾何確率**（geometric probability）と積分幾何学（integral geometry）の出発点であり、針を投げて π を推定するといった驚くべき結果をもたらす。最後の小問では、独立な確率変数の期待値は掛け算できるという事実を用いたが、これは金融や個体群生物学における乗法的成長モデルの基礎となっている。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、この両方の考え方を扱っている。

解答例

STEP II 1998、第 1 問

純粋数学 ・ ディオファントス方程式と偶奇性

> **STEP II 1998、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q1

鍵となる考え方

3 乗を展開するとほとんどの項が打ち消し合い、定数項の小さい n の 3 次式（cubic）が残る。両辺の偶奇（parity）を比べると、n は偶数でなければならないことがわかる。さらに 3 次式を n^2(何か) $= 54$ の形に書けば、問題は約数（divisor）に関するものに変わる。$(**)$ については、偶数であることを用いた置き換え $n = 2m$ によって、ただちに $(*)$ に帰着する。

解答

方程式 $(*)$

恒等式（identity）$(a+b)^3 - (a-b)^3 = 6a^2b + 2b^3$ に $a = n$、$b = 3$ を代入すると、

$$(n+3)^3 - (n-3)^3 = 18n^2 + 54,$$

を得る。よって $(*)$ は次と同値である。

$$n^3 = 18n^2 + 54, \qquad \text{すなわち} \qquad n^2(n-18) = 54. \tag{1}$$

n は偶数である。 右辺 $18n^2 + 54 = 2(9n^2 + 27)$ は任意の整数 n に対して偶数である。もし n が奇数ならば n^3 は奇数となり、$n^3 = 18n^2 + 54$ に矛盾する。したがって n は偶数である。

n^2 は 54 を割り切る。 (1) の 2 番目の形において、$n - 18$ は整数であるから、54 は n^2 の整数倍である。したがって n^2 は 54 の約数である。

考えてみよう これら 2 つの事実を合わせると、なぜすべての整数が除外されるのか？

n は偶数なので、$n = 2k$ とおく。すると $n^2 = 4k^2$ は 4 の倍数である（また (1) において $n = 0$ とすると $0 = 54$ となるので、$n \neq 0$ である）。ところが $54 = 2 \times 27$ は 4 で割り切れないので、0 以外の 4 の倍数がそれを割り切ることはない。この矛盾により、$(*)$ を満たす整数 n は存在しないことが示された。

（別の見方：$54 = 2 \cdot 3^3$ を割り切る平方数は 1 と 9 だけなので、$n \in \{\pm 1, \pm 3\}$ となるが、これらはすべて奇数である。）

方程式 $(**)$

今度は $b = 6$ とすると、

$$(n+6)^3 - (n-6)^3 = 36n^2 + 432,$$

となるので、$(**)$ は次と同値である。

$$n^3 = 36n^2 + 432.$$

右辺は任意の整数 n に対して偶数であるから、先ほどとまったく同様に n^3 は偶数である。奇数の 3 乗は奇数なので、n は偶数である。

考えてみよう なぜ前半の約数による議論をそのまま使うことができないのか？

$n^2(n-36) = 432$ と書くことはできるが、$432 = 2^4 \cdot 3^3$ は偶数の平方因数を数多く持つ（4、16、36、144）ので、割り切れるかどうかの議論だけでは決着しない。そこで偶数であることを利用する。m を整数として $n = 2m$ とおくと、

$$8m^3 = 36 \cdot 4m^2 + 432 \quad \Longleftrightarrow \quad m^3 = 18m^2 + 54,$$

となり、これはちょうど整数 m に対する方程式 (1) である。言い換えれば、m は $(*)$ を満たす。実際、$n = 2m$ としたときの $(**)$ は、$n = m$ としたときの $(*)$ の両辺を 8 倍したものにほかならない。

$$(2m-6)^3 + (2m)^3 - (2m+6)^3 = 8\left[(m-3)^3 + m^3 - (m+3)^3\right].$$

$(*)$ を満たす整数は存在しないことをすでに示したので、そのような m は存在しない。したがって $(**)$ を満たす整数 n は存在しない。

検算

- 展開した式で $n = 1$ を試すと、$(4)^3 - (-2)^3 = 64 + 8 = 72 = 18 + 54$ となる。✓
- 3 次式 $n^3 - 18n^2 - 54$ はちょうど 1 つの実数解をもち、それはおよそ $n \approx 18.164$ であって整数ではない。（$|n| < 10^5$ の範囲でコンピュータにより直接探索しても、どちらの方程式の解も見つからない。）
- $(**)$ の実数解は $n \approx 2 \times 18.164 = 36.33$ であり、置き換え $n = 2m$ による倍率と一致する。

よくある間違い

- $n = 0$ の場合に別途言及する必要があることを忘れる。0 は偶数であるが、0 は 54 の約数ではない。ここでは (1) によってただちに除外される。
- 3 乗をすべて展開して計算ミスをする。恒等式 $(a+b)^3 - (a-b)^3 = 6a^2b + 2b^3$ を使えば手間は半分になる。
- $(**)$ で $n^2 \mid 432$ を示そうとしても行き詰まる。「n は偶数」であることの要点は、置き換え $n = 2m$ にある。

STEP のその先へ

最後の段階、すなわち $(**)$ の解から、同じ形でより小さな数をもつ方程式の解が得られるという部分は、フェルマー（Fermat）の**無限降下法**（method of descent）の簡単な形である。この方法を繰り返し適用すると、$x^3 + y^3 = z^3$ が正の整数解をもたないことが示される。これはフェルマーの最終定理（Fermat's Last Theorem）の 3 乗の場合であり、オイラー（Euler）によって初めて証明された。今回の問題では 3 つの項が等差数列（arithmetic progression）をなしているため、ずっと簡単になっている。実際、$(n-3k)^3 + n^3 = (n+3k)^3$ は $t = n/k$ が $t^3 - 18t^2 - 54$ の根であることを意味し、有理根定理（rational root theorem）によりこの 3 次式は有理数の根をもたないので、どの $k \neq 0$ に対しても整数解は存在しない。Davenport の *The Higher Arithmetic* は、整除性、偶奇による議論、ディオファントス方程式（Diophantine equations）へのすばらしい入門書である。

解答例

STEP II 1998、第 2 問

純粋数学 ・ 二項級数による近似

> **STEP II 1998、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q2

鍵となる考え方

二項級数（binomial series）は引数が小さいほど速く収束（converge）する。そこで、$\sqrt{2}$（あるいは $\sqrt[3]{2}$）を、簡単な有理数と、x がごく小さい $(1+x)^a$ との積として表したい。平方根については、$49/50$ が 1 に非常に近く、しかも因数 2 を含んでいる。立方根については、別の立方数の $2\times$ にほぼ等しい立方数を探す。すると $128 = 2\times 4^3$ が $125 = 5^3$ のすぐ隣にあることがわかる。

解答

2 の平方根

まず、与えられた式を $\sqrt{2}$ と結びつける。$1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50}$ であるから、

$$\left(1-\frac{1}{50}\right)^{1/2} = \frac{7}{\sqrt{50}} = \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}, \qquad \text{よって} \qquad \sqrt{2} = \frac{10}{7}\left(1-\frac{1}{50}\right)^{1/2}.$$

$(1+x)^{1/2}$ の二項級数は

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \cdots,$$

と始まり、$|x|<1$ で成り立つ。$y=\frac{1}{100}$ として $x=-\frac{2}{100}=-2y$ とおく。すると 2 のべきがうまく打ち消し合う。

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{2}{100}\right)^{1/2} &\approx 1-\tfrac{1}{2}(2y)-\tfrac{1}{8}(2y)^2-\tfrac{1}{16}(2y)^3\\ &=1-y-\tfrac{1}{2}y^2-\tfrac{1}{2}y^3\\ &=1-0.01-0.00005-0.0000005\\ &=0.9899495.\end{aligned}$$

1/50 を 2/100 と書くと便利なのはこのためである。各項が 10 のべきに 1 または $\frac{1}{2}$ を掛けたものになるので、計算はすべて有限小数で正確に行える。

したがって

$$\sqrt{2}\approx\frac{10\times 0.9899495}{7}=\frac{9.899495}{7}=1.41421357\ldots,$$

となり、求められているとおり、小数第 6 位まで $\sqrt{2}\approx 1.414214$ である。

2 の立方根

> **考えてみよう** N と a はどう選ぶか。$(1+N/125)^a$ が $\sqrt[3]{2}$ と関係するのはどういうときか。

$125=5^3$ であるから、$(125+N)/125$ の立方根は $\sqrt[3]{125+N}/5$ となる。したがって、N を小さく保ちつつ、$125+N$ が完全立方数の 2 倍になるようにしたい。2×1^3, 2×2^3, 2×3^3, $2\times 4^3=2,16,54,128$ を見ると、128 は 125 とわずか 3 しか違わない。そこで $N=3$、$a=\frac{1}{3}$ とすると、

$$\left(1+\frac{3}{125}\right)^{1/3}=\frac{\sqrt[3]{128}}{5}=\frac{4\sqrt[3]{2}}{5},\qquad\text{よって}\qquad\sqrt[3]{2}=\frac{5}{4}\left(1+\frac{3}{125}\right)^{1/3}.$$

$(1+x)^{1/3}$ の二項級数は

$$(1+x)^{1/3}=1+\tfrac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\cdot(-\frac{2}{3})}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{3}\cdot(-\frac{2}{3})\cdot(-\frac{5}{3})}{3!}x^3+\cdots=1+\tfrac{1}{3}x-\tfrac{1}{9}x^2+\tfrac{5}{81}x^3-\cdots.$$

と始まる。先ほどと同様、置き換えによって計算がすっきりする。$y=\frac{1}{125}=0.008$ として $x=3y$ とおくと、$\frac{1}{3}x=y$、$\frac{1}{9}x^2=y^2$、$\frac{5}{81}x^3=\frac{5}{3}y^3$ となる。よって

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{3}{125}\right)^{1/3} &\approx 1+y-y^2+\tfrac{5}{3}y^3\\ &=1+0.008-0.000064+\tfrac{5}{3}(0.000000512)\\ &=1.007936+0.00000085333\ldots\\ &=1.00793685333\ldots.\end{aligned}$$

$\frac{5}{4}$ を掛けると

$$\sqrt[3]{2} \approx 1.25 \times 1.00793685333\ldots = 1.25992106\ldots,$$

となり、小数第 6 位まで $\sqrt[3]{2} \approx 1.259921$ である。

検算

電卓によれば $\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$、$\sqrt[3]{2} = 1.25992105\ldots$ であるから、どちらの近似値も小数第 6 位まで正しい。ここで得た値は 1.41421357 と 1.25992107 である。両方の級数について、コンピュータで正確な分数を用いて確認した。省略した最初の項を見れば誤差の大きさがわかる。$-\frac{5}{128}x^4$ は $\sqrt{2}$ の近似値に約 -9×10^{-9} だけ寄与し、$-\frac{10}{243}x^4$ は $\sqrt[3]{2}$ の近似値に約 -1.7×10^{-8} だけ寄与する。どちらも、小数第 6 位を変えてしまう 5×10^{-7} よりはるかに小さい。

よくある間違い

- 倍率を元に戻し忘れること。級数から得られるのは $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ と $\frac{4\sqrt[3]{2}}{5}$ であって、$\sqrt{2}$ や $\sqrt[3]{2}$ そのものではない。
- 級数の符号の誤り。前半では x が負なので、1 の後の 4 つの項はすべて負になる。後半では符号が交互に変わる。
- 早すぎる段階での丸め。最後の割り算や掛け算までは、少なくとも小数第 8 位まで保持すること。

STEP のその先へ

この問題の背後には、剰余項（remainder term）つきのテイラー（Taylor）の定理がある。これは「次の項はごく小さい」という感覚を、誤差に対する厳密な評価に変えるものである。この定理によって、比がおよそ 0.02 の級数では 1 項ごとに小数がおよそ 1.5 桁から 2 桁ずつ正確になる理由が説明できる。また、目標とする数の簡単な倍数に p^n/q^n が近くなるような有理数 p/q を見つけるという同じ工夫は、数論における連分数（continued fraction）や有理近似（rational approximation）につながる。これらについて読むには Davenport の *The Higher Arithmetic*（数論の入門書）がよく、テイラーの剰余項については Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）が丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 1998、第 3 問

純粋数学 ・ 望遠鏡型級数

> **STEP II 1998、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q3

鍵となる考え方

一般項の分母に連続する因数の積があれば、部分分数（partial fractions）に分解するのが定石である。分解した各項は和をとると互いに打ち消し合い（telescope）、両端の数項だけが残る。後半では、比 a_n/a_{n-1} が与えられているので、a_n/a_1 は比の積として表され、その積もまた打ち消し合う。うまくいけば、それによって a_n が前半の級数（series）に戻るのだが、実際にそうなる。

解答

和 S_N

次のようにおく。

$$\frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}.$$

カバーアップ法（cover-up rule）を用いる。$n=0$ のとき $A = \frac{-1}{1\cdot 2} = -\frac{1}{2}$、$n=-1$ のとき $B = \frac{-3}{(-1)(1)} = 3$、$n=-2$ のとき $C = \frac{-5}{(-2)(-1)} = -\frac{5}{2}$ である。よって

$$\frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)} = -\frac{1}{2n} + \frac{3}{n+1} - \frac{5}{2(n+2)}.$$

$A+B+C=0$ であることに注意する。これこそが和が打ち消し合う理由である。

$H_N = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}$ とおく。すると

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} = H_N - 1 + \frac{1}{N+1}, \qquad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2} = H_N - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}.$$

したがって

$$\begin{aligned} S_N &= -\tfrac{1}{2}H_N + 3\left(H_N - 1 + \frac{1}{N+1}\right) - \tfrac{5}{2}\left(H_N - \tfrac{3}{2} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right) \\ &= \left(-\tfrac{1}{2} + 3 - \tfrac{5}{2}\right)H_N + \left(-3 + \tfrac{15}{4}\right) + \left(3 - \tfrac{5}{2}\right)\frac{1}{N+1} - \frac{5}{2(N+2)} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2(N+1)} - \frac{5}{2(N+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{N+1} - \frac{5}{N+2}\right), \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。H_N の係数が消えるのは $A+B+C=0$ だからである。

$N \to \infty$ のとき、$\frac{1}{N+1}$ と $\frac{5}{N+2}$ はともに 0 に収束（converge）するので、

$$S_N \to \frac{3}{4}.$$

数列 a_n

$n \geq 2$ に対して、与えられた比を掛け合わせる。

$$\frac{a_n}{a_1} = \prod_{k=2}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+2} \times \prod_{k=2}^{n} \frac{2k-1}{2k-3}.$$

考えてみよう この二つの積はどのように簡単になるか。

書き出してみよう。二つ目の積は、各分子が次の分母と打ち消し合うので、そのまま消えていく。

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{2k-1}{2k-3} = \frac{3}{1}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{5}\cdots\frac{2n-1}{2n-3} = 2n-1.$$

一つ目の積では、分子は $1, 2, \ldots, n-1$、分母は $4, 5, \ldots, n+2$ をわたる。4 から $n-1$ までがすべて約分されるので、

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+2} = \frac{(n-1)!}{(n+2)!/3!} = \frac{6}{n(n+1)(n+2)}.$$

この階乗（factorial）による表示は、約分するものがない $n < 5$ の場合も含め、すべての $n \geq 2$ で成り立つ。したがって

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{6(2n-1)}{n(n+1)(n+2)}.$$

$n = 1$ のとき右辺は $\frac{6}{6} = 1$ となるので、この式はすべての $n \geq 1$ で成り立つ。確認として、$n = 2$ とすると $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ となり、与えられた比 $\frac{1\cdot 3}{4\cdot 1}$ と一致する。

$a_1 = \frac{2}{9}$ のとき、

$$a_n = \frac{2}{9}\cdot\frac{6(2n-1)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{4}{3}\cdot\frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)}.$$

よって a_n は前半の級数の第 n 項の $\frac{4}{3}$ 倍である。その部分和（partial sums）は $\frac{4}{3}S_N \to \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}$ となるので、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1.$$

検算

- $N=1$：公式から $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-\frac{5}{3}\right)=\frac{1}{6}$ となり、これは第 1 項 $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$ である。$N=2$ のときは $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{4}\right)=\frac{7}{24}=\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$ となる。どちらも正しい。
- 数値的には、最初の 1999 項の和は 0.74900… であり、公式が予測するとおり下から $\frac{3}{4}$ に近づいている（$S_N \approx \frac{3}{4}-\frac{2}{N}$）。
- $a_1=\frac{2}{9}$ として漸化式（recurrence）から a_n を生成すると、最初の 299 項の和は 0.9911… となる。残りの部分はおよそ $\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{300}\approx 0.009$ なので、総和が 1 であることと矛盾しない。

よくある間違い

- 打ち消し合う和の両端の扱いを誤る。上のように H_N を用いて書けば、項の管理を正確に行える。
- 階乗の積で位置を一つずらして誤る。約分する前に、最初と最後のいくつかの因数を書き出すこと。
- a_n/a_1 の式が、積が空となる $n=1$ でも成り立つことの確認を忘れる。

STEP のその先へ

打ち消し合う和は、微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）の離散版である。$\int f' = f(b)-f(a)$ と同様に、$\sum(f(n+1)-f(n)) = f(N+1)-f(1)$ が成り立つ。後半の数列は**超幾何**数列（hypergeometric sequence）であり、隣り合う項の比が n の有理関数（rational function）になっている。Gosper のアルゴリズムは、そのような和が閉じた形で表せるのはどのような場合かを正確に判定するものであり、数式処理システム（computer algebra system）はこの方法で級数の和を求めている。部分和の極限の解析については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照のこと。

解答例

STEP II 1998、第 4 問

純粋数学 ・ 部分積分

> **STEP II 1998、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q4

鍵となる考え方

厄介な因子 $\operatorname{cosec}(x/2)$ はそのままでは積分できないが、隣り合う二つの被積分関数（integrand）の**差**はずっと扱いやすい。正弦の差の公式から因子 $\sin(x/2)$ が現れ、これが余割（cosecant）をちょうど打ち消すのである。残るのは多項式と余弦の積であり、これは標準的な部分積分（integration by parts）で処理できる。あとは差を足し合わせると途中の項が次々に消え合い（telescope）、手で計算できる初期値まで帰着する。

解答

差 $I_n - I_{n-1}$

$nx + x/2 = (n + \frac{1}{2})x$ であるから、二つの被積分関数の差は

$$\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left[\sin(n+\tfrac{1}{2})x - \sin(n-\tfrac{1}{2})x\right]\operatorname{cosec}\tfrac{x}{2}$$

である。和積公式（factor formula）$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$ において $\frac{A+B}{2} = nx$、$\frac{A-B}{2} = \frac{x}{2}$ とすると、

$$\sin(n+\tfrac{1}{2})x - \sin(n-\tfrac{1}{2})x = 2\cos nx\,\sin\tfrac{x}{2}.$$

$\sin\frac{x}{2}$ が余割を打ち消すので、

$$I_n - I_{n-1} = 2\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

考えてみよう $\operatorname{cosec}(x/2)$ が無限大となる $x=0$ において、この打ち消しは正当だろうか？

正当である。$\sin(n+\frac{1}{2})x \big/ \sin\frac{x}{2} \to 2n+1$ であるから、もとの各被積分関数は $x\to 0$ のとき有限の極限をもち、積分はまったく通常のものである。$0<x\le\pi$ では打ち消しは厳密な代数的操作であり、被積分関数を一点 $x=0$ で変えても積分の値は変わらない。

次に $u=\frac{\pi}{2}-x$、$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\cos nx$ として部分積分を行う。このとき $v=\frac{1}{n}\sin nx$ である（$n\ge 1$ なので有効）。

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)\cos nx\,\mathrm{d}x &= \left[\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx\,\mathrm{d}x\\ &= 0+\frac{1}{n}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi = \frac{1-\cos n\pi}{n^2} = \frac{1-(-1)^n}{n^2},\end{aligned}$$

ここで $\sin 0=\sin n\pi=0$ であるから境界項は消える。したがって

$$I_n - I_{n-1} = \frac{2\bigl(1-(-1)^n\bigr)}{n^2} = \begin{cases}\dfrac{4}{n^2}, & n\text{ が奇数},\\[2mm] 0, & n\text{ が偶数}.\end{cases}$$

I_n の計算

差を足し合わせるには初期値が必要である。この積分は I_0 も同様に定める。$n=0$ のとき被積分関数は $(\frac{\pi}{2}-x)\sin\frac{x}{2}\operatorname{cosec}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}-x$ となるので、

$$I_0=\int_0^\pi\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\left[\tfrac{\pi}{2}x-\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^\pi=0$$

であり、上の差の公式は $n=1$ でも成り立つ（計算で用いたのは $n\ge 1$ だけである）。$1,2,\dots,n$ についての差を足し合わせると、

$$I_n = I_0+\sum_{k=1}^{n}\bigl(I_k-I_{k-1}\bigr)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2\bigl(1-(-1)^k\bigr)}{k^2}.$$

寄与するのは奇数の k のみで、それぞれ $4/k^2$ を与えるから、

$$\boxed{I_n = 4\sum_{\substack{k=1\\ k\text{ は奇数}}}^{n}\frac{1}{k^2}=4\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right),}$$

最後の項は n が奇数なら $1/n^2$、n が偶数なら $1/(n-1)^2$ である。同値な表し方として、$m=\lceil n/2\rceil$ とおけば $I_n=4\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{(2r-1)^2}$ である。

$n=0$ を用いることに不安があるなら（問題文では n は正の整数とされている）、代わりに I_1 から始めればよい。$\sin\frac{3x}{2}=\sin\frac{x}{2}(1+2\cos x)$ であるから、上の部分積分を

$n=1$ で用いて $I_1=\int_0^{\pi}(\frac{\pi}{2}-x)(1+2\cos x)\,\mathrm{d}x=0+2\cdot 2=4$ を得る。これは公式と一致する。

検算

- $I_1=I_2=4$、$I_3=I_4=4+\frac{4}{9}=\frac{40}{9}\approx 4.4444$ である。もとの積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると（$x=0$ では被積分関数の極限値 $\frac{\pi}{2}(2n+1)$ を用いる）、I_3 について $4.444444\ldots$ が得られ、$n\le 12$ のすべてについて和と 10^{-8} の精度で一致する。
- n に対する被積分関数は $\frac{\pi}{2}-x$ と $1+2\cos x+\cdots+2\cos nx$ の積であり、$\frac{\pi}{2}-x$ は $x=\frac{\pi}{2}$ に関して奇関数である。偶数の k に対して（および定数 1 に対して）、$\cos kx$ は $x=\frac{\pi}{2}$ に関して偶関数であるから、積は奇関数となり、$[0,\pi]$ 上で積分すると 0 になる。これが $I_0=0$ となり、偶数の k が何も寄与しない理由である。

よくある間違い

- 正弦の差の公式で符号や因子 2 を誤る。$x=\pi$、$n=1$ のような値で確かめるとよい。
- $(-1)^n$ ではなく $\cos n\pi=1$ と書いてしまう。こうするとすべての差が 0 になってしまう。
- 初期値を忘れる。あるいは、偶数番目の項が消えることに気づかず、答えをすべての k にわたる和として書いてしまう。

STEP のその先へ

関数 $\sin(n+\frac{1}{2})x\big/\sin\frac{x}{2}=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx$ は**ディリクレ核**（Dirichlet kernel）と呼ばれ、フーリエ級数（Fourier series）の収束（convergence）を証明する際の中心的な対象である。$n\to\infty$ のとき、$\sum_{\text{奇数}k}1/k^2=\pi^2/8$ を用いると、我々の和は $4\cdot\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{2}$ に収束する。これはオイラー（Euler）による $\sum 1/k^2=\pi^2/6$ の近い親戚である（数値的には $I_{200}\approx 4.925$ に対して $\pi^2/2\approx 4.935$ である）。フーリエ級数とこれらの和については Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）に詳しく、収束の背後にある解析学については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）がよい。

解答例

STEP II 1998、第 5 問

純粋数学 ・ 複素数の三角不等式

> **STEP II 1998、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q5

鍵となる考え方

$|z_1 - z_2|$ は複素数平面（Argand diagram）上の 2 点間の距離であるから、$|z_1 + z_2|$ に関する不等式は、三角形の 1 辺の長さは他の 2 辺の長さの和を超えないという主張にすぎない。これを n 項の場合に拡張してしまえば、最後の小問は各項をその絶対値で評価し、等比級数（geometric series）であることに気づけばよい。$|z|$ が小さいと左辺は小さくなりすぎて、決して 1 に届かないのである。

解答

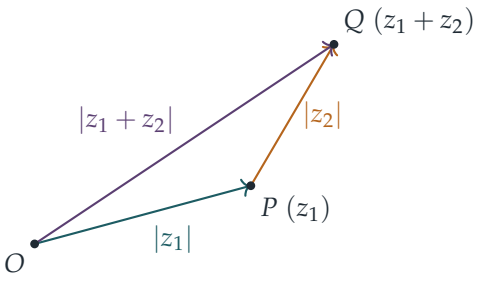
絶対値、距離、三角不等式

x, y を実数として $z = x + \mathrm{i}y$ とすると、z の絶対値（modulus）は

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

であり、これは原点から z を表す点 (x, y) までの距離である。$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$、$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ とすると、$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ であり、これは z_1 と z_2 を表す 2 点間の距離である。

ここで、0、z_1、$z_1 + z_2$ を表す点をそれぞれ O、P、Q とする。



上の解釈により、

$$OP = |z_1 - 0| = |z_1|, \qquad PQ = |(z_1+z_2) - z_1| = |z_2|, \qquad OQ = |z_1+z_2|.$$

線分 OQ は O から Q への最短経路であるから、経路 $O \to P \to Q$ より長くはない。すなわち $OQ \le OP + PQ$ であり、等号が成り立つのは P が線分 OQ 上にあるとき（点が一致する退化した場合も含む）に限る。したがって

$$|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

n 項の不等式

すべての $n \ge 1$ とすべての複素数 $z_1, \dots, z_n$ に対して

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$

が成り立つことを数学的帰納法（induction）で証明する。$n = 1$ のとき、両辺はともに $|z_1|$ に等しい。ある $n = k \ge 1$ で結果が成り立つと仮定する。$z_1, \dots, z_{k+1}$ が与えられたとき、2 つの複素数 $w = z_1 + \cdots + z_k$ と z_{k+1} に 2 項の不等式を適用すると、

$$\begin{aligned} |z_1 + \cdots + z_k + z_{k+1}| = |w + z_{k+1}| &\le |w| + |z_{k+1}| \\ &\le |z_1| + \cdots + |z_k| + |z_{k+1}|, \end{aligned}$$

となる。ここで最後の段階では帰納法の仮定を用いた。よって結果は $n = k+1$ でも成り立ち、数学的帰納法によりすべての $n \ge 1$ で成り立つ。

最後の小問

$|z| \le \frac{1}{4}$ と仮定し、$r = |z|$ とおくと $0 \le r \le \frac{1}{4}$ である。各項は $|a_k z^k| = |a_k|\,|z|^k \le 3r^k$ を満たすので、n 項の不等式により

$$\begin{aligned} |a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n| &\le |a_1|\, r + |a_2|\, r^2 + \cdots + |a_n|\, r^n \\ &\le 3\big(r + r^2 + \cdots + r^n\big). \end{aligned}$$

考えてみよう $3(r+r^2+\cdots+r^n)$ をどのように 1 と比較できる形に変形すればよいか。また、不等式が**狭義**（strict）であることをどのように保証すればよいか。

これは有限の等比級数であり、$r \le \frac{1}{4} < 1$ であるから和の公式が使える。

$$3\left(r+r^2+\cdots+r^n\right) = \frac{3r(1-r^n)}{1-r}.$$

$r = 0$ ならばこれは 0 である。$0 < r \le \frac{1}{4}$ ならば $0 < 1-r^n < 1$ であるから

$$\frac{3r(1-r^n)}{1-r} < \frac{3r}{1-r} \le \frac{3\cdot\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = 1,$$

となる。ここで最後の段階が成り立つのは、$\dfrac{3r}{1-r}$ が $[0,1)$ 上で r について増加するからである（分子は増加し、正の分母は減少する）。いずれの場合も

$$|a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n| < 1,$$

であるから、左辺は 1 に等しくなりえない。よって、この方程式は $|z| \le \frac{1}{4}$ の範囲に解をもたない。

検算

- この評価は最良である。すべての $a_k = 3$、$z = \frac{1}{4}$ とすると、左辺は $3\left(\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4^n}\right) = 1-4^{-n}$ となり、例えば $n = 1,2,3$ に対して 0.75、0.9375、0.984375 である。いくらでも 1 に近づくが決して到達しない。これが狭義の不等式が重要である理由である。
- $n \le 15$、$|a_k| \le 3$ を満たす a_k、$|z| \le \frac{1}{4}$ を満たす z を 200 000 通り無作為に選んで試したところ、得られた $|a_1 z+\cdots+a_n z^n|$ の最大値は約 0.996 であり、常に 1 を下回った。

よくある間違い

- 無限和の評価 $3r/(1-r) \le 1$ だけを用いると $|\text{左辺}| \le 1$ しか得られず、解の存在を否定できない。有限和（あるいは $r > 0$ のとき $r^n > 0$ であるという事実）によって狭義の不等式が得られる。
- 帰納法において、n 項の不等式は $z_1+\cdots+z_k$ を **1 つの**複素数とみなして適用しなければならない。それこそがこの段階の要点である。

STEP のその先へ

三角不等式（triangle inequality）は**距離**（metric）を定義する性質であり、$|z_1 - z_2|$ によって $\mathbb{C}$ は距離空間（metric space）となる。解析学における収束（convergence）の議論のほとんどはこれに基づいている。最後の小問は、多項式や冪級数（power series）の零点（zeros）の位置を特定する諸結果の初歩版である。ここでは $f(z) = a_1 z + \cdots + a_n z^n - 1$ は円板 $|z| \leq \frac{1}{4}$ に零点をもたず、これはルーシェ（Rouché）の定理の精神に通じるものである。複素数の幾何については Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析）を、解析学における距離の考え方については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を読むとよい。

解答例

STEP II 1998、第 6 問

純粋数学 ・ サイクロイドと法線

> **STEP II 1998、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q6

鍵となる考え方

2 つの曲線はどちらもサイクロイド（cycloid）、すなわち転がる円の周上の 1 点が描く軌跡である。半角の公式（half-angle formulae）$1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$、$1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$、$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ を使えば、これらに関するあらゆる計算が簡単になる。傾き（gradient）は $\frac{\theta}{2}$ の tan または cot ひとつにまとまり、法線（normal）の方程式もすっきりとした 1 本の直線の式に縮まる。直線が曲線 (2) の接線（tangent）であることを示すには、その直線上にあり、かつそこでの曲線の傾きが直線の傾きと等しくなるような (2) 上の点を見つければよい。

（問題文の 2 つ目の曲線では y_2 とすべきところが y_1 となっているが、これは誤植である。）

解答

傾き

曲線 (1) について、$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\theta} = 1+\cos\theta$、$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta$ であるから、

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_1} = \frac{-\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = -\tan\frac{\theta}{2},$$

となる。これは $\cos\frac{\theta}{2} \neq 0$、すなわち $\theta \neq \pi$ であるところで成り立つ。

曲線 (2) について、$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\theta} = 1-\cos\theta$、$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}\theta} = \sin\theta$ であるから、

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x_2} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2},$$

となる。これは $\theta \neq 0, 2\pi$ で成り立つ。

$\theta = \pi/2$ のとき $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$ であり、曲線 (1) の傾きは -1、曲線 (2) の傾きは 1 である。

$\theta = 3\pi/2$ のとき $\frac{\theta}{2} = \frac{3\pi}{4}$ であり、そこでは $\tan = -1$、$\cot = -1$ である。よって曲線 (1) の傾きは 1、曲線 (2) の傾きは -1 である。

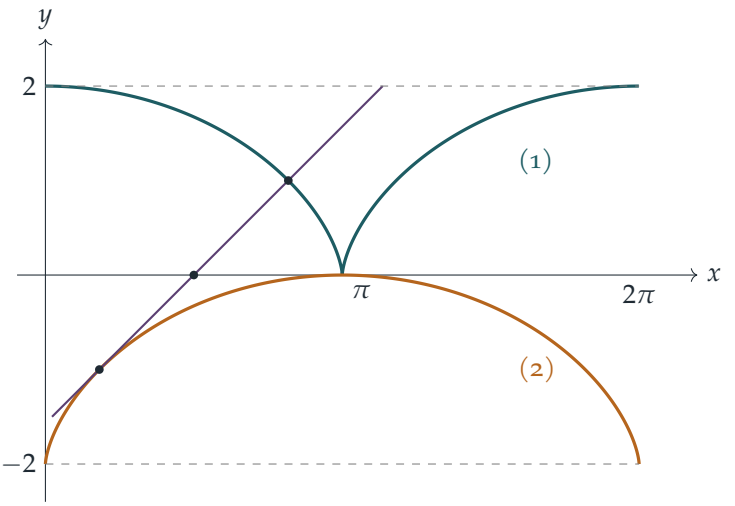
概形

x_1 と x_2 はどちらも θ について単調非減少である（導関数 $1 \pm \cos\theta$ は決して負にならない）。したがって、どちらの曲線も $x = 0$ から $x = 2\pi$ まで左から右へ進む。

曲線 (1) は傾き 0 で $(0, 2)$ から出発し、$(\pi, 0)$ まで下がったのち、対称的に $(2\pi, 2)$ まで上がる。$\theta = \pi$ では両方の導関数が 0 になり、$|\mathrm{d}y_1/\mathrm{d}x_1| = |\tan\frac{\theta}{2}| \to \infty$ となるので、$(\pi, 0)$ に鉛直な接線をもつ尖点（cusp）がある。$0 \leq y_1 \leq 2$ であるから、この曲線は $y = 0$ と $y = 2$ の間にある。

曲線 (2) は $(0, -2)$ に尖点をもち（$\cot\frac{\theta}{2} \to \infty$ より接線は鉛直）、傾きが $\cot\frac{\pi}{2} = 0$ となる $(\pi, 0)$ まで上がったのち、尖点 $(2\pi, -2)$ まで下がる。これは直線 $y = -2$ の上に立つ通常のサイクロイドの 1 つのアーチである。

2 つの曲線は $(\pi, 0)$ で接する。曲線 (1) はそこへ鉛直に到達し、曲線 (2) はそこを水平に通過する。$\theta \mapsto 2\pi - \theta$ は $x \mapsto 2\pi - x$ を引き起こし、どちらの曲線でも y を変えないので、図は $x = \pi$ に関して対称である。紫色の直線は $\theta = \pi/2$ における (1) の法線であり、これについては後で扱う。



曲線 (1) の法線

(1) の接線の傾きは $-\tan\frac{\theta}{2}$ であるから、法線の傾きは $\cot\frac{\theta}{2}$ である（$\theta \neq 0, \pi, 2\pi$ のとき。これらの場合は後で扱う）。点 $(\theta+\sin\theta,\ 1+\cos\theta)$ における法線は

$$y-(1+\cos\theta)=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\left(x-\theta-\sin\theta\right).$$

である。両辺に $\sin\frac{\theta}{2}$ を掛け、半角の形を用いると

$$y\sin\tfrac{\theta}{2}-2\cos^2\tfrac{\theta}{2}\sin\tfrac{\theta}{2}=(x-\theta)\cos\tfrac{\theta}{2}-2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos^2\tfrac{\theta}{2}.$$

となる。両辺の最後の項は等しいので打ち消し合い、

$$\boxed{y\sin\tfrac{\theta}{2}=(x-\theta)\cos\tfrac{\theta}{2}}$$

が法線の方程式として残る。

この形は例外的な値も含んでいる。$\theta=0$ のときは $x=0$ となり、これは $(0,2)$ を通る鉛直な直線である。そこでの接線は水平なので、これは正しい。$\theta=2\pi$ のときも同様に $x=2\pi$ となる。$\theta=\pi$ のときは $y=0$ となり、これは尖点を通る水平な直線で、尖点における鉛直な接線に垂直である。

法線がつねに x 軸上の点 $(\theta,0)$ を通ることに注意しよう。これは転がる円が、その上を転がる直線と接する点であり、サイクロイドのよく知られた性質である。

法線は曲線 (2) の接線である

考えてみよう 法線は曲線 (2) のどの点で接するはずだろうか。

パラメータ ϕ における (2) の接線の傾きは $\cot\frac{\phi}{2}$ であり、法線の傾きは $\cot\frac{\theta}{2}$ である。cot は $(0,\pi)$ 上で単射（one-to-one）であるから、$(0,2\pi)$ 内の ϕ,θ に対して両者が一致するのは $\phi=\theta$ のときに限る。したがって候補となるのは、同じパラメータ θ をもつ (2) 上の点だけである。

その点は $(x_2,y_2)=(\theta-\sin\theta,\ -(1+\cos\theta))$ である。これを法線の方程式に代入すると

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=y_2\sin\tfrac{\theta}{2}=-2\cos^2\tfrac{\theta}{2}\sin\tfrac{\theta}{2},\\ \text{右辺}&=(x_2-\theta)\cos\tfrac{\theta}{2}=-\sin\theta\cos\tfrac{\theta}{2}=-2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos^2\tfrac{\theta}{2}.\end{aligned}$$

となる。両者は等しいので、θ における (1) の法線は、パラメータ θ をもつ (2) 上の点を通る。その点における (2) の傾きは $\cot\frac{\theta}{2}$ であり、法線の傾きと同じである。曲線上

の点を通り、そこでの曲線の傾きをもつ直線はその点における接線であるから、(1) の法線は (2) の接線である。これが示すべきことであった。

特別な値でも成り立つ。$\theta = \pi$ のとき、法線 $y = 0$ は (2) の頂点 $(\pi, 0)$ で (2) に接し、そこでの (2) の傾きは 0 である。$\theta = 0$（または 2π）のとき、法線 $x = 0$（または $x = 2\pi$）は (2) の尖点における鉛直な接線である。

検算

- $\theta = \pi/2$ のとき法線は $y = x - \frac{\pi}{2}$ である。これは (1) 上の点 $(\frac{\pi}{2} + 1, 1)$、点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$、そして (2) 上の点 $(\frac{\pi}{2} - 1, -1)$ を通り、最後の点での (2) の傾きは、最初の部分で求めたとおり 1 である。これが概形の図の紫色の直線である。
- 差分（finite differences）による傾きの数値的な検算は、小数第 6 位まで $-1,1$ および $1, -1$ と一致した。1000 個のランダムな θ の値において、法線は両方の点を通り、(2) の接線と平行であることが 10^{-12} 以内の誤差で確かめられた。

よくある間違い

- 傾きを $-\sin\theta/(1+\cos\theta)$ のままにして、法線について煩雑な計算を延々と続けてしまう。半角の形を使えば、法線は 2 行の計算で済む。
- 法線が曲線 (2) と交わることだけを示してしまう。交わるだけでは不十分であり、交点で傾きが一致することも必要である。

STEP のその先へ

曲線の曲率中心（centre of curvature）が描く曲線をその曲線の**縮閉線**（evolute）といい、これはその曲線の法線の包絡線（envelope）でもある。この問題は、サイクロイドの縮閉線が、アーチ半分だけずらした合同なサイクロイドであることを示している。(1) から (2) との接点までの法線に沿った距離は $4|\cos\frac{\theta}{2}|$ であり、これはちょうど、その点から頂点までの (2) の弧長（arc length）に等しい。したがって (1) は、(2) から巻きほどかれていく糸の端が描く曲線である。ホイヘンス（Huygens）はこれを利用して、周期が振幅に依存しない振り子を作った。曲率、縮閉線、伸開線（involute）については、Pressley, *Elementary Differential Geometry*（初等微分幾何学）を読んでみるとよい。

解答例

STEP II 1998、第 7 問

純粋数学 ・ 導関数による不等式

> **STEP II 1998、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q7

鍵となる考え方

どの不等式も同じ方法で証明できる。関数が $x = 0$ で 0 となり、その導関数（derivative）が正であるから、関数は 0 から増加していく。面白いのは、これらの関数が連鎖している点である。g の導関数には f が現れ、h の導関数は g に $2x$ を代入したものになる。したがって、各小問が次の小問で必要となる「導関数が正」という事実を与えてくれる。小問 (iv) では、対数（logarithm）をとることで商 F が和に変わり、F'/F の符号は小問 (iii) の式の符号に帰着する。

解答

全体を通して用いる道具は次のとおりである。ϕ が微分可能で、$\phi(0) = 0$ かつ $0 < x < a$ において $\phi'(x) > 0$ ならば、ϕ は $[0, a)$ で狭義単調増加（strictly increasing）であり、したがって $0 < x < a$ において $\phi(x) > \phi(0) = 0$ が成り立つ。（平均値の定理（mean value theorem）より、ある $c \in (0, x)$ に対して $\phi(x) = \phi(x) - \phi(0) = x\phi'(c)$ となり、これは正である。）

小問 (i)

$\mathrm{f}(0) = \tan 0 - 0 = 0$ であり、

$$\mathrm{f}'(x) = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x.$$

$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ では $\tan x$ は定義されて正であるから、$\mathrm{f}'(x) > 0$ である。よって $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ において $\mathrm{f}(x) > 0$、すなわちこの範囲で $\tan x > x$ が成り立つ。

小問 (ii)

ここでも $g(0) = 2 - 2 - 0 = 0$ である。$x \sin x$ に積の微分法（product rule）を用いて微分すると、

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2\sin x - (\sin x + x\cos x) \\ &= \sin x - x\cos x \\ &= \cos x\,(\tan x - x) = \cos x\, f(x). \end{aligned}$$

$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ では $\cos x > 0$ であり、小問 (i) より $f(x) > 0$ である。よって $g'(x) > 0$ であり、$g(0) = 0$ であるから、$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ において $g(x) > 0$ が従う。

小問 (iii)

再び $h(0) = 0$ である。微分すると、

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2 + \cos 2x - 2x\sin 2x - 3\cos 2x \\ &= 2 - 2\cos 2x - 2x\sin 2x. \end{aligned}$$

考えてみよう この式は以前に見たことがないだろうか？

これは g の x を $2x$ に置き換えたものである：

$$h'(x) = 2 - 2\cos(2x) - (2x)\sin(2x) = g(2x).$$

$0 < x < \frac{1}{4}\pi$ ならば $0 < 2x < \frac{1}{2}\pi$ であるから、小問 (ii) より $g(2x) > 0$ である。範囲が $\frac{1}{2}\pi$ ではなく $\frac{1}{4}\pi$ になっているのはこのためである。よって $0 < x < \frac{1}{4}\pi$ において $h'(x) > 0$ であり、$h(0) = 0$ と合わせて、$0 < x < \frac{1}{4}\pi$ において $h(x) > 0$ が得られる。

問題文の「hence（これを用いて）」の部分については、与えられた式を 2 倍角の公式（double-angle formulae）で書き直す。$\sin^2 x + 3\cos^2 x = 1 + 2\cos^2 x = 2 + \cos 2x$ および $3\sin x\cos x = \frac{3}{2}\sin 2x$ であるから、

$$\begin{aligned} x(\sin^2 x + 3\cos^2 x) - 3\sin x\cos x &= x(2 + \cos 2x) - \tfrac{3}{2}\sin 2x \\ &= 2x + x\cos 2x - \tfrac{3}{2}\sin 2x = h(x). \end{aligned}$$

したがってこの式はちょうど $h(x)$ に等しく、$0 < x < \frac{1}{4}\pi$ において正である。以上で示された。

小問 (iv)

$0 < x < \frac{1}{4}\pi$ では x、$\sin x$、$\cos x$ はいずれも正であるから、$F(x) > 0$ であり、対数をとることができる：

$$\ln F(x) = \ln x + \tfrac{1}{3}\ln\cos x - \ln\sin x.$$

両辺を x で微分すると、

$$\frac{\mathrm{F}'(x)}{\mathrm{F}(x)} = \frac{1}{x} - \frac{\sin x}{3\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}.$$

考えてみよう この式の符号はどうすればわかるだろうか？

この区間で正である共通の分母 $3x\sin x\cos x$ で通分する：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{F}'(x)}{\mathrm{F}(x)} &= \frac{3\sin x\cos x - x\sin^2 x - 3x\cos^2 x}{3x\sin x\cos x} \\ &= -\frac{x(\sin^2 x + 3\cos^2 x) - 3\sin x\cos x}{3x\sin x\cos x} = -\frac{\mathrm{h}(x)}{3x\sin x\cos x}.\end{aligned}$$

小問 (iii) より分子 $\mathrm{h}(x)$ は正であり、分母も正であるから、$\mathrm{F}'(x)/\mathrm{F}(x) < 0$ である。$\mathrm{F}(x) > 0$ であるから、両辺に掛けて $0 < x < \frac{1}{4}\pi$ において $\mathrm{F}'(x) < 0$ が得られる。以上で示された。

検算

- いくつかの値：$\mathrm{F}(0.1) \approx 0.999998$、$\mathrm{F}(0.5) \approx 0.99849$、$\mathrm{F}(\frac{1}{4}\pi) \approx 0.98954$ であり、F は減少しているが、その減少はゆるやかである。
- 0 の近くでは、これらの不等式は非常にきわどい。マクローリン展開（Maclaurin series）すると $\mathrm{h}(x) = \frac{4}{15}x^5 + \cdots$ となり、x の項と x^3 の項は打ち消し合う。$\mathrm{h} > 0$ が単純に「見てとれる」わけではなく、導関数の連鎖が必要になるのはこのためである。数値的には $\mathrm{h}(0.01)/0.01^5 \approx 0.26666$ である。
- 4 つの不等式すべてと、恒等式 $\mathrm{g}' = \mathrm{f}\cos x$、$\mathrm{h}'(x) = \mathrm{g}(2x)$、$\mathrm{F}'/\mathrm{F} = -\mathrm{h}/(3x\sin x\cos x)$ を、ランダムに選んだ 20 000 点で確かめた。

よくある間違い

- $\mathrm{f}'(x) \geq 0$ であることしか論じない、あるいは $\mathrm{f}(0) = 0$ を述べ忘れる。0 から始まることと、導関数が狭義に正であることの両方が必要である。
- 小問 (iii) で小問 (ii) を使う際に、$2x$ が $(0, \frac{1}{2}\pi)$ に属することを確認しない。制限 $x < \frac{1}{4}\pi$ が生じるのはまさにこの点からである。
- $\mathrm{F} > 0$ であることに触れずに、$\mathrm{F}'/\mathrm{F} < 0$ から $\mathrm{F}' < 0$ を結論する。

STEP のその先へ

「出発点で 0、導関数が正ならば正」という原理は、大学の解析学（analysis）の講義で最初に出会う大定理の一つである平均値の定理から導かれる。ここでのようにこれを繰り返し用いるのは、$\sin x > x - \frac{1}{6}x^3$ のような不等式（inequality）を証明する標準的な方法であり、剰余項付きテイラーの定理（Taylor's theorem with remainder）と密接に関係している。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、平均値の定理とその応用を丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 1998、第 8 問

純粋数学 ・ ベクトルと図形

> **STEP II 1998、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q8

鍵となる考え方

ここでの議論はすべて、各直線を「点 + 媒介変数（parameter）× 方向」の形に書き、その媒介変数をうまく選ぶことに尽きる。式は $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ について対称であるから、ある媒介変数の値で 3 つのベクトルについて対称な答えが得られれば、その同じ点が 3 本の直線すべての上にある。「見ればわかる」という問題文の言い回しが探すよう促しているのは、まさにこのことである。

解答

中線は R で交わる

BC の中点の位置ベクトル（position vector）は $\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ であるから、A からこの点へ向かう直線は

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + s\left(\tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \mathbf{a}\right) = (1-s)\mathbf{a} + \tfrac{s}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

である。結果が対称になるよう、3 つの係数を等しくしたい。$1-s = \frac{s}{2}$ より $s = \frac{2}{3}$ であり、その点は

$$\mathbf{r} = \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

である。B からの直線と C からの直線は $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を巡回的に入れ替えれば得られ、同じく $s = \frac{2}{3}$ と選べば、それぞれの直線上で同じ対称な点が得られる。よって 3 本の直線はすべて、位置ベクトルが

$$\mathbf{r}_R = \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}),$$

である点 R を通る。これは三角形の重心（centroid）である。（A, B, C は本物の三角形をなすので、これらの直線のうちどの 2 本も一致せず、したがって R はそれらのただ

1 つの共有点である。）

3 本の平行線は Q で交わる

P の位置ベクトルを $\mathbf{p}$ とする。3 本の直線は次のとおりである。

$$\begin{aligned}
&\text{辺}BC\text{ の中点を通り、方向が}PA: \quad \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) + \lambda(\mathbf{a}-\mathbf{p}),\\
&\text{辺}CA\text{ の中点を通り、方向が}PB: \quad \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{a}) + \mu(\mathbf{b}-\mathbf{p}),\\
&\text{辺}AB\text{ の中点を通り、方向が}PC: \quad \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + \nu(\mathbf{c}-\mathbf{p}).
\end{aligned}$$

考えてみよう λ をどんな値にすれば、1 つ目の式は $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ について対称になるか。

1 つ目の直線では、$\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ の係数はどちらも $\frac{1}{2}$ であり、$\mathbf{a}$ の係数は λ である。これらをそろえるには $\lambda = \frac{1}{2}$ とすればよい。このとき

$$\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{p}).$$

となる。残りの 2 本の直線で $\mu = \frac{1}{2}, \nu = \frac{1}{2}$ とすると、まったく同じベクトルが得られる。したがって 3 本の直線はすべて、

$$\mathbf{q} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{p}).$$

で定まる点 Q を通る。

PQ は平面 ABC と R で交わる

まず $Q \neq P$ である。実際、$\mathbf{q} = \mathbf{p}$ ならば $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = 3\mathbf{p}$ となるので $\mathbf{p} = \mathbf{r}_R$ であり、P は点 R に一致してしまうが、この点は平面 ABC 上にある。よって PQ は本物の直線であり、

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + t(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = \mathbf{p} + t\left(\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \tfrac{3}{2}\mathbf{p}\right).$$

と表される。$\mathbf{p}$ の項を消すには $1 - \frac{3}{2}t = 0$、すなわち $t = \frac{2}{3}$ とすればよく、このとき

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \mathbf{p} = \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{r}_R.$$

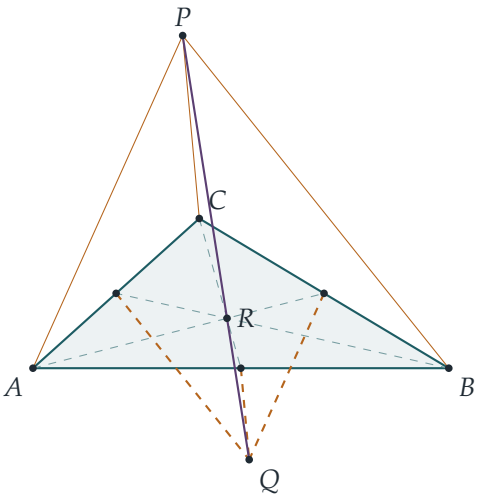
となる。よって R は直線 PQ 上にある。また R は平面 ABC 上にもある（R は A からの中線（median）上にあり、その中線はこの平面内にある）。

考えてみよう PQ が平面と別の場所でも交わることはありうるか。

ありえない。直線と平面は、共有点をもたないか、ちょうど 1 点で交わるか、直線が平面に完全に含まれるかのいずれかである。直線 PQ は平面 ABC に含まれない。な

ぜなら P はこの直線上にあり、しかも P は平面上にないからである。よって直線は平面と高々 1 点で交わり、その点が R である。以上で、PQ が平面 ABC と R で交わることが証明された。

おまけとして、$t = \frac{2}{3}$ から、R は PQ を $PR : RQ = 2 : 1$ の比に内分することがわかる。同じことであるが、$\mathbf{q} - \mathbf{r}_R = -\frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{r}_R)$ が成り立つ。



検算

- 主張した交点はどれも、代入し直して確かめられる。たとえば $\mathbf{q} - \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{p})$ であり、これは明らかに PA に平行である。
- $A = (0,0,0)$, $B = (3,0,0)$, $C = (0,3,0)$, $P = (0,0,3)$ とすると、$R = (1,1,0)$, $Q = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ が得られる。P から Q へ 3 分の 2 進んだ点は $(1,1,0) = R$ であり、平面 $z = 0$ 上にある。
- さらに、A, B, C, P を無作為に 2000 通り選び、有理数の厳密な計算ですべての結果を確かめた。直線 PQ は常に平面 ABC と R で交わり、そのときの媒介変数は $t = \frac{2}{3}$ であった。

よくある間違い

- 方程式を解いて 2 本の直線上にある点を求め、それが 3 本目の直線上にあることを確かめ忘れる。
- R が PQ 上にあることは示しても、それがなぜ PQ と平面が交わる**唯一の**点なのか

を説明しない。P が平面上にないという条件が使われるのは、まさにここである。

STEP のその先へ

この結果の背後には、きれいな幾何学的理由がある。中心 R、拡大率 $-\frac{1}{2}$ の拡大（enlargement）（写像 $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{r}_R - \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_R)$）は、$A, B, C$ をそれぞれ BC, CA, AB の中点に移し、任意の直線をそれに平行な直線に移す。したがってこの拡大は、P で交わる直線 PA, PB, PC を 3 本の新しい直線に移すので、新しい直線は P の像で交わらなければならない。その像が Q であり、拡大の中心は任意の点とその像と同一直線上にある（共線（collinear）である）から、P, R, Q は同一直線上にある。幾何学を変換（アフィン写像（affine map）とその不動点（fixed point））を通して考えることは、大学 1 年の線形代数（linear algebra）の中心的な考え方である。この考え方がどう展開されるかを見るには、ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）がよい。

解答例

STEP II 1998、第 9 問

力学 ・ 骨組構造の静力学

> **STEP II 1998、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q9

鍵となる考え方

骨組み（framework）は軽いので、これにはたらく外力は 2 つだけである。すなわち A における支持力と C における重力である。釣り合い（equilibrium）にある 2 力は、大きさが等しく、向きが反対で、同一直線上になければならない。このことから、支持力も六角形のぶら下がり方も決まる。その後は節点法（method of joints）を用いる。2 本の棒だけが集まる節点（joint）から始めて力を分解（resolve）し、未知の力が高々 2 つであるような節点へと常に移りながら、六角形を一つずつ節点をたどって回っていく。

解答

支持力

六角形の辺と 3 本の対角線の棒を、6 つの頂点でなめらかにピン結合された（smoothly pinned）軽い棒（light rod）としてモデル化し、1 kg の質点の重さを W と書く。したがって $W = g \approx 9.8\,\mathrm{N}$ である。棒は軽いので、骨組み全体にはたらく外力は、A における支点からの力 $\mathbf{R}$ と、C において鉛直下向きにはたらく重さ W だけである。

> ? **考えてみよう** 骨組みは好きな角度でぶら下がることができるだろうか？

できない。骨組み全体について、力の和は 0 でなければならず、力のモーメント（moment）の総和も 0 でなければならない。A のまわりのモーメントを考えると、支持力のモーメントは 0 なので、C における重さの A のまわりのモーメントも 0 でなければならない。これが起こるのは C が A の真下にあるときに限る。よって骨組みは短

い対角線 AC が鉛直になるようにぶら下がり、力を分解すると

$$\mathbf{R} = W \text{ 鉛直上向き}, \qquad |\mathbf{R}| = g \approx 9.8\,\mathrm{N},$$

となる。これは CA に沿ってはたらく 1 kg の重さである。

棒にはたらく力

辺の長さを 1 とする（力はこれに依存しない）。AC が鉛直のとき、B は AC の高さの中央にあってその片側にあり、六角形の残りの部分は反対側にある。すなわち F は A と同じ高さ、E は B と同じ高さ、D は C と同じ高さにある。よって AF、BE、CD は水平であり、辺 AB、BC、DE、EF は水平と 60° をなし、短い対角線 BD、BF は水平と 30° をなす。

棒 XY の張力（tension）を T_{XY} とする。張力はそれぞれの端で、節点を棒のもう一方の端の方へ引く。張力が負であることは、その棒が圧縮力（thrust）を受けていることを意味する。

> **考えてみよう** 棒にはたらく未知の力は 9 つある。どこから始めればよいだろうか？

2 本の棒だけが集まる節点から始める。そうすれば 2 つの式（水平方向と鉛直方向）をただちに解くことができるからである。節点 C には CB と CD しかなく、しかも荷重がかかっている。

節点 C。棒 CB は水平から 60° 上向きを向き、CD は水平で、B の側とは反対を向く。力を分解すると、

$$\begin{aligned} &\text{鉛直方向：} \quad T_{BC}\sin 60^\circ = W \;\Rightarrow\; T_{BC} = \tfrac{2W}{\sqrt{3}}, \\ &\text{水平方向：} \quad T_{CD} = T_{BC}\cos 60^\circ = \tfrac{W}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

節点 D。ここでの未知数は DE と DB だけである。D から見ると、棒 DC は水平に B の側を向き、DE は水平から 60° 上向きで B の側とは反対を向き、DB は水平から 30° 上向きで B の側を向く。力を分解すると、

$$\begin{aligned} &\text{鉛直方向：} \quad T_{DE}\sin 60^\circ + T_{BD}\sin 30^\circ = 0 \;\Rightarrow\; T_{BD} = -\sqrt{3}\,T_{DE}, \\ &\text{水平方向：} \quad T_{CD} - T_{DE}\cos 60^\circ + T_{BD}\cos 30^\circ = 0 \;\Rightarrow\; T_{CD} - \tfrac{1}{2}T_{DE} - \tfrac{3}{2}T_{DE} = 0, \end{aligned}$$

よって $T_{DE} = \frac{1}{2}T_{CD} = \frac{W}{2\sqrt{3}}$、$T_{BD} = -\frac{W}{2}$ である。

節点 E。棒 ED は水平から 60° 下向き、EF は水平から 60° 上向きを向き、EB は水平であって、いずれも B の側を向く。鉛直方向に分解すると $T_{EF} = T_{DE} = \frac{W}{2\sqrt{3}}$ を得る。

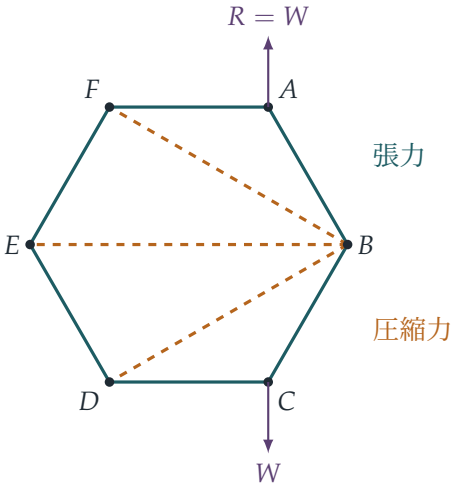
水平方向に分解すると、

$$\tfrac{1}{2}T_{DE} + \tfrac{1}{2}T_{EF} + T_{BE} = 0 \;\Rightarrow\; T_{BE} = -\tfrac{W}{2\sqrt{3}}.$$

節点 F。これは節点 D を直線 BE に関して折り返した鏡像である。鉛直方向に分解すると $T_{BF} = -\sqrt{3}\,T_{EF} = -\frac{W}{2}$、水平方向に分解すると $T_{FA} = 2T_{EF} = \frac{W}{\sqrt{3}}$ である。

節点 A。水平方向について $T_{AB}\cos 60^\circ = T_{FA}$ であるから $T_{AB} = \frac{2W}{\sqrt{3}}$ である。鉛直方向について $R = T_{AB}\sin 60^\circ = W$ であり、最初の小問の結果と一致する。

節点 B からはさらに 2 つの式が得られるが、これらは自動的に成り立つ。骨組み全体がすでに釣り合っているからである。これらを確かめることは、計算の良い検証になる。



まとめると、$W = g$ として次のようになる。

- 6 本の辺はすべて張力を受ける：AB と BC は $\frac{2W}{\sqrt{3}}$、CD と FA は $\frac{W}{\sqrt{3}}$、DE と EF は $\frac{W}{2\sqrt{3}}$ である。
- 内側の 3 本の棒はすべて圧縮力を受ける：BD と BF は $\frac{W}{2}$、BE は $\frac{W}{2\sqrt{3}}$ である。

よって BE にはたらく力は大きさ

$$\frac{g}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,g}{6} \approx 2.83\ \mathrm{N}$$

の圧縮力である。

検算

- 対称性：直線 BE に関して折り返すと $A \leftrightarrow C$、$F \leftrightarrow D$ が入れ替わり、A における上向きの力 W は C における下向きの力 W に移る。よって荷重のかかり方は対称であり、答えも対称になるはずである：$T_{AB} = T_{BC}$、$T_{FA} = T_{CD}$、$T_{EF} = T_{DE}$、$T_{BF} = T_{BD}$。実際そうなっている。
- 節点 B：水平方向について、2 本の辺は一方の向きに $2 \cdot \frac{2W}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}$ を与え、BD、BF、BE は反対の向きに $2 \cdot \frac{W}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{W}{2\sqrt{3}} = \frac{2W}{\sqrt{3}}$ を与える。鉛直方向については、AB と BC が打ち消し合い、BD と BF も打ち消し合う。
- $g = 9.8$ として 12 個の節点の式すべてを数値的に解いた。これらは矛盾なく、$R = 9.8\,\mathrm{N}$ 上向きと、圧縮力 $|T_{BE}| \approx 2.829\,\mathrm{N}$ を与え、AC を傾けると解をもたない。

よくある間違い

- 辺や長い対角線が鉛直になるように六角形を描いてしまう。ぶら下がる位置は一意に決まる：C は A の真下にある。
- 節点ごとに符号の約束を取り違える。「張力は節点を棒のもう一方の端の方へ引く」と一度決めておき、どの棒が圧縮力を受けているかは負の答えに教えてもらえばよい。

STEP のその先へ

節点が j 個の骨組みは、棒がちょうど $2j - 3$ 本のとき、剛（rigid）かつ静定（statically determinate）である。ここでは $2 \cdot 6 - 3 = 9$ であり、これが静力学だけで力を求められる理由である。棒がそれより多いと構造は「不静定」（redundant）となり、棒の弾性（elasticity）を考える必要がある。これが構造力学（structural mechanics）の出発点であり、グラフの剛性（rigidity of graphs）の数学の出発点でもある。背景にあるベクトルによる力学については、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を読んでみるとよい。

解答例

STEP II 1998、第 10 問

力学 ・ 動く楔上の質点

> **STEP II 1998、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q10

鍵となる考え方

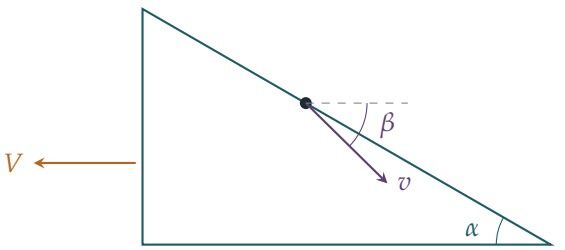
問題全体を動かしているのは二つの事実である。第一に、粒子は面上にとどまるので、そのくさび（*wedge*）に対する速度は面に沿った向きでなければならない。第二に、系の外部から水平方向に押す力はなく、重力以外に仕事をする力もないので、水平方向の運動量とエネルギーがともに保存される。(i)–(iii) はいずれも、これらの事実の一つを式で表したものである。さらに小問 (ii) によって β が決して変化しないことがわかり、そのおかげで最後の部分は等加速度運動に帰着する。

解答

モデル化。粒子は質点とし、くさびは回転せずに滑る剛体とする。面と床はなめらかであり、粒子は面から離れないものとする。図のように、面は右下がりに傾いているとする。すると粒子は右下へ動き、くさびは左へ押される。

水平成分は右向きを正、鉛直成分は上向きを正とすると、

$$\text{粒子の速度} = (v\cos\beta,\ -v\sin\beta), \qquad \text{くさびの速度} = (-V,\ 0).$$



小問 (i)

くさびに対する粒子の相対速度（relative velocity）は

$$(v\cos\beta,\, -v\sin\beta) - (-V,\, 0) = (v\cos\beta + V,\, -v\sin\beta).$$

である。粒子が面上にある間、この相対速度は面に沿っており、水平から下向きに角 α をなす（右下を向く）。よって

$$\frac{v\sin\beta}{v\cos\beta + V} = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

分母を払うと、

$$\begin{aligned} & v\sin\beta\cos\alpha = v\cos\beta\sin\alpha + V\sin\alpha \\ \Longrightarrow \quad & V\sin\alpha = v(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha) = v\sin(\beta - \alpha), \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。これは純粋に運動学（kinematics）の議論である。力学の原理は何も必要なく、粒子が面から離れないという事実だけを使っている。

小問 (ii)

原理：水平方向の運動量保存（conservation of linear momentum）。粒子とくさびを一つの系とみなす。この系にはたらく外力は二つの重力と床からの垂直抗力（normal reaction）であり、床がなめらかなので、これらはすべて鉛直方向である（粒子と面の間の抗力は内力である）。したがって水平方向の運動量の総和は一定であり、すべてが静止状態から動き始めるので、その値は 0 である：

$$mv\cos\beta - MV = 0, \qquad \text{よって} \qquad V = \frac{m}{M}v\cos\beta.$$

これを (i) に代入し、$\sin(\beta - \alpha)$ を展開すると、

$$\frac{m}{M}v\cos\beta\sin\alpha = v(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha).$$

$t > 0$ では粒子は動いているので $v \neq 0$ である。また $\cos\alpha \neq 0$ であり、さらに $\cos\beta \neq 0$ である。実際、もし β が 90° ならば、運動量の式から $V = 0$ となり、すると (i) から $\sin(\beta - \alpha) = 0$、すなわち $\beta = \alpha < 90^\circ$ となって矛盾する。$v\cos\alpha\cos\beta$ で割ると、

$$\frac{m}{M}\tan\alpha = \tan\beta - \tan\alpha \quad \Longrightarrow \quad \tan\beta = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\tan\alpha.$$

考えてみよう なぜ β は単純に α と等しくならないのだろうか？

面そのものが左へ遠ざかっていくからである。くさびから見れば粒子は角 α で斜面を下るが、くさびが後退するため、地面から見ると粒子はより急な角度で落ちていく。

(ii) の右辺が定数であることに注意しよう。β はどの瞬間でも同じ値をとるので、粒子は直線上を運動する。$M \to \infty$ とするとくさびは動かなくなり、$\beta \to \alpha$ となる。これは当然そうあるべき結果である。

小問 (iii)

原理：エネルギー保存（conservation of energy）。接触はすべてなめらかなので、系全体に対して仕事をする力は重力だけである（粒子と面の間の垂直抗力はそれぞれの物体に対しては仕事をするが、相対速度が面に沿っていて抗力と垂直なので、二つの仕事は打ち消し合う。床からの抗力はくさびの運動と垂直である）。くさびの重心（centre of mass）は鉛直方向には動かないので、位置エネルギーの減少量は mgy である。静止状態から始まるので、

$$mgy = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}MV^2.$$

(ii) から得た $V = \dfrac{m}{M} v\cos\beta$ を用いると、

$$mgy = \tfrac{1}{2}mv^2 + \frac{m^2 v^2 \cos^2\beta}{2M}.$$

$2/m$ を掛けると、

$$2gy = v^2\left(1 + \frac{m\cos^2\beta}{M}\right) = \frac{v^2\,(M + m\cos^2\beta)}{M},$$

となり、示すべき式が得られた。

y についての微分方程式

粒子が下降する速さは、その速度の下向き成分である：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v\sin\beta.$$

(iii) に $v = \dot{y}/\sin\beta$ を代入する（$\beta > \alpha > 0$ なので $\sin\beta \neq 0$ であることに注意）。すると次の微分方程式（differential equation）が得られる：

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 = k\,y, \qquad \text{ただし} \qquad k = \frac{2gM\sin^2\beta}{M + m\cos^2\beta}.$$

要点は、k が**定数**だということである。(ii) により β が一定だからである。

これを解くために、両辺を t で微分する：

$$2\dot{y}\,\ddot{y} = k\,\dot{y}.$$

$t > 0$ では粒子は下降しているので $\dot{y} > 0$ であり、これで割ってよい：$\ddot{y} = \tfrac{1}{2}k$。粒子の鉛直方向の運動は、一定の加速度

$$\ddot{y} = \frac{gM\sin^2\beta}{M + m\cos^2\beta}.$$

をもつ。$t = 0$ で $y = 0$ かつ $\dot{y} = 0$（静止状態から始まる）として 2 回積分すると、

$$y = \frac{gMt^2 \sin^2 \beta}{2\,(M + m\cos^2 \beta)},$$

となり、これが求める結果である。

（別解として、正の平方根 $\dot{y} = \sqrt{ky}$ をとり、変数分離（separation of variables）してもよい。$\int y^{-1/2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{k}\,t$ から $2\sqrt{y} = \sqrt{k}\,t$ となり、同じ答えが得られる。先に微分しておけば、解 $y \equiv 0$ について気にせずに済む。この解も $y(0) = 0$ のもとで $\dot{y}^2 = ky$ を満たすが、ここで考えている運動ではない。）

検算

- **固定されたくさび。** $M \to \infty$ とする。すると $\beta \to \alpha$ かつ $y \to \frac{1}{2}gt^2 \sin^2 \alpha$ となり、これは正しい。固定されたなめらかな斜面上では、斜面に沿った加速度は $g \sin \alpha$ であり、その鉛直成分は $g \sin^2 \alpha$ だからである。
- **数値例。** $M = 2, m = 1, \alpha = 30^\circ$ とすると、(ii) から $\tan \beta = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となるので $\sin^2 \beta = \frac{3}{7}, \cos^2 \beta = \frac{4}{7}$ であり、公式から $y = \frac{1}{6}gt^2$ が得られる。$g = 9.8, t = 1$ とすると $y \approx 1.6333$ である。くさびと粒子を直接一歩ずつ数値シミュレーションした結果（垂直抗力を接触条件から求めてニュートン（Newton）の運動法則を適用したもの）も同じ値を与え、さらに無作為に選んだ 2000 通りの場合で (i)–(iii) を丸め誤差の範囲内で満たした。

よくある間違い

- 粒子が水平と角 α をなして動くと述べてしまう。それはくさびに対してのみ正しい。
- 斜面の方向や鉛直方向に運動量を保存させてしまう。床からの抗力は鉛直方向の外力なので、保存されるのは水平成分だけである。
- エネルギーの式でくさびの運動エネルギー $\frac{1}{2}MV^2$ を忘れる。

STEP のその先へ

動く面に拘束された粒子は、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）の古典的な例題である。ラグランジュ力学には大学の 1 年目か 2 年目で出会う。そこでは二つの座標（たとえば、くさびの位置と、粒子が面に沿って下った距離）を選ぶと、拘束力（constraint forces）が方程式から完全に消えてしまうので、一定の加速度がわずか数行

で得られる。拘束のあるニュートン力学や、まさにこの種の問題を数多く扱ったものとしては、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

解答例

STEP II 1998、第 11 問

力学 ・ 放物運動

> **STEP II 1998、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q11

この問題は、*Beyond STEP* の第 11.11 節「**野手はどのように捕球するか**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/fielders.html

鍵となる考え方

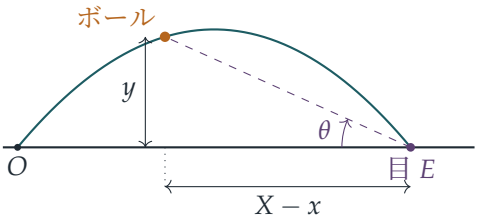
原点をボールが打たれた点（目の高さにある）にとり、$\tan\theta$ を「ボールの高さを、野手（fielder）の目からの水平距離で割ったもの」と書く。目の高さから出発して目の高さに戻ってくる放物体（projectile）の高さは $\frac{1}{2}g\,t(T-t)$ と因数分解できる。ここで T は飛行時間（time of flight）である。野手が正しい位置にたどり着くなら、水平方向の隔たりも $T-t$ の定数倍になる。こうして因数 $T-t$ が約分され、$\tan\theta$ は t に比例する。

解答

ボールを重力のみを受けて運動する質点とみなし（空気抵抗（air resistance）は無視する）、野手の目をボールが打たれた点と同じ高さにある一点とみなす。打った点 O から野手の方向へ水平に x 軸を、鉛直上向きに y 軸をとる。ボールの初速度の水平成分を $U>0$、鉛直成分を $W>0$ とする。このとき時刻 t において

$$x = Ut, \qquad y = Wt - \tfrac{1}{2}gt^2 = \tfrac{1}{2}g\,t\,(T-t), \qquad \text{ただし} T = \frac{2W}{g}$$

であり、これはボールが目の高さに戻ってくる時刻である。



野手の目の水平位置を X とすると（ボールが飛んでいる間は $X > x$ である）、視線は水平から角 θ だけ上向きになり、

$$\tan\theta = \frac{y}{X-x}$$

が成り立つ。

静止している野手

「完璧な位置にいる」とは、ボールが野手の目に届くということである。すなわち野手の目は、ボールが目の高さに戻ってくる点 $X = UT$ にある。このとき $0 < t < T$ に対して

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{UT-Ut} = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{U(T-t)} = \frac{g}{2U}t,$$

となる。ここで、ボールが飛んでいる間は 0 でない $T-t$ を約分した。したがって

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta) = \frac{g}{2U},$$

であり、これは求めるとおり定数である。（捕球の直前には $\tan\theta \to gT/(2U) = W/U$ となる。つまり野手には、ボールが打たれたときとちょうど同じ角度で飛び込んでくるように見える。これは放物線（parabola）の対称性から予想されるとおりである。）

走っている野手

次のボールの速度成分を U, W とし（したがって再び $T = 2W/g$ として $y = \frac{1}{2}gt(T-t)$ である）、ボールが打たれた瞬間に野手は O から距離 D の位置にいて、打者（batsman）に向かって一定の速さ v で走るとする。野手の目は $X = D - vt$ にあるから、

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{D-(U+v)t}. \qquad (*)$$

野手がボールを捕れるのは、時刻 T にボールが目の高さに戻ってくる点にちょうど野手の目があるとき、すなわち

$$D - vT = UT \quad \Longleftrightarrow \quad D = (U+v)T.$$

のときである。これが成り立つことと $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta)$ が定数であることが同値であることを示す。そうすれば、「$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta)$ が一定に保たれるように v を選べ」が正しい規則であることがわかる。

野手が正しい速さを選んだとすると、$D=(U+v)T$ であり、$(*)$ は

$$\tan\theta=\frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{(U+v)(T-t)}=\frac{g}{2(U+v)}t,\qquad \text{よって}\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta)=\frac{g}{2(U+v)},$$

となり、これは定数である。これはちょうど前半の結果で、U を野手に対するボールの相対速度（relative velocity）の大きさ $U+v$ に置き換えたものになっている。

考えてみよう これでは必要なことの半分しか示していないのではないか。ほかの v でも変化率が一定になることはないだろうか。

そのようなことはない。飛行中ずっと $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta)=k$（定数）であるとする。$t=0$ ではボールは目の高さにあるので $\tan\theta=0$ であり、したがって $\tan\theta=kt$ である。これを $(*)$ に代入して t で割ると（$0<t<T$ に対して）、

$$\tfrac{1}{2}g(T-t)=k\big(D-(U+v)t\big)\quad \text{すべての}t\in(0,T).$$

が成り立つ。区間上で一致する t の 1 次関数どうしは係数が等しいから、

$$\tfrac{1}{2}g=k(U+v)\qquad\text{and}\qquad \tfrac{1}{2}gT=kD.$$

である。第 1 式から $k\neq 0$ がわかる。第 2 式を第 1 式で割ると $D=(U+v)T$ が得られ、これはまさに捕球の条件である。

以上より、野手をボールのところまで運ぶ速さ $v=D/T-U$ は、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta)$ が一定に保たれる速さとちょうど一致する。実際には、ボールが空中にある間に野手が $D/T-U$ を計算することはできないが、ボールを見ることはできる。視界の中でボールがますます速く上昇していくように見えるなら、野手は後ろにいすぎるのでもっと速く走るべきであり、ますますゆっくり上昇していくように見えるなら速度を緩めるべきである。（野手は打者に向かって走るので、ボールは野手の出発点より手前に落ちる。すなわち $D>UT$ であるから $v>0$ である。）

検算

- 後半で $v=0$ とおくと前半の結果に戻る。すなわち $D=UT$ であり、変化率は $g/(2U)$ である。
- 単位：g/U の単位は $\mathrm{m\,s^{-2}}/\mathrm{m\,s^{-1}}=\mathrm{s^{-1}}$ であり、無次元量の変化率として正しい。

- 数値例：$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ とし、$20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、45° で打たれたとすると、$T \approx 2.886\,\mathrm{s}$ で、飛距離は 40.82 m である。その地点に立っている野手には、$\tan\theta$ が $g/(2U) \approx 0.346\,\mathrm{s^{-1}}$ の割合で増加するように見える。代わりに 49.47 m 離れた位置から出発して $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ で走る場合には、変化率は $0.286\,\mathrm{s^{-1}}$ である。多くの時刻で $(*)$ を数値的に微分すると、どちらの変化率も一定であること、また誤った v では変化率が変化することが確かめられる。

よくある間違い

- θ を野手の目からではなく打者から測ってしまう。$\tan\theta$ に現れる水平距離は $X - x$ であって、x ではない。
- 正しい v なら変化率が一定になることだけを証明し、変化率が一定なら v が正しい値に決まることを示さない。この規則を実際に使えるものにしているのは、その逆（converse）のほうである。

STEP のその先へ

これは捕球の心理学における「光学的加速度相殺」（optical acceleration cancellation）という考え方である。野手は、ボールがどこに落ちるかを予測することなく、ボールの像が一定の割合で上昇するように走っているらしい。これはフィードバック制御則（feedback control law）の一例であり、軌道を計算する代わりに、観測される量を一定に保つのである。放物体の運動、相対速度、そしてこうした考え方の初歩については、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照せよ。

解答例

STEP II 1998、第 12 問

確率・統計 ・ ベイズの定理

> **STEP II 1998、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q12

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.2 節「**基準率の誤謬**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/base-rate.html

鍵となる考え方

これはベイズの定理（Bayes' theorem）を 2 回使う問題である。前半は古典的な「まれな病気」の意外な結果である。病気がまれであれば、かなり精度の高い検査であっても、陽性の大半が偽陽性（false positive）になりうる。後半で要となるのは、STEP を受ける人々が母集団からの無作為標本ではないと気づくことである。彼らは AL 陽性の集団であり、したがって前半の答えが 2 回目の検査に対する**事前確率**（prior）となる。

解答

ある人が数学炎（mathematitis）にかかっているという事象を D、検査 AL が陽性であるという事象を A、検査 STEP が陽性であるという事象を B とする。与えられているのは

$$\mathrm{P}(D) = \frac{1}{100}, \qquad \mathrm{P}(A \mid D) = \frac{9}{10}, \qquad \mathrm{P}(A \mid D') = \frac{1}{11}.$$

である。

Frankie の確率

全確率の法則（law of total probability）により、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}(A \mid D)\,\mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(A \mid D')\,\mathrm{P}(D') \\ &= \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{100} + \frac{1}{11}\cdot\frac{99}{100} = \frac{9}{1000} + \frac{9}{100} = \frac{99}{1000}.\end{aligned}$$

次にベイズの定理により、

$$\mathrm{P}(D \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid D)\,\mathrm{P}(D)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{9/1000}{99/1000} = \frac{1}{11}.$$

したがって、AL の結果が陽性であっても、Frankie が患者である確率はわずか $\frac{1}{11}$ にすぎない。1000 人の集団で考えると、患者のうち約 9 人が陽性となるが、非患者 990 人のうち約 90 人も陽性となり、偽陽性が真の陽性を圧倒してしまうのである。

p を求める

ここで、AL が陽性であった人々に注目を限定する。この集団の中では

$$\mathrm{P}(D \mid A) = \tfrac{1}{11}, \qquad \mathrm{P}(D' \mid A) = \tfrac{10}{11}.$$

である。STEP についての与えられた情報は $\mathrm{P}(B \mid D \cap A) = 0.9$ および $\mathrm{P}(B \mid D' \cap A) = p$ と読む。すなわち、STEP の振る舞いはその人が患者であるかどうかのみに依存し、AL の結果には依存しない。

> ? **考えてみよう** なぜ $\mathrm{P}(D) = \frac{1}{100}$ から改めて始めないのか？

STEP は AL 陽性であった人々にしか課されず、その集団における患者の割合はもはや 1% ではないからである。それは $\frac{1}{11}$ であり、まさに前半で求めた値である。1 回目の検査の事後確率（posterior）が 2 回目の事前確率となるのである。

AL 陽性の集団の中では、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(D \cap B \mid A) &= \frac{1}{11}\cdot\frac{9}{10} = \frac{9}{110}, \\ \mathrm{P}(D' \cap B \mid A) &= \frac{10}{11}\cdot p = \frac{10p}{11}.\end{aligned}$$

両方の検査で陽性となった人の半数が患者であると与えられている。すなわち $\mathrm{P}(D \mid A \cap B) = \frac{1}{2}$ である。これは上の 2 つの確率が等しいことを意味する：

$$\frac{9}{110} = \frac{10p}{11} \quad\Longrightarrow\quad p = \frac{9}{100} = 0.09.$$

検算

- オッズ（odds）による形：病気の事前オッズは $1:99$ である。AL はこれに $\frac{0.9}{1/11} = 9.9$ を掛け、$9.9:99 = 1:10$ を与える。これは $\frac{1}{11}$ と一致する。オッズを $1:1$ にするには STEP が 10 を掛けなければならないので、$\frac{0.9}{p} = 10$ より $p = 0.09$ である。
- 200 万人に両方の検査を受けさせるシミュレーション（$p = 0.09$）では、AL 陽性者に占める患者の割合は 0.0909、両方の検査で陽性の人に占める割合は 0.5003 となった。

よくある間違い

- STEP の事前確率として $\mathrm{P}(D) = 0.01$ を用いること。このとき $p = 0.0009$ となり、100 倍小さすぎる。
- $\mathrm{P}(A \mid D) = 0.9$ と $\mathrm{P}(D \mid A)$ を混同すること。前半の要点はまさに、この 2 つが大きく異なるということである。

STEP のその先へ

ベイズの定理をオッズの形、すなわち事後オッズは事前オッズに尤度比（likelihood ratio）を掛けたものに等しいという形で書くと、逐次的な検査はほとんど機械的になる。独立な証拠が 1 つ加わるごとに、オッズにその証拠固有の因子を掛けるだけでよいのである。これはベイズ推論（Bayesian inference）の基礎であり、実際の医療スクリーニング計画の設計の基礎でもある。ここで置いた仮定、すなわち病気の有無を与えたもとで検査が条件付き独立（conditionally independent）であるという仮定は、「ナイーブベイズ」分類器の背後にある仮定と同じものである。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）は、条件付き確率とベイズの規則を、この問題のような多くの例とともに見事に扱っている。

解答例

STEP II 1998、第 13 問

確率・統計 ・ 指数分布

STEP II 1998、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/98-s2-q13

鍵となる考え方

最初の結果は指数分布（exponential distribution）の**無記憶性**（memoryless property）である。すなわち、あるサービスがすでに時間 t だけ続いているとき、残りの時間は新たに始まるサービスと同じ分布に従う。これさえ得られれば、店の話にはほとんど計算がいらない。サービスの途中にある客は、確率的には、新たにサービスを受け始める客とまったく同じである。したがって、問題となるどの時点においても、まだサービス中の人々の間の競争は、同一で独立な指数分布に従う時間どうしの競争になる。

解答

無記憶性

$x \geq 0$ に対して、

$$\mathrm{P}(X > x) = \int_x^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = \Big[-\mathrm{e}^{-\lambda u}\Big]_x^\infty = \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

$s, t \geq 0$ をとる。事象 $\{X > s+t\}$ は $\{X > t\}$ に含まれるので、両者の共通部分はちょうど $\{X > s+t\}$ である。条件付き確率（conditional probability）の定義により、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X > s+t \mid X > t) &= \frac{\mathrm{P}(X > s+t \text{ かつ} X > t)}{\mathrm{P}(X > t)} = \frac{\mathrm{P}(X > s+t)}{\mathrm{P}(X > t)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda s} = \mathrm{P}(X > s),\end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。（$\mathrm{P}(X > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} > 0$ であるから、割り算をしてよい。）

2 人の客がともにまだサービス中である確率

モデル：2 つのサービス時間は独立（independent）であり、それぞれが与えられた指数分布に従うとする。私が到着したときにサービスを受けている 2 人の客を A、B とする。

考えてみよう 客 A はすでに未知の長さの時間だけサービスを受けている。そのことは、あとどれだけかかるかの分布を変えないのだろうか？

変えない。これこそが最初の小問の主張である。A のサービスがこれまでに u だけ続いたとする。すると、さらに少なくとも t だけ続く確率は

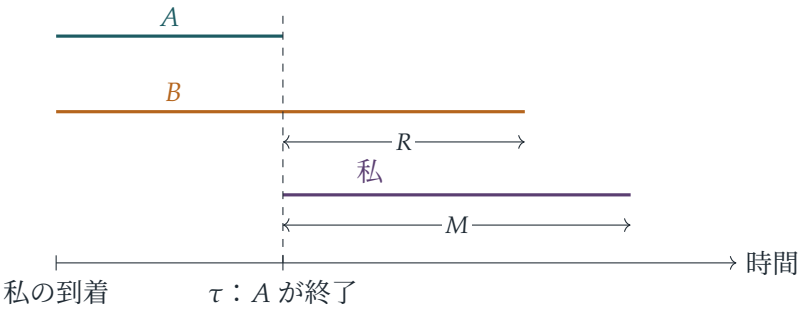
$$\mathrm{P}(X > u + t \mid X > u) = \mathrm{P}(X > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

であり、これは u によらない。したがって、私が店に入った瞬間からの A の**残りの**サービス時間は、同じパラメータ λ の指数分布に従い、B についても同様である。サービス時間全体が独立であるから、2 つの残り時間も独立である。よって

$$\mathrm{P}(\text{両者がまだサービス中、時刻}t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathrm{e}^{-2\lambda t}.$$

もう一人の客が終わるとき、私はまだサービス中か？

A が先に終わり、それが私の到着から時間 τ 後であるとし、私はすぐに A を担当していた店員のところへ行くとする。



時刻 τ において、B がまだ必要とする時間を R、私のサービス時間を M とする。

- 私のサービスは τ で新たに始まるので、M はパラメータ λ の指数分布に従う。異なる客のサービス時間は独立であるから、M はそれ以前のすべてと独立である。
- R もパラメータ λ の指数分布に従う。時刻 τ において、B はすでにある長さの時間（私の到着前の時間と τ の和）だけサービスを受けており、ふたたび無記憶性により、残り時間はもとの分布に従う。また R は M と独立である。

B が終わるときに私がまだサービス中であるのは、ちょうど $M > R$ のときである。ここで M と R は独立で**同じ**連続分布に従うので、対称性（symmetry）により $\mathrm{P}(M > R) = \mathrm{P}(R > M)$ である。また、連続確率変数（continuous random variable）では $\mathrm{P}(M = R) = 0$ であるから、これら 2 つの確率の和は 1 である。よって

$$\mathrm{P}(\text{もう一人の客が終わるとき私がまだサービス中}) = \tfrac{1}{2}.$$

対称性による議論よりも計算を好むなら、R で条件付ければよい：

$$\mathrm{P}(M > R) = \int_0^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda r}\, \mathrm{P}(M > r)\, \mathrm{d}r = \int_0^\infty \lambda \mathrm{e}^{-2\lambda r}\, \mathrm{d}r = \tfrac{1}{2}.$$

検算

- $t = 0$ では $\mathrm{e}^{-2\lambda t} = 1$ である。すなわち、私が到着したとき 2 人の客は確実にサービス中である。$t \to \infty$ のとき確率は 0 に近づき、これも当然である。
- 答え $\frac{1}{2}$ は λ によらない。λ を変えても時間の単位が変わるだけなので、これは予想どおりである。
- $\lambda = 0.7$、$t = 0.9$ としたシミュレーション（simulation）では、2 人の客がともにまだサービス中である割合は 0.2831 となり、$\mathrm{e}^{-1.26} \approx 0.2837$ とよく一致した。2 人の客がすでにランダムな長さの時間だけサービスを受けている状況のシミュレーションでは、私がまだサービス中であった試行の割合は 0.5000 であった。

よくある間違い

- すでにサービス中の客は「もうすぐ終わるはず」なので、残り時間はより短いと考えてしまうこと。指数分布では、すでに起きたことは何の影響も与えない。
- $\mathrm{P}(X > s + t \text{ かつ} X > t)$ を $\mathrm{P}(X > s + t)\, \mathrm{P}(X > t)$ と書いてしまうこと。これらの事象は独立ではなく、一方が他方を含んでいる。

STEP のその先へ

無記憶性をもつ連続分布は指数分布だけである。この事実は**ポアソン過程**（Poisson process）や**待ち行列理論**（queueing theory）の土台となっており、そこでは c 人の店員がいてサービス時間が指数分布に従う店は、古典的な M/M/c 待ち行列にあたる。2 人の客についての計算は n 人に拡張できる。パラメータ λ の独立な n 個の指数確率変数の最小値は、パラメータ $n\lambda$ の指数分布に従い（裾確率（tail probability）を掛け合わせればよい）、対称性により、どの変数も等しい確率で最小となる。Grimmett and

Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、指数確率変数とポアソン過程をこの水準で扱っている。

解答例

STEP II 1998、第 14 問

確率・統計　・　二項分布とポアソン分布の期待値

> **STEP II 1998、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q14

鍵となる考え方

データベース上の分類はどうであれ、これは確率の問題である。ドゥーム博士は、新しい制度のもとでの給与の**期待値**（expected value）が固定給 A を上回るならば、新制度を選ぶべきである。不合格者の数は二項分布（binomial distribution）に従うので、$\mathrm{E}\left[1/(1+X)\right]$ を求める必要がある。厄介な因子 $\frac{1}{k+1}$ は恒等式 $\frac{1}{k+1}\binom{N}{k} = \frac{1}{N+1}\binom{N+1}{k+1}$ によって吸収され、和は $(p+q)^{N+1}$ の二項展開からほんの一部が欠けたものになる。同じ工夫を $\frac{\lambda^k}{(k+1)!}$ に用いれば、ポアソン（Poisson）モデルも扱える。

解答

新制度を受け入れるべきとき

ドゥーム博士の学生のうち不合格となる者の数を X とし、$q = 1 - p$ とおく。学生はそれぞれ確率 p で独立に不合格となるので、$X \sim \mathrm{B}(N, p)$ であり、

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N.$$

ドゥーム博士は給与の期待値によって制度を比較することに納得しているものと仮定する。新制度のもとでの給与は確率変数（random variable）$S = B/(1+X)$ であるから、

$$\mathrm{E}(S) = B \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k+1} \binom{N}{k} p^k q^{N-k}.$$

考えてみよう 和の中にある $\frac{1}{k+1}$ はどうすれば取り除けるか？

階乗（factorial）を用いる：

$$\frac{1}{k+1}\binom{N}{k} = \frac{N!}{(k+1)!\,(N-k)!} = \frac{1}{N+1}\cdot\frac{(N+1)!}{(k+1)!\,\big((N+1)-(k+1)\big)!}$$
$$= \frac{1}{N+1}\binom{N+1}{k+1}.$$

これを代入し、さらに p の累乗が新しい二項係数（binomial coefficient）と合うように p を掛けて p で割ると、

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(S) &= \frac{B}{(N+1)p}\sum_{k=0}^{N}\binom{N+1}{k+1}p^{k+1}q^{N-k}\\ &= \frac{B}{(N+1)p}\sum_{j=1}^{N+1}\binom{N+1}{j}p^{j}q^{N+1-j}\\ &= \frac{B}{(N+1)p}\Big[(p+q)^{N+1}-q^{N+1}\Big]\end{aligned}$$

となる。ここでは $j = k+1$ とおき、続いて二項定理（binomial theorem）を用いた。この和は $(p+q)^{N+1}$ の展開全体から $j=0$ の項 q^{N+1} だけが欠けたものだからである。$p+q=1$ より、

$$\mathrm{E}(S) = \frac{B\big(1-(1-p)^{N+1}\big)}{(N+1)p}.$$

$\mathrm{E}(S) > A$ ならば新制度を受け入れるべきである。両辺に正の数 $(N+1)p$ を掛けると（この式が意味をもつには $p>0$ が必要である。$p=0$ ならば単に B と A を比べればよい）、これは

$$A(N+1)p < B\big(1-(1-p)^{N+1}\big),$$

となり、求める条件が得られる。

ポアソンモデル

二項分布 $\mathrm{B}(N,p)$ は、N が大きく p が小さく、Np がほどほどの大きさであるとき、平均 $\lambda = Np$ のポアソン分布（Poisson distribution）でよく近似される。したがって、クラスの人数が多く、各学生が不合格になる可能性が低く、しかも不合格が依然として独立に起こるならば、ドゥーム博士の学生の不合格者数はポアソン分布でモデル化できる。（より一般に、ポアソンモデルは、一つずつ、独立に、一定の平均頻度で起こる不合格に適している。）

$X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$、$\lambda = Np$ のときも同じ考え方が使える。今度は $\frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{k!} = \frac{1}{(k+1)!}$ を用いて、

$$\mathrm{E}\Big(\frac{B}{1+X}\Big) = B\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!} = \frac{B\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$$
$$= \frac{B\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\big(\mathrm{e}^{\lambda}-1\big) = \frac{B\big(1-\mathrm{e}^{-\lambda}\big)}{\lambda},$$

となる。最後の和は指数関数の級数（exponential series）から初項 1 が欠けたものだからである。よって、このモデルのもとでのドゥーム博士の給与の期待値は

$$\frac{B\left(1-\mathrm{e}^{-Np}\right)}{Np} \text{ ポンド.}$$

検算

- $N=1$ のとき：直接計算すると $\mathrm{E}(S)=B\left(q+\frac{1}{2}p\right)=B\left(1-\frac{1}{2}p\right)$ であり、公式からは $B\,\frac{1-q^2}{2p}=B\,\frac{1+q}{2}=B\left(1-\frac{1}{2}p\right)$ が得られる。
- $p\to 0$ のとき：二項分布による式は B に近づき（誰も不合格にならない）、ポアソン分布による式も $\lambda\to 0$ のとき同様に B に近づく。
- 近似がよく効くはずの場合には、二つの答えは一致する。$N=1000$、$p=0.003$ のとき、$\mathrm{E}(S)/B$ は二項分布の公式から 0.31655、ポアソン分布の公式から 0.31674 となる。$N=20$、$p=0.3$ の場合は、厳密な数え上げでもシミュレーションでも $\mathrm{E}(S)/B\approx 0.1586$ となる。

よくある間違い

- $\mathrm{E}\left(\frac{1}{1+X}\right)=\frac{1}{1+\mathrm{E}(X)}=\frac{1}{1+Np}$ と書いてしまう。期待値は非線形な関数を素通りしない。実際、$\frac{1}{1+x}$ は凸（convex）なので、イェンセンの不等式（Jensen's inequality）により真の値のほうが大きい。
- 添字を付け替えた和に $j=0$ の項が欠けていることを忘れ、$\mathrm{E}(S)=B/((N+1)p)$ としてしまう。

STEP のその先へ

ここでの工夫は、$\frac{1}{1+x}=\int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t$ を用いて $\mathrm{E}\left(1/(1+X)\right)$ を計算する方法の特別な場合である。この方法により、これは確率母関数（probability generating function）$G(t)=\mathrm{E}(t^X)$ と結びつき、答えは $\int_0^1 G(t)\,\mathrm{d}t$ となる。$G(t)=(q+pt)^N$ と $G(t)=\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$ で試してみよ。母関数や、二項分布のポアソン分布への収束（convergence）については、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）によくまとめられている。

解答例

STEP III 1998、第 1 問

純粋数学 ・ 曲線の概形

> **STEP III 1998、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q1

鍵となる考え方

すべてを $\cos x$ で表す。$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ を用いると、関数 f は $\cos x$ の 2 次式になる。平方完成（completing the square）をすれば f の値域（range）が一目でわかり、この値域が最後の小問を支配する。g については、商の微分法（quotient rule）により、その導関数（derivative）は $\mathrm{f}'(x)$ の定数倍を平方で割ったものになる。

解答

$y = \mathrm{f}(x)$ の概形を描く

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ を用いると、

$$\mathrm{f}(x) = 2 + 2\cos x - \cos^2 x = 3 - (1 - \cos x)^2.$$

$0 \le 1 - \cos x \le 2$ であるから、$-1 \le \mathrm{f}(x) \le 3$ を得る。値 3 は $\cos x = 1$ のときにとり、値 -1 は $\cos x = -1$ のときにとる。

微分すると、

$$\mathrm{f}'(x) = -2(1 - \cos x)\sin x = 2\sin x\,(\cos x - 1).$$

これが 0 となるのは $\sin x = 0$ または $\cos x = 1$ のときであり、$[0, 2\pi]$ 上では $x = 0,\ \pi,\ 2\pi$ である。停留点（stationary point）は

$$(0,\ 3), \qquad (\pi,\ -1), \qquad (2\pi,\ 3).$$

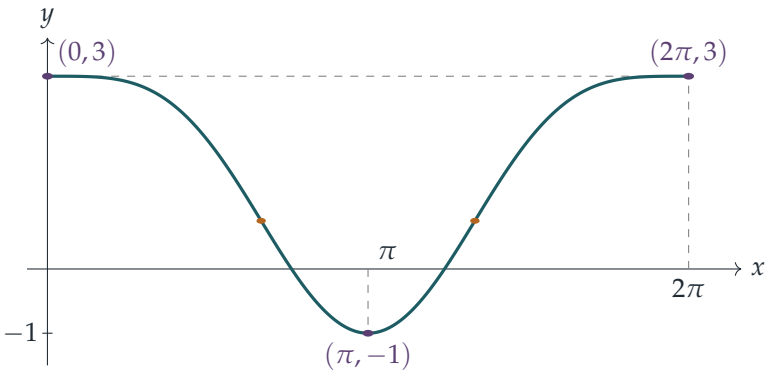
である。$(0, \pi)$ では $\sin x > 0$ かつ $\cos x - 1 < 0$ であるから、$\mathrm{f}' < 0$ となり f は減少する。$(\pi, 2\pi)$ では $\sin x < 0$ であり、$\cos x - 1$ は依然として負であるから、$\mathrm{f}' > 0$ となり f は増加する。よって $(\pi, -1)$ は極小点であり、端点 $(0, 3)$ と $(2\pi, 3)$ は最大点である。

考えてみよう $x=0$ の近くで曲線はどのような形をしているか。放物線のようになっているだろうか。

そうではなく、放物線よりも平らである。$x=0$ の近くでは $1-\cos x \approx \frac{1}{2}x^2$ であるから、$\mathrm{f}(x) \approx 3-\frac{1}{4}x^4$ となる。曲線は頂上で非常に平らであり、これは $\mathrm{f}''(0)=0$ であることと整合する。$x=\pi$ の近くでは $x=\pi+t$ とおく。すると $1-\cos x = 1+\cos t \approx 2-\frac{1}{2}t^2$ であるから、$\mathrm{f} \approx -1+2t^2$ となる。これは通常の放物線的な極小である。

概形を描くのに役立つその他の特徴：

- $\cos(2\pi-x)=\cos x$ であるから、曲線は $x=\pi$ に関して対称である。
- 曲線は $(1-\cos x)^2=3$、すなわち $\cos x = 1-\sqrt{3}$ となるところで x 軸と交わる。これより $x=\arccos(1-\sqrt{3}) \approx 2.39$ および $x=2\pi-\arccos(1-\sqrt{3}) \approx 3.89$ を得る。
- $\mathrm{f}''(x)=2\cos 2x-2\cos x=2(2\cos x+1)(\cos x-1)$ である。これは $\cos x=-\frac{1}{2}$ となるところで符号を変えるので、変曲点（point of inflection）は $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{3}{4}\right)$ と $\left(\frac{4\pi}{3},\frac{3}{4}\right)$ である。



琥珀色の点は変曲点である。

g の停留点

商の微分法により、$c\,\mathrm{f}(x)+d \neq 0$ となるところではどこでも

$$\mathrm{g}'(x)=\frac{a\mathrm{f}'(x)\big(c\mathrm{f}(x)+d\big)-c\mathrm{f}'(x)\big(a\mathrm{f}(x)+b\big)}{\big(c\mathrm{f}(x)+d\big)^2}=\frac{(ad-bc)\,\mathrm{f}'(x)}{\big(c\mathrm{f}(x)+d\big)^2}.$$

$ad \neq bc$ であるから、g が定義されるすべての点において、$\mathrm{g}'(x)=0$ となるのは $\mathrm{f}'(x)=0$ となるときに限る。よって g は f の停留点以外に停留点をもたない。

さらに g が $x=0,\pi,2\pi$ で定義されていることを確かめる必要があり、ここで残りの 2 つの条件が効いてくる。$x=0$ および $x=2\pi$ では分母は $3c+d$ であり、$d \neq -3c$ であ

るからこれは o でない。$x = \pi$ では分母は $d - c$ であり、$d \neq c$ であるからこれは o でない。したがって、求めるとおり $y = \mathrm{g}(x)$ の停留点はちょうど $x = 0,\ \pi,\ 2\pi$ にあり、

$$\mathrm{g}(0) = \mathrm{g}(2\pi) = \frac{3a + b}{3c + d}, \qquad \mathrm{g}(\pi) = \frac{b - a}{d - c}.$$

である。

|g| が有界となるとき

$d/c < -3$ または $d/c > 1$ と仮定する。特に $c \neq 0$ であるから、

$$c\,\mathrm{f}(x) + d = c\left(\mathrm{f}(x) + \frac{d}{c}\right).$$

と書ける。$\mathrm{f}(x)$ は $[-1, 3]$ の値をとるので、括弧の中は $\left[\frac{d}{c} - 1,\ \frac{d}{c} + 3\right]$ に属する。

- $d/c > 1$ ならば、括弧の中は $\frac{d}{c} - 1 > 0$ 以上である。
- $d/c < -3$ ならば、括弧の中は $\frac{d}{c} + 3 < 0$ 以下である。

いずれの場合も、すべての x に対して $\left|c\,\mathrm{f}(x) + d\right| \geq |c|\,k$ となる定数 $k > 0$ が存在する。言葉で言えば、分母は o から離れたままである。分子は $|a\mathrm{f}(x) + b| \leq 3|a| + |b|$ であるから有界（bounded）である。したがって、$[0, 2\pi]$ に属するすべての x に対して

$$|\mathrm{g}(x)| \leq \frac{3|a| + |b|}{|c|\,k}$$

が成り立ち、$|\mathrm{g}(x)|$ がいくらでも大きくなることはない。

考えてみよう $-3 < d/c < 1$ のときは何がうまくいかないのか。

このとき $-d/c$ は -1 と 3 の間に（端点を除いて）ある。f は連続（continuous）で $[-1, 3]$ のすべての値をとるので、$\mathrm{f}(x) = -d/c$ となる x が存在し、そこで分母は o になる。同じ点で分子は o にならない。もし両方が o になるとすれば $a(-d/c) + b = 0$、すなわち $ad = bc$ となってしまうからである。よって g は垂直漸近線（vertical asymptote）をもち、|g| は有界でない。これにより、最後の小問の条件がまさに過不足のないものであることがわかる。

検算

- 数値的に、$[0, 2\pi]$ 上の細かい格子点で f を調べると、最小値は -1、最大値は 3 である。また $3 - \mathrm{f}(0.1) \approx 2.496 \times 10^{-5}$ であり、$\frac{1}{4}(0.1)^4 = 2.5 \times 10^{-5}$ と比べると、$x = 0$ における 4 次の平らさが確かめられる。

- 特別な場合として、$a=1$、$b=0$、$c=0$、$d=1$ とすると $\mathrm{g}=\mathrm{f}$ となり、公式から $\mathrm{g}(0)=3$ および $\mathrm{g}(\pi)=-1$ が得られ、期待どおりである。
- ランダムな a,b,c,d に対して、g の差分（finite difference）による導関数は $(ad-bc)\mathrm{f}'/(c\mathrm{f}+d)^2$ と一致する。

よくある間違い

- 端点 $x=0$ と $x=2\pi$ を停留点として見落とすこと。そこでは f' は確かに o である。
- f の停留点で g が定義されていることの確認を忘れること。条件 $d\neq -3c$ と $d\neq c$ はまさにそのためにある。
- $x=0$ での頂上を、尖った放物線状に描いてしまうこと。曲線はそこではずっと平らである。

STEP のその先へ

$ad\neq bc$ のときの写像 $t\mapsto \dfrac{at+b}{ct+d}$ は**メビウス変換**（Möbius transformation）である。これは逆写像をもち、その導関数 $(ad-bc)/(ct+d)^2$ は決して o にならない。これが、この写像と合成（composition）しても停留点が生じたり消えたりしない理由である。メビウス変換は複素解析（complex analysis）と幾何学において中心的な役割を果たし、合成に関して群（group）をなす。図を中心にした美しい解説としては、Needham, *Visual Complex Analysis*（図で見る複素解析）を参照のこと。

解答例

STEP III 1998、第 2 問

純粋数学 ・ ベータ積分の漸化式

> **STEP III 1998、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q2

鍵となる考え方

この積分は、姿を変えたベータ関数（beta function）である。各小問ではそれぞれ定石の操作を一つずつ用いる。小問 (i) では反転（reflection）$t \mapsto 1-t$ を用いる。これは t と $1-t$ の役割を入れ替える操作である。小問 (ii) では被積分関数（integrand）に $1 = t + (1-t)$ を掛ける。小問 (iii) では部分積分（integration by parts）を行い、$(1-t)$ の指数を一つ t の側へ移す。$(1-t)$ の指数が 0 になるまで小問 (iii) を繰り返すと、すぐに計算できる積分が残る。

解答

小問 (i)

$u = 1-t$ と置換すると $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$ であり、積分区間の端 $t = 0, 1$ は $u = 1, 0$ になる。

$$\mathrm{I}(a,b) = \int_1^0 (1-u)^a u^b \,(-\mathrm{d}u) = \int_0^1 u^b (1-u)^a \,\mathrm{d}u = \mathrm{I}(b,a).$$

$\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$ から生じる負号は、積分区間の端を 0 と 1 の順に戻すときに使い切られる。

小問 (ii)

$t + (1-t) = 1$ であるから、被積分関数は次のように書ける。

$$t^a(1-t)^b = t^a(1-t)^b\big(t + (1-t)\big) = t^{a+1}(1-t)^b + t^a(1-t)^{b+1}.$$

各項を $[0,1]$ 上で積分すると、求める等式 $\mathrm{I}(a,b) = \mathrm{I}(a+1,b) + \mathrm{I}(a,b+1)$ が得られる。

小問 (iii)

$(1-t)^b$ を微分し、t^a を積分する形で $\mathrm{I}(a,b)$ を部分積分する。

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(a,b) &= \left[\frac{t^{a+1}}{a+1}(1-t)^b\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{a+1}}{a+1}\cdot\left(-b(1-t)^{b-1}\right)\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^{a+1}}{a+1}(1-t)^b\right]_0^1 + \frac{b}{a+1}\int_0^1 t^{a+1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

考えてみよう なぜ境界項（boundary term）は消えるのか。また、a と b が正であることはどこで必要になるのか。

$t=1$ では、$b>0$ であるから因子 $(1-t)^b$ は 0 である。$t=0$ では、$a+1>0$ であるから因子 t^{a+1} は 0 である。したがって括弧の部分は零となり、両辺に $a+1$ を掛けると

$$(a+1)\,\mathrm{I}(a,b) = b\,\mathrm{I}(a+1,b-1),$$

となって、求める結果が得られる。（$0<b<1$ のとき、最後の積分には $(1-t)$ の負の累乗が現れる。それでも $b-1>-1$ であるから、この積分は収束（converge）する。いずれにせよ、以下の整数の場合には常に $b-1\geq 0$ である。）

整数 a,b に対する $\mathrm{I}(a,b)$ の計算。得られた結果を $\mathrm{I}(a,b)=\dfrac{b}{a+1}\mathrm{I}(a+1,b-1)$ と書き、これを繰り返し適用する。各段階で第 1 引数は 1 増え、第 2 引数は 1 減る。第 2 引数が 0 に達したところで止める。

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(a,b) &= \frac{b}{a+1}\mathrm{I}(a+1,b-1) = \frac{b}{a+1}\cdot\frac{b-1}{a+2}\mathrm{I}(a+2,b-2) = \cdots \\ &= \frac{b(b-1)\cdots 1}{(a+1)(a+2)\cdots(a+b)}\mathrm{I}(a+b,0).\end{aligned}$$

公式を用いるたびに第 2 引数は正の整数であるから、どの段階も正当である。ここで $\mathrm{I}(a+b,0)=\int_0^1 t^{a+b}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{a+b+1}$ である。また $(a+1)(a+2)\cdots(a+b)=\dfrac{(a+b)!}{a!}$ であるから、

$$\boxed{\mathrm{I}(a,b)=\frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}}$$

この公式は、小問 (i) が要請するとおり a と b について対称（symmetric）である。また、a または b が 0 の場合にも成り立つ。

検算

▶ $\mathrm{I}(1,1)=\int_0^1(t-t^2)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ であり、公式からも $\frac{1!\,1!}{3!}=\frac{1}{6}$ が得られる。

- この公式は小問 (ii) を満たす：$\frac{(a+1)!\,b!}{(a+b+2)!} + \frac{a!\,(b+1)!}{(a+b+2)!} = \frac{a!\,b!\,(a+b+2)}{(a+b+2)!} = \frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}$。
- 数値的には、シンプソンの公式（Simpson's rule）により $\mathrm{I}(2,3) \approx 0.0166667$ が得られ、これは $\frac{2!\,3!}{6!} = \frac{1}{60}$ と一致する。また、整数でない a, b を無作為に選んで小問 (i)–(iii) を数値積分（quadrature）で確かめたところ、約 10^{-11} の精度で一致した。

よくある間違い

- 部分積分を逆向きに行ってしまう。t^a を微分すると $(1-t)$ の指数が上がり、目指す方向とは逆になる。
- 境界項が消えることの根拠を書き忘れる。境界項が消えるのは、$a+1 > 0$ かつ $b > 0$ であるからにほかならない。
- 漸化式（recursion）の適用を一段階早く止めてしまう、あるいは $\mathrm{I}(a+b, 0)$ から生じる最後の因子 $\frac{1}{a+b+1}$ を忘れる。

STEP のその先へ

$\mathrm{I}(a,b)$ はベータ関数 $B(a+1, b+1)$ である。正の実数の引数すべてに対して、ベータ関数はガンマ関数（gamma function）と $B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$ という関係で結ばれている。ここで得た答えは、その特別な場合 $\Gamma(n+1) = n!$ にあたる。確率論では、$t^a(1-t)^b/\mathrm{I}(a,b)$ はベータ分布（beta distribution）の確率密度（density）であり、ベイズ統計学（Bayesian statistics）において中心的な役割を果たす。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）には魅力的な解説があり、答えがなぜ $a!\,b!/(a+b+1)!$ になるのかを説明する数え上げの議論も含まれている。

解答例

STEP III 1998、第 3 問

純粋数学 ・ 線形漸化式

> **STEP III 1998、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q3

鍵となる考え方

これは定数項をもつ 1 階線形漸化式（first-order linear recurrence）であり、微分方程式 $y' = cy - d$ の離散版にあたる。解き方の要点は常微分方程式（ODE）の場合と同じである。まず定数解（「平衡」解（equilibrium））を求め、次にそこからのずれが毎日同じ倍率で掛けられていくだけであることに気づけばよい。極限については、$c \to 0$ のとき $\big((1+c)^N - 1\big)/c$ がどうなるかを理解することだけが本質的な作業であり、それは二項定理（binomial theorem）によって決着する。

解答

$c > 0$ の場合の解

すべての T に対して $V_T = Ak^T + B$ とおいてみる。漸化式に代入すると

$$Ak^{N+1} + B = (1+c)\big(Ak^N + B\big) - d \quad \Longleftrightarrow \quad Ak^N\big(k - (1+c)\big) = cB - d.$$

右辺は N に依存しないが、左辺は 0 にならない限り N に依存する（$A \neq 0$ かつ $k \neq 0$ としたい。そうでなければこの形はただの定数である）。したがって、すべての N について両辺がともに 0 でなければならない：

$$k = 1 + c, \qquad B = \frac{d}{c},$$

ここで $c > 0$ なので c で割ってよい。これらの値のもとで、$V_T = A(1+c)^T + d/c$ は任意の定数 A に対して漸化式を満たす。$T = 0$ とおくと $V_0 = A + d/c$ となるので、$A = V_0 - d/c$ であり

$$\boxed{V_N = \left(V_0 - \frac{d}{c}\right)(1+c)^N + \frac{d}{c}}$$

考えてみよう 形を推測したらうまくいった。では、ほかに解がないとなぜわかるのだろうか。

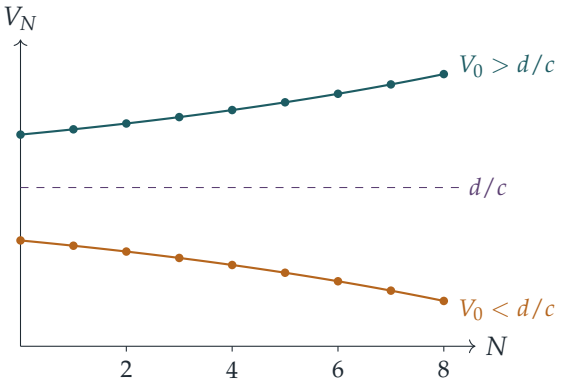
漸化式は V_0 から V_1 を定め、次に V_1 から V_2 を定め、というように進むので、与えられた V_0 をもつ数列はちょうど1つしかない。得られた式は漸化式を満たし、正しい V_0 をもつので、それがまさにその数列である。（直接的な議論を好むなら、$U_N = V_N - d/c$ とおけばよい。漸化式は $U_{N+1} = (1+c)U_N$ となるので $U_N = (1+c)^N U_0$ であり、同じ答えが得られる。）

答えを次のように変形しておくと役に立つ：

$$V_N = V_0(1+c)^N - d\,\frac{(1+c)^N - 1}{c}. \qquad (*)$$

これにはわかりやすい解釈がある。第1項は1日あたり率 c で増えていく V_0 であり、第2項は $d\big(1+(1+c)+\cdots+(1+c)^{N-1}\big)$、すなわち毎日の差し引き額がそれぞれ残りの日数分だけ増えたものを、等比級数（geometric series）として足し合わせたものである。

定数 d/c は平衡値である。$V_0 > d/c$ ならば債券の価値は限りなく増加し、$V_0 = d/c$ ならばその値にとどまり、$V_0 < d/c$ ならばますます速く減少していく：



（図では $c = 0.1$、$d/c = 5$ とし、$V_0 = 6$ と $V_0 = 4$ の場合を描いている。）

$c = 0$ の場合

このとき漸化式は $V_{N+1} = V_N - d$ である。値は毎日 d ずつ減少し、等差数列（arithmetic progression）となる。よって

$$\boxed{V_N = V_0 - Nd}$$

$c > 0$ の場合の式には d/c が含まれるため、そのまま $c = 0$ を代入することはできない点に注意しよう。まさにそのために、問題は極限について問うているのである。

$c \to 0$ のときの極限

N を固定して $(*)$ を用いる。N を固定すれば $(1+c)^N \to 1$ であるから、第 1 項は V_0 に収束する。第 2 項については二項定理により展開する：

$$(1+c)^N - 1 = Nc + \binom{N}{2}c^2 + \cdots + c^N,$$

$$\text{よって}\quad \frac{(1+c)^N - 1}{c} = N + \binom{N}{2}c + \cdots + c^{N-1}.$$

N は固定されているので、これは有限個の項からなる c の多項式であり、第 1 項以外のすべての項は c の正の累乗を含む。したがって $c \to 0$ のときこれは N に収束し、

$$\lim_{c\to 0} V_N = V_0 - Nd,$$

となる。これは $c = 0$ の場合の解であり、示すべきことが示された。（同じことだが、$\big((1+c)^N - 1\big)/c$ は $x = 1$ における x^N の差分商（difference quotient）であるから、その極限は微分係数 N である。）

「N を固定して」という言葉が重要である。c が小さくても N が大きければ、$\binom{N}{2}c$ のような項は小さいとは限らず、最終的には指数的な増大が線形な振る舞いに勝つ。

検算

- $N = 1$：式は $(V_0 - d/c)(1+c) + d/c = (1+c)V_0 - d$ を与え、これは漸化式そのものである。
- $V_0 = d/c$ とすると、すべての N について $V_N = d/c$ となり、平衡状態である。
- 数値的には、$V_0 = 7$、$d = 2$、$N = 12$ として、式は $c = 0.01$ のとき $V_{12} \approx -17.48$、$c = 10^{-4}$ のとき -17.005 を与え、$V_0 - 12d = -17$ に近づいていく。また、閉じた式は多くのランダムな有理数の場合において、直接の反復計算と完全に一致する。

よくある間違い

- $B = -d/c$ としてしまう：符号は $cB - d = 0$ から決まるので、$B = +d/c$ である。
- $A = V_0 - d/c$ ではなく $A = V_0$ としてしまう：$T = 0$ においても定数 B が寄与する。
- $c > 0$ の場合の式に直接 $c = 0$ を代入しようとする：これは定義されないので、極限が必要である。

STEP のその先へ

このような漸化式は**線形差分方程式**（linear difference equations）であり、その理論は線形常微分方程式の理論と並行している。一般解は、1つの特殊解（ここでは定数解）と斉次方程式 $U_{N+1} = (1+c)U_N$ の一般解の和である。金融の分野では、これは定額返済のローンや年金の公式であり、$c \to 0$ の極限は複利的な振る舞いから単利的な振る舞いへの移行にあたる。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（『初等微分方程式』）には、常微分方程式の理論と並んで1階差分方程式を扱う節がある。

解答例

STEP III 1998、第 4 問

純粋数学 ・ 正葉曲線

> **STEP III 1998、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q4

鍵となる考え方

極方程式（polar equation）で表された曲線は、方程式が簡単なときには直交座標（Cartesian coordinates）の式に直すと最も理解しやすく、そうでないときには r の符号を追跡すると理解しやすい。この問題全体の要は、$r<0$ である点は反対方向 $\theta+\pi$ に距離 $|r|$ のところにプロットするという約束である。$r=\cos k\theta$ の場合、この約束によって、負のループが新しい場所に描かれる（新たな花びらとなる）のか、すでに描かれた花びらに重なるのかが決まる。

解答

円 $r=\cos\theta$

両辺に r を掛け、$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, r^2=x^2+y^2$ を用いると

$$\begin{aligned} r^2=r\cos\theta \quad &\Longrightarrow \quad x^2+y^2=x \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

となる。したがって、この曲線上のすべての点は、中心 $(\frac{1}{2},0)$、半径 $\frac{1}{2}$ の円上にある。

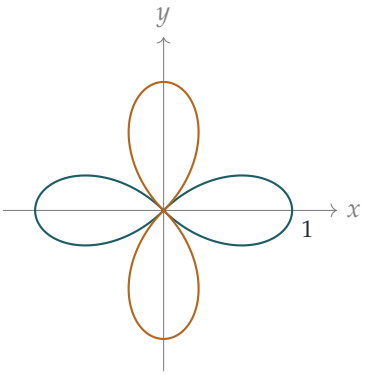
逆に、この円上の原点以外の任意の点 (x,y) をとる。$x=x^2+y^2>0$ であるから、その偏角（polar angle）は $-\frac{1}{2}\pi<\theta<\frac{1}{2}\pi$ を満たし、$r^2=x=r\cos\theta$ を $r>0$ で割ると $r=\cos\theta$ を得る。原点そのものは $\theta=\pm\frac{1}{2}\pi$ で到達される。よって、この曲線はちょうどこの円であり、θ が $-\frac{1}{2}\pi$ から $\frac{1}{2}\pi$ まで動くときに 1 回描かれる。この範囲では常に $r=\cos\theta\geq 0$ であるから、符号の約束は必要ない。

曲線 $r = \cos 2\theta$

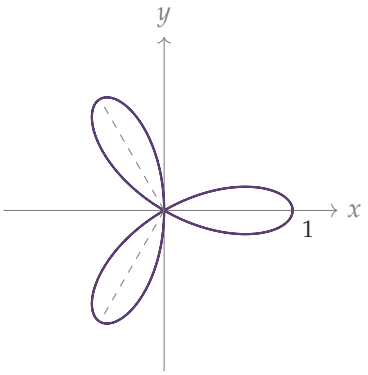
今度は r の符号が変わる。$r < 0$ である (r, θ) は、方向 $\theta + \pi$ に距離 $|r|$ のところにプロットする。

- $-\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{4}\pi$ では $r > 0$ であり、r は 0 から $\theta = 0$ で 1 まで増加し、再び 0 に戻る。これは x 軸の正の向きに伸びる花びらである。
- $\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{3}{4}\pi$ では $r < 0$ であるから、これらの点は方向 $\frac{5}{4}\pi$ から $\frac{7}{4}\pi$ に描かれる。これは y 軸の負の向きに伸びる花びらである。
- 同様に、$\frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{5}{4}\pi (r > 0)$ からは x 軸の負の向きに伸びる花びらが、$\frac{5}{4}\pi < \theta < \frac{7}{4}\pi$（$r < 0$）からは y 軸の正の向きに伸びる花びらが得られる。

結果は四葉の正葉曲線（rose）であり、各花びらの長さは 1、両軸に関して対称で、花びら同士は原点でのみ接する。図では、ティール色の花びらは $r > 0$ から、琥珀色の花びらは $r < 0$ から得られたものである。



$r = \cos 2\theta$



$r = \cos 3\theta$

曲線 $r = \cos 2n\theta$

$\cos(-2n\theta) = \cos 2n\theta$ であるから、n と $-n$ は同じ曲線を与える。そこで $n \geq 1$ とする（$n = 0$ の場合は後で扱う）。

考えてみよう $r < 0$ のとき、ループはすでに描かれたものに重なるのか、それとも新しい場所に描かれるのか。

$r > 0$ となるのは、$k = 0, 1, \ldots, 2n - 1$ に対して $\theta = k\pi/n = 2k \cdot \frac{\pi}{2n}$ を中心とする長さ $\pi/(2n)$ の区間である。それぞれの区間から、方向 $2k \cdot \frac{\pi}{2n}$、すなわち $\frac{\pi}{2n}$ の**偶数**倍の方向を向く花びらが得られる。

$r < 0$ となるのは $\theta = (2k + 1)\frac{\pi}{2n}$ を中心とする区間であり、これらの点は方向 $\theta + \pi$ に

プロットされるから、花びらは

$$(2k+1)\frac{\pi}{2n}+\pi=(2k+1+2n)\frac{\pi}{2n},$$

すなわち $\frac{\pi}{2n}$ の**奇数**倍の方向を向く。したがって、負のループは正の花びらの間の隙間という新しい場所に描かれる。

よって $r=\cos 2n\theta$ は、$4n$ 枚の合同な花びらをもつ正葉曲線であり、各花びらの長さは 1、$m=0,1,\ldots,4n-1$ に対する方向 $m\pi/(2n)$ を向き、各花びらは角 $\pi/(2n)$ を占め、隣り合う花びらは原点でのみ出会う。（$n=1$ のときは上の四葉の正葉曲線である。）花びらの角の合計は $4n\cdot\frac{\pi}{2n}=2\pi$ であるから、花びらは重なりなく一周全体を埋め尽くす。

退化した場合 $n=0$ では、曲線は $r=1$、すなわち単位円である。

面積は n によらない

花びらは重ならないので、囲まれた領域の各部分は θ が 0 から 2π まで動く間にちょうど 1 回ずつ掃かれる。面積の公式 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$（$r^2$ のみを含むので r の符号は関係ない）により、$n\geq 1$ に対して

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2 2n\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1+\cos 4n\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{4}\left[\theta+\frac{\sin 4n\theta}{4n}\right]_0^{2\pi}=\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

を得る。ここで $\sin 8n\pi=0$ を用いた。これは求められている通り n によらない。花びらを増やすと、ちょうどそれを打ち消すように各花びらが細くなるのである。（除外した場合 $n=0$ の単位円の面積は π である。公式中の項 $\sin 4n\theta/(4n)$ こそが、$n\neq 0$ を用いている箇所である。）

曲線 $r=\cos 3\theta$

考えてみよう この曲線の花びらが 6 枚ではなく 3 枚なのはなぜか。

今度は $r>0$ となるのは $\theta=0,\frac{2}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi$ を中心とする区間であり、それらの方向を向く花びらが得られる。負のループは $\theta=\frac{1}{3}\pi,\pi,\frac{5}{3}\pi$ を中心とし、方向 $\frac{4}{3}\pi,2\pi,\frac{8}{3}\pi\equiv\frac{2}{3}\pi$ にプロットされる。これはちょうど正の花びらの方向である。実際、θ を $\theta+\pi$ に置き換えると、反対方向に

$$r=\cos(3\theta+3\pi)=-\cos 3\theta$$

となり、これは同じ点である。したがって $r=\cos 3\theta$ は三葉の正葉曲線であり、長さ 1 の花びらが $\theta=0,\frac{2}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi$ の方向に伸び、それぞれが角 $\frac{1}{3}\pi$ を占める。そして θ が 0 か

ら 2π まで動く間に曲線全体が 2 回描かれる（$0 \le \theta \le \pi$ で 1 回）。これが上の右側の図である。

同じ議論により、任意の奇数 k に対して $r = \cos k\theta$ は 2 回描かれる k 葉の正葉曲線であり、偶数 k に対しては 1 回描かれる $2k$ 葉の正葉曲線であることがわかる。

検算

- $r = \cos\theta$ に $\theta = 0$ を代入すると、点 $(1, 0)$ は $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 上にあり、原点（$\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ のとき）もこの上にある。
- 円 $r = \cos\theta$ の面積は $\pi(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\pi$ であり、$\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\pi$ と一致する。同様に、三葉の正葉曲線については $\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos^2 3\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\pi$ である。ここで 0 から 2π までの積分を用いると二重に数えることになり、$\frac{1}{2}\pi$ を得てしまう。
- 数値的な確認：$n = 1, \ldots, 5$ について $r = \cos 2n\theta$ をプロットすると $4n$ 個の花びらの先端が見つかり、囲まれた面積のモンテカルロ法（Monte Carlo method）による推定値は毎回 $1.57 \approx \pi/2 = 1.5708$ となった。

よくある間違い

- 負の r を無視して、$r = \cos 2\theta$ の花びらを 2 枚しか描かない。
- r のループが 6 つあることから $r = \cos 3\theta$ の花びらは 6 枚であるとしてしまう。実際には負のループは正のループの上に重なる。
- 2 回描かれる曲線（$r = \cos 3\theta$ など）に $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 \, \mathrm{d}\theta$ を用いてしまい、面積を 2 倍にしてしまう。

STEP のその先へ

これらの曲線は**ロードネア**（rhodonea）曲線、すなわち正葉曲線（rose curve）と呼ばれる。点を複素数 $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ と表すと、正葉曲線 $r = \cos k\theta$ は $z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-1)\theta}\right)$ となり、互いに逆向きの 2 つの円運動の和である。この見方により、正葉曲線は周転円（epicycle）やフーリエ級数（Fourier series）と結びつく。また、面積の公式 $\frac{1}{2}\int r^2 \, \mathrm{d}\theta$ は、ベクトル解析におけるグリーンの定理（Green's theorem）の特別な場合である。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、複素数をこのように幾何学的に見る方法を見事に展開している。

解答例

STEP III 1998、第 5 問

純粋数学 ・ 行列の指数関数

> **STEP III 1998、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q5

鍵となる考え方

行列の無限級数（infinite series of matrices）は一見恐ろしく見えるが、ここに現れる二つの行列はいずれも、その冪（power）がきわめて単純な規則で繰り返される。すなわち、$\mathbf{M}$ の冪は i の冪と同じように循環し、$\mathbf{N}$ の冪は 2 乗以降すべて消える。すべての冪がわかれば、級数はおなじみのスカラーの級数に分かれる（あるいは途中で完全に止まる）ので、どのような変換であるかを読み取ることができる。最後の小問は行列の直接計算であり、その幾何学的な意味は、それぞれの変換がどの直線を動かさないかを問うことで明らかになる。

解答

行列 $\mathbf{M}$

積を計算すると

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{I},$$

となり、示すべき式が得られる。したがって、すべての整数 $k \geq 0$ に対して

$$\mathbf{M}^{2k} = (\mathbf{M}^2)^k = (-1)^k\mathbf{I}, \qquad \mathbf{M}^{2k+1} = (-1)^k\mathbf{M}.$$

級数を $\theta\mathbf{M}$ の偶数乗と奇数乗に分けると

$$\begin{aligned}\exp(\theta\mathbf{M}) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^{2k}}{(2k)!}\mathbf{M}^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}\mathbf{M}^{2k+1}\\ &= \Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\theta^{2k}}{(2k)!}\Big)\mathbf{I} + \Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}\Big)\mathbf{M}\\ &= \cos\theta\,\mathbf{I} + \sin\theta\,\mathbf{M} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

（このように分けてよいのは、行列の級数の各成分が実数の級数であり、その項の大きさが $|\theta|^r/r!$ で抑えられるため、絶対収束（absolute convergence）し、項を並べ替えてもよいからである。）

考えてみよう $\cos\theta\,\mathbf{I} + \sin\theta\,\mathbf{M}$ という形を以前どこで見ただろうか。

$\mathbf{M}^2 = -\mathbf{I}$ であるから、行列 $\mathbf{M}$ はちょうど i と同じようにふるまい、この計算は $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ の行列版である。幾何学的には、$\exp(\theta\mathbf{M})$ は $(1,0)$ を $(\cos\theta, \sin\theta)$ に、$(0,1)$ を $(-\sin\theta, \cos\theta)$ に移す。つまりこれは**原点のまわりの角 θ の反時計回りの回転（rotation）**である。（実際、i を掛けることと同じく、$\mathbf{M}$ 自身は角 $\frac{\pi}{2}$ の回転である。）

行列 N

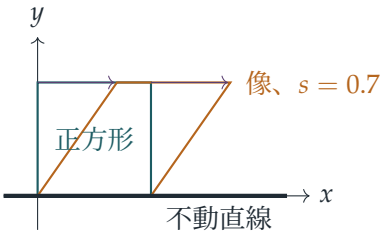
ここでは

$$\mathbf{N}^2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

であるから、すべての $r \geq 2$ に対して $\mathbf{N}^r = \mathbf{0}$ となり、級数は2項で止まる：

$$\exp(s\mathbf{N}) = \mathbf{I} + s\mathbf{N} = \begin{pmatrix}1 & s\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

これは (x,y) を $(x+sy, y)$ に移す。各点は x 軸に平行に、その高さ y に比例する距離だけ動き、x 軸上の点はまったく動かない。したがって $\exp(s\mathbf{N})$ は x **軸に平行なせん断（shear）**であり、x 軸をその不動点の直線とし、単位正方形を同じ面積の平行四辺形に移す（行列式は1である）。



いつ可換になるか

$c = \cos\theta$、$\sigma = \sin\theta$ とおく。このとき

$$\exp(s\mathbf{N})\exp(\theta\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -\sigma \\ \sigma & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+s\sigma & -\sigma+sc \\ \sigma & c \end{pmatrix},$$

$$\exp(\theta\mathbf{M})\exp(s\mathbf{N}) = \begin{pmatrix} c & -\sigma \\ \sigma & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & sc-\sigma \\ \sigma & s\sigma+c \end{pmatrix}.$$

差をとると

$$\exp(s\mathbf{N})\exp(\theta\mathbf{M}) - \exp(\theta\mathbf{M})\exp(s\mathbf{N}) = s\sin\theta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

これがすべての s に対して零行列となるのは、$\sin\theta = 0$ のとき、かつそのときに限る（$\sin\theta \neq 0$ ならば $s = 1$ をとればよい）。よって、二つの行列がすべての s に対して可換（commute）となるのは、ちょうど

$$\theta = n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

のときである。これらの値に対しては $\exp(\theta\mathbf{M}) = (-1)^n\mathbf{I}$ であり、これは単位行列か $-\mathbf{I}$ のいずれかである。

> **考えてみよう**　このせん断と可換な回転が、半回転か何もしない回転でなければならないのはなぜだろうか。

回転を R、せん断を S（ただし $s \neq 0$）とし、$SR = RS$ と仮定する。x 軸上の任意の点 P をとると、$S(P) = P$ である。このとき

$$S\big(R(P)\big) = R\big(S(P)\big) = R(P),$$

となるので、$R(P)$ もまたせん断の不動点である。しかし、せん断が動かさない点は x 軸上の点だけである。したがって回転は x 軸をそれ自身に移さなければならず、そのような原点のまわりの回転は、角 0 の回転（恒等変換）か角 π の回転（半回転 $(x,y) \mapsto (-x,-y)$）に限られる。逆に、これら二つは $\pm\mathbf{I}$ であるから、**あらゆる**線形写像と可換である。平面を半回転させることとせん断することは、どちらの順で行っても同じ結果になる。それ以外の回転はせん断の不動直線を傾けてしまうので、回転の前にせん断するか後にせん断するかで結果が異なる。

検算

- 級数から要請されるとおり、$\theta = 0$ のとき回転行列は $\mathbf{I}$ であり、$s = 0$ のときせん断は $\mathbf{I}$ である。

- 行列式はどちらも 1（$\cos^2\theta + \sin^2\theta$ と $1\cdot 1$）であり、面積を保つ回転とせん断としてあるべき値になっている。
- 数値的には、$\theta = 1$ として級数を 80 項まで足すと、各成分は $\cos 1 \approx 0.5403$ と $\sin 1 \approx 0.8415$ に一致する。$\theta = 1$、$s = 1$ のとき交換子（commutator）の対角成分は $\pm\sin 1 \approx \pm 0.8415$ であり、$s\sin\theta\,\mathrm{diag}(1,-1)$ に一致する。

よくある間違い

- 行列に対して $\exp(\mathbf{A})\exp(\mathbf{B}) = \exp(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ が成り立つと思い込むこと。この法則には $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ が必要であり、それこそが $\sin\theta = 0$ でない限りここで成り立たない点である。
- π のすべての整数倍ではなく、$\theta = 0$（あるいは $\theta = 0, \pi$）だけを答えること。
- $\exp(s\mathbf{N})$ を伸縮や拡大と呼ぶこと。これは面積を保ち、x 軸を各点ごとに固定する。それがせん断であることの決め手である。

STEP のその先へ

行列指数関数（matrix exponential）は**リー代数**（Lie algebra）と**リー群**（Lie group）を結ぶ橋である。$\mathbf{M}$ は回転の群を、$\mathbf{N}$ はせん断の群を生成し、$\exp(t\mathbf{A})$ は線形微分方程式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ を解く。可換でない行列に対して $\exp(\mathbf{A})\exp(\mathbf{B}) = \exp(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ が成り立たない度合いは交換子 $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ によって測られる。これは最後の小問で出会った考え方である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）では、行列指数関数とその微分方程式への応用が扱われている。

解答例

STEP III 1998、第 6 問

純粋数学 ・ 多面体の体積

> **STEP III 1998、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q6

鍵となる考え方

立方体を座標軸上に置き、その頂点が、各座標がすべて 0 または a である点になるようにする。すると距離は三次元のピタゴラス（Pythagoras）の定理から求まり、扱いにくい立体の体積は、立方体から単純な部分を切り取ることで測ることができる。正四面体（regular tetrahedron）は立方体から四つの角を切り落とした残りであり、正八面体（regular octahedron）は二つの正四角錐を底面同士で貼り合わせたものである。

解答

小問 (i)

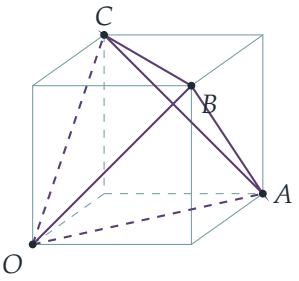
立方体 $[0,a]^3$ を考える。その頂点は、各座標が 0 または a である 8 個の点 (x,y,z) であり、二つの頂点が隣接する（辺で結ばれる）のは、ちょうど一つの座標だけが異なるとき、かつそのときに限る。

どの四つの頂点を選べるか。座標のうち a に等しいものの個数に応じて、頂点を**偶**または**奇**とよぶことにする。辺に沿って移動すると座標が一つ変わるので、偶と奇は必ず入れ替わる。選んだ四つの頂点に偶の頂点 P と奇の頂点 Q が含まれていたとする。これらは隣接しないので三つの座標すべてが異なり、Q は P の対頂点である。他のすべての頂点は P または Q に隣接する（奇の三つは P に、偶の三つは Q に）ので、三つ目の頂点を加えることはできない。したがって、四つの頂点はすべて偶、すなわち

$$O=(0,0,0),\quad A=(a,a,0),\quad B=(a,0,a),\quad C=(0,a,a),$$

であるか、すべて奇（この集合を平面 $x=\frac{1}{2}a$ に関して鏡映したもので、合同な立体を与える）である。

正則性。O, A, B, C のどの二つも、ちょうど二つの座標がそれぞれ a ずつ異なるので、六つの距離はすべて $\sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2}\,a$ である。よって四つの面はいずれも一辺 $\sqrt{2}\,a$ の正三角形であり、$OABC$ は正四面体である。その各辺は立方体のある面の対角線である。



体積。立方体から四面体を取り除くと、四つの角の部分が残り、それぞれ奇の頂点に一つずつある。たとえば $(a,0,0)$ における角は、その頂点と三つの隣接頂点 O、A、B からなる四面体である。$(a,0,0)$ から出る三本の辺は互いに垂直で長さ a なので、これは面積 $\frac{1}{2}a^2$ の直角三角形を底面とし、高さ a の錐であり、体積は $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a^2\cdot a = \frac{1}{6}a^3$ である。よって

$$V_{\text{tet}} = a^3 - 4\cdot\tfrac{1}{6}a^3 = \tfrac{1}{3}a^3.$$

辺の長さを 1 にするには $\sqrt{2}\,a = 1$、すなわち $a = 1/\sqrt{2}$、$a^3 = 1/(2\sqrt{2})$ とすればよい。したがって一辺の長さ 1 の正四面体の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

考えてみよう 四つの角の部分と四面体が、重なりなくちょうど立方体を埋め尽くすのはなぜか。

四面体の各面、たとえば OAB は、立方体の頂点をちょうど一つ、ここでは $(a,0,0)$ を切り落とす。実際、O、A、B を通る平面 $x-y-z=0$ に関して、$(a,0,0)$ は厳密に一方の側にあり、残りの 7 個の頂点は反対側か平面上にある。よって立方体は、各面の外側に一つずつある四つの角の部分と、中央の四面体とに分かれる。

小問 (ii)

一辺の長さ 1 の正八面体は、その 6 個の頂点を

$$(\pm h,0,0),\quad (0,\pm h,0),\quad (0,0,\pm h),\qquad h = \tfrac{1}{\sqrt{2}},$$

に置くことができる。ここで各頂点は、対頂点でない四つの頂点と結ばれる。そのような二頂点、たとえば $(h,0,0)$ と $(0,h,0)$ の距離は $\sqrt{2}\,h = 1$ である。よって 12 本の辺

はすべて長さ 1 であり、各八分空間に一つずつある 8 個の面は正三角形である。平面 $z=0$ 上の四つの頂点は一辺 1 の正方形をなす。八面体は、この正方形を底面とし頂点を $(0,0,\pm h)$ とする二つの正四角錐からなり、それぞれの高さは h である。よって

$$V_{\text{oct}} = 2\cdot\tfrac{1}{3}\cdot 1^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

より一般に、長さを e 倍すると体積は e^3 倍になるので、一辺 e の正八面体の体積は $\frac{\sqrt{2}}{3}e^3$ である。

小問 (iii)

ここでは一辺 a の立方体を原点を中心に $[-\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a]^3$ として置くほうがすっきりする。その面の中心は

$$(\pm\tfrac{1}{2}a,0,0),\quad (0,\pm\tfrac{1}{2}a,0),\quad (0,0,\pm\tfrac{1}{2}a).$$

これはまさに小問 (ii) の配置で $h=\frac{1}{2}a$ としたものである。向かい合う面の中心どうしの距離は a である。隣り合う面の中心どうしの距離は $\sqrt{(\frac{1}{2}a)^2+(\frac{1}{2}a)^2}=a/\sqrt{2}$ である。これら 6 点を頂点とする凸立体は、各八分空間に一つずつ、計 8 個の面をもつ。たとえば八分空間 $x,y,z\ge 0$ にある面は、頂点 $(\frac{1}{2}a,0,0)$、$(0,\frac{1}{2}a,0)$、$(0,0,\frac{1}{2}a)$ をもつ三角形である。各面は一辺 $a/\sqrt{2}$ の正三角形なので、面の中心は一辺 $e=a/\sqrt{2}$ の正八面体をなす。

小問 (ii) より、その体積は

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{a^3}{2\sqrt{2}} = \frac{a^3}{6}.$$

同じ立方体の頂点のうち四つを頂点とする小問 (i) の四面体の体積は $\frac{1}{3}a^3$ である。$\frac{1}{6}a^3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}a^3$ であるから、八面体の体積は四面体の体積の半分であり、これが示すべきことであった。

検算

- 底面積 $\frac{\sqrt{3}}{4}$、高さ $\sqrt{2/3}$ として「底面積 × 高さ」の公式を用いると、一辺 1 の四面体の体積は $\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{12}\approx 0.11785$ となり、小問 (i) と一致する。
- 辺の長さが等しいとき $V_{\text{oct}}=4V_{\text{tet}}$ である。実際 $\frac{\sqrt{2}}{3}=4\cdot\frac{\sqrt{2}}{12}$ である。これは、一辺 2 の四面体を、一辺 1 の四面体四つ（角の部分）と一辺 1 の八面体一つ（中央）に分割する古典的な分割（dissection）と一致する。一辺 1 の四面体を単位として測ると $8=4+4$ である。

- 数値的にも、隣接しない立方体の頂点四つの選び方すべてについて行列式（determinant）で計算すると、単位立方体に対して体積 $\frac{1}{3}$ が得られ、領域 $|x|+|y|+|z| \le 1/\sqrt{2}$ のモンテカルロ法（Monte Carlo）による推定値は 0.4715 となり、$\sqrt{2}/3 \approx 0.47140$ とよく合う。

よくある間違い

- 小問 (i) で立方体の一辺を 1 としてしまうこと。このとき四面体の辺は 1 ではなく $\sqrt{2}$ となり、体積を $(1/\sqrt{2})^3$ 倍に縮尺し直す必要がある。
- 引く角を間違えること。角の部分は（使わない頂点ごとに一つずつ）四つあり、それぞれの体積は $\frac{1}{6}a^3$ である。八つではない。
- 小問 (iii) で立方体の一辺を八面体の辺として用いること。隣り合う面の中心どうしの距離は $a/\sqrt{2}$ である。

STEP のその先へ

立方体の中の二つの四面体と、面の中心からなる八面体は、プラトンの立体（Platonic solids）とその対称群（symmetry group）の物語の始まりである。内接する一つの四面体を保つ立方体の回転全体は位数 12 の群をなし、これは立方体の回転全体 24 個の半分である。立方体と八面体は**双対**（dual）であり（一方の面の中心が他方の頂点を与える）、このような立体の体積は、線形写像が体積を何倍に拡大するかを測る行列式によってきれいに求まる。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は行列式を体積として扱っており、Armstrong の *Groups and Symmetry*（群と対称性）はこれらの立体の対称群を論じている。

解答例

STEP III 1998、第 7 問

純粋数学 ・ 曲線の概形と積分

> **STEP III 1998、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q7

鍵となる考え方

最初の関数は思いつきの準備運動ではない。$\mathrm{b}(x)$ を微分して導関数（derivative）を 0 とおくと、現れる方程式はちょうど $\mathrm{f}(x/T)=0$ になる。したがって、f について分かること（正の根（root）はただ一つで、それは 2 と 3 の間にある）から、b の増減が変わる点の位置が分かる。B の T への依存性は、自然な置換（substitution）$x=Tu$ から得られる。この置換によって被積分関数（integrand）から T が取り除かれるのである。

解答

f の概形と m の決定

$\mathrm{f}(0)=1\cdot(-3)+3=0$ であり、

$$\mathrm{f}'(s)=\mathrm{e}^s(s-3)+\mathrm{e}^s=\mathrm{e}^s(s-2).$$

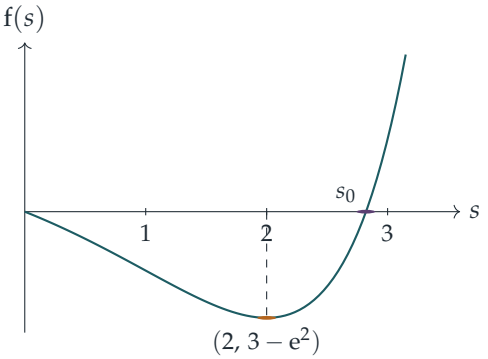
$\mathrm{e}^s>0$ であるから、f は $[0,2]$ で減少し、$[2,\infty)$ で増加する。最小値は $\mathrm{f}(2)=3-\mathrm{e}^2\approx 3-7.29=-4.29$ である。$s\to\infty$ のとき $\mathrm{e}^s(s-3)\to\infty$ であるから、$\mathrm{f}(s)\to\infty$ となる。

$\mathrm{f}(0)=0$ であり、f は $[0,2]$ で狭義単調減少であるから、$0<s\le 2$ に対して $\mathrm{f}(s)<0$ である。$[2,\infty)$ では負の値から $+\infty$ まで狭義単調増加するので、そこでちょうど一度だけ 0 をまたぐ。その点をある $s_0>2$ とする。よって、s_0 は f の**唯一の**正の根である。

$\mathrm{e}\approx 2.7$ とすると、

$$\mathrm{f}(1)=3-2\mathrm{e}\approx -2.4,\qquad \mathrm{f}(2)\approx -4.29,\qquad \mathrm{f}(3)=0+3=3.$$

したがって、$\mathrm{f}(m)>0$ となる最小の正の整数は $m=3$ であり、$2<s_0<3$ である（実際には $s_0\approx 2.82$）。



b のただ一つの停留点

$u = x/T$ とおく。商の微分法（quotient rule）により、

$$\mathrm{b}'(x) = \frac{3x^2(\mathrm{e}^{x/T}-1) - x^3\cdot\frac{1}{T}\mathrm{e}^{x/T}}{(\mathrm{e}^{x/T}-1)^2} = \frac{x^2\left(3\mathrm{e}^{u}-3-u\,\mathrm{e}^{u}\right)}{(\mathrm{e}^{u}-1)^2} = -\frac{x^2\,\mathrm{f}(u)}{(\mathrm{e}^{u}-1)^2}.$$

$x > 0$ のとき $x^2 > 0$ かつ $(\mathrm{e}^u - 1)^2 > 0$ であるから、$\mathrm{b}'(x) = 0$ となるのは $\mathrm{f}(x/T) = 0$ のときであり、かつそのときに限る。前半の結果から、これが起こるのは $x/T = s_0$ のときだけである。よって b は $0 < x < \infty$ にただ一つの停留点（turning point）をもち、その位置は

$$x = s_0 T \approx 2.82\,T.$$

さらに、$0 < u < s_0$ では $\mathrm{f}(u) < 0$、$u > s_0$ では $\mathrm{f}(u) > 0$ であるから、この点の手前では $\mathrm{b}' > 0$、この点の先では $\mathrm{b}' < 0$ である。すなわち、この点は極大点（maximum）である。

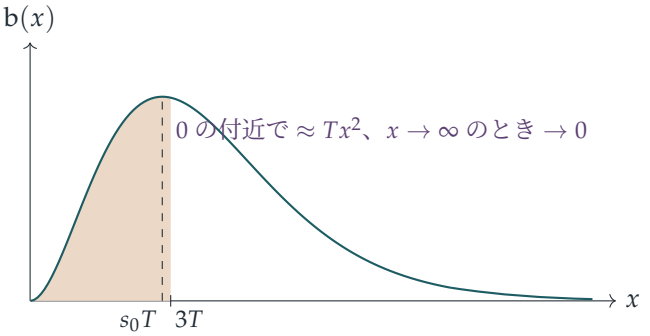
> **考えてみよう** 分子と分母がともに 0 になる $x = 0$ の付近で、b はどのような形をしているか。

x が小さいとき $\mathrm{e}^{x/T} - 1 \approx x/T$ であるから、

$$\mathrm{b}(x) \approx \frac{x^3}{x/T} = Tx^2,$$

となり、グラフは傾き 0 で放物線のように原点から立ち上がる（したがって $\mathrm{b}(0) = 0$ とするのが自然である）。x が大きいときは指数関数がどんな累乗よりも優勢になるので、$\mathrm{b}(x) \approx x^3\mathrm{e}^{-x/T} \to 0$ となり、x 軸が漸近線（asymptote）である。すべての $x > 0$ に対して $\mathrm{b}(x) > 0$ であるから、グラフは原点から上昇して $x = s_0 T$ でただ一つの山をつくり、その後は軸に向かって減衰していく。

前半の結果を用いると、山の高さは $\mathrm{b}(s_0 T) = T^3 s_0^3/(\mathrm{e}^{s_0} - 1) \approx 1.42\,T^3$ であり、$\mathrm{b}(3T) = 27T^3/(\mathrm{e}^3 - 1)$ はそれよりわずかに小さいだけである。



（図は $T=1$ として描いてある。網かけ部分は最後の小問で用いる領域である。）

B の形

$x=Tu$ と置換すると $\mathrm{d}x=T\,\mathrm{d}u$ であり、$T>0$ であるから積分区間の端 $0,\infty$ は変わらない。よって

$$B=\int_0^\infty \frac{T^3u^3}{\mathrm{e}^u-1}\,T\,\mathrm{d}u=T^4\int_0^\infty \frac{u^3}{\mathrm{e}^u-1}\,\mathrm{d}u.$$

最後の積分は T を含まないので、定数 K である（仮定してよいとおり有限である）。したがって $B=KT^4$ であり、$n=4$ である。

K の見積もり

同じ置換と $m=3$ を用いると、

$$KT^4=B\approx 2\int_0^{3T}\mathrm{b}(x)\,\mathrm{d}x=2T^4\int_0^3\frac{u^3}{\mathrm{e}^u-1}\,\mathrm{d}u,\qquad\text{よって}\qquad K\approx 2\int_0^3\frac{u^3}{\mathrm{e}^u-1}\,\mathrm{d}u.$$

これは図（$T=1$）の網かけ部分の面積の 2 倍である。$\mathrm{e}\approx 2.7$ を用いてグラフから高さを読み取ると、

$$\mathrm{b}(0)=0,\quad \mathrm{b}(1)\approx\frac{1}{1.7}\approx 0.59,\quad \mathrm{b}(2)\approx\frac{8}{6.29}\approx 1.27,\quad \mathrm{b}(3)\approx\frac{27}{18.7}\approx 1.45.$$

幅 1 の区間に分けて台形公式（trapezium rule）を用いると、

$$\int_0^3\approx\tfrac{1}{2}(0)+0.59+1.27+\tfrac{1}{2}(1.45)\approx 2.58,$$

したがって

$$K\approx 5.$$

さらに粗い見積もりとして、網かけ部分を底辺 3、高さ約 1.45 の三角形とみなすと、面積は約 2.2 となり、$K\approx 4.3$ を得る。いずれにせよ、K はおよそ 4 から 5 である（三角形による見積もりは確実に小さすぎる。曲線は原点と $(3,\mathrm{b}(3))$ を結ぶ線分より上にあるからである）。

検算

- 数値的な二分法（bisection）によれば f の根は $s_0 \approx 2.8214$ であり、$T = 1.7$ として b′ を数値的に調べると、符号の変化はちょうど一度だけ、$x \approx 4.797 \approx 1.7 s_0$ で起こる。
- シンプソンの公式（Simpson's rule）により、$T = 0.5$、1、2.3 のいずれについても $B/T^4 \approx 6.4939$ となる。毎回同じ値であることから、$n = 4$ が確かめられる。これは既知の厳密値 $K = \pi^4/15 \approx 6.494$ と一致する。
- 積分 $\int_0^3 u^3/(\mathrm{e}^u - 1)\,\mathrm{d}u \approx 2.552$ であるから、問題で許されている近似を用いると $K \approx 5.10$ となる。我々の見積もり 5 はおおむね正しい。6.49 との差は問題の近似 $B \approx 2\int_0^{3T}$ による誤差であり、我々の計算の誤りではない。

よくある間違い

- $\mathrm{f}(0) = 0$ であることを忘れる：$s = 0$ は f の根であるが、これは $x = 0$ に対応し、$0 < x < \infty$ の範囲外であるから、停留点はやはり一つだけである。
- B で変数変換をする際に、$\mathrm{d}x = T\,\mathrm{d}u$ から生じる因子 T を忘れ、$n = 3$ としてしまう。

STEP のその先へ

関数 b は黒体放射（black-body radiation）に関するプランク（Planck）の法則であり、x が振動数、T が温度の役割を果たしている。山の位置 $x = s_0 T$ はウィーン（Wien）の変位則であり、$B \propto T^4$ はシュテファン（Stefan）＝ボルツマン（Boltzmann）の法則である。厳密値 $K = \pi^4/15$ は $1/(\mathrm{e}^u - 1) = \sum_{k\geq 1} \mathrm{e}^{-ku}$ と展開することで得られ、$K = 6\sum_{k\geq 1} 1/k^4 = 6\zeta(4)$ となる。この和と積分の交換を正当化することは、大学 1 年次の解析学の典型的な問題である。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照のこと。

解答例

STEP III 1998、第 8 問

純粋数学 ・ ベクトルと球面

> **STEP III 1998、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q8

鍵となる考え方

ここでのすべては同じ一手に帰着する。「点 $\mathbf{r}$ が球面（sphere）上にある」ことをスカラー方程式（scalar equation）$|\mathbf{r}-\mathbf{c}|^2 = a^2$ として書き、内積（dot product）を用いて展開し、必要なことを読み取るのである。(i) の直線に対しては λ の二次方程式（quadratic）が得られ、交点の個数はその判別式（discriminant）で決まる。(ii) では中心から平面までの距離が必要であり、(iii) では二つの球面の方程式を辺々引くと、「垂直」という条件が問うている内積がちょうど得られる。

解答

小問 (i)

点 $\mathbf{b}+\lambda\mathbf{m}$ が球面上にあるのは、$(\mathbf{b}+\lambda\mathbf{m})\cdot(\mathbf{b}+\lambda\mathbf{m}) = a^2$ となるときであり、またそのときに限る。これを展開し、$\mathbf{m}$ が単位ベクトル（unit vector）であることから $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 1$ を用いると、

$$\lambda^2 + 2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})\lambda + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - a^2 = 0.$$

各実数解（real root）λ が交点を一つずつ与え、異なる λ の値は異なる点を与える（$\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ であるから）。したがって交点が二つあるのは、この二次方程式が異なる二つの実数解をもつとき、すなわち判別式が正のときであり、またそのときに限る。

$$4(\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})^2 - 4(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - a^2) > 0 \iff a^2 > \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})^2,$$

これが求める条件である。

交点がちょうど一つになるのは、判別式が 0 のときである。

$$a^2 = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})^2.$$

このとき重解（repeated root）は $\lambda = -\mathbf{b}\cdot\mathbf{m}$（$\lambda$ の係数の半分に負号をつけたもの）であるから、その点は

$$\mathbf{p} = \mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})\,\mathbf{m}, \qquad \text{であり} \qquad \mathbf{m}\cdot\mathbf{p} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{m} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})(\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}) = 0,$$

となる。ここでも $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 1$ を用いた。よって接線（tangent line）は接点への半径（radius）に垂直であり、当然そうあるべき結果である。

小問 (ii)

$\mathbf{n}$ に垂直な平面は、定数 k を用いて $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = k$ という方程式で表され、$\mathbf{n}$ は単位ベクトルであるから、原点からの距離は $|k|$ である。$k \geq 0$ となるように $\mathbf{n}$ の向きを選ぶ（すなわち $\mathbf{n}$ が原点から平面の方を向くようにする）と、平面は

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = l.$$

考えてみよう 中心 $\mathbf{d}$ はこの平面からどれだけ離れているか。

$\mathbf{d}$ から法線（normal）に沿って進む。点 $\mathbf{d} + \mu\mathbf{n}$ が平面上にあるのは $\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} + \mu = l$ のときであるから、$\mu = l - \mathbf{d}\cdot\mathbf{n}$ である。これは $\mathbf{d}$ から下ろした垂線の足（foot of the perpendicular）であるから、中心から平面までの距離は $|\mu| = |l - \mathbf{d}\cdot\mathbf{n}|$ である。

平面が球面に接する（touch）のは、この距離が半径に等しいときであり、またそのときに限る（距離がそれより小さければ平面は球面を円で切り、大きければ両者は交わらない）。したがって条件は

$$|\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} - l| = a, \qquad \text{すなわち} \qquad (\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} - l)^2 = a^2,$$

つまり $\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} = l \pm a$ である。（逆に $\mathbf{n}$ が平面と反対の方を向いている場合は、平面の方程式は $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = -l$ となり、条件は $|\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} + l| = a$ となる。）

小問 (iii)

一つ目の球面は中心 O、二つ目の球面は中心 D（位置ベクトル $\mathbf{d}$）をもち、半径はどちらも a である。点 $\mathbf{r}$ が両方の上にあるのは

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = a^2 \qquad \text{かつ} \qquad (\mathbf{r} - \mathbf{d})\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{d}) = a^2.$$

のときである。二つ目を展開して一つ目を引くと $-2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{d} + \mathbf{d}\cdot\mathbf{d} = 0$ となるから、すべての交点は

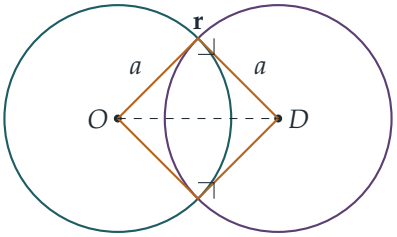
$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{d} = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}.$$

を満たす。点 $\mathbf{r}$ への二本の半径は、ベクトル $\mathbf{r}$（O から）と $\mathbf{r}-\mathbf{d}$（D から）である。これらが垂直になるのは

$$\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{d}) = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r} - \mathbf{r}\cdot\mathbf{d} = a^2 - \tfrac{1}{2}\,\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}$$

が 0 になるときである。右辺はどの交点を選んだかによらないので、$\mathbf{d}\cdot\mathbf{d} = 2a^2$ ならばすべての交点で半径どうしは垂直であり、これが示すべきことであった。（この議論は逆にもたどれる。共有点のうちたった一つでも半径どうしが垂直ならば、$\mathbf{d}\cdot\mathbf{d} = 2a^2$ である。）

この場合、二つの球面は実際に交わる。$|\mathbf{d}| = \sqrt{2}\,a$ は 0 と $2a$ の間に真に含まれるので、両者は円で交わる。O と D を通る断面を見ると、直角がわかる。



平面上で、半径 a の二つの円が共有点において互いに垂直な半径をもつならば、OD は直角二等辺三角形（isosceles right-angled triangle）の斜辺となるので、$OD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ である。ピタゴラス（Pythagoras）の定理によっても同じ答えが得られる。

検算

- (i) で $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ とすると、直線は中心を通り、条件は $a^2 > 0$ となる。実際、そのような直線はつねに球面と二点で交わる。
- (ii) で球面の中心を原点とする（$\mathbf{d} = \mathbf{0}$）と、条件は $l = a$ となる。平面が球面に接するのは、中心からの距離が a のときである。
- 数値で確かめる。$a = 1$、$|\mathbf{d}| = 1.2$（$\sqrt{2}$ ではない）とすると、交点の一つは $(0.6, 0.8, 0)$ であり、$\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{d}) = 1 - 0.72 = 0.28 \neq 0$ となって、$a^2 - \frac{1}{2}\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}$ と一致する。三つの小問すべてについて無作為な値で試したところ、10^{-13} 以内の誤差で一致した。

よくある間違い

- $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 1$ であることを忘れ、λ^2 に不要な係数をつけたまま計算してしまう。
- (ii) の接する条件を $\mathbf{d}\cdot\mathbf{n} - l = a$ だけで書いてしまう。中心は平面のどちら側にもありうる。

STEP のその先へ

量 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})^2$ は $|\mathbf{b}\times\mathbf{m}|^2$、すなわち原点から直線までの距離の二乗であり、$\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})\mathbf{m}$ は $\mathbf{b}$ から $\mathbf{m}$ 方向の成分を取り除いた正射影（orthogonal projection）である。これは線形代数（linear algebra）の核心にある考え方である。直角に交わる球面どうしは直交する（orthogonal）といい、反転幾何学（inversive geometry）や双曲幾何学（hyperbolic geometry）のモデルにおいて中心的な役割を果たす。射影については Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）が扱っており、直交する円が活躍する様子は Needham の *Visual Complex Analysis*（ヴィジュアル複素解析）で見ることができる。

解答例

STEP III 1998、第 9 問

力学 ・ 慣性モーメント

> **STEP III 1998、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q9

鍵となる考え方

中身の詰まった円錐は、頂点からの距離に比例して半径が大きくなる薄い円板を積み重ねたものである。薄い円板の慣性モーメント（moment of inertia）（その軸のまわり、および直径のまわり）がわかっていれば、各薄片の寄与を 1 つの積分で足し合わせることができる。2 本目の軸については、直交軸の定理（perpendicular axis theorem）（円板の軸まわりのモーメントを直径まわりのモーメントに変換するため）と平行軸の定理（parallel axis theorem）（その軸を頂点まで平行移動するため）が必要である。振動の方は実体振り子（compound pendulum）であり、その周期を求めるにはちょうど頂点まわりの慣性モーメントが必要となる。

解答

薄片への分割

頂点を原点に置き、円錐の軸を z 軸に沿ってとる。すると底面は平面 $z = h$ となる。ρ を（一定の）密度（density）とする。相似な三角形により、高さ z における断面は半径

$$r = \frac{az}{h},$$

の円板である。厚さ δz の薄片は質量 $\delta m = \rho\pi r^2\,\delta z = \rho\pi\dfrac{a^2z^2}{h^2}\,\delta z$ の薄い円板である。積分すると

$$m = \int_0^h \rho\pi\frac{a^2z^2}{h^2}\,\mathrm{d}z = \tfrac{1}{3}\rho\pi a^2 h, \qquad \text{よって} \qquad \rho\pi = \frac{3m}{a^2h}.$$

軸まわりの慣性モーメント

質量 M、半径 r の一様な円板の、その軸まわりの慣性モーメントは $\frac{1}{2}Mr^2$ である。（円板を半径 s、質量 $\frac{2Ms}{r^2}\,\delta s$ の円環に分割すると、各円環はその質量の s^2 倍を寄与し、$\int_0^r \frac{2M}{r^2}s^3\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}Mr^2$ となる。）

円錐のどの薄片も中心が軸上にあるので、各薄片の寄与はそのまま足し合わされる。

$$\begin{aligned} I_{\text{axis}} &= \int_0^h \tfrac{1}{2}r^2\,\rho\pi r^2\,\mathrm{d}z = \tfrac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}\int_0^h z^4\,\mathrm{d}z = \tfrac{1}{10}\rho\pi a^4 h \\ &= \frac{1}{10}\cdot\frac{3m}{a^2h}\cdot a^4h = \frac{3}{10}ma^2, \end{aligned}$$

これが求める結果である。

頂点を通る軸まわりの慣性モーメント

2 つの定理を用いる。

- **直交軸の定理**。平面内にある薄板について、その平面に垂直な軸まわりの慣性モーメントは、平面内にあって同じ点でその軸と交わる、互いに垂直な任意の 2 軸のまわりの慣性モーメントの和に等しい。
- **平行軸の定理**。質量 M の物体の、重心（centre of mass）G を通る軸まわりの慣性モーメントが I_G であるとき、その軸から距離 d だけ離れた平行な軸まわりの慣性モーメントは $I_G + Md^2$ である。

薄い円板では、対称性により 2 本の直径は同等であるから、直交軸の定理より $2I_{\text{diam}} = \frac{1}{2}Mr^2$、すなわち $I_{\text{diam}} = \frac{1}{4}Mr^2$ である。

頂点を通り底面に平行な軸 ℓ をとる（たとえば x 軸に沿ってとる）。高さ z の薄片の重心は z 軸上にあって ℓ から距離 z にあり、ℓ に平行なその薄片自身の直径はこの重心を通る。平行軸の定理により、この薄片の寄与は $\left(\frac{1}{4}r^2 + z^2\right)\delta m$ である。したがって

$$\begin{aligned} I_{\text{apex}} &= \int_0^h \left(\frac{a^2z^2}{4h^2} + z^2\right)\rho\pi\frac{a^2z^2}{h^2}\,\mathrm{d}z = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2} + 1\right)\frac{h^5}{5} \\ &= \frac{3m}{a^2h}\cdot\frac{a^2h^3}{5}\cdot\frac{a^2+4h^2}{4h^2} = \frac{3m}{20}\left(a^2+4h^2\right). \end{aligned}$$

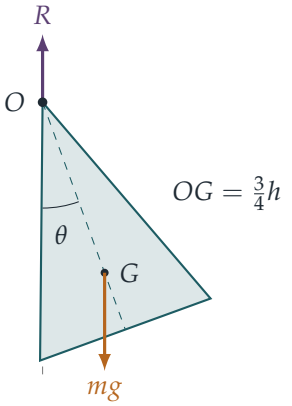
> **考えてみよう** 円錐全体に対して一度に平行軸の定理を適用し、重心から平行移動することはなぜできないのだろうか。

できなくはないが、G を通る平行な軸まわりの慣性モーメントはまだわかっておらず、それこそを計算する必要が生じる。薄片に分割すればこれを回避できる。各円板の自身の直径まわりのモーメントは既知であり、各円板の中心は軸上で ℓ から既知の距離

z にあるからである。（副産物として、$I_G = I_{\text{apex}} - m\left(\frac{3}{4}h\right)^2 = \frac{3m}{80}(4a^2 + h^2)$ が得られる。）

頂点のまわりの微小振動

円錐を、頂点を通り運動平面に垂直な、なめらかな水平軸のまわりに自由に回転できる剛体（rigid body）としてモデル化する。この軸は底面に平行であるから、そのまわりの慣性モーメントは I_{apex} である。円錐の軸と鉛直下向きとのなす角を θ とする。



軸における抗力は O のまわりのモーメントをもたないので、トルク（torque）を生じるのは O から距離 $\frac{3}{4}h$ にある G に働く重力だけである。その O のまわりのモーメントは $mg \cdot \frac{3}{4}h\sin\theta$ であり、θ を減少させる向きに働く。軸のまわりのモーメントを考えると

$$I_{\text{apex}}\,\ddot{\theta} = -\tfrac{3}{4}mgh\sin\theta.$$

微小振動では $\sin\theta \approx \theta$ であるから

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta, \qquad \omega^2 = \frac{\frac{3}{4}mgh}{\frac{3m}{20}(a^2 + 4h^2)} = \frac{5gh}{4h^2 + a^2}.$$

これは単振動（simple harmonic motion）であり、その周期は

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4h^2 + a^2}{5gh}},$$

となり、これが求める結果である。

検算

- 単位：$\frac{4h^2+a^2}{gh}$ の単位は $\mathrm{m}^2/(\mathrm{m\,s^{-2}}\cdot\mathrm{m}) = \mathrm{s}^2$ であり、周期の 2 乗としてふさわしい。

- 細い円錐（$a \to 0$）：質量はすべて軸に沿って分布し、$\int z^2 \,\mathrm{d}m = \frac{3}{5}mh^2$ となって、$I_{\text{apex}} \to \frac{3}{5}mh^2$ と一致する。周期は $2\pi\sqrt{4h/(5g)}$ となり、これは長さ $\frac{4}{5}h$ の単振り子（simple pendulum）の周期である。この長さは $\frac{3}{4}h$ より長く、質量が長さ方向に広がった物体として当然の結果である。
- 数値的に、$m = 1$、$a = 0.7$、$h = 2.3$ として、シンプソンの公式（Simpson's rule）による薄片の数値積分と、円錐内の点のモンテカルロ（Monte Carlo）標本の両方で $I_{\text{axis}} = 0.147$ および $I_{\text{apex}} \approx 3.2475$ が得られ、公式と一致した。また $g = 9.81$ として、小さな振幅から $I\ddot{\theta} = -\frac{3}{4}mgh\sin\theta$ を数値的に時間発展させると周期 2.7525 s が得られ、公式の予測どおりであった。

よくある間違い

- 後半で各薄片に $\frac{1}{2}r^2\,\delta m$ を用いること：底面に平行な軸のまわりでは、円板はその直径のまわりに回転するので、寄与は $\frac{1}{2}r^2\,\delta m$ ではなく $\frac{1}{4}r^2\,\delta m$ である。
- 重心からではなく頂点から平行軸の定理を適用すること：この定理は、2 本の軸の一方が重心を通る場合にのみ成り立つ。
- 円錐を長さ $\frac{3}{4}h$ の単振り子として扱うこと：周期を決めるのは G の位置だけではなく、慣性モーメントである。

STEP のその先へ

ある点を通る任意の軸のまわりの慣性モーメントは、慣性テンソル（inertia tensor）と呼ばれる 1 つの 3×3 対称行列に集約される。直交軸の定理と平行軸の定理は、回転と平行移動のもとでこの行列がどう振る舞うかの特別な場合である。その固有ベクトル（eigenvector）である主軸（principal axes）を考えると、回転する物体がある軸のまわりでは安定し、別の軸のまわりではふらつく理由が説明できる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の回転と実体振り子をこの水準で展開している。

解答例

STEP III 1998、第 10 問

力学 ・ 斜め衝突

> **STEP III 1998、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q10

鍵となる考え方

質量が等しいとき、2 つの保存則（conservation laws）のどちらからも質量が消え、すっきりした 2 つのベクトルの等式が残る。すなわち、速度の和が変わらないことと、速さの 2 乗の和が変わらないことである。$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2$ と $|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2$ を比べると内積（scalar product）$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ だけが取り出され、この 1 つの量が問題のすべての部分を動かしている。最後の部分では、2 つ目の球の速度がわかれば運動量によって 1 つ目の球の速度が決まるので、エネルギーの式は未知の速さ 1 つについての二次方程式（quadratic）になる。そして実数解をもつ二次方程式の判別式（discriminant）は負でない。

解答

2 つの球を、なめらかな（smooth）台の上を動く質量 m の等しいなめらかな球としてモデル化する。こうすると、衝突の間にはたらく水平方向の力は、球どうしが互いに及ぼし合う力だけである。

保存則と相対速さ

運動量（momentum）と運動エネルギー（kinetic energy）から

$$m\mathbf{v}_1+m\mathbf{v}_2=m\mathbf{v}_1'+m\mathbf{v}_2',$$
$$\tfrac{1}{2}m|\mathbf{v}_1|^2+\tfrac{1}{2}m|\mathbf{v}_2|^2=\tfrac{1}{2}m|\mathbf{v}_1'|^2+\tfrac{1}{2}m|\mathbf{v}_2'|^2,$$

が得られる。すなわち

$$\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2' \quad (1), \qquad |\mathbf{v}_1|^2+|\mathbf{v}_2|^2=|\mathbf{v}_1'|^2+|\mathbf{v}_2'|^2 \quad (2).$$

である。(1) の両辺それぞれについて、自分自身との内積をとると

$$|\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2 + 2\,\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = |\mathbf{v}_1'|^2 + |\mathbf{v}_2'|^2 + 2\,\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2'.$$

となる。ここから (2) を引くと

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2'. \qquad (3)$$

が残る。さて、相対速さ（relative speed）の 2 乗は

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 = |\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2 - 2\,\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2,$$

であり、(2) と (3) より右辺の各項は衝突の前後で同じである。よって $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 = |\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2'|^2$ であり、速さは負でないから $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2'|$ となる。つまり相対速さは保存される。

一方の球がはじめ静止している場合

$\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ とする。このとき (3) より

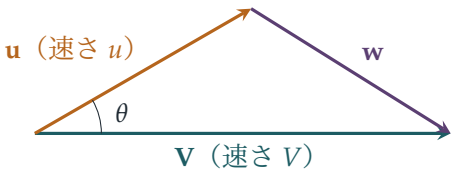
$$\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{0} = 0.$$

である。衝突後は両方の球が動いているので $\mathbf{v}_1' \neq \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{v}_2' \neq \mathbf{0}$ であり、内積が 0 であることは、衝突後の 2 つの速度が垂直であることを意味する。（この条件がなければ、一方の速度が 0 であるという理由だけで内積が 0 になることもありうる。正面衝突（head-on collision）がその例で、このとき 2 つの球は単に速度を入れ替える。）

エネルギーが失われる衝突

今度は (1) は依然として成り立つが、(2) は成り立たない。静止している球を A、動いている球を B とよぶ。B ははじめ $|\mathbf{V}| = V$ である速度 $\mathbf{V}$ をもち、衝突後は $\mathbf{V}$ と角 θ をなす速さ u の速度 $\mathbf{u}$ をもつとする。A の衝突後の速度を $\mathbf{w}$ とする。

運動量から $\mathbf{V} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ となるので、3 つの速度は三角形をなす。



したがって $\mathbf{w} = \mathbf{V} - \mathbf{u}$ であり、$\mathbf{V} \cdot \mathbf{u} = Vu\cos\theta$ であるから

$$|\mathbf{w}|^2 = V^2 - 2Vu\cos\theta + u^2$$

となる（三角形における余弦定理（cosine rule）である）。衝突後の運動エネルギーは、はじめの運動エネルギーの $1-k$ 倍である。$\frac{1}{2}m$ を約すと

$$u^2+|\mathbf{w}|^2=(1-k)V^2 \quad\Longrightarrow\quad 2u^2-2Vu\cos\theta+V^2=(1-k)V^2,$$

となるので、2 つ目の球の衝突後の速さ u は

$$\boxed{2u^2-2Vu\cos\theta+kV^2=0.}$$

を満たす。

考えてみよう 問題が求めているのは $k\le\frac{1}{2}$ を示すことだけである。手もとにあるのが等式だけのとき、不等式はどこから出てくるのだろうか。

速さ u は実際に現れる実数なので、u についてのこの二次方程式は実数解をもつ。したがって判別式は負でない：

$$4V^2\cos^2\theta-8kV^2\ge 0 \quad\Longrightarrow\quad k\le\tfrac{1}{2}\cos^2\theta\le\tfrac{1}{2},$$

ここで $8V^2>0$（2 つ目の球は動いている）で割り、$\cos^2\theta\le 1$ を用いた。よって、示すべきとおり $k\le\frac{1}{2}$ である。

等号が成り立つには $\cos^2\theta=1$ かつ重解（double root）$u=\frac{1}{2}V\cos\theta$ であることが必要である。$u\ge 0$ であるから、これは $\theta=0$ かつ $u=\frac{1}{2}V$ を意味し、このとき $\mathbf{w}=\frac{1}{2}\mathbf{V}$ でもある。つまり 2 つの球は半分の速さで一体となって動き出す。これは完全非弾性（perfectly inelastic）の正面衝突である。失われうる運動エネルギーは高々半分である。

検算

- $k=0$ のとき $2u^2=2Vu\cos\theta$ となり、$u=V\cos\theta$（または $u=0$）である。このとき $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{V}-\mathbf{u})=Vu\cos\theta-u^2=0$ であるから、$\mathbf{w}=\mathbf{V}-\mathbf{u}$ は $\mathbf{u}$ と垂直である。これは 2 つ目の部分の結果と一致する。
- 反発係数（coefficient of restitution）e の正面衝突では $k=\frac{1}{2}(1-e^2)$ となり、これは 0 と $\frac{1}{2}$ の間にある。$e=0.3$ のとき $k=0.455$ である。
- 数値的には、等しいなめらかな球どうしのランダムな弾性衝突（elastic collision）を 10^5 回シミュレーションした。運動量、運動エネルギー、$\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2$、相対速さはいずれも 10^{-13} 以内で一致した。エネルギーが失われるランダムな結果 2×10^5 通りでは二次方程式が 10^{-14} の精度で成り立ち、見つかった k の最大値は 0.49999 であった。

よくある間違い

- 「相対速さ」を $||\mathbf{v}_1| - |\mathbf{v}_2||$ と考えてしまう。相対速さとは相対**速度**の大きさ $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ のことである。
- 2 つ目の部分で、両方の球が動いているという事実を使い忘れる。内積が 0 であることが垂直を意味するのは、どちらのベクトルも 0 でない場合に限られる。
- 最後の部分で、(2) や (3) を再び使ってしまう。これらは運動エネルギーの保存から得られたものであり、もはや成り立たない。残るのは運動量だけである。

STEP のその先へ

内積を用いた議論は、標準的な手法を座標系によらない形にしたものである。すなわち、運動量がゼロとなる座標系（zero-momentum frame）では、弾性衝突は 2 つの速度の大きさを保ったまま、それらを回転させるだけである。失われる割合の最大値 $\frac{1}{2}$ は、失われうるのは質量中心（centre of mass）に対する相対的な運動エネルギーだけであるという一般的な事実の表れであり、ここではそれが $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mV^2$ である。これらの考え方は散乱理論（scattering theory）や特殊相対性理論（special relativity）における衝突へとつながっていく。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、重心系での衝突を丁寧に扱っている。

解答例

STEP III 1998、第 11 問

力学 ・ 大振幅の振り子

> **STEP III 1998、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q11

この問題は、*Beyond STEP* の第 11.3 節「**本当の振り子**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/real-pendulum.html

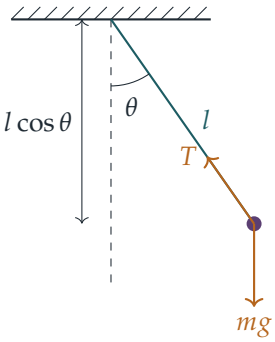
鍵となる考え方

エネルギー保存（energy conservation）から各角度における角速度（angular speed）が求まり、周期（period）は 4 分の 1 振動に要する時間の 4 倍、$\int \mathrm{d}t = \int \mathrm{d}\theta/\dot{\theta}$ である。半角公式（half-angle identity）$\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$ を用いると、エネルギーの式は被積分関数の形に書き換えられる。指示された置換（substitution）により $\theta = \gamma$ における厄介な無限大が取り除かれ、x が小さいときの $(1-x)^{-1/2}$ という形の被積分関数が残る。これこそ二項展開（binomial expansion）の出番である。

解答

エネルギーの式

振り子（pendulum）を、長さ l の軽くて伸び縮みしない糸につながれた質量 m の質点としてモデル化し、空気抵抗なしに鉛直面内で振動するものとする。θ は鉛直下向きから測る。



おもりは支点から深さ $l\cos\theta$ の位置にある。張力（tension）は糸に沿って働き、おもりの速度（円弧に沿う向き）と垂直であるから、仕事をしない。仕事をするのは重力だけであり、力学的エネルギー（mechanical energy）は保存される。おもりの速さは $l\dot{\theta}$ である。

最大の振れ角 $\theta = \gamma$ において、おもりは瞬間的に静止する。そこから一般の角度 θ までの間に、おもりは高さ $l\cos\theta - l\cos\gamma$ だけ下がるので、

$$\tfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 = mgl(\cos\theta - \cos\gamma) \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{1}{2}l\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = g(\cos\theta - \cos\gamma),$$

となる。これが最初の結果である。

周期

両方の余弦に $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2(\alpha/2)$ を用いると、

$$\cos\theta - \cos\gamma = 2\big(\sin^2(\gamma/2) - \sin^2(\theta/2)\big),$$

となるので、エネルギーの式は

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{4g}{l}\big(\sin^2(\gamma/2) - \sin^2(\theta/2)\big).$$

となる。対称性（運動は可逆であり、エネルギーの式は $\theta \mapsto -\theta$ で不変である）により、4 つの 4 分の 1 振動 $0 \to \gamma \to 0 \to -\gamma \to 0$ に要する時間はすべて等しい。$\theta = 0$ から $\theta = \gamma$ までの 4 分の 1 振動の間は θ が増加しているので、正の平方根をとる：

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\sin^2(\gamma/2) - \sin^2(\theta/2)\right)^{-1/2}.$$

0 から γ まで積分して 4 倍すると、

$$P = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\gamma}\left(\sin^2(\gamma/2) - \sin^2(\theta/2)\right)^{-1/2}\mathrm{d}\theta,$$

となり、求める式が得られる。（被積分関数はおもりが静止する $\theta = \gamma$ で発散するが、積分は収束（converge）する。以下の置換によりこのことが明示的にわかる。）

小振幅近似

$k=\sin(\gamma/2)$ とおく。$0<\gamma<\pi$ であるから $0<k<1$ である。さらに $\sin(\theta/2)=k\sin\phi$ とおく。θ が 0 から γ まで動くとき、$\sin\phi$ は 0 から 1 まで動くので、ϕ は 0 から $\pi/2$ まで動く。微分すると、

$$\tfrac{1}{2}\cos(\theta/2)\,\mathrm{d}\theta = k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi.$$

$0\le\theta/2<\pi/2$ かつ $0\le\phi\le\pi/2$ であるから、どちらの余弦も非負であり、

$$\cos(\theta/2)=\sqrt{1-k^2\sin^2\phi},\qquad \left(k^2-k^2\sin^2\phi\right)^{1/2}=k\cos\phi.$$

考えてみよう　この置換によって、厄介な因子 $(\sin^2(\gamma/2)-\sin^2(\theta/2))^{-1/2}$ はどうなるか。

これは $1/(k\cos\phi)$ となり、$\mathrm{d}\theta$ に含まれる $k\cos\phi$ とちょうど打ち消し合う：

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(k^2-\sin^2(\theta/2)\right)^{1/2}}=\frac{1}{k\cos\phi}\cdot\frac{2k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}=\frac{2\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}.$$

したがって

$$P=4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\left(1-k^2\sin^2\phi\right)^{-1/2}\mathrm{d}\phi,$$

となり、被積分関数はまったく素直な振る舞いをする積分が得られる。（ここまでは厳密である。）

γ が小さいとき、$x=k^2\sin^2\phi$ は $0\le x\le k^2$ を満たし小さいので、二項展開 $(1-x)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\cdots$ により

$$\left(1-k^2\sin^2\phi\right)^{-1/2}\approx 1+\tfrac{1}{2}k^2\sin^2\phi,$$

が得られ、誤差は k^4 のオーダーである。$\int_0^{\pi/2}\sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1-\cos 2\phi)\,\mathrm{d}\phi=\frac{\pi}{4}$ であるから、

$$P\approx 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k^2}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right)=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{k^2}{4}\right).$$

最後に、γ が小さいとき $k=\sin(\gamma/2)\approx\gamma/2$（誤差は γ^3 のオーダー）であるから、γ^4 のオーダーの項を除いて $k^2\approx\gamma^2/4$ となり、

$$P\approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\gamma^2}{16}\right),$$

となって、求める結果が得られる。主要項はおなじみの微小振動の周期であり、補正項は振れ幅が大きいほど周期がわずかに長くなることを示している。

検算

- $\gamma \to 0$ とすると、線形化された方程式 $\ddot{\theta} = -(g/l)\theta$ から得られる周期 $2\pi\sqrt{l/g}$ に戻る。
- 次元：$\sqrt{l/g}$ は時間の次元をもち、γ は無次元である。
- 数値的に、$l/g = 1.7/9.81$、$\gamma = 0.5$ として、方程式 $\ddot{\theta} = -(g/l)\sin\theta$ を刻み幅の細かいルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で解くと $P = 2.65705$ となり、厳密な ϕ の積分と表示した桁まですべて一致する。近似式からは 2.65646 が得られ、相対誤差は約 2×10^{-4} である。この誤差は γ^4 に比例して変化し（およそ $0.0036\gamma^4$）、γ^2 の項が正しいことが確かめられる。

よくある間違い

- 因子 4 を忘れる。0 から γ までの積分は周期の 4 分の 1 にすぎない。
- 展開の前に、置換の中で $\cos(\theta/2) \approx 1$ としてしまう。これは求めようとしている補正項と同じオーダーの $k^2\sin^2\phi$ の項を捨てることになる。二項展開の段階までは $\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}$ を厳密なまま残しておくこと。
- $1 + k^2/4$ で止めてしまい、$k = \sin(\gamma/2)$ を $\gamma/2$ に直さない。

STEP のその先へ

厳密な積分 $\int_0^{\pi/2}(1 - k^2\sin^2\phi)^{-1/2}\,\mathrm{d}\phi$ は**第 1 種完全楕円積分**（complete elliptic integral of the first kind）$K(k)$ であり、厳密な周期は $4\sqrt{l/g}\,K(\sin(\gamma/2))$ である。二項級数をさらに続けると $1 + \frac{1}{16}\gamma^2 + \frac{11}{3072}\gamma^4 + \cdots$ が得られる。また、ガウス（Gauss）は算術幾何平均（arithmetic–geometric mean）を用いると K を驚くほど速く計算できることを発見した。周期が振幅に依存するという事実は、非線形振動（nonlinear oscillation）の最も簡単な例である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、大学 1 年生のレベルで振り子と振動を扱っている。

解答例

STEP III 1998、第 12 問

確率・統計 ・ ネットワークの信頼性

> **STEP III 1998、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q12

鍵となる考え方

道路は 6 本しかないので、開通・閉鎖のパターンは $2^6 = 64$ 通りしかない。最も見通しのよい方法は**悪い**パターン、すなわち村々が互いに行き来できないいくつかのグループに分かれてしまうパターンを数えることである。悪いパターンを開通している道路の本数で分類すると、数え上げは非常に短くなる。4 つの村からなるネットワークで開通している道路が 4 本以上あれば、決して非連結（disconnected）にはならないからである。

始める前に注意しておく。問題用紙に印刷された式では括弧の前の係数が p^2 となっているが、正しい係数は p^3 である。印刷された式が正しくありえないことは「検算」で示す。ここでは修正した結果

$$P = 1 - p^3(6p^3 - 12p^2 + 3p + 4).$$

を証明する。

解答

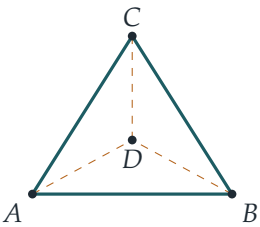
ある道路が開通している確率を $q = 1 - p$ と書く。各道路は独立（independent）に振る舞うので、k 本が開通し $6 - k$ 本が閉鎖された特定のパターンの確率は $q^k p^{6-k}$ である。ネットワークが**非連結**である事象、すなわちある村から別のある村へ到達できない事象を D とする。このとき $P = 1 - \mathbb{P}(D)$ であり、$\mathbb{P}(D)$ はすべての非連結パターンにわたる $q^k p^{6-k}$ の和である。これらを開通している道路の本数 k によって数える。

開通している道路が 4 本以上：決して非連結にならない。 ネットワークが非連結ならば、村々は少なくとも 2 つのグループに分かれ、グループ間には開通した道路がない。可能な分かれ方は $1+3$（孤立した 1 つの村と残りの 3 つ）と $2+2$ だけである。開通している道路はすべてグループの内部にある。$1+3$ の分かれ方では 3 つの村のグループには道路が 3 本しかなく、$2+2$ の分かれ方では各組に道路が 1 本ずつしかないので合計 2 本である。いずれにせよ、開通しうる道路は高々 3 本である。したがって、開通している道路が $k \geq 4$ 本のパターンはすべて連結（connected）である。

開通している道路がちょうど 3 本。

> **考えてみよう** 開通している道路が 3 本のとき、4 つの村すべてを連結しないのはどのパターンか。

上の議論により、開通した道路が 3 本の非連結パターンは $1+3$ の分かれ方であり、3 つの村のグループ内の 3 本の道路がすべて開通していなければならない。すなわち三角形（triangle）ができて、4 つ目の村が孤立する。孤立する村の選び方は 4 通りなので、そのようなパターンは 4 通りである。（残りの $\binom{6}{3} - 4 = 16$ 通りのパターンは四面体（tetrahedron）の全域木（spanning tree）であり、連結である。）



開通している道路 AB, BC, CA（実線）、
D への閉鎖された道路（破線）：
D は孤立する

開通している道路が 2 本以下：常に非連結。 4 つの村を結ぶには少なくとも 3 本の道路が必要である（各道路は、A から到達可能なグループに新しい村を高々 1 つしか加えられない）。したがって、開通した道路が 2 本のパターン $\binom{6}{2} = 15$ 通り、1 本のパターン 6 通り、0 本のパターン 1 通りはすべて非連結である。

合計する。 したがって

$$\mathbb{P}(D) = 4p^3q^3 + 15p^4q^2 + 6p^5q + p^6 = p^3\left(4q^3 + 15pq^2 + 6p^2q + p^3\right).$$

ここで $q = 1 - p$ として括弧の中を展開する。

$$\begin{aligned} 4(1-p)^3 &= 4 - 12p + 12p^2 - 4p^3, \\ 15p(1-p)^2 &= 15p - 30p^2 + 15p^3, \\ 6p^2(1-p) &= 6p^2 - 6p^3, \\ p^3 &= p^3. \end{aligned}$$

足し合わせると、定数項は 4、p の項は $-12p + 15p = 3p$、p^2 の項は $12 - 30 + 6 = -12$、p^3 の項は $-4 + 15 - 6 + 1 = 6$ となる。よって

$$\mathbb{P}(D) = p^3\left(6p^3 - 12p^2 + 3p + 4\right), \qquad \text{したがって} \qquad P = 1 - p^3\left(6p^3 - 12p^2 + 3p + 4\right).$$

検算

- $p = 0$（どの道路も閉鎖されない）のとき $P = 1$ となり、$p = 1$ のとき $P = 1 - (6 - 12 + 3 + 4) = 0$ となる。どちらも正しいが、どちらも p^2 版でも成り立つので、両者を区別することはできない。
- p が小さい場合を考えると両者を区別できる。非連結になるには少なくとも 3 本の道路（たとえば 1 つの村につながる 3 本）が閉鎖されている必要があるので、p が小さいとき $\mathbb{P}(D)$ はおよそ $4p^3$ になるはずである。われわれの式は $\mathbb{P}(D) \approx 4p^3$ を与えるが、印刷された式では $4p^2$ となり、これはありえない。
- $p = \frac{1}{3}$ のとき、われわれの式は $P = 1 - \frac{1}{27} \cdot \frac{105}{27} = \frac{208}{243} \approx 0.856$ を与える。64 通りすべてのパターンを p の 21 個の値についてコンピュータで数え上げた結果は p^3 版の式と完全に一致し、$p = 0.4$ で 200 000 回の降雪をシミュレーションした結果は、式の値 0.7655 に対して 0.767 であった。

よくある間違い

- 孤立した村がある場合だけを数え、$2 + 2$ の分かれ方の確認を忘れること。ここでは新しいものは何も加わらない。$2 + 2$ の分かれ方では開通した道路は高々 2 本なので、それらのパターンはすでに「2 本以下」の数に含まれている。それでも、そのことは明記する必要がある。
- 「A が孤立する」と「B が孤立する」のような重なりのある事象の確率を、重なりを補正せずに足し合わせること。パターン全体を数えれば重複して数えることを避けられる。
- 印刷された p^2 を信じて、計算を無理にそれに合わせること。誠実に計算した結果が「〜を示せ」と食い違うときは、特別な場合で確かめてみるとよい。

STEP のその先へ

これは**ネットワーク信頼性**（network reliability）の小さな例である。グラフの各辺が独立に故障するとき、残ったグラフが連結である確率を求めたい。答えは常に p の多項式であり、その係数は連結な全域部分グラフ（connected spanning subgraph）の個数を数えている（ここでは開通した道路が $6, 5, 4, 3$ 本の場合にそれぞれ $1, 6, 15, 16$）。大きなグラフではこれを求めることは計算量的に困難であり、タット多項式（Tutte polynomial）やパーコレーション理論（percolation theory）と深く結びついている。確率論の側面を身につけるには Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）がよく、Bollobás の *Modern Graph Theory*（現代グラフ理論）はランダムグラフとタット多項式を扱っている。

解答例

STEP III 1998、第 13 問

確率・統計 ・ 最尤推定

STEP III 1998、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/98-s3-q13

鍵となる考え方

ここでの未知数は n であり、しかも整数であるから、微分法（calculus）は役に立たない。n について微分することはできないのである。数列（sequence）を最大化する標準的な道具は、隣り合う項の比（ratio）を調べることである。比が 1 を超えている間は数列は増加し、比が 1 を下回ると減少する。そして、どこかで比がちょうど 1 に等しくなるときに限り、同点（最尤推定値（maximum likelihood estimate、MLE）が 2 つ）が生じる。

解答

公平な硬貨（fair coin）を n 回投げたときの表の回数は二項分布（binomial distribution）に従うから、

$$\mathrm{P}(k \text{ 回表が出る（全}n \text{ 回中）}) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}, \qquad n \geq k,$$

であり、$n < k$ ならばこの確率は 0 である。以下では常に $k \geq 1$（友人は少なくとも 1 回は表を見ている）とするので、候補となるのは $n \geq k$ のみである。

公平な硬貨の場合の一般的な計算

$n \geq k$ に対して $L(n) = \binom{n}{k}2^{-n}$ とおき、k を固定した n の関数とみなす。$n \geq k$ のとき、

$$\frac{L(n+1)}{L(n)} = \frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n+1}{n+1-k} \cdot \frac{1}{2},$$

である。ここで $\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{n+1-k}\binom{n}{k}$ を用いた。$n+1-k>0$ であるから、不等号の向きを変えることなく分母を払うことができる：

$$\frac{L(n+1)}{L(n)} \geq 1 \iff n+1 \geq 2(n+1-k) \iff n \leq 2k-1,$$

であり、等号が成り立つのはちょうど $n=2k-1$ のときである。したがって

$$L(k) < L(k+1) < \cdots < L(2k-1) = L(2k) > L(2k+1) > L(2k+2) > \cdots .$$

考えてみよう 比から、最大値がどこにあるかがどのようにわかるのか？

$n < 2k-1$ では比は 1 より大きいので、各項は直前の項より大きい。すなわち数列は $n=2k-1$ まで狭義単調に増加する。$n=2k-1$ では比はちょうど 1 であるから、$L(2k) = L(2k-1)$ となる。$n > 2k-1$ では比は 1 より小さく、数列はそれ以降狭義単調に減少する。よって、最大値をとる n の値はちょうど 2 つである。

表が 1 回の場合

$k=1$ のとき、2 つの最尤推定値は $n = 2k-1 = 1$ と $n = 2k = 2$ である。直接計算すると

$$L(1) = \tfrac{1}{2}, \quad L(2) = 2\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}, \quad L(3) = 3\cdot\tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{8},$$

であり、上の議論から $L(n)$ は $n=2$ 以降減少し続ける。よって、求めるとおり最尤推定値は 1 と 2 の 2 つである。

表が k 回の場合

一般的な計算により、投げた回数の 2 つの最尤推定値は

$$n = 2k-1 \quad \text{および} \quad n = 2k.$$

である。

偏りのある硬貨

次に $0<p<1$、$q = 1-p$ とする。このとき

$$L(n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad n \geq k.$$

である。$n \geq k$ のとき、因子 p^k は約分され、因子 q が 1 つ余分に現れる：

$$\frac{L(n+1)}{L(n)} = \frac{(n+1)q}{n+1-k}.$$

ここでも $n+1-k>0$ であるから、

$$\frac{L(n+1)}{L(n)} \gtreqless 1 \iff (n+1)(1-p) \gtreqless n+1-k \iff k \gtreqless (n+1)p \iff n+1 \lesseqgtr \frac{k}{p}.$$

したがって L は $n+1 < k/p$ の間は増加し、$n+1 = k/p$ のとき横ばいとなり、$n+1 > k/p$ になると減少する。$p<1$ より $k/p>k$ であるから、転換点は範囲 $n \geq k$ の内部にあることに注意する。

- k/p が整数で**ない**とき、$m = \lfloor k/p \rfloor$ とおく。このとき $n+1 < k/p$ となるのはちょうど $n+1 \leq m$ のときであるから、$L(k) < \cdots < L(m)$ であり、$L(m+1) < L(m)$ でその後も減少が続く。最尤推定値はただ 1 つで、

  $$n = \left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor.$$

  である。

- $k/p = N$ が整数のとき、L は $L(N-1)$ まで増加し、$L(N) = L(N-1)$ となり、その後減少する。最尤推定値は 2 つで、

  $$n = \frac{k}{p} - 1 \quad \text{および} \quad n = \frac{k}{p}.$$

  である。いずれも k 以上である。実際、N は $N > k$ をみたす整数であるから、$N-1 \geq k$ が成り立つ。

よって、最尤推定値が一意であるのは k/p **が整数でないとき、かつそのときに限る**。公平な硬貨では $k/p = 2k$ は常に整数であり、これが前の小問で常に 2 つの最尤推定値 $2k-1$ と $2k$ が得られた理由である。

検算

- 答えは理にかなっている。表が k 回出て、表の出る確率が p ならば、投げた回数はおよそ k/p 回と予想され、最尤推定値は k/p の小数点以下を切り捨てたもの（整数のときはその前後の同点）である。
- $p = \frac{1}{3}$、$k=1$ とすると $k/p = 3$ である。このとき $L(2) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$、$L(3) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$ で同点となり、一方 $L(4) = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{27} = \frac{32}{81} < \frac{4}{9}$ である。
- コンピュータで分数を用いて $L(n)$ を厳密に計算し、公平な硬貨で $k = 1, \ldots, 39$ の場合（常に $\{2k-1, 2k\}$）と、p が分母 12 以下の分数で $k \leq 14$ である 924 組の (p,k) について、最大値をとる点を求めた。すべての場合が上の規則と一致した。

よくある間違い

- n について微分してしまうこと。ここで n は整数であり、$\binom{n}{k}$ は特別な道具立てなしには n のそれ以外の値に対して定義されない。比を調べる方法こそが正しい道具である。
- 不等号の向きを逆にしてしまうこと、あるいは、比が 1 に等しくなることこそが 2 つ目の最尤推定値を生むことを忘れること。
- すべての場合に $\lfloor k/p \rfloor$ と答え、k/p が整数のときの同点を見落とすこと。

STEP のその先へ

最尤法（maximum likelihood）は統計学における推定の中心的な方法である。観測されたデータが最も起こりやすくなるようなパラメータの値を選ぶのである。通常パラメータは連続的であり、対数尤度（log-likelihood）を微分法によって最大化する。n のような整数を推定する問題（「試行回数」の問題）は、この方法が使えない古典的な例であり、この問題は最尤推定値が一意であるとすら限らないことを示している。Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）は二項分布の解説が優れており、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は背景となる確率論を扱っている。

解答例

STEP III 1998、第 14 問

確率・統計 ・ 不偏推定量

> **STEP III 1998、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q14

この問題は、*Beyond STEP* の第 13.3 節「**ドイツ戦車問題**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch13/german-tanks.html

鍵となる考え方

Z_2 は独立（independent）な部分の和なので、その平均（mean）と分散（variance）は一様（uniform）な確率変数 1 個の平均と分散からただちに求まる。Z_1 は最大値（maximum）に依存しており、最大値を扱う自然な方法は分布関数（distribution function）を通すことである。X_i のうち最大のものが m 以下となるのは、**すべての** X_i が m 以下となるとき、かつそのときに限る。これは確率の積に書き換えられ、それを微分すれば確率密度関数（density）が得られる。

解答

Z_2 の平均

各 X_i は $[0, N]$ 上で密度 $1/N$ をもつので、

$$\mathrm{E}(X_i) = \frac{N}{2}, \qquad \mathrm{E}(X_i^2) = \frac{1}{N}\int_0^N x^2\,\mathrm{d}x = \frac{N^2}{3}, \qquad \mathrm{Var}(X_i) = \frac{N^2}{3} - \frac{N^2}{4} = \frac{N^2}{12}.$$

期待値の線形性（linearity of expectation）により、

$$\mathrm{E}(Z_2) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i) = \frac{2}{n}\cdot n \cdot \frac{N}{2} = N.$$

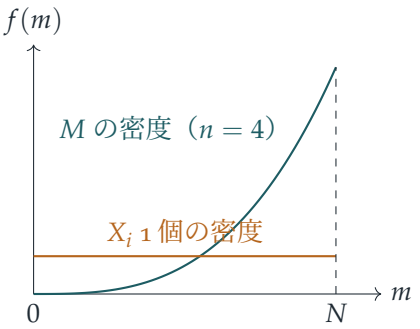
最大値の分布

$M = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ とおく。$0 \le m \le N$ のとき、事象 $M \le m$ が起こるのは、すべての i について $X_i \le m$ となるとき、かつそのときに限る。さらに X_i は独立であるから、

$$\mathrm{P}(M \le m) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X_i \le m) = \left(\frac{m}{N}\right)^n.$$

これを微分すると、M の密度は

$$f(m) = \frac{n\, m^{n-1}}{N^n}, \qquad 0 \le m \le N.$$



最大値は N の近くに集中する。だからこそ、不偏（unbiased）にするには小さな補正係数を掛けるだけで済むのである。そのモーメントは

$$\mathrm{E}(M) = \int_0^N m \cdot \frac{n\, m^{n-1}}{N^n}\, \mathrm{d}m = \frac{n}{N^n} \cdot \frac{N^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1} N,$$
$$\mathrm{E}(M^2) = \int_0^N m^2 \cdot \frac{n\, m^{n-1}}{N^n}\, \mathrm{d}m = \frac{n}{n+2} N^2.$$

Z_1 の平均

$$\mathrm{E}(Z_1) = \frac{n+1}{n}\, \mathrm{E}(M) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} N = N.$$

よって、求められているとおり、どちらの推定量（estimator）も平均は N である。

分散

Z_1 については、まず

$$\mathrm{Var}(M) = \frac{n}{n+2} N^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2} N^2 = \frac{n\left[(n+1)^2 - n(n+2)\right]}{(n+2)(n+1)^2} N^2 = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2} N^2,$$

となる。ここで $(n+1)^2 - n(n+2) = 1$ を用いた。これに $\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$ を掛けて、

$$\boxed{\mathrm{Var}(Z_1) = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{n}{(n+2)(n+1)^2} N^2 = \frac{N^2}{n(n+2)}.}$$

Z_2 については、X_i が独立なので分散は足し合わせられる。

$$\boxed{\mathrm{Var}(Z_2) = \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = \frac{4}{n^2} \cdot n \cdot \frac{N^2}{12} = \frac{N^2}{3n}.}$$

考えてみよう どちらが小さいか。そして、それは常に同じ方か。

比は

$$\frac{\mathrm{Var}(Z_1)}{\mathrm{Var}(Z_2)} = \frac{3n}{n(n+2)} = \frac{3}{n+2}.$$

これは $n = 1$ のとき 1 に等しく（このとき $Z_1 = Z_2 = 2X_1$ であり、二つの推定量は実際に同一である）、$n \geq 2$ のすべてで 1 より小さい。

どちらを選ぶべきか

どちらも不偏なので、ばらつきを比べる。Z_1 の方が望ましい。

- $n \geq 2$ では Z_1 の分散の方が真に小さく、その差は n とともに大きくなる。$\mathrm{Var}(Z_1)$ は $1/n^2$ のように減少するが、$\mathrm{Var}(Z_2)$ は $1/n$ のようにしか減少しない。たとえば $n = 10$ のとき、Z_1 の標準偏差（standard deviation）は約 $0.09N$ であるのに対し、Z_2 は約 $0.18N$ である。
- Z_1 は常に、観測された識別番号の最大値以上である。N も当然そうでなければならない。一方 Z_2 は、実際に観測した番号よりも小さくなることがあり（たとえば観測値が 1, 2, 30 なら $Z_2 = 22$ となる）、ありえないとわかっている推定値を与えてしまう。

検算

- $n = 1$ のとき、どちらの公式も $N^2/3$ を与える。$Z_1 = Z_2 = 2X_1$ であり、$\mathrm{Var}(2X_1) = 4 \cdot N^2/12$ なので、そうなるはずである。
- $N = 10$、試行回数 200 000 のシミュレーションでは、どちらの推定量も標本平均は 10 との差が 0.01 以内であった。また $n = 4$ のとき標本分散は 4.16 と 8.33 であり、理論値 $\frac{100}{24} \approx 4.17$ と $\frac{100}{12} \approx 8.33$ と一致した。

よくある間違い

- 最大値の密度を直接扱おうとすること。まず $\mathrm{P}(M \le m)$ を経由せよ。独立性によって、それは単純な積になる。
- 定数を 2 乗し忘れること。$\mathrm{Var}(cY) = c^2 \mathrm{Var}(Y)$ であるから、掛ける係数は $\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$ と $\frac{4}{n^2}$ である。

STEP のその先へ

これは古典的な「ドイツ戦車問題（German tank problem）」である。第二次世界大戦中、連合国の統計学者たちはこの手法を用いて、シリアル番号からドイツの戦車生産数を驚くほど正確に推定した。ここで最大値は**十分統計量**（sufficient statistic）である。すなわち、最大値がわかってしまえば、標本の残りの部分は N について何の追加情報ももたらさない。さらにレーマン・シェフェ（Lehmann–Scheffé）の定理により、Z_1 はすべての不偏推定量の中で分散が最小であることが示される。十分性と有効推定量は大学 1 年の統計学で扱われる。順序統計量（order statistics）を学び始めるには、Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）がよい。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

1998 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

