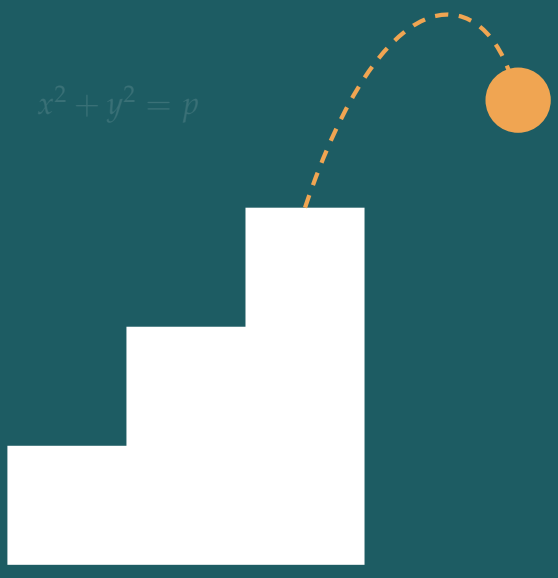
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

1997 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

1997 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

1997 年解答例

1997 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 42 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 硬貨の組合せの数え上げ 純粋数学 . . . 3
Q2 逆三角関数の導関数 純粋数学 . . . 6
Q3 累乗と一の位の数 純粋数学 . . . 10
Q4 絶対値を含む方程式 純粋数学 . . . 13
Q5 幾何におけるベクトル 純粋数学 . . . 17
Q6 積分による円周率の評価 純粋数学 . . . 21
Q7 ガウス求積法 純粋数学 . . . 25
Q8 指数方程式の解 純粋数学 . . . 28
Q9 相対速度 力学 . . . 32
Q10 円運動 力学 . . . 36
Q11 抵抗を受ける運動 力学 . . . 40
Q12 中心極限定理 確率・統計 . . . 44
Q13 条件付き確率 確率・統計 . . . 48
Q14 期待費用の最小化 確率・統計 . . . 51

STEP II

Q1 数字和と数え上げ 純粋数学 . . . 55
Q2 漸化式 純粋数学 . . . 58
Q3 部分分数分解による積分 純粋数学 . . . 61
Q4 剰余の定理 純粋数学 . . . 64
Q5 複素指数関数による写像 純粋数学 . . . 68
Q6 三角方程式 純粋数学 . . . 72
Q7 曲線の概形 純粋数学 . . . 76
Q8 積分による不等式 純粋数学 . . . 80

Q9 摩擦と剛体のつり合い 力学 . . . 84
Q10 爆発と弾性衝突 力学 . . . 88
Q11 放物運動 力学 . . . 92
Q12 二項分布と偶奇の確率 確率・統計 . . . 96
Q13 ビュフォンの針 確率・統計 . . . 100
Q14 ポアソン過程 確率・統計 . . . 104

STEP III

Q1 指数関数のべき級数 純粋数学 . . . 108
Q2 曲線の概形 純粋数学 . . . 112
Q3 1 の冪根 純粋数学 . . . 117
Q4 相加相乗平均の不等式 純粋数学 . . . 121
Q5 サイクロイドの弧長 純粋数学 . . . 125
Q6 チェビシェフの微分方程式 純粋数学 . . . 128
Q7 e の無理性 純粋数学 . . . 132
Q8 二次形式の対角化 純粋数学 . . . 136
Q9 弾性ばねを含む静力学 力学 . . . 141
Q10 滑りを伴う転がり 力学 . . . 145
Q11 剛体の回転 力学 . . . 149
Q12 クーポン収集問題 確率・統計 . . . 153
Q13 正規分布の積率母関数 確率・統計 . . . 157
Q14 確率変数の積 確率・統計 . . . 160

解答例

STEP I 1997、第 1 問

純粋数学 ・ 硬貨の組合せの数え上げ

> **STEP I 1997、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q1

この問題は、*Beyond STEP* の第 9.5 節「**両替の仕方**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/making-change.html

鍵となる考え方

「方法の数」を数えるには、すべての組合せをちょうど 1 回ずつ列挙する体系的な手順が必要である。自然な手順は、まず最も大きい硬貨の枚数を固定し、次に 2 番目に大きい硬貨の枚数を固定し、以下同様に進めることである。2p 硬貨と 1p 硬貨だけが残れば、数え上げはすぐに済む。2p 硬貨の枚数ですべてが決まるからである。またこの方法をとると、10 ペンスの答えがそのまま 20 ペンスの答えに使える。

解答

順序は関係ない。「方法」とは、各硬貨を何枚ずつ使うかの選び方である。したがって、0 以上の整数（non-negative integers）の解の個数を数えることになる。

基本となる部品：2p 硬貨と 1p 硬貨

2p 硬貨と 1p 硬貨で r ペンスを作るには、2p 硬貨の枚数 b を選べばよい。b は 0 から $\lfloor r/2 \rfloor$ までのどの値でもよい。このとき残りの $r - 2b \geq 0$ ペンスは 1p 硬貨で作られ、その方法はちょうど 1 通りである。よって方法の数は

$$\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1.$$

である。

10 ペンスを作る

- *10p* 硬貨を使う場合。この 1 枚だけで全額になる。1 通りである。
- *10p* 硬貨を使わない場合。5p 硬貨の枚数 0、1、2 で場合分けする。

5p 硬貨の枚数	2p と 1p で作る残り	方法の数 $\lfloor r/2 \rfloor + 1$
2	0	1
1	5	3
0	10	6

これで $1 + 3 + 6 = 10$ 通りとなる。

どの組合せも 10p 硬貨の枚数と 5p 硬貨の枚数が確定しているので、ちょうど 1 回だけ数えられる。合計は $1 + 10 = 11$ 通りであり、求める結果が得られた。

20 ペンスを作る

5p、2p、1p の硬貨で n ペンスを作る方法の数を $F(n)$ と書く。いま見たように $F(10) = 10$ であり、また明らかに $F(0) = 1$ である（硬貨を 1 枚も使わない）。$F(20)$ を求めるには、5p 硬貨の枚数 0 から 4 で場合分けする。

5p 硬貨の枚数	2p と 1p で作る残り	方法の数
4	0	1
3	5	3
2	10	6
1	15	8
0	20	11

よって $F(20) = 1 + 3 + 6 + 8 + 11 = 29$ である。

考えてみよう 20p 硬貨と 10p 硬貨を、重複して数えることなく組み込むにはどうすればよいか。

再び大きい硬貨で場合分けする。20p 硬貨を使う場合、それが唯一の硬貨でなければならないので 1 通りである。使わない場合は、10p 硬貨の枚数で場合分けする。

- 10p 硬貨 2 枚：残りはなく、$F(0) = 1$ 通り。
- 10p 硬貨 1 枚：残りは 10p で、$F(10) = 10$ 通り。
- 10p 硬貨 0 枚：残りは 20p で、$F(20) = 29$ 通り。

これらの場合は互いに排反であり、すべてを尽くしているので、20 ペンスを作る方法の数は

$$1+1+10+29=41.$$

である。

検算

- 10p の場合を手で列挙する：10；5+5；5+2+2+1、5+2+1+1+1、$5+1\times5$；さらに 2×5、$2\times4+1\times2$、...、1×10（これらが 6 通り）。合わせて 11 通りである。
- 各硬貨の枚数についてループを回す短いプログラムで数えると、11 と 41 が得られる。途中の値 $F(10)=10$ と $F(20)=29$、および 20p 硬貨を使わない場合が 40 通りであることも確認できる。
- 小さな場合は手で簡単に確かめられる。5p、2p、1p の硬貨で 5p を作る方法は $F(5)=4$ 通りであり、$1+3$ と一致する。

よくある間違い

- 順序を区別して数えてしまい、5+2+2+1 と 2+5+1+2 を別の「方法」としてしまう。これらは同じ硬貨の集まりである。
- 硬貨 1 枚だけの方法、すなわち 10p 硬貨 1 枚と 20p 硬貨 1 枚を忘れる。
- 体系的な手順を示さずに合計だけを答える。問題文には説明のない答えには得点を与えないと注意されているので、場合分けそのものが要点である。

STEP のその先へ

これらは、決まった集合の要素を部分とする n の**分割**（partition）である。これを扱うすっきりした方法は母関数（generating function）である。方法の数は

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})},$$

における x^n の係数であり、われわれの場合分けは、これらの因数を 1 つずつ掛け合わせて展開しているにすぎない。母関数は数え上げの問題を代数に変え、分割に関するオイラー（Euler）やラマヌジャン（Ramanujan）の研究へとつながっていく。これを探究するのによい出発点は Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* であり、整数論の側面については Davenport の *The Higher Arithmetic*（整数論の入門書）がよい。

解答例

STEP I 1997、第 2 問

純粋数学 ・ 逆三角関数の導関数

> **STEP I 1997、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q2

鍵となる考え方

小問 (i) では f の導関数（derivative）がゼロになってしまうので、f は定数である。ただしそれは、関数が定義されている各区間の上に限ってのことである。点 $x = -1$ が実数直線を二つに分けており、その両側で定数の値は異なる。小問 (ii) では、y について x を微分し、その結果の逆数をとるほうが易しい。手間がかかるのは $\sin y^2$ と $\cos y^2$ を x と y で書き直す部分であり、そこで y の範囲が重要になる。

解答

小問 (i)

この関数は $x \neq -1$ を満たすすべての点で定義される。$u = \dfrac{1-x}{1+x}$ とおく。商の微分法（quotient rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}, \qquad 1+u^2 = \frac{(1+x)^2+(1-x)^2}{(1+x)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1+x)^2}.$$

合成関数の微分法（chain rule）による $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}u = \dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ を用いると、

$$\begin{aligned} \mathrm{f}'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \qquad (x \neq -1). \end{aligned}$$

考えてみよう $f'(x) = 0$ は、f がいたるところで同じ定数であることを意味するだろうか。

そうではない。導関数がゼロであることから関数が定数であると結論できるのは、**区間**（interval）の上に限られる（これは平均値の定理（mean value theorem）から従う）。f の定義域は $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ であり、これは二つの区間からなる。したがって f はそれぞれの部分で定数となるが、二つの定数は異なっていてもよい。それぞれの定数は、都合のよい点での値を計算するか、極限をとることで求められる。

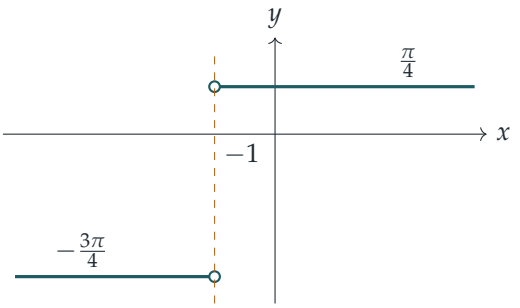
$x > -1$ のとき： $x = 0$ とおく。すると $f(0) = \tan^{-1} 0 + \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$ である。

$x < -1$ のとき： $x \to -\infty$ とする。このとき $\tan^{-1} x \to -\frac{\pi}{2}$ であり、一方 $\dfrac{1-x}{1+x} \to -1$ であるから、$\tan^{-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) \to -\frac{\pi}{4}$ となる。f はこの区間で定数なので、その定数は極限値 $-\frac{3\pi}{4}$ に等しい。（別の方法として、$x = -\sqrt{3}$ とすると $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -(2+\sqrt{3}) = -\tan\frac{5\pi}{12}$ となるので、$f(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{12} = -\frac{3\pi}{4}$ である。）

よって

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & x > -1, \\ -\dfrac{3\pi}{4}, & x < -1. \end{cases}$$

$x = -1$ における π の跳びが生じるのは、そこで $\dfrac{1-x}{1+x}$ が $-\infty$ から $+\infty$ へ一気に移り、そのためその逆正接（inverse tangent）が $-\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}$ へ跳ぶからである。



小問 (ii)

$x = y \sin y^2$ を、積の微分法（product rule）と合成関数の微分法を用いて y で微分すると、

$$\frac{dx}{dy} = \sin y^2 + 2y^2 \cos y^2.$$

次に、二つの三角関数の項をともに x と y で表す。

- $y > 0$ であるから y で割ることができ、$\sin y^2 = \dfrac{x}{y}$ となる。
- $0 < y^2 < \frac{\pi}{2}$ であるから $\cos y^2 > 0$ であり、したがって**正の**平方根をとる：

$$\cos y^2 = \sqrt{1 - \sin^2 y^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{y},$$

ここで最後の等号では $\sqrt{y^2} = y$ を用いた。これは $y > 0$ より成り立つ。

したがって

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x}{y} + 2y\sqrt{y^2 - x^2} = \frac{x + 2y^2\sqrt{y^2 - x^2}}{y}.$$

$x > 0$、$y > 0$ であり、平方根は非負であるから、これは真に正である。よって逆数をとることができ（逆関数の微分法（inverse function rule）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ は $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \neq 0$ となるところで成り立つ）、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x + 2y^2\sqrt{y^2 - x^2}},$$

となって、示すべき式が得られた。

考えてみよう なぜ問題では $0 < y < (\pi/2)^{1/2}$ という条件が課されているのだろうか。

この条件がなければ $\cos y^2$ は負になりうるので、正しい公式では平方根の前に負号がつくことになる。またこの制限により、$y \sin y^2$ はこの範囲で狭義単調増加（strictly increasing）となり（上で求めた導関数は正である）、0 から $(\pi/2)^{1/2}$ まで増加する。したがって $0 < x < (\pi/2)^{1/2}$ を満たす各 x に対して y がちょうど一つ対応し、y は確かに x の関数となる。

検算

- 小問 (i)：$\mathrm{f}(1) = \frac{\pi}{4} + \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4}$ であり、$\mathrm{f}(-3) = \tan^{-1}(-3) + \tan^{-1}(-2) \approx -1.2490 - 1.1071 = -2.3562 \approx -\frac{3\pi}{4}$ である。両方の定数を 10,000 個の無作為に選んだ点で確かめた。
- 小問 (ii)：$x = 0.5$ のとき、$y \sin y^2 = 0.5$ を数値的に解くと $y \approx 0.81355$ となり、公式からは $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \approx 0.60284$ が得られる。これは数値的に求めた逆関数の有限差分（finite difference）による導関数と一致する。
- $x = 0$ の近くでは $y \sin y^2 \approx y^3$ であるから、$y \approx x^{1/3}$ であり、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \approx \frac{1}{3y^2}$ となる。公式からは $y/(y^3 + 2y^3) = \frac{1}{3y^2}$ が得られ、一致する。

よくある間違い

- $x = -1$ が定義域を分けていることを忘れて、すべての x について $f(x) = \frac{\pi}{4}$ と結論してしまう。
- $\cos y^2 = \pm\sqrt{\cdots}$ と書いたまま、なぜ正の根が正しいのかを述べない。

STEP のその先へ

$f' = 0$ から定数が得られるのは定義域の連結な（connected）部分ごとに限られるという事実は、平均値の定理の帰結である。平均値の定理は、大学の解析学（analysis）の講義で最初に出会う大きな結果の一つである。小問 (ii) は逆関数定理（inverse function theorem）のごく簡単な場合にあたる。すなわち、導関数が 0 でない関数は局所的に逆関数をもち、その逆関数の導関数はもとの導関数の逆数である。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、この両方を丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 1997、第 3 問

純粋数学 ・ 累乗と一の位の数

> **STEP I 1997、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q3

鍵となる考え方

何よりもまず、a_7 を 3 の冪として一つにまとめて表す。3 の冪を 3 乗すると、指数が 3 倍になるだけである。そのあとは、各小問がこの一つの巨大な数について異なる問いを投げかけている。最後の桁は指数を 4 で割った余り（modulo）だけで決まる。3 の冪の最後の桁は周期（period）4 で繰り返すからである。大きさの評価には、10 の冪との大雑把な比較があれば十分である。最後の小問はこの大きさの評価に基づく。a_7 が巨大なので、$1/a_7$ は無視できるほど小さい。

解答

まず閉じた形（closed form）を求める。$a_n = 3^k$ ならば $a_{n+1} = (3^k)^3 = 3^{3k}$ であるから、各段階で指数が 3 倍される。$a_1 = 3^1$ から始めて、数学的帰納法（induction）により

$$a_n = 3^{3^{n-1}}, \qquad \text{したがって} \qquad a_7 = 3^{3^6} = 3^{729}.$$

小問 (i)

積の一の位（units digit）は、各因数の一の位だけで決まる。したがって、直前の一の位に 3 を掛けて一の位だけを残すことで、3^k の最後の桁を追跡できる。

k	1	2	3	4	5	$\cdots$
一の位：3^k	3	9	7	1	3	$\cdots$

$k = 4$ で 1 に戻ると、そこから 3, 9, 7, 1 という並びが周期 4 で繰り返す。（言い換えると、$3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$ であるから、$3^{4m+r} \equiv 3^r \pmod{10}$ となる。）

考えてみよう 筆算の割り算をせずに、729 を 4 で割った余りを求めるにはどうすればよいか。

$3 \equiv -1 \pmod 4$ であるから、$3^6 \equiv (-1)^6 = 1 \pmod 4$ である。（直接計算すると $729 = 4 \times 182 + 1$ である。）よって $3^{729} = 3^{4\cdot 182+1}$ の一の位は 3^1 の一の位と同じであり、

よってa_7 の一の位は3.

小問 (ii)

指数を 3 ずつまとめる。$729 = 3 \times 243$ であるから

$$a_7 = 3^{729} = \left(3^3\right)^{243} = 27^{243} > 10^{243} \geq 10^{100},$$

ここで $27 > 10$ を用いた（また、正の数を正の冪に上げても大小関係が保たれることも用いた）。よって、求めるとおり $a_7 \geq 10^{100}$ である。この評価はまったく精密ではない。実際、a_7 は 348 桁の数である。

小問 (iii)

分数を分ける。

$$\frac{a_7 + 1}{2a_7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a_7}.$$

$a_7 > 0$ であるから、第 2 項は正である。また小問 (ii) より、これは非常に小さい。

$$0 < \frac{1}{2a_7} \leq \frac{1}{2 \times 10^{100}} < 10^{-100}.$$

したがって

$$0.5 < \frac{a_7 + 1}{2a_7} < 0.5 + 10^{-100} < 0.505.$$

0.5 より大きく 0.505 より小さい数はすべて、小数第 2 位まで丸めると 0.50 になる。小数第 3 位は 0 であり、切り上げが起こる 5 にはほど遠いからである。よって

$$\frac{a_7 + 1}{2a_7} = 0.50 \quad \text{（小数第 2 位まで）}$$

実際、その小数展開は $0.5000\ldots$ で始まり、5 のあとに少なくとも 100 個の 0 が続く。

検算

コンピュータなら 3^{729} を正確に扱える。3 を 6 回続けて 3 乗して計算すると、$a_7 = 3^{729}$ が 348 桁で最後の桁が 3 の数であること、そして $27^{243} = 3^{729} > 10^{243}$ であること

が確認できる。正確な分数で計算すると、$\frac{a_7+1}{2a_7}$ が $\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{2}+10^{-100}$ の間に（等号なしで）あることも確認できる。より小さな規模で小問 (i) の方法を試すこともできる。$a_2 = 3^3 = 27$ の指数は $3 \equiv 3 \pmod 4$ であり、一の位は 7 と予測されるが、実際そのとおりである。

よくある間違い

- a_7 を 3^{3^6} ではなく $3^{3\cdot 7}$ や 3^{18} と読んでしまう。各段階で指数は 3 を足されるのではなく、3 倍されるのである。
- 指数を 4 ではなく 10 で割った余りに帰着させてしまう。一の位は周期 4 で循環するので、重要なのは指数を 4 で割った余りである。
- 小問 (iii) で、根拠を示さずに「0.5」と書いてしまう。「小数第 2 位まで正確に」とは 0.50 のことであり、値が 0.505 に達しないことを示す評価が必要である。

STEP のその先へ

小問 (i) は、合同算術（modular arithmetic）とオイラー（Euler）の定理への最初の入口である。$\varphi(10) = 4$ であるから $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$ となる。この帰着を塔の段ごとに繰り返し用いることで、整数論の研究者は $3^{3^{3^3}}$ のような巨大な冪の塔（power tower）の最後の桁を求める。Davenport の *The Higher Arithmetic*（高等整数論の入門書）は、合同式（congruence）と元の位数（order of an element）を一から展開している。

解答例

STEP I 1997、第 4 問

純粋数学 ・ 絶対値を含む方程式

STEP I 1997、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/97-s1-q4

鍵となる考え方

各絶対値（modulus）の項は、その中身が零になるところでのみ式の形が変わる。したがって四つの「臨界点」（critical points）$x = -1, 0, 1, 2$ によって実数直線は五つの区間に分けられる。各区間では、どの絶対値も符号の定まったふつうの括弧に置き換えることができ、左辺は一次関数（linear function）となるので、方程式は容易に解ける。注意すべき点はただ一つ、一次方程式の根は、考えている区間に属するときに限り解として数えられるということである。

解答

$L(x) = |x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2|$ とおく。$t \geq 0$ のとき $|t| = t$、$t < 0$ のとき $|t| = -t$ であったことを思い出そう。区間を右から左へ順に調べていく。

$x \geq 2$.　四つの中身はすべて非負であるから、

$$\begin{aligned} L(x) &= (x+1) - x + 3(x-1) - 2(x-2) \\ &= x + 1 - x + 3x - 3 - 2x + 4 = x + 2. \end{aligned}$$

方程式は $x + 2 = x + 2$ となり、これは $x \geq 2$ を満たす**すべての**実数に対して成り立つ。よって区間 $x \geq 2$ 全体が解からなる。

考えてみよう　方程式が恒等式（identity）になってしまった。計算を間違えたのだろうか？

そうではない。$x \to \infty$ のとき、各絶対値における x の係数の和は $1 - 1 + 3 - 2 = 1$、

定数項の和は $1-0-3+4=2$ であり、これは右辺 $x+2$ とちょうど一致する。絶対値を含む方程式が区間全体を解にもつことは十分にありうるし、問題文の「すべての解を求めよ」という表現は、このようなことが起こるかもしれないというヒントになっている。簡単に確かめておくと、$x=3$ では $L(3)=4-3+6-2=5=3+2$ である。

$1 \le x < 2$. このとき $x-2<0$ であるから $|x-2|=-(x-2)$ となり、

$$L(x)=(x+1)-x+3(x-1)+2(x-2)=5x-6.$$

$5x-6=x+2$ より $x=2$ を得るが、これは $[1,2)$ に属さない。（これは解ではあるが、すでに数えてある。）新しい解はない。

$0 \le x < 1$. このとき $x-1<0$ でもあるから、

$$L(x)=(x+1)-x-3(x-1)+2(x-2)=-x.$$

$-x=x+2$ より $x=-1$ を得るが、これは $[0,1)$ に属さない。解はない。

$-1 \le x < 0$. このとき $|x|=-x$ でもあるから、

$$L(x)=(x+1)+x-3(x-1)+2(x-2)=x.$$

方程式 $x=x+2$ は解をまったくもたない。

$x < -1$. 四つの中身はすべて負であるから、

$$L(x)=-(x+1)+x-3(x-1)+2(x-2)=-x-2.$$

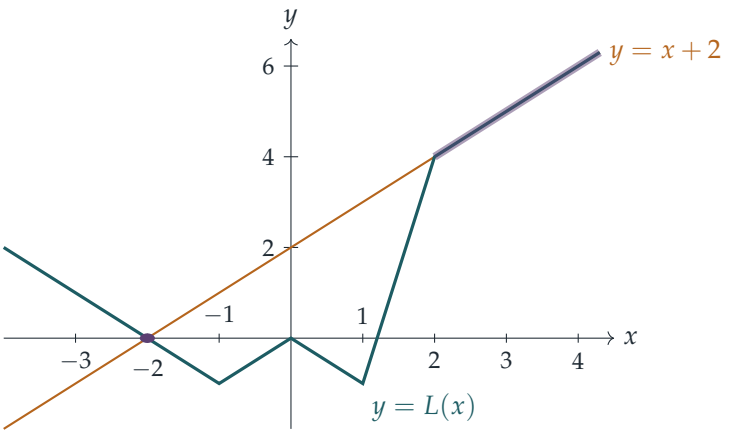
$-x-2=x+2$ より $x=-2$ を得て、$-2<-1$ であるから、これは確かに解である。確認すると $L(-2)=1-2+9-8=0=-2+2$ である。

結論。 解は

$$x=-2 \qquad \text{およびすべての} x \ge 2.$$

である。

グラフを見るとその理由がわかる。$y=L(x)$（ティール）は線分をつないだジグザグであり、直線 $y=x+2$（アンバー）と $x=-2$ で一度交わり、その後 $x=2$ から先はこの直線に重なっている。



検算

いくつかの値を代入してみる。$L(-2) = 0 = -2+2$、$L(5) = 6-5+12-6 = 7 = 5+2$ である一方、$x = 0$ では $L(0) = 1+3-4 = 0 \neq 2$ となる。厳密な分数計算を行うコンピュータにより、100,000 個の無作為な点で L の五つの一次式が正しいことが確認された。また、$[-20, 20]$ 上の刻み幅 0.01 の格子点では、方程式は $x = -2$ と $x \geq 2$ を満たすすべての格子点でちょうど成り立ち、それ以外では成り立たないことも確認された。

よくある間違い

- $x \geq 2$ に対して $x+2 = x+2$ を得たとき、区間全体が解であると認識せずに、「解なし」あるいは「解が無数にあるので、どこかで間違えた」と書いてしまう。
- 考えている区間の外にある根、たとえば（$0 \leq x < 1$ から得られる）$x = -1$ を解として採用してしまう。
- 外側の領域 $x < -1$ を忘れてしまう。孤立した解 $x = -2$ はまさにここにある。

STEP のその先へ

L のような関数は**区分的に線形**（piecewise linear）である。すなわち連続（continuous）であって、有限個の「角」の間では一次式になっている。このような関数は線形計画法（linear programming）や最適化（optimisation）において中心的な役割を果たし、そこでは絶対値の和 $\sum |x - a_i|$ を最小化すると、平均（mean）ではなく中央値（median）が現れる。また、連続であるが孤立した点で微分可能（differentiable）でない関数の最初の例でもあり、この主題は Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）で丁寧

に展開されている。

解答例

STEP I 1997、第 5 問

純粋数学 ・ 幾何におけるベクトル

STEP I 1997、問 5

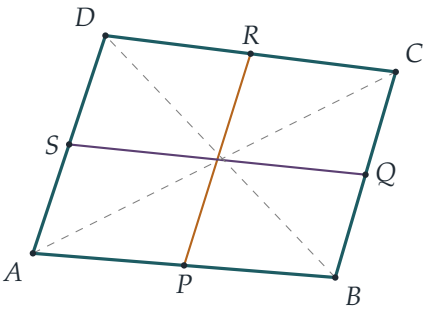
先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/97-s1-q5

鍵となる考え方

長さの 2 乗は内積（dot product）であり、中点（mid-point）は平均であるから、位置ベクトル（position vector）を使えば恒等式全体が代数の計算に帰着する。役に立つ工夫は、両辺がどちらも対角線（diagonal）AC と BD をひそかに含んでいることに気づくことである。それぞれの差を $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ で表してしまえば、恒等式はおのずと導かれる。その後の結論を導くには、4 本の棒の長さが決して変わらないという事実だけを使えばよい。

解答



任意の原点に関する A, B, C, D の位置ベクトルを $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ とし、$|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$ と書く。中点は

$$\mathbf{p} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}), \quad \mathbf{q} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}), \quad \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d}), \quad \mathbf{s} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{d}+\mathbf{a}).$$

である。

4つの辺

それぞれを $|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - 2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ と展開すると、2乗の項 $|\mathbf{a}|^2, \ldots, |\mathbf{d}|^2$ は両辺にそれぞれ1回ずつ現れて打ち消し合い、

$$\begin{aligned}|AB|^2 + |CD|^2 - |AD|^2 - |BC|^2 &= -2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{d} + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{d} + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\\ &= 2(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}).\end{aligned}$$

が残る（$(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b})$ を展開すれば、この因数分解が正しいことを確かめられる）。言い換えれば、これは $-2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ である。

中点を結ぶ2本の線分

$$\overrightarrow{PR} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d}-\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{u}, \qquad \overrightarrow{QS} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{d}+\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{v},$$

とおく。

考えてみよう 4項からなる2乗を2つも展開せずに、$|\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2$ を求めるにはどうすればよいか。

ベクトルについての2乗の差の公式 $|\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})$ を使う。これは $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$ であるから成り立つ。ここで

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = 2(\mathbf{d}-\mathbf{b}), \qquad \mathbf{u}-\mathbf{v} = 2(\mathbf{c}-\mathbf{a}),$$

であるから、

$$|PR|^2 - |QS|^2 = \tfrac{1}{4}\left(|\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2\right) = (\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}) = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}.$$

となる。

2つの結果を合わせる

辺についての結果に、中点についての結果の2倍を加えると、

$$\begin{aligned}&|AB|^2 + |CD|^2 - |AD|^2 - |BC|^2 + 2\left(|PR|^2 - |QS|^2\right)\\ &\quad = 2(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}) + 2(\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}) = 0,\end{aligned}$$

となり、これを整理すると

$$|AB|^2 + |CD|^2 + 2|PR|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 + 2|QS|^2,$$

が得られ、示すべき式となる。凸性（convexity）も、さらには4点が同一平面上にあることさえも一度も使っていないので、この恒等式は任意の4点について成り立つ。四辺形（quadrilateral）が折れ曲がって2本の棒が交差している場合も含まれる。

結論を導く

恒等式を変形すると

$$|PR|^2 - |QS|^2 = \tfrac{1}{2}\left(|AD|^2 + |BC|^2 - |AB|^2 - |CD|^2\right).$$

となる。棒は剛体であるから、継ぎ目がどのように曲がっても右辺の 4 つの長さは決して変わらない。したがって、$|PR|^2 - |QS|^2$ は運動の間ずっと一定である。同じことであるが、対角線の内積 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ は、対角線そのものの長さと向きが変わっても一定に保たれる。

検算

- 辺の長さが a と b の長方形（rectangle）では、$|AB| = |CD| = a$、$|AD| = |BC| = b$ であり、PR と QS は向かい合う辺の中点を結ぶから、$|PR| = b$、$|QS| = a$ である。恒等式の両辺はどちらも $2a^2 + 2b^2$ に等しい。
- ひし形（rhombus）では 4 辺がすべて等しいので、結論はどの位置でも $|PR| = |QS|$ となることを主張する。実際、ひし形の対角線は直交するから、$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ である。
- 数値的には、10^5 個のランダムな四辺形に対して、恒等式は誤差 10^{-12} 以内で成り立つ。$|AB| = 3$、$|BC| = 4$、$|CD| = 5$、$|DA| = 6$ のリンク機構（linkage）を約 200 通りの位置に動かしたところ、$|PR|^2 - |QS|^2$ は終始 $\frac{1}{2}(36 + 16 - 9 - 25) = 9$ のままであった。

よくある間違い

- どの辺とどの辺が組になるかを取り違えること。PR は AB と CD の中点を結ぶ線分であり、恒等式で PR と同じ側に現れるのはまさにこの 2 辺である。
- A を原点に、B を座標軸上に置くといった座標設定を使い、一般の四辺形では残りの点をすべて自由に取らなければならないことを忘れること。ベクトルを使えば、このような管理の手間が省ける。

STEP のその先へ

点 P, Q, R, S は常に平行四辺形（parallelogram）をなし（ヴァリニョンの定理（Varignon's theorem））、PR、QS はその対角線である。ここでの恒等式は、平行四辺形の法則（parallelogram law）$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2$ の親戚である。この法則は、大

学1年次の線形代数（linear algebra）の講義において、内積（inner product）から得られるノルム（norm）をちょうど特徴づけるものである。機構が動いている間も一定に保たれる量、すなわち不変量（invariant）という考え方は、数学のいたるところに繰り返し現れる。内積とその一般化がきちんと展開される様子を見るには、Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）がよい出発点である。

解答例

STEP I 1997、第 6 問

純粋数学 ・ 積分による円周率の評価

> **STEP I 1997、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q6

この問題は、*Beyond STEP* の第 4.3 節「22/7 は π より大きい」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch04/twenty-two-sevenths.html

鍵となる考え方

被積分関数（integrand）は分子の次数が分母の次数より高い有理関数（rational function）である。したがって、まず x^2+1 による多項式の割り算（polynomial division）を行う。すると、容易に積分できる多項式の商（quotient）と、$1+x^2$ を分母にもつ定数の余り（remainder）の項に分かれ、後者を積分すると逆正接関数（arctangent）が現れる。π はこの逆正接関数から出てくるのである。最後の不等式については、$[0,1]$ 上で $1 \leq 1+x^2$ であることを用いて、被積分関数を $x^4(1-x)^4$ そのものと比較する。

解答

割り算

二項定理（binomial theorem）により展開すると、

$$x^4(1-x)^4 = x^4(1-4x+6x^2-4x^3+x^4) = x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4.$$

これを x^2+1 で割る。各段階で最高次の項を取り除いていく：

$$\begin{aligned} x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4 &= x^6(x^2+1)+\left(-4x^7+5x^6-4x^5+x^4\right)\\ -4x^7+5x^6-4x^5+x^4 &= -4x^5(x^2+1)+\left(5x^6+x^4\right)\\ 5x^6+x^4 &= 5x^4(x^2+1)+\left(-4x^4\right)\\ -4x^4 &= -4x^2(x^2+1)+4x^2\\ 4x^2 &= 4(x^2+1)-4. \end{aligned}$$

x^2+1 の倍数をまとめると、

$$x^4(1-x)^4=\left(x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4\right)(x^2+1)-4,$$

よって

$$a_6=1,\quad a_5=-4,\quad a_4=5,\quad a_3=0,\quad a_2=-4,\quad a_1=0,\quad a_0=4,\quad b=-4.$$

簡単に確かめておく。$x=0$ のとき右辺は $4\cdot1-4=0$、$x=1$ のとき右辺は $(1-4+5-4+4)\cdot2-4=0$ であり、いずれも左辺と一致する。

$\frac{22}{7}-\pi$ に等しい積分

恒等式の両辺を $1+x^2$（これは決して 0 にならない）で割ると、

$$\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}=x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\frac{4}{1+x^2}.$$

$[0,1]$ 上で項別に積分し、$\int\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\arctan x$ を用いると、

$$\begin{aligned} \int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\tfrac17x^7-\tfrac23x^6+x^5-\tfrac43x^3+4x\right]_0^1-4\Big[\arctan x\Big]_0^1\\ &= \tfrac17-\tfrac23+1-\tfrac43+4\;-\;4\cdot\tfrac{\pi}{4}\\ &= \tfrac17+3-\pi\\ &= \frac{22}{7}-\pi, \end{aligned}$$

となる。ここで $-\frac23-\frac43=-2$ および $\arctan1=\frac{\pi}{4}$ を用いた。これが求める結果である。

$x^4(1-x)^4$ の積分

最初に求めた展開式を用いると、

$$\int_0^1x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x=\tfrac15-\tfrac46+\tfrac67-\tfrac48+\tfrac19.$$

公分母 $2520=5\cdot7\cdot8\cdot9$ で通分すると、

$$\frac{504-1680+2160-1260+280}{2520}=\frac{4}{2520}=\frac{1}{630}.$$

π の評価

$f(x) = x^4(1-x)^4$ とおく。すると $0 < x < 1$ において $f(x) > 0$ である。

上からの評価。 $(0,1)$ 上で被積分関数 $f(x)/(1+x^2)$ は連続かつ正であるから、その $[0,1]$ 上の積分は正である。したがって $\frac{22}{7} - \pi > 0$、すなわち $\pi < \frac{22}{7}$ である。

下からの評価。 $0 < x < 1$ のとき $1 + x^2 > 1$ であり、$f(x) > 0$ であるから、

$$\frac{f(x)}{1+x^2} < f(x).$$

> **考えてみよう** 積分どうしの不等式が単なる $\leq$ ではなく、等号を含まない不等式になるのはなぜか？

差 $f(x) - \dfrac{f(x)}{1+x^2} = \dfrac{x^2 f(x)}{1+x^2}$ は開区間 $(0,1)$ 全体で連続かつ正であるから、その $[0,1]$ 上の積分は正である。（連続関数が非負であり、かつどこかで正の値をとるならば、その積分は正である。）よって

$$\frac{22}{7} - \pi = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x < \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{630},$$

であり、これを整理すると $\pi > \frac{22}{7} - \frac{1}{630}$ となる。二つの評価を合わせると、

$$\frac{22}{7} > \pi > \frac{22}{7} - \frac{1}{630},$$

となり、示すべきことが示された。

検算

- 数値的には $\frac{22}{7} - \pi \approx 0.0012645$ であり、最初の積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると、小数第 12 位まで同じ値が得られる。
- $\frac{1}{630} \approx 0.0015873$ であり、0.0012645 より十分大きい。得られた評価は $3.141270 < \pi < 3.142857$ を意味し、実際 $\pi \approx 3.141593$ である。
- 値 $\frac{1}{630}$ は、ベータ積分（beta integral）の公式 $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$ からも得られる。実際、$\dfrac{4!\,4!}{9!} = \dfrac{576}{362880} = \dfrac{1}{630}$ である。

よくある間違い

- 割り算の筆算で、二つの 0 である係数 a_3 と a_1 を落としてしまうこと。すべての次数の位置を保っておかないと、余りを誤る。

- $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 4\ln 2$ と書いてしまうこと（$\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ と混同している）。正しくは $4\arctan 1 = \pi$ である。
- 最後の段階で $\leq$ しか証明しないこと。問題は等号を含まない不等式を求めているので、二つの積分が等しくなりえない理由を述べること。

STEP のその先へ

20 世紀に発見されたこの美しい積分は、教科書でおなじみの近似値 $\frac{22}{7}$ が π より大きいことを一挙に示している。$x^n(1-x)^n$ に簡単な関数を掛けて積分し、その結果が小さいが正であることを示すという同じ発想は、π や e が無理数（irrational）であることの古典的な証明の原動力となっている。すなわち、0 と 1 の間に整数は存在しえない、という論法である。$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x$ のような積分はベータ関数（beta function）の値であり、大学 1 年の解析学や確率論で出会う。積分どうしの等号を含まない不等式の注意深い扱いについては、Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学の理解』）を参照されたい。

解答例

STEP I 1997、第 7 問

純粋数学 ・ ガウス求積法

> **STEP I 1997、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q7

鍵となる考え方

両辺はどちらも P に線形（linearly）に依存する。したがって、4 つの基本的な 3 次式（cubic）$1, t, t^2, t^3$ に対して公式が成り立てば、任意の 3 次式に対して成り立つ。こうして問題は、4 つの未知数に関する 4 本の方程式に帰着する。これらは非線形（nonlinear）であるが、奇数次と偶数次のべきがきれいに分かれ、残りは $t = 0$ に関する対称性（symmetry）が片づけてくれる。

解答

$\mathrm{P}(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$ とおく。すると

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = c_0 \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}t + c_1 \int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t + c_2 \int_{-1}^{1} t^2\,\mathrm{d}t + c_3 \int_{-1}^{1} t^3\,\mathrm{d}t,$$

であり、$a_1\mathrm{P}(u_1) + a_2\mathrm{P}(u_2)$ もまったく同じように分解される。よって、公式がすべての 3 次式に対して成り立つための必要十分条件は、$\mathrm{P}(t) = t^k$（$k = 0, 1, 2, 3$）に対して成り立つことである。（「必要」であるのは、各 t^k 自身が広い意味での 3 次多項式だからであり、「十分」であるのは足し合わせればよいからである。）$k = 0, 1, 2, 3$ に対して $\int_{-1}^{1} t^k\,\mathrm{d}t$ は 2, 0, $\frac{2}{3}$, 0 であるから、次が必要である。

$$a_1 + a_2 = 2, \tag{A}$$

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 = 0, \tag{B}$$

$$a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 = \tfrac{2}{3}, \tag{C}$$

$$a_1 u_1^3 + a_2 u_2^3 = 0. \tag{D}$$

考えてみよう これらの方程式は非線形である。因数分解（factorise）できるような組み合わせはないだろうか。

(D) から (B) の u_2^2 倍を引くと、a_2 を含む項が消えて

$$a_1u_1^3 - a_1u_1u_2^2 = a_1u_1(u_1-u_2)(u_1+u_2) = 0.$$

となる。はじめの 3 つの因数を順に除外していく。

- $a_1 = 0$ のとき：(A) より $a_2 = 2$、(B) より $u_2 = 0$ となり、(C) は $0 = \frac{2}{3}$ となる。これは不可能である。
- $u_1 = 0$ のとき：(B) より $a_2u_2 = 0$ なので $a_2u_2^2 = 0$ となり、やはり (C) は $0 = \frac{2}{3}$ となる。これは不可能である。
- $u_1 = u_2$ のとき：2 点が一致し、(B) は $(a_1+a_2)u_1 = 2u_1 = 0$ となるので $u_1 = u_2 = 0$ であり、ここでも (C) が成り立たない。

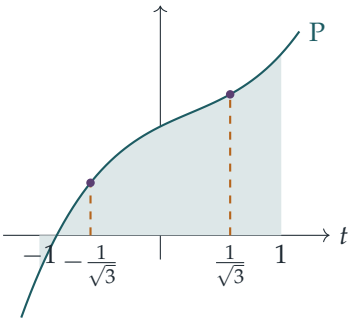
したがって $u_1 \neq 0$ かつ $u_2 = -u_1$ である。このとき (B) は $(a_1-a_2)u_1 = 0$ となるので $a_1 = a_2$ であり、(A) より $a_1 = a_2 = 1$ を得る。最後に (C) より $2u_1^2 = \frac{2}{3}$、すなわち $u_1^2 = \frac{1}{3}$ である。このとき (D) は自動的に満たされる。ゆえに

$$\boxed{a_1 = a_2 = 1, \qquad u_1 = -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \quad u_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}}$$

（あるいは u_1 と u_2 を入れ替えたもの）であり、すなわち

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{P}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + \mathrm{P}\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{すべての 3 次式P.}$$

が成り立つ。この議論から、添字の付け替えを除けば、これが**唯一の**選び方であることもわかる。



どのような 3 次式を描いても、影をつけた部分の面積は 2 本の破線の高さの和に等しい。

検算

- $\mathrm{P}(t) = t^2$：積分は $\frac{2}{3}$ であり、公式は $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ を与える。
- $\mathrm{P}(t) = 1 + t + t^2 + t^3$：積分は $2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ である。公式は、奇数次の項が打ち消し合うので $2 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$ を与える。
- この公式は t^4 に対しては正確**ではない**：公式は $2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$ を与えるが、積分は $\frac{2}{5}$ である。したがって、3 次式が本当に限界である。
- 数値的には、10^4 個のランダムな 3 次式に対して、両辺は 10^{-14} 以内で一致した。

よくある間違い

- はじめから対称性（$u_2 = -u_1, a_1 = a_2$）を仮定してしまうこと。すぐに正しい答えは得られるが、ほかの選び方がうまくいかないことは示せない。上の因数分解はそれを示している。
- 両辺を割るときに、$a_1 = 0$ や $u_1 = u_2$ の場合を忘れること。
- $\mathrm{P}(t) = 1$ と t^2 だけを確かめること。対称性を強いるのは、奇数次の条件 (B) と (D) である。

STEP のその先へ

これは 2 点**ガウス求積**（Gaussian quadrature）である。n 個の点と重みをうまく選べば、次数 $2n - 1$ 以下のすべての多項式を正確に積分できる。これは n 個の等間隔の点で達成できる次数の 2 倍である。最良の点は、$[-1, 1]$ 上で直交する（orthogonal）ルジャンドル多項式（Legendre polynomials）の零点である（ここでは $\frac{1}{2}(3t^2 - 1)$ であり、その零点は $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ である）。直交多項式は、大学 1 年次の数値解析（numerical analysis）や微分方程式（differential equations）の解法に登場する。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『微分方程式入門』）では、級数解（series solutions）の章でルジャンドル（Legendre）の方程式を扱っている。

解答例

STEP I 1997、第 8 問

純粋数学 ・ 指数方程式の解

> **STEP I 1997、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q8

鍵となる考え方

$a^x > 0$ であるから、$x = a^x$ の根は正でなければならない。これにより対数（logarithm）をとることができ、問題は $x > 0$ における $f(x) = \ln x - x \ln a$ の零点（zero）に関する問題に帰着する。$a > 1$ のとき、この関数は増加したのち減少するので、零点をもつのは最大値（maximum）が 0 以上のときに限る。$0 < a < 1$ のときは狭義単調増加（strictly increasing）であるから、零点は高々 1 つであり、問題は実際に零点が存在するかどうかである。

解答

$f(x) = 0$ への帰着

以下つねに $a > 0$ とするので、$a^x = e^{x \ln a}$ はすべての実数 x に対して定義され、正である。$x \leq 0$ ならば $a^x > 0 \geq x$ であるから、$x \leq 0$ の範囲に根はない。$x > 0$ のときは両辺とも正であり、ln は狭義単調増加であるから、

$$x = a^x \iff \ln x = x \ln a \iff f(x) = 0, \qquad \text{ただし} f(x) = \ln x - x \ln a.$$

したがって、$x = a^x$ の実数解はちょうど $(0, \infty)$ における f の零点である。

$a > e^{1/e}$ のとき根をもたないこと

このとき $a > e^{1/e} > 1$ であるから $\ln a > 0$ である。微分すると

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \ln a,$$

となり、これは $0 < x < 1/\ln a$ で正、$x > 1/\ln a$ で負である。よって f は増加したのち減少し、$(0,\infty)$ における最大値は

$$f\left(\frac{1}{\ln a}\right) = \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right) - 1 = -\ln(\ln a) - 1.$$

である。ここで $a > e^{1/e}$ より $\ln a > 1/e$ であり、さらに対数をとると（両辺とも正なので）$\ln(\ln a) > \ln(1/e) = -1$ を得る。ゆえに

$$f(x) \leq -\ln(\ln a) - 1 < 0 \quad \text{任意の} x > 0.$$

したがって f が 0 になることはなく、方程式 $x = a^x$ は実数解をもたない。これが示すべきことであった。

考えてみよう ちょうど $a = e^{1/e}$ のとき、また $1 < a < e^{1/e}$ のときはどうなるか。

$a = e^{1/e}$ のとき、最大値はちょうど 0 であり、それは $x = 1/\ln a = e$ でとられる。よって根は $x = e$ の 1 つ（重根（repeated root））であり、直線 $y = x$ は点 (e,e) で $y = a^x$ に接する（tangent）。$1 < a < e^{1/e}$ のときは最大値が正であり、両端で $f \to -\infty$ となるので、根は 2 つある。（$a = 1$ のときの根は $x = 1$ のみである。）問題ではこれらは問われていないが、$e^{1/e}$ がちょうど境目であることがわかる。

$0 < a < 1$ のとき根がちょうど 1 つであること

このとき $\ln a < 0$ であるから

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \ln a = \frac{1}{x} + |\ln a| > 0 \quad \text{任意の} x > 0,$$

となり、f は $(0,\infty)$ で狭義単調増加である。よって f の零点は**高々 1 つ**である。

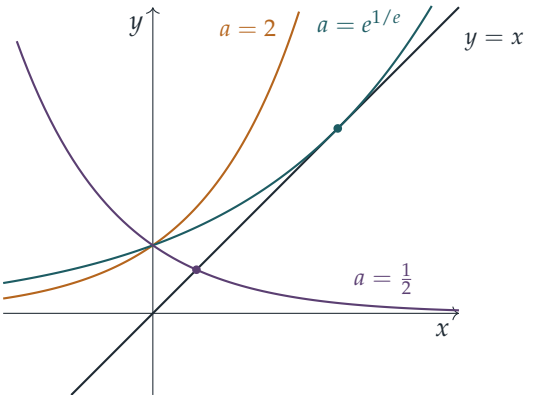
零点が実際に存在することを見るには、f が $(0,\infty)$ で連続（continuous）であり、

$$f(1) = -\ln a > 0, \qquad f(a) = \ln a - a\ln a = (1-a)\ln a < 0,$$

であることに注意すればよい（どちらも $0 < a < 1$ を用いている）。中間値の定理（intermediate value theorem）により、f は a と 1 の間に零点をもつ。

したがって $0 < a < 1$ のとき、方程式 $x = a^x$ は**ちょうど 1 つ**の実数解をもち、それは区間 $(a,1)$ にある。

図を見ればこのことは明らかである。$y = a^x$ は減少関数で正の値をとり、一方 $y = x$ は増加関数であるから、2 つのグラフはちょうど 1 回だけ交わる。（同じことであるが、$g(x) = a^x - x$ は狭義単調減少で、$g(0) = 1 > 0$ かつ $g(1) = a - 1 < 0$ である。）



検算

- 境界では $(e^{1/e})^e = e$ であるから、$a = e^{1/e} \approx 1.4447$ のとき $x = e$ は確かに根であり、接することと整合する。
- $a = \frac{1}{2}$ のとき、二分法（bisection）により唯一の根 $x \approx 0.6412$ が得られ、予想どおり $(\frac{1}{2}, 1)$ に含まれる。
- 数値的には、ランダムにとった 200 個の $a > e^{1/e}$ について、関数 $a^x - x$ は $[-20, 20]$ 上の細かい格子点で正のままであった。$\ln x - x \ln a$ の最大値は $-1 - \ln \ln a$ と一致した。a が $e^{1/e}$ をわずかに下回るときは根が 2 つあった。また、ランダムにとった 500 個の $a \in (0, 1)$ について、符号変化（sign change）はちょうど 1 回であった。

よくある間違い

- 根がすべて $x > 0$ を満たすことを先に確認せずに対数をとること。そうでなければ $\ln x$ は定義されないので、$x \leq 0$ の場合には別に（1 行で済む）議論が必要である。
- $0 < a < 1$ のとき f が増加することだけを示すこと。これで示せるのは根が**高々** 1 つであることであり、根が存在することを示すには符号変化も必要である。
- $\ln a > 1/e$ の ln をとるときに不等号の向きを誤ること。ln は増加関数であり両辺とも正なので、向きはそのままでよい。

STEP のその先へ

$0 < a < 1$ のときの根は写像 $x \mapsto a^x$ の不動点（fixed point）であり、反復（iteration）$x_{n+1} = a^{x_n}$ を考えると「無限べき塔（infinite power tower）」$a^{a^{a^{\cdots}}}$ に行き着く。オイ

ラー（Euler）は、この塔が収束するのはちょうど $e^{-e} \leq a \leq e^{1/e}$ のときであることを示した。ここでも同じ境目 $e^{1/e}$ が現れるのである。反復がいつ収束するかを調べていくと、大学 1 年の解析学（analysis）で学ぶ縮小写像の定理（contraction mapping theorem）に至る。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、中間値の定理と必要な予備知識を扱っている。

解答例

STEP I 1997、第 9 問

力学 ・ 相対速度

> **STEP I 1997、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q9

鍵となる考え方

道路脇から見るとすべてが動いているが、車から見るとすべてが静止している。車は長さ c の隙間を挟んで並ぶ固定されたブロックの列となり、ニワトリは**相対速度**（relative velocity）で一直線に道を横切る。ニワトリが無事に渡れるのは、幅 a の車線の中にいる間に、（車に対して）横方向にずれる距離が隙間 c 以下である場合に限る。この一つの条件から不等式が得られ、最小の速さは $c\sin\theta + a\cos\theta$ を最大化することで求まる。これは $R\cos(\theta - \alpha)$ の形に直す典型的な問題である。

解答

ニワトリを質点、車を速さ V で動く長方形とみなし、どの車も道路を横切る方向に幅 a の同じ帯状の領域を占めるとする。x 軸を道路に沿って車の進行方向にとり、y 軸を道路を横切る方向にとる。すると、ニワトリの速度は $(u\cos\theta, u\sin\theta)$（ただし $0 < \theta < \pi$）である。問題になるのは車が通る帯状の領域だけである。道路のそれ以外の部分では、ニワトリが危険にさらされることはない。

不等式

車に対するニワトリの相対速度は

$$\mathbf{w} = (u\cos\theta - V,\ u\sin\theta).$$

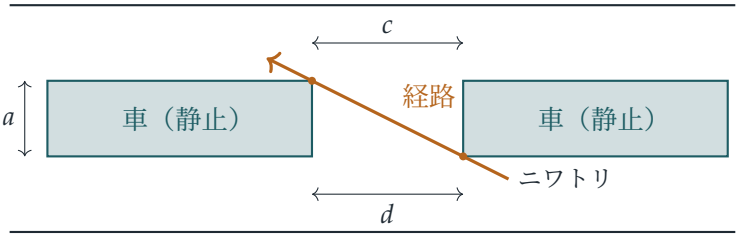
である。車の座標系では車は静止しており、ニワトリは一定の速度 $\mathbf{w}$ で一直線に進む。幅 a の帯を横切るのにかかる時間は

$$\tau = \frac{a}{u\sin\theta}$$

であり、その間にニワトリは（車に対して、車の流れと逆向きに）

$$d = (V - u\cos\theta)\,\tau = \frac{a(V - u\cos\theta)}{u\sin\theta}.$$

だけ後ろへずれる。



図は極端な場合 $d = c$ を示しており、このとき経路はちょうど隙間の対角線に沿う。

考えてみよう なぜずれ d は c 以下でなければならないのか。

車の座標系では、帯を通過するニワトリの経路は道路方向に長さ $|d|$ の区間を占め、その区間のどの点も車線内のある高さで通過される。静止した車が空けているのは長さ c の隙間だけなので、この区間全体が一つの隙間に収まらなければならない。すなわち $|d| \le c$ である。（逆に $|d| \le c$ ならば、ニワトリは出発の時刻を調整して区間が隙間の中に収まるようにできるので、安全に渡れる。）

特に $d \le c$、すなわち

$$a(V - u\cos\theta) \le c\,u\sin\theta, \qquad \text{よって} \qquad Va \le u\,(c\sin\theta + a\cos\theta).$$

である。左辺は正なので、安全に渡れるならば必ず $c\sin\theta + a\cos\theta > 0$ であり、これで割ることができる。

$$u \ge \frac{Va}{c\sin\theta + a\cos\theta},$$

となり、求める不等式が得られた。（条件のもう半分 $d \ge -c$ は、速すぎるニワトリが隙間を追い越して前の車にぶつかることを防ぐものであり、以下の最小値には関係しない。）

最小の速さと横断にかかる時間

$c\sin\theta + a\cos\theta = \sqrt{a^2 + c^2}\,\cos(\theta - \alpha)$ と表す。ここで α は

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \qquad \tan\alpha = \frac{c}{a}.$$

を満たす鋭角である。したがって $c\sin\theta + a\cos\theta \le \sqrt{a^2 + c^2}$ であり、等号は $\theta = \alpha$ のときに限り成り立つ。よって、どの向きについても

$$u \ge \frac{Va}{c\sin\theta + a\cos\theta} \ge \frac{Va}{\sqrt{a^2 + c^2}},$$

であり、$\theta = \alpha$ かつ $u = Va/\sqrt{a^2+c^2}$ のとき両方の不等式で等号が成り立つ。この選び方は実際に安全である。このとき $d = c$ がちょうど成り立ち（図の、角から角への経路）、$-c \le d \le c$ も満たされる。よって、一定の速さとして可能な最小値は $Va/\sqrt{a^2+c^2}$ であり、そのときの角度は $\alpha = \arctan(c/a)$ である。

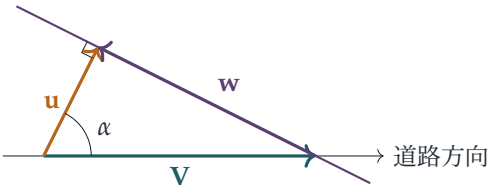
ニワトリは道路を横切る方向の速度成分 $u\sin\alpha$ で道幅 b 全体を横断するので、かかる時間は

$$\frac{b}{u\sin\alpha} = b\cdot\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{Va}\cdot\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c} = \frac{b\,(a^2+c^2)}{Vac} = \frac{b}{V}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right),$$

であり、これが求める結果である。

考えてみよう なぜ最小の速さのとき $\tan\theta = c/a$ となるのか。

速度に注目しよう。ニワトリの速度は $\mathbf{u} = \mathbf{V} + \mathbf{w}$ であり、最良の場合、相対速度 $\mathbf{w}$ は隙間の対角線の向き $(-c, a)$ を向く。したがって $\mathbf{u}$ の先端は、$\mathbf{V}$ の先端を通りこの向きをもつ直線上にあり、最も短い $\mathbf{u}$ は原点からこの直線に下ろした垂線である。その向き (a, c) は道路と角 $\arctan(c/a)$ をなし、その長さは $V\sin($対角線の角度$) = Va/\sqrt{a^2+c^2}$ である。



検算

- 単位：$Va/\sqrt{a^2+c^2}$ は速さであり、$\frac{b}{V}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$ は長さを速さで割ったもの、すなわち時間である。
- 極限：$\theta = \frac{\pi}{2}$（真横に横断）のとき、評価は $u \ge Va/c$ となる。つまりニワトリは、隙間が通り過ぎる時間 c/V のうちに幅 a を渡りきらなければならない。これは明らかに正しい。
- 数値：$a = 1, c = 2, V = 2, b = 5$ のとき、最小の速さは $\tan\theta = 2$ で $2/\sqrt{5} \approx 0.894$ であり、横断にかかる時間は $\frac{5}{2}\left(2+\frac{1}{2}\right) = 6.25$ である。道路の座標系で車とニワトリを直接シミュレーションしても結果は一致する。この速さの 1.01 倍では安全な出発時刻が見つかり、0.99 倍では一つも見つからない。

よくある間違い

- 安全の条件に、道路全体を横断する時間 $b/(u\sin\theta)$ を使ってしまう。問題になるのは幅 a の車線内にいる時間だけである。
- 相対速度の符号を間違える。車に対して、ニワトリは道路方向に $u\cos\theta + V$ ではなく $u\cos\theta - V$ で動く。

STEP のその先へ

障害物が静止して見える座標系に移ることはガリレイ変換（Galilean transformation）であり、問題が静的に見える座標系を選ぶことは力学で最も役に立つ習慣の一つである。また、最小化の部分は小さな最適化問題でもある。点から直線への最短のベクトルは垂線であり、これは線形代数（linear algebra）で直交射影（orthogonal projection）として再び出会うことになる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）には、この考え方に沿った相対運動の問題が数多く収められている。

解答例

STEP I 1997、第 10 問

力学 ・ 円運動

> **STEP I 1997、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q10

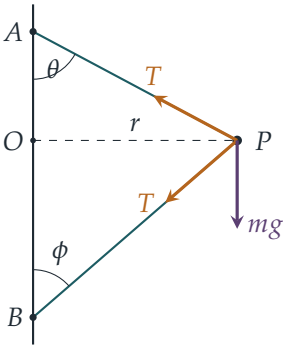
鍵となる考え方

輪はなめらかなので、糸は輪の中を自由に滑る。したがって張力（tension）は P の両側で**等しい**。鉛直方向（鉛直方向の加速度はない）と水平方向（軸に向かう加速度 $r\omega^2$）にそれぞれ力を分解し、一方の式をもう一方の式で割って T と m を消去する。すると和積の公式（sum-to-product formulae）によって、その比は半角の正接（tangent）ひとつにまとまる。

解答

モデルと力

P を軽くて伸びない糸につけられた質点（particle）とみなす。輪はなめらかなので、張力 T は PA でも PB でも同じである。円の中心を O とする。この点は直線 AB 上にあり、$OP = r$ である。P にはたらく力は、重力 mg、張力 T（PA に沿う向き）、張力 T（PB に沿う向き）である。



糸 PA は鉛直方向と角 θ をなす（A における AB と AP のなす角）。したがって、この糸が P を引く力は、上向きに $T\cos\theta$、軸に向かって $T\sin\theta$ の成分をもつ。同様に、PB は B において鉛直方向と角 ϕ をなし、この糸が P を引く力は、下向きに $T\cos\phi$、軸に向かって $T\sin\phi$ の成分をもつ。

運動方程式

P は水平な円周上を一定の速さで運動するので、鉛直方向の加速度はなく、O に向かう加速度 $r\omega^2$ をもつ。力を分解すると、

$$\begin{aligned} &\text{鉛直方向：} \quad T\cos\theta - T\cos\phi = mg, \\ &\text{水平方向：} \quad T\sin\theta + T\sin\phi = mr\omega^2. \end{aligned}$$

これらの式は三角形の形によらず成り立つ（たとえば P が A より上にあれば、$\cos\theta$ が負になるだけである）。$mg > 0$ であるから、第 1 式より $\cos\theta > \cos\phi$ となり、よって $\phi > \theta$ である。つまり、図からも予想されるとおり、下側の糸のほうが軸に対して大きく傾いている。

結果の証明

鉛直方向の式を水平方向の式で割ると、

$$\frac{\cos\theta - \cos\phi}{\sin\theta + \sin\phi} = \frac{g}{r\omega^2}.$$

和積の公式より、

$$\begin{aligned} \cos\theta - \cos\phi &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)\,\sin\tfrac{1}{2}(\phi-\theta), \\ \sin\theta + \sin\phi &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)\,\cos\tfrac{1}{2}(\phi-\theta). \end{aligned}$$

$0 < \theta < \pi$ かつ $0 < \phi < \pi$ であるから（これらは実際の三角形 APB の角である）、$0 < \frac{1}{2}(\theta+\phi) < \pi$ となり、$\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi) \neq 0$ である。よってこれを約分すると

$$\tan\frac{\phi-\theta}{2} = \frac{g}{r\omega^2},$$

となり、求める式が示された。

張力

考えてみよう 答えには $\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)$ が含まれてよいが、$\phi-\theta$ は含まれてはならない。$\cos\frac{1}{2}(\phi-\theta)$ はどうすれば消去できるだろうか？

水平方向の式と 2 番目の和積の公式から、

$$2T\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)\cos\tfrac{1}{2}(\phi-\theta) = mr\omega^2.$$

$\alpha = \frac{1}{2}(\phi-\theta)$ の**正接**はわかっているので、対辺が g、隣辺が $r\omega^2$ の直角三角形から、その余弦が求められる。$0 < \phi-\theta < \pi$ であるから $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ であり、$\cos\alpha > 0$ である：

$$\cos\tfrac{1}{2}(\phi-\theta) = \frac{r\omega^2}{\sqrt{r^2\omega^4+g^2}}.$$

これを代入して $r\omega^2$ を約分すると、

$$T = \frac{m\sqrt{r^2\omega^4+g^2}}{2\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)}.$$

この結果は見通しよく理解することもできる。$\sqrt{(mg)^2+(mr\omega^2)^2}$ は 2 つの張力の合力（resultant）の大きさであり、大きさ T の等しい 2 つの力が互いに角 $\pi-(\theta+\phi)$（角 APB）をなすとき、その合力の大きさは $2T\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)$ である。

検算

- $\omega \to \infty$ のとき右辺は 0 に近づくので、$\phi \to \theta$ となる。輪は外側へ振り出され、AB の中点と同じ高さに来る。重力が無視できるときに予想されるとおりである。
- $\omega \to 0$ のとき $\tan\frac{1}{2}(\phi-\theta) \to \infty$ となるので、$\phi-\theta \to \pi$ である。つまり糸は真下にまっすぐ垂れ下がる。回転がなければ、これ以外の状態はありえない。
- 数値的にも確かめた。A、B、P を無作為に配置し、ベクトル形式の運動方程式から T と ω^2 を直接求め、座標から θ と ϕ を測って、両方の結果と比較した。約 8000 通りの場合における相対誤差の最大値は 3×10^{-12} であった。

よくある間違い

- 異なる 2 つの張力 T_1、T_2 を使ってしまう。輪がなめらかなら、糸は 1 本で張力も 1 つである。張力が 2 つの異なる値をとるとすると、問題は定まらない。
- PB の張力の鉛直成分の符号を間違える。この糸は P を B に向かって**下向き**に引く。
- $\cos\frac{1}{2}(\phi-\theta)$ として負の平方根をとってしまう。そうすると張力が負になってしまう。

STEP のその先へ

糸の長さが与えられたとき、輪は A と B を焦点（foci）とする楕円（ellipse）上にあり、糸は P における接線と等しい角をなす。これは楕円の反射の性質である。したがって張力の合力は楕円の法線（normal）方向を向き、その形に曲げたなめらかな針金からの抗力とまったく同じになる。拘束を面に垂直な力としてとらえる考え方は、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）の出発点である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）には、この種の回転する系に関する問題が数多く収められている。

解答例

STEP I 1997、第 11 問

力学 ・ 抵抗を受ける運動

STEP I 1997、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/97-s1-q11

鍵となる考え方

抵抗（resistance）は速度に依存するが、求めたいのは時間ではなく**距離**の関数としての速度である。そこで加速度（acceleration）を $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$ と書く。$w = v^2$ を未知関数とすると、運動方程式（equation of motion）は**線形**（linear）の一階微分方程式（first-order differential equation）となり、積分因子（integrating factor）によってただちに解ける。最後の小問は一つの物理的事実にかかっている。すなわち、抵抗はつねに運動を妨げる向きにはたらくので、粒子が向きを変えると抵抗の向きも変わる。

解答

粒子を鉛直線上を運動する単位質量の質点としてモデル化する。粒子には重力 g（下向き）と、速度と逆向きにはたらく大きさ kv^2 の抵抗が作用する。s は投射点から上向きに測る。



上昇中



下降中

上昇する運動

粒子が上昇している間、速度 v は上向きなので、抵抗 kv^2 は重力とともに下向きにはたらく。ニュートン（Newton）の第二法則（質量 1）より

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = -g - kv^2,$$

を得る。ここで $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$ を用いた。$w = v^2$ とおくと $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} = 2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$ であるから

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} + 2kw = -2g.$$

これは w について線形である。積分因子 e^{2ks} を掛けると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(w\,\mathrm{e}^{2ks}\right) = -2g\,\mathrm{e}^{2ks} \quad\Longrightarrow\quad w\,\mathrm{e}^{2ks} = -\frac{g}{k}\,\mathrm{e}^{2ks} + C.$$

$s = 0$ で $w = u^2$ なので、$C = u^2 + \frac{g}{k}$ である。よって

$$v^2 = \left(u^2 + \frac{g}{k}\right)\mathrm{e}^{-2ks} - \frac{g}{k} = u^2\mathrm{e}^{-2ks} + \frac{g}{k}\left(\mathrm{e}^{-2ks} - 1\right),$$

となり、これが求める $(*)$ である。（$v\,\mathrm{d}v/(g + kv^2) = -\mathrm{d}s$ と変数分離（separating variables）して対数を得る方法でも同様にうまくいく。）

最高点の高さ

粒子は $v = 0$ となったときに上昇をやめる。$(*)$ の右辺は s について狭義単調減少なので、これはちょうど一度だけ、最高点の高さ H で起こる。$(*)$ で $v = 0$ とおくと

$$\left(u^2 + \frac{g}{k}\right)\mathrm{e}^{-2kH} = \frac{g}{k} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{e}^{2kH} = 1 + \frac{ku^2}{g},$$

したがって

$$H = \frac{1}{2k}\ln\left(1 + \frac{ku^2}{g}\right).$$

下降する経路

> **考えてみよう**　$(*)$ の導出では運動の向きにまったく触れていない。それなら、なぜ $(*)$ が引き続き成り立たないのだろうか。

実は、導出では抵抗の符号という形で運動の向きを使っている。下降中は速度が下向きなので、抵抗 kv^2 は重力に逆らって**上向き**にはたらく。s は引き続き上向きに測り、v を上向きの速度とすると、方程式は

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = -g + kv^2, \qquad \text{ゆえに} \qquad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} - 2kw = -2g,$$

となり、異なる微分方程式になる。したがって、下降する経路では $(*)$ は成り立たない。

これを具体的に確かめるため、$s = H$ で $w = 0$ という条件のもとで新しい方程式を解く。積分因子 e^{-2ks} により $w = \frac{g}{k} + D\mathrm{e}^{2ks}$ を得て、$w(H) = 0$ から $D = -\frac{g}{k}\mathrm{e}^{-2kH}$ が定まる。すなわち

$$v^2 = \frac{g}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-2k(H-s)}\right) \qquad (0 \le s \le H).$$

$u^2 + \frac{g}{k} = \frac{g}{k}\mathrm{e}^{2kH}$ を用いると、式 $(*)$ は $v^2 = \frac{g}{k}\left(\mathrm{e}^{2k(H-s)} - 1\right)$ と書ける。$x = 2k(H-s) \ge 0$ とおくと、二つの式はそれぞれ $\frac{g}{k}(1 - \mathrm{e}^{-x})$ と $\frac{g}{k}(\mathrm{e}^{x} - 1)$ であり、

$$(\mathrm{e}^{x} - 1) - (1 - \mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 2 = \left(\mathrm{e}^{x/2} - \mathrm{e}^{-x/2}\right)^2 > 0 \quad \text{ただし} x > 0.$$

よって $(*)$ は最高点より下のすべての点で誤った速さを与える（両者が一致するのは、ともに 0 となる $s = H$ においてのみである）。$(*)$ は下降中の速さを過大に見積もるのである。

手短な物理的議論もある。式 $(*)$ は v^2 を高さだけの関数として与えるので、もしこれが下降中にも成り立つなら、粒子は各高さを上昇時と同じ速さで通過し、速さ u で出発点に戻ることになる。しかし抵抗は運動全体を通じて負の仕事（work）をするので、粒子はエネルギーを失っており、より遅い速さで戻らなければならない。実際、$s = 0$ において正しい式は

$$v^2 = \frac{g}{k}\left(1 - \frac{1}{1 + ku^2/g}\right) = \frac{u^2}{1 + ku^2/g} < u^2.$$

を与える。

検算

- $k \to 0$ のとき $\ln(1 + ku^2/g) \approx ku^2/g$ なので $H \to u^2/(2g)$ となり、抵抗のない場合のおなじみの高さに一致する。また（$\mathrm{e}^{-2ks} \approx 1 - 2ks$ と展開すると）$(*)$ は $v^2 = u^2 - 2gs$ に近づく。
- 数値的には、$u = 10$、$k = 0.05$、$g = 9.8$ として運動方程式を逐次計算すると $H \approx 4.1224$ となり、$\frac{1}{0.1}\ln(1 + \frac{5}{9.8}) = 4.12245$ と一致する。粒子は $v^2 \approx 66.22$ で戻ってきて、これは $u^2 = 100$ ではなく $u^2/(1 + ku^2/g)$ に一致する。下降の中間点では $v^2 \approx 36.51$ であるのに対し、$(*)$ では 44.87 となってしまう。

よくある間違い

- 運動全体に対する一つの方程式で抵抗を $-kv^2$ と書いてしまうこと。$v^2 \ge 0$ なのでこの項はつねに同じ向きを指し、まさにそれゆえに一つの式で上昇と下降の両方を

扱うことはできない。（一つの方程式で表すには $-kv|v|$ が必要である。）

- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ を用いて v を t の式として解き、その後 t の消去に苦労すること。$v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$ を使えば答えに直行できる。

STEP のその先へ

二次抵抗（quadratic drag）は空気中を高速で運動するボールのよいモデルであり、下降の方程式は**終端速度**（terminal velocity）の存在を示している。すなわち、落下が長く続くにつれて $v^2 \to g/k$ となる。抵抗を $-kv|v|$ と書けば運動全体に対する一つの非線形方程式が得られる。大学一年次の力学の多くは、力が速度に依存しエネルギーが保存されない、このような方程式を扱うものである。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、速度に依存する力と終端速度を丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 1997、第 12 問

確率・統計 ・ 中心極限定理

STEP I 1997、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/97-s1-q12

鍵となる考え方

二次方程式（quadratic equation）を具体的に解き、X を T の簡単な関数として表す。そうすれば X に関する問いはすべて T に関する問いに置き換わり、T の分布は完全にわかっている。うまい簡略化として、$1-T$ もまた $[0,1]$ 上の一様分布（uniform distribution）に従うことが使える。最後の小問は多数の独立（independent）な複製の和に関するものであり、これは中心極限定理（central limit theorem）を使えという合図である。

解答

X の分布

解の公式（quadratic formula）より、$x^2+2x+T=0$ の解は $x=-1\pm\sqrt{1-T}$ である。$0\le T\le 1$ であるからこれらは実数であり、大きい方の解は正の符号をとったものである：

$$X=-1+\sqrt{1-T}.$$

T が $[0,1]$ を動くとき、X は $[-1,0]$ を動く。

$U=1-T$ とおく。T は $[0,1]$ 上の一様分布に従うので、U もそうである。区間をその中点に関して折り返しても、一様な密度は変わらないからである。よって $U\sim \mathrm{U}[0,1]$ として $X=\sqrt{U}-1$ である。

$X > -\frac{1}{3}$ となる確率

$X+1 = \sqrt{U}$ であり、両辺とも非負であるから、

$$X > -\tfrac{1}{3} \iff \sqrt{U} > \tfrac{2}{3} \iff U > \tfrac{4}{9}.$$

両辺が非負なので、2 乗しても不等号の向きは変わらない。したがって

$$\mathrm{P}\Big(X > -\tfrac{1}{3}\Big) = \mathrm{P}\Big(U > \tfrac{4}{9}\Big) = 1 - \tfrac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

（同値な言い方をすれば、$T < \frac{5}{9}$ である。）

平均と分散

$U \sim \mathrm{U}[0,1]$ の密度は $[0,1]$ 上で 1 であるから、

$$\mathrm{E}\big(\sqrt{U}\big) = \int_0^1 u^{1/2}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{3}, \qquad \mathrm{E}\big((\sqrt{U})^2\big) = \mathrm{E}(U) = \frac{1}{2}.$$

よって

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}\big(\sqrt{U}\big) - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}.$$

定数を引いても分散（variance）は変わらないので、

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}\big(\sqrt{U}\big) = \mathrm{E}(U) - \big(\mathrm{E}\sqrt{U}\big)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18},$$

となり、示すべきことが示された。

> **考えてみよう** これらのモーメントを求めるのに、X の確率密度関数（probability density function）は必要だろうか？

必要ない。任意の関数 g について $\mathrm{E}\big(g(U)\big) = \int_0^1 g(u)\,\mathrm{d}u$ であるから、U を直接扱えばよい。それでも密度を知りたければ、$-1 \le x \le 0$ に対して $\mathrm{P}(X \le x) = \mathrm{P}\big(U \le (x+1)^2\big) = (x+1)^2$ であるから、X は $[-1,0]$ 上で密度 $2(x+1)$ をもつ。$x \cdot 2(x+1)$ をこの区間で積分しても $-\frac{1}{3}$ が得られる。

800 個の解の和

各試行が独立であるから X_i も独立であり、それぞれ平均 $-\frac{1}{3}$、分散 $\frac{1}{18}$ をもつ。よって

$$\mathrm{E}(Y) = 800 \cdot \Big(-\tfrac{1}{3}\Big) = -\frac{800}{3}, \qquad \mathrm{Var}(Y) = 800 \cdot \frac{1}{18} = \frac{400}{9},$$

ここで分散を足し合わせる際に独立性を用いている。Y の標準偏差（standard deviation）は $\frac{20}{3}$ である。

800 は大きいので、中心極限定理により Y は近似的に $\mathrm{N}\left(-\frac{800}{3}, \frac{400}{9}\right)$ に従う。求めたいのは

$$\mathrm{P}(Y \le K) \approx \Phi\left(\frac{K + \frac{800}{3}}{20/3}\right) = 0.08.$$

となる K である。数表より $\Phi(1.405) \approx 0.92$ であるから、対称性により $\Phi(-1.405) \approx 0.08$ である。したがって

$$\frac{K + \frac{800}{3}}{20/3} \approx -1.405,$$

$$K \approx -\frac{800}{3} - 1.405 \times \frac{20}{3} \approx -266.67 - 9.37 \approx -276.$$

考えてみよう 連続性補正（continuity correction）は必要ないのだろうか？

必要ない。各 X_i は連続型確率変数であるから Y もそうであり、連続性補正は不要である。この補正は、二項分布（binomial distribution）のような離散分布を正規分布で近似するときにのみ必要となる。

検算

- 解は正しい。$T = 0$ のとき方程式は $x(x+2) = 0$ となり、その大きい方の解は $0 = -1 + \sqrt{1}$ である。
- $\mathrm{E}(X) = -\frac{1}{3}$ は $[-1, 0]$ に含まれる。また密度 $2(x+1)$ は 0 の側に偏っているので、平均が中点 $-\frac{1}{2}$ より大きいことは納得がいく。
- T の値を 400 000 個用いたシミュレーションでは、$\mathrm{P}(X > -\frac{1}{3}) \approx 0.555$、平均 ≈ -0.3337、分散 ≈ 0.0556 が得られた。Y を直接 4000 回シミュレーションすると $\mathrm{P}(Y \le -276.03) \approx 0.083$ となり、0.08 と整合する。

よくある間違い

- 解の公式で負の符号をとってしまう。それでは小さい方の解になる。
- $\mathrm{Var}(Y) = 800^2 \,\mathrm{Var}(X)$ と書いてしまう。これは $800X_1$ の分散であって、800 個の独立な複製の和の分散ではない。
- -1.405 の代わりに $+1.405$ を使ってしまう。確率 0.08 は下側の裾にあるので、K は平均より小さくなければならない。

STEP のその先へ

一様分布に従う U を用いて $X = g(U)$ と表す手法は、逆向きにも使える。F が任意の連続な分布関数（distribution function）ならば、$F^{-1}(U)$ の分布関数は F である。この**逆変換法**（inverse transform method）は、コンピュータが一様乱数から確率変数をシミュレーションする方法である。ここでブラックボックスとして用いた中心極限定理は、大学の最初の確率論の講義で、積率母関数（moment generating function）や特性関数（characteristic function）を用いて証明される。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、これら両方の考え方を扱っている。

解答例

STEP I 1997、第 13 問

確率・統計 ・ 条件付き確率

> **STEP I 1997、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q13

鍵となる考え方

ブロンド氏が明かりをつけるべきかどうかは、どの種類の罠が待ち構えているかだけで決まる。したがって問題全体は、カナリアがいないという条件のもとで、罠が爆弾ではなくアナコンダである確率という、ただ一つの条件付き確率（conditional probability）に帰着する。暗殺者がだれであるかが意味をもつのは、それがどの凶器が使われるかに影響するからにすぎない。そこで、二つの段階（暗殺者、次に凶器）を全確率の法則（law of total probability）で組み合わせ、「カナリアでない」という条件をつけ、そのうえで二つの死亡の危険を比較する。

解答

設定

$i = 1, 2, 3, 4$ に対して、i 氏が罠を仕掛けたという事象を M_i とし、罠がアナコンダ、爆弾、カナリアであるという事象をそれぞれ A、B、C とする。与えられているのは

$$P(M_i) = \frac{i}{10}, \qquad P(A \mid M_i) = \frac{i+1}{10}, \quad P(B \mid M_i) = \frac{i}{10}, \quad P(C \mid M_i) = \frac{9-2i}{10}.$$

である。これらは矛盾していない。実際、$\frac{1+2+3+4}{10} = 1$ であり、各 i について三つの凶器の確率はいずれも非負で、和は $\frac{(i+1)+i+(9-2i)}{10} = 1$ となる。関わる暗殺者はちょうど一人、凶器もちょうど一つであるから、事象 $M_i \cap A$、$M_i \cap B$、$M_i \cap C$ はすべての可能性の分割（partition）をなす。

静けさが教えること

全確率の法則により、

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(M_i)P(A\mid M_i)=\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5}{100}=\frac{40}{100},$$

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(M_i)P(B\mid M_i)=\frac{1+4+9+16}{100}=\frac{30}{100}.$$

よって $P(C')=P(A)+P(B)=\frac{70}{100}$ である。（検算として、$P(C)=\frac{7+10+9+4}{100}=\frac{30}{100}$ となる。）

> **考えてみよう** いまどの暗殺者が最も疑わしいかを求める必要はあるだろうか？

その必要はない。鳴き声が聞こえないことで各暗殺者の見込みは確かに変わるが、死亡の危険は凶器だけで決まる。$A\subseteq C'$ かつ $B\subseteq C'$ であるから、C' で条件づけることは二つの確率を単に定数倍するだけである：

$$P(A\mid C')=\frac{P(A)}{P(C')}=\frac{40}{70}=\frac{4}{7},\qquad P(B\mid C')=\frac{P(B)}{P(C')}=\frac{30}{70}=\frac{3}{7}.$$

暗殺者についての情報は、すでにこの二つの数に織り込まれている。

二つの選択の比較

ブロンド氏が殺されるという事象を K とする。C' で条件づければ、罠はアナコンダか爆弾のどちらかであり、彼の運命は罠と彼の選択だけで決まる。

明かりをつける場合。爆弾は確率 $\frac{1}{2}$ で彼を殺し、アナコンダは確率 $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ で彼を殺す。よって

$$P(K\mid C',\text{点灯})=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{3}=\frac{9}{42}+\frac{8}{42}=\frac{17}{42}.$$

明かりをつけない場合。爆弾が彼を殺すことはなく、アナコンダは確率 $\frac{1}{2}$ で彼を殺す。よって

$$P(K\mid C',\text{消灯})=\frac{3}{7}\cdot 0+\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{7}=\frac{12}{42}.$$

$\frac{12}{42}<\frac{17}{42}$ であるから、**ブロンド氏は明かりをつけずに部屋に入るべきである。**このとき生き延びる確率は $\frac{5}{7}$（約 71%）であり、明かりをつけた場合の $\frac{25}{42}$（約 60%）を上回る。

その理由は、より起こりやすい罠はアナコンダであるが、明かりによって本当に事態が悪化するのは爆弾のほうだからである。明かりをつけると、アナコンダによる危険は $\frac{1}{2}$ から $\frac{1}{3}$ に下がるが、爆弾による危険は 0 から $\frac{1}{2}$ に上がる。アナコンダである確率が $\frac{4}{7}$ なので、明かりによって $\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{4}{42}$ だけ危険が減る。一方、爆弾である確率が $\frac{3}{7}$ なので、$\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{42}$ だけ危険が増える。増えるほうが大きいのである。

検算

- 耳を澄ます前であれば、危険は明かりをつける場合 $\frac{30}{100}\cdot\frac{1}{2}+\frac{40}{100}\cdot\frac{1}{3}$、つけない場合 $\frac{40}{100}\cdot\frac{1}{2}$ となる。これらは上の答えをそれぞれ $\frac{7}{10}$ 倍したものであり、そうなるべきである。カナリアはどちらの比較にも何の寄与もしないからである。
- 明かりをつけない戦略のほうがよいのは、$p=P(A\mid C')$ が $\frac{1}{2}p<\frac{1}{2}(1-p)+\frac{1}{3}p$ を満たすとき、すなわち $p<\frac{3}{4}$ のときである。ここでは $p=\frac{4}{7}$ であり、余裕をもってこれを下回っている。
- 10^6 回の晩をシミュレーションすると、死亡率は明かりをつけた場合約 0.404、つけない場合約 0.286 となり、$\frac{17}{42}\approx 0.405$ および $\frac{2}{7}\approx 0.286$ と一致する。

よくある間違い

- 「カナリアでない」という条件をつけ忘れ、$P(A)=0.4$ と $P(B)=0.3$ をそれがすべてであるかのように用いてしまう。結論としての助言は同じになるが、死亡の確率は誤りとなる。
- 生存と死亡を取り違える。明かりをつけた場合のアナコンダの数値は**生き延びる**確率が $\frac{2}{3}$ ということであり、したがって死亡の確率は $\frac{1}{3}$ である。
- 暗殺者を同様に確からしいものとして扱う、あるいは暗殺者の段階を無視して凶器の確率を平均してしまう。

STEP のその先へ

これは**決定理論**（decision theory）の小さな問題である。事後分布（posterior distribution）のもとで期待損失（expected loss）を最小にする行動を選ぶのであり、ここでの「損失」は単に死亡の確率である。$P(A\mid C')$ だけが問題になるという観察や、最適な行動が切り替わる閾値 $p<\frac{3}{4}$ は、こうした意思決定の分析に典型的なものである。すなわち、データが事後分布を変え、事後分布が行動を決めるのである。条件付き確率とベイズ更新（Bayesian updating）についてさらに知りたければ、Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）を参照するとよい。

解答例

STEP I 1997、第 14 問

確率・統計　・　期待費用の最小化

STEP I 1997、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/97-s1-q14

鍵となる考え方

費用 T は確率変数（random variable）X の関数であるから、その期待値（expectation）はその関数に確率密度関数（density）を掛けて積分したものになる。積分を $x = y$ で分割すると、$\mathrm{E}(T)$ が y の普通の関数として得られる。あとはそれを最小化するだけで、これは大学 1 年の微積分の演習問題である。すなわち、微分して 0 とおき、停留点（stationary point）が本当に最小値を与えることを確かめればよい。

解答

準備量が負になることは意味をなさないので、$y \geq 0$ とする。$T = g(X)$ と書く。ここで

$$g(x) = \begin{cases} y & x \leq y, \\ y + r + s(x - y) & x > y. \end{cases}$$

である。すると

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(T) &= \int_0^\infty g(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty y\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_y^\infty \big(r + s(x-y)\big)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

となる。ここでは、何が起ころうと支払う費用 y を分けて取り出した。確率密度関数の積分は 1 であるから、第 1 の積分は y である。

第 2 の積分については $u = x - y$ と置換する。このとき $\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{-u}$ であり、u は 0

から ∞ まで動く：

$$\begin{aligned}\int_y^\infty (r+s(x-y))\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^{-y}\int_0^\infty (r+su)\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\\ &= \mathrm{e}^{-y}\left(r\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u + s\int_0^\infty u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\right)\\ &= \mathrm{e}^{-y}(r+s),\end{aligned}$$

ここで $\int_0^\infty u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \left[-u\mathrm{e}^{-u}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 1$（部分積分（integration by parts））を用いた。したがって

$$C(y) = \mathrm{E}(T) = y + (r+s)\,\mathrm{e}^{-y}.$$

考えてみよう 積分せずに因子 $\mathrm{e}^{-y}(r+s)$ を見抜く方法はあるだろうか？

ある。洪水被害が起こる確率は $\mathrm{P}(X > y) = \mathrm{e}^{-y}$ である。被害が起こったという条件のもとで、超過分 $X - y$ は再び平均 1 の指数分布（exponential distribution）に従う（指数分布は**無記憶性**（memoryless）をもつ）。よって被害額の期待値は $r + s\cdot 1$ である。これらを掛け合わせると $(r+s)\mathrm{e}^{-y}$ が得られる。

次に最小化する。微分すると

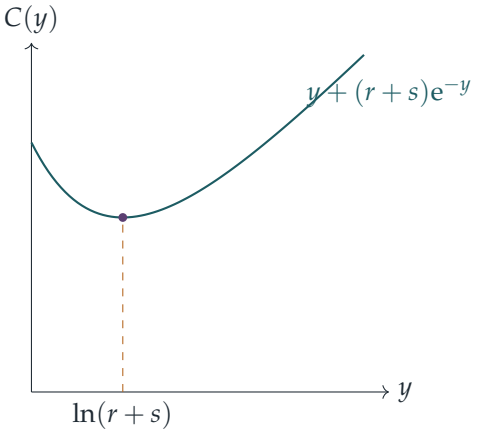
$$C'(y) = 1 - (r+s)\mathrm{e}^{-y}, \qquad C''(y) = (r+s)\mathrm{e}^{-y} > 0.$$

よって $C'(y) = 0$ となるのは $\mathrm{e}^y = r+s$、すなわち $y = \ln(r+s)$ のときに限る。すべての y で $C'' > 0$ であるから、C は凸（convex）であり、C' は増加関数である。したがって C は $y < \ln(r+s)$ で減少し、$y > \ln(r+s)$ で増加する。ゆえにこの停留点は大域的最小点（global minimum）であり、総費用の期待値は

$$y = \ln(r+s),$$

とすることで最小になる。これが示すべきことであった。最小の期待費用は $C\big(\ln(r+s)\big) = \ln(r+s) + 1$ である。

これには $\ln(r+s) \geq 0$、すなわち $r+s \geq 1$ が必要であり、問題文ではこれが暗に仮定されている。$r+s < 1$ ならば、すべての $y \geq 0$ に対して $C'(y) > 0$ となるので、最善の選択は $y = 0$ である。つまり被害があまりに安くつくので、そもそも準備する価値がないのである。



($r+s=3$ として描いた概形。)

検算

- $y=0$ のときは必ず被害を支払うことになり、$\mathrm{E}(T) = r + s\,\mathrm{E}(X) = r+s$ である。これは $C(0)$ と一致する。
- $r=2, s=3$ のとき、公式は $y = \ln 5 \approx 1.609$、最小費用 $1+\ln 5 \approx 2.609$ を与える。$C(y)$ を細かい格子で探索しても同じ最小点が見つかり、また $y=1$ で 4×10^5 年分のシミュレーションを行うと平均費用は 2.844 となり、公式の値 $1+5\mathrm{e}^{-1} \approx 2.839$ とよく合う。
- $r+s$ が大きくなると y も増加する。洪水の被害が高くつくほど多くの準備が正当化されるのであり、常識とも合致する。

よくある間違い

- 準備費用 y は $X \le y$ のときだけでなく、**毎年**支払われることを忘れる。
- $sx\,\mathrm{e}^{-x}$ を積分する際に $-sy\,\mathrm{e}^{-x}$ の項を落とし、$\mathrm{e}^{-y}(r+s)$ の代わりに $\mathrm{e}^{-y}(r+s+sy)$ を得てしまう。
- 停留点を求めただけで、それが最小値であることを示さない。

STEP のその先へ

これは不確実性のもとでの意思決定（decision-making under uncertainty）の小さな例である。すなわち、期待損失（expected loss）を最小にする行動を選ぶ問題である。確実にかかる費用と期待される損失とを釣り合わせるという同じ構造は、オペレーションズ・リサーチ（operations research）における「新聞売り子問題」（newsvendor problem）や、統計学におけるベイズ決定（Bayes decision）の考え方の根底にもある。上で用いた無記憶性は、連続分布の中で指数分布を特徴づける性質である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、これが確率変数の関数の期待値とともに扱われている。

解答例

STEP II 1997、第 1 問

純粋数学 ・ 数字和と数え上げ

> **STEP II 1997、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q1

鍵となる考え方

数を書き並べるのではなく、まず個数を数え、それから各位（place value）の寄与を別々に足し合わせればよい。下 3 桁のそれぞれの位には、使ってよい数字がどれも同じ回数ずつ現れるので、和はほとんど自動的に求まる。さらによいことに、対称性（symmetry）がある。各数字 d を $7-d$ に置き換えると $0 \leftrightarrow 7$ と $2 \leftrightarrow 5$ が入れ替わるので、数は和が一定の組に分かれ、素因数分解（factorisation）もそのまま得られる。

解答

どの数が条件を満たすか

1000 と 6000 の間にある条件を満たす数は 4 桁であり、千の位の数字は $0, 2, 5, 7$ のいずれかでなければならない。0 にはなりえず（4 桁未満になってしまう）、7 にもなりえない（7000 を超えてしまう）。よって千の位は 2 または 5 であり、このように作られる 2000 から 5777 までの数はすべて範囲内にある。端点の 1000 と 6000 自体は数字 1 と 6 を含むので、「間」が端点を含むかどうかは問題にならない。

残りの 3 桁はそれぞれ、使ってよい 4 つの数字のどれでもよく、互いに独立に選べる。よって数の個数は

$$2 \times 4 \times 4 \times 4 = 128$$

である。

位ごとに足す

千の位。 128 個の数のうち半分の 64 個は 2 で始まり、残りの 64 個は 5 で始まる。千の位の数字の寄与は

$$64 \times (2+5) \times 1000 = 448\,000.$$

である。

百の位、十の位、一の位。 これらの位のうち 1 つを固定する。その位にどの数字が入っても残りの数字の選び方は同じ数だけあるので、4 つの数字はそれぞれ、その位にちょうど $128/4 = 32$ 個の数において現れる。したがって、その位の数字の合計は $32 \times (0+2+5+7) = 32 \times 14 = 448$ である。3 つの位の重みは 100、10、1 であるから、合わせた寄与は

$$448 \times (100+10+1) = 448 \times 111 = 49\,728.$$

である。

これらを足すと、求める和は

$$S = 448 \times 1000 + 448 \times 111 = 448 \times 1111 = 497\,728.$$

である。

素数の積として表す

$448 = 64 \times 7 = 2^6 \times 7$ であり、$1111 = 11 \times 101$ である。ここで 101 は素数（prime）である（2、3、5、7 のいずれでも割り切れず、$11^2 > 101$ である）。ゆえに

$$S = 2^6 \times 7 \times 11 \times 101.$$

である。

> ? **考えてみよう** 位ごとの集計をまったくせずに答えを見抜く方法はあるだろうか？

ある。n が条件を満たすならば、$7777 - n$ も条件を満たす。7777 から各桁ごとに引くと繰り下がりは起こらず、各数字 d は $7-d$ に移る。この対応は $\{0,2,5,7\}$ をそれ自身に移し、先頭の数字 2 と 5 を入れ替える。よって 128 個の数は和が 7777 になる 64 組に分かれる（7777 は奇数なので、自分自身と組になる数はない）。したがって

$$S = 64 \times 7777 = 2^6 \times 7 \times 1111 = 2^6 \times 7 \times 11 \times 101,$$

となり、上の計算と一致する。

検算

1000 から 6000 までを短いコンピュータプログラムで探索すると、条件を満たす数はちょうど 128 個で、その和は 497 728 である。また $2^6 \times 7 \times 11 \times 101 = 64 \times 7777 = 497\,728$ である。大きさの妥当性を確かめると、条件を満たす数の平均は $7777/2 = 3888.5$ であり、範囲 2000 から 5777 のほぼ真ん中にある。

よくある間違い

- 先頭の数字に 7 を許してしまう（6000 を超える数が出てくる）、あるいは 0 が先頭に来られないことを忘れる。
- 千の位にも各数字が 128/4 回ずつ現れるとしてしまう。そこに現れるのは 2 と 5 だけで、それぞれ 64 回である。
- 1111 を 11×101 に分解せず、497 728 や 448×1111 で止めてしまう。

STEP のその先へ

各位に各数字が何回現れるかを数えることは、**二重計数**（*double counting*）の議論の最も簡単な例である。これは同じ量を 2 通りの順序で、ここでは数ごとと位ごとに足し合わせる方法である。$7777 - n$ による組分けは対称性の議論であり、同じ種類の議論からガウス（Gauss）の公式 $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ も得られる。数字が固定された集合から選ばれる数やその和は、初等整数論（elementary number theory）や組合せ論（combinatorics）の定番の題材である。ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、次に読む本として素晴らしい一冊である。

解答例

STEP II 1997、第 2 問

純粋数学 • 漸化式

> **STEP II 1997、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q2

鍵となる考え方

この等式の連鎖は、実は姿を変えた漸化式（recurrence）である。連鎖の各段は $x_n + 2/x_{n+1} = 3$ を表しているので、各項が次の項を決める。最初のいくつかの項を分数として計算し、分子と分母をよく観察しよう。すぐに 2 の累乗が現れる。そして予想が立てば、帰納法（induction）に必要なステップはまさに漸化式から得られる。

解答

規則性を見つける

連鎖を等式ごとに読むと

$$\frac{2}{x_1} = 3 \qquad \text{かつ} \qquad x_n + \frac{2}{x_{n+1}} = 3 \quad (n \geq 1),$$

となるので、

$$x_1 = \frac{2}{3}, \qquad x_{n+1} = \frac{2}{3 - x_n}.$$

である（この漸化式が意味をもつのは $x_n \neq 3$ のときに限られるが、すべての x_n が 0 と 1 の間にあることを後で示す）。最初のいくつかの項を計算すると、

$$x_1 = \frac{2}{3}, \qquad x_2 = \frac{2}{3 - \frac{2}{3}} = \frac{6}{7}, \qquad x_3 = \frac{2}{3 - \frac{6}{7}} = \frac{14}{15}, \qquad x_4 = \frac{2}{3 - \frac{14}{15}} = \frac{30}{31}.$$

分母 $3, 7, 15, 31$ はいずれも 2 の累乗より 1 小さい数、すなわち $2^{n+1} - 1$ であり、各分子はその分母より 1 小さい。そこで次のように予想する。

$$x_n = \frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+1} - 1} = 1 - \frac{1}{2^{n+1} - 1}.$$

数学的帰納法による証明

$P(n)$ を命題「$x_n = \dfrac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}$」とする。

基底段階。$n=1$ のとき、公式は $\frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3} = x_1$ を与えるので、$P(1)$ は真である。

帰納段階。ある $k \geq 1$ について $P(k)$ が真であると仮定する。計算を見やすくするため $N = 2^{k+1}$ とおくと、$x_k = \dfrac{N-2}{N-1}$ である。このとき

$$3 - x_k = \frac{3(N-1)-(N-2)}{N-1} = \frac{2N-1}{N-1},$$

であり、これは 0 ではない（実際、$x_k < 1$ より 2 より大きい）。よってこれで割ることができ、

$$x_{k+1} = \frac{2}{3-x_k} = \frac{2(N-1)}{2N-1} = \frac{2N-2}{2N-1}.$$

考えてみよう なぜこれが $n = k+1$ のときの公式なのか？

$2N = 2^{k+2} = 2^{(k+1)+1}$ だからである。したがって

$$x_{k+1} = \frac{2^{(k+1)+1}-2}{2^{(k+1)+1}-1},$$

となり、これはまさに $P(k+1)$ である。

$P(1)$ が真であり、すべての $k \geq 1$ について $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ が成り立つので、数学的帰納法により、すべての $n \geq 1$ について $P(n)$ は真である。これにより、すべての n について $0 < x_n < 1$ であることも確かめられ、分母 $3 - x_n$ が 0 になることは決してない。

「別解」の道筋：線形化

この予想は導くこともできる。$x_{n+1} = 2/(3-x_n)$ という形の漸化式は、0 でない項からなる新たな数列 (a_n) を用いて $x_n = 2a_n/a_{n+1}$ とおくと、線形になる。代入すると

$$\frac{2a_{n+1}}{a_{n+2}} = \frac{2}{3-\frac{2a_n}{a_{n+1}}} = \frac{2a_{n+1}}{3a_{n+1}-2a_n}, \qquad \text{よって} \qquad a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n.$$

特性方程式（auxiliary equation）$t^2 - 3t + 2 = 0$ の解は 1 と 2 であるから、$a_n = A + B \cdot 2^n$ である。$a_1 = 1$（a の定数倍は自由に選べる）、$a_2 = 3$（$x_1 = 2a_1/a_2 = \frac{2}{3}$ となるように）とすると $a_n = 2^n - 1$ となり、$x_n = \dfrac{2(2^n-1)}{2^{n+1}-1}$ という同じ公式が得られる。

検算

- 公式に $n = 0$ を代入すると $x_0 = 0$ となる。実際、最初の等式 $3 = 2/x_1$ は、一般の段 $x_0 + 2/x_1 = 3$ において $x_0 = 0$ としたものである。これはうまく整合している。
- $n \to \infty$ のとき $x_n \to 1$ である。漸化式の極限 L は $L = 2/(3 - L)$、すなわち $L^2 - 3L + 2 = 0$ を満たさなければならないので、$L = 1$ または $L = 2$ であり、この数列が下から近づくのは 1 である。
- $x_1 = \frac{2}{3}$ から始めて $x_{n+1} = 2/(3 - x_n)$ を正確な分数で反復計算すると、40 までのすべての n で公式と一致した。たとえば $x_5 = \frac{62}{63}$ である。

よくある間違い

- 連鎖の読み違い：等式は $x_n + 2/x_{n+1} = 3$ であって、$x_{n+1} + 2/x_n = 3$ ではない。これを間違えると別の数列になってしまう。
- 「この規則性が続く」で止めてしまうこと。問題は証明を求めており、いくつかの項は証拠にすぎない。
- 帰納段階で $2 \cdot 2^{k+1}$ を $2^{(k+1)+1}$ と書き直すのを忘れ、結論が命題 $P(k+1)$ であることが目に見える形にならないこと。

STEP のその先へ

$x_{n+1} = (ax_n + b)/(cx_n + d)$ という形の漸化式はメビウス変換（Möbius transformation）の反復であり、「別解」の道筋のように常に線形化できる。同じことだが、2×2 行列（matrix）$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の累乗を追うこともでき、その固有値（eigenvalue、ここでは 1 と 2）が長期的な振る舞いを支配する。不動点（fixed point）1 と 2 はそれぞれ吸引的、反発的であり、これが数列が 1 に落ち着く理由である。行列の観点については Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を、数列の収束一般については Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の理解）を参照されたい。

解答例

STEP II 1997、第 3 問

純粋数学 ・ 部分分数分解による積分

> **STEP II 1997、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q3

鍵となる考え方

分母にある 2 つの 2 次式を掛け合わせると x^4+4 になる。これは典型的な「姿を変えた平方の差（difference of two squares）」であり、$x^4+4=(x^2+2)^2-(2x)^2$ と書ける。部分分数（partial fractions）に分解できてしまえば、各項は標準的な積分である。それぞれの分子を、分母の導関数の定数倍と定数とに分ける。前者を積分すると対数（logarithm）になり、後者は平方完成（completing the square）を行うと逆正接（arctangent）になる。

解答

部分分数分解

まず

$$(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)=(x^2+2)^2-(2x)^2=x^4+4x^2+4-4x^2=x^4+4.$$

であることに注意する。したがって、求める恒等式の両辺に x^4+4 を掛けると、

$$(ax+b)(x^2-2x+2)+(cx+d)(x^2+2x+2)=1 \quad \text{すべての} x.$$

が成り立てばよい。左辺を展開すると

$$(a+c)x^3+(b-2a+d+2c)x^2+(2a-2b+2c+2d)x+(2b+2d).$$

となる。定数多項式 1 と係数を比較すると、

$$\begin{aligned} x^3: &\quad a+c=0,\\ x^2: &\quad b+d-2a+2c=0,\\ x^1: &\quad 2(a+c)+2(d-b)=0,\\ x^0: &\quad 2(b+d)=1. \end{aligned}$$

第 1 式と第 3 式から $c=-a$、$d=b$ を得る。すると第 4 式から $b=d=\frac{1}{4}$ である。最後に第 2 式は $\frac{1}{2}-4a=0$ となるので、$a=\frac{1}{8}$ である。よって

$$a=\tfrac{1}{8}, \qquad b=\tfrac{1}{4}, \qquad c=-\tfrac{1}{8}, \qquad d=\tfrac{1}{4},$$

すなわち

$$\frac{1}{x^4+4}=\frac{1}{8}\left(\frac{x+2}{x^2+2x+2}+\frac{2-x}{x^2-2x+2}\right).$$

である。（$c=-a$ と $d=b$ は計算をしなくても予想できた。x を $-x$ に置き換えても $\frac{1}{x^4+4}$ は変わらず、2 つの分母が入れ替わるだけだからである。）

積分

考えてみよう $\dfrac{x+2}{x^2+2x+2}$ はどのように積分すればよいだろうか？

分母の導関数は $2x+2$ である。そこで分子を、$2x+2$ の定数倍と残りの部分との和として表す：

$$x+2=\tfrac{1}{2}(2x+2)+1, \qquad 2-x=-\tfrac{1}{2}(2x-2)+1.$$

平方完成すると $x^2\pm 2x+2=(x\pm 1)^2+1$ である。したがって

$$\frac{1}{x^4+4}=\frac{1}{16}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{16}\cdot\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x+1)^2+1}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x-1)^2+1}.$$

となる。どちらの 2 次式もすべての実数 x に対して正であるから、各項は $[0,1]$ 上で連続である。最初の 2 項は $f>0$ として f'/f の形をしており、積分すると $\ln f$ になる。残りの 2 項は積分すると逆正接になる。よって

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^4+4} &= \frac{1}{16}\Big[\ln(x^2+2x+2)-\ln(x^2-2x+2)\Big]_0^1+\frac{1}{8}\Big[\tan^{-1}(x+1)+\tan^{-1}(x-1)\Big]_0^1\\ &= \frac{1}{16}\big[(\ln 5-\ln 1)-(\ln 2-\ln 2)\big]\\ &\quad +\frac{1}{8}\big[(\tan^{-1}2+\tan^{-1}0)-(\tan^{-1}1+\tan^{-1}(-1))\big]\\ &= \frac{1}{16}\ln 5+\frac{1}{8}\big[\tan^{-1}2-\big(\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{\pi}{4}\big)\big]\\ &= \frac{1}{16}\ln 5+\frac{1}{8}\tan^{-1}2, \end{aligned}$$

となり、題意が示された。$\ln 2$ の項どうし、$\frac{\pi}{4}$ の項どうしがそれぞれ打ち消し合う。これは先ほど気づいた対称性から生じる、見ていて気持ちのよい帰結である。

検算

- $x = 0$ のとき、部分分数分解の式は $\frac{1}{8}\left(\frac{2}{2} + \frac{2}{2}\right) = \frac{1}{4} = \frac{1}{0+4}$ を与える。$x = 1$ のときは $\frac{1}{8}\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{1}\right) = \frac{1}{5}$ となり、これも正しい。
- 被積分関数は $[0, 1]$ 上で $\frac{1}{4}$ から $\frac{1}{5}$ まで減少するので、積分の値は 0.2 と 0.25 の間になければならない。数値的には $\frac{1}{16}\ln 5 + \frac{1}{8}\tan^{-1} 2 \approx 0.100589 + 0.138394 = 0.238983$ である。この積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると 0.2389834593 となり、有効数字約 16 桁まで一致する。

よくある間違い

- 実数の範囲で $x^4 + 4$ を因数分解しようとして、実数解を探してしまう。実数解は存在しないので、因数は 2 次式でなければならない。$4x^2$ を足して引き、平方完成するのがコツである。
- 逆正接の項で下端の値を忘れてしまう。$\tan^{-1}(0+1) = \frac{\pi}{4}$ と $\tan^{-1}(0-1) = -\frac{\pi}{4}$ は、両方を含めて初めて打ち消し合う。

STEP のその先へ

因数分解 $x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$ は、ソフィー・ジェルマン（Sophie Germain）の恒等式 $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$ の特別な場合である。この恒等式から、たとえば $n^4 + 4$ が素数（prime）となるのは $n = 1$ のときに限ることがわかる。より一般に、複素数解は共役（conjugate）な対として現れるので、実数係数の多項式はすべて実数係数の 1 次式と 2 次式の積に因数分解できる。したがって、部分分数分解、ひいては対数と逆正接があれば、どんな有理関数（rational function）も積分できる。周回積分（contour integration）を用いれば、$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+4} = \frac{\pi}{4}$ はほとんど計算せずに求められる。その理由は Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）に説明されている。

解答例

STEP II 1997、第 4 問

純粋数学 ・ 剰余の定理

> **STEP II 1997、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q4

鍵となる考え方

次数 d の多項式で割ると、余りの次数は d 未満になる。しかも恒等式 被除数 $=$ 除数 $\times$ 商 $+$ 余り は**すべての** x について成り立つ。そこで、除数をゼロにするような x の値を代入する。すると商の項は消え、余りだけが残る。この問題で使うのはこのひとつの技法だけであり、それを三回使う。

解答

剰余の定理（remainder theorem）

$\mathrm{p}(x)$ を一次式 $x-a$ で割ると、商 $\mathrm{s}(x)$ と、次数が 1 未満の余り R が得られる。したがって R は定数であり、

$$\mathrm{p}(x) = (x-a)\,\mathrm{s}(x) + R \qquad \text{任意の} x.$$

これは x についての恒等式（identity）なので、$x = a$ を代入してよい。右辺の第一項は $0 \cdot \mathrm{s}(a) = 0$ となり、$\mathrm{p}(a) = R$ が残る。よって余りは $\mathrm{p}(a)$ であり、示すべきことが示された。

小問 (i)

剰余の定理により、与えられた余りの条件は

$$\mathrm{p}(1) = 3, \qquad \mathrm{p}(2) = 1, \qquad \mathrm{p}(3) = 5.$$

を意味する。$\mathrm{p}(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\mathrm{q}(x) + \mathrm{r}(x)$ に $x = 1, 2, 3$ を代入すると、いずれの場合も第一項が消えるので、

$$\mathrm{r}(1) = 3, \qquad \mathrm{r}(2) = 1, \qquad \mathrm{r}(3) = 5.$$

考えてみよう $\mathrm{q}(x)$ については何もわかっていない。それは問題になるだろうか。

問題にはならない。$x = 1, 2, 3$ では因数 $(x-1)(x-2)(x-3)$ がゼロになるので、q が何であっても寄与しない。また、係数は高々三個しかないので、三つの値によって r は一意に定まる。

次数が高々二の多項式は、

$$\mathrm{r}(x) = A(x-1)(x-2) + B(x-1) + C,$$

と書いておくと便利である。こうすると、代入するたびに項がひとつずつ消えていくからである。

$$\begin{aligned} x = 1: &\quad C = 3, \\ x = 2: &\quad B + C = 1 \;\Rightarrow\; B = -2, \\ x = 3: &\quad 2A + 2B + C = 5 \;\Rightarrow\; 2A - 4 + 3 = 5 \;\Rightarrow\; A = 3. \end{aligned}$$

したがって

$$\mathrm{r}(x) = 3(x-1)(x-2) - 2(x-1) + 3 = 3x^2 - 11x + 11.$$

確かめると、$\mathrm{r}(1) = 3 - 11 + 11 = 3$、$\mathrm{r}(2) = 12 - 22 + 11 = 1$、$\mathrm{r}(3) = 27 - 33 + 11 = 5$ となる。

小問 (ii)

(問題文には一か所 $\mathrm{P}_n(x)$ と書かれているが、これは同じ多項式 $\mathrm{P}(x)$ を指している。)
剰余の定理により、必要な条件は

$$\mathrm{P}(a) = a \qquad \text{ただし} a = 0, 1, \ldots, n.$$

である。多項式 x はすでにこの条件を満たしているが、次数が合わない。そこで代わりに $\mathrm{D}(x) = \mathrm{P}(x) - x$ を考える。必要なのは $a = 0, 1, \ldots, n$ に対して $\mathrm{D}(a) = 0$ となることである。したがって因数定理（factor theorem、余りが 0 の場合の剰余の定理）により、$x, x-1, \ldots, x-n$ のそれぞれが $\mathrm{D}(x)$ を割り切る。これら $n+1$ 個の一次因数は互いに異なるので、その積も $\mathrm{D}(x)$ を割り切り、その積の次数は $n+1$ である。

考えてみよう $\mathrm{P}(x)$ の次数をちょうど $n+1$ にするにはどうすればよいか。

$\mathrm{D}(x)$ をその積そのもの（望むならゼロでない定数倍）とすればよい。$n+1 \geq 2$ なので、x を加えてもその最高次の項 x^{n+1} が打ち消されることはない。よって

$$\mathrm{P}(x) = x + x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

は次数 $n+1$ をもち、$0 \leq a \leq n$ を満たす各整数 a に対して $\mathrm{P}(a) = a + 0 = a$ となる。これが求める種類の多項式である。

実は、この議論によってそのような多項式がすべて求まる。P が次数 $n+1$ をもち、与えられた余りの条件を満たすとすると、$\mathrm{D}(x) = \mathrm{P}(x) - x$ は次数が高々 $n+1$ で、次数 $n+1$ の積で割り切れる。したがってある定数 k を用いて $\mathrm{D}(x) = k\,x(x-1)\cdots(x-n)$ と書け、次数が $n+1$ となるためには $k \neq 0$ でなければならない。一般解は

$$\mathrm{P}(x) = x + k\,x(x-1)(x-2)\cdots(x-n), \qquad k \neq 0.$$

である。

検算

- $n = 1$ のとき $\mathrm{P}(x) = x + x(x-1) = x^2$ である。x で割った余りは 0、$x-1$ で割った余りは 1 であり、条件どおりである。
- (i) において、任意の q、たとえば $\mathrm{q}(x) = x$ をとって p をつくり、組立除法（synthetic division）で $x-1$、$x-2$、$x-3$ で割ると、余りは $3, 1, 5$ となる。
- コンピュータを用いて、剰余の定理を無作為に選んだ 1000 個の多項式で、小問 (i) を無作為に選んだ 100 通りの q で、小問 (ii) を $n = 1, \ldots, 11$ と $k = 1, -3, 7$ で確かめた。すべての余りが厳密に一致した。

よくある間違い

- 小問 (ii) で、多項式 $\mathrm{P}(x) = x$ そのものも条件を満たすが、次数が $n+1$ ではなく 1 であることを見落とす。次数を正しくするのは積の項である。
- $ax^2 + bx + c$ の係数についての三元連立方程式を解くのも誤りではないが、時間がかかる。入れ子の形 $A(x-1)(x-2) + B(x-1) + C$ を使えば消去の手間が省ける。

STEP のその先へ

小問 (i) は多項式補間（polynomial interpolation）の一例である。x の値が互いに異なる任意の m 個の点を通る、次数が m 未満の多項式はちょうどひとつ存在し、ここで用いた入れ子の形はそのニュートン（Newton）形式である。同じ推論を環（ring）の言葉で述べたものが、多項式に対する中国剰余定理（Chinese remainder theorem）である。すなわち、多項式を $x-1$、$x-2$、$x-3$ を法として知ることは、それらの積を法として知ることと同じである。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）では、多項式環とこの定理が展開されている。

解答例

STEP II 1997、第 5 問

純粋数学 ・ 複素指数関数による写像

STEP II 1997、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/97-s2-q5

この問題は、*Beyond STEP* の第 5.7 節「**写像としての複素指数関数**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch05/complex-exponential.html

鍵となる考え方

この関係式は、$z = \mathrm{e}^{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}v} = \mathrm{e}^{w}$ を絶対値（modulus）と偏角（argument）の形で書いたものにすぎない。u が z の絶対値を決め、v がその偏角を決めている。このことに気づけば、どの小問も極座標（polar coordinates）の問題になる。唯一の微妙な点は、偏角が 2π の整数倍の違いを除いてしか定まらないことである。そのためこの写像は多対一（many-to-one）である。一対一対応（one-to-one correspondence）を得るには、どの辺を含めるかに注意しながら、u–v 平面を適切な高さの水平な帯（strip）に制限しなければならない。

解答

$z = \mathrm{i}\,\mathrm{e}$ のときの w を求める

$\mathrm{e}^{u} > 0$ かつ $|\cos v + \mathrm{i}\sin v| = 1$ であるから、関係式は次のことを意味する。

$$|z| = \mathrm{e}^{u}, \qquad \arg z = v \pmod{2\pi}.$$

$z = \mathrm{i}\,\mathrm{e}$ のとき、$|z| = \mathrm{e}$ かつ $\arg z = \frac{\pi}{2}$ である。よって $\mathrm{e}^{u} = \mathrm{e}$ より $u = 1$ を得る（実数の指数関数は一対一である）。また $\cos v + \mathrm{i}\sin v = \mathrm{i}$ より $\cos v = 0$ かつ $\sin v = 1$ であり、$v = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ を得る。したがって

$$w = 1 + \mathrm{i}\left(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

このような w は無数に存在し、鉛直線 $u = 1$ 上に 2π 間隔で並んでいる。

直線 $u =$ 定数 の像

直線 $u = c$ 上では、点 z の絶対値は e^c、偏角は v である。v がすべての実数を動くと、$\cos v + \mathrm{i}\sin v$ は単位円上を（無限回）回るので、z は次の円を描く。

$$\text{円} x^2 + y^2 = \mathrm{e}^{2c}, \quad \text{中心} O,\ \text{半径} \mathrm{e}^c.$$

c が大きいほど円は大きくなり、$c = 0$ のときは単位円になる。$c \to -\infty$ のとき円は O に向かって縮むが、$\mathrm{e}^c > 0$ であるから決して O には達しない。

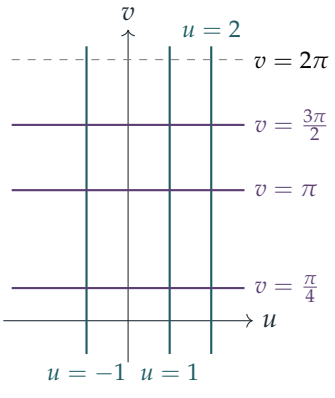
直線 $v =$ 定数 の像

直線 $v = c$ 上では $z = \mathrm{e}^u(\cos c + \mathrm{i}\sin c)$ であり、これは固定された単位ベクトル $(\cos c, \sin c)$ の正の定数倍である。u が $\mathbb{R}$ 全体を動くと、倍率 e^u は $(0, \infty)$ のすべての値をちょうど一度ずつとる。したがって像は次の半直線（half-line）である。

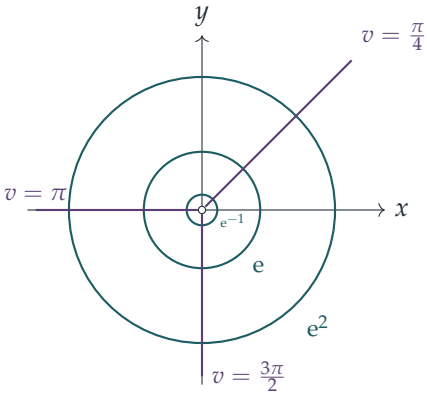
点 O を端点とし、偏角 c（正の x 軸から測る）をもつ半直線。ただし O 自身は除く。

直線 $v = c$ と $v = c + 2k\pi$ は同じ半直線を与える。たとえば直交座標で表すと、$v = \frac{\pi}{4}$ は $y = x$（ただし $x > 0$）を与え、$v = \pi$ は負の x 軸を与える。

図は u–v 平面の格子線とその像を示している。鉛直線は円に、水平線は半直線に移る。



u–v 平面



x–y 平面

（円の大きさは正確な縮尺ではない。半径 e^{-1}、e、e^2 は非常に速く大きくなるからである。白丸は、決して到達しない点 O を表す。）

第1象限と一対一に対応する部分集合

点 z が開いた第1象限にあるのは、$z \neq 0$ であって、0 と $\frac{\pi}{2}$ の間に（端点を含まずに）偏角をもつとき、かつそのときに限る。次のようにとる。

$$W_1 = \left\{(u,v) : u \in \mathbb{R},\ 0 < v < \tfrac{\pi}{2}\right\}, \qquad W_2 = \left\{(u,v) : u \in \mathbb{R},\ 2\pi < v < \tfrac{5\pi}{2}\right\}.$$

W_1 のすべての点は第1象限に移る。そこでは $e^u \cos v > 0$ かつ $e^u \sin v > 0$ だからである。逆に、第1象限の点 z が $z = e^u(\cos v + i \sin v)$ と表されるのは、$u = \ln|z|$ かつ $v = \theta + 2k\pi$ のときに限る。ここで $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ はその偏角の主値（principal argument）である。これらの値のうち $(0, \frac{\pi}{2})$ に入るのはちょうど一つ、$k = 0$ のものだけであるから、z は W_1 にちょうど一つの原像（preimage）をもつ。よって W_1 は象限と一対一に対応する。W_2 についても $k = 1$ として同じ議論が成り立つ。W_2 は W_1 を 2π だけ上に平行移動したものである。

（どの帯 $\{2k\pi < v < 2k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ をとっても同様にうまくいく。）

$0 < |z| < 1$ と一対一に対応する部分集合

今度は $|z| = e^u < 1$、すなわち $u < 0$ が必要である。さらにすべての偏角がちょうど一度ずつとられなければならないので、v はちょうど長さ 2π の区間を動く必要がある。

> **考えてみよう** 帯は上の辺を含むべきか、下の辺を含むべきか。それとも両方を含むべきか、どちらも含まないべきか。

ちょうど一方である。両方を含めて、たとえば $0 \le v \le 2\pi$ とすると、$(u, 0)$ と $(u, 2\pi)$ はどちらも正の実軸上の同じ点 e^u に移るので、対応は一対一にならない。どちらも含めなければ、正の実軸にはまったく到達しない。一方の辺だけを含めれば、すべての偏角がちょうど一度ずつ現れる。そこで次のようにとる。

$$W_3 = \{(u,v) : u < 0,\ 0 \le v < 2\pi\}, \qquad W_4 = \{(u,v) : u < 0,\ -\pi < v \le \pi\}.$$

W_3 について：$0 < |z| < 1$ ならば $u = \ln|z| < 0$ でなければならない。また z の偏角 $\theta + 2k\pi$ のうち $[0, 2\pi)$ に入るものはちょうど一つである。この区間は長さが 2π で、端点を一方しか含まないからである。よってそのような z はそれぞれ W_3 にちょうど一つの原像をもち、W_3 の各点は $0 < e^u < 1$ を満たす z に移る。W_4 については、偏角の主値に対応する区間 $(-\pi, \pi]$ を用いれば同じ議論が成り立つ。どちらも、半平面 $u < 0$ を高さ 2π の半開の帯に制限したものである。

検算

- $u = 1$、$v = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ とおくと $z = \mathrm{e}(\cos\frac{5\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{2}) = \mathrm{i}\,\mathrm{e}$ となり、確かに求めるとおりである。
- 数値的にも、数千組のランダムな (u, v) に対して、$|z| = \mathrm{e}^u$ と $\arg z \equiv v$ が誤差 10^{-9} 以内で成り立つことを確かめた。各目標集合のランダムな点に対して、$W_1, \ldots, W_4$ のそれぞれにちょうど一つの原像が見つかった。また点 $(-1, 0)$ と $(-1, 2\pi)$ はどちらも $z = \mathrm{e}^{-1} \approx 0.3679$ を与える。これにより、閉じた帯では二重に数えてしまうことが確認できる。

よくある間違い

- $w = 1 + \frac{\pi}{2}\mathrm{i}$ だけを答え、$+2k\pi$ を忘れる。
- 像に原点を含めてしまう。e^u は決して 0 にならないので、円が一点に縮むことはなく、半直線の始点は除かれた点である。
- W_3 として閉じた帯 $0 \le v \le 2\pi$（あるいは開いた帯 $0 < v < 2\pi$）を用いる。前者は正の実軸を二重に数え、後者は正の実軸を取りこぼす。

STEP のその先へ

ここでの写像は複素指数関数（complex exponential）$w \mapsto \mathrm{e}^w$ である。これは直交座標の格子線を極座標の格子線に移し、周期 $2\pi\mathrm{i}$ をもつ周期関数である。この写像が一対一となる帯を選ぶことは、まさにその逆関数である**複素対数関数の分枝**（branch of the complex logarithm）を選ぶことにほかならない。除いた辺が**分枝切断**（branch cut）であり、これによって $\log z$ を $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 全体で連続に定義できない理由がわかる。Tristan Needham の *Visual Complex Analysis*（図で見る複素解析の入門書）には、この写像や等角写像（conformal map）一般の美しい図が数多く載っている。

解答例

STEP II 1997、第 6 問

純粋数学 ・ 三角方程式

> **STEP II 1997、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q6

鍵となる考え方

すべてを $t = \tan\theta$ を用いて表す。三倍角の公式（triple-angle formula）によって方程式は t の三次方程式（cubic equation）になり、容易に見つかる根（root）を一つ見つけると、残る二次式はちょうど最初の小問に現れたものになる。したがって、その根は $\tan^{-1}(1 \pm \sqrt{2})$ を計算するのではなく、二倍角（double angle）に関する条件によって処理できる。余接（cotangent）を含む方程式は、同じ方程式が姿を変えたものにすぎない。置換（substitution）$\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$ によって cot が tan に入れ替わるのである。

解答

最初の結果

$t = \tan\phi$ が $t^2 = 2t + 1$ を満たすとする。このとき $1 - t^2 = -2t$ である。また、$t = 0$ は $t^2 = 2t + 1$ を満たさないので $t \neq 0$ であり、さらに $t^2 \neq 1$ である（そうでなければ $2t = 0$ となる）。よって $\tan 2\phi$ は定義され、

$$\tan 2\phi = \frac{2t}{1 - t^2} = \frac{2t}{-2t} = -1,$$

となり、示すべきことが示された。

逆（converse）も成り立ち、これは後で必要になる。$\tan 2\phi = -1$ ならば $2t = -(1 - t^2)$、すなわち $t^2 = 2t + 1$ である。したがって

$$\tan^2\phi = 2\tan\phi + 1 \iff \tan 2\phi = -1.$$

方程式 $\tan\theta = 2 + \tan 3\theta$

解であるためには、$\tan\theta$ と $\tan 3\theta$ がともに定義されていなければならない。$t = \tan\theta$ とおく。すると

$$\tan 3\theta = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2},$$

であり、$\tan 3\theta$ が定義されているので $1 - 3t^2 \neq 0$ である。よって

$$\tan\theta - \tan 3\theta = \frac{t(1-3t^2) - (3t - t^3)}{1 - 3t^2} = \frac{-2t - 2t^3}{1 - 3t^2}.$$

これを 2 に等しいとおき、両辺に $1 - 3t^2$（0 でない）を掛けると

$$-t - t^3 = 1 - 3t^2 \quad \Longleftrightarrow \quad t^3 - 3t^2 + t + 1 = 0.$$

係数の和が 0 であるから $t = 1$ は根であり、

$$t^3 - 3t^2 + t + 1 = (t-1)(t^2 - 2t - 1).$$

$t = 1$ も $t = 1 \pm \sqrt{2}$ も $3t^2 = 1$ を満たさないので、どの根も実際に解を与える。

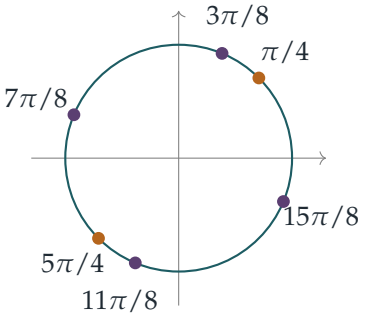
考えてみよう $\tan\theta = 1 \pm \sqrt{2}$ を、π の有理数倍の形にどう直せばよいか？

最初の小問を使う。$t^2 - 2t - 1 = 0$ の根は、$t^2 = 2t + 1$ を満たす $\tan\theta$ の値にほかならず、上の同値関係により、それらはちょうど $\tan 2\theta = -1$ を満たす θ に対応する。

- $\tan\theta = 1$：$\theta = \frac{\pi}{4} + n\pi$。$(0, 2\pi)$ においては $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ となる。
- $\tan 2\theta = -1$：$2\theta = \frac{3\pi}{4} + n\pi$ であるから、$\theta = \frac{3\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$。ここで 2θ は $(0, 4\pi)$ を動くので、$n = 0, 1, 2, 3$ であり、$\theta = \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$ となる。

（たとえば $\tan\frac{3\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$、$\tan\frac{7\pi}{8} = -\tan\frac{\pi}{8} = 1 - \sqrt{2}$ である。）よって、$0 < \theta < 2\pi$ における解は

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}.$$



琥珀色の点は $\tan\theta = 1$ から、四分の一回転ずつ離れた紫色の点は $\tan 2\theta = -1$ から得られる。

方程式 $\cot\theta = 2 + \cot 3\theta$

> **考えてみよう** cot について計算を一からやり直さなければならないのか？

その必要はない。$\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$ とおく。すると $\cot\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \tan\psi$ である。また、cot の周期（period）が π であることを用いると

$$\cot 3\theta = \cot\left(\frac{3\pi}{2} - 3\psi\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - 3\psi\right) = \tan 3\psi,$$

となる。各辺が定義されるのは、対応する tan が定義されるときであり、かつそのときに限る。したがって方程式は

$$\tan\psi = 2 + \tan 3\psi,$$

となり、これは先ほどの方程式である。範囲 $-\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ は $0 < \psi < 2\pi$ となり、これはちょうど先ほどの範囲である。よって ψ は上で求めた六つの値をとり、$\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$ より

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{7\pi}{8}, -\frac{11\pi}{8}.$$

検算

- $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき：$\tan 3\theta = \tan\frac{3\pi}{4} = -1$ であり、$2 + (-1) = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$。$\theta = \frac{3\pi}{8}$ のとき：$\tan\frac{9\pi}{8} = \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ であり、$2 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \sqrt{2} = \tan\frac{3\pi}{8}$。
- t の三次方程式の根は高々三つであり、tan の周期は π であるから、長さ 2π の区間には高々 $3 \times 2 = 6$ 個の解があると予想される。実際に六つ見つかった。
- 数値的に、$\tan x - \tan 3x - 2$ を $(0, 2\pi)$ 上の細かい格子点で調べると、（極（pole）の近くを除いて）符号が変わるのは $x = \frac{2\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{10\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$ だけである。余接の方程式についても同様に調べると、ちょうど上に挙げた六つの値が見つかる。

よくある間違い

- $\tan 2\theta = -1$ で $n = 0, 1$ だけを考えて終えてしまうこと。θ は $(0, 2\pi)$ を動くので 2θ は $(0, 4\pi)$ を動き、解は二つではなく四つになる。
- 確認せずに何かで割ってしまい根 $t = 1$ を失うこと、あるいは $\frac{5\pi}{4}$ を忘れること。
- 最後の小問を一から解き直して、範囲を誤ること。置換によって与えられた区間はちょうど $(0, 2\pi)$ に写されるのであり、これは偶然ではない。

STEP のその先へ

恒等式 $\tan 3\theta = (3t - t^3)/(1 - 3t^2)$ は $(1 + \mathrm{i}t)^3$ の実部と虚部から得られ、一般に $\tan n\theta$ は $(1 + \mathrm{i}t)^n$ から読み取れる、$\tan\theta$ の多項式の比である。これらの多項式の根は π の有理数倍の正接であり、だからこそその因数分解（factorisation）は、ここでの $t^2 - 2t - 1$ のように、きれいな形になるのである。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は、倍角の公式が複素数の乗法の幾何からどのように自然に導かれるかを示している。

解答例

STEP II 1997、第 7 問

純粋数学 ・ 曲線の概形

STEP II 1997、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/97-s2-q7

鍵となる考え方

右辺は x に x^2 を通してのみ依存するので、$u = x^2$ の二次式（quadratic）とみて平方完成（completing the square）する。そうすれば微分を使わずに、y^2 のとりうる最大値が一行で求まる。概形については、方程式は $x \to -x$ としても $y \to -y$ としても変わらないので、第 1 象限（first quadrant）の様子さえわかれば、あとは折り返せばよい。押さえておくべき点は、曲線と座標軸の交点、原点における傾き、そして原点以外で曲線が x 軸と交わる点における傾きである。

解答

最大値と最小値

$a = 0$ のとき、方程式は $y^2 = -x^4$ となり、$x = y = 0$ でなければならない。つまり「曲線」はただ一点 $(0,0)$ であり、y のとる値は 0 のみである。以下では $a \neq 0$ とする。現れるのは a^2 だけなので、$a > 0$ として考え、最後に $|a|$ と書き直せばよい。

$y^2 \geq 0$ であるから、$x^2(a^2 - x^2) \geq 0$、すなわち $x = 0$ または $x^2 \leq a^2$ が必要である。よって曲線は帯状の領域 $-|a| \leq x \leq |a|$ に含まれる。x^2 について平方完成すると

$$y^2 = a^2x^2 - x^4 = \frac{a^4}{4} - \left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2 \leq \frac{a^4}{4},$$

であり、等号が成り立つのは $x^2 = \frac{1}{2}a^2$ のときに限る。したがって曲線上のいたるところで $|y| \leq \frac{1}{2}a^2$ であり、$y = \frac{1}{2}a^2$ と $y = -\frac{1}{2}a^2$ はともに $x = \pm|a|/\sqrt{2}$ において実際にと

られる。ゆえに

$$\boxed{y_{\max} = \frac{a^2}{2}, \qquad y_{\min} = -\frac{a^2}{2}, \qquad \text{いずれも} x = \pm\frac{|a|}{\sqrt{2}}.}$$

考えてみよう これは微分による方法とどう整合するだろうか。$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$ となるのはどこか。

陰関数微分（implicit differentiation）を行うと、$2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2a^2x - 4x^3 = 2x(a^2 - 2x^2)$ となる。$y \neq 0$ である点では、傾きが 0 となるのはちょうど $x^2 = \frac{1}{2}a^2$ のときであり（解 $x = 0$ では $y = 0$ となる）、これらは上で求めた 4 点にほかならない。$y = 0$ となる点では y で割ることができないので、別に扱う必要がある。それは次で扱う。二つの方法の結果は一致するが、平方完成を使えば、停留値（stationary value）が全体での最大値・最小値であることまで一度に証明できる。

曲線の形

$a > 0$ とする。y について解くと、二つの分枝

$$y = x\sqrt{a^2 - x^2} \qquad \text{および} \qquad y = -x\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad -a \leq x \leq a,$$

が得られ、これらは互いに x 軸に関して対称である。第一の分枝では

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

- **原点では**傾きは a であり、もう一方の分枝では $-a$ である。したがって曲線は原点を 2 回通り、そこで自分自身と交差する。接線（tangent）は $y = \pm ax$ である。
- $x = \pm a$ **では** $y = 0$ であり、$x \to a^-$ のとき傾きは $-\infty$ に発散する。したがって曲線は $(\pm a, 0)$ で**鉛直な**接線をもって x 軸と交わる。そこでは曲線はなめらかで丸みを帯びており、尖ってはいない。
- **その間では**、第一の分枝は $(0,0)$ から増加して $x = a/\sqrt{2}$ で最大値 $\frac{1}{2}a^2$ をとり、再び減少して $(a,0)$ に戻る。残りの象限は両座標軸に関する対称性から得られる。

結果として、横に寝かせた 8 の字形が得られる。ループは $x \geq 0$ と $x \leq 0$ にそれぞれ一つずつあり、幅は $2|a|$、全体の高さは a^2 である。

曲線全体を一度に見渡すすっきりした方法は、$x = a\sin t$ とおくことである。すると $a^2 - x^2 = a^2\cos^2 t$ より $y^2 = a^4\sin^2 t\cos^2 t$ となり、曲線は

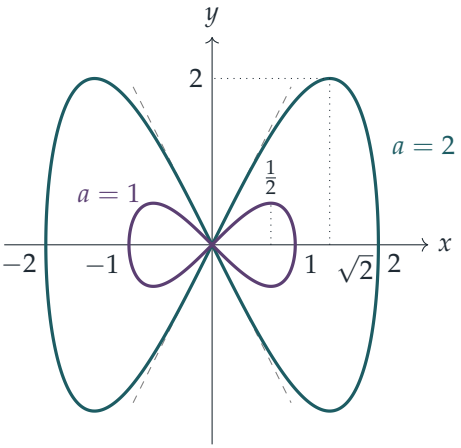
$$x = a\sin t, \qquad y = \tfrac{1}{2}a^2\sin 2t, \qquad 0 \leq t < 2\pi,$$

によって描かれる。ここからも $|y| \leq \frac{1}{2}a^2$ であることがわかる。

$a = 1$ と $a = 2$ の場合

	x 軸との交点	O における接線	極値をとる点
$a = 1$	$x = 0,\ \pm 1$	$y = \pm x$	$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}\right)$
$a = 2$	$x = 0,\ \pm 2$	$y = \pm 2x$	$\left(\pm\sqrt{2}, \pm 2\right)$

二つの曲線の位置関係を調べる。$0 < |x| \leq 1$ では $x^2(1 - x^2) < x^2(4 - x^2)$ であるから、$a = 1$ の曲線は $a = 2$ の曲線の真に内側にあり、共有点は原点のみである。たとえば $x = 1$ では、$a = 1$ の曲線は $y = 0$ にあるのに対し、$a = 2$ の曲線は $y = \pm\sqrt{3}$ にある。



破線は $a = 2$ のときの接線 $y = \pm 2x$ である。$a = 1$ のときの原点における接線は $y = \pm x$ で、傾斜角は $45°$ である。

検算

- a を無作為に 50 通り選び、$|x| \leq |a|$ の範囲で格子探索を行ったところ、どの場合も $|y|$ の最大値は $\frac{1}{2}a^2$ であり、$|x| = |a|/\sqrt{2} \approx 0.7071|a|$ でとられた。$a = 2$ では、$|x| \approx 1.41421$ において $y_{\max} = 2.000000$ となる。
- 最大値は当然 a^2 に比例する。(x, y) を (ax, a^2y) で置き換えると、$a = 1$ の曲線が一般の曲線に移るからである。つまり $a = 2$ の曲線は、$a = 1$ の曲線を横に 2 倍、縦に 4 倍に引き伸ばしたものであり、だからこそずっと背が高いのである。

よくある間違い

- $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$ だけを描いてしまう。方程式が定めているのは y^2 なので、y の正負両方がグラフに含まれ、S 字形ではなく二つのループになる。

- $(\pm a, 0)$ に尖った角を描いてしまう。そこでの傾きは無限大なので、曲線は x 軸を鉛直に、なめらかに横切る。
- 曲線が原点で傾き $\pm a$ をもって自分自身と交差することを忘れる。O の近くで二つの曲線を見分ける手がかりは、まさにこの傾きである。

STEP のその先へ

ここでの原点は**結節点**（node）、すなわち代数曲線（algebraic curve）が自分自身と交差する点である。O の近くでは方程式は $y^2 \approx a^2x^2$、つまり 2 直線 $y = \pm ax$ のように振る舞う。このように最低次の項によって特異点（singular point）を分類することは、代数曲線の研究の第一歩である。$x = a\sin t$ という工夫は、この曲線が三角関数で媒介変数表示（parametrisation）できることを示している。この種の曲線はリサージュ図形（Lissajous figures）と呼ばれる（ここでは振動数の比が 1 : 2 である）。このような曲線の概形を描く練習、さらに広く STEP 流の考え方の練習には、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* を読むとよい。

解答例

STEP II 1997、第 8 問

純粋数学 ・ 積分による不等式

> **STEP II 1997、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q8

鍵となる考え方

$(x^p - 1)/p$ という形の式はどれも、実は積分を姿を変えて表したものである。すなわち、それは $\int_1^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t$ に等しい。したがって、このような二つの式の比較は、被積分関数（integrand）t^{p-1} と t^{q-1} の比較に帰着する。大小関係が $t = 1$ で入れ替わることに気づけば、この比較は容易である。最後の不等式は、もう一度積分すれば得られる。今度は、直前に証明した不等式そのものを積分するのである。

解答

不等式を積分する

$[a, b]$ 上で $\mathrm{f}(t) \geq \mathrm{g}(t)$ ならば、そこで $\mathrm{f} - \mathrm{g} \geq 0$ である。よって $\mathrm{f} - \mathrm{g}$ のグラフと t 軸の間の領域は軸上またはその上側にあり、その符号付き面積（signed area）は非負である：

$$\int_a^b \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b \mathrm{g}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \big(\mathrm{f}(t) - \mathrm{g}(t)\big)\,\mathrm{d}t \geq 0.$$

ここで $a \leq b$ が必要であることに注意する。積分の上端と下端が逆になっていると、積分どうしの不等号の向きは逆転する。

$x \geq 1$ の場合

$t \geq 1$ かつ $p > q$ のとき、$t^{p-1} = t^{q-1}\,t^{p-q} \geq t^{q-1}$ が成り立つ。$t \geq 1$ かつ $p - q > 0$ ならば $t^{p-q} \geq 1$ だからである。$x \geq 1$ であるから、区間 $[1, x]$ の端点は正しい順序に並ん

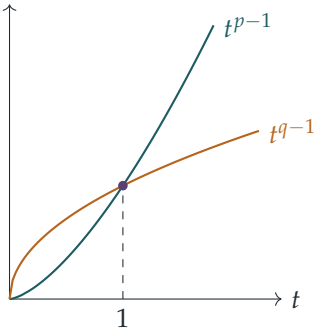
でいる。よって前半の結果により

$$\int_1^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t \;\geq\; \int_1^x t^{q-1}\,\mathrm{d}t.$$

$p, q > 0$ であるから、どちらの積分も直接計算できる：

$$\int_1^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^p}{p}\right]_1^x = \frac{x^p-1}{p}, \qquad \int_1^x t^{q-1}\,\mathrm{d}t = \frac{x^q-1}{q}.$$

したがって、$x \geq 1$ に対して $\dfrac{x^p-1}{p} \geq \dfrac{x^q-1}{q}$ であり、これが示すべきことであった。



この図（$p = 2.5$、$q = 1.5$ として描いたもの）が要点を示している。指数の大きいほうの累乗は、$t > 1$ では大きく、$0 < t < 1$ では小さくなる。

$0 \leq x \leq 1$ の場合

> **考えてみよう**　$0 < t < 1$ では、t^{p-1} と t^{q-1} の間の不等号の向きが逆になる。それなのに、なぜ結論の向きは逆にならないのだろうか。

二つの逆転が打ち消し合うのである。$0 < t \leq 1$ では $t^{p-q} \leq 1$ であるから、$t^{p-1} \leq t^{q-1}$ となる。しかし今度は $x \leq 1$ なので、正しい順序の区間は $[1, x]$ ではなく $[x, 1]$ である。

まず $0 < x \leq 1$ とする。$t^{q-1} \geq t^{p-1}$ を $[x, 1]$ 上で積分すると（$x > 0$ であるから、どちらもそこで連続である）

$$\int_x^1 t^{q-1}\,\mathrm{d}t \;\geq\; \int_x^1 t^{p-1}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{1-x^q}{q} \;\geq\; \frac{1-x^p}{p}.$$

両辺に -1 を掛けると不等号の向きが逆転し、$\dfrac{x^p-1}{p} \geq \dfrac{x^q-1}{q}$ を得る。

$x = 0$ のときは直接確かめる。不等式は $-\frac{1}{p} \geq -\frac{1}{q}$ となるが、$p > q > 0$ より $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$ なので、これは正しい。（$x = 0$ を別に扱うのは、$q < 1$ のとき t^{q-1} が 0 の近くで有界でないからである。）よって不等式はすべての $0 \leq x \leq 1$ で成り立ち、前の場合と合わせて、すべての $x \geq 0$ で成り立つ。

最後の不等式

$\phi_p(t) = \dfrac{t^p - 1}{p}$ とおく。これまでに、$p > q > 0$ ならば、すべての $t \geq 0$ に対して $\phi_p(t) \geq \phi_q(t)$ であることを示した。どちらの関数も $[0, \infty)$ 上で連続であるから、$x > 0$ に対してこの不等式を $[0, x]$ 上で積分してよい：

$$\int_0^x \frac{t^p - 1}{p}\,\mathrm{d}t \;\geq\; \int_0^x \frac{t^q - 1}{q}\,\mathrm{d}t.$$

ここで

$$\int_0^x \frac{t^p - 1}{p}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p}\Big(\frac{x^{p+1}}{p+1} - x\Big) = \frac{x}{p}\Big(\frac{x^p}{p+1} - 1\Big),$$

であり、q についても同様である。よって

$$\frac{x}{p}\Big(\frac{x^p}{p+1} - 1\Big) \;\geq\; \frac{x}{q}\Big(\frac{x^q}{q+1} - 1\Big),$$

であり、$x > 0$ で割ると（不等号の向きは変わらない）

$$\frac{1}{p}\Big(\frac{x^p}{p+1} - 1\Big) \;\geq\; \frac{1}{q}\Big(\frac{x^q}{q+1} - 1\Big).$$

を得る。$x = 0$ のとき、これは $-\frac{1}{p} \geq -\frac{1}{q}$ となり、すでに見たとおり正しい。以上で、すべての $x \geq 0$ に対して証明が完了した。

検算

- $x = 1$ のとき、中間の不等式は $0 \geq 0$ となる。二つの曲線はそこで交わるので、等号が成り立つことと整合する。
- 最後の不等式で $p = 2$、$q = 1$、$x = 3$ とすると、左辺は $\frac{1}{2}(3 - 1) = 1$、右辺は $\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ であり、$1 \geq \frac{1}{2}$ となる。
- $0 < q < p$ かつ $x \geq 0$ を満たす三つ組 (p, q, x) を 200,000 個無作為に選んで試したところ（$x = 0$、$x = 1$、ごく小さな x を含む）、どちらの不等式にも反例は見つからなかった。

よくある間違い

- $x < 1$ のときに $[1, x]$ 上で積分し、不等号の向きをそのままにしてしまう。不等式を積分する前に、積分の端点を小さい順に並べなければならない。
- 端点 $x = 0$ を忘れる。そこでは t^{q-1} が定義すらされないことがある。
- 直前に示した不等式を積分するのではなく、最後の部分を微分法を使って一から証明しようとする。

STEP のその先へ

$q \to 0$ のとき $(x^q - 1)/q \to \ln x$ であるから、この結果は、p が 0 に向かって減少するとき $(x^p - 1)/p$ が $\ln x$ に向かって減少することを示している。これは対数の上界を与えるきれいな関数族であり、統計学におけるボックス・コックス変換（Box–Cox transformation）の基礎でもある。積分が不等式を保つという原理（積分の単調性（monotonicity of the integral））は、解析学の講義でリーマン積分（Riemann integral）について最初に証明される定理の一つである。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を参照のこと。

解答例

STEP II 1997、第 9 問

力学 ・ 摩擦と剛体のつり合い

STEP II 1997、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

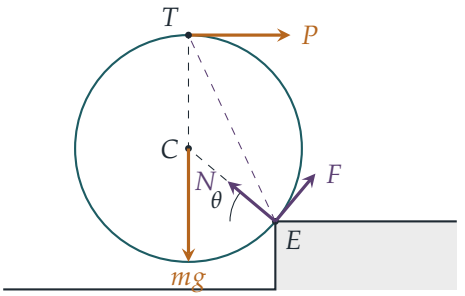
step.maths.org/questions/97-s2-q9

鍵となる考え方

球はゆっくりと引き上げられるので、各瞬間において平衡（equilibrium）状態にある。したがって、各位置で静力学（statics）の問題を解けばよい。球が地面を離れた後は、球にはたらく力は重力、最上点での引く力、段の角での抗力（reaction）の三つだけである。角のまわりの力のモーメント（moments）を考えると未知の抗力が消え、引く力が求まる。さらに三力のつり合いの規則（三つの力の作用線（line of action）は一点で交わらなければならない）から抗力の向きが正確にわかり、摩擦（friction）の条件はほとんど労せずに得られる。

解答

半径を $r = \frac{1}{2}d$ とおくと、段の高さは $\frac{1}{4}d = \frac{1}{2}r$ である。球を一様（uniform）な剛体（rigid body）とみなし、段とは角 E のみで接するとする（E は水平な直線であり、中心を通る鉛直断面では一点となる）。C を中心、T を最上点とし、T に段の方向へ水平な力 P がはたらくとする。EC が水平となす角を θ とする。



幾何的な関係

E を原点とすると、C は E より高さ $r\sin\theta$ だけ上、水平距離 $r\cos\theta$ だけ離れた位置にあり、T はさらに C より r だけ上にある。はじめ球が地面に置かれているとき、C は地面から高さ r、すなわち E より $\frac{1}{2}r$ だけ上にある。よって $\sin\theta = \frac{1}{2}$、$\theta = \frac{\pi}{6}$ である。球が完全に段の上に乗るのは C が E の真上に来るとき、すなわち $\theta = \frac{\pi}{2}$ のときである。したがって、この運動は θ が $\frac{\pi}{6}$ から $\frac{\pi}{2}$ まで増加することに対応する。

力の最大値

球が地面に接している間は、地面が重力の一部を支えており、地面は上向きにしか押せない。球が浮き上がり始めるのは、P が地面からの抗力をちょうど 0 にするだけの大きさになったときである。それ以降、はたらく力は T における P、C における重力 mg、そして E における角からの抗力であり、抗力は EC 方向の垂直成分 N と、EC に垂直な摩擦力 F からなる。

E のまわりのモーメントを考える（抗力は E のまわりにモーメントをもたない）。P の腕の長さは E から測った T の高さ $r(1+\sin\theta)$ であり、重力の腕の長さは $r\cos\theta$ である。つり合いより

$$P\,r(1+\sin\theta) = mg\,r\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad P = \frac{mg\cos\theta}{1+\sin\theta}.$$

$\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ において分子は減少し分母は増加するので、P は θ について減少する。（浮き上がる前は、P はこの値まで増えていくだけである。）したがって最大値は地面を離れる瞬間 $\theta = \frac{\pi}{6}$ でとり、

$$P_{\max} = \frac{mg\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{mg}{\sqrt{3}}.$$

摩擦の条件

考えてみよう 角における抗力はどの向きを向いているか。

平行でない三つの力がつり合っているとき、それらの作用線は一点で交わる（共点（concurrent）である）。P の作用線は T を通る水平線であり、重力の作用線は C を通る鉛直線で、これは T も通る。よって両者は T で交わり、E における抗力の合力は ET に沿ってはたらかなければならない。

ここで $CE = CT = r$ なので、三角形 CET は二等辺三角形（isosceles triangle）である。C における CT（鉛直上向き）と CE（水平より角 θ だけ下向き）のなす角は $\frac{\pi}{2}+\theta$ であるから、底角はそれぞれ

$$\angle CET = \tfrac{1}{2}\left(\pi - \tfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\theta}{2}.$$

これは抗力の合力と法線 EC のなす角であるから

$$\frac{F}{N} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right).$$

力を分解することでこれを確かめられる。抗力は P と重力につり合うので $(-P,\ mg)$ である。単位法線ベクトル $(-\cos\theta, \sin\theta)$ 方向の成分と単位接線ベクトル $(\sin\theta, \cos\theta)$ 方向の成分は

$$N = P\cos\theta + mg\sin\theta = mg\,\frac{\cos^2\theta + \sin\theta + \sin^2\theta}{1+\sin\theta} = mg,$$
$$F = mg\cos\theta - P\sin\theta = mg\cos\theta\left(1 - \frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\right) = \frac{mg\cos\theta}{1+\sin\theta},$$

となる。よって $F/N = \cos\theta/(1+\sin\theta)$ であり、半角の公式（half-angle formulae）によりこれは $\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})$ に等しい。F と N はつねに正であるから、角は確かに球を押しており、摩擦力は図のように接線の上向きにはたらく。

E ですべらないための条件は、すべての位置で $F \le \mu N$、すなわち

$$\mu \ge \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \quad \text{すべての} \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

が成り立つことである。右辺は θ の増加とともに減少するので、最も厳しい位置はやはり $\theta = \frac{\pi}{6}$ であり、そこで右辺は $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ に等しい。この瞬間、摩擦力は垂直抗力（normal reaction）の $1/\sqrt{3}$ 倍以上でなければならない。ちょうど $\mu = 1/\sqrt{3}$ のときは摩擦が限界摩擦（limiting friction）となり、球はすべり出す寸前の状態になる。したがって、すべらせずに確実に引き上げるには $\mu > 1/\sqrt{3}$ が必要であり、これが示すべきことであった。

検算

- $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき中心は角の真上にあり、$P = 0$ かつ $F = 0$ となる。これは当然そうなるべき結果である。
- つねに $N = mg$ である。これは納得がいく。抗力は $(-P, mg)$ であり、その法線方向の成分を計算するとちょうど mg になるからである。
- 数値的に、θ を $\frac{\pi}{6}$ から $\frac{\pi}{2}$ まで少しずつ動かし、モーメントと力の分解をそれぞれ独立に計算すると、P/mg と F/N の最大値はいずれも $0.57735\ldots = 1/\sqrt{3}$ であり、どちらもはじめの位置でとる。

よくある間違い

- E のまわりの P の腕の長さを、$r(1+\sin\theta)$（T の高さ）ではなく $r\sin\theta$（C の高さ）としてしまう。
- 角における抗力が法線方向の成分だけであると仮定してしまう。それはありえない。法線は C を通るので、そうすると三つの力が一点で交わらなくなる。

STEP のその先へ

三力のつり合いの議論は、より一般的な事実の特別な場合である。剛体が平衡にあるのは、力の合計と、任意の一点のまわりのモーメントの合計がともに 0 であるとき、かつそのときに限る。そして三つの力の場合、このことから作用線が一点で交わることが導かれる。抗力と法線のなす角（ここでは $\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$）は「摩擦角（angle of friction）」の考え方であり、これによって摩擦の問題を幾何の問題に置き換えることができる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、これらの原理から剛体の静力学と動力学を展開している。

解答例

STEP II 1997、第 10 問

力学 ・ 爆発と弾性衝突

> **STEP II 1997、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q10

鍵となる考え方

すべての速度（velocity）を、軸（axis）に沿った成分と軸を横切る成分とに分解する。円筒はなめらか（smooth）なので、半径方向にしか押すことができない。したがって円筒は軸方向の速度をまったく変えず、弾性的な跳ね返り（elastic bounce）は横方向の速度を単に逆向きにするだけである。すると爆発における運動量保存（conservation of momentum）により、2 つの破片は 1 本の直径に沿って互いに離れるように飛ぶことになる。こうして問題全体は 2 枚の壁の間の 1 次元の運動に帰着し、軸方向の運動はそれにただ付き従うだけとなる。

解答

設定

破片は小さいので質点としてモデル化し、円筒はなめらかで固定されているものとし、指示どおり重力は無視する。円筒の軸に沿って z 軸をとり、爆発は時刻 $t = 0$ に原点で起こるものとする。

爆発の直後、質量 qM の破片の速度を、軸方向成分 w_1 と横方向成分 $\mathbf{u}_1$（軸に垂直）の和として表し、質量 $(1-q)M$ の破片についても同様に w_2、$\mathbf{u}_2$ と表す。爆発の間には外力がはたらかないので、運動量は保存される：

$$qMw_1 + (1-q)Mw_2 = Mv, \qquad qM\mathbf{u}_1 + (1-q)M\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}.$$

第 2 式は、横方向の速度が互いに逆向きであることを示している。したがって 2 つの破片は、同じ直径に沿って逆向きに軸から離れていく。この直径の方向を x 方向とし、破片 1（質量 qM）は速さ u_1 で $x = +L$ に向かい、破片 2 は速さ u_2 で $x = -L$ に向か

うとする。ここで

$$qu_1 = (1-q)u_2. \tag{1}$$

$q \le \frac{1}{2}$ であるから $u_1 \ge u_2$ である。つまり軽いほうの破片が速い。

各破片は壁に正面から当たる（半径に沿って動いている）ので、なめらかな壁が与える力積（impulse）はその半径の方向を向く。これにより横方向の速度は逆向きになり（跳ね返りは完全弾性的である）、軸方向の速度は変わらない。したがって各破片は同じ直径に沿って動き続け、その軸方向の速度は終始一定である。

$q = \frac{3}{8}$ であることの証明

軸方向の運動。軸方向の位置は $z_1 = w_1 t$、$z_2 = w_2 t$ である。破片はある時刻 $t > 0$ に出会うので $w_1 = w_2$ であり、すると運動量の式から $w_1 = w_2 = v$ が得られる。両方の破片は、もとの物体があったはずの位置と歩調をそろえて進む。

横方向の運動。破片 1 は $t = L/u_1$ に $x = L$ に達し、それから戻ってくるので、跳ね返った後は

$$x_1 = L - u_1\left(t - \frac{L}{u_1}\right) = 2L - u_1 t.$$

同様に、跳ね返った後の破片 2 の位置は $x_2 = -2L + u_2 t$ である。両方が跳ね返った後に衝突するので、$x_1 = x_2$ より

$$t = \frac{4L}{u_1 + u_2}, \qquad x = 2L - \frac{4Lu_1}{u_1 + u_2} = 2L\,\frac{u_2 - u_1}{u_1 + u_2}.$$

(1) より $u_2 = \frac{q}{1-q}u_1$ であるから、$u_1 + u_2 = \frac{u_1}{1-q}$、$u_2 - u_1 = \frac{(2q-1)u_1}{1-q}$ となる。よって衝突点は

$$x = 2L(2q-1).$$

$|x| = \frac{1}{2}L$ が必要なので $2q - 1 = \pm\frac{1}{4}$ であり、$q = \frac{5}{8}$ または $q = \frac{3}{8}$ を得る。$q \le \frac{1}{2}$ であるから

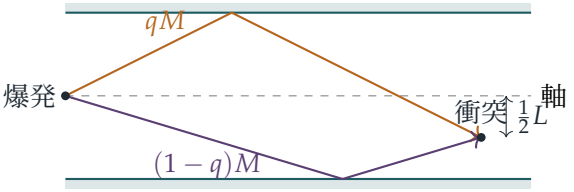
$$q = \frac{3}{8},$$

となり、求める結果が得られた。衝突は $x = -\frac{1}{2}L$、すなわち軸に対して重いほうの破片の側で起こる。

> **考えてみよう** これは本当に、それぞれがちょうど 1 回ずつ跳ね返った後の、最初の出会いだろうか？

$q = \frac{3}{8}$ のとき、(1) より $u_2 = \frac{3}{5}u_1$ である。破片 1 は $t = L/u_1$ に、破片 2 は $t = \frac{5}{3}L/u_1$ に跳ね返り、衝突時刻は $4L/(u_1 + u_2) = \frac{5}{2}L/u_1$ で、どちらよりも後である。もっと早く出会うことはありうるだろうか？破片 1 が跳ね返る前は両者は離れていく一方であり、戻る途中の破片 1 が破片 2 に追いつくのは $t = 2L/(u_1 - u_2) = 5L/u_1$ のときだけ

で、これは破片 2 が向きを変えたずっと後である。したがって求めた出会いが最初のものであり、各破片はちょうど 1 回ずつ跳ね返っている。



図は、軸と共通の直径を含む平面を示している（軸方向は紙面の左右方向）。$q = \frac{3}{8}$ と、以下で求める速さに基づいて正確な縮尺で描いてある。

与えられたエネルギー

衝突時刻は

$$t = \frac{4L}{u_1 + u_2} = \frac{4L(1-q)}{u_1} = \frac{5L}{2u_1}.$$

これを $5L/v$ に等しいとおくと $u_1 = \frac{1}{2}v$ となり、したがって $u_2 = \frac{3}{5}u_1 = \frac{3}{10}v$ である。

軸方向の速度は v のまま変わらないので、爆発で得られた運動エネルギー（kinetic energy）はすべて横方向の運動エネルギーである：

$$\begin{aligned}\Delta E &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{8}M\left(\tfrac{1}{2}v\right)^2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{8}M\left(\tfrac{3}{10}v\right)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}Mv^2\left(\tfrac{3}{32} + \tfrac{9}{160}\right) = \tfrac{1}{2}Mv^2\cdot\tfrac{3}{20} = \frac{3Mv^2}{40}.\end{aligned}$$

合体後の速度

衝突の直前、各破片の横方向の速度は跳ね返りによって逆向きになっている。破片 1 の横方向の運動量は $-qMu_1$、破片 2 は $+(1-q)Mu_2$ である。(1) より、これらの和は零である。軸方向の運動量は $qMv + (1-q)Mv = Mv$ である。合体（coalescence）において運動量は保存されるので、合体した質量 M の物体の速度は

$$v\text{(軸の方向)},$$

となり、もとの物体と同じである。ただし、軸から距離 $\frac{1}{2}L$ だけ離れた、軸に平行な直線上を進む。爆発で生じたエネルギー $\frac{3}{40}Mv^2$ は、合体においてすべて失われる。

検算

- $q = \frac{1}{2}$ のとき $x = 0$ となる。等しい破片は互いに鏡像であり、軸上で出会わなければならないので、これは当然である。

- $L = v = 1$ とすると $u_1 = 0.5$、$u_2 = 0.3$ である。$t = 5$ のとき、破片 1 は $2 - 0.5 \times 5 = -0.5$、破片 2 は $-2 + 0.3 \times 5 = -0.5$ にある。$x = \pm 1$ で反射させる時間刻みのシミュレーションでも、それぞれ 1 回ずつ跳ね返った後に $t = 5.000$、$x = -0.500$ で出会うことが再現された。
- 最終的な横方向の運動量は $-\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{10} = 0$ であるから、最終的な速度は純粋に軸方向である。

よくある間違い

- 壁が軸方向の速度を変えてしまうとすること。なめらかな壁がおよぼすのは垂直（半径方向）の力だけである。
- 跳ね返りによって横方向の運動量が逆向きになることを忘れること。横方向の運動量の総和が零に戻るのは、**両方の**破片が跳ね返った後だけである。
- $q = \frac{5}{8}$ を残してしまうこと。これは破片のラベルを入れ替えただけの同じ配置であり、$q \leq \frac{1}{2}$ により除外される。

STEP のその先へ

運動を対称性の方向に沿った成分とそれを横切る成分とに分けることは、ある大きな考え方の出発点である。すなわち、系の対称性は保存量（conserved quantity）を生み出す、という考え方である。この問題では円筒がその長さ方向のどこでも同じに見えるので、壁が存在しても軸方向の運動量は保存される（ネーター（Noether）の定理がこのことを厳密に述べる）。また、この問題は、爆発とそれに続く完全非弾性衝突（perfectly inelastic collision）によって、軸方向の運動はそのまま続きながら、エネルギーが熱として返されうることも示している。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、運動量と重心（centre of mass）の運動をこのような流儀で展開している。

解答例

STEP II 1997、第 11 問

力学 ・ 放物運動

STEP II 1997、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

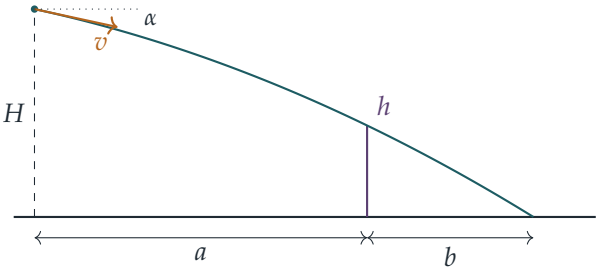
step.maths.org/questions/97-s2-q11

鍵となる考え方

軌道（trajectory）を、水平方向に進んだ距離を用いて、サーバーの打点の高さからどれだけ下がったかを表す方程式として書き下す。すると、与えられた二つの事実（ボールが a 進んだときに高さ h にあり、$a+b$ 進んだときに高さ 0 にある）は、二つの未知数 v と α についての二つの方程式となる。範囲の条件は、これらの方程式の解が実際に物理的な意味をもつのはいつかを問うことから得られる。

解答

ボールを、重力のみを受けて運動する質点（particle）としてモデル化する（空気抵抗（air resistance）や回転は考えない）。ボールを打つ点の真下の地面を原点とし、x をネットに向かう水平方向、y を鉛直上向きにとる。



v^2 の式

初速度は $(v\cos\alpha, -v\sin\alpha)$ である。時刻 t の後、

$$x = vt\cos\alpha, \qquad y = H - vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$t = x/(v\cos\alpha)$ を代入して消去し、$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$ を用いると、

$$y = H - x\tan\alpha - \frac{gx^2(1+\tan^2\alpha)}{2v^2}. \tag{$*$}$$

$T = \tan\alpha$ および $k = \dfrac{g(1+T^2)}{2v^2}$ とおくと便利であり、このとき $y = H - xT - kx^2$ となる。

ボールは $x = a + b$ で着地するので、そこで $y = 0$ とおくと、

$$0 = H - (a+b)T - k(a+b)^2 \quad\Longrightarrow\quad k = \frac{H-(a+b)T}{(a+b)^2}. \tag{1}$$

k をその定義で置き換え、v^2 について整理すると

$$v^2 = \frac{g(a+b)^2(1+\tan^2\alpha)}{2[H-(a+b)\tan\alpha]},$$

となり、これが一つ目の結果である。

$\tan\alpha$ の式

ボールはネットをぎりぎりで越えるので、$x = a$ で $y = h$ である。$(*)$ より、

$$H - h = aT + ka^2.$$

(1) の k を代入し、両辺に $(a+b)^2$ を掛けると、

$$\begin{aligned}(H-h)(a+b)^2 &= aT(a+b)^2 + a^2\big[H-(a+b)T\big]\\ &= aT(a+b)\big[(a+b)-a\big] + a^2H\\ &= abT(a+b) + a^2H.\end{aligned}$$

H の項をまとめ、$(a+b)^2 - a^2 = b(2a+b)$ を用いると、

$$ab(a+b)T = b(2a+b)H - (a+b)^2h.$$

正の量 $ab(a+b)$ で割ると、

$$\tan\alpha = \frac{2a+b}{a(a+b)}\,H - \frac{a+b}{ab}\,h,$$

となり、示すべき式が得られた。

H の範囲

a、b、h、H が与えられると、二つ目の式によって $\tan\alpha$ が定まり、続いて一つ目の式によって v^2 が定まる。このようなサーブが存在するのは、これらの値が許容されるとき、すなわち $\tan\alpha > 0$（ボールは**下向き**に打たれるので $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$）かつ $v^2 > 0$ のとき、そしてそのときに限る。

考えてみよう v^2 の分子は明らかに正である。では、$v^2 > 0$ は実際には何を要求しているのだろうか？

それは分母が正であること、すなわち $H - (a+b)\tan\alpha > 0$ を要求している。$\tan\alpha$ の式を代入すると、

$$\begin{aligned} H - (a+b)\tan\alpha &= H - \frac{2a+b}{a}H + \frac{(a+b)^2}{ab}h \\ &= -\frac{a+b}{a}H + \frac{(a+b)^2}{ab}h = \frac{a+b}{a}\left[\frac{(a+b)h}{b} - H\right]. \end{aligned}$$

$(a+b)/a > 0$ であるから、これが正となるのは次のとき、かつそのときに限る。

$$H < \frac{(a+b)h}{b}.$$

$\tan\alpha > 0$ のためには

$$\frac{2a+b}{a(a+b)}H > \frac{a+b}{ab}h \quad\Longleftrightarrow\quad H > \frac{(a+b)^2 h}{b(2a+b)},$$

が必要である（正の量 $a(a+b)/(2a+b)$ を掛けた）。

二つの条件を合わせると

$$\boxed{\frac{(a+b)^2}{b(2a+b)}h \;<\; H \;<\; \frac{a+b}{b}h}$$

が得られ、逆にこの範囲にある任意の H に対して、条件を満たす α と v が存在する。$\dfrac{a+b}{2a+b} < 1$ であるから、この区間は空ではない。

どちらの範囲の端にも明確な意味がある。上限は、着地点からネットの上端を通る直線が、サーバーのいる鉛直線と交わる高さである。重力によって軌道は下向きに曲がるので、ボールはその直線より下から出発しなければならない（$H = (a+b)h/b$ では無限大の速さが必要になる）。下限は $\alpha = 0$、すなわち水平なサーブの場合である。これより低い位置からサーブすると、ネットを越えたうえで指定された点に着地するには、ボールを上向きに打たなければならなくなる。

検算

- $a = 12\,\mathrm{m}$、$b = 6\,\mathrm{m}$、$h = 1\,\mathrm{m}$ のとき、範囲は $1.8\,\mathrm{m} < H < 3\,\mathrm{m}$ となる。$H = 1.8$ のとき、式から $\tan\alpha = \frac{30}{216}(1.8) - \frac{18}{72} = 0$ が得られ、下限に対して予想どおりの結果となる。
- 範囲内で a、b、h、H を無作為にとり、二つの式から α と v を計算して運動を数値的に追跡したところ、ボールは毎回ネットの上端を通過し、$x = a + b$ に着地した（厳密な軌道に対する相対誤差は 10^{-14} 未満）。
- 次元（dimensions）：$\tan\alpha$ の各項は長さを長さで割ったものであり、v^2 は $g\times$ 長さの次元をもつ。これは当然そうあるべきである。

よくある間違い

- 下向きの角度による符号の誤り：鉛直方向の初速度は $-v\sin\alpha$ であり、$(*)$ における $x\tan\alpha$ の項は引かれる。
- 「$v^2 > 0$」で止まってしまい、それが分母についての条件であって、$\tan\alpha$ を代入して初めて H についての条件になることに気づかない。

STEP のその先へ

ここでは、打ち出しの条件から軌道を決めるのではなく、逆に二つの境界条件（ネットと着地点）が打ち出しの条件を決定している。これは単純な**境界値問題**（*boundary-value problem*）であり、微分方程式を数値的に解くための「シューティング法（shooting method）」の背後にある考え方でもある。空気抵抗や回転を考慮すると、方程式はもはや閉じた形の解（closed-form solution）をもたず、まさにこの方法で解き進めることになる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、抵抗を受ける放物運動をはじめ、さらに多くの内容が扱われている。

解答例

STEP II 1997、第 12 問

確率・統計 ・ 二項分布と偶奇の確率

> **STEP II 1997、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q12

鍵となる考え方

伝言が現時点で**正しい**か**誤っている**かだけを追跡すればよい。聞き間違いが起こるたびに正誤が反転するので、アルバートのもとに戻ってくる伝言が正しいのは、ささやきのうち偶数回が聞き間違えられたとき、かつそのときに限る。二項展開（binomial expansion）の偶数番目の項だけを取り出すのが $(a+b)^n + (a-b)^n$ の役割である。奇数番目の項が打ち消し合うからである。変更後のゲームについては、一度失敗すると、アルバートは**誤った**伝言を伝えることに注意する。したがってそれ以降、各ラウンドでは**奇数**回の聞き間違いが必要になる。

解答

3 人の場合

n 人のプレイヤーがいるとき、ささやきは n 回ある。アルバートからバーサへ、バーサから次のプレイヤーへ、と輪を回ってゼベディーまで進み、最後にゼベディーからアルバートへ戻る。各ささやきは確率 p で正しく聞き取られ、それぞれ独立（independent）である。アルバートが真実を聞くかどうかは、聞き間違えられたささやきの回数だけで決まり、硬貨の出た面にはよらない。

3 人の場合、ささやきは 3 回あり、それぞれ確率 $\frac{2}{3}$ で正しく伝わる。アルバートに届く伝言が正しいのは、どのささやきも誤らない場合か、ちょうど 2 回誤る場合（2 回目の誤りが 1 回目を打ち消す）である。よって

$$\Pr(\text{勝ち}) = \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 + 3\left(\tfrac{1}{3}\right)^2\left(\tfrac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} + \frac{6}{27} = \frac{14}{27}.$$

n 人の場合

$q = 1 - p$ とおく。聞き間違えられたささやきの回数は二項分布（binomial distribution）$\mathrm{B}(n, q)$ に従い、その回数が偶数のときにゲームは勝ちとなる：

$$P = \sum_{k\text{ は偶数}} \binom{n}{k} q^k p^{n-k}.$$

ここで

$$(p+q)^n + (p-q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k} q^k \left(1 + (-1)^k\right) = 2 \sum_{k\text{ は偶数}} \binom{n}{k} p^{n-k} q^k,$$

である。k が奇数の項は打ち消し合い、k が偶数の項は 2 回現れるからである。$p + q = 1$ かつ $p - q = 2p - 1$ であるから、

$$\boxed{P = \tfrac{1}{2}\left(1 + (2p-1)^n\right).}$$

$n = 3$、$p = \frac{2}{3}$ のとき、これは $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{27}\right) = \frac{14}{27}$ となり、前半の結果と一致する。

変更後のゲーム

アルバートがバーサにささやく回数を N とする。伝言が輪をちょうど一周することを**ラウンド**と呼ぶことにする。したがって、どのラウンドもアルバートのささやきから始まる。

> **考えてみよう** 失敗したラウンドの後、次のラウンドは最初のラウンドを単に繰り返したものだろうか？

そうではない。最初のラウンドでは、アルバートは正しい結果を伝える。ゼベディーからの伝言を聞き間違えた場合、アルバートは自分が**聞いた**内容、すなわち誤った内容を伝える。誤った伝言から始まる場合、ラウンドの終わりにアルバートが真実を聞くのは、**奇数**回のささやきが誤ったとき、かつそのときに限る。その確率は $1 - P$ である。そのラウンドも失敗すれば、アルバートは再び誤った伝言を聞き（そしてそれを伝え）るので、それ以降のラウンドはすべてこのラウンドと同じ状況になる。各ラウンドは独立である。聞き取りが独立だからである。

したがって、最初のラウンドは確率 P で成功し、それ以降の各ラウンドは確率 $1 - P$ で成功し、確率 P で失敗する。よって $\Pr(N = 1) = P$ であり、$k \geq 2$ に対して

$$\Pr(N = k) = \underbrace{(1-P)}_{\text{第 1 ラウンドは失敗}} \underbrace{P^{k-2}}_{\text{ラウンド 2,…,}k-1\text{ は失敗}} \underbrace{(1-P)}_{\text{第 }k\text{ ラウンドで勝ち}} = (1-P)^2 P^{k-2}.$$

$0 < p < 1$ と仮定すると、$0 < P < 1$ である。このとき、与えられた和の公式を $x = P$

として用いると

$$\sum_{k=2}^{\infty} kP^{k-2} = \frac{1}{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} kP^{k-1} - 1\right) = \frac{1}{P}\left(\frac{1}{(1-P)^2} - 1\right),$$

となり、したがって

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(N) &= P + (1-P)^2 \cdot \frac{1}{P}\left(\frac{1}{(1-P)^2} - 1\right) \\ &= P + \frac{1-(1-P)^2}{P} \\ &= P + (2-P) = 2. \end{aligned}$$

アルバートがバーサにささやく回数の期待値（expected value）は、プレイヤーの人数や p の値にかかわらず 2 である。

これをもっと手早く確かめる方法がある。最初のラウンドが失敗したという条件のもとで、その後のラウンド数は成功確率 $1-P$ の幾何分布（geometric distribution）に従うので、その平均は $1/(1-P)$ である。よって $\mathrm{E}(N) = 1 + (1-P)\cdot\frac{1}{1-P} = 2$ となる。

（端の場合について：$p = 1$ の場合、または $p = 0$ かつ n が偶数の場合は $P = 1$ であり、アルバートは 1 回だけささやく。$p = 0$ かつ n が奇数の場合は $P = 0$ であり、2 回目のラウンドは確実に成功するので $N = 2$ である。）

検算

- 正しい聞き取りと誤った聞き取りの 2^n 通りのパターンをすべて書き出し、厳密な分数で計算すると、$n \le 8$ およびいくつかの p の値について $\frac{1}{2}(1 + (2p-1)^n)$ が再現される。3 人の場合の $\Pr(\text{勝ち}) = \frac{14}{27}$ もその一つである。
- $p = \frac{1}{2}$ とすると $P = \frac{1}{2}$ となる。伝言は完全なノイズであり、当然そうなるべきである。
- $(n, p) = (3, \frac{2}{3})$、$(5, 0.9)$、$(4, 0.3)$ について変更後のゲームを 2×10^5 回シミュレーションしたところ、ささやきの回数の平均はそれぞれ 2.001、1.996、1.994 であった。

よくある間違い

- ささやきの回数を n ではなく $n-1$ と数えてしまう。ゼベディーからアルバートへ戻る最後のささやきも数に入る。
- 変更後のゲームの各ラウンドが確率 P で勝ちになるとみなしてしまう。そうすると $1/P$ が得られるが、これは誤りである。失敗の後、アルバートは誤った伝言を伝えるからである。

STEP のその先へ

伝言の正誤の状態は 2 状態のマルコフ（Markov）連鎖（Markov chain）であり、$2p-1$ はその遷移行列（transition matrix）の第 2 固有値（eigenvalue）である。$(2p-1)^n$ が、伝言が硬貨の結果をどれだけ速く忘れていくかを支配するのはこのためである。同じモデルは二元対称通信路（binary symmetric channel）と呼ばれ、情報理論（information theory）と誤り訂正符号（error-correcting codes）の出発点となっている。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、母関数（generating functions）とマルコフ連鎖をこのレベルで扱っている。

解答例

STEP II 1997、第 13 問

確率・統計 ・ ビュフォンの針

STEP II 1997、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

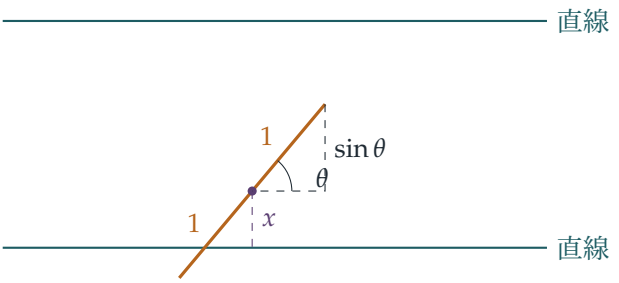
step.maths.org/questions/97-s2-q13

鍵となる考え方

これはビュフォン（Buffon）の針（Buffon's needle）の問題である。針の位置を、2 つの独立（independent）な確率変数で表す。すなわち、針の中心から最も近い直線までの距離と、針が直線となす鋭角である。中心を固定すると、すべては針が直線に垂直な方向にどこまで届くかで決まり、それは針の長さの半分にその角の正弦を掛けたものである。こうして各小問は、一様分布（uniform distribution）に従う角についての問題になる。

解答

「無作為に落とす」を通常の方法でモデル化する。中心から最も近い直線までの距離 X は $[0,1]$ 上の一様分布に従い（直線の間隔は 2 cm なので、最も近い直線は高々 1 cm の距離にある）、針と直線のなす鋭角 θ は X と独立に $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上の一様分布に従うとする。（角を $[0,\pi)$ 上の一様分布としても同じ答えが得られる。どちらの場合も $\sin\theta$ の分布は同じだからである。）



針の半分ずつの長さは 1 であるから、両端は中心から上下にそれぞれ垂直距離 $\sin\theta$ のところにある。

小問 (i)

中心が最も近い直線から距離 x にあるとき、針がその直線と交わるのは、一方の端がその直線を越えるとき、すなわち

$$\sin\theta > x \iff \theta > \arcsin x,$$

のときであり、かつそのときに限る。ここで sin が $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上で増加であることを用いた。θ は $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上の一様分布に従うので、

$$\mathrm{P}(\text{最も近い直線と交わる} \mid X = x) = \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{2}{\pi}\arcsin x = \frac{2}{\pi}\arccos x.$$

小問 (ii)

針が最も近い直線と交わる、すなわち $\theta > \arcsin x$ であるとする。針に沿って測ると、交点は中心から距離 $x/\sin\theta$ のところにある（θ の対辺が x である直角三角形の斜辺）。したがって 2 つの部分の長さは $1 + x/\sin\theta$ と $1 - x/\sin\theta$ であり、短い方は

$$S = 1 - \frac{x}{\sin\theta}.$$

である。θ が $\arcsin x$ から $\frac{\pi}{2}$ まで動くとき、S は 0 から $1 - x$ まで増加するので、S は $[0, 1-x]$ の値をとる。

交わるという条件で条件付け（conditioning）すると、θ は長さ $\frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arccos x$ の区間 $(\arcsin x, \frac{\pi}{2}]$ 上の一様分布に従う。$0 \le s \le 1 - x$ に対して

$$S \le s \iff \frac{x}{\sin\theta} \ge 1 - s \iff \sin\theta \le \frac{x}{1-s} \iff \theta \le \arcsin\frac{x}{1-s},$$

である。ここで $1 - s > 0$ と $x/(1-s) \le 1$（$s \le 1 - x$ より）を用いたので、逆正弦は意味をもつ。よって、短い方の線分の累積分布関数（cumulative distribution function）は

$$F(s) = \mathrm{P}(S \le s) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ \dfrac{\arcsin\left(\frac{x}{1-s}\right) - \arcsin x}{\arccos x}, & 0 \le s \le 1 - x, \\ 1, & s > 1 - x. \end{cases}$$

である。確認として、中央の式は $s = 0$ で 0 を与え、$s = 1 - x$ で $(\frac{\pi}{2} - \arcsin x)/\arccos x = 1$ を与えるので、F は連続である。

考えてみよう 針が直線と交わると知らされた後でも、なぜ θ は一様分布に従うのか。

一様分布に従う変数を、部分区間に入るという条件で条件付けすると、その部分区間上の一様分布になる。実際、$\arcsin x \le a \le \frac{\pi}{2}$ に対して $\mathrm{P}(\theta \le a \mid \theta > \arcsin x) = (a - \arcsin x)/(\frac{\pi}{2} - \arcsin x)$ であり、これは a について 1 次である。まさにこれを用いたのである。

小問 (iii)

最も近い直線は距離 $X \le 1$ にあり、他のすべての直線は距離 $2 - X \ge 1$ 以上のところにある。針は中心から高々 $\sin\theta \le 1$ までしか届かないので、最も近い直線以外の直線と交わりうるのは、ちょうど $X = 1$ かつ $\theta = \frac{\pi}{2}$ のときに限られ、その確率は 0 である。したがって、針がすべての直線と交わらないのは、最も近い直線と交わらないときであり、かつそのときに限る。小問 (i) より

$$\mathrm{P}(\text{交わらない} \mid X = x) = \frac{2}{\pi}\arcsin x.$$

X は $[0,1]$ 上の一様分布（密度（density）1）に従うので、x について平均をとると

$$\mathrm{P}(\text{交わらない}) = \int_0^1 \frac{2}{\pi}\arcsin x \,\mathrm{d}x.$$

$u = \arcsin x$、$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$ として部分積分（integration by parts）を行うと

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arcsin x \,\mathrm{d}x &= \Big[x\arcsin x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} - \Big[-\sqrt{1-x^2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.\end{aligned}$$

したがって

$$\mathrm{P}(\text{針がすべての直線と交わらない}) = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{\pi}{2} - 1\Big) = 1 - \frac{2}{\pi} \approx 0.363.$$

検算

- 小問 (i) の結果は両端で妥当な振る舞いをする。$x = 0$ では中心が直線上にあり、確率は 1 である。$x \to 1$ では垂直な針しか届かず、確率は 0 に近づく。
- 交わる確率は $2/\pi \approx 0.637$ であり、これはビュフォンの古典的な答え $2\ell/(\pi d)$ で $\ell = d = 2$ としたものである。
- 10^6 回の無作為な落下のシミュレーションでは、交わらない割合は 0.3626 となり、$1 - 2/\pi = 0.3634$ と比較できる。$x = 0.2, 0.5, 0.7$ に対する $F(s)$ のシミュレーション値は、公式と約 0.002 の精度で一致した。

よくある間違い

- 小問 (ii) で条件付けを忘れること。$\arccos x$ ではなく $\frac{\pi}{2}$ で割ると、決して 1 に達しない「分布関数」が得られてしまう。
- 短い方の線分を $1 - x\sin\theta$ や $1 - x/\cos\theta$ としてしまうこと。三角形のどの辺が x で、どの角が θ かを確認すること。
- 小問 (iii) で $\frac{1}{2}$ を掛けたり、交わる条件を調整せずに X を $[0,2]$ 上の一様分布としたりすること。最も近い直線までの距離は $[0,1]$ 上の一様分布に従う。

STEP のその先へ

ビュフォンの針（1777 年）は幾何学的確率（geometric probability）の最初期の問題の一つであり、π が現れることから、針を落とすことで π の（収束の遅い）モンテカルロ法（Monte Carlo）による推定が得られる。最も簡潔な現代的扱いは期待値の線形性（linearity of expectation）を用いるものである。交わる回数の期待値は針の長さに比例し、これは曲がった針（「ビュフォンのヌードル」（Buffon's noodle））に対しても成り立つ。この考え方は積分幾何学（integral geometry）とクロフトンの公式（Crofton formula）へとつながる。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、同時分布（joint distribution）やこの種の幾何学的確率の問題が扱われている。

解答例

STEP II 1997、第 14 問

確率・統計 ・ ポアソン過程

STEP II 1997、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/97-s2-q14

鍵となる考え方

力学の設定になってはいるが、これはポアソン過程（Poisson process）の問題である。運動学（kinematics）が教えてくれるのは、どの車両を数えればよいかということだけである。速い車両がトンネル内で私に追いつくのは、私が入ってから一定の時間以内にその車両が入った場合に限る。その境目の時刻がわかれば、あとはすべてポアソン分布に従う個数の問題になる。後半では、車両がランダムに「速い」「遅い」とラベル付けされたポアソン流は、互いに独立（independent）な 2 つのポアソン流に分かれるという事実を用いる。また、遅い車両が 1 台あると、その後ろにいるすべての速い車両から私が守られることにも気づく必要がある。

解答

以下では車両を質点（particle）とみなし（車両の長さは無視する）、追いついた車両はそれ以降、前の車両の速さでそのまま走るものとする。時刻 t は私がトンネルに入った瞬間から秒単位で測る。車両は毎分 6 台、すなわち毎秒 0.1 台の割合で入ってくるので、長さ τ 秒の任意の区間に入る台数は $\mathrm{Po}(0.1\tau)$ に従い、互いに交わらない区間における台数は独立である。

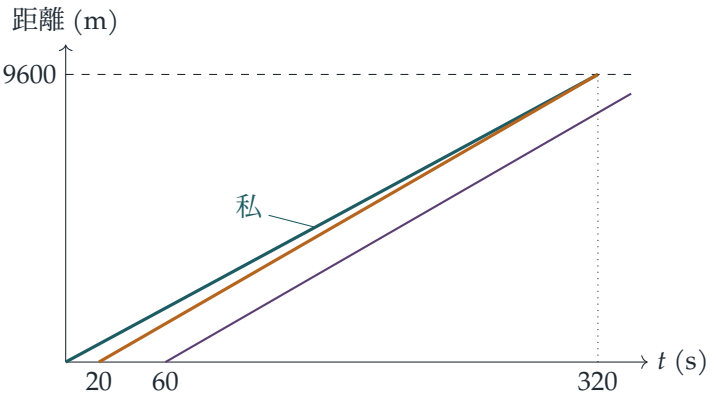
前半：誰が私に追いつけるか

私はトンネルを通り抜けるのに $9600/30 = 320\,\mathrm{s}$ かかる。時刻 $t > 0$ に入る速さ $32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ の車両を考える。それが私に追いつくまでは、時刻 s における私の進んだ距離は $30s$、その車両の進んだ距離は $32(s-t)$ である。これらが等しくなるのは $2s = 32t$、すなわち $s = 16t$ のときであり、そのときの位置はトンネルの入口から $480t$ メートル

である。したがって、私がトンネルを出る前にその車両が追いつくための必要十分条件は

$$480t \leq 9600 \iff t \leq 20.$$

である。（同値な言い方をすれば、その車両は通り抜けるのに $9600/32 = 300\,\mathrm{s}$ かかるので、私より遅れずに出口に着くのは $t + 300 \leq 320$ のとき、かつそのときに限る。）



この距離と時間のグラフには、私（ティール）、$t = 20$ に入る速い車両（アンバー）、$t = 60$ に入る速い車両（プラム）が示されている。アンバーの車両は、ちょうど 2 台とも出口に着いたところで私に追いつく。プラムの車両のように、それより後に入る速い車両は、私がトンネルを出るときにはまだ私の後ろにいる。

他の車両はすべて $32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ で走るので、$(0, 20]$ に入った車両が私に追いつく前に何かに足止めされることはない。私以外でその車両の前にいる車両も、私に追いつくまではやはり $32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ で走っているからである。私より前に入った車両は私の前方にいるので、関係ない。したがって、私がトンネルを出るときに私の後ろにできている列は、ちょうど $(0, 20]$ に入った車両からなり、その台数は $\mathrm{Po}(0.1 \times 20) = \mathrm{Po}(2)$ に従う。私の後ろの列に並ぶ車両の台数の期待値（expected value）は

$$\boxed{2}.$$

である。

中盤：ちょうど 2 台が入ってきて私に追いつく

今度は、他の各車両は確率 $\frac{1}{2}$ で速い（$32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$）か遅い（$30\,\mathrm{m\,s^{-1}}$）かのいずれかであり、これは他のすべてのことと独立であるとする。

考えてみよう 20 秒以内に入った速い車両は、すべて依然として私に追いつくだろうか？

そうではない。時刻 $t' > 0$ に入った遅い車両は、私の後ろ $30t'$ メートルの一定の間隔を保ち続けるので、私に追いつくことはない。それより後に入った速い車両は、その遅い車両に追いつく（あるいはその後ろにいる何かに阻まれる）と、それ以降は $30\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ で走ることになるので、やはり私には届かない。したがって、$(0,20]$ に入った車両が私に追いつくのは、その車両が速く、**かつ**私とその車両の間に入ったすべての車両が速いとき、かつそのときに限る。$t = 20$ より後に入った速い車両は、たとえ行く手を阻むものが何もなくても私に追いつけない。

$(0,20]$ に入る車両の台数を $K \sim \mathrm{Po}(2)$ とする。この小問の事象は、この時間帯にちょうど 2 台の車両が入り、その 2 台がともに私に追いつくというものである。そのためには $K = 2$ で、しかも 2 台とも速い必要がある：

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}(K=2) \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \frac{2^2 \mathrm{e}^{-2}}{2!} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}} \approx 0.0677.$$

終盤：ちょうど 2 台が私の後ろに並ぶ

今度は、最初の 20 秒間に何台の車両が入ってもよい。$(0,20]$ に入る K 台の車両を、入った順に並べる。上の議論により、出口で私の後ろにできている列は、この並びの先頭から途切れずに続く速い車両の連なりである。（$t = 20$ より後に入った車両は決して私に追いつけないので、列に加わることはない。）したがって、列にちょうど 2 台の車両が並ぶのは、次のいずれかのとき、かつそのときに限る。

- $K = 2$ で、2 台とも速い：$K = 2$ という条件のもとでの確率は $\frac{1}{4}$。
- $K \geq 3$ で、最初の 2 台が速く、3 台目が遅い：$K = k \geq 3$ という条件のもとでの確率は $\frac{1}{8}$。

よって

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\text{2 台の列}) &= \tfrac{1}{4}\,\mathrm{P}(K=2) + \tfrac{1}{8}\,\mathrm{P}(K \geq 3) \\
&= \tfrac{1}{4} \cdot 2\mathrm{e}^{-2} + \tfrac{1}{8}\left(1 - \mathrm{e}^{-2} - 2\mathrm{e}^{-2} - 2\mathrm{e}^{-2}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{5}{8}\mathrm{e}^{-2} \\
&= \boxed{\tfrac{1}{8}\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right)} \approx 0.108.
\end{aligned}$$

これは前の答えより大きいが、そうでなければならない。前の事象は、2 台の列ができる場合の一つだからである。

うまい別解がある。車両の流れを速い車両と遅い車両に分けると、それぞれ割合 $0.05\,\mathrm{s^{-1}}$ の独立な 2 つのポアソン過程になる。ちょうど 2 台の列ができるということは、最初の 20 秒間において、最初の 2 つの到着が速い車両で、その次

の到着（もしあれば）が遅い車両であるということである。ラベル付きの事象を扱うポアソン過程の問題では、このように 2 つの流れで考えるのが最短の道筋であることが多い。

検算

- 極限の場合（limiting case）：すべての車両が遅ければ誰も私に追いつけない。実際、速い確率が 0 のとき、列についての式は 0 を与える。
- 速い確率を $\frac{1}{2}$ の代わりに p とすると、同じ議論により $p^2\mathrm{P}(K=2)+p^2(1-p)\mathrm{P}(K\geq 3)$ が得られる。$p=1$ のときこれは $\mathrm{P}(K=2)=2\mathrm{e}^{-2}$ となり、列の長さがちょうど $\mathrm{Po}(2)$ に従う前半の結果と一致する。
- 追い越しのない交通を 4×10^5 回シミュレーションした。その結果、前半の列の長さの平均は 2.003、後半の確率は 0.0674 と 0.1076 であり、厳密値 0.0677 と 0.1081 によく合っていた。

よくある間違い

- 遅い車両が 1 台あると、その後ろにいるすべての速い車両から私が守られることを忘れて、終盤の答えを $\mathrm{P}(\text{exactly two fast in 20 s})=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$ としてしまう。
- 毎分 6 台という割合を秒単位の時間と組み合わせてしまう。20 秒間の平均は 2 であって、120 ではない。
- どの時刻に入った車両も列に加わると考えてしまう。私に届くのは最初の 20 秒以内に入った車両だけである。

STEP のその先へ

後半では**間引き**（thinning）を用いている。割合 λ のポアソン過程の各事象を、独立に確率 p で残すとき、残された事象と捨てられた事象は、それぞれ割合 $p\lambda$ と $(1-p)\lambda$ の独立なポアソン過程をなす。追い越しのできない車両の列は、交通流理論（traffic flow theory）における古典的なモデルであり、そこでは遅い車両が、ここで見たような「車群」（platoon）を生み出す。ポアソン過程と間引きについては、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）を参照せよ。

解答例

STEP III 1997、第 1 問

純粋数学 • 指数関数のべき級数

> **STEP III 1997、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q1

鍵となる考え方

$e^x = \sum x^n/n!$ に多項式を掛けると、級数（series）の項がずれる。すると x^n の係数（coefficient）は $1/n!$、$1/(n-1)!$、$1/(n-2)!, \ldots$ の一次結合となり、共通の分母 $n!$ で通分すると分子は n の多項式になる。$x = 1$ を代入すれば、冪級数（power series）の恒等式が数値の級数についての恒等式に変わる。したがって、この問題は結局、望みの分子を生み出す多項式をいかに選ぶかという問題である。**下降階乗**（falling factorial）n、$n(n-1)$、$n(n-1)(n-2)$ が自然な構成要素となる。なぜなら $n(n-1)\cdots(n-k+1)/n! = 1/(n-k)!$ だからである。

解答

以下を通して、$e^x = \sum_{n\geq 0} x^n/n!$ はすべての実数 x に対して絶対収束（absolute convergence）する。これに多項式を掛けたものはこのような級数の有限和であるから、級数を項別に足し合わせてから $x = 1$ とおいてよい。負の整数 m に対しては $1/m! = 0$ と約束する。こうすると、以下のすべての和を $n = 0$ から始めることができる。

小問 (i)

次が成り立つ。

$$(x^2 + 5x + 4)\, e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+2}}{n!} + 5 \sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{n!} + 4 \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

x^n の係数をまとめるために、最初の二つの和の添字を付け替える。係数は

$$\frac{1}{(n-2)!}+\frac{5}{(n-1)!}+\frac{4}{n!}=\frac{n(n-1)+5n+4}{n!}$$
$$=\frac{n^2+4n+4}{n!}=\frac{(n+2)^2}{n!}.$$

となる。これは $n=0$ と $n=1$ を含むすべての $n\geq 0$ について成り立つ。これらの場合には、約束 $1/m!=0$ によって存在しない項が消える。($n=0$ のとき係数は $4=2^2/0!$、$n=1$ のとき $5+4=9=3^2/1!$ である。) よって

$$(x^2+5x+4)\,\mathrm{e}^x=\sum_{n\geq 0}\frac{(n+2)^2}{n!}\,x^n,$$

であり、$x=1$ とおくと

$$10\,\mathrm{e}=\frac{2^2}{0!}+\frac{3^2}{1!}+\frac{4^2}{2!}+\frac{5^2}{3!}+\cdots=4+\frac{3^2}{1!}+\frac{4^2}{2!}+\cdots,$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

今度は一般項が $(n+1)^2/n!$ なので、級数の係数が

$$\frac{n(n-1)+bn+c}{n!}=\frac{(n+1)^2}{n!}.$$

となるような二次式 x^2+bx+c を求めたい。

考えてみよう 当て推量に頼らずに b と c を求めるにはどうすればよいか？

目標の分子を下降階乗で書く：$n^2+2n+1=n(n-1)+3n+1$。係数を比較すると $b=3$、$c=1$ を得る。したがって、小問 (i) とまったく同じ議論により

$$(x^2+3x+1)\,\mathrm{e}^x=\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)^2}{n!}\,x^n,$$

であり、$x=1$ とおくと

$$(1+3+1)\,\mathrm{e}=5\,\mathrm{e}=1+\frac{2^2}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{4^2}{3!}+\cdots.$$

を得る。

小問 (iii)

一般項は $(n+1)^3/n!$ なので、今度は三次式が必要である。$(ax^3+bx^2+cx+d)\,\mathrm{e}^x$ における x^n の係数は

$$\frac{a}{(n-3)!}+\frac{b}{(n-2)!}+\frac{c}{(n-1)!}+\frac{d}{n!}=\frac{a\,n(n-1)(n-2)+b\,n(n-1)+c\,n+d}{n!}.$$

である。目標を下降階乗で展開する。$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n$ かつ $n^2 = n(n-1) + n$ であるから、

$$\begin{aligned}(n+1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= \big[n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n\big] + 3\big[n(n-1) + n\big] + 3n + 1 \\ &= n(n-1)(n-2) + 6n(n-1) + 7n + 1.\end{aligned}$$

（簡単な検算：$n = 1$ のとき両辺はともに 8 である。$n = 2$ のとき $27 = 0 + 12 + 14 + 1$。）よって $a = 1$、$b = 6$、$c = 7$、$d = 1$ であり、

$$(x^3 + 6x^2 + 7x + 1)\,\mathrm{e}^x = \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)^3}{n!}\, x^n.$$

$x = 1$ とおくと

$$1 + \frac{2^3}{1!} + \frac{3^3}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \cdots = (1 + 6 + 7 + 1)\,\mathrm{e} = 15\,\mathrm{e}.$$

考えてみよう なぜ級数を項ごとに単純に 2 乗したり 3 乗したりできないのか？

$\sum (n+1)^3/n!$ は $\sum (n+1)/n!$ から単純な方法で組み立てられるものではないからである。和は分子について線形であるから、私たちにできるのは、分子を $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ という部分に分けることである。各部分は $n!$ と約分されて、e の級数をずらしたものを与える。そのような各部分は $x = 1$ においてちょうど e を与える。したがって答えは、下降階乗の係数の和 $1 + 6 + 7 + 1 = 15$ に e を掛けたものとなる。

検算

- $n = 60$ までの部分和は 27.1828…、13.5914…、40.7742… となり、計算機の精度で 10e、5e、15e と一致する。
- 三つの分子の恒等式における係数は、$n = 0, \ldots, 39$ について厳密に確認した。
- 整合性：小問 (ii) の級数は $\sum (n+1)^2/n!$、小問 (i) の級数は $\sum (n+2)^2/n!$ である。その差 $\sum (2n+3)/n! = 2\sum n/n! + 3\sum 1/n! = 2\mathrm{e} + 3\mathrm{e} = 5\mathrm{e}$ は確かに $10\mathrm{e} - 5\mathrm{e}$ に等しい。

よくある間違い

- 和の添字を付け替えるとき、最初の二項（$n = 0, 1$）に別途注意が必要であることを忘れる。$m < 0$ に対する約束 $1/m! = 0$ によって処理できるが、確認はしておくべきである。

► $(n+1)^3$ を下降階乗ではなく冪 n^3, n^2, n と比較してしまい、誤った三次式を選ぶ。

STEP のその先へ

和 $\sum_{n\geq 0} n^k/n!$ は $B_k\,\mathrm{e}$ に等しい。ここで B_k は第 k ベル数（Bell number）（k 個の対象からなる集合を分割する方法の数）であり、$B_0, \ldots, B_4 = 1, 1, 2, 5, 15$ である。これはドビンスキー（Dobiński）の公式である。実際、$m = n+1$ とおくと、小問 (iii) は $\sum_{m\geq 1} m^4/m! = B_4\,\mathrm{e} = 15\,\mathrm{e}$ であり、係数 $1, 6, 7, 1$ は第 2 種スターリング数（Stirling numbers of the second kind）$1, 7, 6, 1$ を逆順に並べたものである。冪級数を項別に並べ替えたり組み合わせたりすることは絶対収束によって正当化される。これは大学 1 年次の解析学の主題の一つである。理論については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を、この種の問題をさらに解くには Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）を参照せよ。

解答例

STEP III 1997、第 2 問

純粋数学 • 曲線の概形

> **STEP III 1997、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q2

鍵となる考え方

対数（logarithm）をとると $x^y = y^x$ は $y\ln x = x\ln y$ となり、さらに xy で割ると $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(y)$ が得られる。したがって後半は、実は前半についての問題なのである。f の各値を与える入力がいくつあるかがわかれば、各 x に対して相手となる y がいくつあるかがわかる。この方程式には常に自明な解 $y = x$ がある。興味の対象はもう一つの解である。

解答

f のグラフ

商の微分法（quotient rule）を用いて微分すると、

$$\mathrm{f}'(t) = \frac{t\cdot\frac{1}{t} - \ln t}{t^2} = \frac{1-\ln t}{t^2}, \qquad \mathrm{f}''(t) = \frac{2\ln t - 3}{t^3}.$$

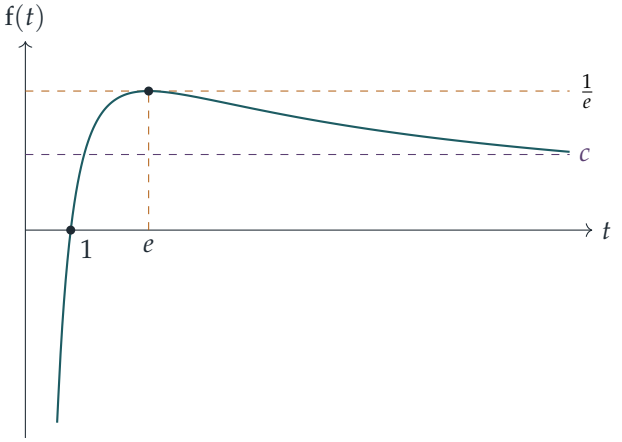
よって $0 < t < e$ では $\mathrm{f}'(t) > 0$、$t > e$ では $\mathrm{f}'(t) < 0$ である。すなわち f は $(0, e]$ で狭義単調増加（strictly increasing）、$[e, \infty)$ で狭義単調減少（strictly decreasing）である。最大値は

$$\mathrm{f}(e) = \frac{1}{e}.$$

である。概形を描くためのその他の特徴は次のとおりである。

- $0 < t < 1$ では $\mathrm{f}(t) < 0$、$\mathrm{f}(1) = 0$、$t > 1$ では $\mathrm{f}(t) > 0$ である。
- $t \to 0^+$ のとき $\ln t \to -\infty$ かつ $1/t \to +\infty$ であるから、$\mathrm{f}(t) \to -\infty$ となる。すなわち y 軸は漸近線（asymptote）である。

- $t \to \infty$ のとき、$\ln t$ は t よりもゆっくり増加するので $\mathrm{f}(t) \to 0^+$ である。よって t 軸は漸近線である。
- $t = e^{3/2}$ に変曲点（point of inflection）があり、そこでは $\mathrm{f} = \frac{3}{2}e^{-3/2} \approx 0.33$ である。個数を数えるためには不要だが、これによって概形が正確なものになる。



値 c を与える t はいくつあるか

f は $(0,e]$ と $[e,\infty)$ のそれぞれにおいて連続（continuous）かつ狭義単調（strictly monotonic）であるから、各部分は到達する値をちょうど一度ずつとる。$(0,e]$ では f は $-\infty$ から $\frac{1}{e}$ まで増加し、$[e,\infty)$ では $\frac{1}{e}$ から 0 に向かって減少するが、決して 0 には達しない。したがって、与えられた値 c に対して次が成り立つ。

- $c > \frac{1}{e}$：t の値は**存在しない**。
- $c = \frac{1}{e}$：$t = e$ の**一つ**だけである。
- $0 < c < \frac{1}{e}$：$(1,e)$ に一つ、(e,∞) に一つの**二つ**である（概形図の水平線 c を参照）。
- $c \le 0$：$(0,1]$ に**一つ**だけである。減少する側の枝は常に正の値をとるからである。

$x^y = y^x$ の解の個数

$x, y > 0$ のとき両辺は正であるから、対数をとってよい。ln は一対一（one-to-one）であるから、解が増えたり失われたりすることはない。

$$x^y = y^x \iff y\ln x = x\ln y \iff \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y} \iff \mathrm{f}(y) = \mathrm{f}(x),$$

ここで $xy > 0$ で割った。よって、x を固定したとき、正の y の個数は、$c = \mathrm{f}(x)$ として $\mathrm{f}(t) = c$ を満たす t の個数に等しい。そのうちの一つは常に $y = x$ である。

考えてみよう 上の四つの場合のうち、$c = \mathrm{f}(x)$ が実際に当てはまりうるのはどれか。

c は f の値であるから、$c > \frac{1}{e}$ の場合は起こりえない。残りの場合を x に関する条件に言い換えると次のようになる。

- $0 < x \leq 1$：このとき $c = \mathrm{f}(x) \leq 0$ であるから、y はちょうど**一つ**、すなわち $y = x$ である。
- $x = e$：このとき $c = \frac{1}{e}$ であるから、y はちょうど**一つ**、すなわち $y = e$ である。
- $1 < x < e$ または $x > e$：このとき $0 < c < \frac{1}{e}$ であるから、y の値はちょうど**二つ**、すなわち $y = x$ ともう一つである。$1 < x < e$ ならばもう一つは (e, ∞) にあり、$x > e$ ならば $(1, e)$ にある。

たとえば、$2^4 = 4^2 = 16$ であるから、$x = 2$ の相手は $y = 4$ である。

解集合の概形

解集合は、直線 $y = x$（すべての $x > 0$ について）と、「もう一つの」解からなる第二の曲線とを合わせたものであり、後者は完全に $x > 1$、$y > 1$ の範囲にある。その形状は次のとおりである。

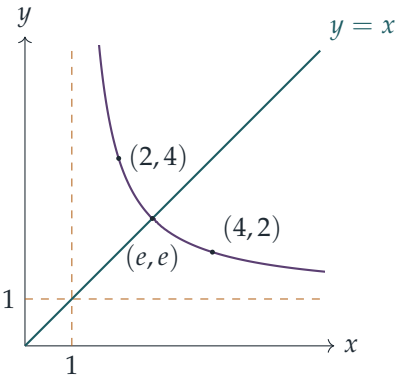
- **対称性。** 方程式は x と y を入れ替えても変わらないので、この曲線は直線 $y = x$ に関して対称（symmetric）である。
- **減少。** x が $(1, e)$ の範囲で増加すると $\mathrm{f}(x)$ は増加するので、相手の $y > e$ は f がより大きくなる位置へ移らなければならない。すなわち y は減少する。$x > e$ についても同様である。よってこの枝の上で y は x の減少関数である。
- **漸近線。** $x \to 1^+$ のとき $\mathrm{f}(x) \to 0^+$ であるから、相手は $y \to \infty$ となる。すなわち直線 $x = 1$ は漸近線である。対称性により、$x \to \infty$ のとき $y \to 1^+$ であり、$y = 1$ は漸近線である。
- **直線 $y = x$ との交差。** $x \to e$ のとき相手も e に近づくので、曲線は (e, e) を通り、そこで直線と交わる。$t = e$ の近くでは、$\mathrm{f}'(e) = 0$ および $\mathrm{f}''(e) = -e^{-3}$ を用いたテイラー（Taylor）の定理（Taylor's theorem）により $\mathrm{f}(t) \approx \frac{1}{e} - \frac{(t-e)^2}{2e^3}$ となる。よって $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(y)$ から $(y-e)^2 \approx (x-e)^2$、すなわち $y - e \approx \pm(x-e)$ が導かれる。正の符号は直線 $y = x$ に対応する。負の符号がわれわれの曲線であり、したがってこの曲線は傾き -1 で直線と直角に交わる。

考えてみよう この曲線を陽に書き表すことはできるか。

できる。比を用いてパラメータ表示（parametrise）すればよい。$t > 0$、$t \neq 1$ として $y = tx$ とおく。すると $x^{tx} = (tx)^x$ となり、両辺の x 乗根をとると $x^t = tx$、よって $x^{t-1} = t$ であり、

$$x = t^{1/(t-1)}, \qquad y = t^{t/(t-1)}.$$

を得る。$t = 2$ のとき $(2,4)$ を、$t = \frac{1}{2}$ のとき $(4,2)$ を与える。$t \to 1$ のとき、$t^{1/(t-1)} \to e$ であるから、両座標はともに e に近づく。下の曲線はこの方法で描いたものである。



検算

- $2^4 = 4^2$ はよく知られた整数の例であり、予想どおり $1 < x < e$ と $x > e$ の範囲で曲線上にある。
- 数値的には、細かい格子探索により f の最大値は $t \approx 2.718$ でとられ、その値は $0.367879 \approx 1/e$ である。二分法（bisection）によると、$x = 1.01$ の相手は $y \approx 659$、$x = 100$ の相手は $y \approx 1.050$ である。これらは漸近線 $x = 1$ および $y = 1$ と整合する。
- $x = e$ における中心差分（central difference）により、第二の枝の傾きは -1.0000 となる。

よくある間違い

- $x \neq e$ ならばどの x にも相手が二つあると主張してしまうこと。$0 < x \leq 1$ では値 $\mathrm{f}(x)$ は正でなく、$y = x$ しか解にならない。
- 最終的な概形図で直線 $y = x$ を描き忘れること。あるいはもう一方の枝を、(e,e) で直線と交わるのではなく接するように描いてしまうこと。
- xy で割る代わりに、$\ln x$ や $\ln y$（これらは 0 になりうる）で割ってしまうこと。

STEP のその先へ

第二の曲線は $f(x) - f(y)$ の等位集合（level set）であり、(e,e) はその関数の勾配（gradient）が 0 になる点である。そのため、そこでは一本のなめらかな曲線が通過するのではなく、二本の枝が交差するのである。大学一年次の解析学（analysis）で学ぶ陰関数定理（implicit function theorem）は、等位集合が局所的にグラフとなるのはどのような場合か、またそうならないときに何が起こるかを説明してくれる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、その基礎を築くのに親しみやすい一冊である。方程式 $x^y = y^x$ そのものにも長い歴史がある。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（発展的な数学の問題集）には、この趣旨の問題がさらに収められている。

解答例

STEP III 1997、第 3 問

純粋数学 ・ 1 の冪根

> **STEP III 1997、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q3

鍵となる考え方

1 の n 乗根（nth roots of unity）$1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ はちょうど $z^n - 1$ の根であるから、この多項式は完全に因数分解できる。そこから因数 $z-1$ を割り去れば最初の恒等式が得られる。O を原点として正多角形を複素平面上に置くと、各頂点は 1 の n 乗根に $re^{i\theta}$ を掛けたものになる。すると、ベクトルの和は等比級数（geometric series）となり、弦の長さの 2 乗は $|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1|^2$ を内積（dot product）で展開することで求まる。

解答

積の恒等式

$k = 0, 1, \ldots, n-1$ に対して $(\omega^k)^n = e^{2\pi i k} = 1$ であるから、各 ω^k は $z^n - 1 = 0$ の根である。これら n 個の数は相異なる。実際、それらの偏角（argument）$2\pi k/n$ は相異なり、すべて $[0, 2\pi)$ に属するからである。最高次の係数が 1 で、相異なる n 個の根をもつ n 次多項式は、対応する 1 次因数の積に等しいので、

$$z^n - 1 = (z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1}).$$

一方、等比級数の和を考えれば（あるいは単に展開すれば）、

$$z^n - 1 = (z-1)(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}).$$

$z \neq 1$ であるすべての z について両辺を $z-1$ で割ることができ、

$$(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1}) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} \qquad (z \neq 1).$$

を得る。

考えてみよう 問題文には「任意の複素数 z」とある。割り算ができない $z=1$ の場合はどうなるだろうか。

両辺はともに $n-1$ 次の多項式であり、$z\neq 1$ である無限個の点で一致する。したがって、その差は無限個の根をもつ多項式であるから、零多項式である。（あるいは、両辺は z について連続であるから、$z\to 1$ とすればよい。）よって、この恒等式は $z=1$ も含めてすべての複素数 z について成り立ち、題意が示された。

ベクトルの和

円を含む平面を、O を原点とする複素平面とみなし、A_k を表す複素数を a_k と書く。$a_1=re^{i\theta}$ とし、頂点を反時計回りに順に番号付けると（隣り合う頂点が O において張る角は $2\pi/n$ である）、

$$a_k=re^{i\theta}\,\omega^{k-1},\qquad k=1,2,\dots,n.$$

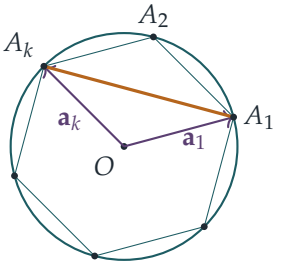
となる。（時計回りに番号付けた場合は、ω を $\bar{\omega}=\omega^{n-1}$ に置き換えるだけであり、これも同じ根の集合を動く。そもそも和は頂点の順序によらない。）

ベクトル $\overrightarrow{OA_k}$ は複素数 a_k に対応し、ベクトルの和は複素数の和に対応する。したがって、求めるべきものは

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=re^{i\theta}\left(1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}\right).$$

である。括弧の中は、恒等式の右辺に $z=\omega$ を代入したものである。左辺の因数の中には（$n\geq 2$ のとき）ω が現れるので、左辺は因数 $\omega-\omega=0$ をもち、括弧の中は 0 となる。（同様に、これは公比 $\omega\neq 1$ の等比級数であるから、$(\omega^n-1)/(\omega-1)=0$ に等しい。）よって

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\mathbf{0}.$$



距離の 2 乗の和

今度は $\mathbf{a}_k = \overrightarrow{OA_k}$ をベクトルとして書く。すると、すべての k について $|\mathbf{a}_k| = r$ であり、$\overrightarrow{A_1A_k} = \mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1$ である。内積を用いて展開すると、

$$\begin{aligned} |A_1A_k|^2 &= (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1)\cdot(\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1) \\ &= |\mathbf{a}_k|^2 + |\mathbf{a}_1|^2 - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_k \\ &= 2r^2 - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_k. \end{aligned}$$

これは $k = 1$ のときにも成り立つ（このとき両辺とも 0 である）。$k = 1, \ldots, n$ について和をとり、内積が和に対して分配法則を満たすことを用いると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |A_1A_k|^2 &= 2r^2 n - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{a}_k\right) \\ &= 2r^2 n - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{0} = 2r^2 n, \end{aligned}$$

となる。ここで前の小問の結果を用いた。これが求める結果である。

検算

- $n = 2$ のとき：恒等式は $z - (-1) = 1 + z$ となる。2 点は直径の両端であるから、和は $0 + (2r)^2 = 4r^2 = 2r^2 \cdot 2$ である。
- $n = 4$、$r = 1$ のとき：正方形の 1 つの頂点からの距離の 2 乗は $0, 2, 4, 2$ であり、合計は $8 = 2 \cdot 1^2 \cdot 4$ である。
- 数値的に、$n \le 20$、半径、回転角を無作為に選んだ 2000 通りについて、ベクトルの和は 0 となり、弦の長さの 2 乗の和は誤差 10^{-14} 以内で $2r^2 n$ に一致した。積の恒等式も、無作為な z（および $z = 1$）において同じ精度で確認した。

よくある間違い

- $z - 1$ で割ったあと、その時点では恒等式が $z \neq 1$ についてしか証明されていないことを忘れる。
- $|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1|^2 = |\mathbf{a}_k|^2 - |\mathbf{a}_1|^2$ と書いてしまう。交差項 $-2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_k$ こそが要点である。

STEP のその先へ

積の恒等式に $z = 1$ を代入して絶対値をとると、$|1-\omega|\,|1-\omega^2|\cdots|1-\omega^{n-1}| = n$ が得られる。すなわち、単位円に内接する正 n 角形の 1 つの頂点から引いた弦の長さの

積はちょうど n であり、ここで扱った2乗の和とよい対をなす。$z^n - 1$ を1の n 乗根を用いて因数分解することは、円分多項式（cyclotomic polynomial）や離散フーリエ変換（discrete Fourier transform）の出発点であり、どちらも大学の講義の早い段階で出会うものである。Needham の *Visual Complex Analysis*（複素解析を図形的に解説した書）は、この種の幾何学が複素数を用いてどのように展開されるかを見るのに最適な一冊である。

解答例

STEP III 1997、第 4 問

純粋数学 ・ 相加相乗平均の不等式

STEP III 1997、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/97-s3-q4

鍵となる考え方

問題文には誤植がある。4 つの根をもつ多項式は 4 次式でなければならず、係数のパターン $1,4,6,4,1$ から、意図された多項式は

$$\mathrm{f}(x) = x^4 - 4ax^3 + 6b^2x^2 - 4c^3x + d^4.$$

であることがわかる。係数は、a, b^2, c^3, d^4 のそれぞれが**平均**になるように選ばれている。すなわち、根の平均、2 つずつの積の平均、3 つずつの積の平均、そして 4 つすべての積の平均である。各不等式は、f、f′ または f″ の根に相加相乗平均の不等式（AM–GM inequality）を適用することで得られ、それらの根が依然として相異なる正の数であることはロルの定理（Rolle's theorem）によって保証される。

解答

$\mathrm{f}(x) = (x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$ とおく。係数を比較すると、

$$p+q+r+s = 4a, \qquad pq+pr+ps+qr+qs+rs = 6b^2,$$
$$pqr+qrs+rsp+spq = 4c^3, \qquad pqrs = d^4.$$

小問 (i)

$P = pqrs = d^4$ とおく。どの根も 0 ではないから、

$$pqr = \frac{P}{s}, \quad qrs = \frac{P}{p}, \quad rsp = \frac{P}{q}, \quad spq = \frac{P}{r}.$$

写像 $t \mapsto P/t$ は正の実数上で単射（one-to-one）であり、p, q, r, s は相異なるので、4 つの積は相異なる。

小問 (ii)

3 つずつの 4 つの積は相異なる正の数であるから、相加相乗平均の不等式より

$$c^3 = \frac{pqr + qrs + rsp + spq}{4} > \left(pqr \cdot qrs \cdot rsp \cdot spq\right)^{1/4} = \left((pqrs)^3\right)^{1/4} = (d^4)^{3/4} = d^3.$$

各根は 4 つの積のうちちょうど 3 つに現れるので、積は $(pqrs)^3$ となる。$c, d > 0$ であり $t \mapsto t^3$ は増加関数であるから、$c^3 > d^3$ より $c > d$ が得られる。

小問 (iii)

$0 < p < q < r < s$ となるように根に名前をつける。多項式 f は微分可能で、p と q で 0 になるので、ロルの定理より f' は $p < \alpha < q$ を満たす根 α をもつ。同様にして、根 $\beta \in (q, r)$ と $\gamma \in (r, s)$ が存在する。これらの開区間は重ならないので、$\alpha < \beta < \gamma$ は相異なる。f' は 3 次式であるから、これ以外の根はもたない。また、$\alpha > p > 0$ であるから、3 つの根はすべて正であることにも注意する。

小問 (iv)

微分すると、

$$\mathrm{f}'(x) = 4x^3 - 12ax^2 + 12b^2x - 4c^3 = 4\left(x^3 - 3ax^2 + 3b^2x - c^3\right),$$

であるから、α, β, γ は $x^3 - 3ax^2 + 3b^2x - c^3$ の根であり、

$$\alpha + \beta + \gamma = 3a, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3b^2, \qquad \alpha\beta\gamma = c^3.$$

これは次数が 1 つ下がった同じパターンなので、小問 (i) と (ii) をそのまま繰り返せばよい。2 つずつの積は $\alpha\beta = c^3/\gamma$、$\beta\gamma = c^3/\alpha$、$\gamma\alpha = c^3/\beta$ であり、α, β, γ が相異なる正の数であるから、これらは相異なる。相加相乗平均の不等式より、

$$b^2 = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{3} > \left((\alpha\beta\gamma)^2\right)^{1/3} = c^2,$$

であり、$b, c > 0$ であるから $b > c$ が得られる。

考えてみよう f' に相加相乗平均の不等式を使う前に、なぜ小問 (iii) が必要なのだろうか。

相加相乗平均の不等式は正の実数にしか適用できず、しかもここでは等号が成り立たない厳密な形が必要である。3 次式は、そもそも 3 つの実数解をもつとは限らない。α, β, γ が相異なる正の実数であること、したがって 2 つずつの積もそうであることを保証しているのは、ロルの定理なのである。

小問 (v)

同じ議論をもう一度適用する。f′ は相異なる根 $\alpha < \beta < \gamma$ をもつので、ロルの定理より

$$\mathrm{f}''(x) = 12x^2 - 24ax + 12b^2 = 12\left(x^2 - 2ax + b^2\right),$$

の根 $\mu \in (\alpha, \beta)$ と $\nu \in (\beta, \gamma)$ が得られ、これらは相異なる正の数である。よって $\mu + \nu = 2a$、$\mu\nu = b^2$ であり、2 数の相加相乗平均の不等式より、

$$a = \frac{\mu + \nu}{2} > \sqrt{\mu\nu} = b.$$

（同じことであるが、$x^2 - 2ax + b^2$ は相異なる 2 つの実数解をもつので、その判別式（discriminant）$4a^2 - 4b^2$ は正であり、a, b はともに正であるから $a > b$ となる。）以上により、

$$a > b > c > d.$$

が示された。

検算

- 根が $1, 2, 3, 4$ のとき：$4a = 10$、$6b^2 = 35$、$4c^3 = 50$、$d^4 = 24$ であるから、$a = 2.5$、$b \approx 2.415$、$c \approx 2.321$、$d \approx 2.213$ となり、正しい順序になっている。
- 4 つの根がすべて k に等しければ、$\mathrm{f}(x) = (x - k)^4$ であり $a = b = c = d = k$ となる。厳密な不等式を得るために根が相異なることが必要なのはこのためである。
- ほとんど一致する場合も含めて、相異なる 4 つの正の根の組を無作為に 20 000 組試したところ、毎回 $a > b > c > d$ が成り立った。

よくある間違い

- f の根に直接相加相乗平均の不等式を適用すること。これで $a > d$ は得られるが、中間の項を分離することはできない。
- 相加相乗平均の不等式に用いる数が相異なる正の数であることの確認を忘れること。これこそが小問 (i) と (iii) の要点である。
- すべての文字が正であることに触れずに、$c^3 > d^3$ や $b^2 > c^2$ から $c > d$ や $b > c$ を導くこと。

STEP のその先へ

量 a, b, c, d は根の**対称平均**（symmetric means）であり、不等式の連鎖 $a > b > c > d$ は**マクローリンの不等式**（Maclaurin's inequality）の特別な場合である。すなわち、正の実数に対して、k 個ずつの積の平均の k 乗根は、k が増えるにつれて減少する。平均を変えずに次数を下げるために微分するという技法は、ニュートンの不等式（Newton's inequalities）を示す標準的な方法でもある。さらに詳しくは、Steele の *The Cauchy–Schwarz Master Class*（不等式の入門書）、あるいはハーディ（Hardy）、リトルウッド（Littlewood）、ポリア（Pólya）による古典 *Inequalities*（『不等式』）を参照するとよい。

解答例

STEP III 1997、第 5 問

純粋数学 ・ サイクロイドの弧長

> **STEP III 1997、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q5

鍵となる考え方

転がる車輪の縁上の点は**サイクロイド**（cycloid）を描く。車輪が回転した角度を用いてその点の位置を書き表してしまえば、この問題は単なる弧長（arc length）の積分になる。中心の運動と回転角を結びつけるのは転がり条件（滑らないこと）であり、半角の公式（half-angle identity）を使うと弧長の公式に現れる平方根がきれいに外れる。

解答

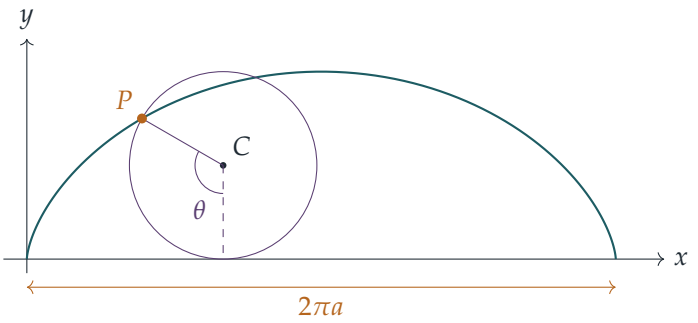
軌跡を設定する

車輪の半径を a とし、車輪が x 軸に沿って滑らずに転がるとする。印をつけた点 P が原点で地面に接している状態から始め、車輪が回転した角度（ラジアン）を θ とする。

滑りがないので、進んだ地面の長さは地面に接した縁の長さに等しい。したがって中心 C は距離 $a\theta$ だけ移動し、$(a\theta,\, a)$ にある。C から見ると、点 P は最初 C の真下にあり、そこから θ だけ回転している（車輪は右に転がるので時計回りである）。よって P は $C + (-a\sin\theta,\, -a\cos\theta)$ にある。ゆえに、1 回転について

$$x = a(\theta - \sin\theta), \qquad y = a(1 - \cos\theta), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

が成り立つ。この間に車輪は距離 $2\pi a$ だけ前進する。



弧長

微分すると

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = a(1-\cos\theta), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = a\sin\theta,$$

であるから、

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 &= a^2\left(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\\ &= 2a^2(1-\cos\theta)\\ &= 4a^2\sin^2\tfrac{\theta}{2},\end{aligned}$$

となる。ここで $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ を用いた。

考えてみよう 平方根をとるとき、それは $2a\sin\frac{\theta}{2}$ なのか $2a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$ なのか。また、ここではその違いが問題になるか。

平方根は常に $2a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$ である。$0 \le \theta \le 2\pi$ のとき $0 \le \frac{\theta}{2} \le \pi$ であり、そこでは $\sin\frac{\theta}{2} \ge 0$ となるので、ちょうど1回転の範囲では絶対値を外してよい（それより長い範囲では積分を分割しなければならない）。

したがって、P が移動する距離は

$$s = \int_0^{2\pi} 2a\sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = \left[-4a\cos\tfrac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = -4a(-1) + 4a = 8a.$$

である。

比

車輪が $2\pi a$ 進む間に、その縁上の点は $8a$ 移動する。よって求める比は

$$\frac{2\pi a}{8a} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785.$$

である。これは車輪の大きさによらないが、それは当然である。車輪を拡大・縮小すると、2つの距離はともに同じ倍率で変わるからである。

検算

- 点は車輪よりも長い距離を移動する（$8a > 2\pi a \approx 6.28a$）。点は前進するうえに、上下にそれぞれ $2a$ ずつ動くのだから、これは理にかなっている。実際、$8a$ はちょうど直径の 4 倍である。
- 大まかな評価：軌跡は $(0,0)$ から $(\pi a, 2a)$ まで上がり、$(2\pi a, 0)$ まで下がるので、その長さは少なくとも $2\sqrt{\pi^2 a^2 + 4a^2} \approx 7.45a$ であり、多くとも $2\pi a + 4a \approx 10.28a$ である。値 $8a$ は余裕をもってその間に収まっている。
- 数値的に確かめると、車輪が転がる間の縁上の点を 200 000 か所で追跡し、各区間の直線距離を足し合わせると、$a = 1$ のとき 7.99999999992 となる。よって比は $0.78539816\ldots = \pi/4$ である。

よくある間違い

- 媒介変数表示（parametrisation）の符号を誤る（たとえば $x = a(\theta + \sin\theta)$ とする）。これでは車輪に対して後ろ向きに動く軌跡になってしまう。$\theta = \pi$ で確かめるとよい。このとき P は最上点 $(\pi a, 2a)$ にあるはずである。
- 被積分関数を $a\sqrt{2 - 2\cos\theta}$ のままにして、直接積分しようとする。計算を簡単にするのは半角の公式を使う一歩である。
- 比を逆に書く。問題が求めているのは点の移動距離に対する車輪の移動距離の比であり、それは $\pi/4$ であって $4/\pi$ ではない。

STEP のその先へ

サイクロイドは数学において最も有名な曲線の一つである。サイクロイドは**最速降下曲線**（brachistochrone）、すなわち重力のもとで 2 点間を最も速く降下する曲線であり、また**等時曲線**（tautochrone）、すなわちどこから出発しても玉が同じ時間で最下点に達する曲線でもある。どちらの事実も変分法（calculus of variations）によって証明される。変分法は大学 1、2 年次の力学や数理手法の講義で学ぶものであり、この問題の弧長の計算はどちらの証明においても最初の一歩となる。この趣旨の問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* に挑戦するとよい。

解答例

STEP III 1997、第 6 問

純粋数学 ・ チェビシェフの微分方程式

STEP III 1997、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/97-s3-q6

鍵となる考え方

$x = \cos\theta$ の隣にある因子 $1 - x^2$ が示唆するのはただ一つ、$1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$ である。連鎖律（chain rule）を用いて注意深く変数変換すれば、x についての扱いにくい方程式は θ についての単振動（simple harmonic motion）の方程式になる。これを解き、二つの付帯条件を用いて定数を決定する。漸化式（recurrence）は、姿を変えた加法定理（compound-angle identity）にほかならない。以下を通じて、n は非負整数とする。条件 $y_n(x) = (-1)^n y_n(-x)$ はその場合にしか意味をもたない。

解答

変数変換

$0 < \theta < \pi$ として $x = \cos\theta$ とおく。このとき $\sin\theta > 0$ かつ $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta = -\sin\theta \neq 0$ である。記法を簡潔にするため、y_n を y と書く。連鎖律により、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}.$$

もう一度 x で微分するには、θ で微分してから $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = -1/\sin\theta$ を掛ければよい。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right) = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)\\ &= \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2} - \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}.\end{aligned}$$

ここで $1-x^2=\sin^2\theta$ と $x=\cos\theta$ を用いて代入すると、

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+n^2y=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}+n^2y$$
$$=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}+n^2y.$$

二つの 1 階導関数の項はちょうど打ち消し合う。したがって、与えられた方程式は $\dfrac{\mathrm{d}^2y_n}{\mathrm{d}\theta^2}+n^2y_n=0$ と同値であり、これが示すべきことであった。

考えてみよう なぜ $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ は単に $\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}$ とはならないのか？

$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ が $-1/\sin\theta$ と $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta$ の積だからである。どちらの因子も θ に依存するので、積の微分法（product rule）により二つの項が現れる。この余分な項こそが $-x\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ の項を打ち消すものであり、問題にその項が含まれているのはそのためである。

y_n を求める

$n\geq 1$ のとき、$y''+n^2y=0$ の一般解（general solution）は

$$y_n=A\cos n\theta+B\sin n\theta.$$

である。$n=0$ のときは方程式が $y''=0$ となるので、$y_0=A+B\theta$ である。

$x=1$ における条件。 $x=1$ は $\theta=0$ に対応し、$y_n(1)=1$ からいずれの場合も $A=1$ を得る。

対称性の条件。 $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ であるから、x を $-x$ に置き換えることは θ を $\pi-\theta$ に置き換えることを意味し、$\pi-\theta$ もまた $[0,\pi]$ に属する。整数 $n\geq 1$ に対して、

$$\cos n(\pi-\theta)=(-1)^n\cos n\theta,\qquad \sin n(\pi-\theta)=-(-1)^n\sin n\theta.$$

よって $(-1)^n y_n(-x)=(-1)^n\left[A(-1)^n\cos n\theta-B(-1)^n\sin n\theta\right]=A\cos n\theta-B\sin n\theta$ である。これがすべての θ について $y_n(x)=A\cos n\theta+B\sin n\theta$ に等しいとおくと $2B\sin n\theta=0$ となり、$B=0$ である。$n=0$ のときは、条件はすべての θ について $1+B\theta=1+B(\pi-\theta)$ となり、やはり $B=0$ が導かれる。

ゆえに、すべての非負整数 n に対して

$$\boxed{y_n=\cos n\theta},\qquad \text{すなわち}\quad y_n(x)=\cos(n\arccos x)\quad(|x|\leq 1).$$

関係式 $\theta=\arccos x$ は $[-1,1]$ を $[0,\pi]$ の上へ写すので、この結果は $|x|\leq 1$ で成り立つ。端点 $x=\pm1$（$\theta=0,\pi$）は連続性（continuity）により含まれる。

結論を導く

$n = 0$ と $n = 1$ のとき、$y_0 = \cos 0 = 1$、$y_1 = \cos\theta = x$ である。

漸化式を得るために、加法定理

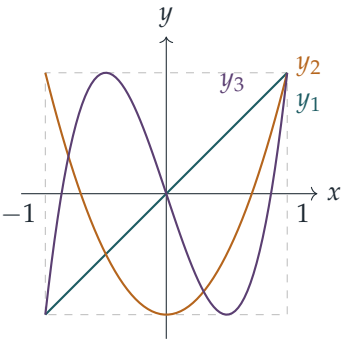
$$\cos(n+1)\theta = \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta, \qquad \cos(n-1)\theta = \cos n\theta\cos\theta + \sin n\theta\sin\theta.$$

を辺々加える。正弦の項は打ち消し合い、$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$ が残る。これを x で表すと

$$y_{n+1} - 2xy_n + y_{n-1} = 0 \qquad (n \geq 1,\ |x| \leq 1),$$

となり、これが求める結果である。

$y_0 = 1$ と $y_1 = x$ から出発すると、漸化式によって多項式が次々に得られる。$y_2 = 2x^2 - 1$、$y_3 = 4x^3 - 3x$、$y_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$ などである。



各 y_n は余弦であるから、当然 $[-1, 1]$ 上で -1 と 1 の間にとどまる。

検算

- $y_2 = 2x^2 - 1$ のとき、$(1 - x^2)\cdot 4 - x\cdot 4x + 4(2x^2 - 1) = 0$ となる。これは $n = 2$ の方程式を満たし、$y_2(1) = 1$ であり、さらに偶関数である。
- y_n の偶奇性（parity）は $(-1)^n$ と一致する。たとえば $y_3 = 4x^3 - 3x$ は奇関数である。
- 数値的には、$x = 0.3$ のとき $\cos(2\arccos 0.3) = -0.82 = 2(0.3)^2 - 1$ である。$y_n = \cos(n\arccos x)$（$0 \leq n \leq 8$）について元の方程式を差分（finite difference）で確かめたところ、残差は 10^{-5} 未満であった。

よくある間違い

- 2 階導関数の計算で積の微分法を忘れ、1 階導関数の項が打ち消し合わなくなる。
- $\sin n\theta$ の解を残してしまう。これは微分方程式と $y_n(1) = 1$ を満たす（$\sin 0 = 0$ であるから）が、対称性の条件を満たさない。この条件は、まさにその解を取り除くために置かれている。
- $n = 0$ の場合を別に扱うのを忘れる。このとき一般解は $A + B\theta$ であり、余弦と正弦の組ではない。

STEP のその先へ

多項式 y_n は**チェビシェフ多項式**（Chebyshev polynomials）$T_n(x)$ である。与えられた方程式はチェビシェフ（Chebyshev）の微分方程式である。私たちが捨てたもう一つの解 $\sin(n \arccos x)$ は、$\sqrt{1 - x^2}$ と多項式の積になる。チェビシェフ多項式は近似理論（approximation theory）の中心にある。次数 n のモニック多項式（monic polynomial）のうちで、$2^{1-n}T_n$ は $[-1, 1]$ 上での最大値の大きさが最小である。多くの数値計算法において T_n の零点が最良の補間点（interpolation points）となるのはこのためである。このような方程式の級数解（series solutions）や、そこから生まれる特殊関数（special functions）については、Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（『微分方程式入門』）を参照するとよい。

解答例

STEP III 1997、第 7 問

純粋数学 ・ e の無理性

> **STEP III 1997、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q7

鍵となる考え方

級数（series）a_n は、$n!\,\mathrm{e}$ から整数部分（integer part）を取り除いた残りにほかならない。級数 $\mathrm{e} = \sum 1/k!$ に $n!$ を掛けると、$k = n$ までの各項はすべて整数になり、残りの裾（tail）が a_n になる。等比級数（geometric series）b_n は、a_n を項ごとに上から押さえる扱いやすい上界（upper bound）の役割を果たす。裾が 0 と 1 の間に厳密に収まることがわかれば、e が有理数（rational number）であるとすると、ある $n!\,\mathrm{e}$ が整数でありながら小数部分（fractional part）がゼロでないことになり、これは不合理である。

解答

小問 (i)

級数 b_n は、初項（first term）$\frac{1}{n+1}$、公比（common ratio）$r = \frac{1}{n+1}$ の等比級数である。$n \geq 1$ より $0 < r \leq \frac{1}{2} < 1$ であるから、これは収束（converge）し、

$$b_n = \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{n}.$$

である。

小問 (ii)

2 つの級数の第 k 項を

$$u_k = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}, \qquad v_k = \frac{1}{(n+1)^k}.$$

と書く。u_k の分母にある k 個の因数 $n+1, n+2, \ldots, n+k$ はどれも $n+1$ 以上であるから、$(n+1)(n+2)\cdots(n+k) \geq (n+1)^k$ であり、したがって

$$0 < u_k \leq v_k \quad \text{任意の} k \geq 1.$$

が成り立つ。等号が成り立つのは $k=1$ のときだけである。$k \geq 2$ では因数 $n+2$ が $n+1$ より真に大きいので、$u_k < v_k$ となる。

すべての項は正であり、収束する級数 b_n の項で上から押さえられているから、（比較判定法（comparison test）により）a_n は収束し、$a_n \geq u_1 > 0$ である。上からの評価については、各項 $v_k - u_k$ が非負であるから、

$$b_n - a_n = \sum_{k\geq 1}(v_k - u_k) \;\geq\; v_2 - u_2 = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0,$$

となる。よって $a_n < b_n = \frac{1}{n}$ であり、合わせて

$$0 < a_n < \frac{1}{n},$$

が成り立つ。これが示すべきことであった。

考えてみよう なぜ「a_n の各項が b_n の対応する項以下である」というだけでは、**厳密な**不等式（strict inequality）を導くのに不十分なのだろうか？

項ごとの $\leq$ からは、極限において $a_n \leq b_n$ が得られるだけである。無限個の項を足し合わせると、厳密な不等式が等式に変わってしまうことがある。だからこそ、差が確定した正の量となる 1 つの項 $k=2$ を取り出し、他の差がすべて ≥ 0 であることに注意したのである。

小問 (iii)

級数 $\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ を用い、$n!$ を掛けて $k=n$ のところで分ける。

$$n!\,\mathrm{e} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}}_{N} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!}.$$

$k \leq n$ のとき $\frac{n!}{k!} = (k+1)(k+2)\cdots n$ は整数であるから、N は正の整数である。$k = n+j$（ただし $j \geq 1$）に対しては

$$\frac{n!}{(n+j)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+j)} = u_j,$$

となるので、裾はちょうど a_n である。したがって、小問 (ii) と $n \geq 1$ を用いると

$$n!\,\mathrm{e} = N + a_n, \qquad N \in \mathbb{Z}, \quad 0 < a_n < \tfrac{1}{n} \leq 1,$$

である。（整数）＋（$[0,1)$ に属する何か）という形の数の整数部分はその整数であるから、$[n!\,\mathrm{e}] = N$ であり、したがって

$$a_n = n!\,\mathrm{e} - [n!\,\mathrm{e}].$$

が成り立つ。

小問 (iv)

背理法（proof by contradiction）で示す。p, q を正の整数として $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$ と仮定する。$n = q$ とおく。すると

$$n!\,\mathrm{e} = q! \cdot \frac{p}{q} = (q-1)!\,p$$

は整数であるから、それ自身の整数部分に等しく、小問 (iii) より $a_q = 0$ となる。しかし小問 (ii) によれば $a_q > 0$ である。この矛盾により、e は無理数（irrational number）であることが示された。

（q は $n!$ を割り切るので、$n \geq q$ を満たすものならどれを取っても同様にうまくいく。要点は、ある $n!\,\mathrm{e}$ が整数にならざるを得ないということだけである。）

検算

$n = 1$ のとき、$1!\,\mathrm{e} = 2.71828\ldots$ であるから小数部分は $0.71828\ldots$ であり、$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots$ を足し合わせてもやはり $0.71828\ldots$ となって、$b_1 = 1$ を十分に下回る。$n = 5$ のとき $a_5 \approx 0.19382$ であり、$\frac{1}{5}$ をわずかに下回る。a_n と b_n は初項が一致するので、n が大きくなるにつれて評価は相対的に精密になる。正確な分数を用いたコンピュータによる検証で、1 から 29 までのすべての n について、$0 < a_n < \frac{1}{n}$ であること、および $[n!\,\mathrm{e}] = N$ として $n!\,\mathrm{e} = N + a_n$ が成り立つことが確認されている。

よくある間違い

- すべての k について $u_k \leq v_k$ であるというだけの理由で $a_n < b_n$ と主張すること。不等式を厳密なまま保つには、真に小さい項が 1 つ（ここでは $k = 2$）必要である。
- $\sum_{k \leq n} n!/k!$ が整数である理由を忘れること。それは、$k \leq n$ のとき $k!$ が $n!$ を割り切るからである。
- 小問 (iv) で、$0 < a_n$ だけ、あるいは $a_n < 1$ だけを使うこと。両方が重要である。$a_n < 1$（小問 (ii) より）によって a_n が小数部分であるとわかり、$a_n > 0$ によって矛盾が得られるのである。

STEP のその先へ

これはフーリエ（Fourier）による e の無理性の証明であり、その型（整数でなければならない量が 0 と 1 の間に厳密にあることを示す）は、π や、有理数 $r \neq 0$ に対する e^r の無理性の証明をはじめ、多くの無理性の証明の雛形となっている。大学で最初に学ぶ解析学（analysis）の講義では、比較判定法と e の級数をきちんと正当化し、$\sum 1/k!$ の収束の速さこそがこの議論を成り立たせていることを学ぶだろう。e は、どんな有理数でもありえないほどきわめて良く分数で近似されるのである。Abbott の *Understanding Analysis* は級数の側面を扱っており、Davenport の *The Higher Arithmetic* は有理近似（rational approximation）へのすばらしい入門書である。

解答例

STEP III 1997、第 8 問

純粋数学 ・ 二次形式の対角化

> **STEP III 1997、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q8

鍵となる考え方

対称行列（symmetric matrix）は二次形式（quadratic form）$ax^2 + 2bxy + cy^2$ を表し、共役をとった行列 $R_{-\alpha} A R_\alpha$ は、座標軸を α だけ回転させた座標で同じ二次形式を表す。この行列を対角行列（diagonal matrix）にすると xy の項が消えるので、新しい座標軸では楕円（ellipse）は標準的な位置にあり、その半軸（semi-axes）の長さをそのまま読み取ることができる。回転（rotation）は原点からの距離を保つので、これらの半軸の長さこそが求めたい距離の最小値と最大値である。

解答

以下を通して、

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad R_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = R_\alpha^{\mathsf{T}}.$$

と書く。

小問 (i)

$C = \cos\alpha$、$S = \sin\alpha$ とおく。まず

$$AR_\alpha = \begin{pmatrix} aC + bS & -aS + bC \\ bC + cS & -bS + cC \end{pmatrix},$$

であり、これに左から $R_{-\alpha}$ を掛けると、右上の成分は

$$\begin{aligned} C(-aS+bC)+S(-bS+cC) &= b(C^2-S^2)-(a-c)SC \\ &= b\cos 2\alpha - \tfrac{1}{2}(a-c)\sin 2\alpha. \end{aligned}$$

となる。A は対称なので、$R_{-\alpha}AR_\alpha = R_\alpha^{\mathsf{T}}AR_\alpha$ も対称である（その転置（transpose）は自分自身に等しい）。よって左下の成分も同じであり、一つの条件で両方が処理できる。この行列が対角行列になるための必要十分条件は

$$\tan 2\alpha = \frac{2b}{a-c} \quad (a \neq c), \qquad \text{したがって} \qquad \alpha = \tfrac{1}{2}\arctan\frac{2b}{a-c}.$$

である（このように α をとればよい）。$a = c$ のときは条件は $b\cos 2\alpha = 0$ となり、$\alpha = \frac{1}{4}\pi$ が条件を満たす（さらに $b = 0$ のときは A がすでに対角行列なので、どの α でもよい）。

小問 (ii)

楕円の方程式を展開すると

$$x^2 + y^2 + 4xy\cot 2\theta + 4x^2\cot^2 2\theta = 1,$$

であり、一方 $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$ である。係数を比較すると

$$a = 1 + 4\cot^2 2\theta, \qquad b = 2\cot 2\theta, \qquad c = 1.$$

を得る。このとき（$0 < 2\theta < \frac{1}{2}\pi$ より）$a - c = 4\cot^2 2\theta \neq 0$ であり、

$$\frac{2b}{a-c} = \frac{4\cot 2\theta}{4\cot^2 2\theta} = \tan 2\theta,$$

となる。よって $\alpha = \theta$ は小問 (i) の条件を満たし、$R_{-\theta}AR_\theta$ は対角行列である。

対角成分については、小問 (i) と同じ掛け算により

$$\text{左上成分} = aC^2 + 2bSC + cS^2, \qquad \text{右下成分} = aS^2 - 2bSC + cC^2,$$

を得る。ただし今度は $C = \cos\theta$、$S = \sin\theta$ である。$k = \cot 2\theta$、$\mu = \cos 2\theta$ とおき、$2SC = \sin 2\theta$、$k\sin 2\theta = \mu$、$C^2 = \frac{1}{2}(1+\mu)$、$S^2 = \frac{1}{2}(1-\mu)$、$k^2 = \mu^2/(1-\mu^2)$ を用いる。右下成分は

$$\begin{aligned} (1+4k^2)S^2 - 2k\sin 2\theta + C^2 &= 1 + 4k^2S^2 - 2\mu \\ &= 1 - 2\mu + \frac{2\mu^2(1-\mu)}{(1-\mu)(1+\mu)} = \frac{(1-2\mu)(1+\mu)+2\mu^2}{1+\mu} \\ &= \frac{1-\mu}{1+\mu} = \frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta} = \tan^2\theta. \end{aligned}$$

となる。まったく同様にして、左上成分は $1+2\mu+\dfrac{2\mu^2}{1-\mu}=\dfrac{1+\mu}{1-\mu}=\cot^2\theta$ である。よって

$$R_{-\theta}AR_\theta=\begin{pmatrix}\cot^2\theta & 0\\ 0 & \tan^2\theta\end{pmatrix}.$$

である。

> **考えてみよう** 計算をやり直さずに、この二つの成分を手早く確かめる方法はあるだろうか？

ある。共役をとってもトレース（trace）と行列式（determinant）は変わらない。ここで $\det A=ac-b^2=1+4k^2-4k^2=1$ であり、実際 $\cot^2\theta\tan^2\theta=1$ となっている。また $\operatorname{tr}A=2+4\cot^2 2\theta$ であり、$\cot\theta-\tan\theta=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2\cot 2\theta$ であるから

$$\cot^2\theta+\tan^2\theta=(\cot\theta-\tan\theta)^2+2=4\cot^2 2\theta+2.$$

となる。

小問 (iii)

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=R_\theta\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ によって新しい座標を導入する。すると X 軸と Y 軸は、もとの座標軸を θ だけ回転させたものになる。$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}R_\theta^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}R_{-\theta}$ であるから、楕円の方程式は

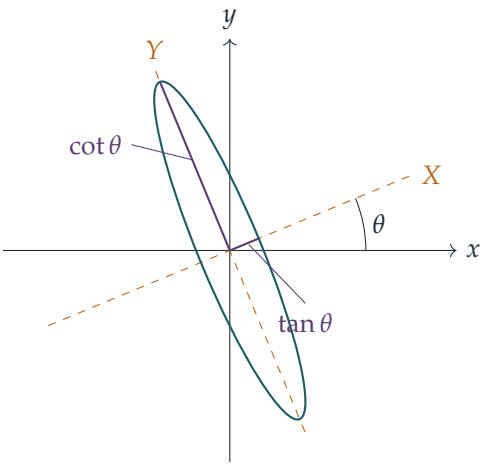
$$\begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}R_{-\theta}AR_\theta\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=1,\qquad\text{すなわち}\qquad X^2\cot^2\theta+Y^2\tan^2\theta=1.$$

となる。これは $(X,Y)\mapsto(-X,-Y)$ に関して対称なので、中心は原点である。回転は長さを保つので、中心から点までの距離は $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{X^2+Y^2}$ である。

$0<\theta<\frac{1}{4}\pi$ より $0<\tan\theta<1<\cot\theta$ であるから、$\tan^2\theta<\cot^2\theta$ である。楕円上の任意の点について

$$\tan^2\theta\,(X^2+Y^2)\ \le\ X^2\cot^2\theta+Y^2\tan^2\theta=1\ \le\ \cot^2\theta\,(X^2+Y^2),$$

が成り立つので、$\tan^2\theta\le r^2\le\cot^2\theta$、すなわち $\tan\theta\le r\le\cot\theta$ である。左側の不等式は $X=0$ のとき、すなわち $(X,Y)=(0,\pm\cot\theta)$ で等号が成り立ち、右側の不等式は $Y=0$ のとき、すなわち $(X,Y)=(\pm\tan\theta,0)$ で等号が成り立つ。どちらの限界も実際に達成されるので、中心から楕円までの距離の最小値と最大値はそれぞれ $\tan\theta$ と $\cot\theta$ であり、示すべきことが示された。



図は $\theta = \frac{1}{8}\pi$ の場合であり、回転させた座標軸を破線で示している。

検算

- $(0, \pm 1)$ は楕円上にあり、$\tan\theta < 1 < \cot\theta$ であるから、求めた限界と矛盾しない。
- $\theta = \frac{1}{8}\pi$ のとき、長軸（major axis）の端点はもとの座標で $\cot\theta\,(-\sin\theta, \cos\theta) = (-\cos\theta, \cos^2\theta/\sin\theta) \approx (-0.924,\ 2.230)$ である。このとき $\cot 2\theta = 1$ であり、$0.924^2 + (2.230 - 1.848)^2 \approx 0.854 + 0.146 = 1$ となって、確かに楕円上にある。
- 数値的にも、いくつかの θ の値について楕円の周りの 200 000 方向を走査したところ、$\theta = 0.3$ では距離の最小値 0.309336、最大値 3.232728 が得られ、$\tan 0.3$ と $\cot 0.3$ に一致した。

よくある間違い

- xy の係数を $2b$ ではなく b と比較してしまう。二次形式は $ax^2 + 2bxy + cy^2$ である。
- どちらの回転をどこに置くかを取り違える。$\mathbf{x} = R_\theta \mathbf{X}$ とすると行ベクトルは $\mathbf{X}^{\mathsf{T}} R_{-\theta}$ となり、これが $R_{-\theta} A R_\theta$ が現れる理由である。
- 係数の大きい方の軸が長い方の軸だと思い込む。$\cot^2\theta X^2$ の方が係数が大きいので、楕円は X 方向に**短い**。

STEP のその先へ

これはスペクトル定理（spectral theorem）の二次元の場合である。すなわち、任意の実対称行列は回転によって対角化でき、その固有値（eigenvalue）が対角成分となる。二次形式の固有値によって二次曲線（conic）や二次曲面（quadric surface）が分類され、同じ考え方から力学における慣性主軸（principal axes of inertia）や統計学における主成分（principal components）が得られる。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、対称行列と二次形式をとても読みやすく扱っている。

解答例

STEP III 1997、第 9 問

力学 ・ 弾性ばねを含む静力学

> **STEP III 1997、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q9

鍵となる考え方

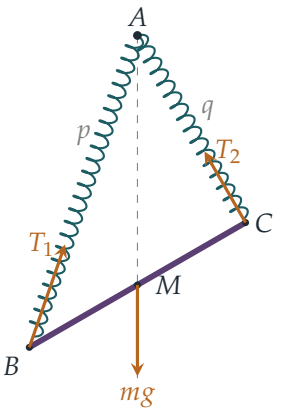
棒にはたらく力は、2 本のばねの張力（tension）と棒の重力の 3 つだけである。互いに平行でない 3 つの力を受けて物体がつり合い（equilibrium）の状態にあるとき、それらの作用線（line of action）は 1 点で交わらなければならない。2 つの張力はどちらも A を通る直線に沿ってはたらくから、重力の作用線も A を通る。したがって、棒の中点は A の真下にある。あとは水平方向への力の分解（resolving horizontally）でほぼ片がつく。

解答

棒を一様（uniform）な剛体（rigid body）とみなし、その質量を m、中点を M とする。ばねは軽く、同じばね定数（spring constant）κ でフックの法則（Hooke's law）に従い、どちらも伸びているとする。ばね AB, AC の自然長（natural length）をそれぞれ a, b、伸びた状態での長さをそれぞれ p, q とすると、張力は

$$T_1 = \kappa(p - a), \qquad T_2 = \kappa(q - b),$$

である。ばねは伸びているので、どちらも正である。



ステップ 1：M は A の真下にある

棒について、A のまわりの力のモーメント（moment）を考える。張力 T_1 は BA に沿って、T_2 は CA に沿ってはたらくので、どちらの作用線も A を通り、A のまわりのモーメントをもたない。よって、M を通って鉛直にはたらく重力も、A のまわりのモーメントが 0 でなければならない。すなわち、M を通る鉛直線は A を通る。したがって M は A の真下にある。A から測った M の深さを $h > 0$ とする。

ステップ 2：水平方向に分解する

A を原点とし、（棒を含む鉛直面内で）水平方向に x 軸、鉛直上向きに y 軸をとる。このとき $M = (0, -h)$ であり、M は BC の中点であるから、ある d, e を用いて

$$B = (-d,\ -h - e), \qquad C = (d,\ -h + e)$$

と書ける。ここで d は棒の水平方向の幅の半分であり、$d \neq 0$ となるのは、ちょうど棒が鉛直でないときである。

ばね AB の張力は、棒の点 B に B から A へ向かう向き、すなわちベクトル $\overrightarrow{BA} = (d,\ h + e)$ の向きにはたらく。このベクトルの長さは p である。よって、この力は $\dfrac{T_1}{p}(d,\ h + e)$ である。同様に、C にはたらく張力は $\dfrac{T_2}{q}(-d,\ h - e)$ である。

水平方向に分解すると

$$\frac{T_1}{p}\,d - \frac{T_2}{q}\,d = 0,$$

となり、$d \neq 0$ であるから

$$\frac{T_1}{p} = \frac{T_2}{q}.$$

考えてみよう 棒が鉛直でないという事実は、正確にはどこで使われたか。

d で割るところだけである。もし棒が鉛直に垂れ下がっていれば、2 本のばねは同じ鉛直線上にあり、水平方向の分解は $0 = 0$ となるだけで、張力の比は鉛直方向のつり合いさえ満たせば何でもよくなる。このような鉛直なつり合いの状態は実際に起こりうるし、その場合には一般に結論は成り立たない。

ステップ 3：フックの法則を用いる

張力を代入すると

$$\frac{\kappa(p-a)}{p} = \frac{\kappa(q-b)}{q} \quad \Longrightarrow \quad 1 - \frac{a}{p} = 1 - \frac{b}{q} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{p} = \frac{b}{q},$$

よって

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b}.$$

伸びた長さの比は自然長の比に等しい。これが示すべきことであった。 ■

念のため鉛直方向に分解すると $\frac{T_1}{p}(h+e) + \frac{T_2}{q}(h-e) = mg$、すなわち $2h\frac{T_1}{p} = mg$ が得られる。これは証明には不要であるが、$T/$長さ の共通の値を定める。

検算

- **解釈。** $p/q = a/b$ であるから、2 本のばねはどちらも同じ倍率で伸びている。つまり、ある $\lambda > 1$ に対して $p = \lambda a$ かつ $q = \lambda b$ である。したがって、2 本のばねは 1 本の一様なばねを比例的に引き伸ばしたかのようにふるまう。答えを覚えるうえで気持ちのよい見方である。
- **数値的確認。** m, κ, a, b と棒の長さを無作為に選び、ポテンシャルエネルギー（potential energy）$mgy_M + \frac{1}{2}\kappa(p-a)^2 + \frac{1}{2}\kappa(q-b)^2$ を数値的に最小化して、つり合いの位置を求めた。たとえば $a/b = 0.709972$ のとき、傾いたつり合いの位置では $p/q = 0.709972$ となり、M は誤差 10^{-7} 以内で A の真下にあった。同じ探索では、$p/q \neq a/b$ となる鉛直なつり合いの位置も見つかった（たとえば $a/b = 1.526$ に対して $p/q = 1.192$）。これは、仮定が必要であることを裏づけている。

よくある間違い

- 張力が等しい、あるいは 2 本のばねが鉛直方向と等しい角をなすと仮定してしまう。どちらも一般には成り立たない。等しくなるのは、張力を長さで割ったものである。
- M のまわりのモーメントを考えて、角度の計算で混乱する。2 つの張力はどちらも A を通るので、A のまわりのモーメントを考えるほうがはるかに見通しがよい。

- 棒が鉛直でないという条件を一度も使わない。完全な答案では、その条件がどこで必要かを明示する。

STEP のその先へ

ここで用いたベクトル $\frac{T}{p}\overrightarrow{BA}$ は、ばねの力を表す自然な書き方である。自然長が 0 のばねは変位ベクトルにちょうど比例する力を及ぼし、このような「理想的な」ばねを用いると、多くのつり合いの問題が線形代数の問題に帰着する。より一般に、つり合いの位置はポテンシャルエネルギーの停留点（stationary point）である。これが今回の数値的確認の背後にある考え方であり、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）の出発点でもある。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、静力学（statics）とエネルギーの観点の両方を丁寧に展開している。

解答例

STEP III 1997、第 10 問

力学 ・ 滑りを伴う転がり

> **STEP III 1997、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q10

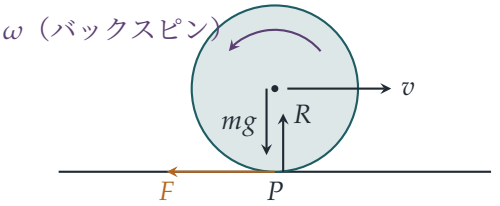
この問題は、*Beyond STEP* の第 11.6 節「**バックスピン**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/backspin.html

鍵となる考え方

重要なのは、ビー玉の底がテーブルの上を滑っているかどうかである。滑っている間は摩擦力（friction）の大きさも向きも一定なので、並進運動も回転運動も等加速度で減速し、正確に式で表すことができる。接触点がテーブルに対して静止した時点で滑りは終わり、その後ビー玉は摩擦力をまったく受けずに転がる。したがって、この問題は結局、$v = 0$、$\omega = 0$、滑り速度（slip velocity）が 0 になること、のうちどれが最初に起こるかという問題である。

解答

モデル化。 ビー玉を質量 m、半径 a の一様な中実球とするので、直径のまわりの慣性モーメント（moment of inertia）は $I = \frac{2}{5}ma^2$ である。中心の速度を v（v_0 の向きを正）とし、角速度（angular velocity）ω は**後ろ向き**の回転を正とする（バックスピン（backspin）を正とする）。すると $v(0) = v_0 > 0$、$\omega(0) = \omega_0 > 0$ である。指は運動を始めさせるだけであり、その後にはたらく力は、重力 mg、垂直抗力（normal reaction）$R = mg$、接触点 P における摩擦力 F である。



バックスピンがあると、ビー玉の底は中心に対して速さ $a\omega$ で前向きに動くので、接触点の速度は

$$s = v + a\omega.$$

である。最初は $s = v_0 + a\omega_0 > 0$ であり、ビー玉はテーブルの上を前向きに滑るので、摩擦力は**後ろ向き**に一定の大きさ F ではたらく。$F = mk$ とおく。

滑っている間の運動方程式。 水平方向の力を考えると $m\dot{v} = -F$ である。中心のまわりのモーメントを考えると、底にはたらく後ろ向きの摩擦力はビー玉を前向きに転がる向きに回すので、バックスピンを減らす：

$$\tfrac{2}{5}ma^2\,\dot{\omega} = -Fa \quad\Longrightarrow\quad \dot{\omega} = -\frac{5k}{2a}.$$

どちらも一定なので、ビー玉が前向きに滑り続ける限り

$$v = v_0 - kt, \qquad a\omega = a\omega_0 - \tfrac{5}{2}kt, \qquad s = v_0 + a\omega_0 - \tfrac{7}{2}kt.$$

である。よって滑り速度は

$$t_1 = \frac{2(v_0 + a\omega_0)}{7k},$$

で 0 になり、それまで摩擦力の向きは変わらないので、途中で v や ω の符号が変わったとしても、これらの式は区間 $0 \le t \le t_1$ 全体で成り立つ。

? **考えてみよう** $t = t_1$ で何が起こるか。また、なぜビー玉はその後、逆向きに滑り始めないのか。

t_1 において接触点は静止しているので $v = -a\omega$ であり、ビー玉は転がっている（rolling）。一定の速さで転がり続けるなら、何かが押す必要はないので、摩擦力（滑りがなくなれば、必要な大きさだけはたらけばよい）は 0 であり、等速で転がることはすべての方程式と矛盾しない。よって t_1 以降、ビー玉は速度

$$V = v(t_1) = v_0 - \tfrac{2}{7}(v_0 + a\omega_0) = \frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7}.$$

で一様に転がる。

小問 (i)

最終的に完全に静止するには、最後の転がりの速度が 0 でなければならない。すなわち $V = 0$ より $5v_0 = 2a\omega_0$、つまり

$$\frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{2}{5}.$$

である。状況が妥当であることを確かめておく。この比のとき、$v = 0$ となるのは $t = v_0/k$、$\omega = 0$ となるのは $t = 2a\omega_0/(5k) = v_0/k$ で同時刻であり、これは t_1 でもある。したがって、並進運動と回転運動はビー玉がまだ滑っている間に同時に消え、その後は静止したままである（滑りがなく、摩擦力もない）。

小問 (ii)

今度は、ビー玉が最終的に速さ $v_0/7$ で後ろ向きに転がらなければならないので、$V = -v_0/7$ である：

$$\frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7} = -\frac{v_0}{7} \quad\Longrightarrow\quad 6v_0 = 2a\omega_0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{1}{3}.$$

この比のとき、v は $t = v_0/k$ で 0 になり、これは $t_1 = 2(v_0 + 3v_0)/(7k) = 8v_0/(7k)$ より前である。この瞬間、ビー玉は一瞬静止するが、まだバックスピン $\omega = \omega_0 - \frac{5v_0}{2a} = \frac{v_0}{2a} > 0$ をもつので、底はなお前向きに滑っており、摩擦力はビー玉を後ろへ引き続ける。t_1 では $v = -v_0/7$、$a\omega = v_0/7$ となるので、ビー玉は求められているとおり、速さ $v_0/7$ で出発点に向かって転がって戻る。

> ? **考えてみよう** t_1 を求めずに V を得る、もっと速い方法はあるか。

ある。運動の直線上にある、テーブル面上の固定点 O のまわりの角運動量（angular momentum）を考える。摩擦力はテーブル面に沿ってはたらくので O のまわりのモーメントをもたず、R と mg のモーメントは打ち消し合う。前向きに転がる向きを正とすると、O のまわりの角運動量は mva（中心の高さは a）からスピンの部分 $\frac{2}{5}ma^2\omega$ を引いたものであり、これが保存される：

$$mv_0a - \tfrac{2}{5}ma^2\omega_0 = maV + \tfrac{2}{5}ma^2 \cdot \frac{V}{a} = \tfrac{7}{5}maV,$$

よって再び $V = (5v_0 - 2a\omega_0)/7$ が得られる。

検算

- スピンがない場合（$\omega_0 = 0$）、式は $V = \frac{5}{7}v_0$ を与える。これは、スピンなしで滑りながら打ち出された球についてのよく知られた結果である。

- $v_0 = 0$ でバックスピンだけの場合、$V = -\frac{2}{7}a\omega_0 < 0$ となる。バックスピンをかけてビー玉をはじいたことがある人なら誰でも知っているとおり、ビー玉は後ろ向きに動く。
- 方程式を数値的に時間発展させると（滑り速度が 0 になったら摩擦力を切る）、$v_0 = 1$、$a\omega_0 = 3$ のとき最終速度 $-0.142857\ldots = -\frac{1}{7}$ が得られ、$v_0 = 2$、$a\omega_0 = 5$ のとき完全に静止する。

よくある間違い

- $v = 0$ の時点で時計を止めてしまうこと。ビー玉が滑らなくなるのは $v + a\omega = 0$ のときだけである。小問 (ii) のように、$v = 0$ のときにまだスピンが残っていることがある。
- トルク（torque）の符号を間違えること。底にはたらく後ろ向きの摩擦力はバックスピンを減らす。
- 転がり始めた後も摩擦力をはたらかせ続けること。滑りがなくなれば、等速運動に摩擦力は必要ないので、摩擦力は 0 になる。

STEP のその先へ

ここでの摩擦力は、クーロン（Coulomb）による滑り摩擦のモデルである。面どうしが滑っている間は大きさが一定で、滑っていないときは（ある限度まで）必要なだけの大きさになる。角運動量を用いた近道は、剛体力学（rigid-body dynamics）における一般的な原理の一例である。すなわち、扱いにくい未知の力がモーメントをもたないように基準点を選ぶのである。スヌーカーやビリヤードの選手は、引き球（screw-back）でまさにこの物理を利用している。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の回転や滑りを伴う転がりをこうした考え方で扱っている。

解答例

STEP III 1997、第 11 問

力学 ・ 剛体の回転

> **STEP III 1997、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q11

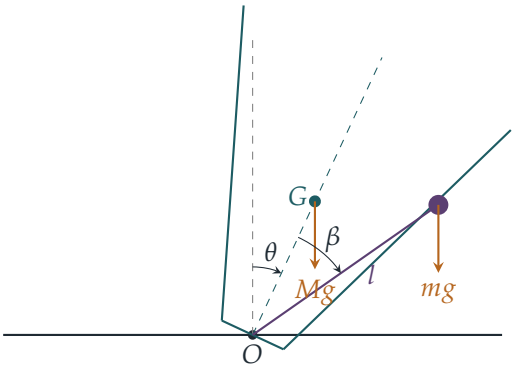
鍵となる考え方

接触している間、鐘と舌（clapper）は同じ点 O のまわりを同じ角速度（angular velocity）で回転するので、両者を引き離しうるのは角**加速度**（angular acceleration）の差だけである。それぞれが単独で動いたらどれだけの角加速度をもつかを考えよう。舌と鐘が離れるのは、自由に振れる鐘の角加速度が、自由な舌の角加速度にちょうど等しくなる瞬間である。そのとき接触力はちょうど 0 であり、角速度はまったく関係しない。

解答

モデル。鐘は O を通る水平な軸のまわりに自由に回転できる剛体（rigid body）であり、その軸のまわりの慣性モーメント（moment of inertia）は Mk^2 である。舌は長さ l の軽い剛体の棒の先についた質量 m の質点であり、やはり O で回転できるように支えられている。支点はなめらかで、空気抵抗はないとする。角度はすべて**上向き**の鉛直方向から測り、軸から見て舌がある側の向きを正とする。鐘の軸 OG の角度を θ とする。両者が接触している間、舌の棒は軸に対して角 β を保つので、その角度は $\theta + \beta$ である。

鐘の内部で、舌の球は倒れようとする側の内壁に寄りかかっている。したがって壁は球を押し戻し（角度が小さくなる向き）、ニュートンの第 3 法則（Newton's third law）により、球は鐘を前へ押す。この接触力（摩擦があればそれも含む）の O のまわりのモーメントを $\Gamma \geq 0$ とする。これは舌には $-\Gamma$、鐘には $+\Gamma$ として作用する。



接触中の運動方程式。それぞれの物体について別々に O のまわりのモーメントをとる（支点での抗力と棒の張力は O のまわりにモーメントをもたない）。

$$\text{舌：}\quad ml^2\ddot{\theta} = mgl\sin(\theta+\beta) - \Gamma,$$
$$\text{鐘：}\quad Mk^2\ddot{\theta} = Mgh\sin\theta + \Gamma.$$

重力 mg は、鉛直方向と角 $\theta+\beta$ をなす直線上で O から距離 l の点に作用するので、そのモーメントは $mgl\sin(\theta+\beta)$ である。G に作用する Mg についても同様である。両者は一緒に動くので、同じ $\ddot{\theta}$ をもつ。

2 式を足すと Γ が消去される。

$$\ddot{\theta} = \frac{g\big(ml\sin(\theta+\beta) + Mh\sin\theta\big)}{ml^2 + Mk^2}.$$

これを舌の方程式に代入して整理すると、

$$\Gamma = \frac{mMgl}{ml^2+Mk^2}\Big(k^2\sin(\theta+\beta) - hl\sin\theta\Big).$$

放した瞬間は $\theta = 0$ で $\Gamma = \dfrac{mMglk^2\sin\beta}{ml^2+Mk^2} > 0$ となるので、当然のことながら、最初は舌が鐘を押している。

考えてみよう 角速度がいくらであっても、ちょうど Γ が 0 に達したときに離れるのはなぜか。

接触力は押すことしかできないので、$\Gamma \geq 0$ でなければならない。$\Gamma > 0$ である間は、自由な舌の角加速度の方が鐘より大きいので、舌は壁に押しつけられ、両者は一緒に動く。両者は同じ点 O のまわりを同じ角速度で回転しているので、球と壁の間にすき間が生じるのは角加速度の差によるほかない。Γ が負になろうとするところで、鐘自身の角加速度 $gh\sin\theta/k^2$ が舌の角加速度 $g\sin(\theta+\beta)/l$ を上回り、壁が球から離れていく。したがって、離れるのは $\Gamma = 0$ となる最初の θ においてである。（括弧内は

$\theta = 0$ で $k^2 \sin\beta > 0$、$\theta = \pi$ で $-k^2 \sin\beta < 0$ であるから、そのような θ は $\theta = \pi$ より前に必ず存在する。）

離れる角度。$\alpha = \theta + \beta$ とおく。これは離れる瞬間に舌の棒が上向きの鉛直方向となす角である。すると $\Gamma = 0$ より

$$k^2 \sin\alpha = hl \sin(\alpha - \beta) = hl(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta).$$

ここで $0 < \alpha < \pi$ より $\sin\alpha \neq 0$ であり、また $\sin\beta \neq 0$ である。$hl\sin\alpha\sin\beta$ で割ると

$$\frac{k^2}{hl\sin\beta} = \cot\beta - \cot\alpha,$$

すなわち

$$\cot\alpha = \cot\beta - \frac{k^2}{hl}\operatorname{cosec}\beta,$$

となり、示すべき式が得られた。どちらの質量も現れないことに注意しよう。

検算

- **短い舌**。$l \to 0$ のとき補正項は発散するので、$\cot\alpha \to -\infty$、$\alpha \to \pi$ となる。これは妥当である。短い振り子は自由な角加速度 $g\sin\alpha/l$ が大きいので、非常に短い棒についた舌は $\sin\alpha$ がほぼ 0 になるまで、つまり両者がほぼ逆さまになるまで鐘を押し続ける。
- **同値な形**。この条件は単に $\dfrac{g\sin\alpha}{l} = \dfrac{gh\sin(\alpha-\beta)}{k^2}$ である。つまり、自由な舌と自由な鐘の角加速度が等しいということである。
- **数値による確認**。$k = 1$、$h = 0.6$、$l = 0.8$、$\beta = 30^\circ$ とすると、公式より $\cot\alpha = \sqrt{3} - 25/6 \approx -2.43$ となり、$\alpha \approx 157.7^\circ$ である。放した瞬間から一体となった運動を数値的に段階を追って積分し、Γ が初めて 0 になったところで止めると、$M/m = 5$ でも $M/m = 500$ でも、小数点以下何桁にもわたって同じ角度が得られる。

よくある間違い

- エネルギー保存則を使って $\dot\theta$ を求め、円運動から「垂直抗力」を求めようとすること。角速度は両方の物体に共通であり、離れるかどうかには関係しない。
- α を上向きの鉛直方向からではなく、鐘の軸から測ってしまうこと。接触している間、棒は軸に対して常に角 β をなすので、$\alpha = \theta + \beta$ である。
- Mk^2 が G のまわりではなく O のまわりの慣性モーメントであることを忘れること。ここでは平行軸の定理（parallel axis theorem）による補正は必要ない。

STEP のその先へ

これは、拘束（constraint）が破れる時点を求める一般的な原理のよい例である。拘束された運動を解き、拘束力を計算し、それが符号を変える点を求めればよい。ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）では、ラグランジュの未定乗数（Lagrange multipliers）を用いてこれを系統的に行う。この乗数は拘束力そのものであることがわかる。同じ考え方から、球面上を滑る質点が面を離れるという古典的な問題も解ける。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は固定軸のまわりの剛体の回転を扱っており、優れた準備となる。

解答例

STEP III 1997、第 12 問

確率・統計 ・ クーポン収集問題

STEP III 1997、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/97-s3-q12

鍵となる考え方

小問 (i) は幾何分布（geometric distribution）であり、その確率母関数（probability generating function）を微分すれば平均（mean）と分散（variance）が得られる：$\mathrm{E}(K) = \mathrm{G}'(1)$ および $\mathrm{E}\big(K(K-1)\big) = \mathrm{G}''(1)$ である。小問 (ii) での工夫は、全種類がそろうまでの長い待ち時間を、**新しい**カード 1 枚ごとの 52 個の短い待ち時間に分割することである。それぞれの短い待ち時間は「初めて表が出るまで硬貨を投げる」試行なので、あとは小問 (i) の結果がすべてを片づけてくれる。

解答

小問 (i)

初めて表が出るのが k 回目の投げであるのは、最初の $k-1$ 回がすべて裏で、k 回目が表であるとき、かつそのときに限る。各回の投げは独立（independent）なので、

$$\mathrm{P}(K = k) = q^{k-1}p, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

したがって

$$\mathrm{G}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}s^k = ps\sum_{j=0}^{\infty}(qs)^j = \frac{ps}{1-qs},$$

となる。ここで等比級数（geometric series）の和を求めたが、これは $|qs| < 1$ のとき収束（converge）する（特に $p > 0$ ならば s が 1 に近いとき収束する）。これが求める結果である。

微分すると、

$$\mathrm{G}'(s) = \frac{p(1-qs)+psq}{(1-qs)^2} = \frac{p}{(1-qs)^2},$$
$$\mathrm{G}''(s) = \frac{2pq}{(1-qs)^3}.$$

$\mathrm{G}'(s) = \sum k\,\mathrm{P}(K=k)s^{k-1}$ かつ $\mathrm{G}''(s) = \sum k(k-1)\mathrm{P}(K=k)s^{k-2}$ であるから、$s=1$ を代入し $1-q=p$ を用いると

$$\mathrm{E}(K) = \mathrm{G}'(1) = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}, \qquad \mathrm{E}\big(K(K-1)\big) = \mathrm{G}''(1) = \frac{2pq}{p^3} = \frac{2q}{p^2}.$$

を得る。よって

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(K) &= \mathrm{E}\big(K(K-1)\big) + \mathrm{E}(K) - \big(\mathrm{E}(K)\big)^2 \\ &= \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q+p-1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.\end{aligned}$$

以上より、$\mathrm{E}(K) = \dfrac{1}{p}$、$\mathrm{Var}(K) = \dfrac{q}{p^2}$ である。

小問 (ii)

ちょうど $i-1$ 種類の異なるカードを見た時点以降、i 種類目の異なるカードが出る回までを含めた引く回数を N_i とする。すると $N_1 = 1$（最初のカードは必ず新しい）であり、

$$N = N_1 + N_2 + \cdots + N_{52}.$$

となる。

> ? **考えてみよう** なぜ各 N_i は K と同じような「初めて表が出る」型の確率変数なのだろうか。

$i-1$ 種類の異なるカードを見た時点で、52 枚のうち $53-i$ 枚はまだ見ていない。復元抽出（drawing with replacement）なので、各回の抽出は過去と独立であり、まだ見ていないカードが出る確率はつねに同じ

$$p_i = \frac{53-i}{52}.$$

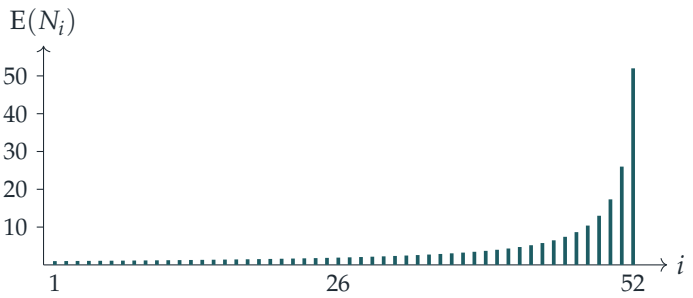
である。このような抽出を「表」と呼ぶことにする。すると N_i は初めて表が出る回までを含めた抽出回数であり、これはまさに $p = p_i$ としたときの小問 (i) の確率変数 K である。したがって

$$\mathrm{E}(N_i) = \frac{1}{p_i} = \frac{52}{53-i}.$$

期待値（expectation）は線形である（このためには N_i たちの独立性は必要ない）から、

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N) &= \sum_{i=1}^{52} \frac{52}{53-i} = 52\left(\frac{1}{52}+\frac{1}{51}+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)\\ &= 52\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{52}\right).\end{aligned}$$

初めのうちの待ち時間は短く、最後の数枚が大部分を占める。最後の 1 枚だけで平均 52 回の抽出を要するのである。



概算するために、$n = 52$ として $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \approx 0.5+\ln n$ を用いる。$\ln 52$ については、$2.7^2 = 7.29$、$7.29^2 \approx 53.1$ より $\mathrm{e}^4 \approx 53 \approx 52$ なので、$\ln 52 \approx 4$ である。したがって

$$\mathrm{E}(N) \approx 52\,(0.5+4) = 52\times 4.5 = 234.$$

つまり、すべてのカードを見るには平均しておよそ 234 回、カードの枚数の約 4.5 倍の抽出が必要である。

検算

- (i) において $\mathrm{G}(1) = p/(1-q) = 1$ であり、確率母関数として当然そうなるべき値になっている。公平な硬貨（$p = \frac{1}{2}$）では $\mathrm{E}(K) = 2$、$\mathrm{Var}(K) = 2$ となる。また $p \to 1$ のとき分散 $q/p^2 \to 0$ となり、最初の投げでほぼ確実に表が出る場合として妥当である。
- 正確な値は $52H_{52} \approx 235.98$ であり、全種類収集を 10^5 回シミュレーションしたところ平均は 235.7 であった。我々の概算値 234 はこれに近い。わずかに小さいのは、近似 $0.5+\ln n$（より精密な近似は $\ln n + 0.577$）と、$\ln 52 \approx 3.95$ を 4 に切り上げたことによる。

よくある間違い

- N_i の成功確率を逆にしてしまうこと。**新しい**カードが出る確率は $(53-i)/52$ であり、集めたカードが増えるにつれて小さくなる。
- $+\mathrm{G}'(1)$ の項を忘れて $\mathrm{Var}(K) = \mathrm{G}''(1) - \mathrm{G}'(1)^2$ としてしまうこと。$\mathrm{G}''(1)$ は $\mathrm{E}(K(K-1))$ であり、$\mathrm{E}(K^2)$ ではない。
- 期待値を足し合わせる前に N_i たちが独立でなければならないと考えること。期待値の線形性（linearity of expectation）は独立性に関係なく成り立つ（ただし、ここでは実際に独立である）。

STEP のその先へ

これは**クーポン収集問題**（coupon collector's problem）である。n 種類が等確率で出るとき、すべてを集めるまでの時間の期待値は $nH_n \approx n\ln n$ である。大学の講義ではさらに進んで、この時間が $n\ln n$ の周りに鋭く集中し、ゆらぎは n のオーダーであることを示す。また確率母関数は、このような独立な確率変数の和を扱う標準的な道具となる。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は母関数と幾何分布を丁寧に扱っている。Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）はクーポン収集問題をさまざまな変形とともに論じている。

解答例

STEP III 1997、第 13 問

確率・統計　・　正規分布の積率母関数

STEP III 1997、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/97-s3-q13

鍵となる考え方

すべては一つの積分に帰着する。それは標準正規分布（standard normal distribution）の積率母関数（moment generating function, mgf）であり、指数部分を平方完成（completing the square）することで求められる。そのあとは、独立性（independence）によって和の積率母関数が積に変わり、積率母関数の一意性（uniqueness）によって分布を読み取ることができる。最後の小問は、形を変えた同じ計算である。$Z = \mathrm{e}^{\mu+\sigma X}$ のべき乗は、X の定数倍の指数関数にすぎない。

解答

小問 (i)

$M(\theta) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta X})$ とおく。このとき

$$M(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\theta x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2-2\theta x)}\,\mathrm{d}x.$$

平方完成すると $x^2 - 2\theta x = (x-\theta)^2 - \theta^2$ であるから、$u = x - \theta$ と置換して

$$M(\theta) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\,\mathrm{d}u,$$

を得る。最後の積分は標準正規分布の確率密度関数（probability density function）の全体での積分であり、その値は 1 である。したがって、任意の実数 θ に対して

$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta X}) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2}.}$$

小問 (ii)

X と Y は独立であるから、$e^{\theta aX}$ と $e^{\theta bY}$ も独立であり、独立な確率変数（random variable）の積の期待値（expectation）はそれぞれの期待値の積に等しい。小問 (i) の θ を $a\theta$ および $b\theta$ に置き換えたものを用いると（Y が X と同じ分布に従うことにも注意して）、

$$\mathrm{E}\big(e^{\theta(aX+bY)}\big) = \mathrm{E}(e^{a\theta X})\,\mathrm{E}(e^{b\theta Y}) = e^{\frac{1}{2}a^2\theta^2}\,e^{\frac{1}{2}b^2\theta^2} = e^{\frac{1}{2}(a^2+b^2)\theta^2}.$$

考えてみよう 積率母関数が一致すれば分布の問題が決着するのはなぜか。

0 の近くのすべての θ で存在する積率母関数は、分布をただ一つに定める。よって $aX+bY$ が X と同じ分布に従うのは、その積率母関数がすべての θ について $e^{\frac{1}{2}\theta^2}$ に等しいとき、すなわち

$$e^{\frac{1}{2}(a^2+b^2)\theta^2} = e^{\frac{1}{2}\theta^2} \quad \text{すべての}\theta.$$

が成り立つときであり、かつそのときに限る。対数をとり、$\theta \neq 0$ を任意に一つ選べば、これが成り立つための必要十分条件は

$$\boxed{a^2+b^2=1.}$$

である。（「必要」の向きは一意性を使わなくても明らかである。$\mathrm{Var}(aX+bY) = a^2+b^2$ は $\mathrm{Var}(X)=1$ に等しくなければならない。）一般に $aX+bY$ は平均 0、分散（variance）a^2+b^2 の正規分布（normal distribution）に従う。たとえば $(X+Y)/\sqrt{2}$ は再び標準正規分布に従う。

小問 (iii)

任意の実数 θ に対して

$$Z^\theta = \big(e^{\mu+\sigma X}\big)^\theta = e^{\mu\theta}\,e^{(\sigma\theta)X},$$

であり、$e^{\mu\theta}$ は定数であるから、小問 (i) の θ を $\sigma\theta$ に置き換えたものにより

$$\mathrm{E}(Z^\theta) = e^{\mu\theta}\,\mathrm{E}\big(e^{(\sigma\theta)X}\big) = e^{\mu\theta}\,e^{\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2} = e^{\mu\theta+\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2},$$

となり、示すべき式が得られた。

$\theta = 1$ とおくと平均が得られる。

$$\boxed{\mathrm{E}(Z) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}.}$$

$\theta = 2$ とおくと $\mathrm{E}(Z^2) = e^{2\mu+2\sigma^2}$ となるから、

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Z) &= \mathrm{E}(Z^2) - \big(\mathrm{E}(Z)\big)^2 = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} \\ &= e^{2\mu+\sigma^2}\big(e^{\sigma^2}-1\big).\end{aligned}$$

検算

- $M(\theta) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2}$ を微分すると $M'(0) = 0$、$M''(0) = 1$ となる。平均 0、分散 1 であり、当然そうなるべき値である。
- $\sigma = 0$ ならば $Z = \mathrm{e}^{\mu}$ は定数である。得られた公式は平均 e^{μ}、分散 0 を与える。
- 数値的には、$\mu = 0.3$、$\sigma = 0.5$ として正規分布の密度関数に対して積分すると $\mathrm{E}(Z) \approx 1.5296$、$\mathrm{Var}(Z) \approx 0.6645$ となり、$\mathrm{e}^{0.425}$ および $\mathrm{e}^{0.85}(\mathrm{e}^{0.25} - 1)$ と一致する。$0.6X + 0.8Y$ のシミュレーションでは標本分散は 1.000 であった。

よくある間違い

- 「X の平均を代入して」$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{e}^{\mu}$ と書いてしまうこと。一般に $\mathrm{E}(g(X)) \neq g(\mathrm{E}(X))$ であり、ここでは指数関数の凸性（convexity）によって平均が因子 $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sigma^2}$ だけ押し上げられる。
- 条件を $a + b = 1$ としてしまうこと。足し合わされるのは係数ではなく分散である。

STEP のその先へ

確率変数 Z は**対数正規分布**（log-normal distribution）に従う。これは、多数の小さなランダムな因子を掛け合わせて成長していく量、たとえばブラック–ショールズモデル（Black–Scholes model）における株価などに対する標準的なモデルである。小問 (ii) は、ある印象的な事実を垣間見せている。すなわち、分散が有限な分布のうち、適切にスケールを調整した和が同じ分布族にとどまるものは本質的に正規分布しかない、という事実であり、これは中心極限定理（central limit theorem）と深く結びついている。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、積率母関数、正規分布、中心極限定理をちょうどこのレベルで扱っている。

解答例

STEP III 1997、第 14 問

確率・統計 ・ 確率変数の積

STEP III 1997、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/97-s3-q14

鍵となる考え方

周囲の長さは縦と横の長さの線形関数（linear function）であるから、その平均（mean）と分散（variance）は独立（independent）な確率変数の和に関する規則からただちに得られる。面積は積であり、独立な確率変数については積の期待値（expectation）は期待値の積に等しい。これを LB と L^2B^2 に適用すれば、平均と分散が求まる。独立でないことを示すには、0 でない共分散（covariance）を見つけるのが最も手際よい。独立な確率変数の共分散は常に 0 だからである。

解答

無作為に選んだ板の縦の長さを L、横の長さを B とする。L と B は独立で、

$$\mathrm{E}(L) = \mu_1, \quad \mathrm{Var}(L) = \sigma_1^2, \qquad \mathrm{E}(B) = \mu_2, \quad \mathrm{Var}(B) = \sigma_2^2.$$

を満たす。周囲の長さを $P = 2(L + B)$、面積を $A = LB$ とする。以下では $\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + [\mathrm{E}(X)]^2$ を繰り返し用いる。特に $\mathrm{E}(L^2) = \mu_1^2 + \sigma_1^2$、$\mathrm{E}(B^2) = \mu_2^2 + \sigma_2^2$ である。

周囲の長さ

期待値の線形性（linearity of expectation）により、

$$\mathrm{E}(P) = 2(\mu_1 + \mu_2).$$

L と B は独立であるから、和の分散は分散の和に等しい。よって

$$\mathrm{Var}(P) = 2^2\big(\mathrm{Var}(L) + \mathrm{Var}(B)\big) = 4(\sigma_1^2 + \sigma_2^2), \qquad \text{標準偏差}(P) = 2\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

面積

L と B は独立であるから $\mathrm{E}(LB) = \mathrm{E}(L)\,\mathrm{E}(B)$ であり、

$$\mathrm{E}(A) = \mu_1\mu_2.$$

分散を求めるには $\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{E}(L^2B^2)$ が必要である。

> **考えてみよう** $\mathrm{E}(L^2B^2)$ もやはり積に分解できるだろうか？

できる。独立な確率変数の関数どうしは独立であるから、L^2 と B^2 は独立であり、$\mathrm{E}(L^2B^2) = \mathrm{E}(L^2)\,\mathrm{E}(B^2)$ となる。したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(A) &= \mathrm{E}(L^2)\,\mathrm{E}(B^2) - \mu_1^2\mu_2^2\\ &= (\mu_1^2+\sigma_1^2)(\mu_2^2+\sigma_2^2) - \mu_1^2\mu_2^2\\ &= \sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2,\end{aligned}$$

であり、

$$\text{標準偏差}(A) = \sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2}.$$

積の分散は単なる $\sigma_1^2\sigma_2^2$ **ではない**ことに注意しよう。一方の辺のばらつきは、もう一方の辺の典型的な大きさによって拡大されるのである。

周囲の長さと面積は独立でない

もし P と A が独立ならば $\mathrm{E}(PA) = \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A)$、すなわち $\mathrm{Cov}(P, A) = 0$ となるはずである。そこで共分散を計算する。まず、

$$\mathrm{E}(PA) = 2\,\mathrm{E}(L^2B) + 2\,\mathrm{E}(LB^2).$$

再び独立性を用いると（今度は L^2 と B の独立性、および L と B^2 の独立性である）、

$$\mathrm{E}(L^2B) = (\mu_1^2+\sigma_1^2)\mu_2, \qquad \mathrm{E}(LB^2) = \mu_1(\mu_2^2+\sigma_2^2).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(P, A) &= \mathrm{E}(PA) - \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A)\\ &= 2\left[(\mu_1^2+\sigma_1^2)\mu_2 + \mu_1(\mu_2^2+\sigma_2^2)\right] - 2(\mu_1+\mu_2)\mu_1\mu_2\\ &= 2\left(\mu_2\sigma_1^2 + \mu_1\sigma_2^2\right).\end{aligned}$$

縦と横の長さは正であるから $\mu_1 > 0$、$\mu_2 > 0$ である。また標準偏差（standard deviation）は 0 でないと与えられているから $\sigma_1^2 > 0$、$\sigma_2^2 > 0$ である。よって $\mathrm{Cov}(P, A) > 0$ である。

独立な確率変数の共分散は 0 であるから、P と A は独立ではありえない。これは直観にも合う。どちらかの方向に平均より大きい板は、周囲の長さも面積も大きくなりやすいからである。

考えてみよう もし共分散が 0 になっていたら、P と A が独立であることが示されたことになるだろうか？

ならない。この含意は一方向にしか成り立たない。独立ならば共分散は必ず 0 になるが、共分散が 0 だからといって独立になるとは限らない。したがって、共分散が 0 でないことは独立でないことを証明し、それこそがここで得られたことである。一方、共分散が 0 であったとしても何もわからなかったはずである。

検算

- L と B を独立とし、それぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で 1 または 3 をとるとする。このとき $\mu_i = 2$、$\sigma_i^2 = 1$ であり、公式から $\mathrm{Cov}(P, A) = 2(2+2) = 8$ が得られる。これは同様に確からしい 4 通りの板を直接数え上げた結果と一致する。独立でないことも直接確かめられる。$\mathrm{P}(P=4) = \mathrm{P}(A=1) = \frac{1}{4}$ であるが、どちらの事象も $L = B = 1$ を意味するので、$\mathrm{P}(P=4 \text{ かつ} A=1) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{16}$ となる。
- $\mu_1 = 5$、$\mu_2 = 3$、$\sigma_1 = 0.7$、$\sigma_2 = 0.4$ としたシミュレーションでは、標準偏差$(A) \approx 2.919$（公式では 2.913）、$\mathrm{Cov}(P, A) \approx 4.56$（公式では 4.54）となった。
- $\sigma_2 \to 0$（横の長さが μ_2 に固定）とすると 標準偏差$(A) \to \mu_2\sigma_1$ となり、$A = \mu_2 L$ の場合として当然の結果になる。

よくある間違い

- $\mathrm{Var}(LB) = \sigma_1^2\sigma_2^2$ としたり、項の欠けた $\mathrm{Var}(LB) = \mathrm{Var}(L)\mathrm{Var}(B) + \ldots$ を書いたりすること。必ず $\mathrm{E}(L^2B^2)$ を経由して計算すること。
- $\mathrm{Var}(2(L+B))$ において係数 2 を 2 乗し忘れること。
- 「どちらも L と B に依存するから」という理由で P と A が独立でないと論じること。それは直観であって証明ではない。決着をつけるのは共分散の計算（あるいは確率が一致しない具体例）である。

STEP のその先へ

無相関（uncorrelated）な確率変数と独立な確率変数の区別は、大学 1 年次の確率論の中心的な話題である。独立性とは同時分布（joint distribution）が積に分解されることを意味し、これはただ 1 つのモーメント（moment）に関する条件よりはるかに強い。また、$\mathrm{Var}(LB)$ の計算は、実験科学のあらゆる場面で用いられる「誤差の伝播（propagation of errors）」の公式の出発点でもある。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、独立性、共分散、確率変数の積を丁寧に扱っている。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

1997 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

