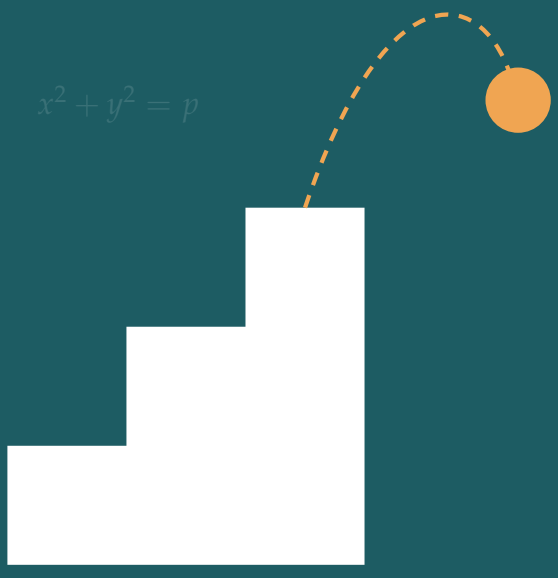
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

1996 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

1996 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

1996 年解答例

1996 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 42 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 円柱の最適化 純粋数学 . . . 3

Q2 ベータ積分 純粋数学 . . . 7

Q3 整数の整除性 純粋数学 . . . 10

Q4 平方完成による積分 純粋数学 . . . 14

Q5 複素数の平方根 純粋数学 . . . 18

Q6 三角関数の和と積分 純粋数学 . . . 22

Q7 一階微分方程式 純粋数学 . . . 26

Q8 循環小数 純粋数学 . . . 30

Q9 弾性ひもとエネルギー 力学 . . . 34

Q10 運動量保存則 力学 . . . 38

Q11 放物運動 力学 . . . 41

Q12 無作為標本の最大値 確率・統計 . . . 44

Q13 離散分布と期待値 確率・統計 . . . 47

Q14 連と条件付き確率 確率・統計 . . . 50

STEP II

Q1 二項級数の係数 純粋数学 . . . 54

Q2 非線形連立方程式 純粋数学 . . . 58

Q3 帰納法によるフィボナッチ数の恒等式 純粋数学 . . . 61

Q4 置換積分 純粋数学 . . . 65

Q5 1 の冪根 純粋数学 . . . 68

Q6 約数の個数 純粋数学 . . . 72

Q7 座標幾何における軌跡 純粋数学 . . . 76

Q8 2 階の微分方程式 純粋数学 . . . 79

Q9 安定性と重心 力学 83
Q10 回転する車輪からの放物運動 力学 88
Q11 単振動 力学 92
Q12 最大値と最小値の分布 確率・統計 97
Q13 格子上のランダムウォーク 確率・統計 100
Q14 積率と中心極限定理 確率・統計 105

STEP III

Q1 双曲線関数の累乗 純粋数学 109
Q2 連立 1 次方程式 純粋数学 113
Q3 半角の置換 純粋数学 117
Q4 積を最大にする分割 純粋数学 121
Q5 倍角の公式 純粋数学 125
Q6 行列の群 純粋数学 129
Q7 解の対称式 純粋数学 133
Q8 メビウス変換 純粋数学 137
Q9 円運動 力学 143
Q10 摩擦のあるつり合い 力学 147
Q11 微小振動 力学 152
Q12 マルコフ連鎖 確率・統計 156
Q13 チェビシェフの不等式 確率・統計 160
Q14 2 状態マルコフ過程 確率・統計 164

解答例

STEP I 1996、第 1 問

純粋数学 ・ 円柱の最適化

> **STEP I 1996、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q1

鍵となる考え方

缶は半径 r と高さ h の 2 つの量で決まる。体積の制約（constraint）を使えばそのうち一方を消去でき、S は r だけの関数となるので、通常の微分（differentiation）によって最小化できる。最適な缶は非常に整った形をしていることがわかる。その形がわかれば、球に関する 2 つの問いはどちらも、軸を含む 1 つの断面を見ることに帰着する。

解答

表面積の最小化

缶の半径を $r > 0$、高さを $h > 0$ とする。このとき

$$V = \pi r^2 h, \qquad S = 2\pi r^2 + 2\pi r h,$$

ここで $2\pi r^2$ は両端の 2 つの円の面積、$2\pi rh$ は側面（曲面）の面積である。V を固定すると $h = V/(\pi r^2)$ であるから、$2\pi rh = 2V/r$ となり、

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, \qquad r > 0.$$

微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{2(2\pi r^3 - V)}{r^2}.$$

これは $r^3 < V/(2\pi)$ のとき負、$r^3 > V/(2\pi)$ のとき正である。よって S は減少したのち増加し、$r > 0$ における最小値をとるのは

$$r^3 = \frac{V}{2\pi}.$$

のときである。これは局所的な最小（極小）であるだけでなく、大域的最小値（global minimum）である。唯一の停留点（stationary point）であり、そこで導関数の符号が $-$ から $+$ に変わるからである。（式からも分かる：$r \to 0^+$ のときも $r \to \infty$ のときも $S \to \infty$ となる。）

この半径では $V = 2\pi r^3$ であるから

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = 2r.$$

最適な缶は、高さと幅（直径）がちょうど等しい。このとき $2V/r = 4\pi r^2$ であるから

$$\begin{aligned} S &= 2\pi r^2 + 4\pi r^2 = 6\pi r^2 = 6\pi \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{2/3} \\ &= 3 \cdot 2\pi \cdot (2\pi)^{-2/3} V^{2/3} = 3\,(2\pi)^{1/3} V^{2/3} = 3\,(2\pi V^2)^{1/3}, \end{aligned}$$

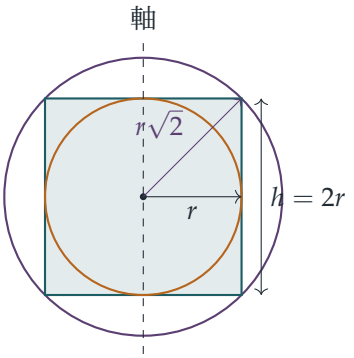
となり、これが求める最小値である。

考えてみよう なぜ h ではなく r で考えるのか？

どちらの変数でもよい。ただし h を消去するほうが簡単である。h はどちらの式にも 1 次でしか現れないので、代入 $h = V/(\pi r^2)$ によって r の簡単な関数が得られるからである。r を消去すると $\sqrt{V/(\pi h)}$ が現れ、計算が煩雑になる。

缶の内部に入る最大の球

以下、缶は $h = 2r$ を満たすとする。軸を含む平面で切ると、断面は $2r \times 2r$ の正方形となる。



缶の内部にある任意の球は半径 $\rho \le r$ をもつ。これを見るには、球を底面の平面に射影すればよい。すると、半径 r の底面の円板の内部にある半径 ρ の円板が得られる。また $2\rho \le h = 2r$ からも同じ評価が得られる。缶の中心を中心とする半径 r の球（断面

図の琥珀色の円）は両端と側面に接するので、缶に収まる。したがって $r^3 = V/(2\pi)$ を用いると、最大の球の体積は

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{4}{3}\pi \cdot \frac{V}{2\pi} = \tfrac{2}{3}V,$$

となり、題意が示された。

缶を含む最小の球

上端の縁上の点と、下端の縁上でそれと直径方向に反対側にある点をとる。これらは正方形の断面の対角にある頂点であるから、その距離は

$$\sqrt{(2r)^2 + h^2} = \sqrt{8r^2} = 2\sqrt{2}\,r.$$

である。缶を含むどの球もこの 2 点を含むので、その直径は $2\sqrt{2}\,r$ 以上、半径は $\sqrt{2}\,r$ 以上である。

> **考えてみよう**　半径 $\sqrt{2}\,r$ の球で実際に十分な大きさであることは、どうすればわかるか？

球の中心を缶の中心 O にとる。缶の任意の点は、軸からの距離が $\rho \le r$ であり、O からの上下方向の高さ z は $|z| \le r$ を満たす。したがって、その点の O からの距離は $\sqrt{\rho^2 + z^2} \le \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}\,r$ である。よって缶全体がこの球の内部にある（紫色の円は正方形の 4 つの頂点すべてを通る）。

したがって、缶が収まる最小の球の半径は $\sqrt{2}\,r$、体積は

$$\tfrac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2}\,r\right)^3 = \tfrac{4}{3}\pi \cdot 2\sqrt{2}\,r^3 = \tfrac{8\sqrt{2}}{3}\pi \cdot \frac{V}{2\pi} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\,V.$$

である。

検算

- $V = 1$ のとき、r の細かい格子上で $2\pi r^2 + 2/r$ を総当たりで最小化すると $S \approx 5.5358$ となり、$3(2\pi)^{1/3} \approx 5.5358$ と一致する。
- 2 つの球の体積比は、半径の比の 3 乗である $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$ になるはずである。実際 $\frac{4\sqrt{2}}{3}V \big/ \frac{2}{3}V = 2\sqrt{2}$ である。
- 大小関係も妥当である：$\frac{2}{3}V < V < \frac{4\sqrt{2}}{3}V \approx 1.886\,V$ であるから、内側の球は缶より小さく、外側の球は缶より大きい。

よくある間違い

- 一方または両方の端を忘れ、$S = \pi r^2 + 2\pi rh$ や $S = 2\pi rh$ と書いてしまう。これでは最適な形が変わってしまう。
- $\mathrm{d}S/\mathrm{d}r = 0$ を示しただけで、その停留点がなぜ最小となるのかを述べない。
- 外側の球の半径を、缶の空間対角線の半分ではなく、r や h としてしまう。

STEP のその先へ

これは制約付き最適化（constrained optimisation）である：$V(r,h)$ を一定に保つという条件のもとで $S(r,h)$ を最小化する。大学では、変数を消去せずにこれを扱うラグランジュ（Lagrange）の未定乗数法（Lagrange multipliers）を学ぶ。条件 $\nabla S = \lambda \nabla V$ からほぼ直ちに $h = 2r$ が得られる。また 2 つの球は、凸体（convex body）の「内接」球と「外接」球の例にもなっており、これらは凸幾何学において中心的な役割を果たす。この種の問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）を参照されたい。

解答例

STEP I 1996、第 2 問

純粋数学 ・ ベータ積分

> **STEP I 1996、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q2

鍵となる考え方

(i) と (ii) の被積分関数（integrand）は、同じ関数を 2 通りに書いたものである：$\alpha x + (1-x) = 1 + (\alpha - 1)x$。したがって、1 つの積分を 2 通りの方法で計算すれば、α の同じ多項式（polynomial）について 2 通りの表示が得られる。小問 (i) からは閉じた形の式が、小問 (ii) からは積分で表された係数が得られ、あとは係数比較（comparing coefficients）をすればよい。部分積分は必要ない。

解答

小問 (i)

$u = 1 + (\alpha - 1)x$ と置換すると $\mathrm{d}u = (\alpha - 1)\,\mathrm{d}x$ であり、$x = 0$ のとき $u = 1$、$x = 1$ のとき $u = \alpha$ である。$\alpha \neq 1$ であるから $\alpha - 1$ で割ってよい：

$$\int_0^1 \big(1 + (\alpha - 1)x\big)^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha - 1}\int_1^\alpha u^n \,\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha - 1}\left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_1^\alpha = \frac{\alpha^{n+1} - 1}{(n+1)(\alpha - 1)},$$

となり、示すべき式が得られる。（$\alpha < 1$ や $\alpha < 0$ の場合でもこの置換は問題ない。置換は 1 次式であり、$\int_1^\alpha u^n \,\mathrm{d}u$ の公式は積分の上端と下端の大小にかかわらず成り立つからである。同じことだが、$\big(1 + (\alpha - 1)x\big)^{n+1} / \big((n+1)(\alpha - 1)\big)$ を微分して確かめてもよい。）

小問 (ii)

αx と $1-x$ を2つの項とみなして、被積分関数を二項定理（binomial theorem）で展開する：

$$\big(\alpha x+(1-x)\big)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha x)^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\alpha^k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

これは有限和であるから項別に積分してよい。x についての積分においては、α は定数である：

$$\int_0^1\big(\alpha x+(1-x)\big)^n\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}\alpha^k\left[\binom{n}{k}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x\right].$$

各括弧の中は α によらない数であるから、これは α についての n 次以下の多項式であり、$0\le k\le n$ に対して α^k の係数は $\binom{n}{k}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x$ である。これが示すべきことであった。

小問 (iii)

(ii) の多項式を $P(\alpha)$ と書く。$\alpha x+(1-x)=1+(\alpha-1)x$ であるから、小問 (i) より、$\alpha\neq 1$ であるすべての α に対して

$$P(\alpha)=\frac{\alpha^{n+1}-1}{(n+1)(\alpha-1)}=\frac{1}{n+1}\big(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n\big),$$

が成り立つ。ここで等比数列の和に関する因数分解 $\alpha^{n+1}-1=(\alpha-1)(1+\alpha+\cdots+\alpha^n)$ を用いた。

> **考えてみよう** この2つの多項式が一致することは、$\alpha\neq 1$ に対してしかわかっていない。それでも係数を比較してよいのはなぜか。

両辺の差は n 次以下の多項式であり、$\alpha\neq 1$ であるすべての α で0になるから、無限に多くの根をもつ。0でない n 次以下の多項式の根は高々 n 個であるから、この差は零多項式であり、すべての係数が一致する。（あるいは、両辺はともに連続であるから、$\alpha=1$ においても一致する、と考えてもよい。）

右辺では、$0\le k\le n$ に対して α^k の係数はすべて $\frac{1}{n+1}$ である。(ii) と比較すると

$$\binom{n}{k}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1},$$

であり、したがって

$$\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}}=\frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)\,n!}=\frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!},$$

となる。これが求める結果である。

検算

- $k=0$ のとき：$\int_0^1 (1-x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$ であり、公式からも $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$ が得られる。
- $n=2$、$k=1$ のとき：$\int_0^1 (x-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1!\,1!}{3!}$。
- 数値的には $\int_0^1 x^2(1-x)^3\,\mathrm{d}x \approx 0.016667 = \frac{1}{60} = \frac{2!\,3!}{6!}$ である。(i) はランダムに選んだ α と n についてシンプソンの公式（Simpson's rule）で確かめ、(iii) は $0 \le k \le n \le 12$ のすべての場合について厳密に確かめた。
- うれしい帰結として、P の係数はすべて等しいから、$\int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x$ は k によらない。

よくある間違い

- (i) が $\alpha \neq 1$ に対してしか証明されていないことに触れずに係数を比較してしまう。多項式（あるいは連続性）について一言述べれば、この穴はふさがる。
- (ii) で $(1+(\alpha-1)x)^n$ を $(\alpha-1)$ のべきで展開してしまう。これでも正しい多項式は得られるが、α のべきの形にはならない。代わりに $\big(\alpha x + (1-x)\big)^n$ を展開すること。

STEP のその先へ

積分 $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x$ はオイラー（Euler）の**ベータ関数**（beta function）$B(a,b)$ であり、ここで得た結果は $B(a,b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$ の整数の場合である。確率の言葉でいえば、p を $[0,1]$ から一様に選び、続いて表の出る確率が p であるコインを n 枚投げるとき、表の枚数が 0 から n までのどの値になることも等しく起こりやすく、それぞれの確率は $\frac{1}{n+1}$ である、ということになる（「係数がすべて等しい」とはまさにこのことである）。これはベイズ（Bayes）自身の有名な論文の出発点である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論の入門書）では、この背後にあるベータ分布とガンマ分布が展開されている。

解答例

STEP I 1996、第 3 問

純粋数学 • 整数の整除性

> **STEP I 1996、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q3

鍵となる考え方

24 のような合成数（composite number）による割り切れやすさを扱うには、素数の冪（prime power）ごとに一つずつ考えるのが最も簡単である。$24 = 3 \times 8$ であり、3 と 8 は互いに素（coprime）であるから、3 で割り切れることと 8 で割り切れることを別々に示せばよい。因数分解（factorisation）すると連続する整数（consecutive integers）の積が現れ、任意の k 個の連続する整数の中には必ず k の倍数が一つ含まれる。残りの二つの小問も同じ習慣で解ける。すなわち、因数分解するか、あるいは n をその余り（remainder）が見える形に書くのである。

解答

小問 (i)

共通因数をくくり出し、平方の差（difference of two squares）の公式を用いると、

$$n^5 - n^3 = n^3(n^2 - 1) = n^3(n-1)(n+1) = n^2\,(n-1)\,n\,(n+1).$$

3 で割り切れること。 $n-1$、n、$n+1$ は連続する三つの整数であるから、そのうちちょうど一つが 3 の倍数である。よって $3 \mid (n-1)n(n+1)$ であり、したがって $3 \mid n^5 - n^3$ である。

8 で割り切れること。 n の偶奇（parity）で場合分けする。

- n が偶数のとき、$n = 2m$ とおくと $n^3 = 8m^3$ であり、これは 8 の倍数である。
- n が奇数のとき、$n-1$ と $n+1$ は連続する二つの偶数である。連続する二つの偶数

のうち一方は 4 の倍数で、もう一方は 2 の倍数であるから、$8 \mid (n-1)(n+1)$ である。

いずれの場合も $8 \mid n^3(n-1)(n+1) = n^5 - n^3$ である。

考えてみよう $3 \mid N$ かつ $8 \mid N$ であることから、なぜ $24 \mid N$ が導かれるのか。$4 \mid N$ かつ $6 \mid N$ からも同じことが言えるだろうか。

3 と 8 には共通因数がないので、$8 \mid N$ ならば $N = 8a$ と書け、このとき $3 \mid 8a$ から $3 \mid a$ が従う（3 は素数であり、8 を割り切らないからである）。よって $N = 24b$ となる。4 と 6 は因数 2 を共有するので、この議論は成り立たない。実際、数 12 はどちらでも割り切れるが、24 では割り切れない。

以上より、すべての正の整数 n に対して $n^5 - n^3$ は 24 で割り切れる。これが示すべきことであった。

小問 (ii)

$2^{2n} = 4^n$ と書く。因数分解 $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$ に $x = 4$ を代入すると、

$$2^{2n} - 1 = 4^n - 1 = (4-1)\left(4^{n-1} + 4^{n-2} + \cdots + 4 + 1\right) = 3\left(4^{n-1} + \cdots + 1\right).$$

括弧の中は整数であるから、$2^{2n} - 1$ は 3 で割り切れる。

同じことを合同式の算術（modular arithmetic）で述べると次のようになる。$4 \equiv 1 \pmod 3$ であるから、$4^n \equiv 1^n = 1 \pmod 3$ である。数学的帰納法（induction）による証明も可能である。$4^k - 1 = 3a$ ならば、$4^{k+1} - 1 = 4(4^k - 1) + 3 = 3(4a + 1)$ となる。

小問 (iii)

$3 \mid n - 1$ であるから、ある整数 $k \geq 0$ を用いて $n = 3k + 1$ と書ける。次のように因数分解する。

$$n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1).$$

第一の因数は $n - 1 = 3k$ である。第二の因数については、

$$\begin{aligned} n^2 + n + 1 &= (9k^2 + 6k + 1) + (3k + 1) + 1 \\ &= 9k^2 + 9k + 3 \\ &= 3(3k^2 + 3k + 1). \end{aligned}$$

したがって、各因数がそれぞれ 3 を一つずつもたらす。

$$n^3 - 1 = 3k \cdot 3(3k^2 + 3k + 1) = 9k(3k^2 + 3k + 1),$$

これは 9 で割り切れる。これが示すべきことであった。（$n = 1$ のときは $k = 0$ であり、$n^3 - 1 = 0$ となるが、これも 9 で割り切れる。）

要点は、$n - 1$ が与える 3 の因数は一つだけであり、二つ目は $n^2 + n + 1$ から来るということである。この二つ目の因数を見るうまい方法は、$n^2 + n + 1 = (n-1)^2 + 3n$ と書くことである。$3 \mid n - 1$ のとき、これは 3 の倍数二つの和になっている。

検算

- 小問 (i)：$n = 2$ のとき $32 - 8 = 24$、$n = 3$ のとき $243 - 27 = 216 = 9 \times 24$ である。$n = 2$ のときちょうど 24 になるので、すべての $n^5 - n^3$ を割り切るこれより大きな数は存在しない。よって 24 は最良である。
- 小問 (ii)：$n = 1, 2, 3$ のとき、それぞれ 3、15、63 となる。
- 小問 (iii)：$n = 4$ のとき $63 = 7 \times 9$、$n = 7$ のとき $342 = 38 \times 9$ であり、それぞれ $k = 1$、$k = 2$ のときの $9k(3k^2 + 3k + 1)$ と一致する。

三つの結果はいずれも、5000 未満のすべての n について（小問 (ii) は $n < 2000$ について）コンピュータで確かめた。また、$n^5 - n^3$ の値の最大公約数（highest common factor）がちょうど 24 であることも確認した。

よくある間違い

- 「$(n-1)n(n+1)$ は 6 で割り切れ、n^2 は ...」と論じて、因数 8 がどこから来るのかを見失うこと。偶数の場合には n だけでなく n^3 が必要である。
- 4 で割り切れることと 6 で割り切れることから、24 で割り切れると結論すること。因数は互いに素でなければならない。
- 小問 (iii) で、「$n - 1$ は 3 で割り切れるので、$n^3 - 1 = (n-1)(\dots)$ は 3 で割り切れる」で止まってしまうこと。これでは 3 の因数が一つしか得られない。

STEP のその先へ

三つの小問はいずれも、本質的には合同式の算術における命題である。m を法とする整数全体は環（ring）をなし、小問 (iii) は $n \equiv 1 \pmod 3$ ならば $n^3 \equiv 1 \pmod 9$ であることを述べている。これは**指数持ち上げ**（lifting the exponent）と呼ばれる一般的な現象の第一歩である。すなわち、$p \mid n - 1$ ならば $p^{j+1} \mid n^{p^j} - 1$ が成り立つ。フェルマー（Fermat）の小定理（Fermat's little theorem）（$n^p \equiv n \pmod p$）は小問 (i) の説

明にもなる。この定理から直ちに $3 \mid n^3 - n$ が得られるからである。Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、これらの考え方への美しい入門書である。

解答例

STEP I 1996、第 4 問

純粋数学 • 平方完成による積分

> **STEP I 1996、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q4

鍵となる考え方

分母に 2 次式が現れたら、平方完成（completing the square）をする：$x^2+2ax+1=(x+a)^2+(1-a^2)$。すべては $1-a^2$ の符号で決まる。正ならば「平方の和」となり、逆正接関数（inverse tangent）が現れる。負ならば平方の差となり、部分分数（partial fractions）に分解できて対数が現れる。本当の作業は、そのあと答えを与えられた形に整理することである。

解答

以下、区間 $[0,1]$ 上の積分を I と書く。平方完成すると

$$x^2+2ax+1=(x+a)^2+1-a^2.$$

$|a|<1$ の場合

$b=\sqrt{1-a^2}>0$ とおく。$u=x+a$ として $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+b^2}=\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{u}{b}$ を用いると

$$I=\frac{1}{b}\left[\tan^{-1}\frac{x+a}{b}\right]_0^1=\frac{1}{b}(\alpha-\beta),\qquad \text{ただし } \alpha=\tan^{-1}\frac{1+a}{b},\quad \beta=\tan^{-1}\frac{a}{b}.$$

（分母は $[0,1]$ 上で常に $b^2>0$ 以上なので 0 にはならず、積分に問題はない。）逆正接をひとつにまとめたいので、$\alpha-\beta$ の正接をとる：

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\dfrac{1+a}{b}-\dfrac{a}{b}}{1+\dfrac{(1+a)a}{b^2}}=\frac{b}{b^2+a+a^2}=\frac{b}{1+a},$$

ここで $b^2+a^2=1$ を用いた。最後に

$$\frac{b}{1+a}=\frac{\sqrt{(1-a)(1+a)}}{1+a}=\sqrt{\frac{1-a}{1+a}},$$

これは $1+a>0$ であるから成り立つ。

? **考えてみよう** $\tan(\alpha-\beta)=t$ から本当に $\alpha-\beta=\tan^{-1}t$ が言えるだろうか？

言えるのは $\alpha-\beta$ が $\tan^{-1}$ の値域 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ に入っているときだけなので、これを確かめなければならない。$(1+a)/b>0$ より $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ であり、また $-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$ である。さらに $\tan^{-1}$ は増加関数で $(1+a)/b>a/b$ なので $\alpha>\beta$ である。よって $0<\alpha-\beta<\pi$。この区間で tan が正となるのは $(0,\frac{\pi}{2})$ 上だけであり、$\tan(\alpha-\beta)>0$ であったから、$0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$ となり

$$I=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\qquad(|a|<1),$$

が示された。

（より鮮やかな見方：$a=\cos\varphi, 0<\varphi<\pi$ とおくと $\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}, \beta=\frac{\pi}{2}-\varphi$ となるので $\alpha-\beta=\frac{\varphi}{2}$ であり、実際 $\sqrt{(1-\cos\varphi)/(1+\cos\varphi)}=\tan\frac{\varphi}{2}$ である。）

$|a|>1$ の場合

$c=\sqrt{a^2-1}>0$ とおく。今度は分母が平方の差になる：

$$x^2+2ax+1=(x+a)^2-c^2=(x+a-c)(x+a+c),$$

部分分数に分解すると

$$\frac{1}{(x+a-c)(x+a+c)}=\frac{1}{2c}\left(\frac{1}{x+a-c}-\frac{1}{x+a+c}\right).$$

この 2 次式の根は $-a\pm c$ である。その積は 1、和は $-2a$ である。

まず $a>1$ と仮定する。このとき（$a^2>a^2-1$ より）$a>c$ なので、$x\geq 0$ において $x+a-c$ と $x+a+c$ はともに正である。よって

$$I=\frac{1}{2c}\left[\ln\frac{x+a-c}{x+a+c}\right]_0^1=\frac{1}{2c}\left(\ln\frac{1+a-c}{1+a+c}-\ln\frac{a-c}{a+c}\right).$$

$(a-c)(a+c)=a^2-c^2=1$ を用いると、どちらの分数も簡単になる：

- $(1+a-c)(a+c)=(a+c)+(a-c)(a+c)=1+a+c$ なので $\dfrac{1+a-c}{1+a+c}=\dfrac{1}{a+c}$；
- $a-c=\dfrac{1}{a+c}$ なので $\dfrac{a-c}{a+c}=\dfrac{1}{(a+c)^2}$。

したがって

$$I = \frac{1}{2c}\big(-\ln(a+c) + 2\ln(a+c)\big) = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}\ln\big(a+\sqrt{a^2-1}\big),$$

ここでは $a+\sqrt{a^2-1} > 0$ でありその絶対値に等しいから、これは問題で述べられた結果である。

では $a < -1$ のときはどうか？ このとき根 $-a \pm c = |a| \pm c$ はともに正で積が 1 なので、小さいほうの根 $|a| - \sqrt{a^2-1}$ は 0 と 1 の間に厳密に含まれる。被積分関数は $[0,1]$ の内部に 1 位の極（simple pole）をもち、根 r の近くでは定数倍の $1/(x-r)$ のように振る舞う。したがって積分は収束（converge）せず、厳密には公式は $a > 1$ に対してのみ成り立つ。（$\ln|\cdot|$ を用いて同じ部分分数の計算をすると、公式が**コーシーの主値**（Cauchy principal value）、すなわち r のまわりの小さな対称な区間を除いた積分の極限を与えることがわかる。問題文の絶対値記号はこれで説明がつく。）

検算

- $a = 0$：積分は $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$ であり、公式は $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$ を与える。
- $a = 2$：シンプソンの公式（Simpson's rule）は 0.380173 を与え、$\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$ と一致する。
- $a \to 1$ のとき、2 つの場合はどちらも $\frac{1}{2} = \int_0^1 (1+x)^{-2}\,\mathrm{d}x$ に近づく。後者については c が小さいとき $\ln(a+c) \approx c$ であり、前者については $\tan^{-1} t \approx t$ かつ $\sqrt{(1-a)/(1+a)}/\sqrt{1-a^2} = 1/(1+a)$ である。

よくある間違い

- 差が $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に入ることを確かめずに $\tan^{-1} A - \tan^{-1} B = \tan^{-1}\frac{A-B}{1+AB}$ と書いてしまう。
- $a < -1$ のとき分母が $[0,1]$ の内部で 0 になることを忘れる。

STEP のその先へ

2 つの答えは、実は a のひとつの関数である。前者で $a = \cos\varphi$、後者で $a = \cosh t$ とおくと $\varphi/(2\sin\varphi)$ と $t/(2\sinh t)$ が得られ、複素数を用いれば（$\cosh t = \cos(\mathrm{i}t)$）一方は他方の解析接続（analytic continuation）になっている。$a < -1$ での発散と主値による救済は、積分路上の極を複素解析（complex analysis）がどう扱うかを初めて垣間

見るものである。これを見るには Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析の入門書）がすばらしい。

解答例

STEP I 1996、第 5 問

純粋数学 ・ 複素数の平方根

> **STEP I 1996、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q5

鍵となる考え方

各小問が次の小問へとつながっている。小問 (i) は有理数部分と無理数部分を比較する問題であり、$4-2\sqrt{3}$ が完全平方（perfect square）であることを教えてくれる。小問 (ii) は複素数の平方根（square root）を求める問題であり、おなじみの「実部と虚部を比較する」という手順を踏むと、小問 (i) に帰着する。小問 (iii) は二次方程式であり、その判別式（discriminant）が小問 (ii) の数のちょうど 4 倍になっていることがわかるので、必要な平方根はすでに手元にあるのである。

解答

小問 (i)

展開すると、

$$(r+s\sqrt{3})^2 = (r^2+3s^2)+2rs\sqrt{3}.$$

これが $4-2\sqrt{3}$ に等しくなるようにしたい。r と s は有理数（rational）であるから、r^2+3s^2 と $2rs$ も有理数である。a,b,c,d を有理数として $a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$ かつ $b\neq d$ であるとすると、$\sqrt{3}=(a-c)/(d-b)$ は有理数となるが、実際にはそうではない。したがって、有理数部分どうしと $\sqrt{3}$ の係数どうしを比較してよい：

$$r^2+3s^2=4, \qquad rs=-1.$$

すると $r\neq 0$ であるから $s=-1/r$ となり、第 1 式は

$$r^2+\frac{3}{r^2}=4 \iff r^4-4r^2+3=0 \iff (r^2-1)(r^2-3)=0.$$

となる。$r^2 = 3$ の場合は $r = \pm\sqrt{3}$ となり、有理数ではない。よって $r^2 = 1$ であり、解は

$$r = 1,\ s = -1 \qquad \text{および} \qquad r = -1,\ s = 1,$$

すなわち $r + s\sqrt{3} = \pm(1 - \sqrt{3})$ である。実際、$(1 - \sqrt{3})^2 = 1 - 2\sqrt{3} + 3 = 4 - 2\sqrt{3}$ となる。

小問 (ii)

$(p + q\mathrm{i})^2 = (p^2 - q^2) + 2pq\,\mathrm{i}$ と展開する。p と q は実数であるから、実部（real part）と虚部（imaginary part）を比較できる：

$$p^2 - q^2 = 3 - 2\sqrt{3}, \qquad pq = 1 - \sqrt{3}.$$

第 2 式から $p \neq 0$ であるので、$q = (1 - \sqrt{3})/p$ かつ $q^2 = (1 - \sqrt{3})^2/p^2 = (4 - 2\sqrt{3})/p^2$ である。これを第 1 式に代入して p^2 を掛けると、

$$p^4 - (3 - 2\sqrt{3})\,p^2 - (4 - 2\sqrt{3}) = 0.$$

考えてみよう これは p^2 についての二次方程式であるが、係数が見るからに厄介である。手早く因数分解する方法はないだろうか。

p^2 についての 2 つの解は、和が $3 - 2\sqrt{3}$、積が $-(4 - 2\sqrt{3})$ でなければならない。-1 を試してみよう。このとき他方の解は $4 - 2\sqrt{3}$ となり、実際 $-1 + (4 - 2\sqrt{3}) = 3 - 2\sqrt{3}$ が成り立つ。したがって

$$\left(p^2 + 1\right)\left(p^2 - (4 - 2\sqrt{3})\right) = 0.$$

p は実数であるから $p^2 \neq -1$ であり、小問 (i) より $p^2 = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$ となる。ゆえに $p = \pm(\sqrt{3} - 1)$、$q = (1 - \sqrt{3})/p = \mp 1$ である。解は

$$p = \sqrt{3} - 1,\ q = -1 \qquad \text{および} \qquad p = 1 - \sqrt{3},\ q = 1.$$

言い換えれば、$(3 - 2\sqrt{3}) + 2(1 - \sqrt{3})\mathrm{i}$ の平方根は $\pm\left((\sqrt{3} - 1) - \mathrm{i}\right)$ である。検算として、$\left((\sqrt{3} - 1) - \mathrm{i}\right)^2 = (4 - 2\sqrt{3}) - 1 - 2(\sqrt{3} - 1)\mathrm{i}$ となり、これは求める数である。

小問 (iii)

解の公式（quadratic formula）により（平方完成（completing the square）は $\mathbb{C}$ 上でも同様にできるので、解の公式は複素数係数でも成り立つ）、

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1 + \mathrm{i})(2\sqrt{3} - 2)}}{2(1 + \mathrm{i})} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (1 + \mathrm{i})(2\sqrt{3} - 2)}}{1 + \mathrm{i}},$$

ここで $\pm\sqrt{\ }$ は 2 つの複素数の平方根を表す。根号の中の量は

$$1-(2\sqrt{3}-2)-(2\sqrt{3}-2)\mathrm{i}=(3-2\sqrt{3})+2(1-\sqrt{3})\mathrm{i},$$

であり、これはまさに小問 (ii) の数である。その平方根は $\pm\big((\sqrt{3}-1)-\mathrm{i}\big)$ であるから、

$$z=\frac{1\pm\big((\sqrt{3}-1)-\mathrm{i}\big)}{1+\mathrm{i}},\quad \text{より}\quad z_1=\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}},\qquad z_2=\frac{(2-\sqrt{3})+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}.$$

分母と分子に $1-\mathrm{i}$ を掛けると（分母は 2 になる）：

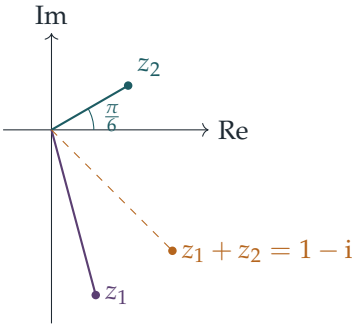
$$z_1=\frac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}=\frac{(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+1)\mathrm{i}}{2},$$
$$z_2=\frac{\big((2-\sqrt{3})+\mathrm{i}\big)(1-\mathrm{i})}{2}=\frac{(3-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)\mathrm{i}}{2}.$$

考えてみよう これは「できるだけ簡単な形」になっているだろうか。どちらかの解をさらに整理できないだろうか。

2 つ目の解は因数分解できる：$(3-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)\mathrm{i}=(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+\mathrm{i})$ であり、$\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$ である。1 つ目については、$|z_1|^2=\frac{1}{4}\big((4-2\sqrt{3})+(4+2\sqrt{3})\big)=2$ であり、$z_1=\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ は $2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$ を $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ で割った商である。よって解は

$$z_1=\tfrac{1}{2}\big((\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+1)\mathrm{i}\big)=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/12},$$
$$z_2=\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+\mathrm{i})=(\sqrt{3}-1)\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/6}.$$

どちらの形（直交座標形式でも極形式（modulus–argument form）でも）も最終的な答えとして十分である。



検算

- 解と係数の関係：$az^2+bz+c=0$ に対して、$z_1+z_2=-b/a=2/(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$ かつ $z_1z_2=c/a=(2\sqrt{3}-2)/(1+\mathrm{i})=(\sqrt{3}-1)(1-\mathrm{i})$ でなければならない。直交

座標形式から $z_1 + z_2 = \frac{1}{2}(2 - 2\mathrm{i}) = 1 - \mathrm{i}$、極形式から $z_1 z_2 = \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4} = (\sqrt{3} - 1)(1 - \mathrm{i})$ となる。どちらも一致する。

- 数値的には $z_1 \approx 0.366 - 1.366\mathrm{i}$、$z_2 \approx 0.634 + 0.366\mathrm{i}$ であり、どちらを $(1 + \mathrm{i})z^2 - 2z + 2\sqrt{3} - 2$ に代入しても、計算機の精度の範囲で 0 となる。

よくある間違い

- 小問 (i) で、$\sqrt{3}$ の係数を比較してよい**理由**を述べ忘れること。これは r, s が有理数であり、$\sqrt{3}$ が無理数（irrational）であることに基づいている。この条件がなければ、実数解は無数に存在する。
- 小問 (ii) で、$p^2 = -1$ を残してしまうこと、あるいは p と q の符号の組合せを誤ること。$pq = 1 - \sqrt{3} < 0$ であるから、符号は逆でなければならない。
- 小問 (iii) で、公式全体を 2 で割る際に誤ること、あるいは分母を実数化せずに $1 + \mathrm{i}$ を分母に残したままにすること。

STEP のその先へ

小問 (i) がうまくいくのは、1 と $\sqrt{3}$ が $\mathbb{Q}$ 上線形独立（linearly independent）であり、$\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{r + s\sqrt{3}\}$ が有理数体上の 2 次元空間のように振る舞うからである。小問 (ii) では、$\mathbb{R}$ 上の 1 と i について同じ考え方を用いている。これは体の拡大（field extension）の出発点であり、大学 1 年次の代数学の講義では、これをガロア理論（Galois theory）へと発展させていく。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）はこの内容を扱っており、Needham の *Visual Complex Analysis*（ヴィジュアル複素解析）は複素数の平方根について美しい幾何学的な見方を与えてくれる。

解答例

STEP I 1996、第 6 問

純粋数学 ・ 三角関数の和と積分

> **STEP I 1996、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q6

鍵となる考え方

与えられた恒等式は、隣り合う項が打ち消し合う和（telescoping sum）になるように作られている。和 $\sum \cos kx$ に $2\sin\frac{1}{2}x$ を掛けると、各項は 2 つの正弦の差になり、隣り合う差どうしが打ち消し合う。f を余弦の和として書いてしまえば、(ii) の一見厄介な積分は 1 つ 1 つの余弦の積分になり、その大部分は $[0,\pi]$ 上で 0 になる。

解答

以下、n は正の整数とする。

小問 (i)

$S=\sum_{k=1}^{n}\cos kx$ とおく。$2\sin\frac{1}{2}x$ を掛け、与えられた公式を各項に用いると、

$$\begin{aligned}2\sin\tfrac{1}{2}x\,S &= \sum_{k=1}^{n}\Big(\sin(k+\tfrac{1}{2})x-\sin(k-\tfrac{1}{2})x\Big)\\ &= \big(\sin\tfrac{3}{2}x-\sin\tfrac{1}{2}x\big)+\big(\sin\tfrac{5}{2}x-\sin\tfrac{3}{2}x\big)+\cdots+\big(\sin(n+\tfrac{1}{2})x-\sin(n-\tfrac{1}{2})x\big)\\ &= \sin(n+\tfrac{1}{2})x-\sin\tfrac{1}{2}x,\end{aligned}$$

となる。途中の項はどれも正の符号と負の符号で 1 回ずつ現れ、打ち消し合うからである。したがって

$$\sin(n+\tfrac{1}{2})x=\sin\tfrac{1}{2}x+2\sin\tfrac{1}{2}x\sum_{k=1}^{n}\cos kx.$$

$0 < x \leq \pi$ のとき $0 < \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}\pi$ であるから $\sin\frac{1}{2}x > 0$ であり、これで割ることができる。よって

$$\mathrm{f}(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos kx,$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

考えてみよう f は $x = 0$ で定義されていない。そもそも $\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ は意味のある積分なのだろうか？

意味がある。小問 (i) より、$0 < x \leq \pi$ において関数 f は余弦多項式（cosine polynomial）$1 + 2\sum\cos kx$ と一致し、この多項式は $[0, \pi]$ 全体で連続である（0 での値は $2n+1$）。[1] 点での値を変えたり未定義のままにしたりしても積分の値は変わらないので、代わりに余弦の和を積分すればよい。

1 つ目の積分。各整数 $k \geq 1$ に対して

$$\int_0^\pi \cos kx\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^\pi = 0,$$

である。$\sin k\pi = 0$ だからである。したがって定数項だけが残り、

$$\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi 1\,\mathrm{d}x + 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi \cos kx\,\mathrm{d}x = \pi.$$

2 つ目の積分。次に

$$\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x + 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi \cos kx\cos x\,\mathrm{d}x.$$

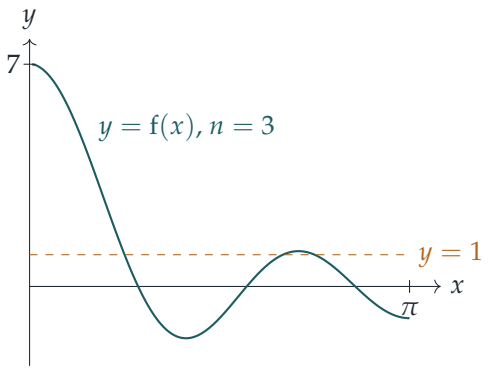
右辺の最初の積分は $[\sin x]_0^\pi = 0$ である。残りの積分には $2\cos kx\cos x = \cos(k+1)x + \cos(k-1)x$ を用いる：

$$2\int_0^\pi \cos kx\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos(k+1)x\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi \cos(k-1)x\,\mathrm{d}x.$$

ここで $k+1 \geq 2$ であるから、最初の積分は上と同様に 0 である。2 番目の積分も $k-1 = 0$ の場合を除いて 0 であり、その場合は被積分関数が 1 となって積分の値は π である。よって $k = 1$ の項だけが寄与し、

$$\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \pi.$$

（もし n が 0 でもよいとすると、$\mathrm{f} \equiv 1$ となり、この積分は 0 になる。$n \geq 1$ であればどの n についても値は π である。）



この図を見ると、1 つ目の答えが n によらない理由がわかる。0 の近くの高い山（高さ $2n+1$）は振動部分によって相殺され、正味の面積は常に定数項の面積 π に等しい。

検算

- $x \to 0$ のとき $\sin(n+\frac{1}{2})x / \sin\frac{1}{2}x \to (2n+1)$ であり、余弦の和の $x=0$ での値は $1+2n$ である。両者は一致する。
- $x = \pi$ では $\mathrm{f}(\pi) = \sin(n+\frac{1}{2})\pi = (-1)^n$ であり、$1 + 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = (-1)^n$ も成り立つ。
- もとの商を $n = 1, \ldots, 7$ について中点則（midpoint rule）で数値積分すると、どちらの積分も 3.14159265… となり、π と一致する。

よくある間違い

- $\sin\frac{1}{2}x$ で割ることの正当化を忘れる。これが 0 でないのは、まさに $0 < x \leq \pi$ だからである。
- すべての k について $\int_0^\pi \cos kx \cos x \,\mathrm{d}x = 0$ と書いてしまい、2 つ目の積分を 0 としてしまう。$k=1$ の項は $\int_0^\pi \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi$ を与える。

STEP のその先へ

関数 f は**ディリクレ核**（Dirichlet kernel）と呼ばれ、フーリエ級数（Fourier series）の理論の中心となる対象である。(ii) の計算は直交性（orthogonality）の例になっている：$\cos kx$ と $\cos mx$ の積を $[0,\pi]$ 上で積分すると、$k=m$ でない限り 0 になる。フーリエ係数はまさにこの方法で取り出され、関数にディリクレ核を掛けて積分すると、その関数のフーリエ級数の第 n 部分和（partial sum）が得られる。これらの部分和が

どのような場合に収束するかについての丁寧な扱いは、Abbott, *Understanding Analysis* を参照するとよい。

解答例

STEP I 1996、第 7 問

純粋数学 ・ 一階微分方程式

> **STEP I 1996、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q7

鍵となる考え方

「量に比例する速さで流れ出る」という記述は、そのまま 1 階（first-order）の微分方程式（differential equation）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky$（ただし $k > 0$）に翻訳でき、その解は指数関数（exponential）である。e^{-k} を一つの数 b とおくと、指数関数は b^t の形になり、同じ置き換え $k = -\ln b$ によって小問 (ii) の方程式も書き直せる。その方程式は線形（linear）なので、積分因子（integrating factor）を用いれば解き切れる。

解答

小問 (i)

水は流れ出るのだから、y は y に比例する速さで減少する：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky \qquad \text{ただし定数} k > 0.$$

タンクに水がある間は $y > 0$ なので、変数分離（separation of variables）ができる：

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int k\,\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad \ln y = -kt + c.$$

$t = 0$ のとき $y = 1$ なので、$c = \ln 1 = 0$ である。したがって

$$y = \mathrm{e}^{-kt} = \left(\mathrm{e}^{-k}\right)^t = b^t, \qquad \text{ただし} b = \mathrm{e}^{-k}.$$

$k > 0$ より $0 < b < 1$ であり、特に求められているとおり $b < 1$ である。後のために次のことに注意しておく：

$$\ln b = -k, \qquad \text{よって} \qquad k = -\ln b > 0.$$

小問 (ii)

流出はまったく前と同じで、同じ定数 k を用いた速さ ky であり、それに加えて水が速さ a で流れ込む。よって正味の変化率は

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a - ky.$$

考えてみよう この方程式には k しか現れないのに、$\ln b$ はどこから出てくるのか。

定数 b は小問 (i) で $b = \mathrm{e}^{-k}$ によって**定義**されたものであり、流出だけを表している。したがってここでも同じ数である。$k = -\ln b$ を代入すると $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a + y\ln b$、すなわち

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\ln b = a,$$

となり、これが求める方程式である。

これは y について線形で、定数係数（constant coefficients）の方程式である。積分因子は

$$\exp\left(-\int \ln b \,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{e}^{-t\ln b} = b^{-t}.$$

両辺に b^{-t} を掛けると、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}b^{-t} = -b^{-t}\ln b$ であるから、左辺はちょうど一つの関数の導関数になる：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(y\,b^{-t}\right) = a\,b^{-t}.$$

積分し、$\int b^{-t}\,\mathrm{d}t = -\dfrac{b^{-t}}{\ln b}$（$\ln b \neq 0$ なので成り立つ）を用いると、

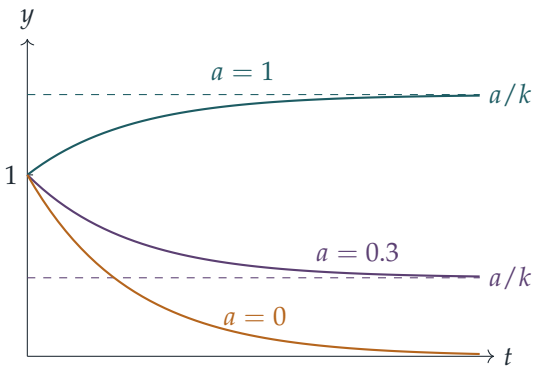
$$y\,b^{-t} = -\frac{a}{\ln b}\,b^{-t} + C.$$

$t = 0$ のとき $y = 1$ なので $1 = -\dfrac{a}{\ln b} + C$ となり、$C = 1 + \dfrac{a}{\ln b}$ を得る。両辺に b^t を掛けて、

$$\begin{aligned} y &= -\frac{a}{\ln b} + \left(1 + \frac{a}{\ln b}\right) b^t \\ &= b^t + \frac{a\,(1 - b^t)}{-\ln b}. \end{aligned}$$

どちらの形でもよい。$-\ln b = \ln(1/b) > 0$ であるから、2 番目の形のほうが読み取りやすい。すなわち、小問 (i) の解 b^t に、流入に由来する正の項が加わったものである。

$t \to \infty$ のとき、$b^t \to 0$（$0 < b < 1$ より）なので、$y \to \dfrac{a}{-\ln b} = \dfrac{a}{k}$ となる。これは平衡（equilibrium）水位であり、そこでは流出 ky が流入 a とちょうど釣り合う。$a > k$ ならタンクはこの水位に向かって満ちていき、$a < k$ ならこの水位に向かって減っていく。



図は $b = \frac{1}{2}$（よって $k = \ln 2 \approx 0.693$）の場合で、$a = 1$、$a = 0.3$ と、比較のための小問 (i) の曲線 $a = 0$ を示している。

検算

- $a = 0$ とおくと、答えは小問 (i) の結果 $y = b^t$ に帰着する。
- $t = 0$ のとき：$y = 1 + \frac{a(1-1)}{-\ln b} = 1$。
- $y = b^t + \frac{a}{\ln b}(b^t - 1)$ を微分すると $y' = b^t \ln b + ab^t$ となり、一方 $y \ln b + a = b^t \ln b + a(b^t - 1) + a = b^t \ln b + ab^t$ であるから、両者は一致する。
- 数値的には、$b = \frac{1}{2}$、$a = 1$、$t = 2$ のとき公式は $y \approx 1.3320$ を与える。ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で微分方程式を数値的に解いても同じ値が得られ、一般に無作為に選んだ a、b、t に対しておよそ 10^{-13} の精度で一致する。

よくある間違い

- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky$ と書いたうえで、流出なのだから k は負でなければならないことを忘れる。$b < 1$ を導くのはこの符号である。
- 小問 (ii) で b を新しい未知数として扱う。b は流出だけで決まるので、$\ln b = -k$ はそのまま引き継がれる。
- $\int b^{-t}\,\mathrm{d}t = -b^{-t}/\ln b$ の符号を誤る。微分して確かめること。

STEP のその先へ

これは最も単純なコンパートメントモデル（compartment model）、すなわち一定の流入と比例的な流出をもつ一つのタンクである。同じ方程式は、一定の速さで血中に点

滴され腎臓によって排出される薬物や、抵抗を通して充電されるコンデンサーも記述する。どの解も平衡値 a/k へ指数関数的に近づいていく。これは安定固定点（stable fixed point）の一例であり、連立微分方程式を学ぶときに中心となる考え方である。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『常微分方程式入門』）は、線形 1 階微分方程式と、このような混合問題を数多く扱っている。

解答例

STEP I 1996、第 8 問

純粋数学 ・ 循環小数

> **STEP I 1996、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q8

鍵となる考え方

循環する数字の並びは、姿を変えた等比級数（geometric series）である。並びが 1 回繰り返されるごとに、直前の並びを右へ k 桁ずらしたものになるので、10^{-k} 倍される。小問 (i) は最も単純な場合である。小問 (ii) では、小数展開を、循環が始まる前の部分（有限小数）と循環する末尾の部分（等比級数）とに分ける。すると、どちらの部分も整数を 10 の累乗または $10^k - 1$ で割ったものになることがわかる。

解答

小問 (i)

並び 38 は 2 桁ごとに繰り返されるので、

$$\begin{aligned} 0.383838\ldots &= \frac{38}{100} + \frac{38}{100^2} + \frac{38}{100^3} + \cdots \\ &= \frac{38/100}{1 - 1/100} = \frac{38}{99}, \end{aligned}$$

となる。ここでは公比（common ratio）$\frac{1}{100}$ の等比級数の和を求めた。$\left|\frac{1}{100}\right| < 1$ であるから、この計算は正当である。$38 = 2 \times 19$ と $99 = 3^2 \times 11$ には共通の素因数がないので、これは既約分数（lowest terms）である：

$$0.383838\ldots = \frac{38}{99}.$$

小問 (ii)

（問題文に印刷された展開 $0\cdot a_1a_2a_2\cdots$ は $0\cdot a_1a_2a_3\cdots$ の誤植である。）各 a_n は 0 から 9 までの数字であり、

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}.$$

この和を $n=N$ のところで分ける。

最初の N 桁　b を、10 進表記の各桁が $a_1a_2\ldots a_N$ である整数（先頭に 0 が並んでもよい）とする。すなわち、

$$b=\sum_{n=1}^{N}a_n10^{N-n}.$$

すると

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{10^n}=\frac{1}{10^N}\sum_{n=1}^{N}a_n10^{N-n}=\frac{b}{10^N}.$$

末尾の部分　すべての $n>N$ に対する条件 $a_{n+k}=a_n$ を繰り返し用いると、すべての $m\geq 0$ と $1\leq j\leq k$ に対して $a_{N+mk+j}=a_{N+j}$ が得られる（m についての数学的帰納法（induction）による。添字 $N+(m-1)k+j$ は N より大きいので、これに k を加えてよい）。したがって、第 N 位より後の展開は、並び $a_{N+1}a_{N+2}\ldots a_{N+k}$ が限りなく繰り返されたものである。c をこれらの数字をもつ整数とする：

$$c=\sum_{j=1}^{k}a_{N+j}10^{k-j}.$$

末尾の部分を k 項ずつのまとまりに分ける。すべての項が非負で、級数が収束（converge）するので、このようにまとめてよい。与えられた $m\geq 0$ に対するまとまりは

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{a_{N+mk+j}}{10^{N+mk+j}}=\frac{1}{10^{N+(m+1)k}}\sum_{j=1}^{k}a_{N+j}10^{k-j}=\frac{c}{10^N}\left(\frac{1}{10^k}\right)^{m+1}.$$

考えてみよう　なぜ各まとまりは、直前のまとまりのちょうど 10^{-k} 倍なのだろうか？

まとまり m からまとまり $m+1$ へ移るとき、使われる数字は（周期性により）同じであるが、それぞれが k 桁だけ右に位置する。そのため各項は 10^k で割られる。これが、循環小数（recurring decimal）に隠れている等比級数である。

公比 $10^{-k}<1$ の等比級数の和を求めると、

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}=\frac{c}{10^N}\cdot\frac{10^{-k}}{1-10^{-k}}=\frac{c}{10^N(10^k-1)}.$$

2 つの部分を合わせる　2 つの部分を足すと、

$$x = \frac{b}{10^N} + \frac{c}{10^N(10^k - 1)},$$

となる。ここで b は最初の N 桁 $a_1 \ldots a_N$ からなる整数、c は 1 周期分 $a_{N+1} \ldots a_{N+k}$ からなる整数である。これが求める形である。

有理数であること　通分すると、

$$x = \frac{b(10^k - 1) + c}{10^N(10^k - 1)}.$$

分子は整数であり、$k \geq 1$ より $10^k - 1 \geq 9$ となるので、分母は正の整数である。したがって x は整数の比であり、x は有理数（rational number）である。

検算

- 小問 (i) は、循環前の部分がなく $k = 2, c = 38$ の場合である。公式から $38/(10^2 - 1) = 38/99$ が得られる。（$N = 1$ とすると $b = 3$、$c = 83$ となり、$\frac{3}{10} + \frac{83}{990} = \frac{380}{990} = \frac{38}{99}$ で、一致する。）
- $0.12345345\ldots$ をとり、$N = 2, k = 3, b = 12, c = 345$ とすると、$\frac{12}{100} + \frac{345}{100 \times 999} = \frac{4111}{33300} = 0.1234534534\ldots$
- さらに、循環前の部分と循環する並びを無作為に 500 通り選び、公式と展開の和とを厳密な計算で比較した。すべて一致した。

よくある間違い

- 末尾の部分に因子 10^{-N} を付け忘れる。循環する並びは第 1 位からではなく、第 $N + 1$ 位から始まる。
- 分母に $10^k - 1$ ではなく 10^k を用いてしまう。等比級数の初項は $c\,10^{-N}$ ではなく $c\,10^{-N-k}$ である。
- (i) で既約分数であることを確かめない。なぜ $\gcd(38, 99) = 1$ なのかを述べること。

STEP のその先へ

逆も成り立つ。すなわち、すべての有理数の小数展開は、ある桁から先で循環する。q で割る筆算では余りが q 通りしかありえないので、いつか同じ余りが繰り返されるか

らである。したがって無理数（irrational number）とは、小数展開がいつまでも循環に落ち着かない実数にほかならない。$1/q$ の周期（period）の長さは、q を法とする 10 の位数（order）と結びついており、これは整数論における群論（group theory）の最初の味見である。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、合同式（congruence）と周期に関するこうした考え方を見事に展開している。

解答例

STEP I 1996、第 9 問

力学 ・ 弾性ひもとエネルギー

> **STEP I 1996、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q9

鍵となる考え方

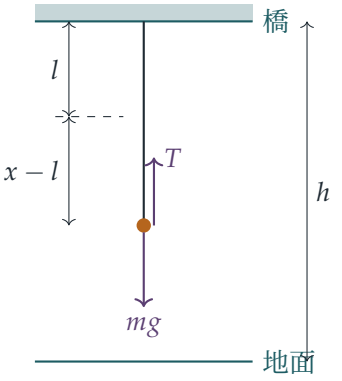
この問題はすべてエネルギーで片づく。仕事をする力は重力とロープの張力（tension）だけであり、どちらも保存力（conservative force）であるから、運動方程式を完全に解く必要はない。「かろうじて地面にぶつからない」とは、ちょうど地面に達した瞬間に速さがゼロになるということである。最大の速さは加速度の符号が変わるところ、すなわち張力が重力とつり合うところで達成される。

解答

飛び降りる人を橋の上で静止状態から出発する質点とみなし、ロープは軽くフックの法則（Hooke's law）に従うものとし、空気抵抗は無視する。落下した距離を x とする。$x \le l$ のときロープはたるんでおり、彼女は自由落下（free fall）している。$x > l$ のとき伸びは $x - l$ であり、フックの法則より張力は

$$T = \frac{mg}{k} \cdot \frac{x - l}{l},$$

であって、ロープには弾性エネルギー（elastic energy）$\dfrac{mg}{k} \cdot \dfrac{(x-l)^2}{2l}$ が蓄えられる。



橋の高さ

最下点では彼女は一瞬静止する。かろうじて地面にぶつからないのだから、この最下点は地面そのもの、すなわち $x = h$ である。明らかに $h > l$ である。もしロープが一度も張らなければ、彼女は自由落下を続け、勢いよく地面にぶつかってしまうからである。橋を離れてから最下点に至るまで、運動エネルギーは始めも終わりもゼロであるから、失われた位置エネルギー（gravitational potential energy）はすべてロープに蓄えられる：

$$mgh = \frac{mg}{k} \cdot \frac{(h-l)^2}{2l}.$$

両辺に $2kl/(mg)$ を掛けると $2klh = (h-l)^2 = h^2 - 2hl + l^2$ となるので

$$h^2 - 2hl(k+1) + l^2 = 0,$$

が示された。解の公式（quadratic formula）より

$$h = l(k+1) \pm l\sqrt{(k+1)^2 - 1} = l\left(k+1 \pm \sqrt{k^2+2k}\right).$$

考えてみよう　どちらの解が求めるものか。また、なぜもう一方の解がそもそも現れるのか。

$k > 0$ より $\sqrt{k^2+2k} > \sqrt{k^2} = k$ であるから、マイナスの符号をとると $h < l(k+1-k) = l$ となる。しかし、エネルギーの式はロープが $h - l$ だけ伸びていると仮定しており、これは $h > l$ のときにしか意味をもたない。余分な解は 2 乗したことから生じたものである。それは、ロープが実際には生み出せない「縮み」に対して同じ $(h-l)^2$ の値を与えるのである。（2 つの解の積は l^2 であるから、一方は l より大きく、他方は小さい。）したがって

$$h = l\left(k+1+\sqrt{k^2+2k}\right).$$

最大の速さ

ロープがたるんでいる間、彼女は下向きに加速度 g で加速する。ロープが張ると、下向きを正としてニュートンの運動の第 2 法則（Newton's second law）より

$$m\ddot{x} = mg - \frac{mg}{k} \cdot \frac{x-l}{l}.$$

これは $x - l < kl$ の間は正であり、その後は負である。よって彼女は伸びが kl になるまで、すなわち張力が重力に等しくなる点まで速さを増し、それ以降は減速する。したがって最大の速さは $x = l + kl$ で達成される。橋からこの点までの力学的エネルギー保存則（conservation of energy）より

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}mv^2 &= mg(l+kl) - \frac{mg}{k} \cdot \frac{(kl)^2}{2l} \\ &= mgl(1+k) - \tfrac{1}{2}mgkl.\end{aligned}$$

2 倍して m で割ると

$$v^2 = 2gl + 2kgl - kgl = (k+2)gl,$$

が示された。

検算

- $k \to 0$ のとき、ロープは非常に硬くなる。このとき $h \to l$（彼女はロープをほとんど伸ばさない）であり、$v^2 \to 2gl$ は距離 l を自由落下した後の速さである。ロープがほぼ即座に彼女を止めるのだから、これは正しい。
- ランダムな k と l に対して運動方程式を数値的に刻んで解くと、最下点と最大の速さは公式と小数第 5 位まで一致する。たとえば $k = 1.5$、$l = 10\,\mathrm{m}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ とすると $h = 10(2.5 + \sqrt{5.25}) \approx 47.9\,\mathrm{m}$、$v^2 = 343$ となり、$v \approx 18.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ である。

よくある間違い

- ロープが張った瞬間に最大の速さになるとしてしまう。その瞬間は張力がゼロなので、彼女はまだ加速している。
- 弾性エネルギーの式で、伸び $x - l$ の代わりに落下距離全体 x を使ってしまう。
- $h > l$ を確かめずに h の 2 つの解を両方残してしまう。

STEP のその先へ

ロープが張った後の運動は、つり合いの伸び kl を中心とする単振動（simple harmonic motion）であり、落下の後半は角振動数 $\sqrt{g/(kl)}$ の正弦曲線の一部となる。このように自由落下と振動子の間で切り替わる区分的な系は、エネルギーの方法や相平面（phase plane）の図が滑らかでない力をどう扱うかを学ぶよい入門となる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このレベルでエネルギー保存と振動を丁寧に展開している。

解答例

STEP I 1996、第 10 問

力学 ・ 運動量保存則

> **STEP I 1996、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q10

鍵となる考え方

使うべき保存則は二つある。運動量は保存される（爆発前は 0 であった）こと、そして爆発後の運動エネルギーが E であることである。質量の分け方がわかれば、この二つから両方の速さが決まるので、相対速度（relative speed）は質量の分け方の関数となる。したがって、それを最小化する問題はただ一つの不等式に帰着し、$m_1 + m_2$ が一定であることから、相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）が自然な道具となる。

解答

二つの部分を質点としてモデル化し、爆発で質量は失われない、すなわち $m_1 + m_2 = M$ であると仮定する。また、爆発の間に外力ははたらかないと仮定する。



運動量。 宇宙船ははじめ静止しているので、全運動量は爆発前に 0 であり、したがって爆発後も 0 である。二つの運動量 $m_1\mathbf{v}_1$ と $m_2\mathbf{v}_2$ は打ち消し合わなければならないから、二つの部分は一直線上をちょうど逆向きに運動し、

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 = p,$$

とおける。ここで $p > 0$ は共通の運動量の大きさである。二つの部分は逆向きに運動するので、その相対速度は確かに $v_1 + v_2$ である。

エネルギー。 爆発後の運動エネルギーはすべて爆発によって生じたものであるから、

$$E = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{p^2}{2m_1} + \frac{p^2}{2m_2} = \frac{p^2(m_1+m_2)}{2m_1m_2} = \frac{p^2M}{2m_1m_2}.$$

よって $p^2 = \dfrac{2Em_1m_2}{M}$ である。

相対速度。 $v_1 = p/m_1$ と $v_2 = p/m_2$ を用いると、

$$v_1 + v_2 = p\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{pM}{m_1m_2},$$

であるから、

$$(v_1+v_2)^2 = \frac{p^2M^2}{m_1^2m_2^2} = \frac{2Em_1m_2}{M}\cdot\frac{M^2}{m_1^2m_2^2} = \frac{2EM}{m_1m_2}.$$

考えてみよう E と M は一定である。自由に変えられるものとして残っているのは何か。また、それをどちらの向きに動かしたいか。

変えられるのは質量の分け方だけであり、$v_1 + v_2$ をできるだけ小さくするには、$m_1 + m_2 = M$ という条件のもとで積 m_1m_2 をできるだけ大きくすればよい。相加平均・相乗平均の不等式より（どちらの質量も正である）、

$$m_1m_2 \le \left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)^2 = \frac{M^2}{4},$$

であり、等号が成り立つのは $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}M$ のときに限る。（同値な言い方をすれば、$m_1m_2 = \frac{1}{4}M^2 - \frac{1}{4}(m_1-m_2)^2$ である。）したがって

$$(v_1+v_2)^2 = \frac{2EM}{m_1m_2} \ge \frac{2EM}{M^2/4} = \frac{8E}{M},$$

であり、速さは負でないから平方根をとってよい。

$$v_1 + v_2 \ge \left(\frac{8E}{M}\right)^{1/2}.$$

この下界は、宇宙船が等しい二つの半分に分かれ、それぞれが速さ $\sqrt{2E/M}$ で運動するときに達成される。よって、相対速度の最小値は $(8E/M)^{1/2}$ であり、これが示すべきことであった。

検算

- 等しく二分した場合：それぞれの運動エネルギーは $\frac{1}{2}E = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}Mv^2$ であるから、$v = \sqrt{2E/M}$ かつ $2v = \sqrt{8E/M}$ となり、下界と一致する。
- 極端な分け方：$m_1 \to 0$ のとき $m_1 m_2 \to 0$ となり、相対速度は限りなく大きくなる。エネルギーの一部を担うごく小さな破片は非常に速く動かなければならないので、これは理にかなっている。
- 単位：E/M の単位は $\mathrm{m^2\,s^{-2}}$ であるから、その平方根は速さである。
- 数値的に、$M = 7$、$E = 3$ として m_1 を $(0,7)$ の範囲で走らせると、相対速度の最小値は $m_1 = 3.5$ のときの $1.85164\ldots$ となり、$\sqrt{24/7} = 1.85164\ldots$ と一致する。

よくある間違い

- 二つの部分がなぜ逆向きに運動するのかを述べ忘れること。相対速度が $|v_1 - v_2|$ ではなく $v_1 + v_2$ になるのは、まさにこのためである。
- $m_1 + m_2 = M$ を用いずに m_1 について最小化しようとすること。この制約条件があるからこそ、問題は一次元になる。
- $(8E/M)^{1/2}$ が下界であることだけを示し、それが実際に（$m_1 = m_2$ のとき）達成されることに触れないこと。

STEP のその先へ

これは重心系（centre-of-mass frame）で考える方法の最も簡単な例である。重心系では、二体への分裂は常に大きさが等しく向きが逆の運動量を生み、運動エネルギーは $p^2/(2\mu)$ となる。ここで $\mu = m_1 m_2/M$ は**換算質量**（reduced mass）である。いまの場合 $(v_1+v_2)^2 = 2E/\mu$ であり、換算質量は二つの質量が等しいときに最大となる。同じ考え方は原子核の崩壊や二体の軌道運動の根底にもある。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、これが丁寧に展開されている。

解答例

STEP I 1996、第 11 問

力学 ・ 放物運動

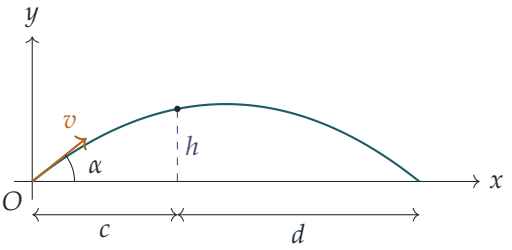
> **STEP I 1996、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q11

鍵となる考え方

投射体（projectile）の経路は放物線（parabola）であり、それが地面と交わる 2 点 $x = 0$ と $x = c + d$ はどちらもわかっている。2 次式は根（roots）によって定数倍を除いて決まるので、軌道（trajectory）はある k を用いて $y = kx(c + d - x)$ と書けるはずである。点 (c, h) によって k が定まり、標準的な軌道の方程式と比較することで、k を $\tan\alpha$ に、さらに v^2 に書き換えることができる。

解答

粒子を重力のみを受けて自由に運動する質点（point mass）としてモデル化し（空気抵抗（air resistance）は無視する）、O を原点とし、x 軸を運動の向きに水平にとり、y 軸を鉛直上向きにとる。射程（range）を $R = c + d$ とおき、$T = \tan\alpha$ とおく。



投射角

初速度の成分を $v\cos\alpha$ と $v\sin\alpha$ とすると、時刻 t における位置は $x = vt\cos\alpha$, $y = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$ である。$t = x/(v\cos\alpha)$ を代入して t を消去すると、軌道

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha}.$$

が得られる。粒子は $x = R$ で着地するので、そこで $y = 0$ である。$R \neq 0$ であるから R で割ってよく、

$$\frac{g}{2v^2\cos^2\alpha} = \frac{\tan\alpha}{R}. \qquad (*)$$

これを軌道の式に代入し直すと、

$$y = Tx - \frac{Tx^2}{R} = \frac{Tx(R-x)}{R}.$$

考えてみよう 点 (c,h) を使う前に $g/(2v^2\cos^2\alpha)$ を置き換えておく価値があるのはなぜか。

$(*)$ によって v が完全に消え、未知数が T ただ 1 つの方程式になるからである。幾何学的には、根 0 と R が見える因数分解された形で放物線を書いたことになる。さて、点 (c,h) は経路上にあり、$R - c = d$ であるから、

$$h = \frac{Tcd}{c+d}, \qquad \text{すなわち、} \qquad \tan\alpha = \frac{h(c+d)}{cd},$$

となり、示すべき式が得られた。

初速の大きさ

$(*)$ を変形し、$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$ を用いると、

$$v^2 = \frac{gR}{2T\cos^2\alpha} = \frac{gR(1+T^2)}{2T} = \frac{g}{2}\left(\frac{R}{T} + RT\right).$$

最初の結果から、$\frac{R}{T} = \frac{cd}{h}$ かつ $RT = \frac{(c+d)^2h}{cd}$ である。したがって

$$v^2 = \frac{g}{2}\left(\frac{cd}{h} + \frac{(c+d)^2h}{cd}\right),$$

となり、問題は解決した。

検算

- 相加・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）により $\frac{R}{T} + RT \geq 2R$ であるから $v^2 \geq gR$ であり、等号が成り立つのはちょうど $T = 1$ のときである。これは、与え

られた速さに対する最大射程が v^2/g であり、それが 45° で達成されるというおなじみの事実である。

- 点 (c, h) が飛行の最高点であれば、$c = d$ かつ $\tan\alpha = 2h/c$ となり、最高点の高さは射程と $\tan\alpha$ の積の 4 分の 1 であるという標準的な結果と一致する。
- 数値的には、$g = 9.81$, $c = 3$, $d = 5$, $h = 2$ とすると、公式から $\tan\alpha = \frac{16}{15}$ と $v^2 \approx 78.64$ が得られる。小さな時間刻みで運動を逐次計算すると、粒子は $x = 3$ で高さ 2.000 を通過し、$x = 8.000$ で着地する。

よくある間違い

- 軌道の方程式の $\cos^2\alpha$ を忘れる、あるいは $\sec^2\alpha$ を $1 + \tan^2\alpha$ ではなく $1 + \tan\alpha$ で置き換えてしまう。
- 「$x = c$ で高さ h」と「$x = c + d$ で高さ 0」という 2 つの方程式を、v と α について直接解こうとする。この方法でも解けるが、先に $(*)$ を使って v を消去するよりも計算がはるかに重くなる。

STEP のその先へ

2 次式をその根を用いて書くという工夫は、ある大きな考え方の小さな例である。すなわち、多項式はその零点によって定数倍を除いて決まるという考え方であり、これは補間（interpolation）や、複素数の範囲での因数定理（factor theorem）へとつながっていく。力学では、v を固定して α を変化させると放物線の族が得られ、その包絡線（envelope）は「安全放物線（parabola of safety）」と呼ばれ、投射体が到達しうるすべての点の境界となる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、投射体の運動とその発展（空気抵抗を含む）を大学 1 年生の水準で扱っている。

解答例

STEP I 1996、第 12 問

確率・統計 ・ 無作為標本の最大値

STEP I 1996、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/96-s1-q12

鍵となる考え方

採点者の選び方は、$\{1,2,\ldots,m\}$ から相異なる n 個の点数からなる**集合**（set）を選ぶことに帰着し、そのような集合はどれも同様に確からしい。したがって、確率は集合の個数を $\binom{m}{n}$ で割ったものになる。最大の点数が k であるということは、点数を一つ確定させ、残りの $n-1$ 個をそれより小さいものの中から選ぶということである。すると、確率の総和が 1 であることから、恒等式（identity）はおのずと得られる。期待値（expectation）については、$k\binom{k-1}{n-1}$ を一つの二項係数（binomial coefficient）に書き直し、同じ恒等式をもう一度使えるようにするのが要点である。

解答

K の分布

採点者は相異なる n 個の点数をつけるので、対称性により、$\{1,\ldots,m\}$ の要素数 n の部分集合はどれも、使われる点数の集合として同様に確からしい。（どの答案にどの点数がつくかは K に影響しない。）そのような部分集合は $\binom{m}{n}$ 個ある。

事象 $K=k$ が起こるのは、集合が k を含み、かつ残りの $n-1$ 個の点数がすべて $\{1,\ldots,k-1\}$ に属するとき、かつそのときに限る。その $n-1$ 個の点数の選び方は $\binom{k-1}{n-1}$ 通りである。これには $k-1\geq n-1$、すなわち $k\geq n$ が必要である。相異なる n 個の正の整数の最大値は n 以上だからである。また、当然 $k\leq m$ である。



（図は $m=10$、$n=4$、$k=7$ の場合である。）よって

$$\mathrm{P}(K=k)=\binom{k-1}{n-1}\Big/\binom{m}{n},\qquad n\le k\le m.$$

恒等式

K は $n, n+1, \ldots, m$ のうちちょうど一つの値をとるから、これらの確率の総和は 1 である：

$$\sum_{k=n}^{m}\binom{k-1}{n-1}\Big/\binom{m}{n}=1\quad\Longrightarrow\quad\sum_{k=n}^{m}\binom{k-1}{n-1}=\binom{m}{n}.$$

これは $1\le n\le m$ を満たす**すべての**整数について成り立ち、次の計算で必要になる。

期待値

定義により

$$\mathrm{E}(K)=\frac{1}{\binom{m}{n}}\sum_{k=n}^{m}k\binom{k-1}{n-1}.$$

> **考えてみよう** 恒等式が再び使えるように、因数 k を消すにはどうすればよいか。

二項係数の中に吸収させればよい：

$$k\binom{k-1}{n-1}=\frac{k\,(k-1)!}{(n-1)!\,(k-n)!}=n\cdot\frac{k!}{n!\,(k-n)!}=n\binom{k}{n}.$$

ここで $\binom{k}{n}=\binom{(k+1)-1}{(n+1)-1}$ である。k が n から m まで動くとき、$j=k+1$ は $n+1$ から $m+1$ まで動く。そこで、恒等式を n、m の代わりに $n+1$、$m+1$ として用いると（$1\le n+1\le m+1$ なので許される）、

$$\sum_{k=n}^{m}\binom{k}{n}=\sum_{j=n+1}^{m+1}\binom{j-1}{(n+1)-1}=\binom{m+1}{n+1}.$$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(K)&=\frac{n\binom{m+1}{n+1}}{\binom{m}{n}}=n\cdot\frac{(m+1)!}{(n+1)!\,(m-n)!}\cdot\frac{n!\,(m-n)!}{m!}\\&=\frac{n(m+1)}{n+1}.\end{aligned}$$

検算

- $n = m$ のとき：すべての点数が使われるので、確実に $K = m$ であり、実際 $\frac{m(m+1)}{m+1} = m$ となる。
- $n = 1$ のとき：K はただ一つの点数で、$\{1, \ldots, m\}$ 上の一様分布に従い、平均は $\frac{m+1}{2}$ となって一致する。
- $m = 6$、$n = 2$ のとき：$\{1, \ldots, 6\}$ から選ぶ 15 組をすべて書き出すと $\mathrm{E}(K) = \frac{70}{15} = \frac{14}{3}$ となり、公式からも $\frac{2 \cdot 7}{3} = \frac{14}{3}$ が得られる。また、$1 \leq n \leq m \leq 9$ のすべての場合について、すべての部分集合を書き出して分布、恒等式、平均を確かめた。
- 答えのうまい見方：選ばれた n 個の点数は、残りの $m - n$ 個の点数を $n + 1$ 個のすき間に分け、それぞれのすき間の大きさの期待値は等しく $\frac{m-n}{n+1}$ である。よって $\mathrm{E}(K) = m - \frac{m-n}{n+1} = \frac{n(m+1)}{n+1}$ となる。

よくある間違い

- 分子では答案への点数の割り当てを順序つきで数え、分母では順序なしの集合を数えてしまう（あるいはその逆）。一貫していればどちらの数え方でもよい。因数 $n!$ が約分されるからである。
- $\binom{k-1}{n-1}$ の代わりに $\binom{k}{n}$ を使ってしまう。これは点数がすべて k **以下**である集合の個数であり、最大の点数が k に**等しい**集合の個数ではない。

STEP のその先へ

この恒等式はパスカルの三角形（Pascal's triangle）の「ホッケースティック恒等式」（hockey-stick identity）であり、ここでは同じものを二通りに数えるという、組合せ論の標準的な手法で証明した。K は非復元抽出による無作為標本の最大値であり、**順序統計量**（order statistic）の一例である。「ドイツ戦車問題」（German tank problem）はこの問題を逆にして、観測された K から m を推定するものである。$\mathrm{E}(K) = \frac{n(m+1)}{n+1}$ を m について解くと、不偏推定量（unbiased estimator）$\frac{n+1}{n}K - 1$ が得られる。順序統計量や数え上げによる議論についてさらに知りたければ、Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）を参照されたい。

解答例

STEP I 1996、第 13 問

確率・統計 ・ 離散分布と期待値

> **STEP I 1996、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q13

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.11 節「**切手、カップ、そして** e」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/stamps-and-e.html

鍵となる考え方

このゲームは最初に予想を外した時点で終わるので、$N = k$ とは「カップが $2, 3, \ldots, k-1$ 個のときにはすべて当て、k 個のときに外す」ということである。これらの確率を掛け合わせると分母に階乗（factorial）が現れる。和の中に階乗があれば、指数関数の級数（exponential series）$\mathrm{e}^x = \sum x^n/n!$ が登場する強い兆候である。期待値（expectation）を求める際のコツは、k の因数を $k!$ と約分して、各和を $\sum 1/n!$ の添字をずらしたものにすることである。

解答

N の分布（distribution）

c 個のカップがかき混ぜられると、ジムは実質的に無作為に予想することになるので、当たる確率は $1/c$、外れる確率は $1 - 1/c$ である。各回で新たにかき混ぜるので、各回の試行は独立（independent）である。

カップは常に少なくとも 2 個あるので、$N \geq 2$ である。$k \geq 2$ に対して、事象 $N = k$ が起こるのは、ジムがカップ $2, 3, \ldots, k-1$ 個のときに正しく予想し、k 個のときに外

す場合であり、かつその場合に限る。独立性より、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(N=k) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{k-1}\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{(k-1)!}\cdot\frac{k-1}{k}\\ &= \frac{k-1}{k!}, \qquad k=2,3,4,\ldots\end{aligned}$$

（$k=2$ のときは正解の確率の積は空積であり、当然そうあるべきように $\frac{1}{2}$ が得られる。）

これと同値な簡潔な形にも注目しておく価値がある。$N>k$ とは、ジムがカップ $2,\ldots,k$ 個のときにすべて当てたということなので、

$$\mathrm{P}(N>k) = \frac{1}{k!} \qquad (k\geq 1).$$

実際 $\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}=\frac{k-1}{k!}$ であり、上の公式と一致する。$k\to\infty$ のときこれは 0 に収束するので、ゲームは確率 1 で終了し、確率の総和は 1 になる。

期待値

k を $k!$ と約分すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N) &= \sum_{k=2}^{\infty} k\cdot\frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-2)!}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!} = \mathrm{e},\end{aligned}$$

ここで $j=k-2$ とおき、$\mathrm{e}^x=\sum_{j\geq 0}x^j/j!$ に $x=1$ を代入した。これが求める結果である。

分散（variance）

> **考えてみよう** ここで和を計算しやすい二次モーメント（second moment）はどちらか。$\mathrm{E}(N^2)$ か、それとも $\mathrm{E}\big(N(N-1)\big)$ か。

どちらでもうまくいく。$k^2\,\mathrm{P}(N=k)=k\cdot\frac{k(k-1)}{k!}$ の因数 $k(k-1)$ がすでにきれいに約分できるからである。計算すると

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N^2) &= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^2(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{k}{(k-2)!} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{j+2}{j!}\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j-1)!} + 2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!} = \mathrm{e}+2\mathrm{e} = 3\mathrm{e},\end{aligned}$$

となる。途中の段階では、$\sum j/j!$ の $j=0$ の項は 0 であり、$j \geq 1$ に対して $j/j! = 1/(j-1)!$ であることを用いた。したがって

$$\mathrm{Var}(N) = \mathrm{E}(N^2) - \big(\mathrm{E}(N)\big)^2 = 3\mathrm{e} - \mathrm{e}^2 = \mathrm{e}(3-\mathrm{e}) \approx 0.766.$$

検算

- 確率 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{30}, \ldots$ の総和は 1 になる。これは裾の形 $\mathrm{P}(N > k) = 1/k!$ からわかる。
- 裾の公式を用いると $\mathrm{E}(N) = \sum_{k\geq 0} \mathrm{P}(N > k) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \mathrm{e}$ となり、同じ答えに独立な経路で到達できる。
- $\mathrm{e} < 3$ なので、分散は当然そうあるべきように正である。厳密な和からは $\mathrm{E}(N) = 2.71828\ldots$、$\mathrm{Var}(N) = 0.76579\ldots$ が得られ、400 000 回のゲームのシミュレーションでは平均 2.720、分散 0.767 が得られた。

よくある間違い

- 分布を $k=1$ から始めてしまう。最初からカップは 2 個あるので、$N \geq 2$ である。
- 外れた予想に対応する最後の因数 $1 - \frac{1}{k}$ を忘れて $1/(k-1)!$ としてしまう。この「確率」の総和は 1 ではなく $\mathrm{e} - 1$ になる。
- $\big(\mathrm{E}(N)\big)^2$ を引くべきところを、$\mathrm{Var}(N) = \mathrm{E}(N^2) - \mathrm{E}(N)$ と書いてしまう。

STEP のその先へ

裾の和の公式 $\mathrm{E}(N) = \sum_{k\geq 0} \mathrm{P}(N > k)$ は、$\{0, 1, 2, \ldots\}$ に値をとる任意の確率変数に対して成り立ち、大学 1 年で学ぶ標準的な道具である。今回のように、面倒な期待値の計算を 1 行の計算に変えてくれることが多い。すべてのモーメントをよりすっきりとまとめる方法として、確率母関数（probability generating function）$G(s) = \mathrm{E}(s^N)$ がある。この問題では $G(s) = 1 + (s-1)\mathrm{e}^s$ となり、$G'(1) = \mathrm{e}$ と $G''(1) = 2\mathrm{e}$ から平均と分散がただちに得られる。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、まさにこの精神で母関数を展開している。

解答例

STEP I 1996、第 14 問

確率・統計 ・ 連と条件付き確率

> **STEP I 1996、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q14

鍵となる考え方

現在の連（run）がどのように終わるかで条件を付ける。コインの面が変われば、それ以前に起きたことはすべて無関係になる。古い連は途切れ、新しい連の長さは 1 である。したがって、表が出た後に裏が現れた瞬間、ゲームは「再出発」し、そのときの状態は最初の投げが裏であった場合とまったく同じになる。逆の場合も同様である。こうして、2 つの未知数に関する 2 つの一次方程式が得られる。

解答

$x = \mathrm{P}(A \mid H)$、$y = \mathrm{P}(A \mid T)$ とおく。各投げは常に互いに独立（independent）である。また $r, s \geq 1$ とする。

$\mathrm{P}(A \mid H)$ の方程式

最初の投げが表であったとする。このとき長さ 1 の表の連があり、裏の連はまだ始まっていない。続く $r-1$ 回の投げ（2 回目から r 回目まで）を見る。

- それらがすべて表であれば（その確率は p^{r-1}）、r 回目の投げで長さ r の表の連が完成する。裏は一度も出ていないので、長さ s の裏の連が先に起きることは決してなく、A が起こる。
- そうでなければ（その確率は $1-p^{r-1}$）、表の連が長さ r に達する前に、$2, \ldots, r$ 回目の投げの中で裏が現れる。最初のそのような裏の時点で、表の連は r に達することなく途切れており、それより前に裏は出ていないので、長さ s の裏の連もまだ起きていない。このとき手元にあるのはちょうど長さ 1 の裏の連であり、それより前

のものは今後のどの連にも寄与しない。

> **考えてみよう** その裏以降で A が起こる確率が、なぜちょうど $\mathrm{P}(A \mid T)$ になるのか。

最初の投げが裏であった後の状況は、長さ 1 の裏の連があり、進行中の表の連はなく、今後の投げは過去と独立である、というものである。これはまさに、上の 2 番目の場合における最初の裏の時点での状況と同じである。後の投げは前の投げと独立であり、2 つの連のどちらが先に起きるかは現在の連と今後の投げだけで決まるので、その時点からの A の条件付き確率（conditional probability）は y である。よって、全確率の法則（law of total probability）により

$$\mathrm{P}(A \mid H) = p^{r-1} + \left(1 - p^{r-1}\right)\mathrm{P}(A \mid T),$$

となり、$\alpha = r - 1$ である。

$\mathrm{P}(A \mid T)$ の方程式

最初の投げが裏であったとする。2 回目から s 回目までの投げを見る。

- すべて裏であれば（確率 q^{s-1}）、表が出る前に長さ s の裏の連が完成するので、A は起こらない。
- そうでなければ（確率 $1 - q^{s-1}$）、裏が s 回連続する前に表が現れる。その表の時点では、長さ 1 の表の連があり、進行中の裏の連はない。これは最初の投げが表であった後の状況とまったく同じである。したがって、そこから A が起こる確率は x である。

ゆえに

$$\mathrm{P}(A \mid T) = \left(1 - q^{s-1}\right)\mathrm{P}(A \mid H),$$

となり、$\beta = s - 1$ である。

（端の場合もこれに合う。$r = 1$ のとき、最初の方程式は $x = 1$ を与えるが、1 回の表がすでに長さ r の連であるから正しい。$s = 1$ のとき、2 番目の方程式は $y = 0$ を与える。）

方程式を解く

2 番目の方程式を最初の方程式に代入すると

$$x = p^{r-1} + \left(1 - p^{r-1}\right)\left(1 - q^{s-1}\right)x.$$

ここで

$$1 - \left(1 - p^{r-1}\right)\left(1 - q^{s-1}\right) = p^{r-1} + q^{s-1} - p^{r-1}q^{s-1},$$

であり、これは正である（$q^{s-1}(1-p^{r-1}) \geq 0$ であるから、$0 < p < 1$ のときこれは $p^{r-1} > 0$ 以上である）。したがってこれで割ってよい。$D = p^{r-1} + q^{s-1} - p^{r-1}q^{s-1}$ とおくと

$$\mathrm{P}(A \mid H) = \frac{p^{r-1}}{D}, \qquad \mathrm{P}(A \mid T) = \frac{p^{r-1}\left(1-q^{s-1}\right)}{D}.$$

最後に、$\mathrm{P}(H) = p$、$\mathrm{P}(T) = q$ として全確率の法則を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= p\,\mathrm{P}(A \mid H) + q\,\mathrm{P}(A \mid T)\\ &= \frac{p^{r-1}\left(p+q-q^{s}\right)}{D}\\ &= \frac{p^{r-1}\left(1-q^{s}\right)}{p^{r-1}+q^{s-1}-p^{r-1}q^{s-1}},\end{aligned}$$

となる。ここで $p+q=1$ を用いた。

検算

- 対称性：公平なコインで $r = s$ ならば、答えは $\frac{1}{2}$ になるはずである。$p = q = \frac{1}{2}$、$r = s = n$ とすると、分子は $2^{1-n}(1-2^{-n})$、分母は $2^{2-n} - 2^{2-2n} = 2 \cdot 2^{1-n}(1-2^{-n})$ であり、$\frac{1}{2}$ が得られる。
- 小さな場合：$r = 1$ のとき $\mathrm{P}(A) = 1 - q^s$ となる。これは最初の s 回の投げがすべて裏ではない確率であり、正しい。
- $p = \frac{1}{2}$、$r = 3$、$s = 2$ のとき、公式から $\mathrm{P}(A \mid H) = \frac{2}{5}$、$\mathrm{P}(A \mid T) = \frac{1}{5}$、$\mathrm{P}(A) = \frac{3}{10}$ が得られる。これは完全なマルコフ連鎖（Markov chain）を厳密に解くことで確かめ、また 200 000 回のゲームのシミュレーションでは 0.298 となった。

よくある間違い

- p^{r-1} の代わりに p^r を用いること。最初の表はすでに与えられているので、必要なのはあと $r-1$ 回だけである。
- $\mathrm{P}(A)$ には最後に p と q による重み付けが必要であることを忘れること。条件付き確率だけでは答えにならない。

STEP のその先へ

この議論はマルコフ連鎖の**第一段階解析**（first-step analysis）である。状態は「現在の面と連の長さ」であり、再出発の性質はマルコフ性（Markov property）にほかならな

い。同じ方法で、表と裏のどんなパターンについても吸収確率（absorption probability）や期待待ち時間（expected waiting time）を求めることができ、さらに Penney のゲーム（Penney's game）へとつながる。このゲームでは、意外なことに、あるパターンが別のパターンに勝つ。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、マルコフ連鎖と第一段階解析をちょうどよい水準で扱っている。

解答例

STEP II 1996、第 1 問

純粋数学 ・ 二項級数の係数

> **STEP II 1996、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q1

鍵となる考え方

三つの括弧の積における係数は、各括弧から一つずつ項を選び、その次数の和が目標の次数になるような選び方すべてにわたる和である。(i) では、これは有限個の場合を注意深く整理して数え上げることを意味する。(ii) では、係数 $1, -2, 3, -4, \ldots$ が $(1+x)^{-2}$ の係数であることに気づける。そして括弧に追加された項は、x^6 の係数において打ち切り（truncation）の影響が見えなくなるためにちょうど必要な項になっている。

解答

小問 (i)

括弧を $P(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k x^k$ と書く。ただし

$$a_k = (-1)^k (k+1), \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

とする。三つの因数から $a_p x^p$、$a_q x^q$、$a_r x^r$ を選んだとき、それが x^6 に寄与するのは $p+q+r = 6$ のときであり、かつそのときに限る。よって求める係数（coefficient）は

$$\sum_{\substack{p+q+r=6 \\ 0 \le p,q,r \le 4}} a_p a_q a_r.$$

である。どの項も符号は $(-1)^{p+q+r} = (-1)^6 = +1$ であるから、符号は無視して積 $(p+1)(q+1)(r+1)$ を足し合わせればよい。

考えてみよう 指数の選び方を漏れなく、また重複なく数えるにはどうすればよいか。

和が 6 で各成分が 4 以下であるような順序を考えない三つ組 $\{p,q,r\}$ を列挙し、それぞれについて、三つの（区別できる）括弧から取り出す順序の数を掛ければよい。順序の数は、成分がすべて異なれば 6 通り、ちょうど二つが等しければ 3 通り、三つすべてが等しければ 1 通りである。

指数	積 $(p+1)(q+1)(r+1)$	順序の数	寄与
$4,2,0$	$5\cdot3\cdot1=15$	6	90
$4,1,1$	$5\cdot2\cdot2=20$	3	60
$3,3,0$	$4\cdot4\cdot1=16$	3	48
$3,2,1$	$4\cdot3\cdot2=24$	6	144
$2,2,2$	$3\cdot3\cdot3=27$	1	27

これで可能性はすべて尽くされている。最大の成分は 4、3、2 のいずれかであり（$3\times1<6$ であるからこれより小さくはなりえず、また 4 を超えることもできない）、最大の成分それぞれについて、残りを二つのより小さな部分に分ける方法をすべて列挙したからである。足し合わせると

$$90+60+48+144+27=369,$$

となり、x^6 の係数は $\boxed{369}$ である。

小問 (ii)

今度は括弧が $Q(x)=\sum_{k=0}^{6}(-1)^k(k+1)x^k$ である。$|x|<1$ で成り立つ二項展開（binomial expansion）により

$$(1+x)^{-2}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)x^k,$$

が得られる。$\binom{-2}{k}=\frac{(-2)(-3)\cdots(-k-1)}{k!}=(-1)^k(k+1)$ だからである。したがって $Q(x)$ は、$(1+x)^{-2}$ の展開を x^6 の項までで打ち切ったものである。すなわち、あるべき級数（power series）$R(x)$ を用いて

$$(1+x)^{-2}=Q(x)+x^7R(x)$$

と書ける。

考えてみよう 欠けている残りの部分 $x^7R(x)$ が、3 乗における x^6 の係数に影響しないのはなぜか。

3 乗すると

$$(1+x)^{-6} = Q(x)^3 + 3Q(x)^2\,x^7R(x) + 3Q(x)\,x^{14}R(x)^2 + x^{21}R(x)^3.$$

となる。第 1 項以外の項はどれも x^7 にべき級数を掛けたものなので、x^7 より低い次数の x のべきを含まない。よって $Q(x)^3$ における x^6 の係数は、$(1+x)^{-6}$ における x^6 の係数に等しい。（言い換えれば、指数の和が 6 になる積では、どの因数からも次数 7 以上の項が使われることはない。）

再び二項展開により

$$\binom{-6}{6} = \frac{(-6)(-7)(-8)(-9)(-10)(-11)}{6!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{720} = \binom{11}{5} = 462.$$

である。したがって $Q(x)^3$ における x^6 の係数は $\boxed{462}$ である。

検算

小問 (ii) は小問 (i) の独立な検算にもなる。二つの括弧の違いは $-6x^5$ と $7x^6$ の項だけなので、$462 - 369$ は、これらのいずれかを使う寄与すべての合計になるはずである。$7x^6$ を使う項では、残り二つの括弧から 1 を取らなければならない。位置は 3 通りで、それぞれ 7 を与えるから、合計は 21 である。$-6x^5$ を使う項では、残り二つの括弧から $-2x$ と 1 を取らなければならない。並べ方は $3\times 2 = 6$ 通りで、それぞれ $(-6)(-2)(1) = 12$ を与えるから、合計は 72 である。実際、$21 + 72 = 93 = 462 - 369$ となっている。コンピュータで 3 乗を展開すると、直接 369 と 462 が得られる。

よくある間違い

- 順序の数え忘れ：指数 $4, 2, 0$ は三つの括弧から 1 通りではなく 6 通りの方法で現れうる。
- 小問 (i) で、成分に 5 や 6 を含む三つ組を入れてしまう。この括弧は x^4 で終わっている。
- 項ごとに符号を気にしてしまう：指数の和は常に 6 なので、寄与はすべて正である。

STEP のその先へ

(ii) の議論は**形式的べき級数**（formal power series）の理論の出発点である。級数は収束（convergence）をまったく考えることなく係数ごとに掛け合わせることができ、積における x^n の係数は、各因数の x^n までの項だけで決まる。このように数列をその母関数（generating function）を通して扱うことは、強力な数え上げの道具である。たとえば、$(1-x)^{-m}$ における x^n の係数は、n を m 個の非負整数の順序付きの和として表す方法の数を数えている。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）には、この種の展開を扱う STEP 形式の演習がさらに収められている。

解答例

STEP II 1996、第 2 問

純粋数学 ・ 非線形連立方程式

> **STEP II 1996、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q2

鍵となる考え方

これらの方程式は x, y, z について線形（linear）ではないが、どの項もわずか三つの積 yz, zx, xy のいずれかである。この三つの積を未知数とみなせば、連立方程式（system of equations）は三つの線形方程式となり、消去法（elimination）で解くことができる。三つの積をすべて掛け合わせると $(xyz)^2$ が得られ、xyz をそれぞれの積で順に割れば、個々の変数が求まる。

解答

姿を変えた連立一次方程式

次のようにおく。

$$a = yz, \qquad b = zx, \qquad c = xy.$$

すると三つの方程式は次のようになる。

$$2a + b - 5c = 2, \tag{1}$$

$$a - b + 2c = 1, \tag{2}$$

$$a - 2b + 6c = 3. \tag{3}$$

(2) より $a = 1 + b - 2c$ である。これを (1) に代入すると

$$2(1 + b - 2c) + b - 5c = 2 \quad \Longrightarrow \quad 3b - 9c = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = 3c.$$

(3) に代入すると

$$(1 + b - 2c) - 2b + 6c = 3 \quad \Longrightarrow \quad -b + 4c = 2.$$

$b = 3c$ と合わせると $c = 2$ が得られ、したがって $b = 6$、$a = 1 + 6 - 4 = 3$ である。係数行列（coefficient matrix）の行列式（determinant）は $-3 \neq 0$ であるから、これがこの連立一次方程式の**唯一の**解である。

$$yz = 3, \qquad zx = 6, \qquad xy = 2.$$

$xyz = \pm 6$ を示す

三つの積をすべて掛け合わせると

$$(yz)(zx)(xy) = x^2y^2z^2 = (xyz)^2 = 3 \times 6 \times 2 = 36,$$

となるので、求めるとおり $xyz = 6$ または $xyz = -6$ である。

> **考えてみよう** これで xyz と、yz, zx, xy のそれぞれがわかった。x 単独の値はどうすれば得られるだろうか？

どの積も零ではないので、x, y, z のいずれも零ではなく、割り算をしてよい。

$$x = \frac{xyz}{yz}, \qquad y = \frac{xyz}{zx}, \qquad z = \frac{xyz}{xy}.$$

とりうる値

$xyz = 6$ ならば、$x = 6/3 = 2$、$y = 6/6 = 1$、$z = 6/2 = 3$ である。

$xyz = -6$ ならば、$x = -2$、$y = -1$、$z = -3$ である。

以上の各段階はすべて必然的に導かれたものであるから、これらが唯一の候補である。そして両者ともともとの方程式を満たす（方程式には二つの変数の積しか現れないので、三つの変数すべての符号を反転させても方程式は変わらない）。よって

$$(x, y, z) = (2, 1, 3) \quad \text{または} \quad (x, y, z) = (-2, -1, -3).$$

検算

$(2, 1, 3)$ を代入すると $yz = 3, zx = 6, xy = 2$ であるから、左辺はそれぞれ $6 + 6 - 10 = 2$, $3 - 6 + 4 = 1$, $3 - 12 + 12 = 3$ となる。三つとも一致する。$|p| \leq 12, 1 \leq q \leq 4$ を満たす分数 p/q からなるすべての三つ組についてコンピュータで探索したところ、ちょうど上の二つの解が見つかった。また、厳密な計算により、この連立一次方程式がただ一つの解 $(a, b, c) = (3, 6, 2)$ をもつことも確かめられる。

よくある間違い

- $(xyz)^2 = 36$ の平方根を変数ごとに別々にとり、たとえば $x = \pm 2, y = \pm 1, z = \pm 3$ と独立に書いてしまう。これでは三つ組が八つできるが、実際に成り立つのは二つだけである。xyz の符号は一つに定まるので、各符号は連動しているのである。
- 負の根を忘れて、$(2, 1, 3)$ だけを答えてしまう。

STEP のその先へ

扱いにくい式に新しい名前をつけて非線形（nonlinear）の問題を線形の問題に変えるという工夫は、対数をとって $y = Ae^{kx}$ のような曲線をデータに当てはめることから、置換（substitution）によって微分方程式（differential equation）を解くことまで、いたるところで使われている。連立方程式が線形になりさえすれば、行列と行列式によって解が一意かどうかがただちにわかる。これは線形代数（linear algebra）の最初の講義の出発点である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、まさにこの精神で消去法と行列式を展開している。

解答例

STEP II 1996、第 3 問

純粋数学 ・ 帰納法によるフィボナッチ数の恒等式

STEP II 1996、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/96-s2-q3

鍵となる考え方

ここで示すことはすべて漸化式（recurrence relation）から導かれるので、数学的帰納法（induction）を用いるのが自然である。積 $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$ については、隣り合う値どうしを比べるのがこつである。漸化式を一度使うと、各値は直前の値の -1 倍になる。加法公式（addition formula）については、k に関する帰納法を用い、その際に仮定が**すべての** n について同時に成り立つものとしておくのが巧みなやり方である。こうしておけば、n の代わりに $n+1$ として仮定を適用できる。

解答

最初のいくつかの値

$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ を $n = 1, 2, 3$ として用いると、

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1, \qquad F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2, \qquad F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3,$$

となり、求める結果を得る。さらに続けると、

$$F_5 = 3 + 2 = 5, \qquad F_6 = 5 + 3 = 8, \qquad F_7 = 8 + 5 = 13.$$

積 $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$

$n \geq 1$ に対して $C_n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$ とおく。値の表から次を得る。

n	1	2	3	4	5	6
$F_{n+1}F_{n-1}$	$1\cdot 0$	$2\cdot 1$	$3\cdot 1$	$5\cdot 2$	$8\cdot 3$	$13\cdot 5$
F_n^2	1	1	4	9	25	64
C_n	-1	1	-1	1	-1	1

値の符号が交互に変わるので、次のように予想する。

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad \text{すべての} n \geq 1.$$

考えてみよう 漸化式だけを用いて、C_n から C_{n+1} へ移るにはどうすればよいか。

C_{n+1} の中で添字の大きいほうを展開する。$n \geq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 \\ &= (F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}^2 && (\text{漸化式による} F_{n+2}) \\ &= F_n^2 - F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) \\ &= F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} && (\text{ここで} F_{n+1} - F_n = F_{n-1}、\text{ただし} n \geq 1) \\ &= -C_n. \end{aligned}$$

これで帰納法はただちに完成する。基底段階（base case）は $C_1 = F_2F_0 - F_1^2 = 0 - 1 = -1 = (-1)^1$ である。ある $n \geq 1$ について $C_n = (-1)^n$ ならば、$C_{n+1} = -C_n = (-1)^{n+1}$ となる。したがって、帰納法により

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad \text{すべての} n \geq 1.$$

加法公式

各正の整数 k に対し、$P(k)$ を次の命題とする。

$$F_{n+k} = F_kF_{n+1} + F_{k-1}F_n \qquad \text{すべての正の整数} n.$$

基底段階 $k = 1$。右辺は $F_1F_{n+1} + F_0F_n = 1\cdot F_{n+1} + 0 = F_{n+1}$ であり、これは左辺に等しい。よって $P(1)$ は成り立つ。

帰納段階（*inductive step*）。ある $k \geq 1$ について $P(k)$ が成り立つと仮定し、n を任意の正の整数とする。

考えてみよう 仮定は F_{n+k} についての主張だが、必要なのは F_{n+k+1} である。仮定にはどの n を代入すればよいか。

$P(k)$ はすべての正の整数について成り立つので、$(n+1)+k = n+(k+1)$ であることに注意して、n の代わりに $n+1$ として適用できる。

$$\begin{aligned} F_{n+(k+1)} = F_{(n+1)+k} &= F_k F_{n+2} + F_{k-1}F_{n+1} && (P(k)\text{ を用いる、代入値}n+1) \\ &= F_k\big(F_{n+1}+F_n\big) + F_{k-1}F_{n+1} && (\text{漸化式による}F_{n+2}) \\ &= \big(F_k + F_{k-1}\big)F_{n+1} + F_k F_n \\ &= F_{k+1}F_{n+1} + F_k F_n && (\text{漸化式、}k \geq 1). \end{aligned}$$

これはまさにこの n に対する $P(k+1)$ であり、n は任意であった。よって帰納法により、すべての正の整数 k について $P(k)$ が成り立つ。すなわち、

$$F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1}F_n \qquad \text{すべての正の整数}n,k,$$

となり、求める結果を得る。

（別の方法として、n を固定して k に関する二段階の帰納法を用いることもできる。$k=1$ と $k=2$ を確かめ、$k-1$ と k に対する式を足し合わせればよい。どちらの方法でもよいが、上の方法では基底段階が一つで済む。）

検算

- $n=6$ でのカッシーニの恒等式：$F_7F_5 - F_6^2 = 13\cdot 5 - 64 = 1 = (-1)^6$。
- $n=3$、$k=4$ での加法公式：$F_7 = 13$ であり、$F_4F_4 + F_3F_3 = 9+4 = 13$。
- $k=n$ とおくと $F_{2n} = F_n(F_{n+1}+F_{n-1})$ を得る。$n=3$ のとき、これは $F_6 = 2\cdot(3+1) = 8$ である。

積の公式は $1 \leq n < 150$ について、加法公式はすべての $1 \leq n,k < 90$ について、コンピュータで確認した。

よくある間違い

- 符号を逆にしてしまう。$C_1 = -1$ であるから、答えは $(-1)^n$ であって $(-1)^{n+1}$ ではない。
- 加法公式で、n を固定して k に関する帰納法を行いながら、仮定を $n+1$ に対して用いてしまう。これが正当なのは、仮定がすべての n について述べられている場合に限る。
- $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$ を用いる際に、$n \geq 1$ が必要であることに触れない。

STEP のその先へ

二つの恒等式はいずれも、一つの行列（matrix）の事実の影である。すなわち $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix}$ である。行列式（determinant）をとれば積の公式（カッシーニの恒等式（Cassini's identity））がただちに得られ、$M^{n+k} = M^k M^n$ と書けば加法公式が得られる。カッシーニの恒等式からは、隣り合うフィボナッチ数（Fibonacci numbers）が互いに素（coprime）であることもわかり、さらに加法公式と組み合わせると、$\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m,n)}$ という目を見張る結果を証明できる。この種の整数論を探究するには、ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）がよい出発点であり、ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（『線形代数入門』）では固有値（eigenvalue）を通してフィボナッチ数が扱われている。

解答例

STEP II 1996、第 4 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP II 1996、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q4

鍵となる考え方

平方根 $\sqrt{1+x}$ と $\sqrt{1-x}$ は、$x=\cos t$ と置くことを強く示唆している。半角の公式（half-angle formulae）によって $1\pm\cos t$ が完全平方になるからである。根号が消えれば、和 $\cos\theta+\sin\theta$ は一つの余弦にまとまり、分母全体は $1+\cos$(何か) の形になって、これもまた完全平方になる。最後の置換は積分区間の中心をずらして分子を $\cos 4u$ にするためのものであり、まさにそのために最初に恒等式を証明しておくのである。

解答

恒等式

$c=\cos u$ として、$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ を 2 回用いると、

$$\begin{aligned}\cos 4u &= 2\cos^2 2u - 1 = 2\left(2c^2-1\right)^2 - 1\\ &= 2\left(4c^4-4c^2+1\right) - 1 = 8\cos^4 u - 8\cos^2 u + 1,\end{aligned}$$

となり、示された。

1 つ目の置換

$x=\cos t$ と置換（substitution）すると、$\mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t$ である。x が -1 から 1 まで動くとき、t は π から 0 まで減少する。負号によって積分の上端と下端が元に戻り、

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{1+\cos t}+\sqrt{1-\cos t}+2}\,\mathrm{d}t.$$

を得る。ここで $1+\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2}$、$1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$ である。

考えてみよう $\sqrt{2\cos^2\frac{t}{2}}$ は本当に $\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$ であって、$\sqrt{2}\left|\cos\frac{t}{2}\right|$ ではないのだろうか？

一般には絶対値（modulus）が付くが、ここでは $0 \le t \le \pi$ なので $0 \le \frac{t}{2} \le \frac{\pi}{2}$ であり、$\cos\frac{t}{2}$ と $\sin\frac{t}{2}$ はともに非負である。$t \in [0, \pi]$ という選び方が（たとえば $[-\pi, 0]$ ではなく）重要なのは、まさにこのためである。よって

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\cos t}+\sqrt{1-\cos t} &= \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{t}{2}+\sin\tfrac{t}{2}\right)\\ &= 2\left(\cos\tfrac{t}{2}\cos\tfrac{\pi}{4}+\sin\tfrac{t}{2}\sin\tfrac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\tfrac{t}{2}-\tfrac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

$v = \frac{t}{4} - \frac{\pi}{8}$ と置くと $\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} = 2v$ であるから、分母は

$$2 + 2\cos 2v = 2(1+\cos 2v) = 4\cos^2 v = 4\cos^2\left(\tfrac{t}{4}-\tfrac{\pi}{8}\right),$$

となり、したがって

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{4\cos^2\left(\frac{t}{4}-\frac{\pi}{8}\right)}\,\mathrm{d}t,$$

となって、示された。

2 つ目の置換

$u = \frac{t}{4} - \frac{\pi}{8}$ と置くと、$t = 4u + \frac{\pi}{2}$、$\mathrm{d}t = 4\,\mathrm{d}u$ である。積分区間の端 $t = 0$ と $t = \pi$ はそれぞれ $u = -\frac{\pi}{8}$ と $u = \frac{\pi}{8}$ になる。分子は

$$\sin t = \sin\left(4u + \tfrac{\pi}{2}\right) = \cos 4u,$$

であり、ここで最初の恒等式が効いてくる。よって

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{\cos 4u}{4\cos^2 u}\cdot 4\,\mathrm{d}u = \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{8\cos^4 u - 8\cos^2 u + 1}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \left(8\cos^2 u - 8 + \sec^2 u\right)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

区間上で $\cos u \ge \cos\frac{\pi}{8} > 0$ であるから、$\cos^2 u$ で割ってよい。$8\cos^2 u = 4 + 4\cos 2u$ を用いると、被積分関数（integrand）は $4\cos 2u - 4 + \sec^2 u$ となるので、

$$I = \Big[\,2\sin 2u - 4u + \tan u\,\Big]_{-\pi/8}^{\pi/8}.$$

括弧内は u の奇関数（odd function）であるから、その値は $\frac{\pi}{8}$ での値の 2 倍である：

$$\begin{aligned}I &= 2\left(2\sin\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\pi}{2} + \tan\tfrac{\pi}{8}\right) = 2\left(\sqrt{2} - \tfrac{\pi}{2} + \sqrt{2} - 1\right)\\ &= 4\sqrt{2} - \pi - 2,\end{aligned}$$

ここで $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ と、与えられた $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ を用いた。これが求める結果である。

検算

- 数値的には $4\sqrt{2}-\pi-2\approx 0.51526$ である。シンプソンの公式（Simpson's rule）を x による元の積分、t による積分、u による積分のそれぞれに適用すると、いずれも 0.515262 を与える。
- 大きさの確認：$[-1,1]$ 上で和 $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ は $\sqrt{2}$（$x=\pm 1$ のとき）と 2（$x=0$ のとき）の間にあるので、被積分関数は $\frac{1}{4}$ と $\frac{1}{2+\sqrt{2}}\approx 0.293$ の間にある。よって $0.5\leq I\leq 0.586$ であり、0.515 はこれに合っている。
- $t=0$ において、分母 $4\cos^2(-\frac{\pi}{8})$ は $\sqrt{2}+0+2$ に等しいはずである。実際、$4\cos^2\frac{\pi}{8}=2(1+\cos\frac{\pi}{4})=2+\sqrt{2}$ である。

よくある間違い

- $\mathrm{d}x=-\sin t\,\mathrm{d}t$ の負号を忘れる、あるいは積分の上端と下端を入れ替えるのを忘れて、$-I$ を得てしまう。
- $[0,\pi]$ 上で $\cos\frac{t}{2}\geq 0$ であることに触れずに $\sqrt{1+\cos t}=\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$ と書いてしまう。
- $\mathrm{d}t=4\,\mathrm{d}u$ の因数 4 を落としてしまう。この 4 は分母の 4 とちょうど打ち消し合う。

STEP のその先へ

$x=\cos t$ のように平方根を「有理化」する置換は、ある一般的な事実の特別な場合である。すなわち、x と $\sqrt{1-x^2}$（あるいは同様の 2 次の無理式）の有理関数（rational function）である被積分関数は、三角関数による置換や $t=\tan\frac{\theta}{2}$ の置換によって必ず有理関数に変換でき、初等関数の範囲で積分できる。大学ではこれを体系的に扱った形に出会い、またその限界にも出会う。3 次や 4 次の無理式になると楕円積分（elliptic integral）が現れ、これは初等関数では表せない。この種の問題をさらに多く解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）に取り組むとよい。

解答例

STEP II 1996、第 5 問

純粋数学 • 1 の冪根

> **STEP II 1996、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q5

鍵となる考え方

この 4 次式（quartic）は**相反的**（palindromic）である。すなわち、係数を前から読んでも後ろから読んでも同じになる。z^2 で割ると項は z^2+z^{-2} と $z+z^{-1}$ にまとまり、どちらも $u=z+z^{-1}$ を用いて表せるので、z の 4 次方程式は u の 2 次方程式（quadratic）に帰着する。後半では、この 4 次式が z^5-1 から $z-1$ をくくり出したときに残る因数であることに気づく。したがってその根は 1 の 5 乗根（fifth roots of unity）であり、同じ 4 つの数の 2 通りの表し方を比べることで、三角関数（trigonometric functions）の正確な値が得られる。

解答

u の値

$z=0$ は $(*)$ を満たさないので、z^2 で割ってよい：

$$z^2+z+1+z^{-1}+z^{-2}=0.$$

ここで $u^2=(z+z^{-1})^2=z^2+2+z^{-2}$ であるから、$z^2+z^{-2}=u^2-2$ である。方程式は

$$u^2-2+u+1=0, \qquad \text{すなわち} \qquad u^2+u-1=0,$$

となるので、

$$u=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{または} \quad u=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

z の値

$z+z^{-1}=u$ より $z^2-uz+1=0$ であるから、

$$z=\frac{u\pm\sqrt{u^2-4}}{2}.$$

$u^2=1-u$ を用いると判別式（discriminant）は $u^2-4=-3-u$ であり、これは u のどちらの値に対しても負である（いずれの場合も $|u|<2$ であるため）。よって根は実数でない：

$$z=\frac{u\pm i\sqrt{3+u}}{2}.$$

$u=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のときは $3+u=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$、$u=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ のときは $3+u=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ である。$\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{10\pm2\sqrt{5}}$ と書き直すと、$(*)$ の 4 つの解は

$$z=\frac{-1+\sqrt{5}\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\qquad\text{および}\qquad z=\frac{-1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

である。u の各値から z の値が 2 つずつ得られ（z と z^{-1} の組で、ここでは互いに共役複素数（complex conjugates）である）、4 次方程式の根はちょうど 4 つなので、これですべてである。

$z^5=1$ との関係

展開すると、中間の項が次々に打ち消し合う（telescope）ので

$$(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=z^5-1,$$

が成り立つ。よって z が $(*)$ を満たすならば、第 2 の因数が 0 となり、$z^5-1=0$ である。

$z^5=1$ の解は $k=0,1,2,3,4$ に対する $z=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}$ である。$k=0$ は $z=1$ を与えるが、これは $(*)$ を**満たさない**（左辺は 5 となる）。残りの 4 つは相異なり、いずれも $(*)$ を満たす。なぜなら、それらに対しては $z-1\neq0$ であるから、因数 $z^4+z^3+z^2+z+1$ が 0 でなければならないからである。したがって $(*)$ の解は

$$z=\cos\theta+i\sin\theta,\qquad r=1,\quad \theta=\pm\frac{2\pi}{5},\pm\frac{4\pi}{5}.$$

である。

結論を導く

これで同じ 4 つの数について 2 通りの表し方が得られた。あとはそれらを対応させればよい。

考えてみよう 4 つの根号を含む式（surd）のうち、どれが $\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ であろうか？

符号に注目する。$0<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$ であるから、数 $\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ の実部（real part）と虚部（imaginary part）はともに正である。根号を含む式の実部は $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}>0$ と $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}<0$ であるから、第 1 象限（first quadrant）にあるものはちょうど 1 つである：

$$\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

（$(0,\pi)$ にあるもう 1 つの角 $\frac{4\pi}{5}$ は余弦が負なので、虚部が正であるもう一方の根に対応する。）実部と虚部を比較して、

$$\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\qquad\text{および}\qquad\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4},$$

が示された。副産物として、$\cos\frac{4\pi}{5}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ および $\sin\frac{4\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ も得られる。

検算

- $\cos\frac{2\pi}{5}=\cos 72^\circ\approx 0.30902$ であり、$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\approx 0.30902$ である。また $\sin 72^\circ\approx 0.95106$ であり、$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\approx 0.95106$ である。
- 4 つの根の和は -1（z^3 の係数の符号を変えたもの）になるはずである。実際、実部の和は $\frac{2(-1+\sqrt{5})+2(-1-\sqrt{5})}{4}=-1$ である。同じことだが、u の 2 つの値の和は -1 である。
- 各根の絶対値（modulus）は 1 になるはずである。例えば $\frac{(-1+\sqrt{5})^2+(10+2\sqrt{5})}{16}=\frac{16}{16}=1$ である。

4 つの根号を含む式がすべて $(*)$ と $z^5=1$ を満たし、$e^{\pm 2\pi i/5}$、$e^{\pm 4\pi i/5}$ と一致することを数値的に確認した。

よくある間違い

- $z=1$ を除外し忘れること。$z=1$ は $z^5=1$ を満たすが $(*)$ は満たさないので、$(*)$ の根は 5 つではなく 4 つである。
- 根拠なしに根号を含む式と角を対応させること。どの根が $\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ であるかを確定させるのは、実部の符号である。
- $z^2+z^{-2}=u^2$ と書いて -2 を落とすこと。

STEP のその先へ

置き換え $u = z + z^{-1}$ によって、任意の相反多項式の次数は半分になる。$\cos\frac{2\pi}{5}$ が 2 次方程式を解くだけで求まるのは偶然ではない。ガウス（Gauss）は、$\cos\frac{2\pi}{n}$ が平方根だけを用いて表せるのは、正 n 角形が定規とコンパス（ruler and compass）で作図できるときであり、かつそのときに限ることを示した。この問題は正五角形の作図の背後にある代数なのである。その全貌はガロア理論（Galois theory）であり、大学 2 年次の代数の講義で学ぶ。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、1 の累乗根について美しい幾何学的な見方を与えてくれる。

解答例

STEP II 1996、第 6 問

純粋数学 • 約数の個数

> **STEP II 1996、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q6

鍵となる考え方

N のすべての約数（factor）は、各素数 p_i について、それを何個とるか（0 個から m_i 個まで）を独立に選ぶことで作られる。その選び方を数えればすべての約数を数えたことになり、あとは 1 と N を除けばよい。そうすると、二つの探索問題はどちらも指数（exponent）についての問題になる。すなわち、どのような指数のパターンが正しい個数を与えるか、そして N をできるだけ小さくするにはそれらの指数をどの素数に割り当てればよいか、という問題である。

解答

最初の例

12 の約数は $1, 2, 3, 4, 6, 12$ である。1 と 12 を除くと $2, 3, 4, 6$ が残るので、真の約数（proper factor）は 4 個である。16 の約数は $1, 2, 4, 8, 16$ である。1 と 16 を除くと $2, 4, 8$ が残るので、真の約数は 3 個である。

一般の個数

M が N を割り切るとする。このとき M の素因数はすべて N の素因数であり、しかも M の中に N の中より多く現れることはない。よって

$$M = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}, \qquad 0 \le a_i \le m_i.$$

逆に、このような積はどれも N を割り切る。素因数分解の一意性（uniqueness of prime factorisation）により、$(a_1, \ldots, a_r)$ の選び方が異なれば異なる整数 M が得られ

る。したがって N の約数はこれらの選び方とちょうど一対一に対応する。各 a_i について m_i+1 通りの選び方があり、それらは独立に選べるので、N は全部で

$$d(N) = (m_1+1)(m_2+1)\cdots(m_r+1)$$

個の約数をもつ。$r \geq 1$ より $N > 1$ であるから、1 と N は**異なる**二つの約数である。これらを除くと、真の約数の個数は

$$(m_1+1)(m_2+1)\cdots(m_r+1) - 2.$$

確認：$12 = 2^2 \cdot 3$ からは $3\cdot 2 - 2 = 4$ が得られ、$16 = 2^4$ からは $5 - 2 = 3$ が得られる。

N を小さくするための原理

どちらの小問でも、指数を固定したうえで、それが許す最小の N を求める。次の二つの観察で決着がつく。

- 最も小さい素数を使う。ある素数 q が使われていて、それより小さい素数 p が使われていないとき、q を p に置き換えてもすべての指数は変わらないので個数も変わらず、しかも N は小さくなる。よって素数は $2, 3, 5, \ldots$ を隙間なく使うべきである。
- 最も大きい指数を最も小さい素数に載せる。$p < q$ で、p の指数が a、q の指数が b であり、$a < b$ であるとする。二つの指数を入れ替えると N は $p^{b-a}/q^{b-a} < 1$ 倍になり、個数は変わらない。

よって、指数 $e_1 \geq e_2 \geq \cdots \geq e_r$ に対して最小の N は $2^{e_1}3^{e_2}5^{e_3}\cdots$ である。

小問 (i)

真の約数がちょうど 12 個必要なので、$d(N) = 14$ である。各因数 m_i+1 は 2 以上であり、$14 = 2\cdot 7$ で 7 は素数である。よって 14 をそれぞれ 2 以上の因数の積として表す方法は次の二通りしかない。

- 14 そのもの：$N = p^{13}$ であり、最小となるのは $2^{13} = 8192$ である。
- 7×2：$N = p^6 q$ であり、最小となるのは $2^6 \cdot 3 = 192$ である。

したがって、真の約数をちょうど 12 個もつ最小の正の整数は

$$\boxed{192 = 2^6 \cdot 3}.$$

その約数は $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, 192$ であり、14 個ある。

小問 (ii)

今度は $d(N) \geq 14$ が必要である。$d(N)$ はもはや固定されていないので、相異なる素数の個数 r で場合分けする。指数を降順に $e_1 \geq e_2 \geq \cdots$ と書く。

> **考えてみよう** なぜ小問 (i) をそのまま使って $d(N) = 14$ だけを調べるのではいけないのだろうか？

約数が**多い**からといって N が大きくなければならないわけではないからである。指数をいくつかの小さい素数に分散させると、安く多くの約数が得られる。たとえば $2^3 \cdot 3 \cdot 5$ は $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ 個の約数をもち、192 よりずっと小さい。よって $d(N) \geq 14$ となるすべての値を調べなければならない。

- $r \geq 4$：このとき $N \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ である。
- $r = 3$：このとき $d(N) = (e_1+1)(e_2+1)(e_3+1) \geq 14$ である。$e_2 = e_3 = 1$ ならば $4(e_1+1) \geq 14$ が必要なので $e_1 \geq 3$ となり、$N \geq 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ である。そうでなければ $e_2 \geq 2$ なので $e_1 \geq 2$ でもあり、$N \geq 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$ である。
- $r = 2$：このとき $e_1 \geq e_2$ のもとで $(e_1+1)(e_2+1) \geq 14$ である。$e_2 = 1$ ならば $e_1 \geq 6$ であり、$N \geq 2^6 \cdot 3 = 192$ である。$e_2 = 2$ ならば $3(e_1+1) \geq 14$ より $e_1 \geq 4$ となるので、$N \geq 2^4 \cdot 3^2 = 144$ である。$e_2 \geq 3$ ならば $e_1 \geq 3$ であり、$N \geq 2^3 \cdot 3^3 = 216$ である。
- $r = 1$：$e_1 + 1 \geq 14$ なので $N \geq 2^{13} = 8192$ である。

どの場合も $N \geq 120$ となり、しかも $N = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ は実際に条件を満たす。真の約数を $4 \cdot 2 \cdot 2 - 2 = 14$ 個もつからである。よって、真の約数を 12 個以上もつ最小の正の整数は

$$\boxed{120},$$

であり、実際には真の約数を 14 個もつ。

検算

2 から 9000 までのすべての N について真の約数を総当たりで数えると、公式 $d(N) - 2$ と一致する。またこれにより、真の約数をちょうど 12 個もつ最初の N が 192 であること、および 12 個以上もつ最初のものが 120 であること（14 個もつ）も確かめられる。手早く手計算で確かめるなら、120 のすぐ下にある約数の多い数、すなわち $60, 72, 84, 90, 96$ および 108 は、いずれも約数を 12 個もつので、真の約数は 10 個しかない。

よくある間違い

- 14 ではなく $d(N) = 12$ とおいてしまう。1 と N は除かれることを忘れないこと。
- 小問 (ii) でも 192 と答えてしまう。真の約数を 12 個以上もつ最小の N が、ちょうど 12 個もつとは限らない。
- 大きい指数を大きい素数に載せてしまう。$2 \cdot 3^6$ は $2^6 \cdot 3$ と同じ個数の約数をもつが、はるかに大きい。

STEP のその先へ

約数関数（divisor function）$d(N)$ は**乗法的**（multiplicative）である。すなわち、a と b が互いに素であるときはつねに $d(ab) = d(a)d(b)$ が成り立つ。積の公式が表しているのはまさにこのことである。自分より小さいどの数よりも多くの約数をもつ数は**高度合成数**（highly composite number）と呼ばれ、ラマヌジャン（Ramanujan）が深く研究した。120 はその一つであり、ここで用いた指数の並べ方の議論は彼の解析の出発点である。ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、約数関数と素因数分解の一意性への素晴らしい入門書である。

解答例

STEP II 1996、第 7 問

純粋数学 • 座標幾何における軌跡

> **STEP II 1996、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q7

鍵となる考え方

正方形を両方の座標軸に関して対称になるように座標の中に置く。すると各距離は 1 次式の絶対値（modulus）となり、2 つの積 pr と qs はそれぞれ $|y^2 - a^2|$ と $|x^2 - a^2|$ になる。$|U| = |V|$ という形の方程式は $U = V$ または $U = -V$ に分かれる。一方の場合からは 2 本の直線が、もう一方の場合からは円が得られる。

解答

正方形の 1 辺の長さを $2a$（ただし $a > 0$）とし、中心を原点に、辺を座標軸に平行にとる：

$$A = (-a, -a), \quad B = (a, -a), \quad C = (a, a), \quad D = (-a, a).$$

このとき AB は直線 $y = -a$ 上に、BC は $x = a$ 上に、CD は $y = a$ 上に、DA は $x = -a$ 上にある。$P = (x, y)$ から水平な直線 $y = c$ までの距離（垂線の長さ）は $|y - c|$ であり、鉛直な直線 $x = c$ までの距離は $|x - c|$ である。よって

$$p = |y + a|, \qquad q = |x - a|, \qquad r = |y - a|, \qquad s = |x + a|.$$

これらの式は、正方形の内部か外部かによらず、平面上のすべての P について成り立つ。距離を非負にしているのは絶対値であるから、これを外してはならない。

2 つずつ掛け合わせ、$|u|\,|v| = |uv|$ を用いると

$$pr = |(y + a)(y - a)| = |y^2 - a^2|, \qquad qs = |(x - a)(x + a)| = |x^2 - a^2|.$$

考えてみよう 多くの領域に場合分けすることなく、$|y^2-a^2|=|x^2-a^2|$ から絶対値を外すにはどうすればよいか？

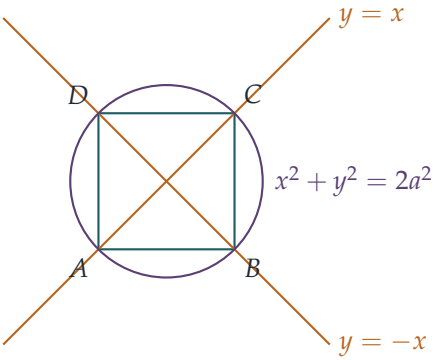
実数に対して、$|U|=|V|$ が成り立つための必要十分条件（if and only if）は $U=V$ または $U=-V$ である。両辺は非負であり、$|U|=|V| \iff U^2=V^2 \iff (U-V)(U+V)=0$ となるからである。用いるのは同値変形だけなので、必要条件と十分条件が同時に得られる。したがって $pr=qs$ が成り立つための必要十分条件は

$$y^2-a^2=x^2-a^2 \qquad \text{または} \qquad y^2-a^2=-(x^2-a^2).$$

第 1 の場合。 $y^2=x^2$、すなわち $(y-x)(y+x)=0$ であるから、$y=x$ または $y=-x$ である。これらは正方形の中心を通り、対角線 AC と BD を含む 2 本の（無限に延びた）直線である。

第 2 の場合。 $x^2+y^2=2a^2$。これは正方形の中心を中心とし、対角線の半分である $\sqrt{2}\,a$ を半径とする円である。よってこれは正方形の外接円（circumcircle）であり、A、B、C、D を通る。

以上より、$pr=qs$ ならば P は 2 本の対角線の直線 AC、BD（両方向に限りなく延長したもの）のいずれか、または $ABCD$ の外接円の上にある。逆に、上の各段階はすべて逆にたどることができる。P がどちらかの直線上にあれば $x^2=y^2$ であるから $|y^2-a^2|=|x^2-a^2|$ となる。P が円上にあれば $y^2-a^2=a^2-x^2$ となり、やはり $|y^2-a^2|=|x^2-a^2|$ が得られる。いずれにしても $pr=qs$ であるから、2 本の直線と円の上のすべての点が P の位置としてありうる。以上で証明が完了する。



考えてみよう 正方形の外部の点は本当に許されるのか。また、直線は頂点で途切れるのか？

問題は平面上の任意の点を許しており、ここで用いた距離の式はどこでも成り立つ。よって軌跡（locus）は各直線の全体であって、線分としての対角線だけではない。たとえば $P=(3a,3a)$ では $p=4a$、$r=2a$、$q=2a$、$s=4a$ であり、$pr=qs=8a^2$ となる。

検算

- 中心 $(0,0)$ は両方の直線上にある：$p = q = r = s = a$ であるから $pr = qs$。
- 円上の点のうち、AB の中点の真下にある点 $(0, -\sqrt{2}\,a)$ をとる。このとき $p = (\sqrt{2}-1)a$、$r = (\sqrt{2}+1)a$ より $pr = a^2$ であり、$q = s = a$ より $qs = a^2$ である。
- 軌跡上にない点、たとえば $(\frac{1}{2}a, 0)$ では $pr = a^2$ だが $qs = \frac{3}{4}a^2$ となり、条件を満たさない。
- 数値的に（$a = 1.7$ として）、3 つの曲線上の 30 000 個のランダムな点で $pr = qs$ が 10^{-9} の精度で成り立った。$[-5,5]^2$ 上の 600×600 の格子で $pr - qs$ の符号変化を調べたところ、2 本の直線と円から離れたところには零点は見つからなかった。

よくある間違い

- 絶対値を外して $pr = a^2 - y^2$、$qs = a^2 - x^2$ と書いてしまう。これは正方形の内部でしか成り立たず、円が失われて $y = \pm x$ だけが得られてしまう。
- P がこれらの曲線上にあることが必要であることしか証明しない。問題は逆も求めているので、直線と円の上のすべての点が条件を満たす理由を述べること。
- 直線を対角線の**線分** AC と BD として記述してしまう。これらは直線全体である。

STEP のその先へ

この軌跡は多項式 $(y^2 - a^2)^2 - (x^2 - a^2)^2$ の零点集合であり、この多項式は $(y - x)(y + x)(x^2 + y^2 - 2a^2)$ と因数分解される。このように、多項式の方程式で与えられた曲線がより単純な部分に分解されるものは、可約な**代数曲線**（algebraic curve）の最初の例である。図形の対称性に合わせて座標をとる習慣こそが、こうした因数分解を見えるようにしてくれる。この種の幾何をさらに学ぶには Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（上級数学問題集）を、曲線の代数については Reid, *Undergraduate Algebraic Geometry*（学部生のための代数幾何）を参照するとよい。

解答例

STEP II 1996、第 8 問

純粋数学 ・ 2 階の微分方程式

> **STEP II 1996、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q8

鍵となる考え方

この方程式には $\mathrm{f}(x)$ と $\mathrm{f}(-x)$ が混在しているので、そもそも f についての通常の微分方程式（ordinary differential equation）ではない。そこで、方程式を x における式と $-x$ における式の 2 通りに書き、それらを足したり引いたりするのがうまいやり方である。和 g と差 h はそれぞれ正真正銘の定数係数（constant-coefficient）の方程式を満たし、それは余関数（complementary function）と特殊解（particular integral）を用いて解くことができる。そして f は $\frac{1}{2}(\mathrm{g}+\mathrm{h})$ として復元される。

解答

$\mathrm{g}(0)$ と $\mathrm{g}'(0)$ の値

$\mathrm{g}(x)=\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(-x)$ に $x=0$ を代入すると $\mathrm{g}(0)=2\mathrm{f}(0)=2$ である。

微分すると、合成関数の微分法（chain rule）により第 2 項にはマイナス符号がつき、

$$\mathrm{g}'(x)=\mathrm{f}'(x)-\mathrm{f}'(-x),$$

となるので、求めるとおり $\mathrm{g}'(0)=\mathrm{f}'(0)-\mathrm{f}'(0)=0$ である。（$\mathrm{f}'(0)$ の値は必要なかったことに注意しよう。g は偶関数（even function）なので、その導関数は奇関数（odd function）となり、0 で値が 0 になるのである。）

g の満たす方程式

もう一度微分すると、合成関数の微分法から出る 2 つのマイナス符号は打ち消し合う：

$$\mathrm{g}''(x)=\mathrm{f}''(x)+\mathrm{f}''(-x).$$

考えてみよう $\mathrm{f}''(-x)$ とは何か。与えられた方程式は $\mathrm{f}''(x)$ についてしか教えてくれない。

与えられた方程式はすべての x について成り立つので、全体にわたって x を $-x$ に置き換えてよい。cos は偶関数であるから、

$$\mathrm{f}''(-x) + \mathrm{f}(x) = -x + 3\cos 2x.$$

を得る。これをもとの方程式に加えると、

$$\mathrm{f}''(x) + \mathrm{f}''(-x) + \mathrm{f}(-x) + \mathrm{f}(x) = 6\cos 2x, \qquad \text{すなわち、} \qquad \mathrm{g}''(x) + \mathrm{g}(x) = 6\cos 2x,$$

となり、求める式が得られた。

g を求める

補助方程式（auxiliary equation）$m^2 + 1 = 0$ の根は $\pm\mathrm{i}$ なので、余関数は $A\cos x + B\sin x$ である。特殊解として $\mathrm{g} = k\cos 2x$ を試すと、$\mathrm{g}'' + \mathrm{g} = -4k\cos 2x + k\cos 2x = -3k\cos 2x$ となるので $k = -2$ である。したがって

$$\mathrm{g}(x) = A\cos x + B\sin x - 2\cos 2x.$$

ここで $\mathrm{g}(0) = A - 2 = 2$ より $A = 4$、また $\mathrm{g}'(0) = B = 0$ である。よって

$$\mathrm{g}(x) = 4\cos x - 2\cos 2x.$$

h を求める

$\mathrm{h}(x) = \mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(-x)$ については

$$\mathrm{h}(0) = 0, \qquad \mathrm{h}'(x) = \mathrm{f}'(x) + \mathrm{f}'(-x), \quad \text{よって} \quad \mathrm{h}'(0) = 2\mathrm{f}'(0) = -2,$$

であり、$\mathrm{h}''(x) = \mathrm{f}''(x) - \mathrm{f}''(-x)$ である。今度は x における方程式から $-x$ における方程式を引く：

$$\mathrm{f}''(x) - \mathrm{f}''(-x) + \mathrm{f}(-x) - \mathrm{f}(x) = 2x, \qquad \text{すなわち、} \qquad \mathrm{h}''(x) - \mathrm{h}(x) = 2x.$$

考えてみよう h の前の符号が $+$ から $-$ に変わったのはなぜか。

引き算では f の項が $\mathrm{f}(-x) - \mathrm{f}(x)$ の形で現れ、これは $+\mathrm{h}(x)$ ではなく $-\mathrm{h}(x)$ である。そのため今度の解は三角関数ではなく指数関数になる。補助方程式 $m^2 - 1 = 0$ から余関数 $C\mathrm{e}^x + D\mathrm{e}^{-x}$ が得られる。特殊解として $\mathrm{h} = px + q$ を試すと $-(px + q) = 2x$ となるので、$p = -2$、$q = 0$ である。したがって

$$\mathrm{h}(x) = C\mathrm{e}^x + D\mathrm{e}^{-x} - 2x.$$

条件から $\mathrm{h}(0) = C + D = 0$ および $\mathrm{h}'(0) = C - D - 2 = -2$ が得られるので、$C = D = 0$ であり、

$$\mathrm{h}(x) = -2x.$$

f を復元する

g と h の定義を足し合わせると $\mathrm{g} + \mathrm{h} = 2\mathrm{f}$ となるので、

$$\mathrm{f}(x) = \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{g}(x) + \mathrm{h}(x)\big) = \tfrac{1}{2}\big(4\cos x - 2\cos 2x - 2x\big) = 2\cos x - \cos 2x - x,$$

となり、これが求める結果である。

検算

- $\mathrm{f}(0) = 2 - 1 - 0 = 1$ であり、$\mathrm{f}'(x) = -2\sin x + 2\sin 2x - 1$ より $\mathrm{f}'(0) = -1$ である。
- 代入して確かめる：$\mathrm{f}''(x) = -2\cos x + 4\cos 2x$ と $\mathrm{f}(-x) = 2\cos x - \cos 2x + x$ を足すと $x + 3\cos 2x$ になる。
- 偶奇性も正しい：g は偶関数、h は奇関数となっており、そうでなければならない。
- $\mathrm{f}(x)$、$\mathrm{f}(-x)$ の組を $x = 0$ から $x = 3$ まで数値的に進めると $\mathrm{f}(3) \approx -5.940155$ となり、$2\cos 3 - \cos 6 - 3$ と一致する。

よくある間違い

- 合成関数の微分法による符号を忘れる：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{f}(-x) = -\mathrm{f}'(-x)$ であるが、$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{f}(-x) = +\mathrm{f}''(-x)$ である。
- 方程式の片側だけで x を $-x$ に置き換える：右辺の x も $-x$ になる。
- $\mathrm{h}'' + \mathrm{h} = 2x$ を導いてしまい、h に三角関数の項が現れてしまう。

STEP のその先へ

これは関数微分方程式（functional differential equation）であり、未知関数が 2 点以上で評価されている。偶関数部分と奇関数部分に分けるとうまくいくのは、反転 $x \mapsto -x$ が 2 乗すると恒等写像（identity）になる線形写像（linear map）だからである。そのためその固有値（eigenvalue）は ± 1 であり、すべての関数は偶関数部分（固有値 1）と奇関数部分（固有値 -1）にただ 1 通りに分解される。それぞれの部分の上では、方程式は通常の微分方程式になる。対称性によって分解するというこの考え方は、線形代数

（linear algebra）やフーリエ解析（Fourier analysis）の全体に通じている。定数係数の方程式そのものについては Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）を、線形代数の観点については Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照するとよい。

解答例

STEP II 1996、第 9 問

力学 ・ 安定性と重心

> **STEP II 1996、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q9

鍵となる考え方

すべては、おもちゃの重心（centre of mass）G が対称軸（axis of symmetry）上のどこにあるかにかかっている。半球（hemisphere）で台に接しているとき、台は常に半球の平らな面の中心 O の真下でおもちゃに接する。したがって、G が O より下にあるか上にあるかによって、「起き上がる」か「倒れる」かが決まる。円錐（cone）で台に接しているとき、おもちゃは母線（generator）全体に沿って台に載っており、G を通る鉛直線がその接触線と交わる限り、おもちゃはその位置にとどまる。

解答

おもちゃを密度 ρ の一様な剛体（rigid body）とみなし、その軸について対称であるとする。共通の円形の面の中心を O とし、軸に沿った距離を O から測り、円錐の頂点 V の向きを正とする。

重心

円錐の体積は $\frac{1}{3}\pi a^2(\lambda a) = \frac{1}{3}\lambda\pi a^3$ であり、その重心は $+\frac{1}{4}\lambda a$ にある。半球の体積は $\frac{2}{3}\pi a^3$ であり、その重心は $-\frac{3}{8}a$ にある。よって G の位置は

$$h = \frac{\frac{1}{3}\lambda\cdot\frac{1}{4}\lambda a - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}a}{\frac{1}{3}\lambda + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{12}\lambda^2 a - \frac{1}{4}a}{\frac{1}{3}(\lambda+2)} = \frac{a(\lambda^2-3)}{4(\lambda+2)}.$$

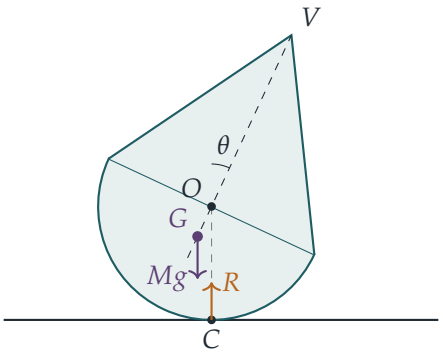
である。したがって、$\lambda < \sqrt{3}$ ならば G は O より下に、$\lambda = \sqrt{3}$ ならば O に、$\lambda > \sqrt{3}$ ならば O より上にある。

半球で台に載っている場合

軸が上向きの鉛直方向に対して角 θ（$0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$）だけ傾いており、半球の曲面が台に接しているとする。

考えてみよう 半球は台のどこで接しているのだろうか？

台は、半球をその一部とする球に接しており、接平面（tangent plane）は接点における半径に垂直である。したがって、θ の値によらず、接点 C は常に O の**真下**にあり、O は常に高さ a にある。



（図は G が O より下にある場合、すなわち $\lambda < \sqrt{3}$ の場合を示している。）

C のまわりの力のモーメント（moment）を考える。垂直抗力（normal reaction）と摩擦力（friction）はいずれも C に作用するので、モーメントをもつのは G に作用する重力 Mg だけである。C から（すなわち O を通る鉛直線から）測った G の水平方向の変位は $h\sin\theta$ であり、頂点が傾いている側を正とする。

- $\lambda < \sqrt{3}$ ならば $h < 0$ である。$0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ を満たすすべての θ について、G は C を通る鉛直線に関して頂点と反対側にある。したがって重力はおもちゃを $\theta = 0$ の向きに戻すように回転させる。同じことであるが、G の高さは $a + h\cos\theta = a - |h|\cos\theta$ であり、これは $\theta = 0$ のとき最小となるので、直立した位置が位置エネルギー（potential energy）最小の位置である。いずれにせよ、半球を下にしてどのように置いても、おもちゃは直立した位置に向かって動く（そのまわりで揺れ、やがて摩擦と空気抵抗によってその位置に落ち着く）。
- $\lambda > \sqrt{3}$ ならば $h > 0$ である。任意の傾き $\theta > 0$ について、G は頂点と同じ側にあり、重力はおもちゃを直立した位置から**さらに**遠ざけるように回転させる。このとき G の高さ $a + h\cos\theta$ は $\theta = 0$ で最大となるので、直立した位置は不安定な平衡（unstable equilibrium）である。わずかな傾きでも大きくなっていき、縁が台に達して、おもちゃは円錐の側面を下にして倒れる。すなわち、おもちゃは転倒する。

（$\lambda = \sqrt{3}$ のときは $G = O$ であり、おもちゃはどの傾きでも中立平衡（neutral equilibrium）にある。）以上で求める結果が示された。

円錐で台に載っている場合

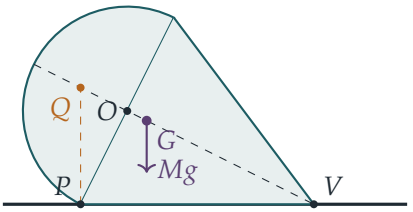
次に、おもちゃが円錐の母線 VP を台につけて横たわっているとする。ただし P は縁の上の点である。軸と VP を含む平面で考える。この平面内に、O を原点とし、$V = (0, \lambda a)$、$P = (a, 0)$ となるように座標軸をとると、半球は $y < 0$ の側にある。VP に沿った円錐の接平面はこの平面に垂直であり、この平面との交線は直線

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{\lambda a} = 1.$$

である。

考えてみよう 代わりに半球が台を突き抜けてしまい、円錐が母線に沿って台にぴったり載ることができない、ということは起こりうるだろうか？

起こらない。おもちゃのどの点も、この平面に射影すると、円錐の三角形の断面か、半円板 $x^2 + y^2 \leq a^2, y \leq 0$ のいずれかの点に移る。三角形の上では $\frac{x}{a} + \frac{y}{\lambda a} \leq 1$ である。半円板の上では $x \leq a$ かつ $y \leq 0$ であるから $\frac{x}{a} + \frac{y}{\lambda a} \leq \frac{x}{a} \leq 1$ であり、等号が成り立つのは P においてのみである。よって、おもちゃ全体はこの平面の一方の側にあり、線分 VP に沿ってのみ平面に接し、それ以外では接しない。



（図は $\lambda = 2$ の場合を示している。P における VP の垂線を破線で示した。）

抗力はすべて VP に沿って作用し、台に垂直である。したがって、おもちゃが台の上で平衡にあり、P や V のまわりに倒れないのは、G を通る鉛直線が線分 VP と交わるとき、すなわち G から VP に下ろした垂線の足が V と P の間にあるとき、かつそのときに限る。

V における VP の垂線が軸と交わるのは V においてのみである。P における VP の垂線が軸と交わる点を Q とする。三角形 VPQ において、P における角は直角であり、PO は斜辺（hypotenuse）VQ への高さであるから $OP^2 = OV \cdot OQ$ が成り立ち、

$$OQ = \frac{a^2}{\lambda a} = \frac{a}{\lambda}.$$

を得る。よって Q は O から距離 a/λ だけ下にある。軸上の点が線分 VP 上に射影されるのは、その点が Q と V の間にあるとき、かつそのときに限る。したがって

$$-\frac{a}{\lambda} < h < \lambda a.$$

が必要である。右側の不等式は、G がおもちゃの内部、V より下にあるので成り立つ。左側の不等式については、両辺に $4\lambda(\lambda+2)/a > 0$ を掛けると

$$\frac{a(\lambda^2-3)}{4(\lambda+2)} > -\frac{a}{\lambda} \iff \lambda^3 - 3\lambda + 4\lambda + 8 > 0 \iff \lambda^3 + \lambda + 8 > 0,$$

となり、これはすべての $\lambda > 0$ について成り立つ。よって、G を通る鉛直線は常に接触線と交わり、おもちゃはその位置にとどまる。回転対称性（rotational symmetry）により、どの母線が接していても同じである。以上より、λ の値によらず、おもちゃは円錐の側面を下にしたまま静止しており、求める結果が示された。

検算

- $\lambda = \sqrt{3}$ のとき、公式は $h = 0$ を与える。円錐のモーメント $\frac{1}{12}\lambda^2 a$ が半球のモーメント $\frac{1}{4}a$ とちょうど釣り合う。おもちゃを薄い円板に切り分けて数値的に足し合わせると、いくつかの λ について h が $10^{-5}a$ の精度で再現される。
- $\lambda = 1$ のとき、$h = -\frac{1}{6}a$、$OQ = a$ であり、G から下ろした垂線の足は V から P へ向かって 0.583 の割合の位置にある。$\lambda = 10$ のときは 0.790 の割合の位置にある。$(0, 50)$ の範囲で λ の値を無作為に 20,000 個選んで調べたところ、垂線の足は常に VP の真に内側にあった。
- 極限の場合：$\lambda \to 0$ のとき、おもちゃはほぼ半球であり（$h \to -\frac{3}{8}a$）、よく知られているように起き上がる。$\lambda \to \infty$ のとき、おもちゃは細長い円錐であり、G は円錐自身の重心とともに軸を上っていく。

よくある間違い

- 実際の接点ではなく、**直立した**おもちゃの最下点のまわりのモーメントを考えてしまう。実際の接点はおもちゃが転がるにつれて動くが、常に O の真下にある。
- 最後の部分で、半球も台に接していると仮定してしまう。半円板は $y \le 0$ の側にあるので、半球は台に接しない。

STEP のその先へ

この揺れるおもちゃは、平衡の安定性（stability of equilibrium）への最初の入り口である。一般に、平面上を転がる物体は、その重心が接点における表面の曲率中心（centre of curvature）（ここでは O）より下にあるとき安定である。同じ考え方が、浮かんでいる船のメタセンター（metacentre）を支配している。大学 1 年生の講義では、これは位置エネルギーの極小と、そのまわりの微小振動（small oscillations）の研究へと発展する。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このような観点から重心と剛体の平衡を扱っている。

解答例

STEP II 1996、第 10 問

力学 ・ 回転する車輪からの放物運動

> **STEP II 1996、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q10

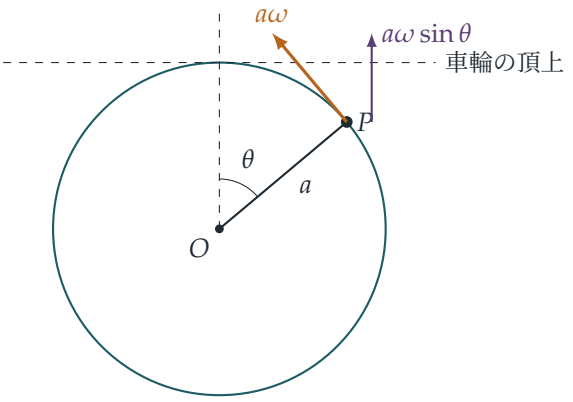
鍵となる考え方

手を離した瞬間から、ヒロインは放物運動をする物体（projectile）となり、その初期位置と初速度は車輪上のどこにいたかによって決まる。高さに関係するのは鉛直方向の運動だけなので、最高点の高さは、手を離した位置の高さに、速度の鉛直成分によって得られる上昇分を加えたものである。これにより高さは手を離す角度という 1 つの変数の関数として表され、問題は「この関数が車輪の頂上を上回ることができるのはどのようなときか、またその最大値はいくらか」ということになる。

解答

設定

ヒロインを車輪の縁とともに運動する質点（particle）とみなし、空気抵抗は無視する。車輪の中心を O とし、OP が鉛直上向きと角 θ（$0 \leq \theta \leq \pi$）をなす点 P で手を離すとする。縁上での速さは $a\omega$ であり、その向きは P における接線（tangent）の方向である。



P における接線は OP に垂直なので、水平方向と角 θ をなす。手を離すときに車輪の頂上へ向かって動いているならば、速度の上向き成分は $a\omega\sin\theta$（紫色で示したもの）である。頂上から遠ざかる向きに動いているならば、鉛直方向の速度は下向きまたは 0 なので、手を離した点より高く上がることはなく、その点は頂上より高くない。したがって、このような場合は考えなくてよい。

手を離す瞬間の O からの高さは $a\cos\theta$ である。重力だけを受けて鉛直方向の速度は $a\omega\sin\theta$ から 0 まで減少し、$v^2 = u^2 - 2gs$ により、さらに $(a\omega\sin\theta)^2/(2g)$ だけ上昇する。よって、車輪の頂上から測った最高点の高さは

$$H(\theta) = a\cos\theta + \frac{a^2\omega^2\sin^2\theta}{2g} - a.$$

である。$c = \cos\theta \in [-1,1]$、$k = \dfrac{a\omega^2}{2g}$ とおく。このとき $\sin^2\theta = 1 - c^2$ であり、

$$\begin{aligned}\frac{H}{a} &= c - 1 + k(1-c^2)\\ &= (1-c)\big[k(1+c) - 1\big].\end{aligned}$$

ω_0 を求める

$c = 1$（頂上で手を離す）のときは、予想どおり $H = 0$ である。$c < 1$ のときは因数 $1-c$ が正なので、$H > 0$ となるのは $k(1+c) > 1$ のときであり、かつそのときに限る。

> **考えてみよう**　c のとりうる値の範囲で、$k(1+c)$ はどこまで大きくなりうるか。

$c < 1$ なので、$k(1+c)$ は $[0, 2k)$ のすべての値をとるが、$2k$ には達しない。したがって、

- $2k > 1$ ならば、$c < 1$ を十分 1 に近くとることで $k(1+c) > 1$ とでき、ヒロインは頂上より高く上がる。

- $2k \leq 1$ ならば、すべての $c < 1$ に対して $k(1+c) < 2k \leq 1$ なので、どの点で手を離しても $H \leq 0$ となり、頂上より高く上がることはできない。

条件 $2k \leq 1$ は $a\omega^2 \leq g$ と同値である。境界の場合 $\omega^2 = g/a$ は「不可能」の側に属することに注意すると、そのような ω の最大値が存在して

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

となる。（これは、車輪の外側の頂上に置かれた質点がちょうど車輪から離れはじめる角速度（angular speed）でもある。すなわち、向心加速度（centripetal acceleration）$a\omega^2$ が g に等しくなる。）

$\omega > \omega_0$ のときの最高点の高さ

このとき $2k = a\omega^2/g = \omega^2/\omega_0^2 > 1$ である。c の関数として

$$\frac{H}{a} = -kc^2 + c + k - 1$$

は上に凸な 2 次関数であり、その導関数（derivative）$1 - 2kc$ が 0 となる

$$c = \frac{1}{2k} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$

で最大となる。この値は 0 と 1 の間に（端点を含まずに）あるので、許される手を離す位置（車輪の頂上の少し手前）であり、$[-1, 1]$ 全体での最大値を与える。代入すると

$$\frac{H_{\max}}{a} = -\frac{1}{4k} + \frac{1}{2k} + k - 1 = k - 1 + \frac{1}{4k}.$$

$k = \frac{1}{2}\omega^2/\omega_0^2$、したがって $\frac{1}{4k} = \frac{1}{2}\omega_0^2/\omega^2$ であるから、

$$H_{\max} = \frac{a}{2}\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = \frac{a}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2,$$

となり、これが求める結果である。この高さは、頂上へ向かって動いている途中の $\cos\theta = \omega_0^2/\omega^2$ となる位置で手を離すことにより達成される。

検算

- $\omega = \omega_0$ のとき公式は 0 を与え、境界の場合と一致する。また ω が大きいとき、公式は $a\omega^2/(2\omega_0^2) = a^2\omega^2/(2g)$ のように増加する。これは O の高さから速さ $a\omega$ で真上に投げ上げた質点が到達する高さである。実際、ω が大きいとき最適な手を離す位置は、速度が鉛直となる $\theta = \frac{\pi}{2}$ の近くである。
- 次元：ω/ω_0 は無次元（dimensionless）なので、$H_{\max}$ は長さの次元をもつ。

- 数値的に、$a = 2\,\mathrm{m}$、$\omega = 2\omega_0$ とすると、公式は $\frac{a}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25\,\mathrm{m}$ を与える。$\cos\theta = \frac{1}{4}$ の位置から放物運動を数値的に追跡しても同じ値が得られ、すべての手を離す角度について調べると、これより高くなるものはないことが確かめられる。

よくある間違い

- 高さを車輪の頂上からではなく中心から測ってしまう。H の中の $-a$ が重要である。
- 最適な手を離す位置を、速度が鉛直となる $\theta = \frac{\pi}{2}$ だと思い込む。そこで最大になるのは追加の上昇分であって、全体の高さではない。
- 最適な $c = \omega_0^2/\omega^2$ が実際に $[-1, 1]$ に含まれることの確認を忘れる。

STEP のその先へ

ここで用いた方法、すなわちある量を 1 つの制御変数の関数として表して最適化するという方法は、最適制御問題（optimal-control problem）の最も単純な形である。これに近い話題として、**軌道の包絡線**（envelope of trajectories）（「安全放物線」（parabola of safety））がある。これは車輪上の手を離す点から到達可能なすべての点の境界であり、同様の判別式（discriminant）を用いる議論によって求めることができる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物運動と回転運動を大学 1 年生のレベルで展開している。

解答例

STEP II 1996、第 11 問

力学 ・ 単振動

> **STEP II 1996、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q11

鍵となる考え方

糸の伸び、すなわちエレベーターに対する質点の位置を変数として扱う。地面に固定した座標系で質点についてニュートン（Newton）の第 2 法則（Newton's second law）を立て、既知であるエレベーターの加速度を差し引く。すると残るのは、ずれた中心のまわりの単振動（simple harmonic motion, SHM）である。伸びが正である限り糸はぴんと張った（taut）状態を保ち、単振動の解から伸びがどこまで小さくなりうるかが正確にわかる。エレベーターの加速が止まると、動くのは振動の中心だけである。エレベーターに対する質点の位置と速度はそのまま引き継がれ、それらから新しい振幅（amplitude）が求まる。

解答

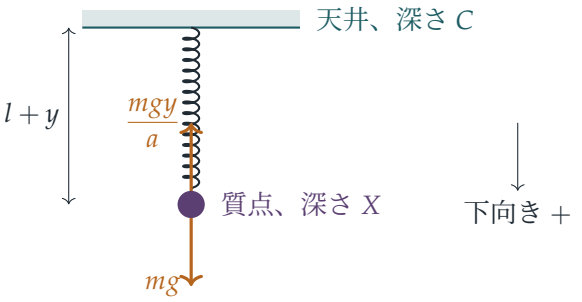
質点の質量を m とし、糸は軽く、弾性率（modulus of elasticity）λ をもつ弾性糸で、張っている間はフックの法則（Hooke's law）に従うものとしてモデル化する。以下を通して、y は糸の長さが自然長 l を超える量を表し、したがって最初は $y = a$ である。与えられた微分方程式に合う解釈はこれしかない。もし y をもとのつり合いの長さ $l + a$ から測ったとすると、右辺は $-f$ になるはずである。

運動方程式

最初のつり合いの状態では張力 $\lambda a/l$ が重力とつり合うので

$$\frac{\lambda a}{l} = mg \quad \Longrightarrow \quad \frac{\lambda}{l} = \frac{mg}{a},$$

であり、伸びが $y > 0$ のときの張力は mgy/a である。



地面に固定した点から下向きに深さを測る。天井の深さを C、質点の深さを X とすると、$X-C=l+y$ である。エレベーターは加速度 f で下降するので $\ddot{C}=f$ である。糸が張っている間、質点について鉛直方向（下向き）の運動方程式（equation of motion）を立てると

$$m\ddot{X}=mg-\frac{mgy}{a}.$$

$y=X-C-l$ であるから $\ddot{y}=\ddot{X}-\ddot{C}=\ddot{X}-f$ となり、したがって

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{a}y=g-f,$$

が示された。

糸は張ったままであり、振幅は af/g

$\omega^2=g/a$ とおく。定数の特殊解（particular solution）は $y=(g-f)/\omega^2=a(g-f)/g$ であるから、一般解（general solution）は

$$y=a-\frac{af}{g}+A\cos\omega t+B\sin\omega t.$$

である。$t=0$ では質点はもとのつり合いの位置にあり、エレベーターとともに動いているので、$y(0)=a$、$\dot{y}(0)=0$ である。これより $A=af/g$、$B=0$ となり

$$y=a-\frac{af}{g}+\frac{af}{g}\cos\omega t.$$

を得る。これは $y=a-af/g$ を中心とする振幅 af/g の単振動である。エレベーターに対する質点の位置は $l+y$ であるから、質点はエレベーターに対して振幅 af/g で振動する。

考えてみよう　フックの法則を使ったが、これは糸が張っていることを前提としている。これは循環論法ではないか？

そうではない。糸が張っていると仮定して解き、その後で、得られた解がその仮定の成り立つ範囲から決して外れないことを確かめるのである。y の最小値は

$$y_{\min} = a - \frac{2af}{g} = a\left(1 - \frac{2f}{g}\right) > 0,$$

である。これは $f < g/2$ による。よって y は正のままで、糸は常に張っており、解は自己矛盾がない。条件 $f < g/2$ が必要になるのはまさにここである。

エレベーターの加速が止まった後

$t > T$ では $\ddot{C} = 0$ であり、同じ議論から

$$\ddot{y} + \omega^2 y = g,$$

を得る。これは $y = a$、すなわち本来のつり合いの伸びを中心とする単振動である。$z = y - a$ とおくと $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$ となる。

考えてみよう この新しい運動の初期条件は何か？

$t = T$ でエレベーターの加速度は不連続に変わるが、速度 $\dot{C}$ は不連続にはならず、質点の位置と速度も同様である。よって $y = X - C - l$ と $\dot{y} = \dot{X} - \dot{C}$ は $t = T$ で連続である。第 1 段階の結果から、$t = T$ において

$$z = \frac{af}{g}(\cos\omega T - 1), \qquad \dot{z} = -\frac{af}{g}\,\omega \sin\omega T.$$

である。単振動 $\ddot{z} = -\omega^2 z$ では、振幅 R は任意の時刻において $R^2 = z^2 + \dot{z}^2/\omega^2$ を満たす（これはエネルギー保存則であり、あるいは $z = R\cos(\omega t + \varepsilon)$ に恒等式 $\cos^2 + \sin^2 = 1$ を適用したものである）。したがって

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{a^2 f^2}{g^2}\left[(1 - \cos\omega T)^2 + \sin^2\omega T\right] \\ &= \frac{a^2 f^2}{g^2}\,(2 - 2\cos\omega T) \\ &= \frac{a^2 f^2}{g^2} \cdot 4\sin^2 \tfrac{1}{2}\omega T, \end{aligned}$$

となる。ここで $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$ を用いた。よって新しい振幅は

$$R = \frac{2af}{g}\left|\sin\tfrac{1}{2}\omega T\right|,$$

であり、題意が示された。

糸がたるむ（slack）ことはない。このとき最小の伸びは

$$a - R \;\geq\; a - \frac{2af}{g} = a\left(1 - \frac{2f}{g}\right) > 0,$$

であり、これもやはり $f < g/2$ による。よって常に $y > 0$ であり、運動方程式は有効なままである。

検算

- T が周期のちょうど整数倍、すなわち $\omega T = 2k\pi$ ならば、エレベーターの加速が止まる瞬間に質点は $y = a$ に戻っており、エレベーターに対して静止している。公式は振幅 0 を与える。質点は静止してぶら下がることになり、当然そうなるべきである。
- ωT が π の奇数倍ならば、質点は最高点 $y = a - 2af/g$ にあり、エレベーターに対して瞬間的に静止している。新しい中心は $y = a$ であるから振幅は $2af/g$ となり、これは公式の最大値である。
- 数値的にも、ランダムな a、$f < g/2$、T について、地面に固定した座標系で運動全体（エレベーターと質点。糸がたるんだら張力を 0 にする）を時間刻みで計算した。たとえば $a = 0.546$、$f/g = 0.337$、$\omega T = 15.27$ のとき、振幅は 0.18380 と 0.35864 となり、af/g および $\frac{2af}{g}|\sin\frac{1}{2}\omega T|$ と有効数字 6 桁まで一致した。また、伸びが $a - 2af/g$ を下回ることはなかった。

よくある間違い

- y をもとのつり合いの長さ $l + a$ から測ってしまう。そうすると右辺は $g - f$ ではなく $-f$ になる。
- 第 2 段階を $\dot{y} = 0$ から始め直してしまう。$t = T$ で質点は一般にエレベーターに対して動いており、その速度も振幅に寄与する。
- f の符号を誤る。**下向き**に加速するエレベーターでは実効的な重力加速度が $g - f$ に減るので、振動の中心は上に移る。

STEP のその先へ

エレベーターの加速度を差し引くことは、加速する座標系で考えることと同じである。そこでは一様な加速度 f が、余分な重力場 $-f$ のようにはたらく。この考え方は見かけの力（fictitious forces）へとつながり、さらにはアインシュタイン（Einstein）の等価原理（equivalence principle）へと至る。第 2 段階は、力が階段状に変化することで駆動される振動子の簡単な例である。その応答は、振動に対してどの時点で力の変化が起こるかによって決まり、これを扱う一般的な道具がグリーン関数（Green's

functions)（デュアメルの原理（Duhamel's principle））である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、非慣性系（non-inertial frames）と振動子をこうした精神で扱っている。

解答例

STEP II 1996、第 12 問

確率・統計　・　最大値と最小値の分布

> **STEP II 1996、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q12

鍵となる考え方

いくつかの独立（independent）な確率変数の最大値は直接扱いにくい。しかし「最大値が小さい」という事象は扱いやすい。この事象が起こるのは、**すべての**変数が小さいときであり、かつそのときに限る。しかも独立性により確率を掛け合わせることができる。そこで、まず累積分布関数（cumulative distribution function）を求め、それを微分して確率密度関数（probability density function）を得る。小問 (ii) はその裏返しであり、**最小値**が大きいのは、すべての変数が大きいとき、かつそのときに限る。

解答

小問 (i)

各 X_j は $[0,1]$ 上の一様分布（uniform distribution）に従うので、$0 \le y \le 1$ に対して $\mathrm{P}(X_j < y) = y$ である。この範囲の y について、$Y < y$ が成り立つのは、すべての j について $X_j < y$ が成り立つとき、かつそのときに限る。X_j は独立であるから、

$$F(y) = \mathrm{P}(Y < y) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{P}(X_j < y) = y^n, \qquad 0 \le y \le 1.$$

もちろん $y < 0$ では $F(y) = 0$、$y > 1$ では $F(y) = 1$ である。微分すると、Y の確率密度関数は

$$f(y) = \begin{cases} ny^{n-1}, & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{それ以外.} \end{cases}$$

となる（確認として、$\int_0^1 ny^{n-1}\,\mathrm{d}y = 1$ である）。

次にモーメント（moments）を求める。

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^1 y \cdot n y^{n-1}\,\mathrm{d}y = \frac{n}{n+1},$$
$$\mathrm{E}(Y^2) = \int_0^1 y^2 \cdot n y^{n-1}\,\mathrm{d}y = \frac{n}{n+2}.$$

したがって

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n\left[(n+1)^2 - n(n+2)\right]}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2},$$

である。ここで $(n+1)^2 - n(n+2) = n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n = 1$ を用いた。これが求める結果である。

考えてみよう いきなり $\mathrm{P}(Y = y)$ や Y の密度関数を書き下そうとするのではなく、$\mathrm{P}(Y < y)$ を扱うのはなぜだろうか。

連続型の確率変数では、密度関数の値は確率ではない。また「最大値が y に等しい」という事象には、どの X_j が最大であるかということと、他の変数がどうなるかということが入り混じっている。一方、事象 $\{Y < y\}$ は n 個の独立な事象の共通部分なので、その確率は単純な積になる。分布関数を求めてから微分するというのが、最大値や最小値を扱う標準的な方法である。

小問 (ii)

j 番目の電球が故障する時刻を T_j とすると、$\mathrm{P}(T_j \le t) = 1 - \mathrm{e}^{-t/\lambda}$ であり、

$$\mathrm{P}(T_j > t) = \mathrm{e}^{-t/\lambda}, \qquad t > 0.$$

電球は互いに独立なので、T_j も独立である。最初の故障が起こる時刻を $T = \min(T_1, \ldots, T_n)$ とする。今度は事象 $T > t$ を考えるのが便利である。これが起こるのは、時刻 t においてすべての電球がまだ点いているとき、かつそのときに限る。

$$\mathrm{P}(T > t) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{P}(T_j > t) = \left(\mathrm{e}^{-t/\lambda}\right)^n = \mathrm{e}^{-nt/\lambda}.$$

よって $\mathrm{P}(T \le t) = 1 - \mathrm{e}^{-nt/\lambda}$ であり、微分すると密度関数

$$g(t) = \frac{n}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-nt/\lambda}, \qquad t > 0.$$

が得られる。言い換えれば、T は電球 1 個と同じ種類の分布に従い、ただ λ が λ/n に置き換わっている。$u = t$ として部分積分（integration by parts）を行うと、

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(T) &= \int_0^\infty t\,\frac{n}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-nt/\lambda}\,\mathrm{d}t = \left[-t\,\mathrm{e}^{-nt/\lambda}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-nt/\lambda}\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + \left[-\frac{\lambda}{n}\,\mathrm{e}^{-nt/\lambda}\right]_0^\infty = \frac{\lambda}{n},\end{aligned}$$

となる。ここで、$t \to \infty$ のとき $te^{-nt/\lambda} \to 0$ であるから、境界項は 0 になる。したがって、最初の故障までの時間の期待値（expected value）は λ/n であり、これが求める結果である。

検算

- $n = 1$ のとき、Y は単に $[0,1]$ 上の一様分布に従い、公式は $\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{12}$ を与える。これはよく知られた一様分布の分散（variance）である。
- n が大きくなると、分散は $1/n^2$ のように振る舞う。多数の一様変数の最大値は 1 の近くに押し寄せられるので、予想どおりである。
- 小問 (ii) で $n = 1$ とすると、電球 1 個の寿命の期待値は λ となる。これはパラメータ $1/\lambda$ の指数分布（exponential distribution）の平均である。
- 5 個の一様変数の最大値を 200 000 回シミュレーションしたところ、分散は 0.01993 となり、$\frac{5}{7\cdot 36} \approx 0.01984$ とよく合った。また $\lambda = 3$ として 4 個の電球をシミュレーションしたところ、最初の故障時刻の平均は 0.749 となり、$\frac{3}{4}$ とよく合った。

よくある間違い

- $\mathrm{P}(T > t)$ を微分するときに負号を忘れ、負の「密度関数」を得てしまう。
- $(\mathrm{E}(Y))^2$ を引くべきところを、$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}(Y)$ と書いてしまう。
- n 個の電球はそれぞれ平均して時刻 λ に故障するのだから、最初の故障も λ に起こると考えてしまう。n 個の変数の最小値は、そのどれか 1 つよりもずっと小さい。

STEP のその先へ

最大値と最小値は**順序統計量**（order statistics）の両極端の場合である。標本を小さい順に並べたとき、n 個の一様変数のうち k 番目に小さいものはベータ分布（beta distribution）に従い、ここでの Y は $k = n$ の場合にあたる。小問 (ii) は、独立な指数分布に従う変数の最小値は再び指数分布に従い、その率（rate）は足し合わされるという重要な事実を示している。この事実は、ポアソン過程（Poisson process）や連続時間マルコフ連鎖（continuous-time Markov chain）の理論の原動力となっている。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）や、Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）は、いずれもこれらの考え方を展開している。

解答例

STEP II 1996、第 13 問

確率・統計 ・ 格子上のランダムウォーク

> **STEP II 1996、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q13

鍵となる考え方

この恒等式（identity）はヴァンデルモンド（Vandermonde）の恒等式であり、両辺の t^n の係数（coefficient）を比較すればよい。歩行については、どの一歩でもちょうど 1 だけ変化する一つの量、すなわち私のホテルから北へ何区画、西へ何区画離れているかの和に注目するとよい。私が一歩進むごとにこの量は 1 増え、友人が一歩進むごとに 1 減る。したがって、私たちが出会えるのはただ一つの時刻、交差点が並ぶただ一本の対角線上だけであり、出会う確率（probability）はちょうど恒等式の和になる。

解答

恒等式

$(1+t)^n$ における t^r の係数は $\binom{n}{r}$ である。積 $(1+t)^n(1+t)^n$ の t^n の項は、ある $r = 0, 1, \ldots, n$ について、第 1 の因数から t^r を、第 2 の因数から t^{n-r} を選ぶことで得られる。よって左辺の t^n の係数は

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}\binom{n}{n-r},$$

であり、右辺では $\binom{2n}{n}$ である。両者を等しいとおけば求める恒等式が得られる。同じ議論を $(1+t)^a(1+t)^b = (1+t)^{a+b}$ に適用すると、より一般的な形

$$\sum_{r} \binom{a}{r}\binom{b}{n-r} = \binom{a+b}{n}, \qquad (*)$$

が得られる。これは後で必要になる。

どこで出会えるか

私のホテルを原点とし、区画を単位として東向きに x、北向きに y をとる。すると友人のホテルは $(-n, n)$ にある。任意の位置に対して

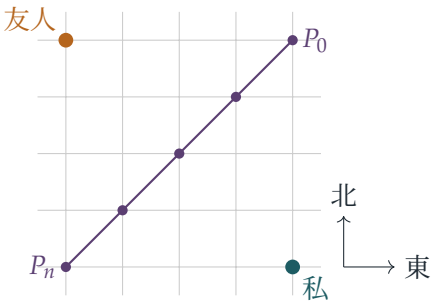
$$D = y - x,$$

と定める。これは私のホテルから北へ何区画、西へ何区画離れているかの和である。北または西へ進むと D は 1 増え、南または東へ進むと 1 減る。したがって t 分歩いた後、私は $D = t$ にあり、$D = 2n$ から出発した友人は $D = 2n - t$ にある。D は歩くにつれて一定の割合で変化するので、これは区画の途中も含めてあらゆる瞬間に成り立つ。

同じ時刻に同じ場所にいるためには D の値が等しくなければならないので、$t = 2n - t$、すなわち $t = n$ である。よって私たちが出会えるのはちょうど n 分後だけであり、そのとき $y - x = n$ を満たす交差点においてである。私の n 歩では領域 $-n \le x \le 0$、$0 \le y \le n$ の外に出ることはないので、出会いうる点は

$$P_r = (-r, n - r), \qquad r = 0, 1, \ldots, n,$$

である。これらは、私のホテルから北へ n 区画の交差点と西へ n 区画の交差点を結ぶ、正方形の対角線上にある $n + 1$ 個の交差点である。（特に、区画の途中ですれ違うことは決してない。）



図は $n = 4$ の場合を示している。出会いうる点は対角線上の点である。

出会う確率

n 分後に私が P_r にいるのは、n 歩のうち r 歩が西、$n - r$ 歩が北であるときであり、かつそのときに限る。n 歩の各列の確率は 2^{-n} なので

$$\mathrm{P}(\text{私の位置が} P_r) = \binom{n}{r} \frac{1}{2^n}.$$

友人が $(-n, n)$ から n 歩で $P_r = (-r, n - r)$ に到達するのは、そのうち $n - r$ 歩が東、r 歩が南であるときであり、かつそのときに限る。その確率は $\binom{n}{n-r} 2^{-n}$ である。私たち

の歩行は独立（independent）であり、異なる r に対する事象「二人とも P_r にいる」は互いに排反（mutually exclusive）なので、恒等式により

$$\mathrm{P}(\text{出会う}) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}\binom{n}{n-r}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n},$$

となる。

$2k$ 分遅れて出発する場合

今度は友人が出発した時点から時刻 T を測る。$T \geq 2k$ のとき私は $T-2k$ 分歩いているので $D = T-2k$ にあり、友人は $D = 2n-T$ にある。これらが等しくなるのは $T = n+k$ のときだけである。このとき私は $n-k$ 歩（ここで $k \leq n$ なので、これは負でない整数である）、友人は $n+k$ 歩進んでいる。$n+k \geq 2k$ なので、私がまだホテルで眠っている間に友人が対角線の私の側に到達することはない。やはり出会えるのは交差点だけであり、区画の途中で出会うことはない。

$n-k$ 歩のうち r 歩が西であれば、私は $(-r, n-k-r)$ にいる。その確率は $\binom{n-k}{r}2^{-(n-k)}$ である。友人が同じ点にいるのは、$n+k$ 歩のうち $n-r$ 歩が東、$k+r$ 歩が南のときであり、その確率は $\binom{n+k}{n-r}2^{-(n+k)}$ である。前と同様に r について和をとると、$a = n-k$、$b = n+k$ とした $(*)$ により

$$\mathrm{P}(\text{出会う}) = \frac{1}{2^{n-k}\,2^{n+k}} \sum_{r=0}^{n-k} \binom{n-k}{r}\binom{n+k}{n-r} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n},$$

となる。

考えてみよう 寝坊してもまったく違いが生じないのはなぜだろうか。

友人の視点から歩行を眺め、私の位置を友人に対する相対位置で測ってみよう。友人の一歩（南または東）も私の一歩（北または西）も、友人に対する私の相対位置を北へ 1 区画か西へ 1 区画、それぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で独立に動かす。二人はどちらの方向にも n 区画離れた状態から出発し、合計 $2n$ 歩（私の歩数と友人の歩数の和）が相対的な「北」の動き n 回と「西」の動き n 回からなるときに、かつそのときに限り出会う。どちらがどの歩を進めるかは関係ないので、$2n$ 歩を n と n に分けても、$n-k$ と $n+k$ に分けても、答えは $\binom{2n}{n}/2^{2n}$ である。k に関する条件は、私が自分の分の歩数を実際に歩けることを保証しているにすぎない。n が大きいとき、この確率はおよそ $1/\sqrt{\pi n}$ で小さく、私が偶数分だけ寝坊してもしなくても同じである。

$n = 1$ で 1 分遅れる場合

今度は私が $D = T-1$、友人が $D = 2-T$ にあり、これらが等しくなるのは $T = \frac{3}{2}$ のときだけである。この時刻には二人とも区画のちょうど中ほどにいる。したがって二

人が同じ時刻に同じ交差点にいることは**決して**なく、出会うことを交差点で出会うことと解釈するなら、確率は 0 である。偶奇（parity）が変わったのである。歩数の合計が今度は奇数になっている。

区画の途中ですれ違うことも（現実の二人ならそうするように）出会いに数えるなら、同じ区画を逆向きに歩くとき、二人は $T=\frac{3}{2}$ に出会う。$T=1$ のとき私はまだホテル $(0,0)$ におり、友人は $(0,1)$ か $(-1,0)$ にいる。その後、友人が $(0,1)$ にいて南へ進み私が北へ進むか、友人が $(-1,0)$ にいて東へ進み私が西へ進めば、二人は出会う。それぞれの確率は $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ なので

$$\mathrm{P}(\text{区画の途中で出会う})=\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}=\tfrac{1}{4}.$$

検算

- 遅れのない $n=1$ の場合、私が北へ進み友人が東へ進むか、私が西へ進み友人が南へ進めば出会う。確率は $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}=\binom{2}{1}/4$ である。
- コンピュータを用いて、$n\le 5$ と許されるすべての k について歩行の組をすべて列挙し、二人の位置を 30 秒ごとに追跡した。出会う確率は、遅れが偶数である限りその値によらず $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{35}{128}, \frac{63}{256}$ であり、出会いは常に予測どおりのただ一つの時刻に起きた。$n=1$ で 1 分遅れる場合、出会いは $T=\frac{3}{2}$ における区画の途中でのものだけであり、その確率の合計は $\frac{1}{4}$ であった。
- $n=100$ のとき $\binom{200}{100}/4^{100}\approx 0.0563$ であり、$1/\sqrt{100\pi}\approx 0.0564$ に近い。

よくある間違い

- 正方形内のどこでも、いつでも出会えると思い込むこと。量 $y-x$ によって、出会いはただ一つの時刻とただ一本の対角線に限定される。
- 出会いうる点について和をとらずに確率を 2 乗してしまうこと、あるいは P_r における友人の歩数が入れ替わっていること（友人に必要なのは東への $n-r$ 歩であり、r 歩ではない）を忘れること。

STEP のその先へ

相対位置を用いた議論はカップリング（coupling）である。二つの独立なランダムウォーク（random walk）を、長さを合わせた一つのウォークで置き換えている。$\binom{2n}{n}/4^n$ が繰り返し現れるのはこのためである。同じ量は、直線上の単純対称ランダムウォーク（simple symmetric random walk）が $2n$ 歩後に原点に戻っている確率でもあり、その

$1/\sqrt{\pi n}$ という減衰（スターリングの公式（Stirling's formula）から得られる）は、1 次元および 2 次元のそのようなウォークが確率 1 で出発点に戻るというポリア（Pólya）の定理の鍵である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、ランダムウォークとこうした回帰確率を扱っている。

解答例

STEP II 1996、第 14 問

確率・統計　・　積率と中心極限定理

STEP II 1996、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/96-s2-q14

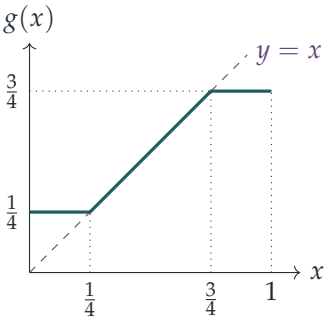
鍵となる考え方

Y は X の両端を「切り詰めた」ものである。すなわち、$\frac{1}{4}$ より下にある確率はすべて一点 $\frac{1}{4}$ に積み上げられ、$\frac{3}{4}$ より上にある確率はすべて $\frac{3}{4}$ に積み上げられる。したがって Y は、二つの点質量（point mass）と連続な中央部分をもつ混合型確率変数（mixed random variable）であり、任意の期待値（expectation）$\mathrm{E}(g(Y))$ も同じように三つの部分に分かれる。最後の小問では非常に多くの独立なコピーの和が現れるので、中心極限定理（central limit theorem）を用いることになる。そのために必要なのは Y の平均と分散（variance）だけであり、それはそれまでの小問ですでに求めてある。

解答

Y のモーメント

$X \sim \mathrm{U}[0,1]$ であるから、$\mathrm{P}(X \le \frac{1}{4}) = \mathrm{P}(X \ge \frac{3}{4}) = \frac{1}{4}$ であり、$[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ 上で X の確率密度（density）は 1 である。下に図示した切り詰め関数 g を用いて $Y = g(X)$ と書けば、$\mathrm{E}(Y^n) = \int_0^1 g(x)^n \,\mathrm{d}x$ を得る。



積分を $\frac{1}{4}$ と $\frac{3}{4}$ で分割すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y^n) &= \left(\tfrac{1}{4}\right)^n \cdot \tfrac{1}{4} + \int_{1/4}^{3/4} x^n \,\mathrm{d}x + \left(\tfrac{3}{4}\right)^n \cdot \tfrac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4^{n+1}} + \frac{3^{n+1}-1}{(n+1)4^{n+1}} + \frac{3^n}{4^{n+1}} \\ &= \frac{(n+1)(1+3^n)+3^{n+1}-1}{(n+1)4^{n+1}}.\end{aligned}$$

分子は $n+1+(n+1)3^n+3\cdot 3^n-1 = n+(n+4)3^n$ であるから、

$$\boxed{\mathrm{E}(Y^n) = \frac{n+(n+4)\,3^n}{(n+1)\,4^{n+1}}} \qquad (n \geq 1).$$

X との比較

一様分布に従う確率変数については $\mathrm{E}(X^n) = \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n+1}$ である。

$n=1$ とすると、公式より $\mathrm{E}(Y) = \dfrac{1+5\cdot 3}{2\cdot 16} = \dfrac{1}{2} = \mathrm{E}(X)$ となり、題意を満たす。（これは驚くことではない。切り詰めによって両端の質量は $\frac{1}{2}$ に関して対称に、同じ量だけ内側へ移動するからである。）

$n=2$ とすると $\mathrm{E}(Y^2) = \dfrac{2+6\cdot 9}{3\cdot 64} = \dfrac{56}{192} = \dfrac{7}{24}$ であり、一方 $\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{3} = \frac{8}{24}$ である。よって

$$\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(Y^2) = \frac{8}{24} - \frac{7}{24} = \frac{1}{24},$$

となり、題意を満たす。

一般の $n \geq 2$ については、二つのモーメント（moment）を共通の分母 $(n+1)4^{n+1}$ で表す：

$$\mathrm{E}(X^n) = \frac{4^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}}.$$

したがって $4^{n+1} > n + (n+4)3^n$ を示せばよい。$4^{n+1} = 4(3+1)^n$ と二項定理（binomial theorem）を用い、上位の二項を別にしておくと、

$$4^{n+1} = 4 \cdot 3^n + 4n \cdot 3^{n-1} + 4 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} 3^k.$$

ここから $n + (n+4)3^n = 4 \cdot 3^n + 3n \cdot 3^{n-1} + n$ を引くと、

$$4^{n+1} - \big(n + (n+4)3^n\big) = n\,3^{n-1} - n + 4 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} 3^k.$$

考えてみよう この差はなぜ正なのか。

$n \geq 2$ のとき $3^{n-1} \geq 3$ であるから、$n\,3^{n-1} - n \geq 2n > 0$ である。和の部分も正である。1 に等しい $k = 0$ の項を含み、どの項も非負だからである。よって差は真に正であり、

$$\mathrm{E}(X^n) > \mathrm{E}(Y^n) \qquad \text{任意の} n \geq 2.$$

が成り立つ。（$n = 1$ のとき差は $3^0 - 1 + 0 = 0$ であり、$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y)$ と一致する。）

240 000 個のコピーの和

前の小問より、

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \big(\mathrm{E}(Y)\big)^2 = \frac{7}{24} - \frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

$N = 240\,000$ として $S = Y_1 + \cdots + Y_N$ とおく。Y_i は独立であるから、期待値も分散も足し合わせることができる：

$$\mathrm{E}(S) = \frac{N}{2} = 120\,000, \qquad \mathrm{Var}(S) = \frac{N}{24} = 10\,000,$$

よって S の標準偏差（standard deviation）は 100 である。Y_i は有限の分散をもつ独立同分布（independent and identically distributed）の確率変数であり、N は非常に大きいので、中心極限定理により S は近似的に $\mathrm{N}(120\,000,\, 100^2)$ に従う。よって

$$\mathrm{P}(S < K) \approx \Phi\Big(\frac{K - 120\,000}{100}\Big) = \frac{3}{4} \quad \Longrightarrow \quad \frac{K - 120\,000}{100} = \Phi^{-1}(0.75) \approx 0.6745,$$

したがって

$$K \approx 120\,000 + 67.45 \approx 120\,067.$$

連続性補正（continuity correction）は必要ない。Y は整数値をとる確率変数ではないし、そもそも標準偏差が 100 であれば、そのような補正はこの精度では結果に何の影響も与えない。

検算

- $\frac{1}{4} \le Y \le \frac{3}{4}$ であるから、$\mathrm{E}(Y^n)$ の公式の値は $(\frac{1}{4})^n$ と $(\frac{3}{4})^n$ の間になければならないが、実際そうなっている。$n = 3$ のとき公式は $\frac{3+7\cdot 27}{4\cdot 256} = \frac{192}{1024} = \frac{3}{16} = 0.1875$ を与え、$g(x)^3$ を中点則（midpoint rule）で数値積分した値と小数第 10 位まで一致する。
- $\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{24} < \frac{1}{12} = \mathrm{Var}(X)$ である。切り詰めは値を平均の方へ引き寄せるので、散らばりは小さくなるはずである。
- Y の 2400 個のコピーの和を 20 000 回シミュレーションしたところ、標準化した上側四分位点（upper quartile）は約 0.678 となり、0.6745 に近かった。これは正規近似（normal approximation）を裏づけている。

よくある間違い

- Y を $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ 上の一様分布とみなしてしまい、両端にある大きさ $\frac{1}{4}$ の点質量を忘れること。この区間上の一様分布に従う確率変数の密度は 1 ではなく 2 である。
- $N\,\mathrm{Var}(Y)$ ではなく $\mathrm{Var}(S) = N^2\,\mathrm{Var}(Y)$ を用いてしまうこと。独立性により分散は足し合わされるので、標準偏差は $\sqrt{N}$ に比例して増える。
- 最後の段階で符号を間違えること。$\mathrm{P}(S < K) = \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$ であるから、K は平均より大きくなければならない。

STEP のその先へ

Y は X を切り詰めた（あるいは「ウィンザー化（Winsorised）」した）ものであり、その分布は離散でも連続でもない。測度論的確率論（measure-theoretic probability）では、このような分布も分布関数（distribution function）を通じて統一的に扱われ、あらゆる期待値は単一の積分 $\int g\,\mathrm{d}F$ となる。平均が等しいもとでの不等式 $\mathrm{E}(X^n) > \mathrm{E}(Y^n)$ は凸順序（convex ordering）の一例である。X は Y の「平均保存拡散（mean-preserving spread）」であり、したがってすべての凸（convex）関数 ϕ に対して $\mathrm{E}(\phi(X)) \ge \mathrm{E}(\phi(Y))$ が成り立つ。最後に用いた中心極限定理の証明は、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）に載っている。

解答例

STEP III 1996、第 1 問

純粋数学 ・ 双曲線関数の累乗

> **STEP III 1996、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q1

鍵となる考え方

すべては、双曲線関数（hyperbolic functions）を指数関数（exponentials）で書き表すことから導かれる。累乗 $\cosh^n x$ は $2^{-n}(e^x + e^{-x})^n$ となり、これを二項定理（binomial theorem）で展開すると指数関数 $e^{(n-2r)x}$ の和になる。これらは $e^{\pm jx}$ という対をなして現れ、各対はひとつの $\cosh jx$ にまとまる。$\sinh^{2m} x$ に対する同様の展開は符号が交互に変わる点だけが異なるので、足したり引いたりすると項が一つおきに消える。

解答

定義と 2 つの恒等式

次のように定義する。

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

ここから直ちに 2 つの事実が従う。$\cosh x + \sinh x = e^x$ かつ $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$ であるから、

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = (\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x) = e^x e^{-x} = 1.$$

定義の式を 2 乗すると $\cosh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})$、$\sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})$ となるので、

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \tfrac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) = \cosh 2x,$$

が成り立ち、これに恒等式（identity）$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ を足したり引いたりすると、

$$\cosh^2 x = \tfrac{1}{2}(\cosh 2x + 1), \qquad \sinh^2 x = \tfrac{1}{2}(\cosh 2x - 1).$$

を得る。最後の 2 式は任意の引数について成り立つので、その中の x を $2x$ に置き換えてよい。

さて、平方の差を因数分解すると、

$$\cosh^4 x - \sinh^4 x = (\cosh^2 x - \sinh^2 x)(\cosh^2 x + \sinh^2 x) = 1 \cdot \cosh 2x = \cosh 2x,$$

となり、示すべき式が得られる。和については、平方完成（completing the square）を行い、$\cosh x \sinh x = \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x}) = \frac{1}{2}\sinh 2x$ を用いる。

$$\begin{aligned}\cosh^4 x + \sinh^4 x &= (\cosh^2 x + \sinh^2 x)^2 - 2\cosh^2 x \sinh^2 x \\ &= \cosh^2 2x - \tfrac{1}{2}\sinh^2 2x \\ &= \tfrac{1}{2}(\cosh 4x + 1) - \tfrac{1}{4}(\cosh 4x - 1) \\ &= \tfrac{1}{4}\cosh 4x + \tfrac{3}{4},\end{aligned}$$

これが 2 つ目の恒等式である。

係数 a_k

二項定理により、

$$\cosh^n x = \frac{1}{2^n}\left(e^x + e^{-x}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}e^{(n-2r)x}.$$

添字 r の項と添字 $n-r$ の項を組にする。$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ であるから両者の係数は等しく、指数は互いに符号が逆の $\pm(n-2r)x$ である。したがって、2 つ合わせると $2\binom{n}{r}\cosh\big((n-2r)x\big)$ となる。

考えてみよう 実際に現れるのはどの $\cosh kx$ か。また、真ん中の項はどうなるか。

指数 $n-2r$ は $n, n-2, n-4, \ldots$ であるから、n と偶奇（parity）が一致する k だけが現れる。$k = n-2r$ とおくと、$1 \le k \le n$ に対する $\cosh kx$ の係数は、$r = \frac{1}{2}(n-k)$ として $2\cdot 2^{-n}\binom{n}{r}$ である。n が偶数のときは、組にならない真ん中の項 $r = \frac{n}{2}$ もあり、定数 $2^{-n}\binom{n}{n/2}$ を与える。よって

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n-1}}\dbinom{n}{\frac{1}{2}(n-k)} & 1 \le k \le n \text{ かつ} n-k \text{ が偶数のとき,} \\ 0 & n-k \text{ が奇数のとき,} \end{cases} \qquad a_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{\frac{1}{2}n} & n \text{ が偶数,} \\ 0 & n \text{ が奇数.} \end{cases}$$

たとえば $\cosh^5 x = \frac{5}{8}\cosh x + \frac{5}{16}\cosh 3x + \frac{1}{16}\cosh 5x$ である。

最後の設問

$n = 2m$ とし、$\sinh^{2m} x$ を同じように展開する。

$$\sinh^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{r=0}^{2m} (-1)^r \binom{2m}{r} e^{(2m-2r)x}.$$

$(-1)^{2m-r} = (-1)^r$ であるから、項 r と項 $2m-r$ はやはり組になる。したがって

$$\sinh^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{r=0}^{2m} (-1)^r \binom{2m}{r} \cosh\big(2(m-r)x\big),$$

となり、これは（cosh が偶関数であることを用いて同じ形に書いた）$\cosh^{2m} x$ の展開の符号を交互にしたものである。引き算と足し算をすると、

$$\cosh^{2m} x \mp \sinh^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{r=0}^{2m} \big(1 \mp (-1)^r\big) \binom{2m}{r} \cosh\big(2(m-r)x\big).$$

よって、差では奇数の r の項だけが（それぞれ 2 倍されて）残り、和では偶数の r の項だけが残る。前と同様に r と $2m-r$ の組をまとめ、$k = 2j = 2(m-r)$ と書くと、

$$\cosh^{2m} x - \sinh^{2m} x = b_0 + \sum_{\substack{1 \le j \le m \\ m-j \text{ 奇数}}} \frac{1}{2^{2m-2}} \binom{2m}{m-j} \cosh 2jx,$$

$$\cosh^{2m} x + \sinh^{2m} x = c_0 + \sum_{\substack{1 \le j \le m \\ m-j \text{ 偶数}}} \frac{1}{2^{2m-2}} \binom{2m}{m-j} \cosh 2jx,$$

を得る。ここで定数項は組にならない真ん中の項 $r = m$ から生じ、m が奇数のときは差に、m が偶数のときは和に残る。

$$b_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2m-1}} \binom{2m}{m} & m \text{ が奇数}, \\ 0 & m \text{ が偶数}, \end{cases} \qquad c_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2m-1}} \binom{2m}{m} & m \text{ が偶数}, \\ 0 & m \text{ が奇数}. \end{cases}$$

言葉でまとめると次のようになる。$\cosh kx$ の係数は、k が奇数のとき 0 である。偶数 $k = 2j \ge 2$ に対しては、$m-j$ が奇数ならば差において、$m-j$ が偶数ならば和において $2^{2-2m}\binom{2m}{m-j}$ であり、それ以外では 0 である。$m = 2$ のとき、差は $\frac{1}{4}\binom{4}{1}\cosh 2x = \cosh 2x$、和は $\frac{1}{8}\binom{4}{2} + \frac{1}{4}\binom{4}{0}\cosh 4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cosh 4x$ となり、最初に証明した恒等式が再び得られる。

検算

$x = 0$ を代入する。すべての $\cosh kx$ は 1 になるので、a_k の総和は 1 でなければならない（実際そうなる。二項係数（binomial coefficients）の総和は 2^n である）。また、最

後の 2 つの展開の係数の和もいずれも 1 でなければならない。$m = 3$ のとき、公式から $\cosh^6 x - \sinh^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cosh 4x$ および $\cosh^6 x + \sinh^6 x = \frac{15}{16}\cosh 2x + \frac{1}{16}\cosh 6x$ が得られる。$x = 1$ では、1 つ目の式の両辺はともに有効数字 4 桁で 10.87 となり、電卓で確かめられる。さらに、$n \leq 12$ および $m \leq 8$ について、ランダムに選んだ x の値ですべての公式を数値的に確認した。

よくある間違い

- 真ん中の項を 2 倍してしまう。n が偶数のとき、$r = \frac{n}{2}$ の項には相手がいないので、a_0 は $2^{-n}\binom{n}{n/2}$ であり、その 2 倍ではない。
- k と n の偶奇が異なるときは常に $a_k = 0$ であることを忘れる。
- 最後の設問で定数項が常に現れると思い込む。定数項は、差では m が奇数のときだけ、和では m が偶数のときだけ現れる。

STEP のその先へ

$\cosh x$（あるいは $\cos x$）の累乗を $\cosh kx$ の 1 次結合として書き表すことは、フーリエ解析（Fourier analysis）への最初の入り口である。e^{ikx} が自然な構成要素であり、$\cos^n x$ は係数が二項係数で与えられる有限フーリエ級数（finite Fourier series）である。逆の操作、すなわち $\cos nx$ を $\cos x$ の多項式として表すと、チェビシェフ（Chebyshev）多項式が得られ、これは近似理論（approximation theory）で重要な役割を果たす。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は、指数関数による表示がなぜこれらの恒等式をすべて自然なものにするのかを示している。

解答例

STEP III 1996、第 2 問

純粋数学 ・ 連立 1 次方程式

STEP III 1996、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/96-s3-q2

鍵となる考え方

3 つの未知数に関する 3 つの 1 次方程式は、係数の行列式（determinant）が 0 にならない限り、ちょうど 1 つの解をもつ。したがって、まずすべきことは行列式を 0 にする a の値を求めることであり、それ以外のすべての a についてはそのまま解けばよい。この問題の本質は例外的な値にあり、そこでは b に応じて、方程式が矛盾する（inconsistent）のか、それとも無数の解をもつのかを判定しなければならない。

解答

方程式に次のように番号をつける。

$$x + y + az = 2, \tag{1}$$
$$x + ay + z = 2, \tag{2}$$
$$2x + y + z = 2b. \tag{3}$$

解がただ 1 つになるのはいつか

係数行列（coefficient matrix）の行列式は

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(a-1) - 1(1-2) + a(1-2a)$$
$$= 2a - 2a^2 = 2a(1-a).$$

である。よって、$a \neq 0$ かつ $a \neq 1$ のとき、b の値によらず解はちょうど1つである。$a = 0$ と $a = 1$ の場合は別に扱う必要がある。

一般の場合：$a \neq 0, 1$

(1) から (2) を引くと

$$(1-a)y - (1-a)z = 0,$$

となり、$a \neq 1$ であるから $1-a$ で割ることができて $y = z$ を得る。$z = y$ を (1) と (3) に代入すると

$$x + (1+a)y = 2, \qquad 2x + 2y = 2b, \text{ すなわち } x + y = b.$$

となる。1つ目から2つ目を引くと $ay = 2 - b$ となり、$a \neq 0$ であるから

$$y = z = \frac{2-b}{a}, \qquad x = b - \frac{2-b}{a} = \frac{(a+1)b - 2}{a}.$$

を得る。これを (1)、(2)、(3) に代入し直すと解であることが確かめられ、上の議論によりこれが唯一の解である。

$a = 0$ の場合

方程式は

$$x + y = 2, \qquad x + z = 2, \qquad 2x + y + z = 2b.$$

となる。最初の2式を足すと $2x + y + z = 4$ を得る。よって、3つ目の方程式の左辺は 4 にも $2b$ にも等しくなければならない。

> **考えてみよう** 行列式が0であることは「解がない」ことを意味するだろうか？

それだけではそうはいえない。行列式が0であるということは、方程式が1次従属（dependent）であること、つまり方程式どうしが矛盾するか、あるいはそのうちの1つが新しい情報を何も加えないかのどちらかであることを意味する。どちらが起こるかは右辺、ここでは b によって決まる。

- $b \neq 2$ ならば $4 = 2b$ は成り立たないので、**解はない**。
- $b = 2$ ならば、3つ目の方程式は最初の2式の和にすぎないので、$x + y = 2$ と $x + z = 2$ だけが残る。$x = t$ とおくと、解は

  $$(x, y, z) = (t,\ 2 - t,\ 2 - t), \qquad t \text{ は任意の実数.}$$

  である。

$a = 1$ の場合

このとき (1) と (2) は同じ方程式 $x + y + z = 2$ となり、連立方程式は

$$x + y + z = 2, \qquad 2x + y + z = 2b.$$

となる。2 つ目から 1 つ目を引くと $x = 2b - 2$ となり、さらに $y + z = 2 - x = 4 - 2b$ を得る。この 2 つの方程式は決して矛盾しないので、b のどのような値に対しても無数の解が存在する。

$$(x, y, z) = (2b - 2,\ s,\ 4 - 2b - s), \qquad s \text{ は任意の実数.}$$

まとめ

- $a \neq 0, 1$：ただ 1 つの解 $x = \dfrac{(a+1)b - 2}{a}$、$y = z = \dfrac{2 - b}{a}$。
- $a = 0$、$b \neq 2$：解なし。
- $a = 0$、$b = 2$：任意の t に対して $(t, 2 - t, 2 - t)$。
- $a = 1$、任意の b：任意の s に対して $(2b - 2, s, 4 - 2b - s)$。

検算

$a = 2$、$b = 4$ とすると、公式から $y = z = -1$、$x = 5$ を得る。実際、$5 - 1 - 2 = 2$、$5 - 2 - 1 = 2$、$10 - 1 - 1 = 8 = 2b$ である。構造的な検算として、一般の公式は分母に a を含むので、$a = 0$ では破綻するはずである。実際に破綻し、その理由は別に行った解析が示している。$a = 1$ では公式はまだ意味をもち、$(2b - 2, 2 - b, 2 - b)$ を与えるが、これは解の族において $s = 2 - b$ としたものである。$y = z$ がもはや強制されないので、これは多くの解のうちの 1 つにすぎない。a、b およびパラメータに多数のランダムな値を与え、厳密な有理数演算によってすべての場合を検証した。

よくある間違い

- $a \neq 1$ や $a \neq 0$ であることを述べずに、$1 - a$ や a で割ってしまう。まさにこうした割り算のところに特別な場合が潜んでいる。
- 行列式が 0 ならば解がないと思い込む。$a = 1$ のときは常に無数の解があり、$a = 0$ のときも $b = 2$ ならば解が存在する。
- 無数の解からなる族を具体的に書き表すのを忘れる。「無数の解がある」と述べることは、方程式を解いたことにはならない。

STEP のその先へ

それぞれの方程式は3次元空間内の平面を表しており、この問題は3枚の平面がどのように交わりうるか、すなわち1点で交わるのか、共通の直線に沿って交わるのか、まったく交わらないのかを問うている（$a = 0$、$b \neq 2$ のとき、平面は2枚ずつ互いに平行な3本の直線に沿って交わり、角柱の側面のような配置になる）。これを体系的に扱う道具がガウスの消去法（Gaussian elimination）と行列の階数（rank）の概念である。連立方程式が解をもつのは、右辺を付け加えても階数が上がらないときであり、かつそのときに限る。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、この描像を見事に展開している。

解答例

STEP III 1996、第 3 問

純粋数学 ・ 半角の置換

> **STEP III 1996、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q3

鍵となる考え方

$1/(\text{定数}+\text{定数}\cdot\cos x)$ から作られる被積分関数（integrand）は、半角置換（half-angle substitution）$t=\tan\frac{1}{2}x$ を用いる典型的な場面である。この置換により、$\sin x$ と $\cos x$ の任意の有理関数（rational function）は t の有理関数に変わる。ここでは標準的な形 $\int \mathrm{d}t/(k^2+t^2)$ が現れ、逆正接（inverse tangent）が得られる。二つの「これを用いて」の結果は、それぞれの被積分関数を $1/(1-a\cos x)$ の形に変形し、a と θ を選ぶだけのことである。

解答

一般の積分

$t=\tan\frac{1}{2}x$ とおく。x が 0 から θ まで動くとき、t は 0 から $T=\tan\frac{1}{2}\theta$ まで動く。$0<\frac{1}{2}\theta<\frac{1}{2}\pi$ であるから、T は有限の正の値である。標準的な半角の公式により

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

が成り立つ。二つ目は $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}(1+t^2)$ による。すると

$$1-a\cos x=\frac{(1+t^2)-a(1-t^2)}{1+t^2}=\frac{(1-a)+(1+a)t^2}{1+t^2},$$

となるので、因子 $1+t^2$ が約分されて

$$\int_0^{\theta}\frac{1}{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{T}\frac{2}{(1-a)+(1+a)t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{1+a}\int_0^{T}\frac{1}{k^2+t^2}\,\mathrm{d}t,\qquad k^2=\frac{1-a}{1+a}.$$

を得る。$-1 < a < 1$ であるから $1-a$ と $1+a$ はともに正であり、$k = \sqrt{(1-a)/(1+a)}$ は確かに正の実数である。（a に関する条件が使われるのはまさにここである。$|a| \geq 1$ ならば分母が 0 になりうるので、積分は広義積分（improper integral）になるか、答えが対数になる。）$\int \mathrm{d}t/(k^2+t^2) = \frac{1}{k}\tan^{-1}(t/k)$ を用いると

$$\int_0^\theta \frac{1}{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(1+a)k}\tan^{-1}\frac{T}{k}.$$

最後に $(1+a)k = \sqrt{(1+a)^2}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} = \sqrt{1-a^2}$ であるから

$$\boxed{\int_0^\theta \frac{1}{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\tan\tfrac{1}{2}\theta\right).}$$

考えてみよう なぜ $\theta < \pi$ が必要なのか。

置換 $t = \tan\frac{1}{2}x$ は $x = \pi$ で破綻する。そこでは t が無限大になってしまうからである。$\theta < \pi$ としておけば区間 $[0,\theta]$ 全体が有限区間 $[0, \tan\frac{1}{2}\theta]$ に移り、公式に特別な注意は要らない。（$\theta \to \pi$ とすると、$\tan^{-1}$ が $\frac{1}{2}\pi$ に近づくので、値は $\pi/\sqrt{1-a^2}$ となる。）

一つ目の「これを用いて」

因子 2 をくくり出す：

$$\frac{1}{2-a\cos x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}a\cos x}.$$

積分が有限であるためには $-2 < a < 2$ が必要であり、このとき $b = \frac{1}{2}a$ は $-1 < b < 1$ を満たす。よって、a を b に置き換え、$\theta = \frac{1}{2}\pi$ として一般の結果を適用できる。ここで $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$ である：

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{1}{2-a\cos x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}a}{1-\frac{1}{2}a}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{4-a^2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{2+a}{2-a}},\end{aligned}$$

ここで $\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}$ を用い、逆正接の中の分数の分子と分母をそれぞれ 2 倍した。これが求める結果である。

二つ目の「これを用いて」

今度は $\sqrt{2}$ をくくり出す：

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos x},$$

したがって $a=-\frac{1}{\sqrt{2}}$（これは $(-1,1)$ に属する）と $\theta=\frac{3}{4}\pi$（これは $(0,\pi)$ に属する）を用いる。すると $\sqrt{1-a^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ であり、

$$\frac{1+a}{1-a}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2,$$

となる。ここでは分子と分母に $\sqrt{2}-1$ を掛け、$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$ を用いた。よって平方根は $\sqrt{2}-1$ であり、一般の公式から

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}+\cos x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{1/\sqrt{2}}\tan^{-1}\Big((\sqrt{2}-1)\tan\tfrac{3}{8}\pi\Big)=2\tan^{-1}\Big((\sqrt{2}-1)\tan\tfrac{3}{8}\pi\Big).$$

を得る。

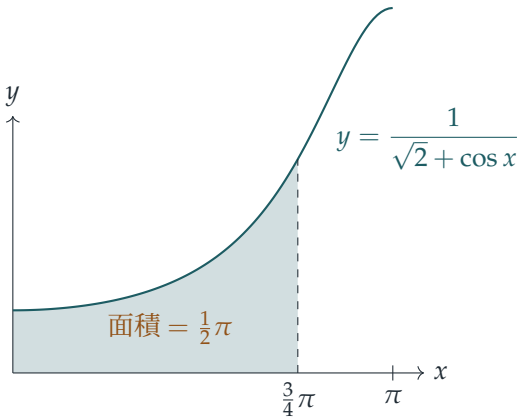
考えてみよう $\tan\frac{3}{8}\pi$ の値はいくらか。

$u=\tan\frac{1}{8}\pi>0$ として倍角の公式（double-angle formula）を用いる：$1=\tan\frac{1}{4}\pi=\frac{2u}{1-u^2}$ であるから $u^2+2u-1=0$ となり、$u=\sqrt{2}-1$（正の解）である。$\frac{3}{8}\pi=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{8}\pi$ であるから、$\tan\frac{3}{8}\pi=\cot\frac{1}{8}\pi=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$ を得る。

ゆえに $(\sqrt{2}-1)\tan\frac{3}{8}\pi=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$ であり、

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}+\cos x}\,\mathrm{d}x=2\tan^{-1}1=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2},$$

となって、求める結果が得られた。



検算

▶ $a=0$ とすると一般の公式は $2\tan^{-1}(\tan\frac{1}{2}\theta)=\theta$ を与え、これは $\int_0^\theta 1\,\mathrm{d}x$ に等しい。同様に、一つ目の「これを用いて」で $a=0$ とすると $\frac{2}{2}\tan^{-1}1=\frac{1}{4}\pi=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$

となる。

- 枠で囲んだ答えを θ で微分すると $1/(1-a\cos\theta)$ に戻るはずである。合成関数の微分法（chain rule）のよい練習になる。
- 最後の積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると 1.5707963… となり、$\frac{1}{2}\pi$ と一致する。一般の公式と一つ目の「これを用いて」の結果も、a と θ を無作為に何百通りも選んだとき、シンプソンの公式による値と 10^{-10} 以内で一致する。

よくある間違い

- 被積分関数を $1/(1-a\cos x)$ の形に変形するときにくくり出した因子 $\frac{1}{2}$（または $\frac{1}{\sqrt{2}}$）を忘れる。
- 最後の部分で $a=+\frac{1}{\sqrt{2}}$ を用いてしまう。$\sqrt{2}+\cos x$ の符号から、a は負である。
- k を見失う。答えは $\frac{1}{k}\tan^{-1}(t/k)$ であり、$\tan^{-1}(t/k)$ でも $\frac{1}{k}\tan^{-1}(kt)$ でもない。

STEP のその先へ

置換 $t=\tan\frac{1}{2}x$（しばしばワイエルシュトラス（Weierstrass）置換と呼ばれる）がうまくいくのは、単位円を有理関数でパラメータ表示するからである。そのため、$\sin x$ と $\cos x$ の任意の有理関数は t の有理関数に帰着され、これは部分分数分解（partial fractions）によって必ず積分できる。$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x/(1-a\cos x)=2\pi/\sqrt{1-a^2}$ のような積分は、複素解析（complex analysis）における周回積分（contour integration）の標準的な最初の例でもあり、そこでは置換 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ と留数定理（residue theorem）が働く。この観点については Needham, *Visual Complex Analysis*（複素解析を視覚的に解説した本）を参照せよ。

解答例

STEP III 1996、第 4 問

純粋数学 ・ 積を最大にする分割

> **STEP III 1996、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q4

鍵となる考え方

N の分割（splitting）の仕方を一つ残らず調べるのではなく、**最適な**（optimal）分割が何を含みえないかを考える。大きすぎる部分は積（product）を下げずに二つに分けることができ、まさにそれを測るのが冒頭の不等式（inequality）である。1 に等しい部分は無駄であり、2 が多すぎれば 3 に取り替えることができる。これらの操作の後に残る形はごくわずかであり、和 N によってそのうちの一つが選び出される。

解答

不等式

次が成り立つ。

$$k \le 2(k-2) \iff k \le 2k-4 \iff k \ge 4.$$

したがって不等式を満たす整数は $k = 4, 5, 6, \ldots$ である。さらに等号が成り立つのは $k = 4$ のときに限り、$k \ge 5$ では不等式は狭義に（strict）成り立つ：$k < 2(k-2)$。

最適な分割の形

$N \ge 2$ を固定する。N を正の整数の和として表す方法は有限個しかないので、最大の積 $P(N)$ が存在する。部分の順序は和にも積にも影響しないので、分割を部分の集まりとして扱う。積が $P(N)$ となる分割を**最適**と呼ぶ。以下で三つの観察を行う。いずれも和を N に保ったまま分割を変更するものである。

(a) **5 以上の部分はない。**部分 $m \ge 5$ を二つの部分 2 と $m-2$（どちらも正）に置き

換えると、積は $2(m-2)/m$ 倍になり、不等式の狭義の形よりこれは 1 より大きい。したがって部分 $m \geq 5$ をもつ分割は最適でない。

4 に等しい部分は、$2 \times 2 = 4$ であるから（等号の場合 $k = 4$）、積を変えずに $2+2$ に置き換えられる。したがって最適な分割の中には 3 より大きい部分をもたないものがある。以後はそのような最適な分割を考える。

(b) **1 である部分はない**。$N \geq 2$ であるから、部分 1 が唯一の部分であることはなく、ほかに部分 a が存在する。二つの部分 1 と a を一つの部分 $a+1$ に置き換えると、和は保たれ、因子 $1 \times a = a$ が $a+1 > a$ に変わる。これは積を増加させるが、最適な分割ではそれは不可能である。

(c) **2 である部分は高々二つである**。もし 2 が三つあれば、$2+2+2$ を $3+3$ に置き換えると因子 8 が 9 に変わり、やはり積が増加する。

したがって、ある最適な分割は 3 が a 個と 2 が b 個（ただし $b \in \{0,1,2\}$）からなり、

$$N = 3a + 2b, \qquad P(N) = 3^a 2^b.$$

考えてみよう 同じ N に二通りの (a,b) が当てはまり、結局それらを比較しなければならないということはありうるだろうか？

ありえない。3 を法（modulo）として考えると $2b \equiv N \pmod 3$ となり、$b = 0,1,2$ に対して $2b \equiv 0,2,1 \pmod 3$ と三つの異なる剰余（residue）が得られる。したがって N によって b が定まり、さらに $a = (N-2b)/3$ も定まる。よって

$$P(N) = \begin{cases} 3^{N/3} & \text{条件：} N \equiv 0 \pmod 3, \\ 2 \times 3^{(N-2)/3} & \text{条件：} N \equiv 2 \pmod 3, \\ 2^2 \times 3^{(N-4)/3} & \text{条件：} N \equiv 1 \pmod 3,\ N \geq 4. \end{cases}$$

$N = 5, \ldots, 9$ の場合の値

これを各 N に順に適用すると

$$\begin{aligned} 5 &= 3+2, & P(5) &= 2 \times 3, \\ 6 &= 3+3, & P(6) &= 3^2, \\ 7 &= 3+2+2, & P(7) &= 2^2 \times 3, \\ 8 &= 3+3+2, & P(8) &= 2 \times 3^2, \\ 9 &= 3+3+3, & P(9) &= 3^3, \end{aligned}$$

となり、求める結果が得られる。（$N = 7$ では分割 $4+3$ も最適である。観察 (a) で 4 を除外するのではなく**置き換える**ことしかしていないのはこのためである。）

$P(1000)$ を求める

$1000 = 3\times 332 + 4$ であるから $1000 \equiv 1 \pmod 3$ であり、$b = 2$、$a = (1000-4)/3 = 332$ となる。最適な分割は 3 が 332 個と 2 が二つであり、

$$P(1000) = 2^2 \times 3^{332}.$$

同値な言い方をすれば、最適な分割は 3 が 332 個と 2 が二つのもの、または 3 が 332 個と 4 が一つのものである。(a)–(c) の操作により、それ以外の分割は狭義に改善できることがわかるので、最適な分割はこれらに限る。

検算

- $N \le 40$ について N のすべての分割を総当たりで調べると、与えられた五つの値も含めて公式と一致する。
- $P(n) = \max_{1\le p\le n} p\,P(n-p)$ を用いた計算機による厳密な計算では $P(1000) = 4\times 3^{332}$ となり、これは 160 桁の数である。
- 妥当性の確認として、整数でない「分割」と比較してみる。N/x 個の等しい部分に分けると積は $x^{N/x}$ となり、これは $x = \mathrm{e} \approx 2.72$ で最大となる。3 が（そしてときどき 2 が）勝つのはこのためである。

よくある間違い

- $1000 = 3\times 333 + 1$ と書いて 3^{333} と答えること。この分割は 1 を含んでおり、$4 > 3$ であるから $3+1$ は $2+2$ に置き換えるべきである。
- 部分 4 は「現れえない」と述べること。最適な分割に現れることはありうる。ただ $2+2$ より良くなることがないだけである。
- $N = 5,\dots,9$ の値を列挙するだけで、それより大きいものがないことを示さないこと。それらが最大であることを証明するのは構造に関する議論である。

STEP のその先へ

ここでの議論は典型的な**極値的**（extremal）論法、あるいは**交換**（exchange）論法である。最良の対象が存在すると仮定し、それが特定の局所的なパターンを避けなければならないことを示すのである。同じ考え方は組合せ論（combinatorics）や、貪欲アルゴリズム（greedy algorithm）が最適であることの証明、整数の分割（integer partition）の理論にも現れる。連続版（$x^{N/x}$ の最大化）は微積分の手頃な演習問題である。こ

の精神に沿った問題をさらに解きたければ Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を、合同式（congruence）と初等整数論については Davenport, *The Higher Arithmetic* を参照するとよい。

解答例

STEP III 1996、第 5 問

純粋数学 ・ 倍角の公式

> **STEP III 1996、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q5

鍵となる考え方

$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^7$ を二項定理（binomial theorem）で展開し、ド・モアブルの定理（de Moivre's theorem）と比較すると、$\cos 7\theta$ と $\sin 7\theta$ が多項式（polynomial）として表される。さらに全体を $\cos^7\theta$ で割ると、すべてが $t = \tan\theta$ の累乗で書ける。$\tan 7\theta$ が t の多項式の比として表されれば、$\tan 7\theta$ が 0 になる角では分子が 0 になり、$\tan 7\theta$ が定義されない角では分母が 0 になる。どちらの多項式も因数 t を除けば偶多項式（even polynomial）なので、t^2 の 3 次式（cubic）となり、あとは解と係数の関係（Vieta's formulae）で片がつく。

解答

$\tan 7\theta$ の公式

$c = \cos\theta$、$s = \sin\theta$ とおくと、ド・モアブルの定理と二項定理により

$$\cos 7\theta + \mathrm{i}\sin 7\theta = (c + \mathrm{i}s)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} \mathrm{i}^k c^{7-k} s^k.$$

$\cos\theta \neq 0$ と仮定し、$t = \tan\theta$ が定義されるようにする。c^7 をくくり出すと $(c + \mathrm{i}s)^7 = c^7(1 + \mathrm{i}t)^7$ となる。$\mathrm{i}^2 = -1$、$\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$、$\mathrm{i}^4 = 1$ と二項係数 $1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1$ を用いると

$$(1 + \mathrm{i}t)^7 = (1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6) + \mathrm{i}\,(7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7).$$

実部と虚部を比較すると（i 以外はすべて実数である）、

$$\cos 7\theta = \cos^7\theta\,(1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6),$$
$$\sin 7\theta = \cos^7\theta\,(7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7).$$

割り算をすると因数 $\cos^7\theta$ は約分され、分子と分母に -1 を掛けると

$$\tan 7\theta = \frac{7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7}{1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6} = \frac{t(t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7)}{7t^6 - 35t^4 + 21t^2 - 1},$$

となり、求める式が得られた。

後で使うために、上の 2 行の式が何を意味するかを確認しておく。$N(t) = t(t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7)$、$D(t) = 7t^6 - 35t^4 + 21t^2 - 1$ とおく。すると $\sin 7\theta = -\cos^7\theta\, N(t)$、$\cos 7\theta = -\cos^7\theta\, D(t)$ であるから、$\cos\theta \neq 0$ のとき

$$\sin 7\theta = 0 \iff N(t) = 0, \qquad \cos 7\theta = 0 \iff D(t) = 0.$$

小問 (i)

$k = 1, 2, 3$ に対して $\theta = \frac{k\pi}{7}$ とする。このとき $\sin 7\theta = \sin k\pi = 0$ かつ $\cos\theta \neq 0$ であるから、$N(\tan\theta) = 0$ である。また $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\tan\theta \neq 0$ なので、因数 t で割ってよい：

$$t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7 = 0.$$

したがって $x = \tan^2\frac{\pi}{7}$, $\tan^2\frac{2\pi}{7}$, $\tan^2\frac{3\pi}{7}$ に対して、$x = t^2$ は

$$x^3 - 21x^2 + 35x - 7 = 0$$

を満たす。

> **考えてみよう** これら 3 つの数が根のすべてであり、1 つの根を何度も数えたものではないことは、どうすればわかるだろうか？

角 $\frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} < \frac{3\pi}{7}$ はいずれも $(0, \frac{\pi}{2})$ に属し、そこで tan は正で狭義単調増加である。よって $\tan^2$ の 3 つの値は互いに異なる。3 次方程式の根は高々 3 個であるから、これらがちょうどその根であり、これが求める 3 次方程式である。

解と係数の関係より、根の積は 7 である：

$$\tan^2\tfrac{\pi}{7}\,\tan^2\tfrac{2\pi}{7}\,\tan^2\tfrac{3\pi}{7} = 7.$$

各角は $(0, \frac{\pi}{2})$ に属するので各正接は正であり、正の平方根をとる：

$$\tan\tfrac{\pi}{7}\,\tan\tfrac{2\pi}{7}\,\tan\tfrac{3\pi}{7} = \sqrt{7}.$$

小問 (ii)

次に $\theta = \frac{\pi}{14}, \frac{3\pi}{14}, \frac{5\pi}{14}$ とする。このとき $7\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ であるから $\cos 7\theta = 0$ であり、一方 $\cos\theta \neq 0$ である。上の注意により $D(\tan\theta) = 0$ となるので、$y = \tan^2\theta$ は

$$7y^3 - 35y^2 + 21y - 1 = 0.$$

を満たす。小問 (i) と同様に、3 つの角は $(0, \frac{\pi}{2})$ に属し互いに異なるので、$\tan^2\theta$ の 3 つの値は互いに異なり、ちょうどこの 3 次方程式の根である。解と係数の関係より、それらの和は $\frac{35}{7}$ である：

$$\tan^2\frac{\pi}{14} + \tan^2\frac{3\pi}{14} + \tan^2\frac{5\pi}{14} = 5.$$

小問 (i) を用いた手早い別解もある。$\frac{\pi}{14} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{7}$ であり、同様に $\frac{3\pi}{14} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{7}$、$\frac{5\pi}{14} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}$ であるから、求める和は小問 (i) の 3 次方程式の根 x_i についての $\sum 1/x_i$ である。すなわち

$$\frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \frac{35}{7} = 5.$$

同じことであるが、小問 (i) の 3 次方程式に $x = 1/y$ を代入して分母を払うと、小問 (ii) の 3 次方程式が得られる。

検算

- $t = 1$、すなわち $\theta = \frac{\pi}{4}$ とおく。公式は $\frac{1-21+35-7}{7-35+21-1} = \frac{8}{-8} = -1$ を与え、実際 $\tan\frac{7\pi}{4} = -1$ である。
- θ が小さいとき $\tan 7\theta \approx 7t$ であり、公式は 1 次の近似で $\frac{-7t}{-1} = 7t$ を与える。
- 数値的には $\tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7} \approx 0.4816 \times 1.2540 \times 4.3813 \approx 2.6458 \approx \sqrt{7}$ であり、$\tan^2\frac{\pi}{14} + \tan^2\frac{3\pi}{14} + \tan^2\frac{5\pi}{14} \approx 0.0521 + 0.6360 + 4.3119 = 5.0000$ である。

よくある間違い

- 3 つの値が互いに異なること、したがってそれらが本当に 3 次方程式の根の**すべて**であることの説明を忘れる。
- 小問 (i) で $\pm\sqrt{7}$ と答える：3 つの正接はすべて正なので、符号は確定する。
- i の累乗による符号の誤り：$\mathrm{i}^6 = -1$、$\mathrm{i}^7 = -\mathrm{i}$ である。

STEP のその先へ

数 $\tan^2 \frac{k\pi}{7}$ は共役な代数的数（conjugate algebraic numbers）である：これらは整数係数の1つの既約（irreducible）な3次多項式の根であり、したがってそれらの任意の対称式（symmetric expression）は有理数となる。これはガロア理論（Galois theory）の出発点であり、ガロア理論は多項式の根の間の対称性を研究するものである。同じ手法から $\sum_{k=1}^{n} \cot^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$ のような恒等式も得られ、これは $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$ のある初等的な証明に用いられる。ド・モアブルの定理と1の冪根（roots of unity）を幾何学的に眺めるには Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析）を、この種の問題をさらに解くには Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（発展的な数学の問題集）を参照せよ。

解答例

STEP III 1996、第 6 問

純粋数学 ・ 行列の群

> **STEP III 1996、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q6

この問題は、*Beyond STEP* の第 6.8 節「**特異行列からなる群**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch06/singular-group.html

鍵となる考え方

S のどの行列も 1 つの固定された行列 $\mathbf{J}$ の定数倍であり、$\mathbf{J}^2$ もまた $\mathbf{J}$ の定数倍である。したがって S の元どうしの積は実数の積に帰着する。意外なのは、この群（group）の単位元（identity）が単位行列（identity matrix）$\mathbf{I}$ **ではない**ことである。この群は $\mathbf{I}$ をまったく必要としない。小問 (ii) は、なぜそうならざるをえないかを説明する。群の中では、どの元も他の任意の元を含む積として書くことができ、しかも行列式（determinant）は積を保つからである。

解答

小問 (i)

次のようにおく。

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{とおくと} \qquad \mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{J}.$$

S の任意の元は $a \neq 0$ として $a\mathbf{J}$ の形であり、$\mathbf{M}_a = a\mathbf{J}$ と書くことにする。

閉性（closure）。0 でない a と b に対して

$$\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b = ab\,\mathbf{J}^2 = 2ab\,\mathbf{J} = \mathbf{M}_{2ab}.$$

$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ なので $2ab \neq 0$ であり、この積は S に属する。よって S は行列の積について閉じている。

次に、残りの群の公理（group axioms）を確かめる。

結合法則（associativity）。行列の積はすべての 2×2 行列について結合法則を満たすので、特に S の行列についても満たす。

単位元。すべての b について $\mathbf{M}_e\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_b$ となる $\mathbf{M}_e$、すなわち $2eb = b$ となるものが欲しい。そこで $e = \frac{1}{2}$ ととる。

$$\mathbf{M}_{1/2}\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_{2\cdot\frac{1}{2}b} = \mathbf{M}_b,$$

同様に $\mathbf{M}_b\mathbf{M}_{1/2} = \mathbf{M}_b$ である。よって、S に属する $\mathbf{E} = \frac{1}{2}\mathbf{J}$ は単位元である。

> **考えてみよう** 単位行列 $\mathbf{I}$ は S に含まれない。行列の群にはそれが必要なのではないか？

そうではない。群に必要なのは、その集合の他の元に対して単位元として働く**何らかの**元であり、$\frac{1}{2}\mathbf{J}$ は S のすべての元に対してその役割を果たす。これはすべての 2×2 行列に対する単位元ではない（たとえば $\frac{1}{2}\mathbf{JI} \neq \mathbf{I}$）が、$\mathbf{I}$ は S に含まれないので問題にならない。

逆元（inverses）。 $\mathbf{M}_a$ が与えられたとき、$2ac = \frac{1}{2}$ となる $\mathbf{M}_c$ が欲しい。すなわち $c = \dfrac{1}{4a}$ であり、$a \neq 0$ なのでこれは存在し、しかも 0 でない。このとき

$$\mathbf{M}_a\mathbf{M}_{1/(4a)} = \mathbf{M}_{1/(4a)}\mathbf{M}_a = \mathbf{M}_{2a/(4a)} = \mathbf{M}_{1/2} = \mathbf{E}.$$

4 つの公理がすべて成り立つので、S は行列の積に関して群をなす。（$\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_{2ab} = \mathbf{M}_b\mathbf{M}_a$ なので、可換群（abelian group）でさえある。）S のどの元も行列式が $a^2 - a^2 = 0$ であることに注意する。これらの行列は通常の意味での逆行列をもたないが、それぞれが群の中では逆元をもつ。

小問 (ii)

$\mathbf{A} \in G$ が $\det \mathbf{A} = 0$ を満たすと仮定し、$\mathbf{B}$ を G の任意の元とする。G は群なので、$\mathbf{A}$ は G の中に逆元 $\mathbf{A}'$ をもち、$\mathbf{AA}' = \mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{E}$ が成り立つ。（$\mathbf{A}^{-1}$ ではなく $\mathbf{A}'$ と書くのは、これが G の中での逆元であって、存在しない逆行列ではないからである。）

$\mathbf{C} = \mathbf{A}'\mathbf{B}$ とおく。閉性より $\mathbf{C} \in G$ であり、

$$\mathbf{AC} = \mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{B}) = (\mathbf{AA}')\mathbf{B} = \mathbf{EB} = \mathbf{B},$$

となる。ここで結合法則と、$\mathbf{E}$ が G の単位元であることを用いた。したがって方程式 $\mathbf{AC} = \mathbf{B}$ は G の中に解 $\mathbf{C}$ をもつ。両辺の行列式をとり、$\det(\mathbf{XY}) = \det\mathbf{X}\det\mathbf{Y}$ を用い

ると

$$\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}\, \det \mathbf{C} = 0 \cdot \det \mathbf{C} = 0.$$

$\mathbf{B}$ は任意だったので、G のすべての元は特異（singular）である。特に、このような群の単位元 $\mathbf{E}$ は特異であり、したがって $\mathbf{I}$ ではありえない。これは小問 (i) で見たとおりである。

> **考えてみよう** G が単に積について閉じた集合ではなく群であることを、どこで用いたのか？

$\mathbf{B}$ を $\mathbf{A}$ と G のある元との積として書くために、逆元 $\mathbf{A}'$ と単位元 $\mathbf{E}$ を用いた。これらがなければ結果は成り立たない。たとえば $\{\mathbf{I}, \mathbf{0}\}$ は積について閉じていて特異行列を含むが、$\mathbf{I}$ は特異ではない。（これは群ではない。$\mathbf{0}$ は逆元をもたないからである。）

$n = 3$ の例。小問 (i) をまねる。次のようにおく。

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G = \{\, a\mathbf{K} : a \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \,\}.$$

$\mathbf{K}^2$ の各成分は $1+1+1=3$ なので $\mathbf{K}^2 = 3\mathbf{K}$ であり、

$$(a\mathbf{K})(b\mathbf{K}) = 3ab\,\mathbf{K}.$$

- **閉性**：$a, b \neq 0$ ならば $3ab \neq 0$ なので、積は G に属する。
- **結合法則**：これは行列の積から受け継がれる。
- **単位元**：$(\frac{1}{3}\mathbf{K})(b\mathbf{K}) = (b\mathbf{K})(\frac{1}{3}\mathbf{K}) = 3 \cdot \frac{1}{3} b\,\mathbf{K} = b\mathbf{K}$ なので、$\mathbf{E} = \frac{1}{3}\mathbf{K}$ である。
- **逆元**：$3 \cdot a \cdot \dfrac{1}{9a} = \frac{1}{3}$ なので、$a\mathbf{K}$ の逆元は $\dfrac{1}{9a}\mathbf{K}$ である。

よって G は行列の積に関して群をなす。どの $a\mathbf{K}$ も 3 つの等しい行をもつので $\det(a\mathbf{K}) = 0$ である。つまりこれは特異な 3×3 行列からなる群である。

（同様にうまくいく別の例として、$a, b \neq 0$ である行列 $\mathrm{diag}(a, b, 0)$ 全体の集合がある。その単位元は $\mathrm{diag}(1, 1, 0)$ である。）

検算

- 具体例で確かめる：$\mathbf{M}_3\mathbf{M}_{1/12}$ の各成分は $3 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$ なので、これは $\mathbf{E} = \mathbf{M}_{1/2}$ に等しく、逆元の公式 $\frac{1}{4a}$ の予測どおりである。
- 0 でない a, b, c を無作為に数百組選び、厳密な分数計算により、2×2 と 3×3 の両方の族について閉性・単位元・逆元の公式が成り立つこと、これらの行列の行列式がすべて 0 であること、および $\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{B}) = \mathbf{B}$ が成り立つことを確認した。

よくある間違い

- $\mathbf{I}$ を単位元とみなしたり、$\mathbf{A}^{-1}$ を通常の逆行列とみなしたりすること。どちらも S には存在しない。単位元と逆元は、その群自身の積の規則から求めること。
- $2ab \neq 0$ の確認を忘れること。閉性のためには、積が正しい形をしていることおよびパラメータが 0 でないことが必要である。

STEP のその先へ

群はその演算によって定義されるのであり、元がたまたまどこに属しているかによって定義されるのではない。ここでは、群が $n \times n$ 行列の中にありながら、その単位元を共有していない。実際、$\mathbf{E}$ は常に $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$ を満たすので射影（projection）であり、この群は $\mathbf{E}$ の像の上で可逆な写像として作用する。写像 $a \mapsto \mathbf{M}_{a/2}$ は、乗法に関する 0 でない実数全体から S への同型写像（isomorphism）であり、これは直接確かめることができる。さらに学ぶには Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）を、射影については Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数の入門書）を参照するとよい。

解答例

STEP III 1996、第 7 問

純粋数学 ・ 解の対称式

STEP III 1996、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/96-s3-q7

鍵となる考え方

両小問とも同じ事実に基づいている。3 つの数の対称式（symmetric expression）はどれも、それらの和、2 つずつの積の和、およびそれらの積を用いて表すことができ、しかもこの 3 つの量は、それらの数を解とする三次方程式（cubic）の係数にほかならない。(i) では、このことによって非線形の連立方程式が三次方程式に帰着する。(ii) では解そのものはまったく必要ない。ヘロンの公式（Heron's formula）は a, b, c について対称なので、三次方程式の係数だけで十分なのである。

解答

小問 (i)

まず平方和を求める。

$$\alpha^2 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx), \qquad \text{よって} \qquad x^2+y^2+z^2 = \alpha^2 - 2\beta.$$

次に因数分解（factorisation）

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right),$$

を用いる。これは右辺を展開すれば確かめられる。$x\cdot xy$ や $y\cdot(-xy)$ のような 9 個の交差項は 2 つずつ打ち消し合い、$-xyz$ の形の 3 つの項が残る。代入すると、

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &= 3\gamma + \alpha\left(\alpha^2-2\beta-\beta\right) \\ &= \alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma. \end{aligned}$$

したがって $A=1, B=-3, C=3\gamma$ である。（ここで C は積の3倍なので γ に依存する。一方 A と B は単なる数である。）

では連立方程式に移ろう。$\alpha=1$ であり、平方和から

$$3=\alpha^2-2\beta=1-2\beta \quad\Longrightarrow\quad \beta=-1.$$

が得られる。さらに立方和から

$$4=\alpha^3-3\alpha\beta+3\gamma=1+3+3\gamma \quad\Longrightarrow\quad \gamma=0.$$

が得られる。

考えてみよう α,β,γ がわかった。ここからどうやって x,y,z に戻ればよいだろうか？

数 x,y,z の和が α、2つずつの積の和が β、積が γ となるのは、それらが

$$(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-\alpha t^2+\beta t-\gamma=0.$$

の3つの解であるとき、かつそのときに限る。両方向とも成り立つ。すなわち、x,y,z が連立方程式の解ならば、それらはこの三次方程式の解であり、逆にこの三次方程式の解は、どの順に並べても正しい α,β,γ をもつので、（上の恒等式により）3つの方程式をすべて満たす。いまの場合、三次方程式は

$$t^3-t^2-t=t\,(t^2-t-1)=0, \qquad \text{よって} \qquad t=0,\quad t=\tfrac{1}{2}\big(1+\sqrt{5}\big),\quad t=\tfrac{1}{2}\big(1-\sqrt{5}\big).$$

となる。したがって解は

$$\{x,y,z\}=\Big\{0,\ \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\ \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5})\Big\},$$

であり、順序は任意である。3つの値はすべて異なるので、順序づけられた組 (x,y,z) は全部で6通りある。

小問 (ii)

a,b,c は三次方程式の解であるから、すべての x について

$$x^3-16x^2+81x-128=(x-a)(x-b)(x-c)$$

が成り立つ。x^2 の係数を比較すると $a+b+c=16$ であり、よって $s=8$ である。ここで工夫をする。この恒等式に $x=s=8$ を代入するのである。右辺は $(s-a)(s-b)(s-c)$ となり、これはまさにヘロンの公式に現れる積である。

$$(s-a)(s-b)(s-c)=8^3-16\cdot 8^2+81\cdot 8-128=512-1024+648-128=8.$$

したがって

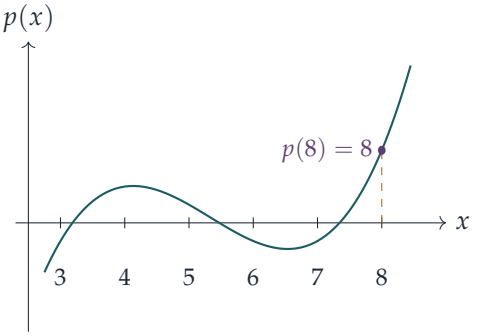
$$\text{面積}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{8\cdot 8}=8.$$

考えてみよう これらを 3 辺とする三角形は本当に存在するのだろうか？

これは確かめておくべきである。ヘロンの公式が三角形を表すのは、a, b, c が正で、しかもそれぞれが他の 2 つの和より小さいときに限られるからである。$a < b + c \iff 2a < a + b + c \iff a < s$ であるから、3 つの解がすべて実数で、正で、8 より小さいことが必要である。$p(x) = x^3 - 16x^2 + 81x - 128$ とおく。すると

$$p(3) = -2, \quad p(4) = 4, \quad p(5) = 2, \quad p(6) = -2, \quad p(7) = -2, \quad p(8) = 8,$$

であるから、符号の変化により $(3,4)$、$(5,6)$、$(7,8)$ のそれぞれに解が 1 つずつ存在する。三次方程式の解は高々 3 個なので、これらが解のすべてであり、どの解も 0 と 8 の間に（端点を除いて）ある。よって三角形は存在し、その面積は 8 である。



検算

- (i) で $x = 1, y = 2, z = 3$ を試すと、$\alpha = 6, \beta = 11, \gamma = 6$ であり、$216 - 198 + 18 = 36 = 1 + 8 + 27$ となる。
- $x = 0, y = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1.618, z = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \approx -0.618$ のとき、和は 1 である。また $y^2 = y + 1, z^2 = z + 1$ であるから、平方和は $(y + z) + 2 = 3$、立方和は $y^2 + z^2 + (y + z) = 3 + 1 = 4$ となる。
- (ii) の解を数値的に求めると $a \approx 3.186, b \approx 5.471, c \approx 7.343$ である。これらの値でヘロンの公式を計算すると 8.000 となり、余弦定理（cosine rule）で求めた C を用いた $\frac{1}{2}ab \sin C$ も同じ値になる。

よくある間違い

- 6 通りの並べ方すべてではなく 1 組だけを答えてしまう。あるいは $t = 0$ が $t^3 - t^2 - t = 0$ の解であることを見落とす。

- 解と係数の関係（Vieta's formulas）で符号を誤る。$t^3 - \alpha t^2 + \beta t - \gamma$ では符号が交互に変わる。
- 解が本当に三角形をなすかを確かめずに面積を求めてしまう。

STEP のその先へ

対称式の基本定理（fundamental theorem of symmetric polynomials）によれば、x, y, z の多項式で、それらを並べ替えても変わらないものはすべて、基本対称式（elementary symmetric functions）α, β, γ の多項式として表される。ニュートン（Newton）の恒等式（Newton's identities）は、冪和（power sums）$x^k + y^k + z^k$ を漸化的に与える。これらの考え方はガロア（Galois）理論（Galois theory）へとつながっていく。ガロア理論は、三次方程式と四次方程式には解の公式があるのに、一般の五次方程式には解の公式が存在しない理由を説明するものである。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は、その方向へ進むための最初の一歩として好適である。

解答例

STEP III 1996、第 8 問

純粋数学 ・ メビウス変換

> **STEP III 1996、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q8

鍵となる考え方

これらはメビウス変換（Möbius transformation）、すなわち一次分数変換（fractional linear transformation）であり、ほとんどすべてのことは二つの観察から導かれる。$y = T(x)$ の分母を払うと、x について一次で**かつ** y についても一次である方程式が得られるので、どちらについても解くことができる。また、$T(x)$ を定数と $1/(cx-d)$ の定数倍との和の形に書けば、T が決してとらない値がすぐにわかる。合成については、単に代入して分母を払えばよい。その結果は、各 T に行列 $\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}$ を対応させると最も整理しやすい。

解答

不動点

$x \neq d/c$ のとき、$T(x) = x$ は $ax - b = x(cx - d)$、すなわち

$$cx^2 - (a+d)x + b = 0. \qquad (*)$$

を意味する。まず、（$c \neq 0$ のとき）$(*)$ から除外される値 $x = d/c$ が出てこないことを確かめる。代入すると $d^2/c - (a+d)d/c + b = (bc - ad)/c \neq 0$ となるので、$(*)$ の根はすべて本当の不動点（fixed point）である。

$c \neq 0$ **のとき**、$(*)$ は二次方程式（quadratic）であり、不動点は

$$x = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4bc}}{2c}.$$

である。$(a+d)^2 > 4bc$ ならば二つ、$(a+d)^2 = 4bc$ ならば一つ、$(a+d)^2 < 4bc$ なら

ば一つもない。

$c = 0$ のとき、条件 $ad \neq bc$ は $ad \neq 0$ となるので、$d \neq 0$ であり、$T(x) = (b - ax)/d$ はいたるところで定義される。このとき $(*)$ は $(a + d)x = b$ となる。$a + d \neq 0$ ならば不動点はちょうど一つで、$x = b/(a + d)$ である。$a + d = 0$ かつ $b \neq 0$ ならば不動点はない。$a + d = 0$ かつ $b = 0$ ならば $T(x) = -ax/d = x$ であるから、T は恒等写像（identity）であり、すべての x が不動点である。

逆写像

$y(cx - d) = ax - b$ から $cxy - dy = ax - b$、よって $x(cy - a) = dy - b$ となり、したがって

$$x = T^{-1}(y) = \frac{dy - b}{cy - a}.$$

を得る。これは T と同じ形であり、

$$a' = d, \qquad b' = b, \qquad c' = c, \qquad d' = a,$$

となる。$a'd' - b'c' = da - bc \neq 0$ であるから、条件も依然として成り立つ。（$cy - a$ で割ってよいのは、$y = a/c$ が決して T の値にならないからである。次の小節を参照せよ。）この逆写像（inverse）も同じ型の変換である。

集合 S_r

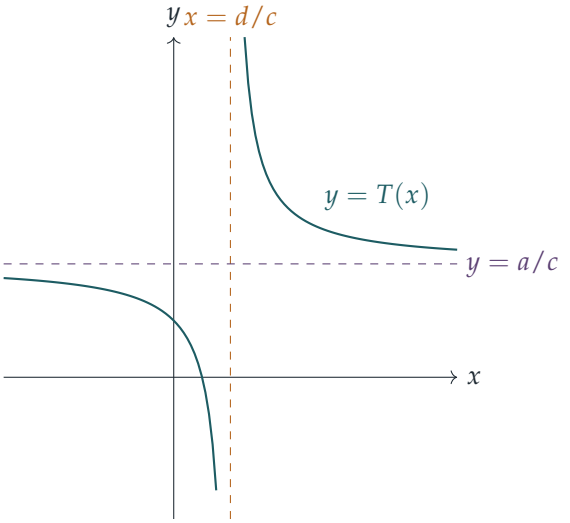
$c \neq 0$ と仮定する。$T(x)$ が定義されるのはちょうど $cx \neq d$ のときなので、$r = d/c$ とおく。すると T はすべての $x \in S_{d/c}$ で定義される。像（image）を求めるため、定数部分を分離する：

$$ax - b = \frac{a}{c}(cx - d) + \frac{ad - bc}{c}, \qquad \text{よって} \qquad T(x) = \frac{a}{c} + \frac{ad - bc}{c\,(cx - d)}.$$

$ad - bc \neq 0$ であるから第 2 項は決して 0 にならず、したがって $T(x) \neq a/c$ である。逆に、$y \neq a/c$ であるすべての値がとられる。逆写像の式から $x = (dy - b)/(cy - a)$ が得られ、この x は d/c ではない。なぜなら d/c は T^{-1} の値にならないからである（同じ議論を T^{-1} に適用すればよい。T^{-1} の「a'/c'」は d/c である）。ゆえに

$$T(S_{d/c}) = S_{a/c},$$

であり、T は $S_{d/c}$ から $S_{a/c}$ への全単射（bijection）である。グラフは、$x = d/c$ と $y = a/c$ を漸近線（asymptote）とする直角双曲線（rectangular hyperbola）である：



（この図では $T(x) = (2x-1)/(x-1) = 2 + 1/(x-1)$ を用いている。）

$c = 0$ のとき、（$ad \neq 0$ であるから）$d \neq 0$ かつ $a \neq 0$ であり、$T(x) = (b - ax)/d$ は定数でない一次関数である。よって T はすべての実数 x で定義され、除外すべき値はなく、$\mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の上へ全単射に写す。それでもなお一点 r を取り除くならば、$T(S_r) = S_{T(r)} = S_{(b-ar)/d}$ となる。

合成

$T_1(x) = \dfrac{a_1x - b_1}{c_1x - d_1}$ を T_2 に代入し、分子と分母に $c_1x - d_1$ を掛ける：

$$\begin{aligned} T_2(T_1(x)) &= \frac{a_2(a_1x - b_1) - b_2(c_1x - d_1)}{c_2(a_1x - b_1) - d_2(c_1x - d_1)} \\ &= \frac{(a_1a_2 - b_2c_1)\,x - (a_2b_1 - b_2d_1)}{(a_1c_2 - c_1d_2)\,x - (b_1c_2 - d_1d_2)}. \end{aligned}$$

よって合成（composition）T_3 は同じ形であり、

$$a_3 = a_1a_2 - b_2c_1, \quad b_3 = a_2b_1 - b_2d_1, \quad c_3 = a_1c_2 - c_1d_2, \quad d_3 = b_1c_2 - d_1d_2.$$

となる。

考えてみよう　「同じ形」であることは本当に証明されたのだろうか？$a_3d_3 \neq b_3c_3$ も必要である。

そのとおり、これは確かに必要である。これらの係数は、ちょうど行列の積

$$\begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ c_2 & -d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ c_1 & -d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 & -b_3 \\ c_3 & -d_3 \end{pmatrix},$$

の成分になっており、各行列の行列式（determinant）は $bc - ad$ である。積の行列式は行列式の積であるから、

$$b_3c_3 - a_3d_3 = (b_1c_1 - a_1d_1)(b_2c_2 - a_2d_2) \neq 0.$$

となる。（直接展開してもよい。数行の計算である。）よって T_3 は同じ型の変換である。

T^2 が恒等写像になるのはいつか

合成の公式で $T_1 = T_2 = T$ とおく。すると $T^2(x) = \dfrac{Ax - B}{Cx - D}$ であり、

$$A = a^2 - bc, \qquad B = b(a - d), \qquad C = c(a - d), \qquad D = bc - d^2.$$

である。T^2 が恒等写像であるのは、その定義域（domain）のすべての x に対して $Ax - B = x(Cx - D)$ が成り立つときであり、定義域は高々有限個の点を除くすべての点である。無限個の点で成り立つ多項式の等式は恒等的に成り立つので、係数を比較して

$$C = 0, \qquad A + D = 0, \qquad B = 0,$$

すなわち

$$c(a - d) = 0, \qquad (a - d)(a + d) = 0, \qquad b(a - d) = 0.$$

を得る。

- $a = d$ ならば、三つすべてが成り立つ。実際、$T^2(x) = \dfrac{(a^2 - bc)x}{-(bc - a^2)} = x$ であり、ここで $a^2 - bc = ad - bc \neq 0$ である。
- $a \neq d$ ならば、$b = c = 0$ かつ $a = -d$ が必要である。このとき $T(x) = ax/(-d) = x$ であるから、T 自身が恒等写像である。

よって T^2 が恒等写像であるのは、**$a = d$ であるか、または $b = c = 0$ かつ $a + d = 0$ であるとき、かつそのときに限る**（後者は T が恒等写像である場合である）。後者の場合は自明なので、興味深い対合（involution）は、ちょうど $a^2 \neq bc$ を満たす写像 $x \mapsto \dfrac{ax - b}{cx - a}$ である。

例

いま求めた条件により、$a = d$ である二つの写像で、その合成が $a \neq d$ となるものを見つければよい。

$$T_1(x) = -x \quad (a_1, b_1, c_1, d_1) = (1, 0, 0, 1), \qquad T_2(x) = 1 - x \quad (a_2, b_2, c_2, d_2) = (1, 1, 0, 1).$$

をとる。どちらも $a = d$ を満たすので、T_1^2 と T_2^2 は恒等写像である。これは直接確かめることもできる：$-(-x) = x$、$1-(1-x) = x$ である。両者の合成は

$$T_3(x) = T_2(T_1(x)) = 1-(-x) = x+1,$$

であり、標準形では $(a_3, b_3, c_3, d_3) = (1, -1, 0, -1)$ となるので、$a_3 \neq d_3$ である。実際 $T_3^2(x) = x+2 \neq x$ である。

幾何学的には、直線の二つの鏡映（reflection）（0 に関するものと $\frac{1}{2}$ に関するもの）を合成すると平行移動（translation）になり、平行移動は自分自身の逆写像ではない。$c \neq 0$ である例としては、同じ T_2 とともに $T_1(x) = -1/x$ を試してみよ。このとき $T_3(x) = (x+1)/x$ であり、$T_3^2(x) = (2x+1)/(x+1)$ となる。

検算

- 図の例 $T(x) = (2x-1)/(x-1)$（$a = 2$、$b = 1$、$c = d = 1$）を用いる。その不動点は $x^2 - 3x + 1 = 0$ の根、すなわち $x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$ であり、$T(2.618\ldots) = 2.618\ldots$ となることが確かめられる。その逆写像は $(y-1)/(y-2)$ であり、予想どおり $y = 2 = a/c$ で定義されない。
- 合成の公式で $T_1 = T$、$T_2 = T^{-1}$、すなわち $(a_2, b_2, c_2, d_2) = (d, b, c, a)$ とおくと、$a_3 = ad - bc$、$b_3 = 0$、$c_3 = 0$、$d_3 = bc - ad$ となる。これは恒等写像であり、そうなるべきとおりである。
- コンピュータを用いて、数千個のランダムな (a, b, c, d) について厳密な分数計算により、逆写像、像、合成の公式を検証した。また、$ad \neq bc$ を満たす $a, b, c, d \in [-3, 3]$ のすべての整数の選び方について、T^2 が恒等写像となる条件を直接の計算結果と照合した。

よくある間違い

- 自明な場合を忘れること：$a = d$ は**必要**条件ではない。恒等写像（$b = c = 0$、$a = -d$）も、2 乗すると恒等写像になるからである。
- 合成が一次式の比であることは示したが、$a_3 d_3 \neq b_3 c_3$ を確かめていないこと。
- $c = 0$ の場合に、除外される点を探してしまうこと。定数でない一次写像はいたるところで定義され、すべての実数に値をとる。

STEP のその先へ

$x = \infty$ を許し、$T(d/c) = \infty$、$T(\infty) = a/c$ と定めると、このような T はすべて拡張された実数直線（extended line）の全単射になる。係数を複素数にすると、リーマン球面（Riemann sphere）上のメビウス変換が得られる。上で用いた行列との対応は、これらの写像が群（group）をなし、それが可逆な 2×2 行列をスカラー倍を法として考えたもの（射影線形群（projective linear group））と同型（isomorphic）であることを示している。合成は行列の積になり、恒等写像以外の写像が対合であるのは、ちょうどその行列のトレース（trace）が 0 であるときである。ここではそれが $a - d = 0$ にあたる。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）には、メビウス変換についての見事な章がある。

解答例

STEP III 1996、第 9 問

力学 ・ 円運動

STEP III 1996、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/96-s3-q9

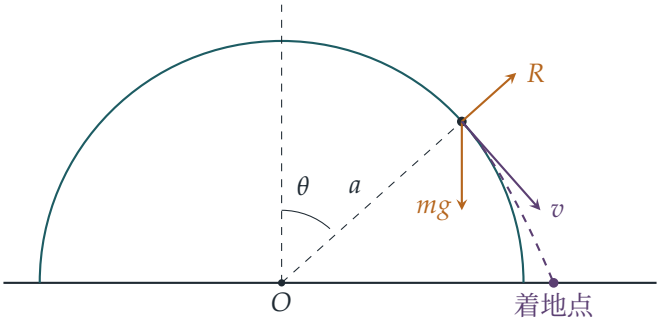
鍵となる考え方

運動は 2 つの段階に分かれる。粒子が球面上にある間は円運動をするので、エネルギー保存（energy conservation）から速さが、半径方向の運動方程式から垂直抗力（normal reaction）が求まる。粒子が球面を離れるのは、この抗力がちょうど 0 になる瞬間である。その後は、既知の点から既知の速さで接線（tangent）方向に打ち出された通常の放物体（projectile）であり、中心と同じ高さを横切る位置を求めればよい。

解答

モデル

粒子を質量 m の質点とみなし、中心 O のなめらかな固定球面上にあるとし、空気抵抗は無視する。はたらく力は重力 mg と垂直抗力 R のみであり、R は半径に沿って O から遠ざかる向きにはたらく。粒子を P とし、OP と鉛直上向きとのなす角を θ、粒子の速さを v とする。変位はわずかであるから、初速は（極限において）0 とみなす。



第 1 段階：球面上の運動

抗力は運動の向きに垂直なので仕事をせず、エネルギーは保存される。粒子は頂点から $a - a\cos\theta$ だけ下がっているので、

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mga(1-\cos\theta), \qquad \text{すなわち} \qquad v^2 = 2ga(1-\cos\theta).$$

球面上にある間は半径 a の円運動をするので、O に向かう方向の成分を考えると

$$mg\cos\theta - R = \frac{mv^2}{a} \quad \Longrightarrow \quad R = mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta) = mg(3\cos\theta - 2).$$

考えてみよう なぜ粒子はちょうど $R = 0$ となるときに球面を離れるのだろうか？

球面は押すことしかできないので、接触している間は $R \geq 0$ である。θ が 0 から増加すると、R は mg から単調に減少し、上の式は $\cos\theta = \frac{2}{3}$ を越えると $R < 0$ を与えてしまう。これは球面が粒子を内側へ引っ張ることを意味するが、そのようなことはできない。したがって接触が失われるのは

$$\cos\theta = \tfrac{2}{3}, \qquad \sin\theta = \tfrac{\sqrt{5}}{3}, \qquad v^2 = 2ga\left(1-\tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{2}{3}ga.$$

のときである。

第 2 段階：放物運動

原点を O とし、x 軸を（運動の向きに）水平に、y 軸を鉛直上向きにとる。球面を離れる瞬間、粒子の位置は

$$x_0 = a\sin\theta = \tfrac{\sqrt{5}}{3}a, \qquad y_0 = a\cos\theta = \tfrac{2}{3}a,$$

であり、速度は接線方向で、水平より角 θ だけ下向きである：

$$u_x = v\cos\theta = \tfrac{2}{3}v, \qquad u_y = -v\sin\theta = -\tfrac{\sqrt{5}}{3}v, \qquad \text{ただし} v = \sqrt{\tfrac{2}{3}ga}.$$

ここで $y = y_0 + u_y t - \frac{1}{2}gt^2$ であるから、粒子が $y = 0$ に達するのは

$$\tfrac{1}{2}gt^2 + \tfrac{\sqrt{5}}{3}v\,t - \tfrac{2}{3}a = 0.$$

のときである。正の解をとると

$$t = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}v + \sqrt{\frac{5}{9}v^2 + \frac{4}{3}ga}}{g}.$$

$v^2 = \frac{2}{3}ga$ を用いると、根号の中は $\frac{10}{27}ga + \frac{36}{27}ga = \frac{46}{27}ga$ となり、また $\frac{\sqrt{5}}{3}v = \sqrt{\frac{10}{27}ga}$ である。よって

$$t = \sqrt{\frac{a}{27g}}\,(\sqrt{46} - \sqrt{10}).$$

飛行中に進む水平距離は

$$\begin{aligned} u_x t &= \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{2}{3}ga}\cdot\sqrt{\frac{a}{27g}}\,(\sqrt{46} - \sqrt{10}) = \frac{2\sqrt{2}\,a}{27}(\sqrt{46} - \sqrt{10}) \\ &= \frac{2a}{27}(\sqrt{92} - \sqrt{20}) = \frac{2a}{27}(2\sqrt{23} - 2\sqrt{5}) = \frac{a}{27}(4\sqrt{23} - 4\sqrt{5}). \end{aligned}$$

である。出発時の距離 $x_0 = \frac{\sqrt{5}}{3}a = \frac{9\sqrt{5}}{27}a$ を加えると、粒子が O を通る水平面に達する点の中心からの距離は

$$x_0 + u_x t = \frac{a}{27}(9\sqrt{5} + 4\sqrt{23} - 4\sqrt{5}) = \frac{a(5\sqrt{5} + 4\sqrt{23})}{27}$$

となり、示すべき結果が得られた。

飛行中に球面に触れないこと

念のため、放物体が実際に球面から離れていることを確かめておこう。飛行経路に沿って $f(t) = x^2 + y^2 - a^2$ とおき、t のべきで展開する：

- 定数項は $x_0^2 + y_0^2 - a^2 = 0$ である。
- t の係数は $2(x_0 u_x + y_0 u_y) = 0$ である。速度が半径に垂直だからである。
- t^2 の係数は $u_x^2 + u_y^2 - g y_0 = v^2 - ga\cos\theta = 0$ であり、これはまさに条件 $R = 0$ そのものである。
- 残りは $-g u_y t^3 + \frac{1}{4}g^2 t^4$ であり、$u_y < 0$ である。

したがって $t > 0$ に対して $f(t) = g|u_y|\,t^3 + \frac{1}{4}g^2 t^4 > 0$ である。粒子は球の外側にとどまり、上で求めた着地距離は実際に到達する距離である。

検算

- 答えはおよそ $1.125a$ である。これは当然 a より大きい。粒子は球を越えなければならず、球は O の高さで距離 a まで広がっているからである。
- 離れる高さが中心から $\frac{2}{3}a$ 上であることはよく知られた結果であり、g にも m にもよらない。着地距離もこれらによらないが、これは次元解析（dimensional analysis）からも要請される。問題に現れる長さは a だけだからである。

- 運動を数値的に追跡した。微小な変位から $\ddot{\theta} = (g/a)\sin\theta$ をルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で積分し、$R = 0$ となったところで止めて放物運動として続けると、$1.12458a$ に着地する。厳密な式は $1.124580\ldots a$ を与える。

よくある間違い

- （$R = 0$ から得られる）$v^2 = ga\cos\theta$ を使いながら、エネルギーの式と組み合わせるのを忘れたり、誤った速さを用いたりすること。離れる瞬間には $v^2 = \frac{2}{3}ga$ であり、$\frac{1}{3}ga$ ではない。
- 放物体を水平に打ち出してしまうこと。速度は接線方向で、水平より角 θ だけ**下向き**であるから、最初から下向きの成分をもつ。
- 着地距離を中心からではなく離れた点から測ってしまい、x_0 を忘れること。

STEP のその先へ

「抗力が 0 になると接触が終わる」という条件は、**片側拘束**（unilateral constraint）の一例である。片側拘束は、針金に通したビーズから太鼓橋を越える自動車まで、力学のいたるところに現れる。解答の最後の段階で見た一致、すなわち離れる点において放物体の軌道と球面が 2 次の項まで一致するという事実は、その瞬間に放物線と円が同じ曲率（curvature）をもつことを意味している。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、円運動、拘束力、エネルギーの方法をこうした考え方で扱っている。

解答例

STEP III 1996、第 10 問

力学 ・ 摩擦のあるつり合い

STEP III 1996、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/96-s3-q10

鍵となる考え方

6 本の釣り合い（equilibrium）の式（各円柱について 2 方向への力の分解（resolution）と 1 本の力のモーメント（moment）の式）を書き下すと、それらによってすべての接触力が一意に定まることがわかる。うまくいく決め手はモーメントの式である。各円柱には中心のまわりにモーメントをもつ摩擦力がちょうど 2 つしかないので、それらの大きさは等しくなければならない。その後は、4 つの不等式はいずれも、3 本の接触線のどれかにおける「摩擦力 $\leq$ 係数 $\times$ 垂直抗力」という条件と、円柱どうしが押し合う力が負でないという条件にすぎない。

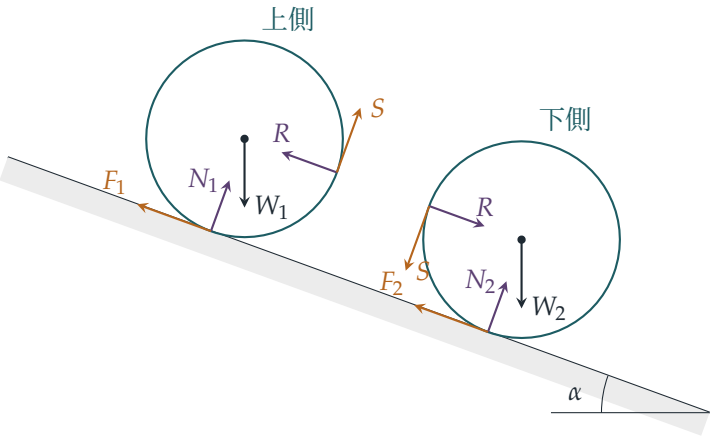
解答

モデル化。各円柱は半径 a の一様な剛体（rigid body）なので、その重力は中心（軸上）に作用する。両円柱の中心を通る鉛直な断面で考える。半径が等しく、両円柱とも斜面上にあるので、中心を結ぶ線は斜面に平行であり、円柱どうしの接触点はその線分の中点にある。x 方向を斜面に沿って**下向き**に、y 方向を斜面に垂直で斜面から外向きにとる。

力を次のように定める（どの成分も正負いずれになってもよい）。

- N_1, N_2：斜面が上側と下側の円柱に及ぼす垂直抗力（normal reaction）。
- F_1, F_2：斜面がそれらに及ぼす摩擦力（frictional force）で、斜面に沿って**上向き**を正とする。
- R：円柱どうしの間の垂直な力で、中心を結ぶ線に沿って働き、下側の円柱を斜面の下向きに、上側の円柱を斜面の上向きに押す。

- S：円柱どうしの間の摩擦力で、斜面に垂直であり、上側の円柱には斜面**から離れる**向きに、したがって（ニュートン（Newton）の第 3 法則により）下側の円柱には斜面**に向かう**向きに働く。



（見やすさのため円柱を離して描いてあるが、R と S はただ 1 本の接触線に作用する。各重力は中心を通って鉛直下向きに作用する。）

モーメント。各円柱の中心のまわりのモーメントを考える。垂直な力 N_1, N_2, R と重力はすべて中心を通るので、モーメントをもつのは摩擦力だけである。各摩擦力は中心から距離 a の点に接線方向に作用する。上側の円柱では、F_1（円柱の最下点で斜面の上向き）と S（斜面の下側の側面で斜面から離れる向き）のモーメントは逆向きなので、

$$aF_1 = aS, \qquad \text{よって} \qquad F_1 = S.$$

同様に、下側の円柱では F_2（最下点で斜面の上向き）と S（斜面の上側の側面で斜面に向かう向き）のモーメントは逆向きなので、$F_2 = S$ である。したがって

$$F_1 = F_2 = S.$$

? **考えてみよう** 斜面から各円柱に働く摩擦力が、円柱どうしの間の摩擦力と等しくなければならないのはなぜか。

自由に転がることのできる円柱が釣り合いを保つのは、軸のまわりの偶力（couple）が打ち消し合う場合に限られ、軸のまわりにモーメントをもつ力は摩擦力だけだからである。向きも確かめられる。上側の円柱では、最下点で斜面の上向きに働く斜面の摩擦力は円柱を斜面の下方へ、すなわち図では時計回りに転がそうとし、一方、斜面の下側の側面に働く上向きの摩擦力は円柱を反時計回りに回そうとする。

力の分解。斜面に平行な方向（斜面の下向きを正とする）：

$$\begin{aligned} \text{上側：}\quad & W_1 \sin\alpha - F_1 - R = 0, \\ \text{下側：}\quad & W_2 \sin\alpha - F_2 + R = 0. \end{aligned}$$

辺々を加え、$F_1 = F_2 = S$ を用いると

$$F_1 = F_2 = S = \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha,$$

となり、予想どおり、これは重力の斜面下向き成分の合計の半分である。次に辺々を引くと

$$R = \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha.$$

斜面に垂直な方向（外向きを正とする）：

$$\begin{aligned} \text{上側：}\quad & N_1 - W_1\cos\alpha + S = 0 \quad \Longrightarrow \quad N_1 = W_1\cos\alpha - \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha, \\ \text{下側：}\quad & N_2 - W_2\cos\alpha - S = 0 \quad \Longrightarrow \quad N_2 = W_2\cos\alpha + \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha. \end{aligned}$$

このように、6 本の式によって 6 つの力がすべて定まる。釣り合いが可能であるのは、これらの力が物理的に許される場合、すなわちすべての垂直抗力が負でなく、すべての摩擦力が摩擦係数（coefficient of friction）と対応する垂直抗力の積以下である場合に限る。

小問 (i)

円柱どうしは押し合うことしかできないので、$R \geq 0$ である。$\sin\alpha > 0$ であるから、これより $W_1 \geq W_2$ が得られる。

小問 (ii)

円柱どうしの接触点では $S \leq \mu R$ が必要である：

$$\tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha \leq \mu \cdot \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha.$$

左辺は正なので、これより $R > 0$、すなわち $W_1 > W_2$ でなければならない（実は重さが等しい場合は不可能である）。正の量 $\frac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha$ で割ると

$$\mu \geq \frac{W_1 + W_2}{W_1 - W_2},$$

となり、求める不等式が得られる。

小問 (iii)

上側の円柱と斜面の接触点では $N_1 \geq 0$ かつ $F_1 \leq \mu_1 N_1$ が必要である。$F_1 > 0$ なので、2 つ目の条件からすでに $N_1 > 0$ が従う。$F_1 \leq \mu_1 N_1$ を $\frac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha > 0$ で割ると

$$1 \leq \mu_1 \left(\frac{2W_1 \cos\alpha}{(W_1 + W_2)\sin\alpha} - 1 \right) = \mu_1 \left(\frac{2W_1 \cot\alpha}{W_1 + W_2} - 1 \right).$$

括弧の中は $N_1 / \left(\frac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha\right)$ であり正なので、これで割ってよい：

$$\mu_1 \geq \left(\frac{2W_1 \cot\alpha}{W_1 + W_2} - 1 \right)^{-1}.$$

（釣り合いのためには括弧の中が正であること、すなわち $\tan\alpha < 2W_1/(W_1 + W_2)$ も必要である。そうでなければ上側の円柱は斜面から浮き上がってしまう。）

μ_2 に関する不等式

ここでは $N_2 = W_2\cos\alpha + \frac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha$ は自動的に正であり、$F_2 \leq \mu_2 N_2$ は $\frac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha$ で割ると次のようになる：

$$1 \leq \mu_2 \left(\frac{2W_2 \cot\alpha}{W_1 + W_2} + 1 \right), \qquad \text{すなわち} \qquad \mu_2 \geq \left(\frac{2W_2 \cot\alpha}{W_1 + W_2} + 1 \right)^{-1}.$$

考えてみよう 下側の円柱では符号が $+1$ なのに、上側の円柱では -1 になるのはなぜか。

円柱どうしの間の摩擦力 S は、上側の円柱を斜面から引き離し、下側の円柱を斜面に押しつける。そのため斜面は上側の円柱を弱く、下側の円柱を強く押すことになり、上側の円柱のほうが垂直抗力に対する摩擦力の比を大きくとる必要がある。

検算

- 2 つの円柱の式を加えると系全体の式が得られる。斜面からの摩擦力の合計は斜面の上向きに $(W_1 + W_2)\sin\alpha$、垂直抗力の合計は $(W_1 + W_2)\cos\alpha$ であり、1 つの剛体ブロックの場合とまったく同じである。
- $\alpha \to 0$ のとき、すべての摩擦力と R は 0 に近づき、μ_1, μ_2 に対する下限もともに 0 に近づく。水平な地面上では当然そうなるべきである。
- 数値例として $W_1 = 3$, $W_2 = 1$, $\alpha = 20^\circ$ とする。6 本の式を直接解くと $R \approx 0.342$, $S = F_1 = F_2 \approx 0.684$, $N_1 \approx 2.135$, $N_2 \approx 1.624$ となるので、$\mu \geq 2$, $\mu_1 \geq 0.320$, $\mu_2 \geq 0.421$ であり、公式と一致する。W_1, W_2, α を多数ランダムに選んだ場合にも同様に一致することを確かめた。

よくある間違い

- モーメントの式を忘れること。これがないと未知数 6 つに対して式は 4 本しかなく、問題は不定に見えてしまう。
- 円柱どうしの間の摩擦力の向きを取り違えること。そうすると最後の 2 つの答えの ± 1 が入れ替わってしまう。
- 軽いほうの円柱が下側でなければならないことを見落とすこと。上側の円柱のほうが軽いとすると、R は負でなければならなくなる。

STEP のその先へ

これは静定（statically determinate）な系である。釣り合いの式によってすべての力が定まるので、摩擦の法則は確認可能な条件となる。接触の数が式の数より多い場合（たとえば、粗い地面の上で粗い壁に立てかけたはしご）には、系は不静定（statically indeterminate）であり、剛体の静力学だけでは力がどのように分担されるかを決めることができない。そこで技術者は物体の弾性を考慮に入れる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の釣り合いとトルクを丁寧に扱っている。

解答例

STEP III 1996、第 11 問

力学 ・ 微小振動

> **STEP III 1996、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q11

鍵となる考え方

円の幾何の 2 つの事実が主役である。AC は直径（diameter）なので、角 ABC は直角である。これにより、2 本の糸の長さ、したがって 2 つの張力（tension）がどちらも θ で表せる。また、中心角（angle at the centre）は円周角（angle at the circumference）の 2 倍なので、B は中心のまわりに 2θ だけ回転している。よって C から測った B の弧長（arc length）は $2a\theta$ であり、接線（tangent）方向にニュートン（Newton）の第 2 法則を適用すれば運動方程式（equation of motion）が得られる。振動については、平衡（equilibrium）のまわりで線形化（linearise）する。

始める前に注意しておく。問題文に印刷された方程式では、$mg\sin 2\theta$ であるべきところが $mg\sin\theta$ となっている。その理由は以下の導出で明らかになり、また、問題文にある $5\lambda = 24mg$ と周期を与えるのは修正後の方程式だけである。

解答

運動方程式

モデル化。輪 B はなめらかな針金上にある質量 m の質点であり、針金は半径方向の垂直抗力（normal reaction）R のみを及ぼす。糸は軽く弾性的で、フックの法則（Hooke's law）に従う。すなわち、自然長（natural length）a の糸を長さ ℓ まで伸ばしたときの張力は $\lambda(\ell - a)/a$ である。

幾何。 AC は直径（長さ $2a$）なので、半円に対する円周角の性質から $\angle ABC = 90^\circ$ である。直角三角形 ABC において

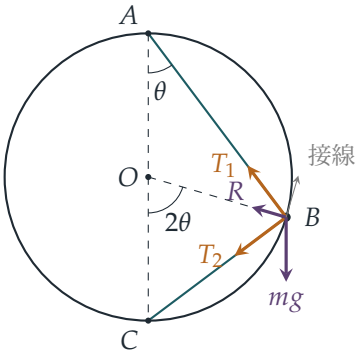
$$AB = 2a\cos\theta, \qquad CB = 2a\sin\theta.$$

円周角 $\angle CAB = \theta$ は弧 CB に対する角なので、中心角は $\angle COB = 2\theta$ である。C から B までの弧長は $s = 2a\theta$ であるから、θ が増加する向き（A に向かう向き）の、針金に沿った B の加速度は $\ddot{s} = 2a\ddot{\theta}$ である。

張力。 BA と BC の張力は

$$T_1 = \lambda\,\frac{2a\cos\theta - a}{a} = \lambda(2\cos\theta - 1), \qquad T_2 = \lambda(2\sin\theta - 1).$$

2 本の糸がともに張っているのは、$\cos\theta > \frac{1}{2}$ かつ $\sin\theta > \frac{1}{2}$、すなわち $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$ のとき、かつそのときに限る。



B における接線方向の力の分解。接線は OB に垂直であり、R は接線方向の成分をもたない。

- 三角形 OAB は二等辺三角形 (isosceles triangle) ($OA = OB = a$) なので、$\angle OBA = \angle OAB = \theta$ である。よって BA は接線と角 $90° - \theta$ をなし、T_1 は A に向かう向きに $T_1\sin\theta$ だけ寄与する。
- 三角形 OCB は二等辺三角形であり、$\angle OCB = \angle ACB = 90° - \theta$ なので、$\angle OBC = 90° - \theta$ である。よって BC は接線と角 θ をなし、T_2 は A から遠ざかる向きに $T_2\cos\theta$ だけ寄与する。
- OB は鉛直下向きと角 2θ をなすので、接線は水平方向と角 2θ をなす。重力は A から遠ざかる向きに $mg\sin 2\theta$ だけ寄与する。

接線方向にニュートンの第 2 法則を適用すると

$$\begin{aligned} 2ma\ddot{\theta} &= \lambda(2\cos\theta - 1)\sin\theta - \lambda(2\sin\theta - 1)\cos\theta - mg\sin 2\theta \\ &= \lambda(\cos\theta - \sin\theta) - mg\sin 2\theta, \end{aligned}$$

となる。$2\lambda\sin\theta\cos\theta$ の項が打ち消し合うからである。これが求める方程式である。ただし重力の項は、印刷された $mg\sin\theta$ ではなく $mg\sin 2\theta$ である。

考えてみよう 印刷された $mg\sin\theta$ が実は正しいということはないだろうか？

そうではない。$\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき輪は O と同じ高さにあり、接線は鉛直で、重さ mg がそのまま針金に沿ってはたらく。このとき $mg\sin 2\theta = mg$ となるが、$mg\sin\theta = mg/\sqrt{2}$ である。次の小問からも決着がつく。印刷された方程式では、平衡において $\frac{24}{5}mg$ ではなく $\lambda = 3mg$ となってしまうのである。

平衡

$\sin\theta = \frac{3}{5}$ のとき（θ を鋭角とすれば）$\cos\theta = \frac{4}{5}$ であり、$\frac{3}{5} > \frac{1}{2}$ かつ $\frac{4}{5} > \frac{1}{2}$ なので、θ は糸が張っている範囲にある。$\ddot{\theta} = 0$ とおくと

$$\lambda\left(\tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{5}\right) = mg\cdot 2\cdot\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{4}{5} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\lambda}{5} = \frac{24mg}{25} \quad\Longrightarrow\quad 5\lambda = 24mg,$$

となり、示すべき式が得られた。

微小振動

$f(\theta) = \lambda(\cos\theta - \sin\theta) - mg\sin 2\theta$ とおくと、$2ma\ddot{\theta} = f(\theta)$ であり、平衡点 θ_0 において $f(\theta_0) = 0$ である。ε を微小として $\theta = \theta_0 + \varepsilon$ とおく。1 次の近似で $f(\theta_0 + \varepsilon) \approx f'(\theta_0)\,\varepsilon$ であり、ここで

$$\begin{aligned} f'(\theta_0) &= -\lambda(\sin\theta_0 + \cos\theta_0) - 2mg\cos 2\theta_0 \\ &= -\tfrac{24}{5}mg\cdot\tfrac{7}{5} - 2mg\left(\tfrac{16}{25} - \tfrac{9}{25}\right) = -\tfrac{168}{25}mg - \tfrac{14}{25}mg = -\tfrac{182}{25}mg. \end{aligned}$$

よって

$$2ma\ddot{\varepsilon} = -\tfrac{182}{25}mg\,\varepsilon \quad\Longrightarrow\quad \ddot{\varepsilon} = -\frac{91g}{25a}\,\varepsilon.$$

これは $\omega^2 = \dfrac{91g}{25a}$ の単振動（simple harmonic motion）である。$f'(\theta_0) < 0$ なので、この平衡は安定（stable）である。変位はわずかなので、糸は張ったままである（θ は θ_0 の近くにとどまり、$(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ の十分内側にある）。周期（period）は近似的に

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\cdot 5\sqrt{\frac{a}{91g}} = 10\pi\sqrt{\frac{a}{91g}}.$$

検算

- $\theta = \frac{\pi}{4}$ では 2 本の糸の伸びが等しいので、接線方向の効果は打ち消し合い（$\cos\theta - \sin\theta = 0$）、重さ全体が鉛直な接線に沿ってはたらく。我々の方程式は $2ma\ddot{\theta} = -mg$ を与え、これは正しい。

- $a = g = m = 1$、$\lambda = 4.8$ として、位置ベクトルから接線方向の力を計算した。この力は $\sin\theta = 0.6$ で 0 になる。微小な変位から運動を数値的に追跡すると周期は 3.29328 となり、$10\pi/\sqrt{91} \approx 3.29328$ と一致した。

よくある間違い

- 弧長を $a\theta$ としてしまう。輪は中心のまわりに θ ではなく 2θ だけ回転するので、接線方向の加速度は $2a\ddot{\theta}$ である。左辺の 2 はここから来ている。
- 接線方向ではなく弦の方向に力を分解してしまう。垂直抗力は未知なので、それを消去するために接線方向に分解するのである。

STEP のその先へ

平衡のまわりでの線形化 $\ddot{x} = f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0)$ は、非線形系（nonlinear systems）の安定性解析の第一歩である。これにより、$f'(x_0) < 0$ のとき安定であり、$\omega^2 = -f'(x_0)$ の単振動となることがわかる。大学では、これが基準振動（normal modes）と行列の固有値（eigenvalues）を通じて、多自由度（several degrees of freedom）の系へと拡張される。さらに学ぶには、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい。

解答例

STEP III 1996、第 12 問

確率・統計 ・ マルコフ連鎖

> **STEP III 1996、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q12

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.16 節「**マルコフ連鎖を順向きにも逆向きにも**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/markov.html

鍵となる考え方

これはマルコフ連鎖（Markov chain）である。次の定理の種類は、現在の定理の種類だけで決まる。小問 (i) は、現在の定理の種類で条件づけた全確率の法則（law of total probability）である。小問 (ii) は、連鎖によって変化しない分布（**定常**分布（stationary distribution））を求める問題であり、小さな連立一次方程式に帰着する。小問 (iii) は連鎖を逆向きにたどる問題であり、条件付き確率を逆転させることはまさにベイズの定理（Bayes' theorem）が行うことである。

解答

定理に順に番号をつける。ある定理の種類を X、その次の定理の種類を Y とし、

$$\mathrm{P}(X = i) = a_i, \qquad \mathrm{P}(Y = j \mid X = i) = p_{ij}, \qquad \mathrm{P}(Y = j) = b_j.$$

とする。

小問 (i)

事象 $\{X = 1\}$、$\{X = 2\}$、$\{X = 3\}$ は互いに排反であり、どの定理も 3 つの種類のうちちょうど 1 つに属するので、いずれか 1 つは必ず起こる。したがってこれらは標本

空間を分割し、事象 $\{Y=j\}$ は互いに素な 3 つの部分に分かれる：

$$\{Y=j\}=\{X=1,\,Y=j\}\cup\{X=2,\,Y=j\}\cup\{X=3,\,Y=j\}.$$

各部分の確率を足し合わせ、それぞれを $\mathrm{P}(X=i)\,\mathrm{P}(Y=j\mid X=i)$ と書けば、

$$b_j=\sum_{i=1}^{3}\mathrm{P}(X=i)\,\mathrm{P}(Y=j\mid X=i)=a_1p_{1j}+a_2p_{2j}+a_3p_{3j},$$

となり、これが全確率の法則である。ここで与えられた観察が使われている。すなわち、現在の定理より前に何が起こったかにかかわらず、$\mathrm{P}(Y=j\mid X=i)$ は p_{ij} である。

小問 (ii)

各 j について $b_j=a_j$ が必要であり、さらに a_i は確率分布をなすので $a_1+a_2+a_3=1$ も必要である。表の列を縦に読むと、3 つの方程式は

$$\begin{aligned}a_1&=0.3a_1+0.2a_2+0.1a_3,\\ a_2&=0.3a_1+0.4a_2+0.3a_3,\\ a_3&=0.4a_1+0.4a_2+0.6a_3.\end{aligned}$$

である。

> **考えてみよう** 未知数 3 つに方程式 3 つ、さらに $a_1+a_2+a_3=1$ がある。方程式が 1 つ多すぎるのではないか？

そうではない。3 つの方程式は独立ではないからである。表の各行の和は 1 なので、3 式を足すと $a_1+a_2+a_3=a_1+a_2+a_3$ となる。したがってどの 2 式からも残りの 1 式が導かれ、解を確定させるのは正規化条件である。

真ん中の方程式が扱いやすい。そこでは a_1 と a_3 の係数が等しいからである。$a_1+a_3=1-a_2$ を用いると、

$$a_2=0.3(1-a_2)+0.4a_2\quad\Longrightarrow\quad 0.9a_2=0.3\quad\Longrightarrow\quad a_2=\tfrac{1}{3}.$$

よって $a_1+a_3=\frac{2}{3}$ である。第 1 式を 10 倍すると $7a_1=2a_2+a_3=\frac{2}{3}+a_3$ となり、$a_3=\frac{2}{3}-a_1$ を代入すると、

$$7a_1=\tfrac{4}{3}-a_1\quad\Longrightarrow\quad a_1=\tfrac{1}{6},\qquad a_3=\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{6}=\tfrac{1}{2}.$$

第 3 式を確かめる：$0.4\cdot\frac{1}{6}+0.4\cdot\frac{1}{3}+0.6\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{3}{10}=\frac{1}{2}=a_3$。よって

$$a_1=\tfrac{1}{6},\qquad a_2=\tfrac{1}{3},\qquad a_3=\tfrac{1}{2}.$$

つまり長い目で見ると、エックス教授の定理の半分は誤りである。

小問 (iii)

今度は X を直前の定理の種類、Y を注目する定理の種類とし、X は小問 (ii) の分布に従うとする。求めたいのは $q_{ij} = \mathrm{P}(X = i \mid Y = j)$ である。ベイズの定理により、

$$q_{ij} = \frac{\mathrm{P}(X = i)\,\mathrm{P}(Y = j \mid X = i)}{\mathrm{P}(Y = j)} = \frac{a_i p_{ij}}{b_j} = \frac{a_i p_{ij}}{a_j},$$

ここで最後の等号には小問 (ii) の $b_j = a_j$ を用いた。問題が a_i をこの値に固定しているのはこのためである。そうすれば、注目する定理はその直前の定理と同じ分布に従う。

列ごとに計算する：

- $j = 1$ $(a_1 = \frac{1}{6})$: $q_{11} = \dfrac{\frac{1}{6}\cdot 0.3}{\frac{1}{6}} = \frac{3}{10}$, $\quad q_{21} = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot 0.2}{\frac{1}{6}} = \frac{2}{5}$, $\quad q_{31} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 0.1}{\frac{1}{6}} = \frac{3}{10}$.
- $j = 2$ $(a_2 = \frac{1}{3})$: $q_{12} = \dfrac{\frac{1}{6}\cdot 0.3}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{20}$, $\quad q_{22} = 0.4 = \frac{2}{5}$, $\quad q_{32} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 0.3}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{20}$.
- $j = 3$ $(a_3 = \frac{1}{2})$: $q_{13} = \dfrac{\frac{1}{6}\cdot 0.4}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{15}$, $\quad q_{23} = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot 0.4}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{15}$, $\quad q_{33} = 0.6 = \frac{3}{5}$.

元の表と同じように（第 i 行、第 j 列に）並べると：

$$(q_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{3}{20} & \frac{2}{15} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{15} \\ \frac{3}{10} & \frac{9}{20} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.15 & 0.1\dot{3} \\ 0.4 & 0.4 & 0.2\dot{6} \\ 0.3 & 0.45 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

ここで和が 1 になるのは**列**である。注目する定理の種類 j を固定すると、直前の定理はいずれかの種類であったはずだからである。

検算

- (q_{ij}) の各列の和は 1 である。たとえば $\frac{2}{15} + \frac{4}{15} + \frac{3}{5} = 1$。
- 対角成分は、式 $q_{ii} = a_i p_{ii} / a_i$ が示すとおり $q_{ii} = p_{ii}$ を満たす。
- 連鎖を 10^6 ステップ模擬実験（シミュレーション）したところ、長期的な頻度は 0.167、0.333、0.501 となり、逆向きの割合は上のすべての q_{ij} と 0.001 以内で一致した。

よくある間違い

- 表に a_i の列ベクトルを掛けてしまう（列ではなく行を使ってしまう）。方程式は $b_j = \sum_i a_i p_{ij}$ であり、和は第 j 列を縦にとる。
- $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ を忘れ、3 つの釣り合いの方程式で a_i が決まらないことに戸惑う。
- 小問 (iii) に p_{ji} と答えてしまう。時間を逆にたどることは、表を逆向きに読むことと同じではない。$q_{12} = 0.15$ だが $p_{12} = 0.3$ なので、この連鎖は可逆ではない。

STEP のその先へ

ベクトル (a_1, a_2, a_3) はこの連鎖の定常分布であり、推移行列（transition matrix）の固有値 1 に対する左固有ベクトル（left eigenvector）である。行列のすべての成分が正であるので、最初の定理がどの種類であっても、第 n 番目の定理の種類の分布はこれに収束する。表 (q_{ij}) は**時間反転した**連鎖（time-reversed chain）を表しており、反転しても元と同じに見える連鎖（$a_i p_{ij} = a_j p_{ji}$、すなわち詳細釣り合い条件（detailed balance condition）を満たすもの）は、ランダムウォークやモンテカルロ法において中心的な役割を果たす。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）には、マルコフ連鎖についての読みやすい章がある。

解答例

STEP III 1996、第 13 問

確率・統計 ・ チェビシェフの不等式

> **STEP III 1996、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q13

鍵となる考え方

分散（variance）は、各値に対応する非負の項 $p_i(x_i-\mu)^2$ の和である。この和を、平均（mean）から遠い値（平均から λ 以上離れているもの）と近い値とに分ける。遠い値をとる確率の**上界**（upper bound）を得るには、近い項を捨て、遠い各項を下から評価する。**下界**（lower bound）を得るにはその逆を行う。すなわち、すべての項を上から評価し、近い項は λ^2 で、遠い項は k^2 で抑える。

解答

定義と $aX+b$

$p_i=\mathrm{P}(X=x_i)$ とおくと、$p_i\ge 0$ かつ $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$ である。このとき

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \qquad \mathrm{var}(X)=\mathrm{E}\big((X-\mu)^2\big)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 p_i,$$

である。ただし $\mu=\mathrm{E}(X)$ とする。（同値な形として $\mathrm{var}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mu^2$ もあるが、ここでは最初の形を用いる。）

確率変数（random variable）$aX+b$ は確率 p_i で値 ax_i+b をとる。（$a=0$ のときはこれらの値が一致するが、等しい値の確率をまとめても以下の和は変わらない。）よって

$$\mathrm{E}(aX+b)=\sum_i (ax_i+b)p_i = a\sum_i x_i p_i + b\sum_i p_i = a\mathrm{E}(X)+b,$$

となる。ここで $\sum_i p_i=1$ を用いた。したがって $aX+b-\mathrm{E}(aX+b)=a(X-\mu)$ であり、

$$\mathrm{var}(aX+b)=\sum_i \big(a(x_i-\mu)\big)^2 p_i = a^2\sum_i (x_i-\mu)^2 p_i = a^2\,\mathrm{var}(X).$$

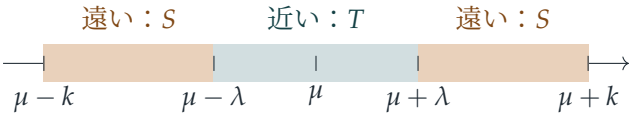
b を加えると、すべての値と平均がそろってずれるので、散らばりには影響しない。

上界

$\mu = \mathrm{E}(X)$ とし、$|x_i - \mu| \geq \lambda$ となる添字 i の集合（「遠い」値）を S、残り、すなわち $|x_i - \mu| < \lambda$ となるものを T とする。このとき

$$\mathrm{P}\big(|X - \mu| \geq \lambda\big) = \sum_{i \in S} p_i.$$

この確率を P とおく。



分散の各項は非負であるから、T の項を取り除いても和が大きくなることはない。また $i \in S$ に対しては $(x_i - \mu)^2 \geq \lambda^2$ である。したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X) &= \sum_{i \in S}(x_i - \mu)^2 p_i + \sum_{i \in T}(x_i - \mu)^2 p_i \\ &\geq \sum_{i \in S}(x_i - \mu)^2 p_i \\ &\geq \lambda^2 \sum_{i \in S} p_i = \lambda^2 P.\end{aligned}$$

$\lambda > 0$ であるから λ^2 で割ることができ、

$$\mathrm{P}\big(|X - \mu| \geq \lambda\big) \leq \frac{\mathrm{var}(X)}{\lambda^2},$$

が得られる。これが示すべき不等式である。（S が空集合ならば S 上の和はどちらもゼロとなり、不等式は自明に成り立つ。）

下界

次に、さらにすべての i について $|x_i - \mu| \leq k$ が成り立つと仮定する。今度は分散のすべての項を**上から**評価する。

- $i \in S$ に対しては、新しい仮定より $(x_i - \mu)^2 \leq k^2$ である。
- $i \in T$ に対しては、T の定義より $(x_i - \mu)^2 < \lambda^2$ である。

$\sum_{i \in T} p_i = 1 - P$ であるから、次が得られる。

$$\mathrm{var}(X) \leq k^2 \sum_{i \in S} p_i + \lambda^2 \sum_{i \in T} p_i = k^2 P + \lambda^2(1 - P) = \lambda^2 + (k^2 - \lambda^2)P.$$

整理すると

$$(k^2 - \lambda^2)\,P \geq \operatorname{var}(X) - \lambda^2.$$

考えてみよう $k^2 - \lambda^2$ で割ってよいだろうか？

条件より $k \geq \lambda > 0$ であるから $k^2 - \lambda^2 \geq 0$ である。$k > \lambda$ ならばこれは正であり、割っても不等号の向きは変わらない。

$$\mathrm{P}\big(|X - \mu| \geq \lambda\big) \geq \frac{\operatorname{var}(X) - \lambda^2}{k^2 - \lambda^2},$$

これが求める結果である。境界の場合 $k = \lambda$ では右辺の分母がゼロとなり、この主張は意味をもたない。その直前の不等式は依然として成り立ち、$\operatorname{var}(X) \leq \lambda^2$ を意味するが、これは各 $(x_i - \mu)^2 \leq k^2 = \lambda^2$ であることから明らかである。

$\operatorname{var}(X) \leq \lambda^2$ のときは下界はゼロ以下となり、新しいことは何も述べていない。この下界が意味をもつのは分散が λ^2 に比べて大きい場合だけであり、そのとき確率の一部が分布の裾（tails）へ押し出されることになる。

検算

- $X = \pm 1$ となる確率がそれぞれ 0.4、± 4 となる確率がそれぞれ 0.1 であるとする。すると $\mu = 0$、$\operatorname{var}(X) = 0.8 \times 1 + 0.2 \times 16 = 4$ である。$\lambda = 1$、$k = 4$ とすると $P = 1$ であり、上界は 4、下界は $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ となって、確かに $\frac{1}{5} \leq 1 \leq 4$ が成り立つ。
- $X = 0$ または $\pm c$ であるとし、それぞれ $\mathrm{P}(X = \pm c) = q/2$ とする。すると $\operatorname{var}(X) = qc^2$ であり、$\lambda = c$ とすると上界はちょうど $q = P$ に一致する。つまりチェビシェフ（Chebyshev）の不等式（Chebyshev's inequality）は一般にはこれ以上改良できない。
- 両方の評価式、および $\mathrm{E}(aX + b)$ と $\operatorname{var}(aX + b)$ の公式を、とる値が高々七つである 20 000 個のランダムな分布について厳密な有理数演算で検証したところ、成り立たない例は一つもなかった。

よくある間違い

- $\operatorname{var}(aX + b) = a \operatorname{var}(X)$ や $a^2\operatorname{var}(X) + b$ と書いてしまう。分散は偏差について二次であり、平行移動はどの偏差も変えない。
- 下界の評価で、近い項を λ^2 ではなく 0 で抑えてしまう。すると $\operatorname{var}(X) \leq k^2 P$ が得られるが、これは正しいものの、求められている結果ではない。

- $k^2 - \lambda^2$ で割る際に、それが正であること（および $k = \lambda$ を除外しなければならないこと）に言及しない。

STEP のその先へ

最初の不等式はチェビシェフの不等式であり、項を捨てるという技法は、$Y \geq 0$ に対するマルコフ（Markov）の不等式（Markov's inequality）$\mathrm{P}(Y \geq c) \leq \mathrm{E}(Y)/c$ の背後にあるものと同じである（これを $Y = (X - \mu)^2$ に適用すればよい）。大学 1 年の確率論の講義では、チェビシェフの不等式を使うと大数の弱法則（weak law of large numbers）がわずか 2 行で証明できる。すなわち、X の独立なコピー n 個の平均は分散 $\mathrm{var}(X)/n$ をもつので、μ から大きく外れる可能性は低い。2 つ目の不等式は有界性を必要とする「逆向き」の版であり、ペイリー＝ジグムントの不等式（Paley–Zygmund inequality）と同じ精神に立つものである。Grimmett and Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）がこれらすべてを扱っている。

解答例

STEP III 1996、第 14 問

確率・統計 ・ 2 状態マルコフ過程

> **STEP III 1996、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q14

鍵となる考え方

時間を長さ δt の微小区間に切り分け、その一つの区間で何が起こりうるかを考える。すると、期待される回数は期待値の線形性（linearity of expectation）によって足し合わせることができ、修理中である確率は単純な「入る分から出る分を引く」という収支に従う。この収支は $\delta t \to 0$ とすると一階線形微分方程式（first-order linear differential equation）になる。$p(t)$ が求まれば、修理時間の期待値はその積分にすぎない。

解答

パンクの回数の期待値

パンクが起こりうるのは実際に自転車をこいでいる時間だけであり、こいでいる間は自転車は正常である。こいでいる時間の合計 T を長さ $\delta t = T/n$ の n 個の小区間に分ける。k 番目の小区間でのパンクの回数を X_k とする。δt の一次までの近似で、X_k は確率 $\alpha\,\delta t$ で 1、それ以外では 0 であるから、$\mathrm{E}(X_k) = \alpha\,\delta t$ である。期待値の線形性により（独立性（independence）は必要ない）、

$$\mathrm{E}(\text{パンクの回数}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(X_k) = n\alpha\,\delta t = \alpha T.$$

ここでの時計は自転車をこいでいる時間だけを測っているので、修理に費やした時間は関係しない。

$p(t)$ の方程式

次に、t を修理を含む実際の（時計の）時間とする。時刻 t において、私は修理中（確率 $p(t)$）か、自転車をこいでいる（確率 $1-p(t)$）かのどちらかである。時刻 $t+\delta t$ に修理中であるのは、次のいずれかの場合である。

- 時刻 t に修理中であり、$(t, t+\delta t)$ の間に修理が完了しなかった場合：確率 $p(t)(1-\beta\,\delta t)$。
- 時刻 t に自転車をこいでおり、$(t, t+\delta t)$ の間にパンクした場合：確率 $(1-p(t))\,\alpha\,\delta t$。

これらは互いに排反であるから、$(\delta t)^2$ のオーダーの項（一つの微小区間で二つの事象が起こる場合）を無視すると、

$$p(t+\delta t) = p(t)(1-\beta\,\delta t) + \big(1-p(t)\big)\alpha\,\delta t.$$

整理すると

$$\frac{p(t+\delta t)-p(t)}{\delta t} = \alpha - (\alpha+\beta)\,p(t),$$

となり、$\delta t \to 0$ とすると

$$p'(t) = \alpha - (\alpha+\beta)\,p(t).$$

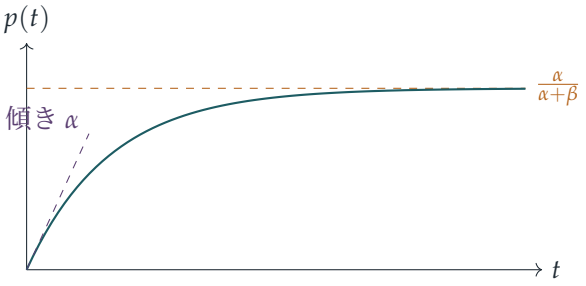
を得る。自転車は正常な状態から出発するので、初期条件（initial condition）は $p(0)=0$ である。

与えられた解の確認

$p(t) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\big(1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}\big)$ に対して $p(0) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-1) = 0$ であり、

$$p'(t) = \alpha\,\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t},$$
$$\alpha - (\alpha+\beta)p(t) = \alpha - \alpha\big(1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}\big) = \alpha\,\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}.$$

これらは一致するので、p は微分方程式と初期条件を満たす。以上で示された。



グラフは、p が 0 から初期の傾き α で増加し、長期的な水準 $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ に近づいていく様子を示している。

修理時間の期待値

$[0,T]$ の間に修理に費やす時間を R とし、時刻 t に修理中ならば 1、そうでなければ 0 をとるものを $I(t)$ とする。すると $R=\int_0^T I(t)\,\mathrm{d}t$ である。$\mathrm{E}(I(t))=p(t)$ であるから、期待値をとると（これも線形性にすぎず、積分を微小区間にわたる和の極限とみなして適用している）

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(R)=\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left[t+\frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}}{\alpha+\beta}\right]_0^T \\ &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(T-\frac{1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)T}}{\alpha+\beta}\right).\end{aligned}$$

考えてみよう 修理時間の期待値が確率の積分に等しくなるのはなぜか？

各微小区間 $(t,t+\delta t)$ において、修理に費やす時間は確率 $p(t)$ でおよそ δt、それ以外では 0 であるから、その期待値は $p(t)\,\delta t$ である。すべての区間にわたって足し合わせると $\sum p(t)\,\delta t\to\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t$ となる。

二つの近似

$x=(\alpha+\beta)T$ とおく。道のりのうち修理に費やす時間の割合の期待値は

$$F=\frac{\mathrm{E}(R)}{T}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(1-\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\right).$$

である。

x が小さい場合。 $\mathrm{e}^{-x}=1-x+\frac{1}{2}x^2-\cdots$ を用いると $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}=1-\frac{1}{2}x+O(x^2)$ となるので、

$$F\approx\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{x}{2}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{(\alpha+\beta)T}{2}=\frac{\alpha T}{2}.$$

これは納得できる結果である。短い道のりでは $p(t)\approx\alpha t$ であり、その $[0,T]$ 上の平均は $\alpha T/2$ である。

x が大きい場合。 このとき $0<\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}<\dfrac{1}{x}$ であり、これは小さいので、

$$F\approx\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

長い道のりでは、ほとんどすべての時間において $p(t)$ は平衡（equilibrium）値 $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ に落ち着いている。

検算

- 平衡：$p' = 0$ とおくと $\alpha(1-p) = \beta p$、すなわち「入る率と出る率が等しい」ことになり、$p = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ を得る。これは T が大きいときの極限と一致する。
- $\beta \to \infty$（瞬時に修理できる）ならば、修理に関するすべての量は 0 に近づく。当然そうあるべきである。
- $\alpha = 0.7, \beta = 2.3, T = 2.5$ のとき、公式から $\mathrm{E}(R) \approx 0.5056$ を得る。2×10^5 回の道のり（指数分布に従う走行期間と修理期間を交互に繰り返す）のシミュレーションでは 0.5058 となり、走行時間 2.5 におけるパンクの回数のシミュレーションの平均は $1.750 = \alpha T$ であった。

よくある間違い

- パンクの項に因子 $(1-p(t))$ を付け忘れる。パンクが起こりうるのは自転車をこいでいる間だけである。
- $p(0) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ を用いたり、初期条件を明記しなかったりする。自転車は正常な状態から出発するので $p(0) = 0$ である。
- x が小さい場合の展開で二次の項を落としてしまい、$\alpha T/2$ ではなく $F \approx 0$ となってしまう。

STEP のその先へ

これは二状態の連続時間マルコフ連鎖（continuous-time Markov chain）である。自転車は「走行可能」と「修理中」の間をそれぞれ率 α と β で行き来し、p の方程式はコルモゴロフ（Kolmogorov）の前向き方程式（forward equations）の最も単純な場合である。同じモデルは、故障しては修理される機械、開閉するイオンチャネル（ion channel）、そして待ち行列理論（queueing theory）の多くを記述する。走行時間におけるパンクの回数は率 α のポアソン過程（Poisson process）である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、ポアソン過程とマルコフ連鎖をちょうどよい水準で扱っている。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

1996 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.