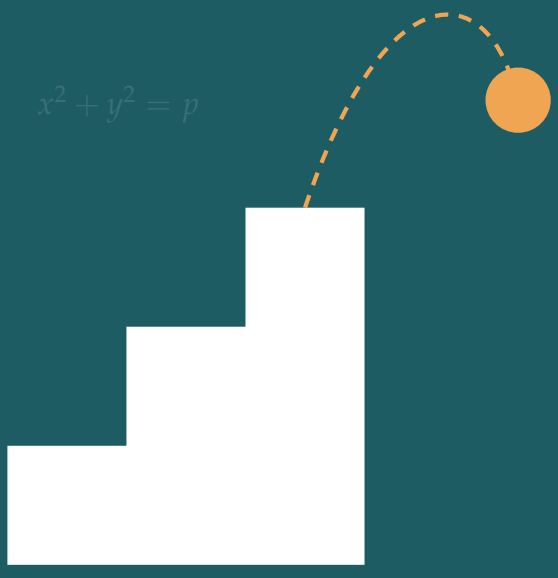
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

1995 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

1995 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

1995 年解答例

1995 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 42 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 多項式の不等式 純粋数学 . . . 3
Q2 置換積分 純粋数学 . . . 7
Q3 望遠鏡型級数 純粋数学 . . . 10
Q4 ド・モアブルの定理 純粋数学 . . . 13
Q5 二項級数と積分 純粋数学 . . . 17
Q6 ベルヌーイ型微分方程式 純粋数学 . . . 21
Q7 ベクトルと三角形 純粋数学 . . . 24
Q8 線形微分方程式 純粋数学 . . . 28
Q9 放物運動の包絡線 力学 . . . 31
Q10 弾性ひもと跳ね返り 力学 . . . 35
Q11 円柱間の摩擦 力学 . . . 40
Q12 並べ方と数え上げ 確率・統計 . . . 44
Q13 ポアソン間引き 確率・統計 . . . 48
Q14 比率の推定 確率・統計 . . . 51

STEP II

Q1 等比級数の微分 純粋数学 . . . 55
Q2 塗り分けの再帰的な数え上げ 純粋数学 . . . 59
Q3 論理的推論と数え上げ 純粋数学 . . . 63
Q4 ウォリスの漸化式 純粋数学 . . . 67
Q5 最適化と凹性 純粋数学 . . . 71
Q6 1の冪根 純粋数学 . . . 74
Q7 ヘロンの公式 純粋数学 . . . 79
Q8 ロジスティック微分方程式 純粋数学 . . . 83

Q9 摩擦とつり合い 力学 87
Q10 衝突と反発係数 力学 91
Q11 速度に比例する空気抵抗 力学 95
Q12 順番に撃ち合う決闘 確率・統計 99
Q13 ポアソン分布と最適化 確率・統計 103
Q14 仮説検定 確率・統計 108

STEP III

Q1 連立1次方程式 純粋数学 112
Q2 漸化式による積分 純粋数学 116
Q3 減衰振動 純粋数学 120
Q4 三角級数の和 純粋数学 124
Q5 マクローリン級数 純粋数学 127
Q6 軌跡と反転 純粋数学 131
Q7 群と同型 純粋数学 135
Q8 平面と球 純粋数学 139
Q9 実体振り子 力学 143
Q10 斜面上の放物運動 力学 147
Q11 相対速度 力学 150
Q12 動径対称な確率密度 確率・統計 154
Q13 雑音のある二元通信路 確率・統計 158
Q14 積率母関数 確率・統計 162

解答例

STEP I 1995、第 1 問

純粋数学 ・ 多項式の不等式

> **STEP I 1995、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q1

鍵となる考え方

小問 (i) は、項をまとめることで因数分解（factorise）できる三次式（cubic）である。いったん三つの一次因数の積になれば、その符号は数直線（number line）から読み取れる。小問 (ii) は同じ三次式が姿を変えたものである。すべての項の次数の合計が 3 なので、y^3 で割ると、変数 x/y についての小問 (i) の三次式になる。すると同じ因数分解から原点を通る三本の直線が得られ、小問 (iii) は直線に沿ってではなく原点のまわりに描く符号表（sign chart）となる。

解答

小問 (i)

項を二つずつまとめると、

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 - x + 4 &= x^2(x-4) - (x-4) \\ &= (x-4)(x^2-1) \\ &= (x+1)(x-1)(x-4). \end{aligned}$$

根は -1、1、4 である。各因数は一次式であり、自分自身の根でのみ符号が変わるので、積は三つの根のそれぞれで符号が変わる。x が十分大きな正の数のとき三つの因数はすべて正であるから、右から読んでいくと符号の様子は次のようになる。

x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < 4$	$x > 4$
符号	$-$	$+$	$-$	$+$

三次式が零となる根も含めると、不等式が成り立つのはちょうど

$$-1 \le x \le 1 \quad \text{または} \quad x \ge 4.$$

のときである。

小問 (ii)

$f(x,y) = x^3 - 4x^2y - xy^2 + 4y^3$ とおく。これは小問 (i) の三次式の各項に y のべきを掛けて次数を 3 にそろえたものであり、同じまとめ方が使える。

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2(x-4y) - y^2(x-4y) \\ &= (x-4y)(x-y)(x+y). \end{aligned}$$

積が零になるのは、いずれかの因数が零になるときに限るので、$f(x,y) = 0$ となるのは三本の直線

$$x = 4y \ (\text{すなわち} y = \tfrac{1}{4}x), \qquad y = x, \qquad y = -x,$$

の上であり、これらはすべて原点を通る。

考えてみよう なぜ (ii) の答えが (i) と関係するはずなのだろうか。

$y \neq 0$ のとき、$t = x/y$ とおく。すると $f(x,y) = y^3\,(t^3 - 4t^2 - t + 4)$ となり、これは小問 (i) の三次式の y^3 倍である。この三次式は $t = -1, 1, 4$ で零になる。すなわち $x = -y$、$x = y$、$x = 4y$ の上で零になる。（$y = 0$ のときは $f = x^3$ であり、これが零になるのは原点のみで、原点はすでに三本の直線すべての上にある。）

小問 (iii)

三本の直線は平面を、原点で接する六つの扇形（sector）に分ける。x 軸の正の向きから反時計回りに測ると、六本の半直線の向きは

$$\arctan \tfrac{1}{4} \approx 14^\circ, \quad 45^\circ, \quad 135^\circ, \quad 194^\circ, \quad 225^\circ, \quad 315^\circ.$$

である。扇形の内部では f のどの因数も零にならないので、そこでの f の符号は一定である。直線を一本横切ると、ちょうど一つの因数の符号が変わる（三本の直線は互いに異なり、原点から離れたところでは一度に一本しか横切らない）。したがって f の符号は隣り合う扇形ごとに交互に入れ替わる。

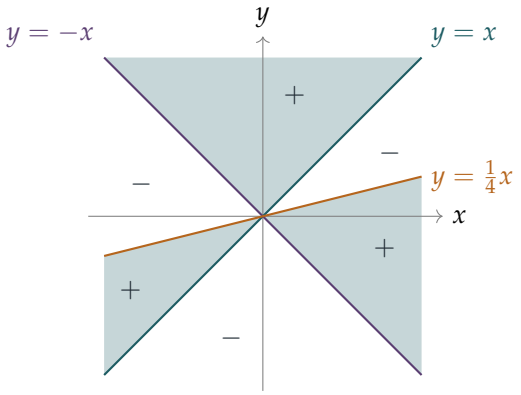
符号を確定させるために $(1,0)$ をとる。$f(1,0) = 1 > 0$ であり、$(1,0)$ は 315° と 14° の間の扇形にある。よって一周すると、符号は次のようになる。

扇形（度）	$-45, 14$	$14, 45$	$45, 135$	$135, 194$	$194, 225$	$225, 315$
符号：f	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

試しに確かめると、三列目では $f(0,1)=4>0$、五列目では $f(-3,-1)=8>0$ である。

したがって $f(x,y)\geq 0$ となるのは、下図で網掛けした三つの扇形と、三本の直線すべて（そこでは $f=0$）である。

- x 軸の正の部分を含む扇形。$x>0$ において、$y=-x$（下側）と $y=\frac{1}{4}x$（上側）の間にある。
- y 軸の正の部分を含む扇形。$y>0$ において、$y=x$ と $y=-x$ の間にある。
- 第 3 象限にある、$y=x$ と $y=\frac{1}{4}x$ の間の細い扇形。



考えてみよう 原点のまわりに半回転すると、網掛けが入れ替わるだけで図が変わらないのはなぜだろうか。

f のすべての項は奇数次 3 なので、$f(-x,-y)=-f(x,y)$ である。点を原点のまわりに 180° 回転すると f の符号が反転するので、網掛けした扇形はそれぞれ網掛けしていない扇形の反対側にある。これはどんな概形図にも使える手早い検算である。網掛けした扇形とそうでない扇形は向かい合う対にならなければならず、実際にそうなっている。

検算

- 直線 $y=1$ の上では $f(x,1)$ はちょうど小問 (i) の三次式なので、$y=1$ のうち網掛けされる部分は $-1\leq x\leq 1$ と $x\geq 4$ になるはずである。図では、$y=1$ は $y=-x$ と $y=x$ の間（$x=-1$ から $x=1$ まで）で網掛けされており、$y=\frac{1}{4}x$ と交わる $x=4$ で再び網掛けした扇形に入る。
- x 軸上では $f=x^3$ であり、これが非負になるのはちょうど $x\geq 0$ のときである。実

際、x 軸の正の部分は網掛けされ、負の部分はされていない。

- 数値的には、2×10^5 個の無作為な点で f を計算したところ、その符号はつねに六つの扇形の符号表と一致した。たとえば $f(1,0) = 1$、$f(0,-1) = -4$、$f(-3,-1) = 8$ である。

よくある間違い

- $y < 0$ のときに y^3 で割って、不等号の向きをそのままにしてしまう。そこでは $y^3 < 0$ なので条件は $t^3 - 4t^2 - t + 4 \leq 0$ となる。下半平面が上半平面と異なって見えるのはこのためである。
- $y > 0$ についてだけ小問 (i) の答えを使って網掛けし、$y < 0$ のことをまったく忘れてしまう。
- 直線そのものを除いてしまう。不等式は等号を含むので、直線も領域に属する。

STEP のその先へ

すべての項が同じ次数をもつ多項式を**同次多項式**（homogeneous polynomial）という。その零点集合は原点を通る直線の和集合であり、その符号は方向だけで決まる。同次多項式は、原点を通る直線全体を一つの点とみなす射影幾何学（projective geometry）の出発点であり、線形代数の講義で円錐曲線（conics）や二次形式（quadratic forms）を分類するときにも再び現れる。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は二次形式を扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の上級問題集）にはこの種の STEP の問題がさらに収められている。

解答例

STEP I 1995、第 2 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP I 1995、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q2

鍵となる考え方

小問 (i) では、どちらの積分も単独では易しくないが、2 つを組にするとみごとにうまくいく。和をとると約分して 1 になる分数が現れ、差をとると分子（numerator）がちょうど分母（denominator）の導関数（derivative）になる。易しい積分が 2 つ得られれば、S と T についての連立方程式（simultaneous equations）が 2 本得られる。小問 (ii) で置換（substitution）$x = \sin^2 t$ を選ぶのは、これによって $\frac{1}{x} - 1$ が完全平方（perfect square）$\cot^2 t$ になり、平方根が消えるからである。その後は最後まで倍角の公式（double-angle formulae）を使うだけである。

解答

小問 (i)

被積関数（integrand）どうしを足すと、

$$S + T = \int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x = x + c_1.$$

引くと、

$$S - T = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x + \sin x) = -\sin x + \cos x$ であるから、分子は分母の導関数である。したがってこれは $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ の形であり、

$$S - T = \ln|\cos x + \sin x| + c_2.$$

この2式の和と差をとって2で割ると、

$$S = \tfrac{1}{2}(x + \ln|\cos x + \sin x|) + C,$$
$$T = \tfrac{1}{2}(x - \ln|\cos x + \sin x|) + C',$$

ここで C と C' は任意定数（arbitrary constants）である。これらは、被積関数が定義される $\cos x + \sin x \neq 0$ を満たす任意の区間で成り立つ。

小問 (ii)

求める積分を I とおく。$x = \sin^2 t$ とすると $\mathrm{d}x = 2\sin t \cos t \,\mathrm{d}t$ である。積分区間については、$x = \frac{1}{4}$ のとき $\sin t = \frac{1}{2}$ より $t = \frac{\pi}{6}$、$x = \frac{1}{2}$ のとき $\sin t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より $t = \frac{\pi}{4}$ である。（t は $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ の範囲にとる。t がこの区間を動くとき、x は $\frac{1}{4}$ から $\frac{1}{2}$ まで増加する。）

次に平方根を処理する。

$$\frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t} = \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}, \qquad \text{よって} \qquad \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

? **考えてみよう** 平方根が $|\cos t / \sin t|$ ではなく $\cos t / \sin t$ になるのはなぜか。

一般には $\sqrt{\cot^2 t} = |\cot t|$ である。しかし $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ では $\sin t$ と $\cos t$ はともに正であるから $\cot t > 0$ となり、絶対値（modulus）を外してよい。t を第1象限（first quadrant）にとったのはこのためである。

代入すると $\sin t$ が約分される。

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/4} (1 - 4\sin^2 t)\, \frac{\cos t}{\sin t}\, 2\sin t \cos t \,\mathrm{d}t = \int_{\pi/6}^{\pi/4} 2\cos^2 t\,(1 - 4\sin^2 t)\,\mathrm{d}t.$$

ここで倍角の公式を用いて、積分しやすい形にする。$2\cos^2 t = 1 + \cos 2t$ および $8\sin^2 t \cos^2 t = 2\sin^2 2t = 1 - \cos 4t$ であるから、

$$2\cos^2 t - 8\sin^2 t \cos^2 t = (1 + \cos 2t) - (1 - \cos 4t) = \cos 2t + \cos 4t.$$

したがって

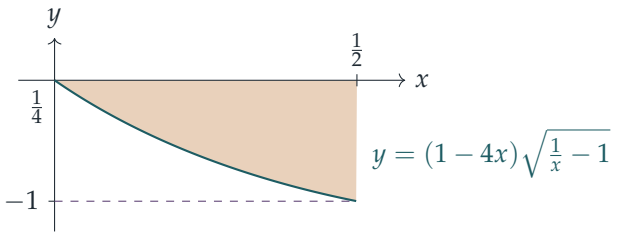
$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/4} (\cos 2t + \cos 4t)\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{2}\sin 2t + \tfrac{1}{4}\sin 4t\right]_{\pi/6}^{\pi/4} \\ &= \left(\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{4}\sin\pi\right) - \left(\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{1}{4}\sin\tfrac{2\pi}{3}\right) \\ &= \tfrac{1}{2} - \left(\tfrac{\sqrt{3}}{4} + \tfrac{\sqrt{3}}{8}\right), \end{aligned}$$

ゆえに

$$\int_{1/4}^{1/2} (1 - 4x)\sqrt{\frac{1}{x} - 1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{8}.$$

検算

- 符号：$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ では $1-4x<0$ であり平方根は正であるから、被積関数は負であり、I は負でなければならない。実際 $4-3\sqrt{3}\approx -1.196$ であるから $I\approx -0.1495$ である。下のグラフは被積関数を表している。
- もとの積分に直接シンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると $-0.149519\ldots$ となり、$\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{8}$ と小数第 10 位まで一致する。
- 小問 (i) については微分して確かめる：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{2}\big(x+\ln(\cos x+\sin x)\big) = \frac{1}{2}\Big(1+\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\Big) = \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}$。たとえば $[0,1]$ 上では、S と T はいずれも数値積分（quadrature）の値（0.66168 と 0.33832）と一致する。



よくある間違い

- 積分区間を $t=\frac{\pi}{6}$ と $t=\frac{\pi}{4}$ に変え忘れる、あるいは x に戻すときに誤る。
- $\mathrm{d}x$ の因子 $2\sin t\cos t$ を落とす、あるいは $\mathrm{d}x=2\sin t\,\mathrm{d}t$ と書いてしまう。
- 正の答えを出す：被積関数はつねに負であるから、正の値が出たら符号の誤りを疑うべきである。

STEP のその先へ

小問 (i) の技法、すなわち扱いにくい積分に「相棒」を組み合わせて和と差をどちらも易しくする方法は、何度も繰り返し現れる。たとえば $\int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$ と $\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$ がそうであり、その複素数版は $\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$ を積分することで得られる。小問 (ii) は一般的な原理の小さな例である。うまく選んだ置換によって、代数的な被積関数を三角多項式（trigonometric polynomial）に変えることができ、これはフーリエ級数（Fourier series）の出発点である。この種の積分をさらに多く、丁寧な解説とともに学びたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を参照するとよい。

解答例

STEP I 1995、第 3 問

純粋数学 • 望遠鏡型級数

STEP I 1995、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/95-s1-q3

鍵となる考え方

和の連続する項が大部分を共有しているとき、各項を差 $f(r)-f(r-1)$ の形に書くと、ほとんどすべてが打ち消し合う。すなわち、和が**望遠鏡的に縮む**（telescopes）のである。工夫すべきは、その差が求めたい項になるように f を選ぶところにあるが、この問題ではそれが与えられている。交代級数（alternating series）については、これを**すべての**立方数の和から偶数の立方数の和の 2 倍を引いたものとして書くのがこつであり、そうすれば小問 (ii) の結果を 2 回使うだけで済む。

解答

小問 (i)

和をすべて書き出すと

$$\sum_{r=1}^{n}\{f(r)-f(r-1)\}=\{f(1)-f(0)\}+\{f(2)-f(1)\}+\cdots+\{f(n)-f(n-1)\}.$$

$f(1),f(2),\ldots,f(n-1)$ はそれぞれ正の符号で 1 回、負の符号で 1 回現れるので、すべて打ち消し合う。残るのは最初の括弧の $-f(0)$ と最後の括弧の $f(n)$ だけであり、$f(n)-f(0)$ が得られる。これが示すべきことであった。

「すべて打ち消し合う」よりも厳密な議論が欲しければ、n に関する数学的帰納法（induction）を用いればよい。$n=1$ のとき、和は $f(1)-f(0)$ である。$n=k$ で結果が成り立つと仮定すると、次の項を加えて

$$f(k)-f(0)+f(k+1)-f(k)=f(k+1)-f(0),$$

となり、これは $n = k+1$ のときの結果である。よって、すべての $n \geq 1$ について成り立つ。

小問 (ii)

$\mathrm{f}(r) = r^2(r+1)^2$ とすると $\mathrm{f}(r-1) = (r-1)^2r^2$ である。どちらも因数 r^2 を含むので、これをくくり出し、2 乗の差の因数分解（difference of two squares）を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(r) - \mathrm{f}(r-1) &= r^2\left[(r+1)^2 - (r-1)^2\right] \\ &= r^2\left[(r+1) + (r-1)\right]\left[(r+1) - (r-1)\right] \\ &= r^2 \cdot 2r \cdot 2 = 4r^3.\end{aligned}$$

ここで $r = 1$ から n まで和をとり、小問 (i) を適用する。$\mathrm{f}(0) = 0$ であるから

$$4\sum_{r=1}^{n} r^3 = \mathrm{f}(n) - \mathrm{f}(0) = n^2(n+1)^2, \qquad \text{よって} \qquad \boxed{\sum_{r=1}^{n} r^3 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2.}$$

小問 (iii)

この級数は $2n+1$ 個の項からなる。奇数の立方は正の符号、偶数の立方は負の符号をもち、最後は奇数の立方 $(2n+1)^3$ で終わる。

> **考えてみよう** $\sum r^3$ の公式だけを使って、交互に変わる符号をどう扱えばよいか。

$(2n+1)^3$ までの**すべての**立方数の和から出発する。この和では偶数の立方がすべて正の符号をもっているが、求めたいのは負の符号なので、偶数の立方をそれぞれ 2 回ずつ引けばよい。

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - \cdots + (2n+1)^3 = \sum_{k=1}^{2n+1} k^3 - 2\sum_{m=1}^{n} (2m)^3.$$

偶数の立方は $m = 1, \ldots, n$ に対する $(2m)^3 = 8m^3$ であり、最大のものは $(2n)^3$ である。小問 (ii) を 2 回（うち 1 回は n の代わりに $2n+1$ として）用いると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n+1} k^3 - 16\sum_{m=1}^{n} m^3 &= \tfrac{1}{4}(2n+1)^2(2n+2)^2 - 16\cdot\tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\ &= (2n+1)^2(n+1)^2 - 4n^2(n+1)^2 \\ &= (n+1)^2\left[(2n+1)^2 - (2n)^2\right] \\ &= (n+1)^2(4n+1),\end{aligned}$$

ここで、2 行目では $(2n+2)^2 = 4(n+1)^2$ を、最後の行では 2 乗の差 $(2n+1)^2 - (2n)^2 = (2n+1+2n)\cdot 1$ を用いた。よって

$$\boxed{1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \cdots + (2n+1)^3 = (n+1)^2(4n+1).}$$

検算

- $n = 0$ のとき、級数は $1^3 = 1$ だけであり、$(0+1)^2(0+1) = 1$ である。
- $n = 1$ のとき：$1 - 8 + 27 = 20$ であり、$2^2 \times 5 = 20$ である。
- $n = 2$ のとき：$1 - 8 + 27 - 64 + 125 = 81$ であり、$3^2 \times 9 = 81$ である。
- 項は $(2m+1)^3 - (2m)^3 \approx 12m^2$ のように対になるので、答えは $(2n+1)^3/2$ 程度、すなわち最後の項のおよそ半分のように増加するはずである。実際 $(n+1)^2(4n+1) \approx 4n^3$ であり、$\sum 12m^2 \approx 4n^3$ と一致する。

また、0 から 199 までのすべての n について、小問 (ii) と (iii) を直接和をとって確かめた。

よくある間違い

- 偶数の立方を 1 回だけ引いてしまうこと。これでは $\sum k^3 - \sum (2m)^3$、すなわち**奇数の**立方の和となり、交代和にはならない。
- 偶数の立方を $(2n+2)^3$ までとってしまったり、すべての立方の和の公式で $2n+1$ の代わりに n を用いてしまったりすること。項の個数を注意深く数えること。

STEP のその先へ

小問 (i) は微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）の離散版である。差 $\mathrm{f}(r) - \mathrm{f}(r-1)$ が導関数の役割を果たし、それを足し合わせると f が復元される。これは F' を積分すると $F(b) - F(a)$ が得られるのとちょうど同じである。この「差分法（calculus of finite differences）」を用いると、適切な f を見つけることで任意の多項式の和を求めることができ、同じ望遠鏡和の考え方は級数の収束に関する多くの証明の土台にもなっている。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、望遠鏡和やこの種の級数の演習がさらに収録されている。

解答例

STEP I 1995、第 4 問

純粋数学 ・ ド・モアブルの定理

> **STEP I 1995、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q4

鍵となる考え方

ド・モアブルの定理（de Moivre's theorem）により、$\sin 5\theta$ は $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^5$ の虚部（imaginary part）として表され、二項定理（binomial theorem）によってこの累乗は $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の積に展開される。虚部のどの項にも $\sin\theta$ の奇数乗が含まれるので、因数を一つくくり出し、残りを $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ によって余弦に書き換えることができる。そして角 $\frac{1}{5}\pi$ が特別なのは、そこで $\sin 5\theta = 0$ となるからであり、その結果 $\cos^2\theta$ についての二次方程式（quadratic）が残る。

解答

恒等式

$c = \cos\theta$、$s = \sin\theta$ とおく。ド・モアブルの定理により、

$$\cos 5\theta + \mathrm{i}\sin 5\theta = (c + \mathrm{i}s)^5.$$

二項定理により、係数 $1, 5, 10, 10, 5, 1$ を用いて

$$(c + \mathrm{i}s)^5 = c^5 + 5c^4(\mathrm{i}s) + 10c^3(\mathrm{i}s)^2 + 10c^2(\mathrm{i}s)^3 + 5c(\mathrm{i}s)^4 + (\mathrm{i}s)^5.$$

$\mathrm{i}^2 = -1$、$\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$、$\mathrm{i}^4 = 1$、$\mathrm{i}^5 = \mathrm{i}$ であるから、虚数の項は $\mathrm{i}s$ の奇数乗を含む項である：

$$\mathrm{Im}(c + \mathrm{i}s)^5 = 5c^4 s - 10c^2 s^3 + s^5.$$

c と s はともに実数なので、虚部を比較すると

$$\begin{aligned}\sin 5\theta &= s\left(5c^4 - 10c^2s^2 + s^4\right)\\ &= s\left(5c^4 - 10c^2(1-c^2) + (1-c^2)^2\right)\\ &= s\left(5c^4 - 10c^2 + 10c^4 + 1 - 2c^2 + c^4\right)\\ &= s\left(16c^4 - 12c^2 + 1\right),\end{aligned}$$

を得る。ただし 2 行目で $s^2 = 1 - c^2$ を用いた。すなわち

$$\sin 5\theta = \sin\theta\left(16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1\right),$$

となり、示すべき式が得られた。

$\cos^2\frac{1}{5}\pi$ の値を求める

$\theta = \frac{1}{5}\pi$ とおく。このとき $\sin 5\theta = \sin\pi = 0$ であり、一方 $\sin\frac{1}{5}\pi \neq 0$ である（$0 < \frac{1}{5}\pi < \pi$ だから）。よって恒等式の両辺を $\sin\theta$ で割ることができ、$x = \cos^2\frac{1}{5}\pi$ は

$$16x^2 - 12x + 1 = 0, \qquad \text{よって} \qquad x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 64}}{32} = \frac{12 \pm 4\sqrt{5}}{32} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}.$$

を満たす。

考えてみよう この二次方程式には解が二つある。$\cos^2\frac{1}{5}\pi$ はどちらだろうか。

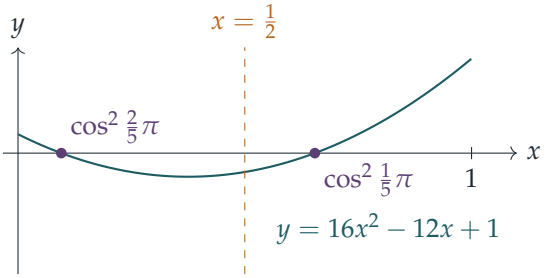
解を選ぶには、$\cos\frac{1}{5}\pi$ についての事実がもう一つ必要である。$0 < \frac{1}{5}\pi < \frac{1}{4}\pi$ であり、cos は $[0, \frac{1}{2}\pi]$ で減少するから、$\cos\frac{1}{5}\pi > \cos\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ であり、したがって

$$\cos^2\tfrac{1}{5}\pi > \tfrac{1}{2}.$$

ここで $\sqrt{5} < 3$ より $\frac{3-\sqrt{5}}{8} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$ であり、一方 $\sqrt{5} > 1$ より $\frac{3+\sqrt{5}}{8} > \frac{1}{2}$ である。$\frac{1}{2}$ より大きい解はちょうど一つなので、

$$\cos^2\tfrac{1}{5}\pi = \frac{3+\sqrt{5}}{8}.$$

（もう一方の解は見かけ上の解（spurious root）ではない。$\theta = \frac{2}{5}\pi$ でも $\sin 5\theta = 0$ かつ $\sin\theta \neq 0$ であり、$\cos^2\frac{2}{5}\pi = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$ となる。）



$\cos\frac{1}{5}\pi$ を導く

$0 < \frac{1}{5}\pi < \frac{1}{2}\pi$ より $\cos\frac{1}{5}\pi > 0$ であるから、正の平方根をとって

$$\cos\tfrac{1}{5}\pi = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}.$$

最後に、$(1+\sqrt{5})^2 = 1+2\sqrt{5}+5 = 6+2\sqrt{5}$ かつ $1+\sqrt{5} > 0$ であるから $\sqrt{6+2\sqrt{5}} = 1+\sqrt{5}$ となり、

$$\cos\tfrac{1}{5}\pi = \tfrac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right),$$

となって、示すべき式が得られた。

検算

- $\theta = \frac{1}{2}\pi$ のとき、恒等式は $\sin\frac{5}{2}\pi = 1\cdot(0-0+1) = 1$ を与え、これは正しい。θ が小さいとき、括弧内は $16-12+1 = 5$ に近づくので、両辺はともにおよそ 5θ となる。
- 数値的には $\cos 36^\circ \approx 0.809017$、$\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) \approx 0.809017$ であり、また $\cos^2 36^\circ \approx 0.654508 = \frac{3+\sqrt{5}}{8}$ である。さらに、10^4 個の無作為な角で恒等式を確かめた。
- $\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$ は黄金比（golden ratio）φ の半分である。黄金比は正五角形の対角線と辺の長さの比であり、36° という角からもそれが示唆される。

よくある間違い

- i の累乗から生じる符号を忘れること。s^3 の項には $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$ がつくので、$-10c^2s^3$ となる。
- 根拠なしに二次方程式の解を選ぶこと。$\frac{3-\sqrt{5}}{8}$ を除外するには、$\cos^2\frac{1}{5}\pi > \frac{1}{2}$ のような不等式が必要である。
- $\sin\frac{1}{5}\pi \neq 0$ に触れずに $\sin\theta$ で割ること。

STEP のその先へ

同じ方法で、$\sin n\theta / \sin\theta$ や $\cos n\theta$ を $\cos\theta$ の多項式として表すことができる。これがチェビシェフ多項式（Chebyshev polynomials）であり、数値解析のあらゆる場面に現れる。数 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/5}$ は 1 の 5 乗根（fifth roots of unity）であり、$\cos\frac{1}{5}\pi$ が平方根だけで表されるという事実こそ、正五角形が定規とコンパスで作図できる理由である。どの正多角形が作図可能かについてのガウス（Gauss）の定理は、大学で学ぶガロア理論

（Galois theory）の白眉の一つである。ド・モアブルの定理の背後にある幾何については、Needham の *Visual Complex Analysis*（複素解析を視覚的に解説した書）を参照するとよい。

解答例

STEP I 1995、第 5 問

純粋数学 ・ 二項級数と積分

> **STEP I 1995、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q5

鍵となる考え方

多項式を項別に微分（differentiate term by term）すると、扱いにくい $1/r$ という因子が消え、残るのはほとんど二項展開（binomial expansion）そのものである。係数 $(-1)^{r+1}\binom{n}{r}$ は、$-(1-x)^n$ から定数項を除いたものの係数にちょうど一致する。f' がわかれば、微積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）（$\mathrm{f}(0)=0$ とあわせて）により f が積分として表され、置換（substitution）$y=1-t$ によって求める形に変形できる。そこに現れる被積分関数は等比級数（geometric series）であり、ただちに積分できる。

解答

導関数

次のようにおく。

$$\mathrm{f}(x)=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\binom{n}{r}\frac{x^r}{r}.$$

これは多項式であるから、項別に微分してよい。

$$\mathrm{f}'(x)=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\binom{n}{r}x^{r-1}.$$

$x \neq 0$ のとき、両辺に x を掛け、$(-1)^{r+1}x^r = -(-x)^r$ を用いると、

$$\begin{aligned} x\,\mathrm{f}'(x) &= -\sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r}(-x)^r \\ &= -\Big(\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}(-x)^r - 1\Big) \\ &= 1-(1-x)^n, \end{aligned}$$

となる。最後の等号は二項定理（binomial theorem）による。x で割ると、

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{1-(1-x)^n}{x} \qquad (x \neq 0),$$

となり、示すべき式が得られた。（$x = 0$ では級数から $\mathrm{f}'(0) = n$ となる。$1-(1-x)^n = nx + O(x^2)$ であるから、これは $x \to 0$ のときの右辺の極限にも一致する。）

積分による表示

f のどの項も因子 x を含むので、$\mathrm{f}(0) = 0$ である。微積分学の基本定理により、

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(0) + \int_0^x \mathrm{f}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1-(1-t)^n}{t}\,\mathrm{d}t.$$

考えてみよう 式の分母に t があるのに、$t = 0$ をまたいで積分してもよいのだろうか？

よい。被積分関数の実体は多項式 $\mathrm{f}'(t)$ であり、分数の形は $t \neq 0$ のときにそれを簡潔に書き表したものにすぎない。$t = 0$ での値は極限値 n である。したがって特異点（singularity）は存在せず、式の上に除去可能な（removable）すき間があるだけである。

次に $y = 1-t$ と置換すると $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}y$ であり、$t = 0$ のとき $y = 1$、$t = x$ のとき $y = 1-x$ である。よって

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) &= \int_1^{1-x} \frac{1-y^n}{1-y}\,(-\mathrm{d}y) \\ &= \int_{1-x}^{1} \frac{1-y^n}{1-y}\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

となる。ここでは積分の上端と下端を入れ替えて負号を吸収した。これが求める結果であり、すべての実数 x に対して成り立つ。

$\mathrm{f}(1)$ の値

$x = 1$ とおくと、下端は 0 になる。$y \neq 1$ のとき、被積分関数は等比級数の和

$$\frac{1-y^n}{1-y} = 1 + y + y^2 + \cdots + y^{n-1},$$

であり、（前と同様に）$y=1$ での値は極限値 n であるから、被積分関数は $[0,1]$ 全体でこの多項式に等しい。したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(1) &= \int_0^1 \left(1+y+\cdots+y^{n-1}\right)\mathrm{d}y \\ &= \left[y+\frac{y^2}{2}+\cdots+\frac{y^n}{n}\right]_0^1 \\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

これが何を意味するかに注目しよう。もとの級数に $x=1$ を代入すると、次の驚くべき恒等式が得られる。

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^{r+1}}{r}\binom{n}{r} = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},$$

これは直接にはとても明らかとはいえない。

検算

- $n=1$：$\mathrm{f}(x)=x$ であり、$\big(1-(1-x)\big)/x = 1 = \mathrm{f}'(x)$ である。また $\mathrm{f}(1)=1$ である。
- $n=4$：$\mathrm{f}(1) = 4-\frac{6}{2}+\frac{4}{3}-\frac{1}{4} = \frac{25}{12} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$。
- 導関数の式を無作為に選んだ 300 個の有理数点で厳密に確かめた。また、無作為な $x\in[-1.5,1.5]$ と $n\le 15$ について、積分（シンプソンの公式（Simpson's rule）による）と級数を比較し（相対誤差は 10^{-11} 未満）、さらに $\mathrm{f}(1)$ についての恒等式を $n\le 40$ のすべてについて厳密に確認した。

よくある間違い

- $(1-x)^n$ の二項展開と照らし合わせる際に、$r=0$ の項を忘れること。$r=1$ からの和は $(1-x)^n-1$ であって、$(1-x)^n$ ではない。
- $\mathrm{f}(0)=0$ であることに触れずに $\mathrm{f}(x)=\int_0^x \mathrm{f}'(t)\,\mathrm{d}t$ と書くこと。
- 置換 $y=1-t$ の後で積分の上端と下端を逆にしてしまうこと。$\mathrm{d}t=-\mathrm{d}y$ の符号こそが、それらを元に戻す役割を果たす。

STEP のその先へ

数 $H_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ は調和数（harmonic numbers）と呼ばれる。これは $\ln n$ のように増大し、$H_n-\ln n$ はオイラー（Euler）の定数 $\gamma\approx 0.5772$ に収束する。ここで用

いた技法、すなわち微分して扱いにくい分母を消し、それから積分して戻すという方法は、$\ln(1+x)$ や $\tan^{-1} x$ の冪級数（power series）を導くのと同じものであり、無限級数に対するその正当化（冪級数の項別微分）は大学1年次の解析学（analysis）の中心的な話題である。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）はこれを丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 1995、第 6 問

純粋数学 ・ ベルヌーイ型微分方程式

> **STEP I 1995、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q6

鍵となる考え方

どちらの方程式も y について線形（linear）ではないが、それぞれ $1/y$ の適当なべきについては線形である。左辺には y'/y^2 が含まれており、これは（符号を除いて）$1/y$ の導関数（derivative）である。したがって $u = 1/y$ とおくと、方程式は u についての 1 階線形微分方程式（first-order linear equation）になり、積分因子（integrating factor）を用いれば解ける。小問 (ii) では y'/y^3 という項があるので、代わりに $1/y^2$ を考えればよいと見当がつく。

解答

小問 (i)

$u = 1/y$ とおく。合成関数の微分法（chain rule）により

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

であるから、方程式の第 1 項はちょうど $-\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ であり、第 2 項は u である。よって方程式は

$$-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = \mathrm{e}^{2x}, \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u = -\mathrm{e}^{2x}.$$

となる。これは u について線形である。積分因子は $\mathrm{e}^{\int -1\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x}$ であり、両辺に掛けると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(u\,\mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \mathrm{e}^{-x}u = -\mathrm{e}^{x}.$$

を得る。A を任意定数として積分すると

$$u\,\mathrm{e}^{-x} = A - \mathrm{e}^{x}, \qquad \text{よって} \qquad u = A\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x}.$$

$y = 1/u$ であるから

$$y = \frac{1}{Ae^x - e^{2x}},$$

となり、これが求める一般解（general solution）である。（元の方程式は $1/y$ を含むので、つねに $y \neq 0$ であり、この置換（substitution）によって失われる解はない。この式は $Ae^x \neq e^{2x}$ となる任意の区間で成り立つ。すなわち、$A > 0$ のときは $x = \ln A$ を避ければよい。）

小問 (ii)

考えてみよう ここで $u = 1/y$ の役割を果たす置換は何か。

新しい変数の導関数から y'/y^3 が現れるようにしたい。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{2}{y^3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

であるから、$v = 1/y^2$ とおくのが正しい選び方である。このとき第 1 項は $-\frac{1}{2}\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$、第 2 項は v となるので

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v = e^{2x}, \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - 2v = -2e^{2x}.$$

今度は積分因子は e^{-2x} である：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(v\,e^{-2x}\right) = -2e^{2x}\cdot e^{-2x} = -2.$$

B を任意定数として積分すると

$$v\,e^{-2x} = B - 2x, \qquad \text{よって} \qquad \frac{1}{y^2} = (B - 2x)\,e^{2x}.$$

したがって

$$y^2 = \frac{e^{-2x}}{B - 2x}, \qquad y = \pm\frac{e^{-x}}{\sqrt{B - 2x}}.$$

$1/y^2 > 0$ であるから $B - 2x > 0$ でなければならない。すなわち、解は $x < \frac{1}{2}B$ においてのみ存在し、符号ははじめの y の符号によって定まる（y は決して 0 にならないので、符号が変わることはない）。小問 (i) と異なり、答えは 2 つの指数関数の差にはならない。ここでは右辺の e^{2x} が積分因子 e^{-2x} とちょうど打ち消し合い、積分すべきものが定数だけになる。線形の項 $-2x$ が現れるのはこのためである。

検算

- (ii) に代入して確かめる：$1/y^2 = (B - 2x)e^{2x}$ を微分すると $-2y'/y^3 = -2e^{2x} + 2(B - 2x)e^{2x}$ となるので、$y'/y^3 = e^{2x} - 1/y^2$ であり、これはもとの方程式そのものである。

- 数値的に確かめる：(ii) で $y(0) = 1$ とすると $B = 1$ となり、公式から $y(0.4) = \mathrm{e}^{-0.4}/\sqrt{0.2} \approx 1.49888$ が予測される。微分方程式を $x = 0$ から数値的に解き進めると、小数第 10 位まで同じ値が得られる。また、どちらの一般解も、多数の無作為な点と定数の値についてそれぞれの方程式を満たす。

よくある間違い

- $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ のマイナス符号（小問 (ii) では係数 2）を忘れ、線形方程式が台無しになる。
- 小問 (ii) で正の平方根だけを書いてしまう、あるいは解が $x < \frac{1}{2}B$ を必要とすることに気づかない。

STEP のその先へ

どちらの方程式もベルヌーイ方程式（Bernoulli equation）$y' + P(x)y = Q(x)y^n$ の例である。y^n で割って $u = y^{1-n}$ とおけば、つねに線形方程式が得られる。ここでは小問 (i) が $n = 2$、小問 (ii) が $n = 3$ の場合にあたる。解が有限の x で「爆発（blow up）」しうること（$x \to \frac{1}{2}B$ のときのように）は非線形方程式に典型的な性質であり、常微分方程式（ODE）の最初の講義で学ぶ。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）を参照のこと。

解答例

STEP I 1995、第 7 問

純粋数学 ・ ベクトルと三角形

> **STEP I 1995、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q7

鍵となる考え方

A, B, C から等距離にある点を原点にとると、位置ベクトル（position vector）$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の長さはすべて等しくなる。この一つの事実がすべてを担う。長さの等しいベクトルについては $(\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{b}) = |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = 0$ が成り立つからである。Q の位置ベクトルが $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ という見事に簡単な形になることがわかれば、どちらの小問も一、二行の計算で片づく。

解答

原点の選び方

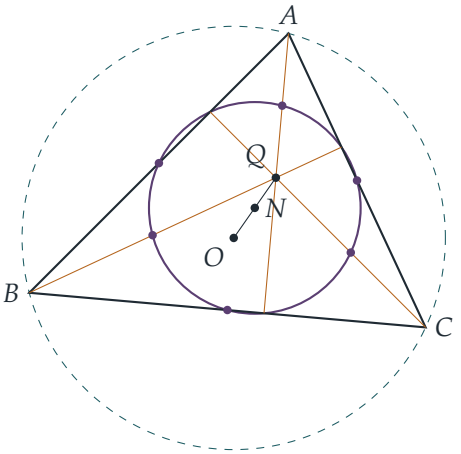
A と B から等距離にある点全体は AB の垂直二等分線（perpendicular bisector）、すなわち AB に垂直な直線をなす。B と C についても同様である。A, B, C は同一直線上にない（not collinear）ので、AB と BC は平行でなく、したがってそれらの垂直二等分線も平行でない。よってこの二直線はちょうど 1 点で交わり、その点は A と B から等距離、かつ B と C から等距離であるから、3 点すべてから等距離である。（これは三角形の外心（circumcentre）である。）

この点を O とし、A, B, C の位置ベクトルを $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ と書き、共通の距離を R とする。すなわち

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = R.$$

重心（centroid）の位置ベクトルは $\mathbf{g} = \frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$ である。$\overrightarrow{GQ} = 2\overrightarrow{OG}$ は $\mathbf{q} - \mathbf{g} = 2\mathbf{g}$ を意味するから、

$$\mathbf{q} = 3\mathbf{g} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}, \qquad \mathbf{n} = \tfrac{1}{2}\mathbf{q} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$



図には、A, B, C を通り O を中心とする円（破線）、Q で交わる 3 本の垂線、および小問 (ii) の 6 つの中点を通る、N を中心とする半径 $\frac{1}{2}R$ の円を示している。

小問 (i)

$\overrightarrow{AQ} = \mathbf{q} - \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ および $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$ であるから、

$$\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BC} = (\mathbf{c} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = R^2 - R^2 = 0,$$

ここで交差項を打ち消すのに $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$ を用いた。よって $\overrightarrow{AQ}$ は $\overrightarrow{BC}$ に垂直である。

? **考えてみよう** $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ から、本当に Q が A から下ろした垂線（altitude）上にあるといえるだろうか。$\overrightarrow{AQ}$ が零ベクトルの場合はどうか。

$Q \neq A$ ならば、直線 AQ は A を通り BC に垂直であるから、これは A から下ろした垂線**そのもの**であり、Q はその上にある。$Q = A$ の場合（これはちょうど $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$、すなわち BC が直径で A における角が直角であるときに起こる）は、Q が A からの垂線上にあるのは自明である。いずれにせよ、Q は A からの垂線上にある。

この議論のどこにも A を特別扱いした部分はない。式 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ は対称であるから、同様にして

$$\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CA} = (\mathbf{c} + \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c}) = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{c}|^2 = 0,$$
$$\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{AB} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 = 0,$$

となり、Q は B からの垂線上にも C からの垂線上にもある。したがって 3 本の垂線はすべてただ 1 点 Q を通る。すなわち 3 本の垂線は 1 点で交わる（concurrent）。（Q は垂心（orthocentre）である。）

小問 (ii)

AQ の中点の位置ベクトルは $\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{q}) = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ であるから、N からの変位は

$$\mathbf{a} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{a}.$$

BC の中点の位置ベクトルは $\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ であるから、N からの変位は

$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = -\tfrac{1}{2}\mathbf{a}.$$

これらの長さはいずれも $\frac{1}{2}|\mathbf{a}| = \frac{1}{2}R$ である。

同じ対称性により、BQ と CA の中点は N から $\pm\frac{1}{2}\mathbf{b}$ だけ、CQ と AB の中点は $\pm\frac{1}{2}\mathbf{c}$ だけ変位している。$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = R$ であるから、6 つの中点はすべて N から距離 $\frac{1}{2}R$ にあり、これが示すべきことであった。実際には、もう少し多くのことを示している。AQ の中点と BC の中点はこの円の直径の両端にあり、残りの 2 組についても同様である。

検算

- 正三角形の場合：このとき $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{0}$ であるから、O, G, Q, N はすべて一致し、6 つの中点はすべて中心から距離 $\frac{1}{2}R$ にあるはずである。実際、辺の中点は距離 $R\cos 60^\circ = \frac{1}{2}R$ にあり、AQ などの中点は半径のちょうど中央にある。
- A が直角の場合：このとき、上の議論が予測するとおり $Q = A$ となる。直角をはさむ 2 辺そのものが A を通る垂線だからである。
- 数値的には、10^5 個の三角形を無作為に生成し、外心を直接計算して、$Q = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ であること、3 つの内積（dot product）がすべて 0 になること、6 つの中点がすべて N から距離 $\frac{1}{2}R$ にあることを確かめた。相対誤差の最大値は約 10^{-13} であった。

よくある間違い

- $\overrightarrow{GQ} = 2\overrightarrow{OG}$ を $\mathbf{q} = 2\mathbf{g}$ と読んでしまう。これは $\mathbf{q} - \mathbf{g} = 2\mathbf{g}$ という意味であり、したがって $\mathbf{q} = 3\mathbf{g}$ である。
- 垂直性を 1 つ示しただけで止めてしまう。1 点で交わることを示すには Q が 3 本すべての垂線上にあることが必要である。同じ計算が B と C についても成り立つことを明記すること。
- 原点の存在の根拠を書き忘れる。原点が存在する理由は、平行でない 2 辺の垂直二等分線が必ず交わることである。

STEP のその先へ

$\mathbf{q} = 3\mathbf{g}$ かつ $\mathbf{n} = \frac{3}{2}\mathbf{g}$ であるから、点 O, G, N, Q はすべて一直線上にあり、$OG : GQ = 1 : 2$ となる。この直線が**オイラー線**（Euler line）である（オイラー（Euler））。小問 (ii) の円は**九点円**（nine-point circle）である。この円は 3 本の垂線の足（図にも見える）も通る。各垂線の足からは、AQ の中点と BC の中点を結ぶ直径のような直径が直角に見込まれるからである。対称な式に仕事をさせるように巧みな原点を選ぶことは、ベクトル幾何や線形代数で繰り返し現れる技法である。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）はベクトルと内積の道具をさらに発展させており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）にはこの精神に沿った STEP 風の幾何の問題がさらに収められている。

解答例

STEP I 1995、第 8 問

純粋数学 ・ 線形微分方程式

> **STEP I 1995、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q8

鍵となる考え方

未知のものは 3 つの関数であるが、x を 1 つ固定すれば、それらは単なる 3 つの数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ にすぎない。与えられた 3 つの解を $(*)$ に代入すると、これら 3 つの数についての 3 本の 1 次方程式が得られるので、これを連立方程式（simultaneous equations）として解く。第 2 段落については、$(*)$ の左辺が y について線形（linear）であるから、$x, 1, x^{-1}$ の組合せに対する結果は、それぞれの項が個別に生み出すものから導かれる。

解答

f, g, h を求める

左辺 $y'' + f(x)y' + g(x)y$ を Ly と書くと、$(*)$ は $Ly = h(x)$ を意味する。各解を順に代入する。

- $y = 1$：このとき $y' = y'' = 0$ であるから、$g(x) = h(x)$。
- $y = x$：このとき $y' = 1, y'' = 0$ であるから、$f(x) + x\,g(x) = h(x)$。
- $y = x^{-1}$：このとき $y' = -x^{-2}, y'' = 2x^{-3}$ であるから、

$$\frac{2}{x^3} - \frac{f(x)}{x^2} + \frac{g(x)}{x} = h(x).$$

2 番目の式に $h = g$ を用いると $f(x) = (1 - x)\,g(x)$ を得る。これら 2 つを 3 番目の式に代入し、両辺に x^3 を掛ける（$x > 0$ なので許される）：

$$\begin{aligned} 2 - x(1 - x)\,g(x) + x^2\,g(x) &= x^3\,g(x) \\ 2 = g(x)\left(x^3 - 2x^2 + x\right) &= g(x)\,x(1 - x)^2. \end{aligned}$$

$0 < x < 1$ であるから因数 $x(1-x)^2$ は 0 でなく、これで割ることができる。したがって

$$\mathrm{g}(x) = \mathrm{h}(x) = \frac{2}{x(1-x)^2}, \qquad \mathrm{f}(x) = (1-x)\,\mathrm{g}(x) = \frac{2}{x(1-x)}.$$

各 x において、3 本の方程式を自由な選択の余地なく順に解いたので、条件を満たす関数はこれらしかない。制限 $0 < x < 1$ により、これらの関数が発散する $x = 0$ と $x = 1$ が除かれている。

よって方程式は

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2}{x(1-x)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{2}{x(1-x)^2}y = \frac{2}{x(1-x)^2}.$$

である。

$ax + b + c/x$ が解となるのはいつか

作用素(operator)L は線形である。すなわち定数 α, β に対して $L(\alpha u + \beta v) = \alpha\,Lu + \beta\,Lv$ が成り立つ。微分は線形であり、f, g はそれぞれ y' と y に掛かっているだけだからである。第 1 段落より

$$L(x) = L(1) = L(x^{-1}) = \mathrm{h}(x).$$

ゆえに $y = ax + b + c/x$ に対して

$$Ly = a\,L(x) + b\,L(1) + c\,L(x^{-1}) = (a+b+c)\,\mathrm{h}(x).$$

> **考えてみよう** 単に「ある x で $a+b+c=1$」ではなく、$a+b+c=1$ と結論できるのはなぜか？

すべての $0 < x < 1$ に対して $(a+b+c)\,\mathrm{h}(x) = \mathrm{h}(x)$、すなわち $(a+b+c-1)\,\mathrm{h}(x) = 0$ が必要である。ところがこの区間では $\mathrm{h}(x) = 2/\big(x(1-x)^2\big) > 0$ であるから、これで割ることができる。よって $y = ax + b + c/x$ が $(*)$ の解であるための必要十分条件は

$$a + b + c = 1.$$

である。

検算

- $(a,b,c) = (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ とおくと与えられた 3 つの解が得られ、いずれも $a+b+c=1$ を満たす。
- 直接確かめる：$x = \frac{1}{2}$ のとき $\mathrm{f} = 8, \mathrm{g} = \mathrm{h} = 16$ である。$y = 1/x$ については $y = 2$, $y' = -4, y'' = 16$ であり、$16 - 32 + 32 = 16$ となって要求どおりである。

- コンピュータで、$(0,1)$ 内の 49 個の有理数点において 3 つの解すべてを厳密に検証し、さらに 2000 組のランダムな (a,b,c,x) に対して $Ly = (a+b+c)\mathrm{h}$ を確認した。

よくある間違い

- $y = x^{-1}$ に対して $y'' = -2x^{-3}$ と書いてしまう。2 つの負号が掛け合わされて $+2x^{-3}$ となる。
- $a+b+c=0$ と答えてしまう。これは $ax+b+c/x$ が**斉次**（homogeneous）方程式 $Ly=0$ の解となる条件である。ここでは右辺は 0 ではなく h である。

STEP のその先へ

これは線形微分方程式（linear differential equation）の解の構造である。すなわち、$Ly = \mathrm{h}$ の任意の 2 つの解の差は $Ly = 0$ の解となる。ここでは $x-1$ と $x^{-1}-1$ が斉次方程式の解であり、2 階（second-order）の方程式では、独立な（independent）2 つの解からすべての解が得られる。よって $1+\alpha(x-1)+\beta(x^{-1}-1)$ が一般解（general solution）であり、これはちょうど $a+b+c=1$ を満たす族にほかならない。「独立」という言葉を厳密にするのがロンスキアン（Wronskian）である。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）は、これらすべてを扱っている。

解答例

STEP I 1995、第 9 問

力学 ・ 放物運動の包絡線

> **STEP I 1995、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q9

鍵となる考え方

点 (x, y) を固定し、その点を通る軌道（trajectory）を与える投射角が存在するかを問う。軌道の方程式を θ ではなく $\tan\theta$ で表すと、$\tan\theta$ の**二次式**（quadratic）になる。点に到達できるのは、ちょうどその二次方程式が実数解をもつときである。したがって、問題全体は判別式（discriminant）の問題に帰着する。

解答

モデル

粒子を、重力のみを受けて運動する質点（point mass）として扱う。すなわち、空気抵抗（air resistance）はなく、g は大きさも向きも一定であり、経路上に障害物もないとする。このとき粒子は初速度を含む鉛直面内を運動する。また、問題になるのは O からの水平**距離**だけなので、対称性により $x \geq 0$ としてよい。粒子は x が増加する向きに、水平面から上向きに角 θ で投射されるものとし、$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする（真上への投射 $\theta = \frac{\pi}{2}$ は最後に扱う）。

軌道

$u = \sqrt{2gh}$ とおく。すなわち $u^2 = 2gh$ である。下向きの一定の加速度 g のもとで、時刻 t における位置は

$$x = ut\cos\theta, \qquad y = ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

である。$t = x/(u\cos\theta)$ を代入して消去し、$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ を用いると、

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2}(1+\tan^2\theta) = x\tan\theta - \frac{x^2}{4h}(1+\tan^2\theta),$$

を得る。ここで $2u^2 = 4gh$ を用いた。$T = \tan\theta$ とおき、両辺に $4h$ を掛けると、軌道が (x,y) を通るための必要十分条件は

$$x^2T^2 - 4hx\,T + \left(x^2 + 4hy\right) = 0. \qquad (*)$$

である。θ が $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 全体を動くとき、$T = \tan\theta$ はすべての実数値をちょうど一度ずつとる。よって、角度を選ぶことは実数 T を選ぶことと同じである。

考えてみよう なぜ軌道を θ ではなく $\tan\theta$ で表すのか？

θ で表すと、方程式に sin、cos、$\sec^2$ が混在して扱いにくい。$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ を用いれば、すべてが一変数 T の多項式になり、「角度は存在するか？」という問いは「この二次方程式は実数解をもつか？」という問いに変わる。これならすぐに答えられる。

到達できる点

$x > 0$ とする。このとき $(*)$ は T についての真の二次方程式であり、実数解をもつための必要十分条件は判別式が非負であることである：

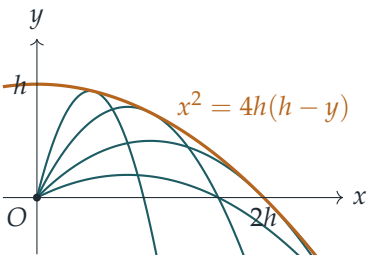
$$\begin{aligned}(4hx)^2 - 4x^2\left(x^2+4hy\right) \geq 0 &\iff 4x^2\left(4h^2 - x^2 - 4hy\right) \geq 0\\ &\iff x^2 \leq 4h^2 - 4hy = 4h(h-y),\end{aligned}$$

ここで $4x^2 > 0$ で割った。したがって、(x,y) が放物線の**上側**にある、すなわち $x^2 > 4h(h-y)$、言い換えれば $y > h - \dfrac{x^2}{4h}$ であるならば、$(*)$ は実数解をもたず、粒子を (x,y) に通過させる投射角は存在しない。

残るのは $x = 0$、すなわち O を通る鉛直線の場合である。この直線上の点で $y \neq 0$ のものには、鉛直に投射したときにしか到達しない（それ以外の角度では、$t > 0$ のすべてで $x > 0$ となる）。速さ u で真上に投射すると、粒子は高さ $u^2/(2g) = h$ まで上がり、それ以上には上がらない。これはちょうど放物線と $x = 0$ の交点である。よってこの直線上でも、放物線より上の点には到達しない。

以上より、投射角がどのようであっても、粒子は放物線 $x^2 = 4h(h-y)$ より上の点には決して到達できない。 ■

この限界は最良である。$x^2 = 4h(h-y)$ のとき判別式は 0 となり、軌道がちょうど放物線に接するような角度 $\tan\theta = 2h/x$ がただ一つ存在する。この放物線はすべての軌道の**包絡線**（envelope）であり、しばしば安全放物線（parabola of safety）と呼ばれる。



速さ $\sqrt{2gh}$ の四つの軌道（青緑）。それぞれが境界の放物線（琥珀色）に一度ずつ接している。

単純化のための仮定

- 粒子は質点である（大きさも回転もない）。
- 空気抵抗（および重力以外のすべての力）は無視する。
- 重力場は一様である。すなわち、運動する領域全体で g は一定であり、これは地表を平面とみなし、地球の自転を無視することも意味する。
- 経路は地面などによって遮られておらず、粒子は問題の点まで実際に移動できる。

検算

- $x = 0$ において放物線は $y = h = u^2/(2g)$ を与え、これは鉛直投げ上げの最高点の高さである。$y = 0$ 上では $x = 2h = u^2/g$ を与え、これは水平な地面上でのおなじみの最大到達距離である（そのときの角度は $45°$ であり、予想どおり $\tan\theta = 2h/x = 1$ となる）。
- 数値的には、$g = 9.8$、$h = 1.7$ として、ほぼ真下からほぼ真上までの 399 通りの投射角について運動を逐次計算した。どの軌道のどの点においても、放物線より上にある高さの最大値は約 -5×10^{-13}、すなわち丸め誤差を除いて 0 であった。また、固定した x に対して角度を動かして y を最大化すると、毎回 $h - x^2/(4h)$ が再現された。

よくある間違い

- θ を範囲 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ だけで考えてしまう。O より下の点には下向きの投射（$T < 0$）が必要であり、議論はそれらも含まなければならない。
- $x = 0$ を別に扱わずに x（または x^2）で割ってしまう。

- 特定の一つの軌道が放物線の下にあることだけを示してしまう。主張は**すべての**角度についてのものであり、だからこそ点を固定して角度を動かすのである。

STEP のその先へ

ここでの放物線は、一径数の軌道の族の**包絡線**、すなわち族のすべての曲線に接する曲線である。族 $F(x,y,T)=0$ の包絡線は、$F=0$ と $\partial F/\partial T=0$ から T を消去して求められ、T の二次式の場合、これはまさに判別式が 0 になることにほかならない。包絡線は、光学における焦線（caustics）、一階微分方程式（first-order differential equations）の理論（特異解（singular solutions））、そして与えられた速さのすべての投射体に対する「安全領域」などに再び現れる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、空気抵抗がある場合とない場合の放物運動を学ぶ次の一歩として好適である。

解答例

STEP I 1995、第 10 問

力学 ・ 弾性ひもと跳ね返り

STEP I 1995、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/95-s1-q10

鍵となる考え方

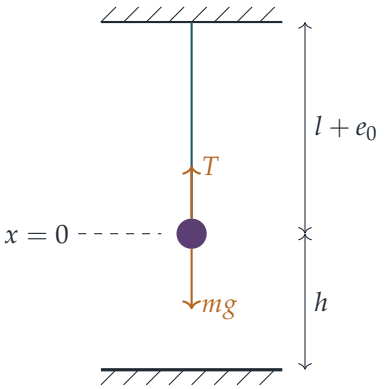
平衡位置（equilibrium position）から測ると、重力と張力（tension）のうち平衡に対応する部分とがちょうど打ち消し合う。そのため、つり合っていない力は変位 x に比例するフックの法則（Hooke's law）による復元力だけになる。ここから単振動（simple harmonic motion）が導かれ、そのエネルギー方程式がそのまま速さの公式となる。その後は帳簿付けにすぎない。エネルギー方程式によって $x = 0$ と面の間を行き来する玉の運動を追い、各衝突ではニュートンの反発の法則（Newton's experimental law）によって速度の向きを反転させ、大きさを定数倍すればよい。

解答

玉を質点とみなし、ひもは軽く弾性的で、伸びている間はフックの法則に従うものとする。空気抵抗は無視し、衝突は瞬間的に起こるものとする。以下では一貫して

$$\omega^2 = \frac{\lambda}{lm}.$$

と書く。



平衡状態での長さ

平衡状態での伸びを e_0 とすると、張力は $T_0 = \lambda e_0 / l$ である。平衡状態にある玉について鉛直方向の力のつり合いを考えると $T_0 = mg$ であるから、

$$\frac{\lambda e_0}{l} = mg \quad \Longrightarrow \quad e_0 = \frac{mgl}{\lambda},$$

となり、全長は $l + e_0 = l(1 + mg/\lambda)$ である。これが示すべきことであった。

速さの公式

x を平衡位置から下向きに測った玉の位置（下向きを正）とする。$x \geq 0$ では伸びは $e_0 + x > 0$ であるから、ひもは張っており、張力は $\lambda(e_0 + x)/l$ である。下向きにニュートンの運動の第二法則を適用すると

$$m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda(e_0 + x)}{l} = -\frac{\lambda x}{l},$$

となる。$\lambda e_0 / l = mg$ だからである。よって $\ddot{x} = -\omega^2 x$ であり、これは $x = 0$ を中心とする単振動である。

$\ddot{x} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ と書いて積分すると、

$$\int v\,\mathrm{d}v = -\omega^2 \int x\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad v^2 = -\omega^2 x^2 + C.$$

$x = 0$ で速さは u_0 であるから $C = u_0^2$ となり、

$$v^2 + \frac{\lambda}{lm}x^2 = u_0^2,$$

が得られる。これが示すべきことであった。（同じことであるが、これはエネルギー保存則にほかならない。重力による位置エネルギーと弾性エネルギーを合わせると、$\frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{l}x^2$ に定数を加えたものになる。）

1 回目の衝突

玉が面に達するのは、$x = h$ で $v^2 > 0$、すなわち $u_0^2 - \omega^2 h^2 > 0$ となるときに限る。これはまさに与えられた条件 $\lambda h^2 < lmu_0^2$ である。よって玉は速さ w_0 で面に衝突する。ここで

$$w_0^2 = u_0^2 - \omega^2 h^2.$$

である。ニュートンの反発の法則により、玉は速さ ew_0 で上向きに面を離れる。

$x = h$ から $x = 0$ へ上昇する間もひもは伸びたままなので、同じ運動方程式が成り立ち、エネルギー積分は $v^2 + \omega^2 x^2 =$ 定数 である。変わるのは定数だけである。$x = h$ では $v^2 = e^2 w_0^2$ であるから、定数は $e^2 w_0^2 + \omega^2 h^2$ となり、$x = 0$ において

$$\begin{aligned} u_1^2 &= e^2 w_0^2 + \omega^2 h^2 \\ &= e^2 \left(u_0^2 - \omega^2 h^2 \right) + \omega^2 h^2 \\ &= e^2 u_0^2 + \frac{\lambda}{lm} h^2 \left(1 - e^2 \right), \end{aligned}$$

が得られる。これが示すべきことであった。ここで u_1 は上向きである。

2 回目の衝突

考えてみよう $x = 0$ を通過した後、玉は平衡位置より上に上がり、ひもがたるむかもしれない。それでも玉は速さ u_1 で $x = 0$ に戻ってくるだろうか。

戻ってくる。$x = 0$ より上では、玉は重力とひもの張力の作用を受けて、あるいはひもがたるんでいれば重力だけの作用を受けて運動する。どちらの力も保存力（conservative force）である。ひもがたるんでいるときは、その弾性エネルギーが単に 0 になるだけである。したがって、$x = 0$ より上を運動している間はずっと、力学的エネルギー（mechanical energy）の総和が保存される。玉が $x = 0$ まで下りてきたとき、その位置エネルギーは出発したときと同じであるから、速さも同じ u_1 であり、向きは今度は下向きである。

よって 2 回目の下降は、u_0 を u_1 に置き換えれば 1 回目とまったく同じである。玉が面に達することも確かめる必要があるが、

$$u_1^2 - \omega^2 h^2 = e^2 \left(u_0^2 - \omega^2 h^2 \right) > 0.$$

であるから、確かに達する。1 回目の衝突の議論を u_0 を u_1 に置き換えて繰り返すと、

$$\begin{aligned} u_2^2 &= e^2u_1^2 + \omega^2h^2\left(1-e^2\right) \\ &= e^2\left[e^2u_0^2 + \omega^2h^2(1-e^2)\right] + \omega^2h^2(1-e^2) \\ &= e^4u_0^2 + \omega^2h^2(1-e^2)(1+e^2) \\ &= e^4u_0^2 + \frac{\lambda}{lm}h^2\left(1-e^4\right), \end{aligned}$$

となり、これで問題は解決した。

検算

- $e=1$ ならばエネルギーの損失はなく、どちらの公式からも $u_1=u_2=u_0$ が得られる。当然そうなるべきである。
- $e=0$ ならば玉は静止した状態で面を離れ、$u_1^2=\omega^2h^2$ となる。玉は振幅 h の位置で静止状態から上昇し、中心を速さ ωh で通過する。これは単振動から予想されるとおりである。
- 規則性を見るうまい方法がある。各衝突で衝突時の速さの 2 乗が e^2 倍されるので、$u_n^2-\omega^2h^2=e^{2n}\left(u_0^2-\omega^2h^2\right)$ となる。
- 運動を数値的に追跡した（ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta）を用い、ひもがたるむことも許した）。たとえば $m=1, l=1, \lambda=20, g=9.8, u_0=6, h=0.3, e=0.9$ とすると、シミュレーションから $u_1=5.4316$ と $u_2=4.9233$ が得られ、公式と一致する。この例では、衝突と衝突の間に実際にひもがたるむ。

よくある間違い

- x を平衡位置からではなく自然長（natural length）の位置から測ってしまう。すると重力が打ち消されず、公式に余分な 1 次の項が現れる。
- 反発係数 e を、$x=h$ での衝突時の速さではなく $x=0$ での速さに掛けてしまう。
- 平衡位置より上でもひもが張ったままだと仮定してしまう。そうなるとは限らないが、エネルギー保存則があるので、$x=0$ での速さにはこのことは関係しない。

STEP のその先へ

平衡点のまわりで重力が打ち消されることは、一般的な原理の最初の例である。すなわち、平衡点のまわりで線形化（linearise）すると、微小振動は単振動となり、ω^2 は「剛

性」を質量で割ったものに等しい。跳ねる玉は、区分的に滑らか（piecewise-smooth）な振動子、すなわち**衝突**振動子（impact oscillator）の一例である。こうした系は、面そのものが動いている場合には、驚くほど豊かな振る舞い（周期倍分岐（period doubling）、さらにはカオス（chaos））を示しうる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、振動子とエネルギーを用いた方法が大学 1 年次の水準で扱われている。

解答例

STEP I 1995、第 11 問

力学 ・ 円柱間の摩擦

> **STEP I 1995、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q11

鍵となる考え方

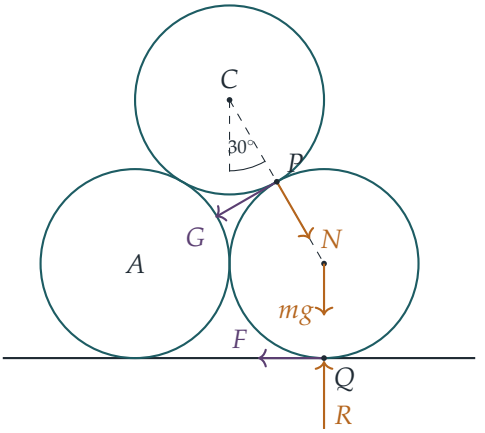
下にある円柱の一つに注目する。その重力と上の円柱からの垂直抗力（normal reaction）はどちらも中心を通るので、中心のまわりのモーメント（moment）を考えると、現れるのは二つの摩擦力（friction）だけであり、それらの大きさは等しくなければならない。次に水平方向の力の分解（resolving）を一回行えば、円柱どうしの接点における摩擦力と垂直抗力の比が決まり、あとは互いに接する三つの円の幾何（30° と 60° の角）がすべてを片づけてくれる。

解答

モデル

円柱は半径 r の一様な剛体（rigid body）の円柱とみなし、軸に垂直な断面で考える。すると各円柱は円となり、その重力は中心にはたらく。どの接点でも摩擦係数（coefficient of friction）は同じ μ とする。下の円柱を A（左）、B（右）、上の円柱を C とよぶ。A と B の中心は高さ r にあって互いに $2r$ 離れており、C の中心はそのそれぞれから $2r$ の距離にある。したがって中心を結ぶ三角形は正三角形であり、C の中心から B の中心へ向かう直線は鉛直方向と 30° をなす。

さしあたり、A と B は互いに力を及ぼし合わないと仮定する。この点には最後に立ち返る。対称性により、B と、C の右側の接点だけを調べれば十分である。



B にはたらく力は次のとおりである。

- 中心にはたらく重力 mg。
- 地面との接点 Q において、上向きの垂直抗力 R と、A の方へ水平に向かう摩擦力 F。
- C との接点 P において、中心を結ぶ直線に沿った垂直抗力 N（下向きかつ外向きで、鉛直方向と 30° をなす）と、共通接線に沿った摩擦力 G。後者は下向きかつ A の方へ、すなわち水平より 30° 下向きにはたらくものとする。

どちらかの摩擦力が実際には逆向きにはたらくなら、その値が負として求まるだけである。

B の中心のまわりのモーメント

重力は B の中心を通り、N も中心を通る。二つの円の間の垂直抗力は中心を結ぶ直線に沿ってはたらくからである。二つの摩擦力はどちらも接線に沿ってはたらき、中心からの垂直距離は r である。下端にあって A の方を向く F は、図において B を時計回りに回そうとし、P にあって接線に沿って A の方へ下向きにはたらく G は、反時計回りに回そうとする。したがって

$$Fr = Gr, \qquad \text{よって} \qquad F = G.$$

B についての水平方向の分解

N は外向きの水平成分 $N\sin 30° = \frac{1}{2}N$ をもつ。F と、G の水平成分 $G\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}G$ はどちらも内向きである。よって

$$\tfrac{1}{2}N = F + \tfrac{\sqrt{3}}{2}G = G\left(1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

したがって

$$\frac{G}{N} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3}.$$

これは正であるから、G は確かに仮定した向きにはたらき、$F = G$ も同様である。

接点 P で滑りが起こらないためには $G \le \mu N$、すなわち

$$\mu \ge 2-\sqrt{3}.$$

が必要である。

地面との接点

地面との接点でこれ以上の摩擦が必要とならないことも確かめておかなければならない。C にとって、B から受ける力は、鉛直方向と 30° をなす左上向きの N と、水平方向と 30° をなして接線に沿って上向きにはたらく G である。これらの鉛直成分は $\frac{\sqrt{3}}{2}N$ と $\frac{1}{2}G$ であり、対称性により A からも同じ寄与がある。C について鉛直方向に分解すると、

$$2\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}N + \tfrac{1}{2}G\right) = mg \implies N(\sqrt{3}+2-\sqrt{3}) = mg \implies N = \tfrac{1}{2}mg.$$

系全体について鉛直方向に分解すると、全重量 $3mg$ は対称性により等しく分担されるので、$R = \frac{3}{2}mg$ である。すると

$$\frac{F}{R} = \frac{(2-\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2}mg}{\frac{3}{2}mg} = \frac{2-\sqrt{3}}{3} < 2-\sqrt{3},$$

となり、$\mu \ge 2-\sqrt{3}$ であれば地面との接点も滑らない。決定的なのは円柱どうしの接点である。

考えてみよう A と B は接している。両者の間の力を無視してよいのはなぜか。

両者は互いを押し離すことしかできないので、A が中心を結ぶ直線に沿って大きさ $S \ge 0$ の力で B を外向きに押すとする。この力は B の中心を通るので、モーメントの式からはやはり $F = G$ が得られるが、水平方向の分解は $\frac{1}{2}N + S = G\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ となる。一方、C についての鉛直方向の式はそのまま成り立ち、この二つを連立して解くと、G/N は S が増加すると増加することがわかる（$S = 0$ のとき $2-\sqrt{3}$ である）。S は方程式から定まらないので、この問題は不静定（statically indeterminate）であり、必要な摩擦が最小になるのは $S = 0$ のときである。よって摩擦係数の最小値は、求めるとおり $2-\sqrt{3}$ である。

検算

- $2-\sqrt{3}=\tan 15^\circ \approx 0.268$ である。つまり円柱どうしの接点で、合力は法線とちょうど 15° をなし、これは図形に現れる 30° の角のちょうど半分である。計算が正しいことを示す心地よい兆候である。
- 地面での比 $(2-\sqrt{3})/3 \approx 0.089$ は円柱どうしの比の 3 分の 1 であり、これは納得がいく。地面は $\frac{3}{2}mg$、すなわち N の 3 倍を支えるが、摩擦力の大きさは同じだからである。
- B と C についての力とモーメントのすべての式に数値を代入し、未知の押す力 $S \geq 0$ について最小化する数値計算を行ったところ、μ の最小値は 0.267949… となり、$2-\sqrt{3}$ と一致した。

よくある間違い

- 中心ではなく、地面との接点や P のまわりのモーメントを考えること。これでも解けるが、N が式に入ってきて計算が煩雑になる。中心を選べば mg と N を一度に消せる。
- 地面だけを調べること。地面との接点に必要な摩擦ははるかに小さいので、誤った臨界値が得られてしまう。
- C について鉛直方向に分解するとき、ニュートン（Newton）の第三法則により C にはたらく摩擦が接線に沿って**上向き**にはたらくことを忘れること。

STEP のその先へ

下の円柱どうしの間の力 S は、釣り合い（equilibrium）の式からは求められない。この構造は**不静定**であり、問題が S のあらゆる可能な値にわたる摩擦の最小値を問うているのは理にかなっている。工学では、このような系は弾性変形をモデル化することで決着がつけられ、同じ問題は積み重ねたパイプや砂山のような粒状物質の力学にも現れる。静力学、摩擦、剛体の釣り合いについての丁寧な解説としては、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

解答例

STEP I 1995、第 12 問

確率・統計 ・ 並べ方と数え上げ

STEP I 1995、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/95-s1-q12

鍵となる考え方

n 人の生徒の並び方はどれも同様に確からしいので、各確率は条件を満たす並び方の数を $n!$ で割ったものである。さらによいことに、対称性により、ホッケー選手が**どの位置**を占めるかだけを考えればよい。r 個の位置の組としてありうる $\binom{n}{r}$ 通りは、どれも同様に確からしいのである。こうすると、各小問は位置の選び方を数える問題になる。最後の小問について、隙間に関するヒントは標準的な「星と棒（stars and bars）」の技法である。まずホッケー選手でない生徒を並べ、ホッケー選手はその間の互いに異なる隙間に入らなければならない。

解答

以下では一貫して、r 人のホッケー選手を H、それ以外の $n-r$ 人の生徒を N と呼ぶ。（互いに区別できる）生徒の $n!$ 通りの並べ方はすべて同様に確からしい。H の位置の組 r 個のどれも、同じ数 $r!\,(n-r)!$ 通りの並べ方から生じるので、H が占める位置の組は、ありうる $\binom{n}{r}$ 通りの組のどれになるのも同様に確からしい。以下では都合のよいほうの見方を用いる。

小問 (i)

まず両端の位置を埋める。左端の生徒がホッケー選手である確率は $\frac{r}{n}$ である。そのもとで、右端の生徒は残りの $n-1$ 人のうちの誰かであり、どの生徒も同様に確からしく、そのうち $r-1$ 人がホッケーをする。よって

$$\mathrm{P}(\text{両端にホッケー選手}) = \frac{r}{n}\cdot\frac{r-1}{n-1} = \frac{r(r-1)}{n(n-1)}.$$

（これが 0 でないためには $r \geq 2$ が必要であるが、これは問題文で保証されている。）

小問 (ii)

ホッケー選手全員が並んで立つのは、彼らの位置が連続する r か所のブロックをなすときであり、そのときに限る。そのようなブロックは位置 $1, 2, \ldots, n-r+1$ のいずれからも始められるので、$\binom{n}{r}$ 通りのうち条件を満たす位置の組は $n-r+1$ 通りある。

$$\mathrm{P}(\text{全員が隣り合う}) = \frac{n-r+1}{\binom{n}{r}} = \frac{r!\,(n-r+1)!}{n!}.$$

同じことであるが、r 人のホッケー選手をくっつけて 1 人の「超生徒」とみなしてもよい。$n-r+1$ 個の単位の並べ方が $(n-r+1)!$ 通り、ブロック内部の並べ方が $r!$ 通りあり、同じ答えが得られる。検算として、$r = n$ のときこれは 1 となり、当然そうなるべき値である。

小問 (iii)

まずホッケー選手でない $n-r$ 人を一列に並べる。すると $n-r+1$ 個の隙間ができる。先頭の前に 1 つ、隣り合う 2 人の間にそれぞれ 1 つ、最後尾の後ろに 1 つである。



どの 2 人のホッケー選手も隣り合わないのは、各隙間に入るホッケー選手が高々 1 人であるときであり、そのときに限る。（2 人の H が同じ隙間に入れば互いに隣り合い、異なる隙間に入れば少なくとも 1 人の N が間に入る。）したがって、条件を満たす並び方は、$n-r+1$ 個の隙間から r 個を選び、選んだ各隙間に 1 人ずつ入れることに対応する。

位置を数えよう。条件を満たす H の位置の組は、どの r 個の隙間を使うかで決まるので、$\binom{n-r+1}{r}$ 通りある。よって

$$\mathrm{P}(\text{どの 2 人も隣り合わない}) = \frac{\binom{n-r+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{(n-r+1)!\,(n-r)!}{(n-2r+1)!\,n!}.$$

（生徒の並べ方を直接数えても同じ結果になる。N の並べ方が $(n-r)!$ 通り、次に区別できる r 人の H を互いに異なる隙間に入れる方法が $(n-r+1)(n-r)\cdots(n-2r+2) = \frac{(n-r+1)!}{(n-2r+1)!}$ 通りであり、全体を $n!$ で割ればよい。）

考えてみよう ホッケー選手全員を引き離しておくことが不可能になるのはどんなときか？

互いに異なる隙間が r 個必要であるが、隙間は $n-r+1$ 個しかない。したがって次のようになる。

- $r \le n-r+1$、すなわち $n \ge 2r-1$ ならば、確率は上で求めた o でない値である。
- $r > n-r+1$、すなわち $n \le 2r-2$ ならば（彼らを引き離すにはホッケー選手でない生徒が少なすぎる）、確率は 0 である。

境界の場合 $n = 2r-1$ では並びは $HNHN\cdots NH$ という形に限られ、公式は $\frac{r!\,(r-1)!}{(2r-1)!} = 1\big/\binom{2r-1}{r}$ を与える。これは、H がちょうどその 1 つおきの r か所に入る確率である。

検算

- $n = 10, r = 3$ とする。このとき (i) は $\frac{6}{90} = \frac{1}{15}$、(ii) は $\frac{8}{120} = \frac{1}{15}$、(iii) は $\binom{8}{3}\big/\binom{10}{3} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$ を与える。3 つとも、ありうる 120 通りの位置の組をコンピュータで数え上げた結果と一致する。また公式は、$2 \le r \le n \le 14$ のすべての場合についてこの方法で確かめ（さらに $n \le 7$ については $n!$ 通りの並べ方すべてと照合し）た。
- 2 人の場合 $r = 2$ には、小問 (ii) と (iii) は余事象の関係にある（2 人の選手は隣り合うか、隣り合わないかのどちらかである）。実際 $\frac{2}{n} + \frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)} = \frac{2}{n} + \frac{n-2}{n} = 1$ である。

よくある間違い

- 隙間を $n-r-1$ 個（ホッケー選手でない生徒どうしの真の間にあるものだけ）しか数えず、列の両端を忘れる。
- モデルを混同する。分子では H の位置の組を数えているのに、分母では生徒の並べ方全体（$n!$）を用いてしまう。どちらか一方の見方を選び、それを貫くこと。
- 答えが o でない条件を $n \ge 2r$ としてしまう。$n = 2r-1$ の場合（交互に並び、最初と最後が H）も成り立つ。

STEP のその先へ

隙間による議論は「星と棒」の考え方であり、数え上げ組合せ論（enumerative combinatorics）の主力となる道具である。同じ数 $\binom{n-r+1}{r}$ は「$\{1,\ldots,n\}$ の r 元部分集

合のうち、連続する 2 つの整数を含まないものはいくつあるか」という問いの答えでもあり、これを r について足し合わせるとフィボナッチ数（Fibonacci numbers）が得られる。人の並べ方を位置の組に置き換えるという手順は、対称性を利用して標本空間（sample space）を縮小する方法の最初の一例であり、大学の確率論で絶えず用いられる。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）には、数え上げと確率の素朴な定義についての優れた章がある。

解答例

STEP I 1995、第 13 問

確率・統計 ・ ポアソン間引き

> **STEP I 1995、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q13

鍵となる考え方

小問 (i) はポアソン分布（Poisson distribution）の**間引き**（thinning）の性質である。がん細胞の真の個数で条件づけると、印をつけられた細胞の個数は二項分布（binomial distribution）に従う。未知の真の個数について和をとると、きれいに指数級数（exponential series）にまとまる。小問 (ii) では、「2 個目の印がスライド k につく」という事象は、最初の $k-1$ 枚のスライドにつけられた印の総数（0 個か 1 個か）によって決まる。そして小問 (i) と、独立なポアソン変数の加法性（additivity）とから、その総数がどのように分布するかが正確にわかる。

解答

以下を通して $q = 1 - p$、$\lambda = \mu p$ とおく。異なるスライド上のがん細胞の個数は互いに独立（independent）であるとし（「無作為」の自然な解釈である）、科学者による検出は互いに独立であり、かつ細胞の個数とも独立であるとする。

小問 (i)

1 枚のスライドについて、がん細胞の個数を N、彼女が印をつける個数を M とすると、$N \sim \mathrm{Po}(\mu)$ である。$N = n$ のもとで、n 個の細胞はそれぞれ独立に確率 p で発見されるので、$M \mid N = n \sim \mathrm{B}(n, p)$ となる。$m = 0, 1, 2, \ldots$ に対して、全確率の法則（law of

total probability）により（寄与するのは $n \geq m$ のみである）、

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(M=m) &= \sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mu}\frac{\mu^n}{n!}\binom{n}{m}p^m q^{n-m} = \mathrm{e}^{-\mu}\frac{(\mu p)^m}{m!}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(\mu q)^{n-m}}{(n-m)!} \\ &= \mathrm{e}^{-\mu}\frac{(\mu p)^m}{m!}\mathrm{e}^{\mu q} = \mathrm{e}^{-\mu p}\frac{(\mu p)^m}{m!}, \end{aligned}$$

ここで $\binom{n}{m}/n! = 1/\big(m!\,(n-m)!\big)$ を用い、次に $j = n-m$ として指数級数を用い、最後に $-\mu+\mu q = -\mu p$ を用いた。よって、求めるとおり $M \sim \mathrm{Po}(\mu p)$ である。

小問 (ii)

スライド i 上で印をつけられた細胞の個数を M_i とする。小問 (i) とスライド間の独立性により、$M_1, M_2, \ldots$ は独立な $\mathrm{Po}(\lambda)$ 変数である。最初の $k-1$ 枚のスライドで印をつけられた個数を $S = M_1 + \cdots + M_{k-1}$ とする。独立なポアソン変数の和は、平均を足し合わせたポアソン分布に従うので $S \sim \mathrm{Po}\big((k-1)\lambda\big)$ であり、S は M_k と独立である。

考えてみよう　2 個目の印がスライド k につくためには、正確には何が起こらなければならないか？

スライド k より前には印が高々 1 個で、スライド k の終わりまでには少なくとも 2 個でなければならない。したがって、互いに排反な 2 つの場合がある：



$S = 0$ かつ $M_k \geq 2$、または $S = 1$ かつ $M_k \geq 1$

（$k = 1$ のときはそれ以前のスライドはなく、自動的に $S = 0$ となり、以下の式はそのまま成り立つ。）S と M_k の独立性を用いると、

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(S=0,\ M_k \geq 2) &= \mathrm{e}^{-(k-1)\lambda}\big(1-\mathrm{e}^{-\lambda}-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\big), \\ \mathrm{P}(S=1,\ M_k \geq 1) &= (k-1)\lambda\,\mathrm{e}^{-(k-1)\lambda}\big(1-\mathrm{e}^{-\lambda}\big). \end{aligned}$$

これらを足して、

$$Q = \mathrm{e}^{-(k-1)\lambda}\Big\{\big(1+(k-1)\lambda\big)\big(1-\mathrm{e}^{-\lambda}\big)-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\Big\}.$$

求める形に合わせるため、$1+(k-1)\lambda = (1+k\lambda)-\lambda$ と書くと、

$$\begin{aligned} \big(1+(k-1)\lambda\big)\big(1-\mathrm{e}^{-\lambda}\big)-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda} &= (1+k\lambda)\big(1-\mathrm{e}^{-\lambda}\big)-\lambda+\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda} \\ &= (1+k\lambda)\big(1-\mathrm{e}^{-\lambda}\big)-\lambda. \end{aligned}$$

$\lambda = \mu p$ とすると

$$Q = \mathrm{e}^{-\mu p(k-1)}\Big\{(1+k\mu p)\big(1-\mathrm{e}^{-\mu p}\big) - \mu p\Big\},$$

となり、これが示すべき結果である。

検算

- $k = 1$ のとき、式は $1 - \mathrm{e}^{-\lambda} - \lambda\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{P}(M_1 \geq 2)$ を与え、当然そうなるべき値になっている。
- 確率を $k = 1, 2, \ldots$ にわたって足すと 1 になるはずである（彼女はいずれ確率 1 で 2 個目の細胞に印をつける）。いくつかの λ の値について数値的に和をとると、このことが確かめられる。
- $\mu = 1.6$、$p = 0.45$（したがって $\lambda = 0.72$）でシミュレーションを行うと、200 000 回の試行のうち約 26.0% で 2 個目の印がスライド 2 についた。式からは $Q \approx 0.2591$ が得られる。

よくある間違い

- 「スライド k より前に印が 1 個、スライド k に少なくとも 1 個」という場合を忘れる、あるいは誤って $S = 1$、$M_k = 0$ の場合を含めてしまう。
- 「最初に印のついたスライド」といった議論でスライドごとに考えると、煩雑になる。最初の $k-1$ 枚のスライドにわたる総数 S を考えるのが効率的である。
- 独立性（スライド間の独立性、および S と M_k の独立性）をどこで用いたかを述べない。

STEP のその先へ

間引きはポアソン過程（Poisson process）の一つの側面である。事象がポアソン過程に従って起こり、各事象を独立に確率 p で残すとき、残された事象もまたポアソン過程をなし、その強度は p 倍になる。すると小問 (ii) は、2 番目の事象までの待ち時間（waiting time）の離散版であり、連続時間ではこれはガンマ分布（gamma distribution）に従う。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、ポアソン過程とこうした待ち時間の分布が展開されている。

解答例

STEP I 1995、第 14 問

確率・統計 ・ 比率の推定

STEP I 1995、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/95-s1-q14

鍵となる考え方

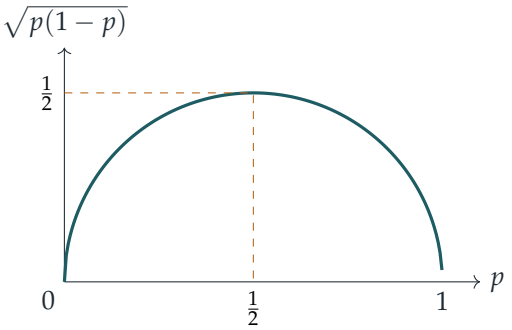
標本比率（sample proportion）は、二項分布（binomial distribution）に従う個数を n で割ったものである。n が大きいとき、これは近似的に平均 p、分散 $p(1-p)/n$ の正規分布（normal distribution）に従う。困るのは、分散がまさに未知の p に依存していることである。小問 (i) はこれを解決する。標準偏差（standard deviation）がとりうる最悪の値を与えるので、最悪の場合に合わせて選んだ標本の大きさは、p がどんな値であっても通用する。そのうえで小問 (iii) では、p についておおよその見当がすでについている場合に何が変わるかを問うている。

解答

小問 (i)

平方完成（completing the square）により、$f(p) = p(1-p) = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2$ とおく。よって $[0,1]$ 上で $f(p) \leq \frac{1}{4}$ であり、等号は $p = \frac{1}{2}$ のときに限り成り立つ。平方根は増加関数であるから、

$$\max_{0 \leq p \leq 1} \sqrt{p(1-p)} = \sqrt{\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}, \qquad \text{最大値をとるのは} p = \tfrac{1}{2}.$$



小問 (ii)

標本に含まれる女性の人数を X とする。選ばれた各人は確率 p で女性である。母集団（population）は大きいと仮定し、n 回の選択は事実上独立（independent）であるとみなす（非常に大きな母集団からの非復元抽出は、復元抽出とほとんど同じである）。このとき

$$X \sim \mathrm{B}(n,p), \qquad \hat{p} = \frac{X}{n}, \qquad \mathrm{E}(\hat{p}) = p, \qquad \mathrm{Var}(\hat{p}) = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}.$$

n が大きいとき、中心極限定理（central limit theorem）（二項分布の正規近似）により

$$\hat{p} \approx \mathrm{N}\left(p,\, \frac{p(1-p)}{n}\right), \qquad \text{よって} \qquad Z = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \approx \mathrm{N}(0,1).$$

求めたいのは $\mathrm{P}\big(|\hat{p}-p| > 0.01\big) < 0.01$、すなわち

$$\mathrm{P}\left(|Z| > \frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) < 0.01.$$

対称性により、この 1% は両側の裾に 0.5% ずつ分かれる。$\Phi(2.576) = 0.995$ であるから、

$$\frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} > 2.576 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{n} > 257.6\sqrt{p(1-p)}.$$

が必要である。

考えてみよう p はわからないのに、p を含む不等式からどうやって n を選べばよいのだろうか？

ここで小問 (i) が生きてくる。p がどんな値でも $\sqrt{p(1-p)} \le \frac{1}{2}$ である。したがって $\sqrt{n} > 257.6 \times \frac{1}{2} = 128.8$ ならば、すべての p に対して不等式が成り立つ。この条件は必要条件でもある。$p = \frac{1}{2}$ のとき（そして女性の割合がそれに近いとき）にこの上界が達成されるからである。よって

$$n > 128.8^2 = 16\,589.44,$$

が必要であり、求める標本の大きさは

$$\boxed{n = 16\,590} \qquad (\text{約}16\,600).$$

である。より精密なパーセント点 $z = 2.5758$ を用いると $n > 16\,587.2$ となる。いずれにせよ答えは「約 16 600」であり、有効数字 3 桁目は使う数表によって変わる。

小問 (iii)

一般に、条件は

$$n > \left(\frac{2.576}{0.01}\right)^2 p(1-p) \approx 66\,360\,p(1-p).$$

である。16 590 という値は最悪の場合 $p = \frac{1}{2}$ から得られたものであった。p が $\frac{1}{2}$ から十分離れていることがわかっていれば、$p(1-p)$ に対してより小さい上界を使える。

(a) 左利き。人々のおよそ 10% が左利きである。$p \le 0.15$ と仮定して差し支えなければ、$p(1-p)$ は $[0, \frac{1}{2}]$ で増加するので $p(1-p) \le 0.15 \times 0.85 = 0.1275$ となる。これから $n > 8461$ を得る。$p = 0.1$ ちょうどならば $n > 66\,360 \times 0.09 \approx 5970$ となり、約 6000 である。いずれにしても、何もわからないときに必要な 16 590 よりずっと小さな標本で済む。np は数百のオーダーなので、正規近似も依然として良い近似である。

(b) 百万長者。今度は p が非常に小さく、おそらく 0.001 から 0.01 程度である。文字どおりに受け取れば、$p \le 0.01$ から $p(1-p) \le 0.0099$、$n > 657$ を得る。しかしこれは要点を外している。

- p 自体が約 0.001 のとき、誤差 0.01 には意味がない。推定値 $\hat{p} = 0$ でさえ真の値から 0.01 以内にあるからである。本当に必要なのは**相対的な**精度、たとえば誤差を p の 1% 以下に抑えることである。そうすると $n > 2.576^2(1-p)/(p \times 0.01^2)$ が必要となり、$p = 0.001$ ではこれは約 6.6×10^7 である。桁違いに大きい。
- p がごく小さく n が数百程度しかないと、np は 1 より小さい。このとき二項分布は大きく歪んでおり、正規近似はもはや妥当でない。ポアソン近似（Poisson approximation）のほうがよいモデルとなるだろう。
- 実際には百万長者に接触するのは難しく、人々は自分の資産について本当のことを言わないかもしれない。したがって無作為抽出が可能かどうかも、正直な回答が得られるかどうかも疑わしい。

このように、左利きの場合は p のおおよその値がわかっていれば標本を小さくできる。一方、百万長者の場合は、意味のある精度を求めようとするとはるかに大きな標本が必要になるか、まったく別の抽出方法が必要になる。

検算

- $p = \frac{1}{2}$、$n = 16\,590$ のとき、正規近似により $\mathrm{P}(|\hat{p} - p| > 0.01) = 2\big(1 - \Phi(2.5762)\big) \approx 0.00999$ となり、1% をわずかに下回る。
- $n = 16\,590$、$p = \frac{1}{2}$ に対して二項分布の確率を正確に足し合わせると約 0.0102 となる。このわずかな超過は二項分布の離散性によるものである（連続性補正（continuity correction）なしの正規近似を用いたため）。$p = 0.3$ では正確な値は約 0.005 であり、小問 (i) の予想どおり十分に条件を満たしている。
- $p = 0.1$、$n = 6000$ に対する二項分布の正確な確率は約 0.0098 であり、(iii)(a) の値が確かめられる。

よくある間違い

- 2.576 の代わりに 1.96 や 2.326 を使ってしまう。1% は両側の裾に分かれるので、$\Phi(z) = 0.995$ が必要である。
- n を p の式のまま残してしまう。問題が求めているのはどんな p に対しても通用するただ一つの数であり、そのために小問 (i) がある。
- 「$\sqrt{p(1-p)} \le \frac{1}{2}$」から $n > 128.8$ が得られると読み違える。128.8 を超えなければならないのは n ではなく $\sqrt{n}$ である。

STEP のその先へ

これは世論調査で示される「誤差の幅（margin of error）」の背後にある標準的な計算である。約 1000 人の調査では、信頼度 95% でおよそ ±3 パーセントポイントの誤差となるが、これはまさに小問 (i) の最悪の場合の議論による。大学では、これは信頼区間（confidence interval）へとつながり、さらにまれな事象の比率をどう推定するかという問題へとつながる。そこではポアソン近似や正確な二項分布の方法が正規近似に取って代わる。Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）は、中心極限定理とこれらの近似を非常に読みやすく解説している。

解答例

STEP II 1995、第 1 問

純粋数学 ・ 等比級数の微分

> **STEP II 1995、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q1

鍵となる考え方

有限等比級数（finite geometric series）には閉じた式（closed form）があり、また x の二つの関数の間に成り立つ恒等式（identity）は、微分することで新しい恒等式を与える。$\sum x^k$ を微分すると因子 k が降りてくるが、これこそが等比級数を $\sum kx^{k-1}$ に変える仕組みである。さらに $x=-1$ を代入すれば、符号が交互に変わる形が得られる。平方の和については、答えの形から A と B が何でなければならないかを読み取り、それを数学的帰納法（induction）で証明するのが最もすっきりした方法である。

解答

小問 (i)

$S = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ とおく。すると

$$S(1-x) = (1 + x + \cdots + x^n) - (x + x^2 + \cdots + x^{n+1}) = 1 - x^{n+1},$$

となる。$x, x^2, \ldots, x^n$ の各べきは正の符号と負の符号でちょうど一回ずつ現れ、打ち消し合うからである。$x \neq 1$ ならば $1 - x \neq 0$ であるから、これで割ることができて

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

(i) の両辺はいずれも $x \neq 1$ において x の微分可能な関数であり、そこで一致しているので、その導関数（derivative）も一致する。左辺については

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1 + x + \cdots + x^n\right) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}.$$

右辺については、商の微分法（quotient rule）により

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\right) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1 - x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

ここで $x = -1$ とおく。$-1 \neq 1$ であるから、これは許される。項 kx^{k-1} は $(-1)^{k-1}k$ になるので、左辺は $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n-1}n$ となる。右辺は、$(-1)^{n+1} = -(-1)^n$ を用いると

$$\frac{1 - (n+1)(-1)^n + n(-1)^{n+1}}{4} = \frac{1 - (-1)^n(2n+1)}{4},$$

となる。

- ▶ n が偶数ならば $(-1)^n = 1$ であり、値は $\dfrac{1 - 2n - 1}{4} = -\dfrac{n}{2}$ である。
- ▶ n が奇数ならば $(-1)^n = -1$ であり、値は $\dfrac{1 + 2n + 1}{4} = \dfrac{n+1}{2}$ である。

これが示すべきことであった。

小問 (iii)

$T_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1}n^2$ とおき、$f(n) = An^2 + Bn$ として $T_n = (-1)^{n-1}f(n)$ と書けると仮定する。

> **考えてみよう** 公式が正しいとわかる前に、どうすれば A と B を求められるだろうか。

T_n について確実にわかっている唯一の事実を使う。すなわち、隣り合う和の差は最後の項であり、$T_n - T_{n-1} = (-1)^{n-1}n^2$ である。$T_{n-1} = (-1)^{n-2}f(n-1) = -(-1)^{n-1}f(n-1)$ であるから、これは

$$(-1)^{n-1}\big(f(n) + f(n-1)\big) = (-1)^{n-1}n^2, \qquad \text{よって} \qquad f(n) + f(n-1) = n^2.$$

となる。$f(n) = An^2 + Bn$ とすると

$$\begin{aligned} f(n) + f(n-1) &= An^2 + Bn + A(n-1)^2 + B(n-1) \\ &= 2An^2 + (2B - 2A)n + (A - B). \end{aligned}$$

これがすべての n について n^2 に等しくなるためには、$2A = 1$ かつ $B = A$ でなければならない。すなわち

$$A = B = \tfrac{1}{2}, \qquad T_n = (-1)^{n-1}\,\frac{n(n+1)}{2}.$$

である。（これらの値は必然的に決まる。$n = 1$ から $A + B = 1$、$n = 2$ から $-(4A + 2B) = -3$ が得られ、その解は $A = B = \frac{1}{2}$ のみである。）

数学的帰納法による証明。 $n = 1$ のとき、$T_1 = 1 = (-1)^0 \cdot \frac{1\cdot 2}{2}$ である。ある $n \geq 2$ について $T_{n-1} = (-1)^{n-2}\frac{(n-1)n}{2}$ が成り立つと仮定する。すると

$$\begin{aligned} T_n = T_{n-1} + (-1)^{n-1}n^2 &= (-1)^{n-1}\left(n^2 - \frac{n(n-1)}{2}\right) \\ &= (-1)^{n-1}\,\frac{n(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

となり、これは n に対する公式である。したがって、$A = B = \frac{1}{2}$ として、公式はすべての $n \geq 1$ について成り立つ。

別解として、項を二つずつ組にする方法がある。$(2m-1)^2 - (2m)^2 = -(4m-1)$ である。$n = 2m$ のときは $T_n = -\sum_{j=1}^{m}(4j-1) = -m(2m+1) = -\frac{n(n+1)}{2}$ となる。$n = 2m+1$ のときは、これに $(2m+1)^2$ を加えて $(2m+1)(m+1) = \frac{n(n+1)}{2}$ を得る。（(ii) の恒等式に x を掛けてもう一度微分する方法もあるが、計算はずっと重くなる。）

検算

$n = 4$ のとき、$1-2+3-4 = -2 = -\frac{4}{2}$ であり、$1-4+9-16 = -10 = -\frac{4\cdot 5}{2}$ である。$n = 5$ のとき、$1-2+3-4+5 = 3 = \frac{6}{2}$ であり、$-10+25 = 15 = \frac{5\cdot 6}{2}$ である。三つの恒等式すべてを n が 500 までの範囲でコンピュータで確かめたところ（たとえば $T_{10} = -55$、$T_{11} = 66$）、完全に一致した。

また、$|T_n| = 1 + 2 + \cdots + n$ であることにも注意しよう。平方の交代和は、最初の n 個の整数の普通の和と同じ大きさになる。これは意外な一致であるが、組にする議論によって説明がつく。

よくある間違い

- $x = -1$ が正当な値であるのは、(i) の恒等式がすべての $x \neq 1$ で成り立つからにほかならない、という点を忘れること。$x = 1$ では右辺は定義されない。
- $(-1)^{n+1}$ に関する符号の誤り。これは $-(-1)^n$ に等しく、$(-1)^n$ ではない。

- $n = 1$ と $n = 2$ から A と B を求めて、そこで終えてしまうこと。それで示されるのは、これらが**唯一可能な**値であるということだけである。公式が実際にすべての n について成り立つことを示すのは、帰納法（あるいは組にする議論）である。

STEP のその先へ

$\sum x^k$ を項別に微分することは、ある強力な考え方の有限版である。すなわち、べき級数（power series）は収束半径（radius of convergence）の内側で項別微分（term-by-term differentiation）でき、$|x| < 1$ に対して $\sum k x^{k-1} = (1-x)^{-2}$ が得られる。$x = -1$ では無限級数 $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots$ は発散（diverge）するが、この式は値 $\frac{1}{4}$ を示唆する。実際、(ii) の式は $\frac{1}{4} - (-1)^n \frac{2n+1}{4}$ と書けるので、部分和は $\frac{1}{4}$ を中心に対称に振動する。このような発散級数に値を与えるというのが、アーベル総和法（Abel summation）の背後にある考え方である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、べき級数の項別微分を丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 1995、第 2 問

純粋数学 ・ 塗り分けの再帰的な数え上げ

> **STEP II 1995、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q2

この問題は、*Beyond STEP* の第 9.3 節「柵の杭を塗り分ける」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/fence-posts.html

鍵となる考え方

最初の柱が赤である塗り方を、最後の柱の色によって分類する。一列に並んだ柱の塗り方はどれも柱を 1 本ずつ付け加えていくことで作られ、新しく加える柱には許される色がちょうど 2 通りあるので、総数を数えるのは易しい。漸化式（recurrence）が必要になるのは、「最後が赤」と「最後が赤でない」への振り分けのほうである。円の場合は、両端の色も異ならなければならない一列の場合にすぎない。

解答

$r_{n+1} = s_n$ となる理由

$n+1$ 本の柱の正しい塗り方で、最初と最後の柱が赤であるものを 1 つとる。柱 n は赤である柱 $n+1$ に隣接しているので、柱 n は赤ではない。したがって柱 $n+1$ を取り除くと、最初の柱が赤で最後の柱が赤でない n 本の柱の正しい塗り方、すなわち s_n 通りのうちの 1 つが残る。

逆に、n 本の柱の s_n 通りの塗り方のうちの 1 つが与えられたとき、柱 n は赤でないので末尾に赤い柱を付け加えることができ、r_{n+1} で数えられる塗り方が得られる。この 2 つの操作は互いに他方を元に戻すので、一対一対応（one-to-one correspondence）を与え、

$$r_{n+1} = s_n.$$

$r_n + s_n$ を求める

最初の柱が赤である正しい塗り方は、どれも最後が赤であるか別の色であるかのいずれかなので、$r_n + s_n$ は最初の柱が赤である正しい塗り方をすべて数えたものである。柱を順に塗っていく。最初の柱は赤（1通り）であり、それ以降の各柱は直前の柱の色以外のどの色でもよいので、それまでにどう塗ったかによらず毎回2通りの選び方がある。よって

$$r_n + s_n = 2^{n-1}.$$

$r_{n+1} + r_n$ を求める

$s_n = r_{n+1}$ を代入すると、

$$r_{n+1} + r_n = 2^{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

数学的帰納法

$P(n)$ を命題 $r_n = \frac{1}{3}\left(2^{n-1} + 2(-1)^{n-1}\right)$ とする。

初期段階。 柱が1本で赤く塗られているとき、その柱は最初の柱でも最後の柱でもあるので、$r_1 = 1$ である。公式は $\frac{1}{3}(1+2) = 1$ を与えるので、$P(1)$ は成り立つ。

帰納段階。 ある $n \geq 1$ について $P(n)$ が成り立つと仮定する。前の結果より、

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= 2^{n-1} - r_n \\ &= \frac{3 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} - 2(-1)^{n-1}}{3} \\ &= \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}, \end{aligned}$$

ここで $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ および $-(-1)^{n-1} = (-1)^n$ を用いた。これはまさに $P(n+1)$ である。数学的帰納法（induction）により、すべての $n \geq 1$ について $P(n)$ が成り立つ。

> **考えてみよう** なぜ帰納法を $n = 2$ から始めたり、初期段階を2つ用いたりしないのか？

漸化式 $r_{n+1} = 2^{n-1} - r_n$ は各項をその直前の1項だけを用いて表すので、初期段階は1つで十分である。2項間の漸化式であれば2つ必要になる。

円形に並んだ柱

円周に沿って柱に $1, 2, \ldots, n$ と番号を付けると、柱 n は柱1にも隣接することになる。円形の正しい塗り方とは、まさに一列 $1, 2, \ldots, n$ の正しい塗り方であって、さらに柱 n が柱1と異なる色であるもののことである。

考えてみよう 最初の柱を赤に固定しない塗り方は、どのように数えればよいか？

対称性を用いる。2 つの色の名前を入れ替えると正しい塗り方は正しい塗り方に移るので、柱 1 の色のどの選び方に対しても塗り方の数は同じである。柱 1 が赤のとき、最後の柱が最初の柱と異なる一列の塗り方は、ちょうど s_n で数えられるものである。よって円形の塗り方の数は

$$\begin{aligned} 3s_n &= 3\left(2^{n-1} - r_n\right) \\ &= 3\cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} - 2(-1)^{n-1} \\ &= 2^n + 2(-1)^n. \end{aligned}$$

ここで柱は区別できる（決まった場所に立っている）ので、回転によって移り合う 2 つの塗り方は別々に数える。

検算

- 小さな場合を手で確かめる：$r_2 = 0$（隣接する 2 本の柱が両方とも赤になることはない）、$r_3 = 2$（RWR、RBR）であり、$\frac{1}{3}(2-2) = 0$ および $\frac{1}{3}(4+2) = 2$ と一致する。
- 3 本の柱からなる三角形では 3 色すべてを使わなければならず、その方法は $3! = 6$ 通りであり、$2^3 + 2(-1)^3 = 6$ である。正方形に並んだ 4 本の柱では $16 + 2 = 18$ となる。
- $n \leq 12$ についてすべての塗り方を総当たりで数えると、上のすべての公式と一致する。たとえば $r_{10} = 170$、$s_{10} = 342$ であり、10 本の柱の円形の塗り方は 1026 通りである。

よくある間違い

- 柱 1 が赤である必要はないことを忘れて、円の場合の答えを r_n や s_n としてしまう。係数 3 が残りの 2 色の分を補う。
- 回転を除くために n で割ってしまう。柱は決まった位置にあるので、回転した塗り方は異なる塗り方である。

STEP のその先へ

円の場合の答え $2^n + 2(-1)^n$ は、閉路グラフ（cycle graph）C_n の**彩色多項式**（chromatic polynomial）の $k = 3$ における値である。彩色多項式は一般に k 色に対して $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$ であり、「一列に並べてから両端を閉じる」という同じ議論で証明できる。彩色多項式や $r_{n+1} + r_n = 2^{n-1}$ のような漸化式は、組合せ論やグラフ理論の最初の講義で扱う標準的な内容である。この趣旨の問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（大学入学前の発展的な数学問題集）を参照されたい。

解答例

STEP II 1995、第 3 問

純粋数学 ・ 論理的推論と数え上げ

STEP II 1995、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/95-s2-q3

鍵となる考え方

これは姿を変えた論理パズルであり、糸口は**数え上げ**（counting）である。各ステージでは $5+4+3+2+1=15$ 点が配られるので、5 人の得点の合計はわかっている。アルエの得点は最大値にきわめて近いので、アルエの結果はほぼすべて決まってしまう。その後、エリュアールの結果からエリュアールの得点を上下から挟み込み、カミュの「4 回同じ順位」という条件によって調べるべき場合はわずかしか残らない。

解答

各選手の合計得点を A, B, C, D, E と書く。条件より $A > B > C > D > E$ かつ $A = 24$ である。

合計点とアルエのステージ

各ステージでは 15 点が配られるので、5 つのステージ全体では

$$A+B+C+D+E = 75, \qquad \text{よって} \qquad B+C+D+E = 51.$$

アルエが得られる点数は最大で $5\times 5 = 25$ 点である。24 点ということはちょうど 1 点だけ失ったことを意味するので、アルエは **4 つのステージで 1 位、1 つのステージで 2 位**であった。ステージ 5 ではエリュアールが優勝したので、アルエの 2 位はステージ 5 でなければならず、アルエはステージ 1–4 で優勝した。

エリュアールが11点である理由

下界（*lower bound*）。エリュアールはステージ4で3点、ステージ5で5点を得ており、残りの3つのステージではそれぞれ少なくとも1点を得ている。したがって $E \geq 3+5+3 = 11$ である。

上界（*upper bound*）。得点は相異なる整数で $B > C > D > E$ であるから、$D \geq E+1$、$C \geq E+2$、$B \geq E+3$ である。よって

$$51 = B+C+D+E \geq 4E+6, \qquad \text{ゆえに} \qquad E \leq \tfrac{45}{4} < 12.$$

2つの評価を合わせると $E = 11$ を得る。さらに、下界で等号が成り立つことから、エリュアールはステージ1、2、3のそれぞれで**最下位**であったこともわかる。

バルト、カミュ、ディドロに残された順位

これでアルエとエリュアールの各ステージでの順位がすべてわかったので、バルト、カミュ、ディドロは残りの順位を分け合ったことになる。

ステージ	アルエ、エリュアール	B、C、D に残された順位	
1, 2, 3	1位、5位	2位、3位、4位	（4, 3, 2点）
4	1位、3位	2位、4位、5位	（4, 2, 1点）
5	2位、1位	3位、4位、5位	（3, 2, 1点）

また $B+C+D = 51-11 = 40$ であり、$B > C > D > 11$ より $D \geq 12$、$C \geq 13$ である。

> **考えてみよう** カミュは4回同じ順位でゴールした。表を見ると、それはどの順位でありうるか。

答えは2位、3位、4位のいずれかである。カミュが5位になりえたのはステージ4と5だけで、それは2つのステージであって4つではない。3つの可能性を順に調べる。

カミュが4回2位の場合。 2位が空いていたのはステージ1–4だけなので、カミュはそのすべてで2位であった。すると、バルトはステージ1–3でそれぞれ高々3点、ステージ4で高々2点、ステージ5で高々3点である。よって $B \leq 9+2+3 = 14$ となる。しかし $C \geq 4 \times 4 = 16 > B$ となり、矛盾である。

カミュが4回4位の場合。 4位はどのステージでも2点なので、カミュの合計の最大値は $4 \times 2 + 4 = 12$ である（残りのステージで2位の場合）。これは $C \geq 13$ に矛盾する。

カミュが4回3位の場合。 3位が空いていたのはステージ1、2、3、5であり、どれも3点なので、これらがカミュの4回の3位である。ステージ4でのカミュの得点を $x \in \{4, 2, 1\}$ とすると、$C = 12 + x$ である。

- $x = 4$ のとき：$C = 16$ なので $B \geq 17$ であり、$D = 40 - B - C \leq 7$ となる。これは $D \geq 12$ に矛盾する。
- $x = 2$ のとき：$C = 14$ なので $B \geq 15$ であり、$D \leq 11$ となる。これも矛盾である。
- $x = 1$ のとき：$C = 13$ なので $B + D = 27$ であり、$B \geq 14$ かつ $12 \leq D \leq 12$ である。よって $D = 12$、$B = 15$ である。

したがって得点は

$$\boxed{B = 15, \quad C = 13, \quad D = 12} \qquad (\text{ただし} A = 24,\ E = 11).$$

最終ステージでのバルト

> **考えてみよう**　合計点はわかったが、ステージごとの結果はわかっていない。ステージ 5 の結果を確定させるのに十分な情報はあるだろうか。

ある。偶奇性（parity）による議論を使う。カミュはステージ 1、2、3、5 で 3 位、ステージ 4 で 5 位なので、ステージ 1–4 のそれぞれでバルトとディドロは 4 点と 2 点の順位を分け合った。ステージ 5 では、2 人は 2 点と 1 点の順位（4 位と 5 位）を分け合った。ディドロがステージ 1–4 のうち k 個で 4 点の順位をとり、ステージ 5 で $s \in \{1, 2\}$ 点を得たとすると、

$$D = 4 \times 2 + 2k + s = 8 + 2k + s = 12.$$

よって $s = 4 - 2k$ は偶数であり、$s = 2$（かつ $k = 1$）でなければならない。ディドロは最終ステージで 4 位だったので、**バルトは最終ステージで最下位（5 位）であった。**

このようなツアーは実際に存在する。たとえば、ステージ 1：A, D, C, B, E、ステージ 2 と 3：A, B, C, D, E、ステージ 4：A, B, E, D, C、ステージ 5：E, A, C, D, B とすればよい。このとき得点は 24, 15, 13, 12, 11 となり、条件を満たす。

検算

- 合計が合っている：$24 + 15 + 13 + 12 + 11 = 75 = 5 \times 15$。
- 上の例のツアーでは、カミュは 4 つのステージで 3 位であり、エリュアールはステージ 4 で 3 位、ステージ 5 で 1 位である。
- ステージ結果の組合せとしてありうる 120^5 通りすべてをコンピュータで探索し、すべての条件を満たすものを残すと、得点は $(24, 15, 13, 12, 11)$ しか現れない。どの場合もバルトはステージ 5 で 5 位である。（条件を満たすツアーはちょうど 4 通りあり、ディドロがステージ 1–4 のどれで 2 位になったかによって決まる。）

よくある間違い

- $E \geq 11$ だけを示してしまう。問題はエリュアールが 11 点で**なければならない**理由を問うているので、$B + C + D + E = 51$ と得点が相異なることから得られる上界が欠かせない。
- カミュが 4 つの**連続した**ステージで同じ順位だったと思い込む、あるいは 4 位の場合を忘れる。
- 得点は求めたが、最終ステージの順位が一意に決まることを証明していない。例のツアーを 1 つ挙げるだけでは不十分であり、偶奇性の議論によって、ありうるすべてのツアーでバルトがステージ 5 で最下位であることが示されるのである。

STEP のその先へ

この議論は 3 つの手から成り立っている。保存則（conservation law、合計が一定であること）、極端な場合に着目する議論（extremal reasoning、24 が最大値にほぼ等しいこと）、そして偶奇性の議論である。この 3 つはいずれも組合せ論（combinatorics）で繰り返し現れる。ある量を上下から挟んで値を確定させる方法は、解析学（analysis）や数学オリンピック（olympiad）の問題解決における基本技法でもある。この種のパズルをさらに楽しみたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* に挑戦するとよい。Engel の *Problem-Solving Strategies*（問題解決の戦略）には、不変量の原理と極端原理（invariance and extremal principles）にそれぞれ丸ごと 1 章が割かれている。

解答例

STEP II 1995、第 4 問

純粋数学 ・ ウォリスの漸化式

> **STEP II 1995、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q4

この問題は、*Beyond STEP* の第 4.4 節「ウォリス、ベータ、そして二分の一の階乗」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch04/wallis-beta.html

鍵となる考え方

部分積分（integration by parts）によって $\cos^2 t$ を $1-\sin^2 t$ に書き換えると、u_n と u_{n-2} を結ぶ漸化式（reduction formula）が得られる。この式に u_{n-1} を掛けると、nu_nu_{n-1} は n が増えても変わらないことがわかり、したがって $n=1$ のときの値に等しい。あとははさみうちの議論である。u_n は減少するので、積 u_nu_{n-1} は u_n^2 と u_{n-1}^2 の間にある。

解答

漸化式

$n \geq 2$ とする。$u_n = \int_0^{\pi/2} \sin t \, \sin^{n-1} t \, \mathrm{d}t$ と書き、$\sin^{n-1} t$ を微分し、$\sin t$ を積分して $-\cos t$ とする部分積分を行う。

$$\begin{aligned} u_n &= \Big[-\cos t \, \sin^{n-1} t\Big]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, \sin^{n-2} t \, \mathrm{d}t \\ &= 0 + (n-1)\int_0^{\pi/2} \big(1-\sin^2 t\big) \sin^{n-2} t \, \mathrm{d}t \\ &= (n-1)\big(u_{n-2} - u_n\big). \end{aligned}$$

境界項が消えるのは、上端で $\cos\frac{\pi}{2}=0$、下端で $\sin 0=0$ となるからである（ここで $n-1\geq 1$ を用いている）。u_n の項をまとめると

$$nu_n=(n-1)u_{n-2}\qquad (n\geq 2).$$

両辺に u_{n-1} を掛けると

$$nu_nu_{n-1}=(n-1)u_{n-1}u_{n-2}\qquad (n\geq 2),$$

となり、示すべき式が得られた。

一定の積

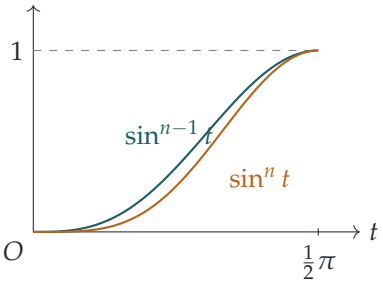
$n\geq 1$ に対して $p_n=nu_nu_{n-1}$ とおく。直前の結果は、すべての $n\geq 2$ について $p_n=p_{n-1}$ であることを述べているので、すべての $n\geq 1$ について $p_n=p_1$ である。ここで

$$u_0=\int_0^{\pi/2}1\,\mathrm{d}t=\tfrac{1}{2}\pi,\qquad u_1=\int_0^{\pi/2}\sin t\,\mathrm{d}t=\Big[-\cos t\Big]_0^{\pi/2}=1,$$

であるから、$p_1=1\cdot u_1u_0=\frac{1}{2}\pi$ である。よって

$$nu_nu_{n-1}=\tfrac{1}{2}\pi\qquad \text{すべての}n\geq 1.$$

グラフの概形と $0<u_n<u_{n-1}$



どちらの曲線も $t=0$ で 0 から始まって増加し、$t=\frac{1}{2}\pi$ で 1 に達する（図は $n=4$ の場合であり、$n=1$ のときは上側の曲線は直線 $y=1$ となる）。$0<t<\frac{1}{2}\pi$ では $0<\sin t<1$ であるから

$$0<\sin^n t=\sin t\cdot\sin^{n-1}t<\sin^{n-1}t.$$

したがって、$\sin^n t$ のグラフは両端を除いて $\sin^{n-1}t$ のグラフより真に下にある。どちらの関数も連続（continuous）なので、それぞれのグラフの下の面積は

$$0<u_n<u_{n-1}\qquad (n\geq 1).$$

を満たす。

考えてみよう 曲線は両端で接しているのに、なぜ不等式は等号を含まない（狭義の）不等式になるのだろうか。

差 $\sin^{n-1} t - \sin^n t$ は連続で、決して負にならず、たとえば $t = \frac{1}{4}\pi$ では正である。ある点で正となる連続関数は、その点のまわりの小さな区間で正であるから、正の面積を囲む。孤立した 2 点で接していても、このことは変わらない。同じ議論により $u_n > 0$ もわかる。

両側からの評価

$n \geq 1$ とする。$u_n > 0$ であるから、$u_n < u_{n-1}$ に nu_n を掛けると $nu_n^2 < nu_n u_{n-1}$ を得る。$u_{n-1} > 0$ であるから、nu_{n-1} を掛けると $nu_n u_{n-1} < nu_{n-1}^2$ を得る。真ん中の量は $\frac{1}{2}\pi$ なので

$$nu_n^2 < \tfrac{1}{2}\pi < nu_{n-1}^2 \qquad (n \geq 1).$$

はさみうちと極限

右側の不等式はすべての $n \geq 1$ で成り立つので、n の代わりに $n+1$ を用いてよい。

$$\tfrac{1}{2}\pi < (n+1)u_n^2, \qquad \text{よって} \qquad nu_n^2 > \frac{n}{n+1} \cdot \tfrac{1}{2}\pi.$$

これを左側の不等式と合わせると

$$\left(\frac{n}{n+1}\right) \tfrac{1}{2}\pi < nu_n^2 < \tfrac{1}{2}\pi.$$

$n \to \infty$ のとき $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$ であるから、下からの評価は $\frac{1}{2}\pi$ に近づく。上からの評価は $\frac{1}{2}\pi$ そのものである。はさみうちの原理（squeeze theorem、sandwich theorem）により

$$nu_n^2 \to \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{ただし} n \to \infty.$$

検算

- 漸化式から $u_2 = \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{4}\pi$ となり、これは $\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\pi$（$\sin^2$ の平均値は $\frac{1}{2}$）と一致する。さらに $2u_2u_1 = \frac{1}{2}\pi$ となり、予想どおりである。
- 数値的には（シンプソンの公式（Simpson's rule）による）$u_{10} \approx 0.38656$ であり、これは $\frac{63}{512}\pi$ に等しい。よって $10u_{10}^2 \approx 1.4943$ となり、$\frac{10}{11} \cdot \frac{1}{2}\pi \approx 1.4280$ と $\frac{1}{2}\pi \approx 1.5708$ の間にある。
- 漸化式を $n = 10^5$ まで計算すると $nu_n^2 \approx 1.570788$ となり、すでに $\frac{1}{2}\pi$ に非常に近い。

よくある間違い

- 漸化式には $n \geq 2$ が必要であることを忘れること。そのため定数は u_1 と u_2 だけでなく、u_0 と u_1 を用いて決めなければならない。
- $\sin^n t \leq \sin^{n-1} t$ であることだけを理由に $u_n < u_{n-1}$ と主張すること。これから得られるのは $\leq$ であり、狭義の不等式を得るには、ある区間上で不等式が狭義に成り立つことが必要である。
- $\frac{1}{2}\pi < nu_{n-1}^2$ から直接、下からの評価を得ようとすること。これは u_n ではなく u_{n-1} を評価しているので、まず添字をずらす必要がある。

STEP のその先へ

これらはウォリス（Wallis）積分である。u_{2m} と u_{2m+1} を積の形で書き表し、$nu_n^2 \to \frac{1}{2}\pi$ を用いると、ウォリスの公式 $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots$ が導かれる。同じ評価により、スターリング（Stirling）の公式 $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n$ における定数 $\sqrt{2\pi}$ が決まる。ここで用いたはさみうちの議論は、大学 1 年次の解析学（analysis）の標準的な道具である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、これを丁寧に展開している。

解答例

STEP II 1995、第 5 問

純粋数学 ・ 最適化と凹性

STEP II 1995、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

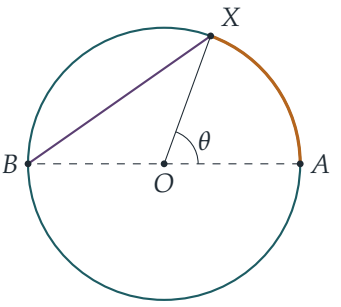
step.maths.org/questions/95-s2-q5

鍵となる考え方

選択肢 (i) と (iii) は、(ii) の族の両端にあたる。$\theta \to 0$ はまっすぐ泳いで横切ることを、$\theta \to \pi$ は最後まで走ることを意味する。そこで、所要時間の合計を $[0, \pi]$ 上の θ の関数として表し、その最小値がどこでとられるかを調べる。意外なことに、この関数は凹関数（concave）であり、ただ一つの停留点（stationary point）は極大（maximum）となる。したがって最良の経路は常に端点のどちらかである。

解答

プールの半径を長さの単位 1 とし、彼女の泳ぐ速さを 1 とする。すると走る速さは k である。時間の単位は（半径）/（泳ぐ速さ）となるが、これはどの比較にも影響しない。



三つの所要時間

(i) 長さ 2 の直径（diameter）AB を泳ぐので、所要時間は 2 である。

(iii) 長さ π の半円（semicircle）を走るので、所要時間は π/k である。

(ii) 長さ θ（半径 1）の弧（arc）AX を時間 θ/k で走る。$\angle AOB = \pi$ であるから、$\angle XOB = \pi - \theta$ である。三角形 XOB は $OX = OB = 1$ の二等辺三角形（isosceles triangle）であるから、弦（chord）の長さは

$$XB = 2\sin\tfrac{\pi-\theta}{2} = 2\cos\tfrac{\theta}{2}.$$

である。（同じことであるが、AB は直径なので $\angle AXB = \frac{\pi}{2}$ であり、二等辺三角形 AOX から $\angle XAB = \frac{\pi-\theta}{2}$ であるので、$XB = 2\sin\angle XAB$ となる。）所要時間の合計は

$$T(\theta) = \frac{\theta}{k} + 2\cos\frac{\theta}{2}, \qquad 0 < \theta < \pi.$$

である。この式は端点でも意味をもつ。$T(0) = 2$ は (i) の所要時間であり、$T(\pi) = \pi/k$ は (iii) の所要時間である。したがって、三つの選択肢はすべて $[0, \pi]$ 上の一つの連続関数で記述される。

T が最小となるのはどこか

微分すると

$$T'(\theta) = \frac{1}{k} - \sin\frac{\theta}{2}, \qquad T''(\theta) = -\tfrac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}.$$

となる。$0 < \theta < \pi$ のとき $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ であるから、$\cos\frac{\theta}{2} > 0$ かつ $T''(\theta) < 0$ である。すなわち、関数 T は $[0, \pi]$ 上で狭義凹（strictly concave）である。

> **考えてみよう** $k > 1$ ならば、$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{k}$ となる点に停留点がある。そこが飛び込むのに最良の場所ではないのか？

そうではない。そこでは $T'' < 0$ であるから、それは**極大**であり、飛び込むのに最悪の場所である。より一般に、閉区間上の狭義凹関数は、両端の値を結ぶ線分よりも真に上にある。したがって $0 < \theta < \pi$ を満たすすべての θ に対して

$$T(\theta) > \Big(1 - \frac{\theta}{\pi}\Big)T(0) + \frac{\theta}{\pi}\,T(\pi) \geq \min\big(T(0),\, T(\pi)\big).$$

が成り立つ。よって k の値が何であっても、X を内部にとる選択は、(i) と (iii) のうちよい方と同じ速さにすら決してならない。（$k \leq 1$ のときは、さらに直接的にわかる。このとき $\sin\frac{\theta}{2} < 1 \leq \frac{1}{k}$ であるから $(0, \pi)$ 上で $T'(\theta) > 0$ となり、T は増加関数である。したがって、すぐに泳ぎ出すのが最良である。）

(i) と (iii) の比較

残るは $T(0) = 2$ と $T(\pi) = \pi/k$ の比較である。

- $k < \frac{\pi}{2}$ ならば $\pi/k > 2$ であるから、彼女は**まっすぐ泳ぐ**べきである。これは選択肢 (i) である。
- $k > \frac{\pi}{2}$ ならば $\pi/k < 2$ であるから、彼女は**最後まで走って回る**べきである。これは選択肢 (iii) である。
- $k = \frac{\pi}{2}$ ならば、(i) と (iii) の所要時間は等しく、どちらも最良である。

物理的な理由は単純で、半円の長さが直径の $\frac{\pi}{2}$ 倍だからである。

最後に、選択肢 (ii) は彼女が決して選ばないものである。すべての $k > 0$ とすべての $\theta \in (0, \pi)$ に対して、(ii) は (i) と (iii) のうちよい方よりも真に遅い。

検算

$k = 3$ のとき、走ると $\pi/3 \approx 1.047$ かかり、泳ぐ場合の 2 に勝つ。停留点は $\theta = 2\arcsin\frac{1}{3} \approx 0.680$ にあり、そこで $T \approx 2.112$ となる。これはどちらの端点よりも遅く、極大として当然の結果である。e^{-4} から e^{4} までの数千個の無作為な k について、細かい θ の格子上で T を計算機で評価したところ、内部の値が $\min(2, \pi/k)$ を下回ることは一度もなく、切り替わりが $k = \pi/2 \approx 1.571$ で起こることも確認された。

よくある間違い

- $T'(\theta) = 0$ とおき、その性質を確かめないまま、得られた点を最適解だと宣言してしまう。ここではそれは極大である。
- 弦の代わりに弧 XB を用いてしまう。あるいは弦の長さを $2\sin\frac{\theta}{2}$ としてしまう（それは XB ではなく AX である）。
- 停留点がまったく存在しない $k \le 1$ の場合を忘れる。

STEP のその先へ

ここで働いている原理は、区間上の凹関数はその最小値を端点でとる、というものである。高次元では、これは多角形上の線形（あるいは凹）な目的関数は頂点で最小となる、という事実になり、線形計画法（linear programming）の基礎をなしている。この問題はまた、スネルの法則（Snell's law）やフェルマー（Fermat）の最小時間の原理（principle of least time）の親戚でもある。そちらでは時間の関数が逆に凸（convex）であるため、答えはふつう内部の点になる。この種の問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* に挑戦するとよい。

解答例

STEP II 1995、第 6 問

純粋数学 • 1 の冪根

> **STEP II 1995、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q6

鍵となる考え方

1 の 7 乗根（seventh roots of unity）は $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^6$ であり、それらの和は 0 である。実数でない 6 つを 3 つずつの 2 組 $\{\alpha, \alpha^2, \alpha^4\}$ と $\{\alpha^3, \alpha^5, \alpha^6\}$ に分ける。2 つ目の組は 1 つ目の組の共役複素数（complex conjugate）をちょうど集めたものなので、2 つの組の和は互いに共役である。したがってそれらの和と積は実数であり、前半の結果によってそれらが 2 次方程式の係数となる。そのうえで解の実部と虚部をとれば、三角関数の和が得られる。

解答

解と係数

u と v が $z^2 + az + b = 0$ の解であるとき、最高次の係数が 1 である 2 次式 $z^2 + az + b$ は因数 $z - u$ と $z - v$ をもつので、すべての z に対して

$$z^2 + az + b = (z - u)(z - v) = z^2 - (u + v)z + uv$$

が成り立つ。z の係数と定数項を比較すると $a = -u - v$、$b = uv$ が得られ、示すべきことが示された。

1 の累乗根

まず注意しておく。問題文には $z^6 - 1 = 0$ とあるが、これは $z^7 - 1 = 0$ の誤植である。実際、$\alpha^6 = \cos(12\pi/7) + \mathrm{i}\sin(12\pi/7) \neq 1$ であり、一方で問題の残りの部分は明らかに 7 等分に関するものである。以下では $z^7 - 1 = 0$ を扱う。

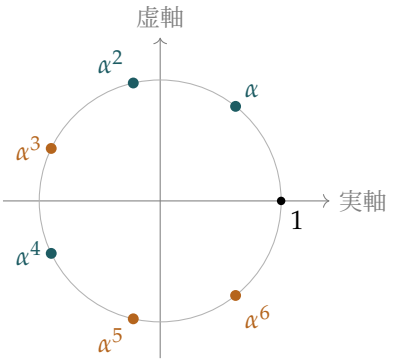
ド・モアブルの定理（de Moivre's theorem）により

$$\alpha^7 = \cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi = 1,$$

であるから、α は $z^7 - 1 = 0$ の解である。より一般に、$\alpha^k = \cos(2k\pi/7) + \mathrm{i}\sin(2k\pi/7)$ であり $(\alpha^k)^7 = (\alpha^7)^k = 1$ である。7 つの数

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \alpha^5,\ \alpha^6$$

は相異なる。$k = 0, \ldots, 6$ に対する偏角 $2k\pi/7$ が $[0, 2\pi)$ の中で相異なるからである。7 次の多項式の解は高々 7 個なので、これらが $z^7 - 1 = 0$ の解のすべてである。これらは単位円上の正七角形の頂点に位置している。



すべての議論を支えるのは 2 つの事実である。第一に、解の和は 0 である。$z^7 - 1 = (z-1)(z^6 + z^5 + \cdots + z + 1)$ であり $\alpha \neq 1$ なので

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 = 0. \qquad (*)$$

（同じことだが、$z^7 - 1$ における z^6 の係数が 0 であることからもわかる。）第二に、$|\alpha| = 1$ なので $\overline{\alpha^k} = \alpha^{-k} = \alpha^{7-k}$ である。よって $\alpha^6 = \overline{\alpha}$、$\alpha^5 = \overline{\alpha^2}$、$\alpha^3 = \overline{\alpha^4}$ である。

A と B を求める

$$p = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4, \qquad q = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6.$$

とおく。上で見た共役の組により $q = \overline{p}$ である。これがもう 1 つの解として自然に予想されるものである。実数係数の 2 次方程式が実数でない解 p をもつならば、$\overline{p}$ も解でなければならないからである。

考えてみよう　p が実数でないことはどうしてわかるのか。もし実数であれば、「もう 1 つの解」が $\overline{p}$ である必要はない。

p の虚部は $\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}$ であり、これが正であることを最後に示す。よって p は実数ではなく、解は p と $\overline{p}=q$ である。（いずれにせよ、p と q を解とする実数 A と B が見つかれば、2 次方程式は決まる。）

$(*)$ により

$$p+q=\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6=-1.$$

積については、展開してから $\alpha^7=1$ を用いて次数を下げる。

$$\begin{aligned}pq&=(\alpha+\alpha^2+\alpha^4)(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6)\\&=\alpha^4+\alpha^6+\alpha^7+\alpha^5+\alpha^7+\alpha^8+\alpha^7+\alpha^9+\alpha^{10}\\&=\alpha^4+\alpha^6+1+\alpha^5+1+\alpha+1+\alpha^2+\alpha^3\\&=3+(\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6)=3-1=2.\end{aligned}$$

9 つの項の中には、3 つの 1 のほかに $\alpha,\dots,\alpha^6$ がそれぞれちょうど 1 回ずつ現れていることに注意しよう。前半の結果より $A=-(p+q)$、$B=pq$ なので

$$A=1,\qquad B=2,$$

であり、p と q は $z^2+z+2=0$ の解、すなわち

$$z=\frac{-1\pm\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}.$$

である。

三角関数の和

$\alpha^k=\cos(2k\pi/7)+\mathrm{i}\sin(2k\pi/7)$ を用いて $p=\alpha+\alpha^2+\alpha^4$ の実部と虚部をとると

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}p&=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7},\\\operatorname{Im}p&=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}.\end{aligned}$$

となる。$z^2+z+2=0$ の 2 つの解はどちらも実部が $-\frac{1}{2}$ なので

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}=-\frac{1}{2},$$

となり、示すべきことが示された。（別の方法として、$p+\overline{p}=-1$ から直接 $2\operatorname{Re}p=-1$ が得られる。）

虚部は $\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$ であり、どちらであるかを決めなければならない。

考えてみよう 3 つの正弦のうち 2 つは正で 1 つは負である。どちらが勝つかをどうすれば確かめられるか。

負の項を正の項の 1 つと比べる。$\frac{8\pi}{7} = \pi + \frac{\pi}{7}$ なので $\sin\frac{8\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7}$ である。また $\sin\frac{4\pi}{7} = \sin\left(\pi - \frac{4\pi}{7}\right) = \sin\frac{3\pi}{7}$ である。正弦関数は $[0, \frac{\pi}{2}]$ で狭義単調増加であり、$0 < \frac{\pi}{7} < \frac{3\pi}{7} < \frac{\pi}{2}$ なので $\sin\frac{3\pi}{7} > \sin\frac{\pi}{7}$ である。したがって

$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \underbrace{\sin\frac{2\pi}{7}}_{>0} + \underbrace{\left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right)}_{>0} > 0,$$

であり、ゆえに

$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

である。これにより、上で用いたように $p = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$ が実数でないことも確かめられる。

検算

電卓で（ラジアンで）計算すると、$\cos\frac{2\pi}{7} \approx 0.6235$、$\cos\frac{4\pi}{7} \approx -0.2225$、$\cos\frac{8\pi}{7} \approx -0.9010$ であり、和は -0.5000 となる。正弦はおよそ 0.7818、0.9749、-0.4339 であり、和は 1.3229 となる。これは $\frac{\sqrt{7}}{2} \approx 1.3229$ と一致する。$p^2 + p + 2 = 0$ を直接確かめることもできる。$p = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$ のとき $p^2 = \frac{-6-2\mathrm{i}\sqrt{7}}{4}$ であり、ここから $p^2 + p + 2 = 0$ が従う。

よくある間違い

- 印刷されたとおりに $z^6 - 1 = 0$ を用いること。その場合 α は解ではなく、和が 0 になるという事実 $(*)$ も成り立たない。
- pq を展開するときに $\alpha^7 = 1$ を用いて次数を下げるのを忘れること、あるいは 1 に等しい 3 つの項を数え間違えること。
- 「2 つの項が正だから」という理由で正弦の和が正であると主張すること。$\sin\frac{3\pi}{7} > \sin\frac{\pi}{7}$ のような比較が必要である。

STEP のその先へ

$\{1,2,4\}$ と $\{3,5,6\}$ への分け方は恣意的なものではない。1, 2, 4 は 7 を法とする 0 でない平方数（すなわち平方剰余（quadratic residue））であり、$2p + 1 = \mathrm{i}\sqrt{7}$ は**ガウス和**（Gauss sum）である。ガウス（Gauss）は、$4k + 3$ の形の素数 ℓ に対して、平方剰余

r にわたる α^r の和が $\frac{-1+i\sqrt{\ell}}{2}$ となることを示した。これは、定規とコンパスでどの正多角形が作図できるかという理論（ガロア理論（Galois theory））と、平方剰余の相互法則（quadratic reciprocity）への第一歩である。Davenport の *The Higher Arithmetic*（初等整数論の入門書）は平方剰余を扱っており、Needham の *Visual Complex Analysis*（図で見る複素解析）は 1 の累乗根を幾何学的な視点から解説している。

解答例

STEP II 1995、第 7 問

純粋数学 ・ ヘロンの公式

> **STEP II 1995、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q7

鍵となる考え方

全体を通して主役となるのは内接円（incircle）である。内接円の中心から接点（point of contact）へ引いた半径は各辺に垂直なので、ABC を敷き詰める三つの小さな三角形の高さがそのまま得られ、これにより (i) が示される。小問 (ii) はヘロン（Heron）の公式（Heron's formula）の古典的な導出である。$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ と書き、余弦定理（cosine rule）を用いて角を消去し、さらに平方の差（difference of two squares）による因数分解を 2 回行う。球については、鉛直な断面（cross-section）を考える。球と穴の縁との接点は、ちょうど内接円が各辺に接する点になっていることがわかる。

解答

小問 (i)

内接円が BC、CA、AB に接する点をそれぞれ P、Q、R' とする。接点へ引いた半径は接線（tangent）に垂直であるから、$IP \perp BC$、$IQ \perp CA$、$IR' \perp AB$ であり、これらの長さはいずれも r である。したがって三角形 BIC は底辺 a、高さ r をもち、他の二つも同様である：

$$[BIC] = \tfrac{1}{2}ar, \qquad [CIA] = \tfrac{1}{2}br, \qquad [AIB] = \tfrac{1}{2}cr.$$

I は三角形の内部にあるので、これら三つの三角形は重なりなくぴったり合わさって ABC をなす。足し合わせると

$$\Delta = \tfrac{1}{2}r(a+b+c) = rs,$$

となり、示すべき式が得られる。

小問 (ii)

$\Delta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ を 2 乗し、$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ を用いると

$$\Delta^2 = \tfrac{1}{4}b^2c^2(1-\cos^2\alpha) = \tfrac{1}{16}\left[4b^2c^2 - (2bc\cos\alpha)^2\right],$$

となり、これが一つ目の結果である。括弧の中は平方の差であるから

$$16\Delta^2 = (2bc - 2bc\cos\alpha)(2bc + 2bc\cos\alpha).$$

余弦定理より $2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$ である。これを各因数に代入すると

$$2bc - 2bc\cos\alpha = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) = a^2 - (b-c)^2,$$
$$2bc + 2bc\cos\alpha = (b^2 + 2bc + c^2) - a^2 = (b+c)^2 - a^2,$$

よって

$$\Delta^2 = \tfrac{1}{16}\left[a^2 - (b-c)^2\right]\left[(b+c)^2 - a^2\right],$$

となり、これが二つ目の結果である。各括弧はふたたび平方の差であるから

$$16\Delta^2 = (a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a).$$

ここで s を導入する。$a+b+c = 2s$ であるから

$$b+c-a = 2(s-a), \qquad a-b+c = 2(s-b), \qquad a+b-c = 2(s-c),$$

となり、積は $2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c) = 16\,s(s-a)(s-b)(s-c)$ である。したがって $\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ である。$\Delta > 0$ であるから正の平方根をとって

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

小問 (iii)

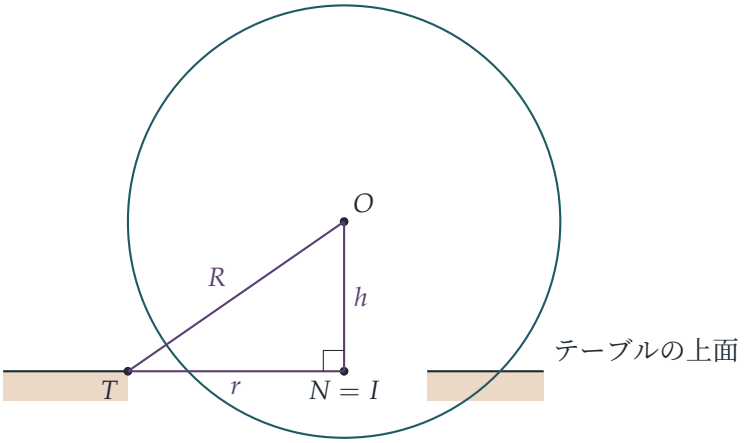
球（sphere）の中心を O、テーブルの上面からの高さを h とする。O からテーブルの平面に下ろした垂線の足を N とすると、$ON = h$ である。球は穴の三つの縁の上に載っている。球が縁 BC に点 T で接するとする。

考えてみよう なぜ N は内心 I でなければならないのか？

球が直線に接する点では、半径はその直線に垂直であるから、$OT \perp BC$ かつ $OT = R$ である。また ON はテーブルの平面全体に垂直であるから、$ON \perp BC$ である。よって BC は平面 ONT 内の平行でない 2 直線に垂直であり、したがってその平面に垂直で、特に NT に垂直である。ゆえに NT は N から BC までの距離であり、直角三角形 ONT に三平方の定理（Pythagoras' theorem）を用いると

$$NT^2 = R^2 - h^2.$$

縁 CA、AB についても同じ議論により、N は三辺のいずれからも等しい距離 $\sqrt{R^2-h^2}$ にあることがわかる。点 N は三角形の内部にあり（球は穴の上にはまっている）、三角形の内部で三辺から等距離にある点は内心（incentre）だけである。よって $N=I$ であり、共通の距離は r で、接点はちょうど内接円が各辺に接する点である。これらの点は辺の延長上ではなく辺そのものの上にあるので、球はたしかに三つの縁の上に載っている。



図は O と T を通る鉛直な断面を示している。縁 BC は紙面に垂直に T を通る。三角形 ONT に三平方の定理を用いると $h^2=R^2-r^2$ が得られる。(i) と (ii) より

$$r=\frac{\Delta}{s}=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s},\qquad \text{よって}\qquad r^2=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}.$$

したがって、球の中心はテーブルの上面から

$$h=\sqrt{R^2-\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

の高さにある。これには $R>r$ が必要である。内接円より大きくない球は、穴をそのまま通り抜けて落ちてしまう。

検算

3–4–5 の三角形を考える。$s=6$ であり、ヘロンの公式から $\Delta=\sqrt{6\cdot3\cdot2\cdot1}=6$ となり、$\frac{1}{2}\cdot3\cdot4$ と一致する。すると $r=\Delta/s=1$ であり、これは直角三角形の公式 $r=\frac{1}{2}(3+4-5)$ からも確かめられる。$R=2$ のとき、公式から $h=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}\approx1.732$ となる。$R\to r^+$ のとき $h\to0$ である。すなわち球は赤道がテーブルと同じ高さになるまで沈み、内接円の上に載る。より広い検算として、ランダムな三角形 18,816 個について数値的に確かめた。いずれの場合も、内心の真上の高さ h に置いた中心は三つの縁を含む直線のすべてからちょうど距離 R にあり、最も近い点は縁の内部にあった。

よくある間違い

- d を I から頂点までの距離として $h = \sqrt{R^2 - d^2}$ とすること。球が接するのは縁であって、角ではない。
- 中心が内心の真上にあることを根拠なく仮定すること。垂直性の議論、あるいは少なくとも明確な対称性による理由が必要である。
- (ii) で因数の組を取り違えること。$b + c - a = 2(s - a)$ であり、$2(s - b)$ や $2(s - c)$ ではない。

STEP のその先へ

ヘロンの公式は、面積や体積を表す対称な公式の一族に属している。ブラーマグプタ（Brahmagupta）の公式は円に内接する四角形（cyclic quadrilateral）に対して同じ役割を果たし、ケイリー（Cayley）・メンガー（Menger）の行列式（Cayley–Menger determinant）は四面体（tetrahedron）の体積を 6 本の辺の長さから与える。「半径 $\perp$ 接線、ゆえに垂線の足は内心である」という段階は、三垂線の定理（theorem of the three perpendiculars）の 3 次元版であり、ベクトルを用いた幾何で知っておく価値がある。この種の問題をさらに多く知りたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を参照するとよい。

解答例

STEP II 1995、第 8 問

純粋数学 ・ ロジスティック微分方程式

> **STEP II 1995、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q8

この問題は、*Beyond STEP* の第 8.3 節「**個体群の収穫**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch08/harvesting.html

鍵となる考え方

この成長法則はロジスティック方程式（logistic equation）であり、変数分離形（separable）である。部分分数（partial fractions）に分解すると、積分は二つの対数になる。後半では、新しい右辺を平方完成（completing the square）すると、ずらし $y = x - K + \alpha$ によって新しい方程式が、K を α に置き換えた**まったく同じ**ロジスティック方程式に変わることがわかる。したがって、改めて積分をしなくても前半の答えをそのまま使い回せる。

解答

取り除きがない場合の個体数

$K > 0$ とする（$x = K$ から始まる個体数なので $K > 0$ でなければならない）。方程式は

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (2K - x)x.$$

である。$x = K$ から出発すると、変化率は $K^2 > 0$ である。解が $x = 0$ や $x = 2K$ に達することはない。これらの定数関数はそれ自体が解であり、この方程式の解どうしは交差しないからである。よって常に $0 < x < 2K$ であり、$(2K - x)x$ で割ってよい。部分分数に分解すると

$$\frac{1}{x(2K - x)} = \frac{1}{2K}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2K - x}\right),$$

となるので、変数を分離して

$$\frac{1}{2K}\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2K-x}\right)\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}t,$$
$$\frac{1}{2K}\Big(\ln x-\ln(2K-x)\Big)=t+C.$$

を得る。x と $2K-x$ はともに正なので、絶対値記号は必要ない。$t=0$ では $x=2K-x=K$ であるから、左辺は 0 となり $C=0$ である。したがって

$$\ln\frac{x}{2K-x}=2Kt\quad\Longrightarrow\quad x=(2K-x)\,\mathrm{e}^{2Kt}\quad\Longrightarrow\quad x=\frac{2K\mathrm{e}^{2Kt}}{1+\mathrm{e}^{2Kt}}=\frac{2K}{1+\mathrm{e}^{-2Kt}}.$$

求められている形に合わせるため、$2=(1+\mathrm{e}^{-2Kt})+(1-\mathrm{e}^{-2Kt})$ と書くと

$$x(t)=\frac{K(1+\mathrm{e}^{-2Kt})+K(1-\mathrm{e}^{-2Kt})}{1+\mathrm{e}^{-2Kt}}=K+K\,\frac{1-\mathrm{e}^{-2Kt}}{1+\mathrm{e}^{-2Kt}},$$

となり、これが示すべき結果である。（同値な表し方として $x=K+K\tanh Kt$ がある。）

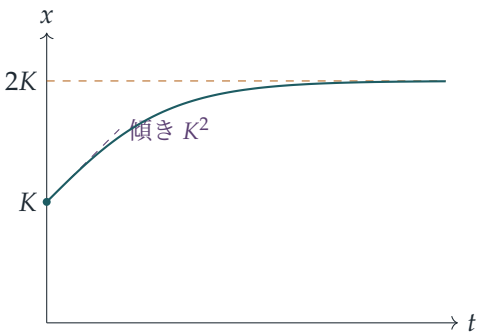
概形。 $t\geq 0$ では $\mathrm{e}^{-2Kt}\in(0,1]$ なので、$K\leq x<2K$ である。すると $\dot{x}=(2K-x)x>0$ であるから、x は増加する。方程式をもう一度微分すると

$$\ddot{x}=(2K-2x)\,\dot{x}\leq 0\quad\text{なぜなら}x\geq K,$$

となるので、グラフは上に凸（concave）であり、$t=0$ での傾きは K^2 である（そこでは $\ddot{x}=0$ であり、時刻の原点は、S 字型をしたロジスティック曲線全体の変曲点（point of inflection）にあたる）。$t\to\infty$ のとき $\mathrm{e}^{-2Kt}\to 0$ であるから

$$x(t)\to 2K.$$

となる。個体数は $2K$ で頭打ちになり、下から近づくが、決して到達しない。



割合 L で取り除く場合

1 時間あたり L マイクログラムを取り除くと、変化率から L が引かれる：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (2K - x)x - L.$$

右辺を平方完成すると

$$(2K - x)x - L = -(x^2 - 2Kx) - L = K^2 - L - (x - K)^2 = \alpha^2 - (x - K)^2,$$

となる。ここで $K^2 > L$ であるから $\alpha = \sqrt{K^2 - L} > 0$ である。

> **考えてみよう** なぜ $y = x - K + \alpha$ が適切な置換なのだろうか？

右辺 $\alpha^2 - (x - K)^2$ は $x = K \pm \alpha$ で 0 になる。これが二つの平衡（equilibrium）個体数である。$K - \alpha$ だけずらすと下側の平衡点が 0 に移り、これはもとのロジスティック方程式で下側の平衡点があった位置でもある。$x - K = y - \alpha$ かつ $\dot{y} = \dot{x}$ であるから

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \alpha^2 - (y - \alpha)^2 = 2\alpha y - y^2 = (2\alpha - y)\, y.$$

これは最初の方程式で K を α に置き換えたものである。初期条件も対応している。$x(0) = K$ から $y(0) = \alpha$ となり、これは $x(0) = K$ の類似である。$\alpha > 0$ なので前半の議論が一字一句そのまま適用でき

$$y(t) = \frac{2\alpha}{1 + \mathrm{e}^{-2\alpha t}}, \qquad \text{よって} \qquad x(t) = K - \alpha + \frac{2\alpha}{1 + \mathrm{e}^{-2\alpha t}}.$$

となる。$t \to \infty$ のとき $\mathrm{e}^{-2\alpha t} \to 0$ であるから $y \to 2\alpha$ となり

$$x(t) \to K - \alpha + 2\alpha = K + \alpha,$$

が示された。$L > 0$ のときは $\alpha < K$ であるから、取り除きを受ける個体数は、予想どおりより低い水準 $K + \alpha < 2K$ に落ち着く。

検算

- $t = 0$ では、どちらの式も $x = K$ を与える。$L = 0$ とおくと $\alpha = K$ となり、二つ目の式は一つ目の式 $2K/(1 + \mathrm{e}^{-2Kt})$ に帰着する。
- $x = K + K\tanh Kt$ を微分すると $\dot{x} = K^2 \operatorname{sech}^2 Kt = K^2(1 - \tanh^2 Kt) = (K - K\tanh Kt)(K + K\tanh Kt) = (2K - x)x$ となる。
- 数値的には、$K = 1$ のとき $x(1) = 2/(1 + \mathrm{e}^{-2}) \approx 1.7616$ であり、$K = 1$ かつ $L = 0.75$（したがって $\alpha = \frac{1}{2}$）のとき $x(1) \approx 1.2311$ である。どちらも微分方程式を直接数値的に（ルンゲ＝クッタ（Runge–Kutta）法で）解いた結果と一致し、二つ目は $1.5 = K + \alpha$ に落ち着く。

よくある間違い

- 部分分数分解で因子 $\frac{1}{2K}$ を落としてしまい、e^{-2Kt} の代わりに e^{-t} を得てしまう。
- 後半で $+L$ と書いてしまう、あるいは積分定数を改めて求めなければならないことを忘れる。ここでは置換によって $y(0) = \alpha$ となるので、新たな定数は必要ない。

STEP のその先へ

後半は**平衡点の安定性**（stability of equilibria）への最初の入り口である。方程式 $\dot{x} = \alpha^2 - (x - K)^2$ は $K \pm \alpha$ に平衡点をもつ。上側の平衡点は近くの解を引き寄せ、下側の平衡点は近くの解を遠ざける。このことは、何も解かなくても右辺の符号から読み取れる。この相直線（phase line）による方法や、$L > K^2$ の場合に何が起こるか（平衡点が存在せず、個体数は有限時間で絶滅する）については、Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations* で扱われている。

解答例

STEP II 1995、第 9 問

力学 ・ 摩擦とつり合い

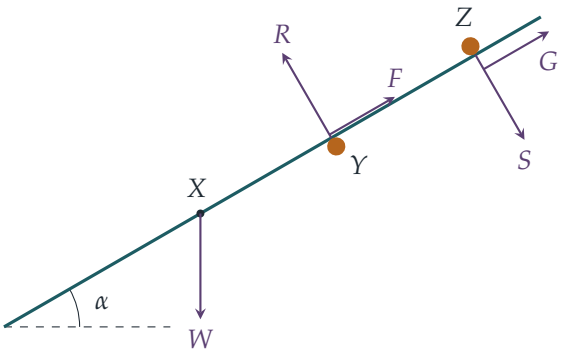
> **STEP II 1995、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q9

鍵となる考え方

棒は最大傾斜線（line of greatest slope）に沿って置かれているので、棒に沿った方向と棒に垂直な方向に力を分解する（resolve）のが自然である。棒が上に載っている横棒は、棒を平面から離れる向きに押し上げる。棒がその下をくぐる横棒は、棒を押し下げることしかできない。Y のまわりのモーメント（moment）を考えると重心がどこになければならないかがわかり、そのうえで μ の最小値は、二つの摩擦力をともに斜面上向きに、限界値（limiting value）で働かせることによって得られる。

解答

棒を重さ W の一様な剛体（rigid body）の棒とし、横棒を固定された細い棒としてモデル化する。各横棒は、棒に垂直な垂直抗力（normal reaction）と棒に沿った摩擦力（friction force）を及ぼす。棒は水平な二本の横棒のどちらにも垂直であるから、それらが定める平面の最大傾斜線に沿っており、したがって水平に対して α だけ傾いている。Y における抗力を R（棒はこの横棒の上に載っているので、棒を平面から離れる向きに押す）、Z における抗力を S（棒はこの横棒の下にあるので、棒を平面に向かって押す）とし、$R, S \geq 0$ とする。Y と Z における摩擦力をそれぞれ F、G とし、斜面上向きを正にとる。



重心はどこになければならないか

棒に垂直な方向に力を分解し、Y のまわりのモーメントを考える（距離は棒に沿って測る）と、

$$R = S + W\cos\alpha,$$
$$S\,d = W\cos\alpha \cdot XY.$$

Y のまわりの S のモーメントは、重力の成分 $W\cos\alpha$ のモーメントとつり合わなければならない。この成分は S と同じく平面に向かう向きに働く。同じ向きの二つの平行な力の Y のまわりのモーメントが打ち消し合えるのは、それらが Y の反対側に働く場合に限られる。Z は Y より斜面の上側にあるから、重心 X は Y の位置かそれより下になければならず、このとき

$$XZ = XY + YZ, \qquad \text{よって} \qquad l = XY + d \geq d.$$

（もし X が Y と Z の間、あるいは Z より先にあれば、モーメントの式から $S < 0$ となってしまう。つまり Z の横棒が棒を引っ張らなければならないが、それは不可能であり、棒は回転してそこから外れてしまう。）等号 $l = d$ は境界の場合であり、このとき X は Y の位置にあって $S = 0$ である。

考えてみよう 問題文には $l \leq d$ とある。なぜ逆向きの不等式が得られるのだろうか。

問題文の不等式は誤植である。実際、問題はこのあと $l = 2d$ とおいているが、これは $l \geq d$ でなければ不可能である。上の議論により、釣り合い（equilibrium）に必要なのは $l \geq d$ であることがわかるので、こちらを用いる。

μ の最小値

$XY = l - d$ とすると、二つの式から

$$S = \frac{W\cos\alpha\,(l-d)}{d}, \qquad R = \frac{W\cos\alpha\,l}{d}, \qquad \text{よって} \qquad R+S = \frac{W\cos\alpha\,(2l-d)}{d}.$$

棒に沿った方向に力を分解すると、摩擦力が重力の斜面下向きの成分を支えなければならないので

$$F + G = W\sin\alpha.$$

摩擦の法則から $|F| \le \mu R$ かつ $|G| \le \mu S$ でなければならず、したがって $F+G \le \mu(R+S)$ である。ゆえに釣り合いのためには

$$W\sin\alpha \le \mu\,\frac{W\cos\alpha\,(2l-d)}{d}, \qquad \text{すなわち} \qquad \mu \ge \frac{d\tan\alpha}{2l-d}.$$

が必要である。逆に、μ がこの値に等しければ、$F = \mu R$、$G = \mu S$（どちらも斜面上向きで、どちらも限界値）とするとすべての式が満たされるので、棒は釣り合いの状態にありうる。したがって最小値は

$$\mu_{\min} = \frac{d\tan\alpha}{2l-d}.$$

である。

$l = 2d$ のとき、これは $\mu_{\min} = \dfrac{d\tan\alpha}{3d} = \frac{1}{3}\tan\alpha$ となるので、求めるとおり $\mu \ge \frac{1}{3}\tan\alpha$ である。

検算

- $l = d$ のとき、重心は下側の横棒の上にあり、$S = 0$ で、$\mu \ge \tan\alpha$ が得られる。これは粗い斜面上に静止する一つの質点についてのおなじみの条件である。
- $l \to \infty$ とすると抗力は限りなく大きくなるので、必要な摩擦はごくわずかになり、実際 $\mu_{\min} \to 0$ となる。
- 数値的には、$\alpha = 0.7$、$l = 2d$ のとき公式は $0.28076\ldots$ を与え、これは $\frac{1}{3}\tan 0.7$ に等しい。また、コンピュータを用いて、力の式とランダムに選んだ点のまわりのモーメントの式を確かめ、$\mu_{\min}$ よりわずかに大きいときには釣り合いが成り立ち、わずかに小さいときには成り立たないことも確認した。

よくある間違い

- 二つの抗力を同じ向きにとってしまうこと。棒がその下にある横棒は、棒を平面に向かって押すことしかできない。

- 一方の横棒でだけ摩擦が限界に達していると仮定してしまうこと。μ をできるだけ小さくするには、両方の横棒が斜面上向きに最大限の摩擦力を出さなければならない。

STEP のその先へ

これは不等式制約をともなう静力学（statics）の小さな問題である。接触力は線形方程式と摩擦の不等式を同時に満たさなければならず、μ の最小値は、実行可能集合（feasible set）がちょうど空でなくなる点である。線形方程式と線形不等式の組合せという同じ構造は、線形計画法（linear programming）や、工学における摩擦接触の解析の基礎にもなっている。剛体の静力学と摩擦についてさらに学ぶには、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

解答例

STEP II 1995、第 10 問

力学 ・ 衝突と反発係数

STEP II 1995、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/95-s2-q10

鍵となる考え方

各衝突（collision）は、運動量保存則（conservation of momentum）とニュートンの実験則（Newton's experimental law）という二つの方程式で解ける問題である。二回の衝突を順に処理し、二番目の球の最終速度を u とおいて m_1 について解く。すると不等式は、質量は正でなければならないという単純な事実から導かれる。最後の小問では、衝突が**相対**速度（relative velocity）のみに依存することに注目する。速さ v で動く座標系（frame）から運動を眺めれば、最初の小問に帰着する。

解答

球は滑らかな台の上の一直線上を動く質点としてモデル化する。したがって水平方向に働く力は球どうしの撃力（impulse）だけである。最初の球の運動の向きを正の向きとする。



一回目の衝突

一回目の衝突の直後における一番目と二番目の球の速度をそれぞれ v_1 と w とする。運動量保存則とニュートンの実験則（遠ざかる速さは近づく速さの e 倍である）から

$$m_1 v_1 + m_2 w = m_1 u, \qquad w - v_1 = eu.$$

$v_1 = w - eu$ を第一式に代入すると $(m_1 + m_2)w = m_1(1+e)u$ となるので

$$w = \frac{m_1(1+e)u}{m_1+m_2}, \qquad v_1 = \frac{(m_1 - em_2)u}{m_1+m_2}.$$

二回目の衝突

次に、速度 w で動く二番目の球が、静止している三番目の球に衝突する。これは m_1, m_2, u を m_2, m_3, w に置き換えた同じ状況であるから、衝突後の二番目の球の速度は

$$\frac{(m_2 - em_3)w}{m_2+m_3}.$$

これが u に等しいと与えられている。w を代入し、$u \neq 0$ で割ると

$$\frac{(m_2 - em_3)\, m_1(1+e)}{(m_2+m_3)(m_1+m_2)} = 1, \qquad \text{よって} \qquad m_1(1+e)(m_2 - em_3) = (m_1+m_2)(m_2+m_3).$$

m_1 を含む項をまとめると

$$m_1\big[(1+e)m_2 - e(1+e)m_3 - m_2 - m_3\big] = m_2(m_2+m_3),$$

となり、括弧内は $em_2 - m_3(1+e+e^2)$ と整理できる。したがって

$$\boxed{m_1 = \frac{m_2(m_2+m_3)}{em_2 - m_3(1+e+e^2)}}.$$

考えてみよう 手元にあるのが等式だけのとき、不等式はどこから出てくるのだろうか。

物理から出てくる。質量は正である。分子 $m_2(m_2+m_3)$ は正であり、割った括弧の部分は 0 にはなりえない（そうでなければ、その直前の式は $0 = m_2(m_2+m_3)$ となってしまう）。よって $m_1 > 0$ であるためには分母が正でなければならない：

$$em_2 - m_3(1+e+e^2) > 0, \qquad \text{すなわち} \qquad m_2 e > m_3(1+e+e^2),$$

これが示すべきことであった。

最後の小問では衝突の回数を数えるので、その後に何も起こらないことを確認しておく価値がある。二回目の衝突の後、二番目の球は速度 u で動き、一番目の球は速度 $v_1 = u - \frac{m_2(1+e)u}{m_1+m_2} < u$ で動くので、一番目の球が再び二番目の球に追いつくことはない。三番目の球は相対速度 $ew > 0$ で二番目の球から遠ざかる。よって衝突はちょうど二回である。

最後の小問

今度は、一番目の球を除く三つの球が共通の速度 v をもち、一番目の球は速度 $u > v$ で動いている。この直線に沿って一定の速度 v で動く座標系から運動を眺める。この座標系では：

- 一番目の球は速度 $u - v > 0$ で二番目の球に向かって動き、二番目と三番目の球は静止している。
- 各衝突において運動量は依然として保存される。すべての速度から v を引くと、運動量の式の両辺が同じ量 $(m_a + m_b)v$ だけ変化するからである。
- ニュートンの実験則は変わらない。速度の差しか含まないからである。

したがって、動く座標系では最初の小問とまったく同じ状況になる。ただし u は $u - v$ に置き換わり、質量は同じ関係式（これは u をまったく含まない）を満たす。最初の小問より、二回の衝突の後、二番目の球はこの座標系に対して速度 $u - v$ で動く。台の座標系に戻るには v を足し戻せばよい。二回の衝突の後の二番目の球の速度は

$$\boxed{u}.$$

条件 $u > v$ は、そもそも一回目の衝突が起こることを保証するためのものである。仮定 $v > 0$ は、実はこの議論には必要ない。

検算

$e = \frac{1}{2}$, $m_3 = 1$, $m_2 = 4$ とする。このとき $em_2 = 2 > \frac{7}{4} = m_3(1 + e + e^2)$ であり、公式から $m_1 = \frac{4 \cdot 5}{1/4} = 80$ を得る。$u = 7$ とすると、一回目の衝突で二番目の球は $w = \frac{80 \cdot \frac{3}{2} \cdot 7}{84} = 10$ となり、続く二回目の衝突で $\frac{(4 - \frac{1}{2}) \cdot 10}{5} = 7 = u$ となる。確かにそうなるべき値である。また、条件を満たす質量と e を無作為に 10^4 通り以上選び、コンピュータで衝突を（分数を用いて）厳密に計算した。どの場合も、衝突がちょうど二回であること、二番目の球の最終速度が u であること、そして二番目と三番目の球に共通の速度 $v < u$ を加えても最終速度は同じ u になることが確かめられた。

よくある間違い

- ニュートンの実験則を逆向きに書いてしまうこと。例えば $v_1 - w = eu$ とする誤りである。前にある球は、少なくとも後ろの球と同じ速さで動いていなければならない。
- 最後の小問で、問題文がはっきりと促している座標系の変換を使わずに、衝突を一

から計算し直してしまうこと。

- 最後に v を足し戻すのを忘れ、答えを $u - v$ としてしまうこと。

STEP のその先へ

最後の小問は、ガリレイ不変性（Galilean invariance）の一例である。衝突の法則は一定の速度で動くどの座標系でも同じ形をしているので、問題が最も易しくなる座標系を選んでよい。大学の力学で好んで使われるのは重心系（centre-of-mass frame）である。重心系では全運動量が 0 であり、衝突は単に速度の向きを反転させ、e 倍するだけである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、衝突を扱う際にこの考え方を多用している。

解答例

STEP II 1995、第 11 問

力学 ・ 速度に比例する空気抵抗

STEP II 1995、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

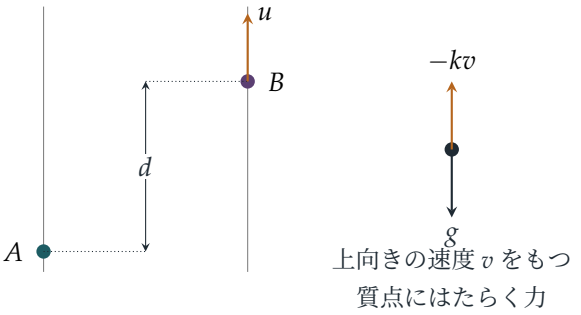
step.maths.org/questions/95-s2-q11

鍵となる考え方

抵抗が速度に**線形**（linear）であるため、運動方程式は線形であり、質点が上昇していても落下していても同じ方程式が成り立つ。そこで二つの運動方程式の差をとる。すると重力は打ち消し合い、**相対速度**（relative velocity）は単に指数関数的に減衰する。これを一度積分すれば、それぞれの質点がどこにあるかを知る必要もなく、直ちに両者の間隔が得られる。

解答

各物体を、鉛直線上を運動する単位質量の質点（particle）とみなす。質点には重力 g と、運動を妨げる向きに大きさ $k|v|$ の抵抗がはたらく。上向きを正とし、原点を A にとる。時刻 t における質点 1（A から出発）と質点 2（B から出発）の高さをそれぞれ x_1、x_2、速度を v_1、v_2 とする。



運動方程式

上向きの速度 v をもつ質点について、抵抗は $-kv$ である。$v > 0$（上昇中）ならば下向き、$v < 0$（落下中）ならば上向きであり、いずれの場合もまさに「運動を妨げる向き」になっている。したがって単位質量に対するニュートン（Newton）の第二法則から、各質点について

$$\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = -g - kv_1, \qquad \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = -g - kv_2,$$

が得られ、これはすべての $t \geq 0$ で成り立つ。

考えてみよう 質点 2 は上昇し、止まり、そして落下する。それぞれの段階ごとに別の方程式が必要ではないのか？

抵抗が**速さの 2 乗**に比例する場合なら必要である。そのとき力は $-kv|v|$ となり、v の符号が変わると式の形が変わる。ここでの力は $-kv$ という単一の式で、v の向きが変われば自動的に向きを反転するので、一つの方程式で運動全体を記述できる。

相対運動

$w = v_2 - v_1$ を、質点 1 に対する質点 2 の速度とする。二つの方程式の差をとると、重力の項が打ち消し合って

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -kw, \qquad w(0) = u - 0 = u,$$

となるので、$w = u\,\mathrm{e}^{-kt}$ である。次に $s = x_2 - x_1$ とおく。B は A より高さ d だけ上にあるので $s(0) = d$ である。すると $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = w$ であり、

$$s = d + \int_0^t u\,\mathrm{e}^{-k\tau}\,\mathrm{d}\tau = d + \frac{u}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right).$$

$u \geq 0$ かつ $1 - \mathrm{e}^{-kt} \geq 0$ であるから $s \geq d > 0$ となる。すなわち質点 2 は常に質点 1 より上にあり、二つの質点が出会うことはない。よって時刻 t における両者の距離は

$$\boxed{d + \frac{u}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right)}$$

である。$k > 0$ であるから $t \to \infty$ のとき $\mathrm{e}^{-kt} \to 0$ となり、距離は $d + \dfrac{u}{k}$ に近づく。これが示すべきことであった。

個々の運動（遠回りをしたい場合）

各方程式を別々に解く（1 階線形微分方程式、あるいは変数分離形である）と $v = -\frac{g}{k} + \left(v(0) + \frac{g}{k}\right)\mathrm{e}^{-kt}$ が得られ、さらに積分すると

$$x_1 = -\frac{gt}{k} + \frac{g}{k^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right),$$
$$x_2 = d - \frac{gt}{k} + \frac{1}{k}\left(u + \frac{g}{k}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right).$$

となる。差をとると gt/k と g/k^2 の項が打ち消し合い、同じ s が再び得られる。両質点はともに終端速度（terminal velocity）$-g/k$ に近づき、そのために両者の間隔は一定値に落ち着くのである。

検算

- $t = 0$ のとき距離は d である。また t が小さいとき距離はおよそ $d + ut$ であり、これは抵抗がない場合（このとき両質点は重力によって等しく落下する）と一致する。
- $u = 0$ ならば二つの質点は静止状態から同時に放され、まったく同じ運動をして、間隔 d を保つ。公式もそのとおりになっている。
- 単位：k の単位は s^{-1}（単位質量・単位速度あたりの力）であるから、u/k は長さである。
- 数値的検証として、ランダムな k、u、d、t に対し、ルンゲ・クッタ法（Runge–Kutta method）で両方の運動方程式を数値的に解いたところ、公式と約 10^{-12} の精度で一致した。$k = 0.5$、$u = 10$、$d = 3$ のとき、距離は $t = 1$ で 10.87、$t = 20$ で 22.999 であり、$d + u/k = 23$ に近づいている。

よくある間違い

- 質点 2 の運動を「上昇」と「落下」の段階に分け、抵抗の符号をそれぞれ変えること。ここではその必要はなく、符号の誤りのよくある原因となる。
- v がすでに（負の値をとる）上向きの速度であるのに、落下する質点の抵抗を $+kv$ と書いてしまうこと。これは符号を二重に数えている。

STEP のその先へ

方程式の差をとるという技法がうまくいくのは、運動方程式が線形だからである。二つの解の差は斉次方程式（homogeneous equation）$\dot{w} = -kw$ を満たす。これは線形

微分方程式の理論全体を支える重ね合わせの原理（superposition principle）であり、そこではすべての解が「特殊解＋余関数」（particular solution plus complementary function）の形に表される。2 乗に比例する抵抗の場合はこの原理が成り立たず、間隔の振る舞いはまったく異なるものになる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『初等微分方程式』）は線形理論を展開しており、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（『力学入門』）は両方の種類の抵抗を受ける運動を扱っている。

解答例

STEP II 1995、第 12 問

確率・統計　・　順番に撃ち合う決闘

> **STEP II 1995、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q12

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.13 節「三つ巴の決闘」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/truel.html

鍵となる考え方

誰かが当たるまで続く決闘（duel）では、両者が外すたびにゲームは「最初からやり直し」になる。したがって、求める確率はそれ自身を含む簡単な方程式を満たし、無限級数（infinite series）を足し合わせる必要はない（足し合わせてもよいが）。三者の決闘では、アルジャーノンの最初の一投の各選択肢はすぐに二者の決闘に帰着し、それは最初の結果で処理できる。意外なのは、アルジャーノンにとって最善の手が誰にも当てないことだという点である。

解答

二者の決闘

パーシーが先に投げるとき、パーシーが勝つ確率を P とする。最初の一組の投擲に注目する。

- パーシーが最初の一投で当てる（確率 p）。このときパーシーはただちに勝つ。
- パーシーが外し、続いてロドニーが当てる（確率 $(1-p)r$）。このときパーシーは負ける。
- 両者とも外す（確率 $(1-p)(1-r)$）。このとき、パーシーが投げる番という最初の状態に戻る。各投擲は独立（independent）なので、ここからパーシーが勝つ確率

は再び P である。

よって

$$P = p + (1-p)(1-r)P \quad \Longrightarrow \quad P\big(1-(1-p)(1-r)\big) = p \quad \Longrightarrow \quad P = \frac{p}{p+r-pr},$$

となる。ここで $1-(1-p)(1-r) = p+r-pr$ であり、$p>0$ よりこれは正である。これが求める結果である。

考えてみよう ゲームは必ず終わるのか。つまり、パーシーが負けることは本当にロドニーが勝つことと同じなのか。

同じである。最初の n ラウンドがすべて両者の外れで終わる確率は $\big((1-p)(1-r)\big)^n$ であり、$p>0$ よりこれは 0 に収束する。同じことだが、等比級数（geometric series）$\sum_{k\geq 0} p\big((1-p)(1-r)\big)^k$ を足し合わせても同じ答えが得られる。

三者の決闘では、A、B、C が当てる確率はそれぞれ $\frac{2}{5}$、$\frac{3}{5}$、1 である。A が先に投げる A と B の二者の決闘は二度現れるので、上の結果に $p=\frac{2}{5}$、$r=\frac{3}{5}$ を代入して、ここで計算しておく。

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}+\frac{3}{5}-\frac{6}{25}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{19}{25}} = \frac{10}{19}.$$

小問 (i)

アルジャーノンがカスバートに当てると、残るのはアルジャーノンとバーティだけであり、次にバーティがアルジャーノンを狙って投げる。アルジャーノンが生き残るのはバーティが外す場合（確率 $\frac{2}{5}$）に限る。その後は A が先に投げる A と B の決闘となり、アルジャーノンはこれに確率 $\frac{10}{19}$ で勝つ。したがって

$$\mathrm{P}(\text{A が勝つ}) = \frac{2}{5}\cdot\frac{10}{19} = \frac{4}{19}.$$

小問 (ii)

アルジャーノンがバーティに当てると、次にカスバートが投げ、狙う相手はアルジャーノンしか残っていない。カスバートは決して外さないので、アルジャーノンが勝つ確率は 0 である。

小問 (iii)

アルジャーノンが外すと、三人とも残っている。次にバーティが投げ、カスバートを狙う。

- 確率 $\frac{3}{5}$ でバーティはカスバートに当てる。アルジャーノンとバーティが残り、アルジャーノンが投げる番となるので、アルジャーノンは確率 $\frac{10}{19}$ で勝つ。
- 確率 $\frac{2}{5}$ でバーティは外す。するとカスバートはバーティを狙い、確実に当てる。アルジャーノンとカスバートが残り、アルジャーノンが投げる番となる。外せばカスバートに当てられるので、アルジャーノンはこの一投で当てなければならない。よって彼が勝つ確率は $\frac{2}{5}$ である。

したがって

$$\mathrm{P}(\text{A が勝つ}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{10}{19} + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{6}{19} + \frac{4}{25} = \frac{150+76}{475} = \frac{226}{475}.$$

バーティとカスバートはその後同じように行動するので、この値は外れがどのように生じたか、つまり故意に外したのか狙いが外れたのかによらず同じである。

アルジャーノンの最善の作戦

考えてみよう アルジャーノンが選べるのは誰かを**狙う**ことだけであり、誰かに**当てる**ことを選べるわけではない。それぞれの選択は実際に彼に何をもたらすのか。

誰かを狙うと、確率 $\frac{2}{5}$ で当たり、確率 $\frac{3}{5}$ で外れる。外れた場合は小問 (iii) の状況になる。よって

$$\begin{aligned}
\text{カスバートを狙う:}\quad & \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{19} + \frac{3}{5}\cdot\frac{226}{475} = \frac{200+678}{2375} = \frac{878}{2375} \approx 0.370,\\
\text{バーティを狙う:}\quad & \frac{2}{5}\cdot 0 + \frac{3}{5}\cdot\frac{226}{475} = \frac{678}{2375} \approx 0.285,\\
\text{故意に外す:}\quad & \frac{226}{475} = \frac{1130}{2375} \approx 0.476.
\end{aligned}$$

カスバートに確実に当てられたとしても $\frac{4}{19} = \frac{100}{475}$ にしかならず、これは $\frac{226}{475}$ より小さい。どちらの相手に当てても、彼の勝つ確率は下がるだけである。したがってアルジャーノンは**最初の一投を故意に外す**べきである。そうすればバーティとカスバートが互いに撃ち合い、アルジャーノンは生き残った方に対して先に投げることができる。この作戦をとると彼が勝つ確率は $\frac{226}{475}$ であり、これが求める結果である。

検算

- $r = 0$ のとき決闘の公式は 1 を与え、$p = 1$ のときも 1 を与える。どちらも当然そうなるべき値である。
- 三つの選択肢の順位は $0.476 > 0.370 > 0.285$ である。三者の決闘全体のモンテカル

ロ・シミュレーション（Monte Carlo simulation）（各戦略につき 3×10^5 回）では 0.476、0.369、0.284 となり、厳密な値と一致した。

- 小問 (iii) の妥当性の確認：$\frac{6}{19} \approx 0.316$ と $\frac{4}{25} = 0.16$ を足すと 0.476 になる。

よくある間違い

- 最初の一投の後の投げる順番を取り違える。小問 (i) では**次に**投げるのはバーティなので、決闘の公式が使えるのはバーティが外した後だけである。
- 「カスバートを狙う」を「カスバートに当てる」と同じものとして扱う。小問 (i)–(iii) は結果を条件とする条件付き（conditional）確率であり、作戦を評価するにはそれらに $\frac{2}{5}$ と $\frac{3}{5}$ の重みを付けなければならない。

STEP のその先へ

一段階進んだ後に確率をそれ自身で表す方法は**第一ステップ解析**（first-step analysis）と呼ばれる。これはマルコフ連鎖（Markov chains）の基本的な道具であり、到達確率（hitting probabilities）や期待到達時間（expected hitting times）を連立一次方程式の解として与える。三者の決闘「truel」はゲーム理論（game theory）ではよく知られたパズルであり、最も弱いプレイヤーが争いに加わらないことで最も有利になることが多い。さらに詳しくは、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*、または Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability* を参照せよ。

解答例

STEP II 1995、第 13 問

確率・統計　・　ポアソン分布と最適化

STEP II 1995、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/95-s2-q13

鍵となる考え方

データベース上の分類はともかく、これはビジネスの装いをした確率の問題である。来なかった客の人数は、試行回数が大きく成功確率がきわめて小さい二項分布（binomial distribution）に従う数であり、これはまさにポアソン分布（Poisson distribution）が取って代わる状況である。その後、整数 k についての最適化のこつは微分ではなく階差（*first difference*）$u_{k+1}-u_k$ を見ることである。チケットをもう 1 枚売ることで期待利益が増える限り、売り続ければよい。この階差が減少することが示されれば、最適な k は階差が初めて正でなくなるところである。

解答

ポアソンモデル

$N+k$ 人のチケット所持者がそれぞれ独立に確率 ϵ で現れないとする。このとき、現れない人数 R は二項分布 $\mathrm{B}(N+k,\epsilon)$ に従い、その平均は $(N+k)\epsilon$ である。k は N に比べて非常に小さいので、この平均はおよそ $N\epsilon=\lambda$ である。試行回数が大きく成功確率が非常に小さい二項分布は、同じ平均をもつポアソン分布でよく近似される。実際、r を固定し、$n\epsilon=\lambda$ を一定に保ったまま $n\to\infty$ とすると、

$$\binom{n}{r}\epsilon^r(1-\epsilon)^{n-r}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{n^r}\cdot\frac{\lambda^r}{r!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-r}\ \to\ \frac{\lambda^r}{r!}\,\mathrm{e}^{-\lambda},$$

となる。最初の因子は 1 に収束し、$(1-\lambda/n)^n\to\mathrm{e}^{-\lambda}$ だからである。したがって、近似的に $R\sim\mathrm{Po}(\lambda)$ である。以下ではこれを厳密なものとして扱い、

$$p_r=\mathrm{P}(R=r)=\frac{\lambda^r}{r!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

と書く。

利益

航空会社は $N+k$ 枚のチケットを 1 枚あたり £A の利益で販売するので、何が起ころうと $A(N+k)$ を得る。r 人の乗客が現れなければ、N 席に対して $N+k-r$ 人が到着する。

- $r \geq k$ ならば、到着するのは高々 N 人であり、全員が搭乗できる。補償を受ける者はおらず、$\max(0, k-r) = 0$ である。
- $r < k$ ならば、$k-r$ 人が搭乗できず、1 人につき £B の費用がかかり、$\max(0, k-r) = k-r$ である。

いずれの場合も、利益（ポンド）は $A(N+k) - B\max(0, k-r)$ である。

期待利益 $u_0, \ldots, u_3$

期待値（expectation）をとると、ペナルティに寄与するのは $r = 0, 1, \ldots, k-1$ のみであるから、

$$u_k = A(N+k) - B\sum_{r=0}^{k-1}(k-r)\,p_r.$$

$p_0 = \mathrm{e}^{-\lambda}$、$p_1 = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}$、$p_2 = \frac{1}{2}\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}$ を用いると、

$$\begin{aligned}
u_0 &= AN,\\
u_1 &= A(N+1) - B\mathrm{e}^{-\lambda},\\
u_2 &= A(N+2) - B\mathrm{e}^{-\lambda}(2+\lambda),\\
u_3 &= A(N+3) - B\mathrm{e}^{-\lambda}\left(3 + 2\lambda + \tfrac{1}{2}\lambda^2\right).
\end{aligned}$$

階差 v_k

一般式どうしを引くと、

$$\begin{aligned}
v_k = u_{k+1} - u_k &= A - B\left[\sum_{r=0}^{k}(k+1-r)\,p_r - \sum_{r=0}^{k-1}(k-r)\,p_r\right]\\
&= A - B\left[p_k + \sum_{r=0}^{k-1}\big((k+1-r) - (k-r)\big)p_r\right]\\
&= A - B\sum_{r=0}^{k} p_r,
\end{aligned}$$

となる。ここで、第 1 の和の $r = k$ の項 $(k+1-k)p_k = p_k$ には、第 2 の和に対応する項がない。言葉で言えば、$v_k = A - B\,\mathrm{P}(R \leq k)$ である。これは納得のいく結果である。

$(k+1)$ 枚目の追加チケットは確実に $£A$ を稼ぎ、その乗客が搭乗を断られるとき、すなわち $R \le k$ のときに限って追加の $£B$ がかかるのである。

考えてみよう なぜ括弧の中は確率の単純な和にまとまるのだろうか。

各 $r \le k-1$ について、k が 1 増えると p_r の係数はちょうど 1 増える（その結果において搭乗を断られる乗客が 1 人増える）。また、結果 $r = k$ は新たに 1 人分の支払いを生じ始める。したがって、0 から k までのすべての r が p_r をちょうど 1 回ずつ寄与する。

すると

$$v_k - v_{k+1} = B\,p_{k+1} = B\,\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} > 0,$$

である。$B > 0$ かつ $\lambda > 0$ だからである。よって、すべての k について $v_k > v_{k+1}$ であり、階差は狭義単調減少する。

最後に、$\sum_{r=0}^{k} p_r$ は $\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{r\ge 0}\lambda^r/r! = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda} = 1$ の部分和（partial sum）であるから、$k \to \infty$ のとき 1 に収束し、

$$v_k \to A - B \qquad \text{極限} k \to \infty,$$

となり、示すべきことが示された。$B > A$ であるから、この極限は負である。

Fly By Night 社への助言

$F(k) = \mathrm{P}(R \le k) = \sum_{r=0}^{k} p_r$ とおくと、$v_k = A - BF(k)$ であり、

$$u_{k+1} > u_k \iff v_k > 0 \iff F(k) < \frac{A}{B}.$$

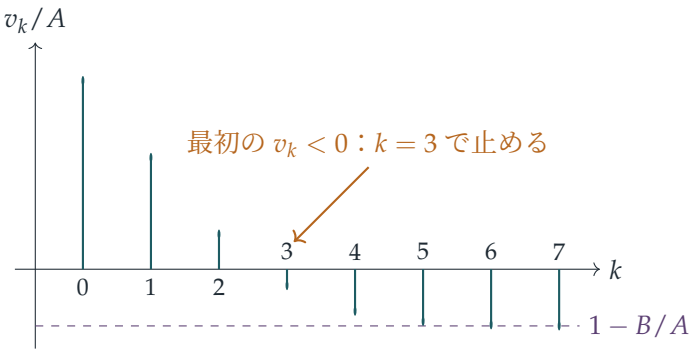
v_k は狭義単調減少で極限が負であるから、数列 $v_0, v_1, v_2, \ldots$ はある点までは正で、それ以降は負（または一度だけ 0）である。したがって u_k は増加したのち減少し、その最大値は、次のチケットがもはや利益を生まなくなる最初の k でとられる。

次を満たす最小のk を選ぶ：$F(k) = \displaystyle\sum_{r=0}^{k} \frac{\lambda^r}{r!}\mathrm{e}^{-\lambda} \;\ge\; \frac{A}{B}.$

特に、$\mathrm{e}^{-\lambda} \ge A/B$（乗客が非常に律儀であるか、ペナルティが非常に重い場合）ならば $v_0 \le 0$ であり、航空会社はオーバーブッキング（overbooking）をまったくすべきでない。すなわち $k = 0$ である。ちょうど $F(k) = A/B$ ならば $v_k = 0$ であり、k と $k+1$ は同じ期待利益を与える。$A/B < 1$ かつ $F(k) \to 1$ であるから、このような k は必ず存在する。

したがって助言は次のとおりである。高々 k 人しか現れない確率が、チケットの利益と補償額の比 A/B より小さい間は追加チケットを売り続け、その確率が初めて A/B に達した k で止めよ。

例えば、$\lambda = 2$、$B = 1.25A$（したがって $A/B = 0.8$）のとき、$F(0) \approx 0.135$、$F(1) \approx 0.406$、$F(2) \approx 0.677$、$F(3) \approx 0.857$ となるので、最適な選択は $k = 3$ である。図はこの場合の v_k/A を示している。



検算

- 一般式から、$u_1 - u_0 = A - Be^{-\lambda} = A - Bp_0$、$u_2 - u_1 = A - Be^{-\lambda}(1 + \lambda) = A - B(p_0 + p_1)$ であり、v_0 と v_1 に一致する。
- 極端な場合：$B \to A$ ならば $A/B \to 1$ となり、k は限りなく大きくなる（搭乗拒否の費用がほぼかからない）。$B \to \infty$ ならば $A/B \to 0$ となり、$k = 0$ である。
- 数値的には、N, A, B, λ を何百通りも無作為に選び、利益の式から直接 u_k を計算して、$u_0, \ldots, u_3$ と v_k の式、$v_k - v_{k+1} = Bp_{k+1}$ であること、および u_k を最大にする k が $F(k) \geq A/B$ を満たす最小の k であることを確かめた。$N = 400$、$k = 3$、$\epsilon = 0.01$ のとき、現れない人数が $r = 3$ となる二項分布とポアソン分布による確率は、それぞれ 0.194 と 0.195 である。

よくある間違い

- ペナルティの和に $r \geq k$ の項を含めてしまうこと。このときは現れた全員が座席を得るので、これらの項は何も寄与しない。
- u_k を k で微分してしまうこと。変数は整数であり、階差 v_k を用いるのが正しい道具である。
- 答えを「$v_k = 0$」と述べること。一般に v_k をちょうど 0 にする k は存在しない。答えは $v_k \leq 0$ となる最初の k である。

STEP のその先へ

「階差が減少するので、その符号が変わるところで止める」という議論は、凹関数（concave function）が導関数の 0 になる点で最大値をとることの離散版である。「$\mathrm{P}(R \leq k)$ が A/B に達したら止める」という規則は、オペレーションズ・リサーチ（operations research）における古典的な**新聞売り子問題**（*newsvendor*）の規則（臨界比率（critical fractile）規則）であり、航空会社のオーバーブッキングはその標準的な応用例である。上で厳密に示した二項分布のポアソン極限は、大学の確率論の講義で最初に学ぶ極限定理（limit theorem）の一つである。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、ポアソン近似と、$\max(0, k - R)$ のような関数の期待値の両方を扱っている。

解答例

STEP II 1995、第 14 問

確率・統計 ・ 仮説検定

STEP II 1995、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/95-s2-q14

鍵となる考え方

密度関数（density function）を $x^2\phi(x)$ の形に書く。ここで ϕ は標準正規分布（standard normal distribution）の密度関数である。すると、必要な積分はすべて標準正規確率変数 Z のモーメント（moment）になる。$\mathrm{E}(Z^4)$ に関するヒントが効いてくるのはここである。データが「確信を揺るがす」かどうかを判断するには、仮説（hypothesis）（$\mu = 0$）が正しいとしたとき、少なくともこれほど極端な結果がどの程度の確率で得られるかを問う。その確率がきわめて小さく、しかも μ をずらせばデータが何の変哲もないものになるならば、そのデータは仮説に不利な証拠となる。

解答

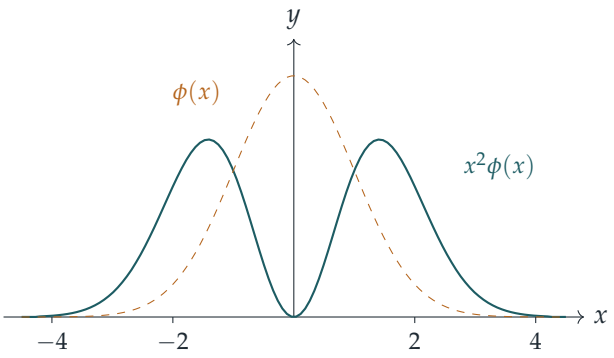
A を求める

$u = x$、$\mathrm{d}v = x\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$ とおいて部分積分（integration by parts）を行う。このとき $v = -\mathrm{e}^{-x^2/2}$ である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 0 + \sqrt{2\pi},$$

ここで標準正規分布の積分を用いた。確率の総和は 1 でなければならないので、

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \text{すなわち} \qquad \mathrm{f}(x) = x^2\phi(x), \quad \phi(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$



この密度関数は対称で、$x = \pm\sqrt{2}$ に二つの山をもち、$x = 0$ で 0 となる。対称性から $\mathrm{E}(X) = 0$ であり、

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4\phi(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{E}(Z^4) = 3, \qquad \text{よって} \qquad \mathrm{Var}(X) = 3.$$

すなわち分散（variance）は 3 である。

小問 (i)

仮説のもとで、$a = 87.3$ ほど遠く離れた結果はどの程度起こりやすいだろうか。先ほどと同様に部分積分すると（今度は $\phi'(x) = -x\phi(x)$ より $v = -\phi(x)$ とする）、

$$\mathrm{P}(X \geq a) = \int_a^{\infty} x \cdot x\phi(x)\,\mathrm{d}x = a\phi(a) + \mathrm{P}(Z \geq a).$$

また $a > 0$ のとき、積分範囲では $x/a \geq 1$ であるから、$\mathrm{P}(Z \geq a) = \int_a^{\infty} \phi(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^{\infty} \frac{x}{a}\phi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\phi(a)}{a}$ が成り立つ。したがって対称性より

$$\mathrm{P}(|X| \geq 87.3) \leq 2\left(a + \frac{1}{a}\right)\phi(a) \approx 70\,\mathrm{e}^{-3810.6} \approx 10^{-1653}.$$

これはばかげているほど小さい。仮説が正しければ、このような値を目にすることは事実上ありえない。一方、μ が 85 や 89 程度であれば（つまり 87.3 が $\mathrm{f}(x - \mu)$ の山の一つに位置するならば）、87.3 という結果はまったくありふれたものである。したがって、87.3 という結果がただ一つ得られただけで、確信は完全に揺らぐはずである。唯一の逃げ道は結果そのもの（たとえば記録の誤り）を疑うことであり、分別のある科学者なら、仮説を捨てる前にまずそれを確認するだろう。

考えてみよう どの特定の値も確率は 0 なのに、一つの観測値から判断するのは不公平ではないだろうか。

問題は 87.3 というちょうどその値の確率ではなく、仮説が確率の重みを置く場所から**少なくともこれだけ離れた**値の確率である。同様に、仮説のもとでの 87.3 における密

度は、適当な対立仮説のもとでのそこでの密度のおよそ 10^{-1650} 倍である。いずれにしても、これほど極端であれば観測値は一つで十分である。

小問 (ii)

$X_1, \ldots, X_{1000}$ を互いに独立な結果とし、$\bar{X}$ をその平均とする。仮説のもとで各 X_i は平均 0、分散 3 をもつので、

$$\mathrm{E}(\bar{X}) = 0, \qquad \mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{3}{1000}, \qquad \mathrm{sd}(\bar{X}) = \sqrt{0.003} \approx 0.0548.$$

分散は有限で、1000 は大きいから、中心極限定理（central limit theorem）により、f 自体は正規分布の密度とは似ても似つかないにもかかわらず、$\bar{X}$ は近似的に $\mathrm{N}(0, 0.003)$ に従う。観測された平均は 0 から

$$\frac{0.23}{0.0548} \approx 4.2$$

標準偏差（standard deviation）分だけ離れており、

$$\mathrm{P}(|\bar{X}| \geq 0.23) \approx \mathrm{P}(|Z| \geq 4.2) \approx 3 \times 10^{-5}.$$

つまり、仮説が正しければ、標本平均が 0 からこれほど離れるのは、実験全体を十万回繰り返して三回程度である。$\mu \approx 0.23$ という対立仮説のもとでは、同じデータはまったく典型的なものになる。したがってこの場合も、(i) ほど圧倒的ではないにせよ、確信は深刻に揺らぐはずである。慣例的などの有意水準（significance level）、例えば 1% や 0.1% でも、$\mu = 0$ は棄却される。

> **考えてみよう** チェビシェフの不等式を使えば、中心極限定理を避けられないだろうか。

チェビシェフ（Chebyshev）の不等式を用いると、近似なしに $\mathrm{P}(|\bar{X}| \geq 0.23) \leq 0.003/0.23^2 \approx 0.057$ が得られる。これは示唆的ではあるが決定的ではない。これほど極端な結果が排除されるのは約 6% の水準までにすぎないからである。中心極限定理を使えばはるかに鋭い値が得られ、裾が $\mathrm{e}^{-x^2/2}$ のように減衰する分布の観測値が 1000 個あるならば、この近似は信頼してよい。

検算

- シンプソンの公式（Simpson's rule）により $\int x^2 \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 2.506628\ldots = \sqrt{2\pi}$、また $\int x^2 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = 3.000$ が得られる。
- 裾の確率の公式 $\mathrm{P}(|X| \geq a) = 2(a\phi(a) + \mathrm{P}(Z \geq a))$ は、$a = 3$ において数値積分の結果と一致する（いずれも 0.029291）。

- $|X|$ は、独立な三つの $\mathrm{N}(0,1)$ 変数からなるベクトルの長さと同じ密度をもつ。この方法で X をシミュレーションし、1000 個の値の平均を 4000 回求めたところ、平均が $2\,\mathrm{sd}$ を超えたのは約 4.9% で、正規分布による予測 4.6% に近く、0.23 を超えたものは一つもなかった。

よくある間違い

- 指数関数の部分が標準正規分布に見えるからといって $\mathrm{Var}(X) = 1$ とすること。余分な x^2 が確率の重みを外側へ押し出すので、分散は 3 になる。
- (ii) で、$\bar{X}$ ではなく単一の X に正規分布による検定を適用すること、あるいは分散を 1000 で割り忘れること。
- (i) で「観測値一つでは何も証明できない」と論じること。これほど極端な結果であれば、証明できるのである。

STEP のその先へ

これは、仮説検定（hypothesis testing）を第一原理から眺めたものである。大学一年次の統計学の講義では、これを p 値（p-value）、尤度比（likelihood ratio）（ネイマン–ピアソンの補題（Neyman–Pearson lemma））、中心極限定理を用いて定式化する。ちなみに $|X|$ は自由度 3 のカイ分布（chi distribution）に従い、これは気体分子の速さのマクスウェル–ボルツマン分布（Maxwell–Boltzmann distribution）にほかならない。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、ここで用いた極限定理を扱っている。

解答例

STEP III 1995、第 1 問

純粋数学 ・ 連立 1 次方程式

STEP III 1995、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/95-s3-q1

鍵となる考え方

第 2 式と第 3 式は y と z の項が同じなので、一方から他方を引くと未知数が一度に二つ消え、x だけの方程式が残る。この問題の大部分は、その操作、あるいは後で行う割り算が成り立たなくなる a と b の値を調べることにある。係数の行列式（determinant）を見れば、そのような値がどこにあるかが前もってわかる。そこでまず行列式を計算し、それから例外的な場合を一つずつ扱う。

解答

各方程式に番号をつける。

$$a^2x + ay + z = a^2 \tag{1}$$

$$ax + y + bz = 1 \tag{2}$$

$$a^2bx + y + bz = b. \tag{3}$$

どこで問題が起こりうるか

係数行列（coefficient matrix）の行列式を第 1 行に沿って展開すると、

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ a^2b & 1 & b \end{vmatrix} = a^2(b-b) - a(ab - a^2b^2) + (a - a^2b)$$

$$= a^3b^2 - 2a^2b + a = a(ab-1)^2.$$

したがって、$a=0$ または $ab=1$ でない限り、解はちょうど一つである。これらの場合には解が存在しないか無数に存在するかのどちらかであり、どちらであるかを決めるには方程式そのものを調べなければならない。

一般の場合：$a\neq 0$ かつ $ab\neq 1$

(3) から (2) を引くと y と z が消える。

$$(a^2b-a)x=b-1, \qquad \text{すなわち} \qquad a(ab-1)\,x=b-1.$$

$a\neq 0$ かつ $ab\neq 1$ であるから両辺を割ることができ、

$$x=\frac{1-b}{a(1-ab)}.$$

を得る。次に、(1) より $z=a^2-a^2x-ay$ である。これを (2) に代入すると、

$$ax+y+a^2b-a^2bx-aby=1 \quad\Longrightarrow\quad (1-ab)\,y=(1-a^2b)-ax(1-ab).$$

$1-ab\neq 0$ で割り、$ax=\dfrac{1-b}{1-ab}$ を用いると、

$$y=\frac{1-a^2b}{1-ab}-\frac{1-b}{1-ab}=\frac{b-a^2b}{1-ab}=\frac{b(1-a^2)}{1-ab}.$$

最後に、

$$\begin{aligned} z=a^2-a(ax)-ay&=a^2-\frac{a(1-b)}{1-ab}-\frac{ab(1-a^2)}{1-ab}\\ &=\frac{a^2-a^3b-a+ab-ab+a^3b}{1-ab}=\frac{a(a-1)}{1-ab}. \end{aligned}$$

よって、$a\neq 0$ かつ $ab\neq 1$ のとき、ただ一つの解は

$$\boxed{x=\frac{1-b}{a(1-ab)}, \qquad y=\frac{b(1-a^2)}{1-ab}, \qquad z=\frac{a(a-1)}{1-ab}.}$$

である。

$a=0$ の場合

方程式は

$$z=0, \qquad y+bz=1, \qquad y+bz=b,$$

となるので、$z=0$、$y=1$ であり、最後の式は $1=b$ を意味する。したがって、

- $a=0$ かつ $b\neq 1$ ならば、**解は存在しない**。
- $a=0$ かつ $b=1$ ならば、解は任意の実数 λ に対して $x=\lambda$、$y=1$、$z=0$ である。x はもはやどの方程式にも現れないので、解は直線をなす。

$ab = 1$ の場合（このとき $a \neq 0$）

考えてみよう $ab = 1$ のとき、方程式 $a(ab-1)x = b-1$ の左辺は 0 になる。このことから何がわかるか。

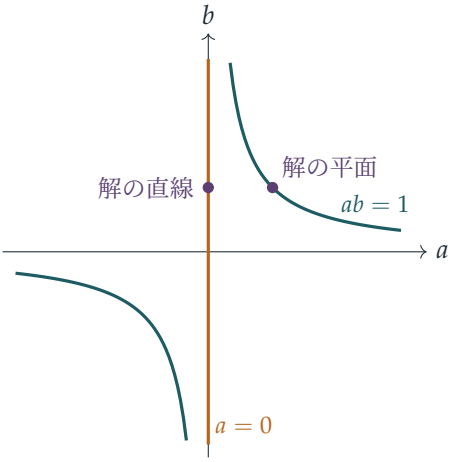
(3) から (2) を引く操作は依然として正しく、その結果は $0 = b-1$ となる。よって $b \neq 1$ ならば、方程式は矛盾する（inconsistent）。$ab = 1$ のもとでは、条件 $b = 1$ から $a = 1$ が従う。したがって、

- $ab = 1$ かつ $a \neq 1$ ならば、**解は存在しない**。
- $a = b = 1$ ならば、三つの方程式はすべて $x + y + z = 1$ となるので、解は任意の実数 λ, μ に対して $x = \lambda$、$y = \mu$、$z = 1 - \lambda - \mu$ である。解は平面全体をなす。

これは行列式に 2 乗の因数 $(ab-1)^2$ が現れることと整合している。$a = b = 1$ では行列の階数（rank）が一気に 1 まで下がるので自由なパラメータが二つあり、一方 $a = 0$、$b = 1$ では階数は 2 なので自由なパラメータは一つしかない。

まとめ

下の図は (a, b) 平面を表している。直線 $a = 0$ と双曲線（hyperbola）$ab = 1$ の上以外では、解はただ一つである。これらの上では、印をつけた二点を除いて解は存在しない。



- $a \neq 0$、$ab \neq 1$：上で枠囲みしたただ一つの解。
- $a = 0$、$b = 1$：$(x, y, z) = (\lambda, 1, 0)$、$\lambda \in \mathbb{R}$。
- $a = b = 1$：$(x, y, z) = (\lambda, \mu, 1 - \lambda - \mu)$、$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$。

- $a = 0$ かつ $b \neq 1$、または $ab = 1$ かつ $a \neq 1$：解なし。

検算

$a = 2$、$b = 3$ とする。公式から $x = \frac{1}{5}$、$y = \frac{9}{5}$、$z = -\frac{2}{5}$ が得られ、実際 $4 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{9}{5} - \frac{2}{5} = 4 = a^2$、$\frac{2}{5} + \frac{9}{5} - \frac{6}{5} = 1$、$\frac{12}{5} + \frac{9}{5} - \frac{6}{5} = 3 = b$ が成り立つ。もう一つの手早い確認として $b = 1$、$a \neq 0, 1$ を考えると、公式から $x = 0$、$y = 1 + a$、$z = -a$ が得られ、これらは三つの方程式をすべて満たす。また、無作為に選んだ 2000 組の (a, b) について、行列式と一般の公式を有理数の厳密な計算で確かめた。

よくある間違い

- $a = 0$ と $ab = 1$ を先に除外せずに $a(ab - 1)$ で割ってしまう。「考えうるすべての値について」とあるのは、特別な場合こそがこの問題の要点だということである。
- 「行列式が 0 だから解なし」と言ってしまう。行列式が 0 であることから否定されるのは解が**ただ一つ**であることだけであり、ここではパラメータの特別な値のうち二つで解が無数に存在する。
- $ab = 1$ と $b = 1$ を合わせると $a = 1$ が従うこと、したがって双曲線上の特別な点が一つだけであることを見落とす。

STEP のその先へ

これは、行列の階数が連立一次方程式（linear system）をどのように支配するかを示す小さな例である。連立方程式が解をもつのは、係数行列と拡大係数行列（augmented matrix）の階数が等しいときであり、かつそのときに限る。そしてそのとき、解全体は次元 3 − 階数 の集合をなす。一点、直線、平面という結果が得られたのはこのためである。ガウスの消去法（Gaussian elimination）を使えばこれらすべてを系統的に扱うことができ、ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は多くの例題とともにこの内容を展開している。

解答例

STEP III 1995、第 2 問

純粋数学 ・ 漸化式による積分

STEP III 1995、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/95-s3-q2

鍵となる考え方

因数 $\sqrt{x}$ と $\sqrt{a-x}$ はどちらも置換（substitution）$x = a\sin^2\theta$ を示唆している。この置換により、これらは同時に $\sqrt{a}\sin\theta$ と $\sqrt{a}\cos\theta$ になる（I_0 については、うまい幾何的な近道もある）。漸化式（reduction formula）を得るには、x の指数が 1 だけ下がるように部分積分（integration by parts）を行う。すると $a-x$ の指数が 1 だけ上がるので、再び $a-x$ を用いてそれを分離する。これにより I_n 自身が再び現れるので、項をまとめることができる。

以下、つねに $a > 0$ とする。

解答

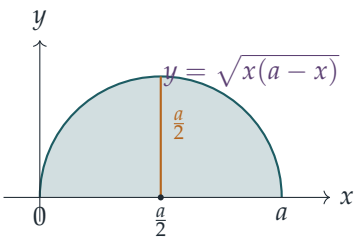
I_0 を求める

$\mathrm{I}_0 = \int_0^a x^{1/2}(a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x$ を求めたい。$x = a\sin^2\theta$ とおくと、$\mathrm{d}x = 2a\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$ である。x が 0 から a まで動くとき、θ は 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで動き、この範囲で $\sin\theta, \cos\theta \geq 0$ である。よって $\sqrt{x} = \sqrt{a}\sin\theta$ かつ $\sqrt{a-x} = \sqrt{a}\cos\theta$ であり、符号の問題は生じない。したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_0 &= \int_0^{\pi/2} (\sqrt{a}\sin\theta)(\sqrt{a}\cos\theta)\,2a\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2a^2\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{8},\end{aligned}$$

となり、求める結果が得られる。ここでは $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ と $\sin^2 2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 4\theta)$ を用い、さらに $\cos 4\theta$ の $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上での積分が 0 になることを用いた。

図で見る。 $y=\sqrt{x(a-x)}$ とすると $y^2=ax-x^2$ であり、これを変形すると $y\geq 0$ のもとで $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$ となる。よって I_0 は半径 $\frac{a}{2}$ の半円（semicircle）の面積であり、その値は $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi a^2}{8}$ である。



漸化式

$n\geq 1$ とする。$u=x^{n+\frac{1}{2}}$、$\mathrm{d}v=(a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x$ として部分積分する。このとき $\mathrm{d}u=\left(n+\frac{1}{2}\right)x^{n-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$、$v=-\frac{2}{3}(a-x)^{3/2}$ である。これより

$$\mathrm{I}_n=\left[-\tfrac{2}{3}x^{n+\frac{1}{2}}(a-x)^{3/2}\right]_0^a+\frac{2}{3}\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^a x^{n-\frac{1}{2}}(a-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x.$$

を得る。境界項は両端で 0 になる。$x=a$ では因数 $(a-x)^{3/2}$ により、$x=0$ では $x^{n+\frac{1}{2}}$ による。なお $\frac{2}{3}\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{2n+1}{3}$ である。

> **考えてみよう** 新しい積分には $(a-x)^{3/2}$ が含まれており、これは I_{n-1} の形ではない。これをどう扱えばよいだろうか。

$(a-x)^{3/2}=(a-x)\,(a-x)^{1/2}$ と書き、最初の因数を展開する：

$$\int_0^a x^{n-\frac{1}{2}}(a-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x=a\int_0^a x^{n-\frac{1}{2}}(a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x-\int_0^a x^{n+\frac{1}{2}}(a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x=a\,\mathrm{I}_{n-1}-\mathrm{I}_n.$$

したがって

$$\mathrm{I}_n=\frac{2n+1}{3}\left(a\,\mathrm{I}_{n-1}-\mathrm{I}_n\right)\quad\Longrightarrow\quad(2n+4)\,\mathrm{I}_n=(2n+1)\,a\,\mathrm{I}_{n-1},$$

となる。ここでは両辺を 3 倍し、I_n の項をまとめた（$3+2n+1=2n+4$）。これが求める結果である。

I_n の値を求める

$k=n,n-1,\ldots,1$ に対して $\mathrm{I}_k=\dfrac{(2k+1)a}{2k+4}\,\mathrm{I}_{k-1}$ を順に適用し、I_0 まで下ろすと

$$\mathrm{I}_n=a^n\,\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k+4)}\cdot\frac{\pi a^2}{8}.$$

を得る。次に二つの積を整理する。分子は奇数の積 $3\cdot5\cdots(2n+1)$ である。欠けている偶数 $2\cdot4\cdots(2n)=2^n n!$ を補うと

$$\prod_{k=1}^{n}(2k+1)=\frac{(2n+1)!}{2^n\,n!}.$$

となる。分母は $\prod_{k=1}^{n}2(k+2)=2^n\cdot3\cdot4\cdots(n+2)=2^n\,\dfrac{(n+2)!}{2}$ である。よって

$$\mathrm{I}_n=\frac{\pi a^{n+2}}{8}\cdot\frac{(2n+1)!}{2^n\,n!}\cdot\frac{2}{2^n\,(n+2)!}=\boxed{\frac{\pi\,a^{n+2}\,(2n+1)!}{4^{n+1}\,n!\,(n+2)!}}$$

この式は $n=0$ のときにも正しい値 $\frac{\pi a^2}{8}$ を与える。

検算

- $n=1$：漸化式より $6\mathrm{I}_1=3a\mathrm{I}_0$ なので $\mathrm{I}_1=\frac{\pi a^3}{16}$ である。公式からは $\pi a^3\cdot3!/(16\cdot1!\cdot3!)=\frac{\pi a^3}{16}$ が得られ、一致する。
- 対称性：x を $a-x$ で置き換えると、$\mathrm{I}_1=\int_0^a x^{1/2}(a-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x$ でもあることがわかる。二つの表示を足し合わせると $2\mathrm{I}_1=a\mathrm{I}_0$ となり、これにより $\mathrm{I}_1=\frac{\pi a^3}{16}$ が独立に確かめられる。
- $a=1$ として数値的に計算すると、シンプソン則（Simpson's rule）または中点則（midpoint rule）による数値積分で $\mathrm{I}_0\approx0.392699=\pi/8$、$\mathrm{I}_3\approx0.085903$ が得られる。公式からは $\pi\cdot7!/(4^4\cdot3!\cdot5!)=35\pi/1280\approx0.085903$ となる。

よくある間違い

- v の符号を間違える：$\int(a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}(a-x)^{3/2}$ であり、合成関数の微分法（chain rule）からマイナス符号が出てくる。
- 右辺に I_n が再び現れ、それをまとめる必要があることに気づかず、直接 I_{n-1} にたどり着こうとする。
- $3\cdot4\cdots(n+2)=(n+2)!/2$ における因数 2 を落とす。

STEP のその先へ

これらの積分は、ベータ関数（Beta function）$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t$ の特別な場合である。$x=at$ と置換すると $\mathrm{I}_n=a^{n+2}B\left(n+\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ であることがわかる。ここで

証明した漸化式は、恒等式 $B(p+1,q) = \frac{p}{p+q}B(p,q)$ の一つの場合である。大学1年次の講義では公式 $B(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ を学ぶが、これは π がどこから来るのかを説明してくれる。すなわち $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ である。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この種の漸化式の問題がさらに収められている。

解答例

STEP III 1995、第 3 問

純粋数学 ・ 減衰振動

> **STEP III 1995、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q3

鍵となる考え方

$x = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいてみる。すると微分方程式（differential equation）は λ の 2 次方程式になり、3 つの場合分けはその判別式（discriminant）の 3 つの可能性（異なる 2 つの実数解、重解、虚数解）にほかならない。減衰振動の場合、停留点（stationary point）は半周期ずつの等しい時間間隔で現れ、そのような各区間において振動する因子は符号が反転するだけであり、指数関数の因子は同じ割合で小さくなる。これが、相続く極値の比が一定になる理由である。

解答

$x = \mathrm{e}^{\lambda t}$ を代入すると、補助方程式（auxiliary equation）

$$\lambda^2 + 2k\lambda + 1 = 0, \qquad \lambda = -k \pm \sqrt{k^2 - 1}.$$

が得られる。以下を通して、A と B は任意定数である。

小問 (i)： $k > 1$

解は相異なる実数であるから、

$$x = A\,\mathrm{e}^{(-k+\sqrt{k^2-1})\,t} + B\,\mathrm{e}^{(-k-\sqrt{k^2-1})\,t}.$$

となる。（$\sqrt{k^2-1} < k$ より、指数はどちらも負である。これは振動を伴わない過減衰（overdamping）である。）

小問 (ii)：$k = 1$

補助方程式は $(\lambda+1)^2 = 0$ であり、重解 $\lambda = -1$ をもつ。もう 1 つの独立な解は $t\,\mathrm{e}^{-t}$ であるから、

$$x = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{-t}.$$

となる。（確認：$x = t\mathrm{e}^{-t}$ ならば $x' = (1-t)\mathrm{e}^{-t}$、$x'' = (t-2)\mathrm{e}^{-t}$ であり、$(t-2) + 2(1-t) + t = 0$ となる。）

小問 (iii)：$0 < k < 1$

このとき $k^2 - 1 < 0$ であるから、解は $\lambda = -k \pm \mathrm{i}\omega$ である。ただし

$$\omega = \sqrt{1-k^2} > 0.$$

である。$\mathrm{e}^{(-k\pm\mathrm{i}\omega)t}$ の実数の組み合わせをとると、

$$x = \mathrm{e}^{-kt}\big(A\cos\omega t + B\sin\omega t\big).$$

となる。

相続く極値

$x(0) = 0$ より $A = 0$ でなければならないので、$x = B\,\mathrm{e}^{-kt}\sin\omega t$ であり、$B \neq 0$ である（そうでなければ $x \equiv 0$ となり、極大も極小も存在しない）。微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B\,\mathrm{e}^{-kt}\big(\omega\cos\omega t - k\sin\omega t\big).$$

$k^2 + \omega^2 = 1$ であるから、$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ として $k = \sin\varphi$、$\omega = \cos\varphi$ と書くことができ、このとき

$$\omega\cos\omega t - k\sin\omega t = \cos(\omega t + \varphi).$$

となる。よって $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B\,\mathrm{e}^{-kt}\cos(\omega t + \varphi)$ であり、これは $\omega t + \varphi$ が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍のときちょうど 0 になり、そのような各時刻で符号を変える。したがって（$t > 0$ における）停留点は

$$t_n = t_1 + \frac{(n-1)\pi}{\omega}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

にあり、π/ω ずつ等間隔に並ぶ。さらに各停留点で $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ の符号が変わるので、それらは確かに極大と極小が交互に現れる。

? **考えてみよう**　t_1 を具体的に求めずに、$x(t_{n+1})$ と $x(t_n)$ を比較するにはどうすればよいか？

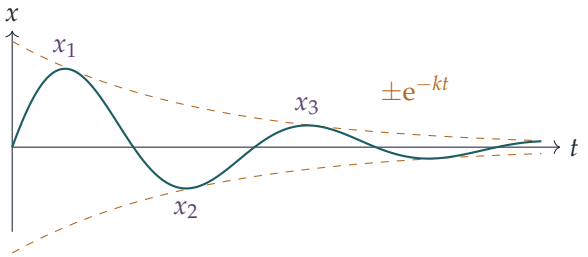
時間を π/ω だけ進めると ωt に π が加わり、$\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$ である。よって

$$x_{n+1} = B\,\mathrm{e}^{-k(t_n+\pi/\omega)}\sin(\omega t_n+\pi) = -\,\mathrm{e}^{-k\pi/\omega}\,B\,\mathrm{e}^{-kt_n}\sin\omega t_n = -\,\mathrm{e}^{-k\pi/\omega}\,x_n.$$

また $x_n \neq 0$ である。なぜなら、$\sin\omega t_n = 0$ ならば $\cos\omega t_n = \pm 1$ となり、このとき $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \pm B\omega\,\mathrm{e}^{-kt_n} \neq 0$ となってしまうからである。ゆえに

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \alpha, \qquad \text{ただし} \alpha = \mathrm{e}^{-k\pi/\omega} = \exp\left(-\frac{k\pi}{\sqrt{1-k^2}}\right),$$

であり、これは要求どおり n によらない。（負の符号は、極大と極小が交互に現れることを裏づけている。）



k^2 の公式

対数をとると $\ln\alpha = -\dfrac{k\pi}{\sqrt{1-k^2}}$ であるから、

$$(\ln\alpha)^2 = \frac{k^2\pi^2}{1-k^2} \implies (\ln\alpha)^2 - k^2(\ln\alpha)^2 = k^2\pi^2 \implies k^2 = \frac{(\ln\alpha)^2}{\pi^2+(\ln\alpha)^2},$$

となり、これが求める結果である。

検算

- $k \to 0$（減衰なし）のとき $\alpha \to 1$、$\ln\alpha \to 0$ であるから、公式は $k^2 \to 0$ を与え、期待どおりである。このとき極値はすべて同じ大きさになる。
- $k \to 1^-$ のとき $\alpha \to 0$、$(\ln\alpha)^2 \to \infty$ であるから $k^2 \to 1$ となる。臨界減衰（critical damping）では、運動はもはや振り戻さない。
- 数値的に、$k = 0.5$、$x(0) = 0$ として方程式を逐次的に解き進めると、相続く極値の比は 0.163034 となり、$\mathrm{e}^{-0.5\pi/\sqrt{0.75}} \approx 0.163034$ と一致する。さらに $(\ln\alpha)^2/(\pi^2+(\ln\alpha)^2) = 0.25 = k^2$ となる。

よくある間違い

- 極大とその次の極小の間の時間を、半周期 π/ω ではなく 1 周期 $2\pi/\omega$ としてしまう。こうすると α ではなく α^2 が得られてしまう。
- 極値が $\sin\omega t = \pm 1$ となるところで生じると考えてしまう。実際はそうではない。減衰する因子のために極値の位置は早まり、$\tan\omega t = \omega/k$ となるところに来る。上の議論では極値の正確な位置は一切必要なく、その間隔だけが必要である。

STEP のその先へ

量 $-\ln\alpha$ は**対数減衰率**（logarithmic decrement）と呼ばれる。技術者は記録された振動からこれを測定し、この問題の公式によってそれを減衰の大きさ k に換算する。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）では、過減衰・臨界減衰・減衰振動が詳しく扱われている。

解答例

STEP III 1995、第 4 問

純粋数学 ・ 三角級数の和

> **STEP III 1995、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q4

鍵となる考え方

余弦の和は複素指数関数（complex exponential）の和の実部（real part）であり、$\sum e^{ik\theta}$ は等比級数（geometric series）である。これを和の公式でまとめ、さらに分子と分母から「半角」（half-angle）の因子 $e^{i\theta/2}$ をくくり出すと、扱いにくい $e^{im\theta}-1$ の項が正弦に変わる。分母の $\sin(\frac{1}{2}\theta)$ はここから現れるのである。不等式については、$C_n(\theta)$ を $\frac{1}{2}$ がはっきりと分離する形に書き直すのがこつである。

解答

和 C_n と S_n

$z = e^{i\theta}$ とおく。$0 < \theta < 2\pi$ より $z \neq 1$ であるから、等比級数の和の公式が使える：

$$C_n(\theta) + iS_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1}.$$

ここで $e^{i\phi}-1 = e^{i\phi/2}\left(e^{i\phi/2}-e^{-i\phi/2}\right) = 2i\,e^{i\phi/2}\sin(\frac{1}{2}\phi)$ を、分子（$\phi = (n+1)\theta$ として）と分母（$\phi = \theta$ として）に用いると、

$$C_n(\theta) + iS_n(\theta) = \frac{2i\,e^{i(n+1)\theta/2}\sin\left(\frac{1}{2}(n+1)\theta\right)}{2i\,e^{i\theta/2}\sin(\frac{1}{2}\theta)} = e^{in\theta/2}\,\frac{\sin\left(\frac{1}{2}(n+1)\theta\right)}{\sin(\frac{1}{2}\theta)}.$$

$0 < \frac{1}{2}\theta < \pi$ であるから、分母は 0 でない。分数部分は実数であるから、（$e^{in\theta/2} = \cos\frac{1}{2}n\theta + i\sin\frac{1}{2}n\theta$ を用いて）実部と虚部（imaginary part）を比較すると

$$C_n(\theta) = \frac{\cos(\frac{1}{2}n\theta)\sin\left(\frac{1}{2}(n+1)\theta\right)}{\sin(\frac{1}{2}\theta)}, \qquad S_n(\theta) = \frac{\sin(\frac{1}{2}n\theta)\sin\left(\frac{1}{2}(n+1)\theta\right)}{\sin(\frac{1}{2}\theta)}.$$

を得る。前者が求める結果であり、後者は S_n に対応する式である。

考えてみよう 複素数を使わずにこれを導く方法はあるだろうか？

ある。各項に $2\sin(\frac{1}{2}\theta)$ を掛け、積和公式（product-to-sum formula）

$$2\sin(\tfrac{1}{2}\theta)\cos k\theta = \sin\big((k+\tfrac{1}{2})\theta\big) - \sin\big((k-\tfrac{1}{2})\theta\big).$$

を用いればよい。$k=0$ から n まで和をとると、最後と最初の項を除いてすべて打ち消し合う（望遠鏡和（telescoping sum））：

$$2\sin(\tfrac{1}{2}\theta)\,C_n(\theta) = \sin\big((n+\tfrac{1}{2})\theta\big) - \sin(-\tfrac{1}{2}\theta) = \sin\big((n+\tfrac{1}{2})\theta\big) + \sin(\tfrac{1}{2}\theta). \qquad (*)$$

和積公式（sum-to-product formula）$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$ を $A=(n+\frac{1}{2})\theta$、$B=\frac{1}{2}\theta$ として用いると、右辺は $2\sin\big(\frac{1}{2}(n+1)\theta\big)\cos(\frac{1}{2}n\theta)$ となり、先に求めた結果と一致する。

不等式

式 $(*)$ はまさに求めたい形である。$2\sin(\frac{1}{2}\theta)\neq 0$ で割ると

$$C_n(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})\theta\big)}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)}.$$

となる。（与えられた公式から出発する場合は、$2\cos(\frac{1}{2}n\theta)\sin\big(\frac{1}{2}(n+1)\theta\big) = \sin\big((n+\frac{1}{2})\theta\big) + \sin(\frac{1}{2}\theta)$ を用いれば同じ式が得られる。）したがって

$$\Big|C_n(\theta) - \frac{1}{2}\Big| = \frac{\big|\sin\big((n+\frac{1}{2})\theta\big)\big|}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)} \leq \frac{1}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)},$$

である。ここで、$0<\theta<2\pi$ のとき $\sin(\frac{1}{2}\theta)>0$ であること（よって分母に絶対値（modulus）は不要である）と、$|\sin x|\leq 1$ であることを用いた。これが求める不等式であり、等号が成り立つのは $\sin\big((n+\frac{1}{2})\theta\big)=\pm 1$ のとき、かつそのときに限る。

考えてみよう $\sin(\frac{1}{2}\theta)$ が正であることはなぜ重要なのだろうか？

もし θ が $(0,2\pi)$ の外の値もとれるとすると、$\sin(\frac{1}{2}\theta)$ は負になりうる。そのとき不等式の右辺は負となるが、絶対値が負の数以下になることはありえない。与えられた範囲では $\frac{1}{2}\theta\in(0,\pi)$ であるから、上界は確かに正の数である。

検算

- $n=1$ のとき：$C_1 = 1+\cos\theta = 2\cos^2(\frac{1}{2}\theta)$ であり、公式からは $\cos(\frac{1}{2}\theta)\sin\theta/\sin(\frac{1}{2}\theta) = 2\cos^2(\frac{1}{2}\theta)$ が得られる。同様に、$S_1=\sin\theta$ は $\sin(\frac{1}{2}\theta)\sin\theta/\sin(\frac{1}{2}\theta)$ と一致する。

- $\theta \to 0$ のとき、C_n の公式は $(n+1)$ に近づく。これは 1 を $n+1$ 個足した和である。一方、上界 $1/(2\sin\frac{1}{2}\theta)$ は発散するが、そうでなければならない。
- 数値で確かめる。$n=3$、$\theta=1$ のとき、直接和をとると $C_3(1) \approx 0.1342$ となって公式と一致し、$|C_3 - \frac{1}{2}| \approx 0.366 \leq 1/(2\sin\frac{1}{2}) \approx 1.043$ である。等号は、たとえば $n=2$、$\theta=\pi/5$ のときに成り立ち、両辺とも 1.618… となる。

よくある間違い

- 和が $k=0$ から始まり、項が $n+1$ 個あることを忘れる。等比級数の分子は $e^{in\theta}$ ではなく $e^{i(n+1)\theta}$ である。
- 分母を実数にしないまま $\left(e^{i(n+1)\theta}-1\right)/\left(e^{i\theta}-1\right)$ の実部をとろうとする。半角による因数分解を使えば、これがすっきりと行える。
- $|\sin(\frac{1}{2}\theta)|$ と書いておきながら、それがなぜ $\sin(\frac{1}{2}\theta)$ に等しいのかを述べない。

STEP のその先へ

関数 $C_n(\theta) - \frac{1}{2} = \sin\left((n+\frac{1}{2})\theta\right)/\left(2\sin\frac{1}{2}\theta\right)$ は、定数倍を除いて**ディリクレ核**（Dirichlet kernel）であり、フーリエ級数（Fourier series）の理論の中心的な対象である。関数の第 n 部分フーリエ和は、この核に関するその関数の平均として表される。ここで証明した評価は、分子の振動と合わせて、フーリエ級数がどのようなときに収束（convergence）するかを証明する出発点となる（また、$\sum\cos(k\theta)/k$ のような級数に対するディリクレ（Dirichlet）の判定法の出発点でもある）。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）には、まさにこれらの和を用いたフーリエ級数についての読みやすい章がある。

解答例

STEP III 1995、第 5 問

純粋数学 ・ マクローリン級数

> **STEP III 1995、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q5

鍵となる考え方

$\theta = \sin^{-1} x$ とおくと、$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = 1/\sqrt{1-x^2}$ である。$y^{(1)}$ に $\sqrt{1-x^2}$ を掛けるとこの厄介な因子が打ち消され、もう一度微分すれば平方根を含まない 2 階微分方程式（second-order differential equation）が得られる。次にライプニッツ（Leibniz）の公式によってこの方程式は漸化式（recurrence）に変わる。$x = 0$ では因子 $1 - x^2$ が 1 になり、x を含む項は消える。こうして漸化式から、0 におけるすべての導関数（derivative）の値が得られる。

解答

微分方程式

$\theta = \sin^{-1} x$ とおくと $\sin\theta = x$ であり、$|x| < 1$ のとき $\cos\theta = \sqrt{1-x^2} > 0$、さらに $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ である。このとき $y = \sin^2 m\theta$ であり、合成関数の微分法（chain rule）により

$$y^{(1)} = 2m \sin m\theta \cos m\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m \sin 2m\theta}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{よって} \qquad \sqrt{1-x^2}\, y^{(1)} = m \sin 2m\theta.$$

これを x について微分する。左辺には積の微分法（product rule）を用いると

$$\sqrt{1-x^2}\, y^{(2)} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, y^{(1)} = 2m^2 \cos 2m\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

両辺に $\sqrt{1-x^2}$ を掛け、$\cos 2m\theta = 1 - 2\sin^2 m\theta = 1 - 2y$ を用いると

$$(1-x^2)\, y^{(2)} = x\, y^{(1)} + 2m^2(1-2y),$$

となり、これが求める方程式である。

考えてみよう なぜ先に $\sqrt{1-x^2}\,y^{(1)} = m\sin 2m\theta$ を2乗しないのか？

2乗すると $(1-x^2)\big(y^{(1)}\big)^2 = 4m^2y(1-y)$ となり、これを微分するとすべての項に因子 $2y^{(1)}$ が残る。すると $y^{(1)}$ で割らなければならないが、これは $x=0$ でゼロになり、しかもそこは後で注目するまさにその点である。2乗する前に微分すれば、この割り算をまったく避けられる。

漸化式

$n \geq 1$ として、この方程式をライプニッツの公式を用いて n 回微分する。$1-x^2$ のゼロでない導関数は2つ（$-2x$ と -2）しかなく、x のそれは1つしかないので、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1-x^2)y^{(2)}\right] &= (1-x^2)y^{(n+2)} - 2nx\,y^{(n+1)} - n(n-1)\,y^{(n)},\\ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[x\,y^{(1)}\right] &= x\,y^{(n+1)} + n\,y^{(n)},\\ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[2m^2(1-2y)\right] &= -4m^2\,y^{(n)}.\end{aligned}$$

最後の式には $n \geq 1$ が必要である。そのときに限り、定数 $2m^2$ が微分して消えるからである。両辺を等しいとおくと

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - 2nx\,y^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} = x\,y^{(n+1)} + n\,y^{(n)} - 4m^2y^{(n)},$$

であり、項を整理すると（$xy^{(n+1)}$ が $2n+1$ 個、また $n(n-1)+n = n^2$）

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)} = (2n+1)\,x\,y^{(n+1)} + (n^2-4m^2)\,y^{(n)} \qquad (n \geq 1),$$

が得られ、題意が示された。

マクローリン級数（Maclaurin series）

$x=0$ のとき $\theta = 0$ であるから

$$y(0) = \sin^2 0 = 0, \qquad y^{(1)}(0) = m\sin 0 = 0, \qquad y^{(2)}(0) = 0 + 2m^2(1-0) = 2m^2,$$

となる。最後の値は微分方程式から得られる。漸化式に $x=0$ を代入すると

$$y^{(n+2)}(0) = (n^2-4m^2)\,y^{(n)}(0) \qquad (n \geq 1).$$

奇数階の導関数。 $y^{(1)}(0) = 0$ であるから、漸化式より $y^{(3)}(0) = 0$、さらに $y^{(5)}(0) = 0$、以下同様であり、奇数階の導関数はすべて0で消える。y は x の偶関数（even function）なので、これは納得のいく結果である。

偶数階の導関数。 $n = 2j$ とおくと

$$y^{(2j+2)}(0) = (4j^2 - 4m^2)\, y^{(2j)}(0) = -4(m^2 - j^2)\, y^{(2j)}(0) \qquad (j \geq 1).$$

$y^{(2)}(0) = 2m^2$ から出発し、これを $j = 1, 2, \ldots, k-1$ に対して適用すると

$$y^{(2k)}(0) = 2m^2 \prod_{j=1}^{k-1} \bigl(-4(m^2 - j^2)\bigr) = (-1)^{k-1}\, 2^{2k-1} \prod_{j=0}^{k-1} (m^2 - j^2),$$

となる。ここで先頭の m^2 を $j = 0$ の因子として積に含めた。（$k = 1$ のとき、この式はあるべき値 $2m^2$ を与える。）

したがってマクローリン級数は

$$y = \sin^2\bigl(m \sin^{-1} x\bigr) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\, 2^{2k-1}}{(2k)!}\, m^2(m^2 - 1^2)(m^2 - 2^2) \cdots \bigl(m^2 - (k-1)^2\bigr)\, x^{2k},$$

であり、最初の数項は

$$y = m^2 x^2 - \frac{m^2(m^2 - 1)}{3}\, x^4 + \frac{2m^2(m^2 - 1)(m^2 - 4)}{45}\, x^6 - \cdots.$$

である。m が整数ならば、$k > |m|$ であるすべての項は因子 $m^2 - m^2 = 0$ を含むので級数は途中で終わり、y は $2|m|$ 次の多項式（polynomial）となる。

検算

- $m = 1$ のとき：$y = \sin^2(\sin^{-1} x) = x^2$ であり、級数も x^2 を与え、その後はゼロが続く。$m = 2$ のとき：級数は $4x^2 - 4x^4$ を与え、実際 $\sin^2 2\theta = 4\sin^2\theta(1 - \sin^2\theta) = 4x^2 - 4x^4$ である。
- $m = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$ のとき：$y = \sin^2(\pi/12) = \frac{1}{2}\bigl(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\bigr) \approx 0.066987$ である。級数は $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{32}x^6 + \cdots$ であり、最初の 3 項で 0.066895 となり、さらに項を加えれば差は縮まっていく。
- 微分方程式が無作為に選んだ x と m で成り立つこと、級数の係数が方程式を厳密に満たすこと、そして級数（300 項まで）が $|x| \leq 0.8$ において y と約 10^{-15} の精度で一致することを数値的に確認した。

よくある間違い

- $n = 0$ で漸化式を使ってしまうこと。漸化式は $n \geq 1$ のときにのみ成り立つ。$n = 0$ のときは定数 $2m^2$ が残るからである。$n = 0$ の場合は元の方程式そのものであり、$y^{(2)}(0) = 2m^2$ はそこから得たのであった。

- ライプニッツの公式の係数を誤ること。項 $-n(n-1)y^{(n)}$ は $\binom{n}{2}\cdot(-2)$ から生じるのであって、$\binom{n}{2}\cdot(-2x)$ からではない。
- 一般項を交代符号なしで書いてしまうこと。各段階で $4(j^2-m^2)$ を掛けるが、これは $m^2>j^2$ のとき負である。

STEP のその先へ

導関数から作ったマクローリン級数が元の関数に等しいとは限らないが、ここでは $|x|<1$ で等しくなる。この級数の収束半径（radius of convergence）は 1 であり（m が整数でないときは比判定法（ratio test）による）、$\sin^{-1}x$ は $x=\pm1$ で振る舞いが悪くなる。整数 m に対して得られる多項式はチェビシェフ多項式（Chebyshev polynomials）の仲間である。$\cos 2m\theta$ は $\sin\theta$ の多項式だからである。このような級数が本当に元の関数に収束する理由を知るには、Abbott の *Understanding Analysis* で剰余項付きのテイラーの定理（Taylor's theorem with remainder）について読むとよい。Needham の *Visual Complex Analysis* は、収束半径が ±1 における不具合によって決まる理由を説明している。

解答例

STEP III 1995、第 6 問

純粋数学 ・ 軌跡と反転

STEP III 1995、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/95-s3-q6

鍵となる考え方

円 $|z-\mathrm{i}|=1$ は原点を通るので、極形式（polar form）で表すとその方程式はとりわけ簡単になる。すなわち、絶対値（modulus）が偏角（argument）のただ一つの三角関数で表される。z を絶対値と偏角の形で表してしまえば、$1/z$ はすぐに求まる（絶対値の逆数をとり、偏角の符号を反転すればよい）。さらにそれを直交座標形式（Cartesian form）で書けば、円が直線に変わったことがわかる。最後の小問は同じ現象を逆向きにたどるものであり、$w=x+\mathrm{i}y$ とおいて直接計算するのがもっとも速い。

解答

z の絶対値

$r>0$ として $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ とおく。このとき $z-\mathrm{i}=r\cos\theta+\mathrm{i}(r\sin\theta-1)$ であるから、

$$\begin{aligned}|z-\mathrm{i}|^2=1 &\iff r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta-2r\sin\theta+1=1\\ &\iff r^2-2r\sin\theta=0\\ &\iff r=2\sin\theta,\end{aligned}$$

となる。ここで最後の段階では r で割ったが、$z\neq 0$ であるからこれは許される。よって

$$|z|=2\sin\theta.$$

$r>0$ であるから $\sin\theta>0$ でなければならず、したがって $0<\theta<\pi$ である。つまり、この円（中心 i、半径 1）は上半平面にあり、実軸とは原点でのみ接するが、原点は除

外されている。逆に、任意の $\theta \in (0, \pi)$ に対して $z = 2\sin\theta(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ は円上の点を与える。よって θ が $(0, \pi)$ を動くとき、z は原点を除く円全体を描く。

考えてみよう なぜ $|z| = 2\sin\theta$ は図から見て「明らか」なのだろうか。

0 から 2i への線分はこの円の直径である。半円に対する円周角の定理により、0、z、2i を頂点とする三角形は z で直角をなし、0 における角は $\frac{\pi}{2} - \theta$ である。よって $|z| = 2\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = 2\sin\theta$ となる。

$1/z$ の絶対値と偏角

$z = 2\sin\theta(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ であるから、

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2\sin\theta}\big(\cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta)\big),$$

よって

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{2\sin\theta}, \qquad \arg\frac{1}{z} = -\theta.$$

$0 < \theta < \pi$ であるから、角 $-\theta$ は $(-\pi, 0)$ にあり、したがってこれが偏角の主値（principal argument）である。

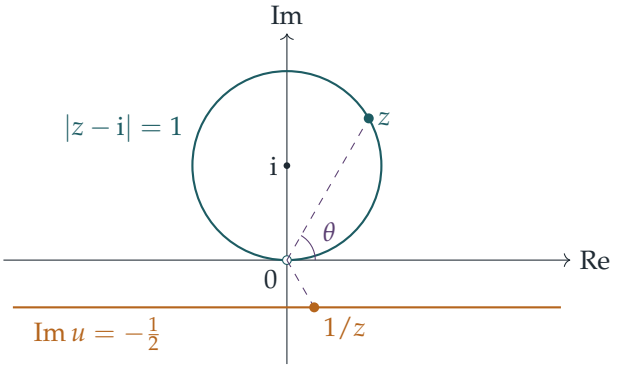
軌跡

$1/z$ が何を描くかを調べるため、直交座標形式に直す。

$$\frac{1}{z} = \frac{\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta}{2\sin\theta} = \tfrac{1}{2}\cot\theta - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}.$$

虚部はつねに $-\frac{1}{2}$ であり、θ が $(0, \pi)$ を動くとき、実部 $\frac{1}{2}\cot\theta$ はすべての実数値をちょうど一度ずつとる（$+\infty$ から $-\infty$ まで減少する）。よって $1/z$ は直線 $\mathrm{Im}\, u = -\frac{1}{2}$ の**全体**を描く。

以上より、z は中心 i、半径 1 の円（原点を除く）上にあり、$1/z$ は $-\frac{1}{2}\mathrm{i}$ を通る水平な直線上にある。下の図は両者を示し、あわせて $\theta = \frac{\pi}{3}$ に対応する点の組を描いている。このとき $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}$、$1/z = \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$ である。二つの点はそれぞれ角 θ と $-\theta$ の半直線上にあり、0 からの距離の積は 1 である。z が原点に近づくと、$1/z$ は直線に沿って無限遠へ去っていく。円の最上点 $z = 2\mathrm{i}$ は点 $-\frac{1}{2}\mathrm{i}$、すなわち直線上で原点にもっとも近い点に移る。



軌跡 C

$w=x+\mathrm{i}y\neq 0$ とする（$1/w$ が存在するためには $w\neq 0$ が必要である）。このとき

$$\frac{1}{w}=\frac{\bar{w}}{|w|^2}=\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2},\qquad \text{よって}\qquad \mathrm{Re}\,\frac{1}{w}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

したがって、$w\neq 0$ のとき

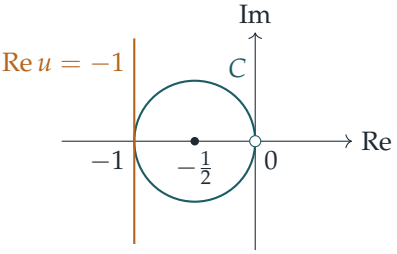
$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\frac{1}{w}=-1 &\iff x=-(x^2+y^2)\\ &\iff x^2+x+y^2=0\\ &\iff \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\tfrac{1}{4}.\end{aligned}$$

どの段階も逆にたどれる（0 でない x^2+y^2 を掛けただけである）ので、これは正真正銘の「必要十分条件」である。よって C は円

$$\left|w+\tfrac{1}{2}\right|=\tfrac{1}{2},$$

すなわち中心 $-\frac{1}{2}$、半径 $\frac{1}{2}$ の円から**原点を除いたもの**である。原点はこの円上にあるが、そこでは $1/w$ が定義されないので、C には含まれない。

これは最初の小問と鏡写しの関係にある。そこでは 0 を通る円が $z\mapsto 1/z$ によって 0 を通らない直線に移された。ここでは直線 $\mathrm{Re}\,u=-1$ が同じ写像（これは自分自身の逆写像である）によって 0 を通る円に移される。



検算

- $\theta = \frac{\pi}{6}$ とすると、$|z| = 1$、$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ であり、確かに $|z - \mathrm{i}| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right| = 1$ となる。その逆数は共役複素数 $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} \approx 0.866 - 0.5\mathrm{i}$ であり、予想どおり虚部は $-\frac{1}{2}$ である。
- $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき、円の最上点 $z = 2\mathrm{i}$ が得られ、$1/z = -\frac{1}{2}\mathrm{i}$ となる。
- C について：$w = -1$ は円上にあり $1/w = -1$ である。$w = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ は円上にあり $1/w = -1 - \mathrm{i}$ で、実部は -1 である。

各軌跡上の 10 000 個の無作為な点による数値実験でも、三つの結果がすべて確かめられた。

よくある間違い

- 範囲 $0 < \theta < \pi$ を忘れること。公式 $|z| = 2\sin\theta$ は $\sin\theta > 0$ となるところでしか意味をもたない。
- $1/z$ の軌跡を半直線や線分と答えること。$\cot\theta$ は $(0, \pi)$ 上ですべての実数値をとるので、直線全体である。
- C に原点を含めること。原点は円の方程式を満たすが、そこでは $1/w$ が存在しない。

STEP のその先へ

写像 $z \mapsto 1/z$ はメビウス変換（Möbius transformation）$z \mapsto (az + b)/(cz + d)$ の一例である。これらの写像についての中心的な事実は、「一般化された円」（円と直線）を一般化された円に移すということであり、$1/z$ によって直線に移されるのはちょうど原点を通る円である。これはリーマン球面（Riemann sphere）の幾何学の出発点であり、そこでは直線は無限遠点を通る円にすぎない。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、これらすべてを図とともに見事に展開している。

解答例

STEP III 1995、第 7 問

純粋数学 ・ 群と同型

> **STEP III 1995、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q7

鍵となる考え方

結合法則（associativity）は成り立つものとして与えられているので、各集合について確かめるべきことは三つしかない。閉じていること（closure）、単位元（identity）が存在すること、すべての元に逆元（inverse）が存在することである。このうち一つでも成り立たなければ、その集合は群（group）ではない。それを示すには具体的な反例（counterexample）を一つ挙げれば十分である。同型（isomorphism）については、どんな同型写像でも保たれる構造上の特徴に注目する。すなわち、元の個数と、各元の位数（order）である。

解答

以下、「乗法」とは、場合に応じて複素数の通常の乗法、n を法とする（modulo）乗法、または行列の積を意味する。

小問 (i)

$S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ とおく。

- **閉じていること**：$|z| = |w| = 1$ ならば $|zw| = |z||w| = 1$ である。
- **単位元**：$1 \in S$ であり、$1z = z1 = z$ である。
- **逆元**：$|z| = 1$ ならば $z \neq 0$ であり、$z^{-1} = \bar{z}$ である（$z\bar{z} = |z|^2 = 1$ だから）。これも絶対値は 1 である。

よって S は群（無限群）である。

小問 (ii)

4 を法とする乗法のもとで、集合 $\{0,1,2,3\}$ は閉じており、単位元 1 をもつ。しかし 0 には逆元がない。どの b に対しても $0\times b\equiv 0\not\equiv 1$ だからである。したがってこれは群ではない。(0 を取り除いても救われない。$2b$ は常に偶数なので 2 にもやはり逆元がなく、実際 $2\times 2\equiv 0$ であるから、$\{1,2,3\}$ は閉じてさえいない。)

小問 (iii)

加法定理(compound-angle formulae)を用いると、

$$\mathrm{M}(\alpha)\mathrm{M}(\beta)=\begin{pmatrix} c_\alpha c_\beta - s_\alpha s_\beta & -(s_\alpha c_\beta + c_\alpha s_\beta) \\ s_\alpha c_\beta + c_\alpha s_\beta & c_\alpha c_\beta - s_\alpha s_\beta \end{pmatrix} = \mathrm{M}(\alpha+\beta),$$

となる。ここで $c_\alpha=\cos\alpha$、$s_\alpha=\sin\alpha$ などと書いた。cos と sin は周期 2π をもつので、$\alpha+\beta$ を $[0,2\pi)$ に入るように調整したものを γ とすれば $\mathrm{M}(\alpha+\beta)=\mathrm{M}(\gamma)$ である。よって次が成り立つ。

- **閉じていること**:この集合の二つの行列の積は、再びこの集合に属する。
- **単位元**:$\mathrm{M}(0)=I$ である。
- **逆元**:$0<\theta<2\pi$ に対して $\mathrm{M}(\theta)\mathrm{M}(2\pi-\theta)=\mathrm{M}(2\pi)=I$ であり、$\mathrm{M}(0)$ は自分自身の逆元である。

よってこの集合は群である。

小問 (iv)

8 を法として、

$$3^2=9\equiv 1,\qquad 5^2=25\equiv 1,\qquad 7^2=49\equiv 1,$$
$$3\times 5=15\equiv 7,\qquad 3\times 7=21\equiv 5,\qquad 5\times 7=35\equiv 3.$$

1 を含む自明な積と合わせると、これで乗積表全体が得られる(乗法は可換(commutative)である)。どの積も $\{1,3,5,7\}$ に属するので、この集合は閉じている。単位元は 1 であり、各元は自分自身の逆元である。よってこれは位数 4 の群であり、1 以外のすべての元の位数は 2 である。

小問 (v)

単位行列 I の成分は整数であり、この集合は閉じている(整数の積と和は整数である)が、逆元の条件が成り立たない。零行列にはそもそも逆行列がない。正則な行列でさ

えうまくいかないことがある。$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は実行列の範囲で逆行列 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ をもち、逆元は一意的であるから、A には整数成分の逆行列は存在しない。よってこの集合は群ではない。

考えてみよう 零行列を指摘するだけで本当に十分なのだろうか。それとも、すべての行列について何か言う必要があるのだろうか。

逆元をもたない元が一つあれば、集合が群でないことを示すには十分である。二つ目の例は、問題が特異行列にとどまらないことを示している。整数行列が整数成分の逆行列をもつのは、その行列式（determinant）が ± 1 であるときであり、そのときに限る。$\det A \det A^{-1} = 1$ であり、両方の行列式が整数だからである。そのような行列に制限すれば、確かに群が得られる。

小問 (vi)

5 を法として、2 の累乗は

$$2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8 \equiv 3, \quad 2^4 = 16 \equiv 1.$$

である。よって $\{1,2,3,4\} = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3\}$ であり、指数を 4 を法として読めば $2^a 2^b = 2^{a+b}$ である。したがってこの集合は閉じており、1 が単位元で、2^a の逆元は 2^{4-a} である。これは群であり、2（または 3）で生成される位数 4 の巡回群（cyclic group）である。

同型

群であるのは (i)、(iii)、(iv)、(vi) であり、組は六つある。

(i) と (iii) は同型である。絶対値 1 の複素数はすべて、$0 \le \theta < 2\pi$ を満たす θ を用いて $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ の形に一意的に表せる。$\phi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \mathrm{M}(\theta)$ と定める。$[0, 2\pi)$ の相異なる θ は相異なる行列を与えるので（第 1 列 $(\cos\theta, \sin\theta)$ が θ を決定する）、これは全単射（bijection）である。また乗法を保つ。実際 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}$ かつ $\mathrm{M}(\alpha)\mathrm{M}(\beta) = \mathrm{M}(\alpha+\beta)$ であり、どちらの群でも角は 2π を法として調整される。幾何学的には、どちらの群も原点のまわりの平面の回転全体である。

(i) または (iii) と、(iv) または (vi)：同型でない。同型写像は全単射なので、二つの群の元の個数は等しくなければならない。群 (i) と (iii) は無限群であり、(iv) と (vi) はどちらも四つの元をもつ。これで四つの組が片づく。

考えてみよう (iv) と (vi) はどちらも四つの元をもち、どちらも可換である。何によって両者を区別できるだろうか。

(iv) と (vi)：同型でない。同型写像 ϕ はすべての元の位数を保つ。$\phi(g)^n = \phi(g^n)$ であり、ϕ は単射（injective）で単位元を単位元に移すので、これが単位元に等しいのは g^n が単位元であるとき、そのときに限るからである。(vi) では元 2 の位数は 4 である。(iv) ではすべての元 g が $g^2 = 1$ を満たすので、位数 4 の元は存在しない。よって同型写像は存在しない。

まとめると、同型である組は (i) と (iii) のみである。

検算

コンピュータを用いて、(iv) と (vi) について閉じていること、単位元、逆元の性質を表の総当たりで確認した。4 を法として 0 と 2 に逆元がないこと、元の位数が (iv) では $1,2,2,2$、(vi) では（$1,2,3,4$ に対して）$1,4,4,2$ であることも確かめた。さらに、10^4 個のランダムな角で $\mathrm{M}(\alpha)\mathrm{M}(\beta) = \mathrm{M}(\alpha+\beta)$ と $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ との対応も確認した。(iv) は手計算ですぐ確かめられる。$(2k+1)^2 = 4k(k+1)+1$ であり $k(k+1)$ は偶数なので、奇数を 2 乗すると 8 を法として 1 になる。

よくある間違い

- (iv) と (vi) は「どちらも四つの元をもつから」同型だと言ってしまう。元の個数が等しいことは必要条件だが、十分条件ではない。
- (v) で $\det A \neq 0$ だけを確かめる。逆行列の成分も整数でなければならない。
- (ii) を 4 を法とする加法と読んでしまう。加法のもとでは位数 4 の巡回群となり (vi) と同型になるが、問題は乗法を指定している。

STEP のその先へ

同型を除けば、位数 4 の群はちょうど二つある。(vi) のような巡回群 C_4 と、(iv) のようなクラインの四元群（Klein four-group）$C_2 \times C_2$ である。元の位数によって小さな群を分類することは、大学の群論の講義で最初に扱う内容の一つである。(i) と (iii) の円周群は、リー群（Lie group）、すなわち滑らかな曲線や曲面でもある群の最も簡単な例である。(v) に現れた行列式 ± 1 の整数行列は群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ をなし、これは整数論において重要である。さらに学ぶには、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）がよい。

解答例

STEP III 1995、第 8 問

純粋数学 ・ 平面と球

> **STEP III 1995、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q8

鍵となる考え方

平面が球を切るとき、切り口の円の中心は、球の中心から平面に下ろした垂線の足（foot of the perpendicular）である。したがって球の中心は、**それぞれの**円の中心を通る法線（normal）上になければならず、各法線に沿った距離は、ピタゴラス（Pythagoras）の定理によって球の半径と結びつく。この問題の残りの部分はすべて、この一つのベクトル方程式と、うまく選んだベクトルとの内積（dot product）をとるだけのことである。

解答

法線と距離

X を通る π の法線は、$\mathbf{x}$ を通り方向が $\mathbf{n}$ の直線

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + t\,\mathbf{n}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

である。これが π と交わるのは $(\mathbf{x}+t\mathbf{n})\cdot\mathbf{n} = p$ となるとき、すなわち（$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$ であるから）$t = p - \mathbf{x}\cdot\mathbf{n}$ のときである。よって垂線の足は $\mathbf{x} + (p - \mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ であり、$\mathbf{n}$ は単位ベクトル（unit vector）であるから、X と π の距離は

$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{n} - p|.$$

である。

両方の円を通る球

中心 $\mathbf{c}$、半径 R の球が両方の円を含むと仮定する。i を固定する。C_i 上のすべての点 $\mathbf{y}$ は $|\mathbf{y}-\mathbf{r}_i| = 1$ かつ $(\mathbf{y}-\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{n}_i = 0$ を満たす。$\mathbf{y}$ が C_i を一周するとき、ベクトル $\mathbf{u} = \mathbf{y}-\mathbf{r}_i$ は $\mathbf{n}_i$ に垂直なすべての単位ベクトルをとる。

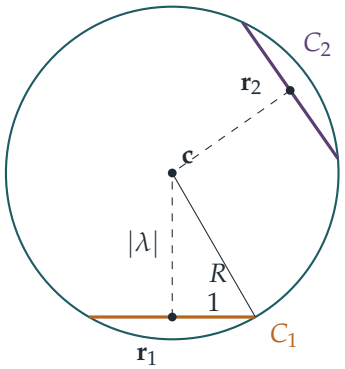
$\mathbf{a} \perp \mathbf{n}_i$ として $\mathbf{c}-\mathbf{r}_i = \mathbf{a}+\mu_i\mathbf{n}_i$ と分解する。すると

$$\begin{aligned} R^2 = |\mathbf{y}-\mathbf{c}|^2 &= |\mathbf{u}-\mathbf{a}-\mu_i\mathbf{n}_i|^2 \\ &= 1 - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{a} + |\mathbf{a}|^2 + \mu_i^2, \end{aligned}$$

となる。ここで $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_i = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}_i = 0$ を用いた。左辺は C_i のどの点についても同じであるから、$\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}$ は許されるすべての $\mathbf{u}$ に対して同じ値をとる。ところが $\mathbf{u}$ が許されるなら $-\mathbf{u}$ も許されるので、平面内のすべての単位ベクトル $\mathbf{u}$ に対して $\mathbf{u}\cdot\mathbf{a} = -\mathbf{u}\cdot\mathbf{a} = 0$ となり、（$\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ならば）$\mathbf{u}$ を $\mathbf{a}$ に平行に選ぶと矛盾が生じる。よって $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ であり、

$$\mathbf{c} = \mathbf{r}_i + \mu_i\mathbf{n}_i, \qquad R^2 = 1 + \mu_i^2.$$

言葉で言えば、球の中心は C_i の中心を通る π_i の法線上にある。これはまさに最初の部分で求めた直線である。



これを $i = 1$ と $i = 2$ に適用すると $1+\mu_1^2 = R^2 = 1+\mu_2^2$ となるので、$\mu_2 = \pm\mu_1$ である。$\lambda = \mu_1$ とおくと

$$\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{n}_1 = \mathbf{c} = \mathbf{r}_2 \pm \lambda\mathbf{n}_2,$$

となり、条件を満たす球が存在するときには、このような λ が必ず存在する。これが示すべきことであった。

二つの必要条件

整理すると

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = -\lambda\mathbf{n}_1 \pm \lambda\mathbf{n}_2.$$

となる。$\mathbf{n}_1$ と $\mathbf{n}_2$ の両方に垂直な $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ との内積をとると

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) = 0.$$

考えてみよう p_1 はどこから出てくるのだろうか？　ベクトル方程式には現れていない。

中心 $\mathbf{r}_1$ は π_1 上にあるので $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_1 = p_1$ であり、同様に $\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_2 = p_2$ である。$k = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2$ とおく。$\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_2 \pm \lambda\mathbf{n}_2$ と $\mathbf{n}_1$、次に $\mathbf{n}_2$ との内積をとると

$$p_1 + \lambda = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \pm \lambda k,$$
$$\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_1 + \lambda k = p_2 \pm \lambda.$$

を得る。よって

$$p_1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \lambda(\pm k - 1), \qquad p_2 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_1 = \lambda(k \mp 1).$$

である。上の符号をとれば右辺はどちらも $\lambda(k-1)$ となり、下の符号をとれば $-\lambda(k+1)$ と $\lambda(k+1)$ になる。いずれにしても二つの左辺は等しいか符号が逆であるから、

$$(p_1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^2 = (p_2 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_1)^2.$$

幾何学的な意味

第一の条件。これは $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$、$\mathbf{n}_1$、$\mathbf{n}_2$ が同一平面上にある（coplanar）こと（スカラー三重積（scalar triple product）が 0 になること）を表す。言い換えると、C_1 の中心を通る π_1 の法線と、C_2 の中心を通る π_2 の法線とが同じ平面上にある。つまり二つの法線はねじれの位置（skew）になく、（球の中心で）交わるか平行である。

第二の条件。最初の部分により、$|p_1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_2|$ は C_2 の中心と π_1 の距離であり、$|p_2 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_1|$ は C_1 の中心と π_2 の距離である。したがってこの条件は、これら二つの距離が等しいこと、すなわち一方の円の中心から他方の円の平面までの距離が、もう一方の中心から最初の円の平面までの距離に等しいことを表している。これは図の対称性を反映している。両方の円は $\mathbf{c}$ から同じ距離 $|\lambda|$ にあるので、$\mathbf{c}$ を通る適当な平面に関する鏡映（reflection）で二つの円が入れ替わり、二つの距離も入れ替わるのである。

検算

- $\pi_1 : z = 0$、$\pi_2 : z = 2$ とし、z 軸上に中心をもつ単位円をとる。これらは $(0,0,1)$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の球上にある。このとき下の符号で $\lambda = 1$ であり、$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{0}$、そして第二の条件の二つの距離はどちらも 2 に等しい。

- 数値的には、半径 $R > 1$ の球を無作為に 5000 個つくり、それぞれを単位円で切る平面を無作為に二つとって、円上のすべての点が球上にあることを確かめた。その結果、すべての場合に二つの条件が 10^{-9} 以内の誤差で成り立ち、両方の符号が現れた。互いに無関係な円の組を無作為にとった場合は、毎回第一の条件を満たさなかった。

よくある間違い

- 球の中心が $\mathbf{r}_i$ を通る法線上にあることを根拠なしに仮定してしまう。これこそが証明の核心である。
- $\pm$ を忘れる。球の中心は、二つの平面に対して法線の向く側と同じ側にあることもあれば、反対側にあることもある。
- C_1 の中心が π_1 上にあるので $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_1 = p_1$ となることを忘れる。

STEP のその先へ

ここでの条件は必要条件（necessary condition）にすぎない。完全な「必要十分条件」とするには、さらに二つの法線が実際に交わり、その交点が両方の円から等距離にあることも必要である。このような問題は二次曲面（quadrics）の解析幾何学（analytic geometry）への第一歩であり、そこでは平面や球、それらの交わりが線形代数（linear algebra）を用いて扱われる。スカラー三重積は、体積を測る 3×3 の行列式（determinant）として再び登場する。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、これらの考え方を丁寧に展開している。

解答例

STEP III 1995、第 9 問

力学 ・ 実体振り子

STEP III 1995、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

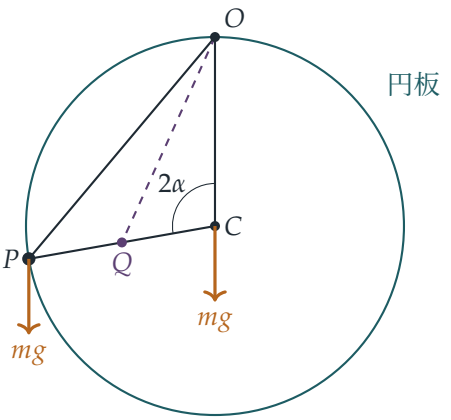
step.maths.org/questions/95-s3-q9

鍵となる考え方

円板と質点は同じ質量をもつので、系全体の重心（centre of mass）は CP の中点 Q である。ほとんどすべてがこの事実から導かれる。安定な平衡（stable equilibrium）では Q が O の真下にあり、小問 (iii) のエネルギーの式に必要なのも Q の高さだけである。残りは二等辺三角形（isosceles triangle）OCP の幾何と、慣性モーメント（moment of inertia）を求める標準的な積分である。

解答

円板を剛体薄板（rigid lamina）、P をその縁に固定された質点とみなす。軸はなめらかなので、力学的エネルギー（mechanical energy）は保存される。以下を通して $OC = CP = r$、$\angle OCP = 2\alpha$ とする。



小問 (i)

円板（重心 C）と質点（位置 P）はどちらも質量 m なので、系の重心は CP の中点 Q である。はたらく力は重力と軸からの抗力だけなので、系が平衡にあるのはちょうど Q が O と同じ鉛直線上にあるときであり、Q が O の下にあるとき平衡は安定である（このとき、どのような変位も Q を持ち上げ、位置エネルギー（potential energy）を増加させる）。したがって安定な平衡では OQ は鉛直であり、β は角 $\angle COQ$ である。

円板の面内に、C を原点とし O が $(r,0)$ となる座標軸をとる。すると $P = r(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$、$Q = \frac{r}{2}(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$ である。よって

$$\overrightarrow{OC} = (-r,\, 0), \qquad \overrightarrow{OQ} = \tfrac{r}{2}\big(-(2-\cos 2\alpha),\, \sin 2\alpha\big).$$

$2 - \cos 2\alpha > 0$ であるから、ベクトル $\overrightarrow{OQ}$ は $\overrightarrow{OC}$ 方向に正の成分 $\frac{r}{2}(2-\cos 2\alpha)$ をもち、それに垂直な方向に成分 $\frac{r}{2}\sin 2\alpha$ をもつ。ゆえに β は鋭角であり、

$$\tan\beta = \frac{\frac{r}{2}\sin 2\alpha}{\frac{r}{2}(2-\cos 2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2-\cos 2\alpha},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

$\rho x/r$ を単位面積あたりの質量とする。半径 x と $x + \mathrm{d}x$ の間の円環の面積は $2\pi x\,\mathrm{d}x$ であるから、

$$m = \int_0^r \frac{\rho x}{r}\, 2\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\rho r^2}{3}.$$

この円環上のすべての点は、C を通り円板に垂直な軸から距離 x にあるので、この軸のまわりの慣性モーメントは

$$I_C = \int_0^r \frac{\rho x}{r}\, 2\pi x \cdot x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\rho r^4}{5} = \frac{3}{5}mr^2,$$

となる。ここで $2\pi\rho r^2 = 3m$ を用いた。O を通る軸はこの軸と平行であり（どちらも円板を含む鉛直面に垂直である）、距離 $OC = r$ だけ離れているので、平行軸の定理（parallel axis theorem）により

$$I_O = \frac{3}{5}mr^2 + mr^2 = \frac{8}{5}mr^2.$$

小問 (iii)

系の慣性モーメント。三角形 OCP は頂角 2α の二等辺三角形なので、弦の長さは $OP = 2r\sin\alpha$ である。質点の寄与は $m(2r\sin\alpha)^2$ であり、

$$I = \frac{8}{5}mr^2 + 4mr^2\sin^2\alpha = \frac{4}{5}mr^2\,(2 + 5\sin^2\alpha).$$

重心の下降量。放した瞬間には OQ は水平なので、Q は O と同じ高さにある。最終的な位置では P が O の真下にあるので OP は鉛直であり、任意の点の O からの深さは、その点の OP 方向に沿った O からの距離である。

- P の深さは $OP = 2r\sin\alpha$ である。
- 三角形 OCP の底角は $\frac{1}{2}(\pi - 2\alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha$ なので、$\angle COP = \frac{\pi}{2} - \alpha$ であり、C の深さは $r\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = r\sin\alpha$ である。

Q は CP の中点なので、その深さは両者の平均 $\frac{3}{2}r\sin\alpha$ である。したがって系（全質量 $2m$）が失った位置エネルギーは $2mg \cdot \frac{3}{2}r\sin\alpha = 3mgr\sin\alpha$ である。

考えてみよう 系は本当に P が O の真下にくる位置まで到達するだろうか？

Q が O と同じ高さにある状態から静かに放すと、系は実体振り子（compound pendulum）として、OQ が水平となる二つの位置の間を振動し、その途中で Q が O より低くなるすべての位置を通過する。最終的な位置では Q の深さは $\frac{3}{2}r\sin\alpha > 0$ なので、この位置には到達する（そして、C が最初 P より低い位置にあるという条件は、振れる向きを決めているにすぎない）。

エネルギー。静止状態から出発し、角速度（angular speed）を ω とすると、

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 = 3mgr\sin\alpha \quad\Longrightarrow\quad \omega^2 = \frac{6gr\sin\alpha}{\frac{4}{5}r^2(2+5\sin^2\alpha)} = \frac{15g\sin\alpha}{2r(2+5\sin^2\alpha)}.$$

C は O を中心とする半径 $OC = r$ の円周上を動くので、$v = r\omega$ であり、

$$v^2 = \frac{15gr\sin\alpha}{2(2+5\sin^2\alpha)},$$

となり、示すべき式が得られた。

最大値。$s = \sin\alpha$ とおく。$0 < \alpha \le \pi/2$ より $s \in (0,1]$ である。$f(s) = \dfrac{s}{2+5s^2}$ とおくと、

$$f'(s) = \frac{(2+5s^2) - 10s^2}{(2+5s^2)^2} = \frac{2-5s^2}{(2+5s^2)^2},$$

これは $s < \sqrt{2/5}$ で正、$s > \sqrt{2/5}$ で負である。$\sqrt{2/5} < 1$ は許される範囲に含まれるので、f はそこで最大値 $f = \dfrac{\sqrt{2/5}}{4} = \dfrac{\sqrt{10}}{20}$ をとる。よって

$$v_{\max}^2 = \frac{15gr}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}}{20} = \frac{3\sqrt{10}}{8}gr \approx 1.19\,gr, \qquad \text{最大となるのは} \sin\alpha = \sqrt{2/5}.$$

検算

- $\alpha \to 0$ のとき、P は O の位置にきて、円板だけが OC を鉛直にしてつり下がる。実際 $\tan\beta \to 0$ となる。$\alpha = \pi/2$ のとき、P は O と直径の反対側にあり、Q は OC 上

にあるので、やはり $\beta = 0$ である。

- $\alpha = \pi/2$ のとき：$I = \frac{28}{5}mr^2$、質量 $2m$ に対して下降量は $\frac{3}{2}r$ なので、$v^2 = r^2 \cdot 3mgr \cdot \frac{10}{28mr^2} = \frac{15}{14}gr$ となり、公式と一致する。
- いくつかの α について、放した位置から運動方程式（equation of motion）を数値的に（RK4 で）積分した。たとえば $\alpha = 0.7$、$r = 1.3$、$g = 9.81$ のとき、シミュレーションは $v^2 = 15.1206$ を与え、公式と有効数字 6 桁まで一致する。また直接探索によっても、最大値 $3\sqrt{10}/8 \approx 1.1859$（$gr$ を単位とする）が確かめられる。

よくある間違い

- I_C に一様な円板の値 $\frac{1}{2}mr^2$ を使ってしまう。ここでは密度が外側ほど大きいので、I_C は $\frac{3}{5}mr^2$ に増加する。
- 小問 (iii) で、慣性モーメントへの質点の寄与 $m \cdot OP^2$ を忘れる。
- v^2 の代わりに ω^2 を答えてしまう。問われているのは C の速さであり、それは $r\omega$ である。

STEP のその先へ

水平な軸のまわりに回転できるように支えられた剛体は**実体振り子**である。これは、おもりが重心にある単振り子のようにふるまうが、慣性として Md^2 の代わりに I をもつ。小問 (i) の平衡のまわりの微小振動の周期は $2\pi\sqrt{I/(Mgd)}$（ただし $d = OQ$）であり、「相当単振り子」の長さ $I/(Md)$ はケーター（Kater）の可逆振り子（reversible pendulum）につながる。これはかつて g を精密に測定するために用いられた。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の回転と平行軸の定理をこうした精神で扱っている。

解答例

STEP III 1995、第 10 問

力学 ・ 斜面上の放物運動

STEP III 1995、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/95-s3-q10

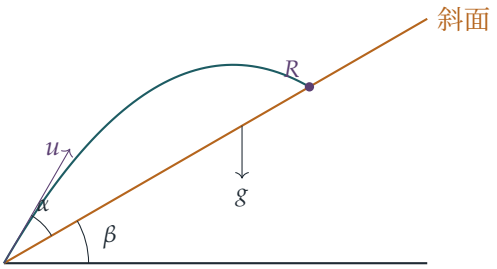
鍵となる考え方

斜面（inclined plane）上では、水平方向と鉛直方向ではなく、斜面に**沿う**方向と斜面に**垂直な**方向に軸をとるのが自然である。この座標軸では重力は 2 つの一定な成分（component）をもち、飛行時間（time of flight）は垂直方向の運動だけから決まり、射程（range）は三角関数の積として表される。この積を積和公式（factor formula）によって正弦の差に直せば、微分を使わなくても最大値が一目でわかる。

解答

設定

砲弾を、空気抵抗（air resistance）を受けずに重力のみのもとで自由に運動する質点（particle）とみなし、斜面の下端から最大傾斜線（line of greatest slope）に沿って斜面の上方へ発射されるものとする。**斜面に対して**角 α で発射されるとすると、水平面からの仰角（angle of elevation）は $\theta = \alpha + \beta$ である。そもそも砲弾が斜面を上っていくためには $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} - \beta$ が必要である。



x 軸を最大傾斜線に沿って上向きに、y 軸を斜面に垂直で斜面から離れる向きにとる。（鉛直下向きの）加速度 g をこれらの方向に分解すると

$$\ddot{x} = -g\sin\beta, \qquad \ddot{y} = -g\cos\beta,$$

であり、初速度の成分は斜面に沿う方向に $u\cos\alpha$、斜面に垂直な方向に $u\sin\alpha$ である。よって時刻 t において

$$x = ut\cos\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2\sin\beta, \qquad y = ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2\cos\beta.$$

飛行時間と射程

砲弾が着地するのは、$t > 0$ で再び $y = 0$ となるときであるから

$$T = \frac{2u\sin\alpha}{g\cos\beta}.$$

このとき斜面に沿って進んだ距離は

$$\begin{aligned} R = x(T) &= \frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g\cos\beta} - \tfrac{1}{2}g\sin\beta\cdot\frac{4u^2\sin^2\alpha}{g^2\cos^2\beta} \\ &= \frac{2u^2\sin\alpha}{g\cos^2\beta}\big(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\big) \\ &= \frac{2u^2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{g\cos^2\beta}. \end{aligned}$$

考えてみよう 微分せずに $\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)$ を最大にするにはどうすればよいか。

積和公式 $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$ に $A = \alpha$、$B = \alpha+\beta$ を代入すると

$$2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta) = \sin(2\alpha+\beta) - \sin\beta,$$

となるので

$$R = \frac{u^2\big(\sin(2\alpha+\beta) - \sin\beta\big)}{g\cos^2\beta}.$$

α に依存するのは $\sin(2\alpha+\beta)$ の項だけであり、その値は 1 以下である。α が $(0, \frac{\pi}{2}-\beta)$ を動くとき、角 $2\alpha+\beta$ は $\frac{\pi}{2}$ を含む区間 $(\beta, \pi-\beta)$ を動く。したがって最大値 1 は実際にとられ、それは $2\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$ のとき、かつそのときに限る。すなわち

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}, \qquad \text{言い換えれば} \qquad \theta = \alpha+\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}.$$

よって大砲は水平面から $\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$ の角で発射すればよい。つまり、発射方向は斜面と鉛直線のなす角を二等分する。

最大射程

$\sin(2\alpha+\beta)=1$ とし、$\cos^2\beta = 1-\sin^2\beta = (1-\sin\beta)(1+\sin\beta)$ を用いると

$$R_{\max} = \frac{u^2(1-\sin\beta)}{g(1-\sin\beta)(1+\sin\beta)} = \frac{u^2}{g(1+\sin\beta)},$$

となる。ここで $\beta < \frac{\pi}{2}$ であるから、$1-\sin\beta$ で約分してよい。これが求める距離である。

検算

- 平地 $\beta = 0$ の場合：最適な角は 45°、射程は u^2/g となり、よく知られた結果に一致する。
- $\beta \to \frac{\pi}{2}$（鉛直な「斜面」）の場合：最適な方向は真上に近づき、$R_{\max} \to u^2/(2g)$ となる。これは鉛直に打ち上げた砲弾の最高到達高度である。
- 数値的には、$u = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$\beta = 30°$ のとき、公式から仰角 60° で $R_{\max} \approx 27.18\,\mathrm{m}$ が得られる。砲弾が斜面を横切るまで水平・鉛直座標で運動を逐次計算すると、ランダムに選んだ u、β、α に対して $R(\alpha)$ が再現され、α について細かく探索すると最大値は $\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}$ でとられる。

よくある間違い

- 水平面からの角と斜面からの角を取り違えること。答えの $\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$ は水平面から測った角である。
- 斜面に沿う成分 $-g\sin\beta$ を忘れること。そうすると、平地での射程の公式を誤った倍率で拡大したものが得られてしまう。

STEP のその先へ

美しい幾何学的な見方がある。1 点から速さ u で発射されたすべての軌道は、発射点を焦点（focus）とする「安全放物線」（parabola of safety）――これらの軌道の包絡線（envelope）――の内側にあり、任意の斜面上での最大射程は、斜面とこの放物線の交点で与えられる。すると焦点と準線（directrix）の性質から $R_{\max} = u^2/(g(1+\sin\beta))$ が 1 行で得られ、最適な方向が斜面と鉛直線のなす角を二等分する理由も説明できる。ベクトルを用いた放物運動の扱いについては、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）が次に読む本として適している。

解答例

STEP III 1995、第 11 問

力学 ・ 相対速度

STEP III 1995、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/95-s3-q11

鍵となる考え方

船とともに動く座標系（reference frame）で考える。船から見ると、飛行機は北西方向の直線に沿ってまっすぐ飛び出し、まっすぐ戻ってこなければならない。飛行機は空気に運ばれるので、この座標系での飛行機の速度は、対気速度（airspeed）ベクトルに「流れ」を加えたものになる。ここで流れとは、風の速度から船の速度を引いたものである。この流れがわかれば、行きと帰りのそれぞれは川を横切る問題と同じになる。合成速度（resultant）がその直線に沿うように機首の向きを選び、往復にかかる時間から距離が決まる。

解答

以下では一貫して x 軸を東向き、y 軸を北向きにとり、速さはノット（knots、1 時間あたりの海里）で測る。こうすると距離は海里（nautical miles）で表される。船の速度は $(-V, 0)$ である。空気の速度を $\mathbf{w}$、空気に対する飛行機の速度を $\mathbf{a}$ とし、$|\mathbf{a}| = kV$ とすると、船に対する飛行機の相対速度（relative velocity）は

$$\mathbf{a} + \mathbf{c}, \qquad \mathbf{c} = \mathbf{w} - (-V, 0) = \mathbf{w} + (V, 0).$$

である。飛行機は常に船の北西にいるので、$\mathbf{a} + \mathbf{c}$ は往路では $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$ の向き、復路では $-\mathbf{u}$ の向きでなければならない。

風があるとき：往路の飛行

風は北から南へ吹くので、$\mathbf{w} = (0, -V)$ であり、

$$\mathbf{c} = (V, -V) = -\sqrt{2}\, V\, \mathbf{u}.$$

となる。この流れの速さは $\sqrt{2}\,V$ で、向きはちょうど南東、すなわち哨戒線にぴったり沿っている。したがってパイロットは、機首をそのまま直線の向きに向ければよい。往路（北西向き）では流れに真っ向から逆らって飛び、復路では流れに乗って飛ぶ：

$$\text{往路の速さ} = (k-\sqrt{2})V, \qquad \text{復路の速さ} = (k+\sqrt{2})V.$$

ここで $k > \sqrt{2}$ が必要である。そうでなければ、飛行機は北西方向の直線に沿って船から離れることがまったくできない。

飛行機が船から距離 d_w の地点まで到達し、1 回の往復に $\frac{1}{2}$ 時間かかるとすると、

$$\frac{d_w}{(k-\sqrt{2})V} + \frac{d_w}{(k+\sqrt{2})V} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{d_w}{V} \cdot \frac{2k}{k^2-2} = \frac{1}{2},$$

であるから、

$$d_w = \frac{(k^2-2)V}{4k}.$$

となる。よって往路の飛行時間は

$$\frac{d_w}{(k-\sqrt{2})V} = \frac{k^2-2}{4k(k-\sqrt{2})} = \frac{k+\sqrt{2}}{4k} \text{ 時間} = 15\left(1+\frac{\sqrt{2}}{k}\right) \text{ 分}.$$

である。これは常に 15 分より長いが、往路は流れに逆らって進むのだから当然である。

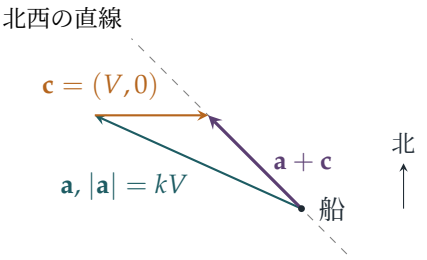
考えてみよう 無風のときも、飛行機の機首を単に北西に向ければよいのではないか。それはなぜだめなのだろうか。

無風のときは、流れはもはや哨戒線に沿っていない。パイロットが機首を北西に向けると、流れの東向きの成分によって飛行機は直線から外れてしまう。機首をわずかに流れに向けて傾ける必要があり、そのぶん対気速度の一部が使われてしまう。

無風のとき

このとき $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ なので $\mathbf{c} = (V, 0)$ である。つまり船から見ると、空気は速さ V で東へ流れている。$\mathbf{c}$ を、$\mathbf{u}$ を用いて直線に沿う成分と、$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ を用いて直線を横切る成分に分解する：

$$\mathbf{c} = -\frac{V}{\sqrt{2}}\,\mathbf{u} + \frac{V}{\sqrt{2}}\,\mathbf{v}.$$



合成速度は $\mathbf{v}$ 方向の成分をもってはならないので、$\mathbf{a}$ の $\mathbf{v}$ 方向の成分は $-V/\sqrt{2}$ でなければならない。$|\mathbf{a}| = kV$ であるから、進行方向の成分は

$$\sqrt{k^2V^2 - \tfrac{1}{2}V^2} = V\sqrt{k^2 - \tfrac{1}{2}}.$$

となる。直線に沿った方向では、流れの寄与は往路で $-V/\sqrt{2}$、復路で $+V/\sqrt{2}$ である（$\mathbf{c}\cdot(-\mathbf{u}) = V/\sqrt{2}$ だからである）。$A = V\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}}$、$B = V/\sqrt{2}$ とおくと、

$$\text{往路の速さ} = A - B, \qquad \text{復路の速さ} = A + B.$$

である。$A^2 - B^2 = V^2(k^2 - 1) > 0$ であるから、往路の速さは正である。

往復にかかる時間が同じく 30 分であるから、

$$\frac{d_c}{A-B} + \frac{d_c}{A+B} = \frac{2A\,d_c}{A^2-B^2} = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad d_c = \frac{A^2-B^2}{4A} = \frac{V(k^2-1)}{4\sqrt{k^2-\frac{1}{2}}}.$$

比

割り算をすると、

$$\frac{d_w}{d_c} = \frac{(k^2-2)V}{4k}\cdot\frac{4\sqrt{k^2-\frac{1}{2}}}{V(k^2-1)} = \frac{(k^2-2)\sqrt{k^2-\frac{1}{2}}}{k(k^2-1)}.$$

$\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{4k^2-2}$ であるから、

$$\frac{d_w}{d_c} = \frac{k^2-2}{2k(k^2-1)}\sqrt{4k^2-2},$$

となり、これが求める結果である。

検算

- $k \to \infty$ のとき、風も船の動きもほとんど影響しなくなる。往路の飛行時間は 15 分に近づき、$d_w/d_c \to 1$ となる（比の分子と分母はどちらも $2k^3$ のように増大する）。

- $k \to \sqrt{2}^{+}$ のとき、風があるときの往路の速さは o に近づくので、$d_w \to 0$ となり、比は $\to 0$ となる。これは公式のとおりである。
- $k = 2$ のとき、往路の飛行時間は $15(1 + 1/\sqrt{2}) \approx 25.6$ 分であり、$d_w/d_c = \frac{2}{12}\sqrt{14} \approx 0.624$ である。機首の向きを直接求める方法と、運動を少しずつ追跡する方法の両方で、この値を数値的に確認した。

よくある間違い

- 風の向きを逆にしてしまう。「北から南へ」の風は南**に向かって**吹く。
- 船の速度を引くべきところで足してしまう。西へ進む船から見ると、静止した空気は**東へ**流れる。
- 無風のときに機首を北西に向け、速さを $kV \pm V/\sqrt{2}$ としてしまう。まず横向きの流れを打ち消さなければならない。

STEP のその先へ

これはガリレイ（Galileo）的な座標系の変換である。互いに等速で動く座標系で測った速度は、一定のベクトルだけ異なる。同じ計算の仕組みが、マイケルソン＝モーリー（Michelson–Morley）の「川を進むボート」の議論の根底にある。そこでは、流れを横切って往復する場合と、流れに沿って往復する場合とで、ここでの計算とまったく同じように所要時間が異なる。そしてこれこそが、特殊相対性理論（special relativity）によって覆された古典的な計算である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この精神で相対運動を扱い、続いて相対性理論を扱っている。

解答例

STEP III 1995、第 12 問

確率・統計 ・ 動径対称な確率密度

STEP III 1995、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/95-s3-q12

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.22 節「平均をもたない分布」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/cauchy.html

鍵となる考え方

放射対称（radially symmetrical）な確率密度（density）は、原点からの距離 $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ を通してのみ (u, v) に依存する。したがって、原点のまわりのどのような回転を施しても同じに見える。特に、原点を頂点とする扇形（sector）に入る確率は、その扇形の中心角だけで決まる。事象 $U/V < k$ は、直線 $u = kv$ と u 軸によって切り取られる向かい合った一対の扇形であるから、その確率は単に角度を 2π で割ったものになる。

解答

同時密度と放射対称性

X と Y はそれぞれ確率密度 $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ をもつ。X と Y は独立（independent）であるから、同時密度（joint density）は周辺密度（marginal densities）の積である：

$$f(x, y) = \phi(x)\,\phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)},$$

これがすべての実数 x, y について成り立ち、示すべきことが示された。

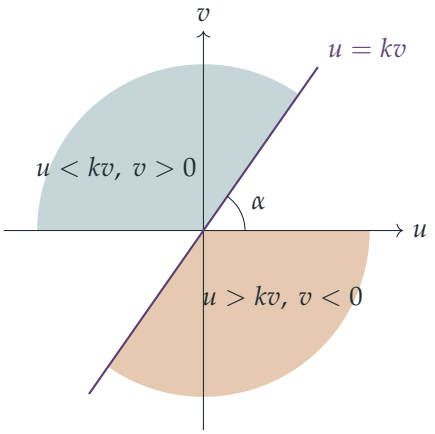
この密度が**放射対称**であるとは、点 (x, y) における値がその点の原点からの距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ だけに依存し、方向には依存しないということである。ここでは $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2}$ である。同じことであるが、この密度は原点のまわりの平面のどのような回転によっても変わらず、その等高線は原点を中心とする円である。

$\mathrm{P}(U/V < k)$ に関する等式

U と V が放射対称な同時密度 $h(u,v) = \rho\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)$ をもつとする。直線 $v=0$ の確率は 0 である（面積が 0 だからである）ので、$V=0$ の場合は無視してよい。不等式 $U/V < k$ に V を掛け、$V<0$ のときは不等号の向きを逆にすると、

$$\left\{\frac{U}{V} < k\right\} = \{U < kV,\ V>0\} \cup \{U > kV,\ V<0\},$$

となり、右辺の二つの事象は互いに排反である。



図（$k>0$ の場合を描いたもの）が示すように、原点を通る直線 $u=kv$ と u 軸は平面を四つの扇形に分け、影をつけた二つが事象 $U/V < k$ を構成する。写像 $(u,v) \mapsto (-u,-v)$ は原点のまわりの角 π の回転であり、領域 $\{u<kv,\ v>0\}$ をちょうど $\{u>kv,\ v<0\}$ に移す（両方の不等式に -1 を掛ければよい）。放射対称な密度は $h(-u,-v)=h(u,v)$ を満たすので、これら二つの領域の確率は等しい。よって

$$\mathrm{P}\left(\frac{U}{V} < k\right) = 2\,\mathrm{P}(U<kV,\ V>0),$$

となり、これが示すべきことであった。

U/V の確率密度

極座標（polar coordinates）$u = r\cos\theta, v = r\sin\theta$ を用いる。領域 $\{u<kv,\ v>0\}$ は扇形 $\alpha < \theta < \pi$ である。ここで $\alpha \in (0,\pi)$ は半直線 $u=kv, v>0$ が u 軸の正の向きとなす角であり、$\cot\alpha = k$ である。（実際、$0<\theta<\pi$ のとき $\sin\theta>0$ であり、$u<kv$ は $\cot\theta < k$ となる。cot は $(0,\pi)$ で減少するので、これは $\theta > \alpha$ と同値である。）

考えてみよう　関数 ρ がわからないとき、(U,V) が原点を頂点とする中心角 β の扇形に入る確率はいくらか。

極座標では面積要素は $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ であるから、扇形 $\theta_1 < \theta < \theta_1 + \beta$ の確率は

$$\int_{\theta_1}^{\theta_1+\beta}\int_0^\infty \rho(r)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \beta\int_0^\infty \rho(r)\,r\,\mathrm{d}r = \frac{\beta}{2\pi},$$

である。なぜなら、$\beta = 2\pi$ とすると平面全体となるので $2\pi\int_0^\infty \rho(r)\,r\,\mathrm{d}r = 1$ だからである。言い換えれば、ρ が何であっても、(U,V) の方向は一様に分布する（uniformly distributed）。

いま考えている扇形の中心角は $\pi - \alpha$ であるから、

$$\mathrm{G}(k) = \mathrm{P}\Big(\frac{U}{V} < k\Big) = 2\cdot\frac{\pi-\alpha}{2\pi} = 1 - \frac{\alpha}{\pi}.$$

$\alpha \in (0,\pi)$ で $\cot\alpha = k$ であるから、$\alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan k$ である（$\cot(\frac{\pi}{2} - \psi) = \tan\psi$ より、両辺はともに $(0,\pi)$ に属し、余接が k となるからである）。したがって

$$\mathrm{G}(k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan k, \qquad -\infty < k < \infty.$$

これは分布関数（distribution function）として当然のように、0 から 1 まで増加する。微分すると U/V の確率密度が得られる：

$$\mathrm{g}(k) = \mathrm{G}'(k) = \frac{1}{\pi(1+k^2)}, \qquad -\infty < k < \infty,$$

これで示すべきことが示された。特に、これは最初の部分の独立な標準正規分布（standard normal）に従う確率変数の比 X/Y にも当てはまる。

検算

- $\mathrm{G}(0) = \frac{1}{2}$：対称性により、$U/V$ が正になる確率と負になる確率は等しい。
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{\pi(1+k^2)} = \frac{1}{\pi}\big[\arctan k\big]_{-\infty}^{\infty} = 1.$
- 三つの異なる放射対称な分布（独立な二つの標準正規分布、単位円板上の一様分布、e^{-r} に比例する密度）からそれぞれ 2×10^5 個の点を発生させたシミュレーションでは、いずれの場合も $\mathrm{P}(U/V < 0.7) \approx 0.694$ となり、$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan 0.7 \approx 0.6944$ と一致した。また、いくつかの k の値について、等式の両辺は標本誤差の範囲内で一致した。

よくある間違い

- $\{U/V < k\} = \{U < kV\}$ と書いてしまうこと：$V < 0$ のとき、V を掛けると不等号の向きが逆になる。
- 不注意に $\alpha = \arctan(1/k)$ とすること：$k < 0$ のときこれは $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ に属するが、必要な角は $(0,\pi)$ に属する。$\alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan k$ と書けば、すべての k について正しい。

STEP のその先へ

密度 $\frac{1}{\pi(1+k^2)}$ は標準**コーシー分布**（Cauchy distribution）である。この分布は平均をもたない（$|k|\,\mathrm{g}(k)$ の積分が発散する）ことで有名であり、そのため大数の法則（law of large numbers）が成り立たない：n 個の独立なコーシー分布に従う確率変数の平均は、そのうちの一つと同じコーシー分布に従うのである。ここでの極座標による議論は、ヤコビアン（Jacobian）を用いた同時密度の変換の最初の一端に触れるものであり、これは大学 1 年次の標準的な手法である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論の入門書）は、その両方を扱っている。

解答例

STEP III 1995、第 13 問

確率・統計 ・ 雑音のある二元通信路

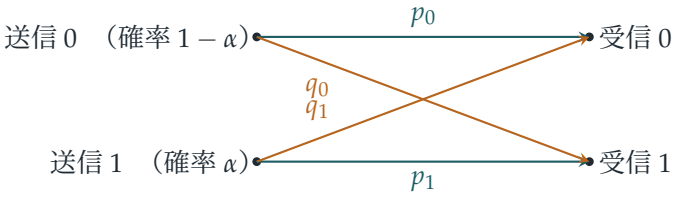
> **STEP III 1995、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q13

鍵となる考え方

すべては、1 桁ずつ見ることから導かれる。各桁は「二元通信路（binary channel）」を通って伝わる。すなわち、0 または 1 として送信され、そのまま届くか反転するかのどちらかである。1 桁に何が起こるかがわかれば、メッセージ全体はその独立（independent）な複製を多数並べたものにすぎず、確率は掛け合わせればよい。中継局については、2 区間を経て桁が正しく届くのは反転が**偶数**回起きたときである、と気づくことが要点である。

解答

以下を通して、メッセージの長さを $N = 10^k$ と書く。問題の意図どおり、元のメッセージの各桁は独立であり（各桁は確率 α で 1 である）、ケーブルは各桁を他のすべての桁と独立に扱うものと仮定する。1 桁についての図を以下に示す。



メッセージ全体が正しく受信される確率

ある特定の桁が正しく受信されるという事象を C とする。その桁は、そのまま届く 0 か、そのまま届く 1 のいずれかであるから、

$$\mathrm{P}(C) = (1-\alpha)p_0 + \alpha p_1.$$

N 個の桁の独立性により、

$$\mathrm{P}(\text{メッセージ全体が正しい}) = \left[(1-\alpha)p_0 + \alpha p_1\right]^{10^k}.$$

確率 β

桁が 1 として受信されるのは、1 であってそのまま届いた場合か、0 であって反転した場合である。よって

$$\beta = \alpha p_1 + (1-\alpha)q_0.$$

ここで

$$\begin{aligned}\beta = \alpha &\iff \alpha p_1 + (1-\alpha)q_0 = \alpha \iff (1-\alpha)q_0 = \alpha(1-p_1) = \alpha q_1 \\ &\iff q_0 = \alpha(q_0+q_1) \iff \alpha = \frac{q_0}{q_0+q_1},\end{aligned}$$

である。最後の段階では q_0+q_1 で割っているが、これはケーブルが完全である場合（$q_0 = q_1 = 0$ で、このとき $\beta = \alpha$ は自明に成り立つ）を除いて正である。どの段階も逆にたどれるので、これで求める「必要十分条件」が示された。言葉で言えば、ケーブルを通しても 1 の割合が変わらないのは、$0 \to 1$ の流れ（すなわち $(1-\alpha)q_0$）と $1 \to 0$ の流れ（すなわち αq_1）がちょうど釣り合うときである。

すべて 0 のメッセージ

この条件が成り立ち、受信した桁がすべて 0 であったとする。（送信した桁、受信した桁）の組は位置ごとに独立であるから、メッセージ全体が正しいという条件付き確率（conditional probability）は、1 桁ごとの確率 P(送信0 | 受信0) の積である。

> **考えてみよう**　「0 を受信した」ことを、何が送信されたかについての主張にどう変換すればよいか。

ベイズの定理（Bayes' theorem）を用いる。桁が 0 として受信される確率は $1-\beta$ であり、条件より $\beta = \alpha$ なので $1-\beta = 1-\alpha$ である。したがって

$$\mathrm{P}(\text{送信0} \mid \text{受信0}) = \frac{(1-\alpha)p_0}{1-\beta} = \frac{(1-\alpha)p_0}{1-\alpha} = p_0,$$

となり、ゆえに

$$\mathrm{P}(\text{メッセージが正しい} \mid \text{すべて 0 を受信}) = p_0^{10^k}.$$

五分五分の確率

$q_0 = q_1 = q$、$\alpha = \frac{1}{2}$ のとき、各桁が正しい確率は $\frac{1}{2}(1-q) + \frac{1}{2}(1-q) = 1-q$ である。10^6 桁のメッセージについて

$$(1-q)^{10^6} = \tfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad 10^6 \ln(1-q) = -\ln 2.$$

が必要である。q は非常に小さいので $\ln(1-q) \approx -q$ であり、

$$q \approx \frac{\ln 2}{10^6} \approx 6.93 \times 10^{-7}.$$

を得る。

中継局を加える

q は長さの 2 乗に比例するので、長さを半分にすると q は $2^2 = 4$ で割られる。よってケーブルの各半分は、もう一方の半分とは独立に、確率 $q/4$ で桁を反転させる（中継局（booster station）は受信したものをそのまま再送信するだけである）。

> **考えてみよう** 桁が正しく届くのは「両方の半分で正しく伝送される」場合だけだろうか。

そうではない。**両方**の半分で反転した桁は元に戻る。よって

$$\mathrm{P}(\text{桁が正しい}) = \left(1-\frac{q}{4}\right)^2 + \left(\frac{q}{4}\right)^2 = 1 - \frac{q}{2} + \frac{q^2}{8} \approx 1 - \frac{q}{2},$$

である。ただし q^2 のオーダーの項は無視した。（ここでは二重反転はそうした項の一つなので答えには影響しないが、なぜそうなるかを理解しておく価値はある。）メッセージ全体が正しい確率は今度は

$$\left(1-\frac{q}{2}\right)^{10^6}.$$

となる。同じオーダーで $(1-\frac{q}{2})^2 \approx 1-q$ であるから、

$$\left(1-\frac{q}{2}\right)^{10^6} \approx (1-q)^{10^6/2} = \left[(1-q)^{10^6}\right]^{1/2} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707.$$

したがって、中継局によってメッセージが完全に届く確率は $\frac{1}{2}$ から約 0.71 に上がる。ここで q の数値はまったく必要なかったことに注意せよ。元の条件 $(1-q)^{10^6} = \frac{1}{2}$ がすべてを片づけてくれた。$e^{-10^6 q} = \frac{1}{2}$ を用いても同じ考え方で $e^{-10^6 q/2} = 1/\sqrt{2}$ が得られる。

検算

- 長さ 4 のすべての送信メッセージと受信メッセージを（$p_0 = 0.9$、$p_1 = 0.8$ として）厳密に数え上げると、$[(1-\alpha)p_0 + \alpha p_1]^4$ と、α に関する条件の下での条件付き確率

$p_0^4 = 0.6561$ の両方が再現される。

- $(1-q)^{10^6} = \frac{1}{2}$ を厳密に解くと $q = 6.9315 \times 10^{-7}$ となり、有効数字 5 桁で $\ln 2/10^6$ と一致する。
- この q を用いると、中継局がある場合の厳密な確率 $\left[(1-\frac{q}{4})^2 + (\frac{q}{4})^2\right]^{10^6}$ は 0.707107 であり、$1/\sqrt{2}$ と一致する。
- 妥当性の確認：$q_0 = q_1$ ならば条件から $\alpha = \frac{1}{2}$ となり、対称性から当然そうなるべき結果である。

よくある間違い

- 各半分での誤り確率を $q/2$ としてしまう。誤り確率は長さの 2 **乗**に比例するので、$q/4$ である。
- 「すべて o」の部分に $(1-\alpha)^N$ や p_0 だけで答えてしまう。必要なのは各桁の条件付き確率であり、それを 10^k 乗しなければならない。

STEP のその先へ

これは情報理論（information theory）における**二元通信路**である。$q_0 = q_1$ のときは二元対称通信路（binary symmetric channel）であり、雑音のある通信路がどれだけの情報を運べるかについてのシャノン（Shannon）の理論の出発点となる。また誤り訂正符号（error-correcting codes）の出発点でもある。誤り訂正符号は冗長性（redundancy）を付け加えることで、ときおり起こる反転を単に起こりにくくするのではなく、検出して修復できるようにするものである。中継局を用いた計算は 2 段階のマルコフ連鎖（Markov chain）でもあり、反転確率の合成は推移行列（transition matrix）の積で表される。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、条件付き確率とマルコフ連鎖をちょうどよい水準で扱っている。

解答例

STEP III 1995、第 14 問

確率・統計 ・ 積率母関数

STEP III 1995、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/95-s3-q14

鍵となる考え方

積率母関数（moment generating function, MGF）は、独立な確率変数（independent random variables）の和を積に変える。すなわち、T_1 と T_2 が独立ならば $\mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{\theta(T_1+T_2)}\right] = \mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{\theta T_1}\right]\mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{\theta T_2}\right]$ である。したがって、1 つの MGF を求めてそれを累乗し、その結果を同じ族の密度関数の MGF として見抜けばよい。MGF はその分布を決定するので、見抜くことができれば十分である。

解答

T の MGF

実数 θ に対して、

$$M_T(\theta) = \mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{\theta T}\right] = \int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-(1-\theta)t}\,\mathrm{d}t.$$

これが収束（converge）するのは $\theta < 1$ のときに限る（そうでなければ被積分関数は 0 に近づかない）ので、以下では $\theta < 1$ と仮定する。繰り返し必要となる積分は

$$\int_0^\infty t^k \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} \qquad (\lambda > 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots),$$

である。これは部分積分（integration by parts）を k 回行えば得られる（あるいは $s = \lambda t$ と置換し、$\int_0^\infty s^k \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = k!$ を用いてもよい）。$k = 1$、$\lambda = 1 - \theta > 0$ とすると、

$$\boxed{M_T(\theta) = \frac{1}{(1-\theta)^2}}, \qquad \theta < 1.$$

簡単な確認として、$M_T(0) = 1$ であり、これはすべての MGF が満たすべき性質である。

U の MGF

T_1 と T_2 を2つの問題にかかる時間とすると、$U = T_1 + T_2$ であり、T_1 と T_2 はそれぞれ密度関数 f をもち、（問題文にあるとおり）独立である。すると $e^{\theta T_1}$ と $e^{\theta T_2}$ も独立であるから、それらの積の期待値は期待値の積に等しい。

$$M_U(\theta) = \mathrm{E}\left[e^{\theta T_1} e^{\theta T_2}\right] = M_T(\theta)^2 = \frac{1}{(1-\theta)^4}, \qquad \theta < 1.$$

U の密度関数

次に、候補となる密度関数 $g(u) = \frac{1}{6}u^3 e^{-u}$ の MGF を計算する。上の積分を $k = 3$、$\lambda = 1 - \theta$ として用いると、

$$\int_0^\infty e^{\theta u}\, \tfrac{1}{6}u^3 e^{-u}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{6} \cdot \frac{3!}{(1-\theta)^4} = \frac{1}{(1-\theta)^4}.$$

（$\theta = 0$ とおくと g の積分が 1 になることが確かめられるので、これは確かに密度関数である。）

> **考えてみよう** g が U と同じ MGF をもつことを示した。なぜこのことから U の密度関数が g であるといえるのか？

ここでは MGF の一意性定理（uniqueness theorem）を用いる。すなわち、2つの確率変数の MGF が $\theta = 0$ を含むある開区間上で存在して一致するならば、両者は同じ分布をもつ。ここでは2つの MGF はすべての $\theta < 1$ で一致し、その範囲は区間 $(-1, 1)$ を含む。したがって U の密度関数は

$$g(u) = \frac{1}{6}u^3 e^{-u}, \qquad u \geq 0,$$

であり、題意は示された。

一意性定理を使いたくなければ、畳み込みの公式（convolution formula）から直接同じ結果が得られる。$T_1, T_2 \geq 0$ であるから、$u \geq 0$ に対して、

$$\begin{aligned} g(u) &= \int_0^u f(s)\, f(u-s)\, \mathrm{d}s = e^{-u} \int_0^u s(u-s)\, \mathrm{d}s \\ &= e^{-u}\left[\tfrac{1}{2}us^2 - \tfrac{1}{3}s^3\right]_0^u = \frac{1}{6}u^3 e^{-u}. \end{aligned}$$

n 問の合計時間

$U_n = T_1 + \cdots + T_n$ とする。ここで T_i は独立で、密度関数 f をもつ。同じ積の議論により

$$M_{U_n}(\theta) = M_T(\theta)^n = \frac{1}{(1-\theta)^{2n}}, \qquad \theta < 1.$$

が得られる。$n = 2$ の場合のパターンから、密度関数 $\mathrm{h}_n(u) = c\,u^{2n-1}\mathrm{e}^{-u}$ が予想される。その MGF は、$k = 2n-1$ の場合の積分により $c\,(2n-1)!/(1-\theta)^{2n}$ である。これが M_{U_n} に等しくなるのは、ちょうど $c = 1/(2n-1)!$ のときである。再び一意性により、n 問の合計時間の密度関数は

$$\boxed{\mathrm{h}_n(u) = \frac{u^{2n-1}\mathrm{e}^{-u}}{(2n-1)!}, \qquad u \geq 0.}$$

である。$n = 1$ のときこれは f となり、$n = 2$ のときは g となって、確かに期待どおりである。

検算

- $\mathrm{E}[T] = M_T'(0) = 2$ であり、これは $\int_0^\infty t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 2$ と一致する。よって $\mathrm{E}[U_n] = 2n$ である。h_n からも同じ値が得られる：$\int_0^\infty u^{2n}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u/(2n-1)! = (2n)!/(2n-1)! = 2n$。
- 数値的には、シンプソンの公式（Simpson's rule）により $\int_0^\infty \mathrm{e}^{0.5t}\,t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 4.000$ が得られ、$1/(1-0.5)^2$ と一致する。f から抽出した 3 つの時間の和を 2×10^5 個シミュレーションしたところ $\mathrm{P}(U_3 \leq 5) \approx 0.386$ となり、h_3 から得られる $\int_0^5 u^5\mathrm{e}^{-u}/120\,\mathrm{d}u \approx 0.384$ とよく合った。

よくある間違い

- 制限 $\theta < 1$ を忘れること。$\theta \geq 1$ では MGF は存在しない。
- MGF を掛ける代わりに足してしまうこと。U の MGF は $M_T(\theta)^2$ であり、$2M_T(\theta)$ ではない。（$2T$ の MGF は $M_T(2\theta)$ であり、これもまた別物である。）
- 正規化定数の階乗を間違えること。u の指数は $2n-1$ であるから、定数は $1/(2n-1)!$ であって、$1/(2n)!$ ではない。

STEP のその先へ

密度関数 $t\mathrm{e}^{-t}$ は形状パラメータ 2、レートパラメータ 1 のガンマ分布（gamma distribution）であり、h_n は形状パラメータ $2n$ のガンマ分布である。この問題は、レートが等しい独立なガンマ分布に従う確率変数の和は、形状パラメータを足し合わせたガンマ分布に従うことを示している。特に、各 T は 2 つの独立な指数分布（exponential distribution）に従う時間の和のようにふるまう。これが、ポアソン過程（Poisson process）において k 番目の事象が起こるまでの待ち時間としてガンマ分布が現れる

仕組みである。大学では、常に存在する特性関数（characteristic function）$\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X}]$ を学び、それを用いて中心極限定理（central limit theorem）を証明する。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、母関数とこれらの考え方をわかりやすく展開している。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

1995 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.