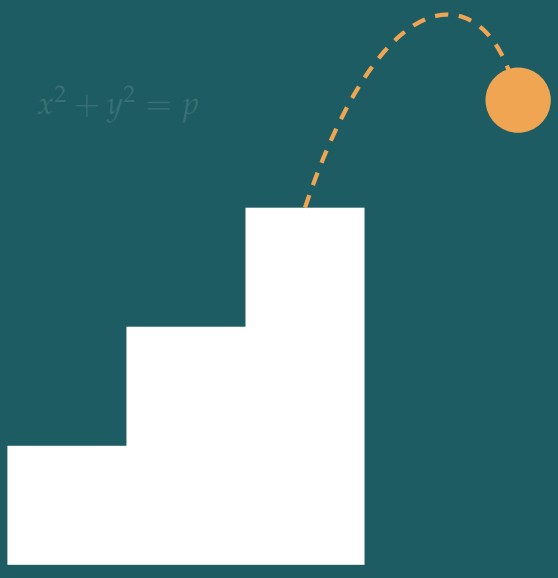
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

1994 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

1994 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

1994 年解答例

1994 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 38 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q2 対数微分法 純粋数学 . . . 3
Q4 逆正接関数の積分 純粋数学 . . . 7
Q5 放物線上の軌跡 純粋数学 . . . 11
Q6 複素関数の合成 純粋数学 . . . 15
Q8 置換積分 純粋数学 . . . 19
Q9 放物運動 力学 . . . 22
Q10 円運動 力学 . . . 26
Q11 斜面上の連結質点 力学 . . . 30
Q13 指示変数 確率・統計 . . . 34
Q14 指数分布の順序統計量 確率・統計 . . . 37

STEP II

Q1 整除性と十進数の各位の数字 純粋数学 . . . 41
Q2 ルジャンドル多項式 純粋数学 . . . 45
Q3 関数方程式 純粋数学 . . . 49
Q4 楕円の面積 純粋数学 . . . 53
Q5 実数解の個数 純粋数学 . . . 58
Q6 望遠鏡型の三角級数 純粋数学 . . . 62
Q7 アポロニウスの円 純粋数学 . . . 66
Q8 2次モデルの最適化 純粋数学 . . . 71
Q9 剛体のつり合い 力学 . . . 75
Q10 弾性ひもと単振動 力学 . . . 79
Q11 放物運動と爆発 力学 . . . 83
Q12 条件付き確率 確率・統計 . . . 87

Q13 クーポン収集問題 確率・統計 . . . 91
Q14 幾何的確率 確率・統計 . . . 95

STEP III

Q1 漸化式による積分 純粋数学 . . . 99
Q2 相反 4 次方程式 純粋数学 . . . 103
Q3 球、平面と絡み 純粋数学 . . . 107
Q4 常微分方程式の特異解 純粋数学 . . . 111
Q5 マクローリン級数 純粋数学 . . . 115
Q6 複素数平面上の回転 純粋数学 . . . 119
Q7 群の同型 純粋数学 . . . 123
Q8 四平方恒等式 純粋数学 . . . 127
Q9 等時曲線と衝突 力学 . . . 130
Q10 相対速度 力学 . . . 135
Q11 剛体のつり合い 力学 . . . 139
Q12 第一段階解析 確率・統計 . . . 143
Q13 指数分布に従う寿命 確率・統計 . . . 147
Q14 幾何的確率 確率・統計 . . . 151

解答例

STEP I 1994、第 2 問

純粋数学 ・ 対数微分法

> **STEP I 1994、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q2

鍵となる考え方

べき関数の微分法則（power rule）は、変数が底にあり指数が固定されているときに使える。指数関数の微分法則は、底が固定され変数が指数にあるときに使える。x が両方の場所に現れた途端、どちらの法則もそのままでは使えなくなる。対処法は、すべてを e のべきとして書き直すこと、あるいは同じことであるが、対数をとって陰関数微分（implicit differentiation）を行うことである。対数は扱いにくいべきを積に変え、積ならば扱うことができる。

以下では常に $x > 0$ とする（そうでなければ x^x や $\ln x$ は意味をもたない）。また、(ii) では底 a は正でなければならない。

解答

繰り返し用いる道具はただ一つである。$u > 0$ に対して

$$u^v = \mathrm{e}^{v \ln u},$$

であるから、$y = u^v$ ならば $\ln y = v \ln u$ であり、合成関数の微分法（chain rule）を用いて微分すると $\dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v \ln u)$ が得られる。

小問 (i)

ここでは指数が定数なので、これは通常のべき関数の微分法則である。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, x^a = a\, x^{a-1}.$$

これが（整数に限らず）任意の実数 a について成り立つ理由を確かめたければ、$x^a = \mathrm{e}^{a\ln x}$ と書けばよい。合成関数の微分法により $\mathrm{e}^{a\ln x}\cdot\frac{a}{x} = a\,x^a/x = a\,x^{a-1}$ となる。

小問 (ii)

今度は底が定数である。$\ln a$ は単なる定数であることに注意して $a^x = \mathrm{e}^{x\ln a}$ と書くと、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,a^x = \ln a\;\mathrm{e}^{x\ln a} = a^x\ln a.$$

(i) とはまったく異なることに注意せよ。これは $x\,a^{x-1}$ ではない。

小問 (iii)

$y = x^x$ とおく。対数をとると $\ln y = x\ln x$ である。右辺には積の微分法（product rule）を用いて両辺を微分すると、

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = 1+\ln x,$$

したがって

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,x^x = x^x\,(1+\ln x).$$

考えてみよう なぜ単純にべき関数の微分法則を用いて $x\cdot x^{x-1} = x^x$ としてはいけないのか？

べき関数の微分法則は指数が定数であることを、指数関数の微分法則は底が定数であることを前提としている。ここでは両方が変化する。実は、答えはちょうど二つの「誤った」答えの和になっている。指数を固定したものとして扱うと $x\cdot x^{x-1} = x^x$ が得られ、底を固定したものとして扱うと $x^x\ln x$ が得られ、真の導関数は $x^x + x^x\ln x$ である。これは多変数の合成関数の微分法（multivariable chain rule）が姿を変えて現れたものである。$y = u^v$ のとき、各変数がそれぞれ自身の変化率の分だけ寄与するのである。

小問 (iv)

$y = x^{(x^x)}$ とおく。これは指数そのものが x^x であるような累乗の塔である。対数をとると、

$$\ln y = x^x\ln x.$$

右辺を積の微分法で微分し、x^x の導関数には (iii) を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x^x(1+\ln x)\cdot\ln x + x^x\cdot\frac{1}{x}\\ &= x^x\left(\frac{1}{x}+\ln x+(\ln x)^2\right).\end{aligned}$$

$y = x^{(x^x)}$ を掛け、x のべきをまとめると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,x^{(x^x)} = x^{(x^x)}\,x^x\left(\frac{1}{x}+\ln x+(\ln x)^2\right) = x^{x^x+x}\left(\frac{1}{x}+\ln x+(\ln x)^2\right).$$

同値な形として、$\frac{1}{x}$ を括弧の外に出せば $x^{x^x+x-1}(1+x\ln x+x(\ln x)^2)$ となる。

小問 (v)

> **考えてみよう**　$(x^x)^x$ は (iv) の式と同じではないのか？

同じではない。指数法則（law of indices）$(u^m)^n = u^{mn}$ により $(x^x)^x = x^{x\cdot x} = x^{x^2}$ であるのに対し、(iv) では指数は x^2 ではなく x^x である。両者は $x=1$ と $x=2$ ではたまたま一致する（$x=2$ ではどちらも 16 になる）が、$x=3$ では一方は 3^{27}、もう一方はわずか 3^9 である。

そこで $y = x^{x^2}$ とおく。すると $\ln y = x^2\ln x$ であり、積の微分法により

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x} = x\,(1+2\ln x).$$

よって

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(x^x)^x = x^{x^2}\cdot x\,(1+2\ln x) = x^{x^2+1}\,(1+2\ln x).$$

（代わりに $(x^x)^x$ を直接微分してもよい。$\ln y = x\ln(x^x) = x^2\ln x$ となり、同じことである。）

検算

- $x=1$ では (iii)、(iv)、(v) のいずれも導関数の値は 1 となる。たとえば (iv) では $1^{1+1}(1+0+0)=1$ である。中心差分 $\big(f(1.000001)-f(0.999999)\big)/0.000002$ もこれと一致する。
- x^x は $1+\ln x=0$ となる $x=\mathrm{e}^{-1}$ で最小値をとり、$(x^x)^x = x^{x^2}$ は $1+2\ln x=0$ となる $x=\mathrm{e}^{-1/2}$ で最小値をとる。どちらもグラフ電卓で確認できる。
- すべての公式を、$0.2\le x\le 2.5$（および $0.2\le a\le 4$）を満たす無作為に選んだ 2000 個の点で数値微分と比較した。相対誤差は常に 10^{-9} 未満であった。

よくある間違い

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^x = x \cdot x^{x-1}$ や $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = x\,a^{x-1}$ と書いてしまう。べき関数の微分法則には定数の指数が必要である。
- (iv) と (v) を同じ関数として扱ってしまう。べき乗は結合的（associative）ではない。一般に $x^{(x^x)} \neq (x^x)^x$ である。
- $\ln y$ を微分した後に y を掛け戻すのを忘れる。

STEP のその先へ

そもそも a が無理数のとき、たとえば $x^{\sqrt{2}}$ のとき、x^a とは何を意味するのだろうか？

大学での答えは、まず exp をべき級数（power series）によって定義し、ln をその逆関数として定義したうえで、$u > 0$ に対して $u^v = \mathrm{e}^{v \ln u}$ と**定義する**ことである。すると指数法則のすべてと上で求めた導関数はみな定理となる。このことは Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）や Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）で丁寧に扱われている。(iii) における「二つの誤った答えの和」は、偏導関数（partial derivative）と多変数の合成関数の微分法を初めて垣間見るものである。

解答例

STEP I 1994、第 4 問

純粋数学 ・ 逆正接関数の積分

> **STEP I 1994、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q4

鍵となる考え方

小問 (i) は半角の公式（half-angle identity）であり、小問 (ii) は「平方完成（complete the square）してから $\tan^{-1}$ を用いる」という定番の積分である。最後の積分は小問 (ii) で $k = \cos\alpha$ とおいたものであり、このとき $\sqrt{1-k^2} = \sin\alpha$ となって分子の因数 $\sin\alpha$ と打ち消し合う。本当に注意が必要なのは最後の部分だけである。正接の値に $\tan^{-1}$ を施して元の角が戻ってくるのは、その角が $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ に属するときに限られる。

解答

小問 (i)

倍角の公式（double-angle formulae）$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ と $\sin\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$ を用いると、

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha} = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha} = \tan\tfrac{1}{2}\alpha,$$

となり、これは $\sin\alpha \neq 0$ のとき（したがって両辺が定義されるとき）常に成り立つ。これが示すべきことであった。

小問 (ii)

分母を平方完成する。

$$1-2kx+x^2 = (x-k)^2 + (1-k^2).$$

$|k| < 1$ であるから定数 $1-k^2$ は正であり、$a = \sqrt{1-k^2} > 0$ として $1-k^2 = a^2$ と書ける。（条件 $|k| < 1$ が使われるのはまさにここである。そうでなければ分母は因数分解

でき、代わりに対数が現れる。）$x-k=a\tan\theta$ と置換すると $\mathrm{d}x=a\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$ であるから、

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-k)^2+a^2}&=\int\frac{a\sec^2\theta}{a^2\tan^2\theta+a^2}\,\mathrm{d}\theta=\int\frac{1}{a}\,\mathrm{d}\theta=\frac{\theta}{a}+C\\&=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\tan^{-1}\left(\frac{x-k}{\sqrt{1-k^2}}\right)+C,\end{aligned}$$

となり、求める結果を得る。（同じことだが、右辺を微分してもよい。合成関数の微分法（chain rule）により $\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1/a}{1+(x-k)^2/a^2}=\dfrac{1}{(x-k)^2+a^2}$ となる。）

最後の積分

$k=\cos\alpha$ とおく。$0<\alpha<\pi$ であるから $|k|<1$ となり、小問 (ii) が適用できる。さらに $\sin\alpha>0$ より

$$\sqrt{1-k^2}=\sqrt{\sin^2\alpha}=\sin\alpha$$

である（この区間では $\sin\alpha>0$ なので、$-\sin\alpha$ ではない）。したがって、分子の因数 $\sin\alpha$ は小問 (ii) の因数 $1/\sqrt{1-k^2}$ と打ち消し合う。

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}\,\mathrm{d}x&=\left[\tan^{-1}\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\right]_0^1\\&=\tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\\&=\tan^{-1}\left(\tan\tfrac{1}{2}\alpha\right)+\tan^{-1}(\cot\alpha),\end{aligned}$$

ここで、第 1 項には小問 (i) を、第 2 項には $\tan^{-1}$ が奇関数（odd function）であることを用いた。

考えてみよう $\tan^{-1}(\tan\theta)$ は常に θ に等しいだろうか？

そうではない。$\tan^{-1}$ の値域は $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ であるから、$\tan^{-1}(\tan\theta)=\theta$ が成り立つのは θ がこの区間に属するときだけである。各項を確かめよう。

- $0<\alpha<\pi$ より $0<\frac{1}{2}\alpha<\frac{\pi}{2}$ であるから、$\tan^{-1}\left(\tan\frac{1}{2}\alpha\right)=\frac{1}{2}\alpha$ である。
- $\cot\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ と書く。$0<\alpha<\pi$ より角 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ は $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ に属するから、$\tan^{-1}(\cot\alpha)=\frac{\pi}{2}-\alpha$ である。

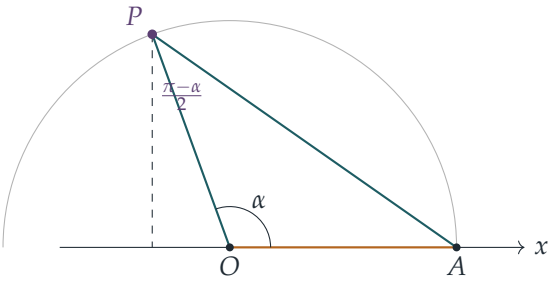
これらを足し合わせると、

$$\int_0^1\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{\pi-\alpha}{2},$$

となり、これが求める結果である。

別解：図で考える

この答えには美しい幾何学的な理由がある。単位円（unit circle）上の点を $P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$、原点を O、$A = (1,0)$ とする。点 $X = (x,0)$ が x 軸上を動くとき、PX と P を通る下向きの鉛直線とのなす角 θ は $\tan\theta = (x - \cos\alpha)/\sin\alpha$ を満たし、被積分関数（integrand）はちょうど $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x$ になっている。したがって積分の値は、X が O から A まで動く間に掃く角、すなわち角 OPA である。三角形 OPA は $OP = OA = 1$ で O における頂角（apex angle）が α の二等辺三角形（isosceles triangle）であるから、その底角（base angles）はどちらも $\frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ である。



検算

- $\alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき積分は $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$ であり、公式からも $\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ が得られる。
- 数値的には、$\alpha = 1$ のときシンプソンの公式（Simpson's rule）により $1.0707963\ldots$ が得られ、$\frac{1}{2}(\pi - 1) = 1.0707963\ldots$ と一致する。
- $\alpha \to \pi^-$ のとき、$[0,1]$ の各 x について被積分関数は 0 に近づき、$\frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ も同様に 0 に近づく。

よくある間違い

- $\frac{\pi}{2} - \alpha$ が $\tan^{-1}$ の値域に属することを確かめずに $\tan^{-1}(\cot\alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha$ と書いてしまう。α が $(0,\pi)$ の外にあると、同じ変形は成り立たない。
- 理由を述べずに $\sqrt{1-\cos^2\alpha} = |\sin\alpha|$ を $\sin\alpha$ としてしまう。ここでそうできるのは $0 < \alpha < \pi$ だからである。

STEP のその先へ

$\alpha \to 0^+$ のとき答えは $\frac{\pi}{2}$ に近づくが、$\alpha = 0$ では被積分関数は恒等的に 0 である。被積分関数は $x = 1$ の近くで高く細い尖りとなり、その面積は小さくならないのである。これは上半平面のポアソン核（Poisson kernel）であり、極限と積分の順序を不用意に交換すると誤った答えが得られる。このような交換がいつ許されるかは、大学 1 年次の解析学（analysis）の中心的な問題である。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照されたい。幾何学的な「見込む角」の描像は、Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）で見事に展開されている。

解答例

STEP I 1994、第 5 問

純粋数学 ・ 放物線上の軌跡

> **STEP I 1994、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q5

鍵となる考え方

まず幾何的な条件を代数に直す。原点で直角をなすということは、位置ベクトル（position vector）$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ が垂直であるということであり、$y = x^2$ 上の点に対しては、これが p と q の間のひとつの簡潔な関係式に帰着する。すると点 R と T の座標はどちらも p と q について対称になるので、すべてを $p+q$ と pq で表し、文字を消去すればよい。

解答

直角となるための条件

P も Q も原点ではありえない。原点であれば角が定義されないからである。よって $p \neq 0$ かつ $q \neq 0$ である。角 POQ が直角となるのは、$\overrightarrow{OP} = (p, p^2)$ と $\overrightarrow{OQ} = (q, q^2)$ の内積（scalar product）が 0 となるときであり、そのときに限る：

$$pq + p^2q^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad pq(1+pq) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad pq = -1,$$

ここで $pq \neq 0$ で割った。（同値な言い方をすれば、OP と OQ の傾き（gradient）p と q の積が -1 になるということである。）

したがって、求める組はちょうど $p \neq 0$ かつ $q = -1/p$ を満たすものである。p が 0 でない実数全体を動くとき、和

$$s = p + q = p - \frac{1}{p}$$

はあらゆる実数値をとる。実際、任意の s に対して、2 次方程式 $p^2 - sp - 1 = 0$ の判別式（discriminant）は $s^2 + 4 > 0$ であるから実数解をもち、その積は -1 なので、ど

ちらの解も 0 ではない。このことは、以下で求める軌跡（locus）が曲線の一部ではなく曲線全体であることを言うのに必要になる。

小問 (i)

PQ の中点（midpoint）は

$$R = \left(\frac{p+q}{2}, \frac{p^2+q^2}{2} \right).$$

である。$R = (x, y)$ とおくと $p+q = 2x$ である。$pq = -1$ を用いると

$$y = \frac{(p+q)^2 - 2pq}{2} = \frac{4x^2+2}{2} = 2x^2 + 1.$$

$p+q$ はあらゆる実数値をとるので x もそうであり、R の軌跡は放物線（parabola）

$$y = 2x^2 + 1,$$

の全体である。頂点（vertex）は $(0,1)$、軸（axis）は y 軸である。$2x^2 + 1 - x^2 = x^2 + 1 > 0$ であるから、この放物線は $y = x^2$ より幅が狭く、全体が $y = x^2$ より上にある。これは、R が凸（convex）な曲線の弦（chord）の中点であることと整合している。

小問 (ii)

$y = x^2$ を微分すると、P における接線（tangent）の傾きは $2p$ であるから、その方程式は

$$y - p^2 = 2p(x - p), \qquad \text{すなわち} \qquad y = 2px - p^2,$$

であり、同様に Q における接線は $y = 2qx - q^2$ である。$p \neq q$ であるから（積が -1 なので両者は等しくなりえない）、これらは平行ではない。2 つの方程式の差をとると

$$2(p-q)x = p^2 - q^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{p+q}{2},$$

ここで $p - q \neq 0$ で割った。すると

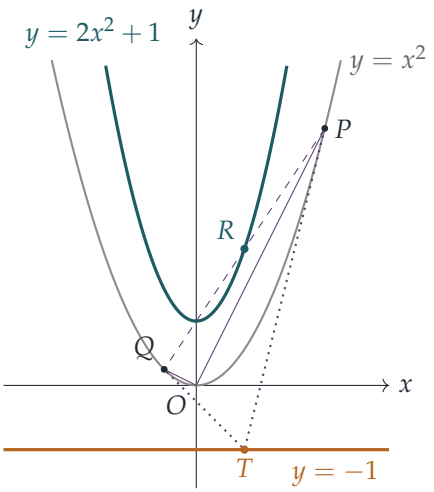
$$y = 2p \cdot \frac{p+q}{2} - p^2 = pq = -1.$$

考えてみよう T の y 座標は一定である。では軌跡は 1 点なのか、線分なのか、それとも直線全体なのか。

T の x 座標は $\frac{1}{2}(p+q)$ であり、これはあらゆる実数値をとることをすでに示した。よって T はこの直線上のどこにでもなりうるので、T の軌跡は直線

$$y = -1.$$

の全体である。また、T はつねに R の真下にあることにも注意しよう。どちらも x 座標が $\frac{1}{2}(p+q)$ だからである。



図は $p = 2, q = -\frac{1}{2}$ の場合のひとつの配置を示している。このとき $R = (\frac{3}{4}, \frac{17}{8})$ はティール色の放物線上に、$T = (\frac{3}{4}, -1)$ は琥珀色の直線上にある。

検算

$p = 1, q = -1$ とすると、$P = (1,1), Q = (-1,1)$ であり、OP, OQ は直線 $y = \pm x$ なので明らかに垂直である。中点は $(0,1)$ で、これは $y = 2x^2 + 1$ の頂点である。また接線 $y = 2x - 1$ と $y = -2x - 1$ は $(0,-1)$ で交わり、これは $y = -1$ 上にある。図と同じく $p = 2, q = -\frac{1}{2}$ とすると、$2 \cdot (\frac{3}{4})^2 + 1 = \frac{17}{8}$ となり、確かに正しい。p の 10^5 個のランダムな値で数値的に確かめたところ、R は約 10^{-10} の誤差の範囲で $y = 2x^2 + 1$ を満たし、T はつねに $y = -1$ を満たした。

よくある間違い

- $pq(1 + pq) = 0$ で止めてしまい、$pq = 0$ が除外される理由を説明しないこと。$pq = 0$ だと P または Q が原点に来てしまう。
- すべての x が実際にとられることを確かめずに軌跡の方程式を答え、図が曲線の一部ではなく全体であることの根拠を欠くこと。
- T が準線（directrix）上にあると思い込むこと。$y = x^2$ の準線は $y = -\frac{1}{4}$ である。接線どうしがそこで交わるのは PQ が焦点（focus）を通るときであり、これは $\angle POQ = 90°$ とは別の条件である。

STEP のその先へ

ここでの弦 PQ はつねに定点 $(0,1)$ を通る。実際、その方程式は $y=(p+q)x-pq=(p+q)x+1$ である。定点を通る直線の族と、それに対応して接線どうしが交わる「極」(pole)（ここでは $(0,1)$ の極線（polar）である直線 $y=-1$ 上にある）は、射影幾何学（projective geometry）の出発点である。射影幾何学では、円錐曲線（conic）とその極と極線の関係が体系的に研究される。この趣旨の問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の上級問題集）に取り組んでみるとよい。

解答例

STEP I 1994、第 6 問

純粋数学 ・ 複素関数の合成

> **STEP I 1994、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q6

鍵となる考え方

商の実部（real part）と虚部（imaginary part）を求めるには、分母の共役複素数（complex conjugate）を分子と分母に掛ければよい。x が実数であれば、その共役は容易に書き下せる。繰り返し適用した関数については、(i) で得た煩雑な実部と虚部をもう一度式に代入するよりも、一般の z に対して f をそれ自身と**代数的に**合成（composition）するほうがはるかに見通しがよい。$\mathrm{f}(\mathrm{f}(z))$ を整った形にしてしまえば、最後の小問は 1 行の代入で済む。

解答

x は実数なので、$\mathrm{i}x+1$ の実部は 1 である。よってこれは決して 0 にならず、$\mathrm{f}(x)$ はすべての実数 x に対して定義される。

小問 (i)

x は実数なので、$\mathrm{i}x+1$ の共役は $1-\mathrm{i}x$ である。これを分子と分母に掛けると、

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(x) = \frac{(\mathrm{i}x-1)(1-\mathrm{i}x)}{(1+\mathrm{i}x)(1-\mathrm{i}x)} &= \frac{\mathrm{i}x+x^2-1+\mathrm{i}x}{1+x^2} \\ &= \frac{x^2-1}{x^2+1} + \mathrm{i}\,\frac{2x}{x^2+1}.\end{aligned}$$

どちらの分数も実数であるから、これらが求める実部と虚部である。

小問 (ii)

任意の複素数 w に対して $ww^* = (\operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} w)^2$ が成り立つ。小問 (i) を用いると、

$$\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(x)^* = \frac{(x^2-1)^2+4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+2x^2+1}{(x^2+1)^2} = 1.$$

したがって $|\mathrm{f}(x)| = 1$ である。すなわち、f はすべての実数を単位円（unit circle）上の点に移す。

小問 (iii)

(i) の答えを f に代入するのではなく、一般の z に対して合成を行う。$w = \mathrm{f}(z) = \dfrac{\mathrm{i}z-1}{\mathrm{i}z+1}$ とおき、$\mathrm{f}(w) = \dfrac{\mathrm{i}w-1}{\mathrm{i}w+1}$ の分子と分母に $\mathrm{i}z+1$ を掛けると、

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(\mathrm{f}(z)) &= \frac{\mathrm{i}(\mathrm{i}z-1)-(\mathrm{i}z+1)}{\mathrm{i}(\mathrm{i}z-1)+(\mathrm{i}z+1)} = \frac{-z-\mathrm{i}-\mathrm{i}z-1}{-z-\mathrm{i}+\mathrm{i}z+1} \\ &= \frac{-(1+\mathrm{i})(z+1)}{(1-\mathrm{i})(1-z)} = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\cdot\frac{z+1}{z-1} = \mathrm{i}\,\frac{z+1}{z-1},\end{aligned}$$

となる。ここで $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{2} = \mathrm{i}$ を用いた。

? **考えてみよう** $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$ はすべての実数 x に対して定義されるだろうか？

そうではない。$\mathrm{i}w+1 \neq 0$、すなわち $\mathrm{f}(x) \neq \mathrm{i}$ が必要である。小問 (i) より、$\mathrm{f}(x) = \mathrm{i}$ となるには $x^2-1=0$ かつ $2x = x^2+1$ でなければならず、これが起こるのは $x=1$ のときだけである。これは上の分母にある因数 $x-1$ と符合している。よって実数 $x \neq 1$ に対して、

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = \mathrm{i}\,\frac{x+1}{x-1}, \qquad \text{よって} \qquad \operatorname{Re}\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = 0, \quad \operatorname{Im}\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = \frac{x+1}{x-1}.$$

実軸（real axis）は 1 回目の f の適用で単位円に移され、単位円は 2 回目の適用で虚軸（imaginary axis）に移される。

小問 (iv)

$y = \dfrac{x+1}{x-1}$ を実数として $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = \mathrm{i}y$ と書く。すると $\mathrm{i}(\mathrm{i}y) = -y$ であるから、

$$\mathrm{f}(\mathrm{i}y) = \frac{-y-1}{-y+1} = \frac{y+1}{y-1}.$$

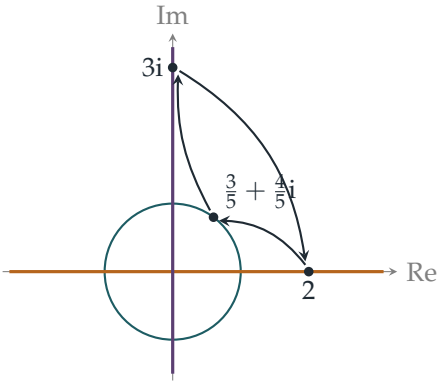
$y=1$ となるには $x+1 = x-1$ でなければならず、これは不可能なので、この式は定義される。ここで

$$y+1 = \frac{2x}{x-1}, \qquad y-1 = \frac{2}{x-1},$$

であるから、

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))) = x \qquad \text{すべての実数} x \neq 1.$$

f を 3 回適用すると出発点に戻る。3 回目の適用によって虚軸は実軸に戻されるのである。下の図は $x = 2$ の場合の巡回を示しており、$2 \mapsto \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i} \mapsto 3\mathrm{i} \mapsto 2$ となる。



検算

- $x = 0$：$\mathrm{f}(0) = -1$ であり、これは単位円上にあって (i) と一致する。次に $\mathrm{f}(-1) = \dfrac{-\mathrm{i} - 1}{-\mathrm{i} + 1} = -\mathrm{i}$ となり、$\mathrm{i}\frac{0+1}{0-1}$ と一致する。さらに $\mathrm{f}(-\mathrm{i}) = \frac{1-1}{1+1} = 0$ である。
- $x = 2$：小問 (i) から $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}$、小問 (iii) から 3i が得られ、小問 (iv) で 2 に戻る。10^4 個の無作為な実数 x（および無作為な複素数 z）による数値検証でも、上のすべての式が丸め誤差の範囲で確かめられた。

よくある間違い

- (i) で得た実部と虚部をそのまま f に代入してしまうこと。それでも答えは出るが、計算が重く間違えやすい。z を用いて合成するほうがはるかに見通しがよい。
- (iii) と (iv) で $x = 1$ を除外し忘れること。$\mathrm{f}(1) = \mathrm{i}$ であり、f(i) は分母が 0 になるからである。

STEP のその先へ

$z \mapsto \dfrac{az + b}{cz + d}$ の形の関数を**メビウス変換**（Möbius transformation）という。このような写像は円と直線を円と直線に移す。ここで見たとおり、実軸は単位円に、単位円は虚軸に移り、そして再び実軸に戻った。2 つのメビウス変換の合成は、2×2 行列

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の積に対応する。実は、すべての複素数 z に対して $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(z))) = z$ が成り立つので、f はメビウス変換のなす群（group）において位数（order）3 をもつ。また、(i) で $x = \tan\frac{\theta}{2}$ とおくと $\mathrm{f}(x) = -\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ となる。これはおなじみの「t 置換」による円のパラメータ表示（parametrisation）である。Needham の *Visual Complex Analysis* には、メビウス変換とその幾何についての見事な章がある。

解答例

STEP I 1994、第 8 問

純粋数学 ・ 置換積分

STEP I 1994、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/94-s1-q8

鍵となる考え方

置換（substitution）$\theta = \frac{1}{4}\pi - \phi$ は区間 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ をそれ自身へ折り返し、加法定理（addition formula）により $1 + \tan(\frac{1}{4}\pi - \phi)$ は $2/(1 + \tan\phi)$ に変わる。こうして右辺に同じ積分が負の符号付きで再び現れるので、難しい積分を実行しなくても、その積分について方程式を解けばよい。後半の二つの積分は、この同じ積分が姿を変えたものである。一方は $x = \tan\theta$ とおいた後に、もう一方は半角の公式（half-angle formulae）を使った後にそれがわかる。

解答

一つ目の積分

この積分を I とおく。$\theta = \frac{1}{4}\pi - \phi$ とおくと $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$ であり、$\theta = 0$ のとき $\phi = \frac{1}{4}\pi$、$\theta = \frac{1}{4}\pi$ のとき $\phi = 0$ である。よって

$$I = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{0} \ln\bigl(1 + \tan(\tfrac{1}{4}\pi - \phi)\bigr)\,(-\mathrm{d}\phi) = \int_{0}^{\frac{1}{4}\pi} \ln\bigl(1 + \tan(\tfrac{1}{4}\pi - \phi)\bigr)\,\mathrm{d}\phi.$$

加法定理と $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$ を用いると

$$1 + \tan(\tfrac{1}{4}\pi - \phi) = 1 + \frac{1 - \tan\phi}{1 + \tan\phi} = \frac{2}{1 + \tan\phi}.$$

（$[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上では $\tan\phi \geq 0$ であるから、分母が 0 になることはなく、対数の中身はすべて正である。）したがって

$$I = \int_{0}^{\frac{1}{4}\pi} \bigl(\ln 2 - \ln(1 + \tan\phi)\bigr)\,\mathrm{d}\phi = \tfrac{1}{4}\pi \ln 2 - I,$$

となる。最後の積分は、積分変数（dummy variable）の名前を変えただけで再び I だからである。

> **考えてみよう** 原始関数（antiderivative）は一度も求めていない。なぜそれでよいのだろうか？

原始関数は必要ない。I は単なる一つの数であり、置換によってその数が満たすべき方程式 $I = \frac{1}{4}\pi \ln 2 - I$ が得られる。これを解くと

$$2I = \tfrac{1}{4}\pi \ln 2 \quad \Longrightarrow \quad \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \ln(1+\tan\theta)\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{8}\pi \ln 2,$$

となり、示すべき式が得られた。

$1+x^2$ を含む積分

因子 $\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ から $x = \tan\theta$ とおくことが思いつく。このとき $\mathrm{d}x = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = (1+x^2)\,\mathrm{d}\theta$ である。積分区間の端 $x = 0$ と $x = 1$ はそれぞれ $\theta = 0$ と $\theta = \frac{1}{4}\pi$ になる。よって

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \ln(1+\tan\theta)\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{8}\pi \ln 2.$$

$\sin x$ と $\cos x$ を含む積分

この積分を J とおく。最も速いのは対称性（symmetry）を使う方法である。$x = \frac{1}{2}\pi - u$ と置換すると sin と cos が入れ替わり、$[0, \frac{1}{2}\pi]$ はそれ自身に移るので

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln\left(\frac{1+\cos u}{1+\sin u}\right)\mathrm{d}u = -J,$$

となり、したがって $J = 0$ である。（同じことだが、$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(1+\sin x)\,\mathrm{d}x$ と $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(1+\cos x)\,\mathrm{d}x$ は等しいので、その差は 0 である。）

> **考えてみよう** 一つ目の結果はどこで使われるのだろうか？

J が I とどう結びついているかを見ておく価値はある。問題がこの積分をここに置いているのは、おそらくそのためである。$t = \frac{1}{2}x$ とおくと、半角の公式から

$$1+\cos x = 2\cos^2 t, \qquad 1+\sin x = (\cos t + \sin t)^2,$$

であるから

$$\frac{1+\sin x}{1+\cos x} = \frac{(\cos t+\sin t)^2}{2\cos^2 t} = \tfrac{1}{2}(1+\tan t)^2.$$

x が $[0, \frac{1}{2}\pi]$ を動くとき t は $[0, \frac{1}{4}\pi]$ を動き、$\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t$ である。よって

$$J = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \left(2\ln(1+\tan t) - \ln 2\right) 2\,\mathrm{d}t = 4I - \tfrac{1}{2}\pi\ln 2 = \tfrac{1}{2}\pi\ln 2 - \tfrac{1}{2}\pi\ln 2 = 0,$$

となり、対称性による議論と一致する。したがって

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right) \mathrm{d}x = 0.$$

検算

シンプソンの公式（Simpson's rule）で数値計算すると、tan を含む積分と $1+x^2$ を含む積分はどちらも 0.2721982613 となり、$\frac{1}{8}\pi\ln 2 = 0.2721982613\ldots$ と一致する。三つ目の積分は計算機の精度の範囲で 0 となる。手計算による大まかな確認もできる。被積分関数（integrand）$\ln(1+\tan\theta)$ は 0 から $\ln 2$ まで増加するので、I はおよそ $\frac{1}{4}\pi\ln 2$ の半分になるはずである。答えはちょうどその値である。

よくある間違い

- $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$ であることと積分区間の端が入れ替わることの一方を忘れる。二つの符号の変化は打ち消し合う。一方だけを考慮すると $I = -\frac{1}{4}\pi\ln 2 - I$ となってしまう（そして正の値をとる積分に負の答えが出る）。
- $\tan(\frac{1}{4}\pi - \phi) = 1 - \tan\phi$ と書いてしまい、加法定理の分母を忘れる。
- $x \mapsto \frac{1}{2}\pi - x$ という対称性に気づかず、三つ目の積分に長い時間を費やす。

STEP のその先へ

折り返しの置換を行い、その結果をもとの積分と足し合わせる技法、すなわち $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$ を利用する技法は、文献によってはキング・プロパティ（King property）と呼ばれる。この技法からは、有名な $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi\ln 2$ も得られる。大学では、このような結果はパラメータを含む定積分の理論や周回積分（contour integration）の理論の中に位置づけられ、そこでは原始関数を求めることなく、積分の族がまとめて計算される。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析の入門書）は複素関数の手法からこうした結果がどのように得られるかを示しており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）には、このような対称性の技法を使う STEP 形式の演習がさらに収められている。

解答例

STEP I 1994、第 9 問

力学 ・ 放物運動

> **STEP I 1994、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q9

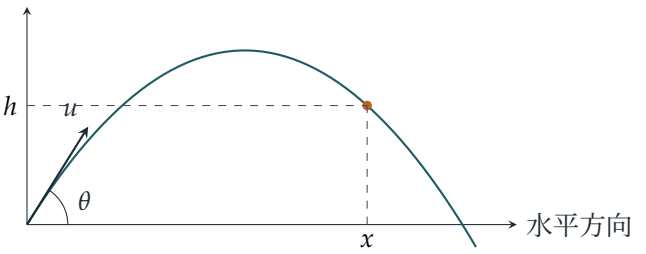
鍵となる考え方

発射角 θ は未知の量であるから、これを消去する。水平方向と鉛直方向の式にはそれぞれ $u\cos\theta$ または $u\sin\theta$ が含まれており、両辺を 2 乗して加えれば θ は完全に消える。得られる式は t^2 についての 2 次方程式（quadratic）であり、2 次方程式が実数解をもつのは判別式（discriminant）が負でないときに限る。この条件こそが到達距離に対する上界を与える。

解答

t についての方程式

砲弾を、原点から水平面に対して角 θ 上向きに発射され、重力のみを受けて運動する質点（particle）としてモデル化する。時刻 t において砲弾は水平距離 x、高さ h の位置にあるので、大砲からの距離は求めるとおり $\sqrt{x^2+h^2}$ である。



下向きの一定の加速度 g を用い、水平方向には力がはたらかないとすると、

$$x = ut\cos\theta,$$
$$h = ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

θ を含む項を分離すると、

$$ut\cos\theta = x, \qquad ut\sin\theta = h + \tfrac{1}{2}gt^2.$$

両辺を 2 乗して加え、$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を用いると、

$$\begin{aligned} u^2t^2 &= x^2 + \left(h + \tfrac{1}{2}gt^2\right)^2 \\ &= x^2 + h^2 + ght^2 + \tfrac{1}{4}g^2t^4, \end{aligned}$$

これを整理すると

$$\tfrac{1}{4}g^2t^4 - (u^2 - gh)t^2 + h^2 + x^2 = 0,$$

となり、求める式が得られる。

到達距離の上界

ここで u と h を固定し、高さ h においてどのような水平距離 x が可能かを考える。ある時刻 t に砲弾が (x,h) にあるならば、$T = t^2$ は

$$\tfrac{1}{4}g^2T^2 - (u^2 - gh)T + (h^2 + x^2) = 0.$$

の実数解である。

考えてみよう　この式には x、h、u、t が含まれているが、私たちが欲しいのは x だけについての主張である。2 次方程式が実数解をもつならば、何が成り立たなければならないか。

実数解をもつためには判別式が負でないことが必要である：

$$\begin{aligned} (u^2 - gh)^2 - 4\cdot\tfrac{1}{4}g^2(h^2 + x^2) &\geq 0 \\ u^4 - 2u^2gh + g^2h^2 - g^2h^2 - g^2x^2 &\geq 0 \\ g^2x^2 &\leq u^2(u^2 - 2gh). \end{aligned}$$

$u^2 > 2gh$ であるから右辺は正であり、負でない平方根をとると

$$x \leq \frac{u\sqrt{u^2 - 2gh}}{g}.$$

を得る。したがって、高さ h における水平到達距離がこの値を超えることは決してなく、これが示すべきことであった。（$u^2 < 2gh$ ならば、この不等式はどの x に対しても成り立たない。高さ h は砲弾が到達できる最高点の高さ $u^2/2g$ より上にあるからである。）

上界は達成される

等号成立は判別式が 0 であることを意味するので、重解

$$t^2 = T = \frac{u^2 - gh}{2 \cdot \frac{1}{4}g^2} = \frac{2(u^2 - gh)}{g^2}.$$

が存在する。これは正であるから（$h \geq 0$ ならば $u^2 > 2gh \geq gh$ であり、$h < 0$ ならば自明である）、実際の時刻 $t > 0$ を与える。あとは、ある角 θ によって、$x = u\sqrt{u^2 - 2gh}/g$ のもとでこの時刻が実現されることを確かめなければならない。2 つの成分の式から、

$$\sin\theta = \frac{h + \frac{1}{2}gt^2}{ut}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{ut}.$$

が必要である。上で求めた t^2 の値を用いると $h + \frac{1}{2}gt^2 = h + (u^2 - gh)/g = u^2/g$ であるから、

$$\sin\theta = \frac{u}{gt}, \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{u^2 - 2gh}}{gt}.$$

考えてみよう $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を別々に定めた。その両方をもつ角が 1 つ存在することは、どうしてわかるのか。

どちらの値も正であり、t^2 の値から

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{u^2 + u^2 - 2gh}{g^2t^2} = \frac{2(u^2 - gh)}{g^2t^2} = 1$$

が成り立つ。したがって、条件を満たす角 θ は 0 と $\frac{1}{2}\pi$ の間にちょうど 1 つ存在し、それは

$$\tan\theta = \frac{u}{\sqrt{u^2 - 2gh}}.$$

で与えられる。この角で発射すれば、砲弾は時刻 t に高さ h にあり、水平距離はちょうど $u\sqrt{u^2 - 2gh}/g$ となる。よって $u^2 > 2gh$ のとき、上界は常に達成される。

$h > 0$ のときは $\tan\theta > 1$ であることに注意しよう。大砲より高いある高さで最も遠くまで届かせるには、45° より急な角度で発射すればよいのである。また、その瞬間の鉛直方向の速度は $u\sin\theta - gt = (u^2 - g^2t^2)/(gt) = (2gh - u^2)/(gt) < 0$ であるから、砲弾は落下する途中で高さ h における最遠点に達する。

検算

- $h = 0$ のとき上界は u^2/g、$\tan\theta = 1$ となる。これは水平な地面上でのおなじみの最大到達距離で、45° のときに得られる。

- $u = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$h = 10\,\mathrm{m}$ のとき、上界は約 29.15 m で、$\theta \approx 54.5^\circ$ のときに得られる。
- 無作為に選んだ軌道に沿って 4 次方程式が成り立つこと、また数千通りの発射角を走査しても上界を超えることはないが、上界との差は 10^{-4} 以内まで迫ることを数値的に確かめた。上で求めた角では上界にちょうど一致する。

よくある間違い

- x を θ で微分して最適な θ を求めようとすること。それも可能だが、計算が煩雑になる。判別式が最適化を代わりにやってくれるのである。
- 最後の段階を忘れること。判別式が 0 であることから t の値は得られるが、それを実現する実数の角が存在することを、$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を確かめることで示さなければならない。

STEP のその先へ

速さ u で発射された砲弾が到達できる点全体は、すべての軌道の**包絡線**（envelope）、すなわち「安全放物線」（parabola of safety）$y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}$ で囲まれた領域をなす。ここで得た上界を変形すると、(x, h) に到達可能であるのは、それがこの放物線上またはその下側にあるとき、かつそのときに限ることがわかる。曲線族の包絡線も同じ「重解」の考え方から得られ、変分法（calculus of variations）や光学（コースティクス、caustics）にも再び現れる。放物運動とその背後にある力学についてさらに知りたい場合は、Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

解答例

STEP I 1994、第 10 問

力学 ・ 円運動

> **STEP I 1994、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q10

鍵となる考え方

これは伸び縮みする糸を用いた円錐振り子（conical pendulum）である。質点には鉛直方向の加速度がないので、張力（tension）の鉛直成分が重力とつり合い、水平成分が向心力（centripetal force）を与える。新しい点は、円の半径が伸び（extension）に依存し、その伸びが張力に依存することであり、フックの法則（Hooke's law）がすべてを結びつける。そして不等式は、$\cos\theta$ のどの値が実際に円運動を表すのかを問うことから得られる。

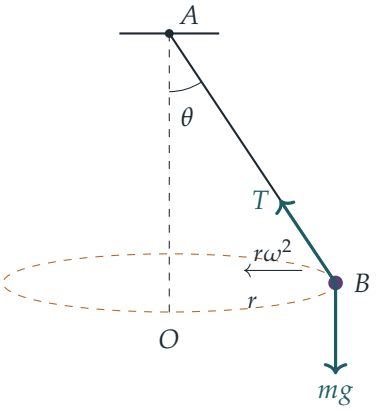
解答

$\cos\theta$ を求める

B を質点、AB をフックの法則に従う軽い弾性糸（elastic string）とみなす。伸びを x、張力を T とすると

$$T = \frac{\lambda x}{l}, \qquad AB = l + x.$$

質点は、A の鉛直真下にある点 O を中心とする半径 $r = (l + x)\sin\theta$ の水平な円周上を運動する。質点にはたらく力は重力と、BA に沿った張力だけである。



鉛直方向に力を分解すると（鉛直方向の加速度はない）

$$T\cos\theta = mg. \tag{1}$$

水平方向に、中心 O へ向かう向きに力を分解すると（加速度は $r\omega^2$）

$$T\sin\theta = m\omega^2(l+x)\sin\theta.$$

本当に円運動であれば $\sin\theta \neq 0$ なので、これで割ることができる。

$$T = m\omega^2(l+x). \tag{2}$$

ここでフックの法則より $\lambda x/l = m\omega^2(l+x)$、すなわち

$$x\left(\lambda - m\omega^2 l\right) = m\omega^2 l^2.$$

$x > 0$（(1) より $T > 0$ なので糸は伸びている）かつ $m\omega^2 l^2 > 0$ であるから、$\lambda - m\omega^2 l > 0$ であり

$$x = \frac{m\omega^2 l^2}{\lambda - m\omega^2 l}, \qquad l + x = \frac{l\lambda}{\lambda - m\omega^2 l}.$$

すると (2) より

$$T = \frac{m\omega^2 l\lambda}{\lambda - m\omega^2 l},$$

となり、(1) より

$$\boxed{\cos\theta = \frac{mg}{T} = \frac{g\left(\lambda - m\omega^2 l\right)}{l\lambda\,\omega^2}}$$

運動が可能となる条件

> **考えてみよう** $\cos\theta$ に対するそれぞれの制約は、物理的に何を意味しているか。

糸がたるまずに、質点が A より下で水平な円運動をするためには、$0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$、すなわち $0 < \cos\theta < 1$ が必要である。逆に、ω が公式から $0 < \cos\theta < 1$ を与えるならば、($\lambda - m\omega^2 l > 0$ のもとで) 上の手順を逆にたどることで、(1) と (2) を満たす正の伸びと張力が得られるので、この運動は確かに存在する。

上界。 他の因数は正であるから、$\cos\theta > 0$ が成り立つのは $\lambda - m\omega^2 l > 0$ のときであり、かつそのときに限る。これは

$$\omega^2 < \frac{\lambda}{ml}.$$

である。物理的には、ω が大きすぎると、糸をどれだけ有限に伸ばしても必要な向心力を与えられない。長さが増えると必要な力も増えるが、その増え方が糸の与える力の増え方より速いからである。

下界。 $\cos\theta < 1$ は

$$g\lambda - gm\omega^2 l < l\lambda\omega^2 \iff g\lambda < \omega^2 l(\lambda + mg) \iff \omega^2 > \frac{g\lambda}{l(\lambda + mg)},$$

を意味する。ここで最初に $l\lambda\omega^2 > 0$ を掛け、最後に $l(\lambda + mg) > 0$ で割っているので、不等号の向きは変わらない。物理的には、ω が小さすぎると公式は $\cos\theta \geq 1$ を要求してしまう。その場合に可能なのは、質点が軸上に静止してぶら下がる ($\theta = 0$) ことだけであり、これは円運動ではない。

以上の二つを合わせると、運動が可能となるのは

$$\frac{g\lambda}{l(\lambda + mg)} < \omega^2 < \frac{\lambda}{ml},$$

のときに限られ、示すべきことが示された。

検算

- 下界では $\cos\theta = 1$ である。このとき糸は鉛直で、張力は mg、長さは $l(\lambda + mg)/\lambda$ であり、これはぶら下がった質点のつり合いの長さにちょうど一致する。$\omega^2 = g/(\text{その長さ})$ となっており、おなじみの円錐振り子の境界条件 $\omega^2 > g/L$ と一致することに注意せよ。
- $\lambda \to \infty$ (伸びない糸) とすると、結果は $\cos\theta = g/(l\omega^2)$ となって通常の円錐振り子に一致し、範囲は $\omega^2 > g/l$ となる。

- 数値的にも、$g = 9.8$ とし、m、l、λ、ω を無作為に選んで、フックの法則と水平方向の式を二分法（bisection）で直接解くと、公式と同じ $\cos\theta$ が得られ、分解した両方の式がつり合う。また 20 000 個の無作為な場合のすべてにおいて、運動が存在するのはちょうど不等式が成り立つときである。

よくある間違い

- 半径として $(l + x)\sin\theta$ ではなく $l\sin\theta$ を用いてしまう。糸は伸びているのである。
- $\sin\theta$ で割ることの正当化を忘れ、そのために $\theta = 0$（したがって $\cos\theta = 1$）が除外される理由を見落とす。
- $\cos\theta < 1$ だけを示し、$\cos\theta > 0$（同値な言い方をすれば、伸びが正であること）から上界が得られることを忘れる。

STEP のその先へ

上界は、**暴走**、すなわち不安定性（instability）の簡単な例である。$\omega^2 \to \lambda/(ml)$ のとき、必要な伸びは発散する。同じ現象は回転する弾性棒や回転体の安定性にも現れる。また下界は分岐（bifurcation）であり、そこでぶら下がったつり合いの状態が円運動に取って代わられる。回転座標系の力学についてさらに知りたければ、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照せよ。

解答例

STEP I 1994、第 11 問

力学 ・ 斜面上の連結質点

STEP I 1994、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

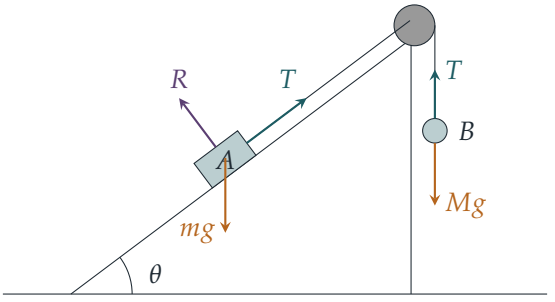
step.maths.org/questions/94-s1-q11

鍵となる考え方

まず幾何的な状況から考える。糸の長さは軌道（track）の長さにちょうど等しいので、台車（wagon）が軌道の下端にあるとき、球は滑車（pulley）のすぐ位置にぶら下がっている。したがって、球は斜面（incline）の高さ $d\sin\theta$ だけ落下し、台車は斜面に沿って同じ距離だけ上る。糸が張っている間、系は一定の加速度で運動する。球が着地すると糸はたるみ、台車はなめらかな斜面を惰性で上っていくだけになる。そこで小問 (ii) は、残った速さで台車が滑車まで残りの距離を上りきるかどうかを問うているのである。

解答

台車と球を質点とみなし、軌道はなめらかで、糸は軽くて伸び縮みせず、軽くて摩擦のない滑車にかけられているとモデル化する。したがって張力（tension）T は両側で等しく、糸が張っている間は台車と球の速さは等しい。



小問 (i)

球の下向きの加速度を a とする。これは台車の斜面に沿って上向きの加速度でもある。球（鉛直方向）と台車（斜面方向）についてニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）を書くと

$$Mg - T = Ma,$$
$$T - mg\sin\theta = ma.$$

となる。垂直抗力（normal reaction）R は斜面に垂直なので、この式には現れない。2 式を加えると T が消去されて

$$a = \frac{(M - m\sin\theta)\,g}{M + m}.$$

を得る。系は静止状態から動き始めるので、球が少しでも動くのは $a > 0$ のときに限る。（$a \leq 0$ ならば何も起こらない。$a = 0$ のとき系はつり合いの状態にとどまり、また糸は押すことができないので $a < 0$ はありえない。）したがって、球が地面まで落下するための必要十分条件は

$$M > m\sin\theta.$$

である。

台車が軌道の下端にあるとき、糸の全長 d が斜面に沿って張られているので、球は滑車と同じ高さ、すなわち地面から高さ $d\sin\theta$ の位置から動き始める。球は静止状態から一定の加速度 a でこの距離を落下するので、$v^2 = u^2 + 2as$ より

$$v^2 = 2 \cdot \frac{(M - m\sin\theta)g}{M + m} \cdot d\sin\theta = \frac{2g(M - m\sin\theta)\,d\sin\theta}{M + m},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

球が地面に達したとき、台車は軌道に沿って $d\sin\theta$ だけ上っており、速さ v で運動している。滑車までは残り

$$d - d\sin\theta = d(1 - \sin\theta)$$

の距離がある。

考えてみよう 球が着地したあと、糸はどうなるか。

球は止まるが、台車はまだ斜面を滑車に向かって上っている。したがって糸はたるみ、$T = 0$ となる。このとき斜面方向にはたらく力は重力の成分だけなので、台車は大き

さ $g\sin\theta$ の加速度で減速する。台車は、$0 = v^2 - 2g\sin\theta\, s$ で与えられるさらに距離 s だけ進んで静止する。すなわち

$$s = \frac{v^2}{2g\sin\theta} = \frac{(M - m\sin\theta)\, d}{M + m}.$$

である。（その後、台車は斜面を下っていき、滑車の近くではそれ以上何も起こらない。）

台車が滑車に衝突しないのは、滑車に達する前に止まるとき、すなわち $s < d(1 - \sin\theta)$ のときである。$d > 0$ かつ $M + m > 0$ なので、これは

$$\begin{aligned} M - m\sin\theta &< (M + m)(1 - \sin\theta) \\ &= M + m - M\sin\theta - m\sin\theta, \end{aligned}$$

と同値であり、整理すると $M\sin\theta < m$ となる。

これを小問 (i) と合わせると、球が地面に達し、かつ台車が滑車の手前で止まるための必要十分条件は

$$m\sin\theta < M < \frac{m}{\sin\theta}.$$

である。$M\sin\theta = m$ のときは、台車は速さ 0 でちょうど滑車に達する。これは接触であって、衝突ではない。

検算

- 台車が軌道を上る最遠点は $d\sin\theta + s = \dfrac{Md(1 + \sin\theta)}{M + m}$ である。これが d より小さくなるのはちょうど $M\sin\theta < m$ のときであり、上の条件と一致する。$m \to 0$ のとき、これは $d(1 + \sin\theta) > d$ に近づく。重さのない台車は必ず滑車に衝突するということであり、予想どおりである。
- $\theta = 90^\circ$ のとき、条件 $M < m$ は小問 (i) の $M > m\sin\theta = m$ と矛盾する。これは正しい。鉛直な軌道では、台車は滑車の真下の下端から、球は上端から動き始め、台車は球が落下するのとちょうど同じ距離だけ上昇する。つまり滑車まで上りきってしまうのである。
- 数値で確かめると、$m = 2$, $M = 1.5$, $\theta = 30^\circ$, $d = 3$, $g = 9.8$ のとき、公式から $v^2 = 4.2$、最遠点は $\frac{27}{14} \approx 1.93 < 3$ となる。運動を小さな時間刻みで数値的に追っても同じ値が得られる。また、ランダムに選んだ場合についても、衝突が起こるのはちょうど $M\sin\theta > m$ のときであることが確認できる。

よくある間違い

- 球の落下距離を $d\sin\theta$ ではなく d としてしまう。球は滑車の位置から動き始め、滑車の高さは $d\sin\theta$ である。
- 球が着地したあとも糸が張ったままだと仮定してしまう、あるいは惰性で進む段階をすっかり忘れて $d\sin\theta$ と d だけを比較してしまう。
- 糸がたるんだあとの台車の減速の加速度に、$g\sin\theta$ ではなく g を用いてしまう。

STEP のその先へ

この問題では、運動を拘束条件の異なる段階、すなわち糸が張っている段階と糸がたるんだ段階とに分けている。これは、引くことはできても押すことはできない**片側拘束**（unilateral constraint）の最も簡単な例である。このような拘束は、机から滑り落ちる鎖からロボット工学における接触問題に至るまで、力学のいたるところに現れる。ここではエネルギーを用いる方法も手早い別解になる。惰性で進む段階では、台車の運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ が位置エネルギー $mgs\sin\theta$ に変わるのである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この両方の見方を丁寧に展開している。

解答例

STEP I 1994、第 13 問

確率・統計 ・ 指示変数

> **STEP I 1994、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q13

鍵となる考え方

個数を指示変数（indicator variable）（それぞれ 1 または 0 をとる）の和として書くと、難しい期待値（expectation）の計算が易しいものに変わる。各部分が独立（independent）であってもなくても、期待値は線形だからである。ここでの取り出しは明らかに独立ではないが、対称性（symmetry）により各 X_i の期待値が等しいことがわかる。次に X の分布から直接 $\mathrm{E}(X)$ を別の方法で計算し、二つの答えを等しいとおけば、二項係数（binomial coefficient）の恒等式がほとんど労せずに得られる。

解答

以下、つねに $1 \le n \le M$ とし、$b > a$ または $b < 0$ のとき $\binom{a}{b} = 0$ と約束する。

小問 (i)

各 X_i は、i 番目に取り出した玉が赤ならば 1、そうでなければ 0 である。したがって和 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ において、取り出した赤い玉はそれぞれちょうど 1 だけ寄与し、赤でない玉は 0 だけ寄与する。よってこの和は取り出した n 個のうちの赤い玉の個数を数えており、それが X である。

小問 (ii)

X_i は 0 と 1 の値しかとらないから、

$$\mathrm{E}(X_i) = 0 \cdot \mathrm{P}(X_i = 0) + 1 \cdot \mathrm{P}(X_i = 1) = \mathrm{P}(i \text{ 番目に取り出す玉が赤}).$$

考えてみよう i 番目の玉が赤である確率は、それより前に何を取り出したかに依存するのではないか？

条件付きで考えれば依存するが、条件を付けなければ依存しない。玉に番号を付け、すべてを一つずつ取り出していくことを想像しよう。M 個の玉の並び順はどれも同様に確からしい。したがって i 番目の位置にある玉は、1 番目の位置の玉と同じく、M 個の玉のどれである確率も等しい。n 回で取り出しをやめても、位置 $i \leq n$ で起こることは変わらない。M 個のうち m 個が赤であるから、

$$\mathrm{E}(X_i) = \mathrm{P}(X_i = 1) = \frac{m}{M} \qquad 各 i = 1, \ldots, n.$$

（$i = 2$ の場合は地道な計算でも確かめられる：$\frac{m}{M} \cdot \frac{m-1}{M-1} + \frac{M-m}{M} \cdot \frac{m}{M-1} = \frac{m(M-1)}{M(M-1)} = \frac{m}{M}$。）

小問 (iii)

小問 (i) と期待値の線形性（linearity of expectation）（独立性は必要ない）により、

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_n) = n \cdot \frac{m}{M} = \frac{mn}{M},$$

となり、示すべきことが得られた。

小問 (iv)

取り出される n 個の玉の集合は、大きさ n の $\binom{M}{n}$ 個の部分集合のどれである確率も等しい。赤い玉がちょうど k 個であるためには、m 個の赤い玉から k 個、残りの $M - m$ 個から $n - k$ 個を選べばよいので、

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{M-m}{n-k}}{\binom{M}{n}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

二項係数についての約束により、$k > m$（赤い玉が足りない）や $n - k > M - m$（それ以外の玉が足りない）のときには、この値は正しく 0 となる。これが**超幾何分布**（hypergeometric distribution）である。

小問 (v)

小問 (iv) から $\mathrm{E}(X)$ を直接計算する。$k = 0$ の項は 0 であるから、

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k\,\mathrm{P}(X = k) = \frac{1}{\binom{M}{n}} \sum_{k=1}^{n} k \binom{m}{k}\binom{M-m}{n-k}.$$

これを小問 (iii) の結果と等しいとおくと、

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{m}{k}\binom{M-m}{n-k} = \frac{mn}{M}\binom{M}{n}.$$

最後に、

$$\frac{n}{M}\binom{M}{n} = \frac{n}{M}\cdot\frac{M!}{n!\,(M-n)!} = \frac{(M-1)!}{(n-1)!\,(M-n)!} = \binom{M-1}{n-1},$$

であるから、右辺は $m\binom{M-1}{n-1}$ となり、これが求める恒等式である。

検算

- $M=5$、$m=2$、$n=3$ とする。小問 (iv) より $\mathrm{P}(X=0,1,2) = \frac{1}{10}, \frac{6}{10}, \frac{3}{10}$ であり、その和は 1 である。また $\mathrm{E}(X) = \frac{6+6}{10} = \frac{6}{5} = \frac{mn}{M}$ となる。恒等式は $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot 3 = 12 = 2\binom{4}{2}$ となる。
- $n = M$（すべて取り出す）ならば確実に $X = m$ であり、実際 $\mathrm{E}(X) = mM/M = m$ となる。
- $M \le 6$ のすべての袋について玉の並び順をすべて列挙して $\mathrm{E}(X_i)$、$\mathrm{E}(X)$、$\mathrm{P}(X=k)$ を確かめ、また $M < 30$ のすべてについて (v) の恒等式を確かめた。

よくある間違い

- $\mathrm{E}(X) = \sum \mathrm{E}(X_i)$ には独立性が必要だと主張すること。必要ない。期待値の線形性はつねに成り立つ。
- 取り出しを独立とみなし、(iv) で二項分布 $\mathrm{B}(n, \frac{m}{M})$ と書くこと。これでは平均は正しくなるが確率は誤りとなる。取り出しは非復元抽出（without replacement）だからである。

STEP のその先へ

指示変数の方法は確率論で最も役に立つ道具の一つである。ランダムな置換（permutation）の固定点（fixed point）の個数、硬貨投げにおける連（run）の個数、ランダムグラフ（random graph）の孤立点（isolated vertex）の個数などの期待値を与え、さらに $\mathrm{Var}(\sum X_i) = \sum \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i\neq j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ によって分散（variance）にも拡張できる。一つの量を二通りに計算して組合せの恒等式を証明する方法も、同じく広く使える。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）は全編を通して指示変数を用いており、この二つの考え方が実際に働く様子を見るのに格好の本である。

解答例

STEP I 1994、第 14 問

確率・統計 ・ 指数分布の順序統計量

STEP I 1994、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/94-s1-q14

鍵となる考え方

各 T_i は指数分布（exponential distribution）に従うので、小問 (i) は標準的な部分積分（integration by parts）を 2 回行うだけである。最後のレポートと最初のレポートについては、最大値（maximum）や最小値（minimum）に関する主張を、**すべての** T_i に関する主張に言い換えるのがこつである。最後のレポートが時刻 u までに提出されているのは、すべてのレポートが提出されているときであり、かつそのときに限る。また、最初のレポートが時刻 t の時点でまだ提出されていないのは、すべてのレポートが未提出であるときであり、かつそのときに限る。そうすれば独立性（independence）によって「すべて」が積に変わり、分布関数（distribution function）を微分すれば確率密度関数（probability density function）が得られる。

解答

小問 (i)

T_i のうちどれか 1 つを X とおく。その確率密度関数は $t \geq 0$ に対して $f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ である。$u = t$、$\mathrm{d}v = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$（したがって $v = -\mathrm{e}^{-\lambda t}$）として部分積分すると、

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty t\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \Big[-t\mathrm{e}^{-\lambda t}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda},$$

となる。ここで、$t \to \infty$ のとき $t\mathrm{e}^{-\lambda t} \to 0$ であることを用いた（指数関数はべき関数より速く増大する）。同様にして、

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^\infty t^2 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \Big[-t^2\mathrm{e}^{-\lambda t}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty 2t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\lambda}\,\mathrm{E}(X) = \frac{2}{\lambda^2},$$

を得る。ここで $\int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ が $\frac{1}{\lambda}\mathrm{E}(X)$ に等しいことを用いた。したがって

$$\mathrm{E}(T_i) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathrm{Var}(T_i) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

小問 (ii)

まず、1 つの T_i の分布関数が必要である。$u \geq 0$ に対して

$$\mathrm{P}(T_i \leq u) = \int_0^u \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda u}.$$

さて、$U = \max(T_1, \ldots, T_n)$ であり、T_i のうち最大のものが u 以下であるのは、それらがすべて u 以下であるときであり、かつそのときに限る。すなわち

$$\{U \leq u\} = \{T_1 \leq u\} \cap \{T_2 \leq u\} \cap \cdots \cap \{T_n \leq u\}.$$

考えてみよう ここで確率を掛け合わせてよいのはなぜか？

事象 $\{T_i \leq u\}$ はそれぞれ異なる T_i に関するものであり、仮定よりそれらは独立であるから、共通部分（intersection）の確率は各確率の積に等しい。よって、$u \geq 0$ に対して

$$\mathrm{P}(U \leq u) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(T_i \leq u) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda u}\right)^n,$$

となり、これが示すべき式である。U の確率密度関数はこの分布関数の導関数である。合成関数の微分法（chain rule）により、

$$f_U(u) = n\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda u}\right)^{n-1} \cdot \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u} = n\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda u}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda u}\right)^{n-1} \qquad (u \geq 0),$$

であり、$u < 0$ に対しては $f_U(u) = 0$ である。

小問 (iii)

今度は $T = \min(T_1, \ldots, T_n)$ である。ここで役に立つのは余事象（complement）である。最初のレポートが時刻 t より後に届くのは、その時点までに 1 つも届いていないとき、すなわちすべての T_i について $T_i > t$ であるときであり、かつそのときに限る。$\mathrm{P}(T_i > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ と、再び独立性を用いて、

$$\mathrm{P}(T > t) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(T_i > t) = \left(\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^n = \mathrm{e}^{-n\lambda t} \qquad (t \geq 0).$$

よって $\mathrm{P}(T \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-n\lambda t}$ であり、これを微分して

$$f_T(t) = n\lambda\,\mathrm{e}^{-n\lambda t} \qquad (t \geq 0),$$

を得る。また $t < 0$ に対しては $f_T(t) = 0$ である。

小問 (iv)

(iii) の確率密度関数は、小問 (i) の確率密度関数において λ を $n\lambda$ に置き換えたものにほかならない。すなわち T はパラメータ $n\lambda$ の指数分布に従う。したがって小問 (i) から、ただちに

$$\mathrm{E}(T) = \frac{1}{n\lambda}, \qquad \mathrm{Var}(T) = \frac{1}{n^2\lambda^2}.$$

と書き下せる。これは直観にも合う。学生が n 人いれば、最初のレポートは特定の 1 人のレポートよりおよそ n 倍早く届くはずである。

検算

- $n = 1$ のときレポートは 1 つだけなので $T = U = T_1$ であり、実際どちらの確率密度関数も $\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ に帰着する。
- $\mathrm{P}(U \le u)$ は $u = 0$ での 0 から、$u \to \infty$ のとき 1 まで増加しており、分布関数として当然そうあるべき振る舞いをしている。
- $n = 5$、$\lambda = 0.7$ として 2×10^5 クラス分のシミュレーションを行った。たとえば $U \le 2$ となった割合は 0.2425 で、理論値 $(1 - \mathrm{e}^{-1.4})^5 \approx 0.2427$ と一致し、T の平均は 0.2860 で、理論値 $1/(5 \times 0.7) \approx 0.2857$ と一致した。また、シンプソンの公式（Simpson's rule）によって f_U の積分が 1 になることも確かめた。

よくある間違い

- 最小値について $\mathrm{P}(T \le t)$ を直接扱おうとすること。「少なくとも 1 つの T_i について $T_i \le t$」は共通部分ではないので、積に分解できない。$\mathrm{P}(T > t)$ を経由すること。
- 積にしてよい根拠が独立性であることを明記し忘れること。
- $\mathrm{Var}(T_i) = \mathrm{E}(T_i^2) = 2/\lambda^2$ と書いて、$(\mathrm{E}\,T_i)^2$ を引くのを忘れること。

STEP のその先へ

T と U は標本の最小および最大の**順序統計量**（order statistics）である。独立な指数分布に従う確率変数の最小値が、率（rate）を足し合わせた指数分布に従うという事実は、ポアソン過程（Poisson process）や待ち行列理論（queueing theory）の基礎となっている。さらに美しい事実として、無記憶性（memoryless property）から、相次ぐレポートの到着の間隔は、それぞれ率 $n\lambda, (n-1)\lambda, \ldots, \lambda$ の独立な指数分布に従うことがわかり、したがって $\mathrm{E}(U) = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$ となる。これらはどちらも

Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）、および Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）で詳しく扱われている。

解答例

STEP II 1994、第 1 問

純粋数学 ・ 整除性と十進数の各位の数字

STEP II 1994、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/94-s2-q1

鍵となる考え方

積の下何桁かは因数の下何桁かだけで決まる。したがって、ここでの議論はすべて 10 のべきを法とする（modulo）算術である。末尾が 1, 3, 7, 9 のいずれかである数は 10 と共通の因数をもたず、そのため 10 を法として**可逆**（invertible）であり、実は 10 の任意のべきを法としても可逆である。中盤の小問では、n から因数 2 と 5 を取り除き、それらを末尾の 0 に変える。最後の小問では、10^{10} を法とする可逆性を用いて、積の下 10 桁を好きな数字の並びにできることを示す。

解答

小問 1：末尾が 1 になる倍数

$n \times m$ の一の位は、（n の一の位）×（m の一の位）の一の位に等しい。他の桁からの寄与はすべて 10 の倍数だからである。n の末尾は 5 でも偶数でもないので、1, 3, 7, 9 のいずれかであり、

$$1 \times 1 = 1, \qquad 3 \times 7 = 21, \qquad 7 \times 3 = 21, \qquad 9 \times 9 = 81.$$

となる。そこで、それぞれ $m = 1, 7, 3, 9$ とすればよい。このとき $n \times m$ の末尾は 1 となり、求める結果が得られる。

小問 2：任意の n

$$n = 2^a \, 5^b \, k,$$

と表す。ここで $a, b \geq 0$ であり、k は 2 でも 5 でも割り切れない。すると k の末尾は 5 でも偶数でもないので、小問 1 より、km' の末尾が 1 となる m' が存在する。ここで

$$m = 2^b\, 5^a\, m'.$$

とおく。すると

$$n \times m = 2^{a+b}\, 5^{a+b}\, km' = 10^{a+b}\, (km').$$

となる。10^{a+b} を掛けることは、km' の後ろに $a+b$ 個の 0 を付け加えることにすぎない。よって $n \times m$ の末尾は、$a+b=0$ ならば 1、そうでなければ 1 の後に $a+b$ 個の 0 が続く形である。これが示すべきことであった。

例えば $n = 40 = 2^3 \cdot 5$ のとき $k = 1$ であるから、$m = 2 \cdot 5^3 = 250$ となり、$n \times m = 10\,000$ である。

小問 3：10 種類すべての数字

$n = 10^r q$ と表す。ただし $r \geq 0$ であり、q の末尾は 1 である。末尾に 0 を付け加えても既存の数字が消えることはないので、$q \times m$ がすべての数字を含むような m を見つければ十分である。そうすれば $n \times m = 10^r (qm)$ もすべての数字を含む。

$N = 10^{10}$、$X = 1234567890$ とおく。X はすべての数字を含む。目標は

$$qm \equiv X \pmod{N},$$

すなわち、qm の下 10 桁を 1234567890 にすることである。

> **考えてみよう** q のある倍数を 10^{10} で割った余りが X になるのはなぜか？

N 個の数 $q \times 0,\ q \times 1,\ \ldots,\ q \times (N-1)$ と、それらを N で割った余りを考える。仮にそのうち 2 つが等しく、$0 \leq t < s \leq N-1$ について $qs \equiv qt \pmod{N}$ であったとする。このとき 10^{10} は $q(s-t)$ を割り切る。ところが q の末尾は 1 なので奇数であり、5 の倍数でもない。したがって $10^{10} = 2^{10}5^{10}$ と共通の素因数をもたない。ゆえに $2^{10}5^{10}$ は $s-t$ を割り切るが、$0 < s-t < N$ であるからこれは不可能である。よって N 個の余りはすべて異なる。余りとしてありうる値は $0, 1, \ldots, N-1$ の N 個しかないので、そのすべてが現れる。特に、$0 \leq m \leq N-1$ を満たすある m について $qm \equiv X \pmod{N}$ が成り立つ。

$X \neq 0$ であるから、この m は 0 ではない。よって qm は正の倍数であり、$qm \geq X \geq 10^9$ を満たす。したがって、その下 10 桁はちょうど $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0$ であり、X の先頭の 1 も確かに現れている。以上より、$q \times m$、したがって $n \times m$ は、すべての数字 $0, 1, \ldots, 9$ を含む。

例えば $n = 21$ のとき $m = 7\,201\,646\,090$ とすることができ、このとき $21 \times m = 151\,234\,567\,890$ である。

考えてみよう n に関する仮定（hypothesis）はどこで使われたか？　また、なぜそれが必要だったのか？

この仮定は、q が因数 2 も 5 ももたないことを知るためだけに使った。それがなければ、余り $qm \bmod 10^{10}$ はすべての値をとることができない。例えば、2 の倍数はすべて偶数なので、末尾が $\ldots 1$ になることはありえない。積の**末尾**を思いどおりに定められるのは、この仮定のおかげである。（小問 2 により、任意の n はこの形の倍数をもつことがわかるので、小問 3 と合わせれば、**すべての** n が 10 種類すべての数字を含む倍数をもつことになる。）

検算

- 小問 1 の手計算による確認：$13 \times 7 = 91$、$29 \times 9 = 261$。
- コンピュータによる検証で、末尾が 5 でも偶数でもないすべての $n \leq 20\,000$ について、小問 1 の手順が正しいことを確認した。小問 2 の構成については、すべての $n \leq 20\,000$ と、10^{15} 以下の無作為な 20 000 個の n について確認した。さらに、末尾に 0 がいくつも並ぶものも含め、条件を満たす形の 10 000 個を超える n の値について小問 3 の乗数を計算し、いずれの場合も $n \times m$ が 10 種類すべての数字を含むことを確かめた。例：$21 \times 7\,201\,646\,090 = 151\,234\,567\,890$、$11 \times 4\,657\,687\,990 = 51\,234\,567\,890$。

よくある間違い

- 小問 3 で、並び 1234567890 が本当に完全な形で現れることの確認を忘れる。先頭の 1 が現れるには $qm \geq 10^9$ が必要であり、これは $qm \equiv X$ かつ $qm > 0$ であることから成り立つ。
- 小問 2 で、$2^b 5^a$ の代わりに 10^{a+b} を掛けてしまう。これでは 0 は付け加わるが、n にもともと含まれていた 2 と 5 はそのまま残ってしまう。

STEP のその先へ

小問 3 の鳩の巣原理（pigeonhole principle）による議論は、一般的な事実を証明している。すなわち、$\gcd(q, N) = 1$ ならば、q は N を法とする乗法逆元（multiplicative inverse）をもつ。可逆な剰余類（residue）は群（group）をなし、$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ と書かれる。これは初等整数論の出発点であり、RSA 暗号（RSA cryptography）の出発点でもある。別の工夫を用いると、最後の小問が任意の n について成り立つことが示せる。$10^k \geq n$ となれば、n のある倍数が $X \cdot 10^k$ と $X \cdot 10^k + 10^k$ の間にあり、そのような倍

数は 1234567890 で始まるのである。Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、合同式（congruence）と剰余類へのすばらしい入門書である。

解答例

STEP II 1994、第 2 問

純粋数学 ・ ルジャンドル多項式

> **STEP II 1994、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q2

鍵となる考え方

因数 $(x-a)^m$ は、微分するたびに少しずつ弱まりながらも生き残る。そのため、m 重の重根（repeated root）は、第 1 次から第 $m-1$ 次までの導関数（derivative）の根でもある。多項式 $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$ は区間 $[-1,1]$ の両端に n 重の重根をもつので、$x^m\mathrm{P}_n(x)$ を部分積分（integration by parts）すると、境界項（boundary term）はすべて消える。部分積分を 1 回行うごとに、微分が 1 つ $(x^2-1)^n$ から x^m へと移る。そして $(x^2-1)^n$ の微分が尽きるより先に、x^m のほうが微分し尽くされてしまうのである。

解答

重根と導関数

積の微分法則（product rule）により、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}'(x) &= m(x-a)^{m-1}\mathrm{Q}(x) + (x-a)^m\mathrm{Q}'(x)\\ &= (x-a)^{m-1}\big[m\mathrm{Q}(x) + (x-a)\mathrm{Q}'(x)\big] = (x-a)^{m-1}\mathrm{R}(x),\end{aligned}$$

である。ここで $\mathrm{R}(x) = m\mathrm{Q}(x) + (x-a)\mathrm{Q}'(x)$ は多項式である。多項式の和と積はまた多項式だからである。これが求める形である。

この結果は、因数 $(x-a)^k$（$k \geq 1$）をもつ多項式の導関数は因数 $(x-a)^{k-1}$ をもつ、ということを述べている。$k = m$ から始めてこれを繰り返し適用すると、ある多項式 R_r を用いて

$$\mathrm{P}^{(r)}(x) = (x-a)^{m-r}\mathrm{R}_r(x) \qquad (0 \leq r \leq m)$$

と書ける。各段階の適用は正当である。$\mathrm{P}^{(r+1)}$ を得るために $\mathrm{P}^{(r)}$ を微分するのは $r \leq m-1$ のときだけであり、そのとき指数 $m-r$ は1以上だからである。$1 \leq r \leq m-1$ ならば $m-r \geq 1$ なので、$(x-a)$ は依然として $\mathrm{P}^{(r)}(x)$ の因数であり、したがって $\mathrm{P}^{(r)}(a)=0$ である。（これは $r=0$ のときにも成り立つが、$r=m$ のときには一般には成り立たない。）

P_n は n 次の多項式である

$\mathrm{F}(x)=(x^2-1)^n$ とおく。二項定理（binomial theorem）により、$\mathrm{F}(x)$ は x^{2n} に次数が $2n-2$ 以下の項を加えたものである。x^k を n 回微分すると、0（$k<n$ のとき）か x^{k-n} の定数倍になるので、$\mathrm{P}_n=\mathrm{F}^{(n)}$ は次数が n 以下の多項式である。その x^n の項は x^{2n} からのみ生じる：

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}x^{2n}=2n(2n-1)\cdots(n+1)\,x^n=\frac{(2n)!}{n!}\,x^n.$$

この係数は0でないので、P_n の次数はちょうど n である。

消える積分

$\mathrm{F}(x)=(x-1)^n(x+1)^n$ であるから、最初の小問の結果を $a=1$、$m=n$、$\mathrm{Q}(x)=(x+1)^n$ として用いると、$1 \leq r \leq n-1$ に対して $\mathrm{F}^{(r)}(1)=0$ がわかる。$a=-1$ として同じ議論を行えば $\mathrm{F}^{(r)}(-1)=0$ を得る。また、直接計算により $\mathrm{F}(\pm 1)=0$ である。よって

$$\mathrm{F}^{(r)}(\pm 1)=0 \qquad \text{ただし} 0 \leq r \leq n-1. \tag{$*$}$$

次に、$j \geq 1$、$1 \leq k \leq n$ とする。x^j を微分し $\mathrm{F}^{(k)}$ を積分する形で部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^j\mathrm{F}^{(k)}(x)\,\mathrm{d}x &= \left[x^j\mathrm{F}^{(k-1)}(x)\right]_{-1}^{1}-j\int_{-1}^{1}x^{j-1}\mathrm{F}^{(k-1)}(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -j\int_{-1}^{1}x^{j-1}\mathrm{F}^{(k-1)}(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

となる。$k-1 \leq n-1$ であるから、$(*)$ により境界項が消えるからである。

考えてみよう 不都合が生じるまでに、これを何回使えるだろうか。

1回使うごとに、x の次数が1つ下がり、導関数の階数も1つ下がる。出発点は x^m と $\mathrm{F}^{(n)}$ なので、これを m 回適用できる。この操作には $k \geq 1$ が必要であり、用いる k の最小値は $n-m+1 \geq 1$ である。m 回の操作の後には

$$\int_{-1}^{1}x^m\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x=(-1)^m m!\int_{-1}^{1}\mathrm{F}^{(n-m)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

となる。（$m=0$ のときは、これはもとの積分そのものである。）

$0 \le m \le n-1$ ならば $n-m \ge 1$ なので、最後の被積分関数（integrand）はそれ自体が導関数であり、

$$\int_{-1}^{1} x^m \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^m m! \left[\mathrm{F}^{(n-m-1)}(x)\right]_{-1}^{1} = 0,$$

となる。$0 \le n-m-1 \le n-1$ であるから $(*)$ が使えるのである。これが求める結果である。

$m = n$ の場合

$m = n$ のときも同じ変形はそのまま成り立ち（最後の段階では $k = 1$ を用いる）、

$$\int_{-1}^{1} x^n \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n n! \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n\,\mathrm{d}x = n! \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x,$$

を得る。$(x^2-1)^n = (-1)^n(1-x^2)^n$ だからである。被積分関数は偶関数（even function）であり、置換（substitution）$x = \sin t$、$\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ によって $[0,1]$ は $[0, \frac{\pi}{2}]$ に移り、$1-x^2 = \cos^2 t$ となる。したがって、ヒントの公式を用いると

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi/2} \cos^{2n+1} t\,\mathrm{d}t = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

ゆえに

$$\boxed{\int_{-1}^{1} x^n \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2^{2n+1}(n!)^3}{(2n+1)!}.}$$

検算

$n = 1$ のとき、$\mathrm{P}_1(x) = 2x$ なので $\int_{-1}^{1} x \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$ であり、公式からは $\frac{8\cdot 1}{6} = \frac{4}{3}$ が得られる。$n = 2$ のとき、$\mathrm{P}_2(x) = 12x^2 - 4$ である。このとき $\int_{-1}^{1} (12x^2-4)\,\mathrm{d}x = 8 - 8 = 0$ であり、$\int_{-1}^{1} x(12x^2-4)\,\mathrm{d}x = 0$（被積分関数が奇関数）となって、予想どおりである。さらに $\int_{-1}^{1} x^2(12x^2-4)\,\mathrm{d}x = \frac{24}{5} - \frac{8}{3} = \frac{32}{15}$ であり、これは $\frac{2^5\cdot 8}{120} = \frac{32}{15}$ と一致する。$n \le 10$ について、これらすべてをコンピュータで厳密に確かめた。

よくある間違い

- 境界項が消えるためには、$1 \le r \le n-1$ だけでなく $r = 0$ に対しても $\mathrm{F}^{(r)}(\pm 1) = 0$ が必要であることを忘れる。$m = n-1$ のときの最後の段階では $r = 0$ を用いる。
- 符号を見失う。$(x^2-1)^n = (-1)^n(1-x^2)^n$ が部分積分から生じる $(-1)^n$ を打ち消すので、答えは正になる。$x^n \mathrm{P}_n(x)$ の最高次の係数は正なので、これは妥当である。

STEP のその先へ

定数倍を除けば、P_n は n 次のルジャンドル（Legendre）多項式（Legendre polynomial）であり、ここで用いたその表示式はロドリゲス（Rodrigues）の公式（Rodrigues' formula）である。最初の結果は、内積（inner product）$\int_{-1}^{1} fg\,\mathrm{d}x$ に関して、P_n がそれより次数の低いすべての多項式と直交する（orthogonal）ことを述べている。これはルジャンドル級数やガウス（Gauss）求積（Gaussian quadrature）の背後にある性質である。ルジャンドル多項式は、球座標（spherical coordinates）におけるラプラス（Laplace）方程式（Laplace's equation）の解法にも現れる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）では、ルジャンドルの微分方程式を通してこれらに出会う。

解答例

STEP II 1994、第 3 問

純粋数学 ・ 関数方程式

> **STEP II 1994、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q3

鍵となる考え方

f について分かっているのは、**すべての** x と y に対して成り立つ一つの恒等式（identity）と、一つの値 $\mathrm{f}(0) = 1$ だけである。したがって使える道具は代入（substitution）しかない。値が分かっている（あるいはすぐに分かる）0 や a に多くの引数がなるように、x と y を選ぶのである。この恒等式は $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ を思い起こさせるはずで、$\mathrm{f}(a-x)$ が $\pm \sin x$ の役割を果たしている。この類推から、何が成り立つと予想されるか、そして例として何を挙げればよいかの両方が分かる。

解答

以下では、与えられた恒等式を

$$\mathrm{f}(x-y) = \mathrm{f}(x)\,\mathrm{f}(y) - \mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(a+y) \qquad \text{任意の} x, y. \qquad (*)$$

と書く。以下のどの段階も $(*)$ への代入だけで進めるので、連続性（continuity）や微分可能性（differentiability）など、それ以外のことは一切仮定しない。

$\mathrm{f}(a) = 0$ を示す

$(*)$ に $x = y = 0$ を代入すると

$$\mathrm{f}(0) = \mathrm{f}(0)^2 - \mathrm{f}(a)\,\mathrm{f}(a), \qquad \text{よって} \qquad 1 = 1 - \mathrm{f}(a)^2.$$

ゆえに $\mathrm{f}(a)^2 = 0$ であり、$\mathrm{f}(a)$ は実数であるから $\mathrm{f}(a) = 0$ である。

小問 (i)

$(*)$ に $x=0$、$y=t$ を代入すると、$\mathrm{f}(0)=1$ と $\mathrm{f}(a)=0$ を用いて

$$\mathrm{f}(-t)=\mathrm{f}(0)\,\mathrm{f}(t)-\mathrm{f}(a)\,\mathrm{f}(a+t)=1\cdot\mathrm{f}(t)-0=\mathrm{f}(t),$$

を得る。よって f は偶関数（even function）である。

小問 (ii)

$(*)$ に $x=y=a$ を代入すると

$$\mathrm{f}(0)=\mathrm{f}(a)^2-\mathrm{f}(0)\,\mathrm{f}(2a),\qquad \text{よって}\qquad 1=0-\mathrm{f}(2a),$$

となり、$\mathrm{f}(2a)=-1$ を得る。

小問 (iii)

考えてみよう 右辺の第1項の積を消し、しかも t を自由に残しておけるような代入はどれか。

$x=a$ とおくと、（$\mathrm{f}(a)=0$ であるから）項 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y)$ が消え、$\mathrm{f}(a-x)$ は $\mathrm{f}(0)=1$ になり、しかも y は自由なままである。$x=a$ のとき、$(*)$ は

$$\mathrm{f}(a-y)=0\cdot\mathrm{f}(y)-\mathrm{f}(0)\,\mathrm{f}(a+y)=-\mathrm{f}(a+y)\qquad \text{任意の}y.$$

となる。つまり f は「a に関して奇」である。ここで $y=a-t$ とすると、$a-y=t$、$a+y=2a-t$ であるから

$$\mathrm{f}(t)=-\mathrm{f}(2a-t),$$

すなわち、すべての t に対して $\mathrm{f}(2a-t)=-\mathrm{f}(t)$ が成り立ち、これが示すべきことであった。（$t=0$ とおくと小問 (ii) が再び得られ、整合性の確認として役に立つ。）

小問 (iv)

(i) を間に挟んで (iii) を2回用いる。まず、(iii) で t を $-t$ に置き換え、(i) を用いると

$$\mathrm{f}(2a+t)=-\mathrm{f}(-t)=-\mathrm{f}(t),\tag{1}$$

を得る。つまり、引数を $2a$ だけずらすと符号が変わる。さらに $2a$ ずらす、すなわち (1) で t を $2a+t$ に置き換えると

$$\mathrm{f}(4a+t)=-\mathrm{f}(2a+t)=-\big(-\mathrm{f}(t)\big)=\mathrm{f}(t).$$

よって f は（$a\neq 0$ のとき）周期 $4a$ の周期関数（periodic function）であり、これはちょうど周期 $4\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi$ のコサインと同じである。

例

$a = \pi/2$ **の場合。** $\mathrm{f}(x) = \cos x$ とする。すると $\mathrm{f}(0) = 1$ であり、$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$、$\cos(\frac{\pi}{2} + y) = -\sin y$ であるから

$$\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y) - \mathrm{f}(\tfrac{\pi}{2} - x)\mathrm{f}(\tfrac{\pi}{2} + y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y) = \mathrm{f}(x - y).$$

$a = -2$ **の場合。** $\mathrm{f}(x) = \cos kx$ を試す。上の結果から、$\mathrm{f}(a) = 0$、すなわち $\cos(2k) = 0$ であり、周期が $4|a| = 8$ である必要がある。そこで $k = \frac{\pi}{4}$、すなわち $\mathrm{f}(x) = \cos\frac{\pi x}{4}$ とする。確かめよう。$\mathrm{f}(0) = 1$ であり、$u = \frac{\pi x}{4}$、$v = \frac{\pi y}{4}$ とおくと

$$\mathrm{f}(-2-x) = \cos\left(-\tfrac{\pi}{2} - u\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + u\right) = -\sin u, \qquad \mathrm{f}(-2+y) = \cos\left(v - \tfrac{\pi}{2}\right) = \sin v,$$

であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y) - \mathrm{f}(-2-x)\mathrm{f}(-2+y) &= \cos u \cos v + \sin u \sin v \\ &= \cos(u - v) = \cos\tfrac{\pi(x-y)}{4} = \mathrm{f}(x - y).\end{aligned}$$

どちらの関数も明らかに定数ではない。（より一般に、$\cos ka = 0$ を満たす任意の a に対して $\cos kx$ が条件を満たすので、$a = -2$ に対しては $\cos\frac{3\pi x}{4}$ でもよい。）

検算

小問 (iii) で $t = 0$ とすると $\mathrm{f}(2a) = -\mathrm{f}(0) = -1$ となり、(ii) と一致する。また (iii) で $t = a$ とすると $\mathrm{f}(a) = -\mathrm{f}(a)$ となり、$\mathrm{f}(a) = 0$ と一致する。数値的には、$a = -2$ に対する $\mathrm{f}(x) = \cos\frac{\pi x}{4}$ について、$x = 1$、$y = 3$ のとき左辺は $\mathrm{f}(-2) = 0$、右辺は $\mathrm{f}(1)\mathrm{f}(3) - \mathrm{f}(-3)\mathrm{f}(1) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = 0$ である。コンピュータで両方の例を 20 000 組の無作為な (x, y) について調べたところ、恒等式は誤差 10^{-13} 以内で成り立っていた。

よくある間違い

- 半周期分のずれの符号を誤ること。(iii) と (i) から $\mathrm{f}(t + 2a) = -\mathrm{f}(t)$ が得られるので、周期は $2a$ ではなく $4a$ である。
- (i)–(iv) を証明する際に、f が微分可能である（あるいはコサインである）と仮定してしまうこと。問題はそれを禁じており、使ってよいのは代入だけである。
- $a = -2$ の場合に、恒等式を満たすことを確かめずに $\cos\frac{\pi x}{4}$ を答えとすること。$\mathrm{f}(a) = 0$ と周期が合うことはよい手がかりではあるが、証明ではない。

STEP のその先へ

関数が満たす恒等式からその関数を決定することは、**関数方程式**（functional equations）の主題である。ここでは、ただ一つの恒等式から、偶関数であること、「半周期」での符号の反転、そして周期性が導かれた。解析学の講義では古典的な結果に出会う。コーシー（Cauchy）の関数方程式 $\mathrm{f}(x+y)=\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(y)$ は、連続性を加えれば $\mathrm{f}(x)=cx$ を導くが、そのような条件がなければ奇妙な解が存在する。同様に、コサインの減法定理は連続関数の中で $\cos kx$ を特徴づける。このような議論に連続性がどのように関わるかについての丁寧な扱いは、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門の教科書）を参照せよ。

解答例

STEP II 1994、第 4 問

純粋数学 ・ 楕円の面積

> **STEP II 1994、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q4

鍵となる考え方

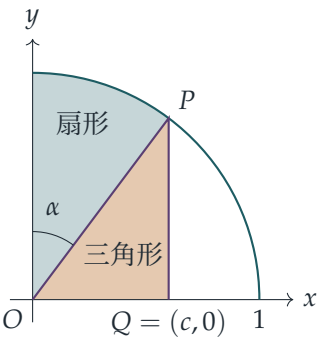
最初の積分は四分円（quarter circle）の下の面積であり、その面積は直角三角形（right-angled triangle）と扇形（sector）にきれいに分かれるので、置換（substitution）は必要ない。楕円（ellipse）は円を縦と横にそれぞれ異なる倍率で引き伸ばしたものであり、引き伸ばしは面積を定数倍するので、2 番目の結果はただちに得られる。最後の部分では対称性（symmetry）がほとんどすべての仕事をしてくれる。2 つの楕円は直線 $y = x$ に関して互いに鏡映の関係にあるので、共通部分の 8 分の 1 だけを考えればよく、その部分は 2 番目の結果から三角形を引いたものになる。

解答

$(1 - x^2)^{1/2}$ の積分

考える領域は、四分円 $y = (1 - x^2)^{1/2}$、座標軸、および直線 $x = c$ で囲まれた部分である（曲線は境界として読む必要がある。すなわち、領域は $0 \le y \le (1 - x^2)^{1/2}$ かつ $0 \le x \le c$ を満たす点全体である）。その面積がちょうど求めたい積分である。

$P = \left(c, (1 - c^2)^{1/2}\right)$ を $x = c$ の上にある円周上の点とし、$Q = (c, 0)$ とおき、さらに $\alpha = \sin^{-1} c$ とおく。このとき $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$ である。O と P を結ぶと、領域は 2 つの部分に分かれる。



- 三角形 OQP は Q で直角をなし、底辺は c、高さは $(1-c^2)^{1/2}$ なので、その面積は $\frac{1}{2}c(1-c^2)^{1/2}$ である。
- 残りは、OP と y 軸の間にある単位円の扇形である。P の y 軸からの水平距離は $c = 1\cdot\sin\alpha$ であるから、OP と y 軸のなす角は α である。半径 1、中心角 α の扇形の面積は $\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sin^{-1}c$ である。

2 つの部分を足し合わせると

$$\int_0^c (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left[c(1-c^2)^{\frac{1}{2}} + \sin^{-1}c\right], \qquad 0 < c \le 1,$$

となり、これが示すべき式である（$c = 1$ のときは三角形がつぶれ、四分円の面積 $\frac{\pi}{4}$ が得られる）。

楕円の下の面積

今回も領域は曲線の上半分 $y = b\left(1-x^2/a^2\right)^{1/2}$ の下、$0 \le x \le c$ の範囲にあるので、その面積は

$$\int_0^c b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x.$$

である。$x = au$ と置換すると $\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}u$ となり、積分区間は 0 から c/a になる（$0 < c \le a$ より $0 < c/a \le 1$ である）。よってこれは

$$ab\int_0^{c/a}(1-u^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{ab}{2}\left[\frac{c}{a}\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \sin^{-1}\left(\frac{c}{a}\right)\right],$$

に等しい。ここで最初の結果を c を c/a に置き換えて用いた。これが求める面積である。

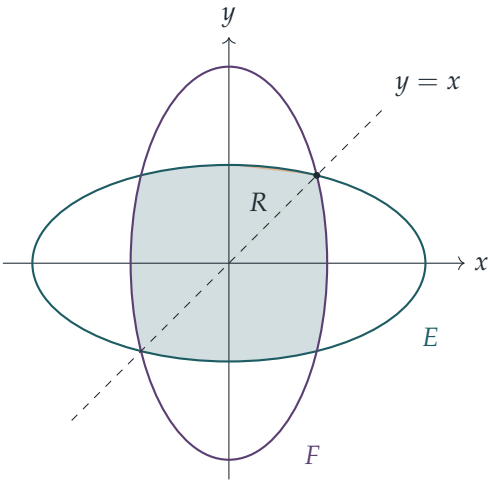
幾何学的には、楕円は単位円を横に a 倍、縦に b 倍に引き伸ばしたものであり、この引き伸ばしはあらゆる面積を ab 倍する。

2 つの楕円の共通部分

E も F も $x \mapsto -x$ および $y \mapsto -y$ で不変であるから、$E \cap F$ も不変であり、その面積は象限 $x, y \geq 0$ にある部分の面積の 4 倍である。また、x と y を入れ替えると E は F に、F は E に移るので、$E \cap F$ は直線 $y = x$ に関して対称である。したがって第 1 象限にある 4 分の 1 の部分は、互いに鏡像となる 2 つの半分からなり、

$$\text{面積}(E \cap F) = 8 \times \text{面積} R, \qquad R = \{(x, y) \in E \cap F : 0 \leq x \leq y\}.$$

が成り立つ。



考えてみよう　R において、実際に境界をなしているのは 2 つの楕円のうちどちらか？

任意の点に対して

$$\left(\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2}\right) - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = (x^2 - y^2)\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right).$$

が成り立つ。$0 \leq x \leq y$ のとき $x^2 - y^2 \leq 0$ であり、$0 < b \leq a$ より $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \geq 0$ である。よってこの差は ≤ 0 となる。すなわち、$y = x$ のこちら側では、E に含まれる点は自動的に F にも含まれる。したがって

$$R = \{(x, y) \in E : 0 \leq x \leq y\},$$

であり、E だけを考えればよい（ここで $b \leq a$ を用いている。$b > a$ ならば 2 つの楕円の役割が入れ替わる）。

E の境界が第 1 象限で $y = x$ と交わるのは $x^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 1$ となるところ、すなわち $x = y = x_0$ であり、

$$x_0 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

である。$0 \le x \le x_0$ では E の上半分は $y = x$ 上またはその上側にあり（高さ $b > 0$ から始まり、直線とは x_0 でのみ交わる）、$x > x_0$ では直線の下側にある。よって R は、$0 \le x \le x_0$ における $y = x$ と曲線 $y = b(1 - x^2/a^2)^{1/2}$ の間の領域であり、

$$\text{面積}(R) = \underbrace{\int_0^{x_0} b\Big(1 - \frac{x^2}{a^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x}_{\text{前の結果で}c=x_0} - \underbrace{\tfrac{1}{2}x_0^2}_{\text{三角形、上辺は}y=x}.$$

となる。$c = x_0$ とすると（必要な条件 $0 < x_0 < a$ も満たされる）、

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \Big(1 - \frac{c^2}{a^2}\Big)^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \frac{c}{a}\Big(1 - \frac{c^2}{a^2}\Big)^{\frac{1}{2}} = \frac{ab}{a^2 + b^2}.$$

である。よって

$$\begin{aligned} \text{面積}(E \cap F) &= 8\,\text{面積}(R) \\ &= 4ab\left[\frac{ab}{a^2 + b^2} + \sin^{-1}\Big(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\Big)\right] - \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2} \\ &= 4ab\sin^{-1}\Big(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\Big), \end{aligned}$$

となる。2 つの代数的な項はちょうど打ち消し合うからである。これが求める面積である。

考えてみよう なぜ代数的な項は打ち消し合うのか？

項 $\frac{ab}{2} \cdot \frac{c}{a}(1 - c^2/a^2)^{1/2} = \frac{1}{2}x_0y_0$ は、円の図における三角形 $O, (x_0, 0), (x_0, y_0)$ を引き伸ばしたものである。ここでは $y_0 = x_0$ なので、これはちょうど引き去った $y = x$ の下の三角形に一致する。残るのは引き伸ばされた扇形であり、だからこそ答えは純粋な逆正弦（inverse sine）になるのである。

検算

- $a = b$ ならば 2 つの楕円は同じ円であり、公式は $4a^2\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = 4a^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi a^2$ を与える。これは正しい。
- a を固定して $b \to 0$ とすると、面積は $4ab \cdot \frac{b}{a} = 4b^2$ のように振る舞う。共通部分は、E の細い横長の帯と F の細い縦長の帯が交差する、一辺 $2b$ の正方形にほぼ等しい。
- $a = 2, b = 1$ のとき、公式は $8\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 3.70918$ を与える。2 つの境界のうち低い方に対してシンプソンの公式（Simpson's rule）を用いると 3.70918 が得られ、2×10^5 個の点によるモンテカルロ法（Monte Carlo method）の推定値は 3.707 である。最初の 2 つの結果も、多数のランダムな a, b, c について数値積分（quadrature）で確かめた。

よくある間違い

- 扇形の角を取り違える。扇形は OP と y 軸の間にあり、その角は $\sin^{-1} c$ であって $\cos^{-1} c$ ではない。
- どちらの楕円が領域の境界になっているかを確かめない。半分の領域 $0 \leq x \leq y$ で境界が E になるのは $b \leq a$ だからである。逆の選び方をすると、答えの逆正弦の中で b の代わりに a が現れてしまう。

STEP のその先へ

線形写像（linear map）$(x, y) \mapsto (ax, by)$ はあらゆる面積を ab 倍し、一般に線形写像は面積をその行列式（determinant）の絶対値倍する。これは、大学 1 年の微積分で学ぶ重積分（multiple integral）の変数変換公式（change-of-variables formula）に現れるヤコビアン（Jacobian）の因子の 2 次元の場合である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、行列式を面積（および体積）の拡大率として説明している。

解答例

STEP II 1994、第 5 問

純粋数学 • 実数解の個数

> **STEP II 1994、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q5

鍵となる考え方

$f(x) = c$ の解の個数を数えるということは、水平な直線 $y = c$ が f のグラフと何回交わるかを問うことである。したがって重要なのは f の形、すなわちどこで最小になり、どこで増加しどこで減少するかである。ここで現れる式はどれも、ある中心点に関して対称に置かれた二つの括弧からできている。中心が原点に来るように変数を平行移動すると、奇数乗の項が打ち消し合い（4 乗の場合）、あるいは偶数乗の項が打ち消し合い（3 乗の場合）、グラフの形が一目でわかるようになる。

解答

小問 (i)

二項定理（binomial theorem）で展開する。$(x+1)^4$ と $(x-1)^4$ では x の奇数乗の項の符号が逆になるので、和をとるとそれらは打ち消し合う：

$$f(x) = (x-1)^4 + (x+1)^4 = 2\left(x^4 + 6x^2 + 1\right) = 2x^4 + 12x^2 + 2.$$

よって f は偶関数（even function）であり、$f(x) = 2 + 2x^4 + 12x^2 \geq 2$ で、等号が成り立つのは $x = 0$ のときに限る。$x \geq 0$ において、$x > 0$ ならば $f'(x) = 8x^3 + 24x > 0$ であるから、f は $[0, \infty)$ で狭義単調増加（strictly increasing）であり、$x \to \infty$ のとき $f(x) \to \infty$ である。f は連続（continuous）であるから、$[0, \infty)$ 上で $[2, \infty)$ のすべての値をちょうど 1 回ずつとる。対称性により、$(-\infty, 0]$ 上でも同様である。

- $c > 2$ のとき：解 $x = a > 0$ がちょうど一つ存在し、$x = -a$ がもう一つの解となる。この二つは異なり、ほかに解はない。よって実数解は**ちょうど 2 個**である。

- $c = 2$ のとき：$f(x) = 2$ より $2x^4 + 12x^2 = 0$ となるので、$x = 0$ が**唯一の**解である。
- $c < 2$ のとき：すべての x に対して $f(x) \geq 2 > c$ であるから、解は**存在しない**。

これがまさに求められていたことである。

（別解として、$2x^4 + 12x^2 + 2 - c = 0$ は $u = x^2$ についての 2 次方程式であり、その解は $u = -3 \pm \sqrt{8 + c/2}$ である。0 以上になりうるのは $+$ の方の解だけであり、それは $c > 2$、$c = 2$、$c < 2$ に応じて正、0、負となる。）

小問 (ii)

括弧 $x-3$ と $x-1$ は $x = 2$ を中心としているので、$y = x - 2$ とおく。すると

$$(x-3)^4 + (x-1)^4 = (y-1)^4 + (y+1)^4,$$

となり、これは小問 (i) の式を変数 y で書いたものである。$x \mapsto y = x - 2$ は実数どうしの一対一対応（one-to-one correspondence）であるから、この方程式の実数解の個数は小問 (i) と同じである：

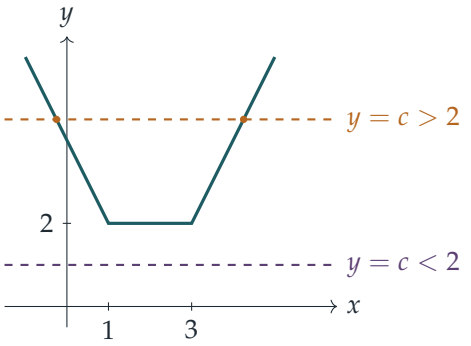
$$2\text{ 個の解}：c > 2, \qquad 1\text{ 個の解}(x = 2)：c = 2, \qquad \text{解なし}：c < 2.$$

小問 (iii)

$g(x) = |x-3| + |x-1|$ とおき、$x = 1$ と $x = 3$ で区切られる三つの区間それぞれで絶対値記号（modulus sign）を外す：

$$g(x) = \begin{cases} (3-x) + (1-x) = 4 - 2x, & x < 1, \\ (3-x) + (x-1) = 2, & 1 \leq x \leq 3, \\ (x-3) + (x-1) = 2x - 4, & x > 3. \end{cases}$$

よってグラフは底が平らな V 字形である。1 と 3 の間では一定値 2 をとり、その左側では狭義単調減少、右側では狭義単調増加であり、$[1, 3]$ の外では $g > 2$ となる。



- $c < 2$ のとき：至るところで $g(x) \geq 2 > c$ であるから、解は**存在しない**。
- $c = 2$ のとき：$1 \leq x \leq 3$ を満たすすべての x が解であり、その外に解はないので、解は**無数に**存在する。
- $c > 2$ のとき：$[1,3]$ には解がない。$x < 1$ では $4 - 2x = c$ より $x = 2 - \frac{c}{2}$ となり、$c > 2$ であるからこれは確かに 1 より小さい。$x > 3$ では $2x - 4 = c$ より $x = 2 + \frac{c}{2} > 3$ となる。よって解は**ちょうど 2 個**、$x = 2 \pm \frac{c}{2}$ である。

考えてみよう $c = 2$ のときの答えが小問 (ii) とこれほど異なるのはなぜだろうか。

4 乗の場合は、両方の項が狭義凸（strictly convex）であるため、和は中心点でただ一つの鋭い最小値をとる。絶対値の場合は、x を 1 と 3 の間で動かすと、一方の距離が増える分だけちょうど他方の距離が減るので、和はその区間全体で 2（1 と 3 の間の距離）のままである。

小問 (iv)

再び $y = x - 2$ とおく。3 乗の場合は、打ち消し合うのは y の偶数乗の項である：

$$(x-3)^3 + (x-1)^3 = (y-1)^3 + (y+1)^3 = 2y^3 + 6y.$$

$h(y) = 2y^3 + 6y$ とおく。すると、すべての実数 y に対して

$$h'(y) = 6y^2 + 6 \geq 6 > 0$$

であるから、h は実数全体で狭義単調増加であり、したがって各値を高々 1 回しかとらない。また $y \to \infty$ のとき $h(y) \to \infty$、$y \to -\infty$ のとき $h(y) \to -\infty$ であり、h は連続であるから、中間値の定理（intermediate value theorem）により、すべての実数値を少なくとも 1 回とる。

よって**すべての**実数 c に対して、この方程式は**ちょうど 1 個の**実数解をもつ。

検算

- 中心点 $x = 2$ では、4 乗の二つの式はどちらも $1 + 1 = 2$ に等しく、$c = 2$ の場合と一致する。また $(2-3)^3 + (2-1)^3 = 0$ である。
- 小問 (iv) で $c = 8$ ならば $x = 3$ となるはずである：実際 $0^3 + 2^3 = 8$ であり、$y = 1$ で $h(1) = 2 + 6 = 8$ となる。
- 小問 (iii) で $c = 4$ のとき、解 $x = 0$ と $x = 4$ はそれぞれ $3 + 1 = 4$ と $1 + 3 = 4$ を与える。

展開式が無作為に選んだ点で成り立つことを数値的に確認し、さらにさまざまな c の値（たとえば (i) と (ii) では $c = 1.9$、2.5、100、(iv) では -1000 から 5000 までの c）について、各関数から c を引いたものの符号の変化を細かい格子上で数えた。その個数は主張どおり 0、2、2、そして常に 1 であった。

よくある間違い

- 小問 (iii) の $c = 2$ の場合に「解は 1 個」や「解は 2 個」と答えてしまう。区間 $1 \le x \le 3$ 全体が解からなる。
- 小問 (iv) で、3 次方程式は「実数解を 1 個または 3 個もつ」と論じるだけで、どちらであるかを決めない。至るところで $h'(y) > 0$ であるという事実によって決着がつく。
- $x = 2 - \frac{c}{2}$ が、式 $4 - 2x$ を用いた領域 $x < 1$ に本当に属しているかを確かめ忘れる。

STEP のその先へ

ここでの議論は、大学最初の解析学の講義で丁寧に証明される二つの定理に基づいている。中間値の定理（区間上の連続関数はその間のすべての値をとる）と、導関数が正である関数は狭義単調増加であるという事実であり、後者は平均値の定理（mean value theorem）から導かれる。小問 (iii) はまた、凸性（convexity）と ℓ^1 距離への最初の入り口でもある。二点への距離の和は、その二点を結ぶ線分全体で最小となるのである。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、これらの考え方を厳密に展開している。

解答例

STEP II 1994、第 6 問

純粋数学 ・ 望遠鏡型の三角級数

> **STEP II 1994、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q6

鍵となる考え方

すべては一つの小さな恒等式（identity）$\tan x = \cot x - 2\cot 2x$ に基づいている。この恒等式により、和の各項は $\frac{1}{2^r}\cot\frac{\theta}{2^r}$ という形の連続する 2 項の差に書き換えられるので、和は打ち消し合って縮む（telescope）。そしてこの同じ恒等式こそが、帰納法のステップ（inductive step）を成り立たせるものである。無限級数のほうは、極限 $\frac{\sin\varphi}{\varphi} \to 1$ さえあれば求まる。

解答

有用な恒等式

$\sin x$、$\cos x$、$\sin 2x$ がいずれも 0 でないような任意の x に対して

$$\cot x - \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\cot 2x,$$

であるから

$$\tan x = \cot x - 2\cot 2x. \qquad (*)$$

が成り立つ。$(*)$ は $r \geq 1$ について $x = \theta/2^r$ とした場合にのみ用いる。$0 < \theta < \pi$ であるから、このような x は $(0, \frac{\pi}{2})$ に属し、$\sin x$、$\cos x$、$\sin 2x$ はすべて正である。よって、以下に現れる tan と cot はすべて定義されている。

有限和を帰納法で求める

左辺 $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{2^r} \tan \frac{\theta}{2^r}$ を S_n と書き、$P(n)$ を次の命題とする。

$$S_n = \frac{1}{2^n} \cot \frac{\theta}{2^n} - \cot \theta.$$

基底段階（*base case*）$n = 1$。$(*)$ に $x = \theta/2$ を代入し、両辺を 2 で割ると

$$S_1 = \tfrac{1}{2} \tan \tfrac{\theta}{2} = \tfrac{1}{2} \cot \tfrac{\theta}{2} - \cot \theta,$$

となり、これは $P(1)$ である。

帰納ステップ。ある $k \geq 1$ について $P(k)$ が成り立つと仮定する。$(*)$ に $x = \theta/2^{k+1}$ を代入すると $2x = \theta/2^k$ であり、両辺を 2^{k+1} で割ると

$$\frac{1}{2^{k+1}} \tan \frac{\theta}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}} \cot \frac{\theta}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^k} \cot \frac{\theta}{2^k}.$$

を得る。これを $P(k)$ に加えると

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{2^{k+1}} \tan \frac{\theta}{2^{k+1}} \\ &= \left(\frac{1}{2^k} \cot \frac{\theta}{2^k} - \cot \theta \right) + \left(\frac{1}{2^{k+1}} \cot \frac{\theta}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^k} \cot \frac{\theta}{2^k} \right) \\ &= \frac{1}{2^{k+1}} \cot \frac{\theta}{2^{k+1}} - \cot \theta, \end{aligned}$$

となり、これは $P(k+1)$ である。数学的帰納法（induction）により、すべての $n \geq 1$ とすべての $\theta \in (0, \pi)$ に対して $P(n)$ が成り立つ。これが示すべきことであった。

> **考えてみよう** 恒等式 $(*)$ を初めて見るとしたら、どうすればそれに気づけるだろうか？

帰納法から逆向きにたどればよい。$n = k$ から $n = k+1$ に進むとき、右辺は $\frac{1}{2^{k+1}} \cot \frac{\theta}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^k} \cot \frac{\theta}{2^k}$ だけ変化し、左辺は $\frac{1}{2^{k+1}} \tan \frac{\theta}{2^{k+1}}$ だけ変化する。2^{k+1} を掛けて $x = \theta/2^{k+1}$ と書くと、二つの変化量が一致するのはちょうど $\tan x = \cot x - 2 \cot 2x$ のときである。つまり、どの恒等式を証明すべきかは問題そのものが教えてくれるのであり、あとは 2 倍角の公式（double-angle formulae）でそれを確かめればよい。

無限級数

項はすべて正であり、部分和（partial sum）の正確な式が得られているので、$n \to \infty$ のときの S_n の極限を求めれば十分である。$\varphi_n = \theta/2^n$ とおくと、$\varphi_n \to 0^+$ かつ $\frac{1}{2^n} = \frac{\varphi_n}{\theta}$ である。すると

$$\frac{1}{2^n} \cot \frac{\theta}{2^n} = \frac{\varphi_n}{\theta} \cdot \frac{\cos \varphi_n}{\sin \varphi_n} = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{\varphi_n}{\sin \varphi_n} \cdot \cos \varphi_n \longrightarrow \frac{1}{\theta} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{\theta},$$

となる。ここで、$\varphi \to 0$ のときの標準的な極限 $\frac{\sin\varphi}{\varphi} \to 1$ と $\cos\varphi \to 1$ を用いた。$\cot\theta$ は n によらないから

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^r} \tan\frac{\theta}{2^r} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{\theta} - \cot\theta,$$

となり、これが求める結果である。特に、この級数はすべての $\theta \in (0, \pi)$ に対して収束（converge）する。

> **考えてみよう** 「無限級数の和は S_n の極限に等しい」と言ってよいのはなぜだろうか？

それが無限級数の和の定義だからである。$\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ とは、極限が存在するときの $\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} a_r$ を意味する。その極限が存在することは実際に計算して示したので、これ以上何も必要ない。

検算

- $\theta = \frac{\pi}{2}$：右辺は $\frac{2}{\pi} - 0 \approx 0.63662$ である。級数の最初の 60 項を数値的に足しても 0.6366198 となる。
- $\theta = 1$：級数と $1 - \cot 1$ はどちらも 0.3579074 となる。
- θ が小さいとき：$\tan\frac{\theta}{2^r} \approx \frac{\theta}{2^r}$ であるから、級数はおよそ $\theta\sum 4^{-r} = \frac{\theta}{3}$ である。これは展開 $\frac{1}{\theta} - \cot\theta = \frac{\theta}{3} + O(\theta^3)$ と一致する。
- $\theta \to \pi^-$ のとき、$\cot\theta \to -\infty$ であり、第 1 項 $\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} \to +\infty$ であるから、両辺はそろって発散する。当然そうなるべきである。

よくある間違い

- $(*)$ の係数 2 を間違え、たとえば $\tan x = \cot x - \cot 2x$ と書いてしまう。$x = \frac{\pi}{4}$ で確かめてみるとよい：$1 = 1 - 2\cdot 0$。
- $\frac{1}{2^n} \to 0$ だから $\frac{1}{2^n}\cot\frac{\theta}{2^n} \to 0$ だと主張してしまう。余接（cotangent）は $2^n/\theta$ のように増大するので、積は 0 ではなく $\frac{1}{\theta}$ に近づく。
- 正接と余接が定義される理由を述べ忘れる。すべての角 $\theta/2^r$ を $(0, \frac{\pi}{2})$ の中にとどめているのは、条件 $0 < \theta < \pi$ である。

STEP のその先へ

関数 $\frac{1}{\theta} - \cot\theta$ は有名な一族に属している。部分分数展開（partial-fraction expansion）$\cot\theta = \frac{1}{\theta} + \sum_{k\geq 1} \frac{2\theta}{\theta^2 - k^2\pi^2}$ を微分すると、バーゼル問題の和（Basel sum）$\sum 1/k^2 = \pi^2/6$ が得られる。オイラー（Euler）は、$\sin\theta$ の無限積からこのような結果を導いた。ヴィエト（Viète）の積 $\frac{\sin\theta}{\theta} = \prod_{r\geq 1} \cos\frac{\theta}{2^r}$ の対数をとって微分すると、ちょうどこの問題の級数が得られ、これは結果を理解するもう一つの見方である。無限和や無限積のこうした操作を厳密にすることは、大学 1 年の解析学の話題である。Abbott, *Understanding Analysis* を参照されたい。

解答例

STEP II 1994、第 7 問

純粋数学 • アポロニウスの円

STEP II 1994、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/94-s2-q7

鍵となる考え方

高さ h のポールの先端を距離 r から見たときの仰角（angle of elevation）の正接は h/r である。したがって「仰角が等しい」という条件は、兵士から 2 本のポールの根元までの距離の比が一定値 $h_1 : h_2$ であるということにほかならない。この条件を 2 乗すると、ちょうど最初の小問の形の方程式が得られるので、軌跡（locus）は円（アポロニウスの円（circle of Apollonius））である。最後の小問では、ポールを一般の位置に置き、各中心を 2 本のポールの根元の重み付きの組合せとして表す。すると恒等式は自然に導かれ、しかもその係数の和が 0 になる。これが 3 点が一直線上にある（共線（collinear）である）ことを導く鍵である。

解答

円

$a > 0$ であるから a で割ることができ、平方完成（completing the square）すると

$$x^2 + y^2 + \frac{2g}{a}x + \frac{2f}{a}y + \frac{c}{a} = 0 \iff \left(x + \frac{g}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{f}{a}\right)^2 = \frac{g^2 + f^2 - ac}{a^2}.$$

$f^2 + g^2 > ac$ より右辺は正であるから、これは

$$\text{中心} \left(-\frac{g}{a}, -\frac{f}{a}\right), \qquad \text{半径} \frac{\sqrt{g^2 + f^2 - ac}}{a}.$$

の円である。（この条件がなければ、「円」は 1 点になるか空集合になる。）

2 本の旗竿

高さ h_1 のポールの根元を原点に、もう一方の根元を $(d,0)$ に置く。兵士が (x,y) にいて、2 本の根元からの距離がそれぞれ r_1, r_2 であるとすると、仰角 θ_1, θ_2 は $\tan\theta_i = h_i/r_i$ を満たす。どちらの角も $(0, \frac{\pi}{2})$ にあり、そこで tan は一対一（one-to-one）であるから

$$\theta_1 = \theta_2 \iff \frac{h_1}{r_1} = \frac{h_2}{r_2} \iff h_2^2 r_1^2 = h_1^2 r_2^2$$

となる。すべての量が正なので、最後の変形は逆向きにもたどれる。（兵士がポールの根元に立つことはない。$r_1 = 0$ ならば $r_2 = 0$ でもなければならないからである。）よって経路は

$$h_2^2(x^2+y^2) = h_1^2\big((x-d)^2+y^2\big) \iff (h_2^2-h_1^2)(x^2+y^2) + 2h_1^2 d\,x - h_1^2 d^2 = 0.$$

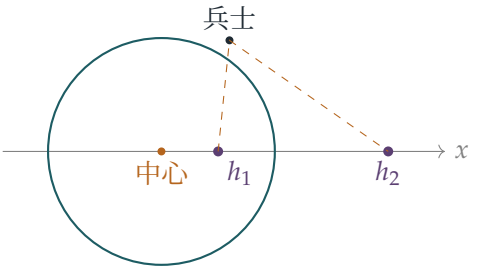
である。$h_2 > h_1$ となるようにポールに名前をつける（高さが異なれば、どちらかが高い）。するとこれは最初の小問の方程式で

$$a = h_2^2 - h_1^2 > 0, \quad g = h_1^2 d, \quad f = 0, \quad c = -h_1^2 d^2,$$

としたものであり、

$$g^2 + f^2 - ac = h_1^4 d^2 + (h_2^2 - h_1^2)h_1^2 d^2 = h_1^2 h_2^2 d^2 > 0.$$

である。したがって兵士は、中心 $\left(-\dfrac{h_1^2 d}{h_2^2 - h_1^2}, 0\right)$、半径 $\dfrac{h_1 h_2 d}{h_2^2 - h_1^2}$ の円を一周する。中心は 2 本の根元を通る直線上で、低いポールの向こう側にある。円は低いポールのまわりを回るが、これは理にかなっている。低いポールを高いポールと同じ高さに見せるには、低いポールの近くに立たなければならないからである。



（$h_1 = 1, h_2 = 2, d = 3$ の場合の図。中心は $(-1,0)$、半径は 2 である。）

$h_1 = h_2$ の場合は $x^2 + y^2$ の項が打ち消し合い、方程式は $2h_1^2 d\,x = h_1^2 d^2$、すなわち $x = \frac{1}{2}d$ となる。兵士は 2 本の根元を結ぶ線分の垂直二等分線（perpendicular bisector）に沿って歩く。これは円ではなく直線である。これは上の円の極限になっている。$h_2 \to h_1$ のとき半径は無限大に発散する。

3 本の旗竿

今度は 3 本の根元をすべて 1 本の軸上に置くことはできないので、高さ h_i のポールが $\mathbf{p}_i = (p_i, q_i)$ に立っているとする。$r_i^2 = (x-p_i)^2 + (y-q_i)^2$ として上の議論を繰り返すと、ポール i と j を担当する兵士は

$$(h_j^2 - h_i^2)(x^2+y^2) - 2(h_j^2 p_i - h_i^2 p_j)x - 2(h_j^2 q_i - h_i^2 q_j)y + \text{定数} = 0.$$

に沿って歩く。これは円である（原点を移動しても g^2+f^2-ac の値は変わらないので、$h_j < h_i$ のときは全体に -1 を掛けたうえで、やはり $h_i^2 h_j^2 |\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j|^2 > 0$ となる）。最初の小問により、その中心 $\mathbf{c}_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$ は

$$(h_j^2 - h_i^2)\,\mathbf{c}_{ij} = h_j^2 \mathbf{p}_i - h_i^2 \mathbf{p}_j.$$

を満たす。この式は i と j を入れ替えても変わらない（両辺とも符号が変わる）ので、$\mathbf{c}_{31}$ をどちら向きに名づけるかは問題にならない。

> **考えてみよう** 何も解かずに、これらの式を 3 つ使って与えられた恒等式を導くにはどうすればよいか。

恒等式の各項にはすでに x_{ij} の隣に因数 $\pm(h_j^2 - h_i^2)$ があるので、上の式をそのまま代入できる。x 座標と y 座標を同時に扱うためにベクトル（vector）を用いると

$$\begin{aligned}
h_3^2(h_1^2 - h_2^2)\,\mathbf{c}_{12} &= -h_3^2(h_2^2\mathbf{p}_1 - h_1^2\mathbf{p}_2) = -h_2^2 h_3^2\,\mathbf{p}_1 + h_1^2 h_3^2\,\mathbf{p}_2,\\
h_1^2(h_2^2 - h_3^2)\,\mathbf{c}_{23} &= -h_1^2(h_3^2\mathbf{p}_2 - h_2^2\mathbf{p}_3) = -h_1^2 h_3^2\,\mathbf{p}_2 + h_1^2 h_2^2\,\mathbf{p}_3,\\
h_2^2(h_3^2 - h_1^2)\,\mathbf{c}_{31} &= h_2^2(h_3^2\mathbf{p}_1 - h_1^2\mathbf{p}_3) = h_2^2 h_3^2\,\mathbf{p}_1 - h_1^2 h_2^2\,\mathbf{p}_3.
\end{aligned}$$

これらを加えると、すべての項が 2 つずつ打ち消し合うので

$$h_3^2(h_1^2 - h_2^2)\,\mathbf{c}_{12} + h_1^2(h_2^2 - h_3^2)\,\mathbf{c}_{23} + h_2^2(h_3^2 - h_1^2)\,\mathbf{c}_{31} = \mathbf{0}.$$

となる。x 成分が求める x_{ij} の間の関係式であり、y 成分は y_{ij} の間の同じ関係式である。

> **考えてみよう** 3 点の間に線形関係があると、なぜそれらは一直線上にあるのか。

3 つの係数を $A = h_3^2(h_1^2 - h_2^2), B = h_1^2(h_2^2 - h_3^2), C = h_2^2(h_3^2 - h_1^2)$ とおく。高さは正で互いに異なるので、A, B, C はどれも 0 でない。鍵となる追加の事実は、これらの和が 0 になることである：

$$A + B + C = h_1^2 h_3^2 - h_2^2 h_3^2 + h_1^2 h_2^2 - h_1^2 h_3^2 + h_2^2 h_3^2 - h_1^2 h_2^2 = 0.$$

よって $C = -A - B$ であり、関係式は

$$A(\mathbf{c}_{12} - \mathbf{c}_{31}) + B(\mathbf{c}_{23} - \mathbf{c}_{31}) = \mathbf{0}, \qquad \text{よって} \qquad \mathbf{c}_{12} - \mathbf{c}_{31} = -\frac{B}{A}(\mathbf{c}_{23} - \mathbf{c}_{31}).$$

となる。$\mathbf{c}_{31}$ から他の 2 つの中心へ向かうベクトルは平行である（2 つの中心が一致する場合は一方が零ベクトルになる）から、3 つの中心は一直線上にある。$A + B + C = 0$ がなければ、線形関係からは何も証明できない。どんな 3 点も、その種の関係を何かしら満たすからである。

検算

- $h_1 = 1, h_2 = 2, d = 3$ のとき、得られた式から中心は $(-1, 0)$、半径は 2 となる。点 $(1, 0)$ は根元からの距離が 1 と 2 であり、$(-3, 0)$ は 3 と 6 である。どちらも比は 1 : 2 で、そうなるべきとおりである。
- 数値的な検証として、各円上にランダムな点をとり、2 つの仰角が一致することを確かめた。また、ランダムな位置に置いたポールの 3 本組 2000 通りについて、恒等式と 3 つの中心の共線性も確かめた。
- 共線性を予想できる別の理由：ある点が 2 つの円の上にあれば $r_1 : r_2 = h_1 : h_2$ かつ $r_2 : r_3 = h_2 : h_3$ であるから、$r_1 : r_3 = h_1 : h_3$ となり、その点は 3 つ目の円の上にもある。円どうしが交わるとき、すべての円が同じ 2 点を通るので、それらの中心はすべてその 2 点の垂直二等分線上にある。

よくある間違い

- 等しい角の正接が等しい理由（どちらの角も鋭角であること）を述べずに $h_1/r_1 = h_2/r_2$ とおいてしまう。
- $g^2 + f^2 > ac$ の確認を忘れる。最初の小問で円が得られるのは、この条件のもとでだけである。
- $A + B + C = 0$ と $A, B, C \neq 0$ を使わずに、恒等式だけから共線性を導いてしまう。

STEP のその先へ

2 つの定点からの距離の比が一定値 $k \neq 1$ である点の集合は**アポロニウスの円**である。k のすべての値をとると、円の**共軸円族**（coaxal system）が得られる。これは、どの 2 つの円も同じ根軸（radical axis）を共有するような円の族である。このような族は反転幾何学（inversive geometry）の出発点であり、複素平面ではこれらは円

$|z-a| = k|z-b|$ となり、メビウス（Möbius）変換によって互いに写り合う。コクセター（Coxeter）とグライツァー（Greitzer）の *Geometry Revisited*（幾何学再入門）は共軸円と反転を扱っている。ニーダム（Needham）の *Visual Complex Analysis*（目で見る複素解析）は複素数の側面を示している。

解答例

STEP II 1994、第 8 問

純粋数学 ・ 2 次モデルの最適化

> **STEP II 1994、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q8

鍵となる考え方

1 回の配送サイクルにおけるお金の流れを追ってみよう。在庫は一定の速さ r で減り、やがて尽きるので、$S(t)$ は単純な一次関数のグラフ（傾斜）となり、保管料はその下の面積の b 倍である。すると 1 サイクルあたりの利益は X の 2 次式（quadratic）になる。これを許される範囲 $0 < X \leq rT$ で最大化すれば条件が得られる。そして仮定 $T \geq p/b$ こそが、放物線の頂点（vertex）をその範囲の内側に収める役割を果たしているのである。

解答

なぜ $X \leq rT$ なのか

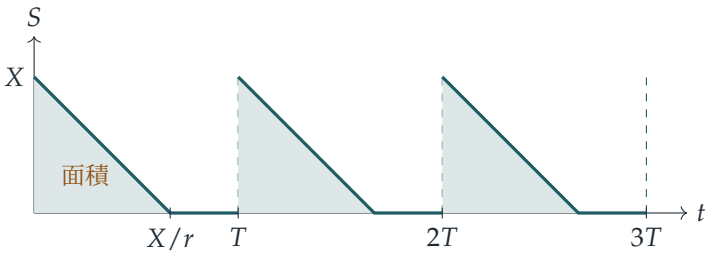
T 時間で彼女が売ることのできる量は高々 rT 個である。もし $X > rT$ ならば、次のトラックが到着した時点で少なくとも $X - rT$ 個が棚に残っている。するとサイクルごとに、この売れ残りの余剰に少なくとも $X - rT$ 個ずつが加わるので、n サイクル後には少なくとも $n(X - rT)$ 個になる。これは限りなく大きくなり、1 個 1 時間あたり b の保管料も同様に限りなく大きくなる。彼女はこれらの商品の代金（およびその保管料）を支払うが、売上はどのみち 1 サイクルあたり rT 個が上限なので、これらの商品は売上を少しも増やさない。したがって、1 回の配送で rT 個より多く注文しても費用が増えるだけであり、$X \leq rT$ とすべきである。

在庫量

$X \le rT$ のとき、各サイクルはちょうど X 個の在庫から始まる。連続モデルでは、在庫がある間は速さ r で売れるので、

$$S(t) = \begin{cases} X - rt, & 0 \le t \le X/r, \\ 0, & X/r \le t \le T. \end{cases}$$

グラフは X から $t = X/r$ でゼロまで下がる直線であり、その後は次の配送時刻 $t = T$ までゼロのまま平らである（その時刻に X まで跳ね上がる）。複数のサイクルにわたって見ると、のこぎり波（sawtooth）の形になる。



1 サイクルあたりの利益

T 時間の 1 周期について考える。

- **売上。**（$X \le rT$ なので）X 個すべてが 1 個 £$(p+q)$ で売れ、売上は £$(p+q)X$ となる。
- **配送費。** £$(a+qX)$。
- **保管料。** $S(t)$ 個を短い時間 δt だけ保管する費用は $bS(t)\,\delta t$ なので、合計は

$$b\int_0^T S(t)\,\mathrm{d}t = b\int_0^{X/r} (X - rt)\,\mathrm{d}t = b \cdot \tfrac{1}{2} \cdot X \cdot \frac{X}{r} = \frac{bX^2}{2r},$$

  すなわち網掛けした三角形の面積の b 倍である。
- **運営費。** £cT。

qX の項は打ち消し合うので、1 サイクルあたりの利益は

$$P(X) = pX - \frac{bX^2}{2r} - a - cT.$$

したがって、p が各商品の実質的な利幅であり、q は単に顧客に転嫁されているだけである。

事業が利益を生むのはどのようなときか

T を固定すると、彼女が調整できるのは範囲 $0 < X \le rT$ における X である。平方完成（completing the square）すると、

$$P(X) = \frac{p^2 r}{2b} - a - cT - \frac{b}{2r}\left(X - \frac{pr}{b}\right)^2.$$

考えてみよう 最適な X は本当に許される範囲にあるだろうか？

放物線は $X = pr/b$ で最大となり、$pr/b \le rT$、すなわち $T \ge p/b$ が必要である。これはまさに仮定そのものである。よって彼女は $X = pr/b$ を選ぶことができ、そのとき

$$P = \frac{p^2 r}{2b} - (a + cT).$$

これが正となるのは、ちょうど $p^2 r > 2b(a + cT)$ のとき、すなわち

$$p^2 > 2\,\frac{(a + cT)b}{r}.$$

のときである。したがって、この不等式が成り立つならば、注文量 $X = pr/b$ によって事業は利益を生む。これが示すべきことであった。（実際には pr/b が最適な選択なので、$T \ge p/b$ のとき、この条件は必要条件でもある。）

逆に $T < p/b$ ならば、頂点は rT より先にある。このとき P は許される範囲全体で増加し、最善の選択は $X = rT$ となる。この特定の条件に T に関する仮定が必要なのはこのためである。

検算

- $a = 10, b = 1, r = 10, p = 4, c = 1, T = 5$ とする。このとき $T \ge p/b = 4$ であり、$p^2 = 16 > 2(15)(1)/10 = 3$ である。最適な注文量は $X = 40 \le rT = 50$ で、利益は $160 - 10 - 80 - 5 = 65 = \frac{16 \cdot 10}{2} - 15$ となる。
- コンピュータで 30 組の無作為なパラメータについて $S(t)$ を 1 サイクル分数値的に追跡したところ、$P(X)$ と 10^{-7} 以内で一致した。また、$T \ge p/b$ を満たす 2000 個の無作為な場合について X のグリッド探索を行い、最大値が $\frac{p^2 r}{2b} - a - cT$ であることを確認した。
- 単位：$p^2 r/b$ の単位は $(£/個)^2 \times (個/時)/(£/個/時) = £$ であり、a と cT も同じである。

よくある間違い

- 実際に保有している在庫に対する $b\int S\,\mathrm{d}t$ ではなく、X 個すべてに T 時間ずっと保管料をかけてしまう（bXT）。
- $X = pr/b$ が $X \leq rT$ を満たすことの確認を忘れる。条件 $T \geq p/b$ が使われるのは、この確認の部分だけである。

STEP のその先へ

これはオペレーションズ・リサーチ（operations research）における古典的な**経済的発注量**（economic order quantity）モデルである。1 回の注文あたりの固定費と、単位時間あたりの保管費とを釣り合わせると、平方根の公式が得られる。ここで、もし彼女が T も選べるならば、利益の**率** P/T は a と保管料とのトレードオフによって最大化される。この種の制約付き最適化（constrained optimisation）（ここでは頂点か境界 $X = rT$ か）は、線形計画法（linear programming）や非線形計画法（nonlinear programming）、そしてカルーシュ・キューン・タッカー条件（Karush–Kuhn–Tucker conditions）へと発展していく。このようなモデルを組み立てて検証する習慣を身につけるには、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）がよい相棒となる。

解答例

STEP II 1994、第 9 問

力学 ・ 剛体のつり合い

STEP II 1994、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/94-s2-q9

鍵となる考え方

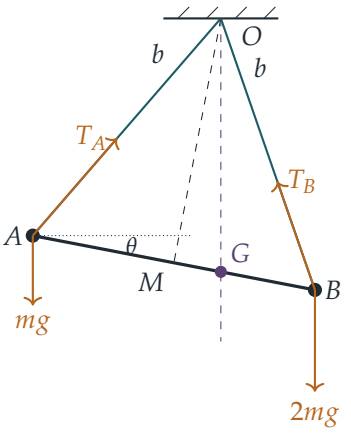
棒、2 本の糸、2 つの質点をまとめて 1 つの剛体（rigid body）とみなす。これにはたらく外力は 2 つの重力と O における支持力だけであるから、つり合い（equilibrium）のためには、重心（centre of mass）G にはたらく合成された重力の作用線が O を通らなければならない。すなわち、G は O の鉛直真下にぶら下がる。これにより、角度の問題は二等辺三角形の純粋な幾何に帰着する。張力（tension）については B のまわりのモーメント（moment）をとる。そうすれば B にはたらく 2 つの未知の力がともに消える。

解答

モデル化。棒と糸は軽く、糸は伸び縮みせず、A、B は質点とする。$OA = OB = b$ かつ $AB = 2a$ であるから、三角形 OAB は二等辺三角形（isosceles triangle）である。AB の中点を M とすると、$OM \perp AB$ であり、ピタゴラス（Pythagoras）の定理より

$$OM = h = \sqrt{b^2 - a^2}.$$

重いほうの質点 B のほうが低い位置にぶら下がり、棒は水平と角 θ をなす。



角度

棒、糸、質点をまとめた系全体を考える。これにはたらく外力は、A における重力 mg、B における重力 $2mg$、そして O における支持力である。O のまわりのモーメントをとると、支持力はモーメントをもたないので、O のまわりの重力のモーメントの和は 0 でなければならない。2 つの重力は平行であるから、質点系の重心 G を通る 1 つの力 $3mg$ に合成される。その O のまわりのモーメントが 0 になるのは、G が O を通る鉛直線上にあるときに限る。したがって G は O の真下にある。

次に G を求める。これは AB 上にあって $AG : GB = 2m : m = 2 : 1$ を満たすから、$AG = \frac{2}{3} \cdot 2a = \frac{4a}{3}$ であり、したがって

$$MG = AG - AM = \frac{4a}{3} - a = \frac{a}{3},$$

となる。ここで G は M から見て B の側にある。

考えてみよう 角 MOG が θ に等しいのはなぜか？

OG は鉛直であり、OM は棒に垂直である。鉛直方向を OM に重ねる回転は、水平方向を棒に重ねる回転と同じであるから、OG と OM のなす角は棒と水平のなす角、すなわち θ に等しい。

三角形 OMG は M で直角であるから

$$\tan\theta = \frac{MG}{OM} = \frac{a/3}{\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{a}{3\sqrt{b^2 - a^2}},$$

となり、題意が示された。

AO の張力

再び棒と質点をまとめて考える。この系にはたらく力は、AO に沿った T_A、BO に沿った T_B、そして 2 つの重力である。（棒にはたらく力は内力である。）B のまわりのモーメントをとると、T_B と重力 $2mg$ が消える。

B から直線 OA に下ろした垂線の長さは、三角形 OAB の面積の 2 倍を OA で割ったものである。その面積は $\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot h = ah$ であるから、垂線の長さは $2ah/b$ である。A における重力 mg の腕の長さ（moment arm）は A と B の水平距離、すなわち $2a\cos\theta$ である。2 つのモーメントは向きが逆であり、それらをつり合わせると

$$T_A \cdot \frac{2ah}{b} = mg\cdot 2a\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad T_A = \frac{mgb\cos\theta}{h}.$$

θ は鋭角であるから、$\tan\theta = \dfrac{a}{3h}$ より $\cos\theta = \dfrac{3h}{\sqrt{9h^2+a^2}}$ であり、また $9h^2 + a^2 = 9b^2 - 8a^2$ である。よって

$$T_A = \frac{mgb}{h}\cdot\frac{3h}{\sqrt{9b^2-8a^2}} = \frac{3mgb}{\sqrt{9b^2-8a^2}}.$$

（A のまわりのモーメントをとって同様に議論すると $T_B = 2T_A$ が得られる。各糸の張力は、その糸が支える質量に比例するのである。）

検算

- $a \to 0$ とすると糸は鉛直になり、$T_A \to 3mgb/(3b) = mg$ となる。これはちょうど質点 A を支えるのに必要な大きさである。
- 系全体について鉛直方向に力を分解すると $3mg$ になるはずである。$a=1$、$b=2$、$m=1$、$g=9.8$ とすると $T_A \approx 11.11\,\mathrm{N}$、$T_B \approx 22.22\,\mathrm{N}$ を得る。これらを糸の方向に沿って分解すると、鉛直成分の合計は $29.4\,\mathrm{N} = 3mg$ となる。
- 数値的な検証として、ランダムに選んだ 2000 組の (a,b,m) について棒を予測された角度に置き、各質点での力のつり合いを別々に解いた。2 つの質点から求めた棒の力は一致し、それは押す力（thrust）であった。また、張力は公式と約 10^{-15} の精度で一致した。

よくある間違い

- G を M から距離 $\frac{2a}{3}$ の位置に置いたり、逆の側に置いたりする。重心は重いほうの質点に近く、中点から $\frac{a}{3}$ の位置にある。

- B のまわりの T_A の腕の長さを $2a$ や b としてしまう。必要なのは B から直線 OA に下ろした垂線の長さである。
- 答えは m、g、a、b で表すよう求められているのに、θ を含んだまま答えてしまう。

STEP のその先へ

1 点から自由にぶら下がった物体は、その点の真下に重心が来る位置で静止する。この原理は、より深い事実の最も簡単な場合である。すなわち、安定なつり合いは位置エネルギー（potential energy）を最小にするのであり、ここでは位置エネルギーはちょうど G の高さの $3mg$ 倍である。大学では、これは仮想仕事の原理（virtual work principle）やラグランジュ（Lagrange）力学へと発展し、そこではつり合いの位置を、力を分解するのではなくエネルギーを微分することによって求める。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の静力学とエネルギー法を丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 1994、第 10 問

力学 ・ 弾性ひもと単振動

> **STEP II 1994、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q10

鍵となる考え方

トレーラーの位置ではなく、ロープの**伸び**（extension）を変数として扱う。トラックの速度は一定なので、伸びは符号を除いてトレーラーの加速度とまったく同じ方程式に従い、その方程式は単振動（simple harmonic motion）を表す。したがってロープは振動の半周期の間だけぴんと張った状態を保ち、その後、トラックより速く動いているトレーラーを放す。そこから先は、等速度で追いつくだけの単純な問題である。

解答

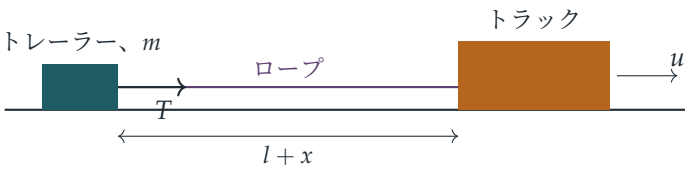
設定

トレーラーを質点とみなし、ロープは軽く、張っている間はフックの法則（Hooke's law）に従い（たるんでいる間は力を及ぼさない）とし、摩擦は無視する。時刻 t はロープが初めて張った瞬間から測り、距離は運動の向きに沿って測る。$t = 0$ においてトラックは速さ u で動いており（以後もその速さを保つ）、トレーラーは静止しており、トラックはトレーラーより距離 l だけ前方にある。

トレーラーの位置を $y(t)$ とし、$y(0) = 0$ とすると、トラックの位置は $l + ut$ である。ロープの伸びは

$$x = (l + ut) - y - l = ut - y.$$

である。



ロープが張っている間

$x > 0$ である間、張力（tension）は $T = \lambda x/l$ であり、これがトレーラーにはたらく唯一の水平方向の力で、トレーラーを前方へ引く。よって

$$m\ddot{y} = \frac{\lambda x}{l}.$$

である。$x = ut - y$ で u は定数だから $\ddot{x} = -\ddot{y}$ であり、したがって

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \qquad \text{ただし} \omega^2 = \frac{\lambda}{ml}.$$

となる。これは単振動である。初期条件は $x(0) = 0$（ロープはちょうど張ったところである）および $\dot{x}(0) = u - \dot{y}(0) = u$ なので、

$$x = \frac{u}{\omega}\sin\omega t, \qquad \dot{x} = u\cos\omega t.$$

を得る。トレーラーの速度は $\dot{y} = u - \dot{x} = u(1 - \cos\omega t)$ である。

考えてみよう 単振動の式では、しばらくすると x が負になる。そのときもこの式は成り立つだろうか？

成り立たない。方程式 $\ddot{x} = -\omega^2 x$ は張力 $\lambda x/l$ を用いて導いたが、これは $x > 0$ のときにしか当てはまらない。ロープは押すことができないからである。この式が成り立つのは $\sin\omega t \geq 0$ となる $0 \leq t \leq \pi/\omega$ の範囲であり、ロープは

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega} = \pi\left(\frac{lm}{\lambda}\right)^{1/2}.$$

で再びたるむ。この瞬間の伸びは 0 なので、トレーラーは再びトラックより距離 l だけ後方にあり、その速度は

$$\dot{y}(t_1) = u(1 - \cos\pi) = 2u.$$

である。

ロープがたるんだ後

$t > t_1$ ではトレーラーは $2u$、トラックは u で動くので、$t = t_1$ で l であった両者の間隔は一定の割合 $2u - u = u$ で縮む。このとき間隔は l より小さいのでロープはたるん

だままであり、トレーラーには依然として水平方向の力がはたらかず、その速さは確かに $2u$ のまま保たれる。間隔はさらに時間 l/u が経過すると 0 になる。

したがって、トレーラーがトラックに衝突するのは、ロープが初めて張ってから

$$t_1 + \frac{l}{u} = \pi\left(\frac{lm}{\lambda}\right)^{1/2} + \frac{l}{u}$$

後であり、これが示すべきことであった。

検算

- 単位：λ は力なので、lm/λ の単位は $\mathrm{m}\cdot\mathrm{kg}/\mathrm{N} = \mathrm{s}^2$ であり、両方の項はともに時間である。
- 座標系（frame）の変換：ロープは、トレーラーと実質的に無限大の質量をもつトラックとの弾性衝突（elastic collision）におけるばねのようにふるまう。トラックの座標系では、トレーラーは速さ u で近づき、逆向きに速さ u で離れていくので、地面に対する速さは最終的に $2u$ となり、上で求めた結果と一致する。
- m、l、λ、u に無作為な値を与えて、トレーラーの運動方程式（equation of motion）を（ロープがたるんでいるときは力を 0 として）数値積分したところ、公式が再現された。たとえば $\pi/\omega \approx 2.9944$、$l/u \approx 2.3017$ となるように m, l, λ, u を選ぶと、衝突時刻は 5.2962 となり、予測値 5.2961 とよく一致した。

よくある間違い

- 伸びが 0 に戻るとロープがたるむことを忘れ、単振動の解をすべての時刻に適用してしまう。
- トレーラーの位置 y について直接運動方程式を立て、外力項をもつ強制振動の方程式（forced equation）$m\ddot{y} = \lambda(ut - y)/l$ を得てしまう。これも解けなくはないが、置換 $x = ut - y$ を使えばただちに外力項のない方程式になる。
- 最後の l/u を忘れる：ロープがたるんだ時点で、トレーラーはまだトラックより自然長（natural length）だけ丸々後方にある。

STEP のその先へ

トラックの座標系に移ると、全体の出来事は、トレーラーと動かない壁に取り付けられたばねとの弾性的な「衝突」となる。トレーラーは速さ u で入ってきて速さ u で

出ていき、接触はその速さによらずちょうど半周期だけ続く。これは、ガリレイ不変性（Galilean invariance）とエネルギー保存則（conservation of energy）が衝突をどのように制約するかを示すもっとも簡単な例であり、この考え方は大学 1 年次の力学全体を貫き、さらに散乱理論（scattering theory）へとつながっていく。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、振動と衝突の両方をこうした精神で扱っている。

解答例

STEP II 1994、第 11 問

力学 ・ 放物運動と爆発

> **STEP II 1994、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q11

鍵となる考え方

爆発は既知の高さ、すなわち鉛直に打ち上げた砲弾の最高点で起こり、その瞬間に砲弾は静止している。したがって、二つの破片（fragment）は同じ点から、大きさが等しく向きが反対の速度で飛び出す。その向きを一つの角 θ で表せば、それぞれの着地時刻は二次方程式から求まり、着地点の間の距離は θ の一つの関数になる。答えが二つの場合に分かれるのは、その関数の最大値が、許される範囲の端でとられるか、内部の極値点でとられるかのいずれかだからである。

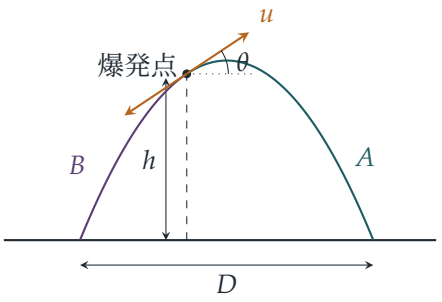
解答

設定

砲弾と破片を、重力のみを受けて運動する質点（particle）としてモデル化する。砲弾は初速 v で上昇するので、次の高さで静止する。

$$h = \frac{v^2}{2g}, \qquad \text{すなわち} \qquad 2gh = v^2.$$

爆発の直後の破片を A、B とよぶ。それらの速度は大きさが等しく向きが反対なので、どちらも爆発点を通る一つの鉛直面内にある。その平面内で x 軸を水平に、y 軸を鉛直上向きにとり、爆発点を $(0, h)$ とする。A が下向きに動かないように破片の名前をつけることができる。このとき A の速度は $(u\cos\theta,\ u\sin\theta)$、$B$ の速度は $(-u\cos\theta,\ -u\sin\theta)$ であり、$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ である。$s = \sin\theta$、$c = \cos\theta$ とおくと、$c \ge 0$ である。



着地時刻

爆発から時間 t 後の破片 A の高さは $h + ust - \frac{1}{2}gt^2$ である。A が着地するのは次のときである。

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - us\,t - h = 0.$$

解の積は $-2h/g < 0$ であるから、正の解はちょうど一つであり、

$$t_A = \frac{us + \sqrt{u^2s^2 + 2gh}}{g} = \frac{us + \sqrt{u^2s^2 + v^2}}{g}.$$

B については鉛直方向の速度が $-us$ なので、s を $-s$ で置き換えて

$$t_B = \frac{-us + \sqrt{u^2s^2 + v^2}}{g}.$$

$\sqrt{u^2s^2 + v^2} > us$ であるから、これは正である。

着地点の間の距離

水平方向には、A は x の正の向きに $uc\,t_A$ だけ進み、B は負の向きに $uc\,t_B$ だけ進むので、両者は発射点をはさんで反対側に着地する。したがって、着地点の間の距離は

$$D = uc\,(t_A + t_B) = \frac{2uc\sqrt{u^2s^2 + v^2}}{g}.$$

$D \geq 0$ であるから、D を最大にすることは D^2 を最大にすることと同じである。$x = s^2 \in [0,1]$ とおくと、$c^2 = 1 - x$ である。このとき

$$\frac{g^2D^2}{4u^2} = (1-x)(v^2 + u^2x) = f(x), \qquad \text{とおく,}$$

であり、

$$f(x) = v^2 + (u^2 - v^2)x - u^2x^2.$$

これは最高次の係数が負である x の二次関数であり、その頂点（vertex）は

$$x^* = \frac{u^2 - v^2}{2u^2}.$$

考えてみよう f の頂点は最大値を与える。それなのに、なぜ答えはいつも $f(x^*)$ にならないのだろうか。

$x = \sin^2\theta$ であるから、許されるのは $x \in [0,1]$ のみである。常に $x^* < \frac{1}{2}$ であることに注意すると、頂点が上端を越えることはない。頂点が許される範囲にあるかどうかは、その符号だけで決まる。

場合 $u \le v$。このとき $x^* \le 0$ である。$[0,1]$ は下に凸でない（上に凸な）放物線の頂点より右側にあるので、そこで f は減少し、最大値は $x = 0$ でとられ、$f(0) = v^2$ である。これは $\theta = 0$、すなわち水平方向の爆発に対応する。よって

$$D_{\max} = \frac{2u}{g}\sqrt{v^2} = \frac{2uv}{g}.$$

場合 $v \le u$。このとき $0 \le x^* < \frac{1}{2}$ であるから、頂点は許される範囲にあり、最大値を与える。

$$f(x^*) = v^2 + \frac{(u^2-v^2)^2}{2u^2} - \frac{(u^2-v^2)^2}{4u^2} = v^2 + \frac{(u^2-v^2)^2}{4u^2}$$
$$= \frac{4u^2v^2 + u^4 - 2u^2v^2 + v^4}{4u^2} = \frac{(u^2+v^2)^2}{4u^2}.$$

したがって

$$D_{\max} = \frac{2u}{g}\cdot\frac{u^2+v^2}{2u} = \frac{u^2+v^2}{g}.$$

これが起こるのは $\sin^2\theta = \dfrac{u^2-v^2}{2u^2}$ のときであり、破片は水平に対してある角度をなして飛び出す。

$u = v$ のときは、どちらの式も $2u^2/g$ を与えるので、二つの答えは場合の境目で一致する。当然そうなるべきである。以上で証明が完了した。

検算

- 単位：uv/g と $(u^2+v^2)/g$ はどちらも（速さ）^{2}/（加速度）であり、これは長さである。
- $g = 9.8$、$u = 30$、$v = 10$ とすると、最適な角は $\theta \approx 41.8^\circ$ であり、D の一般式からも $(u^2+v^2)/g$ からも $D = 1000/9.8 \approx 102.04\,\mathrm{m}$ が得られる。水平方向の爆発では $2\cdot 30\cdot 10/9.8 \approx 61.2\,\mathrm{m}$ にしかならない。
- 二つの軌道を数値的に時間刻みで追跡し、θ を細かい格子上で走査すると、数百組の無作為な (u,v) について両方の最大値が再現される。

- $v = 0$ のとき砲弾は地面の高さで爆発し、答えは u^2/g となる。これは速さ u で 45° の方向に打ち出した物体の通常の最大到達距離であり、そうなるべきである。B はすぐに地面に突入し、$x^* = \frac{1}{2}$ から $\theta = 45°$ が得られる。

よくある間違い

- 最適な爆発は水平方向であると決めつけること。それが正しいのは $u \leq v$ のときだけである。
- 両方の破片に同じ滞空時間を用いること。上向きに飛ばされた破片のほうが長く空中にとどまる。
- 最大化するときに制約 $0 \leq \sin^2\theta \leq 1$ を忘れ、その結果、場合分けを見落とすこと。

STEP のその先へ

このすっきりした答えには、うまい説明がある。単に真下に落下していく重心（centre of mass）から見ると、破片は相対速度 $2u$ で一直線上を互いに離れていく。しかし、破片は異なる時刻に地面に到達するので、問題は制約付きの最適化となり、パラメータが変化するにつれて最大値が境界から内部へと切り替わる。この種の切り替えは、大学一年次の最適化で学ぶラグランジュ乗数（Lagrange multiplier）やカルーシュ・キューン・タッカー条件（Karush–Kuhn–Tucker conditions）において再び現れる。運動量保存（conservation of momentum）、重心系、そして放物運動の問題をさらに深く学ぶには、Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

解答例

STEP II 1994、第 12 問

確率・統計 ・ 条件付き確率

STEP II 1994、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/94-s2-q12

鍵となる考え方

最初の投げで「ポイント」s が定まると、それ以降の投げはすべて同じ独立（independent）な試行であり、結果は三通りである：s が出る（勝ち）、7 が出る（負け）、それ以外が出る（続行）。したがって、ポイントを固定すれば、ゲームが終わる投げの番号は幾何分布（geometric distribution）に従う。問題全体は、ポイントによって場合分けし、全確率の公式（law of total probability）で足し合わせることに尽きる。最後の小問は、条件となる事象を変えて同じ計算をするだけである。

解答

S を公平な二つのさいころの目の和とする。同様に確からしい 36 通りの結果を数えると、

$$\mathrm{P}(S=s)=\frac{6-|s-7|}{36},\qquad s=2,3,\ldots,12,$$

であり、和 $2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12$ の確率は $\frac{1}{36}\times(1,2,3,4,5,6,5,4,3,2,1)$ である。

最初の投げで勝つ確率

最初の和が 7 または 11 ならば、彼女はただちに勝つ：

$$\mathrm{P}(\text{勝つ投げの番号が1})=\frac{6}{36}+\frac{2}{36}=\frac{2}{9}.$$

複数回投げたという条件のもとで第 n 投で勝つ確率

彼女が複数回投げるのは、最初の和がポイント $4,5,6,8,9,10$ のいずれかであるときに限り、その確率は

$$\mathrm{P}(M) = \frac{3+4+5+5+4+3}{36} = \frac{2}{3},$$

である。ここで M は事象「複数回投げる」を表す。

ポイント s を固定し、$p_s = \mathrm{P}(S = s)$ とおく。以降の各投げはそれ以前の投げと独立であり、各投げについて

$$\mathrm{P}(\text{和が}s) = p_s, \qquad \mathrm{P}(\text{和が}7) = \tfrac{1}{6}, \qquad \mathrm{P}(\text{どちらでもない}) = r_s = 1 - p_s - \tfrac{1}{6}.$$

が成り立つ（$s \neq 7$ なので、これら二つの事象は互いに排反である）。彼女が第 $n \geq 2$ 投で勝つのは、第 $2,\ldots,n-1$ 投がすべて「どちらでもない」であり、かつ第 n 投で s が出るときに限る。よって独立性より

$$\mathrm{P}(\text{勝つ投げの番号が}n \mid \text{ポイント}s) = r_s^{n-2}\, p_s.$$

ポイントは確率の等しい組に分かれる（4 と 10、5 と 9、6 と 8）。$p_s = k/36$（$k = 3,4,5$）と書くと $r_s = (30-k)/36$ であり、これはそれぞれ $\frac{3}{4}$、$\frac{13}{18}$、$\frac{25}{36}$ となる。全確率の公式より、$n \geq 2$ のとき

$$\mathrm{P}(\text{勝つ投げの番号が}n) = \sum_s p_s \cdot r_s^{n-2} p_s = 2\sum_{k=3}^{5} \left(\frac{k}{36}\right)^2 \left(\frac{30-k}{36}\right)^{n-2}.$$

第 $n \geq 2$ 投で勝つならば M が起こっているので、$\mathrm{P}(M) = \frac{2}{3}$ で割ると各係数は $\frac{3}{2}$ 倍になる：

$$2 \cdot \frac{k^2}{1296} \cdot \frac{3}{2} = \frac{k^2}{432} \quad \text{より} \quad \frac{9}{432} = \frac{1}{48}, \quad \frac{16}{432} = \frac{1}{27}, \quad \frac{25}{432}.$$

したがって

$$\mathrm{P}(\text{勝つ投げの番号が}n \mid M) = \frac{1}{48}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} + \frac{1}{27}\left(\frac{13}{18}\right)^{n-2} + \frac{25}{432}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-2},$$

となり、示すべき式が得られた。

考えてみよう 一つの「平均的な」ポイントと一つの幾何分布で考えるのは、なぜ誤りなのだろうか。

続行の確率 r_s がポイントによって異なるからである。三つの幾何分布の混合分布（mixture）はそれ自体は幾何分布ではない。答えに一つではなく三つの別々のべきが現れるのはそのためである。

m 回より多く投げたという条件のもとで

M_m を事象「m 回より多く投げる」とする。ただし $m > 1$ である。これが起こるのは、最初の投げでポイント s が出て、第 $2, \ldots, m$ 投がすべて「どちらでもない」であるときに限るので、

$$\mathrm{P}(M_m) = \sum_s p_s\, r_s^{m-1} = \frac{2}{36} \sum_{k=3}^{5} k\Big(\frac{30-k}{36}\Big)^{m-1}.$$

$n \le m$ のとき、第 n 投で勝つことは M_m と両立しないので、条件付き確率（conditional probability）は 0 である。$n > m$ のとき、第 n 投で勝つならば M_m が起こっているので、

$$\mathrm{P}(\text{勝つ投げの番号が}n \mid M_m) = \frac{\mathrm{P}(\text{勝つ投げの番号が}n)}{\mathrm{P}(M_m)} = \frac{9\big(\frac{3}{4}\big)^{n-2} + 16\big(\frac{13}{18}\big)^{n-2} + 25\big(\frac{25}{36}\big)^{n-2}}{36\Big[3\big(\frac{3}{4}\big)^{m-1} + 4\big(\frac{13}{18}\big)^{m-1} + 5\big(\frac{25}{36}\big)^{m-1}\Big]},$$

となる。ここで因子 $\frac{2}{1296}$ と $\frac{2}{36}$ は約分してある。同じことだが、分子と分母に $\frac{1}{432}$ を掛けると

$$\frac{\frac{1}{48}\big(\frac{3}{4}\big)^{n-2} + \frac{1}{27}\big(\frac{13}{18}\big)^{n-2} + \frac{25}{432}\big(\frac{25}{36}\big)^{n-2}}{\frac{1}{4}\big(\frac{3}{4}\big)^{m-1} + \frac{1}{3}\big(\frac{13}{18}\big)^{m-1} + \frac{5}{12}\big(\frac{25}{36}\big)^{m-1}}, \qquad n > m.$$

分母が $\mathrm{P}(M_m \mid M)$ になっていることに注意しよう。これは当然である：分子は先ほどの M を条件とする答えであり、$M_m \subseteq M$ だからである。

検算

- $m = 1$ とすると分母は $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{12} = 1$ となり、前の小問の結果に戻る。
- $n = 2$ のとき、条件付きの式は $\frac{1}{48} + \frac{1}{27} + \frac{25}{432} = \frac{50}{432} = \frac{25}{216} \approx 0.1157$ を与える。直接計算しても $\frac{3}{2} \cdot \frac{2(9+16+25)}{1296}$ で同じ値になる。
- $m = 2$、$n = 3$ のとき、答えは $\frac{107}{930} \approx 0.1151$ である。すべての式を、分数を用いてゲームを一手ずつ厳密に追跡した計算と照合し、さらに 4×10^5 回のゲームのシミュレーションも標本誤差の範囲内で一致した。

よくある間違い

- $\mathrm{P}(M) = \frac{2}{3}$ で割るのを忘れること。そうすると係数は $\frac{1}{72}$、$\frac{2}{81}$、$\frac{25}{648}$ になってしまう。
- 単一の公比で $\mathrm{P}(M_m) = \big(\text{何か}\big)^{m-1}$ とすること。条件となる事象もまた、ポイントについての混合なのである。
- 「どちらでもない」投げの回数を $n-2$ ではなく $n-1$ と数えること。第 1 投でポイントが決まり、第 n 投が勝ちの投げである。

STEP のその先へ

このゲームは「勝ち」と「負け」を吸収状態（absorbing state）とする小さなマルコフ連鎖（Markov chain）であり、ここでの吸収までの時間は幾何分布の混合分布である。m 回を超えて続いたという条件をつけると、混合の重みは最も長く続くポイント（ここでは再び出る確率が最も低い 4 と 10）の方へ移る。これは、無記憶性（memoryless）をもつ分布の混合がそれ自体は無記憶でないことを示す簡単な例である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、このレベルで条件付き確率とマルコフ連鎖を扱っている。

解答例

STEP II 1994、第 13 問

確率・統計 ・ クーポン収集問題

> **STEP II 1994、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q13

この問題は、*Beyond STEP* の第 9.11 節「**全種類を集める**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/coupon-collector.html

鍵となる考え方

これは古典的な「クーポン収集問題」（coupon collector problem）であり、データベースという分類が付いているものの、中身は純粋な確率の問題である。全種類がそろうまでの長い待ち時間を、n 個の短い待ち時間に分割する。すなわち、1 枚目の新しいカードを得るまでの待ち時間、2 枚目を得るまでの待ち時間、という具合である。それぞれの短い待ち時間は幾何分布（geometric distribution）に従うので平均は容易に求まり、期待値の線形性（linearity of expectation）によってそれらを足し合わせることができる。合計は n と調和和（harmonic sum）の積になり、積分の不等式はその和の大きさを知るために用意されている。

解答

新しいカードを待つ

各袋には n 種類のカードのうち 1 枚が入っており、どのカードも確率 $\frac{1}{n}$ で等しく現れ、他の袋とは独立（independent）であるとモデル化する。

すでに r 種類の異なるカードを持っているとする。ただし $0 \le r \le n-1$ である。1 つの袋から新しいカードが出る確率は

$$p = \frac{n-r}{n} > 0,$$

であり、すでに持っているカードが出る確率は $q = 1 - p = \frac{r}{n}$ である。最初の新しいカードが出る袋までを含めて、開ける袋の数を X とする。袋どうしは独立であるから、$X = k$ とは、既出のカードが $k-1$ 回続いた後に新しいカードが出ることを意味する。よって

$$\mathrm{P}(X = k) = q^{k-1}p, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

したがって

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p\,(1-q)^{-2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p},$$

となる。ここで、$|q| < 1$ のとき成り立つ $\sum_{k\geq 1} kq^{k-1} = (1-q)^{-2}$ を用いた（等比級数（geometric series）を微分するか、$(1-q)^{-2}$ を二項展開すればよい）。$r \leq n-1$ であるから $0 \leq q < 1$ である。ゆえに

$$\mathrm{E}(X) = \frac{n}{n-r},$$

となり、題意が示された。

（より手際のよい方法もある。最初の袋から新しいカードが出ればそこで終わり、そうでなければ確率 q で振り出しに戻る。よって $\mathrm{E}(X) = 1 + q\,\mathrm{E}(X)$ となり、$\mathrm{E}(X) = 1/(1-q) = 1/p$ を得る。ただしこの方法は $\mathrm{E}(X)$ が有限であることを前提としており、それは上の級数によって確かめられる。）

積分の不等式

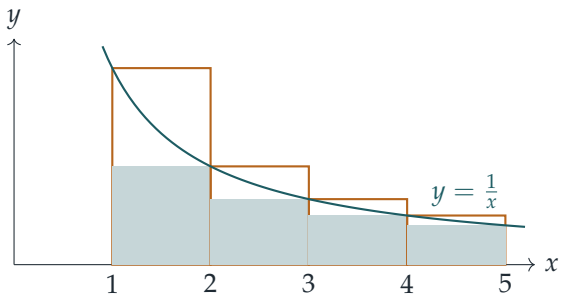
$r \geq 1$ とする。$x > 0$ において $1/x$ は減少関数であるから、$r \leq x \leq r+1$ に対して

$$\frac{1}{r+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{r},$$

が成り立つ。長さ 1 の区間で積分してもこの不等式は保たれるので

$$\frac{1}{r+1} \leq \int_r^{r+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{r}.$$

図で見ると、$x = r$ から $x = r+1$ までの $y = 1/x$ の下の面積は、高さ $\frac{1}{r+1}$ の低い長方形と高さ $\frac{1}{r}$ の高い長方形の間にある。



（見やすさのため、縦方向を拡大してある。）塗りつぶした長方形は曲線の下にあり、輪郭だけの長方形は曲線の上にはみ出している。

ここで $n \geq 2$ として、$r = 1, 2, \ldots, n-1$ についてこの不等式を足し合わせる。積分はつながって 1 つになる：

$$\sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r+1} \leq \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r}.$$

中央の項は $\ln n - \ln 1 = \ln n$ であり、左辺の和では $r+1$ を改めて r と書き直すと、r は 2 から n まで動く。よって

$$\sum_{r=2}^{n} \frac{1}{r} \leq \ln n \leq \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r},$$

となり、題意が示された。

全種類を集める

ちょうど r 種類の異なるカードを持っている間に開ける袋の数を X_r とする。ただし、$r+1$ 種類目のカードが出た袋までを含める。全種類をそろえるのに必要な袋の総数は

$$T = X_0 + X_1 + \cdots + X_{n-1}.$$

である。

> **考えてみよう**　X_r はそれ以前に起きたことに依存する。それでも単純に期待値を足し合わせてよいのだろうか。

よい。期待値の線形性 $\mathrm{E}(A+B) = \mathrm{E}(A) + \mathrm{E}(B)$ には、独立性はまったく必要ない。（実際、それまでの経過がどうであれ、X_r は $p = \frac{n-r}{n}$ の幾何分布に従うので、前半の結果がそれぞれの X_r に適用できる。）したがって、$k = n - r$ とおくと

$$\mathrm{E}(T) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{n}{n-r} = n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{1}\right) = n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

となる。

$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ とおく。不等式の左右それぞれから

$$H_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n, \qquad H_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \geq \ln n + \frac{1}{n}.$$

が得られる。よって

$$n\ln n + 1 \leq \mathrm{E}(T) \leq n\ln n + n.$$

上界と下界の差は n 未満であり、n が大きいとき $n\ln n$ に比べてごく小さい（両者の比 $1/\ln n \to 0$）。したがって、n が大きいとき、食べることになる袋の数はおよそ

$$n\ln n \text{ 袋}$$

と見込まれる。たとえば数学者が 100 人なら、Cruncho をおよそ 460 袋食べることになる。

検算

- $r = 0$ のとき：最初の袋は必ず新しいカードであり、$n/(n-0) = 1$ と一致する。$r = n-1$ のとき：特定の 1 種類だけが欠けており、それは確率 $\frac{1}{n}$ で現れるので、期待値は n 袋であり、$n/1$ と一致する。
- $n = 2$ のとき：$\mathrm{E}(T) = 2(1+\frac{1}{2}) = 3$ であり、下界と上界はそれぞれ $2\ln 2 + 1 \approx 2.39$、$2\ln 2 + 2 \approx 3.39$ である。
- $n = 20$ で全種類の収集を 10^5 回シミュレーションしたところ、平均は 71.9 袋となり、$20H_{20} \approx 71.95$ とよく合った。下界と上界は 60.9 と 79.9 である。

よくある間違い

- 積分の不等式を $r = 0$ から足し始めること：そこでは上界 $\frac{1}{r}$ が意味をなさず、$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ は発散する。和は $r = 1$ から始めなければならない。
- 期待値を足し合わせるには X_r が独立でなければならないと考えること。線形性に独立性は不要である。
- 答えを $\ln n$ や n としてしまうこと：袋の数の期待値は $n\ln n$ のように増加し、n より速く増える。

STEP のその先へ

差 $H_n - \ln n$ は減少しながらある極限に収束（converge）する。これがオイラー（Euler）＝マスケローニ（Mascheroni）定数（Euler–Mascheroni constant）$\gamma \approx 0.5772$ である。したがって、より精密な答えは $\mathrm{E}(T) \approx n(\ln n + \gamma)$ であり、$n = 100$ なら 460 袋ではなくおよそ 519 袋となる。このように和と積分を比較する方法は級数の積分判定法（integral test）であり、大学の解析学（analysis）の最初の講義で早い段階に登場する。クーポン収集問題そのものも、アルゴリズムの解析や、トランプの山を何回ランダムにシャッフルすれば十分に混ざるかという研究の中に再び現れる。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、幾何分布に従う待ち時間と期待値の線形性が組み合わせて使われる様子を見るのに適した本である。

解答例

STEP II 1994、第 14 問

確率・統計　・　幾何的確率

> **STEP II 1994、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q14

鍵となる考え方

「円板上で一様（uniform）」とは、確率が面積に比例するということである。したがって、中心から距離 r 以内に落ちる確率は、小さい円板の面積を的全体の面積で割ったものであり、これによって R の分布関数（distribution function）がただちに得られる。小問 (ii) は、1 回の投げあたり 1 つの確率 p を求め、幾何分布的な「少なくとも 1 回成功する」確率を計算し、整数を変数とする関数を最小化する問題に帰着する。この最小化は微分ではなく、隣り合う値の差を調べることで行う。

解答

小問 (i)

各ダーツを、半径 a の円板上に一様に分布する点としてモデル化する。すると、ダーツが的の任意の領域に落ちる確率は、その領域の面積を πa^2 で割ったものである。

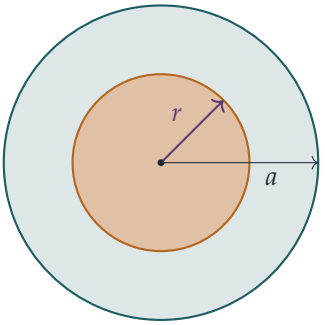
$0 \le r \le a$ に対して、事象 $R \le r$ はダーツが半径 r の同心円板に落ちることを意味するので、

$$\mathrm{P}(R \le r) = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} = \frac{r^2}{a^2}.$$

これを微分すると、R の確率密度関数（probability density function）は

$$f(r) = \frac{2r}{a^2} \qquad (0 \le r \le a),$$

であり、それ以外では $f(r) = 0$ である。



R は $[0, a]$ 上で一様**ではない**ことに注意する。半径が大きいところほど面積が大きい（細い円環が長くなる）ため、密度は r に比例して増加するのである。

さて、

$$\mathrm{E}(R) = \int_0^a r \cdot \frac{2r}{a^2}\,\mathrm{d}r = \frac{2}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{2a}{3},$$
$$\mathrm{E}(R^2) = \int_0^a r^2 \cdot \frac{2r}{a^2}\,\mathrm{d}r = \frac{2}{a^2} \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{a^2}{2},$$

であるから、

$$\mathrm{Var}(R) = \mathrm{E}(R^2) - \big(\mathrm{E}(R)\big)^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{4a^2}{9} = \frac{a^2}{18},$$

となり、題意が示された。

小問 (ii)

（問題文の「with $a/\sqrt{10}$」は「within $a/\sqrt{10}$」の誤りと解釈する。）小問 (i) より、1 回の投げで中心から $a/\sqrt{10}$ 以内に落ちる確率は

$$p = \frac{(a/\sqrt{10})^2}{a^2} = \frac{1}{10}.$$

各投げは独立（independent）であると仮定する（毎回、的の上の新たな一様ランダムな点となる）。すると、m 回の投げのどれも中心から $a/\sqrt{10}$ 以内に入らない確率は $(0.9)^m$ であるから、

$$\mathrm{P}(\text{払い戻し£12}) = 1 - (0.9)^m.$$

彼の損失は、支払う £$(12+m)$ から払い戻される金額を引いたものなので、ポンド単位での期待損失は

$$L(m) = 12 + m - 12\big(1 - (0.9)^m\big) = m + 12(0.9)^m.$$

投げる回数を 1 回増やすと確実に £1 かかるが、£12 が戻ってくる可能性は高くなる。この 2 つが釣り合うところを求めればよい。

考えてみよう 整数でのみ定義された関数は、どのように最小化すればよいだろうか？

隣り合う値を比較する。$m \geq 1$ に対して、

$$L(m+1) - L(m) = 1 + 12(0.9)^m(0.9-1) = 1 - 1.2\,(0.9)^m.$$

$(0.9)^m$ は m が増えると減少するので、この差は m について増加する。したがって、L は差が負である間は減少し、差が正になると増加する。差が負になるのは、ちょうど $(0.9)^m > \frac{1}{1.2} = \frac{5}{6}$ のときである。ここで

$$(0.9)^1 = 0.9 > \tfrac{5}{6}, \qquad (0.9)^2 = 0.81 < \tfrac{5}{6},$$

であるから、$L(2) - L(1) < 0$ であり、すべての $m \geq 2$ に対して $L(m+1) - L(m) > 0$ である。ゆえに

$$L(1) > L(2) < L(3) < L(4) < \cdots,$$

であり、実際 $L(1) = 11.80$、$L(2) = 11.72$、$L(3) = 11.748$ である。（彼は必ずゲームをすると決めているので、$m = 0$ は許されない。いずれにせよ $L(0) = 12$ はより大きい。）

彼は $m = 2$ 回を選ぶべきであり、そのときの期待損失は £11.72 である。最小値は狭義の最小なので、そのような値は $m = 2$ のみである。

検算

- 単位円板内の一様な点 4×10^5 個のシミュレーションでは、平均 0.667、2 乗の平均 0.500、分散 0.0556 $\approx \frac{1}{18}$ が得られ、それぞれ $\frac{2}{3}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{18}$ と一致した。また、点のおよそ 10% が中心から $1/\sqrt{10}$ 以内に入った。
- 厳密には $L(1) = \frac{59}{5}$、$L(2) = \frac{293}{25}$、$L(3) = \frac{2937}{250}$ であり、$1 \leq m \leq 99$ の範囲を探索すると $m = 2$ が最小であることが確認できる。
- 妥当性の確認：分散 $a^2/18$ は、$[0, a]$ 上の一様分布に従う変数の分散 $a^2/12$ よりはるかに小さい。これは R が縁の近くに集中しているためである。

よくある間違い

- R を $[0, a]$ 上の一様分布とみなしてしまい、分散 $a^2/12$ を得てしまう。
- 固定の £12 が費用の一部にすぎないことを忘れる。損失は単なる m ではなく、$12 + m$ から払い戻しの期待値を引いたものである。
- $m + 12(0.9)^m$ の導関数を 0 とおくと $m \approx 2.3$ が得られるが、これは答えではない。その両側の整数値を比較しなければならない。

STEP のその先へ

平面上の一様な点から R の分布を求めることは、同時密度（joint density）を極座標（polar coordinates）に変換する最も簡単な例である。$\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ に現れるヤコビアン（Jacobian）の因子 r こそが、R の密度を r に比例させているのである。同時密度の変数変換（change of variables）と、離散的な選択肢の上での最適化は、大学 1 年次の確率論の標準的な話題である。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、その両方を扱っている。

解答例

STEP III 1994、第 1 問

純粋数学 ・ 漸化式による積分

> **STEP III 1994、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q1

鍵となる考え方

最初の積分（integral）では、$\operatorname{sech} t$ を $\dfrac{\cosh t}{\cosh^2 t} = \dfrac{\cosh t}{1+\sinh^2 t}$ と書き直す。分子は $\sinh t$ の導関数（derivative）であるから、これは姿を変えた arctan である。漸化式（reduction formula）については、$\tanh t$ の導関数である $\operatorname{sech}^2 t$ を因子として切り離し、部分積分（integration by parts）を行うのが自然な方針である。すると恒等式 $\tanh^2 t = 1 - \operatorname{sech}^2 t$ によって右辺に I_n が再び現れるので、それを左辺にまとめればよい。

解答

$\operatorname{sech} t$ の積分

分子と分母に $\cosh t$ を掛け、$\cosh^2 t = 1 + \sinh^2 t$ を用いると、

$$\int_0^x \operatorname{sech} t \,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\cosh t}{1+\sinh^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

$s = \sinh t$ とおくと $\mathrm{d}s = \cosh t \,\mathrm{d}t$ であり、積分区間の端は 0 と $\sinh x$ になるから、

$$\int_0^x \operatorname{sech} t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\sinh x} \frac{\mathrm{d}s}{1+s^2} = \arctan(\sinh x).$$

同様に有効な別の方法として、$\operatorname{sech} t = \dfrac{2\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}+1}$ と書いて $u = \mathrm{e}^t$ とおくものがあり、このとき答えは $2\arctan(\mathrm{e}^x) - \frac{\pi}{2}$ の形で得られる。両者は一致する。実際、どちらも $x = 0$ で 0 になり、導関数はともに $\operatorname{sech} x$ である。（この x の関数は**グーデルマン関数**（Gudermannian）と呼ばれる。）

漸化式

$n \geq 2$ とし、$\operatorname{sech}^n t = \operatorname{sech}^{n-2} t \cdot \operatorname{sech}^2 t$ と書く。

$$u = \operatorname{sech}^{n-2} t, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \operatorname{sech}^2 t,$$

として部分積分を行う。すると $v = \tanh t$ であり、合成関数の微分法（chain rule）により（$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{sech} t = -\operatorname{sech} t \tanh t$ を用いて）

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = (n-2)\operatorname{sech}^{n-3} t \cdot (-\operatorname{sech} t \tanh t) = -(n-2)\operatorname{sech}^{n-2} t \tanh t.$$

したがって

$$\begin{aligned} I_n &= \Big[\operatorname{sech}^{n-2} t \tanh t\Big]_0^x + (n-2)\int_0^x \operatorname{sech}^{n-2} t \tanh^2 t \,\mathrm{d}t \\ &= \operatorname{sech}^{n-2} x \tanh x + (n-2)\int_0^x \operatorname{sech}^{n-2} t \left(1 - \operatorname{sech}^2 t\right) \mathrm{d}t \\ &= \operatorname{sech}^{n-2} x \tanh x + (n-2) I_{n-2} - (n-2) I_n, \end{aligned}$$

ここで、$\tanh 0 = 0$ であるから 0 における境界項（boundary term）は消える。

考えてみよう 堂々巡りになったように見える。右辺に I_n が再び現れたのである。これは問題だろうか？

まったく問題ない。むしろ、これこそ望んでいた形である。右辺の I_n の係数は $+1$ ではなく $-(n-2)$ であるから、これを左辺に移項すると $(n-1)I_n$ となり、$n - 1 \neq 0$ で割ることができる。漸化式は

$$\boxed{(n-1) I_n = \operatorname{sech}^{n-2} x \tanh x + (n-2)\, I_{n-2} \qquad (n \geq 2).}$$

I_5 を求める

奇数番目の系列は $I_1 = \arctan(\sinh x)$ から始まる。$n = 3$ とおくと、

$$2I_3 = \operatorname{sech} x \tanh x + I_1, \qquad \text{よって} \qquad I_3 = \tfrac{1}{2}\operatorname{sech} x \tanh x + \tfrac{1}{2}\arctan(\sinh x).$$

$n = 5$ とおくと、

$$4I_5 = \operatorname{sech}^3 x \tanh x + 3I_3,$$

よって

$$I_5 = \tfrac{1}{4}\operatorname{sech}^3 x \tanh x + \tfrac{3}{8}\operatorname{sech} x \tanh x + \tfrac{3}{8}\arctan(\sinh x).$$

I_6 を求める

偶数番目の系列は $I_0 = \int_0^x 1 \,\mathrm{d}t = x$ から始まるが、より直接には $I_2 = \int_0^x \operatorname{sech}^2 t \,\mathrm{d}t = \tanh x$ から始めてもよい（$n = 2$ としたときの公式もこれを裏づける：$I_2 = \tanh x + 0$）。

$n = 4$ とおくと、

$$3I_4 = \operatorname{sech}^2 x \tanh x + 2I_2, \qquad \text{よって} \qquad I_4 = \tfrac{1}{3}\operatorname{sech}^2 x \tanh x + \tfrac{2}{3}\tanh x.$$

$n = 6$ とおくと、

$$5I_6 = \operatorname{sech}^4 x \tanh x + 4I_4,$$

よって

$$I_6 = \tfrac{1}{5}\operatorname{sech}^4 x \tanh x + \tfrac{4}{15}\operatorname{sech}^2 x \tanh x + \tfrac{8}{15}\tanh x.$$

偶数乗に対する「別解」

偶数乗には、より簡潔な直接的方法がある。$u = \tanh t$ とおくと $\mathrm{d}u = \operatorname{sech}^2 t \,\mathrm{d}t$ かつ $\operatorname{sech}^2 t = 1 - u^2$ であるから、

$$I_6 = \int_0^x (\operatorname{sech}^2 t)^2 \operatorname{sech}^2 t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\tanh x} (1-u^2)^2 \,\mathrm{d}u = \tanh x - \tfrac{2}{3}\tanh^3 x + \tfrac{1}{5}\tanh^5 x.$$

先に得た答えにおいて $\operatorname{sech}^2 x$ を $1 - \tanh^2 x$ に置き換えて展開すると、ちょうどこの式になるので、二つの形は一致する。

検算

- $x \to \infty$ のとき $\tanh x \to 1$、$\operatorname{sech} x \to 0$、$\arctan(\sinh x) \to \frac{\pi}{2}$ であるから、$I_5 \to \frac{3\pi}{16} \approx 0.58905$、$I_6 \to \frac{8}{15}$ となる。区間 $[0, 30]$ でシンプソンの公式（Simpson's rule）を用いると 0.589049 と 0.533333 が得られる。
- $x = 1$ において、シンプソンの公式から $I_5 \approx 0.561566$、$I_6 \approx 0.518343$ が得られ、公式と一致する。また、$2 \le n \le 8$ について、x の無作為な 200 個の値で漸化式を確かめた。
- sech は偶関数であるから、I_5 と I_6 はともに x の奇関数（odd function）でなければならず、実際そうなっている。

よくある間違い

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{sech} t$ の符号を誤ること。正しくは $-\operatorname{sech} t \tanh t$ であり、このマイナス符号のおかげで境界項が正になる。
- 二つの I_n をまとめた後、$n-1$ ではなく n で割ってしまうこと。
- 答えを不定積分（indefinite integral）のままにしてしまうこと。積分区間が 0 から x であるから任意定数は現れず、どの項も $x = 0$ で 0 にならなければならない。

STEP のその先へ

このような漸化式を用いると、積分の族全体を再帰的に計算できる。同じ考え方は $\int_0^{\pi/2} \sin^n t \, \mathrm{d}t$ に対するウォリス（Wallis）の公式の根底にもあり、そこから π を表す有名な無限積が導かれる。ここで求めた極限 $\int_0^{\infty} \operatorname{sech}^n t \, \mathrm{d}t$ はベータ関数（Beta function）の値であり、ベータ関数は大学 1 年次の解析学や確率論で中心的な役割を果たす対象である。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* には漸化式の演習がさらに多く収められており、Abbott の *Understanding Analysis* では広義積分（improper integral）が厳密に扱われている。

解答例

STEP III 1994、第 2 問

純粋数学 ・ 相反 4 次方程式

> **STEP III 1994、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q2

鍵となる考え方

(i) の四次式（quartic）は**回文的**（palindromic）である。すなわち、係数（coefficient）を前から読んでも後ろから読んでも同じになる。x^2 で割ると x^2 と x^{-2}、x と x^{-1} がそれぞれ組になり、どちらの組も $y = x + x^{-1}$ を用いて表せるので、四次式は y の二次式（quadratic）に帰着する。(ii) にはヒントがないので、同じ対称性を少しひねったものを探す。係数 1, 1, −10, −4, 16 は、倍率を許せば組になる。このことから置換（substitution）$y = x - 4/x$ が示唆される。

解答

小問 (i)

定数項（constant term）は $1 \neq 0$ なので $x = 0$ は根（root）ではなく、x^2 で割ってよい：

$$x^2 + 10x + 26 + \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2} = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 26 = 0.$$

$y = x + x^{-1}$ とおくと $y^2 = x^2 + 2 + x^{-2}$ であるから、$x^2 + x^{-2} = y^2 - 2$ である。よって方程式は

$$y^2 - 2 + 10y + 26 = 0 \iff y^2 + 10y + 24 = 0 \iff (y+4)(y+6) = 0,$$

となり、$y = -4$ または $y = -6$ である。ここで x に戻る。$x + x^{-1} = y$ の両辺に x を掛ける（$x \neq 0$ なので、これも問題ない）：

$$x + \frac{1}{x} = -4 \iff x^2 + 4x + 1 = 0 \iff x = -2 \pm \sqrt{3},$$
$$x + \frac{1}{x} = -6 \iff x^2 + 6x + 1 = 0 \iff x = -3 \pm 2\sqrt{2}.$$

これらは相異なる4つの数であり、四次方程式の根は高々4個であるから、解は

$$x = -2 \pm \sqrt{3}, \qquad x = -3 \pm 2\sqrt{2}.$$

である。根が逆数（reciprocal）どうしの組になっていることに注意しよう：$(-2+\sqrt{3})(-2-\sqrt{3}) = 1$、$(-3+2\sqrt{2})(-3-2\sqrt{2}) = 1$ である。x を $1/x$ に置き換えて x^4 を掛けると同じ方程式に戻るので、回文的な多項式では必ずこうなる。

小問 (ii)

考えてみよう 係数 1, 1, −10, −4, 16 は対称ではない。それでもうまくいく、(i) のような置換はあるだろうか？

外側の係数の組を比べてみる。定数項は最高次の係数の $16 = 4^2$ 倍であり、x の係数は x^3 の係数の -4 倍である。したがって項は

$$x^4 + 16 = x^2\left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right), \qquad x^3 - 4x = x^2\left(x - \frac{4}{x}\right).$$

のように組になる。これは回文的なパターンで $1/x$ を $-4/x$ に置き換えたものである。$x = 0$ は根ではない（定数項は16）ので、x^2 で割ると

$$\left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right) + \left(x - \frac{4}{x}\right) - 10 = 0.$$

となる。$y = x - 4/x$ とおく。すると $y^2 = x^2 - 8 + 16/x^2$ なので $x^2 + 16/x^2 = y^2 + 8$ であり、

$$y^2 + 8 + y - 10 = 0 \iff y^2 + y - 2 = 0 \iff (y-1)(y+2) = 0,$$

より $y = 1$ または $y = -2$ を得る。$x - 4/x = y$ に x を掛けると：

$$x - \frac{4}{x} = 1 \iff x^2 - x - 4 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2},$$
$$x - \frac{4}{x} = -2 \iff x^2 + 2x - 4 = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{5}.$$

ここでも相異なる4つの根が得られたので、これですべてである：

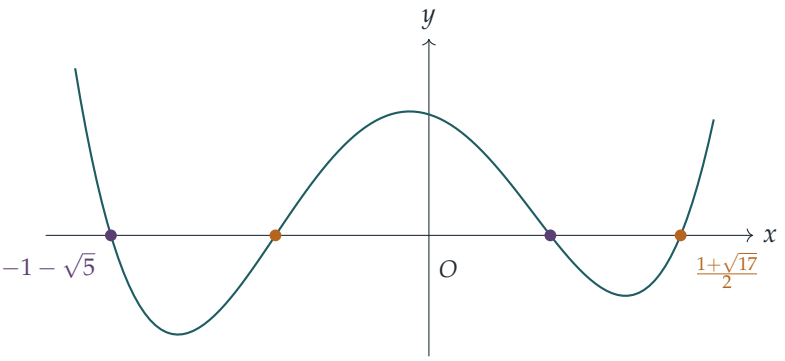
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}, \qquad x = -1 \pm \sqrt{5}.$$

今度は根が積1ではなく積 -4 の組になっている。対称性は $x \mapsto -4/x$ になったのである。

検算として、以上の計算は因数分解（factorisation）

$$x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 16 = (x^2 - x - 4)(x^2 + 2x - 4),$$

にほかならない。これは展開すれば確かめられる：x^3 の項は $2 - 1 = 1$、x^2 の項は $-4 - 2 - 4 = -10$、x の項は $4 - 8 = -4$ となる。



(ii) の四次式のグラフは軸と 4 回交わる。琥珀色の根は $x^2-x-4=0$ から、紫色の根は $x^2+2x-4=0$ から得られる。

検算

- 根の積：(i) では 4 つの根の積は $1\cdot 1=1$ で、定数項に等しい。(ii) では積は $(-4)(-4)=16$ で、やはり定数項に等しい。
- 根の和：(i) では $(-4)+(-6)=-10$ で、x^3 の係数の符号を変えたものである。(ii) でも $1+(-2)=-1$ で同様である。
- 数値的には、$x=-2+\sqrt{3}\approx -0.268$ と $x=-3-2\sqrt{2}\approx -5.828$ はいずれも (i) の四次式を 10^{-9} 以内の誤差で 0 にし、$x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{17})\approx 2.562$ と $x=-1-\sqrt{5}\approx -3.236$ も (ii) で同様である。

よくある間違い

- 交差項を忘れる：$x^2+x^{-2}=y^2-2$ であって y^2 ではない。また (ii) では $x^2+16x^{-2}=y^2+8$ であり、$(x-4/x)^2$ の交差項が -8 なので符号はプラスになる。
- (ii) で $y=x+4/x$ を試す。これでも $x^2+16/x^2=y^2-8$ は得られるが、x^3-4x は作れない。その符号からは $x-4/x$ が必要になる。
- y の値を求めたところで止めてしまう。問題が求めているのは x であり、y の各値から x の値が 2 つずつ得られる。

STEP のその先へ

この技法がうまくいくのは、多項式がある置換のもとで不変（invariant）だからである。(i) では $x\mapsto 1/x$、(ii) では $x\mapsto -4/x$ である。量 y はその置換で変わらず、変わ

らない多項式の式はすべて y で表すことができる。これはガロア理論（Galois theory）を初めて垣間見るものである。ガロア理論では、多項式の根の間の対称性が、その方程式をどのように解けるかを決定する。これらの考え方が展開されていく様子を見るには、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）がよい出発点である。

解答例

STEP III 1994、第 3 問

純粋数学 ・ 球、平面と絡み

STEP III 1994、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/94-s3-q3

鍵となる考え方

各円はそれぞれ自分の平面上にあり、二つの平面は直線 L で交わる。したがって、C_1 が C_2 の平面を通り抜けうるのは L 上にある自身の 2 点に限られ、逆についても同様である。よって、二つの円が絡み合っている（linked）かどうかは一次元の問題、すなわち L 上の 4 点が直線に沿ってどのように並んでいるかという問題に帰着する。

解答

平面と球面

中心 Q、半径 r の球面（sphere）を考え、Q から平面 Π までの距離を d とする。Q から Π に下ろした垂線の足（foot of the perpendicular）を F とする。Π 上の点 X に対して、三平方の定理（Pythagoras' theorem）より $QX^2 = d^2 + FX^2$ であるから、X が球面上にあるのは $FX^2 = r^2 - d^2$ のとき、かつそのときに限る。よって次が成り立つ。

- $d > r$ のとき、平面は球面と交わらない。
- $d = r$ のとき、平面は球面にただ 1 点 F で接する（接平面（tangent plane）である）。
- $d < r$ のとき、共通部分は Π 内の、中心 F、半径 $\sqrt{r^2 - d^2}$ の円である。$d = 0$ のとき、これは半径 r の大円（great circle）である。

与えられた条件

平方完成（completing the square）すると、S_2 は

$$x^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 3,$$

となり、中心 $(0,3,2)$、半径 $\sqrt{3}$ である。球面 S_1 は中心 O、半径 $\sqrt{7}$ である。

O から P_1 までの距離は $\frac{|-1|}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} < \sqrt{7}$ であるから、C_1 は確かに円であり、その半径は $\sqrt{7 - \frac{1}{10}}$ である。$(0,3,2)$ から P_2 までの距離は $\frac{|0-3+1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < \sqrt{3}$ であるから、C_2 は半径 $\sqrt{3-2} = 1$ の円である。その中心は垂線の足 $(0,3,2) + (1,-1,0) = (1,2,2)$ である。実際に $1-2+1=0$ となることを確かめよ。

直線 L

二つの平面の方程式の差をとると $2x - 2 = 0$ となるので $x = 1$ であり、すると $y = x + 1 = 2$ となる。一方、z は任意である。よって

$$L = \{(1,2,t) : t \in \mathbb{R}\},$$

であり、これは $(1,2,0)$ を通る鉛直な直線である。

S_1 上では $1 + 4 + t^2 = 7$ より $t = \pm\sqrt{2}$ である。よって L と S_1 の交点は次の 2 点である。

$$(1,2,\sqrt{2}) \quad と \quad (1,2,-\sqrt{2}).$$

S_2 上では $1 + 1 + (t-2)^2 = 3$ より $t - 2 = \pm 1$ である。よって L と S_2 の交点は次の 2 点である。

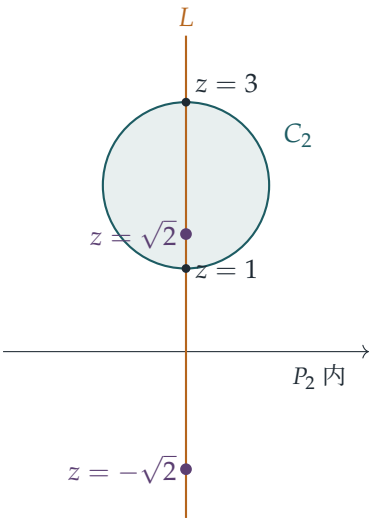
$$(1,2,1) \quad と \quad (1,2,3).$$

L は P_1 内にあるから、L の点のうち S_1 上にあるものは、ちょうど L の点のうち C_1 上にあるものである。同様に、L の点のうち S_2 上にあるものは L の点のうち C_2 上にあるものである。特に $(1,2,1)$ と $(1,2,3)$ は C_2 の直径の両端であり、これは中心が $(1,2,2)$、半径が 1 であることと整合する。

二つの円は絡み合っているか？

まず、二つの円は交わらない。共通点があればそれは $P_1 \cap P_2 = L$ 上にあるが、L 上にある C_1 の点（$z = \pm\sqrt{2}$）と L 上にある C_2 の点（$z = 1, 3$）は異なる。

C_2 を境界とする P_2 内の平らな円板（disc）を D_2 とする。これは L と、$(1,2,1)$ から $(1,2,3)$ までの直径、すなわち $1 \le t \le 3$ を満たす点 $(1,2,t)$ 全体において交わる。



図は平面 P_2 を表し、C_2 とそれが囲む円板を網掛けで示している。紫の点は C_1 が P_2 を通り抜ける点である。

考えてみよう なぜ C_1 はこれら 2 点で、単に接するのではなく、実際に P_2 を**通り抜ける**のだろうか？

直線 L は平面 P_1 を二つの半平面（half-plane）に分ける。P_1 は L に沿って P_2 を横切っているので、これらの半平面は P_2 に関して互いに反対側にある。円 C_1 は L と相異なる 2 点で交わるので、L は C_1 を二つの弧に分け、それぞれの半平面に弧が一つずつある。したがって、C_1 の一方の弧は P_2 の一方の側に真に含まれ、もう一方の弧は真に反対側にあり、C_1 は $(1, 2, \sqrt{2})$ と $(1, 2, -\sqrt{2})$ で P_2 を横切り、それ以外の点では横切らない。

ここで $1 < \sqrt{2} < 3$ であるから、$(1, 2, \sqrt{2})$ での交差は円板 D_2 の内部にある。しかし $-\sqrt{2} < 1$ であるから、$(1, 2, -\sqrt{2})$ での交差は円板の外部にある。C_1 を一周すると、C_2 が張る円板をちょうど 1 回通り抜け、円板の外側で P_2 を横切って戻ってくる。言い換えると、鎖の二つの輪のように、C_1 は C_2 を 1 回くぐり抜けている。

L に沿って 4 点は

$$-\sqrt{2} \ < \ 1 \ < \ \sqrt{2} \ < \ 3,$$

の順に並ぶので、C_1 からの 2 点と C_2 からの 2 点は**交互に並ぶ**（interleave）。まさにこのことによって、C_1 は D_2 をちょうど 1 回横切る。（どちらの対も他方を分離していなければ、C_1 は D_2 を 2 回横切るか、まったく横切らないかのいずれかであり、二つの円は絡み合わない。）よって、**円 C_1 と C_2 は絡み合っている**。

二つの円を引き離すことはできない。二つの円を互いに遠く離れた位置へ移す連続的

な動きがあったとすると、C_1 が C_2 の円板を横切る回数は奇数から偶数へ変わらなければならない。しかし、一方の円が他方の円を通り抜けない限り、交差は対になって生じたり消えたりするだけであり、切断せずに引き離す場合にはそのような通り抜けは許されない。

検算

各点を代入して確かめる。たとえば $(1,2,1)$ からは $3-2-1=0$、$1-2+1=0$、$1+4+1-12-4+10=0$ が得られる。数値的には、二つの円をパラメータ表示し、ガウス（Gauss）の絡み数積分（linking integral）$\frac{1}{4\pi}\oint\oint \frac{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\cdot(\mathrm{d}\mathbf{r}_1\times\mathrm{d}\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}$ を計算したところ、1.002 を得た（絡み合っていない対では 0 となる）。また、二つの円の最短距離はおよそ 0.09 であることもわかった。したがって二つの円は非常に近づくが、接してはいない。

よくある間違い

- 二つの円が交わるかどうかだけを調べること。実際に交わらないが、それだけでは絡み合いについて何もわからない。
- C_1 と P_2 の交差は L 上になければならないことを忘れ、それ以外の場所で探すこと。
- S_2 の中心を間違えること。$-6y$ と $-4z$ の項から中心は $(0,3,2)$ であり、$(0,-3,-2)$ ではない。

STEP のその先へ

交わらない二つの閉曲線が絡み合っているかどうかは、整数値の不変量（invariant）である**絡み数**（linking number）によって測られる。絡み数は、一方の曲線が他方を境界とする曲面を通り抜ける交差を符号付きで数えること（ここで行った方法）によっても、「検算」で用いたガウスの二重積分によっても計算できる。絡み数は結び目理論（knot theory）と代数的位相幾何学（algebraic topology）への第一歩である。Colin Adams の *The Knot Book* は非常に読みやすい入門書である。

解答例

STEP III 1994、第 4 問

純粋数学 ・ 常微分方程式の特異解

STEP III 1994、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/94-s3-q4

この問題は、*Beyond STEP* の第 8.1 節「解が一意でないとき」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch08/non-uniqueness.html

鍵となる考え方

両辺の平方根をとると、方程式は $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \pm 2\sqrt{y}$ となり、ただちに変数分離（separation of variables）ができる。さらによいのは、どの放物線（parabola）$y = (x-c)^2$ もこの方程式を満たすことに気づくことである。つまり解は、$y = x^2$ を x 軸に沿ってずらしたものにすぎない。この図が見えてしまえば、後半の小問は、どのコピーがどの点を通るか、そしてすべてのコピーに共通するものは何か、という問題になる。

解答

一般解

$(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2 \geq 0$ であるから、どの解も $y \geq 0$ を満たす。$y > 0$ となるところでは、定数 c を用いて

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm 2\sqrt{y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm 1 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{y} = \pm(x-c)$$

と書ける。どちらの符号でも、両辺を 2 乗すると

$$y = (x-c)^2.$$

を得る。左半分、右半分、そして頂点（vertex）も含めて、この放物線全体が解であることを直接確かめておく価値がある。$y' = 2(x-c)$ であるから、すべての x に対して

$(y')^2 = 4(x-c)^2 = 4y$ である。

> **考えてみよう** 2 つの符号から同じ式が得られた。では、「±」はどこへ行ったのだろうか？

それは各放物線の 2 つの半分に隠れている。$y = (x-c)^2$ 上では、傾き $2(x-c)$ は頂点の左側で $-2\sqrt{y}$、右側で $+2\sqrt{y}$ であり、1 つの放物線が両方の符号を使っているのである。符号の選択は、ある点を通るように合わせるとき、c の選択として再び現れる。

(a, b^2) を通る解

$(a-c)^2 = b^2$ が必要であるから、$a - c = \pm b$、すなわち $c = a - b$ または $c = a + b$ である。2 つの解は

$$y = (x-a+b)^2 \qquad \text{および} \qquad y = (x-a-b)^2.$$

である。$b \neq 0$ より $a - b \neq a + b$ であるから、これらは異なる。（もし $b = 0$ ならば、これらは頂点が $(a, 0)$ の 1 つの放物線に一致してしまう。このとき、その点は解 $y = 0$ の上にもあることになるが、これについては最後に再び扱う。）b を $-b$ に置き換えると 2 つが入れ替わるだけであり、点 (a, b^2) は変わらないのだから、これは当然である。

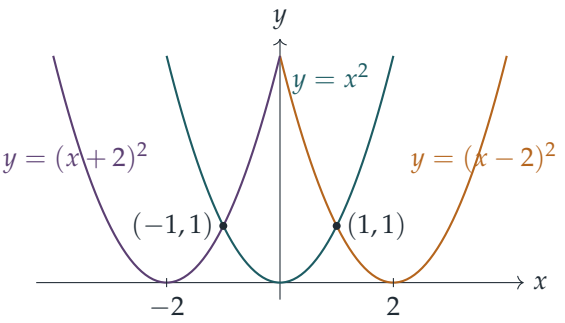
点 $(a_1, 1)$ と $(a_2, 1)$

$b = 1$ とする。$(a, 1)$ を通る解は $y = (x-a+1)^2$ と $y = (x-a-1)^2$ である。放物線 $y = (x-c)^2$ が原点を通るのはちょうど $c = 0$ のときであるから、$a - 1 = 0$ または $a + 1 = 0$ が必要である。よって

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = -1.$$

$(1, 1)$ を通る解は $y = x^2$（$c = a_1 - 1 = 0$ から）と $y = (x-2)^2$ である。$(-1, 1)$ を通る解は $y = (x+2)^2$ と $y = x^2$（$c = a_2 + 1 = 0$ から）である。

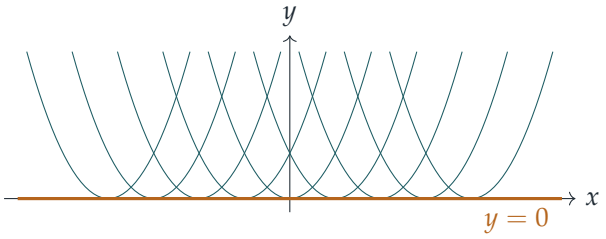
原点を通る解は、どちらの点についても同じ曲線 $y = x^2$ であり、したがってそのグラフは一致する。これは驚くことではない。$(1, 1)$ と $(-1, 1)$ は、$y = x^2$ 上で高さ 1 にある 2 点であり、頂点の両側に 1 つずつある。残りの 2 つの解は $y = (x-2)^2$ と $y = (x+2)^2$ であり、これらは $y = x^2$ をそれぞれ右と左に 2 だけ平行移動したものである。



$(1,1)$ において、曲線 $y=x^2$ の傾きは $+2$、$y=(x-2)^2$ の傾きは -2 である。一般に、ある点を通る 2 つの解は、その点で傾き $\pm 2b$ をもって交わり、それぞれが一方の平方根に対応している。

曲線族とその共通接線

a と b を動かすことは、$c=a\pm b$ をすべての実数にわたって動かすことにほかならない。したがって、この曲線族は $y=x^2$ を水平方向に平行移動（translate）したものすべてである。



どの放物線も頂点 $(c,0)$ で x 軸に接し、そこでの傾きは 0 である。よって直線 $y=0$ は曲線族全体の共通接線（common tangent）である（これは曲線族の**包絡線**（envelope）である）。

このことが重要なのは、$y=0$ そのものが解だからである。実際、このとき $y'=0$ であり、$(y')^2=0=4y$ となる。しかし、これはどの c に対する放物線でもない。これは**特異解**（singular solution）であり、変数分離の過程で $\sqrt{y}$ で割ったために見落とされたのである。各点 $(c,0)$ において、解 $y=0$ と放物線 $y=(x-c)^2$ は同じ値と同じ傾きをもつから、x 軸上の点を通る解は一意（unique）ではない。実際、解をつなぎ合わせることができる。$p<q$ に対して

$$y=\begin{cases}(x-p)^2, & x<p,\\ 0, & p\le x\le q,\\ (x-q)^2, & x>q\end{cases}$$

は連続な導関数をもち、いたるところで方程式を満たす。したがって厳密には、(a, b^2) を通る「2 つの解」とは、その点の近くで放物線と一致する 2 つの解のことである。その点から離れたところでは、解が x 軸に達すると、しばらく軸に沿って進んでから離れていくこともありうる。

検算

- 代入して確かめる：$y = (x - a \pm b)^2$ について、$x = a$ のとき $y = b^2$ となり、$(y')^2 = 4y$ は恒等的に成り立つ。
- (a, b^2) における 2 つの傾きは $2(a - c) = \pm 2b$ であり、その 2 乗はどちらも $4b^2 = 4y$ で、要求どおりである。
- 数値的にも、中心差分（central difference）による導関数を用いて、無作為に選んだ放物線および上のつなぎ合わせた曲線（$p = -1, q = 1$）について $(y')^2 = 4y$ が成り立つこと、また $(1, 1)$ と $(-1, 1)$ を通る解がそれぞれ $c \in \{0, 2\}$ と $c \in \{-2, 0\}$ をもち、共通なのは $c = 0$ のみであることを確認した。

よくある間違い

- $y' = 2\sqrt{y}$ だけを書き、その結果、各点を通る放物線の半分だけしか得られない。
- $y = 0$ を忘れる：これは正真正銘の解であり、まさに最後の小問が求めている共通接線である。
- $(a_1, 1)$ と $(a_2, 1)$ を通る解のうち原点を通る 2 つを異なる曲線だと考えてしまう。どちらも $y = x^2$ である。

STEP のその先へ

この方程式は、解の一意性が崩れる場合の標準的な例である。ピカール–リンデレーフの定理（Picard–Lindelöf theorem）は、f が y についてリプシッツ連続（Lipschitz）であるとき、$y' = f(x, y)$ の解がある点を通るものとしてちょうど 1 つ存在することを保証する。しかし $\pm 2\sqrt{y}$ は $y = 0$ の近くでリプシッツ連続ではなく、まさにそこで放物線たちと特異解が出会うのである。1 パラメータ曲線族の包絡線と、それがクレロー（Clairaut）型のような方程式に対して与える特異解は、常微分方程式（ODE）の入門講義における古典的な話題である。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『微分方程式入門』）では、存在と一意性がこのような例とともに論じられている。

解答例

STEP III 1994、第 5 問

純粋数学 ・ マクローリン級数

> **STEP III 1994、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q5

鍵となる考え方

$\sin^{-1} x$ を 1 回微分すると平方根が現れるが、もう 1 回微分すると、平方根を含まない f'' と f' の間の関係式が得られる。次にライプニッツの定理（Leibniz's theorem）を用いると、この 1 本の方程式から、すべての高階導関数についての漸化式（recurrence）が得られる。$x = 0$ ではほとんどの項が消えるので、マクローリン係数（Maclaurin coefficients）についての簡単な漸化式が得られる。g については、対数法則（laws of logarithms）を用いれば、すべてがよく知られた $\ln(1 \pm x)$ の級数（series）に帰着する。

解答

微分方程式

$-1 < x < 1$ において

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}, \qquad \mathrm{f}''(x) = -\tfrac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2} \cdot (-2x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

2 番目の式に $1 - x^2$ を掛けると $(1-x^2)\mathrm{f}''(x) = x(1-x^2)^{-1/2} = x\mathrm{f}'(x)$ となるので、

$$(1-x^2)\mathrm{f}''(x) - x\mathrm{f}'(x) = 0,$$

となり、示すべき式が得られた。

漸化式

この恒等式を、ライプニッツの定理 $(uv)^{(n)} = \sum_r \binom{n}{r} u^{(r)} v^{(n-r)}$ を用いて n 回微分する。1 つ目の積では $u = 1 - x^2$ とおく。その導関数は $-2x$、-2、その後は 0 となるので、

残る項は3つだけである：

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1-x^2)\mathrm{f}''\right] = (1-x^2)\mathrm{f}^{(n+2)} + n(-2x)\mathrm{f}^{(n+1)} + \binom{n}{2}(-2)\mathrm{f}^{(n)}.$$

2つ目の積では $u = x$ であり、残る項は2つだけである：

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[x\mathrm{f}'\right] = x\mathrm{f}^{(n+1)} + n\mathrm{f}^{(n)}.$$

辺々引き、$2\binom{n}{2} = n(n-1)$ を用いると

$$\begin{aligned} 0 &= (1-x^2)\mathrm{f}^{(n+2)} - (2n+1)x\mathrm{f}^{(n+1)} - \big(n(n-1)+n\big)\mathrm{f}^{(n)} \\ &= (1-x^2)\mathrm{f}^{(n+2)} - (2n+1)x\mathrm{f}^{(n+1)} - n^2\mathrm{f}^{(n)}, \end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。これはすべての $n \geq 1$ で成り立ち、$n = 0$ のときは最初の方程式そのものである。（好みによっては、代わりに数学的帰納法（induction）で証明してもよい。n の場合の式を1回微分して項を整理すれば $n+1$ の場合が得られる。これは同じ計算を1段ずつ行っているにすぎない。）

f のマクローリン級数

考えてみよう x をどの値にすると、この漸化式は使いやすくなるだろうか？

$x = 0$ とおく。真ん中の項は消え、$1 - x^2 = 1$ となるので

$$\mathrm{f}^{(n+2)}(0) = n^2\,\mathrm{f}^{(n)}(0) \qquad (n \geq 0).$$

出発点は $\mathrm{f}(0) = \sin^{-1} 0 = 0$ と $\mathrm{f}'(0) = 1$ である。

偶数階の導関数。 $\mathrm{f}(0) = 0$ であるから、漸化式により、偶数階の導関数はすべて0において値が0となる。$\sin^{-1}$ は奇関数（odd function）なので、これは予想どおりである。

奇数階の導関数。 $n = 1, 3, 5, \ldots$ とすると

$$\mathrm{f}'''(0) = 1^2, \quad \mathrm{f}^{(5)}(0) = 3^2 \cdot 1^2, \quad \mathrm{f}^{(7)}(0) = 5^2 \cdot 3^2 \cdot 1^2,$$

であり、一般に

$$\mathrm{f}^{(2k+1)}(0) = \big(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)\big)^2 \qquad (k \geq 1).$$

したがって

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1^2}{3!}x^3 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{5!}x^5 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{7!}x^7 + \cdots = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots.$$

x^{2k+1} の係数はきれいに簡単になる。$(2k+1)! = \big(1 \cdot 3 \cdots (2k-1)\big)\big(2 \cdot 4 \cdots 2k\big)(2k+1)$ と書き、奇数の積を1つ約分すると

$$a_{2k+1} = \frac{\big(1 \cdot 3 \cdots (2k-1)\big)^2}{(2k+1)!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \cdot \frac{1}{2k+1}.$$

$a_{2k+3}/a_{2k+1} \to 1$ であるから、比判定法（ratio test）により、この級数は $|x| < 1$ で収束（converge）する。そこで実際に $\sin^{-1} x$ に等しいことは、$(1-x^2)^{-1/2}$ の二項級数（binomial series）を項別積分（term-by-term integration）すればまったく同じ係数が得られることから確かめられる。

関数 g

対数法則により $\mathrm{g}(x) = \frac{1}{2}\big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\big)$ である。$|x| < 1$ において

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots, \qquad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots.$$

差をとると偶数乗の項は打ち消し合い、奇数乗の項は 2 倍になる。よって

$$\mathrm{g}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

（g が $\tanh^{-1} x$ であることに気づいた人もいるだろう。）

係数の比較

考えてみよう どちらの係数にも因数 $\frac{1}{2k+1}$ がある。残りで何を比べればよいだろうか？

$n \geq 1$ のとき、x^{2n+1} の係数は、g では $\dfrac{1}{2n+1}$、f では

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

である。n 個の因数 $\frac{2r-1}{2r}$ はいずれも 0 と 1 の間に厳密に含まれ、$n \geq 1$ であるから少なくとも 1 つは存在する。よってそれらの積は 1 より真に小さく、したがって

$$\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n+1}.$$

ゆえに g の係数のほうが大きく、示すべきことが示された。$n = 0$ のときは両方の係数が 1 に等しく、問題文でこの場合が除かれているのはそのためである。

検算

- $x = -\frac{1}{2}$ において、級数を x^{59} まで足すと -0.5235987756 となり、$\sin^{-1}(-\frac{1}{2}) = -\pi/6$ と一致する。
- 係数 $1, \frac{1}{6}, \frac{3}{40}, \frac{5}{112}$ は、$\mathrm{f}^{(n+2)}(0) = n^2 \mathrm{f}^{(n)}(0)$ から直接求めたものと一致する。比較 $\frac{1}{6} < \frac{1}{3}$、$\frac{3}{40} < \frac{1}{5}$、$\frac{5}{112} < \frac{1}{7}$ も主張どおり成り立つ。

- f の各係数は g の対応する係数以下であるから、$0 < x < 1$ において $\sin^{-1} x < \tanh^{-1} x$ となるはずである。$x = 0.5$ では $0.5236 < 0.5493$ である。

よくある間違い

- ライプニッツの定理で $\binom{n}{2}$ の項を忘れ、最終的な係数が n^2 ではなく n になってしまう。
- 2 乗を付けずに $f^{(2k+1)}(0) = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)$ と書いてしまう。漸化式の各段階で掛かるのは n ではなく n^2 である。
- マクローリン係数を求めるときに、$(2k+1)!$ ではなく $(2k)!$ や $(2k+1)$ だけで割ってしまう。

STEP のその先へ

比 $\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$ は $\binom{2n}{n}/4^n$ に等しく、n が大きいとき $1/\sqrt{\pi n}$ のように振る舞う。これはウォリス（Wallis）の積（Wallis's product）とスターリングの公式（Stirling's formula）から導かれる。$\sin^{-1} x$ の級数は $x = 1$ でも収束して $\pi/2$ を与えるが、それを証明するには、収束区間（interval of convergence）の端点におけるべき級数（power series）についてのアーベル（Abel）の定理（Abel's theorem）が必要である。関数の導関数が微分方程式（differential equation）を満たすとき、係数についての漸化式が得られる。これは常微分方程式（ODE）の級数解法（series solutions）と呼ばれる方法であり、Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）で扱われている。テイラー級数（Taylor series）が実際にもとの関数に等しくなるのはどのような場合かについての丁寧な証明は、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学を理解する）を参照するとよい。

解答例

STEP III 1994、第 6 問

純粋数学 ・ 複素数平面上の回転

> **STEP III 1994、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q6

鍵となる考え方

点 p のまわりの角 θ の回転（rotation）は写像 $z \mapsto p + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-p)$ である。つまり、p を原点へ平行移動し、回転し、元へ戻す。このような写像をいくつ合成（composition）しても、必ず $z \mapsto \lambda z + \mu$ の形になる。そして「**すべての** P_1 に対して $P_{\text{last}} = P_1$」とは、この写像が恒等写像（identity）であること、すなわち $\lambda = 1$ かつ $\mu = 0$ であることを意味する。あとはこの二つの等式を幾何学的に読み解くだけである。

解答

z_5 を求める

正の向きの直角回転は i を掛けることであるから、P_1 を A のまわりに回転すると

$$z_2 = a + \mathrm{i}(z_1 - a) = (1-\mathrm{i})a + \mathrm{i}z_1.$$

同様に $z_3 = (1-\mathrm{i})b + \mathrm{i}z_2$、$z_4 = (1-\mathrm{i})c + \mathrm{i}z_3$、$z_5 = (1-\mathrm{i})d + \mathrm{i}z_4$ である。順に代入していくと

$$\begin{aligned} z_5 &= (1-\mathrm{i})\big(d + \mathrm{i}c + \mathrm{i}^2 b + \mathrm{i}^3 a\big) + \mathrm{i}^4 z_1 \\ &= (1-\mathrm{i})\big(d - b + \mathrm{i}(c-a)\big) + z_1. \end{aligned}$$

P_5 が P_1 に戻るのはいつか

直角回転を 4 回行うと一回転になるので、z_1 の係数はちょうど 1 であり、

$$z_5 - z_1 = (1-\mathrm{i})\big(d - b + \mathrm{i}(c-a)\big),$$

となる。これは z_1 にまったく依存しない。合成写像は純粋な平行移動（translation）である。$1-\mathrm{i}\neq 0$ であるから

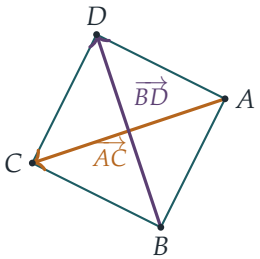
$$\begin{aligned} z_5 = z_1 \text{、任意の} z_1 &\iff d-b+\mathrm{i}(c-a)=0 \\ &\iff \mathrm{i}(c-a)=b-d \\ &\iff a-c=\mathrm{i}(b-d), \end{aligned}$$

ここで最後の段階では両辺に $-\mathrm{i}$ を掛けた（$-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=1$ である）。どの段階も逆にたどれるので、これが求める必要十分条件（if and only if）である。（条件が成り立たないときは平行移動量が 0 でなく、そのときは**どのように** P_1 を選んでも $P_5\neq P_1$ となる。）

考えてみよう $a-c=\mathrm{i}(b-d)$ は図形 $ABCD$ について何を述べているか。

-1 を掛けると、条件は $c-a=\mathrm{i}(d-b)$ となる。$c-a$ はベクトル $\overrightarrow{AC}$ を、$d-b$ はベクトル $\overrightarrow{BD}$ を表す。i を掛けることは、ベクトルの長さを変えずに $\pi/2$ だけ回転することである。したがって、

$\overrightarrow{AC}$ は $\overrightarrow{BD}$ を正の向きに直角だけ回転したものである。すなわち、四角形 $ABCD$ の対角線（diagonal）AC と BD は長さが等しく互いに垂直であり、AC は BD を反時計回りに直角回転した向きにある。



図の例では $\overrightarrow{BD}=-1+3\mathrm{i}$、$\overrightarrow{AC}=-3-\mathrm{i}=\mathrm{i}(-1+3\mathrm{i})$ である。向き（orientation）が重要である。**時計回り**に頂点名をつけた正方形はこの条件を満たすが、反時計回りにつけたものは満たさない（その場合は $\overrightarrow{AC}=-\mathrm{i}\,\overrightarrow{BD}$ となる）。

角 θ の回転を 3 回行う場合

$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ とおく。先ほどとまったく同様に、各段階は $z\mapsto(1-w)p+wz$ であるから

$$\begin{aligned} z_4 &= (1-w)c+w\big((1-w)b+w\big((1-w)a+wz_1\big)\big) \\ &= (1-w)\big(c+wb+w^2a\big)+w^3z_1. \end{aligned}$$

これは $\lambda=w^3$、$\mu=(1-w)(c+wb+w^2a)$ とした $\lambda z_1+\mu$ である。これがすべての z_1 に対して z_1 に等しくなるための必要十分条件は $\lambda=1$ かつ $\mu=0$ である（$z_1=0$ とお

けば $\mu = 0$ が、次に $z_1 = 1$ とおけば $\lambda = 1$ が得られる)。

角について。 $w^3 = 1$ は 3θ が 2π の整数倍であることを意味する。$\theta \neq 0$ を「回転角が一回転の整数倍ではない」と解釈するので $w \neq 1$ である。よって w は 1 の虚数の 3 乗根（cube root of unity）であり、

$$\theta = \pm\tfrac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

点について。 $w \neq 1$ であるから、$\mu = 0$ は $c + wb + w^2 a = 0$ となる。w を掛けて $w^3 = 1$ を用いると $a + w^2 b + wc = 0$ が得られる。さらに $1 + w + w^2 = 0$（$w^3 = 1$、$w \neq 1$ より）であるから $a = -(w + w^2)a$ と書き換えられ、

$$w(c-a) + w^2(b-a) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c - a = -w\,(b-a) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi)}(b-a) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\pi)}(b-a).$$

> **?** **考えてみよう** $\theta = \pm 2\pi/3$ のとき、$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\pi)}$ は何か。

$\theta = 2\pi/3$ のときは $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$、$\theta = -2\pi/3$ のときは $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ である（$\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ による）。したがって $\overrightarrow{AC}$ は $\overrightarrow{AB}$ を長さを変えずに $\mp\pi/3$ だけ回転したものであり、ABC は**正三角形**（equilateral triangle）で、$\theta = 2\pi/3$ のときは A, B, C が**時計回り**に、$\theta = -2\pi/3$ のときは**反時計回り**に並ぶ。逆に、これらの各段階は逆にたどれるので、これらの条件からも $\mu = 0$ が得られる。

A, B, C は単位円上にあるので、その円は三角形の外接円（circumcircle）であり、正三角形では外心（circumcentre）が中心に一致するから、頂点は $|z| = 1$ 上に等間隔に並ぶ。二つの場合はうまく一つの主張にまとめられる。

$$\theta = \pm\tfrac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}, \qquad b = a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}, \quad c = b\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}.$$

言葉で言えば、3 回の回転はいずれも三分の一回転であり、A, B, C は単位円上に等間隔に並び、回転とは**逆の**向きに順に進む。

検算

- コンピュータで、ランダムな A, B, C, D のまわりの 4 回の直角回転をランダムな点に施したところ、z_5 の式と 10^{-9} の精度で一致した。$c = a - \mathrm{i}(b-d)$ とするとどの P_1 も元の位置に戻り、c を 0.1 だけずらすと成り立たなくなった。
- 単位円上のランダムな a と $\theta = \pm 2\pi/3$ に対し、$b = a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$、$c = b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ とするとランダムな z_1 について $z_4 = z_1$ となった。頂点名を逆順にした場合や他の θ では成り立たなかった。
- 手計算：時計回りの単位正方形 $a = 0$、$b = \mathrm{i}$、$c = 1 + \mathrm{i}$、$d = 1$ のまわりに $z_1 = 0$ を回転する。$0 \to 0 \to 1 + \mathrm{i} \to 1 + \mathrm{i} \to 0$ となり、元の位置に戻る。

よくある間違い

- A のまわりの回転を $z \mapsto \mathrm{i}z$ と書いてしまい、先に A を原点へ移すことを忘れる。
- 向きを無視する。対角線の回転の向きも、$\theta = \pm 2\pi/3$ のそれぞれに対する三角形の向きも、条件の一部である。

STEP のその先へ

$|\lambda| = 1$ を満たす写像 $z \mapsto \lambda z + \mu$ は平面の向きを保つ等長変換（isometry）であり、群（group）をなす。角は足し合わされるので、回転の合成は角の総和だけの回転となり、総和が一回転の整数倍のときは平行移動となる。$z_5 - z_1$ が定数になったのはこのためである。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、複素数のこの幾何学的な見方を見事に展開している。

解答例

STEP III 1994、第 7 問

純粋数学 ・ 群の同型

STEP III 1994、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/94-s3-q7

鍵となる考え方

2 つの群（group）が同型（isomorphic）になりうるのは、同型写像（isomorphism）が保つあらゆる構造的性質を両者が共有している場合に限られる。そのような性質のうち最も役に立つのは、元の位数（order）の一覧と、群が可換（commutative、アーベル的（abelian）ともいう）かどうかの 2 つである。位数を列挙するだけで、すでに S_3 と Z_6 は区別できる。2 つの群が同型であることを証明するには、具体的な全単射（bijection）を書き下し、それが演算を保つことを確かめればよい。最後の小問は可換性に帰着する。複素数からなる群はすべてアーベル群であるが、S_3 はそうではない。

解答

S_3 と Z_6 の元

3 つの対象に 1, 2, 3 と名前をつけ、巡回置換の記法（cycle notation）を用いる。合成は右から左に行う。つまり $\sigma\tau$ は「まず τ を行い、次に σ を行う」という意味である。6 つの置換（permutation）を以下に挙げる。

S_3 の元	e	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
位数	1	2	2	2	3	3

互換（transposition）は 2 つの対象を入れ替えるもので、2 回行うとすべてが元に戻るから、位数は 2 である。(123) のような 3-巡回置換は $1 \to 2 \to 3 \to 1$ と移すので、各対象を元の位置に戻すには 3 回適用する必要があり、位数は 3 である。

$Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ では単位元は 0 であり、a の位数は $na \equiv 0 \pmod 6$ を満たす最小

の $n \geq 1$、すなわち $6/\gcd(a,6)$ である。

Z_6 の元	0	1	2	3	4	5
位数	1	6	3	2	3	6

たとえば $4+4=8\equiv 2$、$4+4+4=12\equiv 0$ であるから、4 の位数は 3 である。

S_3 と Z_6 は同型か？

同型ではない。同型写像 θ は位数を保つ。実際、g の位数が n ならば $\theta(g)^k=\theta(g^k)$ であり、θ は単射（injective）であるから、これが単位元となるのは g^k が単位元であるときに限る。したがって、同型な群では各位数の元の個数が等しい。ところが Z_6 には位数 6 の元が 2 つあり、S_3 には 1 つもないので、両者は同型ではない。（位数 2 の元の個数も異なる。S_3 には 3 つあるが、Z_6 には 1 つしかない。）

もう 1 つの理由があり、これは最後にも再び用いる。加法は可換であるから、Z_6 はアーベル群である。一方、S_3 はアーベル群ではない。

$$(12)(13)=(132),\qquad (13)(12)=(123).$$

1 つ目の積については、(13) が $1\to 3$ と移し、次に (12) が 3 を固定するので、$1\to 3$ となる。同様に $3\to 2$、$2\to 1$ である。同型写像は可換な組を可換な組に移すから、非可換群がアーベル群と同型になることはありえない。

C_6 は Z_6 と同型である

$k=0,1,\dots,5$ に対して $\phi(k)=\alpha^k$ により $\phi: Z_6\to C_6$ を定める。

- **全単射であること。** $k=0,\dots,5$ に対する数 $\alpha^k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/3}$ の偏角は $0,\frac{\pi}{3},\dots,\frac{5\pi}{3}$ である。これらは $[0,2\pi)$ 内の相異なる角であるから、6 つの値は単位円上の相異なる点である。よって ϕ は単射であり、したがって要素数 6 の 2 つの集合の間の全単射である。
- **演算を保つこと。** $a,b\in Z_6$ とし、$r=(a+b) \bmod 6$ として $a+b=6q+r$ と書く。$\alpha^6=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}=1$ であるから、

$$\phi(a)\,\phi(b)=\alpha^a\alpha^b=\alpha^{a+b}=(\alpha^6)^q\alpha^r=\alpha^r=\phi\big((a+b) \bmod 6\big).$$

このように ϕ は mod 6 の加法を複素数の乗法に移すので、同型写像である。よって $C_6\cong Z_6$ である。確認として、α と α^5（1 と 5 の像）の位数は 6、α^2 と α^4 の位数は 3、$\alpha^3=-1$ の位数は 2 であり、Z_6 の表と一致する。

S_3 と同型な $\mathbb{C}$ の部分群は存在するか？

考えてみよう 複素数からなる群がすべて共有している性質は何か？

それらはすべてアーベル群である。$(\mathbb{C}, +)$ の部分群（subgroup）H は、すべての複素数 z, w に対して $z + w = w + z$ であるからアーベル群である。0 でない複素数全体の乗法に関する部分群 H も、$zw = wz$ であるからアーベル群である。部分群は大きい群と同じ演算を用いるので、可換性を受け継ぐのである。

そこで、このような H に対して同型写像 $\theta : S_3 \to H$ が存在したと仮定する。これを上の非可換な組に適用する。H はアーベル群であるから、

$$\theta\big((12)(13)\big) = \theta(12)\,\theta(13) = \theta(13)\,\theta(12) = \theta\big((13)(12)\big),$$

となる（ここでは乗法的に書いた。加法の場合は積を和に置き換えればよい）。θ は単射であるから、これより $(12)(13) = (13)(12)$ が得られるが、これは誤りである。したがって、加法的であれ乗法的であれ、S_3 と同型な複素数の部分群は**存在しない**。

検算

- どちらの群でも位数は 6 を割り切る（ラグランジュの定理（Lagrange's theorem））。S_3 では 1, 2, 3、Z_6 では 1, 2, 3, 6 である。
- コンピュータで S_3、Z_6、C_6 のすべての位数を計算し直し、$(12)(13) \neq (13)(12)$ を確認し、さらに 36 通りすべての組 (a, b) について $\alpha^{(a+b) \bmod 6} = \alpha^a \alpha^b$ を誤差 10^{-12} 以内で数値的に確かめた。

よくある間違い

- 「どちらも元が 6 個あるから同型である」と述べてしまう。元の個数が等しいことは必要条件ではあるが、十分条件には程遠い。
- S_3 の位数 3 の元を (12) と (13) としてしまう。互換の位数は 2 であり、位数 3 をもつのは 3-巡回置換だけである。
- 最後の小問で、有限な乗法的部分群（1 の冪根（roots of unity）全体）の場合しか否定していない。可換性による議論を使えば、有限か無限か、加法的か乗法的かを問わず、すべての部分群を一度に扱える。

STEP のその先へ

この問題のテーマは不変量（invariant）、すなわち元の位数や可換性のように、同型な群が必ず共有する性質である。実は、位数 6 の群はすべて Z_6 か S_3 のいずれかと同型である。より一般に、0 でない複素数全体の乗法に関する有限部分群はすべて巡回群（cyclic group）であり、したがって 1 の冪根からなる群である。どちらの結果も、群論の最初の講義の早い段階で学ぶことになるだろう。これらについて読むには、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）が親しみやすい。

解答例

STEP III 1994、第 8 問

純粋数学 ・ 四平方恒等式

> **STEP III 1994、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q8

この問題は、*Beyond STEP* の第 7.8 節「**四つの平方数**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch07/four-squares.html

鍵となる考え方

$\begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$ という形の行列(matrix)の行列式(determinant)は $zz^* + ww^* = |z|^2 + |w|^2$ であり、これは 4 つの実数の平方の和である。a, b, c, d をこのような行列の 1 つに、p, q, r, s を別の 1 つに詰め込めば、$\det(AB) = \det A \det B$ から左辺が得られる。示すべきことは、積 AB も同じ特別な形をしていることである。そうであれば、その行列式もまた 4 つの平方の和となり、それらの平方が L_i^2 になる。

解答

準備

複素数 z と w に対して

$$M(z,w) = \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}, \qquad \det M(z,w) = zz^* - w(-w^*) = |z|^2 + |w|^2.$$

とおく。ここで

$$z_1 = a + b\mathrm{i}, \quad z_2 = c + d\mathrm{i}, \quad z_3 = p + q\mathrm{i}, \quad z_4 = r + s\mathrm{i}.$$

と選ぶ。すると

$$\det M(z_1, z_2) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \qquad \det M(z_3, z_4) = p^2 + q^2 + r^2 + s^2.$$

となる。

積も同じ形をもつ

展開すると

$$M(z_1,z_2)\,M(z_3,z_4)=\begin{pmatrix} z_1z_3-z_2z_4^* & z_1z_4+z_2z_3^* \\ -z_2^*z_3-z_1^*z_4^* & -z_2^*z_4+z_1^*z_3^* \end{pmatrix}.$$

である。第 1 行の成分を $w_1=z_1z_3-z_2z_4^*$、$w_2=z_1z_4+z_2z_3^*$ とおく。積の共役(conjugate)は共役の積であり、また $(z^*)^*=z$ であるから

$$w_1^*=z_1^*z_3^*-z_2^*z_4,\qquad -w_2^*=-z_1^*z_4^*-z_2^*z_3,$$

となり、これらはちょうど右下と左下の成分に一致する。したがって

$$M(z_1,z_2)\,M(z_3,z_4)=M(w_1,w_2).$$

である。

考えてみよう 積がこの特別な形をしていることは、なぜ重要なのだろうか。

一般の 2×2 複素行列では、行列式はそもそも平方の和にはならない。積が再び $M(w_1,w_2)$ の形をしているからこそ、その行列式は $|w_1|^2+|w_2|^2$ となり、4 つの実数の平方に分解できるのである。

行列式をとる

$\det(AB)=\det A\,\det B$ を用いると

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)=\det M(w_1,w_2)=|w_1|^2+|w_2|^2.$$

である。あとは w_1 と w_2 の実部と虚部を求めればよい。

$$\begin{aligned} w_1&=(a+b\mathrm{i})(p+q\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})(r-s\mathrm{i})\\ &=\big[(ap-bq)+(aq+bp)\mathrm{i}\big]-\big[(cr+ds)+(dr-cs)\mathrm{i}\big]\\ &=(ap-bq-cr-ds)+(aq+bp+cs-dr)\mathrm{i},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2&=(a+b\mathrm{i})(r+s\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})(p-q\mathrm{i})\\ &=\big[(ar-bs)+(as+br)\mathrm{i}\big]+\big[(cp+dq)+(dp-cq)\mathrm{i}\big]\\ &=(ar-bs+cp+dq)+(as+br-cq+dp)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

よって

$$L_1=ap-bq-cr-ds,\qquad L_2=aq+bp+cs-dr,$$
$$L_3=ar-bs+cp+dq,\qquad L_4=as+br-cq+dp,$$

ととることができ、このとき $|w_1|^2 + |w_2|^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + L_4^2$ であるから

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2) = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + L_4^2.$$

が得られる。各 L_i は（a, b, c, d のうちの 1 文字）×（p, q, r, s のうちの 1 文字）という項の和であるから、それぞれの変数の組について別々に線形（linear）であり、要求どおりである。（答えは一意ではない。L_i の符号をどのように変えても、あるいは z_j の選び方を変えても、別の正しい組が得られる。）

検算

- $(a, b, c, d) = (1, 2, 3, 4)$、$(p, q, r, s) = (5, 6, 7, 8)$ とする。左辺は $30 \times 174 = 5220$ である。公式から $(L_1, L_2, L_3, L_4) = (-60, 12, 30, 24)$ が得られ、$3600 + 144 + 900 + 576 = 5220$ となる。
- $c = d = r = s = 0$ とおく。すると $L_3 = L_4 = 0$ となり、恒等式（identity）は $(a^2+b^2)(p^2+q^2) = (ap-bq)^2 + (aq+bp)^2$ に帰着する。これは $|z_1 z_3| = |z_1||z_3|$ から得られる二平方恒等式である。
- コンピュータによる検算で、8 つの変数を無作為に有理数で選んだ 20,000 通りについて恒等式が厳密に成り立つことを確認し、また $M(z_1, z_2)M(z_3, z_4) = M(w_1, w_2)$ が数値的に成り立つことも確認した。

よくある間違い

- 積を計算するときに第 2 行の共役を忘れてしまい、積の特別な形が崩れてしまう。
- $(c + d\mathrm{i})(r - s\mathrm{i})$ での符号の誤り。項 $-ds\,\mathrm{i}^2$ は $+ds$ になる。

STEP のその先へ

これはオイラー（Euler）の四平方恒等式（Euler's four-square identity）である。行列 $M(z, w)$ はハミルトン（Hamilton）の四元数（quaternions）の具体的なモデルになっている。これらの行列は積について閉じており、行列式は「長さ」の 2 乗にあたり、乗法的である。この恒等式は、すべての正の整数は 4 つの平方の和で表せるというラグランジュ（Lagrange）の定理の証明において鍵となる段階である。問題を素数の場合に帰着させるからである。Davenport の *The Higher Arithmetic*（高等整数論の入門書）は平方の和を扱っており、Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的複素解析）は二平方の場合について幾何学的な直観を与えてくれる。

解答例

STEP III 1994、第 9 問

力学 ・ 等時曲線と衝突

> **STEP III 1994、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q9

この問題は、*Beyond STEP* の第 11.4 節「**等時曲線**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/tautochrone.html

鍵となる考え方

曲面に沿ったエネルギー保存（energy conservation）から第一積分（first integral）が得られ、お椀の形 $y = s^2/(4k)$ によって、それは弧長（arc length）s に関する単振動（simple harmonic motion）のエネルギー方程式になる。単振動の周期（period）は振幅（amplitude）によらないので、静止状態から放された粒子は、どこから出発しても同じ時間で V に達する。このため、最後の小問の 2 つの粒子は必ず V で出会い、しかも何度も繰り返し出会うことになる。

解答

定数

粒子を滑らかな曲面上の質点としてモデル化する。粒子にはたらく力は重力と垂直抗力（normal reaction）の 2 つである。粒子は静止状態から動き出すので、その速度は、出発点と軸を含む鉛直面に垂直な水平成分をもたずに始まる。どちらの力もその鉛直面に垂直な成分をもたない（軸対称な曲面の抗力は軸を含む平面内にある）ので、粒子はその鉛直断面内にとどまる。粒子は曲線 $s = 2\sqrt{ky}$ に沿って速さ $|\mathrm{d}s/\mathrm{d}t|$ で運動する。

曲面は滑らかなので、垂直抗力は速度に垂直であり、仕事をしない。仕事をするのは

重力だけなので、力学的エネルギーは保存される：

$$\tfrac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 + mgy = \text{一定}.$$

両辺に $2/m$ を掛けると、$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2gy$ が一定であることがわかり、示すべきことが示された。高さ h で静止状態から放した場合、この定数は $2gh$ である。

V に達するまでの時間

曲線上では $y = s^2/(4k)$ である。これを代入すると

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{g}{2k}s^2 = 2gh.$$

t で微分し、$2\,\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ で割る（粒子が動いている間は正当である）と

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{2k}s,$$

となる。これは s に関する単振動であり、$\omega^2 = \dfrac{g}{2k}$、中心は $s = 0$、すなわち点 V である。

考えてみよう 放してから V に達するまでの時間が周期の 4 分の 1 になるのはなぜか。

粒子は端の位置 $s_0 = 2\sqrt{kh}$ から静止状態で出発するので、$s = s_0\cos\omega t$ である。初めて $s = 0$ に達するのは $\omega t = \frac{\pi}{2}$ のときであり、これは周期 $2\pi/\omega$ の 4 分の 1 である。したがって、V に達するまでの時間は

$$T = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2k}{g}} = \pi\sqrt{\frac{k}{2g}},$$

であり、示すべきことが示された。これは h によらない。すなわち、このお椀は**等時曲線**（tautochrone）である。

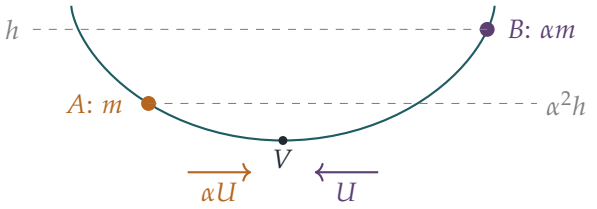
後で使うために記しておくと、V での速さは ωs_0 であり、エネルギー方程式で $y = 0$ とおいて直接求めれば $\sqrt{2gh}$ である。

2 つの粒子

2 つの粒子を、V で正面衝突する質点として扱う。V での接線は水平なので、衝突は水平な直線に沿って起こる。質量 m の粒子（高さ $\alpha^2 h$ から放す）を粒子 A、質量 αm の粒子（反対側の高さ h から放す）を粒子 B とよぶ。

2 つの粒子は V で出会う。前の小問より、各粒子は出発の高さによらず時間 T の後に V に達する。2 つは同時に放されるので、同時に V に到着し、時刻 T にそこで衝突する。

衝突直前の速さ。$U = \sqrt{2gh}$ とおく。エネルギー方程式より、A は速さ $\sqrt{2g\alpha^2 h} = \alpha U$、$B$ は速さ U で、互いに逆向きに到着する。A の運動の向きを正とする。



衝突前の運動量は

$$m(\alpha U) + \alpha m(-U) = 0.$$

である。質量と高さがこのように選ばれているのはこのためである。

1 回目の衝突の後。衝突後の速度を v_A、v_B とする。運動量保存（conservation of momentum）とニュートンの実験則（Newton's experimental law、はね返り係数の式）より

$$mv_A + \alpha m\, v_B = 0, \qquad v_B - v_A = \alpha\big(\alpha U - (-U)\big) = \alpha(1+\alpha)U.$$

1 つ目の式より $v_B = -v_A/\alpha$ である。これを 2 つ目の式に代入すると $-v_A(1+\alpha)/\alpha = \alpha(1+\alpha)U$ となるので

$$v_A = -\alpha^2 U, \qquad v_B = \alpha U.$$

どちらの速度も向きが反転し、α 倍になっている。（全運動量が 0 のとき、相対速度も各粒子の速度もすべて $-\alpha$ 倍になる。）したがって、各粒子はお椀の**自分の**側を上っていく。エネルギー保存より、A は高さ $\alpha^4 h$ まで、B は高さ $\alpha^2 h$ まで上がる。

同じパターンが繰り返される。各粒子は、衝突から時間 T 後の同じ瞬間に、新しい最高点で静止する。その後、それぞれさらに時間 T かけて V に戻る。したがって、2 つの粒子は時刻 $3T$ に再び V で衝突し、そのとき A は高さ $\alpha^4 h$ から、B は高さ $\alpha^2 h$ から来ている。これは、最初の配置で h を $\alpha^2 h$ に置き換えたものとちょうど同じである。再び全運動量は 0 であり、再びどちらの速度も向きが反転して α 倍になる。

帰納法（induction）により、第 n 回目の衝突は時刻 $(2n-1)T$ に V で起こり、その後

$$A \text{ の到達高さは} \alpha^{2n+2}h, \qquad B \text{ の到達高さは} \alpha^{2n}h,$$

となる。いずれも出発したのと同じ側のお椀においてである。粒子はそれぞれ自分の側で振動し、等間隔の時刻 $T, 3T, 5T, \ldots$ に V で衝突する。衝突のたびに速さは α 倍に

なるので、高さは α^2 倍になり、運動エネルギー（kinetic energy）の割合 $1-\alpha^2$ が失われる。衝突の間隔は常に $2T$ なので、衝突は決して終わらない。振幅は等比数列的に減少し、2 つの粒子はともに $t \to \infty$ のとき V で静止する状態に近づくが、有限の時間で V に静止することはない。

検算

- 次元（dimensions）：$s^2 = 4ky$ より k は長さなので、$\sqrt{k/g}$ は時間である。
- 数値的に、$\int_0^{s_0} \mathrm{d}s/\sqrt{2g(h-y)}$ を無作為に選んだ k と h に対して数値積分（quadrature）で計算した。$k=1$、$g=9.81$ のとき値は $0.7092\ldots = \pi\sqrt{1/19.62}$ となり、h によらなかった。
- 2 つの粒子の運動を数値的に追跡し（$\alpha = 0.6$ と $\alpha = 0.3$ の場合）、出会うたびに衝突の法則を適用した。衝突は $t/T = 1, 3, 5, 7$ で起こり、常に V において、全運動量 0 で起こった。$\alpha = 0.6$ のとき、1 回目の衝突後の高さは $0.1296h = \alpha^4 h$ と $0.36h = \alpha^2 h$ であった。
- 極限の場合 $\alpha \to 1$：等しい質量の粒子を等しい高さから放し、完全弾性衝突となるので、予想どおり各粒子は永久に出発時の高さまではね返る。

よくある間違い

- 出発から V までを半周期と考えてしまう。粒子は振動の端から出発するので、V までは 4 分の 1 周期である。
- ニュートンの実験則で向きの反転を忘れる。速さだけでなく、符号つきの速度を用いること。
- 粒子が有限回の衝突の後に静止すると主張してしまう。衝突の間隔は一定であり、（床ではずむボールとは異なり）短くならないので、無限回の衝突が無限の時間にわたって起こる。

STEP のその先へ

自然方程式（intrinsic equation）$s^2 = 4ky$ はサイクロイド（cycloid）を表す。この問題は、ホイヘンス（Huygens）の等時曲線を再発見するものである。すなわち、上下を逆にしたサイクロイド上では、底まで滑り降りる時間が出発点によらない。ホイヘンスはこれを用いて、周期が振れ幅によらない振り子時計を設計した。同じ曲線は最速降下曲線（brachistochrone）、すなわち最も速く降下できる曲線でもあり、これは

変分法（calculus of variations）によって求められる。変分法は大学 2 年次の力学の標準的な話題である。振動と衝突についてさらに学ぶには、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

解答例

STEP III 1994、第 10 問

力学 ・ 相対速度

STEP III 1994、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

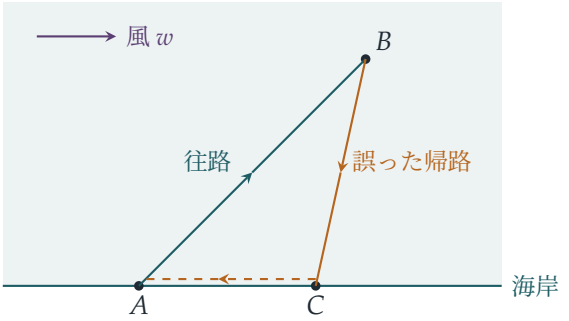
step.maths.org/questions/94-s3-q10

鍵となる考え方

すべてはベクトルの和（vector addition）である。飛行機の地面に対する速度は、その対気速度（air velocity）に風の速度を加えたものである。海岸を x 軸にとり、Alphaport を原点に置き、往路の対気速度を成分で書く。機首方位（heading）を逆にすると対気速度は逆になるが、風は逆に**ならない**。そのため帰路では、運動の北向き成分と東向き成分がまったく異なる振る舞いをする。前半の話はこれに尽きる。後半では、正しい二つの対地速度が同じ二次方程式（quadratic）から得られるので、解と係数の関係（Vieta's formulas）が仕事をしてくれる。

解答

飛行機を、一定の速度 w で真東に動く空気に対して、大きさ v の一定の対気速度で動く質点（particle）としてモデル化する（西**から**の風は東**へ向かって**吹く）。Alphaport A を原点とし、x を東向き、y を北向きにとる。すると海岸は直線 $y = 0$ であり、島は $y > 0$ の側にある。Betaville B は $\left(\frac{d}{\sqrt{2}}, \frac{d}{\sqrt{2}}\right)$ にある。速さの単位は $\mathrm{km\,h^{-1}}$、時間の単位は時間とする。（問題文ではこれらの地名を Alphabet/Alphaport、Betaville/Betaport と呼んでいるが、同じ場所である。）



往路の飛行

往路の対気速度を (a, b) とすると、$a^2 + b^2 = v^2$ である。対地速度（ground velocity）は $(a + w, b)$ であり、これは北東を向かなければならないので、二つの成分は等しく正である：

$$a + w = b > 0.$$

彼女は y 方向の距離 $\frac{d}{\sqrt{2}}$ を y 方向の速さ b で進み、往路の所要時間は t であるから、

$$bt = \frac{d}{\sqrt{2}} = (a + w)t. \tag{1}$$

誤った帰路

機首方位を逆にすると対気速度は $(-a, -b)$ になるが、風は依然として $(w, 0)$ を加えるので、対地速度は

$$(w - a,\ -b).$$

となる。

> **考えてみよう** 彼女はどこで海岸に達するか。それは Alphaport のどちら側か。

北向きの運動は風の影響を受けない。彼女の y 座標は $y = \frac{d}{\sqrt{2}}$ から割合 b で減少するので、(1) より、ちょうど時間 t 後、つまり往路と同じ時間で $y = 0$ に達する。その間に x 座標は $(w - a)t$ だけ変化するので、再び (1) を用いると、彼女が海岸を横切る位置は

$$x = \frac{d}{\sqrt{2}} + (w - a)t = (a + w)t + (w - a)t = 2wt,$$

である。したがって彼女は Alphaport の**東**に距離 $2wt$ の点 C に着く。往路では風が彼女を東へ押し、機首方位はそれを打ち消すように選ばれていた。しかし帰路では機首方位による補正は逆になるのに風による押しは逆にならないので、ずれが 2 倍になる

のである。$2wt > 0$ であるから、海岸に沿って西へ向かうのは確かに正しい方向である。

対気速度 v で向かい風の中を真西へ飛ぶとき、対地速度は $v - w > 0$ である（$v > w$ より）。海岸沿いの区間には $\dfrac{2wt}{v-w}$ かかるので、帰路全体の所要時間は

$$t + \frac{2wt}{v-w} = \frac{(v-w)+2w}{v-w}\,t = \left(\frac{v+w}{v-w}\right) t \text{ 時間,}$$

となり、示すべき結果が得られる。

正しい帰路

直線 AB に沿った対地速度を $\pm(p, p)$ と書く。ここで $\sqrt{2}\,p$ が対地速度の大きさである。対気速度は対地速度から風の速度を引いたものであり、その大きさは v である。

往路では、対地速度は (p_1, p_1)、対気速度は $(p_1 - w,\, p_1)$ であるから

$$(p_1 - w)^2 + p_1^2 = v^2 \iff 2p_1^2 - 2wp_1 + (w^2 - v^2) = 0.$$

帰路では、$p_2 > 0$ として対地速度は $(-p_2, -p_2)$、対気速度は $(-p_2 - w,\, -p_2)$ であるから

$$(p_2 + w)^2 + p_2^2 = v^2 \iff 2(-p_2)^2 - 2w(-p_2) + (w^2 - v^2) = 0.$$

よって p_1 と $-p_2$ はともに同じ二次方程式 $2p^2 - 2wp + (w^2 - v^2) = 0$ の解である。この方程式の解の積は $\frac{w^2-v^2}{2} < 0$ なので、一方は正、他方は負である。p_1 が正の解、$-p_2$ が負の解であるから、これらは相異なる二つの解である。解と係数の関係より

$$p_1 + (-p_2) = w, \qquad p_1(-p_2) = \frac{w^2 - v^2}{2},$$

すなわち $p_1 - p_2 = w$ かつ $p_1 p_2 = \frac{1}{2}(v^2 - w^2)$ である。

距離は往復とも d であるから、往路の所要時間は $t = \dfrac{d}{\sqrt{2}\,p_1}$、正しい帰路の所要時間は $\dfrac{d}{\sqrt{2}\,p_2}$ である。したがって

$$\begin{aligned}\frac{d}{\sqrt{2}\,p_2} &= t + \frac{d}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right) = t + \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{p_1 - p_2}{p_1 p_2} \\ &= t + \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2w}{v^2 - w^2} = t + \frac{\sqrt{2}\,wd}{v^2 - w^2} \text{ 時間,}\end{aligned}$$

となり、これが示すべき結果である。

検算

▶ $w = 0$ ならば、どちらの帰路の所要時間も t になる。無風ならそうなるべきである。

- $v = 300$、$w = 60$、$d = 400$ とすると、$t \approx 1.1785\,\mathrm{h}$ であり、誤った帰路（運動を数値的に刻んで追跡して求めた）は $1.7678\,\mathrm{h} = \frac{360}{240}t$、正しい帰路は 1.5713 h かかり、$t + \frac{\sqrt{2}\cdot 60\cdot 400}{86400}$ と一致する。$v > w$ と d を多数ランダムに選んだ試行でも、丸め誤差の範囲で一致する。
- 誤った帰路は常に正しい帰路より遅い。これは不等式 $\frac{2wt}{v-w} > \frac{\sqrt{2}\,wd}{v^2-w^2}$、すなわち $\sqrt{2}(v+w)t > d$ のことであり、$p_2 < v$ より往路の対地速度 $\frac{d}{t} = \sqrt{2}p_1 = \sqrt{2}(p_2 + w)$ が $\sqrt{2}(v+w)$ より小さいので成り立つ。

よくある間違い

- 対気速度ではなく対地速度を逆にしてしまう。パイロットが向きを変えても、風は向きを変えない。
- 風が西へ向かって吹くと解釈してしまう。「西から」の風は飛行機を東へ運ぶ。
- それぞれの二次方程式を解の公式で解き、煩雑な無理数の逆数どうしを引き算してしまう。p_1 と $-p_2$ が一つの二次方程式の解であることに気づけば、その手間はすべて省ける。

STEP のその先へ

これは最も単純な形の相対速度（relative velocity）である。地面の座標系における飛行機の速度は、空気の座標系における飛行機の速度に空気の速度を加えたものであり、これはガリレイ変換（Galilean change of frame）である。同じ帳簿付けを注意深く行うことが、航法や、大学 1 年の力学で扱う川渡りの問題の基礎になっており、さらに（高速でそれが破綻することが）特殊相対性理論（special relativity）の動機にもなっている。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、運動する座標系を徹底的に扱っている。

解答例

STEP III 1994、第 11 問

力学 ・ 剛体のつり合い

> **STEP III 1994、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q11

鍵となる考え方

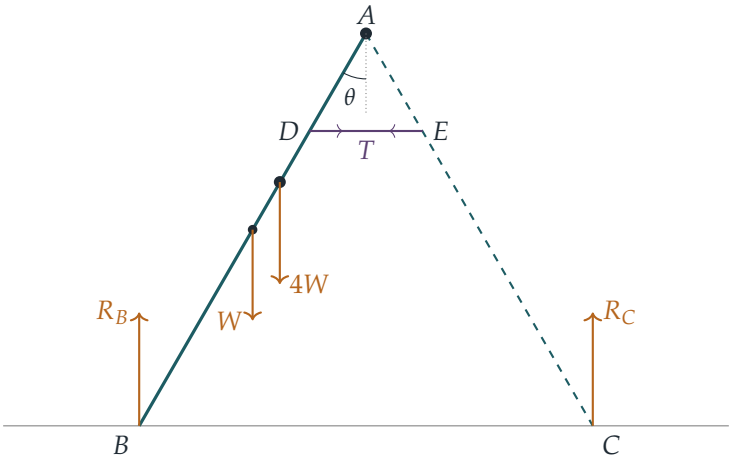
床がなめらか（smooth）なので、床から受ける力は鉛直方向のみである。したがって、脚立全体を考えれば C における抗力（reaction）がすぐに求まる。そのうえで巧妙な働きをするのが軽い脚 AC である。これに働く力は 3 つ（床からの抗力、ロープの張力（tension）、ちょうつがい（hinge）からの力）だけなので、ちょうつがい A のまわりのモーメント（moment）をとれば未知のちょうつがいの力が消え、ロープの張力と C における抗力とが結びつく。フックの法則（Hooke's law）によって張力が脚立の角度と結びつき、その結果 β が角度の関数として表される。これを最大化すればよい。

解答

設定

AB を一様な棒、AC を軽い棒とし、いずれも長さは $4a$ で、A においてなめらかなちょうつがいでつながっているとする。ロープは軽い弾性体とする。人は質点とみなす。対称性（$AD = AE$ かつ $AB = AC$）より、ロープ DE は水平である。各脚が鉛直方向となす角を θ とし、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

床がなめらかなので、B と C における抗力 R_B と R_C は鉛直である。AB の重さ W はその中点、すなわち B から水平距離 $2a\sin\theta$ の位置に働き、人の重さ $4W$ は B から水平距離 $\beta a\sin\theta$ の位置に働く。張力 T は D と E を互いに引き寄せる向きに働く。



C における抗力

脚立全体について B のまわりのモーメントをとる（ちょうつがいの力と張力は内力なので現れない）。$BC = 8a\sin\theta$ であるから

$$R_C \cdot 8a\sin\theta = W \cdot 2a\sin\theta + 4W \cdot \beta a\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad R_C = \tfrac{1}{4}W(1+2\beta).$$

鉛直方向の力のつりあいより $R_B = 5W - R_C = \frac{1}{4}W(19-2\beta)$ であり、$\beta \le 4$（段は脚立上にある）なのでこれは正である。よって、脚が床から浮き上がることはない。

ロープの張力

ロープの長さは $DE = 2a\sin\theta$、自然長は $\frac{a}{4}$ である。もしロープがたるんでいれば $T = 0$ となり、後で行う AC についての A のまわりのモーメントから $R_C = 0$ が導かれてしまうが、これはありえない。したがってロープは伸びており、$\sin\theta > \frac{1}{8}$ であって、フックの法則より

$$T = \frac{W\left(2a\sin\theta - \frac{a}{4}\right)}{a/4} = W(8\sin\theta - 1).$$

軽い脚 AC のつりあい

考えてみよう なぜ AB ではなく AC だけを取り出して考えるのか。

脚 AC は軽いので、これに働く力は 3 つだけである：C における R_C、E における張力 T、そして A におけるちょうつがいの力である。A のまわりのモーメントをとれば、未知のちょうつがいの力は消える。張力は水平で、A から鉛直方向に深さ $a\cos\theta$ だけ

下の位置に働く。抗力 R_C は鉛直で、A から水平距離 $4a\sin\theta$ の位置に働く。よって

$$R_C \cdot 4a\sin\theta = T \cdot a\cos\theta.$$

R_C と T を代入すると

$$\begin{aligned} &W(1+2\beta)\sin\theta = W(8\sin\theta - 1)\cos\theta, \\ &\text{よって}\quad 1+2\beta = 8\cos\theta - \cot\theta, \\ &\text{したがって}\quad \beta = \tfrac{1}{2}\left(8\cos\theta - \cot\theta - 1\right). \end{aligned}$$

人の各位置 β に対して、つりあいが可能であるのは、この方程式が（$\sin\theta > \frac{1}{8}$ を満たす）解 θ をもつときであり、かつそのときに限る。したがって、β のとりうる最大値は $f(\theta) = 8\cos\theta - \cot\theta$ の最大値から得られる。

最大化

微分すると

$$f'(\theta) = -8\sin\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \frac{1 - 8\sin^3\theta}{\sin^2\theta}.$$

$\sin\theta$ は $(0, \frac{\pi}{2})$ で増加するので、これは $\sin\theta < \frac{1}{2}$ のとき正、$\sin\theta > \frac{1}{2}$ のとき負である。よって f は $\sin\theta = \frac{1}{2}$、すなわち $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき最大となり、そのとき

$$f\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = 8\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}, \qquad \beta_{\max} = \tfrac{1}{2}\left(3\sqrt{3} - 1\right) \approx 2.10.$$

これは 4 より小さいので段は脚立上にあり、また $\sin\theta = \frac{1}{2} > \frac{1}{8}$ なので、仮定どおりロープは張っている。

段の高さ

段は B から BA に沿って距離 βa の位置にあり、BA は鉛直方向と角 θ をなすので、その高さは

$$h = \beta a\cos\theta = \tfrac{1}{2}\left(3\sqrt{3} - 1\right) a\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(9-\sqrt{3})\,a}{4} \approx 1.82a.$$

検算

- $\theta = \frac{\pi}{6}$、$W = a = 1$ のとき：$T = 8\cdot\frac{1}{2} - 1 = 3$、$R_C = \frac{1}{4}(1 + 3\sqrt{3} - 1) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.299$ であり、確かに $R_C \cdot 4\sin\theta = 2.598 = T\cos\theta$ となる。
- 両脚それぞれについて力とモーメントの方程式を別々に解き、θ を $(0, \frac{\pi}{2})$ の範囲で走査する数値計算を行ったところ、β の最大値は $\theta \approx 30^\circ$ で 2.09808 となり、高さは $1.81699a$ であった。

- 極限の場合も筋が通っている：$\sin\theta \to \frac{1}{8}$ のときロープはたるみ、β は負でなければならなくなる。また $\theta \to \frac{\pi}{2}$ のときロープのモーメントの腕の長さ $a\cos\theta$ が 0 に近づくので、やはり β は小さくならざるをえない。したがって、その間に最大値があるのは予想どおりである。

よくある間違い

- A におけるちょうつがいの力を水平と考えてしまうこと。2 本の脚にかかる荷重が異なるので、一般には水平ではない。A のまわりのモーメントをとれば、そもそもこの力を求める必要がない。
- ロープの長さ $DE = 2a\sin\theta$ 全体を伸びとしてしまうこと。伸びは $2a\sin\theta - \frac{a}{4}$ である。
- 問われている高さではなく、$\beta_{\max}$（脚立に沿った距離）を答えてしまうこと。高さを求めるには、さらに因子 $a\cos\theta$ が必要である。

STEP のその先へ

これは、配置（θ）が与えられておらず弾性ロープによって決まる静力学（statics）の問題である。そのため、つりあいの位置は 1 パラメータの族をなし、問題はその族の上での最適化となる。大学では、これは仮想仕事（virtual work）の原理やポテンシャルエネルギー（potential energy）を用いる方法の背後にある考え方である。つりあいの位置はポテンシャルエネルギーの停留点であり、どれが安定かを問うことは分岐理論（bifurcation theory）やカタストロフ理論（catastrophe theory）へとつながる。力学をさらに深めるには、Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい出発点である。

解答例

STEP III 1994、第 12 問

確率・統計 ・ 第一段階解析

> **STEP III 1994、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q12

鍵となる考え方

ゲームを 2 つずつ組にして見る。2 点差はゲーム数が偶数のときにしか生じない。また、2 ゲームを 1 組とすると、各組でどちらの選手もちょうど 1 回ずつサーブ（serve）を担当するので、組が終わるとサーブ権は最初の状態に戻る。すると試合は単純な試行の繰り返しになる。各組は、A が 2 ゲームとも取るか、B が 2 ゲームとも取るか、1 ゲームずつ分け合うかのいずれかであり、分け合った場合は同点の状態に戻る。標準テニス（Standard Tennis）は、最初の 2 組だけを特別に扱った同じ構造である。

解答

以下、全体を通して

$$a = p_A p_B, \qquad b = q_A q_B, \qquad s = p_A q_B + q_A p_B.$$

とおく。各選手が 1 回ずつサーブする連続した 2 ゲームの組において、a は A が 2 ゲームとも取る確率、b は B が 2 ゲームとも取る確率、s は 1 ゲームずつ分け合う確率である（A と B がともにサービスゲームをキープする場合と、ともにブレーク（break）される場合がある）。問題の意図どおり、異なるゲームの結果は互いに独立（independent）であると仮定する。起こりうる結果はこの 3 通りのみであるから、

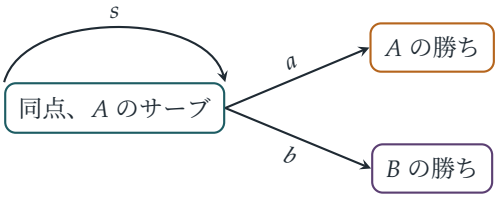
$$a + b + s = (p_A + q_A)(p_B + q_B) = 1.$$

短縮テニス

得点差は 1 ゲームごとに ± 1 だけ変化するので、偶数ゲーム後には偶数、奇数ゲーム後には奇数である。したがって、ちょうど 2 点差が初めて生じうるのは第 $2, 4, 6, \ldots$ ゲ

ームの後に限られ、偶数ゲーム後に試合が続いていれば得点は同点である。

そこで試合を組（第 1–2 ゲーム、第 3–4 ゲーム、…）に分ける。同点で A のサーブから始まるとき、次の組で試合が A の勝ちで終わる確率は a、B の勝ちで終わる確率は b であり、確率 s で再び同点・A のサーブの状態に戻る。このとき状況は最初とまったく同じであるから、



$$P_{\text{short}} = a + sP_{\text{short}} \quad \Longrightarrow \quad P_{\text{short}} = \frac{a}{1-s} = \frac{a}{a+b} = \frac{p_A p_B}{p_A p_B + q_A q_B},$$

となる。ここで $1 - s = a + b$ を用いた。（$1 - s$ で割ってよいのは $s = 1$ でない場合である。$s = 1$ はすべての組が分け合いとなり試合が終わらない退化した場合である。）

B が先にサーブする場合、各組は B のサービスゲームの後に A のサービスゲームが続く形になる。A が 2 ゲームとも取る確率、B が 2 ゲームとも取る確率、分け合う確率はそれぞれ $p_B p_A$、$q_B q_A$、$q_B p_A + p_B q_A$ であり、組の中の 2 ゲームの順序は関係しないので、これらは同じ a、b、s である。同じ議論から同じ答えが得られるので、P_{short} はどちらが先にサーブするかによらない。

4 ゲームで決着する場合

4 ゲームが終わるまでは何も決着しない。4 ゲーム後（2 組、A が先にサーブ）の得点差は偶数であり、試合が決着するのはスコアが 4–0、3–1、1–3、0–4 のときであり、かつそのときに限る。2 つの組を用いて表すと次のようになる。

- A の 4–0：A が両方の組を取る。確率は $a^2 = p_A^2 p_B^2$。
- 0–4：B が両方の組を取る。確率は $b^2 = q_A^2 q_B^2$。
- A の 3–1：A が一方の組を取り、もう一方の組は分け合う。順序は 2 通りあり、確率は $2as$。
- 1–3：同様に $2bs$。

これらを加えて、

$$\Pr(4 \text{ ゲームで決着}) = p_A^2 p_B^2 + q_A^2 q_B^2 + 2(p_A p_B + q_A q_B)(p_A q_B + q_A p_B),$$

となり、求める結果が得られた。

確率が等しい場合の標準テニス

4 ゲームで決着しなければ、スコアは 2–2 である。これが起こる確率は s^2+2ab である（両方の組を分け合うか、各選手が 1 組ずつ取るかで、後者の順序は 2 通り）。2–2 からの「2 点差をつける」という規則は、同点からの短縮テニスの規則とまったく同じであり、第 5 ゲームは A がサーブする。よってそこから A が勝つ確率は P_{short} である。したがって一般に

$$P_{\text{stan}} = a^2 + 2as + (s^2+2ab)P_{\text{short}}.$$

ここで $p_A = p_B = p$、$q_A = q_B = q$ とおくと、$a = p^2$、$b = q^2$、$s = 2pq$、$P_{\text{short}} = \dfrac{p^2}{p^2+q^2}$ である。よって

$$P_{\text{stan}} = p^4 + 4p^3q + \frac{6p^4q^2}{p^2+q^2}.$$

考えてみよう すべてを p と q のべきで展開せずに、P_{stan} と P_{short} を比較する方法はあるだろうか。

ある。短縮テニスを同じ最初の 4 ゲームにわたって展開すればよい。$P_{\text{short}} = a + sP_{\text{short}}$ を 2 回用いると、

$$P_{\text{short}} = a + as + s^2P_{\text{short}}.$$

言葉で言えば、A が第 1 組を取るか、第 1 組を分け合って A が第 2 組を取るか、両方の組を分け合って最初からやり直すか、である。これを P_{stan} の式から引くと、s^2P_{short} の項が打ち消し合う。

$$\begin{aligned} P_{\text{stan}} - P_{\text{short}} &= a^2 + as - a + 2abP_{\text{short}} \\ &= a(a+s-1) + 2abP_{\text{short}} \\ &= -ab + \frac{2a^2b}{a+b} \qquad (a+s-1 = -b \text{ より}) \\ &= \frac{ab(a-b)}{a+b}. \end{aligned}$$

これは任意の p_A、p_B について成り立つ。$a = p^2$、$b = q^2$ とすると、$p+q = 1$ であるから

$$P_{\text{stan}} - P_{\text{short}} = \frac{p^2q^2(p^2-q^2)}{p^2+q^2} = \frac{p^2q^2(p-q)(p+q)}{p^2+q^2} = \frac{p^2q^2(p-q)}{p^2+q^2},$$

となる。これが求める結果である。

その理由は計算の過程に表れている。2 つの形式で結果が異なるのは、A が第 1 組を取り B が第 2 組を取る場合と、その逆の場合だけである。短縮テニスではこの場合、第 1 組を取った方の勝ちとなるが、標準テニスでは 2–2 から試合を続ける。どちらの順序も確率は ab であるから、差は $ab(2P_{\text{short}}-1)$ となり、強い方の選手に有利にはたらく。

検算

- $p = q = \frac{1}{2}$ のとき差は 0 であり、対称性から当然そうなるべきである。実際、どちらの確率も $\frac{1}{2}$ である。
- $p = 0.6$ のとき、$P_{\text{short}} = 0.36/0.52 \approx 0.6923$、$P_{\text{stan}} = 0.1296 + 0.3456 + 0.124416/0.52 \approx 0.7145$ であり、その差 0.02215 は $0.0576 \times 0.2/0.52$ と一致する。
- 4 ゲームで決着する確率 $a^2 + b^2 + 2(a+b)s$ と 2–2 に達する確率 $s^2 + 2ab$ の和は、当然そうなるべきとおり $(a+b+s)^2 = 1$ である。
- 実際の規則をコンピュータでシミュレーションすると、$p_A = 0.7$、$p_B = 0.45$ のとき、どちらが先にサーブしても A が短縮テニスに勝つ割合は約 65.6% となり、$0.315/0.48 = 0.65625$ と一致する。

よくある間違い

- 3–1 が 2 通りの順序（分け合ってから取る、取ってから分け合う）で起こりうることを忘れ、係数 2 を落とす。
- ゲームに勝つ確率をすべてのゲームで同じとして扱う。実際にはどちらがサーブするかによって変わるのであり、だからこそ組にまとめることがこれほど有効なのである。
- 無限等比級数（geometric series）を書き下しながら、それが方程式 $P = a + sP$ にほかならないことに気づかない。

STEP のその先へ

組ごとに考えるこの議論は、吸収状態（absorbing states）をもつ**マルコフ連鎖**（Markov chain）の最初の例であり、方程式 $P = a + sP$ は、吸収確率（absorption probabilities）を求める標準的な方法である第一段階解析（first-step analysis）である。同じ考え方で、テニスの 1 セット全体やスカッシュの 1 ゲームに勝つ確率も求めることができ、さらに破産問題（gambler's ruin）やランダムウォーク（random walk）へとつながっていく。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、ランダムウォークとマルコフ連鎖をちょうどこの水準で展開している。

解答例

STEP III 1994、第 13 問

確率・統計 ・ 指数分布に従う寿命

> **STEP III 1994、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q13

鍵となる考え方

すべては指数分布に従う寿命の生存関数（survival function）$\mathrm{P}(T > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ から導かれる。t_0 まで故障しないという条件のもとでの確率は、このような指数関数どうしの割り算にすぎず、これが有名な**無記憶性**（memoryless property）の由来である。2 本のロープがともに切れるまでの時間は、独立な 2 つの寿命の**最大値**（maximum）であり、最大値が t 以下になるのは、それぞれの寿命が t 以下になるときに限る。そこで、まずその分布関数（distribution function）を求め、それを微分する。最後の小問で「2 本が同じ公演中に切れる」とは、2 本のロープが同じ区間 $((n-1)h,\, nh]$ で切れることを意味し、これを n について足し合わせる。その和は等比級数（geometric series）である。

解答

すでに使用中のロープ

ロープの寿命全体を T とおく。$t \geq 0$ に対して

$$\mathrm{P}(T > t) = \int_t^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\, \mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

ロープが t_0 時間もったこと、すなわち $T > t_0$ がわかっている。これからさらにもつ時間を $S = T - t_0$ とおく。$s \geq 0$ に対して、事象 $\{T > t_0 + s\}$ は $\{T > t_0\}$ に含まれるから

$$\mathrm{P}(S > s \mid T > t_0) = \frac{\mathrm{P}(T > t_0 + s)}{\mathrm{P}(T > t_0)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t_0+s)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t_0}} = \mathrm{e}^{-\lambda s}.$$

したがって、残りの時間 S は $s \geq 0$ で確率密度関数（density）$\lambda \mathrm{e}^{-\lambda s}$ をもつ（$s < 0$ では 0）。これは t_0 の値によらず、**同じ**パラメータ λ の指数分布である。

解釈。使用済みのロープは新品とまったく同じだけ信頼できる。ロープは過去の使用を「記憶」しておらず、次の短い時間 δt の間に切れる確率は、どの時点でもおよそ $\lambda\,\delta t$ である（故障率（failure rate）が一定）。これは突然の偶発的な事故による故障には当てはまる。しかし、実際のロープはほつれたり摩耗したりするので現実的ではなく、古いロープほどすぐに切れる可能性が**高い**はずである。故障率が使用時間とともに増加するモデルのほうがよいだろう。このモデルのもとでは違いはないものの、新しいロープにこだわる芸人の姿勢は実際には理にかなっている。

2 本の新しいロープがともに切れるまでの時間

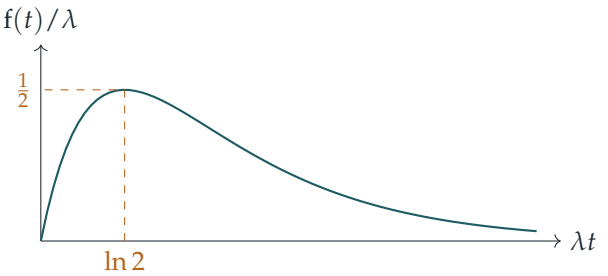
2 本の新しいロープの寿命を T_1, T_2 とする。これらは独立で、それぞれ $t \geq 0$ で分布関数 $\mathrm{P}(T_i \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ をもつ。時刻 t までに 2 本とも切れているのは、遅いほうの故障が起きたときに限るから、求める時間は $M = \max(T_1, T_2)$ である。$M \leq t$ となるのは $T_1 \leq t$ **かつ** $T_2 \leq t$ のとき、かつそのときに限るので、独立性より

$$\mathrm{P}(M \leq t) = \mathrm{P}(T_1 \leq t)\,\mathrm{P}(T_2 \leq t) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^2 \qquad (t \geq 0),$$

であり、$t < 0$ では $\mathrm{P}(M \leq t) = 0$ である。合成関数の微分法（chain rule）を用いて微分すると

$$\mathrm{f}(t) = 2\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right) \cdot \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} = 2\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right) \quad (t \geq 0),$$

となり、$t < 0$ では $\mathrm{f}(t) = 0$ である。これが示すべきことであった。



1 つの指数分布に従う寿命とは異なり、M の密度は $t = 0$ で 0 である。2 つの故障が開始直後に同時に起こることはありえないからである。密度は $\mathrm{e}^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$ となるところで最大になる。

2 本のロープがともに第 n 公演中に切れる確率

第 n 公演は、公演時間の区間 $\big((n-1)h,\, nh\big]$ である。$q = \mathrm{e}^{-\lambda h}$ とおく。1 本のロープについて

$$\mathrm{P}\big((n-1)h < T_i \le nh\big) = \mathrm{e}^{-\lambda(n-1)h} - \mathrm{e}^{-\lambda nh} = q^{n-1}(1-q).$$

考えてみよう $\mathrm{f}(t)$ を第 n 公演の区間で積分すればよいだろうか？

そうではない。$\int_{(n-1)h}^{nh} \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$ は、**2 本目**の故障が第 n 公演中に起こる確率である。1 本目のロープはそれより前の公演で切れているかもしれない。必要なのは**それぞれの**ロープが第 n 公演中に切れることであり、ロープどうしは独立なので

$$p_n = \big(q^{n-1}(1-q)\big)^2 = \mathrm{e}^{-2\lambda(n-1)h}\big(1-\mathrm{e}^{-\lambda h}\big)^2.$$

2 本のロープが同じ公演中に切れる確率

$n = 1, 2, 3, \ldots$ に対する事象「2 本とも第 n 公演中に切れる」は互いに排反であるから、これらを足し合わせればよい。これは公比 $q^2 < 1$ の等比級数である（$\lambda h > 0$ より）：

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = (1-q)^2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{2(n-1)} = \frac{(1-q)^2}{1-q^2} = \frac{1-q}{1+q}.$$

ここで分母と分子に $\mathrm{e}^{\lambda h/2}$ を掛けると

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda h}}{1+\mathrm{e}^{-\lambda h}} = \frac{\mathrm{e}^{\lambda h/2} - \mathrm{e}^{-\lambda h/2}}{\mathrm{e}^{\lambda h/2} + \mathrm{e}^{-\lambda h/2}} = \tanh\left(\frac{\lambda h}{2}\right),$$

となり、求める結果が得られる。

検算

- $\int_0^{\infty} \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = \big[(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})^2\big]_0^{\infty} = 1$ であるから、f は確かに確率密度関数である。
- 極限：$h \to \infty$（終わりのない 1 回の公演）のとき、答え $\tanh(\lambda h/2) \to 1$ である。$h \to 0$ のときは 0 に近づく。連続な 2 つの寿命が非常に小さな共通の区間に入ることはほとんどないからである。h が小さいとき、答えはおよそ $\lambda h/2$ である。
- 数値的には、$\lambda = 0.7$、$h = 0.8$ のとき、級数と $\tanh(0.28)$ はともに 0.27291 を与える。ロープの組 2×10^5 組のシミュレーションでは 0.2746 となり、$p_1 \approx 0.1839$ もシミュレーション値 0.1848 と一致した。

よくある間違い

- 最大値の代わりに**最小値**を使ってしまう。最小値は *1* **本目**のロープが切れるまでの時間であり、パラメータ 2λ の指数分布に従う。
- p_n を求めるのに f を第 n 公演の区間で積分してしまう。それらの確率を足し合わせると $\tanh(\lambda h/2)$ ではなく 1 になる。

STEP のその先へ

無記憶性は指数分布を特徴づける。すなわち、この性質をもつ連続分布は指数分布だけである。信頼性理論（reliability theory）において、「故障率」（ハザード関数（hazard function））$\mathrm{f}(t)/\mathrm{P}(T > t)$ が一定になるのは指数分布の場合だけである。摩耗は増加するハザードでモデル化され、たとえばワイブル分布（Weibull distribution）が用いられる。独立な確率変数の最大値と最小値は**順序統計量**（order statistics）の両極端の場合であり、大学で最初に学ぶ確率論の講義で出会うことになる。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、これらすべてを扱っている。

解答例

STEP III 1994、第 14 問

確率・統計 ・ 幾何的確率

STEP III 1994、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/94-s3-q14

鍵となる考え方

円に内接する角、すなわち円周角（inscribed angle）は、向かい合う弧（arc）が中心に張る角、すなわち中心角（central angle）の半分である。したがって三角形の 3 つの角は、P, Q, R が円を切り分けてできる 3 つの弧の長さを円周に対する割合で測ったものに、ちょうど π を掛けたものになる。こうして問題は、円がランダムに 3 つの部分に分けられる様子についての問題となり、それは三角形の内部の面積についての問題になる。

解答

設定

円周上の位置を円周に対する割合で測り、円の「長さ」を 1 とする。回転対称性により P の位置は関係ないので、P を 0 に置く。すると Q と R は、$[0,1)$ 上の一様分布に従う互いに独立な位置にある。

Q と R の位置を小さい順に並べたものを $U < V$ とする。組 (U,V) は面積 $\frac{1}{2}$ の領域 $0 < u < v < 1$ 上で一様に分布するので、その同時密度（joint density）はそこで 2 である。（2 点が一致する確率は 0 であり、以下に現れる境界の場合もすべて確率 0 である。）3 つの弧は

$$X = U, \qquad Y = V - U, \qquad Z = 1 - V, \qquad X + Y + Z = 1.$$

である。変数変換（change of variables）$(u,v) \mapsto (x,y) = (u, v-u)$ のヤコビアン

（Jacobian）は 1 なので、(X, Y) は面積 $\frac{1}{2}$ の三角形

$$T = \{(x, y) : x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\},$$

上で密度 2 をもつ。したがって、以下の確率はどれも T の内部のある**面積の 2 倍**である。

考えてみよう 三角形の各角が弧の π 倍になるのはなぜか？

三角形の R における角は、R を含まない方の弧 PQ に対する円周角である。円周角の定理（inscribed angle theorem）により、それはその弧が中心に張る角の半分である。円周の割合 x にあたる弧は中心に $2\pi x$ の角を張るので、R における角は πx である。各頂点で同じことが成り立つので、PQR の角は $\pi X, \pi Y, \pi Z$ である（そしてその和は当然 π になる）。したがって

$$\text{ある角が次の値を超える：} k\pi \iff \text{対応する弧が次の値を超える：} k.$$

A_X, A_Y, A_Z をそれぞれ事象 $X > k, Y > k, Z > k$ とする。求めたいのは $\mathrm{P}(A_X \cup A_Y \cup A_Z)$ である。

1 つの弧が k を超える場合

$0 \le k \le 1$ のとき：

- A_X は T のうち $x > k$ の部分であり、直角をはさむ 2 辺の長さが $1 - k$ の三角形で、面積は $\frac{1}{2}(1-k)^2$ である。
- A_Y は $y > k$ の部分であり、同じ計算により面積は $\frac{1}{2}(1-k)^2$ である。
- A_Z は $x + y < 1 - k$ の部分であり、直角をはさむ 2 辺の長さが $1 - k$ の隅の三角形で、面積は $\frac{1}{2}(1-k)^2$ である。

2 倍して、$\mathrm{P}(A_X) = \mathrm{P}(A_Y) = \mathrm{P}(A_Z) = (1-k)^2$ を得る。

$\frac{1}{2} \le k \le 1$ の場合

k を超える弧は高々 1 つである。もし 2 つが超えたとすると、その和は $2k \ge 1$ より大きくなるが、3 つの弧の和は 1 だからである。よって事象 A_X, A_Y, A_Z は互いに排反（mutually exclusive）であり、

$$\mathrm{P}(\text{いずれかの角が次の値を超える：} k\pi) = 3(1-k)^2,$$

となって、示すべき式が得られる。

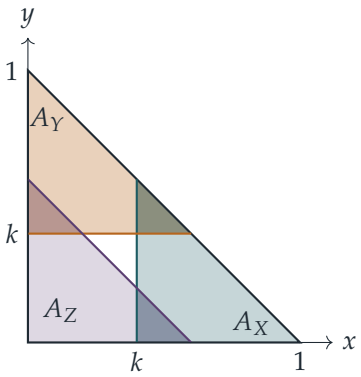
$\frac{1}{3} \le k \le \frac{1}{2}$ の場合

今度は 2 つの弧が同時に k を超えうるので、包除原理（inclusion–exclusion）を用いる。

2 つの弧。 $A_X \cap A_Y$ は T のうち $x > k, y > k, x + y < 1$ の部分である。$x = k + s$, $y = k + t$ と置き換えると、これは $s, t > 0, s + t < 1 - 2k$ となり、直角をはさむ 2 辺の長さが $1 - 2k \ge 0$ で面積が $\frac{1}{2}(1 - 2k)^2$ の三角形である。よって $\mathrm{P}(A_X \cap A_Y) = (1 - 2k)^2$ である。残りの 2 つの組も同じ値を与える。たとえば $A_X \cap A_Z$ は $x > k, y > 0$, $x + y < 1 - k$ であり、これもまた直角をはさむ 2 辺の長さが $1 - 2k$ の三角形である。

3 つの弧。 3 つすべてが k を超えるには $X + Y + Z > 3k \ge 1$ が必要であるが、これは不可能である。よって 3 つの共通部分の確率は 0 である。

下の図は $k = 0.4$ のときの T を示している。3 つの隅の三角形が A_X, A_Y, A_Z であり、色の濃い重なりが 2 つずつの共通部分である。



包除原理により、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_X \cup A_Y \cup A_Z) &= 3(1-k)^2 - 3(1-2k)^2 + 0 \\ &= 3\big[(1-k) - (1-2k)\big]\big[(1-k) + (1-2k)\big] \\ &= 3k(2-3k).\end{aligned}$$

したがって $\frac{1}{3} \le k \le \frac{1}{2}$ のとき、少なくとも 1 つの角が $k\pi$ を超える確率は

$$3k(2-3k) = 6k - 9k^2.$$

である。

検算

- $k = \frac{1}{2}$ では両方の式が $\frac{3}{4}$ を与えるので、2 つの式は連続的につながる。これは、ランダムな内接三角形が鈍角三角形（obtuse triangle）になる確率は $\frac{3}{4}$ であるという

古典的な結果である。

- $k = \frac{1}{3}$ では $3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 1$ を得る。これは正しい。3 つの角の和は π なので、最大の角は常に $\frac{\pi}{3}$ 以上だからである。
- $k = 1$ では 0 を得る。どの角も π を超えることはできないからである。
- 4×10^5 個のランダムな三角形について座標から直接角を計算するシミュレーションを行ったところ、$k = 0.4$ で 0.9602（公式では 0.96）、$k = 0.6$ で 0.4783（公式では 0.48）となった。

よくある間違い

- 3 つ目の頂点を**含まない**方の弧ではなく、弧 PQ 全体を使ってしまう。2 つある弧 PQ のうち、R に向かい合うのは一方だけである。
- X, Y, Z を独立な一様分布として扱ってしまう。これらには $X + Y + Z = 1$ という制約があり、それを正しく扱う方法が面積による見方である。
- $k = \frac{1}{2}$ より小さいところで $3(1-k)^2$ を使ってしまう。$k < \frac{1}{2}$ ではこの式は大きな角を 2 つもつ三角形を二重に数えており、$k = \frac{1}{3}$ では $\frac{4}{3} > 1$ という値を与えてしまう。

STEP のその先へ

弧 (X, Y, Z) は単体（simplex）$x + y + z = 1$ 上に一様に分布する。これはディリクレ分布（Dirichlet distribution）であり、ランダムな点が区間や円を切り分けたときに残る「間隔」（spacings）を記述する。n 個の点の場合も同じ包除原理により $\mathrm{P}(\text{最大の間隔} > k) = \sum_j (-1)^{j+1} \binom{n}{j} (1 - jk)_+^{n-1}$ が得られる。この公式は Whitworth にまでさかのぼる。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）には、幾何学的確率と同時密度についての優れた解説がある。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

1994 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.