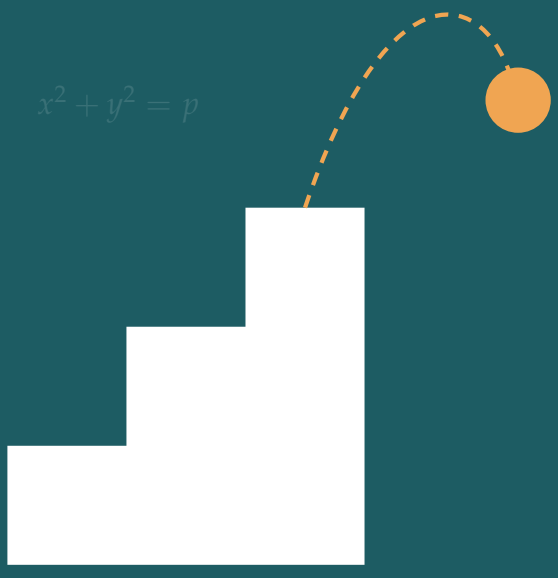
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

1993 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

1993 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

1993 年解答例

1993 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 48 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 さいころの目の和の数え上げ 純粋数学 . . . 3
Q2 等比級数 純粋数学 . . . 7
Q3 ディオファントス方程式 純粋数学 . . . 11
Q4 置換積分 純粋数学 . . . 14
Q5 絶対値と三角不等式 純粋数学 . . . 18
Q6 曲線の概形 純粋数学 . . . 22
Q7 3次式の根 純粋数学 . . . 26
Q8 球とベクトル 純粋数学 . . . 30
Q9 一階微分方程式 純粋数学 . . . 35
Q10 ばねを含むつり合い 力学 . . . 39
Q11 質量中心 力学 . . . 43
Q12 放物体の迎撃 力学 . . . 46
Q13 仕事と仕事率 力学 . . . 50
Q14 指数分布に従う待ち時間 確率・統計 . . . 54
Q15 ベイズの定理 確率・統計 . . . 58
Q16 幾何的確率 確率・統計 . . . 62

STEP II

Q1 組合せゲームの戦略 純粋数学 . . . 66
Q2 三角関数と代数関数の積分 純粋数学 . . . 70
Q3 リッカチ微分方程式 純粋数学 . . . 74
Q4 ねじれの位置にある直線と最短距離 純粋数学 . . . 78
Q5 極方程式の曲線と弧長 純粋数学 . . . 83
Q6 行列代数の反例 純粋数学 . . . 87

Q7 5を法とする無限降下法 純粋数学 91
Q8 数学的帰納法による相加相乗平均の不等式 純粋数学 94
Q9 複素数の偏角 純粋数学 98
Q10 2次形式と2次曲線 純粋数学 102
Q11 速度の2乗に比例する抵抗を受ける運動 力学 106
Q12 摩擦と剛体 力学 110
Q13 単振動 力学 114
Q14 跳ね返りと反発係数 力学 118
Q15 中心極限定理 確率・統計 122
Q16 ポアソン過程 確率・統計 126

STEP III

Q1 弧長と体積 純粋数学 131
Q2 変曲点と極座標による面積 純粋数学 134
Q3 行列のLU分解 純粋数学 138
Q4 級数の和 純粋数学 142
Q5 群と四元数 純粋数学 146
Q6 複素数平面上の軌跡 純粋数学 150
Q7 双曲線関数の連立方程式 純粋数学 154
Q8 空間内の平面と直線 純粋数学 158
Q9 平方和の不等式 純粋数学 162
Q10 行列による変換 純粋数学 167
Q11 偶力と慣性モーメント 力学 171
Q12 弾性ひもとエネルギー 力学 176
Q13 質量が変化する鎖 力学 180
Q14 鉛直面内の円運動 力学 184
Q15 待ち時間の分布 確率・統計 188
Q16 切断正規分布 確率・統計 191

解答例

STEP I 1993、第 1 問

純粋数学 ・ さいころの目の和の数え上げ

> **STEP I 1993、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q1

この問題は、*Beyond STEP* の第 9.6 節「**奇妙なサイコロ**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/strange-dice.html

鍵となる考え方

どの面もそれぞれ異なる色なので、ある合計を出す「出方」とは、各サイコロから面を 1 つずつ選ぶことにほかならない。一方のサイコロに k と書かれた面が a_k 個、他方に b_k 個あるとすると、合計 n を出す出方の数は

$$N(n) = \sum_{i+j=n} a_i\, b_j.$$

である。後半では、表を小さい合計から順に読んでいく。新しい合計ごとに、まだ現れていない未知数は 1 つか 2 つしか入ってこないので、面の個数は 1 つずつ決まっていく。途中で現れる少数の場合分けを排除するだけでよい。

解答

合計 6

1 つ目のサイコロでは、個数は $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 2, a_6 = 1$ である。2 つ目では $b_1 = 1$, $b_3 = 2, b_4 = 1, b_5 = 1, b_6 = 1$ である。合計 6 を出すには、1 つ目のサイコロが 1, 2, 3 のいずれかでなければならない。6 だと 2 つ目のサイコロに 0 が必要になるからである。よって

$$N(6) = a_1 b_5 + a_2 b_4 + a_3 b_3 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7,$$

となり、求める 7 通りが得られる。

新しい番号付けを求める

2 つのサイコロを P, Q とする。$k = 1, \ldots, 6$ に対し、P には k と書かれた面が a_k 個、Q には b_k 個あるとする。これらは非負整数で、

$$a_1 + \cdots + a_6 = b_1 + \cdots + b_6 = 6.$$

を満たす。（確認として、表の値を合計すると $36 = 6 \times 6$ になる。）

合計 2 と 3。 $N(2) = a_1 b_1 = 0$ なので、2 つのサイコロが両方とも 1 をもつことはない。しかし $N(3) = a_1 b_2 + a_2 b_1 = 2$ なので、どちらかのサイコロは 1 をもつ。そのサイコロを P とする。すると $a_1 \geq 1$ かつ $b_1 = 0$ であり、

$$N(3) = a_1 b_2 = 2, \qquad \text{よって} \qquad (a_1, b_2) = (2,1) \text{ または } (1,2).$$

$a_1 = 2, b_2 = 1$ の場合はありえない。 Q は 1 をもたないので $N(7) \geq a_1 b_6 = 2b_6$ であり、$N(7) = 3$ より $b_6 \leq 1$ である。この場合 Q には 2 と書かれた面が 1 つあり、3 や 4 をもたないことを確かめる。

- $N(4) = a_1 b_3 + a_2 b_2 = 2b_3 + a_2 = 1$ なので $2b_3 \leq 1$ であり、$b_3 = 0$、したがって $a_2 = 1$ となる。
- $N(5) = a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 = 2b_4 + 0 + a_3 = 1$ なので、$b_4 = 0$ かつ $a_3 = 1$ である。

よって Q は 2 を 1 つもち、1, 3, 4 をもたず、残りの 5 面は 5 か 6 である。すなわち $b_5 + b_6 = 5$。$b_6 \leq 1$ なので $b_5 \geq 4$ となり、

$$N(6) \geq a_1 b_5 = 2b_5 \geq 8,$$

これは $N(6) = 4$ に矛盾する。したがってこの場合は起こりえない。

ゆえに $a_1 = 1$ かつ $b_2 = 2$。 $b_1 = 0$ であることに注意しながら、表を順に上っていく。

- $N(4) = a_1 b_3 + a_2 b_2 = b_3 + 2a_2 = 1$。$2a_2$ は偶数なので、$a_2 = 0$ かつ $b_3 = 1$ である。
- $N(5) = a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 = b_4 + 0 + 2a_3 = 1$。同様に $a_3 = 0$ かつ $b_4 = 1$ である。
- $N(6) = a_1 b_5 + a_2 b_4 + a_3 b_3 + a_4 b_2 = b_5 + 2a_4 = 4$。

ここまでで Q の面は $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0 + 2 + 1 + 1 = 4$ 個が確定しているので、$b_5 + b_6 = 2$ である。$b_5 = 4 - 2a_4$ より b_5 は偶数なので、$b_5 = 0$ または $b_5 = 2$ である。

考えてみよう $b_5 = 0$ と $b_5 = 2$ のどちらであるかは、どうすれば決まるだろうか。

次の合計を用いる。P は 2 も 3 ももたず、Q は 1 をもたないので、

$$N(7) = a_1 b_6 + a_4 b_3 + a_5 b_2 = b_6 + a_4 + 2a_5 = 3.$$

- $b_5 = 0$ ならば $a_4 = 2$ かつ $b_6 = 2$ である。すると $N(7) \geq b_6 + a_4 = 4 > 3$ となり、ありえない。
- $b_5 = 2$ ならば $a_4 = 1$ かつ $b_6 = 0$ である。すると $N(7) = 0 + 1 + 2a_5 = 3$ より $a_5 = 1$。P の面は $a_1 + a_4 + a_5 = 3$ 個が確定しているので、$a_6 = 3$ である。

表によってすべてが決定された。

$$P:\ 1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 6,\ 6 \qquad\qquad Q:\ 2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5.$$

表の残りを確かめる。 用いたのは合計 2 から 7 だけなので、この番号付けで表の残りの値が得られることを確かめる必要がある。$a_1 = a_4 = a_5 = 1$, $a_6 = 3$ および $b_2 = 2$, $b_3 = b_4 = 1$, $b_5 = 2$ より、

$$\begin{aligned} N(8) &= a_4 b_4 + a_5 b_3 + a_6 b_2 = 1 + 1 + 6 = 8, \\ N(9) &= a_4 b_5 + a_5 b_4 + a_6 b_3 = 2 + 1 + 3 = 6, \\ N(10) &= a_5 b_5 + a_6 b_4 = 2 + 3 = 5, \\ N(11) &= a_6 b_5 = 6, \\ N(12) &= a_6 b_6 = 0. \end{aligned}$$

これらはすべて表と一致する。したがって、サイコロの番号付けは 1,4,5,6,6,6 と 2,2,3,4,5,5 でなければならず、この番号付けで実際に表が得られる。どちらのサイコロをどちらと呼ぶかの入れ替えを除けば、ありうる番号付けはこれだけである。

検算

- 1,4,5,6,6,6 と 2,2,3,4,5,5 の和を 6×6 の表に書き出し、各合計の個数を数えよ。0,2,1,1,4,3,8,6,5,6,0 となるはずである。
- 2 つのサイコロに 1 から 6 の番号を付けるすべての方法（サイコロ 1 個あたり 462 通りの多重集合がある）をコンピュータで探索すると、この組がただ 1 つ見つかり、ほかには見つからない。これにより解の一意性が確認できる。

よくある間違い

- 表に合う番号付けを推測して、そこで終えてしまう。問題は推論を求めているので、表から番号付けが一意に決まることを示す必要がある。
- $a_1 = 2, b_2 = 1$ の場合を忘れる、あるいは理由を示さずに退けてしまう。
- 小さい合計から面の個数を決めたあと、合計 8 から 12 を確かめない。

STEP のその先へ

$N(n)$ をうまくまとめる方法として、母関数（generating function）がある。$p(x) = \sum a_k x^k$, $q(x) = \sum b_k x^k$ とおくと、$p(x)q(x)$ における x^n の係数はちょうど $N(n)$ になる。つまりこの問題は、与えられた多項式を特定の形の 2 つの因子に因数分解せよ、と求めているのである。同じ考え方から**シッカーマンのサイコロ**（Sicherman dice）$1,2,2,3,3,4$ と $1,3,4,5,6,8$ が得られる。これは通常の 2 つのサイコロと同じ合計の分布をもつ。ハーバート・ウィルフ（Herbert Wilf）の *generatingfunctionology* は、この手法への生き生きとした入門書である。

解答例

STEP I 1993、第 2 問

純粋数学 ・ 等比級数

> **STEP I 1993、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q2

鍵となる考え方

どちらの級数も、等比数列（geometric progression）からいくつかの項を取り除いたものである。$S_n(r)$ に現れる指数（exponent）は、3 の倍数**でない**数である。$T_n(r)$ に現れる指数は、偶数である数、**または** 3 の倍数である数である。そこで、それぞれの和を完全な等比数列の組合せとして書き表す。すなわち、等比数列全体をとって不要な項を引くか、二つの等比数列を足して二重に数えた項を引くのである。

解答

偶数乗の和

左辺は初項 1、公比（common ratio）r^2、項数 $n+1$ の等比数列である。これを E とおく。すると

$$E - r^2E = (1 + r^2 + \cdots + r^{2n}) - (r^2 + r^4 + \cdots + r^{2n+2}) = 1 - r^{2n+2},$$

となる。それ以外の項はすべて打ち消し合うからである。$|r| \neq 1$ ならば $r^2 \neq 1$ であるから、$1 - r^2$ で割ることができて

$$1 + r^2 + r^4 + \cdots + r^{2n} = \frac{1 - r^{2n+2}}{1 - r^2},$$

を得る。これが示すべき式である。（実数 r については、条件 $r^2 \neq 1$ はちょうど $|r| \neq 1$ と同値である。）

級数 $S_n(r)$

指数 $1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, \ldots, 3n-1$ は、1 から $3n-1$ までの整数のうち 3 の倍数でないものである。これらは $k = 0, 1, \ldots, n-1$ に対して $3k+1$, $3k+2$ という組になって現れる。よって

$$S_n(r) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(r^{3k+1} + r^{3k+2}\right) = (r + r^2) \sum_{k=0}^{n-1} r^{3k}.$$

最後の和は公比 r^3、項数 n の等比数列である。実数 r について、$r \neq 1$ ならば $r^3 \neq 1$ であるから

$$S_n(r) = \frac{r(1+r)(1-r^{3n})}{1-r^3}.$$

同じことであるが、すべての累乗 $r, r^2, \ldots, r^{3n}$ をとり、そこから 3 の倍数乗を取り除いてもよい：

$$S_n(r) = \frac{r(1-r^{3n})}{1-r} - \frac{r^3(1-r^{3n})}{1-r^3}.$$

極限（limit）を求めるのに必要なのは、この二つ目の形である。

極限。 $|r| < 1$ ならば、$n \to \infty$ のとき $|r^{3n}| = |r|^{3n} \to 0$ である。したがって

$$S_n(r) \to \frac{r}{1-r} - \frac{r^3}{1-r^3}.$$

ここで $\dfrac{r}{1-r} = \dfrac{1}{1-r} - 1$ および $\dfrac{r^3}{1-r^3} = \dfrac{1}{1-r^3} - 1$ である。二つの -1 は打ち消し合い、

$$S_n(r) \to \frac{1}{1-r} - \frac{1}{1-r^3},$$

が残る。これが示すべき式である。

級数 $T_n(r)$

指数 $0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots, 6n$ は、0 から $6n$ までの整数のうち、偶数であるか 3 で割り切れる（あるいはその両方である）ものである。

> **考えてみよう** 偶数乗の項と 3 の倍数乗の項を足し合わせると、どの項を二重に数えたことになるか？

指数が偶数であり、かつ 3 の倍数であるのは、ちょうどそれが 6 の倍数であるときである。そこで包除原理（inclusion–exclusion）を用いる。すなわち、偶数乗の項を足し、3 の倍数乗の項を足し、6 の倍数乗の項を引く。$6n$ までには次のものがある。

- 偶数乗 $r^0, r^2, \ldots, r^{6n}$。これは公比 r^2、項数 $3n+1$ の等比数列をなす。
- 3 の倍数乗 $r^0, r^3, \ldots, r^{6n}$。これは公比 r^3、項数 $2n+1$ の等比数列をなす。

- 6 の倍数乗 $r^0, r^6, \ldots, r^{6n}$。これは公比 r^6、項数 $n+1$ の等比数列をなす。

最初の結果で n を $3n$ に置き換えたものと、公比 r^3 および r^6 に対する同様の議論とを合わせると

$$\mathrm{T}_n(r) = \frac{1-r^{6n+2}}{1-r^2} + \frac{1-r^{6n+3}}{1-r^3} - \frac{1-r^{6n+6}}{1-r^6}.$$

$|r| \neq 1$ であるから、どの分母も 0 ではない。問題がここでは $|r| \neq 1$ を要求し、S_n に対しては $r \neq 1$ しか要求しないのはこのためである。$r = -1$ のとき $1-r^2$ と $1-r^6$ が 0 になってしまう。

極限。 $|r| < 1$ ならば、r^{6n+2}、r^{6n+3}、r^{6n+6} はいずれも 0 に収束する。よって

$$\mathrm{T}_n(r) \to \frac{1}{1-r^2} + \frac{1}{1-r^3} - \frac{1}{1-r^6}.$$

$1-r^6 = (1-r^2)(1+r^2+r^4) = (1-r^3)(1+r^3)$ を用いて共通分母 $1-r^6$ で通分すると、次のように整理される：

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{T}_n(r) = \frac{(1+r^2+r^4)+(1+r^3)-1}{1-r^6} = \frac{1+r^2+r^3+r^4}{1-r^6}.$$

$r > 1$、$r = 1$、$r = -1$ の場合

まず項の数を数える。連続する六つの指数 $6k, 6k+1, \ldots, 6k+5$ からなる各ブロックのうち、偶数であるか 3 で割り切れるものは $6k, 6k+2, 6k+3, 6k+4$ の四つである。ブロック $k = 0, \ldots, n-1$ は $6n-1$ までの指数を覆い、最後の項は r^{6n} である。よって $\mathrm{T}_n(r)$ の項数は $4n+1$ である。

- $r > 1$：どの項 r^e も $r^e \geq 1$ を満たすから $\mathrm{T}_n(r) \geq 4n+1$ であり、したがって $\mathrm{T}_n(r) \to \infty$ である。
- $r = 1$：どの項も 1 に等しいから、$\mathrm{T}_n(1) = 4n+1 \to \infty$ である。この場合は分母が 0 になるので、公式は使えない。
- $r = -1$：$(-1)^e$ は、偶数の e に対して $+1$、奇数の e に対して -1 である。各ブロックで指数 $6k, 6k+2, 6k+4$ は偶数、$6k+3$ は奇数であるから、各ブロックの寄与は $1+1-1+1=2$ である。よって

$$\mathrm{T}_n(-1) = 2n+1 \to \infty.$$

三つの場合のいずれにおいても、$\mathrm{T}_n(r)$ は $+\infty$ に発散（diverge）する。$r = -1$ の場合も発散することに注意しよう。奇数である 3 の倍数乗の項は、偶数乗の項を十分には打ち消さないのである。これを、単に振動（oscillate）するだけの $1-1+1-\cdots$ のような単純な交代級数と比べてみるとよい。

検算

- S_n の公式に $n = 1$ を代入すると $\frac{r(1+r)(1-r^3)}{1-r^3} = r + r^2$ となり、正しい。
- T_n の極限に $r = \frac{1}{2}$ を代入する。公式からは $\frac{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{64}} = \frac{92}{63} \approx 1.4603$ が得られ、$T_n(\frac{1}{2})$ の項を直接数百項足し合わせても同じ値になる。
- $r \to 1^-$ のとき、T_n の極限は $\frac{4}{6(1-r)} = \frac{2}{3(1-r)}$ のように振る舞う。これは、累乗の六つのうち四つが現れていて、全体の級数 $\frac{1}{1-r}$ のおよそ 3 分の 2 になっていることと整合する。

よくある間違い

- 6 の倍数乗を引き忘れ、$1, r^6, r^{12}, \ldots$ を二重に数えてしまう。
- 各等比数列の項数を間違える。0 から $6n$ までの偶数の指数は $3n + 1$ 個であり、$3n$ 個ではない。
- 実際にブロック一つ分の項を足し合わせてみることなく、$T_n(-1)$ が交代級数のように振動すると思い込む。

STEP のその先へ

二つの集合の要素数を足して共通部分の要素数を引くことで和集合の要素を数える方法は、**包除原理**と呼ばれる。母関数（generating function）と組み合わせると、これは組合せ論や数論における標準的な道具となる。実際、ここで求めた極限は、6 と共通の約数をもつ非負整数の母関数である。同じ篩（ふるい）の考え方をすべての素数に適用すると、リーマン（Riemann）ゼータ関数に対するオイラー（Euler）の積公式が得られる。大学の解析学では、「$|r| < 1$ のとき $r^n \to 0$」という段階を厳密に扱い、無限級数をこのように並べ替えてよいのはどのような場合かを問う。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）はこの話題をよく扱っている。

解答例

STEP I 1993、第 3 問

純粋数学 ・ ディオファントス方程式

> **STEP I 1993、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q3

鍵となる考え方

$p \le q \le r$ であるから、逆数（reciprocal）$\frac{1}{p}$ は 3 つの項のうち**最大**のものである。したがって和は高々 $\frac{3}{p}$ であり、これにより p はわずか 2 つほどの値に絞られる。p を固定すれば、残りの 2 項に同じ工夫を施すことで q が抑えられ、さらに r が決まる。要するに、大小関係を用いて、3 つの未知数を含む方程式（あるいは不等式（inequality））を、短い有限個の場合の確認に帰着させるという考え方である。

解答

小問 (i)

$1 \le p \le q \le r$ であるから、$\frac{1}{r} \le \frac{1}{q} \le \frac{1}{p}$ が成り立つ。よって

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \le \frac{3}{p},$$

となり、$p \le 3$ を得る。また $p \neq 1$ である。なぜなら、$p = 1$ とすると $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 0$ となるが、これは正の q, r に対しては不可能だからである。したがって $p = 2$ または $p = 3$ である。

$p = 2$ の場合。このとき $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$ である。$\frac{1}{r} \le \frac{1}{q}$ であるから

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \le \frac{2}{q} \quad \Longrightarrow \quad q \le 4,$$

であり、また $\frac{1}{r} > 0$ より $\frac{1}{q} < \frac{1}{2}$ でなければならないので、$q \ge 3$ である。

- $q = 3$：$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ より $r = 6$。

▶ $q=4$：$\frac{1}{r}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ より $r=4$。

$p=3$ の場合。このとき $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{2}{3}\le\frac{2}{q}$ であるから $q\le 3$ である。$q\ge p=3$ と合わせると $q=3$ に限られ、すると $\frac{1}{r}=\frac{1}{3}$ より $r=3$ である。

すべての場合を調べ尽くしたので、解は

$$(p,q,r)=(2,3,6),\quad (2,4,4),\quad (3,3,3),$$

のみであり、これ以外には存在しない。

小問 (ii)

$p=1$ ならば、任意の q と r に対して和は $1+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1$ となる。これが問題文で与えられている解である。（大小関係 $p\le q\le r$ より、これらは $1\le n\le m$ として $q=n$、$r=m$ としたものである。問題文に書かれた m と n の間の不等号は向きが逆になっているが、影響はない。$p=1$ は任意の q と r に対して成り立つからである。）そこで、$p\ge 2$ である解を探す。

先ほどと同様に $\frac{1}{p}$ が最大の項であるから

$$1<\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\le\frac{3}{p}\quad\Longrightarrow\quad p<3.$$

$p\ge 2$ と合わせて $p=2$ を得る。このとき

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>\frac{1}{2}.$$

が成り立つ必要がある。

> **考えてみよう** q に対する評価で、なぜ今度は不等号が狭義（strict）になるのか。また、それは重要なのか。

$\frac{1}{r}\le\frac{1}{q}$ であるから、$\frac{1}{2}<\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\le\frac{2}{q}$ となり、$q<4$ である。$q=4$ を除外するのは、まさにこの狭義の不等号である。（小問 (i) では $q=4$ が許され、等号成立の場合（equality case）$(2,4,4)$ を与えた。）$q\ge p=2$ と合わせて、$q=2$ または $q=3$ を得る。

▶ $q=2$：和は $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{r}=1+\frac{1}{r}>1$ となり、これは**すべての** r に対して成り立つ。よって $(2,2,r)$ は $r\ge 2$ であるすべての整数 r に対して解である。

▶ $q=3$：$\frac{1}{r}>\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ が必要であるから $r<6$ である。$r\ge q=3$ と合わせて $r=3,4,5$ を得る。

以上より、$p=1$ の族を除けば、解は

$$(p,q,r)=(2,2,r)\ \text{任意の整数}r\ge 2,\qquad (2,3,3),\quad (2,3,4),\quad (2,3,5).$$

である。上の各段階はすべて必然的に導かれたものであるから、これ以外の解は存在しない。

検算

直接代入してみる。たとえば $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}>1$ であるが、$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ はちょうど等しい。これにより、$(2,3,5)$ が $q=3$ の族の最後のものであり、$(2,3,6)$ が小問 (i) から来る境界の場合であることがわかる。同様に $(2,4,4)$ はちょうど 1 を与えるので、$p=2$、$q=4$ のものは小問 (ii) には一つも入らない。$1\le p\le q\le r<400$ のすべてについてコンピュータで探索すると、両方の解のリストがぴったり一致することが確かめられる。

よくある間違い

- 小問 (ii) で無限族 $(2,2,r)$ を見落とすこと。$p=q=2$ となった時点で、最初の 2 項だけで和はすでに 1 になっている。
- 小問 (ii) で $p<3$ の代わりに $p\le 3$ と書き、$p=3$ の場合（和は高々 1 にしかならない）に時間を浪費すること。
- すべての場合を調べ尽くしたことを示さずに、解のリストだけを述べること。「これ以外には存在しない」ことの証明が配点の半分を占める。

STEP のその先へ

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1$ の解は、角が $\frac{\pi}{p},\frac{\pi}{q},\frac{\pi}{r}$ である三角形が球面上に存在するような 3 つ組とちょうど一致する。これらは 3 次元における有限対称性群（finite symmetry group）に対応している。すなわち、二面体群（dihedral）$(2,2,r)$、正四面体群（tetrahedral）$(2,3,3)$、正八面体群（octahedral）$(2,3,4)$、正二十面体群（icosahedral）$(2,3,5)$ である。小問 (i) は平らな平面の 3 種類の正則な平面充填（regular tiling）を与える。このように整数の範囲で解く方程式を、ディオファントス方程式（Diophantine equation）という。Davenport の *The Higher Arithmetic*（整数論の入門書）は良い入門書であり、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）は対称性群を扱っている。

解答例

STEP I 1993、第 4 問

純粋数学 ・ 置換積分

STEP I 1993、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s1-q4

鍵となる考え方

置換 (substitution) $t = \pi - x$ は区間 $[0, \pi]$ をそれ自身に折り返し、しかも $\sin(\pi - t) = \sin t$ であるから $\sin x$ を変えない。そのため厄介な因子 x は $\pi - t$ に変わり、求めたい積分が右辺にマイナス符号付きで再び現れる。これにより、その積分について解くことができる。後に続く積分では、主な作業は $1 + \cos^2 x$ を $\sin x$ で表すことである。$[\pi, 2\pi]$ 上では、π だけずらすことで $[0, \pi]$ に戻すことができる。

解答

一般的な結果

$I = \int_0^\pi x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$ とおき、$t = \pi - x$ とする。このとき $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$ である。$x = 0$ のとき $t = \pi$、$x = \pi$ のとき $t = 0$ である。また $\sin x = \sin(\pi - t) = \sin t$ である。よって

$$\begin{aligned} I &= \int_\pi^0 (\pi - t)\,\mathrm{f}(\sin t)\,(-\mathrm{d}t) = \int_0^\pi (\pi - t)\,\mathrm{f}(\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin t)\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi t\,\mathrm{f}(\sin t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

積分変数の名前は関係ないので、最後の積分は再び I である。したがって $2I = \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin t)\,\mathrm{d}t$ となり、

$$\int_0^\pi x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x,$$

が示された。(積分が存在することが必要であり、たとえば f が $[-1, 1]$ 上で連続であればよい。)

$[0,\pi]$ 上の積分

考えてみよう 被積分関数（integrand）には $\sin x$ だけでなく $\cos^2 x$ も含まれている。これは本当に $x\,\mathrm{f}(\sin x)$ の形をしているだろうか？

している。$\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ であるから $1+\cos^2 x = 2-\sin^2 x$ となり、

$$\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} = x\,\mathrm{f}(\sin x) \qquad \text{ただし} \qquad \mathrm{f}(s) = \frac{s}{2-s^2},$$

であって、f は $[-1,1]$ 上で連続である。一般的な結果により、

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

残った積分は、$\sin x$ が $\cos x$ の導関数（derivative）の -1 倍であるから易しい。$u=\cos x$、$\mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$ と置換すると、

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{-1} \frac{-\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \Big[\arctan u\Big]_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \Big(-\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

したがって

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

$[0,2\pi]$ 上の積分

一般的な結果は $[0,\pi]$ にしか適用できないので、積分範囲を分割する：

$$\int_0^{2\pi} = \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi}.$$

考えてみよう $\int_\pi^{2\pi}$ を $[0,\pi]$ 上の積分に戻すにはどうすればよいか？

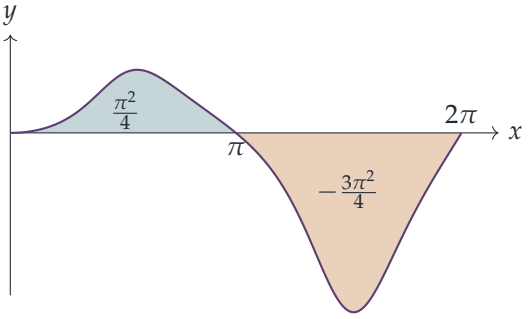
π だけずらす。$x = u+\pi$ とおくと、u は 0 から π まで動く。このとき $\sin x = -\sin u$、$\cos x = -\cos u$ であるから $\cos^2 x = \cos^2 u$ である。よって

$$\begin{aligned}\int_\pi^{2\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \frac{(u+\pi)(-\sin u)}{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u \\ &= -\int_0^\pi \frac{u\sin u}{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u - \pi\int_0^\pi \frac{\sin u}{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{\pi^2}{4} - \pi\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi^2}{4},\end{aligned}$$

ここで前の小問の二つの結果を用いた。二つの部分を足し合わせると、

$$\int_0^{2\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4} - \frac{3\pi^2}{4} = -\frac{\pi^2}{2}.$$

答えが負になる理由はグラフからわかる。$[\pi, 2\pi]$ 上では因子 $\sin x$ が負であり、しかもそこでは因子 x が $[0, \pi]$ 上より大きい。そのため、軸より下の面積が軸より上の面積を上回るのである。



検算

- $\mathrm{f} \equiv 1$ とすると、一般的な結果は $\int_0^\pi x \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \cdot \pi = \frac{\pi^2}{2}$ を与え、これは正しい。
- 被積分関数は $(0, \pi)$ 上で正であるから、一つ目の答えは正でなければならず、実際 $\pi^2/4 \approx 2.467$ は正である。シンプソンの公式（Simpson's rule）によると一つ目の積分は 2.4674011、二つ目の積分は -4.9348022 となり、$\pi^2/4$ および $-\pi^2/2$ と一致する。
- 一般的な恒等式も、f をいくつか無作為に選んで数値的に確かめられる。

よくある間違い

- 一般的な結果を $[0, 2\pi]$ 上でそのまま適用してしまう。この結果は折り返し $x \mapsto \pi - x$ が区間をそれ自身に写すことに依存しており、$[0, 2\pi]$ 上で用いると誤った答え $\frac{\pi}{2} \cdot 0 = 0$ を与える（そこでの正しい折り返しは $x \mapsto 2\pi - x$ であり、これによって $\sin x$ は符号を変える）。
- $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$ のマイナス符号を落とす、あるいは積分の上端と下端を入れ替えて戻すのを忘れる。
- $\arctan(-1) = 3\pi/4$ と書いてしまう。逆正接関数（arctangent）の値は $(-\pi/2, \pi/2)$ に含まれるので、$\arctan(-1) = -\pi/4$ である。

STEP のその先へ

ここでの工夫は、被積分関数がほぼ保つような積分範囲の対称性（symmetry）を利用すること、すなわち x を $\pi - x$ で置き換え、積分の二つの表示を平均することである。同じ考え方により、積分計算をまったくせずに $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ が得られる。大学では、このような対称性による議論は解析学（analysis）の至るところに現れ、フーリエ級数（Fourier series）においても関数の偶奇性（parity）がどの項が残るかを決める。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）にはこの種の置換を用いる STEP 形式の演習がさらに収められており、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学を理解する）では変数変換（change of variables）の公式が厳密に扱われている。

解答例

STEP I 1993、第 5 問

純粋数学 • 絶対値と三角不等式

> **STEP I 1993、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q5

鍵となる考え方

すべては三角不等式（triangle inequality）に基づいている。和の長さは長さの和以下である。これを項ごとに適用すると、多項式は $|z|$ の等比級数（geometric series）で上から抑えられ、$|z| \leq \frac{1}{2}$ のもとではその級数は厳密に 1 より小さいままである。根（root）では多項式部分が -1 に等しくならなければならず、これは絶対値（modulus）がちょうど 1 である。したがって、根は円板 $|z| \leq \frac{1}{2}$ の中にはありえない。

解答

絶対値と積の法則

x, y を実数として $z = x + \mathrm{i}y$ とすると、その絶対値は原点から点 (x, y) までの距離である。

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{(非負の平方根)}.$$

a, b, c, d を実数として $z_1 = a + \mathrm{i}b$、$z_2 = c + \mathrm{i}d$ とする。このとき $z_1 z_2 = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc)$ であるから、

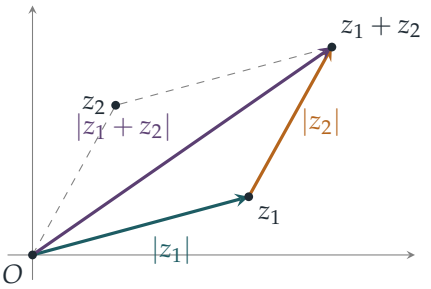
$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\ &= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 \\ &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z_1|^2 |z_2|^2. \end{aligned}$$

$|z_1 z_2|$ と $|z_1||z_2|$ はともに非負であるから、平方根をとって $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ を得る。これが示すべきことであった。

三角不等式

複素平面（Argand diagram）において、原点を O、点 z_1 を A、点 z_1+z_2 を C とする。このとき $\overrightarrow{AC}$ は z_2 を表す（O から z_2 へのベクトルと同じベクトルである）。よって OAC は次の辺の長さをもつ三角形である。

$$OA = |z_1|, \qquad AC = |z_2|, \qquad OC = |z_1+z_2|.$$



2 点を結ぶ最短の経路は線分である。O から C へ直接行く経路は、A を経由する経路より長くはない。よって

$$|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|,$$

が成り立つ。等号が成り立つのは、O、A、C が一直線上にあり A がその間にあるとき、すなわち z_1 と z_2 が同じ向きを向いているとき（またはどちらか一方が 0 のとき）に限る。

代数的に示したければ、共役複素数（conjugate）を $\bar{z}$ で表すと、

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \\ &\le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1|+|z_2|)^2, \end{aligned}$$

となる。複素数の実部はその絶対値以下であり、また積の法則により $|z_1\bar{z}_2| = |z_1||z_2|$ だからである。

この不等式を繰り返し適用すると（項数に関する簡単な数学的帰納法（induction）による）、任意の複素数 $w_1, \ldots, w_n$ に対して

$$|w_1 + w_2 + \cdots + w_n| \le |w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n|$$

が成り立つ。

多項式の評価

各 j について $|a_j| \le 1$ であり、$|z| \le \frac{1}{2}$ であるとする。このとき

$$\begin{aligned}\left|a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z\right| &\le |a_n||z|^n + |a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_1||z| \\ &\le |z|^n + |z|^{n-1} + \cdots + |z| \\ &\le \left(\tfrac{1}{2}\right)^n + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots + \tfrac{1}{2} \\ &= 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \\ &< 1.\end{aligned}$$

1 行目は n 項の三角不等式と積の法則（繰り返し用いて $|a_k z^k| = |a_k||z|^k$ とする）による。2 行目では $|a_j| \le 1$ を、3 行目では $0 \le |z| \le \frac{1}{2}$ を用い、4 行目では有限等比級数の和を計算している。これが求める狭義の不等式（strict inequality）である。

> **考えてみよう** 狭義の不等式はどこから来るのか。上の各段階は「$\le$」にすぎない。

それは有限等比級数から来る。$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ は 1 にちょうど $\frac{1}{2^n} > 0$ だけ足りない。この差こそが、結論を導くのに必要なものである。

根

（問題文の最後の行には $|x| > \frac{1}{2}$ とあるが、これは明らかに $|w| > \frac{1}{2}$ の誤植である。議論の対象となっている根は w だからである。）

w を根とすると、

$$a_n w^n + a_{n-1}w^{n-1} + \cdots + a_1 w = -1, \qquad \text{したがって} \qquad |a_n w^n + \cdots + a_1 w| = |-1| = 1.$$

背理法（proof by contradiction）により、$|w| \le \frac{1}{2}$ と仮定する。このとき前の部分で $z = w$ とすると $|a_n w^n + \cdots + a_1 w| < 1$ となり、絶対値がちょうど 1 であることに矛盾する。したがって、すべての根は $|w| > \frac{1}{2}$ を満たす。

検算

- この評価は極限において達成される。すべての $a_j = 1$ とし $z = \frac{1}{2}$ とすると、左辺はちょうど $1 - 2^{-n}$ となる。
- 根に関する結果も最良である。すべての $a_j = -1$ とすると $1 - z - z^2 - \cdots - z^n = 0$ となり、その正の根は $n = 1$ のとき 1、$n = 2$ のとき 0.618（黄金比の共役（golden

ratio conjugate))、$n = 5$ のとき 0.5087、$n = 10$ のとき 0.50025 である。常に $\frac{1}{2}$ より大きいが、そこへ近づいていく。

- 数値的にも、単位円板内の a_j と半径 $\frac{1}{2}$ の円板内の z を無作為に 50 000 通り選んで試し（見つかった最大値は 0.79）、さらにそのような無作為な多項式 2000 個のすべての根を求めた。根の絶対値の最小値は 0.562 であった。

よくある間違い

- $|a_1 z + \cdots + a_n z^n| = |a_1||z| + \cdots + |a_n||z|^n$ と書いてしまう。三角不等式から得られるのは「$\leq$」だけである。
- 無限和 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 1$ を使ってしまう。これでは ≤ 1 しか得られず、結論が導けなくなる。有限和を使うこと。
- $|z^k| = |z|^k$ の根拠を示し忘れる。これは直前に証明した積の法則から従う。

STEP のその先へ

これは、数値的な求根法を支える多項式の根の評価の初歩版である。コーシー（Cauchy）の評価は、多項式のすべての根を、係数の大きさだけで決まる半径の円板の中に収める。また、同じ「支配的な項が勝つ」という議論は、複素解析（complex analysis）におけるルーシェの定理（Rouché's theorem）の原動力となっている。三角不等式そのものは**距離**（metric）を定義する性質であり、距離は大学 1 年次の解析学の中心にある抽象的な概念である。これらすべてを美しく幾何的に扱ったものとして、Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚で捉える複素解析）を読むとよい。

解答例

STEP I 1993、第 6 問

純粋数学 • 曲線の概形

> **STEP I 1993、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q6

鍵となる考え方

すべては、$N = 10^{100}$ のとき x^N がどう振る舞うかにかかっている。$|x| < 1$ ならば、たとえ 1 をわずかに下回るだけでも x^N は想像を絶するほど小さい。$|x| > 1$ ならば、たとえ 1 をわずかに上回るだけでも想像を絶するほど大きい。そして $x = \pm 1$ ではちょうど 1 である（N が偶数だからである）。したがって分数 $x^N/(1+x^N)$ はスイッチ（switch）のように振る舞う。$(-1, 1)$ の内側では 0、外側では 1 である。h については逆の考え方になる。$10^{-N}x$ は非常に小さいので、sin はその引数と区別がつかない。

解答

以下を通して、次のようにおく。

$$s(x) = \frac{x^N}{1+x^N} = \frac{1}{1+x^{-N}} \quad (x \neq 0), \qquad s(0) = 0,$$

すると $\mathrm{f}(x) = 2 + s(x)$、$\mathrm{g}(x) = x\,s(x)$ である。

f の特徴

- **対称性と値域**（*range*）。 N は偶数なので $x^N = (-x)^N \geq 0$ である。よって f は偶関数（even function）であり、$0 \leq s(x) < 1$ から $2 \leq \mathrm{f}(x) < 3$ が得られる。
- **$|x| < 1$ における高さ** $y = 2$。ここでは $x^N \to 0$ が驚異的な速さで起こる。例えば $0.99^N = 10^{N \log_{10} 0.99} \approx 10^{-4.4 \times 10^{97}}$ である。したがって $s(x) \approx x^N$ はグラフで表せるどんな量よりもはるかに小さく、目に見える精度では $\mathrm{f}(x) = 2$ である。厳密には $\mathrm{f}(0) = 2$ である。

- $|x| > 1$ における高さ $y = 3$。今度は x^{-N} が同じくらい小さいので、$s(x) = 1/(1+x^{-N})$ は目に見える精度で 1 であり、$\mathrm{f}(x) = 3$ となる（下から近づく）。（実際、直線 $y = 3$ は $|x| \to \infty$ のときの漸近線（asymptote）である。）
- $x = \pm 1$ での跳び。$x = \pm 1$ では $x^N = 1$ なので $\mathrm{f}(\pm 1) = \frac{5}{2}$ であり、ちょうど中間の高さである。この関数は連続（continuous）かつ微分可能（differentiable）なので、概形図の鉛直な線分は実際には極めて急な上昇である。微分すると

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{Nx^{N-1}}{(1+x^N)^2}, \qquad \mathrm{f}'(1) = \frac{N}{4} = 2.5 \times 10^{99}.$$

考えてみよう グラフの「鉛直な」部分の幅はどれほど狭いか？

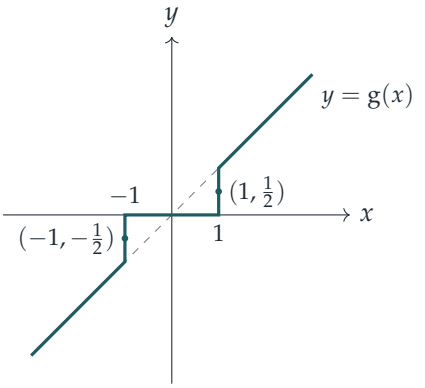
$x = 1 + \delta$（δ は小さい）とおくと、$x^N = \mathrm{e}^{N\ln(1+\delta)} \approx \mathrm{e}^{N\delta}$、$s(x) \approx 1/(1+\mathrm{e}^{-N\delta})$ となる。これは $N\delta$ が $-\ln 99$ から $\ln 99$ まで動く間に 0.01 から 0.99 まで上昇する。すなわち、幅およそ 9×10^{-100} の区間で上昇する。どんな図においても、これは鉛直な線になる。対称性により、$x = -1$ でも同じことが起こる。（また、x^{N-1} は x と同符号なので、f' の符号から、f は $x > 0$ で増加し、$x < 0$ で減少することもわかる。）

g のグラフ

$\mathrm{g}(x) = x\,s(x)$ なので、今度はスイッチ s が直線 $y = x$ に掛けられる。

- $|x| < 1$ では $s(x)$ は無視できるので、目に見える精度で $\mathrm{g}(x) = 0$ である（$x = 0$ では厳密に 0）。
- $|x| > 1$ では $s(x)$ は目に見える精度で 1 なので、$\mathrm{g}(x) = x$ である。正確には $x - \mathrm{g}(x) = \dfrac{x}{1+x^N}$ であり、これは無視できる。
- $x = \pm 1$ では $\mathrm{g}(\pm 1) = \pm\frac{1}{2}$ であり、それぞれの跳びのちょうど中間である。

s は偶関数、x は奇関数なので、g は奇関数（odd function）である。また増加関数でもある。実際 $\mathrm{g}'(x) = s(x) + x\,s'(x)$ であり、x と $s'(x)$ は同符号なので、両方の項が ≥ 0 である。$x = 1$ での傾きは $\mathrm{g}'(1) = \frac{1}{2} + \frac{N}{4}$ なので、ここでも見かけ上鉛直な跳びが現れる。今回は $x = 1$ で 0 から 1 へ、$x = -1$ で -1 から 0 へ上がる。



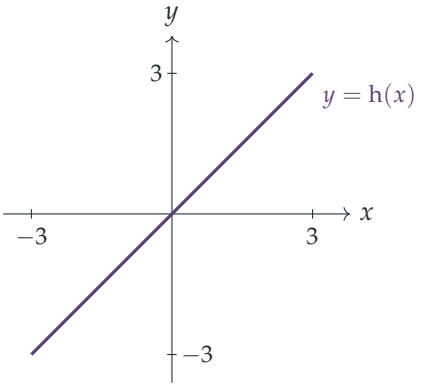
$[-3,3]$ 上の g の概形。$(-1,1)$ 上では零、その外側では直線 $y=x$（破線）であり、両者は $(\pm1,\pm\frac{1}{2})$ を通るほぼ鉛直な上昇でつながっている。

h のグラフ

$u=10^{-N}x$ とおく。$|x|\le 3$ のとき $|u|\le 3\times 10^{-N}$ であり、これは途方もなく小さい。小さい u に対して $\sin u = u-\frac{u^3}{6}+\cdots$ であり、$u>0$ では評価 $u-\frac{u^3}{6}\le \sin u\le u$ が成り立つ。10^N を掛けると、$0\le x\le 3$ に対して

$$0\le x-\mathrm{h}(x)\le \frac{x^3}{6}10^{-2N}\le \frac{27}{6}\times 10^{-2N},$$

であり、h は奇関数なので、$-3\le x\le 0$ に対しても符号を逆にして同じことが成り立つ。したがって $[-3,3]$ 上で h のグラフは、考えうるどんな精度でも原点を通る直線 $y=x$ であり、$x>0$ ではそのごくわずか下に、$x<0$ ではごくわずか上にある。傾きは $\mathrm{h}'(x)=\cos(10^{-N}x)$ であり、誤差およそ 10^{-2N} 以内で 1 に等しい。



正弦波は依然として存在するが、とてつもなく引き伸ばされている。最初の極大は $x=\frac{\pi}{2}\times 10^N$ にあり、その高さは 10^N である。そのため、窓 $[-3,3]$ に見えるのは、原点を通るまっすぐに見えるごく小さな部分だけである。

検算

- $s = 1/(1+\mathrm{e}^{-N\ln|x|})$ を用いて直接計算すると、$s(0.999)$ と $s(1.001)$ は機械精度でそれぞれ 0 と 1 であり、$s(\pm 1) = \frac{1}{2}$ は厳密に成り立つ。
- $N = 10$ や 200 のような控えめな N では、数値微分により $s'(1) = N/4$ と $\mathrm{g}'(1) = \frac{1}{2} + N/4$ が確認でき、細かい格子で調べると g が $[-3,3]$ 上で増加することがわかる。N を大きくしても段差が鋭くなるだけである。
- ランダムな $x \in [-3,3]$ に対して、$10^{100}\sin(10^{-100}x)$ は倍精度の全桁で x と一致する。また、縮小版の類似物 $M\sin(x/M)$（$M = 1000$）は評価 $0 < x - M\sin(x/M) \leq x^3/(6M^2)$ を満たす。

よくある間違い

- N が偶数であることを忘れる。x^N は $x < -1$ でも巨大で**正**なので、そこでも f は 3 であり、それ以外の値にはならない。
- 段差を本物の不連続点として述べてしまう。3 つの関数はすべて連続（実際には微分可能）であり、上昇が急すぎて描けないだけである。
- h を振動するグラフとして扱う。$[-3,3]$ 上では、極値点（turning point）にはまったく近づかない。

STEP のその先へ

関数 $x^n/(1+x^n)$ は、偶数値をとりながら $n \to \infty$ とするとき、$(-1,1)$ の内側で 0、± 1 で $\frac{1}{2}$、外側で 1 となる階段関数（step function）に**各点収束**（pointwise convergence）する。つまり、滑らかな関数の列でありながら、その極限は不連続なのである。これは、解析学者がなぜ**一様**収束（uniform convergence）を必要とするのかを示す古典的な例であり、一様収束は実解析（real analysis）の最初の講義における中心的な概念である。関数 h はその裏側を示している。$M \to \infty$ のとき、有界区間上で $M\sin(x/M) \to x$ は一様収束する。Abbott の *Understanding Analysis* は、この二つの考え方をとても読みやすく扱っている。

解答例

STEP I 1993、第 7 問

純粋数学 • 3 次式の根

> **STEP I 1993、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q7

鍵となる考え方

最高次の係数（leading coefficient）が正の三次関数（cubic）は $-\infty$ から $+\infty$ まで増加していくので、その根についての性質はすべて二つの極値点（turning point）で決まる。曲線の極大値（local maximum）が軸より上にあり、極小値（local minimum）が軸より下にあれば、グラフは必ず三回交わる。そうでなければ交わる回数はそれより少ない。$x^3 + ax^2 + b$ の場合は、導関数（derivative）が因数分解できるので、極値点を正確に求めるのは容易である。

解答

極値点

$\mathrm{f}(x) = x^3 + Ax^2 + B$ に対して

$$\mathrm{f}'(x) = 3x^2 + 2Ax = x(3x + 2A),$$

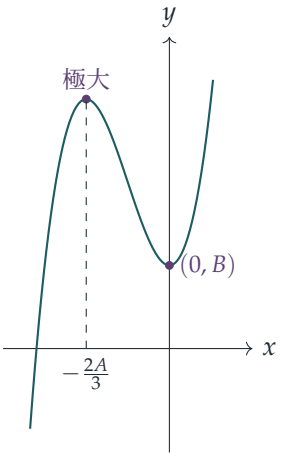
であるから、停留点（stationary point）は $x = 0$ と $x = -\frac{2A}{3}$ にある。そこでの値は $\mathrm{f}(0) = B$ および

$$\mathrm{f}\left(-\tfrac{2A}{3}\right) = -\frac{8A^3}{27} + \frac{4A^3}{9} + B = \frac{4A^3}{27} + B.$$

である。また $\mathrm{f}''(x) = 6x + 2A$ より $\mathrm{f}''(0) = 2A$、$\mathrm{f}''(-\frac{2A}{3}) = -2A$ である。$A > 0$ のときは $x = 0$ の点が極小、$x = -\frac{2A}{3}$ の点が極大となり、$A < 0$ のときはその役割が入れ替わる。

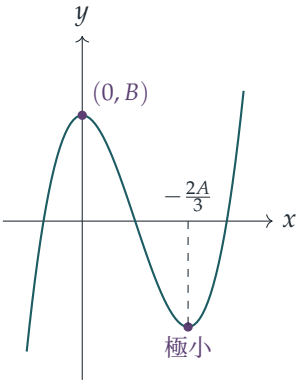
$A > 0$、$B > 0$ の場合の概形

極大点は $\left(-\frac{2A}{3},\, B + \frac{4A^3}{27}\right)$ にあり、y 軸の左側で、高さは B より大きい。極小点は $(0, B)$ にあり、y 軸の正の部分の上にある。二つの極値点がともに x 軸より上にあるので、曲線は x 軸とちょうど一回、極大点より左で交わる。（図では $A = 3$、$B = 2$ とした。極大点は $(-2, 6)$、極小点は $(0, 2)$ である。）



$A < 0$、$B > 0$ の場合の概形

今度は極大点が $(0, B)$ にあり、極小点は $\left(-\frac{2A}{3},\, B + \frac{4A^3}{27}\right)$ にあって y 軸の右側に位置する。$A^3 < 0$ であるから極小値は B より小さく、正にも 0 にも負にもなりうる。$\mathrm{f}(0) = B > 0$ であり、$x \to -\infty$ のとき $\mathrm{f} \to -\infty$ であるから、$x < 0$ の根が常に一つ存在する。極小値が軸より下にあれば、$x > 0$ にさらに二つの根がある（図の $A = -3$、$B = 2$ の場合がそうで、極小点は $(2, -2)$、根は $1 - \sqrt{3}$、1、$1 + \sqrt{3}$ である）。極小値がちょうど軸上にあれば、曲線はそこで軸に接する。極小値が軸より上にあれば、負の根がただ一つの根である。



根の個数を数える

次に $\mathrm{g}(x) = x^3 + ax^2 + b$ を考える。$a = 0$ ならば g は狭義単調増加である（導関数 $3x^2$ が 0 になるのは 0 においてのみである）から、実根をちょうど一つもつ。そこで $a \neq 0$ と仮定する。上の計算から、g は相異なる二つの極値点をもち、そこでの値は b と $b + \frac{4a^3}{27}$ である。

考えてみよう 二つの極値の値から、根の個数はどのようにわかるだろうか？

極値点を $x_1 < x_2$ とおく。この三次関数は $(-\infty, x_1]$ で狭義単調増加、$[x_1, x_2]$ で狭義単調減少、$[x_2, \infty)$ で狭義単調増加であるから、各区間にもつ根は高々一つである。$\mathrm{g}(x_1) > 0 > \mathrm{g}(x_2)$ ならば、中間値の定理（intermediate value theorem）により（$x \to \mp\infty$ のとき $\mathrm{g} \to \mp\infty$ であることを用いて）、$(-\infty, x_1)$、(x_1, x_2)、(x_2, ∞) のそれぞれに根が存在するので、相異なる根は三つある。そうではなく二つの値が同符号であるか、いずれかが 0 であれば、少なくとも一つの区間はその内部に根をもたず、根の個数は高々二つである。極大値は常に二つの値のうち大きい方であるから、「一方が正で他方が負」は「両者の積が負」と同じことである。したがって、g が相異なる三つの実根をもつのは、ちょうど

$$b\left(b + \frac{4a^3}{27}\right) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 27b^2 + 4a^3 b < 0.$$

のときである。（$27 > 0$ を掛けても不等号の向きは変わらない。）これは $a = 0$ の場合も含んでいる。そのときは $27b^2 + 4a^3 b = 27b^2 \geq 0$ となるからである。

第一の条件

$27b^2 + 3a^3 b < 0$ と仮定する。すると $3a^3 b < -27b^2 \leq 0$ であるから $a^3 b < 0$ であり、したがって

$$27b^2 + 4a^3 b = \left(27b^2 + 3a^3 b\right) + a^3 b < 0 + 0 = 0.$$

となる。上の判定法により、方程式は相異なる三つの実根をもつ。これが示すべきことであった。

第二の条件

問題文のとおりでは、第二の条件は不等式 $27b^2 + 4a^3 b < 0$ を繰り返しているだけであり、「$<$」のままではこの主張は偽である。実際、$a = -3$、$b = 1$ とすると $27 - 108 = -81 < 0$ となるが、$x^3 - 3x^2 + 1$ は $x = 0$ で値 1、$x = 2$ で値 -3 をとるので、相異なる三つの実根をもつ。意図された不等式は逆向きのものに違いない。判定法により、

$$27b^2 + 4a^3 b > 0$$

（さらには $27b^2 + 4a^3b \geq 0$）であれば、方程式の相異なる実根は三つより少ない。以上で問題は完結する。

よって、正確な境界は $27b^2 + 4a^3b = 0$ である。$3a^3$ を含む条件は、三つの根をもつための十分条件（sufficient condition）ではあるが必要条件（necessary condition）ではない。$a = -2$、$b = 1$ とすると $27b^2 + 3a^3b = 3 > 0$ であるが $27b^2 + 4a^3b = -5 < 0$ であり、実際 $x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^2 - x - 1)$ は三つの根 1 と $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ をもつ。

検算

$A = -3$、$B = 2$ とすると $x^3 - 3x^2 + 2 = (x-1)(x^2 - 2x - 2)$ となり、その根 1、$1 \pm \sqrt{3}$ は概形と一致する。また $27 \cdot 4 + 4(-27)(2) = -108 < 0$ であり、判定法の予測どおりである。数値的にも、第一の条件を満たすランダムな有理数の組 (a, b) 約 80,000 個について、停留値は常に異符号であった。200,000 組にわたって、「相異なる三つの根をもつ」ことは $27b^2 + 4a^3b < 0$ と完全に一致した。

よくある間違い

- $a = 0$ の場合を忘れること。このとき二つの極値点は一つに重なり、変曲点（point of inflection）となる。
- 極値が 0 になる場合を三つの根を与えると扱うこと。このときは重根（repeated root）が生じるので、相異なる根は二つしかない。
- 第二の主張を、判定法と矛盾していることに気づかず、問題文のとおりに証明しようとすること。

STEP のその先へ

量 $-(4a^3b + 27b^2)$ は $x^3 + ax^2 + b$ の**判別式**（discriminant）であり、$b^2 - 4ac$ の三次版である。これは根の差の二乗の積に等しいので、相異なる三つの実根をもつときは正、重根をもつときは 0、二つの根が虚数のときは負となる。判別式や根の対称式（symmetric functions）はガロア理論（Galois theory）の中で展開される。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（『環・体・群』）はよい入門書である。

解答例

STEP I 1993、第 8 問

純粋数学 ・ 球とベクトル

> **STEP I 1993、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q8

鍵となる考え方

小問 (i) では、対称性（symmetry）のあるところに原点と座標軸を置く。球面（sphere）の中心が z 軸上にあり、平面（plane）が $z = 0$ であれば、方程式がほとんどすべてを片づけてくれる。球面が二つになっても難しさは変わらない。二つの方程式を引き算すると平方の項がすべて消え、**平面**の方程式が残るからである。小問 (ii) でも、座標を使えばすべてが内積（scalar product）の計算に帰着する。B を原点に置き、二本の柱の先端をどちらも E から測るようにする。

解答

小問 (i)

球面と平面。球面の中心を O'、半径を $r > 0$ とし、O' から平面に下ろした垂線の足（foot of the perpendicular）を N とする。N を原点とし、平面を $z = 0$、z 軸を NO' の方向にとる。すると $O' = (0, 0, d)$ である。ここで $d \geq 0$ は中心から平面までの距離である。球面の方程式は

$$x^2 + y^2 + (z - d)^2 = r^2,$$

であるから、点が球面と平面の両方の上にあるのは、$z = 0$ かつ

$$x^2 + y^2 = r^2 - d^2.$$

が成り立つときであり、またそのときに限る。

- $d < r$ のとき、これは平面上の中心 N、半径 $\sqrt{r^2 - d^2}$ の円である。
- $d = r$ のとき、$x^2 + y^2 = 0$ より $x = y = 0$ となるので、共通部分はただ一点 N であ

る（平面は接平面（tangent plane）である）。

▶ $d > r$ のとき、右辺は負であるから該当する点はなく、共通部分は空集合である。

これらの場合ですべての可能性が尽くされるので、最初の主張が証明された。

二つの球面。二つの球面の半径を $r, s > 0$ とし、異なる中心の間の距離を $c > 0$ とする。一つ目の中心を原点に、二つ目の中心を $(0, 0, c)$ に置く：

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \qquad x^2 + y^2 + (z - c)^2 = s^2.$$

考えてみよう 二つの二次方程式の解の集合が、どうしてちょうど一つの円になりうるのだろうか？

一つ目の方程式から二つ目の方程式を引く。平方の項はすべて消え、

$$2cz - c^2 = r^2 - s^2 \quad \Longleftrightarrow \quad z = h, \qquad \text{ただし} h = \frac{r^2 - s^2 + c^2}{2c}.$$

が残る。中心は異なるので、c で割ってよい。点が両方の球面上にあることは、その点が一つ目の球面上にあり、かつ差の方程式を満たすことと同値であるから、

$$(\text{球面 1}) \cap (\text{球面 2}) = (\text{球面 1}) \cap (\text{平面} z = h).$$

となる。最初の結果により、これは円、一点、または空集合である。（具体的には、$|h| < r$ のときは平面 $z = h$ 上の円 $x^2 + y^2 = r^2 - h^2$、$|h| = r$ のときはただ一点、$|h| > r$ のときは空集合である。）この円は中心どうしを結ぶ直線に垂直な平面上にあり、その中心はこの直線上にある。

小問 (ii)

柱の根元についての仮定。問題文には A、B、C がどこに立っているかが書かれていない。ここでは、これらが水平な地面上の一辺 2 m の正三角形（equilateral triangle）の頂点にあるとする。これが問題文の角度を与える配置である（「検算」を参照）。

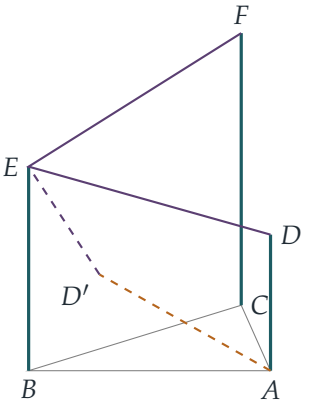
B を原点とし、z 軸を鉛直方向にとる：

$$B = (0, 0, 0), \quad A = (2, 0, 0), \quad C = (1, \sqrt{3}, 0),$$

すると柱の先端は

$$D = (2, 0, 2), \quad E = (0, 0, 3), \quad F = (1, \sqrt{3}, 4).$$

となる。



図において、D'（破線）は、いたずらをした者たちが柱を動かした後の D の位置である。

もとの彫刻。E を始点とするベクトルを用いると、

$$\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

であるから、$\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EF} = 2 + 0 - 1 = 1$、$|\overrightarrow{ED}| = |\overrightarrow{EF}| = \sqrt{5}$ である。したがって

$$\cos \angle DEF = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{1}{5}, \qquad \text{よって} \qquad \angle DEF = \cos^{-1} \tfrac{1}{5},$$

となり、求める結果が得られた。

いたずらの後。柱 AD の長さは 2 のままであり、根元も A のままである。柱はいま A と B を通る鉛直平面（平面 $y = 0$）内にあり、地面に対して $\frac{1}{4}\pi$ の角をなして B の方へ傾いている。A から B へ向かう向きは $-x$ の向きであるから、

$$D' = \left(2 - 2\cos \tfrac{\pi}{4},\ 0,\ 2\sin \tfrac{\pi}{4}\right) = \left(2 - \sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}\right).$$

である。$2 - \sqrt{2} \approx 0.59$ は 0 と 2 の間にあるので、点 D' は確かに線分 AB の上方にある。ここで

$$\overrightarrow{ED'} = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} - 3 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{ED'} \cdot \overrightarrow{EF} = (2 - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - 3) = -1,$$

であり、

$$|\overrightarrow{ED'}|^2 = (2 - \sqrt{2})^2 + (3 - \sqrt{2})^2 = (6 - 4\sqrt{2}) + (11 - 6\sqrt{2}) = 17 - 10\sqrt{2}.$$

である。

考えてみよう 内積が負になった。このことから角について何がわかるだろうか？

内積が負であることは角が鈍角（obtuse）であることを意味するので、$\cos^{-1}$ の値として $\frac{1}{2}\pi$ と π の間にあるものをとる必要がある：

$$\cos\angle D'EF = \frac{-1}{\sqrt{5}\sqrt{17-10\sqrt{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{85-50\sqrt{2}}} \approx -0.264542,$$
$$\angle D'EF \approx 1.839 \text{ ラジアン（有効数字 } 4 \text{ 桁）}.$$

検算

- 底面が一辺 s の正三角形のとき、同じ方法により $\cos\angle DEF = \dfrac{s^2/2-1}{s^2+1}$ が得られる。これが $\frac{1}{5}$ に等しくなるのは $s=2$ のときに限るので、仮定した底面の配置が裏づけられる。数値計算でも、$s=2$ のとき $\cos\angle DEF = 0.2$ となることを確認した。
- $|AD'|=2$ と $\angle BAD' = \frac{1}{4}\pi$ を数値的に確認した。新しい角は 1.838525… ラジアン（約 105.3°）となり、上の厳密な式と一致した。
- 小問 (i)：無作為に選んだ球面について、予測される円上の点を調べたところ、それらは誤差 10^{-12} 以内で両方の曲面上にあった。

よくある間違い

- 二つの球面の場合に、方程式の差が共通部分**そのもの**であると主張してしまうこと。平面は共通部分を含むにすぎず、さらにその平面と一方の球面との共通部分をとる必要がある。
- D' を A に関して B と反対側に置いてしまうこと。その点は線分 AB の上方になく、異なる角を与えてしまう。
- 答えを度数法で答えたり、負の符号を落として鋭角 $\cos^{-1}(0.2645)$ として答えたりすること。

STEP のその先へ

二つの球面の方程式を引き算して平面を得るという考え方は、二つの円や球面の**根平面**（radical plane）（二次元では根軸（radical axis））の背後にある考え方である。同じ工夫により、GPS 型の三辺測量（trilateration）は線形の問題に帰着される。より一

般に、任意の二次曲面（quadric surface）と平面の共通部分は円錐曲線（conic）であり、そのような共通部分を分類することは、二次形式（quadratic forms）を用いた線形代数（linear algebra）の最初の演習としてよい題材である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）はそのための道具を展開しており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には STEP 風の座標幾何の問題がさらに収められている。

解答例

STEP I 1993、第 9 問

純粋数学 ・ 一階微分方程式

> **STEP I 1993、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q9

鍵となる考え方

これは混合問題（mixing problem）である。容器内の A の量の変化率は（流入速度）から（流出速度）を引いたものであり、混合が速やかに行われるので、流出する液体の濃度（concentration）は容器内の濃度に等しい。まず気づくべきことは、各容器の液体の総体積がまったく変化しないことである。したがって濃度は単に「A の量を定数で割ったもの」になる。すると各容器について一階線形微分方程式（first-order linear differential equation）が得られ、第 1 の容器からの流出が第 2 の容器の強制項（forcing term）となる。

解答

第 1 の容器

第 1 の容器には液体が合計 $a + (b - a) = b$ リットル毎秒の速さで流入し、b リットル毎秒の速さで流出する。よって、その体積はすべての $t \geq 0$ に対して初期値 K リットルのまま一定である。

混合は速やかであるから、時刻 t において容器の中身は一様であり、液体のうち化学物質 A が占める割合は $V(t)/K$ である。短い時間 δt の間に、A が $a\,\delta t$ リットル流入し、混合液が $b\,\delta t$ リットル流出する。流出する混合液のうち A は $\frac{V}{K}\,b\,\delta t$ リットルである。したがって

$$\delta V \approx a\,\delta t - \frac{bV}{K}\,\delta t,$$

であり、δt で割って $\delta t \to 0$ とすると

$$\dot{V}(t) = -\frac{bV(t)}{K} + a,$$

となる。これが求める方程式である。

この方程式は定数係数（constant coefficients）の線形方程式である。$\dot{V} + \frac{b}{K}V = a$ と書き、積分因子（integrating factor）$\mathrm{e}^{bt/K}$ を掛けると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(V\mathrm{e}^{bt/K}\right) = a\,\mathrm{e}^{bt/K} \quad \Longrightarrow \quad V\mathrm{e}^{bt/K} = \frac{aK}{b}\mathrm{e}^{bt/K} + C.$$

初めに容器には化学物質 B しか入っていないので $V(0) = 0$ であり、$C = -\frac{aK}{b}$ を得る。したがって

$$V(t) = \frac{aK}{b}\left(1 - \mathrm{e}^{-bt/K}\right), \qquad t \geq 0,$$

となり、示すべき式が得られた。

第 2 の容器

第 2 の容器は第 1 の容器から b リットル毎秒の液体を受け取り、b リットル毎秒の速さで排出するので、その体積は L リットルのまま一定である。時刻 t においてこの容器に含まれる A の体積を $W(t)$ とおくと、$W(0) = 0$ である。

考えてみよう 化学物質 A はどのような速さで第 2 の容器に流入するか。

A は第 1 の容器から流出するのとまったく同じ速さ、すなわち $\frac{bV}{K} = a\left(1 - \mathrm{e}^{-bt/K}\right)$ で流入する。また、同じく速やかな混合の議論により、$\frac{bW}{L}$ の速さで流出する。よって

$$\dot{W} + \frac{b}{L}W = a - a\,\mathrm{e}^{-bt/K}.$$

積分因子 $\mathrm{e}^{bt/L}$ を掛けると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(W\mathrm{e}^{bt/L}\right) = a\,\mathrm{e}^{bt/L} - a\,\mathrm{e}^{bt(1/L - 1/K)}.$$

$L \neq K$ であるから指数 $b\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{K}\right) = \frac{b(K-L)}{KL}$ は 0 でなく、第 2 項を指数関数として積分できる：

$$W\mathrm{e}^{bt/L} = \frac{aL}{b}\mathrm{e}^{bt/L} - \frac{aKL}{b(K-L)}\mathrm{e}^{b(K-L)t/(KL)} + D.$$

両辺に $\mathrm{e}^{-bt/L}$ を掛け、$\frac{b(K-L)}{KL} - \frac{b}{L} = -\frac{b}{K}$ に注意すると

$$W = \frac{aL}{b} - \frac{aKL}{b(K-L)}\mathrm{e}^{-bt/K} + D\mathrm{e}^{-bt/L}.$$

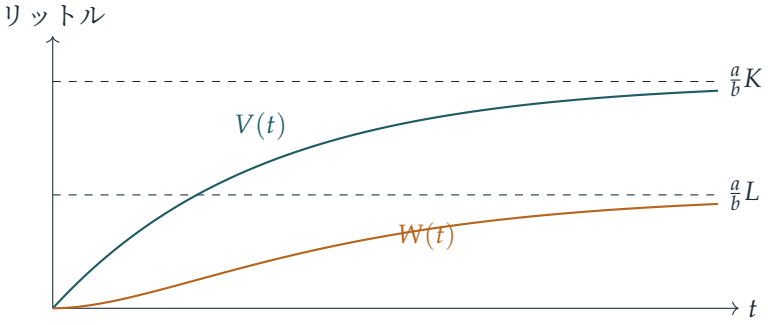
$W(0) = 0$ とおくと

$$D = \frac{aKL}{b(K-L)} - \frac{aL}{b} = \frac{aL}{b} \cdot \frac{K - (K-L)}{K-L} = \frac{aL^2}{b(K-L)}.$$

よって時刻 $t \geq 0$ において、第 2 の容器には化学物質 A が

$$W(t) = \frac{aL}{b}\left(1 - \frac{Ke^{-bt/K} - Le^{-bt/L}}{K - L}\right)$$

リットル含まれる。



この図は $a = 1$、$b = 2$、$K = 10$、$L = 5$ の場合である。W は傾き 0 で始まることに注意せよ。最初のうちは、第 1 の容器から流入する液体にほとんど A が含まれていないからである。

検算

- $t = 0$ において括弧内は $1 - \frac{K-L}{K-L} = 0$ となり、当然そうなるべき値である。また $\dot{W}(0) = 0$ であり、A が $bV(0)/K = 0$ の速さで流入するという事実と一致する。
- $t \to \infty$ のとき $V \to \frac{a}{b}K$、$W \to \frac{a}{b}L$ である。すなわち、どちらの容器も最終的に A の濃度が a/b となり、これは流入する液体の濃度に等しい。
- この式は前に掛かる因子 L を除けば K と L について対称であり、計算の整合性を確かめるよい目安となる。
- $a = 1$、$b = 2$、$K = 10$、$L = 5$、$t = 5$ のとき、$V = 5(1 - e^{-1}) \approx 3.1606$、$W = 2.5(1 - e^{-1})^2 \approx 0.99894$ である。両方の容器を（体積も追跡しながら）数値シミュレーションすると、a, b, K, L を多数無作為に選んだ場合について、どちらの式とも約 10^{-13} の精度で一致する。

よくある間違い

- A の流出量として $b - a$ や a を用いてしまう。A の流出量は、液体全体の流出速度に濃度を掛けたものである。

- 第 2 の容器への A の流入量を a としてしまう。第 2 の容器に届くのは、第 1 の容器から流出した A だけである。
- なぜ $L \neq K$ が必要なのかを忘れてしまう。$L = K$ ならば強制項 $\mathrm{e}^{-bt/K}$ は斉次方程式（homogeneous equation）の解となり、答えには代わりに $t\,\mathrm{e}^{-bt/K}$ の項が現れる。

STEP のその先へ

よく混合された容器を連ねたものは標準的なコンパートメントモデル（compartment model）であり、体内を移動する薬物の投与量や放射性崩壊系列の解析に用いられる。系を $\dot{\mathbf{x}} = M\mathbf{x} + \mathbf{f}$ の形に書くと、減衰率 b/K と b/L は M の固有値（eigenvalue）であり、$L = K$ の場合は重複固有値（repeated eigenvalue）となる。これは $t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ という形の解を生み出すのと同じ「共鳴」（resonance）である。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）は、混合問題と線形の系の両方をこのような方法で扱っている。

解答例

STEP I 1993、第 10 問

力学 ・ ばねを含むつり合い

STEP I 1993、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

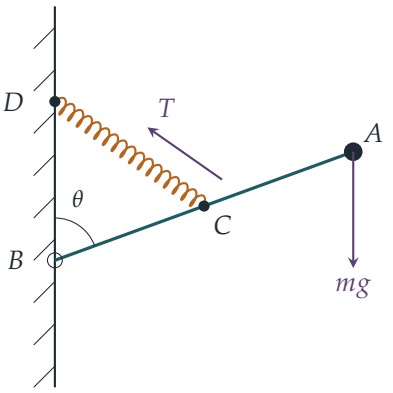
step.maths.org/questions/93-s1-q10

鍵となる考え方

蝶番（hinge）B のまわりのモーメント（moment）をとる。そうすれば B における未知の反力（reaction）は完全に消え、ばねの張力（tension）と棒の角度を結ぶ式が一つだけ残る。幾何は見た目ほど難しくない。$BD = BC = a$ であるから三角形 BCD は二等辺三角形（isosceles triangle）であり、その中のすべての長さは B における角の半分を用いて表せるからである。

解答

ランプを質点、棒を軽く剛体であるもの、B の蝶番をなめらかなもの、ばねを軽くフックの法則（Hooke's law）に従うものとしてモデル化する。$\theta = \angle DBA$ とおく。これは棒と鉛直上向きの BD とのなす角である。「壁から離れて」とは $0 < \theta < \pi$ を意味する。$\theta = 0$ または $\theta = \pi$ のとき、棒は壁に沿って横たわる。



ばねの長さ

$BC = BD = a$ であり、そのなす角が θ であるから、三角形 BCD は二等辺三角形である。B から CD に垂線を下ろすと、それは角 θ と辺 CD をともに二等分するので、

$$CD = 2a\sin\tfrac{\theta}{2}, \qquad B \text{ から直線 } CD \text{ までの距離} = a\cos\tfrac{\theta}{2}.$$

フックの法則により、ばねの張力は

$$T = \frac{\lambda}{a}\left(2a\sin\tfrac{\theta}{2} - a\right) = \lambda\left(2\sin\tfrac{\theta}{2} - 1\right)$$

である。ここで T が負であれば、ばねは圧縮されて押していることを意味する。

B のまわりのモーメント

棒とランプからなる系にはたらく力は、A における重力 mg、C において CD に沿ってはたらくばねの力 T、そして B における反力である。反力は B のまわりのモーメントをもたない。重力は壁から水平距離 $2a\sin\theta$ の位置で鉛直にはたらき、棒を下向きに回転させる（θ を増加させる）。張力は C を D の方へ引き、棒を壁の方へ戻すように回転させる。釣り合い（equilibrium）のためには

$$T \cdot a\cos\tfrac{\theta}{2} = mg \cdot 2a\sin\theta = 4mga\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}.$$

$0 < \theta < \pi$ のとき $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ であるから、これで割ってよい：

$$T = 4mg\sin\tfrac{\theta}{2}.$$

特に $T > 0$ である。すなわち、ばねは伸びていなければならない。何かがランプを支えていなければならないのだから、これは理にかなっている。

考えてみよう これで T について二つの式が得られた。それらを等しいとおくと何が得られるか。また、その答えが棒の実際の位置を表すためには、何が成り立たなければならないか。

$s = \sin\frac{\theta}{2}$ とおく。T の二つの式を等しいとおくと

$$\lambda(2s-1) = 4mgs \quad\Longrightarrow\quad s(2\lambda - 4mg) = \lambda \quad\Longrightarrow\quad s = \frac{\lambda}{2(\lambda - 2mg)},$$

ただし $\lambda \neq 2mg$ とする（$\lambda = 2mg$ ならば方程式は $0 = \lambda$ となり、これは不可能である）。$0 < \theta < \pi$ であるから、実際の位置であるためには $0 < s < 1$ が必要である。

- $\lambda < 2mg$ ならば $s < 0$ となり、解は存在しない。
- $\lambda > 2mg$ ならば $s > 0$ であり、

$$s < 1 \iff \lambda < 2\lambda - 4mg \iff \lambda > 4mg.$$

したがって $\lambda > 4mg$ のとき、値 $s = \lambda/\big(2(\lambda - 2mg)\big)$ は 0 と 1 の間に厳密に含まれ、モーメントが釣り合う角 $\theta \in (0, \pi)$ がちょうど一つ得られる。（実際 $s > \frac{1}{2}$ であるから、ばねは確かに伸びている。）このとき合力（resultant force）は B における反力が受け持つので、求められているとおり、ランプは壁から離れた位置で釣り合って吊り下がることができる。逆に、$\lambda \leq 4mg$ ならばそのような位置は存在しない。

その角は

$$\angle DBA = \theta = 2\arcsin\left(\frac{\lambda}{2(\lambda - 2mg)}\right),$$

であり、$\cos\theta = 1 - 2s^2$ であるから、同値な形で

$$\cos\angle DBA = 1 - \frac{\lambda^2}{2(\lambda - 2mg)^2}$$

と書ける。

検算

- $\lambda \to \infty$ のとき、ばねは伸びることができないので $CD \to a$ となり、三角形 BCD は正三角形になる。公式からは $s \to \frac{1}{2}$ が得られるので、$\theta \to 60°$ である。✓
- 上から $\lambda \to 4mg$ とするとき、$s \to 1$ かつ $\theta \to 180°$ となる。ばねが弱すぎて、ランプは沈み込み、壁に沿って垂れ下がる。
- $\lambda = 6mg$ のとき：$s = \frac{3}{4}$、$\cos\theta = -\frac{1}{8}$ であるから、$\theta \approx 97.2°$ である。この角を（ばねの力を座標から計算した）完全なベクトルのモーメント方程式に代入すると、正味のモーメントは零になる。$0 < \theta < \pi$ の範囲で正味のモーメントを数値的に走査すると、$\lambda > 4mg$ のときはただ一つの根（たとえば $\lambda = 5mg$ のとき 112.9°）が見つかり、$\lambda \leq 4mg$ のときは根は見つからない。

よくある間違い

- B からばねの力の作用線までの距離として、a ではなく棒全体の長さ $2a$ を用いてしまう。垂直距離は $a\cos\frac{\theta}{2}$ である。
- モーメントをとらずに力を分解してしまう。こうすると B における反力の二つの未知成分が入り込むだけで、何も得をしない。
- $0 < \sin\frac{\theta}{2} < 1$ の確認を忘れる。条件 $\lambda > 4mg$ はまさにここから生じる。

STEP のその先へ

この問題は、釣り合いが存在するかどうかだけを問うている。自然な次の問いは、それが**安定**（stable）かどうか、すなわち小さく突いたときにその揺れが減衰するか増大するか、である。これは位置エネルギー（potential energy）$V(\theta)$（重力によるものと弾性エネルギーの和）を書き下し、釣り合いの位置における $V''(\theta)$ の符号を調べることで答えられる。この考え方は大学 1 年の力学全体を貫き、のちには力学系（dynamical systems）の理論全体を貫いている。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、エネルギーによる方法と安定性を丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 1993、第 11 問

力学 ・ 質量中心

> **STEP I 1993、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q11

鍵となる考え方

1 点から自由につり下げられた剛体（rigid body）にはたらく力は、支点が引く力と重力の 2 つだけである。2 つの力がつり合うのは、それらが同一直線上にはたらくときに限られる。したがって、重心（centre of mass）は支点の真下にこなければならない。結局のところ問題は、折り曲げた針金の重心 G を求めることと、2 つの位置の間で物体が直線 GA と GB のなす角だけ回転することに気づくことに帰着する。

解答

重心

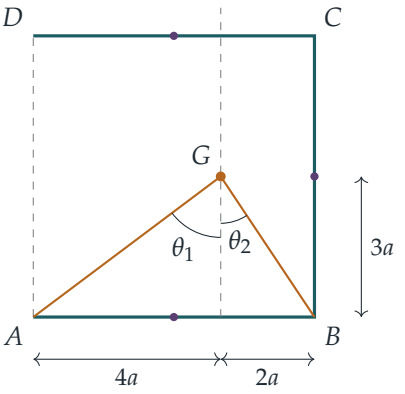
針金を、3 辺 AB、BC、CD の形に折り曲げた一様な剛体の棒とみなす。各辺の重さはいずれも W であり、なめらかな釘または軽い糸でつり下げるものとする。数値を整数に保つため、正方形の 1 辺の長さを $6a$ とし、針金を含む平面に座標軸を

$$A = (0,0), \quad B = (6a,0), \quad C = (6a,6a), \quad D = (0,6a).$$

となるようにとる。各辺は一様な棒であるから、その重力は中点にはたらく。すなわち AB では $(3a,0)$、BC では $(6a,3a)$、CD では $(3a,6a)$ である。3 つの重さは等しいので、G は 3 つの中点の平均である：

$$G = \left(\frac{3a + 6a + 3a}{3}, \frac{0 + 3a + 6a}{3} \right) = (4a,\ 3a).$$

（BC と AD の中点を通る直線に関する対称性から、G の高さは $3a$ でなければならない。計算が必要だったのは水平方向の位置だけである。）



図中の G を通る鉛直な破線は BC（および欠けている辺 AD）に平行である。GA がこの破線となす角を θ_1、反対側で GB がこの破線となす角を θ_2 とする。図から読み取ると、

$$\tan\theta_1 = \frac{4a}{3a} = \frac{4}{3}, \qquad \tan\theta_2 = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}.$$

（実際 $AG = 5a$ であり、3–4–5 の三角形になっている。）

A からつり下げ、次に B からつり下げる

針金が A からつり下げられてつり合っているとき、針金にはたらく力は A における抗力と、G にはたらく全体の重さ $3W$ だけである。これらがつり合うためには、A のまわりのモーメント（moment）が打ち消し合わなければならないので、重力の作用線は A を通る。すなわち直線 AG は鉛直であり、G は A の下にある。BC は図の破線に平行であるから、このとき BC は鉛直方向に対して θ_1 だけ傾いている。

同様に、針金を B からつり下げると直線 BG が鉛直になり、BC は鉛直方向に対して、今度は逆向きに θ_2 だけ傾く。

考えてみよう BC の 2 つの向きのなす角が $\theta_1 - \theta_2$ ではなく $\theta_1 + \theta_2$ になるのはなぜか？

第 1 の位置から第 2 の位置へ移るとき、針金は剛体として回転するので、針金の中のどの直線も同じ角だけ回転する。同じことだが、針金を紙面上に固定しておき、代わりに「下向き」のほうを回転させてもよい。第 1 の位置では下向きは GA の方向であり、第 2 の位置では GB の方向である。したがって回転角は、それらのなす角 AGB である。図において A と B は G を通る破線に関して反対側にあるので、

$$\angle AGB = \theta_1 + \theta_2.$$

加法定理（addition formula）を用いると、

$$\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}{1-\frac{8}{9}}=\frac{2}{\frac{1}{9}}=18.$$

θ_1 と θ_2 はともに鋭角であるから $0<\theta_1+\theta_2<180^\circ$ であり、その正接が正なので、和は実際には鋭角である。よって、BC の 2 つの向きのなす角は $\tan^{-1}18$ であり、題意は示された。

検算

- 数値的には $\theta_1=\tan^{-1}\frac{4}{3}\approx 53.13^\circ$、$\theta_2=\tan^{-1}\frac{2}{3}\approx 33.69^\circ$ であり、和は 86.82° となる。また $\tan^{-1}18\approx 86.82^\circ$ でもある。
- 針金を 90 000 個の等しい小片で置き換え、それらの位置を平均して $G=(4a,3a)$ を得て、毎回 G が支点の下にくるように物体全体を回転させると、BC の 2 つの像のなす角は小数第 9 位まで同じ値になる。
- G の妥当性の確認：G は欠けている辺 AD よりも BC に近い。右側には針金がすべてあり、左側にはまったくないのだから、そうなるべきである。

よくある間違い

- G を正方形の中心 $(3a,3a)$ にとってしまう。4 辺すべてがあればそれで正しいが、欠けている辺 AD は何も左へ引き寄せない。
- 2 つの傾きを足さずに引いてしまう。BC は A からつり下げたときには一方に傾き、B からつり下げたときには反対側に傾くのである。

STEP のその先へ

「自由につり下げられた物体は、重心が支点の真下にくるようにぶら下がる」という原理は、扱いにくい形の平板の重心を実際に求める方法になっている。2 点からつり下げて、2 本の鉛直線（下げ振りの糸）がどこで交わるかを見ればよい。大学 1 年次の講義では、同じ考え方が位置エネルギー（potential energy）を通じて現れる。すなわち、つり合いの位置は G の高さの停留点（stationary point）であり、安定なつり合いの位置は最も低いものである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、重心と剛体の静力学を、これと同様の多くの例とともに扱っている。

解答例

STEP I 1993、第 12 問

力学 ・ 放物体の迎撃

> **STEP I 1993、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q12

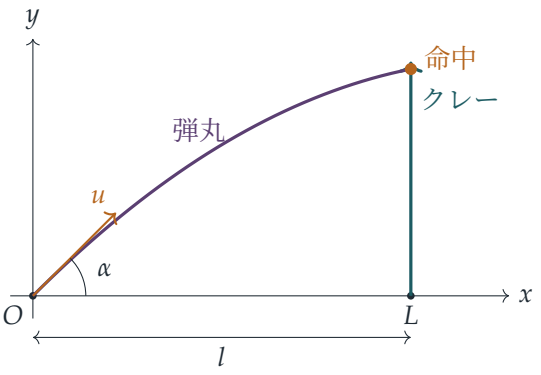
鍵となる考え方

命中するとは、弾丸とクレーが同じ瞬間に同じ位置にあるということである。弾丸が発射装置を通る鉛直線に到達する時刻は水平方向の運動だけで決まるので、まずその時刻を求め、次に二つの高さを一致させる。弾丸が飛んでいる間、重力は二つの物体をちょうど同じ量 $\frac{1}{2}gt^2$ だけ引き下げるので、この項は打ち消し合い、すっきりした一次の条件が残る。$T = 0$ のときには、この打ち消し合いによって問題全体を見通しよく読み解くことができる。

解答

モデル

クレーと弾丸を、空気抵抗なしに重力のみを受けて自由に運動する質点（particle）として扱い、競技者は発射装置を含む鉛直面内で、発射装置の方へ向けて撃つものと仮定する。競技者を原点 O に置き、x 軸を水平に、$x = l$ にある発射装置 L の方向へとり、y 軸を鉛直上向きにとる。時刻 t はライフルを撃った瞬間から測る。したがってクレーはすでに時間 T だけ空中にあり、時刻 t にはクレーが飛び始めてから $T + t$ だけ経過している。



命中の条件

発射から時刻 t における弾丸の位置は

$$x_B = (u\cos\alpha)\,t, \qquad y_B = (u\sin\alpha)\,t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

であり、時間 T だけ前に速さ v で真上に打ち出されたクレーは $x = l$ にあって、その高さは

$$y_C = v(T+t) - \tfrac{1}{2}g(T+t)^2 = \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right) + (v - gT)\,t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

である。弾丸がクレーと出会えるのは直線 $x = l$ 上だけであり、弾丸がそこに到達するのは $(u\cos\alpha)\,t = l$ のとき、すなわち

$$t = \frac{l}{u\cos\alpha}.$$

のときである。（ここで $\cos\alpha > 0$ である。$l > 0$ なので、真上に向けたライフルの弾は発射装置に決して届かない。）命中するには、この瞬間に $y_B = y_C$ となる必要がある。$-\frac{1}{2}gt^2$ の項は打ち消し合うので

$$(u\sin\alpha)\,t = \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right) + (v - gT)\,t.$$

となる。$t = l/(u\cos\alpha)$ を代入すると

$$\frac{l\sin\alpha}{\cos\alpha} = \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right) + \frac{(v - gT)\,l}{u\cos\alpha},$$

が得られ、両辺に $\cos\alpha$ を掛けると

$$l\sin\alpha - \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right)\cos\alpha = \frac{v - gT}{u}\,l,$$

となる。これが求める結果である。

$T = 0$ の場合

$T = 0$ のとき条件は $l \sin\alpha = vl/u$ となり、$l > 0$ であるから

$$\sin\alpha = \frac{v}{u}.$$

考えてみよう なぜこれから $v \le u$ だけでなく $v < u$ が導かれるのだろうか？

$\sin\alpha \le 1$ が必要なので $v \le u$ である。しかし $v = u$ ならば $\alpha = \frac{\pi}{2}$ となり、このとき $\cos\alpha = 0$ である。弾丸は O から真上に飛び、直線 $x = l$ には決して到達しない。したがって命中が可能なのは $v < u$ のときに限る。このとき

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{u^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - v^2}}{u},$$

である（$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ なので正の平方根をとる）。命中は時刻

$$t = \frac{l}{u\cos\alpha} = \frac{l}{\sqrt{u^2 - v^2}}.$$

に起こる。クレーが空中にあるのは $t = 0$ から再び $vt - \frac{1}{2}gt^2 = 0$ となるまで、すなわち $t = 2v/g$ までである。よって、クレーが落ちる前に命中させるには

$$\frac{l}{\sqrt{u^2 - v^2}} < \frac{2v}{g} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2v\sqrt{u^2 - v^2}}{g} > l,$$

が必要である。ここで正の量 $\sqrt{u^2 - v^2}$ を両辺に掛けた。$v < u$ と合わせて、これが示すべきことであった。

$T = 0$ の場合には見通しのよい見方がある。$\sin\alpha = v/u$ のとき、弾丸の速度の鉛直成分は $u\sin\alpha = v$ であってクレーの速度と等しく、両者は同じ重力を受ける。したがって弾丸とクレーは**あらゆる瞬間に同じ高さにあり**、問題は、クレーが落ちてくる前に弾丸の水平方向の速さ $\sqrt{u^2 - v^2}$ で距離 l を進み切れるかどうかだけになる。

検算

- **重力のない極限。** $g = 0$ かつ $T = 0$ ならば、二つの物体はともに直線運動をし、条件 $\sin\alpha = v/u$ は、等速度で動く物体を迎撃するときのおなじみの「見越し射撃」の条件にほかならない。
- **最大到達距離。** u を固定すると、上界 $2v\sqrt{u^2 - v^2}/g$ は $v = u/\sqrt{2}$ のとき最大となり、その値は u^2/g、すなわち速さ u で投げ出された物体の最大到達距離に等しい。これは理にかなっている。$v = u/\sqrt{2}$ のとき $\alpha = 45^\circ$ となり、命中はちょうど弾丸が地面に戻ってくる瞬間に起こるのである。

- **数値例。** $g = 9.8$、$v = 20$、$T = 0.7$、$u = 120$、$l = 60$（SI 単位）として命中する角度を数値的に求めると $\alpha \approx 0.2987$ rad となり、最初の恒等式の両辺は一致する。二つの運動を時間を追って進めると、弾丸が発射装置に到達したとき、弾丸とクレーはともに高さ 17.13 m にある。$T = 0$、$v = 20$、$u = 100$ のとき、上界は約 400 m で、$\alpha \approx 11.5^\circ$ である。

よくある間違い

- 遅れ T を考慮せずに、二つの物体に同じ時間変数を使ってしまう。クレーの高さには $T + t$ を用いなければならない。
- $v = u$ を除外し忘れる。このとき $\alpha = 90^\circ$ となり、まったく命中しない。
- 弾丸が発射装置に届くことだけを確かめ、その瞬間にクレーがまだ空中にあることを確かめない。

STEP のその先へ

$\frac{1}{2}gt^2$ の打ち消し合いは、ある深い考え方の特別な場合である。加速度 g で自由落下する座標系（frame）では重力が消え、あらゆる投射物は等速度で直線運動をする。これは加速度系に適用したガリレイの相対性原理（Galilean relativity）であり、アインシュタイン（Einstein）の手によって、一般相対性理論（general relativity）の核心にある等価原理（equivalence principle）となった。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、相対運動と非慣性系（non-inertial frame）を丁寧に展開している。

解答例

STEP I 1993、第 13 問

力学 ・ 仕事と仕事率

STEP I 1993、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

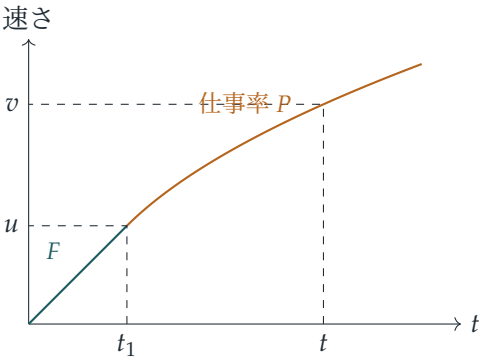
step.maths.org/questions/93-s1-q13

鍵となる考え方

運動は二つの段階からなり、それぞれの段階でニュートンの運動の第 2 法則（Newton's second law）を異なる形で用いる必要がある。力が一定である間は加速度も一定なので、*suvat* の公式（等加速度運動の公式）ですべて片づく。機関が一定の仕事率（power）で働くようになると、駆動力は P/v となり、速さとともに変化する。ここでの工夫は、加速度を $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$（時間を求める場合）または $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$（距離を求める場合）と書き、変数を分離できるようにすることである。

解答

機関車と列車をまとめて、抵抗のない水平な直線軌道上を動く質量 M の質点（particle）としてモデル化する。水平方向にはたらく力は牽引力（tractive force）だけである（重力と垂直抗力（normal reaction）は鉛直方向で、互いに打ち消し合う）。図は速さを時間に対して描いたものである。速さ u までは直線で、その後は速さが増すにつれて傾きが小さくなる曲線となる。



第 1 段階：一定の力

一定の力 F のもとでは加速度は F/M である。静止状態から出発すると、速さが u に達する時刻は

$$t_1 = \frac{Mu}{F} = \frac{Mu^2}{P},$$

である。ここで $F = P/u$ を用いた。$v^2 = u^2 + 2as$（ここでは 0 から u まで）により、進む距離は

$$s_1 = \frac{u^2}{2F/M} = \frac{Mu^2}{2F} = \frac{Mu^3}{2P}.$$

第 2 段階：一定の仕事率

仕事率は力と速度の積なので、速さ w のときの牽引力は P/w である。$w = u$ のときこれは $P/u = F$ となるので、機関の動作が切り替わるときに力が不連続に変わることはない点に注意しよう。ニュートンの運動の第 2 法則より

$$M\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{P}{w}.$$

時間。 変数分離（separation of variables）により、$Mw\,\mathrm{d}w = P\,\mathrm{d}t$ である。時刻 t_1 における速さ u から時刻 t における速さ v まで積分すると

$$\frac{M}{2}\left(v^2 - u^2\right) = P\,(t - t_1).$$

（これはまさに仕事とエネルギーの原理（work–energy principle）である。機関は仕事 $P(t - t_1)$ をし、それがすべて運動エネルギー（kinetic energy）になる。）よって

$$t = \frac{Mu^2}{P} + \frac{M}{2P}\left(v^2 - u^2\right) = \frac{M}{2P}\left(2u^2 + v^2 - u^2\right) = \frac{M}{2P}\left(u^2 + v^2\right),$$

となり、示すべき式が得られた。$v \geq u$ なので、速さ v に達するのは第 2 段階においてである（またはちょうどその開始時点である）。このため第 2 段階の方程式を用いてよい。

考えてみよう 距離を求めるには、独立変数（independent variable）として t ではなく x が必要である。加速度はどのように書き直せばよいだろうか？

連鎖律（chain rule）により、$\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = w\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$ である。したがって運動方程式（equation of motion）は

$$Mw\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \frac{P}{w}, \qquad \text{すなわち、} \qquad Mw^2\,\mathrm{d}w = P\,\mathrm{d}x.$$

となる。

距離。 $w = u$ から $w = v$ まで積分すると、第 2 段階で進む距離 s_2 は

$$\frac{M}{3}\left(v^3 - u^3\right) = P s_2, \qquad s_2 = \frac{M}{3P}\left(v^3 - u^3\right).$$

を満たす。したがって全距離は

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= \frac{Mu^3}{2P} + \frac{M}{3P}\left(v^3 - u^3\right) \\ &= \frac{M}{6P}\left(3u^3 + 2v^3 - 2u^3\right) \\ &= \frac{M}{6P}\left(2v^3 + u^3\right). \end{aligned}$$

問題文の誤植。 印刷された答えでは u^3 の代わりに u^2 となっている。これは正しいはずがない。Mv^3/P は長さである（仕事率の単位は $\mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}}$ で、Mv^3 の単位は $\mathrm{kg\,m^3\,s^{-3}}$ である）のに対し、Mu^2/P は時間である。よって二つの項を足し合わせるためには、u の項も 3 乗でなければならない。正しい距離は $\dfrac{M}{6P}\left(2v^3 + u^3\right)$ であり、これが上で示したものである。

検算

- $v = u$ とすると、時間の式は $Mu^2/P = Mu/F$、距離の式は $Mu^3/(2P) = Mu^2/(2F)$ を与え、当然そうなるべきとおり、第 1 段階の結果とちょうど一致する。
- 単位：Mv^2/P はエネルギーを仕事率で割ったもので時間であり、Mv^3/P は長さである。誤植はこのようにして見つかる。
- $M = F = u = 1$（よって $P = 1$）、$v = 2$ とすると、公式は $t = 2.5$ と距離 $17/6 \approx 2.833$ を与える。運動を数値的に刻んで計算する（速さ u 未満では力 F、それ以上では P/w）と両方の値が再現され、ランダムな M、F、u および $v \geq u$ に対しても公式と 10^{-7} より高い精度で一致する。印刷された u^2 の版は一致しない。

よくある間違い

- 第 1 段階を忘れて、一定仕事率の方程式を静止状態から積分してしまう。第 2 段階の方程式は $w \geq u$ となって初めて成り立つ。$w = 0$ から始めると力が無限大になってしまう。
- x について積分するときに $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$ を用いてしまう。距離を求めるには、加速度を $w\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$ と書かなければならない。
- 第 1 段階の時間を u/F と書いてしまう。加速度は F ではなく F/M である。

STEP のその先へ

一定仕事率の段階は変数分離で解ける 1 階微分方程式（first-order differential equation）であり、独立変数を t から x に切り替える方法は、エネルギーを用いた解法全般で使われるのと同じ工夫である。$w\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$ を積分すると運動エネルギーが得られ、これが仕事とエネルギーの定理へ、さらにはポテンシャル（potential）や保存量（conserved quantity）へとつながっていく。低速時に力に上限を設けることは、実際の牽引の仕組みでもある。一定の仕事率をもつモーターは、静止状態で無制限の力を出すことはできないからである。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このような流れで仕事、エネルギー、仕事率を展開している。

解答例

STEP I 1993、第 14 問

確率・統計 ・ 指数分布に従う待ち時間

STEP I 1993、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s1-q14

鍵となる考え方

重要なのはトード氏（Mr Toad）の速さではなく、最後の 1 km を進むのにかかる**時間** T であり、$T = 1/V$ である。V の確率密度関数（density）は扱いにくそうに見えるが、その累積分布関数（cumulative distribution function）は非常に単純であり、これを T についての主張に書き換えると、T がパラメータ α の指数分布（exponential distribution）に従うことがわかる。そうすれば、青信号の各期間に対する確率は二つの指数関数の差となり、青信号の期間すべてについて足し合わせると等比級数（geometric series）が現れる。

解答

到着時刻の分布

V を分速（km 毎分）で表した速さとし、$T = 1/V$ を、信号が青に変わった瞬間から測って、彼が信号に到着するまでの時間（分）とする。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\,\mathrm{e}^{-\alpha/v} = \alpha v^{-2}\mathrm{e}^{-\alpha/v},$$

であること、および $v \to 0^+$ のとき $\mathrm{e}^{-\alpha/v} \to 0$ であることに気づけば、V の分布関数（distribution function）は

$$\mathrm{P}(V \le v) = \int_0^v \alpha u^{-2}\mathrm{e}^{-\alpha/u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\alpha/v} \qquad (v > 0).$$

となる（$v \to \infty$ のときこれは 1 に収束するので、確かに確率密度関数になっている）。$V > 0$ であるから、$t > 0$ に対して $T > t \iff 1/V > t \iff V < 1/t$ が成り立ち、

したがって

$$\mathrm{P}(T > t) = \mathrm{P}\left(V < \tfrac{1}{t}\right) = \mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

である。よって T はパラメータ α の指数分布に従う。

考えてみよう なぜ V ではなく T を扱うのか？

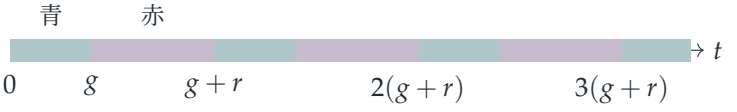
信号の状態は時間によって記述されるので、考えたい事象はすべて T の値の区間として表される。V の確率密度関数を手計算で T の確率密度関数に書き換えるには変数変換（change of variable）が必要になるが、$\mathrm{P}(T > t)$ を経由すればそれを避けられ、答えが一行で得られる。

青信号の一つの期間

時刻 0 に信号が青に変わる。信号は $[0, g)$ で青、$[g, g+r)$ で赤、$[g+r, (g+r)+g)$ で青となり、以下同様に続く。$(n+1)$ 番目の青信号の期間は $n(g+r) \le t < n(g+r)+g$ である。T は連続型なので、端点を含めるかどうかは結果に影響せず、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\big(n(g+r) < T < n(g+r)+g\big) &= \mathrm{P}\big(T > n(g+r)\big) - \mathrm{P}\big(T > n(g+r)+g\big)\\ &= \mathrm{e}^{-\alpha n(g+r)} - \mathrm{e}^{-\alpha(n(g+r)+g)},\end{aligned}$$

となり、求める式が得られる（問題文では二つ目の指数において閉じ括弧の位置が誤っている。指数はここに示したとおり $-\alpha\big(n(g+r)+g\big)$ でなければならない）。この計算は $n = 0$、すなわち信号が一度も赤になる前の最初の青信号の期間に対しても同様に成り立つ。



青信号で通過する確率

彼が青信号で通過するのは、T がこれらの青信号の期間のいずれかに入るとき、かつそのときに限る。これらの期間は互いに交わらないので、$n = 0$ も含めてそれぞれの確率を足し合わせればよい：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-\alpha n(g+r)} - \mathrm{e}^{-\alpha n(g+r)}\mathrm{e}^{-\alpha g}\right) = \left(1-\mathrm{e}^{-\alpha g}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-\alpha(g+r)}\right)^n\\ &= \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha g}}{1-\mathrm{e}^{-\alpha(g+r)}},\end{aligned}$$

ここで等比級数の和を求めた。$\alpha > 0$ かつ $g + r > 0$ より $0 < \mathrm{e}^{-\alpha(g+r)} < 1$ であるから、この級数は収束（converge）する。

極限

$\alpha \to \infty$ のとき、$g > 0$、$g + r > 0$ であるから $e^{-\alpha g} \to 0$ かつ $e^{-\alpha(g+r)} \to 0$ となり、

$$P(\alpha) \to \frac{1-0}{1-0} = 1.$$

である。これは納得のいく結果である。α が大きいことはトード氏が非常に速いことを意味し、その場合ほぼ確実に最初の青信号の期間が終わる前に通過できる。

$\alpha \to 0$ のときは分子と分母がともに 0 に収束するので、もっと注意が必要である。それぞれにおいて $1 - e^{-x} = e^{-x}(e^x - 1)$ と書き直すと、

$$P(\alpha) = \frac{e^{-\alpha g}\left(e^{\alpha g} - 1\right)}{e^{-\alpha(g+r)}\left(e^{\alpha(g+r)} - 1\right)} = e^{\alpha r} \cdot \frac{\dfrac{e^{\alpha g} - 1}{\alpha g}}{\dfrac{e^{\alpha(g+r)} - 1}{\alpha(g+r)}} \cdot \frac{g}{g+r},$$

となる。ここで分子と分母を α で割り、因子 g と $g + r$ を挿入した。$\alpha \to 0$ のとき $e^{\alpha r} \to 1$ であり、また $\alpha g \to 0$ かつ $\alpha(g + r) \to 0$ であるから、$(e^x - 1)/x \to 1$ により二つの分数はいずれも 1 に収束する。したがって

$$P(\alpha) \to \frac{g}{r+g} \qquad \text{ただし} \alpha \to 0.$$

である。この場合トード氏は非常に遅く、到着時刻が非常に多くの周期にわたって広がっているので、青信号である確率は、各周期のうち青である時間の割合にほかならない。

検算

- $\alpha = 0.7$、$g = 1$、$r = 2$ のとき、公式から $P(\alpha) \approx 0.5737$ が得られる。$e^{-\alpha/v}$ の逆関数を用いて V を生成し、4×10^5 回の走行をシミュレーションしたところ 0.5744 となり、$n = 0, 1, 2$ の各青信号の期間に対する確率も一致した。
- $g = 1$、$r = 2$ のとき：$P(10^{-4}) \approx 0.33337$ であり $\frac{1}{3}$ に近く、また $P(10) \approx 0.99995$ である。
- $r = 0$ のとき信号は常に青であり、公式はすべての α に対して $P(\alpha) = 1$ を与える。これは当然そうなるべき結果である。

よくある間違い

- $n = 0$ を含め忘れる。一度も赤になる前の最初の青信号の期間が、最も大きな確率をもつ。

- 問題文に印刷された指数 $-\alpha(n(g+r))+g$ をそのまま写してしまう。これは $-\alpha\big(n(g+r)+g\big)$ の誤植（misprint）である。
- V そのものを到着時刻として扱ったり、$\mathrm{E}(T)$ を求めようとしたりする。実はここでは $\mathrm{E}(V)$ は無限大であるが、この問題ではそれは一切必要ない。

STEP のその先へ

分布関数を通じて V の分布を $T=g(V)$ の分布に変換することは、確率変数（random variable）の変換の標準的な方法である。ここで V は逆指数分布（inverse-exponential distribution）に従っている。極限 $\alpha\to 0$ は、ある一般的な考え方の小さな例になっている。すなわち、多くの周期にわたって広がった確率的な時刻は、各局面にその局面の長さに比例した確率で入る。これが再生理論（renewal theory）の出発点である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、確率変数の変換と指数分布の両方が扱われている。

解答例

STEP I 1993、第 15 問

確率・統計 ・ ベイズの定理

> **STEP I 1993、問 15**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q15

鍵となる考え方

これは物語の衣をまとったベイズの定理（Bayes' theorem）である。要点は、**真の**方向で条件付けし、それぞれの場合に住民の一連の答えがどれほど起こりやすいかを考えることにある。Biscii は常に嘘をつくので、Biscii の繰り返しの答えは常に一致し、しかも常に誤った方向を指す。したがって、同じ答えが繰り返されるほど、相手が Biscii である可能性が高まる。もう一度尋ねるだけで判断が逆転しうるのは、このためである。

解答

Ascii だけの場合

Ascii は各質問に確率 $\frac{3}{4}$ で正直に答え、それは以前の答えとは独立である。質問の答えは 2 通り（左か右）しかないので、2 つの答えが一致するのは、両方とも真実であるか、両方とも嘘であるときに限る。よって

$$\mathrm{P}(\text{同じ答えを 2 回}) = \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = \tfrac{9}{16} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{10}{16} = \tfrac{5}{8},$$

となり、求める結果が得られる。このうち「両方とも真実」の場合が $\frac{9}{16}$ を占めるので、条件付き確率（conditional probability）の定義より

$$\mathrm{P}(\text{真実を言っている} \mid \text{同じ答えを 2 回}) = \frac{9/16}{10/16} = \frac{9}{10},$$

となる。これが 2 つ目の結果である。

「左」という答えが 2 回の場合

左が正しい方向であるという事象を L、右が正しい方向であるという事象を R とする。また、住民が Ascii である事象を A、Biscii である事象を B とし、$\mathrm{P}(A) = \frac{11}{16}$、$\mathrm{P}(B) = \frac{5}{16}$ で、これは地理とは独立に選ばれるものとする。船長は初めは方向について何も知らないので、$\mathrm{P}(L) = \mathrm{P}(R) = \frac{1}{2}$ とおく。住民が「左」と 2 回答える事象を E_2 とする。

考えてみよう なぜ $\mathrm{P}(L \mid E_2)$ よりも $\mathrm{P}(E_2 \mid L)$ のほうが求めやすいのか。

真の方向がわかれば、各部族のふるまいは完全に決まるので、答えの確率は容易に書き下せる。そのうえでベイズの定理を用いて、条件を逆向きにすればよい。

左が正しい場合、Ascii が「左」と 2 回答えるのは 2 回とも真実を言うときであり、その確率は $\frac{9}{16}$ である。Biscii は嘘をついて「右」と言うので、E_2 を生じえない。よって

$$\mathrm{P}(E_2 \mid L) = \frac{11}{16} \cdot \frac{9}{16} + \frac{5}{16} \cdot 0 = \frac{99}{256}.$$

右が正しい場合、Ascii が「左」と 2 回答えるのは 2 回とも嘘をつくときであり、その確率は $\frac{1}{16}$ である。Biscii は必ず「左」と 2 回答える。よって

$$\mathrm{P}(E_2 \mid R) = \frac{11}{16} \cdot \frac{1}{16} + \frac{5}{16} \cdot 1 = \frac{11+80}{256} = \frac{91}{256}.$$

L と R の事前確率（prior）は等しいので、ベイズの定理において約分される。

$$\mathrm{P}(L \mid E_2) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{99}{256}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{99}{256} + \frac{1}{2} \cdot \frac{91}{256}} = \frac{99}{99+91} = \frac{99}{190}.$$

これは $\frac{1}{2}$ より大きいので、左のほうが可能性の高い方向であり、船長は左へ進むべきである。そのとき正しい確率は $\frac{99}{190}$ である。

「左」という答えが 3 回の場合

「左」と 3 回答える事象を E_3 とする。同じ推論が、今度は Ascii からの 3 つの独立な答えについて成り立つ。

$$\mathrm{P}(E_3 \mid L) = \frac{11}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \frac{5}{16} \cdot 0 = \frac{11}{16} \cdot \frac{27}{64} = \frac{297}{1024},$$
$$\mathrm{P}(E_3 \mid R) = \frac{11}{16}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{5}{16} \cdot 1 = \frac{11}{1024} + \frac{320}{1024} = \frac{331}{1024}.$$

$\mathrm{P}(E_3 \mid R) > \mathrm{P}(E_3 \mid L)$ であり、事前確率は等しいので、今度は右のほうが可能性の高い方向となる。正確には

$$\mathrm{P}(R \mid E_3) = \frac{331}{297+331} = \frac{331}{628} > \frac{1}{2}.$$

したがって船長は**右**へ進むべきであり、そのとき正しい確率は $\frac{331}{628}$ である。

考えてみよう 3 回目の「左」によって、なぜ左の可能性が下がるのか。

「左」が 1 回増えるごとに、$\mathrm{P}(E \mid L)$ における Ascii の寄与は $\frac{3}{4}$ 倍になる。一方、$\mathrm{P}(E \mid R)$ では Ascii の項は $\frac{1}{4}$ 倍に縮むが、Biscii の項は $\frac{5}{16}$ のまま変わらない。同じ答えが長く続くことはまさに Biscii が生み出すものなので、証拠はますます「相手は嘘つきだ」と告げるようになる。正直な Ascii も答えは一貫しているが、それは確率 $(\frac{3}{4})^n$ でしか起こらず、この値は急速に小さくなっていく。

検算

- 「左」が 1 回だけの場合、尤度（likelihood）は $\frac{11}{16} \cdot \frac{3}{4} = \frac{33}{64}$（$L$ のもと）と $\frac{11}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{16} = \frac{31}{64}$（$R$ のもと）であるから、$\mathrm{P}(L \mid \text{左}) = \frac{33}{64}$ である。数列 $\frac{33}{64} \approx 0.516$、$\frac{99}{190} \approx 0.521$、$\frac{297}{628} \approx 0.473$ はいったん増加してから減少しており、上の説明と合致する。
- 答えの回数が多くなると、Biscii の項が支配的になるので、$\mathrm{P}(L \mid E_n) \to 0$ となる。
- 4 つの確率はすべて、分数を用いた厳密な数え上げと、10^6 回の会話のシミュレーションによって確認した。シミュレーションの値は 0.5214（厳密値 $\frac{99}{190} \approx 0.5211$）および 0.5266（厳密値 $\frac{331}{628} \approx 0.5271$）であった。

よくある間違い

- $\mathrm{P}(L) = \mathrm{P}(R) = \frac{1}{2}$ という仮定を明記し忘れること。方向について何らかの事前確率を置かなければ、この問題には答えられない。
- 最初の部分で得た $\frac{9}{10}$ を住民全体に当てはめること。これは Ascii だけについての主張であり、Biscii もまた毎回必ず同じ答えを 2 回返す。
- 住民が**誰であっても**、3 つの答えが独立であるとみなすこと。答えが独立になるのは部族（および真の方向）がわかったときに限られる。だからこそ、まず条件付けを行うのである。

STEP のその先へ

この計算はベイズ更新（Bayesian updating）の一例である。比 $\mathrm{P}(E \mid R)/\mathrm{P}(E \mid L)$ は尤度比（likelihood ratio）またはベイズ因子（Bayes factor）と呼ばれ、証拠が一方の仮説をどれほど強く支持するかを測る量である。部族はすべての答えに共通する隠れ変数（hidden variable）であるため、答えは**条件付きで**独立（conditionally independent）であるにすぎず、一方を指しているように見える証拠が、結局は逆を指すことになり

うる。Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）は、条件付き確率と、まさにこの種のパラドックスについて優れた解説をしている。

解答例

STEP I 1993、第 16 問

確率・統計 ・ 幾何的確率

> **STEP I 1993、問 16**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q16

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.20 節「**ビュフォンの針**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/buffon.html

鍵となる考え方

これはビュフォン（Buffon）の針の問題である。ピンが最も近い直線と交わるかどうかは、ピンの先端がその直線**に向かって**どこまで届くかだけで決まり、その到達距離はピンの半分を直線に垂直な方向へ射影（projection）した長さである。まず中心の距離を固定し、角度だけから条件付き確率（conditional probability）を求め、それから距離について平均をとる。前半の積分はまさにこの平均操作から現れる積分であり、それゆえ問題はそこから始まっているのである。

解答

積分

$y = \cos^{-1} t$ とおくと、$t = \cos y$ かつ $\mathrm{d}t = -\sin y \,\mathrm{d}y$ である。$t = 0$ のとき $y = \frac{\pi}{2}$、$t = 1$ のとき $y = 0$ である。したがって

$$\int_0^1 \cos^{-1} t \,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^0 y\,(-\sin y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} y \sin y \,\mathrm{d}y.$$

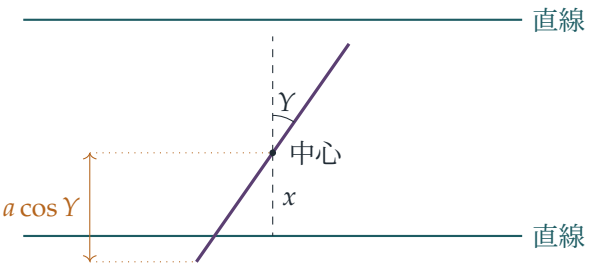
$u = y$、$\mathrm{d}v = \sin y\,\mathrm{d}y$ として部分積分（integration by parts）を行うと、

$$\int_0^{\pi/2} y\sin y\,\mathrm{d}y = \Big[-y\cos y\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos y\,\mathrm{d}y$$
$$= 0 + \Big[\sin y\Big]_0^{\pi/2} = 1,$$

となり、示すべき式が得られる。

（別解：この積分は $y = \cos^{-1} t$ と座標軸で囲まれた部分の面積であり、これは $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$ における $t = \cos y$ の下側の面積と同じ領域である。すなわち $\int_0^{\pi/2}\cos y\,\mathrm{d}y = 1$ である。）

$X = x$ のもとでの確率



ピンの半分はそれぞれ長さ a をもち、直線に垂直な方向と角 Y をなすので、ピンの両端は中心の両側に垂直距離 $a\cos Y$ だけ離れたところにある。最も近い直線は中心から距離 x にあるので、ピンがそれと交わるのはちょうど

$$a\cos Y \ \ge\ x.$$

のときである。（等号の場合、すなわち先端がちょうど直線に触れる場合の確率は 0 なので、それを数えるかどうかは問題にならない。）

> **考えてみよう**　$a\cos Y \ge x$ を Y だけの条件に書き直すにはどうすればよいか？

cos は $[0, \frac{\pi}{2}]$ で減少するので、x/a という値がとりうるものかどうかで場合が分かれる。

- $x \ge a$ ならば、$a\cos Y \le a \le x$ であり、等号が成り立つのは $Y = 0$ かつ $x = a$ のときに限られるので、確率は 0 である。
- $0 \le x < a$ ならば、$\cos Y \ge x/a$ は $Y \le \cos^{-1}(x/a)$ と同値であり、ここで $\cos^{-1}(x/a) \in (0, \frac{\pi}{2}]$ である。Y は $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上の一様分布（uniform distribution）に従うので、

$$\mathrm{P}(\text{交差する} \mid X = x) = \frac{\cos^{-1}(x/a)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\cos^{-1}\frac{x}{a}.$$

ここでは X と Y の独立性（independence）を用いた。$X = x$ がわかっても、Y は $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上の一様分布のままである。

一般の投げ方に対する確率

次に $a < b$ とする。X の確率密度関数（probability density function）は $[0, b]$ 上で $1/b$ である。$a < b$ なので、交差が起こりうる区間 $[0, a)$ は $[0, b]$ に含まれ、$[a, b]$ 上では条件付き確率は 0 である。全確率の法則（law of total probability）により、

$$\mathrm{P}(\text{交差する}) = \int_0^b \mathrm{P}(\text{交差する} \mid X = x)\, \frac{1}{b}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{b} \int_0^a \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \frac{x}{a}\, \mathrm{d}x.$$

$x = at$、$\mathrm{d}x = a\, \mathrm{d}t$ と置換し、前半の結果を用いると、

$$\mathrm{P}(\text{交差する}) = \frac{2a}{\pi b} \int_0^1 \cos^{-1} t\, \mathrm{d}t = \frac{2a}{\pi b},$$

となり、示すべき式が得られる。$a < b$ なのでピンは間隔 $2b$ より短く、2 本目の直線に届くことは決してない。したがって「いずれかの直線と交わる」ことと「最も近い直線と交わる」ことは同じ事象である。

検算

- $a \to b$ のとき答えは $2/\pi \approx 0.637$ に近づき、これは 1 より小さい。そうでなければならない。間隔と同じ長さのピンでも、直線とほぼ平行に横たわることはよくあるからである。
- 答えは a に比例する。短いピンの長さを 2 倍にすると交差の確率も 2 倍になり、これは交差の回数の期待値が長さについて線形であるという事実と合致する。
- 実際の幾何的状況（中心は帯の幅にわたって一様、角度も一様）を $a = 1$、$b = 2$ としてシミュレーションしたところ、4×10^5 回の投げで 0.3183 となり、$1/\pi \approx 0.31831$ と一致した。中点則による数値積分では $\int_0^1 \cos^{-1} t\, \mathrm{d}t = 1.0000000$ となった。

よくある間違い

- $a \cos Y$ の代わりに $a \sin Y$ を用いてしまう。ここで Y は直線そのものからではなく、直線に**垂直な方向**から測った角である。
- 条件付き確率を式 $\frac{2}{\pi} \cos^{-1}(x/a)$ のまま $[0, b]$ 全体で積分してしまう。この式は $x > a$ では定義されず、そこでの条件付き確率は 0 である。
- X について平均をとるときに密度 $1/b$ を忘れる。

STEP のその先へ

ビュフォンは 18 世紀にこの問題を提起した。これは**幾何学的確率**（geometric probability）の古典的な例であり、確率をパラメータ空間（ここでは長方形 $[0, b] \times [0, \frac{\pi}{2}]$）における面積として計算するものである。答えに π が含まれるので、ピンを投げることで π の（非常に収束の遅い）モンテカルロ法（Monte Carlo method）による推定値が得られる。美しい拡張である「ビュフォンのヌードル」（Buffon's noodle）は、期待値の線形性（linearity of expectation）により、どんな形の曲線であっても交差の回数の期待値はその長さだけで決まることを示す。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、連続的な同時分布やこの種の条件付けを扱っている。

解答例

STEP II 1993、第 1 問

純粋数学 ・ 組合せゲームの戦略

> **STEP II 1993、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q1

鍵となる考え方

すべては一つの数え上げの事実に基づく。両者とも分配できるのはちょうど 9 であるから、ベティがすべての戦場（field）でアダムと同点以上となり、しかもそのうち一つで勝つことはできない。そのためには少なくとも $9+1$ が必要になるからである。したがって、ベティが勝つときは必ずちょうど二つの戦場で勝ち、残りの一つで負ける。このことがわかれば、前半は決まった手順に従うだけになり、二つの三つ組（triple）に関する部分は短い場合分け（case analysis）で片づく。

解答

以下では、「ベティが戦場 i で勝つ」とは $b_i > a_i$ のことであり、「アダムが戦場 i で勝つ」とは $a_i > b_i$ のことであり、$a_i = b_i$ である戦場は引き分けとする。

補題：ベティはどのように勝てるか

ベティの三つ組がアダムの三つ組 (a_1, a_2, a_3) に勝つとする。ただし $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ である。

- 三つの戦場すべてで勝つことはできない。そのためには各 i について $b_i \geq a_i + 1$ が必要となり、$b_1 + b_2 + b_3 \geq 12$ となってしまうからである。
- ちょうど一つの戦場で勝つとする。ベティはアダムより多く得点しているので、アダムの得点は 0 であり、残りの二つの戦場は引き分けかベティの勝ちである。すると、すべての i について $b_i \geq a_i$ であり、少なくとも一つでは狭義の不等号が成り立つので、$b_1 + b_2 + b_3 \geq 9 + 1 = 10$ となる。これは不可能である。

ベティはアダムより多く得点しているので、少なくとも 1 点は得ている。よって、ベティは**ちょうど二つ**の戦場で勝つ。したがって、ベティが (a_1, a_2, a_3) に勝つための必要十分条件は、ある二つの戦場 i, j について

$$b_i \geq a_i + 1, \qquad b_j \geq a_j + 1,$$

が成り立ち、残りの戦場 k で負けることである。なお、戦場 k で負けることは自動的に成り立つ。実際、$b_k = 9 - b_i - b_j \leq 9 - a_i - a_j - 2 = a_k - 2$ である。

ベティは常に勝てる

$a_1 \geq a_2 \geq a_3$ となるように戦場に番号をつける。すると $3a_1 \geq a_1 + a_2 + a_3 = 9$ であるから、$a_1 \geq 3$ である。ベティはアダムが最も強い戦場を捨て、他の二つの戦場で一つずつ上回る：

$$(b_1, b_2, b_3) = (a_1 - 2,\ a_2 + 1,\ a_3 + 1).$$

これらは非負整数であり（$a_1 - 2 \geq 1$ だから）、和は 9 である。$a_1 - 2 < a_1$ であるから、ベティは戦場 2 と 3 で勝ち、戦場 1 で負ける。ベティの得点は 2、アダムの得点は 1 であるから、ベティが勝つ。

アダムは決して勝たないようにできる

$(a_1, a_2, a_3) = (9, 0, 0)$ とする。$b_2, b_3 \geq 0$ であるから、アダムは戦場 2 や 3 では得点できない。よってアダムの得点は高々 1 点であり、それは戦場 1 で勝つとき、すなわち $b_1 \leq 8$ のときに限る。その場合 $b_2 + b_3 = 9 - b_1 \geq 1$ であるから、ベティは戦場 2 か戦場 3 に正の値を置いており、少なくとも 1 点を得る。アダムの得点は 0 であるか、または 1 でベティの得点が少なくとも 1 であるかのいずれかである。どちらの場合もアダムの得点はベティを上回らないので、ベティがどうしようとアダムは決して勝たない。

（総当たり（brute force）で調べると、この性質をもつ三つ組は $(9, 0, 0)$ とその並べ替え**だけ**であることがわかる。それ以外の三つ組に対しては、ベティが何らかの愚かな選択をすればアダムに勝ちを譲ることになる。）

二つの三つ組：$(5, 3, 1)$ と $(3, 1, 5)$

両方に勝つ三つ組 (b_1, b_2, b_3) が存在しないことを示せばよい。補題により、ベティはそれぞれの三つ組に対して二つの戦場で勝つ必要がある。

$(5, 3, 1)$ に対して。戦場 1 と 2 で勝つには $6 + 4 = 10 > 9$ が必要であり、不可能である。よって、戦場 3 と、戦場 1 または戦場 2 で勝たなければならない：

$$b_3 \geq 2 \quad \text{かつ} \quad (b_1 \geq 6 \ \text{または}\ b_2 \geq 4). \tag{A}$$

$(3,1,5)$ **に対して**。戦場 1 と 3 で勝つには $4+6=10>9$ が必要であり、不可能である。よって、戦場 2 と、戦場 1 または戦場 3 で勝たなければならない：

$$b_2 \geq 2 \quad \text{かつ} \quad (b_1 \geq 4 \ \text{または}\ b_3 \geq 6). \tag{B}$$

> **考えてみよう** どちらの条件にも戦場の選択が含まれている。場合を見落とさずに両者を組み合わせるにはどうすればよいか？

(B) の後半の選択で場合分けする。

- $b_3 \geq 6$ ならば $b_1+b_2 \leq 3$ であるから、$b_1 \geq 6$ も $b_2 \geq 4$ も成り立たず、(A) に矛盾する。
- $b_1 \geq 4$ ならば、(B) の $b_2 \geq 2$ と (A) の $b_3 \geq 2$ を合わせ、(A) の選択肢を加えると、

  $$b_1+b_2+b_3 \geq 6+2+2=10 \qquad \text{または} \qquad b_1+b_2+b_3 \geq 4+4+2=10.$$

  のいずれかとなる。和は 9 であるから、どちらも不可能である。

どの場合も矛盾が生じるので、$(5,3,1)$ と $(3,1,5)$ の両方に勝つ三つ組は存在しない。よって、示すべきとおり、アダムはこの組で勝つ。

検算

三つ組は $\binom{11}{2}=55$ 個しかないので、すべて総当たりで確かめられる。コンピュータで調べると、アダムの 55 個の三つ組はどれも上のベティの手順で打ち負かされ、勝つ応手はどれもちょうど二つの戦場で勝つことが確かめられる。また、$(5,3,1)$ に勝つ 13 個の三つ組と $(3,1,5)$ に勝つ 13 個の三つ組を列挙すると、両方のリストに共通する三つ組は見つからない。具体例として、$(4,2,3)$ は $(3,1,5)$ に 2–1 で勝つが、$(5,3,1)$ に対しては戦場 3 でしか勝てず、戦場 1 と 2 で負けるので、1–2 で負ける。

よくある間違い

- アダムの「決して勝たない」三つ組として $(3,3,3)$ を試してしまう。ベティが $(2,2,5)$ を出せば 1–2 で負けるので、この三つ組ではアダムは勝つことが**ありうる**。
- ベティが一つの戦場だけで勝つにはアダムが無得点である必要があることを忘れ、さらに和が 9 であることを使ってその場合を排除しない。
- 二つの三つ組の部分で、**どの**応手もうまくいかないことを証明する代わりに、$(6,0,3)$ や $(0,2,7)$ のような自然な応手をいくつか調べるだけで済ませてしまう。

STEP のその先へ

ブロットー大佐（Colonel Blotto）ゲームはゲーム理論（game theory）の古典である。ベティは完全な情報をもって後から手を選ぶので常に勝つ。そのため、興味深いのは両者が同時に手を選ぶ場合である。その場合、通常は最善の純粋戦略（pure strategy）は存在せず、解は**混合戦略**（mixed strategy）、すなわち三つ組全体の上の確率分布（probability distribution）となる。その存在はフォン・ノイマン（von Neumann）のミニマックス定理（minimax theorem）によって保証される。この問題の二つの三つ組の変種はその方向への第一歩である。アダムにとって最善の守りは、選択を複数の三つ組に分散させることだからである。同じ趣旨の問題については、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）を参照せよ。混合戦略を支える確率の道具については、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）を参照せよ。

解答例

STEP II 1993、第 2 問

純粋数学 ・ 三角関数と代数関数の積分

STEP II 1993、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s2-q2

鍵となる考え方

小問 (i) では、余弦の積は積分しにくいが和なら容易なので、積和公式（factor formula）を用いて積を和に直す。あとはすべて一つの事実に帰着する。すなわち、$\cos kx$ を 1 周期（period）にわたって積分すると、$k = 0$ でない限り 0 になる。特別な場合とは、ちょうど $m - n$ または $m + n$ が 0 になる場合である。小問 (ii) では、根号の中を一つの分数にまとめて有理化（rationalise）する。これにより被積分関数（integrand）が標準的な二つの部分に分かれる。

解答

小問 (i)

積和公式 $2\cos A \cos B = \cos(A - B) + \cos(A + B)$ より

$$\cos(mx)\cos(nx) = \tfrac{1}{2}\big[\cos\big((m-n)x\big) + \cos\big((m+n)x\big)\big].$$

したがって、整数 k に対して $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}x$ を求めればよい。

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\dfrac{\sin kx}{k}\right]_0^{2\pi} = \dfrac{\sin 2k\pi}{k} = 0, & k \neq 0, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}x = 2\pi, & k = 0. \end{cases}$$

ここでは k が整数であるから $\sin 2k\pi = 0$ となることを用いた。$k = 0$ のときは k で割ることができないので、この場合を別に扱っている。

? **考えてみよう** 場合はいくつあるか。また、それらは重なり合うか。

$k = m - n$ と $k = m + n$ はそれぞれ 0 であるかないかのどちらかであり、両方が 0 になるのは $m = n = 0$ のときに限る。よって場合は次の三つである。

- $m \neq n$ かつ $m \neq -n$、すなわち $|m| \neq |n|$ のとき：両方の積分が 0 になり、答えは 0 である。
- $m - n$ と $m + n$ のうちちょうど一方が 0、すなわち $|m| = |n| \neq 0$ のとき：一方の項が $\frac{1}{2} \cdot 2\pi$ を与え、他方は 0 を与えるので、答えは π である。
- $m = n = 0$ のとき：両方の項が $\frac{1}{2} \cdot 2\pi$ を与える（直接見ても、被積分関数は 1 である）。答えは 2π である。

まとめると

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & |m| \neq |n|, \\ \pi, & |m| = |n| \neq 0, \\ 2\pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

cos は偶関数（even function）であり $\cos(-nx) = \cos(nx)$ となるので、$m = -n$ の場合は $m = n$ の場合と同じ扱いになることに注意しよう。

小問 (ii)

被積分関数 $\sqrt{1 + 1/x} = \sqrt{(x+1)/x}$ が実数となるのは $(x+1)/x \geq 0$ のとき、すなわち $x > 0$ または $x \leq -1$ のときに限る。まず $x > 0$ の場合を扱う。

$x > 0$ の場合。 根号の中の分子と分母に $x + 1$ を掛けると

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}} = \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x(x+1)}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}},$$

となる。ここで $(x+1)^2$ の平方根をとる際に $x + 1 > 0$ を用いた。次に、分子の一部が $x^2 + x$ の導関数の半分になるように分子を分ける。

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}.$$

考えてみよう $1/\sqrt{x^2+x}$ はどのように積分すればよいか。

平方完成（completing the square）を行うと $x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ である。すると、$u > a > 0$ で成り立つ標準的な結果 $\int (u^2 - a^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}u = \ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right)$ を $u = x + \frac{1}{2}$、$a = \frac{1}{2}$ として適用できる。

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x}} = \ln\left(x + \tfrac{1}{2} + \sqrt{x^2+x}\right) + \text{定数} = \ln\left(2x + 1 + 2\sqrt{x^2+x}\right) + \text{定数}.$$

第 1 の部分は $\int \frac{1}{2}(2x+1)(x^2+x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+x}$ である。したがって、$x>0$ のとき

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+x} + \frac{1}{2}\ln\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right) + C.$$

$2x+1+2\sqrt{x^2+x} = \left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2$ であるから、これは

$$\sqrt{x(x+1)} + \ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right) + C.$$

と書くこともできる。置換（substitution）$x = \sinh^2 t$ を用いると、この第 2 の形が直接得られる。被積分関数は $2\cosh^2 t = 1+\cosh 2t$ となり、これを積分すると $t+\sinh t\cosh t$ となる。

$x \le -1$ の場合。 このとき $x+1 \le 0$ であるから $\sqrt{(x+1)^2} = -(x+1)$ となり

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}} = -\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}.$$

同じ分け方が使えるが、今度は $x+\frac{1}{2} < 0$ なので、$|u| > a$ で成り立つ $\int (u^2-a^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}u = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|$ が必要になる。$x<-1$ のとき

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{x^2+x} - \frac{1}{2}\ln\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right| + C.$$

$\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right)\left(2x+1-2\sqrt{x^2+x}\right) = 1$ であるから、対数の項は $+\frac{1}{2}\ln\left|2x+1-2\sqrt{x^2+x}\right|$ と書くこともできる。

検算

- 小問 (i)：$m=n=1$ のとき被積分関数は $\cos^2 x$ であり、その平均値は $\frac{1}{2}$ なので、積分は $\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi$ となり、予想どおりである。$-6 \le m,n \le 6$ のすべての組について数値計算（シンプソンの公式（Simpson's rule））を行ったところ、三つの場合に分けた公式と一致した。
- 小問 (ii)：答えを微分する。$\sqrt{x^2+x}$ の導関数は $\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$ である。$\frac{1}{2}\ln(\cdots)$ の導関数は $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x}}$ である。これらを加えると $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}$ となり、求めるとおりである。
- 数値的には、シンプソンの公式によっても、公式 $\sqrt{12} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\dfrac{7+4\sqrt{3}}{3+2\sqrt{2}}$ によっても $\int_1^3 \sqrt{1+1/x}\,\mathrm{d}x \approx 2.48547$ となる。

よくある間違い

- $m = -n \neq 0$ の場合を忘れること。この場合も $m = n \neq 0$ の場合と同様に π になる。
- $k = 0$ のときに $\dfrac{\sin kx}{k}$ と書いてしまうこと。この場合は別に扱う必要がある。
- 符号を確かめずに $\sqrt{(x+1)^2} = x+1$ と書くこと。これでは $x < -1$ に対して誤った答えになる。

STEP のその先へ

小問 (i) は、関数 $1, \cos x, \cos 2x, \ldots$ が $[0, 2\pi]$ 上で**直交する**（orthogonal）ことを述べている。これはフーリエ級数（Fourier series）の背後にある事実である。$f(x) = \sum a_n \cos nx$ ならば、$\cos mx$ を掛けて積分することで、ただ一つの係数 a_m が取り出される。積分が内積（dot product）の役割を果たすという同じ考え方が、関数の空間における線形代数（linear algebra）の多くを支えている。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は直交性を扱っており、Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式入門）では、熱方程式（heat equation）を解く場面でフーリエ級数が実際に活躍する様子が示されている。

解答例

STEP II 1993、第 3 問

純粋数学 • リッカチ微分方程式

STEP II 1993、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s2-q3

鍵となる考え方

どちらの方程式も y^2 の項のために非線形（nonlinear）であり、標準的な一階（first-order）微分方程式の解法はどれもそのままでは適用できない。置換（substitution）は、この y^2 の項を消すように設計されている。(i) では、y を u'/u の定数倍として表すと二乗の項が打ち消し合い、定数係数（constant coefficients）の線形二階微分方程式が残る。(ii) では、$y = 1/x$ がたまたま厳密な解になっており、$y = 1/x + 1/v$ とおくと方程式は v についての線形一階微分方程式になる。これは積分因子（integrating factor）を用いて解ける。

解答

小問 (i)

$y = -\dfrac{u'}{3u}$ とおく。ただし $u' = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ である。商の微分法（quotient rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{u''}{3u} + \frac{(u')^2}{3u^2}, \qquad \text{また} \qquad 3y^2 = 3 \cdot \frac{(u')^2}{9u^2} = \frac{(u')^2}{3u^2}.$$

よって厄介な項は打ち消し合う：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 3y^2 = -\frac{u''}{3u}.$$

したがって、方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y - 3y^2 = -2$ は

$$-\frac{u''}{3u} + \frac{u'}{3u} = -2.$$

となる。$-3u$ を掛けると（$u \neq 0$ とする。これは y が定義されるためにもともと必要な条件である）、

$$u'' - u' - 6u = 0.$$

を得る。特性方程式（auxiliary equation）は $m^2 - m - 6 = (m-3)(m+2) = 0$ であるから、$m = 3$ または $m = -2$ であり、

$$u = A\mathrm{e}^{3x} + B\mathrm{e}^{-2x}$$

となる。ここで A と B は定数で、両方が同時に零になることはない。このとき $u' = 3A\mathrm{e}^{3x} - 2B\mathrm{e}^{-2x}$ であり、

$$y = -\frac{u'}{3u} = \frac{2B\mathrm{e}^{-2x} - 3A\mathrm{e}^{3x}}{3\left(A\mathrm{e}^{3x} + B\mathrm{e}^{-2x}\right)}.$$

考えてみよう 一階微分方程式の解には任意定数（arbitrary constant）が一つだけ含まれるはずである。なぜここでは二つあるのだろうか。

意味をもつのは A と B の比だけである。u に零でない定数を掛けても u'/u は変わらないからである。$A \neq 0$ ならば、分子と分母を $A\mathrm{e}^{3x}$ で割り、$K = B/A$ とおくと、

$$y = \frac{2K\mathrm{e}^{-5x} - 3}{3\left(1 + K\mathrm{e}^{-5x}\right)} = \frac{2K - 3\mathrm{e}^{5x}}{3\left(\mathrm{e}^{5x} + K\right)},$$

となる。ここで K は任意定数である。$A = 0$ の場合は定数解（constant solution）$y = \frac{2}{3}$ が得られ、これは $K \to \infty$ としたときのこの解の族の極限である。$K = 0$ とすると、もう一つの定数解 $y = -1$ が得られる。検算として、定数解は $-y - 3y^2 = -2$、すなわち $(3y-2)(y+1) = 0$ を満たしている。

小問 (ii)

$y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{v}$ とおく。すると

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x^2} - \frac{v'}{v^2},$$

であるから、

$$\begin{aligned} x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -1 - \frac{x^2v'}{v^2}, \\ xy &= 1 + \frac{x}{v}, \\ x^2y^2 &= x^2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xv} + \frac{1}{v^2}\right) = 1 + \frac{2x}{v} + \frac{x^2}{v^2}. \end{aligned}$$

これら三行を足し合わせると、方程式 $x^2y' + xy + x^2y^2 = 1$ は

$$1 - \frac{x^2v'}{v^2} + \frac{3x}{v} + \frac{x^2}{v^2} = 1, \qquad \text{すなわち} \qquad -\frac{x^2v'}{v^2} + \frac{3x}{v} + \frac{x^2}{v^2} = 0.$$

となる。v^2/x^2 を掛けると（方程式から要請されるとおり $x \neq 0$ とする）、線形方程式

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \frac{3}{x}v = 1.$$

を得る。積分因子は $\exp\left(-\int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x\right) = x^{-3}$ である（区間 $x > 0$ と $x < 0$ のどちらにおいても成り立つ。積分因子の定数倍もまた積分因子として同じように使えるので、絶対値記号（modulus sign）は外してよい）。よって

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v}{x^3}\right) = \frac{1}{x^3} \quad\Longrightarrow\quad \frac{v}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + c \quad\Longrightarrow\quad v = cx^3 - \tfrac{1}{2}x = \frac{x\left(Kx^2 - 1\right)}{2},$$

となる。ここで c は任意定数であり、$K = 2c$ である。したがって

$$y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x\left(Kx^2 - 1\right)} = \frac{Kx^2 + 1}{x\left(Kx^2 - 1\right)},$$

であり、K は任意定数である。$K = 0$ とすると $y = -1/x$ が得られる。この置換では $1/v$ が存在することを仮定しているので、$y = 1/x$ そのもの（「$v = \infty$」）は取りこぼされる。$x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 1 + 1 = 1$ であるから、これもまた解であり、$K \to \infty$ としたときの解の族の極限になっている。

検算

- (i) において、$x = 0$ での解の値は $y(0) = \dfrac{2K - 3}{3(1 + K)}$ である。$x \to +\infty$ のとき $y \to -1$ となり、$x \to -\infty$ のとき $y \to \frac{2}{3}$ となる（$K \neq 0$ の場合）。つまり、解は一方の定数解からもう一方の定数解へと移っていく。これは予想どおりである。
- (ii) において、$K = 1$、$x = 2$ とすると、$y = \frac{5}{6}$ および $y'(2) = -\frac{31}{36}$ である。このとき $x^2y' + xy + x^2y^2 = -\frac{31}{9} + \frac{5}{3} + \frac{25}{9} = 1$ となり、確かに成り立つ。
- 二つの一般解をいずれも、有限差分（finite differences）を用いて、数百個の無作為な点と K の値について数値的に確かめた。元の方程式における残差（residual）は、丸め誤差の範囲でゼロであった。

よくある間違い

- (i) の答えに二つの定数 A、B を残したまま、意味をもつのはその比だけであることに気づかない。
- (ii) で x^2y^2 の交差項（cross term）にある因子 2 を忘れ、$3v/x$ が $2v/x$ になってしまい、誤った積分因子を得る。
- 置換では到達できない解 $y = 1/x$（あるいは (i) における $y = \frac{2}{3}$）を落としてしまう。

STEP のその先へ

$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2$ の形の方程式はリッカチ方程式（Riccati equations）とよばれる。ここで用いた二つの技法はどちらも一般的に通用する。置換 $y = -u'/(ru)$ は、リッカチ方程式をつねに線形二階微分方程式に変換する。また、特殊解（particular solution）y_1 が一つわかっていれば、$y = y_1 + 1/v$ とおくことでつねに v についての線形一階微分方程式が得られる。リッカチ方程式と線形二階微分方程式とのこの結びつきは、量子力学（quantum mechanics）や制御理論（control theory）でも再び現れる。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）には、リッカチ方程式に関する演習問題がある。

解答例

STEP II 1993、第 4 問

純粋数学 ・ ねじれの位置にある直線と最短距離

STEP II 1993、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s2-q4

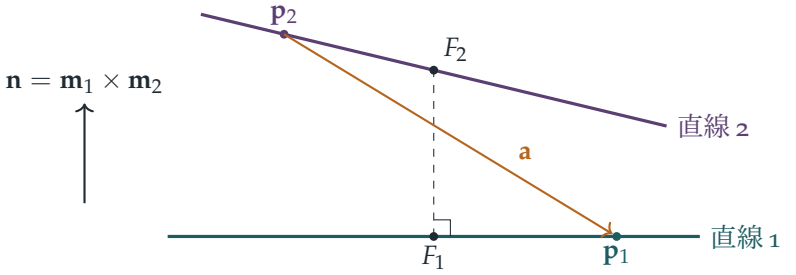
鍵となる考え方

一方の直線上の点と他方の直線上の点を結ぶベクトルは、どれも共通法線（common normal）$\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$ 方向の成分が等しい。どちらの直線に沿って動いても、加わるのは $\mathbf{m}_1$ と $\mathbf{m}_2$ の実数倍だけであり、それらはこの法線に垂直だからである。この一定の成分こそが最短距離（shortest distance）である。航空機の問題では、A_2 から見た座標系で考えるのがうまいやり方である。A_2 から A_1 へのベクトルは**ただ一本の**直線に沿って動くので、最接近距離は点と直線の距離になる。

解答

2 直線間の最短距離

$\mathbf{a} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$、$\mathbf{n} = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$ とおく。2 直線は平行でないので $\mathbf{n}$ は零ベクトルではなく、$\mathbf{m}_1$ と $\mathbf{m}_2$ の両方に垂直である。



図には、2 本の直線（ねじれの位置（skew）にあり、交わらない）、$\mathbf{p}_2$ から $\mathbf{p}_1$ へのベ

クトル $\mathbf{a}$、そして $\mathbf{n}$ に平行な共通垂線（common perpendicular）F_1F_2 を示している。

直線 2 上の点から直線 1 上の点への一般のベクトルは

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + t_1\mathbf{m}_1 - t_2\mathbf{m}_2.$$

である。$\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n} = 0$ であるから、単位法線ベクトル（unit normal）$\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n}/|\mathbf{n}|$ 方向の成分は

$$\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}},$$

となり、t_1, t_2 をどう選んでも変わらない。ベクトルの長さはそのどの成分の大きさ以上でもあるので $|\mathbf{d}| \geq |\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}|$ が成り立ち、等号が成立するのは $\mathbf{d}$ が $\mathbf{n}$ に平行なときに限る。そして等号は実際に成立する。$\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{n}$ は同一平面上にないので基底（basis）をなし、$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{m}_1 + \beta\mathbf{m}_2 + \gamma\mathbf{n}$ と書ける。$t_1 = -\alpha$、$t_2 = \beta$ と選べば $\mathbf{d} = \gamma\mathbf{n}$ が残る。この選び方が図の垂線の足 F_1, F_2 を与える。図でいえば、最短距離は $\mathbf{a}$ の $\mathbf{n}$ 方向の「高さ」である。したがって最短距離は

$$|\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}| = \frac{|(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2)|}{|\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2|}.$$

である。

小問 (i)

ここでは $\mathbf{a} = (1,1,1)$ である。$\mathbf{m}_1$ と $\mathbf{m}_2$ をそれぞれ零でない実数倍に置き換えても、その因子は分子と分母で約分されるので公式は変わらない。そこで $(4,3,0)$ と $(0,-3,1)$ を用いてよい。

$$(4,3,0) \times (0,-3,1) = (3,-4,-12), \qquad |(3,-4,-12)| = \sqrt{9+16+144} = 13.$$

すると $(1,1,1) \cdot (3,-4,-12) = -13$ であるから、最短距離は $13/13 = 1$ である。

小問 (ii)

時刻 t において航空機はそれぞれ $\mathbf{p}_1 + v_1 t\,\mathbf{m}_1$ と $\mathbf{p}_2 + v_2 t\,\mathbf{m}_2$ にあるので、A_2 から A_1 へのベクトルは

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{w}, \qquad \mathbf{w} = v_1\mathbf{m}_1 - v_2\mathbf{m}_2.$$

である。$\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ は平行でないので、（両方の速さが 0 でない限り）$\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ である。飛行は $t = 0$ の前後を含むすべての時刻にわたるものとする。このとき

$$|\mathbf{r}(t)|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2t\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} + t^2|\mathbf{w}|^2,$$

は最高次の係数が正の t の 2 次式である。平方完成（completing the square）すると

$$|\mathbf{r}(t)|^2 = |\mathbf{w}|^2\left(t + \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{w}|^2}\right)^2 + |\mathbf{a}|^2 - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{w})^2}{|\mathbf{w}|^2},$$

となるので、$t = -\mathbf{a}\cdot\mathbf{w}/|\mathbf{w}|^2$ における最小値は

$$d^2 = \frac{|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2|^2\,|v_1\mathbf{m}_1 - v_2\mathbf{m}_2|^2 - [(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\cdot(v_1\mathbf{m}_1-v_2\mathbf{m}_2)]^2}{|v_1\mathbf{m}_1-v_2\mathbf{m}_2|^2},$$

であり、これが示すべき式である。幾何学的には、d は原点と直線 $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{w}$ の距離であり、θ を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{w}$ のなす角として $|\mathbf{a}|\sin\theta$ に等しい。

小問 (iii)

まず、計算をしなくても得られる評価がある。どの瞬間にも A_1 は直線 1 上に、A_2 は直線 2 上にあるので、小問 (i) より $d \geq 1$ である。等号が成り立つには、両方の航空機が**同時に**垂線の足 F_1、F_2 にいなければならない。

> **考えてみよう** A_2 のパイロットは本当にそうなるように飛べるだろうか？

垂線の足を求めよう。$\mathbf{a} + t_1\mathbf{m}_1 - t_2\mathbf{m}_2$ が $\mathbf{m}_1$ と $\mathbf{m}_2$ に垂直であるという条件を、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{m}_1 = \frac{7}{5}$、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{m}_2 = -\frac{2}{\sqrt{10}}$、$\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{m}_2 = -\frac{9}{5\sqrt{10}}$ を用いて書き、2 つの連立 1 次方程式を解くと

$$t_1 = -\tfrac{20}{13}, \qquad t_2 = \tfrac{\sqrt{10}}{13}.$$

を得る。A_1 が F_1 にいるのは時刻 $t_1/v_1 < 0$ であるが、$v_2 > 0$ のとき A_2 が F_2 にいるのは時刻 $t_2/v_2 > 0$ である。これらが一致することはありえない。F_1 は $\mathbf{p}_1$ の後方にあり、F_2 は $\mathbf{p}_2$ の前方にあるからである。したがって A_2 が $\mathbf{m}_2$ の向きに飛ぶ限り、値 $d = 1$ には到達できない。どこまで到達できるかを調べるため、小問 (ii) を用いる。

$v_2 = \sqrt{10}\,\lambda v_1$ とおく。λ は尺度を調整した速さの比である。すると

$$\mathbf{w} = v_1\left(\tfrac{1}{5}(4,3,0) - \lambda(0,-3,1)\right) = \tfrac{v_1}{5}(4,\ 3+15\lambda,\ -5\lambda),$$

となり、因子 $\frac{v_1}{5}$ は d^2 の公式から約分される。$|\mathbf{a}|^2 = 3$ と

$$\mathbf{a}\cdot(4,3+15\lambda,-5\lambda) = 7+10\lambda, \qquad |(4,3+15\lambda,-5\lambda)|^2 = 25+90\lambda+250\lambda^2,$$

より

$$d^2 = 3 - \frac{(7+10\lambda)^2}{25+90\lambda+250\lambda^2} = \frac{26+130\lambda+650\lambda^2}{25+90\lambda+250\lambda^2} = \frac{26}{5}\cdot\frac{1+5\lambda+25\lambda^2}{5+18\lambda+50\lambda^2}.$$

である。最後の分数 N/D を微分すると、導関数の分子は次のように簡単になる。

$$\begin{aligned} N'D - ND' &= (5+50\lambda)(5+18\lambda+50\lambda^2) - (1+5\lambda+25\lambda^2)(18+100\lambda) \\ &= 7+150\lambda+200\lambda^2 = (1+20\lambda)(7+10\lambda). \end{aligned}$$

よって、すべての実数 λ の関数として、d^2 は $\lambda = -\frac{7}{10}$ で極大（このとき $\mathbf{a} \perp \mathbf{w}$ かつ $d = \sqrt{3}$）、$\lambda = -\frac{1}{20}$ で極小となり、極小値は

$$d^2 = \frac{26}{5} \cdot \frac{1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16}}{5 - \frac{9}{10} + \frac{1}{8}} = \frac{26}{5} \cdot \frac{13/16}{169/40} = 1.$$

である。これは評価 $d = 1$ そのものであり、$v_2 = -\frac{v_1}{2\sqrt{10}}$ のときに達成される。これは垂線の足から得られる t_2/t_1 と一致する。

したがって、2 つの航空機は 2 直線間の最短距離 $d = 1$ まで近づくことができ、それ以上は近づけない。これを実現するには、A_2 のパイロットは直線 2 に沿って $-\mathbf{m}_2$ の向きに速さ $\frac{v_1}{2\sqrt{10}}$ で飛べばよい。問題文の記法でいえば $v_2 = -\frac{v_1}{2\sqrt{10}}$ であり、これは速さではなく $\mathbf{m}_2$ 方向の速度である。このとき両方の航空機は同じ瞬間に共通垂線の足に到達する。これは小問 (i) の答えを再現しており、おそらく出題者が意図したのはこの答えであろう。答えが比 v_2/v_1 のみに依存することにも注意しよう。

正の速さについての注意。 v_2 が本当に速さでなければならない、すなわち $v_2 > 0$ かつ $\lambda > 0$ であるとすると、$(1 + 20\lambda)(7 + 10\lambda) > 0$ であり、d^2 は v_2 について狭義単調増加である。

$$d^2 \to \frac{26}{25} \quad \text{ただし} v_2 \to 0^+, \qquad d^2 \to \frac{13}{5} \quad \text{ただし} v_2 \to \infty.$$

この解釈では最適な速さは存在しない。パイロットはゆっくり飛ぶほど有利になり、最接近距離は $\mathbf{p}_2$ と直線 1 の距離である $\frac{\sqrt{26}}{5} \approx 1.020$ にいくらでも近づけられるが、決してそれに到達することはない。

検算

- 小問 (i) の共通垂線：$t_1 = -\frac{20}{13}$、$t_2 = \frac{\sqrt{10}}{13}$ のとき、結ぶベクトルは $\frac{1}{13}(-3, 4, 12)$ であり、これは $(3, -4, -12)$ に平行で、長さはちょうど 1 である。
- コンピュータで、ランダムな速さに対して $|\mathbf{r}(t)|$ を直接探索により最小化したところ、小問 (ii) の公式と 10^{-6} の精度で一致した。また v_2/v_1 を $[-2, 2]$ の範囲で走査したところ、最小値は $v_2/v_1 \approx -0.1581 = -1/(2\sqrt{10})$ における $d^2 = 1.0000$ であり、$v_2 > 0$ では d^2 は 1.04 から増加した。
- 極端な場合：$v_2 = 0$ とすると A_2 は $\mathbf{p}_2$ に固定された点となり、$3 - (\frac{7}{5})^2 = \frac{26}{25}$ は確かに $\mathbf{p}_2$ と直線 1 の距離の 2 乗である。

よくある間違い

- 両方の航空機が同じ瞬間に共通垂線の足に到達できるかを確かめずに、小問 (iii) に「小問 (i) より 1」と答えてしまう。
- 小問 (ii) の公式が $\mathbf{w}$ の定数倍で変わらないことを忘れ、何ページにもわたる計算で v_1 を持ち回ってしまう。
- 直線間の距離の公式で絶対値を落とし、-1 を得てしまう。

STEP のその先へ

小問 (ii) は**正射影**（orthogonal projection）の小さな例である。d は $\mathbf{a}$ の $\mathbf{w}$ に垂直な成分の長さであり、$|\mathbf{a}|^2|\mathbf{w}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{w})^2 = |\mathbf{a}\times\mathbf{w}|^2$ はグラム行列式（Gram determinant）、すなわち $\mathbf{a}$ と $\mathbf{w}$ が張る平行四辺形の面積の 2 乗である。大学初年次の線形代数で学ぶ最小二乗法（least squares）によるあてはめも、同じ射影の考え方に基づいている。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、この考え方を見事に展開している。

解答例

STEP II 1993、第 5 問

純粋数学 ・ 極方程式の曲線と弧長

> **STEP II 1993、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q5

鍵となる考え方

R における直角のおかげで、小さな三角形 PQR のすべての辺の長さを、直角三角形 ORQ から OQ と小さな角 $\delta\theta$ だけを用いて読み取ることができる。$Q \to P$ の極限（limit）をとると、弦 PQ は接線（tangent）になる。らせんでは $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ が r の定数倍なので、$r\,\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r$ はどこでも同じ値をとり、弧長（arc length）の被積分関数は単なる指数関数になる。

解答

曲線と動径のなす角

点 R は直線 OP（の延長）上にあり、$\angle ORQ$ は直角である。直角三角形 ORQ において、斜辺は $OQ = r + \delta r$、O における角は $\delta\theta$ であるから、

$$QR = (r+\delta r)\sin\delta\theta, \qquad OR = (r+\delta r)\cos\delta\theta.$$

$OP = r$ であるから、$PR = OR - OP = (r+\delta r)\cos\delta\theta - r$ である。三角形 PRQ は R で直角をなすので、

$$\tan\angle QPR = \frac{QR}{PR} = \frac{(r+\delta r)\sin\delta\theta}{(r+\delta r)\cos\delta\theta - r}.$$

$\delta\theta$ が小さいとき $\sin\delta\theta = \delta\theta + O(\delta\theta^3)$、$\cos\delta\theta = 1 + O(\delta\theta^2)$ であるから、

$$\tan\angle QPR = \frac{r\,\delta\theta + \delta r\,\delta\theta + \cdots}{\delta r + O(\delta\theta^2)} = \frac{r\dfrac{\delta\theta}{\delta r} + \delta\theta + \cdots}{1 + O\left(\dfrac{\delta\theta^2}{\delta r}\right)},$$

となる。ここで省略記号の部分は、書き出した項に比べて小さい項である。$Q \to P$ のとき、δr と $\delta\theta$ はともに 0 に近づき、$\delta\theta/\delta r \to \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r$ となる。よって $\delta\theta^2/\delta r = \delta\theta \cdot (\delta\theta/\delta r) \to 0$ であり、また $\delta\theta \to 0$ でもある。したがって

$$\tan\angle QPR \to r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}.$$

考えてみよう なぜ $\angle QPR$ の極限が、曲線が OP と交わる角になるのか？

角 QPR は、弦 PQ と点 P を通る動径（radius line）とのなす角である。曲線に沿って $Q \to P$ とすると、弦 PQ は P における接線になる。したがって極限において $\angle QPR$ は接線と OP のなす角となり、これがまさに「曲線が OP と交わる角」の意味である。よってその角は

$$\tan^{-1}\left(r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\right),$$

であり、題意は示された。

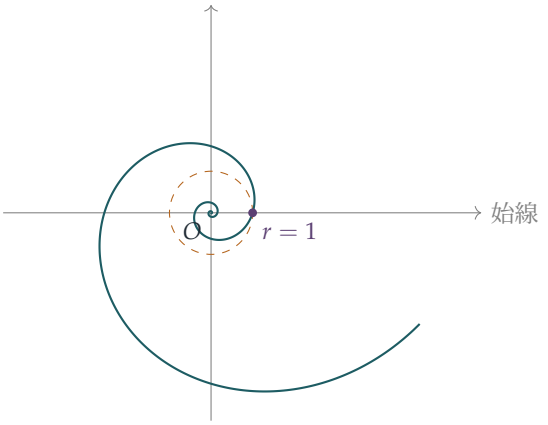
等角らせん

$r = \mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}$ に対して、

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \cot\alpha\,\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha} = r\cot\alpha, \qquad \text{よって} \qquad r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{r}{r\cot\alpha} = \tan\alpha.$$

$0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ であるから、角 α は $\tan^{-1}$ の値域に含まれ、$\tan^{-1}(\tan\alpha) = \alpha$ となる。これは θ によらないので、等角らせん（equiangular spiral）はすべての点において、どの動径とも角 α で交わる。

概形。$\cot\alpha > 0$ であるから、r は θ とともに単調に増加する。1 周するごとに r は一定の倍率 $\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}$ 倍になる。$\theta \to -\infty$ のとき $r \to 0$ であるから、曲線は原点に到達することなく、その周りを無限回巻きつく。$\theta \to +\infty$ のときは、反時計回りに外側へ渦を巻いて広がっていく。曲線は $\theta = 0$ のとき、$r = 1$ で始線と交わる。図では $\cot\alpha = 0.3$ としている。



破線の円は $r=1$ である。その内側にあるらせんの部分が、内向きに無限に巻いている部分である。

弧長

与えられた公式と $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = r\cot\alpha$ を用いると、

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = r^2 + r^2\cot^2\alpha = r^2\operatorname{cosec}^2\alpha, \qquad \text{よって} \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}}{\sin\alpha},$$

となる。ここで、s は θ とともに増加し、$\sin\alpha > 0$ であるから、正の平方根をとった。

$r=1$ から始まり外側へ向かう 1 周は、$\theta=0$ から $\theta=2\pi$ までである。その長さは

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}}{\sin\alpha}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}-1}{\cot\alpha} = \sec\alpha\left(\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}-1\right).$$

$r \le 1$ の部分は $\theta \le 0$、すなわち $-\infty < \theta \le 0$ である。その長さは広義積分（improper integral）

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}}{\sin\alpha}\,\mathrm{d}\theta = \lim_{T\to\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-T\cot\alpha}}{\sin\alpha\cot\alpha} = \sec\alpha,$$

で与えられる。$\cot\alpha > 0$ より $\mathrm{e}^{-T\cot\alpha} \to 0$ となるからである。したがって、この部分は原点の周りを無限回巻いているにもかかわらず、その全長は有限であり、$\sec\alpha$ に等しい。

検算

- $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ のとき $\cot\alpha \to 0$ となり、らせんは単位円になる。単位円はどの動径とも直角に交わる。1 周の長さは $\sec\alpha(\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}-1) \approx \sec\alpha\cdot 2\pi\cot\alpha = 2\pi\operatorname{cosec}\alpha \to 2\pi$ となり、円周の長さに一致する。

- $\sec\alpha$ のきれいな幾何的検算：らせんに沿って任意の点から原点までの長さは $r\sec\alpha$ であり、これはその点から、O を通り OP に垂直な直線までの接線の線分の長さに等しい。
- 数値的には、$\alpha = 0.9$ として 2×10^5 本の弦の長さを足し合わせると、1 周の長さは 233.8349、内側の部分の長さは 1.608726 となる。これらは $\sec\alpha(e^{2\pi\cot\alpha}-1)$ および $\sec\alpha$ と、少なくとも有効数字 8 桁まで一致する。

よくある間違い

- 理由を説明せずに $PR=\delta r$、$QR = r\,\delta\theta$ と書いてしまう。どちらも 1 次の近似としてしか成り立たず、この問題が試しているのはまさにその極限の議論である。
- 内側の部分について、$(-\infty,0]$ ではなく $[0,2\pi]$ で積分してしまう。$r\le1$ の部分は 1 周ではなく、無限に多くの周回からなる。

STEP のその先へ

等角らせん（対数らせん（logarithmic spiral）とも呼ばれる）は自己相似（self-similar）である。$e^{2\pi\cot\alpha}$ 倍、あるいは任意の倍率で拡大すると、同じ曲線を回転させたものが得られる。複素数を用いると $z = e^{(\cot\alpha+i)\theta}$ と表され、これは指数写像による直線の像である。角が一定であることは、exp が等角写像（conformal、角を保つ写像）であることから従う。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は、この描像を見事に展開している。無限に巻いた曲線の長さが有限であるという事実は、解析学の最初の講義で出会う広義積分や収束の問題への最初の入り口である。

解答例

STEP II 1993、第 6 問

純粋数学 ・ 行列代数の反例

> **STEP II 1993、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q6

この問題は、*Beyond STEP* の第 7.1 節「**行列では成り立たない法則**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch07/matrix-rules.html

鍵となる考え方

各主張は実数についてなら成り立つことばかりである。したがってこの問題が本当に問うているのは、通常の代数で身についた習慣のうち、どれが行列でも通用するかということである。破綻する点は 2 つある。行列の積は可換（commutative）とは限らないこと、そして零でない 2 つの行列の積が零になりうることである。ごく単純な行列の組をうまく 1 つ選べば (i) と (ii) が片づき、余因子行列（adjugate matrix）で (iii) が片づき、冪零（nilpotent）というひねりを加えた重「根」（repeated root）で (iv) が片づく。

解答

以下、$\mathbf{I}$ は 2×2 の単位行列（identity matrix）、$\mathbf{0}$ は零行列（zero matrix）を表す。

小問 (i)

偽である。次のようにとる。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

いずれも零行列ではない。このとき

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

考えてみよう このような反例（counterexample）を、当て推量ではなく、どのようにして見つければよいだろうか？

$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ としたいので、$\mathbf{B}$ のすべての列は $\mathbf{A}$ によって消されなければならない。上の行列 $\mathbf{A}$ は $(0, y)^{\mathsf{T}}$ の形のベクトルをすべて消すので、$\mathbf{B}$ の列をその形にとればよい。あとは $\mathbf{BA}$ がたまたま零になるかどうかを確かめるだけである。最も素直な選び方では、零にはならない。

小問 (ii)

偽である。 各積の順序を保ったまま注意深く展開すると

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} - \mathbf{BA} - \mathbf{B}^2,$$

となるので、この主張が成り立つのはちょうど $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ のときである。小問 (i) の行列は可換でないので、反例となる。実際、そこでは $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = -\mathbf{BA} \neq \mathbf{0}$ である。具体的には

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

である。ここで $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ と $\mathbf{B}^2 = \mathbf{0}$ を用いた。

小問 (iii)

真である。 両方向を証明する。

$\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ が零でない解をもつならば、$\det \mathbf{A} = 0$ である。 対偶（contrapositive）を証明する。$\det \mathbf{A} \neq 0$ と仮定する。すると $\mathbf{A}^{-1}$ が存在し、$\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ から $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ が得られる。よって解は零行列のみである。

$\det \mathbf{A} = 0$ ならば、零でない解が存在する。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

とおく（つまり $\mathbf{X}$ は $\mathbf{A}$ の余因子行列である）。積を計算すると

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix} = (\det \mathbf{A})\,\mathbf{I} = \mathbf{0}.$$

$\mathbf{X}$ の成分は $\mathbf{A}$ の成分を並べ替え、いくつかの符号を変えたものであり、$\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ であるから $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ である。以上で証明が完了する。ここで仮定 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ が使われていることに注意しよう。余因子行列が零でないことを保証しているのが、この仮定である。

小問 (iv)

偽である。数の場合、2 次方程式の根は高々 2 個である。しかしその事実の証明には「$pq = 0$ ならば $p = 0$ または $q = 0$」が使われており、これは小問 (i) でちょうど示したように、行列では成り立たない。そこで、完全平方の形に因数分解される 2 次式を探す。$\mathbf{A} = -2\mathbf{I}$、$\mathbf{B} = \mathbf{I}$ とおく。いずれも零行列ではない。$\mathbf{I}$ はあらゆる行列と可換なので

$$\mathbf{X}^2 - 2\mathbf{X} + \mathbf{I} = (\mathbf{X} - \mathbf{I})^2,$$

となり、$(\mathbf{X} - \mathbf{I})^2 = \mathbf{0}$ となればよい。$\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ を満たす任意の行列 $\mathbf{N}$ を $\mathbf{X} - \mathbf{I}$ としてとればよく、そのような行列は無数にある。各実数 t に対して

$$\mathbf{X}_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

と定める。このとき

$$\mathbf{X}_t^2 - 2\mathbf{X}_t + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

各 $\mathbf{X}_t$ は零行列ではなく、t の値が異なれば行列も異なる。よってこの方程式の解は、高々 2 個どころか無数に存在する。

> **考えてみよう**　$\mathbf{A} = -2\mathbf{I}$、$\mathbf{B} = \mathbf{I}$ という選び方に、何か特別な意味はあるだろうか？

特にない。$\mathbf{A} = -2\lambda\mathbf{I}$、$\mathbf{B} = \lambda^2\mathbf{I}$（$\lambda \neq 0$ は任意）とすれば、$\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ を満たすすべての $\mathbf{X} = \lambda\mathbf{I} + \mathbf{N}$ が解となる。冪零行列そのものも大きな族をなしている。実際、$\begin{pmatrix} pq & -p^2 \\ q^2 & -pq \end{pmatrix}$ はすべての実数 p、q に対して、2 乗すると $\mathbf{0}$ になる。本質的なのは、2 次式が 2 つの行列の積に因数分解されるという点だけであり、そのような積は、数の場合よりもはるかに多くの仕方で零になりうるのである。

検算

各反例を手で計算して確かめよ。(i) では、$\mathbf{AB}$ の成分はすべて 0 であるのに対し、$\mathbf{BA}$ は左下の成分が 1 である。恒等式 $(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 + \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ はランダムな整数行列の組 1000 組で検証し、$\mathbf{A}\,\mathrm{adj}\,\mathbf{A} = \mathbf{0}$ かつ $\mathrm{adj}\,\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ であることはランダム

な特異行列 2000 個で検証した。(iv) では $t = 3$ を試すとよい。$\mathbf{X}_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であり、$\mathbf{X}_3^2 - 2\mathbf{X}_3 + \mathbf{I} = \mathbf{0}$ となる。

よくある間違い

- $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ であるかのように $(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ を展開してしまう。また (ii) で具体的な反例を示さずに「偽」と書くだけでは、ほとんど得点にならない。問題は反例を求めているからである。
- (iii) で、「必要十分」の一方向しか証明しない。
- (iv) で、解の公式や因数分解によって 2 次方程式を「解き」、$\mathbf{X} = \mathbf{I}$ が唯一の根であると結論してしまう。因数分解すること自体は問題ないが、$\mathbf{P}^2 = \mathbf{0}$ から $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ は導かれない。

STEP のその先へ

2×2 の実行列全体は**零因子をもつ非可換環**（non-commutative ring with zero divisors）をなす。この問題の各小問は、体（field）では成り立つがそのような環では成り立たない法則を試している。小問 (iii) は、線形代数（linear algebra）の中心的な定理の 2×2 の場合である。すなわち、正方行列が自明でない零空間（null space）をもつのは、ちょうどその行列式（determinant）が零になるときである。(iv) のような $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ を満たす行列は冪零行列と呼ばれ、ジョルダン標準形（Jordan normal form）の鍵となる要素である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra* は線形代数を、Allenby の *Rings, Fields and Groups* は環論を扱っている。

解答例

STEP II 1993、第 7 問

純粋数学 ・ 5 を法とする無限降下法

> **STEP II 1993、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q7

鍵となる考え方

右辺は 5 の倍数なので、5 を法として（modulo 5）考えると、この方程式は有限個の場合を調べるだけの小さな問題に変わる。平方数は 5 を法として 0、1、4 $(\mathrm{mod}\ 5)$ のいずれかにしかならないからである。a と b が 5 の倍数であることが示されれば、方程式から c も 5 の倍数となり、すべてを 5 で割ると**より小さい**解が得られる。0 でない整数を 5 で限りなく割り続けることはできない。これがフェルマー（Fermat）の無限降下法（method of infinite descent）である。

解答

a と b が 5 で割り切れること

5 を法とする各剰余（residue）を 2 乗すると、次のようになる。

$x\ (\mathrm{mod}\ 5)$	0	1	2	3	4
$x^2\ (\mathrm{mod}\ 5)$	0	1	4	4	1
$2x^2\ (\mathrm{mod}\ 5)$	0	2	3	3	2

よって $b^2 \equiv 0, 1$ または 4 であり、$2a^2 \equiv 0, 2$ または 3 $(\mathrm{mod}\ 5)$ である。$5c^2 \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5)$ であるから、

$$2a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 5.$$

が成り立たなければならない。そこで、すべての組合せを書き出す。

$2a^2+b^2$	$b^2\equiv 0$	$b^2\equiv 1$	$b^2\equiv 4$
$2a^2\equiv 0$	**0**	1	4
$2a^2\equiv 2$	2	3	1
$2a^2\equiv 3$	3	4	2

値が 0 となるのは、$2a^2\equiv 0$ かつ $b^2\equiv 0$ の場合だけである。最初の表より、$x^2\equiv 0 \pmod 5$ となるのは $x\equiv 0$ のときに限る（同じことであるが、5 は素数（prime）なので、$5\mid x^2$ ならば $5\mid x$ である）。したがって $a\equiv 0$ かつ $b\equiv 0 \pmod 5$ であり、a と b はともに 5 で割り切れる。これが示すべきことであった。

解は $a=b=c=0$ のみであること

p,q を整数として $a=5p$、$b=5q$ とおく。代入すると、

$$25(2p^2+q^2)=5c^2 \quad\Longrightarrow\quad c^2=5(2p^2+q^2).$$

よって $5\mid c^2$ であり、5 は素数なので $5\mid c$ である。$c=5r$ とおく。すると $25r^2=5(2p^2+q^2)$、すなわち

$$2p^2+q^2=5r^2.$$

となる。これは元の方程式そのものである。したがって、(a,b,c) が解ならば、3 つとも 5 で割り切れ、$(a/5,\,b/5,\,c/5)$ もまた整数解である。

> **考えてみよう** 「5 で割り続けられる」ことから、なぜすべてが 0 でなければならないのか。

この操作を繰り返し適用する。解 (a,b,c) から始めて n 回操作すると整数解 $(a/5^n,\,b/5^n,\,c/5^n)$ が得られるので、**すべての** $n\geq 1$ に対して 5^n は a、b、c のそれぞれを割り切る。

しかし、0 でない整数 m は 5 で有限回しか割れない。実際、$5^n\mid m$ かつ $m\neq 0$ ならば $5^n\leq |m|$ であるが、n が大きくなればこれは成り立たなくなる。よって a、b、c のいずれも 0 でない値をとることはできない。

同じことを降下法の議論として述べることもできる。$c\neq 0$ である解が存在したと仮定し、そのうち $|c|$ が正で最小となるものを選ぶ。すると $(a/5,b/5,c/5)$ は $0<|c/5|<|c|$ を満たす解となり、矛盾する。よって $c=0$ であり、このとき $2a^2+b^2=0$ となるが、両方の項は非負なので $a=b=0$ でなければならない。

したがって、整数解は $a=b=c=0$ のみである。

検算

- 5 を法とする剰余の組 $(a, b) \bmod 5$ の 25 通りすべてを調べると、$2a^2 + b^2 \equiv 0$ となるのは $(0, 0)$ のみである。
- $|a|, |b| \leq 300$ の範囲をすべてコンピュータで探索しても、$2a^2 + b^2 = 5c^2$ の解は $a = b = c = 0$ 以外に見つからない。
- $a^2 + b^2 = 5c^2$ と比較してみよ。こちらは $(1, 2, 1)$ のような自明でない解を**実際にもつ**。この場合は $1 + 4 \equiv 0 \pmod 5$ となるので、前半の剰余による議論が成り立たなくなる。まさにそうなるべきなのである。

よくある間違い

- $5 \mid a^2$ から理由を述べずに $5 \mid a$ と結論すること。これは 5 が素数であることから（あるいは表から）正しいが、そのことは書き添える必要がある。
- c も 5 で割り切れることを示し忘れること。これがなければ $(a/5, b/5, c/5)$ が整数解であるとは限らず、降下法が始まらない。
- 「再び 5 で割れる」で止めてしまうこと。割り算を繰り返すとなぜ 0 になるのかを述べるまで、証明は完成しない。

STEP のその先へ

これはフェルマーの**無限降下法**であり、$\sqrt{2}$ が無理数であることや、$x^4 + y^4 = z^2$ が自明でない解をもたないことを証明するのと同じ方法である。$2a^2 + b^2 = 5c^2$ のような方程式は、整数論（number theory）において体系的に研究されている。ルジャンドル（Legendre）の定理は、$Ax^2 + By^2 = Cz^2$ が自明でない整数解をもつための正確な条件を、平方剰余（quadratic residue）を用いて与える。今回の場合、解の存在を妨げているのは、-2 が 5 を法として平方数でないことである。Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）では、合同式、平方剰余、降下法が扱われている。

解答例

STEP II 1993、第 8 問

純粋数学 ・ 数学的帰納法による相加相乗平均の不等式

STEP II 1993、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s2-q8

この問題は、*Beyond STEP* の第 3.2 節「**相加・相乗平均を逆向きに**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch03/am-gm-backwards.html

鍵となる考え方

2 項の不等式は、平方が非負であるという事実にすぎない。2^m 項から 2^{m+1} 項へ進むには、並びを長さ 2^m の二つの半分に分け、それぞれに帰納法の仮定（induction hypothesis）を用い、さらに二つの半分の平均（mean）に 2 項の不等式を用いればよい。これで相加相乗平均の不等式（AM–GM inequality）が示されるのは項数が 2 の累乗のときだけである。最後の小問では、コーシー（Cauchy）による巧妙な工夫でその隙間を埋める。すなわち、並びにその平均自身のコピーを付け加えるのである。こうしても平均は変わらず、積についても本質的なことは何も変わらない。

解答

2 項の場合

展開すると、

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - a_1a_2 = \frac{a_1^2+2a_1a_2+a_2^2-4a_1a_2}{4} = \left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2 \geq 0,$$

となるので、$a_1a_2 \leq \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2$ であり、等号が成り立つのはちょうど $a_1 = a_2$ のときである。これは**任意の**二つの正の数について成り立つことに注意しておく。以下では a_1 と a_2 以外の数に対してもこれを用いる。

帰納法

$P(m)$ を、2^m 個の正の数からなる任意の並びに対して $(*)$ が成り立つという命題とする。$m=1$ の場合は、いま証明した 2 項の不等式である。

次に $P(m)$ が成り立つと仮定し、2^{m+1} 個の正の数 $a_1,\dots,a_{2^{m+1}}$ をとる。$N=2^m$ とおき、これらをそれぞれ N 項からなる二つの半分に分け、その平均を

$$X=\frac{a_1+\cdots+a_N}{N},\qquad Y=\frac{a_{N+1}+\cdots+a_{2N}}{N}.$$

とする。それぞれの半分に $P(m)$ を適用すると、

$$a_1\cdots a_N\le X^N\qquad\text{かつ}\qquad a_{N+1}\cdots a_{2N}\le Y^N.$$

ここに現れる量はすべて正であるから、この二つの不等式を掛け合わせてよい：

$$a_1\cdots a_{2N}\le X^NY^N=(XY)^N.$$

さて X と Y は正であるから、2 項の不等式により $XY\le\left(\frac{X+Y}{2}\right)^2$ である。$t\mapsto t^N$ は $t>0$ で増加関数であるから、両辺を N 乗しても不等号の向きは変わらない：

$$(XY)^N\le\left(\frac{X+Y}{2}\right)^{2N}.$$

最後に、$\dfrac{X+Y}{2}=\dfrac{(a_1+\cdots+a_N)+(a_{N+1}+\cdots+a_{2N})}{2N}$ は $2N=2^{m+1}$ 個すべての数の平均である。以上の不等式をまとめると、

$$a_1\cdots a_{2^{m+1}}\le\left(\frac{a_1+\cdots+a_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}\right)^{2^{m+1}},$$

となり、これは $P(m+1)$ である。数学的帰納法により、すべての正の整数 m に対して $(*)$ が成り立つ。

考えてみよう このように二つの不等式を掛け合わせてよいのだろうか？

$0<p\le q$ かつ $0<r\le s$ ならば、まず r の正値性、次に q の正値性を用いて $pr\le qr\le qs$ が得られる。正値性がなければこれは成り立たないことがある（たとえば $-3\le1$ かつ $-3\le1$ であるが $9>1$ である）。条件 $a_i>0$ が重要なのはこのためである。

2 の累乗まで補う

問題文の定義では $b_1=a_2$ となっているが、これは $b_1=a_1$ の誤植に違いない。そこで $1\le i\le n$ に対して $b_i=a_i$、$n<i\le2^m$ に対して $b_i=A$ とする。各 b_i は正である（A は正の数の平均だからである）。これらの和は

$$b_1+\cdots+b_{2^m}=(a_1+\cdots+a_n)+(2^m-n)A=nA+(2^m-n)A=2^mA,$$

であるから、b_i の平均はちょうど A である。これらの積は $a_1 \cdots a_n \, A^{2^m - n}$ である。したがって b_i に $(*)$ を適用すると

$$a_1 \cdots a_n \, A^{2^m - n} \le A^{2^m},$$

となり、求める不等式が得られる。

相加相乗平均の不等式

任意の正の整数 n に対して、$2^m > n$ となる m を選ぶ（$2^m \to \infty$ であるから可能である）。すると前の段階が適用できる。正の数 $A^{2^m - n}$ で割ると

$$a_1 \cdots a_n \le A^n.$$

を得る。両辺は正であり、$t \mapsto t^{1/n}$ は $t > 0$ で増加関数であるから、n 乗根をとって

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \le A = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n},$$

となる。これが相加相乗平均の不等式である。（n がたまたま 2 の累乗であれば $(*)$ を直接引用してもよいが、$2^m > n$ と選んでおけば場合分けは不要である。）

検算

$n = 3$、$a = (1, 2, 6)$ で試してみる：$A = 3$ であり、$m = 2$ とすると補った並びは $(1, 2, 6, 3)$ となる。その平均は 3、積は $36 \le 3^4 = 81$ である。3 で割ると $12 \le 27 = A^3$ となるので、$\sqrt[3]{12} \approx 2.29 \le 3$ である。また、a_i がすべて等しいときは、用いた不等式はすべて等式になり、これは当然そうあるべきである。$m \le 6$ について $(*)$ を、$n \le 40$ について最後の不等式を、何千もの無作為な並びに対して厳密な有理数演算でコンピュータで検証したところ、反例は見つからなかった。

よくある間違い

- 帰納法の仮定を 2^{m+1} 項すべてに一度に適用してしまう。仮定が扱うのは長さ 2^m の並びだけなので、半分に分けなければならない。
- 補った並びの平均が依然として A であることの確認を忘れる。ほかの値ではなく A で補う意味はまさにここにある。
- 量が正であることに触れずに n 乗根をとったり割り算をしたりする。

STEP のその先へ

この「前進・後退」型の帰納法は、相加相乗平均の不等式に対するコーシーの証明である。まず 2 の累乗について証明し、それからすべての n へと下りてくるのである。相加相乗平均の不等式は、凹関数（concave function）ln に対するイェンセンの不等式（Jensen's inequality）の特別な場合でもあり、べき平均の不等式、ヘルダー（Hölder）の不等式、ミンコフスキー（Minkowski）の不等式といった一群の不等式が同じ考え方から生まれる。これらは大学 1 年の解析学の基本的な道具である。Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は最初からこうした不等式を用いており、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には STEP 形式の演習問題がさらに収められている。

解答例

STEP II 1993、第 9 問

純粋数学 ・ 複素数の偏角

> **STEP II 1993、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q9

鍵となる考え方

$0 \le \arg z < 2\pi$ という規約のもとでは、「虚部（imaginary part）が正」とは「偏角（argument）が 0 と π の間に厳密に含まれる」ということである。複素数の和はベクトルの和であり、すべて同じ開半平面（open half-plane）の中を向くベクトルの和は、その半平面の中にとどまる。z_1 または z_3 が実軸上にくるように回転させると、示すべき不等式はまさにこの事実に帰着する。最後の小問では、積の偏角は偏角の和（2π の整数倍の違いを除いて）であることを用いる。そして、すでに証明した不等式によって、その差は 0 と 2π の間に厳密に閉じ込められる。

解答

虚部が正であること

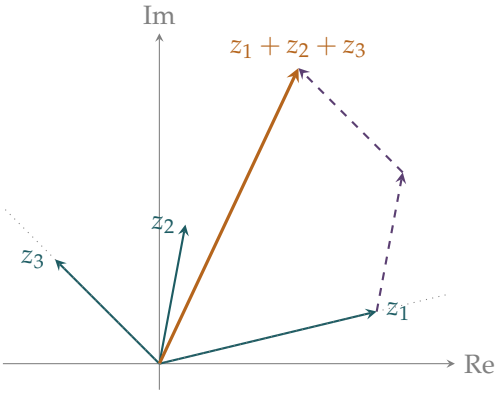
$r > 0$、$0 \le \theta < 2\pi$ として $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ とおく。このとき $\operatorname{Im} z = r\sin\theta > 0$ となるのはちょうど $\sin\theta > 0$ のときであり、$[0, 2\pi)$ においてこれが成り立つのはちょうど

$$0 < \arg z < \pi.$$

のときである。したがって z は上半平面にあり、その偏角が 0 や π になることはない（そうなると z は実数になってしまう）。

図

$\theta_k = \arg z_k$ とおくと、$0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \pi$ である。z_1、z_2、z_3 を原点から出る矢印として描き、次にそれらを始点と終点をつないで並べ、$z_1 + z_2 + z_3$ に到達させる。



経路の各段は、直前の段に対して反時計回りに曲がり（$\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ だからである）、どの段も上半平面の方向を向いている。経路は角 θ_1 の半直線に沿って出発し、そこから左へ曲がるので、終点はその半直線より厳密に反時計回りの側にある。逆の端から振り返ると、経路は角 θ_3 の段で終わり、それ以前の部分はすべて角 θ_3 の半直線より時計回りの側にある。したがって和は、角 θ_1 と角 θ_3 の半直線にはさまれた扇形領域の中にある。

これを厳密にするために、全体に $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}$ を掛ける。これはすべてを時計回りに θ_1 だけ回転させる操作である：

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}(z_1+z_2+z_3) = r_1 + r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)} + r_3\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_3-\theta_1)},$$

ここで $r_k = |z_k| > 0$ である。第 1 項は正の実数であり、残りの 2 項は角が $(0,\pi)$ にあるので虚部が正である。よって右辺の虚部は正であり、その偏角 α は $0 < \alpha < \pi$ を満たす。したがって $z_1+z_2+z_3$ は偏角の一つとして $\theta_1+\alpha$ をもち、$\theta_1 < \theta_1+\alpha < \theta_1+\pi < 2\pi$ であるから、これが範囲 $[0,2\pi)$ における偏角である。ゆえに $\arg(z_1+z_2+z_3) > \theta_1$ である。

同様に、$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_3}$ を掛けると $r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_3)} + r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2-\theta_3)} + r_3$ となる。ここで最初の 2 つの角は $(-\pi,0)$ にあるので、これは虚部が負であり、$0 < \beta < \pi$ として $\rho\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}$ と書ける。すると $z_1+z_2+z_3 = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_3-\beta)}$ であり、$-\pi < \theta_3-\beta < \theta_3 < \pi$ である。和は虚部が正なので、その偏角は $(0,\pi)$ にあり、$\theta_3-\beta$ とは 2π の整数倍だけ異なる。両者はともに長さ 2π の区間 $(-\pi,\pi)$ にあるので、等しい。よって $\arg(z_1+z_2+z_3) = \theta_3-\beta < \theta_3$ であり、以上を合わせて

$$\arg z_1 < \arg(z_1+z_2+z_3) < \arg z_3.$$

を得る。

積と和

$\varphi = \arg(z_1 + z_2 + z_3)$ とおくと、前の小問より $\theta_1 < \varphi < \theta_3$ である。複素数を掛けると偏角は加わるので、

$$z_1 z_2 z_3 = r_1 r_2 r_3 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)},$$

であり、$\arg(z_1 z_2 z_3)$ は $[0, 2\pi)$ に属する数のうち、$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ と 2π の整数倍だけ異なるものである。

考えてみよう 和 $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ は $(0, 3\pi)$ のどこにでもなりうるので、2π の何倍を引けばよいかはわからない。それを知らずに済ませるにはどうすればよいか。

実は知る必要はない。必要なのは、もし $\arg(z_1 z_2 z_3) = \varphi$ ならば

$$D = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \varphi$$

が 2π の整数倍になる、ということだけである。そこで $\theta_1 < \varphi < \theta_3$ を用いて D を評価する：

$$D > \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_3 = \theta_1 + \theta_2 > 0,$$
$$D < \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_1 = \theta_2 + \theta_3 < 2\pi,$$

1 行目では $\theta_k > 0$ を、2 行目では $\theta_k < \pi$ を用いた。よって $0 < D < 2\pi$ であり、0 と 2π の間に厳密に含まれる 2π の整数倍は存在しない。ゆえに $\arg(z_1 z_2 z_3)$ が $\arg(z_1 + z_2 + z_3)$ に等しくなることは決してない。

検算

図の例 $z_1 = 2.5 + 0.6\mathrm{i}$、$z_2 = 0.3 + 1.6\mathrm{i}$、$z_3 = -1.2 + 1.2\mathrm{i}$ では、偏角はそれぞれ約 0.236、1.385、2.356 であり、$\arg(z_1 + z_2 + z_3) = \arg(1.6 + 3.4\mathrm{i}) \approx 1.131$ は最初と最後の値の間にある。200 000 組のランダムな 3 つ組（絶対値（modulus）は e^{-4} から e^{4} の間）で試したところ、2 つの不等式と $0 < D < 2\pi$ はすべての場合に成り立ち、積と和が同じ方向を向くことは一度もなかった。

上半平面という条件がなぜ重要かを見るために、大小関係の条件を等号まで緩めて $z_1 = z_2 = z_3 = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ としてみよう。積は 1 であり、和は $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ の方向を向く。これは $D = 4\pi/3$ と整合している。3 つの角をすべて π に近づけると D は 2π に近づくので、$\theta_k < \pi$ という評価は本質的な役割を果たしているのである。

よくある間違い

- いきなり $\arg(z_1z_2z_3) = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ と書いてしまうこと。これは和が 2π 以上のときには誤りである。使えるのは 2π を法とする等式だけである。
- $\arg(z_1 + z_2 + z_3)$ が θ_k のある種の平均であると論じること。そうではない（絶対値が影響する）。正しいのは、それが θ_1 と θ_3 の間に厳密に含まれるということだけである。

STEP のその先へ

最初の事実は、開半平面（さらに一般に、角が π 未満の任意の扇形領域）が**凸錐**（convex cone）である、つまりその中のベクトルの正係数の結合はその中にとどまる、という主張である。凸錐は線形計画法（linear programming）や最適化（optimisation）において中心的な役割を果たす。また、最後の小問で回避した arg の多価性（multivaluedness）は、複素解析（complex analysis）の最初の講義で学ぶ分枝切断（branch cut）や複素対数（complex logarithm）へとつながっていく。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析入門）は、これら両方の考え方を幾何学的に扱った美しい本である。

解答例

STEP II 1993、第 10 問

純粋数学 • 2 次形式と 2 次曲線

STEP II 1993、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s2-q10

鍵となる考え方

x と y についての二次方程式が扱いにくい理由は二つある。xy の交差項（cross term）と一次の項である。行列 $\mathbf{P}$ は前者を処理する。$\mathbf{PAP}$ が対角（diagonal）になるからである。平行移動 $\mathbf{a}$ は後者を処理する。これを原点が円錐曲線（conic）の中心に移るように選ぶと、$\mathbf{x}_1$ について一次の項がすべて打ち消し合う。残るのは純粋な「平方和＝定数」の形である。

解答

対角化

まず、

$$\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -10 \\ 30 & 5 \end{pmatrix},$$

であるから、

$$\mathbf{PAP} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -10 \\ 30 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix},$$

となり、要求どおり対角行列である。また、$\mathbf{P}$ は対称なので $\mathbf{P}^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}$ であることにも注意しておく。これはすぐ後で使う。

代入

$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}$ とおく。すると $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}$ であり、

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a} \\ &= \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a}.\end{aligned}$$

となる。中央の二つの項は等しい。各項は 1×1 行列なので自身の転置（transpose）に等しく、さらに $\mathbf{A}$ と $\mathbf{P}$ が対称であることを用いると $(\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{a})^{\mathrm{T}} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1$ となるからである。また $\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}$ である。よって方程式は次のようになる。

$$\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \left(2\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \left(\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a} - 11\right) = 0.$$

考えてみよう　「適切なベクトル $\mathbf{a}$」は何を満たさなければならないか？

目標の形 $3x_1^2 - y_1^2 = c$ には x_1 や y_1 単独の項がないので、中央の括弧は消えなければならない。$\mathbf{A}$ は対称なので $2\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \mathbf{b}^{\mathrm{T}} = (2\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{b})^{\mathrm{T}}$ であり、したがって次が必要である。

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = -\tfrac{1}{2}\mathbf{b} = \begin{pmatrix}-9\\-3\end{pmatrix}.$$

ここで $\det\mathbf{A} = -11 - 64 = -75 \neq 0$ なので、解はただ一つ存在する：

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{75}\begin{pmatrix}11 & -8\\-8 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-9\\-3\end{pmatrix} = -\frac{1}{75}\begin{pmatrix}-75\\75\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

（検算：$\mathbf{A}\mathbf{a} = \begin{pmatrix}-1-8\\8-11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\-3\end{pmatrix}$。）

定数項

この $\mathbf{a}$ に対しては $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\left(-\tfrac{1}{2}\mathbf{b}\right) = -\tfrac{1}{2}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}$ であるから、定数項は

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a} - 11 = \tfrac{1}{2}(18-6) - 11 = -5.$$

である。二次の項は

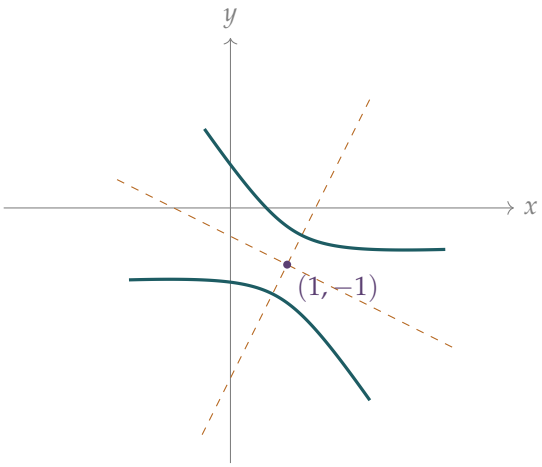
$$\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}75 & 0\\0 & -25\end{pmatrix}\mathbf{x}_1 = 75x_1^2 - 25y_1^2.$$

である。よって方程式は $75x_1^2 - 25y_1^2 - 5 = 0$ となる。25 で割ると、

$$3x_1^2 - y_1^2 = \tfrac{1}{5}, \qquad \text{よって} c = \tfrac{1}{5}.$$

成分で書くと、代入は $x = x_1 + 2y_1 + 1$、$y = 2x_1 - y_1 - 1$ である。元の方程式は $-x^2 + 16xy + 11y^2 + 18x + 6y - 11 = 0$ であるから、この曲線は中心 $(1,-1)$ の双曲線

（hyperbola）である。**P** の列 $(1,2)$ と $(2,-1)$ は直交しているので、これらがこの双曲線の対称軸（axes of symmetry）を与える。



破線は対称軸であり、その方向は $(1,2)$ と $(2,-1)$ である。

考えてみよう なぜ **P** は回転（rotation）ではないのか？

列どうしは直交しているが、それぞれの長さが $\sqrt{5}$ なので、$\mathbf{P}^2 = 5\mathbf{I}$ であって **I** ではない。**PAP** の対角成分が 75 と -25 になるのはこのためである。これらは **A** の固有値（eigenvalues）15 と -5 の 5 倍になっている。この倍率はここでは問題にならない。二次の部分が 5 倍されるだけだからである。

検算

- **A** のトレース（trace）と行列式（determinant）は 10 と -75 なので、固有値は 15 と -5 である。これらは 75/5 と $-25/5$ に一致する。
- $x_1 = y_1 = 0$ とする。このとき $(x,y) = (1,-1)$ であり、元の左辺は $-1-16+11+18-6-11 = -5$ となって、$75x_1^2 - 25y_1^2 - 5$ と一致する。
- $x_1 = 1$、$y_1 = 1$ とする。このとき $(x,y) = (4,0)$ であり、$-16+72-11 = 45 = 75-25-5$ となる。

さらに、恒等式 左辺 $= 25\left(3x_1^2 - y_1^2 - \frac{1}{5}\right)$ が成り立つことを、1000 個のランダムな有理点で厳密に確認した。

よくある間違い

- 交差項 $\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{a}$ と $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1$ が等しいことを忘れると、因子 2 が抜け落ちて $\mathbf{A}\mathbf{a} = -\mathbf{b}$ となってしまう。
- $75x_1^2 - 25y_1^2 = 5$ で止めてしまい、要求された形に合わせて全体を割らずに $c = 5$ と答えてしまう。

STEP のその先へ

これは主軸定理（principal axes theorem）の縮図である。すべての実対称行列（real symmetric matrix）は直交行列（orthogonal matrix）によって対角化できる（ここでは $\mathbf{P}/\sqrt{5}$ がそれにあたる）。したがって、すべての円錐曲線、そして三次元のすべての二次曲面（quadric surface）は、回転（または鏡映）と平行移動によって標準形に直すことができる。同じ考え方により、多変数関数の停留点（stationary points）をヘッセ行列（Hessian matrix）を通して分類できる。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）には、対称行列と正定値性（positive definiteness）についての優れた章がある。

解答例

STEP II 1993、第 11 問

力学 ・ 速度の 2 乗に比例する抵抗を受ける運動

STEP II 1993、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

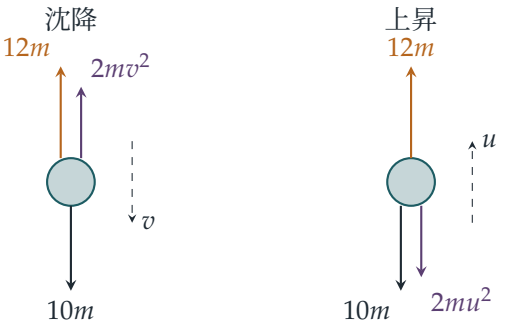
step.maths.org/questions/93-s2-q11

鍵となる考え方

物体が液体に入ると浮力（buoyancy）が重力を上回るので、v^2 に比例する抵抗（resistance）に加えて、一定の正味の上向きの力がはたらく。抵抗は常に運動を妨げる向きにはたらくので、物体が向きを変えるとその向きが反転する。したがって、沈む段階と上昇する段階では別々の運動方程式（equation of motion）が必要になる。どちらもきれいに変数分離（separation of variables）できる。時間を求めたいときは $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ を、距離を求めたいときは $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ を用いる。

解答

物体を質点としてモデル化する。液体中では、重力は下向きに $10m\,\mathrm{N}$、浮力は上向きに $\frac{6}{5}\times 10m = 12m\,\mathrm{N}$ であるから、これらを合わせると、物体がどちら向きに動いていても、**上向きに** $2m\,\mathrm{N}$ の正味の力となる。抵抗 $2mv^2\,\mathrm{N}$ は速度と逆向きにはたらく。



沈む段階

下向きを正とし、x を液面からの深さ、v を下向きの速さとする。ニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）より

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 10m - 12m - 2mv^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -2(1+v^2).$$

物体が速さ $V > 0$ で液体に入るとする。変数を分離し、液体に入った瞬間（$t = 0$、$v = V$）から沈むのが止まる瞬間（$t = T_1$、$v = 0$）まで積分すると

$$\int_V^0 \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = -2\int_0^{T_1} \mathrm{d}t \qquad \Longrightarrow \qquad T_1 = \tfrac{1}{2}\arctan V.$$

任意の有限な V に対して $\arctan V < \frac{\pi}{2}$ であるから、$T_1 < \frac{1}{4}\pi$ を得る。すなわち、どれほど速く投げ入れても、物体は液体に入ってから $\frac{1}{4}\pi$ 秒未満で沈むのが止まる。（また、常に $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \le -2$ であるから、物体は確かに止まる。）

$V = 1$ のときの到達深さ

このとき $T_1 = \frac{1}{2}\arctan 1 = \frac{\pi}{8}$ である。深さを求めるため、加速度を $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ と書くと

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -2(1+v^2) \qquad \Longrightarrow \qquad \int_1^0 \frac{v\,\mathrm{d}v}{1+v^2} = -2\int_0^D \mathrm{d}x,$$

よって $-\frac{1}{2}\ln 2 = -2D$ であり、最大の深さは

$$D = \tfrac{1}{4}\ln 2 \text{ メートル},$$

となり、題意が示された。

上昇する段階

深さ D で物体は一瞬静止するが、上向きの正味の力 $2m$ N は依然としてはたらいているので、物体は上昇し始める。このとき抵抗は下向きにはたらく。上向きを正とし、y を最下点からの上昇高さ、u を上向きの速さとすると

$$m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 12m - 10m - 2mu^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2(1-u^2).$$

考えてみよう 沈む段階の方程式をそのまま使い、v を負にするだけではなぜいけないのだろうか。

項 $-2mv^2$ は v の符号によらず常に上向きである。物体が上昇しているときは抵抗は下向きでなければならないので、方程式が変わるのである。（1 つの方程式で表すなら $-2mv|v|$ とする必要がある。）また、上昇中は常に $u < 1$ であることにも注意しよ

う。u は 0 から始まり、$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} > 0$ となるのは $u < 1$ の間だけであるから、u は終端速度（terminal speed）1 ms^{-1} に近づくことしかできない。このことから、以下で $1-u^2$ は正である。

液面での速さ。 $u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = 2(1-u^2)$ を用い、$y=0$、$u=0$ から $y=D$、$u=U$ まで積分すると

$$\int_0^U \frac{u\,\mathrm{d}u}{1-u^2} = 2\int_0^D \mathrm{d}y \qquad \Longrightarrow \qquad -\tfrac{1}{2}\ln(1-U^2) = 2D = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

よって $1-U^2 = \frac{1}{2}$ であり、物体は速さ $U = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ms^{-1} で液面に戻る。

上昇にかかる時間。 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2(1-u^2)$ を部分分数分解（partial fractions）$\dfrac{1}{1-u^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+u} + \dfrac{1}{1-u}\right)$ とともに用いると

$$T_2 = \frac{1}{2}\int_0^U \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \frac{1}{4}\Big[\ln\frac{1+u}{1-u}\Big]_0^U = \frac{1}{4}\ln\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1},$$

となる。最後の段階では分母と分子に $\sqrt{2}$ を掛けた。

合計の時間。 物体がふたたび液面に達するのは、プールに入ってから

$$T_1 + T_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) \text{ 秒}$$

後であり、題意が示された。

検算

- $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2$ であるから、上昇にかかる時間は $T_2 = \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) \approx 0.4407\,\mathrm{s}$ であり、合計は $\approx 0.3927 + 0.4407 = 0.8334\,\mathrm{s}$ である。
- 運動を数値的に追跡する（抵抗を $-2v|v|$ と書いてルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）を用いる）と、止まるまでの時間 0.39270 s、深さ 0.17329 m $= \frac{1}{4}\ln 2$、戻ったときの速さ 0.70711 ms^{-1}、戻るまでの時間 0.83339 s が得られ、すべて一致する。
- 戻ったときの速さは入ったときの速さより小さく、当然そうでなければならない。抵抗は往路でも復路でも負の仕事をするからである。

よくある間違い

- 上昇するときも抵抗を上向きのままにしてしまう。すると上向きの正味の力が $2m + 2mu^2$ となり、上昇がはるかに速くなってしまう。

- 浮力が重力を上回ることを忘れる。正味の力は（下向きを正として）$+2m$ ではなく $-2m$ である。
- 深さを求めるのに $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ を、時間を求めるのに $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ を用いてしまい、積分で行き詰まる。

STEP のその先へ

二次の抵抗（quadratic drag）により運動方程式は非線形（nonlinear）になるが、それでも変数分離が可能である。そのため、下降では arctan が、上昇では $\tanh^{-1}$ が現れる（実際 $T_2 = \frac{1}{2}\tanh^{-1} U$ である）。上昇では速さが終端速度 $1\ \mathrm{ms}^{-1}$ に近づき、そこで抵抗が上向きの正味の力とつり合う。大学 1 年の講義では、$\dot{u} = 2(1-u^2)$ のような方程式の相直線（phase line）による描像も含めて、このようなモデルを系統的に扱う。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は速度に依存する力を扱っており、Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）は変数分離形の方程式と自励系の方程式（autonomous equation）を扱っている。

解答例

STEP II 1993、第 12 問

力学 ・ 摩擦と剛体

STEP II 1993、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s2-q12

鍵となる考え方

球は壁と平面の間に挟まれているので、どちらか一方との接触を失わずに動き出すことはできない。両方の接点で同時に滑るなら、中心は動かず、球は単に中心のまわりに回転するだけである。どちら向きに回転するかを考えれば、それぞれの摩擦力（friction）がどちら向きにはたらくかがわかる。あとは未知数 N_1、N_2、m についての 3 つの式（2 方向の力のつり合いと 1 つのモーメントのつり合い）を立てればよい。後半では、モーメントをとる点を適切に選べば、答えは 1 行で得られる。

解答

モデルと摩擦の向き

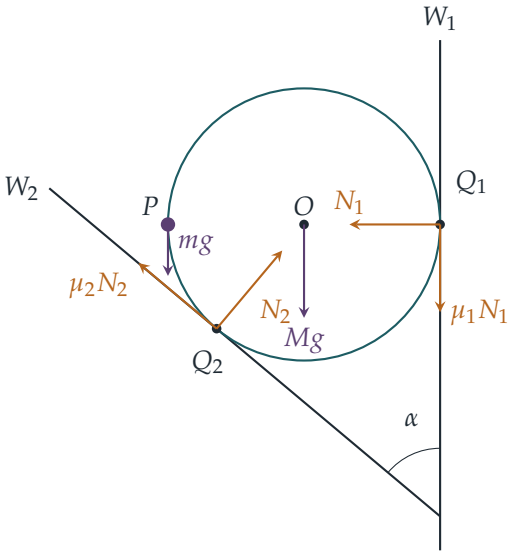
球を一様な剛体球（rigid uniform sphere）、粒子を P に固定された質点とみなす。Q_1 と Q_2 での接触は粗い。垂直抗力（normal reaction）を N_1（水平で、壁から離れる向き）と N_2（平面に垂直で、中心 O を通る）とする。

PQ_1 は水平な直径なので、粒子は O から水平距離 r の位置、壁と反対側にぶら下がっている。したがってその重さは O のまわりに mgr のモーメント（moment）をもち、P が下がる向きに球を回そうとする。接点での力がこれとつり合わなければならない。

考えてみよう 各接点で摩擦はどちら向きにはたらくか？

球が両方の点で滑るとき、球は両方と接したままなので O は固定され、球は P が下がる向きに O のまわりを回転する。すると、P の反対側の点である Q_1 は壁に沿って**上向き**に動き、Q_2 は平面に沿って隅のほうへ**下向き**に動く。摩擦は滑りを妨げる向きに

はたらくので、Q_1 では壁に沿って**下向き**に、Q_2 では平面に沿って**上向き**にはたらく。両方の点でまさに滑り出そうとしているので、どちらでも摩擦は限界摩擦（limiting friction）であり、$F_1 = \mu_1 N_1$、$F_2 = \mu_2 N_2$ である。どちらの摩擦力も O のまわりに粒子のモーメントと逆向きのモーメントをもつが、これは当然そうあるべきである。



両方の接点で滑る場合

平面は鉛直と角 α をなすので、その法線は水平と角 α をなす。すると N_2 は壁に向かう成分 $N_2 \cos\alpha$ と上向きの成分 $N_2 \sin\alpha$ をもち、平面に沿って上向きの摩擦 $\mu_2 N_2$ は壁から離れる向きの成分 $\mu_2 N_2 \sin\alpha$ と上向きの成分 $\mu_2 N_2 \cos\alpha$ をもつ。

水平方向の力のつり合いより：

$$N_1 = N_2 \cos\alpha - \mu_2 N_2 \sin\alpha = N_2(\cos\alpha - \mu_2 \sin\alpha). \tag{1}$$

鉛直方向の力のつり合いより：

$$N_2 \sin\alpha + \mu_2 N_2 \cos\alpha - \mu_1 N_1 = (M+m)g. \tag{2}$$

O のまわりのモーメントを考える。2 つの垂直抗力はどちらも O を通り、Mg も O を通る。2 つの摩擦力は接線に沿ってはたらき、O からの距離は r である。よって

$$mgr = \mu_1 N_1 r + \mu_2 N_2 r \quad \Longrightarrow \quad mg = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2. \tag{3}$$

(1) を (3) と (2) に代入すると：

$$mg = N_2\big(\mu_2 + \mu_1 \cos\alpha - \mu_1\mu_2 \sin\alpha\big),$$
$$(M+m)g = N_2\big(\sin\alpha + \mu_2 \cos\alpha - \mu_1 \cos\alpha + \mu_1\mu_2 \sin\alpha\big).$$

2 番目の式から 1 番目の式を引くと

$$\begin{aligned} Mg &= N_2\bigl(\sin\alpha + \mu_2\cos\alpha - 2\mu_1\cos\alpha + 2\mu_1\mu_2\sin\alpha - \mu_2\bigr) \\ &= N_2\bigl((2\mu_1\mu_2+1)\sin\alpha + (\mu_2 - 2\mu_1)\cos\alpha - \mu_2\bigr). \end{aligned}$$

mg の式をこの式で割ると、N_2 と g が消えて

$$m = \frac{\mu_2 + \mu_1\cos\alpha - \mu_1\mu_2\sin\alpha}{(2\mu_1\mu_2+1)\sin\alpha + (\mu_2 - 2\mu_1)\cos\alpha - \mu_2}\,M,$$

となり、求める結果が得られた。

これが物理的に意味をもつためには $N_1 > 0$ が必要であり、(1) よりこれは $\mu_2 < \cot\alpha$ ということである。μ_2 がそれより大きければ、Q_2 での摩擦が球を壁から引き離すことになり、最後の小問の状況になる。

Q_2 のまわりに転がる場合

今度は球は Q_2 で滑らない。その代わりに Q_2 のまわりに回転しようとしている（平面を転がり上がる）ので、中心は壁から離れる向きに動き、Q_1 での接触はまさに失われようとしている。転がり始める瞬間には $N_1 = 0$ であり、したがって Q_1 での摩擦も 0 である。

考えてみよう 今や未知となった Q_2 での摩擦はどう扱えばよいか？

Q_2 のまわりのモーメントをとれば、Q_2 での抗力も摩擦も式から消える。残るのは 2 つの重さだけである。水平距離を Q_2 から測る。OQ_2 は平面に垂直なので水平と角 α をなし、したがって O は Q_2 から壁側に水平距離 $r\cos\alpha$ のところにある。粒子は O からさらに壁と反対側に r だけ離れているので、Q_2 から反対側に水平距離 $r - r\cos\alpha$ のところにある。モーメントがつり合うためには

$$Mg\,r\cos\alpha = mg\,r(1-\cos\alpha) \quad\Longrightarrow\quad m = \frac{M\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{M}{\sec\alpha - 1},$$

である。最後の等号では分子と分母を $\cos\alpha$ で割った。これが求める結果である。

検算

- 2 つの答えは、2 つの状況の境界 $N_1 = 0$、すなわち $\mu_2 = \cot\alpha$ で一致するはずである。最初の式に $\mu_2 = \cos\alpha/\sin\alpha$ を代入すると、μ_1 の値によらず、分子は $\cot\alpha$ に、分母は $(1-\cos\alpha)/\sin\alpha$ になる。よって $m = M\cos\alpha/(1-\cos\alpha)$ となり、2 番目の答えと一致する。
- $\alpha = 60^\circ$ のとき、2 番目の答えは $m = M$ を与える。$\alpha = 60^\circ$、$\mu_1 = 0.2$、$\mu_2 = 0.3$、

$M = 1$ のとき、最初の答えは $m \approx 0.561$ を与える。これらの値と、2000 個のランダムな場合について、力とモーメントのつり合いをコンピュータで確かめた。

- 両方の接触がなめらか（$\mu_1 = \mu_2 = 0$）なら、最初の式は $m = 0$ を与える。粒子のモーメントに抵抗するものが何もないのだから、予想どおりである。

よくある間違い

- 摩擦の向きを間違える。まず球がどちらに回るかを決め、次に各接点がどちらに滑るかを考えること。
- 2 つの抗力はどちらも中心を通るので、O のまわりのモーメントの式には現れないことを忘れる。
- 最後の小問で、壁での摩擦を残してしまう。球が壁から離れようとしているときは $N_1 = 0$ なので、そこでの摩擦は 0 である。

STEP のその先へ

このように、滑ったり転がったりしうる接点が複数ある問題は、拘束（constraint）のある剛体の力学の入り口である。各接点は不等式（$|F| \le \mu N$、$N \ge 0$）を与え、そのうちどれが等号で成り立つかを見きわめなければならない。同じ場合分けはロボット工学にも現れ、ロボットの手が物をつかめるかどうかを決める。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、静力学（statics）と剛体の回転を丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 1993、第 13 問

力学 ・ 単振動

STEP II 1993、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s2-q13

鍵となる考え方

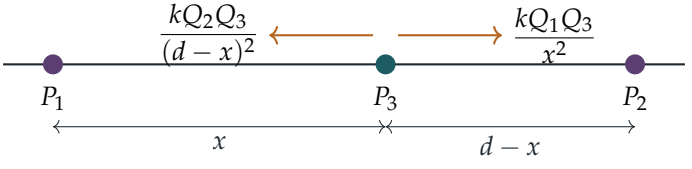
動くビーズに座標を設定し、それにはたらく合力を書き下す。互いに逆向きの 2 つの逆二乗（inverse-square）の斥力（repulsion）である。平衡（equilibrium）の位置とは、この 2 つがつり合う点である。振動については、ビーズを小さな y だけ変位させ、与えられた近似を**両方の**力に用いる。すると定数項は平衡条件によって打ち消し合い、y に比例する復元力（restoring force）だけが残る。これはまさに単振動（simple harmonic motion）の方程式である。

（問題文には P_3 が「P_1 と P_3 の間」を動くとあるが、これは「P_1 と P_2 の間」の誤りである。）

解答

モデル化。ビーズは質点とみなす。針金はなめらかで水平であるから、P_3 の重力と垂直抗力（normal reaction）はいずれも針金に垂直であり、針金に沿った運動には関与しない。針金に沿った力は、P_3 にはたらく 2 つの電気的斥力だけである（固定されたビーズはその位置に保持されているので、それらにはたらく力を気にする必要はない）。

x を P_1 から P_2 の向きに測ると、P_3 は P_1 から距離 x、P_2 から距離 $d - x$ の位置にあり、$0 < x < d$ である。



P_1 は P_3 を P_2 の向き（正の向き）に押し、P_2 はそれを押し返す。したがって、針金に沿ったニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）より

$$m\ddot{x} = \frac{kQ_1Q_3}{x^2} - \frac{kQ_2Q_3}{(d-x)^2}. \qquad (*)$$

平衡の位置

平衡のとき $x = a$ であり、$(*)$ の右辺は 0 になる。k と Q_3 は正であるから、kQ_3 で割ることができる：

$$\frac{Q_1}{a^2} = \frac{Q_2}{(d-a)^2} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{d-a}{a}\right)^2 = \frac{Q_2}{Q_1}.$$

a と $d-a$ はともに正である（ビーズは固定されたビーズの間にある）から、正の平方根をとる：

$$\frac{d-a}{a} = \frac{\sqrt{Q_2}}{\sqrt{Q_1}} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{Q_1}\,(d-a) = \sqrt{Q_2}\,a \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{d\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2}},$$

となり、求める結果が得られた。以下では $S = \sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2}$、$b = d - a$ とおくと便利である。このとき

$$a = \frac{d\sqrt{Q_1}}{S}, \qquad b = \frac{d\sqrt{Q_2}}{S}.$$

ビーズは**弱いほうの**電荷の近くに位置することに注意しよう。これは理にかなっている。

微小振動

y を小さいとして $x = a + y$ とおくと、$d - x = b - y$、$\ddot{x} = \ddot{y}$ である。与えられた近似（および、y を $-y$ に、a を b に置き換えた同じ近似）を用いると

$$\frac{1}{(a+y)^2} \approx \frac{1}{a^2} - \frac{2y}{a^3}, \qquad \frac{1}{(b-y)^2} \approx \frac{1}{b^2} + \frac{2y}{b^3}.$$

これらを $(*)$ に代入すると：

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &\approx kQ_3\left[Q_1\left(\frac{1}{a^2} - \frac{2y}{a^3}\right) - Q_2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{2y}{b^3}\right)\right] \\ &= kQ_3\left(\frac{Q_1}{a^2} - \frac{Q_2}{b^2}\right) - 2kQ_3\left(\frac{Q_1}{a^3} + \frac{Q_2}{b^3}\right)y. \end{aligned}$$

考えてみよう y を含まない項はどうなるか？

それらはまさに平衡条件そのものであるから、$\frac{Q_1}{a^2} - \frac{Q_2}{b^2} = 0$ となって打ち消し合う。平衡点のまわりで展開するときには必ずこうなる。0 次の力は定義により 0 なのである。

次に、a と b の式を用いて y の係数を簡単にする：

$$\frac{Q_1}{a^3} = \frac{Q_1 S^3}{d^3 Q_1^{3/2}} = \frac{S^3}{d^3\sqrt{Q_1}}, \qquad \frac{Q_2}{b^3} = \frac{S^3}{d^3\sqrt{Q_2}},$$

よって

$$\frac{Q_1}{a^3} + \frac{Q_2}{b^3} = \frac{S^3}{d^3} \cdot \frac{\sqrt{Q_2} + \sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1 Q_2}} = \frac{S^4}{d^3\sqrt{Q_1 Q_2}}.$$

したがって

$$\ddot{y} \approx -\omega^2 y, \qquad \omega^2 = \frac{2kQ_3 S^4}{md^3\sqrt{Q_1 Q_2}} > 0.$$

これは単振動の方程式であるから、微小な変位に対して P_3 は $x = a$ を中心に近似的に単振動を行う。（$y = y_0$ で静かに放すと、運動は $y \approx y_0 \cos \omega t$ となる。）周期は

$$\begin{aligned} T = \frac{2\pi}{\omega} &= 2\pi\sqrt{\frac{md^3\sqrt{Q_1 Q_2}}{2kQ_3 S^4}} = \frac{2\pi d}{S^2}\sqrt{\frac{md\sqrt{Q_1 Q_2}}{2kQ_3}} \\ &= \frac{\pi d}{S^2}\sqrt{\frac{4md\sqrt{Q_1 Q_2}}{2kQ_3}} = \frac{\pi d}{(\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2})^2}\sqrt{\frac{2md\sqrt{Q_1 Q_2}}{kQ_3}}, \end{aligned}$$

であり、これが求める結果である。

検算

- **対称性：** $Q_1 = Q_2$ のとき $a = d/2$、すなわち中点となり、当然そうなるべき結果である。周期の式は Q_1 と Q_2 について対称であり、これもそうあるべきである（電荷を入れ替えることは図を左右反転することにすぎない）。
- **次元（dimensions）：** kQQ'/r^2 は力であるから、$kQ_3\sqrt{Q_1 Q_2}$ の次元は力 × 長さ^2 である。すると $md\sqrt{Q_1 Q_2}/(kQ_3) \cdot d^2/(\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2})^4$ の次元は 質量 × 長さ / 力 = 時間^2 となる。よし。
- **数値：** $Q_1 = 4$、$Q_2 = 1$、$d = 3$、$k = Q_3 = m = 1$ とすると、$a = 2$（確認：$4/2^2 = 1/1^2$）、$T = 2\pi/\sqrt{3} \approx 3.628$ を得る。定数をさまざまにランダムに選び、ごく小さな変位から $(*)$ を数値積分すると、周期の式が 10^4 分の 1 よりよい精度で再現される。

よくある間違い

- 2 つの力のうち一方だけを展開してしまう。どちらも y に依存し、どちらも復元力に（同じ符号で）寄与する。
- $1/(b-y)^2$ における y の項の符号を誤る。与えられた近似で y を $-y$ に置き換えると $+2y/b^3$ となる。

- 平衡条件で負の平方根をとってしまう。そうするとビーズが線分 P_1P_2 の外に出てしまう。

STEP のその先へ

ここで行ったのは**線形化**（linearisation）である。ポテンシャル（potential）$V(x)$ の安定な平衡点の近くでは、運動は近似的に $\omega^2 = V''(a)/m$ の単振動となる。ここでは $V = kQ_3\big(Q_1/x + Q_2/(d-x)\big)$ であり、$V''(a)$ から同じ ω^2 が得られることを確かめることができる。この考え方を複数の座標に拡張すると、基準振動（normal modes of vibration）に至る。これは大学 1 年の力学の中心的な話題である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、平衡点のまわりの微小振動をわかりやすく扱っている。

解答例

STEP II 1993、第 14 問

力学 ・ 跳ね返りと反発係数

STEP II 1993、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s2-q14

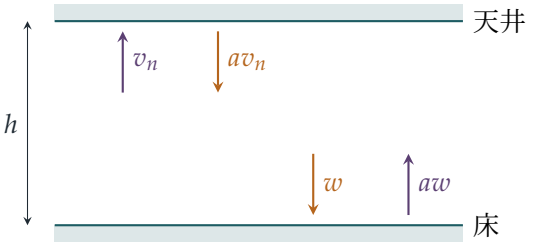
鍵となる考え方

衝突と衝突の間、ボールは重力のみを受けて自由に運動するので、$v^2 = u^2 \pm 2gh$ によって床での速さと天井での速さが結びつけられ、各衝突では速さが a 倍になる。1 周期（天井、床、そして再び天井）を追うと、天井での運動エネルギー（kinetic energy）に関する線形漸化式（linear recurrence）が得られ、これを不動点（fixed point）だけずらすことで解く。ボールが n 回目に天井に達するのは、ちょうどそのエネルギーが正であるときであり、対数（logarithm）をとるとこれが求める評価に変わる。

解答

ボールを鉛直方向に運動する質点（particle）とみなし、空気抵抗は無視する。また $0 < a < 1$ とする（評価式の分母に $\ln a$ があり、また $a = 1$ ならボールは永久に天井に当たり続ける）。n 回目の天井との衝突の直前の速さを v_n とし、

$$E_n = \frac{v_n^2}{2gh}, \qquad \text{とおくと} \qquad \tfrac{1}{2}mv_n^2 = mgh\,E_n.$$



最初の天井との衝突

ボールは $u^2 = 2kgh$ で床を離れ、重力に逆らって高さ h だけ上昇するので、

$$v_1^2 = 2kgh - 2gh = 2gh(k-1), \qquad E_1 = k - 1 > 0,$$

となる。$k > 1$ よりこれは正であるから、ボールは少なくとも 1 回は確実に天井に達する。

1 周期の解析

n 回目の天井との衝突の直後、ボールは速さ av_n で下向きに運動する（固定された天井でのニュートン（Newton）の実験則（Newton's experimental law））。ボールは高さ h だけ落下するので、床に達するときの速さを w とすると

$$w^2 = a^2 v_n^2 + 2gh.$$

ボールは速さ aw で上向きに跳ね返り、高さ h だけ上昇する。再び天井に達するならば、そこでの速さは

$$v_{n+1}^2 = a^2 w^2 - 2gh = a^4 v_n^2 + 2gh\,(a^2 - 1).$$

を満たす。$2gh$ で割ると、

$$E_{n+1} = a^4 E_n + (a^2 - 1).$$

これは右辺が正であるときに成り立つ。右辺が 0 以下であれば、ボールは二度と天井に達しない。

> **考えてみよう**　$E_{n+1} = a^4 E_n + c$ の形の漸化式はどのように解けばよいか。

$E = a^4 E + (a^2 - 1)$ を満たす定数解 E を探す：

$$E = \frac{a^2 - 1}{1 - a^4} = \frac{a^2 - 1}{(1 - a^2)(1 + a^2)} = -\frac{1}{1 + a^2}.$$

この不動点を引くと定数項が消える。すなわち $F_n = E_n + \dfrac{1}{1 + a^2}$ とおくと $F_{n+1} = a^4 F_n$ となる。よって $F_n = a^{4(n-1)} F_1$ であり、$F_1 = (k-1) + \dfrac{1}{1 + a^2}$ であるから、

$$E_n = a^{4n-4}\left(k - 1 + \frac{1}{a^2 + 1}\right) - \frac{1}{a^2 + 1} = a^{4n-4}(k-1) + \frac{a^{4n-4} - 1}{a^2 + 1}.$$

mgh を掛けると、n 回目の天井との衝突の直前の運動エネルギーは

$$mgh\left(a^{4n-4}(k-1) + \frac{a^{4n-4} - 1}{a^2 + 1}\right),$$

となり、示すべきことが示された。

天井との衝突の回数

ボールが n 回目に天井に当たるのは、天井に到達したときに正の速さをもつとき、すなわち $E_n > 0$ のときに限る。（n 回目に天井に当たるならば、それ以前のすべての回でも天井に当たっているので、上の式が適用できる。）$E_n > 0$ の両辺に $a^2+1>0$ を掛けると、

$$a^{4n-4}\big((k-1)(a^2+1)+1\big) > 1 \quad\Longleftrightarrow\quad a^{4n-4}\big(a^2(k-1)+k\big) > 1.$$

両辺はともに正であるから、対数をとってよい：

$$(4n-4)\ln a + \ln\big[a^2(k-1)+k\big] > 0.$$

考えてみよう $4\ln a$ で割るとき、不等号の向きはどうなるか。

$0 < a < 1$ より $\ln a < 0$ であるから、$4\ln a$ で割ると不等号の向きが逆になる：

$$n-1 < -\frac{\ln\big[a^2(k-1)+k\big]}{4\ln a}, \qquad \text{すなわち} \qquad n < 1 - \frac{\ln\big[a^2(k-1)+k\big]}{4\ln a}.$$

したがって、ボールが天井に N 回当たるならば、$n = N$ でこの不等式が成り立ち、

$$N < 1 - \frac{\ln[a^2(k-1)+k]}{4\ln a}.$$

となる。特に、天井との衝突の回数はこの値以下であり、これが示すべきことであった。（実際には E_n は n について減少するので、N はこの上界より真に小さい正の整数の個数にちょうど等しい。）

検算

- $n = 1$：式は $mgh(k-1)$ を与え、エネルギー保存則（conservation of energy）から得られる $\frac{1}{2}m(2kgh) - mgh$ と一致する。
- n が大きいとき：$E_n \to -\frac{1}{1+a^2} < 0$ となるので、ボールはやがて天井に届かなくなる。各衝突でエネルギーが失われるのだから、当然そうなるはずである。
- 数値的には、$k = 6$、$a = 0.9$、$h = 2\,\mathrm{m}$、$m = 1\,\mathrm{kg}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ として逐次シミュレーションを行うと、天井での運動エネルギーは 98、60.57、36.02 J となり、式と一致する。ボールは天井に 6 回当たり、上界は約 6.48 である。

よくある間違い

- 天井と床の**両方**で速さが a 倍になることを忘れ、1 周期あたり a^4 ではなく a^2 としてしまう。

- 不等号の向きを逆にせずに $\ln a$ で割ってしまう。
- 反発（restitution）の係数を速さではなく運動エネルギーに適用してしまう。各衝突でエネルギーは a 倍ではなく a^2 倍になる。

STEP のその先へ

漸化式 $E_{n+1} = a^4 E_n + c$ は 1 階線形差分方程式（first-order linear difference equation）である。不動点を引くという工夫は、線形常微分方程式（linear ODE）の特殊解（particular integral）を求めることの離散版であり、反復写像（iterated maps）とその安定性（stability）の研究にも再び現れる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、衝突とエネルギー損失をより一般的に扱っている。

解答例

STEP II 1993、第 15 問

確率・統計 ・ 中心極限定理

> **STEP II 1993、問 15**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q15

この問題は、*Beyond STEP* の第 13.6 節「**積み重なる誤差**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch13/errors-add-up.html

鍵となる考え方

誤差の合計は、各数に 1 つずつ生じる多数の小さな独立な誤差の和である。そこで、*1 つの*数に生じる誤差の平均と分散を求め、それをすべての数について足し合わせ、中心極限定理（Central Limit Theorem）を用いて合計を近似的に正規分布に従うものとして扱う。2 台のコンピュータの違いは、すべて平均から生じる。一方の機械の誤差は平均すると打ち消し合うが、もう一方の誤差はすべて同じ向きに偏るのである。

解答

1 つの数に生じる誤差

数を $a = m + U$ とおく。ここで $m = \lfloor a \rfloor$ は整数、U はその小数部分であり、$U \sim \mathrm{U}[0,1)$ である。誤差を（近似値）−（真の値）と定義する。符号の取り方は誤差の大きさには影響しない。

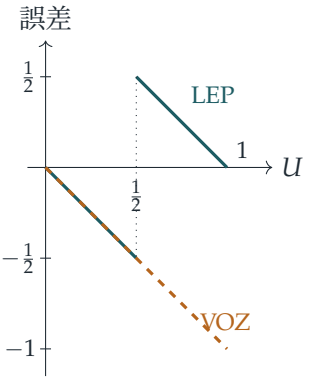
LEP（**四捨五入**（*rounding*））。$U < \frac{1}{2}$ ならば数は m に置き換えられ、誤差は $-U$ である。$U \geq \frac{1}{2}$ ならば $m+1$ に置き換えられ、誤差は $1-U$ である。よって誤差は

$$X = \begin{cases} -U, & 0 \leq U < \frac{1}{2}, \\ 1-U, & \frac{1}{2} \leq U < 1, \end{cases}$$

であり、$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ の各値を一定の密度でとる。すなわち X は $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上の一様分布に従

う（図ののこぎり波）。

VOZ（**切り捨て**（*truncation*））。数は m に置き換えられるので、誤差は $Y = -U$ であり、$(-1, 0]$ 上の一様分布に従う。



長さ 1 の区間上の一様分布（uniform distribution）の分散（variance）は、区間がどこにあっても $\frac{1}{12}$ である。よって

$$\mathrm{E}(X) = 0, \quad \mathrm{Var}(X) = \tfrac{1}{12}; \qquad \mathrm{E}(Y) = -\tfrac{1}{2}, \quad \mathrm{Var}(Y) = \tfrac{1}{12}.$$

（念のため記しておくと、$\mathrm{Var}(U) = \int_0^1 u^2 \,\mathrm{d}u - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ である。）

1500 個の数を足す

コンピュータは近似値どうしを正確に足し合わせるので、答えに含まれる誤差は個々の数に生じる誤差の和である。小数部分は互いに独立であるから、個々の誤差も独立（independent）であり、それらの分散は足し合わせることができる。$n = 1500$ 個の数に対して

$$\mathrm{Var}(\text{誤差の合計}) = \frac{1500}{12} = 125, \qquad \text{標準偏差} \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \approx 11.18.$$

中心極限定理により、独立で同一の分布に従う 1500 個の誤差の和は、正規分布（normal distribution）に非常に近い。

LEP。誤差の合計 E_L は近似的に $\mathrm{N}(0, 125)$ に従うので、

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(|E_L| > 15) &\approx \mathrm{P}\left(|Z| > \frac{15}{\sqrt{125}}\right) = \mathrm{P}(|Z| > 1.342) \\ &= 2\big(1 - \Phi(1.342)\big) \approx 2(1 - 0.9102) \approx 0.18. \end{aligned}$$

連続性補正（continuity correction）は必要ない。誤差は整数ではなく連続型確率変数だからである。

VOZ。誤差の合計 E_V は近似的に $\mathrm{N}(-750, 125)$ に従う。誤差の大きさが 15 以下となるのは $E_V \geq -15$ のときに限られ、これは平均より

$$\frac{-15-(-750)}{\sqrt{125}} = \frac{735}{11.18} \approx 66$$

標準偏差も上にある。この確率はまったく無視できるほど小さいので、

$$\mathrm{P}(|E_V| > 15) \approx 1.$$

切り捨ては常に下向きに、平均して $\frac{1}{2}$ ずつずれるので、1500 個の数を足すと VOZ はおよそ 750 だけずれてしまう。

> **考えてみよう** どちらの機械も同じ分散の誤差を生じる。それなのに、なぜ答えがこれほど違うのだろうか。

誤差の合計のばらつきは同じで、およそ ±11 程度であるが、その**中心**は同じではない。LEP の誤差は 0 を中心としているので、合計は 0 の周りをふらつく。VOZ の誤差はすべて平均 $-\frac{1}{2}$ をもつので、偏り（bias）は n に比例して増大する一方、ランダムなばらつきは $\sqrt{n}$ 程度でしか増えない。偏りのほうが圧倒的に勝るのである。

LEP は何回足し算できるか

LEP が n 個の数を足すとする。その誤差の合計は近似的に $\mathrm{N}\left(0, \frac{n}{12}\right)$ に従い、次が必要である。

$$\mathrm{P}(|E_L| < 10) = 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) - 1 \;\geq\; 0.9 \quad\Longleftrightarrow\quad \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) \geq 0.95.$$

Φ は増加関数で $\Phi(1.6449) = 0.95$ であるから、これは

$$\frac{10}{\sqrt{n/12}} \geq 1.6449 \iff n \leq 12\left(\frac{10}{1.6449}\right)^2 \approx 443.5.$$

と同値である。確率は n が増えると減少するので、$n \leq 443$ では 0.9 以上であり、$n = 444$ で初めて 0.9 を下回る。よって LEP は **443** 個の数を足すことができる。（「足し算」を $+$ 記号の使用 1 回と数えるならば、443 個の数を足すには 442 回の足し算が必要である。どちらの解釈を採るかを明記すれば、どちらでも構わない。）

検算

- 1.342 は妥当か。誤差の合計 15 は 1 標準偏差（11.18）を少し超える程度であり、正規分布では平均から 1.34 標準偏差より遠くにある部分がおよそ 18% である。おおむね妥当である。

- **数値的な確認。** 1500 個の四捨五入された数の組を 10^5 回シミュレーションしたところ、$\mathrm{P}(|E_L| > 15) \approx 0.179$ となった。一様分布の和の正確な分布からは 0.1797 が得られ、正規近似による値 0.1797 と一致する。後半については、正確な確率は $n = 443$ で 0.90019、$n = 444$ で 0.89981 であり、境界が正しいことが確かめられる。

よくある間違い

- LEP の誤差を $[0, \frac{1}{2}]$ 上の一様分布とすること。四捨五入では上にも下にもずれうるので、誤差は $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上の一様分布である。
- VOZ の 1 つの数あたりの平均 $-\frac{1}{2}$ を忘れ、LEP と同じ答えを出してしまうこと。
- 最後の小問で 0.95 の代わりに $\Phi(z) = 0.9$ を用いること。事象 $|E| < 10$ は両側なので、それぞれの裾に 0.05 ずつが割り当てられる。

STEP のその先へ

これは浮動小数点演算（floating-point arithmetic）における丸め誤差（rounding error）の古典的な解析である。偏りのない丸めでは累積誤差は $\sqrt{n}$ 程度で増大するが、偏りのある規則では n 程度で増大する。IEEE 754 規格が、ちょうど半分のときに常に切り上げるのではなく「偶数への丸め（round half to even）」を採用しているのはこのためである。n 個の一様分布の和には正確な分布（アーウィン・ホール分布（Irwin–Hall distribution））があり、それがどれほど速く正規分布に近づくかを調べることは、中心極限定理への良い入り口となる。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、この定理が証明され、詳しく論じられている。

解答例

STEP II 1993、第 16 問

確率・統計 ・ ポアソン過程

> **STEP II 1993、問 16**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q16

鍵となる考え方

この問題には独立な 2 つの乱雑さの源がある。1 つはバスであり、これは幾何分布（geometric distribution）に従う待ち時間を与える。もう 1 つは乗客であり、これはポアソン過程（Poisson process）をなす。最初のバスがいつ来るかで条件付けをする（condition）。それがわかれば、待っている人数は、長さのわかった時間区間におけるポアソン分布に従う個数にすぎない。小問 (iii) では全確率の公式（law of total probability）を用いる。本当の問題は、その結果得られる無限級数を、数表と電卓だけで有効数字 2 桁まで求めるにはどうすればよいかである。

解答

時間は 8:00 からの経過分数で測る。最初のバスが到着する時刻を T とし、区間 $(0, t]$ に到着する乗客の人数を X_t とする。乗客の到着は 1 分あたり率 4 のポアソン過程であるから、$X_t \sim \mathrm{Po}(4t)$ である。バスが来うるのは $t = 1, 2, 3, \ldots$ のときだけであり（「8 時を少し過ぎたところ」とは、8:00 に来うるバスはすでに来て去った後であることを意味する）、バスは乗客とは独立である。

小問 (i)

最初のバスが 8 時 n 分に到着するのは、ちょうど $1, 2, \ldots, n-1$ 分にはバスが来ず、かつ n 分にはバスが来るときである。これらの事象は独立であるから、

$$\mathrm{P}(T = n) = \left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1} \tfrac{1}{4}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

したがって T はパラメータ $\frac{1}{4}$ の幾何分布に従う。（確認として、これらの確率の和は $\frac{1}{4}/\left(1-\frac{3}{4}\right)=1$ である。）

小問 (ii)

8:05 に待っている人々は、ちょうど $(0,5]$ に到着した人々である。8:05 より前にバスは来ていないので、誰も去っていない。よって、$T=5$ という条件の下での X_5 の分布を求めればよい。

> **考えてみよう** 最初のバスが 8:05 に来たと知ることで、乗客の人数の分布は変わるだろうか？

変わらない。事象 $T=5$ はバスだけに依存し、バスは乗客と独立である。よって $T=5$ で条件付けても X_5 の分布は変わらず、$X_5 \sim \mathrm{Po}(4\times 5)=\mathrm{Po}(20)$ である。したがって

$$\mathrm{P}(m \text{ 人が待っている} \mid T=5)=\frac{\mathrm{e}^{-20}\,20^m}{m!}, \qquad m=0,1,2,\ldots$$

小問 (iii)

バスが全員を乗せられないのは、ちょうど 25 人より多くの人が待っているとき、すなわち $X_T \geq 26$ のときである。この事象を F とする。T で条件付けし、(ii) と同様に独立性を用いると、

$$\mathrm{P}(F)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}(T=n)\,\mathrm{P}(X_n\geq 26)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1}\tfrac{1}{4}\,\mathrm{P}\big(\mathrm{Po}(4n)\geq 26\big).$$

ここで、この無限級数を有限の手間の計算に変え、しかも誤差を 0.005 よりも十分小さく抑える方針が必要である。求めたいのは有効数字 2 桁であり、答えは 0.1 程度の大きさになることがわかる。

ステップ 1：余事象を扱い、裾の部分を容易にする。 $w_n=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\frac{1}{4}$、$q_n=\mathrm{P}(\mathrm{Po}(4n)\leq 25)$ とおく。$\sum w_n=1$ であるから、

$$\mathrm{P}(F)=1-\sum_{n=1}^{\infty}w_n\,q_n.$$

この形のほうがよいのは、n が大きいとき q_n がきわめて小さいからである。$n\geq 11$ では平均 $4n\geq 44$ は 25 を大きく上回る。n が増えると q_n は減少する（時間が長いほど乗客は多い）から、

$$\sum_{n\geq 11}w_n q_n \leq q_{11}\sum_{n\geq 11}w_n = q_{11}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{10}.$$

正規近似（normal approximation）により $q_{11} \approx \Phi\big((25.5-44)/\sqrt{44}\big) = \Phi(-2.79) \approx 0.003$ であるから、この裾の部分は 0.0002 未満であり、無視してよい。残るのは 10 項である。

ステップ 2：最初のいくつかの項。 $n=1$ と $n=2$（平均 4 と 8）では、26 人以上の乗客が来ることはきわめて起こりにくいので、必要な精度をはるかに超えて $q_1 = q_2 = 1$ としてよい。よってこれらの寄与は $w_1 + w_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{16}$ である。

ステップ 3：中間の項は数表から。 $n = 3,4,5$（平均 12、16、20）については、$q_n = \mathrm{P}(\mathrm{Po}(4n) \le 25)$ をポアソン分布の累積分布表から直接読み取る。この表は通常、平均 20 までを扱っている。表に平均 24 と 28 も載っていれば、$n = 6,7$ にもそれを使う。

ステップ 4：大きい平均は正規近似で。 残りの n から 10 まで（平均は最大 40）については、連続修正（continuity correction）を施した $\mathrm{Po}(\mu) \approx \mathrm{N}(\mu,\mu)$ を用いる：

$$q_n \approx \Phi\left(\frac{25.5 - 4n}{\sqrt{4n}}\right),$$

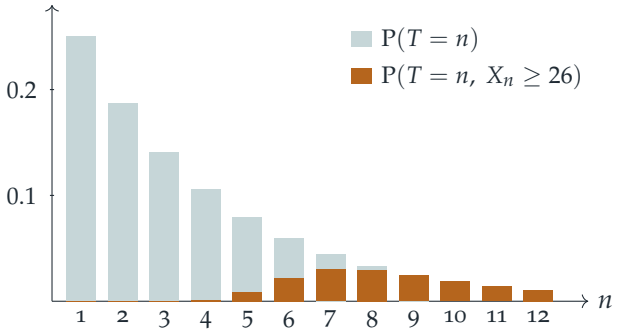
ここで Φ は正規分布表から読み取る。これらの平均は近似がよく効くほど十分大きい。さらに重要なのは、重み w_n がすでに小さい（$w_8 \approx 0.033$、$w_{10} \approx 0.019$）ので、q_n に千分の数程度の誤差があっても $\mathrm{P}(F)$ の変化は 0.001 未満にとどまることである。

ステップ 5：まとめる。 電卓で $w_1, \ldots, w_{10}$ を計算し、

$$\mathrm{P}(F) \approx 1 - \sum_{n=1}^{10} w_n q_n,$$

を求めてから、有効数字 2 桁に丸める。無視した部分や近似した部分はそれぞれ高々 0.001 程度であるから、合計が丸めの境界にきわめて近くならない限り、丸めは安全である。もし近くなったとしても、この方法ならどの項を精密にすればよいかがはっきりわかる。

問題文はこの計算を実行することまでは求めていないが、実行すると $\mathrm{P}(F) \approx 0.19$ となる。下のグラフはこの確率がどこから来るかを示している。その大部分は最初のバスが 8:06 から 8:10 に来る場合から生じる。このとき、待ち行列の人数の期待値は 24 から 40 であり、定員に近いか定員を超えている。



検算

- (i) では、確率の和は 1 であり、$\mathrm{P}(T=1)=\frac{1}{4}$ となっていて、あるべき通りである。
- (ii) では、待っている人数の平均は 20 であり、これは 1 分あたり 4 人が 5 分間来ることに対応する。
- (iii) では、厳密な和（計算機で計算したもの）は 0.1904 である。2×10^5 回の朝をモンテカルロ・シミュレーション（Monte Carlo simulation）すると 0.189 が得られる。上の数表と正規近似による方法では 0.1912 となる。3 つとも丸めると 0.19 になる。

よくある間違い

- 境界を 1 つずらしてしまうこと。バスが全員を乗せられないのは 26 人以上が待っているときだけであるから、求める確率は $1-\mathrm{P}(\mathrm{Po}(4n)\leq 25)$ であって、$1-\mathrm{P}(\mathrm{Po}(4n)\leq 24)$ ではない。
- 待ち行列の人数を $\mathrm{Po}(4\,\mathrm{E}[T])=\mathrm{Po}(16)$ として扱うこと。待ち時間は確率的であるから、平均時間を代入するのではなく、ポアソン確率を T について平均しなければならない。
- 級数を打ち切ってよい理由を述べずに、無限級数のまま放置すること。無視した裾の部分が小さすぎて有効数字 2 桁目に影響しないことを示さなければならない。

STEP のその先へ

待っている人数 X_T は、平均が確率的に決まるポアソン分布に従う個数、すなわちポアソン分布の**混合**（mixture）である。T が幾何分布に従うので、X_T は簡潔な閉じた形の母関数（generating function）をもつことがわかる。また、このような条件付けに

よる議論は、待ち行列理論（queueing theory）の基礎であり、確率論の最初の講義で出会う複合分布や混合分布の基礎でもある。級数をどこで打ち切り、誤差をどう評価するかという問題は、数値解析（numerical analysis）の出発点である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、ポアソン過程と母関数をちょうどよい水準で扱っている。

解答例

STEP III 1993、第 1 問

純粋数学 ・ 弧長と体積

STEP III 1993、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s3-q1

鍵となる考え方

倍角の公式（double-angle formula）$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ を使えば、媒介変数表示の曲線（parametric curve）はそのまま直交座標（Cartesian）による方程式に書き換えられる。そして θ の範囲から、放物線（parabola）のどの部分が得られるのかが正確にわかる。長さについては、$\sqrt{1+16x^2}$ は双曲線関数による置換（hyperbolic substitution）を使えという典型的な合図である。$1+\sinh^2 u = \cosh^2 u$ が成り立つからである。体積は、P の両端が回転軸（axis of rotation）上にあることに気づけば、通常の回転体の体積（volume of revolution）の問題になる。

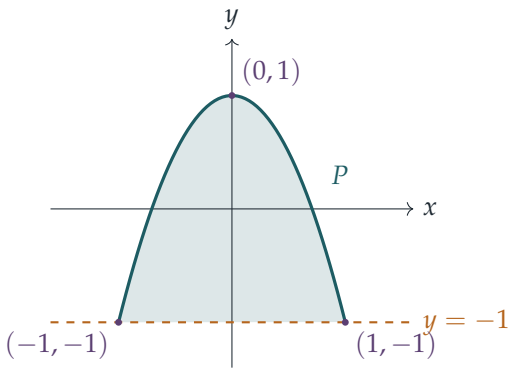
解答

曲線とその概形

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ かつ $x = \sin\theta$ であるから、

$$y = 1 - 2x^2.$$

したがって、P 上のすべての点は放物線 $y = 1 - 2x^2$ 上にある。θ が $-\pi/2$ から $\pi/2$ まで動くとき、$x = \sin\theta$ は -1 から 1 まで単調に増加し、各値をちょうど一度ずつとる。よって P は、この放物線のうち $-1 \le x \le 1$ の部分の弧にほかならない。P は $(-1,-1)$ から頂点（vertex）$(0,1)$ まで上り、再び $(1,-1)$ まで下る曲線であり、y 軸に関して対称である。



P の長さ

直交座標の形で考えると $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -4x$ であるから、

$$\text{長さ} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+16x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} \sqrt{1+16x^2}\,\mathrm{d}x,$$

となる。ここで、被積分関数（integrand）が偶関数（even function）であることを用いた。（媒介変数表示の公式 $\int \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}\theta$ を使っても、$x = \sin\theta$ と置換すれば同じ積分が得られる。）

考えてみよう どのような置換をすれば $\sqrt{1+16x^2}$ が簡単になるだろうか。

$16x^2$ を $\sinh^2$ の形にしたいので、$4x = \sinh u$ とおく。すると $4\,\mathrm{d}x = \cosh u\,\mathrm{d}u$ であり、$\sqrt{1+16x^2} = \cosh u$ となる（$\cosh u > 0$ であるから正である）。積分区間の端 $x = 0, 1$ は $u = 0$ と $u = \alpha$ に対応する。ただし $\alpha = \sinh^{-1} 4$ である。$\sinh\alpha = 4$、$\cosh\alpha = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$ であることに注意する。$\cosh^2 u = \frac{1}{2}(1+\cosh 2u)$ を用いると、

$$\begin{aligned} 2\int_0^1 \sqrt{1+16x^2}\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^\alpha \cosh u \cdot \tfrac{1}{4}\cosh u\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{4}\int_0^\alpha (1+\cosh 2u)\,\mathrm{d}u \\ &= \tfrac{1}{4}\Big[u + \tfrac{1}{2}\sinh 2u\Big]_0^\alpha = \tfrac{1}{4}(\alpha + \sinh\alpha\cosh\alpha) \\ &= \tfrac{1}{4}\big(\sinh^{-1}4 + 4\sqrt{17}\big). \end{aligned}$$

よって、P の長さは求めるとおり $\sqrt{17} + \frac{1}{4}\sinh^{-1} 4$ である。

体積

P の両端はともに直線 $y = -1$ 上にあるので、P をこの直線のまわりに回転させると閉曲面ができる。この曲面が囲む立体は、P と $y = -1$ の間の網掛け部分を回転させて得られる立体とちょうど一致する。位置 x における断面は半径

$$y - (-1) = 2 - 2x^2 = 2(1-x^2)\ (\geq 0、\text{ただし} |x| \leq 1).$$

の円板である。したがって

$$V = \pi \int_{-1}^{1} 4(1-x^2)^2 \,\mathrm{d}x = 8\pi \int_{0}^{1} \left(1 - 2x^2 + x^4\right) \mathrm{d}x$$
$$= 8\pi\left(1 - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{5}\right) = 8\pi \cdot \tfrac{8}{15} = \frac{64\pi}{15}.$$

検算

- $\theta = 0$ のとき $(0,1)$、$\theta = \pm\pi/2$ のとき $(\pm 1, -1)$ が得られ、いずれも $y = 1 - 2x^2$ を満たす。
- 長さ $\sqrt{17} + \frac{1}{4}\sinh^{-1} 4 \approx 4.6468$ は、$(\pm 1, -1)$ から $(0,1)$ への 2 本の弦（chord）の長さの和 $2\sqrt{5} \approx 4.472$ より少し大きいはずである。実際そうなっている。また、$[-\pi/2, \pi/2]$ 上で $\int \sqrt{\cos^2\theta + 4\sin^2 2\theta}\,\mathrm{d}\theta$ を中点則（midpoint rule）で数値計算しても 4.64678 が得られる。
- パップスの定理（Pappus's theorem）：この領域の面積は $\int_{-1}^{1}(2 - 2x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}$ であり、その重心（centroid）は回転軸から $\frac{4}{5}$ だけ上にある。よって $V = 2\pi \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{64\pi}{15} \approx 13.404$ となり、これも数値積分の結果と一致する。

よくある間違い

- 誤って x 軸のまわりに回転させ、半径として $y + 1$ ではなく y を使ってしまう。
- $\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cosh u\,\mathrm{d}u$ に由来する係数 $\frac{1}{4}$ を忘れる。あるいは $\sinh 2\alpha$ を $2\sinh\alpha\cosh\alpha = 8\sqrt{17}$ と書き直さずに、簡単にしないまま残してしまう。

STEP のその先へ

弧長（arc length）は、曲線の微分幾何学（differential geometry）への最初の入り口である。曲線上の位置を弧長 s で測ると速さは常に 1 となり、s に対して向きがどれだけ速く変わるかを表すのが**曲率**（curvature）である。放物線 $y = 1 - 2x^2$ では、曲率は頂点で最大となる。上で用いたような双曲線関数による置換は、大学 1 年の微積分のいたるところに現れる。Siklos 著 *Advanced Problems in Mathematics* には、この種の問題がさらに数多く収録されている。

解答例

STEP III 1993、第 2 問

純粋数学 ・ 変曲点と極座標による面積

STEP III 1993、問 2

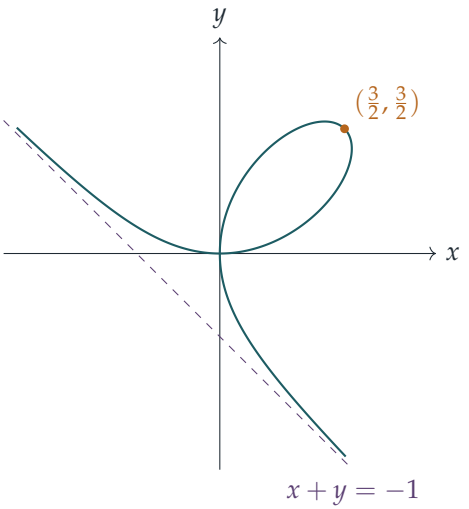
先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s3-q2

鍵となる考え方

変曲点（point of inflection）では第 2 次導関数（second derivative）が 0 になり（かつ符号が変わら）なければならない。そこで (i) の方針は、陰関数微分（implicit differentiation）によって $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ を求め、それがいつ 0 になりうるかを調べることである。計算は重そうに見えるが、曲線の方程式そのものを使うと分子はごく簡単な式に縮む。(ii) では、3 次の項と xy の項の次数が異なるので、極座標（polar coordinates）に直すと因数 r^2 が約分され、r が θ の陽な関数として得られる。

解答



図は曲線（デカルト（Descartes）の正葉線（folium of Descartes））の概形である。第 1 象限にループがあり、第 2 象限と第 4 象限にある 2 本の枝が漸近線（asymptote）$x+y=-1$ に近づいていく。

小問 (i)

$x^3+y^3=3xy$ を x について陰関数微分すると、

$$3x^2+3y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3y+3x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\qquad \text{よって}\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{N}{D},\quad N=y-x^2,\ D=y^2-x,$$

となる（ただし $D\neq 0$ のところで）。この商を微分し、$y'=N/D$ として $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}=y'-2x$ と $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x}=2yy'-1$ を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{(y'-2x)D-N(2yy'-1)}{D^2}=\frac{(N-2xD)-\left(2yN^2/D-N\right)}{D^2}\\&=\frac{2\left(ND-xD^2-yN^2\right)}{D^3}.\end{aligned}$$

ここで括弧の中を展開する。

$$\begin{aligned}ND&=x^3+y^3-x^2y^2-xy,\\xD^2&=xy^4-2x^2y^2+x^3,\\yN^2&=y^3-2x^2y^2+x^4y,\end{aligned}$$

であるから、

$$ND-xD^2-yN^2=3x^2y^2-xy-xy^4-x^4y=-xy\left(1+x^3+y^3-3xy\right).$$

C 上では $x^3+y^3-3xy=0$ なので、この括弧はちょうど 1 となり、

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{-2xy}{(y^2-x)^3}.$$

考えてみよう これが 0 になりうるのはどこか。また、この式が使えなくなる点ではどうなるか。

第 2 次導関数が 0 になるのは $x=0$ または $y=0$ のときに限る。C 上では、$x=0$ ならば $y^3=0$ となり、$y=0$ ならば $x^3=0$ となる。いずれにせよ原点であり、原点は変曲点ではないと仮定してよい。原点と $y^2=x$ を満たす点を除けば、第 2 次導関数は連続で 0 にならないから、符号を変えることはできない。したがって、そこに変曲点はない。

残るのは $D=y^2-x=0$ となる点であり、そこでは y は x の微分可能な関数ではない。もしそこで N も 0 ならば、$x=y^2$ かつ $y=x^2$ なので $x=x^4$ となり、$(0,0)$ また

は $(1,1)$ を得る。しかし $1+1 \neq 3$ であるから $(1,1)$ は C 上にない。よって原点以外のそのような点ではすべて $N \neq 0$ であり、接線は鉛直（vertical tangent）である。したがって x を y の関数とみなして扱うべきである。C の方程式は x と y について対称なので、上の計算で文字の役割を入れ替えると

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2} = \frac{-2xy}{(x^2-y)^3},$$

を得る。これは定義されており（$x^2 - y = -N \neq 0$ であるから）、かつ 0 でない（原点以外では $xy \neq 0$ であるから）。よって、これらの点でも曲線の曲がる向きは変わらない。

以上より、C は変曲点をもたない。

小問 (ii)

$x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ とおく。すると

$$r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta) = 3r^2\cos\theta\sin\theta,$$

であり、$r \neq 0$ のとき r^2 で割ることができて

$$r = \frac{3\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}.$$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ では分子と分母はともに非負（かつ分母は正）であるから $r \geq 0$ であり、$r = 0$ となるのはちょうど $\theta = 0$ と $\theta = \frac{\pi}{2}$ のときである。したがって θ が 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで動くとき、点は原点から出発して原点に戻り、ループをちょうど 1 周する。面積は

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} r^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{(\cos^3\theta+\sin^3\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

分子と分母を $\cos^6\theta$（$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ で正）で割ると、

$$A = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\tan^2\theta\sec^2\theta}{(1+\tan^3\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

$u = \tan\theta$、$\mathrm{d}u = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$ と置換すると（置換積分（substitution））、u は 0 から ∞ まで動き、

$$A = \frac{9}{2}\int_0^{\infty} \frac{u^2}{(1+u^3)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{9}{2}\left[-\frac{1}{3(1+u^3)}\right]_0^{\infty} = \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{2}.$$

$u \to \infty$ のとき原始関数（antiderivative）は 0 に近づくので、この広義積分（improper integral）は収束（converge）する。よってループの面積は $\frac{3}{2}$ である。

検算

- ループの先端は $y = x$ となる点である。$2x^3 = 3x^2$ より $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ となり、原点からの距離は $\frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2.12$ である。この長さで幅がおよそ 1 のループなら、面積は 1 から 2 程度になるはずであり、結果と合っている。
- 媒介変数表示（parametrisation）$x = \frac{3t}{1+t^3}$、$y = \frac{3t^2}{1+t^3}$（直線 $y = tx$ が C と交わる点）を用いて、無作為に選んだ点で $\frac{-2xy}{(y^2-x)^3}$ を媒介変数表示による第 2 次導関数と比較し、さらにどの枝でも曲率（curvature）の符号が変わらないことを確かめた。
- $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ の中点則による数値積分と、媒介変数表示したループを 1 周する靴ひも公式（shoelace formula）による和は、どちらも 1.500000 を与える。

よくある間違い

- 第 2 次導関数を完全に展開してしまい、その中に $x^3 + y^3 - 3xy$ が現れていることに最後まで気づかない。この簡約こそが問題の核心である。
- 接線が鉛直になる点を忘れる。そこでは $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ は 0 なのではなく、定義されないのである。
- 面積を $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ ではなく $\frac{1}{2}\int r\,\mathrm{d}\theta$ と書いてしまう。

STEP のその先へ

陰関数微分は陰関数定理（implicit function theorem）によって正当化される。すなわち、$\partial F/\partial y \neq 0$ となる任意の点の近くでは、方程式 $F(x, y) = 0$ は確かに y を x の滑らかな関数として定める。原点では両方の偏導関数（partial derivative）が 0 になり、そこは 2 本の枝が交差する特異点（singular point）である。だからこそ原点は特別な扱いを必要としたのである。また正葉線は有理曲線（rational curve）でもあり、その二重点（double point）を通る直線 $y = tx$ によって媒介変数表示される。この考え方は代数幾何学（algebraic geometry）へとつながっていく。これらすべての背後にある解析学については、Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）を参照するとよい。

解答例

STEP III 1993、第 3 問

純粋数学 • 行列の LU 分解

STEP III 1993、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s3-q3

鍵となる考え方

$\mathbf{M}$ を下三角行列（lower-triangular matrix）と上三角行列（upper-triangular matrix）の積として表すこと（*LU* 分解（LU decomposition））により、すべてが未知数 1 個の方程式の連鎖に帰着する。$\mathbf{AB}$ を展開し、成分を適切な順序で比較していく。すると、新しく現れる方程式はどれも未知数を 1 つしか含まないので、値とその一意性（uniqueness）が同時に得られる。また、三角行列は逆行列（inverse）を求めるのが容易であり、$\mathbf{Mx} = \mathbf{v}$ は解きやすい 2 つの三角行列の連立方程式に分かれる。

はじめに注意。問題文には $e = 1$ と印刷されているが、これは誤植であり、正しい値は $e = -1$ である。$e = 1$ とすると、$\mathbf{AB}$ の最下行は (3, 8, 7) ではなく (3, 10, 1) となってしまう。以下ではすべて $e = -1$ を用いる。

解答

A と B を求める

展開すると、

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a & ap & aq \\ b & bp + c & bq + cr \\ d & dp + e & dq + er + f \end{pmatrix}.$$

これを $\mathbf{M}$ と等しいとおき、各方程式に未知数が 1 つだけ残るように、次の順序で成分を比較する。

► $(1,1)$ 成分：$a = 1$。

- (1,2) 成分と (1,3) 成分：$ap = 3$ かつ $aq = 2$ であるから、$p = 3$、$q = 2$（$a = 1$ による）。
- (2,1) 成分と (3,1) 成分：$b = 4$、$d = 3$。
- (2,2) 成分：$bp + c = 13$ であるから、$c = 13 - 12 = 1$。
- (2,3) 成分：$bq + cr = 5$ であるから、$8 + r = 5$ より $r = -3$（$c = 1$ を用いた）。
- (3,2) 成分：$dp + e = 8$ であるから、$9 + e = 8$ より $e = -1$。
- (3,3) 成分：$dq + er + f = 7$ であるから、$6 + 3 + f = 7$ より $f = -2$。

どの未知数も、他のすべてがすでに分かっている方程式によって**一つに定まった**。また、割り算は $a = 1$ と $c = 1$ によるものだけであり、これらは 0 でない。よって、$\mathbf{M} = \mathbf{AB}$ ならば未知数はこれらの値をとらなければならない。逆に、これらの値は 9 個の方程式をすべて満たす。したがって解は存在し、しかも一意である：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ただし $a = 1$、$b = 4$、$c = 1$、$d = 3$、$e = -1$、$f = -2$、$p = 3$、$q = 2$、$r = -3$ である。

考えてみよう 一意性はどこから来るのか。見つけた解は 1 つだけである。

一意性は推論の**順序**から生じる。どの段階でも選択の余地はなかった。各方程式は 1 つの新しい未知数についての 1 次方程式で、その係数は 0 でなかったから、解はちょうど 1 つであった。したがって、与えられた形の $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ で $\mathbf{AB} = \mathbf{M}$ を満たすものは、上の組に限られる。（$\mathbf{B}$ の対角成分が 1 であることは重要である。これがなければ、$\mathbf{A}$ を定数倍で大きくし、$\mathbf{B}$ を同じだけ小さくすることができてしまう。）

逆行列

$\mathbf{A}$ の逆行列を求めるには、$\mathbf{Au} = \mathbf{v}$ を上から順に解く：

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1, \\ u_2 &= v_2 - 4u_1 = -4v_1 + v_2, \\ -2u_3 &= v_3 - 3u_1 + u_2 = -7v_1 + v_2 + v_3 \implies u_3 = \tfrac{1}{2}(7v_1 - v_2 - v_3). \end{aligned}$$

$\mathbf{B}$ の逆行列を求めるには、$\mathbf{Bw} = \mathbf{u}$ を下から順に解く：

$$\begin{aligned} w_3 &= u_3, \\ w_2 &= u_2 + 3w_3 = u_2 + 3u_3, \\ w_1 &= u_1 - 3w_2 - 2w_3 = u_1 - 3u_2 - 11u_3. \end{aligned}$$

係数を読み取ると、

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -11 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

実際に掛け算をすると、$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ かつ $\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$ であることが確かめられる。下三角（上三角）行列の逆行列はやはり下三角（上三角）行列であることに注意しよう。

連立方程式

与えられた連立方程式（simultaneous equations）は、$\mathbf{x} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$、$\mathbf{v} = (7, 18, 25)^{\mathrm{T}}$ として $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{v}$ と表される。$\mathbf{M} = \mathbf{A}\mathbf{B}$ であるから、

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}.$$

順序に注意すること：$(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ である。まず、

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -28 + 18 \\ \frac{1}{2}(49 - 18 - 25) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix},$$

次に、

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 7 + 30 - 33 \\ -10 + 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

よって、ただ 1 つの解は

$$x = 4, \qquad y = -1, \qquad z = 3.$$

これが一意であるのは、$\mathbf{M}$ が正則（invertible）だからである：$\det \mathbf{M} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B} = (1 \cdot 1 \cdot (-2))(1) = -2 \neq 0$。

検算

代入して確かめる：$4 - 3 + 6 = 7$, $16 - 13 + 15 = 18$, $12 - 8 + 21 = 25$。3 つの方程式はすべて成り立つ。また、正確な分数計算により $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{M}$ であること、および $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ が確かに $\mathbf{M}^{-1}$ であることも確認した。その最下行は $(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ である。印刷された値 $e = 1$ を用いると、積 $\mathbf{A}\mathbf{B}$ の最下行は $(3, 10, 1)$ となり、誤植であることが裏づけられる。

よくある間違い

- 印刷された $e = 1$ をそのまま信じ、(3,2) 成分と (3,3) 成分を無理に合わせようとする。求めた $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ は必ず掛け合わせて確かめること。
- $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ の代わりに $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$ を用いる。
- 求めた値が条件を満たすことを示すだけで、他の値がありえないことを論じない。

STEP のその先へ

これが *LU* 分解であり、コンピュータが実際に連立 1 次方程式を解く方法である。ガウス（Gauss）の消去法は、実は $\mathbf{M} = \mathbf{LU}$ と分解する過程にほかならない。いったん分解してしまえば、右辺が新しくなるたびに必要なのは前進代入（forward substitution）と後退代入（back substitution）だけであり、消去をやり直す必要はない。一般には、先に行の入れ替えが必要になることがあり、その場合は $\mathbf{PM} = \mathbf{LU}$ となる。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、この考え方を軸に丸 1 章を構成している。

解答例

STEP III 1993、第 4 問

純粋数学 • 級数の和

STEP III 1993、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s3-q4

鍵となる考え方

どの級数（series）も、見慣れた級数が姿を変えたものである。級数の和を求める通常の方法は、それを標準的な展開（対数（logarithm）、等比級数（geometric series）、あるいはその導関数（derivative））の特定の点での値とみなすか、一般項を分解して和が打ち消し合う形（telescoping）にすることである。そこで各小問について、それがどの標準的な級数でありうるか、そしてその形にするには何を掛け、何を微分し、どう並べ替えればよいかを考える。

解答

小問 (i)

分母が奇数 $1,3,5,\ldots$ であることから、奇数乗の項だけを残した対数の級数が思い浮かぶ。$|x|<1$ のとき

$$\ln(1+x)=x-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{3}-\cdots, \qquad \ln(1-x)=-x-\tfrac{x^2}{2}-\tfrac{x^3}{3}-\cdots,$$

であり、差をとると偶数乗の項が消える：

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

求める級数は $\sum x^{2n}/(2n+1)$ で $x=\frac{1}{2}$ としたものである。冪が偶数なので、x で割る（$x\neq 0$ なので許される）：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}=\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

$x=\frac{1}{2}$ は収束区間（interval of convergence）の内部にあり、$\frac{1+x}{1-x}=\frac{3/2}{1/2}=3$、$\frac{1}{2x}=1$ であるから

$$1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots=\ln 3.$$

小問 (ii)

係数は周期 4 で繰り返し、$x^{4k}, x^{4k+1}, x^{4k+2}, x^{4k+3}$ に対してそれぞれ $2,-1,0,-1$ である。そこで 4 項ずつまとめると

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{4k}\left(2-x-x^3\right)=\frac{2-x-x^3}{1-x^4},$$

となる。これは公比 x^4 の等比級数であり、$|x^4|<1$ なので収束する。このようにまとめてよいのは、もとの級数が $|x|<1$ で絶対収束（absolute convergence）するからである。実際、各項の大きさは $2|x|^m$ で押さえられる。

次に式を簡単にする。分子は $x=1$ で 0 になるので、$1-x$ を因数にもつ：

$$2-x-x^3=(1-x)(x^2+x+2),\qquad 1-x^4=(1-x)(1+x)(1+x^2).$$

$1-x$（$|x|<1$ なので 0 でない）を約分して、部分分数（partial fractions）に分解する：

$$\frac{x^2+x+2}{(1+x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}.$$

$x=-1$ とおくと $2=2A$ より $A=1$。すると $x^2+x+2-(1+x^2)=x+1=(Bx+C)(1+x)$ より $B=0$、$C=1$ である。したがって

$$2-x-x^3+2x^4-\cdots=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}.$$

これは容易に確かめられる。$1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots$ と $1-x^2+x^4-\cdots$ を足すと、係数は $2,-1,0,-1,2,\ldots$ となり、求めるとおりである。

小問 (iii)

一般項を次のように書く：

$$\frac{r\,2^{r-2}}{3^{r-1}}=\frac{1}{2}\,r\left(\frac{2}{3}\right)^{r-1}.$$

考えてみよう $\sum ry^{r-1}$ は以前どこで見たか？

これは等比級数の導関数である。$|y|<1$ のとき、$\sum_{r=0}^{\infty} y^r=\frac{1}{1-y}$ を項別に微分する（収束区間の内部では正当である）と

$$\sum_{r=1}^{\infty} ry^{r-1}=\frac{1}{(1-y)^2}.$$

$y = \frac{2}{3}$ とするとこれは $\frac{1}{(1/3)^2} = 9$ である。求める和は $r = 2$ から始まるので、$r = 1$ の項 1 を取り除く：

$$\sum_{r=2}^{\infty} \frac{r\,2^{r-2}}{3^{r-1}} = \frac{1}{2}(9-1) = 4.$$

小問 (iv)

$r(r^2-1) = (r-1)r(r+1)$ は連続する 3 整数の積なので、隣り合う 2 つの「対」の分数の差を考える：

$$\frac{1}{(r-1)r} - \frac{1}{r(r+1)} = \frac{(r+1)-(r-1)}{(r-1)r(r+1)} = \frac{2}{r(r^2-1)}.$$

よって和は打ち消し合う形になる。$r = 2$ から N まで足すと、最初と最後以外の項はすべて消える：

$$\sum_{r=2}^{N} \frac{2}{r(r^2-1)} = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{N(N+1)}.$$

$N \to \infty$ とすると最後の項は 0 に収束するので

$$\sum_{r=2}^{\infty} \frac{2}{r(r^2-1)} = \frac{1}{2}.$$

検算

- (i)：最初の 4 項で $1 + 0.0833 + 0.0125 + 0.0022 \approx 1.098$ となり、すでに $\ln 3 \approx 1.0986$ に近い。
- (ii)：$x = 0$ では両辺とも 2 である。$x = \frac{1}{2}$ では閉じた式は $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{22}{15}$ を与え、数値的に部分和と一致する。
- (iii)：最初の項は $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{16}{27}, \ldots$ であり、部分和はゆっくりと 4 に近づいていく。
- (iv)：$N = 4$ までの部分和は $\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} = \frac{9}{20} = \frac{1}{2} - \frac{1}{20}$ であり、公式と一致する。

よくある間違い

- (i) で x で割るのを忘れること。$\sum x^{2n+1}/(2n+1)$ の $x = \frac{1}{2}$ での値は $\frac{1}{2}\ln 3$ であり、$\ln 3$ ではない。
- (iii) で $r = 1$ から足して、欠けている最初の項を引くのを忘れること。そうすると $\frac{9}{2}$ になってしまう。
- (iv) で代わりに $\frac{1}{r-1} - \frac{1}{r+1}$ を用いて打ち消し合いを作ろうとすること。これは $\frac{2}{r^2-1}$ の分解であって、$\frac{2}{r(r^2-1)}$ の分解ではない。

STEP のその先へ

ここで特に断らずに行った操作（(ii) での項のまとめ直しと、(iii) での冪級数の項別微分）は、まさに解析学の最初の講義で正当化されるものである。冪級数（power series）は収束半径（radius of convergence）の内部で絶対収束し、項別に微分できる。一方、条件収束（conditional convergence）するだけの級数は、項を並べ替えると和が変わりうる（リーマン（Riemann）の再配列定理）。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、この両方を丁寧に扱っている。

解答例

STEP III 1993、第 5 問

純粋数学 ・ 群と四元数

> **STEP III 1993、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q5

この問題は、*Beyond STEP* の第 6.7 節「**四元数群**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch06/quaternions.html

鍵となる考え方

この演算は一見すると恣意的に見えるが、最初の部分で求める四つの積がその構造を明らかにする。$(z,0)$ の形の組は通常の複素数と同じように掛け算され、第 2 成分は $j^2=-1$ を満たす新しい記号 j のように振る舞い、自分を通り過ぎるものを何でも複素共役（conjugate）に変える。これら四つの積が得られれば、S_1 の 8 個の元は $u\in\{1,i,-1,-i\}$ に対する $(u,0)$ と $(0,u)$ にすぎない。したがって、閉性、逆元、位数はわずか数行の一般的な議論から得られ、64 個の成分をもつ表を作る必要はない。

解答

結合法則と交換法則

$z=(z_1,z_2)$、$w=(w_1,w_2)$、$u=(u_1,u_2)$ とおく。以下では常に $(ab)^*=a^*b^*$、$(a\pm b)^*=a^*\pm b^*$、$a^{**}=a$ を用いる。まず

$$z\circ w=(z_1w_1-z_2w_2^*,\ z_1w_2+z_2w_1^*),$$

であるから、$(z\circ w)\circ u$ の二つの成分は

$$(z_1w_1-z_2w_2^*)u_1-(z_1w_2+z_2w_1^*)u_2^*=z_1w_1u_1-z_1w_2u_2^*-z_2w_1^*u_2^*-z_2w_2^*u_1,$$
$$(z_1w_1-z_2w_2^*)u_2+(z_1w_2+z_2w_1^*)u_1^*=z_1w_1u_2+z_1w_2u_1^*+z_2w_1^*u_1^*-z_2w_2^*u_2.$$

である。一方、$w \circ u = (w_1u_1 - w_2u_2^*,\ w_1u_2 + w_2u_1^*)$ であるから、$z \circ (w \circ u)$ の二つの成分は

$$z_1(w_1u_1 - w_2u_2^*) - z_2(w_1u_2 + w_2u_1^*)^* = z_1w_1u_1 - z_1w_2u_2^* - z_2w_1^*u_2^* - z_2w_2^*u_1,$$
$$z_1(w_1u_2 + w_2u_1^*) + z_2(w_1u_1 - w_2u_2^*)^* = z_1w_1u_2 + z_1w_2u_1^* + z_2w_1^*u_1^* - z_2w_2^*u_2.$$

である。右辺は項ごとに一致するので、$\circ$ は結合的（associative）である。

この演算は可換（commutative）ではない。たとえば

$$(0,1) \circ (i,0) = (0-0,\ 0+1\cdot i^*) = (0,-i), \qquad (i,0) \circ (0,1) = (0-0,\ i\cdot 1+0) = (0,i).$$

四つの積

定義に o を代入すると

$$(z,0) \circ (w,0) = (zw,\ 0), \qquad (z,0) \circ (0,w) = (0,\ zw),$$
$$(0,z) \circ (w,0) = (0,\ zw^*), \qquad (0,z) \circ (0,w) = (-zw^*,\ 0).$$

集合 S_1

$U = \{1, i, -1, -i\}$ とおく。このとき

$$S_1 = \{(u,0) : u \in U\} \cup \{(0,u) : u \in U\},$$

であり、A, C, E, G が第 1 の種類、B, D, F, H が第 2 の種類である。

閉性（closure）。集合 U は乗法、複素共役（$i^* = -i$）、符号の反転のいずれについても閉じている。四つの積により、S_1 の二つの元の積は、$z, w \in U$ として $(zw,0)$、$(0,zw)$、$(0,zw^*)$、$(-zw^*,0)$ のいずれかである。zw と $\pm zw^*$ はいずれも U に属するので、どの積も S_1 に属する。

単位元（identity）。任意の $(w_1,w_2) \in S$ に対して

$$(1,0) \circ (w_1,w_2) = (w_1,\ w_2), \qquad (w_1,w_2) \circ (1,0) = (w_1,\ w_2 \cdot 1^*) = (w_1,w_2),$$

であるから、$A = (1,0)$ は両側単位元であり、S_1 に属する。

逆元（inverse）と位数（order）。第 1 の種類の元については $(z,0) \circ (w,0) = (zw,0)$ であるから、これらは U の複素数とまったく同じように振る舞う。よって A は位数 1 で自分自身が逆元であり、$E = (-1,0)$ は位数 2 で自分自身が逆元であり、$C = (i,0)$ と $G = (-i,0)$ はいずれも位数 4 で互いに逆元である。

考えてみよう 第 2 の種類の元を 2 乗すると何になるか？

四つの積の最後のものにより、$u \in U$ に対して

$$(0,u)\circ(0,u) = (-uu^*,\,0) = (-|u|^2,\,0) = (-1,0) = E.$$

したがって B, D, F, H はいずれも 2 乗すると E になる。E の位数は 2 であるから、これらの位数はいずれも 4 である。逆元については、$(0,u)\circ(0,w) = (-uw^*,0)$ が $(1,0)$ に等しくなるのは、（$uu^* = 1$ を用いると）$w^* = -1/u = -u^*$、すなわち $w = -u$ のときに限る。逆の順序も確かめると、$(0,-u)\circ(0,u) = (uu^*,0) = (1,0)$ もやはり成り立つ。よって $(0,u)$ の逆元は $(0,-u)$ である。

まとめると次のようになる。

元	A	B	C	D	E	F	G	H
逆元	A	F	G	H	E	B	C	D
位数	1	4	4	4	2	4	4	4

群（group）。これで四つの公理がすべてそろった。S_1 は $\circ$ について閉じている。演算は S 全体で結合的であり、とくに S_1 上でも結合的である。$A \in S_1$ は単位元であり、すべての元が S_1 の中に逆元をもつ。したがって S_1 は $\circ$ について位数 8 の群である。これは非可換（non-abelian）である。実際、$B\circ C = H$ であるが $C\circ B = D$ である。

部分群と行列

上の積を用いると、$B = (0,1)$ の累乗は

$$B^2 = E, \qquad B^3 = E\circ B = (-1,0)\circ(0,1) = (0,-1) = F, \qquad B^4 = E\circ E = A.$$

である。よって $\{A,B,E,F\} = \{B^0, B^1, B^2, B^3\}$ は B が生成する巡回部分群（cyclic subgroup）である。$B^m \circ B^n = B^{m+n}$ であり指数は mod 4 で簡約できるので、この集合は閉じており、また A と各 B^k の逆元 B^{4-k} を含む。したがってこれは位数 4 の部分群である。

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。このとき

$$M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I, \qquad M^3 = -M, \qquad M^4 = I,$$

であるから、M が生成する群は $\{I, M, -I, -M\}$ であり、これも位数 4 の巡回群である。位数の等しい二つの巡回群は同型（isomorphic）である。ここでは写像

$$A \mapsto I, \quad B \mapsto M, \quad E \mapsto -I, \quad F \mapsto -M,$$

すなわち $B^k \mapsto M^k$ は全単射（bijection）であり、$B^m \circ B^n = B^{m+n} \mapsto M^{m+n} = M^m M^n$ を満たす。よって二つの群は確かに**同型である**。

検算

- 元の位数は群の位数を割り切る：位数 $1, 2, 4$ はすべて 8 を割り切り、部分群については 2 と 4 が 4 を割り切る。
- 複素数としての見方：$(z,0)\circ(w,0)=(zw,0)$ であるから、$C\circ C=(i^2,0)=E$ となり、$i^2=-1$ とまったく同じである。
- 簡単なコンピュータによる検証で、複素数の組の無作為な三つ組 $10\,000$ 個について結合法則を確認し、8×8 の完全な表を作って閉性、単位元、上の逆元と位数、および $B\circ C=H\neq D=C\circ B$ を確認し、さらに $B^k\mapsto M^k$ が乗法を保つことを確認した。

よくある間違い

- 共役を忘れること：$(0,z)\circ(w,0)$ は $(0,zw^*)$ であって、$(0,zw)$ ではない。非可換性はここから生じる。
- 数値例を一つ示しただけで結合法則を示したとすること。例はある法則が**成り立たない**ことを示すことはできるが、成り立つことの証明には一般的な展開が必要である。
- 一方の群が複素数の組から、もう一方が行列からできているという理由で「同型でない」と結論すること。同型とは乗法の構造に関することであって、元が何であるかには関係しない。

STEP のその先へ

この演算はハミルトン（Hamilton）による**四元数**（quaternions）の乗法である。組 (z_1,z_2) は z_1+z_2j を表し、ここで $j^2=-1$、$jz=z^*j$ である。群 S_1 は**四元数群**（quaternion group）$Q_8=\{\pm1,\pm i,\pm j,\pm k\}$ である。これはすべての部分群が正規部分群（normal subgroup）であるような最小の非可換群であり、位数 8 のもう一つの非可換群（正方形の対称性の群）とは、位数 2 の元を一つしかもたない点で異なる。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）では、小さい位数の群と四元数が扱われている。

解答例

STEP III 1993、第 6 問

純粋数学 ・ 複素数平面上の軌跡

> **STEP III 1993、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q6

鍵となる考え方

円（circle）を表すには $|z-k|=r$ が自然な記述であり、$|u|^2=uu^*$ を用いてこれを 2 乗すると、平方根を含まない z と z^* の方程式になる。軌跡（locus）をいったんこの形で書けば、$w=z/(z-1)$ のようなメビウス（Möbius）変換は扱いやすい。逆に解いて z を w で表し、代入し、分母を払い、一般形と比較して新しい中心と半径を読み取ればよい。

解答

円の方程式

P が円上にあるのは、K からの距離が r であるとき、すなわち $|z-k|=r$ であるとき、かつそのときに限る。両辺を 2 乗し、$|u|^2=uu^*$ と $(z-k)^*=z^*-k^*$ を用いると

$$r^2=(z-k)(z^*-k^*)=zz^*-kz^*-k^*z+kk^*,$$

となるので、求める式 $zz^*-kz^*-k^*z+kk^*-r^2=0$ が得られる。

逆に、$s>0$ として方程式 $ww^*-cw^*-c^*w+cc^*-s^2=0$ は $|w-c|^2=s^2$ を意味するから、これは中心 c、半径 s の円である。以下ではこれを用いて円を見分ける。

P の軌跡

OA を直径とする円は、中心が i（0 と $2i$ の中点）、半径が 1 である。$k=i$、$k^*=-i$、$kk^*=1$、$r=1$ とすると、最初の結果から

$$zz^*+iz-iz^*=0. \qquad (*)$$

を得る。

Q_1 の軌跡 L

$z=1$ はこの円上にない（i からの距離が $\sqrt{2}$ である）ので、$w_1 = z/(z-1)$ はすべての P に対して定義される。w_1 を w と書く。$w(z-1)=z$ を z について解くと

$$z = \frac{w}{w-1}, \qquad z^* = \frac{w^*}{w^*-1},$$

となり、また $w \neq 1$ である。$w=1$ となるには $z=z-1$ が必要だからである。これを $(*)$ に代入すると

$$\frac{ww^*}{(w-1)(w^*-1)} + \frac{iw}{w-1} - \frac{iw^*}{w^*-1} = 0.$$

o でない $(w-1)(w^*-1)$ を両辺に掛けると

$$\begin{aligned} 0 &= ww^* + iw(w^*-1) - iw^*(w-1) \\ &= ww^* + iww^* - iw - iww^* + iw^* \\ &= ww^* - iw + iw^*. \end{aligned}$$

したがって L の方程式は

$$w_1 w_1^* - iw_1 + iw_1^* = 0.$$

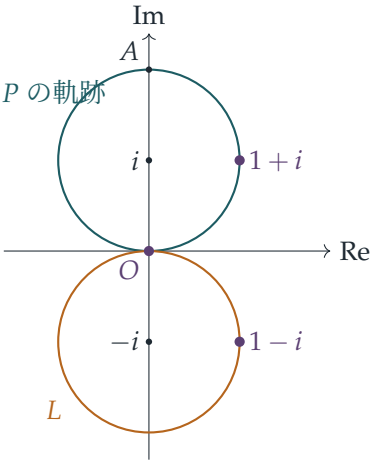
である。これが何であるかを調べるために一般形と比較する。$-k^* = -i$ かつ $-k = i$ が必要なので $k=-i$ であり、このとき $kk^* = 1$、定数項 $kk^* - r^2$ は 0 なので $r=1$ である。よって L は中心 $-i$、半径 1 の円、すなわち $|w_1 + i| = 1$ である。これは P の円を実軸に関して折り返したものであり、やはり原点を通る。

> **考えてみよう** この円のすべての点が実際に到達されるのか、それとも一部だけなのか。

上の各段階はすべて逆にたどることができる。$w \neq 1$ が $|w+i|=1$ 上にあれば、$z = w/(w-1)$ は $(*)$ を満たすので、これは $w_1 = w$ となる円上の点 P である。取りこぼされる可能性があるのは $w=1$ だけだが、$|1+i| = \sqrt{2}$ なのでこれは L 上にない。よって軌跡は円全体である。

Q_2 の軌跡

$|z-i|=1$ の共役（conjugate）をとると、$|u^*| = |u|$ かつ $(z-i)^* = z^* + i$ であるから $|z^*+i|=1$ を得る。よって $w_2 = z^*$ は $|w_2+i|=1$ を満たす。z が i を中心とする円全体を動くとき、z^* は $-i$ を中心とする円全体を動く。同じことであるが、$(*)$ の共役をとると $z^*z - iz^* + iz = 0$ となり、これは $w = z^*$ とした L の方程式である。したがって Q_2 の軌跡もまた L である。



Q_1 と Q_2 が一致するとき

$\dfrac{z}{z-1} = z^*$、すなわち

$$z = zz^* - z^*.$$

が必要である。円上では $(*)$ より $zz^* = iz^* - iz$ である。これを代入すると

$$z = iz^* - iz - z^* \quad \Longrightarrow \quad (1+i)z = (i-1)z^*.$$

解の一つは $z = 0$ である。それ以外のときは $z^* \neq 0$ であり

$$\frac{z}{z^*} = \frac{i-1}{1+i} = \frac{(i-1)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i}{2} = i.$$

となる。$\rho > 0$ として $z = \rho \mathrm{e}^{i\theta}$ と書くと、これは $\mathrm{e}^{2i\theta} = i$ を意味するので、$\theta = \frac{\pi}{4}$ または $\frac{5\pi}{4}$ であり、P は直線 $y = x$ 上にある。この直線が円 $x^2 + (y-1)^2 = 1$、すなわち $x^2 + y^2 = 2y$ と交わるのは $2x^2 = 2x$ となるところ、つまり $x = 0$ または $x = 1$ のときである。o でない点は $z = 1 + i$ である。

両方を確かめる。$z = 0$ のとき $w_1 = 0 = z^*$ であり、$z = 1 + i$ のとき

$$w_1 = \frac{1+i}{i} = 1 - i = z^*.$$

である。したがって Q_1 と Q_2 が一致するのは、P が原点または点 $1 + i$ であるとき、かつそのときに限る。これらは $y = x$ と円の 2 つの交点であり、$Q_1 = Q_2$ の共通の位置は 0 と $1 - i$ である。

検算

- 具体的な点で確かめる。$P = 2i$（点 A）とすると $w_1 = \frac{2i}{2i-1} = \frac{4-2i}{5}$ であり、$|w_1 + i| = \left|\frac{4+3i}{5}\right| = 1$ なので、この点は L 上にある。

- 数値的には、$|z-i|=1$ 上のランダムな点を 10^4 個とり、$z/(z-1)$ と z^* がともに誤差 10^{-9} 以内で $|w+i|=1$ を満たすことを確かめた。また円周上の 2×10^5 個の点について $\left|z/(z-1)-z^*\right|<10^{-3}$ となるものを探したところ、見つかったのは $z=0$ と $z=1+i$ だけであった。

よくある間違い

- $z=0$ の場合を先に別扱いせずに z^* で割ってしまい、解 $P=O$ を失う。
- $z/z^*=i$ を導いたところで止めてしまう。これは P の方向を決めるだけであり、さらにその直線と円との交点を求める必要がある。
- $ww^*-iw+iw^*=0$ を一般形と照合するときに k の符号を誤る。w^* の係数は $-k$ なので、$k=-i$ であり、i ではない。

STEP のその先へ

写像 $z\mapsto z/(z-1)$ はメビウス変換（Möbius transformation）であり、このような写像は常に円と直線を円と直線に写す。ここでは像の円がたまたま元の円の鏡像になっており、そのため共役をとっても同じ軌跡が得られるのである。共役をとる操作それ自体は向き（orientation）を反転させるのでメビウス変換ではないが、これをメビウス変換と合成すると「反メビウス変換」が得られ、その中には円に関する鏡映が含まれる。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析入門）は、メビウス変換、反転（inversion）、および円を保つ性質について美しい幾何学的な解説を与えている。

解答例

STEP III 1993、第 7 問

純粋数学 ・ 双曲線関数の連立方程式

STEP III 1993、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s3-q7

鍵となる考え方

二つの式に現れる倍角の sinh をどちらも展開する。すると第 2 式から $\cosh x$ が y で直接表され、第 1 式をそれで割ると $\sinh x$ も y で表される。恒等式（identity）$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ を用いれば x は完全に消去され、$\sinh^2 y$ だけの方程式が残る。あとは三次方程式（cubic）の適切な解を見つけ、それを数値的に確定させればよい。

解答

x の消去

$\sinh 2u = 2\sinh u \cosh u$ を用いると、二つの方程式は

$$2\sinh x \cosh x = \cosh y, \qquad 2\sinh y \cosh y = 2\cosh x.$$

となる。第 2 式から

$$\cosh x = \sinh y \cosh y.$$

を得る。$\cosh x \geq 1 > 0$ であるから、第 1 式を $2\cosh x$ で割ってよく、

$$\sinh x = \frac{\cosh y}{2\sinh y \cosh y} = \frac{1}{2\sinh y},$$

となる。ここで $\cosh y > 0$ であるから $\cosh y$ で割ることは問題なく、また $\sinh y \cosh y = \cosh x \neq 0$ であるから $\sinh y \neq 0$ である。

次に、これら二つを $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ に代入する。$t = \sinh^2 y$ とおくと $\cosh^2 y = 1 + t$ であるから、

$$t(1+t) - \frac{1}{4t} = 1.$$

両辺に $4t$（これは 0 でない）を掛けると $4t^2+4t^3-1=4t$、すなわち

$$4t^3+4t^2-4t-1=0,$$

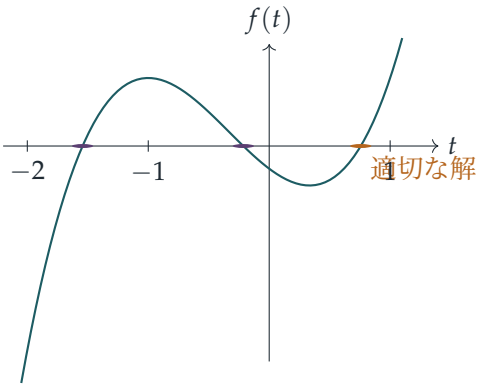
を得る。よって $t=\sinh^2 y$ は与えられた三次方程式の解であり、示すべきことが示された。

適切な解は高々一つ

$f(t)=4t^3+4t^2-4t-1$ とおく。$t=\sinh^2 y$ かつ $\sinh y\neq 0$ であるから、適切な解は $t>0$ を満たさなければならない。さて

$$f(-2)=-9,\quad f(-1)=3,\quad f(0)=-1,\quad f(1)=3,$$

であるから、中間値の定理（intermediate value theorem）により、この三次方程式は $(-2,-1)$、$(-1,0)$、$(0,1)$ のそれぞれに解をもつ。三次方程式の解は高々三つであるから、これらがすべての解であり、正の解はちょうど一つである。



考えてみよう　正の t からは $\sinh y=\pm\sqrt{t}$ の二つの値が得られる。なぜ一方しか残らないのか？

$\cosh x=\sinh y\cosh y$ であり、$\cosh x>0$、$\cosh y>0$ であるから、$\sinh y>0$ でなければならない。よって $\sinh y=+\sqrt{t}$ であり、sinh は狭義単調増加（strictly increasing）であるから、これを満たす y はちょうど一つで、$y>0$ である。したがって三次方程式から得られる適切な y は高々一つである（そして sinh は単射（one-to-one）であるから、$\sinh x=1/(2\sinh y)$ により x も一意に定まる）。

t の位置の特定と計算

$$f(0.7)=1.372+1.96-2.8-1=-0.468<0,$$
$$f(0.8)=2.048+2.56-3.2-1=0.408>0,$$

であるから、中間値の定理により正の解は 0.7 と 0.8 の間にある。

ニュートン・ラフソン法（Newton–Raphson method）の反復

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}, \qquad f'(t) = 12t^2 + 8t - 4,$$

を、中点 $t_0 = 0.75$ から始めて用いる。$f(0.75) = -0.0625$、$f'(0.75) = 8.75$ であるから、

$$t_1 = 0.75 + \frac{0.0625}{8.75} = 0.7571429,$$
$$t_2 = 0.7570685,$$
$$t_3 = 0.75706846,$$

となり、t_4 は表示したすべての桁で t_3 と一致する。小数第 6 位までを確定させるために、符号の変化

$$f(0.7570680) < 0 < f(0.7570690),$$

を確かめる。よって解はこの区間にあり、

$$t = 0.757068 \text{ （小数第 6 位まで）.}$$

である（より遅いがまったく問題のない別の方法として、$t^2(4t+4) = 4t+1$、すなわち $t = \sqrt{(4t+1)/(4t+4)}$ と変形する方法がある。解の近くで右辺の導関数はおよそ 0.16 であるから、この反復は収束し、1 ステップごとに小数 1 桁弱ずつ精度が上がる）。

y と x を求める

正の平方根をとると $\sinh y = \sqrt{0.7570685} = 0.870097$ であるから、

$$y = \operatorname{arsinh}(0.870097) = \ln\bigl(0.870097 + \sqrt{1.757068}\bigr) = 0.786474,$$

であり、

$$\sinh x = \frac{1}{2\sinh y} = 0.574649, \qquad x = \ln\bigl(0.574649 + \sqrt{1.330221}\bigr) = 0.546965.$$

である。

もとの方程式で確かめると、

$$\sinh 2x = 1.325545 = \cosh y,$$
$$\sinh 2y = 2.306704 = 2\cosh x,$$

となり、両方の式が成り立つ。小数第 4 位までで、

$$x = 0.5470, \qquad y = 0.7865.$$

検算

- 三次方程式の残り二つの解はおよそ -0.2140 と -1.5431 であり、議論のとおりどちらも負である。三つの解の積は $\frac{1}{4}$ であり、$0.757068 \times 0.2140 \times 1.5431 \approx 0.250$ と一致する。
- $y \in [-5, 5]$ の範囲を直接数値的に調べ、第 2 式から $x = \pm \operatorname{arcosh}(\frac{1}{2}\sinh 2y)$ をとって第 1 式を確かめると、解は $y \approx 0.7865$、$x > 0$ のただ一つだけ見つかる。
- 負の選択 $\sinh y = -\sqrt{t}$ をすると $\sinh y \cosh y < 0$ となり、これは決して $\cosh x$ と等しくなりえない。これは、この選択が確かに不適であることの手早い確認になる。

よくある間違い

- 早い段階で 2 乗し（たとえばもとの二つの方程式をどちらも 2 乗し）、その後で不適な符号を除くのを忘れる。
- 二つの反復値が小数第 6 位まで一致した時点で反復をやめてしまい、丸めの区間をまたぐ符号の変化を確かめない。
- 平方根や対数をとる前に t を小数第 6 位で丸めてしまう。余分な桁を保持して計算し、最終的な x と y だけを丸めること。

STEP のその先へ

ここで用いた二つの反復は、収束の速さが大きく異なる。不動点反復（fixed-point iteration）$t \mapsto g(t)$ は一次収束（linear convergence）し、誤差は 1 ステップごとにおよそ $|g'(\text{解})|$ 倍に縮む。一方、ニュートン・ラフソン法は二次収束（quadratic convergence）し、1 ステップごとに正しい桁数がおよそ 2 倍になる。これを厳密にするには平均値の定理（mean value theorem）とテイラーの定理（Taylor's theorem）を用いる。これが数値解析（numerical analysis）の出発点である。その背後にある解析学については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を参照のこと。

解答例

STEP III 1993、第 8 問

純粋数学 • 空間内の平面と直線

STEP III 1993、問 8

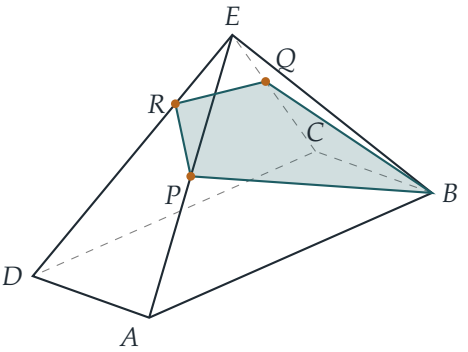
先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s3-q8

鍵となる考え方

各側辺は底面の頂点と E を結んでいるので、側辺上のすべての点は簡単なパラメータ表示（parametric form）をもつ。したがって P、Q、R はすぐに書き下すことができ、B、P、Q を通る平面は、これらの点を代入して係数を定める一次方程式（linear equation）として求められる。後半については、平行四辺形（parallelogram）であるかどうかを判定する最もすっきりした方法は、対角線（diagonal）が互いに他を二等分する（bisect each other）かどうかを調べることである。これが成り立たないことを示すには、座標を一つ見れば十分である。

解答



γ を求める

辺 AE 上では $x+z=a$ が成り立つので、辺 AE は $0 \leq t \leq 1$ に対する点 $(ta, 0, (1-t)a)$ の全体である。同様に、CE は $\{(-ta, 0, (1-t)a)\}$、DE は $\{(0, -ta, (1-t)a)\}$ である。よって

$$P = \big(\lambda a,\, 0,\, (1-\lambda)a\big), \qquad Q = \big(-\mu a,\, 0,\, (1-\mu)a\big), \qquad R = \big(0,\, -\gamma a,\, (1-\gamma)a\big).$$

平面 BPQ を

$$px + qy + rz = a.$$

の形で求める。3 点 B、P、Q は同一直線上にない（not collinear）ので、ただ一つの平面を定める。三つの条件をすべて満たす p, q, r が見つかれば、その方程式が求める平面である。各点を代入すると

$$\begin{aligned} B:&\quad qa = a, && \text{よって} q = 1,\\ P:&\quad p\lambda + r(1-\lambda) = 1,\\ Q:&\quad -p\mu + r(1-\mu) = 1. \end{aligned}$$

p を消去するために、P の式を μ 倍し、Q の式を λ 倍して加えると

$$r\big(\mu - \lambda\mu + \lambda - \lambda\mu\big) = \lambda + \mu, \qquad \text{よって} \qquad r = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu-2\lambda\mu}.$$

分母は $\lambda(1-\mu) + \mu(1-\lambda) > 0$ なので、これで問題ない。（以下では使わないが、$p = (\lambda-\mu)/(\lambda+\mu-2\lambda\mu)$ である。）

さて、R はこの平面上にあるので

$$-\gamma + r(1-\gamma) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \gamma(1+r) = r-1 \quad \Longrightarrow \quad \gamma = \frac{r-1}{r+1}.$$

すべてを共通の分母 $\lambda+\mu-2\lambda\mu$ で表すと

$$r-1 = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+\mu-2\lambda\mu}, \qquad r+1 = \frac{2(\lambda+\mu-\lambda\mu)}{\lambda+\mu-2\lambda\mu},$$

したがって

$$\gamma = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-\lambda\mu},$$

となり、示すべき式が得られた。

$0 < \gamma < 1$ であること、つまり R が確かに辺 DE 上の D と E の間（両端を除く）にあることにも注意しておくとよい。正であることは明らかである。$\gamma < 1$ については、分母が分子より $\lambda+\mu-2\lambda\mu = \lambda(1-\mu) + \mu(1-\lambda) > 0$ だけ大きいことからわかる。

$BPRQ$ は平行四辺形ではない

考えてみよう 与えられた順に並べた 4 点が平行四辺形をなすかどうかを判定する、最も手早い方法は何か。

四角形 $BPRQ$ が平行四辺形であるのは、対角線 BR と PQ が互いに他を二等分するとき、すなわち

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}.$$

が成り立つときであり、かつそのときに限る。（これは $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{QR}$、つまり一組の対辺が平行で長さが等しいことと同じである。）両辺の y 座標を比較すると

$$\text{左辺}：a-\gamma a=(1-\gamma)a,\qquad \text{右辺}：0+0=0.$$

これらが等しくなければならないので、$\gamma=1$ となる。しかし $\gamma<1$ はすでに示した。実際、$\gamma=1$ なら R は E に一致してしまう。よって対角線が互いに他を二等分することはなく、$BPRQ$ は平行四辺形になりえない。 ■

念のため補足しておく。平面は 4 本の側辺を EB, EA, ED, EC の巡回順に切るので、四角形の頂点は確かに B, P, R, Q の順に並ぶ。点の組み合わせ方を変えても状況は変わらない。$B+P=Q+R$ と $B+Q=P+R$ はいずれも y 座標で $a=-\gamma a$ を必要とするが、$\gamma>0$ なのでこれは不可能である。

同じことを幾何的に見る方法もある。BP は面 ABE 上にあり、QR は面 CDE 上にある。これら二つの面は、E を通り AB に平行な直線で交わる。この二つの平面上にそれぞれある 2 直線が平行ならば、それらはこの共通の直線に平行でなければならない。よって $BP \parallel QR$ ならば $BP \parallel AB$ となるが、$P \neq A$ なのでこれは不可能である。

検算

- 対称な場合 $\lambda=\mu$：公式から $\gamma=\lambda/(2-\lambda)$ となる。$\lambda=\mu=\frac{1}{2}$ のとき、これは $\frac{1}{3}$ である。直接計算すると、$p=0$、$r=2$ で平面は $y+2z=a$ となり、DE と $(0,-\frac{1}{3}a,\frac{2}{3}a)$ で交わる。予想どおりである。
- 極限 $\lambda,\mu\to 1$：$P\to A$、$Q\to C$ となって平面は底面に近づき、$\gamma\to 1$ より $R\to D$ となる。当然そうなるべきである。
- 結果は $\dfrac{1-\gamma}{\gamma}=\dfrac{1-\lambda}{\lambda}+\dfrac{1-\mu}{\mu}$ ときれいに書き直せ、数値で確かめやすい。たとえば $\lambda=\frac{1}{2}$、$\mu=\frac{2}{5}$ のとき $\gamma=\frac{2}{7}\approx 0.2857$ となる。
- a,λ,μ を無作為に 2000 通り選び、公式、$0<\gamma<1$、および平行四辺形に関する主張を（分数を用いて）厳密に確認した。R は、外積（cross product）で求めた平面の法線ベクトル（normal）を使って独立に求めた。

よくある間違い

- AE のパラメータ表示の誤り：AE 上では座標が $x+z=a$ かつ $y=0$ を満たすので、P の z 座標は λa ではなく $(1-\lambda)a$ である。
- 2 次元の図の上で傾きを使って $BP \parallel QR$ かどうかだけを調べること。四角形は傾いた平面上にあるので、3 次元のベクトルで扱うこと。
- $\gamma < 1$ を示し忘れること。これこそ平行四辺形の議論に必要なことである。

STEP のその先へ

平面と直線の交点を求めることは、連立一次方程式（linear system）を解くことの最も簡単な例である。$EP : PA = (1-\lambda) : \lambda$ であり、他の辺についても同様なので、この結果は

$$\frac{ER}{RD} = \frac{EP}{PA} + \frac{EQ}{QC},$$

と言い換えられる。これは B を通る任意の平面についての、座標によらない主張である。直線上の比だけを用いているので、底面が平行四辺形である任意の角錐（pyramid）についても成り立つ。アフィン写像（affine map）によって、そのような角錐はどれもこの角錐に移されるからである。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）では、平面、法線、連立一次方程式が本格的に展開されている。

解答例

STEP III 1993、第 9 問

純粋数学 ・ 平方和の不等式

> **STEP III 1993、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q9

鍵となる考え方

ここに現れる不等式はどれも、平方和（sum of squares）が非負であるという事実を姿を変えて述べたものである。小問 (i) は最も単純な場合 $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$ であり、それ以降の小問に共通する方針は、$(a_i - a_j)^2$ を**すべての**組について足し合わせ、各平方と各積が何回現れるかを数えることである。一般形 (iv) が得られれば、$(\sum a_i)^2$ を平方の項と交差項（cross terms）に展開することで (v) が従う。

以下では一貫して

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \qquad P = \sum_{i<j} a_i a_j,$$

と書く。ただし、2 番目の和は $1 \leq i < j \leq n$ を満たす $\binom{n}{2}$ 個の組すべてにわたってとる。

解答

小問 (i)

実数の平方は非負であるから、

$$0 \leq (a_1 - a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2,$$

よって $a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1 a_2$ であり、等号はちょうど $a_1 = a_2$ のときに成り立つ。

小問 (ii)

3 つの組それぞれに (i) を適用して足し合わせる：

$$a_2^2 + a_3^2 \geq 2a_2a_3,$$
$$a_3^2 + a_1^2 \geq 2a_3a_1,$$
$$a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1a_2.$$

各平方はこれらの行のうちちょうど 2 つに現れるので、足し合わせると

$$2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \geq 2(a_2a_3 + a_3a_1 + a_1a_2),$$

となり、両辺を 2 で割れば求める結果を得る。同値な言い方をすれば、$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - (a_2a_3 + a_3a_1 + a_1a_2) = \frac{1}{2}\left[(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2\right] \geq 0$ であり、等号はちょうど $a_1 = a_2 = a_3$ のときに成り立つ。

小問 (iii)

今度は $1 \leq i < j \leq 4$ を満たす組 (i, j) が 6 つある。それぞれに (i) を適用すると

$$\sum_{1\leq i<j\leq 4} (a_i^2 + a_j^2) \;\geq\; 2 \sum_{1\leq i<j\leq 4} a_ia_j.$$

左辺に a_1^2 は何回現れるだろうか。添字 1 を含む組ごとに 1 回、すなわち残り 3 つの添字それぞれとの組で 1 回ずつ現れる。どの a_k^2 についても同じことが成り立つので、左辺は $3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)$ に等しく、

$$3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) \geq 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4),$$

が示された。

小問 (iv)

(i)–(iii) に見られる規則性は、左辺の係数が変数の個数より 1 小さいということである：1、次に 2（小問 (ii) を 2 倍したもの）、そして 3。

主張. 任意の $n \geq 2$ と実数 $a_1, \ldots, a_n$ に対して

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \;\geq\; 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} a_ia_j, \qquad \text{すなわち} \qquad (n-1)S \geq 2P,$$

が成り立ち、等号が成り立つのは $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のとき、かつそのときに限る。

考えてみよう すべての組 $i<j$ について $a_i^2+a_j^2$ を足し合わせるとき、特定の a_k^2 は何回現れるか。

証明. すべての組にわたる差の平方の和を考える：

$$D=\sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2=\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i^2+a_j^2\right)-2\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j.$$

添字 k はちょうど $n-1$ 個の組に属する（他の $n-1$ 個の添字それぞれと組になる）ので、1 番目の和において a_k^2 は $n-1$ 回現れる。したがって

$$D=(n-1)S-2P.$$

D の各項は実数の平方であるから $D\ge 0$ であり、これより $(n-1)S\ge 2P$ を得る。等号が成り立つのは、すべての $(a_i-a_j)^2$ が 0 であるとき、すなわちすべての a_i が等しいとき、かつそのときに限る。 ■

$n=2,3,4$ とおくと、それぞれ (i)、(ii) の 2 倍、(iii) が再び得られる。

小問 (v)

ここでは $n-1>0$ となるように $n\ge 2$ が必要である。和の平方を展開すると、各平方は 1 回ずつ、$i\ne j$ である各積 a_ia_j は 2 回ずつ（a_ia_j と a_ja_i として）現れるので、

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=S+2P.$$

考えてみよう S を評価する (iv) が、P だけを含む評価にどう役立つのだろうか。

$n-1>0$ であるから、不等号の向きを変えずに小問 (iv) を $n-1$ で割ることができ、$S\ge\dfrac{2P}{n-1}$ を得る。S のこの下界を代入すると

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2&=S+2P\\&\ge\frac{2P}{n-1}+2P\\&=\frac{2P+2(n-1)P}{n-1}\\&=\frac{2n}{n-1}\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j,\end{aligned}$$

となり、これが求める不等式である。等号が成り立つのはちょうど (iv) で等号が成り立つとき、すなわちすべての a_i が等しいときである。

P が正である必要はまったくなかったことに注意しよう。この議論では $S \geq 2P/(n-1)$ の両辺に $2P$ を加えているだけであり、それは P の符号によらず正しい。

検算

- すべて等しい場合：すべての $a_i = c$ とすると $S = nc^2$、$P = \binom{n}{2}c^2 = \frac{1}{2}n(n-1)c^2$ であるから $(n-1)S = n(n-1)c^2 = 2P$ となり、(v) では両辺とも n^2c^2 に等しい。どちらの不等式も、あるべき通り等号が成立する。
- (iii) の数値による確認：$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 2, -3, 5)$ とすると $S = 39$、$P = -7$ であり、$3S = 117 \geq -14 = 2P$ となる。また (v) では $(\sum a_i)^2 = 25 \geq \frac{8}{3}(-7) = -\frac{56}{3}$ である。（さらに $S + 2P = 39 - 14 = 25$ となり、あるべき通りである。）
- 恒等式 $D = (n-1)S - 2P$ と両方の不等式についても、長さ 2 から 9 の無作為な数列 20 000 個と、等号成立にきわめて近い値の集まった数列に対して、有理数演算により厳密に検証した。反例は見つからなかった。

よくある間違い

- 数え間違い：$\sum_{i<j}(a_i^2 + a_j^2)$ において各 a_k^2 が現れる回数は $n-1$ 回であり、n 回でも $\binom{n}{2}$ 回でもない。
- $(\sum a_i)^2 = S + P$ と書いてしまうこと：展開において各交差項は 2 回現れる。
- $n - 1 > 0$ に言及せずに (iv) を $n-1$ で割ること、あるいは等号成立条件を述べ忘れること。

STEP のその先へ

量 $D = (n-1)S - 2P$ は、平均からの偏差の平方和の n 倍 $n\sum(a_i - \bar{a})^2$ に等しいので、(iv) は実のところ分散（variance）が非負であるという主張である。小問 (v) は、コーシー・シュワルツ（Cauchy–Schwarz）の不等式 $(\sum a_i \cdot 1)^2 \leq n\sum a_i^2$ が姿を変えたものと読むこともできる。線形代数（linear algebra）の言葉では、これは二次形式（quadratic form）$(n-1)S - 2P$ が半正定値（positive semi-definite）であり、すべての成分が 1 のベクトルがその核（kernel）を張るという主張である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は二次形式と正定値性を扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には STEP 形式の不等式

の演習問題がさらに収められている。

解答例

STEP III 1993、第 10 問

純粋数学 ・ 行列による変換

STEP III 1993、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

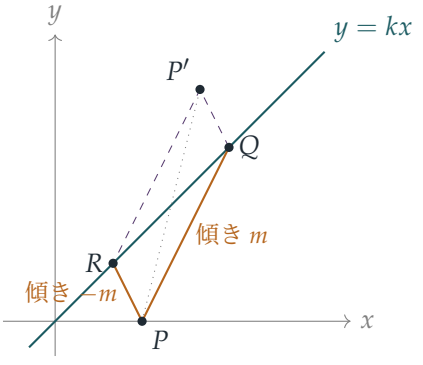
step.maths.org/questions/93-s3-q10

鍵となる考え方

ここで扱う点はすべて 2 直線の交点であるから、座標は 1 次方程式を 1 つずつ解けば求まる。P' は平行四辺形からただちに得られる。平行四辺形 $PQP'R$ では対角線が互いに他を二等分するので、位置ベクトルとして $P + P' = Q + R$ が成り立つ。P' を行列と P の積として表してしまえば、面積に関する問いは行列式（determinant）の計算にすぎない。

解答

以下、つねに $m^2 \neq k^2$ を仮定する。$m = \pm k$ ならば、P を通る 2 直線の一方は $y = kx$ に平行となり、これと交わらない（あるいはこれに重なる）ので、作図が成り立たない。



（図では $m = 2$、$k = 1$、$P = (1, 0)$ としている。）

点 Q

$P(x_1, y_1)$ を通り $y = mx$ に平行な直線は $y - y_1 = m(x - x_1)$ である。Q では $y = kx$ も成り立つから、

$$kx - y_1 = mx - mx_1 \quad \Longrightarrow \quad (m-k)x = mx_1 - y_1 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{mx_1 - y_1}{m-k},$$

となる。ここで $m - k \neq 0$ で割った。さらに $y = kx$ より

$$Q = \left(\frac{mx_1 - y_1}{m-k}, \frac{k(mx_1 - y_1)}{m-k} \right),$$

を得る。これが示すべきことであった。

点 R

P を通り $y = -mx$ に平行な直線については、m を $-m$ に置き換えて同じ計算をすればよい。

$$x = \frac{-mx_1 - y_1}{-m-k} = \frac{mx_1 + y_1}{m+k}, \qquad R = \left(\frac{mx_1 + y_1}{m+k}, \frac{k(mx_1 + y_1)}{m+k} \right).$$

点 P'

考えてみよう これ以上直線の交点を求めずに、平行四辺形の 4 つ目の頂点を求めるにはどうすればよいか。

頂点は P, Q, P', R の順に並ぶので、PP' と QR が対角線である。平行四辺形の対角線は互いに他を二等分するから、両者の中点は一致する。

$$\tfrac{1}{2}(P + P') = \tfrac{1}{2}(Q + R) \quad \Longrightarrow \quad P' = Q + R - P.$$

（同じことであるが、$\overrightarrow{QP'} = \overrightarrow{PR}$ である。）Q と R はともに $y = kx$ 上にあるので、まず x 座標どうしを足すのがもっとも簡単である。共通の分母 $m^2 - k^2$ で通分すると

$$\begin{aligned} x_Q + x_R &= \frac{(mx_1 - y_1)(m+k) + (mx_1 + y_1)(m-k)}{m^2 - k^2} \\ &= \frac{(m^2x_1 + mkx_1 - my_1 - ky_1) + (m^2x_1 - mkx_1 + my_1 - ky_1)}{m^2 - k^2} \\ &= \frac{2(m^2x_1 - ky_1)}{m^2 - k^2}, \end{aligned}$$

であり、また $y_Q + y_R = k(x_Q + x_R)$ である。したがって $P' = (x', y')$ とおくと

$$x' = \frac{2(m^2x_1 - ky_1)}{m^2 - k^2} - x_1 = \frac{(m^2 + k^2)x_1 - 2ky_1}{m^2 - k^2},$$

$$y' = \frac{2k(m^2x_1 - ky_1)}{m^2 - k^2} - y_1 = \frac{2km^2x_1 - (m^2 + k^2)y_1}{m^2 - k^2}.$$

T を行列で表す

どちらの座標も x_1, y_1 の 1 次式で定数項をもたないから、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \frac{1}{m^2 - k^2} \begin{pmatrix} m^2 + k^2 & -2k \\ 2km^2 & -(m^2 + k^2) \end{pmatrix}.$$

面積

行列 $\mathbf{M}$ で表される線形写像（linear map）は、あらゆる面積を $|\det \mathbf{M}|$ 倍する。各行から因数 $\frac{1}{m^2-k^2}$ をくくり出すと

$$\det \mathbf{M} = \frac{-(m^2+k^2)^2 + 4k^2m^2}{(m^2-k^2)^2} = \frac{-\left(m^4 - 2m^2k^2 + k^4\right)}{(m^2-k^2)^2} = \frac{-(m^2-k^2)^2}{(m^2-k^2)^2} = -1.$$

よって $|\det \mathbf{M}| = 1$ であり、どの領域も同じ面積の領域に写される。これが示すべきことであった。負の符号は、T が鏡映と同様に向き（orientation）を反転させることを表している。すなわち、反時計回りにたどった図形の像は時計回りにたどられる。

考えてみよう T が何をしているのか、図として捉えられないだろうか。

捉えられる。PP' の中点は QR の中点に一致し、これは $y = kx$ 上にある。また $y = kx$ 上の点は動かない（そこでは $Q = R = P$ となる）。$\mathbf{Mv} = -\mathbf{v}$ を解くと $2m^2x - 2ky = 0$ という行が得られるので、T によって向きが反転されるベクトルは (k, m^2) の定数倍である。したがって T は**斜交鏡映**（skew reflection）である。すなわち、直線 $y = kx$ に関する鏡映であるが、直線に垂直な方向ではなく (k, m^2) の方向に沿って折り返す。他の鏡映と同じく $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$ を満たし、これは作図とも整合する。P' から始めても同じ Q と R が得られ、したがって P に戻るからである。

検算

- $m = 2$、$k = 1$、$P = (1, 0)$ のとき、$Q = (2, 2)$、$R = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ であるから $P' = \left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$ となる。行列は $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$ であり、$(1, 0)$ を $\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$ に写す。その行列式は $\frac{1}{9}(-25 + 16) = -1$ である。
- 直線上の点 (t, kt) は動かないはずである。実際 $x' = \frac{(m^2+k^2)t - 2k^2t}{m^2-k^2} = t$ となる。✓
- $\mathbf{M}$ のトレース（trace）は 0、行列式は -1 であるから、固有値（eigenvalue）は ± 1 であり、鏡映に期待されるとおりである。
- これらの公式はすべて、三角形の面積が保たれることとあわせて、m、k、P を無作為に約 3000 通り選び、有理数演算で厳密に確かめた。

よくある間違い

- $Q+R-P$ ではなく、$P'=Q+R$ あるいは $P'=P+Q+R$ としてしまう。文字の並び $PQP'R$ から、どの頂点どうしが向かい合うかがわかる。
- $\det\mathbf{M}=-1$ から、面積が負になると結論してしまう。面積の拡大率は $|\det\mathbf{M}|$ であり、符号は向きを記録しているにすぎない。

STEP のその先へ

ある直線上の各点を固定し、別の 1 つの方向を反転させる線形写像は**対合**（involution）であり、$T^2=I$ を満たす。通常の直交鏡映は、反転される方向が直線に垂直となる特別な場合である。ここでそれが起こるのは (k,m^2) が $(1,k)$ に垂直なときであり、すなわち $k=0$ のときに限られる（直線 $y=\pm mx$ は $y=kx$ ではなく x 軸に関して対称である）。大学では、これは固有値と対角化（diagonalisation）の理論の中に位置づけられる。そこでは T は基底 $(1,k)$、(k,m^2) に関して $\mathrm{diag}(1,-1)$ と見なされる。また、行列式を符号付きの体積の拡大率として捉える考え方の中にも位置づけられる。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、この両方の考え方をわかりやすく扱っている。

解答例

STEP III 1993、第 11 問

力学 ・ 偶力と慣性モーメント

STEP III 1993、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s3-q11

鍵となる考え方

立方体に座標を入れ、すべての力をベクトルで表す。6 つの力の和は零になるので、これらの力の働きは**偶力**（couple）を加えることだけであり、偶力のモーメント（moment）はどの点のまわりでも同じである。すると小問 (i) は、そのモーメントの向きを求める問題になる。小問 (ii) では、その OO' 方向の成分だけを用いる。あわせて、点と直線の距離を使って慣性モーメント（moment of inertia）を棒 1 本ずつ積み上げて求める。

解答

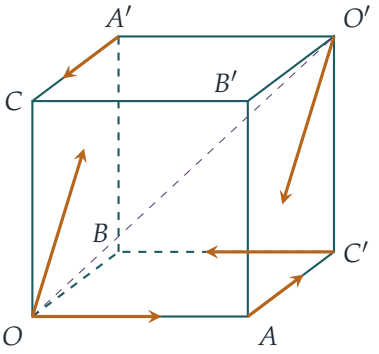
枠は剛体（rigid body）であり、細い一様な棒でできていて、重力は働かないものとしてモデル化する。O を原点とし、OA、OB、OC に沿った単位ベクトルをとると、

$$A = (a, 0, 0), \quad B = (0, a, 0), \quad C = (0, 0, a),$$

であり、それぞれの反対側の頂点は

$$O' = (a, a, a), \quad A' = (0, a, a), \quad B' = (a, 0, a), \quad C' = (a, a, 0).$$

である。



琥珀色の矢印は 6 つの作用線（line of action）を表し、対角線 OO' は紫の破線で示してある。

小問 (i)

各力は、その大きさに作用線方向の単位ベクトルを掛けたものである。たとえば $O'A$ はベクトル $(0,-a,-a)$ で、その長さは $\sqrt{2}\,a$ であるから、これに沿った大きさ $\sqrt{2}\,mg$ の力は $mg(0,-1,-1)$ となる。6 つすべてについて同様にすると、次のようになる。

直線	直線上の点	力
OA	O	$mg(2,0,0)$
AC'	A	$mg(0,1,0)$
$O'A$	A	$mg(0,-1,-1)$
OA'	O	$mg(0,1,1)$
$C'B$	B	$mg(-2,0,0)$
$A'C$	C	$mg(0,-1,0)$

力の和は $\mathbf{0}$ である。合力（resultant）が零である力の系は偶力と同等であり、そのモーメントはどの点のまわりでも同じである。O のまわりのモーメントをとる（OA と OA' に沿った力は O を通るので寄与しない）。

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= A\times mg(0,1,0) + A\times mg(0,-1,-1) + B\times mg(-2,0,0) + C\times mg(0,-1,0)\\ &= amg\big[(0,0,1)+(0,1,-1)+(0,0,2)+(1,0,0)\big]\\ &= amg\,(1,1,2).\end{aligned}$$

O の支点は枠に力を及ぼしうるが、その力は O を通って働くので、O のまわりのモーメントをもたない。したがって、静止状態から動き出す枠は、O を通り偶力の軸に沿

った直線のまわりに回転し始める。その方向は

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},$$

であり、これが求めるものであった。

興味のある人へ。これが問題の意図する答えであり、答案にはこう書けばよい。ただし厳密には、3 次元で自由に回転できる物体の角加速度（angular acceleration）は $\mathbf{I}^{-1}\mathbf{G}$ である。ここで $\mathbf{I}$ は O のまわりの慣性**テンソル**（inertia tensor）である。これが $\mathbf{G}$ の向きを向くのは、$\mathbf{G}$ が主軸（principal axis）に沿っているときに限られる。この枠の O のまわりの慣性モーメントは、OO' のまわりでは $14ma^2/3$（小問 (ii) より）、O を通り OO' に垂直などの軸のまわりでも $41ma^2/3$ である。このことから、回転し始める軸の方向は $(25,25,32)$ となり、$(1,1,2)$ から約 12.6° ずれている。

小問 (ii)

$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ を OO' 方向の単位ベクトルとする。$\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}$ は $\mathbf{p}$ の直線方向の成分であるから、ピタゴラス（Pythagoras）の定理により、点 $\mathbf{p}$ と直線 OO' の距離の 2 乗は

$$d^2 = |\mathbf{p}|^2 - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{u})^2$$

である。

棒 OA。O から距離 x にある点は $(x,0,0)$ であるから、$d^2 = x^2 - \frac{x^2}{3} = \frac{2}{3}x^2$ となる。長さ $\mathrm{d}x$ の微小部分の質量は $\frac{m}{a}\,\mathrm{d}x$ であるから、

$$I_{OA} = \int_0^a \frac{m}{a}\cdot\frac{2x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{2ma^2}{9}.$$

中点 $(\frac{a}{2},0,0)$ と OO' の距離の 2 乗は $\frac{2}{3}\cdot\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{6}$ である。平行軸の定理（parallel axis theorem）により、中点を通る平行な軸のまわりでは

$$I_{\text{中点}} = \frac{2ma^2}{9} - m\cdot\frac{a^2}{6} = \frac{ma^2}{18}.$$

棒 $B'C$。この棒は $(a,0,a)$ から $(0,0,a)$ まで伸びているので、OA と平行である。また長さも同じで、軸に対して同じ角度に置かれている。よって、自身の中点を通る平行な軸のまわりの慣性モーメントはやはり $ma^2/18$ である。その中点は $\mathbf{p} = (\frac{a}{2},0,a)$ であり、

$$d^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{2}.$$

平行軸の定理により、

$$I_{B'C} = \frac{ma^2}{18} + \frac{ma^2}{2} = \frac{5ma^2}{9}.$$

考えてみよう 本当に 12 本の棒すべてについてこれを計算しなければならないのだろうか？

その必要はない。対称性が代わりにやってくれる。OO' のまわりの 120° の回転（$x \to y \to z \to x$ と巡回させる）と、立方体の中心に関する点対称移動（point reflection）$\mathbf{p} \mapsto (a,a,a) - \mathbf{p}$ は、いずれも枠と直線 OO' をそれ自身に移す。よって、これらは OO' のまわりの慣性モーメントを変えない。回転は OA を OB と OC に移し、点対称移動はこれらを $O'A'$、$O'B'$、$O'C'$ に移す。これらは O または O' を端点にもつ 6 本の棒であり、それぞれの慣性モーメントは $2ma^2/9$ である。同様に、$B'C$ は立方体の中ほどを一周する「ジグザグ」AB'、$B'C$、CA'、$A'B$、BC'、$C'A$ の残りの 5 本に移され、これらの慣性モーメントはいずれも $5ma^2/9$ である。したがって

$$I_{\text{枠}} = 6 \cdot \frac{2ma^2}{9} + 6 \cdot \frac{5ma^2}{9} = \frac{42ma^2}{9} = \frac{14ma^2}{3},$$

となり、これが求めるものであった。

角加速度。今度は、枠は固定された直線 OO' のまわりにしか回転できない。軸受けがこの直線に垂直な向きに必要なだけの偶力を供給するので、加えられた偶力のうち枠を回転させるのは OO' 方向の成分だけである。力は依然として偶力 $\mathbf{G} = amg(1,1,2)$ をなし、任意の直線のまわりのそのモーメントは、その直線方向の成分である。

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{u} = \frac{amg(1+1+2)}{\sqrt{3}} = \frac{4amg}{\sqrt{3}}.$$

固定軸のまわりの回転の方程式 $I\ddot{\theta} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}$ より

$$\ddot{\theta} = \frac{4amg/\sqrt{3}}{14ma^2/3} = \frac{12g}{14\sqrt{3}\,a} = \frac{2\sqrt{3}\,g}{7a}.$$

その向きは、O' から O の方を見たときに反時計回り、すなわち $\overrightarrow{OO'}$ の方向に関する右ねじの向きの回転である。

検算

- 6 つの力にはそれぞれ「相方」がある。OA と $C'B$、AC' と $A'C$、$O'A$ と OA' である。各組は平行な直線上で大きさが等しく向きが逆であり、そのため合力が零になる。
- 枠は中心に関して立方体の対称性をもつので、中心を通るどの軸のまわりでも慣性モーメントは同じである。中心を通り OC に平行な軸のまわりでは、鉛直な 4 本の棒の寄与は $4m(a/\sqrt{2})^2 = 2ma^2$ である。水平な 8 本の棒の寄与はそれぞれ $\frac{ma^2}{12} + \frac{ma^2}{4} = \frac{ma^2}{3}$ である。合計は $\frac{14ma^2}{3}$ となり、OO' も中心を通るので、上の答えと一致する。

- 数値的に、$a = m = g = 1$ として 12 本の棒について中点和を計算すると $I = 4.66667$、$\ddot{\theta} = 0.494872$ となり、$2\sqrt{3}/7 \approx 0.494872$ と一致する。

よくある間違い

- 面の対角線に沿った力 $\sqrt{2}\,mg$ を成分に直すときに、因数 $1/\sqrt{2}$ を忘れること。各成分の大きさは mg であり、$\sqrt{2}\,mg$ ではない。
- 小問 (ii) で、固定軸方向の成分ではなく偶力全体 $|\mathbf{G}| = \sqrt{6}\,amg$ を用いること。
- 重心を通らない軸から平行軸の定理を適用すること。$2ma^2/9$ から $ma^2/18$ を求めた段階のように、必ず重心を**経由**しなければならない。

STEP のその先へ

3 次元の回転では、慣性モーメントは 3×3 の対称行列（symmetric matrix）である慣性テンソルとなり、角運動量（angular momentum）は $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$ で与えられる。その固有ベクトル（eigenvector）が主軸である。小問 (i) の注で見たように、物体は一般には加えられた偶力の軸のまわりに回転し始めるわけではない。立方体の枠はよい例である。中心を通るどの軸のまわりでも慣性モーメントは同じだが、頂点のまわりではそうはならない。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、慣性テンソルを含め、3 次元の剛体運動を詳しく展開している。

解答例

STEP III 1993、第 12 問

力学 ・ 弾性ひもとエネルギー

STEP III 1993、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

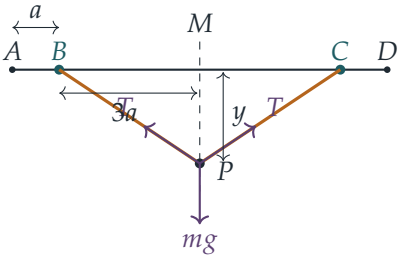
step.maths.org/questions/93-s3-q12

鍵となる考え方

釘（peg）はなめらかで、質点は弦の中点にあるので、弦は自然長（natural length）がそれぞれ a の同一な二つの半分に分かれ、各半分の張力（tension）はその全長にわたって一定である。各半分は固定端から釘を経由して P まで下がる（または上がる）ので、伸びた長さは距離 BP だけで決まる。伸び（extension）を P の高さで表せば、つり合い（equilibrium）から k が求まり、エネルギー保存則（conservation of energy）によって Q と R が結びつく。

解答

P を質点（particle）、弦を軽い弾性弦（elastic string）、釘をなめらかなものとしてモデル化する。対称性より、P は BC の中点 M を通る鉛直線上を動く。P の M から下向きに測った深さを y とする。P が BC より上にあるときは負である。



k を求める

半分 $A \to B \to P$ の長さは $a + BP = a + \sqrt{9a^2 + y^2}$、自然長は a であるから、その伸びは

$$x = \sqrt{9a^2 + y^2}.$$

フックの法則（Hooke's law）より、各半分の張力は

$$T = \frac{kmg\,x}{a}.$$

BP が水平となす角を θ とすると、$\sin\theta = |y|/x$ である。P において力を鉛直方向に分解する（resolve）と

$$2T\sin\theta = mg \quad \Longrightarrow \quad 2 \cdot \frac{kmg\,x}{a} \cdot \frac{y}{x} = mg \quad \Longrightarrow \quad \frac{2ky}{a} = 1.$$

平方根が消えたので、$BP = \frac{\sqrt{145}}{4}a$ という厄介な値はまったく関係しない。$y = a/4$ とすると $k/2 = 1$ となるので、

$$k = 2.$$

Q から R までのエネルギー

各半分は弾性エネルギー（elastic energy）$\dfrac{kmg\,x^2}{2a}$ を蓄えるので、$k = 2$ のとき二つの半分が蓄えるエネルギーの合計は

$$E(y) = 2 \cdot \frac{2mg\,x^2}{2a} = \frac{2mg\,(9a^2 + y^2)}{a}.$$

> **考えてみよう**　なぜ P は R で止まるのか。また、P が最終的に釘より上に来ても問題ないのはなぜか。

P は Q で静かに放され、R は上昇する最高点なので、そこでも一瞬静止する。BC より上でも各半分は伸びたままである（どちらも $x \geq 3a > 0$ である）ので、E の同じ式が使える。弦がたるむことはない。

Q では $y = pa$、R では $y = -3a$ である。質点は $(p+3)a$ だけ上昇する。釘はなめらかでほかに損失もなく、両端で運動エネルギー（kinetic energy）は o であるから、

$$\begin{aligned} E(pa) &= E(-3a) + mg(p+3)a \\ 2mga(9+p^2) &= 2mga(9+9) + mga(p+3) \\ 18 + 2p^2 &= 36 + p + 3, \end{aligned}$$

これより

$$2p^2 - p - 21 = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad (2p+6)\left(p - \tfrac{7}{2}\right) = 0.$$

$p > 0$ より $p = \frac{7}{2}$ である。

これは問題文に印刷された $2p^2 - p - 17 = 0$ と**一致しない**。直接の数値シミュレーションも含めてモデルを注意深く確認した（検算を参照）が、与えられたデータから得られるのは -21 である。きれいな根 $p = \frac{7}{2}$ が得られることから、意図された定数は 21 であり、17 は誤植であると考えられる。最後の部分は、どちらの定数が正しいかには依存しない。

P が初めて止まるのが本当に R であることを確かめるため、$y = ta$ とおく。深さ ta での運動エネルギーは

$$E(pa) - E(ta) - mg(p-t)a = mga\,(p-t)(2p+2t-1).$$

$p = \frac{7}{2}$ のとき、これは $mga\,(\frac{7}{2} - t)(2t+6)$ である。これは $-3 < t < \frac{7}{2}$ で正であり、$t = -3$ で初めて o になる。これが R である。

張力の比較

張力は $T = 2mg\,x/a$ であり、x について増加するので、x が R において Q におけるより小さいことを示せばよい。エネルギーの式を使えば、p の値を用いずにこれを示せる。

$$E(Q) - E(R) = mg(p+3)a > 0.$$

弾性エネルギーは $\dfrac{2mg\,x^2}{a}$ なので $x_R^2 < x_Q^2$ であり、$x_R < x_Q$、したがって $T_R < T_Q$ となる。言葉で言えば、質点は上昇する間に位置エネルギー（potential energy）を得るが、そのエネルギーは弦からしか供給されないので、R では弦の伸びは小さくなっていなければならない。

具体的には、$p = \frac{7}{2}$ のとき $x_Q = \frac{\sqrt{85}}{2}a$、$x_R = 3\sqrt{2}\,a$ であるから、

$$T_Q = \sqrt{85}\,mg \approx 9.22\,mg, \qquad T_R = 6\sqrt{2}\,mg \approx 8.49\,mg.$$

検算

- **単振動による検算。** P にはたらく上向きの力は $2T \cdot \dfrac{y}{x} = \dfrac{4mg\,y}{a}$ であり、BC の下でも上でも y について線形である。したがって P は $y = a/4$（上で求めたつり合いの位置）を中心に単振動（simple harmonic motion）をする。$y = \frac{7}{2}a$ で静かに放されるので振幅は $\frac{13}{4}a$ であり、最高点は $y = \frac{1}{4}a - \frac{13}{4}a = -3a$ である。これはちょうど R であり、$p = \frac{7}{2}$ が独立に確認される。
- $a = 1, k = 2, p = 3.5$ として運動方程式を数値積分すると、最高点は $y = -3.0000$ となる。

- 印刷された方程式からは $p = \frac{1+\sqrt{137}}{4} \approx 3.18$ が得られるが、このときエネルギーの収支は $4mga$ だけ合わない。

よくある間違い

- 各半分の長さを計算するときに線分 AB を忘れる。半分の長さは $AB + BP = a + BP$ であり、その伸びが BP となるのは AB が自然長 a に等しいからにすぎない。
- 弦全体を張力 $kmg \cdot (\text{全体の伸び})/(2a)$ の一本のばねとして扱う。これでも同じ答えが得られるが、それは伸びとして**全体の**伸び $2x$ を用いた場合に限る。
- P が BC より上にあるときにも弾性エネルギーが残っていることを忘れる。そこでも弦は伸びたままである。

STEP のその先へ

弦の幾何は非線形であるにもかかわらず、鉛直方向の復元力（restoring force）は変位にちょうど比例した。これは、長さに比例する張力の鉛直成分は鉛直方向の距離に比例するからであり、自然長ゼロのばね（zero-natural-length spring）が理想的な吊り下げ装置になるのと同じ理由である（LaCoste の長周期地震計の原理）。座標について二次式である位置エネルギーからは線形の運動方程式が導かれ、これが微小振動と基準振動（normal modes）の理論の出発点である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、ばね、エネルギー、振動をこの精神で扱っている。

解答例

STEP III 1993、第 13 問

力学 ・ 質量が変化する鎖

> **STEP III 1993、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q13

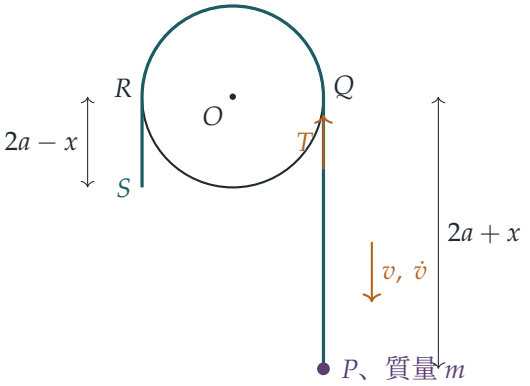
鍵となる考え方

鎖は滑らないので、円板、鎖全体、質点はすべて同じ速さで動く。したがって未知数は v ただ一つである。このとき運動エネルギー（kinetic energy）は $\frac{1}{2}$(有効質量)v^2 となる。位置エネルギー（potential energy）について変化するのは垂れ下がっている 2 つの部分だけである。上部にかかる弧の部分は、同じ形の鎖に次々と置き換わるだけだからである。張力（tension）を求めるには、動いている部分 PQ と質点をまとめて考える。そのうえで、Q でそこに加わる鎖がすでにどれだけの速さで動いているかをよく考えてほしい。

解答

モデル

円板は一様な薄板（lamina）であり、O を通るなめらかな固定軸のまわりを回転する。その慣性モーメント（moment of inertia）は $\frac{1}{2}(4m)a^2 = 2ma^2$ である。鎖は単位長さあたりの質量が m/a の一様な鎖で、伸び縮みせず（inextensible）、円板の縁の上で滑らない。質点は大きさのない点とみなす。P が x だけ下がったとき、右側の部分 QP の長さは $2a + x$、左側の部分 RS の長さは $2a - x$ であり、弧 RQ は長さ πa の半円である。鎖のどの点も速さ v で動き、滑りがないので円板の縁も同じ速さで動く。よって円板の角速度（angular speed）は $\omega = v/a$ である。



速さ

運動エネルギー。 円板の寄与は $\frac{1}{2}(2ma^2)(v/a)^2 = mv^2$、鎖の寄与は $\frac{1}{2}(4+\pi)mv^2$、質点の寄与は $\frac{1}{2}mv^2$ である。よって

$$\mathrm{KE} = \tfrac{1}{2}mv^2\big(2+4+\pi+1\big) = \tfrac{1}{2}(\pi+7)mv^2.$$

位置エネルギー。 弧 RQ はつねに同じ半円形の鎖なので、その位置エネルギーは変化しない。O の高さを基準（ゼロ）にとる。この高さより下に垂れ下がった長さ ℓ の部分は、質量が $m\ell/a$ で、重心（centre of mass）が深さ $\frac{1}{2}\ell$ にあるので、その位置エネルギーは $-\dfrac{mg\ell^2}{2a}$ である。したがって、垂れ下がった 2 つの部分の位置エネルギーの減少量は

$$\frac{mg}{2a}\Big[(2a+x)^2+(2a-x)^2-(2a)^2-(2a)^2\Big] = \frac{mg}{2a}\cdot 2x^2 = \frac{mgx^2}{a}.$$

である。質点の位置エネルギーは mgx だけ減少する。

エネルギー。 軸はなめらかであり、滑りがないので粗い接触面は仕事をしない。よってエネルギーは保存され、静止状態から始めると

$$\tfrac{1}{2}(\pi+7)mv^2 = \frac{mgx^2}{a} + mgx \quad\Longrightarrow\quad (\pi+7)av^2 = 2g(x^2+ax),$$

となり、示すべき式が得られた。

加速度

時間で微分し、$\dot{x} = v$ を用いると

$$2(\pi+7)av\dot{v} = 2g(2x+a)v \quad\Longrightarrow\quad \dot{v} = \frac{g(2x+a)}{(\pi+7)a} \qquad (v \neq 0).$$

S が R に達するのは $x = 2a$ のときであり、このとき

$$\dot{v} = \frac{5g}{\pi+7}, \qquad v^2 = \frac{2g(4a^2+2a^2)}{(\pi+7)a} = \frac{12ga}{\pi+7}.$$

Q における張力

Q における張力を T とする。質点と、Q より下に垂れ下がった鎖をまとめて 1 つの系とみなす。その質量は

$$M = \frac{m}{a}(2a + x) + m,$$

であり、鎖が円板から離れてくるにつれて $\dot{M} = \dfrac{m}{a}v$ の割合で増加する。この系にはたらく外力は、下向きの重力 Mg と上向きの T である。系全体は下向きに速さ v で動いている。

> **考えてみよう** PQ に加わろうとしている鎖は、加わる直前にどれだけの速さで動いているか。

Q では円板の縁が鉛直になっているので、そこに到達する鎖はすでに鉛直下向きに速さ v で動いている。その鎖は運動量 $v\,\delta M$ を持ち込む。したがって可変質量（variable mass）の運動方程式（運動量の変化率 = 力 + 単位時間あたりに持ち込まれる運動量）は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mv) = Mg - T + v\dot{M}, \qquad \text{すなわち} \qquad M\dot{v} = Mg - T.$$

となる。S が R に達したとき $M = 5m$ なので

$$T = 5m\left(g - \frac{5g}{\pi + 7}\right) = \frac{5(\pi + 2)}{\pi + 7}\,mg.$$

力のモーメント（*moment*）による検証。 円板と鎖の弧 RQ をまとめて考える。軸からの力は O を通ってはたらき、弧にはたらく重力の O のまわりのモーメントの合計は 0 である（弧は O を通る鉛直線に関して対称だからである）。また鎖と円板の間の摩擦は内力である。弧のどの部分も O から距離 a の位置を速さ v で動く。よって角運動量（angular momentum）は $(2ma^2 + \pi ma^2)(v/a)$ であり、

$$(T - T_R)a = (2 + \pi)ma\,\dot{v}.$$

が成り立つ。S が R に達したとき左側の部分の長さは 0 になっているので、$T_R = 0$ である。これより、再び $T = (2 + \pi)m \cdot \dfrac{5g}{\pi + 7} = \dfrac{5(\pi + 2)}{\pi + 7}mg$ が得られる。

問題に記載された答え。 問題文に記載された値 $\dfrac{5\pi - 2}{\pi + 7}mg$ は、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mv) = Mg - T$ と書いた場合に得られる値とちょうど一致する。これは、PQ に加わる鎖が静止した状態で到達するとみなすことに相当する：

$$T = M(g - \dot{v}) - \frac{m}{a}v^2 = \frac{5(\pi + 2)}{\pi + 7}mg - \frac{12}{\pi + 7}mg = \frac{5\pi - 2}{\pi + 7}mg.$$

これは、静止した霧を取り込んでいく雨粒に対しては正しい方程式である。しかしここでは正しくない。縁を回ってくる鎖は、すでに PQ と一緒に動いているからである。

我々の 2 つの方法はどちらも $\dfrac{5(\pi+2)}{\pi+7}mg$ で一致するので、記載された答えにはこの誤りが含まれていると考えられる。記載された値が必要な場合は「静止状態で加わる」とする方程式を用いればよいが、それは T を mv^2/a だけ少なく見積もっていることを知っておいてほしい。

検算

- $x=0$ のとき、公式から $v=0$、$\dot{v}=g/(\pi+7)$ が得られる。つり合っていない力は質点の重さ mg だけであり、それが有効質量 $(\pi+7)m$ にはたらいている。
- 運動方程式 $(\pi+7)m\dot{v} = mg(2x+a)/a$ を静止状態から数値的に積分すると、$(\pi+7)av^2 = 2g(x^2+ax)$ が誤差 10^{-11} 以内で再現される。$m=a=1$、$g=9.81$ とすると、運動量による方法とモーメントによる方法はどちらも $T/mg \approx 2.5349 = 5(\pi+2)/(\pi+7)$ を与える。「静止状態で加わる」とする方法では $1.3517 = (5\pi-2)/(\pi+7)$ となる。
- 垂れ下がっている質量 $5m$ は下向きに加速しているので、当然 $T<5mg$ でなければならず、実際そうなっている。

よくある間違い

- 円板の運動エネルギーを忘れる。あるいは慣性モーメントとして $\frac{1}{2}(4m)a^2$ の代わりに ma^2 を用いる。
- 位置エネルギーの変化に鎖の弧の部分を含めてしまう。弧の形と位置は決して変わらない。
- 取り込まれる質量がもともとどのような速度を持っていたかを考えずに、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mv) = F$ を用いる。

STEP のその先へ

可変質量の問題の本質は、系をどう選ぶかを決め、その境界を通過する運動量を追跡することにある。これが検査体積（control volume）の考え方であり、ロケットの運動や流体力学（fluid mechanics）の多くの部分の基礎となっている。ここでのよくある誤り、すなわち質量が変化する場合にはいつでも $F=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv)$ が成り立つと仮定することは、有名な落とし穴である。一般にこの方程式は、座標系（frame of reference）の取り方に依存しないことすら保証されていない。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、可変質量の系が丁寧に扱われている。

解答例

STEP III 1993、第 14 問

力学 ・ 鉛直面内の円運動

STEP III 1993、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

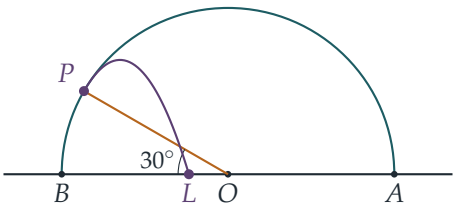
step.maths.org/questions/93-s3-q14

鍵となる考え方

糸は水平で、粒子は鉛直方向に打ち出されるので、速度ははじめ糸に垂直である。したがって粒子は O を中心とする半径 c の鉛直な円周上を運動し、A と直径の反対側にある点 B に着地する。各衝突（impact）は速度が鉛直のときに起こるので、衝突によって速さは単に半分になる。粒子が円の最高点を越えられなくなる最初の跳ね返りを求め、そのうえでエネルギーと動径方向の運動方程式を用いて張力（tension）が 0 になる位置を求めればよい。その後は通常の放物運動（projectile motion）である。

解答

粒子を質量 m の質点、糸を軽く伸び縮みしないもの、台を滑らかで水平なものとしてモデル化する。O を原点とし、$A=(c,0)$、$B=(-c,0)$ とする。粒子が上昇している側の水平な半径から上向きに測った角を θ とする。



衝突と衝突の間の運動

粒子が A または B から速さ V で鉛直上向きに台を離れたとする。その速度はぴんと張った糸に垂直であるから、糸が張っている間、粒子は O を中心とする半径 c の円周

上を運動する。力学的エネルギー保存則（conservation of energy）により、角 θ における速さ v は

$$v^2 = V^2 - 2gc\sin\theta.$$

を満たす。張力を T として O に向かう方向の成分をとると

$$T + mg\sin\theta = \frac{mv^2}{c} \quad\Longrightarrow\quad \frac{T}{m} = \frac{V^2}{c} - 3g\sin\theta.$$

$0 \le \theta \le 90^\circ$ では張力は最高点で最小となるので、半円全体で糸が張ったままであるための必要十分条件は $V^2 \ge 3gc$ である。（最高点を過ぎると $\sin\theta$ は再び減少するので、T は増加する一方である。）この場合、粒子は直径の反対側の端で台に降りてきて、エネルギーより再び速さ V で鉛直下向きに運動している。

この衝突では速度が台に垂直であるから、跳ね返りは鉛直で速さは $\frac{1}{2}V$ となり、糸は依然として水平で張っている。したがって、V が半分になった状態で全過程が繰り返される。

糸がたるむ位置

粒子は $V_0 = 64\sqrt{6gc}$ で出発するので、$V_0^2 = 24576\,gc$ である。k 回の衝突後の速さは $V_k = V_0/2^k$ であるから

$$V_k^2 = \frac{24576}{4^k}\,gc: \qquad V_6^2 = 6gc, \qquad V_7^2 = \tfrac{3}{2}gc.$$

よって速さ $V_0, \ldots, V_6$ で始まる半円はすべて完走され（いずれも $V_k^2 \ge 3gc$）、衝突は B, A, B, A, B, A, B の順に起こる。7 回目の衝突は B で起こり、粒子は $V_7^2 = \frac{3}{2}gc < 3gc$ で B から上昇する。

考えてみよう 糸が先にたるむのではなく、糸がたるむ前に粒子が落ち戻ることはありえないか？

ありえない。速さが 0 になるのは $V_7^2 = 2gc\sin\theta$、すなわち $\sin\theta = \frac{3}{4}$ のときであるが、張力はそれより早く、

$$\frac{V_7^2}{c} = 3g\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{3}{2}gc = 3gc\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \sin\theta = \tfrac{1}{2}.$$

となるところで 0 になる。したがって糸は $\theta = 30^\circ$、すなわち B 側の点 P でたるみ、その高さは台から $c\sin\theta = c/2$ であり、題意のとおりである。

A と B の間での最初の跳ね返り

P では $\theta = 30^\circ$ であるから $P = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c,\ \frac{1}{2}c\right)$ であり、

$$v^2 = \tfrac{3}{2}gc - 2gc\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}gc.$$

速度は接線方向、すなわち OP に垂直で、上向きかつ O の側を向いており、水平と 60° をなす。よってその成分は

$$v_x = \tfrac{1}{2}v, \qquad v_y = \tfrac{\sqrt{3}}{2}v, \qquad \text{ただし} v_x^2 = \tfrac{1}{8}gc, \quad v_y^2 = \tfrac{3}{8}gc.$$

ここから先、粒子は放物運動をする。台に達するのは $\frac{1}{2}c + v_y t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$ のときであり、正の解をとると

$$t = \frac{v_y + \sqrt{v_y^2 + gc}}{g} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{c}{g}}.$$

この間の水平方向の変位は

$$v_x t = \sqrt{\frac{gc}{8}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{c}{g}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{8}\,c,$$

であるから、粒子は

$$x_L = -\frac{\sqrt{3}}{2}c + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{8}c = \frac{\sqrt{11}-3\sqrt{3}}{8}\,c \approx -0.235\,c.$$

を満たす点 L に着地する。（この飛行の間、粒子は常に O から距離 c 以内にあるので、L に達する前に糸が再び張ることはない。特に $|x_L| < c$ である。）

$\sqrt{11} < \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ であるから $x_L < 0$ であり、着地点は O に関して B と同じ側にある。O は AB の中点であるから、A と B の間での最初の跳ね返りは B **に近い側**で起こり、B からの距離は約 $0.77c$、A からの距離は約 $1.23c$ である。

検算

- 判定条件 $V_k^2 \geq 3gc$ により、最初に完走されない半円は $k = 7$ であり、$V_7^2 = \frac{3}{2}gc$ である。たるみの条件から $\sin\theta = \frac{1}{2}$ が得られる。
- P において重力の動径方向成分 $g\sin 30^\circ = \frac{1}{2}g$ は $v^2/c = \frac{1}{2}g$ に等しく、張力 0 の条件をちょうど満たしている。
- 逐次的な数値シミュレーション（$g = 9.8$、$c = 1.3$）では、糸がたるむ高さは $0.5000c$、着地点は $x \approx -0.2349c$ であり、飛行中に O からの距離が c を超えることはなかった。

よくある間違い

- 半円を完走する条件として $V^2 \geq 4gc$（最高点にちょうど達する条件）を用いてしまう。棒とは異なり、糸の場合は $V^2 \geq 3gc$ が必要である。

- 7 回目の衝突がどちらの端で起こるかを見失う。奇数回目の衝突は B で起こる。
- P における速度の向きを誤る。速度は OP に垂直で、水平と 60° をなすのであって、30° ではない。

STEP のその先へ

糸がたるむ瞬間とは、拘束（constraint）が外れる瞬間である。張力は $|OP| = c$ を保つためのラグランジュ乗数（Lagrange multiplier）であり、それが負にならなければならなくなったとき、拘束は作用しなくなる。このような片側拘束や衝突を含む問題は、大学の力学で体系的に扱われる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、エネルギーと動径方向の運動方程式をこのように組み合わせて用いる様子を見るのによい本である。

解答例

STEP III 1993、第 15 問

確率・統計 ・ 待ち時間の分布

STEP III 1993、問 15

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s3-q15

鍵となる考え方

最後の 1 回の投げに注目する。実験が第 n 回でちょうど終わるのは、その回の結果が、まだ足りなかった面の 2 回目を与えるときである。したがって最初の $n-1$ 回には、その面がちょうど 1 回、残りはすべてもう一方の面が出ていなければならない。これにより、分布（distribution）は 2 つの簡単な項の和になる。期待値（expectation）は $\sum n(n-1)x^{n-2}$ の形の級数（series）2 つで表され、これは等比級数（geometric series）を 2 回微分することで求められる。

解答

$0 < p < 1$ と仮定し（そうでなければ実験は終わらない）、各回の投げは独立（independent）であるとする。

N の分布

表が少なくとも 2 回、裏が少なくとも 2 回必要なので、$N \geq 4$ である。$n \geq 4$ を固定する。事象 $N = n$ のもとで、第 n 回は表か裏のいずれかであり、この 2 つの場合は互いに排反（disjoint）である。

第 n 回が表の場合。その直前までは目標に達しておらず、第 n 回で表が加わって目標に達した。よって最初の $n-1$ 回の時点で裏はすでに少なくとも 2 回出ていたが、表は 1 回しか出ていなかった。すなわち、表がちょうど 1 回、裏が $n-2$ 回である（$n \geq 4$ より $n-2 \geq 2$ である）。逆に、そのような列の後に表が出れば、ちょうど第 n 回で終

わる。1 回の表の位置は $n-1$ 通りのいずれでもよいので、この場合の確率は

$$(n-1)\,p\,q^{n-2}\cdot p=(n-1)p^2q^{n-2}.$$

である。

第 n 回が裏の場合。 表と裏を入れ替えて同じ議論をすれば、確率は $(n-1)q^2p^{n-2}$ である。

これらを足して

$$\boxed{\mathrm{P}(N=n)=(n-1)\big(p^2q^{n-2}+q^2p^{n-2}\big),\qquad n=4,5,6,\ldots}$$

を得る。また $n\le 3$ に対しては $\mathrm{P}(N=n)=0$ である。

> **考えてみよう** 最後の投げが表のとき、最初の $n-1$ 回に表が 2 回含まれることがないのはなぜか。

もし含まれていたとすると、そこには表が 2 回と（終了の条件から）裏が 2 回すでに含まれていることになり、実験は第 n 回より前に終わっていたはずである。これにより、回数がちょうど 1 回に定まるのである。

期待値

$|x|<1$ のとき、$\sum_{n\ge 0}x^n=(1-x)^{-1}$ を 2 回微分すると

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

を得る。ここで扱う和は $n=4$ から始まるので、$n=2$ と $n=3$ の項、すなわち 2 と $6x$ を取り除く：

$$\sum_{n=4}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3}-2-6x.$$

さて

$$\mathrm{E}(N)=\sum_{n=4}^{\infty}n\,\mathrm{P}(N=n)=p^2\sum_{n=4}^{\infty}n(n-1)q^{n-2}+q^2\sum_{n=4}^{\infty}n(n-1)p^{n-2}.$$

である。この級数を $x=q$（このとき $1-x=p$）として、次に $x=p$（このとき $1-x=q$）として用いる。$0<p,q<1$ であるから、どちらも有効である：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N)&=p^2\Big(\frac{2}{p^3}-2-6q\Big)+q^2\Big(\frac{2}{q^3}-2-6p\Big)\\&=\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-2(p^2+q^2)-6pq(p+q).\end{aligned}$$

$p+q=1$ であるから、$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{p+q}{pq}=\frac{1}{pq}$ かつ $p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=1-2pq$ である。したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N) &= \frac{2}{pq}-2(1-2pq)-6pq \\ &= \frac{2}{pq}-2-2pq = 2\Big(\frac{1}{pq}-1-pq\Big),\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

- 確率の総和は 1 になる。同じ級数で因子を 1 つ減らしたものから $\sum_{n\geq 4}(n-1)p^2q^{n-2}=1-p^2-2p^2q$ が得られ、表裏を入れ替えたものを足すと、$p^2+q^2=1-2pq$ を用いて $1-(p^2+q^2)-2pq(p+q)=1-1+2pq-2pq=1$ が残る。
- 公平な硬貨では $pq=\frac{1}{4}$ であり、$\mathrm{E}(N)=2(4-1-\frac{1}{4})=\frac{11}{2}$ となる。直接計算すると $\mathrm{P}(N=4)=\frac{3}{8}$、$\mathrm{P}(N=5)=\frac{1}{4}$、…であり、$n\,\mathrm{P}(N=n)$ の部分和は 5.5 に近づく。
- $p\to 0$ のとき $\mathrm{E}(N)\approx 2/p$ である。表が 2 回出るのを待つことになり、1 回あたりおよそ $1/p$ 回の投げを要するからである。
- 長さ 10 までのすべての列を数え上げると分布が正確に再現され、$p=0.3$ でのシミュレーションでは平均 7.10 が得られた。公式による値は 7.1038 である。

よくある間違い

- $n-1$ の代わりに $\binom{n}{2}$ と書いてしまう。最後の投げの位置は固定されているので、自由に動けるのは最初の $n-1$ 回の中にただ 1 回ある表（または裏）だけである。
- 標準的な級数を用いる際に、$n=2$ と $n=3$ の項を引き忘れる。

STEP のその先へ

N は、ずらした 2 つの**負の二項分布**（negative binomial）に従う待ち時間の混合であり、等比級数を微分するという技法は**確率母関数**（probability generating function）の手作り版である。$G(s)=\mathrm{E}(s^N)$ とおけば、平均は $G'(1)$ として、分散は $G''(1)$ から、同じくらい手早く求められる。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、母関数や、このような待ち時間の問題が詳しく扱われている。

解答例

STEP III 1993、第 16 問

確率・統計 ・ 切断正規分布

STEP III 1993、問 16

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s3-q16

鍵となる考え方

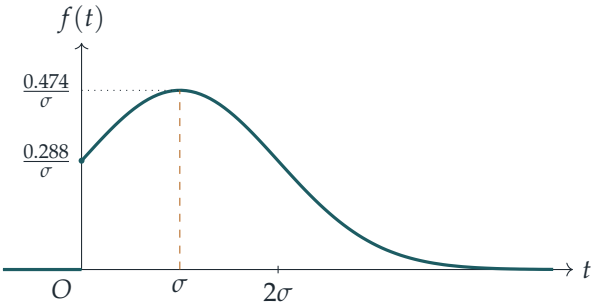
因子 $1/k$ を除けば、この確率密度関数（probability density function）は、平均（mean）σ、標準偏差（standard deviation）σ の正規分布（normal distribution）の密度を $t = 0$ で切断したものにほかならない。したがって T に関するあらゆる確率は、正規分布の確率を、切断する前の確率変数が非負となる確率で割ったものになる。$z = (t - \sigma)/\sigma$ と標準化（standardise）すれば、すべてが $Z \sim N(0,1)$ に関する主張と Φ の表の問題に帰着する。

解答

以下を通して、$Z \sim N(0,1)$ とし、その密度を $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$、分布関数（distribution function）を Φ とする。

概形

$t \geq 0$ では、グラフは $t = \sigma$ を中心とする正規分布の釣鐘型の曲線を $1/k$ 倍に拡大したものである。最大値は $t = \sigma$ でとり、そこで $f(\sigma) = \frac{1}{k\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{0.474}{\sigma}$ であり、$t = 2\sigma$ に変曲点（point of inflexion）をもつ。切断点では曲線は正の高さ $f(0) = \frac{e^{-1/2}}{k\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{0.288}{\sigma}$ から始まり、$t < 0$ では 0 に跳ぶ。$t \to \infty$ のとき $f(t) \to 0$ である。



k の値

全確率は 1 でなければならない：

$$1 = \int_0^\infty \frac{1}{k\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{t-\sigma}{\sigma}\right)^2\right) \mathrm{d}t.$$

$z = (t-\sigma)/\sigma$ と置換すると、$\mathrm{d}t = \sigma\,\mathrm{d}z$ であり、$t = 0$ は $z = -1$ に対応するから、

$$1 = \frac{1}{k}\int_{-1}^\infty \phi(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1-\Phi(-1)}{k} = \frac{\Phi(1)}{k}.$$

よって $k = \Phi(1) \approx 0.8413$ であり、求めるとおり $k \approx 0.841$ である。

平均

同じ置換により $t = \sigma(1+z)$ であるから、

$$\mathrm{E}(T) = \frac{1}{k}\int_{-1}^\infty \sigma(1+z)\,\phi(z)\,\mathrm{d}z = \sigma\left[\frac{1}{k}\int_{-1}^\infty \phi(z)\,\mathrm{d}z + \frac{1}{k}\int_{-1}^\infty z\,\phi(z)\,\mathrm{d}z\right].$$

最初の積分は、いま示したとおり k である。

> **考えてみよう** $\phi(z)$ 自体は積分できないのに、$z\,\phi(z)$ はどうすれば積分できるだろうか。

$\phi'(z) = -z\,\phi(z)$ という事実を用いる。すなわち $z\,\phi(z)$ の原始関数（antiderivative）は $-\phi(z)$ である：

$$\int_{-1}^\infty z\,\phi(z)\,\mathrm{d}z = \Big[-\phi(z)\Big]_{-1}^\infty = \phi(-1) = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.24197.$$

したがって

$$\mathrm{E}(T) = \sigma\left(1 + \frac{e^{-1/2}}{k\sqrt{2\pi}}\right) \approx \sigma\left(1 + \frac{0.24197}{0.84134}\right) \approx 1.288\,\sigma.$$

これは当然 σ より大きい。左側の裾を取り除くと、平均は右へ押しやられるからである。

σ を求める

問題作成時間の平均は 3 時間であるから、

$$\sigma = \frac{3}{1.2876} \approx 2.330 \text{ 時間}.$$

任意の $a \geq 0$ に対して、同じ置換により

$$\mathrm{P}(T > a) = \frac{1}{k}\int_{(a-\sigma)/\sigma}^{\infty} \phi(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1-\Phi\left(\frac{a}{\sigma}-1\right)}{\Phi(1)}. \qquad (*)$$

小問 (i)

$a = 4$ とすると、$\frac{4}{\sigma} - 1 \approx \frac{4}{2.330} - 1 \approx 0.717$ であり、$\Phi(0.717) \approx 0.7633$ である。$(*)$ より

$$\mathrm{P}(T > 4) \approx \frac{1 - 0.7633}{0.8413} \approx 0.2814, \qquad \mathrm{P}(T \leq 4) \approx 0.7186.$$

ここで、16 問の作成時間は互いに独立（independent）で、それぞれ T と同じ分布に従うと仮定する（利用できる唯一の妥当なモデルである）。すると

$$\mathrm{P}(4 \text{ 時間を超える問題が } 1 \text{ 問もない}) = \mathrm{P}(T \leq 4)^{16} \approx 0.7186^{16} \approx 0.0051.$$

したがって、すべての問題が 4 時間以内に作成される可能性は非常に低い（およそ 200 回に 1 回）。

小問 (ii)

考えてみよう どの事象を条件としているのだろうか。

「2 時間後に満足のいくものでない」とは、その問題の作成に合計で 2 時間を超える時間が必要だということであり、事象 $T > 2$ である。「さらに 2 時間後もまだ受け入れられない」は $T > 4$ である。$\{T > 4\} \subseteq \{T > 2\}$ であるから、条件付き確率（conditional probability）は

$$\mathrm{P}(T > 4 \mid T > 2) = \frac{\mathrm{P}(T > 4)}{\mathrm{P}(T > 2)}.$$

$a = 2$ のとき $\frac{2}{\sigma} - 1 \approx -0.142$ であるから、$1 - \Phi(-0.142) = \Phi(0.142) \approx 0.5563$ である。$(*)$ の二つの式の比をとると、因子 $\Phi(1)$ は約分される：

$$\mathrm{P}(T > 4 \mid T > 2) \approx \frac{1 - 0.7633}{0.5563} = \frac{0.2367}{0.5563} \approx 0.426.$$

検算

- 密度を直接数値積分すると（シンプソンの公式（Simpson's rule）、$\sigma = 1$）、k で割る前の全面積は 0.84134、平均は 1.2876σ となる。

- 平均と標準偏差がともに $\sigma = 2.330$ の正規乱数を 4×10^5 個生成し、負のものを捨てるシミュレーションを行うと、標本平均は 3.004、$\mathrm{P}(T > 4) \approx 0.282$、$\mathrm{P}(T > 4 \mid T > 2) \approx 0.426$ となる。
- 小問 (i) は丸めの影響を非常に受けやすい。$0.719^{16} \approx 0.0051$ であるが、$0.718^{16} \approx 0.0050$ である。答えは約 0.005 と述べておくのがよい。
- 切断がなくても、$\mathrm{P}(T > 4 \mid T > 2)$ は同じ値になる。因子 $1/k$ が約分されるからである。k の影響を受けるのは小問 (i) と平均だけである。

よくある間違い

- $\mathrm{P}(T > 4)$ で k で割るのを忘れること。この場合 0.281 ではなく 0.237 となり、(i) では $0.7633^{16} \approx 0.013$ と、正しい値の 2 倍以上になってしまう。
- T の平均を σ（切断前の平均）としてしまい、$\sigma = 3$ とすること。
- (ii) で、条件付き確率ではなく $\mathrm{P}(2 < T \leq 4)$ や $\mathrm{P}(T > 2)$ を求めてしまうこと。

STEP のその先へ

平均に現れる量 $\phi(1)/\Phi(1)$ は、**逆ミルズ比**（inverse Mills ratio）の一例である。一般に、正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ を a より下で切断したものの平均は、$\alpha = (a - \mu)/\sigma$ として $\mu + \sigma\phi(\alpha)/(1 - \Phi(\alpha))$ である。切断分布（truncated distribution）は、データがある閾値より上でしか観測できない場面ならどこにでも現れる。たとえば生存時間解析（survival analysis）や、打ち切りデータ（censored data）の計量経済モデルがそうである。小問 (ii) は**生存関数**（survival function）$\mathrm{P}(T > t)$ に関するものである。$\mathrm{P}(T > s + t \mid T > s)$ が s によらないのは、指数分布（exponential distribution）の場合に限られる。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、連続分布と条件付けを扱っている。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

1993 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.