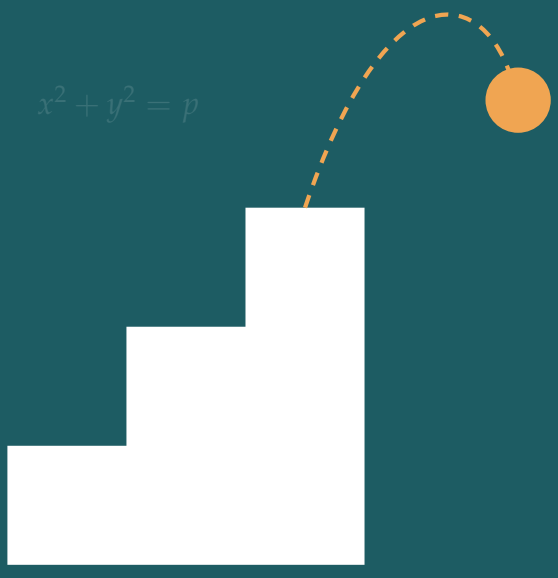
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

1992 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

1992 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

1992 年解答例

1992 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 48 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 7を法とする暦の計算 純粋数学 . . . 3
Q2 魔方陣と数え上げ 純粋数学 . . . 6
Q3 奇関数と偶関数 純粋数学 . . . 10
Q4 複素数平面上の軌跡 純粋数学 . . . 14
Q5 多項式の重複因数 純粋数学 . . . 18
Q6 小さな角の近似 純粋数学 . . . 22
Q7 整数値多項式 純粋数学 . . . 26
Q8 微分積分学の基本定理 純粋数学 . . . 29
Q9 微分方程式 純粋数学 . . . 33
Q10 反動と運動量 力学 . . . 37
Q11 弾性ひものつり合い 力学 . . . 41
Q12 摩擦のある静力学 力学 . . . 45
Q13 脱出速度と動径方向の落下 力学 . . . 49
Q14 統計的主張の解釈 確率・統計 . . . 53
Q15 期待待ち時間 確率・統計 . . . 58
Q16 ネットワークの信頼性 確率・統計 . . . 62

STEP II

Q1 数列の極限 純粋数学 . . . 66
Q2 クレロー型微分方程式 純粋数学 . . . 70
Q3 内サイクロイドと面積 純粋数学 . . . 74
Q4 微分の公理 純粋数学 . . . 78
Q5 行列群 純粋数学 . . . 82
Q6 接線と解の個数 純粋数学 . . . 86

Q7 3次方程式の重解 純粋数学 91
Q8 積分の技法 純粋数学 95
Q9 スカラー三重積 純粋数学 99
Q10 複素数平面上の軌跡 純粋数学 103
Q11 放物運動 力学 107
Q12 力のモーメントと弾性糸 力学 111
Q13 摩擦と連結された質点 力学 115
Q14 連結された質点と滑車 力学 119
Q15 ランダムウォーク 確率・統計 123
Q16 条件付き確率 確率・統計 127

STEP III

Q1 マクローリン級数 純粋数学 131
Q2 行列の累乗と数学的帰納法 純粋数学 135
Q3 曲線と多項式の根 純粋数学 139
Q4 直交軌道 純粋数学 143
Q5 空間ベクトルと図形 純粋数学 147
Q6 三角関数の漸化式（積分） 純粋数学 151
Q7 ベクトルと図形 純粋数学 154
Q8 解を用いた三角関数の和 純粋数学 158
Q9 楕円の極方程式 純粋数学 162
Q10 弧長と面積 純粋数学 166
Q11 衝突と反発係数 力学 170
Q12 運動量保存則 力学 174
Q13 固定軸まわりの回転 力学 178
Q14 ほどける糸の力学 力学 183
Q15 幾何的確率 確率・統計 187
Q16 ポアソン間引き 確率・統計 192

解答例

STEP I 1992、第 1 問

純粋数学 ・ 7 を法とする暦の計算

> **STEP I 1992、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q1

鍵となる考え方

曜日は 7 日ごとに繰り返すので、必要なのは二つの日付の間の日数を 7 を法として（modulo）簡約したものだけである。これを楽にする工夫は $365 = 52 \times 7 + 1$ という事実である。すなわち、平年は曜日を一つずらし、うるう年（leap year）は二つずらす。そこで、まず丸ごとの年とうるう日を数え、最後に端数の月を処理する。「注意深く」とは、どの 2 月 29 日が実際に区間内に入るか、そして私たちをつまずかせるかもしれない唯一の世紀年について正確であることを意味する。

解答

1905 年 4 月 3 日から 1992 年 6 月 26 日までの区間を二つに分ける。

$$1905\text{ 年 }4\text{ 月 }3\text{ 日} \longrightarrow 1992\text{ 年 }4\text{ 月 }3\text{ 日} \longrightarrow 1992\text{ 年 }6\text{ 月 }26\text{ 日}.$$

丸ごとの年：1905 年 4 月 3 日から 1992 年 4 月 3 日まで

これは $1992 - 1905 = 87$ 年分の丸ごとの年である。そのような各年（4 月 3 日から翌年の 4 月 3 日まで）は 365 日を含み、その中に 2 月 29 日が入っていればさらに 1 日加わる。

1905 年 4 月 3 日から 1992 年 4 月 3 日までの間にある 2 月 29 日はどれか。この範囲のうるう年は 4 で割り切れる年、すなわち

$$1908,\ 1912,\ \ldots,\ 1988,\ 1992.$$

である。1904 年の 2 月 29 日は 1905 年 4 月 3 日より前なので数えない。1992 年の 2 月

29 日は 1992 年 4 月 3 日より前にあるので数える。したがって、うるう日の個数は

$$\frac{1992-1908}{4}+1=21+1=22$$

である。

> **考えてみよう** この範囲で 4 で割り切れる年は、本当にすべてうるう年だろうか。

グレゴリオ暦では、世紀年は 400 で割り切れる場合に限りうるう年となるので、1900 年はうるう年では**なかった**（そして 2000 年はうるう年であった）。しかし、どちらも今回の区間には入っていないので、単純な「4 で割り切れる」という規則（覚え歌にある規則）がここではそのまま正しい。もし問題が 1900 年より前までさかのぼっていたら、1900 年 2 月 29 日を除かなければならなかったであろう。

よって、1905 年 4 月 3 日から 1992 年 4 月 3 日までの日数は

$$87\times 365+22=31\,755+22=31\,777.$$

である。7 を法として計算するほうが速い。$365\equiv 1 \pmod 7$ であるから、これは

$$87+22=109=15\times 7+4\equiv 4 \pmod 7.$$

となる。

端数の月：1992 年 4 月 3 日から 1992 年 6 月 26 日まで

覚え歌によれば、4 月は 30 日、5 月は 31 日であるから、

$$\begin{aligned}4\text{月}3\text{日}&\to 5\text{月}3\text{日}:30\text{日},\\ 5\text{月}3\text{日}&\to 6\text{月}3\text{日}:31\text{日},\\ 6\text{月}3\text{日}&\to 6\text{月}26\text{日}:23\text{日},\end{aligned}$$

となり、合計 $30+31+23=84=12\times 7$ 日で、これは $\equiv 0 \pmod 7$ である。うれしいことに、1992 年 4 月 3 日と 1992 年 6 月 26 日は同じ曜日である。

まとめる

全体の間隔は

$$31\,777+84=31\,861=4551\times 7+4\text{ 日},$$

であるから、1905 年 4 月 3 日は 1992 年 6 月 26 日より曜日にして 4 日**前**である。金曜日から 4 日さかのぼると、木曜日、水曜日、火曜日、月曜日となる。よって

1905 年 4 月 3 日は月曜日であった。

検算

- コンピュータで二つの日付の間の日数を月ごとに直接数えると 31 861 日となり、これは 4 (mod 7) である。また、コンピュータのカレンダーでも 1905 年 4 月 3 日は月曜日（そして 1992 年 6 月 26 日は金曜日）となる。
- 向きの確認：月曜日から**後ろへ** 4 日進むと、当然金曜日になる。
- うるう日の個数を別の方法で確認する：87 年にはおよそ $87/4 \approx 21.75$ 個のうるう日が含まれるので、22 はほぼ妥当である。

よくある間違い

- 1904 年 2 月 29 日（開始日より前）を含めてしまう、あるいは 1992 年 2 月 29 日（終了日より前）を除いてしまう。どちらも答えが 1 日ずれる。
- 前へ数えるべきところを後ろへ数える、またはその逆。余り 4 は、週の周期の中で 1905 年の日付が金曜日の 4 日**前**であることを意味し、後ではない。
- この方法をより前の日付に拡張するときに、1900 年をうるう年として扱ってしまう。

STEP のその先へ

これは 7 を法とする算術である。鍵となる事実 $365 \equiv 1 \pmod 7$ により、大きな数え上げが小さなものに変わる。合同式（congruence）と、任意の日付の曜日を求めるツェラーの公式（Zeller's congruence）のような暦の問題へのその応用は、整数論（number theory）の最初の講義の標準的な内容である。ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（高等算術）は、合同式をはじめ多くの話題へのすばらしい入門書である。

解答例

STEP I 1992、第 2 問

純粋数学 ・ 魔方陣と数え上げ

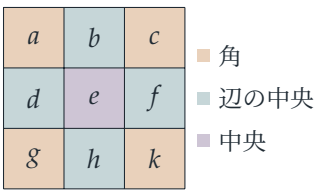
> **STEP I 1992、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q2

鍵となる考え方

すべては、直線上の和をうまく足し合わせることから得られる。3 つの行をすべて足すと、各数をちょうど 1 回ずつ使うことになり、そこから n が求まる。中央を通る 4 本の直線を足すと、各数を 1 回ずつ使い、さらに中央を 4 回使うことになり、これにより e が決まる。その後は、小規模で注意深い場合分け（case analysis）の問題になる。e が分かれば、中央を通る各直線は和が一定である 2 つの数を組にするので、大きな数を置ける余地はほとんど残らない。そして正方形の対称性（回転）が数え上げを代わりにやってくれる。

解答

マスを 3 種類に分けて名前をつけておくと便利である。4 つの**角**（corner）a, c, g, k、4 つの**辺の中央**（edge-middle）b, d, f, h、そして**中央**（centre）e である。



小問 (i)

3 つの行を合わせると、9 個の成分がそれぞれちょうど 1 回ずつ含まれる。したがって、3 つの行の和を足し合わせると

$$3n = (a+b+c)+(d+e+f)+(g+h+k) = 1+2+\cdots+9 = 45,$$

となり、よって $n = 15$ である。

小問 (ii)

中央を通る直線は 4 本ある。中央の行、中央の列、そして 2 本の対角線である。これらを足し合わせると

$$(d+e+f)+(b+e+h)+(a+e+k)+(c+e+g) = 4n = 60.$$

左辺では、e 以外の各成分はちょうど 1 回ずつ現れ、e は 4 回現れるので、左辺は $45+3e$ である。したがって $45+3e = 60$ となり、$e = 5$ を得る。

ここから有用な帰結が得られる。中央を通る各直線の和は 15 であり、$e = 5$ であるから、中央をはさんで**向かい合う** 2 つのマスの和は常に 10 である：

$$a+k = c+g = b+h = d+f = 10.$$

小問 (iii)

$e = 5$ であるから、9 は中央には入らない。したがって、9 が角に入りえないことを示せばよい。

背理法（proof by contradiction）により、9 が角にあると仮定する。どの角についても議論は同じなので、$a = 9$ とする。すると向かい側の角は $k = 10-9 = 1$ である。上の行と左の列はどちらも a を通るので

$$b+c = 15-9 = 6 \qquad \text{かつ} \qquad d+g = 15-9 = 6.$$

4 つの数 b, c, d, g は相異なり、1, 5, 9 を使った残り、すなわち $\{2,3,4,6,7,8\}$ から選ばれる。この集合の**相異なる** 2 数の和として 6 を表す方法は $2+4$ しかない（$1+5$ はすでに置いた数を使い、$3+3$ は同じ数を繰り返すからである）。よって $\{b,c\} = \{2,4\}$ かつ $\{d,g\} = \{2,4\}$ となるが、これには 2 と 4 をそれぞれ 2 回ずつ使う必要がある。これは数が相異なることに矛盾する。

考えてみよう なぜ角 a だけを扱えば十分なのだろうか。

どの角についても、同じ 3 つの事実が成り立つ。向かい側の角は 1 でなければならず、その角を通って正方形の辺に沿う 2 本の直線では、それぞれ残り 2 つの成分の和が 6

でなければならない。したがって同じ矛盾が現れる。（同じことであるが、魔方陣を4分の1回転させると別の魔方陣が得られ、回転によって a は他のそれぞれの角に移る。）

以上より、9は中央でも角でもないので、b, d, f, h のいずれかでなければならない。

小問 (iv)

$b = 9$ とする。すると $h = 10 - 9 = 1$ であり、上の行から $a + c = 6$ である。(iii) と同様に、未使用の数は $\{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ であり、そこから選んだ相異なる2数で和が6となる組は $\{2, 4\}$ のみである。よって $a = 2$, $c = 4$ または $a = 4$, $c = 2$ のいずれかである。

a と c が定まれば、残りはすべて向かい合う組と左右の列によって決まる：

- $a = 2, c = 4$ のとき：$k = 10 - a = 8$, $g = 10 - c = 6$, $d = 15 - a - g = 7$, $f = 15 - c - k = 3$ である。
- $a = 4, c = 2$ のとき：$k = 6, g = 8, d = 15 - 4 - 8 = 3, f = 15 - 2 - 6 = 7$ である。

値が決まってしまうことから分かるのは、これらが**唯一の**候補であるということだけである。実際に条件を満たすことはまだ確かめなければならない。どちらの場合も成分は $1, \ldots, 9$ がちょうど1回ずつであり、すべての行・列・対角線の和は15である：

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

（たとえば1つ目では、行の和は $15, 15, 15$、列の和は $2 + 7 + 6, 9 + 5 + 1, 4 + 3 + 8$、対角線の和は $2 + 5 + 8, 4 + 5 + 6$ である。）したがって、$b = 9$ である魔方陣（magic square）はちょうど2つであり、2つ目は1つ目を中央の列について鏡映したものである。

小問 (v)

魔方陣を時計回りに4分の1回転させると、別の魔方陣が得られる。新しい行はもとの列であり、新しい列はもとの行（逆順に読んだもの）であり、2本の対角線は入れ替わる。4分の1回転は元に戻せる（反時計回りに戻せばよい）ので、魔方陣どうしの間の1対1対応（one-to-one correspondence）を与える。

時計回りの4分の1回転は、マス b をマス f に移す。よって $f = 9$ である魔方陣は、$b = 9$ である魔方陣を4分の1回転させたものとちょうど一致し、ちょうど2個ある。さらに回転させると、$h = 9$ であるものがちょうど2個、$d = 9$ であるものがちょうど2個ある。

(iii) より、どの魔方陣でも9は位置 b, f, h, d のちょうど1つにあるので、これら4つの

グループは互いに重ならず、すべてを尽くしている。したがって

$$4 \times 2 = 8$$

個の異なる 3×3 魔方陣が存在する。それらは (iv) の 2 つの方陣と、それらを 4 分の 1、2 分の 1、4 分の 3 回転させたものである。同じことであるが、1 つの方陣の 8 通りの回転と鏡映である。

検算

$1, \ldots, 9$ の $9! = 362\,880$ 通りの並べ方すべてを短いコンピュータ探索で調べると、魔方陣はちょうど 8 個見つかる。そのすべてで直線の和は 15、中央は 5 であり、すべてで 9 は辺の中央にあり、$b = 9$ である 2 つは (iv) で見つけた方陣である。手計算でも、どの方陣でも 1 が 9 の向かい側にあり、偶数 $2, 4, 6, 8$ が角を占めることを確かめられる。

よくある間違い

- (iv) で、決まった方陣が本当に魔方陣であることの確認を忘れること。推論から分かるのは、それ以外のものはうまくいかないということだけである。
- (v) で、回転によって新しい、本当に異なる方陣が得られる理由を説明せずに、あるいは (iii) を使って 4 つの場合が重なりなくすべてを尽くすことを確かめずに、「2」や「4」と答えること。

STEP のその先へ

小問 (v) は**群作用**（group action）への最初の入り口である。正方形の 8 つの対称性（4 つの回転と 4 つの鏡映）は群（group）をなし、魔方陣全体はこの群のもとでただ 1 つの軌道（orbit）をなす。このように対称性を除いて対象を数えることは、バーンサイドの補題（Burnside's lemma）で展開され、群論の最初の講義で学ぶ。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）は、最初に読むのに親しみやすい本である。

解答例

STEP I 1992、第 3 問

純粋数学 ・ 奇関数と偶関数

STEP I 1992、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/92-s1-q3

鍵となる考え方

ここで扱う積分はすべて対称区間（symmetric interval）$[-\pi, \pi]$ 上のものなので、まず各被積分関数（integrand）が偶関数（even function）か奇関数（odd function）かを調べる。奇関数を対称区間で積分するとゼロになり、偶関数を積分すると $[0, \pi]$ 上の積分の 2 倍になる。しかもその区間では絶対値（modulus）の記号が外れる。この対称性に気づけば、4 つの小問はいずれも、たかだか 1 回の短い計算で済む。

解答

2 つの基本的な事実を用いる。$f(-x) = f(x)$（偶関数）ならば

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

であり、$f(-x) = -f(x)$（奇関数）ならば $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ である。どちらも、$[-a, 0]$ 上の積分で $x = -u$ と置換（substitution）すれば導かれる。この置換により、その積分は $\int_{0}^{a} f(-u)\,\mathrm{d}u$ となる。

また、$\int_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \left[-\cos x\right]_{0}^{\pi} = 1 - (-1) = 2$ も用いる。

小問 (i)

$|\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x|$ であるから、被積分関数は偶関数である。$[0, \pi]$ 上では $\sin x \geq 0$ なので、そこでは $|\sin x| = \sin x$ となる。よって

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 2 \times 2 = 4.$$

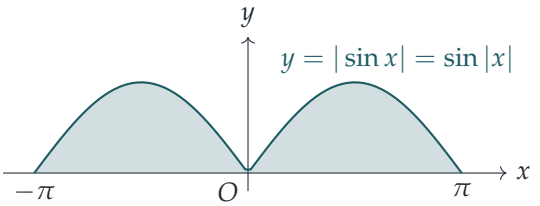
小問 (ii)

$|-x| = |x|$ であるから、関数 $\sin|x|$ は偶関数である。$[0, \pi]$ 上では $|x| = x$ なので

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 4.$$

考えてみよう (i) と (ii) の答えが一致するのは偶然だろうか。

偶然ではない。この区間上では、2 つの被積分関数は同じ関数なのである。$0 \le x \le \pi$ ではどちらも $\sin x$ に等しい。$-\pi \le x \le 0$ では $\sin x \le 0$ なので $|\sin x| = -\sin x$ であり、一方 $\sin|x| = \sin(-x) = -\sin x$ も成り立つ。2 つの曲線が分かれるのは $[-\pi, \pi]$ の外側だけである。たとえば $x = 3\pi/2$ では $|\sin x| = 1$ であるが $\sin|x| = -1$ である。



網掛けの部分は正弦曲線の 2 つのアーチからなり、それぞれの面積は 2 である。

小問 (iii)

ここでは $(-x)\sin(-x) = (-x)(-\sin x) = x\sin x$ であるから、被積分関数は偶関数である（2 つの奇関数の積）。したがって

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x.$$

$u = x$、$\mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x$（よって $v = -\cos x$）として部分積分（integration by parts）を行うと

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x &= \left[-x\cos x\right]_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \left(-\pi\cos\pi - 0\right) + \left[\sin x\right]_{0}^{\pi} \\ &= \pi + 0 = \pi.\end{aligned}$$

よって

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = 2\pi.$$

小問 (iv)

今度は $(-x)^{10}\sin(-x) = x^{10}(-\sin x) = -x^{10}\sin x$ であるから、被積分関数は奇関数である（偶関数と奇関数の積）。したがって対称区間上の積分は

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^{10}\sin x\,\mathrm{d}x = 0.$$

部分積分を 10 回も繰り返す必要はない！$[-\pi, 0]$ からの寄与と $[0, \pi]$ からの寄与は大きさが等しく符号が逆なので、ちょうど打ち消し合う。

検算

- 面積としての感覚：(i) の被積分関数は負にならず、たかだか 1 であるから、答えは 0 と $2\pi \approx 6.28$ の間になければならない。4 はその範囲にある。
- (iii) では $[-\pi, \pi]$ 上で $x\sin x \geq 0$ なので、答えは正でなければならない。2π は正である。また $\sin x - x\cos x$ を微分すると $x\sin x$ となり、原始関数（antiderivative）が正しいことが確かめられる。
- シンプソンの公式（Simpson's rule）で区間を 20 000 個に分割して計算すると、4 つの積分はそれぞれ 4.0000000、4.0000000、6.2831853、0.0000000 となる。(iv) のゼロは単に小さな数というわけではない。同じ区間での $|x^{10}\sin x|$ の積分はおよそ 13 275 であり、打ち消し合いが厳密かつ完全に起きているのである。

よくある間違い

- 絶対値を無視して $\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \big[-\cos x\big]_{-\pi}^{\pi} = 0$ と書いてしまう。決して負にならない被積分関数の積分が 0 になるのは、その関数がほとんど至る所（almost everywhere）でゼロである場合に限られる。
- $\sin x$ が奇関数だから $\sin|x|$ も奇関数だと思い込む。$|x|$ との合成（composition）は常に偶関数を生み出す。
- (iii) の部分積分での符号の誤り。$\cos\pi = -1$ であるから $-\pi\cos\pi = +\pi$ となることに注意せよ。

STEP のその先へ

関数を偶関数部分と奇関数部分に分解すること、すなわち $f(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) + \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big)$ は、フーリエ級数（Fourier series）の出発点である。$[-\pi, \pi]$ 上で、

偶関数部分は余弦関数で、奇関数部分は正弦関数で展開され、(iii) や (iv) のような積分こそが係数（coefficient）を計算するのに使われるものである。たとえば、x のフーリエ級数における $\sin x$ の係数は (iii) の積分から得られる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『常微分方程式入門』）には、フーリエ級数とその微分方程式の解法への応用について、読みやすい入門がある。

解答例

STEP I 1992、第 4 問

純粋数学 • 複素数平面上の軌跡

> **STEP I 1992、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q4

鍵となる考え方

それぞれの条件を x と y についての条件（ただし $z = x + \mathrm{i}y$）、あるいは z の絶対値（modulus）と偏角（argument）についての条件に書き直せば、たいていの場合、領域はすぐに見えてくる。小問 (i) と (ii) はこれだけで十分である。小問 (iii) は事情が異なる。これは**和**の集合を記述しているので、二つのことを示さなければならない。すなわち、どの和も主張する領域に属すること、そしてその領域のどの点も実際にそのような和として表せることである。

解答

以下では一貫して、x, y を実数として $z = x + \mathrm{i}y$ とおく。

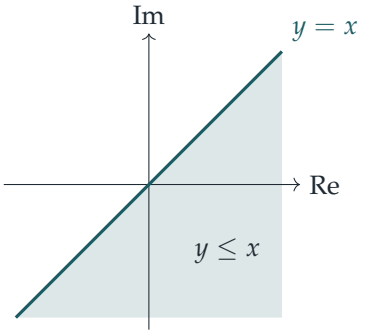
小問 (i)

展開すると

$$(1+\mathrm{i})z = (1+\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y) = (x-y) + \mathrm{i}(x+y),$$

となるので、$\mathrm{Re}\big((1+\mathrm{i})z\big) = x - y$ である。条件は $x - y \geq 0$、すなわち $y \leq x$ である。求める集合は、直線 $y = x$ 上およびその下側からなる閉半平面（closed half-plane）であり、直線そのものも含む。

幾何的には、$1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ を掛けることは $\frac{\pi}{4}$ の回転と $\sqrt{2}$ 倍の拡大を表す。したがって条件は、z を反時計回りに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転させた点が右半平面 $\mathrm{Re} \geq 0$ に入る、ということを意味する。これは $-\frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$（または $z = 0$）ということであり、同じ半平面を表している。



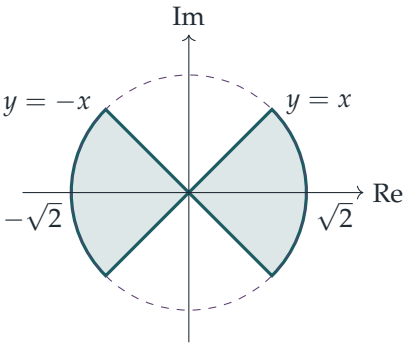
小問 (ii)

$|z^2| = |z|^2$ であるから、一つ目の条件は $|z|^2 \leq 2$、すなわち $|z| \leq \sqrt{2}$ である。これは原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の閉円板である。

二つ目の条件については、$z^2 = (x^2 - y^2) + 2\mathrm{i}xy$ より $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$ なので、条件は $x^2 \geq y^2$、すなわち $|y| \leq |x|$ となる。これは直線 $y = x$ と $y = -x$ にはさまれ、実軸を含む、互いに向かい合った一対の閉扇形領域（sector）である。

極形式を使えば同じことがもっと手早くわかる。$z = re^{\mathrm{i}\theta}$ とすると $z^2 = r^2 e^{2\mathrm{i}\theta}$ なので、$r \leq \sqrt{2}$ かつ $\cos 2\theta \geq 0$ が必要であり、これより $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ または $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$（または $z = 0$）を得る。

求める集合はこれらの共通部分であり、二つの閉じた四分円板（それぞれ中心角 $\frac{\pi}{2}$、半径 $\sqrt{2}$ の扇形）が、一方は右向きに、他方は左向きに開いて、原点で接している。境界はすべて含まれる。



小問 (iii)

和全体の集合を S とする。S は閉円環（closed annulus）$\{z : 1 \leq |z| \leq 3\}$ であることを示す。

どの和も円環に属する。 $|z_1| = 2$、$|z_2| = 1$ ならば、三角不等式（triangle inequality）

より

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| = 3, \qquad |z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2| = 1.$$

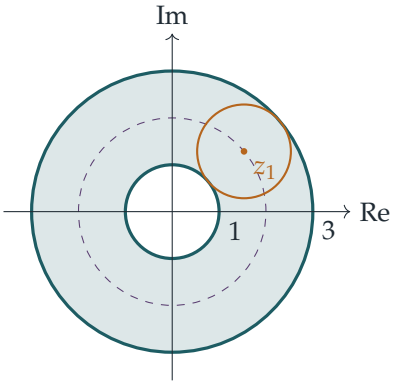
考えてみよう これで十分だろうか。円環の内部にある何かの曲線だけでなく、円環全体が埋め尽くされることはどうしてわかるのか。

これらの不等式は S が円環の**内部に含まれる**ことを示すにすぎないので、逆向きの包含関係も示す必要がある。$1 \leq |z| \leq 3$ を満たす任意の z をとる。$|z - z_2| = 2$ を満たす絶対値 1 の複素数 z_2 を見つけたい。そうすれば $z_1 = z - z_2$ の絶対値は 2 となり、$z = z_1 + z_2$ が成り立つからである。

幾何的には、z_2 は 0 を中心とする単位円上にあり、かつ z を中心とする半径 2 の円上にもなければならない。半径 1 と 2 の二つの円で、中心間の距離が $d = |z|$ であるものは、$2 - 1 \leq d \leq 2 + 1$ のときちょうど交わる。そしてこれがまさに条件 $1 \leq |z| \leq 3$ である。

円についてのこの事実を引用せずに確かめるには、$z = re^{i\alpha}$ と書き、φ について連続な関数 $f(\varphi) = |z - e^{i\varphi}|$ を考える。$\varphi = \alpha$ のとき点 $e^{i\varphi}$ は z と同じ向きを指すので、$f(\alpha) = |r - 1| = r - 1 \leq 2$ である。$\varphi = \alpha + \pi$ のときは逆向きを指すので、$f(\alpha + \pi) = r + 1 \geq 2$ である。中間値の定理（intermediate value theorem）により、ある φ で $f(\varphi) = 2$ となり、$z_2 = e^{i\varphi}$ が条件を満たす。

以上より、S はちょうど円 $|z| = 1$ と $|z| = 3$ にはさまれた閉円環であり、境界の二つの円はどちらも含まれる。次のように思い描くとよい。半径 2 の円上に z_1 を固定すると、$z_1 + z_2$ は z_1 を中心とする単位円を描く。z_1 が一周するにつれて、これらの小さな円が円環を掃き出していく。



琥珀色の円は、破線の円 $|z_1| = 2$ 上の一つの固定した z_1 に対する和を表している。

検算

- (i) で、$z = 1$ のとき $\mathrm{Re}(1+\mathrm{i}) = 1 \geq 0$、$z = \mathrm{i}$ のとき $\mathrm{Re}(-1+\mathrm{i}) = -1 < 0$ である。これは $y \leq x$ と一致する。
- (ii) で、$z = 1$ は集合に属し、$z = \mathrm{i}$ は属さない（$\mathrm{i}^2 = -1$）。したがって扇形は図のとおり実軸を含むはずである。
- (iii) で、$z_1 = 2$、$z_2 = -1$ からは 1、$z_1 = 2$、$z_2 = 1$ からは 3 が得られるので、境界の二つの円はどちらも実現される。三つの記述すべてを 200 000 個の無作為な点で検証した。無作為な和の絶対値は 1.0000 から 3.0000 の範囲にあり、円環内の無作為な 1000 個の点に対して、適切な z_2 が誤差 2×10^{-4} 以内で見つかった。

よくある間違い

- (ii) で、扇形 $|\arg z| \leq \frac{\pi}{4}$ だけを残し、左側の扇形を忘れること。z と $-z$ の平方は等しい。
- (iii) で、三角不等式を示したところで止めてしまうこと。それは S が円環に含まれることを示すだけで、S が円環全体であることは示していない。
- 境界が含まれるかどうかを書き落とすこと。ここでの不等式はすべて等号付きなので、境界はすべて含まれる。

STEP のその先へ

小問 (iii) は、二つの集合のミンコフスキー（Minkowski）和（*Minkowski sum*）$A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$ の小さな例である。これは幾何学や凸解析（convex analysis）全体に通じる考え方である。二つの包含関係を示す論法（$S \subseteq T$ を示し、次に $T \subseteq S$ を示す）は、二つの集合が等しいことを証明する標準的な方法であり、大学ではこれを絶えず使うことになる。複素数の乗法を回転と拡大として捉える幾何的な見方を知れば (i) と (ii) はほとんど一瞬で解けるが、それについては Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）を参照するとよい。

解答例

STEP I 1992、第 5 問

純粋数学 ・ 多項式の重複因数

> **STEP I 1992、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q5

この問題は、*Beyond STEP* の第 9.7 節「**等しい累乗和**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/equal-power-sums.html

鍵となる考え方

多項式（polynomial）が重複因数（repeated factor）$(1-x)^m$ をもつとき、それを微分して（x を掛けて）も因数 $(1-x)^{m-1}$ が残る。したがって 1 はその多項式の根（root）であり、さらにそこから続くいくつかの多項式の根でもある。これらの多項式それぞれの $x=1$ における値を係数を用いて計算すると、$\sum k^r c_k$ の形の和が得られる。係数がすべて ± 1 であるとき、これらの和はそれぞれ、二つの整数の集合の r 乗の和が等しいことを表している。

解答

因数 $(1-x)^3$

平方の差の因数分解（difference of two squares）を 2 回用いると、

$$1-x^2=(1-x)(1+x), \qquad 1-x^4=(1-x^2)(1+x^2)=(1-x)(1+x)(1+x^2),$$

であるから、

$$\mathrm{p}_0(x)=(1-x)^3(1+x)^2(1+x^2),$$

となり、$(1-x)^3$ は $\mathrm{p}_0(x)$ の因数である。これが示すべきことであった。

$\mathrm{p}_0'(1)=0$ **と** $\mathrm{p}_1'(1)=0$

小さな事実を一つ証明し、それを繰り返し用いる。

補題（*lemma*）。 $m\geq 1$ で q が多項式であるとき、$\mathrm{p}(x)=(1-x)^m\mathrm{q}(x)$ ならば、$\mathrm{p}'(x)$、したがって $x\mathrm{p}'(x)$ は因数 $(1-x)^{m-1}$ をもつ。

証明。積の微分法（product rule）により、

$$\mathrm{p}'(x)=-m(1-x)^{m-1}\mathrm{q}(x)+(1-x)^m\mathrm{q}'(x)=(1-x)^{m-1}\big[(1-x)\mathrm{q}'(x)-m\,\mathrm{q}(x)\big],$$

であり、括弧の中は多項式である。x を掛けてもこの因数は消えない。□

これを $m=3$ として適用すると、$\mathrm{p}_0'(x)$ は因数 $(1-x)^2$ をもつので、$\mathrm{p}_0'(1)=0$ である。また $\mathrm{p}_1(x)=x\mathrm{p}_0'(x)$ も因数 $(1-x)^2$ をもつ。補題を $m=2$ として再び適用すると、$\mathrm{p}_1'(x)$ は因数 $1-x$ をもつので、$\mathrm{p}_1'(1)=0$ である。

> **考えてみよう** 三つの括弧の積をそのまま微分して $x=1$ を代入すればよいのではないか？

それも可能であるが、問題は因数から議論することを求めており、また一般化できるのは因数による議論のほうである。重複度（multiplicity）m の根は $m-1$ 回の微分を経ても根として残り、最後の小問で必要になるのはまさにこの事実である。

二つの恒等式

展開すると、

$$(1-x)(1-x^2)=1-x-x^2+x^3,$$

であり、さらに

$$\mathrm{p}_0(x)=1-x-x^2+x^3-x^4+x^5+x^6-x^7.$$

となる。よって $c_0=c_3=c_5=c_6=1$、$c_1=c_2=c_4=c_7=-1$ である。

ここで

$$\mathrm{p}_0'(x)=\sum_{k=1}^{7}k\,c_kx^{k-1},\qquad \mathrm{p}_1(x)=\sum_{k=0}^{7}k\,c_kx^k,\qquad \mathrm{p}_1'(x)=\sum_{k=1}^{7}k^2c_kx^{k-1}.$$

$x=1$ とおき、$\mathrm{p}_0'(1)=0$ を用いると、

$$-1-2+3-4+5+6-7=0,\quad \text{すなわち}\quad 1+2+4+7=3+5+6.$$

$\mathrm{p}_1'(1)=0$ を用いると、

$$-1^2-2^2+3^2-4^2+5^2+6^2-7^2=0,\quad \text{すなわち}\quad 1^2+2^2+4^2+7^2=3^2+5^2+6^2.$$

（両辺はともに 14 に等しく、平方については 70 に等しい。）c_0 の項は 0 または 0^2 が掛けられるので、何も寄与しない。

最後の小問

さらに一段階進める。

$$\mathrm{P}_0(x) = (1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8) = \mathrm{p}_0(x)(1-x^8).$$

とおく。$1-x^8 = (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)$ であるから、$\mathrm{P}_0(x)$ は因数 $(1-x)^4$ をもつ。$j = 0, 1, 2$ に対して $\mathrm{P}_{j+1}(x) = x\mathrm{P}_j'(x)$ と定める。補題により、P_1、P_2、P_3 はそれぞれ因数 $(1-x)^3$、$(1-x)^2$、$(1-x)$ をもつので、

$$\mathrm{P}_1(1) = \mathrm{P}_2(1) = \mathrm{P}_3(1) = 0.$$

である。

$\mathrm{P}_0(x) = \sum_{k=0}^{15} d_k x^k$ と書く。$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ を 1 回施すごとに x^k の係数は k 倍されるので、$\mathrm{P}_r(x) = \sum_{k=0}^{15} k^r d_k x^k$ であり、

$$\sum_{k=1}^{15} k^r d_k = 0 \qquad \text{for } r = 1, 2, 3.$$

が成り立つ。

d_k を求めるために、$\mathrm{p}_0(x)$ に $1-x^8$ を掛ける。すると

$$\mathrm{P}_0(x) = \mathrm{p}_0(x) - x^8\mathrm{p}_0(x).$$

となる。第 2 項からは、p_0 の符号を反転させた $x^8, \ldots, x^{15}$ の項が得られる。重なりはないので、すべての d_k は ± 1 である：

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
d_k	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+

（実際、$s(k)$ を k の二進展開（binary expansion）に現れる 1 の個数とすると、$d_k = (-1)^{s(k)}$ である。なぜなら、x^k は k の二進数の各桁に対応する括弧から $-x^{2^i}$ を選ぶことで得られるからである。）

$k = 0$ を除くと、係数は $k \in \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$（8 個の数）に対して $d_k = -1$、$k \in \{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15\}$（7 個の数）に対して $d_k = +1$ である。これらを合わせるとちょうど $1, 2, \ldots, 15$ になる。そこで

$$(a_1, \ldots, a_8) = (1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14), \qquad (a_9, \ldots, a_{15}) = (3, 5, 6, 9, 10, 12, 15).$$

とおく。すると $\sum k^r d_k = 0$ はまさに

$$a_1^r + \cdots + a_8^r = a_9^r + \cdots + a_{15}^r \qquad (r = 1, 2, 3),$$

を意味し、これが示すべきことであった。

考えてみよう 分け方が一方に 8 個、もう一方に 7 個となるのはなぜか？

$+1$ の側には $k = 0$ も含まれるが、これは $r \geq 1$ に対して $0^r = 0$ しか寄与しないので除いてよい。そのため両辺の項数は等しくなくてよいのである。（$r = 0$ の場合には恒等式に 0 が必要になり、そのとき $8 = 8$ となる。）

検算

直接計算すると、和は $r = 1$ で $60 = 60$、$r = 2$ で $620 = 620$、$r = 3$ で $7200 = 7200$ となる。コンピュータで P_0 を展開し、その符号と根 $x = 1$ の重複度が 4 であることを確認し、三つの等式すべてを検証した。$r = 4$ では等式は成り立たない（根の重複度は 4 しかない）。これは議論が最良であることを示すよい兆候である。

よくある間違い

- $k = 0$ の項を忘れ、両辺の個数が等しくなければならないと考えてしまう。
- $\mathrm{p}_0''(1) = 0$ だけから $\mathrm{p}_1'(1) = 0$ を結論してしまう。$\mathrm{p}_1' = \mathrm{p}_0' + x\mathrm{p}_0''$ であるから、$\mathrm{p}_0'(1) = 0$ と $\mathrm{p}_0''(1) = 0$ の両方が必要である。

STEP のその先へ

これはプルーエ–タリー–エスコット問題（Prouhet–Tarry–Escott problem）である。$\{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ を二進数の各桁の和の偶奇（トゥエ–モース数列（Thue–Morse sequence））によって分けると、$r < n$ のすべての r に対して r 乗の和が等しい二つの集合が得られる。その背後にある道具、すなわち重複度 m の根は最初の $m - 1$ 個の導関数の根でもあるという事実は、任意の体（field）上の多項式の代数において中心的な役割を果たす。多項式とその根の代数については、Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を参照せよ。より一般に数論（number theory）については、Davenport, *The Higher Arithmetic*（高等算術）を参照せよ。

解答例

STEP I 1992、第 6 問

純粋数学 • 小さな角の近似

STEP I 1992、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/92-s1-q6

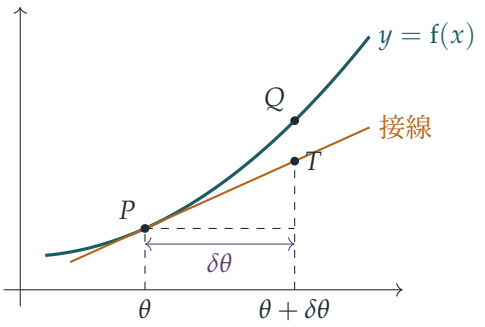
鍵となる考え方

遠方の点 C における角はちょうど ϕ である。$\theta + \phi$ が三角形 ABC の外角（exterior angle）だからである。すると正弦定理（sine rule）により AC が厳密に求まる。C は非常に遠くにあるので ϕ はごく小さいはずであり、小角近似（small-angle approximation）を用いると、厳密な式が簡単な形になる。小角近似とは、実は最初の部分の線形近似（linear approximation）が姿を変えたものにほかならない。誤差に関する問いは、同じ線形近似をもう一度、今度は ϕ を変数として用いるものである。

解答

線形近似

点 $P = (\theta, \mathrm{f}(\theta))$ の近くでは、f のグラフはその接線（tangent line）に非常に近い。この接線の傾きは $\mathrm{f}'(\theta)$ である。



右へ距離 $\delta\theta$ だけ進む。接線に沿うと、高さは（傾き）×（横の移動量）$= \mathrm{f}'(\theta)\,\delta\theta$ だけ増え、点 T に達する。曲線に沿うと、高さ $\mathrm{f}(\theta+\delta\theta)$ の点 Q まで上がる。$\delta\theta \to 0$ のとき、差 QT は $\delta\theta$ 自身よりも速く小さくなる。なぜなら

$$\frac{\mathrm{f}(\theta+\delta\theta)-\mathrm{f}(\theta)}{\delta\theta} \to \mathrm{f}'(\theta)$$

は、まさに導関数（derivative）の定義だからである。したがって $\delta\theta$ が小さいとき、

$$\mathrm{f}(\theta+\delta\theta) \approx \mathrm{f}(\theta) + \mathrm{f}'(\theta)\,\delta\theta.$$

C までの距離

三角形 ABC において、A における角は θ であり、B における外角は $\theta+\phi$ である。外角はそれと隣り合わない二つの内角の和に等しいので、

$$\angle ACB = \phi.$$

B における内角は $\pi-(\theta+\phi)$ であり、$\sin(\pi-x)=\sin x$ であるから、正弦定理により次の厳密な結果が得られる。

$$AC = \frac{a\sin(\theta+\phi)}{\sin\phi}, \qquad h = AC\sin\theta = \frac{a\sin\theta\,\sin(\theta+\phi)}{\sin\phi}.$$

> **考えてみよう** 「h は a に比べて非常に大きい」という条件は、実際にはどこで効いてくるのか？

この条件は ϕ が小さいことを教えてくれる。厳密な式を変形すると $\sin\phi = a\sin\theta\sin(\theta+\phi)/h \le a/h$ となるので、$h \gg a$ であれば $\sin\phi$、したがって ϕ はごく小さくならざるを得ない。（非常に遠くにある C から見ると、基線（baseline）AB を見込む角はほとんどない。）ここで最初の部分を $\mathrm{f}=\sin$ として用いる：

$$\sin(\theta+\phi) \approx \sin\theta + \phi\cos\theta \approx \sin\theta, \qquad \sin\phi \approx \sin 0 + \phi\cos 0 = \phi.$$

したがって

$$h \approx \frac{a\sin^2\theta}{\phi},$$

となり、求める結果が得られる。また

$$AC = \frac{h}{\sin\theta} \approx \frac{a\sin\theta}{\phi}.$$

（$\phi\cos\theta$ の項を残すと $AC \approx a\sin\theta/\phi + a\cos\theta$ となる。余分な部分は a 程度の大きさにすぎず、h のオーダーの距離に比べれば無視できる。）

ϕ の誤差の影響

AC を関数 $g(\phi) = a\sin\theta\,\phi^{-1}$ とみなす。θ は正しく測定されるので固定しておく。最初の部分により、誤差 $\delta\phi$ によって推定値は次だけ変化する。

$$\delta(AC) \approx g'(\phi)\,\delta\phi = -\frac{a\sin\theta}{\phi^2}\,\delta\phi.$$

よって AC の誤差の大きさはおよそ $\dfrac{a\sin\theta}{\phi^2}\,|\delta\phi|$ である。ϕ を過大に見積もると、距離は過小に見積もられる。

> **考えてみよう** a を 2 倍にするとどうなるか。式では a が分子にある。誤差も 2 倍になるのではないか？

そうではない。ϕ は固定されておらず、基線に依存するからである。点 C（したがって h）は変わらず、$h \approx a\sin^2\theta/\phi$ から $\phi \approx a\sin^2\theta/h$ が得られるので、a を 2 倍にすると ϕ もおよそ 2 倍になる。（C は非常に遠くにあるので、θ はごくわずかしか変わらない。）誤差を固定された量 h を用いて表すと、

$$\frac{a\sin\theta}{\phi^2}\,|\delta\phi| \approx a\sin\theta\cdot\frac{h^2}{a^2\sin^4\theta}\,|\delta\phi| = \frac{h^2}{a\sin^3\theta}\,|\delta\phi|.$$

測定器の誤差 $\delta\phi$ が同じであれば、AC の誤差は a に反比例する。**望遠鏡どうしの距離を 2 倍にすると、誤差はおよそ半分になる。**

検算

- $a = 1$、$\theta = \pi/6$、$\phi = 10^{-4}$ とする。厳密な式からは $h \approx 2500.43$、$AC \approx 5000.87$ が得られ、近似式からは 2500 と 5000 が得られる。AC の差は約 $0.87 \approx a\cos\theta$ であり、まさに余分な項が予測するとおりである。
- 二本の視線の交点として C を直接計算すると、ランダムに選んだ数千組の a、θ と小さな ϕ に対して、両方の近似式と 0.1% 以内で一致する。また、小さな $\delta\phi$ による AC の変化も $-a\sin\theta\,\delta\phi/\phi^2$ と一致する。
- 遠方の点 C を固定し、基線 a と $2a$ のそれぞれについて ϕ を計算し直し、それぞれを同じ $\delta\phi$ だけずらすと、誤差の比は 2 になる。
- 次元（dimensions）：ラジアン（radians）で測った角は無次元なので、$a\sin^2\theta/\phi$ は長さである。

よくある間違い

- ϕ を度数法で測ったまま $\sin\phi \approx \phi$ を用いること。この近似は、sin の f′ と同様に、ラジアンを必要とする。
- ϕ を固定したまま考えて、誤差が a とともに 2 倍になると結論すること。目標物によって固定されるのは h であって、ϕ ではない。
- $\angle ACB = \phi$ に気づかず、代わりに座標を設定すること。それでも解けるが、時間がかかる。

STEP のその先へ

これは視差（parallax）による三角測量（triangulation）であり、天文学者が地球の公転軌道を基線として近くの恒星までの距離を測る方法である。誤差の解析は、誤差伝播（error propagation）への最初の一歩である。一次の近似では、測定値の誤差 δx は、その測定値から計算される任意の量において誤差 $g'(x)\,\delta x$ となる。この考え方は、剰余項（remainder term）付きのテイラーの定理（Taylor's theorem）によって厳密なものとなり、大学 1 年次の解析学（analysis）の中心的な部分をなす。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を参照のこと。

解答例

STEP I 1992、第 7 問

純粋数学 • 整数値多項式

> **STEP I 1992、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q7

鍵となる考え方

係数（coefficients）が整数であることを証明しようとしてはならない。二次関数（quadratic function）の場合、係数は整数である必要がないからである。実際、$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ はすべての整数で整数値をとる。そうではなく、係数を与えられた整数値で表して元の式に代入し、$\mathrm{f}(n)$ を $\mathrm{f}(-1)$、$\mathrm{f}(0)$、$\mathrm{f}(1)$ の整数倍の和として表すのである。最後の小問は、原点を平行移動（shift of origin）すれば、真ん中の小問そのものになる。

解答

一次関数

$\mathrm{g}(0) = b$、$\mathrm{g}(1) = a + b$ であるから、$b = \mathrm{g}(0)$、$a = \mathrm{g}(1) - \mathrm{g}(0)$ であり、どちらも整数である。よって任意の整数 n に対して

$$\mathrm{g}(n) = an + b = \mathrm{g}(0) + n\big(\mathrm{g}(1) - \mathrm{g}(0)\big),$$

となる。これは整数どうしの積の和であるから、整数である。

二次関数

$p = \mathrm{f}(-1)$、$q = \mathrm{f}(0)$、$r = \mathrm{f}(1)$ とおく。これらはすべて整数である。このとき

$$p = A - B + C, \qquad q = C, \qquad r = A + B + C,$$

であり、これを解くと

$$C = q, \qquad B = \frac{r - p}{2}, \qquad A = \frac{p + r - 2q}{2}.$$

を得る。したがって A と B は整数である必要はなく、奇数の半分である可能性もある。これらを $\mathrm{f}(n) = An^2 + Bn + C$ に代入し、p、q、r の項ごとにまとめると

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(n) &= \frac{p+r-2q}{2}\,n^2 + \frac{r-p}{2}\,n + q \\ &= \frac{n(n-1)}{2}\,p + (1-n^2)\,q + \frac{n(n+1)}{2}\,r.\end{aligned}$$

となる。

考えてみよう p と r の係数は分母に 2 をもつ。それでも整数になるのはなぜか。

整数 n に対して、$n-1$ と n は連続する整数であるから、どちらか一方は偶数であり、$n(n-1)$ は偶数である。同様に $n(n+1)$ も偶数である。よって $\frac{1}{2}n(n-1)$ と $\frac{1}{2}n(n+1)$ は整数であり、$1-n^2$ も整数である。したがって $\mathrm{f}(n)$ は整数どうしの積の和となり、すべての整数 n に対して整数である。これが示すべきことであった。

（3 つの係数は、$-1, 0, 1$ のうち 1 つで 1、残りの 2 つで 0 となる二次式である。これはラグランジュ補間（Lagrange interpolation）にほかならない。）

最後の小問

α を実数とし、$\mathrm{h}(x) = \mathrm{f}(\alpha + x)$ と定める。展開すると

$$\mathrm{h}(x) = A(\alpha+x)^2 + B(\alpha+x) + C = Ax^2 + (2A\alpha + B)x + (A\alpha^2 + B\alpha + C),$$

となるので、h も実数係数の $A'x^2 + B'x + C'$ という形の関数である。真ん中の小問では、A、B、C について実数であること以外は何も用いていない。さて、

$$\mathrm{h}(-1) = \mathrm{f}(\alpha - 1), \qquad \mathrm{h}(0) = \mathrm{f}(\alpha), \qquad \mathrm{h}(1) = \mathrm{f}(\alpha + 1)$$

は仮定によりすべて整数である。よって真ん中の小問を h に適用すれば、すべての整数 n に対して $\mathrm{h}(n) = \mathrm{f}(\alpha + n)$ は整数である。具体的には

$$\mathrm{f}(\alpha+n) = \frac{n(n-1)}{2}\,\mathrm{f}(\alpha-1) + (1-n^2)\,\mathrm{f}(\alpha) + \frac{n(n+1)}{2}\,\mathrm{f}(\alpha+1).$$

である。

検算

- $\mathrm{f}(n)$ の式に $n = -1, 0, 1$ を代入すると、係数はそれぞれ $(1,0,0)$、$(0,1,0)$、$(0,0,1)$ となり、p、q、r が再現される。

- 例 $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ では $p = 0$、$q = 0$、$r = 1$ であり、式から $\mathrm{f}(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$、すなわち三角数（triangular numbers）が得られる。
- 数値で確かめる。$\alpha = \sqrt{2}$ とし、$\mathrm{f}(\alpha - 1) = 3$、$\mathrm{f}(\alpha) = -7$、$\mathrm{f}(\alpha + 1) = 11$ とすると、これらの点を通る二次式から $\mathrm{f}(\alpha + 5) = 363.000\ldots$ が得られ、$10 \cdot 3 - 24 \cdot (-7) + 15 \cdot 11 = 363$ と一致する。

よくある間違い

- A、B、C が整数でなければならないと主張すること。それらは整数である必要はなく、このことに依存した議論は誤りである。
- 最後の小問で、α が整数または有理数でなければならないことを示そうとすること。α は任意の実数でよく、重要なのは平行移動だけである。

STEP のその先へ

すべての整数で整数値をとる多項式は、二項係数（binomial coefficients）$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$ の整数係数の一次結合とちょうど一致する。二次式の場合、これらは 1、x、$\frac{1}{2}x(x-1)$ であり、この結果は差分（finite differences）を用いて証明される。すなわち、次数 d の多項式は、連続する $d+1$ 個の整数で整数値をとれば、整数値多項式（integer-valued polynomial）である。同じ考え方が、数値解析（numerical analysis）におけるニュートン（Newton）の前進差分公式（forward-difference formula）の根底にもある。整数値関数と整除性（divisibility）についてさらに知りたければ、Davenport, *The Higher Arithmetic*（整数論の入門書）を参照するとよい。

解答例

STEP I 1992、第 8 問

純粋数学 ・ 微分積分学の基本定理

> **STEP I 1992、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q8

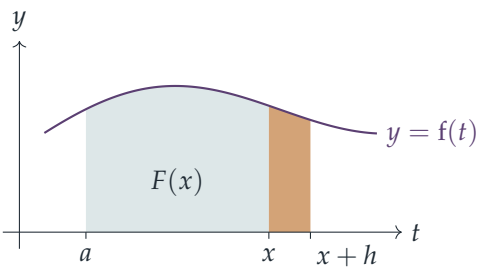
鍵となる考え方

上端が変数である積分は、上端が動くにつれて増えていく面積であり、その増え方の速さは上端における曲線の高さに等しい。この一つの事実（微分積分学の基本定理（Fundamental Theorem of Calculus））によって、問題に現れる各積分方程式（integral equation）は微分方程式（differential equation）に書き換えられる。微分すると定数についての情報が失われるので、もとの方程式に都合のよい x の値（たいていは $x = 0$）を代入して、その情報を必ず取り戻すことにする。

解答

積分の導関数

$F(x) = \int_a^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$ とおく。これは $t = a$ から $t = x$ までの $y = \mathrm{f}(t)$ の下の面積である。x を小さな量 h だけ増やすと、幅 h の細い帯が付け加わる。



この帯の面積は $F(x+h) - F(x)$ である。f が連続（continuous）ならば、$[x, x+h]$ 上で曲線は $\mathrm{f}(x)$ から小さな量 $\varepsilon(h)$ 以内にとどまる。ここで $h \to 0$ のとき $\varepsilon(h) \to 0$ であ

る。したがって、帯は高さ $\mathrm{f}(x) \pm \varepsilon(h)$ の長方形の間に挟まれる。

$$\big(\mathrm{f}(x) - \varepsilon(h)\big)h \le F(x+h) - F(x) \le \big(\mathrm{f}(x) + \varepsilon(h)\big)h.$$

$h > 0$ で割り（$h < 0$ の場合も、帯が左側にあるだけで同様である）、$h \to 0$ とすると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \mathrm{f}(x).$$

a が現れないことに注意しよう。下端を変えても、F に定数が加わるだけである。

方程式 $\mathrm{f}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t + 1$

上の結果から右辺は微分可能なので、f も微分可能であり、両辺を微分すると

$$\mathrm{f}'(x) = \mathrm{f}(x).$$

もとの方程式に $x = 0$ を代入すると、積分は長さ 0 の区間上のものになるので、$\mathrm{f}(0) = 1$ である。

考えてみよう $\mathrm{f}' = \mathrm{f}$ の解が e^x の定数倍以外にないことは、どうすればわかるだろうか？

$g(x) = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{f}(x)$ を考える。積の微分法則（product rule）により

$$g'(x) = \mathrm{e}^{-x}\big(\mathrm{f}'(x) - \mathrm{f}(x)\big) = 0,$$

であるから g は定数であり、$g(0) = \mathrm{f}(0) = 1$ である。よって $\mathrm{e}^{-x}\mathrm{f}(x) = 1$、すなわち求めるとおり $\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^x$ である。（逆に、$\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t + 1 = \mathrm{e}^x - 1 + 1 = \mathrm{e}^x$ であるから、これは確かに解である。）

方程式 $\mathrm{f}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$

前とまったく同様に $\mathrm{f}' = \mathrm{f}$ であるから、$\mathrm{e}^{-x}\mathrm{f}(x)$ は定数である。しかし今度は $x = 0$ とすると $\mathrm{f}(0) = 0$ となるので、その定数は 0 であり、解は

$$\mathrm{f}(x) = 0 \quad \text{すべての} x.$$

に限る。前の方程式の「+1」こそが指数関数の大きさを決めていたのであり、それがなければ零関数しか残らない。

最後の小問

両辺を x で微分する。右辺では x が今度は下端になっており、

$$\int_x^1 t^2\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = -\int_1^x t^2\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \text{よって} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^1 t^2\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = -x^2\mathrm{f}(x).$$

したがって

$$\mathrm{f}(x) = -x^2\mathrm{f}(x) + 1 - x^4,$$
$$(1+x^2)\,\mathrm{f}(x) = 1 - x^4 = (1-x^2)(1+x^2).$$

$1 + x^2 > 0$ であるからこれで割ることができ、

$$\mathrm{f}(x) = 1 - x^2.$$

C を求めるために、与えられた方程式に $x = 0$ を代入する。左辺と項 $x - \frac{x^5}{5}$ は消えて、

$$0 = \int_0^1 t^2(1-t^2)\,\mathrm{d}t + C = \left[\tfrac{t^3}{3} - \tfrac{t^5}{5}\right]_0^1 + C = \tfrac{2}{15} + C,$$

が残る。よって求めるとおり $C = -\frac{2}{15}$ である。

考えてみよう 微分してわかるのは、両辺の導関数が等しいということだけである。$\mathrm{f}(x) = 1 - x^2$、$C = -\frac{2}{15}$ は本当にすべての x で方程式を満たすだろうか？

満たす。この f に対して両辺はすべての x で導関数が等しいので、両辺の差は定数である。そして C は、まさに $x = 0$ で両辺が一致するように選んだのであった。したがって両辺はいたるところで一致する。逆に、どの解も微分した方程式を満たさなければならないので、f としてありうるのは $1 - x^2$ だけである。

検算

- $x = 1$ のとき：左辺は $\int_0^1 (1-t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}$、右辺は $0 + 1 - \frac{1}{5} - \frac{2}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ である。一致する。
- 数値的には、シンプソンの公式（Simpson's rule）により $\int_0^1 t^2(1-t^2)\,\mathrm{d}t \approx 0.133333 = \frac{2}{15}$ が得られ、最後の方程式の両辺は $x = -1.3,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.9,\ 2$ において 10^{-10} の精度で一致する。

よくある間違い

- 変数が**下端**にあるときのマイナス符号を忘れる：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t = -g(x)$。
- $\mathrm{f}' = \mathrm{f}$ を解いて $A\mathrm{e}^x$ で止めてしまう：A を決めるのは、$x = 0$ におけるもとの積分方程式である。
- $\mathrm{f}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ のように、積分変数（ダミー変数（dummy variable））t と端点 x を混同した式を書く。

STEP のその先へ

未知関数が積分の中に現れる方程式を**積分方程式**という。ここで扱ったような端点が変数であるものはヴォルテラ（Volterra）方程式と呼ばれ、微分方程式の初期値問題（initial-value problem）と同値である。大学最初の解析学（analysis）の講義では、リーマン（Riemann）積分の定義から微分積分学の基本定理を丁寧に証明し、上の帯による議論は ε–δ 論法による証明になる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、これをとても読みやすく扱っている。

解答例

STEP I 1992、第 9 問

純粋数学 ・ 微分方程式

> **STEP I 1992、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q9

鍵となる考え方

すべては一つの式から導かれる。すなわち、水の**体積**（volume）の変化率は（流入する割合）から（流出する割合）を引いたものに等しい。相似な三角形（similar triangles）を用いると、体積は深さ x の簡単な関数として表されるので、連鎖律（chain rule）によってこれは x についての微分方程式（differential equation）になる。前半ではこの方程式はきれいに変数分離できる。後半では方程式を解くのではなく、$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ の符号と、それが 0 になる深さから振る舞いを読み取る。

解答

円錐から水が抜ける場合

水の深さが x cm のとき、水はフィルター全体と相似な、高さ x、半径 r の小さな円錐を満たしている。相似な三角形より $r/x = a/H$ であるから $r = ax/H$ であり、水の体積は

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 x = \frac{\pi a^2 x^3}{3H^2}.$$

である。連鎖律により

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi a^2 x^2}{H^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

水は割合 Ax で流出するだけなので、$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = -Ax$ である。よって

$$\frac{\pi a^2 x^2}{H^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -Ax \quad\Longrightarrow\quad x\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{AH^2}{\pi a^2},$$

となる。ここで x で割ったが、これは円錐の中にまだ水がある間（$x > 0$）は許される。左辺は $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$ であるから、$\frac{1}{2}x^2$ は**一定の**割合 $AH^2/(\pi a^2)$ で減少する。その値は $\frac{1}{2}h^2$

から始まり、0 に達したとき円錐は空になるので、かかる時間は

$$T = \frac{\frac{1}{2}h^2}{AH^2/(\pi a^2)} = \frac{\pi a^2 h^2}{2AH^2} \text{ 秒},$$

であり、これが示すべきことであった。（同じことであるが、変数分離（separation of variables）によって $\int_h^0 x\,\mathrm{d}x = -\frac{AH^2}{\pi a^2}\int_0^T \mathrm{d}t$ としてもよい。）

水を注ぎ入れる場合

今度は $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = B - Ax$ であるから

$$\frac{\pi a^2 x^2}{H^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B - Ax, \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{H^2(B-Ax)}{\pi a^2 x^2}.$$

$x > 0$ より因子 $H^2/(\pi a^2 x^2)$ は正であるから、$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ の符号は $B - Ax$ の符号と一致する。$c = B/A$ とおくと

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} > 0 \text{ となるのは} x < c, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ となるのは} x = c, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} < 0 \text{ となるのは} x > c.$$

したがって $x = c$ は流入と流出がちょうど釣り合う平衡（equilibrium）の深さであり、水位は常に c に**向かって**動く。これがフィルターの内部で物理的に実現できるのは $c \le H$ のときに限られるので、場合分けは c を h および H と比較することで決まる。

考えてみよう 水位が c に向かって動くとき、実際に c に到達するのだろうか。それとも行き過ぎるのだろうか。

行き過ぎることはない。c を通り越すためには、まず c に等しくならなければならないが、そこでは $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$ である。実は、有限の時間で c に到達することもない。t を x の関数とみなすと、h から h と c の間の深さ X に達するまでの時間は

$$t = \int_h^X \frac{\pi a^2 x^2}{H^2(B-Ax)}\,\mathrm{d}x = \int_h^X \frac{\pi a^2 x^2}{AH^2(c-x)}\,\mathrm{d}x.$$

である。$x = c$ の近くでは被積分関数（integrand）は $\frac{\pi a^2 c^2}{AH^2}\cdot\frac{1}{c-x}$ のように振る舞い、その積分は $-\ln(c-x)$ の定数倍である。これは $X \to c$ のとき無限大に発散する。したがって水位はますますゆっくりと c に近づき、「無限の時間の後に」しか到達しない。どちらの側から近づく場合も同じ議論が成り立つ。

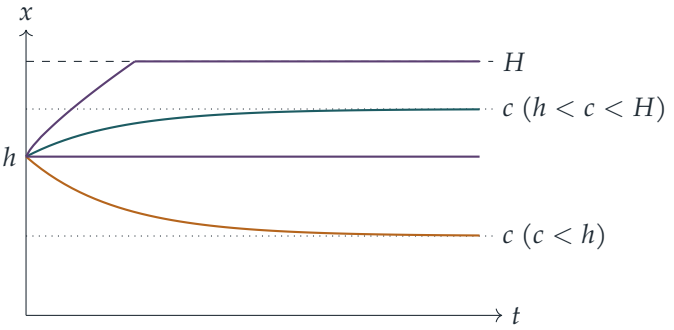
以上より、場合分けは次のようになる。

- $B < Ah$（したがって $c < h$）。最初は $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t < 0$ であり、水位は次第に遅くなりながら下がり、$c = B/A$ に上から近づくが到達はしない。特に、前半とは異なり、円錐が空になることはない（$c > 0$ であるから）。

- $B = Ah$（したがって $c = h$）。このときは最初から $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$ である。水は流出するのと同じ速さで流入し、水位は h のままである。
- $Ah < B < AH$（したがって $h < c < H$）。水位は次第に遅くなりながら上がり、B/A に下から近づく。水位は H より下にとどまるので、フィルターからあふれることはない。
- $B = AH$（したがって $c = H$）。水位は縁に向かって上がり H に近づくが、上の議論により決して到達しないので、（このモデルでは）あふれることはない。
- $B > AH$（したがって $c > H$）。このときすべての $x \leq H$ に対して $B - Ax \geq B - AH > 0$ であり、また $x^2 \leq H^2$ であるから

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \geq \frac{H^2(B - AH)}{\pi a^2 H^2} = \frac{B - AH}{\pi a^2} > 0.$$

  となる。水位の上昇速度は正の定数で下から押さえられるので、水位は有限の時間、高々 $\pi a^2(H - h)/(B - AH)$ 秒で縁に達する。その後フィルターはあふれる。水位は H のままで、余分な $B - AH\ \mathrm{cm^3\,s^{-1}}$ が上からこぼれ出る。



この図は典型的な振る舞いを示している。c まで下がる場合（琥珀色）、h のままか有限時間の後にあふれる場合（紫）、c まで上がる場合（青緑）である。

検算

- $B = 0$ とおくと $c = 0$ となり、水位は 0 に向かって下がる。これは前半と一致する（前半では水位は実際に 0 に**到達する**。流出 Ax は x に比例する一方、体積は x^3 のように振る舞うので、$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -AH^2/(\pi a^2 x)$ は 0 に収束しないからである）。
- 数値的に $a = 3$、$H = 8$、$A = 0.7$、$h = 5$ とすると、公式から $T \approx 7.889\,\mathrm{s}$ が得られ、x^2 を時間について逐次計算しても同じ値になる。後半の方程式を数値的に積分すると、それぞれの場合が確認できる。たとえば $B/A = 9 > H$ のとき水位は約

41.5 s 後に H に達し、$B/A = 7$ のときは、7 との差が ε 以内になるまでの時間が、ε を 10 で割るごとに約 71 s ずつ増える。これは上で予測した対数的な増加である。

よくある間違い

- 高さ x の相似な円錐の体積ではなく、円柱の体積 $\pi a^2 x$ を使ってしまう。
- 水位が有限の時間で B/A に到達する、あるいは行き過ぎて振動する、と主張してしまう。
- 縁のことを忘れる。平衡 B/A に向かえるのは $B/A \leq H$ のときだけであり、そうでなければフィルターはあふれる。

STEP のその先へ

後半は微分方程式の**定性的**理論（qualitative theory）の入り口である。$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = f(x)$ に対しては、何も解かずに、平衡点（f の零点）を求め、その両側での f の符号から安定性（stability）を判定し、解の一意性（uniqueness）を用いて平衡点には近づくが決して横切らないことを示すことができる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）は、この考え方に沿って自励系の方程式（autonomous equations）と安定性を扱っている。

解答例

STEP I 1992、第 10 問

力学 ・ 反動と運動量

> **STEP I 1992、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q10

鍵となる考え方

力 P は弾丸（projectile）を前方へ押すが、ニュートン（Newton）の第 3 法則（Newton's third law）により、弾丸も同じ大きさ P の力で大砲を後方へ押し返す。そして大砲の反動（recoil）を止める水平方向の力は何もない。したがって、弾丸が砲身の中にある間に進む距離は、地面に対して l なのではない。l だけ進むのは大砲に対してである。どちらの物体も加速度は一定なので、相対運動（relative motion）で考えるのが最も見通しのよい方法である。

解答

モデル化

弾丸と大砲を同一の水平直線上を運動する質点とみなし、床はなめらかであるとし（大砲は「自由に滑る」）、砲身に沿って弾丸と砲身の間にはたらく力は一定値 P であるとする。鉛直方向については、重力は垂直抗力（床が大砲に及ぼす力、砲身が弾丸に及ぼす力）とつり合っているので、水平方向の運動には関与しない。発射の向きを正の向きとする。



2 つの加速度

弾丸が砲身の中にある間、弾丸にはたらく水平方向の力は前向きの P のみであり、大砲にはたらく水平方向の力は後ろ向きの反作用 P のみである（ニュートンの第 3 法則による。床はなめらかである）。ニュートンの第 2 法則（Newton's second law）より、加速度は

$$a_{\text{弾丸}} = \frac{P}{m}, \qquad a_{\text{大砲}} = -\frac{P}{M}.$$

である。どちらも一定であり、どちらの物体も静止状態から動き始める。

> **考えてみよう** 弾丸はどれだけの距離にわたって加速されるのか。l だろうか、それとも別の値だろうか。

砲身の長さは l であるが、砲身そのものが後方へ動く。弾丸が砲口から出るのは、**大砲に対する**変位が l に達したときである。大砲に対して、弾丸は静止状態から一定の加速度

$$a_{\text{相対}} = \frac{P}{m} - \left(-\frac{P}{M}\right) = \frac{P}{m} + \frac{P}{M} = \frac{P(M+m)}{mM}.$$

で運動を始める。

砲身内にある時間

相対運動に $s = \frac{1}{2}at^2$ を用いると、弾丸が砲口から出る時刻 T は

$$l = \frac{1}{2} \cdot \frac{P(M+m)}{mM} T^2, \qquad \text{よって} \qquad T^2 = \frac{2mMl}{P(M+m)}.$$

を満たす。

発射速度

地面に対して、弾丸は静止状態から一定の加速度 P/m で運動するので、時刻 T における速さ v は

$$\begin{aligned} v^2 = \left(\frac{P}{m}T\right)^2 &= \frac{P^2}{m^2} \cdot \frac{2mMl}{P(M+m)} \\ &= \frac{2PMl}{m(M+m)}. \end{aligned}$$

を満たす。$v > 0$ であるから

$$v = \sqrt{\frac{2PMl}{m(M+m)}},$$

となり、これが求める結果である。

別解：エネルギーと運動量

同じ答えは保存則からも得られる。水平方向の外力ははたらかないので、水平方向の運動量は保存される（conservation of momentum）。弾丸が砲口から出る瞬間に大砲が後ろ向きに速さ V をもつとすると、$mv = MV$ である。弾丸が砲身の中にある間に、弾丸が前方へ x、大砲が後方へ X だけ動くとすると、$x + X = l$ である。弾丸にはたらく力がする仕事は Px であり、大砲にはたらく反作用は大砲の運動の向きと同じ向きなので、その仕事は PX である。合わせて $P(x + X) = Pl$ の仕事がなされる。よって

$$Pl = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}MV^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}M\left(\frac{mv}{M}\right)^2 = \tfrac{1}{2}mv^2\,\frac{M+m}{M},$$

であり、ここからもやはり $v^2 = \dfrac{2PMl}{m(M+m)}$ が得られる。

検算

- 重い大砲：$M \to \infty$ のとき因子 $M/(M+m) \to 1$ となり、$v \to \sqrt{2Pl/m}$ となる。これは固定された大砲から撃ったときの速さ（仕事 Pl がすべて弾丸に与えられる場合）である。反動する大砲では、エネルギーの一部が反動に使われるので、速さは常にわずかに小さくなる。これは当然そうあるべき結果である。
- 単位：Pl はエネルギーであり、Pl/m の単位は $\mathrm{m^2\,s^{-2}}$ であるから、v は速さである。
- 数値：$m = 0.1$、$M = 0.9$、$P = 9$、$l = 0.5$（SI 単位）とすると、公式から $v = 9\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ が得られ、大砲は $1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ で反動する。このとき運動量は $0.1 \times 9 = 0.9 \times 1$、運動エネルギーは $4.05 + 0.45 = 4.5 = Pl$ である。両物体の運動を逐次的に数値シミュレーションし、両者の距離が l に達した時点で止めると、m、M、P、l の多くの無作為な値に対して公式と一致する。

よくある間違い

- $v^2 = 2(P/m)l$ を用いること。これは l を地面に対する弾丸の移動距離とみなし、反動を無視している。
- ニュートンの第 3 法則を忘れ、大砲を静止したままにしてしまうこと。大砲は自由に滑るので、必ず反動する。
- エネルギーを用いる方法で、仕事を P と弾丸の地面に対する変位の積だけとしてしまうこと。大砲にはたらく反作用も仕事をする。

STEP のその先へ

これは二体問題（two-body problem）であり、相対加速度 $P(M+m)/(mM)$ は P を**換算質量**（reduced mass）$\mu = mM/(m+M)$ で割ったものである。互いの間でのみ相互作用する 2 つの物体は、相対的には質量 μ の 1 つの物体のようにふるまう。同じ考え方で惑星の軌道、連星、衝突する粒子を扱うことができ、ロケットや反動の問題の基礎にもなっている。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、換算質量とここで用いた運動量の考え方の両方が展開されている。

解答例

STEP I 1992、第 11 問

力学 ・ 弾性ひものつり合い

> **STEP I 1992、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q11

鍵となる考え方

各質点は釣り合い（equilibrium）の状態にあるので、そのすぐ上の糸の張力（tension）は、すぐ下の糸の張力より mg だけ大きい。これによって 3 つの張力が結びつき、フックの法則（Hooke's law）によって張力は伸び（extension）に置き換えられる。必要な追加の事実は幾何的なものただ一つである。すなわち、伸びた 3 本の糸の長さの和は部屋の高さに等しくなければならない。高さが求まれば、「$CD = a$」とは単に、いちばん下の糸に張力がはたらいていないということを意味する。

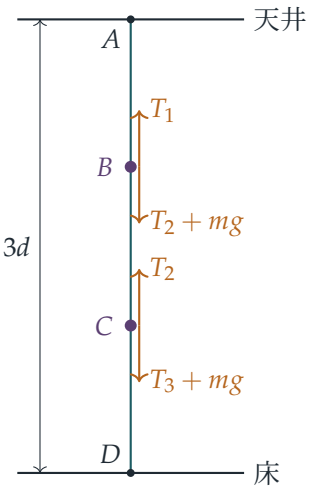
解答

モデル

糸は軽く弾性をもち、伸びているときはフックの法則（張力 $= \lambda \times$ 伸び $/ a$）に従う。質点は静止している。AB、BC、CD の張力をそれぞれ T_1、T_2、T_3、伸びを x_1、x_2、x_3 と書くと、$T_i = \lambda x_i / a$ である。重さ mg だけによって生じる伸びに名前をつけておくと便利である：

$$e = \frac{mga}{\lambda}.$$

まず 3 本の糸がすべてぴんと張っている（taut）と仮定し、これが成り立つのはどのような場合かを後で確かめる。床からの高さを y_B、y_C とする。



B と C の高さ

各質点について鉛直方向の力の釣り合いを考える（上の糸は上向きに引き、下の糸と重力は下向きに引く）：

$$B: \quad T_1 = T_2 + mg, \qquad C: \quad T_2 = T_3 + mg.$$

λ/a で割ると、これらは伸びについての式になる：

$$x_1 = x_2 + e, \qquad x_2 = x_3 + e, \qquad \text{よって} \qquad x_2 = x_3 + e, \quad x_1 = x_3 + 2e.$$

3 本の糸の長さの和は部屋の高さに等しい：

$$3a + x_1 + x_2 + x_3 = 3d \quad \Longrightarrow \quad 3x_3 + 3e = 3d - 3a \quad \Longrightarrow \quad x_3 = d - a - e.$$

すると $x_2 = d - a$、$x_1 = d - a + e$ である。高さは下側の糸の長さから求まる：

$$y_C = CD = a + x_3 = d - e = d - \frac{mga}{\lambda},$$
$$y_B = y_C + BC = (d - e) + (a + d - a) = 2d - \frac{mga}{\lambda}.$$

AB について確認すると、$3d - y_B = d + e = a + x_1$ となり、確かにそうなるべき値になっている。

考えてみよう これらの答えが実際に正しいのはどのような場合か？

すべての糸がぴんと張っていると仮定したので、すべての伸びが非負でなければならない。最も厳しい条件はいちばん下の糸に関するもので、$x_3 \geq 0$、すなわち

$$\frac{mga}{\lambda} \leq d - a.$$

である（このとき $x_2 = d - a \geq 0$ と $x_1 > 0$ は自動的に成り立つ）。最初にたるむ（slack）のが CD であるのは理にかなっている。CD は何も支えておらず、部屋の高さによって引き伸ばされていることだけがこの糸を張らせているからである。$mga/\lambda > d - a$ ならば糸 CD はたるみ、系は単に A から 2 つの質点がぶら下がっているだけになる。このとき $T_2 = mg$、$T_1 = 2mg$ なので $AB = a + 2e$、$BC = a + e$ となり、これがまだ床より上にあれば $y_B = 3d - a - 2e$、$y_C = 3d - 2a - 3e$ である。問題が意図しているのは、すべての糸が張っている主要な場合である。

$CD = a$ となるのはいつか？

糸 CD がちょうど自然長（natural length）になるのは、張力がなくちょうど張った状態、すなわち $T_3 = 0$、つまり $x_3 = 0$ のときである。これは上の 2 つの場合の境界であり、どちらの公式からも

$$y_C = a \iff d - \frac{mga}{\lambda} = a \iff m = \frac{\lambda(d-a)}{ga}.$$

が得られる。物理的には、このとき C にある質点は完全に BC によって支えられており、$T_2 = mg$、$T_1 = 2mg$ である。

適切な質量が存在するのは、この m の値が正であるとき、すなわち $d > a$ のときに限る。逆に、$d \leq a$ ならばどんな正の m もうまくいかない。もしすべての糸が張っているとすると $x_2 = d - a \geq 0$ かつ $x_3 = d - a - e < 0$ が必要になるが、これは不可能である。したがって CD はたるみ、C は高さ $3d - 2a - 3e < 3a - 2a = a$ にぶら下がる（あるいは床の上に乗る）ので、$CD < a$ となる。よって求める値の集合は

$$\{\, d : d > a \,\}.$$

である。このような d に対して $y_C = a$、$y_B = d + a$、$AB = 2d - a$ が得られる。

検算

- 単位：mga/λ は力 × 長さ ÷ 力なので長さであり、d から引くものとして当然そうでなければならない。
- $m = 0$ のとき、3 本の糸は伸びを等しく分け合う。それぞれの長さは d となり、C は d、B は $2d$ の位置にくる。質量を加えると、BC の伸びは $d - a$ のままなので、両方の質点が同じ量 e だけ下がる。
- 数値的に、a、λ、d、m を無作為に 250 通り選び、$0 \leq y_C \leq y_B \leq 3d$ の範囲で位置エネルギー（potential energy）（重力によるものと弾性によるものの和、糸がたるむことも許す）を最小化したところ、張った場合と CD がたるんだ場合の両方で、高さが

10^{-14} 以内の誤差で再現された。$a = 1$、$\lambda = 10$、$d = 2$、$m = \lambda(d-a)/(ga) \approx 1.020$ とすると $CD = 1.000000$、$y_B = 3.000000$ が得られた。また $d \le a$ のときには、どの正の m でも $CD = a$ とはならなかった。

よくある間違い

- 張力を $\lambda\times$ 伸び $/a$ ではなく $\lambda\times$（伸びた長さ）$/a$ と書いてしまう。
- 全長が部屋によって固定されていることを忘れる：$\sum(a + x_i) = 3d$ がなければ、釣り合いの式だけでは伸びは決まらない。
- すべての糸に張力がはたらいていなければならないと思い込む。糸はたるむことがあり、$CD = a$ となるのはまさにたるみの境界においてである。

STEP のその先へ

これは小さな不静定構造（statically indeterminate structure）である。質点の釣り合いだけでは張力は決まらず、適合条件（compatibility condition）（長さの和が合うこと）も必要であった。同じ考え方を行列の形で用いるのが、技術者がばねや棒からなる骨組みを解析する方法である。もう一つの取り組み方は全位置エネルギーを最小化することであり、数値的な検算はこの方法で行った。この変分的（variational）な見方は、より進んだ力学において中心的な役割を果たす。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、ばね、釣り合い、位置エネルギーを丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 1992、第 12 問

力学 ・ 摩擦のある静力学

> **STEP I 1992、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q12

鍵となる考え方

2 本のはしごは軽い（light）ので、一方のはしごについて役に立つ方程式を得るには、蝶番（hinge）A のまわりのモーメント（moment）をとるしかない。そうすれば、もう一方のはしごから受ける未知の力と A にかかる荷重が消える。はしごの足は互いに離れるように滑ろうとし、この外向きの押す力には、摩擦（friction）と棒の両方が抵抗する。倒壊の瞬間には摩擦は出せる限りの力を出しているので、残りは棒が担わなければならない。

解答

モデル

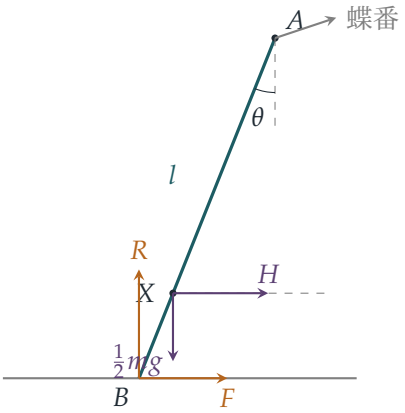
はしごは軽い棒で、A でなめらかな蝶番によってつながれている。木の棒 XY は質量 m の一様な（uniform）棒で、X と Y でピン接合（pin-jointed）されている。質量 M は A にある質点（particle）である。$t = \tan\theta$ とおく。装置全体の左右対称性により、2 つの足には等しい垂直抗力（normal reaction）R がはたらき、脚立（step-ladder）全体について鉛直方向の力を分解すると

$$2R = (M+m)g \quad \Longrightarrow \quad R = \tfrac{1}{2}(M+m)g.$$

はしごは外側に傾いているので、足は互いに離れるように滑ろうとする。したがって、各足にはたらく摩擦力 F は内向きである。

棒から受ける力。 棒は水平で、それ自体に重さがあるので、両端にはたらく力は棒に沿った方向では**ない**。対称性により、各端は棒の重さの半分を支えるので、はしごは

X で棒に上向きの力 $\frac{1}{2}mg$ と、外向きの水平な力 H（張力（tension））を及ぼす。ニュートンの第三法則（Newton's third law）により、棒ははしご AB を X で、内向きの水平な力 H と下向きの鉛直な力 $\frac{1}{2}mg$ で引く。



はしご AB についての A のまわりのモーメント

A から測ると、足 B は水平方向に $l\sin\theta$、下方向に $l\cos\theta$ の位置にあり、X は水平方向に $\frac{3}{4}l\sin\theta$、下方向に $\frac{3}{4}l\cos\theta$ の位置にある。A のまわりのモーメントをとる（A にはたらく力はすべてモーメントをもたない）：

- R ははしごを一方の向きに回し、そのモーメントは $Rl\sin\theta$ である。
- F と H（どちらも内向きで、A より下ではたらく）ははしごを逆の向きに回し、そのモーメントは $Fl\cos\theta$ と $H\cdot\frac{3}{4}l\cos\theta$ である。
- X での下向きの力 $\frac{1}{2}mg$ は R と同じ側にはたらくが向きは逆であり、R に逆らうモーメント $\frac{1}{2}mg\cdot\frac{3}{4}l\sin\theta$ をもつ。

よって

$$Fl\cos\theta+\tfrac{3}{4}Hl\cos\theta=Rl\sin\theta-\tfrac{3}{8}mgl\sin\theta,$$

であり、$l\cos\theta$ で割って R を代入すると

$$F+\tfrac{3}{4}H=t\left(\tfrac{1}{2}(M+m)g-\tfrac{3}{8}mg\right)=t\left(\tfrac{1}{2}M+\tfrac{1}{8}m\right)g. \qquad (*)$$

考えてみよう 摩擦と棒はどちらも足を内側に押さえている。F としてどの値を用いればよいだろうか？

式 $(*)$ は、摩擦と張力が一定量の仕事を分担していることを示している。摩擦が多く担えば担うほど、棒が担う分は少なくてすむ。したがって、許される範囲の摩擦

（$F \leq \mu R$）のうちどれかで $H \leq T$ となる限り、脚立は持ちこたえる。そして、最小の張力は最大の摩擦 $F = \mu R$ のときに得られる。これが、問題文で仮定してよいとされている、倒壊時の限界状態である。$F = \mu R = \frac{1}{2}\mu(M+m)g$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}\tfrac{3}{4}H &= t\left(\tfrac{1}{2}M + \tfrac{1}{8}m\right)g - \tfrac{1}{2}\mu(M+m)g \\ &= \tfrac{1}{2}(t-\mu)Mg + \tfrac{1}{8}(t-4\mu)mg,\end{aligned}$$

よって

$$H = \tfrac{2}{3}(t-\mu)Mg + \tfrac{1}{6}(t-4\mu)mg.$$

$t > \mu$ であるから、H は M とともに増加する。棒がなければ、摩擦だけでは荷重さえ支えられない（$m = 0$ のとき、$t \leq \mu$ が必要になる）。

安全に置ける最大の質量

棒が持ちこたえるのは $H \leq T$、すなわち

$$\tfrac{2}{3}(t-\mu)Mg \leq T - \tfrac{1}{6}(t-4\mu)mg,$$

のときであり、正の量 $\frac{2}{3}(t-\mu)g$ で割ると

$$\boxed{M \leq \frac{6T - (\tan\theta - 4\mu)mg}{4(\tan\theta - \mu)g}}$$

したがって、A に安全に置ける最大の質量は $\dfrac{6T - (\tan\theta - 4\mu)mg}{4(\tan\theta - \mu)g}$ である。

自重による破壊

A に何も置かない場合（$M = 0$）、必要な張力は $H = \frac{1}{6}(t-4\mu)mg$ であるから、棒が破断するのは

$$\tfrac{1}{6}(\tan\theta - 4\mu)mg > T \iff \tan\theta > \frac{6T}{mg} + 4\mu,$$

のときであり、これが示すべきことであった。この場合、上で求めた M の上限は負になる。脚立は自分自身さえ支えられないので、どんな荷重も安全ではない。

検算

- T が非常に大きければ安全な質量も非常に大きい。また、$\tan\theta$ が μ をわずかに上回るだけなら分母は非常に小さく、やはりほとんどどんな荷重も安全である。摩擦だけでほぼ足りるからである。

- 静力学の完全な問題（両方のはしご、棒、A のピンを含み、12 個の未知の力成分と両足での限界摩擦をもつ）を、2000 通りのランダムな配置について数値的に解いたところ、張力の公式が約 10^{-12} の精度で再現された。たとえば、$\theta = 45°$、$\mu = 0.2$、$m = 2\,\mathrm{kg}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ のとき、$M = 0$ での棒の張力は $\frac{1}{6}(0.2)(19.6) \approx 0.653\,\mathrm{N}$ である。

よくある間違い

- 棒を軽い連結棒として扱い、X での力が純粋に XY に沿った方向だとしてしまう。棒には重さがあるので、各端は鉛直方向に $\frac{1}{2}mg$ も支えている。$\frac{1}{8}m$ と 4μ はここから生じる。
- 足での摩擦を外向きにしてしまう。$\tan\theta > \mu$ であるから足は開こうとするので、摩擦は内向きにはたらき、棒を助ける。

STEP のその先へ

このような骨組みのように、つり合い（equilibrium）の方程式だけではすべての力が定まらない（ここでは摩擦と張力が互いに融通し合える）ものを、**静的不定**（statically indeterminate）であるという。技術者はこのような場合を、追加の情報によって解決する。ここでのような限界条件や、部材の弾性などである。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、力、トルク（torque）、つり合いについての理解を深めるのによい本である。

解答例

STEP I 1992、第 13 問

力学 ・ 脱出速度と動径方向の落下

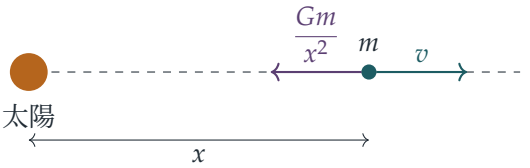
> **STEP I 1992、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q13

鍵となる考え方

力は距離 x のみに依存するので、自然な道具は運動方程式（equation of motion）を $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ の形で書くことである。これはただちに積分でき、速さと距離を結びつけるエネルギー方程式（energy equation）が得られる。前半では、v^2 が決して負にならないという事実によって、この方程式が x の上限を与える。後半では、エネルギー方程式から $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ が x の関数として得られ、変数分離（separation of variables）によって時間が求まる。

解答

太陽は固定されているとし、彗星を質点とみなす。また、与えられた引力以外の力ははたらかないものとする。引力は彗星と太陽を結ぶ直線に沿ってはたらくので、太陽から真っすぐ遠ざかる向きに運動している（あるいは静止している）彗星は、その直線上を運動し続ける。したがって x は一直線上の座標であり、$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ とおいて、v が正のときは太陽から遠ざかる向きを表すものとする。



エネルギー方程式

直線に沿ってニュートン（Newton）の第二法則を適用すると、力は太陽に向かう向き（x が減少する向き）なので、

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{Gm}{x^2}.$$

加速度を $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ と書き、m を約すと、

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{G}{x^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \tfrac{1}{2}v^2 = \frac{G}{x} + C$$

となる。ここで C は定数である。これは彗星がどちら向きに運動していても、運動の全期間を通じて成り立つ。（これは単位質量あたりのエネルギー保存則であり、運動エネルギー $\frac{1}{2}v^2$ と位置エネルギー $-G/x$ の和が一定であることを表す。）

x がいくらでも大きくなるための条件

与えられた時刻において $x = h$、$v = V$ であるから、$C = \frac{1}{2}V^2 - \dfrac{G}{h}$ であり、それ以後のすべての時刻で

$$v^2 = V^2 - \frac{2G}{h} + \frac{2G}{x}.$$

対偶（contrapositive）を証明する。すなわち、$V^2 < 2G/h$ ならば x は有界であることを示す。

考えてみよう 彗星はその後、原理的にはさまざまな動き方をしうる。たった一つの方程式で、どうしてすべての時刻にわたって x を押さえられるのだろうか。

彗星がどのように運動していようとも、各瞬間に $v^2 \geq 0$ が成り立つからである。$V^2 < 2G/h$ と仮定し、$k = \dfrac{2G}{h} - V^2 > 0$ とおく。するとエネルギー方程式より

$$\frac{2G}{x} = v^2 + k \geq k, \qquad \text{よって} \qquad x \leq \frac{2G}{k} = \frac{2Gh}{2G - hV^2}$$

がそれ以後のすべての時刻で成り立つ（$x > 0$ かつ $k > 0$ なので、両辺に掛けて分母を払ってよい）。したがって x は決して一定の値 $2Gh/(2G - hV^2)$ を超えない。彗星はこの距離まで上昇してそこで $v = 0$ となり、その後落下して戻ってくる。ゆえに、$V^2 \geq 2G/h$ でない限り x はいくらでも大きくなることはできない。これが示すべきことであった。

（逆（converse）も成り立つ。$V^2 \geq 2G/h$ ならば、彗星が外向きに運動している間は $v^2 \geq 2G/x > 0$ なので、彗星は決して止まらない。さらに $x \leq X$ である限り $v^2 \geq 2G/x \geq 2G/X$ なので、どんな距離 X よりも内側にいつまでもとどまり続けることはできない。これが脱出速度（escape speed）である。）

太陽に落下するまでの時間

次に、彗星は非常に遠い距離 D から静止した状態で出発する。静止状態から放たれると、彗星は太陽に向かって真っすぐ落下する。$x = D$ で $v = 0$ としてエネルギー方程式を用いると、

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{G}{x} - \frac{G}{D}.$$

考えてみよう　「非常に遠い距離」とは、定数にとって何を意味するのだろうか。

それは $D \to \infty$ とすることを意味する。すると $G/D \to 0$ となり、定数は 0 になる。つまり彗星の全エネルギーは 0 である。（D が大きいが有限であれば、彗星はわずかに遅くなり、時間はわずかに長くなるが、その差は $D \to \infty$ のとき 0 に収束する。）よって距離 x における速さは $\sqrt{2G/x}$ であり、x は減少しているので、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{2G}{x}} \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{2G}\,\mathrm{d}t.$$

$x = h$ から $x = 0$ まで進むのにかかる時間を T とする。積分すると、

$$\sqrt{2G}\,T = \int_0^h \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{3}h^{3/2},$$

よって

$$T = \frac{2h^{3/2}}{3\sqrt{2G}} = \frac{h}{3}\sqrt{\frac{2h}{G}}.$$

（被積分関数 $\sqrt{x}$ は $x = 0$ においてまったく問題なく振る舞うので、速さが限りなく大きくなるにもかかわらず、彗星は実際に有限の時間で太陽に到達する。）

検算

- 単位：力 Gm/x^2 は質量と加速度の積なので、G の単位は $\mathrm{m^3\,s^{-2}}$ である。すると V^2 と $2G/h$ はいずれも $\mathrm{m^2\,s^{-2}}$ の単位をもち、$h^{3/2}/\sqrt{G}$ の単位は秒である。
- $x = h$ における彗星の速さは $\sqrt{2G/h}$ である。もしこの速さを保ったままなら、かかる時間は $h/\sqrt{2G/h} = \frac{h}{2}\sqrt{2h/G}$ となり、これは T より長い。彗星は加速するのだから、当然そうなるべきである。実際、T はこの値の 3 分の 2 である。
- 数値的に、$G = h = 1$ とする。$x = 1$、$v = \sqrt{1.5}$ から運動を少しずつ進めて計算すると、彗星は $x = 4.000$ で折り返し、$2Gh/(2G - hV^2) = 4$ という予測と一致する。$x = 1$、$v = -\sqrt{2}$ から出発すると、0.4714 後に太陽に到達し、$T = \frac{1}{3}\sqrt{2} \approx 0.47140$ と一致する。無限遠の代わりに $D = 10^6$ から静止状態で出発させても、T は小数第 7 位しか変わらない。

よくある間違い

- $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{2G/x}$ のマイナス符号を忘れ、負の時間が出てしまう、あるいは理由を述べずに 0 から h まで積分してしまう。
- 彗星が減速することだけを示してしまう。遠ざかる彗星はすべて減速するのであり、脱出するものでさえそうである。要点は、$V^2 < 2G/h$ のとき、ある距離より先では v^2 が負になってしまうということである。

STEP のその先へ

量 $\frac{1}{2}v^2 - G/x$ はニュートン重力場における単位質量あたりのエネルギーであり、その符号によって束縛軌道（bound orbit、楕円）か脱出（放物線および双曲線）かが決まる。最後の小問で扱った全エネルギー 0 の落下は、放物線軌道の退化した直線の場合であり、$T \propto h^{3/2}$ はケプラー（Kepler）の第三法則（Kepler's third law）の親戚である。大学 1 年次の軌道に関する講義では、これらすべてを同じエネルギー方程式と角運動量（angular momentum）の方程式から展開する。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、中心力（central force）と軌道を徹底的に扱っている。

解答例

STEP I 1992、第 14 問

確率・統計 ・ 統計的主張の解釈

> **STEP I 1992、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q14

この問題は、*Beyond STEP* の第 13.1 節「**見出しを読み解く**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch13/headlines.html

鍵となる考え方

どの見出しも、ある一つの数値から一足飛びに結論を導いている。それぞれについて、二つの問いを立てるとよい。第一に、同じ種類のものどうしを比べているか。すなわち、同じものを同じ方法で測り、リスクへの曝露量（exposure）に応じて調整しているか。第二に、その差は単なる偶然で説明できないか。第二の問いについては、まれで互いに独立な事象の個数に対するポアソンモデル（Poisson model）が自然な物差しとなる。その標準偏差（standard deviation）は平均の平方根である。このモデルがいつ当てはまり、いつ当てはまらないかを見極めることが、(ii) から (iv) の核心である。

解答

以下では一貫して、「平均して」とは 1974–1989 年の年平均を意味する。すなわち、歩行者の死者は年 1080 人、航空機による死者は年 180 人である。

小問 (i)

「6 倍」という数字は比 $1080/180 = 6$ に由来するが、これはリスクではなく単なる総数どうしを比べたものである。リスクとは曝露量の単位あたりの死者数であり、1 回の移動あたり、1 時間あたり、あるいは移動距離 1 キロメートルあたりなどで測る。ポルダビアではほぼすべての人が毎日道路の近くを歩くが、飛行機に乗る人は比較的少な

く、乗るとしてもたまにである。安全性を比べるには、次のようなものが必要である。

$$\frac{\text{歩行者の死者数}}{\text{歩いた総時間（または総距離 km）}} \quad \text{対} \quad \frac{\text{航空機による死者数}}{\text{飛行した総時間（または総距離 km）}},$$

しかし見出しからは、どちらの分母も得られない。測り方によっては、結論が逆になることさえありうる。距離あたりで見れば飛行機は非常に安全に見えるが、時間あたりや 1 回の移動あたりで見れば、それほど安全には見えないかもしれない。

ほかにも問題がある。ここでいう「歩くこと」の実態は、徒歩中に車両にはねられることであり、この数値は人通りの少ない場所の歩行者については何も語らない。航空機による死者には乗客だけでなく乗務員も含まれる。また、ある期間の平均値によって 1991 年の安全性について何かを「証明」することはできない。せいぜい 1974–1989 年についての証拠になるだけである。

小問 (ii)

一見すると、125 は平均の 180 を大きく下回っている。この減少は偶然以上のものだろうか。

もし死亡が一人ずつ独立に起こるのであれば、平均 180 のポアソンモデルが妥当であろう。その標準偏差は $\sqrt{180} \approx 13.4$ であるから、125 は平均より約 4.1 標準偏差下にあり、偶然に起こる可能性は非常に低い（$P(X \leq 125) \approx 10^{-5}$）。

しかし、航空機による死亡は一人ずつ起こるのではない。死亡はまとまって生じ、一度の墜落で数十人から数百人が亡くなりうる。自然なモデルは、**死亡事故**の件数がポアソン分布に従い、各事故がランダムな人数の死者を出すというものである。これにより、ばらつきは大幅に大きくなる。例として、死亡事故が平均して年 6 件あり、各事故で 30 人が亡くなるとしよう。すると年間の死者数は $N \sim \mathrm{Po}(6)$ として $30N$ となり、その標準偏差は $30\sqrt{6} \approx 73$ であって、

$$P(\text{死者数} \leq 125) = P(N \leq 4) \approx 0.29.$$

この（説明のための）数値のもとでは、死者が 125 人の年はまったく普通である。事故が通常より 1 件か 2 件少なければよいだけだからである。各事故の規模もばらつくとすれば、散らばりはさらに大きくなる。

したがって、ある一年の数値からわかることはごくわずかである。1990 年にどれだけ飛行が行われたか（航空交通量が減っていれば、いずれにせよ死者は減ると予想される）、さらに真の傾向があるかどうかを見るために複数年の数値も知りたいところである。見出しの主張は裏づけられていない。

小問 (iii)

ここには、別々の誤りが二つある。

一日だけでは増加を示せない。「増えている」とは時間的な傾向についての主張であり、ある一日の数値はまったく比較を与えない。長期間にわたる日ごと（あるいは年ごと）の数値が必要である。

7人はそもそも珍しくない。手元にある道路関係の数値は歩行者についてのものだけである。すなわち年1080人、つまり

$$\lambda = \frac{1080}{365} \approx 2.96 \text{ per day.}$$

歩行者の死亡はポアソン分布でかなりよくモデル化できる。まれであり、ほとんどが一つの事故につき一人であり、おおむね独立だからである。ある日に亡くなる歩行者の数を $X \sim \text{Po}(2.96)$ とする。すると

$$P(X \geq 7) = 1 - \sum_{k=0}^{6} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \approx 0.031,$$

となるから、歩行者が少なくとも7人亡くなる日は、年におよそ $365 \times 0.031 \approx 11$ 日あると予想される。しかも見出しは「死亡した人」と言っており、運転者、同乗者、自転車に乗る人も含まれる。道路での一日あたりの総死者数の率は2.96より大きいはずであり、7人という数はいっそう目立たないものになる。

> **考えてみよう** 平均の2倍を超える死者が出た日は、憂慮すべきではないのか。

小さな個数については、そうではない。平均が約3のとき、ポアソン分布の標準偏差は $\sqrt{3} \approx 1.7$ であり、平均に比べて大きいので、日によって比率として大きく振れるのは普通のことである。最悪の日を選び出すことは選択効果（selection effect）でもある。一年には365日あり、新聞はいつでもひどい日を見つけられる。曜日も関係する。交通量や徒歩で外出する人の数は、曜日や季節によって変わるからである。一定の率をもつポアソンモデルは、大まかな第一近似にすぎない。

小問 (iv)

これは、本当に検討に値する見出しである。まず統計を、次に解釈を考える。

1350は偶然以上のものか。ここでは (iii) で述べた理由により、ポアソンモデルがよい出発点となる。平均が1080のとき標準偏差は $\sqrt{1080} \approx 32.9$ であり、

$$\frac{1350 - 1080}{32.9} \approx 8.2.$$

平均より8標準偏差上の値は、このモデルのもとで 10^{-15} 程度の確率しかもたない。たとえ年ごとの真の散らばりがポアソン分布の値の2倍や3倍であったとしても（たとえば厳しい冬のために）、一定の率1080と比べれば1350はやはり非常に珍しい。したがって、何かが変化した可能性が非常に高い。問題は、それが何かである。

何と比べているのか。見出しは 1990 年を 1989 年とではなく、16 年間の平均と比べている。もし歩行者の死者数がこの期間に着実に増え続けていたなら、平均 1080 は期間の中ごろ（1981–82 年ごろ）を表すことになり、1990 年はそれを大きく上回るはずである。たとえば、1974 年の約 855 人から毎年 30 人ずつ着実に増えると、平均は 1080 となり、1990 年には約 1335 人となる。この場合、1990 年は「急増」などではまったくなく、長期的な傾向が続いているだけである。その傾向は見出しに値するかもしれないが、それは別の見出しである。二つの筋書きを見分けるには、年ごとの数値が必要である。

曝露量は変化したか。人口が増えたり、車両が増えたり、歩く量が増えたりすれば、1 回の移動あたりの歩行の危険性が少しも増えなくても、死者数は増える。公正な比較は、人口 100 000 人あたりや歩行距離 1 キロメートルあたりの死者数のような率によるものである。

測り方は変化したか。死亡の記録や分類の方法が変われば、見かけ上の急増が生じる。たとえば、事故後どれだけの期間内の死亡を交通事故死として数えるか、誰を歩行者として数えるかが変わった場合や、報告がより正確になった場合である。そのような変化がないことを確かめる必要がある。

言葉の選び方は正しいか。「死傷者（casualties）」とは通常、死亡した人**または**負傷した人を意味する。引用されている数値は死者だけのものであるから、見出しはこの数値が示す以上のことを言っている。負傷者ははるかに多く、まったく異なる傾向を示すかもしれない。

まとめると、1350 への増加は、一定の率 1080 のまわりのポアソン分布による変動で説明するにはあまりにも大きい。しかし、それを「憂慮すべき」と呼ぶ前に、最近の年ごとの数値（突然の増加と長期的傾向を区別するため）と、人口や交通量の数値（個数を率に直すため）が必要である。さらに、定義が変わっていないことも確かめる必要がある。

検算

確率は、ポアソン級数を正確に足し合わせる方法と、2×10^5 回の試行によるシミュレーションとで確かめた。(iii) では、$\lambda = 1080/365$ のとき $P(X \geq 7) = 0.0315$ である（シミュレーションでは 0.0317）。(ii) では、各 30 人の死者を出す事故が年 6 件の場合、$P(N \leq 4) = 0.285$ である。事故の規模が 1 から 59 まで一様にばらつくとすると、シミュレーションにより標準偏差は 84、$P(\text{死者数} \leq 125) \approx 0.28$ となった。ポアソン分布に従う個数についての手早い目安は、平均からおよそ平方根 2 つ分以内の値は目立たないというものである。一日については $3 + 2 \times 1.7 \approx 6.4$ であるから、7 はその範囲をわずかに外れるだけであり、選べる日が 365 日あれば、そのような日は必ず起こる。

一年については $1080 + 2 \times 33 = 1146$ であり、1350 には遠く及ばない。

よくある間違い

- (i) で率ではなく総数を比べること。リスクには必ず分母が必要である。
- (ii) でポアソン分布の標準偏差 $\sqrt{180}$ を用いること。航空機事故による死亡はまとまって起こるので、散らばりははるかに大きい。
- (iv) で「8 標準偏差だから本当の増加だ」で止めてしまい、16 年間の平均との比較、人口、あるいは定義によって説明できないかを問わないこと。

STEP のその先へ

小問 (ii) は**過分散**（overdispersion）に関するものである。ポアソン分布に従う個数のまとまりからなり、各まとまりの大きさがランダムであるような総和は**複合ポアソン**（compound Poisson）確率変数であり、その分散は λ ではなく $\lambda\,\mathrm{E}[S^2]$ である。小問 (iv) は仮説検定（hypothesis testing）へ、さらに統計的に有意（statistically significant）な変化とは実際に何を意味するのかという、はるかに難しい問いへとつながる。どちらも大学の確率・統計の講義の早い段階で登場する。Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）は、ポアソンモデルとその限界について読むのによい本である。

解答例

STEP I 1992、第 15 問

確率・統計 ・ 期待待ち時間

> **STEP I 1992、問 15**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q15

鍵となる考え方

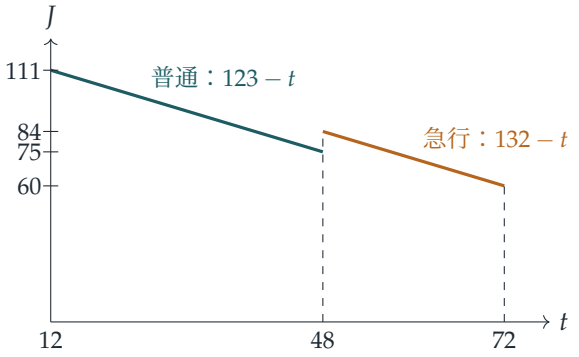
すべては 1 時間ごとに繰り返されるので、1 時間の区間上に一様分布（uniform distribution）する時刻に到着する乗客を考えれば十分である。その 1 時間は 2 つの間隔に分かれる。ある列車の前の間隔に到着した乗客は全員その列車に乗り、各乗客の所要時間は「待ち時間＋乗車時間」である。1 つの間隔の中では待ち時間は一様分布するので、その平均は間隔の半分である。これにより、問題全体が 1 つの間隔の長さについての 2 次式に帰着する。

解答

現在の時刻表

時刻 t を正午からの経過分で測り（どの時刻を基準にしてもよい）、乗客の到着時刻 T は長さ 1 時間の区間 $(12, 72]$ 上の一様分布に従うとする。この範囲にある列車は、48 に出発してロンドンに $48 + 75 = 123$ に着く普通列車と、72（すなわち次の時の 12 分）に出発して $72 + 60 = 132$ に着く急行列車である。

- $12 < T \leq 48$ ならば、最初に乗れる列車は普通列車なので、所要時間は $J = 123 - T$ である。
- $48 < T \leq 72$ ならば、最初に乗れる列車は急行列車なので、$J = 132 - T$ である。



T は $(12, 72]$ 上で密度（density）$\frac{1}{60}$ をもつので、

$$\mathrm{E}(J) = \frac{1}{60}\left[\int_{12}^{48}(123-t)\,\mathrm{d}t + \int_{48}^{72}(132-t)\,\mathrm{d}t\right].$$

被積分関数はいずれも 1 次式なので、各積分は区間の長さと中点での値の積に等しい：

$$\int_{12}^{48}(123-t)\,\mathrm{d}t = 36\times(123-30) = 3348, \qquad \int_{48}^{72}(132-t)\,\mathrm{d}t = 24\times(132-60) = 1728.$$

よって

$$\mathrm{E}(J) = \frac{3348+1728}{60} = \frac{5076}{60} = 84.6 \text{ 分},$$

となり、示すべきことが得られた。

急行列車の時刻の変更

次に、急行列車が毎時 x 分に出発し、普通列車は引き続き 48 分に出発するとする。急行列車の出発から次の普通列車の出発までの分数を d とおくと、$0 \le d < 60$ かつ $d \equiv 48 - x \pmod{60}$ である（元の時刻表では $d = 36$）。このとき 1 時間は次のように分かれる。

- 各普通列車の前にある長さ d の間隔：この乗客は $[0, d)$ 上で一様分布する時間 W だけ待ち、その後 75 分乗車する。
- 各急行列車の前にある長さ $60 - d$ の間隔：この乗客は $[0, 60-d)$ 上で一様に待ち、その後 60 分乗車する。

乗客が 1 つ目の間隔に入る確率は $\frac{d}{60}$、2 つ目に入る確率は $\frac{60-d}{60}$ であり、長さ g の間隔上の一様な待ち時間の平均は $\frac{g}{2}$ である。したがって、乗客がどちらの間隔に到着する

かで条件付け（conditioning）をすると、

$$\begin{aligned} 60\,\mathrm{E}(J) &= d\left(\frac{d}{2}+75\right)+(60-d)\left(\frac{60-d}{2}+60\right) \\ &= \frac{d^2}{2}+75d+\frac{3600-120d+d^2}{2}+3600-60d \\ &= d^2-45d+5400. \end{aligned}$$

確認として、$d=36$ とすると $1296-1620+5400=5076$ となり、前半の結果と一致する。

考えてみよう 最適な間隔が、1 時間を等分する $d=30$ にならないのはなぜだろうか。

普通列車の間隔にいる乗客は、遅い列車に乗るために一人あたり 15 分の損をする。したがってその間隔に入る乗客を減らしたい。つまりその間隔を 30 分より短くしたいが、短くしすぎると急行列車の間隔（したがってその乗客たちの待ち時間）が長くなってしまう。2 次式はこの 2 つの効果の釣り合いをとっているのである。

平方完成（completing the square）をすると、

$$d^2-45d+5400=\left(d-\tfrac{45}{2}\right)^2+5400-\tfrac{2025}{4},$$

となり、これは $d=22.5$ のとき最小となる。この値は $[0,60)$ に含まれる。このとき $60\,\mathrm{E}(J)=\frac{19575}{4}$ なので、平均所要時間の最小値は

$$\mathrm{E}(J)=\frac{19575}{240}=\frac{1305}{16}=81\tfrac{9}{16}\approx 81.56 \text{ 分}.$$

である。急行列車は普通列車の 22.5 分前に出発しなければならないので、

$$x=48-22.5=25.5,$$

すなわち、急行列車は毎時 $25\frac{1}{2}$ 分に出発すべきである。出発時刻を整数の分に限るならば、$x=25$ と $x=26$（$d=23$ と $d=22$）が同等となり、いずれも $\frac{2447}{30}\approx 81.57$ 分を与える。

検算

- $d=0$ のとき 2 本の列車は同時に出発する。全員が急行列車に乗り、平均 30 分待つので、$\mathrm{E}(J)=90$ である。公式からは $\frac{5400}{60}=90$ が得られる。
- $d\to 60$ のとき、普通列車は急行列車の直前に出発し、ほぼ全員を乗せる。平均待ち時間 30 分、乗車時間 75 分で、合計 105 分である。公式からは $\frac{3600-2700+5400}{60}=105$ が得られる。

- 刻み幅 0.1 の格子上のすべての x について、所要時間を 1 時間にわたって数値積分（numerical integration）すると、$x = 12$ で 84.6、$x = 25.5$ で最小値 81.5625 が得られる。

よくある間違い

- 毎時 48 分から 60 分の間に到着した乗客を、1 時間を加えずに「12 分」の急行列車に乗せてしまうこと。彼らの乗る列車は**次の**時の 12 分に出発する。
- 2 つの所要時間を、間隔の長さではなく列車の本数で重み付けして平均してしまうこと。列車が何人の乗客を運ぶかを決めるのは、その列車の前の間隔の長さである。

STEP のその先へ

ここで計算した量は周期的な時刻表における平均待ち時間であり、長い間隔ほど多くの乗客を捕まえるという観察は**検査のパラドックス**（inspection paradox）の一形態である。すなわち、ランダムに到着する乗客は、短い間隔よりも長い間隔に入る可能性が高い。これは、ランダムな到着とサービスを研究する再生理論（renewal theory）や待ち行列理論（queueing theory）の中心的な考え方である。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、その基礎となる条件付けや期待値（expectation）の道具に出会うのによい本である。

解答例

STEP I 1992、第 16 問

確率・統計 ・ ネットワークの信頼性

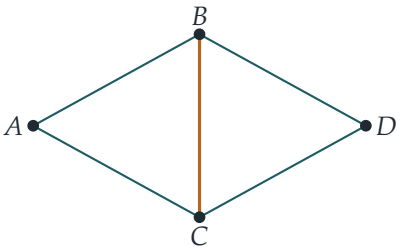
STEP I 1992、問 16

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/92-s1-q16

鍵となる考え方

この道路網は「ブリッジ（bridge）」の形をしている。A から D へは B を経由する経路と C を経由する経路の二つがあり、その中央を道路 CB がつないでいる。ブリッジを扱う最もすっきりした方法は、CB が通行可能かどうかで条件付け（conditioning）することである。それさえわかれば、あとはすべて直列（series）と並列（parallel）の道路の問題に帰着するからである。ある道路に雪対策を施すことは、その両端を一つの町に融合するのと同じ効果をもつ。したがって、二つの案は、それぞれが生み出すより小さなネットワークを調べることで比較できる。



解答

以下を通して、ある道路が通行可能である確率を $q = 1 - p$ と書く。各道路は独立（independent）に通行止めになるので、通行可能な道路と通行止めの道路の特定のパターンが起こる確率は、p と q の積になる。同じ町を二度通らない A から D への経路は次の四つである。

$$ABD, \qquad ACD, \qquad ABCD, \qquad ACBD.$$

通行可能な経路が $ABCD$ だけである場合

$ABCD$ が通行可能であるためには、AB、BC、CD がすべて通行可能でなければならない。さらにそれが通行可能な**唯一の**経路であるためには、ABD が通れない必要があり、AB は通行可能なので BD が通行止めでなければならない。同様に ACD も通れない必要があり、CD は通行可能なので AC が通行止めでなければならない。このとき $ACBD$ も自動的に通れない（AC と BD の両方を使うからである）。

よってこの事象は、ちょうど「AB、BC、CD が通行可能で、AC、BD が通行止め」という事象である。独立性より、その確率は

$$q^3p^2 = p^2(1-p)^3,$$

となり、示すべき結果が得られた。

現状で通り抜けられる確率

A と D が通行止めでない道路で結ばれているという事象を E とし、道路 CB で条件付けする。

CB が通行可能な場合、B と C は一つの町のようにふるまう。AB と AC の両方が通行止めでない限り A からその町へ行くことができ、BD と CD の両方が通行止めでない限りその町から D へ行くことができる。これらは異なる道路に関する事象なので、

$$\mathrm{P}(E \mid CB \text{ 通行可能}) = (1-p^2)^2.$$

CB が通行止めの場合、ありうる経路は ABD と ACD だけであり、それぞれ確率 q^2 で通行可能で、共通の道路をもたないので互いに独立である。よって

$$\mathrm{P}(E \mid CB \text{ 通行止め}) = 1-(1-q^2)^2.$$

A が D から遮断される確率を扱うほうが簡単である。$1-(1-p^2)^2 = p^2(2-p^2)$ および $1-q^2 = p(2-p)$ であるから、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{遮断}) &= q\,p^2(2-p^2) + p\cdot p^2(2-p)^2 \\ &= p^2[(1-p)(2-p^2) + p(4-4p+p^2)] \\ &= p^2\,(2+2p-5p^2+2p^3).\end{aligned}$$

どの道路に雪対策を施すか

CB に雪対策を施す場合。このとき CB は常に通行可能なので、常に上の一つ目の場合にあたる。

$$\mathrm{P}(\text{遮断}) = 1-(1-p^2)^2 = 2p^2-p^4.$$

AB に雪対策を施す場合。このとき A と B は一つの町としてふるまい、D から遮断されるのは、BD が通行止めで、**かつ** C を通る道もない場合にちょうど一致する。C を通る道には、CD が通行可能で、かつ AC、CB の少なくとも一方が通行可能であることが必要なので、これが失敗する確率は $p + q\,p^2$ である。したがって

$$\mathrm{P}(\text{遮断}) = p\,(p + qp^2) = p^2 + p^3 - p^4.$$

> **考えてみよう** どちらの答えも p^2 の項から始まる。すべての p に対してどちらが小さいかは、どのように判断すればよいだろうか。

差をとると、

$$(2p^2 - p^4) - (p^2 + p^3 - p^4) = p^2 - p^3 = p^2(1-p) > 0 \quad \text{ただし} 0 < p < 1.$$

よって、p の値によらず、AB に雪対策を施すほうが常に遮断される確率が小さくなる。政府は AB を選ぶべきであり、二つの選択肢が同等に良くなることは決してない。

これは直観とも合う。CB を補強しても、それが迂回路の一部として必要なときにしか役に立たない。一方、AB を補強すると A と B が一つの町になり、その町は直通の道路 BD と、C を経由する経路の両方によって D と結ばれる。

最後の小問

$p = \frac{1}{10}$ のとき、現状で遮断される確率は

$$\frac{1}{100}\left(2 + \frac{2}{10} - \frac{5}{100} + \frac{2}{1000}\right) = \frac{1}{100} \times 2.152 = 0.02152.$$

これは $\frac{1}{100}$ より大きいので、政府は計画を実行する（そして前の小問より、AB に雪対策を施す）。

主要項 $2p^2 = 0.02$ だけで結論は決まる。ちょうど二本の道路が通行止めになることで遮断される場合が二通り、すなわち $\{AB, AC\}$ と $\{BD, CD\}$ があるからである。

検算

- $p \to 0$ のとき、遮断される確率はおよそ $2p^2$ であり、これは通行止めになると A または D が孤立する二組の道路を数えたものである。AB に雪対策を施すと組 $\{BD, CD\}$ だけが残り、およそ p^2 となって、求めた式と一致する。CB に雪対策を施しても両方の組が残り、およそ $2p^2$ となる。
- $p = 1$ のとき、現状の式は $1 \cdot (2 + 2 - 5 + 2) = 1$ を与える。すべての道路が通行止めなら、確実に遮断される。

- 通行可能・通行止めの全 2^5 通りのパターンを厳密に数え上げると、いくつかの p の値について上のすべての式が確かめられる。$p = \frac{1}{10}$ では、現状で 0.02152、AB に雪対策を施した後で 0.0109、CB に雪対策を施した後で 0.0199 となる。2×10^5 回の冬をシミュレーションした結果は 0.0215 であった。

よくある間違い

- 四つの経路が通行可能である確率を足し合わせてしまう。経路は道路を共有しているので、これらの事象は重なり合い、和は数えすぎになる。
- 最初の小問で、「通行可能な唯一の経路」であるためには AC と BD が通行止めでなければならないことを忘れ、答えを $(1-p)^3$ としてしまう。
- 二つの案を $p = \frac{1}{10}$ だけで比較してしまう。差 $p^2(1-p)$ を見れば、すべての p について AB のほうが良いことがわかる。

STEP のその先へ

これは**ネットワーク信頼性**（network reliability）の小さな例であり、一本の辺で条件付けする（あるいはその両端を融合する）という技法は、グラフ理論（graph theory）全体を貫く削除縮約（deletion–contraction）の考え方である。大規模なランダムネットワークでは、同じ問いが**パーコレーション理論**（percolation theory）につながる。そこでは p に鋭い閾値（threshold）があり、その値で長距離の連結が突然消失する。ここで用いた条件付けの道具を身につけるには、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）がよい出発点である。

解答例

STEP II 1992、第 1 問

純粋数学 • 数列の極限

> **STEP II 1992、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q1

鍵となる考え方

どの極限（limit）にも標準的な手法が一つずつ必要であり、問われているのは正しい手法を選び取る力である。有理関数（rational function）なら、分子と分母を n の最高次の冪で割る。有界なものを増大するもので割った形なら、はさみうち（squeeze）を用いる。既知の極限が姿を変えて現れているなら、置換によってその変装をはがす。そして平方根の差なら、共役（conjugate）を掛ける。そうすれば、ほぼ等しい二つの量の差が、様子のはっきり見える商に変わる。

解答

小問 (i)

分子と分母を n で割ると、

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{1}{1+0} = 1,$$

となる。$\frac{1}{n} \to 0$ だからである。極限は 1 である。

小問 (ii)

最高次の冪は n^2 であり、これは分母にしか現れない。分子と分母を n^2 で割ると、

$$\frac{5n+1}{n^2-3n+4} = \frac{\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}} \longrightarrow \frac{0}{1} = 0.$$

極限は 0 である。分母は n^2 のように増大するが、分子は n のようにしか増大しない。

小問 (iii)

大きな整数 n に対する $\sin n$ について、有界（bounded）であること、すなわち $|\sin n| \leq 1$ であること以外に役立つことは何もわからない。しかしそれで十分である。なぜなら

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

だからである。したがって $\dfrac{\sin n}{n}$ は $-\frac{1}{n}$ と $\frac{1}{n}$ にはさまれ、そのどちらも 0 に収束するので、極限は 0 である。

小問 (iv)

考えてみよう これは (iii) と同じではないか？

そうではない。ここでは角 $1/n$ は増大するのではなく、0 へと縮んでいく。$x = 1/n$ とおく。$n \to \infty$ のとき $x \to 0^+$ であり、式は $\dfrac{\sin x}{x}$ となる。$x \to 0$ のときのその極限は、標準的な結果

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

である。（一つの見方として、これは sin の 0 における微分係数、すなわち導関数（derivative）の値 $\cos 0 = 1$ である。あるいは $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots$ を用いれば $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \cdots$ となる。）極限は 1 である。

小問 (v)

$n \to \infty$ のとき $\arctan n \to \frac{\pi}{2}$ である。なぜなら、下から $\theta \to \frac{\pi}{2}$ とすると $\tan\theta \to +\infty$ であり、arctan は連続（continuous）かつ増加関数だからである。極限 $\frac{\pi}{2}$ は 0 でないので、逆数をとってよい。

$$(\arctan n)^{-1} \longrightarrow \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

$(\arctan n)^{-1}$ は $1/\arctan n$ を意味するのであって、arctan の逆関数（inverse function）（それなら単に tan になってしまう）ではないことに注意せよ。

小問 (vi)

分子も分母も 0 に収束するので、それぞれの極限を別々にとるだけでは済まない。それぞれに共役を掛ける。

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}, \qquad \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}.$$

よって、分子と分母を $\sqrt{n}$ で割ると、

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)},$$

となる。$n \to \infty$ のとき、どちらの平方根も 1 に収束する（$\sqrt{\ }$ は連続だからである）ので、極限は

$$\frac{1+1}{2(1+1)} = \frac{1}{2}.$$

である。

考えてみよう 答えが、たとえば 1 ではなく $\frac{1}{2}$ になるのはなぜか？

大きな n の近くでは、$\sqrt{x}$ のグラフは傾き $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ のほぼ直線である。したがって $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \approx \frac{1}{2\sqrt{n}}$（幅 1 の一歩）、$\sqrt{n+2}-\sqrt{n} \approx \frac{2}{2\sqrt{n}}$（幅 2 の一歩）となり、比はおよそ $\frac{1}{2}$、すなわち一歩の幅の比になる。

検算

大きな n を代入してみる。$n = 10^6$ とすると、(i) は 0.999999、(ii) は 5×10^{-6}、(iii) は約 -3.5×10^{-7}、(iv) は小数第 7 位まで 1.0000000、(v) は 0.636620 となり $2/\pi \approx 0.636620$ と一致する。そして (vi) は有理化（rationalise）した形から計算すると 0.50000012 となる。(vi) では、小さな n で有理化した形をもとの形と照合することもしておく。$n = 1$ では、どちらも $(\sqrt{2}-1)/(\sqrt{3}-1) \approx 0.5658$ に等しい。

よくある間違い

- (iii) と (iv) を同じように扱うこと。(iii) では正弦は有界のままで分母が増大するが、(iv) では分子も分母も 0 に縮み、その比が 1 に収束する。
- (v) の $(\arctan n)^{-1}$ を逆関数と読んでしまうこと。
- (vi) を、非常に大きな n でもとの形のまま電卓で計算すること。ほぼ等しい数どうしの引き算で精度が失われる。先に有理化せよ。

STEP のその先へ

大学では、「$a_n \to L$」は厳密に定義される。すなわち、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある N が存在して、$n > N$ を満たすすべての n について $|a_n - L| < \varepsilon$ が成り立つ、ということである。上で用いた手法、たとえば (iii) のはさみうち、(v) で 0 でない極限の逆数を

とること、(vi) で極限を連続関数の中に通すことは、どれも解析学（analysis）の最初の講義でこの定義から証明される定理となる。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、これらの考え方を丁寧に、読みやすく展開している。

解答例

STEP II 1992、第 2 問

純粋数学 ・ クレロー型微分方程式

> **STEP II 1992、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q2

鍵となる考え方

この方程式は $p = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ として $y = xp - f(p)$ の形をしており、クレロー方程式（Clairaut equation）とよばれる。一度微分すると厄介な p の項が打ち消し合い、残った式はずっと簡単な二つの方程式に因数分解される。ただし、微分すると情報が失われる（定数が消える）ので、得られた解の候補はすべて $(*)$ に代入し直して定数を決めなければならない。

解答

$p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ とおくと、$(*)$ は $y = xp - \cosh p$ となる。

微分する

両辺を x で微分する。xp には積の微分法（product rule）を、$\cosh p$ には合成関数の微分法（chain rule）を用いると

$$p = p + x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - \sinh p\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

両辺の p が打ち消し合い、

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left(x - \sinh p\right) = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\left(x - \sinh\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0.$$

が残る。積が 0 となるのはいずれかの因数が 0 のときに限るから、$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0$ または $x - \sinh\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0$ であり、これが示すべきことであった。

二つの方程式

第一の方程式。 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0$ を 2 回積分すると、一般解（general solution）

$$y = Ax + B, \qquad A, B \text{ は任意定数}$$

が得られる。

第二の方程式。このとき $\sinh p = x$ である。sinh は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への全単射（bijection）であるから、すべての x に対して $p = \sinh^{-1} x$ が得られる。$u = \sinh^{-1} x$、$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$ として部分積分（integration by parts）を行うと

$$\begin{aligned} y &= \int \sinh^{-1} x \,\mathrm{d}x = x \sinh^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \,\mathrm{d}x \\ &= x \sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2} + C, \qquad C \text{ は任意定数} \end{aligned}$$

$(*)$ の解

$(*)$ の解はすべて導かれた二つの方程式のいずれかを満たすが、逆は成り立たない。微分によって条件が一つ捨てられたからである。そこで、それぞれの解の族を $(*)$ に代入し直す。

> **考えてみよう** 導かれた方程式には、それぞれ 2 個と 1 個の任意定数がある。これらすべてが $(*)$ のような 1 階の方程式の解になりえないのはなぜか。

1 階の方程式の解は 1 パラメータの族をなすはずであるが、上の各族は定数が多すぎるか、確かめていない定数を含んでいる。$(*)$ を微分して分かるのは $y - xp + \cosh p$ が**定数**であることだけであり、その定数が 0 であることが必要なのである。

直線。 $y = Ax + B$ のとき $p = A$ であり、$(*)$ は

$$Ax + B = Ax - \cosh A \iff B = -\cosh A.$$

となる。よって、1 パラメータの直線族

$$y = Ax - \cosh A, \qquad A \in \mathbb{R}.$$

が得られる。

もう一つの曲線。 $y = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2} + C$ のとき $p = \sinh^{-1} x$ であるから、$\sinh p = x$ かつ $\cosh p = \sqrt{1+\sinh^2 p} = \sqrt{1+x^2}$ である（$\cosh p > 0$ より正の平方根をとる）。このとき $(*)$ の右辺は

$$xp - \cosh p = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2},$$

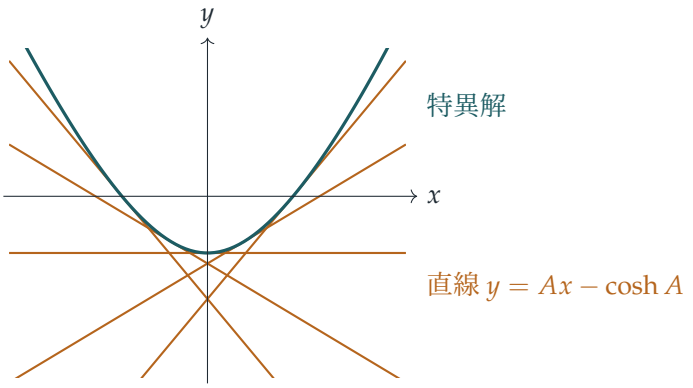
となり、これが y に等しくなるのはちょうど $C = 0$ のときである。こうして、任意定数を含まない解がもう一つ得られる：

$$y = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1 + x^2}.$$

以上より、$(*)$ の解は直線 $y = Ax - \cosh A$（各実数 A について）と、ただ一つの曲線 $y = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1 + x^2}$ である。

二つの関係

傾き A の直線は $x = \sinh A$ で曲線に接する。そこでの曲線の傾きは $\sinh^{-1}(\sinh A) = A$ であり、高さは $A \sinh A - \cosh A$ で、直線の高さと一致する。曲線は $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}} > 0$ を満たすので下に凸であり、これらの接線はどれも曲線の下側にある。この曲線は直線族の**包絡線**（envelope）であり、**特異解**（singular solution）とよばれる。



このことから微妙な点も説明できる。条件 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x - \sinh p) = 0$ は各点ごとに成り立つ条件なので、解は二つの型の間で切り替わってもよい。たとえば、$x = \sinh A$ までは曲線に沿って進み、そこから先はその点での接線に沿って進むと、導関数が連続で、しかもいたるところで $(*)$ を満たす関数が得られる。このようなつなぎ合わせの解は上で求めた解から作られるものであり、期待される解答は直線族と特異解の曲線である。

検算

- $A = 0$ のとき直線は $y = -1$ であり、曲線は $y(0) = 0 - 1 = -1$、傾き $\sinh^{-1} 0 = 0$ である。予想どおり、両者は $(0, -1)$ で接する。

- 数値的に $x = 0.7$ とすると $\sinh^{-1} 0.7 \approx 0.6527$ であるから、曲線は $y \approx 0.4569 - 1.2207 = -0.7638$ を与え、$xp - \cosh p \approx 0.4569 - 1.2207$ と一致する。y に $C \neq 0$ を加えると、ちょうど C だけずれが生じる。
- ランダムな点で差分により $(*)$ を確かめると、各直線 $y = Ax - \cosh A$ と特異解の曲線のいずれについても、残差は丸め誤差の程度である。

よくある間違い

- $y = Ax + B$ や $y = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1 + x^2} + C$ で止めてしまうこと。これらは**微分した**方程式の解であり、$(*)$ そのものから $B = -\cosh A$ および $C = 0$ が要求される。
- 因数 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ で「割って」しまい、特異解をまるごと見落とすこと。

STEP のその先へ

$y = xp - f(p)$ の形の方程式はクレロー方程式である。その一般解は常に直線族 $y = cx - f(c)$ であり、特異解はその族の包絡線である。ここでは $f = \cosh$ であり、包絡線 $y = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1 + x^2}$ は cosh のルジャンドル変換（Legendre transform）である。この構成は力学（ラグランジアンからハミルトニアンへの移行）や熱力学に現れる。またこの例は、存在と一意性の定理（existence and uniqueness theorem）の条件が成り立たないとき、1 階の方程式の解は一意とは限らないことも示している。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は、1 階の方程式とこの一意性の定理を扱っている。

解答例

STEP II 1992、第 3 問

純粋数学 ・ 内サイクロイドと面積

> **STEP II 1992、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q3

鍵となる考え方

すべては**滑らずに転がる**（rolling without slipping）という条件から導かれる。すなわち、小円が大円に沿って転がった弧の長さは、小円のうち接触してきた部分の弧の長さに等しい。これによって小円がどれだけ回転したかが決まり、あとは B が単に「中心 P に正しい向きの単位ベクトルを加えたもの」になる。概形を描く際には、三倍角の公式（triple-angle formulae）を使うと座標が非常にきれいに簡単になることに気づくとよい。

解答

B の座標を求める

小円（半径 1）は大円（半径 4）の内側に接し続けるので、その中心は常に O から距離 $4-1=3$ のところにある。ϕ を角 AOP とすると、

$$P = (3\cos\phi,\ 3\sin\phi).$$

T を現在の接点とする。T は半直線 OP の延長上にあるので $T = (4\cos\phi, 4\sin\phi)$ であり、P から T への向きは x 軸と角 ϕ をなす。

はじめ B は接点 A にあった。滑りがないので、大円の弧 AT の長さは小円の弧 BT の長さに等しい：

$$4\phi = 1 \times \angle BPT \quad \Longrightarrow \quad \angle BPT = 4\phi.$$

考えてみよう　P で測ったとき、B の角は $\phi+4\phi$ だろうか、それとも $\phi-4\phi$ だろうか。

P が O のまわりを反時計回りに動くとき、小円は大円の内側に沿って転がるので、**時計回り**に回転する（図の矢印）。点 B はそれ以前の接点だったので、新しい接点 T の後ろに取り残されている。つまり小円に沿って T から B へ進むのは、時計回りに 4ϕ の回転である。したがって向き $\overrightarrow{PB}$ は x 軸と角 $\phi-4\phi=-3\phi$ をなし、$PB=1$ であるから、

$$\begin{aligned} B &= P+(\cos(-3\phi),\ \sin(-3\phi)) \\ &= (3\cos\phi+\cos 3\phi,\ 3\sin\phi-\sin 3\phi), \end{aligned}$$

となり、求める結果が得られた。（確認：$\phi=0$ とすると $(4,0)=A$ となる。）

C の概形を描く

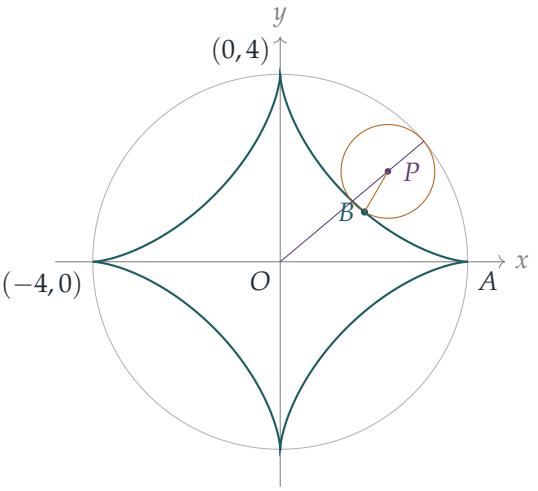
$\cos 3\phi=4\cos^3\phi-3\cos\phi$ および $\sin 3\phi=3\sin\phi-4\sin^3\phi$ を用いると、

$$x=4\cos^3\phi,\qquad y=4\sin^3\phi.$$

よって C は曲線 $x^{2/3}+y^{2/3}=4^{2/3}$、すなわち**アステロイド**（astroid）である。いくつかの特徴を挙げる：

- B が大円上にあるのは $\cos^6\phi+\sin^6\phi=1$ のとき、すなわち $\phi=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$ のときに限り、そのとき点 $(\pm4,0)$、$(0,\pm4)$ を与える。ここでは B が接点なので瞬間的に静止しており、曲線は尖点（cusp）をもつ。
- 曲線は両方の座標軸に関して対称である（ϕ を $-\phi$ または $\pi-\phi$ に置き換えればよい）。
- 第 1 象限では $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{12\sin^2\phi\cos\phi}{-12\cos^2\phi\sin\phi}=-\tan\phi$ であるから、曲線は $(4,0)$ を x 軸に沿って出発し、$(0,4)$ に y 軸に沿って到達する。曲線は**内側に**へこんでいる：$\phi=\frac{\pi}{4}$ では $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ を通り、これは直線 $x+y=4$ よりかなり内側である。

P が一周する（ϕ が 0 から 2π まで動く）と、小円は OP に対して 3 回転し、B は A に戻る。したがって C は 4 つの尖点をもつ閉曲線である。



面積

$x = 3\cos\phi + \cos 3\phi$ であり、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi} = 3\cos\phi - 3\cos 3\phi,$$

であるから、

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi} = 9\cos^2\phi - 6\cos\phi\cos 3\phi - 3\cos^2 3\phi.$$

一周期全体にわたって、任意の整数 $k \neq 0$ に対して $\int_0^{2\pi} \cos^2 k\phi \,\mathrm{d}\phi = \pi$ が成り立ち（$\frac{1}{2}(1 + \cos 2k\phi)$ と書き直せばよい）、また

$$\int_0^{2\pi} \cos\phi\cos 3\phi \,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos 4\phi + \cos 2\phi)\,\mathrm{d}\phi = 0.$$

したがって

$$\text{面積} = \int_0^{2\pi} x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi}\,\mathrm{d}\phi = 9\pi - 0 - 3\pi = 6\pi.$$

答えは当然あるべきとおり正である：ϕ が増加するにつれて、B は C を反時計回りに一周する。

検算

- C は内側にへこんでいるので、領域は 4 つの尖点を頂点とする面積 32 の正方形の内部にある。実際 $6\pi \approx 18.85 < 32$ である。
- 数値的に、積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用しても、C に内接する 200 000 角形の面積を靴ひも公式（shoelace formula）で求めても、どちらも $18.8496\ldots = 6\pi$ となる。

- アステロイドの標準的な面積公式 $\frac{3}{8}\pi a^2$ に $a = 4$ を代入しても 6π が得られる。
- 各尖点において B の速さの数値は 0 となり、転がりの条件が要求するとおり、B が大円に接するとき静止していることが確かめられる。

よくある間違い

- $\overrightarrow{PB}$ の角を $+5\phi$ や $+3\phi$ としてしまう：小円は P が O のまわりを動く向きと**逆向き**に回転する。
- P の軌道の半径として 3 ではなく 4 を使ってしまう。
- 鋭い尖点の代わりに丸い端を描いたり、外側にふくらんだ弧を描いたりしてしまう。

STEP のその先へ

ある円の内側を転がる円の上の点が描く曲線は**内サイクロイド**（hypocycloid）であり、外側を転がる場合は**外サイクロイド**（epicycloid）となる。半径の比が 4 : 1 のときアステロイドが得られ、比が 3 : 1 のときは 3 つの尖点をもつデルトイド（deltoid）が得られる。面積の公式 $\int x\,\mathrm{d}y$ はグリーンの定理（Green's theorem）の特別な場合である。この定理は閉曲線に沿った積分を、その内部の領域上の二重積分と結びつけるもので、大学 1 年次のベクトル解析（vector calculus）の山場の一つである。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析の入門書）は、$z = 3e^{i\phi} + e^{-3i\phi}$ を用いてこれらの転がり曲線を見事に扱っている。

解答例

STEP II 1992、第 4 問

純粋数学 • 微分の公理

> **STEP II 1992、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q4

この問題は、*Beyond STEP* の第 6.5 節「**公理から考える微分**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch06/derivations.html

鍵となる考え方

4 つの規則は、微分のよく知られた性質そのものである。すなわち、積の微分法則（product rule）、線形性（linearity）、そして $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = 1$ である。この問題では、多項式（polynomial）に対しては、これらの性質だけでこの演算が完全に決まってしまうことを示すよう求められている。定数を扱う際の工夫は、$1 \times 1 = 1$ のように、答えがすでにわかっている積を積の法則に入れてみることである。その後は、積の法則によって x のあらゆるべきを 1 段ずつ組み立てることができ、残りは線形性が処理してくれる。

全体を通して、与えられた 4 つの規則**だけ**を用いなければならない。$\Diamond$ が微分に似ているからといって、それについて何かを仮定してはならない。それこそが、これから証明しようとしていることだからである。

解答

定数

考えてみよう $\Diamond 1$ については何もわかっていない。規則からどうすればその値がわかるだろうか？

積の法則 (i) を多項式 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{g}(x) = 1$ に適用する。これらの積は再び 1 であるから、

$$\Diamond 1 = \Diamond(1 \cdot 1) = 1 \cdot \Diamond 1 + 1 \cdot \Diamond 1 = 2\Diamond 1.$$

両辺から $\Diamond 1$ を引くと $\Diamond 1 = 0$ となる。これは零多項式（zero polynomial）である。

次に、$\mathrm{f}(x) = c$ を任意の定数多項式とする。このとき $\mathrm{f}(x) = c \cdot 1$ であり、c は定数であるから、規則 (iv) より

$$\Diamond c = \Diamond(c \cdot 1) = c\Diamond 1 = c \cdot 0 = 0.$$

これは $c = 0$ の場合も含むので、すべての定数多項式に対して $\Diamond \mathrm{f}(x) = 0$ となり、示すべきことが示された。

（$\Diamond 1 = 0$ を導く別の方法：$x = x \cdot 1$ と書くと、規則 (i) と規則 (iii) より $1 = 1 \cdot 1 + x\Diamond 1$ となるので $x\Diamond 1 = 0$ である。x を掛けて 0 になる多項式は零多項式でなければならない。）

べき x^2 と x^3

$\mathrm{f}(x) = \mathrm{g}(x) = x$ として積の法則を用い、続いて規則 (iii) を用いると、

$$\Diamond x^2 = \Diamond(x \cdot x) = x\Diamond x + x\Diamond x = x + x = 2x.$$

次に、$x^3 = x^2 \cdot x$ であるから、積の法則、規則 (iii)、そしていま求めた結果により、

$$\Diamond x^3 = x\Diamond x^2 + x^2\Diamond x = x \cdot 2x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

任意の多項式

ステップ 1：x のべき。数学的帰納法（induction）により

$$\Diamond x^n = nx^{n-1} \qquad \text{すべての整数} n \geq 1.$$

を証明する。$n = 1$ のときは規則 (iii) そのものである。ある $n = k \geq 1$ で成り立つと仮定する。$x^{k+1} = x^k \cdot x$ と書いて積の法則を用い、続いて規則 (iii) と帰納法の仮定を用いると、

$$\Diamond x^{k+1} = x\Diamond x^k + x^k\Diamond x = x \cdot kx^{k-1} + x^k = (k+1)x^k,$$

となるので、$n = k+1$ のときも成り立つ。よって数学的帰納法により、すべての $n \geq 1$ で成り立つ。$n = 0$ のときは、$x^0 = 1$ は定数であるから、最初の部分より $\Diamond x^0 = 0$ である。いずれの場合も $\Diamond x^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n$ が成り立つ。

ステップ 2：和。規則 (ii) は 2 つの多項式について述べられているが、項の個数についての帰納法により任意の有限和に拡張できる。実際、$\Diamond(\mathrm{f}_1 + \cdots + \mathrm{f}_m) = \Diamond \mathrm{f}_1 + \cdots + \Diamond \mathrm{f}_m$

が成り立つならば、$(\mathrm{f}_1 + \cdots + \mathrm{f}_m) + \mathrm{f}_{m+1}$ に規則 (ii) を適用すると、$m+1$ 項についての同じ主張が得られる。

ステップ 3：まとめ。任意の多項式は、定数係数 a_k を用いて $\mathrm{h}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ と書ける。ステップ 2、続いて各項に規則 (iv)、さらにステップ 1 を用いると、

$$\begin{aligned} \lozenge \mathrm{h}(x) &= \lozenge(a_0) + \lozenge(a_1 x) + \cdots + \lozenge(a_n x^n) \\ &= a_0 \lozenge 1 + a_1 \lozenge x + \cdots + a_n \lozenge x^n \\ &= 0 + a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\mathrm{h}(x)\big), \end{aligned}$$

となり、これが証明すべきことであった。

検算

微分が本当に 4 つの規則すべてを満たすことを確認しておく価値がある。そうでなければ、この結果は中身のないものになってしまうからである。実際、微分はこれらを満たす（積の微分法則、線形性、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x = 1$）。また、解答と同じように 4 つの規則だけを用いて $\lozenge$ をコンピュータ上で構成し、分数係数をもつ次数 7 以下のランダムな多項式 500 個について通常の導関数と比較した。両者は常に一致し、数値的な差分商（difference quotient）とも一致した。たとえば、規則から $\lozenge x^3 = 3x^2$ が得られる。

よくある間違い

- 「定数の導関数は 0 だから $\lozenge c = 0$」と言ってしまうこと。これは証明しようとしていることを仮定している。0 は規則から導かれなければならない。
- 最後の部分で定数項を忘れること。帰納法は $n = 1$ から始まるので、a_0 には定数についての結果が必要である。
- 規則 (ii) が 2 項の場合から帰納法で拡張できることに触れずに、多くの項の和に対して用いること。

STEP のその先へ

規則 (i)、(ii)、(iv) を満たす演算は**導分**（derivation）と呼ばれ、導分は代数学や幾何学のいたるところで研究されている。この問題は、多項式上の導分が x での値だけで完全に決まることを示している。より一般に、$\mathrm{p} = \lozenge x$ とおくと $\lozenge \mathrm{h} = \mathrm{p}(x)\,\mathrm{h}'(x)$ であり、微分幾何学（differential geometry）ではこの考え方がベクトル場（vector field）の

定義となる。多項式環（polynomial ring）という代数的な枠組みについては、Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を参照されたい。

解答例

STEP II 1992、第 5 問

純粋数学 ・ 行列群

> **STEP II 1992、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q5

鍵となる考え方

ここでのすべては条件 $wz - xy = 1$ にもとづいている。この条件により、S に属する行列の逆行列（inverse）が特に簡単になる。位数（order）3 の部分は、すべての 2×2 行列がそのトレース（trace）と行列式（determinant）から作られる 2 次方程式を満たすことに気づけば、最もうまく扱える。S に属する行列については、これにより $\mathbf{A}^2$、さらに $\mathbf{A}^3$ を $\mathbf{A}$ と $\mathbf{I}$ で表すことができるので、条件 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$ はトレース $w + z$ に関する条件になる。

（問題文では $\mathbf{A}$ の右下の成分が x と印刷されているが、最後の小問では z に言及しているので、意図された行列は明らかにそこが z である。以下ではそれを一貫して用いる。）

解答

元の位数

$g \in G$ の位数とは、$g^n = e$ を満たす最小の正の整数 n のことである。ここで e は G の単位元（identity）である。g のどの正の冪も e に等しくならないとき、g は無限位数をもつという。位数 1 の元は単位元だけである。

逆行列

次のようにおく。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}, \qquad wz - xy = 1.$$

2×2 行列の逆行列の通常の公式では行列式で割るが、ここでは行列式は 1 であるから

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} z & -x \\ -y & w \end{pmatrix}.$$

実際に掛け合わせると確かめられる：$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} wz-xy & 0 \\ 0 & wz-xy \end{pmatrix} = \mathbf{I}$ であり、同様に $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ である。

S は群である

群（group）の 4 つの公理を確かめる。

- **閉包性**（*closure*）。 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in S$ ならば $\det(\mathbf{AB}) = \det\mathbf{A}\,\det\mathbf{B} = 1\times 1 = 1$ であるから、$\mathbf{AB} \in S$ である。
- **結合法則**（*associativity*）。行列の積についてはこれを仮定してよい。
- **単位元**。 $\det\mathbf{I} = 1$ であるから $\mathbf{I} \in S$ であり、すべての $\mathbf{A}$ に対して $\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$ である。
- **逆元**（*inverse element*）。上で求めた行列 $\mathbf{A}^{-1}$ の行列式は $wz-(-x)(-y) = wz-xy = 1$ であるから、これは S に属する。

よって、S は行列の積に関して群である。

自己逆元と位数 2 の元

$\mathbf{A}^{-1}$ と $\mathbf{A}$ を成分ごとに比べると、$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$ となるのは

$$z = w, \qquad -x = x, \qquad -y = y,$$

のとき、かつそのときに限る。すなわち $x = y = 0$ かつ $z = w$ である。このとき行列式の条件は $w^2 = 1$ となるので、$w = \pm 1$ である。したがって自己逆元（self-inverse element）は

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad \text{および} \quad \mathbf{A} = -\mathbf{I}$$

である。元が位数 2 をもつのは、$\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$（同値な言い方をすれば $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$）かつ $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$ のときである。したがって位数 2 の元は $-\mathbf{I}$ のみである。

位数 3 の元

$\mathbf{A}$ のトレースを $t = w + z$ と書く。2 乗すると

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} w^2+xy & x(w+z) \\ y(w+z) & xy+z^2 \end{pmatrix}.$$

$xy = wz - 1$ であるから、左上の成分は $w^2 + wz - 1 = tw - 1$ であり、右下の成分は $tz - 1$ である。よって

$$\mathbf{A}^2 = t\mathbf{A} - \mathbf{I}. \qquad (*)$$

考えてみよう $(*)$ は $\mathbf{A}^3$ を求めるのにどう役立つだろうか？

$(*)$ に $\mathbf{A}$ を掛け、もう一度 $(*)$ を用いて $\mathbf{A}^2$ を消去する：

$$\mathbf{A}^3 = t\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} = t(t\mathbf{A} - \mathbf{I}) - \mathbf{A} = (t^2 - 1)\mathbf{A} - t\mathbf{I}.$$

したがって $\mathbf{A}$ のどの冪も $\mathbf{A}$ と $\mathbf{I}$ の一次結合で表され、係数を比較することができる。

$w + z + 1 = 0$ のとき： $t = -1$ であるから $t^2 - 1 = 0$ となり、$\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$ である。また、$\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$ である。なぜなら $\mathbf{I}$ のトレースは $2 \neq -1$ だからである。$\mathbf{A}$ の位数は 3 を割り切り、しかも 1 ではないから、3 である。

逆に、$\mathbf{A}$ の位数が 3 であると仮定する。このとき $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$ かつ $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$ であるから

$$(t^2 - 1)\mathbf{A} = (1 + t)\mathbf{I}.$$

- $t^2 \neq 1$ ならば $\mathbf{A} = \dfrac{1+t}{t^2-1}\mathbf{I} = \dfrac{1}{t-1}\mathbf{I}$ となり、これは単位行列のスカラー倍 $\lambda\mathbf{I}$ である。その行列式は $\lambda^2 = 1$ であるから、$\lambda = \pm 1$ である。しかし $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ は除外されており、$\mathbf{A} = -\mathbf{I}$ の位数は 3 ではなく 2 である。よってこの場合は起こりえない。
- $t = 1$ ならば、方程式は $\mathbf{0} = 2\mathbf{I}$ となるが、これは成り立たない。

残る可能性は $t = -1$、すなわち $w + z + 1 = 0$ のみである。これで「必要十分」が示された。

例。 $w = 0$、$z = -1$ とし、$wz - xy = 0 + 1 = 1$ となるように $x = -1$、$y = 1$ を選ぶ：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^3 = \mathbf{I}.$$

検算

- 上の例を実際に掛け合わせて、$\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$ を直接確かめよ。
- 120° の回転 $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ は行列式 1、トレース -1 をもち、もちろん位数 3 である。
- S に属する 20 000 個のランダムな有理数成分の行列について、$\mathbf{A}^2 = t\mathbf{A} - \mathbf{I}$ が成り立つことをコンピュータで確認した。また、成分が -4 から 4 までの $\frac{1}{2}$ の倍数であ

るような S のすべての行列を調べた：位数 3 をもつのはトレースが -1 であるちょうど 48 個であり、位数 2 をもつのは $-\mathbf{I}$ のみである。

よくある間違い

- 位数 2 の元に $\mathbf{I}$ を含めてしまう。これは自己逆元ではあるが、位数は 1 である。
- 位数 3 に関する結果の一方向だけを証明してしまう。逆を示すには、$t^2 \neq 1$ の場合と $t = 1$ の場合を除外する必要がある。
- 群の公理を確かめる際に、逆元自体の行列式が 1 であることの確認を忘れる。

STEP のその先へ

群 S は**特殊線形群**（special linear group）SL_2 であり、数学で最も重要な群の一つである。恒等式 $\mathbf{A}^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{A})\mathbf{A} + (\det\mathbf{A})\mathbf{I} = \mathbf{0}$ は、ケイリー–ハミルトンの定理（Cayley–Hamilton theorem）の 2×2 の場合である：任意の正方行列は自分自身の固有方程式（characteristic equation）を満たす。この恒等式はまた、トレースだけで SL_2 の元についてどれほど多くのことがわかるかを示している：上の議論を一般化すると、有限位数 n の元のトレースは、ある整数 k を用いて $2\cos(2\pi k/n)$ と表されることが示される。行列の群についてさらに学ぶには Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を、ケイリー–ハミルトンの定理と固有値（eigenvalue）については Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照のこと。

解答例

STEP II 1992、第 6 問

純粋数学 ・ 接線と解の個数

> **STEP II 1992、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q6

鍵となる考え方

方程式 $kx = \ln(2\sec x)$ の解は、原点を通る直線 $y = kx$ と曲線 $y = \ln(2\sec x)$ の交点である。この曲線は原点より上から始まり、凸（convex）であり、無限大へと急上昇する。そのため、原点を通る直線はこの曲線と交わらないか、接するか、2 回交わるかのいずれかである。特別な値 k_0 は**原点から引いた接線**（*tangent from the origin*）の傾きである。接するとは、2 つの曲線が同じ高さと同じ傾きをもつことであり、この 2 つの方程式からほかのすべてが得られる。

解答

2 つのグラフ

$f(x) = \ln(2\sec x) = \ln 2 - \ln\cos x$ とおく。すると

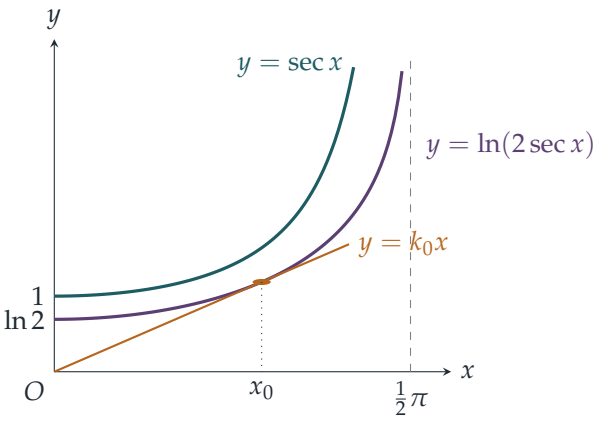
$$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x, \qquad f''(x) = \sec^2 x > 0.$$

したがって $f(0) = \ln 2 \approx 0.69$、$f'(0) = 0$ であり、f は $(0, \frac{1}{2}\pi)$ で増加し、凸（下に凸）である。また $\cos x \to 0^+$ であるから、$x \to \frac{1}{2}\pi^-$ のとき $f(x) \to \infty$ となる。

同様に、$y = \sec x$ については $\sec 0 = 1$ であり、傾きは $\sec x \tan x$ である。これは $x = 0$ で 0、それ以降は正であり、$x \to \frac{1}{2}\pi^-$ のとき $\sec x \to \infty$ となる。どちらの曲線も垂直漸近線（vertical asymptote）$x = \frac{1}{2}\pi$ をもち、どちらもそこでは定義されない。

対数曲線は常にセカント曲線の下にある。$u = \sec x \geq 1$ とおくと $\ln(2u) < u$ である。実際、$\ln(2u) - u$ の導関数は $\frac{1}{u} - 1 \leq 0$ なので、この関数の値は $u = 1$ での値 $\ln 2 - 1 < 0$ 以下である。また、対数曲線の増加ははるかに遅い。$x \to \frac{1}{2}\pi$ のとき、そ

れはセカントの ln のようにふるまう。



k が小さいとき解はなく、k が大きいとき解は 2 つ

f は増加関数なので、$[0, \frac{1}{2}\pi)$ 上で $f(x) \geq \ln 2$ であり、一方そこでは $kx < \frac{1}{2}\pi k$ である。$k \leq 2\ln 2/\pi \approx 0.44$ ならば、区間全体で $kx < \ln 2 \leq f(x)$ となるので、直線は曲線の下を通り、解は存在しない。

k が大きいとき、直線は曲線の下から始まる（$x = 0$ での高さは $0 < \ln 2$）が、十分に急なので、どこかで曲線の上に出る。$x = \frac{1}{4}\pi$ での曲線の高さは $\ln(2\sqrt{2}) = \frac{3}{2}\ln 2 \approx 1.04$ であり、$k > \frac{6}{\pi}\ln 2 \approx 1.32$ となれば、そこで直線のほうが高くなる。$\frac{1}{2}\pi$ の近くでは曲線は無限大へ発散するが、直線の高さは高々 $\frac{1}{2}\pi k$ にとどまるので、最終的に曲線は再び直線の上に来る。直線は曲線と、上に抜けるときに 1 回、下に戻るときにもう 1 回交わる。すなわち解は 2 つである。

3 つ以上はありえない。関数 $f(x) - kx$ の 2 階導関数は $\sec^2 x > 0$ なので、この関数は凸であり、凸関数の零点は高々 2 つである。

k_0 が存在する理由

$f(0) = \ln 2 \neq 0$ なので、どの解も $x > 0$ を満たす。よって x で割って、方程式を次のように書き直せる。

$$k = g(x), \qquad \text{ただし} g(x) = \frac{\ln(2\sec x)}{x}, \quad 0 < x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

したがって、解の個数は g のグラフが高さ k に達する回数に等しい。ここで

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}, \qquad h(x) = x\tan x - \ln(2\sec x),$$

であり、$h'(x) = \tan x + x\sec^2 x - \tan x = x\sec^2 x > 0$ である。$h(0) = -\ln 2 < 0$ かつ $x \to \frac{1}{2}\pi$ のとき $h(x) \to \infty$ であるから、h の零点はちょうど 1 つであり、それを x_0 と

する。よって g は $(0, x_0)$ で減少し、$(x_0, \frac{1}{2}\pi)$ で増加し、両端で $g \to \infty$ となる（$x \to 0$ のとき分子は $\ln 2$ に近づき、$x \to \frac{1}{2}\pi$ のとき分子は ∞ に発散する）。ゆえに、g の最小値を $k_0 = g(x_0)$ とすると、次が成り立つ。

- $k < k_0$：解はない；
- $k = k_0$：解はちょうど 1 つで、$x = x_0$；
- $k > k_0$：解は 2 つ。

グラフで見ると、$y = k_0 x$ は $y = \ln(2\sec x)$ の接線のうち原点を通るものである。これにより概形による議論が裏づけられ、しきい値が正確に定まる。

> **考えてみよう** なぜ「解がちょうど 1 つ」であることは、直線が接線であることを意味するのか？

直線が x_0 で曲線と横断的に（transversally）交わっているとすると、O のまわりにわずかに回転させても（k を少し小さくしても大きくしても）近くでやはり交わり、さらに上の凸性の議論から 2 つ目の交点も得られることになる。孤立したただ 1 つの共有点で、k が小さくなると共有点がなくなるものは、まさに接点である。代数的には、これは $h(x_0) = 0$、すなわち $g'(x_0) = 0$ である。

x_0 の満たす方程式

接点では、直線と曲線は同じ高さと同じ傾きをもつ。

$$k_0 x_0 = \ln(2\sec x_0), \qquad k_0 = f'(x_0) = \tan x_0.$$

（2 つ目の方程式は、上で述べた $h(x_0) = 0$ でもある。）2 つ目を 1 つ目に代入すると $x_0 \tan x_0 = \ln(2\sec x_0)$ を得る。$0 < x_0 < \frac{1}{2}\pi$ より $\tan x_0 \neq 0$ なので、

$$x_0 = \cot x_0 \, \ln(2\sec x_0),$$

となり、示すべき式が得られた。

x_0 と k_0 を求める

$x_{n+1} = \cot x_n \ln(2\sec x_n)$ を直接反復したくなるところである。しかしこれは収束が遅い。右辺の x_0 における導関数は $1 - 2x_0/\sin 2x_0 \approx -0.89$ なので、反復値は振動し、1 ステップあたり約 11% しか近づかない。$h(x) = x\tan x - \ln(2\sec x)$ にニュートン法（Newton's method）を適用するほうがはるかによく、しかも $h'(x) = x\sec^2 x$ は非常に簡単である。

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n \tan x_n - \ln(2\sec x_n)}{x_n \sec^2 x_n}.$$

$x_1 = 1$ から始めると（以下すべてラジアンを用いる）、

$$x_2 \approx 0.9274, \qquad x_3 \approx 0.9147, \qquad x_4 \approx 0.91440.$$

小数第 2 位まで正しいことを確かめるため、符号の変化を調べる。$h(0.905) \approx -0.023 < 0$ かつ $h(0.915) \approx +0.0015 > 0$ なので、$0.905 < x_0 < 0.915$ であり、

$$x_0 \approx 0.91.$$

である。すると $k_0 = \tan x_0 \approx \tan 0.9144 \approx 1.30$ となる。同値な式 $k_0 = \ln(2\sec x_0)/x_0$ からも同じ値が得られる。

検算

- k_0 の 2 つの表し方は一致する：$\tan(0.91440) \approx 1.2981$ かつ $\ln(2\sec 0.91440)/0.91440 \approx 1.2981$。
- $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上で $g(x) = \ln(2\sec x)/x$ を数値的に調べると、最小値は $x \approx 0.914$ における 1.2981 である。
- $kx - \ln(2\sec x)$ の符号変化を数えると、$k = 1.29$ では根がなく、$k = 1.31$ では根が 2 つある。
- 答えは先に求めた大まかな評価 $0.44 < k_0 < 1.32$ に合っている。

よくある間違い

- 度数法を使ってしまう。ここでの x の値は、ニュートン法の反復値や $\tan x_0$ も含め、すべてラジアンでなければならない。
- 接する条件に方程式を 1 つしか使わない。曲線と交わるだけでは不十分で、傾きも一致しなければならない。k_0 を決めるのはこの 2 つ目の条件である。
- 確認せずに小数第 2 位まで正しいと主張する。$[0.905, 0.915]$ で h の符号が変わることを示すか、小数第 2 位が安定するまで反復すること。

STEP のその先へ

$f(x)/x$ の値域を調べて $kx = f(x)$ の根を数えるのは、大きな考え方のほんの一部である。原点を通る接線と f の凸性は、解析学や力学における**ルジャンドル変換**（*Legendre transform*）や凸双対性（convex duality）の土台となるものである。ここでニュートン

法がこれほど速く収束するのは、単根の近くで 2 次収束（quadratic convergence）するからであり、一方、不動点反復（fixed-point iteration）は比 $|\varphi'(x_0)|$ で 1 次収束するにとどまる。どちらの事実も、解析学や数値解析の最初の講義で証明される。Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は、凸関数とニュートン法の誤差解析を扱っている。

解答例

STEP II 1992、第 7 問

純粋数学 ・ 3 次方程式の重解

> **STEP II 1992、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q7

鍵となる考え方

$(x-a)(x-b)(x-c)$ と与えられた三次式（cubic）の係数を比較すると、p、q、r が根（root）の対称関数（symmetric function）として表される。(i) では、重根（repeated root）があることと「根の和が 0 である」ことを合わせると、根は $\alpha, \alpha, -2\alpha$ という形に定まり、あとはすべてそこから導かれる。(ii) では、問題の式は (i) の答えの q と r をより複雑なものに置き換えたもののように見える。このことから、x を平行移動して x^2 の項を消し、新しい三次式に (i) を適用すればよいと見当がつく。

解答

a、b、c が根であり、最高次の係数が 1 であるから、すべての x に対して

$$x^3 - px^2 + qx - r = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

が成り立つ。係数を比較すると

$$p = a+b+c, \qquad q = ab+bc+ca, \qquad r = abc.$$

小問 (i)

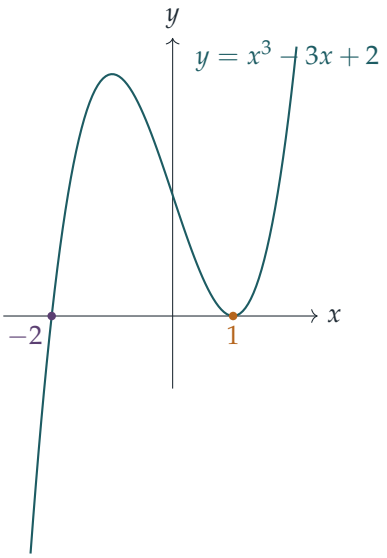
重根が $a = b = \alpha$ となるように根に名前をつける。すると $p = 0$ より $c = -(a+b) = -2\alpha$ となるので、根は $\alpha, \alpha, -2\alpha$ である。よって

$$\begin{aligned} q &= \alpha^2 + \alpha(-2\alpha) + (-2\alpha)\alpha = -3\alpha^2, \\ r &= \alpha \cdot \alpha \cdot (-2\alpha) = -2\alpha^3. \end{aligned}$$

したがって

$$4q^3 + 27r^2 = 4(-27\alpha^6) + 27(4\alpha^6) = -108\alpha^6 + 108\alpha^6 = 0,$$

となり、示すべきことが得られた。ここでは α が実数である必要はどこにもなく、三重根（triple root）の場合（$\alpha = 0$ で、係数がすべてゼロ）も含まれている。



たとえば $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$ では $\alpha = 1$、$q = -3$、$r = -2$ であり、$4(-27) + 27 \cdot 4 = 0$ となる。二重根は、グラフが軸に接することとして現れている。

小問 (ii)

今度は p がゼロとは限らない。もとの三次式の根の和は p であるから、その平均は $p/3$ である。平均の分だけずらして

$$x = y + \tfrac{p}{3}.$$

とおく。すると $y = x - \frac{p}{3}$ であるから、y についての新しい三次式の根は $a - \frac{p}{3}$、$b - \frac{p}{3}$、$c - \frac{p}{3}$ である。それらの和は $p - p = 0$ であり、a, b, c のうち二つが等しければ、これらのうち二つも等しい。

考えてみよう y についての三次式は、具体的にどうなるか。

各項を展開すると

$$\begin{aligned}\left(y+\tfrac{p}{3}\right)^3 &= y^3+py^2+\tfrac{p^2}{3}y+\tfrac{p^3}{27},\\ -p\left(y+\tfrac{p}{3}\right)^2 &= -py^2-\tfrac{2p^2}{3}y-\tfrac{p^3}{9},\\ q\left(y+\tfrac{p}{3}\right) &= qy+\tfrac{pq}{3},\end{aligned}$$

となり、これらと $-r$ を足し合わせると、y^2 の項は打ち消し合い（これこそが平行移動の狙いである）、$\frac{p^3}{27}-\frac{p^3}{9}=-\frac{2p^3}{27}$ を用いて

$$x^3-px^2+qx-r=y^3+\left(q-\frac{p^2}{3}\right)y-\left(\frac{2p^3}{27}-\frac{pq}{3}+r\right),$$

を得る。この y についての三次式は y^3-Py^2+Qy-R の形であり、

$$P=0,\qquad Q=q-\frac{p^2}{3},\qquad R=\frac{2p^3}{27}-\frac{pq}{3}+r.$$

である。y^2 の係数がゼロで、等しい二つの根をもつから、小問 (i) が適用でき、$4Q^3+27R^2=0$、すなわち

$$4\left(q-\frac{p^2}{3}\right)^3+27\left(\frac{2p^3}{27}-\frac{pq}{3}+r\right)^2=0,$$

が得られる。これが求める結果である。

検算

- $p=0$ のとき、(ii) の結果は $4q^3+27r^2=0$ となり、小問 (i) に帰着する。
- $(x-1)^2(x-2)=x^3-4x^2+5x-2$ では $p=4$、$q=5$、$r=2$ であるから、$Q=-\frac{1}{3}$、$R=\frac{128}{27}-\frac{20}{3}+2=\frac{2}{27}$ である。すると $4Q^3+27R^2=-\frac{4}{27}+\frac{4}{27}=0$ となる。
- さらに、重根をもつ数百個のランダムな三次式について、両方の恒等式を厳密な有理数演算で確かめ、平行移動の恒等式もランダムな点で確認した。

よくある間違い

- 解と係数の関係（Vieta's formulae）での符号の誤り。この問題で選ばれている符号 $-p$、$+q$、$-r$ のもとでは、p,q,r の三つはいずれも根を用いて正の符号で表される。
- $p/3$ だけずらす向きを逆にしてしまうこと。新しい三次式の根は $a-\frac{p}{3}$ などであり、だからこそその和がゼロになる。
- (ii) で、すべてを a,a,c を用いて力ずくで展開すること。それでも解けるが、長く間違えやすい。平行移動を使えば (i) をそのまま再利用できる。

STEP のその先へ

一般の三次式では、(ii) の左辺は $-(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$ に等しく、これは**判別式**（discriminant）の符号を変えたものである。これは二つの根が一致するときに限ってゼロになり、その符号から、実係数の三次式が三つの実数解をもつか、一つしかもたないかがわかる。平行移動 $x = y + \frac{p}{3}$ は、三次方程式を解くカルダノ（Cardano）の公式の第一段階でもある。根の対称関数、判別式、そしてどの方程式が冪根（radicals）によって解けるかという問題は、ガロア理論（Galois theory）へとつながっていく。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は、その入門として好適である。

解答例

STEP II 1992、第 8 問

純粋数学 ・ 積分の技法

STEP II 1992、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/92-s2-q8

鍵となる考え方

各小問に一つずつ、計三つの標準的な手法を用いる。(i) では分母を完全に因数分解（factorise）し、**重複した**因数があることに気づく。そのため部分分数分解（partial fractions）には 2 乗の項が必要になる。(ii) では置換（substitution）$t = \tan\frac{x}{2}$ により、$\sin x$ と $\cos x$ の任意の有理関数（rational function）が t の有理関数に変わる。ここでは得られる 2 次式がきれいに因数分解できる。(iii) では $\sinh x$ を指数関数（exponentials）で表して $u = \mathrm{e}^x$ と置換すると、やはり部分分数分解に帰着する。

解答

小問 (i)

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ であるから、分母は $(x-1)^2(x+1)$ である。因数 $x-1$ が重複しているので、

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1},$$

すなわち

$$x = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2.$$

を満たす定数を求める。$x = 1$ を代入すると $1 = 2B$ となり、$B = \frac{1}{2}$ である。$x = -1$ を代入すると $-1 = 4C$ となり、$C = -\frac{1}{4}$ である。x^2 の係数を比較すると $0 = A + C$ とな

り、$A = \frac{1}{4}$ である。よって

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x-1)(x^2-1)}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{4(x+1)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} - \tfrac{1}{4}\ln|x+1| + c \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2(x-1)} + c.\end{aligned}$$

小問 (ii)

$t = \tan\frac{x}{2}$ とおく。すると

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

である。最後の式は $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1+t^2)$ による。したがって

$$3\cos x + 4\sin x = \frac{3-3t^2+8t}{1+t^2} = \frac{(1+3t)(3-t)}{1+t^2},$$

となり、因数 $1+t^2$ が約分される。

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3\cos x + 4\sin x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+3t)(3-t)}.$$

考えてみよう 2 次式 $3+8t-3t^2$ が因数分解できることは、どうすればわかるだろうか。

その判別式（discriminant）は $64+36 = 100 = 10^2$ で完全平方数であるから、根 $t = 3$ と $t = -\frac{1}{3}$ は有理数である。（これは偶然ではない。$3^2+4^2 = 5^2$ であり、これは後で述べる三角関数の合成（harmonic form）の振幅（amplitude）が整数になる理由でもある。）

次に $\dfrac{2}{(1+3t)(3-t)} = \dfrac{a}{1+3t} + \dfrac{b}{3-t}$ とおくと、$2 = a(3-t) + b(1+3t)$ である。$t = 3$ を代入すると $b = \frac{1}{5}$、$t = -\frac{1}{3}$ を代入すると $\frac{10}{3}a = 2$ となり $a = \frac{3}{5}$ である。したがって

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{3\cos x + 4\sin x} &= \int \left(\frac{3}{5(1+3t)} + \frac{1}{5(3-t)}\right)\mathrm{d}t = \tfrac{1}{5}\ln|1+3t| - \tfrac{1}{5}\ln|3-t| + c \\ &= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{1+3\tan\frac{x}{2}}{3-\tan\frac{x}{2}}\right| + c.\end{aligned}$$

別解として、$\cos\beta = \frac{4}{5}$、$\sin\beta = \frac{3}{5}$ として $3\cos x + 4\sin x = 5\sin(x+\beta)$ と表すこともできる。このとき積分は $\frac{1}{5}\int \operatorname{cosec}(x+\beta)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\ln\left|\tan\frac{1}{2}(x+\beta)\right| + c$ となる。二つの答えは一致する。実際、$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{1}{3}$（$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\beta}{1+\cos\beta} = \frac{3/5}{9/5}$ による）であるから、加法

定理（addition formula）より

$$\tan\tfrac{1}{2}(x+\beta)=\frac{t+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}t}=\frac{1+3t}{3-t}.$$

となる。

小問 (iii)

$\sinh x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x})$ であるから、分子と分母に e^{x} を掛けると

$$\frac{1}{\sinh x}=\frac{2\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x}-1}.$$

となる。$u=\mathrm{e}^{x}$ と置換すると $\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$ であるから、

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sinh x}&=\int\frac{2\,\mathrm{d}u}{u^{2}-1}=\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u=\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+c\\&=\ln\left|\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}+1}\right|+c=\ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right|+c,\end{aligned}$$

である。最後の変形では分子と分母を $\mathrm{e}^{x/2}$ で割った。すなわち $\dfrac{\mathrm{e}^{x/2}-\mathrm{e}^{-x/2}}{\mathrm{e}^{x/2}+\mathrm{e}^{-x/2}}=\tanh\frac{x}{2}$ である。(ii) の別解で用いた $\int\operatorname{cosec}x\,\mathrm{d}x=\ln|\tan\frac{x}{2}|+c$ と見事に対応していることに注意しよう。

検算

それぞれの答えを微分してみる。たとえば (iii) では、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\tanh\frac{x}{2}=\frac{\frac{1}{2}\operatorname{sech}^{2}\frac{x}{2}}{\tanh\frac{x}{2}}=\frac{1}{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sinh x}$ である。数値的には、シンプソンの公式（Simpson's rule）により、(i) の被積分関数の $\int_{2}^{5}$ は 0.548287、(ii) の被積分関数の $\int_{0}^{1}$ は 0.234276、$\int_{1/2}^{2}\operatorname{cosech}x\,\mathrm{d}x$ は 1.134488 となり、いずれも原始関数（antiderivative）から求めた値と小数点以下少なくとも 12 桁まで一致する。

よくある間違い

- (i) で重複因数を見落として $\frac{A}{x-1}+\frac{C}{x+1}$ だけで分解しようとすること、あるいはそもそも $x^{2}-1$ が因数分解できることを忘れること。
- 対数の中の絶対値記号（modulus signs）を落とすこと。被積分関数は $x-1$、$1+3t$、$\tanh\frac{x}{2}$ が負の値をとるときにも定義されている。
- (ii) で $\mathrm{d}x$ から生じる因数 $\frac{2}{1+t^{2}}$ を忘れること。

STEP のその先へ

置換 $t = \tan\frac{x}{2}$（ワイエルシュトラス置換（Weierstrass substitution）とよばれることもある）により、$\sin x$ と $\cos x$ のあらゆる有理関数が初等的な原始関数（elementary antiderivative）をもつことがわかる。t のあらゆる有理関数は部分分数分解で処理できるからである。この背後には単位円の有理関数によるパラメータ表示があり、これはすべてのピタゴラス数（Pythagorean triples）を生成するのと同じものである。そもそもどのような関数が初等的な原始関数をもつのかという問いは、リウヴィル（Liouville）の定理や微分代数（differential algebra）へとつながっていく。積分の解析的な基礎については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を参照するとよい。

解答例

STEP II 1992、第 9 問

純粋数学 ・ スカラー三重積

> **STEP II 1992、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q9

鍵となる考え方

$\mathbf{r}$ の式を、$\mathbf{a}$ に $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ と $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ の一次結合を加えた形に変形すると、これが A, B, C を通る平面（plane）であることがわかる。その平面の法線ベクトル（normal）は、平面内にある 2 つのベクトルの外積（cross product）で与えられ、その外積を展開すると、問題に現れる 3 つの三重積（triple product）がちょうど現れる。そのあとは、恒等式（identity）が**すべての** λ, μ に対して成り立つので、都合のよい値を選べばよい。

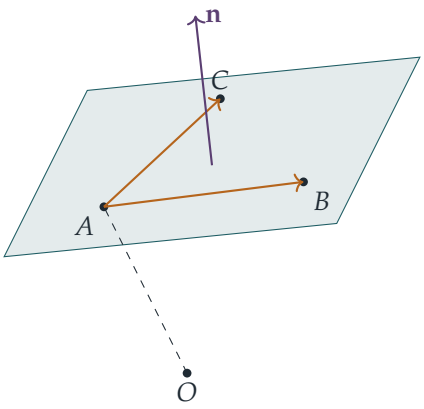
解答

軌跡

方程式を次のように書き直す。

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b}-\mathbf{a}) + \mu(\mathbf{c}-\mathbf{a}).$$

これは点 A に、ベクトル $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}-\mathbf{a}$ と $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}-\mathbf{a}$ の任意の一次結合を加えたものである。この 2 つのベクトルは平行ではない。もし平行なら A, B, C は一直線上にあることになるが、直線と O を合わせたものは必ずある平面上にあり、これは仮定により除外されている。したがって、λ と μ がすべての実数を動くとき、$\mathbf{r}$ は A, B, C **を通る平面**を描く。$(\lambda, \mu) = (0,0), (1,0), (0,1)$ とすると、それぞれ A, B, C 自身が得られる。O は平面 ABC 上にないので、この平面は原点を通らない。



方程式 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=p$

平面の法線ベクトルは $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の両方に垂直であるから、

$$\mathbf{n}=(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a}),$$

とおく。2 つのベクトルは平行でないので、これは零ベクトルではない。$\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$ と $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}$ を用いて展開すると、

$$\begin{aligned}\mathbf{n}&=\mathbf{b}\times\mathbf{c}-\mathbf{b}\times\mathbf{a}-\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{a}\times\mathbf{a}\\&=\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}.\end{aligned}$$

平面上のすべての点は、A と $\mathbf{n}$ に垂直なベクトルだけ異なるので、$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$ である。$\mathbf{a}$ は $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ にも $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ にも垂直であるから、

$$p=\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

よって平面の方程式は $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ である。

考えてみよう $\mathbf{r}$ のパラメータ表示を代入すると、$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}$ はどうなるか。

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}, \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}, \mathbf{c}\cdot\mathbf{n}$ が必要である。あるベクトルは、それ自身を含む外積に必ず垂直であるから、いずれの場合も 3 つの項のうち 2 つが消える。

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}),\qquad \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}),\qquad \mathbf{c}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

点 $\mathbf{r}=(1-\lambda-\mu)\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c}$ はすべての λ, μ に対して平面上にあるので、$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=p$ から

$$(1-\lambda-\mu)\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\lambda\,\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mu\,\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

が得られる。両辺から $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ を引くと、すべてのスカラー λ, μ に対して

$$-(\lambda+\mu)\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\lambda\,\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mu\,\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0$$

となり、示すべき式が得られた。

結論の導出

この恒等式はすべての λ, μ に対して成り立つので、項を切り分けられるような値を選ぶ。

- $\lambda = 1, \mu = 0$： $-\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = 0$。
- $\lambda = 0, \mu = 1$： $-\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0$。

これらを合わせると

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

を得る。（同じことであるが、左辺は λ と μ について一次式であり恒等的に零なので、λ の係数も μ の係数もともに零でなければならない。）

A, B, C, O が同一平面上にある場合

このとき、$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ はすべて O を通る 1 つの平面上にある。$\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ はその平面に垂直（または零）であるから $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = 0$ となり、同様に残りの 2 つの三重積も零になる。幾何学的には、$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が張る平行六面体（parallelepiped）はつぶれていて体積が零である。結果は依然として成り立つが、自明に $0 = 0 = 0$ となるだけである。A, B, C が一直線上にない（非共線（non-collinear））ならば、軌跡（locus）は依然として平面であるが、原点を通るので $p = 0$ となり、その方程式は $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = 0$ である。A, B, C が一直線上にあるならば $\mathbf{n} = \mathbf{0}$ であり、軌跡は直線にすぎない（3 点がすべて一致すれば 1 点になる）ので、この議論からは何の情報も得られない。

検算

- $\mathbf{a} = \mathbf{i}, \mathbf{b} = \mathbf{j}, \mathbf{c} = \mathbf{k}$ とすると、3 つの三重積はすべて 1 に等しく、$\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $p = 1$ となる。平面は $x + y + z = 1$ であり、確かに 3 点を含む。
- 整数成分の 3 つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ をランダムに 2000 組とり、厳密な分数計算で確かめた。$\mathbf{n}$ の展開形、p の値、ランダムな λ, μ に対する方程式 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = p$、そして 3 つの三重積の一致は、いずれも厳密に成り立った。同一平面上にある組では、三重積はすべて 0 であった。

よくある間違い

- $(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ を展開するときの符号の誤り。項 $-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ は $+\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ に、$-\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ は $+\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ になる。

- なぜ $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ なのかを述べ忘れること。まさにここで、同一平面上にないという条件（A, B, C が一直線上にないことを通して）が使われる。

STEP のその先へ

スカラー三重積（scalar triple product）$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ は、行が $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ である 3×3 行列式（determinant）に等しく、ここで証明した巡回対称性は、行の巡回置換（cyclic permutation）（2 回の入れ替え）で行列式が変わらないという事実にほかならない。その値は 3 つのベクトルが張る平行六面体の符号付き体積であり、それが零になるのはベクトルがちょうど一次従属（linearly dependent）であるとき、すなわち同一平面上にある場合である。大学 1 年次の講義では、これが体積の拡大率としての行列式の一般論へと発展する。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）がこれをわかりやすく展開している。

解答例

STEP II 1992、第 10 問

純粋数学 ・ 複素数平面上の軌跡

STEP II 1992、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/92-s2-q10

鍵となる考え方

$\dfrac{z-1}{z} = \dfrac{1-z}{0-z}$ と書く。その偏角（argument）は、方向 $z \to 0$ から方向 $z \to 1$ まで反時計回りに測った角である。したがって偏角を固定することは、0 から 1 への線分が z において張る角（subtend する角）を固定することにほかならず、あとは円の定理（circle theorems）、すなわち同じ弧に対する円周角（angles in the same segment）や円に内接する四角形（cyclic quadrilateral）の対角の性質が仕事を引き受けてくれる。最後の小問も同じ考え方で、0 から 1 への線分の代わりに弦（chord）z_4z_2 を用いればよい。

解答

（問題文には誤植がある。条件は $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}\pi$ のつもりである。）

すべての仕事は二つの事実が担う。第一に、$\arg\dfrac{z-1}{z} = \arg(1-z) - \arg(0-z)$ であるから、この偏角は z における、直線 $z0$ から直線 $z1$ まで反時計回りに測った角を表す。第二に、これによって z が実軸のどちら側にあるかがわかる：

$$\operatorname{Im}\frac{z-1}{z} = \operatorname{Im}\left(1-\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Im}\left(-\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2}.$$

よって $\arg\frac{z-1}{z} \in (0,\pi)$ となるのはちょうど $\operatorname{Im} z > 0$ のときであり、$(-\pi,0)$ に属するのはちょうど $\operatorname{Im} z < 0$ のときである。実軸上の点では商が実数（偏角は 0 または π）となり、$z = 0,1$ では偏角はそもそも定まらない。

小問 (i)

このとき $\operatorname{Im} z > 0$ であり、0 から 1 への線分は z において角 α を張る。固定された弦が一定の角を張るような実軸より上の点全体は、弦の両端を通る円の弧をなす（同じ弧に対する円周角は等しい）。逆に、その弧上のどの点からも弦は角 α で見え、しかもその点は弦より上にあるので向きは反時計回りである。よって弧全体が軌跡（locus）に含まれる。

円を確定させよう。中心角は 2α であるから、長さ 1 の弦に対して半径は $\dfrac{1}{2\sin\alpha}$ となり、中心は $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ 上の高さ $\frac{1}{2}\cot\alpha \geq 0$ の位置にある。軌跡は円

$$\left|z - \tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\cot\alpha\right| = \frac{1}{2\sin\alpha}$$

のうち実軸より上にある弧であり、端点 0 と 1 は除く。$\alpha \leq \frac{1}{2}\pi$ であるから、これは優弧（major arc）である。$\alpha = \frac{1}{2}\pi$ のときは、0 から 1 を直径とする上半円となる（半円に対する円周角）。

小問 (ii)

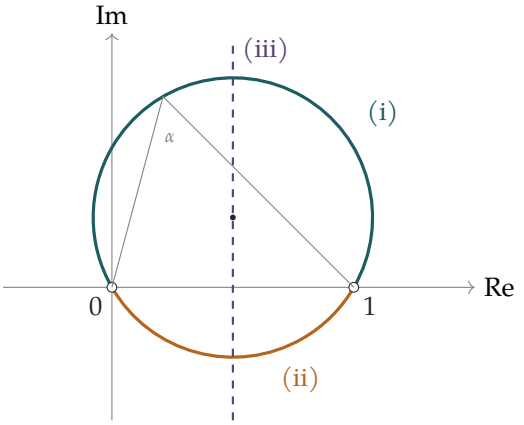
今度は偏角 $\alpha - \pi$ が $(-\pi, -\frac{1}{2}\pi]$ に属するので $\operatorname{Im} z < 0$ であり、弦は z において大きさ $\pi - \alpha$ の角を時計回りに張る。

考えてみよう 実軸より下で弦が角 $\pi - \alpha$ を張るのは、どの円か？

(i) と同じ円である。P が (i) の弧上にあり、Q がその円のもう一方の弧上にあるとき、$0PQ1$（適切な順に並べたもの）は P と Q が対頂点となる円に内接する四角形であるから、P と Q における角の和は π である。よって、実軸より下の劣弧（minor arc）こそがちょうど角が $\pi - \alpha$ となる場所である。軌跡は (i) の円のうち実軸より下にある弧であり、やはり 0 と 1 を除く。小問 (i) と (ii) を合わせると、0 と 1 を除いた円全体になる。（$\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ならば、(ii) は下半円である。）

小問 (iii)

$\left|\frac{z-1}{z}\right| = 1$ は、$z \neq 0$ のもとで $|z-1| = |z|$ を意味する。すなわち z は 0 と 1 から等距離にある。軌跡は垂直二等分線（perpendicular bisector）、すなわち直線 $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ である。



図は $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ の場合である。ティール色の優弧が (i)、アンバー色の劣弧が (ii)、プラム色の破線が (iii) であり、白抜きの丸は除外される点 0 と 1 を表す。

最後の小問

$f(z) = \dfrac{z - z_2}{z - z_4}$ とおく。$(z_1 - z_4)(z_3 - z_2) = (z_4 - z_1)(z_2 - z_3)$ であるから、

$$\frac{f(z_1)}{f(z_3)} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_4 - z_1)(z_2 - z_3)} = w,$$

となり、$\arg w = \arg f(z_1) - \arg f(z_3)$（$2\pi$ を法として）が成り立つ。

関数 f は、小問 (i) と (ii) の関数を新しい座標で表したものである。$z = z_4 + (z_2 - z_4)u$ とおく。これは回転と拡大に平行移動を続けたもので、$u = 0, 1$ をそれぞれ z_4, z_2 に移す。このとき

$$f(z) = \frac{(z_2 - z_4)(u - 1)}{(z_2 - z_4)u} = \frac{u - 1}{u}.$$

4 点を通る円は、u 平面における 0 と 1 を通る円に対応する。

考えてみよう なぜ z_1 と z_3 は異なる弧の上にあるのか？

4 点は円周上を z_1, z_2, z_3, z_4 の順に並んでいるので、弦 z_2z_4 は円を二つの弧に分け、一方が z_1 を、他方が z_3 を含む。u 平面では、そのうち一方が実軸より上に、他方が下にある。

(i) と (ii) から、$\frac{u-1}{u}$ の偏角は上側の弧では一定値 $\beta \in (0, \pi)$ をとり、下側の弧では値 $\beta - \pi$ をとる。ここでは $\beta \leq \frac{1}{2}\pi$ を仮定していない。上で述べた円の定理による議論は、その制限を一度も使っていないからである。したがって

$$\arg w = \arg f(z_1) - \arg f(z_3) = \pm\big(\beta - (\beta - \pi)\big) = \pm\pi \pmod{2\pi},$$

であり、w は実数、しかも実際には負である。 ■

検算

正方形 $z_1 = 1, z_2 = \mathrm{i}, z_3 = -1, z_4 = -\mathrm{i}$ については $w = \dfrac{(1-\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})}{(-1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \dfrac{-(1-\mathrm{i})^2}{-(1+\mathrm{i})^2} = \dfrac{-2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = -1$ となり、これは負の実数である。(i) については、$\alpha = \frac{1}{2}\pi$、$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ とすると、$\frac{z-1}{z} = \frac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \mathrm{i}$ であり、その偏角は $\frac{1}{2}\pi$ である。さらに、いくつかの α の値について各弧が述べたとおりの偏角をもつこと、およびランダムな円上に順に並んだ 4 点の組 10^4 個について w が負の実数であることを数値的に確認した。

よくある間違い

- (i) の答えとして円全体を挙げてしまう。正しい偏角をもつのは一方の弧だけであり、もう一方の弧では偏角は $\alpha - \pi$ となる。これはまさに小問 (ii) である。
- 偏角が定義されない点 0 と 1 を除き忘れる。
- $(z_4 - z_1)(z_2 - z_3)$ の負号の扱いを誤り、$\arg w$ の符号を間違える。上のように負号を対にして処理すれば、この誤りは避けられる。

STEP のその先へ

量 w は（符号と順序の違いを除いて）4 点の**複比**（cross-ratio）である。複比はすべてのメビウス（Möbius）変換 $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ で不変であり、4 点が一つの円または直線上にあるのは、ちょうどその複比が実数のときである。メビウス変換は円と直線を円と直線に移すので、これは 4 点が同一円周上にあること（共円性、concyclicity）を証明する見事な方法となる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ビジュアル複素解析』）は、この幾何学的な見方を美しく展開している。

解答例

STEP II 1992、第 11 問

力学 ・ 放物運動

> **STEP II 1992、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q11

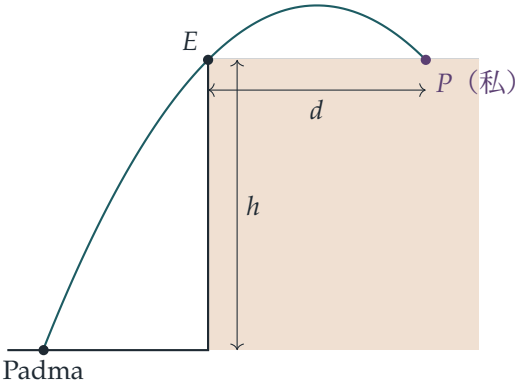
鍵となる考え方

この投げ方で厄介なのは、財布を高さ h まで上げることではなく、崖の上を越えさせることである。財布は崖の縁から私のところまで、水平距離にして少なくとも d の区間ずっと、高さ h 以上になければならない。そこで、財布が初めて高さ h に達した瞬間からの運動だけを考える。その時点以降は、水平な地面（崖の上の高さ）の上での普通の放物運動（projectile motion）であり、その速さはエネルギー保存則（conservation of energy）からわかる。あとはおなじみの最大到達距離（maximum range）u^2/g が片をつけてくれる。

解答

モデル

財布を、空気抵抗（air resistance）のない状態で重力のみを受けて自由に運動する質点（particle）とみなし、地面の高さから投げられるものとする（Padma の身長は無視できる）。崖の上端の縁を E、私が立っている点を P とする。したがって P は高さ h にあり、E から水平距離 d だけ先にある。崖の面は鉛直であり、浜辺は崖をはさんで私とは反対側にある。よって Padma がどこに立っても、財布は E の上を越え（最悪でもかすめ）、それから P まで降りてこなければならない。



全体を通して一つの事実を用いる。ある高さで速さ u をもち、水平から角 α だけ上向きに運動する質点は、時間 $2u\sin\alpha/g$ の後に同じ高さに戻り、その間に水平方向に

$$\frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} \le \frac{u^2}{g},$$

だけ進む。等号が成り立つのはちょうど $\alpha = 45^\circ$ のときである。

条件は必要である

ある投げ方で財布が P に届いたとする。財布は高さ h に達しなければならないので、軌道上で初めて高さ h となる点を Q とする。崖のふもとを位置エネルギー（potential energy）の基準にとると、エネルギー保存則から Q での速さ u は

$$u^2 = V^2 - 2gh.$$

となる。

> ? **考えてみよう** なぜ Q は P から水平距離にして少なくとも d 離れていなければならないのか？

財布の水平位置が崖の面の位置にあるとき、財布は高さ h 以上になければならない。そうでなければ崖の面にぶつかる（あるいは縁の下を通る）からである。財布の高さは 0 から連続的に増えるので、その時点までにすでに高さ h に達している。つまり Q は E より浜辺側にあるか、E に一致する。P は E から水平距離 d だけ先にあるので、Q から P までの水平距離は少なくとも d である。

Q から P までの間、財布は速さ u で出発し、高さ h から再び高さ h まで運動する。上の到達距離の事実により、その間に進む水平距離は高々 u^2/g である。したがって

$$d \le \frac{u^2}{g} = \frac{V^2 - 2gh}{g}, \qquad \text{すなわち} \qquad V^2 \ge g(2h + d).$$

条件は十分である

次に $V^2 \geq g(2h+d)$ と仮定する。すると $u^2 = V^2 - 2gh \geq gd > 0$ であるから $gd/u^2 \leq 1$ となり、$0 < \alpha \leq 45^\circ$ かつ

$$\sin 2\alpha = \frac{gd}{u^2}.$$

を満たす角 α を選ぶことができる。速さ u で E を通過し、浜辺から遠ざかる向きに水平から角 α だけ上向きに運動する放物線（parabola）の軌道を考える。到達距離の事実により、この軌道は E から水平距離 $u^2 \sin 2\alpha / g = d$ だけ先で高さ h に戻ってくる。これはちょうど P である。E と P の間では軌道は高さ h より上にあるので、崖の上を越える。

この軌道を E から時間を逆向きにたどる。より早い時刻ほど、財布はより低く、より浜辺の上方の遠くにある（鉛直方向の速度はより大きく、上向きだったからである）。したがって軌道は、崖のふもとから正の水平距離だけ離れた浜辺上のある点で地面と交わる。E に達する前の軌道はすべて崖の面より浜辺側にあるので、さえぎるものはない。また浜辺は広いので、Padma はその点に立つことができる。エネルギー保存則により、その点での速さは $\sqrt{u^2 + 2gh} = V$ である。よって Padma がその点から軌道の方向に速さ V で投げれば、財布はこの軌道をたどって私のところに届く。

（ちょうど $V^2 = g(2h+d)$ のときは $\alpha = 45^\circ$ であり、財布は縁 E をかすめる。V がそれより大きいときは、$(0^\circ, 90^\circ)$ の範囲にうまくいく角が二つあり、どちらの場合も財布は縁の真上を厳密に上方で通過する。）

二つの部分を合わせると、Padma が財布を私のところへ投げ届けられるための必要十分条件は $V^2 \geq g(2h+d)$ であり、これが示すべきことであった。

検算

- $d = 0$ のとき、条件は $V^2 \geq 2gh$ となる。これはまさに、鉛直に投げ上げて高さ h に届くために必要な条件である。
- $h = 0$ のとき、条件は $V^2 \geq gd$ となる。これは水平な地面上での通常の最大到達距離の条件である。
- 崖の縁を無視すれば、Padma にとって最善なのは崖のふもとに立つことであり、すべての軌道の包絡放物線（bounding parabola）からは $V^2 \geq g\left(h + \sqrt{h^2 + d^2}\right)$ という条件しか得られない。$\sqrt{h^2 + d^2} \leq h + d$ であるから、これはより弱い条件である。したがって、実際に効いている制約は崖の縁である。
- 数値的には、$g = 9.8$、$h = 20$、$d = 15$ のとき臨界速度は $\sqrt{539} \approx 23.2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ である。Padma は崖のふもとから約 11.4 m のところに立ち、投げた財布の運動を逐次的に

シミュレーションすると、財布は E をかすめて縁から 15.0 m 先に着地する。また、ランダムな h、V についてすべての投射角を走査したところ、軌道上の高さ h の二点の間の水平距離の最大値は $(V^2 - 2gh)/g$ であることが確かめられた。

よくある間違い

- 崖のふもとから見た点 P に対する包絡放物線だけを用いること。これは崖の縁を無視しており、得られる条件は必要条件ではあるが十分条件ではない。
- 一方向しか証明しないこと。十分性の証明には具体的な投げ方を示すことが必要であり、それが浜辺から出発し、崖にぶつからないことの確認も含まれる。

STEP のその先へ

運動を高さ h で仕切り直すという工夫がうまくいくのは、運動方程式が時間の推移や水平方向の平行移動によって変わらないからであり、そのため軌道上のどの点も新たな投射点とみなすことができる。「どの目標に届くか?」という形の問題は、曲線族の包絡線（envelope）に関する問題である。障害物があるときには、どの制約が最初に効いてくるかによって答えが決まる。この考え方は、最適化（optimisation）や変分法（calculus of variations）にも再び現れる。放物運動とエネルギーを用いた方法について次に学ぶには、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい。

解答例

STEP II 1992、第 12 問

力学 ・ 力のモーメントと弾性系

STEP II 1992、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/92-s2-q12

鍵となる考え方

各車輪は自由に回転できるので、車輪が釣り合い（equilibrium）の状態にあるための条件は、その中心のまわりのモーメント（moment）がつり合うことだけである。つり下げられた質点は車輪を一方の向きに回そうとし、弾性ひも（elastic string）はそれを反対向きに引き戻す。図形の関係から弾性ひもの伸び（extension）が θ で表され、フック（Hooke）の法則から張力（tension）が得られる。そしてモーメントを考えると θ についての方程式が一つ得られる。したがって、釣り合いの位置を数えることは、物理的に意味のある角度の範囲でこの方程式の解を数えることにほかならない。

解答

モデルの設定

質点は質点として扱い、それらをつり下げるひもは軽くて伸びない（inextensible）ものとし、弾性ひもは軽くてフックの法則に従うものとする。車軸はなめらかであるから、各中心における抗力はその中心のまわりにモーメントをもたない。

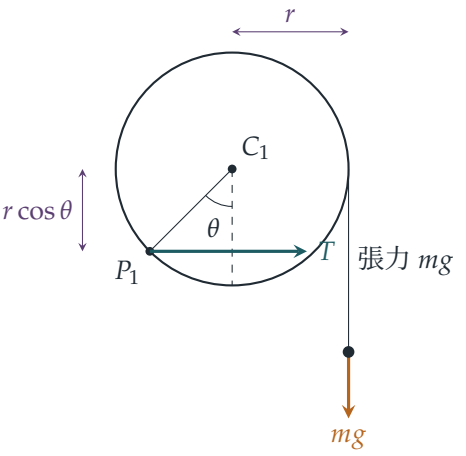
C_1C_2 を水平にとる。図において、P_1 は C_1 の外側（左側）に距離 $r\sin\theta$、下方に距離 $r\cos\theta$ の位置にあり、P_2 はその鏡像である。よって P_1 と P_2 は同じ高さにあり、弾性ひもは水平で、その長さは

$$P_1P_2 = d + 2r\sin\theta.$$

である。自然長（natural length）は d であるから、伸びは $2r\sin\theta$ であり、フックの法則により張力は

$$T = \frac{\lambda\,(2r\sin\theta)}{d}.$$

となる。



W_1 につり下げられた質点は釣り合っているので、そのひもの張力は mg である。このひもは W_2 に近い側で車輪から接線方向に離れ、その位置は C_1 から水平距離 r のところにある。弾性ひもは P_1 を水平に W_2 の方へ力 T で引き、その作用線は C_1 の下方距離 $r\cos\theta$ のところにある。

釣り合いの条件

C_1 のまわりのモーメントを考える。重さは W_1 を（図の向きで）時計回りにモーメント mgr で回そうとし、張力は反時計回りにモーメント $Tr\cos\theta$ で回そうとする。よって

$$mgr = Tr\cos\theta = \frac{2\lambda r\sin\theta}{d}\,r\cos\theta = \frac{\lambda r^2\sin 2\theta}{d},$$

となる。ここで $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ を用いた。両辺を λr^2 で割ると

$$\sin 2\theta = \frac{mgd}{\lambda r},$$

が得られ、これが示すべき式である。対称性により、C_2 のまわりのモーメントを考えても同じ方程式が得られる。

許される角度はどれか

考えてみよう なぜ θ は任意の角度をとることができず、したがって $\sin 2\theta = k$ が無数の解をもつことにはならないのか。

張力のモーメントは重さのモーメントと逆向きでなければならない。$\sin\theta \le 0$ ならば、点 P_1 と P_2 の距離は d 以下であるから、弾性ひもはたるんでおり $T = 0$ となって、mgr

とつり合うものがない。$\cos\theta \leq 0$ ならば、ひもは C_1 と同じ高さかそれより上を通るので、C_1 のまわりのそのモーメントは 0 であるか、重さと同じ向きに車輪を回す。いずれの場合も釣り合いは存在しない。したがって、釣り合いには

$$0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}, \qquad \text{すなわち} \qquad 0 < 2\theta < \pi.$$

が必要である。(二つの車輪が**異なる**角度で止まることはありうるだろうか。各中心のまわりの張力のモーメントは、T にその中心から直線 P_1P_2 までの垂直距離を掛けたものであり、どちらのモーメントも mgr に等しくなければならない。よって C_1 と C_2 はこの直線から等距離にあり、しかも直線に対して同じ側、すなわち直線は中心より下にある。したがってこの直線は C_1C_2 に平行であり、P_1 と P_2 は同じ深さにある。二つの角度の符号が逆であればひもの長さはちょうど d となってたるんでしまうから、二つの角度は一致する。ゆえに、釣り合いはすべて図に示した対称な形のものである。)

$k = \dfrac{mgd}{\lambda r} > 0$ とおく。$0 < 2\theta < \pi$ において、$\sin 2\theta$ は 0 から増加して $2\theta = \frac{\pi}{2}$ で 1 となり、再び 0 まで減少する。したがって $(0,1)$ の各値をちょうど 2 回、値 1 をちょうど 1 回とる。よって方程式 $\sin 2\theta = k$ は

- $k > 1$ のとき、解をもたない。
- $k = 1$ のとき、ちょうど一つの解 $\theta = \frac{\pi}{4}$ をもつ。
- $0 < k < 1$ のとき、ちょうど二つの解 $\theta = \alpha$ と $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ をもつ。ただし $\alpha = \frac{1}{2}\arcsin k \in (0, \frac{\pi}{4})$ である。

$k > 1 \iff \lambda < \dfrac{mgd}{r}$ であるから、答えは次のとおりである。

小問 (i)

$\lambda < \dfrac{mgd}{r}$ のとき、釣り合いの位置は存在しない。弾性ひもが弱すぎて、どの角度でも質点を支えられない。

小問 (ii)

$\lambda = \dfrac{mgd}{r}$ のとき、釣り合いの位置はただ一つであり、$\theta = \frac{\pi}{4}$ である。

小問 (iii)

$\lambda > \dfrac{mgd}{r}$ のとき、釣り合いの位置はちょうど二つであり、$\theta = \alpha$ と $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ である。

小問 (iv)

θ は $(0, \frac{\pi}{2})$ に限られるので、釣り合いの位置が三つ以上となる λ の値は存在しない。

検算

- 次元：λ は力であり mg も力である。また d/r は長さの比であるから、$mgd/(\lambda r)$ は無次元（dimensionless）であり、正弦の値として当然そうでなければならない。
- 極限の場合：$\lambda \to \infty$ とすると、ひもは伸びなくなり、二つの解は $\theta \to 0$（伸びはごく小さく、張力は大きい）と $\theta \to \frac{\pi}{2}$（ひもがほぼ中心と同じ高さにあり、腕の長さ（moment arm）がごく小さい）に近づく。どちらも理にかなっている。
- 数値的に、$m = 1$、$d = 4$、$r = 1$、$g = 9.8$、$\lambda = 3mgd/r$（よって $k = \frac{1}{3}$）とすると、二つの車輪の完全なモデル（二つの角度が異なることも許す）はちょうど二つの釣り合いをもち、それは $\theta \approx 0.1699$ と $\theta \approx 1.4009$ である。これらは $\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}$ と、$\frac{\pi}{2}$ からそれを引いたものである。

よくある間違い

- 伸びを $2r\sin\theta$ ではなく $r\sin\theta$ としてしまう。ひもの両端がともに外側へ動くことに注意する。
- 張力の腕の長さとして $r\sin\theta$ を用いてしまう。張力は水平であるから、その腕の長さは**鉛直**方向の距離 $r\cos\theta$ である。
- 物理的に可能なのは $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ だけであることを忘れて、(iv) に「無数にある」と答えてしまう。

STEP のその先へ

パラメータを変化させながら釣り合いの個数を数えることは、**分岐理論**（bifurcation theory）の出発点である。ここでは、$\lambda > mgd/r$ のときの二つの釣り合いが $\lambda = mgd/r$ で合体して消滅する。これはサドルノード分岐（saddle-node bifurcation、折り目分岐（fold bifurcation）ともいう）と呼ばれる。ポテンシャルエネルギー（potential energy）を調べると、二つのうち一方は安定（stable）で他方は不安定（unstable）であることがわかり、これは折り目分岐に典型的な性質である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、モーメント、剛体（rigid body）の釣り合い、そしてポテンシャルエネルギーによる安定性が扱われている。

解答例

STEP II 1992、第 13 問

力学 ・ 摩擦と連結された質点

STEP II 1992、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

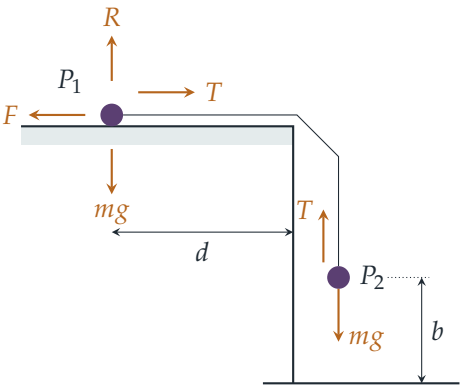
step.maths.org/questions/92-s2-q13

鍵となる考え方

運動は二つの段階からなる。P_2 が落下している間は糸（string）がぴんと張っており、二つの質点は共通の加速度で一緒に運動する。P_2 が床に当たると糸はたるみ、P_1 は摩擦によって滑りながら止まるだけである。すべては衝突の瞬間の速さから導かれる。前半では停止するまでの**距離**と端までの残りの距離を比べ、後半では二つの**時間**を比べる。

解答

P_1 と P_2 を質点（particle）とみなし、糸は軽くて伸び縮みしない（light and inextensible）もので、滑らかな端にかけられているとする。したがって張力（tension）T は糸のどこでも等しい。テーブルは P_1 に対して粗い。$b < d$ を仮定する。こうすると P_1 が端に達する前に P_2 が着地する（糸の長さはこれ以上関与しない）。



前半

第 1 段階：糸が張っている。 P_1 について鉛直方向の力のつり合いを考えると $R = mg$ である。P_1 は滑っているので摩擦力は最大摩擦力（limiting friction）となり、$F = \mu R = \mu mg$ で運動を妨げる向きにはたらく。共通の加速度を a とすると、

$$\begin{aligned} P_2\,(\text{下向き}): &\quad mg - T = ma, \\ P_1\,(\text{端の向き}): &\quad T - \mu mg = ma. \end{aligned}$$

辺々を加えると $2ma = mg(1-\mu)$ となるので $a = \frac{1}{2}g(1-\mu)$ であり、$\mu < 1$ よりこれは正である。したがって系は実際に動き始める。P_2 は静止状態から距離 b だけ落下するので、床に達したときの速さ V は

$$V^2 = 2ab = gb(1-\mu).$$

を満たす。この瞬間 P_1 も同じ速さ V をもち、距離 b だけ進んでいるので、端からの距離は $d - b$ である。

第 2 段階：糸がたるんでいる。衝突後、P_2 は床の上にあるか上向きにはね返っており、一方 P_1 は端に向かって進み続けるので、糸はたるみ $T = 0$ となる。

> **考えてみよう** P_2 がはね返っている間に、糸が再び張ることがないのはなぜか？

衝突の瞬間、糸はちょうど張った状態にあった。その後 P_1 は端に近づくので、端の向こう側へ送り出される糸は増える。一方 P_2 は床より下には行かないので、衝突時より多くの糸を必要としない。したがって、それ以降糸はたるんだままである。

よって P_1 は摩擦だけによる大きさ μg の加速度で減速し、さらに

$$s = \frac{V^2}{2\mu g} = \frac{b(1-\mu)}{2\mu},$$

の距離を進んで静止する。ただし、それより先に端に達しない場合である。ゆえに P_1 が落ちるのは $s > d - b$ のとき、かつそのときに限る：

$$\begin{aligned} \frac{b(1-\mu)}{2\mu} > d - b &\iff b - b\mu > 2\mu d - 2\mu b \qquad (\text{両辺に掛けた数は} 2\mu > 0) \\ &\iff b > \mu(2d - b) \\ &\iff \mu < \frac{b}{2d-b}, \end{aligned}$$

最後の段階では $2d - b$ で割っているが、$d > b$ よりこれは正である。どの段階も逆にたどれるので、これが求める「必要十分条件」である。（μ が $b/(2d-b)$ に等しい場合、P_1 はちょうど端で止まり、落ちない。）

後半

いま $\mu > b/(2d-b)$ なので、P_1 はテーブルの上で止まる。P_2 が初めて床に当たった瞬間から時間を測る。この瞬間、両方の質点の速さは V である。

P_1：速さ V から大きさ μg の加速度で減速するので、

$$t_1 = \frac{V}{\mu g}.$$

の時間の後に止まる。

P_2：ニュートンのはね返りの法則（Newton's law of restitution）により、速さ eV ではね返る。糸はたるんでいるので重力のみを受けて自由に運動し、$eVt - \frac{1}{2}gt^2 = 0$ のとき、すなわち

$$t_2 = \frac{2eV}{g}.$$

の時間の後に再び床に戻る。（衝突は瞬間的なので、1 回目のはね返りで時間は失われない。）

P_1 が 2 回目のはね返りより前に静止するのは、$t_1 < t_2$ のとき、かつそのときに限る：

$$\frac{V}{\mu g} < \frac{2eV}{g} \iff \frac{1}{\mu} < 2e \iff e > \frac{1}{2\mu},$$

ここで $V/g > 0$ で割った。よって $e > 1/(2\mu)$ ならば、P_2 が 2 回目にはね返る前に P_1 は静止し、題意が示された。実際には逆も成り立つ。

検算

- 極限の場合：$\mu \to 0$ のとき、上限 $b/(2d-b)$ は自明に下回り、滑らかなテーブルの上では P_1 は確かに滑り落ちる。$b = d$ ならば上限は 1 となるので、$\mu < 1$ である限り必ず落ちる。P_2 が着地するとき P_1 はすでに端にあって、まだ動いているのだから、これは正しい。
- $\mu < 1$ なので、二つ目の条件には $e > \frac{1}{2}$ が必要である。ほとんどはね返らない床では跳躍が短くなるので、予想どおり P_2 のほうが先に再着地する。
- 数値的に、$d = 2$、$b = 1$、$\mu = 0.5$、$e = 0.8$（$g = 9.8$ とする）として運動を少しずつ計算すると、$t_1 \approx 0.452\,\mathrm{s}$、$t_2 \approx 0.361\,\mathrm{s}$ となり、$V^2 = 4.9$ のときの $V/(\mu g)$ と $2eV/g$ に一致する。ここでは $e = 0.8 < 1/(2\mu) = 1$ なので、P_2 のほうが先に再びはね返る。逐次シミュレーションで両方の条件を無作為に試したところ、すべての場合で一致した。

よくある間違い

- 第 2 段階でも張力を残してしまう。P_2 が着地すると糸はたるみ、P_1 は摩擦だけによって減速する。
- P_1 がすでに距離 b だけ進んでいることを忘れ、s を $d-b$ ではなく d と比べてしまう。
- 系の加速度を $g(1-\mu)$ としてしまう。力 $mg(1-\mu)$ は**両方の**質量を加速させなければならないことを忘れている。

STEP のその先へ

ここでの糸は**片側**拘束（unilateral constraint）である。引くことはできても押すことはできないので、糸がたるむと運動方程式が切り替わる。衝突のときや接触が失われたときに支配方程式が変わる系は、区分的に滑らかな系（piecewise-smooth system）やハイブリッド系（hybrid system）と呼ばれ、工学の動力学やロボット工学で本格的に研究されている。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、糸、摩擦、衝突を丁寧に扱っており、次に読む本として適している。

解答例

STEP II 1992、第 14 問

力学 ・ 連結された質点と滑車

STEP II 1992、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/92-s2-q14

鍵となる考え方

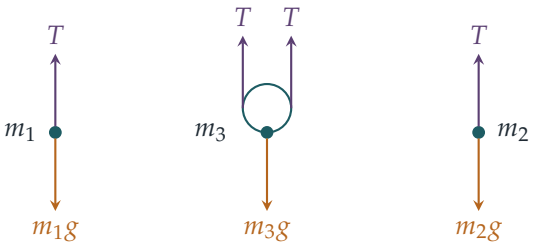
動く物体は 3 つあるが糸は 1 本だけなので、糸全体を通して張力（tension）は 1 つの値 T であり、3 つの加速度を結ぶ束縛条件（constraint）も 1 つである。各質点についてニュートン（Newton）の運動の第 2 法則を書き（滑車 P_3 とその質点は一体となって動く）、糸の長さの条件を書けば、4 つの未知数に関する 4 つの線形方程式が得られる。静止の条件は、単に P_3 の加速度が 0 であるということになる。

解答

モデル

滑車（pulley）はなめらかで軽く、糸は軽くて伸びない（inextensible）ので、張力は糸のどこでも同じ値 T をとる。P_3 は軽いので、P_3 と質量 m_3 の質点は質量 m_3 の 1 つの物体とみなせ、これは鉛直な 2 本の糸で支えられ、それぞれが大きさ T の力で上向きに引いている。

変位はすべて下向きに測る。x_1, x_2, x_3 をそれぞれ質点 m_1、質点 m_2、滑車 P_3 の固定滑車からの深さとし、加速度を a_1, a_2, a_3（下向きを正）とする。



運動方程式

各物体について鉛直方向（下向きを正）に力を分解すると、運動方程式（equation of motion）は次のようになる。

$$m_1 a_1 = m_1 g - T,$$
$$m_2 a_2 = m_2 g - T,$$
$$m_3 a_3 = m_3 g - 2T.$$

糸の束縛条件

滑車に巻きついている一定の長さを無視すると、糸は P_1 から m_1 まで下がる部分（長さ x_1）、固定滑車から P_3 まで下がる 2 本の部分（それぞれ長さ x_3）、P_2 から m_2 まで下がる部分（長さ x_2）からなる。糸は伸びないので、

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = \text{一定}, \qquad \text{よって} \qquad a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$$

が、2 回微分することにより得られる。

考えてみよう x_3 の係数が 1 ではなく 2 になるのはなぜか？

P_3 が距離 d だけ下がると、それを支える **2 本の**糸がどちらも d ずつ長くなるので、糸が $2d$ だけ使われる。その分は外側の糸から供給されなければならないので、$x_1 + x_2$ は $2d$ だけ減る。この因数を見落とすことが、この問題で最もよくある誤りである。

張力

各運動方程式をその質量で割ると、

$$a_1 = g - \frac{T}{m_1}, \qquad a_2 = g - \frac{T}{m_2}, \qquad a_3 = g - \frac{2T}{m_3}.$$

これを $a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$ に代入すると、

$$4g - T\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{4}{m_3}\right) = 0.$$

両辺に $m_1m_2m_3$ を掛けて T について解くと、

$$\boxed{T = \frac{4m_1m_2m_3\,g}{m_3(m_1+m_2)+4m_1m_2}}$$

方程式のどこにも位置に依存する部分はないので、これは運動の間ずっと（いずれかの質点が滑車に達するまで）成り立つ。

P_3 が静止したままである場合

系は静止状態から動き始めるので、P_3 が静止したままであるのは $a_3 = 0$、すなわち $2T = m_3g$ のときであり、かつそのときに限る。求めた T の値を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{8m_1m_2m_3\,g}{m_3(m_1+m_2)+4m_1m_2} &= m_3g\\ \iff\quad 8m_1m_2 &= m_3(m_1+m_2)+4m_1m_2\\ \iff\quad 4m_1m_2 &= m_3(m_1+m_2),\end{aligned}$$

ここで $m_3g > 0$ で割り、正の分母を掛けた。よって $4m_1m_2 = m_3(m_1+m_2)$ ならば $a_3 = 0$ となり、題意のとおり P_3 は静止したままである。（各段階は可逆なので、この条件は十分条件であるだけでなく必要条件でもある。）

外側の質点は静止している必要はないことに注意しよう。このとき $T = \frac{1}{2}m_3g$ であり、$a_1 = g - T/m_1 = -a_2$ となるが、これは $m_1 = m_2$ でない限り 0 ではない。一方の質点が上がり、もう一方が同じ割合で下がり、糸は P_3 を動かすことなくその下を滑っていく。

検算

- 対称な場合 $m_1 = m_2 = m$：条件は $4m^2 = 2mm_3$、すなわち $m_3 = 2m$ となる。これは単に静的なつり合い $2T = 2mg = m_3g$ であり、当然の結果で安心できる。
- $m_3 \to \infty$ のとき $T \to \dfrac{4m_1m_2g}{m_1+m_2}$ となり、これはおなじみのアトウッドの器械（Atwood machine）の張力 $\dfrac{2m_1m_2g}{m_1+m_2}$ のちょうど 2 倍である。これは正しい。重い P_3 は $a_3 \to g$ で自由落下するので、糸は速く加速されるからである。$m_3 \to 0$ のときは $T \to 0$ となるが、質量のない滑車は正味の力を支えられないので、これも妥当である。
- 数値的には、$m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 4$, $g = 9.8$（SI 単位）とすると、公式から $T \approx 21.38\,\mathrm{N}$ が得られる。エネルギーを用いる方法（ラグランジュの方法）で独立に解いても、同じ加速度 $a_1 \approx -0.891$, $a_2 \approx 2.673$, $a_3 \approx -0.891\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ が得られ

る。$m_1 = 1, m_2 = 3, m_3 = 3$ とすると静止の条件が成り立ち、実際 $a_3 = 0$ であり、$a_1 = -a_2 = -4.9\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ となる。

よくある間違い

- P_3 が 2 本の糸でつり下げられていることを忘れて、束縛条件を $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ と書いてしまう。
- P_3 にはたらく力が T ではなく $2T$ であることを忘れる。
- P_3 が静止していれば系全体が静止すると思い込む。$m_1 = m_2$ でない限り、そうはならない。

STEP のその先へ

束縛条件 $x_1 + x_2 + 2x_3 =$ 一定 により系の自由度（degrees of freedom）は 2 に減る。このような系を扱う最もすっきりした方法はラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）である。独立な座標を用いてエネルギーを書き表せば、張力はまったく必要ない（張力は「束縛力（constraint force）」である）。先ほどの数値的な検算もこの方法で行った。大学 1 年の力学で学ぶことになるだろう。滑車のような束縛のある系にニュートンの法則を丁寧に適用する様子を見るには、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい。

解答例

STEP II 1992、第 15 問

確率・統計 ・ ランダムウォーク

> **STEP II 1992、問 15**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q15

鍵となる考え方

点が s 歩のうち R 歩を正の向きに進むと、終点は $x = R - (s - R) = 2R - s$ であり、R は二項分布（binomial distribution）に従う。したがって、ここで現れる確率はすべて二項係数（binomial coefficient）の和である。偶奇（parity）が大いに役立つ。偶数歩の後に可能なのは $x = 2$ と $x = 4$ だけであり、奇数歩の後は $x = 3$ と $x = 5$ だけである。よって各 $\mathrm{P}(s)$ は隣り合う二つの二項係数の和にすぎない。さらにパスカルの法則（Pascal's rule）により、その和は一つの二項係数にまとまる。最大値については、s が偶数の場合と奇数の場合に分けて、隣り合う項の比を調べる。

解答

最初の s 歩のうち正の向きに進んだ歩数を R とする。各歩は独立で、それぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で正の向きであるから、$R \sim \mathrm{B}(s, \frac{1}{2})$ であり、

$$\mathrm{P}(R = r) = \binom{s}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^s.$$

となる。s 歩後の位置は $X = 2R - s$ なので、$X = x$ となるのはちょうど $R = \frac{1}{2}(s + x)$ のときである。特に、X の偶奇は s の偶奇と一致する。

$\mathrm{P}(5)$ と $\mathrm{P}(6)$ の値

$s = 5$ のとき、起こりうるのは $x = 3$ と $x = 5$ だけであり、それぞれ $R = 4$ と $R = 5$ が必要である：

$$\mathrm{P}(5) = \left[\binom{5}{4} + \binom{5}{5}\right]\frac{1}{2^5} = \frac{5+1}{32} = \frac{3}{16}.$$

$s=6$ のとき、起こりうるのは $x=2$ と $x=4$ だけであり、それぞれ $R=4$ と $R=5$ が必要である：

$$\mathrm{P}(6)=\left[\binom{6}{4}+\binom{6}{5}\right]\frac{1}{2^6}=\frac{15+6}{64}=\frac{21}{64}.$$

一般の偶数の場合

$s=2k$ のとき、到達しうる目標点は $x=2$ と $x=4$ であり、それぞれ $R=k+1$ と $R=k+2$ が必要である。パスカルの法則 $\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}$ により、

$$\mathrm{P}(2k)=\left[\binom{2k}{k+1}+\binom{2k}{k+2}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}=\binom{2k+1}{k+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}=\binom{2k+1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k},$$

となる。ただし最後の段階では、$(2k+1)-(k+2)=k-1$ として $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ を用いた。これが求める結果である。この式は $k=1$ のときも成り立つ。このとき $\binom{2}{3}=0$ なので $x=4$ の項はそもそも現れず、公式は 2 歩とも正の向きに進む確率 $\frac{1}{4}$ を与える。

奇数の場合

$s=2k+1$ のとき、目標点は $x=3$ と $x=5$ であり、それぞれ $R=k+2$ と $R=k+3$ が必要である。同様にして、

$$\mathrm{P}(2k+1)=\left[\binom{2k+1}{k+2}+\binom{2k+1}{k+3}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}=\binom{2k+2}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}.$$

$k=2$ のときこれは $\binom{6}{1}/32=\frac{3}{16}$ となり、$\mathrm{P}(5)$ と一致する。

最大値

$k\geq 1$ に対して $a_k=\mathrm{P}(2k)$、$k\geq 1$ に対して $b_k=\mathrm{P}(2k+1)$ とおく（$b_0=\mathrm{P}(1)=0$ に注意）。これらはすべて正なので、隣り合う項は比によって比較できる。

考えてみよう 二つの二項係数の比はどのように簡単にすればよいか？

両方を階乗で表して約分すればよい。偶数歩の項については、

$$\frac{\binom{2k+3}{k}}{\binom{2k+1}{k-1}}=\frac{(2k+3)!}{k!\,(k+3)!}\cdot\frac{(k-1)!\,(k+2)!}{(2k+1)!}=\frac{(2k+3)(2k+2)}{k(k+3)},$$

よって

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{(2k+3)(2k+2)}{4k(k+3)}=\frac{4k^2+10k+6}{4k^2+12k}.$$

分母は正なので、この比が 1 より大きいのはちょうど $10k+6>12k$、すなわち $k<3$ のときであり、$k=3$ のとき 1 に等しく、$k>3$ のとき 1 より小さい。したがって

$$a_1<a_2<a_3=a_4>a_5>a_6>\cdots,$$

となり、偶数歩での最大値は $a_3 = a_4 = \mathrm{P}(6) = \mathrm{P}(8) = \frac{21}{64}$ である（確認：$\mathrm{P}(8) = \binom{9}{3}/2^8 = 84/256 = 21/64$）。

奇数歩の項についても同様に約分すると

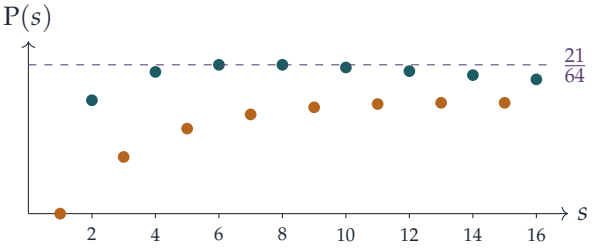
$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{(2k+4)(2k+3)}{4k(k+4)} = \frac{4k^2+14k+12}{4k^2+16k},$$

となり、これは $k < 6$ のとき 1 より大きく、$k = 6$ のとき 1 に等しく、$k > 6$ のとき 1 より小さい。よって奇数歩での最大値は

$$b_6 = b_7 = \mathrm{P}(13) = \mathrm{P}(15) = \binom{14}{5}\frac{1}{2^{13}} = \frac{2002}{8192} = \frac{1001}{4096}.$$

である。最後に、$\frac{21}{64} = \frac{1344}{4096} > \frac{1001}{4096}$ であるから、奇数歩の値が偶数歩の最大値を上回ることはない。以上より、$\mathrm{P}(s)$ が最大値 $\frac{21}{64}$ をとるのは次のときである：

$$s = 6 \quad \text{および} \quad s = 8.$$



青緑の点は s が偶数の場合、琥珀色の点は s が奇数の場合を表す。これらは別々の二つの数列であり、いずれも増加したのち減少し、偶数の方が常に上にある。

検算

- 小さい場合を手計算で確かめる：$\mathrm{P}(2) = \frac{1}{4}$（右へ 2 歩）、$\mathrm{P}(3) = \frac{1}{8}$（右へ 3 歩）であり、$k = 1$ とすると公式は $\binom{3}{0}/2^2 = \frac{1}{4}$ と $\binom{4}{0}/2^3 = \frac{1}{8}$ を与え、確かに一致する。
- 分数を用いた厳密な計算機による全列挙（$s \le 60$）により、二つの公式がともに正しいこと、$\mathrm{P}(6) = \mathrm{P}(8) = \frac{21}{64} \approx 0.328$ が全体の最大値であること、そして $\mathrm{P}(13) = \mathrm{P}(15) = \frac{1001}{4096} \approx 0.244$ が奇数歩での最大値であることが確認できる。

よくある間違い

- すべての s について四つの目標点をすべて足し合わせてしまう。偶奇の理由から、そのうち半分は起こりえない。

- 偶数歩での最大値を求めたところで止めてしまう。奇数歩の値は別の数列をなすので、その最大値の方が小さいことを確かめなければならない。
- 「$k < 3$ のとき比は > 1」で止めて $s = 6$ だけを答えてしまう。$k = 3$ では比が 1 に等しいので、$s = 8$ も同じ値になる。

STEP のその先へ

これは単純対称ランダムウォーク（simple symmetric random walk）であり、確率論の中心的な対象の一つである。s 歩後の位置は $\sqrt{s}$ 程度に広がっていくので、固定された有限の範囲内にいる確率は、はじめは増加し、やがてゼロへと減少していく。$s = 7$ 付近のピークは、広がりがその範囲と同程度になるところである。同じ二項係数による数え上げから、鏡像原理（reflection principle）や、1 次元のランダムウォークが確率 1 で原点に戻るという事実が導かれる。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）には、ランダムウォークについての優れた章がある。

解答例

STEP II 1992、第 16 問

確率・統計 ・ 条件付き確率

STEP II 1992、問 16

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/92-s2-q16

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.17 節「**バナッハのマッチ箱**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/matchboxes.html

鍵となる考え方

これはバナッハ（Banach）のマッチ箱問題（matchbox problem）の一つの変形である。不足に気づいたのが**いつか**（N 回目に手を伸ばしたとき）が与えられているので、これは条件付き確率（conditional probability）の問題である。そこで二つの同時確率（joint probability）を計算する。一つは最初の失敗が N 回目に起こり、それがトフィーである確率、もう一つは最初の失敗が N 回目に起こり、それがミントである確率である。どちらも「最初の $N-1$ 回の中に各種類がちょうどこれだけ含まれ、その次に特定の種類が来る」という計算であり、二項分布（binomial distribution）によるものである。

解答

手を伸ばす各回は独立（independent）であり、各回でトフィーに手を伸ばす確率は p、ミントに手を伸ばす確率は q であるとする。ただし $0 < p < 1$ である。T を、N 回目に彼女がトフィーに手を伸ばしてトフィーの袋が空であると気づき、かつそれより前の回ではどの袋も空だと気づいていない、という事象とする。M を、トフィーをミントに置き換えた同じ事象とする。求めるものは

$$\mathrm{P}(\text{トフィー} \mid \text{初めて気づいたのが第} N) = \frac{\mathrm{P}(T)}{\mathrm{P}(T) + \mathrm{P}(M)}.$$

である。

T の確率

T が起こるためには、$N-1$ 回手を伸ばした後にトフィーの袋が空になっていなければならない。それまでに失敗した回はないので、それらの各回ではすべて菓子を取り出している。したがって最初の $N-1$ 回のうちちょうど n 回がトフィーに手を伸ばした回であり（もう一回あれば失敗になっていたはずである）、残りの $N-1-n$ 回はミントに手を伸ばした回である。そして N 回目はトフィーに手を伸ばす。

逆に、最初の $N-1$ 回の中に、順序は任意で、トフィーに手を伸ばした回がちょうど n 回、ミントに手を伸ばした回が $N-1-n \le m$ 回含まれているとする。このとき、それより前の回で失敗することはありえない。どの段階でも、トフィーに n 回より多く、あるいはミントに m 回より多く手を伸ばしてはいないからである。そのうえで N 回目がトフィーであれば、T が起こる。

> **考えてみよう** 早い段階で使い切ってしまわないように、最初の $N-1$ 回の順序が問題になるのではないか？

問題にならない。彼女が袋が空であることに気づくのは、空になった袋に手を伸ばしたときだけである。トフィーの袋を早い段階で（n 個目のトフィーで）空にしてしまっても、N 回目より前に再びトフィーに手を伸ばさなければ差し支えない。そしてこれは自動的に成り立つ。最初の $N-1$ 回の中にトフィーに手を伸ばした回は n 回しかないからである。よって $\binom{N-1}{n}$ 通りの順序はすべて許され、

$$\mathrm{P}(T) = \binom{N-1}{n} p^n q^{N-1-n} \cdot p = \binom{N-1}{n} p^{n+1} q^{N-1-n}, \qquad n \le N-1 \le n+m,$$

であり、それ以外の場合は $\mathrm{P}(T)=0$ である。$N-1<n$ ならば、トフィーを使い切ることはできない。$N-1>n+m$ ならば、m 個より多くのミントが必要になってしまう。

M の確率

役割を入れ替えれば、まったく同様にして

$$\mathrm{P}(M) = \binom{N-1}{m} q^{m+1} p^{N-1-m}, \qquad m \le N-1 \le n+m,$$

であり、それ以外の場合は $\mathrm{P}(M)=0$ である。

答え

気づくのは $\min(n,m)+1$ 回目から $n+m+1$ 回目のどこかでなければならない。$n+m+2$ 回目はありえない。その時点では両方の袋が空になっており、すでにどこかで失敗が起きているはずだからである。

- $N \le m$ のとき（このとき $\mathrm{P}(M) = 0$ だが $\mathrm{P}(T) > 0$）、彼女は確実にトフィーに手を伸ばしていた。確率は 1 である。
- $N \le n$ のとき（このとき $\mathrm{P}(T) = 0$）、確率は 0 である。
- $\max(n, m) + 1 \le N \le n + m + 1$ のとき、どちらも起こりうるので、

$$\mathrm{P}(\text{トフィー}) = \frac{\binom{N-1}{n} p^{n+1} q^{N-1-n}}{\binom{N-1}{n} p^{n+1} q^{N-1-n} + \binom{N-1}{m} q^{m+1} p^{N-1-m}}.$$

最後の場合は、分子と分母を $\mathrm{P}(T)$ で割ることで式を整理できる。二項係数から共通因数 $(N-1)!$ が約分され、累乗はまとめて $(q/p)^{n+m+2-N}$ となる。これより

$$\mathrm{P}(\text{トフィー}) = \left[1 + \frac{n!\,(N-1-n)!}{m!\,(N-1-m)!} \left(\frac{q}{p}\right)^{n+m+2-N}\right]^{-1}.$$

を得る。

検算

- 対称性：$n = m$ かつ $p = q = \frac{1}{2}$ ならば、二つの式は等しく、答えは当然 $\frac{1}{2}$ となる。
- $n = 2$、$m = 3$、$p = \frac{1}{2}$、$N = 5$ とする。このとき $\mathrm{P}(T) = \binom{4}{2}/2^5 = \frac{3}{16}$、$\mathrm{P}(M) = \binom{4}{3}/2^5 = \frac{1}{8}$ であるから、答えは $\frac{3/16}{5/16} = \frac{3}{5}$ である。トフィーのほうが少ないので、トフィーが尽きるほうが起こりやすい。
- $N = 1, \ldots, n + m + 1$ にわたって $\sum_N \big(\mathrm{P}(T) + \mathrm{P}(M)\big) = 1$ である。いずれはどこかの回で必ず失敗するからである。このことと公式とを、すべての $n, m \le 6$ といくつかの p の値について、一歩ずつの厳密な数え上げと照合して確かめた。$n = 4$、$m = 3$、$N = 7$、$p = 0.55$ での 2×10^5 回の試行によるシミュレーションでは 0.527 となり、厳密値 0.528 とよく一致した。

よくある間違い

- N 回目そのものに対応する最後の因数 p（または q）を忘れる。
- 条件付き確率 $\mathrm{P}(T)/(\mathrm{P}(T) + \mathrm{P}(M))$ ではなく $\mathrm{P}(T)$ を答えてしまう。気づいたのが N 回目であることは与えられているのである。
- 事象を「N 回目にトフィーが尽きる」ことだと考えてしまう。最後のトフィーを取り出すことは気づくことではない。気づくのはその次に手を伸ばしたときである。

STEP のその先へ

最初の失敗が起こる時刻は、二つの**負の二項分布**（negative binomial distribution）の混合である。負の二項分布は、与えられた回数の成功を得るまでに必要な試行の回数を数えるものである。バナッハの元のマッチ箱問題（$n = m$、$p = \frac{1}{2}$）は、気づいた瞬間にもう一方の箱にマッチが何本残っているかを問うものである。その答えはスターリングの公式（Stirling's formula）で近似でき、平均はおよそ $2\sqrt{n/\pi}$ となる。負の二項分布については Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）を参照されたい。フェラー（Feller）の古典的名著 *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Volume 1（確率論とその応用第 1 巻）には、マッチ箱問題についての有名な議論がある。

解答例

STEP III 1992、第 1 問

純粋数学 ・ マクローリン級数

> **STEP III 1992、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q1

鍵となる考え方

小問 (i) では、2 つの恒等式（identity）が導関数を次々と生み出す装置となる。f'' を f' で表してしまえば、それより高階の導関数はすべてもう一度微分するだけで得られ、$x = 0$ ではすべてが $f'(0) = \frac{1}{2}$ から組み立てられる。小問 (ii) で厄介なのは因子 $\sinh x$ であり、これは原点で消える。x を掛けるとその零点が打ち消され、展開は手計算で求められる 2 つの級数の積になる。対称性（奇関数と偶関数）から、どのべきが現れうるかが前もってわかる。

解答

小問 (i)

$f(x) = \ln(1 + e^x)$ を合成関数の微分法（chain rule）で微分すると、

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} > 0,$$

となるので、その対数は定義され、

$$\ln[f'(x)] = \ln e^x - \ln(1 + e^x) = x - f(x),$$

となる。これが 1 つ目の結果である。この恒等式を微分すると、左辺は $f''(x)/f'(x)$ となるので、

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = 1 - f'(x) \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = f'(x) - [f'(x)]^2,$$

となり、題意が示された。これを $f'' = f'(1 - f')$ と書いておくと便利である。

考えてみよう $\ln(1+e^x)$ を 4 回も微分することなく、f''' と f'''' を得るにはどうすればよいか？

恒等式 $f'' = f' - (f')^2$ そのものを微分すればよい。$(f')^2$ には積の微分法（product rule）を用いる：

$$f''' = f'' - 2f'f'' = f''(1-2f'),$$
$$f'''' = f'''(1-2f') - 2(f'')^2.$$

ここで $x=0$ における値を求める。このとき $f(0) = \ln 2$、$f'(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ である：

$$f''(0) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4},$$
$$f'''(0) = \tfrac{1}{4}\left(1 - 2\cdot\tfrac{1}{2}\right) = 0,$$
$$f''''(0) = 0 - 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = -\tfrac{1}{8}.$$

マクローリンの定理（Maclaurin's theorem）より $f(x) = \sum f^{(n)}(0)\, x^n/n!$ なので、

$$f(x) = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + \cdots,$$

となる。x^3 の項は消えている（また $-\frac{1}{8} \div 24 = -\frac{1}{192}$ である）。

小問 (ii)

g がそのような展開をもたない理由。 非負のべきからなる級数 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ は、$x=0$ で有限の値 a_0 をとり、そこで連続である。ところが $\sinh 0 = 0$、$\cosh 0 = 1$ なので、分母 $\sinh x \cosh 2x$ は $x \to 0$ のとき 0 に近づく。実際、小さい x に対して $\sinh x \approx x$ なので $g(x) \approx 1/x$ であり、これは 0 の近くで有界でない。したがって、原点の近くで $g(x)$ がそのような級数に等しくなることはありえない。

$xg(x)$ が展開をもつ理由。

$$x\,g(x) = \frac{x}{\sinh x} \cdot \frac{1}{\cosh 2x}.$$

と書く。$\sinh x = x\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \cdots\right)$ なので因子 x は打ち消され、

$$\frac{x}{\sinh x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \cdots},$$

となる。これは定数項が 1 である級数分の 1 であり、このような逆数は二項展開（binomial expansion）によって非負のべきで展開できる。同様に $\cosh 2x \geq 1$ は決して消えないので、$1/\cosh 2x$ も同じように展開できる。このような級数 2 つの積もまた、同様の級数である。

偶数乗のみが現れる理由。 sinh は奇関数（odd function）、cosh は偶関数（even function）なので $\mathrm{g}(-x) = -\mathrm{g}(x)$、すなわち g は奇関数である。よって $h(x) = x\,\mathrm{g}(x)$ は $h(-x) = (-x)(-\mathrm{g}(x)) = h(x)$ を満たし、h は偶関数である。$h(x) = \sum a_n x^n$ とすると、$h(x) - h(-x) = 2\sum_{n\text{ が奇数}} a_n x^n$ は恒等的に消える。恒等的に消えるべき級数（power series）はすべての係数が零であるから、すべての奇数 n に対して $a_n = 0$ である。（直接見ることもできる：上の 2 つの因子はどちらも x^2 の級数である。）

展開。 $u = \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}$ として $(1+u)^{-1} = 1 - u + u^2 - \cdots$ を用い、x^4 までの項を残すと、

$$\frac{x}{\sinh x} = 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + \cdots,$$

となる。ここで $\frac{1}{36} - \frac{1}{120} = \frac{10-3}{360}$ を用いた。次に、（$\frac{(2x)^2}{2}$ と $\frac{(2x)^4}{24}$ から）$\cosh 2x = 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \cdots$ なので、$v = 2x^2 + \frac{2}{3}x^4$ とおくと、

$$\frac{1}{\cosh 2x} = 1 - v + v^2 - \cdots = 1 - 2x^2 - \tfrac{2}{3}x^4 + 4x^4 + \cdots = 1 - 2x^2 + \tfrac{10}{3}x^4 + \cdots.$$

2 つの級数を掛け合わせ、べきごとにまとめると：

$$\begin{aligned} x\,\mathrm{g}(x) &= \left(1 - \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{7}{360}x^4\right)\left(1 - 2x^2 + \tfrac{10}{3}x^4\right) + \cdots \\ &= 1 - \left(2 + \tfrac{1}{6}\right)x^2 + \left(\tfrac{10}{3} + \tfrac{2}{6} + \tfrac{7}{360}\right)x^4 + \cdots \\ &= 1 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{1327}{360}x^4 + \cdots, \end{aligned}$$

となる。ここで $\frac{10}{3} + \frac{1}{3} = \frac{11}{3} = \frac{1320}{360}$ である。

検算

- (i) で x^3 の項が現れないのは偶然ではない。$\mathrm{f}(x) - \frac{x}{2} = \ln(\mathrm{e}^{-x/2} + \mathrm{e}^{x/2}) = \ln(2\cosh\frac{x}{2})$ は偶関数なので、$\frac{x}{2}$ の後には偶数乗しか現れない。
- 数値的に確かめると、$x = 0.1$ において $\ln(1+\mathrm{e}^x) \approx 0.7443966600$ と 4 次式 $\ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192}$ は約 3.5×10^{-10} の精度で一致する。
- $x = 0.05$ において、$x\,\mathrm{g}(x)$ と $1 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{1327}{360}x^4$ の差は約 9×10^{-8} で、これはおよそ $6x^6$ である。次の項が x^6 の項であることから予想されるとおりである。

よくある間違い

- $1/(1+u)$ を $1-u$ までしか展開しないこと。u^2 の項は x^4 に寄与する（上の $\frac{1}{36}$ と $4x^4$）。

- $2x$ の 4 乗が $16x^4$ であることを忘れて、$\cosh 2x = 1 + 2x^2 + \frac{x^4}{24} \cdots$ と書いてしまうこと。

STEP のその先へ

小問 (ii) は**極**（pole）をもつ関数の話である。g は $1/x$ のように発散し、x を掛けるとその特異点（singularity）が取り除かれる。複素解析（complex analysis）では、このような関数は**ローラン級数**（Laurent series）$\frac{1}{x}\left(1 - \frac{13}{6}x^2 + \cdots\right)$ をもち、$1/x$ の係数（**留数**（residue）、ここでは 1）は多くの実積分を計算する鍵となる。この級数の収束半径（radius of convergence）は、分母の次に近い零点によって決まる。それは $\cosh 2x = 0$ となる点 $x = \pm\frac{\pi}{4}\mathrm{i}$ である。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的にとらえる複素解析）は、これらの考え方を見事に展開している。

解答例

STEP III 1992、第 2 問

純粋数学 ・ 行列の累乗と数学的帰納法

> **STEP III 1992、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q2

鍵となる考え方

すべては $\mathbf{J}^2 = 2\mathbf{J}$ という一つの事実に基づいている。これにより、$\mathbf{I} + p\mathbf{J}$ の形をした行列（matrix）どうしの積はどれも再びこの形になる。したがって、追いかけるべき数はつねに一つだけである。一見ややこしい $\frac{1}{2}[(1+2a)^k - 1]$ という式も、掛け算に対して素直に振る舞うのは p ではなく $1+2p$ であると気づけば、見通しがよくなる。

解答

掛け算の規則

$$\mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{J},$$

であり、$\mathbf{I}$ はどの行列とも可換（commute）であるから、任意の実数 p, q に対して

$$(\mathbf{I} + p\mathbf{J})(\mathbf{I} + q\mathbf{J}) = \mathbf{I} + (p+q)\mathbf{J} + pq\mathbf{J}^2 = \mathbf{I} + (p+q+2pq)\mathbf{J}. \qquad (*)$$

が成り立つ。ここで

$$1 + 2(p+q+2pq) = (1+2p)(1+2q),$$

であることに注意する。つまり、行列 $\mathbf{I} + p\mathbf{J}$ に数 $1+2p$ を対応させると、行列の掛け算はこれらの数の掛け算に対応する。$\mathbf{A} = \mathbf{I} + a\mathbf{J}$ に対応する数は $1+2a$ である。

2乗と3乗

$(*)$ で $p=q=a$ とすると、

$$\mathbf{A}^2=\mathbf{I}+(2a+2a^2)\mathbf{J},\qquad \text{また}\qquad \tfrac{1}{2}\left[(1+2a)^2-1\right]=\tfrac{1}{2}(4a+4a^2)=2a+2a^2,$$

であるから、求めるとおり $\mathbf{A}^2=\mathbf{I}+\frac{1}{2}[(1+2a)^2-1]\mathbf{J}$ となる。

3乗については、$\mathbf{A}^3=\mathbf{A}^2\mathbf{A}$ と書き、$(*)$ で $p=2a+2a^2, q=a$ とすると

$$\begin{aligned}p+q+2pq&=2a+2a^2+a+2a(2a+2a^2)\\&=3a+6a^2+4a^3\\&=\tfrac{1}{2}(6a+12a^2+8a^3)=\tfrac{1}{2}\left[(1+2a)^3-1\right],\end{aligned}$$

となる。ここで $(1+2a)^3=1+6a+12a^2+8a^3$ を用いた。よって、求めるとおり $\mathbf{A}^3=\mathbf{I}+\frac{1}{2}[(1+2a)^3-1]\mathbf{J}$ である。

4乗については、$\mathbf{A}^4=\mathbf{A}^2\mathbf{A}^2$ とするのがいちばん早い。$p=q=\frac{1}{2}[(1+2a)^2-1]$ とすると $1+2p=(1+2a)^2$ であるから、$\mathbf{A}^4$ に対応する数は $(1+2a)^2(1+2a)^2=(1+2a)^4$ である。したがって

$$\mathbf{A}^4=\mathbf{I}+\tfrac{1}{2}\left[(1+2a)^4-1\right]\mathbf{J}=\mathbf{I}+(4a+12a^2+16a^3+8a^4)\mathbf{J}.$$

一般の累乗

ここまでの規則性から、次のように予想できる。

$$p_k=\tfrac{1}{2}\left[(1+2a)^k-1\right],\qquad \text{すなわち}\qquad 1+2p_k=(1+2a)^k.$$

すべての整数 $k\geq 1$ に対して $\mathbf{A}^k=\mathbf{I}+p_k\mathbf{J}$ が成り立つことを、数学的帰納法（induction）で証明する。

基本段階。 $k=1$ のとき $p_1=\frac{1}{2}(1+2a-1)=a$ であり、$\mathbf{A}^1=\mathbf{I}+a\mathbf{J}$ である。（この式は $p_0=0$ も与え、$\mathbf{A}^0=\mathbf{I}$ と一致する。）

帰納段階。 p_k を上のとおりとして $\mathbf{A}^k=\mathbf{I}+p_k\mathbf{J}$ が成り立つと仮定する。すると $(*)$ より

$$\mathbf{A}^{k+1}=\mathbf{A}^k\mathbf{A}=\mathbf{I}+(p_k+a+2ap_k)\mathbf{J},$$

であり、

$$\begin{aligned}p_k+a+2ap_k&=(1+2a)p_k+a\\&=\tfrac{1}{2}(1+2a)\left[(1+2a)^k-1\right]+a\\&=\tfrac{1}{2}(1+2a)^{k+1}-\tfrac{1}{2}(1+2a)+a\\&=\tfrac{1}{2}\left[(1+2a)^{k+1}-1\right]=p_{k+1}.\end{aligned}$$

となる。よって $\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{I} + p_{k+1}\mathbf{J}$ であり、数学的帰納法により

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{I} + \tfrac{1}{2}\left[(1+2a)^k - 1\right]\mathbf{J} \qquad \text{任意の整数} k \geq 1.$$

が成り立つ。

> **考えてみよう** もし $\mathbf{A}^2$ と $\mathbf{A}^3$ が与えられていなかったら、p_k の予想はどこから得られただろうか？

漸化式（recurrence）そのものから得られる。帰納段階から $p_{k+1} = (1+2a)p_k + a$ がわかり、これは 1 階線形漸化式（first-order linear recurrence）である。両辺に $\frac{1}{2}$ を加えると $p_{k+1} + \frac{1}{2} = (1+2a)(p_k + \frac{1}{2})$ となるので、$p_k + \frac{1}{2}$ は公比 $1+2a$、初項 $a + \frac{1}{2}$ の等比数列（geometric sequence）である。これはまさに $p_k + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1+2a)^k$ ということである。

負の累乗（おまけ）。 $a \neq -\frac{1}{2}$ ならば、この式は $k = -1$ に対しても成り立つ。実際、$p_{-1} = -\dfrac{a}{1+2a}$ とすると、$(*)$ より $a + p_{-1} + 2ap_{-1} = a - \dfrac{a(1+2a)}{1+2a} = 0$ となるので、$(\mathbf{I} + a\mathbf{J})(\mathbf{I} + p_{-1}\mathbf{J}) = \mathbf{I}$ である。$a = -\frac{1}{2}$ のときは $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ は正則でない（singular）。このとき式はすべての $k \geq 1$ に対して $p_k = -\frac{1}{2}$ を与えるが、実際 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ である。

検算

- $a = 1$ とすると $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ であり、実際に掛け算すると $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{pmatrix}$ となる。式からは $p_2 = \frac{1}{2}(9-1) = 4$, $p_4 = \frac{1}{2}(81-1) = 40$ が得られる。
- $\mathbf{A}$ は固有値（eigenvalue）$1+2a$ に対する固有ベクトル（eigenvector）$(1,1)$ と、固有値 1 に対する固有ベクトル $(1,-1)$ をもつ。よって $\mathbf{A}^k$ の固有値は $(1+2a)^k$ と 1 である。一方、行列 $\mathbf{I} + p_k\mathbf{J}$ の固有値は $1 + 2p_k$ と 1 であり、両者は一致する。
- $0 \leq k \leq 12$ および $a = -\frac{1}{2}$ を含む 40 個のランダムな a の値について、厳密な有理数演算で $\mathbf{A}^k = \mathbf{I} + p_k\mathbf{J}$ を確認した。

よくある間違い

- $(\mathbf{I}+a\mathbf{J})^k$ を二項定理（binomial theorem）で展開するのは（$\mathbf{I}$ と $\mathbf{J}$ が可換なので）正当であるが、$\mathbf{J}$ ではなく $\mathbf{J}^r = 2^{r-1}\mathbf{J}$ となることを忘れると、係数を誤る。
- 帰納段階で、p_{k+1} についての結論を先に書いて逆向きにたどるのは証明にならない。$\mathbf{A}^k\mathbf{A}$ から出発すること。

STEP のその先へ

$\mathbf{I}+p\mathbf{J}$ に対応させた数 $1+2p$ は、この行列のベクトル $(1,1)$ に対する固有値である。このような行列はすべて固有ベクトル $(1,1)$ と $(1,-1)$ を共有しているので、同じ基底の変換（change of basis）によっていっせいに対角化され、累乗は固有値を単に k 乗するだけで計算できる。これが対角化（diagonalisation）の考え方であり、行列の累乗、行列の指数関数（matrix exponential）、線形漸化式をスカラーの計算に帰着させる。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、多くの例題とともにこの考え方を展開している。

解答例

STEP III 1992、第 3 問

純粋数学 ・ 曲線と多項式の根

STEP III 1992、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/92-s3-q3

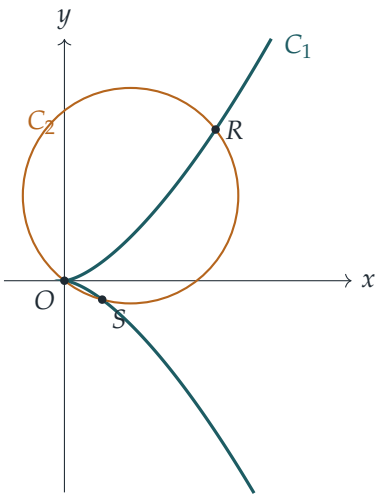
鍵となる考え方

パラメータ表示（parametrisation）を、原点を通る円の一般の方程式にそのまま代入する。すると t についての多項式の方程式が得られ、その解が交点のパラメータとなる。原点は因数 t^2 として現れる。残るのは t^3 の項をもたない 4 次式（quartic）であり、その解の和と、2 つずつの積の和はいずれも決まった値になる。したがって、解のうち 2 つ r と s がわかれば、残りの 2 つは完全に決まる。

解答

概形

$x = t^2 \geq 0$ であるから、曲線は半平面 $x \geq 0$ に含まれる。t を $-t$ に置き換えると (x, y) は $(x, -y)$ に移るので、曲線は x 軸に関して対称である。t を消去すると $y^2 = x^3$、すなわち $y = \pm x^{3/2}$ を得る。$t = 0$ では $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$ であり、原点の近くでは $|y| = x^{3/2}$ は x よりはるかに小さい。よって 2 つの枝はいずれも x 軸に接しながら O から出ていき、曲線は O で尖点（cusp）をもつ。$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3t}{2}$ であるから、t が大きいところでは枝は急激に立ち上がる。



曲線 C_1 は青緑色で描いてある。琥珀色の円は C_2 の一例であり、$r = 1$、$s = -\frac{1}{2}$ のときの O、R、S を通る円である。

4次方程式

原点を通る円の方程式は定数項をもたない：

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0,$$

ここで g と f は実数の定数で、両方が 0 ではない。パラメータ t の点がこの円上にあるのは、ちょうど

$$t^4 + t^6 + 2gt^2 + 2ft^3 = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad t^2\left(t^4 + t^2 + 2ft + 2g\right) = 0.$$

のときである。因数 t^2 からは $t = 0$ が得られ、これは原点である。O 以外の交点はすべて $t \neq 0$ であるから、そのパラメータは

$$t^4 + t^2 + at + b = 0, \qquad a = 2f, \quad b = 2g.$$

を満たす。特に r と s はこの方程式の解であり、a、b は求められているとおり実数の定数である。

$x \neq 0$ のときは $t = y/x$（$x = 0$ のときは $t = 0$）であるから、C_1 の各点のパラメータはただ1つに定まる。よって異なる点 R と S のパラメータは異なり、$r \neq s$ である。また、C_1 と C_2 の交点は、方程式 $t^2(t^4 + t^2 + at + b) = 0$ の実数解とちょうど1対1に対応する。

残りの 2 つの解

4 次方程式の 4 つの解（実数でも複素数でもよい）を r、s、p、q とする。

$$(t-r)(t-s)(t-p)(t-q) = t^4 + 0\cdot t^3 + 1\cdot t^2 + at + b$$

の係数を比較すると

$$r+s+p+q = 0,$$
$$rs + (r+s)(p+q) + pq = 1.$$

を得る。（ここでは 2 つずつの積 6 個を、rs、pq と 4 つの交差項 $rp+rq+sp+sq = (r+s)(p+q)$ にまとめた。）

> **考えてみよう**　4 つの解のうち、わかっているのは 2 つだけである。a と b を知らずに、残りの 2 つにたどり着くにはどうすればよいか。

t^3 と t^2 の 2 つの係数は、円にまったく依存しない。1 つ目の式から $p+q = -(r+s)$ である。これを 2 つ目の式に代入すると

$$pq = 1 - rs + (r+s)^2 = r^2 + rs + s^2 + 1.$$

よって p と q は 2 次方程式

$$t^2 + (r+s)\,t + \left(r^2 + rs + s^2 + 1\right) = 0,$$

の解であり、その係数は r と s だけで決まる。C_1 と C_2 にこれ以外の交点があるとすれば、そのパラメータはこの 2 次方程式の実数解でなければならない。

（副産物として、$a = -(r+s)(r^2+s^2+1)$、$b = rspq = rs(r^2+rs+s^2+1)$ が得られるので、O、R、S を通る円は r と s によって決まる。）

これ以外に実数の交点はない

この 2 次方程式の判別式（discriminant）は

$$\begin{aligned}\Delta &= (r+s)^2 - 4\left(r^2 + rs + s^2 + 1\right)\\ &= -3r^2 - 2rs - 3s^2 - 4\\ &= -\left[2(r^2+s^2) + (r+s)^2 + 4\right].\end{aligned}$$

である。$2(r^2+s^2)$ と $(r+s)^2$ はいずれも 0 以上であるから、括弧の中は 4 以上である。よって $\Delta \le -4 < 0$ となり、この 2 次方程式は実数解をもたない。すなわち p と q は互いに共役な虚数の組である。

したがって $t^2(t^4+t^2+at+b)=0$ の実数解は 0、r、s のみである。各実数解は C_1 のただ1つの点に対応するから、C_1 と C_2 の実数の交点は O、R、S のみである。これが示すべきことであった。

検算

$r=1$、$s=-\frac{1}{2}$ とする。公式から $a=-\frac{9}{8}$、$b=-\frac{7}{8}$ となるので、$f=-\frac{9}{16}$、$g=-\frac{7}{16}$ である。円の中心は $(\frac{7}{16},\frac{9}{16})$ であり、$R=(1,1)$ と $S=(\frac{1}{4},-\frac{1}{8})$ はいずれも中心からの距離の2乗が $\frac{130}{256}$ で、O も同様である。残る2次式は $t^2+\frac{1}{2}t+\frac{7}{4}$ で、判別式は $\frac{1}{4}-7<0$ である。これが図の円であり、C_1 と交わるのが O、R、S だけであることが図からも見てとれる。さらに、ランダムに選んだ400組の (r,s) について数値的にも確かめた。各組について O、R、S を通る円を求め、因数分解を確認し、$-30\le t\le 30$ の範囲を調べたところ、円の方程式の符号が変わるのは $t=r$ と $t=s$ のときだけであった。

よくある間違い

- O を通る円には定数項がないことを忘れる。一般の円には3つの定数があり、定数項が消えることこそが因数 t^2 が現れる理由である。
- 重解（double root）$t=0$ は円が O で C_1 に接することを意味すると考えてしまう。これは尖点に由来するものであり、O を通るどんな円でも t^2 が因数として現れる。
- 判別式を、平方の和に正の定数を加えたものに負号をつけた形に書かずに、「明らかに負」と述べてしまう。

STEP のその先へ

曲線 $y^2=x^3$ は特異3次曲線（singular cubic curve）の代表的な例である。ここで行ったように重複度（multiplicity）をこめて交点を数えることは、ベズー（Bézout）の定理の出発点である。この定理によれば、m 次と n 次の曲線は、正しく数えれば mn 個の点で交わる。3次曲線と円なら6個であり、これは O での2個、R、S、そして2つの複素数の点と一致する。同じヴィエト（Vieta）型の計算が、楕円曲線（elliptic curve）上の群演算（group law）の原動力となっている。Reid の *Undergraduate Algebraic Geometry*（学部生のための代数幾何学）と、Silverman と Tate の *Rational Points on Elliptic Curves*（楕円曲線上の有理点）は、いずれもこれらの考え方をさらに先へと進めている。

解答例

STEP III 1992、第 4 問

純粋数学 ・ 直交軌道

STEP III 1992、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/92-s3-q4

鍵となる考え方

S_1 の各曲線を $y = 1 + \dfrac{a}{x-a}$ と書く。これは漸近線（asymptote）が $x = a$ と $y = 1$ である直角双曲線（rectangular hyperbola）であり、どの曲線も原点を通る。曲線族全体が満たす微分方程式（differential equation）を求めるには、微分してから曲線自身の方程式を用いて a を消去する。2 曲線が直交するのは、交点での傾きの積が -1 となるときであり、そのときに限る。したがって $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ を $-1/\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ に置き換えると、S_1 の方程式は S_2 の方程式に変わり、これは変数分離形（separable）となる。

解答

S_1 の曲線

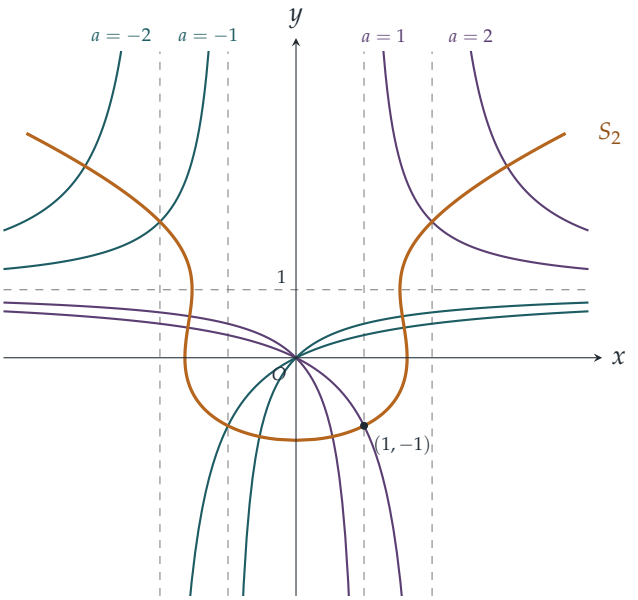
$x = (x-a) + a$ であるから、

$$y = \frac{x}{x-a} = 1 + \frac{a}{x-a}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{a}{(x-a)^2}.$$

よって $a \neq 0$ のとき、この曲線は鉛直漸近線 $x = a$ と水平漸近線 $y = 1$ をもつ直角双曲線であり、原点を通る。

- $a > 0$ のとき、傾きは常に負である。$x < a$ の枝は（$x \to -\infty$ で）$y = 1$ から下がってきて O を通り、$x \to a^-$ で $-\infty$ へ落ちていく。$x > a$ の枝は $+\infty$ から $y = 1$ に向かって下がっていく。
- $a < 0$ のとき、傾きは常に正である。$x > a$ の枝は $-\infty$ から O を通って $y = 1$ に向かって上がっていく。$x < a$ の枝は $y = 1$ より上にある。

x を $-x$ に置き換えると $\frac{x}{x-a}$ は $\frac{x}{x+a}$ に変わるので、$-a$ に対する曲線は a に対する曲線を y 軸に関して折り返したもの（鏡映、reflection）である。プロットに便利な点：$x = \frac{3}{2}a$ のとき $y = 3$ である。



破線は漸近線である。琥珀色の曲線は $(1, -1)$ を通る S_2 の曲線であり、その形については以下で根拠を示す。

S_1 の微分方程式

$y(x-a) = x$ から $x - a = \dfrac{x}{y}$、$a = x - \dfrac{x}{y} = \dfrac{x(y-1)}{y}$ を得る。（S_1 の曲線上で $y = 0$ となるのは原点だけなので、その点を除けば y で割ってよい。）これを傾きの式に代入すると、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{a}{(x-a)^2} = -\frac{x(y-1)}{y} \cdot \frac{y^2}{x^2} = -\frac{y(y-1)}{x},$$

となるので、S_1 のすべての曲線は次を満たす。

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y(1-y).$$

S_2 の微分方程式

2 曲線が直交するのは、交点におけるそれぞれの傾きの積が -1 となるときであり、そのときに限る。したがって、共通の点における S_1 の曲線の傾きを p_1、S_2 の曲線の傾きを p_2 とすると $p_1 p_2 = -1$、すなわち $p_1 = -1/p_2$ である。

考えてみよう いま求めた方程式は S_1 に関するものである。なぜそれが S_2 について何かを教えてくれるのだろうか？

各点 (x,y)（ただし $x,y\neq 0$）を通る S_1 の曲線はちょうど 1 本、すなわち $a=x(y-1)/y$ のものであり、その点での傾きは $-y(y-1)/x$ である。同じ点を通る S_2 の曲線の傾きは $p_2=-1/p_1$ でなければならないので、S_2 上では

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{-y(y-1)/x}=\frac{x}{y(y-1)},\qquad \text{すなわち、}\qquad x=y(y-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

となり、示すべきことが示された。

$(1,-1)$ を通る S_2 の曲線

この方程式は変数分離できる：

$$\int (y^2-y)\,\mathrm{d}y=\int x\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad \frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+C.$$

$(1,-1)$ において $-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+C$ であるから $C=-\frac{4}{3}$ である。両辺に 6 を掛けると、図に描いた曲線は次のとおりである。

$$3x^2=2y^3-3y^2+8.$$

概形を描くために $g(y)=2y^3-3y^2+8$ とおくと $x=\pm\sqrt{g(y)/3}$ であり、曲線は y 軸に関して対称である。$g'(y)=6y(y-1)$ であるから、g は極大値 $g(0)=8$ と極小値 $g(1)=7$ をとる。どちらも正なので、g の実数の零点は -2 と -1 の間にただ 1 つだけある（$g(-2)=-20$、$g(-1)=3$ であるから）。数値的には $y_0\approx -1.214$ である。よってこの曲線は次のような性質をもつ。

- 最低点は $(0,y_0)$ であり、そこで $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=0$ である。
- $y=0$ となる点（$x=\pm\sqrt{8/3}\approx\pm 1.63$）と $y=1$ となる点（$x=\pm\sqrt{7/3}\approx\pm 1.53$）で鉛直な接線をもつ。そこでは $y(y-1)=0$ となるからである。
- $y=0$ と $y=1$ の間では軸の方へわずかに折り返し（そこでは $x>0$ に対して傾き $x/(y(y-1))$ は負である）、その後 $|x|$ が大きいところでは $y\approx(\frac{3}{2}x^2)^{1/3}$ のように増加する。

図の検証として、$(1,-1)$ を通る S_1 の曲線は $-1=\frac{1}{1-a}$ を満たすので $a=2$ であり、そこでの傾きは -2 である。S_2 の傾きは $\frac{1}{(-1)(-2)}=\frac{1}{2}$ であり、確かに $(-2)\cdot\frac{1}{2}=-1$ となる。$y=1$ における鉛直な接線も納得がいく。そこで曲線は、S_1 の $a=0$ の曲線である $y=1$ と直交しているのである。

検算

- $(1,-1)$ において：$3(1)^2 = 3$、$2(-1)^3 - 3(-1)^2 + 8 = 3$。✓
- S_2 の曲線は $a = 1$ の曲線と $(2,2)$ で交わる。そこでの S_1 の傾きは $-1/(2-1)^2 = -1$、S_2 の傾きは $2/(2\cdot 1) = 1$ であり、積は -1 である。
- 数値計算により、琥珀色の曲線と図に描いた 4 本の双曲線との交点 12 個すべて（各 3 個。例えば $a = -2$ とは $(1.5901, 0.4429)$ で交わる）を求めたところ、各交点で傾きの積は -1.00000000 であった。

よくある間違い

- 微分方程式に a を残してしまう。肝心なのは、$y = x/(x-a)$ そのものを用いてこれを消去することである。
- $p_1 p_2 = -1$ ではなく $p_2 = -p_1$ や $p_2 = 1/p_1$ を用いてしまう。
- S_2 の曲線を単純な U 字形に描いてしまう。実際には $y = 0$ と $y = 1$ で鉛直な接線をもち、その間でわずかに後ろへ折り返している。

STEP のその先へ

S_2 の曲線は S_1 の**直交截線**（orthogonal trajectories）である。物理学では、等ポテンシャル線と交わる力線や、速度ポテンシャルが一定の線と交わる流線として現れる。ここでの技法（パラメータを消去し、y' を $-1/y'$ に置き換える）は標準的な方法であり、その結果得られる 1 階の方程式は常微分方程式（ODE）の最初の講義の定番である。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations* を参照せよ。

解答例

STEP III 1992、第 5 問

純粋数学 ・ 空間ベクトルと図形

STEP III 1992、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/92-s3-q5

鍵となる考え方

対称性（symmetry）がほとんどすべての仕事をしてくれる。平面 $y+z=2$ に関する鏡映（reflection）は四面体（tetrahedron）をそれ自身に移し、A と D を固定するので、B と C を入れ替えなければならない。このことから、BC はこの平面に垂直であり、その中点 N はこの平面上にあることがわかる。あとは、4 つの頂点がすべて中心 Y から等距離にあるという事実を用いて、ピタゴラス（Pythagoras）の定理と内積（scalar product）を使うだけである。

解答

N と半径を求める

$\overrightarrow{AY}=(3,-2,4)-(0,4,-2)=(3,-6,6)$ であるから、球（sphere）の半径（radius）は

$$YA=\sqrt{9+36+36}=9.$$

である。$\overrightarrow{AY}=3\overrightarrow{YN}$ より $\overrightarrow{YN}=(1,-2,2)$ となるので、$N=(4,-4,6)$、$YN=3$ である。A、Y、N はいずれも $y+z=2$ を満たすことに注意しよう。つまり、3 点とも対称面（plane of symmetry）上にある。

BC が平面に垂直である理由

平面 $y+z=2$ を Π とする。Π に関する鏡映は四面体をそれ自身に移すので、頂点を並べ替える（permute）。鏡映は Π 上にある A と D を固定する。B も C も Π 上にはない。もしどちらかがそうであれば、鏡映はその点を固定し、さらに残る 4 番目の頂

点も固定しなければならなくなる。すると4つの頂点がすべて Π 上にあることになり、四面体ができない。したがって鏡映は B と C を入れ替える。つまり C は B の鏡像（mirror image）である。ゆえに

- BC は Π に垂直であるから、法線（normal）$(0,1,1)$ に平行である。
- BC の中点 N は Π 上にある（これは先に求めた結果と一致する）。

考えてみよう なぜ三角形 YNB は N で直角なのか？

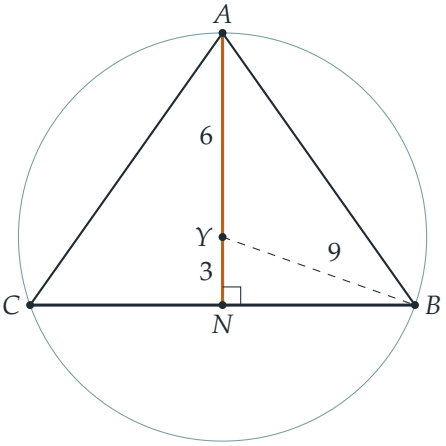
Y と N はともに Π 上にあるので、YN は Π 内の直線である。一方、NB は Π の法線の方向にある。法線は平面内のすべての直線に垂直であるから、$\angle YNB = 90^\circ$ である。

BN と、B および C の座標

B は球面上にあるので $YB = 9$ である。三角形 YNB にピタゴラスの定理を用いると

$$BN^2 = YB^2 - YN^2 = 81 - 9 = 72, \qquad \text{よって} \qquad BN = 6\sqrt{2},$$

となり、示すべき結果が得られた。



図は平面 ABC を正確な縮尺で描いたものである（Y は AN 上にあるので、この平面は Y を含む）。琥珀色の線 AN はこの平面と Π の交線であり、円はこの平面と球面の交わりである。

BC 方向の単位ベクトル（unit vector）は $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$ であるから

$$\overrightarrow{NB} = \pm 6\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) = \pm(0,6,6).$$

である。$N = (4,-4,6)$ であるから、弦（chord）の両端は $(4,2,12)$ と $(4,-10,0)$ であ

る。よって

$$B=(4,2,12),\ C=(4,-10,0) \qquad \text{または} \qquad B=(4,-10,0),\ C=(4,2,12).$$

確認として、$(4,2,12)-(3,-2,4)=(1,4,8)$ の長さは $\sqrt{1+16+64}=9$ であるから、B は確かに球面上にある。

D の座標

$\overrightarrow{YD}=(p,q,r)$ とおく。条件は 3 つある。

- D と Y はともに Π 上にあるので、$\overrightarrow{YD}$ は法線 $(0,1,1)$ に垂直である：$q+r=0$。
- D は球面上にある：$p^2+q^2+r^2=81$。
- 角の条件：$\overrightarrow{YA}\cdot\overrightarrow{YD}=YA\cdot YD\cos\angle AYD=9\cdot 9\cdot\frac{1}{3}=27$。

> **考えてみよう** 未知数 3 つに対して方程式が 3 つあるが、そのうち 1 つは 2 次式である。解はいくつあると予想されるか？

最終的に 2 次方程式（quadratic）に帰着するので、最大で 2 つである。幾何的には、D は Π と球面の交わりである円（$Y\in\Pi$ なので大円（great circle）である）上にあり、その円上で YA と所定の角をなす点は、A の両側にある互いに鏡像の関係の 2 点である。

$\overrightarrow{YA}=(-3,6,-6)$ と $r=-q$ を用いると、角の条件から

$$-3p+6q+6q=27 \quad\Longrightarrow\quad p=4q-9.$$

が得られる。これを球面の方程式に代入し、$r^2=q^2$ を用いると：

$$\begin{aligned}(4q-9)^2+2q^2&=81\\ 18q^2-72q&=0\\ 18q(q-4)&=0.\end{aligned}$$

- $q=0$：このとき $p=-9$、$r=0$ であるから、$\overrightarrow{YD}=(-9,0,0)$、$D=(-6,-2,4)$ である。
- $q=4$：このとき $p=7$、$r=-4$ であるから、$\overrightarrow{YD}=(7,4,-4)$、$D=(10,2,0)$ である。

どちらも本当の四面体を与える。D は Π 上にあるが直線 AN（平面 ABC のうち Π に含まれる唯一の部分）上にはないので、D は平面 ABC 上にない。ゆえに

$$D=(-6,-2,4) \qquad \text{または} \qquad D=(10,2,0).$$

検算

- 各 D は $y+z=2$ を満たし、どちらの場合も $|\overrightarrow{YD}|^2 = 81$ である（81 および $49+16+16$）。
- $D=(10,2,0)$ のとき：$\overrightarrow{YA}\cdot\overrightarrow{YD} = -21+24+24 = 27 = 81\cdot\frac{1}{3}$。✓
- B と C は互いに鏡像である。(x,y,z) を $y+z=2$ に関して鏡映すると $(x,\,2-z,\,2-y)$ となり、これは $(4,2,12)$ を $(4,-10,0)$ に移す。
- 座標が 20 以下の Π 上のすべての格子点について、球面上にあって $\cos\angle AYD = \frac{1}{3}$ を満たす点をコンピュータで探索したところ、見つかったのはちょうど $(-6,-2,4)$ と $(10,2,0)$ であった。四面体の体積はどちらの場合も $1728/6 = 288$ であり、つぶれていない。

よくある間違い

- N を間違える。$\overrightarrow{AY} = 3\overrightarrow{YN}$ より Y は AN の 4 分の 3 の位置にあるので、$N = Y + \frac{1}{3}\overrightarrow{AY}$ であって、$A+\frac{1}{3}\overrightarrow{AY}$ ではない。
- 半径を YN や AN としてしまう。半径は $YA=9$ であり、$YN=3$ は中心から弦 BC までの距離にすぎない。
- D が Π 上になければならないことを忘れる。$q+r=0$ がなければ、条件を満たす点は円周全体にわたって存在する。

STEP のその先へ

鏡映が B と C を入れ替えなければならないという議論は、群論（group theory）のささやかな一例である。図形の対称性はその頂点を並べ替えるという形で作用し、鏡映の不動点（fixed point）はその鏡面上になければならない。鏡映そのものは線形代数の写像 $\mathbf{x}\mapsto \mathbf{x} - 2\frac{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}-d)}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$ であり、行列式（determinant）が -1 の直交変換（orthogonal transformation）である。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は鏡映と直交行列を扱っており、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は対称性の群を展開している。

解答例

STEP III 1992、第 6 問

純粋数学 ・ 三角関数の漸化式（積分）

STEP III 1992、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/92-s3-q6

鍵となる考え方

どちらの漸化式（reduction formula）も、三角関数の差を因数 $\sin x$ を含む積に変形し、その因数で厄介な分母を約分するという発想に基づいている。I_n に対して用いる道具は $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B)$ であり、J_n に対しては $\sin P - \sin Q$ の和積公式（sum-to-product formula）である。分母が消えてしまえば、残るのは初等的な積分であり、二つの漸化式は順に打ち消し合う和（telescoping sum）となる。

解答

まず被積分関数について一言述べておく。どの被積分関数も分母に $\sin x$ をもち、これは $x = 0$ と $x = \pi$ で 0 になるが、これらの特異点は除去可能（removable）である。実際、$x \to 0$ のとき $\sin(nx)/\sin x \to n$、$x \to \pi$ のとき $\sin(nx)/\sin x \to \pm n$ であるから、どちらの被積分関数も有界（bounded）である。したがって、以下の積分はすべて連続関数の通常の積分である。

関係式 $I_n - I_{n-1} = J_n$

$\sin^2 A - \sin^2 B = (\sin A - \sin B)(\sin A + \sin B)$ と和積公式を用いると、

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \left(2\cos\tfrac{A+B}{2}\sin\tfrac{A-B}{2}\right)\left(2\sin\tfrac{A+B}{2}\cos\tfrac{A-B}{2}\right) = \sin(A+B)\sin(A-B).$$

$A = nx$、$B = (n-1)x$ とおくと、

$$\sin^2(nx) - \sin^2\big((n-1)x\big) = \sin\big((2n-1)x\big)\sin x.$$

したがって、$n \geq 1$ に対して

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^\pi \frac{x\left[\sin^2(nx) - \sin^2((n-1)x)\right]}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{x\sin(2n-1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = J_n,$$

となり、示すべき式が得られた。（$n = 1$ のときは、I_0 を $x\sin^2 0/\sin^2 x = 0$ の積分と解釈するので、$I_0 = 0$ である。）

J_n の漸化式

次に J_{n+1} と J_n を比べる。和積公式 $\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$ により、

$$\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x = 2\cos(2nx)\sin x,$$

であるから、ここでも $\sin x$ が約分される：

$$J_{n+1} - J_n = 2\int_0^\pi x\cos(2nx)\,\mathrm{d}x.$$

$u = x$、$\mathrm{d}v = \cos(2nx)\,\mathrm{d}x$ として部分積分（integration by parts）を行うと、

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\cos(2nx)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x\sin(2nx)}{2n}\right]_0^\pi - \frac{1}{2n}\int_0^\pi \sin(2nx)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{1}{4n^2}\left[\cos(2nx)\right]_0^\pi = \frac{1}{4n^2}(1-1) = 0,\end{aligned}$$

となる。整数 n に対して $\sin(2n\pi) = 0$、$\cos(2n\pi) = 1$ だからである。よって漸化式は

$$J_{n+1} = J_n \qquad (n \geq 1).$$

考えてみよう $J_{n+1} = J_n$ という漸化式は、怪しいほど自明に見える。本当にこれが答えなのだろうか。

その通りである。現れる $2\cos(2nx)$ は、整数個の周期にわたって x を掛けて積分すると 0 になるので、n から次の n へ移っても何も変わらない。値を確定させるには最初の項だけを求めればよい：

$$J_1 = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2},$$

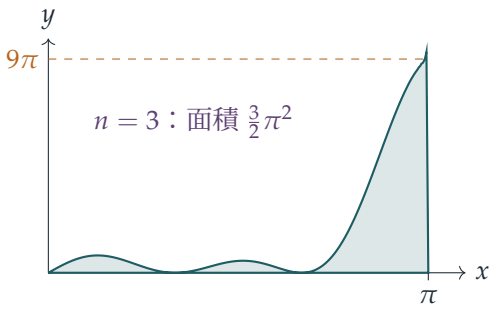
したがって、すべての正の整数 n に対して $J_n = \frac{1}{2}\pi^2$ である。

C の下の面積

$(0,\pi)$ 上で $x \geq 0$ かつ $\sin^2(nx)/\sin^2 x \geq 0$ であるから、曲線は決して x 軸の下に出ない。よって C の下の面積はちょうど I_n に等しい。最初の関係式を足し合わせ（項が順に打ち消し合う）、$I_0 = 0$ を用いると、

$$I_n = I_0 + \sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} J_k = n\cdot\frac{\pi^2}{2}.$$

したがって、C の下の面積は $\frac{1}{2}n\pi^2$ であり、示すべき結果が得られた。



検算

- $n = 1$：曲線は $y = x$ であり、その三角形の面積は $\frac{1}{2}\pi^2$ である。✓
- $n = 1, \ldots, 8$ の積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると、毎回 $J_n \approx 4.9348022 = \frac{1}{2}\pi^2$ となり、また例えば $I_3 \approx 14.8044066 = \frac{3}{2}\pi^2$ となる。
- 曲線は $x = \pi$ で $y = n^2\pi$ まで上がるが、面積は n について一次でしか増えない。山は高くなるが幅は狭くなる（幅はおよそ π/n）ので、これは矛盾しない。

よくある間違い

- $I_0 = 0$ を忘れる（あるいは I_0 が何を意味するかを確かめない）ために、打ち消し合う和の出発値がなくなってしまう。
- $\int x\cos(2nx)\,\mathrm{d}x$ での符号の誤り。境界項が消え、残る $\sin(2nx)$ の $[0, \pi]$ 上の積分が 0 であることに注目する方がすっきりする。

STEP のその先へ

関数 $\sin^2(nx)/\sin^2 x$ は、因数 $1/n$ を除けば、フーリエ解析（Fourier analysis）における**フェイエール核**（*Fejér kernel*）であり、$\sin\big((2n-1)x\big)/\sin x$ は本質的に**ディリクレ核**（*Dirichlet kernel*）である。ここで見つけた事実、すなわち関数が区間の端に集中していく一方でその積分が n によらないということこそが、フーリエ級数（Fourier series）が収束する（converge）ことの証明においてこれらの核を有用なものにしている。Stein と Shakarchi の *Fourier Analysis: An Introduction*（フーリエ解析入門）はこの内容を見事に展開している。実解析（real analysis）の背景については、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の理解）を参照するとよい。

解答例

STEP III 1992、第 7 問

純粋数学 ・ ベクトルと図形

> **STEP III 1992、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q7

鍵となる考え方

この問題に現れるものはすべて、平行四辺形（parallelogram）と、辺を与えられた比に分ける点からできている。これはまさに位置ベクトル（position vector）が得意とする状況である。原点を A にとり、すべての点を 2 つの辺ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AD}$ で表す。そのうえで 2 本の直線の交点を求め、その点が 3 本目の直線上にあることを確かめればよい。

解答

A を原点とし、$\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$、$\mathbf{d} = \overrightarrow{AD}$ とおく。$ABCD$ はつぶれていない本物の平行四辺形であるから、これらは平行でない。したがって平面上のすべての点は、ただ 1 組の実数の組 (λ, μ) によって $\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{d}$ と表され、係数比較（comparing coefficients）ができる。

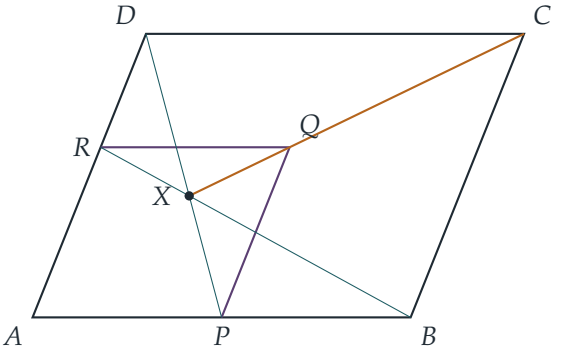
$ABCD$ は平行四辺形であるから、C の位置ベクトルは $\mathbf{b} + \mathbf{d}$ である。P は辺 AB 上、R は辺 AD 上にあるから、

$$\mathbf{p} = p\,\mathbf{b}, \qquad \mathbf{r} = r\,\mathbf{d}, \qquad 0 \le p, r \le 1.$$

と書ける。$APQR$ は平行四辺形であるから $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR}$ であり、

$$\mathbf{q} = p\,\mathbf{b} + r\,\mathbf{d}.$$

となる。



BR と DP の交点

直線 BR 上の一般の点は

$$\mathbf{b}+s(r\mathbf{d}-\mathbf{b})=(1-s)\,\mathbf{b}+sr\,\mathbf{d},$$

であり、直線 DP 上の一般の点は

$$\mathbf{d}+t(p\mathbf{b}-\mathbf{d})=tp\,\mathbf{b}+(1-t)\,\mathbf{d}.$$

である。共有点では $\mathbf{b}$ の係数どうし、$\mathbf{d}$ の係数どうしが一致しなければならない：

$$1-s=tp,\qquad sr=1-t.$$

$s=1-tp$ を第 2 式に代入すると $r-rpt=1-t$ となり、$t(1-pr)=1-r$ を得る。

> **考えてみよう** $1-pr$ で割ってよいだろうか？

$0\le p,r\le 1$ であるから、$pr=1$ となるのは $p=r=1$、すなわち $P=B$ かつ $R=D$ のときに限る。このとき $Q=C$ となり、「直線」CQ は定まらないので、証明すべきことは何もない。そこでこの場合を除外すると、$1-pr>0$ となる。これにより BR と DP は平行でないこともわかり、両者はちょうど 1 点で交わる。よって

$$t=\frac{1-r}{1-pr},\qquad s=1-tp=\frac{1-pr-p+pr}{1-pr}=\frac{1-p}{1-pr},$$

であり、交点 X は

$$\mathbf{x}=tp\,\mathbf{b}+sr\,\mathbf{d}=\frac{p(1-r)\,\mathbf{b}+r(1-p)\,\mathbf{d}}{1-pr}.$$

である。

X は CQ 上にある

直線 CQ 上の一般の点は

$$\mathbf{c}+u(\mathbf{q}-\mathbf{c})=(\mathbf{b}+\mathbf{d})+u\big((p-1)\mathbf{b}+(r-1)\mathbf{d}\big)=\big(1-u(1-p)\big)\mathbf{b}+\big(1-u(1-r)\big)\mathbf{d}.$$

である。$u = \dfrac{1}{1-pr}$ とおいてみる。**b** の係数は

$$1 - \frac{1-p}{1-pr} = \frac{1-pr-1+p}{1-pr} = \frac{p(1-r)}{1-pr},$$

となり、**d** の係数は

$$1 - \frac{1-r}{1-pr} = \frac{1-pr-1+r}{1-pr} = \frac{r(1-p)}{1-pr}.$$

となる。これらはちょうど **x** の係数に一致する。したがって X は CQ 上にもあり、3 本の直線 BR、CQ、DP はすべて X を通る。すなわち 3 直線は 1 点で交わる（concurrent）。以上で示された。 ■

（対称性からも安心できる。B, P, p と D, R, r の役割を入れ替えると、BR と DP が入れ替わり、CQ はそのままで、**x** の式も変わらない。）

検算

- $P = A$（$p = 0$）ならば $Q = R$ であり、$\mathbf{x} = r\mathbf{d}$、すなわち R となる。実際、DP は直線 DA であって BR と R で交わり、CQ は CR であって R を通る。
- P、R がそれぞれ AB、AD の中点ならば $\mathbf{x} = \frac{1}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{d})$ であり、これは A から C へ向かって 3 分の 1 の位置にある点である。BR と DP は三角形 ABD の中線（median）のうちの 2 本であるから、この点が三角形 ABD の重心（centroid）になるのは当然である。
- ランダムに選んだ 5000 個の平行四辺形と、ランダムな P、R の位置について、分数を用いた厳密計算で 3 直線が 1 点で交わることを確認した。すべての場合で **x** の式と一致した。

よくある間違い

- 2 つの係数を比較できるのは **b** と **d** が平行でないからである、ということを忘れる。
- 異なる 2 本の直線に同じ媒介変数（parameter）を使ってしまう。直線ごとに別々の媒介変数（s、t、u）が必要である。
- $P = B$、$R = D$ という退化した場合（degenerate case）に触れない。この場合 $Q = C$ となり、直線 CQ は定まらない。

STEP のその先へ

この解答では長さや角度を一切使わず、平行線と直線上の比だけを用いていることに注目しよう。したがってこの結果は**アフィン幾何学**（affine geometry）に属する。アフィン写像（affine map、線形写像（linear map）に平行移動（translation）を合成したもの）は、3 直線が 1 点で交わるという性質を保ったまま任意の平行四辺形を正方形に移すので、正方形の場合に結果を示せば十分である。直線が交わることに関する問題は、射影幾何学（projective geometry）においても自然なものであり、チェバ（Ceva）の定理やデザルグ（Desargues）の定理といった定理はこの分野に属する。これらの考え方を幅広く、読みやすく概観するには、コクセター（Coxeter）の *Introduction to Geometry*（幾何学入門）や、Brannan、Esplen、Gray の *Geometry*（幾何学）を読んでみるとよい。

解答例

STEP III 1992、第 8 問

純粋数学 ・ 解を用いた三角関数の和

> **STEP III 1992、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q8

鍵となる考え方

ド・モアブル（de Moivre）の定理を用いると、$\sin(2n+1)\theta$ は $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の多項式（polynomial）に変形でき、$\sin^{2n+1}\theta$ でくくり出すと $\cot^2\theta$ の多項式が残る。角 $k\pi/(2n+1)$ では左辺が 0 になるので、それらの余接の 2 乗は既知の多項式の根（root）である。根がすべてわかってしまえば、三つの和は姿を変えた解と係数の関係（Vieta's formulas）（根の和と根の逆数の和）にすぎない。

解答

恒等式

$c=\cos\theta$、$s=\sin\theta$、$N=2n+1$ とおく。ド・モアブルの定理と二項定理（binomial theorem）により、

$$\cos N\theta+\mathrm{i}\sin N\theta=(c+\mathrm{i}s)^N=\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}c^{N-j}(\mathrm{i}s)^j.$$

虚数の項は j が奇数の項である。$j=2m+1$ とおくと $\mathrm{i}^{2m+1}=\mathrm{i}(-1)^m$ であるから、

$$\sin N\theta=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{2n+1}{2m+1}c^{2n-2m}s^{2m+1}.$$

ここで $r = n - m$ として和の順序を逆にする。このとき $2m+1 = 2n+1-2r$ であり、二項係数の対称性から $\binom{2n+1}{2n+1-2r} = \binom{2n+1}{2r}$ である。よって

$$\begin{aligned}\sin(2n+1)\theta &= \sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}\binom{2n+1}{2r}c^{2r}s^{2n+1-2r}\\ &= \sin^{2n+1}\theta\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}\binom{2n+1}{2r}\cot^{2r}\theta,\end{aligned}$$

となる。ここで s^{2n+1} をくくり出し、$c^{2r}/s^{2r} = \cot^{2r}\theta$ を用いた。これは $\sin\theta \neq 0$ であるかぎり成り立ち、示すべきことが示された。

多項式の根

$$p(x) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^{r}\binom{2n+1}{2r}x^{r},$$

とし、$k = 1,\dots,n$ に対して $\theta_k = k\pi/(2n+1)$ とおく。すると $(2n+1)\theta_k = k\pi$ より $\sin(2n+1)\theta_k = 0$ であり、一方 $0 < \theta_k < \pi/2$ より $\sin\theta_k \neq 0$ である。恒等式を $\sin^{2n+1}\theta_k$ で割り、$(-1)^n$ を掛けると、

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r}\binom{2n+1}{2r}\cot^{2r}\theta_k = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad p\left(\cot^2\theta_k\right) = 0.$$

考えてみよう これらが根のすべてであることは、どうしてわかるのか。以下の和はこの事実に依存している。

角 $\theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n$ はすべて $(0,\pi/2)$ にあり、そこでは cot は正で狭義単調減少である。よって n 個の数 $\cot^2\theta_k$ は互いに異なる。p の最高次の係数は $(-1)^n\binom{2n+1}{2n} = (-1)^n(2n+1) \neq 0$ であるから、p の次数はちょうど n であり、根は高々 n 個である。したがって $p(x) = 0$ の根はちょうど $k = 1,\dots,n$ に対する $\cot^2\theta_k$ であり、いずれも単根である。

必要な係数は次のとおりである。

$$\begin{aligned}[x^n]:\ (-1)^n\binom{2n+1}{2n} &= (-1)^n(2n+1),\\ [x^{n-1}]:\ (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{2n-2} &= (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{3},\\ [x^1]:\ -\binom{2n+1}{2} &= -n(2n+1), \qquad [x^0]:\ 1.\end{aligned}$$

小問 (i)

根の和は、x^{n-1} の係数と x^n の係数の比にマイナスをつけたものである。

$$\sum_{k=1}^{n} \cot^2\theta_k = -\frac{(-1)^{n-1}\binom{2n+1}{3}}{(-1)^n(2n+1)} = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

小問 (ii)

$\tan^2\theta_k = 1/\cot^2\theta_k$ であるから、求めたいのは根 x_k の逆数の和である。どの根も 0 ではなく（定数項が 1 である）、

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = \frac{\sum_k \prod_{j\neq k} x_j}{\prod_k x_k},$$

の分子と分母は､解と係数の関係によりそれぞれ $(-1)^{n-1}\cdot[x^1]/[x^n]$ と $(-1)^n\cdot[x^0]/[x^n]$ である。その比は $-[x^1]/[x^0]$ であるから、

$$\sum_{k=1}^{n} \tan^2\theta_k = -\frac{-n(2n+1)}{1} = n(2n+1).$$

(同値な見方として、逆数 $1/x_k$ は係数の並びを逆にした多項式 $x^n p(1/x)$ の根であり、その根の和を読み取ればよい。)

小問 (iii)

$\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$ と小問 (i) を用いると、

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cosec}^2\theta_k = n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{3n+2n^2-n}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

検算

$n=1$ のとき多項式は $1-3x$ であり、その根は $\frac{1}{3} = \cot^2(\pi/3)$ である。このとき (i) は $\frac{1}{3}$、(ii) は $3 = \tan^2(\pi/3)$、(iii) は $\frac{4}{3} = \operatorname{cosec}^2(\pi/3)$ を与え、いずれも正しい。$n=3$ のとき角は $\pi/7, 2\pi/7, 3\pi/7$ であり、電卓で計算すると三つの和は 5、21、8 となって、$\frac{3\cdot5}{3}$、$3\cdot7$、$\frac{2\cdot3\cdot4}{3}$ と一致する。また、無作為に選んだ θ と n で恒等式を、$n \le 29$ で三つの和をすべて数値的に確かめた。

よくある間違い

- $\cot^2\theta_k$ が互いに異なることと、p の次数がちょうど n であることを論じ忘れる。これがなければ、$\cot^2\theta_k$ に解と係数の関係を適用することはできない。

- 係数の符号の誤り。小問 (i) では因子 $(-1)^n$ が打ち消し合うが、それは両方の係数がこの因子をもつ場合に限られる。
- k を $2n$ まで動かしてしまう。$k > n$ に対する角 $k\pi/(2n+1)$ は同じ $\cot^2$ の値を繰り返すだけなので、互いに異なる根を与えるのは $k \leq n$ のみである。

STEP のその先へ

小問 (iii) の結果と、$0 < \theta < \pi/2$ で成り立つ $\cot^2\theta < 1/\theta^2 < \operatorname{cosec}^2\theta$ を組み合わせると、$\sum_{k=1}^{n} 1/k^2$ をここで求めた和の定数倍二つで挟み込むことができる。$n \to \infty$ とすると、オイラー（Euler）の有名な結果 $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$ が得られる。これは大学 1 年の解析学の講義でもよく紹介される、美しい初等的証明である。多項式の係数から和を読み取るという同じ発想は、対称関数（symmetric functions）やニュートンの恒等式（Newton's identities）の根底にもある。解析学の側面については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を、この趣向の問題をさらに解きたければ Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（発展的な数学の問題集）を参照するとよい。

解答例

STEP III 1992、第 9 問

純粋数学 ・ 楕円の極方程式

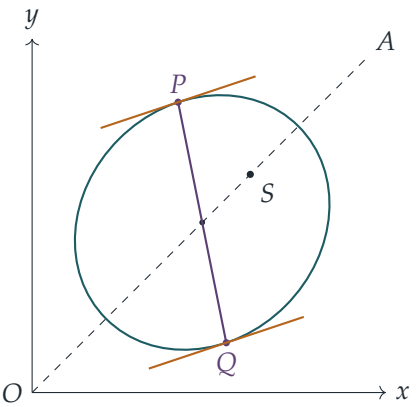
STEP III 1992、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/92-s3-q9

鍵となる考え方

極座標（polar coordinates）は S を極とし、始線（initial line）を $y = x$ の向きにとって測る。したがって偏角 θ の点は、S から見て直交座標（Cartesian coordinates）で $\theta + \frac{\pi}{4}$ の方向にある。x と y を θ の関数として表し、微分すれば傾き（gradient）が得られる。後半で実際に使える直径（diameter）の性質は、楕円（ellipse）がその中心に関して対称であることである。すなわち、直径の両端における接線（tangent）は平行になる。そこで二つの傾きを等しいとおき、あとは半角の三角関数に任せればよい。



図（$e = \frac{1}{2}$）において、PQ は中心を通る直径であり、P と Q における接線は平行である。

解答

接線の傾き

S は第 1 象限で直線 $y=x$ 上にあるから、S を点 (s,s)（$s>0$）とする。SA 方向の単位ベクトルは $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ であり、x 軸となす角は $\frac{\pi}{4}$ である。よって S を極とする極座標が (r,θ) である点は

$$x = s + r\cos\phi, \qquad y = s + r\sin\phi, \qquad \text{ただし} \phi = \theta + \tfrac{\pi}{4}.$$

E 上では $r = \ell/(1+e\cos\theta)$ であるから

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\ell e\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = \frac{r\,e\sin\theta}{1+e\cos\theta}.$$

$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ を r' と書き、$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\theta = 1$ を用いると

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = r'\cos\phi - r\sin\phi, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = r'\sin\phi + r\cos\phi.$$

必要なのは比だけなので、両方に正の量 $(1+e\cos\theta)/r$ を掛ける：

$$\frac{1+e\cos\theta}{r}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = e\sin\theta\cos\phi - (1+e\cos\theta)\sin\phi = e\sin(\theta-\phi) - \sin\phi = -\frac{e}{\sqrt{2}} - \sin\phi,$$
$$\frac{1+e\cos\theta}{r}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = e\sin\theta\sin\phi + (1+e\cos\theta)\cos\phi = e\cos(\theta-\phi) + \cos\phi = \frac{e}{\sqrt{2}} + \cos\phi,$$

ここで $\theta-\phi = -\frac{\pi}{4}$ を用いた。さらに $\sin\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta+\cos\theta)$、$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta-\sin\theta)$ である。全体に $\sqrt{2}$ を掛けると、$\theta=\alpha$ における接ベクトル（tangent vector）は

$$\mathbf{d}(\alpha) = \big(-(\sin\alpha+\cos\alpha+e),\ \cos\alpha-\sin\alpha+e\big). \qquad (*)$$

したがって

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos\alpha-\sin\alpha+e}{-(\sin\alpha+\cos\alpha+e)} = \frac{\sin\alpha-\cos\alpha-e}{\sin\alpha+\cos\alpha+e},$$

となり、示すべき式が得られた。（$\sin\alpha+\cos\alpha+e=0$ となるところでは接線は鉛直であるが、そこでも $(*)$ は成り立つ。）

直径の両端

考えてみよう 中心をまだ求めていないのに、「PQ が中心を通る」という条件をどうすれば α と β の方程式に直せるだろうか。

前半の結果を使う。楕円はその中心 C のまわりの半回転（half-turn）、すなわち点対称移動に関して対称である。P と Q が直径の両端であれば、この半回転は二点を入れ替え、P における接線を Q における接線に移す。半回転はどの直線も平行な直線に移すから、P と Q における接線は平行である。

そこで P で $\theta=\alpha$、Q で $\theta=\beta$ とすると、$(*)$ のベクトル $\mathbf{d}(\alpha)$ と $\mathbf{d}(\beta)$ は平行である。傾きではなくベクトルで扱うので、接線が鉛直な場合でも 0 で割ることはない。$s_\alpha=\sin\alpha$、$c_\alpha=\cos\alpha$ などと書く。条件は

$$(s_\alpha+c_\alpha+e)(c_\beta-s_\beta+e)=(s_\beta+c_\beta+e)(c_\alpha-s_\alpha+e).$$

展開すると、$c_\alpha c_\beta$、$-s_\alpha s_\beta$、ec_α、ec_β、e^2 の項は両辺に現れて打ち消し合い、

$$s_\alpha c_\beta-c_\alpha s_\beta+es_\alpha-es_\beta=s_\beta c_\alpha-c_\beta s_\alpha+es_\beta-es_\alpha,$$

が残る。すなわち

$$\sin(\alpha-\beta)+e(\sin\alpha-\sin\beta)=0.$$

ここで $\sin(\alpha-\beta)=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ と $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ を用いると

$$2\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}+e\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=0.$$

考えてみよう $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ で割ってよいだろうか。

よい。P と Q は異なる点であるから、α と β の差は 2π の整数倍ではなく、$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\neq0$ である。したがって

$$\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}+e\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}=0.$$

$\frac{\alpha}{2}$ と $\frac{\beta}{2}$ を用いて展開すると

$$(1+e)\cos\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\beta}{2}+(1-e)\sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2}=0.$$

$(1-e)\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$ で割ると（E は楕円なので $1-e>0$ である）

$$\tan\tfrac{\alpha}{2}\tan\tfrac{\beta}{2}=-\frac{1+e}{1-e},$$

となり、示すべき式が得られた。この割り算は $\cos\frac{\alpha}{2}$ または $\cos\frac{\beta}{2}$ が 0 でない限り正当である。たとえば $\alpha=\pi$ ならば、方程式から $\sin\frac{\beta}{2}=0$、よって $\beta=0$ となる。この直径は OSA に沿った長軸（major axis）であり、そこでは tan の積は定義されない。それ以外のすべての直径はこの結果を満たす。

検算

- $\alpha=0$（S に近い方の頂点）では、公式から傾きは $\frac{-1-e}{1+e}=-1$ となる。これは正しい。長軸の端における接線は $y=x$ に垂直だからである。
- $e=\frac{1}{2}$ のとき、積は -3 になるはずである。$\alpha=\frac{\pi}{2}$ とすると $\tan\frac{\alpha}{2}=1$ である。すると $\tan\frac{\beta}{2}=-3$ であり、$\sin\beta=-\frac{3}{5}$、$\cos\beta=-\frac{4}{5}$ となる。$(*)$ より $\mathbf{d}(\alpha)=(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$、$\mathbf{d}(\beta)=(\frac{9}{10},\frac{3}{10})$ であり、これらは平行である。✓

- 数値的にも、ℓ、e、S、α を無作為に 2000 通り選んで調べたところ、傾きの公式は有限差分（finite difference）による導関数と一致した。また P を中心（S から AS に沿って距離 $\ell e/(1-e^2)$ の位置）に関して対称移動すると E 上の点 Q が得られ、その β は 10^{-13} の精度で恒等式を満たした。

よくある間違い

- $\frac{\pi}{4}$ の回転を忘れて $x = r\cos\theta$ を用いてしまい、誤った座標系での傾きを求めてしまう。
- $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ が 0 でない理由を述べずにそれで割ってしまう。
- 中心を求めて「C は PQ の中点である」という条件を直接課そうとする。これでも解けるが、平行な接線を使うよりはるかに煩雑になる。

STEP のその先へ

直径の両端における接線が平行であることは、**共役直径**（conjugate diameters）の理論の一部である。平行な弦の族の中点は一本の直径上にあり、その直径の両端における接線はそれらの弦に平行である。楕円を円に変換するアフィン写像（affine map）のもとでは、これらはすべて初等的な円の幾何学になる。これはアフィン幾何学や射影幾何学（projective geometry）が非常に強力である理由の一つである。また、ここで現れた半角の tan は、天体力学（celestial mechanics）で軌道に用いられる標準的な媒介変数表示（parametrisation）でもある。この幾何学への大学 1 年生向けのよい入門としては、Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析入門）や Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の定番問題集）を読んでみるとよい。

解答例

STEP III 1992、第 10 問

純粋数学 ・ 弧長と面積

> **STEP III 1992、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q10

鍵となる考え方

2 つの周長はどちらも弧長（arc length）の積分であり、初等的には計算できない（これらは**楕円積分**（elliptic integrals）である）。したがって、両者が等しいことを示す唯一の方法は、一方の積分を他方の積分に変形することである。それぞれの曲線について弧長の微小要素を書き下し、$\cos^2 + \sin^2 = 1$ を用いて各被積分関数（integrand）を簡単にする。そのうえで置換（substitution）と少しの対称性（symmetry）を使えば、2 つが同じ積分であることがわかる。面積のほうはどちらも直接計算できるので、より易しい。

（問題用紙に印刷された範囲は $\frac{1}{4}\theta$ で終わっている。これは明らかに $\frac{1}{4}\pi$ の誤植（misprint）であり、ここでは $-\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{4}\pi$ とする。）

解答

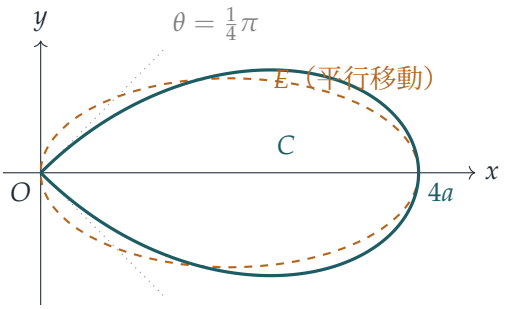
C の概形

$-\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{4}\pi$ のとき $-\frac{1}{2}\pi < 2\theta < \frac{1}{2}\pi$ であるから、（$a > 0$ として）範囲全体で $r = 4a\cos 2\theta > 0$ である。いくつかの特徴を挙げる。

- $r(-\theta) = r(\theta)$ であるから、C は始線（initial line）に関して対称である。
- 最大値 $r = 4a$ は $\theta = 0$ でとり、その点は $(4a, 0)$ である。
- $\theta \to \pm\frac{1}{4}\pi$ のとき $r \to 0$ であるから、曲線は原点に入り込み、そこで直線 $\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$ に接する（tangent）。

よって C は 1 つの閉じたループであり、4 枚の花びらをもつバラ曲線（rose）$r = 4a\cos 2\theta$

の花びら 1 枚で、x 軸の正の部分に沿って横たわっている。図には、C とともに、同じ区間 $0 \le x \le 4a$ にわたるように $2a$ だけ平行移動した E の写しを示してある。



C の周長

極方程式で表された曲線（polar curve）では、弧長の微小要素は $\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2$ を満たす。ここでは $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -8a\sin 2\theta$ であるから、

$$\begin{aligned} r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 &= 16a^2\cos^2 2\theta + 64a^2\sin^2 2\theta \\ &= 16a^2\left(1 + 3\sin^2 2\theta\right). \end{aligned}$$

したがって、θ が $(-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$ を動くときループはちょうど 1 回描かれるので、

$$\text{周長：} C = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 4a\sqrt{1 + 3\sin^2 2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

$\phi = 2\theta$ と置換すると、$\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\mathrm{d}\phi$ となり、積分区間の端は $\pm\frac{1}{2}\pi$ になる。

$$\text{周長：} C = 2a\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 + 3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi,$$

最後の等号は、被積分関数が ϕ の偶関数（even function）であることによる。

E の周長

$x = 2a\cos\phi$、$y = a\sin\phi$ とすると、

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 = 4a^2\sin^2\phi + a^2\cos^2\phi = a^2\left(1 + 3\sin^2\phi\right),$$

であり、ϕ が 0 から 2π まで動くとき E はちょうど 1 回描かれるので、

$$\text{周長：} E = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi.$$

考えてみよう なぜ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{1+3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi$ は $[0,\tfrac{1}{2}\pi]$ 上の積分の 4 倍になるのか。

$g(\phi)=\sqrt{1+3\sin^2\phi}$ とおく。$\sin^2(\pi-\phi)=\sin^2\phi$ であるから、$[\tfrac{1}{2}\pi,\pi]$ 上の g のグラフは $[0,\tfrac{1}{2}\pi]$ 上のグラフを鏡に映したものであり、$\int_0^{\pi}g=2\int_0^{\pi/2}g$ となる。また $\sin^2(\phi+\pi)=\sin^2\phi$ であるから、g は周期（period）π をもち、$\int_{\pi}^{2\pi}g=\int_0^{\pi}g$ となる。（幾何学的には、楕円の 4 つの象限（quadrant）にある部分の長さが等しいということである。）したがって

$$\text{周長：}E=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi,$$

これは C の周長として得た式とまったく同じである。よって 2 つの周長は等しく、しかも積分を計算する必要は一度もなかった。

面積

極方程式で表された曲線が囲む面積は $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ である。$\cos^2 2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)$ を用いると、

$$\begin{aligned}\text{面積：}C&=\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}16a^2\cos^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta=4a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(1+\cos 4\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=4a^2\Big[\theta+\tfrac{1}{4}\sin 4\theta\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4}=4a^2\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi a^2.\end{aligned}$$

楕円については、反時計回りに描かれる閉曲線が囲む面積は $\frac{1}{2}\oint\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi}-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi}\right)\mathrm{d}\phi$ であり、これから

$$\text{面積：}E=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(2a^2\cos^2\phi+2a^2\sin^2\phi\right)\mathrm{d}\phi=\frac{1}{2}\cdot 2a^2\cdot 2\pi=2\pi a^2.$$

が得られる。（同じことだが、これはよく知られた $\pi\times$ 半軸 $\times$ 半軸 $=\pi(2a)(a)$ である。）よって 2 つの面積は等しく、どちらも $2\pi a^2$ である。

検算

- $a=1.7$ として各曲線を 200 000 角形で近似すると、どちらの周長も 16.470362 となり、これはシンプソンの公式（Simpson's rule）で求めた $4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi$ の値に一致する。したがって各周長はおよそ $9.6884a$ である。
- 同じ多角形で、どちらの面積も $18.158406=2\pi(1.7)^2$ となった。
- C の面積の妥当性の確認：C は長方形 $0\le x\le 4a$、$|y|\le 1.1a$ の内部にあり、その面積はおよそ $8.8a^2$ である。$2\pi a^2\approx 6.3a^2$ はその妥当な割合である。

よくある間違い

- $\phi = 2\theta$ と置換するとき、$\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\mathrm{d}\phi$ から生じる因子 $\frac{1}{2}$ を忘れる。C の係数 $4a$ はいったん $2a$ になり、偶関数を使う段階を経て初めて再び $4a$ になる。
- 極方程式の曲線の面積として、$\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ の代わりに $\int r\,\mathrm{d}\theta$ を使う。
- $0 \leq \theta < 2\pi$ に対するバラ曲線 $r = 4a\cos 2\theta$ 全体を C とみなしてしまう。与えられた範囲は花びら 1 枚だけを取り出している。

STEP のその先へ

積分 $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi$ は**第 2 種完全楕円積分**（complete elliptic integral of the second kind）であり、初等的な原始関数（antiderivative）をもたない。問題が積分の計算を禁じているのはこのためである。楕円の周長には閉じた形（closed form）の式が存在しないのである。ここでの積分は $k^2 = -3$ の場合にあたる。$\sin^2\phi$ を $1 - \cos^2\phi$ で置き換え、さらに ϕ を $\frac{1}{2}\pi - \phi$ で置き換えることにより、$0 < k < 1$ の標準形に書き直すことができる。楕円積分の研究は楕円関数（elliptic functions）や楕円曲線（elliptic curves）へとつながり、これらは現代の数論（number theory）の中心にある。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、極方程式や媒介変数表示（parametric）で表された曲線の弧長や面積をこのように比較する STEP の問題がさらに収められている。

解答例

STEP III 1992、第 11 問

力学 ・ 衝突と反発係数

STEP III 1992、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

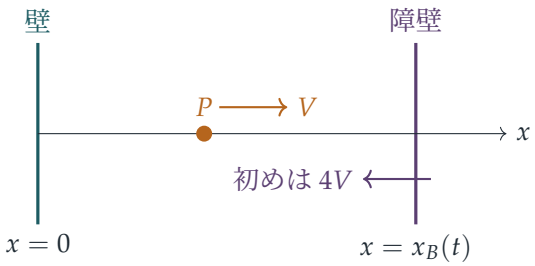
step.maths.org/questions/92-s3-q11

鍵となる考え方

すべての位置を壁から測ることにすると、粒子と障壁のそれぞれについて、壁からの距離が簡単な式で表される。衝突とは、これらの式のうち二つが一致する瞬間にほかならず、したがって時刻を求める各問題は二次方程式に帰着する。衝突の際には、ニュートン（Newton）の反発の法則（law of restitution）が**相対速度**（relative velocity）に対して適用されるので、その瞬間の障壁自身の速度が重要になる。

解答

P を、なめらかな台の上を、O を通り壁に垂直な直線に沿って運動する質点とみなす。x を壁 AB からの距離とし、障壁に向かう向きを正とする。また時刻 t は打ち出した瞬間から測る。速度は壁から離れる向きを正とする。



1 回目の衝突

障壁は距離 $\frac{75}{32}VT$ の位置から速度 $-4V$ で動き始め、一定の加速度 $+4V/T$ をもつ。したがって等加速度運動（constant acceleration）の公式により

$$x_B(t) = \tfrac{75}{32}VT - 4Vt + \frac{2Vt^2}{T}, \qquad v_B(t) = -4V + \frac{4Vt}{T}.$$

である。最初に何かに当たるまでは、P は一定の速さで運動する（台はなめらかである）から、$x_P = Vt$ である。両者が出会うのは $x_P = x_B$ のときである。$s = t/T$ とおくと

$$2s^2 - 5s + \tfrac{75}{32} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 64s^2 - 160s + 75 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad (8s-5)(8s-15) = 0.$$

となる。最初に出会うのは小さい方の根であるから、衝突は題意のとおり $t = 5T/8$ に起こる。（それより前では差 $x_B - x_P$ は正である。$s = 0$ で正であり、その間に根をもたないからである。）

この瞬間、P は $x = \frac{5}{8}VT$ にあり、障壁の速度は

$$v_B\left(\tfrac{5}{8}T\right) = -4V + \tfrac{5}{2}V = -\tfrac{3}{2}V,$$

である。よって障壁はまだ壁に向かって速さ $\frac{3}{2}V$ で動いている。

衝突後の速さ

障壁の運動は影響を受けないので、必要なのはニュートンの実験法則だけである。近づく速さは $V - (-\frac{3}{2}V) = \frac{5}{2}V$ である。衝突直後の P の速度を w とすると、遠ざかる速さは $-\frac{3}{2}V - w$ であり、

$$-\tfrac{3}{2}V - w = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{2}V \quad\Longrightarrow\quad w = -\tfrac{11}{4}V.$$

となる。したがって P は速さ $\dfrac{11V}{4}$ で壁に向かってはね返る。

> **考えてみよう**　はね返った後の速さが、それ以前に P がもっていた速さ V より大きいのはなぜか。

衝突の瞬間、障壁は P に向かって動いている。バットがボールを打つのと同じである。反発の法則は**障壁に対する** P の速さに作用する。障壁から見ると、P は $\frac{5}{2}V$ で到着し、$\frac{5}{4}V$ で離れていく。これに障壁自身の壁向きの速さ $\frac{3}{2}V$ を加え戻すと $\frac{11}{4}V$ になる。

壁でのはね返りと 2 回目の衝突

P は距離 $\frac{5}{8}VT$ を速さ $\frac{11}{4}V$ で進まなければならず、それには $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{11}T = \frac{5}{22}T$ かかる。よって P が AB に当たる時刻は

$$t_1 = \tfrac{5}{8}T + \tfrac{5}{22}T = \tfrac{75}{88}T.$$

である。障壁がその途中で邪魔をすることはありえない。この時間内、障壁は P より遅い速さで壁に向かって動いており（その速さは $\frac{3}{2}V$ から減少していく）、しかもそもそも壁に到達することがない。障壁が最も壁に近づくのは $t = T$ のときで、このとき $v_B = 0$ かつ $x_B = \frac{75}{32}VT - 4VT + 2VT = \frac{11}{32}VT > 0$ である。

壁は固定されているので、$e = \frac{1}{2}$ より粒子は速さ $\frac{11}{8}V$ ではね返り、その後は

$$x_P = \tfrac{11}{8}V\left(t - \tfrac{75}{88}T\right) = \tfrac{11}{8}Vt - \tfrac{75}{64}VT.$$

となる。障壁との次の衝突は、t_1 より後で初めて $x_P = x_B$ となる時刻である。$s = t/T$ を用いて表すと

$$\tfrac{75}{32} - 4s + 2s^2 = \tfrac{11}{8}s - \tfrac{75}{64} \iff 128s^2 - 344s + 225 = 0 \iff (8s-9)(16s-25) = 0.$$

である。根は $s = \frac{9}{8}$ と $s = \frac{25}{16}$ である。$\frac{75}{88} < 1 < \frac{9}{8}$ であるから、どちらも t_1 より後である。t_1 において差 $x_B - x_P = x_B(t_1)$ は正であるから、差が初めて 0 になるのは小さい方の根である。したがって障壁との次の衝突は、題意のとおり開始から時刻 $9T/8$ に起こる。（検算として、そのとき両者はともに $x = \frac{3}{8}VT$ にある。）

> **考えてみよう** 任意の根ではなく、小さい方の根をとらなければならないのはなぜか。

この二次方程式は、二つの運動があたかも互いにすり抜けられるかのように記述している。2 番目の根 $\frac{25}{16}T$ は、実際の衝突の後、すでに運動が変化してしまった後の「出会い」にあたる。物理的な衝突は、差が初めて 0 になる時刻である。

検算

- $t = \frac{5}{8}T$ において：$x_B = \frac{75}{32} - \frac{80}{32} + \frac{25}{32} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$（$VT$ を単位とする）であり、x_P に等しい。
- $t = \frac{9}{8}T$ において：$x_B = \frac{75}{32} - \frac{144}{32} + \frac{81}{32} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$ であり、$x_P = \frac{11}{8} \cdot \frac{24}{88} = \frac{3}{8}$ である。
- $V = T = 1$ として時間刻み（刻み幅 10^{-6}）のシミュレーションを行うと、衝突は $t \approx 0.6250$（はね返り後の速度 -2.750）、$0.8523 \approx \frac{75}{88}$、$1.1250$ に見いだされた。

よくある間違い

- 反発の法則を P の速さだけに適用し、$\frac{11}{4}V$ ではなく $\frac{1}{2}V$ を得てしまう。障壁は動いているので、相対速度を用いること。
- 加速度の符号を誤る。障壁は壁に向かって動き**始める**が減速しており、$t = T$ で向きを変える。

- P が AB ではね返る前に、障壁が P（あるいは壁）に到達しないことの確認を忘れる。

STEP のその先へ

ここでのうまい工夫は、衝突の瞬間における障壁の座標系（frame）で考えることである。障壁は非常に重いので、反発の法則は、固定された壁の場合とまったく同じように、相対速度の向きを反転させ大きさを定数倍する。このように座標系を取り替えることは大学 1 年の力学の中心的な考え方であり、ガリレイ不変性（Galilean invariance）や、二体衝突における重心系（centre-of-mass frame）へとつながっていく。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、これらの考え方を丁寧に展開している。

解答例

STEP III 1992、第 12 問

力学 ・ 運動量保存則

STEP III 1992、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

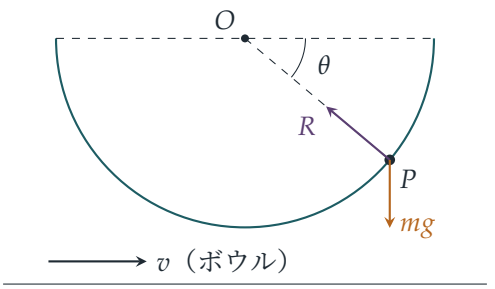
step.maths.org/questions/92-s3-q12

鍵となる考え方

ボウルと質点からなる系には外部から水平方向の力がはたらかず、重力以外に仕事をする力もない。したがって二つの保存則が成り立つ。水平方向の運動量保存（conservation of momentum）とエネルギー保存（conservation of energy）である。運動量の式でボウルの速さと $\dot{\theta}$ が結びつき、さらにエネルギーの式から v^2 が得られる。抗力（reaction）については、ボウルとともに（加速しながら）動く座標系で考えるのが最もすっきりしている。その座標系では、質点は単に O を中心とする円運動をする。また、抗力はボウルにはたらく唯一の水平方向の力でもあることを覚えておこう。

解答

モデル化。ボウルはなめらかなので、P にはたらく抗力 R は法線方向、すなわち PO に沿ってはたらく。台車は軽く、テーブルはなめらかなので、ボウル（台車を含む）にはたらく水平方向の力は、質点が押す力の水平成分だけである。P は縁の右端から動き始めるものとし、P が滑り降りるにつれて θ が 0 から増加するようにとる。このときボウルは右向きに動く。



水平方向の運動量保存

ボウルの水平方向の位置を X とし、$\dot{X} = v$ とする。O から見ると質点は $(a\cos\theta,\ -a\sin\theta)$ にあるので、その位置は $(X + a\cos\theta,\ -a\sin\theta)$ であり、速度は

$$\big(v - a\dot{\theta}\sin\theta,\ -a\dot{\theta}\cos\theta\big).$$

である。系には外部から水平方向の力がはたらかず、はじめは静止しているので、水平方向の全運動量はゼロのまま保たれる：

$$2mv + m\big(v - a\dot{\theta}\sin\theta\big) = 0 \quad\Longrightarrow\quad 3v = a\dot{\theta}\sin\theta,$$

これで求める結果が得られた。このとき質点の水平方向の速度は $v - 3v = -2v$ となることに注意しよう。すなわち質点はボウルの 2 倍の速さで左向きに動く。ボウルの運動量 $2mv$ を打ち消すためには、当然そうでなければならない。

エネルギー

抗力は全体として仕事をせず（内力であり、面はなめらかである）、テーブルも仕事をしないので、エネルギーは保存される。OP が角 θ をなすとき、質点は $a\sin\theta$ だけ落下している。$a\dot{\theta} = 3v/\sin\theta$ を用いると、質点の鉛直方向の速さは $a\dot{\theta}\cos\theta = 3v\cot\theta$ となるので、

$$\begin{aligned} mga\sin\theta &= \tfrac{1}{2}(2m)v^2 + \tfrac{1}{2}m\big[(2v)^2 + 9v^2\cot^2\theta\big] \\ &= mv^2\Big(3 + \tfrac{9}{2}\cot^2\theta\Big). \end{aligned}$$

両辺に $2\sin^2\theta/m$ を掛けると：

$$2ga\sin^3\theta = v^2\big(6\sin^2\theta + 9\cos^2\theta\big) = v^2\big(9 - 3\sin^2\theta\big),$$

したがって

$$v^2 = \frac{2ga\sin^3\theta}{3(3 - \sin^2\theta)},$$

これが 2 番目の結果である。

抗力

> **考えてみよう**　ボウルは加速している。PO に沿った質点の運動方程式はどのように書けばよいだろうか？

二つの方程式を用いる。まずボウルについて考える。質点は O から P に向かう向きの力 R でボウルを押し、その水平成分は右向きに $R\cos\theta$ である。よってボウルの加速

度 A は次を満たす。

$$2mA = R\cos\theta. \tag{1}$$

次に質点については、ボウルの座標系で考える。この座標系では、質点は O を中心とする半径 a の円周上を速さ $a\dot{\theta}$ で運動し、R と mg に加えて、左向きの慣性力（fictitious force）mA を受ける。O に向かう方向（向き $(-\cos\theta, \sin\theta)$）に分解すると、重力の寄与は $-mg\sin\theta$、慣性力の寄与は $+mA\cos\theta$ であるから、

$$R - mg\sin\theta + mA\cos\theta = ma\dot{\theta}^2. \tag{2}$$

（同じことであるが、地面に固定した座標系では、質点の加速度はボウルの加速度 A と、ボウルに対する円運動の加速度との和である。これを PO に沿って分解しても同じ式が得られる。）

最初の二つの結果から、

$$a\dot{\theta}^2 = \frac{9v^2}{a\sin^2\theta} = \frac{6g\sin\theta}{3-\sin^2\theta}.$$

(1) から得られる $mA = \frac{1}{2}R\cos\theta$ を (2) に代入し、R を含む項をまとめると：

$$R\left(1 + \tfrac{1}{2}\cos^2\theta\right) = mg\sin\theta + \frac{6mg\sin\theta}{3-\sin^2\theta} = mg\sin\theta\,\frac{9-\sin^2\theta}{3-\sin^2\theta}.$$

$1 + \frac{1}{2}\cos^2\theta = \frac{1}{2}(3-\sin^2\theta)$ であるから、

$$\boxed{R = \frac{2mg\sin\theta\,(9-\sin^2\theta)}{(3-\sin^2\theta)^2} = \frac{2mg\sin\theta\,(8+\cos^2\theta)}{(2+\cos^2\theta)^2}.}$$

検算

- 最初は $\theta = 0$ であり、$R = 0$ となる。これは当然である。質点は縁で静止しており、それをボウルに押しつけるものは何もない。
- 最下点 $\theta = \frac{1}{2}\pi$ では、(1) よりボウルの加速度はゼロであり、$a\dot{\theta}^2 = 3g$、$R - mg = 3mg$ となるので $R = 4mg$ である。これは公式から得られる値 $2mg\cdot 8/2^2$ と一致する。
- ボウルが固定されている（無限に重い）場合、よく知られた結果は $v_P^2 = 2ga\sin\theta$ および $R = 3mg\sin\theta$ である。ボウルが反動で動くと、縁の近くでは R は小さくなる（ボウルが P から遠ざかるため、θ が小さいとき $3mg\sin\theta$ ではなく約 $2mg\sin\theta$ となる）が、最下点では大きくなる（$3mg$ ではなく $4mg$）。
- 完全な運動方程式を数値的に解いてみると（$m = 1.3$、$a = 0.7$、$g = 9.81$ として）、縁から最下点までの全区間で、$3v = a\dot{\theta}\sin\theta$、$v^2$ の公式、R の公式がいずれも 10^{-7} 以内の誤差で再現された。

よくある間違い

- ボウルが固定されているかのように $R - mg\sin\theta = ma\dot{\theta}^2$ と書いてしまう。ボウルは加速するので、質点の加速度はボウルに対する円運動の加速度だけではない。
- 質点の運動エネルギーとして $\frac{1}{2}m(a\dot{\theta})^2$ を用いてしまう。$a\dot{\theta}$ はボウルに対する速さであって、テーブルに対する速さではない。

STEP のその先へ

これは 2 自由度（two degrees of freedom）の系であり、最も整った体系的な扱い方はラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）である。運動エネルギーと位置エネルギーを X と θ で表すと、ラグランジアンに X が現れない（それは「循環座標」（cyclic coordinate）である）ため、運動量保存則が自然に導かれる。ここで用いた慣性力は、非慣性系（non-inertial frame）における力学の最も簡単な場合であり、大学 1 年次の講義では、これを遠心力（centrifugal force）やコリオリ（Coriolis）力を伴う回転座標系へと拡張する。Kleppner and Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、非慣性系と、相互作用する物体の系の両方を非常によく扱っている。

解答例

STEP III 1992、第 13 問

力学 ・ 固定軸まわりの回転

STEP III 1992、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/92-s3-q13

鍵となる考え方

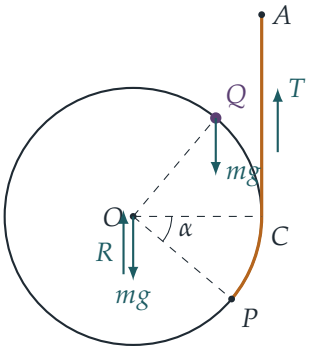
軸は固定されているので、円板と質点は一つの剛体（rigid body）をなし、その座標は回転角ただ一つである。エネルギー保存則（conservation of energy）（弾性・重力・運動の各エネルギー）から各位置での角速度（angular speed）が得られ、「P が C に達する」とは、途中で運動エネルギーが決して 0 にならないということにすぎない。C での角速度が求まれば、軸に働く抗力（reaction）は、系全体に対するニュートン（Newton）の第 2 法則を重心（centre of mass）に適用して得られる。

解答

モデルと幾何

Q を質点とみなし、糸は軽いとする。円板の縁はなめらかであるとするので、張力（tension）T は糸全体で等しく、糸が縁に及ぼす垂直抗力（normal contact force）は O を通る。したがって、糸の O のまわりのモーメント（moment）は、P で接線方向に引く張力によるものだけであり、それは $2bT$ である。（張力が、糸が縁を離れる点 C において AC に沿って鉛直上向きに、O から距離 $2b$ のところに働くとみなしても、まったく同じモーメントが得られる。）

$\alpha = \angle POC$ とし、P は OC の下側にあるとする。放した瞬間は $\alpha = \frac{\pi}{2}$ であり、P が C に達するのは $\alpha = 0$ のときである。$\angle POQ = 90^\circ$ であるから、OQ は OC の上方に角 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ をなし、Q は O より高さ $2b\cos\alpha$ のところにある。特に、Q は初め（C にあって）O と同じ高さにあり、P が C に達したときには O の真上にある。



糸の全長は $AC + \text{弧}CP = \pi b + 2b\alpha$ であり、自然長（natural length）は πb であるから、伸び（extension）は $2b\alpha$ である。フックの法則（Hooke's law）により

$$T = \frac{kmg \cdot 2b\alpha}{\pi b} = \frac{2kmg\alpha}{\pi},$$

であり、蓄えられる弾性エネルギー（elastic energy）は

$$E(\alpha) = \frac{kmg\,(2b\alpha)^2}{2\pi b} = \frac{2kmgb\,\alpha^2}{\pi}.$$

である。

軸のまわりの慣性モーメント（moment of inertia）は、円板のものと縁にある Q のものとの和である：

$$I = \tfrac{1}{2}m(2b)^2 + m(2b)^2 = 6mb^2.$$

P は C に達する

円板が回転して P が C に向かって上がる（すなわち α が減少する）につれて、糸は縮んで弾性エネルギーを放出し、一方で Q は上昇する。軸は固定されていてなめらかであるから、エネルギーは保存される。系は $\alpha = \frac{\pi}{2}$ で静止状態から動き始め、そこでは Q の O に対する高さは 0、$E = \frac{1}{2}\pi kmgb$ であるから、

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}I\dot{\alpha}^2 &= E\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - E(\alpha) - mg \cdot 2b\cos\alpha \\ &= \frac{2kmgb}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2\right) - 2mgb\cos\alpha.\end{aligned}$$

円板は実際に正しい向きに回り始める。放した瞬間、糸は半径 $2b$ のところを $T = kmg$ で引き、一方 Q の重さは水平距離 $2b$ のところで逆向きに働くので、正味のモーメントは $2(k-1)mgb > 0$ となる。$k > \frac{4}{\pi} > 1$ だからである。

P が C に達するのは、$[0, \frac{\pi}{2})$ のすべての α で運動エネルギーが正のままであるとき、すなわち

$$\frac{k}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2\right) > \cos\alpha \qquad \text{ただし} 0 \le \alpha < \tfrac{\pi}{2}.$$

が成り立つときである。$k > \frac{4}{\pi}$ かつ $\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2 > 0$ であるから、左辺は

$$\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2\right) = 1 - \frac{4\alpha^2}{\pi^2},$$

より大きい。よって、$[0, \frac{\pi}{2}]$ 上で $g(\alpha) = 1 - \dfrac{4\alpha^2}{\pi^2} - \cos\alpha \geq 0$ を示せば十分である。

考えてみよう 区間全体で 2 次式と $\cos\alpha$ を比較するにはどうすればよいか？

第 2 次導関数（second derivative）を調べる。$g(0) = g(\frac{\pi}{2}) = 0$、$g'(\alpha) = -\frac{8\alpha}{\pi^2} + \sin\alpha$ より $g'(0) = 0$ であり、$g''(\alpha) = \cos\alpha - \frac{8}{\pi^2}$ である。$\frac{8}{\pi^2} < 1$ であり、$\cos\alpha$ は 1 から 0 まで減少するので、$[0, \alpha_0)$ で $g'' > 0$、$(\alpha_0, \frac{\pi}{2}]$ で $g'' < 0$ となる α_0 がただ一つ存在する。

- $[0, \alpha_0]$ 上では、g' は $g'(0) = 0$ から増加するので $g' \geq 0$ であり、$g \geq g(0) = 0$ である。
- $[\alpha_0, \frac{\pi}{2}]$ 上では、g は上に凸（concave）であるから、そのグラフは端点での値 $g(\alpha_0) \geq 0$ と $g(\frac{\pi}{2}) = 0$ を結ぶ弦（chord）より上にある。したがって、ここでも $g \geq 0$ である。

よって全体で $g \geq 0$ であり、狭義の不等式 $k > \frac{4}{\pi}$ により、$0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ で運動エネルギーは真に正となる。円板は $\alpha = 0$ に至る前に静止することはなく、P は C に達する。特に、C において（$\alpha = 0$ とおいて）

$$3mb^2\dot{\alpha}^2 = \frac{\pi k m g b}{2} - 2mgb \quad \Longrightarrow \quad \omega^2 = \frac{(\pi k - 4)g}{6b},$$

である。ここで ω は P が C にあるときの角速度である。（条件 $k > \frac{4}{\pi}$ がどこから来るのかがここでわかる。これはちょうど $\omega^2 > 0$ となるための条件である。）

軸に働く抗力

P が C にあるとき、二つのことが同時に起こる。

- 糸は自然長になっている（$AC = \pi b$ であり、弧の部分はなくなる）ので、$T = 0$ である。
- Q は O の鉛直上方にあるので、その重さは O のまわりにモーメントをもたない。

したがってこの瞬間、軸のまわりのモーメントはなく、角加速度（angular acceleration）は 0 である。円板の中心 O は固定されており、Q は角加速度 0 で半径 $2b$ の円周上を動くので、その加速度は純粋に向心的（centripetal）である。すなわち、大きさ $2b\omega^2$ で Q から O に向かう向き、つまり鉛直下向きである。

考えてみよう 抗力を求める方程式にはどの力が入るか？

系全体（円板と Q）に対して、鉛直方向にニュートンの第 2 法則を適用する。外力は、下向きの二つの重さ $2mg$、軸に働く上向きの抗力 R、そしてこの瞬間には 0 である糸の張力である。Q と円板の間の内力は打ち消し合う。加速度をもつのは Q だけであるから

$$R - 2mg = m\left(-2b\omega^2\right),$$

であり、したがって

$$R = 2mg - 2mb\cdot\frac{(\pi k-4)g}{6b} = 2mg - \frac{mg(\pi k-4)}{3} = \frac{mg(10-\pi k)}{3},$$

となり、求める結果が得られた。（この瞬間、Q は水平方向の加速度をもたないので、抗力の水平成分は 0 である。）

検算

- 境界の場合 $k = \frac{4}{\pi}$ では、系は $\omega = 0$ でかろうじて C までじわじわと到達し、公式は静止時の値 $R = 2mg$ を与える。これは整合的である。
- 運動方程式 $6mb^2\ddot{\psi} = 2bT - 2mgb\cos\psi$（ただし $\psi = \frac{\pi}{2} - \alpha$）をコンピュータで数値積分する。$m = g = b = 1$、$k = 2$ とすると、$\omega^2 = 0.38053$ で C に達し、これは $(2\pi - 4)/6$ と一致し、$R = 1.23894 = (10 - 2\pi)/3$ となる。$k = 1.29, 1.5, 3$ に対しても小数第 6 位まで一致する。
- $k > \frac{10}{\pi}$ ならば公式は $R < 0$ を与える。このとき軸は下向きに引かなければならない。Q が頂点を十分速く回るため、向心力として系の重さ以上の力が必要になるからである。

よくある間違い

- 伸びを常に πb としてしまう。実際には P が C に達するにつれて伸びは 0 まで縮み、それゆえそこで張力が消えるのである。
- 円板自身の慣性モーメント $\frac{1}{2}m(2b)^2$ を忘れ、Q のものだけを用いてしまう。
- C での運動エネルギーが正であることだけを示してしまう。「P が C に達する」には、そこに至るまでずっと運動エネルギーが正であり続ける必要がある。

STEP のその先へ

最後のステップは、「外力の総和は全質量と重心の加速度の積に等しい」という法則の剛体版であり、支点における抗力はその古典的な応用例である。大学 1 年次の剛体力

学の講義では、これを角運動量（angular momentum）の方程式 $\mathrm{d}\mathbf{L}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{\tau}$ とあわせて展開する。不等式 $\cos\alpha \leq 1 - 4\alpha^2/\pi^2$ はジョルダンの不等式（Jordan's inequality）$\sin x \geq 2x/\pi$ の親戚であり、ここでは標準的な凸性（convexity）の議論によって証明した。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、固定軸のまわりの回転と支点の抗力を非常にわかりやすく扱っている。

解答例

STEP III 1992、第 14 問

力学 ・ ほどける糸の力学

> **STEP III 1992、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q14

鍵となる考え方

すべては一つの角 θ によって決まる。糸の自由な部分は Q において円板に接しており、その長さは円板からほどけた糸の弧の長さに等しいので、P の位置は θ を用いて容易に表せる（描かれる曲線は円の**伸開線**（involute）である）。微分すると、P の速度（velocity）は糸に垂直であることがわかる。したがって糸の張力（tension）は仕事をせず、運動方向に働くのは摩擦（friction）だけである。そこで PQ に沿った方向と PQ に垂直な方向に分解すると、問題はきれいに二つに分かれる。

解答

P の位置

P を水平な台の上の質点とみなし、抵抗は与えられた摩擦のみとし、糸は軽く伸び縮みしないものとする。重力と垂直抗力は打ち消し合うので、水平方向の力は PQ に沿った張力 T と摩擦だけである。

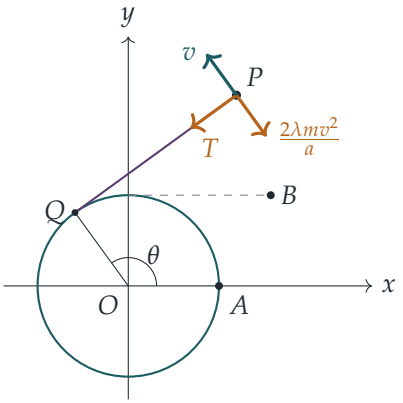
$A = (a, 0)$ を x 軸上にとると、接点は $Q = (a\cos\theta, a\sin\theta)$ である。P が A にあったとき、糸はすべて円板に巻きついていた。糸は伸び縮みしないので、自由な部分 QP の長さはほどけた弧 AQ の長さ、すなわち $a\theta$ に等しい。糸は Q で接しているので QP は OQ に垂直であり、その向きは単位ベクトル（unit vector）$(\sin\theta, -\cos\theta)$ の向きである（$\theta = \frac{\pi}{2}$ のときこれは $(1, 0)$ であり、図のように円板の最上点から B の方を向く）。よって

$$\overrightarrow{OP} = a(\cos\theta, \sin\theta) + a\theta(\sin\theta, -\cos\theta),$$

すなわち

$$x = a\cos\theta + a\theta\sin\theta, \qquad y = a\sin\theta - a\theta\cos\theta.$$

前者が求める x 座標である。B では自由な糸は OA に平行で、円板の最上点で接しているので、そこでは $\theta = \frac{\pi}{2}$ であり、$B = (\frac{\pi a}{2}, a)$ となる。



速度と加速度

OQ 方向の単位ベクトルを $\mathbf{e} = (\cos\theta, \sin\theta)$、$P$ から Q へ向かう単位ベクトル（上の糸の向きの逆）を $\mathbf{f} = (-\sin\theta, \cos\theta)$ とおく。$\dot{\mathbf{e}} = \dot\theta\,\mathbf{f}$、$\dot{\mathbf{f}} = -\dot\theta\,\mathbf{e}$ であることに注意する。

x と y を微分すると

$$\dot x = (-a\sin\theta + a\sin\theta + a\theta\cos\theta)\,\dot\theta = a\theta\dot\theta\cos\theta,$$
$$\dot y = (a\cos\theta - a\cos\theta + a\theta\sin\theta)\,\dot\theta = a\theta\dot\theta\sin\theta,$$

となるので、速度は $a\theta\dot\theta\,\mathbf{e}$ である。これは OQ に平行であり、したがって糸に垂直である。積の微分法則（product rule）を用いてもう一度微分すると

$$\ddot{\mathbf{r}} = a\left(\dot\theta^2 + \theta\ddot\theta\right)\mathbf{e} + a\theta\dot\theta\,\dot{\mathbf{e}} = a\left(\dot\theta^2 + \theta\ddot\theta\right)\mathbf{e} + a\theta\dot\theta^2\,\mathbf{f}.$$

よって加速度（acceleration）は、PQ に沿った（Q へ向かう）成分が $a\theta\dot\theta^2$、PQ に垂直な（$\mathbf{e}$ の向きの）成分が $a\dot\theta^2 + a\theta\ddot\theta$ であり、題意が示された。

運動方程式

B では $\theta = \frac{\pi}{2}$ であり、速度は $a\cdot\frac{\pi}{2}\,\dot\theta\,(0,1)$ である。OA に垂直に、OA から遠ざかる向きに打ち出すということは、速度が y 軸の正の向きに大きさ V であることを意味するので

$$\dot\theta = \frac{2V}{\pi a} > 0 \quad \text{（初期において）}$$

である。$\dot\theta > 0$ である間は、速さは $v = a\theta\dot\theta$ で運動の向きは $+\mathbf{e}$ であるから、大きさ $2\lambda m v^2/a = 2\lambda m a\theta^2\dot\theta^2$ の摩擦が $-\mathbf{e}$ の向きに働く。張力は $\mathbf{f}$ に沿って働き、$\mathbf{e}$ 成分をもたない。

> **考えてみよう** θ だけの方程式を得るには、二つの加速度成分のどちらを使えばよいか。

垂直成分である。張力 T は未知であり、それは PQ に沿った成分にしか現れない。PQ に垂直な方向にニュートンの第 2 法則（Newton's second law）を適用すると

$$m\left(a\dot\theta^2 + a\theta\ddot\theta\right) = -2\lambda m a\theta^2\dot\theta^2.$$

$ma\theta\dot\theta$ で割ると（$\theta > 0$ かつ $\dot\theta > 0$ なので割ってよい）

$$\frac{\ddot\theta}{\dot\theta} = -\left(\frac{1}{\theta} + 2\lambda\theta\right)\dot\theta,$$

となり、これが求める結果である。

$\dot\theta$ を求める

左辺は $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\dot\theta$ であり、合成関数の微分法則（chain rule）により右辺は $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\ln\theta - \lambda\theta^2\right)$ である。よって

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln\left(\theta\dot\theta\right) + \lambda\theta^2\right) = 0, \qquad \text{よって} \qquad \theta\dot\theta\,\mathrm{e}^{\lambda\theta^2} = \text{定数}.$$

B においてこの定数は $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2V}{\pi a}\,\mathrm{e}^{\lambda\pi^2/4} = \frac{V}{a}\,\mathrm{e}^{\lambda\pi^2/4}$ である。したがって

$$\dot\theta = \frac{V}{a\theta}\,\exp\!\left(\lambda\left(\frac{\pi^2}{4} - \theta^2\right)\right).$$

これはすべての θ に対して正であるから、$\dot\theta$ が 0 になることはなく、上で用いた仮定 $\dot\theta > 0$ は常に成り立つ。（答えには θ、λ、a に加えて V も必ず含まれる。）同値な言い方をすれば、速さは $v = a\theta\dot\theta = V\mathrm{e}^{\lambda(\pi^2/4 - \theta^2)}$ である。

$\theta = \pi$ における張力

PQ に沿って働く力は Q へ向かう T だけなので、$T = ma\theta\dot\theta^2$ である。$\theta = \pi$ のとき

$$\dot\theta^2 = \frac{V^2}{a^2\pi^2}\,\mathrm{e}^{2\lambda(\pi^2/4 - \pi^2)} = \frac{V^2}{a^2\pi^2}\,\mathrm{e}^{-3\lambda\pi^2/2},$$

であるから

$$T = ma\pi\cdot\frac{V^2}{a^2\pi^2}\,\mathrm{e}^{-3\lambda\pi^2/2} = \frac{mV^2}{\pi a}\,\mathrm{e}^{-3\lambda\pi^2/2}.$$

検算

- 自由な糸 PQ の長さは $a\theta$ であり、これは伸開線の曲率半径（radius of curvature）である。よって Q は曲率中心（centre of curvature）であり、Q へ向かう成分は $v^2/(a\theta) = a\theta\dot{\theta}^2$ となるはずである。実際そうなっている。
- $\lambda = 0$（摩擦なし）のとき速さは V のまま一定である。張力は運動に垂直で仕事をしないので、当然そうなるべきである。$\theta = \frac{\pi}{2}$ では $T = mV^2/(\frac{\pi}{2}a)$ であり、これは B における糸の長さ $r = \frac{\pi a}{2}$ に対する mv^2/r である。
- 数値的に、$a = 1.3$、$m = 0.7$、$V = 2.1$、$\lambda = 0.25$ として θ の方程式をルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で数値積分したところ、$\dot{\theta}$ の公式と 10^{-14} の精度で一致した。(x, y) の差分（finite-difference）による加速度は両成分および摩擦と一致し、$\theta = \pi$ において $T \approx 0.018667$ を与え、公式と合致した。

よくある間違い

- 初期値として $\theta = 0$ を用いること。質点は A ではなく、$\theta = \frac{\pi}{2}$ である B から出発する。
- $\dot{\theta}$ を求めるのに PQ に沿って分解すること。その方程式には未知の張力が含まれ、しかも摩擦はその方向の成分をもたない。
- 摩擦が速度に逆向きであり、その速度は糸に沿った方向ではなく OQ に沿った方向であることを忘れること。

STEP のその先へ

P の軌跡は円の伸開線である。これは糸巻きからほどける張った糸の端が描く曲線であり、ほとんどの歯車の歯の形に用いられている曲線でもある。ここで用いた事実（速度が糸に垂直であること、および糸の長さが曲率半径であること）は、曲線の微分幾何学（differential geometry）における縮閉線（evolute）と伸開線の関係の特別な場合である。力学的には、接線成分と法線成分による自然座標（intrinsic components）を用いて、既知の力と未知の拘束力（constraint force）を分離するよい例である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、極座標（polar coordinates）や自然座標による運動、および拘束運動をこの考え方で扱っている。

解答例

STEP III 1992、第 15 問

確率・統計 ・ 幾何的確率

STEP III 1992、問 15

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/92-s3-q15

鍵となる考え方

ヤギの位置は牧草地全体で一様（uniform）に分布するので、どの確率も単に面積を a^2 で割ったものになる。したがって問題全体は、正方形のうち角 O からの距離が r 以内にある部分の面積を求めることに帰着する。r が a を超えると四分円が正方形からはみ出すが、内側に残る面積を求めるには、それを 2 つの直角三角形と 1 つの扇形（sector）に切り分けるのがすっきりした方法である。確率密度は微分によって得られ、つながれたヤギの問題も、領域が異なるだけで同じ考え方で解ける。

解答

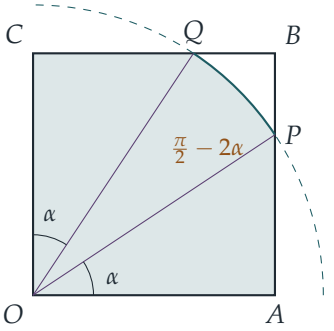
O を原点に置き、OA を x 軸方向、OC を y 軸方向にとると、牧草地は $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$ となる。$F(r) = \mathrm{P}(R < r)$ とおく。これは牧草地のうち $x^2 + y^2 < r^2$ を満たす部分の面積を a^2 で割ったものである。

R の分布

$0 < r \le a$ のとき。 O を中心とする半径 r の四分円板は牧草地の内部に完全に含まれるので、

$$F(r) = \frac{\frac{1}{4}\pi r^2}{a^2} = \frac{\pi r^2}{4a^2}.$$

$a \le r \le a\sqrt{2}$ のとき。 このとき弧は辺 AB（直線 $x = a$）と $P = \left(a, \sqrt{r^2 - a^2}\right)$ で交わり、辺 CB（直線 $y = a$）と $Q = \left(\sqrt{r^2 - a^2}, a\right)$ で交わる。$\alpha = \cos^{-1}(a/r)$ とおくと、これは角 AOP である（$\cos \angle AOP = a/r$ だからである）。対称性より、角 COQ も α である。



影をつけた領域（牧草地のうち O からの距離が r 以内の部分）は 3 つの部分に分かれる。

- 三角形 OAP。A で直角となり、直角をはさむ 2 辺は a と $\sqrt{r^2 - a^2}$ なので、面積は $\frac{1}{2}a\sqrt{r^2 - a^2}$ である。
- 三角形 OCQ。これは前者と合同で、面積も等しい。
- 半径 r、中心角 $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$ の扇形 OPQ。面積は $\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \frac{\pi r^2}{4} - r^2\alpha$ である。

これらを足して a^2 で割ると、

$$\begin{aligned} F(r) &= \frac{a\sqrt{r^2 - a^2}}{a^2} + \frac{\pi r^2}{4a^2} - \frac{r^2}{a^2}\alpha \\ &= \left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi r^2}{4a^2} - \frac{r^2}{a^2}\cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right), \end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。（$r \geq a\sqrt{2}$ のときは牧草地全体が O から距離 r 以内にあるので、$F(r) = 1$ である。実際、この式は $r = a\sqrt{2}$ で $1 + \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 1$ を与え、期待どおりである。）

中央値

$r = a$ では $F(a) = \pi/4 \approx 0.785 > \frac{1}{2}$ なので、中央値（median）m は $0 < m < a$ の範囲にあり、そこでは簡単な式が成り立つ。

$$\frac{\pi m^2}{4a^2} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad m = a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0.798a.$$

確率密度関数

確率密度関数（probability density function）は $f(r) = F'(r)$ である。$0 < r < a$ では $f(r) = \dfrac{\pi r}{2a^2}$ となる。

$a < r < a\sqrt{2}$ では $\cos^{-1}(a/r)$ の導関数が必要である。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-a^2/r^2}}\cdot\left(-\frac{a}{r^2}\right) = \frac{a}{r\sqrt{r^2-a^2}}.$$

そこで F の各項を微分すると（最後の項には積の微分法（product rule）を用いる）、

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{r}{a\sqrt{r^2-a^2}} + \frac{\pi r}{2a^2} - \frac{2r}{a^2}\cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{r^2}{a^2}\cdot\frac{a}{r\sqrt{r^2-a^2}} \\ &= \frac{r}{a^2}\left(\frac{\pi}{2} - 2\cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)\right), \end{aligned}$$

となる。最初の項と最後の項が打ち消し合うからである。よって

$$f(r) = \begin{cases} \dfrac{\pi r}{2a^2}, & 0 < r \le a, \\ \dfrac{r}{a^2}\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\cos^{-1}\left(\dfrac{a}{r}\right)\right), & a < r \le a\sqrt{2}, \\ 0, & \text{それ以外.} \end{cases}$$

これは幾何的にも納得がいく。$f(r)\,\mathrm{d}r$ は（牧草地内にある半径 r の円の弧の長さ）$\times\,\mathrm{d}r/a^2$ であり、その弧が張る中心角は $r \le a$ のとき $\frac{\pi}{2}$、$r > a$ のとき $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$ である。2 つの式は $r = a$ で一致し（どちらも $\pi/(2a)$ を与える）、f は $\alpha = \pi/4$ となる $r = a\sqrt{2}$ で 0 まで下がる。

つながれたヤギ

つながれると、ヤギが到達できるのは牧草地のうち $R \le a$ を満たす点、すなわち O を中心とする半径 a の四分円板だけであり、その面積は $\frac{1}{4}\pi a^2$ である。ヤギの位置は依然として一様分布に従うが、今度はこの四分円板上での一様分布である。これはちょうど、もとのモデルを事象 $R \le a$ で条件づけたもの、すなわち条件付き確率（conditional probability）の設定にほかならない。

考えてみよう　柵 OC からの距離を表すのはどの座標か？

OC を y 軸方向にとっているので、OC からの距離は x である。したがって、四分円板のうち $x > a/2$ を満たす部分の面積が必要である。

$$\begin{aligned} \int_{a/2}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_{a/2}^{a} \\ &= \frac{\pi a^2}{4} - \left(\frac{\sqrt{3}\,a^2}{8} + \frac{\pi a^2}{12}\right) = \frac{\pi a^2}{6} - \frac{\sqrt{3}\,a^2}{8}. \end{aligned}$$

（幾何的には、これは中心角 $\pi/3$ の扇形から、2 辺が $a/2$ と $\sqrt{3}a/2$ の三角形を除いたものである。直線 $x = a/2$ は OA から角 $\pi/3$ の位置で弧と交わるからである。）四分

円板の面積 $\frac{1}{4}\pi a^2$ で割ると、

$$\mathrm{P}\left(\text{柵からの距離}OC > \tfrac{a}{2} \,\middle|\, R \le a\right) = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0.391.$$

検算

- 連続性：F の 2 つの式はどちらも $r = a$ で $\pi/4$ を与え、また $F(a\sqrt{2}) = 1$ である。
- 単位正方形内の 4×10^5 個の一様な点を用いたモンテカルロ・シミュレーション（Monte Carlo simulation）は、$r = 0.3, 0.7, 1.1, 1.25, 1.4$ において $F(r)$ と小数第 3 位程度まで一致した。標本中央値は 0.7986 で、$\sqrt{2/\pi} = 0.7979$ と比べられ、条件付きの割合は 0.3914 で、$\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi} = 0.3910$ と比べられる。
- 確率密度を $[0, a\sqrt{2}]$ 上で数値積分すると 1 になり、いくつかの点で F の数値微分とも一致する。
- つながれた場合の答えは $\frac{1}{2}$ より小さく、これは期待どおりである。四分円板は OC から遠いところほど細くなっているからである。

よくある間違い

- 中央値を求める際に、$r > a$ では F に別の式が必要であることを忘れる。まず $F(a) > \frac{1}{2}$ を確かめておくとよい。それにより中央値が簡単な範囲にあることがわかる。
- 扇形の中心角として $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$ ではなく $\frac{\pi}{2} - \alpha$ を用いてしまう。角の部分は両側に 1 つずつ、計 2 つ切り取られる。
- つながれた場合の問題で a^2 で割ってしまう。条件付き確率では四分円板の面積 $\frac{1}{4}\pi a^2$ で割る。

STEP のその先へ

ここで R は、ある領域内で一様に選ばれた点の関数であり、その分布は $R < r$ となる領域の大きさを測ることで得られた。これは確率変数の関数の分布を求める一般的な方法であり、密度の式 $f(r) = (\text{弧の長さ})/a^2$ は、領域を等位集合に切り分けるという「余面積（coarea）」の考え方への最初の入り口である。同じ幾何的な推論は、ビュフォン（Buffon）の針の問題や、正方形内の 2 つのランダムな点の間の距離といった問題の背後にもある。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）、お

よび Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）は、いずれも連続確率変数に対するこの幾何的なアプローチを展開している。

解答例

STEP III 1992、第 16 問

確率・統計 ・ ポアソン間引き

> **STEP III 1992、問 16**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q16

鍵となる考え方

誤植の総数を固定すれば、各誤植は私が見つけるか見逃すかのどちらかである独立な試行となるので、小問 (i) は二項分布（binomial distribution）の確率である。小問 (ii) は条件付き確率（conditional probability）であり、その分母、すなわちちょうど m 個の誤植を見つける確率を求めるには、見逃した誤植の個数としてありうるすべての値について和をとる必要がある。この和は指数関数の級数（exponential series）になることがわかり、そのおかげですべてがきれいなポアソン分布（Poisson distribution）の形にまとまるのである。

解答

以下では $q = 1 - p$ と書く。その号に含まれる誤植の総数を N、私が見つける誤植の個数を S、見逃す誤植の個数を $U = N - S$ とする。問題文より

$$\mathrm{P}(N = k) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

である。

小問 (i)

$N = m + n$ のもとで、$m + n$ 個の誤植はそれぞれ他と独立に確率 p で見つけられる。したがって、$N = m + n$ という条件のもとで、見つける誤植の個数は二項分布 $\mathrm{B}(m + n, p)$ に従う。見つける m 個と見逃す n 個の特定の選び方 1 つの確率は $p^m q^n$ で

あり、そのような選び方は $\binom{m+n}{m}$ 通りあるので、

$$\mathrm{P}(S=m \mid N=m+n)=\binom{m+n}{m}p^m(1-p)^n.$$

小問 (ii)

求めたいのは $\mathrm{P}(U=n \mid S=m)$ である。事象 $\{S=m,\, U=n\}$ は $\{N=m+n,\, S=m\}$ と同じであるから、小問 (i) より

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(S=m,\, U=n) &= \mathrm{P}(N=m+n)\,\mathrm{P}(S=m \mid N=m+n)\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{m+n}}{(m+n)!}\cdot\frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,p^m q^n\\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{(\lambda p)^m}{m!}\cdot\frac{(\lambda q)^n}{n!}.\end{aligned}$$

因子 $(m+n)!$ が約分されて消えることが、この問題の要である。

考えてみよう　誤植が何個あったかわからないとき、$\mathrm{P}(S=m)$ はどのように求めればよいだろうか。

ちょうど m 個を見つけたとき、見逃した個数は $0,1,2,\ldots$ のどれでもありうり、これらの場合は互いに排反である。そこで、同時確率を U のすべての値 j について足し合わせる：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(S=m) &= \sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{(\lambda p)^m}{m!}\cdot\frac{(\lambda q)^j}{j!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{(\lambda p)^m}{m!}\,\mathrm{e}^{\lambda q}\\ &= \frac{(\lambda p)^m}{m!}\,\mathrm{e}^{-\lambda p},\end{aligned}$$

ここで $\sum_{j\ge 0} x^j/j! = \mathrm{e}^x$ と $-\lambda+\lambda q=-\lambda p$ を用いた。（したがって、私が見つける誤植の個数そのものも平均 λp のポアソン分布に従う。）これは正であるから、これで割ってよい。よって

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(U=n \mid S=m) &= \frac{\mathrm{P}(S=m,\, U=n)}{\mathrm{P}(S=m)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,\dfrac{(\lambda p)^m}{m!}\cdot\dfrac{(\lambda q)^n}{n!}}{\mathrm{e}^{-\lambda p}\,\dfrac{(\lambda p)^m}{m!}}\\ &= \frac{(\lambda q)^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-\lambda+\lambda p} = \frac{(1-p)^n\lambda^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-(1-p)\lambda},\end{aligned}$$

となり、示された。

この答えは m にまったく依存しない。すなわち、私が誤植をいくつ見つけたかを知っても、いくつ見逃したかについては何の情報も得られない。見逃した個数は、m が何であっても平均 $(1-p)\lambda$ のポアソン分布に従うのである。

検算

- 最終的な答えを $n = 0, 1, 2, \ldots$ について足し合わせると $e^{(1-p)\lambda} e^{-(1-p)\lambda} = 1$ となり、条件付き分布として当然満たすべき性質を満たしている。
- $p \to 1$ のときは私がすべてを見つけることになり、答えは $n = 0$ のとき 1 に、$n \geq 1$ のとき 0 に収束する。妥当である。
- $\lambda = 3$、$p = 0.6$、$m = 2$、$n = 1$ のとき、公式は $1.2\,e^{-1.2} \approx 0.3614$ を与える。400 000 部の新聞をシミュレーションし、ちょうど 2 個の誤植が見つかったものだけを残したところ、0.360 という値が得られた。

よくある間違い

- 小問 (i) で二項係数 $\binom{m+n}{m}$ を書き忘れること。見つけた m 個の誤植は、$m + n$ 個のうちのどの m 個でもありうる。
- 見逃した誤植の個数としてありうるすべての値について和をとらずに、$P(S = m)$ を $P(N = m)$ や小問 (i) の答えとしてしまうこと。

STEP のその先へ

これはポアソン分布の**間引き**（thinning、または分割 splitting）と呼ばれる性質である。ポアソン (λ) 分布に従う個数の対象それぞれを確率 p で残すとき、残った個数と捨てた個数は、それぞれ平均 λp と $\lambda(1-p)$ をもつ**独立な**ポアソン確率変数となる。今回求めた同時確率は、まさにこの 2 つの部分の積に分解されている。間引きはポアソン過程（Poisson process）の理論における重要な道具であり、ランダムな事象の 1 つの流れを独立な部分的な流れに分割することを可能にする。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）はこの性質を扱っており、それを 1 行で証明する母関数（generating function）の方法もあわせて解説している。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

1992 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.