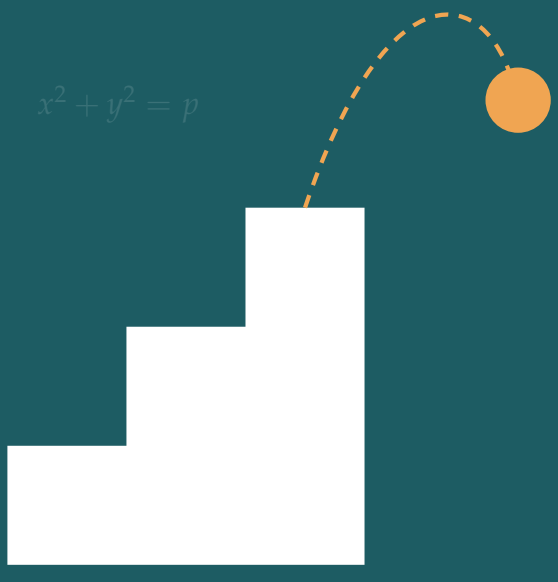
STEP 対策 · 大学の数学

# Beyond STEP

## STEP I, II と III

1991 年解答例



KEITH McNULTY

# Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

## 1991 年解答例

Keith McNulty

**Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問**

**1991 年解答例**

1991 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 48 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

# 目次

## STEP I


Q1 三角関数の恒等式 純粋数学 . . . 3
Q2 変化率 純粋数学 . . . 6
Q3 複素等比級数 純粋数学 . . . 10
Q4 図形における最適化 純粋数学 . . . 14
Q5 正則なベクトルの組 純粋数学 . . . 18
Q6 停留点と広義積分 純粋数学 . . . 23
Q7 変数分離形の微分方程式 純粋数学 . . . 27
Q8 置換積分 純粋数学 . . . 31
Q9 不等式と調和級数 純粋数学 . . . 35
Q10 垂れ下がる鎖のつり合い 力学 . . . 39
Q11 滑車と力積 力学 . . . 43
Q12 摩擦のあるつり合い 力学 . . . 48
Q13 運動量保存則 力学 . . . 53
Q14 三角形の数え上げ 確率・統計 . . . 57
Q15 正規近似 確率・統計 . . . 62
Q16 条件付き確率 確率・統計 . . . 66


## STEP II


Q1 2 次式と判別式 純粋数学 . . . 70
Q2 双曲線の漸近線 純粋数学 . . . 74
Q3 対称な連立方程式 純粋数学 . . . 79
Q4 余弦の和 純粋数学 . . . 82
Q5 積分の漸化式 純粋数学 . . . 87
Q6 積分の評価 純粋数学 . . . 91

Q7 関数方程式 純粋数学 95
Q8 非線形1階常微分方程式 純粋数学 100
Q9 行列群 純粋数学 104
Q10 空間の直線と平面 純粋数学 108
Q11 発射点からの放物体の距離 力学 112
Q12 弾性体の強制振動 力学 116
Q13 剛体の回転 力学 120
Q14 相対速度と追跡 力学 125
Q15 期待値の線形性 確率・統計 129
Q16 二項分布の正規近似 確率・統計 133

## STEP III

Q1 級数と展開 純粋数学 137
Q2 図形における複素数 純粋数学 141
Q3 区分的に定義された関数と逆関数 純粋数学 146
Q4 空間の直線と平面 純粋数学 151
Q5 極方程式の曲線と常微分方程式 純粋数学 155
Q6 双曲型の一次変換 純粋数学 159
Q7 対称性を利用した積分 純粋数学 164
Q8 積分の漸化式と和 純粋数学 168
Q9 楕円の弧長 純粋数学 172
Q10 ニュートンの恒等式 純粋数学 176
Q11 剛体のつり合い 力学 180
Q12 曲線上の運動 力学 184
Q13 放物体と天井の衝突 力学 188
Q14 ばねによる円運動 力学 193
Q15 標本中の組の数え上げ 確率・統計 198
Q16 同時分布と周辺分布 確率・統計 202

解答例

# STEP I 1991、第 1 問

純粋数学 ・ 三角関数の恒等式

> **STEP I 1991、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q1

## 鍵となる考え方

角に関する条件を使えば、角の一つを消去できる。$\psi = \frac{1}{2}\pi - (\theta + \phi)$ であるから $\sin\psi = \cos(\theta + \phi)$ となり、恒等式（identity）は二つの自由な角についての主張になる。そのあと、積 $\sin\theta\sin\phi$ と $\cos(\theta + \phi)$ がまとまって $\cos(\theta - \phi)$ となり、積 $\cos(\theta + \phi)\cos(\theta - \phi)$ は非常にすっきりした形をもつ。後半では、角を特別に選ぶことで $\psi$ が $\theta$ の**半分**に等しくなる。$\frac{1}{10}\pi$ についての情報はここから得られるのである。

## 解答

### 恒等式

$\theta + \phi + \psi = \frac{1}{2}\pi$ であるから、

$$\sin\psi = \sin(\tfrac{1}{2}\pi - (\theta + \phi)) = \cos(\theta + \phi).$$

よって、恒等式の左辺は

$$L = \sin^2\theta + \sin^2\phi + \cos(\theta + \phi)[\cos(\theta + \phi) + 2\sin\theta\sin\phi].$$

括弧の中では $\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$ であるから、

$$\cos(\theta + \phi) + 2\sin\theta\sin\phi = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi = \cos(\theta - \phi).$$

次に積 $\cos(\theta+\phi)\cos(\theta-\phi)$ が必要である。加法定理（compound-angle formulae）を展開すると、

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\phi)\cos(\theta-\phi) &= (\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi)(\cos\theta\cos\phi+\sin\theta\sin\phi)\\ &= \cos^2\theta\cos^2\phi-\sin^2\theta\sin^2\phi\\ &= \cos^2\theta(1-\sin^2\phi)-(1-\cos^2\theta)\sin^2\phi\\ &= \cos^2\theta-\sin^2\phi.\end{aligned}$$

したがって

$$L=\sin^2\theta+\sin^2\phi+\cos^2\theta-\sin^2\phi=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,$$

となり、求める恒等式が得られる。

### $\sin\frac{1}{10}\pi$ についての三次方程式

$\theta=\phi=\frac{1}{5}\pi$ とする。このとき $\psi=\frac{1}{2}\pi-\frac{2}{5}\pi=\frac{1}{10}\pi$ である。

$$x=\sin\tfrac{1}{10}\pi,\qquad s=\sin\tfrac{1}{5}\pi.$$

とおく。恒等式から

$$2s^2+x^2+2s^2x=1,\qquad \text{すなわち}\qquad 2s^2(1+x)=1-x^2. \tag{$*$}$$

> **考えてみよう** $\sin\psi=\cos 2\theta=1-2s^2$ を使って $s$ を消去するだけではなぜいけないのか？

この関係式は $\psi=\frac{1}{2}\pi-2\theta$ を満たす**すべての** $\theta$ について成り立つので、$s^2=\frac{1}{2}(1-x)$ を $(*)$ に代入すると $(1-x)(1+x)=1-x^2$ が得られる。これは正しいが、何の情報も含まない。$\frac{1}{5}\pi$ に固有の性質を使わなければならないのである。その特別な事実とは $\frac{1}{5}\pi=2\cdot\frac{1}{10}\pi$、つまり $\theta=2\psi$ であることで、2 倍角の公式（double-angle formula）によって $s$ と $x$ が結びつく：

$$s=\sin 2\psi=2\sin\psi\cos\psi,\qquad \text{よって}\qquad s^2=4x^2(1-x^2).$$

これを $(*)$ に代入すると、

$$8x^2(1-x^2)(1+x)=1-x^2.$$

$0<\frac{1}{10}\pi<\frac{1}{2}\pi$ であるから $0<x<1$ であり、$1-x^2\neq 0$ なので両辺をこれで割ってよい：

$$8x^2(1+x)=1,\qquad \text{すなわち}\qquad 8x^3+8x^2-1=0.$$

よって、$\sin\frac{1}{10}\pi$ は与えられた三次方程式（cubic）を満たす。これが示すべきことであった。

## 検算

恒等式は $\theta = \frac{1}{2}\pi$、$\phi = \psi = 0$ で確かめられる。このとき左辺は $1+0+0+0 = 1$ である。$\theta = \phi = \psi = \frac{1}{6}\pi$ のときは $3\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{8} = 1$ となる。

三次方程式については、$\sin\frac{1}{10}\pi = \sin 18^\circ \approx 0.309017$ であり、そこで $8x^3 + 8x^2 - 1$ を計算すると丸め誤差の範囲で 0 になる。実際、この三次式は $(2x+1)(4x^2+2x-1)$ と因数分解（factorise）でき、その根は $-\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{5})$ である。そして $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \approx 0.309017$ は $\sin 18^\circ$ のよく知られた厳密な値である。

## よくある間違い

- $\sin\psi = \cos 2\theta$ だけを使って $s$ を消去し、恒等式 $0 = 0$ を得てしまう。上の囲みを参照せよ。
- $1 - x^2$ が 0 でない理由を述べずに、それで割ってしまう。ここでは $x = \sin\frac{1}{10}\pi$ は 0 と 1 の間に（端点を含まずに）ある。

## STEP のその先へ

三次方程式の残りの二つの根も偶然ではない。$-\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right)$ であり、$\frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}) = -\sin\frac{3}{10}\pi$ である。このような方程式は、$\pi$ の有理数倍（rational multiples）における sin と cos の値の間の代数的な関係を記述しており、それは 1 の冪根（roots of unity）を通して理解するのが最もよい。$\cos\frac{1}{5}\pi$ は 1 の 5 乗根、すなわち $z^5 = 1$ の解と密接に結びついている。定規とコンパス（ruler and compasses）による正五角形（regular pentagon）の作図が $\sqrt{5}$ に帰着するのはこのためである。Needham の *Visual Complex Analysis*（複素解析を視覚的に理解する本）は、これらの考え方を幾何学的に見ることのできる美しい一冊である。

解答例

# STEP I 1991、第 2 問

純粋数学 ・ 変化率

> **STEP I 1991、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q2

## 鍵となる考え方

融解の法則を半径で書き直す。球では $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ であり、表面積もまた $4\pi r^2$ であるから、「体積が表面積に比例する速さで失われる」とは、単に半径が一定の速さで縮むということにほかならない。2 つの雪玉は比例定数を共有するので、どの時間についても両方の半径は同じだけ減少する。こうしてすべてが 1 変数、すなわち各半径の縮んだ量 $x$ の関数となる。

## 解答

### 半径は同じ一定の速さで縮む

雪玉の半径を $r$、体積を $V = \frac{4}{3}\pi r^3$、表面積を $S = 4\pi r^2$ とする。融解の法則は、両方の雪玉に共通の定数 $k > 0$ を用いて $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -kS$ と表される。合成関数の微分法（chain rule）により、

$$4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -k \cdot 4\pi r^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -k,$$

となる。ここで $4\pi r^2$ で割ったが、雪玉が存在している間（$r > 0$）はこれは正当である。よって時間 $t$ の後、各半径は同じ量 $x = kt$ だけ減少している。すなわち頭の半径は $2R - x$、胴の半径は $3R - x$ であり、これは $0 \le x \le 2R$ で成り立つ（$x = 2R$ で頭が消える）。

### 高さが半分のときの体積

頭は胴の上に載っているので、フロスティの高さは 2 つの直径の和である：

$$h = 2(2R - x) + 2(3R - x) = 10R - 4x.$$

最初は $h = 10R$ であるから、高さが半分とは $10R - 4x = 5R$、すなわち $x = \frac{5}{4}R$ のことである。これは $2R$ より小さいので頭はまだ残っており、このとき半径は $\frac{3}{4}R$ と $\frac{7}{4}R$ である。比をとると因子 $\frac{4}{3}\pi$ は約分されるので、

$$\frac{V}{V_0} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{7}{4}\right)^3}{2^3 + 3^3} = \frac{(27 + 343)/64}{35} = \frac{370}{2240} = \frac{37}{224}.$$

したがって高さが半分になったとき、フロスティには元の体積のわずか $\frac{37}{224} \approx 0.165$ しか残っていない。体積は長さの 3 乗に比例して変わるのである。

### $\mathrm{d}V/\mathrm{d}S$ の最大値

$a = 2R - x$、$b = 3R - x$ とおく。$0 \le x < 2R$ において

$$V = \tfrac{4}{3}\pi(a^3 + b^3), \qquad S = 4\pi(a^2 + b^2),$$

であり、$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} = -1$ であるから

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -4\pi(a^2 + b^2), \qquad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -8\pi(a + b).$$

> **考えてみよう** $V$ と $S$ はどちらも時間の（あるいは $x$ の）関数である。では $\mathrm{d}V/\mathrm{d}S$ とは何を意味するのか？

$x$ が増加すると $S$ は狭義単調減少する（$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} < 0$ だからである）ので、$V$ を $S$ の関数とみなすことができる。合成関数の微分法により $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \Big/ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}$ であるから、

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S} = \frac{a^2 + b^2}{2(a + b)}.$$

ここで、決して変化しない $b - a = R$ を利用する。$s = a + b = 5R - 2x$ とおく。すると $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}\left((a + b)^2 + (b - a)^2\right) = \frac{1}{2}(s^2 + R^2)$ であるから、

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S} = \frac{s^2 + R^2}{4s} = \frac{s}{4} + \frac{R^2}{4s} = f(s), \text{ とおく.}$$

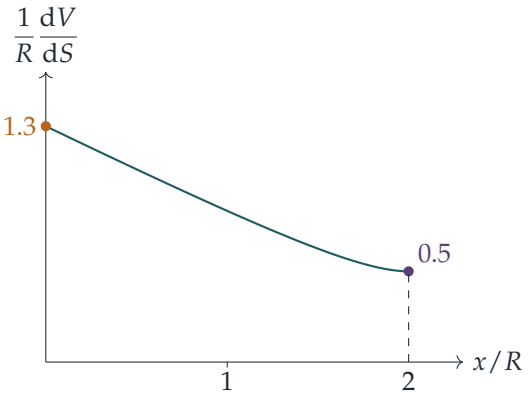
$x$ が 0 から $2R$ まで動くとき、$s$ は $5R$ から $R$ まで減少する。ここで

$$f'(s) = \frac{1}{4} - \frac{R^2}{4s^2} = \frac{s^2 - R^2}{4s^2} > 0 \quad \text{ただし} s > R,$$

であるから、$f$ は $[R,5R]$ で増加し、その最大値をとるのは $s=5R$、すなわち一番最初（$x=0$）である：

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S}\right)_{\max}=\frac{5R}{4}+\frac{R}{20}=\frac{13R}{10}.$$

（直接計算すると $\frac{4R^2+9R^2}{2\cdot 5R}=\frac{13}{10}R$ である。）その後この値は着実に減少し、頭が消える瞬間にちょうど $f(R)=\frac{1}{2}R$ となる。




## 検算

- 各雪玉について $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-kS$ を（$R=k=1$ として）逐次的に数値シミュレーションすると、$t\approx 1.25$ で高さが半分になり、そのときの体積比は 0.16518 であって、$\frac{37}{224}=0.165178\ldots$ と一致する。
- シミュレーションで得た $V$ と $S$ の差分商は、全区間で $\frac{a^2+b^2}{2(a+b)}$ と一致し、$1.3R$ を超えることはない。
- 単位：$\mathrm{d}V/\mathrm{d}S$ は体積を面積で割ったものなので長さであり、$\frac{13}{10}R$ も確かに長さである。

## よくある間違い

- 高さを直径の和ではなく半径の和としてしまう。（この問題ではたまたま $x$ は変わらないが、誤りである。）
- $\mathrm{d}V/\mathrm{d}S$ の代わりに $V/S$ を計算してしまう。1つの球では $V/S=r/3$ であるが、$\mathrm{d}V/\mathrm{d}S=r/2$ である。
- 停留点（stationary point）を探してしまう。$f$ の極値をとる点は区間の端点 $s=R$ にあるので、最大値は区間のもう一方の端でとられる。

## STEP のその先へ

この問題の核心は、「表面積に比例する速さ」という法則が半径については一定の速さに変わるという点であり、幾何学によって微分方程式（differential equation）が自明なものになりうることの最初の例である。後半は媒介変数表示の微分、すなわち曲線 $(S(t), V(t))$ に沿った $\mathrm{d}V/\mathrm{d}S$ であり、閉区間上で最大値を求める際の注意点、つまり最大値が停留点ではなく端点でとられることがあるという点を扱っている。そのような最大値がなぜ必ず存在するのかについては、Bartle と Sherbert による *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）が説明している。微分方程式によるモデル化については、Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）を読んでみるとよい。

解答例

# STEP I 1991、第 3 問

純粋数学 • 複素等比級数

> **STEP I 1991、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q3

## 鍵となる考え方

複素数平面（Argand diagram）において、$re^{i\phi}$ を掛けることは、ベクトルを $r$ 倍に拡大し、反時計回りに $\phi$ だけ回転させることである。経路の各線分は、直前の線分を同じ倍率で拡大し同じ角だけ回転させたものなので、各線分を表すベクトルは直前のものに一定の複素数を掛けたものになる。したがって線分は等比数列（geometric progression）をなし、それらを足し合わせればすべての頂点の位置が得られる。

## 解答

### 隣り合う線分の比

$P_n$ から $P_{n+1}$ へのベクトルは $z_{n+1} - z_n$ で表され、$P_{n-1}$ から $P_n$ へのベクトルは $z_n - z_{n-1}$ で表される。2 つの複素数の商では、絶対値（modulus）は割り算になり、偏角（argument）は引き算になる：

$$\left|\frac{z_{n+1} - z_n}{z_n - z_{n-1}}\right| = \frac{P_nP_{n+1}}{P_{n-1}P_n} = d, \qquad \arg\frac{z_{n+1} - z_n}{z_n - z_{n-1}} = \arg(z_{n+1} - z_n) - \arg(z_n - z_{n-1}) = \theta,$$

なぜなら、後の線分の長さは前の線分の $d$ 倍であり、ある有向線分の向きから次の有向線分の向きへ反時計回りに測った角は $\theta$ だからである。（偏角は $2\pi$ の整数倍の差を除いてしか定まらないが、これは複素数そのものには影響しない。）よって、すべての $n \geq 2$ に対して

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_n - z_{n-1}} = d\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = d(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

### $z_{n+1}$ を表す式

$w = de^{i\theta}$ とおく。最初の線分は $z_2 - z_1 = 1$ であり、以後の各線分は直前の線分の $w$ 倍であるから、数学的帰納法（induction）により

$$z_{k+1} - z_k = w^{k-1} \qquad (k \geq 1).$$

これらを $k = 1, 2, \ldots, n$ について足し合わせると、左辺は隣り合う項が打ち消し合って（telescoping）$z_{n+1} - z_1 = z_{n+1}$ となる：

$$z_{n+1} = 1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = \frac{w^n - 1}{w - 1} = \frac{d^n e^{in\theta} - 1}{de^{i\theta} - 1}.$$

この等比級数（geometric series）の和の公式を使うには $w \neq 1$ が必要であり、$|w| = d$ であるから、ここで $d \neq 1$ という条件が使われる。

### $\theta = \frac{1}{3}\pi$、$d = 2$ の場合

このとき $w = 2e^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3}$ であるから、分母はとても簡単になり、$w - 1 = i\sqrt{3}$ である。$\frac{1}{i} = -i$ より

$$z_{n+1} = \frac{w^n - 1}{i\sqrt{3}} = -\frac{i}{\sqrt{3}}\left(2^n \cos\tfrac{n\pi}{3} - 1 + i\,2^n \sin\tfrac{n\pi}{3}\right),$$

したがって

$$\operatorname{Re} z_{n+1} = \frac{2^n \sin\frac{n\pi}{3}}{\sqrt{3}}, \qquad \operatorname{Im} z_{n+1} = \frac{1 - 2^n \cos\frac{n\pi}{3}}{\sqrt{3}}.$$

**考えてみよう** $\operatorname{Im} z_{n+1}$ の符号から、経路が実軸と交わることがどのようにわかるだろうか？

経路はつながっている。すなわち、線分が切れ目なく連なったものである。ある頂点が実軸より真に下にあり、それより後の頂点が実軸より真に上にある（あるいはその逆である）ならば、その間の経路は実軸と交わらなければならない。そこで、実軸の反対側にある頂点の組を、繰り返し見つけていけばよい。

$\cos\frac{n\pi}{3}$ の値は周期 6 で繰り返す。$k \geq 1$ を任意の整数とする。

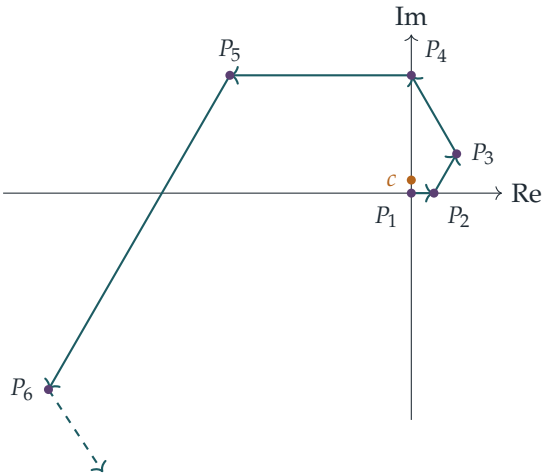
- $n = 6k$ のとき $\cos\frac{n\pi}{3} = \cos 2k\pi = 1$ であり、$2^{6k} > 1$ より $\operatorname{Im} z_{6k+1} = \dfrac{1 - 2^{6k}}{\sqrt{3}} < 0$ である。
- $n = 6k + 3$ のとき $\cos\frac{n\pi}{3} = \cos(2k\pi + \pi) = -1$ であり、$\operatorname{Im} z_{6k+4} = \dfrac{1 + 2^{6k+3}}{\sqrt{3}} > 0$ である。

よって、すべての $k \geq 1$ に対して、$P_{6k+1}$ は実軸より下にあり、$P_{6k+4}$ は実軸より上にある。したがって、各 $k = 1, 2, 3, \ldots$ について、$P_{6k+1}$ から $P_{6k+4}$ までの経路は実軸を下から上へ横切る。これらは $k$ ごとに異なる経路の部分であるから、経路は実軸と無限回交わる。（同じ議論により、$P_{6k+4}$ と $P_{6k+7}$ の間では上から下へも横切る。）以上で証明が完了する。

実は、頂点は 3 つずつまとまって回っている。$\operatorname{Im} z_1, \operatorname{Im} z_2, \ldots$ の符号の並びは $0, 0, +, +, +, -, -, -, +, +, +, \ldots$ である。これには見事な幾何学的理由がある。

$$z_{n+1} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} w^n,$$

と書くと、$P_{n+1}$ は定点 $c = \mathrm{i}/\sqrt{3}$ から距離 $2^n/\sqrt{3}$ の位置にあり、1 ステップごとに $c$ のまわりを $60°$ ずつ回転することがわかる。頂点は $c$ のまわりの、1 ステップごとに大きさが 2 倍になる螺旋の上にあり、$c$ は実軸のすぐ上にあるので、螺旋は実軸を繰り返し横切り続けるのである。




図には $P_1, \ldots, P_6$ を示した。次の頂点は $P_7 = -21\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ であり、はるか下方にある。経路は $P_5P_6$ 上で初めて実軸と交わり、その後は実軸より下にとどまって、$P_8 = 64 - 21\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ から $P_9 = 128 + 43\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ への $P_8P_9$ 上で下から上へ横切る。

## 検算

- 図形から直接求めると $z_3 = 1 + w = 2 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$ であり、公式からは $\operatorname{Im} z_3 = (1 - 4\cos\frac{2\pi}{3})/\sqrt{3} = 3/\sqrt{3} = \sqrt{3}$ が得られる。同様に、$w^2 = -2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ と $w^3 = -8$ を加えると $z_5 = -8 + 3\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ となり、$n = 4$ とした公式からは $\operatorname{Re} z_5 = 16\sin\frac{4\pi}{3}/\sqrt{3} = -8$、$\operatorname{Im} z_5 = (1 + 8)/\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ が得られる。

- $d = 1$ ならば頂点は正多角形の上に並び、経路は閉じる。等比級数の公式が使えなくなるのはまさにこの場合であり、そうなるべきである。
- 長さと回転角（$d$、$\theta$ と出発点は無作為に選んだ）から経路を数値的に構成し、比 $d\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$、$z_{n+1}$ の閉じた形の式、および $\theta = \frac{1}{3}\pi$、$d = 2$ の場合の上記の符号の並びを確認した。$z_1, \ldots, z_{41}$ の間で $\operatorname{Im} z$ の符号は 13 回変わる。

## よくある間違い

- 比を $\frac{1}{d}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ と書いてしまうこと。分子にあるのは**後の**線分であり、長さが $d$ 倍で $+\theta$ だけ回転しているのはそちらである。
- 和で項数を 1 つずれて数えてしまうこと。$P_1$ から $P_{n+1}$ までには $n$ 本の線分があるので、級数は $w^{n-1}$ までである。
- 実軸上にある頂点 1 つから交わると主張してしまうこと。実軸の**真に**反対側にある頂点が必要である（ここでは $z_1$ と $z_2$ が実軸上にあるので、$k \geq 1$ から始める）。

## STEP のその先へ

規則 $z_{n+1} - z_n = w(z_n - z_{n-1})$ は線形漸化式（linear recurrence）であり、各頂点を次の頂点に移す写像 $z \mapsto c + w(z - c)$ は、その不動点（fixed point）$c$ を中心とする**回転相似**（spiral similarity）、すなわち回転と拡大を組み合わせたものである。このような写像はメビウス変換（Möbius transformation）の最も簡単な例であり、これを繰り返し適用すると、貝殻に見られる等角螺旋（対数螺旋）が現れる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、複素数の掛け算をこのように幾何学的に捉える考え方を見事に展開している。

解答例

# STEP I 1991、第 4 問

純粋数学 ・ 図形における最適化

> **STEP I 1991、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q4

## 鍵となる考え方

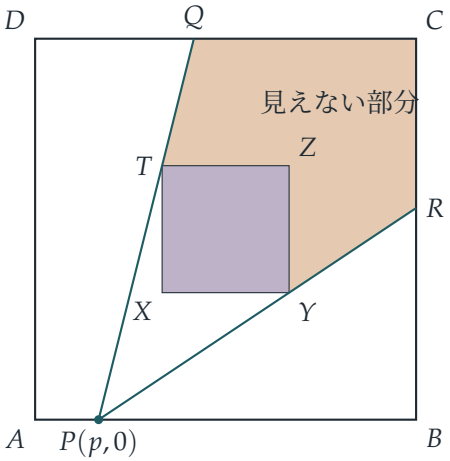
見張りには、塔の陰に隠れた点を除いて中庭のすべての点が見える。そこでヒントに従い、見張りの位置 $P=(p,0)$ から見た塔の「影」（shadow）の面積を求める。影は、$P$ から出て塔をかすめる 2 本の半直線で囲まれる。これらの半直線が壁と交わる点を求め、影の面積を多角形の面積として計算すれば、問題は $[0,4]$ 上の 1 変数関数の最大化に帰着する。端点（endpoint）の確認を忘れないこと。

## 解答

### 設定

中庭は大きな正方形から塔を除いたもので、その面積は $144-16=128$ である。見張りの位置を $0\le p\le 4$ として $P=(p,0)$ とし、見張りから**見えない**部分の面積を $H(p)$ とする。見える部分の面積は $128-H(p)$ であるから、見える面積が最小になるのは $H$ が最大のときであり、逆もまた成り立つ。

$p\le 4$ であるから、$P$ は直線 $y=4$ より下にあり、直線 $x=4$ の左側（または直線上）にある。したがって $P$ からは塔の下面 $XY$ と左面 $XT$ が見え、塔の輪郭は角 $T(4,8)$ と $Y(8,4)$ によって決まる。角 $Z(8,8)$ は角 $TPY$ の内部にあり、隠れている。隠れた領域は、半直線 $PT$ と $PY$ の間で、経路 $T\to Z\to Y$ の向こう側にある。




### かすめる半直線と壁の交点

$P$ から $T(4,8)$ を通る半直線は、横に $4-p$ 進むごとに 8 上がるので、$y=12$ に達するのは

$$x = p + \tfrac{12}{8}(4-p) = 6 - \tfrac{p}{2}, \qquad \text{よって} Q = \left(6 - \tfrac{p}{2},\, 12\right).$$

のときである。$4 \le 6 - \frac{p}{2} \le 6$ であるから、この点は確かに上の壁 $DC$ 上にある。

$P$ から $Y(8,4)$ を通る半直線は、横に $8-p$ 進むごとに 4 上がるので、$x=12$ に達するのは

$$y = \frac{4(12-p)}{8-p}, \qquad \text{よって} R = \left(12,\, \frac{4(12-p)}{8-p}\right).$$

のときである。この値は $p$ が 0 から 4 まで動くとき 6 から 8 まで増加するので、$R$ は右の壁 $BC$ 上にある。

### 見えない部分の面積

見えない領域は多角形 $TQCRYZ$ である。その面積は

$$H = [PRCQ] - [PYZT],$$

として求めるのが最も簡単である。ここで $[\cdots]$ は面積を表す。すなわち、2 本の半直線に挟まれ壁まで達するくさび形全体から、くさび形のうち塔の奥の面より手前にある部分（塔の手前の見える地面と塔そのもの）を除いたものである。

$P(p,0)$、$R(12,q)$、$C(12,12)$、$Q(r,12)$ に対して靴ひも公式（shoelace formula）を用い

る。ただし $q = \frac{4(12-p)}{8-p}$、$r = 6 - \frac{p}{2}$ である。

$$[PRCQ] = \tfrac{1}{2}\big(pq + (144 - 12q) + (144 - 12r) - 12p\big)$$
$$= \tfrac{1}{2}\big(288 - 12p - 12r - (12-p)q\big) = 108 - 3p - \frac{2(12-p)^2}{8-p},$$

ここで $12r = 72 - 6p$ を用いた。同様に、$P(p,0)$、$Y(8,4)$、$Z(8,8)$、$T(4,8)$ に対して

$$[PYZT] = \tfrac{1}{2}\big(4p + 32 + 32 - 8p\big) = 32 - 2p.$$

したがって

$$H(p) = 76 - p - \frac{2(12-p)^2}{8-p}.$$

**考えてみよう** 最適化しやすくなるような置換（substitution）はあるだろうか？

扱いにくい分母を見ると、$u = 8 - p$ とおくのがよさそうである。すると $u$ は $[4,8]$ を動き、$12 - p = u + 4$ となる。このとき

$$H = 76 - (8-u) - \frac{2(u+4)^2}{u} = 68 + u - \frac{2u^2 + 16u + 32}{u} = 52 - \left(u + \frac{32}{u}\right).$$

### 小問 (i)：見える面積の最小値

$H$ をできるだけ大きくしたいので、$u + \frac{32}{u}$ をできるだけ小さくすればよい。相加相乗平均の不等式（AM–GM inequality）により、$u > 0$ のとき

$$u + \frac{32}{u} \;\geq\; 2\sqrt{32} = 8\sqrt{2},$$

であり、等号が成り立つのはちょうど $u = \frac{32}{u}$、すなわち $u = 4\sqrt{2}$ のときである。これは $[4,8]$ に含まれる（$4\sqrt{2} \approx 5.66$）ので許される。$p = 8 - u$ であるから、見える面積が最小になるのは見張りが次の位置にいるときである。

$$\boxed{p = 8 - 4\sqrt{2} \;\approx 2.34 \text{ 単位、起点は} A}$$

このとき見えない面積は $52 - 8\sqrt{2}$ であるから、見える面積は $76 + 8\sqrt{2} \approx 87.3$ 平方単位である。

### 小問 (ii)：見える面積の最大値

今度は $H$ をできるだけ小さくしたいので、$[4,8]$ 上で $f(u) = u + \frac{32}{u}$ をできるだけ大きくすればよい。$f'(u) = 1 - \frac{32}{u^2}$ であるから、$f$ は $[4, 4\sqrt{2}]$ で減少し、$[4\sqrt{2}, 8]$ で増加する。よって最大値は端点でとる。

$$f(4) = 4 + 8 = 12, \qquad f(8) = 8 + 4 = 12,$$

であり、両者は等しい。したがって $H$ は $u = 8$ と $u = 4$ の両方、すなわち $p = 0$ と $p = 4$ で最小値 $52 - 12 = 40$ をとる。見える面積が最大値 $128 - 40 = 88$ 平方単位となるのは、見張りが

$$\boxed{\text{点} A\ (p = 0) \text{ または点} E\ (p = 4)}$$

にいるときであり、$AE$ 上の他の点ではそうならない。

## 検算

- $p = 0$ のときは影を手計算で求められる。半直線は壁と $(6, 12)$ および $(12, 6)$ で交わり、見えない六角形の面積は 40 となって $H(0)$ と一致する。
- $p = 4$ のとき、$T$ を通る半直線は直線 $x = 4$ に沿ってまっすぐ上に伸び、やはり $H(4) = 40$ となる。両端点での値が等しいのはよい兆候であり、公式が偏っていないことを示している。
- $600 \times 600$ の格子上で、$P$ からの視線が塔を通過するかどうかを調べて見えない点を数えた。$p = 8 - 4\sqrt{2}$ では 40.687 となり、$52 - 8\sqrt{2} = 40.686$ と比べてよく合う。$p = 1$ では 40.429 となり、$H(1) = \frac{283}{7} \approx 40.429$ と一致する。

## よくある間違い

- かすめる点として $T$ や $Y$ ではなく $Z$ を使ってしまう。左下から見ると、塔の輪郭は奥の角ではなく、2 つの角 $T$ と $Y$ によって決まる。
- 小問 (ii) で停留点（stationary point）にとどまってしまう。停留点で得られるのは見える面積の**最小値**であるから、最大値は端点から得なければならず、ここでは端点が 2 つある。

## STEP のその先へ

これは、計算幾何学（computational geometry）で研究される**可視性**（visibility）の問題の小さな例である（「美術館問題」（art gallery problem）は、多角形の部屋のすべての点を見張るのに何人の見張りが必要かを問うものである）。最適化の段階は、解析学（analysis）の基本的な事実を示している。すなわち、閉区間（closed interval）上の連続関数（continuous function）は最大値と最小値をとり、それは停留点か端点のいずれかで実現される。これが最大値・最小値の定理（extreme value theorem）であり、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）で丁寧に証明されている。

解答例

# STEP I 1991、第 5 問

純粋数学 • 正則なベクトルの組

> **STEP I 1991、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q5

## 鍵となる考え方

条件 (ii) はベクトル（vector）の和が $\mathbf{0}$ になることを述べている。ベクトルの等式を数の等式に変える最も手軽な方法は、ベクトルの一つとの内積（dot product）をとることであり、その値は条件 (i) によって計算できる。そこから先は、問題全体が数え上げの問題になる。いくつかの固定されたベクトルとの内積がすべて指定されたベクトルは、取りうる位置がごく限られる。したがって、集合に入るベクトルは少数しかありえないのである。

## 解答

**等式** $(n-1)\beta = -\alpha^2$

(ii) より $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ である。両辺と $\mathbf{a}_1$ との内積をとる。(i) より、項 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1$ は $\alpha^2$ であり、残りの $n-1$ 個の項 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_j$（$j \neq 1$）はいずれも $\beta$ であるから、

$$\alpha^2 + (n-1)\beta = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad (n-1)\beta = -\alpha^2,$$

となり、示すべき式が得られた。特に $\beta = -\alpha^2/(n-1) < 0$ である。

### 2 次元の場合

このとき $\alpha^2 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1$ であるから、各 $\mathbf{a}_i$ は単位ベクトル（unit vector）であり、

$$\beta = -\frac{1}{n-1}.$$

$i \geq 2$ に対して $\mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ とおく。条件 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_i = \beta$ は $x_i = \beta$ を意味し、さらに $|\mathbf{a}_i| = 1$ より $y_i = \pm\sqrt{1-\beta^2}$ でなければならない。よって、$\mathbf{a}_1$ 以外のベクトルはすべて

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \sqrt{1-\beta^2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \beta \\ -\sqrt{1-\beta^2} \end{pmatrix}.$$

のいずれかである。

**考えてみよう** 候補がわかると、$n$ はどのように制限されるか。

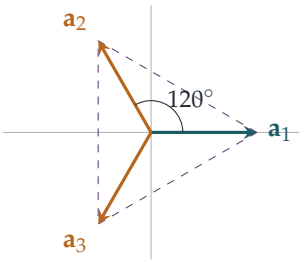
集合のベクトルは互いに異なるので、$\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ は $n-1$ 個の**相異なる**候補である。候補は高々 2 個しかないので $n-1 \leq 2$、すなわち $n \leq 3$ である。$n \geq 2$ であるから、$n = 2$ または $n = 3$ である。

**$n = 2$ の場合**。このとき $\beta = -1$ であるから、2 つの候補は一致し、$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる。これは条件を満たす。実際、$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = -1 = \beta$ かつ $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$ である。

**$n = 3$ の場合**。このとき $\beta = -\frac{1}{2}$、$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ であり、$\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は 2 つの異なる候補

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

でなければならない（順序はどちらでもよい）。確認すると、$\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} = \beta$ であり、3 つのベクトルの和は $\mathbf{0}$ である。これらは原点を中心とする正三角形（equilateral triangle）の頂点を指している。




（$\beta$ を決定する別の方法：$n \geq 3$ のとき $-1 < \beta < 0$ であるから、2 つの候補は確かに異なり、$\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ はその両方でなければならない。すると $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \beta^2 - (1-\beta^2) = 2\beta^2 - 1$ であり、これを $\beta$ に等しいとおくと $(2\beta+1)(\beta-1) = 0$ を得る。よって $\beta = -\frac{1}{2}$ であり、やはり $n = 3$ となる。）

### 3次元の場合

ここでも $\alpha = 1$、$\beta = -1/(n-1)$ である。$n = 2$ の場合は先ほどと同様である。すなわち $\beta = -1$ であり、$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = -1$ を満たす単位ベクトルは $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1 = (-1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ のみで、これは $x$-$y$ 平面上にある。よって $\{\mathbf{a}_1, -\mathbf{a}_1\}$ は答えの一つである。

次に $n \geq 3$ と仮定する。このとき $-\frac{1}{2} \leq \beta < 0$ である。$\mathbf{a}_2$ は $x$-$y$ 平面上にあるので、2次元の場合と同じ議論により

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ \varepsilon\sqrt{1-\beta^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

となり、$\beta \neq \pm 1$ であるから $y$ 成分 $y_2 = \varepsilon\sqrt{1-\beta^2}$ は 0 でない。

**?** **考えてみよう** $i \geq 3$ のとき、条件は $\mathbf{a}_i$ について何を述べているか。

$i \geq 3$ に対して $\mathbf{a}_i = (x_i, y_i, z_i)^{\mathrm{T}}$ とおく。すると

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_i = \beta &\implies x_i = \beta, \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_i = \beta &\implies \beta^2 + y_2 y_i = \beta \implies y_i = \frac{\beta(1-\beta)}{y_2}, \\ |\mathbf{a}_i| = 1 &\implies z_i^2 = 1 - \beta^2 - y_i^2. \end{aligned}$$

よって $x_i$ と $y_i$ はすべての $i \geq 3$ について同じであり、$z_i$ は2つの平方根のいずれかにしかなりえない。ベクトルは互いに異なるので、$\mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n$ は高々2個であり、$n - 2 \leq 2$、すなわち $n \leq 4$ である。

**$n = 3$ の場合**。(ii) より $\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$ であり、これは $x$-$y$ 平面上にある。よってこの集合は平面 $z = 0$ 内の正則な集合（regular set）であり、2次元の結果から

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

となる。ただし $\mathbf{a}_2$ は後の2つのどちらでもよい。（上の公式とも一致する。実際、$\beta = -\frac{1}{2}$ のとき $y_3 = -y_2$、$z_3^2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0$ となる。）

**$n = 4$ の場合**。このとき $\beta = -\frac{1}{3}$ であるから、$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$、$y_2 = \varepsilon\frac{2\sqrt{2}}{3}$ である。すると

$$y_i = \frac{(-\frac{1}{3})(\frac{4}{3})}{\varepsilon\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\varepsilon\frac{2}{3\sqrt{2}} = -\varepsilon\frac{\sqrt{2}}{3}, \qquad z_i^2 = 1 - \frac{1}{9} - \frac{2}{9} = \frac{2}{3}.$$

$\mathbf{a}_3 \neq \mathbf{a}_4$ であるから、これらは互いに逆符号の2つの値 $z = \pm\sqrt{2/3} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ をとらな

ければならない。これより

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \varepsilon\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\varepsilon\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \pm\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix},$$

を得る。$\varepsilon = \pm 1$ のそれぞれについて 1 つの集合が得られる。ここまでは $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$ が関わる条件しか用いていないので、残りの条件も確認しなければならない。まず、$\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_4 = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} - \frac{6}{9} = -\frac{1}{3} = \beta$ である。次に和について、$x$ 成分は $1 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 0$、$y$ 成分は $\varepsilon\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = 0$ となり、$z$ 成分は打ち消し合う。よって、どちらの集合も正則である。幾何学的には、4 つのベクトルは原点を中心とする正四面体（regular tetrahedron）の頂点を指している。

**まとめ**。正則な集合は、$\{\mathbf{a}_1, -\mathbf{a}_1\}$（$n = 2$）、$x$-$y$ 平面内の正三角形（$n = 3$）、および上で求めた 2 つの正四面体（$n = 4$、$\varepsilon = \pm 1$。$x$-$z$ 平面に関して互いに鏡像（mirror image）の関係にある）である。$n \geq 5$ となる正則な集合は存在しない。

## 検算

各集合において、ベクトルの和は 0 になり、どの 2 つのベクトルの内積も等しくなるはずである。正四面体の場合、任意の 2 つのベクトルのなす角は $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109.47^\circ$ であり、これはおなじみのメタンの結合角である。また等式から $(4-1)\left(-\frac{1}{3}\right) = -1 = -\alpha^2$ を得る。5 つの集合すべてを数値的に確認し（グラム行列と重心（centroid）を $10^{-12}$ の精度で）、さらに平面上での総当たり探索により、$n$ が 11 以下の範囲で正則な集合は $n = 2$ と $n = 3$ の場合にしか存在しないことを確かめた。

## よくある間違い

- ベクトルが**互いに異なる**ことを忘れる。この条件こそが、「候補は高々 2 個」という事実を $n$ の上界に変えるのである。
- $n = 4$ の場合に、$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ との内積から $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ を求めたあと、$\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_4 = \beta$ と重心の条件を確認しない。
- 3 次元の場合に、$n = 2$ の場合や符号 $\varepsilon$ の選び方を見落とす。

## STEP のその先へ

これらの集合は正単体（regular simplex）の頂点である。すなわち、$(n-1)$ 次元空間内の $n$ 個の点で、どの 2 点間の距離も等しいものである。内積を並べた行列 $G = (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j)$

（**グラム行列**（Gram matrix））は $(\alpha^2-\beta)I+\beta J$ である。ここで $J$ はすべての成分が1の行列である。この行列の階数（rank）は $n-1$ であり、グラム行列の階数は空間の次元を超えないから、$d$ 次元では直ちに $n \leq d+1$ が得られる。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、階数、内積、グラム行列を扱っている。

解答例

# STEP I 1991、第 6 問

純粋数学 ・ 停留点と広義積分

**STEP I 1991、問 6**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/91-s1-q6

この問題は、*Beyond STEP* の第 3.1 節「**誤りを見抜け**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch03/spot-the-flaw.html

## 鍵となる考え方

何ひとつ鵜呑みにしてはならない。すべての計算を自分でやり直し、「よって」「したがって」が現れるたびに、その推論が本当に成り立つかを問うことである。(i) では導関数（derivative）の計算が誤っており、たとえ正しい停留点（stationary point）が得られていたとしても、極大・極小（maxima, minima）や全体での上下界（global bounds）についての推論には欠陥がある。(ii) では原始関数（antiderivative）が誤っており、さらに深刻なことに、被積分関数（integrand）が区間の内部で発散するため、微積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）はそもそも適用できない。

## 解答

### 小問 (i)

**ステップ 1：停留点**。商の微分法（quotient rule）により、

$$\mathrm{g}'(x) = \frac{6x^2(x^4+4) - 4x^3(2x^3+3)}{(x^4+4)^2} = \frac{-2x^6 - 12x^3 + 24x^2}{(x^4+4)^2} = \frac{-2x^2\,(x^4+6x-12)}{(x^4+4)^2}.$$

したがって、$\mathrm{g}'(x) = 0$ となるのは $x = 0$ または $h(x) = 0$ のときであり、かつそのときに限る。ただし $h(x) = x^4 + 6x - 12$ である。ここで $h(1) = -5$、$h(-1) = -17$ であるから、$x = \pm 1$ は停留点では**ない**。実際、$\mathrm{g}'(1) = \frac{2}{5}$、$\mathrm{g}'(-1) = \frac{34}{25}$ である。主張は最初のステップで破綻している。

$h$ はいくつの根をもつか。$h'(x) = 4x^3 + 6$ が 0 になるのは $x_0 = -(3/2)^{1/3}$ のみであるから、$h$ は減少したのち増加し、したがって零点を横切るのは高々 2 回である。また $h(0) = -12 < 0$ であり、$x \to \pm\infty$ のとき $h(x) \to +\infty$ であるから、少なくとも 2 回は横切る。よって $h$ はちょうど 2 つの実根 $\beta < 0 < \alpha$ をもつ。$h(1) < 0 < h(2) = 16$ かつ $h(-3) = 51 > 0 > h(-2) = -8$ であるから、

$$1 < \alpha < 2, \qquad -3 < \beta < -2,$$

であり、数値的には $\alpha \approx 1.386$、$\beta \approx -2.247$ である。

**ステップ 2：停留値**。$g(0) = \frac{3}{4}$ は正しく、$g(1) = 1$ も正しいが、$g(-1) = \frac{1}{5}$ であって 1 ではない（そもそも $\pm 1$ のどちらの点も停留点ではない）。$h$ の根 $t$ においては $t^4 = 12 - 6t$ であるから、$t^3 = (12 - 6t)/t$ となり、

$$g(t) = \frac{2(12-6t)/t + 3}{16 - 6t} = \frac{24 - 9t}{t(16-6t)} = \frac{3(8-3t)}{2t(8-3t)} = \frac{3}{2t},$$

を得る。ここで $8 - 3t \neq 0$ で約分した（$t = \frac{8}{3}$ は $h$ の根ではないからである）。したがって停留値は $g(0) = \frac{3}{4}$、$g(\alpha) = \frac{3}{2\alpha} \approx 1.083$、$g(\beta) = \frac{3}{2\beta} \approx -0.668$ である。

> **考えてみよう** ある停留値が別の停留値より小さいならば、小さいほうは必ず極小なのだろうか。

**ステップ 3：停留点の種類**。そうではない。停留点における値を比較しても、その種類については何もわからない。両側での $g'$ の符号（あるいは $g''$）を調べなければならない。因数分解した形から、$x \neq 0$ のとき $x^2 > 0$ かつ $(x^4 + 4)^2 > 0$ であるので、$g'(x)$ の符号は $-h(x)$ の符号に一致する。$(\beta, \alpha)$ 上で $h < 0$、$[\beta, \alpha]$ の外で $h > 0$ であるから、

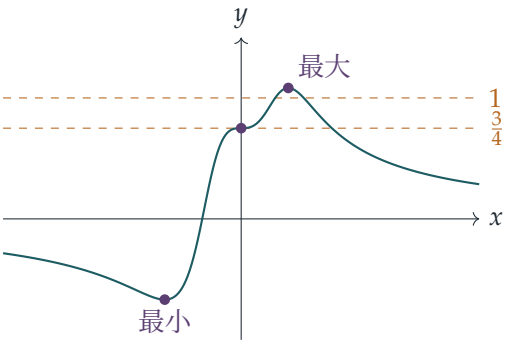
- $g$ は $x < \beta$ で減少、$(\beta, \alpha)$ で増加、$x > \alpha$ で減少する。
- $x = \beta$ は極小、$x = \alpha$ は極大である。
- $x = 0$ では両側で $g' > 0$ であるから、$x = 0$ は停留点である変曲点（stationary point of inflection）であって、極小ではない。

**ステップ 4：全体での上下界**。正しい極大・極小が得られたとしても、「すべての $x$ に対して」成り立つ評価を得るにはそれ以上のことが必要である。関数が別の場所、たとえば $x \to \pm\infty$ の方向で、極大値を超える可能性があるからである。ここでは $x \to \pm\infty$ のとき $g(x) \to 0$ であり（分母のほうが次数が高い）、$x^4 + 4 > 0$ であるから $g$ は至るところ連続である。これとステップ 3 の単調性（monotonicity）を合わせると、$g$ は 0 に近い値から $g(\beta)$ まで減少し、$g(\alpha)$ まで増加し、それから再び 0 に向かって減少する。よって正しい主張は

$$\frac{3}{2\beta} \leq g(x) \leq \frac{3}{2\alpha} \quad \text{任意の} x, \qquad \text{すなわちおよそ} -0.668 \leq g(x) \leq 1.083,$$

であり、上界・下界ともに実際に達成される。

**結論**。$\frac{3}{4} \le \mathrm{g}(x) \le 1$ という結論は両端とも誤りである。$\mathrm{g}(-1) = \frac{1}{5} < \frac{3}{4}$ であり（実際、$2x^3 + 3 < 0$ のときは常に $\mathrm{g}(x) < 0$ である）、また $\alpha < \frac{3}{2}$ であるから $\mathrm{g}(\alpha) > 1$ である（確認：$h(\frac{3}{2}) = \frac{81}{16} - 3 > 0$ より $\alpha < \frac{3}{2}$、したがって $\frac{3}{2\alpha} > 1$）。




**小問 (ii)**

**ステップ 1：不定積分**。与えられた答えは誤りである。$-3(1-x)^{-4}$ を微分すると $-12(1-x)^{-5}$ となり、$(1-x)^{-3}$ にはならない。指数は 1 だけ**上がる**べきであり、$-3$ から $-2$ になる。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x)^{-2} = -2(1-x)^{-3}\cdot(-1) = 2(1-x)^{-3},$$

であるから、正しい結果は

$$\int (1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(1-x)^{-2} + c, \qquad x \neq 1.$$

である。

> **考えてみよう** 正しい原始関数を使っても、$-1$ から 3 までで $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = 0$ となる。では、結局答えは 0 なのだろうか。

**ステップ 2：定積分**。そうではない。$[F(x)]_{-1}^{3}$ を計算してよいのは、区間全体で $F' = f$ が成り立ち、かつそこで $f$ が連続であるときに限られる。ここで $(1-x)^{-3}$ は $[-1,3]$ の内部にある $x = 1$ で定義されず、その近くで有界でもない。したがってこの積分は広義積分（improper integral）であり、2 つの部分それぞれの極限として定義しなければならない。

$$\int_{-1}^{1-\varepsilon} (1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon^{-2} - \tfrac{1}{4}\right) \to +\infty \quad (\varepsilon \to 0^{+}),$$

$$\int_{1+\delta}^{3} (1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4} - \delta^{-2}\right) \to -\infty \quad (\delta \to 0^{+}).$$

どちらの部分も発散（diverge）するので、この積分は存在しない。「$\infty - \infty$」には値がない。これは幾何学的にも納得がいく。被積分関数は $x < 1$ で正、$x > 1$ で負であり、それぞれの側が無限の面積を囲んでいるのである。

**結論**。どちらのステップも誤りであり、結論もそのままでは偽である。$\int_{-1}^{3}(1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x$ は定義されない。「0」という答えに一理あるのは、**対称な**すき間 $\varepsilon = \delta$ を切り取る場合だけである。このとき 2 つの部分はちょうど打ち消し合い、極限は 0 となる（コーシー（Cauchy）の主値（Cauchy principal value））。しかし、たとえば $\delta = 2\varepsilon$ とすると、和は $\frac{1}{2}(\varepsilon^{-2} - \frac{1}{4}\varepsilon^{-2}) \to \infty$ となる。つまり答えは $x = 1$ への近づき方に依存し、まさにそれゆえにこの積分は定義されないのである。

## 検算

g の数値微分は、無作為に選んだ点において因数分解した公式と一致する。$\mathrm{g}'(1) = 0.4 \neq 0$ である。二分法（bisection）により $\alpha \approx 1.3856$、$\beta \approx -2.2467$ が得られ、$\mathrm{g}(\alpha) = 1.0825 = 3/(2\alpha)$、$\mathrm{g}(\beta) = -0.6676 = 3/(2\beta)$ である。$[-100, 100]$ 上で g の値を標本として調べると、これらが最大値・最小値であることが確かめられる。(ii) については、$[-1, 0.99]$ 上の中点則（midpoint quadrature）による数値積分はおよそ 4999.87 となって $\frac{1}{2}(10^4 - \frac{1}{4})$ と一致し、対応する $[1.01, 3]$ 上の部分は $-4999.87$ となる。

## よくある間違い

- 停留点の種類を、その値の比較によって判定してしまう。
- 全体での評価を主張するときに、$x \to \pm\infty$ での振る舞いを忘れる。
- 被積分関数が無限大になる点をまたいで $[F(x)]_a^b$ を適用してしまう。必ず先に、被積分関数が $[a, b]$ 上で連続であることを確かめること。

## STEP のその先へ

小問 (ii) は広義積分に関するものである。特異点（singularity）を含む区間上の積分は極限として定義され、片側からの極限がそれぞれ別々に存在するときに限り収束する。対称な極限、すなわちコーシーの主値は、複素解析（complex analysis）や物理学において実に有用な考え方であるが、それは別の対象である。小問 (i) は局所的な極値と大域的な極値の違いに関するものであり、解析学ではこれを最大値・最小値の定理（extreme value theorem）によって厳密に扱う。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門）は、この両方を丁寧に扱っている。

解答例

# STEP I 1991、第 7 問

純粋数学 ・ 変数分離形の微分方程式

> **STEP I 1991、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q7

## 鍵となる考え方

どちらの変化率も $(1+V/V_0)^2$ の定数倍であるから、自然な変数は $u = 1 + V/V_0$ であり、これは $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \pm c\,u^2$ を満たす。変数分離（separation of variables）を行うと、逆数（*reciprocal*） $w = 1/u$ は単に一次関数的に変化することがわかる。すなわち、成長の年には割合 $a$ で減少し、衰退の年には割合 $b$ で増加する。こうして問題全体は、1 本の折れ線グラフを追いかけて次の二つの問いに答えることに帰着する。$w$ は 0 に達するか（資金が無限大になる）、それとも 1 に達するか（国庫（Treasury）が空になる）。

## 解答

### 設定

$t$ を年単位で測り、$V = kV_0$ とおく。すると $u = 1 + k$ であり、$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = V_0\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ である。成長の年には

$$V_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = aV_0u^2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = a \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{u}\right) = -a,$$

となり、同様に衰退の年には（$V > 0$ である間）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{u}\right) = +b$ となる。したがって

$$w = \frac{1}{1+V/V_0},$$

とおくと、$w$ は成長期には割合 $a$ で一次関数的に減少し、衰退期には割合 $b$ で一次関数的に増加する。$V \geq 0$ は $0 < w \leq 1$ に対応することに注意する。国庫が空になるのはちょうど $w = 1$ のときであり、$V \to \infty$ となるのはちょうど $w \to 0^+$ のときである。

### 不等式の意味

最初は $w = w_0 = \frac{1}{1+k_0}$ であり、1年目の間は $w = w_0 - at$ である。このとき次のことがいえる。

- $k_0 \geq 0$ は、単に国庫が負の額の資金を保有できないことを述べている。
- 1年目を通じて資金が有限にとどまるのは、$w$ が $t = 1$ まで正であり続けるとき、すなわち $w_0 - a > 0$ のときに限る。これは

$$\frac{1}{1+k_0} > a \iff 1 + k_0 < \frac{1}{a} \iff k_0 < a^{-1} - 1.$$

  である。これが成り立たなければ、$V$ はまさに1年目のうちに、時刻 $t = w_0/a \leq 1$ で無限大になってしまう。これは現実の国庫のモデルとしてはあり得ない。

さらに、これらの不等式を合わせると $a^{-1} - 1 > 0$、すなわち $a < 1$ も導かれる。これは最後に用いる。

### 2年目を乗り切る

1年目の終わりには $w_1 = \frac{1}{1+k_1}$ である（実際 $w_1 = w_0 - a$ である）。衰退の年の間は、$w < 1$ である限り $w = w_1 + bt$ である。その年の終わりに国庫がまだ空でないのは、$t = 1$ までに $w$ が1に達していないときに限る。すなわち

$$\frac{1}{1+k_1} + b < 1 \iff b < \frac{k_1}{1+k_1}.$$

特に $b < 1$ が必要であり、そのもとでこれを変形すると

$$k_1 > \frac{b}{1-b}.$$

となる。逆に $b \geq \frac{k_1}{1+k_1}$ ならば、資金は時刻 $t = (1 - w_1)/b \leq 1$ で尽き、その年の残りの期間はずっと0のままである。

### 3年目における無制限の増大

**考えてみよう** 2年目に国庫が空になったらどうなるか。それでも3年目に爆発することはあり得るだろうか。

2年目の終わりに国庫が空であれば、3年目は $w = 1$ から始まり $w = 1 - at$ となる。$a < 1$ であるから、これはその年の間ずっと正である。したがって空の国庫が3年目に爆発することはなく、2年目を資金が乗り切る場合だけを考えればよい。

その場合 $w_2 = w_1 + b = \frac{1}{1+k_0} - a + b$ であり、3年目には $w = w_2 - at$ である。3年目の間に資金が無制限になるのは、$t = 1$ までに $w$ が0に達するとき、すなわち $w_2 \leq a$

のときに限る。

$$\frac{1}{1+k_0} - a + b \le a \iff b \le 2a - \frac{1}{1+k_0}.$$

これが「ただし、それより前ではない」という条件と矛盾しないことを確かめなければならない。

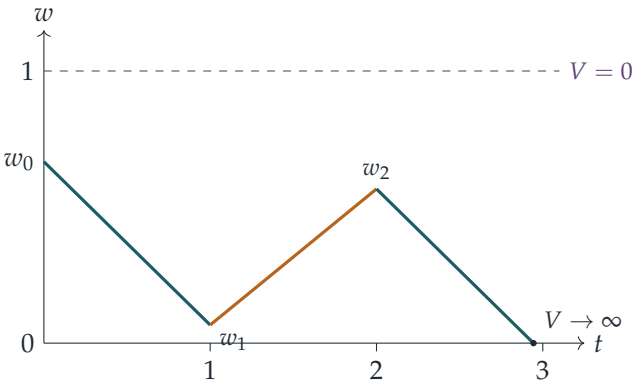
- 1 年目に爆発が起こらないことは $k_0 < a^{-1} - 1$ によって保証されており、資金が減少している 2 年目には爆発は起こり得ない。
- 資金は 2 年目を乗り切る。$w_2 \le a$ ならば、$a < 1$ より $w_2 < 1$ であるから、乗り切るための条件 $w_2 < 1$ は自動的に満たされる。

よって、モデルが 3 年目に（それより前ではなく）無制限の増大を予測するのは、ちょうど

$$b \le 2a - \frac{1}{1+k_0}.$$

のときである。不等号が狭義であれば、$V$ は 3 年目に入って時刻 $t = w_2/a < 1$ で無限大になる。等号の場合は、ちょうど 3 年目が終わるときに $V \to \infty$ となる。（$b > 0$ であるから、これが起こり得るのは $2a > \frac{1}{1+k_0}$、すなわち $k_0 > \frac{1}{2a} - 1$ のときに限る。）

次の図は、条件が成り立つ例として $a = 0.6$、$b = 0.5$、$k_0 = 0.5$ の場合に $w$ を $t$ に対して描いたものである。




## 検算

上の例では $k_1 = 14$ であり、乗り切るための条件 $14 > \frac{0.5}{0.5} = 1$ が成り立つ。このとき $k_2 = \frac{13}{17} \approx 0.765$ であり、3 年目の爆発は $t = w_2/a \approx 0.944$ で起こる。これは $2a - \frac{1}{1+k_0} - b = \frac{1}{30} > 0$ と整合している。また、$a$、$b$、$k_0$ を無作為に 300 通り選び、微分方程式（differential equation）を数値的に積分した（4 次のルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method））。$k_1$ と $k_2$ の閉じた式は約 $10^{-11}$ の精度で一致し、乗り切る条

件と爆発の条件はいずれも、すべての場合において数値的な振る舞いを正しく予測した。

## よくある間違い

- 2 年目に国庫が空になり得ることを忘れる。ここでは $a < 1$ であるため害はないが、そのことは述べておく必要がある。
- 爆発の条件を逆に取り違える。爆発に対応するのは $1/(1+k)$ が 0 に達することであり、$k$ が 0 に達することではない。
- $\frac{1}{1+k_1} + b < 1$ を $k_1$ に関する条件に変形するときに、$b < 1$ という要請を無視する。

## STEP のその先へ

方程式 $\dot{u} = au^2$ は**有限時間爆発**（*finite-time blow-up*）の標準的な例である。指数関数的増大（exponential growth）とは異なり、解が有限の時刻で無限大になり得るので、微分方程式の解がすべての時刻で存在するとは限らない。常微分方程式（ODE）の最初の講義では、ここで解の局所存在（local existence）と大域存在（global existence）の区別が現れる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『常微分方程式入門』）では、非線形一階方程式を扱う箇所でこのことが論じられている。

解答例

# STEP I 1991、第 8 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP I 1991、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q8

## 鍵となる考え方

置換（substitution）$y = \pi - x$ は区間 $[0, \pi]$ をそれ自身に写し、$\sin x$ を変えないが、扱いにくい因子 $x$ を $\pi - y$ に変える。積分とその「折り返し」を足し合わせると、$x$ は完全に消えてしまう。小問 (ii) では、被積分関数（integrand）がある関数とその導関数（derivative）から組み立てられているので、うまく選んだ置換ひとつですべてが片づく。

## 解答

### 小問 (i)

$I = \displaystyle\int_0^{\pi} x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$ とおく。区間 $[0, \pi]$ の両端を入れ替え、かつ $\sin x$ を変えない置換がほしいので、$k = \pi$ とする。すなわち $x = \pi - y$ とおくと、$\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$、$\sin x = \sin(\pi - y) = \sin y$ であり、$x = 0, \pi$ はそれぞれ $y = \pi, 0$ に対応する。すると

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi}^{0} (\pi - y)\,\mathrm{f}(\sin y)\,(-\mathrm{d}y) = \int_0^{\pi} (\pi - y)\,\mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y \\ &= \pi \int_0^{\pi} \mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y - I, \end{aligned}$$

となる。ここで $y$ は単なるダミー変数（dummy variable）にすぎないので、最後の積分は再び $I$ である。よって

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

**考えてみよう** $\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}$ から $\pi \int_0^{\pi/2}$ へはどうすれば移れるか？

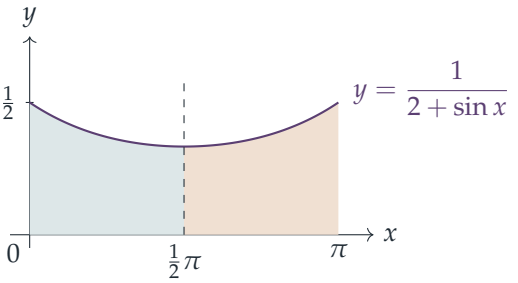
$\sin(\pi - x) = \sin x$ であるから、区間 $[0, \pi]$ 上の $\mathrm{f}(\sin x)$ のグラフは $x = \frac{1}{2}\pi$ に関して対称である。これを厳密に述べるため、積分を $\frac{1}{2}\pi$ で分割し、後半に同じ置換 $x = \pi - y$ を用いる：

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/2}^{0} \mathrm{f}(\sin y)\,(-\mathrm{d}y) = \int_{0}^{\pi/2} \mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y.$$

したがって $\int_0^{\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$ であり、ゆえに

$$\int_0^{\pi} x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x,$$

が示された。




次に $\mathrm{f}(u) = \dfrac{1}{2+u}$ とする。これは $u \in [-1, 1]$ で連続（continuous）である。すると

$$\int_0^{\pi} \frac{x}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}.$$

残った積分には $t = \tan\frac{1}{2}x$ を用いる。このとき

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

であり、$x = 0, \frac{1}{2}\pi$ はそれぞれ $t = 0, 1$ に対応する。すると

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} &= \int_0^1 \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{2(1+t^2)+2t} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\sqrt{3} - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

よって

$$\int_0^{\pi} \frac{x}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi^2}{9}.$$

### 小問 (ii)

**考えてみよう** $(\sin^{-1} t)^2$ の導関数は何か？

合成関数の微分法（chain rule）により

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sin^{-1} t\right)^2 = \frac{2\sin^{-1} t}{\sqrt{1-t^2}},$$

であり、これはちょうど余弦に掛かっている因子の（2 倍）である。そこで $u = (\sin^{-1} t)^2$ と置換すると、$\mathrm{d}u = \dfrac{2\sin^{-1} t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ である。$t = 0$ のとき $u = 0$ であり、$t = 1$ のとき $\sin^{-1} 1 = \frac{1}{2}\pi$ であるから $u = \frac{1}{4}\pi^2$ である。したがって

$$\int_0^1 \frac{(\sin^{-1} t)\cos\left[(\sin^{-1} t)^2\right]}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi^2/4} \cos u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi^2}{4}.$$

被積分関数は $t = 1$ で発散するので、厳密にはこれは広義積分（improper integral）である。置換によってこの点はすっきり処理できる。$\theta = \sin^{-1} t$ を用いると積分は $\int_0^{\pi/2} \theta\cos\theta^2\,\mathrm{d}\theta$ となり、その被積分関数は連続であるから、積分は収束（converge）し、上の値は正しい。（$\theta = \sin^{-1} t$、続いて $u = \theta^2$ と 2 段階で置換するのも、まったく問題のない別解である。）

答え $\frac{1}{2}\sin\frac{1}{4}\pi^2$ は厳密な値であり、これ以上簡単にはならない。$\frac{1}{4}\pi^2$ は「きれいな」角ではないのである。出題者が電卓に頼らないよう注意していたのは、おそらくこのためであろう。

## 検算

- シンプソンの公式（Simpson's rule）によれば $\int_0^{\pi} x/(2+\sin x)\,\mathrm{d}x \approx 1.899406$ であり、$\pi^2/(3\sqrt{3}) \approx 1.899406$ である。
- 簡単な妥当性の確認：$\frac{1}{3} \le \frac{1}{2+\sin x} \le \frac{1}{2}$ であるから、積分の値は $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\pi^2 \approx 1.64$ と $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi^2 \approx 2.47$ の間にある。
- (i) の等式は $\mathrm{f}(u) = 1$ で確かめられる。両辺とも $\frac{1}{2}\pi^2$ に等しい。
- (ii) については $\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{4}\pi^2) \approx 0.312133$ であり、これは $\int_0^{\pi/2} \theta\cos\theta^2\,\mathrm{d}\theta$ の数値計算の結果と一致する。

## よくある間違い

- 積分区間を半分にすることを正当化せずに、$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$ で止めてしまう。

- $t = \tan\frac{1}{2}x$ と置換するときに積分の上端・下端を変え忘れる（上端は $\infty$ ではなく 1 になる）。
- 小問 (ii) で因子 $\frac{1}{2}$ を落とす：d$u$ には 2 が含まれている。

## STEP のその先へ

小問 (i) の技法、すなわち区間の対称性（symmetry）を利用して、原始関数（antiderivative）を一度も求めずに $\int x\,g(x)\,\mathrm{d}x$ を計算するという方法は、ある大きなテーマの小さな一例である。そのテーマとは、対称性を使えば計算よりも手軽に積分の値がわかることが多い、ということである。小問 (ii) は広義積分の理論に触れている。そこでは変数変換（change of variables）によって、有界でない被積分関数を連続なものに変えられることがある。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は変数変換の定理を厳密に扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）にはこの種の積分がほかにも数多く収められている。

解答例

# STEP I 1991、第 9 問

純粋数学 ・ 不等式と調和級数

> **STEP I 1991、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q9

## 鍵となる考え方

小問 (i) では、各不等式（inequality）が $x$ を 2 つの $k$ 乗根の間に挟み込んでいる。要点は、互いに矛盾する下界（lower bound）と上界（upper bound）を 1 つずつ見つけることである。電卓を使わずに 3 乗根と 5 乗根を比較するには、両辺を 15 乗すればよい。小問 (ii) では、長い和を（項の数）×（最小の項）で下から評価する。そのうえで、この形の互いに重ならないブロックをつなぎ合わせることで、調和級数（harmonic series）の和をいくらでも大きくできる。

## 解答

### 小問 (i)

$x > 1$ であるから、$x$ のべき乗はすべて正である。正の数どうしの不等式の両辺を正の指数でべき乗しても、不等号の向きは変わらない。以下ではこの事実を常に用いる。

背理法（proof by contradiction）により、$n \geq 5$ と仮定する。このとき特に、3 番目と 5 番目の不等式が成り立つ：

$$x^3 > 3 \qquad \text{かつ} \qquad x^5 < 6.$$

1 つ目の両辺を 5 乗し、2 つ目の両辺を 3 乗すると、

$$x^{15} > 3^5 = 243 \qquad \text{かつ} \qquad x^{15} < 6^3 = 216.$$

これより $243 < x^{15} < 216$ となるが、これはあり得ない。よって $n \geq 5$ とはなり得ず、したがって $n \leq 4$ である。

**考えてみよう** 3 番目と 5 番目の不等式を選べばよいと、どうすればわかるだろうか？

各不等式は $k^{1/k} < x < (k+1)^{1/k}$ を意味している。下界 $k^{1/k}$ は 1, 1.41, 1.44, 1.41, 1.38, ...と変化し、$k = 3$ で最大となる。上界 $(k+1)^{1/k}$ は減少していき、$3^{1/3} \approx 1.44$ を初めて下回るのは $6^{1/5} \approx 1.43$ である。暗算による大まかな見積もりでこの組が見当づけられ、15 乗をとることでそれが厳密に証明される。（$n = 4$ は実際に起こり得る。たとえば $x = 1.45$ とすると、$x^2 = 2.1025$、$x^3 \approx 3.05$、$x^4 \approx 4.42$ となる。）

### 小問 (ii)

$n \geq 2$ とする。和 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ は $n^2 - n$ 個の項からなり、各項は最後の項 $\frac{1}{n^2}$ 以上である。$n \geq 2$ より項は $n^2 - n \geq 2$ 個あるので、最初の項 $\frac{1}{n+1}$ は $\frac{1}{n^2}$ より真に大きい。したがって

$$\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n^2} > (n^2 - n) \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}.$$

両辺に $\frac{1}{n}$ を加えると、

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n^2} > 1,$$

となり、示すべき式が得られた。

**調和級数の和を 10 より大きくする** $m \geq 2$ のとき、各ブロック $\frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m^2}$ は 1 より大きい寄与をする。これを複数使うには、互いに重ならないブロックが必要なので、各ブロックを直前のブロックが終わったすぐ次から始めることにする。

$$a_1 = 2, \qquad a_{k+1} = a_k^2 + 1,$$

と定めると、$a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 26$, $a_4 = 677, \ldots$ である。第 $k$ ブロックは $\frac{1}{a_k}$ から $\frac{1}{a_k^2}$ までであり、次のブロックは $\frac{1}{a_k^2+1} = \frac{1}{a_{k+1}}$ から始まる。よって $k = 1, \ldots, 9$ のブロックは互いに重ならず連続しており、合わせて $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{a_9^2}$ を覆う。したがって

$$\sum_{n=1}^{a_9^2} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{k=1}^{9} \left( \frac{1}{a_k} + \cdots + \frac{1}{a_k^2} \right) > 1 + 9 = 10.$$

**考えてみよう** $a_9^2$ はとてつもなく大きな数である。代わりに $N$ を具体的に示すことはできるだろうか？

できる。$a_k$ を上から評価すればよい。$a_k < 2^{2^k}$ が成り立つことを示す。$k = 1$ のときは $2 < 4$ より成り立つ。$a_k < 2^{2^k}$ ならば $a_k \leq 2^{2^k} - 1$ であるから、

$$a_{k+1} = a_k^2 + 1 \leq \left(2^{2^k} - 1\right)^2 + 1 = 2^{2^{k+1}} - 2^{2^k+1} + 2 < 2^{2^{k+1}}.$$

よって数学的帰納法（induction）により $a_9 < 2^{512}$、$a_9^2 < 2^{1024}$ である。正の項をさらに加えても和は大きくなるだけなので、

$$N = 2^{1024} \quad \text{とすれば} \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > 10.$$

これより大きい $N$ でもよい。

**別解：** $\frac{1}{2^j+1} + \cdots + \frac{1}{2^{j+1}}$ という形のブロックにまとめると、各ブロックは $2^j$ 個の項からなり、どの項も $\frac{1}{2^{j+1}}$ 以上である。これより、各ブロックは $j \geq 1$ のとき $\frac{1}{2}$ より大きく、$j = 0$ のとき $\frac{1}{2}$ に等しい。よって $\sum_{n=1}^{2^{18}} \frac{1}{n} > 1 + \frac{18}{2} = 10$ であり、$N = 2^{18} = 262\,144$ というはるかに小さな答えが得られる。

## 検算

- 小問 (i)：数値的には、$n = 4$ のとき不等式から $x \in (3^{1/3}, 5^{1/4}) \approx (1.442, 1.495)$ が残る。5 番目の不等式を加えると $x < 6^{1/5} \approx 1.431$ となり、何も残らない。
- 小問 (ii)：分数で正確に計算すると $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1$ であり、2 から 39 までのすべての $n$ についてブロックの和は 1 を超える。
- 調和級数の和が初めて 10 を超えるのは $N = 12\,367$ のときであり、正しい答えはすべてこれ以上でなければならない。$2^{18}$（このとき和は約 13.05）も $2^{1024}$ も、これを十分に上回っている。

## よくある間違い

- 両辺が正であること（ここでは $x > 1$ により保証される）に触れずに、不等式をべき乗してしまう。
- 端点を共有するブロック $[2,4]$, $[4,16]$, $[16,256]$, ...を用いてしまい、一部の項を二重に数えてしまう。
- 小問 (ii) で、少なくとも 1 つの項が $\frac{1}{n^2}$ より真に大きいことを確かめずに、$>$ ではなく $\geq$ と書いてしまう。

## STEP のその先へ

小問 (ii) は、コーシー（Cauchy）の凝集判定法（Cauchy condensation test）の考え方の一種である。これにより調和級数が発散（diverge）することが証明されるが、その発散は驚くほど遅い。部分和（partial sum）は $\ln N + \gamma$ のように増加する。ここで

$\gamma \approx 0.5772$ はオイラー–マスケローニ定数（Euler–Mascheroni constant）である。和を積分と比較するとこの増加の速さが得られ、最小の $N$ も容易に見積もることができる（$e^{10-\gamma} \approx 12\,367$）。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、凝集判定法と級数の収束を丁寧に扱っている。

解答例

# STEP I 1991、第 10 問

力学 ・ 垂れ下がる鎖のつり合い

> **STEP I 1991、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q10

この問題は、*Beyond STEP* の第 11.14 節「**懸垂線ではなく放物線**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/bridge-parabola.html

## 鍵となる考え方

鎖の各節点は、隣り合う二つのリンクの張力（tension）と、そこから吊り下げられた重さ $w$ の三つの力のもとで平衡（equilibrium）にある。水平方向に力を分解すると、すべてのリンクで張力の水平成分が**等しい**ことがわかる。次に鉛直方向に分解すると、各節点で鉛直成分がちょうど $w$ ずつ減ることがわかり、水平方向の間隔は一定であるから、リンクの傾きは等差数列（arithmetic progression）をなす。傾きが等差数列をなすことは、放物線（parabola）の離散的な特徴である。

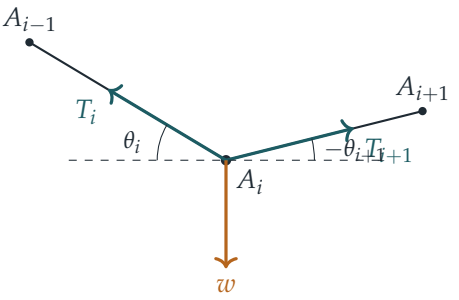
## 解答

### 平衡の方程式

鎖は軽く、柔軟で、伸び縮みしないものとしてモデル化する。したがって、各リンク $A_{i-1}A_i$ の張力はそのリンクに沿ってはたらく。$\theta_i$ を、$A_{i-1}A_i$ が水平となす角とし、$x$ が増加する向きに進むときに**下向き**を正として測る。すなわち

$$\tan\theta_i = \frac{y_{i-1} - y_i}{h}.$$

である（橋の右半分では $\theta_i$ は負になるが、以下の議論はその符号によらない）。節点 $A_i$ は、$A_iA_{i-1}$ に沿って $T_i$ で、$A_iA_{i+1}$ に沿って $T_{i+1}$ で引かれ、さらに支柱によって大きさ $w$ の力で下向きに引かれる。




$1 \le i \le n+1$（実際にはすべての $1 \le i \le 2n+1$）について、$A_i$ で水平方向と鉛直方向に力を分解すると

$$T_i \cos\theta_i = T_{i+1}\cos\theta_{i+1},$$
$$T_i \sin\theta_i - T_{i+1}\sin\theta_{i+1} = w.$$

これらが求める方程式である。

## 比

第 1 式は、$T_i\cos\theta_i$ がすべてのリンクで等しいことを表している。この共通の水平成分を $H$ とおく。鎖は引くことしかできないので、これは正である。第 2 式を $H$ で割り、$\tan\theta_i = (y_{i-1}-y_i)/h$ を用いると

$$\frac{H}{h}(y_{i-1}-y_i) - \frac{H}{h}(y_i - y_{i+1}) = w.$$

となる。そこで、リンク $i$ の張力の鉛直成分を $V_i = H(y_{i-1}-y_i)/h$ と書けば

$$V_i - V_{i+1} = w \quad (1 \le i \le 2n+1), \qquad \text{よって} \qquad V_i = V_1 - (i-1)w \quad (1 \le i \le 2n+2).$$

**考えてみよう** 未知数 $V_1$ が一つ残っている。橋のどの事実がこれを決めるだろうか？

支点は同じ高さにある。鎖全体にわたって下がった量を足し合わせると

$$\begin{aligned} 0 = y_0 - y_{2n+2} &= \sum_{i=1}^{2n+2}(y_{i-1}-y_i) = \frac{h}{H}\sum_{i=1}^{2n+2} V_i \\ &= \frac{h}{H}\Big[(2n+2)V_1 - w\big(0+1+\cdots+(2n+1)\big)\Big]. \end{aligned}$$

括弧の中は $(2n+2)V_1 - w(2n+1)(n+1)$ であるから、$V_1 = \frac{1}{2}(2n+1)w$ である（これは全体の鉛直方向のつり合いから予想されることとも一致する。すなわち、二つの支点が全荷重 $(2n+1)w$ を等分して支えている）。したがって

$$V_i = \tfrac{1}{2}(2n+3-2i)\,w, \qquad \text{すなわち} \qquad y_{i-1}-y_i = \frac{(2n+3-2i)\,wh}{2H}.$$

$i = n+1, n, \ldots, 1$ とおくと、下がる量は $wh/(2H)$ の $1, 3, \ldots, 2n+1$ 倍となる：

$$\frac{h}{y_n - y_{n+1}} = \frac{3h}{y_{n-1} - y_n} = \cdots = \frac{(2n+1)h}{y_0 - y_1} = \frac{2H}{w},$$

これが求める等式の連鎖である（最後の分子は問題用紙では $(2n+1)y$ と印刷されているが、規則性から見ても、また他の比と同様に無次元であるためにも、$(2n+1)h$ でなければならない）。

### 放物線

$k = wh/(2H)$ とおく。$A_0$ から下がる量を足し合わせると

$$y_i = y_0 - k\sum_{j=1}^{i}(2n+3-2j) = y_0 - k\big[(2n+3)i - i(i+1)\big] = y_0 - k\,i\,(2n+2-i).$$

$m = n+1$ と書くと $i(2m-i) = m^2 - (i-m)^2$ であるから

$$y_i = (y_0 - km^2) + k(i-m)^2 = y_{n+1} + k(i-n-1)^2,$$

となる。ここで、$i = m$ とおくと $y_0 - km^2 = y_{n+1}$ となることを用いた。さて $x_i = x_0 + ih$ であるから $(i-n-1)h = x_i - x_{n+1}$ であり、すべての点 $A_i$（$0 \le i \le 2n+2$）は

$$y = y_{n+1} + \frac{w}{2Hh}\,(x - x_{n+1})^2.$$

を満たす。これは最下点 $A_{n+1}$ を通る鉛直な軸をもつ一つの放物線であり、したがって点 $A_0, A_1, \ldots, A_{2n+2}$ はすべてこの上にある。端点も含まれている。実際、$i = 0$ と $i = 2n+2$ はどちらも $y_0$ を与え、そうなるべきとおりである。

## 検算

- $n = 0$ のとき、支柱は中央に 1 本だけである。公式は $V_1 = \frac{1}{2}w$ を与えるので、鎖の左右それぞれが荷重の半分を支えることになり、当然そうなるべきとおりである。
- 結果は連続的な描像と一致する。水平方向の単位長さあたり $w/h$ の一様な荷重を、水平張力 $H$ のケーブルから吊るすと $y'' = (w/h)/H$ となり、我々の放物線は $y'' = w/(Hh)$ を満たす。
- 数値的な検算として、ランダムな橋を 200 個（$1 \le n \le 8$、$H$、$w$、$h$ はランダム）とり、節点の方程式を正確な分数による連立一次方程式として直接解いて、比、公式 $y_i = y_0 - k\,i(2n+2-i)$、放物線、およびすべての節点における力のつり合いを確認した。たとえば $n = 2$、$w = 2$、$H = 5$、$h = 1$ のとき、下っていく区間で下がる量は 1.0, 0.6, 0.2 であり、各比は $2H/w = 5$ に等しい。

## よくある間違い

- 対称性を用いて、説明なしに $y_n = y_{n+2}$ とすること。これは正しいが、支点が同じ高さにあることから導かれる事実である。上の和をとる議論は、これを仮定するのではなく証明している。
- 張力の水平成分が一定であることを見落とし、各 $T_i$ を個別に求めようとすること。この問題では $T_i$ そのものは一度も必要ない（それらは $\sqrt{H^2 + V_i^2}$ である）。
- 鎖の上り側の半分で $\theta_i$ の符号を取り違えること。全体を通して $\tan\theta_i = (y_{i-1} - y_i)/h$ を用いて考えれば、これを避けられる。

## STEP のその先へ

自重で垂れ下がる鎖は懸垂線（catenary）$y = c\cosh(x/c)$ をなすが、道路の床版のように**水平方向**に一様に分布した荷重を支える鎖は放物線をなす。この問題はその事実の離散版である。2 階差分の方程式 $y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} =$ 一定 は $y'' =$ 一定 の差分（finite difference）形であり、同じ考え方が微分方程式の数値解法の根底にある。変分法（calculus of variations）では懸垂線やその仲間を扱う。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、弦やケーブルの静力学（statics）が丁寧に扱われているのを見るのによい本である。

解答例

# STEP I 1991、第 11 問

力学 ・ 滑車と力積

> **STEP I 1991、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q11

## 鍵となる考え方

各周期は 2 つの段階からなる。おもりが杭に当たると、おもりはその場で静止し、糸はたるむ。そのため釣り合いおもりは上へ飛び上がり、重力のみを受けて自由に落ちてくる。次に糸がぴんと張り、2 つの質点は運動量を分け合う。その後は、おもりが再び杭に着くまで、最初の小問で求めた一定の加速度で一緒に運動する。加速度が一定であるため、どちらの段階も時間について対称になる。したがって、1 つの周期におけるすべての速さは、直前の周期における速さの一定倍となり、ただちに等比数列が得られる。

## 解答

### 一定の加速度

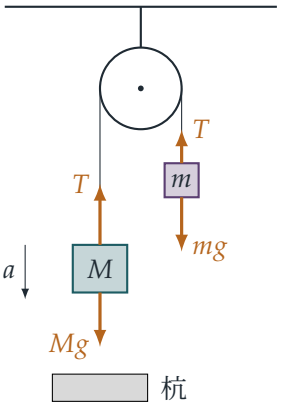
おもりと釣り合いおもり（counterweight）を質点とみなし、糸は軽くて伸び縮みしない（inextensible）もので、滑らかで軽い滑車（smooth pulley）にかけられているとする。糸が張っている間、2 つの質点は同じ速さ $v$ で運動し、おもりは下へ、釣り合いおもりは上へ動く。静止状態から距離 $x$ だけ動いたとき、速さが $v$ になったとする。おもりは位置エネルギー（potential energy）$Mgx$ を失い、釣り合いおもりは $mgx$ を得る。滑車は滑らかで、糸は軽く伸び縮みしないので、エネルギーは失われず、

$$\tfrac{1}{2}(M+m)v^2 = (M-m)gx.$$

これを時間で微分し、$\dot{x} = v$ を用いると、$v \neq 0$ のとき

$$(M+m)v\dot{v} = (M-m)gv \quad \Longrightarrow \quad \dot{v} = g\,\frac{M-m}{M+m}$$

となる。これは定数である。これを $a$ とおく。同じ結果はニュートン（Newton）の運動の第 2 法則からも得られる。張力（tension）を $T$ とすると、$Mg - T = Ma$ かつ $T - mg = ma$ であり、これらを足すと $(M - m)g = (M + m)a$ となる。




**ある衝突から次の衝突まで**

衝突の直前、おもりは速さ $v$ で下向きに、釣り合いおもりは同じ速さ $v$ で上向きに運動している。この運動を 3 つの段階に分けて追っていく。

**衝突。**衝突は完全非弾性（completely inelastic）であり、杭（pile）は固定されているので、おもりは静止する。釣り合いおもりはなお速さ $v$ で上向きに運動しているので、糸はたるむ。すると張力は釣り合いおもりに作用できず、重力だけがおもりを杭に押しつけるので、おもりはその場にとどまる。

**自由飛行。**糸がたるんでいる間、釣り合いおもりは鉛直方向に運動する放物体（projectile）である。それは上昇したのち、糸が再び張る点、すなわち衝突時にいた点に戻ってくる。一定の加速度 $g$ のもとでは運動は対称であるから、釣り合いおもりはその点に速さ $v$ で**下向き**に到達する。それまでにかかる時間は

$$\frac{2v}{g}.$$

**糸が張る瞬間。**釣り合いおもりが速さ $v$ で下向きに運動し、おもりが静止している状態で、糸が急にぴんと張る。その後、2 つの質点は共通の速さ $u$ で、釣り合いおもりは下向きに、おもりは上向きに運動しなければならない。与えられた仮定により、釣り合いおもりが失う運動量（momentum）は、おもりが得る運動量に等しい：

$$m(v - u) = Mu \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{mv}{M + m}.$$

**考えてみよう** なぜここで系全体について運動量保存則をそのまま用いることができないのだろうか？

2 つの質点は互いに逆向きに運動しており、さらに滑車が力積（impulse）を及ぼすので、全運動量が保存されるような単一の方向は存在しない。正しいのは、糸が軽く滑車が滑らかであるため、撃力的な張力が両方の質点に同じ大きさ $J$ で作用するということである。したがって、釣り合いおもりは糸に沿って運動量 $J$ を失い、おもりは糸に沿って運動量 $J$ を得る。これこそが、仮定してよいとされていた主張にほかならない。

**再び一緒に。** ここで糸は張っており、おもりは速さ $u$ で上向きに運動している。最初の小問により、加速度の大きさは一定値 $a$ で、その向きは重いほうの質点 $M$ が下がる向きである。したがって、おもりは減速して静止し、その後杭へ落ちて戻る。加速度が一定なので、この運動も対称である。おもりは速さ $u$ で杭に到達し、それまでにかかる時間は

$$\frac{2u}{a}.$$

よって、次の衝突の直前に釣り合いおもりが運動する速さは

$$u = \frac{mv}{M+m},$$

となり、題意が示された。

### 時間は等比数列をなす

$k = \dfrac{m}{M+m}$ とおくと、$0 < k < 1$ である。最初の衝突の直前の速さを $v_0$ とする。前の小問により、$(n+1)$ 回目の衝突の直前の速さは $v_n = k^n v_0$ である。2 つの段階を合わせると、$(n+1)$ 回目の衝突から次の衝突までの時間は

$$t_n = \frac{2v_n}{g} + \frac{2kv_n}{a} = \left(\frac{2}{g} + \frac{2k}{a}\right) k^n v_0.$$

これは定数と $k^n$ の積であるから、連続する衝突の間の時間は公比（common ratio）$k = m/(M+m)$ の等比数列（geometric progression）をなす。

### 全体の時間

手を放してから最初の衝突までの時間を $T_0$ とする。おもりは静止状態から加速度 $a$ で動き始めるので、$v_0 = aT_0$ である。$0 < k < 1$ であるから等比級数（geometric series）は収束（converge）し、全体の時間は

$$T_0 + \sum_{n=0}^{\infty} t_n = T_0 + \left(\frac{2}{g} + \frac{2k}{a}\right) \frac{v_0}{1-k}.$$

ここで $1-k=\dfrac{M}{M+m}$ であり、$\dfrac{k}{a}=\dfrac{m}{M+m}\cdot\dfrac{M+m}{g(M-m)}=\dfrac{m}{g(M-m)}$ である。よって

$$\frac{2}{g}+\frac{2k}{a}=\frac{2}{g}\left(1+\frac{m}{M-m}\right)=\frac{2M}{g(M-m)},$$
$$\left(\frac{2}{g}+\frac{2k}{a}\right)\frac{v_0}{1-k}=\frac{2M}{g(M-m)}\cdot\frac{M+m}{M}v_0=\frac{2v_0}{a}=2T_0.$$

したがって、衝突は無限回起こるが、それに要する時間の合計は有限である。おもりが最終的に静止するまでの時間は

$$T_0+2T_0=3T_0,$$

であり、これは開始から最初の衝突までの時間のちょうど 3 倍である。

## 検算

- 極限 $m\to 0$ をとる。このとき $k\to 0$ かつ $a\to g$ であるから、おもりは最初の衝突の後、二度と持ち上がらない。残る時間は釣り合いおもりの飛行時間 $2v_0/g=2gT_0/g=2T_0$ だけであり、合計は $3T_0$ となって、一般の公式の予測と一致する。
- ランダムに選んだ $M$、$m$ と落下の高さに対して、運動を数値的に段階を追って計算した（たとえば $M=2.403$、$m=1.571$ で、$k=0.3953$）。速さの比と時間間隔の比はいずれも 0.3953 となり、等比数列の残りの部分を含めた全体の時間は $2.99998\,T_0$ となった。

## よくある間違い

- 自由飛行の段階を忘れること。釣り合いおもりは衝突の後も上昇し続けるので、1 つの周期には、それが放物体として運動する時間 $2v/g$ が含まれる。
- 糸がたるんでいる段階で $g$ の代わりに $a$ を用いること。糸がたるめば、釣り合いおもりに作用するのは重力だけである。
- 糸が張る瞬間に、2 つの速度を同じ向きにとって「全運動量は保存される」と書くこと。滑車が糸の向きを変えるので、分け合われるのは**糸に沿った**運動量である。

## STEP のその先へ

このパイルドライバーや弾むボールのように、有限の時間内に無限回の事象が起こる現象は、ゼノン的振る舞い（Zeno behaviour）と呼ばれる。これは、滑らかな運動が突

然の跳躍によって中断されるハイブリッドシステム（hybrid systems）の理論に現れる。糸が急に張る現象は、単純な撃力的拘束（impulsive constraint）である。ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）では、大学 1 年次にこのような拘束を体系的に扱う。力積、衝突、拘束された運動についてさらに学ぶには、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

解答例

# STEP I 1991、第 12 問

力学 ・ 摩擦のあるつり合い

> **STEP I 1991、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q12

## 鍵となる考え方

板 $AB$ は軽く、力を受けるのは両端の滑らかな蝶番（smooth hinge）からだけである。したがって、$AB$ が $CD$ に及ぼす力は $AB$ に沿った向きにはたらかなければならない。これにより、問題は 1 つの剛体（rigid body）$CD$ と 3 つの未知の力の問題に帰着する。$C$ のまわりの力のモーメント（moment）を考えると $AB$ の推力（thrust）が求まり、続いて力を分解すると $C$ における摩擦力（friction）と垂直抗力（normal reaction）が求まる。幾何的な条件（2 枚の板が $B$ で接すること）によって $x$ が $\alpha$ と $\beta$ に結びつけられ、これによって答えから $l$ と $x$ が消えるのである。

## 解答

### モデル化

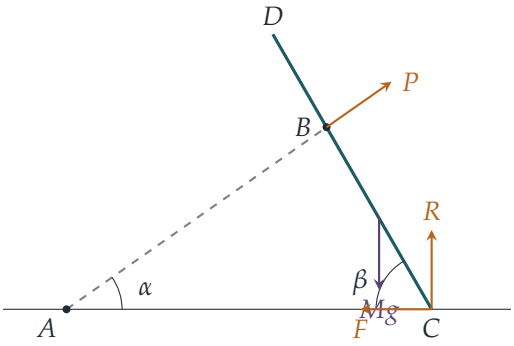
板は重さのない剛体の棒、塗装職人は質量 $M$ の質点（particle）、$A$ と $B$ の蝶番は滑らかであるとみなす。地面は $C$ において粗く、その摩擦係数（coefficient of friction）は $\mu$ である。

> ? **考えてみよう** $B$ において板どうしの間にはたらく力は、なぜ $AB$ に沿った向きでなければならないのか。

板 $AB$ には重さがなく、これにはたらく力は $A$ と $B$ の滑らかな蝶番からの力だけである。$A$ のまわりのモーメントを考えると、$B$ における力は $A$ のまわりのモーメントをもたないので、$BA$ に沿った向きにはたらく。すると $A$ における力は、これと大きさが等しく向きが反対でなければならない。ニュートン（Newton）の第 3 法則により、

$AB$ は $B$ において $CD$ を $AB$ に沿った力 $P$ で押す。$P$ の向きを $A$ から $B$ への向き（推力）にとると、計算の結果 $P > 0$ であることが確かめられる。

よって $CD$ にはたらく力は次のとおりである。$B$ における推力 $P$（水平から角 $\alpha$ だけ上向きで、$A$ から遠ざかる向き）、板に沿って $C$ から距離 $x$ の位置にはたらく塗装職人の重力 $Mg$、そして $C$ における上向きの垂直抗力 $R$ と $A$ に向かう向きの摩擦力 $F$ である。推力が $C$ を $A$ から遠ざける向きに押すので、摩擦力は $A$ に向かう向きでなければならない。




### 幾何的な条件

点 $B$ は $AB$ の上端であるから、その高さは $2l\sin\alpha$ である。また $B$ は $CD$ に沿って $C$ から距離 $2x$ の位置にあるので、その高さは $2x\sin\beta$ でもある。したがって

$$x\sin\beta = l\sin\alpha, \qquad \text{すなわち} \qquad x = \frac{l\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

水平距離 $AC$ は、$AB$ と $BC$ の水平方向への射影の和である。

$$AC = 2l\cos\alpha + 2x\cos\beta.$$

### $CD$ についてのモーメントと力の分解

$C$ のまわりのモーメントを考える。$P$ の作用線（line of action）は直線 $AB$ であり、$C$ からこの直線までの距離は $AC\sin\alpha$ である。重力は $C$ から水平距離 $x\cos\beta$ の位置にはたらく。2 つのモーメントは互いに逆向きであるから

$$P\cdot AC\sin\alpha = Mg\,x\cos\beta \quad\Longrightarrow\quad P = \frac{Mg\,x\cos\beta}{(2l\cos\alpha + 2x\cos\beta)\sin\alpha} > 0.$$

水平方向と鉛直方向に分解すると

$$F = P\cos\alpha, \qquad R = Mg - P\sin\alpha.$$

$P$ を代入すると

$$R = Mg\left(1 - \frac{x\cos\beta}{2l\cos\alpha + 2x\cos\beta}\right) = Mg\,\frac{2l\cos\alpha + x\cos\beta}{2l\cos\alpha + 2x\cos\beta},$$
$$F = Mg\,\frac{x\cos\beta\cos\alpha}{(2l\cos\alpha + 2x\cos\beta)\sin\alpha}.$$

特に $R > 0$ であるから、端 $C$ は地面から離れない。両者の比をとると

$$\frac{F}{R} = \frac{x\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\,(2l\cos\alpha + x\cos\beta)}.$$

ここで幾何的な条件 $x = l\sin\alpha/\sin\beta$ を用いる。すると $x\cos\beta = l\sin\alpha\cot\beta$ となり、

$$\frac{F}{R} = \frac{l\sin\alpha\cot\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\,(2l\cos\alpha + l\sin\alpha\cot\beta)} = \frac{\cos\alpha\cot\beta}{2\cos\alpha + \sin\alpha\cot\beta} = \frac{\cot\alpha\cot\beta}{2\cot\alpha + \cot\beta},$$

である。ただし最後の変形では分子と分母を $\sin\alpha$ で割った。

板 $CD$ が釣り合う（equilibrium）のは、摩擦力がこの大きさの力を与えられるとき、すなわち $F \le \mu R$ のときに限る。$R > 0$ であるから、これは

$$\mu \ge \frac{\cot\alpha\cot\beta}{2\cot\alpha + \cot\beta},$$

となり、示すべき式が得られた。（板 $AB$ は $A$ で蝶番により固定されているので、必要な力がどのようなものであっても位置が保たれる。）

### 最後の設問

$B$ が $D$ と一致するならば $2x = 2l$ であるから $x = l$ である。幾何的な条件から $\sin\beta = \sin\alpha$ となり、両方の角は鋭角であるから $\beta = \alpha$ である。2 枚の板と地面は二等辺三角形（isosceles triangle）をなし、$AC = 4l\cos\alpha$ である。摩擦の条件は

$$\mu \ge \frac{\cot^2\alpha}{3\cot\alpha} = \tfrac{1}{3}\cot\alpha, \qquad \text{すなわち} \qquad \tan\alpha \ge \frac{1}{3\mu}.$$

となる。よって釣り合いが可能であるのは、$\tan\alpha_0 = 1/(3\mu)$ として $\alpha \ge \alpha_0$ のときであり、かつそのときに限る。

**考えてみよう** 塗装職人はどこにいるか。また、$\alpha$ が変化するとき、距離はどちらの向きに変化するか。

塗装職人は $CD$ の中点、すなわち $C$ から距離 $l$ の位置に立っている。$A$ を原点にとると、$C$ は $(4l\cos\alpha, 0)$ にあり、塗装職人の位置は

$$(4l\cos\alpha - l\cos\alpha,\ l\sin\alpha) = (3l\cos\alpha,\ l\sin\alpha).$$

である。よって塗装職人と $A$ との距離の 2 乗は

$$d^2 = 9l^2\cos^2\alpha + l^2\sin^2\alpha = l^2\left(1 + 8\cos^2\alpha\right).$$

である。これは $(0, \frac{\pi}{2})$ において $\alpha$ が増加すると減少する。したがって距離が最大となるのは許される最小の角 $\alpha = \alpha_0$ のときである。このとき $\tan\alpha_0 = 1/(3\mu)$ であるから

$$\cos^2\alpha_0 = \frac{1}{1+\tan^2\alpha_0} = \frac{9\mu^2}{1+9\mu^2},$$

であり、

$$d_{\max}^2 = l^2\left(1 + \frac{72\mu^2}{1+9\mu^2}\right) = l^2\,\frac{1+81\mu^2}{1+9\mu^2}.$$

となる。以上より、塗装職人と $A$ との距離の最大値は

$$l\sqrt{\frac{1+81\mu^2}{1+9\mu^2}},$$

であり、示すべき結果が得られた。この値は摩擦がちょうど限界状態 (limiting friction) にあるときに実際に達成される。

## 検算

- 最終的な答えの極限の場合：$\mu \to 0$ のとき距離は $l$ に近づき、これは $\alpha \to \frac{\pi}{2}$、すなわち両方の板が鉛直になる場合に対応する。$\mu \to \infty$ のとき距離は $3l$ に近づき、これは板が地面に平らに横たわり、塗装職人が $(3l, 0)$ にいる場合に対応する。どちらも妥当である。
- $\beta \to \frac{\pi}{2}$、すなわち $CD$ が鉛直になる場合、$\cot\beta \to 0$ となり、必要な $\mu$ は 0 に近づく。鉛直な板には摩擦が不要であるから、これは整合する。
- 数値的に、$\alpha = 60°$、$\beta = 70°$ として $CD$ についての 3 つの釣り合いの式を直接解くと $F/R = 0.13837$ となり、公式と一致する。$\mu = 0.5$ として $\alpha$ を走査すると距離の最大値は $2.55704\,l$ となり、公式からも $l\sqrt{21.25/3.25} = 2.55704\,l$ が得られる。

## よくある間違い

- $B$ における力が水平または鉛直であると仮定してしまうこと。$AB$ は軽く、両端が滑らかな蝶番でつながれているので、力は $AB$ に沿った向きでなければならない。
- $R$ において推力の鉛直成分を忘れること。この成分は垂直抗力を減らし、その結果として摩擦力を与えにくくする。
- 最後の設問で、釣り合いが可能な角だけでなく、すべての $\alpha$ にわたって最大化してしまうこと。

## STEP のその先へ

両端に滑らかなピンをもつ軽い棒は**二力部材**（two-force member）とよばれる。これを見抜くことは、工学の静力学においてピン接合された骨組み構造（トラス、truss）を解析するための第一歩であり、そこではこのような各部材が純粋な張力または推力を受け持つ。最後の設問は小さな制約付き最適化（constrained optimisation）の問題である。目的関数が単調（monotonic）であるので、最適値は実行可能領域（feasible set）の境界上でとられる。これは線形計画法（linear programming）や最適化の分野全体で繰り返し現れるテーマである。剛体の釣り合いについてさらに学ぶには、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照されたい。

解答例

# STEP I 1991、第 13 問

力学 ・ 運動量保存則

> **STEP I 1991、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q13

## 鍵となる考え方

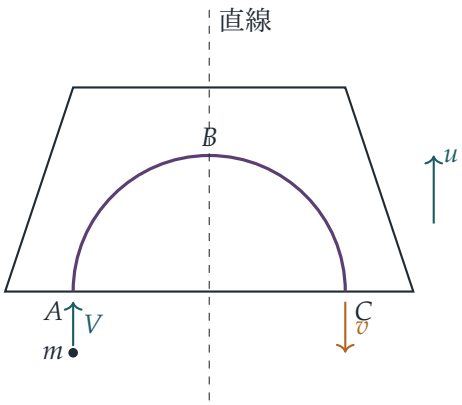
台はなめらかで溝もなめらかなので、系の外部から直線方向に押す力はなく、またどの力も仕事をしない。したがって、直線方向の運動量（momentum）と運動エネルギー（kinetic energy）という二つの保存則が得られる。出口での溝の接線（tangent）は直線に平行なので、出口では**両方**の速度が直線方向を向き、二つの保存則は一次元の弾性衝突（elastic collision）とまったく同じように働く。固定された薄板（lamina）については、平均の力は単に力積（impulse）の総和をかかった時間で割ったものである。

問題文の表現について一言述べておく。問題文では $A$ と $B$ における接線が直線に平行であるとしているが、図を見ると直線に平行なのは両端 $A$ と $C$ における接線である（$B$ では溝は直線に垂直である）。ここでは、明らかに意図されている $A$ と $C$ を用いる。

## 解答

### 動く薄板

粒子を質点（point mass）、薄板を直線方向にのみ並進できる剛体（rigid body）とみなし、すべての接触はなめらかであるとする。直線を座標軸にとり、粒子が $A$ から入るときの運動の向きを正の向きとする。




粒子が $C$ から直線方向の速度 $v$（$V$ の向きを正とする）で出ていき、そのとき薄板の直線方向の速度が $u$ であるとする。

**考えてみよう** $C$ における粒子の速度は、なぜ直線方向を向いていなければならないのか。

薄板に対して粒子は溝に沿って動くので、$C$ における相対速度はそこでの接線方向、すなわち直線に平行な方向を向く。薄板自身は直線方向にしか動かない。この二つを合成すると、$C$ における粒子の実際の速度もまた直線方向を向く。したがって出口では、それぞれの物体について一つの数だけを考えればよい。

運動の間、系（粒子と薄板）に外部から働く力は、鉛直方向を向く台からの垂直抗力（normal reaction）と、薄板を直線上に保つ力であり、後者は直線に垂直である（直線はなめらかである）。溝が粒子に及ぼす力と粒子が溝に及ぼす力は内力（internal force）であり、対になって打ち消し合う。よって直線方向の運動量は保存される：

$$mV = mv + Mu. \tag{1}$$

すべての接触はなめらかで台は水平なので、仕事はなされず、運動エネルギーは保存される。（溝の垂直抗力は粒子と薄板それぞれに対しては仕事をするが、抗力は**相対速度**に垂直なので、その二つの量は打ち消し合う。）よって

$$\tfrac{1}{2}mV^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}Mu^2. \tag{2}$$

(1) と (2) を次のように書き直す。

$$m(V - v) = Mu, \qquad m(V - v)(V + v) = Mu^2.$$

一つの解は $v = V, u = 0$ であるが、これは何も起こる前の $A$ における状況である。$C$ では粒子は薄板に対して**逆向き**に動いているので、$v \neq V$ かつ $u \neq 0$ であり、第 2 式を第 1 式で割って次を得る。

$$V + v = u.$$

（これは、薄板に対する粒子の相対速さが両端でともに $V$ であることを意味しており、ちょうど弾性衝突の場合と同じである。）$u = V + v$ を (1) に代入すると

$$mV = mv + MV + Mv \quad \Longrightarrow \quad v = -\frac{M-m}{M+m}V, \qquad u = V + v = \frac{2m}{M+m}V.$$

$m < M$ なので $v$ は負である。すなわち、粒子は来た向きへ戻るように $C$ から出ていく。よって粒子が溝を離れるとき

$$\text{粒子の速さ} = \frac{M-m}{M+m}V, \qquad \text{薄板の速さ} = \frac{2m}{M+m}V,$$

であり、薄板は粒子のもとの運動の向きに動き、粒子はその反対向きに動く。

粒子は確かに溝を回り切る。もし粒子が薄板に対して静止する点があれば、そこでは粒子は薄板と同じ速度をもち、運動エネルギーは $\frac{1}{2}(mV)^2/(M+m) < \frac{1}{2}mV^2$ となるが、これはエネルギー保存則に反する。したがって相対速さがゼロになることはない。

### 薄板を固定した場合

今度は薄板は動けない。溝が粒子に及ぼす抗力は粒子の速度に垂直なので仕事をせず、粒子は一定の速さ $V$ で半円を回る。半円の長さは $\pi r$ なので、溝の中にいる時間は

$$T = \frac{\pi r}{V}.$$

粒子の運動量は前向きの $mV$ から後ろ向きの $mV$ に変わるので、薄板が粒子に与える力積の総和は直線に沿って後ろ向きに $2mV$ である。直線に垂直な方向の運動量は両端でともにゼロなので、力積の垂直成分はゼロである。

ニュートン（Newton）の第三法則（third law）により、粒子は薄板に直線に沿って前向きに $2mV$ の力積を与える。薄板は静止したままなので、留め金（peg）が逆向きの力積を与えなければならず、薄板は留め金を、粒子のもとの運動の向きに総力積 $2mV$ で押す。（前段落より、直線からの横向きの押す力は平均するとゼロになる。）$T$ で割ると、留め金に働く平均の力は

$$\frac{2mV}{\pi r/V} = \frac{2mV^2}{\pi r},$$

であり、その向きは粒子が溝に入ったときの向きである。（問題文の「単位時間あたりの平均の力」とは、まさにこれ、すなわち単位時間あたりの力積を意味する。）

このことは直接確かめることもできる。粒子には中心向きに $mV^2/r$ の力が必要なので、粒子は薄板を外向きに $mV^2/r$ で押す。粒子への半径が $CA$ となす角を $\theta$ とすると（$\theta$ は一定の割合で 0 から $\pi$ まで動く）、この押す力の直線方向の成分は $(mV^2/r)\sin\theta$ であり、$[0,\pi]$ における $\sin\theta$ の平均は $2/\pi$ である。

## 検算

- $M \to \infty$ のとき、薄板はほとんど動かない。$u \to 0$ となり、粒子の速さは固定された溝の場合と同様に $V$ に近づく。
- $m = M$ のとき、粒子は静止して出てきて、薄板が速さ $V$ をすべて受け取る。これは等しい質量どうしの弾性衝突と同じである。
- $M = 3, m = 1, V = 2$ のとき、$v = -1, u = 1$ である。運動量：$1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 2 = mV$。エネルギー：$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2$。運動方程式の数値シミュレーション（半円形の溝と半楕円形の溝について）でも小数点以下 6 桁まで同じ値が得られ、固定された薄板について $(mV^2/r)\sin\theta$ を数値積分すると平均の力 $2mV^2/(\pi r)$ が得られた。たとえば $m = 0.7, r = 1.3, V = 2.1$ のとき 1.5117 である。

## よくある間違い

- 解 $v = V, u = 0$ を残してしまう。これは両方の式を満たすが、出口ではなく入口の瞬間を表している。
- 直線方向の平均の力ではなく、最大の力 $mV^2/r$ を用いてしまう。横向きの成分は打ち消し合い、直線方向の成分が $mV^2/r$ に達するのは $B$ においてのみである。

## STEP のその先へ

前半は隠れた衝突である。溝の形がどうであれ、重要なのは保存量と出口での向きだけである。これは、力を知らなくても保存則によって散乱（scattering）の問題を扱うという考え方の根底にあるものである。ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）では、直線方向の座標はラグランジアン（Lagrangian）に現れないので、その共役運動量（conjugate momentum）は自動的に保存される。これが対称性と保存則の結びつき（ネーター（Noether）の定理）の出発点である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、運動量、力積、衝突をこの精神で扱っている。

解答例

# STEP I 1991、第 14 問

確率・統計 ・ 三角形の数え上げ

> **STEP I 1991、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q14

## 鍵となる考え方

3 つの長さ $a > b > c$ が退化しない三角形（non-degenerate triangle）をなすのは、最も長い辺が他の 2 辺の和より真に短いとき、すなわち $b + c > a$ のときであり、かつそのときに限る。残りの 2 つの三角不等式（triangle inequality）は自動的に成り立つ。そこで $a$ を固定し、各 $b$ について $a - b$ と $b$ の間に収まる $c$ の値の個数を数える。この個数は 2 ずつ増えていくので、奇数（または偶数）の和が現れるのである。さらにあらゆる $a$ について足し合わせるには、$\sum k^2$ のよく知られた公式だけがあればよい。

## 解答

### 三角形が存在するのはどのようなときか

$a > b > c > 0$ とする。退化しない三角形のための 3 つの三角不等式は

$$b + c > a, \qquad a + c > b, \qquad a + b > c.$$

である。後の 2 つは、$a$ がすでに $b$ よりも $c$ よりも大きいので自動的に成り立つ。したがって、3 本の棒が退化しない三角形をなすための必要十分条件は $b + c > a$ である。（$b + c = a$ のとき「三角形」はつぶれて面積が 0 になるので、除外する。）

### 最も長い棒の長さが偶数の場合

$a$ を固定する。次を満たす整数 $b, c$ が必要である。

$$a - b < c < b, \qquad b < a.$$

与えられた $b$ に対し、$a-b+1 \le c \le b-1$ を満たす整数 $c$ の個数は

$$(b-1)-(a-b+1)+1 = 2b-a-1,$$

である。ただしこれが正の場合であり、そうでなければ $c$ は存在しない。（ここで $c \ge a-b+1 \ge 2$ であるから、$c$ は自動的に実際の棒の長さとなることに注意する。）

いま $a$ を偶数とする。このとき $2b-a-1$ は奇数であり、これが 1 以上となるのは $b \ge \frac{a}{2}+1$ のときであり、かつそのときに限る。よって $b$ は $\frac{a}{2}+1$ から $a-1$ まで動き、

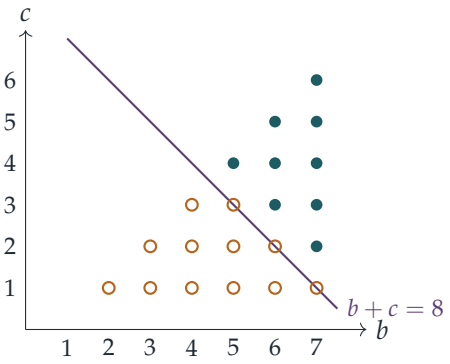
$$\begin{aligned} b = \tfrac{a}{2}+1 &: \quad 2b-a-1 = 1, \\ b = \tfrac{a}{2}+2 &: \quad 2b-a-1 = 3, \\ &\vdots \\ b = a-1 &: \quad 2b-a-1 = a-3. \end{aligned}$$

となる。$b$ が 1 増えるごとに個数は 2 ずつ増えるので、この長さを最も長い棒とする三角形の個数は

$$1+3+5+\cdots+(a-3),$$

であり、これが示すべきことであった。（$a=2$ のときこの和は空和となるが、これは正しい。最長辺が 2 の三角形は存在しない。）最初の $k$ 個の奇数の和は $k^2$ であり、ここでは項数が $\frac{a-2}{2}$ であるから、この個数は $\left(\frac{a-2}{2}\right)^2$ である。

下の図は $a=8$ の場合を示している。各点は $8>b>c$ を満たす組 $(b,c)$ であり、塗りつぶした点は直線 $b+c=8$ より上にあるものである。各列には塗りつぶした点がそれぞれ 1 個、3 個、5 個含まれる。




### 最も長い棒の長さが奇数の場合

次に $a$ を奇数とする。このとき $2b-a-1$ は偶数であり、これが正となるのは $b \ge \frac{a+3}{2}$ のときであり、かつそのときに限る。$b$ が $\frac{a+3}{2}$ から $a-1$ まで動くとき、個数は

$2,4,\dots,a-3$ となるので、三角形の個数は

$$2+4+6+\cdots+(a-3)=2\Big(1+2+\cdots+\tfrac{a-3}{2}\Big)=\frac{a-3}{2}\cdot\frac{a-1}{2}=\frac{(a-1)(a-3)}{4}.$$

である。（この場合も $a=3$ のとき正しく 0 となる。）

### 三角形の総数

最も長い棒は $3,4,\dots,2N+1$ のいずれでもありうる（それより小さい値ではいずれにせよ 0 個である）。

**偶数**の $a=2m$（$m=1,\dots,N$）のとき、個数は $(m-1)^2$ であるから、これらの寄与は

$$\sum_{m=1}^{N}(m-1)^2=\sum_{k=1}^{N-1}k^2=\frac{(N-1)N(2N-1)}{6}.$$

である。

**奇数**の $a=2m+1$（$m=1,\dots,N$）のとき、個数は $\frac{(2m)(2m-2)}{4}=m(m-1)$ であるから、これらの寄与は

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{N}(m^2-m)&=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}-\frac{N(N+1)}{2}\\&=\frac{N(N+1)(2N-2)}{6}=\frac{(N-1)N(N+1)}{3}.\end{aligned}$$

である。

これらを足し合わせると、退化しない三角形をなす選び方の総数は

$$T_N=\frac{N(N-1)}{6}\big[(2N-1)+2(N+1)\big]=\frac{N(N-1)(4N+1)}{6}.$$

である。

> ? **考えてみよう** 1 つの公式をそのまま足し合わせるのではなく、$a$ の偶奇で和を分けるのはなぜか。

与えられた $a$ に対する個数は、$a$ が偶数のときは $\frac{(a-2)^2}{4}$ であるが、$a$ が奇数のときは $\frac{(a-1)(a-3)}{4}=\frac{(a-2)^2-1}{4}$ である。これらは $a$ の異なる多項式であるから、$a=2m$ または $a=2m+1$ とおくことで、それぞれを標準的な公式で和をとれる $m$ の簡単な多項式に直すのである。

### $N=3$ の場合の確認

公式から $T_3=\frac{3\cdot2\cdot13}{6}=13$ が得られる。棒 $1,\dots,7$ で直接書き出し、三角形を $(a,b,c)$ と表すと次のようになる。

- $a = 4$（1 個）：$(4,3,2)$
- $a = 5$（2 個）：$(5,4,2)$、$(5,4,3)$
- $a = 6$（4 個）：$(6,4,3)$、$(6,5,2)$、$(6,5,3)$、$(6,5,4)$
- $a = 7$（6 個）：$(7,5,3)$、$(7,5,4)$、$(7,6,2)$、$(7,6,3)$、$(7,6,4)$、$(7,6,5)$

これで $1+2+4+6 = 13$ 個の三角形となり、公式と一致する（さらに偶数の $a$ については $1 = 1^2$、$4 = 2^2$、奇数の $a$ については $2 = 2\cdot 1$、$6 = 3\cdot 2$ とも一致する）。

### 確率

3 本の棒を無作為に非復元抽出（without replacement）で取り出すとき、$\binom{2N+1}{3}$ 通りの順序を区別しない選び方はどれも同様に確からしい。

$$\binom{2N+1}{3} = \frac{(2N+1)(2N)(2N-1)}{6},$$

であるから、退化しない三角形ができる確率（probability）は

$$\frac{T_N}{\binom{2N+1}{3}} = \frac{N(N-1)(4N+1)}{(2N+1)\,2N\,(2N-1)} = \frac{(N-1)(4N+1)}{2(4N^2-1)},$$

となる。ここで因数 $N$ を約分し、$(2N+1)(2N-1) = 4N^2-1$ を用いた。これが求める結果である。

## 検算

- $N = 3$ のとき確率は $\frac{2\cdot 13}{2\cdot 35} = \frac{13}{35}$ であり、$\binom{7}{3} = 35$ 通りの選び方のうち 13 個が三角形であることと一致する。
- $N \to \infty$ のとき確率は $\frac{4N^2}{8N^2} = \frac{1}{2}$ に収束する。これは連続版と一致する。すなわち、$[0,1]$ 上の一様分布に従う 3 つの独立な長さについて、最大のものが他の 2 つの和より小さい確率は $\frac{1}{2}$ である。
- 2 から 29 までのすべての $N$ について、あらゆる 3 つ組を総当たりで数えた結果は、$T_N$ とも確率の公式とも完全に一致した。

## よくある間違い

- $b + c \geq a$ を用いてしまう。等号の場合はつぶれた三角形となり、問題ではこれを除外しているので、どの個数も大きくなりすぎる。

- 3 つの三角不等式をすべて個別に確かめてしまう、あるいは $a$ が最大であれば $b+c>a$ だけが問題になることを見落とす。
- $b$ の範囲を 1 つずれて取ってしまう。$a=6$ のような小さな場合で確かめるとよい（三角形は $(6,4,3)$、$(6,5,2)$、$(6,5,3)$、$(6,5,4)$、すなわち $1+3$ 個）。

## STEP のその先へ

図のように領域内の格子点（lattice point）を数えることは、面積を計算することの離散版であり、$N$ が大きくなると、個数を $\binom{2N+1}{3}$ で割った値は単位立方体における体積比に近づく。このような離散一様分布から連続一様分布への移行や、折れた棒の問題（broken-stick problem）のような「幾何確率（geometric probability）」の問題は、大学 1 年次の古典的な題材である。さらに学ぶには、Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）がよい。

解答例

# STEP I 1991、第 15 問

確率・統計 ・ 正規近似

> **STEP I 1991、問 15**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q15

## 鍵となる考え方

各 $X_j$ は平均（mean）0、分散（variance）1 をもち、各回の投げは独立（independent）であるから、$S_n$ は平均 0、分散 $n$ をもつ。$n$ が大きいときは、中心極限定理（central limit theorem）により $S_n$ を近似的に正規分布（normal distribution）に従うものとして扱える。最後の小問も見かけは似ているが、落とし穴がある。どの $Y_k$ にも**同じ** 1 回目の投げ $X_1$ が含まれているので、$Y_k$ たちは独立ではなく、その共有された 1 回の投げが結局は合計全体を支配してしまうのである。

## 解答

各 $X_j$ はそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で値 $\pm 1$ をとるので、

$$\mathrm{E}(X_j) = 0, \qquad \mathrm{E}(X_j^2) = 1, \qquad \mathrm{Var}(X_j) = 1.$$

各回の投げは独立であるから、$\mathrm{E}(S_n) = 0$ かつ $\mathrm{Var}(S_n) = n$ である。中心極限定理により、$n$ が大きいとき

$$S_n \approx \mathrm{N}(0,\, n).$$

（同じことであるが、表の出た回数を $H$ とすると $H \sim \mathrm{B}(n, \frac{1}{2})$ であり、$S_n = H - (n - H) = 2H - n$ である。）

### 小問 (i)

$n = 10\,000$ のとき、$S_n$ の標準偏差（standard deviation）は $\sqrt{10\,000} = 100$ であるから、

$$\mathrm{P}(S_n > 100) \approx \mathrm{P}\left(Z > \frac{100}{100}\right) = 1 - \Phi(1) \approx 0.16.$$

もう少し丁寧に扱いたければ、$H$ に連続修正（continuity correction）を施せばよい。$S_n > 100$ は $2H - 10\,000 > 100$、すなわち $H \geq 5051$ を意味する。$H$ の平均は 5000、標準偏差は 50 であるから、

$$\mathrm{P}(H \geq 5051) \approx \mathrm{P}\left(Z > \frac{5050.5 - 5000}{50}\right) = 1 - \Phi(1.01) \approx 0.156.$$

いずれにせよ、答えはおよそ 0.16 である。

**小問 (ii)**

標準化すると、

$$\mathrm{P}(S_n > 0.01n) \approx \mathrm{P}\left(Z > \frac{0.01n}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(0.01\sqrt{n}\right).$$

これは $n$ が増加すると減少し、0.01 より小さくなるのはちょうど $\Phi(0.01\sqrt{n}) > 0.99$ のときである。数表より $\Phi(2.326) = 0.99$ であるから、

$$0.01\sqrt{n} > 2.326 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{n} > 232.6 \quad \Longleftrightarrow \quad n > 54\,100\text{(近似値)}.$$

が必要である。よって、そのような最小の $n$ はおよそ 54 000 である。（代わりに 2.33 を用いるとおよそ 54 300 となる。この程度の近似では、$5.4 \times 10^4$ に近い答えであればどれも正しい。）

**新しい得点の付け方**

$2 \leq k \leq n$ に対して、1 回目の投げと $k$ 回目の投げの組合せは 4 通りある。

| 1 回目の投げ | $k$ 回目の投げ | 得点 $Y_k$ | $X_1 + X_k$ |
|---|---|---|---|
| H | H | 2 | $1+1=2$ |
| T | T | $-2$ | $-1-1=-2$ |
| H | T | 0 | $1-1=0$ |
| T | H | 0 | $-1+1=0$ |

最後の 2 列はすべての場合で一致するので、求めるとおり $Y_k = X_1 + X_k$ である。

**平均と分散。** 線形性（linearity）により、$\mathrm{E}(Y_k) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_k) = 0$ である。$k \geq 2$ であるから、$X_1$ と $X_k$ は異なる回の投げであり、したがって独立である。よって

$$\mathrm{Var}(Y_k) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_k) = 2.$$

（直接計算してもよい。$Y_k$ はそれぞれ確率 $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ で 2、$-2$、0 をとるので、$\mathrm{E}(Y_k^2) = 2$ である。）

**極限。** $m = n-1$、$T = Y_2 + Y_3 + \cdots + Y_n$ とおく。すると

$$T = \sum_{k=2}^{n}(X_1 + X_k) = mX_1 + S', \qquad \text{ただし} S' = X_2 + X_3 + \cdots + X_n.$$

> **考えてみよう** 各 $Y_k$ は、定数倍した $X_j$ とちょうど同じように、平均 0、分散 2 をもつ。それなのに、なぜ小問 (ii) の議論をそのまま写すことができないのだろうか。

それは、小問 (ii) の議論では各項が独立であることが必要だったのに、$Y_k$ たちは独立ではないからである。これらはすべて $X_1$ を共有している。実際、$j \neq k$ のとき $\mathrm{Cov}(Y_j, Y_k) = \mathrm{Var}(X_1) = 1$ であり、$\mathrm{Var}(T) = m^2 + m$ となって $2m$ にはならない。そこで、$X_1$ の 2 つの値を別々に調べる。$S'$ はそれぞれ $\pm 1$ である $m$ 個の項の和なので、$-m \leq S' \leq m$ であることに注意する。

- 1 回目の投げが裏ならば、$X_1 = -1$ かつ $T = -m + S' \leq 0$ である。よって $T > 0.01m$ となることはありえない。
- 1 回目の投げが表ならば、$X_1 = 1$ かつ $T = m + S'$ であるから、$T > 0.01m$ となるのはちょうど $S' > -0.99m$ のときである。小問 (ii) と同じ正規近似により、$S' \approx \mathrm{N}(0, m)$ として

$$\mathrm{P}(S' \leq -0.99m) \approx \Phi\left(-0.99\sqrt{m}\right) \to 0 \quad \text{極限} m \to \infty.$$

  （実は近似は必要ない。チェビシェフ（Chebyshev）の不等式（Chebyshev's inequality）により、この確率は高々 $m/(0.99m)^2 \to 0$ である。）

$S'$ は $X_1$ と独立であるから、

$$\mathrm{P}(T > 0.01m) = \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{P}(S' > -0.99m) \;\to\; \tfrac{1}{2} \quad \text{極限} n \to \infty.$$

よって、この主張は**偽**である。確率は 0 ではなく $\frac{1}{2}$ に収束する。言葉で言えば、$n$ が大きいとき、合計が正になるのは本質的に 1 回目の投げが表のときであり、そうでなければ正にはならない。

## 検算

- 小問 (i)：$H \sim \mathrm{B}(10\,000, \frac{1}{2})$ に対する厳密な二項分布（binomial distribution）の確率 $\mathrm{P}(H \geq 5051)$ は 0.15625 であり、連続修正をした値 0.156 と一致する。
- 小問 (ii)：$\mathrm{P}(S_n > 0.01n)$ の厳密な二項分布の値は、$n = 50\,000$ で 0.0125、$n = 54\,000$ 付近でおよそ 0.0100、$n = 55\,000$ で 0.0094 である。したがって、境目は確かに 54 000 に近い。

- 最後の小問：$n \leq 14$ についてすべての $2^n$ 通りの結果を数え上げると、$\frac{1}{2}\mathrm{P}(S' > -0.99m)$ と厳密に一致する。$n = 14$ ですでに確率は 0.49994 であり、$n = 100$ でのシミュレーションでは 0.497 となった。

## よくある間違い

- $Y_2, \ldots, Y_n$ を独立として扱い、$\mathrm{Var}(T) = 2(n-1)$ と結論してしまうこと。こうすると確率が 0 に収束するように見えてしまう。
- 得点の分散として、$n$ の代わりに $\mathrm{Var}(S_n) = n/4$（表の出た回数の分散）を用いてしまうこと。

## STEP のその先へ

小問 (ii) は大数の弱法則（weak law of large numbers）を定量的に表したものである。$n$ が大きくなれば、$S_n/n$ が 0 から大きく離れることはほとんど起こりえない。最後の小問は、各項が強く従属しているときにこの法則がどのように破れるかを示している。ここではすべての項が 1 回目の投げを共有しているので、平均 $T/m = X_1 + S'/m$ は平均値 0 ではなく、確率的な量である $X_1$ に収束する。従属な列に対する大数の法則（エルゴード定理（ergodic theorems）、交換可能な列（exchangeable sequences））は、大学の確率論における豊かな話題である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、大数の弱法則とチェビシェフの不等式が扱われている。

解答例

# STEP I 1991、第 16 問

確率・統計 ・ 条件付き確率

> **STEP I 1991、問 16**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q16

## 鍵となる考え方

それぞれの爬虫類が初めて道路を見てから $n = 0, 1, 2, \ldots$ 分後という確認時刻ごとに、すべてを整理する。ヒキガエルの待ち時間は幾何分布（geometric distribution）に従うので、彼女は確実に道路を渡る。カエルは事情が異なる。彼の規則では遅くとも $n = 3$ までに決断を迫られるので、彼の話は四つの段階しかなく、各段階で彼が無事に渡りきる確率を列挙できる。その一覧が得られれば、ヒキガエルとの比較も条件付き確率（conditional probability）も、いくつかの和を計算するだけである。

## 解答

以下を通して、異なる確認時刻における道路の状態は独立（independent）で、それぞれ確率 0.1 で安全であり、ヒキガエルとカエルは互いに独立に行動するものと仮定する。カエルは「後で」別の時刻に渡るのだから、これは妥当である。渡るのにかかる時間は無視できるので、確認時刻 $n$ に渡り始めた爬虫類は時刻 $n$ 分に到着する。

### ヒキガエル

ヒキガエルは安全なときにしか渡らないので、轢かれることは決してない。確認時刻 $0, 1, \ldots, k$ の後もまだ待っている確率は $0.9^{k+1}$ であり、これは 0 に収束する。したがって、彼女が最終的に安全に渡る確率は

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0.9^k(0.1) = \frac{0.1}{1 - 0.9} = 1.$$

である。彼女が渡る時刻を $T$ とおく。すると $P(T = k) = 0.9^k(0.1)$ であり、後で使うために記しておくと $P(T > k) = 0.9^{k+1}$ である。

### カエル

確認時刻 $n$ において、彼がまだ待っているとすると、

- 確率 0.1 で道路は安全であり、彼は安全に渡る。
- 確率 $0.9 \cdot \frac{n}{3}$ で道路は安全でないが、それでも彼は渡り始め、確率 0.2 で無事に到着し、確率 0.8 で轢かれる。
- 確率 $0.9\left(1-\frac{n}{3}\right)$ で彼は次の確認時刻まで待つ。

$n=0$ では彼は決して危険を冒さず、$n=3$ では安全でないときに渡り始める確率が 1 になるので、それまでに渡っていなければ $n=3$ で必ず渡り始める。特に、$n>3$ の場合は起こりえない。

確認時刻 $n$ に彼がまだ待っている確率は

$$w_0=1, \quad w_1=0.9, \quad w_2=0.9\cdot 0.9\cdot \tfrac{2}{3}=0.54, \quad w_3=0.54\cdot 0.9\cdot \tfrac{1}{3}=0.162.$$

である。確認時刻 $n$ に彼が無事に到着する確率は $w_n\left(0.1+0.9\cdot\frac{n}{3}\cdot 0.2\right) = w_n(0.1+0.06n)$ である。この確率を $s_n$ と書くと、

$$s_0=1\times 0.1=0.1, \qquad s_1=0.9\times 0.16=0.144,$$
$$s_2=0.54\times 0.22=0.1188, \qquad s_3=0.162\times 0.28=0.04536.$$

よって

$$P(\text{カエルが安全に渡る})=0.1+0.144+0.1188+0.04536=\boxed{0.40816=\tfrac{2551}{6250}}.$$

彼が轢かれる確率は残りの $1-0.40816=0.59184$ である。

### 両者とも安全で、カエルのほうが速い場合

カエルが無事に到着する時刻を $F$ とおく。両者が無事に到着し、かつ $F<T$ となる確率を求めればよい。ヒキガエルは確実に安全であり、独立性から

$$P(\text{カエルが時刻}n\text{ で安全に到着し、かつ}T>n)=s_n\,P(T>n)=s_n(0.9)^{n+1}.$$

**考えてみよう** なぜ $T\geq n$ ではなく $T>n$ なのか？

両者が同じ確認時刻 $n$ に渡るなら、かかった時間は同じであり、カエルが真に速いとはいえない。したがって、ヒキガエルは時刻 $n$ の確認の後もまだ待っていなければならず、その確率は $0.9^{n+1}$ である。カエルのありうる四つの時刻について和をとると、

$$\begin{aligned} P &= 0.1(0.9)+0.144(0.81)+0.1188(0.729)+0.04536(0.6561)\\ &= 0.09+0.11664+0.0866052+0.029760696\\ &= 0.323005896\approx \boxed{0.323}. \end{aligned}$$

厳密な分数で表すと $\frac{40375737}{125000000}$ である。

### 最後の小問

カエルが最初の確認から 2 分後の時点で向こう側に到着していないという事象を $A$、彼が轢かれるという事象を $R$ とおく。渡るのは一瞬なので、$n=2$ の確認時刻に無事に渡ったカエルは 2 分の時点で到着**している**。したがって $A$ は「$n=0$、1、2 のいずれかで安全に到着する」の補事象（complement）である：

$$P(A) = 1 - (s_0 + s_1 + s_2) = 1 - 0.3628 = 0.6372.$$

轢かれたカエルはどの時刻にも決して到着しないので、$R \subseteq A$ であり $P(R \cap A) = P(R) = 0.59184$ である。よって

$$P(R \mid A) = \frac{0.59184}{0.6372} = \frac{59184}{63720} = \boxed{\frac{274}{295} \approx 0.929}.$$

これには、すでに（$n=1$ または $n=2$ で）轢かれたカエルと、まだ待っていてその後 $n=3$ で轢かれるカエルの両方が含まれており、「どこかの段階で」という条件のとおりである。

（この条件を、$n=0$ と $n=1$ の確認の後、すなわち $n=2$ の確認の**前**に到着していないという意味に解釈する読者もいるだろう。その解釈では $0.59184/(1-0.244) = \frac{137}{175} \approx 0.783$ となる。ちょうど 2 分での到着は、彼が出発してから「2 分後」の到着であるから、本書では上の解釈を採る。）

## 検算

- カエルの結果はすべての場合を尽くしていなければならない。$n=1,2,3$ で轢かれる確率は $0.9(0.24)$、$0.54(0.48)$、$0.162(0.72)$、すなわち $0.216+0.2592+0.11664 = 0.59184$ であり、これはちょうど $1-0.40816$ に等しい。
- カエルが安全に渡る確率は、ヒキガエルの確実な 1 よりかなり小さい。せっかちなほうなのだから、そうあるべきである。
- 分数による厳密な数え上げと、$10^6$ 組の爬虫類によるモンテカルロ・シミュレーション（Monte Carlo simulation）を行ったところ 0.4087、0.3234、0.9286 が得られ、0.40816、0.32301、0.92881 と一致した。

## よくある間違い

- $n=0$ でカエルに危険を冒させてしまう。そこでは規則により $n/3 = 0$ である。

- カエルの過程が $n = 3$ で終わることを忘れ、ヒキガエルと同じように彼についても幾何級数を足してしまう。
- 最後の小問で、$P$(安全に到着していない、$n \leq 2$) で割っているのに、分子には $n = 2$ までに轢かれる場合しか入れない。問題が尋ねているのは $n = 3$ を含め、どこかの段階で轢かれることである。

## STEP のその先へ

カエルの道のりは、吸収状態（absorbing state）（「安全」と「轢かれる」）をもつ小さな**マルコフ連鎖**（Markov chain）であり、ヒキガエルの待ち時間は幾何分布、すなわち無記憶性をもつ指数分布（exponential distribution）の離散版である。マルコフ連鎖の吸収確率と到達時間（hitting time）は、最初の確率論の講義の中心的な話題である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、その両方を展開している。

解答例

# STEP II 1991、第 1 問

純粋数学 • 2 次式と判別式

> **STEP II 1991、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q1

## 鍵となる考え方

二次式（quadratic）が完全平方式（perfect square）の定数倍になるのは、それが重解（repeated root）をもつとき、すなわち判別式（discriminant）が o になるときであり、またそのときに限る。後に続くどの部分も、係数が $\lambda$ に依存する二次式にこのただ一つの条件を当てはめたものである。判別式を o にする $\lambda$ を求めると $\lambda$ についての二次式が得られ、分解は f と g についての二つの一次方程式を解くことで得られる。

## 解答

### $(*)$ の形になるための条件

展開すると

$$a(x+k)^2 = ax^2 + 2akx + ak^2.$$

$\mathrm{h}(x)$ がこの形であれば、係数比較（comparing coefficients）により $b = 2ak$ かつ $c = ak^2$ であるから、

$$b^2 = 4a^2k^2 = 4a \cdot ak^2 = 4ac.$$

逆に $b^2 = 4ac$ ならば、$k = \dfrac{b}{2a}$ とおく（$a \neq 0$ なのでこれは可能である）。すると $2ak = b$ かつ $ak^2 = \dfrac{b^2}{4a} = c$ となるので、$\mathrm{h}(x) = a(x+k)^2$ である。したがって条件は

$$b^2 = 4ac,$$

であり、これは判別式が o であることを意味する。

### $\lambda$ の二つの値

$$\mathrm{f}(x)+\lambda \mathrm{g}(x)=(3+\lambda)x^2+4x-2\lambda.$$

である。$\lambda=-3$ のとき、これは $4x+6$ となる。$(*)$ の形には $x^2$ の係数が 0 でないことが必要なので、これは $(*)$ の形ではない。よって $3+\lambda\neq 0$ であり、上の条件から

$$16=4(3+\lambda)(-2\lambda) \iff \lambda^2+3\lambda+2=0 \iff (\lambda+1)(\lambda+2)=0.$$

が必要である。ゆえに $\lambda=-1$ または $\lambda=-2$ であり、どちらも $-3$ ではない。具体的には

$$\mathrm{f}(x)-\mathrm{g}(x)=2x^2+4x+2=2(x+1)^2,$$
$$\mathrm{f}(x)-2\mathrm{g}(x)=x^2+4x+4=(x+2)^2.$$

### 分解

**考えてみよう** $\mathrm{f}-\mathrm{g}$ と $\mathrm{f}-2\mathrm{g}$ についての二つの事実から、どうすれば f と g をそれぞれ求められるだろうか。

上に示した二つの恒等式（identities）を、未知数 $\mathrm{f}(x)$ と $\mathrm{g}(x)$ についての連立一次方程式（simultaneous linear equations）とみなす。第一式から第二式を引くと

$$\mathrm{g}(x)=2(x+1)^2-(x+2)^2,$$

が得られ、さらに $\mathrm{f}(x)=(\mathrm{f}(x)-2\mathrm{g}(x))+2\mathrm{g}(x)=(x+2)^2+4(x+1)^2-2(x+2)^2$、すなわち

$$\mathrm{f}(x)=4(x+1)^2-(x+2)^2.$$

となる。展開して確かめると、$4(x^2+2x+1)-(x^2+4x+4)=3x^2+4x$ であり、$2(x^2+2x+1)-(x^2+4x+4)=x^2-2$ である。よって一つの選び方は

$$A=4,\quad B=-1,\quad C=2,\quad D=-1,\quad m=1,\quad n=2.$$

である。$m$ と $n$ の役割を入れ替えると、同等な答え $m=2$、$n=1$、$A=-1$、$B=4$、$C=-1$、$D=2$ が得られる。

### 最後の部分

このとき

$$\mathrm{f}(x)+\lambda \mathrm{g}(x)=(3+\lambda)x^2+4x+\lambda\alpha.$$

である。先ほどと同様に、$\lambda=-3$ では一次式 $4x-3\alpha$ となり、これは決して $(*)$ の形にはならない。$\lambda\neq -3$ のとき、条件 $b^2=4ac$ は

$$16=4(3+\lambda)\lambda\alpha \iff \alpha\lambda^2+3\alpha\lambda-4=0. \qquad (\dagger)$$

となる。(†) を満たし、かつ $\lambda \neq -3$ である $\lambda$ の値がちょうど一つであるようにしたい。

> **考えてみよう** (†) が二つの解をもち、そのうち一つが除外される値 $\lambda = -3$ である、ということはありうるだろうか。

ありえない。(†) の左辺に $\lambda = -3$ を代入すると $9\alpha - 9\alpha - 4 = -4 \neq 0$ となるので、$\lambda = -3$ が解になることはない。したがって条件を満たす $\lambda$ の値は、ちょうど (†) の解である。

- $\alpha = 0$ ならば、(†) は $-4 = 0$ となり、解をもたない。よって $\alpha \neq 0$ である。
- $\alpha \neq 0$ ならば、(†) は $\lambda$ についての真の二次方程式である。これがちょうど一つの解をもつのは、判別式が 0 のとき、かつそのときに限る：

  $$9\alpha^2 + 16\alpha = 0 \iff \alpha(9\alpha + 16) = 0 \iff \alpha = -\tfrac{16}{9},$$

  ここで $\alpha \neq 0$ を用いた。

ゆえに

$$\alpha = -\frac{16}{9}.$$

である。重解は $\lambda = -\frac{3\alpha}{2\alpha} = -\frac{3}{2}$ であり、実際

$$f(x) - \tfrac{3}{2}\left(x^2 - \tfrac{16}{9}\right) = \tfrac{3}{2}x^2 + 4x + \tfrac{8}{3} = \tfrac{3}{2}\left(x + \tfrac{4}{3}\right)^2.$$

となる。

## 検算

分解をある値で展開して確かめる。$x = 1$ のとき、$4(2)^2 - (3)^2 = 7 = f(1)$ かつ $2(2)^2 - 3^2 = -1 = g(1)$ である。最後の部分では、$\frac{3}{2}(x + \frac{4}{3})^2$ の $x = 0$ での値は $\frac{3}{2} \cdot \frac{16}{9} = \frac{8}{3}$ であり、$\lambda\alpha = (-\frac{3}{2})(-\frac{16}{9})$ と一致する。$|p| \leq 60$、$q \leq 12$ を満たすすべての有理数 $\lambda = p/q$ をコンピュータで調べたところ、中間の部分ではちょうど $\lambda = -1, -2$ が、$\alpha = -\frac{16}{9}$ のときには $\lambda = -\frac{3}{2}$ のみが見つかった。

## よくある間違い

- $(*)$ における条件 $a \neq 0$ を忘れること。$\lambda = -3$ では式が一次式になるので、その値が除外される理由を述べるべきである。
- 最後の部分で、「(†) の判別式が 0」で止まってしまい、$\alpha = 0$ の場合を扱わないこと。このとき (†) はそもそも二次式ではなく、解をもたない。

## STEP のその先へ

f と g を一次形式（linear forms）の二つの平方の結合として表すことは、二つの二次形式（quadratic forms）の同時対角化（simultaneous diagonalisation）にほかならない。$f + \lambda g$ を退化（degenerate）させる $\lambda$ の値は、対応する対称行列（symmetric matrices）についての $\det(F + \lambda G) = 0$ の解であり、これは「一般化固有値（generalised eigenvalue）」問題である。二つの $\lambda$ の値が一致する最後の部分は、まさにそのような対角化が失敗しうる場合である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、二次形式と固有値をこうした観点から扱っている。

解答例

# STEP II 1991、第 2 問

純粋数学 ・ 双曲線の漸近線

**STEP II 1991、問 2**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/91-s2-q2

## 鍵となる考え方

2 次の部分 $3y^2 - 10xy + 3x^2$ は $(3y - x)(y - 3x)$ と因数分解（factorise）でき、これがすべてである。1 次の項まで含めてこの因数分解を完成させると、曲線は「2 つの 1 次式の積 $= 1$」という形になる。曲線上を遠くへ進むと一方の因数は限りなく大きくならざるをえないので、もう一方の因数は 0 に近づかなければならない。その因数を 0 とおいたものが漸近線（asymptote）である。これこそ、ヒントが求めている「極限における $s$ と $t$ の関係」にほかならない。

## 解答

### 接線

(†) を $x$ について陰関数微分（implicit differentiation）すると、

$$6y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 10y - 10x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 6x + 16\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 16 = 0,$$

したがって

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{10y - 6x + 16}{6y - 10x + 16} = \frac{5y - 3x + 8}{3y - 5x + 8}.$$

点 $(s, t)$ における傾きは $m = \dfrac{5t - 3s + 8}{3t - 5s + 8}$ であり、接線（tangent）は $y = mx + (t - ms)$ である。切片を通分すると、

$$t - ms = \frac{t(3t - 5s + 8) - s(5t - 3s + 8)}{3t - 5s + 8} = \frac{3t^2 - 10st + 3s^2 + 8t - 8s}{3t - 5s + 8}.$$

$(s,t)$ は曲線上にあるので $3t^2-10st+3s^2=-16t+16s-15$ であり、分子は $-8t+8s-15=-(8t-8s+15)$ となる。よって接線は

$$y=\left(\frac{5t-3s+8}{3t-5s+8}\right)x-\left(\frac{8t-8s+15}{3t-5s+8}\right),$$

となり、示すべき式が得られた。($3t-5s+8=0$ のときは接線は鉛直であり、この式は分母を払った形で読むものとする。)

### 漸近線

(†) を $(3y-x+a)(y-3x+b)+k=0$ の形に書くことを試みる。展開すると

$$(3y-x+a)(y-3x+b)=3y^2-10xy+3x^2+(3b+a)y-(b+3a)x+ab,$$

となるので、$3b+a=16$ かつ $b+3a=16$ が必要であり、$a=b=4$、$ab=16$ を得る。したがって (†) は

$$(3y-x+4)(y-3x+4)=1.$$

と書ける。点 $(s,t)$ に対して

$$u=3t-s+4,\qquad v=t-3s+4,\qquad \text{とおくと}\qquad uv=1.$$

接線の式に現れる式はすべて $u$、$v$ と定数の組合せで表せる。$t$ と $s$ の係数を比較すると

$$\begin{aligned}5t-3s+8&=\tfrac{1}{2}(3u+v),\\3t-5s+8&=\tfrac{1}{2}(u+3v),\\8t-8s+15&=2(u+v)-1=2(u+v)-uv,\end{aligned}$$

となる。ただし最後の式では $uv=1$ を用いた。よって接線の傾きと切片は

$$m=\frac{3u+v}{u+3v},\qquad c=\frac{8t-8s+15}{3t-5s+8}=\frac{2(2u+2v-uv)}{u+3v}.$$

**考えてみよう** $s\to\infty$ のとき、$u$ と $v$ はどうなるか。

$t$ を消去すると $u-3v=8s-8$ なので、$u-3v\to\infty$ である。$uv=1>0$ より、$u$ と $v$ は同符号である。

- ともに正ならば、$u-3v\to\infty$ より $u\to\infty$ でなければならず、すると $v=1/u\to 0$ である。
- ともに負ならば、$u-3v=3|v|-|u|\to\infty$ より $|v|\to\infty$ でなければならず、すると $u=1/v\to 0$ である。

これがヒントの求める関係である。一方の分枝では $t-3s+4\to 0$、もう一方の分枝では $3t-s+4\to 0$ となる。

**$v\to 0$、$u\to\infty$ の場合。**分子と分母を $u$ で割ると

$$m=\frac{3+v/u}{1+3v/u}\to 3,\qquad c=\frac{2(2+2v/u-v)}{1+3v/u}\to 4,$$

となるので、接線の極限は $y=3x-4$ である。

**$u\to 0$、$v\to\infty$ の場合。**分子と分母を $v$ で割ると

$$m=\frac{3u/v+1}{u/v+3}\to \tfrac{1}{3},\qquad c=\frac{2(2u/v+2-u)}{u/v+3}\to \tfrac{4}{3},$$

となるので、接線の極限は $y=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$、すなわち $3y=x-4$ である。

よって漸近線は $y=3x-4$ と $3y=x-4$ である。（代わりに $s\to-\infty$ とすると、2つの場合の役割が入れ替わるだけで同じ2直線が得られる。）これらはちょうど直線 $v=0$ と $u=0$ であることに注意しよう。因数分解した形を見れば、すぐにわかることである。

### 角と軸

直線 $y=3x-4$ の傾きは3なので、$x$ 軸となす角 $\theta$ は $\tan\theta=3$ を満たす。このとき $y$ 軸となす角は $\frac{\pi}{2}-\theta$ であり、$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta=\frac{1}{3}$ である。直線 $3y=x-4$ の傾きは $\frac{1}{3}$ なので、$x$ 軸となす角は $\arctan\frac{1}{3}$ であり、これは1本目の漸近線が $y$ 軸となす角と等しい。

**? 考えてみよう** なぜこれから角の二等分線がわかるのか。

直線 $y=x$ に関する鏡映（reflection）は $x$ 軸と $y$ 軸を入れ替え、いま示したことから、2本の漸近線の方向も入れ替える。すなわち方向 $(1,3)$ は $(3,1)$ に移る。したがって漸近線のなす角は $y=x$ の方向に関して対称であり、$y=x$ がその角を二等分する。実際、漸近線の方向は $x$ 軸から $\arctan 3$ と $\arctan\frac{1}{3}$ の角をなし、これらは $\frac{\pi}{4}\pm\left(\arctan 3-\frac{\pi}{4}\right)$ である。もう1本の二等分線は1本目に垂直である。よって二等分線（bisector）の傾きは $1$ と $-1$ である。

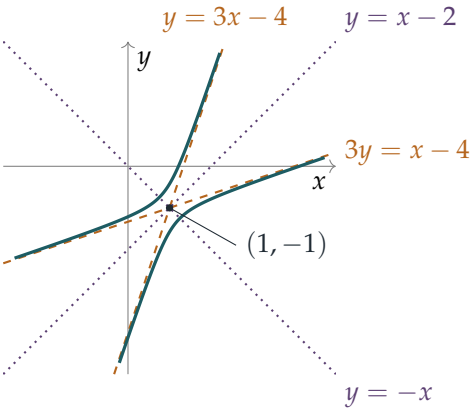
双曲線（hyperbola）の軸は、中心（漸近線の交点）を通る漸近線の角の二等分線である。$y=3x-4$ と $3y=x-4$ を連立すると $9x-12=x-4$ より $x=1$、$y=-1$ である。中心は $(1,-1)$ であり、軸は

$$y+1=x-1\iff y=x-2,\qquad y+1=-(x-1)\iff y=-x.$$

である。

どちらがどちらの軸かを見るには次のようにする。$y=-x$ 上では $u=v=4-4x$ なので、$uv=1$ より $x=1\pm\frac{1}{4}$ であり、頂点は $(\frac{5}{4},-\frac{5}{4})$ と $(\frac{3}{4},-\frac{3}{4})$ である。よって

$y = -x$ は主軸（transverse axis）である。$y = x - 2$ 上では $u = 2x - 2 = -v$ なので $uv = -(2x-2)^2 \leq 0$ となり、この直線（副軸（conjugate axis））は曲線と交わらない。




## 検算

- 点 $(\frac{5}{4}, -\frac{5}{4})$ は (†) を満たす：$3 \cdot \frac{25}{16} + 10 \cdot \frac{25}{16} + 3 \cdot \frac{25}{16} - 20 - 20 + 15 = 25 - 25 = 0$。
- 数値的に、$u = 10^8$（このとき $s \approx 1.25 \times 10^7$）とすると、接線の式から傾き 3.0000000、切片の項 3.99999998 が得られる。$u = -10^{-8}$ とすると 0.33333333 と 1.33333334 が得られる。
- 中心 $(1, -1)$ では $u = v = 0$ となるので、中心は曲線上にない。接線の式が決して $0/0$ にならないのはこのためである。

## よくある間違い

- （$t \approx ks$ として）$3k^2 - 10k + 3 = 0$ から傾き 3 と $\frac{1}{3}$ だけを求め、切片には次の項が必要であることを忘れる。$t \approx 3s$ だけでは不十分で、$t = 3s - 4 + o(1)$ が必要である。
- 二等分線を中心 $(1, -1)$ ではなく原点を通るものとしてしまう。

## STEP のその先へ

任意の 2 次曲線（conic）$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ は、対称行列（symmetric matrix）$A = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ を用いて $\mathbf{x}^{\mathsf{T}} A \mathbf{x} + \ldots$ の形に書くことができ、その軸は $A$ の固

有ベクトル（eigenvector）の方向を向く。ここでは $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ の固有ベクトルは $(1,1)$ と $(1,-1)$ であり、固有値（eigenvalue）は異符号の $-2$ と $8$ である。これが、この曲線を双曲線にしているのである。このような2次形式（quadratic form）の対角化（diagonalisation）は、大学1年次の線形代数の中心的な話題である。Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照のこと。

解答例

# STEP II 1991、第 3 問

純粋数学 ・ 対称な連立方程式

> **STEP II 1991、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q3

## 鍵となる考え方

三つの等しい式からは方程式が二つしか得られず、未知数が三つあるので $x, y, z$ そのものを求めることは望めない。できるのは巡回対称性（cyclic symmetry）を利用することである。式を二つずつ引くと、各差 $x-y$ は次の差 $y-z$ の定数倍で表され、三つの関係式を掛け合わせるとほとんどすべてが約分される。二つ目の結果については、共通の値に $k$ という名前をつけて分母を払うと、巡回的な三つの一次の関係式が得られ、それらが $xyz$ を三通りの方法で決定する。

## 解答

**$x^2y^2z^2 = 1$ であることの証明**

最初の二つの式を等しいとおくと、

$$x - y = \frac{1}{z} - \frac{1}{y} = \frac{y-z}{yz}.$$

同様に、二つ目と三つ目、さらに三つ目と一つ目を等しいとおくと、

$$y - z = \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{z-x}{zx}, \qquad z - x = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x-y}{xy}.$$

これら三つの等式を掛け合わせると、

$$(x-y)(y-z)(z-x) = \frac{(y-z)(z-x)(x-y)}{x^2y^2z^2}.$$

$x, y, z$ は相異なるので、積 $(x-y)(y-z)(z-x)$ は零ではなく、両辺をこれで割ってよい。すると $1 = 1/(x^2y^2z^2)$ が残る。すなわち

$$x^2y^2z^2 = 1,$$

となり、示すべきことが得られた。

**考えてみよう** $x, y, z$ が相異なり、かつ零でないという条件は、正確にはどこで使ったか。

零でないことは、そもそも分数 $1/x, 1/y, 1/z$ が意味をもつために必要である。相異なることによって $(x-y)(y-z)(z-x)$ で割ることができる。この条件がなければ結果は成り立たない。実際、$x=y=z=2$ は方程式を満たすが、$x^2y^2z^2=64$ である。

### 共通の値は $\pm 1$ である

共通の値を $k$ とおくと、

$$x+\frac{1}{y}=k, \qquad y+\frac{1}{z}=k, \qquad z+\frac{1}{x}=k.$$

それぞれに $y, z, x$ を掛けると（いずれも零でない）、

$$xy=ky-1, \qquad yz=kz-1, \qquad zx=kx-1. \tag{$*$}$$

ここで一つ目の式に $z$ を掛け、二つ目の式を用いて $yz$ を置き換えると、

$$\begin{aligned} xyz &= k\,yz - z \\ &= k(kz-1)-z \\ &= (k^2-1)z-k. \end{aligned}$$

関係式 $(*)$ は $x\to y\to z\to x$ という置き換えで不変であるから、二つ目および三つ目の関係式から始めて同じ計算をすると、

$$xyz=(k^2-1)x-k, \qquad xyz=(k^2-1)y-k.$$

$xyz$ の最初の二つの表示を引くと、

$$(k^2-1)(z-x)=0.$$

$z\neq x$ であるから $k^2=1$ でなければならず、したがって $x+\frac{1}{y}$ の値は $+1$ または $-1$ であり、示すべきことが得られた。

おまけとして、$k^2=1$ を代入し直すと $xyz=-k$ が得られる。このとき $x^2y^2z^2=k^2=1$ となるので、これは最初の結果に至る別の道筋にもなっている。

## 検算

どちらの値も実際に現れる。$k=1$ のとき、任意の $x\neq 0,1$ から始めて $y=\frac{1}{1-x}$, $z=\frac{1}{1-y}=\frac{x-1}{x}$ とおく。すると $z+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}+\frac{1}{x}=1$ となるので、三つの式は

すべて 1 に等しい。たとえば $x = 2$ とすると $y = -1, z = \frac{1}{2}$ であり、確かに $2 - 1 = -1 + 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ かつ $xyz = -1 = -k$ である。$(x, y, z)$ を $(-x, -y, -z)$ で置き換えると、$(-2, 1, -\frac{1}{2})$ のような $k = -1$ の解が得られる。ここで三つの数は常に相異なる。なぜなら $x = \frac{1}{1-x}$ となるには $x^2 - x + 1 = 0$ が必要であるが、これは実数解をもたないからである。このような三つ組を正確な分数で約 4000 個調べ、いずれについても $x^2y^2z^2 = 1$ および $xyz = -k$ が成り立つことを確認した。

## よくある間違い

- $(x - y)(y - z)(z - x)$ が零でない理由を述べずにこれで割ってしまう。相異なるという条件はまさにこのためにある。
- $xyz = \pm 1$ ではなく $xyz = 1$ と結論してしまう。実際には $xyz = -k$ であるから、共通の値が 1 のときは $xyz = -1$ である。

## STEP のその先へ

写像 $t \mapsto \dfrac{1}{k - t}$ は $x$ を $y$ に、$y$ を $z$ に、そして $z$ を $x$ に戻す。これはメビウス変換（Möbius transformation）であり、その行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix}$ である。このような写像の合成は、それらの行列の積に対応する。この問題が本当に問うているのは、この写像がいつ 3 周期の巡回をもつかということであり、その答え $k^2 = 1$ は、ちょうど行列の 3 乗が単位行列の定数倍になる場合にあたる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）には、メビウス変換と、行列のトレースによるその分類についての見事な章がある。

解答例

# STEP II 1991、第 4 問

純粋数学 ・ 余弦の和

> **STEP II 1991、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q4

この問題は、*Beyond STEP* の第 6.2 節「ガウスの正 17 角形」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch06/gauss-17gon.html

## 鍵となる考え方

$5\phi = 2\pi$ および $17\theta = 2\pi$ であるから、角の大きな倍数の余弦は小さな倍数の余弦に折り返される。すなわち $n\phi = 2\pi$ のとき $\cos(n-k)\phi = \cos k\phi$ である。したがって、余弦の和を積和公式（product formula）を用いて 2 乗したり掛け合わせたりすると、すべてが同じ少数の余弦に帰着する。後半では、8 つの余弦 $\cos\theta, \ldots, \cos 8\theta$ を 4 つずつの 2 組に分け、それらの和と積を求めることで、$z$ を解にもつ二次方程式（quadratic）を得る。

## 解答

**正五角形：$\phi = 2\pi/5$**

積和公式 $2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$ と $\cos^2 A = \frac{1}{2}(1+\cos 2A)$ を用いる。$5\phi = 2\pi$ であるから、

$$\cos 3\phi = \cos(2\pi - 2\phi) = \cos 2\phi, \qquad \cos 4\phi = \cos(2\pi - \phi) = \cos\phi.$$

よって

$$\begin{aligned} y^2 &= \cos^2\phi + 2\cos\phi\cos 2\phi + \cos^2 2\phi \\ &= \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\phi) + (\cos 3\phi + \cos\phi) + \tfrac{1}{2}(1+\cos 4\phi) \\ &= \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\phi) + (\cos 2\phi + \cos\phi) + \tfrac{1}{2}(1+\cos\phi) \\ &= 1 + \tfrac{3}{2}(\cos\phi + \cos 2\phi) = 1 + \tfrac{3}{2}y. \end{aligned}$$

両辺に 2 を掛けると $2y^2 = 3y + 2$ となり、示すべき式が得られる。

これは $(2y+1)(y-2) = 0$ と因数分解できるので、$y = -\frac{1}{2}$ または $y = 2$ である。ところが $2\phi = \frac{4\pi}{5}$ は $\frac{\pi}{2}$ と $\pi$ の間にあるので $\cos 2\phi < 0$ であり、一方 $\cos\phi \leq 1$ である。ゆえに $y < 1$ であり、$y = 2$ は除外される。したがって

$$y = \cos\tfrac{2\pi}{5} + \cos\tfrac{4\pi}{5} = -\tfrac{1}{2}.$$

### $\theta = 2\pi/17$ に対する余弦の和

$\omega = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ とおく。ド・モアブルの定理（de Moivre's theorem）により $\omega^k = \cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta$ であり、$\omega^{17} = \cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi = 1$、かつ $\omega \neq 1$ である。等比級数（geometric series）の和を求めると、

$$\sum_{k=0}^{16} \omega^k = \frac{\omega^{17} - 1}{\omega - 1} = 0.$$

実部（real part）をとると $\displaystyle\sum_{k=0}^{16} \cos k\theta = 0$ となり、示すべき式が得られる。

### $z$ の値

$c_k = \cos k\theta$ と書く。$17\theta = 2\pi$ であり、余弦は偶関数であるから、

$$c_{17-k} = c_k \quad \text{かつ} \quad c_{-k} = c_k,$$

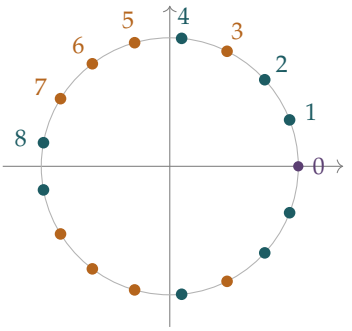
したがって、どの $c_k$ も $c_1, c_2, \ldots, c_8$ のいずれかに等しい。特に、いま証明した和から $c_0 = 1$ を除くと $2(c_1 + c_2 + \cdots + c_8) = -1$ となるので、

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_8 = -\tfrac{1}{2}. \qquad (*)$$

$z$ に現れる角は $1, 2, 4, 8$ である（それぞれ直前の値の 2 倍であり、上のように帰着させると $16 \to 1$ となる）。残りの 4 つ $3, 5, 6, 7$ からは、対となる和

$$w = c_3 + c_5 + c_6 + c_7.$$

が得られる。図は単位円（unit circle）上の 17 個の点 $\omega^k$ を示している。ティール色の点（およびその鏡像）が $z$ に現れる余弦を、琥珀色の点が $w$ に現れる余弦を担っている。




**和。** $(*)$ により、$z+w=c_1+c_2+\cdots+c_8=-\frac{1}{2}$ である。

**積。** $zw$ を展開すると、$a\in\{1,2,4,8\}$、$b\in\{3,5,6,7\}$ に対する 16 個の積 $c_ac_b$ が現れ、それぞれは $\frac{1}{2}(c_{a+b}+c_{a-b})$ に等しい。各添字を 1 から 8 の範囲に帰着させると（$c_{-k}=c_k$ と $c_{17-k}=c_k$ を用いる）、添字の組は次のとおりである。

| | $b=3$ | $b=5$ | $b=6$ | $b=7$ |
|---|---|---|---|---|
| $a=1$ | 4, 2 | 6, 4 | 7, 5 | 8, 6 |
| $a=2$ | 5, 1 | 7, 3 | 8, 4 | 8, 5 |
| $a=4$ | 7, 1 | 8, 1 | 7, 2 | 6, 3 |
| $a=8$ | 6, 5 | 4, 3 | 3, 2 | 2, 1 |

（たとえば $a=8$、$b=7$ からは $c_{15}$ と $c_1$ が得られ、$c_{15}=c_2$ である。）

**考えてみよう** どの余弦が現れるかを知る必要があるのか、それとも何回現れるかだけでよいのか？

何回現れるかだけでよい。表を数えると、32 個の成分の中に添字 $1,2,\ldots,8$ はそれぞれちょうど 4 回ずつ現れる。よって、再び $(*)$ を用いて

$$zw=\tfrac{1}{2}\cdot 4\,(c_1+c_2+\cdots+c_8)=2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)=-1,$$

を得る。

**二次方程式。** $z+w=-\frac{1}{2}$ かつ $zw=-1$ であるから、$z$ と $w$ は

$$t^2+\tfrac{1}{2}t-1=0,\qquad \text{すなわち}\qquad 2t^2+t-2=0,$$

の解であり、$\{z,w\}=\left\{\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4},\ \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}\right\}$ となる。1 つ目の解は正、2 つ目の解は負である。

**解の選択。** $z>0$ を示す。$\frac{4}{17}<\frac{1}{4}$ であるから、$\theta$ と $2\theta$ はともに $(0,\frac{\pi}{4})$ に属し、$c_1$ と $c_2$ はともに $\frac{1}{\sqrt{2}}$ より大きく、$c_1+c_2>\sqrt{2}>1$ である。また $4\theta=\frac{8\pi}{17}<\frac{\pi}{2}$ であるから $c_4>0$ であり、$c_8\geq -1$ である。したがって

$$z=(c_1+c_2)+c_4+c_8>1+0-1=0,$$

であり、$z$ は正の解でなければならない：

$$z=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}=-\frac{1-\sqrt{17}}{4}.$$

## 検算

数値的には、$\cos 72^\circ+\cos 144^\circ=0.30902-0.80902=-0.5$ である。$\theta=2\pi/17$ のとき、電卓によれば $z=0.932472+0.739009+0.092268-0.982973=0.780776$ であり、$(\sqrt{17}-1)/4=0.780776$ である。また $w=-1.280776=(-1-\sqrt{17})/4$ であるから、求めたとおり $z+w=-0.5$、$zw=-1$ となる。

## よくある間違い

- 前半で $y=2$ を除外し忘れること、あるいは後半で $w$ の解を除外し忘れること。二次方程式からは候補が 2 つ得られるので、どちらかを選ぶには別に符号についての議論が必要である。
- $(*)$ に $k=0$ を含めてしまうこと。全体の和は 0 であるが、$c_0=1$ なので $c_1+\cdots+c_{16}=-1$ であり、これを半分にして $-\frac{1}{2}$ を得る。
- 積の表で添字の帰着を誤ること。たとえば $c_9$ を $c_8$ としてではなく新しい項として扱ってしまうこと。

## STEP のその先へ

これは、正十七角形（regular 17-gon）が定規とコンパス（ruler and compasses）で作図できることを示した、ガウス（Gauss）の有名な計算である。17 を法とする生成元（generator）である 3 の累乗によって余弦を 8、4、2、1 個ずつの入れ子になった組に分けると、二次方程式の連鎖が得られ、したがって $\cos\frac{2\pi}{17}$ は平方根だけを用いて表せ

る。$z$ と $w$ はその連鎖の第 1 段階であり、ガウス周期（Gaussian periods）と呼ばれる。この話の全体像はガロア理論（Galois theory）に属する。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を参照せよ。また 1 の冪根（roots of unity）の数論については Davenport の *The Higher Arithmetic*（高等算術）を参照せよ。

解答例

# STEP II 1991、第 5 問

純粋数学 ・ 積分の漸化式

> **STEP II 1991、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q5

## 鍵となる考え方

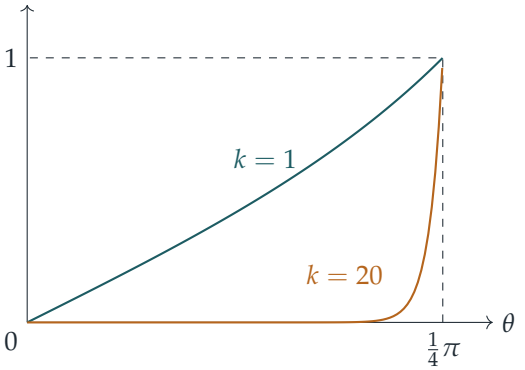
$I_k = \int_0^{\pi/4} \tan^k\theta \,\mathrm{d}\theta$ とおく。tan の奇数乗や偶数乗はそのままでは積分できないが、2 つを足し合わせると積分できる。実際、$\tan^k\theta + \tan^{k+2}\theta = \tan^k\theta\sec^2\theta$ であり、これは $\tan^{k+1}\theta/(k+1)$ の導関数（derivative）である。この漸化式（reduction formula）を数学的帰納法（induction）でたどると求める公式が得られる。また、$k$ が大きいときのグラフの概形から積分が 0 に縮んでいくことがわかり、これによって公式が無限級数（infinite series）の和に変わるのである。

## 解答

### グラフの概形

$[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上では $0 \le \tan\theta \le 1$ であり、$\tan 0 = 0$、$\tan\frac{1}{4}\pi = 1$ である。$k = 1$ のとき、グラフは $(0,0)$ から $(\frac{1}{4}\pi, 1)$ まで、ゆるやかに下に凸な曲線を描いて増加する（傾きは 1 から始まり、$\sec^2\frac{1}{4}\pi = 2$ で終わる）。

$k \gg 1$ のとき、1 より小さい $\tan\theta$ の値はすべて、高い次数で累乗されることで 0 の方へ押しつぶされる。一方、端の値 0 と 1 は変わらない。したがって $\tan^k\theta$ は区間の大部分で軸にほぼ張りつき、$\theta = \frac{1}{4}\pi$ のごく近くで急に 1 まで跳ね上がる。実際、$u$ を小さいとして $\theta = \frac{1}{4}\pi - u$ と書くと $\tan\theta \approx 1 - 2u$ なので、$\tan^k\theta \approx (1-2u)^k \approx \mathrm{e}^{-2ku}$ となる。すなわち、この突起の幅はおよそ $1/(2k)$ であり、その下の面積もおよそ $1/(2k)$ である。




**漸化式**

$k \geq 0$ に対して

$$I_k + I_{k+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^k\theta\,(1+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/4} \tan^k\theta\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{\tan^{k+1}\theta}{k+1}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{k+1}.$$

また、2つの初期値も必要である。

$$I_0 = \tfrac{1}{4}\pi, \qquad I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \Big[-\ln\cos\theta\Big]_0^{\pi/4} = -\ln\tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

**奇数乗**

$J_n = I_{2n+1}$ とおく。漸化式で $k = 2n-1$ とすると

$$J_n = \frac{1}{2n} - J_{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

求める公式を数学的帰納法で証明する。$n=1$ のとき、$J_1 = \frac{1}{2} - J_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 = (-1)^1\left(\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$ であり、これは $n=1$ のときの公式である。

$n-1 \geq 1$ のとき成り立つと仮定する。すると

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{2n} - (-1)^{n-1}\left(\tfrac{1}{2}\ln 2 + \sum_{m=1}^{n-1}\frac{(-1)^m}{2m}\right) \\ &= (-1)^n\left(\tfrac{1}{2}\ln 2 + \sum_{m=1}^{n-1}\frac{(-1)^m}{2m}\right) + (-1)^n\frac{(-1)^n}{2n} \\ &= (-1)^n\left(\tfrac{1}{2}\ln 2 + \sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m}{2m}\right), \end{aligned}$$

となる。ここで、$(-1)^n(-1)^n = 1$ を用いて $\frac{1}{2n}$ を括弧内の $m=n$ の項として書いた。数学的帰納法により、公式はすべての正の整数 $n$ について成り立つ。以上で示された。

### 1 つ目の級数

**考えてみよう** 「グラフで見ると小さそうだ」というだけでなく、$J_n \to 0$ であることはどうすればわかるだろうか？

きちんとした評価が必要である。$[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上では $\tan\theta \geq 0$ かつ $\sec^2\theta \geq 1$ であるから

$$0 \leq J_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n+1}\theta \,\mathrm{d}\theta \leq \int_0^{\pi/4} \tan^{2n+1}\theta \sec^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2n+2}.$$

よって $n \to \infty$ のとき $J_n \to 0$ であり、これはまさに $k$ が大きいときのグラフが示唆していたことである（評価 $1/(2n+2)$ は、突起の面積がおよそ $1/(2k)$ であることと一致している）。$|J_n|$ は公式の括弧の絶対値であるから

$$\left|\tfrac{1}{2}\ln 2 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m}\right| = J_n \leq \frac{1}{2n+2} \to 0,$$

となり、部分和（partial sums）$\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m}$ は $-\frac{1}{2}\ln 2$ に収束（converge）する。$-1$ を掛けて

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m} = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

### 2 つ目の級数

次に、偶数乗について同じことを行う。$K_n = I_{2n}$ とおく。漸化式で $k = 2n-2$ とすると

$$K_n = \frac{1}{2n-1} - K_{n-1} \qquad (n \geq 1), \qquad K_0 = \tfrac{1}{4}\pi.$$

まったく同じ帰納法（今度は $K_1 = 1 - \frac{1}{4}\pi$ から始める）により

$$K_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n}\theta \,\mathrm{d}\theta = (-1)^n\left(\tfrac{1}{4}\pi + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m-1}\right):$$

が得られる。帰納法の段階は、先ほどとまったく同様に $K_n = \frac{1}{2n-1} - (-1)^{n-1}(\cdots) = (-1)^n(\cdots) + (-1)^n\frac{(-1)^n}{2n-1}$ である。同じ評価により

$$0 \leq K_n \leq \int_0^{\pi/4} \tan^{2n}\theta \sec^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2n+1} \to 0,$$

となるので、$\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m-1} \to -\frac{1}{4}\pi$、すなわち

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

## 検算

- $n = 1$ のとき、$\int_0^{\pi/4} \tan^3\theta \, d\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.15343$ であり、この積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると小数第 10 位まで同じ値が得られる。この方法で、$n = 1, \ldots, 11$ について $I_{2n+1}$ と $I_{2n}$ の公式を確かめた。
- $k$ が大きいとき、数値的には $I_{100} \approx 0.0049995$、$I_{1000} \approx 0.00049999996$ であり、グラフの概形から予想されるとおり $1/(2k)$ に非常に近い。
- 2 つの級数を 100 万項まで足すと $0.346573\ldots$ と $0.785398\ldots$ になり、$\frac{1}{2}\ln 2 = 0.346574$、$\frac{1}{4}\pi = 0.785398$ と比べられる。誤差は、上の評価が示唆するとおり、次の項とほぼ同じ大きさである。

## よくある間違い

- 評価を示さずに「$\tan^{2n+1}\theta \to 0$ だから積分は 0 に近づく」と述べること。被積分関数（integrand）は $\theta = \frac{1}{4}\pi$ では 0 に近づか**ない**ので、$\sec^2\theta \geq 1$ による評価のような根拠が必要である。
- 帰納法での符号の誤り。$(-1)^n$ は括弧の外に出しておき、$n = 1$ の場合を直接計算した値と照らし合わせて確認すること。

## STEP のその先へ

1 つ目の級数は交代調和級数（alternating harmonic series）$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \ln 2$ の半分であり、2 つ目は $\pi$ に関するライプニッツ級数（Leibniz series）である。どちらも**条件収束**（conditionally convergent）するにすぎない。すなわち、項の順序を並べ替えると和が変わりうる。これは解析学（analysis）の最初の講義で早いうちに出会う驚くべき事実である（リーマン（Riemann）の再配列定理）。ここでの議論、つまり誤差項を正確に求めてそれを 0 に挟み込むという考え方は、剰余項付きのテイラーの定理（Taylor's theorem with remainder）と同じ発想である。Abbott の *Understanding Analysis* では、この両方が丁寧に扱われている。

解答例

# STEP II 1991、第 6 問

純粋数学 ・ 積分の評価

**STEP II 1991、問 6**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/91-s2-q6

## 鍵となる考え方

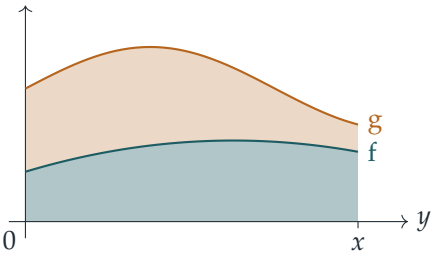
0 から $x$ までの積分（integral）は面積であり、より小さい非負の関数が囲む面積はより小さい。この一つの事実を繰り返し使うことで、既知の不等式（inequality）から新しい不等式が得られる。$0 \le \cos y \le 1$ を積分すると $\sin x$ の評価が得られ、それを積分すると $\cos x$ の評価が得られ、さらに積分すると $\sin x$ のより精密な評価が得られる。そして各積分の評価は、被積分関数（integrand）を、正確に積分できる二つの関数で挟み込むことによって導かれる。

## 解答

### 積分の比較

$[0, x]$ 上で $\mathrm{f}(y) \ge 0$ であるから、f のグラフは $y$ 軸上またはその上方にある。よって $\int_0^x \mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y$ はグラフと軸の間の面積であり、非負である。また $\mathrm{f}(y) \le \mathrm{g}(y)$ であるから、f の下側の領域は g の下側の領域に含まれ、その面積は大きくならない：

$$0 \le \int_0^x \mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y \le \int_0^x \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y.$$



（解析的には：$g - f \geq 0$ であるから $\int_0^x (g-f)\,dy \geq 0$ であり、積分は線形（linear）である。）

### $\sin x$ と $\cos x$ の評価

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ とする。$0 \leq y \leq x$ に対して $0 \leq \cos y \leq 1$ であるから、上の結果を $f = \cos$、$g = 1$ として用いると

$$0 \leq \int_0^x \cos y\,dy \leq \int_0^x 1\,dy, \qquad \text{すなわち} \qquad 0 \leq \sin x \leq x.$$

これは $[0, \frac{1}{2}\pi]$ のすべての $x$ で成り立つから、特に $0 \leq y \leq x$ に対して $0 \leq \sin y \leq y$ である。再び結果を $f = \sin$、$g(y) = y$ として用いると

$$\int_0^x \sin y\,dy \leq \int_0^x y\,dy \quad \Longrightarrow \quad 1 - \cos x \leq \tfrac{1}{2}x^2 \quad \Longrightarrow \quad \cos x \geq 1 - \tfrac{1}{2}x^2.$$

### 一つ目の積分

$[0, \frac{1}{10}]$（$[0, \frac{1}{2}\pi]$ に十分含まれる）上では $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x \leq 1$ が成り立つから

$$3 - \tfrac{1}{2}x^2 \leq 2 + \cos x \leq 3.$$

**考えてみよう** そのまま 2 乗して逆数をとってよいだろうか？

よい。ここに現れる量はすべて正だからである：$3 - \frac{1}{2}x^2 \geq 3 - \frac{1}{200} > 0$。正の数については、2 乗しても大小関係は保たれ、逆数（reciprocal）をとると大小関係は逆転する。さらに $x \geq 0$ を掛けると

$$\frac{x}{9} \leq \frac{x}{(2+\cos x)^2} \leq \frac{x}{(3 - \frac{1}{2}x^2)^2} \qquad (0 \leq x \leq \tfrac{1}{10}).$$

三つの関数はいずれも非負であるから、0 から $\frac{1}{10}$ まで積分してよい。左辺からは

$$\int_0^{1/10} \frac{x}{9}\,dx = \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{1800}.$$

右辺については、分子の $x$ は符号を除いて $3 - \frac{1}{2}x^2$ の導関数（derivative）であり、$\frac{d}{dx}\left(3 - \frac{1}{2}x^2\right)^{-1} = x\left(3 - \frac{1}{2}x^2\right)^{-2}$ である。よって

$$\int_0^{1/10} \frac{x}{(3 - \frac{1}{2}x^2)^2}\,dx = \left[\frac{1}{3 - \frac{1}{2}x^2}\right]_0^{1/10} = \frac{200}{599} - \frac{1}{3} = \frac{600 - 599}{1797} = \frac{1}{1797}.$$

したがって

$$\frac{1}{1800} \leq \int_0^{1/10} \frac{x}{(2+\cos x)^2}\,dx \leq \frac{1}{1797}.$$

### $\sin x$ のより精密な評価

$0 \le y \le x \le \frac{1}{2}\pi$ に対して $\cos y \ge 1 - \frac{1}{2}y^2$、すなわち $0 \le 1 - \cos y \le \frac{1}{2}y^2$ である（左側の不等式は $\cos y \le 1$ による）。0 から $x$ まで積分すると

$$\int_0^x (1 - \cos y)\,\mathrm{d}y \le \int_0^x \tfrac{1}{2}y^2\,\mathrm{d}y \quad\Longrightarrow\quad x - \sin x \le \tfrac{1}{6}x^3 \quad\Longrightarrow\quad \sin x \ge x - \tfrac{1}{6}x^3.$$

### 二つ目の積分

$[0, \frac{1}{10}]$ 上では $x - \frac{1}{6}x^3 \le \sin x \le x$ が成り立つから

$$1 - \tfrac{1}{6}x^3 \le 1 - x + \sin x \le 1.$$

**考えてみよう** なぜこの組合せに注目するのが適切なのだろうか？

分母の $-x$ は $\sin x$ の主要項を打ち消すためにあり、その結果 1 に $x^3$ のオーダーの項が加わった形が残る。下からの評価 $1 - \frac{1}{6}x^3 \ge 1 - \frac{1}{6000}$ は正であるから、先ほどと同様に 2 乗し、逆数をとり（大小関係が逆転する）、$x^2 \ge 0$ を掛けると

$$x^2 \le \frac{x^2}{(1 - x + \sin x)^2} \le \frac{x^2}{(1 - \frac{1}{6}x^3)^2}.$$

積分すると、左辺からは $\int_0^{1/10} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1000} = \frac{1}{3000}$ が得られる。右辺については $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1 - \frac{1}{6}x^3\right)^{-1} = \frac{1}{2}x^2\left(1 - \frac{1}{6}x^3\right)^{-2}$ であるから

$$\int_0^{1/10} \frac{x^2}{(1 - \frac{1}{6}x^3)^2}\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{6}x^3}\right]_0^{1/10} = 2\left(\frac{6000}{5999} - 1\right) = \frac{2}{5999}.$$

したがって

$$\frac{1}{3000} \le \int_0^{1/10} \frac{x^2}{(1 - x + \sin x)^2}\,\mathrm{d}x \le \frac{2}{5999}.$$

## 検算

- シンプソンの公式（Simpson's rule）によると $\int_0^{1/10} x(2 + \cos x)^{-2}\,\mathrm{d}x \approx 0.00055648$ であり、これは $1/1800 \approx 0.00055556$ と $1/1797 \approx 0.00055648$ の間にある（上からの評価は極めて精密で、約 $5 \times 10^{-10}$ の差で一致する）。
- 同様に $\int_0^{1/10} x^2(1 - x + \sin x)^{-2}\,\mathrm{d}x \approx 0.000333389$ であり、これは $1/3000 \approx 0.000333333$ と $2/5999 \approx 0.000333389$ の間にある。
- 三つの各点ごとの不等式は、$[0, \frac{1}{2}\pi]$ の $10^5$ 個の無作為な点で成り立ち、$x = 0$ で等号が成立した。

## よくある間違い

- 符号を確認せずに逆数をとること：$a \leq b$ から $1/a \geq 1/b$ が従うのは、$a$ と $b$ が同符号のときに限る。
- 比較の結果の左側の不等式には $\mathrm{f} \geq 0$ が必要であることを忘れること。ここでは $\sin y \geq 0$ と $1 - \cos y \geq 0$ がそれを保証している。
- 積分の上からの評価に $\cos x \leq 1$ を用いること：$\cos x \leq 1$ からは分母が 9 より小さいことが分かり、これは上からの評価ではなく下からの評価 $1/1800$ を与える。

## STEP のその先へ

$0 \leq \cos y \leq 1$ を繰り返し積分すると、交互に上下から挟むテイラー（Taylor）評価の列 $x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \leq \cdots$ 全体が得られる。これは sin と cos のテイラー級数（Taylor series）がそれぞれの関数に収束（converge）することを証明する方法の一つである。積分の単調性（monotonicity）と被積分関数の比較は実解析（real analysis）の基本的な道具であり、剰余項（remainder）、誤差、極限を評価するのに用いられる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、積分と剰余項付きのテイラーの定理を丁寧に展開している。

解答例

# STEP II 1991、第 7 問

純粋数学 ・ 関数方程式

> **STEP II 1991、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q7

## 鍵となる考え方

関数方程式（functional equation）は**すべての** $x$ と $y$ に対して成り立つので、一方の変数を固定したまま、もう一方の変数について微分してよい。こうすると、関数方程式は 2 つの異なる点における $\mathrm{g}'$ を結びつける微分方程式（differential equation）に変わる。そこで一方の変数をうまく選べば、$\mathrm{g}'$ がいたるところで決まり、あとは積分すれば完成である。以下では、問題文のとおり g と f は微分可能であると仮定する。

## 解答

### 導関数の関係式

$y > 0$ を固定し、$\mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(y) = \mathrm{g}(z)$ の両辺を $x$ について微分する。このとき $\mathrm{g}(y)$ は定数なので、合成関数の微分法（chain rule）により

$$\mathrm{g}'(x) = \mathrm{g}'(z)\,\frac{\partial z}{\partial x}.$$

商の微分法（quotient rule）により

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(x+y+1) - xy}{(x+y+1)^2} = \frac{y^2+y}{(x+y+1)^2},$$

であり、これが 1 つ目の形である。2 つ目の形については、$z+1$ がきれいに因数分解できることに注目する：

$$z+1 = \frac{xy+x+y+1}{x+y+1} = \frac{(x+1)(y+1)}{x+y+1}, \qquad \text{よって} \qquad z(z+1) = \frac{xy(x+1)(y+1)}{(x+y+1)^2}.$$

これを $x(x+1)$ で割るとちょうど $\dfrac{y(y+1)}{(x+y+1)^2}$ になるので、

$$g'(x) = \frac{y^2+y}{(x+y+1)^2}\,g'(z) = \frac{z(z+1)}{x(x+1)}\,g'(z),$$

となり、示すべき式が得られた。これを対称な形

$$x(x+1)\,g'(x) = z(z+1)\,g'(z). \qquad (\dagger)$$

に書いておくと便利である。

**$2g'(1) = (u^2+u)g'(u)$ を導く**

**考えてみよう** $(0,1)$ 内のすべての $u$ についての主張が欲しい。どの変数を、どの値に固定すればよいだろうか。

$(\dagger)$ で $x = 1$ とおくと、左辺は $2g'(1)$ となり、$z = \dfrac{y}{y+2}$ である。$y$ が $(0,\infty)$ 全体を動くとき、$\dfrac{y}{y+2} = 1 - \dfrac{2}{y+2}$ は 0 から 1 に向かって連続的に増加するので、$0 < u < 1$ を満たすすべての値 $u$ をとる（具体的には $y = \frac{2u}{1-u}$）。したがって

$$2g'(1) = (u^2+u)\,g'(u) \qquad \text{任意の} 0 < u < 1.$$

**積分する**

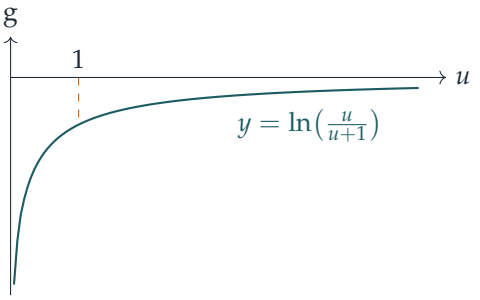
定数 $A = 2g'(1)$ とおく。すると $0 < u < 1$ に対して、部分分数分解（partial fractions）を用いて

$$g'(u) = \frac{A}{u(u+1)} = A\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right),$$

であり、これを積分すると（すべて正なので絶対値記号は不要である）

$$g(u) = A\big(\ln u - \ln(u+1)\big) + B = A\ln\left(\frac{u}{u+1}\right) + B.$$

実はこの式は $u < 1$ だけでなく、**すべての** $u > 0$ に対して成り立つ。$x$ を固定すると、$y$ が 0 から $\infty$ まで動くとき $z = \dfrac{xy}{x+y+1}$ は 0 から $x$ に向かって増加するので、$z < 1$ となるように $y$ を選べる。すると $(\dagger)$ と上の結果から $x(x+1)g'(x) = z(z+1)g'(z) = A$ が得られる。よって同じ積分が $(0,\infty)$ 全体で通用し、$(0,\infty)$ は区間なので定数 $B$ は 1 つで済む。




（図の曲線は $A = 1$、$B = 0$ の場合である。負の値をとり、増加し、$u \to \infty$ のとき 0 に近づく。）

### $(*)$ の確認と $B$ の決定

$\mathrm{g}(u) = A \ln \frac{u}{u+1} + B$ を代入する。$(*)$ の左辺は

$$\mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(y) = A \ln \frac{xy}{(x+1)(y+1)} + 2B.$$

右辺については、先に求めた $z+1$ の因数分解から

$$\frac{z}{z+1} = \frac{xy}{x+y+1} \cdot \frac{x+y+1}{(x+1)(y+1)} = \frac{xy}{(x+1)(y+1)},$$

となるので、

$$\mathrm{g}(z) = A \ln \frac{xy}{(x+1)(y+1)} + B.$$

両辺がすべての $x, y > 0$ で一致するための必要十分条件は $2B = B$、すなわち $B = 0$ である。よって $\mathrm{g}(u) = A \ln \dfrac{u}{u+1}$ は $(*)$ を満たす。

### $A$ は決定できるか

できない。上の確認は $A = 0$（零関数）も含め、**どんな** $A$ の値に対しても成り立つ。定義 $A = 2\mathrm{g}'(1)$ も役に立たない。実際、ここで得た解では $\mathrm{g}'(1) = A\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{A}{2}$ なので、$A = 2\mathrm{g}'(1)$ は自動的に成り立ち、新しい情報を何も与えない。方程式 $(*)$ は g について線形（linear）なので、解の定数倍もまた解であり、$A$ はその倍率にすぎない。

### 関数 f

同じ方法が使える。$y > 0$ を固定し、$\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(y) = \mathrm{f}(xy)$ を $x$ について微分すると

$$\mathrm{f}'(x) = y\,\mathrm{f}'(xy).$$

**考えてみよう** ここで $x = 1$ とおくことに相当するのは何だろうか。

$x = 1$ とおくと、すべての $y > 0$ に対して $f'(1) = y f'(y)$ が得られるので、$C = f'(1)$ とおけば

$$f'(y) = \frac{C}{y} \qquad \Longrightarrow \qquad f(y) = C \ln y + D \quad (y > 0).$$

これを元の式に代入すると、$f(x) + f(y) = C \ln(xy) + 2D$ である一方 $f(xy) = C \ln(xy) + D$ なので、$D = 0$ となる。（同じことだが、方程式で $x = y = 1$ とおくと $2f(1) = f(1)$ となり、$f(1) = 0$ である。）したがって示すべきとおり $f(x) = C \ln x$ であり、ここでも $C$ は任意である。

## 検算

- $x = 1$、$y = 2$ とすると $z = \frac{1}{2}$ であり、2 つの導関数の係数は $\frac{6}{16}$ と $\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{8}$ となって一致する。
- $A = 1$ のとき：$g(1) + g(2) = \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} = \ln\frac{1}{3}$ であり、$g(\frac{1}{2}) = \ln\frac{1/2}{3/2} = \ln\frac{1}{3}$ である。✓
- コンピュータを用いて、1000 個のランダムな点で導関数の恒等式を有限差分（finite differences）により確認し、さらにいくつかの $A$ の値について $g(x) + g(y) - g(z)$ がちょうど $B$ に等しい（したがって $B = 0$ のときに限り 0 になる）ことを確認した。

## よくある間違い

- $x$ について微分するとき $g(y)$ が定数であることを忘れる、あるいは合成関数の微分による因子 $\partial z/\partial x$ を忘れる。
- $x = 1$ とおいたものの、そのとき $z$ が本当に $(0, 1)$ 全体をとるかを確かめない。この確認こそが、1 つの等式をすべての $u$ についての主張に変えるのである。
- 「積分定数は重要でないから」$B$ は 0 でなければならないと思い込む。$B = 0$ を強いるのは方程式 $(*)$ であり、そのことは示す必要がある。

## STEP のその先へ

2 つ目の方程式はコーシー（Cauchy）の対数型関数方程式である。$x = e^s$ とおくと、$h(s + t) = h(s) + h(t)$ に変わる。ここでは微分可能性を仮定したが、大学の解析学

（analysis）の最初の講義では、ただ 1 点での連続性（continuity）だけで $h(s) = cs$ が導かれることを学ぶ。一方、何の正則性も仮定しなければ、（ハメル基底（Hamel basis）を用いて構成される）とんでもない非線形の解が存在する。1 つ目の方程式も実は同じものの姿を変えたものである。$w = \ln \frac{u}{u+1}$ によって $(*)$ は加法的な方程式に変換される。この種の連続性による議論について読むには、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）がよい。

解答例

# STEP II 1991、第 8 問

純粋数学 ・ 非線形 1 階常微分方程式

**STEP II 1991、問 8**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/91-s2-q8

## 鍵となる考え方

どちらの微分方程式も $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ についての 2 次方程式であるから、まず導関数（derivative）について代数的に解き、そのあとで積分すればよい。それぞれの 2 次方程式は 2 つの解をもつので、1 階の方程式の候補が 2 つ得られ、$x = 0$ における条件によってどちらの分枝（branch）が許されるかが決まる。双曲線関数（hyperbolic function）の恒等式、とりわけ $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ と半角の公式を使うと、解がすっきりした形になる。

## 解答

### 2 次方程式

解の公式により、

$$u = \frac{-2\sinh x \pm \sqrt{4\sinh^2 x + 4}}{2} = -\sinh x \pm \sqrt{\sinh^2 x + 1} = -\sinh x \pm \cosh x,$$

となる。ここで $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ と $\cosh x > 0$ を用いた。$\cosh x - \sinh x = \mathrm{e}^{-x}$ かつ $\cosh x + \sinh x = \mathrm{e}^{x}$ であるから、2 つの解は

$$u = \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{または} \qquad u = -\mathrm{e}^{x}.$$

である。（検算：解の積は $-1$、和は $\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x} = -2\sinh x$ であり、確かにそうなるべき値になっている。）

### 1 つ目の微分方程式

$u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ とおけば、これはちょうど上の 2 次方程式であるから、各 $x$ において $y' = \mathrm{e}^{-x}$ または $y' = -\mathrm{e}^{x}$ のいずれかが成り立つ。

> **考えてみよう** $y'$ が、ある $x$ の値では一方の解に従い、別のところではもう一方の解に従うということはありうるだろうか？

ありえない。1 つ目の解はつねに正、2 つ目の解はつねに負であるから、両者が一致することはない。導関数は中間値の性質（intermediate value property）をもつ（ダルブー（Darboux）の定理。$y'$ が連続であると仮定するなら、通常の中間値の定理でよい）。したがって $y'$ は 0 を通らずに正の値から負の値へ跳ぶことはできないが、どちらの解もその値をとらない。よって $y'$ は全域で一方の解にとどまる。

$x = 0$ において解は 1 と $-1$ であり、$y' > 0$ が必要であるから、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x}$ である。積分すると $y = -\mathrm{e}^{-x} + c$ となり、$x = 0$ で $y = 0$ であることから $c = 1$ を得る：

$$\boxed{y = 1 - \mathrm{e}^{-x}}$$

### 2 つ目の微分方程式

$p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ とおくと、$p^2 \sinh x + 2p - \sinh x = 0$ である。

**$x = 0$ のとき**、$\sinh 0 = 0$ であり、方程式は $2p = 0$ に帰着するので、$y'(0) = 0$ でなければならない。

**$x \neq 0$ のとき**、$\sinh x \neq 0$ であり、解の公式により

$$p = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\sinh^2 x}}{2\sinh x} = \frac{-1 \pm \cosh x}{\sinh x}.$$

を得る。$\cosh x = 1 + 2\sinh^2 \frac{x}{2} = 2\cosh^2 \frac{x}{2} - 1$ および $\sinh x = 2\sinh \frac{x}{2} \cosh \frac{x}{2}$ を用いると、2 つの解は次のように簡単になる：

$$\frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{2\sinh^2 \frac{x}{2}}{2\sinh \frac{x}{2}\cosh \frac{x}{2}} = \tanh \tfrac{x}{2},$$

$$\frac{-1 - \cosh x}{\sinh x} = -\frac{2\cosh^2 \frac{x}{2}}{2\sinh \frac{x}{2}\cosh \frac{x}{2}} = -\coth \tfrac{x}{2}.$$

**分枝の選択。** 2 つ目の解 $-\coth \frac{x}{2}$ は $x \to 0$ のとき有界でなく、これを積分すると $y = -2\ln\left|\sinh \frac{x}{2}\right| + c$ となり、どちらの側から $x \to 0$ としても $+\infty$ に発散する。したがって原点のどちらの側でも、この分枝から $x = 0$ で連続かつ $y(0) = 0$ を満たす解を得ることはできない。ゆえに $x = 0$ の近くでは（それぞれの側で）1 つ目の解をとらなければならず、$\tanh 0 = 0$ であるから、これは $y'(0) = 0$ と整合する。2 つの解が一致

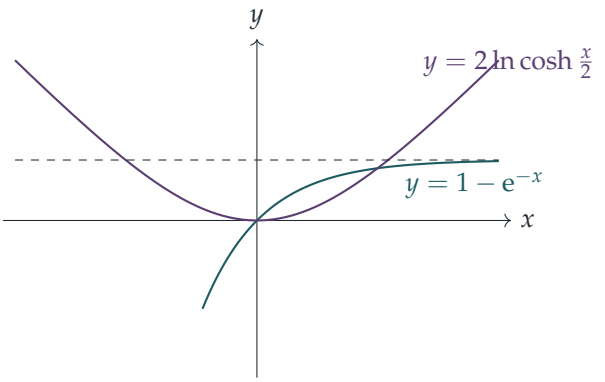
することはない（一方は $x$ と同符号、他方は逆符号であり、$x \neq 0$ ではどちらも 0 にならない）。よって先ほどと同じ中間値の議論により、解はすべての $x$ でこの分枝にとどまる：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tanh\tfrac{x}{2} \quad \text{すべての} x.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sinh\frac{x}{2}$ であるから、$\tanh\frac{x}{2} = 2\cdot\dfrac{\frac{1}{2}\sinh\frac{x}{2}}{\cosh\frac{x}{2}}$ となり、これは $2f'/f$ の形である。よって積分すると $y = 2\ln\cosh\frac{x}{2} + c$ を得る（$\cosh > 0$ であるから絶対値は不要である）。条件 $y(0) = 0$ から $c = 0$ となるので、

$$\boxed{y = 2\ln\cosh\tfrac{x}{2} = \ln\left(\frac{1+\cosh x}{2}\right)}$$

である。2 つ目の形は $2\cosh^2\frac{x}{2} = 1 + \cosh x$ から従う。




## 検算

- $y = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ について：$y'^2 + 2y'\sinh x = \mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}) = 1$ であり、要求どおりである。また $y'(0) = 1 > 0$ である。
- $y = 2\ln\cosh\frac{x}{2}$ について、$t = \tanh\frac{x}{2}$ とおくと $\sinh x = \frac{2t}{1-t^2}$ であり、$\sinh x\,(t^2 - 1) + 2t = -2t + 2t = 0$ となる。方程式は $x \mapsto -x, y \mapsto y$ で不変であるから、解は偶関数になるはずであり、実際そうなっている。
- 数値的には、$x = 1$ における解の値は $1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0.6321$ と $2\ln\cosh\frac{1}{2} \approx 0.2402$ である。多数のランダムな点で差分による導関数を代入すると、どちらの方程式も $10^{-6}$ 以内の精度で満たされる。

## よくある間違い

- 2 つ目の方程式を $\sinh x$ で割るとき、それが $x = 0$ で 0 になることに気づかないこと。そこはまさに初期条件（initial condition）が課される場所であり、もとの方程式から $y'(0) = 0$ が強制される。
- 後半で両方の分枝を残してしまうこと。$-\coth \frac{x}{2}$ の分枝は、その積分が原点で発散するため、$y(0) = 0$ を満たすことができない。

## STEP のその先へ

$F(x, y, y') = 0$ のように $y'$ について線形でない方程式は、1 点を通る解を複数もったり、どの単一の分枝でも記述できない「特異解（singular solution）」をもったりすることがある。そのため、解の存在と一意性の定理（ピカール–リンデレフ（Picard–Lindelöf）の定理）は、すでに $y' = f(x, y)$ の形に解かれた方程式について述べられる。今回は解が互いに離れていたので、各分枝は素直に振る舞った。判別式が 0 になりうる場合には、分枝どうしをつなぎ合わせることができ、一意性が成り立たなくなる。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）では、存在と一意性、そしてこうした非線形の 1 階方程式が論じられている。

解答例

# STEP II 1991、第 9 問

純粋数学 ・ 行列群

> **STEP II 1991、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q9

## 鍵となる考え方

すべては一つの事実に基づいている。すなわち、5 を法とする整数は体（field）をなす、ということである。0 でない剰余（residue）はどれも乗法逆元（multiplicative inverse）をもち、0 でない剰余どうしの積が 0 になることはない。これによって対角成分の扱いがうまくいき、閉性と逆元の存在はほとんど自動的に得られる。最後の小問では、$M^2 = I$ を解いて位数（order）が 1 または 2 の元を具体的に求め、そのうちの二つを掛けたものがその集合にとどまるかどうかを調べればよい。

## 解答

以下、計算はすべて 5 を法として行い、都合のよいときは 4 を $-1$ と書く。一般の元を

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \qquad a,c \in \{1,2,3,4\},\ b \in \{0,1,2,3,4\}.$$

と表す。

### $G$ は群である

**閉性（closure）**。二つの元を掛けると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad & ae+bf \\ 0 & cf \end{pmatrix}.$$

となる。これは成分が 5 を法とする上三角行列（upper triangular matrix）である。その対角成分 $ad$ と $cf$ は 0 でない。実際、5 は素数であるから、$5 \mid ad$ ならば $5 \mid a$ または $5 \mid d$ であるが、どちらも成り立たない。よって積は $G$ に属する。

**結合法則（associativity）**は行列の積が結合的であることから成り立つ。

**単位元（identity）**。$I = M(1,0,1)$ は $G$ に属し、任意の $M$ に対して $IM = MI = M$ である。

**逆元（inverse）**。5 を法とする 0 でない剰余はすべて逆元をもつ（$1^{-1} = 1, 2^{-1} = 3, 3^{-1} = 2, 4^{-1} = 4$）。したがって、$M(a,b,c) \in G$ が与えられたとき

$$N = \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}bc^{-1} \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix},$$

を作ることができ、$a^{-1}, c^{-1} \neq 0$ であるから $N$ は $G$ に属する。積の公式を用いると

$$MN = \begin{pmatrix} aa^{-1} & -aa^{-1}bc^{-1} + bc^{-1} \\ 0 & cc^{-1} \end{pmatrix} = I, \qquad NM = \begin{pmatrix} a^{-1}a & a^{-1}b - a^{-1}bc^{-1}c \\ 0 & c^{-1}c \end{pmatrix} = I.$$

となる。よってすべての元は $G$ の中に逆元をもち、$G$ は群（group）である。

### $G$ の位数

$a$ の選び方は 4 通り、$b$ は 5 通り、$c$ は 4 通りであり、選び方が異なれば異なる行列が得られる。よって

$$|G| = 4 \times 5 \times 4 = 80.$$

である。

### $G$ は可換か？

可換（commutative）ではない。$A = M(1,1,1), B = M(2,0,1)$ とすると

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

であるから $AB \neq BA$ であり、$G$ は可換ではない。

### 位数 1 または 2 の元

元 $M$ の位数が 1 または 2 であるのは、$M^2 = I$ のときであり、かつそのときに限る。積の公式より

$$M(a,b,c)^2 = \begin{pmatrix} a^2 & b(a+c) \\ 0 & c^2 \end{pmatrix},$$

であるから、$a^2 = 1, c^2 = 1, b(a+c) = 0$ が必要である。

$1, 2, 3, 4$ の平方は 5 を法として $1, 4, 4, 1$ であるから、$a^2 = 1$ より $a = \pm 1$ であり、同様に $c = \pm 1$ である。

- $a = c$ のとき、$a + c = \pm 2 \neq 0$ である。$\mathbb{Z}_5$ には零因子（zero divisor）がないから、$b(a + c) = 0$ より $b = 0$ となる。これにより $I$ と $-I$ が得られる。
- $c = -a$ のとき、$a + c = 0$ であるから $b$ は何でもよい。これにより、$b = 0, 1, \ldots, 4$ に対する 10 個の行列 $M(1, b, -1)$ と $M(-1, b, 1)$ が得られる。

よって、位数 1 または 2 の元全体の集合 $H$ の要素はちょうど 12 個である。

**考えてみよう** 自分自身が逆元であるような元の集合は、自動的に閉じているだろうか？

そうではない。この集合は $I$ を含み、各元は自分自身の逆元であるから、単位元と逆元に関する公理は自動的に成り立つ。成り立たない可能性があるのは閉性だけであり、非可換な群では実際に成り立たないことが多い。$X^2 = Y^2 = I$ のとき $(XY)^2 = XYXY$ であるが、$X$ と $Y$ が可換でない限り、これが $I$ になるとは限らない。

ここでも閉性は成り立たない。$H$ の元 $X = M(1, 1, -1)$ と $Y = M(1, 0, -1)$ をとると

$$XY = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

となる。これは $a = c = 1$ であるが $b = -1 \neq 0$ であるから、上の分類により $H$ に属さない。（実際 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるから、この元の位数は 5 である。）したがって $H$ は閉じておらず、$G$ の部分群（subgroup）では**ない**。

ラグランジュ（Lagrange）の定理を知っていれば、もっと手早く示せる。部分群の位数は群の位数を割り切らなければならないが、$12 \nmid 80$ である。

## 検算

80 個の行列すべてをコンピュータで短時間に列挙すると、閉性、逆元の公式、および上の組に対する $AB \neq BA$ が確認できる。すべての元を 2 乗すると、予想どおりちょうど 12 個の $M^2 = I$ の解が見つかり、$XY = M(1, 4, 1)$ の位数は 5 である。手計算では、$M(-1, 3, 1)^2 = I$ を確かめてみるとよい。非対角成分は $3(-1 + 1) = 0$ となる。

## よくある間違い

- 逆元が $G$ に属することを示し忘れる。その対角成分 $a^{-1}, c^{-1}$ が 0 でないことが必要である。
- $M^2 = I$ ならば $M$ は対角行列であると思い込み、$b \neq 0$ である元 $M(1, b, -1)$ と

$M(-1, b, 1)$ を見落とす。

- $H$ について単位元と逆元の公理だけを確認する。成り立たないのは閉性の公理である。

## STEP のその先へ

$G$ は有限体（finite field）$\mathbb{F}_5$ 上の可逆な $2 \times 2$ 上三角行列全体のなす群であり、$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$ の**ボレル部分群**（Borel subgroup）である。$a = c = 1$ である行列全体は位数 5 の正規部分群（normal subgroup）をなし、$G$ はこれと対角行列全体から半直積（semidirect product）として構成される。有限体上の行列のなす群は、群論（group theory）の入門講義において豊富な例の宝庫である。さらに学ぶには、Allenby, *Rings, Fields and Groups* を参照するとよい。

解答例

# STEP II 1991、第 10 問

純粋数学 ・ 空間の直線と平面

> **STEP II 1991、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q10

## 鍵となる考え方

データベース上の分類にかかわらず、これは 3 次元空間における直線（line）と平面（plane）の問題である。影の先端は、棒の先端をかすめる太陽光線が地面と交わる点である。そこで、光線を太陽と棒の先端を通る直線として表し、地面を棒の根元を通り棒に垂直な平面として表して、両者の交点を求める。すべての位置を棒の向きの単位ベクトル（unit vector）を用いて表せば、あとは易しい。

## 解答

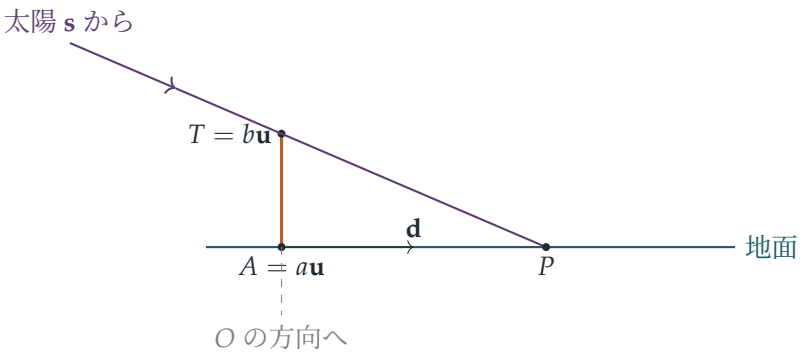
地球の中心を $O$ とし、

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{s} = R\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

とおく。このとき $\mathbf{u}$ は棒の向きの単位ベクトルであり、棒の根元は $A = a\mathbf{u}$、先端は $T = b\mathbf{u}$、太陽は $\mathbf{s}$ にある。必要な内積（dot product）はただ一つで、

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{u} = R\sin\theta\cos\phi.$$

である。簡単のため $c = R\cos\phi\sin\theta$ と書く。




### 先端を通る光線

影の先端 $P$ に届く光は、ちょうど棒の先端をかすめてきたものである。よって $P$ は $\mathbf{s}$ と $b\mathbf{u}$ を通る直線上にあり、ある実数 $t$ を用いて

$$\mathbf{p} = \mathbf{s} + t\,(b\mathbf{u} - \mathbf{s}) = (1-t)\,\mathbf{s} + tb\,\mathbf{u}$$

と表される。

### 地面

地面は水平、すなわち棒に垂直であり、根元 $a\mathbf{u}$ を通る。$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 1$ であるから、地面は平面 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{u} = a$ である。

### 交点を求める

直線の式を平面の式に代入し、$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 1$ と $\mathbf{s}\cdot\mathbf{u} = c$ を用いると、

$$(1-t)c + tb = a \qquad \Longrightarrow \qquad t = \frac{c-a}{c-b}.$$

を得る。$c-b$ で割ってよいのは、太陽が棒を照らしているからである。棒の先端において太陽が地平線より上にあるのは、太陽がそこでの接平面（tangent plane）の向こう側にあるとき、すなわち $\mathbf{s}\cdot\mathbf{u} > b$ のときであり、ちょうどそのときに限る。したがって $c > b$ である。

> **考えてみよう**　この $P$ は本当に棒の向こう側の地面上にあり、太陽の後ろ側のどこかにあるのではないといえるか？

$c > b > a$ であるから $c-a > c-b > 0$ となり、$t > 1$ である。$t = 0$ の点が太陽、$t = 1$ の点が棒の先端であるから、$t > 1$ は先端を越えて太陽から遠ざかる側にあり、あるべき位置にある。

$t$ の値から、

$$1-t=\frac{(c-b)-(c-a)}{c-b}=\frac{a-b}{c-b}=-\frac{h}{c-b},$$
$$tb-a=\frac{b(c-a)-a(c-b)}{c-b}=\frac{c(b-a)}{c-b}=\frac{ch}{c-b}.$$

よって、根元から影の先端への変位（displacement）は

$$\begin{aligned}\mathbf{d}=\mathbf{p}-a\mathbf{u}&=(1-t)\,\mathbf{s}+(tb-a)\,\mathbf{u}\\&=\frac{h}{c-b}\left(c\,\mathbf{u}-\mathbf{s}\right)\\&=\frac{Rh}{c-b}\left[\cos\phi\sin\theta\begin{pmatrix}0\\\cos\phi\\\sin\phi\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\\0\end{pmatrix}\right]\\&=\frac{Rh}{c-b}\begin{pmatrix}-\cos\theta\\-(1-\cos^2\phi)\sin\theta\\\cos\phi\sin\phi\sin\theta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

である。$1-\cos^2\phi=\sin^2\phi$ かつ $c-b=R\cos\phi\sin\theta-b$ であるから、これは

$$\mathbf{d}=Rh\left(R\cos\phi\sin\theta-b\right)^{-1}\begin{pmatrix}-\cos\theta\\-\sin^2\phi\sin\theta\\\cos\phi\sin\phi\sin\theta\end{pmatrix},$$

となり、求める式が得られた。

途中の行 $\mathbf{d}=\frac{h}{c-b}(c\,\mathbf{u}-\mathbf{s})$ は注目に値する。ベクトル $c\,\mathbf{u}$ は $\mathbf{s}$ の棒の向きの成分（component）であるから、$c\,\mathbf{u}-\mathbf{s}$ は太陽の位置ベクトル（position vector）の水平部分に負号をつけたものである。つまり影は太陽の水平方向とちょうど反対向きに伸びる。これは経験から予想されるとおりである。

## 検算

- $\mathbf{d}\cdot\mathbf{u}=\frac{Rh}{c-b}\left(-\sin^2\phi\sin\theta\cos\phi+\cos\phi\sin^2\phi\sin\theta\right)=0$ であるから、影は地面に沿っている。
- $\phi=0$ とすると、棒は $y$ 軸の向きを向く。このとき $\mathbf{d}=\frac{Rh}{R\sin\theta-b}(-\cos\theta,0,0)$ である。$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき太陽は真上にあり、影は消える。$R$ が非常に大きいとき、影の長さは $h\cot\theta$ に近づく。これは、高度 $\theta$ にある太陽に対する、平らな地球でのおなじみの答えである。

- 数値的にも、太陽が地平線より上にあるような $R, a, h, \theta, \phi$ を無作為に何千通りも選び、光線と地面の平面の交点を直接求めて影の先端を定めた。結果は常に公式と一致し、相対誤差は最大でも約 $10^{-13}$ であった。

## よくある間違い

- 地面を平面 $y = a\cos\phi$ や、ほかの座標平面とみなしてしまう。「水平」とは $\mathbf{u}$ に垂直という意味であり、地面は $\mathbf{r}\cdot\mathbf{u} = a$ である。
- 最初からすべてを成分で展開してしまう。$\mathbf{u}$ と $\mathbf{s}$ を最後の行までベクトルのまま扱えば、計算が大幅に省ける。

## STEP のその先へ

ここでの太陽光は一点（太陽）を通る直線の族であるから、影は棒の地面の平面への**中心射影**（central projection）である。太陽が非常に遠くにあるとき、光線はほぼ平行になり、この射影は平行射影（parallel projection）になる。これは線形代数（linear algebra）が研究する種類の写像であり、ベクトル $c\,\mathbf{u} - \mathbf{s}$ は、$\mathbf{s}$ の棒への射影から $\mathbf{s}$ 自身を引いたものである。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、直線や平面への射影を詳しく扱っている。

解答例

# STEP II 1991、第 11 問

力学 ・ 発射点からの放物体の距離

**STEP II 1991、問 11**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/91-s2-q11

## 鍵となる考え方

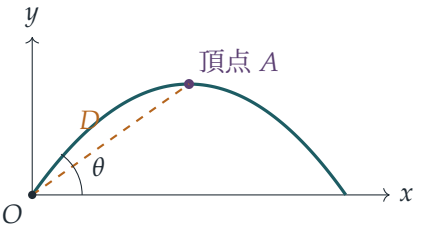
砲からの距離の 2 乗を扱う。こうすれば平方根を避けられ、どちらの小問も多項式の問題になる。前半では、頂点（apex）までの距離の 2 乗が $\sin^2\theta$ の 2 次式になるので、平方完成（completing the square）するか微分すれば最適な角度が求まる。後半では、砲弾が近づいてくるのは距離の 2 乗が減少しているときにちょうど限られるので、飛行全体にわたってその時間導関数（time derivative）の符号を調べる。

## 解答

### モデル

砲弾を、空気抵抗（air resistance）のない状態で重力のみを受けて自由に運動する質点（particle）とみなす。砲弾は原点 $O$（砲手が立っている位置）から、速さ $u$、仰角（elevation）$\theta$ で発射される。ただし $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。$x$ を水平方向、$y$ を鉛直上向きにとる。時刻 $t$ において

$$x = ut\cos\theta, \qquad y = ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$



### 仰角

頂点に達するのは $\dot{y} = u\sin\theta - gt = 0$ のとき、すなわち $t = u\sin\theta/g$ のときである。このとき

$$x_A = \frac{u^2\sin\theta\cos\theta}{g}, \qquad y_A = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}.$$

距離 $OA$ を $D$ とおき、$s = \sin^2\theta$ とおくと $\cos^2\theta = 1 - s$ である。すると

$$\begin{aligned} D^2 = x_A^2 + y_A^2 &= \frac{u^4}{g^2}\left(\sin^2\theta\cos^2\theta + \tfrac{1}{4}\sin^4\theta\right) \\ &= \frac{u^4}{g^2}\left(s(1-s) + \tfrac{1}{4}s^2\right) = \frac{u^4}{g^2}\left(s - \tfrac{3}{4}s^2\right). \end{aligned}$$

被害は距離とともに小さくなるので、砲手は $D$ をできるだけ大きくしたい。これは $D^2$ をできるだけ大きくすることと同じである。平方完成すると

$$s - \tfrac{3}{4}s^2 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{4}\left(s - \tfrac{2}{3}\right)^2,$$

となり、これが最大値 $\frac{1}{3}$ をとるのは $s = \frac{2}{3}$ のときであり、そのときに限る。$s = \sin^2\theta$ は $(0,1)$ のすべての値をとるので、この値は実現可能である。よって $\sin^2\theta = \frac{2}{3}$、$\cos^2\theta = \frac{1}{3}$ であり、

$$\boxed{\tan\theta = \sqrt{2}, \qquad \theta = \arctan\sqrt{2} \approx 54.7^\circ}$$

を得る。このとき頂点は砲から距離 $D = \dfrac{u^2}{\sqrt{3}\,g}$ の位置にある。

### 下降中に砲弾は近づいてくるか？

時刻 $t$ における砲からの距離の 2 乗を $r^2 = x^2 + y^2$ とする。砲弾が近づくのは $r^2$ が減少しているときにちょうど限られるので、

$$\tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2) = x\dot{x} + y\dot{y}.$$

の符号を調べればよい。

> **考えてみよう** 頂点での距離と、その後のいくつかの点での距離を比べるだけではなぜいけないのだろうか？

いくつかの点を調べただけでは、その間で距離が一時的に縮む可能性を排除できない。導関数を使えば、飛行中の**すべての**瞬間について一度に知ることができる。$\dot{x} = u\cos\theta$、

$\dot{y} = u\sin\theta - gt$ より

$$\begin{aligned} x\dot{x} + y\dot{y} &= u^2 t\cos^2\theta + \left(ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2\right)(u\sin\theta - gt) \\ &= u^2 t - \tfrac{3}{2}ugt^2\sin\theta + \tfrac{1}{2}g^2t^3 \\ &= \tfrac{1}{2}t\left[(gt)^2 - 3u\sin\theta\,(gt) + 2u^2\right], \end{aligned}$$

ここで $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を用いた。$t > 0$ では符号は括弧内の $gt$ についての 2 次式の符号と一致する。平方完成すると

$$(gt)^2 - 3u\sin\theta\,(gt) + 2u^2 = \left(gt - \tfrac{3}{2}u\sin\theta\right)^2 + u^2\left(2 - \tfrac{9}{4}\sin^2\theta\right).$$

選んだ角度では $\sin^2\theta = \frac{2}{3}$ なので、定数項は $u^2\left(2 - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}u^2 > 0$ である。したがって括弧内はすべての $t$ で正であり、$r^2$ は飛行全体を通じて狭義単調増加（strictly increasing）である。

よって答えは**いいえ**である。砲弾は落下する間ずっと砲手から着実に遠ざかっていき、下降経路のうち最も近い点は頂点そのものである。これにより、最高点での爆発だけを考えるという砲手の簡便法が正当であったことがわかる。この角度では、それが実際に下降経路で最も近い点を与え、その距離は $u^2/(\sqrt{3}\,g)$ である。

## 検算

- $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき頂点は $(u^2/2g,\, u^2/4g)$ にあり、$D^2 = \frac{5}{16}u^4/g^2$ となる。これは最大値 $\frac{1}{3}u^4/g^2$ よりわずかに小さく、そうなるべきである。
- 一般の計算から、砲弾が一度でも近づいてくるのは $\frac{9}{4}\sin^2\theta \geq 2$、すなわち $\sin\theta \geq \frac{2\sqrt{2}}{3}$ のときに限ることがわかる。これは約 70.5° の角度であり、54.7° を十分に上回る。（極限 $\theta \to \frac{\pi}{2}$ も納得がいく。真上に撃った砲弾は砲に向かってまっすぐ落ちてくる。）
- 数値的に、$u = g = 1$ として $\theta$ を探索すると、頂点までの距離の最大値 $0.57735 \approx 1/\sqrt{3}$ が $\theta \approx 54.736°$ で得られる。その角度で軌道（trajectory）に沿って少しずつ調べると、$O$ からの距離は決して減少しない。$70.5° \pm 0.6°$ のあたりで、単調（monotonic）から単調でない状態へと切り替わる。

## よくある間違い

- 頂点の砲からの直線距離ではなく、水平距離や高さを最大化してしまう。
- 砲弾は水平方向に遠ざかり続けるのだから、頂点を過ぎれば砲からの距離は当然増加すると思い込む。砲弾は同時に落下しており、十分に急な角度で撃てば実際に近

づいてくる。

## STEP のその先へ

$r$ ではなく $r^2$ を微分し、$\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}$ の符号を読み取るという手法は、動点が近づいているか遠ざかっているかを判定する標準的な方法であり、ベクトル力学（vector mechanics）全般や軌道の研究に登場する。しきい値の角度 $\arcsin(2\sqrt{2}/3)$ は古典的な結果である。これより小さい角度では、投射体の発射点からの距離は常に増加する。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この種の議論を自然なものにする、運動へのベクトル的アプローチを展開している。

解答例

# STEP II 1991、第 12 問

力学 ・ 弾性体の強制振動

> **STEP II 1991、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q12

この問題は、*Beyond STEP* の第 11.1 節「共鳴」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/resonance.html

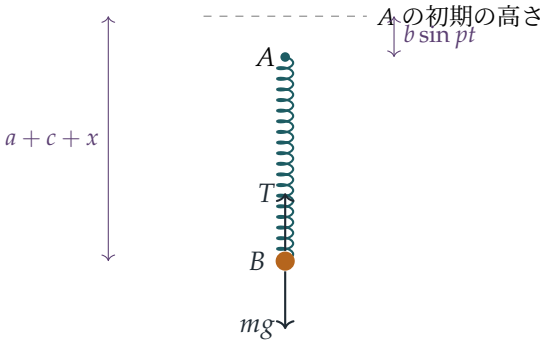
## 鍵となる考え方

張力（tension）は伸び（extension）だけで決まる。伸びとは、質点の位置から動く端の位置を引き、さらに自然長（natural length）を引いたものである。これを $x$ と $b\sin pt$ を用いて書き表し、最初のつり合いを使って弾性率（modulus）を $c$ を含む式で置き換えれば、運動方程式（equation of motion）は自然に得られる。その結果として現れるのは強制単振動（forced simple harmonic oscillator）である。これは余関数（complementary function）に特殊解（particular solution）を加えて解く。また、「ぴんと張っている」（taut）とは「伸びが決して負にならない」という意味であることを忘れてはならない。

## 解答

### 運動方程式

質点を、フックの法則（Hooke's law）に従う弾性率 $\lambda$ の軽い弾性ひもにつけられた質量 $m$ の点としてモデル化する。位置はすべて、$A$ の初期位置から下向きに測る。




最初のつり合いの状態では、伸びは $c$ であり、張力が重力とつり合っている：

$$\frac{\lambda c}{a} = mg, \qquad \text{よって} \qquad \frac{\lambda}{ma} = \frac{g}{c} = n^2.$$

時刻 $t$ において、質点の深さは $a + c + x$、端 $A$ の深さは $b \sin pt$ である。ひもが張っている間、その長さは $a + c + x - b \sin pt$ であるから、伸びは

$$e = c + x - b \sin pt,$$

であり、張力は $T = \lambda e / a$ である。質点について下向きの成分を考えると、

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} &= mg - \frac{\lambda}{a}(c + x - b \sin pt) \\ &= mg - \frac{\lambda c}{a} - \frac{\lambda}{a}(x - b \sin pt) \\ &= -\frac{\lambda}{a}(x - b \sin pt), \end{aligned}$$

となる。ここで $\lambda c / a = mg$ を用いた。両辺を $m$ で割り、$\lambda / (ma) = n^2$ を用いると、

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -n^2(x - b \sin pt),$$

となり、求める式が得られる。これには $e \geq 0$ が必要である。ひもがたるむと、張力は $\lambda e / a$ ではなく 0 になるからである。

### $x(t)$ を求める

方程式を $\ddot{x} + n^2 x = n^2 b \sin pt$ と書き直す。余関数は $C \cos nt + D \sin nt$ である。特殊解として $x = K \sin pt$ を試すと、

$$-p^2 K + n^2 K = n^2 b \quad \Longrightarrow \quad K = \frac{n^2 b}{n^2 - p^2},$$

となる。$p < n$ より $n^2 - p^2 \neq 0$ であるから、これは妥当である。したがって

$$x = \frac{n^2 b}{n^2 - p^2} \sin pt + C \cos nt + D \sin nt.$$

$t = 0$ において質点はつり合いの位置で静止しているから、$x(0) = 0$ かつ $\dot{x}(0) = 0$ である。前者から $C = 0$ が得られる。後者から

$$\frac{n^2bp}{n^2 - p^2} + nD = 0 \quad \Longrightarrow \quad D = -\frac{nbp}{n^2 - p^2}.$$

が得られる。ゆえに

$$x(t) = \frac{bn}{n^2 - p^2}\,(n \sin pt - p \sin nt),$$

となり、求める式が得られる。

### ひもが張ったままである条件

> **考えてみよう** 正（または 0 以上）であり続けなければならないのは、正確には何か。$x$ か、張力か、それとも別のものか。

それは伸び $e = c + x - b \sin pt$ である。$x(t)$ の式が運動を表すのは $e \geq 0$ である間だけであるから、ひもが常に張ったままであるための条件は、これがすべての $t \geq 0$ で成り立つことにほかならない。$x$ を代入すると、

$$\begin{aligned} x - b \sin pt &= b \sin pt \left( \frac{n^2}{n^2 - p^2} - 1 \right) - \frac{bnp}{n^2 - p^2} \sin nt \\ &= \frac{bp}{n^2 - p^2}\,(p \sin pt - n \sin nt). \end{aligned}$$

よって必要十分条件は

$$c + \frac{bp}{n^2 - p^2}\,(p \sin pt - n \sin nt) \geq 0 \quad \text{すべての} t \geq 0,$$

であり、$n^2 - p^2 > 0$ であるから、同値な形として

$$bp\,(n \sin nt - p \sin pt) \leq c\,(n^2 - p^2) \quad \text{すべての} t \geq 0.$$

と書ける。（$e$ が孤立した瞬間にだけ 0 に達する場合、張力は一瞬 0 になるが、運動方程式は依然として成り立ち、ひもが実際にたるむことはない。不等式が等号を含むのはこのためである。）

ここで $pb < (n - p)c$ と仮定する。任意の $t$ について、$\sin nt \leq 1$、$-\sin pt \leq 1$ かつ $n, p > 0$ であるから、

$$n \sin nt - p \sin pt \leq n + p.$$

$b > 0$（振幅）とすると $bp > 0$ であるから、

$$bp\,(n \sin nt - p \sin pt) \leq bp\,(n + p) < (n - p)c\,(n + p) = c\,(n^2 - p^2).$$

条件は成り立ち、実際には狭義の不等式で成り立つ。よってひもは常に張ったままである。（$b$ が負であってもよいとする場合は、$|n \sin nt - p \sin pt| \leq n + p$ であるから、$b$ の代わりに $|b|$ を用いて同じ議論が成り立つ。）

## 検算

- $t = 0$ のとき：$x(0) = 0$ かつ $\dot{x}(0) = \frac{bn}{n^2 - p^2}(np - pn) = 0$ であり、そうなるべきとおりである。
- $p \to 0$ のとき、端 $A$ はほとんど動かず、$x(t) \approx \frac{bn}{n^2}(npt - pnt) \to 0$ となる。予想どおり何も起こらない。
- 伸びの最小値は $c - bp(n+p)/(n^2 - p^2) = c - bp/(n-p)$ を下回らない。これが正であるのは、ちょうど $pb < (n-p)c$ のときである。
- 数値的には、$m, \lambda, a, c, b, p$ を無作為に選び、フックの法則に基づく完全な方程式を逐次（RK4）積分したところ、$x(t)$ の式と $4 \times 10^{-10}$ 以内で一致した。$n = 1$、$p = 1/\sqrt{2}$、$c = 1$ とし、$b$ を $(n-p)c/p$ よりわずか 5% 大きくとると、$t = 20\,000$ までに伸びは実際に負（約 $-0.05$）になる。

## よくある間違い

- $x$ そのものを伸びとしてしまう。上端が動くので、伸びは $c + x - b\sin pt$ である。
- $\dot{x}(0) = 0$ から解に $\sin nt$ の項が必要になることを忘れる。この項がなければ、質点は速度 $n^2bp/(n^2 - p^2)$ で動き始めることになる。
- ひもが張っている条件を $x \geq -c$ と書いてしまう。これが正しいのは $A$ が固定されている場合だけである。

## STEP のその先へ

これは減衰のない強制振動である。応答は駆動振動数 $p$ と固有振動数（natural frequency）$n$ が混ざったものであり、因子 $1/(n^2 - p^2)$ は $p \to n$ のとき発散する。これが共振（resonance）である。$n/p$ が無理数のとき、$(nt, pt)$ を $2\pi$ を法として見た値は稠密に分布するので、$n\sin nt - p\sin pt$ はいくらでも $n + p$ に近くなる。したがって十分条件 $pb < (n-p)c$ は、本質的には必要条件でもある（ただし等号は依然として許される）。強制振動、共振、減衰（damping）については Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）で詳しく扱われており、微分方程式の側面については Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）で扱われている。

解答例

# STEP II 1991、第 13 問

力学 ・ 剛体の回転

> **STEP II 1991、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q13

## 鍵となる考え方

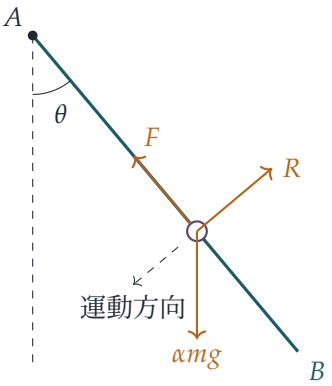
輪が滑り出すまでは、棒と輪は $A$ を支点とする一つの剛体（rigid body）として一体となって運動する。したがって、この合成された物体の角速度（angular speed）をエネルギーから、角加速度（angular acceleration）を力のモーメント（moments）から求めることができる。次に、それらを用いて、輪が棒と一緒に動き続けるために棒が輪に及ぼさなければならない力を求める。輪が棒上で静止していられるのは、必要な摩擦力が垂直抗力の $\mu$ 倍以下である間だけであり、その条件が初めて破れる角度で滑りが始まる。

## 解答

### モデル化

輪は $A$ から距離 $x$ の位置にある質点、支点はなめらか、棒は剛体として扱う。棒と鉛直下向きのなす角を $\theta$ とすると、放した瞬間は $\theta = \frac{\pi}{2}$ であり、棒が振り下ろされるにつれて $\theta$ は減少する。角速度を $\omega = |\dot{\theta}|$、角加速度の大きさを $\beta = |\ddot{\theta}|$ と書く。

棒は輪に二つの力を及ぼす。一つは棒に垂直な垂直抗力（normal reaction）$R$ で、輪の運動の向きを正とする。もう一つは棒に沿った摩擦力（friction）$F$ で、$A$ に向かう向きを正とする。輪は棒に通されているので、$R$ はどちらの符号にもなりうる。




図では $R$ を運動と逆向きに描いている。$k^2 > xd$ のときには実際にそうなるからであるが、計算では符号を一般のまま扱う。

### 剛体の運動

輪が棒に固定されているとき、$A$ のまわりの慣性モーメント（moment of inertia）は $mk^2 + \alpha m x^2 = m(k^2 + \alpha x^2)$ である。放した位置から、棒の重心（centre of mass）は $d\cos\theta$ だけ、輪は $x\cos\theta$ だけ下がっているので、エネルギー保存則（conservation of energy）より

$$\tfrac{1}{2}m(k^2 + \alpha x^2)\,\omega^2 = mg(d + \alpha x)\cos\theta \quad \Longrightarrow \quad \omega^2 = \frac{2g(d + \alpha x)\cos\theta}{k^2 + \alpha x^2}.$$

$A$ のまわりの力のモーメントを考えると（支点からの力はモーメントをもたない）、重力の合計のモーメントは $mg(d + \alpha x)\sin\theta$ であるから

$$\beta = \frac{g(d + \alpha x)\sin\theta}{k^2 + \alpha x^2}.$$

### 輪にはたらく力

輪は半径 $x$ の円周上を運動する。その加速度は、棒に沿って $A$ に向かう向きに $x\omega^2$、棒に垂直で運動の向きに $x\beta$ である。棒に沿って外向きの方向は鉛直下向きと角 $\theta$ をなすので、重力の成分は棒に沿って外向きに $\alpha mg\cos\theta$、運動の向きに $\alpha mg\sin\theta$ である。

棒に沿って $A$ に向かう向きについて：$F - \alpha mg\cos\theta = \alpha m x\omega^2$ であるから

$$\begin{aligned} F &= \alpha mg\cos\theta\left(1 + \frac{2x(d + \alpha x)}{k^2 + \alpha x^2}\right) \\ &= \frac{\alpha mg\cos\theta\,(k^2 + 3\alpha x^2 + 2xd)}{k^2 + \alpha x^2}. \end{aligned}$$

棒に垂直で運動の向きについて：

$$R + \alpha mg\sin\theta = \alpha m x\beta \quad\Longrightarrow\quad R = \alpha mg\sin\theta\left(\frac{x(d+\alpha x)}{k^2+\alpha x^2} - 1\right) = \frac{\alpha mg\sin\theta\,(xd - k^2)}{k^2+\alpha x^2}.$$

$R$ では $\alpha x^2$ の項が打ち消し合うことに注意しよう。そのため $k^2 - xd$ だけが現れるのである。

**考えてみよう** 輪はどちら向きに滑ろうとするか。また、$R$ の符号は何を意味するか。

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ では $F > 0$ である。つまり棒は輪を $A$ **に向かって**引かなければならず、摩擦が足りなければ輪は外向き、すなわち $B$ の方へ滑る。$k^2 > xd$ ならば $R < 0$ であり、棒は輪を押しとどめている。輪は単独なら棒のこの点よりも速く落下しようとするので、棒がそれに逆らって押さなければならないのである。

### いつ滑り出すか

輪が棒上で静止し続けるのは $|F| \le \mu|R|$ が成り立つ間である。$k^2 > xd$ のとき、$F$ と $|R|$ はともに同じ正の因数 $\alpha mg/(k^2+\alpha x^2)$ をもつので、条件は

$$\cos\theta\,(k^2 + 3\alpha x^2 + 2xd) \le \mu\sin\theta\,(k^2 - xd), \quad \text{すなわち} \quad \mu\tan\theta \ge \frac{3\alpha x^2 + k^2 + 2xd}{k^2 - xd}.$$

放した瞬間は $\theta = \frac{\pi}{2}$ で $F = 0$ なので、輪はすぐには滑らない。$\theta$ が $\frac{\pi}{2}$ から 0 まで減少するにつれて、$\mu\tan\theta$ は $+\infty$ から 0 まで単調に減少するが、右辺は一定の正の数である。したがって、この不等式が初めて破れて輪が外向きに滑り始めるのは、

$$\boxed{\mu\tan\theta = \frac{3\alpha x^2 + k^2 + 2xd}{k^2 - xd}}$$

を満たすただ一つの角度においてであり、これが求める結果である。輪は棒が鉛直になる前に必ず滑り出す。

### 小問 (i)：$k^2 = xd$

このときはどの角度でも $R = 0$ であるから、得られる最大摩擦力 $\mu|R|$ は 0 である。しかし $\theta < \frac{\pi}{2}$ となるやいなや $F > 0$ となる。したがって $\mu$ の値にかかわらず、輪は**棒を放した瞬間から**棒に沿って外向きに滑り始める。物理的には、放した瞬間、$A$ から距離 $x = k^2/d$ にある棒上の点はちょうど加速度 $g$ で落下し始める（$\theta = \frac{\pi}{2}$ で $x\beta = g$ となるため）。そのため輪は棒のどちらの側にも押し付けられず、摩擦がはたらく手がかりがないのである。

**小問 (ii)：$k^2 < xd$**

このときは $R > 0$ である。放した瞬間、棒のこの点は $g$ より速く落下しようとするので、棒は輪を運動の向きに押し進める。輪はやはり外向きに滑ろうとし、条件 $F \le \mu R$ は

$$\mu \tan\theta \ge \frac{3\alpha x^2 + k^2 + 2xd}{xd - k^2}.$$

となる。先ほどと同じ議論により、輪は最初は静止しており、

$$\mu \tan\theta = \frac{3\alpha x^2 + k^2 + 2xd}{xd - k^2},$$

となったときに外向きに滑り始める。これは与えられた結果の $k^2 - xd$ を $|k^2 - xd|$ に置き換えたものである。違いは、垂直抗力が今度は輪の反対側にはたらくことだけである。

## 検算

- $k^2 > xd$ のとき、$\mu \to \infty$ とすると滑り出す角度は $\theta \to 0$ となる。非常に粗い棒は輪をほぼ最下点まで保持するということである。また $k^2 - xd \to 0$ とすると角度は $\frac{\pi}{2}$ に近づき、小問 (i) と一致する。
- 長さ $2a$ の一様な棒では $d = a$、$k^2 = \frac{4}{3}a^2$ であるから、臨界位置 $x = k^2/d = \frac{4}{3}a$ は打撃の中心（centre of percussion）、すなわち棒を放したときに自由落下の状態から動き始める点である。
- 数値的にも、剛体の運動を数値積分し、輪の加速度を有限差分（finite differences）で求め、ランダムなパラメータ値に対して $F$ と $R$ を $10^{-5}$ 以内の精度で再現した。たとえば $k^2 - xd \approx 2.87$ の場合、輪が初めて $\mu|R|$ を超える摩擦を必要としたのは $\theta \approx 1.3270$ においてであり、公式と一致した。$k^2 < xd$ の場合も同様に (ii) の公式と一致した。

## よくある間違い

- 慣性モーメントと重力のモーメントへの輪自身の寄与を忘れること。輪は滑り出すまでは剛体の一部である。
- 摩擦の法則に、実際の垂直抗力 $R$ ではなく重力の垂直成分を用いること。ここでは $R$ は角加速度にも依存する。
- 棒に沿った方程式で求心（centripetal）項 $x\omega^2$ を落とすこと。$3\alpha x^2$ の係数 3 はこの項から生じる。

## STEP のその先へ

支点から距離 $k^2/d$ にある点は**打撃の中心**である。そこに打撃を加えても支点には撃力的な反力が生じない。クリケットのバットやテニスラケットに「スイートスポット」があるのはこのためである。またこの距離は、物理振り子（compound pendulum）と同じ周期をもつ単振り子（simple pendulum）の長さでもある。ここで用いた方法、すなわち剛体の運動を求めてから、それを維持するのに必要な内力を問うという方法は、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）における拘束力（constraint forces）の解析の基礎となっている。剛体の回転と物理振り子についてさらに学ぶには、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を読むとよい。

解答例

# STEP II 1991、第 14 問

力学 ・ 相対速度と追跡

**STEP II 1991、問 14**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

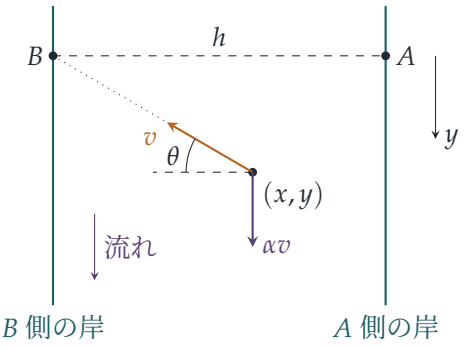
step.maths.org/questions/91-s2-q14

## 鍵となる考え方

ボートの対地速度は、水に対するボートの速度に水の速度を加えたものである。「常に $B$ の方を向いている」という条件は $y = x\tan\theta$ という幾何的な条件であり、これを微分すると同じ速度についてもう一つの表示が得られる。二つを比較すると、$x$ と $\theta$ を結ぶ変数分離形（separable）の微分方程式が得られる。置換（substitution）$\tan\theta = \sinh(\alpha s)$ を選ぶのは、これによって $\sec\theta + \tan\theta$ が指数関数になり、すべてが $s$ の単純な指数関数で表されるからである。

## 解答

ボートを質点（particle）としてモデル化する。$B$ を原点とし、$x$ を $B$ 側の岸から $A$ の方へ測り、$y$ を下流方向に測る。すると $A$ は $(h,0)$ にあり、ボートはそこから出発する。



### $\theta$ を用いた速度の表示

ボートは $B$ 側の岸の方を向き、方向 $AB$ に対して角 $\theta$ だけ上流側に傾いている（流されるのを打ち消すためである）。したがって、水に対するボートの速度は、$(x, y)$ 成分で表すと単位ベクトル $-(\cos\theta, \sin\theta)$ の向きに大きさ $v$ である。これに $y$ 方向の速さ $\alpha v$ の流れを加えると、

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v\cos\theta \\ \alpha v - v\sin\theta \end{pmatrix}.$$

### $B$ の方を向くこと

点 $(x, y)$ にあるボートから $B$ への向きは $(-x, -y)$ の向きであり、これが $AB$ と角 $\theta$ をなすのは、ちょうど $\tan\theta = y/x$ のときである。よって、運動の間中、

$$y = x\tan\theta.$$

が成り立つ。積の微分法（product rule）と合成関数の微分法（chain rule）を用いて $t$ で微分すると、

$$\dot{y} = \tan\theta\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x\sec^2\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},$$

となり、速度ベクトル $(\dot{x}, \dot{y})$ は求める形をもつ。

### $x$ と $\theta$ の微分方程式

ここで二つの表示を比較する。$x$ 成分から $\dot{x} = -v\cos\theta$ を得る。これを $y$ 成分に代入すると、

$$\begin{aligned} \tan\theta\,(-v\cos\theta) + x\sec^2\theta\,\dot{\theta} &= \alpha v - v\sin\theta \\ x\sec^2\theta\,\dot{\theta} &= \alpha v, \end{aligned} \qquad (*)$$

となる。$\tan\theta\cos\theta = \sin\theta$ であり、$-v\sin\theta$ の項が打ち消し合うからである。特に $\dot{\theta} > 0$ なので、$\theta$ は 0 から単調に増加し、$x$ を $\theta$ の関数とみなしてよい。割り算をすると、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\dot{x}}{\dot{\theta}} = \frac{-v\cos\theta\cdot x\sec^2\theta}{\alpha v} = -\frac{x\sec\theta}{\alpha}, \qquad \text{よって} \qquad \alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -x\sec\theta,$$

となり、示すべき式が得られた。

### $x$ を求める

この方程式は変数分離できる（ボートが到着するまでは $x > 0$ である）。

$$\alpha\int\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\int\sec\theta\,\mathrm{d}\theta \quad\Longrightarrow\quad \alpha\ln x = -\ln(\sec\theta + \tan\theta) + C,$$

ここで、$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ で成り立つ標準的な積分 $\int \sec\theta \,\mathrm{d}\theta = \ln(\sec\theta + \tan\theta)$ を用いた。出発時にボートは $A$ にあり、そこでは $x = h$、$\theta = 0$ であるから、$C = \alpha \ln h$ である。したがって

$$\alpha \ln \frac{x}{h} = -\ln(\sec\theta + \tan\theta), \qquad \text{すなわち} \qquad \left(\frac{x}{h}\right)^{\alpha} = (\sec\theta + \tan\theta)^{-1}.$$

**置換** $\tan\theta = \sinh(\alpha s)$

**考えてみよう** $\sec\theta$ を $s$ で表すとどうなるか。

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \sinh^2(\alpha s) = \cosh^2(\alpha s)$ であり、$\sec\theta$ と $\cosh(\alpha s)$ はともに正である（$0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ だからである）。よって $\sec\theta = \cosh(\alpha s)$ を得る。すると

$$\sec\theta + \tan\theta = \cosh(\alpha s) + \sinh(\alpha s) = \mathrm{e}^{\alpha s},$$

であるから $(x/h)^{\alpha} = \mathrm{e}^{-\alpha s}$ となり、両辺の $\alpha$ 乗根をとって $x = h\mathrm{e}^{-s}$ を得る。

速さについての方程式を得るために、$\tan\theta = \sinh(\alpha s)$ を $t$ で微分する。

$$\sec^2\theta\,\dot{\theta} = \alpha \cosh(\alpha s)\,\dot{s}.$$

これと $x = h\mathrm{e}^{-s}$ を $(*)$ に代入すると $h\mathrm{e}^{-s} \cdot \alpha\cosh(\alpha s)\,\dot{s} = \alpha v$ となり、$\alpha$ で割ると、

$$h\mathrm{e}^{-s}\cosh(\alpha s)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v,$$

となって、示すべき式が得られた。

### 横断に要する時間

$A$ では $\theta = 0$ なので $s = 0$ である。$\dot{s} > 0$ より $s$ は増加し、ボートが $B$ に到達するのは $x = h\mathrm{e}^{-s} \to 0$ のとき、すなわち $s \to \infty$ のときである。（ボートは実際に $B$ に到着する。$\alpha < 1$ であるから $y = x\tan\theta = h\mathrm{e}^{-s}\sinh(\alpha s) \to 0$ となるからである。）変数を分離すると、横断に要する時間は

$$\begin{aligned} T &= \frac{h}{v}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s}\cosh(\alpha s)\,\mathrm{d}s = \frac{h}{2v}\int_0^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-(1-\alpha)s} + \mathrm{e}^{-(1+\alpha)s}\right)\mathrm{d}s \\ &= \frac{h}{2v}\left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1+\alpha}\right) = \frac{h}{2v}\cdot\frac{2}{1-\alpha^2} = \frac{h}{v(1-\alpha^2)}, \end{aligned}$$

である。ここで、$1 - \alpha > 0$ であるから、どちらの積分も収束（converge）する。よって、横断に要する時間は $hv^{-1}(1-\alpha^2)^{-1}$ である。

## 検算

- 流れがない場合（$\alpha = 0$）、ボートはまっすぐ対岸へ向かい、当然 $T = h/v$ となる。$\alpha \to 1$ のとき時間は発散する。流れより速くないボートは、真上流を向くことになる $B$ の近くで、流れに逆らって前進することが決してできないからである。
- 運動を数値的に追跡した（4 次のルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）を用い、各ステップで $B$ の方へ舵を取る）。$h = v = 1$、$\alpha = \frac{1}{2}$ のとき、ボートは $t \approx 1.33333$ に到着し、$1/(1 - \frac{1}{4}) = \frac{4}{3}$ と一致した。経路に沿って、$(x/h)^{\alpha}(\sec\theta + \tan\theta)$ はおよそ $10^{-13}$ の精度で 1 に等しいままであった。

## よくある間違い

- 船首の向きの $y$ 成分の符号を間違えること。ボートは下流へ流されるので、$B$ の方を向くことは一部上流を向くことを意味する。$\theta > 0$ のとき、その成分は $-v\sin\theta$ である。
- $\sec\theta = +\cosh(\alpha s)$ の根拠を示し忘れること。これには $\theta$ が $\frac{\pi}{2}$ 未満にとどまることが必要であり、$\theta$ は $B$ から $x > 0$ の点へ引いた直線の角であるから、これは成り立つ。

## STEP のその先へ

これは古典的な**追跡曲線**（*pursuit curve*）の問題である。ある物体が絶えず目標の方へ舵を取り、その経路を運動の向きについての微分方程式から求める。同じ考え方で、動いている飼い主を追いかける犬や、目標を追尾するミサイルを記述することができ、トラクトリックス（tractrix）のような曲線へと自然につながる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、相対速度（relative velocity）や、運動する座標系での運動方程式の立て方に習熟するのに適した本である。

解答例

# STEP II 1991、第 15 問

確率・統計　・　期待値の線形性

> **STEP II 1991、問 15**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q15

## 鍵となる考え方

組 $(n_1, n_2)$ を $m \times m$ の格子のマス目と考え、$m^2$ 個のマス目がすべて同様に確からしいとする。$|n_1 - n_2| = k$ となるマス目は主対角線に平行な 2 本の対角線上に並ぶので、数えるのは容易である。その後はすべて**期待値の線形性**（linearity of expectation）から導かれる。すなわち、差の和の期待値は各期待値の和に等しい。隣り合う項が変数を共有していて独立でなくても、このことは成り立つ。試験監督者の歩く距離も同じ種類の和であるが、最初の移動だけはランダムな机ではなく決まった机から出発する点が異なる。

## 解答

**$|n_1 - n_2|$ の分布**

$n_1$ と $n_2$ は独立（independent）で、それぞれ $\{1, \ldots, m\}$ 上の一様分布（uniform distribution）に従うので、$m^2$ 個の順序対 $(n_1, n_2)$ はそれぞれ確率 $1/m^2$ をもつ。

$1 \le k \le m-1$ を満たす $k$ を固定する。$n_1 - n_2 = k$ となる組は $(k+1, 1), (k+2, 2), \ldots, (m, m-k)$ であり、$m-k$ 個ある。対称性から $n_2 - n_1 = k$ となる組も $m-k$ 個あり、$k \neq 0$ なので両者は重ならない。したがって

$$\mathrm{P}\big(|n_1 - n_2| = k\big) = \frac{2(m-k)}{m^2},$$

となり、示すべき式が得られた。（$k = 0$ のときは組が $m$ 個あるので、$\mathrm{P}(|n_1 - n_2| = 0) = 1/m$ である。確認として、$\frac{1}{m} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{2(m-k)}{m^2} = \frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{m^2} = 1$ となる。）

### $|n_1 - n_2|$ の期待値

値 $k = 0$ は期待値に何も寄与しないので、

$$\begin{aligned}\mathrm{E}|n_1 - n_2| &= \sum_{k=1}^{m-1} k \cdot \frac{2(m-k)}{m^2} = \frac{2}{m^2}\left(m\sum_{k=1}^{m-1} k - \sum_{k=1}^{m-1} k^2\right) \\ &= \frac{2}{m^2}\left(\frac{m\cdot m(m-1)}{2} - \frac{(m-1)m(2m-1)}{6}\right) \\ &= \frac{2}{m^2}\cdot\frac{m(m-1)\big(3m-(2m-1)\big)}{6} = \frac{(m-1)(m+1)}{3m} = \frac{m^2-1}{3m},\end{aligned}$$

となる。ここで、よく知られた和の公式 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ と $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を $n = m-1$ として用いた。

### $m = 2$ で整数が 3 個の場合

$m = 2$ のとき、同様に確からしい三つ組 $(n_1, n_2, n_3)$ は $2^3 = 8$ 個ある。$S = |n_1 - n_2| + |n_2 - n_3|$ とおくと、次のようになる。

| $(n_1, n_2, n_3)$ | 111 | 112 | 121 | 122 | 211 | 212 | 221 | 222 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S$ | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 |

合計は 8 なので、$\mathrm{E}(S) = 8/8 = 1$ である。主張されている値は $2(m^2-1)/(3m) = 2\cdot 3/6 = 1$ であり、一致する。

> **考えてみよう** 項 $|n_1 - n_2|$ と $|n_2 - n_3|$ はどちらも $n_2$ を含んでいる。それでも単純に期待値を足し合わせてよいのだろうか。

よいのである。期待値の線形性 $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$ は独立性をまったく必要としない。各組 $(n_i, n_{i+1})$ は単独で見れば 2 つの独立な一様整数からなるので、各項の期待値は $(m^2-1)/(3m)$ である。項は $r-1$ 個あるので、

$$\mathrm{E}\big(|n_1 - n_2| + |n_2 - n_3| + \cdots + |n_{r-1} - n_r|\big) = \frac{(r-1)(m^2-1)}{3m}.$$

$r = 3$ の場合が、先ほど $m = 2$ で確かめた結果である。

### 試験監督者

机に一列に沿って $1, 2, \ldots, m$ と番号を付けると、机 $i$ と机 $j$ の距離は $d|i-j|$ である。$j = 1, \ldots, N+1$ に対し、$j$ 番目に呼んだ机の番号を $c_j$ とする。呼ぶ人は互いに独立で、それぞれ $\{1, \ldots, m\}$ 上で一様であるとモデル化する。これが「$m$ 人の受験者のうち誰から呼ばれることも同様に確からしい」の解釈である。受験者が同時に呼んだり、別の呼び出しの対応中に呼んだりすることはないので、試験監督者は呼び出しに順に対

応し、呼び出し $j+1$ が来たときには机 $c_j$ に立っている。（同じ受験者が続けて 2 回呼んだ場合、その移動の長さは 0 であり、式はこの場合も含んでいる。）

したがって、歩いた距離の合計は

$$D = d\,|c_1 - 1| + d\sum_{j=1}^{N} |c_{j+1} - c_j|.$$

**最初の移動。**試験監督者は机 1 から出発し、$c_1$ は一様なので、

$$\mathrm{E}|c_1 - 1| = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(i-1) = \frac{m-1}{2}.$$

これは $(m^2-1)/(3m)$ より大きいことに注意する。列の端から出発するので、最初の移動は平均より長くなるのである。

**残りの $N$ 回の移動。**ここでは $c_1,\ldots,c_{N+1}$ が $r = N+1$ としたときの $n_1,\ldots,n_r$ の役割を果たすので、上の結果より

$$\mathrm{E}\sum_{j=1}^{N} |c_{j+1} - c_j| = \frac{N(m^2-1)}{3m}.$$

**まとめる。**再び線形性により、

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(D) &= d\left(\frac{m-1}{2} + \frac{N(m-1)(m+1)}{3m}\right)\\ &= \frac{d(m-1)}{6m}\big(3m + 2N(m+1)\big) = \frac{d(m-1)}{6m}\big[2N(m+1) + 3m\big],\end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。

## 検算

- $m = 1$ のときは机が 1 つしかないので、試験監督者はまったく動かない。式は 0 を与え、そうなるべきである。
- $N = 0$ のときは最初の呼び出ししかなく、式は $d(m-1)\cdot 3m/(6m) = \frac{1}{2}d(m-1)$ となり、最初の移動の期待値に一致する。
- 呼ぶ人のあらゆる列を厳密に数え上げると、すべての $m \le 4$ と $N \le 3$ について式が正しいことが確かめられる。$m = 10$、$N = 20$、$d = 1$ として $2\times 10^5$ 回のシミュレーションを行うと平均は 70.50 となり、式の値 $\frac{9}{60}(440+30) = 70.5$ と一致した。

## よくある間違い

- 最初の移動を他の移動と同じように扱ってしまう。試験監督者はランダムな机ではなく机 1 から出発するので、その移動の期待値は $(m^2-1)/(3m)$ ではなく $\frac{1}{2}(m-1)$ である。
- $n_1 - n_2 = k$ だけを数えて $n_2 - n_1 = k$ の分の因子 2 を忘れる、あるいは $k = 0$ の場合を誤って 2 倍してしまう。
- 期待値を足し合わせるには和の各項が独立でなければならないと考えてしまう。

## STEP のその先へ

試験監督者の位置は**マルコフ連鎖**（Markov chain）をなす。すなわち、次にどこへ行くかは現在どこにいるかだけで決まる。ここでの連鎖は非常に単純で、各ステップは過去を完全に「忘れる」。より豊かなモデル（たとえば近くの机からの呼び出しほど起こりやすいもの）では、呼び出し 1 回あたりの長期的な平均移動距離を求めるのに、連鎖の定常分布（stationary distribution）が必要になる。最初の結果の連続版は、$[0,1]$ 上の独立な一様な 2 点の距離の平均が $\frac{1}{3}$ であるというものであり、これは $(m^2-1)/(3m)$ を $m$ で割ったものの極限である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、期待値の線形性とマルコフ連鎖の両方を扱っている。

解答例

# STEP II 1991、第 16 問

確率・統計　・　二項分布の正規近似

> **STEP II 1991、問 16**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q16

## 鍵となる考え方

不足量（deficit）、すなわち水位がダムの上端からどれだけ下にあるかを追跡する。放水によって不足量は一定の割合で増え、にわか雨が 1 回降るごとにちょうど $V$ だけ減る。あふれるとは、不足量が負になることである。2 日間の問題では、あふれる可能性のある雨の降り方は 1 通りしかなく、そのとき関係するのは一様分布に従う 1 つの時刻だけである。夏の問題では放水が止められるので、すべてはにわか雨の回数を数えることに帰着し、その回数は二項分布（binomial distribution）に従う。

## 解答

### 小問 (i)：2 日間の休暇

休暇が始まる真夜中から日単位で時間を測り、時刻 $t$ における不足量を $D(t)$ とする。すると $D(0) = V$ である。にわか雨とにわか雨の間では $D$ は割合 $u$ で増加し、にわか雨が 1 回降るごとに $V$ だけ減少する。$D$ が一度でも負になれば、ダムはあふれる。（問題の意図どおり、2 日間を通して放水を続けられるだけの水が貯水池にあるものと仮定する。）

1 日目に雨が降る事象を $R_1$、2 日目に雨が降る事象を $R_2$ とし、雨の降る時刻（1 日に対する割合で表す）を $T_1$、$T_2$ とする。これらはそれぞれ $[0,1]$ 上の一様分布（uniform distribution）に従う。「任意の 1 日について確率 $p$」という表現に暗に含まれているとおり、各日の出来事は独立（independent）である。

► **雨が降らない場合：**不足量は増えるだけであり、あふれることはない。

- **1 日だけ雨が降る場合**（時刻 $s$ とする）：にわか雨の直後には $D = V + us - V = us \geq 0$ となるので、あふれない（確率 0 の事象 $s = 0$ を除く）。
- **両日とも雨が降る場合：** 1 回目のにわか雨の後は $D = uT_1 \geq 0$ であり、安全である。2 回目のにわか雨の直後、すなわち時刻 $1 + T_2$ では

$$D = V + u(1 + T_2) - 2V = u(1 + T_2) - V.$$

  $T_1$ が消えていることに注意しよう。1 回目のにわか雨がいつ降っても、放水は同じ割合で続くからである。

したがって、あふれるのは両日とも雨が降り、かつ $u(1+T_2) < V$、すなわち $T_2 < \frac{V}{u} - 1$ となるときであり、そのときに限る。$\frac{1}{2}V \leq u \leq V$ ならば数 $\frac{V}{u} - 1$ は $[0,1]$ に含まれ、$T_2$ は一様分布に従うので

$$\mathrm{P}(\text{あふれる}) = p^2 \left( \frac{V}{u} - 1 \right).$$

これを $Q$ に等しいとおくと

$$\frac{V}{u} = 1 + \frac{Q}{p^2} \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{p^2 V}{p^2 + Q}.$$

条件 $Q < p^2$ があるからこそ、この結果は矛盾なく成り立つ。$0 < Q/p^2 < 1$ から、仮定どおり $\frac{1}{2}V < u < V$ が得られるのである。（この条件がなければ解は存在しない。雨の日が 2 日必要なので、あふれる確率は決して $p^2$ を超えないからである。）

### 小問 (i)：夏の休暇

今度は $u = 0$ なので、不足量は決して増えない。不足量は $kV$ から始まり、にわか雨のたびに $V$ ずつ減る。よって 18 日のうち雨の降る日数を $N$ とすると

$$\text{あふれる} \iff NV > kV \iff N > k.$$

各日は独立で、それぞれ確率 $\frac{1}{3}$ で雨が降るので、$N \sim \mathrm{B}(18, \frac{1}{3})$ であり、平均（mean）は 6、分散（variance）は $18 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 4$ である。

> ? **考えてみよう** ここで「適切な」近似とはどれか。また、なぜ連続性補正が必要なのか。

$np = 6$、$n(1-p) = 12$ なので、正規近似（normal approximation）$N \approx \mathrm{N}(6,4)$ は妥当である。（$p$ が小さくないので、ポアソン（Poisson）近似は適切でない。）$N$ は整数値をとるので、整数 $k$ に対して事象 $N > k$ は事象 $N \geq k+1$ と同じであり、これを $X \sim \mathrm{N}(6,4)$ として $X > k + \frac{1}{2}$ で近似する。これを連続性補正（continuity correction）

という。必要な条件は

$$\mathrm{P}\left(Z > \frac{k+\frac{1}{2}-6}{2}\right) < \frac{1}{10} \iff \frac{k-5.5}{2} > 1.2816 \iff k > 8.06.$$

具体的には、$k = 8$ のとき $\mathrm{P}(Z > 1.25) \approx 0.106$ となり大きすぎるが、$k = 9$ のとき $\mathrm{P}(Z > 1.75) \approx 0.040$ となり条件を満たす。あふれるかどうかは $N > k$ であるかどうかだけで決まるので、8 と 9 の間の整数でない $k$ を選んでも $k = 9$ より良くはならない。したがって技師は、貯水池の水位を

$$k = 9,$$

すなわち上端から $9V$ 下まで下げておくべきである。

### 小問 (ii)

今度は独立な半日が 36 個あり、それぞれ確率 $\frac{1}{6}$ で雨が降る。放水は依然として止まっているので、あふれるのはやはり $N > k$ のときであり、今度は $N \sim \mathrm{B}(36, \frac{1}{6})$ である。平均は依然として 6 だが、分散は $36 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 5$ であり、4 より大きい。

平均が同じで分散が大きければ、上側の裾が重くなる。すなわち、平均より上の各 $k$ に対して、$\mathrm{P}(N > k)$ は以前より大きくなる。よって必要な $k$ は**大きく**なる。連続性補正を用いて $\mathrm{N}(6, 5)$ で近似すると、必要な条件は

$$\frac{k-5.5}{\sqrt{5}} > 1.2816 \iff k > 8.37,$$

であり、以前の $k > 8.06$ と比べて大きい。（ここでは正規近似により $\mathrm{P}(N \geq 9) \approx 0.132$ となり、小問 (i) の 0.106 より大きい。）このように、しきい値は上がる。$k$ を整数に切り上げれば、どちらの場合も $k = 9$ となる。しかし $k = 9$ における裾の確率は、0.04 ではなく約 0.06 になるので、安全の余裕は小さくなる。

## 検算

- $p = 0.5$、$Q = 0.1$、$u = \frac{0.25}{0.35}V \approx 0.714V$ として 2 日間の休暇のモンテカルロ・シミュレーション（Monte Carlo simulation）を行ったところ（400,000 回）、あふれる頻度は 0.0996 であった。$p$ と $Q$ を他の値にしても、同様によく一致した。
- 極限の場合：$Q \to p^2$ のとき $u \to \frac{1}{2}V$ となる。これは、雨の日が 2 日あればまだあふれうる最も遅い放水の割合である。$Q \to 0$ のとき $u \to V$ となり、この割合では 2 回目のにわか雨で決してあふれない。
- 二項分布の裾の正確な値によって、正規近似が確かめられる。$\mathrm{B}(18, \frac{1}{3})$ では $\mathrm{P}(N \geq 9) = 0.1076$、$\mathrm{P}(N \geq 10) = 0.0433$ である。$\mathrm{B}(36, \frac{1}{6})$ では $\mathrm{P}(N \geq 9) = 0.1332$、$\mathrm{P}(N \geq 10) = 0.0652$ である。

## よくある間違い

- 2 日間の問題で、1 回目の雨の時刻 $T_1$ が関係すると考えてしまう。放水の割合は一定なので、これは打ち消し合う。
- 連続性補正を忘れる。補正をしないと不等式は $k > 8.56$ となり、$N$ が整数であるという事実が見えなくなる。
- 平均が等しいからという理由で、(ii) の答えは「同じ」と言ってしまう。裾を支配するのは散らばりである。

## STEP のその先へ

雨がランダムな瞬間に降り、水が一定の割合で流れ出ていくという設定は、応用確率論における古典的なモデルであり、Moran がダムのために発展させた貯水理論（storage theory）と呼ばれる。これは待ち行列（queue）や保険の破産（ruin）の理論と密接に関係している。小問 (ii) において、平均を固定したまま 1 日をより多くのより小さな区間に分割していくと、$\mathrm{B}(n, 6/n)$ は平均 6、分散 6 のポアソン分布に近づき、雨の到来はポアソン過程（Poisson process）になる。さらに学ぶには、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）を参照するとよい。

解答例

# STEP III 1991、第 1 問

純粋数学 ・ 級数と展開

**STEP III 1991、問 1**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/91-s3-q1

## 鍵となる考え方

三つの小問はいずれも、力ずくで計算を始める前に少し考えると報われる。(i) では、部分分数分解（partial fractions）によって和が次々と打ち消し合う望遠鏡和（telescoping sum）の形になる。(ii) では、3 次式 $1+x+x^2+x^3$ は等比級数（geometric series）なので、二つのごく簡単な式の商として表せ、対数は二つの標準的な級数に分かれる。(iii) では、まず指数部分を級数で表す。それは $x^2$ から始まるので、指数関数の級数のうち $x^4$ まで届く項はわずかしかない。

## 解答

### 小問 (i)

次を満たす定数を求める。

$$\frac{6}{r(r+1)(r+3)} = \frac{A}{r} + \frac{B}{r+1} + \frac{C}{r+3}.$$

隠蔽法（cover-up rule）により、$A = \dfrac{6}{1\cdot 3} = 2$、$B = \dfrac{6}{(-1)(2)} = -3$、$C = \dfrac{6}{(-3)(-2)} = 1$ である。（簡単な検算として $A+B+C=0$ となるが、左辺は $r$ が大きいとき $6/r^3$ のように振る舞い、$1/r$ の項をもたないので、これは当然である。）

係数 $2, -3, 1$ の和は 0 であるから、これを $2-2$ と $-1+1$ に分けることが思いつく。

$$\frac{6}{r(r+1)(r+3)} = 2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right) - \left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+3}\right).$$

これでそれぞれの括弧が望遠鏡和になる。一つ目は

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

を与える。二つ目では項が二つずつずれているので、両端にそれぞれ二つの項が残る。

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r+3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}.$$

これらを合わせると、

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n}\frac{6}{r(r+1)(r+3)}&=2-\frac{2}{n+1}-\frac{5}{6}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\\&=\frac{7}{6}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}.\end{aligned}$$

**小問 (ii)**

**考えてみよう** $1+x+x^2+x^3$ をもっとすっきり書く方法はないだろうか。

これは公比 $x$ の等比級数であるから、$x\neq 1$ のとき

$$1+x+x^2+x^3=\frac{1-x^4}{1-x}.$$

である。$|x|<1$ のとき $1-x^4$ と $1-x$ はともに正であるから、対数を分けることができる。

$$\ln(1+x+x^2+x^3)=\ln(1-x^4)-\ln(1-x).$$

$|y|<1$ で成り立つ $\ln(1-y)=-\sum_{k\geq 1}y^k/k$ を用いると（ここでは $|x^4|<1$ も成り立つ）、

$$-\ln(1-x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k},\qquad \ln(1-x^4)=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{4m}}{m}.$$

二つ目の級数に現れるのは、$k$ が 4 の倍数であるようなべき $x^k$ だけである。そのような $k=4m$ に対して、合わせた係数は

$$\frac{1}{4m}-\frac{1}{m}=-\frac{3}{4m}=-\frac{3}{k}.$$

となる。よって

$$\ln(1+x+x^2+x^3)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{3x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\cdots,$$

であり、一般項は

$$\frac{x^k}{k}\ \ 4\nmid k\ \text{のとき},\qquad -\frac{3x^k}{k}\ \ 4\mid k\ \text{のとき}.$$

である。どの係数も o でないので、上に示した五つの項が最初の五つの o でない項である。

**小問 (iii)**

$-1 < x \leq 1$ のとき $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$ であるから、

$$u = x\ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \cdots .$$

**考えてみよう** $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \cdots$ の項はいくつ必要だろうか。

$u$ は $x^2$ から始まるので、項 $u^k$ は $x^{2k}$ から始まる。したがって $u^3$ 以降は $x^4$ までには何も寄与せず、$u^2$ からはその最低次の項 $x^4$ だけが必要である。よって

$$\begin{aligned} e^{x\ln(1+x)} &= 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{2}x^4 + \cdots \\ &= 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{6} + \cdots . \end{aligned}$$

（もちろん $e^{x\ln(1+x)}$ は $(1+x)^x$ にほかならない。）

## 検算

- (i) で $n = 1$ とすると $\frac{7}{6} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ となり、ただ一つの項 $\frac{6}{1\cdot 2\cdot 4}$ と一致する。$n \to \infty$ とすると、無限和 $\frac{7}{6}$ が得られる。
- (ii) で、$y = x + x^2 + \cdots$ として $\ln(1+y) \approx y - \frac{y^2}{2}$ と 2 次まで直接展開すると $x + x^2 - \frac{x^2}{2} = x + \frac{x^2}{2}$ となり、得られた最初の二項と一致する。数値的にも、$x = 0.5$ において級数を多くの項まで足すと $\ln 1.875 \approx 0.6286$ と一致する。
- (iii) で、$x = 0.01$ における展開と $(1.01)^{0.01}$ との差はおよそ $7.4 \times 10^{-11}$ であり、これは当然そうあるべきように $x^5$ の大きさである（次の係数は $-\frac{3}{4}$ であることがわかる）。

## よくある間違い

- (i) で、二つずれた望遠鏡和では両端に一つではなく二つずつ項が残ることを忘れる。
- (ii) で、$x^4$ の係数を $\frac{1}{4} - 1$ と正しく求めながら、一般項を $(-1)^{k+1}x^k/k$ などと書いてしまう。規則性は $k$ を 4 で割った余りによって決まる。
- (iii) で、$\frac{1}{2}u^2$ の項を落とす。この項は $\frac{1}{2}x^4$ を寄与する。

## STEP のその先へ

小問 (iii) はべき級数（power series）の合成のささやかな例であり、各項の最低次のべきを追跡するという帳簿づけの工夫は、大学で漸近展開（asymptotic expansion）を扱う方法そのものである。べき級数がいつ収束するのか、また収束半径（radius of convergence）の内側ではなぜ自由に足したり掛けたり合成したりできるのか、という問題は、解析学（analysis）の最初の講義の主題である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）はこれらを明快に扱っている。

解答例

# STEP III 1991、第 2 問

純粋数学 ・ 図形における複素数

**STEP III 1991、問 2**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/91-s3-q2

## 鍵となる考え方

1 つの複素数（complex number）は、長さの比と角の両方を同時に表すことができる。商 $(z_1 - z_2)/(z_1 - z_3)$ は、$P_1$ における三角形の 2 辺の長さの比（その絶対値（modulus））と、一方の辺からもう一方の辺への回転（その偏角（argument））を記録している。そしてこの 2 つの情報こそ、相似（similarity）の二辺夾角による判定条件（SAS）に必要なものである。条件を行列式（determinant）の形に直してしまえば、各小問は行列式の因数分解（factorisation）に帰着するか、比較の相手となる三角形 $Q_1Q_2Q_3$ をうまく選ぶ問題に帰着する。

## 解答

### まず誤植について

問題文に印刷されたとおりでは、左辺の分母は $z_2 - z_3$ となっている。しかしこれは正しいはずがない。$w_i = z_i$ とおき、2 つの三角形を同一にしてみよう。このとき右辺は $(z_1 - z_2)/(z_1 - z_3)$ となり、$z_2 \neq z_1$ であるから左辺とは異なる。意図されている条件、すなわち行列式と対応する条件は

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3}. \qquad (*)$$

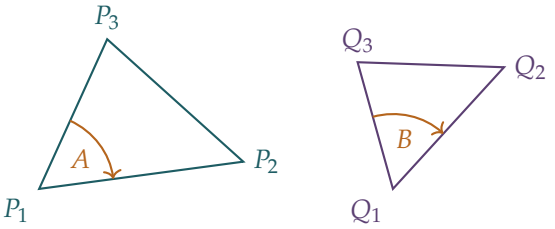
である。以下ではこれを証明する。

### 相似の条件

三角形 $P_1P_2P_3$ の $P_1$ における角を $A$ とする。したがって $0 < A < \pi$ である。極形式（polar form）で書くと

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{P_1P_2}{P_1P_3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

となる。ここで $\theta$ は、$\overrightarrow{P_1P_3}$ の向きから $\overrightarrow{P_1P_2}$ の向きへ移るときに回転する角である。よって $P_1 \to P_2 \to P_3$ が反時計回りならば $\theta = -A$ であり（$P_1P_3$ から時計回りに回して $P_1P_2$ に至る）、時計回りならば $\theta = +A$ である。要するに、この商の偏角（$(-\pi, \pi)$ の範囲でとる）の大きさは $P_1$ における角に等しく、その符号は三角形の向きを表している。$Q_1$ における角を $B$ とすれば、$w$ についても同じことが成り立つ。




**同じ向きに相似 $\Rightarrow$ $(*)$。**三角形が $P_i \leftrightarrow Q_i$ の対応で相似ならば、$P_1$ と $Q_1$ における辺の比は等しく $P_1P_2/P_1P_3 = Q_1Q_2/Q_1Q_3$ であり、そこでの角も等しく $A = B$ である。2つの三角形は同じ向きなので、2つの偏角 $\mp A$ と $\mp B$ は同じ符号をもち、したがって等しい。絶対値が等しく偏角も等しいので、$(*)$ が得られる。

**$(*)$ $\Rightarrow$ 同じ向きに相似。**$(*)$ が成り立つならば、絶対値を比較して $P_1P_2/P_1P_3 = Q_1Q_2/Q_1Q_3$ を得る。偏角を比較すると $A = B$ が得られ、さらに符号も等しいので、2つの三角形は同じ向きである。2辺の比が等しくその間の角が等しいというのは二辺夾角の条件（SAS）であるから、三角形は $P_i \leftrightarrow Q_i$ の対応で相似である。（$(*)$ が実数である場合は、どちらの3点も同一直線上（collinear）にあり、退化した「三角形」どうしはやはり相似である。）

同じ事実を別の見方で捉えることもできる。$(*)$ はまさに、定数 $a = (w_1 - w_2)/(z_1 - z_2) \neq 0$ と $b = w_1 - az_1$ に対して $w_i = az_i + b$ が成り立つことを意味している。写像 $z \mapsto az + b$ は、倍率 $|a|$ の拡大（enlargement）と角 $\arg a$ の回転と平行移動を合成したものであり、このような写像は形と向きを保つ。

### 行列式による表現

分母を払うと（点はすべて異なるので、分母はどちらも0でない）、$(*)$ は

$$(z_1 - z_2)(w_1 - w_3) - (z_1 - z_3)(w_1 - w_2) = 0.$$

と同値である。展開すると $z_1w_1$ の項は打ち消し合い、

$$z_1(w_2-w_3)-z_2(w_1-w_3)+z_3(w_1-w_2)=0,$$

が残る。これは行列式を第 1 行に沿って展開したものである。したがって $(*)$ は $\det=0$ と同じである。

各小問のためには、行列式を別の方法で計算しておくとよい。第 2 列と第 3 列から第 1 列を引き（行列式の値は変わらない）、$(1,0,0)$ となった最下行に沿って展開すると

$$\det\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} z_2-z_1 & z_3-z_1 \\ w_2-w_1 & w_3-w_1 \end{pmatrix}. \qquad (\dagger)$$

を得る。

### 小問 (i)

$w_i=z_i^2$ とすると、$(\dagger)$ は

$$\begin{aligned}(z_2-z_1)(z_3^2-z_1^2)-(z_3-z_1)(z_2^2-z_1^2) &= (z_2-z_1)(z_3-z_1)\big[(z_3+z_1)-(z_2+z_1)\big]\\ &= (z_2-z_1)(z_3-z_1)(z_3-z_2).\end{aligned}$$

となる。$z_i$ はすべて異なるので、どの因数も 0 でない。よって行列式は決して 0 にならず、2 つの三角形が（上の意味で）相似になることはない。

### 小問 (ii)

$w_i=z_i^3$ とし、$z_j^3-z_1^3=(z_j-z_1)(z_j^2+z_jz_1+z_1^2)$ を用いると

$$\begin{aligned}(z_2-z_1)(z_3^3-z_1^3)-(z_3-z_1)(z_2^3-z_1^3) &= (z_2-z_1)(z_3-z_1)\big[(z_3^2+z_3z_1)-(z_2^2+z_2z_1)\big]\\ &= (z_2-z_1)(z_3-z_1)(z_3-z_2)(z_1+z_2+z_3),\end{aligned}$$

となる。ここで $z_3^2-z_2^2+z_1(z_3-z_2)=(z_3-z_2)(z_3+z_2+z_1)$ を用いた。最初の 3 つの因数は 0 でないので、行列式が 0 になるのは $z_1+z_2+z_3=0$ のとき、かつそのときに限る。すなわち、2 つの三角形が相似であるための必要十分条件は、重心（centroid）$\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$ が原点であることである。

### 小問 (iii)

うまい手は、三角形をラベルを付け替えた自分自身と比べることである。$Q_1,Q_2,Q_3$ を $P_2,P_3,P_1$ とする。すなわち

$$w_1=z_2, \qquad w_2=z_3, \qquad w_3=z_1.$$

とおく。

**考えてみよう** なぜ「正三角形」がこのラベルの付け替えと関係するのだろうか。

$P_1 \leftrightarrow P_2$、$P_2 \leftrightarrow P_3$、$P_3 \leftrightarrow P_1$ の対応で相似であれば、対応する辺の比は共通の値 $k > 0$ をとらなければならない：

$$\frac{P_2P_3}{P_1P_2} = \frac{P_3P_1}{P_2P_3} = \frac{P_1P_2}{P_3P_1} = k.$$

3つを掛け合わせると $k^3 = 1$ となるので $k = 1$ であり、3辺はすべて等しい。逆に、三角形が正三角形（equilateral triangle）ならば、その中心のまわりの（適切な向きの）$120°$ 回転によって $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1$ と移る。回転は形と向きを保つので、この三角形はラベルを付け替えた自分自身と同じ向きに相似である。したがって

$$P_1P_2P_3 \text{ が正三角形} \iff \text{同じ向きに次と相似：} P_2P_3P_1.$$

最初の部分により、右辺が成り立つのは

$$0 = \det \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = z_1(z_3 - z_1) - z_2(z_2 - z_1) + z_3(z_2 - z_3),$$

のとき、かつそのときに限る。すなわち

$$z_1z_3 - z_1^2 - z_2^2 + z_1z_2 + z_2z_3 - z_3^2 = 0 \iff z_2z_3 + z_3z_1 + z_1z_2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2,$$

であり、これが示すべきことであった。

## 検算

- 小問 (ii)：$z_1, z_2, z_3 = 1, \omega, \omega^2$（$\omega = e^{2\pi i/3}$）は重心が 0 であるが、その3乗はすべて 1 に等しく、互いに異なるという条件を満たさない。代わりに $z = 1,\ i,\ -1 - i$ を試す。重心は 0 で、3乗は $1,\ -i,\ 2 - 2i$ である。どちらの三角形も、$P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1$ の順に辺の長さが $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{5}$ であり（この場合は合同でさえある）、どちらも反時計回りである。
- 小問 (iii)：$z = 0, 1, e^{i\pi/3}$ に対しては、$1 + e^{2i\pi/3} = e^{i\pi/3}$ であるから、両辺とも $e^{i\pi/3}$ に等しい。
- $10^4$ 個のランダムな三角形に対するコンピュータでの検証により、$w_i = az_i + b$ は常に $(*)$ を満たし、鏡映した三角形 $w_i = a\bar{z}_i + b$ は決して満たさないことが確かめられた。また、$(\dagger)$ の2つの因数分解と正三角形の判定条件も確かめられた。印刷されたとおりの条件（$z_2 - z_3$ を含むもの）は、実際に相似であるすべての場合で成り立たなかった。

## よくある間違い

- 三角形の向きを無視すること。絶対値だけでは、鏡映を除いた相似しか得られない。鏡像の関係にある三角形は偏角の符号が逆になるので、$(*)$ を満たさない。
- 小問 (iii) で逆（converse）を忘れること。ラベルを付け替えた相似による議論は両方向に成り立たせる必要があり、また $k^3 = 1 \Rightarrow k = 1$ という段階では $k$ が正の実数であることを用いている。

## STEP のその先へ

写像 $z \mapsto az + b$ は、平面の向きを保つ相似変換（orientation-preserving similarity）である。これらは最も単純なメビウス（Möbius）変換（Möbius transformation）であり、4 点の複比（cross-ratio）は $(*)$ を一般化したものである。正三角形の条件は $(z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3)(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0$ と因数分解することもでき、これは $z_1, z_2, z_3$ がいずれかの向きに正三角形をなして並ぶことを表している。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、複素数をこのように幾何的に考える見方を見事に展開している。

解答例

# STEP III 1991、第 3 問

純粋数学 ・ 区分的に定義された関数と逆関数

> **STEP III 1991、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q3

## 鍵となる考え方

絶対値（modulus）とは、中身の符号が変わるところで式が切り替わる関数にすぎない。ここに現れる三つの絶対値の中身は $x = -1$、0、1 でのみ符号を変えるので、それらが $x < 2$ を区切ってできる四つの区間（interval）のそれぞれで、この関数は普通の二次関数（quadratic）になる。四つの二次関数が求まれば、どの問い（極値点（turning point）、変曲点（inflection）、連続性（continuity）、滑らかさ（smoothness）、逆関数（inverse））も、単純な放物線（parabola）とそのつながり方についての問いになる。

## 解答

### 絶対値を外す

中身を因数分解する：$x^2 - x = x(x-1)$、$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$、$x^2 + x = x(x+1)$。それぞれの符号は次のとおりである。

| 区間 | $x^2 - x$ | $x^2 - 1$ | $x^2 + x$ | $\mathrm{f}(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| $x \le -1$ | $+$ | $+$ | $+$ | $x^2 - 4x - 1$ |
| $-1 \le x \le 0$ | $+$ | $-$ | $-$ | $3x^2 + 1$ |
| $0 \le x \le 1$ | $-$ | $-$ | $+$ | $1 - 5x^2$ |
| $1 \le x < 2$ | $+$ | $+$ | $+$ | $x^2 - 4x - 1$ |

たとえば $-1 \le x \le 0$ では

$$\mathrm{f}(x) = 2(x^2 - x) + (1 - x^2) + 2(x^2 + x) = 3x^2 + 1,$$

であり、$0 \le x \le 1$ では $\mathrm{f}(x) = -2(x^2 - x) + (1 - x^2) - 2(x^2 + x) = 1 - 5x^2$ である。外

側の二つの区間では三つの中身がすべて正であり、$2(x^2-x)+(x^2-1)-2(x^2+x)=x^2-4x-1$ となる。区間の端点ではいずれかの中身が 0 になるので、そこではどちらの式を使っても正しい。

### 連続性と微分可能性

f は $|\cdot|$ と多項式という連続な関数から作られているので、f は $x<2$ 上で**至るところ連続**である。確認として、つなぎ目では隣り合う式の値が一致する：$f(-1)=4$、$f(0)=1$、$f(1)=-4$。

微分可能性（differentiability）については、つなぎ目での片側微分係数（one-sided derivative）を比べる。四つの部分の導関数は $2x-4$、$6x$、$-10x$、$2x-4$ である。

- $x=-1$ において：左側からは $2(-1)-4=-6$、右側からは $6(-1)=-6$。これらは一致するので、$f'(-1)=-6$ である。
- $x=0$ において：両側とも 0 となるので、$f'(0)=0$ である。
- $x=1$ において：左側からは $-10$、右側からは $2-4=-2$。これらは異なるので、グラフは $(1,-4)$ で**角**（corner）をもつ。

したがって f は**至るところ微分可能というわけではない**。微分可能でないのはちょうど $x=1$ においてである。

### 極値点と変曲点

どの部分でも、ただ一点 $x=0$ を除いて $f'<0$ である。

- $x<-1$ および $1<x<2$：$x<2$ より $f'(x)=2x-4<0$。
- $-1<x<0$：$f'(x)=6x<0$。
- $0<x<1$：$f'(x)=-10x<0$。

f は連続であり、各部分で狭義に減少するので、$x<2$ **全体で狭義単調減少**（strictly decreasing）である。とくに、**極大点や極小点は存在しない**。局所的なもの（local maximum/minimum）すら存在しない。

> **考えてみよう** $f'(0)=0$ なのだから、$(0,1)$ は極値点ではないのか？

そうではない。左側の部分 $3x^2+1$ は 0 で最小値をとり、右側の部分 $1-5x^2$ はそこで最大値をとるが、それぞれの式が適用される区間の上では、どちらも減少している。したがって f は水平な接線をもちながら、減少したまま $x=0$ を通過する。

次に凹凸（concavity）を調べる。各部分の第2次導関数は

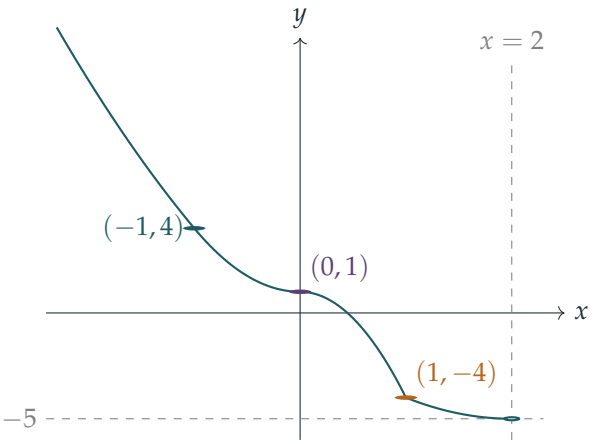
$$f'' = 2\ (x < -1), \qquad 6\ (-1 < x < 0), \qquad -10\ (0 < x < 1), \qquad 2\ (1 < x < 2).$$

である。

- $x = 0$ ではグラフが下に凸（convex）から上に凸（concave）へと変わり、そこで接線（tangent）をもつので、$(0, 1)$ は**停留変曲点**（stationary point of inflection）である。
- $x = -1$ では $f''$ は2から6へと跳ぶが正のままなので、変曲点ではない。
- $x = 1$ では曲線は上に凸から再び下に凸へと変わるが、そこには角があって接線が存在しない。通常の定義（曲線を横切る接線）によれば、$(1, -4)$ は変曲点ではない。答案ではこのことを明示しておく価値がある。

### 概形

$x \to -\infty$ のとき $f(x) \to +\infty$ である。$x \to 2^-$ のとき $f(x) \to 4 - 8 - 1 = -5$ であり、この値はとられない。




曲線は全体を通して下がり続ける。$(0, 1)$ では平らになって水平な変曲点となり、$(1, -4)$ では角をもち、そこで傾きが $-10$ から $-2$ へと跳ぶ。

### 逆関数

f は $x < 2$ 上で連続かつ狭義単調減少であり、左側で $f \to \infty$、右側で $f \to -5$ となるので、$(-\infty, 2)$ から $(-5, \infty)$ への全単射（bijection）である。よって $f^{-1}$ は $x > -5$ で定義される。$y = f(x)$ として、各部分をそれがとる値の範囲の上で逆に解く。

- $x \le -1$、値域 $y \ge 4$：$y = x^2 - 4x - 1 = (x-2)^2 - 5$ より $(x-2)^2 = y+5$。ここでは $x - 2 < 0$ なので負の平方根をとり、$x = 2 - \sqrt{y+5}$。
- $-1 \le x \le 0$、値域 $1 \le y \le 4$：$x^2 = (y-1)/3$ であり、$x \le 0$ なので $x = -\sqrt{(y-1)/3}$。
- $0 \le x \le 1$、値域 $-4 \le y \le 1$：$x^2 = (1-y)/5$ であり、$x \ge 0$ なので $x = \sqrt{(1-y)/5}$。
- $1 \le x < 2$、値域 $-5 < y \le -4$：再び $(x-2)^2 = y+5$ かつ $x - 2 < 0$ なので、$x = 2 - \sqrt{y+5}$。

変数を $x$ に書き直すと

$$\mathrm{f}^{-1}(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{x+5}, & -5 < x \le -4, \\ \sqrt{\frac{1-x}{5}}, & -4 \le x \le 1, \\ -\sqrt{\frac{x-1}{3}}, & 1 \le x \le 4, \\ 2 - \sqrt{x+5}, & x \ge 4. \end{cases}$$

となる。共有する端点では式の値が一致する。たとえば $x = 4$ ではどちらも $-1$ を与え、$x = -4$ ではどちらも $1$ を与える。

## 検算

- 特定の値で確かめる：$\mathrm{f}(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$ であり、$1 - 5 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ である。また $\mathrm{f}^{-1}(-\frac{1}{4}) = \sqrt{1.25/5} = \frac{1}{2}$ である。
- 直接計算すると $\mathrm{f}(-3) = 2 \cdot 12 + 8 - 2 \cdot 6 = 20$ である。式からは $9 + 12 - 1 = 20$ が得られ、$\mathrm{f}^{-1}(20) = 2 - \sqrt{25} = -3$ である。
- 数値的に、$10^5$ 個のランダムな $x < 2$ に対して $\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{f}(x)) = x$ が成り立ち、細かい格子のすべての点で関数は減少しており、$x = 1$ での片側の傾きは $-10$ と $-2$ になる。

## よくある間違い

- $\mathrm{f}'(0) = 0$ であることから、$(0,1)$ を極大または極小と呼んでしまう。各放物線自身の頂点は、それがその式の成り立つ区間の端にあるならば、関係がない。
- 逆関数で誤った平方根を選んでしまう。各区間における $x$（または $x-2$）の符号によって決まる。
- 二つの式のつなぎ目は必ず微分可能でない点だと思い込んでしまう。$x = -1$ と $x = 0$ では傾きが一致している。

## STEP のその先へ

区分的に定義された関数は、微分可能でなくても連続であることがあり、また第2次導関数が連続でなくても微分可能であることがある（ここでは $f''$ が $x = -1$ と $x = 0$ で跳ぶ）。逆関数定理（inverse function theorem）によれば、狭義単調（monotonic）な連続関数は連続な逆関数をもち、その逆関数は $f' \neq 0$ となるところでは微分可能である。$f^{-1}$ が $x = 1$ で鉛直な接線（vertical tangent）をもつことに注意しよう。これはちょうど $f'(0) = 0$ となるところに対応している。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、これらの考え方を丁寧に展開している。

解答例

# STEP III 1991、第 4 問

純粋数学 ・ 空間の直線と平面

**STEP III 1991、問 4**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/91-s3-q4

## 鍵となる考え方

同じ観測者 $O_1$ からの異なる 2 本の視線（line of sight）はどちらも $O_1$ を通るので、1 つの平面を張る。そして $P$ の軌跡はその両方と交わる。$O_1$ を通る 2 直線と交わり、かつ $O_1$ 自身は通らない直線は、それら 2 直線のつくる平面上になければならない。$O_2$ についても同様であるから、軌跡は 2 平面の交線である。こうして、ねじれの位置（skew）にあるように見える 4 本の直線に関する問題が、外積（cross product）1 回と連立方程式（simultaneous equations）1 組の問題に帰着する。

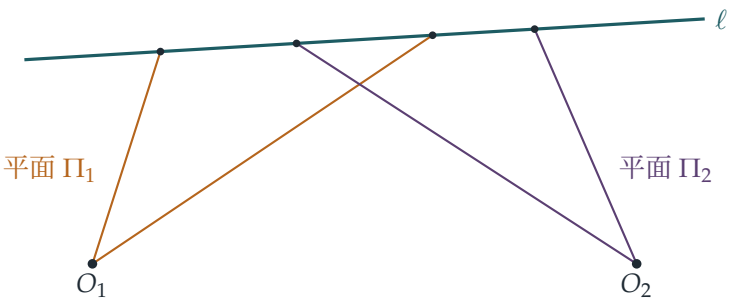
## 解答

$P$ が動く直線を $\ell$ と書く。4 本の視線の方向は

$$\mathbf{d}_1 = (2,0,3), \qquad \mathbf{d}_1' = (0,3,4) \qquad (O_1 \text{ を通る}),$$

$$\mathbf{d}_2 = (-3,1,3), \qquad \mathbf{d}_2' = (-4,2,5) \qquad (O_2 \text{ を通る}).$$

である。各視線は観測者と $P$ のある位置を結ぶものであるから、$\ell$ はこれら 4 本すべてと交わる。




（模式図にすぎない。琥珀色の2本の視線と $\ell$ は1つの平面 $\Pi_1$ 上にあり、紫色の2本と $\ell$ は別の平面 $\Pi_2$ 上にある。）

### $\ell$ が各観測者を通る平面上にある理由

まず、$\ell$ は $O_1$ を通り得ない。もし通るなら、$P \neq O_1$ であるときはいつでも $O_1$ からの視線は $\ell$ そのものとなり、$O_1$ からの異なる2本の視線は存在し得ないからである。同様に $\ell$ は $O_2$ を通らない。

$O_1$ からの2本の視線は $O_1$ を通る異なる直線であるから、$O_1$ のみで交わり、1つの平面 $\Pi_1$ を張る。直線 $\ell$ はそれらと2点で交わり、その2点は異なる。共有点は $O_1$ のみであり、$\ell$ は $O_1$ を通らないからである。2点とも $\Pi_1$ 上にあるので、$\ell$ 全体が $\Pi_1$ 上にある。同様にして、$\ell$ は $O_2$ を通り $\mathbf{d}_2$ と $\mathbf{d}_2'$ を含む平面 $\Pi_2$ 上にある。

**考えてみよう** $\ell$ は特定の平面上にあることなく、各視線とただ1点で交わるだけ、ということはあり得ないのか？

1本の直線についてなら、あり得る。しかしここでは、交点のうち2つが $O_1$ を通る直線上にあり、異なる2点は $\ell$ を決定する。その2点はともに $\Pi_1$ 上にあるので、$\ell$ に選択の余地はない。$\ell$ はその2点を通る直線であり、それは $\Pi_1$ 上にある。

### 平面 $\Pi_1$

$\Pi_1$ の法線ベクトル（normal）は

$$\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_1' = (2,0,3) \times (0,3,4) = (0-9,\ 0-8,\ 6-0) = (-9,-8,6),$$

であり、$\Pi_1$ は原点を通るので

$$\Pi_1 : \quad 9x + 8y - 6z = 0.$$

である。

**平面 $\Pi_2$**

$\Pi_2$ の法線ベクトルは

$$\mathbf{d}_2 \times \mathbf{d}_2' = (-3,1,3)\times(-4,2,5) = (5-6,\ -12+15,\ -6+4) = (-1,3,-2),$$

であり、$\Pi_2$ は $O_2(8a,0,0)$ を通るので $-(x-8a)+3y-2z=0$、すなわち

$$\Pi_2:\quad x-3y+2z=8a.$$

である。(簡単な確認：$(-3,1,3)\cdot(-1,3,-2)=3+3-6=0$、$(-4,2,5)\cdot(-1,3,-2)=4+6-10=0$。)

$a\neq 0$ と仮定する。そうでなければ 2 人の観測者が一致してしまう。このとき $O_2$ は $\Pi_1$ 上になく（$9\cdot 8a\neq 0$ より)、$O_1$ は $\Pi_2$ 上にない。これは上で述べたことと整合する。

**軌跡**

法線ベクトル $(-9,-8,6)$ と $(-1,3,-2)$ は平行でないので、$\Pi_1$ と $\Pi_2$ はただ 1 本の直線で交わり、その直線が $\ell$ でなければならない。その方向は両方の法線ベクトルに垂直であり、

$$(-9,-8,6)\times(-1,3,-2) = (16-18,\ -6-18,\ -27-8) = (-2,-24,-35),$$

であるから、方向として $(2,24,35)$ をとることができる。この直線上の点を求めるため、$y=0$ とおく。方程式は $9x=6z$ および $x+2z=8a$ となるので、$x=\frac{2}{3}z$、$\frac{8}{3}z=8a$ である。これより $z=3a$、$x=2a$ を得る。よって $(2a,0,3a)$ は $\ell$ 上にある。この点は $O_1$ からの 1 本目の視線上にもあり、当然そうあるべきである。

したがって $P$ の軌跡は

$$\boxed{\frac{x-2a}{2}=\frac{y}{24}=\frac{z-3a}{35}}$$

であり、同値な表し方をすれば、2 つの方程式 $9x+8y-6z=0$ と $x-3y+2z=8a$ の組である。

最後に、$\ell$ が確かに 4 本の視線すべてと、観測者以外の点で交わることを確かめる。$\ell$ を $(2a+2\lambda,\ 24\lambda,\ 3a+35\lambda)$ と表すと、各視線との交点はそれぞれ

$$(2a,0,3a),\qquad (0,-24a,-32a),\qquad \left(\tfrac{80a}{37},\tfrac{72a}{37},\tfrac{216a}{37}\right),\qquad \left(\tfrac{56a}{25},\tfrac{72a}{25},\tfrac{36a}{5}\right)$$

である。

**考えてみよう** 2 番目の点は $a>0$ のとき $y$ と $z$ が負である。これは問題ではないのか？

視線は直線全体として与えられており、$(0, -24a, -32a)$ は $x = 0$、$y/3 = z/4$ を満たす。我々が用いたのは直線だけで、観測者がどちらを向いていたかは用いていないので、答えはこのままでよい。「視線」を観測者から出る半直線（ray）と解釈するなら、この観測は $O_1$ の背後にあることになる。これはデータの特異な点であって、方法の誤りではない。

## 検算

- 点 $(2a, 0, 3a)$ と方向 $(2, 24, 35)$ を両方の平面の方程式に代入する。$9(2) + 8(24) - 6(35) = 18 + 192 - 210 = 0$、$2 - 72 + 70 = 0$ であるから、方向は両方の平面に含まれる。
- $a = 1$ のとき、点 $\left(\frac{80}{37}, \frac{72}{37}, \frac{216}{37}\right)$ は $O_2 + \frac{72}{37}(-3, 1, 3)$ に等しく、また $\frac{80/37 - 2}{2} = \frac{3}{37} = \frac{72/37}{24}$ である。よってこの点は視線上にも軌跡上にもある。
- いくつかの $a$ の値について、4つの交点すべてを有理数の厳密な計算で確かめた。

## よくある間違い

- 視線どうしの交点を求めようとすること。異なる観測者から異なる時刻に引いた視線は、そもそも交わるとは限らない。
- $\Pi_2$ が原点ではなく $O_2$ を通ることを忘れ、$= 8a$ ではなく $x - 3y + 2z = 0$ としてしまうこと。
- 外積の符号の誤り。必ず法線ベクトルと両方の方向ベクトルとの内積をとって確認すること。

## STEP のその先へ

空間内の与えられた4本の直線すべてと交わる直線は何本あるだろうか。一般の位置（general position）にある4本の直線に対しては、答えは2本である（複素数の範囲で数えた場合。実数の範囲では0本のこともある）。これは数え上げ幾何学（enumerative geometry）の古典的な結果であり、ここでの4本の直線は、2本ずつ2人の観測者を通るという点で特殊である。同じ「視線の平面」という考え方は、三角測量（triangulation）や、2台のカメラから点の3次元的な位置を復元するステレオ視（stereo vision）のエピポーラ幾何（epipolar geometry）の根底にもある。直線・平面・交わりの線形代数については、Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を読むとよい。

解答例

# STEP III 1991、第 5 問

純粋数学 ・ 極方程式の曲線と常微分方程式

**STEP III 1991、問 5**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/91-s3-q5

## 鍵となる考え方

極座標（polar coordinates）のことはいったん忘れよう。この方程式は、$\theta$ を変数とする定数係数の線形 2 階常微分方程式（linear second-order ODE with constant coefficients）にすぎない。通常の方法（余関数と特殊解の和）で解き、$\theta = \frac{\pi}{2}$ における条件から定数を決め、それから幾何に戻ればよい。$r = f(\theta)$ で与えられる曲線は、$r$ が 0 から始まって 0 で終わり、その間で正であり続けるとき閉曲線（closed loop）となり、その面積は $\frac{1}{2}\int r^2 \,\mathrm{d}\theta$ である。

## 解答

### 微分方程式を解く

特性方程式（auxiliary equation）$m^2 + 4 = 0$ の解は $m = \pm 2\mathrm{i}$ であるから、余関数（complementary function）は

$$r = A\cos 2\theta + B\sin 2\theta.$$

である。特殊解（particular integral）については、$\sin 3\theta$ は余関数に含まれないので、$r = k\sin 3\theta$ とおいてみる。すると $r'' = -9k\sin 3\theta$ であり、

$$-9k\sin 3\theta + 4k\sin 3\theta = 5\sin 3\theta \quad \Longrightarrow \quad k = -1.$$

よって一般解（general solution）は

$$r = A\cos 2\theta + B\sin 2\theta - \sin 3\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -2A\sin 2\theta + 2B\cos 2\theta - 3\cos 3\theta.$$

である。$\theta = \frac{\pi}{2}$ では $\cos 2\theta = -1$、$\sin 2\theta = 0$、$\sin 3\theta = -1$、$\cos 3\theta = 0$ である。二つの条件は

$$r = -A + 1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad A = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -2B = -2 \quad \Longrightarrow \quad B = 1.$$

となる。したがって

$$r = \sin 2\theta - \sin 3\theta.$$

### 曲線は閉曲線である

$r$ がどこで 0 になり、どのような符号をとるかを調べるため、恒等式 $\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$ を用いて因数分解する：

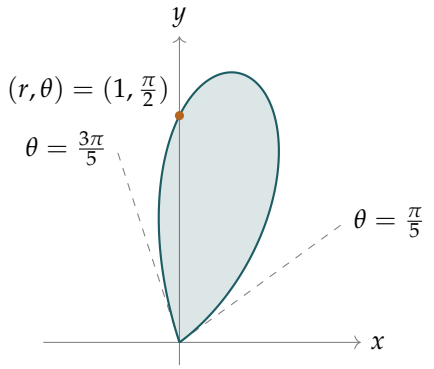
$$r = 2\cos\frac{5\theta}{2}\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) = -2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{5\theta}{2}.$$

**考えてみよう** 因数分解した形によって、なぜ「閉曲線」の問題に決着がつくのか？

与えられた範囲では、どちらの因数もすぐに読み取れるからである。$\frac{\pi}{5} \le \theta \le \frac{3\pi}{5}$ のとき：

- $\frac{\theta}{2}$ は $\left[\frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}\right]$ にあるので、$\sin\frac{\theta}{2} > 0$ である；
- $\frac{5\theta}{2}$ は $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ にあるので、$\cos\frac{5\theta}{2} \le 0$ であり、等号が成り立つのは両端のみである。

よって $\theta = \frac{\pi}{5}$ と $\theta = \frac{3\pi}{5}$ で $r = 0$ となり、その間の（両端を除く）すべての $\theta$ で $r > 0$ である。したがって曲線は半直線 $\theta = \frac{\pi}{5}$ に沿って原点を出発し、正の $r$ を保ちながら回り込み、半直線 $\theta = \frac{3\pi}{5}$ に沿って原点に戻る。その間の各半直線 $\theta =$ 定数 は曲線とちょうど 1 回交わる（その $\theta$ に対する $r > 0$ の唯一の点で交わる）ので、曲線は自分自身と交差しない。これは一つの閉曲線であり、領域 $0 \le r \le \sin 2\theta - \sin 3\theta$、$\frac{\pi}{5} \le \theta \le \frac{3\pi}{5}$ を囲む。



### 面積

囲まれる面積は

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{\pi/5}^{3\pi/5} r^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi/5}^{3\pi/5} \left(\sin^2 2\theta - 2\sin 2\theta \sin 3\theta + \sin^2 3\theta\right)\mathrm{d}\theta.$$

である。$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ と $2\sin P\sin Q = \cos(P-Q) - \cos(P+Q)$ を用いると、

$$r^2 = 1 - \tfrac{1}{2}\cos 4\theta - \tfrac{1}{2}\cos 6\theta - \cos\theta + \cos 5\theta.$$

$D = \sin\frac{2\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{5}$ とおく。$\left[\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}\right]$ で項ごとに積分し、$\sin(x+2\pi) = \sin x$ と $\sin(\pi - x) = \sin x$ を用いて各正弦を $\pm\sin\frac{\pi}{5}$ または $\pm\sin\frac{2\pi}{5}$ に帰着させる：

$$\begin{aligned}
\int 1\,\mathrm{d}\theta &= \tfrac{2\pi}{5},\\
\int -\tfrac{1}{2}\cos 4\theta\,\mathrm{d}\theta &= -\tfrac{1}{8}\left[\sin\tfrac{12\pi}{5} - \sin\tfrac{4\pi}{5}\right] = -\tfrac{1}{8}\left[\sin\tfrac{2\pi}{5} - \sin\tfrac{\pi}{5}\right] = -\tfrac{1}{8}D,\\
\int -\tfrac{1}{2}\cos 6\theta\,\mathrm{d}\theta &= -\tfrac{1}{12}\left[\sin\tfrac{18\pi}{5} - \sin\tfrac{6\pi}{5}\right] = -\tfrac{1}{12}\left[-\sin\tfrac{2\pi}{5} + \sin\tfrac{\pi}{5}\right] = \tfrac{1}{12}D,\\
\int -\cos\theta\,\mathrm{d}\theta &= -\left[\sin\tfrac{3\pi}{5} - \sin\tfrac{\pi}{5}\right] = -D,\\
\int \cos 5\theta\,\mathrm{d}\theta &= \tfrac{1}{5}\left[\sin 3\pi - \sin\pi\right] = 0.
\end{aligned}$$

（3 行目では、$\sin\frac{18\pi}{5} = \sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = -\sin\frac{2\pi}{5}$ および $\sin\frac{6\pi}{5} = -\sin\frac{\pi}{5}$ である。）これらを足し合わせると

$$\int_{\pi/5}^{3\pi/5} r^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{5} + \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{12} - 1\right)D = \frac{2\pi}{5} - \frac{25}{24}D,$$

となり、これを半分にして

$$\mathcal{A} = \frac{\pi}{5} - \frac{25}{48}D = \frac{\pi}{5} + \frac{25}{48}\left[\sin\frac{\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5}\right],$$

を得る。これが求める結果である。

## 検算

- $\theta = \frac{\pi}{2}$ において：$r = \sin\pi - \sin\frac{3\pi}{2} = 1$、$r' = 2\cos\pi - 3\cos\frac{3\pi}{2} = -2$ であり、条件どおりである。
- 数値的には $\mathcal{A} \approx 0.6283 - \frac{25}{48}(0.3633) \approx 0.4391$ である。$\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用しても、描いた閉曲線に靴ひも公式（shoelace formula）を適用しても、どちらも 0.43911 となる。$\theta = \frac{\pi}{2}$ から微分方程式を数値的に解き進めると $r = \sin 2\theta - \sin 3\theta$ が再現され、両端で $r$ が 0 に戻ることも確認できる。

- 答えは妥当である：閉曲線は $r \approx 1.22$ まで達し、角度 $\frac{2\pi}{5}$ にわたって広がる。半径 1.22、中心角がこの角度の扇形（sector）の面積は約 0.93 であり、閉曲線はその半分よりやや小さい部分を占める。

## よくある間違い

- 特殊解の符号を間違える：$(-9+4)k = 5$ から $k = -1$ であり、$+1$ ではない。
- 両端点の間で $r > 0$ であることを示し忘れる。$r$ の零点が二つあるだけでは閉曲線にはならない。間で $r$ の符号が変わる可能性があり、その場合 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ は囲まれる面積にはならない。
- $\sin\frac{12\pi}{5}$ や $\sin\frac{18\pi}{5}$ を不注意に簡約する：それぞれ $\pm\sin\frac{2\pi}{5}$ であり、符号が重要である。

## STEP のその先へ

ここでの方法がうまくいくのは、方程式が線形だからである。すべての解は一つの特殊解と、二つの独立な解 $\cos 2\theta$ と $\sin 2\theta$ の線形結合との和であり、二つの初期条件によってちょうど一つの解が選び出される。これが線形常微分方程式に対する解の存在と一意性の定理（existence and uniqueness theorem）であり、大学 1 年次の講義で証明され、絶えず使われる。関連する魅力的な事実として、逆 2 乗の力（inverse-square force）のもとでの軌道に対して $u = 1/r$ が $u'' + u =$ 定数 を満たすことがあり、これによってニュートン（Newton）の法則から円錐曲線（conic section）の軌道が導かれる。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は線形理論を詳しく扱っている。

解答例

# STEP III 1991、第 6 問

純粋数学 ・ 双曲型の一次変換

> **STEP III 1991、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q6

この問題は、*Beyond STEP* の第 7.6 節「**双曲的回転と相対性理論**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch07/hyperbolic-rotations.html

## 鍵となる考え方

この行列は回転行列（rotation matrix）のようにふるまうが、三角関数の代わりに双曲線関数（hyperbolic functions）が現れる。恒等式 $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ と、cosh および sinh の加法定理（addition formulae）がすべての仕事をしてくれる。傾き $\tanh v$ の方向をベクトル $(\cosh v, \sinh v)$ として書くと、$T$ が傾きに与える効果は明らかになる。それは単に「双曲角」$v$ に $u$ を加えるだけである。角の条件については、2 直線のなす角の正接を $v_1$ と $v_2$ で表し、何が不変でなければならないかを調べる。

## 解答

以下を通して $c = \cosh u$、$s = \sinh u$ と書く。すると $c^2 - s^2 = 1$ であり、$u > 0$ より $s > 0$ である。変換は次のとおりである。

$$x' = cx + sy, \qquad y' = sx + cy.$$

### 双曲線

任意の点について、

$$\begin{aligned} x'^2 - y'^2 &= (cx + sy)^2 - (sx + cy)^2 \\ &= (c^2 - s^2)x^2 + 2csxy - 2csxy - (c^2 - s^2)y^2 \\ &= x^2 - y^2. \end{aligned}$$

よって $T$ は $x^2 - y^2$ を保ち、$x^2 - y^2 = 1$ 上のすべての点は $x^2 - y^2 = 1$ 上の点に移される。この曲線は単に自分自身の中へ写されるだけでなく、すべて覆われる。実際、$u$ を $-u$ に置き換えた行列は $T$ の逆行列（inverse）であり（掛け算を展開して $c^2 - s^2 = 1$ を用いよ）、これも $x^2 - y^2$ を保つ。したがって双曲線上のすべての点は、双曲線上のある点の像である。曲線は自分自身に変換される。

（実際、各分枝（branch）はそれ自身に移る。$x \geq 1$ ならば $|y| < x$ であるから、$x' = cx + sy > (c - s)x = \mathrm{e}^{-u}x > 0$ となる。）

### 原点を通る不変直線

$T$ は線形（linear）なので、原点を原点に移し、方向 $\mathbf{d}$ の原点を通る直線を、方向 $T\mathbf{d}$ の原点を通る直線に移す。よって $T\mathbf{d}$ が $\mathbf{d}$ に平行であること、すなわち $\mathbf{d}$ が固有ベクトル（eigenvector）であることが必要である。$\mathbf{d} = (1, m)$ を試すと

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + sm \\ s + cm \end{pmatrix},$$

となり、これが $(1, m)$ に平行となるのは $s + cm = m(c + sm)$、すなわち $s(1 - m^2) = 0$ のときに限る。$s \neq 0$ であるから $m = \pm 1$ である。（鉛直方向 $(0, 1)$ は $(s, c)$ に移り、これは鉛直ではないので、新しいものは得られない。）2本の直線は

$$\boxed{y = x \quad \text{および} \quad y = -x}$$

であり、実際 $T(1, 1) = \mathrm{e}^{u}(1, 1)$、$T(1, -1) = \mathrm{e}^{-u}(1, -1)$ である。これらは双曲線の漸近線（asymptotes）であり、双曲線が自分自身に写されることと整合している。

### 傾き：$v' = v + u$

点 $\mathbf{p}$ を通り方向 $\mathbf{d}$ をもつ直線をとる。その上の点は $\mathbf{p} + t\mathbf{d}$ である。線形性より、その像は $T\mathbf{p} + tT\mathbf{d}$ であり、これは $T\mathbf{p}$ を通り方向 $T\mathbf{d}$ をもつ直線である。よって直線の位置は無関係で、方向だけが問題となる。

傾き $\tanh v$ の直線は方向 $(1, \tanh v)$ をもつ。$\cosh v > 0$ を掛ければ、方向は

$(\cosh v, \sinh v)$ としてもよい。すると

$$T\begin{pmatrix}\cosh v\\ \sinh v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh u\cosh v + \sinh u \sinh v\\ \sinh u\cosh v + \cosh u\sinh v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh(u+v)\\ \sinh(u+v)\end{pmatrix}$$

が加法定理より成り立つ。したがって像の直線の傾きは $\tanh(v+u)$ である。tanh は単射（one-to-one）なので、$\tanh v' = \tanh(v+u)$ から

$$v' = v + u,$$

が得られ、示すべきことが示された。（この形に書けるのは傾きが $-1$ より大きく $1$ より小さい直線だけであり、そのために問題では $\tanh v$ を用いている。）

### 等しい角

2 直線の傾きが $m_1$ と $m_2$ で、$1 + m_1 m_2 \neq 0$ ならば、それらのなす鋭角 $\theta$ は次を満たす。

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|.$$

ここでは $|m_1|, |m_2| < 1$ なので $1 + m_1 m_2 > 0$ である。よって 2 直線が垂直になることはなく、$\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ であり、$\theta$ は $\tan\theta$ によって決まる。

> **考えてみよう** この式は $\tanh(v_1 - v_2)$ に似ているが、分母の符号が違う。代わりに何に簡約されるだろうか？

$m_i = \tanh v_i$ とおき、分子と分母に $\cosh v_1 \cosh v_2 > 0$ を掛けると

$$\tan\theta = \frac{|\sinh v_1 \cosh v_2 - \cosh v_1 \sinh v_2|}{\cosh v_1 \cosh v_2 + \sinh v_1 \sinh v_2} = \frac{|\sinh(v_1 - v_2)|}{\cosh(v_1 + v_2)}.$$

変換後の直線では $v_i' = v_i + u$ である。差は変わらないが、和は $2u$ だけ増えるので、それらのなす角 $\theta'$ は次を満たす。

$$\tan\theta' = \frac{|\sinh(v_1 - v_2)|}{\cosh(v_1 + v_2 + 2u)}.$$

そもそも $\ell_1$ と $\ell_2$ が交わるためには $v_1 \neq v_2$ が必要なので、分子は 0 でない。よって

$$\theta = \theta' \iff \cosh(v_1 + v_2) = \cosh(v_1 + v_2 + 2u).$$

$\cosh a = \cosh b$ となるのは $a = \pm b$ のときに限るから、これは $v_1 + v_2 = v_1 + v_2 + 2u$（$u > 0$ より不可能）か、$v_1 + v_2 = -(v_1 + v_2 + 2u)$ のいずれかを意味する。よって必要十分条件（necessary and sufficient condition）は

$$\boxed{v_1 + v_2 = -u}$$

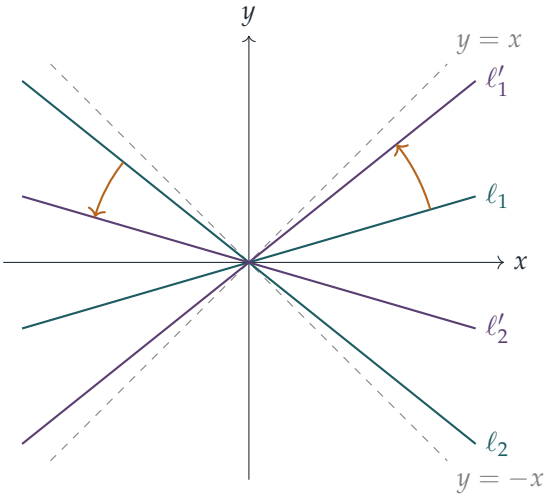
であり、同値な言い方をすれば $v_1' + v_2' = u$ である。

### 2 直線が原点で交わる場合の図

$v_1 + v_2 = -u$ のとき、

$$v_1' = v_1 + u = -v_2, \qquad v_2' = v_2 + u = -v_1.$$

となる。よって $\ell_1'$ の傾きは $-\tanh v_2$ であり、これは $\ell_2$ の $x$ 軸に関する鏡映（reflection）である。同様に $\ell_2'$ は $\ell_1$ の鏡映である。2 直線が原点を通るならば、変換後の組は元の組を $x$ 軸に関して折り返したものにすぎず、だからこそなす角が等しいのである。図では $u = 0.8$、$v_1 = 0.3$、$v_2 = -1.1$ を用いている。傾きは $\ell_1, \ell_2$ についてそれぞれ約 $0.29$ と $-0.80$、$\ell_1', \ell_2'$ については $0.80$ と $-0.29$ である。各直線は、$T$ が引き伸ばす不変直線 $y = x$ の方へ回転する。




ティール色の直線が $\ell_1, \ell_2$、プラム色の直線がそれらの像であり、琥珀色の矢印は $\ell_1 \to \ell_1'$ と $\ell_2 \to \ell_2'$ を表す。プラム色の組は、ティール色の組を $x$ 軸に関して鏡映したものである。

## 検算

- $u = 0.8$、$v_1 = 0.3$、$v_2 = -1.1$ のとき、$\ell_1$ と $\ell_2$ のなす角も、それらの像のなす角も、数値的にいずれも $54.92^\circ$ となる。$v_2$ を少し変えると 2 つの角は異なる。
- $u \to 0$ とすると $T$ は恒等変換になり、条件は $v_1 + v_2 = 0$ となる。これは $x$ 軸に関して対称な 2 直線であり、恒等写像は当然それを対称なまま保つ。
- $\cosh u + \sinh u = \mathrm{e}^u$ なので、$T(1,1) = \mathrm{e}^u(1,1)$ は手計算で容易に確かめられる。

## よくある間違い

- 双曲線が自分自身の**中へ**写されることだけを示してしまう。逆変換を用いれば、取りこぼしがないことがわかる。
- 角の公式を $\tanh(v_1 - v_2)$ と書いてしまう。$1 + m_1 m_2$ の $+$ の符号のために、分母には代わりに $\cosh(v_1 + v_2)$ が現れ、$T$ によって変化するのは**和**のほうである。
- $\cosh a = \cosh b$ の解 $v_1 + v_2 = v_1 + v_2 + 2u$ を忘れ、それが不可能である理由を述べない。

## STEP のその先へ

この行列は特殊相対性理論（special relativity）におけるローレンツ・ブースト（Lorentz boost）であり、$x$ と $y$ がそれぞれ時間と空間の役割を果たす（光速を 1 とする単位系で）。量 $x^2 - y^2$ は不変間隔（invariant interval）、$\tanh v$ は速度であり、$v$ はその**ラピディティ**（rapidity）である。結果 $v' = v + u$ はラピディティが加法的であることを述べており、これは相対論的な速度の合成則を姿を変えて表したものである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics* は、特殊相対性理論をこのように展開している。不変直線を固有ベクトルの観点から見るには、Strang の *Introduction to Linear Algebra* を参照のこと。

解答例

# STEP III 1991、第 7 問

純粋数学 • 対称性を利用した積分

> **STEP III 1991、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q7

## 鍵となる考え方

$\ln(\sin x)$ の積分は原始関数（antiderivative）から求めることはできないが、対称性がすべてを片付けてくれる。置換（substitution）$x \mapsto \frac{1}{2}\pi - x$ は sin と cos を入れ替え、$x \mapsto \pi - x$ は $[0, \pi]$ 上の $\sin x$ が $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上の値の 2 つ分であることを示す。さらに $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ と書き直せば、未知の積分が満たすべき方程式が得られる。小問 (iii) は $x \cot x$ を $\ln(\sin x)$ に変える部分積分（integration by parts）であり、小問 (ii) は境界項を処理するためのものである。

## 解答

以下を通して、

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

とおく。

### 小問 (i)

**サインの積分とコサインの積分は等しい。** $x = \frac{1}{2}\pi - t$ と置換すると、$\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$、$\sin x = \cos t$ である。積分区間の端 $0, \frac{1}{2}\pi$ は $\frac{1}{2}\pi, 0$ となるが、負号によってもとの向きに戻る：

$$I = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{0} \ln(\cos t)\,(-\mathrm{d}t) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t.$$

**$\sin 2x$ との関係。** 等しい 2 つの積分を足し合わせ、$\ln a + \ln b = \ln(ab)$ を用いる（開区

間上で $\sin x, \cos x > 0$ なので成り立つ）：

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x \cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln\left(\tfrac{1}{2}\sin 2x\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x - \tfrac{1}{2}\pi \ln 2. \end{aligned}$$

両辺を 2 で割ると $I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\pi \ln 2$ となり、1 つ目の等式の連鎖が示された。

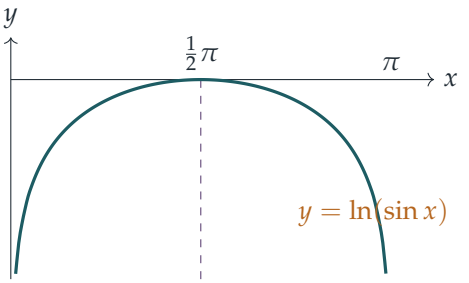
**2 つ目の連鎖。** $u = 2x$ とおくと $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$ であり、積分区間の端は 0 と $\pi$ になる：

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u.$$

ここで $[0, \pi]$ を $\frac{1}{2}\pi$ で分割する。後半では $u = \pi - v$ と置換する。$\sin(\pi - v) = \sin v$ であり、積分区間の端 $\frac{1}{2}\pi, \pi$ は $\frac{1}{2}\pi, 0$ になるので、

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin v)\,\mathrm{d}v = I.$$

下のグラフはこの対称性を表している。曲線 $y = \ln(\sin x)$ は $x = \frac{1}{2}\pi$ に関して対称である。




よって $\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = 2I$ であり、したがって

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(2I) = I,$$

となり、示すべきことが示された。

**$I$ の値を求める。** 2 つ目の結果を 1 つ目に代入すると、

$$I = \tfrac{1}{2}I - \tfrac{1}{4}\pi \ln 2 \quad \Longrightarrow \quad I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2}\pi \ln 2.$$

この段階では $I$ が有限の値であることが必要であり、そのために問題文では収束（convergence）を仮定してよいとしているのである。それがなければ、「$I = \frac{1}{2}I + c$」からは何も証明できない。

### 小問 (ii)

$x \geq 1$ とし、$u = \sqrt{x}$ とおく。すると $u \geq 1$ なので、与えられた不等式が適用できる：

$$\ln \sqrt{x} < \sqrt{x}, \qquad \text{すなわち} \qquad \tfrac{1}{2} \ln x < \sqrt{x}.$$

**1 つ目の極限**。 $x \geq 1$ のとき $\ln x \geq 0$ であり、$\ln x < 2\sqrt{x}$ を $x > 0$ で割ると

$$0 \leq \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

を得る。右辺は $x \to \infty$ のとき 0 に近づくので、はさみうちの原理 (squeeze (sandwich) principle) により $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$ である。

**2 つ目の極限**。 $0 < x < 1$ に対して $x = 1/t$ とおくと、$t > 1$ であり、$x \to 0^+$ のとき $t \to \infty$ である。すると

$$x \ln x = \frac{1}{t} \ln \frac{1}{t} = -\frac{\ln t}{t} \to 0$$

が 1 つ目の極限から従う。よって $x$ が正の値をとりながら $x \to 0$ とするとき、$x \ln x \to 0$ である。

### 小問 (iii)

まず、被積分関数は 0 で問題を起こさないことに注意する：$x \cot x = \dfrac{x}{\sin x} \cos x \to 1$ である。$(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上で $\cot x$ は $\ln(\sin x)$ の導関数なので、$u = x$、$\mathrm{d}v = \cot x \, \mathrm{d}x$、$v = \ln(\sin x)$ として部分積分を行う。対数は 0 で発散するので、$[\varepsilon, \frac{1}{2}\pi]$ 上で計算してから $\varepsilon \to 0^+$ とする：

$$\int_\varepsilon^{\frac{1}{2}\pi} x \cot x \, \mathrm{d}x = \Big[ x \ln(\sin x) \Big]_\varepsilon^{\frac{1}{2}\pi} - \int_\varepsilon^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x) \, \mathrm{d}x.$$

上端では $\ln(\sin \frac{1}{2}\pi) = \ln 1 = 0$ である。よって境界項は単に $-\varepsilon \ln(\sin \varepsilon)$ となる。

> **考えてみよう** なぜ $\varepsilon \ln(\sin \varepsilon)$ は 0 に近づくのだろうか。小問 (ii) が扱っているのは $x \ln x$ であって、$x \ln(\sin x)$ ではない。

$s = \sin \varepsilon$ とおく。$\varepsilon \to 0^+$ のとき、$s$ は正の値をとりながら 0 に近づく。すると

$$\varepsilon \ln(\sin \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} \cdot s \ln s.$$

第 1 の因子は 1 に近づき（よく知られた極限 $\sin \varepsilon / \varepsilon \to 1$）、$s \ln s \to 0$ は小問 (ii) による。よって境界項は 0 に近づく。

$\varepsilon \to 0^+$ とし、小問 (i) を用いると：

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x \cot x \, \mathrm{d}x = 0 - I = \tfrac{1}{2}\pi \ln 2.$$

## 検算

- 符号：区間上で $\ln(\sin x) \leq 0$ なので $I$ は負でなければならず、実際 $-\frac{1}{2}\pi \ln 2 \approx -1.0888$ は負である。一方、$(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上で $x \cot x > 0$ であり、得られた答えは正である。
- 大きさ：$x \cot x$ は長さ $\frac{1}{2}\pi \approx 1.571$ の区間で 1 から 0 まで減少するので、積分の値がおよそ 1.09 というのは妥当である。
- 数値的には、中点則による数値積分で $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x \cot x \, \mathrm{d}x \approx 1.0887930$ となり、$\frac{1}{2}\pi \ln 2 = 1.0887930\ldots$ と一致する。また $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x) \, \mathrm{d}x \approx -1.08879$ である。

## よくある間違い

- $u = 2x$ に置換する際に $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$ の係数 $\frac{1}{2}$ を忘れてしまい、$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x) \, \mathrm{d}x = 2I$ となって行き詰まる。
- 小問 (iii) で、0 における極限を正当化せずに $[x \ln(\sin x)]_0^{\frac{1}{2}\pi} = 0$ と書いてしまう。その極限こそ、小問 (ii) が用意されている理由である。

## STEP のその先へ

ここで扱った積分はどちらも**広義積分**（improper integral）である。すなわち、被積分関数、あるいは用いた原始関数が、区間の端点で有界でない。広義積分は、$\varepsilon$ を用いて行ったように極限として定義される。大学の最初の解析学の講義ではこれを厳密に扱い、そのような極限が存在するための判定法を学ぶ。問題文の「仮定してよい」という一文の背後にあるのは、こうした判定法である。同じ対称性の技法を使えば、$\int_0^{\pi/2} \ln(\tan x) \, \mathrm{d}x = 0$ など、さらに多くの積分の値を求めることができる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、これらすべての土台となる極限と積分の理論を扱っている。

解答例

# STEP III 1991、第 8 問

純粋数学 ・ 積分の漸化式と和

**STEP III 1991、問 8**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/91-s3-q8

## 鍵となる考え方

小問 (i) は漸化式（reduction formula）なので、まず部分積分（integration by parts）を行うのが自然である。残った被積分関数には $\sin x \sin kx$ が含まれており、$\cos(k-1)x$ に対する加法定理（compound-angle formula）を使うと、これを同じ族の積分に戻すことができる。小問 (ii) は $(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta})^m$ の二項展開（binomial expansion）の実部である。小問 (iii) は (ii) を積分し、(i) の漸化式を望遠鏡和（telescoping）によってほどくことで得られる。

## 解答

### 小問 (i)

$k \geq 1$ とし、$u = \cos^k x$、$\mathrm{d}v = \cos kx\,\mathrm{d}x$ として部分積分を行う。このとき $v = \frac{1}{k}\sin kx$、$\mathrm{d}u = -k\cos^{k-1}x \sin x\,\mathrm{d}x$ であるから、

$$\begin{aligned} I_k &= \left[\tfrac{1}{k}\cos^k x \sin kx\right]_0^\theta + \int_0^\theta \cos^{k-1} x\, \sin x\, \sin kx\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{k}\cos^k\theta \sin k\theta + \int_0^\theta \cos^{k-1} x\, \sin x\, \sin kx\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

となる。ここで、括弧の中は $x = 0$ で 0 になることを用いた。

**考えてみよう** $\sin x \sin kx$ を $x$ の倍数の余弦を用いてどのように書き直せるだろうか。

$(k-1)x = kx - x$ と書くと、加法定理より

$$\cos(k-1)x = \cos kx \cos x + \sin kx \sin x,$$

であるから、

$$\sin x \sin kx = \cos(k-1)x - \cos x \cos kx.$$

したがって

$$\begin{aligned}\int_0^\theta \cos^{k-1} x \, \sin x \, \sin kx \, \mathrm{d}x &= \int_0^\theta \cos^{k-1} x \cos(k-1)x \, \mathrm{d}x \\ &\quad - \int_0^\theta \cos^k x \cos kx \, \mathrm{d}x \\ &= I_{k-1} - I_k.\end{aligned}$$

これをもとの式に代入して $k$ を掛けると、

$$kI_k = \cos^k \theta \sin k\theta + kI_{k-1} - kI_k,$$

すなわち

$$2kI_k = kI_{k-1} + \cos^k \theta \sin k\theta,$$

となり、示すべき式が得られた。

**小問 (ii)**

$z = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$ とおく。二項定理（binomial theorem）より

$$\begin{aligned}(1+z)^m &= \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} z^r \\ &= \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \big( \cos 2r\theta + \mathrm{i} \sin 2r\theta \big).\end{aligned}$$

次に「半角」をくくり出す。

$$1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \big( \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \big) = 2 \cos\theta \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

よって

$$(1+z)^m = 2^m \cos^m \theta \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} = 2^m \cos^m \theta \, (\cos m\theta + \mathrm{i} \sin m\theta).$$

$2^m \cos^m \theta$ は実数であるから、二つの表示の実部を比較すると

$$\sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \cos 2r\theta = 2^m \cos^m \theta \cos m\theta,$$

が得られ、これが示すべき恒等式である（$r = 0$ と $r = m$ の項はそれぞれ 1 と $\cos 2m\theta$ である）。

### 小問 (iii)

一つ目の式を $S$ とおく。(ii) の右辺は $I_m$ の被積分関数の $2^m$ 倍であるから、(ii) を 0 から $\theta$ まで積分する。$r=0$ の項の積分は $\theta$ であり、$r \geq 1$ に対しては $\int_0^\theta \cos 2rx \,\mathrm{d}x = \frac{\sin 2r\theta}{2r}$ である。よって

$$\theta + \sum_{r=1}^{m} \binom{m}{r} \frac{\sin 2r\theta}{2r} = 2^m I_m, \qquad \text{よって} \qquad S = 2^m I_m - \theta.$$

次に (i) を用いて $2^m I_m$ を求める。漸化式を $2k$ で割って $2^k$ を掛けると、$k \geq 1$ に対して

$$2^k I_k = 2^{k-1} I_{k-1} + \frac{2^{k-1}}{k} \cos^k \theta \sin k\theta.$$

**考えてみよう** なぜ $2^k$ を掛けるのだろうか。

$I_k = \frac{1}{2} I_{k-1} + \ldots$ と書くと、この漸化式には各段階で $\frac{1}{2}$ という係数がつく。$J_k = 2^k I_k$ とおくとこれが消え、$J_k - J_{k-1}$ が単純な陽な項になるので、和が望遠鏡和となる。$k = 1, 2, \ldots, m$ に対する式をすべて足し合わせると、途中の項が打ち消し合って

$$2^m I_m = 2^0 I_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{2^{k-1}}{k} \cos^k \theta \sin k\theta.$$

最後に $I_0 = \int_0^\theta 1 \,\mathrm{d}x = \theta$ であるから、

$$\begin{aligned} S = 2^m I_m - \theta &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} 2^{k-1} \cos^k \theta \sin k\theta \\ &= \cos\theta \sin\theta + \cos^2\theta \sin 2\theta + \cdots + \frac{1}{m} 2^{m-1} \cos^m \theta \sin m\theta, \end{aligned}$$

となり、示すべき結果が得られた。

## 検算

- $m = 1$：主張は $\frac{1}{2} \sin 2\theta = \cos\theta \sin\theta$ となり、これは 2 倍角の公式である。
- $m = 2$：左辺は $\sin 2\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta$、右辺は $\cos\theta \sin\theta + \cos^2\theta \sin 2\theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta (1 + \cos 2\theta)$ であり、$\sin 2\theta \cos 2\theta = \frac{1}{2} \sin 4\theta$ より両者は等しい。
- 数値的には、$m = 5$、$\theta = 0.7$ のとき両方の式はともに 1.51963（小数第 5 位まで）となる。また、漸化式は、ランダムに選んだ $k$ と $\theta$ に対してシンプソンの公式（Simpson's rule）で求めた $I_k$ の値とも一致する。

## よくある間違い

- 部分積分での符号の誤り。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos^k x = -k\cos^{k-1} x \sin x$ であり、このマイナス符号が $\int v\,\mathrm{d}u$ の前のマイナスと打ち消し合う。
- (ii) の $r = 0$ の項を忘れること。この項の積分は $\theta$ となり、望遠鏡和の最下段にある $I_0 = \theta$ と打ち消し合う。

## STEP のその先へ

$\cos^m\theta\cos m\theta$ を $\cos 2r\theta$ の一次結合として表すことは、フーリエ級数（Fourier series）を計算することにほかならない。ここではそれが有限の級数であり、項別に積分するのは、大学 1 年次の数理手法の講義でフーリエ級数を扱うやり方そのものである。また、(i) のような漸化式は、$\int \cos^n x\,\mathrm{d}x$ の形の積分やウォリスの積（Wallis product）を扱う際の標準的な道具でもある。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析の入門書）では、(ii) で用いた $1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} = 2\cos\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ という技巧が幾何学的に説明されている。

解答例

# STEP III 1991、第 9 問

純粋数学 ・ 楕円の弧長

**STEP III 1991、問 9**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/91-s3-q9

## 鍵となる考え方

$E_1$ は中心を基準とした形で表した楕円（ellipse）であり、$E_2$ は同じ曲線を、焦点（focus）を極とする極形式（polar form）で表したものである。$E_2$ を直交座標の式に直して平方完成（completing the square）すれば、中心と軸の位置がわかり、半軸（semi-axis）の長さを比べることで $k$ と $b$ が求まる。積分については、周長（perimeter）はただ一つの数であるが、媒介変数表示（parametrisation）ごとに見かけの異なる弧長（arc length）の積分が得られる。

## 解答

**軸、$k$ と $b$**

$E_2$ の座標を $(x, y)$ と書き、$r = \sqrt{x^2 + y^2}$、$\theta = \theta_2$ とおく。すると $E_2$ は $r = \dfrac{k}{1 + e\cos\theta}$、すなわち $r + er\cos\theta = k$ を表すから、

$$r = k - ex.$$

両辺を 2 乗すると（曲線上では $r = k/(1 + e\cos\theta) > 0$ なので、これによって情報は失われない）、

$$x^2 + y^2 = k^2 - 2kex + e^2x^2 \quad \Longrightarrow \quad (1 - e^2)x^2 + 2kex + y^2 = k^2.$$

$x$ について平方完成すると

$$(1 - e^2)\left(x + \frac{ke}{1 - e^2}\right)^2 + y^2 = k^2 + \frac{k^2e^2}{1 - e^2} = \frac{k^2}{1 - e^2},$$

よって

$$\frac{\left(x+\frac{ke}{1-e^2}\right)^2}{k^2/(1-e^2)^2}+\frac{y^2}{k^2/(1-e^2)}=1.$$

これは、$E_2$ の座標軸において中心が $\left(-\frac{ke}{1-e^2},0\right)$ で、対称軸が $E_2$ の座標軸に平行であり、半軸の長さが

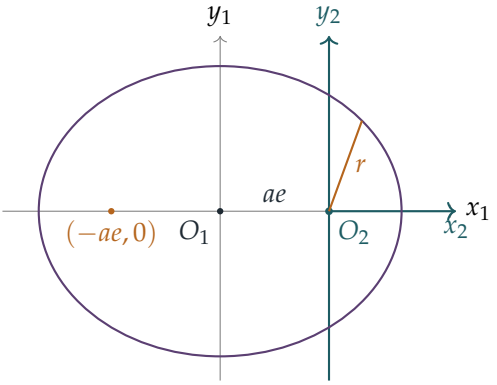
$$A=\frac{k}{1-e^2}\,(x\text{ 方向}),\qquad B=\frac{k}{\sqrt{1-e^2}}\,(y\text{ 方向}).$$

である楕円である。$0<1-e^2<1$ であるから $A>B$ となり、長軸（major axis）は $E_2$ の $x$ 軸に沿っている。$E_1$ については $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ かつ $a>b$ であるから、長軸は $E_1$ の $x$ 軸に沿っている。二つの曲線は同じものであるから、長半軸どうしが一致し、短半軸どうしも一致する：

$$a=\frac{k}{1-e^2},\quad \text{すなわち}\quad k=a(1-e^2),\qquad b^2=\frac{k^2}{1-e^2}=\frac{a^2(1-e^2)^2}{1-e^2}=a^2(1-e^2),$$

これが求める二つの結果である。

中心、すなわち $E_1$ の原点は、$E_2$ の $x$ 軸上の $x=-\frac{ke}{1-e^2}=-ae$ にある。したがって $E_2$ の座標軸は、$E_1$ の座標軸を長軸に沿って距離 $ae$ だけ平行移動したものである。$E_2$ の原点は $E_1$ における点 $(ae,0)$ であり、$a^2-b^2=a^2e^2$ であるからこれは焦点である。二つの $x$ 軸は同じ直線（長軸）上にあり、$y$ 軸どうしは平行である。$E_1$ の座標で書けば $x_1=x_2+ae$、$y_1=y_2$ である。楕円は両方の軸に関して対称であるから、$E_2$ の原点をもう一方の焦点 $(-ae,0)$ にとり、$x$ 軸の向きを逆にしてもよい。いずれにしても、$\theta_2=0$ に対応する点は焦点に最も近い頂点である。




## 二つの積分

楕円の上半分（$y\geq 0$）の長さを二通りの方法で計算する。

**$E_1$ を用いる。**$\theta_1$ が 0 から $\pi$ まで動くとき、点は上半分をちょうど 1 回通る。$\dot{x}=-a\sin\theta_1$、

$\dot{y} = b\cos\theta_1$ であるから、$a^2 - b^2 = a^2e^2$ を用いて

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2\sin^2\theta_1 + b^2\cos^2\theta_1 = a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\theta_1 = a^2\big(1 - e^2\cos^2\theta_1\big),$$

となる。よって周長の半分は

$$\tfrac{1}{2}P = a\int_0^{\pi} \sqrt{1 - e^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

**$E_2$ を用いる。** ここでは $r > 0$ であるから、$y_2 = r\sin\theta_2 \geq 0$ となるのはちょうど $0 \leq \theta_2 \leq \pi$ のときである。したがって $\theta_2 \in [0, \pi]$ もまた上半分をちょうど 1 回描く。極座標（polar coordinates）では $\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2$ である。$r = k(1 + e\cos\theta)^{-1}$ より

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{ke\sin\theta}{(1 + e\cos\theta)^2},$$

であるから

$$r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = \frac{k^2\left[(1 + e\cos\theta)^2 + e^2\sin^2\theta\right]}{(1 + e\cos\theta)^4} = \frac{k^2\big(1 + e^2 + 2e\cos\theta\big)}{(1 + e\cos\theta)^4}.$$

したがって $k = a(1 - e^2)$ を用いて

$$\tfrac{1}{2}P = a(1 - e^2)\int_0^{\pi} \frac{\sqrt{1 + e^2 + 2e\cos\theta}}{(1 + e\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

$\frac{1}{2}P$ の二つの表示を等しいとおき、$a > 0$ で割れば、求める等式が得られる。

**考えてみよう** なぜ両方の媒介変数がともに $[0, \pi]$ を動かなければならず、一方だけ別の範囲を動くのではいけないのだろうか。

弧長は曲線の同じ部分についてのものでなければならない。$\theta_1$ と $\theta_2$ は異なる角である（一方は中心から測った離心角（eccentric angle）、他方は焦点から測った偏角（polar angle）である）が、どちらも $[0, \pi]$ 上で、右側の頂点 $(a, 0)$ から左側の頂点 $(-a, 0)$ まで上半分を描く。したがって二つの積分は同じ弧を測っている。

### 近似

$0 \leq e^2\cos^2\theta < 1$ であるから、二項級数（binomial series）が使える：

$$\sqrt{1 - u} = 1 - \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{8}u^2 + O(u^3), \qquad u = e^2\cos^2\theta.$$

$O(u^3)$ の項は $O(e^6)$ であり、これは無視する。

$$\int_0^{\pi} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\pi} \cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{8}$$

（2 番目は $\cos^4\theta = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta$ から得られる）を用いると

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1 - e^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \approx \pi - \frac{e^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{e^4}{8}\cdot\frac{3\pi}{8} = \pi\left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64}\right)$$
$$= \tfrac{1}{64}\pi\left(64 - 16e^2 - 3e^4\right).$$

いま証明した等式により、2 番目の積分も同じ値をとる。これで問題は完結する。

## 検算

- $e = 0$ のとき二つの積分はともに $\pi$ に等しく、$E_2$ は $k = a$ として円 $r = k$ になる。正しい。
- $a = 2$、$b = 1$（したがって $e^2 = \frac{3}{4}$）のとき、200 000 角形で近似すると周長は 9.6884482 となり、$2a$ に 1 番目の積分を掛けたものと一致する。
- 数値的には、$e = 0.2$ のとき二つの積分はともに 3.1099371 であり、近似式は 3.1099411 を与える。その差はおよそ $-0.063e^6$ であり、級数の次の項 $-\frac{5\pi}{256}e^6 \approx -0.061e^6$ と整合する。

## よくある間違い

- $E_2$ の原点を中心にとってしまうこと。分母に $1 + e\cos\theta$ をもつ極形式では、極は常に焦点にある。
- 極座標の弧長で $(\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta)^2$ の項を忘れること、あるいは一方を $[0, 2\pi]$、他方を $[0, \pi]$ で積分してしまうこと。

## STEP のその先へ

積分 $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$ は第 2 種完全楕円積分（complete elliptic integral of the second kind）$E(e)$ であり、楕円の周長は $4aE(e)$ となる。これは初等関数（elementary functions）では表せない。だからこそ、ここで扱ったような級数（そしてラマヌジャン（Ramanujan）による驚くほど精度の高い近似式）が重要になるのである。楕円積分は楕円関数（elliptic functions）や楕円曲線（elliptic curves）へとつながっており、楕円曲線は現代の整数論（number theory）の中心的な話題である。この種の問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展的問題集）を参照するとよい。

解答例

# STEP III 1991、第 10 問

純粋数学 ・ ニュートンの恒等式

> **STEP III 1991、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q10

## 鍵となる考え方

この多項式（polynomial）は o でない係数（coefficient）を三つしかもたないので、基本対称式（elementary symmetric functions）$\Sigma_m$ のほとんどすべてが o となり、与えられた恒等式（ニュートン（Newton）の恒等式（Newton's identity））は二項の漸化式（recurrence）に帰着する。次数 $n$ を超えるとこの恒等式はもはや使えないが、さらに単純なものが使える。すなわち、どの根（root）も方程式そのものを満たすので、それに $\alpha^k$ を掛けて根全体にわたって和をとれば、$S_{n+k}$ をそれ以前の冪和（power sum）と結びつけることができる。

## 解答

### $S_{n-1}$ までの冪和

$x^n - qx^{n-1} + r$ と $\prod_i (x - \alpha_i) = x^n - \Sigma_1 x^{n-1} + \Sigma_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n \Sigma_n$ を比較すると、次が読み取れる。

$$\Sigma_1 = q, \qquad \Sigma_2 = \Sigma_3 = \cdots = \Sigma_{n-1} = 0, \qquad (-1)^n \Sigma_n = r.$$

与えられた恒等式で $1 \le p \le n-1$ とする。$p \le n-1$ であるから、$\Sigma_2, \ldots, \Sigma_p$ を含む項はすべて o となる。（$p = 1$ のとき、恒等式は単に $S_1 - \Sigma_1 = 0$ である。）残るのは

$$S_p - q\, S_{p-1} = 0 \quad (2 \le p \le n-1), \qquad S_1 = q.$$

である。よって $S_1 = q$ であり、各冪和は一つ前の冪和の $q$ 倍である。$p$ に関する数学的帰納法（induction）により、

$$S_p = q^p \qquad \text{ただし} 1 \le p \le n-1,$$

が示された。各 $\alpha_i^0 = 1$ であるから、$S_0 = n$ であることも記しておくと便利である。

### $S_n$、$S_{n+1}$ および $S_{n+2}$

$p = n$ のときも恒等式はまだ使え、今度は最後の項が現れる。

$$S_n - q\,S_{n-1} + (-1)^n n\,\Sigma_n = 0.$$

$(-1)^n\Sigma_n = r$ であるから、

$$S_n = q \cdot q^{n-1} - nr = q^n - nr.$$

を得る。

> **考えてみよう** 与えられた恒等式は $p = n$ で終わっている。その先へはどうやって進めばよいだろうか。

方程式そのものを用いる。各根は $\alpha_i^n = q\alpha_i^{n-1} - r$ を満たす。これに $\alpha_i^k$（ただし $k \geq 0$）を掛けて $i$ について和をとると、

$$S_{n+k} = q\,S_{n+k-1} - r\,S_k \qquad (k \geq 0). \tag{$*$}$$

を得る。$k = 0$ とすると再び $S_n = q^n - nr$ が得られ、心強い検算となる。さて、

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= q\,S_n - r\,S_1 = q^{n+1} - nqr - qr = q^{n+1} - (n+1)qr, \\ S_{n+2} &= q\,S_{n+1} - r\,S_2 = q^{n+2} - (n+1)q^2r - q^2r = q^{n+2} - (n+2)q^2r. \end{aligned}$$

ここで $S_1 = q$ と $S_2 = q^2$ を用いた。これらが成り立つのは、$n \geq 5$ により $2 \leq n-1$ となるからである。

### 一般の公式

$S_n = q^n - nr$、$S_{n+1} = q^{n+1} - (n+1)qr$、$S_{n+2} = q^{n+2} - (n+2)q^2r$ というパターンから、次が予想される。

$$S_{n+m} = q^{n+m} - (n+m)\,q^m r \qquad \text{ただし} 0 \leq m \leq n-1.$$

これを $m$ に関する帰納法で証明する。$m = 0$ の場合は上で示した $S_n = q^n - nr$ である。

$1 \leq m \leq n-1$ として、公式がある $m-1$ に対して成り立つと仮定する。$k = m$ として $(*)$ を用いると、

$$\begin{aligned} S_{n+m} &= q\,S_{n+m-1} - r\,S_m \\ &= q\left(q^{n+m-1} - (n+m-1)q^{m-1}r\right) - r\,q^m \\ &= q^{n+m} - (n+m)\,q^m r, \end{aligned}$$

となる。ここで $S_m = q^m$ を用いたが、これは $1 \le m \le n-1$ であるから成り立つ。これは $m$ に対する公式である。帰納法により、公式はすべての $0 \le m \le n-1$、すなわち $m < n$ に対して成り立つ。

**考えてみよう** 条件 $m < n$ は正確にはどこで効いてくるのだろうか。

$S_m = q^m$ を用いる段階だけである。$m = n$ では $S_n$ が必要になるが、それは $q^n$ ではなく $q^n - nr$ であるから、余分な $-nr$ が入り込んでパターンが崩れる。実際、$(*)$ から $S_{2n} = q^{2n} - 2nq^n r + nr^2$ が得られる。

## 検算

- $r = 0$ のとき、方程式は $x^{n-1}(x-q) = 0$ となり、根は $q$ と 0（$n-1$ 重）であるから、すべての $S_k = q^k$ である。ここで得た公式はすべてこれに帰着する。
- $q = 0$ のとき、根は $-r$ の $n$ 乗根である。このとき $1 \le p \le n-1$ に対して $S_p = 0$ であり、$S_n = n \cdot (-r) = -nr$ となって $q^n - nr$ と一致する。
- 数値的に、ランダムな $q, r$ と $5 \le n \le 9$ に対してすべての根を求め、その冪の和を計算した。$S_p = q^p$ および $S_{n+m}$ の公式（$0 \le m \le n-1$）は約 $10^{-12}$ の精度で一致したが、$m = n$ では公式は目に見えて成り立たなくなった。

## よくある間違い

- 恒等式の最後の項にある因子 $p$ を忘れ、$q^n - nr$ ではなく $S_n = q^n - r$ としてしまう。
- $\Sigma_n$ の符号を誤る。定数項は $(-1)^n \Sigma_n$ であるから、$n$ の偶奇（parity）にかかわらず $(-1)^n n\Sigma_n = nr$ である。
- 与えられた恒等式を $p > n$ で適用してしまう。そこでは、述べられた形のままでは成り立たない。

## STEP のその先へ

これらはニュートンの恒等式であり、$(*)$ は、冪和が元の方程式を特性多項式（characteristic polynomial）とする線形漸化式（linear recurrence）を満たすことを示している。行列の言葉でいえば、$S_k$ は $A^k$ のトレース（trace）である。ここで $A$ はこの多項式のコンパニオン行列（companion matrix）である。根に関する任意の対称式が $\Sigma_m$ を用いて表せるという事実は対称式の基本定理（fundamental theorem of

symmetric polynomials）であり、ガロア（Galois）理論へとつながっていく。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（『環・体・群』）は、この代数が展開されていく様子を見るのによい本である。

解答例

# STEP III 1991、第 11 問

力学 ・ 剛体のつり合い

**STEP III 1991、問 11**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

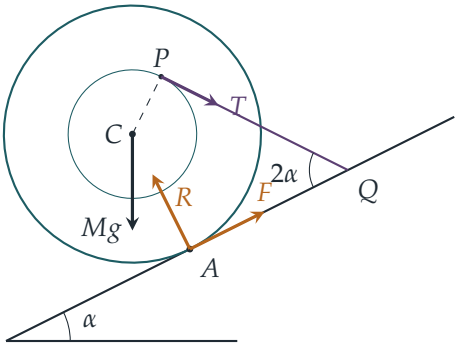
step.maths.org/questions/91-s3-q11

## 鍵となる考え方

円柱は 4 つの力、すなわち重力、垂直抗力（normal reaction）、接点での摩擦力（friction）、糸の張力（tension）を受けて釣り合っている（equilibrium）剛体（rigid body）である。このうち重力と垂直抗力の 2 つは円柱の中心を通るので、中心のまわりのモーメント（moment）を考えれば、摩擦力と張力が直接結びつく。次に斜面に平行な方向と垂直な方向に力を分解すると摩擦力と垂直抗力が求まり、あとは不等式 $F \leq \mu R$ を使えばよい。後半では、糸の先を何が支えているかは円柱には関係ないので、張力は変わらず、質点だけを調べればよい。

## 解答

円柱は一様な剛体で、その重心（centre of mass）は中心 $C$ にあるものとし、糸は軽く伸び縮みしないもの、もう一方の物体は質点（particle）とみなす。斜面との接点を $A$、糸の張力を $T$ とする。糸は溝に巻きつけられているので、糸の巻かれていない部分 $PQ$ は $P$ で溝に接し、その作用線（line of action）は $C$ からの垂直距離が $a$ である。図より、$Q$ は $A$ よりも斜面の上方にあり、糸は円柱を $P$ から $Q$ の向きに引く。すなわち斜面に沿って上向き、かつ斜面に押しつける向きで、斜面となす角は $2\alpha$ である。




破線で示した半径 $CP$ の長さは $a$ で、糸に垂直である。円柱にはたらく摩擦力を $F$ とし、斜面に沿って上向きを正とする。

**円柱：$\mu \geq \frac{1}{3}\tan\alpha$ を示す**

**$C$ のまわりのモーメント**。重力は $C$ にはたらき、垂直抗力は $AC$ に沿ってはたらくので、どちらも $C$ のまわりのモーメントをもたない。摩擦力は $C$ から距離 $2a$ の点にはたらき、張力の作用線までの垂直距離は $a$ であり、両者は円柱を逆向きに回そうとするので、

$$F \cdot 2a = T \cdot a, \qquad \text{すなわち、} \qquad T = 2F.$$

**考えてみよう** 摩擦力と張力が円柱を逆向きに回そうとするのはなぜか。

この 2 つは $C$ のまわりのモーメントをもつ唯一の力なので、それらのモーメントは打ち消し合わなければならない。糸が $P$ を引く力だけがはたらけば、円柱は斜面を転がり上がる向きに回る。$A$ で斜面に沿って上向きにはたらく摩擦力は、それと逆向きに回そうとする。もし摩擦力の向きを誤って仮定していたとしても、以下の式から $F < 0$ が得られるだけなので、この符号は余分な仮定ではない。

**斜面に平行な方向の力の釣り合い**（斜面に沿って上向きを正とする）：

$$F + T\cos 2\alpha = Mg\sin\alpha \quad \Longrightarrow \quad F(1 + 2\cos 2\alpha) = Mg\sin\alpha.$$

**斜面に垂直な方向の力の釣り合い：**張力は斜面に押しつける向きに成分 $T\sin 2\alpha$ をもつので、

$$R = Mg\cos\alpha + T\sin 2\alpha = Mg\cos\alpha + 2F\sin 2\alpha.$$

$F = Mg\sin\alpha/(1 + 2\cos 2\alpha)$ を代入すると、

$$\begin{aligned} R(1 + 2\cos 2\alpha) &= Mg\big(\cos\alpha + 2\cos 2\alpha\cos\alpha + 2\sin 2\alpha\sin\alpha\big) \\ &= Mg\big(\cos\alpha + 2\cos(2\alpha - \alpha)\big) = 3Mg\cos\alpha. \end{aligned}$$

よって

$$F = \frac{Mg\sin\alpha}{1+2\cos 2\alpha}, \qquad R = \frac{3Mg\cos\alpha}{1+2\cos 2\alpha}.$$

円柱は斜面から離れないので $R > 0$ である。$\alpha$ は鋭角なので $\cos\alpha > 0$ であり、したがって $1+2\cos 2\alpha > 0$ となるから、$F > 0$ でもある。割り算をすると

$$\frac{F}{R} = \frac{\sin\alpha}{3\cos\alpha} = \tfrac{1}{3}\tan\alpha.$$

釣り合っているためには摩擦力が $F \le \mu R$ を満たさなければならないので、$\mu \ge F/R = \frac{1}{3}\tan\alpha$ となり、示すべきことが示された。

**質点：摩擦係数の最小値**

糸の位置は変わらないので、円柱はまったく同じ位置にあり、その 3 つの式も変わらない。特に、張力は依然として

$$T = 2F = \frac{2Mg\sin\alpha}{1+2\cos 2\alpha}.$$

である。$\tan\alpha = \frac{1}{2}$ のとき $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$、$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ なので、

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{3}{5}, \qquad \sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{4}{5},$$

であり、$1+2\cos 2\alpha = \frac{11}{5}$ となる。したがって

$$T = \frac{2Mg}{\sqrt{5}}\cdot\frac{5}{11} = \frac{2\sqrt{5}}{11}Mg.$$

（円柱については $\mu \ge \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ も必要である。）

次に $Q$ にある質点を考える。糸は質点を $P$ の向きに引く。すなわち、斜面に沿って**下向き**に成分 $T\cos 2\alpha$、斜面から**離れる向き**に成分 $T\sin 2\alpha$ をもつ。重力 $3Mg$ も斜面に沿って下向きの成分をもつので、質点にはたらく摩擦力 $F'$ は斜面に沿って上向きでなければならない。質点にはたらく垂直抗力を $R'$ とする。

斜面に平行な方向：

$$F' = 3Mg\sin\alpha + T\cos 2\alpha = \frac{3Mg}{\sqrt{5}} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{11}Mg = \frac{33\sqrt{5}}{55}Mg + \frac{6\sqrt{5}}{55}Mg = \frac{39\sqrt{5}}{55}Mg.$$

斜面に垂直な方向：

$$R' = 3Mg\cos\alpha - T\sin 2\alpha = \frac{6Mg}{\sqrt{5}} - \frac{4}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{11}Mg = \frac{66\sqrt{5}}{55}Mg - \frac{8\sqrt{5}}{55}Mg = \frac{58\sqrt{5}}{55}Mg.$$

これは正なので、質点は確かに斜面から離れない。釣り合いには $F' \le \mu' R'$ が必要である。ここで $\mu'$ は質点と斜面の間の摩擦係数（coefficient of friction）である。よって

$$\mu' \ge \frac{F'}{R'} = \frac{39}{58}.$$

摩擦係数の最小値は $\dfrac{39}{58}$ である。

## 検算

- 代わりに $A$ のまわりのモーメントを考えると $T\,a(1+2\cos 2\alpha) = 2a\,Mg\sin\alpha$ となり、同じ張力が得られる。（$A$ から糸までの垂直距離は $a+2a\cos 2\alpha$ である。）
- $\alpha \to 0$ のとき斜面は水平になり、張力も摩擦力も 0 になり、下限 $\frac{1}{3}\tan\alpha \to 0$ となる。これは当然そうなるべき結果である。
- 数値による検算として、$60^\circ$ 未満の鋭角 $\alpha$ を無作為に 10 000 個とり、座標から図形を構成して釣り合いの式を解いたところ、$F/R = \frac{1}{3}\tan\alpha$ が確認された。$\tan\alpha = \frac{1}{2}$ のときは $T \approx 0.4066\,Mg$、$F' \approx 1.5856\,Mg$、$R' \approx 2.3580\,Mg$、$F'/R' \approx 0.67241 = 39/58$ となる。

## よくある間違い

- 張力が円柱を斜面に**押しつける**向きにはたらき、$R$ を増やすことを忘れる。$T\sin 2\alpha$ を落とすと比が誤ったものになる。
- 糸が質点を引く向きを誤る。糸は質点を $P$ の向きに引くので、質点にはたらく垂直抗力を**減らし**、斜面に沿って下向きの力を増やす。
- 後半で張力を一から計算し直す。円柱の釣り合いは変わっていないので、$T$ も変わらない。

## STEP のその先へ

剛体の静力学（statics）は、結局 2 つのベクトル方程式に帰着する。すなわち、力の総和が 0 であることと、**任意の**点のまわりのモーメントの総和が 0 であることである。その点をうまく選ぶこと、ここでは未知の力が 2 つ通る中心を選ぶことが、最も重要な技術である。大学では、これは力の系とそれと等価な「レンチ」（wrench）の研究へと発展する。また摩擦の問題は、釣り合いが**どのように**崩れるのか、すなわち滑るのか、転がるのか、倒れるのかという問いにもつながっていく。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の静力学と回転を丁寧に扱っている。

解答例

# STEP III 1991、第 12 問

力学 ・ 曲線上の運動

**STEP III 1991、問 12**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/91-s3-q12

## 鍵となる考え方

質点は楕円（ellipse）に束縛されているので、その位置はただ一つの媒介変数（parameter）$\theta$ で完全に記述される。位置ベクトル（position vector）を 2 回微分し、加速度を内向きの単位法線ベクトル（unit normal）に射影する。このとき $\ddot{\theta}$ の項は接線（tangent）方向を向いているので消える。後半では、垂直抗力（normal reaction）が 0 まで減少したときに質点は面から離れる。管はなめらかなので、エネルギー保存（energy conservation）によって各点での速さが求まる。

## 解答

### 法線方向の加速度

質点をなめらかな曲線上を動く点としてモデル化する。したがって、はたらく力は鉛直下向きの重力 $mg$ と、管からの垂直抗力 $R$ だけである。

位置は $\mathbf{r} = (a\cos\theta,\, b\sin\theta)$ である。連鎖律（chain rule）を用いて時間で微分すると、

$$\dot{x} = -a\sin\theta\,\dot{\theta}, \qquad \dot{y} = b\cos\theta\,\dot{\theta},$$
$$\ddot{x} = -a\sin\theta\,\ddot{\theta} - a\cos\theta\,\dot{\theta}^2, \qquad \ddot{y} = b\cos\theta\,\ddot{\theta} - b\sin\theta\,\dot{\theta}^2.$$

接線方向は $(-a\sin\theta,\, b\cos\theta)$ であるから、法線方向の一つは $(b\cos\theta,\, a\sin\theta)$ である（両者の内積（dot product）は 0 である）。$\theta = 0$ ではこれは $(b, 0)$ となり、楕円の外側を向く。よって内向きの単位法線ベクトルは

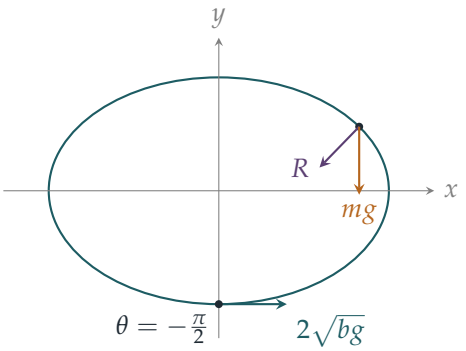
$$\mathbf{n} = -\frac{(b\cos\theta,\, a\sin\theta)}{D}, \qquad D = \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}.$$

したがって、内向き法線方向の加速度は

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n} &= -\frac{1}{D}\Big[b\cos\theta\big(-a\sin\theta\,\ddot{\theta}-a\cos\theta\,\dot{\theta}^2\big)+a\sin\theta\big(b\cos\theta\,\ddot{\theta}-b\sin\theta\,\dot{\theta}^2\big)\Big]\\ &= -\frac{1}{D}\Big[-ab\,\dot{\theta}^2\big(\cos^2\theta+\sin^2\theta\big)\Big] = \frac{ab\,\dot{\theta}^2}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}},\end{aligned}$$

となる。2 つの $\ddot{\theta}$ の項が打ち消し合うからである。これが求める結果である。

### 面から離れる点




最下点は $\theta=-\frac{\pi}{2}$ であり、そこでは $y=-b$ である。管はなめらかなので、垂直抗力は仕事をせず、エネルギーは保存される。媒介変数 $\theta$ の点での速さを $v$ とすると、

$$\tfrac{1}{2}mv^2+mgb\sin\theta=\tfrac{1}{2}m(4bg)-mgb \quad\Longrightarrow\quad v^2=2gb(1-\sin\theta).$$

前半の計算から $v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2=D^2\dot{\theta}^2$ であるので、$\dot{\theta}^2=v^2/D^2$ である。

次に、内向き法線 $\mathbf{n}$ の方向に力を分解する。垂直抗力 $R$ は $\mathbf{n}$ の方向にはたらく（質点は内側にあるので、接触している間は管が内向きに押し、$R\geq 0$ である）。重力は $(0,-mg)$ であり、その $\mathbf{n}$ 方向の成分は $(0,-mg)\cdot\mathbf{n}=mga\sin\theta/D$ である。ニュートン（Newton）の第二法則より

$$R+\frac{mga\sin\theta}{D}=\frac{m\,ab\,\dot{\theta}^2}{D}=\frac{m\,ab\,v^2}{D^3},\qquad\text{よって}\qquad R=\frac{ma}{D^3}\Big(bv^2-g\sin\theta\,D^2\Big).$$

**考えてみよう**　重力の成分が負の符号ではなく $+mga\sin\theta/D$ となるのはなぜか。

上半分（$\sin\theta>0$）では、内向き法線は下向きの成分をもつ。したがってそこでは、鉛直面内の円運動の最高点と同じように、重力が質点を内側へ引く助けとなる。$R$ と重力のこの成分の両方が、向心加速度（centripetal acceleration）をもたらすのである。

ここで $a = \frac{3}{2}b$、$v^2 = 2gb(1-\sin\theta)$ とし、$s = \sin\theta$ とおく。すると

$$D^2 = \tfrac{9}{4}b^2s^2 + b^2(1-s^2) = b^2\left(1+\tfrac{5}{4}s^2\right),$$

であるから、

$$bv^2 - g\sin\theta\, D^2 = gb^2\left[2(1-s) - s\left(1+\tfrac{5}{4}s^2\right)\right] = -\tfrac{1}{4}gb^2\left(5s^3+12s-8\right).$$

$ma/D^3 > 0$ であるから、$R$ の符号は $-(5s^3+12s-8)$ の符号と一致する。

質点は $R$ が初めて 0 になる点で面から離れる。関数 $p(s) = 5s^3+12s-8$ は $p'(s) = 15s^2+12 > 0$ より狭義単調増加（strictly increasing）であり、$p(-1) = -25 < 0$、$p(1) = 9 > 0$ である。よって $p$ は $(-1,1)$ にちょうど一つの根をもつ。質点が最下点から上昇するにつれて $s$ は $-1$ から増加し、$s$ がその根に達するまでは $R > 0$ である。また、すべての $s < 1$ に対して $v^2 = 2gb(1-s) > 0$ であるから、質点はその点に達したときもまだ管を上向きに動いている。したがって、$R$ が初めて 0 になり、質点が面から離れるのは

$$5\sin^3\theta + 12\sin\theta - 8 = 0,$$

を満たす点であり、これが求めるものである。数値的には $\sin\theta \approx 0.584$ であり、質点は長軸の高さより少し上で面から離れる。

## 検算

- $a = b = r$ とすると、法線方向の加速度は $r\dot{\theta}^2 = v^2/r$ となり、よく知られた円運動の結果に一致する。
- 最下点では $v^2 = 4bg$ のもとで $R = m\left(\frac{bv^2}{a^2}+g\right)$ となり、これは正である（そこでの曲率半径（radius of curvature）は $a^2/b$ である）。$p(-1) = -25 < 0$ もこれと整合する。
- $b = 1$、$a = 1.5$、$g = 9.81$ として、$\theta$ に関する運動方程式（equation of motion）を最下点から逐次的に数値積分した。垂直抗力は $\sin\theta \approx 0.58379$ で初めて 0 になり、三次方程式（cubic）の根 0.58377 と一致した（$\theta \approx 35.7^\circ$）。

## よくある間違い

- $\theta$ を極角（polar angle）とみなしてしまうこと。$a = b$ でない限り、点 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ は $x$ 軸から角 $\theta$ の位置にはなく、法線も動径の方向ではない。
- 法線方向の加速度として $v^2/b$ や $v^2/a$ を用いること。楕円上では曲率半径は点ごとに変化し、それこそが前半で計算している内容である。

- 重力の法線成分の符号を誤ること。そうすると三次式が $5s^3 - 4s + \ldots$ となり、意味のある根が得られない。

## STEP のその先へ

前半の結果は、$\rho$ を曲率半径とする法線加速度の公式 $v^2/\rho$ の特別な場合である。実際、この楕円では $\rho = D^3/(ab)$ である。加速度を接線成分と法線成分に分解すること（フレネ標構（Frenet frame））は、大学 1 年次の力学や微分幾何学（differential geometry）で標準的に扱われる。束縛を一つの座標 $\theta$ で扱う考え方は、自然にラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）へとつながる。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、束縛運動や極座標（polar coordinates）、内在座標（intrinsic coordinates）をよく解説している。

解答例

# STEP III 1991、第 13 問

力学 ・ 放物体と天井の衝突

**STEP III 1991、問 13**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

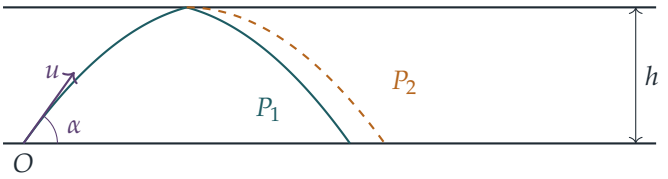
step.maths.org/questions/91-s3-q13

## 鍵となる考え方

天井はなめらか（smooth）なので、水平方向の速度 $u\cos\alpha$ は決して変化せず、どの到達距離も $u\cos\alpha$ に飛行時間を掛けたものにすぎない。仕事はすべて鉛直方向の運動にあり、エネルギーの式（energy equation）から天井における鉛直方向の速さがすぐに得られる。完全弾性衝突（elastic impact）の後、粒子は上昇したときの運動をちょうど逆再生したように落ちてくる。非弾性衝突（inelastic impact）の後は、単に静止状態から落下する。

## 解答

両方の粒子を、空気抵抗のない状態で重力のみを受けて自由に運動する質点（point mass）としてモデル化する。$u = \sqrt{8gh}$、$s = \sin\alpha$、$c = \cos\alpha$ とおく。$O$ を原点とし、$x$ を水平方向、$y$ を鉛直上向きにとる。




### 天井に到達する条件

初速度の鉛直成分は $us$ であり、上昇中は

$$\dot{y}^2 = u^2 s^2 - 2gy = 8gh\,s^2 - 2gy.$$

が成り立つ。粒子が高さ $h$ に到達するのは、そこで $\dot{y}^2 \geq 0$ となるとき、すなわち $8ghs^2 \geq 2gh$ のときに限られるので、$s^2 \geq \frac{1}{4}$ である。$\alpha$ は鋭角なので $s > 0$ であり、この条件は $\sin\alpha \geq \frac{1}{2}$、すなわち $\alpha \geq \frac{1}{6}\pi$ となる。（ちょうど $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ のときは、天井にかろうじて触れる。）到達したとき、そこでの上向きの速さは

$$w = \sqrt{8ghs^2 - 2gh} = \sqrt{2gh}\,\sqrt{4s^2 - 1}.$$

である。

### $P_1$ の到達距離

上昇中、鉛直方向の速度は $us$ から $w$ まで一定の割合 $g$ で減少するので、天井に達するまでの時間は

$$t_1 = \frac{us - w}{g}.$$

である。

**考えてみよう** $P_1$ が天井から下まで戻ってくるのにかかる時間はどれだけか。

衝突は完全弾性的で天井はなめらかなので、鉛直方向の速度は下向きに $w$ となり、水平方向の速度は変わらない。すると天井から下への鉛直方向の運動は、上昇中の鉛直方向の運動を時間について逆向きにたどったもの（高さ $h$ から床に向かって速さ $w$ で出発し、加速度 $g$ で加速する）になる。したがって、粒子は鉛直方向の速さ $us$ で床に到達し、さらに時間 $t_1$ を要する。直接確かめると、鉛直方向の速さは $w$ から $\sqrt{w^2 + 2gh} = us$ まで割合 $g$ で増加する。

全飛行時間は $2t_1$ なので、到達距離は

$$\begin{aligned} R_1 &= uc \cdot \frac{2(us - w)}{g} = \frac{2\sqrt{8gh}\,c}{g}\left(2\sqrt{2gh}\,s - \sqrt{2gh}\sqrt{4s^2 - 1}\right) \\ &= \frac{2\sqrt{8gh}\sqrt{2gh}}{g}\,c\left(2s - \sqrt{4s^2 - 1}\right) = 8h\cos\alpha\left(2\sin\alpha - \sqrt{4\sin^2\alpha - 1}\right), \end{aligned}$$

となる。ここで $us = \sqrt{8gh}\,s = 2\sqrt{2gh}\,s$ と $\sqrt{8gh}\sqrt{2gh} = 4gh$ を用いた。これが求める到達距離である。

### $P_2$ の到達距離と差 $D$

$P_2$ は天井まで同じ経路をたどり、時間 $t_1$ を要する。衝突は完全非弾性的なので鉛直方向の速度は 0 になり、天井はなめらかなので水平方向の速度は $uc$ のままである。その後、静止状態から高さ $h$ を落下し、時間 $\sqrt{2h/g}$ を要する。よって

$$R_2 = uc\left(t_1 + \sqrt{\tfrac{2h}{g}}\right), \qquad R_2 - R_1 = uc\left(\sqrt{\tfrac{2h}{g}} - t_1\right).$$

である。ここで

$$t_1 = \frac{\sqrt{2gh}\,(2s - \sqrt{4s^2-1})}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,(2s - \sqrt{4s^2-1})$$

であり、$uc\sqrt{2h/g} = \sqrt{8gh}\sqrt{2h/g}\,c = 4hc$ なので

$$R_2 - R_1 = 4h\cos\alpha\Big(1 - 2\sin\alpha + \sqrt{4\sin^2\alpha - 1}\Big).$$

となる。これは $\frac{1}{6}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ で正である。実際、$s > \frac{1}{2}$ のとき $(2s-1)^2 = 4s^2 - 1 - 2(2s-1) < 4s^2 - 1$ であるから、$2s - 1 < \sqrt{4s^2-1}$ となる。したがって $P_2$ は常により遠くに着地し（弾性的な跳ね返りによって $P_1$ はより速く下に投げ出される）、

$$D = 4h\cos\alpha\Big(1 - 2\sin\alpha + \sqrt{4\sin^2\alpha - 1}\Big).$$

である。

### $D$ の最大化

$\frac{1}{6}\pi \le \alpha < \frac{1}{2}\pi$ において $f(\alpha) = D/(4h) = c(1-2s) + c\,r$ とおく。ただし $r = \sqrt{4s^2-1}$ である。$f(\frac{1}{6}\pi) = 0$ であり、$\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ のとき $f \to 0$（$c \to 0$ のため）、その間では $f > 0$ であることに注意する。$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{4sc}{r}$ を用いて微分すると

$$f'(\alpha) = -s(1-2s) - 2c^2 - sr + \frac{4sc^2}{r}.$$

となる。$c^2 = 1 - s^2$ を代入し、$r > 0$（$\alpha > \frac{1}{6}\pi$ のとき）を掛けると

$$\begin{aligned} rf'(\alpha) &= (4s^2 - s - 2)\,r - sr^2 + 4s(1-s^2) \\ &= (4s^2 - s - 2)\,r - s(8s^2 - 5). \end{aligned}$$

を得る。$\alpha = \frac{1}{4}\pi$ では $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$、$r = 1$ であり、$(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} - 2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(4-5) = 0$ となる。よって $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ は停留点（stationary point）である。

> **考えてみよう** これが他の停留点ではなく最大値を与えることは、どうすればわかるか。

任意の停留点において $(4s^2 - s - 2)r = s(8s^2 - 5)$ が成り立つ。両辺を 2 乗して $r^2 = 4s^2 - 1$ を用い、展開して因数分解すると

$$(4s^2 - s - 2)^2(4s^2 - 1) - s^2(8s^2 - 5)^2 = -2(2s^2 - 1)(8s^3 - s^2 - 2s - 2),$$

となるので、すべての停留点で $s^2 = \frac{1}{2}$ または $q(s) = 8s^3 - s^2 - 2s - 2 = 0$ が成り立つ。$[\frac{1}{2}, 1]$ 上で $q'(s) = 24s^2 - 2s - 2 > 0$ なので $q$ は増加関数であり、$q(0.8) = -0.144 <$

$0 < 0.0985 = q(0.82)$ であるから、この区間における唯一の根は $(0.8, 0.82)$ にある。しかし、そのような $s$ に対しては

$$4s^2 - s - 2 < 4(0.82)^2 - 0.8 - 2 < 0, \qquad 8s^2 - 5 > 8(0.8)^2 - 5 > 0,$$

なので、左辺 $(4s^2 - s - 2)r$ は負、右辺 $s(8s^2 - 5)$ は正となる。つまり、この根は 2 乗したことによって生じたものであり、停留点ではない。よって $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ は $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ における唯一の停留点である。$f$ は連続であり、区間の内部で正、両端で 0 である（または 0 に近づく）から、内部で最大値をとり、それはこの停留点でなければならない。したがって $D$ は $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ のとき最大となり、

$$D_{\max} = 4h \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1 - \sqrt{2} + 1) = 4h(\sqrt{2} - 1).$$

である。

## 検算

- $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ のとき粒子は天井にかろうじて触れるだけなので、2 つの粒子の結果は一致するはずである。実際 $D = 0$ であり、$R_1 = 8h \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\,h$ は通常の到達距離 $u^2 \sin 2\alpha / g$ に等しい。
- $h = 1.7\,\mathrm{m}$ として、$\alpha = 1$ で両方の運動を数値的に刻んで計算すると $R_1 \approx 2.420\,\mathrm{m}$、$D \approx 2.464\,\mathrm{m}$ となり、公式と一致する。$\alpha$ について細かく探索すると、$D/(4h)$ の最大値は $\alpha = 0.78540 \approx \frac{1}{4}\pi$ でとられ、その値は $0.41421 \approx \sqrt{2} - 1$ である。

## よくある間違い

- $h = ust - \frac{1}{2}gt^2$ を $t_1$ について解き、大きいほうの根をとってしまう。これは天井がなかった場合に粒子が下降中に高さ $h$ を通過する時刻である。
- $D = R_1 - R_2$ と書いてしまう。これは負である。非弾性衝突をした粒子のほうが遠くに着地する。
- $f'(\frac{1}{4}\pi) = 0$ で止めてしまい、この停留点が最大値を与えることを示さない。

## STEP のその先へ

$P_1$ に対する時間反転の議論は、ある深い事実を初めて垣間見せてくれる。保存力のもとでのニュートン（Newton）の法則は時間を逆向きに進めても同じ形をしており、完全弾性衝突はその対称性を保つが、非弾性衝突（エネルギーを失う）はそれを破る。

反発係数（coefficient of restitution）が 0 と 1 の間にある場合は、ここで求めた 2 つの到達距離の中間を補間することになる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、衝突とエネルギー保存をこの精神で扱っている。

解答例

# STEP III 1991、第 14 問

力学 ・ ばねによる円運動

**STEP III 1991、問 14**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

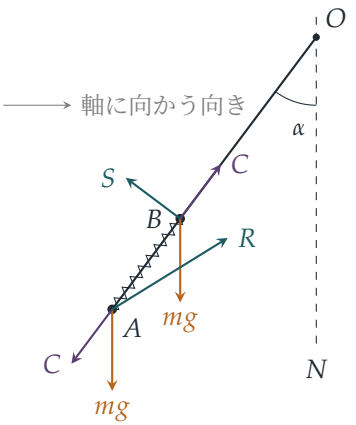
step.maths.org/questions/91-s3-q14

## 鍵となる考え方

すべてのものが同じ角速度（angular speed）で $ON$ を軸とする水平な円周上を動くので、各質量がもつのは軸に向かう既知の加速度 $\omega^2 r$ だけである。**なめらかな**棒に通された輪（ring）については、棒に沿った方程式が最もすっきりしている。未知の垂直抗力（normal reaction）がそこから消えるからである。次に、ばねの力が輪と $A$ にある質点を結びつけ、そこでの棒の抗力の向きから $k$ が決まる。

## 解答

**モデル**。棒は軽くなめらかであり、$A$ と $B$ は質量 $m$ の質点（particle）である。ばねは棒に沿って $B$ と $A$ の間にある。$\alpha = \sin^{-1}\frac{3}{5}$ とおくと、$\sin\alpha = \frac{3}{5}$、$\cos\alpha = \frac{4}{5}$ であり、また $\omega^2 = \frac{5g}{2a}$ である。$OB = x$ とおくと、$AB = 2a - x$ である。



ここで $C$ はばねの推力（thrust）である（後でばねが圧縮されていることがわかるので、ばねは $B$ を $O$ の方へ押し、$A$ を $O$ から遠ざかる向きに押す）。$S$ はなめらかな棒が $B$ に及ぼす垂直抗力（棒に垂直で鉛直面内にあり、向きは後で求める）、$R$ は棒が $A$ に及ぼす抗力である。$\omega$ は一定で、$B$ は棒に対して静止しているので、鉛直面を横切る向きの加速度はない。したがって、すべての力はこの鉛直面内にある。

**長さ** $OB$

$B$ は半径 $x\sin\alpha$ の水平な円周上を動くので、その加速度は $ON$ に向かって水平に $\omega^2 x\sin\alpha$ である。棒に沿って $O\to A$ の向き（下向きかつ軸から遠ざかる向き）に力を分解する（resolve）。加速度は軸の方を向き、棒は鉛直と角 $\alpha$ をなすので、この向きの加速度成分は $-\omega^2 x\sin\alpha\cdot\sin\alpha$ である。

$B$ にはたらくばねの力を張力（tension）$T$（$B$ を $A$ の方へ引く向き）とおき、符号は計算に任せるのが最も簡単である。フックの法則（Hooke's law）より、

$$T=\frac{kmg\left((2a-x)-a\right)}{a}=\frac{kmg(a-x)}{a}.$$

棒はなめらかなので、抗力 $S$ は棒に沿った成分をもたない。よって $OA$ に沿って、

$$mg\cos\alpha+\frac{kmg(a-x)}{a}=-m\omega^2 x\sin^2\alpha.$$

$\cos\alpha=\frac{4}{5}$、$\sin^2\alpha=\frac{9}{25}$、$\omega^2=\frac{5g}{2a}$ を用いると、右辺は $-\frac{9gx}{10a}\,m$ である。両辺を $mg$ で割って $10a$ を掛けると、

$$\begin{aligned}8a+10k(a-x)&=-9x\\(10k+8)a&=(10k-9)x,\end{aligned}$$

よって

$$OB=x=\frac{(10k+8)a}{10k-9},$$

となり、示すべき式が得られた。$x>a$ であること（正の答えを得るには $10k>9$ が必要である）に注意すると、$AB=2a-x<a$ となる。つまりばねは圧縮されており、その推力は

$$C=-T=\frac{kmg(x-a)}{a}=\frac{17k\,mg}{10k-9},$$

である。ここで $x-a=\dfrac{17a}{10k-9}$ を用いた。

### $k$ を求める

**考えてみよう** なぜ $A$ における抗力は、$B$ における抗力のように棒に垂直ではないのだろうか？

$A$ にある質点は棒に通されているのではなく、棒に**固定されて**いるので、棒はそれをどの向きにも押したり引いたりできる。なめらかさが制限するのは、すべる輪にはたらく力だけである。そこで $R$ を成分で表し、軸に向かう水平成分を $R_h$、鉛直上向きの成分を $R_v$ とする。

$A$ は半径 $2a\sin\alpha = \frac{6a}{5}$ の円周上を動くので、その加速度は軸に向かって $\omega^2 \cdot \frac{6a}{5} = 3g$ である。推力 $C$ は $A$ に $OA$ に沿って $O$ から遠ざかる向きにはたらくので、軸から遠ざかる向きの成分 $C\sin\alpha$ と下向きの成分 $C\cos\alpha$ をもつ。よって

$$\begin{aligned} \text{水平方向（軸に向かう向き）：}\quad & R_h - \tfrac{3}{5}C = 3mg, \\ \text{鉛直方向：}\quad & R_v - mg - \tfrac{4}{5}C = 0. \end{aligned}$$

$C = c\,mg$ とおく。抗力は水平と角 $\tan^{-1}\frac{13}{21}$ をなすので、

$$\frac{R_v}{R_h} = \frac{1+\frac{4}{5}c}{3+\frac{3}{5}c} = \frac{13}{21} \implies 21 + \tfrac{84}{5}c = 39 + \tfrac{39}{5}c \implies 9c = 18, \quad c = 2.$$

（$c > 0$ のとき $R_h$ と $R_v$ はともに正なので、抗力は確かに上向きかつ内向きであり、符号のあいまいさはない。）すると

$$\frac{17k}{10k-9} = 2 \implies 17k = 20k - 18 \implies k = 6.$$

よって $k = 6$ であり、$OB = \frac{68a}{51} = \frac{4}{3}a$ となる。これは確かに $a$ と $2a$ の間にある。また推力は $C = 2mg$ である。（このとき $A$ にはたらく抗力は $R_h = \frac{21}{5}mg$、$R_v = \frac{13}{5}mg$ である。）

### 輪にはたらく抗力

**考えてみよう** 最小の手間で $S$ を求めるには、どの向きに分解すればよいだろうか？

棒に垂直な向きである。そうすれば、ばねの力が消える。鉛直面内で $OA$ に垂直で、**上向きかつ軸から遠ざかる向き**の単位方向をとる。これは水平と角 $\alpha$ をなすので、外向きの成分 $\cos\alpha$ と上向きの成分 $\sin\alpha$ をもつ。$B$ にはたらく抗力のこの向きの成分を $S$ とする。重力の寄与は $-mg\sin\alpha$ であり、加速度（軸に向かって $\omega^2 x\sin\alpha$）の寄与は $-\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha$ である。よって

$$S - mg\sin\alpha = -m\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha.$$

$x = \frac{4}{3}a$ を代入すると、

$$m\omega^2 x \sin\alpha \cos\alpha = m \cdot \frac{5g}{2a} \cdot \frac{4a}{3} \cdot \frac{12}{25} = \frac{8}{5}mg, \qquad \text{よって} \qquad S = \frac{3}{5}mg - \frac{8}{5}mg = -mg.$$

したがって、棒と輪の間の抗力の大きさは

$$\boxed{mg},$$

であり、負の符号は、それが棒に垂直に**下向きかつ軸に向かう向き**にはたらくことを示している。

## 検算

- $B$ についてベクトルで完全に確かめる（水平成分は軸に向かう向き、鉛直成分は上向きを正とする）。$AO$ に沿ってはたらく $C = 2mg$ と、求めた $S = mg$ を用いる。水平方向：$\frac{3}{5}(2mg) + \frac{4}{5}(mg) = 2mg$ であり、$m\omega^2 x \sin\alpha = m \cdot \frac{5g}{2a} \cdot \frac{4a}{3} \cdot \frac{3}{5} = 2mg$ である。鉛直方向：$\frac{4}{5}(2mg) - \frac{3}{5}mg - mg = 0$ である。どちらもつり合っている。
- $k \to \infty$ のとき、ばねは変形しなくなり、$OB \to a$ すなわち自然長（natural length）に近づく。これは当然そうなるべき結果である。
- $m = g = a = 1$ として数値的に、無作為に選んだ 200 個の $k$ の値に対して $OB$ の公式を正確に確かめ、角 $\tan^{-1}\frac{13}{21}$ が得られるのは $k = 6$ のときだけであることを確認し、$|S| = 1.0$ を得た。また、小さな変位から始めて棒に沿った $B$ の運動を数値的に追うと、それは $x \approx 1.3333$ の近くにとどまる。

## よくある間違い

- ばねが伸びていると仮定してしまい、$x > a$ となって戸惑う。張力の符号は計算から自然に出てくるようにすればよい。
- $A$ における抗力を棒に垂直であるとしてしまう。そのような制限があるのは、すべる輪だけである。
- 円運動の半径として $x\sin\alpha$ ではなく $x$ を用いてしまう。

## STEP のその先へ

棒とともに回転する座標系（rotating frame）では、$B$ は外向きの「遠心力」（centrifugal force）$m\omega^2 r$ を受け、棒に沿った方程式は通常のつり合いの問題になる。この見方をさらに進めると、有効ポテンシャル（effective potential）、コリオリ力（Coriolis force）（こ

の問題では、$B$ が棒に沿って動くとすぐに棒の抗力とつり合う)、そしてつり合いの安定性（stability）といった話題につながる。$x = \frac{4}{3}a$ は安定だろうか？Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、非慣性系（non-inertial frame）と回転する系をまさにこの水準で扱っている。

解答例

# STEP III 1991、第 15 問

確率・統計 ・ 標本中の組の数え上げ

**STEP III 1991、問 15**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/91-s3-q15

## 鍵となる考え方

$k$ 枚のカードの組はどれも等しい確率で現れるので、各確率は手札（hand）の数を $\binom{2n}{k}$ で割ったものになる。与えられたペアの構造をもつ手札を数えるには、段階を追って組み立てればよい。まず、どの種類（sort）が完全なペアとして現れるかを選ぶ。次に、それ以外のどの種類が 1 枚だけ現れるかを選ぶ。最後に、1 枚だけの各種類について、2 枚のうちどちらのカードを持っているかを選ぶ。この数え方が確立すれば、問題のすべての小問は 1 つの公式の特別な場合となる。

## 解答

$2n$ 枚のカードをすべて区別できるものと考える（同じ種類の 2 枚に 1 と 2 の番号を付けておけばよい）。すると、$k$ 枚を非復元抽出（without replacement）で引くことにより、大きさ $k$ の $\binom{2n}{k}$ 個の部分集合のそれぞれが同じ確率で得られる。ある種類の 2 枚がともに引かれたとき、手札はその種類の**ペア**（pair）を含むという。

### 4 枚、ペアなし

ペアを含まない手札は、異なる 4 種類のカードを 1 枚ずつ含む。種類の選び方は $\binom{n}{4}$ 通り、各種類のカードの選び方は 2 通りであるから、手札は $2^4\binom{n}{4}$ 通りとなる。

$$\binom{2n}{4} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{24} = \frac{4n(n-1)(2n-1)(2n-3)}{24},$$

であるから、

$$\mathrm{P}(\text{ペアなし}) = \frac{16\cdot n(n-1)(n-2)(n-3)/24}{4n(n-1)(2n-1)(2n-3)/24} = \frac{4(n-2)(n-3)}{(2n-1)(2n-3)},$$

となり、題意が示された。(ここで $n \geq 4$ により、異なる 4 種類が存在することが保証される。)

### 4 枚、ちょうど 1 組のペア

ペアとして現れる種類を選ぶ ($n$ 通り)。残りの 2 枚は、残りの $n-1$ 種類のうちの異なる 2 種類から来なければならず、その選び方は $\binom{n-1}{2}$ 通りで、それぞれについてカードの選び方が 2 通りある。手札の数は

$$n \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot 4 = 2n(n-1)(n-2),$$

であるから、

$$\mathrm{P}(\text{ちょうど 1 組のペア}) = \frac{24 \cdot 2n(n-1)(n-2)}{4n(n-1)(2n-1)(2n-3)} = \frac{12(n-2)}{(2n-1)(2n-3)}.$$

### $k$ 枚、ちょうど $r$ 組のペア

手札がちょうど $r$ 組のペアを含むとする。これらで $2r$ 枚を使う。残りの $k-2r$ 枚はすべて異なる種類に属し、そのどれも $r$ 個のペアの種類ではない。そうでなければペアがさらに増えてしまうからである。したがって、次のように数える。

- ペアになる種類:$\binom{n}{r}$ 通り。
- 1 枚だけ現れる $k-2r$ 種類を、残りの $n-r$ 種類から選ぶ:$\binom{n-r}{k-2r}$ 通り。
- 1 枚だけの各種類について、2 枚のうちどちらを持つか:$2^{k-2r}$ 通り。

ちょうど $r$ 組のペアを含む各手札は、このような選択の列のちょうど 1 つから得られる。よって

$$\boxed{\mathrm{P}(\text{ちょうど } r \text{ 組のペア}) = \frac{2^{k-2r}\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-2r}}{\binom{2n}{k}}}$$

**考えてみよう** これが 0 になることはあるか。また、4 枚の場合の答えと一致するか。

1 枚だけの種類については $k-2r \leq n-r$、すなわち $r \geq k-n$ が必要である。$k > n$ ならば、どの $k$ 枚も少なくとも $k-n$ 組のペアを含まなければならず、このことは $\binom{n-r}{k-2r} = 0$ によって自動的に処理される。$k = 4$ のとき、$r = 0$ の場合は $2^4\binom{n}{4}/\binom{2n}{4}$、$r = 1$ の場合は $2^2\, n\binom{n-1}{2}/\binom{2n}{4}$ となり、これらはまさに上の 2 つの数え上げに一致する。

### $k$ が偶数で、すべてのカードがペアになる場合

$k = 2m$ とおく。手札が $m$ 組のペアからなるのは、それが $m$ 個の完全な種類の和集合であるときに限る。そのような手札は $\binom{n}{m}$ 通りある（これは一般の公式で $r = m$ とした場合である）。よって

$$\mathrm{P} = \frac{\binom{n}{m}}{\binom{2n}{2m}} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \cdot \frac{(2m)!\,(2n-2m)!}{(2n)!}.$$

これを簡単にするために、階乗の偶数の因数と奇数の因数を分けてまとめる。

$$(2j)! = \big(2 \cdot 4 \cdots 2j\big)\big(1 \cdot 3 \cdots (2j-1)\big) = 2^j\, j!\,\big(1 \cdot 3 \cdots (2j-1)\big).$$

$O_j = 1 \cdot 3 \cdots (2j-1)$ とおき、$O_0 = 1$ とする。すると $(2j)!/j! = 2^j O_j$ であるから、

$$\mathrm{P} = \frac{2^m O_m \cdot 2^{n-m} O_{n-m}}{2^n O_n} = \frac{O_m\, O_{n-m}}{O_n}.$$

$O_n$ を $O_{n-m}$ で割ると、$2n - 2m + 1 = 2n - k + 1$ から $2n - 1$ までの奇数が残るので、

$$\mathrm{P}(\tfrac{1}{2}k \text{ 組のペア}) = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (k-1)}{(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-k+1)},$$

となり、題意が示された。

直接的な鮮やかな議論もある。山札全体をよく切り、上から $k$ 枚を手札とする。一番上のカードに注目する。その相方のカードは、他の $2n-1$ 個の位置のどれにも等しい確率で存在し、そのうち $k-1$ 個は手札の中にあるので、相方が手札にある確率は $\frac{k-1}{2n-1}$ である。そうであれば、そのペアを取り除く。残るのは $2n-2$ 枚のカードのランダムな並びで、手札はその上から $k-2$ 枚である。同じ議論を繰り返すと $\frac{k-3}{2n-3}$ が得られ、以下同様にして $\frac{1}{2n-k+1}$ まで続く。これらの条件付き確率（conditional probability）を掛け合わせると、同じ積が得られる。

## 検算

- 4 枚の場合、ペアの数は 0、1、2 の 3 通りであり、2 組のペアとなる確率は $\binom{n}{2}/\binom{2n}{4} = \frac{3}{(2n-1)(2n-3)}$ である。実際

  $$4(n-2)(n-3) + 12(n-2) + 3 = 4n^2 - 8n + 3 = (2n-1)(2n-3),$$

  であるから、3 つの確率の和は 1 になる。

- $n = 5$ で 4 枚の場合、確率は $\frac{8}{21}$、$\frac{4}{7}$、$\frac{1}{21}$ である。$4 \le n \le 8$ および 3 から $2n-1$ までのすべての $k$ について、コンピュータですべての手札を列挙したところ、一般の公式ともすべてペアになる場合の公式とも一致した。

- $k = 2$ のとき、すべてペアになる場合の公式は $\frac{1}{2n-1}$ を与える。これは 2 枚目のカードが 1 枚目と一致する確率である。

## よくある間違い

- 1 枚だけのカードを、残りの $2n-2r$ 枚すべてから $\binom{2n-2r}{k-2r}$ として選んでしまうこと。これでは、そのうち 2 枚が同じ種類になることを許してしまい、余分なペアが生じる。
- 因数 $2^{k-2r}$ を忘れること。1 枚だけ現れる各種類について、そのカードは 2 枚のうちどちらでもありうる。

## STEP のその先へ

ちょうど $r$ 組のペアを含む手札の数は、「構造を選んでから中身を埋める」という典型的な数え上げであり、積 $1\cdot 3\cdots(2m-1)$（二重階乗（double factorial）$(2m-1)!!$）は $2m$ 個の対象をペアに分ける方法の数を数えている。二重階乗は、標準正規分布（standard normal distribution）の偶数次のモーメント（moment）としても再び現れる。ランダムな標本の中にペアがいくつ残るかという同じ組合せの問題は、古典的な「なくした靴下」の問題や誕生日型の問題にも現れる。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、この種の数え上げの良い基礎を与えてくれる。

解答例

# STEP III 1991、第 16 問

確率・統計 ・ 同時分布と周辺分布

**STEP III 1991、問 16**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/91-s3-q16

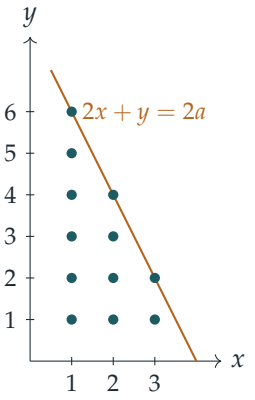
## 鍵となる考え方

ここで扱うものはすべて、三角形をなす格子点（lattice points）の上の有限和である。まず領域を図に描くこと。各 $x$ に対してどの $y$ が許されるか、また各 $y$ に対してどの $x$ が許されるかを把握する必要がある。和の範囲さえ正しく定まれば、各周辺分布（marginal distribution）は等差数列（arithmetic progression）の和になる。唯一の微妙な点は、与えられた $y$ に対して許される最大の $x$ が $\lfloor (2a-y)/2 \rfloor$ であり、これが $y$ の偶奇によって変わることである。

## 解答

### 領域

条件は $x \geq 1$、$y \geq 1$ および $2x + y \leq 2a$ である。$y \geq 1$ であるから $2x \leq 2a - 1$ が必要であり、したがって $x \leq a - 1$ となる。$1 \leq x \leq a - 1$ を満たす $x$ を固定すると、許される値は $y = 1, 2, \ldots, 2a - 2x$ である。同様に、$x \geq 1$ であるから $y \leq 2a - 2$ となる。




図は $a = 4$ の場合を示している。列 $x$ には $2a - 2x$ 個の点がある。

### $X$ の周辺分布と $c$ の値

$x$ を固定し、$n = 2a - 2x$ とおく。等差数列 $2x + 1, \ldots, 2x + n$ の和をとると

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X = x) &= c \sum_{y=1}^{n} (2x + y) = c \left( 2xn + \frac{n(n+1)}{2} \right) = c \frac{n}{2} (4x + n + 1) \\ &= c\,(a - x)(2a + 2x + 1), \qquad x = 1, 2, \ldots, a - 1, \end{aligned}$$

であり、それ以外では $\mathrm{P}(X = x) = 0$ である。

確率の総和は 1 でなければならない。$k = a - x$ とおくと、$k$ は 1 から $a - 1$ までを動く。このとき $2a + 2x + 1 = 4a + 1 - 2k$ であり、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{a-1} k(4a + 1 - 2k) &= (4a + 1) \frac{(a-1)a}{2} - 2 \cdot \frac{(a-1)a(2a-1)}{6} \\ &= a(a-1) \left( \frac{4a+1}{2} - \frac{2a-1}{3} \right) = \frac{a(a-1)(8a+5)}{6}. \end{aligned}$$

これの $c$ 倍を 1 とおくと

$$c = \frac{6}{a(a-1)(8a+5)},$$

となり、求める結果が得られる。

### $Y$ の周辺分布

$1 \leq y \leq 2a - 2$ を満たす $y$ を固定する。許される $x$ は $1, 2, \ldots, N$ であり、ここで $N$ は $2N \leq 2a - y$ を満たす最大の整数である。これら $N$ 個の項について

$$\sum_{x=1}^{N} (2x + y) = N(N + 1) + yN = N(N + 1 + y).$$

**$y$ が偶数の場合**。このとき $2a-y$ は偶数で $N=\frac{1}{2}(2a-y)$ であるから、$N+1+y=\frac{1}{2}(2a+2+y)$ となり、$c$ の値を用いると

$$\mathrm{P}(Y=y)=c\cdot\frac{(2a-y)(2a+2+y)}{4}=\frac{3(2a-y)(2a+2+y)}{2a(a-1)(8a+5)},$$

を得る。これが求める結果である。

**考えてみよう** $y$ が奇数のとき、なぜ $N=\frac{1}{2}(2a-y)$ を使えないのだろうか。

$y$ が奇数のとき、$\frac{1}{2}(2a-y)$ は整数ではない。$2x\le 2a-y$ を満たす最大の整数 $x$ は $N=\frac{1}{2}(2a-y-1)$ である。切り捨てによって半端な分が落ちるのである。

**$y$ が奇数の場合**。$N=\frac{1}{2}(2a-1-y)$ とすると $N+1+y=\frac{1}{2}(2a+1+y)$ となるから

$$\mathrm{P}(Y=y)=c\cdot\frac{(2a-1-y)(2a+1+y)}{4}=\frac{3(2a-1-y)(2a+1+y)}{2a(a-1)(8a+5)}.$$

（二つの場合は、同じ分母の上に、それぞれ $3\big((2a+1)^2-(y+1)^2\big)$ と $3\big(4a^2-(y+1)^2\big)$ をのせた形にも書ける。）

### $Y$ の期待値

$y\,\mathrm{P}(Y=y)$ を足し上げようとすると、$y$ が偶数の場合と奇数の場合を別々に扱うことになる。同時分布（joint distribution）に立ち返り、各列ごとに縦に和をとるほうがすっきりする。$x$ を固定し、先ほどと同じく $n=2a-2x$ とすると

$$\sum_{y=1}^{n}y(2x+y)=2x\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)}{6}\big(6x+2n+1\big).$$

再び $k=a-x$ とおくと、$n=2k$ および $6x+2n+1=6a-2k+1$ である。列の和は

$$\frac{2k(2k+1)(6a+1-2k)}{6}=\frac{k(2k+1)(6a+1-2k)}{3}.$$

となる。展開すると $k(2k+1)(6a+1-2k)=(6a+1)(2k^2+k)-4k^3-2k^2$ である。$a-1$ までの標準的な和の公式を用いると

$$\sum_{k=1}^{a-1}(2k^2+k)=\frac{a(a-1)(2a-1)}{3}+\frac{a(a-1)}{2}=\frac{a(a-1)(4a+1)}{6},$$

$$\sum_{k=1}^{a-1}k^3=\frac{a^2(a-1)^2}{4},\qquad\sum_{k=1}^{a-1}k^2=\frac{a(a-1)(2a-1)}{6}.$$

よって

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{a-1} k(2k+1)(6a+1-2k) \\
&\quad = a(a-1)\left(\frac{(6a+1)(4a+1)}{6} - a(a-1) - \frac{2a-1}{3}\right) \\
&\quad = \frac{a(a-1)}{6}\left(24a^2+10a+1-6a^2+6a-4a+2\right) \\
&\quad = \frac{a(a-1)(6a^2+4a+1)}{2}.
\end{aligned}$$

したがって、期待値（expectation）は

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y) &= \frac{c}{3}\cdot\frac{a(a-1)(6a^2+4a+1)}{2} = \frac{6}{a(a-1)(8a+5)}\cdot\frac{a(a-1)(6a^2+4a+1)}{6} \\
&= \frac{6a^2+4a+1}{8a+5}.
\end{aligned}$$

である。

## 検算

- $a=2$ のとき、点は $(1,1)$ と $(1,2)$ の二つだけであり、重みはそれぞれ $3c$ と $4c$ であるから $c=\frac{1}{7}$ となる。これは $6/(2\cdot 1\cdot 21)$ と一致する。さらに $\mathrm{E}(Y)=\frac{3+8}{7}=\frac{11}{7}$ であり、公式からも $\frac{33}{21}=\frac{11}{7}$ が得られる。
- $X$ の周辺分布の公式、$Y$ の周辺分布の公式（偶奇の両方）、および $\mathrm{E}(Y)$ は、2 から 29 までのすべての $a$ について、分数を用いた厳密な全数列挙で確かめた。たとえば $a=3$ では $\mathrm{E}(Y)=\frac{67}{29}$ となる。
- $a$ が大きいとき、$\mathrm{E}(Y)\approx\frac{3}{4}a$ である。重み $2x+y$ は斜辺に近い点ほど大きいので、$Y$ は三角形上で重みを均等にした場合に得られる $\frac{2}{3}a$ よりもかなり上に位置する。

## よくある間違い

- $x$ を $a$ まで動かしてしまうこと。点 $x=a$ では $y\le 0$ とならざるを得ない。
- 奇数の $y$ に対して、整数でない $N=\frac{1}{2}(2a-y)$ を使ってしまうこと。
- 二つの場合に分かれた周辺分布から $\mathrm{E}(Y)$ を求めようとすること。それでも求められるが、同時分布の列ごとに和をとれば、偶奇（parity）による場合分けそのものを避けられる。

## STEP のその先へ

同時分布から周辺分布を得るとは、もう一方の変数について和をとって消去することであり、難しいのはいつも領域の範囲である。連続型の確率変数では、同じ作業が二重積分（double integral）の積分範囲を選ぶことになり、（$\mathrm{E}(Y)$ を求めたときのように）和の順序を交換することは積分の順序を交換することになる。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、離散型と連続型の両方について同時分布と周辺分布を扱っている。

# Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

**1991 年解答例.** 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

**beyondstep.keithmcnulty.org**

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.