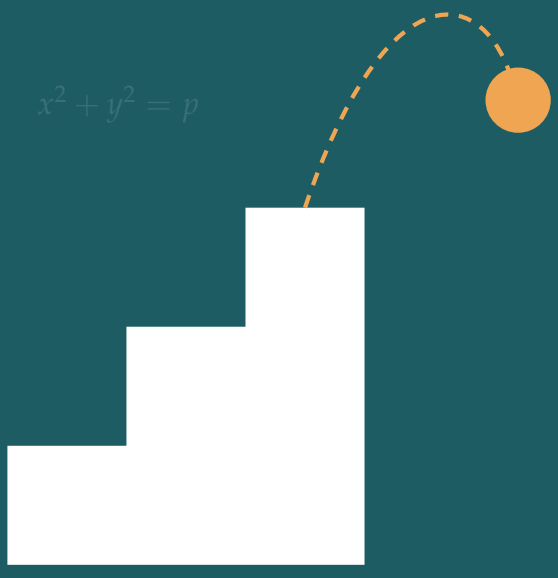
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

1990 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

1990 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

1990 年解答例

1990 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 48 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 三角関数の最適化 純粋数学 . . . 3

Q2 1の冪根によるフィルター 純粋数学 . . . 7

Q3 法線と平行曲線 純粋数学 . . . 11

Q4 等差数列と階差 純粋数学 . . . 15

Q5 部分分数分解と曲線の概形 純粋数学 . . . 19

Q6 ベクトルと平行四辺形 純粋数学 . . . 23

Q7 一階線形常微分方程式 純粋数学 . . . 27

Q8 三角関数の無限積 純粋数学 . . . 31

Q9 接線と面積の評価 純粋数学 . . . 35

Q10 仕事率と抵抗 力学 . . . 39

Q11 放物運動と運動量 力学 . . . 43

Q12 ばねとエネルギー 力学 . . . 47

Q13 摩擦と剛体のつり合い 力学 . . . 51

Q14 期待値と最適停止 確率・統計 . . . 55

Q15 負の二項分布 確率・統計 . . . 59

Q16 三角分布と検定 確率・統計 . . . 63

STEP II

Q1 多項式の不等式 純粋数学 . . . 67

Q2 トレミーの定理 純粋数学 . . . 71

Q3 3次関数のグラフの概形 純粋数学 . . . 75

Q4 直線の配置と数学的帰納法 純粋数学 . . . 80

Q5 複素数と円 純粋数学 . . . 84

Q6 整数の不等式と分数 純粋数学 . . . 88

Q7 微分方程式 純粋数学 92
Q8 部分積分 純粋数学 96
Q9 極方程式の曲線と弧長 純粋数学 100
Q10 行列の多項式方程式 純粋数学 104
Q11 角運動量保存則 力学 108
Q12 反発係数と放物運動 力学 112
Q13 棒のつり合い 力学 116
Q14 弾性衝突 力学 120
Q15 順序統計量 確率・統計 125
Q16 ベイズの定理 確率・統計 129

STEP III

Q1 倍角と多項式の根 純粋数学 132
Q2 空間ベクトル 純粋数学 136
Q3 群の公理と共役 純粋数学 140
Q4 三角級数 純粋数学 144
Q5 ライプニッツの公式 純粋数学 148
Q6 線形変換と楕円 純粋数学 152
Q7 陰関数のグラフ 純粋数学 157
Q8 完全微分方程式 純粋数学 162
Q9 双曲線関数 純粋数学 165
Q10 解と漸近近似 純粋数学 169
Q11 剛体の回転 力学 174
Q12 動く楔上の質点 力学 178
Q13 球の内部での運動 力学 182
Q14 力の系 力学 186
Q15 幾何分布 確率・統計 190
Q16 幾何的確率 確率・統計 194

解答例

STEP I 1990、第 1 問

純粋数学 ・ 三角関数の最適化

> **STEP I 1990、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q1

鍵となる考え方

ブラインドのすべての頂点は中心 D から距離 r にある。したがって、半径 DX と DY によって、四角形（quadrilateral）は D を頂点とする 3 つの二等辺三角形（isosceles triangle）に分割される。それぞれの面積は $\frac{1}{2}r^2\sin(\text{頂角})$ であり、3 つの頂角（apex angle）の和は π である。これにより、幾何の問題は正弦の和を最大化する問題に帰着し、和積の公式（sum-to-product formula）を使えば、前半は微分を一切使わずに解ける。

解答

ブラインドの面積

A, D, C は一直線上にある（collinear）から、D における角は

$$\angle ADX + \angle XDY + \angle YDC = \pi, \qquad \text{よって} \qquad \angle YDC = \pi - \theta - \alpha.$$

を満たす。ここで $\theta \geq 0, \alpha > 0, \theta + \alpha \leq \pi$ であり、X と Y は弧の上に A, X, Y, C の順に並ぶ。

半径 DX と DY によって、ブラインド $AXYC$ は三角形 ADX, XDY, YDC に分割される。いずれも長さ r の 2 辺が D で交わる三角形である。それぞれに面積 $= \frac{1}{2}ab\sin C$ を用いると、

$$\begin{aligned} \text{面積} &= \tfrac{1}{2}r^2\sin\theta + \tfrac{1}{2}r^2\sin\alpha + \tfrac{1}{2}r^2\sin(\pi - \theta - \alpha) \\ &= \tfrac{1}{2}r^2[\sin\alpha + \sin\theta + \sin(\theta + \alpha)], \end{aligned}$$

となる。ここで $\sin(\pi - u) = \sin u$ を用いた。

α を固定したときの最適な θ

α を固定すると、変化するのは $\sin\theta + \sin(\theta+\alpha)$ のみである。和積の公式 $\sin P + \sin Q = 2\sin\frac{P+Q}{2}\cos\frac{P-Q}{2}$ により、

$$\sin\theta + \sin(\theta+\alpha) = 2\cos\tfrac{\alpha}{2}\,\sin\!\left(\theta+\tfrac{\alpha}{2}\right).$$

? **考えてみよう** なぜこの変形によって最大値が明らかになるのか。

$0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ であるから、因子 $2\cos\frac{\alpha}{2}$ は正の定数である。よって、面積が最大になるのは、ちょうど $\sin(\theta+\frac{\alpha}{2})$ が最大になるときである。θ が $[0, \pi-\alpha]$ を動くとき、角 $\theta+\frac{\alpha}{2}$ は $[\frac{\alpha}{2}, \pi-\frac{\alpha}{2}]$ を動き、この区間は $\frac{\pi}{2}$ を含む。したがって正弦は $\theta+\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$ のとき、とりうる最大値 1 に達する。すなわち

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi-\alpha}{2}.}$$

このとき $\angle YDC = \pi - \theta - \alpha = \frac{\pi-\alpha}{2} = \theta$ でもある。つまり最適なブラインドは鉛直な半径に関して対称（symmetric）であり、これは直観とも一致する。この α に対する最大面積は

$$\tfrac{1}{2}r^2\left[\sin\alpha + 2\cos\tfrac{\alpha}{2}\right].$$

である。

α を動かす

次に、$0 < \alpha < \pi$ において $f(\alpha) = \sin\alpha + 2\cos\frac{\alpha}{2}$ を最大化する。（各 α に対する最大面積は $\frac{1}{2}r^2 f(\alpha)$ であるから、全体での最大面積は f の最大値の $\frac{1}{2}r^2$ 倍である。）微分すると、

$$f'(\alpha) = \cos\alpha - \sin\tfrac{\alpha}{2}.$$

$s = \sin\frac{\alpha}{2}$ とおくと $0 < s < 1$ であり、$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ を用いると

$$f'(\alpha) = 1 - s - 2s^2 = (1-2s)(1+s).$$

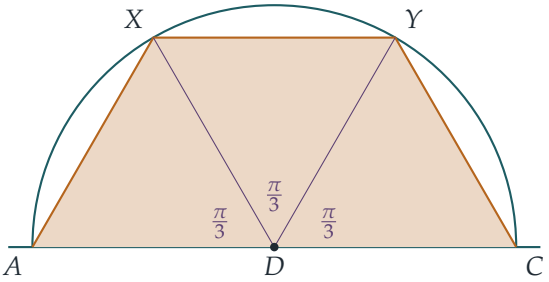
$1+s > 0$ であるから、f' の符号は $1-2s$ の符号と一致する。$(0,\pi)$ において s は α とともに増加するので、f' は $s < \frac{1}{2}$ で正、$s > \frac{1}{2}$ で負である。よって f は増加したのち減少し、$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$、すなわち $\alpha = \frac{\pi}{3}$ で最大値をとる。このとき

$$f\!\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \sin\tfrac{\pi}{3} + 2\cos\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \tfrac{3\sqrt{3}}{2},$$

であるから、ブラインドの面積の最大値は

$$\boxed{\tfrac{1}{2}r^2 \cdot \tfrac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\,r^2.}$$

である。このとき $\alpha = \theta = \angle YDC = \frac{\pi}{3}$ であるから、3 つの三角形はいずれも正三角形であり、ブラインドは円全体に内接する（inscribed）正六角形（regular hexagon）のちょうど半分になる。



検算

- 極端な場合（limiting cases）：$\alpha \to 0$ のとき、ブラインドは X を頂上にもつ三角形 AXC となり、面積は $\frac{1}{2} \cdot 2r \cdot r = r^2$ である。実際 $\frac{1}{2}r^2 f(0) = r^2$ となる。$\alpha \to \pi$ のときはブラインドが直径の上につぶれ、$f(\pi) = 0$ となる。最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2 \approx 1.299r^2$ はこの両方より大きく、また当然ながら半円（semicircle）の面積 $\frac{\pi}{2}r^2 \approx 1.571r^2$ より小さい。
- 数値による確認：X と Y の位置をランダムにとり、3 つの三角形による公式を靴ひも公式（shoelace formula）と照合した。また、いくつかの α の値について細かいグリッド探索で最適な θ を求め、さらに $r = 1$ として θ と α を同時に探索すると、最大面積は $1.299038\ldots = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ となることを確かめた。

よくある間違い

- 3 つ目の三角形 YDC を忘れる、あるいはその角を $\pi - \theta - \alpha$ ではなく $\pi - \alpha$ としてしまう。
- 後半で、根拠を示さずに $\theta = \alpha = \frac{\pi}{3}$ という近道を使ってしまう。最適なブラインドが本当に正六角形の半分であることを示すには、微分（あるいは対称性による議論）が必要である。

STEP のその先へ

この答えは古典的な事実の特別な場合である。すなわち、円に内接するすべての n 角形のうち、面積が最大になるのは正 n 角形である。巧みな証明の一つは、$[0, \pi]$ における

sin の凹性（concavity）とイェンセン（Jensen）の不等式（Jensen's inequality）を用いるものである。中心角（central angle）$\phi_1, \ldots, \phi_n$ の和が 2π ならば、$\sum \sin \phi_i \leq n \sin \frac{2\pi}{n}$ が成り立つ。今回のブラインドは $n = 6$ の場合の半分である。この種の凸性（convexity）や不等式は、大学 1 年次の解析学（analysis）で繰り返し現れるテーマである。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門）はこれらをきちんと学ぶのに適した一冊であり、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（発展的な数学の問題集）には同じ趣旨の STEP の問題がさらに収められている。

解答例

STEP I 1990、第 2 問

純粋数学 ・ 1 の冪根によるフィルター

> **STEP I 1990、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q2

この問題は、*Beyond STEP* の第 5.2 節「*1* の累乗根によるフィルター」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch05/roots-filter.html

鍵となる考え方

1 の 3 乗根（cube roots of unity）はフィルターとしてはたらく。$(1+\omega^r)^n$ を二項定理（binomial theorem）で展開し、$r=1,2,3$ についての結果を足し合わせると、各二項係数（binomial coefficient）$\binom{n}{j}$ には $1+\omega^j+\omega^{2j}$ が掛かる。これは 3 が j を割り切るときは 3、そうでないときは 0 となる。したがって、この和にはちょうど求めたい係数だけが残る。各 $(1+\omega^r)^n$ を求めるもう一つの方法は、$1+\omega^r$ を極形式（modulus–argument form）で表し、ド・モアブルの定理（de Moivre's theorem）を用いることである。

解答

1 の 3 乗根

$\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ であるから、$\omega^3 = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$ であるが $\omega \neq 1$ である。したがって

$$0 = \omega^3 - 1 = (\omega-1)(1+\omega+\omega^2),$$

であり、$\omega - 1 \neq 0$ であるからこれで割ることができ、$1+\omega+\omega^2 = 0$ を得る。

これより $1+\omega^2 = -\omega$ である。$-1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}$ を掛けることは $-\pi$ だけ回転することであるから、

$$1+\omega^2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}.$$

よって $1+\omega^2$ の絶対値（modulus）は 1、偏角（argument）は $-\frac{\pi}{3}$ である。（確認と

して、$1+\omega^2 = 1+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ である。）同様に $1+\omega = -\omega^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ であり、これは複素共役（complex conjugate）である。

恒等式

第 1 の方法：二項定理。 $r = 1, 2, 3$ に対して、

$$(1+\omega^r)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \omega^{rj}.$$

3 つの場合を足し合わせると、

$$(1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n + (1+\omega^3)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\omega^j + \omega^{2j} + \omega^{3j}\right).$$

考えてみよう 一般の整数 j に対して、$\omega^j + \omega^{2j} + \omega^{3j}$ はどうなるか？

$\omega^{3j} = 1$ であるから、括弧の中は $1+\omega^j+\omega^{2j}$ であり、$\omega^3 = 1$ であるので、これは 3 を法とした j の値（modulo）だけで決まる。

- j が 3 の倍数ならば、$\omega^j = 1$ であり、括弧の中は $1+1+1 = 3$ となる。
- $j \equiv 1 \pmod 3$ ならば、$\omega^j = \omega$、$\omega^{2j} = \omega^2$ であるから、括弧の中は $1+\omega+\omega^2 = 0$ となる。
- $j \equiv 2 \pmod 3$ ならば、$\omega^j = \omega^2$、$\omega^{2j} = \omega^4 = \omega$ であるから、やはり括弧の中は 0 となる。

よって $3 \mid j$ である項だけが残り、

$$(1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n + (1+\omega^3)^n = 3\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{k}\right],$$

となる。ここで k は n 以下の最大の 3 の倍数である。

第 2 の方法：絶対値と偏角。 前半の結果から $1+\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$、$1+\omega^2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$ であり、また $1+\omega^3 = 2$ である。ド・モアブルの定理により、

$$\begin{aligned}(1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n + (1+\omega^3)^n &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/3} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi/3} + 2^n \\ &= 2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

2 通りの計算結果を比較して 3 で割ると、

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots + \binom{n}{k} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right),$$

となり、これが求める結果である。

$n = 25$ の場合

25 を超えない最大の 3 の倍数は 24 であるから、1 つ目の和はちょうど $n = 25$ のときの恒等式である。ここで $\frac{25\pi}{3} = 8\pi + \frac{\pi}{3}$ であるから $\cos\frac{25\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ となり、

$$\binom{25}{0} + \binom{25}{3} + \cdots + \binom{25}{24} = \frac{1}{3}\left(2^{25} + 1\right) = \frac{33554433}{3} = 11184811.$$

2 つ目の和

ここでは $n = 24$ であり、$j \equiv 2 \pmod 3$ を満たす係数 $\binom{24}{j}$ の和を求めたい。すべての係数 $\binom{24}{j}$ を、j を 3 で割った余りによって分類すると、

$$S_0 + S_1 + S_2 = \sum_{j=0}^{24} \binom{24}{j} = 2^{24},$$

となる。ここで S_m は $j \equiv m \pmod 3$ を満たす $\binom{24}{j}$ の和である。

対称性 $\binom{24}{j} = \binom{24}{24-j}$ によって、これらは対応づけられる。24 は 3 の倍数であるから、$j \equiv 2$ ならば $24 - j \equiv -2 \equiv 1 \pmod 3$ である。したがって $j \mapsto 24 - j$ により S_2 の項と S_1 の項が一対一に対応し、$S_1 = S_2$ となる。

$n = 24$ のときの恒等式から S_0 が得られる。$\cos 8\pi = 1$ であるから、

$$S_0 = \frac{1}{3}\left(2^{24} + 2\right).$$

したがって

$$S_2 = \frac{1}{2}\left(2^{24} - S_0\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 2^{24} - 2}{3} = \frac{2^{24} - 1}{3}.$$

与えられた値を半分にすると $2^{24} = 16777216$ であるから、

$$\binom{24}{2} + \binom{24}{5} + \cdots + \binom{24}{23} = \frac{16777215}{3} = 5592405.$$

検算

- 小さい場合：$n = 3$ のとき左辺は $1 + 1 = 2$、右辺は $\frac{1}{3}(8 + 2\cos\pi) = 2$ である。$n = 4$ のときは左辺 $1 + 4 = 5$ に対し、右辺は $\frac{1}{3}\left(16 + 2\cos\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}(16 - 1) = 5$ である。
- 割り切れること：$2^{25} + 1$ と $2^{24} - 1$ はどちらも 3 の倍数でなければならないが、$2 \equiv -1 \pmod 3$ であるから実際にそうなっている。
- 二項係数の和をコンピュータで直接計算した。恒等式は 199 以下のすべての n で成り立ち、1 つ目の和は 11184811、2 つ目の和は 5592405 である。

よくある間違い

- $1+\omega^2$ の偏角を $\frac{\pi}{3}$ としてしまう。これは第 4 象限にあるので、偏角の主値（principal argument）は $-\frac{\pi}{3}$（$\frac{5\pi}{3}$ としても同じ）である。
- 2^n を与える $r=3$ の場合を忘れる。
- 2 つ目の和で公式を直接使おうとする。公式は 3 の倍数の項しか与えないので、余りが 2 の項については別の考え（ここでは対称性）が必要である。

STEP のその先へ

この手法は **1 の冪根フィルター**（roots of unity filter）と呼ばれ、離散フーリエ変換（discrete Fourier transform）の最初の例である。1 の m 乗根にわたって $f(\omega^r)$ を平均すると、多項式 f の係数のうち、m を法とする指定された剰余類（residue class）に属するものが取り出される。対称性の群にわたる同様の平均は、有限群の指標理論（character theory）や、バーンサイドの補題（Burnside's lemma）のような数え上げの議論にも再び現れる。複素数がなぜこのような計算を自然なものにするのかについてさらに知りたければ、Needham の *Visual Complex Analysis*（図で見る複素解析）を参照されたい。

解答例

STEP I 1990、第 3 問

純粋数学 ・ 法線と平行曲線

> **STEP I 1990、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q3

鍵となる考え方

下向きの単位法線ベクトル（unit normal）を具体的に書き下し、$\mathbf{s}$ の座標を x で表せば、あとはすべて自然に従う。小問 (i) は、$\mathbf{s}$ の y 座標が 0 になるように強制するだけの問題である。小問 (ii) では、指示された置き換えによって $\mathbf{s}$ の座標が非常に簡単になり、傾きの条件は 1 階微分方程式（first-order differential equation）に帰着する。しかもこれは、ある関数の導関数そのもの、すなわち完全導関数（exact derivative）の形になっていることがわかる。

解答

準備。 $y = \mathrm{f}(x)$ の接線（tangent）の方向は $(1, \mathrm{f}'(x))$ であるから、法線方向は $\pm(\mathrm{f}'(x), -1)$ である。下向きのものは y 成分が負であるから、

$$\mathbf{n} = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} \mathrm{f}'(x) \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad N = \sqrt{1 + \mathrm{f}'(x)^2},$$

となり、したがって

$$\mathbf{s} = \mathbf{r} + \mathrm{p}(x)\mathbf{n} = \begin{pmatrix} x + \dfrac{\mathrm{p}(x)\,\mathrm{f}'(x)}{N} \\ \mathrm{f}(x) - \dfrac{\mathrm{p}(x)}{N} \end{pmatrix}.$$

また、$\mathbf{n}$ は単位ベクトルであるから $|\mathbf{r} - \mathbf{s}| = |\mathrm{p}(x)|$ であることにも注意しておく。

小問 (i)

ここでは $\mathrm{f}(x) = x^k$、$\mathrm{f}'(x) = kx^{k-1}$、$N = \sqrt{1 + k^2 x^{2k-2}}$ である。$\mathbf{s}$ が x 軸上にあるためには、その y 座標が 0 でなければならない：

$$x^k - \frac{\mathrm{p}(x)}{N} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}(x) = x^k \sqrt{1 + k^2 x^{2k-2}}.$$

このように選ぶと、$\mathbf{s}$ の x 座標は

$$x + x^k \cdot kx^{k-1} = x + kx^{2k-1},$$

となる。これは連続な増加関数で、$x \to 0^+$ のとき 0 に近づき、$x \to \infty$ のとき無限大に発散する。よって $\mathbf{s}$ は確かに正の x 軸の一部だけでなく、その全体をくまなく動く。

さて、$|\mathbf{r}|^2 = x^2 + x^{2k}$ であり、$|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^2 = \mathrm{p}(x)^2 = x^{2k} + k^2 x^{4k-2}$ である（ここで $\mathrm{p} > 0$）。したがって、すべての $x > 0$ に対して $|\mathbf{r}| = |\mathbf{r} - \mathbf{s}|$ となるのは、ちょうど

$$x^2 = k^2 x^{4k-2} \quad \text{任意の} x > 0.$$

が成り立つときである。$x = 1$ とおくと $k^2 = 1$ でなければならず、$k = 1$ となる。逆に $k = 1$ のとき両辺はともに x^2 に等しい。ゆえに $k = 1$ である。

幾何学的には次のようになる。直線 $y = x$ 上では、(x, x) から下ろした下向きの法線は x 軸と $(2x, 0)$ で交わり、O、(x, x)、$(2x, 0)$ を頂点とする三角形は、等しい 2 辺の長さがともに $\sqrt{2}\,x$ の二等辺三角形（isosceles triangle）である。

小問 (ii)

今度は $\mathrm{f}(x) = x^2$、$\mathrm{f}'(x) = 2x$、$N = \sqrt{1 + 4x^2}$ である。$\mathrm{p} = \mathrm{q}N$ とおくと、扱いにくい平方根が消える：

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2x\,\mathrm{q}(x) \\ x^2 - \mathrm{q}(x) \end{pmatrix}.$$

新しい曲線は x を媒介変数とするパラメータ表示（parametric representation）で与えられているから、$\mathbf{s}$ における傾きは

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{\mathrm{d}Y/\mathrm{d}x}{\mathrm{d}X/\mathrm{d}x} = \frac{2x - \mathrm{q}'}{1 + 2\mathrm{q} + 2x\mathrm{q}'}.$$

である。これを $\mathbf{r}$ における $y = x^2$ の傾き $2x$ に等しいとおき、分母を払うと

$$\begin{aligned} & 2x - \mathrm{q}' = 2x + 4x\mathrm{q} + 4x^2\mathrm{q}' \\ \Longleftrightarrow \quad & (1 + 4x^2)\,\mathrm{q}' + 4x\,\mathrm{q} = 0. \end{aligned}$$

考えてみよう　（どこかで 0 になるかもしれない）q で割らずに、これを解くことはできるだろうか？

できる。代わりに、決して 0 にならない $N=\sqrt{1+4x^2}$ で割ればよい。$N'=4x/N$ であるから、

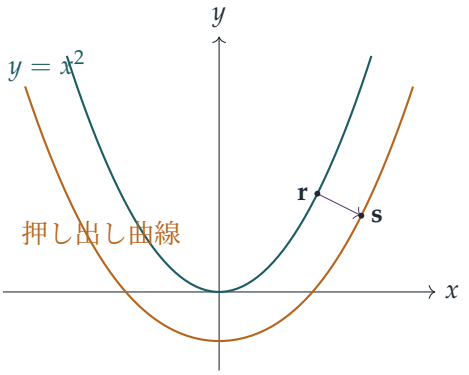
$$\frac{(1+4x^2)\,\mathrm{q}'+4x\,\mathrm{q}}{N}=N\mathrm{q}'+\frac{4x}{N}\,\mathrm{q}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(N\mathrm{q})=\mathrm{p}'(x).$$

よって条件は単に、すべての x について $\mathrm{p}'(x)=0$ ということであり、したがって

$$\mathrm{p}(x)=c,\qquad \text{定数}$$

となる（同値な言い方をすれば $\mathrm{q}(x)=c/\sqrt{1+4x^2}$）。逆に、上の各段階は新しい曲線の傾きが定義される範囲では可逆であるから、任意の定数 c がこの条件を満たす。

新しい曲線は**平行曲線**（parallel curve）である。すなわち、放物線上の各点をその法線に沿って一定の距離 c だけ押し出したものである。図は $c=\frac{1}{2}$ の場合を示している。



微妙な点が一つある。$\mathrm{d}X/\mathrm{d}x=1+2\mathrm{q}+2x\mathrm{q}'$ であり、$\mathrm{q}=c/N$ のときこれは $1+2c/N^3$ と簡単になる。$c>-\frac{1}{2}$ ならばこれは常に正であるから、押し出し曲線（push-off）はなめらかな曲線である。$c\le-\frac{1}{2}$ のとき（頂点における曲率半径（radius of curvature）である $\frac{1}{2}$ 以上だけ**上向きに**押し出すとき）、これは $N^3=-2c$ となるところで 0 になり、押し出し曲線はそこで尖点（cusp）をもつ。

検算

- (i) で $k=2$、$x=1$ とすると、$\mathrm{p}(1)=\sqrt{5}$ であり、$\mathbf{s}=(1,1)+\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)=(3,0)$ となって、要求どおり x 軸上にある。しかし $|\mathbf{r}|=\sqrt{2}\neq\sqrt{5}$ であるから、$k=2$ は条件を満たさない。
- (ii) で $x=0$ のとき、定数 c による押し出し曲線は $(0,-c)$ を通り、対称性からそこでの傾きは 0 である。これは放物線の頂点での傾きと一致する。

- 数値的に確かめると、$c = 1$、$x = 0.8$ のとき、押し出し曲線の差分による傾き（finite-difference gradient）は $2x = 1.6$ と一致する。一方、定数でない $\mathrm{p} = x^2$ を選ぶと、傾きはおよそ 0.41 となってしまう。

よくある間違い

- 上向きの法線 $(-\mathrm{f}', 1)/N$ を使ってしまう：$\mathbf{s}$ の符号がすべて反転する。
- 新しい曲線の傾きを $(\mathrm{d}Y/\mathrm{d}x)/(\mathrm{d}X/\mathrm{d}x)$ ではなく $\mathrm{d}Y/\mathrm{d}x$ と書いてしまう。新しい曲線の x 座標は X であって、x ではない。
- (i) で、指数の比較（$4k - 2 = 2$）だけから $k = 1$ と結論し、係数の条件 $k^2 = 1$ を確かめ忘れる。

STEP のその先へ

一定の距離だけ押し出した曲線は**平行曲線**あるいは**オフセット曲線**（offset curve）と呼ばれ、実用上も重要である。たとえばフライス盤の刃物の中心は、切削する形状の平行曲線をたどる。オフセットの距離が曲率半径を超えたときに現れる尖点は、曲率中心の軌跡である**縮閉線**（evolute）の上にある。縮閉線は曲線の微分幾何学（differential geometry）における中心的な対象である。よい入門書として Pressley, *Elementary Differential Geometry*（初等微分幾何学）がある。

解答例

STEP I 1990、第 4 問

純粋数学 ・ 等差数列と階差

> **STEP I 1990、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q4

鍵となる考え方

数列のどの項も、初項に差（difference）の累積和を加えたものである。等差数列（arithmetic progression）では差が一定なので、和は容易に求まる。二重等差数列（double arithmetic progression）では差そのものが等差数列をなすので、和をとる操作がもう一段増え、二項係数（binomial coefficient）$\binom{n}{2}$ と $\binom{n}{3}$ が自然に現れる。最後の部分は、未知の 2 つの差についての 2 本の一次方程式に帰着する。

解答

等差数列

公差（common difference）を $d = a_2 - a_1$ とおくと、$a_k = a_1 + (k-1)d$ である。このとき

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = na_1 + d\sum_{k=1}^{n}(k-1) = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}(a_2 - a_1),$$

となる。ここで $0+1+\cdots+(n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$ を用いた。a_1 と a_2 の項をまとめると

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n}{2}\left[(3-n)a_1 + (n-1)a_2\right].$$

二重等差数列

階差を $\delta_k = b_{k+1} - b_k$ とおく。これらは初項 $p = \delta_1 = b_2 - b_1$、公差

$$e = \delta_2 - \delta_1 = (b_3 - b_2) - (b_2 - b_1) = b_3 - 2b_2 + b_1.$$

の等差数列をなす。よって $\delta_j = p + (j-1)e$ であり、最初の $k-1$ 個の階差を足し合わせると（前半の公式で n を $k-1$ に置き換えたもの）

$$b_k = b_1 + \sum_{j=1}^{k-1} \delta_j = b_1 + (k-1)p + \frac{(k-1)(k-2)}{2}\, e = b_1 + \binom{k-1}{1} p + \binom{k-1}{2} e.$$

を得る。次に $k = 1, \ldots, n$ について和をとる。必要な和は 2 つある。1 つ目は前と同様に $\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \binom{n}{2}$ である。2 つ目は、$j = k-1$ が 0 から $n-1$ まで動くとして

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{j(j-1)}{2} &= \frac{1}{2}\left[\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)n}{2}\right] = \frac{n(n-1)}{12}\left[(2n-1)-3\right] \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \binom{n}{3}.\end{aligned}$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = nb_1 + \binom{n}{2}(b_2 - b_1) + \binom{n}{3}(b_3 - 2b_2 + b_1).$$

これはすでに n、b_1、b_2、b_3 による式になっている。各 b_i の係数を個別に知りたければ、展開して

$$b_1 + \cdots + b_n = \frac{n(n^2 - 6n + 11)}{6}\, b_1 + \frac{n(n-1)(7-2n)}{6}\, b_2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\, b_3.$$

を得る。（簡単な確認：$n = 1, 2, 3$ のとき、それぞれ b_1、$b_1 + b_2$、$b_1 + b_2 + b_3$ となる。）

考えてみよう $\binom{n}{3}$ がどこから来るのかを、もっとすっきりと見る方法はあるだろうか？

ある。$\binom{k-1}{2}$ は $k-1$ 個から 2 個を選ぶ方法の数であり、ホッケースティック恒等式（hockey-stick identity）$\sum_{k=1}^{n}\binom{k-1}{2} = \binom{n}{3}$（$n$ 個から 3 個を選ぶとき、まず最大のもの k を固定して数える）を使えば、和が一度に求まる。「階差の階差」を一段とるごとに二項係数の段が 1 つ上がる。これは積分によって冪の次数が 1 つ上がるのとまったく同じである。

階乗数列

ここでは $b_1 = 1$ であり、上と同じ p と e を用いると $b_k = 1 + (k-1)p + \frac{1}{2}(k-1)(k-2)e$ である。よって

$$b_2 = 1 + p, \qquad b_4 = 1 + 3p + 3e, \qquad b_6 = 1 + 5p + 10e.$$

$c_1 = b_2$、$c_2 = b_4$、$c_3 = b_6$、$c_4 = 220$ の階乗数列（factorial progression）では、隣り合う項の差は $1!\,d$、$2!\,d$、$3!\,d$、すなわち d、$2d$、$6d$ である：

$$\begin{aligned} b_4 - b_2 &= 2p + 3e = d, \\ b_6 - b_4 &= 2p + 7e = 2d, \\ 220 - b_6 &= 219 - 5p - 10e = 6d. \end{aligned}$$

1 つ目を 2 つ目に代入すると $2p + 7e = 4p + 6e$ となるので $e = 2p$、さらに $d = 8p$ である。3 つ目の式は

$$219 - 5p - 20p = 48p \quad \Longrightarrow \quad 73p = 219 \quad \Longrightarrow \quad p = 3,$$

となるので、$e = 6$、$d = 24$ であり、要求どおり d は 0 でない。どの段階でも値が一意に定まったので、解はただ 1 つである。

よって $b_k = 1 + 3(k-1) + 3(k-1)(k-2) = 3k^2 - 6k + 4$ であり、数列は $1, 4, 13, 28, 49, 76, \ldots$ となる。実際、$b_2, b_4, b_6, 220 = 4, 28, 76, 220$ の差は $24, 48, 144 = 1! \cdot 24,\ 2! \cdot 24,\ 3! \cdot 24$ である。

最後に、$b_1 = 1$、$b_2 - b_1 = 3$、$b_3 - 2b_2 + b_1 = 6$ として和の公式を用いると

$$\begin{aligned} 1 + b_2 + \cdots + b_n &= n + 3 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 6 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ &= \frac{n}{2}\left[2 + 3(n-1) + 2(n-1)(n-2)\right] \\ &= \frac{n(2n^2 - 3n + 3)}{2}. \end{aligned}$$

検算

$n = 1, 2, 3$ のとき、最終的な公式は 1、5、18 を与え、1、$1+4$、$1+4+13$ と一致する。$n = 6$ のときは $3 \cdot 57 = 171$ であり、直接計算しても $1 + 4 + 13 + 28 + 49 + 76 = 171$ である。また、コンピュータを用いて、数百個の無作為な数列とすべての $n \le 24$ について、2 つの一般的な和の公式を（分数で）厳密に確認した。

よくある間違い

- 階乗数列の差を $d, 2d, 3d$ としてしまう：差は $1!\,d$、$2!\,d$、$3!\,d$ なので、3 つ目は $6d$ である。
- $b_k = b_1 + kp + \ldots$ と書いてしまう：b_1 と b_k の間にある階差は $k-1$ 個しかない。

STEP のその先へ

これは差分法（calculus of finite differences）である。m 階差が一定である数列は n の m 次多項式（polynomial）であり、その部分和（partial sum）は $m+1$ 次多項式となる。これは基底（basis）$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots$ を用いて書くのが最もよい（ニュートン（Newton）の前進差分公式（forward-difference formula））。$\binom{n}{r}$ を足し合わせて $\binom{n+1}{r+1}$ を得ることは、$\int x^r \, \mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1}$ の離散版である。この方向の問題をさらに解きたければ、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* の問題に挑戦するとよい。

解答例

STEP I 1990、第 5 問

純粋数学 ・ 部分分数分解と曲線の概形

STEP I 1990、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s1-q5

鍵となる考え方

(i) では 2 次式が因数分解できるので、部分分数分解（partial fractions）によって積分は対数の差になる。(ii) では巨大な指数に圧倒されそうになるが、$1760 = 8 \times 220$ なので、この関数は実は $u = x^{220} \geq 0$ とおいたときの $u^8 - u + q$ にすぎない。グラフの形は停留点（stationary points）から決まり、解の個数は、横軸が極大値（local maximum）と 2 つの極小値（minima）に対してどの位置にあるかだけで決まる。

解答

小問 (i)

$6 \times 15 = 90 = 9 \times 10$ かつ $9 + 10 = 19$ であるから、この 2 次式は次のように因数分解できる。

$$6x^2 + 19x + 15 = (2x + 3)(3x + 5).$$

ここで

$$\frac{1}{(2x+3)(3x+5)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{3x+5}, \qquad \text{より} \qquad 1 = A(3x+5) + B(2x+3).$$

とおく。$x = -\frac{3}{2}$ を代入すると $\frac{1}{2}A = 1$ となるので $A = 2$、$x = -\frac{5}{3}$ を代入すると $-\frac{1}{3}B = 1$ となるので $B = -3$ である。$2x+3$ と $3x+5$ はともに $[1,3]$ 上で正であるから、絶対値記号は必要ない。

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{6x^2+19x+15} = \int_1^3 \left(\frac{2}{2x+3} - \frac{3}{3x+5}\right) \mathrm{d}x = \Big[\ln(2x+3) - \ln(3x+5)\Big]_1^3$$
$$= \ln\frac{9}{14} - \ln\frac{5}{8} = \ln\frac{72}{70} = \ln\frac{36}{35}.$$

小問 (ii)

対称性と端での振る舞い。 2 つの指数はともに偶数なので、f は偶関数（even function）であり、そのグラフは y 軸に関して対称である。$|x|$ が大きいときは x^{1760} の項が支配的なので、$x \to \pm\infty$ のとき $\mathrm{f}(x) \to +\infty$ となる。また、$\mathrm{f}(0) = q$ かつ $\mathrm{f}(\pm 1) = q$ である。

停留点。 微分すると

$$\mathrm{f}'(x) = 1760x^{1759} - 220x^{219} = 220\,x^{219}\left(8x^{1540} - 1\right).$$

これは $x = 0$ および $x^{1540} = \frac{1}{8}$ となる点、すなわち

$$a = 8^{-1/1540} \approx 0.9987.$$

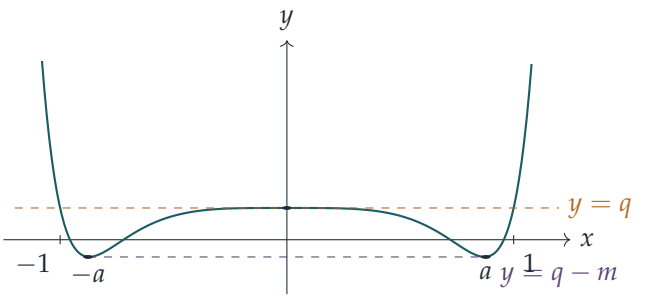
として $x = \pm a$ で 0 になる。$x > 0$ では $\mathrm{f}'(x)$ の符号は $8x^{1540} - 1$ の符号と一致し、$(0, a)$ 上で負、$x > a$ で正である。x^{219} は奇数乗なので、$x < 0$ では符号が逆になる。したがって、f は $(-\infty, -a)$ で減少し、$(-a, 0)$ で増加し、$(0, a)$ で減少し、(a, ∞) で増加する。すなわち、$x = 0$ で極大値 q をとり、$x = \pm a$ で等しい 2 つの極小値をとる。

> **考えてみよう** $8^{-1/1540}$ と格闘せずに極小値を求めるにはどうすればよいだろうか。

$u = x^{220}$ を用いて考える。$x = \pm a$ では $x^{1540} = u^7 = \frac{1}{8}$ であるから、$u = 8^{-1/7}$ かつ $u^8 = u \cdot u^7 = \frac{1}{8}u$ となる。よって

$$\mathrm{f}(\pm a) = u^8 - u + q = q - \tfrac{7}{8}u = q - m, \qquad \text{ただし} \qquad m = \tfrac{7}{8} \cdot 8^{-1/7} = 7 \cdot 2^{-24/7} \approx 0.650.$$

グラフの概形。 グラフは「W」字型である。高いところから始まり、$x = -a$ で極小値 $q - m$ まで下がり、原点で極大値 q まで上がり、$x = a$ で再び極小値 $q - m$ まで下がった後、急激に上昇する。指数が非常に大きいため、実際のグラフは極めて平らである。$|x|$ が 1 にごく近くない限り x^{220} は非常に小さいので、$(-1, 1)$ の大部分で $\mathrm{f}(x) \approx q$ となり、$x = \pm 1$（ここでグラフは高さ q に戻る）のすぐ内側に 2 つの細いくぼみがあり、その外側はほぼ垂直な壁になっている。下の図では、特徴が見えるようにくぼみを誇張して描いている。



解の個数を数える。 $\mathrm{f}(x)=0$ の解はグラフが x 軸と交わる点であるから、0 を極大値 q および極小値 $q-m$ と比較する。

- $q>m$：極小値 $q-m$ が正なので、いたるところで $\mathrm{f}>0$ である。**解はない。**
- $q=m$：グラフは極小点でのみ軸に接する。**解は 2 個**、$x=\pm a$ である。
- $0<q<m$：このとき $q-m<0<q$ である。4 つの単調（monotonic）な区間 $(-\infty,-a)$、$(-a,0)$、$(0,a)$、(a,∞) のそれぞれにおいて、f は連続かつ狭義単調であり、正の値から負の値へ、あるいはその逆へと移るので、各区間にちょうど 1 つの解をもつ。**解は 4 個。**
- $q=0$：$\mathrm{f}(x)=x^{220}(x^{1540}-1)$ となり、これはちょうど $x=0$ と $x=\pm1$ で 0 になる。**解は 3 個。**
- $q<0$：極大値 $\mathrm{f}(0)=q$ が負なので、$[-a,a]$ 全体で $\mathrm{f}<0$ であり、(a,∞) と $(-\infty,-a)$ のそれぞれにおいて f は負の値から $+\infty$ まで狭義単調に変化する。**解は 2 個。**

したがって、相異なる解の個数としてありうるのは 0、2、3、4 であり、次のようになる。

0 個の解：　$q>m$,
2 個の解：　$q<0$ または $q=m$,
3 個の解：　$q=0$,
4 個の解：　$0<q<m$,

$$m=\tfrac{7}{8}\cdot 8^{-1/7}=7\cdot 2^{-24/7}\approx 0.650.$$

検算

(i) の被積分関数にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると 0.0281709 となり、$\ln\frac{36}{35}=0.0281709$ と一致する。(ii) については、$x=1$ の近くで $x^{1760}-x^{220}$ の最小値を細かく数値探索すると、$x\approx 0.99865$ で -0.650123 となり、$-m$ および a と一致する。細かい格子上で f の符号の変化を数えると、$q=1,\ 0.5,\ 0.1,\ 0.001,\ 0,\ -0.01,\ -5$ に対して解の個数は $0,4,4,4,3,2,2$ となり、表の予測どおりである。$q=0$ の場合はグラフの概形の妥当性を確かめるよい材料である。グラフは原点と $(\pm1,0)$ を通らなければならない。

よくある間違い

- 境界の場合 $q=0$（極大値が軸上にあるので解は 3 個）と $q=m$（極小点での 2 つの重解）を見落とす。
- $-a$ と a の間で何も起こらないことを確かめずに、$q<0$ のとき「対称性により」解

は 2 個だと主張する。そこに余分な解がないことを保証するのは、極大値 q が負であるという事実である。

- なだらかに曲がった「W」を描く。指数がこれほど大きいと、グラフは $|x| < 1$ でほぼ高さ q の水平線になる。概形の図でくぼみを誇張するとしても、そのことは述べておく価値がある。

STEP のその先へ

停留値の位置を調べて解の個数を数えることは、解析学（analysis）の最初の講義で厳密に扱われる中間値の定理（intermediate value theorem）と単調性による議論の入口である。また、置換 $u = x^{220}$ は、$n \to \infty$ のとき x^n がどう振る舞うか、すなわち $(-1, 1)$ 上で 0 に収束するが一様収束（uniform convergence）はしないことも示している。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、連続性と一様収束の両方を丁寧かつ読みやすく扱っている。

解答例

STEP I 1990、第 6 問

純粋数学 ・ ベクトルと平行四辺形

STEP I 1990、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s1-q6

鍵となる考え方

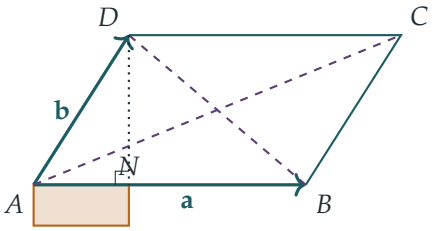
原点を A にとり、すべてを 2 つの辺ベクトル（side vector）$\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ と $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$ で表す。すると対角線（diagonal）は $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ と $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ となり、長さの 2 乗はすべてあるベクトルとそれ自身との内積（dot product）になる。これらの内積を展開すれば、それで仕事はすべて片づく。必要な幾何的事実はただ 1 つ、$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|$ は $\mathbf{u}$ の長さと、$\mathbf{v}$ の $\mathbf{u}$ への射影（projection）の長さとの積である、ということだけである。

解答

A を原点とし、$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$、$\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ とおく。$ABCD$ は平行四辺形（parallelogram）であるから $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ であり、したがって

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}+\mathbf{b}, \qquad \overrightarrow{BD} = \mathbf{b}-\mathbf{a}.$$

任意のベクトルについて $|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ が成り立ち、内積は対称で、和に対して分配法則が成り立つ。$a = |\mathbf{a}|$、$b = |\mathbf{b}|$ と書く。



図において、N は D から直線 AB に下ろした垂線の足であり、したがって AN は AD

の AB への射影で、その長さは $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|/a$ である。

小問 (i)

対辺は等しいので、左辺は $2a^2+2b^2$ である。対角線については

$$AC^2=(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=a^2+2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+b^2,$$
$$BD^2=(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=a^2-2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+b^2.$$

これらを加えると交差項が打ち消し合い、$AC^2+BD^2=2a^2+2b^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$ となって、示すべき式が得られる。（これはしばしば平行四辺形の法則（parallelogram law）と呼ばれる。）

小問 (ii)

今度は同じ 2 つの式を引き算すると

$$AC^2-BD^2=4\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b},\qquad\text{よって}\qquad\left|AC^2-BD^2\right|=4\,|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|.$$

次に $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$ の意味を考える。θ を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角とすると $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|=a\cdot b|\cos\theta|$ であり、$b|\cos\theta|$ はちょうど AD の AB への射影の長さ AN である。よって $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$ は、AB と、AD の AB への射影とを 2 辺とする長方形（図の網かけ部分）の面積である。

考えてみよう この結果は、どの辺についても、また隣り合う辺のどちらについても成り立つと主張している。なぜ 8 通りの計算を別々に行う必要がないのだろうか。

平行四辺形のどの辺もベクトル $\pm\mathbf{a}$ または $\pm\mathbf{b}$ であり、それに隣り合う 2 辺は、符号を除いてもう一方のベクトルである。たとえば辺 BC は $\mathbf{b}$ であり、その隣の辺 AB と CD は $\mathbf{a}$ と $-\mathbf{a}$ である。射影の長さは $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|/|\mathbf{u}|$ であるから、符号を変えてもベクトルの長さも射影の長さも変わらない。したがって、辺と隣り合う辺をどう選んでも、長方形の面積は同じ $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$ になる。すなわち $a\times$（$\mathbf{b}$ の射影の長さ、射影先は$\mathbf{a}$）または $b\times$（$\mathbf{a}$ の射影の長さ、射影先は$\mathbf{b}$）のいずれかであり、どちらも $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$ に等しい。ゆえに、どの場合にも

$$\left|AC^2-BD^2\right|=4\times(\text{その長方形の面積}).\qquad\blacksquare$$

最後の小問

小問 (ii) は 2 つの辺の内積から得られた。辺と対角線の役割を入れ替えて、2 本の対角線の内積をとると

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=b^2-a^2,$$

となる。交差項 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ と $-\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ が打ち消し合うからである。したがって

$$\left|AB^2-AD^2\right| = \left|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}\right|.$$

小問 (ii) と同様に論じると、次が得られる。

結果. $\left|AB^2-AD^2\right|$ は、一方の対角線と、もう一方の対角線のそれへの射影とを 2 辺とする長方形の面積に等しい。

証明. φ を 2 本の対角線のなす角とすると、$\left|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}\right| = AC\cdot BD\,|\cos\varphi|$ である。ここで $BD\,|\cos\varphi|$ は BD の AC への射影の長さであり、$AC\,|\cos\varphi|$ は AC の BD への射影の長さである。よって、どちらの対角線から始めても面積は同じであり、上の式によりそれは $\left|AB^2-AD^2\right|$ に等しい。■

さらに (ii) に似た形にするため、対角線が互いを二等分する点を O とする。すると $AC=2OA$ であり、BD の AC への射影は OB の OA への射影の 2 倍である。よって $\left|AB^2-AD^2\right|$ は、OA と、OB の OA への射影とを 2 辺とする長方形の面積の 4 倍でもある。今度は対角線の半分が辺の役割を果たしているのである。

ここから 2 つの気持ちのよい系が得られる。対角線が等しくなるのはちょうど $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ のとき、すなわち平行四辺形が長方形のときである。対角線が直交するのはちょうど $a=b$ のとき、すなわち菱形（rhombus）のときである。

検算

$A=(0,0)$、$B=(4,0)$、$D=(1,2)$ とすると $C=(5,2)$ である。このとき $AC^2=29$、$BD^2=13$ であり、$2(16+5)=42=29+13$ となって (i) が確かめられる。(ii) については $AC^2-BD^2=16$ であり、一方 AD の AB への射影の長さは 1 なので長方形の面積は $4\times1=4$ となり、$16=4\times4$ である。最後の小問については $AB^2-AD^2=16-5=11$ であり、$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(5,2)\cdot(-3,2)=-11$ である。また、3 つの結果すべてを、辺と隣り合う辺のあらゆる選び方について、10^5 個のランダムな平行四辺形で検証した。最大の食い違いは約 10^{-13} であり、これは単なる丸め誤差である。

よくある間違い

- $\overrightarrow{BD}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$ や $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ と書いてしまう。BD^2 については符号は問題にならないが、向きを正しくとっておけば後で混乱せずに済む。
- 絶対値を忘れる。A における角が鈍角のとき $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ は負になるが、面積は負になりえない。だからこそ問題文では $\left|AC^2-BD^2\right|$ となっているのである。

- 最後の小問で、対角線全体を用いているのに係数 4 をつけてしまう。対角線全体を用いるなら係数は 1 であり、係数 4 が現れるのは対角線の半分を用いる場合だけである。

STEP のその先へ

恒等式 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 4\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ は**偏極恒等式**（polarisation identity）であり、内積が長さだけから復元できることを示している。小問 (i) の平行四辺形の法則とあわせて、これは内積空間（inner product space）に関する重要な事実である。ノルム（norm）が内積から得られるのは、それが平行四辺形の法則を満たすときであり、かつそのときに限る。これはヨルダン（Jordan）とフォン・ノイマン（von Neumann）による定理である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、内積、射影、直交性（orthogonality）が任意の次元で展開されるのを見るのに適した本である。

解答例

STEP I 1990、第 7 問

純粋数学 ・ 一階線形常微分方程式

STEP I 1990、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s1-q7

鍵となる考え方

$y = uv$ とおくと、必要なのは一つの関数であるのに未知関数が二つになるので、そのうちの一方に追加の条件を課す余裕が生まれる。自然な選び方は、u によって P を含む項を消すことであり、そうすると直接積分できる微分方程式（differential equation）が残る。これは姿を変えた積分因子法（integrating-factor method）にほかならない。実際、$1/u$ がちょうど積分因子になっている。

解答

置き換え

$y = uv$ とすると、積の微分法（product rule）により $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ であるから、方程式は

$$u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + Pu\right) = Q.$$

となる。u を 1 階（first order）の方程式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + Pu = 0,$$

を満たすように選べば、括弧の中が消えて

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{Q}{u},$$

が残る。これは求められているとおり、$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ を x、Q、u のみで表す方程式である。（割り算をするには $u \neq 0$ が必要である。$u' + Pu = 0$ の 0 でない解は $A \neq 0$ として $u = A\mathrm{e}^{-\int P\,\mathrm{d}x}$ であり、これは決して 0 にならない。）

個別の方程式

ここでは $P = -\dfrac{2}{x+1}$、$Q = (x+1)^{5/2}$ である。Q は（実数として）$x \geq -1$ でしか定義されず、P は $x = -1$ で定義されないことに注意する。そこで $x > -1$ の範囲で考える。このとき $x+1 > 0$ である。

考えてみよう u については一般解（general solution）が必要だろうか。それとも解が一つあれば十分だろうか。

0 でない解が一つあれば十分である。最終的な答えに現れる任意定数は、v を求める積分のときに出てくるからである。そこで

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2u}{x+1}$$

を変数分離（separation of variables）によって解く。$\ln|u| = 2\ln(x+1) + 定数$ となるので、

$$u = (x+1)^2.$$

をとる。（確認：$u' = 2(x+1) = \frac{2u}{x+1}$。）すると

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{(x+1)^{5/2}}{(x+1)^2} = (x+1)^{1/2}, \qquad \text{よって} \qquad v = \tfrac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C.$$

したがって一般解は

$$y = uv = \tfrac{2}{3}(x+1)^{7/2} + C(x+1)^2.$$

である。$y(1) = 0$ を用いると

$$0 = \tfrac{2}{3}\cdot 2^{7/2} + 4C \quad \Longrightarrow \quad C = -\tfrac{1}{6}\cdot 2^{7/2} = -\tfrac{1}{6}\cdot 8\sqrt{2} = -\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

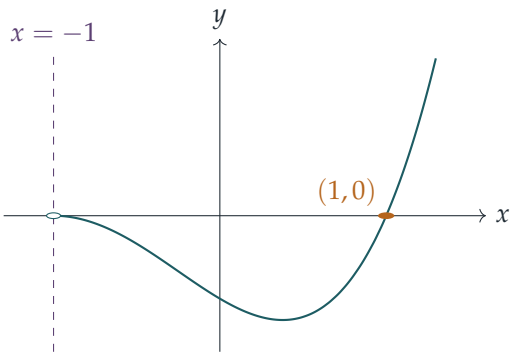
ゆえに

$$\boxed{y = \tfrac{2}{3}(x+1)^{7/2} - \tfrac{4\sqrt{2}}{3}(x+1)^2 = \tfrac{2}{3}(x+1)^2\left[(x+1)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right]}$$

解が有効な範囲

考えてみよう y の式は $x = -1$ でも意味をもつ。それなのに、なぜ $x = -1$ は含まれないのだろうか。

解が有効なのは $x > -1$ である。$x < -1$ では右辺の $(x+1)^{5/2}$ が実数にならないので、そこでは微分方程式そのものが意味をもたない（求めた $(x+1)^{7/2}$ も同様である）。$x = -1$ では項 $\frac{2y}{x+1}$ が定義されないので、得られた式が $x \to -1^+$ のとき $y \to 0$ を与えるとしても、方程式はそこでも成り立たない。$x+1 > 0$ となる区間 $x > -1$ 全体では、上のすべての手順が正当であり、解はこの区間に含まれる与えられた点 $x = 1$ を通る。



白丸は除外される端点 $x = -1$ を表す。

検算

- 元の式に代入する：$y' = \frac{7}{3}(x+1)^{5/2} - \frac{8\sqrt{2}}{3}(x+1)$、$\frac{2y}{x+1} = \frac{4}{3}(x+1)^{5/2} - \frac{8\sqrt{2}}{3}(x+1)$ であり、その差は求めるとおり $(x+1)^{5/2}$ となる。
- $y(1) = \frac{2}{3} \cdot 4\left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\right) = 0$。
- 特定の値：$y(0) = \frac{2-4\sqrt{2}}{3} \approx -1.219$、$y(3) = \frac{256-64\sqrt{2}}{3} \approx 55.16$。$y(1) = 0$ から出発して方程式を数値的に（ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で）積分すると、どちらの値とも 9 桁まで一致する。

よくある間違い

- P の符号を間違える：ここでは $P = -\frac{2}{x+1}$ であるから $u = (x+1)^2$ であり、$(x+1)^{-2}$ ではない。
- v を求める積分で定数を忘れる。そうすると $y(1) = 0$ に合わせる自由度がなくなってしまう。
- 範囲を $x \geq -1$ と答える：方程式は $x = -1$ で定義されない。

STEP のその先へ

厄介な項を取り除くように u を選ぶというのは、**定数変化法**（variation of parameters）の背後にある考え方である。まず斉次方程式（homogeneous equation）を解き、次にその「定数」を変化させて外力項を吸収させるのである。同じ工夫は 2 階線形方程式にも使える。また、解がどこで有効かという問いは、存在と一意性の定理（existence

and uniqueness theorem）へと発展する。この定理は、P と Q が連続であるような任意の区間上で、解がただ一つ存在することを保証する。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は、その両方を扱っている。

解答例

STEP I 1990、第 8 問

純粋数学 ・ 三角関数の無限積

> **STEP I 1990、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q8

鍵となる考え方

倍角の公式（double-angle formula）$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ を用いると、各余弦は 2 つの正弦の比 $\cos\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{2\sin\theta}$ に書き換えられる。このような比を掛け合わせると、望遠鏡和（telescoping sum）のように、ほとんどすべてが打ち消し合う。有限積が 1 つのすっきりした分数になってしまえば、$n \to \infty$ とするには、$x \to 0$ のとき $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$ という標準的な極限（limit）さえあればよい。

解答

α に関する条件について

以下のすべての段階で、ある $m \geq 0$ に対して $\sin(\alpha/2^m)$ で割るので、これらが決して 0 にならないことが必要である。もし $\sin(\alpha/2^m) = 0$ ならば、ある整数 j に対して $\alpha/2^m = j\pi$ となり、$\alpha = (2^m j)\pi$ は π の整数倍となるが、これは除外されている。したがって、すべての $m \geq 0$ に対して $\sin(\alpha/2^m) \neq 0$ である。

2 つの余弦の積

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ を、まず $\theta = \alpha/2$、次に $\theta = \alpha/4$ として 2 回適用すると、

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\\ &= 2\left(2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}\right)\cos\frac{\alpha}{2} = 4\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}.\end{aligned}$$

$\sin(\alpha/4) \neq 0$ であるから $4\sin(\alpha/4)$ で割ることができ、

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4} = \frac{\sin\alpha}{4\sin(\alpha/4)},$$

を得る。これが示すべきことであった。

n 個の余弦の積

$P_n = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^n}$ とおく。n に関する数学的帰納法（induction）により、

$$P_n = \frac{\sin\alpha}{2^n\sin(\alpha/2^n)}.$$

が成り立つことを証明する。$n = 1$ のとき、これは $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{2\sin(\alpha/2)}$ となり、倍角の公式を $2\sin(\alpha/2) \neq 0$ で割ったものにほかならない。（$n = 2$ の場合は、いま示した結果である。）

次に、ある $n \geq 1$ に対して公式が成り立つと仮定する。倍角の公式を $\theta = \alpha/2^{n+1}$ として用いると $\sin\frac{\alpha}{2^n} = 2\sin\frac{\alpha}{2^{n+1}}\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}$ となる。よって

$$\begin{aligned} P_{n+1} = P_n\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} &= \frac{\sin\alpha}{2^n\sin(\alpha/2^n)}\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} \\ &= \frac{\sin\alpha\,\cos(\alpha/2^{n+1})}{2^n\cdot 2\sin(\alpha/2^{n+1})\cos(\alpha/2^{n+1})} = \frac{\sin\alpha}{2^{n+1}\sin(\alpha/2^{n+1})}. \end{aligned}$$

$\cos(\alpha/2^{n+1})$ を約分してよいのは、これが 0 でない $\sin(\alpha/2^n)$ の因数であり、したがってそれ自身も 0 でないからである。これは $n+1$ に対する公式であるから、数学的帰納法により、すべての正の整数 n に対して公式が成り立つ。

$n \to \infty$ とする

無限積（infinite product）とは、部分積（partial products）P_n の極限のことである。$x_n = \alpha/2^n$ とおくと、$n \to \infty$ のとき $x_n \to 0$ であり、

$$2^n\sin\frac{\alpha}{2^n} = \alpha\cdot\frac{\sin x_n}{x_n} \longrightarrow \alpha\cdot 1 = \alpha.$$

考えてみよう $\lim P_n = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$ の逆数をとってよいのはなぜか？

極限が 0 でないからである。いま考えている α については $\alpha \neq 0$ かつ $\sin\alpha \neq 0$ である。したがって $P_n \to \frac{\sin\alpha}{\alpha} \neq 0$ であり、無限積は存在し、$\sin\alpha$ をそれで割ると

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\cdots} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\alpha}{P_n} = \lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{\alpha}{2^n} = \alpha,$$

となる。これが求める公式である。

$\pi/2$ の公式

$\alpha = \pi/2$ とする。これは π の整数倍ではなく、また $\sin\alpha = 1$ である。すると

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots}.$$

あとは、これらの余弦が入れ子になった平方根（nested square roots）であることを示せばよい。$k \geq 1$ に対して $c_k = \cos(\pi/2^{k+1})$ とおく。このとき $c_1 = \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ である。半角の公式（half-angle formula）$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$ を $\theta = \pi/2^{k+2}$ として用いると

$$c_{k+1}^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}c_k, \qquad \text{よって} \qquad c_{k+1} = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}c_k},$$

となる。ここで正の平方根をとったのは、$0 < \pi/2^{k+2} < \pi/2$ より $c_{k+1} > 0$ だからである。したがって

$$c_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \quad c_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}, \quad c_3 = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}, \quad \ldots,$$

であり、各因数は 1 つ前の因数を $t \mapsto \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t}$ に代入したものである。これらはまさに求める積の因数であるから、

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}.$$

検算

- $\alpha = \pi/2$、$n = 1$ のとき、有限の公式は $\cos\frac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2\sin(\pi/4)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を与え、これは正しい。
- 入れ子の根号の部分積の逆数は 1.4142、1.5307、1.5607、1.5683、1.5702,… であり、60 個の因数をとると 1.5707963267949 となって、計算機の精度（machine precision）の範囲で $\pi/2$ と一致する。
- 有限の恒等式は、ランダムな α と 14 までの n についても数値的に確かめられ、また $\alpha = 2.5$ や $\alpha = -4$ などの値に対して $\sin\alpha / P_{60}$ は α を再現する。

よくある間違い

- $\sin(\alpha/2^n)$ が 0 でない理由を述べずにそれで割ってしまう。これこそが条件 $\alpha \neq k\pi$ の存在理由である。

- $\lim P_n \neq 0$ であることに触れずに $1/\lim P_n = \lim(1/P_n)$ と書いてしまう。
- 半角の公式の段階で正の平方根をとる根拠を示し忘れる。

STEP のその先へ

最後の公式は 1593 年のヴィエト（Viète）の積であり、π を表す厳密な無限の式として史上初めて書き下されたものである。大学では解析学（analysis）で無限積をきちんと学ぶ。そこでは、0 でない因数からなる積は、その部分積が**0 でない**極限に近づくとき収束する（converge）という。これはまさに私たちが確認した点である。オイラー（Euler）の積 $\sin\alpha = \alpha\prod_{k\geq 1}\left(1-\frac{\alpha^2}{k^2\pi^2}\right)$ は、より奥深い親戚である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、こうした極限が厳密に扱われる様子を見るのに親しみやすい一冊である。

解答例

STEP I 1990、第 9 問

純粋数学 ・ 接線と面積の評価

> **STEP I 1990、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q9

鍵となる考え方

曲線 $y = 1/x$ は上に向かって曲がっている（凸（convex）である）ので、どの接線（tangent）も曲線の下側にある。したがって、接線の下にある二つの台形（trapezium）は、$x = 1$ から $x = b$ までの曲線の下の領域に収まり、その領域の面積は $\ln b$ である。二つの面積を比べると、対数（logarithm）に対する下からの評価（lower bound）が得られる。同じように、曲線の上側にある長方形を用いると上からの評価（upper bound）が得られる。

解答

点 C

$y = 1/x$ に対して $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1/x^2$ である。よって、$(t, 1/t)$ における接線は

$$y - \frac{1}{t} = -\frac{1}{t^2}(x - t), \qquad \text{すなわち} \qquad y = \frac{2}{t} - \frac{x}{t^2}.$$

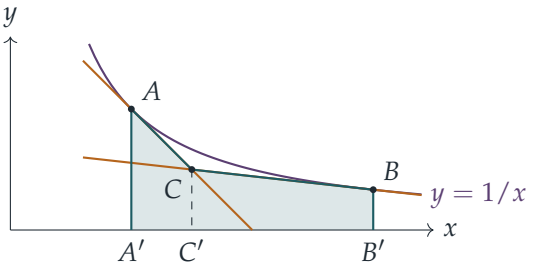
である。$t = 1$ とすると、A における接線は $y = 2 - x$ である。$t = b$ とすると、B における接線は $y = \frac{2}{b} - \frac{x}{b^2}$ である。両者の交点では

$$2 - x = \frac{2}{b} - \frac{x}{b^2} \quad \Longrightarrow \quad x\left(1 - \frac{1}{b^2}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{b}\right).$$

が成り立つ。$b > 1$ であるから $1 - \frac{1}{b} \neq 0$ で割ることができ、$x\left(1 + \frac{1}{b}\right) = 2$ が残る。したがって

$$C = \left(\frac{2b}{b+1}, \frac{2}{b+1}\right),$$

である。ここで y 座標は $y = 2 - x$ から求めた。$1 < \frac{2b}{b+1} < b$ であることに注意しよう。左側の不等式は $b+1 < 2b$ と同値であり、右側の不等式は $2 < b+1$ と同値である。$b > 1$ であるからどちらも成り立ち、C は横方向に A と B の間にある。



図は $b = 3$ の場合である。網かけの領域は二つの四角形（quadrilateral）からなる。

面積の和

どちらの四角形も鉛直な辺を二つもつので台形であり、その面積は幅に二つの鉛直な辺の長さの平均を掛けたものである。

$ACC'A'$ について、幅は $\frac{2b}{b+1} - 1 = \frac{b-1}{b+1}$ であり、鉛直な辺の長さは 1 と $\frac{2}{b+1}$ である。よって

$$\text{面積}(ACC'A') = \frac{1}{2} \cdot \frac{b-1}{b+1}\left(1 + \frac{2}{b+1}\right) = \frac{(b-1)(b+3)}{2(b+1)^2}.$$

$CBB'C'$ について、幅は $b - \frac{2b}{b+1} = \frac{b(b-1)}{b+1}$ であり、鉛直な辺の長さは $\frac{2}{b+1}$ と $\frac{1}{b}$ である。よって

$$\text{面積}(CBB'C') = \frac{1}{2} \cdot \frac{b(b-1)}{b+1}\left(\frac{2}{b+1} + \frac{1}{b}\right) = \frac{(b-1)(3b+1)}{2(b+1)^2}.$$

これらを加えると、分子はまとめて $(b-1)(4b+4) = 4(b-1)(b+1)$ となるので

$$\text{面積}(ACC'A') + \text{面積}(CBB'C') = \frac{2(b-1)}{b+1}.$$

不等式

考えてみよう 二つの台形が曲線の下に収まらなければならないのはなぜか。

$x > 0$ のとき、曲線と $(t, 1/t)$ における接線との差は

$$\frac{1}{x} - \left(\frac{2}{t} - \frac{x}{t^2}\right) = \frac{t^2 - 2tx + x^2}{t^2 x} = \frac{(x-t)^2}{t^2 x} \geq 0.$$

である。よって、すべての $x > 0$ に対して、各接線は曲線上またはその下側にある。網かけの領域の上端は、$[1, \frac{2b}{b+1}]$ 上では A における接線、$[\frac{2b}{b+1}, b]$ 上では B における接線

である。どちらの部分も $y = 1/x$ の下側にあり、領域は x 軸の上側にある。したがって、網かけの領域は $x = 1$ から $x = b$ までの曲線の下の領域に含まれ、

$$\frac{2(b-1)}{b+1} \leq \int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln b.$$

が成り立つ。

上からの評価については、$x \geq 1$ のとき $\frac{1}{x} \leq 1$ であるから、曲線の下の領域は底辺 $A'B'$、高さ 1 の長方形の内部にある。したがって

$$\ln b = \int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \int_1^b 1\,\mathrm{d}x = b - 1.$$

ここで $z > 0$ とし、$b = 1 + z$ とおくと、要求どおり $b > 1$ となる。このとき $b - 1 = z$、$b + 1 = 2 + z$ であり、二つの不等式を合わせると

$$\frac{2z}{2+z} \leq \ln(1+z) \leq z,$$

となる。これが証明すべきことであった。（実は $z > 0$ のとき二つの不等式はどちらも等号が成り立たない。曲線と評価に用いた直線は孤立した点でしか交わらないからである。）

検算

- $b = 1$ とすると、C は $(1,1) = A$ となり、面積の和は 0 となる。当然そうなるべきである。
- $b = 2$ のとき、$C = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ であり、面積の和は $\frac{2}{3} \approx 0.667$ である。これは $\ln 2 \approx 0.693$ をわずかに下回り、さらにそれは 1 を下回る。
- z が小さいとき、$\frac{2z}{2+z} = z - \frac{z^2}{2} + \cdots$ は $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \cdots$ と z^2 の項まで一致するので、下からの評価は 0 の近くで非常に精密である。

いくつかの b の値について座標と二つの台形の面積を厳密な計算で確かめ、また 10^{-6} から 10^6 までの 10^5 個の無作為な z について不等式を確かめた。

よくある間違い

- C が $x = 1$ と $x = b$ の間にあることの確認を忘れる。これがないと、「四角形」が思っているとおりの形になるとは限らない。
- 接線が曲線の下にあることを「図から」と述べてしまう。$(x-t)^2$ を用いた一行の計算があってこそ証明になる。

STEP のその先へ

関数をそのグラフの上下にある単純な図形と比べるという考え方は、リーマン（Riemann）和（Riemann sum）の背後にある考え方であり、解析学の最初の講義で積分を厳密に定義する方法でもある。凸関数の接線がそのグラフの下にあるという事実は、凸関数の理論の出発点である。それはイェンセン（Jensen）の不等式や、相加相乗平均の不等式（AM–GM）をはじめとする多くの古典的な不等式へとつながる。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、まさにこの精神で積分を展開している。

解答例

STEP I 1990、第 10 問

力学 ・ 仕事率と抵抗

STEP I 1990、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s1-q10

鍵となる考え方

「一定の速さ」とは加速度（acceleration）がないということであり、したがって走者の駆動力（driving force）は抵抗（resistance）とちょうどつり合い、仕事率（power）は駆動力と速さの積である。唯一の微妙な点は、空気抵抗（air resistance）が**空気に対する**速さ（相対速度、relative speed）に依存し、それが往路と復路とで異なることである。問題の後半では、仕事率ではなく全エネルギー（total energy）に注目するとよい。各区間で消費されるエネルギーは抵抗と距離の積であり、これによって一定のエネルギー予算が二つの速さについての一次の条件（linear condition）に変わる。

解答

一定の速さとレースの所要時間

走者を直線上を動く質点（particle）としてモデル化する。ある区間における走者の地面に対する速さを v（単位 $\mathrm{m\,s^{-1}}$）、走者が生み出す前向きの駆動力を D（単位 N）とする。抵抗は 50 N と $2w$ N であり、それぞれ地面に対する運動、空気に対する運動を妨げる向きにはたらく。



走路に沿った方向に力を分解すると、一定のペースでは加速度は 0 であるから、

$$D = 50 + 2w.$$

走者が仕事をする割合は、駆動力とその作用点の速さの積であるから、$300 = Dv$ である。

往路。風は走者の進行方向に $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ で吹いている。$v > 3$ ならば、走者は空気に対して前向きに $w = v - 3$ の速さで動き、空気抵抗は後ろ向きにはたらく（$v > 3$ であることは後で確かめる）。このとき $D = 50 + 2(v-3) = 44 + 2v$ であり、

$$v_1(44 + 2v_1) = 300 \iff v_1^2 + 22v_1 - 150 = 0 \iff v_1 = -11 + \sqrt{271} \approx 5.462,$$

ただし正の解をとった。これは確かに 3 より大きいので、仮定は成り立つ（別の見方として、$v = 3$ では空気抵抗がなく、必要な仕事率は $3 \times 50 = 150 < 300\,\mathrm{W}$ にすぎないので、走者は風より速く走らなければならない）。

復路。今度は走者は向かい風の中を走るので、$w = v + 3$、$D = 50 + 2(v+3) = 56 + 2v$ である：

$$v_2(56 + 2v_2) = 300 \iff v_2^2 + 28v_2 - 150 = 0 \iff v_2 = -14 + \sqrt{346} \approx 4.601.$$

所要時間。スタート時と折り返し時の加速を無視すると、

$$T_0 = \frac{5000}{v_1} + \frac{5000}{v_2} \approx 915.4 + 1086.7 = 2002.1,$$

よって、レースの所要時間は秒単位に丸めて $2002\,\mathrm{s}$（約 33 分 22 秒）である。

別の戦術

代わりに、走者が往路では $x_1\,\mathrm{W}$、復路では $x_2\,\mathrm{W}$ の仕事率で走り、一定の速さがそれぞれ v_1、v_2 であるとする。力のつり合いは変わらないので、$v_1 > 3$ である限り、

$$x_1 = v_1(44 + 2v_1), \qquad x_2 = v_2(56 + 2v_2).$$

往路にかかる時間は $5000/v_1$ であるから、そこで使われるエネルギーは

$$x_1 \cdot \frac{5000}{v_1} = 5000(44 + 2v_1),$$

であり、これは当然のことながら、まさに抵抗と距離の積である。同様に、復路で使われるエネルギーは $5000(56 + 2v_2)$ である。したがって全エネルギーは

$$E = 5000\big(100 + 2(v_1 + v_2)\big).$$

考えてみよう 一定の全エネルギーという条件はどこで効いてくるか。

走者は元のレースと同じ全エネルギーを使わなければならないので、E は定数である。E は $v_1 + v_2$ を通してのみ速さに依存するので、この和は

$$v_1 + v_2 = \frac{E}{10\,000} - 50,$$

と定まり、x_1 と x_2 をどう選んでも変わらない。これで結果が証明された。その値は元のレースから得られるものであり、

$$S = v_1 + v_2 = \sqrt{271} + \sqrt{346} - 25 \approx 10.063.$$

最善の戦術。このときレースの所要時間は

$$T = 5000\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) = \frac{5000\,(v_1+v_2)}{v_1 v_2} = \frac{5000\,S}{v_1 v_2}.$$

S が一定であるから、これは $v_1 v_2$ が最大のとき最小になる。相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）より $v_1 v_2 \le \left(\frac{S}{2}\right)^2$ であり、等号が成り立つのは $v_1 = v_2 = \frac{S}{2}$ のときに限る。よって最善の計画は、往復とも同じ速さ $\frac{S}{2} \approx 5.032\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ で走ることである。これは依然として風より速いので、往路の x_1 の式はそのまま有効である。最小の所要時間は

$$T_{\min} = \frac{5000\,S}{S^2/4} = \frac{20\,000}{S} \approx 1987.4\ \mathrm{s}.$$

走者が短縮できる時間は $T_0 - T_{\min} \approx 2002.1 - 1987.4 = 14.7\,\mathrm{s}$ であり、求めるとおり約 15 秒である。仕事率は往路で約 $x_1 \approx 272\,\mathrm{W}$、復路で約 $x_2 \approx 332\,\mathrm{W}$ となる。すなわち、走者は追い風のときには力を抜き、向かい風のときにはより頑張るのである。

検算

- エネルギーの整合性：$300 \times 2002.105 \approx 600\,632\,\mathrm{J}$ であり、$5000(100 + 2 \times 10.0632) \approx 600\,632\,\mathrm{J}$ とも一致する。
- 風がなければ、どちらの区間でも $v^2 + 25v - 150 = 0$ となるので $v = 5$ であり、二つの方法は一致する。時間の短縮を可能にしているのは風である。
- x_1 を無作為に 1000 通り選び（x_2 はエネルギー予算から定まる）、$v_1 + v_2 = 10.0632$ となること、どの選び方も 1987.4 s を下回らないこと、短縮時間が 14.66 s であることを数値的に確認した。

よくある間違い

- 空気抵抗の項に、空気に対する速さではなく地面に対する速さを使ってしまう、あるいは一方の区間で風の符号を逆にしてしまう。
- 往復で**仕事率**を等しくするのが公平だと考えてしまう。所要時間を最小にするのは、往復で**速さ**を等しくすることである。
- 仕事率の式だけから $v_1 + v_2$ が一定であることを証明しようとする。一定の全エネルギーという条件が必要である。

STEP のその先へ

最後の部分は小さな制約付き最適化（constrained optimisation）の問題である：一次の制約条件のもとで $1/v_1 + 1/v_2$ を最小化する。ここでは相加平均・相乗平均の不等式で決着がつくが、一般的な道具は大学 1 年次の講義で学ぶラグランジュの未定乗数法（method of Lagrange multipliers）であり、同じ考え方が自転車競技やボート競技における最適なペース配分を支配している。仕事、仕事率、抗力（drag force）についての丁寧な解説は、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

解答例

STEP I 1990、第 11 問

力学 ・ 放物運動と運動量

> **STEP I 1990、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q11

鍵となる考え方

過程は 3 つの段階に分かれる。飛行の最高点までの通常の放物運動（projectile motion）、瞬間的な衝突（受け止め）、そして瞬間的な「爆発」（押し出し）である。2 つの瞬間的な段階の間、重力が作用する時間はないので、砲弾とスーパーマンからなる系の運動量（momentum）は、各方向ごとに別々に保存される。その後、砲弾は再び放物運動をする物体となり、既知の高さから既知の下向きの速さで運動を始める。

解答

砲弾とスーパーマンを質点（particle）としてモデル化し、空気抵抗（air resistance）は無視する。また、砲弾は水平な地面から発射され、水平な地面に着地するものとする。x を運動の向きの水平方向、y を鉛直上向きにとる。

飛行の最高点まで

砲弾の初速度の成分は

$$u_x = v\cos\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2}v, \qquad u_y = v\sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}v.$$

である。最高点では鉛直方向の速度が 0 になるので、そこまでにかかる時間と到達する高さは

$$t_1 = \frac{u_y}{g} = \frac{\sqrt{3}\,v}{2g}, \qquad H = \frac{u_y^2}{2g} = \frac{3v^2}{8g}.$$

である。この瞬間、砲弾は速さ $\frac{1}{2}v$ で水平に運動している。

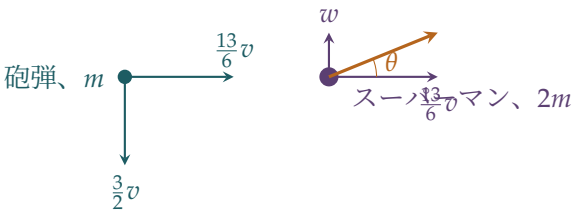
受け止め

スーパーマンは速さ $3v$ で水平に運動しながら砲弾を後ろから受け止め、両者は一体となって運動する。（瞬間的な）受け止めの間、水平方向の運動量は保存されるので、共通の速さを V とすると

$$2m(3v) + m\left(\tfrac{1}{2}v\right) = 3mV \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{13v}{6}.$$

となる。この瞬間、どちらも鉛直方向の速度をもたないので、全体の鉛直方向の運動量は 0 である。

押し出し



次にスーパーマンは砲弾を真下に押し出す。この押し出しは内力による力積（impulse）なので、2 つの物体の運動量の総和はどちらの方向にも変化しない。

水平方向：砲弾は水平方向の速さ $\frac{13}{6}v$ を保つ。水平方向の運動量の総和は依然として $3m \cdot \frac{13}{6}v$ であるから、スーパーマンも水平方向の速さ $\frac{13}{6}v$ を保つ。（力積は鉛直方向なので、これは驚くことではない。）

鉛直方向：鉛直方向の運動量の総和は 0 であったから、スーパーマンが速さ w で上向きに運動するとすれば

$$2m\,w - m\left(\tfrac{3}{2}v\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad w = \tfrac{3}{4}v.$$

である。

> **考えてみよう** 重力が常に作用しているのに、なぜ運動量保存則（conservation of momentum）を使えるのだろうか？

受け止めと押し出しは瞬間的に起こる。重力は有限の力なので、長さ 0 の時間間隔における重力の力積は 0 である。問題になるのはスーパーマンと砲弾の間にはたらく、非常に大きく短時間しか続かない内力（internal force）だけであり、それらは対になって打ち消し合う。

砲弾の残りの飛行

砲弾は今度は高さ $H = \frac{3v^2}{8g}$ から、鉛直下向きの速さ $\frac{3}{2}v$ で運動を始める。下向きに s を測ると、砲弾は時間 t_2 後に地面に達する。ここで t_2 は

$$\tfrac{3}{2}v\,t_2 + \tfrac{1}{2}gt_2^2 = \frac{3v^2}{8g}.$$

を満たす。両辺に $8g$ を掛けると、gt_2 についての二次方程式（quadratic equation）が得られる。

$$4(gt_2)^2 + 12v(gt_2) - 3v^2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad gt_2 = \frac{-12v + \sqrt{144v^2 + 48v^2}}{8} = \frac{-12 + 8\sqrt{3}}{8}\,v,$$

ただし $t_2 > 0$ なので正の解をとった。よって

$$t_2 = \left(\sqrt{3} - \tfrac{3}{2}\right)\frac{v}{g}.$$

である。（$\sqrt{3} \approx 1.732 > 1.5$ なので、これは正である。）飛行時間の合計は

$$\begin{aligned} T = t_1 + t_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{v}{g} + \left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)\frac{v}{g} \\ &= \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}\,\frac{v}{g} \;\approx\; 1.10\,\frac{v}{g}. \end{aligned}$$

である。

スーパーマンの向き

押し出しの直後、スーパーマンの速度の成分は水平方向に $\frac{13}{6}v$、上向きに $\frac{3}{4}v$ である。したがって、スーパーマンの軌道は水平から上向きに角 θ の方向へ始まり、

$$\tan\theta = \frac{\frac{3}{4}v}{\frac{13}{6}v} = \frac{9}{26}, \qquad \theta = \arctan\frac{9}{26} \approx 19.09^\circ,$$

となる。よって、この角は 1 度単位に丸めると 19° である。

検算

- スーパーマンがいなければ、砲弾は時刻 $2t_1 = \sqrt{3}\,v/g \approx 1.73\,v/g$ に着地する。下に押し出せば飛行時間は短くなるはずであり、実際 $T \approx 1.10\,v/g$ はこれより小さい。
- 質量比：砲弾の質量はスーパーマンの半分なので、砲弾はスーパーマンの 2 倍の鉛直方向の速さを逆向きに得るはずである。実際そうなっている：$\frac{3}{2}v = 2 \times \frac{3}{4}v$。

- 数値的に、$v = 13.7$、$g = 9.81$ として、高さ H からの砲弾の落下を刻み幅 10^{-6} で追跡すると $t_2 \approx 0.32407\,\mathrm{s}$ となり、$(\sqrt{3} - \frac{3}{2})v/g$ と一致する。また $T \approx 1.5335\,\mathrm{s} = 1.0981\,v/g$ である。

よくある間違い

- 受け止めを忘れること：押し出しの後の水平方向の速さとして、共通の速さ $\frac{13}{6}v$ ではなく、砲弾自身の $\frac{1}{2}v$ やスーパーマンの $3v$ を使ってしまう。
- 質量を無視して、スーパーマンの上向きの速さを $\frac{3}{2}v$ としてしまう。
- 二次方程式の負の解をとってしまう。あるいは t_2 を t_1 ではなく $2t_1$ に加えてしまう。

STEP のその先へ

受け止めは完全非弾性衝突（perfectly inelastic collision）であり、押し出しはその逆過程である爆発である。同じ保存則がどちらの向きにも成り立つ一方、運動エネルギー（kinetic energy）は前者では失われ、後者では供給される。大学 1 年次の講義では、これは撃力（impulsive force）の一般理論、そして系の重心（centre of mass）の理論へと発展する。重心の運動は、各部分が互いにどれほど激しく押し合っても、外力だけによって決まる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、運動量、力積、重心をこうした精神で扱っている。

解答例

STEP I 1990、第 12 問

力学 ・ ばねとエネルギー

STEP I 1990、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

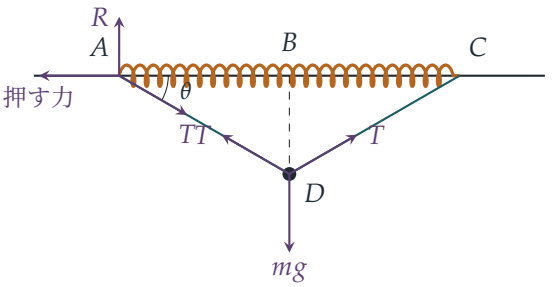
step.maths.org/questions/90-s1-q12

鍵となる考え方

ここでは質点以外はすべて軽い（light）ので、両端 A と C にはたらく力は厳密につり合っていなければならない。すなわち、各端で糸が水平に引く力は、縮んだばね（spring）が押す力に等しい。これが平衡（equilibrium）の条件を与える。運動については、エネルギーを用いるのが自然である。運動エネルギー（kinetic energy）をもつのは質点だけなので、質点が静止するのは、位置エネルギー（potential energy）がちょうど最初の値に戻るときである。

解答

モデル化。ばねと糸は軽く、糸は伸びない（inextensible）。また棒はなめらか（smooth）なので、棒がばねに及ぼす力は鉛直方向のみである。B を通る鉛直線に関する対称性から、質点 D は常に B の真下にあり、$AD = DC = l$ である。糸の各半分の張力（tension）を T、各半分が棒となす角を θ とする。



平衡

$\theta = \pi/6$ のとき、AC の半分の長さは $l\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}l$ であるから、

$$AC = \sqrt{3}\,l < 2l,$$

となり、ばねは $(2-\sqrt{3})l$ だけ縮んでいる。フックの法則（Hooke's law）により、ばねは A（および C）を外向きに次の大きさの力（thrust）で押す。

$$\frac{\lambda(2-\sqrt{3})l}{2l} = \lambda\Big(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big).$$

D において鉛直方向に分解すると：$2T\sin\frac{\pi}{6} = mg$ より $T = mg$ である。

A において水平方向に分解すると：

> **考えてみよう** A には何もないのに、なぜ A で力のつり合いを考えてよいのだろうか？

ばねの端は軽い点である。質量 0 の物体に合力がはたらけば加速度は無限大になってしまうので、そこにはたらく力は（平衡状態に限らず）各瞬間に必ずつり合っていなければならない。棒はなめらかなので抗力（reaction）R は鉛直であり、水平方向には糸とばねの力だけがはたらく。

$$T\cos\frac{\pi}{6} = \lambda\Big(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \quad\Longrightarrow\quad mg\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \lambda\,\frac{2-\sqrt{3}}{2},$$

よって

$$mg = \lambda\,\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \lambda\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\Big),$$

となり、示すべき式が得られた。

位置エネルギー

$AC = 2xl$ とおくと、糸がぴんと張っている間は $0 < x \le 1$ である。AC の半分は xl、$AD = l$ であるから、三平方の定理（Pythagoras）により D は棒から

$$BD = l\sqrt{1-x^2}$$

の深さにある。ばねの伸びは $2xl - 2l$ なので、弾性エネルギー（elastic energy）は $\frac{\lambda(2l-2xl)^2}{2\cdot 2l} = \lambda l(1-x)^2$ である。棒の高さを重力による位置エネルギーの基準とすると、

$$V(x) = \lambda l(1-x)^2 - mgl\sqrt{1-x^2}.$$

整合性を確かめておく。

$$V'(x) = -2\lambda l(1-x) + \frac{mglx}{\sqrt{1-x^2}},$$

であり、$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$（このとき $\cos\theta = x$ より $\theta = \frac{\pi}{6}$）でこれが 0 になるのは、ちょうど $mg\sqrt{3} = \lambda(2-\sqrt{3})$ のときである。これは上で求めた条件そのものである。

B からの落下

はじめ質点は B にあるので、糸は棒に沿っており、$AC = 2l$、$x = 1$ である。このとき $V(1) = 0$ であり、系は静止状態から動き出す。

棒はなめらかで糸は伸びないので、エネルギーは失われない。また、ばねと糸は軽いので、運動エネルギーは質点の $\frac{1}{2}mv^2$ だけである。したがって運動の間つねに

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + V(x) = V(1) = 0.$$

考えてみよう「静止する」が意味するのは、なぜ $V'(x) = 0$ ではなく $V(x) = 0$ なのだろうか？

質点が静止するのは $v = 0$ のときであり、エネルギー保存則により、これは $V(x) = 0$ を意味する。条件 $V'(x) = 0$ は平衡を表し、そこは質点が止まる場所ではなく、**最も速く動く場所**である。よって x は次を満たす。

$$\lambda(1-x)^2 = mg\sqrt{1-x^2}, \qquad \text{すなわち} \qquad (1-x)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)\sqrt{1-x^2}.$$

解 $x = 1$ は出発点である。$x < 1$ のときは $\sqrt{1-x} > 0$ で割ってから 2 乗してよく、より扱いやすい三次方程式（cubic）が得られる。

$$(1-x)^3 = k^2(1+x), \qquad k = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \approx 0.15470, \quad k^2 \approx 0.023932.$$

$(1-x)^{3/2} = k\sqrt{1+x}$ の両辺はともに正なので、ここで 2 乗しても問題はない。$f(x) = (1-x)^3 - k^2(1+x)$ とおくと、

$$f(0.65) = 0.042875 - 0.039488 \approx +0.0034,$$
$$f(0.66) = 0.039304 - 0.039727 \approx -0.0004,$$

となるので、0.65 と 0.66 の間、それも 0.66 のごく近くに解がある。$f'(x) = -3(1-x)^2 - k^2 < 0$ より f は狭義単調減少であるから、$x < 1$ の範囲の解はこれだけである。質点が次に静止するのは $x \approx 0.66$（より正確には $x \approx 0.6589$）のときであり、そのとき D は棒から約 $0.75l$ の深さにある。

検算

- $\theta = \pi/6$ で $\lambda = l = m = 1$、$g = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$ とすると、A における水平方向の引く力とばねの押す力はともに 0.13397 に等しく、$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ における V の数値微分は 0 になる（さらに $V'' > 0$ なので、この平衡は安定（stable）である）。

- 二分法（bisection）により解 $x = 0.658861$ が得られる。また、D の深さ y についての運動方程式 $m\ddot{y} = mg - 2\lambda(1-x)\,y/(lx)$ を、$y = 0$ での静止状態から（RK4 で）数値的に解き進めると、質点が最初に止まるのは $x = 0.658861$ であり、結果は一致する。
- 平衡の値 $x = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$ は 0.66 と 1 の間にあるが、これは当然である。質点は平衡位置のまわりで振動するからである。

よくある間違い

- ばねが伸びていると考えてしまう。ここでは $AC < 2l$ なので、ばねは縮んでおり、A と C を互いに離れる向きに押している。
- 静止位置を求めるのに $V'(x) = 0$ とおいてしまう。これで得られるのは平衡位置であり、そこでは速さが最大になる。
- 棒より下では重力による位置エネルギーが**負**であることを忘れる。そうするとエネルギーの式は $(0,1)$ に解をもたなくなってしまう。

STEP のその先へ

質量のない物体にはたらく合力は o でなければならないという考え方は、運動の法則ではなく拘束（constraint）である。このような問題は、ラグランジュ（Lagrange）力学（Lagrangian mechanics）を用いると最もすっきり扱える。ラグランジュ力学では、ただ一つの座標（ここでは x）でエネルギー関数を一つ書き下せばよく、拘束力は一切現れない。また、位置エネルギー $V(x)$ からは、V'' を通して平衡位置のまわりの微小振動（small oscillations）の周期も得られる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、エネルギーを用いる方法と微小振動をこうした考え方で扱っている。

解答例

STEP I 1990、第 13 問

力学 ・ 摩擦と剛体のつり合い

STEP I 1990、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

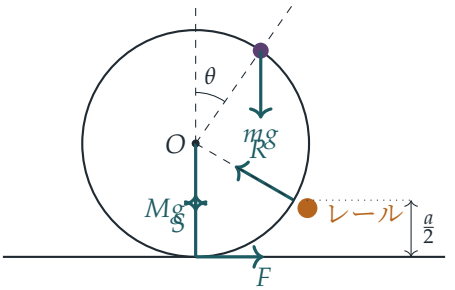
step.maths.org/questions/90-s1-q13

鍵となる考え方

まず質点（particle）を扱う。これは粗い斜面（rough slope）上の普通の質点であり、その斜面とは接点における円柱の接平面（tangent plane）である。次に、質点は釣り合い（equilibrium）の状態にあるので、質点が円柱に及ぼす力の合計は単にその重さであり、接点を通って鉛直下向きに働くことに注目する。円柱の中心のまわりのモーメント（moment）をとると、その力と平面からの摩擦力（friction）以外のすべての力が消える。これが最も手早い糸口である。

解答

質点を質量 m の質点、円柱を質量 M の一様な剛体（rigid body）の円柱とし、その重心（centre of mass）O は軸上にあるとしてモデル化する。レールはなめらかなので垂直抗力（normal force）のみを及ぼす。平面と円柱の表面は粗く、摩擦係数（coefficient of friction）は μ である。すべては O を通る鉛直な断面内で起こるので、以後はこの断面で考える。レールは右側に置く。



図は円柱に働く力を示している（質点の位置に働く mg については後半で説明する）。矢印の長さは実際の大きさに比例していない。

質点の釣り合い

接点 P において、外向きの法線は鉛直上向きと角 θ をなすので、そこでの接平面は水平面に対して θ だけ傾いた斜面である。質点に働く力は、重力 mg、外向き法線方向の垂直抗力（normal reaction）N、そして接線方向で斜面を上る向きの摩擦力 f である。法線方向とそれに垂直な方向に分解すると、

$$N = mg\cos\theta, \qquad f = mg\sin\theta.$$

摩擦がこれを供給できるのは $f \le \mu N$ のとき、すなわち

$$\tan\theta \le \mu, \qquad \text{同値な条件として} \qquad \theta \le \arctan\mu.$$

のときである（N が正であるためには $0 \le \theta < 90^\circ$ が必要だが、質点は円柱の上部にあるのでこれは成り立つ）。

手を離した後の円柱の釣り合い

考えてみよう 質点は垂直抗力と摩擦力によって円柱を押している。これらを別々に扱う必要があるだろうか？

その必要はない。ニュートン（Newton）の第 3 法則（作用・反作用の法則）により、円柱は P において $-N$ と $-f$ を受ける。N と f は合わせて質点の重さと釣り合うので、その和は鉛直上向きの mg である。したがって、質点が円柱に及ぼす力の合計は**P に働く鉛直下向きの mg** である。その作用線（line of action）は O から水平距離 $a\sin\theta$ の位置にあり、レールの側にある。

円柱に働くその他の力は次のとおりである。

- O に働く重力 Mg。
- レールからの抗力 R。これは円柱の表面に垂直なので、半径に沿って O に向かう。レールは高さ $a/2$、すなわち O より $a/2$ 下で接しているので、この半径は鉛直下向きと 60° をなす。よって R は、レールから離れる向きの水平成分 $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ と上向きの成分 $\frac{1}{2}R$ をもつ。
- 最下点における上向きの垂直抗力 S と水平方向の摩擦力 F（レールに向かう向きを正とする）。

O のまわりのモーメント。 Mg、R、S の作用線はすべて O を通る。質点による mg のモーメントは $mg\,a\sin\theta$（円柱をレールの方へ回転させる向き）であり、F は O の距離

a 下で逆向きに働く。よって

$$Fa = mg\,a\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad F = mg\sin\theta.$$

これは正なので、摩擦力は図のとおりレールに向かって働く（レールがなければ円柱はレールの側へ転がるだろう。だからこそ、レールが役に立つためには質点がその側になければならないのである）。

水平方向に分解すると：$\frac{\sqrt{3}}{2}R = F$ なので、

$$R = \frac{2mg\sin\theta}{\sqrt{3}} > 0,$$

これはレールが押すことしかできないことと矛盾しない。

鉛直方向に分解すると：

$$S = (M+m)g - \tfrac{1}{2}R = (M+m)g - \frac{mg\sin\theta}{\sqrt{3}},$$

$\sin\theta < 1 < \sqrt{3}$ かつ $M > 0$ なのでこれは正であり、円柱は平面から離れない。

平面が摩擦力を供給できるのは $F \le \mu S$ のときである：

$$m\sin\theta \le \mu\left[(M+m) - \frac{m\sin\theta}{\sqrt{3}}\right] \iff m\sin\theta\left(\sqrt{3}+\mu\right) \le \sqrt{3}\,\mu\,(M+m).$$

したがって、手を離した後に両方の物体が釣り合いを保てるのは、$\tan\theta \le \mu$ と

$$\boxed{\sin\theta \le \frac{\sqrt{3}\,\mu\,(M+m)}{m\,(\sqrt{3}+\mu)}}$$

がともに成り立つときである（なめらかなレールでは摩擦は必要なく、質点と円柱の間の摩擦は前半で扱った）。

最後の小問

$m = 7M$、$\mu = \frac{3}{4}$ のとき、質点の条件は $\tan\theta \le \frac{3}{4}$、すなわち $\sin\theta \le \frac{3}{5}$ である。円柱の条件は

$$\sin\theta \le \frac{\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot 8M}{7M\,(\sqrt{3}+\frac{3}{4})} = \frac{24\sqrt{3}}{7(4\sqrt{3}+3)} = \frac{24\sqrt{3}\,(4\sqrt{3}-3)}{7\cdot 39} = \frac{24(4-\sqrt{3})}{91}.$$

どちらがより厳しいだろうか？

$$\frac{24(4-\sqrt{3})}{91} < \frac{3}{5} \iff 120(4-\sqrt{3}) < 273 \iff 207 < 120\sqrt{3} \iff 42849 < 43200,$$

であり、これは正しい。したがって、円柱が平面上で滑ることが（ぎりぎりではあるが）効いてくる制約であり、釣り合いが保たれる θ の最大値は

$$\theta_{\max} = \arcsin\frac{24(4-\sqrt{3})}{91} \approx 36.7^\circ,$$

であって、$\arctan\frac{3}{4} \approx 36.9^\circ$ をわずかに下回る。

検算

- 極限の場合 $M \to \infty$：非常に重い円柱は常に摩擦で支えられるので、円柱の条件は自明に成り立つものとなり、$\tan\theta \le \mu$ だけが残る。
- $\theta \to 0$ のとき、質点は頂上にあり、その重さの作用線は O を通り、$F = R = 0$ となる。予想どおり、レールも摩擦も必要ない。
- 数値的に、M, m, a, μ, θ を 20 000 通りランダムに選び、力のベクトルそのものから 3 つの釣り合いの式を解くと、毎回枠で囲んだ条件と一致する。$m = 7M$、$\mu = 0.75$ のとき θ を細かく走査すると $\theta_{\max} \approx 36.737^\circ$、$\sin\theta_{\max} \approx 0.59814$ が得られる。

よくある間違い

- レールからの力を水平とみなしてしまう。この力は円柱の表面に垂直なので半径に沿った向きであり、ここでは水平から 30° 上向きである。
- レールからの力の上向き成分 $\frac{1}{2}R$ を忘れてしまう。これは S を減らし、したがって平面から得られる摩擦力を減らす。
- 円柱の条件と比較せずに $\theta = \arctan\frac{3}{4}$ で止めてしまう。円柱の条件のほうが（わずかに）厳しい。

STEP のその先へ

ここで役立った工夫、すなわち質点の接触力を、その重さに等しい 1 つの合力（resultant）で置き換えることは、剛体に働く任意の力の系は、選んだ点を通る 1 つの力と 1 つの偶力（couple）に帰着されるという考え方の最初の一端である。摩擦を伴う接触を複数もつ剛体の静力学（statics）は大学 1 年次の標準的な題材であり、どの接触点が最初に滑るかという問題は、釣り合いの式だけでは摩擦力が決まらない、より微妙な問題へとつながっていく。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、力、トルク、剛体の釣り合いを丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 1990、第 14 問

確率・統計　・　期待値と最適停止

> **STEP I 1990、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q14

鍵となる考え方

玉は毎回元に戻すので、各回の取り出しは独立（independent）であり、どの回も白・赤・黒が同じ一定の確率で出る。Juggins については、3 回の取り出しを生き残る確率と、生き残った 1 回あたりの平均得点さえ分かればよい。Muggins についてはトレードオフの問題になる。もう 1 回引けば平均的には少し得点が増えるが、それまでに積み上げた得点をすべて失う危険があり、その危険の大きさは N とともに大きくなる。「引いた場合の得点の期待値（expected value）」と「やめた場合の得点」を比べると、閾値（threshold）が得られる。

解答

各回の取り出しで、玉が白・赤・黒である事象をそれぞれ W, R, B とする。玉は元に戻すので、各回の取り出しは互いに独立であり、

$$\mathrm{P}(W) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(R) = \frac{3}{10}, \qquad \mathrm{P}(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

である。

Juggins の戦略

Juggins の最終得点が 0 になるのは、最初の 3 回のうちに黒玉が出るとき、かつそのときに限る。そうでなければ 3 回とも黒以外であり、そこでやめる。よって

$$\mathrm{P}(\text{最終得点が}0) = 1 - \mathrm{P}(3\text{回とも黒以外}) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 1 - \frac{64}{125} = \frac{61}{125}.$$

である。

得点の期待値を求めるため、最終得点を S とする。最初の 3 回がすべて黒以外であれば（確率 $\frac{64}{125}$）、$S = X_1 + X_2 + X_3$ である。ここで X_i は、i 回目が黒でないという条件のもとでの i 回目の得点である。1 回の取り出しが黒でないという条件のもとでは、白である確率は $\frac{1/2}{4/5} = \frac{5}{8}$、赤である確率は $\frac{3/10}{4/5} = \frac{3}{8}$ である。したがって

$$\mathrm{E}(X_i) = 1 \cdot \tfrac{5}{8} + 2 \cdot \tfrac{3}{8} = \tfrac{11}{8}.$$

それ以外の場合はすべて $S = 0$ である。ゆえに

$$\mathrm{E}(S) = \tfrac{64}{125} \cdot 3 \cdot \tfrac{11}{8} = \tfrac{264}{125} = 2.112.$$

考えてみよう ここで $\frac{1}{2}$ と $\frac{3}{10}$ ではなく、$\frac{5}{8}$ と $\frac{3}{8}$ を用いるのはなぜか。

すでに生き残ることを条件としている（条件付き確率（conditional probability））ので、3 回の取り出しはいずれも黒でないと分かっており、確率の和が 1 になるように比率を調整し直さなければならない。同じことを条件付けなしで考えることもできる。$\mathrm{E}(S)$ は、白・赤からなる $2^3 = 8$ 通りの列すべてについての（確率）×（得点）の和である。各回の取り出しは期待値として $1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{11}{10}$ だけ寄与し、その得点が残るのは他の 2 回も生き残る場合（確率 $\frac{16}{25}$）に限られる。これより再び $3 \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{16}{25} = \frac{264}{125}$ が得られる。

Muggins の判断

Muggins が N 点を持っていて、もう 1 回引いて（そこでやめる）とする。得点は $N+1$, $N+2$, 0 のいずれかになるので、

$$\mathrm{E}(\text{もう 1 回引いた後の得点}) = \tfrac{1}{2}(N+1) + \tfrac{3}{10}(N+2) + \tfrac{1}{5} \cdot 0 = \tfrac{4}{5}N + \tfrac{11}{10}.$$

平均的に、引くほうがやめるより有利になるのは

$$\tfrac{4}{5}N + \tfrac{11}{10} > N \iff \tfrac{11}{10} > \tfrac{1}{5}N \iff N < 5.5.$$

のとき、かつそのときに限る。1 回引くことによる平均の利得は $\frac{11}{10}$ であり、平均の損失は $\frac{1}{5}N$、すなわち黒玉が出る確率と失うかもしれない得点との積である。得点は整数なので、次の戦略が示唆される。

得点が 5 以下である間は引き続け、6 以上になったらただちにやめる。

考えてみよう もう 1 回だけ引く場合とやめる場合を比べるのは、近視眼的に見える。$N \geq 6$ で引き、後でさらに引くつもりでいることが得になることはないだろうか。

ない。得点がいったん 6 以上になれば、それ以降どれだけ引いても得点は 6 以上のままである（あるいは 0 でゲームが終わる）。したがって、その後のどの判断の時点でも、1 回分の比較は再び「やめる」を示す。そのような得点から余分に 1 回引くたびに最終得点の期待値は下がるので、そこからの最善の方針はただちにやめることである。6 未満では、もう 1 回引くことがすでにやめることより有利であり、さらに続けるという選択肢はそれをいっそう有利にすることしかない。よって、この閾値による規則は単に妥当な戦略であるだけでなく、最善の戦略である。

この戦略を用いるとき、得点 N から始めたときの最終得点の期待値を $V(N)$ とする。すると $N \geq 6$ では $V(N) = N$、$N \leq 5$ では $V(N) = \frac{1}{2}V(N+1) + \frac{3}{10}V(N+2)$ である。大きい N から順に計算すると、

N	6	5	4	3	2	1	0
$V(N)$	6	5.1	4.35	3.705	3.1575	2.690	2.292

となる。よって Muggins は 1 ゲームあたり平均約 2.29 点を得ることになり、Juggins の 2.112 点を上回る。

検算

- 3 回までの取り出しのすべての列をコンピュータで厳密に数え上げた。その結果、$\mathrm{P}(0) = \frac{61}{125} = 0.488$ および $\mathrm{E}(S) = \frac{264}{125}$ が確認された。2×10^5 ゲームのモンテカルロ法（Monte Carlo method）によるシミュレーションでは、0.488 と 2.111 が得られた。
- $N = 5$ で引くと $\frac{4}{5} \cdot 5 + 1.1 = 5.1 > 5$ となる。$N = 6$ で引くと $5.9 < 6$ となる。よって切り替わりは 5 と 6 の間にある。
- あらゆる戦略にわたる価値反復（value iteration）でも同じ規則が得られた。代わりに ≥ 5 でやめる場合や ≥ 7 でやめる場合は、平均がそれぞれ 2.261, 2.265 となり、6 でやめる場合の 2.292 より低い。

よくある間違い

- $\mathrm{E}(S)$ を $3 \times \frac{11}{10}$ と計算してしまう。これは、後で黒玉が出るとそれまでの得点が消えてしまうことを忘れている。
- 条件付き平均 $\frac{11}{8}$ に、さらに条件なしの確率まで掛けてしまう。これは生き残りの因子を二重に数えている。
- 閾値を $N \leq 5.5$ と書いたまま、N が整数であることに触れない。N は整数なので、規則は「5 では引き、6 ではやめる」となる。

STEP のその先へ

Muggins の問題は**最適停止**（optimal stopping）問題である。「今やめるほうがもう 1 段階進むより有利なときにやめる」という規則は**一段先読み**（one-step look-ahead）規則とよばれ、この問題のように、その規則が「やめる」と示す状態の集合から決して抜け出せないときには、つねに最適となる。同じ考え方はマルコフ決定過程（Markov decision process）や動的計画法（dynamic programming）へとつながる。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は期待値とマルコフ連鎖（Markov chain）の基礎を扱っており、Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）には、同様の第一段階解析（first-step analysis）の例が数多く載っている。

解答例

STEP I 1990、第 15 問

確率・統計 ・ 負の二項分布

> **STEP I 1990、問 15**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q15

鍵となる考え方

最初の部分では、事象を二つの独立な（independent）部分に分ける。すなわち、最後の投げで何が起こるかと、それ以前のすべての投げで何が起こるかである。残りの部分で重要なのは、硬貨には記憶がないという事実、すなわち無記憶性（memoryless property）である。表が出た直後から、次の表が出るまでの待ち時間は新たに始まる。したがって、幾何分布（geometric distribution）に従う待ち時間が偶数になる確率と奇数になる確率さえわかればよい。

解答

以下では一貫して $q = 1 - p$ とおく。各回の投げは独立であり、それぞれ確率 p で表が出る。

k 回目の表の分布

k 回目の表が出る投げの番号を T_k とする。事象 $\{T_k = n\}$ が起こるのは、次の二つが成り立つときであり、かつそのときに限る。

- n 回目の投げが表であり、かつ
- $1, 2, \ldots, n-1$ 回目の投げのうち、表がちょうど $k-1$ 回（したがって裏が $n-k$ 回）である。

両方の条件が必要である。n 回目が裏であれば、k 回目の表は n 回目より前か後に出ることになり、n 回目には出ない。最初の $n-1$ 回に含まれる表の個数が異なれば、そ

の回の投げは k 回目の表にはならない。また、二つの条件を合わせれば十分でもある。

これら二つの事象は互いに重ならない投げの集合に関するものなので、独立である。前者の確率は p である。後者については、$k-1$ 個の表は最初の $n-1$ 回のうち $\binom{n-1}{k-1}$ 通りの位置の組のどれにあってもよい。そのような配置はそれぞれ $k-1$ 個の表と $n-k$ 個の裏からなる特定の列であり、独立性によりその確率は $p^{k-1}q^{n-k}$ である。また、異なる配置は互いに排反である。よって

$$\mathrm{P}(T_k = n) = p \cdot \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad n \geq k,$$

となり、示すべき式が得られた。

偶数から偶数へ

$(k-1)$ 回目の表の後、さらに必要な投げの回数を $G = T_k - T_{k-1}$ とする（ただし $T_0 = 0$ とする）。T_{k-1} 回目より後の投げは、それまでに起こったすべてのことと独立である。したがって G は T_{k-1} と独立であり、幾何分布

$$\mathrm{P}(G = g) = q^{g-1}p, \qquad g = 1, 2, \ldots$$

に従う（これは最初の部分で $k = 1$ とした場合である）。

考えてみよう T_{k-1} が偶数のとき、T_k が偶数になるのはどのような場合か？

$T_k = T_{k-1} + G$ であるから、T_{k-1} が偶数ならば、T_k が偶数になるのは G が偶数のときであり、かつそのときに限る。G は T_{k-1} と独立なので、T_{k-1} が偶数であるという条件をつけても G の分布は変わらない。したがって

$$\mathrm{P}(T_k \text{ が偶数} \mid T_{k-1} \text{ が偶数}) = \mathrm{P}(G \text{ が偶数}).$$

幾何級数の和を計算すると、

$$\mathrm{P}(G \text{ が偶数}) = p\left(q + q^3 + q^5 + \cdots\right) = \frac{pq}{1-q^2} = \frac{pq}{(1-q)(1+q)} = \frac{q}{1+q},$$
$$\mathrm{P}(G \text{ が奇数}) = p\left(1 + q^2 + q^4 + \cdots\right) = \frac{p}{1-q^2} = \frac{1}{1+q}.$$

よって求める確率は

$$\frac{q}{1+q} = \frac{1-p}{2-p}.$$

である。この答えは k によらない。

偶数回目の投げでちょうど二回表が出る確率

今度は三回目の表が出るまで投げる。三つの待ち時間を $G_1 = T_1$、$G_2 = T_2 - T_1$、$G_3 = T_3 - T_2$ とする。同じ無記憶性の議論により、これらは独立であり、いずれも上

と同じ幾何分布に従う。

$$e = \mathrm{P}(G_i \text{ が偶数}) = \frac{q}{1+q}, \qquad o = \mathrm{P}(G_i \text{ が奇数}) = \frac{1}{1+q}.$$

とおく。出発点は 0 回目であり、これは偶数である。偶数の間隔は現在位置の偶奇（parity）を保ち、奇数の間隔は偶奇を入れ替える。次の表は、(G_1, G_2, G_3) の偶奇の八通りのパターンと、その結果として得られる (T_1, T_2, T_3) の偶奇を並べたものである。

G_1	G_2	G_3	T_1	T_2	T_3	偶数回目の表
偶	偶	偶	偶	偶	偶	3
偶	偶	奇	偶	偶	奇	**2**
偶	奇	偶	偶	奇	奇	1
偶	奇	奇	偶	奇	偶	**2**
奇	偶	偶	奇	奇	奇	0
奇	偶	奇	奇	奇	偶	1
奇	奇	偶	奇	偶	偶	**2**
奇	奇	奇	奇	偶	奇	1

偶数回目の投げでちょうど二回表が出るのは三つの場合であり、それらの確率は e^2o、eo^2、o^2e である。間隔の独立性により、求める確率は

$$\begin{aligned} e^2o + 2eo^2 = eo(e+2o) &= \frac{q}{(1+q)^2} \cdot \frac{q+2}{1+q} \\ &= \frac{q(2+q)}{(1+q)^3} = \frac{(1-p)(3-p)}{(2-p)^3}. \end{aligned}$$

検算

- 最初の部分の検算として、$\mathrm{P}(T_k = n)$ を $n \geq k$ について足し合わせると 1 になるはずである。これは負の二項級数（negative binomial series）$\sum_{n \geq k} \binom{n-1}{k-1} q^{n-k} = (1-q)^{-k}$ である。
- 偶奇の二つの確率 $\frac{q}{1+q}$ と $\frac{1}{1+q}$ の和は 1 である。p が 1 に近いとき、最初の表はほぼ必ずすぐに、すなわち奇数回目に出るので、$\mathrm{P}(G \text{ が偶数}) \to 0$ となり、公式と一致する。
- 公平な硬貨（$p = \frac{1}{2}$）のとき、最終的な答えは $\frac{(1/2)(5/2)}{(3/2)^3} = \frac{10}{27} \approx 0.370$ である。2×10^5 回のシミュレーションでは 0.369 が得られた。また、三つの待ち時間について直接和をとった値は、$p = 0.3$、0.5、0.8 のいずれでも公式と 10^{-9} の精度で一致した。

よくある間違い

- 最初の部分で $\binom{n}{k}$ を使ってしまう。最後の投げは表と決まっているので、自由に選べるのは最初の $n-1$ 回だけである。
- 二番目の部分で、負の二項分布を偶数の n について足し合わせようとする。無記憶性による間隔の考え方を使えば、これはまったく必要ない。
- 最後の部分で、偶数回目の位置にある表を、位置どうしが独立であるかのように数えてしまう。各位置は一つ前の位置をもとに決まるので、独立ではない。

STEP のその先へ

k 回目の表が出る時刻は**負の二項分布**（negative binomial distribution）に従う。これを独立な幾何分布の間隔の和として表すことは、ポアソン過程（Poisson process）の到着時刻が独立な指数分布（exponential distribution）の待ち時間から組み立てられることの離散版である。最後の部分の偶奇の記録は二状態のマルコフ連鎖（Markov chain）であり、大学一年次の確率論の講義の早い段階で学ぶ話題である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、これらすべてを扱っている。

解答例

STEP I 1990、第 16 問

確率・統計　・　三角分布と検定

> **STEP I 1990、問 16**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q16

鍵となる考え方

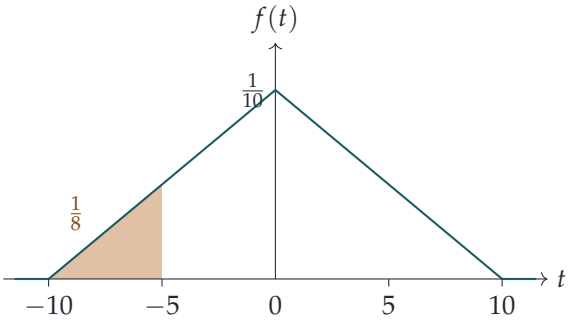
密度関数（density）は三角形の形をしているので、必要な確率はどれも小さな三角形の面積になり、累積分布関数（cumulative distribution function）がすべての仕事をしてくれる。次に気づくべきことは、午前 8 時付近に来うるバスは 8 時のバスだけだという点である。7 時のバスは 7.10 までには行ってしまっており、9 時のバスは 8.50 より前には来られない。したがって、朝に「バスに乗れる」とは、実際には「8 時のバスより先に停留所に着く」ということである。最後の小問は、パラメータが 1 つの二項分布（binomial distribution）モデルと有意性検定（significance test）の問題になる。

解答

T の密度関数

密度は $t=-10$ での 0 から $t=0$ での最大値まで直線的に増加し、その後同じ割合で減少して $t=10$ で 0 になる。よって $[-10,10]$ 上で $f(t)=k(10-|t|)$ の形をとり、それ以外では零である。全面積は底辺 20、高さ $10k$ の三角形の面積なので、$\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 10k=1$ であり、$k=\frac{1}{100}$ を得る：

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{10+t}{100}, & -10\le t\le 0,\\[2mm] \dfrac{10-t}{100}, & 0\le t\le 10,\\[2mm] 0, & \text{それ以外.}\end{cases}$$



後で使うために、左半分での累積分布関数を求めておく。これは底辺 $a+10$、高さ $f(a)$ の三角形の面積である：

$$\mathrm{P}(T<a)=\tfrac{1}{2}(a+10)\cdot\frac{a+10}{100}=\frac{(a+10)^2}{200},\qquad -10\le a\le 0,$$

また $t=0$ に関する対称性より、$0\le a\le 10$ に対して $\mathrm{P}(T>a)=\dfrac{(10-a)^2}{200}$ である。図の網掛け部分の面積は $\mathrm{P}(T<-5)=\frac{25}{200}=\frac{1}{8}$ である。

午前 8.10 までにバスに乗る

バスが来るまで停留所で待つものと仮定する。8 時に来る予定のバスは午前 8 時から T 分後に到着し、$-10\le T\le 10$ である。その前のバスは 7.10 までに出発しており、次のバスは 8.50 より前には到着できない。したがって、8.10 までにバスに乗れるのは、8 時のバスが到着する前に停留所に着くときであり、かつそのときに限る。そしてこのとき、8.10 という期限は自動的に満たされる。

午前 8 時から a 分後に停留所に着いたとすると、$T>a$ のときにバスに乗れる（ちょうど $T=a$ となる確率は零である）。3 つの場合はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned}
7{\cdot}55,\ a=-5:&\quad \mathrm{P}(T>-5)=1-\tfrac{25}{200}=\tfrac{7}{8},\\
7{\cdot}58,\ a=-2:&\quad \mathrm{P}(T>-2)=1-\tfrac{64}{200}=\tfrac{17}{25},\\
8{\cdot}02,\ a=2:&\quad \mathrm{P}(T>2)=\tfrac{64}{200}=\tfrac{8}{25}.
\end{aligned}$$

停留所に着く時刻は、確率 0.5 で 7.55、確率 $0.5\times 0.8=0.4$ で 7.58、確率 $0.5\times 0.2=0.1$ で 8.02 である。寝坊はバスとは無関係なので、全確率の法則（law of total probability）により

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\text{8.10 までにバスに乗る})&=0.5\cdot\tfrac{7}{8}+0.4\cdot\tfrac{17}{25}+0.1\cdot\tfrac{8}{25}\\
&=0.4375+0.272+0.032=\frac{1483}{2000}=0.7415.
\end{aligned}$$

新しい時計はずれているか

まず時計が正しいと仮定する。このとき毎朝 7.55 に停留所に着く。8 時のバスと 9 時のバスの到着時刻を、正時から何分後かで表してそれぞれ T_8、T_9 とする。これらは独立（independent）で、どちらも密度 f をもつ。午前 9 時を過ぎても待っているのは、8 時のバスに乗り遅れ（$T_8 < -5$）、**かつ** 9 時のバスが遅れる（$T_9 > 0$）ときであり、かつそのときに限る。よって、ある 1 日の朝について

$$p = \mathrm{P}(T_8 < -5)\,\mathrm{P}(T_9 > 0) = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{16}.$$

考えてみよう 検定はどちら向きに行うべきか。5 回というのは「多すぎる」のか、それとも「少なすぎる」のか。

時計がずれていれば、p はどちらの向きにも動きうる。時計が d 分進んでいるとしよう。すると停留所に着くのは真の時刻で $7.55 - d$ であり、時計が 9.00 を示すのは真の時刻で $9.00 - d$ である。したがって「午前 9 時」を過ぎても待っている確率は

$$g(d) = \mathrm{P}(T_8 < -5 - d)\,\mathrm{P}(T_9 > -d).$$

となる。時計が進んでいる（$d > 0$）と停留所に早く着くので、8 時のバスに乗り遅れることはまれになり、$g(d) < \frac{1}{16}$ となる。時計が少し遅れていると逆のことが起こる（たとえば $g(-2.5) \approx 0.079$）。したがって、正しい検定は両側検定（two-sided test）である。

新しい時計で午前 9 時を過ぎても待っていた朝の回数を、100 日のうち X 回とする。異なるバスの到着時刻は独立であり、毎日同じ時刻に停留所に着くので、各朝は独立な試行であり

$$H_0\colon \text{時計は正しい},\quad X \sim \mathrm{B}\bigl(100, \tfrac{1}{16}\bigr); \qquad H_1\colon \text{時計がずれている。よって} p \neq \tfrac{1}{16}.$$

H_0 のもとでの期待値は $\mathrm{E}(X) = 6.25$ 回、分散（variance）は $\mathrm{Var}(X) = 100 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{15}{16} \approx 5.86$ なので、標準偏差（standard deviation）は約 2.42 である。観測値 5 は平均をわずかに下回るだけである。正確には

$$\mathrm{P}(X \le 5) = \sum_{k=0}^{5} \binom{100}{k} p^k (1-p)^{100-k} \approx 0.40 \qquad \text{ただし} p = \tfrac{1}{16},$$

であり、連続性補正（continuity correction）を施した正規近似（normal approximation）では $\Phi\bigl((5.5 - 6.25)/2.42\bigr) = \Phi(-0.31) \approx 0.38$ となる。これは 0.025（両側 5% 検定の下側の裾）には遠く及ばず、通常用いられるどの有意水準（significance level）にも届かない。したがって H_0 は棄却されない。すなわち、**新しい時計がずれているという証拠はない**。

これは、時計が正しいという証拠があるということとは異なる。実際、密度が対称なので $g(d) = g(-5-d)$ が成り立つ（2 本のバスの役割を入れ替えればよい）。よって 5 分遅れている時計は、正しい時計とまったく同じ $p = \frac{1}{16}$ を与える。この種のデータをいくら多くの朝について集めても、この 2 つを区別することはできない。

検算

- 密度関数の面積は 1 であり、三角形の公式は f の数値積分の結果と一致する。たとえば $\mathrm{P}(T < -2) = 0.32$ である。
- 答え 0.7415 は、最良の場合 $\frac{7}{8}$（常に 7.55 に着く）と最悪の場合 0.32（常に 8.02 に着く）の間にあり、そうあるべきである。10^6 日分の朝のシミュレーションでは 0.741 を得た。
- (T_8, T_9) の組 10^6 個のシミュレーションでは、$\frac{1}{16} = 0.0625$ に対して 0.0622 を得た。また、二項分布の裾の正確な値 $\mathrm{P}(X \leq 5)$ は 0.4002 となる。

よくある間違い

- 9 時を過ぎても待つためには 8 時のバスに乗り遅れることが必要だ、という点を忘れること。答え $p = \frac{1}{2}$（単に「9 時のバスが遅れる」）は、最初の因子を無視している。
- 「8.10 までにバスに乗る」について、$T \leq 10$ を別に確かめる必要があると考えること。8 時のバスは必ず 8.10 までに到着するので、問題になるのは $T > a$ だけである。
- データがわずかに少なすぎる結果を示しているのに、「多すぎる」かどうかの片側検定（one-tailed test）を行うこと。時計がずれていれば、p はどちらの向きにも動きうる。

STEP のその先へ

この三角形の密度は、ちょうど 2 つの独立な一様確率変数（uniform random variable）の和の分布である。これは畳み込み（convolution）の最初の例であり、大学 1 年の確率論の講義では、和の密度はこの方法で求められる。最後の小問は、統計的識別可能性（identifiability）をほんの少し味わうものである。対称性 $g(d) = g(-5-d)$ は、異なる 2 つのパラメータの値がまったく同じデータを生み出すことを意味しており、どんな検定でもそれらを区別することはできない。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、畳み込みと確率変数の和をわかりやすく扱っている。

解答例

STEP II 1990、第 1 問

純粋数学 ・ 多項式の不等式

> **STEP II 1990、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q1

鍵となる考え方

実数解をもたない 4 次式とは、要するに常に正の値をとる 4 次式のことである。そこで、それを非負であることがわかっている部分、すなわち完全平方式や、特定の区間で符号が明らかな積に分解する方法を探す。どこでも通用する分け方は 1 つもないが、区間ごとに異なる分け方が使え、それらを合わせれば実数全体を覆うことができる。最初の問いでは部品が与えられているが、最後の問いでは自分で見つけなければならない。

解答

2 つの非負の式

4 次式を因数分解（factorising）し、2 次式を平方完成（completing the square）すると、

$$x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2\left(x^2 - 2x + 1\right) = x^2(x-1)^2,$$
$$x^2 - 8x + 17 = (x-4)^2 + 1.$$

1 つ目は 2 つの平方の積であるから、すべての実数 x に対して ≥ 0 である。2 つ目は平方に 1 を加えたものであるから 1 以上であり、特に非負である。

1 つ目の方程式

$p(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 17$ とおく。p は上の 2 つの式の和ではないことに注意する（その和には x^2 ではなく $2x^2$ が現れる）。したがって単純に足し合わせることはできない。代わりに、区間ごとに p を異なる形に分け、全域で $p(x) > 0$ であることを示

す。

> **考えてみよう** 問題では 2 つの非負の式が与えられているが、それらを足しても $p(x)$ にはならない。それでもどうすればこれらを利用できるだろうか？

それぞれの式は、数直線の一部で「借りる」ことができる。ある区間では 4 次式 $x^2(x-1)^2$ を残し、余った $17-8x$ を直接扱う。別の区間では 2 次式 $(x-4)^2+1$ を残し、余った x^4-2x^3 を直接扱う。

$x \le 0$ の場合. このとき $x^4 \ge 0$、$-2x^3 \ge 0$（$x^3 \le 0$ より）、$x^2 \ge 0$、$-8x \ge 0$ である。よって $p(x)$ の各項はすべて非負であり、定数項 17 により全体は 17 以上となる。ゆえに $p(x) > 0$ である。

$0 < x \le 2$ の場合. 次のように書く。

$$p(x) = x^2(x-1)^2 + (17-8x).$$

第 1 項は ≥ 0 であり、$x \le 2$ より $17-8x \ge 17-16 = 1$ である。よって $p(x) \ge 1 > 0$ である。

$x > 2$ の場合. 次のように書く。

$$p(x) = x^3(x-2) + \left(x^2-8x+17\right) = x^3(x-2) + (x-4)^2 + 1.$$

$x > 2$ より x^3 と $x-2$ はともに正であるから $x^3(x-2) > 0$ であり、また $(x-4)^2+1 \ge 1$ である。よって $p(x) > 1 > 0$ である。

3 つの区間はすべての実数を覆い、それぞれで $p(x) > 0$ であるから、$p(x) = 0$ は実数解（real roots）をもたない。

2 つ目の方程式

$q(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 4x + 4$ とおく。同じ方法をまねるが、今度は分け方を自分で選ぶ。

> **考えてみよう** 数直線をどこで分け、どの項どうしを組にすればよいだろうか？

各組が、それぞれの区間で明らかな符号をもつようにしたい。組 $4-4x = 4(1-x)$ は $x \le 1$ で非負である。$x \ge 1$ では、組 $x^4 - x^3 = x^3(x-1)$ が非負であり、残りの $x^2-4x+4 = (x-2)^2$ は完全平方式である。したがって自然な境界は $x = 1$ である。

$x \leq 1$ の場合.　次のように書く。

$$q(x) = \left(x^4 - x^3 + x^2\right) + 4(1-x) = x^2\left[\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}\right] + 4(1-x).$$

第 1 項は ≥ 0 であり、0 となるのは $x = 0$ のときに限る（角括弧の中は $\frac{3}{4}$ 以上である）。第 2 項は $x \leq 1$ より ≥ 0 であり、0 となるのは $x = 1$ のときに限る。2 つの項が同時に 0 になることはないから、$q(x) > 0$ である。

$x \geq 1$ の場合.　次のように書く。

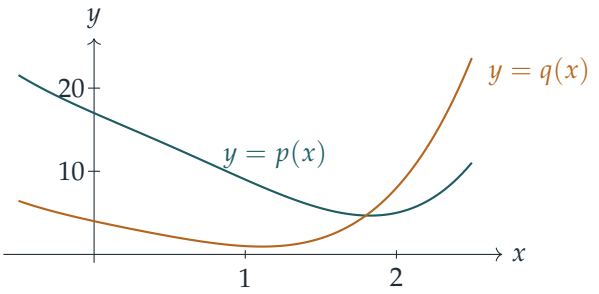
$$q(x) = x^3(x-1) + \left(x^2 - 4x + 4\right) = x^3(x-1) + (x-2)^2.$$

$x \geq 1$ では x^3 と $x - 1$ はともに非負であるから第 1 項は ≥ 0 であり、0 となるのは $x = 1$ のときに限る。第 2 項は平方であり、0 となるのは $x = 2$ のときに限る。やはり両者が同時に 0 になることはないので、$q(x) > 0$ である。

よって、すべての実数 x に対して $q(x) > 0$ であり、$q(x) = 0$ は実数解をもたない。

検算

- 各分解を展開し、本当に p または q に戻ることを確かめる。たとえば $x^3(x-1) + (x-2)^2 = x^4 - x^3 + x^2 - 4x + 4$ である。
- $-5 \leq x \leq 8$ を刻み幅 10^{-4} で数値的に調べると、p の最小値は約 4.67（$x \approx 1.83$ 付近）、q の最小値は約 0.94（$x \approx 1.11$ 付近）となる。図からもわかるとおり、どちらも十分に正である。



よくある間違い

- 与えられた 2 つの式を足して、その和が $p(x)$ であると主張すること。x^2 の項が一致しないので、そうはならない。

- 「非負の項と非負の項の和」から $q(x) > 0$ と結論すること。それでは $q(x) \geq 0$ しか得られない。解の存在を否定するには、2 つの項が同時に 0 にならないことを示さなければならない。
- $-2x^3$ や $-8x$ の符号が常に負だと思い込むこと。$x \leq 0$ では、これらは邪魔になるどころか助けになる。

STEP のその先へ

多項式を平方和（sum of squares）として表すことでその正値性を示すことは、本格的な研究テーマである。1 変数の非負多項式はすべて、2 つの実多項式の平方の和として表せる。しかしヒルベルト（Hilbert）は、多変数ではこれが成り立たないことを示し、これが彼の第 17 問題へとつながった。今日では、最適化問題においてコンピュータがこのような分解を探索している。この種の不等式の技法をさらに多く知りたければ、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（上級数学問題集）が次の一歩としてよいだろう。

解答例

STEP II 1990、第 2 問

純粋数学 ・ トレミーの定理

> **STEP II 1990、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q2

鍵となる考え方

前半は三角関数の恒等式（identity）であり、正弦の積をすべて余弦の差に直してしまえば崩れるように解ける。そのうえで条件 $A+B+C+D=\pi$ を用いて $\cos(A+C)$ と $\cos(A-C)$ を書き換えればよい。後半はトレミー（Ptolemy）の定理、すなわちトレミーの定理（Ptolemy's theorem）である。中心 O がヒントになっている。半径 r の円の弦（chord）の長さはつねに $2r\sin$(弦が中心に張る角の半分、中心はO) であり、O のまわりの四つの半角の和は π になる。これはまさに前半の条件である。

解答

恒等式

積和公式（product-to-sum formula）

$$\sin X \sin Y = \tfrac{1}{2}\big[\cos(X-Y)-\cos(X+Y)\big]$$

を 3 回用いる。左辺については

$$\sin(A+B)\sin(A+D) = \tfrac{1}{2}\big[\cos(B-D)-\cos(2A+B+D)\big],$$
$$\sin B \sin D = \tfrac{1}{2}\big[\cos(B-D)-\cos(B+D)\big],$$

であるから、$\cos(B-D)$ の項が打ち消し合い、

$$\sin(A+B)\sin(A+D)-\sin B\sin D = \tfrac{1}{2}\big[\cos(B+D)-\cos(2A+B+D)\big].$$

となる。右辺については

$$\sin A \sin C = \tfrac{1}{2}\big[\cos(A-C)-\cos(A+C)\big].$$

である。ここで $C = \pi - A - B - D$ を用いると、

$$A + C = \pi - (B + D), \qquad \text{よって} \quad \cos(A + C) = -\cos(B + D),$$
$$A - C = (2A + B + D) - \pi, \qquad \text{よって} \quad \cos(A - C) = -\cos(2A + B + D),$$

を得る。ただし $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ および $\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta$ を用いた。したがって

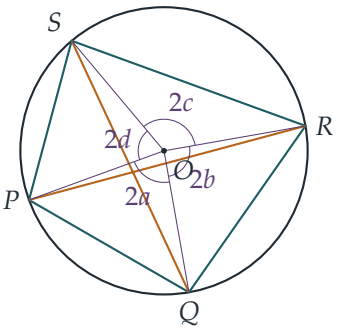
$$\sin A \sin C = \tfrac{1}{2}\big[-\cos(2A + B + D) + \cos(B + D)\big],$$

となり、これは左辺と一致する。以上で恒等式が証明された。

円

円の半径を r とする。円周上を P から Q、R、S と進んで P に戻るとき、弧 PQ、QR、RS、SP が O に張る角をそれぞれ $2a$、$2b$、$2c$、$2d$ とする。点はこの順に並んでいるので、これら四つの弧は重なることなく円周全体を構成する。よって

$$a, b, c, d > 0, \qquad 2a + 2b + 2c + 2d = 2\pi, \qquad \text{すなわち} \quad a + b + c + d = \pi.$$



考えてみよう 弧が中心に張る角が 2θ であるような弦の長さはいくらか。

$0 < 2\theta \le \pi$ のとき、O と弦の両端がつくる三角形は、2辺が r で頂角が 2θ の二等辺三角形（isosceles triangle）である。O から下ろした垂線は弦と頂角をともに二等分するので、弦の長さは $2r\sin\theta$ となる。一方 $\pi < 2\theta < 2\pi$ のときは、三角形の O における内角は $2\pi - 2\theta$ であり、弦の長さは $2r\sin(\pi - \theta) = 2r\sin\theta$ となる。よっていずれの場合も

$$\text{弦の長さ} = 2r\sin\theta.$$

これを四つの辺と対角線（弧 $P \to Q \to R$ が張る角は $2(a + b)$、弧 $Q \to R \to S$ が張る角は $2(b + c)$）に適用すると、

$$PQ = 2r\sin a, \quad QR = 2r\sin b, \quad RS = 2r\sin c, \quad PS = 2r\sin d,$$

$$PR = 2r\sin(a+b), \qquad QS = 2r\sin(b+c).$$

を得る。$a+b$ や $b+c$ は $\frac{\pi}{2}$ を超えることがある点に注意せよ。半円より大きい弧に対する公式が必要だったのはこのためである。

$4r^2$ で割ると、示すべき結果は

$$\sin a \sin c + \sin b \sin d = \sin(a+b)\sin(b+c),$$

すなわち、同値な形で

$$\sin(b+a)\sin(b+c) - \sin a \sin c = \sin b \sin d.$$

となる。これはまさに前半の恒等式で $A = b$、$B = a$、$D = c$、$C = d$ としたものであり、$b+a+d+c = \pi$ であるからこの代入は許される。改めて $4r^2$ を掛ければ

$$PQ \times RS + QR \times PS = PR \times QS,$$

となり、示すべきことが得られた。

検算

- 半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円に内接する正方形は、辺が 1、対角線が $\sqrt{2}$ である：$1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$。
- 辺が p と q の任意の長方形では、トレミーの定理は $p^2 + q^2 = (\text{対角線})^2$ となる。つまりピタゴラスの定理（Pythagoras's theorem）は特別な場合である。3×4 の長方形では $9 + 16 = 25 = 5\times 5$ である。
- A, B, D の無作為な値 10^5 組（$C = \pi - A - B - D$ とする）で恒等式を数値的に確かめたところ、最大誤差は約 5×10^{-15} であった。また、無作為に選んだ円に内接する四角形（cyclic quadrilateral）10^5 個は、相対誤差 10^{-15} 以内で最終結果を満たした。点の順序を崩すと（たとえば円周上に P, R, Q, S の順に並べると）等式は成り立たなくなるので、順序は本当に重要である。

よくある間違い

- 円周上の点における円周角（inscribed angle）を、どの弧に対する角なのかを述べずに用いること。問題が示唆するように中心角を使えば、この問題は避けられる。
- 対角線が半円より大きい弧を切り取ることがあるのを忘れること。公式 $2r\sin\theta$ はそれでも成り立つが、上で述べた一行の正当化が必要である。
- A, B, C, D に対応させる角を取り違えること。A と C は右辺にのみ現れる二つの角でなければならず、ここでは b と d である。

STEP のその先へ

トレミーの定理には深い続きがある。平面上の**任意の** 4 点について $PQ \cdot RS + QR \cdot PS \geq PR \cdot QS$ が成り立ち、等号が成り立つのはちょうど 4 点がこの順に円（または直線）上に並ぶときである。鮮やかな証明として、点を複素数（complex numbers）p, q, r, s とみなし、代数的恒等式 $(p-q)(r-s) + (q-r)(p-s) = (p-r)(q-s)$ に注目して三角不等式（triangle inequality）を適用する方法がある。等号成立の場合を調べるところで複素平面の幾何が登場する。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ビジュアル複素解析』）は、この種の議論や、この結果をやはり見事に証明する反転（inversion）に触れるのにうってつけの本である。

解答例

STEP II 1990、第 3 問

純粋数学 ・ 3 次関数のグラフの概形

STEP II 1990、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s2-q3

鍵となる考え方

3 次関数（cubic）を $f(x) = x(x^2 - 2bx + c^2)$ と書く。2 つの判別式（discriminant）がすべてを支配する。$f'(x)$ の判別式からは極値点（turning point）があるかどうかがわかり、2 次の因数の判別式からは曲線が原点以外で x 軸と交わるかどうかがわかる。7 つの場合は、2 つの境界値 $\frac{\sqrt{3}}{2}c$ と c に対して b をどこに置くかの違いにすぎない。3 次関数のグラフを描いてしまえば、$y^2 = f(x)$ はほとんど労せずに得られる。$f(x) \geq 0$ となる部分だけを残し、平方根をとり、x 軸に関して折り返せばよい。

解答

すべての場合に成り立つ事実

$f(x) = x^3 - 2bx^2 + c^2x = x(x^2 - 2bx + c^2)$ とおく。このとき

$$f'(x) = 3x^2 - 4bx + c^2, \qquad f''(x) = 6x - 4b.$$

- **極値点。** f' の判別式は $16b^2 - 12c^2 = 4(4b^2 - 3c^2)$ である。したがって f' は、$2b > c\sqrt{3}$ ならば相異なる 2 つの実数の零点をもち、$2b = c\sqrt{3}$ ならば 1 つの重根（repeated root）をもち、$2b < c\sqrt{3}$ ならば零点をもたない。零点があるとき、それらの和は $\frac{4}{3}b \geq 0$、積は $\frac{1}{3}c^2 \geq 0$ であるから、どちらも負ではない。すなわち、極値点はすべて $x \geq 0$ にある。
- **根（*root*）。** 常に $f(0) = 0$ である。2 次の因数は $(x - b)^2 + c^2 - b^2$ であるから、$b < c$ ならば実数の零点をもたず、$b = c$ ならば二重の零点 $x = b$ をもち、$b > c$ ならば 2 つの零点 $b \pm \sqrt{b^2 - c^2}$ をもつ。

- **負の x。** $x<0$ のとき、x^3、$-2bx^2$、c^2x はいずれも ≤ 0 であり、しかも $x^3<0$ であるから、$f(x)<0$ である。y 軸より左側の曲線は、すべて x 軸より下にある。
- **形状。** $x\to\pm\infty$ のとき $f(x)\to\pm\infty$ である。原点での傾きは $f'(0)=c^2$ であり、変曲点（point of inflection）は f'' の符号が変わる $x=\frac{2}{3}b$ のただ1つである。

$c>0$ のとき常に $c\sqrt{3}<2c$ であるから、c を固定すると、各場合は b が増加する順に並ぶ。すなわち、極値点なし、次に停留変曲点、次に軸より上にある極値点、次に軸に接する根、最後に3つの根、という順である。

3次関数のグラフ

(i) $2b<c\sqrt{3}$。このとき、すべての x に対して $f'(x)>0$ である（判別式が負で、最高次の係数が正であるから）。よって f は狭義単調増加（strictly increasing）である。また $b<\frac{\sqrt{3}}{2}c<c$ である（ここでは $c>0$ であることに注意）から、根は原点のみである。曲線は傾き c^2 で原点を通って上昇し、$x=\frac{2}{3}b$ に変曲点をもつ。

(ii) $2b=c\sqrt{3}\neq 0$。このとき $f'(x)=3(x-\frac{2}{3}b)^2\ge 0$ であるから、f は依然として増加するが、$x=\frac{2}{3}b=c/\sqrt{3}$ において一瞬だけ水平になる。ここは $f''=0$ となる点でもあるから、停留変曲点（stationary point of inflection）である。$c^2=\frac{4}{3}b^2$ を用いると

$$f\left(\tfrac{2}{3}b\right)=\tfrac{2}{3}b\left(\tfrac{4}{9}b^2-\tfrac{4}{3}b^2+\tfrac{4}{3}b^2\right)=\tfrac{8}{27}b^3=\tfrac{\sqrt{3}}{9}c^3>0.$$

やはり $b<c$ であるから、根は原点のみである。

(iii) $c\sqrt{3}<2b<2c$。このとき f' は2つの零点 $x_1<x_2$ をもち、どちらも正である。$x_1=\frac{1}{3}\left(2b-\sqrt{4b^2-3c^2}\right)$ で極大（maximum）、$x_2=\frac{1}{3}\left(2b+\sqrt{4b^2-3c^2}\right)$ で極小（minimum）となる。

? **考えてみよう** 極小点は x 軸より下に沈み込むだろうか？

沈み込まない。$b<c$ であるから、因数 $(x-b)^2+c^2-b^2$ はすべての x に対して正であり、したがってすべての $x>0$ に対して $f(x)>0$ である。よって2つの極値点はどちらも軸より上にあり、曲線が軸を横切るのは依然として原点のみである。曲線は上昇し、少しだけ下がり、その後はずっと上昇し続ける。

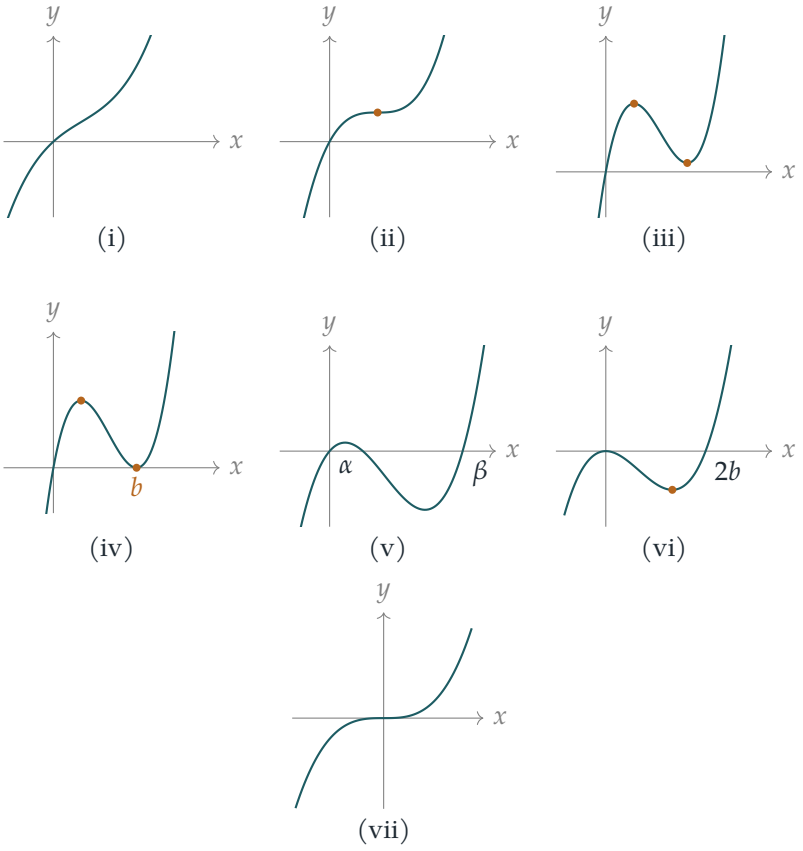
(iv) $b=c\neq 0$。このとき $f(x)=x(x-b)^2$ である。$x=b$ が重根であることは、曲線がそこで軸に接することを意味する。これが極小点 $(b,0)$ である。$f'(x)=(x-b)(3x-b)$ のもう1つの零点から、極大点 $\left(\frac{1}{3}b,\frac{4}{27}b^3\right)$ が得られる。

(v) $b>c>0$。3つの根 $0<\alpha<\beta$ がある。ここで $\alpha=b-\sqrt{b^2-c^2}$、$\beta=b+\sqrt{b^2-c^2}$ である（$\sqrt{b^2-c^2}<b$ であるから、どちらも正）。隣り合う根の間で曲線は向きを変えなければならないから、極大点は $(0,\alpha)$ にあってそこでは $f>0$ であり、極小点は (α,β) にあってそこでは $f<0$ である。したがって、$f\ge 0$ となるのはちょうど $[0,\alpha]$

上と $[\beta, \infty)$ 上である。

(vi) $c = 0$、$b \neq 0$。このとき $f(x) = x^2(x-2b)$、$f'(x) = x(3x-4b)$ である。原点が重根であるから、原点は曲線が軸に接する極大点となり、$\left(\frac{4}{3}b, -\frac{32}{27}b^3\right)$ に極小点がある。曲線は $x = 2b$ で軸を横切る。

(vii) $b = c = 0$。これは $y = x^3$ であり、原点に停留変曲点をもつ。



これらの図では、(i)〜(iv) で $c = 1$ かつ $b = \frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0.99, 1、(v) で $(b, c) = (1, 0.8)$、(vi) で $b = 0.6$ としている。(iii) と (iv) の小さな山が見えるように、縦軸の尺度は図ごとに異なる。

曲線 $y^2 = f(x)$

次の 3 つの規則によって、各 3 次関数のグラフは曲線 $y^2 = f(x)$ に変わる。

- $f(x) < 0$ となる点は存在せず、特に $x < 0$ となる点は存在しない。
- $f(x) \geq 0$ のところでは $y = \pm\sqrt{f(x)}$ であるから、曲線は x 軸に関して対称であり、

f が最大となるところで最も高くなる。

▶ 微分すると $2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$ である。

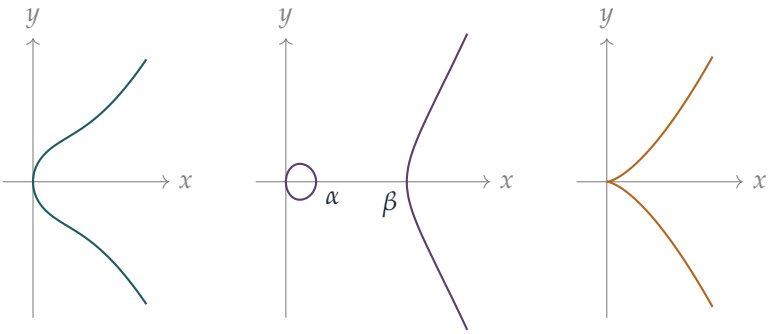
考えてみよう 曲線は x 軸と交わるところでどのような形をしているだろうか？

f の単純根（simple root）x_0 では $f'(x_0) \neq 0$ であり、$y \to 0$ のとき $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{2y}{f'(x)} \to 0$ となる。したがって、そこでの接線は**鉛直**であり、上半分と下半分はなめらかにつながる。このような根の近くでは $y^2 \approx f'(x_0)(x - x_0)$ であり、これは横倒しになった放物線である。場合 (vii) が示すように、重根では様子が異なる。

場合 (i)。$f(x) \geq 0$ となるのはちょうど $x \geq 0$ のときであり、0 における根は単純根である（$f'(0) = c^2 > 0$）。したがって、曲線は有界でない 1 本の枝（branch）からなる。曲線は鉛直な接線をもって原点から出発し、原点付近では $y^2 \approx c^2 x$ のように見える。f は増加するから $|y| = \sqrt{f(x)}$ は着実に増加し、最終的には $x^{3/2}$ のように増大する。上半分は、はじめは $\sqrt{x}$ のように上に凸（concave）であり、最後は $x^{3/2}$ のように下に凸（convex）になるから、変曲点をもつ（対称性により、下半分も同様である）。

場合 (v)。$[0, \alpha]$ 上と $[\beta, \infty)$ 上で $f(x) \geq 0$ であり、3 つの根はすべて単純根である。したがって、曲線は 2 つの分離した部分からなる。1 つは $(0,0)$ と $(\alpha, 0)$ を通る閉じた卵形（oval）であり、どちらの点でも鉛直な接線をもち、3 次関数の極大点の x 座標で（y 方向に）最も幅が広くなる。もう 1 つは、$(\beta, 0)$ から鉛直な接線をもって出発し、場合 (i) の曲線のように右へ開いていく有界でない枝である。3 次関数が負となる隙間 $\alpha < x < \beta$ には何もない。

場合 (vii)。$y^2 = x^3$ であるから、$x \geq 0$ かつ $y = \pm x^{3/2}$ である。このとき、$x \to 0$ のとき $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \pm\frac{3}{2}x^{1/2} \to 0$ となる。すなわち、上半分と下半分はどちらも上と下から x **軸に接しながら**原点に到達し、尖点（cusp）と呼ばれる鋭くとがった点をつくる。



(i)　(v)　(vii)

これらの図では、対応する 3 次関数と同じ b と c の値を用い、2 つの軸の尺度を等しくしている。

検算

- 一般的な主張に $b = c = 0$ を代入すると、(vii) と一致するはずである。たとえば、(ii) の停留値 $\frac{8}{27}b^3$ と (vi) の極小値 $-\frac{32}{27}b^3$ は、どちらも原点に縮退する。
- $c = 1$、$b = 0.99$（場合 (iii)）のとき、極値点はおよそ $(0.340, 0.150)$ と $(0.980, 0.020)$ にあり、主張どおりどちらも軸より上にある。$(b, c) = (1, 0.8)$ のとき、根は 0、0.4、1.6 であり、極小値はおよそ -0.388 で、$x \approx 1.147$ においてとる。これは $(0.4, 1.6)$ の内部にある。
- 場合 (i)、(iii)、(v) について数千組のランダムな (b, c) で数値的に検証し、極値点と根の個数と位置、および $f \geq 0$ となる集合を確認した。

よくある間違い

- 場合 (iii) の極小点を軸より下に描くこと。$b < c$ のとき、3 次関数はすべての $x > 0$ で正である。
- $y^2 = f(x)$ が単純根で x 軸を横切るところに、角や水平な接線を描くこと。そこでの接線は鉛直である。
- $y^2 = f(x)$ には 3 次関数が負となる点が存在しないことを忘れること。そのため、場合 (v) では卵形と枝はつながっていない。

STEP のその先へ

3 次式が相異なる根をもつような曲線 $y^2 = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ は**楕円曲線**（elliptic curve）であり、現代の数論（number theory）の中心的な対象の 1 つである。3 つの実数の根をもつ場合 (v) では、卵形と枝からなる 2 つの部分の図が得られ、実数の根を 1 つだけもつ場合 (i) では、1 つの部分からなる図が得られる。根が一致すると、曲線は特異（singular）になる。場合 (vii) は尖点をもち、場合 (iv) では $(b, 0)$ で自分自身と交差する曲線が得られる。このような曲線上の点を「足し合わせる」ことができる驚くべき仕組みへの入門としては、シルヴァーマン（Silverman）とテイト（Tate）による *Rational Points on Elliptic Curves*（楕円曲線上の有理点）を参照のこと。

解答例

STEP II 1990、第 4 問

純粋数学 ・ 直線の配置と数学的帰納法

> **STEP II 1990、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q4

この問題は、*Beyond STEP* の第 9.1 節「**平面を分割する直線**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/lazy-caterer.html

鍵となる考え方

図を直線 1 本ずつ見ていく。新しい直線を加えると、それは古い直線のそれぞれとちょうど 1 回ずつ、しかも相異なる点で交わるので、予測できる個数の部分に切り分けられる。その各部分は二つの役割を果たす。一つは新しい線分になること、もう一つは既存の領域を二つに切り分けることである。新しい直線 1 本の効果を数えると漸化式（recurrence）が得られ、その漸化式は容易に和をとって解くことができる。

解答

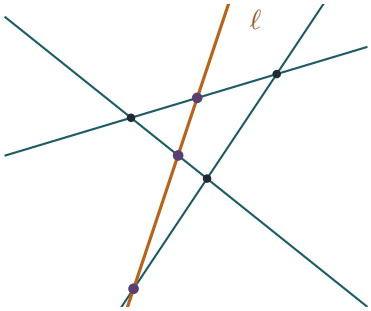
小さな場合

以下を通じて、「線分」（segment）とは、各直線上の隣り合う交点の間にある部分を指す。各直線の両端にある 2 本の無限に延びた部分、すなわち半直線（ray）も含める。また、直線が 1 本だけのときは、その直線全体を 1 本の線分と数える。最初のいくつかの場合を図に描くと次のようになる。

n	1	2	3	4
線分	1	4	9	16
領域	2	4	7	11

たとえば、3 本の直線は三角形をつくる。各直線は有限の辺 1 本と半直線 2 本に切り分

けられるので、線分は 9 本である。領域は、三角形そのもの、その辺に接する 3 個の領域、その頂点に接する 3 個の領域であり、合わせて 7 個である。線分の数からは n^2 が予想される。



図は 3 本の直線（青緑）と 4 本目の直線 ℓ（琥珀色）を示している。ℓ が古い直線と交わる 3 個の紫の点によって、ℓ は 4 個の部分に切り分けられ、各部分が古い 7 個の領域のうち一つずつを分割するので、領域は 11 個になる。

線分の数

n 本の直線のうち 1 本を固定する。どの 2 本も平行でないので、この直線は他の $n-1$ 本の直線のそれぞれと交わる。さらに、どの 3 本も 1 点で交わらない（共点でない、concurrent でない）ので、これら $n-1$ 個の交点はすべて相異なる（もし二つが一致すれば、そこで 3 本の直線が交わることになる）。したがって、この直線上には相異なる $n-1$ 個の点があり、それらが直線を n 個の部分、すなわち $n-2$ 本の有限の線分と 2 本の半直線に切り分ける。これを n 本の直線それぞれについて行うと、

$$\text{線分の数} = n \cdot n = n^2.$$

各線分はちょうど 1 本の直線上にあるので、どの線分も 1 回ずつ数えられている。

数学的帰納法（induction）を用いたければ、線分の数を $S(n)$ とおく。一般の位置（general position）にある $n-1$ 本の直線に n 本目の直線を加えると、新しい直線は n 個の部分に切り分けられ、さらにそれが交わる古い $n-1$ 本の直線のそれぞれでは、線分の一つが二つに分割され、線分が 1 本ずつ増える。よって

$$S(n) = S(n-1) + n + (n-1) = S(n-1) + 2n - 1,$$

であり、$S(1) = 1$ と合わせて、$S(n-1) = (n-1)^2$ ならば $S(n) = (n-1)^2 + 2n - 1 = n^2$ となる。

領域の数

一般の位置にある n 本の直線がつくる領域の数を $R(n)$ とおく。すると $R(1)=2$ である。このような $n-1$ 本の直線から出発し、n 本目の直線 ℓ を加える。上と同様に、ℓ は古い直線と相異なる $n-1$ 個の点で交わり、n 個の部分に切り分けられる。

これらの部分の一つをとる。その内部はどの古い直線とも交わらないので、ただ一つの古い領域の内部にあり、しかもその領域を境界から境界まで（あるいは無限遠まで）横切っている。したがって、それはその領域を二つに分割する。

> **考えてみよう** n 個の部分のうち二つが同じ古い領域に含まれ、その結果、新しく生じる領域が n 個より少なくなることはありうるだろうか？

ありえない。各領域は半平面（各古い直線に関して決まった側）の共通部分であるから、凸（convex）である。直線と凸集合の共通部分は一つの区間であるので、ℓ は各古い領域を高々 1 回しか通らず、異なる部分は異なる領域に含まれる。また、ℓ が通らない領域は影響を受けない。

よって、ℓ を加えると、ちょうど n 個の古い領域がそれぞれ二つに分割され、残りはそのまま変わらない。すなわち

$$R(n)=R(n-1)+n.$$

ここで数学的帰納法を用いる。式 $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ は $n=1$ のとき 2 を与え、これは正しい。$R(n-1)=\frac{1}{2}\big((n-1)^2+(n-1)+2\big)=\frac{1}{2}(n^2-n+2)$ ならば、

$$R(n)=\tfrac{1}{2}(n^2-n+2)+n=\tfrac{1}{2}(n^2+n+2),$$

となるので、求めるとおり、この式はすべての $n\geq 1$ で成り立つ。（同値な言い方をすれば、$R(n)=1+(1+2+\cdots+n)=1+\frac{1}{2}n(n+1)$ であり、先頭の 1 は直線が 1 本もないときの平面全体を表す。）

検算

- この式は $n=1,2,3,4$ に対して $2,4,7,11$ を与え、図と一致する。
- オイラー（Euler）の公式によって、独立な検算ができる。無限に延びた半直線をすべてただ一つの「無限遠点」でつなぐ。すると、頂点は $V=\binom{n}{2}+1$ 個、辺は $E=n^2$ 本、面は F 個で $V-E+F=2$ が成り立つので、$F=n^2-\binom{n}{2}+1=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ となる。
- 整数係数をもつ高々 8 本の直線からなる集合をコンピュータでランダムに描き、交点の位置を求めて線分を数え、さらに各交点の周りと遠方にとった標本点について

「各直線のどちら側にあるか」のパターンが何通り現れるかによって領域を数えた。たとえば、8 本の直線では、毎回 64 本の線分と 37 個の領域が得られた。

よくある間違い

- 各直線上の 2 本の無限に延びた半直線を数え忘れ、n^2 ではなく $n(n-2)$ としてしまう。
- 新しい直線によって増える領域を、n 個（部分 1 個につき 1 個）ではなく $n-1$ 個（交点 1 個につき 1 個）としてしまう。
- 仮定を使わない。「どの 3 本も 1 点で交わらない」という条件がなければ、直線上の交点が相異なるとは限らず、個数は減ってしまう。

STEP のその先へ

これは**超平面配置**（hyperplane arrangement）の最も簡単な場合である。同じ議論を 1 次元上げて行うと、一般の位置にある n 枚の平面は空間を $\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$ 個の部分に切り分けることがわかる。新しい平面それ自体が、古い平面によって $R(n-1)$ 個の領域に切り分けられるからである。オイラーの公式による検算は、位相幾何学（topology）の中心的な概念であるオイラー標数（Euler characteristic）を初めて垣間見るものである。オイラーの公式とその応用についてのすばらしい章として、Aigner と Ziegler の *Proofs from THE BOOK*（邦題『天書の証明』）を参照するとよい。

解答例

STEP II 1990、第 5 問

純粋数学 ・ 複素数と円

> **STEP II 1990、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q5

鍵となる考え方

円 $|z| = r$ 上では、共役（conjugation）をとることは割り算と同じである：$\bar{z} = r^2/z$。これにより、「この比が純虚数（purely imaginary）である」（2 つの方向が垂直であるかどうかの判定法）という条件が、$lm + pq = 0$ というすっきりした多項式の条件に変わる。そのあとの問題の残りは追跡作業である。垂直な弦（chord）をとるたびに、新しい点は $z \mapsto c/z$ という形の式で与えられるので、これらの写像を合成（compose）して何が出てくるかを見ればよい。

解答

垂直であるための条件

S の半径を r とすると、$|l| = |m| = |p| = |q| = r$ であるから、

$$\bar{l} = \frac{r^2}{l}, \qquad \bar{m} = \frac{r^2}{m}, \qquad \bar{p} = \frac{r^2}{p}, \qquad \bar{q} = \frac{r^2}{q}.$$

弦 LM と PQ の方向はそれぞれ $l - m$ と $p - q$ であり、点はすべて異なるので、どちらも零ではない。零でない 2 つの複素数が垂直な方向を表すのは、その商が純虚数であるときであり、かつそのときに限る。そこで

$$w = \frac{l - m}{p - q}.$$

とおく。このとき、w が純虚数であることは $w + \bar{w} = 0$ と同値である。ここで

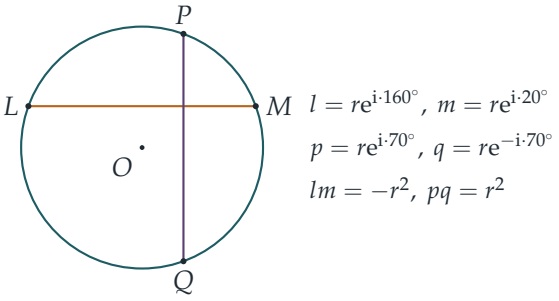
$$\bar{w} = \frac{r^2/l - r^2/m}{r^2/p - r^2/q} = \frac{(m - l)/(lm)}{(q - p)/(pq)} = \frac{l - m}{p - q} \cdot \frac{pq}{lm} = w\,\frac{pq}{lm},$$

であるから、

$$w + \bar{w} = w\left(1 + \frac{pq}{lm}\right) = \frac{w}{lm}(lm + pq).$$

$w \neq 0$ かつ $lm \neq 0$ であるから、これが零になるのは $lm + pq = 0$ のとき、かつそのときに限る。よって、$LM \perp PQ$ であることと $lm + pq = 0$ であることは同値であり、示すべきことが示された。

（垂直二等分線（perpendicular bisector）を用いる方法も、同じ考え方を幾何の装いで述べたものである。弦 LM の垂直二等分線は O を通り、弦の方向はその垂直二等分線の方向の i 倍になる。）



3 点の場合

A_1, A_2, A_3 を a_1, a_2, a_3 で表し、A_1' を z で表す。上の条件により、「$A_1'A_2' \perp A_1A_2$」は $z\,a_2' = -a_1a_2$ を意味するので、

$$a_2' = -\frac{a_1a_2}{z}.$$

$|a_2'| = r \cdot r/r = r$ であるから、この点は確かに S 上にある。また、条件を満たす S 上の点はこれ以外にない。同様にして

$$a_3' = -\frac{a_2a_3}{a_2'} = \frac{a_3}{a_1}z,$$

$$a_1'' = -\frac{a_3a_1}{a_3'} = -\frac{a_1^2}{z}.$$

したがって、$A_1'' = A_1'$ となるのは $z = -a_1^2/z$ のとき、かつそのときに限る。すなわち

$$z^2 = -a_1^2 \iff z = \pm \mathrm{i}\,a_1.$$

どちらの値も絶対値が r なので S 上にあり、$a_1 \neq 0$ であるから互いに異なる。よって A_1' の位置はちょうど **2** つあり、それは A_1 を O のまわりに $\pm 90^\circ$ 回転した点である。

考えてみよう　写像 $z \mapsto -a_1^2/z$ は円に対して何をしているのだろうか。

S 上では $1/z = \bar{z}/r^2$ であるから、$-a_1^2/z = -(a_1^2/r^2)\,\bar{z}$ となる。これは共役をとったあとに回転（rotation）を施したもの、すなわち円の直径に関する鏡映（reflection）である。鏡映は、その鏡となる直径の両端のちょうど2点を動かさない。解が2つある理由はここにある。実際、各ステップ $z \mapsto -a_k a_{k+1}/z$ はどれもこのような鏡映であり、このことが以下のすべてを説明する。

4点の場合

最後のステップの代わりに a_4 を用いて同じ追跡を続けると、

$$a_2' = -\frac{a_1 a_2}{z}, \qquad a_3' = \frac{a_3}{a_1}\,z,$$
$$a_4' = -\frac{a_3 a_4}{a_3'} = -\frac{a_1 a_4}{z}, \qquad a_1'' = -\frac{a_4 a_1}{a_4'} = z.$$

よって、S 上の A_1' をどのように選んでも $A_1'' = A_1'$ となる。

n 点の場合

k に関する帰納法（induction）により、追跡の結果は

$$a_k' = \frac{a_k}{a_1}\,z \quad (k \text{ が奇数}), \qquad a_k' = -\frac{a_1 a_k}{z} \quad (k \text{ が偶数}),$$

となる。実際、a_k' が一方の形をしていれば、$a_{k+1}' = -a_k a_{k+1}/a_k'$ はもう一方の形になる。最後のステップは $a_1'' = -a_n a_1/a_n'$ である：

- n が偶数ならば、$a_1'' = -a_n a_1 \cdot \dfrac{z}{-a_1 a_n} = z$ となるので、どの A_1' に対しても A_1'' は A_1' と一致する。
- n が奇数ならば、$a_1'' = -a_n a_1 \cdot \dfrac{a_1}{a_n z} = -\dfrac{a_1^2}{z}$ となるので、$n = 3$ の場合とまったく同様に、A_1'' が A_1' と一致するような A_1' の位置はちょうど2つ、すなわち $z = \pm \mathrm{i} a_1$ である。

言葉で言えば、偶数回の鏡映は回転になり、ここではそれが恒等写像（identity）であることがわかる。一方、奇数回の鏡映は鏡映になり、円上に2つの不動点（fixed point）をもつ。

検算

- 図について：$l = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 160^\circ}$、$m = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 20^\circ}$ とすると弦 LM は水平であり、$p = r\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\cdot 70^\circ}$ とすると弦 PQ は鉛直である。実際、$lm = r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -r^2 = -pq$ となっている。
- 数値的に、ランダムな半径の円上のランダムな点について、n を3から9まで変え

て垂直な弦を追跡したところ、どのステップでも得られる点は S 上にあり、n が偶数のときはちょうど出発点に戻った。n が奇数のときは、円周上の 200 000 個の出発位置を調べたところ、不動点はちょうど 2 つ、$\pm \mathrm{i}a_1$ にあった。

よくある間違い

- 垂直かどうかを「w が実数である」で判定してしまう。平行な弦では比が実数になり、垂直な弦では比が純虚数になる。
- $\bar{z} = r^2/z$ には $|z| = r$ が必要であることを忘れる。4 点すべてが O を中心とする同じ円上にあるという事実こそが、この条件をこれほど簡潔にしているのである。
- n 点の場合に、答えが n の偶奇（parity）によって変わることを忘れる。

STEP のその先へ

写像 $z \mapsto c/z$ を円に制限したものは鏡映であり、鏡映を合成することは等長変換群（isometry group）の研究の出発点である。円の対称性全体は直交群（orthogonal group）$O(2)$ をなし、そこでは 2 つの鏡映を合成すると回転になる。$z \mapsto c/z$ や $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ のような写像はメビウス変換（Möbius transformation）であり、複素解析（complex analysis）や幾何学において中心的な役割を果たす。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は、この両方の見方を見事に展開している。

解答例

STEP II 1990、第 6 問

純粋数学 • 整数の不等式と分数

STEP II 1990、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s2-q6

鍵となる考え方

すべては整数（integer）に関するただ一つの事実に基づいている。すなわち、整数どうしの狭義の不等式（strict inequality）は 1 だけ強めることができる。$a < b$ ならば $b \geq a + 1$ であり、$d < c$ ならば $d \leq c - 1$ である。これにより (ii) は一行の評価に帰着する。その後の小問は、巧みに選んだ整数に (ii) を適用するだけである。分数の不等式の分母（denominator）を払い、得られた整数の不等式を再び (ii) に代入すればよい。

解答

以下、文字はすべて正の整数を表す。

小問 (i)

$b > a \geq 1$ であり b は整数であるから、$b \geq 2$ である。両辺に $c > 0$ を掛けると $bc \geq 2c$ を得る。

$c > 1$ であり c は整数であるから、$c \geq 2$ である。よって $2c = c + c \geq c + 2$ となる。これらを合わせて $bc \geq 2c \geq 2 + c$ であり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

不等式は狭義であり、数はすべて整数であるから、$b \geq a+1$ かつ $d \leq c-1$ である。前者では $c > 0$ を、後者では $a > 0$ を用いると、

$$\begin{aligned} bc - ad &\geq (a+1)c - a(c-1) \\ &= ac + c - ac + a \\ &= a + c. \end{aligned}$$

よって $bc - ad \geq a + c$ であり、等号が成り立つのは $b = a+1$ かつ $d = c-1$ のときに限る。

（これは (i) と同じ「1 だけ強める」技法であり、(i) は準備運動にすぎない。以後 (i) を再び使うことはない。）

小問 (iii)

$b, d > 0$ を用いて、二つの不等式の分母を払う。

$$\frac{a}{b} < p \iff a < bp, \qquad p < \frac{c}{d} \iff dp < c.$$

ここで、b を bp に、d を dp に置き換えて (ii) を適用する（どちらも正の整数である）。仮定 $a < bp$ と $dp < c$ はまさに手元にある不等式であるから、

$$(bp)c - a(dp) \geq a + c, \qquad \text{すなわち} \qquad (bc - ad)p \geq a + c.$$

小問 (iv)

分母（すべて正）を払うと、二つの整数の不等式が得られる。

$$aq < bp \qquad \text{かつ} \qquad dp < cq.$$

また $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ であるから $ad < bc$ であり、$bc - ad$ は**正の**整数である。したがって、不等号の向きを変えることなくこれで割ることができる。

> **考えてみよう**　(ii) における a, b, c, d の役割を、どの四つの数に担わせればよいだろうか？

狭義の不等式は二つあり、(ii) が必要とするのもちょうど二つ、「1 番目 $<$ 2 番目」と「4 番目 $<$ 3 番目」である。対応のさせ方には自然なものが二通りあり、それぞれから一方の評価が得られる。

p の評価。 $aq < bp$ を「$a < b$」の不等式、$dp < cq$ を「$d < c$」の不等式とみなす。aq, bp, cq, dp に (ii) を適用すると、

$$(bp)(cq) - (aq)(dp) \geq aq + cq, \qquad \text{よって} \qquad pq(bc - ad) \geq q(a + c).$$

$q > 0$ で割り、さらに $bc - ad > 0$ で割ると、

$$p \geq \frac{a+c}{bc-ad}.$$

q の評価。今度は役割を入れ替え、$dp < cq$ を「$a < b$」の不等式、$aq < bp$ を「$d < c$」の不等式とみなす。dp, cq, bp, aq に (ii) を適用すると、

$$(cq)(bp) - (dp)(aq) \geq dp + bp, \qquad \text{よって} \qquad pq(bc - ad) \geq p(b+d).$$

$p > 0$ で割り、$bc - ad > 0$ で割ると、

$$q \geq \frac{b+d}{bc-ad}.$$

以上で二つの評価がともに証明された。（小問 (iii) は、一つ目の評価で $q = 1$ とした特別な場合である。）

8/9 と 9/10 の間にある分数

$a = 8, b = 9, c = 9, d = 10$ とおく。すると

$$bc - ad = 81 - 80 = 1,$$

であるから、8/9 と 9/10 の間に（端点を含まずに）ある分数 p/q（p, q は正の整数で、既約分数（lowest terms）であってもなくてもよい）はすべて

$$p \geq \frac{8+9}{1} = 17, \qquad q \geq \frac{9+10}{1} = 19.$$

を満たす。したがって、分母が 20 未満であれば、ちょうど $q = 19$ でなければならない。このとき

$$\frac{8}{9} < \frac{p}{19} < \frac{9}{10} \iff \frac{152}{9} < p < \frac{171}{10} \iff 16.88\ldots < p < 17.1,$$

が必要であるから、$p = 17$ である。そして $8 \cdot 19 = 152 < 153 = 9 \cdot 17$ かつ $17 \cdot 10 = 170 < 171 = 9 \cdot 19$ であるから、17/19 は確かにこの区間に含まれる。

よって、8/9 と 9/10 の間にあって分母が 20 未満である分数は

$$\frac{17}{19}.$$

ただ一つである。評価 $q \geq 19$ は既約分数に限らず、分数のあらゆる表し方に対して成り立つから、34/38 のような既約でない形がより小さな分母で紛れ込むこともない。

検算

- 17/19 はメディアント（mediant）$\frac{8+9}{9+10}$ であり、(iv) の二つの評価はどちらもこの分数で等号が成り立つ。これは評価が最良であることを示すよい兆候である。
- 小数で表すと、$8/9 \approx 0.8889, 17/19 \approx 0.8947, 9/10 = 0.9$ である。
- (i) と (ii) は 29 までのすべての値で確かめ、(iii) と (iv) は約 60,000 個の無作為な場合で確かめた。さらに、8/9 と 9/10 の間にある $q \leq 19$ の p/q を総当たりですべて列挙したところ、現れたのは 17/19 のみであった。

よくある間違い

- (iv) で $bc - ad > 0$ を述べずに、それで割ってしまう。
- 最後の小問で p の評価だけを使う。これは q が 19 までであることを許すが、それだけではより小さな分母を排除できない。実際に効いているのは q の評価である。
- (iv) で (ii) から一方の評価しか導けない。二つ目の評価を得るには、二つの不等式の役割を入れ替える必要がある。

STEP のその先へ

$bc - ad = 1$ を満たす二つの分数 $a/b < c/d$ はファレイ隣接分数（Farey neighbours）と呼ばれ、この問題はそれに関する鍵となる事実を証明している。すなわち、二つの分数の間にあって分母が最小の分数は、それらのメディアント $\frac{a+c}{b+d}$ である。メディアントを繰り返し挿入していくと、ファレイ数列（Farey sequences）やシュテルン・ブロコ木（Stern–Brocot tree）が構成される。これらはすべての正の有理数をちょうど一度ずつ列挙するものであり、連分数（continued fractions）や実数の最良有理近似（best rational approximations）と密接に結びついている。連分数と近似について読むには、ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（整数論の入門書）が素晴らしい一冊である。

解答例

STEP II 1990、第 7 問

純粋数学 ・ 微分方程式

> **STEP II 1990、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q7

鍵となる考え方

指数関数型の試行解（exponential trial solution）を用いると、遅延方程式（delay equation）は p についての通常の方程式に帰着する。時間をずらすことは、e^{pt} に定数を掛けることにすぎないからである。方程式 $(*)$ では p と e^{-p} が混在しているため厳密には解けないが、両辺に e^{p} を掛ければ p への依存をすべて一方の辺にまとめられる。すなわち、根（root）は一本の曲線 $y=(p+1)\mathrm{e}^{p}$ と水平な直線 $y=k$ の交点である。こうして根の個数を数える問題は、一つの曲線を描く問題に帰着する。

解答

p についての方程式

$A\neq 0$ として $\mathrm{f}(t)=A\mathrm{e}^{pt}$ とおく（零でない解を求めたいからである）。すると $\mathrm{f}'(t)=pA\mathrm{e}^{pt}$ かつ $\mathrm{f}(t-1)=A\mathrm{e}^{p(t-1)}=\mathrm{e}^{-p}A\mathrm{e}^{pt}$ であるから、(†) は

$$A\mathrm{e}^{pt}\left(p+1-k\mathrm{e}^{-p}\right)=0 \quad \text{すべての} t.$$

となる。$A\neq 0$ かつ $\mathrm{e}^{pt}>0$ であるから、これがすべての t で成り立つための必要十分条件は

$$p+1=k\mathrm{e}^{-p},$$

であり、これは $(*)$ にほかならない。したがって、このような解が存在するのは p が $(*)$ の実数解であるときちょうどそのときであり、そのとき A は任意でよい。

実数解はいくつあるか

$(*)$ に $\mathrm{e}^p > 0$ を掛けると、同値な方程式

$$g(p) = k, \qquad \text{ただし} g(p) = (p+1)\mathrm{e}^p.$$

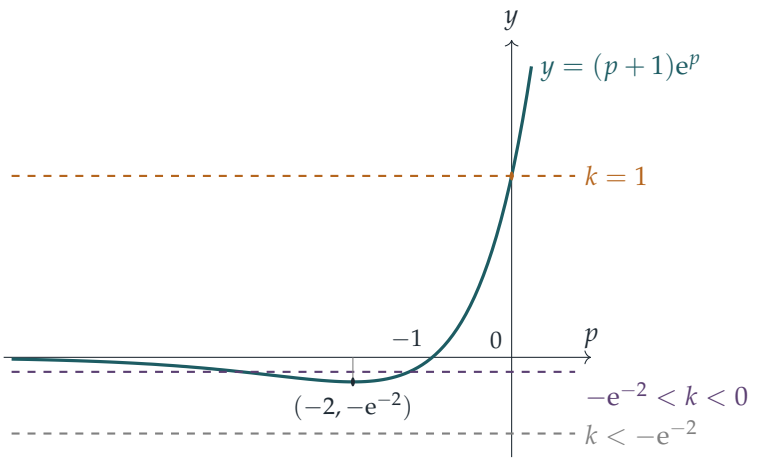
が得られる。よって、曲線 $y = g(p)$ と水平な直線 $y = k$ の交点の個数を数えればよい。

> **考えてみよう** $y = (p+1)\mathrm{e}^p$ はどのような形をしているか。どこで最小となり、両端ではどうなるか。

微分すると $g'(p) = \mathrm{e}^p + (p+1)\mathrm{e}^p = (p+2)\mathrm{e}^p$ であり、これは $p < -2$ で負、$p > -2$ で正である。よって g は $(-\infty, -2]$ で減少し、$[-2, \infty)$ で増加し、大域的最小値（global minimum）

$$g(-2) = -\mathrm{e}^{-2}.$$

をとる。両端については、$p \to \infty$ のとき $g(p) \to \infty$、$p \to -\infty$ のとき $g(p) \to 0$ である（指数関数的な減衰は一次関数的な増大に勝つ）。$p < -1$ では因子 $p+1$ が負であるから、g は下側から 0 に近づく。曲線が軸と交わるのは $p = -1$ のみであり、また $g(0) = 1$ である。



図から読み取ると次のようになる（上で調べた単調性（monotonicity）により、これは厳密な議論となる）。

- $k > 0$ のとき：$(-\infty, -1]$ では $g \le 0 < k$ であり、$(-1, \infty)$ では g は 0 から ∞ まで狭義単調に増加するから、根は**ちょうど一つ**であり、それは $p > -1$ を満たす。
- $-\mathrm{e}^{-2} < k < 0$ のとき：$(-\infty, -2]$ では g は 0 に近い値から $-\mathrm{e}^{-2}$ まで狭義単調に減少するから、値 k を一度とる。$[-2, -1]$ では $-\mathrm{e}^{-2}$ から 0 まで狭義単調に増加する

から、値 k をもう一度とる。$p > -1$ では $g > 0 > k$ である。よって根は**二つ**あり、一つは $(-\infty, -2)$ に、もう一つは $(-2, -1)$ にある。

- $k = -\mathrm{e}^{-2}$ のとき：直線は曲線の最小点で曲線に接し、**ただ一つ**の根 $p = -2$ を与える。
- $k < -\mathrm{e}^{-2}$ のとき：直線は曲線全体より下にあるから、根は**存在しない**。

以上より、題意のとおり $(*)$ は k に応じて 0 個、1 個または 2 個の実数解をもち、$A\mathrm{e}^{pt}$ の形の解が存在するのは

$$k \geq -\mathrm{e}^{-2}, \quad k \neq 0.$$

のときちょうどそのときである。（値 $k = 0$ は問題文で除外されている。その場合はただ一つの根 $p = -1$ が得られる。）

解が減衰するのはいつか

考えてみよう どのような p に対して $A\mathrm{e}^{pt} \to 0$ となるか。また、$(*)$ を解かずに、根が 0 に対してどこにあるかをどう突き止めればよいか。

$A \neq 0$ のとき、$t \to +\infty$ で $A\mathrm{e}^{pt} \to 0$ となるための必要十分条件は $p < 0$ である。根を具体的に求める必要はなく、根が 0 に対してどちら側にあるかだけがわかればよい。

- $-\mathrm{e}^{-2} \leq k < 0$ ならば、すべての根は $(-\infty, -1)$ にある（実際、$p \geq -1$ では $g \geq 0$ であるから、$g(p) = k < 0$ ならば $p < -1$ でなければならない）。よってこのような解はすべて減衰する。
- $k > 0$ ならば、ただ一つの根は g が狭義単調に増加する範囲にあるから、$p < 0 \iff g(p) < g(0) \iff k < 1$ である。$k = 1$ のとき根は $p = 0$ であり、定数解 $\mathrm{f} = A$ を与えるが、これは零に収束しない。$k > 1$ のとき根は正であり、解は増大する。

したがって、$t \to +\infty$ のとき解が零に収束するのは

$$-\mathrm{e}^{-2} \leq k < 1, \quad k \neq 0.$$

のときちょうどそのときである。

検算

- $k = 1$：$p = 0$ は $0 + 1 = 1 \cdot \mathrm{e}^{0}$ を満たし、$\mathrm{f} = A$ が $\mathrm{f}' + \mathrm{f} - \mathrm{f}(t-1) = 0$ の解であることは明らかである。これは減衰と増大の境目であり、そうなるべきものである。
- $k = -\mathrm{e}^{-2} \approx -0.1353$：$p = -2$ とすると $-1 = -\mathrm{e}^{-2}\mathrm{e}^{2}$ となる。数値的には、

$k = -0.13$ のとき二つの根 $p \approx -2.311$ と $p \approx -1.742$ が -2 の両側に得られ、$k = -0.14$ のときは根が存在しない。

- 物理的な意味：フィードバックがない場合（$k \to 0$）、系は $\mathrm{f}' = -\mathrm{f}$ となり、減衰率は $p = -1$ である。これは $|k|$ が小さいときの根の位置と一致する。強い正のフィードバック（$k > 1$）は減衰に打ち勝ち、解は増大する。

よくある間違い

- $y = p + 1$ と $y = k\mathrm{e}^{-p}$ を描いて比べ、$k < 0$ のとき直線が曲線と二回交わることもまったく交わらないこともあるのを見落とす。接する条件（tangency condition）は $g(p) = (p+1)\mathrm{e}^{p}$ を用いたほうが見つけやすい。
- 端点 $k = -\mathrm{e}^{-2}$ を忘れる。この場合も（重根（repeated root）として）根 $p = -2$ が得られ、したがって減衰する解が存在する。
- $k = 1$ を減衰する場合に含めてしまう。$p = 0$ は減衰する解ではなく定数解を与える。

STEP のその先へ

方程式 (†) は**遅延微分方程式**（delay differential equation）であり、$(*)$ はその特性方程式（characteristic equation）である。通常の線形常微分方程式（ODE）とは異なり、これは無限個の**複素数**の根 p をもち、一般解はそのすべてから組み立てられる。したがって完全な安定性（stability）のためには、すべての複素数の根の実部が負でなければならない。これは制御理論（control theory）で研究される。$(p+1)\mathrm{e}^{p} = k$ の実数解はランベルトの W 関数（Lambert W function）の値であり、$p + 1 = W(k\mathrm{e})$ となる。そして $-\mathrm{e}^{-1}$（ここでは $k\mathrm{e} = -\mathrm{e}^{-1}$）はちょうど W の分岐点（branch point）である。線形常微分方程式と特性方程式については、Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）を参照せよ。

解答例

STEP II 1990、第 8 問

純粋数学 ・ 部分積分

STEP II 1990、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s2-q8

鍵となる考え方

この微分方程式（differential equation）の各項は、完全な導関数（exact derivative）であるか、ほぼそうなっている。y と y' は $t=0$ と $t=1$ で同じ値をとるので、それらの完全な導関数を積分すると 0 になる。各関係式は、方程式に適当な関数を掛け、境界項（boundary term）がすべて消えるまで部分積分（integration by parts）を繰り返すことで得られる。境界項を消すのに使える事実を一覧にしておくとよい。すなわち $x(0)=0$、$y(0)=y(1)$、$y'(0)=y'(1)$、そして（証明した後は）$x(1)=0$ である。

解答

第一の等式

$x'=y$ であるから、被積分関数 $xy=xx'$ は $\frac{1}{2}x^2$ の導関数である。よって

$$\int_0^1 x(t)\,y(t)\,\mathrm{d}t=\Big[\tfrac{1}{2}x(t)^2\Big]_0^1=\tfrac{1}{2}[x(1)]^2,$$

となる。ここで $x(0)=\int_0^0 y(u)\,\mathrm{d}u=0$ を用いた。これが求める結果である。

$x(1)=0$ の証明

$(*)$ の中央の項を完全な導関数として書く：

$$(y^2-1)\,y'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\tfrac{1}{3}y^3-y\Big).$$

そこで $(*)$ を 0 から 1 まで項ごとに積分すると

$$\Big[y'\Big]_0^1+\Big[\tfrac{1}{3}y^3-y\Big]_0^1+\int_0^1 y\,\mathrm{d}t=0.$$

第一の括弧は $y'(1)-y'(0)=0$ であり、第二の括弧は $y(1)=y(0)$ より 0 である。残った積分は x の定義により $x(1)$ である。したがって $x(1)=0$ である。

関係式 $\int y^2=\frac{1}{3}\int y^4$

$(*)$ に x を掛けて $[0,1]$ で積分する。積分は三つあるので、一つずつ扱う。

最後の項。第一の等式と $x(1)=0$ より

$$\int_0^1 x\,y\,\mathrm{d}t=\tfrac{1}{2}[x(1)]^2=0.$$

y'' の項。x を微分する側として部分積分する（$x'=y$ である）：

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\,y''\,\mathrm{d}t&=\Big[x\,y'\Big]_0^1-\int_0^1 y\,y'\,\mathrm{d}t\\&=x(1)y'(1)-x(0)y'(0)-\Big[\tfrac{1}{2}y^2\Big]_0^1=0,\end{aligned}$$

これは $x(1)=x(0)=0$ かつ $y(1)=y(0)$ による。

> **考えてみよう** $x\,(y^2-1)\,y'$ はどのように部分積分すればよいか。どちらの因子を積分すべきか。

中央の項。因子 $(y^2-1)y'$ を積分し（これが $\frac{1}{3}y^3-y$ の導関数であることはすでにわかっている）、x を微分する：

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\,(y^2-1)\,y'\,\mathrm{d}t&=\Big[x\big(\tfrac{1}{3}y^3-y\big)\Big]_0^1-\int_0^1 y\big(\tfrac{1}{3}y^3-y\big)\,\mathrm{d}t\\&=0-\tfrac{1}{3}\int_0^1 y^4\,\mathrm{d}t+\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

x は両端で 0 なので、境界項は消える。

三つの部分を足し合わせると 0 になる：

$$\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}t-\tfrac{1}{3}\int_0^1 y^4\,\mathrm{d}t=0,\qquad\text{すなわち}\qquad\int_0^1[y(t)]^2\,\mathrm{d}t=\tfrac{1}{3}\int_0^1[y(t)]^4\,\mathrm{d}t,$$

となり、求める結果が得られる。

関係式 $\int y'^2=\int y^2$

> **考えてみよう** y'^2 の積分を得たい。何を掛ければそれが現れるだろうか。

$y\,y''$ を部分積分すると $-\int y'^2$ が現れるので、今度は $(*)$ に y を掛けて積分する。各項

を順に計算すると

$$\int_0^1 y\,y''\,\mathrm{d}t = \Big[y\,y'\Big]_0^1 - \int_0^1 y'^2\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 y'^2\,\mathrm{d}t,$$
$$\int_0^1 (y^3 - y)\,y'\,\mathrm{d}t = \Big[\tfrac{1}{4}y^4 - \tfrac{1}{2}y^2\Big]_0^1 = 0.$$

境界項 $y(1)y'(1) - y(0)y'(0)$ は、y と y' がともに同じ値に戻るので 0 である。二行目は $y(1) = y(0)$ より 0 となる。残るのは

$$-\int_0^1 y'^2\,\mathrm{d}t + \int_0^1 y^2\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \text{よって} \qquad \int_0^1 [y'(t)]^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 [y(t)]^2\,\mathrm{d}t.$$

検算

第一の等式は任意の y について成り立つ。$y = \cos 3t + t^2 - 0.7e^t$ とすると、数値積分（quadrature）により $\int_0^1 xy\,\mathrm{d}t \approx 0.338191$ が得られ、これは $\frac{1}{2}x(1)^2$ に等しい。

時間 1 の後に同じ状態に戻る $(*)$ の非自明な解は存在しない（後述）。しかし、同じ議論は時間 T の後に同じ状態に戻る任意の解について、区間 $[0, T]$ 上でそのまま通用する。$(*)$ を数値的に積分して周期軌道（periodic orbit）に乗せたところ、その周期は $T \approx 6.6633$ であった。一周期にわたって $\int y \approx 10^{-9}$、$\int y^2 \approx 13.72222$、$\frac{1}{3}\int y^4 \approx 13.72222$、$\int y'^2 \approx 13.72228$ が得られ、これらは刻み幅による誤差の範囲内で一致する。

よくある間違い

- 第三の部分で $x(1) = 0$ が必要であることを忘れる。これがなければ、$\int xy$ も境界項も消えない。
- 中央の項で、$(y^2 - 1)y'$ ではなく x を積分してしまう。$x' = y$ を用いることで、積分が y のべきに帰着するのである。
- 境界項が 0 になるのは「$y(0) = 0$ だから」と述べる。そのような条件は与えられていない。境界項が消えるのは、0 と 1 における値が等しいからである。

STEP のその先へ

方程式 $(*)$ はファン・デル・ポール振動子（van der Pol oscillator）であり、自励振動する電気回路の古典的なモデルである。この方程式はただ一つの周期軌道をもち、ここで証明した関係式は一周期にわたるエネルギー収支を表している。これらの関係式からは意外な事実もわかる。$\int_0^1 y = 0$ であるから、フーリエ級数（Fourier series）か

ら得られるウィルティンガー（Wirtinger）の不等式（ポアンカレ（Poincaré）の不等式ともいう）により $\int_0^1 y'^2 \geq 4\pi^2 \int_0^1 y^2$ が成り立つ。これと最後の関係式を合わせると $y \equiv 0$ でなければならない。つまり、時間 1 の後に同じ状態に戻る解は自明な解しかない。真の周期は約 6.66 だからである。周期軌道とリミットサイクル（limit cycle）についてさらに学ぶには、Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）を参照するとよい。

解答例

STEP II 1990、第 9 問

純粋数学 • 極方程式の曲線と弧長

STEP II 1990、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s2-q9

鍵となる考え方

2 つの曲線はどちらも r を θ の式として与えられているので、半直線ごとに比較すればよい。原点から出る各半直線（half-line）上に放物線（parabola）の点はちょうど 1 つあり、それはカージオイド（cardioid）の内側か外側のどちらかにある。これにより、放物線がどこでカージオイドに入り、どこで出るかがただちにわかる。長さについては、カージオイドは極座標（polar coordinates）の形のまま扱うのがよく（弧長（arc length）の被積分関数が半角の公式（half-angle identity）によって簡単になる）、一方で放物線は直交座標の形で扱うほうがはるかに易しい。

解答

2 つの曲線

放物線については、$r + r\cos\theta = 1$ は $r = 1 - x$ を意味する。両辺を 2 乗すると $x^2 + y^2 = (1-x)^2$ となるので、

$$y^2 = 1 - 2x.$$

これは焦点（focus）が原点、頂点（vertex）が $(\frac{1}{2}, 0)$ で、左向きに開いた放物線である。原点はその凹側、すなわち $y^2 < 1 - 2x$ となる側にある。この側を放物線の内側とよぶことにする。

カージオイド $r = 4(1 + \cos\theta)$ は原点に尖点（cusp）をもち（$\theta = \pi$ のとき）、$\theta = 0$ のとき $x = 8$ に達する。

2 曲線の交わり

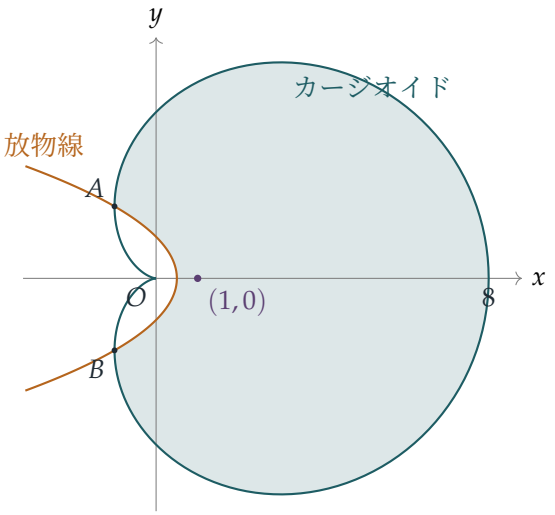
$-\pi < \theta < \pi$ を満たす方向 θ を固定する。このとき $1+\cos\theta > 0$ である。この半直線上で、放物線は距離 $1/(1+\cos\theta)$ の位置にあり、カージオイドの境界は距離 $4(1+\cos\theta)$ の位置にある。また、カージオイドの内部は、この半直線のうち境界より手前の部分である。したがって、放物線上の点がカージオイドの内側にあるのは、ちょうど

$$\frac{1}{1+\cos\theta} < 4(1+\cos\theta) \iff (1+\cos\theta)^2 > \frac{1}{4} \iff \cos\theta > -\frac{1}{2} \iff |\theta| < \frac{2\pi}{3},$$

のときである。ここで、正の量 $1+\cos\theta$ を掛け、正の平方根をとった。等号は $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$ で成り立ち、このとき $r = 2$ であるから、2 つの交点

$$A = (-1, \sqrt{3}), \qquad B = (-1, -\sqrt{3}).$$

が得られる。よって、放物線は B から頂点 $(\frac{1}{2}, 0)$ を通って A に至る途切れのない 1 本の弧に沿ってカージオイドの内側にあり、それ以外ではすべて外側にある。この 1 本の弧はカージオイドの境界上の 2 点を結ぶので、内部を 2 つの部分に分ける。1 つは放物線の内側の部分（原点を含み、尖点付近のカージオイドの小さなループで囲まれる）、もう 1 つは放物線の外側の部分（カージオイドの大きな外側の弧で囲まれる）である。



（図からも見てとれる面白い事実がある。$x = 4(1+\cos\theta)\cos\theta = (2\cos\theta+1)^2 - 1 \geq -1$ であるから、A と B はカージオイドの最も左にある点でもある。）

境界の長さ

$r = 1$、$\theta = 0$ の点は $(1, 0)$ である。この点はカージオイドの内側にあり（$1 < 8$）、放物線の外側にある（$0^2 > 1 - 2$）ので、網かけ部分に属する。その境界は、カージオイドの弧 $-\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ と、B から A までの放物線の弧からなる。

カージオイドの弧。 極座標では $\mathrm{d}s = \sqrt{r^2 + (\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$ である。ここでは $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = -4\sin\theta$ であるから、

$$r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = 16\left(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = 32(1+\cos\theta) = 64\cos^2\tfrac{\theta}{2}.$$

考えてみよう 単純に $\sqrt{64\cos^2(\theta/2)} = 8\cos(\theta/2)$ と書いてよいだろうか？

そう書けるのは、考えている範囲全体で $\cos\frac{\theta}{2} \geq 0$ だからにすぎない。実際、$|\theta| \leq \frac{2\pi}{3}$ のとき $|\frac{\theta}{2}| \leq \frac{\pi}{3}$ である。x 軸に関する対称性を用いると、

$$L_{\text{カージオイド}} = 2\int_0^{2\pi/3} 8\cos\tfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 32\left[\sin\tfrac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi/3} = 32\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}.$$

放物線の弧。 y を媒介変数とする。$x = \frac{1}{2}(1-y^2)$ であるから $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = -y$、$\mathrm{d}s = \sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y$ であり、y は $-\sqrt{3}$ から $\sqrt{3}$ まで動く。対称性より、

$$L_{\text{放物線}} = 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y.$$

$y = \sinh u$、$\mathrm{d}y = \cosh u\,\mathrm{d}u$ とおくと、被積分関数は $\cosh^2 u = \frac{1}{2}(1+\cosh 2u)$ となるので、

$$\int \sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{4}\sinh 2u = \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{arsinh} y + y\sqrt{1+y^2}\right) + C.$$

$y = \sqrt{3}$ のとき $\sqrt{1+y^2} = 2$、$\operatorname{arsinh}\sqrt{3} = \ln\left(\sqrt{3}+2\right)$ であるから、

$$L_{\text{放物線}} = \left[\operatorname{arsinh} y + y\sqrt{1+y^2}\right]_0^{\sqrt{3}} = \ln(2+\sqrt{3}) + 2\sqrt{3}.$$

合計。 これらを加えると、

$$L = 16\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3}) = 18\sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3}),$$

となり、示すべきことが得られた。

検算

- カージオイド全体の長さは $\int_{-\pi}^{\pi} 8\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 32$ であり、用いた外側の弧 $16\sqrt{3} \approx 27.71$ はその大部分を占める。これは図と合っている。尖点付近の小さなループの長さは $32 - 16\sqrt{3} \approx 4.29$ である。
- 放物線の弧は約 4.78 であり、B から頂点 $(\frac{1}{2}, 0)$ を経て A に至る 2 本の線分の長さの合計 $2\sqrt{1.5^2+3} \approx 4.58$ より少し長い。当然そうなるべきである。
- 数値的に、両曲線の極座標での弧長の被積分関数を中点則（midpoint rule）による数値積分（quadrature）で計算すると合計 32.49387 となり、$18\sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3}) \approx 32.49387$ と一致した。

よくある間違い

- 違う部分をとってしまうこと。$(1,0)$ は放物線の外側（頂点 $x=\frac{1}{2}$ より右側）にあるので、その境界にはカージオイドの大きな外側の弧が使われ、尖点付近のループは使われない。
- カージオイドを $8\cos\frac{\theta}{2}$ で 0 から 2π まで一度に積分してしまうこと。この式は $\theta>\pi$ で負になる。正しい被積分関数は $8\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$ である。

STEP のその先へ

2 つの曲線はどちらも、焦点または尖点を極（pole）に置いて表した二次曲線（conics）またはリマソン（limaçon）である。$r=\ell/(1+e\cos\theta)$ は、太陽を焦点に置いたときに軌道力学（orbital mechanics）で二次曲線が現れる形である。弧長の公式 $\int\sqrt{r^2+r'^2}\,\mathrm{d}\theta$ は媒介変数表示された曲線の長さ $\int|\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$ の特別な場合であり、大学 1 年次のベクトル解析（vector calculus）では、これが曲率（curvature）や線積分（line integrals）へとつながっていく。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、二次曲線の極座標表示を用いてケプラー（Kepler）の軌道を導いている。

解答例

STEP II 1990、第 10 問

純粋数学 • 行列の多項式方程式

> **STEP II 1990、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q10

鍵となる考え方

行列式（determinant）は行列の積を普通の数の積に変える。そして実数の積がゼロになるのは、因数のどれかがゼロであるときに限られる。3 次式については、$\mathbf{M}$ は $\mathbf{I}$ と可換（commute）であるから、$\mathbf{M}$ の行列多項式は x の多項式とまったく同じように因数分解（factorise）できる。さらに上三角行列（upper triangular matrix）は非常に扱いやすい。積の対角成分は対角成分どうしの積にすぎないので、対角部分はすぐに処理でき、本当に手間がかかるのは右上の成分だけである。

解答

$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ を満たす行列

積の行列式は行列式の積であるから、

$$\det \mathbf{A} \, \det \mathbf{B} = \det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{0} = 0.$$

左辺は 2 つの実数の積であるから、少なくとも一方はゼロである。すなわち $\det \mathbf{A} = 0$ または $\det \mathbf{B} = 0$、あるいはその両方が成り立つ。これが示すべき結果である。

$\det \mathbf{B} \neq 0$ ならば $\mathbf{B}^{-1}$ が存在し、$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ の右から $\mathbf{B}^{-1}$ を掛けると

$$\mathbf{A} = \mathbf{ABB}^{-1} = \mathbf{0}\,\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{0}.$$

したがって $\mathbf{A}$ は零行列（zero matrix）でなければならない。

しかし、両方の行列式がゼロであるだけでは十分ではない。たとえば

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

とすると、$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} = 0$ であるが、$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ である。

3 次式の因数分解

まず多項式 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ を因数分解する。6 の小さな約数を試すと

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1 + 2 + 5 - 6 = 0, \\ f(2) &= 8 + 8 - 10 - 6 = 0, \\ f(-3) &= -27 + 18 + 15 - 6 = 0, \end{aligned}$$

であり、最高次の係数が 1 であるから $f(x) = (x+1)(x-2)(x+3)$ となる。

次に $(\mathbf{M} + p\mathbf{I})(\mathbf{M} + q\mathbf{I})(\mathbf{M} + r\mathbf{I})$ を展開する。$\mathbf{I}$ は $\mathbf{M}$ と可換であり（さらに $\mathbf{I}^2 = \mathbf{I}$ であり）、展開は数の場合とまったく同じになる：

$$\mathbf{M}^3 + (p+q+r)\mathbf{M}^2 + (pq+qr+rp)\mathbf{M} + pqr\,\mathbf{I}.$$

上の多項式と係数を比べると、

$$p = 1, \qquad q = -2, \qquad r = 3$$

（順序は任意）ととればよく、このときすべての正方行列 $\mathbf{M}$ に対して $\mathbf{M}^3 + 2\mathbf{M}^2 - 5\mathbf{M} - 6\mathbf{I} = (\mathbf{M} + \mathbf{I})(\mathbf{M} - 2\mathbf{I})(\mathbf{M} + 3\mathbf{I})$ が成り立つ。

> ? **考えてみよう** これで、3 つの因数のうちどれかが零行列でなければならないと言えるだろうか？

言えない。前半で見たように、行列の積はどの因数もゼロでないのにゼロになりうる。わかるのは、少なくとも 1 つの因数が特異（singular）であるということだけである。したがって、実際に計算しなければならない。

上三角行列の解

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ とおく。各因数は上三角行列で、右上の成分はどれも同じ c である：

$$\mathbf{M} + k\mathbf{I} = \begin{pmatrix} a+k & c \\ 0 & b+k \end{pmatrix}.$$

対角成分が (d_i, e_i) で右上の成分がすべて c に等しい 3 つの上三角行列について、積を計算すると

$$\begin{pmatrix} d_1 & c \\ 0 & e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_2 & c \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_3 & c \\ 0 & e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1d_2d_3 & c\,(d_1d_2 + d_1e_3 + e_2e_3) \\ 0 & e_1e_2e_3 \end{pmatrix}.$$

となる。$d_1, d_2, d_3 = a+1, a-2, a+3$ および $e_1, e_2, e_3 = b+1, b-2, b+3$ とすると、方程式は次の 3 つの条件になる：

$$\begin{aligned} (a+1)(a-2)(a+3) &= 0, \\ (b+1)(b-2)(b+3) &= 0, \\ c\left[(a+1)(a-2) + (a+1)(b+3) + (b-2)(b+3)\right] &= 0. \end{aligned}$$

はじめの 2 つは $a, b \in \{-1, 2, -3\}$ を意味する。3 つ目の括弧の中を展開すると

$$(a^2 - a - 2) + (ab + 3a + b + 3) + (b^2 + b - 6) = a^2 + ab + b^2 + 2(a+b) - 5.$$

考えてみよう 9 通りの組をすべて試すよりも、この括弧がゼロになる場合を見抜くうまい方法はないだろうか？

ある。$a \neq b$ ならば、括弧の中は

$$\frac{a^3 - b^3}{a-b} + 2\,\frac{a^2 - b^2}{a-b} - 5\,\frac{a-b}{a-b} = \frac{f(a) - f(b)}{a-b},$$

であり、$f(a) = f(b) = 0$ であるからこれは 0 である。よって $a \neq b$ のとき、3 つ目の条件は c が何であっても成り立つ。

$a = b$ ならば、括弧の中は $3a^2 + 4a - 5 = f'(a)$ である。これは $a = -1, 2, -3$ のときそれぞれ $-6, 15, 10$ であり（f は相異なる 3 つの根をもつので、どれもゼロではない）、3 つ目の条件から $c = 0$ が導かれる。

したがって、解は次のとおりである：

- $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ で、a と b は $\{-1, 2, -3\}$ の中の**異なる**数、c は**任意の**実数であるもの（6 つの族）；
- 3 つのスカラー行列（scalar matrix）$-\mathbf{I}, 2\mathbf{I}, -3\mathbf{I}$（$a = b$ の場合で、このとき $c = 0$ となる）。

検算

$a=-1$, $b=2$, $c=5$ とする。このとき $\mathbf{M}+\mathbf{I}=\begin{pmatrix}0&5\\0&3\end{pmatrix}$, $\mathbf{M}-2\mathbf{I}=\begin{pmatrix}-3&5\\0&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{M}+3\mathbf{I}=\begin{pmatrix}2&5\\0&5\end{pmatrix}$ である。はじめの 2 つの積がすでに $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ であるから、どんな c に対しても全体の積はゼロになる。一方、$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$ とすると $\mathbf{M}^3+2\mathbf{M}^2-5\mathbf{M}-6\mathbf{I}=\begin{pmatrix}0&15\\0&0\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}$ となり、$f'(2)=15$ と一致する。多数の有理数 a,b,c についてコンピュータで探索したところ、ちょうど上の解だけが見つかった。また、因数分解はランダムな 3×3 整数行列で確かめた。

よくある間違い

- $(\mathbf{M}+\mathbf{I})(\mathbf{M}-2\mathbf{I})(\mathbf{M}+3\mathbf{I})=\mathbf{0}$ から、$\mathbf{M}$ は $-\mathbf{I}$, $2\mathbf{I}$, $-3\mathbf{I}$ のいずれかでなければならないと結論してしまう。前半の問いは、まさにこの誤りを戒めるためにある。
- $a=b$ の場合を忘れる、あるいはその場合にも c が任意であると思い込む。
- 前半の例として、うっかり $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$ となるものを書いてしまう。積が本当にゼロでないことを確かめること。

STEP のその先へ

この答えは**最小多項式**（minimal polynomial）への入り口である。行列が相異なる根をもつ多項式を満たすのは、その行列が対角化可能（diagonalisable）で、固有値（eigenvalue）がそれらの根の中にあるときであり、かつそのときに限る。$a\neq b$ の解はどの c に対しても対角化可能であるが、$c\neq0$ のときの $\begin{pmatrix}a&c\\0&a\end{pmatrix}$ は対角化可能でなく、だからこそ解にならないのである。右上の成分に現れる差分商（divided difference）$\big(f(a)-f(b)\big)/(a-b)$ が $a=b$ のとき $f'(a)$ になることは、一般に行列の関数を定義する方法そのものである。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、固有値と対角化をわかりやすく解説している。

解答例

STEP II 1990、第 11 問

力学 ・ 角運動量保存則

STEP II 1990、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s2-q11

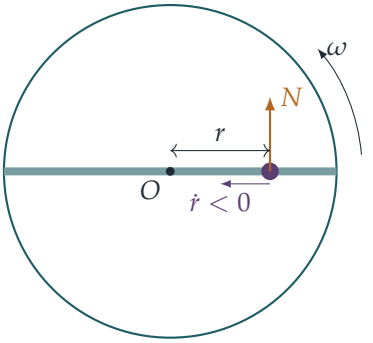
鍵となる考え方

円板と粒子をひとまとまりの系とみると、鉛直な回転軸のまわりの外力のトルク（torque）はなく、仕事をする外力もない。したがって、軸のまわりの角運動量（angular momentum）と運動エネルギー（kinetic energy）という 2 つの量が保存される。この 2 つの式から ω と $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ が直ちに求まる。一方の変化率を他方で割ると時間が消去され、経路、すなわち θ の関数としての r についての変数分離形（separable）の微分方程式が残る。

解答

モデル

粒子をなめらかな溝の中にある質点（point mass）とみなし、軸もなめらか（摩擦のない軸受け）であると仮定する。上から見ると、溝に沿って距離 r の位置にある粒子は、溝に沿った方向に速度 $\dot{r}$、溝に垂直な方向に速度 $r\omega$ をもつ。ここで $\omega = \dot{\theta}$ である。



粒子にはたらく水平方向の力は、溝からの抗力（reaction）N だけであり、これは溝に垂直である（溝はなめらかなので、溝に沿った成分はない）。円板は $-N$ を受ける。

角運動量

重力と鉛直方向の抗力は軸に平行であり、なめらかな軸はトルクを及ぼさないので、軸のまわりの全角運動量は一定である。円板の寄与は $mk^2\omega$、粒子の寄与は $m\,r\cdot r\omega = mr^2\omega$ である。$t=0$ のときと比較すると

$$mk^2\omega + mr^2\omega = mk^2\Omega + ma^2\Omega \quad\Longrightarrow\quad \omega = \frac{\Omega(k^2+a^2)}{k^2+r^2}.$$

エネルギー

> **考えてみよう** 抗力 N は、粒子が横向きに動いている間、粒子を横向きに押している。それでは運動エネルギーが変わってしまうのではないか？

粒子の運動エネルギーは変わるが、全体の運動エネルギーは変わらない。N は粒子に対して仕事率 $N\cdot r\omega$ で仕事をする。一方、円板にはたらく大きさが等しく向きが逆の力は同じ距離 r の位置に作用するので、トルク $-Nr$ を及ぼし、仕事率 $-Nr\omega$ で仕事をする。これらは打ち消し合うので、全運動エネルギーは保存される：

$$\tfrac{1}{2}mk^2\omega^2 + \tfrac{1}{2}m\left(\dot r^2 + r^2\omega^2\right) = \tfrac{1}{2}mk^2\Omega^2 + \tfrac{1}{2}m\left(V^2 + a^2\Omega^2\right).$$

よって

$$\dot r^2 = V^2 + (k^2+a^2)\Omega^2 - (k^2+r^2)\omega^2.$$

与えられた条件 $V^2 = \Omega^2a^2(k^2+a^2)/k^2$ を用いると

$$V^2 + (k^2+a^2)\Omega^2 = \Omega^2(k^2+a^2)\,\frac{a^2+k^2}{k^2} = \frac{\Omega^2(k^2+a^2)^2}{k^2},$$

であり、角運動量の結果から $(k^2+r^2)\omega^2 = \Omega^2(k^2+a^2)^2/(k^2+r^2)$ である。したがって

$$\dot r^2 = \Omega^2(k^2+a^2)^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2+r^2}\right) = \frac{\Omega^2(k^2+a^2)^2\,r^2}{k^2(k^2+r^2)}.$$

粒子が軸に向かって動いている間は $\dot r < 0$ なので、負の平方根をとる（$r>0$ とする）：

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{\Omega r(k^2+a^2)}{k(k^2+r^2)^{1/2}},$$

となり、示すべき式が得られた。

経路

$\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t > 0$ なので、連鎖律（chain rule）より

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t} = -\frac{\Omega r(k^2+a^2)}{k(k^2+r^2)^{1/2}} \cdot \frac{k^2+r^2}{\Omega(k^2+a^2)} = -\frac{r(k^2+r^2)^{1/2}}{k},$$

すなわち $k\,\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = -r(k^2+r^2)^{1/2}$ である。Ω と a が消えていることに注意しよう。

ここで $u = 1/r$ とおくと、$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = -u^{-2}\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}\theta$ であり、$r(k^2+r^2)^{1/2} = u^{-2}(1+k^2u^2)^{1/2}$ である（$u > 0$ だから）。方程式は

$$k\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = \sqrt{1+k^2u^2}.$$

となる。平方根の形から、双曲線関数による置換（hyperbolic substitution）が思い浮かぶ。$ku = \sinh\phi$ とおく。すると $k\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}\theta = \cosh\phi\,\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\theta$ かつ $\sqrt{1+\sinh^2\phi} = \cosh\phi$ なので

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta} = 1 \quad\Longrightarrow\quad \phi = \theta + \alpha.$$

$\theta = 0$ のとき $r = a$ なので、$\sinh\alpha = ku = k/a$ である。よって $k/r = \sinh(\theta+\alpha)$、すなわち

$$r\sinh(\theta+\alpha) = k, \qquad \sinh\alpha = \frac{k}{a}.$$

粒子は決して軸に到達しない

> **考えてみよう** $r = k/\sinh(\theta+\alpha)$ は $\theta \to \infty$ のとき 0 に近づく。円板が有限の時間で無限の角度だけ回転することはありうるだろうか？

ありえない。$r^2 \geq 0$ なので $\omega = \Omega(k^2+a^2)/(k^2+r^2) \leq \Omega(k^2+a^2)/k^2$ であり、時刻 t までに円板が回転する角度は高々 $\theta \leq \Omega(k^2+a^2)t/k^2$ で、これは有限である。有限の θ に対して $\sinh(\theta+\alpha)$ は有限なので、$r = k/\sinh(\theta+\alpha) > 0$ である。また、すべての $r > 0$ に対して $\dot{r}$ は厳密に負なので、粒子が止まって引き返すことはない。したがって、これらの式はすべての t で成り立ち、r は 0 に向かって減少し続けるが、決して 0 には到達しない。

（別解として、$\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ の式から直接示すこともできる。a から r まで進むのにかかる時間は $\frac{k}{\Omega(k^2+a^2)}\int_r^a \frac{\sqrt{k^2+x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$ であり、$x = 0$ の近くで被積分関数は k/x のようにふるまうので、その積分は $r \to 0$ のとき対数的に発散する。）

検算

- $t = 0$ では $r = a$ より $\omega = \Omega$ かつ $\dot{r} = -\Omega a\sqrt{k^2+a^2}/k = -V$ となり、初期条件と一致する。また $\theta = 0$ では $r = k/\sinh\alpha = a$ となる。

- θ が大きいとき $r \approx 2ke^{-(\theta+\alpha)}$ である。粒子は指数関数的に渦を巻きながら近づいていき、決して到達しないことと整合する。
- 数値的に、ランダムな k, a, Ω に対して運動方程式（角運動量を固定した $\ddot{r} = r\omega^2$）を逐次計算すると、$\dot{r}$、エネルギー、および $r\sinh(\theta+\alpha) = k$ が約 10^{-12} の精度で再現された。$k = a = \Omega = 1$ のとき、$r = 10^{-8}$ に達するまでの時間は約 9.32 であり、$\frac{1}{2}\ln(1/r)$ のように増加する。

よくある間違い

- 粒子のエネルギーだけが保存されると仮定してしまう。溝からの抗力は粒子に仕事をするので、保存されるのは全体のエネルギーだけである。
- 粒子の運動エネルギーや角運動量において、横方向の速度 $r\omega$ を忘れてしまう。
- θ が有限の時間で有限にとどまることを確かめずに、有限の θ に対して $r > 0$ であることだけから、粒子は決して軸に到達しないと結論してしまう。

STEP のその先へ

V に課された特別な条件は、粒子を $r = 0$ に向かっていつまでもじわじわと近づいていく軌道にちょうど乗せるものである。回転座標系（rotating frame）では $r = 0$ は不安定な平衡点（unstable equilibrium）であり、この軌道はその**安定多様体**（stable manifold）である。V がわずかでも大きければ粒子は中心を通り過ぎ、わずかでも小さければ引き返す。このような考え方は、連結された物体に対する保存則とともに、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）に登場する。

解答例

STEP II 1990、第 12 問

力学 ・ 反発係数と放物運動

STEP II 1990、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

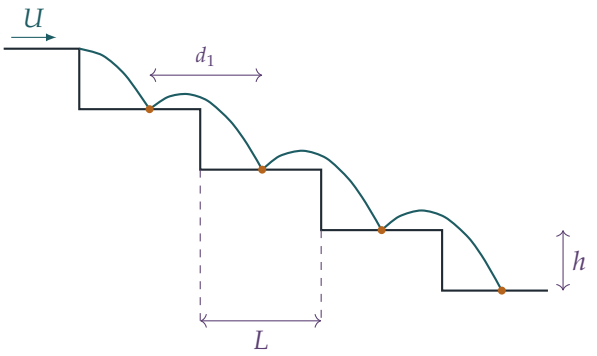
step.maths.org/questions/90-s2-q12

鍵となる考え方

階段は滑らか（smooth）なので、水平方向の速度は決して変化しない。速度は終始 U のままであり、どの水平距離も単に U に飛行時間を掛けたものになる。仕事はすべて鉛直方向の運動にある。そこでは、跳ね返るたびに鉛直方向の速さが e 倍になり、h だけ落下するたびにその 2 乗に $2gh$ が加わる。これにより、各跳ね返りにおける鉛直方向の速さの 2 乗について、簡単な漸化式（recurrence）が得られる。最後の小問では、跳ね返りがどこに着地しなければならないかを考えるとよい。限りなく続く階段の上で、一段につき一回である。

解答

粒子は、跳ね返りと跳ね返りの間では重力のみを受けて運動する点としてモデル化する。また階段は滑らかな水平面とし、各段は一つ上の段より高さ h だけ低く、各段の縁は水平距離 L ずつ離れているものとする。



跳ね返りの間の距離

水平方向の運動。階段は滑らかなので、階段から受ける力積（impulse）はすべて鉛直方向であり、跳ね返りの間にはたらく力は重力のみである。したがって水平方向の速度は常に U であり、時間 T の飛行で進む水平距離は UT である。

鉛直方向の運動。n 回目の跳ね返りで粒子が段に衝突するときの（下向きの）速さを w_n とする。粒子は鉛直方向の速度 0 で最上段を離れ、h だけ落下するので、

$$w_1^2 = 2gh.$$

である。n 回目の跳ね返りでは、固定された段に対するニュートンの反発の法則（Newton's law of restitution）により、粒子は速さ ew_n で上向きに跳ね返る。その後、粒子は h だけ低い次の段に到達しなければならないので、$v^2 = u^2 + 2as$ より（下向きを正とすると変位は $+h$ である）

$$w_{n+1}^2 = e^2 w_n^2 + 2gh.$$

が成り立つ。$w_1^2 = 2gh$ から始めてこれを繰り返し用いると、

$$\begin{aligned} w_n^2 &= 2gh\left(1 + e^2 + e^4 + \cdots + e^{2(n-1)}\right) \\ &= 2gh\,\frac{1 - e^{2n}}{1 - e^2} = 2gh\,\alpha_n^2, \end{aligned}$$

となる。ここで等比級数（geometric series）の和を求めた（$e^2 \neq 1$ なのでこれは正当である）。よって、すべての $n \geq 1$ に対して $w_n = \sqrt{2gh}\,\alpha_n$ である。これを厳密にするには簡単な数学的帰納法（induction）で十分である。実際、$e^2 \cdot 2gh\,\alpha_n^2 + 2gh = 2gh\left(e^2\alpha_n^2 + 1\right)$ かつ $e^2\alpha_n^2 + 1 = \dfrac{e^2 - e^{2n+2} + 1 - e^2}{1 - e^2} = \alpha_{n+1}^2$ である。

> **考えてみよう** n 回目の跳ね返りから $(n+1)$ 回目までの飛行時間はどれだけか。

鉛直方向の速度は一定の割合 g（下向き）で変化する。上向きの ew_n から始まり下向きの w_{n+1} で終わるので、全体で $ew_n + w_{n+1}$ だけ変化する。したがって飛行時間は

$$T_n = \frac{ew_n + w_{n+1}}{g} = \frac{\sqrt{2gh}}{g}\left(e\alpha_n + \alpha_{n+1}\right) = \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(e\alpha_n + \alpha_{n+1}\right).$$

である（最終的な速さがすでに分かっているので、T_n についての 2 次方程式を解かずに済む）。水平方向の速さ U を掛けると、

$$d_n = U\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(e\alpha_n + \alpha_{n+1}\right),$$

となり、求める結果が得られる。

非常に長い階段

$0 \le e < 1$ なので $e^{2n} \to 0$ であり、$n \to \infty$ のとき $\alpha_n \to \dfrac{1}{\sqrt{1-e^2}}$ となる。したがって、$1-e^2 = (1-e)(1+e)$ を用いると

$$d_n \to D = U\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1+e}{\sqrt{1-e^2}} = U\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2}},$$

である。

考えてみよう なぜこの極限の距離はちょうど L でなければならないのか。

最上段の縁から水平方向に x を測る。すぐ下の段は $0 \le x \le L$ を占め、一般に最上段から n 段下の段は $(n-1)L \le x \le nL$ を占める。粒子はどの段でもちょうど一回跳ね返るので、n 回目の跳ね返りの位置を x_n とすると

$$(n-1)L \le x_n \le nL, \qquad \text{よって} \qquad \frac{x_n}{n} \to L \text{ ただし} n \to \infty.$$

が成り立つ。一方、$x_n = x_1 + d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-1}$ であり、$d_k \to D$ である。もし $D > L$ ならば、ある番号以降のすべての d_k は L を一定量以上上回るので、粒子は跳ね返るたびに段の縁に対して一定の距離ずつ先行し、やがてある段を飛び越えてしまう。もし $D < L$ ならば、粒子は着実に遅れていき、やがて同じ段に二回着地してしまう（厳密には、D に収束する項の平均 x_n/n は D に収束する）。いずれにせよ、十分に長い階段では一段につき一回の跳ね返りとはならない。したがって、非常に大きな N に対しては $D = L$ でなければならない：

$$U\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2}} = L \quad \Longrightarrow \quad U = \left(\frac{L^2 g}{2h}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{2}},$$

となり、求める結果が得られる。

検算

- **特別な値。** $\alpha_1 = 1$ なので $d_1 = U\sqrt{2h/g}\,(e + \sqrt{1+e^2})$ である。$e = 0$ のとき、粒子は跳ね返るたびに鉛直方向に完全に停止するので、各飛行は $\sqrt{2h/g}$ の時間をかけて単に h だけ落下するものとなる。実際 $d_n = U\sqrt{2h/g}$ であり、最後の条件は $U\sqrt{2h/g} = L$ となって、まさにそうあるべき形になる。
- **次元。** $\sqrt{2h/g}$ は時間なので d_n は長さであり、$\sqrt{L^2 g/h}$ は速さである。
- **数値計算。** U、h、e の値をランダムに選び（$g = 9.8$ として）運動を数値的に追跡したところ、各 d_n が 10^{-6} 以内の誤差で再現された。$e = \frac{1}{2}$、$L = 0.3$、$h = 0.2$ のとき公式から $U \approx 0.857$ が得られ、このとき跳ね返りの位置は 2000 段にわたって連続する段の上にとどまった。

よくある間違い

- すべての跳ね返りを、静止状態から、あるいは前回の跳ね返りの高さからの h の落下とみなしてしまう。粒子は跳ね返るたびに上昇するので、鉛直方向の速さは段を経るごとに増大していく。
- $w_{n+1} = ew_n + \sqrt{2gh}$ と書いてしまう。足し合わされるのは速さの **2 乗**であり、速さそのものではない。

STEP のその先へ

最後の小問は平均についての主張である。$d_n \to D$ ならば、累積平均についても $\frac{1}{n}\sum d_k \to D$ が成り立つ（チェザロ（Cesàro）の定理）。これは実解析（real analysis）の初期に扱われる標準的な演習問題である。また、U についての条件は**必要条件**（necessary）であって十分条件ではないことにも注意しよう。初期の跳ね返りは L より短く、e が 1 に近い場合には、累積した不足分が初めの先行分 x_1 を上回ることがあり、そのときはどの打ち出しの速さでもうまくいかない。数列の極限を丁寧に扱ったものとしては Abbott, *Understanding Analysis* を、衝突の力学については Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics* を参照されたい。

解答例

STEP II 1990、第 13 問

力学 ・ 棒のつり合い

STEP II 1990、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s2-q13

鍵となる考え方

釘はなめらかで糸は軽いので、張力（tension）は糸のどこでも等しい。したがって棒は PO に沿った引く力と QO に沿った引く力という、大きさの**等しい**二つの力を受ける。これらの合力（resultant）は角 POQ を二等分し、釣り合い（equilibrium）のためには同じ鉛直線上で重力と打ち消し合わなければならない。よって O を通る鉛直線は角 POQ の二等分線（angle bisector）であり、しかも G を通る。あとは角の二等分線定理が片をつけてくれる。そして求める不等式は、三角形 OPQ がつぶれていない本物の三角形であるという主張にすぎない。

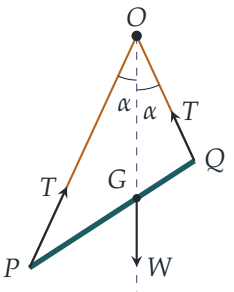
解答

OP と OQ を求める

棒を剛体の棒とみなし、その重心（centre of gravity）を G とする。ここで $PG = a + d$, $GQ = a - d$ であり、$0 \leq d < a$ とする。これにより G は棒の上にあり、中点に対して Q の側（または中点そのもの）にある。糸は軽く伸び縮みせず、釘は小さくなめらかなので、張力 T は二つの部分 OP と OQ で等しく、

$$OP + OQ = 2b.$$

である。棒にはたらく力は三つだけである。G にはたらく重力 W、P で PO の向きにはたらく張力 T、Q で QO の向きにはたらく張力 T である。



二つの張力の作用線は O で交わるので、(O のまわりのモーメント（moment）を考えると）重力も O を通って作用しなければならない。すなわち、O を通る鉛直線は G を通る。さらに、二つの張力は大きさが等しいので、その合力は PO 方向の単位ベクトルと QO 方向の単位ベクトルの和の向きを向く。これは両者のなす角の二等分線の向きである。この合力は W と釣り合うために鉛直でなければならない。したがって鉛直線 OG は角 POQ を二等分する。その半分の角をそれぞれ α とおく。

考えてみよう　OG が角 POQ を二等分することがわかると、長さについて何がいえるだろうか。

三角形 OPQ における角の二等分線定理（angle bisector theorem）により、O からの二等分線は PQ を隣り合う二辺の比に分ける：

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{PG}{GQ} = \frac{a+d}{a-d}.$$

（直接確かめるには次のようにすればよい。三角形 OPG と OQG は O からの高さが共通なので、面積の比は $PG : GQ$ である。一方、それぞれの面積は $\frac{1}{2}\,OP \cdot OG \sin\alpha$ と $\frac{1}{2}\,OQ \cdot OG \sin\alpha$ でもある。）よってある $k > 0$ を用いて $OP = k(a+d), OQ = k(a-d)$ と書け、$OP + OQ = 2b$ から $2ka = 2b$、すなわち $k = b/a$ を得る：

$$OP = \frac{b(a+d)}{a}, \qquad OQ = \frac{b(a-d)}{a}.$$

不等式

$\theta = \angle POQ = 2\alpha$ とおく。棒は鉛直ではないので、O は直線 PQ 上にない。よって OPQ は本物の三角形であり、$0 < \theta < \pi$ である。$PQ = 2a$ として余弦定理（cosine rule）を用いると

$$\begin{aligned} 4a^2 &= OP^2 + OQ^2 - 2\,OP \cdot OQ \cos\theta \\ &= \frac{b^2}{a^2}\Big[(a+d)^2 + (a-d)^2 - 2(a^2-d^2)\cos\theta\Big] \\ &= \frac{2b^2}{a^2}\Big[(a^2+d^2) - (a^2-d^2)\cos\theta\Big]. \end{aligned}$$

となる。ここで $\theta \neq 0$ より $\cos\theta < 1$ であり、$d < a$ より $a^2 - d^2 > 0$ である。したがって

$$4a^2 > \frac{2b^2}{a^2}\left[(a^2 + d^2) - (a^2 - d^2)\right] = \frac{4b^2d^2}{a^2},$$

すなわち $b^2d^2 < a^4$ である。($b > 0, d \geq 0$ であるから) 正の平方根をとると $bd < a^2$ となり、

$$d < \frac{a^2}{b},$$

が示された。

これは三角不等式(triangle inequality)$OP - OQ < PQ$ と同値である。実際、$OP - OQ = 2bd/a$ であり、$2bd/a < 2a$ は同じ条件である。(もう一方の不等式 $\cos\theta > -1$ からは $OP + OQ > PQ$、すなわち $b > a$ が得られる。これは糸がそもそも釘にかけられるだけの長さをもつということにすぎない。)

検算

- $d = 0$ (一様な棒) ならば $OP = OQ = b$ となり、対称性から当然のとおり棒は水平につり下がる。不等式 $0 < a^2/b$ は自動的に成り立つ。
- $d \to a^2/b$ とすると $OP - OQ \to 2a = PQ$ となり、三角形はつぶれて棒は鉛直になる。この値を超えると、つり下がる方法は鉛直につり下がる以外にない。
- $a = 1, b = 2, d = 0.3$ とすると $OP = 2.6, OQ = 1.4, \cos\theta \approx 0.648$ である。OG が鉛直になるようにこの三角形を置くと、二つの張力の水平成分は打ち消し合い、O のまわりのモーメントも計算機の精度の範囲で釣り合う。糸のあらゆる位置を走査したところ、これが鉛直でない唯一の釣り合いの位置であり、$d \geq a^2/b$ となるとそのような位置は存在しないことが確かめられた。

よくある間違い

- 糸の二つの部分で張力が異なると考えてしまう。なめらかな釘にかけた糸では張力は等しく、まさにそのことが OG を角の二等分線にしている。
- 角の二等分線による比を逆にしてしまう。長いほうの糸 OP は、G から遠いほうの端につながる。
- この釣り合いが安定であると思い込む。実際には不安定 (unstable) である。$d = 0$ のとき、水平な棒では G は O より $\sqrt{b^2 - a^2}$ だけ下にあるが、鉛直につり下がると O より b だけ下になり、こちらのほうが低い。問題が問うているのは釣り合いだけである。

STEP のその先へ

棒に対する O の軌跡（locus）は P と Q を焦点（foci）とする楕円（ellipse）であり、釣り合いの位置は G の高さが停留（stationary）する点である。これが仮想仕事の原理（principle of virtual work）であり、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）へとつながっていく。この見方は、等しい張力がなぜ角を二等分するのかも説明してくれる。それは楕円の反射性質（reflection property）にほかならない。静力学（statics）と安定性（stability）について次に学ぶには、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい。

解答例

STEP II 1990、第 14 問

力学 ・ 弾性衝突

> **STEP II 1990、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q14

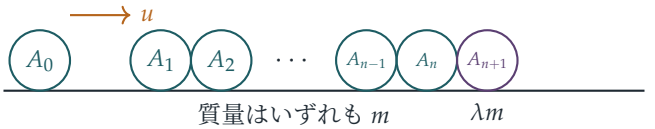
この問題は、*Beyond STEP* の第 10.1 節「ニュートンのゆりかご」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch10/newtons-cradle.html

鍵となる考え方

力積（impulse）が列に沿ってどのように伝わるのかがわからない以上、衝突を一つずつ追っていくことはできない。できるのは、考えられる最終的な運動それぞれを次の三つの条件に照らして確かめることである。すなわち、運動量（momentum）が保存されること、運動エネルギー（kinetic energy）が保存されること、そしてビー玉同士が互いをすり抜けないことである。三つ目の条件は忘れやすいが、各小問の結論を決めるのはまさにこの条件である。すぐ後ろに静止したビー玉があるビー玉は後ろ向きに動くことができず、また、ビー玉がすぐ前にあるビー玉より速く動いていることはありえない。

解答

ビー玉を滑らかな直線（溝）上の質点（particle）とみなし、速度は A_0 のもとの運動の向きを正として測る。衝突前の運動量の総和は mu、運動エネルギーの総和は $\frac{1}{2}mu^2$ であり、どちらも保存される。



ビー玉は重なり合うことができないので、起こりうるどんな最終的な運動についても、次の二つの事実が成り立つ。

- A_k が静止していて、A_{k+1} がそのすぐ前で接しているならば、A_{k+1} の速度は負にはなりえない。
- A_k と A_{k+1} が接しているならば、A_k の速度は A_{k+1} の速度を超えることはない。

小問 (i)

A_n と A_{n+1} だけが動き、その速度がそれぞれ v、w であるとする。両辺を m で割ると、

$$v + \lambda w = u,$$
$$v^2 + \lambda w^2 = u^2.$$

$v = u - \lambda w$ をエネルギーの式に代入すると、

$$u^2 - 2\lambda uw + \lambda^2 w^2 + \lambda w^2 = u^2 \quad \Longrightarrow \quad \lambda w\big((1+\lambda)w - 2u\big) = 0.$$

解 $w = 0$ からは $v = u$ が得られる。このとき A_n は静止している A_{n+1} に向かって前進することになり、これは不可能である。もう一つの解は

$$w = \frac{2u}{1+\lambda}, \qquad v = u - \lambda w = \frac{(1-\lambda)u}{1+\lambda}.$$

$\lambda < 1$ の場合：このとき $v > 0$ なので、A_n は静止している A_{n-1} から離れていく。また

$$w - v = \frac{(1+\lambda)u}{1+\lambda} = u > 0,$$

なので、A_{n+1} は A_n から離れていく。二つの保存則がともに成り立ち、重なり合うものもないので、この運動は起こりうる。このとき $A_0, \ldots, A_{n-1}$ はすべて静止している。

$\lambda > 1$ の場合：このとき $v < 0$ なので、A_n は後ろ向きに動かなければならない。しかし、そのすぐ後ろには A_{n-1} が接して静止している。したがって、二つの保存則をともに満たす唯一の運動は物理的に不可能であり、$\lambda > 1$ のときこの種の運動は存在しない。

小問 (ii)

A_{n-1}、A_n、A_{n+1} だけが動き、その速度がそれぞれ a、b、c であるとする。$n \geq 3$ なので、ビー玉 A_{n-2} が存在し、それは静止していて A_{n-1} に後ろから接している。よって $a \geq 0$ である。動いている三つのビー玉は互いを追い越せないので、$a \leq b \leq c$ である。したがって a、b、c はすべて非負である。

考えてみよう 二つの保存則からは、いずれも a、b、c に関する方程式が得られる。方程式を解かずに、これらをどのように比較すればよいだろうか？

運動量の式を 2 乗し、エネルギーの式を引く。保存則より $a+b+\lambda c = u$ かつ $a^2+b^2+\lambda c^2 = u^2$ なので、

$$(a+b+\lambda c)^2 - (a^2+b^2+\lambda c^2) = u^2 - u^2 = 0.$$

左辺を展開すると、

$$\lambda(\lambda-1)c^2 + 2ab + 2\lambda c(a+b) = 0.$$

$\lambda > 1$ かつ $a,b,c \geq 0$ のとき、左辺の各項はすべて非負なので、各項はすべて 0 でなければならない。特に $\lambda(\lambda-1)c^2 = 0$ であり、これより $c = 0$ となる。すると $0 \leq a \leq b \leq c = 0$ となり、三つのビー玉はすべて静止していることになる。$u > 0$ なので、これは運動量の式に矛盾する。したがって、$\lambda > 1$ のときこのような運動は存在しない。

小問 (iii)

(ii) の議論は、動いているビー玉がどのような組であっても通用する。すなわち、すべての速度が非負で A_{n+1} が動くならば、運動エネルギーが小さすぎるのである。したがって $\lambda > 1$ のときは、いずれかのビー玉が後ろ向きに動かなければならない。A_0 以外のビー玉にはすべてすぐ後ろに別のビー玉があるので、跳ね返るビー玉の候補として自然なのは A_0 である。

考えてみよう どの二つのビー玉で試せばよいだろうか？

A_0 と A_{n+1} が速度 p、q で動き、$A_1,\ldots,A_n$ は静止したままである場合を試す。これは v,w を p,q に置き換えただけで (i) と同じ二つの方程式であり、自明でない解は

$$p = \frac{(1-\lambda)u}{1+\lambda} = -\frac{(\lambda-1)u}{\lambda+1}, \qquad q = \frac{2u}{1+\lambda}.$$

(i) と同様に、運動量とエネルギーは保存されている。さらに、この運動は物理的にも起こりうる。

- $p < 0$ なので、A_0 は後ろ向きに動いて A_1 から離れていき、A_0 の後ろには何もない。
- $q > 0$ なので、A_{n+1} は静止している A_n から離れていく。

したがって、起こりうる運動の一つは、A_0 が速さ $\dfrac{(\lambda-1)u}{\lambda+1}$ で跳ね返り、A_{n+1} が速さ $\dfrac{2u}{\lambda+1}$ で動き出し、$A_1,\ldots,A_n$ が静止したままであるというものである。

これは、衝突を隣り合うビー玉同士の個別の衝突の連続としてモデル化した場合に起こることとも一致する。質量の等しいビー玉の組はそれぞれ速度を交換するので、速さ u は A_n まで受け渡されていく。A_n が A_{n+1} に衝突すると、A_n は速度 p で跳ね返り、その後ろ向きの速度が今度は列に沿って A_0 まで受け渡されていく。

検算

- $\lambda = 1$ のときはすべてのビー玉が同一であり、どちらの答えも、A_{n+1} が速さ u で動き出し、それ以外はすべて静止するというものになる。これはおなじみの「ニュートンのゆりかご（Newton's cradle）」である。
- $\lambda = 2$、$u = 3$ のとき、小問 (iii) から $p = -1$、$q = 2$ が得られる。運動量：$-1 + 2 \times 2 = 3$。エネルギー：$1 + 2 \times 4 = 9 = 3^2$。
- $n = 3$ と $n = 6$ について、2 個ずつの弾性衝突（elastic collision）の連続を数値的に追った。$\lambda = 2$ のとき最終的な速度は $-\frac{1}{3}u$ と $\frac{2}{3}u$、$\lambda = 4$ のときは $-0.6u$ と $0.4u$ となり、予測どおりであった。$\lambda = \frac{1}{2}$ のときは、シミュレーションは A_n と A_{n+1} がそれぞれ $\frac{1}{3}u$ と $\frac{4}{3}u$ で動く状態で終わり、(i) と一致する。

よくある間違い

- 二つの保存則の方程式を解いただけで終わりにしてしまうこと。各小問の結論は、その解が物理的に起こりうるかどうか、すなわち速度の符号や、ビー玉同士がすり抜けることにならないかどうかにかかっている。
- (i) で解 $w = 0$、$v = u$ を残してしまうこと。この解は衝突前の運動を表しているにすぎない。
- (ii) において、A_{n-1} の後ろに静止した A_{n-2} があることを保証しているのが $n \geq 3$ であることを忘れること。

STEP のその先へ

接して並んだビー玉の列では、二つの保存則（conservation law）だけでは結果は決まらない。この問題の本質は、保存量の条件を満たす多くの解のうち、どれが物理的に起こりうるかということにある。それらの中から選ぶには、接触についてのより詳しいモデル、たとえば 2 個ずつの衝突の連続や、ビー玉を硬いばねとして扱うモデルが必要になる。ビー玉をばねとしてモデル化すると、粒子の鎖を伝わる波の理論につながる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このよう

な考え方で衝突と保存則を扱っている。

解答例

STEP II 1990、第 15 問

確率・統計　・　順序統計量

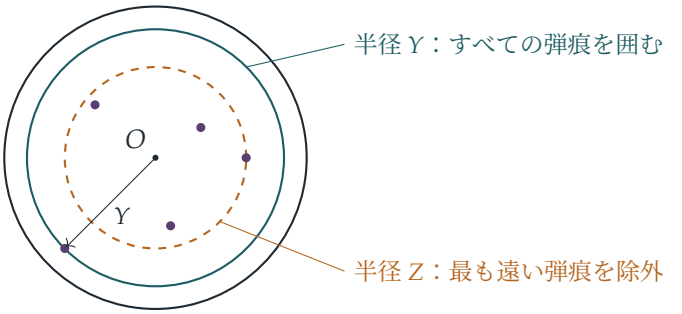
STEP II 1990、問 15

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s2-q15

鍵となる考え方

O を中心とし、すべての弾痕を囲む最小の円の半径は、**最も遠い**弾痕までの距離に等しい。したがって Y は独立な距離の最大値である。最大値が y 以下となるのは、**すべての**弾痕が y 以内にあるときであり、またそのときに限る。これにより累積分布関数（cumulative distribution function）は積で表される。最も遠い弾痕を除外した後に求める半径は、**2 番目に**大きい距離である。その分布関数は、与えられた円の外側にいくつの弾痕があってよいかを数えることで得られる。



解答

$R_1, \ldots, R_n$ を n 個の弾痕の O からの距離とする。これらは独立（independent）であり（各弾は独立に撃たれる）、それぞれの分布関数は

$$P(R_i \le t) = t^2, \qquad 0 \le t \le 1.$$

である。

Y の分布

すべての弾痕を含む O 中心の最小の円の半径は $Y = \max(R_1, \ldots, R_n)$ である。$0 \le y \le 1$ に対して

$$P(Y \le y) = P(R_1 \le y, \ldots, R_n \le y) = \prod_{i=1}^{n} P(R_i \le y) = (y^2)^n = y^{2n},$$

となる。ここで 2 番目の等号で独立性を用いた。これを微分すると、Y の確率密度関数（probability density function）は

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} y^{2n} = 2ny^{2n-1}, \qquad 0 \le y \le 1,$$

となり、求める結果が得られる。（$[0,1]$ の外では 0 であり、積分すると当然 1 になる。）

円の面積は πY^2 であるから

$$E(\pi Y^2) = \pi \int_0^1 y^2 \cdot 2ny^{2n-1}\,\mathrm{d}y = 2n\pi \int_0^1 y^{2n+1}\,\mathrm{d}y = \frac{2n\pi}{2n+2} = \frac{n\pi}{n+1}.$$

である。

最も遠い弾痕を除外する

弾痕が残るように $n \ge 2$ とする。最も遠い弾痕を取り除くと、残りを囲む O 中心の最小の円の半径は Z、すなわち $R_1, \ldots, R_n$ のうち 2 番目に大きいものとなる。

> **考えてみよう** 事象 $Z \le z$ を、半径 z の円の外側に落ちる弾痕の個数を用いてどのように表せるだろうか？

2 番目に大きい距離が z 以下となるのは、O から z より遠くにある弾痕が**高々 1 個**であるときであり、またそのときに限る。各弾痕は独立に確率 z^2 で z 以内にあるので、半径 z の円の外側にある弾痕の個数は二項分布（binomial distribution）$\mathrm{B}(n, 1-z^2)$ に従う。したがって $0 \le z \le 1$ に対して

$$\begin{aligned} P(Z \le z) &= P(\text{外側に弾痕がない}) + P(\text{外側にちょうど 1 個の弾痕がある}) \\ &= z^{2n} + n(1-z^2)z^{2(n-1)} \\ &= nz^{2n-2} - (n-1)z^{2n}. \end{aligned}$$

となる。微分すると Z の密度関数が得られる：

$$f_Z(z) = 2n(n-1)z^{2n-3} - 2n(n-1)z^{2n-1} = 2n(n-1)z^{2n-3}(1-z^2), \qquad 0 \le z \le 1.$$

よって新しい円の面積の期待値は

$$\begin{aligned} E(\pi Z^2) &= 2n(n-1)\pi \int_0^1 \left(z^{2n-1} - z^{2n+1}\right) \mathrm{d}z \\ &= 2n(n-1)\pi \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right) \\ &= 2n(n-1)\pi \cdot \frac{2}{2n(2n+2)} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)\pi, \end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。

検算

- $n = 1$ のとき、最初の答えは $\pi/2$ である。弾痕が 1 個のとき R^2 は $[0,1]$ 上の一様分布に従う（$P(R^2 \le u) = u$ であるから）ので、面積 πR^2 の期待値は $\pi/2$ となる。
- $n = 2$ のとき、2 番目の答えは $\pi/3$ であり、これは 2 個の弾痕のうち**近いほう**に対する面積の期待値である。最初の答え $2\pi/3$ と合わせると、両者の平均は 1 個の場合の値 $\pi/2$ となり、確かにそうなるべきである。
- $n = 5$、試行回数 2×10^5 のシミュレーションでは、面積の期待値として 2.618 と 2.095 が得られた。理論値は $5\pi/6 \approx 2.618$ と $4\pi/6 \approx 2.094$ である。

よくある間違い

- 残りの弾痕を $n-1$ 個の新たな標本であるかのように扱い、$P(Z \le z) = z^{2(n-1)}$ と書いてしまう。除外される弾痕は無作為ではないので、残った弾痕は O の側に偏っている。
- どの弾痕が円の外側にあるかを表す因子 n を忘れる。
- $E(Y)$ を求めてからそれを 2 乗してしまう。面積の期待値は $\pi E(Y^2)$ であり、$\pi\big(E(Y)\big)^2$ ではない。

STEP のその先へ

これらは**順序統計量**（order statistics）である。$U_i = R_i^2$ は $[0,1]$ 上の一様分布に従うので、面積は単に n 個の一様乱数の順序統計量であり、n 個の独立な一様乱数のうち k 番目に小さいものは平均 $k/(n+1)$ のベータ分布（beta distribution）に従う。ここでの 2 つの答えは $k = n$ と $k = n-1$ の場合である。n 個の無作為な点が $[0,1]$ を、長さの期待値が等しい $n+1$ 個の区間に分ける、というのが見通しのよい描像である。

Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門書）では、この種の変換や順序統計量が扱われている。

解答例

STEP II 1990、第 16 問

確率・統計 ・ ベイズの定理

> **STEP II 1990、問 16**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q16

鍵となる考え方

これは姿を変えたベイズの定理（Bayes' theorem）である。写真からは黒のネクタイを着けていたことがわかり、求めたいのはそれを**条件としたときの**曜日の確率である。そこでまず順方向に考える。各種類の日について、ズボンで枝分かれする樹形図（tree diagram）を用いて黒のネクタイを着ける確率を求める。次に、その条件付き確率（conditional probability）を逆向きにする。月曜日の規則は樹形図の枝を一本変えるだけなので、後半の小問ではほとんど追加の手間がかからない。

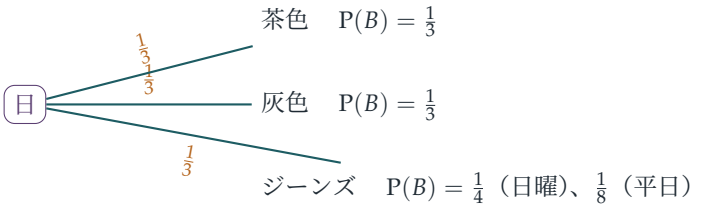
解答

写真が日曜日に撮られたという事象を S、私が黒のネクタイを着けているという事象を B とする。写真は 7 日のうちどの日のものである可能性も等しいので、写真を見る前の段階では $\mathrm{P}(S) = \frac{1}{7}$ である。（後で扱う月曜日を除く）すべての日において、それぞれのズボンを選ぶ確率は $\frac{1}{3}$ である。

各種類の日に黒のネクタイを着ける確率

- **茶色のズボン**。クラヴァットは除外されるので、ネクタイは黒、水玉、レジメンタルのいずれかから無作為に選ばれる：$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}$。
- **灰色のズボン**。水玉のネクタイは除外されるので、黒、レジメンタル、クラヴァットから選ぶ：$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}$。
- **日曜日のジーンズ**。必ずネクタイを着け、4 本すべてから選ぶ：$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{4}$。
- **平日のジーンズ**。確率 $\frac{1}{2}$ でスウェットシャツを着てネクタイはしない。そうでなけ

れば 4 本のネクタイのいずれかである：$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$。



枝に沿って足し合わせる（ズボンについての全確率の公式（law of total probability））と、

$$\mathrm{P}(B \mid \text{日曜日}) = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{11}{12} = \tfrac{11}{36} = \tfrac{22}{72},$$
$$\mathrm{P}(B \mid \text{平日}) = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{8}\right) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{19}{24} = \tfrac{19}{72}.$$

前半の答え

ベイズの定理により、日曜日の事前確率（prior probability）を $\frac{1}{7}$、6 日間の平日をまとめた事前確率を $\frac{6}{7}$ として、

$$\mathrm{P}(S \mid B) = \frac{\frac{1}{7} \cdot \frac{22}{72}}{\frac{1}{7} \cdot \frac{22}{72} + \frac{6}{7} \cdot \frac{19}{72}} = \frac{22}{22 + 6 \times 19} = \frac{22}{136} = \frac{11}{68},$$

となり、示すべき結果が得られた。（共通因数 $\frac{1}{7 \times 72}$ が約分で消える。すべてを分母 72 でそろえておく価値があるのはこのためである。）

考えてみよう 答えが単に $\mathrm{P}(B \mid \text{日曜日})$ や $\frac{1}{7}$ にならないのはなぜか。

$\mathrm{P}(B \mid \text{日曜日}) = \frac{11}{36}$ は別の問いに答えている。これは曜日を条件としたネクタイの確率であり、ネクタイを条件とした曜日の確率ではない。また $\frac{1}{7}$ は証拠を無視している。日曜日にはネクタイなしの選択肢がないため、黒のネクタイは日曜日のほうがわずかに起こりやすい（$\frac{22}{72}$ 対 $\frac{19}{72}$）。そのため写真によって、日曜日である確率は $\frac{1}{7} = \frac{11}{77}$ から $\frac{11}{68}$ へと少し押し上げられる。

月曜日の規則がある場合

今度は月曜日には必ずジーンズをはき、しかも月曜日は平日であるから、スウェットシャツの選択肢は依然として適用される：

$$\mathrm{P}(B \mid \text{月曜日}) = 1 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8} = \tfrac{9}{72}.$$

日曜日と残り 5 日の平日は変わらない。各曜日の事前確率は依然として $\frac{1}{7}$ であり、これは約分で消えるので、

$$\mathrm{P}(S \mid B) = \frac{\frac{22}{72}}{\frac{22}{72} + \frac{9}{72} + 5 \cdot \frac{19}{72}} = \frac{22}{22 + 9 + 95} = \frac{22}{126} = \frac{11}{63}.$$

これは $\frac{11}{68}$ より少し大きい。これは理にかなっている。月曜日には黒のネクタイが起こりにくくなる（$\frac{19}{72}$ ではなく $\frac{1}{8}$）ので、黒のネクタイの写真は月曜日から遠ざかり、わずかに日曜日の側を指すことになる。

検算

- 各曜日のネクタイの確率と「ネクタイなし」の確率を合わせると 1 になる。たとえば平日にネクタイなしとなる確率は $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ である。
- 無作為な 4×10^5 日のシミュレーションでは、黒のネクタイの日のうち日曜日である割合はおよそ 0.161（厳密値 $\frac{11}{68} \approx 0.1618$）、月曜日の規則がある場合はおよそ 0.174（厳密値 $\frac{11}{63} \approx 0.1746$）となる。

よくある間違い

- 月曜日もジーンズには確率半分のスウェットシャツが伴うことを忘れる。月曜日は平日である。月曜日について $\frac{1}{8}$ の代わりに $\frac{1}{4}$ を用いると $\frac{22}{135}$ になってしまう。
- 茶色や灰色のズボンのときに 4 本すべてのネクタイから選んでしまう。どちらの場合もネクタイは 3 本しか残らない。

STEP のその先へ

「仮説を条件とした証拠の確率」を「証拠を条件とした仮説の確率」に変換することは、ベイズ推論（Bayesian inference）の核心である。これを簡潔に言い表すと、事後オッズ（posterior odds）は事前オッズ（prior odds）と尤度比（likelihood ratio）の積に等しい、となる。ここでは日曜日対平日の事前オッズは 1 : 6、尤度比は 22 : 19 であり、これより 22 : 114、すなわち 11 : 57 が得られる。大学の講義ではこれをベイズ統計学（Bayesian statistics）へと発展させ、そこでは分布全体が同じようにして更新される。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）には、条件付き確率についての優れた章があり、本問のような例が数多く載っている。

解答例

STEP III 1990、第 1 問

純粋数学 ・ 倍角と多項式の根

STEP III 1990、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s3-q1

鍵となる考え方

9 は 3×3 であるから、正接の三倍角の公式（triple-angle formula）を 2 回用いれば $\tan 9\theta$ が得られる。これは $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^9$ を展開するよりもはるかに手間が少ない。さらに、因数分解（factorisation）された形から、$\theta = \pi/9, 2\pi/9, 4\pi/9$ でどの因数が 0 になるかもわかる。これらはちょうど $\tan^2 3\theta = 3$ となる角である。これにより $u = \tan^2\theta$ についての三次方程式（cubic）が得られ、あとはヴィエトの公式（Vieta's formulas、多項式の解と係数の関係）がすべてを片づけてくれる。

解答

$\tan 9\theta$ の公式

$t = \tan\theta$、$T = \tan 3\theta$ とおく。三倍角の公式は $\tan(2\theta + \theta)$ からも、$n = 3$ としたド・モアブル（de Moivre）の定理からも得られ、

$$T = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2} = \frac{t(t^2 - 3)}{3t^2 - 1}, \qquad \tan 9\theta = \frac{3T - T^3}{1 - 3T^2} = \frac{T(3 - T^2)}{1 - 3T^2}.$$

となる。ここで $3-T^2$ と $1-3T^2$ を共通の分母 $(1-3t^2)^2$ で表す。

$$\begin{aligned}(1-3t^2)^2(3-T^2) &= 3(1-3t^2)^2 - t^2(3-t^2)^2\\ &= (3-18t^2+27t^4) - (9t^2-6t^4+t^6)\\ &= -(t^6-33t^4+27t^2-3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-3t^2)^2(1-3T^2) &= (1-3t^2)^2 - 3t^2(3-t^2)^2\\ &= (1-6t^2+9t^4) - (27t^2-18t^4+3t^6)\\ &= -(3t^6-27t^4+33t^2-1).\end{aligned}$$

比をとると因数 $-(1-3t^2)^{-2}$ は約分されるので、

$$\tan 9\theta = \frac{t(t^2-3)}{3t^2-1}\cdot\frac{t^6-33t^4+27t^2-3}{3t^6-27t^4+33t^2-1},$$

となり、これが求める結果である。

代わりにド・モアブルの定理を用いると、$\tan 9\theta = \operatorname{Im}(1+\mathrm{i}t)^9 / \operatorname{Re}(1+\mathrm{i}t)^9$ である。この場合は、

$$9t-84t^3+126t^5-36t^7+t^9 \quad \text{と} \quad 1-36t^2+126t^4-84t^6+9t^8$$

がそれぞれ上の分子と分母のように因数分解されることを確かめなければならない。実際そうなるのだが、$\tan 3\theta$ を経由する方法なら因数分解がおのずと手に入る。

三次方程式

$P(t) = t^6-33t^4+27t^2-3$ とおく。上の最初の計算から

$$3-\tan^2 3\theta = -\frac{P(t)}{(1-3t^2)^2} \qquad \text{ただし} 3t^2 \neq 1.$$

が成り立つ。ここで $\theta = \pi/9,\ 2\pi/9,\ 4\pi/9$ とする。すると $3\theta = \pi/3,\ 2\pi/3,\ 4\pi/3$ であり、いずれの場合も $\tan 3\theta = \pm\sqrt{3}$、したがって $\tan^2 3\theta = 3$ である。また、いずれの場合も 3θ は $\pi/6$ の奇数倍ではないので、$3t^2 \neq 1$ である（そうでなければ $\tan 3\theta$ が定義されない）。よって、3 つの角すべてについて $P(\tan\theta) = 0$ である。

これらはちょうど、$(0, \pi/2)$ の中で、t や t^2-3 ではなく因数 P によって $\tan 9\theta = 0$ となる角である。実際、$t \neq 0$ であり、また $\theta \neq \pi/3$ であるから $t^2 \neq 3$ である。

> **考えてみよう** この 3 つの数が三次方程式の解の**すべて**であり、重解がないことはどうしてわかるだろうか。

$u = t^2$ とおく。$\tan^2(\pi/9)$、$\tan^2(2\pi/9)$、$\tan^2(4\pi/9)$ はいずれも

$$u^3-33u^2+27u-3 = 0.$$

の解（root）である。tan は $(0, \pi/2)$ で正かつ狭義単調増加であり、$\pi/9 < 2\pi/9 < 4\pi/9 < \pi/2$ であるから、これら 3 つの値は相異なる。三次方程式の解は高々 3 個であるから、これらがちょうどその解である。これが求める整数係数の三次方程式である。

積

ヴィエトの公式により、$u^3 - 33u^2 + 27u - 3$ の解の積は 3 である。

$$\tan^2\left(\tfrac{\pi}{9}\right)\tan^2\left(\tfrac{2\pi}{9}\right)\tan^2\left(\tfrac{4\pi}{9}\right) = 3.$$

3 つの角はすべて $(0, \pi/2)$ にあるので、各正接は正であり、正の平方根をとる。

$$\tan\left(\tfrac{\pi}{9}\right)\tan\left(\tfrac{2\pi}{9}\right)\tan\left(\tfrac{4\pi}{9}\right) = \sqrt{3}.$$

6 乗の和

解を u_1, u_2, u_3 とする。三次方程式から

$$e_1 = u_1 + u_2 + u_3 = 33, \qquad e_2 = u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = 27, \qquad e_3 = u_1u_2u_3 = 3.$$

である。求めたいのは $u_1^3 + u_2^3 + u_3^3$ であり、これは正接の 6 乗の和にほかならない。

> **考えてみよう** 解を求めずに、e_1, e_2, e_3 から 3 乗の和を得るにはどうすればよいだろうか。

各解は $u_i^3 = 33u_i^2 - 27u_i + 3$ を満たす。この 3 つの等式を足し合わせると

$$\sum u_i^3 = 33\sum u_i^2 - 27\sum u_i + 9.$$

となる。ここで $\sum u_i = 33$ であり、

$$\sum u_i^2 = e_1^2 - 2e_2 = 1089 - 54 = 1035.$$

である。したがって

$$\begin{aligned}\sum u_i^3 &= 33 \times 1035 - 27 \times 33 + 9\\ &= 34155 - 891 + 9\\ &= 33273.\end{aligned}$$

すなわち

$$\tan^6\left(\tfrac{\pi}{9}\right) + \tan^6\left(\tfrac{2\pi}{9}\right) + \tan^6\left(\tfrac{4\pi}{9}\right) = 33273,$$

となり、示すべきことが示された。同じことであるが、$\sum u_i^3 = e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3 = 35937 - 2673 + 9$ としてもよい。

検算

- 数値的には、$\tan^2(\pi/9) \approx 0.1325$、$\tan^2(2\pi/9) \approx 0.7041$、$\tan^2(4\pi/9) \approx 32.163$ である。これらの和は 33.000、積は 3.000 である。
- 3 つの正接の積は $1.7320508\ldots = \sqrt{3}$ である。
- 上の 3 つの値の 3 乗の和は 33273.0 である。そのほとんどは $\tan^6(4\pi/9) \approx 33272.4$ によるものである。
- $\tan 9\theta$ の公式は、数千個のランダムな θ の値において、電卓の値と有効数字約 12 桁まで一致する。
- 簡単な場合：$t = 1$、すなわち $\theta = \pi/4$ とする。公式から $\frac{1\cdot(-2)(-8)}{2\cdot 8} = 1 = \tan(9\pi/4)$ が得られる。

よくある間違い

- 六次式（sextic）の因数が 0 になると結論する前に、$3t^2 \neq 1$（すなわち分母が 0 でないこと）を確かめるのを忘れる。
- 積として $-\sqrt{3}$ をとってしまう。どの角も鋭角であるから、どの正接も正である。
- $+3e_3$ の項を落として $\sum u_i^3 = e_1^3 - 3e_1e_2$ と書いてしまう。こうすると 33264 になる。

STEP のその先へ

三次式 $u^3 - 33u^2 + 27u - 3$ は有理数解をもたないので、$\mathbb{Q}$ 上既約（irreducible）である。また、この三次式は 3 つの実数解をもつ。ガロア理論（Galois theory）によれば、このような三次式の解は実数の冪根（radicals）だけを用いて表すことができない（**還元不能の場合**（casus irreducibilis））。$\tan^2(\pi/9)$ のような三角関数による表示がそれらを書き表す自然な方法であるのはそのためである。解の冪乗の和は、一般にニュートンの恒等式（Newton's identities）によって支配される。ド・モアブルの定理の幾何学的な側面については、Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）を読むとよい。代数的な側面については、Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を読むとよい。

解答例

STEP III 1990、第 2 問

純粋数学 ・ 空間ベクトル

> **STEP III 1990、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q2

鍵となる考え方

4 点はすべて、ただ 1 本の曲線 $t \mapsto (t^3, t^2, t)$、すなわち**ねじれ三次曲線**（twisted cubic）の上にある。交わる 2 直線は共通の平面上にあるので、小問 (i) は O, A, B, C が決して同一平面上（coplanar）にないことを示す問題に帰着する。これは、ヴァンデルモンド行列式（Vandermonde determinant）と同じように因数分解できる行列式（determinant）の計算である。小問 (ii) では、条件 $ab = 1$ によって内積（scalar product）と長さがまとまり、ただ 1 つの量 $a^2 + 1/a^2$ の関数になる。

解答

まず、「相異なる」という条件から何がわかるだろうか。パラメータ t に対応する点の第 3 座標は t そのものなので、異なる点は異なるパラメータをもつ。したがって a, b, c は相異なる。また O は $t = 0$ に対応する点であるから、a, b, c のいずれも 0 ではない。

小問 (i)

直線 OA と BC が交わると仮定する。共通の点を通る 2 直線は共通の平面上にある（2 直線がたまたま一致する場合は、それらを含む任意の平面をとればよい）。よって O, A, B, C はすべて原点を通る 1 つの平面上にあり、位置ベクトル $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ は一次従属（linearly dependent）となる。これが起こるのは、ちょうど

$$D = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a \\ b^3 & b^2 & b \\ c^3 & c^2 & c \end{vmatrix} = 0.$$

となるときである。第 1 行から因数 a を、第 2 行から b を、第 3 行から c をくくり出すと、

$$D = abc\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}.$$

第 1 行と第 2 行のそれぞれから第 3 行を引き、最後の列に沿って展開すると、

$$D = abc\begin{vmatrix} (a-c)(a+c) & a-c & 0 \\ (b-c)(b+c) & b-c & 0 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = abc\,(a-c)(b-c)\begin{vmatrix} a+c & 1 \\ b+c & 1 \end{vmatrix}$$

$$= abc\,(a-b)(a-c)(b-c).$$

$a, b, c \neq 0$ であり、a, b, c は相異なるので、どの因数も 0 ではない。よって $D \neq 0$ であり、4 点は同一平面上になく、したがって直線 OA と BC は交わりえない。（平行でもないので、2 直線はねじれの位置（skew）にある。）

考えてみよう 4 点が同一平面上にないことを示せば十分なのはなぜか。

交わる 2 直線は必ず 1 つの平面を張るからである。もし OA と BC が点 P で交わるならば、P を通り両直線を含む平面は O, A, B, C を含むことになる。そのような平面が存在しないことはすでに示した。

小問 (ii)

$b = 1/a$ とおく。このとき $a \neq 0$ であり、さらに $a \neq \pm 1$ である。そうでなければ $b = a$ となり、A と B が一致してしまうからである。内積は

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (ab)^3 + (ab)^2 + ab = 3,$$

であり、長さの 2 乗は

$$|\mathbf{a}|^2 = a^2(a^4 + a^2 + 1), \qquad |\mathbf{b}|^2 = \frac{1}{a^6} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^2} = \frac{a^4 + a^2 + 1}{a^6}.$$

である。これらを掛け合わせると $|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 = (a^4 + a^2 + 1)^2/a^4$ となるので、$|\mathbf{a}||\mathbf{b}| = (a^4 + a^2 + 1)/a^2$ であり、これは正である。$\theta = \angle AOB$ とおくと、

$$\cos\theta = \frac{3a^2}{a^4 + a^2 + 1} = \frac{3}{u+1}, \qquad \text{ただし} u = a^2 + \frac{1}{a^2}.$$

取りうる値。 相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM）により（あるいは $a^2 + a^{-2} - 2 = (a - a^{-1})^2$ であることから）、$u \geq 2$ であり、等号は $a^2 = 1$ のときに限って成り立つが、これは除外されている。よって $u > 2$ であり、したがって

$$0 < \cos\theta = \frac{3}{u+1} < \frac{3}{3} = 1,$$

となり、$0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ を得る。これ以外の角はありえない。

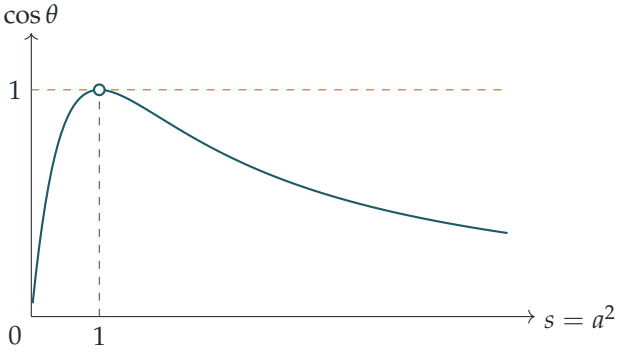
そのような値はすべて実際に現れる。 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ を満たす任意の θ をとると、$0 < \cos\theta < 1$ である。必要なのは $u = 3/\cos\theta - 1$ であり、これは 2 より大きい。方程式 $a^2 + 1/a^2 = u$ は a^2 についての 2 次方程式 $(a^2)^2 - u\,a^2 + 1 = 0$ であり、その解の 1 つは

$$a^2 = \frac{u + \sqrt{u^2 - 4}}{2} > 1,$$

である。$u > 2$ なので、これは実数である。a をその正の平方根とし、$b = 1/a$ とする。すると $a > 1 > b > 0$ なので、$ab = 1$、$A \neq B$ であり、どちらも O ではなく、$\cos\angle AOB = 3/(u+1) = \cos\theta$ となる。両方の角は余弦が単射（one-to-one）となる区間 $[0, \pi]$ にあるので、$\angle AOB = \theta$ である。

以上より、$\angle AOB$ は $0 < \angle AOB < \frac{1}{2}\pi$ のすべての値をとり、それ以外の値はとらない。これが示すべきことであった。

グラフは $s = a^2$ に対する $\cos\theta$ を表している。グラフは除外された値 $s = 1$ で 1 まで上昇し、両端では 0 に近づくので、その値域はちょうど $(0, 1)$ を埋め尽くす。



検算

- $a = 2, b = \frac{1}{2}$ を試す。$A = (8, 4, 2)$ と $B = (\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ から $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 + 1 + 1 = 3$ を得る。公式からは $\cos\theta = 12/21 = 4/7$ となり、$\theta \approx 55.2°$ で、これは区間の内部にある。
- $a \to 1$ のとき、点 A と B は 1 点に近づき、$\theta \to 0$ となる。$a \to \infty$ のとき、A はほぼ x 軸に沿って遠ざかり、B はほぼ z 軸に沿って O に近づくので、$\theta \to \frac{1}{2}\pi$ となる。これらが区間の両端である。
- D の因数分解は数千組の無作為な有理数 a, b, c について厳密に確かめ、角の公式とその範囲は数値的に確かめた。

よくある間違い

- a, b, c が相異なり 0 でない理由を述べ忘れる。これらこそが $D \neq 0$ を保証する事実である。
- $a = \pm 1$ を除外せずに、$\cos\theta < 1$ だけから結論を出す。$\theta = 0$ を排除するのは、狭義の不等式 $u > 2$ である。
- 「それ以外の値はとらない」ことだけを証明する。問題は区間内のすべての値が実際にとられることも示すよう求めており、そのためには具体的な a が必要である。

STEP のその先へ

曲線 (t^3, t^2, t) はねじれ三次曲線であり、代数幾何学（algebraic geometry）の標準的な例である。小問 (i) は、この曲線上のどの 4 点も同一平面上にないという事実である。また、計算した行列式はヴァンデルモンド行列式であり、多項式補間（polynomial interpolation）や一次独立（linear independence）に関する議論に再び登場する。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、行列式と一次独立をわかりやすく扱っている。

解答例

STEP III 1990、第 3 問

純粋数学 ・ 群の公理と共役

> **STEP III 1990、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q3

鍵となる考え方

3 つの小問はいずれも群の公理（group axioms）だけから導かれ、どの小問でも、ある元を別の元を用いて書き直すことが有効な一手となる。位数（order）2 の元は自分自身の逆元（inverse）であり、これにより (i) は 1 行の計算に帰着する。(ii) と (iii) で用いる道具は**共役**（*conjugation*）である。写像 $x \mapsto c^{-1}xc$ は積を保つので、べきをべきに移す。

以下では $x * y$ を xy と書き、単位元（identity）を e と書く。

解答

小問 (i)

元 x の位数が 2 であるのは、$x \neq e$ かつ $x^2 = e$ のとき、そしてそのときに限る。2 つ目の条件は $x^{-1} = x$ ということである。よって

$$a^{-1} = a, \qquad b^{-1} = b, \qquad (ab)^{-1} = ab.$$

群の任意の元について $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ が成り立つ。実際、$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = e$ である。したがって

$$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba,$$

となり、a と b は可換（commute）である。

小問 (ii)

まず、dc は cd の共役元（conjugate）であることに注意する。

$$c^{-1}(cd)\,c = (c^{-1}c)\,dc = dc.$$

> **考えてみよう** $dc = c^{-1}(cd)c$ と書くことが、なぜ位数を調べるのに役立つのか。

共役はべきと交換できるからである。任意の x と任意の正の整数 n に対して

$$(c^{-1}xc)^n = (c^{-1}xc)(c^{-1}xc)\cdots(c^{-1}xc) = c^{-1}x^nc,$$

が成り立つ。途中で隣り合う $c\,c^{-1}$ がすべて打ち消し合うからである。$x = cd$ とおくと $(dc)^n = c^{-1}(cd)^nc$ を得る。ここで

$$(dc)^n = e \iff c^{-1}(cd)^nc = e \iff (cd)^n = cec^{-1} = e,$$

であり、2 つ目の同値では左から c、右から c^{-1} を掛けている（逆向きには c^{-1} と c を掛ける）。よって、$(cd)^n = e$ を満たす正の整数 n は、$(dc)^n = e$ を満たす正の整数 n とちょうど一致する。位数はそのような n の最小値であるから、cd と dc の位数は等しい。そのような n が存在しない場合は、両者とも位数が無限大となるので、この場合にも主張は成り立つ。

小問 (iii)

$c^{-1}bc = b^r$ が与えられている。正の整数 s に対して、(ii) の打ち消し合いの議論により

$$c^{-1}b^sc = (c^{-1}bc)^s = (b^r)^s = b^{sr}.$$

を得る。$s = 0$ のときも同じ式が成り立つ（両辺とも e である）。s が負のときは、$t > 0$ として $s = -t$ と書く。すると $(c^{-1}b^tc)(c^{-1}b^{-t}c) = e$ であるから、$c^{-1}b^sc = \left(c^{-1}b^tc\right)^{-1}$ となる。よって

$$c^{-1}b^sc = \left(b^{tr}\right)^{-1} = b^{-tr} = b^{sr}.$$

以上より、すべての整数 s に対して $c^{-1}b^sc = b^{sr}$ が成り立つ。

2 つ目の結果は、$n \geq 1$ に関する数学的帰納法（induction）で、すべての整数 s について同時に示す。$n = 1$ の場合はいま証明したことそのものである。すべての整数 s に対して $c^{-n}b^sc^n = b^{sr^n}$ が成り立つと仮定する。このとき

$$\begin{aligned} c^{-(n+1)}\,b^s\,c^{n+1} &= c^{-1}\left(c^{-n}b^sc^n\right)c \\ &= c^{-1}\,b^{sr^n}\,c \\ &= b^{(sr^n)r} = b^{sr^{n+1}}, \end{aligned}$$

となる。ただし最後の行では、1つ目の結果を s の代わりに整数 sr^n に対して用いた。これで帰納法が完成し、すべての正の整数 n に対して $c^{-n}b^sc^n = b^{sr^n}$ が成り立つ。

考えてみよう なぜわざわざ1つ目の結果を負の s についても証明したのか。

r が負の場合（たとえば二面体群（dihedral group）における $c^{-1}bc = b^{-1}$）、s が正であっても sr^n は負になりうる。そして帰納法のステップでは、1つ目の結果を s の代わりに sr^n に対して用いている。すべての整数 s について証明しておくことで、r の符号によらず帰納法が機能するのである。

検算

小さな群で確かめてみよう。正方形の対称性のなす群において、2本の対角線に関する鏡映とその積（半回転）はいずれも位数2であり、(i) の予想どおり、2つの鏡映は確かに可換である。S_3 において $c = (12)$、$d = (13)$ とすると、cd と dc は2つの3-巡回置換であり、どちらも位数は3である。(iii) については、二面体群において鏡映 c と回転 b は $c^{-1}bc = b^{-1}$ を満たすので $r = -1$ であり、公式は $c^{-n}b^sc^n = b^{(-1)^ns}$ を与える。これは正しい。鏡映による共役を2回行うと何も変わらないからである。さらに、3つの主張すべてを計算機でも確認した。S_4（(i) については S_5 も）のすべての該当する元について網羅的に調べ、また13を法とする写像 $x \mapsto ux + v$ のなす群でも確かめた。

よくある間違い

- $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ と書いてしまうこと。順序は逆になる。そしてこの逆転こそが (i) を成り立たせている。
- (ii) で $(cd)^n = e \Rightarrow (dc)^n = e$ だけを証明すること。両方向が必要であり（あるいは対称性を用いて c と d の役割を入れ替えてもよい）、位数が無限大の場合にも言及すべきである。
- (iii) で、2つ目の結果について帰納法を用いず、点を3つ並べて書くだけの「証明」をすること。

STEP のその先へ

写像 $x \mapsto c^{-1}xc$ は群の**自己同型**（*automorphism*）である。すなわち、G から自分自身への全単射（bijection）で演算を保つものであり、したがって位数を保ち、べきをべ

きに移す。小問 (iii) は**半直積**（*semidirect products*）における鍵となる関係式である。$c^{-1}bc = b^r$ を満たす b と c で生成される群には、二面体群（$r = -1$）や、素数を法とする写像 $x \mapsto ux + v$ のなす群が含まれる。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（『環・体・群』）では、共役とこれらの例が丁寧に展開されている。

解答例

STEP III 1990、第 4 問

純粋数学 ・ 三角級数

> **STEP III 1990、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q4

鍵となる考え方

どちらの級数も、角が等間隔に増えていく余弦の和であるから、自然な道具が二つある。単純な和については、$2\sin\beta$ を掛けて積和公式（product-to-sum formula）を使う。すると各項が二つの正弦の差に分かれ、和は隣り合う項が打ち消し合って消えていく（telescoping）。二項係数付きの和と最後の恒等式については、$\cos\phi$ を $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ の実部（real part）とみなす。そうすれば二項定理（binomial theorem）や等比級数（geometric series）の和の公式が仕事をしてくれ、最後に実部または虚部（imaginary part）をとることで答えが得られる。

解答

第一の級数

この和を S とおく。積和公式 $2\sin A\cos B = \sin(B+A) - \sin(B-A)$ により、

$$2\sin\beta\cos(\alpha+2r\beta) = \sin\big(\alpha+(2r+1)\beta\big) - \sin\big(\alpha+(2r-1)\beta\big).$$

これを $r = 0, 1, \ldots, n$ について足し合わせると、和は次々に打ち消し合う。r に対する第一の正弦が、$r+1$ に対する第二の正弦と相殺されるのである。したがって残るのは二つの項だけである：

$$\begin{aligned} 2\sin\beta\, S &= \sin\big(\alpha+(2n+1)\beta\big) - \sin(\alpha-\beta) \\ &= 2\cos(\alpha+n\beta)\sin\big((n+1)\beta\big), \end{aligned}$$

ここで $\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$ を $\frac{P+Q}{2} = \alpha + n\beta$、$\frac{P-Q}{2} = (n+1)\beta$ として用いた。$\sin\beta \neq 0$ であるから両辺を割ることができ、

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n} \cos(\alpha + 2r\beta) = \frac{\sin(n+1)\beta\,\cos(\alpha + n\beta)}{\sin\beta}}$$

$\alpha + n\beta$ が最初の角と最後の角の平均になっていることに注意しよう。これは式の形が妥当かどうかを確かめるよい目安になる。

二項係数付きの級数

この和を T とおく。$\cos\phi = \mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ であり、二項係数は実数であるから、二項定理により

$$T = \mathrm{Re}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta}\right)^r = \mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta}\right)^n\right]$$

となる。ここで「半角」の因数をくくり出す：

$$1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\right) = 2\cos\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}.$$

よって $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta})^n = 2^n\cos^n\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+n\beta)}$ であり、$2^n\cos^n\beta$ は実数であるから、

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\cos(\alpha+2r\beta) = 2^n\cos^n\beta\,\cos(\alpha+n\beta)}$$

（こちらは実際には $\sin\beta \neq 0$ を必要としない。）

最後の恒等式

正割（secant）が現れるので $\cos\theta \neq 0$ が必要であり、これは問題文で暗に仮定されている。第 r 項は $\cos r\theta\,\sec^r\theta = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sec\theta\right)^r$ である。$\sec^r\theta$ が実数だからである。そこで

$$w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sec\theta = \frac{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}{\cos\theta} = 1 + \mathrm{i}\tan\theta.$$

とおく。左辺は $\mathrm{Re}(1 + w + \cdots + w^n)$ である。

> **考えてみよう**　ここで等比級数の和の公式を使ってよいのはなぜか。また、w を導入すると何がうれしいのか。

この公式には $w \neq 1$ が必要であり、$w - 1 = \mathrm{i}\tan\theta \neq 0$ となるのはまさに $\sin\theta \neq 0$ だからである。条件はここで使われる。w の利点は、$w-1$ が純虚数なので割り算が容易であり、一方で w^{n+1} は指数形式 $w = \sec\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ から容易に計算できることにある。$t = \tan\theta$ と書くと、

$$1 + w + \cdots + w^n = \frac{w^{n+1}-1}{w-1} = \frac{\sec^{n+1}\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta} - 1}{\mathrm{i}t}.$$

任意の複素数 z と実数 $t \neq 0$ に対して $\operatorname{Re}\dfrac{z}{it} = \operatorname{Re}\dfrac{-iz}{t} = \dfrac{\operatorname{Im} z}{t}$ が成り立つ。分子の -1 は虚部が 0 であるから、

$$\sum_{r=0}^{n} \cos r\theta \, \sec^r\theta = \frac{\sec^{n+1}\theta \, \sin(n+1)\theta}{\tan\theta} = \sec^{n+1}\theta \, \sin(n+1)\theta \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$= \frac{\sin(n+1)\theta \, \sec^n\theta}{\sin\theta},$$

となり、これが求める結果である。

第一の部分とのつながり。 両辺に $\cos^n\theta$ を掛けると、この恒等式は

$$\sum_{r=0}^{n} \cos r\theta \cos^{n-r}\theta = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

を主張していることになる。この形であれば、n に関する数学的帰納法（induction）でも証明できる。左辺を C_n とすると $C_n = \cos\theta\, C_{n-1} + \cos n\theta$ であり、$\sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta = \sin(n+1)\theta$ によって帰納法の段階が完結する。

検算

- $n = 0$：三つの公式はいずれも最初の一項（$\cos\alpha$、$\cos\alpha$、1）に帰着する。
- 第一の和で $\beta \to 0$ とすると $\frac{\sin(n+1)\beta}{\sin\beta} \to n+1$ となるので $S \to (n+1)\cos\alpha$ であり、これは $n+1$ 個の等しい項の和として正しい。第二の和では、$\sum \binom{n}{r} = 2^n$ であるから、$\beta = 0$ のとき $2^n\cos\alpha$ となる。
- $\theta = \pi/4$、$n = 2$：左辺は $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2} + 0 = 2$、右辺は $\sin\frac{3\pi}{4}\cdot 2/\sin\frac{\pi}{4} = 2$ である。
- 数値的にも、α、β、θ と $n \le 15$ を無作為に 20 000 通り選んだところ、三つの公式はすべて直接の和と（相対誤差で）10^{-9} 以内で一致した。

よくある間違い

- 第一の級数が（$r = 0$ から n までの）$n+1$ 項からなることを忘れ、$\sin(n+1)\beta$ の代わりに $\sin n\beta$ としてしまう。
- $1 + e^{2i\beta}$ を $2\cos\beta$ と書いて因数 $e^{i\beta}$ を落とし、答えの角がずれてしまう。
- 最後の部分で、分子と分母の実部を別々にとってしまう。まず分母を実数にしなければならない。

STEP のその先へ

cos を指数関数の実部として書くと、三角関数の和が等比級数や二項係数付きの和に変わる。これはフーリエ解析（Fourier analysis）の出発点である。第一の和は本質的にディリクレ（Dirichlet）核（Dirichlet kernel）$\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)/\sin\frac{x}{2}$ であり、これはフーリエ級数（Fourier series）がどのように収束するかを支配している。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、$e^{i\theta}$ を掛けることがなぜ回転を意味するのか、そしてこのような和がなぜきれいな公式にまとまるのかについて、見事に幾何学的な見方を与えてくれる。

解答例

STEP III 1990、第 5 問

純粋数学 ・ ライプニッツの公式

> **STEP III 1990、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q5

鍵となる考え方

パスカルの法則（Pascal's rule）は、二つの項を通分してしまえば、階乗を含む分数の計算にすぎない。積の n 階導関数に関するライプニッツの公式（Leibniz's formula）は、n についての数学的帰納法（induction）で証明できる。n 階の公式をもう一度微分すると、混合項がそれぞれ二回ずつ現れ、その各組をまとめるのがまさにパスカルの法則である。最後の部分では、$y = \sin^{-1} x$ をそのまま n 回微分しようとしても見込みはない。代わりに、y が満たす簡単な二階の方程式を見つけ、それにライプニッツの公式を適用する。

（問題文には $y = \sin^{-1} y$ とあるが、これは明らかに $y = \sin^{-1} x$ の誤植であり、以下ではそちらを用いる。）

解答

パスカルの法則

$\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$、ただし $0! = 1$ であったことを思い出そう。$1 \le r \le n$ のとき $r - 1$ と $n - r$ はともに非負であるから、以下に現れる階乗はすべて意味をもつ。$r! = r\,(r-1)!$ かつ $(n-r+1)! = (n-r+1)\,(n-r)!$ であるから、共通の分母は $r!\,(n-r+1)!$ であ

る：

$$\begin{aligned}\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1} &= \frac{n!}{r!\,(n-r)!}+\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}\\ &= \frac{n!\,(n-r+1)}{r!\,(n-r+1)!}+\frac{n!\,r}{r!\,(n-r+1)!}\\ &= \frac{n!\,(n+1)}{r!\,(n+1-r)!}=\frac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!}=\binom{n+1}{r}.\end{aligned}$$

ライプニッツの公式

u と v は必要なだけ何回でも微分できるものとする。和の記号を用いると、主張は

$$(uv)^{(n)}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}u^{(n-r)}v^{(r)},$$

である。ここで $z^{(0)}$ は z 自身を表す。これを $n\geq 1$ についての帰納法で証明する。

基本の場合 $n=1$。右辺は $u^{(1)}v+uv^{(1)}$ であり、積の微分法則（product rule）によりこれは $(uv)'$ に等しい。

帰納段階。ある $n\geq 1$ について公式が成り立つと仮定する。各項に積の微分法則を用いて、これを微分すると

$$(uv)^{(n+1)}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}u^{(n+1-r)}v^{(r)}+\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}u^{(n-r)}v^{(r+1)}.$$

となる。第二の和で $s=r+1$ とおくと、それは $\sum_{s=1}^{n+1}\binom{n}{s-1}u^{(n+1-s)}v^{(s)}$ となる。これで両方の和が $u^{(n+1-r)}v^{(r)}$ の形の項からなる。第一の和の $r=0$ の項と、第二の和の $s=n+1$ の項を分けて書くと

$$\begin{aligned}(uv)^{(n+1)} &= u^{(n+1)}v+\sum_{r=1}^{n}\left[\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}\right]u^{(n+1-r)}v^{(r)}+uv^{(n+1)}\\ &= u^{(n+1)}v+\sum_{r=1}^{n}\binom{n+1}{r}u^{(n+1-r)}v^{(r)}+uv^{(n+1)},\end{aligned}$$

となる。ここでパスカルの法則を用いたが、$1\leq r\leq n$ であるから適用できる。$\binom{n+1}{0}=\binom{n+1}{n+1}=1$ であるから、これは

$$(uv)^{(n+1)}=\sum_{r=0}^{n+1}\binom{n+1}{r}u^{(n+1-r)}v^{(r)},$$

すなわち $n+1$ の場合の公式である。帰納法により、公式はすべての $n\geq 1$ について成り立つ。

$\sin^{-1} x$ の導関数

$-1 < x < 1$ において $y = \sin^{-1} x$ とする。このとき

$$y^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{よって} \qquad (1-x^2)\big(y^{(1)}\big)^2 = 1.$$

これを x について微分すると

$$(1-x^2)\cdot 2y^{(1)}y^{(2)} - 2x\big(y^{(1)}\big)^2 = 0.$$

$(-1,1)$ 上で $y^{(1)} > 0$ であるから、$2y^{(1)}$ で割ってよい：

$$(1-x^2)\,y^{(2)} - x\,y^{(1)} = 0. \qquad (*)$$

これが $n = 0$ の場合の求める結果である。

> **考えてみよう** $(1-x^2)^{-1/2}$ をそのまま微分するのではなく、微分する前に $y^{(1)}$ を二乗するのはなぜだろうか？

$(1-x^2)^{-1/2}$ を直接微分すると $y^{(2)} = x(1-x^2)^{-3/2}$ が得られ、$1-x^2$ を掛ければ同様に $(*)$ が得られる。どちらの方法でもよい。要点は、係数が x の**多項式**であり、y の導関数について**線形**であるような方程式にたどり着くことである。ライプニッツの公式がうまく扱えるのはまさにそのような方程式だからである。多項式の係数は何回か微分すればすぐに 0 になる。

さて、$n \geq 1$ として $(*)$ を n 回微分し、各積にライプニッツの公式を適用する。第一の積では $u = y^{(2)}$、$v = 1-x^2$ とする。すると $v^{(1)} = -2x$、$v^{(2)} = -2$ であり、それより高階の導関数はすべて 0 になるので、残る項は三つだけである：

$$\big((1-x^2)\,y^{(2)}\big)^{(n)} = (1-x^2)\,y^{(n+2)} + \binom{n}{1}(-2x)\,y^{(n+1)} + \binom{n}{2}(-2)\,y^{(n)}.$$

（$n = 1$ のときは最後の項が現れないが、これは $\binom{1}{2} = 0$ と整合する。）第二の積では $u = y^{(1)}$、$v = x$ とすると、残る項は二つだけである：

$$\big(x\,y^{(1)}\big)^{(n)} = x\,y^{(n+1)} + n\,y^{(n)}.$$

差をとると、$(*)$ の n 階導関数は

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)} - 2nx\,y^{(n+1)} - n(n-1)\,y^{(n)} - x\,y^{(n+1)} - n\,y^{(n)} = 0.$$

となる。項をまとめると $-2nx - x = -(2n+1)x$、$-n(n-1) - n = -n^2$ であるから

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)} - (2n+1)x\,y^{(n+1)} - n^2 y^{(n)} = 0,$$

となり、求める結果が得られた。これはすべての $n \geq 0$ と、$(-1,1)$ のすべての x について成り立つ。

検算

- ライプニッツの公式で $n=1$ とすると、積の微分法則が得られる。$n=2$ のときは $(uv)''=u''v+2u'v'+uv''$ であり、これは $u'v+uv'$ を微分して確かめられる。
- $x=0$ において、最終結果は $y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)$ を意味する。$y^{(1)}(0)=1$ から $y^{(3)}(0)=1$、$y^{(5)}(0)=9$ が得られるので、マクローリン級数（Maclaurin series）は $x+\frac{x^3}{6}+\frac{9x^5}{120}=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}$ で始まる。これは $\sin^{-1}x$ のよく知られた級数である。
- 数値的にも確認した：パスカルの法則は $n<60$ のすべてについて、ライプニッツの公式は 300 組のランダムな多項式の組について厳密に、最終的な恒等式は $(1-x^2)^{-1/2}$ のテイラー係数（Taylor coefficients）を用いて n が 27 以下の場合に $(-1,1)$ 内の 6 点で確認した。相対残差は 10^{-15} 未満であった。

よくある間違い

- 帰納段階で第二の和の添字を付け替えた後、二項係数（binomial coefficient）を間違える。パスカルの法則を適用する前に、$r=0$ と $r=n+1$ の端の項を別々に書き出すこと。
- まず方程式 $(*)$ を見つけるのではなく、$\sin^{-1}x$ を直接 n 回微分しようとする。
- $1-x^2$ を微分する際に、係数 $\binom{n}{2}$ やマイナス符号を忘れる。

STEP のその先へ

多項式係数の線形微分方程式（linear differential equation）を見つけ、それを n 回微分するという技法は、テイラー係数の漸化式を得る標準的な方法である。これはそのまま常微分方程式（ODE）の冪級数解（power-series solutions）の方法につながり、ルジャンドル関数（Legendre functions）やベッセル関数（Bessel functions）はこうして現れる。また、ライプニッツの公式は二項定理（binomial theorem）の微分版でもある。$u=\mathrm{e}^{ax}$、$v=\mathrm{e}^{bx}$ とすると、公式は $(a+b)^n=\sum\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$ に帰着する。級数解についてさらに知りたければ、Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）を参照のこと。

解答例

STEP III 1990、第 6 問

純粋数学 ・ 線形変換と楕円

STEP III 1990、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s3-q6

この問題は、*Beyond STEP* の第 7.2 節「向きを変えずに伸ばす」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch07/eigenvectors.html

鍵となる考え方

2 つの特別なベクトルはこの行列の固有ベクトル（eigenvector）であり、これが幾何学的な全体像を教えてくれる。T はある直線に沿って一つの倍率で、それに垂直な直線に沿って別の倍率で引き伸ばすので、単位円（unit circle）はそれらの直線を軸とする楕円（ellipse）になる。計算の面では、E の方程式を求める最も簡潔な方法は、T の逆変換（inverse）をとって x と y を X と Y で表し、$x^2 + y^2 = 1$ に代入することである。面積は行列式（determinant）倍になり、また T は直線を直線に写すので、E の接線（tangent）は単に C の接線の像である。

解答

$M = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ とおくと、T は M を掛ける写像である。

2 つの特別な方向

計算すると

$$M\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}9-4\\-2+12\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},$$
$$M\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}18+2\\-4-6\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}20\\-10\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}.$$

よって $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ は向きを保ったまま 2 倍され、$\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ は向きを保ったまま 4 倍される。これが示すべきことであった。$1\cdot 2 + 2\cdot(-1) = 0$ であるから、これら 2 つの方向は垂直であることに注意しよう。

E の方程式

M の行列式は

$$\det M = \left(\tfrac{2}{5}\right)^2 (9\cdot 6 - (-2)(-2)) = \tfrac{4}{25}\cdot 50 = 8,$$

であり、これは 0 でないので T は逆変換をもち、

$$M^{-1} = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{5}\begin{pmatrix}6&2\\2&9\end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix}6&2\\2&9\end{pmatrix}.$$

したがって、点 (X,Y) が (x,y) の像であるのは、ちょうど

$$x = \frac{3X+Y}{10}, \qquad y = \frac{2X+9Y}{20}.$$

のときである。点 (X,Y) が E 上にあるのは、もとの点が C 上にあるとき、すなわち $x^2+y^2=1$ のとき、かつそのときに限る。代入すると

$$\begin{aligned}\frac{(3X+Y)^2}{100} + \frac{(2X+9Y)^2}{400} = 1 &\iff 4(9X^2+6XY+Y^2) + (4X^2+36XY+81Y^2) = 400\\ &\iff 40X^2+60XY+85Y^2 = 400\\ &\iff 8X^2+12XY+17Y^2 = 80,\end{aligned}$$

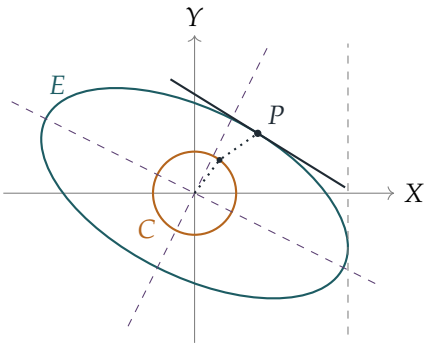
となり、これが求める E の方程式である。

面積

線形写像（linear map）はあらゆる面積を $|\det M|$ 倍する。C で囲まれた円板の面積は π であるから、E で囲まれた領域の面積は

$$8\pi.$$

である。これは幾何学的な見方とも一致する。E は半軸（semi-axis）が 2（$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 方向）と 4（$\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ 方向）の楕円であり、$\pi\cdot 2\cdot 4 = 8\pi$ となる。



図には、C、楕円 E とその軸（破線）、E に接する鉛直線 $X = 2\sqrt{17/5}$、そして $\frac{1}{5}(3,4)$ の像 P における接線を示している。

X の最大値

E の方程式を Y についての二次方程式とみる：

$$17Y^2 + 12XY + (8X^2 - 80) = 0.$$

ある X の値が E 上に現れるのは、この方程式が実数解 Y をもつとき、すなわち判別式（discriminant）が非負であるとき、かつそのときに限る：

$$\begin{aligned} 144X^2 - 4\cdot 17(8X^2-80) \geq 0 &\iff 144X^2 - 544X^2 + 5440 \geq 0 \\ &\iff 400X^2 \leq 5440 \\ &\iff X^2 \leq \tfrac{68}{5}. \end{aligned}$$

よって E 上のすべての点で $X \leq \sqrt{68/5} = 2\sqrt{17/5}$ が成り立ち、等号も成立する（このとき判別式は 0 となり、$Y = -\frac{6X}{17}$ である 1 点が得られる）。したがって、E 上の X の最大値は $2\sqrt{17/5}$ である。これが示すべきことであった。

> **考えてみよう** 判別式を使わずに、円から直接これを見る方法はあるだろうか？

ある。E 上では、$x^2 + y^2 = 1$ のもとで $X = \frac{2}{5}(9x - 2y)$ である。$(x,y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ と書くと、式 $9\cos\theta - 2\sin\theta$ の最大値は $\sqrt{81+4} = \sqrt{85}$ である（$R\cos(\theta+\alpha)$ の形への合成）。よって X の最大値は $\frac{2}{5}\sqrt{85} = 2\sqrt{85/25} = 2\sqrt{17/5}$ であり、上の結果と一致する。

接線

C 上の点 $\frac{1}{5}(3,4)$ は

$$P = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 9\cdot\frac{3}{5} - 2\cdot\frac{4}{5} \\ -2\cdot\frac{3}{5} + 6\cdot\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} \frac{19}{5} \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{38}{25} \\ \frac{36}{25} \end{pmatrix}.$$

に写る。$\frac{1}{5}(3,4)$ における C の接線はそこでの半径に垂直であるから、

$$3x + 4y = 5.$$

である。T は線形かつ逆変換をもつので、直線を直線に写し、C とちょうど 1 点で交わる直線は E とちょうど 1 点で交わる直線に写る。よって、P における E の接線はこの直線の像である。$x = \frac{3X+Y}{10}$ と $y = \frac{2X+9Y}{20}$ を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{3(3X+Y)}{10} + \frac{4(2X+9Y)}{20} = 5 &\iff 6(3X+Y) + 4(2X+9Y) = 100 \\ &\iff 26X + 42Y = 100, \end{aligned}$$

となるので、P における E の接線は

$$13X + 21Y = 50.$$

である。確認として、$13\cdot\frac{38}{25} + 21\cdot\frac{36}{25} = \frac{494+756}{25} = 50$ であるから、P はこの直線上にある。別解として、$8X^2 + 12XY + 17Y^2 = 80$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると、P における法線（normal）の方向は $(16X + 12Y,\ 12X + 34Y) = \frac{1}{25}(1040,\ 1680)$ であり、これは $(13,21)$ に平行であるから、同じ直線が得られる。

検算

- $(1,0)$ の像は $\frac{2}{5}(9,-2)$ であり、$\frac{4}{25}\left(8\cdot 81 - 12\cdot 18 + 17\cdot 4\right) = \frac{4}{25}\cdot 500 = 80$ であるから、これは E 上にある。
- 軸の端点 $\pm 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ と $\pm 4\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$ は E の方程式を満たす。たとえば $\frac{4}{5}(8 + 24 + 68) = 80$ である。
- 数値的に、C 上の 200 000 点をサンプリングすると X の最大値は $X \approx 3.687818$ となり、$2\sqrt{17/5} \approx 3.687818$ と一致する。また、像の多角形の靴ひも公式（shoelace formula）による面積は $25.13274 \approx 8\pi$ である。

よくある間違い

- $x^2 + y^2 = 1$ に代入するときに M^{-1} ではなく M を用いてしまう。像の曲線の方程式を得るには、古い座標を新しい座標で表す必要がある。

- 行列式を計算するときに係数 $\frac{2}{5}$ を忘れてしまう。この係数の寄与は $\frac{2}{5}$ ではなく $\left(\frac{2}{5}\right)^2$ である。
- 像の点 P を求めたのに、E の接線として $\frac{1}{5}(3,4)$ における C の傾きを使ってしまう。線形写像は接することは保つが、傾きは保たない。

STEP のその先へ

ここでの行列は対称行列（symmetric matrix）であり、それこそが固有ベクトルが垂直になる理由である。これはスペクトル定理（spectral theorem）の 2 次元の場合であり、この定理は、すべての実対称行列は回転によって対角化（diagonalise）できることを述べている。これにより、任意の二次形式（quadratic form）$ax^2 + 2hxy + by^2$ が互いに垂直な主軸（principal axes）をもつ円錐曲線（conic）を表すことが説明され、その二次形式の行列の固有値（eigenvalue）から曲線の形がただちにわかる。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、固有値、対称行列、二次形式を、豊富な幾何学的な図とともに展開している。

解答例

STEP III 1990、第 7 問

純粋数学 ・ 陰関数のグラフ

> **STEP III 1990、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q7

鍵となる考え方

陰関数微分（implicit differentiation）を 2 回行うと、各点における $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ と $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$ が得られ、これらがそのままテイラー級数（Taylor series）の係数になる。不等式については、この方程式が y についての **2 次式**にすぎないことに気づくのがこつである。点 (x,y) が存在しうるのは、その 2 次方程式が実数解をもつときに限られるので、判別式（discriminant）は 0 以上である。さらに 2 次方程式を具体的に解くと曲線全体の様子がわかる。曲線は 2 つの分枝（branch）からなり、それらは判別式が 0 になるところで出会う。

解答

以下を通して $F(x,y) = xy^2 + x^3 + a^2y - a^3$ とおく。代入すれば、P、Q、R で $F = 0$ となることが確かめられる。たとえば R では $a \cdot a^2 + a^3 - a^3 - a^3 = 0$ となる。

P、Q、R におけるテイラー級数

y を x の関数とみなして $F(x,y) = 0$ を x で微分すると、

$$y^2 + 2xyy' + 3x^2 + a^2y' = 0, \qquad \text{よって} \qquad y' = -\frac{y^2 + 3x^2}{2xy + a^2}.$$

最初の式をもう一度微分すると（項 $2xyy'$ からは $2yy' + 2xy'^2 + 2xyy''$ が出る）、

$$4yy' + 2xy'^2 + 6x + (2xy + a^2)\,y'' = 0.$$

各点で分母 $2xy + a^2$ は 0 でないので、これらの式から y' と y'' が定まり、$y = y_0 + y'h + \frac{1}{2}y''h^2 + \cdots$ となる。

$P(0,a)$ **において：** $y' = -a^2/a^2 = -1$ である。すると $4a(-1) + a^2 y'' = 0$ より $y'' = 4/a$ であり、

$$y = a - h + \frac{2}{a}h^2 + \cdots.$$

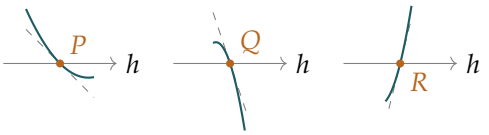
$Q(a,0)$ **において：** $y' = -3a^2/a^2 = -3$ である。すると $0 + 2a(9) + 6a + a^2 y'' = 0$ より $y'' = -24/a$ であり、

$$y = -3h - \frac{12}{a}h^2 + \cdots.$$

$R(a,-a)$ **において：** ここでは $2xy + a^2 = -a^2$ なので $y' = -4a^2/(-a^2) = 4$ である。すると $4(-a)(4) + 2a(16) + 6a - a^2 y'' = 0$、すなわち $22a = a^2 y''$ より $y'' = 22/a$ であり、

$$y = -a + 4h + \frac{11}{a}h^2 + \cdots.$$

したがって、P の近くでは曲線は傾き -1 で下降し、下に凸（接線より上側に曲がる）である。Q の近くでは傾き -3 で急に下降し、上に凸である。R の近くでは傾き 4 で上昇し、下に凸である。



（$a = 1$ のときの局所的な形。破線は接線である。）

不等式

C の方程式を y についての 2 次式として書く。

$$x\,y^2 + a^2\,y + (x^3 - a^3) = 0.$$

$x \neq 0$ で (x,y) が C 上にあるならば、この 2 次方程式は実数解 y をもつので、判別式は 0 以上である。

$$a^4 - 4x(x^3 - a^3) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4x^4 - 4a^3 x - a^4 \leq 0.$$

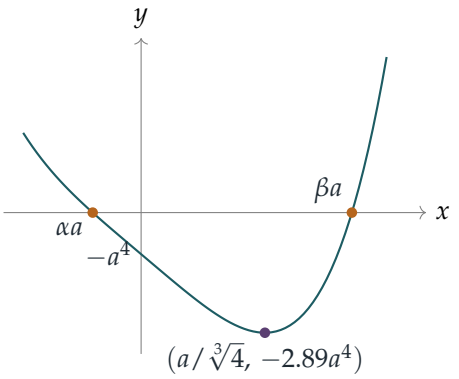
$x = 0$ のときは左辺が $-a^4 < 0$ となるので、この場合も不等式は成り立つ。以上で示された。

$y = 4x^4 - 4a^3 x - a^4$ のグラフ

問題文には $4x^4 - 4a^3 - a^4$ と印刷されているが、これは今出てきた 4 次式 $g(x) = 4x^4 - 4a^3 x - a^4$ の誤植であろう。$g(0) = -a^4$ であり、$g'(x) = 16x^3 - 4a^3$ は $x_0 = a/\sqrt[3]{4} \approx 0.63a$ でのみ 0 となり、そこで g は最小値をとる。$x_0^3 = a^3/4$ を用いると、

$$g(x_0) = a^3 x_0 - 4a^3 x_0 - a^4 = -a^4\left(1 + 3 \cdot 4^{-1/3}\right) \approx -2.89a^4.$$

$x \to \pm\infty$ のとき $g \to +\infty$ であり、g は減少したのち増加するので、ちょうど 2 つの零点 $x = \alpha a$ と $x = \beta a$ をもつ。ここで $\alpha \approx -0.246$、$\beta \approx 1.072$ は $4t^4 - 4t - 1 = 0$ の解である（きれいな閉じた形はないが、必要もない）。また $g''(x) = 48x^2 \geq 0$ なので、グラフは下に凸である。



（$a = 1$ として描いた。）したがって C 上のすべての点は $\alpha a \leq x \leq \beta a$ を満たす。曲線は縦の帯状領域の中に収まっている。

曲線 C

$x \neq 0$ のとき、2 次方程式を解くと 2 つの分枝

$$y_\pm = \frac{-a^2 \pm \sqrt{D}}{2x}, \qquad D = a^4 + 4a^3x - 4x^4,$$

が得られる。これらはちょうど帯状領域の上で実数となり、$D = 0$ となる $x = \alpha a$ と $x = \beta a$ で出会う。そこでは $y = -a^2/(2x)$ であり、接線は垂直である。なぜなら、そこは y' の分母 $2xy + a^2$ が 0 になる点だからである。これにより点 $(\beta a, -0.47a)$ と $(\alpha a, 2.03a)$ が得られる。

考えてみよう　$x \to 0$ のとき、2 つの分枝はどうなるか。

分子と分母に $\sqrt{D} + a^2$ を掛け、$D - a^4 = 4x(a^3 - x^3)$ を用いると、

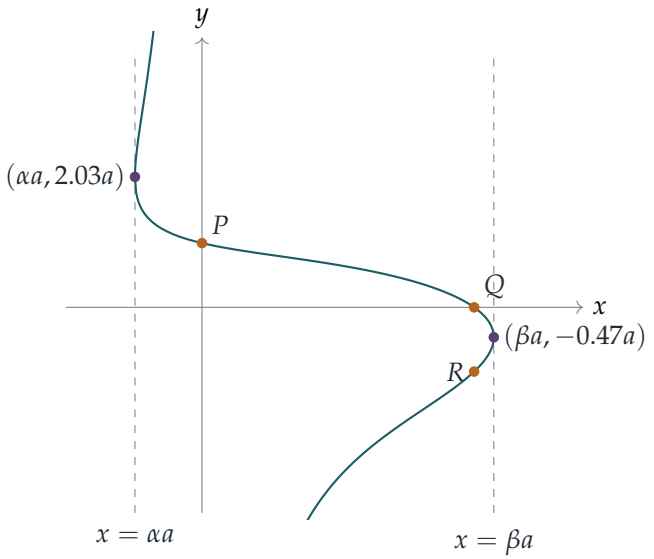
$$y_+ = \frac{2(a^3 - x^3)}{a^2 + \sqrt{D}},$$

となる。これは $x = 0$ でまったく問題なく振る舞い、そこでの値は a である。よって y_+ は P を通る 1 本のなめらかな分枝である。もう一方の分枝は小さな x に対して $y_- \approx -a^2/x$ を満たすので、$x \to 0^+$ のとき $y_- \to -\infty$、$x \to 0^-$ のとき $y_- \to +\infty$ となる。これが y 軸に沿った漸近線（asymptote）である。

概形を確定させるのに役立つ事実をさらに挙げておく。

- 水平な接線は存在しない。$y' = 0$ となるには $y^2 + 3x^2 = 0$、すなわち $(0,0)$ でなければならないが、この点は C 上にない。
- 曲線が $y = 0$ と交わるのは $x^3 = a^3$ となる点 Q のみであり、$x = 0$ と交わるのは P のみである。
- $x = a$ では $D = a^4$ なので、$y_+ = 0$（点 Q）、$y_- = -a$（点 R）である。

以上をまとめると、C は 1 本のつながった曲線である。y 軸のすぐ左側を $+\infty$ から y_- に沿って下りてきて、$(\alpha a, 2.03a)$ の垂直な接線に達する。そこで折り返して y_+ に沿って P を通り（傾き -1）、Q を通って下降し（傾き -3）、$(\beta a, -0.47a)$ の垂直な接線に達する。そこで再び折り返して y_- に沿って R を通り（傾き 4）、y 軸のすぐ右側を $-\infty$ へと下りていく。P では下に凸、Q では上に凸なので、その間に変曲点（point of inflection）がある。



（$a = 1$ として描いた。破線は上で求めた帯状領域の境界である。）

検算

- $a = 1.7$ として、各点の近くの $x = x_0 + h$ で 2 次方程式を y について解いた。2 項までのテイラー級数の誤差は、h を半分にするごとに約 8 分の 1 になった。これは予想どおりの h^3 の振る舞いである。
- x の値を 10^5 個ランダムにとったところ、2 次方程式が実数解をもつのは、ちょうど $4x^4 - 4a^3x - a^4 \leq 0$ のときであった。

- 二分法（bisection）により $\alpha \approx -0.2463$、$\beta \approx 1.0724$ が得られる。$x = \pm 0.001$（$a = 1.7$）では、一方の解は a に近く、もう一方は $-a^2/x \approx \mp 2890$ に近い。

よくある間違い

- 係数 $\frac{1}{2}$ を忘れる。h^2 の係数は y'' ではなく $\frac{1}{2}y''$ である。
- 判別式を使うために x で割り、$x = 0$ の場合を別に確かめない。
- y_+ が P をなめらかに通ることを見落とす。$(-a^2 + \sqrt{D})/(2x)$ と書くと $x = 0$ で特異に見えるが、実際はそうではない。

STEP のその先へ

ここでは、陰関数のテイラー展開から点の近くでの曲線の振る舞いを求めた。$\partial F/\partial y \neq 0$ となるところでは y が x のなめらかな関数であることを保証する定理は**陰関数定理**（implicit function theorem）であり、多変数解析学の重要な結果である。帯状領域の端にある垂直な接線は、まさに $\partial F/\partial y = 2xy + a^2$ が 0 になる点である。この曲線は平面上の 3 次曲線であり、こうした曲線の研究は代数幾何学（algebraic geometry）や楕円曲線（elliptic curves）へとつながっていく。この種の問題をもっと解きたければ、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* に挑戦するとよい。

解答例

STEP III 1990、第 8 問

純粋数学 ・ 完全微分方程式

STEP III 1990、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s3-q8

鍵となる考え方

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(py'+qy)$ を展開して $Py''+Qy'+Ry$ と比較する。これにより p と q は完全に決まり、条件 $P''-Q'+R=0$ はちょうど最後の係数を一致させるための条件になっている。与えられた微分方程式ではこの条件が成り立つので、一度積分するだけで二階の方程式から一階線形微分方程式（first-order linear differential equation）へと直ちに移ることができ、あとは積分因子（integrating factor）で解き切ればよい。

解答

完全性の判定条件

任意の関数 p、q、y に対して、積の微分法（product rule）により

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(py'+qy) = py''+(p'+q)y'+q'y. \qquad (*)$$

が成り立つ。

必要性。 p と q（これらは y に依存しない）が、すべての y に対して $Py''+Qy'+Ry$ を $(*)$ に等しくするとする。$y=1$ とおくと $R=q'$ を得る。$y=x$ とおくと $Q+Rx=(p'+q)+q'x$ となるので $Q=p'+q$ である。$y=\frac{1}{2}x^2$ とおくと $P+Qx+\frac{1}{2}Rx^2=p+(p'+q)x+\frac{1}{2}q'x^2$ となるので $P=p$ である。したがって

$$P''-Q'+R = p''-(p''+q')+q' = 0.$$

十分性。 $P''-Q'+R=0$ とする。

$$p=P, \qquad q=Q-P'.$$

と選ぶ。すると $p'+q = P'+Q-P' = Q$ であり、条件を用いれば $q' = Q'-P'' = R$ である。$(*)$ より、すべての y に対して $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(py'+qy) = Py''+Qy'+Ry$ となり、示すべきことが示された。

この計算からは、p と q が必然的に P と $Q-P'$ でなければならないこともわかる。以下ではこの方法で p、q を求める。

微分方程式

ここでは $P = x-x^4$、$Q = 1-7x^3$、$R = -9x^2$ であるから

$$P''-Q'+R = -12x^2-(-21x^2)-9x^2 = 0.$$

よって判定条件が適用でき、$p = P = x-x^4$、$q = Q-P' = (1-7x^3)-(1-4x^3) = -3x^3$ である。方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x-x^4)y'-3x^3y\right] = (x^3+3x)\mathrm{e}^x.$$

となる。部分積分（integration by parts）を繰り返すと $\int x^3\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x^3-3x^2+6x-6)\mathrm{e}^x$、$\int 3x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (3x-3)\mathrm{e}^x$ であるから

$$(x-x^4)y'-3x^3y = (x^3-3x^2+9x-9)\mathrm{e}^x+C.$$

$x=2$ において $y = 2\mathrm{e}^2$、$y'=0$ であるから、左辺は $-3\cdot 8\cdot 2\mathrm{e}^2 = -48\mathrm{e}^2$、右辺は $5\mathrm{e}^2+C$ となる。よって $C = -53\mathrm{e}^2$ である。

> **考えてみよう**　左辺 $(x-x^4)y'-3x^3y$ は $(x-x^4)y$ の導関数ではない。二度目の積分はどうすればよいだろうか？

x をくくり出すと、左辺は $x\left[(1-x^3)y'-3x^2y\right] = x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^3)y\right]$ となる。（これは通常の積分因子である。実際、$y'-\frac{3x^2}{1-x^3}y$ の積分因子は $\exp\int\frac{-3x^2}{1-x^3}\,\mathrm{d}x = 1-x^3$ である。）解は $x=2$ の近くで考えているので x で割ってよく、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^3)y\right] = (x^2-3x+9)\mathrm{e}^x-\frac{9\mathrm{e}^x}{x}-\frac{53\mathrm{e}^2}{x}.$$

再び部分積分により $\int(x^2-3x+9)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x^2-5x+14)\mathrm{e}^x$ である。項 e^x/x は初等関数の範囲で原始関数をもたないので、出発点 $x=2$ からの積分の形のまま残しておく：

$$(1-x^3)y = (x^2-5x+14)\mathrm{e}^x-53\mathrm{e}^2\ln\frac{x}{2}-9\int_2^x\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t+D.$$

$x=2$ において左辺は $-7\cdot 2\mathrm{e}^2 = -14\mathrm{e}^2$、右辺は $8\mathrm{e}^2+D$ であるから $D = -22\mathrm{e}^2$ である。したがって

$$\boxed{y = \frac{1}{1-x^3}\left[(x^2-5x+14)\mathrm{e}^x-22\mathrm{e}^2-53\mathrm{e}^2\ln\frac{x}{2}-9\int_2^x\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t\right]}$$

が $x > 1$ で成り立つ。y'' の係数 $x - x^4$ は $x = 1$ で 0 になるので、$x = 2$ を通る解は $x > 1$ で定義され、$x = 1$ を越えて延長する必要はない。

検算

- $x = 2$ において括弧内は $8e^2 - 22e^2 = -14e^2$ であり、$1 - 8 = -7$ で割ると $y = 2e^2$ となって、条件どおりである。
- もとの方程式を $x = 2$ から数値的に解き進める（四次のルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method））と $y(3) \approx 7.90306$ となり、積分をシンプソンの公式（Simpson's rule）で計算した上の式の値と一致する。両者は $x = 1.2$、1.5、4 でも一致する。
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x - x^4)y' - 3x^3y\right]$ を展開すると、もとの $(x - x^4)y'' + (1 - 7x^3)y' - 9x^2y$ に戻る。

よくある間違い

- 一度目の積分の後で定数 C を書き忘れる。ここでは C は 0 ではなく、これが対数の項を生み出す。
- $\int e^x/x\,\mathrm{d}x$ を無理に閉じた形で表そうとする。それは不可能なので、下端を 2 とする定積分の形で残しておけばよい。そうすれば初期条件も適用しやすくなる。

STEP のその先へ

完全な導関数になっている式 $Py'' + Qy' + Ry$ は**完全**（exact）であるという。式 $P'' - Q' + R$ は、**随伴**（adjoint）方程式 $(Pz)'' - (Qz)' + Rz = 0$ の左辺に $z = 1$ を代入したものである。一般に、随伴方程式の任意の解 z は積分因子となり、$z(Py'' + Qy' + Ry)$ を完全にする。随伴の考え方は、自己随伴（シュトゥルム＝リウヴィル（Sturm–Liouville））問題やグリーン関数（Green's function）へとつながっていく。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）では、二階線形方程式の演習問題の中で完全方程式と随伴方程式を扱っている。

解答例

STEP III 1990、第 9 問

純粋数学 ・ 双曲線関数

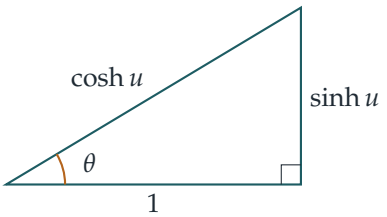
STEP III 1990、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s3-q9

鍵となる考え方

関係式 $\tan\theta = \sinh u$ は $\sec^2\theta = 1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u$ と同値である。したがって、2 つの変数の三角関数（trigonometric functions）と双曲線関数（hyperbolic functions）はぴったり対応する：$\cos\theta = \operatorname{sech} u$、$\sin\theta = \tanh u$、$\sec\theta = \cosh u$ である。辺の長さが 1、$\sinh u$、$\cosh u$ の直角三角形を描けば、これらすべてが一目でわかる。この「対応表」を手に入れてしまえば、各小問は短い微分計算をしてから元の変数に翻訳し直すだけである。



解答

全体を通して、$0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$ より $\tan\theta \ge 0$ であるから、$\sinh u \ge 0$ かつ $u \ge 0$ である。また $\cos\theta > 0$ かつ $\cosh u > 0$ である。

小問 (i)

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ と $1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u$ を用いると、

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u.$$

$\sec\theta$ と $\cosh u$ はともに正であるから $\sec\theta = \cosh u$、すなわち $\cos\theta = \operatorname{sech} u = v$ となり、示すべきことが得られた。

対になる事実も記録しておく価値がある：$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \sinh u \operatorname{sech} u = \tanh u$ である。

小問 (ii)

$\tan\theta = \sinh u$ を u について（連鎖律（chain rule）を用いて陰関数として）微分すると、

$$\sec^2\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u} = \cosh u \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u} = \cosh u\cos^2\theta = \cosh u\operatorname{sech}^2 u = \operatorname{sech} u = v,$$

ここで $\cos\theta$ には小問 (i) の結果を用いた。

小問 (iii)

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\cosh u = \sinh u$ であるから、

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\big(\cosh u\big)^{-1} = -\frac{\sinh u}{\cosh^2 u} = -\operatorname{sech} u\tanh u.$$

対応表により $\operatorname{sech} u\tanh u = \cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ であるから、

$$\sin 2\theta = -2\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}.$$

2 階導関数については、積の微分法則（product rule）と $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\tanh u = \operatorname{sech}^2 u$ を用いる：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2} &= -\Big[\big(-\operatorname{sech} u\tanh u\big)\tanh u + \operatorname{sech} u\cdot\operatorname{sech}^2 u\Big]\\ &= \operatorname{sech} u\big(\tanh^2 u - \operatorname{sech}^2 u\big).\end{aligned}$$

$-\cosh u$ を掛けると $\operatorname{sech} u$ が消える：

$$-\cosh u\,\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2} = \operatorname{sech}^2 u - \tanh^2 u = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta,$$

これが 2 つ目の結果である。

小問 (iv)

今度は u と v を θ の関数とみなす。小問 (i) より $v = \cos\theta$ かつ $\cosh u = \sec\theta$ であり、小問 (ii) より $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = 1\big/\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u} = 1/v$ である（$v > 0$ なのでこれは正当である）。よって

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = \sec\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} = \sec\theta\tan\theta,$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\theta^2} = -\cos\theta.$$

考えてみよう 計算に取りかかる前に、(iv) の恒等式は印刷されたとおりで本当に正しいように見えるだろうか？

実は正しくない。印刷どおりだと第 1 項は $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}$ を含み、このとき左辺は

$$\begin{aligned}\sec\theta\cdot\sec\theta\tan\theta-\sin\theta\sec\theta\tan\theta+\sec^2\theta&=\sec^2\theta\tan\theta+(\sec^2\theta-\tan^2\theta)\\&=\sec^2\theta\tan\theta+1\ \geq 1,\end{aligned}$$

となり、決して 0 にならない。意図された恒等式は第 1 項に $\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\theta^2}$ を含むものである（v を u と誤った誤植（misprint）である）：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\theta^2}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2=0.$$

4 つの導関数を代入すると、

$$\sec\theta(-\cos\theta)+(-\sin\theta)\sec\theta\tan\theta+\sec^2\theta=-1-\tan^2\theta+\sec^2\theta=0,$$

となる。$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$ だからである。これで訂正後の結果が証明された。

より簡潔な見方もある：積の微分法則により、最初の 2 項は $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\right)$ に等しく、$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}=-\sec\theta\sin\theta=-\tan\theta$ であって、その導関数は $-\sec^2\theta=-\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2$ である。

検算

$u=\ln 2$ とすると $\sinh u=\frac{3}{4}$、$\cosh u=\frac{5}{4}$、$\tan\theta=\frac{3}{4}$ である。3–4–5 の直角三角形から $\cos\theta=\frac{4}{5}=\operatorname{sech}u$ および $\sin 2\theta=\frac{24}{25}$ が得られ、一方 $-2\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}u=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$ である。数値的にも、ランダムな 2000 点での差分（finite difference）による導関数は (i)–(iii) および訂正後の (iv) と約 10^{-7} の精度で一致し、印刷どおりの (iv) の左辺が $1+\sec^2\theta\tan\theta$ に等しいことも確認できる。

よくある間違い

- 正の符号が正しい理由を述べずに $\cos\theta=\pm\operatorname{sech}u$ から一方を選んでしまう。符号を決めるのは範囲 $0\leq\theta<\frac{1}{2}\pi$ である。
- $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$ が $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u}$ の逆数にすぎないことを忘れ、$\operatorname{arsinh}(\tan\theta)$ を一から微分してしまう。

STEP のその先へ

関数 $\theta(u)=\arctan(\sinh u)$ は**グーデルマン関数**（Gudermannian function）と呼ばれ、複素数を使わずに円関数と双曲線関数を結びつける。その逆関数 $u=\ln(\sec\theta+\tan\theta)=$

$\int_0^\theta \sec t \, \mathrm{d}t$ は、まさにメルカトル図法（Mercator projection）の地図における縦方向の座標である。同じ対応は $\cosh(\mathrm{i}x) = \cos x$ と書いたときにも現れる。これらのつながりを幾何学的に見るには、Needham の *Visual Complex Analysis*（『ビジュアル複素解析』）が素晴らしい一冊である。

解答例

STEP III 1990、第 10 問

純粋数学 ・ 解と漸近近似

STEP III 1990、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s3-q10

鍵となる考え方

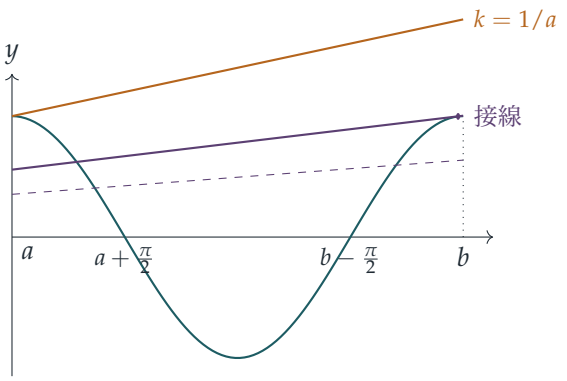
与えられた区間において、$\sin x$ はちょうど 1 周期（period）分を動き、山の頂点で始まり山の頂点で終わる。一方、直線 $y = kx$ は正の値をとり、ゆっくりと増加する。根（root）が存在しうるのは $\sin x > 0$ となる場所に限られ、そのような場所は 2 つの離れた部分からなる。一方は $\sin x$ が減少する部分（交点は高々 1 個）、もう一方は増加していて上に凸（concave）な部分（交点は高々 2 個）である。興味深い境界となるのは直線が 2 つ目の山にちょうど接する（tangent）場合であり、接点を区間の右端から左へ小さな距離 δ だけ離れた点として表すと、接する条件が与えられた方程式になる。

解答

以下では一貫して

$$a = (4n+1)\frac{\pi}{2}, \qquad b = (4n+5)\frac{\pi}{2} = a + 2\pi,$$

とおく。したがって区間は $a < x < b$ である。$\sin a = \sin b = 1$ であるから、$\sin x$ のグラフは山の頂点から始まり、$x = a + \frac{\pi}{2}$ で 0 まで下がり、$x = a + \frac{3\pi}{2} = b - \frac{\pi}{2}$ までは負であり、その後 b で再び山の頂点まで上がる。



図（$n = 1$ の場合を縮尺どおりに描いたもので、原点ははるか左にある）では、$\sin x$ をティール色で、$(a, 1)$ を通る直線をアンバー色で、接線をプラム色の実線で、そして曲線と 3 回交わるより傾きの緩やかな直線を破線で示している。

根の個数としてありうる値

$k > 0$ かつ $x > 0$ より $kx > 0$ であるから、すべての根は $\sin x > 0$ となる場所、すなわち $I_1 = (a, a + \frac{\pi}{2})$ または $I_2 = (b - \frac{\pi}{2}, b)$ のいずれかにある。

I_1 上について。 ここでは $\sin x$ は狭義単調減少（strictly decreasing）、kx は狭義単調増加であるから、$kx - \sin x$ は狭義単調増加であり、根は高々 1 個である。右端では $kx - \sin x > 0$ であり、$x = a$ ではその値は $ka - 1$ に等しい。よって $ka < 1$ ならば I_1 にちょうど 1 個の根があり、$ka \geq 1$ ならば根はない（このとき区間全体で $kx - \sin x > 0$ となる）。

I_2 上について。 $f(x) = \sin x - kx$ とおく。ここでは $f''(x) = -\sin x < 0$ であるから、f は上に凸であり、I_2 上の零点（zero）は高々 2 個である。また左端で $f < 0$ であり、$f(b) = 1 - kb$ である。

- $kb < 1$ ならば、f は負から正へ変化する。上に凸な関数が増加しながら符号を変えるのは 1 回だけであるから、根はちょうど 1 個である。$kb = 1$ のときも同様である。このとき $f(b) = 0$ かつ $f'(b) = \cos b - k = -k < 0$ であるから、b のすぐ左で $f > 0$ となり、I_2 の内部に根が 1 個ある（b 自身での零点は除外される）。
- $kb > 1$ ならば両端で $f < 0$ であるから、I_2 上での f の最大値が負、零、正のいずれであるかに応じて、根は 0 個、1 個、2 個となる。最大値が 0 となるのが接する場合であり、このとき直線はある点 $t \in I_2$ で山に接する。その傾きを k_t とする。k を大きな値から減少させると直線は下がっていくので、$k > k_t$ のとき根はなく、$k = k_t$ のとき 1 個、$\frac{1}{b} < k < k_t$ のとき 2 個である。

接点では $k_t t = \sin t < 1$ かつ $t > a$ であるから $k_t < 1/a$ である。また接する場合は

$kb > 1$ であるから $k_t > 1/b$ である。2 つの部分を合わせると次のようになる。

k の範囲	I_1 内の根	I_2 内の根	合計
$k \le 1/b$	1	1	2
$1/b < k < k_t$	1	2	3
$k = k_t$	1	1	2
$k_t < k < 1/a$	1	0	1
$k \ge 1/a$	0	0	0

よって、題意のとおり、方程式はこの区間に 0 個、1 個、2 個、3 個のいずれかの個数の根をもちうる。

根がちょうど 1 個の場合

表より、根がちょうど 1 個となるのは $k_t < k < \dfrac{1}{a} = \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$ のとき、かつそのときに限る。あとは k_t を記述すればよい。

考えてみよう　「直線が曲線に接する」ことを、どのように方程式に書き直せばよいだろうか？

直線 $y = kx$ が $x = t$ で $y = \sin x$ に接するのは、2 つのグラフがそこで交わり、**かつ**傾きが等しいときである。

$$\sin t = k_t t, \qquad \cos t = k_t.$$

点 t は I_2 にあるので、$t = b - \delta$（ただし $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$）と書く。$\sin b = 1$ かつ $\cos b = 0$ であるから、

$$\sin t = \sin(b-\delta) = \cos\delta, \qquad \cos t = \cos(b-\delta) = \sin\delta.$$

よって傾きの条件から $k_t = \sin\delta$ が得られ、交わる条件は次のようになる。

$$\cos\delta = \left((4n+5)\frac{\pi}{2} - \delta\right)\sin\delta.$$

したがって、根がちょうど 1 個となるのは

$$\sin\delta < k < \frac{2}{(4n+1)\pi},$$

のときである。ここで δ は上で述べたものであり、これが示すべきことであった。

n が大きいときの近似

δ の方程式を $\sin\delta$ で割る（$0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ であるから零ではない）。

$$\cot\delta = b - \delta, \qquad \text{すなわち} \qquad \tan\delta = \frac{1}{b-\delta}.$$

$\delta < \frac{\pi}{2}$ であるから、右辺は $1/(b - \frac{\pi}{2})$ より小さく、これは n が大きいとき小さい。よって δ は小さく、$\tan\delta \approx \delta$ かつ $b - \delta \approx b$ であるから、次を得る。

$$\delta \approx \frac{1}{b} = \frac{2}{(4n+5)\pi}.$$

次の近似を得るために、$\delta = \dfrac{1}{b} + \dfrac{c}{b^3}$ とおき、両辺で b^{-3} までの項を残す。左辺は $\tan\delta = \delta + \frac{1}{3}\delta^3 + \cdots = \dfrac{1}{b} + \dfrac{c + \frac{1}{3}}{b^3} + \cdots$ である。右辺は

$$\frac{1}{b-\delta} = \frac{1}{b}\left(1 - \frac{\delta}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{b}\left(1 + \frac{\delta}{b} + \cdots\right) = \frac{1}{b} + \frac{1}{b^3} + \cdots,$$

となる。ここで補正項では $\delta \approx 1/b$ を用いた。b^{-3} の項を比較すると $c + \frac{1}{3} = 1$ となるので、$c = \frac{2}{3}$ であり、

$$\delta \approx \frac{1}{b} + \frac{2}{3b^3} = \frac{2}{(4n+5)\pi} + \frac{16}{3(4n+5)^3\pi^3}.$$

（同値な方法として、反復（iteration）$\delta \mapsto \arctan\dfrac{1}{b-\delta}$ を $\delta = 1/b$ から出発して 1 回行うと $\arctan\dfrac{b}{b^2-1}$ が得られ、これも同じ展開をもつ。）したがって、k の区間の下端は $\sin\delta \approx \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{2b^3}$ である。

検算

- $n = 1$ のとき、$\cos\delta = (\frac{9\pi}{2} - \delta)\sin\delta$ を数値的に解くと $\delta = 0.070973$ となる。一方 $1/b = 0.070736$、$1/b + 2/(3b^3) = 0.070971$ であり、改良した近似は約 150 倍正確である。$n = 10$ では誤差は約 5×10^{-10} まで小さくなる。
- $n = 1, 2, 3, 5$ と表の各行から選んだ k の値について、細かい格子上で $kx - \sin x$ の符号変化を数えると、予想どおり $2, 3, 1, 0$ 個の根が得られる。また $\sin\delta$ と $2/((4n+1)\pi)$ の間でランダムに選んだ k に対しては、常に根は 1 個である。

よくある間違い

- 接する場合を忘れたり、$1/b$、k_t、$1/a$ の大小関係を誤ったりすること。これにより根の個数の数え上げが混乱する。
- 2 番目の近似で $\tan\delta \approx \delta$ だけを用いること。これでは $\delta \approx b/(b^2-1) \approx 1/b + 1/b^3$ となってしまう。$\frac{1}{3}\delta^3$ の項は $\tan\delta$ の展開に含まれるもので、補正項と同じオーダーであるから、残しておかなければならない。

STEP のその先へ

小さいまたは大きいパラメータを含む方程式の根に対して、次々とよりよい近似を求めることは**漸近解析**（asymptotic analysis）とよばれる。ここで行ったのとまったく同様に、$1/b$ のべきによる級数を代入して係数を比較するのである。同じ考え方を $\tan x = x$ に適用すると、この方程式の大きな根を記述でき、それらは熱伝導や振動の問題に現れる。このような展開の背後にある解析についてさらに知りたければ、Bartle と Sherbert による *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）を参照するとよい。また Siklos による *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には、STEP 形式の演習問題がさらに収録されている。

解答例

STEP III 1990、第 11 問

力学 ・ 剛体の回転

STEP III 1990、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

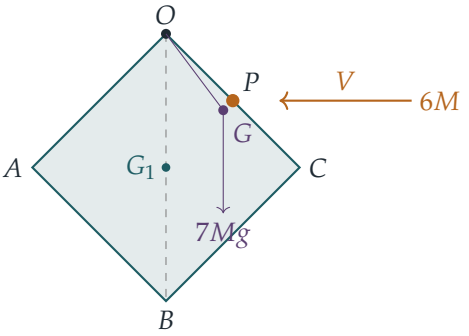
step.maths.org/questions/90-s3-q11

鍵となる考え方

衝突は瞬間的であり、その間に点 O の軸は大きな撃力を及ぼすので、運動量（linear momentum）は保存**されない**。しかし、その力積（impulse）は O に作用するので、O のまわりのモーメントをもたない。したがって、軸のまわりの角運動量（angular momentum）は衝突の前後で保存される。衝突後の系は固定軸のまわりを回転する剛体（rigid body）であり、仕事をする力は重力だけなので、最上点を越えられるかどうかはエネルギー保存則（conservation of energy）によって判定できる。

解答

薄板（lamina）を一様な剛体の正方形、粒子を衝突の瞬間に薄板に付着する質点、軸をなめらかなものとしてモデル化する。O を原点とする。OB が鉛直下向きのとき、正方形の中心 G_1 の深さは $\sqrt{2}\,a$（対角線 $2\sqrt{2}\,a$ の半分）であり、A と C は OB の両側に水平距離 $\sqrt{2}\,a$ の位置にあって、深さはやはり $\sqrt{2}\,a$ である。したがって、OC の中点 P は O から水平距離 $a/\sqrt{2}$、深さ $a/\sqrt{2}$ の位置にあり、$OP = a$ である。



（図では粒子が右から飛んでくる場合を示している。後で見るように、左から飛んでくる場合も同じ答えになる。）

軸のまわりの慣性モーメント

一辺 $2a$ の一様な正方形の薄板について、中心を通り板に垂直な軸のまわりの慣性モーメント（moment of inertia）は $\frac{1}{12}M\big((2a)^2+(2a)^2\big)=\frac{2}{3}Ma^2$ である（直交軸の定理（perpendicular axis theorem）により、板の面内にある 2 本の軸のまわりの慣性モーメント、それぞれ $\frac{1}{3}Ma^2$、を足し合わせればよい）。平行軸の定理（parallel axis theorem）により、$OG_1=\sqrt{2}\,a$ であるから

$$I_{\text{薄板}}=\tfrac{2}{3}Ma^2+M\big(\sqrt{2}\,a\big)^2=\tfrac{8}{3}Ma^2.$$

粒子は最終的に O から距離 a の点 P に位置するので、合わせた物体については

$$I=\tfrac{8}{3}Ma^2+6Ma^2=\tfrac{26}{3}Ma^2.$$

衝突

考えてみよう　なぜ衝突に運動量保存則を使えないのだろうか？

軸が固定されているからである。O を動かさないためには、軸は衝突の間に薄板へ力積を与えなければならず、その力積は未知である。しかし、その作用線は O を通るので O のまわりのモーメントは 0 であり、また重力は一瞬の間には力積を与えない。したがって、軸のまわりの角運動量は保存される。

衝突の直前、O のまわりの粒子の角運動量は、運動量 $6MV$ に、O から粒子の（水平な）運動の直線までの垂直距離、すなわち P の深さ $a/\sqrt{2}$ を掛けたものである。薄板は静止している。衝突の直後には物体全体が角速度 ω で回転するので

$$\tfrac{26}{3}Ma^2\,\omega=6MV\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\qquad\Longrightarrow\qquad\omega=\frac{9V}{13\sqrt{2}\,a}.$$

よって、衝突直後の運動エネルギーは

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{26}{3}Ma^2\cdot\frac{81V^2}{338a^2} = \frac{27}{26}MV^2.$$

完全に回転するための条件

合わせた物体の重心（centre of mass）G（質量 $7M$）の O からの水平変位と深さは

$$\frac{M\cdot 0 + 6M\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}}{7M} = \frac{3\sqrt{2}}{7}a, \qquad \frac{M\cdot\sqrt{2}\,a + 6M\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}}{7M} = \frac{4\sqrt{2}}{7}a,$$

であるから、$OG = \frac{\sqrt{2}}{7}a\sqrt{3^2+4^2} = \frac{5\sqrt{2}}{7}a$ である。

物体は剛体で O にピン留めされているので、（糸につながれた粒子とは異なり）円軌道から「外れる」ことはない。物体が完全に回転するのは、位置エネルギーが最大となる位置、すなわち G が O の真上にくる位置で、運動エネルギーがまだ正であるときであり、かつそのときに限る。G は、はじめの O の下 $\frac{4\sqrt{2}}{7}a$ の深さから O の上 $\frac{5\sqrt{2}}{7}a$ の高さまで

$$\frac{4\sqrt{2}}{7}a + \frac{5\sqrt{2}}{7}a = \frac{9\sqrt{2}}{7}a,$$

だけ上昇する。これは物体がどちら向きに回転しても同じなので、粒子がどちらから飛んできたかは関係ない。衝突後に仕事をするのは重力だけである（なめらかな軸は仕事をしない）から、エネルギー保存則により

$$\frac{27}{26}MV^2 > 7Mg\cdot\frac{9\sqrt{2}}{7}a = 9\sqrt{2}\,Mga,$$

が必要であり、すなわち

$$\boxed{V^2 > \frac{26\sqrt{2}}{3}ga.}$$

問題に現れる質量はすべて M の倍数であるから、当然ながら質量 M は約分されて消える。（ちょうど等号が成り立つ場合には、物体は最上点の位置にじわじわと近づくだけで決してそこを通過しないので、不等号は厳密である。）

検算

- 慣性モーメント、重心（鉛直下向きからの角度の tan は $\frac{3}{4}$）、運動エネルギーの係数 $\frac{27}{26}$ はいずれも数値的に確認した。慣性モーメントは、傾いた正方形上の格子で積分して確かめた。
- 運動方程式 $I\ddot{\theta} = -7Mg\,x_G$ を $a = 1.3$、$g = 9.81$ として数値的に解いた。V^2 を $\frac{26\sqrt{2}}{3}ga \approx 15.6$ の 98% にすると物体は振り戻り、102% にすると一回転した。これはどちらの向きから粒子が飛んできた場合も同様であった。

- エネルギーについての妥当性の確認：粒子のもつ $3MV^2$ のうち、衝突後に残るのは $\frac{27}{26}MV^2$ だけであり、これは完全非弾性衝突（perfectly inelastic collision）として予想どおりである。

よくある間違い

- 衝突の前後で運動量を保存させてしまう。軸が力積を与えるので、運動量は保存されない。
- 粒子の運動量の腕の長さとして、運動の直線までの垂直距離 $a/\sqrt{2}$ ではなく、距離 $OP = a$ を使ってしまう。
- 粒子が付着すると重心が OB 上から外れることを忘れ、最上点までの上昇量を単純にはじめの深さの 2 倍としてしまう。

STEP のその先へ

これは固定軸のまわりを回転する剛体の力学であり、そこでは軸での撃力的な反力のために、衝突において保存される量は運動量ではなく角運動量となる。興味深い発展として**打撃の中心**（centre of percussion）がある。これは、打撃を加えても軸に撃力的な反力がまったく生じない点のことであり、クリケットのバットに「スイートスポット」があるのはこのためである。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の回転と角力積を丁寧に扱っている。

解答例

STEP III 1990、第 12 問

力学 ・ 動く楔上の質点

> **STEP III 1990、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q12

鍵となる考え方

粒子が滑っている間、二つの量が保存される。水平方向の運動量（momentum）（台は滑らかなので、水平方向の外力ははたらかない）と、エネルギー（energy）（すべての面が滑らか）である。この二つの法則と、粒子は常にくさびに対して面 AC に沿って動くという事実とを合わせると、すべての速度が決まる。その後の跳ね返りと飛行は、くさびが一定の速さで動き続ける間の、単なる放物運動（projectile motion）である。

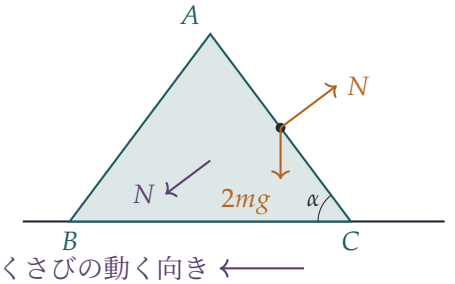
解答

設定

粒子を質量 $2m$ の質点とし、くさび（wedge）を質量 m の剛体として扱う。すべての接触は滑らかである。A, B, C を通る鉛直断面で考える。B を原点にとり、$C = (6a, 0)$、$A = (3a, 4a)$ とする。三角形は $AB = AC = 5a$、底辺の半分が $3a$ の二等辺三角形なので、A の高さは $4a$ である。角 ACB を α とおく。すると

$$\sin\alpha = \frac{4}{5}, \qquad \cos\alpha = \frac{3}{5}.$$

粒子は AC を x 軸の正の向きに滑り下り、くさびは x 軸の負の向きに押し戻される。



AC に沿って下向きの、**くさびに対する**粒子の速さを u とする。くさびの速度を V とし、これは水平である。粒子の速度は、くさびの速度とくさびに対する粒子の相対速度（relative velocity）の和である：

$$\mathbf{v}_P = \big(V + u\cos\alpha,\ -u\sin\alpha\big) = \big(V + \tfrac{3}{5}u,\ -\tfrac{4}{5}u\big).$$

滑っている間の運動量とエネルギー

外力は重力と台からの鉛直な抗力だけなので、水平方向の運動量は保存される。はじめは 0 なので

$$2m\big(V + \tfrac{3}{5}u\big) + mV = 0 \quad\Longrightarrow\quad V = -\tfrac{2}{5}u.$$

したがって粒子の速度は $\big(\frac{1}{5}u,\ -\frac{4}{5}u\big)$、くさびの速度は $-\frac{2}{5}u$ である。

> **考えてみよう**　なぜ粒子だけについてエネルギー保存を考えてはいけないのだろうか。

粒子にはたらく垂直抗力（normal reaction）は面 AC に垂直であるが、その面自体が動いている。そのため粒子の実際の速度は AC に沿っておらず、N は粒子に仕事をする。エネルギーが保存されるのは**系**全体だけであり、それは一対の垂直抗力がする仕事の合計が 0 になるからである。

粒子が AC の下端に達するまでに落下する高さは $4a$ である。系全体のエネルギーから

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(2m)\Big(\tfrac{1}{25} + \tfrac{16}{25}\Big)u^2 + \tfrac{1}{2}m\cdot\tfrac{4}{25}u^2 &= 2mg\cdot 4a\\ \tfrac{19}{25}u^2 &= 8ga\\ u^2 &= \frac{200ga}{19}.\end{aligned}$$

粒子は終始面から離れない。加速度を用いて力を分解すると、垂直抗力は一定値 $N = \frac{10}{19}mg > 0$ となることがわかる。

衝突の瞬間の位置関係

運動量は常に 0 なので、系の重心（centre of mass）は水平方向に動かない。粒子が台に達するまでに、粒子が水平に x_P、くさびが水平に x_W だけ動くとする。すると $2m\,x_P + m\,x_W = 0$ である。くさびに対して粒子は A から C まで、水平距離にして $3a$ だけ進んだので、$x_P - x_W = 3a$ である。よって

$$x_P = a, \qquad x_W = -2a.$$

その瞬間、粒子は $x = 3a + a = 4a$ にあり、角 C は $6a - 2a = 4a$ にある。粒子はちょうど C に達したところなので、当然ながら両者は同じ位置にある。

跳ね返りと飛行

台は固定されていて滑らかであり、衝突は完全弾性衝突（perfectly elastic）である。したがって粒子の水平方向の速度は変わらず、鉛直方向の速度は向きが逆になる。粒子は速度 $\left(\frac{1}{5}u,\ \frac{4}{5}u\right)$ で台を離れる。再び台に戻るまでの飛行時間は

$$T = \frac{2 \cdot \frac{4}{5}u}{g} = \frac{8u}{5g}.$$

飛行中、粒子は右向きに水平距離 $\frac{1}{5}u \cdot T = \dfrac{8u^2}{25g}$ だけ進む。

粒子が離れた後、くさびには水平方向の力がはたらかないので、くさびは左向きに速さ $\frac{2}{5}u$ で動き続ける。時間 T の間にくさびは $\frac{2}{5}u \cdot T = \dfrac{16u^2}{25g}$ だけ動く。粒子は右へ、くさびは左へ動いているので、粒子が再びくさびに当たることはない。

両者はともに $x = 4a$ から出発して互いに逆向きに動いたので、D と E の距離はこの二つの距離の和である：

$$DE = \frac{8u^2}{25g} + \frac{16u^2}{25g} = \frac{24u^2}{25g} = \frac{24}{25} \cdot \frac{200a}{19} = \frac{192}{19}\,a,$$

これで示された。

検算

- 衝突時の運動エネルギーの合計：$\frac{19}{25}mu^2 = \frac{19}{25} \cdot \frac{200}{19}mga = 8mga$。これは失われた位置エネルギーに等しい。
- 運動量：$2m \cdot \frac{1}{5}u + m \cdot \left(-\frac{2}{5}u\right) = 0$。
- $a = g = m = 1$ として運動を数値的に追跡すると $DE \approx 10.1053$ となり、$\frac{192}{19} = 10.10526\ldots$ である。

よくある間違い

- 粒子の速度が AC に沿っているとしてしまう。それは動いているくさびに対する速度にすぎない。
- 粒子だけについて $\frac{1}{2}(2m)u^2 = 2mg \cdot 4a$ と書いてしまう。これはくさびの運動エネルギーと N がする仕事を無視している。
- DE を、その瞬間に粒子と C がともにある衝突点 $x = 4a$ からではなく、C のもとの位置から測ってしまう。

STEP のその先へ

滑らかな台の上を滑るくさびは、**束縛**（constraints）のある系の典型例である。ラグランジュ（Lagrange）力学では、束縛力がまったく現れないように座標（ここでは、くさびの位置と、粒子が斜面に沿って下った距離）を選ぶことで、このような系を扱う。そのとき、水平方向の運動量の保存は、水平方向の平行移動に対する問題の対称性から導かれる。これはネーターの定理（Noether's theorem）の一例である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、運動する座標系と多体系における運動量保存が扱われている。

解答例

STEP III 1990、第 13 問

力学 ・ 球の内部での運動

> **STEP III 1990、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q13

鍵となる考え方

運動は二つの段階に分かれる。まず垂直抗力（normal reaction）が 0 になるまでは球面上の円運動（circular motion）であり、その後は放物運動（projectile motion）として自由に飛ぶ。球面を離れる条件から、離れる瞬間の速さが θ を用いて定まる。あとはヒントのとおり、放物運動する質点が再び球面上に戻る条件 $x^2 + y^2 = a^2$ を t の方程式として書き下せばよい。離れる条件のおかげでいくつもの項が打ち消し合い、式は見事に簡単になる。

解答

モデル

P を質点とみなし、球（半径 a）はなめらかであるとする。したがって、P が球面に接している間に P にはたらく力は、重力 mg と、O に向かう垂直抗力 R だけである。運動は O を通る鉛直面内で起こる。原点を O とし、x 軸を水平に、y 軸を鉛直上向きにとり、P は球の右側を上っていくものとする。

そもそも P が球面を離れるとすれば、それは O より高い位置でなければならない。O より低い位置では、重力の PO 方向の成分は O から遠ざかる向きを向くので、P が円周上を運動している間に R が 0 になることはありえないからである。よって $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ である。

球面を離れる

OP が鉛直上向きと角 θ をなすときの P の速さを v とする。このとき P は O より $a\cos\theta$ だけ高い位置にある。O に向かう方向に力を分解すると、重力のその方向の成分は $mg\cos\theta$ であるから

$$R + mg\cos\theta = \frac{mv^2}{a}.$$

P は $R = 0$ となるときに離れるので、その瞬間には

$$v^2 = ag\cos\theta.$$

（エネルギー保存（conservation of energy）より、打ち出す速さ u は $u^2 = v^2 + 2ga(1 + \cos\theta) = ag(2 + 3\cos\theta)$ を満たさなければならない。したがって u を適切に選べば、$(0, \frac{\pi}{2})$ 内のどの θ も実現できる。P が上っていくにつれて v は減少し R も減少するので、R が初めて 0 になるのはちょうどこの点である。）

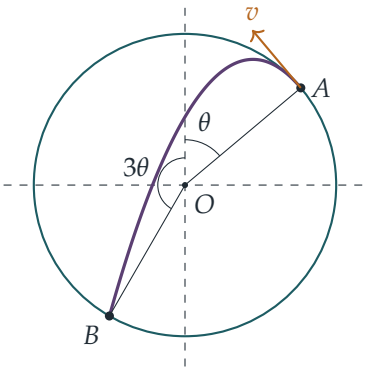
自由飛行

離れる瞬間を $t = 0$ とすると、P は $(a\sin\theta, a\cos\theta)$ にあり、その速度は接線（tangent）方向、すなわち OP に垂直で、頂上を越える向きに斜め上を向いている：

$$\text{速度} = v(-\cos\theta, \sin\theta).$$

その後は重力だけがはたらくので

$$x = a\sin\theta - vt\cos\theta, \qquad y = a\cos\theta + vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$



P は A で球面を離れ、以下で示すように B で再び球面に衝突する。

P が球面上にあるのは $x^2 + y^2 = a^2$ のときである。展開すると、定数項と t の 1 次の項はそれぞれ

$$a^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta = a^2 \qquad \text{および} \qquad -2avt\sin\theta\cos\theta + 2avt\cos\theta\sin\theta = 0,$$

となるので

$$\begin{aligned} x^2+y^2-a^2 &= v^2t^2\cos^2\theta + v^2t^2\sin^2\theta - gt^2\left(a\cos\theta + vt\sin\theta\right) + \tfrac{1}{4}g^2t^4 \\ &= \left(v^2 - ag\cos\theta\right)t^2 - gv\sin\theta\, t^3 + \tfrac{1}{4}g^2t^4 \\ &= gt^3\left(\tfrac{1}{4}gt - v\sin\theta\right), \end{aligned}$$

である。最後の変形では $v^2 = ag\cos\theta$ を用いた。

考えてみよう なぜ $t=0$ は単なる解ではなく、三重解（triple root）として現れるのだろうか？

離れる瞬間には、円周上を運動するのに必要な O に向かう加速度 v^2/a を、重力だけがちょうど与えている。したがって放物線は、球面と同じ向きかつ同じ曲率（curvature）で出発する。放物線は球面にきわめて密着したまま進み、やがて球の内側へと離れていく。これが、t の項だけでなく t^2 の項まで打ち消し合う理由である。

$0 < t < 4v\sin\theta/g$ ではこの式は負であるから、P は球の真に内側にあり、次に球面と出会うのは

$$T = \frac{4v\sin\theta}{g}.$$

のときである。

着地点

$t = T$ において、$vT\sin\theta = 4v^2\sin^2\theta/g = 4a\cos\theta\sin^2\theta$ および $\frac{1}{2}gT^2 = 8v^2\sin^2\theta/g = 8a\cos\theta\sin^2\theta$ を用いると

$$y = a\cos\theta + 4a\cos\theta\sin^2\theta - 8a\cos\theta\sin^2\theta = a\cos\theta\left(1 - 4\sin^2\theta\right).$$

（$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos\theta(1-4\sin^2\theta)$ であるから、これは $a\cos 3\theta$ に等しい。同様に $x = -a\sin 3\theta$ となるので、衝突点 B は図のように、反対側で鉛直上向きから角 3θ の位置にある。）

P が O より低い位置で衝突するのは、ちょうど $y < 0$ のときである。$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\cos\theta > 0$ であるから

$$y < 0 \iff 1 - 4\sin^2\theta < 0 \iff \sin\theta > \tfrac{1}{2} \iff \theta > \tfrac{\pi}{6},$$

となる。最後の同値は、sin が $(0, \frac{\pi}{2})$ で増加することによる。ちょうど $\theta = \frac{\pi}{6}$ のときは、P は O とちょうど同じ高さで球面に衝突する。よって θ が超えなければならない角は

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{6} = 30^\circ}$$

であり、$30^\circ < \theta < 90^\circ$ を満たすすべての θ に対して、実際に O より低い位置で衝突する。

検算

- $\theta = 60°$：公式から $y = a\cos 180° = -a$ となり、P は最下点、すなわち打ち出した点に戻ってくる。$\theta = 45°$ のときは、鉛直上向きから 135° の位置に着地する。どちらも当然 $y < 0$ である。
- $\theta \to 0$ のとき $T \to 0$ かつ $B \to A$ である。頂上でかろうじて離れる質点は、そのまま球面上に落ちてくる。
- 数値シミュレーション（$R = 0$ となるまで球面上の運動を刻んで計算し、その後は球面と出会うまで放物運動を計算する）を $\theta = 10°, 25°, 29°, 30.5°, 31°, 45°, 60°, 80°$ について行ったところ、小数第 4 位まで $T = 4v\sin\theta/g$ および $y = a\cos 3\theta$ と一致した。たとえば $\theta = 31°$ では $y/a = -0.0523$ となる。

よくある間違い

- 速度の向きを取り違える。速度は OP に垂直で、まだ頂上を越える向きに上を向いており、その成分は $(v\sin\theta, v\cos\theta)$ ではなく $(-v\cos\theta, v\sin\theta)$ である。
- $x^2 + y^2 = a^2$ を解く前に $v^2 = ag\cos\theta$ を使うのを忘れる。そうすると、きれいな因数分解（factorisation）ではなく、扱いにくい 4 次方程式（quartic）が残ってしまう。
- P が O より高い位置で離れるから $\cos\theta > 0$ であることに触れずに、$1 - 4\sin^2\theta < 0$ の両辺を割ってしまう。

STEP のその先へ

$t = 0$ での三重解は、**接触**（*osculation*）についての主張である。放物線と円は離れる点で接線と曲率を共有しており、したがって 2 次の接触をしている。曲率と接触円（osculating circle）は曲線の微分幾何学（differential geometry）の中心的な概念であり、力学においても、加速度を接線成分と法線成分に分解するたびに再び現れる。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、極座標（polar coordinates）による運動の記述や、この種の束縛運動（constrained motion）を丁寧に扱っている。

解答例

STEP III 1990、第 14 問

力学 ・ 力の系

STEP III 1990、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

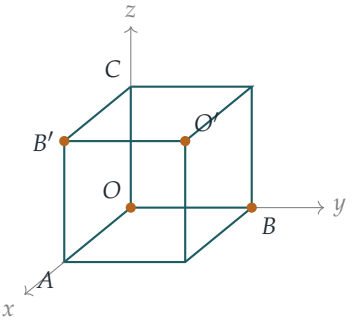
step.maths.org/questions/90-s3-q14

鍵となる考え方

剛体（rigid body）に働く力の系は、2 つのベクトルに帰着する。合力（resultant）$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i$ と、選んだ点のまわりのモーメント（moment）$\mathbf{G}_P = \sum (\mathbf{r}_i - \mathbf{p}) \times \mathbf{F}_i$ である。基準点を O から P へ移すと、モーメントは簡単な規則 $\mathbf{G}_P = \mathbf{G}_O - \mathbf{p} \times \mathbf{R}$ に従って変わる。この問題のどの小問も、P を変えてこの規則を使うだけである。

解答

立方体を一辺 a の剛体とみなす。$A = (a, 0, 0)$、$B = (0, a, 0)$、$C = (0, 0, a)$ とし、B と向かい合う頂点を $B' = (a, 0, a)$ とする。



λ、μ、ν を求める

O に働く力は O のまわりのモーメントをもたないので、残りの 3 つの力だけを考えればよい。外積（cross product）の公式 $(x, y, z) \times (p, q, r) = (yr - zq,\ zp - xr,\ xq - yp)$

を用いると、

$$\overrightarrow{OO'} \times \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda - 1 \\ -\lambda \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{OB} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{OB'} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -\mu \\ 1 - \nu \\ \mu \end{pmatrix}.$$

これらを足すと、O のまわりの全モーメントは $a\,(3-\mu,\ \lambda-\nu,\ 1-\lambda+\mu)$ となる。各成分を 0 とおくと $\mu = 3$、次に $\lambda = 1+\mu = 4$、さらに $\nu = \lambda = 4$ を得る。

$$\lambda = 4, \qquad \mu = 3, \qquad \nu = 4.$$

これらはいずれも α, β, γ によらない。また合力は

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \alpha + \lambda - 1 + 1 \\ \beta + \mu \\ \gamma + 1 + 2 + \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 4 \\ \beta + 3 \\ \gamma + 7 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{G}_O = \mathbf{0}.$$

である。

小問 (i)

$\alpha = \beta = \gamma = 0$ のとき $\mathbf{R} = (4, 3, 7)$ である。2 つの力の系が同等（equivalent）であるのは、合力が等しく、かつある 1 点のまわりのモーメントが等しい（したがってすべての点のまわりで等しい）ときである。よって B に働く 1 つの力は $\mathbf{R}$ そのものでなければならず、偶力（couple）はもとの系の B のまわりのモーメントに等しくなければならない。

$$\mathbf{G}_B = \mathbf{G}_O - \overrightarrow{OB} \times \mathbf{R} = \mathbf{0} - a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = -a \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

考えてみよう なぜ B のまわりのモーメントは $\mathbf{G}_O - \overrightarrow{OB} \times \mathbf{R}$ に等しいのか？

各力について $(\mathbf{r}_i - \mathbf{b}) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i - \mathbf{b} \times \mathbf{F}_i$ が成り立つ。これを i について和をとれば $\mathbf{G}_O - \mathbf{b} \times \mathbf{R}$ となる。

したがって、同等な系は、B に働く力 $(4,3,7)$ と、モーメント $a(-7,0,4)$ の偶力の組である。検算として、B に働く力とこの偶力を合わせた O のまわりのモーメントは $a(7,0,-4)+a(-7,0,4)=\mathbf{0}$ となり、確かにそうなるべき値になっている。

小問 (ii)

このとき $\mathbf{R}=(2+4,\ 3+3,\ 2+7)=(6,6,9)=3(2,2,3)$ であり、やはり $\mathbf{G}_O=\mathbf{0}$ である。位置ベクトル $\mathbf{r}=(x,y,z)$ の点 P において、

$$\mathbf{G}_P=\mathbf{G}_O-\mathbf{r}\times\mathbf{R}=-\mathbf{r}\times\mathbf{R}.$$

$\mathbf{R}\neq\mathbf{0}$ であるから、これが 0 になるのは $\mathbf{r}$ が $\mathbf{R}$ に平行（または $\mathbf{r}=\mathbf{0}$）のときであり、そのときに限る。よって求める軌跡（locus）は、O を通り方向ベクトル $(2,2,3)$ をもつ直線

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}.$$

である。物理的には、系全体がこの直線に沿って働く 1 つの力 $(6,6,9)$ と同等であるということである。

立方体が並進（translation、回転を伴わない運動）するとき、すべての点が同じ変位だけ動くので、力のする仕事（work）は $\mathbf{R}\cdot\mathbf{s}$ である。ここで $\mathbf{s}$ は変位である。この直線に沿って $(2,2,3)$ の向きに距離 d だけ動くとき、$\mathbf{s}=\dfrac{d}{\sqrt{17}}(2,2,3)$ であり、

$$W=(6,6,9)\cdot\frac{d}{\sqrt{17}}(2,2,3)=\frac{51d}{\sqrt{17}}=3\sqrt{17}\,d.$$

問題文では距離に名前がついていないが、単位距離あたりの仕事は $3\sqrt{17}\approx 12.37$ である。$\mathbf{R}$ はこの直線上にあるので、これは単に $|\mathbf{R}|\,d=\sqrt{36+36+81}\,d=\sqrt{153}\,d$ であり、同じ値になる。（直線に沿って逆向きに動けば $-3\sqrt{17}\,d$ となる。）

検算

- $\lambda=4$、$\mu=3$、$\nu=4$ のとき、O のまわりの 3 つのモーメントは $a(1,3,-4)$、$a(2,0,1)$、$a(-3,-3,3)$ であり、和は 0 になる。
- (ii) で $P=(2,2,3)$ とすると $\mathbf{r}\times\mathbf{R}=(2,2,3)\times(6,6,9)=\mathbf{0}$ である。$P=(1,0,0)$ ではモーメントは $-(0,-9,6)\neq\mathbf{0}$ となる。
- 厳密な分数計算を行うコンピュータで、すべてのモーメントを確認した。また (i) の同等な系がランダムに選んだ 20 点のまわりでもとの系と同じモーメントをもつことを確かめ、単位距離あたりの仕事が $3\sqrt{17}\approx 12.369$ であることも確認した。

よくある間違い

- $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ の順序を取り違える。順序を逆にするとすべての符号が反転する。
- (i) の偶力を $+\overrightarrow{OB} \times \mathbf{R}$ としてしまう。力を O から B へ移すには、逆符号の補正の偶力が必要である。
- 異なる頂点に働く力ごとに仕事を足し合わせて求めようとする。純粋な並進では合力だけが問題になる。

STEP のその先へ

剛体に働く任意の力の系は、ある直線に沿った 1 つの力と、その同じ直線のまわりの偶力の組に帰着する。これを**レンチ**（*wrench*）といい、そのピッチ（pitch）は $\mathbf{R} \cdot \mathbf{G} / |\mathbf{R}|^2$ である。(ii) ではピッチが 0 なので、レンチは単なる 1 つの力であり、モーメントが 0 となる点の軌跡はその作用線、すなわち中心軸（central axis）である。これらの考え方は、剛体の力学や、ロボット工学におけるスクリュー理論（screw theory）へとつながっていく。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、トルクと剛体をちょうどよい水準で扱っている。

解答例

STEP III 1990、第 15 問

確率・統計 ・ 幾何分布

> **STEP III 1990、問 15**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q15

鍵となる考え方

各回の投げで A が出る確率は $\frac{1}{4}$、B が出る確率は $\frac{3}{4}$ であり、それぞれ独立である。したがって事象 $\{M = m,\ N = n\}$ はある特定の投げの列 1 つに対応し、その確率は積で表される。この積は m のみに依存する因子と n のみに依存する因子の積に分解でき、これがほとんどすべての仕事をしてくれる。すなわち、周辺分布（marginal distribution）は幾何分布（geometric distribution）となり、2 つの確率変数は独立（independent）であり、以降のすべての確率は等比級数（geometric series）になる。

解答

1 回の投げについて $p = \mathrm{P}(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$、$q = \mathrm{P}(B) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ とおく。各回の投げは独立である。

事象 $\{M = m,\ N = n\}$ が起こるのは、最初の $m + n + 1$ 回の投げが

$$\underbrace{A\,A\cdots A}_{m}\ \underbrace{B\,B\cdots B}_{n}\ A,$$

となるとき、かつそのときに限る。よって独立性より、$m \geq 0$ かつ $n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{P}(M = m,\ N = n) = \left(\tfrac{1}{4}\right)^{m} \left(\tfrac{3}{4}\right)^{n} \tfrac{1}{4} = \left(\tfrac{1}{4}\right)^{m+1} \left(\tfrac{3}{4}\right)^{n}.$$

である。（確率 1 で、列はいずれ B を出し、その後に A を出すので、これらの確率の総和は 1 である。このことは以下の周辺分布によっても確かめられる。）

小問 (i)

M の周辺分布を求めるには、$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \dfrac{3/4}{1-3/4} = 3$ を用いて $n \geq 1$ について和をとる。

$$\mathrm{P}(M=m) = \left(\tfrac{1}{4}\right)^{m+1}\cdot 3 = \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{4}\right)^m, \qquad m = 0,1,2,\ldots$$

N の周辺分布を求めるには、$\sum_{m\geq 0}\left(\frac{1}{4}\right)^{m+1} = \dfrac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}$ を用いて $m \geq 0$ について和をとる。

$$\mathrm{P}(N=n) = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{3}{4}\right)^n = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1}, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

どちらも直接的に解釈できる。M は最初の B より前に出る A の個数を数えたものであり、N は B の連が始まってから最初の A が出るまでの待ち時間である。いずれも総和は 1 になる。

小問 (ii)

$|x| < 1$ のとき $\sum_{k\geq 1} kx^{k-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ が成り立つこと（等比級数を微分すればよい）を用いる。すると

$$\mathrm{E}(M) = \tfrac{3}{4}\sum_{m\geq 1} m\left(\tfrac{1}{4}\right)^m = \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\frac{1}{(3/4)^2} = \tfrac{1}{3},$$

$$\mathrm{E}(N) = \tfrac{1}{4}\sum_{n\geq 1} n\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1} = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1/4)^2} = 4.$$

となる。

独立性

周辺分布どうしを掛け合わせると、すべての $m \geq 0, n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{P}(M=m)\,\mathrm{P}(N=n) = \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{4}\right)^m\cdot\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1} = \left(\tfrac{1}{4}\right)^{m+1}\left(\tfrac{3}{4}\right)^n = \mathrm{P}(M=m,\ N=n)$$

が成り立つ。したがって M と N は**独立である**。

> **考えてみよう**　A の連の長さは、B の連に影響を与えるはずではないか？　なぜ影響しないのか？

A の連は最初の B で終わり、その投げ以降、過程は新たに始まり直す。すなわち、残りの投げはそれ以前のすべてと独立である。B の連の長さはその後の投げのみに依存するので、M を知っても N については何もわからない。同時確率の因数分解は、このことを代数的に表現したものである。

N と M に関する確率

整数 $k \geq 1$ に対して、幾何分布の裾の部分の和をとると

$$\mathrm{P}(N > k) = \sum_{n \geq k+1} \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1} = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{(3/4)^k}{1 - 3/4} = \left(\tfrac{3}{4}\right)^k.$$

となる。この式は $\mathrm{P}(N > 0) = 1$ も与えるが、$N \geq 1$ であるからこれは正しい。

$\mathrm{P}(N > M)$ については、M で条件付けして独立性を用いる。

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(N > M) &= \sum_{m \geq 0} \mathrm{P}(M = m)\,\mathrm{P}(N > m) = \sum_{m \geq 0} \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{4}\right)^m \left(\tfrac{3}{4}\right)^m \\ &= \tfrac{3}{4} \sum_{m \geq 0} \left(\tfrac{3}{16}\right)^m = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{16}{13} = \tfrac{12}{13}.\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(N = M)$ については、$N \geq 1$ であるから共通の値は 1 以上でなければならない。

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(N = M) &= \sum_{m \geq 1} \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{4}\right)^m \cdot \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{m-1} = \tfrac{3}{64} \sum_{m \geq 1} \left(\tfrac{3}{16}\right)^{m-1} \\ &= \tfrac{3}{64} \cdot \tfrac{16}{13} = \tfrac{3}{52}.\end{aligned}$$

最後に、3 つの事象 $N > M, N = M, N < M$ は互いに排反であり、かつすべての場合を尽くしているので、

$$\mathrm{P}(N < M) = 1 - \tfrac{12}{13} - \tfrac{3}{52} = \tfrac{52 - 48 - 3}{52} = \tfrac{1}{52},$$

となり、示すべきことが示された。

検算

- 平均値は直観に合っている。A は出にくいので、最初の A の連は短く（平均 $\frac{1}{3}$）、一方 B の連を終わらせる A が出るまでには平均 $1/p = 4$ 回待つことになる。
- 直接計算すると $\mathrm{P}(M > n) = \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n+1}$ であるから、$\mathrm{P}(N < M) = \sum_{n \geq 1} \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n+1} = \tfrac{1}{64}\sum_{n \geq 1}\left(\tfrac{3}{16}\right)^{n-1} = \tfrac{1}{64} \cdot \tfrac{16}{13} = \tfrac{1}{52}$ となり、引き算で求めた結果と一致する。$\mathrm{P}(N > k) = \left(\tfrac{3}{4}\right)^k$ の直接的な理由は、最初の B の後の k 回の投げがすべて B でなければならないことである。
- 同時分布を厳密に足し合わせると $\mathrm{P}(N > M) = 0.92308$、$\mathrm{P}(N = M) = 0.05769$、$\mathrm{P}(N < M) = 0.01923$ となる。200 000 回の投げの系列をシミュレーションしたところ、0.923、0.058、0.019 が得られ、標本平均は 0.334 と 3.99 であった。

よくある間違い

- $\mathrm{P}(N = M)$ の和に $m = 0$ を含めてしまうこと。N が 0 になることはない。
- M が 0 になりうること（最初の投げが B かもしれない）を忘れること。これにより M の周辺分布がずれ、誤った平均が得られてしまう。

STEP のその先へ

ここで連の長さが独立になるのは、独立試行の列が、最初の B のように過去のみによって決まる任意の時刻において「再出発」するからである。これは**強マルコフ性**（strong Markov property）と呼ばれ、再生理論（renewal theory）やマルコフ連鎖（Markov chain）の解析の基礎となっている。これらは大学 1、2 年次で学ぶ内容である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、幾何分布、独立性、マルコフ連鎖をちょうどよい水準で扱っている。

解答例

STEP III 1990、第 16 問

確率・統計 ・ 幾何的確率

> **STEP III 1990、問 16**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q16

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.21 節「棒を折る」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/broken-stick.html

鍵となる考え方

合計が一定である 3 つの長さが三角形をなすのは、どの長さも合計の半分より小さいとき、かつそのときに限る。三角形ができるとき、それが鈍角三角形（obtuse triangle）となるのは、最も長い辺の 2 乗が他の 2 辺の 2 乗の和より大きいとき、かつそのときに限る（余弦定理（cosine rule））。どちらの小問もこれらを確率変数に関する条件に書き換えることができ、確率は (i) では区間の長さ、(ii) では領域の面積になる。

解答

小問 (i)

3 つの部分の長さは X, $\frac{1}{2}(1-X)$, $\frac{1}{2}(1-X)$ であり、合計は 1 である。3 つの正の長さが三角形をなすのは、どの長さも他の 2 つの和より小さいとき、すなわち周長（perimeter）の半分（ここでは $\frac{1}{2}$）より小さいとき、かつそのときに限る。等しい 2 つの部分は $X > 0$ であれば常に $\frac{1}{2}(1-X) < \frac{1}{2}$ を満たすので、条件は $X < \frac{1}{2}$ だけである。三角形を作れるという事象を T とする。このとき

$$\mathrm{P}(T) = \mathrm{P}\left(0 < X < \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}.$$

三角形が鈍角三角形であるのは、最も長い辺の 2 乗が他の 2 辺の 2 乗の和より大きいとき、かつそのときに限る。どの辺が最も長いかは X によって決まる。

- $X \le \frac{1}{3}$ ならば $X \le \frac{1}{2}(1-X)$ であるから、等しい部分の一方が最も長い辺である。判定条件は $\frac{1}{4}(1-X)^2 > \frac{1}{4}(1-X)^2 + X^2$、すなわち $X^2 < 0$ となるが、これは決して成り立たない。この三角形は底辺が等しい 2 辺より長くない二等辺三角形（isosceles triangle）であり、決して鈍角三角形にはならない。
- $\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}$ ならば最も長い辺は X であり、三角形が鈍角三角形となるのは

$$X^2 > 2 \cdot \tfrac{1}{4}(1-X)^2 \iff X > \frac{1-X}{\sqrt{2}},$$

のとき、かつそのときに限る。ここで両辺は正なので、正の平方根をとった。これを整理すると $X(\sqrt{2}+1) > 1$、すなわち $X > \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 \approx 0.414$ となり、これは確かに $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ に含まれる。

三角形が鈍角三角形であるという事象を O とする。このとき $O \cap T$ は事象 $\sqrt{2}-1 < X < \frac{1}{2}$ であり、X は一様分布（uniform distribution）に従うので、条件付き確率（conditional probability）は

$$\mathrm{P}(O \mid T) = \frac{\mathrm{P}(\sqrt{2}-1 < X < \frac{1}{2})}{\mathrm{P}(T)} = \frac{\frac{1}{2} - (\sqrt{2}-1)}{\frac{1}{2}} = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 3 - 2\sqrt{2},$$

となり、示すべきことが示された。

小問 (ii)

作図は常に可能である。 頂点 $(1,0), (1,1), (0,1)$ をもつ三角形 R は、$x \le 1, y \le 1, x+y \ge 1$ を満たす点全体の集合である。辺の候補 $x, y, 2-x-y$ の合計は 2 であり、これらが（退化している場合も含めて）三角形をなすのは、3 つすべてが非負で、どれも周長の半分 1 を超えないとき、かつそのときに限る：

- R 上では $0 \le x \le 1$ および $0 \le y \le 1$ が成り立つ。
- $2-x-y \le 1$ は $x+y \ge 1$ そのものであり、$2-x-y \ge 0$ は $x \le 1, y \le 1$ から従う。

したがって、R のどの点からも三角形が得られる。三角形が退化（degenerate）するのは R の辺上のみであり、その確率は 0 である。

$\angle ABC$ が鈍角となるのはいつか。 B における角は BA と BC の間にあるので、その対辺は $CA = y$ である。余弦定理より、$\angle ABC$ が鈍角となるのは $CA^2 > AB^2 + BC^2$ のとき、かつそのときに限る：

$$y^2 > x^2 + (2-x-y)^2.$$

$(2-x-y)^2 = (2-x)^2 - 2(2-x)y + y^2$ と展開すると y^2 の項が打ち消し合い、条件は

$$2(2-x)y > x^2 + (2-x)^2 = 2x^2 - 4x + 4.$$

となる。$x \le 1$ より $2-x > 0$ であるから、不等号の向きを変えずに $2(2-x)$ で割ることができ、

$$y > \frac{x^2 - 2x + 2}{2-x},$$

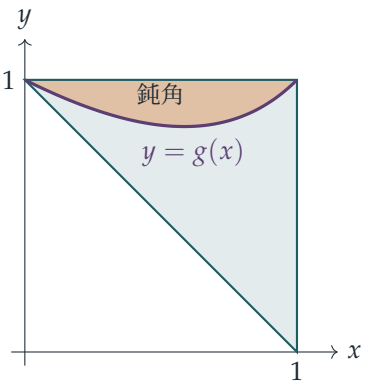
を得る。これが示すべきことであった。右辺を $g(x)$ とおく。

考えてみよう 曲線 $y = g(x)$ は本当に三角形 R の内部にとどまっているだろうか。

鈍角となる領域が単に R のうち曲線より上の部分となるためには、$0 \le x \le 1$ において曲線が直線 $y = 1-x$ と $y = 1$ の間にあることが必要である。実際、

$$1 - g(x) = \frac{(2-x) - (x^2 - 2x + 2)}{2-x} = \frac{x(1-x)}{2-x} \ge 0, \qquad g(x) - (1-x) = \frac{x}{2-x} \ge 0,$$

であり、$g(0) = g(1) = 1$ である。したがって曲線は $(0,1)$ から $(1,1)$ まで延び、$y = 1$ より下に沈むが、斜辺（hypotenuse）$x + y = 1$ より下に行くことはない。



確率。 三角形 R の面積は $\frac{1}{2}$ であるから、同時確率密度（joint density）は R 上で 2 であり、

$$\mathrm{P}(\angle ABC \text{ が鈍角}) = 2 \times \text{面積}\{(x,y) : g(x) < y \le 1,\ 0 \le x \le 1\} = 2\int_0^1 \big(1 - g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

g を積分するために $u = 2-x$ と置換（substitution）すると、$x = 2-u$ であり

$$x^2 - 2x + 2 = (2-u)^2 - 2(2-u) + 2 = u^2 - 2u + 2, \qquad g = \frac{u^2 - 2u + 2}{u} = u - 2 + \frac{2}{u}.$$

となる。x が 0 から 1 まで動くとき u は 2 から 1 まで動き、$\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$ であるから、

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(u - 2 + \frac{2}{u}\right)\mathrm{d}u = \left[\tfrac{1}{2}u^2 - 2u + 2\ln u\right]_1^2$$
$$= (2 - 4 + 2\ln 2) - \left(\tfrac{1}{2} - 2\right) = 2\ln 2 - \tfrac{1}{2}.$$

よって

$$\mathrm{P}(\angle ABC \text{ が鈍角}) = 2\left(1 - 2\ln 2 + \tfrac{1}{2}\right) = 3 - 4\ln 2,$$

となり、示すべきことが示された。

検算

- 数値的には $3 - 2\sqrt{2} \approx 0.1716$、$3 - 4\ln 2 \approx 0.2274$ である。10^6 回の試行によるモンテカルロ・シミュレーション（Monte Carlo simulation）では、それぞれ約 0.1719 と 0.2278 が得られた。
- どちらの答えも 0 と 1 の間にある。(ii) では曲線が両端で $y = 1$ に接している。$x = 0$ では辺 BC が消え、$x = 1$ では辺 AB が消えるので、どちらも予想どおり退化した場合である。
- シンプソンの公式（Simpson's rule）で $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ を計算すると 0.886294 となり、$2\ln 2 - \frac{1}{2}$ と一致する。

よくある間違い

- (i) で条件付けを忘れること。鈍角三角形ができる条件なしの確率は $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$ であり、求める答えの半分である。
- (ii) で余弦定理に誤った辺を用いること。B における角の対辺は $CA = y$ であって、AB ではない。
- R 上の密度が 1 ではなく 2 であることを忘れること。そうすると答えが半分の大きさになる。

STEP のその先へ

確率を長さや面積に置き換えることを**幾何的確率**（geometric probability）といい、棒を無作為に折る問題はその古典的な問題の一つである。独立な一様分布に従う 2 点で棒を折るとき、三角形ができる確率は $\frac{1}{4}$ である。小問 (ii) は連続的な同時分布への最初の一歩であり、そこでは確率は領域上での同時確率密度の二重積分となる。Grimmett

と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は同時確率密度を扱っており、この種の問題がいくつか収められている。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

1990 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

