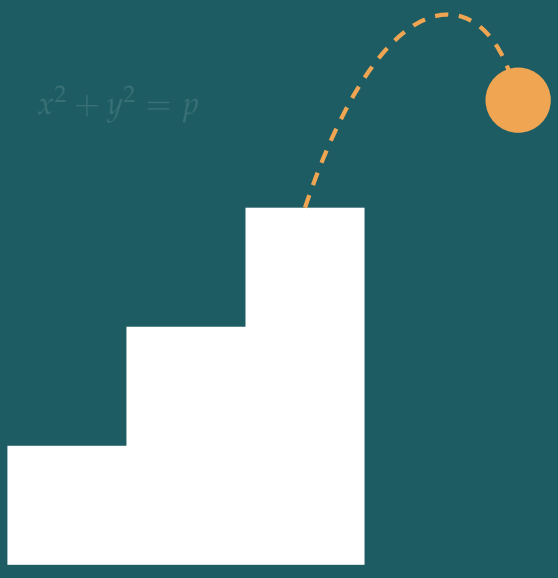
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

1989 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

1989 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

1989 年解答例

1989 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 48 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 複合図形の面積 純粋数学 . . . 3
Q2 リーマン和と極限 純粋数学 . . . 7
Q3 ベクトルと内積 純粋数学 . . . 11
Q4 ラムゼー理論 純粋数学 . . . 15
Q5 二項係数の恒等式 純粋数学 . . . 19
Q6 法線と微分方程式 純粋数学 . . . 22
Q7 曲線の概形と最適化 純粋数学 . . . 25
Q8 倍角の公式 純粋数学 . . . 29
Q9 グラフの変換 純粋数学 . . . 33
Q10 速度に依存する抵抗 力学 . . . 38
Q11 到達距離の最適化 力学 . . . 41
Q12 弾性ひもとエネルギー 力学 . . . 45
Q13 摩擦のある梯子のつり合い 力学 . . . 49
Q14 条件付き分布 確率・統計 . . . 53
Q15 分布の比較 確率・統計 . . . 57
Q16 ゼロサムゲーム 確率・統計 . . . 61

STEP II

Q1 3次方程式の三角関数による解法 純粋数学 . . . 65
Q2 べき級数の係数 純粋数学 . . . 69
Q3 複素双曲線関数による写像 純粋数学 . . . 73
Q4 分数関数のグラフ 純粋数学 . . . 77
Q5 極方程式の曲線と反射 純粋数学 . . . 83
Q6 逆関数の積分 純粋数学 . . . 87

Q7 2階の微分方程式 純粋数学 91
Q8 変換群 純粋数学 95
Q9 行列の指数関数と連立系 純粋数学 99
Q10 直線と平面 純粋数学 103
Q11 連結された質点と力積 力学 107
Q12 剛体のつり合い 力学 112
Q13 慣性モーメント 力学 116
Q14 円運動 力学 121
Q15 幾何的確率 確率・統計 125
Q16 二項分布 確率・統計 129

STEP III

Q1 回転面 純粋数学 133
Q2 空間内の平面 純粋数学 137
Q3 行列群 純粋数学 141
Q4 曲線の概形と解 純粋数学 145
Q5 チェビシェフ多項式 純粋数学 151
Q6 2次曲線の極方程式 純粋数学 155
Q7 せん断行列 純粋数学 160
Q8 連立微分方程式 純粋数学 164
Q9 べき級数の和 純粋数学 168
Q10 リーマン和 純粋数学 172
Q11 球の斜め衝突 力学 176
Q12 回転座標系 力学 180
Q13 単振動 力学 185
Q14 滑車と力積 力学 189
Q15 中央値の分布 確率・統計 193
Q16 確率と仮説検定 確率・統計 198

解答例

STEP I 1989、第 1 問

純粋数学 ・ 複合図形の面積

> **STEP I 1989、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q1

鍵となる考え方

この領域は半円（semicircle）からできている。大きな半円板（half-disc）を一つ用意し、そこから小さな半円板を取り除いたり加えたりすれば得られる。したがって必要なのはそれぞれの半径であり、特に下側の半円 CDE の半径である。これは直線 AG に沿った長さから求まる。放物線（parabola）に変えても方法は変わらない。放物線のアーチには簡単な面積公式があり、それが $\frac{1}{2}\pi a^2$ の役割を果たすからである。

解答

半円の場合

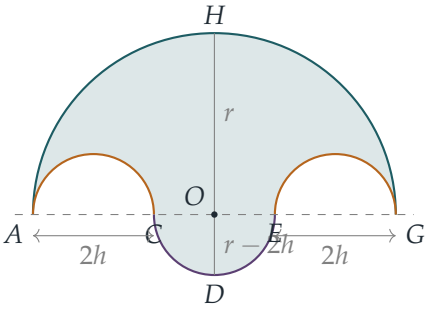
A から直線に沿って長さを測る。ABC の半径は h なので $AC = 2h$ である。同様に $EG = 2h$ であり、AHG の半径は r なので $AG = 2r$ である。よって

$$CE = 2r - 4h,$$

であり、$2h < r$ であるから、これは正である。よって半円 CDE の半径は $r - 2h$ である。その中心は CE の中点であり、対称性によりこれは AG の中点でもある。したがって、この半円は大きな半円と中心 O を共有する。

図より、ABC と EFG は AG に関して H と同じ側、すなわち大きな半円の内側にあり、CDE は反対側にある。したがって、囲まれた領域は次のようになる。

$$(\text{半円板}AHG) - (\text{半円板}ABC\text{ と}EFG) + (\text{半円板}CDE).$$



半径 a の半円板の面積は $\frac{1}{2}\pi a^2$ であるから、囲まれた面積は次のようになる。

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\pi r^2 - 2\cdot\tfrac{1}{2}\pi h^2 + \tfrac{1}{2}\pi(r-2h)^2 &= \tfrac{1}{2}\pi(r^2 - 2h^2 + r^2 - 4rh + 4h^2)\\ &= \tfrac{1}{2}\pi(2r^2 - 4rh + 2h^2)\\ &= \pi(r-h)^2.\end{aligned}$$

考えてみよう HD の長さはいくらか？

点 H は大きな半円の頂点なので、O を通り AG に垂直な直線上にあり、O からの距離は r である。点 D は CDE の最下点なので、同じ垂線上で直線の反対側にあり、O からの距離は $r-2h$ である。よって

$$HD = r + (r-2h) = 2(r-h),$$

であり、HD を直径とする円の半径は $r-h$、面積は $\pi(r-h)^2$ である。これは先に求めた面積に一致し、示すべきことが示された。

放物線の場合

半径 a の各半円を、長さ $2a$ の同じ弦（chord）の上に立つ放物線のアーチで置き換える。その頂点は弦の中点から高さ a の位置にある。弦の中点を原点とする。放物線は頂点を通る軸に関して対称なので、$y = a - kx^2$ の形をしている。これは $(\pm a, 0)$ を通るので $k = 1/a$ である。アーチと弦の間の面積は

$$\int_{-a}^{a}\left(a - \frac{x^2}{a}\right)\mathrm{d}x = 2a^2 - \frac{2a^3}{3a} = \frac{4a^2}{3}.$$

である。（これはアルキメデス（Archimedes）の結果であり、外接する長方形の面積の 3 分の 2、すなわち $\frac{2}{3}\cdot 2a\cdot a$ に等しい。）

どのアーチも、もとの半円と同じく AG の同じ側にある。また、小さなアーチがそれぞれ大きなアーチの下にあることも確かめておくべきである。どちらのアーチも傾き

2 で A から出発するので、A の近くではこれは自明ではない。A からの距離が x（ただし $0 \le x \le 2h$）の位置で、大きなアーチの高さは $x(2r-x)/r$、アーチ ABC の高さは $x(2h-x)/h$ である。その差は

$$\frac{x(2r-x)}{r} - \frac{x(2h-x)}{h} = x^2\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{r}\right) \ge 0,$$

となるので、ABC は確かに AHG の内側にあり、対称性により EFG も同様である。したがって、$\frac{4}{3}a^2$ を $\frac{1}{2}\pi a^2$ の代わりに用いれば、同じ足し引きによる分解がそのまま使える。

$$\begin{aligned}\tfrac{4}{3}r^2 - 2\cdot\tfrac{4}{3}h^2 + \tfrac{4}{3}(r-2h)^2 &= \tfrac{4}{3}(2r^2 - 4rh + 2h^2)\\ &= \tfrac{8}{3}(r-h)^2.\end{aligned}$$

よって、放物線の場合に囲まれる面積は $\frac{8}{3}(r-h)^2$ である。

検算

- どちらの答えも $(r-h)^2$ の定数倍である。これは必然である。二つの計算はまったく同じ構造をもち、変わるのはアーチ一つ分の係数だけで、それが $\frac{\pi}{2}$ から $\frac{4}{3}$ に変わるにすぎないからである。比 $\frac{8/3}{\pi} \approx 0.849$ は 1 より小さいが、これは当然である。同じ弦と高さをもつ放物線のアーチは半円の内側にあるからである。
- 極限の場合 $h \to 0$：小さなアーチは消え、CDE は半径 r の完全な下側の半円となり、面積 πr^2 の円板全体が得られる。公式 $\pi(r-h)^2$ もこれと一致する。
- 数値的には、$r = 3$、$h = 1$（試験問題の図の比率）とすると、面積は $4\pi \approx 12.566$ と $\frac{32}{3} \approx 10.667$ である。ランダムに選んだ 8 組の (r,h) について、境界をたどって靴ひも公式（shoelace formula）で計算したところ、どちらの公式とも離散化誤差の範囲内で一致した。

よくある間違い

- CDE の半径を $r-h$ や $r-4h$ としてしまう。AG に沿った長さを図に書き込むこと。$CE = 2r - 4h$ であるから、半径は $r-2h$ である。
- 上側の小さな半円を引くべきところで足してしまう。これらは大きな半円板を削り取るので、その面積は差し引かれる。

STEP のその先へ

前半の図形は**アルベロス**（arbelos、「靴職人のナイフ」）と呼ばれ、アルキメデスが研究した図形である。その古典的な形は、大きな半円の内側に二つの小さな半円を置いたもので、その面積もうまく選んだ弦を直径とする円の面積に等しい。アルキメデスは放物線の切片に対する $\frac{2}{3}$ の法則も発見した。それは積分（integration）にかなり近い極限の議論によるものであった。大学では、彼の「取り尽くし法」（method of exhaustion）からリーマン（Riemann）積分への歩みが、最初の解析学（analysis）の講義の中心的な部分となる。これを学ぶのによい本は Abbott, *Understanding Analysis* である。

解答例

STEP I 1989、第 2 問

純粋数学 ・ リーマン和と極限

> **STEP I 1989、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q2

鍵となる考え方

この奇妙な式は、長方形の面積の和が姿を変えたものにすぎない。n 個の長方形の面積の合計を直接書き下すと、$k \ln k$ を含む和が得られる。階乗（factorial）の対数は、その同じ和を組み替えたものにほかならない。両者を対応させれば、極限（limit）は積分となり、その値は最初の小問を使って計算できる。

解答

不定積分

$u = \ln x$、$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = x$ として部分積分（integration by parts）を行う。このとき $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$、$v = \frac{1}{2}x^2$ であるから、

$$\begin{aligned}\int x \ln x \,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}x^2 \ln x - \int \tfrac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 \ln x - \tfrac{1}{4}x^2 + C.\end{aligned}$$

積分の値

$\ln(1/x) = -\ln x$ であるから、被積分関数は $-x \ln x$ である。被積分関数は $x = 0$ で定義されないので、$[\varepsilon, 1]$ で積分してから $\varepsilon \to 0^+$ とする：

$$\int_{\varepsilon}^{1} x \ln(1/x)\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x^2 \ln x\right]_{\varepsilon}^{1} = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 + \tfrac{1}{2}\varepsilon\,(\varepsilon \ln \varepsilon).$$

$\varepsilon \to 0$ のとき、$\varepsilon^2 \to 0$ であり、また（与えられた事実により）$\varepsilon \ln \varepsilon \to 0$ であるから、

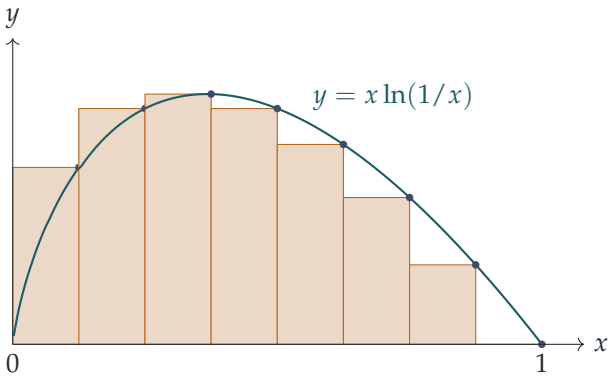
$$\int_{0}^{1} x \ln(1/x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

同じ事実から、$x \to 0^+$ のとき $f(x) = x\ln(1/x)$ は 0 に近づくことがわかる。よって $f(0) = 0$ と定めれば、f は $[0,1]$ 全体で連続（continuous）になる。曲線は 0 から上昇して $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$（ここで $f'(x) = -\ln x - 1 = 0$）で最大値 $\frac{1}{\mathrm{e}}$ をとり、$x = 1$ で再び 0 に戻る。

長方形

$[0,1]$ を幅 $\frac{1}{n}$ の n 個の帯に分ける。k 番目の帯は $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ であり、その長方形は右上の頂点が曲線上にあるので、高さは

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n}\ln\frac{n}{k} = \frac{k}{n}(\ln n - \ln k).$$



したがって、長方形の面積の合計は

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}(\ln n - \ln k) &= \frac{\ln n}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k \\ &= \frac{\ln n}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln n - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k. \end{aligned}$$

第 1 項は、求める式とすでに一致している。

？ 考えてみよう 階乗はどこから現れるのだろうか？

$0 \le m \le n-1$ に対して、

$$\ln\frac{n!}{m!} = \ln\big((m+1)(m+2)\cdots n\big) = \sum_{k=m+1}^{n} \ln k.$$

これを $m = 0, 1, \ldots, n-1$ について足し合わせ、各 $\ln k$ が何回現れるかを数える。項 $\ln k$ が含まれるのは $m+1 \le k$ のとき、すなわち $m = 0, 1, \ldots, k-1$ のときに限られる

ので、ちょうど k 回である。よって

$$\ln\frac{n!}{0!}+\ln\frac{n!}{1!}+\cdots+\ln\frac{n!}{(n-1)!}=\sum_{k=1}^{n}k\ln k.$$

（たとえば $n=3$ のとき、$\ln 6+\ln 6+\ln 3=\ln 1+2\ln 2+3\ln 3$ であり、両辺とも $\ln 108$ に等しい。）したがって、問題の式はちょうど S_n、すなわち n 個の長方形の面積に等しい。

極限

$n\to\infty$ のとき、長方形は曲線にますますよく沿うようになり、f は $[0,1]$ で連続であるから、その面積の合計は曲線の下の面積に近づく。したがって

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln n-\frac{1}{n^2}\left[\ln\frac{n!}{0!}+\ln\frac{n!}{1!}+\cdots+\ln\frac{n!}{(n-1)!}\right]=S_n\to\int_0^1 x\ln(1/x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4},$$

となり、示すべきことが示された。

「長方形が曲線にますますよく沿う」よりも確かな根拠が欲しければ、次のような評価がある。各帯において、長方形の面積と曲線の下の面積の差は、高々、その帯の上で f が変化する量の $\frac{1}{n}$ 倍である。この変化量をすべての帯について足し合わせる。f は $\frac{1}{\mathrm{e}}$ だけ上昇し、$\frac{1}{\mathrm{e}}$ だけ下降して戻るので、合計は高々 $\frac{2}{\mathrm{e}}$ である。よって $\left|S_n-\frac{1}{4}\right|\le\frac{2}{\mathrm{e}n}\to 0$ となる。

検算

- 最初の小問の答えを微分する：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2\right)=x\ln x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x=x\ln x$。
- $n=2$ のとき、式の値は $\frac{3}{4}\ln 2-\frac{1}{4}(\ln 2+\ln 2)=\frac{1}{4}\ln 2\approx 0.173$ であり、これは 2 つの長方形の面積 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\cdot 0$ に等しい。
- 数値的には、式の値は $n=10$ で約 0.24559、$n=100$ で約 0.249937、$n=1000$ で約 0.2499992 であり、$\frac{1}{4}$ に近づいていく。

よくある間違い

- 符号を見落とす：被積分関数は $x\ln(1/x)=-x\ln x$ であるから、最初の小問で求めた原始関数（antiderivative）の符号を反転させなければならず、面積は $-\frac{1}{4}$ ではなく $+\frac{1}{4}$ である。
- $\frac{1}{2}n(n+1)$ ではなく $\sum k=\frac{1}{2}n^2$ と書いてしまう：そうすると括弧の中の $\frac{1}{n}$ が消えてしまう。

- 積分が 0 で広義積分（improper integral）であることを忘れる：下端の処理には $x \ln x \to 0$ という事実が必要であり、これは問題文で与えられている。

STEP のその先へ

長方形の和はリーマン（Riemann）和（Riemann sum）であり、閉区間上のあらゆる連続関数についてそれが積分に収束（converge）するという事実は、大学の解析学の講義で最初に出会う大きな定理の一つである。f の上昇と下降の合計を用いた先ほどの評価は、**有界変動**（bounded variation）関数という考え方そのものである。逆向きに見れば、この問題は $\sum k \ln k$ についての情報も与えてくれる。これは超階乗（hyperfactorial）$1^1\, 2^2 \cdots n^n$ と密接に関係する量であり、その増大の様子は、$n!$ に対するスターリング（Stirling）の公式と同じ発想で、より精密に求めることができる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、リーマン積分を丁寧に展開している。

解答例

STEP I 1989、第 3 問

純粋数学 ・ ベクトルと内積

> **STEP I 1989、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q3

鍵となる考え方

O を原点（origin）とし、すべてを 2 つのベクトル（vector）$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ で表す。すると「垂直（perpendicular）」は「内積（scalar product）がゼロ」という条件になる。さらに $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 1$ であるから、その内積は x、OY、そして唯一の未知数 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ だけで決まる。$OX + OY = 1$ を用いると、x と $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ を結ぶ 1 本の等式が残る。あとは x がとりうる範囲から不等式が得られる。

解答

条件

O を原点とし、$k = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ とおく。C は A から B へ向かって 3 分の 1 の位置にあり、D は 3 分の 2 の位置にあるから、

$$\overrightarrow{OC} = \mathbf{a} + \tfrac{1}{3}(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \tfrac{1}{3}(2\mathbf{a}+\mathbf{b}), \qquad \overrightarrow{OD} = \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+2\mathbf{b}).$$

X は OA 上にあって $OX = x$ であり、$|\mathbf{a}| = 1$ であるから、$\overrightarrow{OX} = x\mathbf{a}$ である。同様に、$y = OY = 1 - x$ として $\overrightarrow{OY} = y\mathbf{b}$ である。よって

$$3\overrightarrow{CY} = (3y-1)\mathbf{b} - 2\mathbf{a}, \qquad 3\overrightarrow{DX} = (3x-1)\mathbf{a} - 2\mathbf{b}.$$

2 直線が垂直であることは、内積がゼロであることと同値である。展開して $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 1$ を用いると、

$$\begin{aligned} 9\overrightarrow{CY}\cdot\overrightarrow{DX} &= (3x-1)(3y-1)k - 2(3y-1) - 2(3x-1) + 4k \\ &= k\big[(3x-1)(3y-1)+4\big] - 2(3x+3y-2). \end{aligned}$$

ここで $x+y=1$ を用いる。すると $3x+3y-2=1$ であり、

$$(3x-1)(3y-1)=9xy-3(x+y)+1=9xy-2.$$

したがって垂直条件は $k(9xy+2)=2$ となる。$y=1-x$ を代入すると

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\frac{2}{9x(1-x)+2}}$$

である（分母は2以上なので、これで割ってよい）。

範囲

X は長さ1の線分 OA 上にあるから、$0\le x\le 1$ である（このとき $y=1-x$ も $[0,1]$ に入るので、Y は自動的に OB 上にある）。この区間において

$$x(1-x)=\tfrac{1}{4}-\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2,$$

であるから $0\le x(1-x)\le\frac{1}{4}$ であり、最大値は $x=\frac{1}{2}$ のとき、最小値は $x=0$ または1のときにとる。ゆえに

$$2\le 9x(1-x)+2\le\tfrac{9}{4}+2=\tfrac{17}{4}.$$

逆数（reciprocal）をとると不等号の向きが逆になり（すべて正である）、さらに2を掛けると

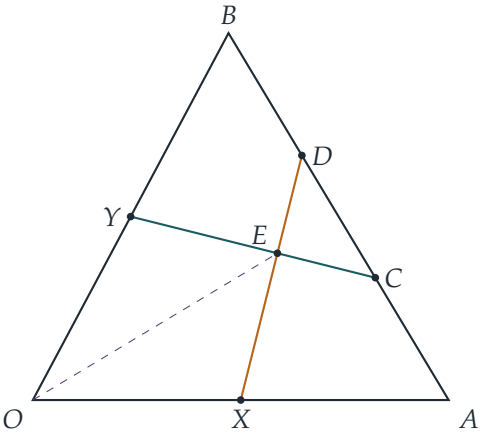
$$\frac{8}{17}\le\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\le 1,$$

が得られ、示すべきことが示された。（値1となるには $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ が必要であり、これは本当の三角形にならないので、実際には $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}<1$ である。それでも与えられた不等式は成り立つ。）

最大の角と OE

考えてみよう なぜ角が最大になるのは $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ が最小のときなのだろうか？

$|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=1$ であるから $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\cos A\hat{O}B$ であり、余弦（cosine）は $[0,\pi]$ で減少する。よって角が最大となるのは $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\frac{8}{17}$、すなわち $x=\frac{1}{2}$（したがって $y=\frac{1}{2}$）のときである。このとき X と Y はそれぞれ OA と OB の中点（midpoint）であり、角は $\arccos\frac{8}{17}\approx 61.9^\circ$ である。



さて、図全体は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の入れ替えに関して対称である。この入れ替えで $A \leftrightarrow B$、$C \leftrightarrow D$、$X \leftrightarrow Y$ となるので、直線 CY と DX が入れ替わる。したがって、それらの交点 E は入れ替えによって変わらず、対称軸（line of symmetry）上にある。すなわち、ある t に対して $\overrightarrow{OE} = t(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ である。

DX 上の一般の点は

$$\overrightarrow{OX} + s\,\overrightarrow{XD} = \tfrac{1}{2}\mathbf{a} + s\left(\tfrac{1}{3}\mathbf{a} + \tfrac{2}{3}\mathbf{b} - \tfrac{1}{2}\mathbf{a}\right) = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{s}{6}\right)\mathbf{a} + \tfrac{2s}{3}\mathbf{b}.$$

である。$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は平行でないので、係数を比較（comparing coefficients）できる。これが $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ の定数倍となるのは $\frac{1}{2} - \frac{s}{6} = \frac{2s}{3}$ のときであり、$s = \frac{3}{5}$、$t = \frac{2}{5}$ を得る。よって $\overrightarrow{OE} = \frac{2}{5}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ である。最後に

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 2 + \tfrac{16}{17} = \tfrac{50}{17},$$

であるから

$$OE = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{50}{17}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{17}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}} = \boxed{\frac{2\sqrt{34}}{17}} \approx 0.686.$$

検算

- 座標で考え、$\mathbf{a} = (1,0)$、$\mathbf{b} = (\frac{8}{17}, \frac{15}{17})$ とする。すると $X = (\frac{1}{2}, 0)$、$D = (\frac{11}{17}, \frac{10}{17})$ であるから $\overrightarrow{XD} = (\frac{5}{34}, \frac{10}{17})$ である。また $Y = (\frac{4}{17}, \frac{15}{34})$、$C = (\frac{14}{17}, \frac{5}{17})$ であるから $\overrightarrow{CY} = (-\frac{10}{17}, \frac{5}{34})$ である。これらの内積は $-\frac{50}{578} + \frac{50}{578} = 0$ であり、当然そうなるべきとおりである。
- $E = \frac{2}{5}(\frac{25}{17}, \frac{15}{17}) = (\frac{10}{17}, \frac{6}{17})$ であり、$|OE| = \frac{\sqrt{136}}{17} = \frac{2\sqrt{34}}{17} \approx 0.6860$ である。これは 2 直線の交点を直接数値計算した結果と一致する。

- 値 $s = \frac{3}{5}$ は $[0,1]$ に入っているので、E は確かに X と D の間、つまり三角形の内部にある。

よくある間違い

- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 1$ であることを忘れる（その結果、条件に $|\mathbf{a}|^2$ の項が残ってしまう）、あるいは三等分点（trisection points）を逆にとってしまう。
- 角が最大になるのは $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ が最大のときだと考えてしまう。角が大きくなると余弦は小さくなる。
- $x\mathbf{a}$ ではなく $\overrightarrow{OX} = x$ と書いてしまう。点 X はベクトルであり、x はその長さにすぎない。

STEP のその先へ

ここで用いた方法、すなわちすべての点を 2 つの基底ベクトルの組合せとして書き、幾何を内積の計算に置き換える方法は、内積（inner product）とグラム行列（Gram matrix）を扱う出発点である。ベクトルの配置は、その内積の表によって回転を除いて決まる。ここではその表はただ 1、1、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ である。問題全体がただ 1 つの数に帰着するのはこのためである。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）がこれらの考え方を展開している。

解答例

STEP I 1989、第 4 問

純粋数学 ・ ラムゼー理論

> **STEP I 1989、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q4

この問題は、*Beyond STEP* の第 9.2 節「**ミニチュア版ラムゼーの定理**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/ramsey.html

鍵となる考え方

幾何のことは忘れてよい。点についての条件が保証しているのは、どの 3 点も本物の三角形をなすということだけである。したがってこれは、6 点を結ぶ 15 本の辺の彩色（colouring）だけに関する問題である。ヒントに従って、1 つの点に注目する。その点からは 5 本の辺が出ており、色は 2 色しかないので、鳩の巣原理（pigeonhole principle）により、それらのうち少なくとも 3 本は同じ色である。すると、その 3 本の先にある 3 点の間の辺は、最初の点とともに単色の三角形を完成させるか、それ自身で単色の三角形をなすかのどちらかである。

解答

6 点の場合

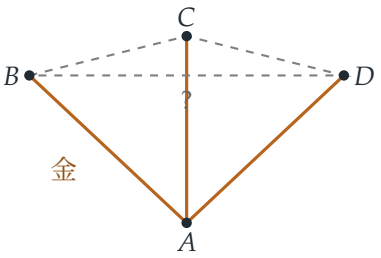
どの 3 点も同一直線上（collinear）にないので、どの 3 点も本物の三角形の頂点となり、その 3 辺は描いた線分の中に含まれている。（どの 4 点も同一平面上（coplanar）にないという条件は、この議論では何の役割も果たさない。）

A から出る 5 本の線分 AB, AC, AD, AE, AF を考える。それぞれは金か銀である。金が高々 2 本、銀も高々 2 本であるとすると、線分は全部で高々 4 本となり、矛盾する。よって、少なくとも 3 本は同じ色である。点 $B, \ldots, F$ の名前を付け替え、必要なら 2 色

の名前を入れ替えることで、

$$AB,\ AC,\ AD \text{ はすべて金である}$$

と仮定してよい。



次に、先端どうしを結ぶ 3 本の線分 BC、CD、DB を見る。

> **考えてみよう** BC、CD、DB がどんな色であっても、以下の 2 つの場合のどちらかで必ず単色の三角形が得られるのはなぜか。

可能性は 2 つしかない。

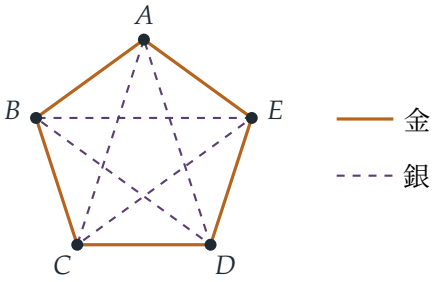
- BC, CD, DB のうち少なくとも 1 本が金である場合。それを BC とする（他の場合も文字を入れ替えれば同じである）。すると AB、AC、BC はすべて金なので、三角形 ABC の辺はすべて同じ色である。
- BC, CD, DB のどれも金でない場合。このとき 3 本ともすべて銀であり、三角形 BCD の辺はすべて同じ色である。

いずれの場合も、辺がすべて同じ色である三角形が存在する。これが示すべきことであった。

5 点の場合

5 点の場合、各点から出る辺は 4 本しかなく、2 本ずつに分けることができるので、上の議論は成り立たない。この主張が本当に偽であることを示すには、単色の三角形をもたない彩色を 1 つ与えればよい。

点 A, B, C, D, E を五角形の周上に配置する。5 本の辺 AB, BC, CD, DE, EA を金に、5 本の対角線（diagonal）AC, BD, CE, DA, EB（五芒星（pentagram））を銀に塗る。



どの三角形も 5 点のうちの 3 点を使う。五角形の任意の 3 頂点のうち、少なくとも 2 つは隣り合っていない（3 頂点が互いに隣り合うには、5-サイクルの中に三角形が必要になる）。よって、どの三角形も銀の辺をもつ。また、任意の 3 頂点のうち少なくとも 2 つは隣り合っている。実際、3 頂点のどの 2 つも隣り合っていないとすると、五角形を一周したとき、選んだ頂点の間の各すき間には選ばれていない頂点が少なくとも 1 つ含まれることになり、$3+3=6$ 個の点が必要になる。よって、どの三角形も金の辺ももつ。したがって、単色の三角形は存在しない。

> **考えてみよう**　正五角形（regular pentagon）は平面図形なので、その 4 頂点は同一平面上にある。これは一般の位置（general position）に関する規則に反するのではないか。

点が文字どおり平面上にあるならば反する。しかし、この彩色はどの 2 点が結ばれているかだけに依存し、点がどこにあるかには依存しない。頂点を平面からそれぞれ異なる量だけわずかに持ち上げればよい（たとえば $k=0,1,2,3,4$ に対して、k 番目の頂点を高さ $0.3k^2$ まで持ち上げる）。すると、どの 3 点も同一直線上になく、どの 4 点も同一平面上にない。そして上から見れば、図は依然としてここに描いた五角形と五芒星であり、彩色も同じで、単色の三角形はない。

検算

6 点の場合、辺の塗り方は $2^{15}=32768$ 通りしかないので、コンピュータですべて試すことができる。どの塗り方にも単色の三角形があり、実際には常に少なくとも 2 つある。5 点の場合、五角形の彩色について $\binom{5}{3}=10$ 個の三角形をすべて調べると、どれも両方の色をもつことが確かめられる。行列式（determinant）を用いて調べると、上で持ち上げた五角形のどの 4 点も同一平面上にないことが確かめられる。

よくある間違い

- 何を仮定しているのかを述べずに「対称性により」と書くこと。多数派の色をもつ A からの 3 本の辺を選び、その色を金と呼ぶことを明示すべきである。
- A から同じ色の辺が 3 本出ていることだけを示して、そこで止まってしまうこと。第 2 段階、つまり BC、CD、DB を調べることこそが証明の核心である。
- 5 点の場合に、すべての三角形を確認せずに図だけを示すこと。たとえば「A から出る星形を金、それ以外をすべて銀」という彩色はうまくいかない。

STEP のその先へ

これはラムゼー理論（Ramsey theory）の最初の例である。**ラムゼー数**（Ramsey number）$R(3,3)$ とは、完全グラフ（complete graph）K_n の辺をどのように 2 色で塗っても必ず単色の三角形が含まれるような最小の n であり、この問題は $R(3,3) = 6$ であることを示している。ラムゼー（Ramsey）の定理によれば、単色の完全部分グラフの大きさをどのように指定しても、このような数は存在する。しかし、その値を計算するのは恐ろしく難しく、$R(5,5)$ でさえ未解決である。ラムゼーの定理も含むグラフ理論のすばらしい入門書として、Wilson, *Introduction to Graph Theory*（グラフ理論入門）がある。

解答例

STEP I 1989、第 5 問

純粋数学 ・ 二項係数の恒等式

> **STEP I 1989、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q5

鍵となる考え方

二項展開（binomial expansion）は x についての恒等式（identity）であるから、どんな数を代入しても成り立つ。$x = 1$ を選ぶとすべての係数（coefficient）の和が得られ、$x = -1$ を選ぶと符号を交互に変えた和が得られる。この 2 つを組み合わせると、偶数番目の係数と奇数番目の係数を分離できる。(ii) の重み付きの和については、因子 r が $\binom{n}{r}$ の前に付いているが、これはまさに x^r を微分したときに現れるものである。そこで、展開式を微分してから代入する。

解答

正の整数 n に対して

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n,$$

が成り立つ。ここで $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ である。これはすべての実数 x について成り立つ。

小問 (i)

偶数番目の係数の和を $E = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$、奇数番目の係数の和を $O = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1}$ とおく。n は偶数なので、最後の項 $\binom{n}{n}$ は E に、$\binom{n}{n-1}$ は O に属する。したがって E と O を合わせると、すべての係数がちょうど 1 回ずつ現れる。

展開式に $x = 1$ を代入すると

$$E + O = 2^n.$$

を得る。$x=-1$ を代入すると、偶数乗の $(-1)^r$ は $+1$、奇数乗は -1 となり、一方で左辺は $0^n=0$ となる。これは $n\geq 1$ だからである。よって

$$E-O=0.$$

ゆえに $E=O$ であり、すると $2E=2^n$ となるから

$$E=O=2^{n-1},$$

となり、これが求める結果である。

小問 (ii)

展開式の両辺を x で微分（differentiate）する。定数項は消え、x^r は rx^{r-1} になる：

$$n(1+x)^{n-1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+3\binom{n}{3}x^2+\cdots+n\binom{n}{n}x^{n-1}.$$

ここで $x=1$ とおくと

$$n2^{n-1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n},$$

となり、題意が示された。これは奇数か偶数かによらず、すべての正の整数 n について成り立つ。

考えてみよう 小問 (ii) を微積分を使わずに理解する方法はあるだろうか？

ある。$r\binom{n}{r}=r\cdot\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!}=n\binom{n-1}{r-1}$（ただし $1\leq r\leq n$）であるから、和は $n\sum_{r=1}^{n}\binom{n-1}{r-1}=n\cdot 2^{n-1}$ となる。最後の等号は、$x=1$ を $(1+x)^{n-1}$ の展開式に代入して得られる。言葉で言えば、n 人から任意の人数の委員会を選び、さらにその委員会から委員長を選ぶことは、先に委員長を選び（n 通り）、次に残りの $n-1$ 人の任意の部分集合を選ぶ（2^{n-1} 通り）ことと同じである。

最後の和

和を 2 つに分ける：

$$\sum_{r=0}^{n}\left(r+(-1)^r\right)\binom{n}{r}=\sum_{r=0}^{n}r\binom{n}{r}+\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}.$$

第 1 の和の $r=0$ の項は 0 であるから、第 1 の和はちょうど (ii) の和、すなわち $n2^{n-1}$ である。第 2 の和は $(1+x)^n$ の展開式の $x=-1$ における値、すなわち $(1-1)^n=0$ であり、これはすべての正の整数 n について成り立つ。（これは (i) の $E-O=0$ の段階である。必要なのは $n\geq 1$ だけであり、n が偶数である必要はない。）したがって

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n}\left(r+(-1)^r\right)\binom{n}{r}=n2^{n-1}.}$$

検算

- $n = 2$ のとき：係数は $1, 2, 1$ であるから、$E = 1 + 1 = 2 = O$ であり、$2^1 = 2$ である。(ii) の和は $2 + 2 \cdot 1 = 4 = 2 \cdot 2^1$ となる。
- $n = 3$ のとき、最後の和は $(0+1) \cdot 1 + (1-1) \cdot 3 + (2+1) \cdot 3 + (3-1) \cdot 1 = 1 + 0 + 9 + 2 = 12 = 3 \cdot 2^2$ となる。
- すべての n（1 から 29 まで）について、3 つの恒等式すべてを厳密に確かめた。たとえば $n = 6$ では $192 = 6 \cdot 2^5$ となる。

よくある間違い

- $\sum (-1)^r \binom{n}{r} = 0$ が奇数の n に対しても成り立つことを忘れ、最終的な答えが n の偶奇（parity）に依存すると考えてしまう。成り立たないのは $n = 0$ のときだけであり、ここでは n は正である。
- (ii) で微分する前に $x = 1$ を代入してしまう。代入は最後に行わなければならない。x が数になってしまえば、もう微分するものは何も残らない。

STEP のその先へ

多項式を係数の貯蔵庫とみなし、代入・微分・乗算によって情報を取り出すという考え方は、**母関数**（generating function）の考え方であり、組合せ論（combinatorics）と確率論における最も強力な道具の一つである。± 1 の代わりに 1 の複素累乗根（complex roots of unity）を代入すると、同じようにして 3 つごと、4 つごとの係数を取り出すことができる。また、確率母関数（probability generating function）を微分すると分布の平均が得られる。これは、ここで $\sum r\binom{n}{r}$ が得られたのとまったく同じである。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、母関数が活躍する様子を見ることができる。

解答例

STEP I 1989、第 6 問

純粋数学 ・ 法線と微分方程式

> **STEP I 1989、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q6

鍵となる考え方

P における法線（normal）の傾き（gradient）は $-1/\mathrm{f}'(x)$ であるから、Q を求めるにはその方程式に $X = 0$ を代入するだけでよい。すると PQ^2 は水平方向の距離の 2 乗と鉛直方向の距離の 2 乗の和となり、与えられた長さの条件は $\mathrm{f}'(x)$ だけについての方程式になる。唯一注意を要するのは最後の平方根であり、どちらの符号を選ぶかは極小点（minimum point）によって決まる。

解答

Q の y 座標

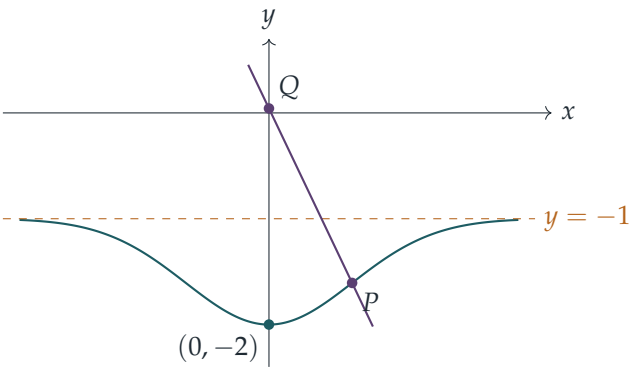
$P = (x, \mathrm{f}(x))$ における接線（tangent）の傾きは $\mathrm{f}'(x)$ であるから、($\mathrm{f}'(x) \neq 0$ であれば) 法線の傾きは $-1/\mathrm{f}'(x)$ である。動点の座標を (X, Y) で表すと、法線の方程式は

$$Y - \mathrm{f}(x) = -\frac{1}{\mathrm{f}'(x)}\,(X - x).$$

$X = 0$ を代入すると、法線は y 軸と

$$Y = \mathrm{f}(x) + \frac{x}{\mathrm{f}'(x)}, \qquad \text{よって} \qquad Q = \left(0,\ \mathrm{f}(x) + \frac{x}{\mathrm{f}'(x)}\right).$$

で交わる。($\mathrm{f}'(x) = 0$ のとき法線は鉛直であり、$x = 0$ でない限り y 軸とは交わらない。)



微分方程式

P と Q の差は水平方向に x、鉛直方向に $x/\mathrm{f}'(x)$ であるから、

$$PQ^2 = x^2 + \frac{x^2}{\left(\mathrm{f}'(x)\right)^2}.$$

これを $\mathrm{e}^{x^2} + x^2$ に等しいとおくと、x^2 の項が打ち消し合い、

$$\frac{x^2}{\left(\mathrm{f}'(x)\right)^2} = \mathrm{e}^{x^2}, \qquad \text{すなわち} \qquad \boxed{\left(\mathrm{f}'(x)\right)^2 = x^2\,\mathrm{e}^{-x^2}.}$$

を得る。これは微分方程式（differential equation）$\mathrm{f}'(x) = \pm x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ と同値である。

$(0, -2)$ に極小点をもつ曲線

> **考えてみよう**　どちらの符号をとるべきか。また、曲線の途中で符号が入れ替わることはありうるか。

f' は連続であり（曲線が極小点をもつので、微分可能であることを仮定している）、$\mathrm{f}'(x)^2 = x^2\mathrm{e}^{-x^2}$ が 0 となるのは $x = 0$ のときだけであるから、f' は $x > 0$ においても $x < 0$ においても符号を変えることができない。符号を変えるには 0 を通過しなければならないからである。$(0, -2)$ が極小点であるためには、f は 0 のすぐ左で減少し、すぐ右で増加していなければならないので、$x < 0$ で $\mathrm{f}'(x) < 0$、$x > 0$ で $\mathrm{f}'(x) > 0$ である。これはちょうど x の符号と一致するから、両側で

$$\mathrm{f}'(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

である。（全体でマイナスの符号をとると $x = 0$ で極大となり、符号を混ぜると f' の符号が一定となる。すなわち変曲点（point of inflection）となる。）

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-x^2/2}\right) = -x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ であるから、積分すると

$$\mathrm{f}(x) = -\mathrm{e}^{-x^2/2} + c.$$

条件 $\mathrm{f}(0) = -2$ より $-1 + c = -2$、よって $c = -1$ であり、求める曲線は

$$\boxed{y = -1 - \mathrm{e}^{-x^2/2}.}$$

である。この曲線は $x = 0$ で最小値 -2 をとり、図のように両側で漸近線（asymptote）$y = -1$ に向かって上昇する。

検算

- $x = 1$ のとき：$\mathrm{f}(1) = -1 - \mathrm{e}^{-1/2} \approx -1.6065$、$\mathrm{f}'(1) = \mathrm{e}^{-1/2} \approx 0.6065$ であるから、$Q \approx (0,\, 0.0422)$、$PQ \approx \sqrt{1 + 1.6487^2} \approx 1.9283$ となり、これは要求どおり $\sqrt{\mathrm{e} + 1}$ に等しい。
- コンピュータで、無作為に選んだ 2000 個の点において法線と y 軸の交点として Q を計算し直したところ、PQ は $\sqrt{\mathrm{e}^{x^2} + x^2}$ と（相対誤差で）10^{-15} 以内で一致した。

よくある間違い

- 法線の傾き $-1/\mathrm{f}'(x)$ の代わりに接線の傾き $\mathrm{f}'(x)$ を使ってしまい、Q を $\mathrm{f}(x) - x\mathrm{f}'(x)$ としてしまう。
- マイナスの符号を捨てる理由を述べずに、平方根を $\mathrm{f}'(x) = x\mathrm{e}^{-x^2/2}$ ととってしまう。

STEP のその先へ

ここでは、曲線上のすべての点についての幾何的な条件が一階微分方程式（first-order differential equation）になったが、そこでは f' が 2 乗の形で現れるため、追加の情報によって分枝が選ばれるまでは解がただ一つに定まらない。このような y' について解かれていない方程式こそ、常微分方程式（ODE）の一意性定理（uniqueness theorem）に注意が必要になり始めるところであり、包絡線（envelope）や特異解（singular solution）へとつながっていく。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）は、一階の方程式と、その解の存在と一意性の理論を扱っている。

解答例

STEP I 1989、第 7 問

純粋数学 ・ 曲線の概形と最適化

> **STEP I 1989、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q7

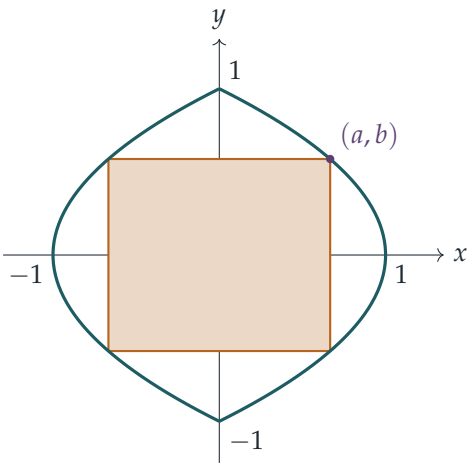
鍵となる考え方

この曲線は両方の座標軸に関して対称（symmetric）であるから、最大の長方形は原点を中心とし、1 つの頂点が第 1 象限（first quadrant）にある曲線上の点となるはずである。これにより、2 変数の探索が 1 変数関数の最大化に帰着する。一般の曲線についても、$|y|$ を $1-|x|$ のべき（power）として解いてしまえば、同じ考え方が通用する。

解答

概形

$y^2 \geq 0$ であるから $1-|x| \geq 0$ でなければならず、$-1 \leq x \leq 1$ である。$x \geq 0$ では曲線は $x = 1-y^2$ であり、これは頂点（vertex）が $(1,0)$ で左に開いた放物線（parabola）である。$x \leq 0$ ではその鏡像 $x = y^2 - 1$ である。2 つの弧は $(0,\pm 1)$ で出会い、そこで角をつくる（傾き $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \mp\frac{1}{2}$ と $\pm\frac{1}{2}$ が一致しない）。また、$(\pm 1, 0)$ では x 軸と垂直に交わる。この曲線は領域 $|x| + y^2 \leq 1$ を囲む閉曲線であり、角の丸いひし形のような形をしている。



最大の長方形

長方形 $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ が領域 $|x| + y^2 \leq 1$ の内部にあるとする。$A = \max(|x_1|, |x_2|)$、$B = \max(|y_1|, |y_2|)$ とおく。頂点は (x_i, y_j) であり、i, j は独立に選べるから、$|x| = A$ かつ $|y| = B$ を同時に満たす頂点が 1 つ存在する。その頂点は領域内にあるので、$A + B^2 \leq 1$ である。すると長方形 $[-A, A] \times [-B, B]$ も領域内にある。実際、$|x| \leq A$、$|y| \leq B$ ならば

$$|x| + y^2 \leq A + B^2 \leq 1.$$

この長方形の幅は $2A \geq x_2 - x_1$、高さは $2B \geq y_2 - y_1$ であるから、元の長方形以上の大きさをもつ。したがって、原点を中心とし頂点が $(\pm a, \pm b)$ の長方形を考えればよく、さらに頂点を曲線に接するまで外側へ押し広げれば、$0 \leq b \leq 1$ として $a = 1 - b^2$ となる。

考えてみよう なぜ原点を中心とする長方形だけを調べれば十分なのだろうか。

それはまさに上の議論のとおりである。各辺を、座標軸からの 2 つの距離のうち大きいほうに置き換えても、長方形は（対称性により）曲線の内部にとどまり、決して小さくならない。

面積は

$$S(b) = 4ab = 4b(1 - b^2) = 4b - 4b^3, \qquad S'(b) = 4 - 12b^2.$$

$S'(b) = 0$ となるのは $b = 1/\sqrt{3}$ のときであり、その前では $S' > 0$、後では $S' < 0$ である。また $S(0) = S(1) = 0$ であるから、これが最大値を与える。このとき $a = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ であり、

$$S_{\max} = 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{27}},$$

となって、求める結果が得られる。

一般の曲線

今度は $y^{2m} = (1-|x|)^n$ である。左辺は非負であり、n は奇数なので $(1-|x|)^n$ は $1-|x|$ と同符号である。よって再び $|x| \le 1$ であり、（正の）$2m$ 乗根をとると

$$|y| = (1-|x|)^k, \qquad k = \frac{n}{2m} > 0.$$

（もし n が偶数ならば、すべての x が許され、曲線は無限遠へ伸びていくので、最大の長方形は存在しない。これが n が奇数でなければならない理由である。）この曲線もまた $(\pm 1, 0)$ と $(0, \pm 1)$ を通る閉曲線で、両方の座標軸に関して対称であり、$|y| \le (1-|x|)^k$ を囲む。$(1-|x|)^k$ は $|x|$ の増加に伴って減少するから、前と同じ議論により、頂点が $(\pm a, \pm b)$、$b = (1-a)^k$、$0 \le a \le 1$ の長方形を考えればよい。その面積は

$$S(a) = 4a(1-a)^k.$$

微分すると

$$S'(a) = 4(1-a)^{k-1}\big[(1-a) - ka\big] = 4(1-a)^{k-1}\big[1-(1+k)a\big],$$

となり、これは $0 < a < \frac{1}{1+k}$ で正、$\frac{1}{1+k} < a < 1$ で負である。$S(0) = S(1) = 0$ であるから、最大となるのは $a = \frac{1}{1+k}$ のときであり、このとき $1-a = \frac{k}{1+k}$ である。

$$S_{\max} = \frac{4}{1+k}\left(\frac{k}{1+k}\right)^k = \frac{4k^k}{(1+k)^{k+1}}.$$

$k = \frac{n}{2m}$、$1+k = \frac{n+2m}{2m}$ とすると、$2m$ のべきは $(2m)^{-k} \cdot (2m)^{k+1} = 2m$ とまとまるので、

$$S_{\max} = \frac{8m\, n^{n/(2m)}}{(n+2m)^{(n+2m)/(2m)}} = 8m\left(\frac{n^n}{(n+2m)^{n+2m}}\right)^{1/(2m)}.$$

検算

- $m = n = 1$ とすると $8\left(\frac{1}{27}\right)^{1/2} = 8/\sqrt{27} \approx 1.5396$ となり、前半の結果と一致する。
- $(m,n) = (1,3), (2,1), (2,3), (3,5)$ について $a \in [0,1]$ を細かく探索すると、公式と一致する。たとえば $(m,n) = (2,1)$ では $16/5^{5/4} \approx 2.1400$ となる。中心をずらした長方形を無作為に選んでも、これを上回ることはない。
- n を固定して $m \to \infty$ とすると $k \to 0$ となり、曲線は正方形 $|x| \le 1$、$|y| \le 1$ を満たすように広がる。公式はその正方形の面積 4 に収束（converge）する。

よくある間違い

- 係数 4 を忘れること。頂点 (a, b) が与える長方形は、幅 $2a$、高さ $2b$ である。
- n が奇数であることの意味を無視すること。n が偶数のときは有界な曲線にならない。

STEP のその先へ

$a(1-a)^k$ の最大化は、姿を変えた重み付き相加・相乗平均の不等式（weighted AM–GM inequality）の問題である。$a \cdot \left(\frac{1-a}{k}\right)^k$ を和が一定である $1+k$ 個の因数の積として書けば、微分を使わずに最大値が得られる。曲線 $|x|^p + |y|^q = 1$ は ℓ^p ノルム（norm）の単位球（unit ball）の仲間であり、これらは大学 1 年次の解析学（analysis）や線形代数（linear algebra）に登場する。この種の不等式についてさらに知りたければ Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* を、最適化（optimisation）の背後にある解析学については Abbott の *Understanding Analysis* を参照するとよい。

解答例

STEP I 1989、第 8 問

純粋数学 ・ 倍角の公式

> **STEP I 1989、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q8

鍵となる考え方

ド・モアブル(de Moivre)の定理(de Moivre's theorem)により、$\cos n\theta$ は $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$ の実部（real part）として表され、$\sin^2\theta$ を $1-\cos^2\theta$ で置き換えれば $\cos\theta$ の多項式(polynomial) が残る。最後の部分では、与えられた 6 次式 (sextic) が直前に求めた 2 つの多項式の組合せのように見えるので、その組合せを探す。実はそれは $\cos 6\theta - \cos 4\theta$ の半分であり、$\cos 6\theta = \cos 4\theta$ を解くのは易しい。

解答

以下を通して $c = \cos\theta$、$s = \sin\theta$ とおく。したがって $s^2 = 1 - c^2$ である。

小問 (i)

ド・モアブルの定理より $\cos 4\theta + \mathrm{i}\sin 4\theta = (c + \mathrm{i}s)^4$ である。二項定理（binomial theorem）で展開し、実数の項（$\mathrm{i}s$ の偶数乗を含む項）だけを残すと、

$$\begin{aligned}\cos 4\theta &= c^4 - \tbinom{4}{2}c^2s^2 + s^4 \\ &= c^4 - 6c^2(1-c^2) + (1-c^2)^2 \\ &= c^4 - 6c^2 + 6c^4 + 1 - 2c^2 + c^4 \\ &= 8c^4 - 8c^2 + 1,\end{aligned}$$

となり、これが求める恒等式である。

小問 (ii)

同様に、$(c+\mathrm{i}s)^6$ の実部から

$$\cos 6\theta = c^6 - 15c^4s^2 + 15c^2s^4 - s^6,$$

が得られる。ここで $\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$ および $\mathrm{i}^2 = -1$、$\mathrm{i}^4 = 1$、$\mathrm{i}^6 = -1$ を用いた。$u = c^2$ とおくと $s^2 = 1-u$ であるから、

$$\begin{aligned}\cos 6\theta &= u^3 - 15u^2(1-u) + 15u(1-u)^2 - (1-u)^3 \\ &= u^3 - 15u^2 + 15u^3 + 15u - 30u^2 + 15u^3 - 1 + 3u - 3u^2 + u^3 \\ &= 32u^3 - 48u^2 + 18u - 1 \\ &= 32c^6 - 48c^4 + 18c^2 - 1,\end{aligned}$$

となり、題意が示された。

方程式

左辺を $p(x) = 16x^6 - 28x^4 + 13x^2 - 1$ とおく。

> **考えてみよう** どちらの恒等式とも一致しない多項式に対して、2 つの恒等式をどう役立てればよいだろうか？

係数を比較する（compare coefficients）。最高次の係数 16 は 32 の半分であり、定数項 -1 は -2 の半分である。これは (ii) から (i) を引くことを示唆している：

$$\cos 6\theta - \cos 4\theta = 32c^6 - 56c^4 + 26c^2 - 2 = 2\,p(c).$$

したがって $x = \cos\theta$ ならば

$$p(x) = 0 \iff \cos 6\theta = \cos 4\theta.$$

ここで $\cos A = \cos B$ となるのは、ある整数 k に対して $A = \pm B + 2k\pi$ となるときであり、そのときに限る。今の場合、これより

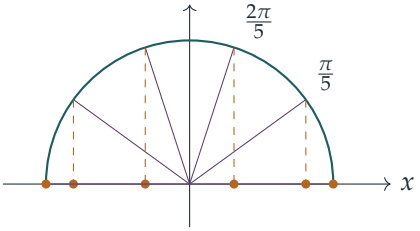
$$6\theta = 4\theta + 2k\pi \;\Rightarrow\; \theta = k\pi, \qquad \text{または} \qquad 6\theta = -4\theta + 2k\pi \;\Rightarrow\; \theta = \frac{k\pi}{5}.$$

第 1 の族は第 2 の族に含まれるので、解は $\theta = k\pi/5$ であり、対応する $x = \cos\theta$ の値は

$$\cos 0 = 1, \quad \cos\tfrac{\pi}{5}, \quad \cos\tfrac{2\pi}{5}, \quad \cos\tfrac{3\pi}{5} = -\cos\tfrac{2\pi}{5}, \quad \cos\tfrac{4\pi}{5} = -\cos\tfrac{\pi}{5}, \quad \cos\pi = -1.$$

である。k の他の値ではこれらが繰り返されるだけである。これらは 6 つの**相異なる**数であり（余弦は $[0,\pi]$ で狭義単調減少である）、p の次数は 6 であるから、これらが

実数・複素数を含めた p の根のすべてである。特に、置換 $x=\cos\theta$ では $-1\le x\le 1$ の範囲しか扱えないが、この区間の外の根を見落としてはいない。見つけるべき根はもう残っていないからである。



ただし、これはまだ答えとして十分ではない。数値による近似は認められず、余弦の値を正確に与えなければならないからである。$x=1$ が根であるから $x=-1$ も根であり（p は偶関数である）、x^2-1 が因数となる。割り算をする（あるいは係数を比較する）と

$$p(x)=(x^2-1)(16x^4-12x^2+1).$$

4 次の因数（quartic factor）は x^2 についての 2 次式である：

$$x^2=\frac{12\pm\sqrt{144-64}}{32}=\frac{12\pm 4\sqrt{5}}{32}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{8}.$$

ここで

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2=\frac{6+2\sqrt{5}}{16}=\frac{3+\sqrt{5}}{8},\qquad \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2=\frac{6-2\sqrt{5}}{16}=\frac{3-\sqrt{5}}{8}.$$

であることに注意する。x^2 の値はどちらも正であるから、それぞれから x の実数値が 2 つずつ得られる。よって、方程式の実数解は次の 6 つの数である。

$$x=\pm 1,\qquad x=\pm\frac{1+\sqrt{5}}{4},\qquad x=\pm\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

おまけとして、上の一覧と大小を照らし合わせると（$\cos\frac{\pi}{5}>\cos\frac{2\pi}{5}>0$）、よく知られた値 $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ および $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ が得られる。

検算

- $\theta=0$ では両方の恒等式が $1=1$ を与える。$\theta=\frac{\pi}{2}$ では、(i) は $1=1$、(ii) は $-1=-1$ を与える。
- p の係数の和は $16-28+13-1=0$ であり、$x=1$ が根であることが確かめられる。
- 数値的には $\frac{1+\sqrt{5}}{4}\approx 0.80902=\cos 36^\circ$、$\frac{\sqrt{5}-1}{4}\approx 0.30902=\cos 72^\circ$ であり、p はどちらの点でも（丸め誤差の範囲で）0 になる。

よくある間違い

- $6\theta = -4\theta + 2k\pi$ から得られる解を忘れ、$x = \pm 1$ しか求めない。
- 答えを $\cos\frac{\pi}{5}$ などの形や小数のまま残す。問題は根号を用いた正確な形を求めている。
- $|x| > 1$ となる根がない理由を説明しない。次数を数えれば決着がつく。

STEP のその先へ

$\cos n\theta$ を $\cos\theta$ で表す多項式はチェビシェフ（Chebyshev）多項式（Chebyshev polynomial）T_n である。したがって (i) と (ii) は $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ および $T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$ を述べている。チェビシェフ多項式は数値解析（numerical analysis）において中心的な役割を果たし、その根は多項式補間（polynomial interpolation）に最適な点を与える。$\cos\frac{\pi}{5}$ に $\sqrt{5}$ が現れるのは、正五角形の幾何と黄金比（golden ratio）を反映している。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、ド・モアブルの定理や 1 の冪根（roots of unity）を幾何的に眺めるのに最適な一冊である。

解答例

STEP I 1989、第 9 問

純粋数学 ・ グラフの変換

> **STEP I 1989、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q9

鍵となる考え方

基本となる三次関数（cubic）のグラフを一度描いてしまえば、他のグラフはすべて、同じ曲線を座標変換を通して見たものにすぎない。置換 $X = ax + b, Y = cy + d$ は、各方向への拡大・縮小（stretch）または反転（reflection）に続けて平行移動（translation）を施すだけのものであり、極値点（turning point）を極値点に移す。したがって、作業のすべては元の三次関数の 2 つの極値点を求め、それらがどこへ移るかを追跡することにある。

解答

基本のグラフ

$y = \frac{1}{8}(x^3 - 12x) = \frac{1}{8}x(x^2 - 12)$ とおく。すると

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3x^2 - 12}{8} = \frac{3(x-2)(x+2)}{8}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{6x}{8} = \frac{3x}{4}.$$

傾きは $x = \pm 2$ で 0 となる。

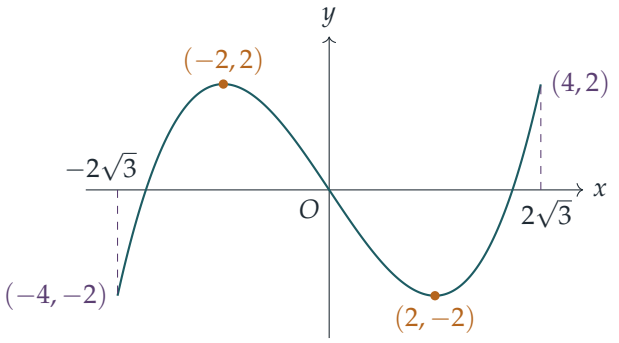
- $x = -2$ において：$y = \frac{1}{8}(-8 + 24) = 2$ であり、$y'' = -\frac{3}{2} < 0$ であるから、$(-2, 2)$ は極大（local maximum）である。
- $x = 2$ において：$y = \frac{1}{8}(8 - 24) = -2$ であり、$y'' = \frac{3}{2} > 0$ であるから、$(2, -2)$ は極小（local minimum）である。

その他の有用な特徴：

- 曲線が座標軸と交わるのは $x(x^2 - 12) = 0$ となるところ、すなわち $x = 0$ および

$x = \pm 2\sqrt{3} \approx \pm 3.46$ である。

- この関数は奇関数（odd function）であるから、グラフは原点に関して位数 2 の回転対称性をもつ。原点は変曲点（point of inflection）でもあり、そこでの傾きは $-\frac{3}{2}$ である。
- 両端では $y(4) = \frac{1}{8}(64 - 48) = 2$、$y(-4) = -2$ である。つまり曲線は、ちょうど $x = 4$ で極大値の高さまで戻ってくる。



なぜ極値点は極値点に移るのか

考えてみよう 座標を変換したとき、新しい極値点が元の極値点の像にすぎないことは、どうしてわかるのだろうか。

$a, c \neq 0$ として $X = ax + b$、$Y = cy + d$ とすると、連鎖律（chain rule）により

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{\mathrm{d}Y/\mathrm{d}x}{\mathrm{d}X/\mathrm{d}x} = \frac{c}{a}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

であり、これは $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ が 0 となるところでちょうど 0 となる。したがって新しい極値点は $(-2, 2)$ と $(2, -2)$ の像である（$c/a < 0$ ならば図は反転し、極大と極小の役割が入れ替わる）。幾何学的には次のとおりである。

- $X = \frac{1}{2}x$ はグラフを横方向に 2 分の 1 に縮める。
- $Y = \frac{1}{2}y$ はグラフを縦方向に 2 分の 1 に縮める。
- さらに X または Y に 1 を加えると、グラフは右または上に 1 だけ平行移動する。

変換された 4 つのグラフ

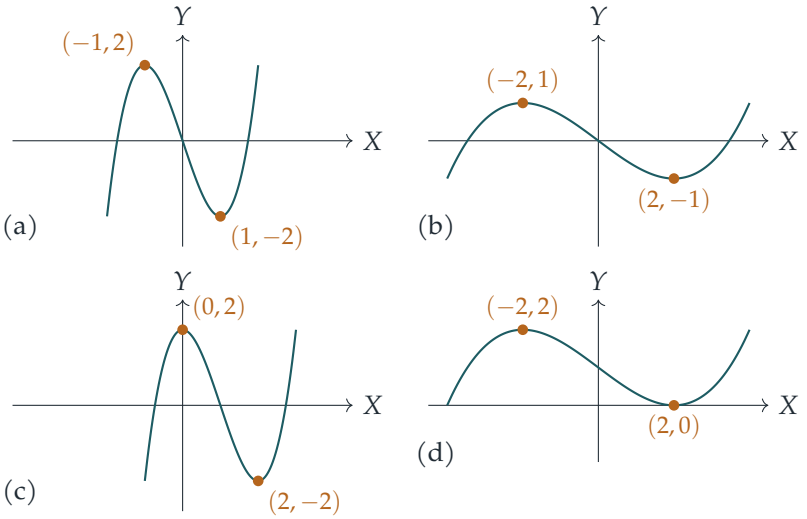
それぞれの写像を $(-2, 2)$、$(2, -2)$ および範囲 $-4 \leq x \leq 4$ に適用すると：

(a) $X = \frac{1}{2}x, Y = y$：極大 $(-1, 2)$、極小 $(1, -2)$、範囲は $-2 \leq X \leq 2$。曲線は $Y = X^3 - 3X$ である。

(b) $X = x,\ Y = \frac{1}{2}y$：極大 $(-2,1)$、極小 $(2,-1)$、範囲は $-4 \le X \le 4$。曲線は $16Y = X^3 - 12X$ である。

(c) $X = \frac{1}{2}x + 1,\ Y = y$：極大 $(0,2)$、極小 $(2,-2)$、範囲は $-1 \le X \le 3$。これはグラフ (a) を右に 1 だけ平行移動したもので、変曲点は $(1,0)$ である。

(d) $X = x,\ Y = \frac{1}{2}y + 1$：極大 $(-2,2)$、極小 $(2,0)$、範囲は $-4 \le X \le 4$。これはグラフ (b) を上に 1 だけ平行移動したもので、変曲点は $(0,1)$ である。極小点で X 軸に接する。



最後の小問

$a, c \neq 0$ が必要であり（そうでなければグラフは直線につぶれてしまう）、そのとき新しいグラフの極値点は

$$(-2a + b,\ 2c + d) \quad と \quad (2a + b,\ -2c + d).$$

である。これらが順序はともかく $(0,0)$ と $(1,1)$ でなければならないので、2 組の連立一次方程式が得られる。

場合 1：$(-2,2) \mapsto (0,0)$ かつ $(2,-2) \mapsto (1,1)$ のとき。$-2a + b = 0$ かつ $2a + b = 1$ より $b = \frac{1}{2}$、$a = \frac{1}{4}$。また $2c + d = 0$、$-2c + d = 1$ より $d = \frac{1}{2}$、$c = -\frac{1}{4}$。

場合 2：$(-2,2) \mapsto (1,1)$ かつ $(2,-2) \mapsto (0,0)$ のとき。同様にして $a = -\frac{1}{4}$、$b = \frac{1}{2}$、$c = \frac{1}{4}$、$d = \frac{1}{2}$。

よって答えの 1 つは

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1}{4}, \quad d = \frac{1}{2},$$

であり、もう 1 つは $a=-\frac{1}{4}$、$b=\frac{1}{2}$、$c=\frac{1}{4}$、$d=\frac{1}{2}$ である。

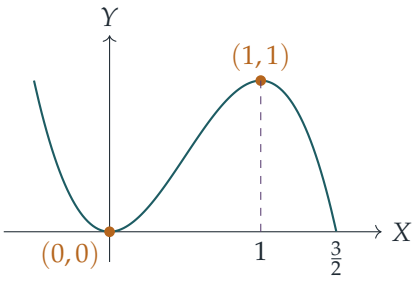
新しい曲線を求めておく価値がある。場合 1 では $x=4X-2$、$y=2-4Y$ であるから

$$\begin{aligned}8(2-4Y) &= (4X-2)^3-12(4X-2)\\ &= 64X^3-96X^2+48X-8-48X+24\\ &= 64X^3-96X^2+16,\end{aligned}$$

となり、これを整理すると

$$Y=3X^2-2X^3=X^2(3-2X).$$

となる。このとき $Y'=6X(1-X)$ であるから、極値点は確かに $(0,0)$ での極小と $(1,1)$ での極大である。場合 2 もまったく同じ曲線を与える。三次関数が奇関数であるため、(x,y) を $(-x,-y)$ に置き換えても元のグラフは変わらず、2 つの場合の違いはそれだけだからである。



$-4\le x\le 4$ に対して、この曲線は $(-\frac{1}{2},1)$ から $(\frac{3}{2},0)$ まで延びる。

検算

- $Y=3X^2-2X^3$ に $X=0$ と $X=1$ を代入すると 0 と 1 が得られ、$Y'=6X(1-X)$ はどちらでも 0 となる。
- 変換された各グラフは、範囲の端で曲線が極値点の高さに戻るという元の特徴を保っている。たとえば (d) では、$X=4$ で $Y=2$、$X=-4$ で $Y=0$ である。
- 数値的には、$x=1$ のとき $y=-\frac{11}{8}$ である。場合 1 ではこれは $X=0.75$、$Y=0.84375$ を与え、実際 $3(0.75)^2-2(0.75)^3=0.84375$ である。

よくある間違い

- 拡大・縮小の向きを取り違えること：$X=\frac{1}{2}x$ はグラフを**狭く**するのであって、広くするのではない。$x=2$ にある点が $X=1$ に移るからである。

- 定義域（domain）も変換し忘れること：グラフ (c) の範囲は $-1 \leq X \leq 3$ であり、$-4 \leq X \leq 4$ ではない。
- 極値点のもう一方の対応のさせ方に気づかず、最後の小問に解を 1 つしか答えないこと（どちらか一方で十分ではあるが、最初の場合で $c < 0$ となることは見落としやすい）。

STEP のその先へ

写像 $X = ax + b, Y = cy + d$ はアフィン変換（affine transformation）であり、最後の小問は、2 つの極値点をもつ任意の三次関数のグラフが、そのような変換の 1 つによって標準的な曲線 $Y = 3X^2 - 2X^3$ に移せることを示している。これはコンピュータグラフィックスで使われる「smoothstep」関数である。このように変換群を法として曲線を分類することは、幾何学と線形代数を貫くテーマである。行列の側からの話については、ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照せよ。

解答例

STEP I 1989、第 10 問

力学 ・ 速度に依存する抵抗

> **STEP I 1989、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q10

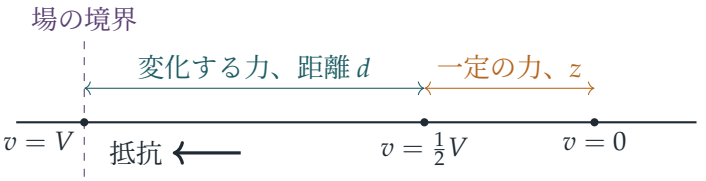
鍵となる考え方

抵抗（resistance）は時間ではなく速さ v に依存し、求めたいのは**距離**である。これは加速度を $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ と書くべきだという合図であり、そうすることでニュートンの第二法則（Newton's second law）は v と x を直接結びつける変数分離形（separable）の微分方程式になる。後半は減速度が一定の問題なので、やるべきことは切り替わる瞬間の力を求め、それを $\pm 10\%$ の範囲で変化させることだけである。

解答

モデル

宇宙船を、直線上を運動する質量 M の質点（particle）として扱う。場に入ってからの移動距離を x、速さを v とし、$x = 0$ で $v = V$ とする。働く力は抵抗のみで、これは後ろ向きに働くので、速さは常に減少する。



速さが半分になるまでの距離

運動の向きを正とし、加速度を $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ と書くと、ニュートンの第二法則より

$$Mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{M\omega\,(v^2+V^2)}{v} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{v^2}{v^2+V^2}\,\mathrm{d}v = -\omega\,\mathrm{d}x.$$

考えてみよう　$\dfrac{v^2}{v^2+V^2}$ はどのように積分すればよいか。

分子を $(v^2+V^2)-V^2$ と書き直すと

$$\frac{v^2}{v^2+V^2} = 1 - \frac{V^2}{v^2+V^2}, \qquad \int \frac{v^2}{v^2+V^2}\,\mathrm{d}v = v - V\arctan\frac{v}{V} + C,$$

となる。ここで標準的な積分 $\int \frac{\mathrm{d}v}{v^2+V^2} = \frac{1}{V}\arctan\frac{v}{V}$ を用いた。

速さが $\frac{1}{2}V$ まで落ちたときの移動距離を d とする。$(x,v)=(0,V)$ から $(d,\frac{1}{2}V)$ まで積分すると

$$\begin{aligned}\omega d &= \int_{V/2}^{V} \frac{v^2}{v^2+V^2}\,\mathrm{d}v = \Big[v - V\arctan\frac{v}{V}\Big]_{V/2}^{V} \\ &= \frac{V}{2} - V\Big(\arctan 1 - \arctan\tfrac{1}{2}\Big) = V\Big(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{1}{2}\Big).\end{aligned}$$

よって求める距離は

$$d = \frac{V}{\omega}\Big(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{1}{2}\Big) = \frac{V}{\omega}\Big(\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{3}\Big) \approx 0.178\,\frac{V}{\omega}.$$

2 つ目の形は、正接の減法定理から得られる $\arctan 1 - \arctan\frac{1}{2} = \arctan\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \arctan\frac{1}{3}$ を用いたものである（どちらの角も $(0,\frac{\pi}{2})$ にあるので、あいまいさはない）。どちらの形でも完全な答えである。

一定の力

切り替わる直前には $v=\frac{1}{2}V$ なので、抵抗力の大きさは

$$\frac{M\omega\big(\frac{1}{4}V^2+V^2\big)}{\frac{1}{2}V} = \frac{5}{2}M\omega V.$$

新しい一定の力 F はこの値との差が 10% 以内なので

$$\frac{9}{10}\cdot\frac{5}{2}M\omega V \le F \le \frac{11}{10}\cdot\frac{5}{2}M\omega V, \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{9}{4}M\omega V \le F \le \frac{11}{4}M\omega V.$$

力が一定なら減速度 $a = F/M$ も一定なので、$u=\frac{1}{2}V$、終わりの速さ 0 として $v^2 = u^2 - 2as$ を用いると

$$z = \frac{(V/2)^2}{2a} = \frac{MV^2}{8F}.$$

これは F が増加すると減少するので、最大の力が最小の z を与え、逆も同様である。

$$\frac{MV^2}{8\cdot\frac{11}{4}M\omega V}\le z\le\frac{MV^2}{8\cdot\frac{9}{4}M\omega V},\qquad\text{つまり}\qquad\boxed{\frac{V}{22\,\omega}\le z\le\frac{V}{18\,\omega}}$$

（「10% 以内」を厳密な意味に読むなら、不等号は等号なしになる。）力がまったく変わらなければ $z=V/(20\omega)$ であり、これはこの範囲のちょうど中央にある。

検算

- 次元（dimensions）：$M\omega v$ は力でなければならないので ω の単位は s^{-1} であり、したがって V/ω は長さである。どちらの答えもそうなっている必要がある。
- 係数 $\frac{1}{2}-\arctan\frac{1}{3}\approx 0.1782$ は正で $\frac{1}{2}$ より小さい。そうなるはずである。宇宙船は $\frac{1}{2}V$ から V の間の速さで進み、減速度は少なくとも $2\omega V$ なので、この区間にかかる時間は高々 $1/(4\omega)$ であり、進む距離は $V/(4\omega)$ より小さい。
- $V=\omega=1$ として $\dot v=-\omega(v^2+V^2)/v$ を数値的に刻んで計算すると、$v=\frac{1}{2}$ となる距離は 0.17825 となり、一定の力の段階を同様に計算すると、力が 110%、100%、90% のとき $z=0.0455$、0.0500、0.0556 となって、$\frac{1}{22},\frac{1}{20},\frac{1}{18}$ と一致する。

よくある間違い

- $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ の代わりに $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ を使うこと。これでは距離ではなく時間が得られ、さらにもう一度積分が必要になる。
- 上下の限界を逆に対応させること。**大きい**力ほど停止距離は**短く**なるので、力の 1.1 倍は下限 $V/(22\omega)$ に対応する。

STEP のその先へ

$a=v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ と書くことは、より大きな考え方への入り口である。位置または速さだけに依存する 1 次元の力に対しては、時間を別の変数に取り替えて方程式の階数を下げることができ、力が位置だけに依存する場合には、これがエネルギー保存（energy conservation）や運動の相平面（phase plane）による描像につながる。後半は**感度**（sensitivity）についての小さな演習である。すなわち、データの不確かさ（ここでは力の ±10%）が答えにどう伝わるか（z ではおよそ ∓10%）を見ている。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、速度に依存する力をこうした観点から扱っている。

解答例

STEP I 1989、第 11 問

力学 ・ 到達距離の最適化

> **STEP I 1989、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q11

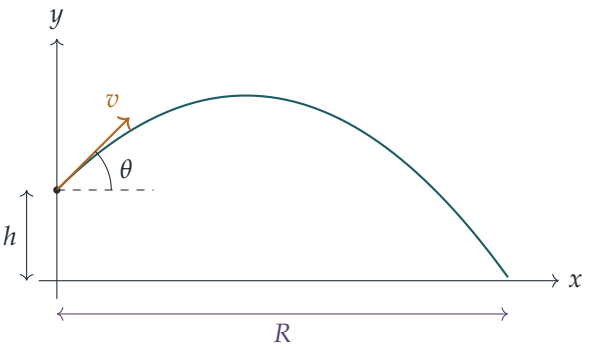
鍵となる考え方

飛行時間（time of flight）は t についての二次方程式（quadratic equation）から求まる。砲丸は高さが再び 0 に戻ったときに着地するからである。正の解をとって水平方向の速さを掛ければ R が得られ、あとは平方根を求められた形に整理するだけである。後半の「θ を少し小さくすると R は増えるか」という問いは、$\theta = 45^\circ$ における $\mathrm{d}R/\mathrm{d}\theta$ の符号についての問いであり、$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$ という対称性のおかげで、この導関数（derivative）は非常にすっきりと簡単になる。

解答

モデル

砲丸を、重力のみを受けて運動する質点（particle）とみなす。砲丸は点 $(0, h)$ から、水平より角 θ 上向きに速さ v で投げ出される。ただし $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$、$h > 0$ とする。投げる向きに水平に x 軸を、地面から鉛直上向きに y 軸をとる。



到達距離

時刻 t において

$$x = vt\cos\theta, \qquad y = h + vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

砲丸が地面に落ちるのは $y = 0$ のとき、すなわち

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - (v\sin\theta)\,t - h = 0 \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{v\sin\theta \pm \sqrt{v^2\sin^2\theta + 2gh}}{g}.$$

のときである。$h > 0$ より二つの解の積 $-2h/g$ は負であるから、正の解はちょうど一つである。マイナスの符号は負の解（投げ出す前の時刻）を与えるので、プラスの符号をとる。すると

$$\begin{aligned} R = v\cos\theta\, t &= \frac{v\cos\theta}{g}\left(v\sin\theta + \sqrt{v^2\sin^2\theta + 2gh}\right) \\ &= \frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2\sin^2\theta}}\right) \qquad (v\sin\theta > 0 \text{ をくくり出す}) \\ &= \frac{v^2}{2g}\sin 2\theta\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hg}{v^2\sin^2\theta}}\right), \end{aligned}$$

となる。ここで $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ を用いた。これが求める結果である。

考えてみよう $v\sin\theta$ を $v^2\sin^2\theta$ として平方根の中に入れてよいのはなぜか。

$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$ が成り立つのは $a \geq 0$ のときに限るからである。ここでは $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ なので $v\sin\theta > 0$ であり、この変形は正しい。（下向きに投げる場合にはこれが成り立たず、与えられた式は誤りとなる。）

45° は最適な角度か

微分するには、整理する前の形のほうが扱いやすい。

$$R(\theta) = \frac{v}{g}\cos\theta\left(v\sin\theta + S\right), \qquad S = \sqrt{v^2\sin^2\theta + 2gh},$$

とおくと、$\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{v^2\sin\theta\cos\theta}{S}$ である。積の微分法則（product rule）により

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta} = \frac{v}{g}\left[-\sin\theta\left(v\sin\theta + S\right) + \cos\theta\left(v\cos\theta + \frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{S}\right)\right].$$

$\theta = 45^\circ$ において $\sin\theta = \cos\theta = c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ とおく。項 $-vc^2$ と $+vc^2$ が打ち消し合い、

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=45^\circ} &= \frac{vc}{g}\left(-S + \frac{v^2c^2}{S}\right) = \frac{vc}{gS}\left(v^2c^2 - S^2\right)\\ &= \frac{vc}{gS}\left(\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v^2 - 2gh\right) = -\frac{2vhc}{S} = -\frac{\sqrt{2}\,vh}{\sqrt{v^2+4gh}},\end{aligned}$$

が残る。ただし最後の段階で $S = \sqrt{\frac{1}{2}v^2 + 2gh} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{v^2+4gh}$ を用いた。

$v > 0$ かつ $h > 0$ であるから、この導関数は真に負である。よって R は 45° の付近で θ の狭義単調減少関数（strictly decreasing function）であり、十分小さな減少量 $\delta\theta > 0$ に対して $R(45^\circ - \delta\theta) \approx R(45^\circ) + \frac{\sqrt{2}\,vh}{\sqrt{v^2+4gh}}\,\delta\theta > R(45^\circ)$ が成り立つ。**答えは「はい」である。θ を少し小さくすると R は増加する。**

物理的に言えば、高い位置から投げ出された砲丸は、水平な地面から投げた場合よりも少し長く空中にとどまる。その余分な時間は水平方向に進むことに使ったほうが得であり、そのため低めの角度で投げたほうが有利になる。$h = 0$ のときに限って導関数が 0 となり、45° が最適となる。

検算

- $h = 0$ とすると、式は $R = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta$ となり、おなじみの水平な地面での到達距離（range）に一致する。また 45° での導関数は 0 となり、そうなるべきとおりである。
- 単位：v^2/g は長さであり、$2hg/v^2$ は無次元（dimensionless）である。
- 数値例として $g = 9.8$、$v = 13\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$h = 2\,\mathrm{m}$ とすると、$R(45^\circ) \approx 19.05\,\mathrm{m}$ であるのに対し $R(40^\circ) \approx 19.10\,\mathrm{m}$ となる。運動を時間について少しずつ進めて計算すると R の式が再現され、また 45° における差分（finite difference）による導関数の近似値は、多数のランダムな v と h について $-\sqrt{2}\,vh/\sqrt{v^2+4gh}$ と一致する。

よくある間違い

- t についての二次方程式で誤った解をとる、あるいは負の解を捨てる理由を述べ忘れる。
- 「$\sin 2\theta$ は 45° で最大となるから、R も 45° で最大となる」と推論する。括弧の部分も θ に依存する（θ が増えると**減少する**）ので、この議論は不完全である。

STEP のその先へ

一般に $\mathrm{d}R/\mathrm{d}\theta = 0$ とおくと、高さ h から投げる場合の最適な角度は $\tan\theta = v/\sqrt{v^2+2gh}$ を満たすことがわかる。これは 45° より少し小さい（上の数値例ではおよそ 42°）。実際の砲丸投げの選手はさらに低い角度で投げる。低い角度のほうが強く押し出せるからである。このように軌道の族全体について最適化を行うと、その族の**包絡線**（envelope）、すなわち「安全放物線」（parabola of safety）にたどり着く。これは砲丸が到達しうるすべての点の範囲を示す曲線である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物運動とその様々な変形を丁寧に展開している。

解答例

STEP I 1989、第 12 問

力学 ・ 弾性ひもとエネルギー

> **STEP I 1989、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q12

鍵となる考え方

すべては正四面体（regular tetrahedron）の幾何に帰着する。すなわち、その質量中心（centre of mass）が頂点からどれだけ離れているか、面からどれだけ離れているか、そして頂点を通る軸からどれだけ離れているかである。この三つの長さが求まれば、前半はフックの法則（Hooke's law）を当てはめるだけである。後半では、対称性により運動は純粋な鉛直方向の並進（translation）に保たれる。四面体は静止状態から動き始め、静止状態で終わるので、運動方程式（equation of motion）はまったく必要ない。重力による位置エネルギー（gravitational potential energy）と弾性エネルギー（elastic potential energy）の収支を考えれば十分である。

解答

四面体の幾何

棒は一様な剛体の棒、糸はフックの法則に従う軽い弾性糸としてモデル化する。各棒の質量はその中点に集中しているとみなせる。どの頂点も六本の棒のうちちょうど三本に属するので、六つの中点の平均は四つの頂点の平均に等しい。したがって、質量中心 G は四面体の重心（centroid）である。

面 BCD は一辺 $2a$ の正三角形であるから、その中心 N は B、C、D のそれぞれから距離

$$\rho = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

にある。四面体の高さは $AN = \sqrt{(2a)^2 - \rho^2} = \sqrt{\frac{8}{3}}\,a = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$ である。重心は AN 上に

あり、面から測って全体の四分の一の高さにある。よって

$$GN = r = \frac{\sqrt{6}}{6}\,a, \qquad GA = GB = GC = GD = R = \frac{\sqrt{6}}{2}\,a.$$

（検算として、$R^2 = \rho^2 + r^2 = \frac{4}{3}a^2 + \frac{1}{6}a^2 = \frac{3}{2}a^2$ である。）

張力

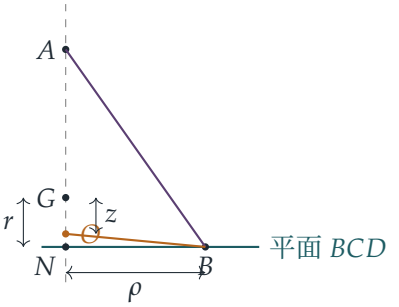
X が G にあるとき、各糸の長さは $R = \frac{\sqrt{6}}{2}a$、伸び（extension）は $R - a = \frac{\sqrt{6}-2}{2}\,a > 0$ であるから、四本ともぴんと張っている。フックの法則により、各糸の張力（tension）は

$$T = \frac{\lambda(R-a)}{a} = \frac{\sqrt{6}-2}{2}\,\lambda \approx 0.225\,\lambda.$$

XA が切れた後

切れる前、四つの等しい張力は各頂点を G へ向かう四つの方向に引いている。G は重心であるから、G から各頂点へ向かう単位ベクトルの和は零であり、糸は正味の力を及ぼさず、台が重さ Mg をすべて支えている。

XA が切れると、残りの三本の糸は合計で鉛直上向きに大きさ T の力で引く。これは失われた XA の引く力を符号反転したものである。水平方向には、鉛直線 AN のまわりの三回対称性により三つの力は打ち消し合う。各力はこの直線を含む鉛直面内にあるので、ねじる偶力（couple）は生じず、傾ける偶力も対称性により打ち消し合う。したがって四面体は純粋な鉛直方向の並進運動をし、AN は O を通る鉛直線上にとどまる。$T > Mg$ であるから四面体は台から離れる。このことは最後に確かめる。



O から測った G の高さを z とする。このとき B は O を通る鉛直線から水平距離 ρ の位置にあり、O に対する高さは $z - r$ であるから、三本の糸の長さはいずれも

$$L(z) = \sqrt{\rho^2 + (z-r)^2}.$$

最初は $z = 0$ で $L = \sqrt{\rho^2 + r^2} = R$ である。最高点では BCD が O と同じ高さになるの

で、$z = r$ かつ $L = \rho = \frac{2}{\sqrt{3}}a$ である。$0 \le z \le r$ では L は ρ と R の間にあり、どちらも a より大きいので、糸は運動中ずっと張ったままである。

> **考えてみよう** 扱いにくい非線形の運動方程式を解かずに、最高到達点の高さを求めるにはどうすればよいか？

台はなめらかで糸は軽いので、力学的エネルギーは保存される（conservation of mechanical energy）。四面体はすぐに台から離れるので、垂直抗力（normal reaction）は仕事をしない。四面体は最初も最高点でも静止しているので、運動エネルギーは式から消える。三本の糸が失う弾性エネルギー $3 \cdot \dfrac{\lambda(L-a)^2}{2a}$ は、得られる重力による位置エネルギー Mgr に等しくなければならない：

$$Mg\,r = \frac{3\lambda}{2a}\Big[(R-a)^2 - (\rho-a)^2\Big].$$

括弧内を変形し、$R^2 - \rho^2 = \frac{3}{2}a^2 - \frac{4}{3}a^2 = \frac{1}{6}a^2$ を用いると、

$$\begin{aligned}(R-a)^2 - (\rho-a)^2 &= R^2 - \rho^2 - 2a(R-\rho)\\ &= a^2\Big(\tfrac{1}{6} - \sqrt{6} + \tfrac{4}{\sqrt{3}}\Big).\end{aligned}$$

$\dfrac{3}{2ar} = \dfrac{3}{2a}\cdot\dfrac{6}{\sqrt{6}\,a} = \dfrac{3\sqrt{6}}{2a^2}$ であるから、

$$\begin{aligned}\frac{Mg}{\lambda} &= \frac{3\sqrt{6}}{2}\Big(\tfrac{1}{6} - \sqrt{6} + \tfrac{4}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{\sqrt{6}}{4} - 9 + 6\sqrt{2}\\ &\approx 0.6124 - 9 + 8.4853 = 0.0977,\end{aligned}$$

となり、有効数字 2 桁で 0.098 である。これが求める結果である。

最後に、$Mg \approx 0.098\lambda < 0.225\lambda \approx T$ であるから、切れた直後の正味の上向きの力 $T - Mg$ は正であり、四面体は確かに浮き上がる。これは問題の設定と矛盾しない。

検算

- $a = 1$ として四つの頂点を座標で置き、六本の辺がすべて長さ 2 で、四つの頂点がすべて重心から $\frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1.2247$ の距離にあることを確かめ、$T \approx 0.2247\lambda$ を再び得た。
- $Mg/\lambda = 6\sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{4} - 9 \approx 0.09765$ として、運動方程式 $M\ddot{z} = 3T(L)\,\frac{r-z}{L} - Mg$ を $z = 0$ での静止状態から数値的に追跡した。速度が初めて零に戻るのは $z \approx 0.40825$ においてであり、これは $r = \frac{\sqrt{6}}{6}$ と一致する。

よくある間違い

- R を重心から面までの距離と取り違えること。重心は頂点から測って $\frac{3}{4}$ 下った位置にあるので、$R = 3r$ である。
- 最高点でも糸がまだ伸びていることを忘れること。そこでの各糸のエネルギーは零ではなく $\frac{\lambda(\rho-a)^2}{2a}$ である。
- 伸び $L - a$ の L を、O から頂点までではなく、O から面の中心 N までの長さで測ってしまうこと。

STEP のその先へ

ここで用いた重心の工夫（六本の棒の中点の平均が四つの頂点の平均に等しいこと）は、「系の質量中心は各部分の質量中心を質量で重み付けした平均である」という一般的な事実の小さな例である。運動を純粋な並進として扱えたのは対称性の議論によるが、こうした議論は剛体（rigid body）の力学において体系化され、そこでは物体の運動は質量中心の並進とそのまわりの回転とに分解される。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、これら二つの考え方を丁寧に展開している。

解答例

STEP I 1989、第 13 問

力学 ・ 摩擦のある梯子のつり合い

STEP I 1989、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

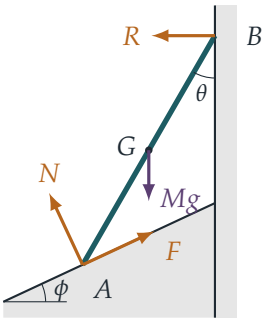
step.maths.org/questions/89-s1-q13

鍵となる考え方

これは三つの力に摩擦力が加わったつり合い（equilibrium）の問題であり、要点は方向をうまく選ぶことにある。はしごの下端のまわりのモーメント（moment）を考えると N と F がともに消え、壁からの抗力がただちに求まる。次に、水平方向と鉛直方向に分解する代わりに、**斜面に垂直な方向と斜面に沿った方向**に力を分解する（resolve）。それぞれの式には未知数 N と F の一方しか含まれないので、与えられた式がそのまま導かれる。

解答

はしごを長さ $2a$ の一様な棒 AB とみなし、その重心（centre of mass）G は中点にあるとする。下端 A は粗い斜面上にあり、上端 B はなめらかな壁に接しているので、壁からの抗力 R は水平で、壁から離れる向きである。A には斜面に垂直な垂直抗力（normal reaction）N と、斜面に沿った摩擦力（friction）F がはたらく。はしごは下端が斜面を下る向き、すなわち壁から離れる向きにすべろうとするので、F は斜面を上る向き、つまり壁に向かう向きにはたらくとする（F の式は正になることがわかり、この選び方が正しいことが確かめられる）。



壁からの抗力

A のまわりのモーメントを考えると、N と F が消える。はしごは鉛直方向と角 θ をなすので、B は A より高さ $2a\cos\theta$ だけ上にあり、G は A から水平距離 $a\sin\theta$ の位置にある。B における水平な力 R のモーメントは $R\cdot 2a\cos\theta$ であり、重力のモーメントは逆向きに $Mg\cdot a\sin\theta$ であるから、

$$2aR\cos\theta = Mga\sin\theta \qquad \Longrightarrow \qquad R = \tfrac{1}{2}Mg\tan\theta.$$

斜面に垂直な方向と斜面に沿った方向への分解

> **考えてみよう** それぞれの式に未知数が一つだけ含まれるようにするには、どの方向に分解すればよいか。

斜面に垂直な方向と斜面に沿った方向に分解する。F は斜面に垂直な成分をもたず、N は斜面に沿った成分をもたない。残りの二つの力の成分を求めればよい。

- 重力 Mg は、斜面に押しつける向きに成分 $Mg\cos\phi$、斜面を下る向きに成分 $Mg\sin\phi$ をもつ。
- 斜面は壁に向かって上っているので、斜面の上向きの法線は壁から離れる側に傾いている。したがって水平な力 R（これも壁から離れる向き）は、その法線方向に成分 $R\sin\phi$ をもつ。すなわち斜面から**離れる**向きである。斜面に沿った方向では、R は壁から離れる向き、つまり斜面を下る向きであり、その成分は $R\cos\phi$ である。

斜面に垂直な方向：

$$N + R\sin\phi = Mg\cos\phi,$$

$$\text{よって} \quad N = Mg\cos\phi - \tfrac{1}{2}Mg\tan\theta\sin\phi = Mg\left(\cos\phi - \frac{\tan\theta\sin\phi}{2}\right).$$

斜面に沿った方向（斜面を上る向きを正とする）：

$$F = Mg\sin\phi + R\cos\phi \quad \Longrightarrow \quad F = Mg\left(\sin\phi + \frac{\tan\theta\cos\phi}{2}\right).$$

これらが求める二つの結果である。

最大の角

下端がすべらないためには、接触が保たれること、すなわち $N > 0$ と、摩擦力が限界を超えないこと、すなわち $\mu = 2$ として $F \le \mu N$ が必要である（ここでは $F > 0$ なので、摩擦に関する条件はこれだけである）。$\phi = 45^\circ$ のとき $\sin\phi = \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ であり、$t = \tan\theta$ とおくと

$$F = \frac{Mg}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{t}{2}\right), \qquad N = \frac{Mg}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{t}{2}\right).$$

よって $N > 0$ には $t < 2$ が必要であり、このとき $F \le 2N$ は

$$1 + \frac{t}{2} \le 2 - t \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3t}{2} \le 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \tan\theta \le \frac{2}{3}.$$

となる。これは $t < 2$ より厳しいので、こちらが効いてくる条件である。$\tan\theta$ は $0 < \theta < 90^\circ$ で増加するので、はしごがつり合って静止できる最大の角は

$$\theta = \arctan\tfrac{2}{3} \approx 33.7^\circ,$$

であり、この角において摩擦は限界の状態（limiting friction）にある。

検算

- $\phi = 0$（水平な地面）のとき、式から $N = Mg$ および $F = \frac{1}{2}Mg\tan\theta = R$ が得られる。これは水平な床に立てかけたはしごについてのおなじみの結果である。
- $\theta = 0$（はしごが鉛直）のとき、壁は何の力も及ぼさず、$N = Mg\cos\phi$、$F = Mg\sin\phi$ となる。これは斜面上に静止している質点の場合とまったく同じである。
- 数値的に、ランダムな θ と ϕ について水平方向と鉛直方向の力のつり合いの式を直接解くと、両方の式と 10^{-13} の精度で一致する。また $\phi = 45^\circ$ のとき、比 F/N は $\theta = 33.690^\circ$ で 2 を通過する。

よくある間違い

- $R\sin\phi$ の項の符号を誤る。斜面は壁に向かって上っているので、R は下端を斜面から部分的に**引き離す**向きにはたらき、N を減少させる。
- 水平方向と鉛直方向に分解し、得られた連立方程式を解く途中で誤る。この方法でも解けるが、斜面に沿った方向と垂直な方向に分解するほうがはるかに速い。

STEP のその先へ

斜面が急になるほど、はしごを傾けられる角は小さくなることに注意しよう。これは、壁からの抗力が N を減らす一方で F を増やすからである。このような問題は静力学（statics）の入り口であり、そこでは未知数を切り離すように座標軸とモーメントの中心を選ぶ。同じ考え方は、トラスや骨組み構造の解析、さらに一般に安定性の解析の基礎となっている。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体のつり合いと摩擦を丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 1989、第 14 問

確率・統計 ・ 条件付き分布

STEP I 1989、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/89-s1-q14

鍵となる考え方

すべては一組の確率、すなわち種が幅 1 リーグの各帯状地帯に落ちる確率に基づいている。種が木に育つのは、公園地か農地に落ちたときであり、そのときに限る。したがって木の本数は二項分布（binomial distribution）に従う。木が育つ距離 Y は、陸地に落ちたという**条件のもとでの**（conditioned）L にほかならない。その確率密度関数（probability density function）は、f を陸地の帯だけに制限し、全面積が 1 になるように拡大したものである。最後の小問は仮説検定（hypothesis test）である。二項分布に従う個数として、農地の木が 23 本というのは驚くほど多いのだろうか。

解答

各帯の確率

L の累積分布関数（cumulative distribution function）は、$0 \le x \le 4$ に対して

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8}t\right)\mathrm{d}t = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{16},$$

であるから、$\mathrm{F}(1) = \frac{7}{16}$、$\mathrm{F}(2) = \frac{3}{4}$、$\mathrm{F}(3) = \frac{15}{16}$、$\mathrm{F}(4) = 1$ である。よって

$$\mathrm{P}(\text{公園地}) = \mathrm{P}(0 \le L \le 1) = \tfrac{7}{16}, \qquad \mathrm{P}(\text{湖}) = \tfrac{3}{4} - \tfrac{7}{16} = \tfrac{5}{16},$$
$$\mathrm{P}(\text{農地}) = \mathrm{P}(2 \le L \le 3) = \tfrac{15}{16} - \tfrac{3}{4} = \tfrac{3}{16}, \qquad \mathrm{P}(\text{海}) = \tfrac{1}{16}.$$

（L は連続型なので境界の確率は 0 であり、境界がどちらの帯に属するかは問題にならない。）種が木に育つ確率は

$$p = \tfrac{7}{16} + \tfrac{3}{16} = \tfrac{5}{8}.$$

である。1 年間に育つ木の本数を T とする。96 個の種は互いに独立に風で運ばれ、それぞれ確率 $\frac{5}{8}$ で育つので、$T \sim \mathrm{B}\left(96, \frac{5}{8}\right)$ であり、毎年新たに育つフィーバーツリーの本数の平均は

$$\mathrm{E}(T) = 96 \times \tfrac{5}{8} = 60.$$

である。

小問 (i)

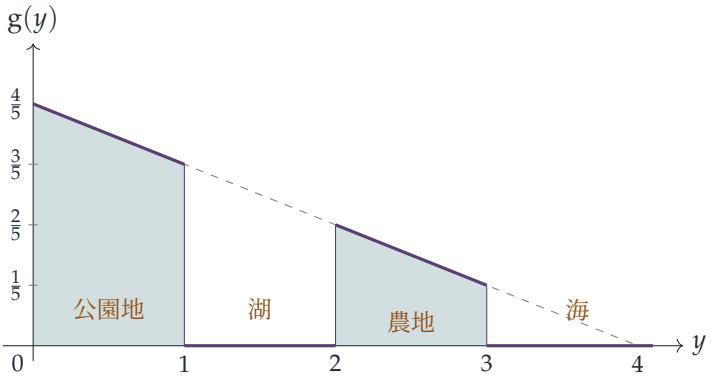
Y は、種が陸地に落ちたという条件のもとでの L の分布をもつ。陸地を $A = [0,1] \cup [2,3]$ と書く。$y \in A$ に対して

$$\mathrm{P}(y \le Y \le y + \delta y) = \frac{\mathrm{P}(y \le L \le y + \delta y)}{\mathrm{P}(L \in A)} \approx \frac{\mathrm{f}(y)\,\delta y}{5/8},$$

であり、Y が A の外の値をとることはない。したがって Y の確率密度関数は

$$\mathrm{g}(y) = \begin{cases} \frac{8}{5}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}y\right) = \dfrac{4-y}{5} & \text{条件：} 0 \le y \le 1 \text{ または} 2 \le y \le 3, \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

である。確認として、その面積は $\frac{8}{5}\left(\frac{7}{16} + \frac{3}{16}\right) = 1$ となる。グラフは同じ右下がりの直線の 2 つの部分からなる。公園地の上では $\frac{4}{5}$ から $\frac{3}{5}$ まで下がり、湖の上では何もなく、農地の上では $\frac{2}{5}$ から $\frac{1}{5}$ まで下がる。



破線は比較のために示した $\frac{8}{5}\mathrm{f}$ である。Y の確率密度関数は陸地の上でだけこれに一致する。

平均については、$\int y(4-y)\,\mathrm{d}y = 2y^2 - \frac{1}{3}y^3$ であるから

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &= \frac{1}{5}\left[2y^2 - \tfrac{1}{3}y^3\right]_0^1 + \frac{1}{5}\left[2y^2 - \tfrac{1}{3}y^3\right]_2^3 \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{1}{5}\left(9 - \frac{16}{3}\right) = \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{11}{3} = \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

となる。したがって新しい木は、平均して城の南 $\frac{16}{15}$ リーグの位置に育つ。これは公園地を少し越えた湖の中であるが、それで問題はない。平均は確率変数が実際にとりうる値である必要はないからである。

小問 (ii)

1 年間に農地で育つ木の本数を X とする。しきたりが守られていれば 96 個の種が放たれ、それぞれが独立に確率 $\frac{3}{16}$ で農地に落ちるので

$$X \sim \mathrm{B}\left(96, \tfrac{3}{16}\right), \qquad \mathrm{E}(X) = 18, \qquad \mathrm{Var}(X) = 96 \cdot \tfrac{3}{16} \cdot \tfrac{13}{16} = \tfrac{117}{8} \approx 14.6,$$

であり、標準偏差（standard deviation）はおよそ 3.82 となる。

> **考えてみよう** 正確には何を検定しているのか。そして、どちらの向きに検定するのか。

帰無仮説（null hypothesis）は、しきたりが守られた、すなわち種は 96 個で $X \sim \mathrm{B}\left(96, \frac{3}{16}\right)$ である、というものである。農地の木が通常より**多い**ことから自然に生じる疑いは、96 個より多くの種が放たれたというものである。そこで片側検定（one-tailed test）を用い、帰無仮説のもとで 23 本**以上**となる確率がどれほどかを調べる。

$np = 18$ と $n(1-p) = 78$ はともに十分大きいので、連続性補正（continuity correction）を施した正規近似（normal approximation）$X \approx \mathrm{N}(18, 14.625)$ を用いる。

$$\mathrm{P}(X \geq 23) \approx \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{22.5 - 18}{3.824}\right) = \mathrm{P}(Z \geq 1.18) \approx 0.12.$$

（二項分布による正確な値は 0.121 である。）したがって通常の条件のもとでも、農地の木が 23 本以上になることはおよそ 8 年に 1 度は起こる。これは 5% の有意水準（significance level）（さらには 10%）にもまったく届かない。この観測結果はしきたりが守られていたこととよく整合しており、この証拠だけでは王の疑いは正当化**されない**。

比較のために述べると、5% の水準であっても、王が妥当な根拠をもつには本数が少なくとも 25 本（正確には $\mathrm{P}(X \geq 25) \approx 0.049$）でなければならない。もし王が公園地の木の本数も知っていれば、木の総数 $T \sim \mathrm{B}\left(96, \frac{5}{8}\right)$ を検定することができ、そのほうが放たれた種の個数についてはるかによい証拠となるだろう。

検算

- 4 つの帯の確率 $\frac{7}{16}, \frac{5}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16}$ の和は 1 であり、Y の確率密度関数の全面積も 1 である。

- 中点則（midpoint rule）による数値積分では $\mathrm{E}(Y) = 1.06667$ となり、$\frac{16}{15}$ と一致する。400 000 個の種のシミュレーション（U を $[0,1]$ 上の一様分布として $L = 4 - 4\sqrt{1-U}$ を用いる）では、62.5% が陸地に落ち、それらの落下距離の平均は 1.069 であった。
- 二項分布の確率を正確に足し合わせると $\mathrm{P}(X \geq 23) = 0.1213$ となり、正規近似による推定値 0.120 に近い。

よくある間違い

- f そのものを Y の確率密度関数として用いてしまう。陸地の上での f の面積は $\frac{5}{8}$ しかないので、$\frac{5}{8}$ で割らなければならない。
- $\mathrm{E}(L\,;\, L \in A) = \int_A y\,\mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}$ を計算して、$\mathrm{P}(L \in A)$ で割るのを忘れてしまう。
- 裾の確率 $\mathrm{P}(X \geq 23)$ ではなく $\mathrm{P}(X = 23)$ を検定してしまう。X がある特定の 1 つの値をとる確率は、どの値であってもかなり小さい。

STEP のその先へ

小問 (i) は**条件付き分布**（conditional distribution）の一例である。すなわち、確率変数をある事象に制限し、全確率が 1 になるように正規化し直す（renormalising）操作である。同じ操作が、確率密度関数に対するベイズの定理（Bayes' theorem）や、統計学のいたるところで用いられる切断分布（truncated distribution）の基礎にある。小問 (ii) は仮説検定と p 値（p-value）への最初の入門であり、大学 1 年次の講義ではネイマン–ピアソン（Neyman–Pearson）の枠組みによってこれを厳密に扱う。Blitzstein and Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）は、この問題のような具体的な状況設定の例題を豊富に用いて条件付き分布を扱っている。

解答例

STEP I 1989、第 15 問

確率・統計 ・ 分布の比較

> **STEP I 1989、問 15**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q15

鍵となる考え方

時速 $12\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ では 1 km ごとにちょうど 5 分かかるので、どの道の所要時間も、一定の分数に、ある一つの確率変数（random variable）の単純な定数倍を加えたものになる。その確率変数は一様分布（uniform distribution）、ポアソン分布（Poisson distribution）、二項分布（binomial distribution）のいずれかに従う。したがって、時間に関する問いはすべて、その一つの確率変数に関する問いに帰着する。中間の部分は、等確率で選ばれる三つの道に対するベイズの定理（Bayes' theorem）である。

解答

所要時間

三つの道を通るときの所要時間（分）をそれぞれ T_A, T_B, T_D とする。$12\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ は 5 分ごとに 1 km であるから、

- Angle Avenue：$T_A = 25 + A$、ただし $A \sim \mathrm{U}(0, 10)$。
- Bend Boulevard：$T_B = 20 + 3B$、ただし $B \sim \mathrm{Po}(4)$。
- Detour Drive：迂回の回数を X とする。五か所の道路工事がそれぞれ確率 $\frac{4}{5}$ で互いに独立に迂回を生じさせると仮定すると、$X \sim \mathrm{B}(5, \frac{4}{5})$ であり、距離は $2 + X$ km、所要時間は $T_D = 10 + 5X$ となる。

27 分以上かかる確率

Angle Avenue。 $T_A \geq 27 \iff A \geq 2$ であるから、

$$\mathrm{P}(T_A \geq 27) = \frac{10-2}{10} = \frac{4}{5}.$$

Bend Boulevard。 B は整数であるから、$T_B \geq 27 \iff 3B \geq 7 \iff B \geq 3$ である。よって

$$\mathrm{P}(T_B \geq 27) = 1 - \mathrm{e}^{-4}\left(1 + 4 + \frac{4^2}{2!}\right) = 1 - 13\mathrm{e}^{-4} \approx 0.7619.$$

Detour Drive。 $T_D \geq 27 \iff 5X \geq 17 \iff X \geq 4$ である。よって

$$\mathrm{P}(T_D \geq 27) = 5\left(\frac{4}{5}\right)^4\frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^5 = \left(\frac{4}{5}\right)^4\left(1 + \frac{4}{5}\right) = \frac{256}{625}\cdot\frac{9}{5} = \frac{2304}{3125} = 0.73728.$$

所要時間が長かったとき、どの道だったか

選んだ道を R とし、$\mathrm{P}(R=A) = \mathrm{P}(R=B) = \mathrm{P}(R=D) = \frac{1}{3}$ とする。また、所要時間が 27 分以上である事象を L とする。ベイズの定理により、因子 $\frac{1}{3}$ は約分されて消える：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(R=B \mid L) &= \frac{\mathrm{P}(L \mid B)}{\mathrm{P}(L \mid A) + \mathrm{P}(L \mid B) + \mathrm{P}(L \mid D)} = \frac{1 - 13\mathrm{e}^{-4}}{\frac{4}{5} + 1 - 13\mathrm{e}^{-4} + \frac{2304}{3125}} \\ &= \frac{1 - 13\mathrm{e}^{-4}}{\frac{7929}{3125} - 13\mathrm{e}^{-4}} \approx \frac{0.7619}{2.2992} \approx 0.331.\end{aligned}$$

これは $\frac{1}{3}$ をわずかに上回るだけである。三つの道はいずれも、27 分以上かかる確率がほぼ等しいのだから、これは納得のいく結果である。

小問 (i)

$\mathrm{E}(A) = 5$、$\mathrm{E}(B) = 4$、$\mathrm{E}(X) = 5 \times \frac{4}{5} = 4$ と期待値の線形性（linearity of expectation）を用いると、

$$\mathrm{E}(T_A) = 25 + 5 = 30, \qquad \mathrm{E}(T_B) = 20 + 3 \times 4 = 32, \qquad \mathrm{E}(T_D) = 10 + 5 \times 4 = 30.$$

考えてみよう 二つの道が同じ値になった。これは計算の誤りだろうか？

そうではない。Angle Avenue と Detour Drive はどちらも平均がちょうど 30 分であり、Bend Boulevard の平均は 32 分である。したがって、平均所要時間をできるだけ小さくするには、Angle Avenue と Detour Drive の**どちらか**を使えばよい。この二つは同等に良く、どちらも Bend Boulevard より優れている。

小問 (ii)

次に、各道について $\mathrm{P}(T < 32)$ を比較する。

- $T_A < 32 \iff A < 7$ であるから、$\mathrm{P}(T_A < 32) = \frac{7}{10} = 0.7$。
- $T_B < 32 \iff 3B < 12 \iff B \leq 3$ であるから、

$$\mathrm{P}(T_B < 32) = \mathrm{e}^{-4}\left(1 + 4 + 8 + \frac{32}{3}\right) = \frac{71}{3}\mathrm{e}^{-4} \approx 0.4335.$$

- $T_D < 32 \iff 5X < 22 \iff X \leq 4$ であるから、

$$\mathrm{P}(T_D < 32) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^5 = 1 - \frac{1024}{3125} = \frac{2101}{3125} \approx 0.6723.$$

$0.7 > 0.6723 > 0.4335$ であるから、常に **Angle Avenue** を使うべきである。そうすれば、70% の日に 32 分未満で到着できる。

検算

- 400 000 回の移動をシミュレーションしたところ、$\mathrm{P}(T \geq 27) \approx 0.801,\ 0.761,\ 0.740$、平均所要時間 $\approx 30.0,\ 32.0,\ 30.0$ 分、$\mathrm{P}(T < 32) \approx 0.700,\ 0.435,\ 0.670$、$\mathrm{P}(R = B \mid L) \approx 0.331$ という結果が得られた。いずれも厳密な値と一致する。
- 境界の確認：Detour Drive で迂回が 3 回なら所要時間は 25 分、4 回なら 30 分であるから、「27 分以上」はたしかに「迂回が 4 回以上」を意味する。

よくある間違い

- 整数条件をいい加減に扱うこと。$3B \geq 7$ は $B \geq 2$ ではなく $B \geq 3$ を意味し、$3B < 12$ は $B \leq 4$ ではなく $B \leq 3$ を意味する。
- Detour Drive の基本距離 2 km を忘れること。あるいは、他の道で 1 km あたり 5 分の走行時間を忘れること。
- (i) で勝者を一つに決めてしまうこと。二つの平均はちょうど等しい。

STEP のその先へ

小問 (i) と (ii) は、「最良」が何を最適化するかによって変わることを示している。平均は分布を要約する一つの指標にすぎず、平均が同じ二つの道でも、散らばり（spread）や裾確率（tail probability）は大きく異なりうる。決定理論（decision theory）では、

これは**損失関数**（loss function）の選択にあたる。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、ここで扱った分布とベイズの定理を扱っている。Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）には、この種の問題が数多く収められている。

解答例

STEP I 1989、第 16 問

確率・統計 ・ ゼロサムゲーム

> **STEP I 1989、問 16**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q16

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.14 節「**混合戦略**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/mixed-strategies.html

鍵となる考え方

すべては一つの小さな表から導かれる。すなわち、9 通りの予想の組それぞれに対する B の獲得額の表である。これを書き出してしまえば、各期待値（expected value）は表の成分の重み付き和にすぎない。最後の小問では、和を A の確率 a_j ごとにまとめることで、「A がどうしようとも」という条件が三つの係数に関する条件に変わる。そして三つすべてを非負にすることは、小さな連立一次不等式（system of linear inequalities）の問題になる。

解答

A が i と予想し B が j と予想した回における B の獲得額（ポンド単位）を $w(i,j)$ と書く。規則から読み取ると次のようになる。

- $|i-j|=2$ のとき、1 と言った者が 3 と言った者に 2 ポンド支払うので、$w(1,3)=2$ かつ $w(3,1)=-2$ である。
- $|i-j|=1$ のとき、大きい方の数を言った者が 1 ポンド支払うので、$w(2,1)=w(3,2)=1$ かつ $w(1,2)=w(2,3)=-1$ である。
- $w(i,i)=0$ である。

	B が 1 と言う	B が 2 と言う	B が 3 と言う
A が 1 と言う	0	-1	2
A が 2 と言う	1	0	-1
A が 3 と言う	-2	1	0

$w(j,i) = -w(i,j)$ が成り立つことに注意する。規則は二人の参加者をまったく同じように扱うので、予想を入れ替えると支払う側が入れ替わるのである。

小問 (i)

A が常に N と言うならば、B は表の第 N 行を見て、常に最大の成分を選べばよい。

- $N = 1$：B は常に 3 と言い、毎回 £2 を得る。
- $N = 2$：B は常に 1 と言い、毎回 £1 を得る。
- $N = 3$：B は常に 2 と言い、毎回 £1 を得る。

いずれの場合も、この選択が唯一の最善の選択であり、他の応じ方では何も得られないか損をする。

小問 (ii)

ある回において、A の予想と B の予想は独立（independent）である（A は自分だけで無作為に選び、B はひそかに決める）。よって A が i と言い B が j と言う確率は $\frac{1}{3}b_j$ である。したがって B の獲得額の期待値は

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(W) &= \sum_{j=1}^{3} b_j \cdot \tfrac{1}{3}\big(w(1,j) + w(2,j) + w(3,j)\big) \\ &= \tfrac{1}{3}\big(b_1(0+1-2) + b_2(-1+0+1) + b_3(2-1+0)\big) \\ &= \tfrac{1}{3}\,(b_3 - b_1).\end{aligned}$$

となる。$b_3 \le 1$ かつ $b_1 \ge 0$ であるから、これは高々 $\frac{1}{3}$ であり、等号が成り立つのはちょうど $b_3 = 1$ のとき（このとき $b_1 = b_2 = 0$ となる）である。よって B は**常に 3 と予想する**べきであり、そのとき 1 回あたり £$\frac{1}{3}$ の獲得が期待できる。一様に無作為に選ぶ A に対して、予想 3 は £2 を得る、£1 を失う、引き分けるのいずれかが、それぞれ確率 $\frac{1}{3}$ で起こる。

小問 (iii)

A が確率 a_i で i と予想し、B が確率 b_j で j と予想し、これらが独立であるとき、

$$\mathrm{E}(W) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_i b_j\, w(i,j).$$

である。各 a_i ごとに項をまとめる（表の 1 行ずつ）と、

$$\mathrm{E}(W) = \underbrace{(2b_3 - b_2)}_{X}\, a_1 + \underbrace{(b_1 - b_3)}_{Y}\, a_2 + \underbrace{(b_2 - 2b_1)}_{Z}\, a_3.$$

となる。$X \geq 0$、$Y \geq 0$、$Z \geq 0$、すなわち

$$b_2 \leq 2b_3, \qquad b_3 \leq b_1, \qquad 2b_1 \leq b_2.$$

としたい。これらをつなげると $b_2 \leq 2b_3 \leq 2b_1 \leq b_2$ となるので、すべて等号でなければならない。すなわち $b_3 = b_1$ かつ $b_2 = 2b_1$ である。これと $b_1 + b_2 + b_3 = 1$ をあわせると

$$b_1 = \tfrac{1}{4}, \qquad b_2 = \tfrac{1}{2}, \qquad b_3 = \tfrac{1}{4},$$

を得る。このとき $X = Y = Z = 0$ であり、これらは確かに非負である。よってそのような選び方は存在する（実際、それはただ一つである）。

考えてみよう B はもっとうまくやって、X、Y、Z をすべて正にすることができるだろうか？

できない。任意の b_j に対して

$$b_1 X + b_2 Y + b_3 Z = b_1(2b_3 - b_2) + b_2(b_1 - b_3) + b_3(b_2 - 2b_1) = 0,$$

が成り立つ。これは、B が自分自身の複製と対戦すると損得なしになる（表が反対称（antisymmetric）である）ということにほかならない。和が 1 となる非負の重みによる X, Y, Z の重み付き和は、三つすべてが正ならば 0 にはなりえない。上の不等式が等号でしか満たされなかったのはこのためである。

では結論を導こう。$b = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ のとき、a_1, a_2, a_3 を**どのように**選んでも

$$\mathrm{E}(W) = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 = 0$$

である。より一般に、$X, Y, Z \geq 0$ であれば、各 $a_i \geq 0$ であるから $\mathrm{E}(W) = Xa_1 + Ya_2 + Za_3 \geq 0$ となる。各回における B の獲得額は独立で同一の分布に従い（両者の予想は回ごとに独立である）、いずれも平均は 0 以上である。大数の法則（law of large numbers）により、多数回にわたる B の 1 回あたりの平均獲得額はこの平均に近づく。よって長期的には、A がどうしようとも B は損をしない。 □

検算

- 小問 (ii) は小問 (iii) の特別な場合 $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{3}$ である。実際 $\frac{1}{3}(X+Y+Z) = \frac{1}{3}(b_3 - b_1)$ となり、先に求めたものと一致する。
- 小問 (i) は a が N にすべての重みを置く場合である。$N = 1$ のとき $\mathrm{E}(W) = X = 2b_3 - b_2$ であり、これは $b_3 = 1$ で最大となって値 2 を与える。
- B が $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ を用い、A が $(0.6, 0.1, 0.3)$ を用いる 2×10^5 回のシミュレーションでは、1 回あたりの平均獲得額は約 -0.004 であり、0 と矛盾しない。

よくある間違い

- 符号の取り決めを逆にしてしまうこと。差が 1 のときは**大きい**方の予想をした者が支払うが、差が 2 のときは**小さい**方である。まず表を作り、それが反対称であることを確かめるとよい。
- 小問 (ii) から、B は予想を混ぜるべきだと結論してしまうこと。固定された混合戦略（mixed strategy）に対しては、最善の応じ方は常に純粋戦略（pure strategy）である（ここでは常に 3）。混ぜることが得になるのは、小問 (iii) のように、B が A の**あらゆる**戦略に備えなければならない場合だけである。

STEP のその先へ

これは二人ゼロ和ゲーム（two-player zero-sum game）であり、小問 (iii) はフォン・ノイマン（von Neumann）のミニマックス定理（minimax theorem）の小さな例である。すなわち B には、A がどうしようともゲームの値以上を保証する混合戦略があり、ゲームが対称なのでその値は 0 である。このような戦略を求めることは線形計画法（linear programming）の問題であり、確率を最適化や経済学と結びつける。確率の側面については Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）を、ゲームそのものについては Binmore, *Playing for Real*（ゲーム理論の入門書）を最初に読むとよい。

解答例

STEP II 1989、第 1 問

純粋数学 ・ 3 次方程式の三角関数による解法

> **STEP II 1989、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q1

鍵となる考え方

この恒等式（identity）は、$z = \cos\theta$ のとき $4z^3 - 3z$ が実は $\cos 3\theta$ が姿を変えたものにすぎないことを述べている。したがって、3 次方程式（cubic）を $|k| \leq 1$ である $4z^3 - 3z = k$ という形に押し込むことができれば、それを解くことは $\cos 3\theta = k$ を解くことと同じであり、こちらには簡単に求まる三つの解がある。二つの置換（substitution）はそれぞれ別の役割を果たす。平行移動 $y = x + a$ は 2 乗の項を消し、拡大縮小 $z = by$ は残った係数（coefficient）の比を 4 : 3 に合わせる。

解答

恒等式

加法定理（addition formulae）と $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ を用いると、

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta \\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta \\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られる。

3 次方程式の変形

$y = x + a$ とおくと $x = y - a$ であり、$24(y-a)^3 - 72(y-a)^2 + \cdots$ における y^2 の係数は $-72a - 72$ である。これを消すには $a = -1$、すなわち $x = y + 1$ とすればよい。こ

のとき

$$\begin{aligned}&24(y+1)^3-72(y+1)^2+66(y+1)-19\\&\quad=(24y^3+72y^2+72y+24)-(72y^2+144y+72)\\&\qquad+(66y+66)-19\\&\qquad\qquad=24y^3-6y-1,\end{aligned}$$

であるから、$(*)$ は

$$24y^3-6y=1.$$

となる。次に $y=z/b$ とおくと

$$\frac{24}{b^3}z^3-\frac{6}{b}z=1.$$

考えてみよう 左辺が $4z^3-3z$ の定数倍になるようにするには、b をどう選べばよいか。

z^3 と z の係数の比が $4:-3$ となる必要があるので、

$$\frac{24/b^3}{6/b}=\frac{4}{3}\quad\Longrightarrow\quad\frac{4}{b^2}=\frac{4}{3}\quad\Longrightarrow\quad b^2=3.$$

$b=\sqrt{3}$ をとる。すると方程式は $\dfrac{8}{\sqrt{3}}z^3-\dfrac{6}{\sqrt{3}}z=1$ となり、両辺に $\frac{\sqrt{3}}{2}$ を掛けて

$$4z^3-3z=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

を得る。よって $a=-1$、$b=\sqrt{3}$、$k=\frac{\sqrt{3}}{2}$ であり、$z=\sqrt{3}\,(x-1)$ である。（代わりに $b=-\sqrt{3}$ をとると $k=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ となるが、最終的には同じ解が得られる。）

解

$|k|\le 1$ であるから $z=\cos\theta$ と書くことができ、恒等式により方程式は

$$\cos 3\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ.$$

となる。よって $3\theta=30^\circ,\,390^\circ,\,750^\circ$ であり、$\theta=10^\circ,\,130^\circ,\,250^\circ$ を得る。これらは互いに異なる三つの $\cos\theta$ の値を与え、3 次方程式の解は高々三つであるから、これですべての解が尽くされる：

$$z=\cos 10^\circ,\quad\cos 130^\circ,\quad\cos 250^\circ.$$

置換をもとに戻すと $x = 1 + \dfrac{z}{\sqrt{3}}$ であるから、

$$x_1 = 1 + \frac{\cos 10^\circ}{\sqrt{3}} = 1.5686\ldots \approx 1.57,$$
$$x_2 = 1 + \frac{\cos 130^\circ}{\sqrt{3}} = 0.6289\ldots \approx 0.629,$$
$$x_3 = 1 + \frac{\cos 250^\circ}{\sqrt{3}} = 0.8025\ldots \approx 0.803.$$

すべての 3 次方程式でうまくいくわけではない

一般のモニック（monic、最高次の係数が 1）な 3 次方程式 $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ に対しては、平行移動の量は一意に決まる。$x = y - a$ とした後の y^2 の係数は $\alpha - 3a$ であるから $a = \frac{\alpha}{3}$ であり、$p = \beta - \frac{\alpha^2}{3}$ として $y^3 + py + q = 0$ に到達する。$y = z/b$ とおいて $4b^3$ を掛けると

$$4z^3 + 4pb^2 z + 4qb^3 = 0,$$

となり、これを $4z^3 - 3z$ に合わせるには $4pb^2 = -3$、すなわち $b^2 = -\dfrac{3}{4p}$ でなければならない。これが実数解をもつのは $p < 0$ のときに限る。

反例（counterexample）として

$$x^3 + 3x - 4 = 0.$$

がある。ここでは $\alpha = 0$ なので $a = 0$、$p = 3 > 0$ である。$b^2 = -\frac{1}{4}$ が必要になるが、これを満たす実数 b は存在しない。したがってこの方程式は $4z^3 - 3z = k$ の形にはまったく変形できない。（方程式自体は解をもつ。$(x-1)(x^2+x+4) = 0$ と因数分解でき、2 次式の判別式（discriminant）は $-15 < 0$ であるから、$x = 1$ がただ一つの実数解である。うまくいかないのは解法であって、方程式ではない。）

$p < 0$ であっても、次の段階で解法が破綻することがある。$x^3 - 3x - 4 = 0$ に対して $x = 2z$ とおくと $4z^3 - 3z = 2$ となるが、$|\cos 3\theta| \le 1$ であるから、$\cos 3\theta = 2$ を満たす実数 θ は存在しない。

検算

- 三つの解の和は $\frac{72}{24} = 3$、積は $\frac{19}{24}$ になるはずである。実際、cos の項の和は 0 であり（$\cos 10^\circ + \cos 130^\circ + \cos 250^\circ = 0$）、数値的には $1.5686 \times 0.6289 \times 0.8025 = 0.7917 \approx \frac{19}{24}$ である。
- $x = 1.5686$ を $24x^3 - 72x^2 + 66x - 19$ に代入すると、電卓の精度の範囲で 0 になる。他の二つの解についても同様である。

よくある間違い

- $\theta = 10^\circ$ で止めてしまうこと。残りの二つの解は $3\theta = 390^\circ$ と 750° から得られる。
- a の符号を間違えること。$y = x + a$ かつ $x = y + 1$ ということは $a = -1$ であり、$+1$ ではない。
- 反例として、$p < 0$ かつ $|k| \le 1$ である 3 次方程式を選んでしまうこと。そのような方程式はこの解法で問題なく扱える。うまくいかないと主張する前に、$b^2 > 0$ と $|k| \le 1$ を確認すること。

STEP のその先へ

この解法がうまくいくのは、ちょうど 3 次方程式が三つの実数解をもつときであり、これは「還元不能の場合」（casus irreducibilis）と呼ばれる。この場合、答えはすべて実数であるにもかかわらず、カルダノ（Cardano）の公式では複素数の立方根を経由せざるを得ない。$|k| > 1$ のときは、$\cosh 3u = 4\cosh^3 u - 3\cosh u$ であるから、cos の代わりに cosh を用いて同じ考え方が使える。$x^3 - 3x - 4 = 0$ に対しては、これにより実数解 $x = 2\cosh\left(\frac{1}{3}\operatorname{arcosh} 2\right) \approx 2.196$ が得られる。そもそもどの多項式方程式が冪根（radicals）によって解けるのかという、より深い問いはガロア理論（Galois theory）へとつながる。入門には Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）がよく、Needham, *Visual Complex Analysis*（複素解析を図形的に解説した本）は立方根の幾何学的な姿を見せてくれる。

解答例

STEP II 1989、第 2 問

純粋数学 ・ べき級数の係数

> **STEP II 1989、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q2

鍵となる考え方

ある関数の x における値と、同じ関数の $2x$ における値とを結びつける三角関数の恒等式（trigonometric identity）は、冪級数（power series）の係数（coefficient）どうしの関係に翻訳できる。x を $2x$ に置き換えると x^n の係数は 2^n 倍になるので、両辺を冪級数で表してしまえば、係数を比較するだけで関係式がそのまま読み取れる。ここで役に立つ工夫は、はじめに全体に x を掛けておくことである。そうすれば、どの項も 0 において本当に冪級数展開をもつ関数になる。

解答

以下では常に x は十分小さく、かつ 0 でないとする。したがって以下に現れる級数はすべて収束（converge）する（たとえば $0 < |x| < \frac{\pi}{4}$ であれば、ここに現れる関数はすべて性質のよい関数である）。0 を含む区間上で一致する二つの収束冪級数は係数がすべて等しいので、x^n の係数を比較してよい。

a_{n-1} と b_n の関係

まず $(*)$ を確かめる：

$$\cot x - \tan x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\cot 2x.$$

両辺に x を掛けると

$$x\cot x - x\tan x = (2x)\cot(2x).$$

ここで各項を級数で表す。

- $x\cot x = 1 + \sum_{n\geq 1} b_n x^n$。
- $x\tan x = \sum_{m\geq 0} a_m x^{m+1} = \sum_{n\geq 1} a_{n-1}x^n$（$n = m+1$ とおいた）。
- x が小さければ $2x$ も小さいので、$x\cot x$ の級数において x を $2x$ に置き換えてよい：

$$(2x)\cot(2x) = 1 + \sum_{n\geq 1} b_n (2x)^n = 1 + \sum_{n\geq 1} 2^n b_n x^n.$$

よって

$$1 + \sum_{n\geq 1} (b_n - a_{n-1})x^n = 1 + \sum_{n\geq 1} 2^n b_n x^n.$$

定数項は一致しており、$n \geq 1$ について x^n の係数を比較すると $b_n - a_{n-1} = 2^n b_n$、すなわち

$$a_{n-1} = (1 - 2^n)\, b_n \qquad (n \geq 1),$$

が得られる。これが示すべきことであった。

> **考えてみよう** $\cot x$ そのものを扱うのではなく、展開する前に x を掛けるのはなぜか。

$\cot x$ は 0 で発散するので、そこでは冪級数展開をもたない。問題で与えられているのは $x\cot x$ の級数だけである。恒等式全体に x を掛けると、どの項も「冪級数展開をもつ関数」の形になり、右辺の余接の項は $(2x)\cot(2x)$、つまり同じ関数を $2x$ で評価したものになる。これこそ必要な形である。

係数 c_n

対になる恒等式は、差ではなく和をとったものである：

$$\cot x + \tan x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\operatorname{cosec} 2x.$$

再び x を掛けると

$$x\cot x + x\tan x = (2x)\operatorname{cosec}(2x).$$

先ほどと同じ展開と、$x\operatorname{cosec} x$ の級数で x を $2x$ に置き換えたものを用いると

$$1 + \sum_{n\geq 1} (b_n + a_{n-1})x^n = 1 + \sum_{n\geq 1} 2^n c_n x^n,$$

となるので、$n \geq 1$ に対して

$$2^n c_n = b_n + a_{n-1}.$$

ここで最初の結果を用いて b_n を消去する。$n \geq 1$ より $1-2^n \neq 0$ であるから $b_n = \dfrac{a_{n-1}}{1-2^n}$ となり、

$$2^n c_n = a_{n-1}\left(\frac{1}{1-2^n}+1\right) = a_{n-1}\frac{2-2^n}{1-2^n} = a_{n-1}\frac{2\left(2^{n-1}-1\right)}{2^n-1}.$$

両辺を 2^n で割り、$2/2^n = 1/2^{n-1}$ と書くと

$$c_n = \frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\,a_{n-1} \qquad (n \geq 1),$$

となり、これが求める結果である。

検算

$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$ より $a_1 = 1$、$a_3 = \frac{1}{3}$ である。最初の結果からは $b_2 = a_1/(1-4) = -\frac{1}{3}$、$b_4 = a_3/(1-16) = -\frac{1}{45}$ が予想され、これは $x\cot x = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \cdots$ と一致する。二つ目の結果からは $c_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{6}$、$c_4 = \frac{7}{15}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3} = \frac{7}{360}$ が予想され、これは $x\operatorname{cosec} x = 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + \cdots$ と一致する。また $n = 1$ の場合にも注意しておくと、$a_0 = 0$ かつ $b_1 = c_1 = 0$ であり、どちらの公式とも矛盾しない。sin と cos の級数の割り算によって、$n \leq 23$ のすべてについて両方の関係式を（分数で）厳密に確かめた。また、級数の値を $\tan 0.3 \approx 0.309336$ および $0.3\operatorname{cosec} 0.3 \approx 1.015159$ と照合した。

よくある間違い

- 添字のずれ（index shift）を忘れる：$x\tan x$ の x^n の係数は a_n ではなく a_{n-1} である。
- $x\cot x$ の x に $2x$ を代入したつもりで $2x\cot x$ や $x\cot 2x$ と書いてしまう。恒等式に現れる項は正確に $(2x)\cot(2x)$ でなければならない。
- $1-2^n \neq 0$ であることを確認せずにそれで割ってしまう。

STEP のその先へ

ここに現れた係数は、簡単な因子を除けばベルヌーイ数（Bernoulli numbers）である：$x\cot x = \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}x^{2k}$ であり、この問題の関係式によって正接と余割の級数がベルヌーイ数で表される。0 の近くで一致する二つの冪級数の係数を等しいとおいてよいという事実（冪級数の一致の定理（identity theorem））は、解析学の最初の講義で証明される。さらに学ぶには、冪級数については Abbott, *Understanding Analysis*（解

析学入門）を、これらの展開が複素関数から自然に現れる様子については Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析）を参照するとよい。

解答例

STEP II 1989、第 3 問

純粋数学 ・ 複素双曲線関数による写像

> **STEP II 1989、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q3

鍵となる考え方

右辺は $2\sinh(x+\mathrm{i}y)$ である。したがってこの問題は、写像（map）$u+\mathrm{i}v=\sinh(x+\mathrm{i}y)$ についての問題である。和の sinh を展開すると実部と虚部に分かれ、u と v が具体的に求まる。そのうえで x または y を固定すると、媒介変数表示された曲線（parametric curve）が残る。恒等式 $\cos^2+\sin^2=1$ と $\cosh^2-\sinh^2=1$ を使えば、その媒介変数を消去できる。

解答

u と v を求める

両辺を 2 で割ると、$u+\mathrm{i}v=\sinh(x+\mathrm{i}y)$ である。$\sinh(\mathrm{i}y)=\mathrm{i}\sin y$ と $\cosh(\mathrm{i}y)=\cos y$ を用いると、

$$\begin{aligned}\sinh(x+\mathrm{i}y)&=\sinh x\cosh(\mathrm{i}y)+\cosh x\sinh(\mathrm{i}y)\\&=\sinh x\cos y+\mathrm{i}\cosh x\sin y.\end{aligned}$$

（好みに応じて $\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x}(\cos y+\mathrm{i}\sin y)-\mathrm{e}^{-x}(\cos y-\mathrm{i}\sin y)\right)$ を直接展開してもよい。結果は同じである。）x、y、u、v はすべて実数である。よって実部と虚部を比較すると、

$$u=\sinh x\cos y,\qquad v=\cosh x\sin y.$$

直線 $x = a$

$x = a$ を固定して y を動かすと、$u = \sinh a \cos y$、$v = \cosh a \sin y$ である。$a > 0$ より $\sinh a$ と $\cosh a$ はともに正なので、これらで割ることができる。

$$\left(\frac{u}{\sinh a}\right)^2 + \left(\frac{v}{\cosh a}\right)^2 = \cos^2 y + \sin^2 y = 1.$$

逆に、この楕円（ellipse）上のすべての点は、ある y を用いて $(\sinh a \cos y, \cosh a \sin y)$ の形に書ける。これは楕円の標準的な媒介変数表示（parametrisation）だからである。したがって直線 $x = a$ は楕円全体に対応する。このとき楕円は、y の長さ 2π の区間ごとに1周ずつ描かれる。楕円の半軸（semi-axes）は、u 軸方向に $\sinh a$、v 軸方向に $\cosh a$ である。

直線 $y = b$

次に $y = b$ を固定して x を動かすと、$u = \sinh x \cos b$、$v = \cosh x \sin b$ である。条件より $0 < \sin b < 1$ なので、$\sin b \neq 0$ である。さらに $\cos^2 b = 1 - \sin^2 b > 0$ なので、$\cos b \neq 0$ でもある。それぞれで割ると、

$$\left(\frac{v}{\sin b}\right)^2 - \left(\frac{u}{\cos b}\right)^2 = \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

これは v 軸を主軸とし、頂点（vertices）を $(0, \pm \sin b)$ にもつ双曲線（hyperbola）である。

考えてみよう なぜ一方の分枝（branch）だけなのか。また、その分枝全体が覆われるのか。

$\cosh x > 0$ かつ $\sin b > 0$ なので、常に $v > 0$ である。つまり、到達するのは上側の分枝だけである。そして、上側の分枝全体に到達する。実際、上側の分枝上に任意の点 (u, v) をとり、$x = \sinh^{-1}(u / \cos b)$ とおくと、$\sinh x \cos b = u$ となる。このとき $\cosh x \sin b$ は、その u に対する双曲線の方程式の正の解であり、それは v に等しい。したがって直線 $y = b$ は、ちょうど一方の分枝、すなわち $v > 0$ の分枝に対応する。

交点と直角

点 $x = a$、$y = b$ は両方の直線上にある。よってその像は両方の曲線上にある。

$$(u, v) = (\sinh a \cos b,\ \cosh a \sin b).$$

この点での曲線の向きを求めるため、それぞれの媒介変数表示を各自の媒介変数で微分する。楕円（$x = a$、媒介変数 y）に沿っては、$y = b$ において

$$\mathbf{t}_1 = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right) = (-\sinh a \sin b,\ \cosh a \cos b).$$

双曲線（$y = b$、媒介変数 x）に沿っては、$x = a$ において

$$\mathbf{t}_2 = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) = (\cosh a \cos b,\ \sinh a \sin b).$$

どちらのベクトルも零ベクトルではない。いずれも成分 $\cosh a \cos b \neq 0$ をもつからである。したがって、両者はともに正真正銘の接ベクトル（tangent vector）である。その内積（scalar product）は

$$\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 = -\sinh a \sin b \cosh a \cos b + \cosh a \cos b \sinh a \sin b = 0,$$

となる。よって要求どおり、楕円と双曲線の分枝はこの点で直角に交わる。

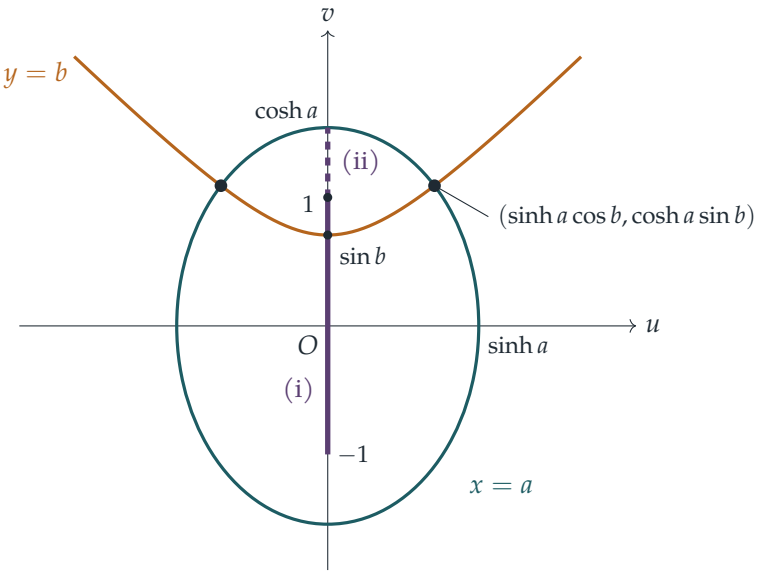
（両曲線は $u \mapsto -u$ に関して対称である。したがって $(-\sinh a \cos b, \cosh a \sin b)$ においても直角に交わる。この点は $x = -a$、$y = b$ の像であり、同じことだが $x = a$、$y = \pi - b$ の像でもある。）

概形

(i) $x = 0$ のとき $u = 0$、$v = \sin y$ である。これは v 軸上の $(0, -1)$ から $(0, 1)$ までの線分である。$\sinh a \to 0$ かつ $\cosh a \to 1$ なので、これは $a \to 0$ としたときの楕円の極限になっていることに注意しよう。

(ii) $y = \frac{1}{2}\pi$、$0 \leq x \leq a$ のとき $u = 0$、$v = \cosh x$ であり、v は 1 から $\cosh a$ まで増加する。これは v 軸上の $(0, 1)$ から楕円の最上点 $(0, \cosh a)$ までの線分である。

双曲線の分枝の頂点は $(0, \sin b)$ にあり、これは線分 (i) 上にある。図では $a = 1$、$b = \frac{1}{4}\pi$ としている。



線分 (i) は実線、線分 (ii) は破線で示している。両者を合わせると、v 軸上を -1 から楕円の最上点まで上っていく。もし代わりにすべての実数 x に対して $y = \frac{1}{2}\pi$ をとると、v 軸上の半直線 $v \geq 1$ が 2 重に得られる。これは問題で除外されている退化した場合 $\sin b = 1$ にあたる。

検算

- 2 つの 2 次曲線（conics）はともに焦点（foci）を $(0, \pm 1)$ にもつ。楕円については $\cosh^2 a - \sinh^2 a = 1$、双曲線については $\sin^2 b + \cos^2 b = 1$ だからである。共焦点（confocal）の楕円と双曲線は常に直角に交わるので、今回の結果と一致する。
- 数値的に確かめると、$a = 1$、$b = \frac{1}{4}\pi$ のとき $\sinh(1 + \frac{1}{4}\pi\mathrm{i}) \approx 0.8310 + 1.0911\mathrm{i}$ であり、$(\sinh 1 \cos \frac{1}{4}\pi,\ \cosh 1 \sin \frac{1}{4}\pi)$ と一致する。また、多数のランダムな (a, b) について、2 つの曲線の方程式と内積が零になることも確かめた。

よくある間違い

- $\mathrm{i}\sin y$ ではなく $\sinh(\mathrm{i}y) = \sin y$ と書いてしまう。こうすると u と v の役割が入れ替わってしまう。
- 「双曲線」と言うだけで、なぜ $v > 0$ の分枝だけが現れるのかを説明しない。
- $\cos b \neq 0$ を確認せずに、それで割ってしまう。条件 $\sin b < 1$ はまさにそのためにある。

STEP のその先へ

写像 $z \mapsto \sinh z$ は**等角**（conformal）である。導関数が零でない点では角を保つ。そのため、直線 $x =$ 定数 と $y =$ 定数 からなる直交する格子は、曲線からなる直交する格子に写らなければならない。ここではそれが共焦点の楕円と双曲線である。平板やスリットのまわりでラプラス方程式（Laplace's equation）を解くときに、このような「楕円座標」（elliptic coordinates）が現れるのはこのためである。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は等角写像を見事に解説しており、まさにこの種の図が数多く載っている。

解答例

STEP II 1989、第 4 問

純粋数学 ・ 分数関数のグラフ

> **STEP II 1989、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q4

鍵となる考え方

一次式の積や商は、対数微分（logarithmic differentiation）を用いるのが最も簡単である。対数をとると積が和に変わるからである。値域（range）については、問いを逆向きに考える。すなわち、どのような z に対して $\mathrm{f}(x) = z$ が実数解をもつか、を問うのである。この方程式は x についての二次方程式であるから、答えは判別式（discriminant）から得られる。グラフの概形は、零点（zeros）、極（poles）、$|x|$ が大きいときの振る舞い、そして取らない z の値があるかどうかから描ける。

問題文について一言注意しておく。条件 $a+d \neq c+d$ は $a \neq c$ を述べているにすぎず、これはすでにわかっている。実際に用いる条件は $a+b \neq c+d$ であり、以下ではこれを常に仮定する。

解答

導関数

$\mathrm{f}(x) \neq 0$ となるところ、すなわち $x \neq a, b$（かつ $x \neq c, d$）では、絶対値の対数をとることができる：

$$\ln|\mathrm{f}(x)| = \ln|x-a| + \ln|x-b| - \ln|x-c| - \ln|x-d|.$$

これを微分し、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x-k| = \frac{1}{x-k}$ を用いると、

$$\frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-c} - \frac{1}{x-d}.$$

ここで両辺に x を掛ける。$x \neq 0$ のとき各項は

$$\frac{x}{x-k} = \frac{1}{1-k/x} = \left(1-\frac{k}{x}\right)^{-1},$$

となり、求める恒等式

$$\frac{x\,\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \left(1-\frac{a}{x}\right)^{-1} + \left(1-\frac{b}{x}\right)^{-1} - \left(1-\frac{c}{x}\right)^{-1} - \left(1-\frac{d}{x}\right)^{-1}.$$

が得られる。

$|x|$ が大きいとき

$|x|$ が $|k|$ よりはるかに大きいとき、二項展開（binomial expansion）により $(1-k/x)^{-1} = 1 + \frac{k}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ である。先頭の 4 つの 1 は打ち消し合い（$1+1-1-1=0$）、

$$\frac{x\,\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \frac{a+b-c-d}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad \text{よって} \qquad \mathrm{f}'(x) = \frac{\mathrm{f}(x)}{x^2}\left[(a+b-c-d) + O\left(\tfrac{1}{x}\right)\right].$$

が残る。$a+b-c-d \neq 0$ であるから、$|x|$ が十分大きければ括弧内は $a+b-c-d$ と同じ符号をもつ。また $|x| \to \infty$ のとき $\mathrm{f}(x) \to 1$ であるから、そこでは $\mathrm{f}(x) > 0$ であり、さらに $x^2 > 0$ である。したがって、$|x|$ が大きいとき、実数直線の両端のいずれにおいても $\mathrm{f}'(x)$ は $a+b-c-d$ と同じ符号をもつ。

曲線が漸近線（asymptote）$y = 1$ のどちら側にあるかも記録しておく価値がある。直接計算すると

$$\mathrm{f}(x) - 1 = \frac{(c+d-a-b)x + ab - cd}{(x-c)(x-d)} \approx \frac{c+d-a-b}{x} \quad \text{十分大きな} |x|,$$

であり、分子を見ると $\mathrm{f}(x) = 1$ となる点はちょうど 1 つ、$x_0 = \dfrac{cd-ab}{c+d-a-b}$ であることがわかる。

値域の条件：方法

$\mathrm{f}(x) = z$ を $(x-a)(x-b) = z(x-c)(x-d)$ と変形すると、二次方程式

$$(1-z)x^2 - \big(a+b-(c+d)z\big)x + (ab - cdz) = 0.$$

が得られる。

- この方程式の解が $x = c$ や $x = d$ となることはない。そこでは左辺 $(x-a)(x-b)$ が 0 でないからである。よって、この二次方程式の実数解は、$\mathrm{f}(x) = z$ の実数解とちょうど一致する。

- $z \neq 1$ のとき、実数解が存在するための必要十分条件は、判別式 $\Delta(z) = \big(a+b-(c+d)z\big)^2 - 4(1-z)(ab-cdz)$ が ≥ 0 となることである。これを展開し、$(c-d)^2 > 0$ を掛けて z の累乗ごとに整理する。$P = (a-c)(b-d)$、$Q = (a-d)(b-c)$ とおくと、有用な恒等式は $P - Q = (a-b)(c-d)$ であり、これにより定数項 $(a-b)^2(c-d)^2$ は $(P+Q)^2 - 4PQ$ に等しい。すると与えられた不等式はちょうど $(c-d)^2\Delta(z) \geq 0$ となる。
- $z = 1$ のとき、方程式は x の係数が $c+d-a-b \neq 0$ の一次方程式であるから、解が存在する。また両辺の差は $(c-d)^2(a+b-c-d)^2 > 0$ であるから、不等式も成り立つ。

グラフの概形

$G(z) = \big[(c-d)^2 z + P + Q\big]^2 - 4PQ$ とおく。z を動かすと平方の部分は $[0, \infty)$ のすべての値をとるから、G の最小値は $-4PQ$ である。したがって

$$\text{関数f の値域は}\mathbb{R} \iff PQ \leq 0.$$

$PQ > 0$ のとき、$G(z) < 0$ となる z の値は開区間をなし、これらが取らない値である。

> **考えてみよう** 具体的な数値がなくても、PQ の符号はどうしてわかるのだろうか。

組み替えると $PQ = (a-c)(a-d)\cdot(b-c)(b-d)$ である。$a < c < d$ であるから、前半の組は負の数 2 つの積であり、正である。よって PQ は $(b-c)(b-d)$ と同じ符号をもち、これが負となるのは b が極 c と d の間にあるときに限る。すべては $c < d$ に対して b がどこにあるか、そして $a+b-c-d$ の符号によって決まる：

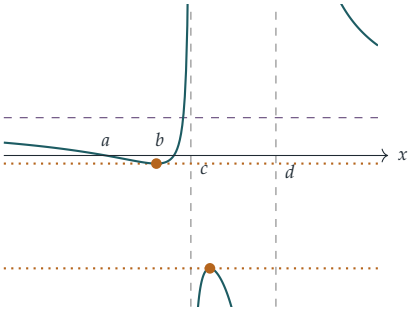
1. $a < b < c < d$：このとき自動的に $a+b < c+d$ である。
2. $a < c < b < d$：$a < c$ かつ $b < d$ であるから、やはり $a+b < c+d$ である。
3. $a < c < d < b$ かつ $a+b < c+d$。
4. $a < c < d < b$ かつ $a+b > c+d$。

よって値域が $\mathbb{R}$ 全体となるのは場合 2 のみである。場合 1、3、4 では、ある区間の値が取られない。

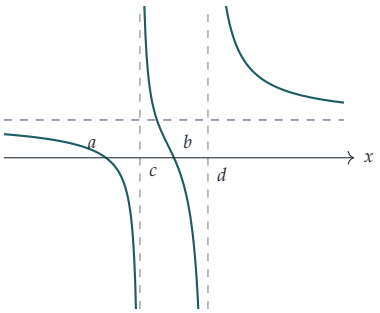
極値を調べるには、もう 1 つの道具が役立つ。f が x_1 で停留点（stationary point）をもち $f(x_1) = z_1$ ならば、x_1 は $(x-a)(x-b) - z_1(x-c)(x-d) = 0$ の重解（repeated root）である。（$z_1 = 1$ のときはこれが一次方程式になるので、このようなことは起こらない。）重解をもつことは $G(z_1) = 0$ を意味する。よって停留値は、取らない区間の

端点にちょうど一致する。場合 2 では常に $G > 0$ であるから、停留点はまったく存在しない。

各極のすぐ両側での f の符号は、負の因数の個数を数えればわかる。各図において、縦の破線は極 $x = c$、$x = d$、横の破線は漸近線 $y = 1$、琥珀色の点線は取らない区間の端点を表し、これは停留点（琥珀色の点）での値である。曲線は特定の値（各図の下に記す）で描いてあるが、その場合に属するどの選び方でも形は同じである。



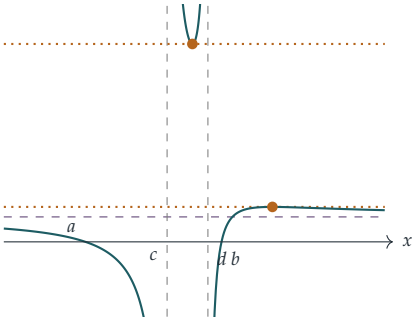
場合 1：$a, b, c, d = -2, 0, \frac{1}{2}, 3$



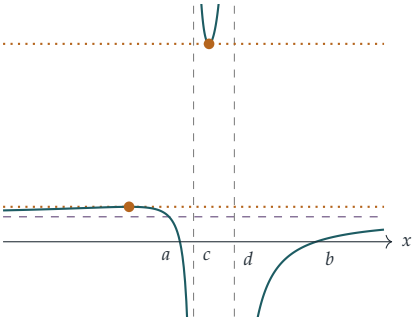
場合 2：$a, b, c, d = -1, 1, 0, 2$

場合 1 $(a < b < c < d)$。 このとき、十分左では $f < 1$、十分右では $f > 1$ である。$x < c$ では、曲線は 1 のすぐ下から入ってきて、a で 0 まで下がり、a と b の間で負の極小値まで下がった後、b を通って上昇し、c で $+\infty$ に至る。極の間では分母の 2 つの因数が異符号で分子は正であるから、両端で $f \to -\infty$ となり、その間に負の極大値をもつ。d の右側では、曲線は $+\infty$ から 1 へと下がる。(c, d) 上の極大値は (a, b) 上の極小値より小さく、その間にある値（端点を除く）は取られない。**値域は $\mathbb{R}$ 全体ではない。**

場合 2 $(a < c < b < d)$。 停留点は存在しない。曲線は 1 のすぐ下から a を通って下がり、c で $-\infty$ に至る。次に $+\infty$ から b を通って d で $-\infty$ に至る。最後に $+\infty$ から 1 へと下がる。中央の枝だけで、すべての実数値をとる。**値域は $\mathbb{R}$ 全体である。**



場合 3：$a, b, c, d = -3, 2, 0, \frac{3}{2}$



場合 4：$a, b, c, d = -\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, 0, \frac{3}{2}$

場合 3（$a < c < d < b$、$a + b < c + d$）。 $x < c$ では、曲線は 1 のすぐ下から a を通って下がり、$-\infty$ に至る。極の間では分子が負であるから、両端で $\mathrm{f} \to +\infty$ となり、極小値 m をもつ。d の右側では、$-\infty$ から b を通って上昇し、x_0 で $y = 1$ を横切り、1 のわずかに上で極大値 M に達した後、上側から 1 へと戻っていく。(M, m) の値は取られない。ただし $1 < M < m$ である。**値域は $\mathbb{R}$ 全体ではない。**

場合 4（$a < c < d < b$、$a + b > c + d$）。 これは場合 3 の外側の振る舞いを逆にしたものである。十分左では f は 1 のわずかに上にあって増加している。極大値 $M > 1$ に達した後、$x_0 < a$ で $y = 1$ を横切り、a を通って下がり、c で $-\infty$ に至る。中央の枝は、前と同じく極小値 m をもつ U 字形である。d の右側では、曲線は $-\infty$ から b を通って上昇し、下側から 1 に近づく。やはり (M, m) は取られない。**値域は $\mathbb{R}$ 全体ではない。**

検算

- 恒等式：無作為に選んだ a, b, c, d, x において、有限差分（finite difference）による $x\mathrm{f}'(x)/\mathrm{f}(x)$ の推定値は、右辺と約 10^{-9} の精度で一致する。
- 場合 1 で $a, b, c, d = -2, 0, \frac{1}{2}, 3$ のとき：$P = \frac{15}{2}$、$Q = \frac{5}{2}$、$(c-d)^2 = \frac{25}{4}$ であり、$G(z) = 0$ から $z = -\frac{8}{5} \pm \frac{4}{5}\sqrt{3}$、すなわち約 -0.2144 と -2.9856 が得られる。これらは $\mathrm{f}'(x) = 0$ を解いて求めた停留値（$x \approx -0.515$ と $x \approx 1.060$ における値）とちょうど一致する。4×10^5 個の点で f の値を調べても、その値が両者の間（端点を除く）に入ることは一度もない。
- 場合 3 と 4（図に描いた値）：取らない区間は $(1.4007, 7.9327)$ であり、やはり停留値と一致する。場合 2 では、$\mathrm{f}'(x) = 0$ は実数解をもたない。

よくある間違い

- $\mathrm{f}(x) = z$ が二次方程式となるのは $z \neq 1$ のときだけであることを忘れる。$z = 1$ の場合は別に一文を割いて扱う必要がある。
- 曲線が両端で $y = 1$ に同じ側から近づくと思い込む。実際はそうではない。$\mathrm{f} - 1 \approx (c + d - a - b)/x$ は x の符号とともに符号を変える。

STEP のその先へ

「f の値域は何か」を「どのような z に対して $\mathrm{f}(x) = z$ が解をもつか」に言い換えるのは、逆像（preimage）の考え方である。また、停留値とは 2 つの解が合流するところ

である、という観察は臨界値（critical values）の理論の出発点である。この例のような次数 2 の有理関数（rational function）は二対一の写像であり、その振る舞いは複素数（complex numbers）の範囲で考えるとはるかに明快になる。そこではすべての値が（重複度（multiplicity）を込めて数えて）ちょうど 2 回ずつとられる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、この幾何学的な見方を見事に展開している。

解答例

STEP II 1989、第 5 問

純粋数学 ・ 極方程式の曲線と反射

> **STEP II 1989、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q5

鍵となる考え方

小問 (i) は、$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ として $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta)/(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta)$ を計算するだけである。鏡については、O を中心とする極座標（polar coordinates）を用いるのが自然である。反射光線はつねに動径に沿って極へ戻ってくるからである。すると反射の法則（law of reflection）により、各点における法線（normal）の向きが θ だけで表される。それを小問 (i) によって $r(\theta)$ に関する 1 階の微分方程式（differential equation）に書き直すと、変数分離形（separable）になる。

解答

小問 (i)

極座標が (r,θ) である点の直交座標は $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ である。曲線 $r = r(\theta)$ 上では、これらはどちらも θ の関数であり、積の微分法（product rule）により

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta.$$

となる。$\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta \neq 0$ であるところでは、（媒介変数表示された曲線に対する）連鎖律（chain rule）により

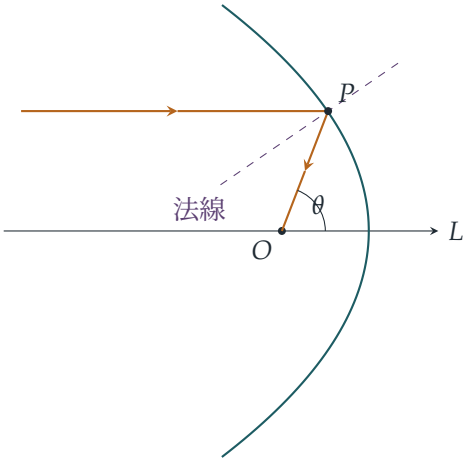
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\tan\theta + r}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} - r\tan\theta},$$

である。最後の等号では分母と分子を $\cos\theta$ で割った。これは $\cos\theta \neq 0$ であれば許される。以上が求める公式である。

小問 (ii)

平面曲線への帰着。 L を含む任意の平面 Π と、Π 上にある鏡の点 P をとる。P を通り L に平行な光線は Π 上にあり、O も同様である。したがって反射光線 PO も Π 上にある。P における法線は Π 上の 2 直線のなす角を二等分するから、これも Π 上にある。鏡と Π の交わりである曲線 C の P における接線（tangent）は、Π と鏡の接平面の両方に含まれるので、法線に垂直である。よって平面 Π 内で、C の P における法線は入射光線と反射光線のなす角を二等分する。こうして問題は 2 次元の問題になる。

座標。 Π において、O を極とし、L に沿う始線をもつ極座標を用いる。向きは、入射光線が $\theta = 0$ の方向に進むように定める（図のように、光線は鏡の開口部の向こう側から L に沿ってやってくる）。$P = (r, \theta)$ を C 上の点とする。



法線の向き。 P から見ると、入射光線は $(-1, 0)$ の方向へ戻り、反射光線は $(-\cos\theta, -\sin\theta)$ の方向へ O に向かう。どちらも単位ベクトルであるから、その和はこの 2 つのなす角の二等分線（bisector）、すなわち法線の方向を向く。

$$(-1 - \cos\theta, -\sin\theta) = -2\cos\tfrac{\theta}{2}\left(\cos\tfrac{\theta}{2}, \sin\tfrac{\theta}{2}\right),$$

ここで $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ と $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ を用いた。したがって P における法線は L と角 $\frac{\theta}{2}$ をなし、接線はそれに垂直であるから、P における C の傾きは

$$m = -\cot\tfrac{\theta}{2}.$$

である。

微分方程式。 $r' = \mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$, $t = \tan\theta$, $\tau = \tan\frac{\theta}{2}$ とおくと、$t = \dfrac{2\tau}{1-\tau^2}$ かつ $m = -\dfrac{1}{\tau}$ である。小問 (i) により

$$\frac{r't + r}{r' - rt} = m \quad \Longrightarrow \quad r'(t - m) = -r(1 + mt) \quad \Longrightarrow \quad \frac{r'}{r} = -\frac{1 + mt}{t - m}.$$

ここで

$$1+mt = 1-\frac{2}{1-\tau^2} = -\frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}, \qquad t-m = \frac{2\tau}{1-\tau^2}+\frac{1}{\tau} = \frac{1+\tau^2}{\tau(1-\tau^2)},$$

であるから、

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \tan\tfrac{\theta}{2}.$$

を得る。

考えてみよう 小問 (i) の式は $\cos\theta = 0$ のところで使えなくなる。これによって議論に穴が生じないだろうか。

生じない。方程式 $r'/r = \tan\frac{\theta}{2}$ に現れるのは $-\pi < \theta < \pi$ 上で連続な θ の関数だけである。この式は、孤立した値 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$（および接線が鉛直になる孤立点）を除くすべての点で成り立つので、r' の連続性により、それらの点でも成り立つ。（別の方法として、動径と接線のなす角 ψ は $\tan\psi = r/r'$ を満たし、幾何的な考察から直接 $\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ が得られる。こちらには例外点がない。）

解く。 $-\pi < \theta < \pi$ において $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ であることに注意して積分すると、

$$\ln r = \int \tan\tfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = -2\ln\cos\tfrac{\theta}{2} + \text{定数}, \qquad \text{よって} \qquad r = \frac{k}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2k}{1+\cos\theta}$$

となる。ここで $k > 0$ は定数である（$r > 0$ だから）。$\ell = 2k$ とおく。すると $r + r\cos\theta = \ell$、すなわち $r = \ell - x$ である。$r^2 = x^2 + y^2$ を用いて両辺を 2 乗すると

$$x^2 + y^2 = (\ell - x)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 = \ell^2 - 2\ell x.$$

これは軸が L、焦点（focus）が O の放物線（parabola）である（$X = \frac{\ell}{2} - x, a = \frac{\ell}{2}$ とすると $Y^2 = 4aX$ の形であり、焦点は $x = \frac{\ell}{2} - a = 0$ にある）。Π は L を含む任意の平面であったから、鏡はそのようなすべての平面と放物線で交わる。これが示すべきことであった。（実際には、定数 ℓ がどの平面でも同じになるのは、鏡が 1 つの回転放物面（paraboloid of revolution）である場合に限られる。ただし、この問題ではそこまでは必要ない。）

検算

- $\theta = 0$ のとき $r = \frac{\ell}{2}$ となる。すなわち頂点（vertex）は O と準線（directrix）$x = \ell$ のちょうど中間にあり、焦点が O の放物線として正しい。
- $\ell = 2, \theta = \frac{\pi}{2}$ のとき点は $P = (0,2)$ であり、そこでの $y^2 = 4 - 4x$ の傾きは $-1 = -\cot\frac{\pi}{4}$ である。方向 $(1,0)$ をこの接線に関して反射すると $(0,-1)$ となり、まっすぐ下の O に向かう。

- 数値的な確認：(i) の傾きの公式は、2000 本のランダムな曲線について有限差分と（10^{-8} の精度で）一致した。$r(0) = 1.35$ から出発して $r' = r\tan\frac{\theta}{2}$ をルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で解くと $r(2.5) = 13.5776380$ となり、$2.7/(1+\cos 2.5)$ と一致した。また、L に平行な光線を $y^2 = \ell^2 - 2\ell x$ で反射させると、ランダムに選んだ 1000 点のすべてで光線は O を通った。

よくある間違い

- 二等分線を取り違えること。光線に沿って P から**離れる**向きの 2 つの単位ベクトルの和が法線を与え、その差は接線を与える。
- 問題が平面の問題になる理由の説明を忘れること。L を通る平面は入射光線と O を含み、したがって反射光線と法線も含む。
- 積分定数を付けずに $\ln r = -2\ln\cos\frac{\theta}{2}$ と書くこと。これでは放物線の族全体が失われてしまう。

STEP のその先へ

方程式 $r(1+\cos\theta) = \ell$ は、焦点を極とし離心率（eccentricity）が 1 である円錐曲線（conic）の極方程式である。1 を e に置き換えると楕円（ellipse）や双曲線（hyperbola）が得られる。これはまさに、ニュートン（Newton）の運動方程式を極座標で解いたときに惑星の軌道が現れる形である。また、この反射の議論は、衛星放送用のパラボラアンテナや自動車のヘッドライトが回転放物面になっている理由でもある。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、この方法で円錐曲線の軌道を導いている。

解答例

STEP II 1989、第 6 問

純粋数学 ・ 逆関数の積分

> **STEP II 1989、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q6

鍵となる考え方

右辺には g の y に関する積分が含まれているので、左辺の積分を $y = \mathrm{f}(x)$ を用いて書き直す、すなわち $x = \mathrm{g}(y)$ と置換する（substitution）のが自然な方針である。新しい被積分関数には $y\,\mathrm{g}'(y)$ が現れる。これはまさに部分積分（integration by parts）を求めている形であり、境界項から長方形が生じる。第二の公式もまったく同様にして得られる。x を $x^2/2$ に、面積を y 軸のまわりの回転体の体積（volume of revolution）に置き換えればよい。

解答

第一の公式

$[a, b]$ 上で $\mathrm{f}'(x) > 0$ であるから、f はそこで狭義単調増加（strictly increasing）である。したがって f は $[a, b]$ から $[\alpha, \beta]$ への全単射（bijection）であり、逆関数（inverse function）$\mathrm{g}\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ が存在する。さらに g は微分可能であり、

$$\mathrm{g}'(y) = \frac{1}{\mathrm{f}'(\mathrm{g}(y))},$$

が成り立つ。f' は一度も 0 にならないので、この式は意味をもつ。

$x = \mathrm{g}(y)$ と置換すると、$\mathrm{f}(x) = y$ かつ $\mathrm{d}x = \mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y$ である。$x = a$ のとき $y = \mathrm{f}(a) = \alpha$ であり、$x = b$ のとき $y = \beta$ である。よって

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta y\,\mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y.$$

次に $u = y$、$\mathrm{d}v = \mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y$ として部分積分を行う。このとき $v = \mathrm{g}(y)$ である：

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta y\,\mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y &= \Big[y\,\mathrm{g}(y)\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \beta\,\mathrm{g}(\beta) - \alpha\,\mathrm{g}(\alpha) - \int_\alpha^\beta \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y \\ &= b\beta - a\alpha - \int_\alpha^\beta \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

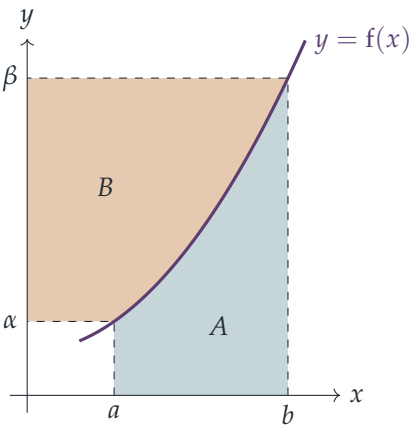
ここで $\mathrm{g}(\beta) = b$ および $\mathrm{g}(\alpha) = a$ を用いた。これが求める公式である。

幾何学的な意味

$a > 0$ かつ $\alpha > 0$ とする。f は増加関数なので $0 < a < b$ かつ $0 < \alpha < \beta$ であり、(a, α) から (b, β) までの $y = \mathrm{f}(x)$ の弧は第 1 象限にある。公式を次のように書き直す。

$$\underbrace{\int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{面積}A} + \underbrace{\int_\alpha^\beta \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y}_{\text{面積}B} = b\beta - a\alpha.$$

ここで A は $a \le x \le b$ の範囲で曲線と x 軸に挟まれた部分の面積であり、B は $\alpha \le y \le \beta$ の範囲で曲線と y 軸に挟まれた部分の面積である（曲線を横から見て $x = \mathrm{g}(y)$ とみなしている）。両者を合わせると、長方形 $[0, b] \times [0, \beta]$ から小さい長方形 $[0, a] \times [0, \alpha]$ を取り除いた領域をちょうど埋め尽くす。この L 字型の領域の面積は $b\beta - a\alpha$ である。



第二の公式

同じ置換 $x = \mathrm{g}(y)$、$\mathrm{d}x = \mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y$ を用いると

$$2\pi \int_a^b x\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_\alpha^\beta y\,\mathrm{g}(y)\,\mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y.$$

考えてみよう 今度はどの因子を積分すべきだろうか？

連鎖律（chain rule）により、$g(y)\,g'(y)$ は $\frac{1}{2}[g(y)]^2$ の導関数であることに注意する。そこで $u = y$、$v = \frac{1}{2}[g(y)]^2$ として部分積分を行う：

$$\begin{aligned} 2\pi \int_\alpha^\beta y\,g(y)\,g'(y)\,\mathrm{d}y &= 2\pi \left(\left[\tfrac{1}{2} y\,[g(y)]^2 \right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \tfrac{1}{2}[g(y)]^2\,\mathrm{d}y \right) \\ &= \pi(\beta b^2 - \alpha a^2) - \pi \int_\alpha^\beta [g(y)]^2\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

ここでも $g(\beta) = b$ と $g(\alpha) = a$ を用いた。これが第二の公式である。

第二の公式の幾何学的な意味

再び $a > 0$、$\alpha > 0$ とし、上の図を y 軸のまわりに 1 回転させる。

- 領域 A が描く立体の体積は、円筒殻法（method of cylindrical shells）により $2\pi \int_a^b x\,f(x)\,\mathrm{d}x$ である。実際、軸から距離 x の位置にある高さ $f(x)$、幅 $\mathrm{d}x$ の細い帯は、体積がおよそ $2\pi x\,f(x)\,\mathrm{d}x$ の円筒殻になる。
- 領域 B が描く立体の体積は、円板法（disc method）により $\pi \int_\alpha^\beta [g(y)]^2\,\mathrm{d}y$ である。実際、高さ y にある帯は半径 $g(y)$ の円板になる。
- 2 つの立体を合わせると、半径 b、高さ β の円柱から、その底面側にある半径 a、高さ α の同軸の円柱を取り除いた立体をちょうど埋め尽くす。その体積は $\pi b^2\beta - \pi a^2\alpha$ である。

つまりこの公式は、円筒殻による体積と円板による体積の和が、2 つの円柱の体積の差に等しいことを述べている。条件 $a > 0$ と $\alpha > 0$ により、2 つの領域はともに軸の一方の側にあり、かつ x 軸より上にあることが保証される。そのため、積分は確かに体積を表し、2 つの立体は重ならない。

検算

$[1,2]$ 上で $f(x) = x^2$ を試す。このとき $\alpha = 1$、$\beta = 4$、$g(y) = \sqrt{y}$ である。第一の公式では、左辺は $\frac{7}{3}$、右辺は $8 - 1 - \frac{2}{3}(8-1) = \frac{7}{3}$ となる。第二の公式では、左辺は $2\pi \cdot \frac{15}{4} = \frac{15\pi}{2}$、右辺は $\pi(16-1) - \pi \cdot \frac{15}{2} = \frac{15\pi}{2}$ となる。また、g を二分法（bisection）で求めたうえで、シンプソンの公式（Simpson's rule）により両方の公式を数値的にも確かめた。対象としたいくつかの関数のなかには $[\frac{1}{2},2]$ 上の $x^3 + x$ も含まれ、このとき第一の公式の両辺はともに 5.859375 となる。

よくある間違い

- 積分区間の変更を忘れる。$x = g(y)$ と置換したあとの積分区間は α と β であり、a と b ではない。
- g が存在して微分可能である理由を述べない。条件 $f' > 0$ はまさにそのためにある。
- 領域 B を曲線の下にある領域だと説明してしまう。実際には曲線と y 軸の間にある。

STEP のその先へ

第一の公式は、f と f^{-1} のグラフが $y = x$ に関して互いに対称であるという事実の積分版である。これはヤングの不等式（Young's inequality）の背後にある考え方である。すなわち、$f(0) = 0$ を満たす増加関数 f と $a, b \geq 0$ に対して $ab \leq \int_0^a f + \int_0^b f^{-1}$ が成り立つ。またこれは、凸解析（convex analysis）やハミルトン力学（Hamiltonian mechanics）で用いられるルジャンドル変換（Legendre transform）の背後にある考え方でもある。さらに、arcsin や ln のような逆関数の積分を、巧妙な置換を使わずに求める方法もこれである。置換積分と逆関数の丁寧な扱いについては、Abbott, *Understanding Analysis* を参照せよ。

解答例

STEP II 1989、第 7 問

純粋数学　・　2 階の微分方程式

> **STEP II 1989、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q7

鍵となる考え方

項 $x\,y''$ と $-b\,y'$ は組み合わせが扱いにくく見えるが、独立変数の変換（change of independent variable）$t = x^{\alpha}$ を行うと、y'' から 1 階導関数の項が現れ、これを $-b\,y'$ とちょうど打ち消し合うようにできる。そのように α を選ぶと、t についての単振動（simple harmonic motion）の方程式が残る。その後、$x \to 0$ のときの振る舞いは $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ に含まれる因子 x^{b} の振る舞いに帰着し、それは b の符号によって決まる。

解答

変数の変換

α は後で選ぶことにして $t = x^{\alpha}$ とおき、y を t の関数とみなす。$\dot{y} = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ とすると、合成関数の微分法（chain rule）により

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \alpha x^{\alpha-1}\dot{y},$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\dot{y} + \alpha^2 x^{2\alpha-2}\ddot{y},$$

となる。ここで 2 行目では積の微分法（product rule）と $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dot{y} = \alpha x^{\alpha-1}\ddot{y}$ を用いた。代入すると

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \alpha^2 x^{2\alpha-1}\ddot{y} + \alpha(\alpha-1-b)\,x^{\alpha-1}\dot{y}.$$

$\alpha = b+1$ と選べば $\dot{y}$ の項は消える。$b > -1$ であるから、この α は 0 でない。このとき $2\alpha - 1 = 2b+1$ であるから、方程式は

$$(b+1)^2 x^{2b+1}\ddot{y} + x^{2b+1}y = 0 \quad\Longrightarrow\quad \ddot{y} + \frac{y}{(b+1)^2} = 0,$$

となる。ここで $x^{2b+1} \neq 0$ で割った（$x > 0$ である）。これは t についての角振動数 $1/(b+1)$ の単振動であるから、

$$\boxed{y = A\cos\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}\right) + B\sin\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}\right)}$$

である。ただし A, B は任意定数である。2 階の方程式に対して定数が 2 つあるので、これが一般解（general solution）である。

$x \to 0$ のときの振る舞い

$u = x^{b+1}/(b+1)$ とおく。$b+1 > 0$ であるから、$x \to 0^+$ のとき $u \to 0^+$ であり、

$$y \to A\cos 0 + B\sin 0 = A.$$

したがって $y \to 1$ より $A = 1$ でなければならない。$\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = x^b$ を用いて微分すると

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^b\left(-\sin u + B\cos u\right) \qquad (A = 1).$$

$b > 0$ の場合。このとき $x^b \to 0$ であり、括弧の中は有限の値 B に近づく。よって **B の値にかかわらず** $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \to 0$ である。解の族

$$y = \cos\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}\right) + B\sin\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}\right), \qquad B \in \mathbb{R},$$

のどの解も両方の条件を満たす。解は存在するが、一意ではない。これが示すべきことであった。

> **考えてみよう** 通常の 2 階の方程式では、y の値と y' の値を 1 つずつ与えれば解が定まる。ここではなぜそれが成り立たないのか。

一意性定理（uniqueness theorem）は、方程式が $y'' = f(x, y, y')$ の形で、f が性質のよい関数であることを必要とする。x で割ると $y'' = (b/x)\,y' - x^{2b}y$ となり、係数 b/x は $x = 0$ で発散する。点 $x = 0$ は**特異点**（singular point）であり、通常の保証はそこでは適用されない。

$b = 0$ の場合。このとき $x^b = 1$ であり、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \to B$ となる。条件より $B = 0$ でなければならず、一意的な解 $y = \cos x$ が得られる。（これは単に $y'' + y = 0$ である。）

$-1 < b < 0$ の場合。このとき $x^b \to \infty$ である。$B \neq 0$ ならば $Bx^b\cos u \to \pm\infty$ となる一方、もう一方の項は小さい。実際、$\sin u \leq u$ であるから

$$\left|x^b \sin u\right| \leq x^b \cdot \frac{x^{b+1}}{b+1} = \frac{x^{2b+1}}{b+1}.$$

より正確には $\sin u/u \to 1$ であるから、$x^b \sin u \sim x^{2b+1}/(b+1)$ である。よって $B = 0$ でなければならず、このとき

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x^b \sin u \sim -\frac{x^{2b+1}}{b+1}.$$

これが 0 に近づくのは $2b+1 > 0$、すなわち $b > -\frac{1}{2}$ のとき、かつそのときに限る。$b = -\frac{1}{2}$ のときは -2 に近づき、$b < -\frac{1}{2}$ のときは有界でない。したがって $-\frac{1}{2} < b < 0$ のときは解がただ 1 つ $y = \cos\left(x^{b+1}/(b+1)\right)$ だけ存在し、$-1 < b \leq -\frac{1}{2}$ のときは解は存在しない。

結論

条件が一意的な解を定めるのは、ちょうど

$$-\tfrac{1}{2} < b \leq 0,$$

のときであり、その解は $y = \cos\left(x^{b+1}/(b+1)\right)$ である。



検算

- $b = 0$ のとき $y'' + y = 0$ となり、その解 $A\cos x + B\sin x$ は公式と一致する。
- 数値的にも、一般解は丸め誤差の範囲で方程式を満たす（無作為に選んだ x, b, A, B における差分近似による）。$b = -\frac{1}{4}, B = 0$ のとき、$x = 10^{-9}$ で $y' \approx -4.2 \times 10^{-5}$ となり、0 に近づいていく。$b = -\frac{1}{2}$ のときは値は -2 のままであり、$b = 1, B = 5$ のときは $x = 10^{-9}$ で 5×10^{-9} である。

よくある間違い

- 「$b \leq 0$ ならば一意」で止めてしまうこと。$-1 < b \leq -\frac{1}{2}$ のときは余弦の解でさえ $y' \not\to 0$ であり、解はまったく存在しない。
- $\alpha x^{\alpha-1}y$ を x で微分するときに積の微分法を忘れること。そこで現れる余分な項こそが、$-by'$ を打ち消すものである。

STEP のその先へ

点 $x = 0$ はこの方程式の**確定特異点**（regular singular point）である。このような点の近くでは、フロベニウス（Frobenius）の方法により $x^r \sum c_n x^n$ の形の解を探す。ここでの決定方程式（indicial equation）の根は $r = 0$ と $r = b + 1$ である。特異点におけるどのような条件で解が定まるかは、まさに上で見たとおり、これらの指数によって決まる。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は、級数解と確定特異点を扱っている。

解答例

STEP II 1989、第 8 問

純粋数学 ・ 変換群

> **STEP II 1989、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q8

鍵となる考え方

すべては一つの恒等式 $\Omega^3 = -1$ に基づいている。これにより Ω は第 1 行の二次方程式を満たし、Ω の任意の累乗を Ω の一次式に帰着できる。R と T が 4 点をどのように入れ替えるかがわかれば、数え上げは式ではなく 4 点についての問題になる。群は z_0 を 4 点のどれにも移さなければならず、しかも z_0 を動かさない相異なる写像をすでに 3 つ含んでいる。最後の小問では、R と T がどのような種類の置換（permutation）であるかを考えるとよい。

解答

恒等式

$\Omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ であるから $\Omega^3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$ であり、

$$0 = \Omega^3 + 1 = (\Omega + 1)(\Omega^2 - \Omega + 1).$$

$\Omega \neq -1$ であるから第 2 の因数が 0 となり、求める $\Omega^2 - \Omega + 1 = 0$ が得られる。

以下では、これを次の形で用いる。

$$\Omega^2 = \Omega - 1, \qquad \Omega^3 = -1, \qquad \Omega^4 = -\Omega.$$

また $2\Omega - 1 = 2\cos\frac{\pi}{3} - 1 + 2\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \mathrm{i}\sqrt{3} \neq 0$ にも注意する。

R と T は 4 点を置換する

R について、$\Omega^2 = e^{2i\pi/3}$ を掛けることは 0 を中心とする 120° の回転である。

$$R(0) = 0, \qquad R(1) = \Omega^2, \qquad R(\Omega^2) = \Omega^4 = -\Omega, \qquad R(-\Omega) = -\Omega^3 = 1.$$

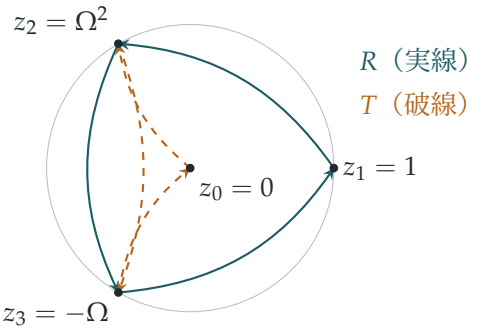
よって R は z_0 を固定し、$z_1 \to z_2 \to z_3 \to z_1$ と移す。

T について、各点を代入し $\Omega^2 = \Omega - 1$ を用いて簡単にする。

$$\begin{aligned}
T(0) &= \frac{\Omega^2}{1} = z_2, \\
T(1) &= \frac{\Omega + \Omega^2}{2\Omega^2 + 1} = \frac{2\Omega - 1}{2\Omega - 1} = 1 = z_1, \\
T(\Omega^2) &= \frac{\Omega^3 + \Omega^2}{2\Omega^4 + 1} = \frac{\Omega - 2}{1 - 2\Omega} = -\Omega = z_3, \\
T(-\Omega) &= \frac{-\Omega^2 + \Omega^2}{-2\Omega^3 + 1} = \frac{0}{3} = 0 = z_0.
\end{aligned}$$

3 行目では $\Omega^3 + \Omega^2 = -1 + (\Omega - 1) = \Omega - 2$ であり、最後の等号は $-\Omega(1 - 2\Omega) = -\Omega + 2\Omega^2 = -\Omega + 2\Omega - 2 = \Omega - 2$ から成り立つ。分母はすべて 0 でない（それぞれ 1、$i\sqrt{3}$、$-i\sqrt{3}$、3 である）。

よって T は z_1 を固定し、$z_0 \to z_2 \to z_3 \to z_0$ と移す。R と T はともに 4 点を置換し、いずれも 3-巡回置換（3-cycle）である。



群の位数は 12 以上である

R と T を含む最小の変換群（group）を G とする。すなわち、R、T およびそれらの逆変換を合成して作れるもの全体である。R と T は集合 $\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ をそれ自身の上に写す（その逆変換も、この有限集合の全単射（bijection）の逆であるから同様である）ので、G のすべての元はこの集合をそれ自身の上に写す。

z_0 を固定する 3 つの写像。 集合 $H = \{I, R, R^2\}$ は G に含まれ、その元はすべて z_0 を固定し、3 つは相異なる変換である（0°、120°、240° の回転）。

z_0 をあらゆる点に移す写像。上で求めた巡回を用いると、

$$g_0 = I, \qquad g_1 = R^2T, \qquad g_2 = T, \qquad g_3 = RT$$

は $g_k(z_0) = z_k$ を満たす。たとえば $RT(z_0) = R(z_2) = z_3$、$R^2T(z_0) = R^2(z_2) = R(z_3) = z_1$ である。

ここで、$k \in \{0,1,2,3\}$、$h \in H$ に対する 12 個の積 g_kh を考える。$h(z_0) = z_0$ であるから $g_kh(z_0) = z_k$ となる。

> **考えてみよう**　この 12 個の積のうち、2 つが同じ変換になることはあり得るだろうか？

あり得ない。$g_kh = g_lh'$ ならば、両辺を z_0 に施すと $z_k = z_l$ となるので $k = l$ である。次に左から g_k^{-1} を合成すると $h = h'$ を得る。したがって 12 個の積は G の相異なる元であり、$|G| \geq 12$ である。（群論の言葉でいえば、z_0 の軌道（orbit）の大きさは 4、その固定部分群（stabiliser）の大きさは 3 以上であるから、軌道・固定部分群定理（orbit–stabiliser theorem）により $|G| \geq 4 \times 3$ である。）

最後の小問

答えは「はい」である。4 点の 24 個の置換のうち、ちょうど半分は決して作ることができない。

> **考えてみよう**　置換として見たとき、R と T にはどのような共通点があるだろうか？

どちらも 3-巡回置換であり、3-巡回置換は**偶置換**（even permutation）である。たとえば $(z_1\,z_2\,z_3) = (z_1\,z_3)(z_1\,z_2)$ は 2 つの互換（transposition）の積である。それらの逆変換も 3-巡回置換である。偶置換の合成は偶置換であるから、R と T から得られる点の置換はすべて偶置換である。4 個のものの偶置換は 12 個しかないので、残りの 12 個、すなわち奇置換は決して得られない。たとえば、z_2 と z_3 を固定したまま z_0 と z_1 を入れ替える置換は 1 つの互換であるから奇置換であり、得ることはできない。

実は、前の小問と合わせると G が完全に決定できる。R と T はメビウス変換（Möbius map）であり（T については $ad - bc = \Omega - 2\Omega^4 = 3\Omega \neq 0$）、3 点を固定するメビウス変換は恒等変換であるから、G の各元は 4 点をどう置換するかによって決まる。よって $|G| \leq 12$ であり、前の小問と合わせて $|G| = 12$ となる。G はこれらの点に偶置換全体のなす群、すなわち A_4 として作用する。

検算

- 数値的に $|\Omega^2 - \Omega + 1| \approx 2 \times 10^{-16}$ であり、4 点で R と T の値を計算すると、上の 2 つの 3-巡回置換がそのまま得られる。
- $R^3 = I$ は明らかである。また、3-巡回置換であるべきとおり $T^3 = I$ も成り立つ（ランダムな点で 10^{-16} の精度で確認した）。
- R と T のあらゆる合成を計算機で生成すると、相異なる写像がちょうど 12 個得られ、いずれも偶置換を引き起こし、z_0 は 4 点すべてに移され、z_0 を固定する写像は 3 個である。

よくある間違い

- 「G は位数 3 の元を含むから $|G| \geq 12$ である」と論じること。位数 3 の元だけからは 3 が $|G|$ を割り切ることしかわからない。因数 4 をもたらすのは、4 点への推移性（transitivity）である。
- Ω の累乗を簡単にしないまま放置し、$T(\Omega^2) = -\Omega$ が誤りに見えてしまうこと。まずすべてを $a + b\Omega$ の形に帰着させること。

STEP のその先へ

$|G| =$ (軌道の大きさ) $\times$ (固定部分群の大きさ) という数え上げは軌道・固定部分群定理であり、偶置換全体は交代群（alternating group）A_4 をなす。これは正四面体（regular tetrahedron）の回転群でもある。ここでこのことが起こるのには美しい理由がある。メビウス変換は 4 点の複比（cross-ratio）を保ち、これら 4 点の複比は $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$ である。これは特別な「等非調和（equianharmonic）」の値で、この値を保つのはちょうど偶置換だけなのである。群と群作用については Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を、メビウス変換とリーマン球面（Riemann sphere）については Needham, *Visual Complex Analysis*（目で見る複素解析）を参照されたい。

解答例

STEP II 1989、第 9 問

純粋数学 ・ 行列の指数関数と連立系

> **STEP II 1989、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q9

鍵となる考え方

すべては一つの小さな計算にかかっている。$\mathbf{A}^2$ が単位行列（identity）になるのである。すると $\mathbf{A}$ の偶数乗はすべて $\mathbf{I}$、奇数乗はすべて $\mathbf{A}$ となるので、級数は指数関数の級数の偶数部分と奇数部分に分かれ、それぞれ $\cosh t$ と $\sinh t$ になる。微分方程式（differential equation）については、スカラーの場合の積分因子法（integrating-factor method）をそのまま真似て、行列 $\mathbf{F}$ に $\mathrm{e}^{\int a\,\mathrm{d}t}$ の役割を担わせればよい。

解答

行列 F

積を計算すると、

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-8 & 3-3 \\ -24+24 & -8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

したがって、すべての $k \geq 0$ に対して $\mathbf{A}^{2k} = (\mathbf{A}^2)^k = \mathbf{I}$、$\mathbf{A}^{2k+1} = \mathbf{A}^{2k}\mathbf{A} = \mathbf{A}$ である。$\mathbf{I} = \frac{t^0}{0!}\mathbf{A}^0$ と書き、級数を n が偶数の項と奇数の項に分けると（行列の級数の各成分は絶対収束（absolutely convergent）するスカラー級数の並べ替えなので、これは許される）、

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}\mathbf{A}^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\mathbf{A}^{2k+1} \\ &= \mathbf{I}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \mathbf{A}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \mathbf{I}\cosh t + \mathbf{A}\sinh t,\end{aligned}$$

となる。ここでマクローリン級数（Maclaurin series）$\cosh t = \sum t^{2k}/(2k)!$ および $\sinh t = \sum t^{2k+1}/(2k+1)!$ を用いた。これが求める形である。

逆行列

$\mathbf{G} = \mathbf{I}\cosh t - \mathbf{A}\sinh t$ とおく。$\mathbf{I}$ と $\mathbf{A}$ は可換（commute）なので、通常の数と同じように展開できる：

$$\mathbf{FG} = \mathbf{I}\cosh^2 t - \mathbf{A}^2\sinh^2 t + (\mathbf{A} - \mathbf{A})\cosh t \sinh t = \mathbf{I}(\cosh^2 t - \sinh^2 t) = \mathbf{I},$$

ここで $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ と $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ を用いた。同じ計算により $\mathbf{GF} = \mathbf{I}$ も得られるので、逆行列（inverse）は $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I}\cosh t - \mathbf{A}\sinh t$ である。

導関数

成分ごとに微分すると（行列 $\mathbf{I}$ と $\mathbf{A}$ は定数である）、

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{I}\sinh t + \mathbf{A}\cosh t, \qquad \text{一方} \qquad \mathbf{FA} = \mathbf{A}\cosh t + \mathbf{A}^2\sinh t = \mathbf{A}\cosh t + \mathbf{I}\sinh t.$$

両者は一致するので、$\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{FA}$ である。また、$\mathbf{F}$ は $\mathbf{I}$ と $\mathbf{A}$ から作られているので、$\mathbf{FA} = \mathbf{AF}$ が成り立つことにも注意しておく。

微分方程式

スカラーの方程式 $r' + ar = 0$ では、導関数が $\mathrm{e}^{at}a$ となる e^{at} を掛けて、左辺をちょうど一つの関数の導関数の形にする。行列 $\mathbf{F}$ はまさにこの性質 $\mathbf{F}' = \mathbf{FA}$ をもつので、方程式に $\mathbf{F}$ を**左から**掛ける：

$$\mathbf{F}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} + \mathbf{FAr} = \mathbf{0}.$$

積の微分法則（product rule）により（因数の順序を保つ限り、これは行列の積についても成り立つ）、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{Fr}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r} + \mathbf{F}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{FAr} + \mathbf{F}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t},$$

であり、これはちょうど左辺に等しい。よって方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{Fr}) = \mathbf{0},$$

を意味し、$\mathbf{Fr}$ は定ベクトル $\mathbf{c}$ である。

> ? **考えてみよう** なぜ右からではなく左から掛けるのか。また、$\mathbf{c}$ はどのように求めればよいか。

積 $\mathbf{rF}$ はそもそも定義されない（$\mathbf{r}$ は 2×1 の列ベクトルである）。また、積の微分法則から現れたのは $\mathbf{FAr}$ であり、これが項 $\mathbf{F}(\mathbf{Ar})$ と一致するのは $\mathbf{F}$ が左にあるときに限

る。定数を求めるには $t = 0$ とおけばよい。このとき $\cosh 0 = 1$、$\sinh 0 = 0$ なので $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ となり、

$$\mathbf{c} = \mathbf{I}\,\mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

次に、$\mathbf{Fr} = \mathbf{c}$ に、上で求めた $\mathbf{F}^{-1}$ を左から掛ける：

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \cosh t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \sinh t \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \cosh t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \sinh t \begin{pmatrix} -3\alpha - \beta \\ 8\alpha + 3\beta \end{pmatrix}.$$

成分を読み取ると、

$$x(t) = \alpha \cosh t + (3\alpha + \beta)\sinh t,$$
$$y(t) = \beta \cosh t - (8\alpha + 3\beta)\sinh t,$$

となり、求める結果が得られた。

検算

- $t = 0$ のとき、これらの式は当然そうなるべきとおり $x = \alpha$、$y = \beta$ を与える。
- 直接代入：$x' = \alpha \sinh t + (3\alpha + \beta)\cosh t$ であり、$-(-3x - y) = 3x + y = (3\alpha + \beta)\cosh t + \alpha \sinh t$ である（$9\alpha + 3\beta - 8\alpha - 3\beta = \alpha$ を用いた）。よって $x' = -(\text{第 1 成分：}\mathbf{Ar})$ であり、y についても同様である。
- 数値的にも、級数を 60 項まで足し合わせた結果は $\mathbf{I}\cosh t + \mathbf{A}\sinh t$ と一致し、$\alpha = 1$、$\beta = 0$ としてこの連立方程式をルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で解くと $x(2) \approx 14.6428$ となって、$\cosh 2 + 3\sinh 2$ と一致する。

よくある間違い

- $\mathbf{F}$ を右から掛けてしまうこと。あるいは、ここでそれが許される理由（$\mathbf{F}$ は $\mathbf{I}$ と $\mathbf{A}$ の一次結合なので可換である）に触れずに、$\mathbf{AF}$ と $\mathbf{FA}$ を区別なく書いてしまうこと。
- 級数を分けるときに $\mathbf{I}$ の項（$n = 0$ の項）を忘れ、$\cosh t$ の定数項 1 を落としてしまうこと。
- $-\mathbf{A}$ を $(\alpha, \beta)^{\mathrm{T}}$ に掛けるときの符号の誤り。

STEP のその先へ

行列 $\mathbf{F}$ は行列指数関数（matrix exponential）$e^{t\mathbf{A}}$ であり、ここでの方法は、$\mathbf{r}' = \mathbf{M}\mathbf{r}$ の解が常に $\mathbf{r} = e^{t\mathbf{M}}\mathbf{r}(0)$ となることを示している。本問では $\mathbf{M} = -\mathbf{A}$ であり、答えに $\mathbf{F}^{-1} = e^{-t\mathbf{A}}$ が現れるのはそのためである。一般には、$\mathbf{M}$ を対角化（diagonalisation）することで $e^{t\mathbf{M}}$ を計算する。本問の $\mathbf{A}$ は固有値（eigenvalue）± 1 をもち（$\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ が言っているのはまさにこのことである）、そこから $e^{\pm t}$、ひいては cosh と sinh が現れるのである。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）には行列指数関数と連立微分方程式についての優れた章があり、Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式入門）は線形連立微分方程式を詳しく扱っている。

解答例

STEP II 1989、第 10 問

純粋数学 ・ 直線と平面

> **STEP II 1989、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q10

鍵となる考え方

空間内の 2 直線がただ 1 点で交わらない場合は 3 通りある。同一の直線である場合、平行である場合、そして異なる平面上にあって互いにすれ違う**ねじれの位置**（skew）にある場合である。したがって「ちょうど 1 点」であるためには 2 つの条件が必要である。すなわち、方向が平行でないことと、2 直線が共通の平面上にあることである。外積（cross product）を用いると、この両方を一度に扱える。平面については、交線は法線ベクトル（normal）の外積の方向に伸びており、最後の小問は形を変えた最初の小問にほかならない。

解答

前半：2 直線がちょうど 1 点で交わるのはいつか

2 直線は $\mathbf{a}+\lambda\mathbf{u}=\mathbf{b}+\mu\mathbf{v}$ となるところ、すなわち

$$\lambda\mathbf{u}-\mu\mathbf{v}=\mathbf{b}-\mathbf{a}.$$

となるところで交わる。これらが本当に直線であるためには $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$ かつ $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ でなければならない。そのうえで次のようになる。

- $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ が平行（$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$）ならば、2 直線は平行で異なる（共有点なし）か、一致する（共有点は無数）かのいずれかである。どちらの場合も、ちょうど 1 点ではない。
- $\mathbf{u}\times\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ ならば、$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ は 1 つの平面を張り、上の方程式が解をもつのは、$\mathbf{b}-\mathbf{a}$ がその平面内にあるとき、すなわち $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ に垂直であるときに限る。解が存在すれば、$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ が 1 次独立（independent）であるから、その解はただ 1 つである。

よって条件は

$$\mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \quad (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0.$$

である。（最初の 2 つは 3 つ目から導かれるが、明記しておく価値はある。）最後の条件が成り立たなければ、2 直線はねじれの位置にある。

中盤：2 つの平面

法線ベクトルは $\mathbf{n}_1 = (1, 1, b)$ と $\mathbf{n}_2 = (b, b, 1)$ であり、

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \left(1 - b^2,\ b^2 - 1,\ 0\right) = (1 - b^2)(1, -1, 0).$$

である。2 平面が直線で交わらないのは、法線ベクトルが平行であるときに限り、ここでは $1 - b^2 = 0$ のとき、つまり $b = 1$ または $b = -1$ のときである。

- $b = 1$：どちらの方程式も $x + y + z = 3$ となる。
- $b = -1$：方程式は $x + y - z = 1$ と $-x - y + z = -1$ であり、これもまた同じ平面である。

したがって、どちらの場合も 2 平面は平行で離れているのではなく、一致する。

次に $b \neq \pm 1$ とする。交線は $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ の方向に伸びるので、$\mathbf{u} = (1, -1, 0)$ を用いることができる。交線上の点を求めるために、x と y は $s = x + y$ の形でしか現れないことに注目する。

$$s + bz = b + 2, \qquad bs + z = 2b + 1.$$

第 2 式から第 1 式の b 倍を引くと $(1 - b^2)z = 1 - b^2$ となるので $z = 1$ であり（$b^2 \neq 1$ であるから割ってよい）、このとき $s = 2$ である。したがって交線は $x + y = 2, z = 1$ であり、b によらない。

この直線上の点 $\mathbf{a}$ で、$\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = 0$、すなわち $x - y = 0$ を満たすものが必要である。$x + y = 2$ と合わせると $x = y = 1$ となるので、

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b \neq \pm 1.$$

である。点 $\mathbf{a}$ は原点からこの直線に下ろした垂線の足である。

最後の小問

両方の方程式 $(*)$ を満たす座標をもつ点全体は、$b \neq \pm 1$ のときは上の直線となり、$b = \pm 1$ のときは平面全体となる。場合を分けて扱う。

考えてみよう $b=\pm1$ のとき、両方の方程式を満たす点全体はどのような集合か？

2 平面が一致することがわかっているので、それは空集合ではなく平面全体である。このことにより、これらの場合の答えはまったく変わってくる。

$b\neq\pm1$ の場合。 与えられた直線が、直線 $\mathbf{r}=(1,1,1)+\lambda(1,-1,0)$ とちょうど 1 点で交わる必要がある。前半の結果を $\mathbf{a}=(1,1,1)$, $\mathbf{u}=(1,-1,0)$, $\mathbf{b}=(0,0,c)$, $\mathbf{v}=(1,d,0)$ として適用する。すると

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(0,\,0,\,d+1),\qquad(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=(-1,-1,c-1)\cdot(0,0,d+1)=(c-1)(d+1).$$

となる。$\mathbf{u}\times\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ が必要なので $d\neq-1$ であり、このとき $(c-1)(d+1)=0$ から $c=1$ が導かれる。よって条件は $c=1$ かつ $d\neq-1$ である。（直接確かめると、与えられた直線上では $z=c$ であるから、$z=1$ と交わるのは $c=1$ のときに限り、そのとき $x+y=\mu(1+d)=2$ は $d\neq-1$ ならばただ 1 つの解 $\mu=2/(1+d)$ をもつ。）

$b=\pm1$ の場合。 今度は、与えられた直線が平面とちょうど 1 点で交わる必要がある。点 $(\mu,d\mu,c)$ が $x+y+z=3$（$b=1$ の場合）上にあるのは $\mu(1+d)=3-c$ のときであり、$x+y-z=1$（$b=-1$ の場合）上にあるのは $\mu(1+d)=1+c$ のときである。いずれの方程式も、μ についてちょうど 1 つの解をもつための必要十分条件は $1+d\neq0$ である。$d=-1$ ならば直線は平面に平行であり、解は存在しないか無数にある。この場合、c は任意である。

答え。 そのような点がちょうど 1 つ存在するための必要十分条件は

$$d\neq-1\quad\text{かつ}\quad\big(c=1\text{ または }b=\pm1\big),$$

であり、簡潔に書けば $d\neq-1$ かつ $(b^2-1)(c-1)=0$ である。

検算

- $(1+\lambda,1-\lambda,1)$ を $(*)$ に代入すると、すべての b と λ について $2+b=b+2$ および $2b+1=2b+1$ となる。
- $b=2,c=1,d=3$ のとき、点は $\mu=\frac{1}{2}$、すなわち $(\frac{1}{2},\frac{3}{2},1)$ であり、$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+2=4=b+2$ かつ $1+3+1=5=2b+1$ となる。
- コンピュータを用いて、$\{-3,\ldots,3,\frac{1}{2},-\frac{5}{3}\}$ に属するすべての b,c,d（729 通り）について、厳密な算術で μ を直接解いて調べたところ、解の個数が 1 になるのは、述べた条件が成り立つときに限られた。

よくある間違い

- 2 直線が平行でないというだけで、1 点で交わると述べてしまう。3 次元では、ねじれの位置にある場合がある。
- $b = \pm 1$ のとき 2 平面は平行で離れていると思い込み、点はまったく存在しないと結論してしまう。右辺を確認すること。2 平面は一致している。
- $1 - b^2$ が 0 でない理由を述べずに、$1 - b^2$ で割ってしまう。

STEP のその先へ

これは形を変えた小さな連立 1 次方程式（system of linear equations）である。3 つの未知数に関する 2 つの方程式は、係数行列の階数（rank）が 2 のときは解全体が直線となり、階数が 1 のときは平面（または空集合）となる。これに直線の媒介変数表示を加えると、μ に関する方程式の個数が未知数より多い優決定系（overdetermined system）となり、「ちょうど 1 つの解をもつ」というのは階数と解の存在（無矛盾性）に関する主張となる。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、ここに現れる行の見方（平面の交わり）と列の見方（ベクトルの 1 次結合）から、これらすべてを組み立てている。

解答例

STEP II 1989、第 11 問

力学 ・ 連結された質点と力積

> **STEP II 1989、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q11

鍵となる考え方

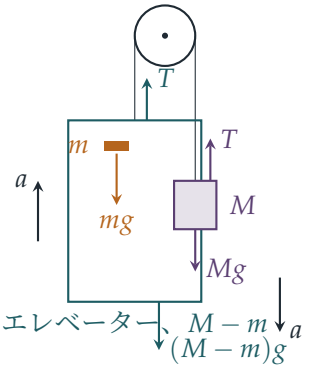
はじめにエレベーター（lift）と釣り合いおもり（counterweight）は釣り合っているので、エレベーターの質量 M にはタイルが含まれていなければならない。タイルが外れると、エレベーターは釣り合いおもりより軽くなって上向きに加速し、一方タイルは自由落下するので、床がタイルを迎えに上昇していくことになる。衝突については、エレベーター、ケーブル、釣り合いおもりをケーブルに沿って動く一つの系として扱う。この系の「ケーブルに沿った運動量（momentum）」は重力によってのみ変化し、衝突による力積（impulse）は系の内部のものである。

解答

モデルの設定

エレベーター、釣り合いおもり、タイルを質点とみなし、ケーブルは軽く伸び縮みしない（inextensible）ものとし、なめらかで軽い滑車にかかっているとする。ガイドはなめらかなので、鉛直方向の力は及ぼさない。タイルが落ちる前、系は両側の質量が M と M の状態で静止している。したがって、エレベーターの質量 M はタイルを含んでいる。（もし含んでいなければ、エレベーター側の重さは $(M+m)g$ となって Mg と釣り合わず、静止していられない。）

タイルが外れた後、エレベーターの質量は $M-m$、釣り合いおもりの質量は M であり、タイルは自由な質点となる。



床に届くまでの時間

エレベーターが上向きに加速度 a で加速するとすると、釣り合いおもりは下向きに a で加速する。ケーブルの張力（tension）を T とする。ニュートンの第二法則（Newton's second law）より

$$\begin{aligned} \text{エレベーター（上向き）：} &\quad T-(M-m)g=(M-m)a, \\ \text{釣り合いおもり（下向き）：} &\quad Mg-T=Ma. \end{aligned}$$

二つの式を足すと T が消去され、

$$a=\frac{mg}{2M-m}, \qquad T=M(g-a)=\frac{2M(M-m)g}{2M-m}>0,$$

となるので、ケーブルはたるまない。

> **考えてみよう** なぜ単に「タイルは重力のもとで距離 h だけ落下する」と言えないのか？

床も動いているからである。タイルは下向きに g で、床は上向きに a で、どちらも静止状態から加速する。したがって、すき間は一定の相対加速度

$$g+a=g+\frac{mg}{2M-m}=\frac{2Mg}{2M-m}.$$

で縮まっていく。すき間ははじめ h なので、タイルが着地するのは $\frac{1}{2}(g+a)t^2=h$ となるときであり、これより

$$t^2=\frac{2h}{g+a}=\frac{(2M-m)h}{Mg}, \qquad t=\sqrt{\frac{(2M-m)h}{Mg}}.$$

これは問題文に印刷された式ではない。印刷された式では $2M-m$ の代わりに $2(M-m)$ となっている。二つが一致するのは $m=0$ のときだけであり、我々の値は後で運動を数値的に追跡することで確認する。印刷された形になるには、エレベータ

ーの加速度が $mg/(M-m)$ でなければならない。これは、釣り合いおもりも加速させなければならないことを忘れ、張力が Mg のままであるとみなした場合に得られる値である。印刷された式は、元の問題の誤植か誤りであると考えられる。問題の残りの部分はこれに依存しない。

衝突

衝突の直前、エレベーターは上向きに、釣り合いおもりは下向きに、どちらも速さ $u = at$ で動いている。タイルは下向きに速さ $v = gt$ で動いている。すると

$$(2M-m)u = (2M-m)\cdot\frac{mg}{2M-m}\,t = mgt = mv.$$

では衝突を考えよう。エレベーターが上向き・釣り合いおもりが下向きとなる向き、すなわちケーブルが両者を一緒に運ぶ向きを「正」とする。衝突はごく短時間なので、有限の力（重力）による力積は無視できる。力積は、エレベーターとタイルの内部のものであるタイルと床の間の力積と、ケーブルの撃力的な張力 J だけである。衝突後の共通の速さを w とする（エレベーターとタイル、質量 M は上向き、釣り合いおもりは下向き）。衝突は完全非弾性衝突（perfectly inelastic collision）なので、タイルは最終的に床と一緒に動く。すると

$$\begin{aligned}\text{エレベーターとタイル：}\quad & Mw - \big[(M-m)u - mv\big] = J,\\ \text{釣り合いおもり：}\quad & Mw - Mu = -J.\end{aligned}$$

これらを足すと

$$2Mw = (M-m)u + Mu - mv = (2M-m)u - mv = 0,$$

したがって $w = 0$ であり、エレベーターは静止する。（また $J = Mu > 0$ なので、ケーブルはたるむのではなく実際にぴんと引っ張られ、仮定と矛盾しない。）衝突後は質量が再び M と M になって釣り合うので、すべてが静止したままである。

> ? **考えてみよう** なぜ衝突直前の「ケーブルに沿った運動量」の総和はゼロなのか？

衝突前、三つの物体に働く外力のうち運動の方向に沿うものは重力だけであり、上で定めた正の向きでの正味の効果は $Mg - (M-m)g - mg = 0$ である。（滑車からの抗力は仕事をせず、ケーブルは内部のものである。）したがって、この運動量は常に初期値 0 のままである。衝突もこれを変えることはできない。

失われるエネルギー

系は静止状態から始まり静止状態で終わるので、失われる力学的エネルギーは、始めと終わりの間の重力による位置エネルギー（potential energy）の減少量に等しい。落

下の間にエレベーターが s_1 上昇し（したがって釣り合いおもりは s_1 下降し）、タイルが s_2 落下したとする。タイルは h のすき間を埋めるので $s_1 + s_2 = h$ である。位置エネルギーの変化は

$$(M-m)g\,s_1 - Mg\,s_1 - mg\,s_2 = -mg(s_1+s_2) = -mgh.$$

衝突後は何も動かないので、失われるエネルギーは求めるとおり mgh である。衝突直前にあった運動エネルギー（kinetic energy）はすべて衝突で失われる。この議論では t の値をまったく使っていないことに注意しよう。

検算

- $m \to 0$ とすると、$a \to 0$ かつ $t \to \sqrt{2h/g}$ となり、これは静止した床への自由落下である。どちらの式もこのテストに合格するので、これでは両者を区別できない。
- $M = 5$、$m = 1$、$h = 1$、$g = 9.8$ として運動を数値的に追跡すると $t \approx 0.4286\,\mathrm{s}$ となり、$\sqrt{9/49} \approx 0.4286$ と一致する。印刷された式では $\sqrt{8/49} \approx 0.404\,\mathrm{s}$ となる。
- 同じシミュレーションで、衝突直前の運動エネルギーは有効数字 5 桁まで mgh に等しく、衝突後の速さは丸め誤差の範囲でゼロである。

よくある間違い

- エレベーターの質量を M にタイルを**加えた**ものとしてしまう。そうすると系は静止状態から始まることができない。
- 釣り合いおもりの慣性（inertia）を忘れ、エレベーターの加速度が $mg/(M-m)$ となってしまう。
- 衝突において、エレベーターとタイルだけで線形運動量保存則を使い、ケーブルの撃力的な張力を無視してしまう。

STEP のその先へ

ここで用いた「ケーブルに沿った運動量」は**一般化運動量**（generalised momentum）である。自由度（degree of freedom）が 1 の系で、座標は滑車を通過したケーブルの長さである。ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）はこれを体系化する。力が正味の効果をもたない座標のそれぞれに対して保存される一般化運動量が対応し、撃力的な拘束も同じように扱われる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、糸と滑車でつながれた系や、衝突における力積とエネルギーを丁寧に

扱っている。

解答例

STEP II 1989、第 12 問

力学 ・ 剛体のつり合い

> **STEP II 1989、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q12

鍵となる考え方

薄板（lamina）にはたらく力は三つだけである。重力と、二本のペグ（peg）からの抗力（reaction）である。なめらかなペグは接している辺に垂直に押すので、長方形の場合、それぞれの抗力はもう一方の辺に平行な向きになる。互いに平行でない三つの力で物体がつり合い（equilibrium）の状態に保たれるには、それらの作用線（line of action）が一点で交わらなければならない。したがって、二つの抗力の作用線の交点は、重心を通る鉛直線上にある。二つの結果はどちらも、この一つの事実と、ペグが同じ高さにあるという条件から導かれる。

解答

設定

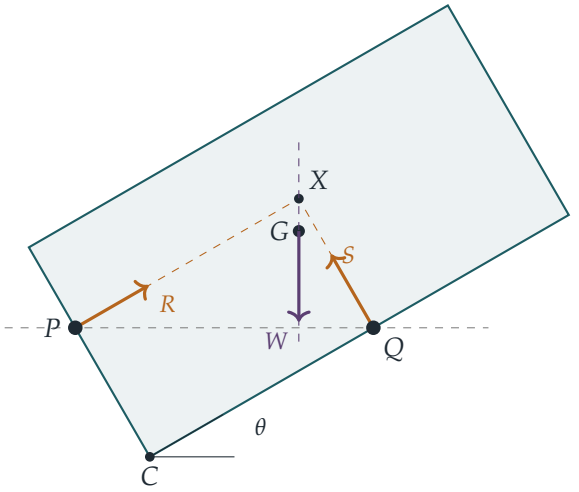
薄板を、重さ W、中心 G の一様な剛体の長方形とみなし、ペグを同じ高さにあるなめらかな点 P と Q とみなす。最も低い頂点を C とする。C を通る長さ $2a$ の辺が P に載っており、$CP = p$ である。また C を通る長さ $2b$ の辺が Q に載っており、$CQ = q$ である。$2b$ の辺は水平と鋭角 θ をなすので、それに垂直な $2a$ の辺は鉛直と角 θ をなす。

辺に沿った座標を使うのが最も簡単である。C から、$2b$ の辺に沿って u を、$2a$ の辺に沿って v を測る。すると

$$C = (0,0), \qquad P = (0,p), \qquad Q = (q,0), \qquad G = (b,a).$$

点 (u,v) の C からの水平方向および鉛直方向の変位は

$$x = u\cos\theta - v\sin\theta, \qquad y = u\sin\theta + v\cos\theta.$$



抗力の作用線は G を通る鉛直線上で交わる

P における抗力 R は $2a$ の辺に垂直なので、$2b$ の辺に平行である。すなわち、その作用線は $v = p$ である。同様に、Q における抗力 S は $u = q$ に沿ってはたらく。これらの直線は $X = (q, p)$、すなわち長方形 $CPXQ$ の第四の頂点で交わる。

X のまわりのモーメント（moment）を考えると、二つの抗力のモーメントは 0 なので、重力のモーメントも 0 でなければならない。つまり、G を通る鉛直線は X を通る。言い換えれば、X と G の水平座標は等しい：

$$q\cos\theta - p\sin\theta = b\cos\theta - a\sin\theta, \qquad \text{すなわち、} \qquad (q-b)\cos\theta = (p-a)\sin\theta. \quad (1)$$

（力を分解（resolving）すると $R = W\sin\theta$、$S = W\cos\theta$ が得られ、どちらも正であるから、ペグは実際にこれらの力を与えることができる。）

第一の結果

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるから、$\cos\theta$ と $\sin\theta$ はともに正である。よって (1) より、$q - b$ と $p - a$ は同符号である。$p < a$ ならば (1) の右辺は負なので $q - b < 0$、すなわち $q < b$ である。これが求める結果である。頂点が $2a$ の辺上のペグから a 未満の距離にあれば、もう一方のペグからは b 未満の距離にある。

考えてみよう　なぜここで問題が終わらないのだろうか。d はどこで関わってくるのだろうか。

式 (1) はモーメントの条件しか使っていない。まだ d については何も述べておらず、しかも p と q は独立ではない。ペグは同じ高さにあり、互いに d だけ離れているからである。ここで、この二つの事実を取り入れる。

d との関係

ペグは同じ高さにあるので、P と Q の y 座標は等しい：

$$p\cos\theta = q\sin\theta, \qquad \text{よって} \qquad p = q\tan\theta. \tag{2}$$

両者の水平方向の距離は d である：

$$d = x_Q - x_P = q\cos\theta + p\sin\theta = q\cos\theta + \frac{q\sin^2\theta}{\cos\theta} = \frac{q}{\cos\theta}. \tag{3}$$

（同じことであるが、CPQ は C を直角とする直角三角形で、斜辺 $PQ = d$ が水平なので、$q = d\cos\theta$、$p = d\sin\theta$ である。）

ここで、(1) の第一の形の左辺に $q = d\cos\theta$ と $p = d\sin\theta$ を代入すると

$$\begin{aligned} b\cos\theta - a\sin\theta &= q\cos\theta - p\sin\theta \\ &= d\cos^2\theta - d\sin^2\theta \\ &= d\cos 2\theta, \end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。

検算

- 正方形の場合 $a = b$、$\theta = \frac{\pi}{4}$：両辺はともに 0 である。対称性により対角線 CG は鉛直なので、これは矛盾しない。また、正方形を対称に置いたときに当然そうあるべきように、この式はすべての d に対して成り立つ。
- $a = 1$、$b = 2$、$\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき、つり合うためには $q = d\cos\theta$ かつ $d = (b\cos\theta - a\sin\theta)/\cos 2\theta \approx 2.4641$ が必要である。このとき $p \approx 1.2321 > a$、$q \approx 2.1340 > b$ となり、(1) と矛盾しない。$R = W\sin\theta$、$S = W\cos\theta$ として G のまわりのモーメントをとると 0 になる。
- 数値的に、10^5 個を超えるランダムなつり合いの状態（ペグが辺上にあるようなランダムな a、b、θ）がすべて 10^{-14} 以内の誤差でこの恒等式を満たし、「$p < a \Rightarrow q < b$」に反する例は一つもなかった。

よくある間違い

- ペグからの抗力を鉛直と考えてしまうこと。なめらかな接触面からの力は、地面に垂直ではなく、**接触面**（ここでは薄板の辺）に垂直にはたらく。
- どの辺が水平と角 θ をなすのかを取り違えること。$2a$ の辺は**鉛直**と角 θ をなす。

STEP のその先へ

三力の原理は、剛体の静力学（statics）の一般論の特別な場合である。力の系がつり合うのは、合力と、任意の一点のまわりの合モーメントがともに 0 になるとき、かつそのときに限る。大学では、これはレンチ（wrench）や仮想仕事（virtual work）の言葉で語られるようになる。仮想仕事の方法では、薄板がペグとの接触を保つという条件のもとで G の高さを最小化することにより、このつり合いの位置を求めることになる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の静力学とトルク（torque）を丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 1989、第 13 問

力学 ・ 慣性モーメント

> **STEP II 1989、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q13

この問題は、*Beyond STEP* の第 11.7 節「棒の中のシンプソンの公式」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/simpsons-rod.html

鍵となる考え方

すべては慣性モーメント（moment of inertia）に関する二つの事実に基づいている。平行軸の定理（parallel axis theorem）によれば、任意の軸のまわりの慣性モーメントは、質量、重心（centre of mass）、そして重心を通る平行な軸のまわりの慣性モーメントによって決まる。また、慣性モーメントは**加法的**（*additive*）であるから、物体をいくつかの部分に切り分け、各部分をそれと等価なものに置き換えることができる。薄板（lamina）は細い棒（rod）を積み重ねたものであるから、棒一本の置き換え方がわかれば、薄板を置き換えることができる。

解答

すべての軸についての等価性

ℓ を任意の軸とし、ℓ_O を O を通り ℓ に平行な軸とし、その ℓ からの距離を d とする。物体と質点（particle）系はともに質量 m、重心 O をもつから、それぞれに平行軸の定理を適用できる：

$$I_\ell^{\text{物体}} = I_{\ell_O}^{\text{物体}} + md^2, \qquad I_\ell^{\text{質点系}} = I_{\ell_O}^{\text{質点系}} + md^2.$$

ℓ_O は O を通るので、仮定より $I_{\ell_O}^{\text{物体}} = I_{\ell_O}^{\text{質点系}}$ である。よって二つの右辺は等しく、すべての軸 ℓ について $I_\ell^{\text{物体}} = I_\ell^{\text{質点系}}$ が成り立つ。これが示すべきことであった。

一様な棒

棒を x 軸に沿って $x=-a$ から $x=a$ まで置く。このとき重心 O は原点である。質量 p, q, r の質点をそれぞれ $x=-a, 0, a$ に置く。全質量が m で重心が O であるためには

$$p+q+r=m, \qquad -pa+ra=0,$$

が必要であるから、$r=p$ かつ $q=m-2p$ である。

次に、O を通り棒と角 θ をなす任意の軸を考える。位置 x にある棒上の点とこの軸との距離は $|x|\sin\theta$ である。したがって、O を通る軸のまわりの慣性モーメントはすべて $\sum(\text{質量})\,x^2$ の $\sin^2\theta$ 倍であり、この一つの和が一致すれば十分である。棒については、各微小部分の質量が $\frac{m}{2a}\,\mathrm{d}x$ であるから

$$\int_{-a}^{a}\frac{m}{2a}\,x^2\,\mathrm{d}x=\frac{m}{2a}\cdot\frac{2a^3}{3}=\tfrac{1}{3}ma^2,$$

であり、質点系については $pa^2+q\cdot 0+pa^2=2pa^2$ である。$p=\frac{1}{6}m$ のとき、これらはすべての θ について一致する。よって棒は次の質点系と力学的に等価（dynamically equivalent）である：

$$\tfrac{1}{6}m\text{(両端それぞれ)}, \qquad \tfrac{2}{3}m\text{(中点)}.$$

前半の結果により、このとき両者は O を通る軸に限らず、**任意の**軸のまわりで同じ慣性モーメントをもつ。

長方形の薄板

長方形の中心を O、辺の長さを $2a$（x 軸に平行）と $2b$ とする。このとき単位面積あたりの質量は $M/(4ab)$ である。これを x 軸に平行な細い帯に切り分ける。高さ y にある幅 δy の帯は、長さ $2a$、質量 $\delta M=\frac{M}{2b}\,\delta y$ の一様な棒である。

> **考えてみよう**　帯の中心は O にない。それでも各帯をその三つの質点で置き換えてよいのはなぜか。

これこそが前半の結果の役割である。各帯は、帯自身の中心を通る軸に限らず**すべての**軸のまわりで、その三つの質点と同じ慣性モーメントをもつ。慣性モーメントは加え合わせられるので、薄板は任意の軸のまわりで、置き換えたすべての質点の集まりと同じ慣性モーメントをもつ。各帯の置き換えは帯と同じ質量と重心をもつから、その集まりも全質量 M、重心 O をもつ。

高さ y の帯は、$(\pm a, y)$ のそれぞれに $\frac{1}{6}\delta M=\frac{M}{12b}\,\delta y$、$(0,y)$ に $\frac{2}{3}\delta M=\frac{M}{3b}\,\delta y$ の質点で置き換えられる。y が $-b$ から b まで動くと、これらの質点は長さ $2b$ の三本の一様な棒を形づくる：

- 各辺 $x = \pm a$ に沿う棒が一本ずつで、それぞれの質量は $\frac{M}{12b} \cdot 2b = \frac{1}{6}M$；
- 中心線 $x = 0$ に沿う棒が一本で、質量は $\frac{M}{3b} \cdot 2b = \frac{2}{3}M$。

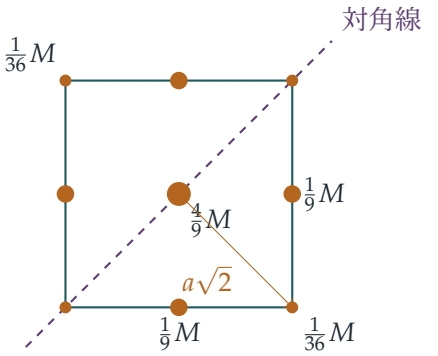
同じ加法性の議論により、これらの棒それぞれに棒についての結果を適用する：

- 各辺の棒（$\frac{1}{6}M$）は、両端（すなわち角）のそれぞれにある $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}M = \frac{1}{36}M$ と、中点（すなわち長さ $2b$ の辺の中点）にある $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}M = \frac{1}{9}M$ になる；
- 中央の棒（$\frac{2}{3}M$）は、両端（すなわち長さ $2a$ の辺の中点）のそれぞれにある $\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3}M = \frac{1}{9}M$ と、中心にある $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}M = \frac{4}{9}M$ になる。

したがって、各角に $\frac{1}{36}M$、各辺の中点に $\frac{1}{9}M$、中心に $\frac{4}{9}M$ がある。合計は $\frac{4}{36}M + \frac{4}{9}M + \frac{4}{9}M = M$ であり、対称性から重心は O である。これが求める等価な質点系である。

対角線のまわりの正方形

一辺 $2a$ の正方形について、角を $(\pm a, \pm a)$ に置き、対角線 $y = x$ をとる。点 (x_0, y_0) とこの直線との距離は $|x_0 - y_0|/\sqrt{2}$ である。



- 角 $(a, a), (-a, -a)$ と中心は対角線上にあり、寄与しない。
- 角 $(a, -a), (-a, a)$ は距離 $2a/\sqrt{2} = a\sqrt{2}$ にある。
- 各中点 $(\pm a, 0), (0, \pm a)$ は距離 $a/\sqrt{2}$ にある。

よって

$$I_{\text{対角線}} = 2 \cdot \tfrac{1}{36}M \cdot 2a^2 + 4 \cdot \tfrac{1}{9}M \cdot \tfrac{1}{2}a^2 = \tfrac{1}{9}Ma^2 + \tfrac{2}{9}Ma^2 = \tfrac{1}{3}Ma^2.$$

一様でない棒

長さ $2a$ の棒が x 軸に沿って $x=0$ から $x=2a$ まであり、その線密度（line density）が kx であるとする。このとき

$$m=\int_0^{2a} kx\,\mathrm{d}x=2ka^2,\qquad \text{よって}\qquad k=\frac{m}{2a^2}.$$

重心の位置は

$$\bar{x}=\frac{1}{m}\int_0^{2a} kx^2\,\mathrm{d}x=\frac{k}{m}\cdot\frac{8a^3}{3}=\frac{4a}{3},$$

であり、また

$$\int_0^{2a} kx^3\,\mathrm{d}x=\frac{k\,(2a)^4}{4}=4ka^4=2ma^2.$$

一様な棒の場合と同様に、すべての点は一本の直線上にあるので、重心を通り棒と角 θ をなす軸のまわりの慣性モーメントは $\sin^2\theta\sum(\text{質量})(x-\bar{x})^2$ である。質量と重心が一致していれば $\sum(\text{質量})(x-\bar{x})^2=\sum(\text{質量})x^2-m\bar{x}^2$ であるから、$\sum(\text{質量})\,x^2$ を一致させれば十分である。これは端 $x=0$ を通り棒に垂直な軸のまわりの慣性モーメントである。

質点を、$x=0$ に p_0、$x=a$ に p_1、$x=2a$ に p_2 とする。質量、一次モーメント（first moment）、二次モーメント（second moment）を一致させると、次の方程式が得られる：

$$\begin{aligned} p_0+p_1+p_2&=m,\\ p_1a+2p_2a&=\tfrac{4}{3}ma,\\ p_1a^2+4p_2a^2&=2ma^2. \end{aligned}$$

第 3 式を a^2 で割ったものから第 2 式を a で割ったものを引くと $2p_2=\frac{2}{3}m$ となり、$p_2=\frac{1}{3}m$ である。すると $p_1=\frac{4}{3}m-\frac{2}{3}m=\frac{2}{3}m$ であり、最後に $p_0=m-\frac{2}{3}m-\frac{1}{3}m=0$ となる。

軽い側の端にある質点の質量は 0 であるから、必要な質点は二つだけである：中点に $\frac{2}{3}m$、重い側の端に $\frac{1}{3}m$。

検算

- 一辺 $2a$ の正方形の薄板について、その面内にあり中心を通って一辺に平行な軸のまわりの慣性モーメントは、よく知られた結果により $\frac{1}{3}Ma^2$ である。直交軸の定理（perpendicular axis theorem）と対称性により、中心を通る面内のすべての軸で同じ値になるから、対角線についても同じでなければならない。これは上の結果と一致する。

- 一様でない棒について、二つの質点は質量 m、一次モーメント $\frac{2}{3}m\cdot a+\frac{1}{3}m\cdot 2a=\frac{4}{3}ma$（よって重心は $\frac{4}{3}a$）、二次モーメント $\frac{2}{3}ma^2+\frac{4}{3}ma^2=2ma^2$ を与え、すべて要求どおりである。
- 数値的にも、細かい格子状の点質量を用いて、各物体とその質点系を空間内の 100〜200 本のランダムな軸（中心を通らないもの）のまわりで比較した。棒と密度が変化する棒は 10^{-7} より良い精度で一致し、長方形は 4×10^{-5} まで一致し（格子による誤差）、対角線のまわりの正方形は $M=a=1$ に対して 0.33332 を与えた。

よくある間違い

- 各帯をその三つの質点で置き換えてよい理由を述べずに置き換えてしまうこと。帯の中心は O にないので、前半の「任意の軸」についての結果が必要である。
- 最後の小問で、質量と重心の条件だけを課すこと。二つの方程式では三つの質量は決まらない。$p_0=0$ を導くのは慣性モーメントの条件である。

STEP のその先へ

空間内を運動する剛体にとって、力学的に重要なのは、その質量、重心、そして**慣性テンソル**（*inertia tensor*）である。慣性テンソルは 3×3 の対称行列であり、重心を通るすべての軸のまわりの慣性モーメントを与える。これらを共有する二つの物体は、同じ力のもとでまったく同じように運動する。「力学的に等価」という名前がふさわしいのはこのためである。分布の最初のいくつかのモーメントを少数の点質量で一致させるという発想は、数値積分の背後にある考え方でもある。一様な棒に対する重み $\frac{1}{6},\frac{2}{3},\frac{1}{6}$ はまさにシンプソンの公式（Simpson's rule）であり、重みだけでなく位置も選ぶことにするとガウス求積（Gaussian quadrature）に至る。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、慣性テンソルと剛体の運動が展開されている。

解答例

STEP II 1989、第 14 問

力学 ・ 円運動

STEP II 1989、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

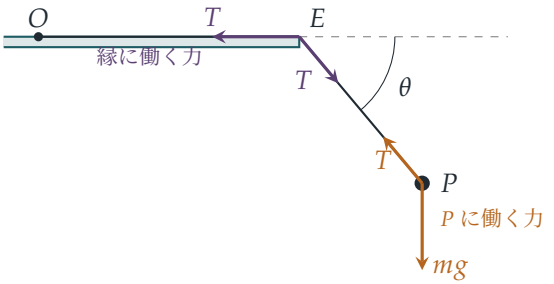
step.maths.org/questions/89-s2-q14

鍵となる考え方

質点を放したあとも、台の上にある部分の糸は動かない。固定された端と台の縁との間でぴんと張られたままだからである。したがって縁は固定された支点としてはたらき、質点はそのまわりを半径 a の円周上で運動する。これは水平位置から放した単振り子（simple pendulum）とまったく同じである。速さはエネルギーから、張力（tension）は半径方向の運動方程式（equation of motion）から求まる。縁はなめらかなので、張力は縁の両側で等しく、縁に働く力は 2 本の糸に沿って引く等しい 2 つの張力のベクトル和である。

解答

モデル化。 糸は軽く伸び縮みせず、台の上面はなめらかで薄く、質点は大きさのない質点とする。糸の固定端を O、糸が縁にかかる点を E とすると、$OE = l - a$ であり、垂れ下がった部分 EP の長さは a である。垂れ下がった部分が水平（はじめの向きで、台から離れる向き）から下方へ回転した角を θ とする。



O は固定されており、糸は張ったままである（$T > 0$ であることは後で確かめる）から、部分 OE は台の上にとどまり静止したままである。よって P は中心 E、半径 a の円周上を運動する。

速さ。 台はなめらかで、張力はつねに P の運動と垂直であるから、どちらも仕事をせず、力学的エネルギーが保存される（conservation of mechanical energy）。糸が θ だけ回転したとき、P は高さ $a\sin\theta$ だけ落下しているので、静止状態から始めると

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mga\sin\theta \qquad \Longrightarrow \qquad v^2 = 2ga\sin\theta.$$

張力。 PE に沿って中心 E へ向かう方向に分解する。張力は PE に沿って働き、重力の PE 方向の成分は E から**遠ざかる**向きに $mg\sin\theta$ である（$0 < \theta < \pi$ では P は E の高さより下にある）。よって

$$T - mg\sin\theta = \frac{mv^2}{a} = 2mg\sin\theta, \qquad \text{ゆえに} \qquad \boxed{T = 3mg\sin\theta.}$$

これは $0 < \theta < \pi$ で正であるから、糸は運動の間ずっと張ったままである。$\theta = \pi$ では $v = 0$ となる。質点はちょうど E と同じ高さで台の下面に達し、引き返す。したがって運動は $0 \le \theta \le \pi$ の範囲で起こる。

縁に働く力。 縁はなめらかなので、張力はその両側で T である。糸は大きさ T の 2 つの引く力で縁を押す。1 つは EO に沿って固定端へ向かう水平な力、もう 1 つは EP に沿う力である。x 軸を台から離れる水平方向、y 軸を鉛直上向きにとる。EO 方向と EP 方向の単位ベクトルはそれぞれ $(-1, 0)$ と $(\cos\theta, -\sin\theta)$ であるから、縁に働く力は

$$\mathbf{F} = T\,(\cos\theta - 1,\ -\sin\theta).$$

その大きさは

$$|\mathbf{F}| = T\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = T\sqrt{2 - 2\cos\theta} = 2T\sin\tfrac{\theta}{2}$$

である。ここで $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ を用い、$0 \le \theta \le \pi$ では $\sin\frac{\theta}{2} \ge 0$ であることを使った。（幾何的に見れば、角 $\pi - \theta$ をなす 2 つの等しい力 T の和は $2T\cos\frac{\pi-\theta}{2}$ であり、同じ結果になる。）T と $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ を代入すると

$$|\mathbf{F}| = 6mg\sin\theta\sin\tfrac{\theta}{2} = 12mg\,s^2\sqrt{1-s^2}, \qquad \text{ただし} s = \sin\tfrac{\theta}{2} \in [0, 1].$$

考えてみよう $s^2\sqrt{1-s^2}$ をすっきりと最大化するにはどうすればよいか。

これは非負であるから、その 2 乗 $h(u) = u^2(1-u)$（$u = s^2 \in [0,1]$）を最大化すれば十分である。すると $h'(u) = 2u - 3u^2 = u(2-3u)$ であり、これは $0 < u < \frac{2}{3}$ で正、$\frac{2}{3} < u \le 1$ で負である。よって h は $[0,1]$ において $u = \frac{2}{3}$ で最大となり、そのとき $h = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$ である。したがって $s^2\sqrt{1-s^2}$ の最大値は $\sqrt{4/27} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ であり、

$$|\mathbf{F}|_{\max} = 12mg \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{8mg}{\sqrt{3}},$$

となって、求める結果が得られた。最大となるのは $\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{2}{3}$、すなわち $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{3}$ のときであり、$\theta \approx 109.5^\circ$ である。このとき質点はすでに縁の真下を通り過ぎ、台の下へと振れ込んでいる。

検算

- $\theta = \frac{\pi}{2}$（糸が鉛直）のとき、速さは $\sqrt{2ga}$、$T = 3mg$ であり、水平位置から放した振り子についてよく知られた結果と一致する。このとき縁に働く力は $T\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\,mg \approx 4.24mg$ であり、$8mg/\sqrt{3} \approx 4.62mg$ よりやや小さい。これは最大となる位置が鉛直より先にあることと整合する。
- $\theta = 0$ と $\theta = \pi$ では質点は縁と同じ高さで瞬間的に静止しているので $T = 0$ となり、縁には力が働かない。式もそのとおりになっている。
- 運動方程式 $\ddot{\theta} = (g/a)\cos\theta$ を数値的に積分した。半径方向の方程式から得た T は $3mg\sin\theta$ と 10^{-12} の精度で一致し、縁に働く力の最大は $\theta \approx 1.9106$（すなわち $\arccos(-\frac{1}{3})$）で値 $4.6188\,mg$ となり、$8/\sqrt{3}$ と一致した。

よくある間違い

- 縁に働く力を単に T としたり、垂れ下がった糸による引く力の鉛直成分だけとしたりすること。台の上の糸も縁を水平に引いており、2 つの引く力をベクトルとして足し合わせなければならない。
- 最大化を $\theta \le \frac{\pi}{2}$ の範囲で打ち切ってしまうこと。質点は台の下まで運動を続け、最大値はその後の段階にある。

STEP のその先へ

ここでの張力は**拘束力**（constraint force）である。仕事をせず、質点を円周上に保つのに必要なだけの大きさをとる。ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）では、このような力は運動方程式から完全に消え、あとから（ここで半径方向の方程式を用い

たように）求めるか、ラグランジュの未定乗数（Lagrange multipliers）を用いて求める。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、円運動、拘束、エネルギーを用いる方法をこのレベルで丁寧に扱っている。

解答例

STEP II 1989、第 15 問

確率・統計 ・ 幾何的確率

STEP II 1989、問 15

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/89-s2-q15

鍵となる考え方

「周（perimeter）上に無作為に」選ばれた点は長さに関して一様（uniform）に分布するので、すべては全長 $\pi+2$ から始まる。三角形は常に中心 O を頂点にもつから、その面積は $\frac{1}{2}ab\sin C$ である。ここで a と b は O からの距離、C は O における角である。各場合の条件付き期待値（conditional expectation）はそれぞれ簡単な期待値（expectation）の計算に帰着し、全期待値の法則（law of total expectation）によってそれらをつなぎ合わせることができる。

解答

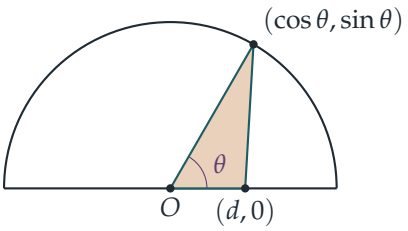
O を原点にとり、直径（diameter）を x 軸上の $(-1,0)$ から $(1,0)$ まで、弧（arc）を $y\geq 0$ の側におく。周の長さは $2+\pi$ であり、直径が 2、弧が π を占める。各点は周に沿って一様に分布するから、

$$\mathrm{P}(\text{点が直径上にある})=\frac{2}{\pi+2},\qquad \mathrm{P}(\text{点が弧上にある})=\frac{\pi}{\pi+2}.$$

弧上にあるという条件のもとでは、点は $(\cos\theta,\sin\theta)$ と表され、θ は $[0,\pi]$ 上で一様である。直径上にあるという条件のもとでは、点は $(d,0)$ と表され、d は $[-1,1]$ 上で一様である。

2 点は独立（independent）であり、「ちょうど 1 点が直径上にある」という事象は、1 点目が直径上にある場合と 2 点目が直径上にある場合のどちらでも起こりうるので、

$$\mathrm{P}(\text{ちょうど 1 点が直径上にある})=2\cdot\frac{2}{\pi+2}\cdot\frac{\pi}{\pi+2}=\frac{4\pi}{(\pi+2)^2}.$$



小問 (i)

一方の点を直径上の $(d,0)$、他方を弧上の $(\cos\theta,\sin\theta)$ とする。O から出る 2 辺の長さは $|d|$ と 1 であり、そのなす角は θ である（$d<0$ のときはなす角が $\pi-\theta$ となるが、正弦の値は同じである）。よって

$$A=\tfrac{1}{2}\,|d|\sin\theta.$$

この場合という条件のもとで d と θ は独立であるから、積の期待値は期待値の積に等しい。d は $[-1,1]$ 上で一様なので、$|d|$ は $[0,1]$ 上で一様であり、$\mathrm{E}|d|=\frac{1}{2}$ である。また

$$\mathrm{E}(\sin\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{2}{\pi}.$$

したがって

$$\mathrm{E}(A\mid \text{ちょうど 1 点が直径上にある})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{1}{2\pi},$$

となり、求める結果が得られた。

小問 (ii)

今度は 2 点とも弧上にあり、その角を θ_1,θ_2 とする。これらは独立で、$[0,\pi]$ 上で一様である。2 点はどちらも O から距離 1 にあり、O におけるなす角は $X=|\theta_1-\theta_2|$ で、これは $[0,\pi]$ に属する。よって

$$A=\tfrac{1}{2}\sin X.$$

考えてみよう なぜ X について与えられた密度を使ってよいのだろうか。

角 θ は単位半円に沿った弧の長さを表しているので、弧上に一様に 2 点を選ぶことは、長さ π の線分上に一様に 2 点を選ぶことと同じである。角 X はちょうどその 2 点間の距離であるから、X は $[0,\pi]$ 上で密度（density）$2(\pi-x)/\pi^2$ をもつ。ゆえに

$$\mathrm{E}(\sin X)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin x\,\mathrm{d}x.$$

積分を分けると $\int_0^\pi \pi \sin x \,\mathrm{d}x = 2\pi$ であり、$u = x$ として部分積分（integration by parts）を行うと

$$\int_0^\pi x \sin x \,\mathrm{d}x = \Big[-x\cos x\Big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x \,\mathrm{d}x = \pi + 0 = \pi.$$

よって $\int_0^\pi (\pi - x)\sin x \,\mathrm{d}x = 2\pi - \pi = \pi$ となり、$\mathrm{E}(\sin X) = \dfrac{2}{\pi}$ および

$$\mathrm{E}(A \mid \text{どちらの点も直径上にない}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi},$$

が得られ、求める結果が示された。

A の期待値

3 つ目の場合がある。2 点とも直径上にあるときは、「三角形」は退化（degenerate）している（3 点すべてが x 軸上にある）ので、$A = 0$ である。どちらの点も直径上にない確率は $\left(\frac{\pi}{\pi+2}\right)^2$ である。全期待値の法則により

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(A) &= \frac{4\pi}{(\pi+2)^2}\cdot\frac{1}{2\pi} + \frac{\pi^2}{(\pi+2)^2}\cdot\frac{1}{\pi} + \frac{4}{(\pi+2)^2}\cdot 0\\ &= \frac{2+\pi}{(\pi+2)^2}\\ &= \frac{1}{2+\pi},\end{aligned}$$

となり、これが求めたかった結果である。

検算

- 3 つの場合の確率 $\frac{4}{(\pi+2)^2}$, $\frac{4\pi}{(\pi+2)^2}$, $\frac{\pi^2}{(\pi+2)^2}$ の和は $\frac{(2+\pi)^2}{(\pi+2)^2} = 1$ である。
- 当然そうあるべきとおり、$\mathrm{E}(A) \le \frac{1}{2}$（とりうる最大の面積で、2 本の半径が直角をなす場合）が成り立つ。実際、$\frac{1}{2+\pi} \approx 0.1945$ である。
- 2×10^6 組の点の対によるモンテカルロ・シミュレーション（Monte Carlo simulation）では、P(ちょうど 1 点) ≈ 0.4757（厳密値 0.4754）、条件付き平均 0.1591 と 0.3184（厳密値 $\frac{1}{2\pi} \approx 0.1592$ と $\frac{1}{\pi} \approx 0.3183$）、そして $\mathrm{E}(A) \approx 0.1944$ が得られた。

よくある間違い

- P(ちょうど 1 点) の因数 2 を忘れる。どちらの点も直径上にある方の点になりうる。
- 「直径上にある」確率を $\frac{1}{2}$ とみなす。選び方は長さに関して一様なのであって、境界のどの部分かについて一様なのではない。

▶ 小問 (ii) で、半径のなす角の正弦ではなく、$\sin\theta_1 \sin\theta_2$ などを用いてしまう。

STEP のその先へ

期待値を場合の分割に沿って $\mathrm{E}(A) = \sum_i \mathrm{E}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i)$ と分けることは全期待値の法則であり、大学 1 年の確率論における主力の道具の一つである。その一般形 $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(A \mid Y)\big)$ は、分枝過程（branching processes）からマルコフ連鎖（Markov chains）まで、あらゆるところに現れる。小問 (ii) で引用された X の密度は、それ自体がよい演習問題である。これは正方形 $[0,\pi]^2$ の中の帯状領域の面積から導かれる。このような問題は幾何確率（geometric probability）に属する。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、条件付き期待値と同時密度（joint densities）をちょうどよい水準で扱っている。

解答例

STEP II 1989、第 16 問

確率・統計　・　二項分布

STEP II 1989、問 16

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/89-s2-q16

鍵となる考え方

バッチを、振る舞いの異なる二つの部分に分ける。標本に含まれる n 個のウィジェットと、一度も抜き取られない N 個のウィジェットである。それぞれの部分に含まれる不良品の個数は二項分布（binomial distribution）に従い、二つの個数は互いに独立（independent）である。すべては標本で決まる。標本に不良品が 2 個以上あればバッチは最終的に完全なものになり、そうでなければ何も変わらない。したがって、最終的に $k \geq 1$ 個の不良品を含むバッチでは、標本中の不良品は 0 個または 1 個であり、残りは他の N 個の中にあったはずである。

解答

$q = 1 - p$ とおく。標本に含まれる不良ウィジェットの個数を X、バッチ内の他の N 個に含まれる不良ウィジェットの個数を Y とする。各ウィジェットは独立に確率 p で不良品であるから、

$$X \sim \mathrm{B}(n, p), \qquad Y \sim \mathrm{B}(N, p),$$

であり、X と Y は互いに素（disjoint）なウィジェットの集合における不良品を数えているので、独立である。

品質管理（quality control）を経た後のバッチに含まれる不良ウィジェットの個数を K とする。$X \geq 2$ ならばすべての不良が修正され、$K = 0$ となる。$X \leq 1$ ならば何も修正されず、$K = X + Y$ となる。よって

$$K = \begin{cases} X + Y, & X \leq 1, \\ 0, & X \geq 2. \end{cases}$$

K の分布

$1 \le k \le N$ とする。$k \ge 1$ であるから、事象 $K = k$ は $X \ge 2$ の場合からは生じ得ず、ちょうど $X = 0,\ Y = k$ または $X = 1,\ Y = k-1$ のときに起こる。これらは互いに排反であり、独立性より

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(K=k) &= \mathrm{P}(X=0)\,\mathrm{P}(Y=k) + \mathrm{P}(X=1)\,\mathrm{P}(Y=k-1)\\ &= q^n\binom{N}{k}p^k q^{N-k} + npq^{n-1}\binom{N}{k-1}p^{k-1}q^{N-k+1}\\ &= \left[\binom{N}{k} + n\binom{N}{k-1}\right]p^k q^{N+n-k}.\end{aligned}$$

両方の項で p の累乗も q の累乗も同じであり、だからこそ一つにまとめられる。次に、二項係数（binomial coefficient）を共通の分母 $k!\,(N-k+1)!$ で表す。

$$\binom{N}{k} = \frac{N!\,(N-k+1)}{k!\,(N-k+1)!}, \qquad n\binom{N}{k-1} = \frac{n\,N!\,k}{k!\,(N-k+1)!}.$$

足し合わせると分子は $N!\,(N-k+1+nk) = N!\,[N+1+k(n-1)]$ となるので、

$$\mathrm{P}(K=k) = \frac{[N+1+k(n-1)]\,N!}{(N-k+1)!\,k!}\,p^k(1-p)^{N+n-k},$$

となり、示すべき式が得られた。

考えてみよう $k = 0$ のときはどうなるか？

この公式は $k \ge 1$ のときにしか成り立たない。$k = 0$ のとき公式は $\frac{(N+1)N!}{(N+1)!}q^{N+n} = q^{N+n}$ を与えるが、これは不良品がまったくなかった確率である。しかし $K = 0$ は $X \ge 2$ のときにも必ず起こるので、実際には

$$\mathrm{P}(K=0) = q^{N+n} + \mathrm{P}(X \ge 2) = q^{N+n} + 1 - q^n - npq^{n-1}.$$

である。問題文の「$k \le N$」は $1 \le k \le N$ と読むべきである。

$k = N+1$ の場合

$K = N+1$ となるには、$X \le 1$ かつ $X + Y = N+1$ が必要である。$Y \le N$ であるから、これより $X = 1$ かつ $Y = N$ でなければならず、

$$\mathrm{P}(K=N+1) = npq^{n-1}\cdot p^N = np^{N+1}q^{n-1}.$$

公式に $k = N+1$ を代入すると、係数は

$$\frac{[N+1+(N+1)(n-1)]\,N!}{0!\,(N+1)!} = \frac{(N+1)\,n\,N!}{(N+1)!} = n,$$

となり、q の累乗は $q^{N+n-(N+1)} = q^{n-1}$ である。よって公式は $np^{N+1}q^{n-1}$ を与え、これは正しい。（$K \le N+1$ であるから、$k \ge N+2$ に対する確率は 0 である。）

不良品の個数の期待値

$k\,\mathrm{P}(K=k)$ を総和してもよいが、X と Y を用いた K の表し方を使うほうがはるかに速い。事象 $X \le 1$ の指示関数（indicator function）を $\mathbf{1}_{\{X\le 1\}}$ と書くと、

$$K = (X+Y)\,\mathbf{1}_{\{X\le 1\}} = X\,\mathbf{1}_{\{X\le 1\}} + Y\,\mathbf{1}_{\{X\le 1\}}.$$

第 1 項について、$X\mathbf{1}_{\{X\le 1\}}$ は $X=1$ のとき 1、それ以外のとき 0 に等しいので、その期待値（expectation）は $\mathrm{P}(X=1) = npq^{n-1}$ である。第 2 項について、Y は X と独立であるから

$$\mathrm{E}\left[Y\,\mathbf{1}_{\{X\le 1\}}\right] = \mathrm{E}[Y]\,\mathrm{P}(X\le 1) = Np\left(q^n + npq^{n-1}\right).$$

これらを足し合わせ、因数 pq^{n-1} をくくり出すと、

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[K] &= npq^{n-1} + Np\,q^{n-1}(q+np)\\ &= pq^{n-1}\left[n + N(1-p) + Nnp\right]\\ &= \left[N + n + pN(n-1)\right]p(1-p)^{n-1},\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

- 確率の総和は 1 になるはずである。$n=2$、$N=1$ とすると、$\mathrm{P}(K=1) = (2+1)pq^2 = 3pq^2$、$\mathrm{P}(K=2) = 2p^2q$、$\mathrm{P}(K=0) = q^3 + p^2$ であり、これらを足すと（$p^2 = p^2(p+q)$ を用いて）$q^3 + 3pq^2 + 3p^2q + p^3 = 1$ となる。
- n が非常に大きければ、標本に不良品を含むバッチはほぼすべて修正され、期待値は 0 に近づく。これは因数 $(1-p)^{n-1}$ と整合する。
- $2 \le n \le 6$、$0 \le N \le 6$ およびいくつかの p の値について、すべての公式を厳密な分数で確かめ、さらにこの手順をシミュレーションした。$n=4$、$N=6$、$p=0.3$ のとき公式は $\mathrm{E}[K] \approx 1.585$ を与え、200 000 個のバッチのシミュレーションでは 1.581 となった。

よくある間違い

- 「2 個以上」という規則をバッチ全体の不良品の個数に適用してしまう。不良が修正されるかどうかを決めるのは、標本中の個数 X だけである。
- 修正されたバッチから $K=0$ への追加の寄与があることを忘れる。そのため公式は $k=0$ では成り立たない。

- E[K] を力ずくの総和で計算する。それでも求まるが、指示関数を使って K を分解し、独立性を用いるほうがはるかに短い。

STEP のその先へ

確率変数を、指示関数を掛けた部分の和として表し、期待値の線形性（linearity of expectation）を用いる方法は、大学 1 年の確率論で最も役に立つ技法の一つである。平均だけが必要なときに、分布を求めずに済む。また、この問題は品質管理における抜き取り検査（acceptance sampling）の小さなモデルにもなっている。そこでは検査の費用と見逃される不良品とのバランスをとるように n を選ぶ。さらに学ぶには、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）や、全編を通じて指示関数を活用している Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率入門）を参照するとよい。

解答例

STEP III 1989、第 1 問

純粋数学 ・ 回転面

> **STEP III 1989、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q1

鍵となる考え方

球面は半円の回転面（surface of revolution）であるから、球帯（zone）の面積は回転面の面積を求める標準的な積分で表される。意外なのは、被積分関数（integrand）が定数になることであり、まさにそのために答えは 2 平面間の距離だけで決まる。後半では、曲面は（OP から生じる）円錐（cone）と（弧 PR から生じる）球帯に分かれる。難しい部分は前半の結果が引き受けてくれ、接線（tangent）の条件から必要な直角三角形が得られる。

問題文に印刷された方程式について一言述べておく。右辺が c^2 のままだと円は O を通り、定数 a がまったく現れない。意図されている曲線は明らかに

$$(x-c)^2+y^2=a^2,$$

すなわち中心 $C=(c,0)$、半径 a の円である。$c>a$ であるから原点はこの円の外部にあり、O から接線を引くことができる。以下ではこの曲線について問題を解く。

解答

球帯の面積

半径 r、中心が原点の球を考え、x 軸を 2 平面に垂直にとる。2 平面を $x=h_1$ と $x=h_2$ $(-r\le h_1<h_2\le r)$ とする。球面は上半円 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ を x 軸のまわりに 2π だけ回転させてできるので、球帯の面積は

$$S=\int_{h_1}^{h_2}2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

ここで $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$ であるから、$|x| < r$ に対して

$$y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} = \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}} = \sqrt{r^2-x^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}} = r.$$

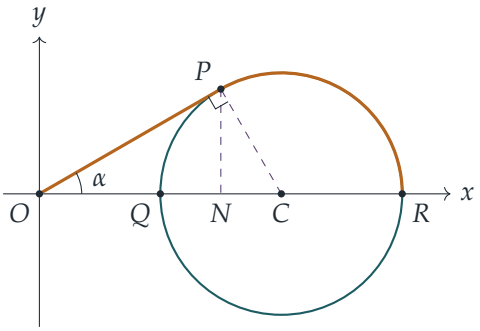
考えてみよう $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ が無限大になる $x = \pm r$ では何が起こるか？

導関数は両極で発散するが、積 $y\sqrt{1+(y')^2}$ は $(-r, r)$ 全体で r に等しいので有界である。平面が球に接する場合（$h_1 = -r$ または $h_2 = r$）、積分は広義積分（improper integral）になるが、それは無害な形にすぎない。$h_2 - \varepsilon$ まで積分して $\varepsilon \to 0$ とすればよい。（あるいは $x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ と媒介変数表示すれば、この問題そのものを避けられる。）したがって

$$S = \int_{h_1}^{h_2} 2\pi r\,\mathrm{d}x = 2\pi r\,(h_2 - h_1),$$

これは $2\pi \times$ (半径) $\times$ (2 平面間の距離) であり、求める結果である。

曲面



中心を $C = (c, 0)$ とし、P から x 軸に下ろした垂線の足を N とする。このとき $Q = (c-a, 0)$、$R = (c+a, 0)$ である。弧 PR は Q を通らない方の弧（琥珀色で示したもの）である。P から R へのもう一方の弧は Q を通って円の下側を回っており、これを回転させると球面全体ができてしまう。

接線は接点における半径に垂直であるから、角 OPC は直角である。三角形 OPC において $OC = c$、$CP = a$ であるから、ピタゴラス（Pythagoras）の定理より

$$OP = \sqrt{c^2-a^2}.$$

角 POC を α とする。すると $\sin\alpha = \frac{a}{c}$、$\cos\alpha = \frac{\sqrt{c^2-a^2}}{c}$ であり、

$$PN = OP\sin\alpha = \frac{a\sqrt{c^2-a^2}}{c}, \qquad ON = OP\cos\alpha = \frac{c^2-a^2}{c}.$$

円錐。 OP を x 軸のまわりに回転させると、母線の長さ（slant height）$l = OP$、底面の半径 PN の円錐ができる。その側面積は $\pi \times$ (底面の半径) $\times$ (母線の長さ) であるから、

$$\pi \cdot \frac{a\sqrt{c^2-a^2}}{c} \cdot \sqrt{c^2-a^2} = \frac{\pi a(c^2-a^2)}{c}.$$

球帯。 弧 PR を回転させると、（中心 C、半径 a の）球面のうち、N を通り軸に垂直な平面と R における接平面とに挟まれた部分ができる。これら 2 平面の間の距離は

$$NR = (c+a) - \frac{c^2-a^2}{c} = \frac{ac+a^2}{c} = \frac{a(c+a)}{c}$$

であるから、前半の結果より球帯の面積は

$$2\pi a \cdot \frac{a(c+a)}{c} = \frac{2\pi a^2(c+a)}{c}.$$

合計。 2 つの部分を加えると

$$\begin{aligned} \text{面積} &= \frac{\pi a}{c}\left[(c^2-a^2) + 2a(c+a)\right] \\ &= \frac{\pi a}{c}\left(c^2+2ac+a^2\right) \\ &= \frac{\pi a(c+a)^2}{c}. \end{aligned}$$

検算

- $a = 1$、$c = 2$ とする。このとき $P = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であり、円錐の面積は $\frac{3\pi}{2}$、球帯の面積は 3π であるから、合計は $\frac{9\pi}{2} \approx 14.137$ となる。曲線を 20 000 本の短い線分で近似し、それによってできる円錐台（frustum）の面積を足し合わせると 14.13717 が得られる。
- $a \to c$ とすると、P は O に近づき、円錐は消える。曲面は半径 c の球面全体になり、実際 $\pi c(2c)^2/c = 4\pi c^2$ である。
- a を固定して $c \to \infty$ とすると、面積は πac のように増大する。これは母線の長さがおよそ c、底面の半径がおよそ a の細長い円錐の面積であり、予想どおりである。

よくある間違い

- 円錐の母線の長さとして OP ではなく OC や ON を用いてしまう。
- 球帯の厚さを、P から下ろした垂線の足 N からではなく、C や Q から測ってしまう。

- 公式 $2\pi rh$ を $r = a$ ではなく $r = c$ で用いてしまう。切り取られる球は C を中心とする半径 a の球であり、O を中心とするものではない。

STEP のその先へ

球帯についての結果はアルキメデス（Archimedes）の定理である。球面を外接する円柱へ水平に射影すると面積が保たれる。これがランベルト（Lambert）正積図法（equal-area map projection）の背後にある考え方である。また、球面上で一様に選んだ点の高さが一様分布に従う理由もこれで説明できる。回転面の面積は、大学 1 年次のベクトル解析の講義で学ぶ面積分（surface integral）$\iint |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$ の最初の例である。曲率と曲面を見事に幾何学的に捉えた本として、Needham の *Visual Differential Geometry and Forms*（視覚的な微分幾何学と微分形式）を参照されたい。

解答例

STEP III 1989、第 2 問

純粋数学 ・ 空間内の平面

> **STEP III 1989、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q2

鍵となる考え方

東、北、上の向きに座標（coordinates）を入れる。すると各平面はグラフ $z = px + qy + r$ として表され、3 点を与えればそれぞれが一つに定まる。平面の傾きの大きさは z が水平方向にどれだけ速く変化するかだけで決まるので、角度は p と q から求まる。後半には見事な近道がある。鉱層（seam）の地表からの**深さ**もまた位置の一次関数（linear function）であり、鉱層が地表に現れるのはちょうどその深さが 0 になるところである。

解答

設定

A を原点とし、x 軸を東向き、y 軸を北向き、z 軸を鉛直上向きにとる（長さの単位はすべてメートル）。すると

$$A = (0, 0, 0), \qquad B = (0, 100, -5), \qquad C = (60, 100, -10),$$

である。B は A より 5 m 低く、C は B よりさらに 5 m 低いからである。ボーリング孔（bore-hole）は鉛直なので、それらが鉱層に達する点はこれらの真下にある：

$$A' = (0, 0, -95), \qquad B' = (0, 100, -50), \qquad C' = (60, 100, -86).$$

鉱層の傾斜角

A', B', C' は平面図上で同一直線上にない 3 点の上にあるので、鉱層は鉛直ではない。したがって鉱層は $z = px + qy + r$ と書ける。

- A' において：$r = -95$。
- A' から B' へ進むと、y は 100、z は 45 増えるので、$100q = 45$ より $q = \frac{9}{20}$。
- B' から C' へ進むと、x は 60 増え、z は -36 変化するので、$60p = -36$ より $p = -\frac{3}{5}$。

よって鉱層は

$$z = -\tfrac{3}{5}x + \tfrac{9}{20}y - 95,$$

であり、その法線ベクトル（normal vector）は $\mathbf{n} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{9}{20}, 1\right)$、あるいは 20 倍して $(12, -9, 20)$ である。

2 つの平面のなす角は、それらの法線のなす角に等しい。水平面の法線は $\mathbf{k} = (0,0,1)$ なので、鉱層が水平面となす角 θ は

$$\cos\theta = \frac{|(12,-9,20)\cdot(0,0,1)|}{\sqrt{12^2+9^2+20^2}} = \frac{20}{\sqrt{144+81+400}} = \frac{20}{\sqrt{625}} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

を満たす。よって、題意のとおり鉱層は水平面に対して $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$ だけ傾いている。

（別の見方もある。最大傾斜線（line of greatest slope）に沿っては、水平方向に 1 m 進むごとに z が $\sqrt{p^2+q^2} = \sqrt{\frac{9}{25}+\frac{81}{400}} = \frac{3}{4}$ だけ変化する。よって $\tan\theta = \frac{3}{4}$ であり、3–4–5 の三角形から $\cos\theta = \frac{4}{5}$ となる。）

鉱層が地表に現れる場所

地表は原点を通る平面である。先ほどと同様に、A から B へ北に進むと 100 につき 5 下がり、B から C へ東に進むと 60 につき 5 下がるので、

$$z = -\tfrac{1}{12}x - \tfrac{1}{20}y.$$

考えてみよう 本当に 2 つの平面の方程式を連立して解く必要があるだろうか？

実はその必要はない。水平位置 (x, y) の点における、地表から鉱層までの深さを $d(x, y)$ とする。これは 2 つの一次関数の差なので、それ自身も一次関数である：

$$d(x,y) = \left(-\tfrac{1}{12}x - \tfrac{1}{20}y\right) - \left(-\tfrac{3}{5}x + \tfrac{9}{20}y - 95\right) = \tfrac{31}{60}x - \tfrac{1}{2}y + 95.$$

確認すると、$d(0,0) = 95$、$d(0,100) = 45$、$d(60,100) = 45 + 31 = 76$ であり、これらは 3 本のボーリング孔の深さに一致する。（実際、これらの値から d を直接書き下すこともできた。北へ 100 m 進むと深さは 50 減り、東へ 60 m 進むと 31 増えるのである。）

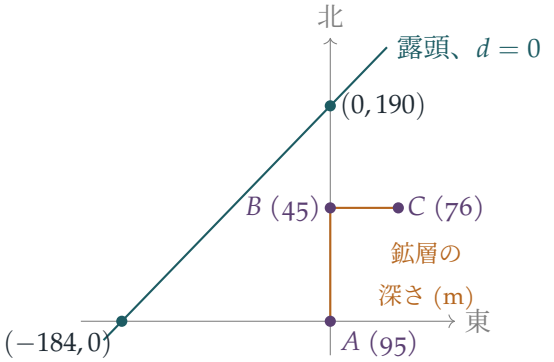
鉱層が地表に現れるのは $d = 0$ となるところであり、平面図上ではそれは直線

$$\tfrac{31}{60}x - \tfrac{1}{2}y + 95 = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad y = \tfrac{31}{30}x + 190.$$

である。この直線に沿っては、東へ 30 m 進むと北へ 31 m 進む。よってこの直線が真北となす角を φ とすると

$$\tan\varphi = \frac{\text{東}}{\text{北}} = \frac{30}{31}, \qquad \varphi = \tan^{-1}\left(\tfrac{30}{31}\right) \approx 44.06^\circ.$$

である。したがって、この直線の方位（bearing）は $\tan^{-1}\left(\frac{30}{31}\right) \approx 044^\circ$ である。逆向きに読めば 224° となる。直線には両方の方位があり、どちらで表してもよい。この直線は北東よりわずかに西寄りに走り、平面図上では A の真北 190 m の点を通る。



検算

- 鉱層の法線 $(12, -9, 20)$ の長さはちょうど 25 なので、$\cos\theta = \frac{20}{25}$ となり、問題が予告したとおりきれいな 3–4–5 の答えになる。
- 深さの式 d は 3 本のボーリング孔の深さをすべて再現するので、2 つの平面はどちらも正しい。
- 数値的には $\tan^{-1}(30/31) = 44.0608^\circ$ である。直線 $y = \frac{31}{30}x + 190$ 上の任意の点をとると、丸め誤差の範囲で両方の平面上で同じ高さになる。

よくある間違い

- 各孔の上端からの深さを、上端がすべて同じ高さであるかのように使ってしまう。B と C は A よりそれぞれ 5 m、10 m 低いので、そこでの鉱層は A の高さから 45 m、76 m ではなく 50 m、86 m 下にある。
- 露頭（outcrop）ではなく、鉱層内の水平な直線（$-\frac{3}{5}x + \frac{9}{20}y$ が一定となる直線で、方位は $\tan^{-1}\frac{3}{4} \approx 037^\circ$）の方位を答えてしまう。地表も傾いているので、両者は異なる。
- $\tan\varphi = $ 東/北 を北/東と取り違える。方位は北から時計回りに測る。

STEP のその先へ

これは地質学者のいう「走向と傾斜（strike and dip）」の問題であり、使う道具は大学1年次のベクトル幾何のものである。すなわち $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=c$ としての平面、法線を通じた平面のなす角、そして交線（line of intersection）である。深さを使う工夫は一般的な原理の一例である。2つのアフィン関数（affine function）の差はアフィン関数なので、平行でない2平面の交線は1つの一次関数の零点集合（zero set）になる。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、この描像を連立一次方程式の幾何学の中に組み込んでいる。

解答例

STEP III 1989、第 3 問

純粋数学 ・ 行列群

STEP III 1989、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/89-s3-q3

鍵となる考え方

$\mathbf{M}$ は角 $2\pi/m$ の回転（rotation）であるから $\mathbf{M}^m = \mathbf{I}$ であり、その累乗の和は等比級数（geometric series）になる。これに $\mathbf{I} - \mathbf{M}$ を掛ければ、項がすべて打ち消し合う（telescoping）。漸化式（recurrence）については、$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ を書き出せば規則性は明らかである。群（group）はただ一つの恒等式から得られる。すなわち、これらの式の一つを別の式に代入すると添字がちょうど足し合わされるので、元は m を法とする整数（integers modulo）のように振る舞うのである。

解答

$\mathbf{M}$ の累乗の和

$\mathbf{M}$ は原点を中心とする角 $\theta = 2\pi/m$ の反時計回りの回転を表す行列である。これを k 回施すと角 $k\theta$ だけ回転するので、

$$\mathbf{M}^k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}, \qquad \text{特に} \qquad \mathbf{M}^m = \begin{pmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

（$\mathbf{M}^{k+1} = \mathbf{M}\mathbf{M}^k$ であるから、$\mathbf{M}^k$ の式は加法定理（compound-angle formulae）を用いた数学的帰納法（induction）により示される。）

$\mathbf{S} = \mathbf{I} + \mathbf{M} + \cdots + \mathbf{M}^{m-1}$ とおく。これらの行列はすべて $\mathbf{M}$ の累乗であるから互いに可換（commute）であり、積は次のように打ち消し合う：

$$(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{S} = \mathbf{I} - \mathbf{M}^m = \mathbf{I} - \mathbf{I} = \mathbf{O}.$$

考えてみよう 因子 $\mathbf{I}-\mathbf{M}$ を単純に「約分」してよいだろうか？

それが許されるのは $\mathbf{I}-\mathbf{M}$ が正則（invertible）である場合に限る。零行列でない行列どうしの積が $\mathbf{O}$ になることもあるからである。ここでは

$$\det(\mathbf{I}-\mathbf{M}) = (1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 2-2\cos\theta,$$

であり、$m>1$ より $0<\theta\leq\pi$ であるから $\cos\theta\neq 1$ となり、行列式（determinant）は 0 でない。$(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{S}=\mathbf{O}$ の左から $(\mathbf{I}-\mathbf{M})^{-1}$ を掛けると $\mathbf{S}=\mathbf{O}$ が得られ、これが求める結果である。

$\mathbf{X}_k$ の一般式

最初の数項を計算すると

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{P}\mathbf{X}_0+\mathbf{Q},\quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{P}^2\mathbf{X}_0+\mathbf{P}\mathbf{Q}+\mathbf{Q},\quad \mathbf{X}_3 = \mathbf{P}^3\mathbf{X}_0+(\mathbf{P}^2+\mathbf{P}+\mathbf{I})\mathbf{Q},$$

となり、$k\geq 0$ に対して

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{P}^k\mathbf{X}_0+\mathbf{S}_k\mathbf{Q},\qquad \text{ただし}\quad \mathbf{S}_k = \mathbf{I}+\mathbf{P}+\cdots+\mathbf{P}^{k-1}\quad (\mathbf{S}_0=\mathbf{O}).$$

であることが予想される。$k=0$ のとき、これは $\mathbf{X}_0=\mathbf{X}_0$ となり成り立つ。ある $k\geq 0$ で成り立つと仮定すると、

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{P}\mathbf{X}_k+\mathbf{Q} &= \mathbf{P}^{k+1}\mathbf{X}_0+(\mathbf{P}+\mathbf{P}^2+\cdots+\mathbf{P}^k)\mathbf{Q}+\mathbf{Q}\\ &= \mathbf{P}^{k+1}\mathbf{X}_0+\mathbf{S}_{k+1}\mathbf{Q},\end{aligned}$$

となるので $k+1$ でも成り立ち、数学的帰納法によりすべての $k\geq 0$ で成り立つ。因子の順序に注意せよ。$\mathbf{P}$ は常に左から掛かっており、$\mathbf{P}$ と $\mathbf{Q}$ は可換とは限らない。

群

$\mathbf{X}_i$ を、任意の行列 $\mathbf{X}_0$ を別の行列に移す規則、すなわち式 $\mathbf{P}^i\mathbf{X}_0+\mathbf{S}_i\mathbf{Q}$ とみなす。$\mathbf{X}_0$ に $\mathbf{X}_j$ を代入すると

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_i * \mathbf{X}_j &= \mathbf{P}^i\left(\mathbf{P}^j\mathbf{X}_0+\mathbf{S}_j\mathbf{Q}\right)+\mathbf{S}_i\mathbf{Q}\\ &= \mathbf{P}^{i+j}\mathbf{X}_0+\left(\mathbf{P}^i\mathbf{S}_j+\mathbf{S}_i\right)\mathbf{Q}.\end{aligned}$$

を得る。ここで $\mathbf{P}^i\mathbf{S}_j = \mathbf{P}^i+\cdots+\mathbf{P}^{i+j-1}$ であり、これに $\mathbf{S}_i=\mathbf{I}+\cdots+\mathbf{P}^{i-1}$ を加えるとちょうど $\mathbf{S}_{i+j}$ になる。よって、任意の $\mathbf{P}$ に対して

$$\mathbf{X}_i * \mathbf{X}_j = \mathbf{X}_{i+j}.$$

が成り立つ。（これは驚くことではない。漸化式を j ステップ進め、さらに i ステップ進めることは、$i+j$ ステップ進めることと同じだからである。）

ここで $\mathbf{P}=\mathbf{M}$ とする。前半の結果より $\mathbf{M}^m=\mathbf{I}$ かつ $\mathbf{S}_m=\mathbf{O}$ であるから、

$$\mathbf{X}_m=\mathbf{X}_0,$$

すなわち $\mathbf{X}_m$ はすべての行列を変えない式である。すると任意の k に対して $\mathbf{X}_{k+m}=\mathbf{X}_k*\mathbf{X}_m=\mathbf{X}_k$ となるので、式の列は周期 m で繰り返し、

$$G=\{\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_3,\ldots\}=\{\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\ldots,\mathbf{X}_m\}$$

は有限集合である。群の公理（group axioms）を確かめよう。

- **演算について閉じていること**（*closure*）。$\mathbf{X}_i*\mathbf{X}_j=\mathbf{X}_{i+j}$ であり、$i+j\geq 1$ であるから、これは G に属する。
- **結合法則**（*associativity*）。$(\mathbf{X}_i*\mathbf{X}_j)*\mathbf{X}_k$ と $\mathbf{X}_i*(\mathbf{X}_j*\mathbf{X}_k)$ はどちらも $\mathbf{X}_{i+j+k}$ に等しい。（より一般に、代入とは関数の合成（composition）であり、合成は常に結合法則を満たす。）
- **単位元**（*identity*）。$\mathbf{X}_m*\mathbf{X}_j=\mathbf{X}_{m+j}=\mathbf{X}_j$ かつ $\mathbf{X}_j*\mathbf{X}_m=\mathbf{X}_j$ であるから、$\mathbf{X}_m$ が単位元である。
- **逆元**（*inverses*）。$1\leq i<m$ に対して $\mathbf{X}_i*\mathbf{X}_{m-i}=\mathbf{X}_{m-i}*\mathbf{X}_i=\mathbf{X}_m$ であり、$\mathbf{X}_m$ は自分自身の逆元である。いずれの逆元も G に属する。

したがって、G は $*$ に関して有限群である。

実際、G の元はちょうど m 個である。$\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_m$ の係数 $\mathbf{M}^1,\ldots,\mathbf{M}^m$ は $(0,2\pi]$ 内の相異なる角の回転であるから、これらは相異なる式だからである。すべての元が $\mathbf{X}_1$ の「累乗」であるから、G は位数（order）m の巡回群（cyclic group）である。

検算

- $m=2$ のとき $\mathbf{M}=-\mathbf{I}$ であり、和は $\mathbf{I}+(-\mathbf{I})=\mathbf{O}$ となる。$m=4$ のとき $\mathbf{M}$ は 4 分の 1 回転であり、$\mathbf{I}+\mathbf{M}+\mathbf{M}^2+\mathbf{M}^3=\mathbf{I}+\mathbf{M}-\mathbf{I}-\mathbf{M}=\mathbf{O}$ となる。
- 数値計算により、2 から 39 までのすべての m について累乗の和が（丸め誤差の範囲で）$\mathbf{O}$ になること、ランダムな $\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{X}_0$ に対して $\mathbf{X}_k$ の式が漸化式と一致すること、そして $\mathbf{P}=\mathbf{M}$ とし $\mathbf{Q}$ と $\mathbf{X}_0$ をランダムにとったとき、漸化式を m ステップ進めるとちょうど $\mathbf{X}_0$ に戻ることを確かめた。

よくある間違い

- $\mathbf{I}-\mathbf{M}$ が正則であることを確かめずに約分してしまう。
- $\mathbf{QS}_k$ や $\mathbf{X}_0\mathbf{P}^k$ と書いてしまう。行列は一般に可換ではなく、漸化式では $\mathbf{P}$ が左に掛かっている。
- $\mathbf{X}_0$ を単位元としてしまう。列挙した G に $\mathbf{X}_0$ は含まれていない。単位元は $\mathbf{X}_m$ であり、それが $\mathbf{X}_0$ に等しいのは $\mathbf{S}_m=\mathbf{O}$ だからにすぎない。

STEP のその先へ

各 $\mathbf{X}_i$ はアフィン写像（affine map）$\mathbf{X}\mapsto\mathbf{AX}+\mathbf{B}$ であり、$\mathbf{A}$ が正則であるアフィン写像全体は合成に関して群をなす。ここで見つけたのは、m 乗が恒等写像になるただ一つの写像によって生成される位数 m の巡回部分群（subgroup）である。$\mathbf{I}+\mathbf{M}+\cdots+\mathbf{M}^{m-1}=\mathbf{O}$ という事実は、1 の m 乗根の和が 0 になることの行列版である。そして一般的な考え方、すなわち群が変換によって集合に作用するという群作用（group action）の考え方は、群論の最初の講義の中心的な主題である。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）でこの考え方が展開されている。

解答例

STEP III 1989、第 4 問

純粋数学 ・ 曲線の概形と解

STEP III 1989、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/89-s3-q4

鍵となる考え方

分数式を多項式と真分数式（proper fraction）の和に分けると、斜漸近線（oblique asymptote）がただちに得られ、導関数（derivative）の計算も容易になる。導関数は至るところで 2 より大きいことがわかるので、3 本の枝（branch）はいずれも $-\infty$ から $+\infty$ まで上昇する。後半の各方程式は、実は「曲線 = より単純な曲線」という形を変装させたものである。そのうえで、各枝における差の狭義単調性（strict monotonicity）によって交点の個数を正確に数えることができる。

解答

曲線

$2x(x^2-5) = 2x(x^2-4) - 2x$ であるから、

$$y = 2x - \frac{2x}{x^2-4}.$$

この関数は奇関数（odd function）なので、曲線は原点のまわりに位数 2 の回転対称性（rotational symmetry）をもつ。曲線が座標軸と交わるのは $x(x^2-5) = 0$ となるところ、すなわち $x = 0$ と $x = \pm\sqrt{5}$ のみである。

漸近線。分母は $x = \pm 2$ で 0 となり（そこでの分子は $\mp 4 \neq 0$）、したがって $x = 2$ と $x = -2$ は垂直漸近線（vertical asymptote）である。$|x| \to \infty$ のとき $\frac{2x}{x^2-4} \to 0$ であるから、$y = 2x$ は斜漸近線である。また $y - 2x = -\frac{2x}{x^2-4}$ は、正で大きな x に対しては負、負で絶対値の大きな x に対しては正である。よって曲線は、右側では下から、左側では上から $y = 2x$ に近づく。

傾き。分解した形を微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2 - \frac{2(x^2-4) - 2x\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = 2 + \frac{2(x^2+4)}{(x^2-4)^2} > 2.$$

したがって停留点（stationary point）は存在せず、y は区間 $x < -2$、$-2 < x < 2$、$x > 2$ のそれぞれで狭義単調増加（strictly increasing）である。さらに微分すると $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\dfrac{4x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$ となるので、変曲点（point of inflection）は原点のみである。

原点における接線。$x = 0$ における傾きは $2 + \frac{2\cdot 4}{16} = \frac{5}{2}$ であるから、そこでの接線（tangent）は

$$y = \tfrac{5}{2}x.$$

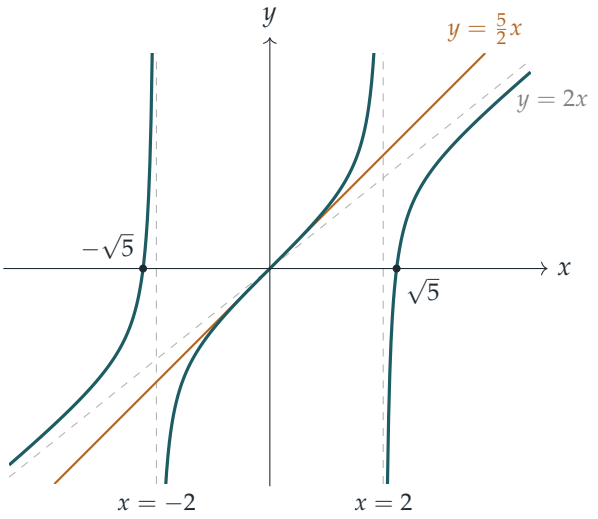
$x = \pm 2$ の近くでの振る舞い。$x = 2$ の近くでは項 $-\frac{2x}{x^2-4}$ が支配的である。この項は $x \to 2^+$ のとき $-\infty$ に、$x \to 2^-$ のとき $+\infty$ に発散し、対称性により $x \to -2^-$ のとき $+\infty$ に、$x \to -2^+$ のとき $-\infty$ に発散する。したがって、

- $x < -2$ では、y は $-\infty$ から $+\infty$ まで上昇し、$-\sqrt{5}$ で軸と交わる。
- $-2 < x < 2$ では、y は原点を通って $-\infty$ から $+\infty$ まで上昇する。
- $x > 2$ では、y は $-\infty$ から $+\infty$ まで上昇し、$\sqrt{5}$ で軸と交わる。

もう一つ、役に立つ事実がある。$0 < x < 2$ に対して

$$y - \tfrac{5}{2}x = \frac{x\left[4(x^2-5) - 5(x^2-4)\right]}{2(x^2-4)} = \frac{-x^3}{2(x^2-4)} > 0,$$

であるから、この範囲で曲線は原点における接線より上にある（対称性により、$-2 < x < 0$ では下にある）。



小問 (i)

$x = 0$（左辺 0、右辺 8）も $x = \pm 2$（左辺 -16、右辺 0）も解ではない。よって $2x(x^2-4)$ で割ってよく、方程式は

$$\frac{2x(x^2-5)}{x^2-4} = \frac{5x-2}{2x} = \frac{5}{2} - \frac{1}{x}.$$

となる。したがって解は、曲線と双曲線（hyperbola）$H\colon y = \frac{5}{2} - \frac{1}{x}$ との交点の x 座標である。枝ごとに調べる。

- $x < -2$：ここで H の傾きは $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{4}$ であり、一方で曲線の傾きは > 2 である。よって差（曲線 $-$ H）は狭義単調増加である。H は $\frac{5}{2}$ と 3 の間にとどまるので、この差は $x \to -\infty$ のとき $-\infty$ に、$x \to -2^-$ のとき $+\infty$ に発散する。解はちょうど 1 個である。
- $-2 < x < 0$：曲線では $y < 0$ である（3 つの因数 x、x^2-5、x^2-4 がすべて負）が、H では $y > \frac{5}{2}$ である。解はない。
- $0 < x < 2$：前述の事実より $y > \frac{5}{2}x$ である。また

  $$\tfrac{5}{2}x - \left(\tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{x}\right) = \frac{5x^2-5x+2}{2x} > 0,$$

  である。$5x^2-5x+2$ の判別式（discriminant）は $25-40 < 0$ だからである。よって曲線は H より真に上にある。解はない。
- $x > 2$：第 1 の場合と同様に、差は狭義単調増加である（傾きは $> 2 - \frac{1}{4}$）。H は 2 と $\frac{5}{2}$ の間にとどまるので、差は $-\infty$ から $+\infty$ まで変化する。解はちょうど 1 個である。

したがって方程式 (i) はちょうど **2 個**の実数解をもち、一つは -2 より小さく、もう一つは 2 より大きい。

> **考えてみよう** (ii) の方程式は両辺に平方があるが、どうすれば曲線から読み取れるだろうか。

$(x^2-4)^2$ で割る。左辺は y^2 となるので、方程式は $y^2 = x^2 + 1$ を意味する。

小問 (ii)

ここでも $x = \pm 2$ は解ではない（左辺 16、右辺 0）。よって方程式は $y^2 = x^2 + 1$ であり、y は曲線の縦座標である。解は、曲線と直角双曲線（rectangular hyperbola）$y^2 - x^2 = 1$ の 2 本の枝 $y = \pm\sqrt{x^2+1}$ との交点である。

上の枝。 $f(x) = y - \sqrt{x^2+1}$ とおく。すると

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} > 2 - 1 > 0,$$

であるから、f は 3 つの区間のそれぞれで狭義単調増加である。各区間で y は $-\infty$ から $+\infty$ まで変化するが、$\sqrt{x^2+1}$ は有限にとどまる（$x \to +\infty$ のとき、$2x$ に対して $|x|$ 程度にしか増加しない。また $x \to -\infty$ のときは f の 2 つの項がともに負である）。よって f は $-\infty$ から $+\infty$ まで変化し、各区間にちょうど 1 個の解がある。合わせて 3 個である。

下の枝。 写像 $(x,y) \mapsto (-x,-y)$ は曲線を自分自身に移し、下の枝を上の枝に移す。よって下の枝との交点もちょうど 3 個である。

2 組の解は重ならない。共通の x において曲線の y はただ一つであり、それが正かつ負であることはありえないからである。したがって方程式 (ii) はちょうど **6 個**の実数解をもつ。（検算として、これは次数 6 の多項式方程式、すなわち $3x^6 - 33x^4 + 92x^2 - 16 = 0$ であるから、その解はすべて実数である。）

> **考えてみよう** (iii) の変数は x ではなく z であり、z は負かもしれない。どうすれば曲線を持ち込めるだろうか。

$z > 0$ に対しては、$x > 0$ として $z = x^2$ とおく。$z \le 0$ の場合は別に直接扱う。

小問 (iii)

左辺は決して負にならないので、解は $z + 1 \ge 0$、すなわち $z \ge -1$ を満たさなければならない。また $z = 0$ は解ではなく（左辺 0、右辺 16）、$z = 4$ も解ではない（左辺 64、右辺 0）。

$z > 0$ である解。 $x > 0$ として $z = x^2$ とおくと、各正の解 z はちょうど 1 個の $x > 0$ に対応する。方程式は $4x^4(x^2-5)^2 = (x^2-4)^2(x^2+1)$ となる。$x^2(x^2-4)^2$ で割ると

$$y^2 = 1 + \frac{1}{x^2}, \qquad \text{すなわち} \qquad y = \pm s(x), \quad s(x) = \sqrt{1 + x^{-2}}.$$

ここで s は $+\infty$（$x \to 0^+$ のとき）から 1（$x \to \infty$ のとき）まで減少し、$s'(x) = -\dfrac{1}{x^3\sqrt{1+x^{-2}}}$ であるから $|s'(x)| < \frac{1}{x^3}$ である。

- $y = s(x)$：関数 $y - s$ の導関数は $y' - s' > 2$ である。$(0,2)$ 上でこの関数は $-\infty$（$y \to 0$ かつ $s \to \infty$ となるため）から $+\infty$ まで変化する。$(2,\infty)$ 上でも $-\infty$ から $+\infty$ まで変化する。それぞれに解が 1 個ずつ、合わせて 2 個である。
- $(0,2)$ 上の $y = -s(x)$：そこでは曲線は $y > 0 > -s$ を満たす。解はない。

- $(2,\infty)$ 上の $y=-s(x)$：関数 $y+s$ の導関数は $y'+s'>2-\frac{1}{8}>0$ であり、$-\infty$ から $+\infty$ まで変化する。解は 1 個である。

したがって正の解 z はちょうど 3 個である。

$-1\le z<0$ **である解**。$0<t\le 1$ として $z=-t$ とおく。方程式は

$$4t^2(t+5)^2=(t+4)^2(1-t).$$

となる。$(0,1]$ 上で左辺は 0（$t\to 0$ のとき）から 144 まで狭義単調増加である。右辺は 16 から 0 まで狭義単調減少である。その差は狭義単調増加で符号を変えるので、解はちょうど 1 個である。

よって方程式 (iii) はちょうど **4 個**の実数解をもつ。3 個は正であり、1 個は $(-1,0)$ にある。展開すると 4 次方程式 $4z^4-41z^3+107z^2-8z-16=0$ となるので、その 4 個の解はすべて実数である。

検算

- $x=1000$ において $y-2x\approx -0.002$ であり、$y=2x$ に下から近づくことが確かめられる。
- 数値的には、(i) の解は $x\approx -2.143$ と 2.401 であり、予想どおり外側の各枝に 1 個ずつある。
- (ii) の解は $x\approx \pm 0.431,\ \pm 2.155,\ \pm 2.484$ であり、双曲線の各枝について、曲線の各枝に 1 個ずつある。
- (iii) の解は $z\approx -0.332,\ 0.473,\ 4.799,\ 5.310$ である。後の 3 つから $x=\sqrt{z}\approx 0.688,\ 2.191,\ 2.304$ が得られ、曲線上の値は $y\approx 1.77,\ -1.10,\ 1.09$ となって、場合分けの結果と一致する。

よくある間違い

- $x=0$ や $x=\pm 2$ が解でないことを先に確かめずに、x や x^2-4 で割ってしまう。
- (ii) で $y=+\sqrt{x^2+1}$ との交点だけを数えて下の枝を忘れ、6 ではなく 3 としてしまう。
- (iii) で $z=x^2$ と置き換えたまま z が負になりうることを忘れ、$(-1,0)$ にある解を見落とす。

STEP のその先へ

ここでの個数の議論は、中間値の定理（intermediate value theorem）（符号を変える連続関数は零点をもつ）と狭義単調性（零点は高々 1 個である）の組み合わせに基づいている。この 2 つの事実を厳密にすることは、大学の解析学（analysis）の講義で最初に取り組む課題の一つである。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、どちらも丁寧かつ読みやすく扱っている。デカルトの符号法則（Descartes' rule of signs）とスツルム列（Sturm sequences）は多項式の実数解の個数を数える代数的な方法であり、ここで用いた幾何的な方法と比べてみると興味深い。

解答例

STEP III 1989、第 5 問

純粋数学 ・ チェビシェフ多項式

> **STEP III 1989、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q5

鍵となる考え方

$x = \cosh\theta$ とおく。すると $e^{\pm\theta}$ はちょうど $x \pm \sqrt{x^2-1}$ であり、$y = \cosh n\theta$ はそれらの n 乗の平均である。これらのべきを二項定理（binomial theorem）で展開すると、$\sqrt{x^2-1}$ の奇数乗は打ち消し合うので、残るのは x の多項式（polynomial）である。その多項式を整った形に書ければ、各係数は二項係数（binomial coefficient）の短い和にすぎない。

解答

閉じた形

$\theta = \cosh^{-1} x$ とおくと、$\theta \geq 0$ かつ $x = \cosh\theta$ である。このとき $\sinh\theta \geq 0$ かつ $\sinh^2\theta = x^2 - 1$ であるから、$\sinh\theta = \sqrt{x^2-1}$ である。したがって

$$e^{\theta} = \cosh\theta + \sinh\theta = x + \sqrt{x^2-1}, \qquad e^{-\theta} = \cosh\theta - \sinh\theta = x - \sqrt{x^2-1}.$$

ゆえに

$$y = \cosh n\theta = \frac{e^{n\theta} + e^{-n\theta}}{2} = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2},$$

となり、示すべき式が得られた。

y が奇多項式である理由

$s = \sqrt{x^2-1}$ とおく。二項定理より

$$(x+s)^n + (x-s)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} s^j \left(1 + (-1)^j\right) = 2 \sum_{j \text{ が偶数}} \binom{n}{j} x^{n-j} s^j.$$

s の奇数乗は打ち消し合い、偶数乗 $s^{2m} = (x^2-1)^m$ はどれも x の多項式である。よって

$$y = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2m} x^{n-2m}(x^2-1)^m.$$

ここで $n = 2k+1$ とすると、m は 0 から k までを動く。各項は奇数乗 $x^{2k+1-2m}$ と x^2 の多項式との積であるから、x の奇数乗のみを含み、最高次は x^{2k+1} である。したがって $y = a_0x + a_1x^3 + \cdots + a_kx^{2k+1}$ である。

係数を読み取るため、$j = k-m$（したがって $j = 0,\ldots,k$）とおき、$\binom{2k+1}{2k-2j} = \binom{2k+1}{2j+1}$ を用いると

$$y = \sum_{j=0}^{k} \binom{2k+1}{2j+1} x^{2j+1}(x^2-1)^{k-j}.$$

添字 j の項は x^{2j+1} から始まる。よって x^{2r+1} は $j \le r$ の項からのみ現れ、そのうち第 j 項からは $(x^2-1)^{k-j}$ の $(x^2)^{r-j}$ の項、すなわち $\binom{k-j}{r-j}(-1)^{k-r}$ が必要である。したがって

$$a_r = (-1)^{k-r} \sum_{j=0}^{r} \binom{2k+1}{2j+1}\binom{k-j}{r-j}. \qquad (*)$$

a_0

$r = 0$ のとき、寄与するのは $j = 0$ のみである：

$$a_0 = (-1)^k \binom{2k+1}{1} = (-1)^k(2k+1).$$

小問 (i)

$r = 1$ のとき、$j = 0, 1$ が寄与する：

$$\begin{aligned} a_1 &= (-1)^{k-1}\left[(2k+1)\binom{k}{1} + \binom{2k+1}{3}\right] = (-1)^{k-1}(2k+1)\left[k + \frac{2k(2k-1)}{6}\right] \\ &= (-1)^{k-1}(2k+1)\,k\,\frac{3+2k-1}{3} = (-1)^{k-1}\,\frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}, \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

ここでは x^5 が現れるために $k \ge 2$ が必要である。$r = 2$ のとき、$j = 0, 1, 2$ が寄与する：

$$a_2 = (-1)^k\left[(2k+1)\binom{k}{2} + \binom{2k+1}{3}\binom{k-1}{1} + \binom{2k+1}{5}\right].$$

各項は因数 $(2k+1)k(k-1)$ をもつので、これをくくり出すと

$$\begin{aligned} a_2 &= (-1)^k(2k+1)k(k-1)\left[\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{3}+\frac{(2k-1)(2k-3)}{30}\right] \\ &= (-1)^k(2k+1)k(k-1)\,\frac{15+(20k-10)+(4k^2-8k+3)}{30} \\ &= (-1)^k(2k+1)k(k-1)\,\frac{4(k+1)(k+2)}{30} = (-1)^k\,\frac{2(k-1)k(k+1)(k+2)(2k+1)}{15}. \end{aligned}$$

第 3 項については $\binom{2k+1}{5} = \frac{(2k+1)(2k)(2k-1)(2k-2)(2k-3)}{120} = \frac{(2k+1)k(k-1)(2k-1)(2k-3)}{30}$ を用いた。

考えてみよう 我々の答えには、(ii) に印刷された式にはない因数 $(k+1)$ がある。どちらが正しいのだろうか？

$k=2$ で確かめる。このとき $x=\cosh\theta$ として $y=\cosh(5\theta)$ であり、$\cosh 5\theta = 16x^5-20x^3+5x$ であるから $a_2=16$ である。我々の式は $2\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5/15=16$ を与える。印刷された式は $2\cdot1\cdot2\cdot4\cdot5/15=\frac{16}{3}$ を与えるが、a_r は整数なのでこれは正しくありえない。つまり問題文には誤植があり、因数 $(k+1)$ が抜けている。正しい結果は上に示したものである。

係数の和

多項式に $x=1$ を代入する。恒等式は $x\geq 1$ で成り立ち、$x=1$ も許されるので

$$\sum_{r=0}^{k} a_r = y(1) = \cosh\left(n\cosh^{-1}1\right) = \cosh 0 = 1.$$

検算

- $k=1$：$\cosh 3\theta = 4x^3-3x$。公式から $a_0=-3$、$a_1=2\cdot1\cdot2\cdot3/3=4$ となり、$-3+4=1$ である。
- $k=3$：$\cosh 7\theta = 64x^7-112x^5+56x^3-7x$。公式から $a_0=-7$、$a_1=56$、$a_2=-2\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot7/15=-112$ となり、係数の和は 1 である。
- $(*)$ は、$k\leq 14$ のすべてについて漸化式（recurrence relation）$T_{m+1}=2xT_m-T_{m-1}$ とコンピュータで照合し、さらに無作為に選んだ $x\geq 1$ で多項式を $\cosh(n\cosh^{-1}x)$ と比較して確かめた。

よくある間違い

- x^{2r+1} には展開の 1 つの項だけでなく、いくつもの項から寄与があることを忘れる。

- 符号の誤り：a_r への寄与はどれも同じ符号 $(-1)^{k-r}$ をもつので、まずそれをくくり出すこと。
- (ii) の印刷された形に無理やり式変形を合わせようとする。$k = 2$ のような小さな場合を試せば、誤植であることがわかる。

STEP のその先へ

多項式 y はチェビシェフ（Chebyshev）多項式 $T_n(x)$ であり、通常は $T_n(\cos\phi) = \cos n\phi$ によって定義される。我々の双曲線関数版は $x \geq 1$ における同じ恒等式であり、多項式は任意の区間上の値で決まるので、両者は一致する。チェビシェフ多項式は近似理論（approximation theory）の中心的な存在である。n 次のモニック多項式（monic polynomial）の中で、$[-1, 1]$ 上の最大値（絶対値）が最も小さいのが $2^{1-n}T_n$ だからである。数値解析（numerical analysis）の入門講義でも必ず再び登場する。この種の式変形について STEP 形式の演習をさらに積みたければ、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）に取り組むとよい。

解答例

STEP III 1989、第 6 問

純粋数学 ・ 2 次曲線の極方程式

STEP III 1989、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/89-s3-q6

鍵となる考え方

極座標（polar coordinates）では、原点を通らない直線は $1/r$ が $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の一次結合で表される。これを $A\cos\theta + B\cos(\theta-\gamma)$ の形に書けば、円錐曲線（conic）自身の $\cos\theta$ の項とぴったり一致させることができる。$e\cos\theta$ の部分が一致すれば、弦（chord）の方程式で調整すべきものは余弦一つだけになり、残りは $\theta = \gamma$ に関する対称性（symmetry）が片づけてくれる。弦を一点に縮めれば接線（tangent）が得られ、接線の方程式から二等分の性質はほとんど自動的に従う。

解答

以下を通して、(r,θ) は $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ を満たす極座標とし、$r < 0$ も許す（点 (r,θ) は $(-r,\theta+\pi)$ と同じ点である）。円錐曲線の焦点（focus）S は原点にあるものとする。

直線の極方程式

$lx + my = 1$ は原点を通り得ないので、この直線上では $r \neq 0$ であり、r で割ると

$$\frac{1}{r} = l\cos\theta + m\sin\theta.$$

を得る。提示された形を展開すると

$$A\cos\theta + B\cos(\theta-\gamma) = (A + B\cos\gamma)\cos\theta + B\sin\gamma\,\sin\theta.$$

となる。$B\sin\gamma = m$ かつ $A + B\cos\gamma = l$ ならば、これらはすべての θ で一致する。$\sin\gamma \neq 0$ なので

$$B = \frac{m}{\sin\gamma}, \qquad A = l - m\cot\gamma,$$

ととることができ、これが求める極方程式である。逆に、A, B が両方の係数を同時に 0 にしないような方程式 $1/r = A\cos\theta + B\cos(\theta - \gamma)$ は、$l = A + B\cos\gamma, m = B\sin\gamma$ とした直線 $lx + my = 1$ である。また、この形は $(r,\theta) \to (-r,\theta + \pi)$ で変わらないので、r の符号をどちらで用いても直線全体を表すことに注意する。

弦 PQ

弦を $a/r = A\cos\theta + B\cos(\theta - \gamma)$ の形で探す。P と Q では $\theta = \gamma \mp \delta$ かつ $a/r = 1 + e\cos\theta$ であるから、

$$A\cos(\gamma \mp \delta) + B\cos(\mp\delta) = 1 + e\cos(\gamma \mp \delta).$$

が成り立てばよい。どちらの点についても $\cos(\mp\delta) = \cos\delta$ なので、$A = e, B\cos\delta = 1$ と選べば二つの式が同時に満たされ、$\cos\delta \neq 0$ より B について解ける。異なる二点は直線を一つに定めるので、弦 PQ は

$$\boxed{\frac{a}{r} = e\cos\theta + \sec\delta\,\cos(\theta - \gamma).}$$

である。($\cos\delta = 0$ ならば P と Q は $\theta = \gamma \mp \frac{\pi}{2}$ にあり、PQ は焦点弦（focal chord）である。原点を通る直線は $1/r = \ldots$ の形の方程式をもたないので、この場合は除外されている。)

> **考えてみよう** 弦が円錐曲線と P と Q でのみ交わることは、どうしてわかるのだろうか？

各 θ に対して、円錐曲線上の点は $a/r = 1 + e\cos\theta$ を満たすただ一つである。弦がその点を通るのは $1 + e\cos\theta = e\cos\theta + \sec\delta\cos(\theta - \gamma)$、すなわち $\cos(\theta - \gamma) = \cos\delta$ のときであり、したがって $\theta = \gamma \pm \delta$ のときに限る。$e\cos\theta$ の項が打ち消し合うこと、これこそが $A = e$ と選んだ理由のすべてである。

$\theta = \gamma$ における接線

$\theta = \gamma$ となる点 G における接線は、P と Q が G に近づくとき、すなわち $\delta \to 0$ のときの弦 PQ の極限である。弦の方程式は δ に連続的に依存し、$\sec\delta \to 1$ であるから、接線は

$$\boxed{\frac{a}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \gamma).}$$

である。確認として、これが円錐曲線と交わるのは $\cos(\theta-\gamma)=1$ のとき、すなわち G のみであり、接線としてあるべき姿になっている。より決定的には、直交座標で接線は $(e+\cos\gamma)x+(\sin\gamma)y=a$ であり、法線ベクトル（normal vector）は $(e+\cos\gamma,\,\sin\gamma)$ である。円錐曲線は $r=a-ex$ であり、曲線に沿って微分すると $(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)/r=-e\,\mathrm{d}x$、すなわち $(e+x/r)\,\mathrm{d}x+(y/r)\,\mathrm{d}y=0$ を得る。G では $x/r=\cos\gamma, y/r=\sin\gamma$ なので、そこでの曲線の法線は同じベクトルである。

最後の小問

焦点 S を原点におくと、円錐曲線は $a/r=1+e\cos\theta$ となる。L と M を $\theta=\alpha$ と $\theta=\beta$ の点とし、

$$\gamma=\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),\qquad \delta=\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha),$$

とおくと、L と M は $\theta=\gamma-\delta$ と $\gamma+\delta$ にあり、上の P と Q とまったく同じ状況になる。前の結果から、L と M における接線は

$$\frac{a}{r}=e\cos\theta+\cos(\theta-\alpha),\qquad \frac{a}{r}=e\cos\theta+\cos(\theta-\beta).$$

である。T では両方が成り立つので $\cos(\theta-\alpha)=\cos(\theta-\beta)$ である。よって $\theta-\alpha=\theta-\beta+2k\pi$（これは $L=M$ を意味する）であるか、または

$$\theta-\alpha=-(\theta-\beta)+2k\pi\quad\Longrightarrow\quad\theta=\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+k\pi=\gamma+k\pi.$$

である。したがって T は S を通り $\theta=\gamma$ の方向をもつ直線上にあり、

$$r_T=\frac{a}{e\cos\gamma+\cos\delta}$$

である（$e\cos\gamma+\cos\delta=0$ のときに限り、二本の接線は平行で T は存在しない）。

半直線 SL と SM は方向 $\alpha=\gamma-\delta$ と $\beta=\gamma+\delta$ を向いている（楕円（ellipse）や放物線（parabola）の場合のように、L と M で $r>0$ となる通常の場合を考える）。直線 $\theta=\gamma$ はそれぞれと角 δ をなすので、直線 ST は角 LSM を二等分する。（$r_T<0$ ならば T は反対側の半直線上にあり、ST は優角（reflex angle）LSM を二等分する。この場合も角 LST と MST は等しい。）

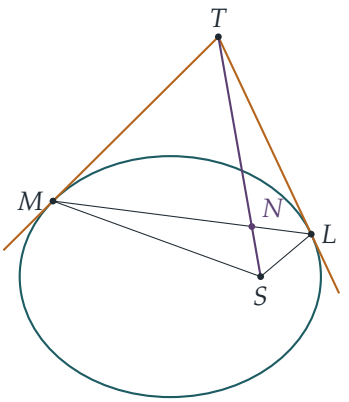
ST と LM の交点を求めるため、その点を N とよぶ。弦 LM は $a/r=e\cos\theta+\sec\delta\cos(\theta-\gamma)$ であり、ST 上では $\theta=\gamma$ であるから

$$\frac{a}{SN}=e\cos\gamma+\sec\delta\quad\Longrightarrow\quad SN=\frac{a\cos\delta}{1+e\cos\gamma\cos\delta}.$$

$2\cos\gamma\cos\delta=\cos(\gamma-\delta)+\cos(\gamma+\delta)=\cos\alpha+\cos\beta$ を用いると、これは

$$\boxed{N\text{ の位置は}\theta=\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),\quad r=\frac{2a\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{2+e\cos\alpha+e\cos\beta}.}$$

となる。LM が焦点弦（$\cos\delta = 0$）のとき、これは当然そうあるべきように $N = S$ を与える。



検算

- 円（$e = 0$、半径 a）で試してみる。接線は $a/r = \cos(\theta - \gamma)$、すなわち $x\cos\gamma + y\sin\gamma = a$ となり、$x^2 + y^2 = a^2$ のおなじみの接線である。
- 三角形 LSM における角の二等分線定理（angle bisector theorem）によれば $LN : NM = SL : SM$ である。$a = 1.5, e = 0.6, \alpha = 40°, \beta = 160°$（図の場合）とすると $SN \approx 0.791$ であり、比は数値的に確かに成り立つ。
- 弦と接線の方程式、ST の方向、角の相等、SN の公式は、無作為に選んだ何千もの円錐曲線と点についてコンピュータで検証した。

よくある間違い

- $\cos(\theta - \alpha) = \cos(\theta - \beta)$ を $+$ の符号だけで解いてしまう。その場合からは何も得られず（$\alpha = \beta$ が必要になる）、有用な解は $-$ の符号の方である。
- A の自由度を使わない。$A = e$ とすることで、円錐曲線との交点を求めるときに $e\cos\theta$ の項が打ち消し合うのである。

STEP のその先へ

ST が $\angle LSM$ を二等分するという結果は円錐曲線の古典的な焦点の性質であり、直線 LM は円錐曲線に関する T の**極線**（polar）である。極と極線の双対性（pole–polar duality）は射影幾何学（projective geometry）への入り口であり、そこではすべての

非退化な円錐曲線が同値となり、接することや点が線上にあることは純粋に代数的な概念になる。Brannan, Esplen, Gray の *Geometry*（幾何学）は、円錐曲線と射影幾何学についての大学一年生向けのよい解説書である。

解答例

STEP III 1989、第 7 問

純粋数学 ・ せん断行列

> **STEP III 1989、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q7

鍵となる考え方

すべては 2 つの単位ベクトル（unit vector）を用いると最も簡単になる。直線 $L\colon y = x\tan\alpha$ の向きの $\mathbf{u}$ と、それに垂直な $\mathbf{n}$ である。このせん断（shear）は各点を $\mathbf{u}$ に平行に、L からの符号付き距離に比例する量だけ動かすので、$\mathbf{M} = \mathbf{I} + k\,\mathbf{u}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$ となる。後半については、ある行列が $\mathbf{I} + k\mathbf{A}$ と可換（commute）であることと、$\mathbf{A}$ と可換であることは同値であり、これによって煩雑な部分が取り除かれる。

解答

$s = \sin\alpha$、$c = \cos\alpha$ とおく。α は鋭角なので、$s > 0$ かつ $c > 0$ である。

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix},$$

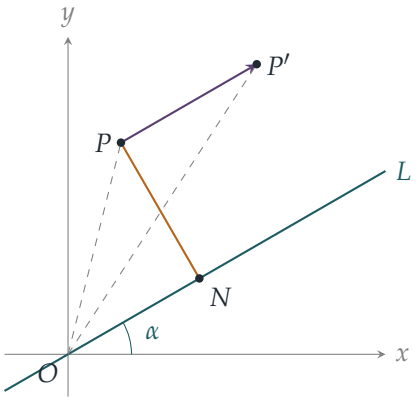
とおくと、$\mathbf{u}$ は x 軸と角 α をなす L 方向の単位ベクトルであり、$\mathbf{n}$ は L の左上側を向く単位法線ベクトル（unit normal）である。

M を求める

$P = (x, y)$ に対して

$$d = \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OP} = y\cos\alpha - x\sin\alpha,$$

とおく。これは P から L までの**符号付き**距離（signed distance）である。このとき $PN = |d|$ であり、$d > 0$ となるのは P が L の上側にあるときに限る。



P を L の上側にとり、$d > 0$ とする。(i) より $\overrightarrow{PP'}$ は $\mathbf{u}$ の向きを向くので、$\lambda > 0$ として $\overrightarrow{PP'} = \lambda\mathbf{u}$ と書ける。条件 (ii) はこれと矛盾しない。2 次元の外積（cross product）は

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} \times (\overrightarrow{OP} + \lambda\mathbf{u}) = \lambda\,(xs - yc) = -\lambda d < 0,$$

であるから、OP から OP' への回転は時計回りであり、要求どおりである。条件 (iii) より $\lambda = k\,PN = kd$ である（これらの条件が同時に成り立つには $k > 0$ が必要である）。したがって、L の上側にあるすべての P に対して

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + kd\,\mathbf{u} = \overrightarrow{OP} + k\,\mathbf{u}\,(\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OP}).$$

が成り立つ。

考えてみよう ここまでは L の上側の点しか使っていない。それなのに、なぜ $\mathbf{M}$ が完全に決まるのだろうか。

T は線形（linear）であり、写像 $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + k\,\mathbf{u}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})$ も線形である。両者は L の上側の開半平面（open half-plane）上で一致し、この半平面は一次独立（linearly independent）な 2 つのベクトル（たとえば $\mathbf{n}$ と $\mathbf{n} + \mathbf{u}$）を含む。基底（basis）上で一致する 2 つの線形写像は等しい。よってすべてのベクトルに対して

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} + k\,\mathbf{u}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} = \mathbf{I} + k\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -s & c \end{pmatrix} = \mathbf{I} + k\begin{pmatrix} -sc & c^2 \\ -s^2 & sc \end{pmatrix}.$$

である。すなわち

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 - k\sin\alpha\cos\alpha & k\cos^2\alpha \\ -k\sin^2\alpha & 1 + k\sin\alpha\cos\alpha \end{pmatrix},$$

となり、示すべき式が得られた。確認として、$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ より $\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{u}$ であるから、L 上の各点は動かない。また $\det\mathbf{M} = 1 - k^2s^2c^2 + k^2s^2c^2 = 1$ であり、せん断として当然あるべき値になっている。

可換であるための条件

$\mathbf{A} = \mathbf{u}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} -sc & c^2 \\ -s^2 & sc \end{pmatrix}$、$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix}$ とおく。$\mathbf{M} = \mathbf{I} + k\mathbf{A}$ であり、$\mathbf{I}$ はあらゆる行列と可換であるから

$$\mathbf{X}\mathbf{M} - \mathbf{M}\mathbf{X} = k(\mathbf{X}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{X}).$$

となる。$k \neq 0$ なので、$\mathbf{X}$ が $\mathbf{M}$ と可換であることは、$\mathbf{A}$ と可換であることと同値である。積を計算すると

$$\mathbf{X}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -psc - qs^2 & pc^2 + qsc \\ -rsc - ts^2 & rc^2 + tsc \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -psc + rc^2 & -qsc + tc^2 \\ -ps^2 + rsc & -qs^2 + tsc \end{pmatrix},$$

であるから

$$\mathbf{X}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -(qs^2 + rc^2) & -c^2(t-p) + 2qsc \\ -s^2(t-p) - 2rsc & qs^2 + rc^2 \end{pmatrix}.$$

となる。これが零行列になるのは、次が成り立つとき、かつそのときに限る。

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad qs^2 + rc^2 = 0, \\ &\text{(b)} \quad c^2(t-p) = 2qsc, \\ &\text{(c)} \quad s^2(t-p) = -2rsc. \end{aligned}$$

$c \neq 0$ なので、(b) は $t - p = 2q\tan\alpha$ と同値である。$s \neq 0$ なので、(c) は $t - p = -2r\cot\alpha$ と同値である。

考えてみよう 式は 3 つあるのに、示すべき条件には 2 つしか含まれていない。(a) はどこへ行ったのだろうか。

(a) は残りの 2 式から導かれる。$2q\tan\alpha = -2r\cot\alpha$ ならば、両辺に $\frac{1}{2}sc$ を掛けて $qs^2 = -rc^2$ となり、これは (a) である。よって

$$\mathbf{X}\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{X} \iff t - p = 2q\tan\alpha = -2r\cot\alpha.$$

が成り立つ。上の各段階はすべて同値変形なので、両方向が成り立つ。これが求める必要十分条件（necessary and sufficient condition）である。

検算

▶ $\alpha = \frac{\pi}{4}$、$k = 2$ とすると $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ となる。$y = x$ の上側に距離 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ だけ離れた点 $(0,1)$ は $(1,2)$ に移る。これは 45° の方向への $\sqrt{2} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ の移動であり、回転は時計回りである。

- $\mathbf{X} = \mathbf{M}$ 自身はこの条件を満たす。実際、$t - p = 2ksc$、$2q\tan\alpha = 2kc^2 \cdot \frac{s}{c} = 2ksc$、$-2r\cot\alpha = 2ks^2 \cdot \frac{c}{s} = 2ksc$ である。$\mathbf{I}$ も 3 つの式がすべて 0 となり、条件を満たす。
- 数値的に、ランダムな α、k と L の上側のランダムな P に対して、$\mathbf{M}$ が (i)–(iii) を再現することを確かめた。条件を満たすランダムな行列は誤差 10^{-8} 以内で $\mathbf{M}$ と可換であり、条件を満たさないランダムな行列は可換でなかった。

よくある間違い

- すべての点について符号なしの距離 PN を使ってしまう。変位は**符号付き**距離の k 倍である。L の下側の点は逆向きに動き、そのおかげで T は線形になる。
- 可換であるための条件について、一方の向き（「条件を満たせば可換」または「可換ならば条件を満たす」）だけを証明してしまう。あるいは、(1,1) 成分から新しい条件が出てこないことを示し忘れる。

STEP のその先へ

ここで $\mathbf{M}$ と可換な行列は、ちょうど $a\mathbf{I} + b\mathbf{A}$ の形の行列である。$t - p = 2q\tan\alpha = -2r\cot\alpha$ が 2 パラメータの族であることを確かめてみよ。これは一般的な事実の一例である。$\mathbf{I}$ の定数倍でない 2×2 行列について、それと可換な行列はちょうど $a\mathbf{I} + b\mathbf{M}$ の形の行列である。$n \times n$ 行列については、最小多項式（minimal polynomial）が固有多項式（characteristic polynomial）と一致するとき、類似の事実（可換な行列は $\mathbf{M}$ の多項式である）が成り立つ。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）では、階数 1 の行列（rank-one matrix）$\mathbf{u}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$ と、この背後にある考え方が展開されている。

解答例

STEP III 1989、第 8 問

純粋数学 ・ 連立微分方程式

STEP III 1989、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/89-s3-q8

鍵となる考え方

第 1 式は y を x と $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ で表している。そこで第 1 式をもう一度微分すると、現れる $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ を第 2 式で置き換えることができ、y は完全に消える。残るのは定数係数（constant coefficients）の二階線形微分方程式（second-order linear differential equation）である。その補助方程式（auxiliary equation）は重解（repeated root）をもち、強制項（forcing term）の一つがその根と一致する。この共鳴（resonance）こそが、この問題の本当の試金石である。

解答

y の消去

t についての導関数をドットで表す。$\dot{x} = 4(x - y)$ を微分し、$\dot{y}$ に第 2 式を用いると

$$\ddot{x} = 4\dot{x} - 4\dot{y} = 4\dot{x} - 4x + 48\left(\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t}\right),$$

となる。したがって

$$\boxed{\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 48\left(\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t}\right),}$$

であり、この式には y が含まれない。

x を求める

余関数 (*complementary function*)。補助方程式 $m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 = 0$ は重解 $m = 2$ をもつので、余関数は

$$x_{\mathrm{c}} = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{2t}.$$

である。

特殊解（*particular integral*）。方程式は線形なので、二つの強制項を一つずつ扱えばよい。

$48\mathrm{e}^{-2t}$ に対しては $x = D\mathrm{e}^{-2t}$ とおいてみる。代入すると $D(4+8+4)\mathrm{e}^{-2t} = 48\mathrm{e}^{-2t}$ となるので、$D = 3$ である。

> **考えてみよう** $48\mathrm{e}^{2t}$ の項に対して、$C\mathrm{e}^{2t}$ や、さらには $Ct\,\mathrm{e}^{2t}$ でさえうまくいかないのはなぜか？

e^{2t} も $t\,\mathrm{e}^{2t}$ もすでに余関数に含まれているので、左辺はこれらを 0 に移してしまう。2 は**二重根**であるから、$t^2\mathrm{e}^{2t}$ まで上げなければならない。そこで $x = Ct^2\mathrm{e}^{2t}$ とおいてみる。代入のうまい方法は、$x = u\,\mathrm{e}^{2t}$ と書くことである。すると

$$\dot{x} = (\dot{u} + 2u)\mathrm{e}^{2t}, \qquad \ddot{x} = (\ddot{u} + 4\dot{u} + 4u)\mathrm{e}^{2t},$$

であるから

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = \ddot{u}\,\mathrm{e}^{2t}.$$

となる。$u = Ct^2$ のときこれは $2C\mathrm{e}^{2t}$ なので、$2C = 48$ より $C = 24$ である。（この置き換えは、余関数が $(A + Bt)\mathrm{e}^{2t}$ となる理由も示している。$\ddot{u} = 0$ であればよいのである。）

よって一般解（general solution）は

$$x = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{2t} + 24t^2\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^{-2t}.$$

である。

初期条件（*initial conditions*）。与えられているのは $x(0) = 0$ と $y(0) = 0$ だけである。二階の方程式には $\dot{x}(0)$ が必要であり、それはもとの第 1 式から得られる：$\dot{x}(0) = 4\big(x(0) - y(0)\big) = 0$。

$x(0) = 0$ から $A + 3 = 0$、すなわち $A = -3$ である。微分すると

$$\dot{x} = \big(B + 2A + 2Bt + 48t + 48t^2\big)\mathrm{e}^{2t} - 6\mathrm{e}^{-2t},$$

となるので、$\dot{x}(0) = B + 2A - 6 = 0$ から $B = 12$ を得る。したがって

$$\boxed{x = \left(24t^2 + 12t - 3\right)\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^{-2t}.}$$

y を求める

もう一つ微分方程式を解く必要はない。第 1 式から $y = x - \frac{1}{4}\dot{x}$ となるからである。$A = -3$、$B = 12$ のとき

$$\dot{x} = \left(48t^2 + 72t + 6\right)\mathrm{e}^{2t} - 6\mathrm{e}^{-2t},$$

であるから

$$\begin{aligned} y &= \left(24t^2 + 12t - 3\right)\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^{-2t} - \left(12t^2 + 18t + \tfrac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{2t} + \tfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2t} \\ &= \left(12t^2 - 6t - \tfrac{9}{2}\right)\mathrm{e}^{2t} + \tfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2t}. \end{aligned}$$

すなわち

$$\boxed{y = \tfrac{3}{2}\left(8t^2 - 4t - 3\right)\mathrm{e}^{2t} + \tfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2t}.}$$

検算

- $t = 0$ において：$y(0) = -\frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 0$。これは直接課した条件ではないので、本当の意味での検算になっている。
- y を消去するためだけに使った第 2 式も成り立つはずである。微分すると

  $$\dot{y} = \left(24t^2 + 12t - 15\right)\mathrm{e}^{2t} - 9\mathrm{e}^{-2t},$$

  であり、

  $$x - 12\left(\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t}\right) = \left(24t^2 + 12t - 15\right)\mathrm{e}^{2t} - 9\mathrm{e}^{-2t}.$$

  である。両者は一致する。
- 数値的には、もとの連立方程式をルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で $(0,0)$ から順に進めると、$x(1) \approx 244.2449$、$y(1) \approx 11.6926$ が得られる。公式からは $33\mathrm{e}^2 + 3\mathrm{e}^{-2}$ と $\frac{3}{2}\mathrm{e}^2 + \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2}$ が得られ、これらは同じ値をもつ。

よくある間違い

- 共鳴する項に対して $Ct\,\mathrm{e}^{2t}$ を試してしまう。根 2 は重解なので、$t^2\mathrm{e}^{2t}$ が必要である。
- 二つ目の初期条件がどこから来るのかに気づかない。$\dot{x}(0) = 0$ という値は、第 1 式と $x(0) = y(0)$ に隠れている。
- y について別の二階方程式を解いてしまう。そうすると新たに二つの定数が入り込み、それらを x と整合させなければならなくなる。$y = x - \frac{1}{4}\dot{x}$ を用いればこれを避けられる。

STEP のその先へ

y を消去するのは、線形連立方程式を解く方法の一つである。大学での扱い方では、これを $M = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ として $\dot{\mathbf{v}} = M\mathbf{v} + \mathbf{f}(t)$ と書く。ここで M は重複する固有値

（eigenvalue）2 をもつが、固有ベクトル（eigenvector）は一つしかないので対角化（diagonalise）できない。そしてまさにそこから te^{2t} の項が生じるのである。ジョルダン標準形（Jordan normal form）と行列指数関数（matrix exponential）e^{Mt} によって、このことは厳密に定式化される。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）は、固有値が重複する場合も含めて線形連立方程式を扱っている。

解答例

STEP III 1989、第 9 問

純粋数学 ・ べき級数の和

STEP III 1989、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/89-s3-q9

鍵となる考え方

どの級数も、よく知られたべき級数（power series）$\sum a_r x^r$ に特定の x を代入したものである。したがって、なすべきことはそれがどの級数かを見抜くことである。最初の二つの級数の元になるのは等比級数（geometric series）$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ である。これを微分すると因子 r が前に出て、積分すると r で割られる。三つ目については、奇数の積を階乗で割ったものは、負の分数べきの二項展開（binomial expansion）から現れるものである。

解答

以下では一貫して、$|x| < 1$ に対して

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{r=1}^{\infty} x^{r-1}.$$

を用いる。問題文に収束（convergence）について考える必要はないとあるので、遠慮なく項別に微分・積分する。（実際、用いる三つの x の値はいずれも収束区間の十分内側にあるので、この操作は正当である。）

小問 (i)

一般項は $r\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}$ であるから、$x = \frac{1}{2}$ における $\sum r x^{r-1}$ を求めればよい。等比級数を項別に微分すると、

$$\sum_{r=1}^{\infty} r x^{r-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

$x = \frac{1}{2}$ を代入すると、

$$1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \cdots = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4.$$

小問 (ii)

一般項は $\frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}$ である。r で割る操作は微分によって打ち消されるので、今度は積分する。等比級数を 0 から x まで積分すると、

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{r} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = -\ln(1-x).$$

ここでは指数が一つ大きすぎるので、（$x \neq 0$ のとき）x で割る：

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} x^{r-1} = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

$x = \frac{1}{2}$ を代入すると、

$$1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^2} + \cdots = -\frac{\ln \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\ln 2.$$

小問 (iii)

次のようにおく。

$$c_k = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1)}{k!}, \qquad c_0 = 1.$$

考えてみよう 奇数の積を $k!$ で割ったものを、以前どこで見たことがあるだろうか？

それは $(1+y)^{-1/2}$ の二項展開においてである。y^k の係数は

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!} = \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1)}{k!} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_k.$$

である。したがって $y = -2x$ とすると、符号と 2 のべきが打ち消し合う：

$$(1-2x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-2x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 1 + x + \frac{1 \times 3}{2!}x^2 + \frac{1 \times 3 \times 5}{3!}x^3 + \cdots,$$

これは $|2x| < 1$ で成り立つ。

さて、与えられた級数を注意深く見てみよう。その一般項は $c_k \cdot \frac{1}{3^{k-1}} = 3c_k\left(\frac{1}{3}\right)^k$ であり、$k = 2$ から始まっている（初項は $\frac{1\times3}{2!} \times \frac{1}{3}$ である）。よってこれは、上の級数の

$x = \frac{1}{3}$ における値から $k = 0$ と $k = 1$ の項を除いたものの 3 倍である：

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty} c_k \frac{1}{3^{k-1}} &= 3\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\tfrac{1}{3}\right)^k - c_0 - c_1 \cdot \tfrac{1}{3}\right) \\ &= 3\left(\left(1 - \tfrac{2}{3}\right)^{-1/2} - 1 - \tfrac{1}{3}\right) \\ &= 3\left(\sqrt{3} - \tfrac{4}{3}\right) \\ &= 3\sqrt{3} - 4.\end{aligned}$$

ここで $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1/2} = \sqrt{3}$ であり、$x = \frac{1}{3}$ は $|2x| < 1$ を満たす。

検算

- 小問 (i)：部分和 1, 2, 2.75, 3.25, 3.5625, … は少しずつ 4 に近づき、200 項の和は計算機の精度で 4 に一致する。
- 小問 (ii)：$2\ln 2 \approx 1.3863$ であり、部分和 1, 1.25, 1.3333, 1.3646, … もこれと合致する。
- 小問 (iii)：各項は 0.5, 0.2778, 0.1620, … であり、400 項の和は 1.196152… となって $3\sqrt{3} - 4 \approx 1.1962$ と一致する。簡単な妥当性の確認として、答えは正で初項 0.5 より大きくなければならない。また $k = 1$ の項を除き忘れた場合も排除できる（その場合は $3\sqrt{3} - 3 \approx 2.196$ となるが、各項はおおよそ等比的に小さくなるので、これは大きすぎる）。

よくある間違い

- (ii) で x で割るのを忘れること：$x = \frac{1}{2}$ における $-\ln(1-x)$ は $\ln 2$ となり、答えの半分になってしまう。
- (iii) で級数が $k = 2$ から始まることに気づかないこと、あるいは $\frac{1}{3^{k-1}} = 3 \cdot \frac{1}{3^k}$ から生じる余分な因子 3 を見落とすこと。

STEP のその先へ

べき級数を項別に微分・積分することは、その収束半径（radius of convergence）の内側では正当化される。なぜなら、べき級数はその半径の真に内側にある任意の閉区間上で一様収束（uniform convergence）するからである。これは大学 1 年次の解析学で学ぶ標準的な結果であり、ここで「収束の問題は考えなくてよい」としても差し支え

ないのはこのためである。整数でないべきに対する二項級数は、まさにこの種のべき級数である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、一様収束とべき級数をわかりやすく解説している。

解答例

STEP III 1989、第 10 問

純粋数学 ・ リーマン和

> **STEP III 1989、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q10

この問題は、*Beyond STEP* の第 4.1 節「**積分とは何か？**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch04/riemann.html

鍵となる考え方

連続する整数の積は r^5 の「下降冪」（falling power）版であり、r^5 を積分するのとまったく同じように、望遠鏡和（telescoping）によって和を求めることができる。すなわち、連続する二つの 6 項の積の差は、5 項の積の 6 倍になる。小問 (i) と (ii) では、$\sum r^5$ のわずかに上とわずかに下にある積の和が得られる。小問 (iii) では、x^5 の二つのリーマン和（Riemann sum）をこれらの上下の評価で挟み込む。上下の評価はどちらも同じ極限に近づく。

解答

小問 (i)

$P(r) = r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)$ とおく。$P(r)$ と $P(r-1) = (r-1)r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)$ は五つの因数 $r(r+1)\cdots(r+4)$ を共有するので、

$$\begin{aligned} P(r) - P(r-1) &= r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)\big[(r+5) - (r-1)\big] \\ &= 6\,r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4). \end{aligned}$$

$r=1$ から n まで和をとると、右辺は望遠鏡和として打ち消し合う：

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) = \tfrac{1}{6}\sum_{r=1}^{n}\big[P(r)-P(r-1)\big] = \tfrac{1}{6}\big[P(n)-P(0)\big]$$
$$= \tfrac{1}{6}\,n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5),$$

ここで $P(0)=0$ を用いた。（n に関する数学的帰納法（induction）でも同様に示せる。帰納段階は同じ因数分解（factorisation）である。）

結論を導く。$r\geq 1$ ならば、$k=1,2,3,4$ に対して各因数は $r+k>r>0$ を満たすので、

$$r^5 < r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) \qquad (r\geq 1).$$

これらの狭義の不等式を $r=1,\ldots,n$ について足し合わせると、$\sum_{r=1}^{n} r^5 < \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$ が得られ、示すべきことが示された。

小問 (ii)

今度は r^5 の下にある積がほしいので、因数を下にずらして $(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r$ を用いる。$Q(r)=(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r(r+1)$ とおくと、同じ因数分解により

$$Q(r)-Q(r-1) = (r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r\big[(r+1)-(r-5)\big]$$
$$= 6\,(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r.$$

$r=0$ から $n-1$ まで和をとると、

$$\sum_{r=0}^{n-1}(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r = \tfrac{1}{6}\big[Q(n-1)-Q(-1)\big]$$
$$= \tfrac{1}{6}\,(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n,$$

なぜなら $Q(-1)=(-5)(-4)(-3)(-2)(-1)\cdot 0=0$ だからである。

考えてみよう 和に現れるすべての r に対して、$(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r < r^5$ は成り立つだろうか？

そうとは限らない。ここで条件 $n>1$ が効いてくる。項ごとに比較する：

- $r=0$：両辺とも 0 なので、等号しか成り立たない。
- $r=1,2,3,4$：積は値 0 の因数を含むので、$0<r^5$ となる。
- $r\geq 5$：$k=1,2,3,4$ に対して各因数は $0<r-k<r$ を満たすので、積は $<r^5$ である。

したがって、すべての $r \geq 0$ に対して $(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r \leq r^5$ であり、$r \geq 1$ ではつねに狭義の不等号が成り立つ。$n > 1$ ならば、$r = 0$ から $n-1$ までの和は $r = 1$ の項を含むので、少なくとも一つの不等式は狭義であり、

$$\sum_{r=0}^{n-1} r^5 > \tfrac{1}{6}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n.$$

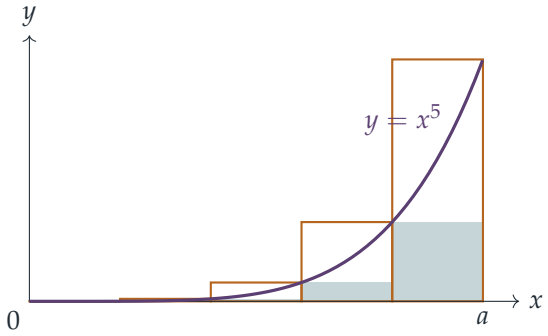
（$n = 1$ のときは両辺とも 0 となる。これが条件が必要な理由である。）

小問 (iii)

$\mathrm{f}(x) = x^5$ とおく。これは増加関数である。定義に現れる二つの和は

$$L_n = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{a}{n}\left(\frac{ra}{n}\right)^5 = \frac{a^6}{n^6}\sum_{r=0}^{n-1} r^5, \qquad U_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{a}{n}\left(\frac{ra}{n}\right)^5 = \frac{a^6}{n^6}\sum_{r=1}^{n} r^5.$$

$a > 0$ のとき、これらは曲線の下側と上側にある長方形の面積の和である：



（塗りつぶし部分：L_n、輪郭線：U_n。ここでは $n = 5$ である。）ただし、以下の計算に $a > 0$ は必要ない。任意の $a \neq 0$ に対して $a^6 > 0$ であり、$a = 0$ のときはすべての和が 0 となるので自明である。

L_n には小問 (ii)（$n > 1$ として）を、U_n には小問 (i) を用いると、

$$L_n > \frac{a^6}{6n^6}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n = \frac{a^6}{6}\prod_{k=1}^{5}\left(1-\frac{k}{n}\right),$$

$$U_n < \frac{a^6}{6n^6}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) = \frac{a^6}{6}\prod_{k=1}^{5}\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

また $U_n - L_n = \dfrac{a^6}{n^6}\left(n^5 - 0^5\right) = \dfrac{a^6}{n} > 0$ であるから、まとめると

$$\frac{a^6}{6}\prod_{k=1}^{5}\left(1-\frac{k}{n}\right) < L_n < U_n < \frac{a^6}{6}\prod_{k=1}^{5}\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

$n \to \infty$ とすると各括弧は 1 に近づくので、外側の二つの評価はどちらも $\frac{1}{6}a^6$ に近づく。はさみうちの原理（squeeze (sandwich) theorem）により、L_n と U_n はともに収束（converge）し、その極限はともに $\frac{1}{6}a^6$ である。よって定義に現れる二つの極限はともに存在して等しく、したがって

$$\int_0^a x^5 \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{6}a^6.$$

検算

- (i) の小さな場合：$n = 1$ のとき $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 = \frac{1}{6} \cdot 720$、$n = 2$ のとき $120 + 720 = 840 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$。
- (i) と (ii) の恒等式、および二つの不等式は、200 までのすべての n で正確に成り立つ（コンピュータで確認した）。
- $a = 1$、$n = 1000$ のとき：$L_n \approx 0.166167$、$U_n \approx 0.167167$ であり、$\frac{1}{6} \approx 0.166667$ をはさんでいる。また $U_n - L_n = 0.001 = a^6/n$ である。

よくある間違い

- すべての $r \geq 0$ に対して $(r-4)\cdots r < r^5$ であると主張すること。$r = 0$ では等号となるので、狭義の不等式には $r = 1$ の項、すなわち $n > 1$ が必要である。
- L_n と U_n が有界であることだけ、あるいは $U_n - L_n \to 0$ であることだけを示すこと。定義では二つの極限がともに**存在する**ことが必要である。はさみうちの原理は、存在とその値を同時に与えてくれる。

STEP のその先へ

小問 (iii) は、リーマン（Riemann）積分（あるいはダルブー（Darboux）積分）を手を動かして体験するものである。関数が積分可能（integrable）であるとは、その下限和と上限和を互いに挟み込めることであり、単調（monotonic）な関数では、その差はつねに $(b-a)\,|\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a)|/n$ となる。したがって、閉区間上の単調関数はすべて積分可能である。(i) と (ii) の積は「上昇階乗冪」と「下降階乗冪」（rising and falling factorial powers）であり、これを用いると差分法（calculus of finite differences）が通常の微分積分学とそっくりに見える。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、この方法で積分を展開している。

解答例

STEP III 1989、第 11 問

力学 ・ 球の斜め衝突

> **STEP III 1989、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q11

鍵となる考え方

まず衝突（impact）の瞬間の幾何学的配置を確定させる。これによって中心線（line of centres）が決まり、残りはすべてそこから導かれる。次に、一方が拘束を受けている場合のなめらかな球どうしの斜衝突（oblique impact）に対する標準的な手順を用いる。球どうしの間の力積（impulse）は中心線に沿って働く。ニュートンの反発の法則（Newton's law of restitution）は、その線に沿った速度成分に対して適用される。そして、糸や支点がそれ自身の力積を与えるために成り立たなくなる運動量保存（conservation of momentum）の代わりに、拘束の影響を受けない方程式を用いる。すなわち、糸につながれた A については水平方向の運動量を、棒の場合は O のまわりの角運動量（angular momentum）を用いる。

解答

衝突時の幾何学的配置

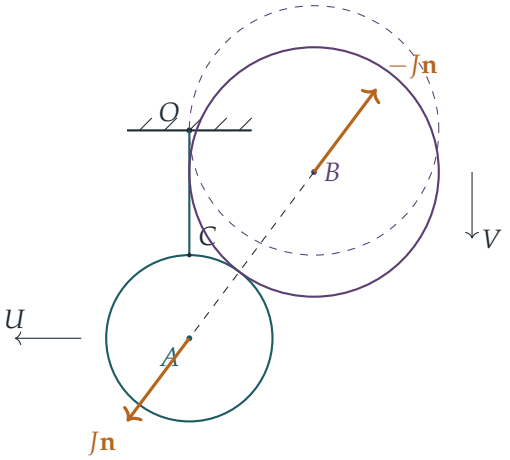
2 つの球はともになめらかで一様であり、糸は軽く伸び縮みしないものとしてモデル化する。衝突前、糸は鉛直に垂れている。C は直線 OA 上にあるので $OA = 3a + 2a = 5a$ であり、A は O の真下にある。

球 B は $OB = 3a$ が水平な位置から出発し、鉛直に落下する。落下距離を h とする。衝突時には 2 つの球が接するので $AB = 2a + 3a = 5a$ である。A と B の水平方向の距離は $3a$ であるから、鉛直方向の距離は $\sqrt{25a^2 - 9a^2} = 4a$ となる。よって B は A より $4a$ 上、すなわち O の高さより a 下にあり、$h = a$ である。

したがって中心線は 3–4–5 の直角三角形をなす。B から A へ向かって、水平方向に

（OA の方へ）$3a$、下向きに $4a$ 進む。B から A へ向かう単位ベクトルを $\mathbf{n}$ とし、x 軸を水平に、OA から B へ向かう向きにとる。すると

$$\mathbf{n} = \left(-\tfrac{3}{5}, -\tfrac{4}{5}\right).$$



破線の球は B の出発位置を、実線の球は衝突時の位置を表す。

糸の場合の衝突

球どうしの間の力積の大きさを J とし、A は $J\mathbf{n}$ を、B は $-J\mathbf{n}$ を受けるとする。球はなめらかなので、$J\mathbf{n}$ は中心線に沿って働き、A を通る。糸の力積は OC に沿って働き、これも A を通る。したがって球 A に回転を与えるものは何もなく、A は O を中心とする半径 $5a$ の円周上を質点として運動する。衝突直後も糸は鉛直なので、A は水平に、x の負の向きに速さ U で運動する。

球 A の水平方向。糸は水平方向の力積を与えないので、

$$3mU = \tfrac{3}{5}J, \qquad \text{すなわち} \qquad J = 5mU.$$

（鉛直方向には、糸が上向きの力積 $\frac{4}{5}J$ を与え、$J\mathbf{n}$ の下向き成分を打ち消す。これは正なので、糸は確かにたるまずに張ったままである。）

球 B。衝突前は $\mathbf{v}_B = (0, -V)$ であり、その $\mathbf{n}$ 方向の成分は $\frac{4}{5}V$ である。力積 $-J\mathbf{n}$ はこの成分だけを変化させ、それを $J/(25m)$ だけ減らす：

$$\mathbf{v}_B' \cdot \mathbf{n} = \tfrac{4}{5}V - \frac{J}{25m} = \tfrac{4}{5}V - \tfrac{1}{5}U.$$

考えてみよう なぜ単純に中心線方向の運動量を保存させてはいけないのか？

糸が A に与える力積は鉛直方向であり、これは $\mathbf{n}$ 方向の成分をもつ。そのため $\mathbf{n}$ 方向の運動量の総和は変化する。外部からの力積が働かない方向は水平方向だけであり、それこそが A について用いた方程式である。

反発。 $\mathbf{n}$ 方向について、A は静止状態から始まるので、近づく速さは $\frac{4}{5}V - 0$ である。遠ざかる速さは $\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}'_B \cdot \mathbf{n}$ であり、ここで $\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{n} = (-U)(-\frac{3}{5}) = \frac{3}{5}U$ である。よって

$$\tfrac{3}{5}U - \left(\tfrac{4}{5}V - \tfrac{1}{5}U\right) = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{4}{5}V \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{4}{5}U = \tfrac{7}{5}V \quad\Longrightarrow\quad U = \tfrac{7}{4}V.$$

棒の場合の衝突

今度は球と棒が、O のまわりに回転する 1 つの剛体（rigid body）をなす。支点はどの向きにも力積を与えうるので、水平方向の運動量はもはや保存されない。しかし支点の力積は O に働くので、O のまわりのモーメントを考える。O のまわりの慣性モーメント（moment of inertia）は、平行軸の定理（parallel axis theorem）により

$$I = \tfrac{2}{5}(3m)(2a)^2 + 3m(5a)^2 = \tfrac{24}{5}ma^2 + 75ma^2 = \tfrac{399}{5}ma^2.$$

力積 $J\mathbf{n}$ は O より深さ $5a$ だけ下にある A を通って働く。O のまわりにモーメントをもつのはその水平成分 $\frac{3}{5}J$ だけであり、そのモーメントは $5a \cdot \frac{3}{5}J = 3aJ$ である。衝突直後の物体の角速度を ω とすると、A は速さ $U' = 5a\omega$ で水平に運動し、

$$I\omega = 3aJ \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{399}{5}ma^2 \cdot \frac{U'}{5a} = 3aJ \quad\Longrightarrow\quad J = \tfrac{133}{25}\,mU'.$$

B についての方程式と反発の方程式は、$\mathbf{n}$ 方向の成分しか含まないので、前とまったく同じである。よって

$$\tfrac{3}{5}U' - \left(\tfrac{4}{5}V - \frac{J}{25m}\right) = \tfrac{3}{5}V \quad\Longrightarrow\quad \left(\tfrac{3}{5} + \tfrac{133}{625}\right)U' = \tfrac{7}{5}V \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{508}{625}U' = \tfrac{7}{5}V,$$

したがって $U' = \frac{875}{508}V$ である。これを $U = \frac{7}{4}V$ と比べると、

$$\frac{U'}{U} = \frac{875}{508} \cdot \frac{4}{7} = \frac{500}{508} = \frac{125}{127},$$

となり、衝突直後の A の速さは、求めるとおり $125U/127$ である。

答えが前より少し小さくなるのは理にかなっている。糸の場合、A は質量 $3m$ の質点として水平方向の運動に抵抗する。棒の場合、球は回転も始めなければならず、A における実効的な水平方向の質量は $I/(5a)^2 = \frac{399}{125}m$ となり、これは $3m$ よりわずかに大きい。

検算

- エネルギー：$m = a = V = 1$ とすると、衝突前の運動エネルギー（kinetic energy）は 12.5 である。衝突後は、糸の場合 11.625、棒の場合約 11.58 となる。$e < 1$ のと

きそうでなければならないとおり、どちらも小さくなっている。

- 弾性（elastic）の極限：$e = 1$ で糸の場合、同じ手順により $\frac{4}{5}U = \frac{8}{5}V$、よって $U = 2V$ となり、運動エネルギーは厳密に保存される。これにより符号が正しいことが確かめられる。
- $a = m = V = 1$ として、コンピュータで両方の衝突を厳密な分数で解いた。その結果 $U = 7/4$、$U' = 875/508$ が得られ、比は $125/127$ となった。また、B の接線方向の速度（tangential velocity）が変化しないこと、および B が接触前に距離 a だけ落下することも確認した。

よくある間違い

- 中心線方向の運動量の総和を保存させてしまう。糸や支点は、その方向の成分をもつ外部からの力積を与える。
- 棒につながれた球が回転することを忘れる。O のまわりの慣性モーメントには、$3m(5a)^2$ に加えて $\frac{2}{5}(3m)(2a)^2$ の項が必要である。
- 中心線を 45° や鉛直にとってしまう。接するという条件により、中心線は 3–4–5 の直角三角形として定まる。

STEP のその先へ

拘束を受けた衝突は、**剛体の撃力運動**への最初の入り口である。一般的な規則として、固定された支点に働く力積は、その支点のまわりの角運動量の方程式から消える。これは**打撃の中心**（centre of percussion）という考え方につながる。打撃の中心とは、支点のある物体をそこで打つと支点がまったく力積を受けない点のことであり、クリケットのバットに「スイートスポット」があるのはこのためである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、角運動量と剛体の力積をちょうどこのレベルで扱っている。

解答例

STEP III 1989、第 12 問

力学 ・ 回転座標系

> **STEP III 1989、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q12

鍵となる考え方

平面は滑らか（smooth）で、棒は軽く（light）、自由に回転できるように軸支されている（freely pivoted）。したがって P にはたらく水平方向の力は棒に沿った向きの力だけである。よって、P の加速度（acceleration）のうち AP に垂直な成分は 0 でなければならない。その成分を求めて 0 とおけば ϕ についての振り子の方程式（pendulum equation）が得られ、おなじみの「$\dot{\phi}$ を掛けて積分する」という手法で ϕ が求まる。

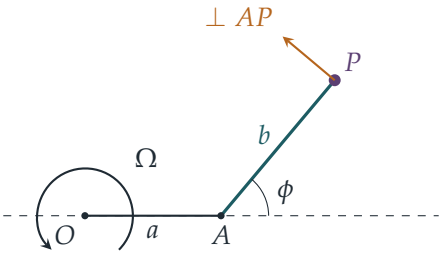
解答

モデル化と設定

P を滑らかな平面上の質点とみなし、棒は軽い剛体で A において自由に回転できるように軸支されているとする。固定された慣性系（inertial frame）で考える。平面上の位置を複素数（complex numbers）で表し、O を原点、$t = 0$ における OA の向きを実軸とし、$\Omega > 0$ を反時計回りにとる。A は平面に固定されているので半径 a の円周上を動き、AP は OA の延長と角 ϕ をなす。OA の延長そのものは角 Ωt だけ回転している。そこで $\theta = \Omega t + \phi$ とおくと、

$$z_A = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}, \qquad z_P = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

ここで $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ は AP 方向の単位ベクトル（unit vector）であり、$\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ は AP に垂直で ϕ が増加する向きの単位ベクトルである。



加速度の垂直成分

$\dot\theta = \Omega + \dot\phi$、$\ddot\theta = \ddot\phi$（$\Omega$ は定数であるから）に注意して微分すると、

$$\dot z_P = \mathrm{i}a\Omega\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + \mathrm{i}b(\Omega+\dot\phi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$
$$\ddot z_P = -a\Omega^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + b\big(\mathrm{i}\ddot\phi - (\Omega+\dot\phi)^2\big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

AP に平行な成分と垂直な成分に分解するために、$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\cos\phi - \mathrm{i}\sin\phi)$ と書く。すると

$$\ddot z_P = \big[-a\Omega^2\cos\phi - b(\Omega+\dot\phi)^2\big]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \big[\,b\ddot\phi + a\Omega^2\sin\phi\,\big]\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

よって、P の加速度の AP に垂直で ϕ が増加する向きの成分は

$$\boxed{\,b\,\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} + a\Omega^2\sin\phi\,}$$

である。（第 1 項は、A を中心とする円運動でおなじみの $b\ddot\phi$ である。第 2 項は、A 自身がもつ O に向かう向心加速度（centripetal acceleration）$a\Omega^2$ を、棒に垂直な方向に分解したものから生じる。）

$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$ を求める

考えてみよう　なぜこの加速度の成分は 0 でなければならないのか。

P にはたらく力は、重力と垂直抗力（normal reaction）（どちらも鉛直方向で、つり合っている）、そして棒からの力である。平面は滑らかなので摩擦（friction）ははたらかない。A で自由に回転できるように軸支された軽い棒は、自身の長さ方向にしか押したり引いたりできない。したがって AP に垂直な水平方向の力は存在せず、ニュートン（Newton）の運動の第 2 法則より

$$b\ddot\phi + a\Omega^2\sin\phi = 0.$$

これは振り子の方程式である。$\dot\phi$ を掛けて積分すると、

$$\tfrac{1}{2}b\dot\phi^2 = a\Omega^2\cos\phi + C.$$

初期条件（*initial conditions*）。はじめ O、A、P は一直線上にある。$b > a$ であるから P は O と A の間にはあり得ず、P は A の先にあるとする。よって $t = 0$ で $\phi = 0$ である。このとき 2 つの指数関数はともに 1 に等しく、

$$\dot{z}_P(0) = \mathrm{i}\big[(a+b)\Omega + b\dot{\phi}(0)\big],$$

となり、これは OP（実軸）に垂直である。$(a+b)\Omega$ はちょうど P の真下にある平面上の点の速さであり、$b\dot{\phi}(0)$ は平面に対する P の相対的な速さであることに注意する。問題文に印刷された速さは $(a+2\sqrt{ab})\Omega$ であるが、これは $(a+b+2\sqrt{ab})\Omega = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\Omega$ の誤植であると思われる。後者こそが与えられた結果を導く値である（最後の注意を参照）。この値を用いると、P は平面に対して速さ $2\sqrt{ab}\,\Omega$ で動くので、

$$\dot{\phi}(0) = 2\Omega\sqrt{a/b}.$$

エネルギーの式に $\phi = 0$ を代入すると $\frac{1}{2}b\cdot 4a\Omega^2/b = a\Omega^2 + C$ となるので、$C = a\Omega^2$ であり、

$$\tfrac{1}{2}b\dot{\phi}^2 = a\Omega^2(1+\cos\phi) = 2a\Omega^2\cos^2\tfrac{\phi}{2}, \qquad \text{よって} \qquad \dot{\phi}^2 = \frac{4a\Omega^2}{b}\cos^2\tfrac{\phi}{2}.$$

はじめ $\dot{\phi} > 0$ であり、$\dot{\phi}$ の符号が変わるには 0 を通過しなければならない。そのためには $\cos\frac{\phi}{2} = 0$、すなわち $\phi = \pm\pi$ が必要である。したがって $-\pi < \phi < \pi$ である限り正の平方根をとって、

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = 2\Omega\sqrt{\frac{a}{b}}\cos\frac{\phi}{2}}$$

P は決して OA を横切らない

> **考えてみよう** ϕ がじわじわと π に近づき、そのまま越えてしまうことはないのか。

P が直線 OA 上にあるのは ϕ が π の整数倍のときに限る（$\phi = \pi$ のとき、P は O の先、距離 $b-a$ の位置にある）。$0 \le \phi < \pi$ の間は $\dot{\phi} > 0$ であるから ϕ は 0 から増加し、直線上に戻る唯一の方法は $\phi = \pi$ に達することである。方程式を解くことで、これが決して起こらないことを示す。$k = \sqrt{a/b}$ として変数分離（separating the variables）すると、

$$\int_0^{\phi}\sec\tfrac{u}{2}\,\mathrm{d}u = 2k\Omega t \quad\Longrightarrow\quad \ln\Big(\sec\tfrac{\phi}{2}+\tan\tfrac{\phi}{2}\Big) = k\Omega t.$$

$s = \sin\frac{\phi}{2}$ とおくと $\sec\frac{\phi}{2}+\tan\frac{\phi}{2} = \frac{1+s}{\sqrt{1-s^2}} = \sqrt{\frac{1+s}{1-s}}$ であるから、左辺は $\frac{1}{2}\ln\frac{1+s}{1-s} = \operatorname{artanh} s$ である。よって

$$\sin\frac{\phi}{2} = \tanh\Big(\Omega t\sqrt{\tfrac{a}{b}}\Big).$$

すべての $t>0$ に対して右辺は 0 と 1 の間の値（両端を含まない）をとるので、すべての $t>0$ に対して $0<\phi<\pi$ である。したがって P は常に直線 OA の一方の側に厳密にとどまる。$t\to\infty$ のとき P は（O の先の点で）直線に近づくが、決して到達しない。よって P は決して OA を横切らない。 ■

（解かずに示すこともできる。$\phi=\pi$、$\dot\phi=0$ は振り子の方程式の平衡点（equilibrium）であり、その近くでは $\psi=\pi-\phi$ が $\dot\psi\approx-k\Omega\psi$ を満たすので、ψ は指数関数的に減衰し、決して 0 にならない。）

印刷された速さについての注意。速さを文字どおり $(a+2\sqrt{ab})\Omega$ とすると $\dot\phi(0)=(2k-1)\Omega$ となり、同様に積分すると $\dot\phi^2=\Omega^2\left[(2k-1)^2-4k^2\sin^2\frac{\phi}{2}\right]$ を得る。これはすっきりした式ではない。このとき、$b<16a$ ならば P は $\phi=0$ のまわりで振動し（振れるたびに OA の延長を横切る）、$b>16a$ ならば P はぐるりと一周して OA を横切る。したがって、印刷された値が意図されたものであるはずがない。

検算

- $a=0$ とすると A は O に一致し、$\dot\phi\equiv0$ となる。つまり P は単に平面とともに速さ $b\Omega$ で回る。初速が $b\Omega$ になるので、これは正しい。
- 単位（units）：$\Omega\sqrt{a/b}$ は変化率であるから単位は s^{-1} であり、$\dot\phi$ の単位として適切である。
- $a=1$、$b=3$、$\Omega=1.3$ として $b\ddot\phi=-a\Omega^2\sin\phi$ を数値的に（RK_4 法で）計算した。$t=2$ では $\phi\approx2.2644$、$\dot\phi\approx0.6375$ となり、$2\arcsin\tanh(\Omega t\sqrt{a/b})$ および $2\Omega\sqrt{a/b}\cos\frac{\phi}{2}$ と有効数字 10 桁まで一致した。$t=10$ では $\phi\approx3.1394<\pi$ であった。

よくある間違い

- P の初速度に対する座標系自身の寄与 $(a+b)\Omega$ を忘れ、与えられた速さを平面に対する相対的な速さとして扱ってしまう。
- P の加速度を、A のまわりの円運動の加速度だけで書いてしまう。軸 A 自身も加速しており、$a\Omega^2\sin\phi$ はそこから生じる。
- $a\Omega^2\sin\phi$ の符号を間違える。符号が逆だと $\phi=0$ が不安定になってしまうが、「遠心力（centrifugal force）」による引っ張りは O から遠ざかる向きなので、これは物理的にあり得ない。

STEP のその先へ

回転する平面から見ると、P は OA の延長方向を向いた一様な「重力」$a\Omega^2$ の中にぶら下がった振り子である。コリオリ力（Coriolis force）は棒に沿ってはたらくので仕事をせず、方程式から消える。初期条件は、運動をちょうど**セパラトリクス**（separatrix）の上に置いている。セパラトリクスとは、往復振動と頂点を越えて回転する運動との境界であり、その上では振り子が倒立した位置に達するのに無限の時間がかかる。回転座標系（rotating frame）、見かけの力（fictitious force）、そしてこのような相平面（phase plane）の図については、Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）で扱われている。

解答例

STEP III 1989、第 13 問

力学 ・ 単振動

> **STEP III 1989、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q13

鍵となる考え方

各糸は O（台の下）から穴を通って台の上を横切り、P まで張られている。台の下の部分の長さはつねにちょうど自然長（natural length）a に等しいので、各糸の伸び（extension）は単に P からその穴までの距離である。したがって各張力（tension）はあるベクトルに比例し、位置ベクトル（position vector）を用いれば 5 つの力の和は 1 行で求まる。5 つの穴は対称に配置されていて、その位置ベクトルの和が零になるからである。

解答

設定

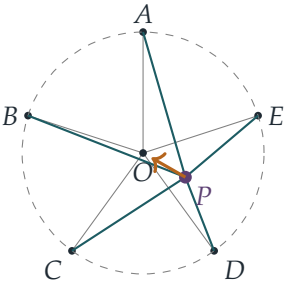
P をなめらかな台の上の質点、糸を軽い弾性糸（elastic string）、穴をなめらかなものとしてモデル化する。したがって張力は各糸の全体にわたって等しい。台の上の O を原点にとり、P の位置ベクトルを $\mathbf{r}$、$A, \ldots, E$ の位置ベクトルを $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5$ とする。これらの長さはいずれも a である。

穴 i を通る糸は、O（台の下、中心の真下）から穴までの長さ a の鉛直な部分と、台の上の長さ $|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|$ の部分からなる。全長は $a + |\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|$ なので、伸びは $|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|$ である。これは決して負にならないので、P がどこにあっても、どの糸も張っている（P が穴の位置にあるときはちょうどたるむ寸前である）。つまり、糸がたるんで方程式が変わることはない。フックの法則（Hooke's law）より張力は $\frac{\lambda}{a}|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|$ であり、台の上では P を穴の方へ、すなわち単位ベクトル（unit vector）$\frac{\mathbf{a}_i - \mathbf{r}}{|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|}$ の向きに引く。よって糸 i

から P にはたらく力は

$$\frac{\lambda}{a}|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}| \cdot \frac{\mathbf{a}_i - \mathbf{r}}{|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|} = \frac{\lambda}{a}(\mathbf{a}_i - \mathbf{r}).$$

である。



青緑色の線は台の上の 5 本の糸を上から見たものであり、琥珀色の矢印は P にはたらく合力（resultant force）を表す。合力はまっすぐ O を向いている。

前半

P にはたらく鉛直方向の力（重力と垂直抗力（normal reaction））はつり合っている。5 つの水平方向の力を加えると、

$$\mathbf{F} = \frac{\lambda}{a}\sum_{i=1}^{5}(\mathbf{a}_i - \mathbf{r}) = \frac{\lambda}{a}\Big(\sum_{i=1}^{5}\mathbf{a}_i\Big) - \frac{5\lambda}{a}\mathbf{r}.$$

考えてみよう なぜ $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5 = \mathbf{0}$ となるのか？

図全体を O のまわりに 72° 回転すると 5 つの穴が入れ替わるだけなので、和 $\mathbf{s} = \sum \mathbf{a}_i$ は変わらない。しかし 72° の回転で変わらないベクトルは零ベクトルだけであるから、$\mathbf{s} = \mathbf{0}$ である。（同じことだが、1 の 5 乗根（fifth roots of unity）の和は 0 である。）

したがって、ニュートンの運動の第 2 法則（Newton's second law）より

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{5\lambda}{a}\mathbf{r}, \qquad \text{すなわち} \qquad \ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2\mathbf{r} \quad \text{ただし} \quad \omega^2 = \frac{5\lambda}{am}.$$

P は F で静止した状態から動き出すので、$\mathbf{r}(0) = \overrightarrow{OF}$、$\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{0}$ である。解は $\mathbf{r} = \cos(\omega t)\,\overrightarrow{OF}$ であるから、P は直線 FO 上を往復し（O に関して F と対称な点まで行って戻ってくる）、O からの変位は単振動（simple harmonic motion）の方程式を満たす。周期（period）は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{am}{5\lambda}},$$

となり、示された。（これは小さな変位に限らず、**任意の**出発点 F について成り立つことに注意せよ。力の法則が厳密に線形だからである。）

後半

ここで糸 PAO の弾性係数（modulus）は $k\lambda$ であるから、この糸から P にはたらく力は $\frac{k\lambda}{a}(\mathbf{a}_1-\mathbf{r})$ である。$\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4+\mathbf{a}_5=-\mathbf{a}_1$ を用いると、

$$\begin{aligned}\mathbf{F}&=\frac{k\lambda}{a}(\mathbf{a}_1-\mathbf{r})+\frac{\lambda}{a}\sum_{i=2}^{5}(\mathbf{a}_i-\mathbf{r})\\&=\frac{k\lambda}{a}(\mathbf{a}_1-\mathbf{r})+\frac{\lambda}{a}(-\mathbf{a}_1-4\mathbf{r})\\&=\frac{\lambda}{a}\big[(k-1)\mathbf{a}_1-(k+4)\mathbf{r}\big]=-\frac{(k+4)\lambda}{a}\,(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,,\qquad \mathbf{r}_0=\frac{k-1}{k+4}\,\mathbf{a}_1.\end{aligned}$$

よって平衡位置（equilibrium position）は OA 上の点 $\mathbf{r}_0$（$\mathbf{F}=\mathbf{0}$ となる点）であり、

$$\ddot{\mathbf{r}}=-\frac{(k+4)\lambda}{am}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0).$$

P を $\mathbf{r}_0$ から OA に沿ってずらし、静かに放すと、$\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ ははじめ $\mathbf{a}_1$ に平行であり、加速度はつねに $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ に平行で、初速度は零である。したがって前半とまったく同様に $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=\cos(\omega' t)(\mathbf{r}(0)-\mathbf{r}_0)$ となる。つまり P は OA に沿って直線運動をし、$\mathbf{r}_0$ を中心とする角振動数（angular frequency）ω' の単振動をする。ここで

$$\omega'^2=\frac{(k+4)\lambda}{am}.$$

である。周期が $T/2$ となるのは $\omega'=2\omega$、すなわち $\omega'^2=4\omega^2$ のときであり、そのときに限る：

$$\frac{(k+4)\lambda}{am}=\frac{20\lambda}{am}\quad\Longrightarrow\quad k+4=20\quad\Longrightarrow\quad k=16.$$

$k=16$ のとき平衡位置は $\mathbf{r}_0=\frac{15}{20}\mathbf{a}_1$ であり、O から A までの 4 分の 3 の位置にある。（このモデルが成り立つためには、P が A の穴に達しないよう、振幅（amplitude）が $\frac{1}{4}a$ より小さくなければならない。）

検算

- $k=1$ とおくと前半の結果が得られる：$\mathbf{r}_0=\mathbf{0}$、$\omega'^2=5\lambda/(am)$。
- 単位：λ は力なので、$\lambda/(am)$ の単位は $\mathrm{N}/(\mathrm{m\,kg})=\mathrm{s}^{-2}$ であり、T は時間の単位をもつ。
- 1000 個のランダムな位置で 5 つの張力ベクトルの和を計算したところ（$a=1.3$、$m=0.7$、$\lambda=2.1$）、正確に $-5\lambda\mathbf{r}/a$ となり、$k=16$ のときは正確に $-20\lambda(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)/a$ となった。$(0.4,-0.3)$ から運動を数値的に追跡すると、P は O を通る直線上にとどまったまま、時間 $T\approx 1.85$ 後に出発点に戻った。$k=16$ で $\mathbf{r}_0+0.1a\,\hat{\mathbf{a}}_1$ から出発すると、$T/2$ 後に戻った。

よくある間違い

- 伸びを $|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}| - a$ や $|\mathbf{r}|$ としてしまうこと。自然長 a は台の下の部分でちょうど使い切られている。
- 5 つの張力を角度と三角関数を使って分解すること。それでも解けるが、ベクトルを使えば打ち消し合いがすぐにわかる。
- 新しい振動もまだ O を中心としていると思い込むこと。より硬い糸が平衡位置を A の方へ引き寄せる。

STEP のその先へ

2 次元における力 $\mathbf{F} = -c\,\mathbf{r}$ は等方調和振動子（isotropic harmonic oscillator）を与える。一般の運動（横向きの初速度がある場合）は平衡点を中心とする楕円であり、どの軌道も同じ周期をもつ。逆二乗則（inverse-square law）とともに、これは有界な軌道がすべて閉じるようなたった 2 つの中心力（central force）のうちの 1 つである（ベルトランの定理（Bertrand's theorem））。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、振動子と中心力をこのようなベクトルの流儀で扱っている。

解答例

STEP III 1989、第 14 問

力学 ・ 滑車と力積

> **STEP III 1989、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q14

鍵となる考え方

小問 (i) では、円板を細い円環に切り分ける。各円環の質量はすべて中心から同じ距離にあるので、質量も慣性モーメント（moment of inertia）も r についての 1 変数の積分になる。小問 (ii) では、系全体の自由度（degree of freedom）は 1 つ（D の深さ）なので、運動方程式（equation of motion）を 1 つ立てれば加速度が求まる。B を急に止めると、糸の拘束（constraint）から、その後 D がどれだけの速さで動けるかがすぐにわかり、力積（impulse）は単にその運動量（momentum）の変化である。

解答

小問 (i)

（小問 (i) の軸は中心 O を通る軸である。問題文の「C」は誤植である。）O からの距離が r の点での密度（density）を $\rho = kr$ とする。ただし k は定数である。半径 r と $r + \mathrm{d}r$ の間の細い円環の面積は $2\pi r\,\mathrm{d}r$ なので、その質量は $2\pi kr^2\,\mathrm{d}r$ であり、円環上のどの点も軸から距離 r にある。よって

$$m = \int_0^a 2\pi kr^2\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi ka^3}{3}, \qquad I = \int_0^a r^2 \cdot 2\pi kr^2\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi ka^5}{5}.$$

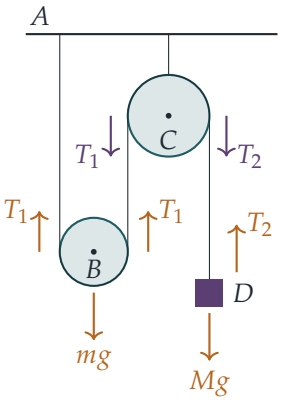
割り算をすると $I/m = \frac{3}{5}a^2$ となるので、

$$I = \tfrac{3}{5}ma^2,$$

となり、示すべき式が得られた。（これは一様な円板の $\frac{1}{2}ma^2$ より大きいが、そうなるべきである。質量の多くが縁の近くにあるからである。）

小問 (ii)：B を止める前の運動

モデル：B は質量 m のなめらかな滑車（pulley）であり、C は (i) の型の円板で、質量 m、半径 a である。したがって、固定軸のまわりの慣性モーメントは $\frac{3}{5}ma^2$ である。糸は軽く、伸び縮みせず（inextensible）、C の上を滑らない。B はなめらかなので、2 本の部分 AB と BC の張力（tension）T_1 は等しい。部分 CD の張力を T_2 とする。C は粗いので、T_2 が T_1 に等しいとは限らない。



D が加速度 f で下向きに動くとする。B を支える 2 本の部分は、それぞれ CD が伸びる量の半分ずつ縮むので、B は加速度 $\frac{1}{2}f$ で上昇する。また、糸は C の上を滑らないので、C の角加速度（angular acceleration）は f/a である。運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} D\,(\text{下向き}):&\quad Mg - T_2 = Mf,\\ B\,(\text{上向き}):&\quad 2T_1 - mg = \tfrac{1}{2}mf,\\ C\,(\text{軸のまわりのモーメント}):&\quad (T_2 - T_1)a = \tfrac{3}{5}ma^2 \cdot \frac{f}{a}. \end{aligned}$$

$T_2 = Mg - Mf$ と $T_1 = \frac{1}{2}mg + \frac{1}{4}mf$ を最後の式に代入すると、

$$Mg - Mf - \tfrac{1}{2}mg - \tfrac{1}{4}mf = \tfrac{3}{5}mf \quad\Longrightarrow\quad f\left(M + \tfrac{17}{20}m\right) = g\left(M - \tfrac{1}{2}m\right),$$

となるので、

$$f = \frac{10(2M - m)g}{20M + 17m}.$$

これは定数であり、正になるのはちょうど $m < 2M$ だからである。この条件が課されているのはそのためである。これにより、D は確かに静止状態から下降することがわかる。したがって t 秒後に D が下向きに動く速さは

$$v = ft = \frac{10(2M - m)gt}{20M + 17m},$$

であり、B は速さ $\frac{1}{2}v$ で上昇し、C は角速度 v/a で回転している。

（エネルギーによる検算でも同じ f が得られる。D が x だけ落下したとき、運動エネルギーは $\frac{1}{2}\left(M+\frac{1}{4}m+\frac{3}{5}m\right)\dot{x}^2$ であり、失われた位置エネルギーは $\left(M-\frac{1}{2}m\right)gx$ である。）

小問 (ii)：力積

考えてみよう　B を止めた後も、D は動けるだろうか？

糸が張っている間は、D の速さは常に B の速さの 2 倍である。A は固定されていて、AB と BC はそれぞれ同じ量だけ長さが変わるからである。B が静止すると、これら 2 つの長さはどちらも固定されるので、糸は C を回って移動できず、D も止まらなければならない。C も同様である。糸は実際に張ったままである。D は C から遠ざかる向きに動いているので CD をぴんと引っ張り、まだ回転している C は BC 側から糸を巻き上げるので、その部分もぴんと引っ張られる。（実際、撃力的な張力（impulsive tension）は CD で Mv、BC で $\left(M+\frac{3}{5}m\right)v$ となり、どちらも正であるから、このことが確かめられる。）

したがって、D の速度は下向きの v から 0 に下がり、（糸から）D が受ける力積はその運動量の変化に等しい：

$$\text{力積：対象}D = Mv = \frac{10M(2M-m)gt}{20M+17m} \quad \text{鉛直上向き。}$$

検算

- $m \to 0$（軽い滑車）とすると $f \to g$ となり、力積は Mgt である。予想どおり、D は単に自由落下する。
- $m = 2M$ のとき力積は 0 である。系はつり合いの状態にあり、動き出すことはない。
- $M = 3$、$m = 2.5$、$g = 9.8$、$t = 1.3$ として運動を数値的に追跡すると $Mv \approx 13.0507$ となって公式と一致し、増加した運動エネルギーは失われた位置エネルギーと一致する。数値積分による慣性モーメントの比は 0.6000 である。

よくある間違い

- C の両側の張力を同じとしてしまうこと。滑車 C は質量をもち粗いので、まさにその張力の差が C を回転させるのである。
- B が D の半分の速さで動くことを忘れること。これにより有効質量（effective mass）には m ではなく $\frac{1}{4}m$ が現れる。

▶ 力積の向きを書かずに答えること。力積は D に上向きに働く。

STEP のその先へ

運動エネルギーを 1 つの座標で $\frac{1}{2}M_{\text{eff}}\dot{x}^2$ と書くことは、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）の出発点である。ラグランジュ力学では、滑車の幾何のような拘束がはじめから組み込まれており、張力は一切現れない。B を止めるような突然の拘束も、撃力的な方程式を用いて同じように扱われる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体（rigid body）の回転と力積をこのスタイルで扱っている。

解答例

STEP III 1989、第 15 問

確率・統計 ・ 中央値の分布

STEP III 1989、問 15

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/89-s3-q15

鍵となる考え方

$2n+1$ 個の値の中央値（median）が z の近くにあるのは、ちょうど 1 個の値が z にある微小な区間に入り、n 個の値がそれより下に、n 個の値がそれより上にあるときである。小問 (i) と (ii) は「すべて下にある」部分と「すべて上にある」部分の確率を与え、どの値がどの役割を担うかの選び方を数え上げれば確率密度関数（density）が得られる。その後は、確率密度関数の積分が 1 になるという事実から積分の値がただちに求まり、同じ技法を n の代わりに $n+1$ として用いれば分散（variance）が得られる。

解答

以下を通して、X は $[-c,c]$ 上で確率密度 $\frac{1}{2c}$ をもつので、$-c \le k \le c$ に対して

$$\mathrm{P}(X > k) = \frac{c-k}{2c}, \qquad \mathrm{P}(X < k) = \frac{c+k}{2c}.$$

である。

小問 (i)

n 個の値は独立（independent）であるから、確率を掛け合わせて

$$\mathrm{P}(n \text{ 個の値がすべて次より大きい：} k) = \left(\frac{c-k}{2c}\right)^n.$$

小問 (ii)

同様にして

$$\mathrm{P}(n \text{ 個の値がすべて次より小さい：} k) = \left(\frac{c+k}{2c}\right)^n.$$

中央値の確率密度関数

$X_1, \ldots, X_{2n+1}$ を標本とし、Z をその中央値、すなわち $(n+1)$ 番目に小さい値とする。X は連続型であるから、値が一致する確率は 0 であり、そのような場合は無視してよい。各 X_i は $[-c, c]$ に属するので、Z も $[-c, c]$ に属する。

z を $(-c, c)$ にとり、小さな $\delta z > 0$ をとる。$(\delta z)^2$ のオーダーの項を除けば、事象 $z < Z \le z + \delta z$ が起こるのはちょうど次の場合である。

- 値のうち 1 個が $(z, z+\delta z]$ に入る。
- 残りの値のうち n 個が z より小さい。
- 残りの n 個の値が $z+\delta z$ より大きい。

（微小な区間に 2 個以上の値が入る配置の確率は $(\delta z)^2$ のオーダーであり、極限では影響しない。）

> **考えてみよう** $2n+1$ 個の値をこれら 3 つの役割に割り当てる方法は何通りあるか。

微小な区間に入る値の選び方が $2n+1$ 通りあり、その後、残りのうちどの n 個を z より下に置くかの選び方が $\binom{2n}{n}$ 通りある。したがって割り当ては

$$(2n+1)\binom{2n}{n} = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$$

通りである。これらは互いに排反であり、どれも同じ確率をもつ。ある 1 つの割り当てを固定すると、独立性と、$k = z$ とした小問 (i), (ii) により、その確率は

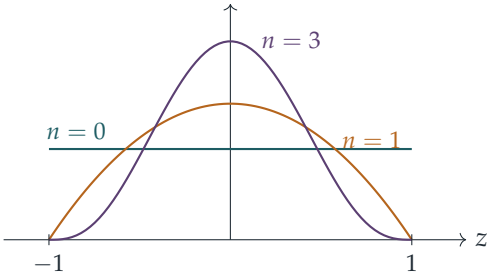
$$\frac{\delta z}{2c}\left(\frac{c+z}{2c}\right)^n\left(\frac{c-z-\delta z}{2c}\right)^n.$$

となる。すべての割り当てについて足し合わせ、δz で割って $\delta z \to 0$ とすると、Z の確率密度関数は

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\cdot\frac{1}{2c}\cdot\frac{(c+z)^n(c-z)^n}{(2c)^{2n}} \\ &= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2(2c)^{2n+1}}\,(c^2-z^2)^n, \qquad -c \le z \le c, \end{aligned}$$

である。ここで $(c+z)(c-z) = c^2 - z^2$ を用いた。これが求める結果である。

下の図は $c = 1$ のときの確率密度関数を示している。$n = 0$ のとき「中央値」は 1 個の値そのものであり、一様分布（uniform distribution）に従う。n が大きくなるにつれて、中央値は 0 の近くに集中する。



積分

確率密度関数をその値域全体で積分すると 1 になるので

$$\frac{(2n+1)!}{(n!)^2(2c)^{2n+1}} \int_{-c}^{c} (c^2 - z^2)^n \, \mathrm{d}z = 1,$$

であり、したがって

$$\int_{-c}^{c} (c^2 - z^2)^n \, \mathrm{d}z = \frac{(n!)^2(2c)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

である。これはすべての整数 $n \geq 0$ について成り立ち、このことをすぐ後で用いる。

平均と分散

確率密度関数 g は z の偶関数（even function）であるから、$zg(z)$ は奇関数（odd function）であり、対称な区間 $[-c, c]$ 上でのその積分は 0 である。よって

$$\mathrm{E}(Z) = 0.$$

ゆえに $\mathrm{var}(Z) = \mathrm{E}(Z^2)$ である。$K_n = \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2(2c)^{2n+1}}$ および $I_n = \displaystyle\int_{-c}^{c} (c^2 - z^2)^n \, \mathrm{d}z = \frac{1}{K_n}$ とおく。

考えてみよう $z^2(c^2 - z^2)^n$ を展開せずに積分するにはどうすればよいか。

$z^2 = c^2 - (c^2 - z^2)$ と書く。すると

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Z^2) &= K_n \int_{-c}^{c} \big(c^2 - (c^2 - z^2)\big)(c^2 - z^2)^n \, \mathrm{d}z \\ &= K_n \big(c^2 I_n - I_{n+1}\big) = c^2 - \frac{K_n}{K_{n+1}}, \end{aligned}$$

となる。ここで $K_n I_n = 1$ と、積分の結果で n の代わりに $n+1$ とした $I_{n+1} = 1/K_{n+1}$ を用いた。さて

$$\frac{K_n}{K_{n+1}} = \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} \cdot \frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2} \cdot \frac{(2c)^{2n+3}}{(2c)^{2n+1}} = \frac{(n+1)^2 \cdot 4c^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{2(n+1)c^2}{2n+3}.$$

したがって

$$\operatorname{var}(Z) = c^2 \left(1 - \frac{2n+2}{2n+3}\right) = \frac{c^2}{2n+3}.$$

である。

検算

- $n = 0$ のとき、中央値は X の 1 個の値にすぎない。確率密度関数は $\frac{1}{2c}$ となり、積分は $2c$、分散は $\frac{c^2}{3}$ となる。これは $[-c, c]$ 上の一様分布の分散である。
- $n = 1$ かつ $c = 1$ のとき、積分の公式から $\int_{-1}^{1} (1 - z^2)\,\mathrm{d}z = \frac{1 \cdot 8}{6} = \frac{4}{3}$ が得られ、これは正しい。
- $c = 1.7$ として大きさ 5（$n = 2$）の標本を 10^5 個シミュレーションしたところ、中央値の分散は 0.415 となり、$c^2/7 \approx 0.413$ とよく一致した。

よくある間違い

- 中央の値の選び方に対応する因子 $2n+1$ を忘れ、$\binom{2n}{n}$ だけを用いてしまう。
- 中央の値自身の確率密度に対応する因子 $\frac{1}{2c}$ を落とし、累乗が $(2c)^{2n+1}$ ではなく $(2c)^{2n}$ のままになってしまう。
- $\mathrm{E}(Z^2)$ を求めるために $(c^2 - z^2)^n$ を二項展開してしまう。それでも計算はできるが、和を簡単にするのは難しい。

STEP のその先へ

中央値は標本の**順序統計量**（order statistics）の 1 つである。同じ数え上げの議論により、任意の連続型分布からとった m 個の値のうち r 番目に小さい値の確率密度関数が $\frac{m!}{(r-1)!\,(m-r)!} F^{r-1}(1-F)^{m-r} f$ として得られる。一様分布の場合、これらは**ベータ分布**（beta distributions）であり、導いた積分はベータ関数（beta function）$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ の特別な場合である。分散 $c^2/(2n+3)$ は $1/n$ のように小さくなり、これは標本中央値の漸近正規性（asymptotic normality）への第一歩である。Blitzstein と Hwang によ

る *Introduction to Probability*（確率論入門）は、順序統計量とベータ分布をよく扱っている。

解答例

STEP III 1989、第 16 問

確率・統計 ・ 確率と仮説検定

STEP III 1989、問 16

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/89-s3-q16

鍵となる考え方

「はい／いいえ」で答える 3 つの特徴によって母集団は 8 つの区画に分かれ、8 つの記述はそれらの区画の割合（proportion）についての 1 次方程式にすぎない。まず緑の目の区画を埋め（そこでの条件が最も具体的である）、次にハシバミ色の目の区画を埋める。統計の部分は、ルリタニア人が長頭である確率というただ 1 つの数に基づいており、その値のもとで観測結果が意外なものかどうかを問うている。

解答

印刷された問題には書き誤りが 3 か所ある。(iv) の「arrow-headed」は**長頭**（*narrow-headed*）、(vi) の「fair-headed」は**金髪**（*fair-haired*）、(viii) の「hazel-haired」は**ハシバミ色の目**（*hazel-eyed*）と読むことにする。3 つの特徴は髪（金髪か黒髪か）、目（緑かハシバミ色か）、頭（長頭か短頭か）であるから、意味の通る読み方はこれしかない。

長頭の人の割合

ルリタニア人を無作為に 1 人選ぶ。金髪・黒髪を F, D、緑の目・ハシバミ色の目を G, H、長頭・短頭を N, B で表す。$\mathrm{P}(F) = \frac{1}{4}$ および $\mathrm{P}(G) = \frac{1}{5}$ が与えられている。

緑の目の区画。 (v) より $\mathrm{P}(N \mid G) = \mathrm{P}(B \mid G) = \frac{1}{2}$ であるから、

$$\mathrm{P}(G \cap N) = \mathrm{P}(G \cap B) = \tfrac{1}{10}.$$

(vi) より、緑の目で短頭の人は金髪と黒髪に等しく分かれる：

$$\mathrm{P}(F \cap G \cap B) = \mathrm{P}(D \cap G \cap B) = \tfrac{1}{20}.$$

(iv) より $\mathrm{P}(F \cap G \cap N) = 0$ であるから、$\mathrm{P}(D \cap G \cap N) = \frac{1}{10}$ である。

ハシバミ色の目の区画。次のようにおく。

$$a = \mathrm{P}(F \cap H \cap B), \quad b = \mathrm{P}(F \cap H \cap N), \quad c = \mathrm{P}(D \cap H \cap B), \quad d = \mathrm{P}(D \cap H \cap N).$$

- 金髪：緑の目で金髪の人は $0 + \frac{1}{20}$ を占めるので、$a + b = \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{1}{5}$ である。
- ハシバミ色の目：$a + b + c + d = \frac{4}{5}$ であるから、$c + d = \frac{3}{5}$ である。
- 記述 (vii)：$\mathrm{P}(B \cap D) = \frac{1}{20} + c = \frac{1}{2}$ であるから $c = \frac{9}{20}$、したがって $d = \frac{3}{20}$ である。
- 記述 (viii)：$\mathrm{P}(F \cap B \mid H) = \mathrm{P}(D \cap N \mid H)$。両辺に $\mathrm{P}(H)$ を掛けると $a = d = \frac{3}{20}$ となり、よって $b = \frac{1}{20}$ である。

8 つの割合をすべて 20 分の 1 を単位として表すと、次のようになる。

	$G \cap N$	$G \cap B$	$H \cap N$	$H \cap B$
F	0	1	1	3
D	2	1	3	9

いずれも負でなく、合計は 20 であるから、このモデルは矛盾がない。長頭の列を足し合わせると、

$$\mathrm{P}(N) = \frac{0 + 2 + 1 + 3}{20} = \frac{3}{10}.$$

したがって、このモデルによればルリタニア人の 30% が長頭である。

短頭の知人 6 人

6 人の知人が互いに独立（independent）な無作為標本（random sample）であるとすれば、6 人全員が短頭である確率は

$$\left(\tfrac{7}{10}\right)^6 = 0.1176\ldots \approx 0.12.$$

考えてみよう 確率 12% の出来事は、このモデルに反する有力な証拠になるだろうか。

ならない。確率がおよそ 1 / 8 の出来事は珍しいものではなく、5% のような通常のどの水準でも有意（significant）とはならない。このデータにはもう 1 つ弱点がある。知人は無作為標本ではないのである。知人どうしは家族、地域、社会集団を共有しているかもしれないので、独立とは限らず、母集団全体を代表しているとも限らない。この観測結果は、せいぜいごくわずかな疑いの根拠を与えるにすぎない。

200 人の無作為標本

200 人の無作為標本に含まれる長頭の人数を X とする。母集団は大きいので、抽出は事実上独立であり、モデルのもとで $X \sim \mathrm{B}(200, \frac{3}{10})$ となる。ここで

$$\mathrm{E}(X) = 60, \qquad \mathrm{Var}(X) = 200 \times 0.3 \times 0.7 = 42, \qquad \sqrt{42} \approx 6.481.$$

np と $n(1-p)$ はともに大きいので、正規近似（normal approximation）$X \approx \mathrm{N}(60, 42)$ を連続性補正（continuity correction）とともに用いる：

$$\mathrm{P}(X \le 50) \approx \Phi\left(\frac{50.5 - 60}{\sqrt{42}}\right) = \Phi(-1.466) \approx 0.071.$$

したがってモデルのもとでは、長頭が 50 人以下となることはおよそ 7% の割合で起こる。

考えてみよう ここでモデルを棄却すべきだろうか。

5% 水準では棄却されない。$p = 0.3$ 対 $p < 0.3$ の片側検定（one-tailed test）を行うと、p 値（p-value）はおよそ 0.07 である。とはいえ、この結果はモデルにいくらかの疑いを投げかける。標本比率 $\frac{50}{200} = 0.25$ は予測値よりおよそ 1.5 標準偏差（standard deviation）だけ小さい。また、予想より長頭が少なかった知人の場合と同じ方向を指している。モデルの示す 30% という値を信頼する前に、さらにデータを集めるのが賢明であろう。（両側検定（two-tailed test）であれば p 値はおよそ 0.14 となり、証拠はさらに弱くなる。）

検算

- 8 つの条件はいずれも表から直接読み取れる。たとえば (vii) は、20 分の 1 を単位として $1 + 9 = 10$ となり、これは $= \frac{1}{2}$ である。
- コンピュータで確かめると、各区画の割合が唯一の解であること、$\mathrm{P}(N) = \frac{3}{10}$ であること、$(0.7)^6 = 0.117649$ であることが確認できる。二項分布（binomial distribution）による正確な確率 $\mathrm{P}(X \le 50) = 0.0695$ は、正規近似の値 0.0713 に近い。

よくある間違い

- (v) や (vi) を、条件付きの記述ではなく母集団全体についての記述と読んでしまうこと。緑の目の集団の中での「as likely as（同じくらい起こりやすい）」は、$\frac{1}{5}$ を半分ずつに等分するという意味である。

- 連続性補正を忘れること。50.5 の代わりに 50 を用いると $\Phi(-1.543) \approx 0.061$ となる。
- 何の断りもなく知人を無作為標本として扱うこと。

STEP のその先へ

最後の部分は仮説検定（hypothesis test）であり、2 つの証拠から自然な疑問が生じる。いくつもの弱い証拠をどのように組み合わせればよいのだろうか。大学の統計学はこれに尤度（likelihood）によって答える（ベイズ主義者であれば事後確率（posterior probabilities）によって答える）。これらは、p の各値が**すべての**データをまとめてどれだけよく説明するかを測るものである。確率論の基礎については Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction* が詳しく、ベイズ的な見方については Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability* に親しみやすい解説がある。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

1989 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.