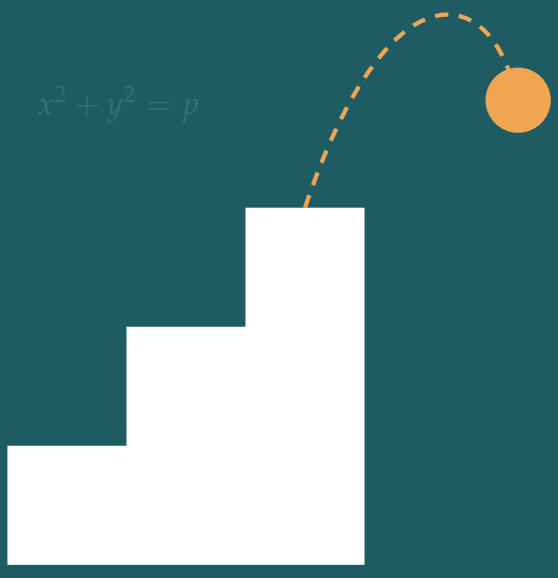
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

1988 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

1988 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

1988 年解答例

1988 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 48 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 曲線の概形 純粋数学 . . . 3
Q2 停留点 純粋数学 . . . 7
Q3 幾何的な極値の評価 純粋数学 . . . 11
Q4 直線の交点の個数 純粋数学 . . . 15
Q5 級数と母関数 純粋数学 . . . 19
Q6 複素数と図形 純粋数学 . . . 22
Q7 2 次関数の導関数の評価 純粋数学 . . . 26
Q8 空間図形 純粋数学 . . . 30
Q9 置換積分 純粋数学 . . . 34
Q10 放物運動 力学 . . . 37
Q11 質量中心 力学 . . . 41
Q12 変化する力による運動 力学 . . . 45
Q13 弾性ひもと衝突 力学 . . . 49
Q14 打ち切り正規分布の期待値 確率・統計 . . . 53
Q15 二項検定 確率・統計 . . . 57
Q16 連続分布と条件付け 確率・統計 . . . 60

STEP II

Q1 部分分数分解と級数 純粋数学 . . . 64
Q2 対称な代数方程式 純粋数学 . . . 68
Q3 解の対称性 純粋数学 . . . 72
Q4 複素数平面上の軌跡 純粋数学 . . . 76
Q5 1 の冪根と正接 純粋数学 . . . 81
Q6 双曲線関数の不等式 純粋数学 . . . 85

Q7 置換積分 純粋数学 90
Q8 行列と固有ベクトル 純粋数学 94
Q9 部分群と和集合 純粋数学 98
Q10 ベクトルと放物面 純粋数学 102
Q11 柱に巻きつく糸 力学 107
Q12 落下する鎖 力学 111
Q13 摩擦とつり合い 力学 115
Q14 回転する剛体 力学 119
Q15 離散一様分布の和 確率・統計 123
Q16 正規分布 確率・統計 127

STEP III

Q1 曲線の概形と評価 純粋数学 131
Q2 線形漸化式 純粋数学 135
Q3 複素平面上の軌跡 純粋数学 139
Q4 弧長の最適化 純粋数学 143
Q5 漸化式とローン 純粋数学 146
Q6 繰り返し微分 純粋数学 150
Q7 微分方程式と直交性 純粋数学 153
Q8 放物線の接線と法線 純粋数学 157
Q9 群の元の位数 純粋数学 162
Q10 追跡曲線 純粋数学 165
Q11 摩擦のある梯子のつり合い 力学 169
Q12 斜め衝突 力学 173
Q13 空気抵抗のある放物運動 力学 177
Q14 なめらかな針金上の運動 力学 181
Q15 期待値の漸化式 確率・統計 185
Q16 超幾何分布 確率・統計 189

解答例

STEP I 1988、第 1 問

純粋数学 ・ 曲線の概形

> **STEP I 1988、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q1

鍵となる考え方

方程式 $n^m = m^n$ では、変数が底と指数の間で入り混じっており扱いにくい。対数（logarithm）をとると $m\ln n = n\ln m$ となり、さらに mn で割ると変数は完全に分離される：$\frac{\ln n}{n} = \frac{\ln m}{m}$。したがって、h が同じ値をとるような相異なる二つの整数を見つければよく、そのような組がどこに存在しうるかはグラフの形が正確に教えてくれる。

解答

h のグラフ

商の微分法（quotient rule）を用いて微分すると、

$$\mathrm{h}'(x) = \frac{x\cdot\frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

$x^2 > 0$ であるから、$\mathrm{h}'(x)$ の符号は $1-\ln x$ の符号と一致する。よって h は $(0,\mathrm{e})$ で狭義単調増加（strictly increasing）、(e,∞) で狭義単調減少（strictly decreasing）であり、$x = \mathrm{e}$ で最大値（maximum）

$$\mathrm{h}(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

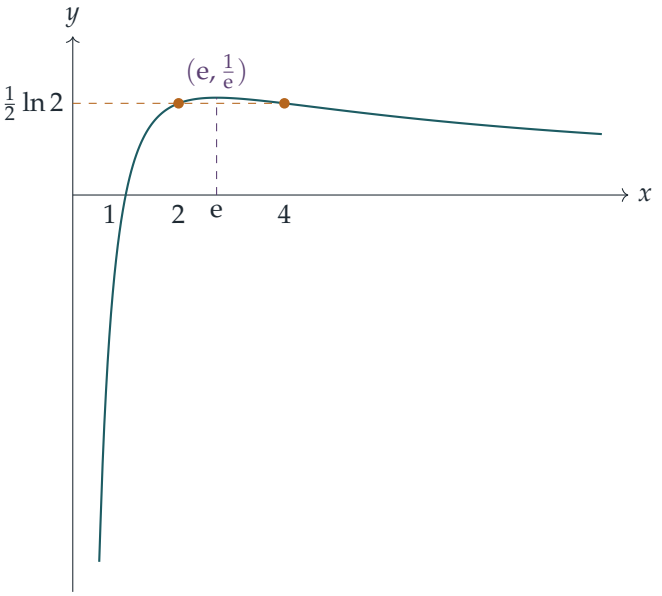
をとる。もう一度微分すると、

$$\mathrm{h}''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - (1-\ln x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3},$$

となるので、$x = \mathrm{e}^{3/2} \approx 4.48$ に変曲点（point of inflection）があり、そこでは $\mathrm{h} = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3/2} \approx 0.335$ である。曲線はこの点より左側で上に凸（concave）、右側で下に凸（convex）である。

次に、両端での振る舞いと符号を調べる：

- $x \to 0^+$ のとき、$\ln x \to -\infty$ かつ $\frac{1}{x} \to +\infty$ であるから、$\mathrm{h}(x) \to -\infty$ となる。すなわち y 軸は漸近線（asymptote）である。
- $\mathrm{h}(1) = 0$ であり、$\mathrm{h}(x)$ の符号は $\ln x$ の符号と一致する：$(0,1)$ で負、$x > 1$ で正である。
- $x \to \infty$ のとき $\frac{\ln x}{x} \to 0$ であり（対数は x のどんな正の累乗よりも増加が遅い）、そこでは $\mathrm{h}(x) > 0$ であるから、曲線は上側から x 軸に近づく。



方程式 $n^m = m^n$

m と n は正であるから両辺は正であり、対数をとることができる：

$$n^m = m^n \iff m \ln n = n \ln m \iff \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln m}{m} \iff \mathrm{h}(n) = \mathrm{h}(m),$$

ここで中央の段階では $mn > 0$ で割った。したがって、$\mathrm{h}(m) = \mathrm{h}(n)$ を満たす相異なる正の整数を求めればよい。対称性から $m < n$ と仮定する。

考えてみよう グラフ上で、異なる二点が同じ高さをもちうるのはどこか？

h は $(0,\mathrm{e}]$ で狭義単調増加、$[\mathrm{e},\infty)$ で狭義単調減少であるから、それぞれの区間で一対一（one-to-one）である。よって、同じ値をとる相異なる二つの入力は e の両側に分かれていなければならない：$m < \mathrm{e} < n$。m は正の整数で $\mathrm{e} \approx 2.718$ であるから、$m = 1$ または $m = 2$ である。

- $m = 1$ ならば $\mathrm{h}(n) = \mathrm{h}(1) = 0$ となり、$\ln n = 0$ でなければならないから $n = 1 = m$ となって条件に反する。（直接見ても、$n^1 = 1^n$ から $n = 1$ である。）
- $m = 2$ ならば、$\mathrm{h}(n) = \frac{1}{2}\ln 2$ を満たす整数 $n \geq 3$ が必要である。$n = 4$ はこれを満たす。実際、
$$\mathrm{h}(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{2\ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{2} = \mathrm{h}(2),$$
すなわち $4^2 = 16 = 2^4$ である。h は $[\mathrm{e}, \infty)$ で狭義単調減少であるから、そこで値 $\frac{1}{2}\ln 2$ をとるのは高々一回であり、したがって $n = 4$ が唯一の可能性である。

以上より、$n^m = m^n$ を満たす相異なる正の整数の組は

$$(m, n) = (2, 4) \quad \text{および} \quad (m, n) = (4, 2).$$

のみである。

検算

$1 \leq m, n \leq 300$ のすべてについて厳密な整数演算でコンピュータ探索を行うと、見つかるのは $(2, 4)$ と $(4, 2)$ のみである。数値的には $\mathrm{h}(2) = \mathrm{h}(4) = 0.346574\ldots$ であり、グラフが示すとおり最大値 $1/\mathrm{e} = 0.367879\ldots$ をわずかに下回る。また、$\mathrm{h}(3)$ から解が得られない理由もわかる：$\mathrm{h}(3) \approx 0.366$ は $\mathrm{h}(2)$ より大きく、e の左側にあるその相方は 2 と e の間に厳密に位置するので、整数ではない。

よくある間違い

- 試行錯誤で $(2, 4)$ を見つけてそこで止めてしまう。問題は**すべての**組を求めているので、他に解がないことを証明する単調性（monotonicity）の議論こそが解答の核心である。
- 概形を描く際に漸近的な振る舞いを忘れる：曲線は y 軸に沿って $-\infty$ へ急降下するが、$x \to \infty$ では 0 へゆっくり近づくだけで、再び軸と交わることはない。

STEP のその先へ

実数まで許すと、$(1, \mathrm{e})$ の各 a に対して $a^b = b^a$ を満たす相方 $b > \mathrm{e}$ がちょうど一つ存在し、これらの組は $t > 0$ を用いて $a = (1 + \frac{1}{t})^t$、$b = (1 + \frac{1}{t})^{t+1}$ ときれいにパラメータ表示（parametrise）できる。$t \to \infty$ のとき両者はともに e に収束（converge）し、これがグラフの頂点での合流点である。ここで用いた極限 $\frac{\ln x}{x} \to 0$ は増加の速さ

（growth rate）の比較の最初の例であり、解析学（analysis）の入門課程で厳密に扱われる。Abbott, *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）を参照のこと。

解答例

STEP I 1988、第 2 問

純粋数学 ・ 停留点

> **STEP I 1988、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q2

鍵となる考え方

g を合成関数（composition）とみなす。すなわち $h(t) = t + 1/t$ として $\mathrm{g} = h \circ \mathrm{f}$ である。すると合成関数の微分法（chain rule）により、g' が 0 になるのは $\mathrm{f}' = 0$ となるところか、$h'(\mathrm{f}) = 0$ となるところ、つまり $\mathrm{f} = \pm 1$ となるところである。$\cos 2x$ を $\sin x$ で表すと、f は $\sin x$ の 2 次式になり、その大きさと形についてすべてがわかる。

解答

導関数

$\mathrm{g} = \mathrm{f} + \mathrm{f}^{-1}$ を合成関数の微分法で微分すると、

$$\mathrm{g}'(x) = \mathrm{f}'(x) - \frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)^2} = \mathrm{f}'(x)\left(1 - \frac{1}{\mathrm{f}(x)^2}\right).$$

さらに積の微分法（product rule）でもう一度微分し、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\mathrm{f}^{-2}\right) = 2\mathrm{f}^{-3}\mathrm{f}'$ を用いると、

$$\mathrm{g}''(x) = \mathrm{f}''(x)\left(1 - \frac{1}{\mathrm{f}(x)^2}\right) + \frac{2\,\mathrm{f}'(x)^2}{\mathrm{f}(x)^3}.$$

f の大きさ

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ を用い、$s = \sin x$ とおくと、

$$\mathrm{f}(x) = 5 + 2s - 2s^2 = \tfrac{11}{2} - 2\left(s - \tfrac{1}{2}\right)^2.$$

s が $[-1,1]$ を動くとき、これは $s=\frac{1}{2}$ で最大（$\frac{11}{2}$）となり、区間の端点のうち $\frac{1}{2}$ から遠い方、すなわち $s=-1$ で最小となって、そのとき値は 1 である。よって

$$1 \le \mathrm{f}(x) \le \tfrac{11}{2} \quad \text{任意の} x,$$

であり、$\mathrm{f}(x)=1$ となるのは $\sin x=-1$ のときに限る。特に f は決して 0 にならないので、g はいたるところで定義される。

停留点

$\mathrm{g}'(x)=0$ となるのは、ちょうど $\mathrm{f}'(x)=0$ または $\mathrm{f}(x)^2=1$ のときである。

f' の零点。

$$\mathrm{f}'(x) = -2\sin 2x + 2\cos x = 2\cos x\,(1-2\sin x),$$

であり、これは $\cos x=0$ または $\sin x=\frac{1}{2}$ のとき 0 になる。$[0,2\pi]$ においては

$$x = \tfrac{\pi}{6},\ \tfrac{\pi}{2},\ \tfrac{5\pi}{6},\ \tfrac{3\pi}{2}.$$

$\mathrm{f}=\pm 1$ となる点。 $\mathrm{f}\ge 1$ であるから、これは $\mathrm{f}=1$、すなわち $\sin x=-1$、すなわち $x=\frac{3\pi}{2}$ を意味し、これはすでに上の一覧に含まれている。

したがって、g は $[0,2\pi]$ においてちょうど 4 つの停留点（stationary point）をもつ。（端点はこれに含まれない。実際 $\mathrm{g}'(0)=\mathrm{g}'(2\pi)=2\cdot\frac{24}{25}\neq 0$ である。）

停留点の分類

$\mathrm{f}''(x) = -4\cos 2x - 2\sin x$ である。各停留点では $\mathrm{f}'=0$ なので、g'' の第 2 項は消え、$\mathrm{g}''=\mathrm{f}''\,(1-\mathrm{f}^{-2})$ となる。

- $x=\frac{\pi}{6}$ と $x=\frac{5\pi}{6}$：ここでは $\sin x=\frac{1}{2}$、$\cos 2x=\frac{1}{2}$ なので、$\mathrm{f}=\frac{11}{2}$、$\mathrm{f}''=-2-1=-3$ である。よって $\mathrm{g}''=-3\left(1-\frac{4}{121}\right)<0$ となり、どちらも**極大**であって、

$$\mathrm{g} = \tfrac{11}{2}+\tfrac{2}{11} = \tfrac{125}{22}.$$

- $x=\frac{\pi}{2}$：ここでは $\sin x=1$、$\cos 2x=-1$ なので、$\mathrm{f}=5$、$\mathrm{f}''=4-2=2$ である。よって $\mathrm{g}''=2\left(1-\frac{1}{25}\right)=\frac{48}{25}>0$ となり、**極小**であって、$\mathrm{g}=5+\frac{1}{5}=\frac{26}{5}$ である。
- $x=\frac{3\pi}{2}$：ここでは $\mathrm{f}=1$ なので $1-\mathrm{f}^{-2}=0$ であり、さらに $\mathrm{f}'=0$ でもある。したがって $\mathrm{g}''=0$ となる。

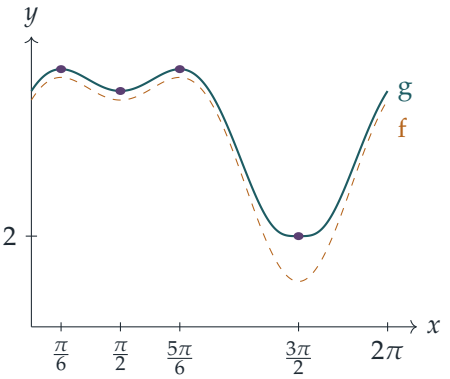
考えてみよう $x=\frac{3\pi}{2}$ では 2 階導関数による判定法（second-derivative test）が使えない。ほかにどのような方法で判定できるだろうか。

$h(t) = t + 1/t$ に立ち返ろう。$t > 0$ のとき

$$t + \frac{1}{t} - 2 = \frac{(t-1)^2}{t} \geq 0,$$

であり、等号が成り立つのは $t = 1$ のときに限る。$\mathrm{f} > 0$ であるから、すべての x に対して $\mathrm{g}(x) \geq 2$ が成り立ち、等号が成り立つのはちょうど $\mathrm{f}(x) = 1$ のときである。$x = \frac{3\pi}{2}$ では $\mathrm{g} = 2$ であるから、この点は**極小**である（実際、g の最小値を与える）。

まとめ。極大は $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$（値 $\frac{125}{22}$）、極小は $x = \frac{\pi}{2}$（値 $\frac{26}{5}$）と $x = \frac{3\pi}{2}$（値 2）である。



検算

- h は $t > 1$ で増加するので、$\mathrm{f} > 1$ であるところでは g は f と一緒に増減するはずである。グラフを見ると、確かに f（破線）と g は同じところで増減が入れ替わっている。
- 数値的には $\mathrm{g}(\frac{\pi}{6}) \approx 5.6818 = \frac{125}{22}$、$\mathrm{g}(\frac{\pi}{2}) = 5.2$ である。$[0, 2\pi]$ 上で g を細かく調べると、増減が入れ替わる点は $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ のみであり、最小値は 2.000 である。
- g'' の式は、無作為に選んだ点において差分による 2 階導関数の近似値と一致する。

よくある間違い

- 因子 $1 - \mathrm{f}^{-2}$ を見落とすこと。この問題では新たな停留点は生じないが、それは $\mathrm{f} = 1$ となる点がたまたま $\mathrm{f}' = 0$ となる点でもあるからにすぎない。それでも確認は必要である。
- $\mathrm{g}''(\frac{3\pi}{2}) = 0$ から、その点を変曲点（point of inflection）だと結論すること。2 階導関数が 0 であるというだけでは何もわからない。

STEP のその先へ

退化した点 $x = \frac{3\pi}{2}$ は合成関数に典型的なものである。f が極小となる点で h も極小となるならば、$h \circ \mathrm{f}$ はそこでより「平坦」になり、2 階導関数が 0 になる。大学の解析学では、2 階導関数による判定法の代わりに、0 でない最初の導関数によってこのような点を分類するテイラーの定理（Taylor's theorem）や、（ここで行ったように）直接的な不等式を用いる。平均値の定理（mean value theorem）とテイラーの定理が丁寧に展開されているのを見るには、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）がよい。

解答例

STEP I 1988、第 3 問

純粋数学 ・ 幾何的な極値の評価

> **STEP I 1988、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q3

鍵となる考え方

正方形の点が O から**遠い**とき、その点はどこにありうるかを考える。そのような点は、反対側の頂点の近くにある小さな領域に押し込められていなければならない。P と Q がともに O から遠ければ、両方ともその小さな領域に入るので、互いに近い。$\sqrt{6}-\sqrt{2}$ という数はまさにこの議論がうまくいく大きさであり、正方形の中に対称に置かれた正三角形（equilateral triangle）から生じる。

解答

単位はセンチメートルとし、O を原点、正方形を $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ とする。

$$s = \sqrt{6}-\sqrt{2}, \qquad s^2 = 6+2-2\sqrt{12} = 8-4\sqrt{3} \approx 1.072,$$

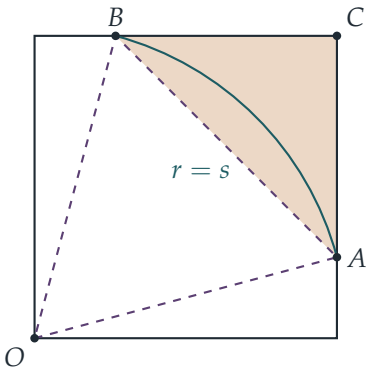
とおき、さらに $t = 2-\sqrt{3} \approx 0.268$ とする。点を次のように定める。

$$A = (1, t), \qquad B = (t, 1), \qquad C = (1, 1).$$

このとき

$$\begin{aligned} OA^2 = OB^2 &= 1 + (2-\sqrt{3})^2 = 8-4\sqrt{3} = s^2, \\ AB^2 &= 2(1-t)^2 = 2(\sqrt{3}-1)^2 = 8-4\sqrt{3} = s^2, \\ AC = BC &= 1-t = \sqrt{3}-1 \approx 0.732 < s. \end{aligned}$$

よって OAB は正方形の内部にある一辺 s の正三角形である。



青緑色の弧は O を中心とする半径 s の円である。正方形のうちこの弧より外側の部分は、影をつけた三角形 ABC の内部にある。

ステップ1：O から遠い点は三角形 ABC の中にある

直線 AB は $x+y=1+t$ である。正方形のうち、この直線に関して O の側にある部分 $\{x+y\le 1+t\}$ を考える。これは次の点を頂点とする五角形（pentagon）である。

$$O=(0,0),\quad (1,0),\quad A,\quad B,\quad (0,1).$$

関数 x^2+y^2 は凸関数（convex function）であるから、この凸五角形上での最大値はある頂点でとられる。各頂点での値は $0, 1, s^2, s^2, 1$ であり、最大は s^2 である。したがって、正方形のすべての点について

$$x+y\le 1+t \implies x^2+y^2\le s^2$$

が成り立つ。これを裏返すと、正方形の点 (x,y) の O からの距離が s **より大きい**ならば $x+y>1+t$ であり、$x\le 1$ かつ $y\le 1$ であるから、その点は三角形 ABC の中にある。

> **考えてみよう** 三角形の2点間の距離の最大値が、その三角形の辺のいずれかの長さになるのはなぜか。

Q を固定する。距離 $|PQ|$ は P の凸関数であるから、三角形上では P が頂点のときに最大となる。次にその頂点を固定して Q を動かすと、同じ議論により Q も頂点としてよい。よって三角形の2点間の距離の最大値は2つの頂点の間の距離、すなわち最も長い辺の長さである。

ステップ2：矛盾

$OP>s$ かつ $OQ>s$ と仮定する（そうでなければすでに示すべきことは成り立っている）。ステップ1により、P と Q はともに三角形 ABC の中にある。この三角形の最も

長い辺は $AB = s$ である（他の 2 辺は $\sqrt{3} - 1 < s$）。よって上の囲みにより

$$PQ \leq s.$$

したがって、どの場合にも OP, PQ, QO の少なくとも 1 つは $s = (\sqrt{6} - \sqrt{2})$ cm 以下であり、これが示すべきことであった。

この評価は最良である

$P = A, Q = B$ とすると、ちょうど $OP = PQ = QO = s$ となるので、これより小さい数では成り立たない。$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ であるから $s = \sec 15^\circ$ である。極端な場合の三角形は、対角線に関して対称に置かれた正三角形であり、OA と OB はそれぞれ正方形の辺と 15° の角をなす。

検算

- $s \approx 1.0353$ は正方形の一辺より少し大きく、対角線 $\sqrt{2} \approx 1.414$ よりかなり小さい。これは妥当である。
- 数値的に、正方形内の 10^6 組のランダムな点 P, Q について、$\min(OP, PQ, QO)$ が s を超えることは一度もなかった（最大はおよそ 1.0235）。最小値をできるだけ大きくする山登り法（hill-climbing）による探索は $P \approx (1, 0.26795)$, $Q \approx (0.26795, 1)$、値 1.035276 に落ち着き、A, B, s と一致した。

よくある間違い

- $OP, OQ > s$ のとき $\angle POQ < 60^\circ$ であることだけを論じる。これは正しいが、それだけでは PQ が最短の辺になるとはいえないので、さらに議論を加えなければ証明は完結しない。
- 対称な配置だけを調べる。これは評価が改良できないことを示すが、すべての P と Q について評価が成り立つことの証明にはならない。

STEP のその先へ

これは点の配置に関する小さな極値問題（extremal problem）である。ある領域の 3 点を、すべて同時にどこまで互いに離せるか、という問いである。このような問いは詰め込み問題（packing problem）や被覆問題（covering problem）へとつながり、また集合の**直径**（diameter）という概念にもつながる。集合の直径はその凸包（convex

hull）の直径と等しい。この事実のおかげで、ステップ 2 は楽に済んだのである。この種の問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を参照するとよい。

解答例

STEP I 1988、第 4 問

純粋数学 ・ 直線の交点の個数

> **STEP I 1988、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q4

鍵となる考え方

すべての線分を一度に思い描こうとしてはならない。代わりに、2 本の線分が交わるのはどのようなときかを問うのである。その答えは両軸上での端点の並び順だけで決まり、これによって各交点は各軸から 2 点ずつを選ぶことに対応する。1 本の線分上の交点を数えられるようになれば、交点が最多・最少の線分と最終的な平均（average）は、丁寧に数え上げることで求まる。

解答

y 軸上の点を原点 O からの距離が小さい順に $B_1, \ldots, B_m$ とし、x 軸上の点も同様に $A_1, \ldots, A_n$ とする。線分（segment）B_iA_j を s_{ij} と書く。

小問 (i)

m 個の点 B_i のそれぞれが n 個の点 A_j のそれぞれと結ばれるので、線分の本数は

$$mn$$

である。

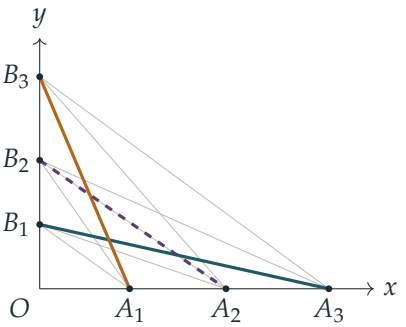
小問 (ii)

異なる 2 本の線分 s_{ij} と s_{kl} をとる。

- $i = k$ または $j = l$ のとき、2 本は端点を共有する。共通の点から出る異なる 2 本の線分はその点でしか交わらず、そのような交わりは数えない。

- $i < k$ かつ $j < l$ のとき、B_i と A_j はともに直線 B_kA_l に関して O と同じ側にある（これらは三角形 OB_kA_l の辺 OB_k と OA_l 上にあり、B_k や A_l とは一致しない）。両端点が直線の一方の側に厳密に含まれる線分はその側から出ないので、s_{ij} は s_{kl} と交わらない。s_{ij} はその下に「入れ子」になっているのである。
- $i < k$ かつ $j > l$ のとき、B_i は直線 B_kA_l に関して O と同じ側にあり、A_j は反対側にある。よって s_{ij} はその直線を横切る。同様に、A_l は直線 B_iA_j に関して O の側にあり、B_k は反対側にある。それぞれの線分がもう一方の線分の端点を分けるので、2 本の線分はちょうど 1 点で交わり、その点は端点ではない。

$i > k$ の場合は役割を入れ替えれば同じである。



図（$m = n = 3$）において、青緑色の s_{13} と琥珀色の s_{31} は端点の並び順が逆なので交わる。破線の s_{22} もそれぞれと交わる。

したがって、内部の点で交わる線分の組はどれも、2 点 B_i, B_k（$i < k$）と 2 点 A_j, A_l（$j < l$）を選び、s_{il} と s_{kj} をとることで得られる。逆に、このような選び方はそれぞれちょうど 1 組の交わる線分の組を与える。3 本の線分が共通の内部の点を通ることはないので、異なる組は異なる点を与える。よって交点（point of intersection）の個数は

$$\binom{m}{2}\binom{n}{2} = \frac{m(m-1)n(n-1)}{4}.$$

である。

平均

1 本の線分上の交点。上の規則により、s_{ij} が s_{kl} と交わるのは $k < i,\ l > j$ または $k > i,\ l < j$ のときに限る。よって s_{ij} 上の交点の個数は

$$c_{ij} = (i-1)(n-j) + (m-i)(j-1).$$

である。

$m = n$ のときの交点が最多・最少の線分。$N = n - 1$、$a = i - 1$、$b = j - 1$ とおくと $0 \le a, b \le N$ であり、

$$c_{ij} = a(N-b) + (N-a)b = N(a+b) - 2ab = \tfrac{1}{2}\big(N^2 - (N-2a)(N-2b)\big),$$

となる。これは展開すれば確かめられる。$|N-2a| \le N$ かつ $|N-2b| \le N$ であるから、積 $(N-2a)(N-2b)$ は $-N^2$ 以上 N^2 以下である。したがって $0 \le c_{ij} \le N^2$ であり、

- $c_{ij} = N^2$ となるのは $(N-2a)(N-2b) = -N^2$、すなわち $\{a, b\} = \{0, N\}$ のときに限る。これは 2 本の線分 s_{1n} と s_{n1} である。
- $c_{ij} = 0$ となるのは $(N-2a)(N-2b) = N^2$、すなわち $a = b = 0$ または $a = b = N$ のときに限る。これは 2 本の線分 s_{11} と s_{nn} である。

（ここで $N \ge 2$ なので、これら 4 本の線分は互いに異なる。）よって、最多の $(n-1)^2$ 個の点をもつ線分はちょうど 2 本、最少の 0 個の点をもつ線分もちょうど 2 本である。これらを取り除くと $n^2 - 4$ 本の線分が残る。

考えてみよう いったい何の平均をとっているのか？

4 本の線分を取り除いた後に残る交点、すなわち残った 2 本の線分どうしの交点を、各点を 1 回ずつ数える。そしてそれを残った線分の本数で割る。（代わりに残った各線分上の交点を足し合わせると、各点が 2 回ずつ数えられ、さらに失われた点の一部もまだ数えられてしまう。その結果は $\frac{1}{2}(n-1)^2$ となり、求める答えにはならない。「よくある間違い」を参照のこと。）

失われる点。線分 s_{11} と s_{nn} は交点をもたないので、取り除いても何も失われない。線分 s_{1n} と s_{n1} はそれぞれ $(n-1)^2$ 個の点をもつ。この 2 本は互いに交わる（$1 < n$ かつ $n > 1$）ので、両方に乗る点はちょうど 1 個である。包除原理（inclusion–exclusion）により、失われる点の個数は $2(n-1)^2 - 1$ である。

残る点。小問 (ii) で $m = n$ とすると、残る点の個数は

$$\begin{aligned}\frac{n^2(n-1)^2}{4} - 2(n-1)^2 + 1 &= \frac{(n-1)^2(n^2-8)+4}{4} \\ &= \frac{n^4 - 2n^3 - 7n^2 + 16n - 4}{4} \\ &= \frac{(n-2)(n^3 - 7n + 2)}{4}.\end{aligned}$$

である。因数分解（factorisation）については、$n = 2$ のとき 4 次式が $16 - 16 - 28 + 32 - 4 = 0$ となるので、$n - 2$ が因数であることに注意する。$(n-2)(n^3 - 7n + 2) = n^4 - 2n^3 - 7n^2 + 16n - 4$ と展開すれば確認できる。

平均。残った $n^2-4=(n-2)(n+2)$ 本の線分で割り、$n-2\neq 0$（$n\geq 3$ より）で約分すると、平均は

$$\frac{(n-2)(n^3-7n+2)}{4(n-2)(n+2)}=\frac{n^3-7n+2}{4(n+2)},$$

となり、題意が示された。

検算

$n=3$ のとき、公式は $\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$ を与える。直接確かめると、$s_{11},s_{33},s_{13},s_{31}$ を取り除くと $s_{12},s_{21},s_{22},s_{23},s_{32}$ が残る。このうち端点の並び順が逆になっているのは s_{12} と s_{21}、および s_{23} と s_{32} の組だけなので、5 本の線分に対して点は 2 個であり、$\frac{2}{5}$ となる。コンピュータによる検証では、両軸上に無作為に点を配置し、厳密な演算ですべての交点を求めて、mn、$\binom{m}{2}\binom{n}{2}$、c_{ij} を確認した。さらに、3 から 29 までのすべての n について平均の公式も確認した。

よくある間違い

- 残った各線分上の交点を足し合わせてしまう。各点は 2 本の線分に乗るのでこれは二重に数えることになり、しかも取り除いた線分と共有する点もまだ含まれている。結果は $\frac{1}{2}(n-1)^2$ となり、与えられた公式にはならない。
- s_{1n} と s_{n1} が互いに交わることを忘れ、$2(n-1)^2-1$ ではなく $2(n-1)^2$ を引いてしまう。
- 交点を線分の組 $\binom{mn}{2}$ 個として数えてしまう。ほとんどの組は端点を共有するか入れ子になっていて、交わらない。

STEP のその先へ

この問題の核心は全単射（bijection）である。すなわち、交点は各軸から 2 点ずつを選ぶことにちょうど対応する。これは組合せ論（combinatorics）の基本的な道具である。同じ図は完全二部グラフ（complete bipartite graph）$K_{m,n}$ の「交差数（crossing number）」にも現れる。Zarankiewicz の描画（各軸の両側に点を置いた、まさにこの描き方）は $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$ 個の交差を用いるが、これが常に最小であるかどうかはいまだ未解決問題（open problem）である。全単射による数え上げをさらに学ぶには Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* を、グラフ理論については Wilson の *Introduction to Graph Theory* を読んでみるとよい。

解答例

STEP I 1988、第 5 問

純粋数学 ・ 級数と母関数

> **STEP I 1988、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q5

鍵となる考え方

各因数を等比級数（geometric series）として展開し（指数 -1 の二項定理（binomial theorem））、それらを掛け合わせる。すると c_m は有限の等比数列の和となり、簡潔な閉じた形（closed form）をもつ。c_m^2 を 3 つの純粋なべき $(a^2)^m$、$(ab)^m$、$(b^2)^m$ の結合として書いてしまえば、最後の級数は 3 つの等比級数に分かれる。あとは分数の計算を丁寧に行い、各級数がどこで収束（converge）するかを追跡すればよい。

解答

c_m を求める

指数 -1 の二項定理により、

$$(1-ax)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k \quad (|ax|<1), \qquad (1-bx)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} b^j x^j \quad (|bx|<1).$$

$0 < a < b$ であるから、条件 $b|x| < 1$ より $a|x| < b|x| < 1$ となり、両方の展開が成り立つ。どちらの級数も絶対収束（converge absolutely）するので、掛け合わせて x のべきごとにまとめてよい。x^m の係数は $k + j = m$ となる組から生じる：

$$c_m = \sum_{k=0}^{m} a^k b^{m-k} = b^m + ab^{m-1} + \cdots + a^{m-1}b + a^m.$$

これは初項 b^m、公比（common ratio）a/b、項数 $m+1$ の等比数列の和である。$a \neq b$ であるから、その和は

$$c_m = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{b-a}.$$

（同値な言い方をすれば、$(b-a)c_m = b^{m+1} - a^{m+1}$ である。展開すると和の項が次々に打ち消し合うからである。）

c_m^2 の公式

2乗して $(b-a)^2 = (a-b)^2$ を用いると、

$$c_m^2 = \frac{\left(b^{m+1} - a^{m+1}\right)^2}{(b-a)^2} = \frac{a^{2m+2} - 2(ab)^{m+1} + b^{2m+2}}{(a-b)^2},$$

となり、示すべき式が得られた。

級数 $\sum c_m^2 x^m$

前の公式の要点は、各項が定数と m 乗の積になっていることである：

$$c_m^2 x^m = \frac{1}{(a-b)^2}\left(a^2\,(a^2x)^m - 2ab\,(abx)^m + b^2\,(b^2x)^m\right).$$

したがって $\sum c_m^2 x^m$ は、公比がそれぞれ a^2x、abx、b^2x である3つの等比級数の結合である。

考えてみよう どのような x に対して、3つの等比級数がすべて収束するか。

$|a^2x| < 1$、$|abx| < 1$、$|b^2x| < 1$ が必要である。$0 < a^2 < ab < b^2$ であるから、最後の条件が最も強く、他の2つを導く。よって3つすべてが収束するのは、ちょうど $|x| < 1/b^2$ のときである。このとき、各等比級数を足し合わせると

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m^2 x^m = \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{a^2}{1-a^2x} - \frac{2ab}{1-abx} + \frac{b^2}{1-b^2x}\right).$$

すべてを共通分母 $(1-abx)(1-a^2x)(1-b^2x)$ で通分する。分子は

$$N = a^2(1-abx)(1-b^2x) - 2ab(1-a^2x)(1-b^2x) + b^2(1-a^2x)(1-abx).$$

これを x のべきごとに整理する：

$$\begin{aligned}
\text{定数項：}\quad & a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2,\\
\text{係数}x\text{：}\quad & -a^2(ab+b^2) + 2ab(a^2+b^2) - b^2(a^2+ab)\\
& \qquad = a^3b - 2a^2b^2 + ab^3 = ab(a-b)^2,\\
\text{係数}x^2\text{：}\quad & a^2\cdot ab^3 - 2ab\cdot a^2b^2 + b^2\cdot a^3b = 0.
\end{aligned}$$

よって $N = (a-b)^2(1+abx)$ である。因数 $(a-b)^2$ が約分され、次が残る：

$$c_0^2 + c_1^2 x + c_2^2 x^2 + \cdots = \frac{1+abx}{(1-abx)(1-a^2x)(1-b^2x)} \qquad \text{ただし} -\frac{1}{b^2} < x < \frac{1}{b^2}.$$

この区間をこれ以上広げることはできない。$x = \pm 1/b^2$ では、各項は

$$|c_m^2 x^m| = \frac{\left(b^{m+1} - a^{m+1}\right)^2}{(b-a)^2\, b^{2m}} = \frac{b^2\left(1 - (a/b)^{m+1}\right)^2}{(b-a)^2} \to \frac{b^2}{(b-a)^2} \neq 0,$$

を満たすので、そこで級数は発散（diverge）する。また $|x| > 1/b^2$ でも、項が限りなく大きくなるので発散する。

検算

$a = 1$、$b = 2$ とする。このとき $c_m = 2^{m+1} - 1$ であるから $c_0, c_1, c_2 = 1, 3, 7$ であり、直接計算しても $\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = (1 + x + x^2 + \dots)(1 + 2x + 4x^2 + \dots) = 1 + 3x + 7x^2 + \cdots$ となる。2 乗は $1, 9, 49$ である。一方、$\frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-4x)} = 1 + 7x + 35x^2 + \cdots$ であり、これに $1 + 2x$ を掛けると $1 + 9x + 49x^2 + \cdots$ となって、確かに一致する。数値的にも、$a = 0.7$、$b = 1.3$、$x = 0.3$ として $c_m^2 x^m$ を多くの項まで足し合わせると $4.163878\dots$ となり、閉じた形の値と一致する。

よくある間違い

- 最初の部分からそのまま写して、区間を $b|x| < 1$ としてしまう。新しい級数の公比は a^2x、abx、b^2x であるから、条件は $b^2|x| < 1$ である。
- c_m を和の形のまま放置する。閉じた形 $(b^{m+1} - a^{m+1})/(b-a)$ こそが、問題の残りの部分を解けるようにするものである。
- N における x の係数の符号の誤り。うまく工夫しようとするよりも、各積を 1 項ずつ丁寧に展開するほうが早い。

STEP のその先へ

級数 $\sum c_m x^m$ は数列 c_m の**母関数**（*generating function*）であり、この問題は、数列が有理関数（rational function）の母関数をもつならば、その 2 乗の数列もまた有理関数の母関数をもつことを示している。これは 2 つの有理的なべき級数（power series）の**アダマール積**（*Hadamard product*）の特別な場合であり、アダマール積は常に有理的である。ここで求めた区間は**収束半径**（*radius of convergence*）の一例である。有理関数のべき級数は、最も近い極（pole）、ここでは $x = 1/b^2$ まで収束する。母関数については Wilf の *generatingfunctionology* で見事に展開されており、べき級数とその収束については Abbott の *Understanding Analysis* で丁寧に扱われている。

解答例

STEP I 1988、第 6 問

純粋数学 ・ 複素数と図形

> **STEP I 1988、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q6

鍵となる考え方

複素数平面（Argand diagram）において、ベクトル $\overrightarrow{P_jP_k}$ は複素数 $z_k - z_j$ そのものである。したがって、ベクトルが等しいことは差が等しいことになり、垂直であることは「一方の差を他方の差で割ったものが純虚数（purely imaginary）である」ことになる。与えられた値を代入すると、条件 (i) により z_4 と w が z で表され、条件 (ii) により z の虚部が決まる。すると六角形はその中心に関して対称であることがわかり、凸性（convexity）と最後の角の扱いが容易になる。

解答

条件の言い換え

$\overrightarrow{P_jP_k}$ は $z_k - z_j$ で表されるから、条件 (i) は

$$z_2 - z_1 = z_4 - z_5 \qquad \text{かつ} \qquad z_3 - z_2 = z_5 - z_6.$$

を意味する。(ii) については、0 でない二つのベクトル u と v が垂直であるのは、偏角の差が $\pm\frac{\pi}{2}$ であるとき、すなわち u/v が純虚数であるときに限る。各点は相異なるので $z_4 - z_2 \neq 0$ かつ $z_6 - z_3 \neq 0$ であり、条件 (ii) は

$$\frac{z_4 - z_2}{z_6 - z_3} \text{ は純虚数、} \qquad \text{同値な言い換えとして} \qquad \operatorname{Re}\left[(z_4 - z_2)\,\overline{(z_6 - z_3)}\right] = 0.$$

を意味する。

(i) から導かれること

(i) の二つの等式を辺々加えると、z_2 と z_5 の項が消えて

$$z_3 - z_1 = z_4 - z_6, \qquad \text{よって} \qquad z_4 - z_3 = z_6 - z_1,$$

となる。これは $\overrightarrow{P_3P_4} = \overrightarrow{P_1P_6}$ という主張そのものであり、示すべきことが示された。

六角形

ここで $z_1 = 0$、$z_2 = 1$、$z_3 = z$、$z_5 = \mathrm{i}$、$z_6 = w$ とおく。(i) の第一の等式から

$$z_4 = z_5 + z_2 - z_1 = 1 + \mathrm{i},$$

が得られ、第二の等式から $z - 1 = \mathrm{i} - w$ が得られるので

$$w = 1 + \mathrm{i} - z.$$

である。$z_1 + z_4 = z_2 + z_5 = z_3 + z_6 = 1 + \mathrm{i}$ となっていることに注意する。すなわち向かい合う頂点どうしは点 $\frac{1}{2}(1 + \mathrm{i})$ に関して対称であり、この六角形は対称の中心（centre of symmetry）をもつ。

(ii) については、$z_4 - z_2 = \mathrm{i}$ かつ $z_6 - z_3 = w - z = 1 + \mathrm{i} - 2z$ である。商 $\mathrm{i}/(1 + \mathrm{i} - 2z)$ が純虚数となるのは $1 + \mathrm{i} - 2z$ が実数となるとき、すなわち $1 - 2\,\mathrm{Im}(z) = 0$ のときに限る。よって

$$\mathrm{Im}(z) = \tfrac{1}{2}, \qquad \text{このとき} \qquad \mathrm{Im}(w) = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

である。a を実数として $z = a + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ と書く。すると $w = (1 - a) + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ であり、常に $\mathrm{Re}(w) = 1 - \mathrm{Re}(z)$ が成り立つ。六つの頂点は

$$(0,0), \quad (1,0), \quad (a, \tfrac{1}{2}), \quad (1,1), \quad (0,1), \quad (1-a, \tfrac{1}{2}) :$$

であり、単位正方形の左右の辺それぞれの中ほどに「とがった点」を付け加えた形である。

考えてみよう 図に頼らずに凸性を確かめるにはどうすればよいか？

六角形の周を順にたどっていく。六角形が凸であるのは、各頂点で常に同じ向きに曲がるときに限る。ある頂点での曲がる向きは、入ってくる辺 u と出ていく辺 v の外積（cross product）$\mathrm{Im}(\bar{u}v) = u_x v_y - u_y v_x$ の符号で測られる。各辺は

$$P_1P_2 = (1,0), \quad P_2P_3 = (a-1, \tfrac{1}{2}), \quad P_3P_4 = (1-a, \tfrac{1}{2}),$$
$$P_4P_5 = (-1,0), \quad P_5P_6 = (1-a, -\tfrac{1}{2}), \quad P_6P_1 = (a-1, -\tfrac{1}{2}),$$

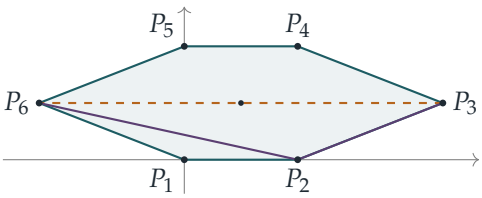
であり、$P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_1$ における外積は順に

$$\tfrac{1}{2}, \qquad a-1, \qquad \tfrac{1}{2}, \qquad \tfrac{1}{2}, \qquad a-1, \qquad \tfrac{1}{2}.$$

である。このうち四つは a によらず正であるから、六角形が凸であるための必要十分条件は $a-1>0$ である。（$a=1$ のときは P_3 が線分 P_2P_4 上にあり、本当の六角形にはならない。）幾何的にいえば、P_3 は正方形の辺 $x=1$ より右側になければならず、対称性により P_6 は $x=0$ より左側になければならない。よって求める条件は

$$\boxed{\mathrm{Re}(z)>1 \quad \text{かつ} \quad \mathrm{Re}(w)=1-\mathrm{Re}(z) \ \text{（したがって}\mathrm{Re}(w)<0\text{）}}$$

である（これに加えて $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(w)=\frac{1}{2}$ であるが、これは (ii) によりすでに強制されている）。



距離 P_3P_6

P_2 から出る二本の線分は

$$z_3-z_2=(a-1)+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}, \qquad z_6-z_2=-a+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}.$$

である。角 $\theta=\angle P_3P_2P_6$（0 以上 π 以下）について、二本の線分の内積（dot product）は $|P_2P_3|\,|P_2P_6|\cos\theta$ を与え、外積の大きさは $|P_2P_3|\,|P_2P_6|\sin\theta$ を与える：

$$\text{内積}=-a(a-1)+\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{4}(1+4a-4a^2), \qquad \text{外積}=(a-1)\cdot\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cdot(-a)=\tfrac{1}{2}(2a-1).$$

$a>1$ のとき外積は正であるから、これはちょうど $\sin\theta$ の項に一致し、

$$\tan\theta=\frac{\frac{1}{2}(2a-1)}{\frac{1}{4}(1+4a-4a^2)}=\frac{2(2a-1)}{1+4a-4a^2}.$$

となる。これを $-\frac{2}{3}$ に等しいとおくと

$$3(2a-1)=-(1+4a-4a^2) \quad\Longrightarrow\quad 4a^2-10a+2=0 \quad\Longrightarrow\quad 2a^2-5a+1=0,$$

よって $a=\frac{1}{4}(5\pm\sqrt{17})$ である。マイナスの符号では $a\approx 0.22$ となり、凸性の条件 $a>1$ を満たさない。プラスの符号では $a\approx 2.28>1$ となる。（このとき分母 $1+4a-4a^2$ は負なので、θ は鈍角であり、タンジェントが負であることと整合する。）

最後に、P_3 と P_6 は虚部が等しいので

$$P_3P_6 = |z-w| = |2a-1| = 2a-1 = \frac{5+\sqrt{17}}{2} - 1 = \boxed{\frac{3+\sqrt{17}}{2}} \approx 3.56.$$

である。

凸性の要請を外すと、同じ方法（このとき分子は $|2a-1|$ となる）によってもう一つの解 $a = \frac{1}{4}(-1-\sqrt{17})$ が得られる。これは z と w を入れ替える鏡映 $a \mapsto 1-a$ による像にすぎず、同じ距離 $\frac{1}{2}(3+\sqrt{17})$ を与える。

検算

- 対称性：$z_1+z_4 = z_2+z_5 = z_3+z_6$ であるから、結果 $\overrightarrow{P_3P_4} = \overrightarrow{P_1P_6}$ は、中心対称な六角形の三組目の対辺についての主張にほかならない。
- $a = \frac{1}{4}(5+\sqrt{17}) \approx 2.2808$ として $\arg\left((z_6-z_2)/(z_3-z_2)\right)$ を直接計算すると、タンジェントが -0.66667 となる角が得られ、また $|z-w| \approx 3.5616 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{17})$ となる。
- a を -5 から 5 まで動かして数値的に凸性を調べると、六角形が凸となるのはちょうど $a > 1$ のときであることが確認できる。

よくある間違い

- ベクトルの向きを取り違えること：$\overrightarrow{P_5P_4}$ は z_4-z_5 であり、z_5-z_4 ではない。
- 垂直条件を「傾きの積が -1」と書き、鉛直な場合を取りこぼすこと。ここでは $\overrightarrow{P_2P_4}$ が鉛直であり、商による判定法ならこれをすっきり扱える。
- 根 $a = \frac{1}{4}(5-\sqrt{17})$ を残してしまうこと。これは凸な六角形を与えない（しかも実際にはそこで $\tan\theta > 0$ となる）。

STEP のその先へ

点を複素数として扱うと、幾何が代数に変わる。平行移動は加法になり、回転と拡大・縮小は乗法になる。「u/v が純虚数である」という判定法は、角が偏角になる一つの例である。凸性を外積の符号で判定する方法は、計算幾何学（computational geometry）における標準的な凸包（convex hull）アルゴリズムの基礎となっている。Needham の *Visual Complex Analysis*（複素解析を視覚的に解説した本）は、複素数のこうした幾何的な見方を見事に展開している。

解答例

STEP I 1988、第 7 問

純粋数学 • 2 次関数の導関数の評価

> **STEP I 1988、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q7

この問題は、*Beyond STEP* の第 3.6 節「**傾きの上界**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch03/markov-bound.html

鍵となる考え方

二次関数（quadratic）は 3 点での値によって一意に定まるので、f' は $f(1)$、$f(-1)$、$f(0)$ から組み立て直すことができる。f' をそのように表してしまえば、仮定（hypothesis）$|f| \le 1$ によって 3 つの係数それぞれが抑えられ、あとは三角不等式（triangle inequality）が片づけてくれる。最後の部分では、証明に現れるすべての不等式が等号になるのは f がどのような値をとるときかを調べる。

解答

$f'(x)$ の恒等式

$f(1) = a+b+c$、$f(-1) = a-b+c$、$f(0) = c$ である。右辺を x のべきについて整理すると、

$$\begin{aligned} &f(1)\left(x+\tfrac{1}{2}\right) + f(-1)\left(x-\tfrac{1}{2}\right) - 2f(0)x \\ &\quad = \left[(a+b+c)+(a-b+c)-2c\right]x + \tfrac{1}{2}\left[(a+b+c)-(a-b+c)\right] \\ &\quad = 2ax + b. \end{aligned}$$

$f'(x) = 2ax+b$ であるから、これが求める恒等式（identity）である。

評価 $|f'(x)| \leq 4$

$|x| \leq 1$ のとき常に $|f(x)| \leq 1$ であると仮定する。特に、$|f(1)|$、$|f(-1)|$、$|f(0)|$ はいずれも 1 以下である。$|x| \leq 1$ を満たす任意の x をとる。恒等式と三角不等式により、

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leq |f(1)|\left|x+\tfrac{1}{2}\right| + |f(-1)|\left|x-\tfrac{1}{2}\right| + 2|f(0)|\,|x| \\ &\leq \left|x+\tfrac{1}{2}\right| + \left|x-\tfrac{1}{2}\right| + 2|x|. \end{aligned}$$

> **考えてみよう** $|x| \leq 1$ のとき、$\left|x+\frac{1}{2}\right| + \left|x-\frac{1}{2}\right|$ はどこまで大きくなりうるか。

これは x から $\frac{1}{2}$ までの距離と $-\frac{1}{2}$ までの距離の和である。$|x| \leq \frac{1}{2}$ ならば x は 2 点の間にあり、和はちょうど 1 である。$|x| > \frac{1}{2}$ ならば 2 点はともに x の同じ側にあり、和は $2|x|$ である。いずれの場合も、$|x| \leq 1$ ならば和は 2 以下である。また $2|x| \leq 2$ であるから、

$$|f'(x)| \leq 2 + 2 = 4 \qquad \text{ただし} |x| \leq 1,$$

となり、示すべきことが得られた。

(別の見方もある。f' は一次関数（linear function）なので、$[-1, 1]$ 上でその絶対値（modulus）が最大になるのは端点においてであり、$x = \pm 1$ での評価は $|f'(\pm 1)| \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2 = 4$ となる。)

等号が成り立つ例

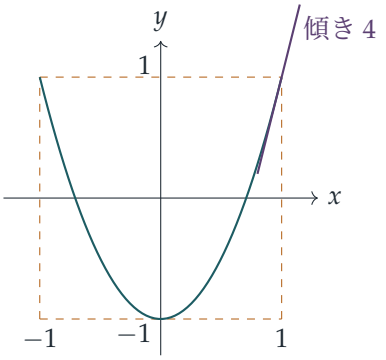
$x = 1$ で等号が成り立つためには、そこで上の各段階がすべて等号でなければならない。$x = 1$ において、係数 $x + \frac{1}{2}$、$x - \frac{1}{2}$、$-2x$ はそれぞれ $\frac{3}{2}$、$\frac{1}{2}$、-2 である。したがって $f'(1) = +4$ とするには、

$$f(1) = 1, \qquad f(-1) = 1, \qquad f(0) = -1.$$

であればよい。これより $c = -1$、$a + b + c = 1$、$a - b + c = 1$ となるので、$b = 0$、$a = 2$ である：

$$a = 2, \quad b = 0, \quad c = -1, \qquad f(x) = 2x^2 - 1.$$

ここで条件を確かめる。$|x| \leq 1$ のとき $0 \leq x^2 \leq 1$ であるから $-1 \leq 2x^2 - 1 \leq 1$、すなわち $|f(x)| \leq 1$ である。また $f'(x) = 4x$ であるから、区間内の $x = 1$ において $f'(1) = 4$ となる。これが求める例である。



曲線 $y = 2x^2 - 1$（青緑色）は正方形 $|x| \le 1$、$|y| \le 1$ の内部にとどまりながら、上端から下端へ、そしてまた上端へと振れる。そのため、両端では可能な限り急な傾きになっている。

（$\pm(2x^2 - 1)$ のいずれでも $|f'(\pm 1)| = 4$ となる。$f(x) = 2x^2 - 1$ を選ぶと $f'(1) = +4$ となり、$-(2x^2 - 1)$ も $x = -1$ において同じ値を与える。）

検算

- $f(x) = x^2 + x + 1$ で試す：$f(1) = 3$、$f(-1) = 1$、$f(0) = 1$ である。$x = 2$ において恒等式は $3 \cdot \frac{5}{2} + 1 \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot 2 = 5 = f'(2)$ を与える。
- $\max_{|x| \le 1} |f(x)| = 1$ となるように正規化した 20,000 個の二次関数をランダムに探索したところ、$\max_{|x| \le 1} |f'(x)| = 2|a| + |b|$ が 4 を超えるものは見つからなかった（最大値は約 3.91 であった）。一方、$2x^2 - 1$ はちょうど 4 に達する。

よくある間違い

- $\left|x + \frac{1}{2}\right|$ と $\left|x - \frac{1}{2}\right|$ をそれぞれ別々に $\frac{3}{2}$ で抑えてしまう。これでは $|f'(x)| \le 5$ しか得られない。2 つの距離はまとめて評価しなければならない。
- 0 と ± 1 だけでなく区間全体で $|f(x)| \le 1$ が成り立つことを確かめずに、例を提示してしまう。

STEP のその先へ

これはマルコフ（Markov）の不等式（Markov's inequality）の 2 次の場合である。すなわち、n 次多項式 p が $[-1, 1]$ 上で $|p| \le 1$ を満たすならば、そこで $|p'| \le n^2$ が成り立つ。等号はチェビシェフ（Chebyshev）多項式（Chebyshev polynomial）$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$

によって達成され、$2x^2 - 1 = T_2(x)$ である。指定した点での値を用いて多項式を表すことはラグランジュ（Lagrange）補間（Lagrange interpolation）と呼ばれ、数値解析（numerical analysis）や近似理論（approximation theory）の基本的な道具である。この趣旨の問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を参照するとよい。

解答例

STEP I 1988、第 8 問

純粋数学 ・ 空間図形

STEP I 1988、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

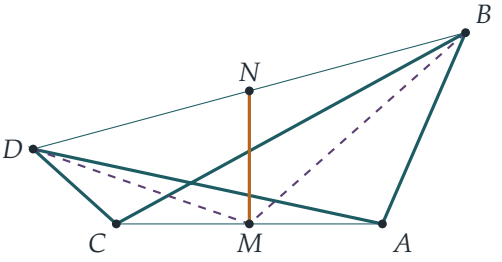
step.maths.org/questions/88-s1-q8

鍵となる考え方

各対角線（diagonal）は四辺形（quadrilateral）を二つの三角形に分け、向かい合う辺が等しいことから、その二つの三角形は合同（congruent）になる（三辺相等、SSS）。合同な三角形の中線（median）は等しいので、一方の対角線の中点（midpoint）は他方の対角線の両端から等距離にある。線分の両端から等距離にある点とその線分の中点を結ぶと、その線分に垂直な直線が得られる。これは二等辺三角形（isosceles triangle）の性質にほかならない。

解答

AC の中点を M、BD の中点を N とする。



この図はねじれ四辺形（skew quadrilateral）の射影（projection）である。破線 MB と MD は以下で用いる中線であり、琥珀色の線分が MN である。

まず、$M \neq N$ であること

直線 MN が意味をもつのは、M と N が異なる点である場合に限る。もし $M = N$ ならば、対角線 AC と BD は共通の点で互いに二等分し合うことになる。共通の点を通る二直線は一つの平面上にあるので、A、B、C、D はすべてその平面上にあり、$ABCD$ は（平面上の）平行四辺形（parallelogram）になってしまう。$ABCD$ はねじれ四辺形であるから、$M \neq N$ である。「ねじれ」という条件が使われるのはまさにこの箇所である。平行四辺形では向かい合う辺は等しいが、二つの中点が一致してしまう。

MN は BD に垂直である

対角線 AC を共有する三角形 ABC と CDA を考える。

$$AB = CD, \qquad BC = DA, \qquad CA = AC,$$

であるから、これらの三角形は $A \leftrightarrow C$、$B \leftrightarrow D$、$C \leftrightarrow A$ の対応で合同である（SSS）。この対応のもとで、三角形 ABC において B から AC の中点へ引いた中線は、三角形 CDA において D から CA の中点へ引いた中線に対応する。どちらの中線も同じ点 M で終わるので、

$$MB = MD.$$

考えてみよう 合同な三角形の中線が等しくなければならないのはなぜか。

中線は辺の長さだけで完全に決まる。たとえば余弦定理（cosine rule）（あるいは中線定理（Apollonius's theorem））により、三角形 ABC において B から引いた中線 m は $4m^2 = 2AB^2 + 2BC^2 - AC^2$ を満たす。辺の長さが同じなら中線も同じなので、$MB^2 = \frac{1}{4}(2AB^2 + 2BC^2 - AC^2) = \frac{1}{4}(2CD^2 + 2DA^2 - CA^2) = MD^2$ となる。

さて、M は B と D から等距離にあり、N は BD の中点である。三角形 MNB と MND は $MB = MD$、$NB = ND$ を満たし、辺 MN を共有するので合同であり（SSS）、角 $\angle MNB$ と $\angle MND$ は等しい。また、B、N、D は一直線上にあるので、この二つの角は互いに補角（supplementary）である。よってどちらも直角であり、$MN \perp BD$ となる。（これらの三角形は退化していない。もし M が直線 BD 上にあって $MB = MD$ ならば、M は中点 N に一致するが、それはすでに否定した。）

MN は AC に垂直である

対角線の役割を入れ替えれば、同じ議論が成り立つ。三角形 ABD と CDB は対角線 BD を共有し、

$$AB = CD, \qquad AD = CB, \qquad BD = DB,$$

であるから、$A \leftrightarrow C$、$B \leftrightarrow D$、$D \leftrightarrow B$ の対応で合同である。A からの中線と C からの中線はどちらも BD の中点 N で終わるので、$NA = NC$ である。M は AC の中点であり $N \neq M$ であるから、上の二等辺三角形の議論により $MN \perp AC$ が得られる。

以上より、対角線の中点を結ぶ直線は各対角線に垂直であり、示すべきことが証明された。

ベクトルを用いる方法

原点を M にとると、位置ベクトル（position vector）として $C = -A$ であり、$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{d})$ である。与えられた二つの等式を 2 乗すると、

$$AB^2 = CD^2 \iff |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{d}|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{d},$$
$$BC^2 = AD^2 \iff |\mathbf{b}|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{d}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}.$$

辺々引くと $4\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -4\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}$、すなわち $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{d}) = 0$ を得る。$\overrightarrow{AC} = -2\mathbf{a}$ であるから、これは $\overrightarrow{MN} \perp AC$ を意味する。代わりに原点を N にとれば、同様にして $MN \perp BD$ が得られる。

検算

$A = (1,0,0)$、$B = (1,2,1)$、$C = (-1,0,0)$、$D = (-1,-2,1)$ とする。このとき $AB = CD = \sqrt{5}$、$BC = AD = 3$ であり、4 点は同一平面上にない（スカラー三重積（scalar triple product）$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})$ は 8 である）。ここで $M = (0,0,0)$、$N = (0,0,1)$ であるから MN は z 軸に沿っており、一方 AC は x 軸に沿い、$\overrightarrow{BD} = (-2,-4,0)$ は z 成分をもたない。よってどちらも MN に垂直である。また、向かい合う辺が等しいねじれ四辺形を無作為に 20 000 個生成して調べたところ、MN といずれかの対角線のなす角の余弦は一度も 4×10^{-12} を超えなかった。

よくある間違い

- $M \neq N$ である理由を説明していない。ねじれという条件がなければ結果は成り立たない。平行四辺形では直線 MN がそもそも存在しないからである。
- 合同な三角形を明示せずに「対称性より」$MB = MD$ と主張する。
- 一方の対角線に対する垂直性しか証明していない。もう一方には別の合同な三角形の組が必要である。

STEP のその先へ

上の例では、z 軸（直線 MN）のまわりの半回転（half-turn）によって A と C、B と D が入れ替わる。これは一般に成り立つ。すなわち、向かい合う辺が等しいねじれ四辺形はすべて、MN のまわりの $180°$ の回転によって自分自身に移される。（この回転は M を固定し、MN に垂直なすべての方向を逆向きにするので、A を C に移す。同様に B を D に移す。）逆に、この半回転を考えれば辺が等しいことは明らかである。幾何学的な事実を、空間の等長変換（isometry）である対称性の帰結として捉えることは、大学 1 年次の幾何学や群論（group theory）の中心的な考え方である。群論の側面については Allenby の *Rings, Fields and Groups* が詳しく展開しており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* には STEP 形式の幾何の問題がさらに収められている。

解答例

STEP I 1988、第 9 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP I 1988、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q9

鍵となる考え方

どちらの積分も、どの部分に着目するかを正しく選べば、標準的な手法で解ける。(i) では $\ln x$ と x のべきの積であるから、部分積分（integration by parts）を用い、対数を微分して消してしまう。(ii) では厄介なのは平方根であるから、これを新しい変数とする。$\cos x\,\mathrm{d}x$ はちょうどこの置換積分（substitution）に必要なものであり、残るのは部分分数分解（partial fractions）で処理できる有理関数（rational function）である。

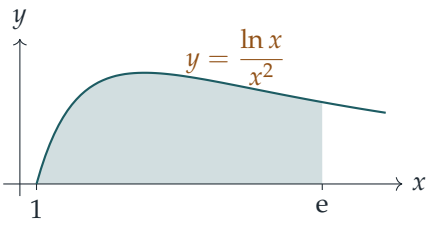
解答

小問 (i)

$u = \ln x$、$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x^2}$ として部分積分を行う。このとき $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x}$、$v = -\dfrac{1}{x}$ であるから、

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(-\frac{1}{\mathrm{e}} - 0\right) + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}} + 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

ここで $\ln \mathrm{e} = 1$ と $\ln 1 = 0$ を用いた。答えは正であり、そうでなければならない。被積分関数（integrand）は $(1, \mathrm{e}]$ 上で正だからである。



網掛け部分の面積は $1-2/\mathrm{e}\approx 0.264$ である。

小問 (ii)

被積分関数は $\sin x\neq 0$ かつ $1+\sin x>0$ のとき定義される。

$$u=\sqrt{1+\sin x},\qquad \text{とおくと} u^2=1+\sin x,\quad 2u\,\mathrm{d}u=\cos x\,\mathrm{d}x,\quad \sin x=u^2-1.$$

ここで $u>0$ であり、$\sin x\neq 0$ より $u\neq 1$ である。よって

$$\int\frac{\cos x}{\sin x\sqrt{1+\sin x}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{2u}{(u^2-1)\,u}\,\mathrm{d}u=\int\frac{2}{u^2-1}\,\mathrm{d}u.$$

考えてみよう $\cos x$ はどうなったのか。これを u で表す必要はあるのだろうか。

その必要はない。$\cos x\,\mathrm{d}x$ 全体が $2u\,\mathrm{d}u$ に置き換わるのであり、これこそがこの置換がこれほどきれいに機能する理由である。もし分子が別のものであったなら、$\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$ が必要になり、符号の面倒な問題がつきまとったであろう。

部分分数分解により $\dfrac{2}{u^2-1}=\dfrac{1}{u-1}-\dfrac{1}{u+1}$ となるから、

$$\int\frac{2}{u^2-1}\,\mathrm{d}u=\ln|u-1|-\ln|u+1|+C=\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C.$$

x に戻すと、

$$\int\frac{\cos x}{\sin x\sqrt{1+\sin x}}\,\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sqrt{1+\sin x}+1}\right|+C.$$

絶対値記号（modulus signs）は重要である。$-1<\sin x<0$ のとき $0<u<1$ となり、$\dfrac{u-1}{u+1}$ は負になるからである。（厳密には、定義域は $\sin x$ の零点によって分割されているので、被積分関数が定義される各区間ごとに定数が異なってよい。）

分数の分子と分母に $u-1$ を掛けると、同値な別の形が得られる。$(u+1)(u-1)=u^2-1=\sin x$ であるから、答えは

$$2\ln\left|\sqrt{1+\sin x}-1\right|-\ln|\sin x|+C.$$

とも表せる。

検算

- シンプソンの公式（Simpson's rule）により $\int_1^{\mathrm{e}} x^{-2}\ln x\,\mathrm{d}x \approx 0.264241$ が得られ、$1-2/\mathrm{e} = 0.264241\ldots$ と一致する。
- (ii) については答えを微分すればよい。合成関数の微分法（chain rule）により $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left|\dfrac{u-1}{u+1}\right| = \dfrac{2}{u^2-1}\cdot\dfrac{\cos x}{2u}$ となり、これは被積分関数である。数値的には、被積分関数の $\int_{0.3}^{1.2}$ はシンプソンの公式で 0.926006 となり、原始関数（antiderivative）の差と一致する。$[-1.2, -0.2]$ のように $\sin x < 0$ となる区間でも同様によく一致し、そこでの積分値は -2.361027 である。

よくある間違い

- (i) で、逆に $u = 1/x^2$、$\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = \ln x$ と選んでしまう。原理的にはうまくいくが、はるかに煩雑になる。対数のほうを微分すること。
- (ii) で絶対値記号を落としてしまい、$\sin x < 0$ のとき答えが定義されなくなる。
- $2u\,\mathrm{d}u$ の因数 2 を落としてしまい、答えが半分になる。

STEP のその先へ

小問 (ii) は一般的な原理の一例である。x と $\sqrt{ax+b}$ の有理関数である被積分関数は、置換 $u = \sqrt{ax+b}$ によって u の有理関数となり、有理関数は部分分数分解によって常に積分できる。ここでは $\sin x$ が x の役割を果たしている。大学 1 年の解析学（analysis）の講義では、この話のもう一つの側面に出会う。すなわち、置換積分と部分積分を正当化する定理、そして積分定数（constant of integration）が定義域の離れた区間ごとに異なってよい理由である。Bartle と Sherbert による *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は、その両方を丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 1988、第 10 問

力学 ・ 放物運動

> **STEP I 1988、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q10

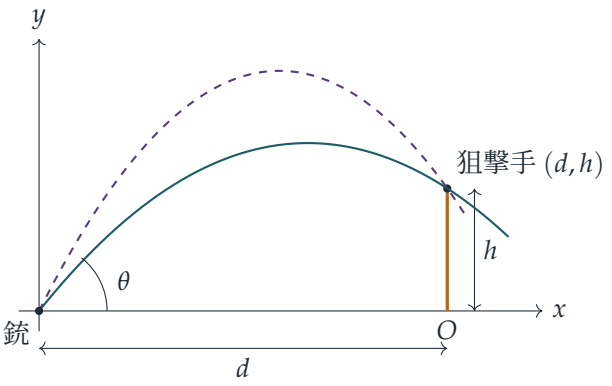
鍵となる考え方

問題を逆向きに考える。銃が木の根元から水平距離 d の位置にあるとして、「速さ v の弾丸が木の頂上を通るような仰角（angle of elevation）が少なくとも一つ存在するか」を問うのである。軌道（trajectory）の方程式を $\tan\theta$ を用いて書くと $\tan\theta$ についての 2 次方程式（quadratic equation）になるので、答えが「はい」となるのは、この 2 次方程式が実数解（real root）をもつときであり、かつそのときに限る。すると判別式（discriminant）の条件は、d だけについての不等式になることがわかる。

解答

モデル

弾丸を、重力のみを受けて運動する（空気抵抗（air resistance）はない）質点（particle）とみなし、地面の高さから速さ v、水平面からの角 θ で発射されるものとする。ただし $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ である。銃の位置はわからないので、木の根元 O からの距離を $d \geq 0$ とし、銃を原点として、x 軸を木に向かう水平方向、y 軸を鉛直上向きにとる。このとき木の頂上は点 (d, h) である。



狙撃手に命中させる

時刻 t における弾丸の位置は $x = vt\cos\theta$、$y = vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$ である。$\theta < \frac{\pi}{2}$ ならば $t = x/(v\cos\theta)$ を消去し、$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ を用いると、軌道の方程式

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v^2}\left(1 + \tan^2\theta\right).$$

が得られる。弾丸が狙撃手に命中するのは、(d, h) がこの曲線上にあるとき、かつそのときに限る。まず $d > 0$ とする。$T = \tan\theta$、$k = \dfrac{gd^2}{2v^2} > 0$ とおくと、条件は

$$kT^2 - dT + (h + k) = 0.$$

となる。任意の実数 T は、ただ一つの $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ によって $\tan\theta$ と表される。では、解が負になることはあるだろうか。2 解の積は $(h + k)/k > 0$、和は $d/k > 0$ であるから、実数解はいずれも正であり、正しく仰角 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を与える。したがって、条件を満たす仰角が存在するのは、この 2 次方程式が実数解をもつとき、すなわち判別式が負でないときであり、かつそのときに限る：

$$\begin{aligned} d^2 - 4k(h+k) \geq 0 &\iff d^2 \geq \frac{2gd^2}{v^2}\left(h + \frac{gd^2}{2v^2}\right) \\ &\iff v^4 \geq 2ghv^2 + g^2d^2 \qquad (d^2 > 0 \text{ で割り、} v^4 \text{ を掛けた}) \\ &\iff d^2 \leq \frac{v^2}{g^2}\left(v^2 - 2gh\right). \end{aligned}$$

考えてみよう 銃がちょうど木の根元にあって $d = 0$ となり、上の軌道の方程式が使えない場合はどうなるか。

このとき弾丸は鉛直上向き（$\theta = \frac{\pi}{2}$）に発射されたはずであり、終速度が 0 以上であることから $v^2 = u^2 - 2gs$ により、高さ h に達するのは $v^2 \geq 2gh$ のとき、かつそのと

きに限る。これは上の条件で $d = 0$ としたものと同じであるから、この不等式はすべての場合を含んでいる。

$d \geq 0$ であるから、負でない平方根をとると

$$d \leq \frac{v}{g}\sqrt{v^2 - 2gh}.$$

を得る。よって銃は、水平な地面上で木の根元からの距離が $(v/g)\sqrt{v^2 - 2gh}$ 以下の点にあった。すなわち、木の根元を中心とし、この長さを半径とする円の内部（極端な場合には円周上）にあったことになり、題意は示された。平方根の中が負にならないのは、実際に射撃が行われたことがわかっているからである。実際、$d = 0$ のとき不等式から $v^2 \geq 2gh$ が導かれるが、これは弾丸が高さ h まで上がるのに十分なエネルギーをもつということにほかならない。

この条件は十分条件（sufficient condition）でもある。円の内部の任意の点から見ると、2 次方程式は相異なる二つの正の実数解をもつので、可能な仰角は二つある（図のように、低い弾道と高い弾道）。そして円周上ではこの二つが一致して一つになる。

検算

- $h = 0$ とすると半径は v^2/g となり、水平な地面上でのおなじみの最大到達距離（maximum range）に一致する。$v^2 \to 2gh$ とすると半径は 0 に縮む。このとき銃は、根元から真上に撃ってかろうじて狙撃手に届くだけである。
- 単位：$(v/g)\sqrt{v^2}$ の単位は $(\mathrm{m\,s^{-1}})^2/(\mathrm{m\,s^{-2}}) = \mathrm{m}$ である。
- 数値例として、$g = 9.8$、$v = 20$、$h = 8$ とすると半径は約 31.8 m である。$d = 31.8\,\mathrm{m}$ の位置から、唯一許される仰角 $\tan\theta = v^2/(gd)$ で運動を逐次計算すると、弾丸は木の位置で高さ 8.000 m に達する。あらゆる仰角について調べると、円の数パーセント外側の点には届かず、内側の点には届くことが確かめられる。

よくある間違い

- 最大到達距離 v^2/g や最高点の高さだけを用いてしまうこと。狙撃手は高さ h にいるので、両方の座標を同時に考えなければならない。
- $\tan\theta$ の解が水平より上向きの仰角を与えることの確認を忘れること、あるいは鉛直に撃つ場合 $d = 0$ を無視すること。

STEP のその先へ

v を固定すると、銃から到達できる点全体は放物線 $y = \dfrac{v^2}{2g} - \dfrac{gx^2}{2v^2}$ の下側の領域を埋め尽くす。この放物線は軌道の族の**包絡線**（envelope）であり、「安全放物線」（parabola of safety）と呼ばれる。判別式による条件は、まさに「$h \leq$ この包絡線の $x = d$ での値」ということである。曲線族の包絡線は、変分法（calculus of variations）や 1 階微分方程式（first-order differential equations）の理論でも再び登場する。このように丁寧に扱われた放物運動の問題に取り組むための次の一歩としては、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい。

解答例

STEP I 1988、第 11 問

力学 ・ 質量中心

> **STEP I 1988、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q11

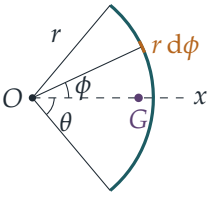
鍵となる考え方

円弧（arc）については、対称性から重心（centre of mass）は円弧を二等分する半径の上にあり、角度についての積分を一つ計算すれば中心からの距離が求まる。枠組み（framework）について注目すべき事実は、それが半円上のどの点で床に接しても釣り合うということである。床からの抗力（reaction）は常に半円の半径に沿って働き、それらすべての半径の上にある点は中心だけである。したがって、枠組み全体の重心は半円の中心でなければならず、その点のまわりのモーメント（moment）を考えると h についての方程式が得られる。

解答

一様な円弧

円弧の中心を O、単位長さあたりの密度（density）を ρ とする。角 ϕ を二等分する半径から測ることにすると、円弧は $-\theta \leq \phi \leq \theta$ と表される。x 軸を二等分線に沿ってとる。この軸に関する対称性から重心はこの軸上にあるので、$\bar{x}$ だけを求めればよい。



ϕ と $\phi + \mathrm{d}\phi$ の間の微小部分の長さは $r\,\mathrm{d}\phi$ であるから、その質量は $\rho r\,\mathrm{d}\phi$ であり、その

x 座標は $r\cos\phi$ である。全質量は $\rho r \cdot 2\theta$ である。よって

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_{-\theta}^{\theta} r\cos\phi\ \rho r\,\mathrm{d}\phi}{2\rho r\theta} = \frac{r\left[\sin\phi\right]_{-\theta}^{\theta}}{2\theta} = \frac{r\sin\theta}{\theta}.$$

したがって重心は二等分する半径の上にあり、中心からの距離は

$$\boxed{\bar{x} = \frac{r\sin\theta}{\theta}}$$

である。半円の弧では $\theta = \frac{\pi}{2}$ であり、この値は $\dfrac{2r}{\pi}$ となる。これが次に必要となる場合である。

枠組み：重心はどこになければならないか

枠組みは剛体（rigid body）であり、単位長さあたりの密度がすべて ρ に等しい一様な細い棒でできているとし、床は水平であるとモデル化する。半円の中心を O とする。これは長方形の下の辺の中点である。

> ? **考えてみよう** なぜ「半円上のどの点で接しても平衡である」という条件によって、重心が完全に決まるのだろうか。

枠組みが半円上の点 P で床に接して静止しているとする。床は P において半円の接線（tangent）となっているので、P を通る鉛直線はその接線に垂直であり、すなわち半径の直線 OP である。働く力は二つだけで、重心 G に働く重力と P における抗力である。平衡（equilibrium）であるためには、これらは同一直線上に働かなければならないので、G は P を通る鉛直線、すなわち直線 OP 上にある。これは半円上のすべての P について成り立つ。異なる二点 P からは O を通る異なる二直線が得られ、それらは O でしか交わらない。よって $G = O$ である。

逆に $G = O$ ならば、どの P についても重力は OP に沿って接点をまっすぐ通るように働くので、枠組みは床のどこで接しても平衡にある。したがって、条件はちょうど「G が O にある」ことと同値である。

下の辺のまわりのモーメント

下の辺の直線のまわりのモーメントを考え、高さは O から上向きに測る（したがって半円はこの直線より下にある）。各部分は次のとおりである。

部分	質量	重心の高さ	モーメント
上の棒	$2r\rho$	$2h$	$4rh\rho$
両側の棒 2 本	$2\times 2h\rho$	h	$4h^2\rho$
下の棒	$2r\rho$	0	0
半円	$\pi r\rho$	$-\dfrac{2r}{\pi}$	$-2r^2\rho$

半円の重心は円弧の公式で $\theta=\frac{\pi}{2}$ とおいて得られ、O より下にある。G の高さは 0 であるから全モーメントを 0 とおき、2ρ で割ると

$$2h^2+2rh-r^2=0.$$

これは h についての二次方程式（quadratic equation）であり、その解は

$$h=\frac{-2r\pm\sqrt{4r^2+8r^2}}{4}=\frac{(-1\pm\sqrt{3})\,r}{2}.$$

$h>0$ であるから正の解をとって

$$\boxed{h=\frac{(\sqrt{3}-1)\,r}{2}\approx 0.366\,r}$$

下の棒は自分自身の直線のまわりのモーメントが 0 であることに注意しよう。枠組みがこの棒を含むかどうかにかかわらず答えは同じであるから、図の読み方が多少異なっても問題はない。

検算

- $\theta\to 0$ のとき $\frac{r\sin\theta}{\theta}\to r$ である。すなわち、非常に短い円弧の重心は円弧そのものの上にある。円全体、すなわち $\theta=\pi$ のときは 0、つまり中心となり、対称性から要請されるとおりである。
- $h=\frac{(\sqrt{3}-1)r}{2}$ のとき、$2h^2=(2-\sqrt{3})r^2$、$2rh=(\sqrt{3}-1)r^2$ であり、これらの和は要求どおり r^2 となる。
- 各棒を 20 000 個の部分に分割して、重心を数値的に計算した。$r=1$、$h\approx 0.36603$ のとき、重心は O から 10^{-9} 以内にある。h を 10% 増やすと重心は約 0.03 上に移動し、枠組みはもはや釣り合わなくなる。

よくある間違い

- 半円形の**針金**（wire）に対する $\frac{2r}{\pi}$ の代わりに、半円形の**薄板**（lamina）に対する $\frac{4r}{3\pi}$ を用いてしまう。

- 長さではなく角度で重みをつけてしまう。微小部分の質量は $\rho r\,\mathrm{d}\phi$ であり、因子 r が約分されるのは、それが全質量にも現れるからにすぎない。
- 理由を示さずに G が O にあると主張してしまう。根拠は、抗力が常に半径に沿って働くということである。

STEP のその先へ

円弧についての積分は、曲線に沿った**線積分**（line integral）$\int \mathbf{r}\rho\,\mathrm{d}s$ として重心を表す最も簡単な例である。大学 1 年次の講義では、さらに二重積分や三重積分（double and triple integrals）を用いて曲面や立体の重心へと進み、パップス（Pappus）の定理によってこれらの重心が回転体の面積や体積と結びつけられる。釣り合いについての議論は、揺動安定性（rocking stability）の背後にある考え方でもある。曲面の上に置かれた物体は、その重心が曲率中心（centre of curvature）より下にあれば安定である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このような考え方で重心と剛体の平衡を扱っている。

解答例

STEP I 1988、第 12 問

力学 ・ 変化する力による運動

STEP I 1988、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s1-q12

鍵となる考え方

それぞれの方法について、スケーターが岸に向かって最も遠くまで進む距離を求める。少なくとも一方の方法でその距離を d が上回るとき、そしてそのときに限り、彼女は安全である。方向転換は典型的な円運動（circular motion）である。速度に垂直な一定の大きさの力は半径一定の円を描かせ、その半径がさらに前進する距離になる。ブレーキは力が速さに依存する変力の問題であるが、求めたいのは**距離**である。これが、加速度を $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ と書くべき合図である。

解答

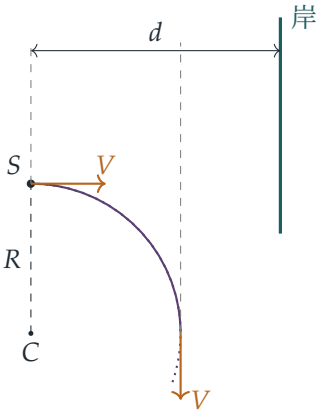
モデル

スケーターを、なめらかな水平の氷の上にある質量 M の質点（particle）として扱う。彼女にはたらく水平方向の力は彼女自身が加える力だけであるから、重力と垂直抗力（normal reaction）は打ち消し合い、以後は関係しない。出発点から岸に向かう向きに距離 x を測ると、岸は $x = d$ にある。

方法 1：円を描いて曲がる

速度に垂直な力は仕事をしないので、速さは V のまま変わらない。一定の速さ V の速度に常に直角にはたらく一定の大きさ F の力は、半径 R の円運動の向心力（centripetal force）となる。ここで

$$F = \frac{MV^2}{R}, \qquad \text{よって} \qquad R = \frac{MV^2}{F}.$$



彼女は S から岸に向かってまっすぐ進み始めるので、円の中心 C は S を通り岸に**平行**な直線上の、S から距離 R の点にある。角 θ だけ向きを変えたとき、岸に向かって進んだ距離は $x = R\sin\theta$ であり、これは $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき最大値 R をとる。そこで彼女は岸に平行に動いており、その後は岸から離れるように曲がっていく。したがって、彼女が岸にぶつからない条件は

$$d > \frac{MV^2}{F}.$$

（ちょうど $d = MV^2/F$ のときは、岸に沿って動きながら岸をかすめる。）

方法 2：ブレーキをかける

今度は力が運動の方向とちょうど逆向きにはたらくので、彼女は岸に向かって一直線に進みながら減速する。時間ではなく距離を求めたいので加速度を $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ と書くと、ニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）より

$$Mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{F(V^2+v^2)}{2V^2}.$$

変数分離（separation of variables）を行い、$v = V$ となる $x = 0$ から、彼女が止まる点 $x = X$ まで積分すると

$$\begin{aligned}\int_V^0 \frac{v}{V^2+v^2}\,\mathrm{d}v &= -\frac{F}{2MV^2}\int_0^X \mathrm{d}x,\\ \left[\tfrac{1}{2}\ln(V^2+v^2)\right]_V^0 &= -\frac{FX}{2MV^2},\\ \tfrac{1}{2}\ln\frac{V^2}{2V^2} &= -\tfrac{1}{2}\ln 2 = -\frac{FX}{2MV^2},\end{aligned}$$

となるので、停止距離は

$$X = \frac{MV^2}{F}\ln 2.$$

考えてみよう 彼女は本当に静止するのだろうか。それとも、いつまでもじわじわ前進しながら速さが o に近づくだけなのだろうか。

ブレーキの力は決して $\frac{1}{2}F$ を下回らないので、速さは有限の時間で o になる。具体的には、$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{F}{2V^2}(V^2+v^2)$ を積分すると $\frac{2MV}{F}\left(\arctan 1 - \arctan\frac{v}{V}\right) = t$ となるので、彼女は $t = \pi MV/(2F)$ で止まり、それまでに有限の距離 X だけ進む。（静止したら押すのをやめる。）したがって、$d > X$ ならブレーキで助かる。$d = X$ ならば速さ o で岸に達し、衝突することなく岸に触れる。

2 つの方法の比較

$\ln 2 \approx 0.693 < 1$ であるから、停止距離は回転半径より短い。つまりブレーキのほうがよい方法であり、方向転換でうまくいくときは必ずブレーキでもうまくいく。よって、彼女が岸への衝突を避けられるのは、ちょうど

$$\boxed{d > \frac{MV^2}{F}\ln 2}$$

のときである（$d = \frac{MV^2}{F}\ln 2$ は、静止した状態で岸に到着する境界の場合である）。

質点という仮定

実際のスケーターには大きさがある。体や腕は重心よりいくらか前に出ているので、実際には d が上の値よりおよそその分だけ大きくなければならない。より重要なのは、力が氷の上のスケート靴から生じることである。曲がるには内側に体を傾けなければならず、強くブレーキをかけるには刃を進行方向に対して横向きにひねる（ホッケーストップ）必要があり、そのとき体は横を向く。このような回転や姿勢こそ、質点モデルが無視しているものである。また、このモデルは、氷がなめらかであるとされているにもかかわらず、そもそも氷がこれらの力を供給できることを暗に仮定している。刃に沿った方向に摩擦がなくても、刃は横方向には氷をとらえるのである。

検算

- 単位：MV^2/F は $\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}/N} = \mathrm{m}$ であり、当然そうあるべきとおり長さである。
- 上下からの評価：ブレーキの力は $\frac{1}{2}F$ と F の間にある。一定の力 F なら $MV^2/(2F)$ で止まり、一定の力 $\frac{1}{2}F$ なら MV^2/F で止まる。実際 $\frac{1}{2} < \ln 2 < 1$ である。
- 数値計算：ランダムな M、V、F（たとえば $R = MV^2/F = 7.0747$）に対して両方の運動をルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で数値積分すると、方向転換

での最大前進距離は 7.0747、ブレーキでの停止距離は $4.9038 = R\ln 2$ となり、停止時刻は $\pi MV/(2F)$ であった。

よくある間違い

- 円の中心を彼女の横に置いて前進距離を R とすべきところを、運動の直線上（あるいは岸の上）に置いてしまい、前進距離を $2R$ や 0 としてしまう。
- ブレーキの場合に $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ を使い、距離を求めるのに苦労する。$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ を使えば 1 回の積分で求まる。
- 2 つの条件を比較せずに別々に答えてしまう。問題は彼女が逃れることができる d の範囲を問うているので、2 つの方法のうちよいほうが必要である。

STEP のその先へ

$\ddot{x} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ と書くことは、エネルギーを用いる方法への第一歩である。位置だけに依存する力に対しては、これは仕事とエネルギーの定理（work–energy theorem）そのものであり、大学の力学ではポテンシャル（potential）や、運動を相平面（phase plane）上に描く見方へと発展する。また、スケーターが方向転換とブレーキのどちらを選ぶかという問題は、単純な最適制御（optimal control）の問題でもある。限られた力を使って障害物を避けるには、どうするのが最善だろうか。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、速度に依存する力と円運動を、ちょうど一段上の水準で扱っている。

解答例

STEP I 1988、第 13 問

力学 ・ 弾性ひもと衝突

STEP I 1988、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s1-q13

鍵となる考え方

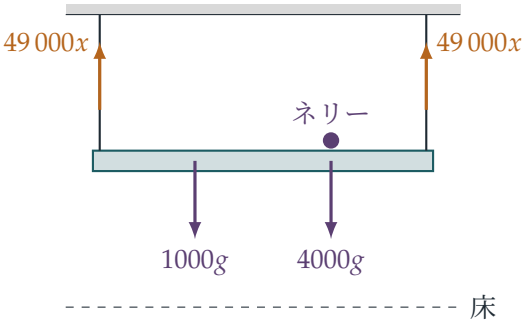
この問題は 3 つの段階に分かれ、それぞれに固有の保存則（conservation law）がある。ネリーの着地は瞬間的な非弾性衝突（inelastic collision）なので、運動量（momentum）は保存されるがエネルギーは保存されない。床までの下降では重力と弾性ロープだけがはたらくので、エネルギーが保存される。ネリーが降りたあとも再びエネルギーが保存される。そこで、蓄えられた弾性エネルギーが、ロープが自然長となる位置を越えるまで板を持ち上げるのに十分かどうかを調べればよい。

解答

板は水平を保つ剛体（rigid body）とみなし、鉛直方向に運動する質量 1000 kg の質点（particle）として扱う。ネリーは質量 4000 kg の質点であり、ロープはフックの法則（Hooke's law）に従う軽い弾性ひもとする。2 本のロープの伸び（extension）は常に等しく x であるから、2 本が合わせて及ぼす上向きの力は

$$2 \cdot \frac{490\,000}{10}\, x = 98\,000\, x \text{ N}.$$

である。したがって 2 本のロープは、ばね定数（stiffness）$K = 98\,000 \text{ N m}^{-1}$ の 1 本のばねのようにふるまい、その弾性エネルギー（elastic energy）は $\frac{1}{2}Kx^2 = 49\,000\, x^2$ J である。



初期位置

ネリーが来る前、板はつり合いの状態でぶら下がっているので、伸び e_0 は

$$98\,000\,e_0 = 1000 \times 9.8 \quad \Longrightarrow \quad e_0 = 0.1\ \text{m}.$$

を満たす。

着地

ネリーは板に着地してそのまま板の上にとどまるので、これは完全非弾性衝突（perfectly inelastic collision）である。衝突は非常に短い時間で起こり、ロープの張力や重力は有限の力であるから、衝突の間にこれらが与える力積（impulse）は無視できる。よって運動量は保存され、衝突直後の共通の速さ v は

$$4000 \times 5 = 5000\,v \quad \Longrightarrow \quad v = 4\ \text{m}\,\text{s}^{-1}.$$

を満たす。

考えてみよう ネリーが到着した時点から、そのままエネルギー保存則を使えないだろうか？

使えない。ゾウが板に着地してそのままとどまるとき、多くの運動エネルギーが熱や音に変わる。ここでは $\frac{1}{2} \cdot 4000 \cdot 5^2 = 50\,000\,\text{J}$ が $\frac{1}{2} \cdot 5000 \cdot 4^2 = 40\,000\,\text{J}$ になるので、$10\,000\,\text{J}$ が失われる。エネルギーが保存されるのは、着地直後の瞬間からである。

下降

板の床からの最初の高さを h とする。板とネリー（合計質量 $5000\,\text{kg}$）は速さ $4\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ で動き始め、距離 h だけ下の床で静止する。そのときの伸びは $0.1 + h$ である。仕事を

する力は重力とロープの張力だけなので、

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}\cdot 5000\cdot 4^2}_{\text{失われた運動エネルギー}} + \underbrace{5000\cdot 9.8\,h}_{\text{失われた位置エネルギー}} = \underbrace{49\,000\left[(0.1+h)^2-0.1^2\right]}_{\text{増加した弾性エネルギー}},$$

$$40\,000 + 49\,000\,h = 49\,000\,(0.2h+h^2).$$

が成り立つ。両辺を 49 000 で割って整理すると

$$h^2 - 0.8\,h - \tfrac{40}{49} = 0, \qquad \text{よって} \qquad h = 0.4 + \sqrt{0.16+\tfrac{40}{49}} = \frac{14+2\sqrt{299}}{35},$$

となる。ここで $h>0$ であるから正の解をとった。したがって

$$h \approx 1.39\ \text{m}.$$

である。板が下がるにつれて伸びは増えるだけなので、この段階を通じてロープはずっと張ったままである。

ネリーが降りたあと

ネリーは静かに降りるので、板だけ（1000 kg）が床の位置で静止しており、そのときの伸びは

$$X = 0.1 + h \approx 1.488\ \text{m}.$$

である。板が十分に上昇して伸びが 0 まで減れば、ロープはたるむ。そのためには板が高さ X だけ上昇すればよい。ロープが張っている間はエネルギーが保存されるので、蓄えられた弾性エネルギーが位置エネルギーの増加分を上回れば、板はその高さに達する。

$$\tfrac{1}{2}KX^2 = 49\,000\,X^2 \approx 108\,500\ \text{J}, \qquad 1000\cdot 9.8\cdot X \approx 14\,600\ \text{J}.$$

前者のほうがはるかに大きいので、板は約 93 900 J の運動エネルギー（速さ約 13.7 m s^{-1}）をもったまま、まだ上向きに動きながら自然長（natural length）の位置に到達する。この点より上では、ロープは自然長より短くならなければならないので、たるんでいる。**よって、ロープはたるむ。**

考えてみよう 単振動を使えばすぐに済むのではないか？

ロープが張っている間ならそのとおりである。板だけの運動は、つり合いの伸び 0.1 m を中心とする単振動（simple harmonic motion, SHM）であり、板はその位置より $h \approx 1.39$ m 下から動き始めるので、振幅（amplitude）は 1.39 m である。振動の最高点では伸びが $0.1 - 1.39 < 0$ となるが、これは張ったロープではありえない。したがって、板が最高点に達する前にロープはたるまなければならない。（実際、単振動による議論では $h > 0.1$ でありさえすれば結論が得られる。）

ロープがたるむと、板は重力だけを受けて自由に運動し、さらに $13.7^2/(2\times 9.8)\approx 9.6\,\mathrm{m}$ 上昇する。これは 10 m より小さいので、板は（ぎりぎりで！）ロープの固定点に届くことなく落下に転じる。

検算

- エネルギーの式に $h=1.3881$ を代入すると、両辺はジュール単位で四捨五入して 108 017 J となる。
- $\ddot{x}=g-Kx/5000$ を $x=0.1, \dot{x}=4$ から数値的に追っていくと、板は 1.3881 m 下降したところで止まる。
- ネリーが降りたあとの板の運動を数値的に追うと、板が $13.7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ で上昇しているときに伸びが 0 になり、最高点は床から 11.07 m の高さとなる。これは $X+9.58$ と一致する。
- 単位：490 000 N / 10 m は $\mathrm{N\,m^{-1}}$ となるので、エネルギーの式の各項はすべてジュールである。

よくある間違い

- 着地の前後でエネルギー保存則を使ってしまい、一体となった速さを $4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ではなく $\sqrt{20}\approx 4.47\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ としてしまう。
- 弾性エネルギーを自然長から測るときに最初の伸び 0.1 m を忘れる。増加する弾性エネルギーは $49\,000h^2$ ではなく $49\,000[(0.1+h)^2-0.1^2]$ である。
- 2 本のロープではなく、1 本のロープのばね定数を使ってしまう。

STEP のその先へ

2 本のロープは非線形ばね（nonlinear spring）である。引き伸ばされれば引っ張るが、縮められても押し返すことはできない。このように異なる運動方程式の間を切り替わる系は、区分線形振動子（piecewise-linear oscillator）あるいは「衝撃」振動子（impact oscillator）とよばれ、単純なものでさえ驚くほど複雑なふるまいを示すことがある。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、エネルギー、衝突、振動を丁寧に扱っており、この問題全体の土台となる内容を学ぶことができる。

解答例

STEP I 1988、第 14 問

確率・統計 ・ 打ち切り正規分布の期待値

STEP I 1988、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s1-q14

鍵となる考え方

変数 X_M は単に $\min(X, M)$ である。すなわち、正規確率変数（normal random variable）のうち M を超える部分をすべて M に押しつぶしたものである。その期待値（expectation）は $x < M$ での積分と、定数と裾確率（tail probability）の積とに分かれる。そして $x\phi(x)$ は符号を除けば $\phi(x)$ の導関数（derivative）なので、この積分は易しい。観光客の話も、同じ考え方が姿を変えて現れたものである。バスの車両群が運ぶ乗客数は $\min(\text{需要}, \text{定員})$ であり、正規近似（normal approximation）を施すと、これはまさに X_M の形になる。

解答

X_M の期待値

$\{X < M\}$ 上では $X_M = X$、$\{X \geq M\}$ 上では $X_M = M$ であるから、

$$\mathrm{E}(X_M) = \int_{-\infty}^{M} x\,\phi(x)\,\mathrm{d}x \;+\; M\,\mathrm{P}(X \geq M) = \int_{-\infty}^{M} x\,\phi(x)\,\mathrm{d}x \;+\; M(1-\Phi(M)).$$

考えてみよう 導関数が $x\phi(x)$ となる関数はあるだろうか。

ある。$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$ に対して、合成関数の微分法（chain rule）により $\phi'(x) = -x\phi(x)$ となる。したがって

$$\int_{-\infty}^{M} x\,\phi(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\phi(x)\Big]_{-\infty}^{M} = -\phi(M) + 0,$$

である。ここで $x \to -\infty$ のとき $\phi(x) \to 0$ であることを用いた。よって

$$\mathrm{E}(X_M) = -\phi(M) + M(1 - \Phi(M)),$$

となり、示すべき式が得られた。

妥当性の確認として、$M \to \infty$ とすると $M(1-\Phi(M)) \to 0$ であるから $\mathrm{E}(X_M) \to 0 = \mathrm{E}(X)$ となる。また $M \to -\infty$ とすると $\mathrm{E}(X_M) \approx M$ となり、当然そうあるべき結果である。

バス

1 回の来訪において、バス乗り場へ案内される観光客の人数を N とする。1024 人の観光客はそれぞれ独立に、どちらの方向へも確率 $\frac{1}{2}$ で案内されると仮定する。すると

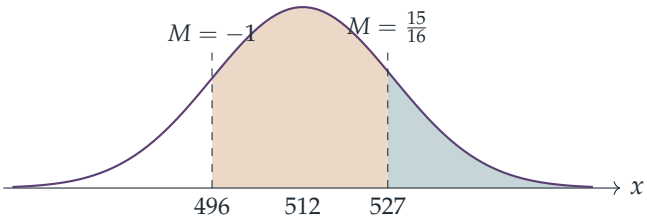
$$N \sim \mathrm{B}(1024, \tfrac{1}{2}), \qquad \mathrm{E}(N) = 512, \qquad \mathrm{Var}(N) = 1024 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = 256 = 16^2.$$

である。$n = 1024$ とこれほど大きいので、N は X を標準正規分布（standard normal distribution）に従う変数として $512 + 16X$ で非常によく近似される。

バスが 16 台なら定員は $16 \times 31 = 496$、17 台なら 527 である。定員 C の車両群は $\min(N, C)$ 人の乗客を運ぶので、1 回の来訪あたりの利益（単位はヴロスカ）は

$$\begin{aligned}\min(N, C) &\approx \min(512 + 16X,\ C) \\ &= 512 + 16\min\Big(X, \frac{C - 512}{16}\Big) = 512 + 16\,X_M, \qquad \text{ただし} M = \frac{C - 512}{16}.\end{aligned}$$

となる。よって $C = 496$ のとき $M = -1$、$C = 527$ のとき $M = \frac{15}{16}$ である。



需要が琥珀色の帯に入るとき、17 台目のバスは 496 を超えた分の乗客を運ぶ。需要が青緑色の裾に入るとき、17 台目のバスは満員の 31 人を運ぶ。

$\phi(1) \approx 0.24197$、$\Phi(1) \approx 0.84134$ を用い、$1 - \Phi(-1) = \Phi(1)$ に注意すると、

$$\mathrm{E}(X_{-1}) = -\phi(1) - \big(1 - \Phi(-1)\big) = -\phi(1) - \Phi(1) \approx -0.24197 - 0.84134 = -1.08332.$$

となる。$\phi(0.9375) \approx 0.25707$、$1 - \Phi(0.9375) \approx 0.17425$ を用いると、

$$\mathrm{E}(X_{15/16}) \approx -0.25707 + 0.9375 \times 0.17425 \approx -0.25707 + 0.16336 = -0.09371.$$

となる。したがって、追加のバスによって 1 回の来訪あたりの期待利益は

$$16\big(\mathrm{E}(X_{15/16}) - \mathrm{E}(X_{-1})\big) \approx 16 \times 0.98961 \approx 15.83 \text{ ヴロスカ}.$$

だけ増える。来訪は年に 50 回あるので、追加のバスの価値はおよそ

$$50 \times 15.83 \approx 792 \text{ ヴロスカ（年あたり）}.$$

である。これが検討に値する賄賂の年額の上限である。期待される追加利益を超える額を支払えば、協同組合は平均として損をすることになる。

考えてみよう　N は離散的なのだから、連続性補正（continuity correction）を用いるべきではないのか。

この場合は必要ない。連続性補正が役立つのは、$\mathrm{P}(N \le c)$ のような確率を近似するとき、つまり平均をとる関数が整数のところで跳ぶときである。関数 $k \mapsto \min(k, C)$ には跳びがなく、補正なしの正規近似がこの関数に対しては極めて正確である。厳密な二項分布（binomial distribution）による計算では 791.68 となり、上の値と小数第 2 位まで一致する。定員を $\frac{1}{2}$ ずらすとかえって悪くなり、775 となってしまう。

検算

- $\int_{-\infty}^{M} x\phi(x)\,\mathrm{d}x + M(1-\Phi(M))$ を中点則（midpoint rule）で数値積分すると、いくつかの M の値について公式と小数第 8 位まで一致する。4×10^5 個の標本を用いた $\min(X, M)$ のモンテカルロ・シミュレーション（Monte Carlo simulation）も一致する。
- $\mathrm{B}(1024, \frac{1}{2})$ にわたる厳密な和をとると、1 回の来訪あたりの追加期待利益は 15.8337、すなわち年あたり 791.68 となり、正規近似と一致する。
- 大まかな妥当性：追加のバスは $N > 496$ のときには必ず何らかの利益を生み、これは約 0.84 の確率で起こり、しかもしばしば満員になる。したがって、1 回の来訪あたり 31 の半分を少し上回る値は妥当である。

よくある間違い

- 尺度の掛け忘れ：$\min(N, C)$ は $512 + 16X_M$ であるから、$\mathrm{E}(X_M)$ の差には標準偏差（standard deviation）16 を掛け、さらに 50 を掛けなければならない。
- $M = -1$ での符号の誤り：項 $M(1-\Phi(M))$ は $-(1-\Phi(-1)) = -\Phi(1)$ であり、$-(1-\Phi(1))$ ではない。

STEP のその先へ

量 $\mathrm{E}\min(X, M)$ は、**打ち切り**（censored）正規確率変数の期待値である。$\mathrm{E}(X-M)^{+} = \phi(M) - M(1-\Phi(M))$ のような密接に関連した式は、在庫理論（inventory theory、「新聞売り子問題（newsvendor problem）」）や、オプションのブラック–ショールズ（Black–Scholes）価格の根幹をなしている。恒等式 $\mathrm{E}\min(N, C+1) - \mathrm{E}\min(N, C) = \mathrm{P}(N > C)$ は、定員を 1 単位増やすことの価値を見通すうまい方法である。これらの考え方についてさらに知りたければ、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）を参照するとよい。

解答例

STEP I 1988、第 15 問

確率・統計 ・ 二項検定

> **STEP I 1988、問 15**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q15

鍵となる考え方

「得点の半分より多くをファウルから得る」という条件を、ファウルの数とゴールの数の間の簡単な不等式（inequality）に書き直す。そのうえでゴールの数で条件付け（conditioning）をすると、あとは等確率なファウルの値を数えるだけになる。後半では、**以前の**分布のもとで 300 回の試行のうち 9 回のファウルが起こる回数がどれくらいと期待されるか、そして何も変わっていないとしたら観測された回数がどれほど意外なものかを考える。

解答

確率

ある試合におけるある特定のチームについて、そのチームが挙げるゴールの数を G、そのチームに対して犯されるファウルの数を F とする。このとき G と F は独立（independent）であり、

$$\mathrm{P}(G=0),\ldots,\mathrm{P}(G=4) = \tfrac{1}{9},\tfrac{2}{9},\tfrac{3}{9},\tfrac{2}{9},\tfrac{1}{9}, \qquad \mathrm{P}(F=f)=\tfrac{1}{10} \quad (f=0,1,\ldots,9).$$

である。チームはゴールから $2G$ 点、ファウルから F 点を得るので、合計は $2G+F$ 点である。得点の半分より多くをファウルから得るのは、ちょうど

$$F > \tfrac{1}{2}(2G+F) \iff F > 2G.$$

のときである。（チームがまったく得点しない場合は $F=0=2G$ となり、これは条件を満たさない。厳密な不等号を用いればこの場合も正しく扱える。）

$G = g$ のもとで条件を満たす F の値は $2g+1, \ldots, 9$ であり、これは等確率な 10 個の値のうち $9-2g$ 個である。よって F と G の独立性を用いると、

$$\mathrm{P}(F > 2G \mid G = g) = \frac{9-2g}{10}, \qquad g = 0, 1, 2, 3, 4,$$

となり、値は $\frac{9}{10}, \frac{7}{10}, \frac{5}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}$ である。全確率の公式（law of total probability）により、

$$\mathrm{P}(F > 2G) = \frac{1\cdot 9 + 2\cdot 7 + 3\cdot 5 + 2\cdot 3 + 1\cdot 1}{9 \times 10} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}.$$

この簡潔な答えには理由がある。ゴールの分布は 2 に関して対称であり、$(9-2g)/10$ は g の一次式なので、その平均は $g = 2$ における値、すなわち $\frac{1}{2}$ に等しいのである。

ファウルの分布は変化したか？

あるチームが犯すファウルの数は、相手チームに対して犯されるファウルの数であるから、以前のルールのもとでは、各チームが 1 試合で 9 回のファウルを犯す確率は $\frac{1}{10}$ である。300 のチーム試合のうち、チームが 9 回のファウルを犯したものの数を X とする。次の検定を行う。

$$H_0 : \ p = \tfrac{1}{10} \ \text{（変化なし）} \qquad \text{対} \qquad H_1 : \ p < \tfrac{1}{10},$$

ここで p はチームが 1 試合で 9 回のファウルを犯す確率である。ルール変更は多数のファウルが起こる可能性を**下げる**ことを意図したものなので、対立仮説（alternative hypothesis）は片側（one-sided）である。

> **考えてみよう** ここで二項分布（binomial distribution）のモデルを用いることは正当化されるか？

300 のチーム試合が独立で、それぞれ同じ確率 p をもつ必要がある。問題文は 1 試合の中での独立性を与えており、異なる試合どうしも独立であると仮定するのは妥当である。よって H_0 のもとで $X \sim \mathrm{B}(300, \frac{1}{10})$ であり、

$$\mathrm{E}(X) = 30, \qquad \mathrm{Var}(X) = 300 \times \tfrac{1}{10} \times \tfrac{9}{10} = 27, \qquad \text{標準偏差（standard deviation）} \sqrt{27} \approx 5.20.$$

である。観測値は $X = 12$ であり、期待値 30 より 18 小さく、これは標準偏差の約 3.5 倍にあたる。正規近似（normal approximation）と連続性補正（continuity correction）を用いると、

$$\mathrm{P}(X \le 12) \approx \Phi\left(\frac{12.5 - 30}{\sqrt{27}}\right) = \Phi(-3.37) \approx 0.0004.$$

二項分布による正確な確率はさらに小さく、約 0.0001 である。いずれにせよ、何も変わっていなければ、これほど極端な結果が起こるのは 1000 シーズンに 1 回未満である。これは通常の 5% や 1% の有意水準（significance level）さえはるかに超えている

ので、H_0 を棄却する。これはファウルの数の分布が変化したことの十分な証拠である。しかも期待された方向、すなわち 9 回のファウルが起こる試合が少なくなる方向に変化している。

注意すべき点が二つある。この検定が示すのは P(9 回のファウル) が減少したことだけであり、分布の残りの部分がどう変化したかは示さない（ただし、それが自然な説明ではある）。また、シーズンの間に他の要因が変わった可能性もあるので、ルール変更がその減少を引き起こしたことを統計学で証明することはできない。

検算

- ゴールの確率 $\frac{1}{9}(1+2+3+2+1)$ の和は、当然そうあるべきとおり 1 である。
- 5×10 通りのすべての組 (g, f) を正確な分数で列挙すると $\mathrm{P}(F > 2G) = \frac{1}{2}$ となり、200,000 試合のシミュレーションでは 0.4997 となった。
- 二項確率を直接足し合わせると、$X \sim \mathrm{B}(300, 0.1)$ に対して $\mathrm{P}(X \leq 12) = 9.2 \times 10^{-5}$ となる。正規近似（3.8×10^{-4}）と平均 30 のポアソン近似（Poisson approximation）（1.7×10^{-4}）も、この確率が非常に小さいことで一致している。

よくある間違い

- F を $2G$ ではなく G と比較してしまう。1 ゴールは 2 点の価値がある。
- $F > 2G$ ではなく $F \geq 2G$ を数えてしまう。「半分より多く」は厳密な不等号であり、得点のないチームはファウルから得点を得ていない。
- 標本の大きさとして 300 のチーム試合ではなく 150 試合を用いてしまう。あるいは、計算の前に帰無仮説（null hypothesis）と二項分布のモデルを述べ忘れる。

STEP のその先へ

後半は二項母比率に関する仮説検定（hypothesis test）であり、求めた裾の確率は p 値（p-value）である。大学では、尤度比検定（likelihood ratio test）やカイ二乗検定（chi-squared test）を学ぶ。これらは一つの値だけでなく、観測されたファウル数の分布全体を以前の分布と比較するものである。Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）は、確率の側面（条件付け、二項分布、正規近似）を非常にわかりやすく扱っている。

解答例

STEP I 1988、第 16 問

確率・統計 ・ 連続分布と条件付け

STEP I 1988、問 16

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s1-q16

鍵となる考え方

最初の部分は正規化（normalisation）と積分の練習である。密度（density）は定数倍を除いてしか与えられていないので、全確率が 1 となることを要請してその定数を求めなければならない。また $t^2/(1+t^2)^2$ の積分は、これを $1/(1+t^2)$ と $t/(1+t^2)$ の導関数とに分けることで計算できる。その後の検査の仕組みは、場合分けの短い樹形図にすぎない。意味をもつのは 4 歳と 5 歳での検査だけである（3 歳より前に錆びている車はない）。そこで、4 回目の検査の時点ですでに錆びていたかどうかで場合を分ける。最後の部分は、同じ樹形図の上でのベイズの定理（Bayes' theorem）である。

解答

錆び始める時期の分布

車が年齢 $3+T$ で錆び始めるとする。ここで $T \geq 0$ は、ある定数 k を用いて密度 $f(t) = kt^2/(1+t^2)^2$ をもつ。鍵となる積分は、次のことに気づけば得られる。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t}{1+t^2}\right) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}, \qquad \text{よって} \qquad \frac{t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\right),$$

これは括弧の中を共通の分母 $(1+t^2)^2$ で通分すれば確かめられる。分子は $(1+t^2)-(1-t^2) = 2t^2$ となる。したがって

$$\int_0^t \frac{s^2}{(1+s^2)^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left(\arctan t - \frac{t}{1+t^2}\right).$$

$t \to \infty$ のとき $\arctan t \to \frac{\pi}{2}$、$t/(1+t^2) \to 0$ であるから、$[0,\infty)$ 上の積分は $\frac{\pi}{4}$ である。f が密度であるためには $k \cdot \frac{\pi}{4} = 1$ が必要なので、$k = 4/\pi$ である。ゆえに

$$\boxed{F(t) = \mathrm{P}(\text{錆び始めの年齢が次より小さい：}3+t) = \mathrm{P}(T < t) = \frac{2}{\pi}\left(\arctan t - \frac{t}{1+t^2}\right), \quad t \geq 0.}$$

（$F(t) \to 1$ に注意せよ。どの車もいずれは錆びる。）

必要となる二つの値は次のとおりである。

$$F(1) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \approx 0.1817,$$
$$F(2) = \frac{2}{\pi}\left(\arctan 2 - \frac{2}{5}\right) \approx 0.4502.$$

5 年目の検査で不合格になる確率

3 歳より前に錆びている車はないので、1 歳、2 歳、3 歳での検査には必ず合格する（ちょうど 3 回目の検査の瞬間に錆び始める確率は 0 である）。5 歳で不合格になるには、4 歳で合格し、かつ 5 歳で不合格にならなければならない。そして不合格になるには、5 歳の時点で錆びていることが必要である。錆は消えることがないので、これが起こるのは互いに排反（disjoint）な次の二通りである。

- **4 歳の時点ですでに錆びている**（確率 $F(1)$）。4 回目の検査に確率 $\frac{1}{2}$ で合格し、その後も錆びたままなので、確率 $\frac{1}{2}$ で 5 回目の検査に不合格となる。寄与は $\frac{1}{4}F(1)$。
- **4 歳から 5 歳の間に錆び始める**（確率 $F(2) - F(1)$）。4 回目の検査には必ず合格し、5 回目の検査には確率 $\frac{1}{2}$ で不合格となる。寄与は $\frac{1}{2}\big(F(2) - F(1)\big)$。

ここでは問題の意図どおり、錆びた車に対する異なる検査の結果は互いに独立（independent）であり、錆び始めた時刻とも独立であると仮定している。

> **考えてみよう**　なぜ 1 歳、2 歳、3 歳での検査に合格する確率を掛けないのだろうか？

それらの検査は、どの車もまだ錆びうる前に行われるので、すべての車が合格するからである。その因子は 1 である。

二つの場合を足し合わせると

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{不合格となる年齢が5}) &= \tfrac{1}{4}F(1) + \tfrac{1}{2}\big(F(2) - F(1)\big) = \tfrac{1}{2}F(2) - \tfrac{1}{4}F(1)\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\arctan 2 - \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{8} + \frac{1}{4\pi}\\ &= \boxed{\frac{1}{\pi}\left(\arctan 2 - \frac{3}{20}\right) - \frac{1}{8} \approx 0.1797.}\end{aligned}$$

5 回目の検査で廃車になったとき、4 回目の検査の時点で錆びていた確率

5 回目の検査の直後に廃車となる車とは、ちょうど（それ以前の検査にはすべて合格したうえで）その検査に不合格となった車のことであり、これはいま求めた事象である。4 回目の検査の時点で錆びていたという事象を A、5 回目の検査に不合格となる事象を D とする。上の一つ目の項目はまさに $A \cap D$ であるから

$$\mathrm{P}(A \cap D) = \tfrac{1}{4}F(1) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4\pi} = \frac{\pi - 2}{8\pi}.$$

条件付き確率（conditional probability）の定義により

$$\mathrm{P}(A \mid D) = \frac{\mathrm{P}(A \cap D)}{\mathrm{P}(D)} = \frac{\dfrac{\pi - 2}{8\pi}}{\dfrac{1}{\pi}\left(\arctan 2 - \dfrac{3}{20}\right) - \dfrac{1}{8}}.$$

分子と分母に 8π を掛けて

$$\boxed{\mathrm{P}(A \mid D) = \frac{\pi - 2}{8\arctan 2 - \frac{6}{5} - \pi} = \frac{5(\pi - 2)}{40\arctan 2 - 6 - 5\pi} \approx 0.253.}$$

つまり、5 年で廃車となった車のうち、すでに錆びていながら 4 回目の検査をすり抜けていたものは約 4 分の 1 にすぎず、大部分は 5 年目の間に錆び始めたのである。

検算

- 分布関数（distribution function）であるからには当然そうあるべきとおり、$F(0) = 0$ であり、$t \to \infty$ のとき $F(t) \to 1$ である。$\frac{4}{\pi}\int_0^2 t^2/(1+t^2)^2\,\mathrm{d}t$ にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると 0.45018 となり、$F(2)$ と一致する。
- 400 000 台の車のシミュレーション（錆び始める時刻を抽出し、毎年の検査を実行する）では、5 年で不合格となる確率が 0.1789、条件付き確率が 0.255 となり、厳密値 0.1797 および 0.2528 とよく合う。
- 妥当性の確認：$\mathrm{P}(D)$ は $\frac{1}{2}F(2) \approx 0.225$（それ以前の廃車を無視して、5 歳の時点で錆びていてかつ不合格となる確率）より小さくなければならないが、実際そうなっている。

よくある間違い

- 正規化を忘れること。密度は $t^2/(1+t^2)^2$ に**比例する**だけであり、因子 $4/\pi$ を落とすとその後の答えがすべて狂う。

- 「5 歳の時点で錆びている」を確率 $F(2)$ の一つの場合として扱い、$\frac{1}{2}$ を掛けてしまうこと。これでは、4 歳の時点で錆びていてその検査で除かれた車を無視することになる。
- 最後の部分で、「5 歳で不合格になった」ではなく「5 歳の時点で錆びている」を条件としてしまうこと。

STEP のその先へ

ここでの関数 F は分布関数であり、比 $f(t)/(1-F(t))$ は**ハザード率**（hazard rate）、すなわちそれまで錆びずに残った車が次の瞬間に錆び始める確率の割合である。これは生存解析（survival analysis）と信頼性理論（reliability theory）の中心的な対象である。最後の部分はフィルタリング（filtering）の小さな例であり、不完全な観測（検査）から隠れた状態（錆びているかどうか）を推測している。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、このような考え方で連続分布と条件付けを扱っている。

解答例

STEP II 1988、第 1 問

純粋数学 ・ 部分分数分解と級数

STEP II 1988、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s2-q1

鍵となる考え方

f を部分分数（partial fractions）に分解すれば、すべては二つの簡単な分数 $\frac{1}{x-1}$ と $\frac{1}{x-2}$ を等比級数（geometric series）として展開することに帰着する。本当に判断が必要なのは、それぞれを**どちら向きに**展開するかという点だけである。等比級数 $\sum r^n$ は $|r|<1$ のときに限り収束（converge）するので、各分数について、分母の二つの項のうち大きさの大きいほうをくくり出す。この選択は $|x|$ が 1 を、さらに 2 を越えるところで変わる。展開が三通りある理由はここにある。

解答

部分分数分解

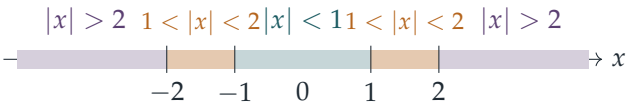
$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$ とおく。隠蔽法（cover-up rule）により $A = \frac{1}{1-2} = -1$、$B = \frac{1}{2-1} = 1$ を得るので、

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

必要となる基本的な部品は等比級数

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \qquad (|r|<1),$$

であり、r としては x、$\frac{x}{2}$、$\frac{1}{x}$、$\frac{2}{x}$ のうち、考えている範囲で絶対値（modulus）が 1 より小さくなるものを用いる。



範囲 $|x|<1$

このとき $|x|<1$ であり、さらに $|\frac{x}{2}|<\frac{1}{2}<1$ であるから、どちらの分数も x のべきで展開できる：

$$-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,$$
$$\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

これらを加えて、

$$\mathrm{f}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\qquad(|x|<1),$$

となり、求める結果を得る。

範囲 $1<|x|<2$

二つ目の分数はそのままでよい。依然として $|\frac{x}{2}|<1$ であるから、先ほどとまったく同様に $\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2}\sum_{n\geq0}(\frac{x}{2})^n$ である。

考えてみよう なぜ一つ目の分数に $\sum x^n$ を使い続けることができないのか。

今度は $|x|>1$ なので、項 x^n は 0 に近づかず、$\sum x^n$ は発散（diverge）するからである。そこで、分母から大きいほうの項 x をくくり出す。すると比 $\frac{1}{x}$ が残り、$|\frac{1}{x}|<1$ となる：

$$-\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=-\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}x^{-n}=-\sum_{n=0}^{\infty}x^{-(n+1)}=-\sum_{n=1}^{\infty}x^{-n},$$

ここで最後の段階は $n+1$ を改めて n と書き直しただけである。二つを加えて、

$$\mathrm{f}(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}x^{-n}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\qquad(1<|x|<2),$$

となり、求める結果を得る。

範囲 $|x|>2$

一つ目の分数は、$|\frac{1}{x}|<\frac{1}{2}<1$ であるから、前の範囲での展開をそのまま使える。しかし今度は $|\frac{x}{2}|>1$ なので、二つ目の分数も同じように向きを変えなければならない。x

をくくり出すと比 $\frac{2}{x}$ が残り、$|\frac{2}{x}| < 1$ となる：

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{x}} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{x}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{-(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}x^{-n}.$$

したがって、$|x| > 2$ のとき

$$\mathrm{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}x^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} x^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty}(2^{n-1}-1)x^{-n}.$$

$n = 1$ の係数は $2^0 - 1 = 0$ であるから、この級数は実際には x^{-2} から始まる：

$$\boxed{\mathrm{f}(x) = \sum_{n=2}^{\infty}(2^{n-1}-1)x^{-n} = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \frac{7}{x^4} + \frac{15}{x^5} + \cdots \qquad (|x| > 2).}$$

（二つの級数を項ごとにまとめてよいのは、それぞれが収束するからである。）二つの級数の形でも、まとめた形でも、正しい答えである。

検算

- **主要な振る舞い。** $|x|$ が大きいとき $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x^2-3x+2} \approx \frac{1}{x^2}$ であり、これは最後の展開の初項と一致する。x^{-1} の係数が消えるのは偶然ではない。二つの部分分数は、大きさが等しく符号が逆の $\frac{1}{x}$ のような振る舞いをするのである。
- **値の確認。** $x = 3$ では $\mathrm{f}(3) = \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}$ であり、$\sum_{n\geq 2}(2^{n-1}-1)3^{-n} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}(\frac{2}{3})^n - \sum_{n\geq 2}(\frac{1}{3})^n = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ となる。同様に、$\mathrm{f}(\frac{1}{2}) = \frac{4}{3}$ と $\mathrm{f}(\frac{3}{2}) = -4$ も、最初の二つの展開と一致する。
- 数値的にも、三つの級数（4000 項まで和をとったもの）は、それぞれの範囲内の正負にわたる数百個の無作為な点で、f と約 10^{-14} の精度で一致する。

よくある間違い

- $\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x/2}$ で符号を誤ること。くくり出す因数は 2 ではなく -2 である。
- $\frac{1}{x}$ を掛けたあとで添字が一つずれること。$\frac{1}{x}\sum_{n\geq 0}x^{-n}$ は x^{-1} から始まるので、添字を付け替えた和は $n = 1$ から始まる。
- 比の絶対値が 1 より小さいことを確かめずに、すべての範囲で同じ展開を使うこと。

STEP のその先へ

これら三つの展開は、複素解析（complex analysis）における**ローラン級数**（Laurent series）の実変数版の影である。複素数 z に対して、関数 $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ は、$|z| < 1$、$1 < |z| < 2$、$|z| > 2$ の各領域でそれぞれ異なるローラン展開をもつ。これらは、極（poles）を通る円で区切られた一つの円板と二つの円環領域（annuli）であり、円 $|x| = 1$ と $|x| = 2$ はまさにこれになる。このような展開における z^{-1} の係数（留数（residues））が、周回積分（contour integrals）を支配することがわかる。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は、べき級数（power series）とローラン級数について、見事に幾何学的な解説を与えている。

解答例

STEP II 1988、第 2 問

純粋数学 • 対称な代数方程式

STEP II 1988、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s2-q2

鍵となる考え方

分母を払い、一方の方程式から他方を引く。右辺の平方の差（difference of two squares）から因数 $y-z$ が現れ、これが左辺に現れる $y-z$ と一致する。そして仮定（hypothesis）$y \neq z$ こそが、この因数で割ることを許すのである。その後はすべてが x, y, z についてのただ一つの対称（symmetric）な式に帰着し、あとは対称性が片付けてくれる。

解答

$x+y+z=a$ の証明

$y \neq 0$ かつ $z \neq 0$ であるから、両辺に掛けて分母を払うことができる。

$$2ay - 3y^2 = (z-x)^2, \tag{1}$$
$$2az - 3z^2 = (x-y)^2. \tag{2}$$

(1) から (2) を引き、右辺に平方の差を用いると、

$$\begin{aligned} 2a(y-z) - 3(y^2-z^2) &= (z-x)^2 - (x-y)^2 \\ &= \big[(z-x)-(x-y)\big]\big[(z-x)+(x-y)\big] \\ &= (y+z-2x)(z-y). \end{aligned}$$

左辺は $(y-z)\big[2a-3(y+z)\big]$ であるから、

$$(y-z)\big[2a-3(y+z)\big] = -(y-z)(y+z-2x).$$

考えてみよう $y \neq z$ が必要になるのは、正確にはどこか？

まさにここである。$y-z \neq 0$ であるから、これで両辺を割ることができ、

$$2a-3y-3z=2x-y-z \quad \Longrightarrow \quad 2a=2x+2y+2z,$$

となる。よって、求める通り $x+y+z=a$ である。

3 番目の方程式の証明

$a=x+y+z$ を (1) に代入すると、

$$y(2x+2y+2z-3y)=(z-x)^2 \implies 2xy-y^2+2yz=z^2-2zx+x^2,$$

となり、整理すると

$$x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2zx=0. \tag{3}$$

を得る。注目すべきは、(3) が x, y, z について**対称**であることだ。ここで示したいものを見てみよう。$x \neq 0$ であるから、方程式 $2a-3x=\dfrac{(y-z)^2}{x}$ は

$$x(2a-3x)=(y-z)^2,$$

と同値であり、$a=x+y+z$ を用いるとこれは

$$x(2y+2z-x)=y^2-2yz+z^2 \iff x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2zx=0,$$

となる。これはまさに (3) である。したがって

$$2a-3x=\frac{(y-z)^2}{x}.$$

(実のところ、3 つの方程式はいずれも (3) と $a=x+y+z$ を合わせたものを、それぞれ 1 つの変数の立場から書き表したものにすぎない。)

$y=z$ のとき最後の方程式は成り立ちうるか？

成り立ちうる。$y=z$ ならば、与えられた 2 つの方程式は同じ方程式 $2a-3y=\dfrac{(y-x)^2}{y}$ になり、最後の方程式は $2a-3x=0$、すなわち $a=\frac{3}{2}x$ となる。$a=\frac{3}{2}x$ を 1 番目の方程式に代入すると、

$$3x-3y=\frac{(x-y)^2}{y} \iff 3y(x-y)=(x-y)^2 \iff (x-y)(x-4y)=0.$$

よって、たとえば $x=y=z=1$、$a=\frac{3}{2}$ は 3 つの方程式すべてを満たす。

$$2a-3y=0=\frac{(z-x)^2}{y}, \qquad 2a-3z=0=\frac{(x-y)^2}{z}, \qquad 2a-3x=0=\frac{(y-z)^2}{x}.$$

別の例として $x=4, y=z=1, a=6$ がある。このとき最初の2つの方程式はいずれも $2a-3y=9=\frac{(1-4)^2}{1}$ となり、$2a-3x=0=\frac{0^2}{4}$ である。

したがって、最後の方程式は $y\neq z$ のときに限って成り立つ**わけではない**。条件 $y\neq z$ はそれが成り立つことを保証するが、$y=z$ のときにも成り立ちうるのである。$y=z$ のときに失われるのは**保証**のほうである。たとえば $x=1, y=z=2, a=\frac{13}{4}$ は与えられた2つの方程式をともに満たす（どちらも両辺が $\frac{1}{2}$ に等しい）が、$2a-3x=\frac{7}{2}\neq 0$ である。また、最初の例では $x+y+z=3\neq a$ であることにも注意しよう。つまり $y=z$ のときは、最初の結論さえ成り立たないことがある。

検算

- (3) を満たす $x=9, y=4, z=1$ をとる：$81+16+1-72-8-18=0$。このとき $a=14$ であり、$2a-3y=16=\frac{(1-9)^2}{4}$、$2a-3z=25=\frac{(9-4)^2}{1}$、$2a-3x=1=\frac{(4-1)^2}{9}$ となる。3つとも成り立つ。
- 数値計算により、恒等式 $(1)-(2)=(y-z)\big(2a-2(x+y+z)\big)$ が10,000組の無作為な有理数の三つ組で厳密に成り立つことを確かめた。また、$y\neq z$ を満たす (3) 上の無作為な約1,900点、および上で挙げた $y=z$ の3つの例について、3つの方程式すべてが成り立つことを確認した。

よくある間違い

- なぜ許されるのかを述べずに $y-z$ で割ってしまう。この一歩こそ、仮定が置かれている理由そのものである。
- 最後の問いに「いいえ」や「はい」とだけ答え、例を挙げない。$y=z$ を満たす具体的な三つ組を1つ示せば決着がつく。
- $y=z$ だと最後の方程式が偽になると考えてしまう。$y=z$ によって失われるのは保証だけである。

STEP のその先へ

方程式 (3) は二次形式（quadratic form）であり、その零点集合は (x,y,z) 空間内の二重円錐（double cone）である。$x,y,z>0$ のとき $x=p^2, y=q^2, z=r^2$ とおくと、(3) は

$$-(p+q+r)(-p+q+r)(p-q+r)(p+q-r)=0,$$

と因数分解（factorise）される。左辺は、3 辺が p, q, r の三角形の面積の 2 乗の 16 倍である（ヘロン（Heron）の公式）。したがって (3) は、$\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$ が退化した三角形（degenerate triangle）をなすことを意味している。たとえば上の検算では $\sqrt{9} = \sqrt{4} + \sqrt{1}$ である。二次形式とその分類は、大学 1 年次の線形代数（linear algebra）の標準的な話題である。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照のこと。

解答例

STEP II 1988、第 3 問

純粋数学 • 解の対称性

> **STEP II 1988、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q3

鍵となる考え方

係数（coefficients）から考え始めるのではなく、根（roots）の集合を相手にするのである。与えられた性質は、根の集合が操作 $k \mapsto 1/k$ によって変わらないことを述べている。したがって、2 つの根が入れ替わるか、各根がそれぞれ動かないかのいずれかである。2 つ目の操作 $k \mapsto 1-k$ を加えても、同じ議論がもう一度使える。3 次方程式（cubic）の場合、2 つの操作を繰り返し施すと 1 つの根から最大 6 個の値が得られるが、3 次方程式には根が 3 個分の余地しかない。したがって根は、6 個の値のうちいくつかが一致するような特別な点に位置しなければならない。

解答

逆数の性質

根を α と β とする（等しい場合も、複素数の場合もありうる）。すると $\alpha+\beta=-b$、$\alpha\beta=c$ である。まず、0^{-1} は存在しないので 0 は根になりえない。よって $c \neq 0$ である。

写像 $k \mapsto 1/k$ は各根を根に移さなければならないので、$1/\alpha \in \{\alpha, \beta\}$ である。

- $1/\alpha=\beta$ ならば $\alpha\beta=1$、すなわち $c=1$ である。逆に $c=1$ ならば、根は 0 でなく $\beta=1/\alpha$ を満たすので、各根の逆数（reciprocal）はもう一方の根であり、任意の実数 b に対して性質が成り立つ。（これには $b=\mp 2$ のときの重解（repeated roots）± 1 や、$|b|<2$ のときの単位円（unit circle）上の複素数の根も含まれる。）
- $1/\alpha=\alpha$ であるが $1/\alpha \neq \beta$ である場合、$\alpha=\pm 1$ かつ $\alpha\beta \neq 1$ である。性質を β に適

用すると、その逆数は α ではない（$\alpha\beta \neq 1$ だから）ので、$1/\beta = \beta$ となり、$\beta = \pm 1$ でもある。$\alpha\beta \neq 1$ であるから、根は 1 と -1 でなければならず、$x^2 - 1 = 0$、すなわち $b = 0$、$c = -1$ を得る。この方程式は実際に性質をもつ。

よって、性質が成り立つのはちょうど

$$c = 1 \ (b \text{ は任意の実数}), \qquad \text{または} \qquad b = 0,\ c = -1.$$

のときである。

性質 $k \mapsto 1 - k$ を加える

$1/k$ の代わりに $1 - k$ を用いて同じ議論を行う。$1 - \alpha = \beta$ であって $\alpha + \beta = 1$ となるか、あるいは両方の根が動かず $1 - \alpha = \alpha$ かつ $1 - \beta = \beta$ であって $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ となり、やはり $\alpha + \beta = 1$ となる。いずれにせよ $b = -1$ であり、逆に $b = -1$ ならば根は α と $1 - \alpha$ となるので、性質が成り立つ。

$b = 0$、$c = -1$ の場合はこれを満たさないので、$c = 1$ かつ $b = -1$ が必要である：

$$b = -1, \qquad c = 1,$$

これにより $x^2 - x + 1 = 0$ を得て、その根は $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ である。どちらも絶対値（modulus）が 1、実部（real part）が $\frac{1}{2}$ であるから、$1/k$ と $1 - k$ はともに共役複素数（complex conjugate）$\bar{k}$、すなわちもう一方の根に等しい。

3 次方程式

次に、$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ が実数係数で、両方の性質をもつとする。前と同様に 0 は根ではなく、1 も根ではない（もしそうなら $1 - 1 = 0$ が根となってしまう）。

実数係数の 3 次方程式は少なくとも 1 つの実数解をもつ。それを a とする。2 つの操作を繰り返し施すと、次のそれぞれが根となる：

$$a, \quad \frac{1}{a}, \quad 1 - a, \quad \frac{1}{1 - a}, \quad 1 - \frac{1}{a} = \frac{a - 1}{a}, \quad \frac{1}{(a - 1)/a} = \frac{a}{a - 1}.$$

（4 番目は 3 番目の逆数、5 番目は $1 - 2$ 番目、6 番目は 5 番目の逆数である。）これらは 6 個の実数であるが、3 次方程式の相異なる根は高々 3 個であるから、このうち 2 つは一致する。

考えてみよう 「これらのうち 2 つが等しい」ということから、どのようにして a が決まるだろうか？

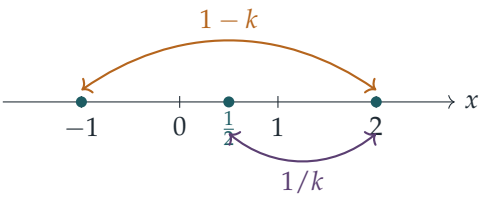
6 個の写像を $f_1, \ldots, f_6$ とし、f_1 を恒等写像（identity）とする。各写像はリストの中に逆写像（inverse）をもつ。$\frac{1}{k}$、$1 - k$、$\frac{k}{k-1}$ はそれ自身が逆写像であり、$\frac{1}{1-k}$ と $\frac{k-1}{k}$ は互

いに逆写像である。また、どの2つの写像を合成（composing）しても、リスト内の別の写像になることも確かめられる。したがって、$i \neq j$ で $f_i(a) = f_j(a)$ ならば、f_i^{-1} を施すことで $a = g(a)$ を得る。ここで $g = f_i^{-1} \circ f_j$ は6個のうちの1つであり、恒等写像ではない。よって a は、恒等写像以外の5個の写像のいずれかの不動点（fixed point）である：

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{a} = a &\iff a = \pm 1, & \tfrac{1}{1-a} = a &\iff a^2 - a + 1 = 0, \\ 1 - a = a &\iff a = \tfrac{1}{2}, & \tfrac{a-1}{a} = a &\iff a^2 - a + 1 = 0, \\ \tfrac{a}{a-1} = a &\iff a(a-2) = 0. \end{aligned}$$

2次式 $a^2 - a + 1$ は実数解をもたない（先ほどの2次方程式である）。また $a \neq 0, 1$ である。ゆえに $a \in \{-1, \tfrac{1}{2}, 2\}$ である。

a がこれらのどれであっても、上の6個の値はちょうど -1、2、$\tfrac{1}{2}$ を動く。写像 $1 - k$ は -1 と 2 を入れ替え $\tfrac{1}{2}$ を固定し、$1/k$ は 2 と $\tfrac{1}{2}$ を入れ替え -1 を固定するからである。



よって -1、2、$\tfrac{1}{2}$ はこの3次方程式の相異なる3つの根である。最高次の係数が1の3次式（monic cubic）はその3つの根によって決まるので、それは

$$(x+1)(x-2)\left(x - \tfrac{1}{2}\right) = (x^2 - x - 2)\left(x - \tfrac{1}{2}\right) = x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{3}{2}x + 1.$$

でなければならない。逆に、この3次方程式の根の集合 $\{-1, \tfrac{1}{2}, 2\}$ は $k \mapsto 1/k$ によっても $k \mapsto 1 - k$ によってもそれ自身に移されるので、この3次方程式は実際に両方の性質をもつ。よって

$$x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{3}{2}x + 1 = 0$$

がそのような唯一の3次方程式であり、示すべきことが示された。

検算

$x = 2$ を代入すると $8 - 6 - 3 + 1 = 0$、$x = -1$ を代入すると $-1 - \tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{2} + 1 = 0$ である。根の積は $-1 \cdot 2 \cdot \tfrac{1}{2} = -1 = -r$、根の和は $\tfrac{3}{2} = -p$ である。この3次方程式の係数は、符号を除いて前から読んでも後ろから読んでも同じ（$1, -\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, 1$）であることに注意しよう。この回文的（palindromic）な形こそ、$k \mapsto 1/k$ が強制するものである。

20,000 組のランダムな (b, c) に対するコンピュータによる検証で逆数の条件が確認され、また $0, \pm 1, \frac{1}{2}, 2$ から離れたランダムな実数 a では、常に相異なる 6 個の値が得られた。

よくある間違い

- 最初の部分で「$c = 1$」だけを答えてしまうこと。各根がそれ自身の逆数である場合から、$b = 0$、$c = -1$ が加わる。
- 両方の写像で閉じている組 $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ を見落とすこと。これを除外するのは、**実数**の根から出発することである。実数係数の 3 次方程式は実数解をもち、その根から得られる 6 個の値にこれらが含まれることはない。
- 与えられた 3 次方程式が条件を満たすことだけを証明すること。問題は、それが**唯一の**ものであることを示すよう求めている。

STEP のその先へ

6 個の写像 $k \mapsto k,\ 1/k,\ 1-k,\ \frac{1}{1-k},\ \frac{k-1}{k},\ \frac{k}{k-1}$ は合成に関して群（group）をなし、これは対称群（symmetric group）S_3 と同型である。この群は 3 点 $0, 1, \infty$ を置換し、6 個の値は 4 点の複比（cross-ratio）としてとりうる値である。数え上げの部分は軌道・固定部分群定理（orbit–stabiliser theorem）にあたる。すなわち、軌道（orbit）の長さが 6 より短くなるのは、恒等元以外のある元によって固定される点に限られる。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は集合に作用する群を展開しており、Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析）は、これらの写像を平面のメビウス（Möbius）変換として示している。

解答例

STEP II 1988、第 4 問

純粋数学 • 複素数平面上の軌跡

> **STEP II 1988、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q4

鍵となる考え方

複素数（complex number）を $a+\mathrm{i}b$ と書き、「実数である」あるいは「虚数である」という条件を a と b についての一つの実数の方程式に直す。するとアルガン図（Argand diagram）上のなじみのある曲線が得られる。次に、2 乗することを平面から平面への写像とみなし、x と y（あるいは p と q）を a と b で表して消去することにより、その曲線がどこに移されるかを求める。

問題文について一言注意しておく。問題文には w^2-2x とあるが、この時点で x はまだ導入されておらず、最後の小問（t^2-2t を含むもの）を見れば意図された条件がわかる。そこでここでは、これを**w^2-2w が実数である**と読むことにする。

解答

小問 (i)

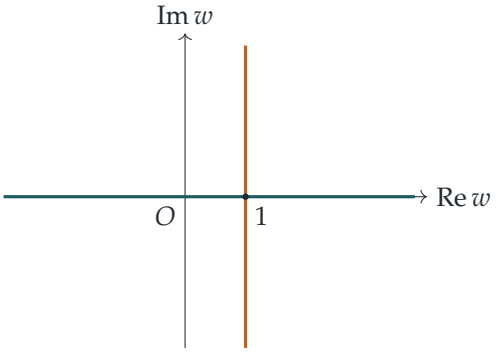
a, b を実数として $w=a+\mathrm{i}b$ とおく。すると

$$w^2-2w=(a^2-b^2-2a)+\mathrm{i}\,(2ab-2b)=(a^2-b^2-2a)+2\mathrm{i}\,b(a-1).$$

これが実数となるのは虚部が 0 になるとき、すなわち

$$b(a-1)=0, \qquad \text{すなわち} \qquad b=0 \ \text{または}\ a=1.$$

のときであり、かつそのときに限る。したがって w の軌跡（locus）は、実軸と垂直な直線 $\mathrm{Re}\,w=1$ を合わせたものである。2 本の直線は $w=1$ で交わる。



小問 (ii)

2 本の直線をそれぞれ別々に 2 乗する。

実軸。 $b = 0$ ならば $w = a$ は実数で、$w^2 = a^2$ である。よって $y = 0$ かつ $x = a^2 \geq 0$ であり、a が実数全体を動くとき、a^2 は $[0, \infty)$ のすべての値をとる。軌跡のこの部分は x 軸の非負の部分、すなわち半直線（half-line）$y = 0$、$x \geq 0$ である。

直線 $a = 1$。 $w = 1 + \mathrm{i}b$ ならば

$$w^2 = 1 - b^2 + 2\mathrm{i}b, \qquad \text{よって} \qquad x = 1 - b^2, \quad y = 2b.$$

$b = \frac{1}{2}y$ を用いて消去すると

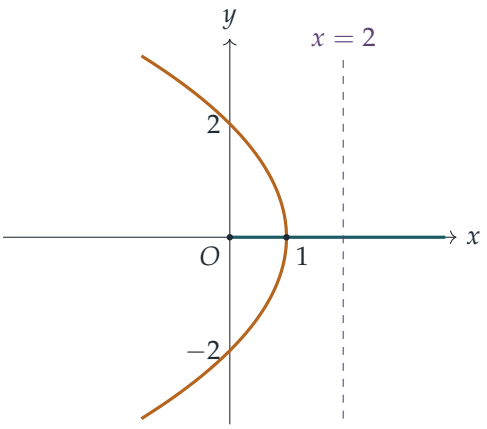
$$x = 1 - \tfrac{1}{4}y^2, \qquad \text{すなわち} \qquad y^2 = 4(1 - x) = -4(x - 1).$$

$b = \frac{1}{2}y$ ととれば、この曲線上のすべての点に到達する。これは軸が x 軸に沿い、頂点が $(1, 0)$ で、x の負の向きに開いた放物線（parabola）である。標準形 $Y^2 = 4cX$ と比べると、$X = x - 1$ として $c = -1$ である。よって焦点（focus）は $X = -1$、すなわち原点であり、準線（directrix）は $X = 1$、すなわち直線 $x = 2$ である。実際 $x^2 + y^2 = x^2 + 4 - 4x = (2 - x)^2$ であるから、どの点も O からの距離と直線 $x = 2$ からの距離が等しい。この放物線は y 軸と $(0, \pm 2)$ で交わる。

考えてみよう なぜ半直線は x の負の側まで伸びないのだろうか。

w 平面の実軸は（a と $-a$ によって）2 回覆われるが、実数を 2 乗しても負の値には決してならない。そのため実軸全体が非負の半分の上に折りたたまれる。同様に、$b \mapsto 2b$ は一対一（one-to-one）であるから、直線 $\mathrm{Re}\, w = 1$ は放物線にちょうど 1 回ずつ移される。

以上より、(x, y) の軌跡は、焦点が原点で準線が $x = 2$ である放物線 $y^2 = 4(1 - x)$ と、半直線 $y = 0$、$x \geq 0$ を合わせたものである。この半直線は焦点から頂点 $(1, 0)$ を通って伸びている。頂点は、小問 (i) の 2 本の直線の交点 $w = 1$ の像である。



最後の小問

$t = a + \mathrm{i}b$ とおく。ここでの「虚数」は純虚数（purely imaginary）を意味するので、$t^2 - 2t$ の実部が 0 になればよい：

$$a^2 - b^2 - 2a = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad (a-1)^2 - b^2 = 1.$$

よって t は、中心が 1 で頂点が $t = 0$ と $t = 2$ の直角双曲線（rectangular hyperbola）上にある。その上では $b^2 = a^2 - 2a = a(a-2) \geq 0$ であるから、$a \leq 0$ または $a \geq 2$ である。

さて $t^2 = p + \mathrm{i}q$ より

$$p = a^2 - b^2 = 2a, \qquad q = 2ab,$$

となる。ここで p を簡単にするために双曲線の方程式 $a^2 - b^2 = 2a$ を用いた。よって $a = \frac{1}{2}p$ であり、

$$q^2 = 4a^2b^2 = 4a^2(a^2 - 2a) = p^2\left(\tfrac{1}{4}p^2 - p\right), \qquad \text{よって} \qquad 4q^2 = p^3(p-4).$$

条件 $a \leq 0$ または $a \geq 2$ は $p \leq 0$ または $p \geq 4$ となり、これはちょうど $p^3(p-4) \geq 0$ となる範囲である。逆に、この曲線上の点をとる。$p \neq 0$ ならば $a = \frac{1}{2}p$、$b = q/p$ とおく。すると $b^2 = q^2/p^2 = \frac{1}{4}p(p-4) = a^2 - 2a$ であるから t は双曲線上にあり、$t^2 = (a^2 - b^2) + 2\mathrm{i}ab = p + \mathrm{i}q$ である。$p = 0$ ならば $q = 0$ であり、この点は $t = 0$ から得られる。よって軌跡は曲線

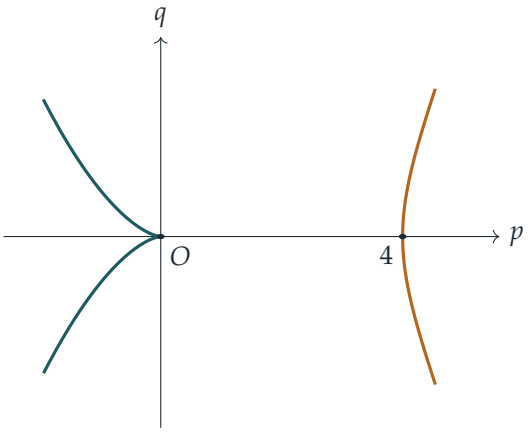
$$4q^2 = p^3(p-4).$$

全体である。

その形は次のとおりである。

- q^2 しか現れないので、p 軸に関して対称である。

- $0 < p < 4$ となる点は存在しない。曲線は二つの部分からなり、それぞれ双曲線の一方の枝から生じる。
- 右側の部分は、$t = 2$ の像である $(4, 0)$ から始まる。その近くでは $q^2 \approx 16(p-4)$ であるから、接線（tangent）は垂直である。
- 左側の部分は、$t = 0$ の像である原点を通る。その近くでは $q^2 \approx -p^3$ であるから $|q| \approx |p|^{3/2}$ となり、右向きの尖点（cusp）をなし、両方の腕は p 軸に接する。
- $|p|$ が大きいところでは $|q| \approx \frac{1}{2}p^2$ であるから、どちらの部分も放物線のように広がっていく。



（縦方向の縮尺は縮めてある。ティール色の部分は双曲線の $\mathrm{Re}\, t \leq 0$ の枝から、琥珀色の部分は $\mathrm{Re}\, t \geq 2$ の枝から生じる。）

検算

- 小問 (i)：$w = 1 + 2\mathrm{i}$ とすると $w^2 - 2w = (-3 + 4\mathrm{i}) - (2 + 4\mathrm{i}) = -5$ となり、実数である。小問 (ii)：その 2 乗 $-3 + 4\mathrm{i}$ は $16 = 4(1 - (-3))$ を満たす。
- 最後の小問：$t = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ は $1 - 3 + 2 = 0$ を満たす。その 2 乗は $-2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ であり、$4q^2 = 48 = (-8)(-6) = p^3(p-4)$ となる。
- 数千個の無作為な点で数値的に確かめ、各軌跡が述べた曲線の上へ移されること、また各曲線のすべての点に到達することを確認した。

よくある間違い

- 小問 (i) で実軸を忘れ、その結果小問 (ii) で半直線を見落とす。あるいは $x \geq 0$ の部分だけでなく x 軸全体を描いてしまう。
- $a^2 - b^2 = 2a$ を用いて $p = 2a$ を得ることをしない。これを使わないと、消去の計算がずっと煩雑になる。
- 最後の概形で、隙間 $0 < p < 4$ や原点の尖点を見落とす。

STEP のその先へ

2 乗する写像 $z \mapsto z^2$ は、最も簡単な等角写像（conformal map）である。この写像は角を 2 倍にする。ここで直線や双曲線が放物線や尖点をもつ曲線に変わるのはそのためである。$z = 0$ では導関数（derivative）が 0 になるので角はもはや保たれず、尖点はそこから生じる。流体力学や静電気学では、このような写像を使って扱いにくい領域を扱いやすい領域に変換するのが定番の手法である。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析の入門書）は、これらの写像を図を用いて見事に解説している。

解答例

STEP II 1988、第 5 問

純粋数学　•　1 の冪根と正接

> **STEP II 1988、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q5

鍵となる考え方

$z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ とおき、二項定理（binomial theorem）を用いて z^7 を展開する。その虚部（imaginary part）は $\sin 7\theta$ であり、これを $\cos^7\theta$ で割ると $t = \tan\theta$ の多項式（polynomial）になる。1 の 7 乗根（seventh roots of unity）は $\sin 7\theta$ を 0 にするので、7 次多項式の 7 個の根（root）がそのまま手に入る。あとは、正接の積は根の積にほかならず、定数項（constant term）から読み取れる。

解答

6 次方程式の根

ド・モアブル（de Moivre）の定理より、$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^7 = \cos 7\theta + \mathrm{i}\sin 7\theta$ である。$c = \cos\theta$、$s = \sin\theta$ とおく。左辺を二項定理で展開し、$\mathrm{i}s$ の奇数乗を含む項だけを取り出すと

$$\sin 7\theta = 7c^6 s - 35c^4 s^3 + 21c^2 s^5 - s^7.$$

$\cos\theta \neq 0$ であれば c^7 で割ることができ、$t = \tan\theta$ とおくと

$$\frac{\sin 7\theta}{\cos^7\theta} = 7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7 = -t\,(t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7). \qquad (*)$$

$z^7 = 1$ の根は $\theta = \frac{2k\pi}{7}$ に対する $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ であり、これらに対しては $z^7 = 1$ の虚部をとって $\sin 7\theta = \sin 2k\pi = 0$ となる。$\theta = \frac{k\pi}{7}$（$k = 0, 1, \ldots, 6$）を用いる方が少しすっきりする。この場合も $\sin 7\theta = \sin k\pi = 0$ となり、しかも tan は周期（period）π をもつので、得られる正接の値の集合は同じである。

これらの各 θ について、

- $\frac{k\pi}{7} = \frac{\pi}{2}$ となるには $2k = 7$ が必要なので、$\cos\theta \neq 0$ である。よって $(*)$ が成り立つ。
- $\sin 7\theta = 0$ なので、$(*)$ より数 $t = \tan\frac{k\pi}{7}$ は $p(t) = t^7 - 21t^5 + 35t^3 - 7t$ の根である。

7 個の値 $\tan\frac{k\pi}{7}$（$k = 0, \ldots, 6$）は互いに異なる。実際、角 $0, \frac{\pi}{7}, \ldots, \frac{6\pi}{7}$ は $[0, \pi)$ の相異なる点で、どれも $\frac{\pi}{2}$ に等しくない。そして tan は $[0, \pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ 上で一対一（one-to-one）である（$[0, \frac{\pi}{2})$ では正で増加し、$(\frac{\pi}{2}, \pi)$ では負でやはり増加し、二つの部分はそれぞれ $[0, \infty)$ と $(-\infty, 0)$ の値をとる）。

考えてみよう 根の一部だけでなく、すべての根を見つけたと、どうしてわかるのか。

7 次多項式の根は高々 7 個である。相異なる根を 7 個見つけたのだから、それらがすべてである。$k = 0$ は $t = 0$ を与え、これは因数 t に由来する根である。したがって $t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7 = 0$ の根はちょうど

$$t = \tan\frac{k\pi}{7}, \qquad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

であり、$\tan\frac{(7-k)\pi}{7} = -\tan\frac{k\pi}{7}$ であるから、これは $\pm\tan\frac{\pi}{7}$、$\pm\tan\frac{2\pi}{7}$、$\pm\tan\frac{3\pi}{7}$ のことである。

積 $\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{4\pi}{7}\tan\frac{6\pi}{7}$

偶数次のモニック多項式（monic polynomial）では、根の積は定数項に等しい。よって

$$\left(\tan\tfrac{\pi}{7}\right)\left(-\tan\tfrac{\pi}{7}\right)\left(\tan\tfrac{2\pi}{7}\right)\left(-\tan\tfrac{2\pi}{7}\right)\left(\tan\tfrac{3\pi}{7}\right)\left(-\tan\tfrac{3\pi}{7}\right) = -7,$$

すなわち

$$\left(\tan\tfrac{\pi}{7}\tan\tfrac{2\pi}{7}\tan\tfrac{3\pi}{7}\right)^2 = 7.$$

3 つの角はいずれも $(0, \frac{\pi}{2})$ にあるので、各正接は正であり、積は正の平方根である：$\tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7} = \sqrt{7}$。

ここで $\tan(\pi - x) = -\tan x$ を用いると、$\tan\frac{4\pi}{7} = -\tan\frac{3\pi}{7}$、$\tan\frac{6\pi}{7} = -\tan\frac{\pi}{7}$ である。2 つの負号は打ち消し合うので

$$\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{4\pi}{7}\tan\frac{6\pi}{7} = \tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7}\tan\frac{\pi}{7} = \sqrt{7},$$

となり、示すべき式が得られた。

$n = 9$ と $n = 11$ の場合

同じ議論は任意の奇数 $n = 2m + 1$ で通用する。$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$ の虚部をとり、$\cos^n\theta$ で割ると

$$\frac{\sin n\theta}{\cos^n\theta} = \sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{n}{2r+1}t^{2r+1} = t\,q_n(t),$$

となる。ここで q_n は次数 $2m = n-1$、最高次係数（leading coefficient）$(-1)^m$、定数項 $\binom{n}{1} = n$ の多項式である。具体的には

$$q_9(t) = t^8 - 36t^6 + 126t^4 - 84t^2 + 9,$$
$$q_{11}(t) = -t^{10} + 55t^8 - 330t^6 + 462t^4 - 165t^2 + 11.$$

先ほどとまったく同様に（n は奇数なので、どの $\frac{k\pi}{n}$ も $\frac{\pi}{2}$ に等しくない）、q_n の根は $n-1$ 個の相異なる数 $\tan\frac{k\pi}{n}$（$k = 1, \dots, n-1$）であり、これらは $k = 1, \dots, m$ に対する $\pm\tan\frac{k\pi}{n}$ として対になる。次数が偶数なので、q_n の根の積は（定数項）/（最高次係数）である：

$$(-1)^m \prod_{k=1}^{m} \tan^2\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{(-1)^m} \quad \Longrightarrow \quad \prod_{k=1}^{m} \tan\frac{k\pi}{n} = \sqrt{n},$$

ここで、これらの角はすべて $(0, \frac{\pi}{2})$ にあるので正の根をとった。$n = 9$ では、これは q_9 の定数項 9 を最高次係数 1 で割ったものである。$n = 11$ では $11/(-1) = -11 = (-1)^5 \prod \tan^2$ となる。いずれにせよ、$k = 1, \dots, m$ にわたる $\tan\frac{k\pi}{n}$ の積は、$n = 9$ のとき 3、$n = 11$ のとき $\sqrt{11}$ である。

考えてみよう 求める積の角は $\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots$ ではなく $\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots$ である。一方から他方へどう移ればよいか。また、符号はどうなるか。

偶数 $2j \le m$ はそれぞれ、すでに $1, \dots, m$ の中にある。偶数 $2j > m$（すなわち $2j > \frac{n}{2}$）は $\tan\frac{2j\pi}{n} = -\tan\frac{(n-2j)\pi}{n}$ を与え、$n-2j$ は奇数で m 以下である。偶数は前者から、奇数は後者から得られるので、1 から m までの各数はこの方法でちょうど 1 回ずつ現れる。よって求める積は $\pm\sqrt{n}$ であり、$\frac{n}{2}$ と n の間にある偶数 1 個につき負号が 1 つ付く。

- $n = 9$：偶数は $2, 4, 6, 8$ で、4.5 より大きいものは $6, 8$ であるから、負号は 2 つ。よって
$$\tan\frac{2\pi}{9}\tan\frac{4\pi}{9}\tan\frac{6\pi}{9}\tan\frac{8\pi}{9} = \sqrt{9} = 3.$$
- $n = 11$：偶数は $2, 4, 6, 8, 10$ で、5.5 より大きいものは $6, 8, 10$ であるから、負号は 3 つ。よって
$$\tan\frac{2\pi}{11}\tan\frac{4\pi}{11}\tan\frac{6\pi}{11}\tan\frac{8\pi}{11}\tan\frac{10\pi}{11} = -\sqrt{11}.$$

（$n = 7$ では 3.5 より大きい偶数は 4, 6 で負号は 2 つであり、だからこそあの積は正になったのである。）

検算

- $n = 9$ には簡単な部分的検算がある：$\tan\frac{6\pi}{9} = \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$ であり、数値的には $\tan\frac{2\pi}{9}\tan\frac{4\pi}{9}\tan\frac{8\pi}{9} \approx 0.8391 \times 5.6713 \times (-0.3640) \approx -1.732 = -\sqrt{3}$ となるので、

全体で 3 となる。

- 電卓で計算すると $\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{4\pi}{7}\tan\frac{6\pi}{7} \approx 2.645751$、$\sqrt{7} \approx 2.645751$ である。$n = 11$ の積は $\approx -3.316625 = -\sqrt{11}$ である。
- $\tan\frac{\pi}{7} \approx 0.4816$ を代入すると、当然ながら $t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7 \approx 0$ となる。

よくある間違い

- $\cos^7\theta$ が 0 でないことを確かめずに割ってしまう、あるいは 7 個の正接が互いに異なることを論じない。これらの点がなければ、**すべて**の根を見つけたことを示したことにはならない。
- $n = 11$ で符号を誤る：積の 2 乗は簡単だが、符号を決めるには負の正接の個数を数える必要がある。
- $a_d t^d + \cdots + a_0$ の根の積が $(-1)^d a_0/a_d$ であることを忘れる。これは最高次係数が -1 である $n = 11$ で効いてくる。

STEP のその先へ

数 $\tan\frac{k\pi}{n}$ は代数的数（algebraic number）であり、多項式 q_n は（n が素数のとき）有理数体上でのそれらの最小多項式（minimal polynomial）である。$\prod\tan\frac{k\pi}{n} = \sqrt{n}$ のような恒等式は、ガウス（Gauss）和（Gauss sum）の影である。ガウス和は、$\sqrt{\pm p}$ が 1 の p 乗根によって生成される体（field）に属することを示すもので、代数的整数論（algebraic number theory）の礎石の一つである。Davenport の *The Higher Arithmetic*（初等整数論の入門書）はこの一連の考え方へのやさしい入り口であり、Needham の *Visual Complex Analysis*（図で見る複素解析）は 1 の冪根を幾何的に感じ取らせてくれる。

解答例

STEP II 1988、第 6 問

純粋数学 ・ 双曲線関数の不等式

> **STEP II 1988、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q6

鍵となる考え方

3 つの関数はいずれも $x = 0$ で値が 0 であるから、$x > 0$ で増加（increasing）であることを示せば十分である。導関数（derivative）は各小問が次の小問につながるように仕組まれている。すなわち、(ii) の導関数には (i) の関数が現れ、(iii) の導関数は (ii) の関数を定数倍・変数変換したものになっている。f については、対数微分（logarithmic differentiation）によって f′ の符号の問題が (iii) の関数の符号の問題に帰着される。(iii) が明らかにそのために用意されていたことがわかる。

解答

全体を通して、$F(0) = 0$ かつすべての $x > 0$ に対して $F'(x) > 0$ ならば、すべての $x > 0$ に対して $F(x) > 0$ である、という原理を用いる。（平均値の定理（mean value theorem）により、ある $\xi \in (0, x)$ が存在して $F(x) = F(x) - F(0) = xF'(\xi)$ となるからである。）

小問 (i)

$g(x) = x - \tanh x$ とおく。このとき $g(0) = 0$ であり、

$$g'(x) = 1 - \operatorname{sech}^2 x = \tanh^2 x$$

である。ここで $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$ を用いた。$x > 0$ では $\tanh x > 0$ であるから $g'(x) > 0$ である。よって $x > 0$ において $x - \tanh x > 0$ である。

小問 (ii)

$h(x) = x\sinh x - 2\cosh x + 2$ とおく。このとき $h(0) = 0 - 2 + 2 = 0$ であり、

$$h'(x) = \sinh x + x\cosh x - 2\sinh x = x\cosh x - \sinh x = \cosh x\,(x - \tanh x)$$

である。$x > 0$ では $\cosh x > 0$ であり、小問 (i) より $x - \tanh x > 0$ であるから、$h'(x) > 0$ である。よって $x > 0$ において $h(x) > 0$ である。

小問 (iii)

$k(x) = 2x\cosh 2x - 3\sinh 2x + 4x$ とおく。このとき $k(0) = 0$ であり、

$$\begin{aligned} k'(x) &= 2\cosh 2x + 4x\sinh 2x - 6\cosh 2x + 4 \\ &= 4x\sinh 2x - 4\cosh 2x + 4. \end{aligned}$$

考えてみよう この組み合わせは以前どこで見たか？

$u = 2x$ とおくと、これは $2u\sinh u - 4\cosh u + 4 = 2\,(u\sinh u - 2\cosh u + 2) = 2h(u)$ である。したがって、$2x > 0$ であるから小問 (ii) により

$$k'(x) = 2h(2x) > 0 \quad \text{ただし} x > 0$$

が成り立つ。よって $x > 0$ において $k(x) > 0$ である。

f には停留点がない

$x > 0$ では $\mathrm{f}(x)$ を構成する因数はすべて正であるから、$\mathrm{f}(x) > 0$ であり、対数をとることができる：

$$\ln \mathrm{f}(x) = \ln x + \tfrac{1}{3}\ln\cosh x - \ln\sinh x.$$

微分すると、

$$\frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \frac{1}{x} + \frac{\sinh x}{3\cosh x} - \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{3\sinh x\cosh x + x\sinh^2 x - 3x\cosh^2 x}{3x\sinh x\cosh x}.$$

次に、$\sinh x\cosh x = \frac{1}{2}\sinh 2x$、$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$、$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$ を用いて、分子を 2 倍角（double angle）の式で表す：

$$\begin{aligned} 3\sinh x\cosh x + x\sinh^2 x - 3x\cosh^2 x &= \tfrac{3}{2}\sinh 2x + \tfrac{x}{2}(\cosh 2x - 1) - \tfrac{3x}{2}(\cosh 2x + 1) \\ &= \tfrac{3}{2}\sinh 2x - x\cosh 2x - 2x \\ &= -\tfrac{1}{2}\big(2x\cosh 2x - 3\sinh 2x + 4x\big). \end{aligned}$$

したがって

$$f'(x) = -\frac{f(x)\left(2x\cosh 2x - 3\sinh 2x + 4x\right)}{6x\sinh x\cosh x}.$$

$x > 0$ では、小問 (iii) より括弧内は正であり、$f(x)$、x、$\sinh x$、$\cosh x$ はいずれも正である。よってすべての $x > 0$ に対して $f'(x) < 0$ である。f' は決して 0 にならないので、f には停留点（turning point）がなく、実際 f は $x > 0$ で狭義単調減少（strictly decreasing）である。

グラフの概形

両端での振る舞いを調べる必要がある。

$x \to 0^+$ のとき： $x/\sinh x \to 1$ かつ $(\cosh x)^{1/3} \to 1$ であるから、$f(x) \to 1$ である。より詳しくは、$(\cosh x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{6}x^2 + O(x^4)$ かつ $x/\sinh x = 1 - \frac{1}{6}x^2 + O(x^4)$ であるから、x^2 の項は打ち消し合う。それぞれの級数をもう 1 項ずつ計算すると

$$f(x) = 1 - \tfrac{1}{45}x^4 + O(x^6)$$

が得られる。したがって曲線は（除外された）点 $(0,1)$ から傾き 0 で、非常に平らに出発する。

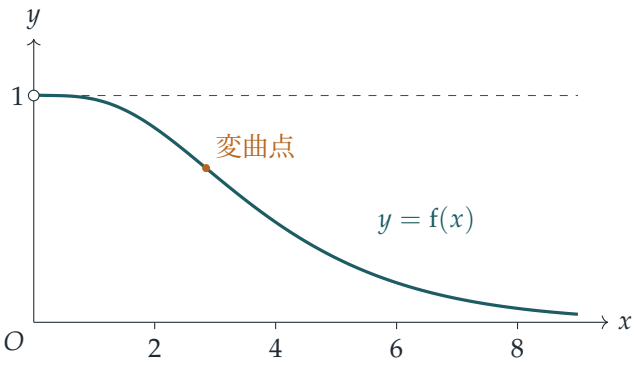
$x \to \infty$ のとき： $\cosh x \sim \frac{1}{2}e^x$ かつ $\sinh x \sim \frac{1}{2}e^x$ であるから、

$$f(x) \sim \frac{x\left(\frac{1}{2}e^x\right)^{1/3}}{\frac{1}{2}e^x} = 2^{2/3}\,x\,e^{-2x/3} \to 0$$

である。指数関数は x のべきに勝るからである。x 軸は漸近線（asymptote）であり、$f > 0$ であるから曲線は常にその上側にある。

> **考えてみよう** 曲線は平らに始まり平らに終わるが、常に減少している。このことから何が必然的に導かれるか？

0 の近くでは曲線は上に凸である（$1 - x^4/45$ の形をしている）。一方、x が大きいところでは減衰する指数関数であり、下に凸である。したがって、その間に少なくとも 1 つの変曲点（point of inflection）が存在しなければならない。数値計算によれば変曲点はちょうど 1 つあり、$x \approx 2.85$ 付近、$f \approx 0.68$ のところにある。いくつかの値を挙げておく：$f(1) \approx 0.983$、$f(2) \approx 0.858$、$f(4) \approx 0.441$、$f(6) \approx 0.174$。



検算

- $x = 1$ において：$1 - \tanh 1 \approx 0.238$、$\sinh 1 - 2\cosh 1 + 2 \approx 0.089$、$2\cosh 2 - 3\sinh 2 + 4 \approx 0.643$ であり、いずれも正である。
- 恒等式（identity）$\mathrm{f}'/\mathrm{f} = -k(x)/(6x\sinh x\cosh x)$ は任意の点で確かめられる。$x = 1$ では両辺ともおよそ -0.0592 であり、f の数値微分とも一致する。
- 数値計算によれば、小さい x に対して $(1 - \mathrm{f}(x))/x^4 \approx 0.0222 \approx \frac{1}{45}$ であり、大きい x に対して $\mathrm{f}(x)/(2^{2/3}xe^{-2x/3}) \to 1$ である。

よくある間違い

- 導関数が正であることだけを示し、関数が $x = 0$ で 0 になることの確認を忘れる。両方が必要である。
- 商の微分法（quotient rule）と積の微分法（product rule）を使って f を直接微分しようとする。それでも計算はできるが、対数微分のほうがはるかに見通しがよく、(iii) とのつながりも見えやすい。
- 曲線が x 軸と交わるように描いたり、原点から出発するように描いたりする。曲線は高さ 1 から（その値はとらずに）出発し、常に正である。

STEP のその先へ

$F(0) = 0$ と $F' > 0$ から $F(x) > 0$ を示す手法は平均値の定理の応用そのものであり、それを（ここでの k'、h'、g' のように）連鎖的に用いることは、解析学において関数の間の不等式を証明する標準的な方法である。展開 $\mathrm{f}(x) = 1 - x^4/45 + \cdots$ はべき級数（power series）の操作の一端に触れるものであり、大学 1 年次の解析学ではこれが

厳密に基礎づけられる。両者について学ぶのによい本として、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）がある。

解答例

STEP II 1988、第 7 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP II 1988、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q7

鍵となる考え方

ここでの等式はどれも置換（substitution）によるもので、難しいのは正しい置換を見つけることである。最初の段階では、$[1,2]$ を $[0,1]$ に移し、しかも $2-2x+x^2$ を $1+t^2$ を含む式に変える置換が必要になる。メビウス（Möbius）写像 $x=2/(1+t)$ がまさにそれを実現する。$1+t^2$ が現れれば、$t=\tan\theta$ とおくのは自然な一手である。θ についての被積分関数（integrand）は $\theta=\frac{1}{8}\pi$ に関して対称（symmetric）であり、半分の区間で $t=\tan\theta$ の置換を元に戻すと $\tan\frac{1}{8}\pi=\sqrt{2}-1$ が現れる。最後の導出では、同じ置換を逆向きに用いる。

解答

以下を通して、k は任意の実数の定数とする。累乗の底となる式はいずれも考える範囲で正であるから、指数が整数でなくても問題は生じない。

$[1,2]$ から $[0,1]$ へ

$x=\dfrac{2}{1+t}$ とおく。すると $x=1$ のとき $t=1$、$x=2$ のとき $t=0$ であり、$\mathrm{d}x=-\dfrac{2}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ である。このとき

$$2-2x+x^2=\frac{2(1+t)^2-4(1+t)+4}{(1+t)^2}=\frac{2(1+t^2)}{(1+t)^2},\qquad x^{k+1}=\frac{2^{k+1}}{(1+t)^{k+1}}.$$

よって被積分関数は

$$\frac{2^k(1+t^2)^k}{(1+t)^{2k}}\cdot\frac{(1+t)^{k+1}}{2^{k+1}}\cdot\frac{2}{(1+t)^2}=\frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}},$$

となり、$\mathrm{d}x$ の負の符号によって積分範囲が $\int_1^0$ から $\int_0^1$ に入れ替わる。

$$I = \int_0^1 \frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t.$$

三角関数による表示

次に $t = \tan\theta$ とおき、θ は 0 から $\frac{1}{4}\pi$ まで動くとする。すると $1+t^2 = \sec^2\theta$、$\mathrm{d}t = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$ であり、

$$1+t = \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{4}\pi-\theta\right)}{\cos\theta},$$

である。ここで $\cos\theta+\sin\theta = \sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{4}\pi\cos\theta+\sin\frac{1}{4}\pi\sin\theta\right)$ を用いた。被積分関数は

$$\begin{aligned}\sec^{2k}\theta\cdot\frac{\cos^{k+1}\theta}{\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{4}\pi-\theta\right)\right]^{k+1}}\cdot\sec^2\theta &= \frac{\cos^{-(k+1)}\theta}{\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{4}\pi-\theta\right)\right]^{k+1}}\\ &= \frac{1}{\left[\sqrt{2}\cos\theta\cos\left(\frac{1}{4}\pi-\theta\right)\right]^{k+1}},\end{aligned}$$

となる。$\cos\theta$ の指数の合計が $-2k+(k+1)-2 = -(k+1)$ となるからである。2 つの余弦はどちらも $[0,\frac{1}{4}\pi]$ で正であるから、これはすべての実数 k に対して成り立つ。以上で I の 2 番目の表示が得られた。

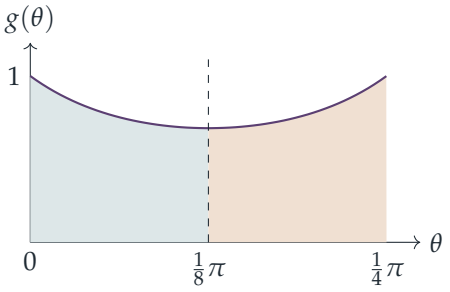
> **考えてみよう**　$[0,\frac{1}{4}\pi]$ 上の積分が $[0,\frac{1}{8}\pi]$ 上の積分の 2 倍になるのはなぜだろうか。

θ についての被積分関数を $g(\theta)$ と書く。θ を $\frac{1}{4}\pi-\theta$ に置き換えると、2 つの因子 $\cos\theta$ と $\cos(\frac{1}{4}\pi-\theta)$ が入れ替わるだけであるから、$g(\frac{1}{4}\pi-\theta) = g(\theta)$ である。つまり g のグラフは $\theta = \frac{1}{8}\pi$ に関して対称である。（このことは直接確かめることもできる。$\sqrt{2}\cos\theta\cos(\frac{1}{4}\pi-\theta) = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\cos(2\theta-\frac{1}{4}\pi)\right)$ であり、これは θ と $\frac{1}{8}\pi$ の距離だけで決まる。）形式的には、$\phi = \frac{1}{4}\pi-\theta$ と置換して

$$\int_{\pi/8}^{\pi/4} g(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/8} g(\tfrac{1}{4}\pi-\phi)\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{\pi/8} g(\phi)\,\mathrm{d}\phi,$$

となるので、$[0,\frac{1}{4}\pi]$ の 2 つの半分は等しく寄与し、

$$I = 2\int_0^{\pi/8} \frac{\mathrm{d}\theta}{\left[\sqrt{2}\cos\theta\cos\left(\frac{1}{4}\pi-\theta\right)\right]^{k+1}}.$$



図は $k=1$ のときの g を示している。影をつけた 2 つの半分は互いに鏡像になっている。

したがって $\sqrt{2}-1$ までの積分

ここで $[0, \frac{1}{8}\pi]$ 上で置換 $t=\tan\theta$ を逆向きにたどる。上の計算の各段階はそのまま成り立ち、変わるのは上端だけで、それは $t=\tan\frac{1}{8}\pi$ に移る。$\tau=\tan\frac{1}{8}\pi$ として $\tan\frac{1}{4}\pi=\dfrac{2\tau}{1-\tau^2}=1$ から $\tau^2+2\tau-1=0$ が得られ、$\tau=-1\pm\sqrt{2}$ となる。正の解をとって $\tan\frac{1}{8}\pi=\sqrt{2}-1$ である。したがって

$$I=2\int_0^{\sqrt{2}-1}\frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t,$$

となり、示すべき式が得られた。これを同じ被積分関数による $I=\int_0^1$ と比べると、$[0,\sqrt{2}-1]$ 上の積分と $[\sqrt{2}-1,1]$ 上の積分が**どちらも** $\frac{1}{2}I$ に等しいことがわかる。次にこの事実を用いる。

導出

左辺。 $u=x^2$ として $\dfrac{2-2x^2+x^4}{x^2}=\dfrac{2-2u+u^2}{u}$ と書く。すると $\mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x$ より $\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{2u}$ であり、u は 1 から 2 まで動く。

$$\int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{2-2x^2+x^4}{x^2}\right)^k\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{(2-2u+u^2)^k}{u^k}\cdot\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}I.$$

右辺。 被積分関数は $\dfrac{(2-2x+x^2)^k}{x^{k+1}}$ であり、I の定義と同じであるが、積分範囲は $[1,\sqrt{2}]$ である。再び最初の置換 $x=2/(1+t)$ を用いる。今度は $x=\sqrt{2}$ が $1+t=\sqrt{2}$、

すなわち $t=\sqrt{2}-1$ に対応するので、

$$\int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{2-2x+x^2}{x}\right)^k\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{2}-1}^{1}\frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t$$
$$=I-\int_0^{\sqrt{2}-1}\frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t=I-\tfrac{1}{2}I=\tfrac{1}{2}I.$$

両辺とも $\frac{1}{2}I$ に等しいので両辺は等しく、これが示すべき結果である。

検算

- $k=0$：$I=\int_1^2\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln 2$ であり、最後の恒等式の両辺はともに $\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln 2$ となり、確かに一致する。
- $k=1$：$I=\int_1^2\left(\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right)\mathrm{d}x=2-2\ln 2\approx 0.61371$ である。I の 5 つの表示すべてと、最後の恒等式の両辺にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると、小数第 10 位まで一致する（各辺は ≈ 0.30685）。$k=0.5$、$k=-0.7$、$k=4.3$ のように、k が整数でない場合や負の場合にも同様に一致する。

よくある間違い

- $\cos\theta+\sin\theta$ を 1 つの余弦で表すときに因子 $\sqrt{2}$ を忘れ、余計な $2^{(k+1)/2}$ が残ってしまう。
- I の値を求めようとしてしまう。一般の k に対しては閉じた形（closed form）の値は存在せず、その必要もない。どの段階も変数変換か対称性によるものである。
- 導出において、右辺が I の**一部**にすぎず、仕上げるには「これより（hence）」で示した結果が必要であることを見落とす。

STEP のその先へ

写像 $x\mapsto 2/(1+t)$ はメビウス変換（一次分数変換、fractional linear transformation）である。これらの写像は円と直線を円と直線に移し、2 次式から作られる被積分関数に対する自然な変数変換となっている。ここでの $\theta\mapsto\frac{1}{4}\pi-\theta$ のように被積分関数に隠れた対称性を見抜くことは、初等的な原始関数（antiderivative）をもたない定積分（definite integral）を計算するための定番の技法である。メビウス変換についてさらに知るには、Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）を読むとよい。この種の積分をさらに多く見たければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）を参照せよ。

解答例

STEP II 1988、第 8 問

純粋数学 ・ 行列と固有ベクトル

> **STEP II 1988、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q8

鍵となる考え方

このモデルの 1 年分の変化は線形写像（linear map）であり、したがって 2×2 行列 M を掛けることにあたる。比がまったく変わらない個体数とは、M によって定数倍されるだけのもの、すなわち**固有ベクトル**（eigenvector）である。2 つの固有ベクトルが求まれば、どんな初期個体数もそれぞれの方向の成分に分解でき、各成分は毎年それぞれの固有値（eigenvalue）を掛けられるだけである。したがって長期的な行く末は、どちらの固有値が大きいか、そしてその前に付く係数の符号によって決まる。

解答

比が変わらない場合

個体数を列ベクトルで表すと、モデルの 1 年分は

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

となる。比 $A:B$ が変わらないのは、ある数 λ に対して $(A', B') = \lambda(A, B)$ となるとき、すなわち (A, B) が M の固有ベクトルであるときに限る。固有値は

$$\det(M - \lambda I) = \left(\tfrac{1}{4} - \lambda\right)\left(\tfrac{3}{2} - \lambda\right) + \tfrac{3}{8} = \lambda^2 - \tfrac{7}{4}\lambda + \tfrac{3}{4} = 0,$$

を満たすので、$4\lambda^2 - 7\lambda + 3 = (\lambda - 1)(4\lambda - 3) = 0$ となり、$\lambda = 1$ または $\lambda = \frac{3}{4}$ を得る。

- $\lambda = 1$ のとき：第 1 行から $\frac{1}{4}A + \frac{3}{4}B = A$ となるので $A = B$ である。比は 1 であり、このような個体数は毎年まったく同じままである。

▶ $\lambda = \frac{3}{4}$ のとき：第 1 行から $\frac{1}{4}A + \frac{3}{4}B = \frac{3}{4}A$ となるので $A = \frac{3}{2}B$ である。比は $\frac{3}{2}$ である。第 2 行も確かめると $\frac{3}{2}B - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}B = \frac{3}{4}B$ となる。両方の種が毎年 $\frac{3}{4}$ 倍に減少する。

行列を使わずに同じことを示すこともできる。$A = rB$ とすると新しい比は $\dfrac{\frac{1}{4}r + \frac{3}{4}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}r}$ であり、これを r に等しいとおくと $2r^2 - 5r + 3 = 0$ となるので、$r = 1$ または $r = \frac{3}{2}$ である。いずれにせよ、比が一定に保たれるのはそれが 1 または $\frac{3}{2}$ のときに限られ、これが示すべきことであった。以下 $x = 1$、$y = \frac{3}{2}$ とする。

その後の年

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

と書く。成分を比較すると $p + \frac{3}{2}q = a$、$p + q = b$ である。辺々引くと $\frac{1}{2}q = a - b$ となるので

$$q = 2(a-b), \qquad p = b - q = 3b - 2a.$$

である。M は線形なので、1 年後には第 1 の成分は 1 倍、第 2 の成分は $\frac{3}{4}$ 倍される。n 年後には（モデルが適用できる限り）

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = (3b-2a)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2(a-b)\left(\frac{3}{4}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

すなわち

$$a_n = (3b-2a) + 3(a-b)\left(\tfrac{3}{4}\right)^n,$$
$$b_n = (3b-2a) + 2(a-b)\left(\tfrac{3}{4}\right)^n.$$

となる。$(\frac{3}{4})^n \to 0$ であるから、個体数は $(3b-2a,\, 3b-2a)$ に近づく。これは平衡点（equilibrium）の集まりである直線 $a = b$ 上の点である。

分類の前に 1 つ安心材料を述べておく。ツチブタが問題を起こすことはない。$a_n \geq 0$ かつ $b_n > 0$ ならば $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n > 0$ であるから、バッファローが生き残っている間はツチブタも正のままである。したがって注意すべきは b_n の符号だけであり、平面の領域 $a \geq 0$、$b > 0$ で考えればよい。

考えてみよう b_n がしばらくの間負になり、その後回復して正の極限に向かうということはありうるだろうか？

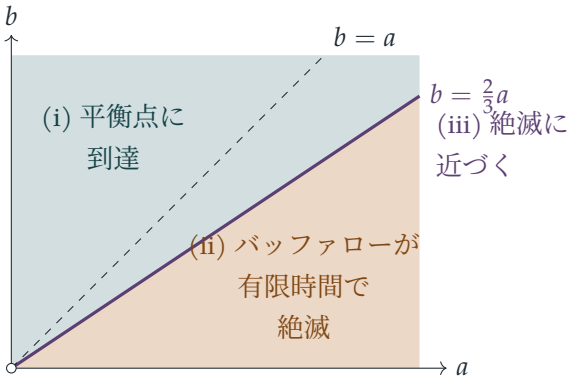
ありえない。b_n の式の中で n に依存するのは $(\frac{3}{4})^n$ だけであり、これは 1 から 0 へと単調に減少する。したがって b_n は $b_0 = b$ からその極限 $3b - 2a$ へと単調に動き、すべての b_n は b と $3b - 2a$ の間にある。これにより分類が明快になる。

3 つの領域

(i) $3b-2a>0$、すなわち $b>\frac{2}{3}a$ ならば、b と $3b-2a$ はともに正であるから、すべての b_n は正であり、モデルはいつまでも適用できる。個体数は平衡点 $(3b-2a,\,3b-2a)$ に収束（converge）し、これは零ではない。これは直線 $b=\frac{2}{3}a$ より上の領域である（b 軸 $a=0$ を含む）。

(ii) $3b-2a<0$、すなわち $b<\frac{2}{3}a$ ならば、$a>\frac{3}{2}b>b$ であるから $a-b>0$ であり、b_n は負の数 $3b-2a$ に向かって狭義単調に減少する。よってある有限の n で $b_n\le 0$ となる。すなわちバッファローは有限時間で絶滅する。これは直線 $b=\frac{2}{3}a$ と a 軸の間の領域である。

(iii) $3b-2a=0$、すなわち $a>0$ で $b=\frac{2}{3}a$ ならば、$p=0$ であり、個体数は $(\frac{3}{2},1)$ の純粋な定数倍となる。$b_n=b\,(\frac{3}{4})^n$ はすべての n で正であるが 0 に近づく。バッファロー（とツチブタ）は絶滅に近づくが、決して絶滅には至らない。これは半直線 $b=\frac{2}{3}a$、$a>0$ だけである。



破線 $b=a$ はすでに平衡状態にある個体数からなる。領域 (i) のどの初期点もこの直線に向かって、直線 $b=\frac{2}{3}a$ に平行に滑るように動く（$(\frac{3}{2},1)$ 方向の成分は縮んで消え、$(1,1)$ 成分は一定のまま保たれる）。

検算

- $n=0$ のとき、式から $a_0=3b-2a+3a-3b=a$、$b_0=3b-2a+2a-2b=b$ となり、当然そうなるべき結果である。
- 領域 (i) にある $(a,b)=(1,3)$ から始める。モデルの 1 年分で $(\frac{1}{4}+\frac{9}{4},\,\frac{9}{2}-\frac{1}{2})=(\frac{5}{2},4)$ となり、式からは $7-6(\frac{3}{4})=\frac{5}{2}$ と $7-4(\frac{3}{4})=4$ が得られる。極限は $(7,7)$ である。
- コンピュータでランダムな 3000 個の初期点からモデルを（分数で）厳密に反復計

算し、閉じた式が 40 年分正しいこと、そして $3b-2a$ の符号がすべての場合に結果を正しく予測することを確認した。$b=\frac{2}{3}a$ 上の点も含めてであり、たとえば $(3,2)$ は 5 年後に $\left(\frac{729}{1024},\frac{243}{512}\right)$ となり、これは初期値の $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ 倍である。

よくある間違い

- 比を逆にしてしまうこと。問題はツチブタとバッファローの比を求めているので、値は 1 と $\frac{2}{3}$ ではなく 1 と $\frac{3}{2}$ である。
- $b_n \le 0$ となるとモデルが停止することを忘れ、負の「極限」をもつものも含めて、すべての個体数が $(3b-2a, 3b-2a)$ に近づくと主張してしまうこと。
- 領域 (iii) を面積をもつ領域として記述すること。これは (i) と (ii) の境界である半直線 $b=\frac{2}{3}a$ にすぎない。

STEP のその先へ

これは離散線形力学系（discrete linear dynamical system）であり、この方法（対角化（diagonalise）し、各固有値を n 乗する）は、大学 1 年の線形代数で M^n を計算する方法そのものである。固有値 1 は不動点の直線を与え、固有値 $\frac{3}{4}<1$ は減衰する方向を与える。時間を連続にし、λ^n の代わりに $e^{\lambda t}$ を用いれば、同じ描像が線形微分方程式の連立系を支配する。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）には差分方程式と行列の累乗についての良い章があり、Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）は連続版を扱っている。

解答例

STEP II 1988、第 9 問

純粋数学 ・ 部分群と和集合

> **STEP II 1988、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q9

この問題は、*Beyond STEP* の第 6.6 節「**部分群の和集合**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch06/subgroup-unions.html

鍵となる考え方

背理法（proof by contradiction）で示す。どちらの部分群（subgroup）も群全体でないとすると、G_2 だけに含まれる元と G_1 だけに含まれる元を一つずつ選び、その積がどこに属するかを考える。積と逆元（inverse）についての閉性（closure）から、積をどちらの部分群に入れても矛盾が生じる。部分群が三つあれば、積には行き場がもう一つある。試すべき自然な群は、すべての元が自分自身の逆元であるような群である。

解答

二つの部分群

G のすべての元が G_1 または G_2 に属するとし、矛盾を導くために $G_1 \neq G$ かつ $G_2 \neq G$ と仮定する。

$G_1 \neq G$ かつ $G_1 \subseteq G$ であるから、$a \notin G_1$ となる元 $a \in G$ が存在する。すべての元は G_1 または G_2 に属するので、$a \in G_2$ である。

同様に、$G_2 \neq G$ であるから $b \notin G_2$ となる元 $b \in G$ が存在し、このとき $b \in G_1$ である。

よって

$$a \in G_2, \quad a \notin G_1, \qquad\qquad b \in G_1, \quad b \notin G_2.$$

が成り立つ。ここで積 $ab \in G$ を考える。仮定より、これは G_1 または G_2 に属する。

- $ab \in G_1$ の場合：$b \in G_1$ であり G_1 は部分群であるから $b^{-1} \in G_1$ であり、したがって閉性より

$$a = (ab)\,b^{-1} \in G_1,$$

  となるが、これは $a \notin G_1$ に矛盾する。

- $ab \in G_2$ の場合：$a \in G_2$ であるから $a^{-1} \in G_2$ でもあり、したがって

$$b = a^{-1}(ab) \in G_2,$$

  となるが、これは $b \notin G_2$ に矛盾する。

どちらの場合も起こりえないので、仮定は誤りであった。すなわち $G_1 = G$ または $G_2 = G$ である。 ■

考えてみよう G が有限であることはどこで使ったか？

使っていない。この議論は部分群の性質（閉性と逆元の存在）だけを用いており、有限・無限を問わず任意の群で成り立つ。言い換えれば、群は決して二つの真部分群（proper subgroup）の和集合（union）にはならない。

三つの部分群

H をクラインの四元群（Klein four-group）

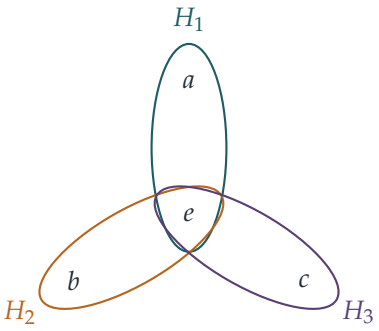
$$H = \{e,\ a,\ b,\ c\}, \qquad a^2 = b^2 = c^2 = e, \quad ab = ba = c,\ bc = cb = a,\ ca = ac = b.$$

とする。具体的には、H は各成分ごとに 2 を法とする加法を演算とする $\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$ であり、また正方形でない長方形の対称変換群（恒等変換、二つの鏡映、半回転）でもある。

単位元（identity）以外のすべての元は位数（order）2 であるから、

$$H_1 = \{e,a\}, \qquad H_2 = \{e,b\}, \qquad H_3 = \{e,c\}$$

はいずれも部分群である。実際、どれも e を含み、積について閉じており（自明でない積は $a \cdot a = e$ だけであり、b と c についても同様）、各元は自分自身の逆元である。それぞれ元を 2 個しかもたないので、どれも H ではない。しかし、これらを合わせると e、a、b、c を含み、これは H のすべての元である。



このように、三つの真部分群で群を覆うことはできる。別の例として四元数群（quaternion group）$Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ があり、これはいずれも位数 4 の三つの巡回部分群（cyclic subgroup）$\{\pm 1, \pm i\}$、$\{\pm 1, \pm j\}$、$\{\pm 1, \pm k\}$ の和集合である。

ここで最初の議論が破綻する理由に注目しよう。$a \notin H_2$ かつ $b \notin H_1$ のとき、積 $ab = c$ は三つ目の部分群 H_3 に逃げ込むことができるのである。

検算

- 位数 1 から 12 までの巡回群、S_3、S_4、位数 8 の二面体群（dihedral group）、Q_8、$\mathbb{Z}_2^2$、$\mathbb{Z}_2^3$ のすべての部分群について総当たりで調べたところ（真部分群の順序対は 1278 組）、和集合が群全体となる組は一つも見つからなかった。
- 同じ探索により、$\{e, a\} \cup \{e, b\} \cup \{e, ab\}$ がクラインの四元群全体であること、また Q_8 が $\langle i\rangle$、$\langle j\rangle$、$\langle k\rangle$ の和集合であることも確かめられる。興味深いことに、調べた巡回群のどれも、また S_3 も S_4 も、三つの真部分群の和集合にはならない。
- 前半についての簡単な確認：巡回群では、生成元（generator）はどの真部分群にも属さないので、巡回群はいくつの真部分群を用いても覆うことができない。

よくある間違い

- 個数を数えて論じる方法：二つの真部分群はそれぞれ高々 $\frac{1}{2}|G|$ 個の元をもつが、どちらも e を含むので、その和集合の元は高々 $|G| - 1$ 個である。この数え上げによる証明は（ラグランジュの定理（Lagrange's theorem）により）正しく簡潔であるが、有限性とラグランジュの定理の両方を必要とする。両方を明記すること。
- $a \notin G_1$ と $b \notin G_2$ を選んだのに、$a \in G_2$ と $b \in G_1$ を使い忘れること。この二つの事実がなければ矛盾は導けない。
- 真部分群でないものを含む三つの部分群や、そもそも部分群でないもの（たとえば

$ab = c$ であるため閉じていない $\{e, a, b\}$）を挙げてしまうこと。

STEP のその先へ

どのような群が三つの真部分群の和集合になるのだろうか。Scorza の定理（1926 年）がその答えを与える。それはちょうど、クラインの四元群と同型（isomorphic）な商群（quotient group）をもつ群であり、だからこそクラインの四元群が基本的な例なのである。同じ「二つの和集合にはならない」という事実は線形代数（linear algebra）にも現れ、無限体（infinite field）上のベクトル空間（vector space）は決して有限個の真部分空間（proper subspace）の和集合にはならない。群論の入門としては、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を読んでみるとよい。

解答例

STEP II 1988、第 10 問

純粋数学 ・ ベクトルと放物面

> **STEP II 1988、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q10

鍵となる考え方

この方程式は、幾何学的な意味のはっきりした二つの部分からなる。r は O からの距離であり、$(a^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{r})/a$ は平面 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = a^2$ からの符号付き距離（signed distance）である。したがって S は、O を焦点（focus）、この平面を準線（directrix）とする回転放物面（paraboloid of revolution）である。残りの部分は、O を通る直線に沿って考えればよい。直線 OP 上の点を $\lambda\mathbf{p}$ と書き、O を通り $\mathbf{a}$ と $\mathbf{p}$ の両方に垂直な直線上の点を $\mu\,\mathbf{a}\times\mathbf{p}$ と書く。そしてこれらを S の方程式に代入する。$|\lambda\mathbf{p}| = |\lambda|p$ であるから、λ の符号が重要になる。

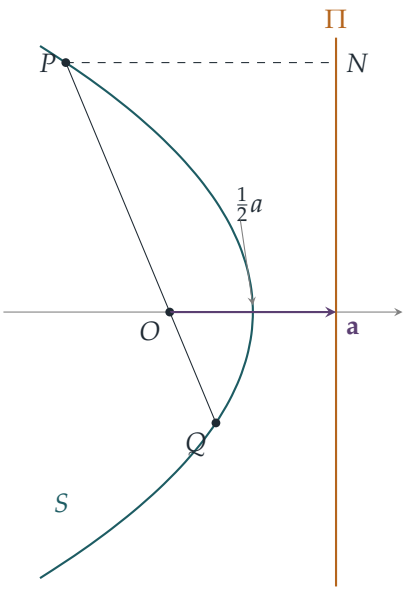
解答

軌跡（locus）

Π を平面 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = a^2$ とする。この平面の単位法線ベクトル（unit normal）は $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/a$ であり、Π は O から距離 a だけ $\mathbf{a}$ の側に離れたところにある。点 $\mathbf{r}$ から Π までの距離は

$$d(\mathbf{r}) = |\,a - \hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{r}\,| = \frac{|a^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{r}|}{a}.$$

である。



図は、$\mathbf{a}$ を含む平面による S の断面を示している。点 P は、O からの距離と、Π 上への垂線の足 N からの距離が等しい。この曲面は O と Π のちょうど中間にある $\frac{1}{2}\mathbf{a}$ で軸と交わる。

S 上の点は等距離にある。 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}+ar=a^2$ ならば、$a^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}=ar\geq 0$ である。よって

$$d(\mathbf{r})=\frac{a^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{a}=\frac{ar}{a}=r=|OR|.$$

等距離にある点は S 上にある。 $r=d(\mathbf{r})$、すなわち $ar=|a^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}|$ と仮定する。$a^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}\geq 0$ ならば、これはまさに S の方程式である。そうでなければ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}>a^2$ であり、条件は $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}=ar+a^2>ar$ を意味する。これはコーシー・シュワルツの不等式（Cauchy–Schwarz）による $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}\leq ar$ に矛盾する。よって Π の向こう側にある点で等距離のものは存在せず、S は O と Π から等距離にある点全体の集合とちょうど一致する。これは、O を通り $\mathbf{a}$ の方向をもつ直線を軸とする回転放物面である。

後で役に立つ帰結が二つある。S 上の点 P について

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}=a^2-ap. \qquad (*)$$

が成り立つ。また $a^2=\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}+ap\leq 2ap$ であるから $p\geq\frac{1}{2}a$ であり、したがって $2p-a\geq 0$ である。等号が成り立つのは $\mathbf{p}$ が $\mathbf{a}$ の正の定数倍のとき、すなわち P が頂点（vertex）$\frac{1}{2}\mathbf{a}$ のときに限る。

第二の交点 Q

直線 OP 上の点は $\lambda\mathbf{p}$ と表され、$|\lambda\mathbf{p}| = |\lambda|p$ である。これを S の方程式に代入すると

$$\lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} + a|\lambda|p = a^2.$$

を得る。

> **考えてみよう** なぜ Q は O に関して P と同じ側にあり得ないのか。

$\lambda > 0$ ならば左辺は $\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} + ap) = \lambda a^2$ となるので $\lambda = 1$ であり、これは P 自身である。（幾何学的には、焦点から出る半直線は回転放物面と高々一回しか交わらない。）よって Q では $\lambda < 0$ であり、このとき $|\lambda| = -\lambda$ である。$(*)$ を用いると

$$\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} - ap) = a^2 \quad\Longrightarrow\quad \lambda(a^2 - 2ap) = a^2 \quad\Longrightarrow\quad \lambda = -\frac{a}{2p-a}.$$

となる。$2p > a$、すなわち P が頂点でなければ、これは求めるとおり負である。（頂点では直線 OP は軸そのものであり、S と一回しか交わらない。）したがって

$$\boxed{\mathbf{q} = -\frac{a}{2p-a}\,\mathbf{p}} \qquad \text{かつ} \qquad |OQ| = \frac{ap}{2p-a}.$$

点 T と T'

O を通り $\mathbf{a}$ と $\mathbf{p}$ の両方に垂直な直線は $\mathbf{t} = \mu\,\mathbf{a}\times\mathbf{p}$ である。（$\mathbf{a}\times\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ が必要なので、P は軸上にないとする。）$\mathbf{a}\cdot\mathbf{t} = 0$ であるから、S の方程式は $at = a^2$、すなわち $|\mathbf{t}| = a$ に帰着する。よって T と T' は、O を通り Π に平行な平面と S との交わりである円の上にあり、

$$|\mu|\,|\mathbf{a}\times\mathbf{p}| = a.$$

が成り立つ。

> **考えてみよう** $\mathbf{a}$ と $\mathbf{p}$ のなす角を知らずに、どうやって $|\mathbf{a}\times\mathbf{p}|$ を求めればよいか。

恒等式 $|\mathbf{a}\times\mathbf{p}|^2 = a^2p^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{p})^2$ を用いる。これは $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ を姿を変えて書いたものである。そこに $(*)$ を代入する。

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}\times\mathbf{p}|^2 &= a^2p^2 - (a^2 - ap)^2\\ &= a^2p^2 - a^4 + 2a^3p - a^2p^2\\ &= a^3(2p-a).\end{aligned}$$

したがって

$$|\mu| = \frac{a}{a^{3/2}\sqrt{2p-a}} = \frac{1}{\sqrt{a(2p-a)}} = \frac{1}{\sqrt{2ap-a^2}},$$

であり、T と T' の位置ベクトル（position vector）は求めるとおり $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2ap-a^2}}\,\mathbf{a}\times\mathbf{p}$ である。

三角形 PQT の面積

点 P、O、Q は同一直線上にあり、O は P と Q の間にある。ベクトル $\mathbf{t}$ は $\mathbf{a}\times\mathbf{p}$ に平行なので $\mathbf{p}$ に垂直であり、したがって直線 PQ に垂直である。よって OT は三角形 PQT の T から下ろした高さ（altitude）であり、その長さは a である。底辺は

$$|PQ| = p + \frac{ap}{2p-a} = \frac{p(2p-a)+ap}{2p-a} = \frac{2p^2}{2p-a}.$$

である。したがって

$$\text{面積} = \tfrac{1}{2}\cdot|PQ|\cdot|OT| = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{2p^2}{2p-a}\cdot a = \frac{ap^2}{2p-a},$$

となり、求める結果を得る。T の代わりに T' をとっても同じことが成り立つ。

検算

- $\mathbf{a}=(2,0,0)$、$P=(-1.25,3,0)$ とする。これは図中の点である。このとき $\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}+ap = -2.5+2(3.25) = 4 = a^2$ であるから、P は S 上にある。公式から $\mathbf{q} = -\frac{2}{4.5}\mathbf{p} = (0.556,-1.333,0)$ を得て、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{q}+aq = 1.111+2.889 = 4$ であるから、Q も S 上にある。
- P を通径（latus rectum）の端点にとると、$\mathbf{p}\perp\mathbf{a}$ かつ $p=a$ である。このとき $\mathbf{q}=-\mathbf{p}$ となり、対称性から正しい。面積は $\frac{1}{2}(2a)(a) = a^2$ であり、公式からも $a\cdot a^2/a = a^2$ を得る。
- 二つの焦点距離は $\dfrac{1}{OP}+\dfrac{1}{OQ} = \dfrac{1}{p}+\dfrac{2p-a}{ap} = \dfrac{2}{a}$ を満たす。これは放物線の焦点弦（focal chord）についての古典的な性質である。
- 数値的には、$\mathbf{a}$ と P を無作為に 20 000 通り選んで Q、T、T' と面積を確かめた。最大誤差は約 10^{-11} であった。

よくある間違い

- すべての λ について $|\lambda\mathbf{p}| = \lambda p$ と書いてしまうこと。こうすると解は $\lambda=1$ しかなく、Q が求まらない。
- 最初の部分で逆（converse）を忘れること。Π の向こう側にある点では $|a^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}| = \mathbf{a}\cdot\mathbf{r}-a^2$ であり、そのような点を除外しなければならない。

- $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PT}$ の外積（cross product）を使って面積を計算すること。それでも求まるが、$OT \perp PQ$ に気づく方法よりずっと長くなる。

STEP のその先へ

これは円錐曲線（conic）の焦点・準線による定義を、三次元で、しかも座標を使わずに表したものである。e を離心率（eccentricity）とすると、曲面 $e\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} + ar = e\,a^2$（$O$ からの距離が Π からの距離の e 倍に等しい点の集合）は、O を焦点とするほかの回転二次曲面（quadric of revolution）を与える。関係式 $1/OP + 1/OQ = 2/a$ は、軌道力学（orbital mechanics）で中心的な役割を果たす極方程式（polar equation）$\ell/r = 1 + e\cos\theta$ のベクトル版である。ベクトル代数をさらに学ぶにはストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）がよい次の一歩であり、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）にはこの種の問題がさらに収められている。

解答例

STEP II 1988、第 11 問

力学 ・ 柱に巻きつく糸

STEP II 1988、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s2-q11

鍵となる考え方

糸のうち巻きついていない部分は、常に柱から**接線**（tangent）に沿って離れていく。したがって粒子の位置は「接点に、長さが（ほどけている糸の長さ）である接線方向のベクトルを加えたもの」であり、これは角 θ を用いて簡単に書き表せる。これを微分すると 2 つの項が打ち消し合い、速度は糸に垂直であることがわかる。よって張力（tension）は仕事（work）をせず、速さは初めの値のまま一定であり、速さの式は θ についての変数分離形の微分方程式（separable differential equation）となる。

解答

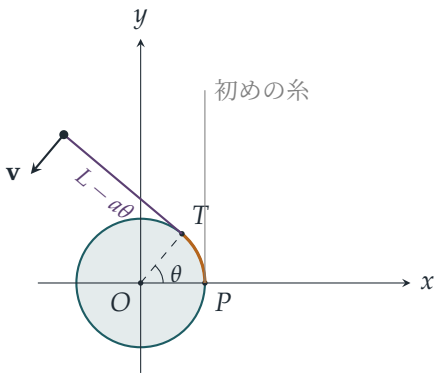
設定

粒子を滑らかな台の上の質点（point mass）とみなし、糸は軽くて伸び縮みしない（inextensible）もので、常にぴんと張っているとする。重力と垂直抗力（normal reaction）は鉛直方向で互いに打ち消し合うので、水平方向にはたらく力は張力のみである。

原点を O とする座標軸をとり、P を $(a, 0)$ におく。糸は初め OP に垂直であるから、P において柱に接している。そこで粒子の初めの位置を (a, L) とする。（鏡像の選び方をしても、y 座標の符号が反転するだけである。）糸が反時計回りに巻きついていき、角 θ だけ巻きついたとき、長さ $a\theta$ の部分が P からの弧に沿っており、糸は

$$T = a(\cos\theta,\ \sin\theta).$$

において柱から離れる。



巻きついていない長さ $L-a\theta$ の部分は、T における接線に沿って伸びている。糸がほどけていく向きの単位接ベクトルは $(-\sin\theta,\cos\theta)$ である。実際、これは OT に垂直であり、$\theta=0$ のとき $(0,1)$ となって初めの位置と一致する。

位置と速度

よって粒子の位置ベクトルは

$$\mathbf{r}=a\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}+(L-a\theta)\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos\theta-(L-a\theta)\sin\theta\\ a\sin\theta+(L-a\theta)\cos\theta\end{pmatrix}.$$

である。連鎖律（chain rule）と積の微分法（product rule）を用いて t で微分すると、

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}&=a\dot\theta\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}-a\dot\theta\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}+(L-a\theta)\dot\theta\begin{pmatrix}-\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix}\\&=-(L-a\theta)\dot\theta\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

となる。最初の 2 つの項は打ち消し合う。接点が柱に沿って動く効果が、巻きついていない糸が短くなる効果によってちょうど相殺されるのである。

$(\cos\theta,\sin\theta)$ は単位ベクトルであり、$L-a\theta>0$、また糸が巻きついていく間は $\dot\theta>0$ であるから、速さは

$$|\dot{\mathbf{r}}|=(L-a\theta)\dot\theta,$$

であり、これが示すべきことであった。

柱に当たるまでの時間

考えてみよう 糸は粒子を引っ張っているのに、なぜ粒子の速さは v のまま変わらないのだろうか。

速度は $(\cos\theta, \sin\theta)$ に平行であり、一方で糸、したがって張力は $(-\sin\theta, \cos\theta)$ の方向にある。これらは垂直であるから、張力は仕事をしない。台は滑らかなので、張力は水平方向にはたらく唯一の力である。よって運動エネルギー（kinetic energy）は一定であり、それとともに速さも v のまま一定である。張力は速度の向きを変えるだけである。

したがって、粒子が柱に達するまでのすべての t について

$$(L - a\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = v, \qquad \theta(0) = 0.$$

が成り立つ。変数分離して 0 から t まで積分すると

$$L\theta - \tfrac{1}{2}a\theta^2 = vt.$$

を得る。粒子が柱に当たるのは糸がすべて巻きついたとき、すなわち $a\theta = L$ となるときであり、このとき $\theta = L/a$ である。すると

$$vt = \frac{L^2}{a} - \frac{L^2}{2a} = \frac{L^2}{2a}, \qquad \text{よって} \qquad t = \frac{L^2}{2av},$$

であり、これが求める時間である。

検算

- $\theta = 0$ のとき、式から $\mathbf{r} = (a, L)$ および $\dot{\mathbf{r}} = (-L\dot{\theta}, 0)$ が得られ、これは初めの糸に垂直であって、あるべき姿になっている。
- 単位：$L^2/(av)$ は $\mathrm{m}^2/(\mathrm{m}\cdot\mathrm{m\,s^{-1}}) = \mathrm{s}$ である。
- 答えの別の見方：粒子の経路全体の長さは

  $$\int_0^{L/a} (L - a\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{L^2}{2a},$$

  であり、これを一定の速さ v で進む。
- $a = 1$、$L = 3$、$v = 2$ の柱に非常に硬い糸が巻きつく場合について、運動を数値シミュレーションした。シミュレーションによる時間は $L\theta - \frac{1}{2}a\theta^2 = vt$ と 10^{-5} 以内で一致し、$\dot{\theta} = v/(L - a\theta)$ を $a\theta = L$ まで積分すると 2.25 となり、これは $L^2/(2av)$ に等しい。

よくある間違い

- O のまわりの角運動量（angular momentum）保存則を用いること。張力は O を通らない（接線に沿ってはたらく）ので、O のまわりの角運動量は保存**されない**。正しく使うべき道具はエネルギーである。
- 巻きついていない糸を接線方向ではなく $(\cos\theta, \sin\theta)$ の方向、すなわち動径方向にとってしまうこと。
- 速さの式には $\dot{\theta} > 0$ が必要であることを忘れること。ベクトルの大きさは $(L - a\theta)|\dot{\theta}|$ である。

STEP のその先へ

粒子が描く経路は円の**伸開線**（involute）であり、これは糸巻きからぴんと張った糸をほどいていくときに、糸の端が描く曲線である。歯車の歯があのような形をしているのは伸開線のためであり、伸開線はホイヘンス（Huygens）による振り子時計の研究においても中心的な役割を果たした。その弧長 $\int (L - a\theta)\,\mathrm{d}\theta$ は、平面曲線の微分幾何学（differential geometry）（縮閉線（evolute）、伸開線、曲率（curvature））の最初の例である。力学の側面については、エネルギーや角運動量が保存される場合とされない場合も含めて、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を読むとよい。

解答例

STEP II 1988、第 12 問

力学 ・ 落下する鎖

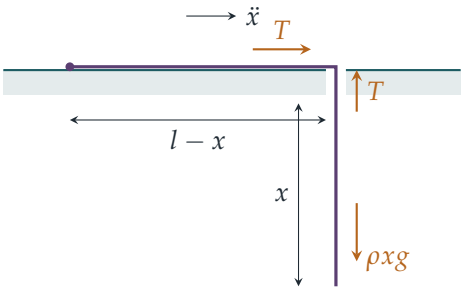
> **STEP II 1988、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q12

鍵となる考え方

ひもは伸び縮みしない（inextensible）ので、ひものどの部分も同じ速さで動く。したがってひも全体は一つの物体のようにふるまい、それを動かす力はテーブルの下に垂れ下がっている部分の重さである。穴を通り抜けるひもが増えるにつれてその重さは大きくなるので、垂れ下がった部分の長さについての簡単な線形微分方程式（linear differential equation）が得られる。その解は双曲線余弦関数（hyperbolic cosine）であり、求める時間はそれを逆に解くことで得られる。

解答

どこにも摩擦（friction）はない。テーブルはなめらかであり、穴は小さくなめらかである（したがって穴はひもの向きを変えるだけで、ひもに沿った方向には力を及ぼさない）。また、ひもの単位長さあたりの質量は ρ である。時刻 t においてテーブルの下に垂れ下がっている長さを x とすると、テーブルの上にある長さは $l - x$ である。はじめ $x = l - d$ かつ $\dot{x} = 0$ であり、ひもの端が穴の上端に達するのは $x = l$ のときである。テーブルの高さは l より大きいので、それまでに垂れ下がった部分が床に触れることはない。



穴の位置でのひもの張力（tension）を T とする。穴はなめらかなので、張力は穴のすぐ上でもすぐ下でも同じ値 T をとる。

テーブルの上の部分。この部分の質量は $\rho(l-x)$ であり、加速度 $\ddot{x}$ で穴に向かって水平に動く（ひもは伸び縮みしないので、垂れ下がった部分と同じ速さで動く）。テーブルはなめらかなので、この部分にはたらく水平方向の力は張力 T だけである。よって

$$\rho(l-x)\,\ddot{x} = T.$$

垂れ下がった部分。この部分の質量は ρx であり、下向きの重力 $\rho x g$ と上向きの張力 T を受けて、下向きに加速度 $\ddot{x}$ で運動する。

$$\rho x\,\ddot{x} = \rho x g - T.$$

二つの式を足し合わせると T が消去される。

$$\rho l\,\ddot{x} = \rho g x, \qquad \text{すなわち} \qquad \ddot{x} = n^2 x, \quad n = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

考えてみよう 穴の両側にあるひもの量は刻々と変化している。それぞれの部分に $F = ma$ を用いて本当によいのだろうか？

よい。それぞれの式は、ある一つの瞬間に、その瞬間に穴のその側にあるひもの部分に対して適用されている。ひもは全体として一つの速さ $\dot{x}$ で動くので、ひも全体の運動量（momentum）の変化率は $\rho l\ddot{x}$ であり、運動の向きの成分をもつ外力は垂れ下がった部分の重力 $\rho x g$ だけである（テーブルからの垂直抗力は水平な部分の重力とつり合い、穴はひもの向きを変えるだけである）。したがって、合わせた式 $\rho l\ddot{x} = \rho g x$ はひも全体に対するニュートン（Newton）の第二法則（second law）にほかならない。このことは下のエネルギーによる検算でも確かめられる。

$\ddot{x} = n^2 x$ の一般解（general solution）は $x = A\cosh nt + B\sinh nt$ である。$t = 0$ で $\dot{x} = 0$ であることから $B = 0$ が得られ、$t = 0$ で $x = l - d$ であることから $A = l - d$ が得られる。

$$x = (l-d)\cosh nt.$$

ひもの端が穴の上端に達するのは $x = l$ のときであるから、それは

$$\cosh nt_1 = \frac{l}{l-d}.$$

を満たす時刻 t_1 である。$l/(l-d) > 1$ なので、これを満たす正の解はちょうど一つであり、$\operatorname{arcosh} u = \ln\left(u + \sqrt{u^2-1}\right)$ を用いると、

$$\sqrt{u^2-1} = \frac{\sqrt{l^2-(l-d)^2}}{l-d} = \frac{\sqrt{2ld-d^2}}{l-d},$$

であるから、かかる時間は

$$\boxed{t_1 = \sqrt{\frac{l}{g}}\ \operatorname{arcosh}\left(\frac{l}{l-d}\right) = \sqrt{\frac{l}{g}}\ \ln\left(\frac{l+\sqrt{2ld-d^2}}{l-d}\right).}$$

である。

検算

- **エネルギー**。テーブルの上面を位置エネルギー（potential energy）の基準とする。垂れ下がった部分の重心（centre of mass）は深さ $x/2$ にあるので、その位置エネルギーは $-\frac{1}{2}\rho g x^2$ である。静止状態からのエネルギー保存（conservation of energy）により $\frac{1}{2}\rho l\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\rho g\left(x^2-(l-d)^2\right)$ が得られ、これを t で微分すると再び $l\ddot{x} = gx$ が得られる。
- **d が小さい場合**。d がごく小さければ、ひものほとんどが垂れ下がっているので、ひもは g に近い加速度で落下し、かかる時間はおよそ $\sqrt{2d/g}$ になるはずである。実際、d が小さいとき、$\cosh nt_1 = 1 + \frac{d}{l} + \cdots$ と $\cosh nt_1 \approx 1 + \frac{1}{2}n^2t_1^2$ から $t_1^2 \approx 2d/(n^2l) = 2d/g$ が得られる。
- **$d \to l$ の場合**。垂れ下がっている部分がほとんどなければ、ひもはほとんど動き出さず、対数の式からわかるように $t_1 \to \infty$ となる。
- **数値による確認**。$l = 2\,\mathrm{m}$、$d = 1.5\,\mathrm{m}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ とすると、公式から $t_1 \approx 0.932\,\mathrm{s}$ が得られ、これは運動を逐次的に数値積分（numerical integration）した結果と一致する。

よくある間違い

- 垂れ下がった部分だけについて $\rho x\ddot{x} = \rho xg$ と書き、その部分がテーブルの上のひもを引きずらなければならないことを忘れる（言い換えれば、質量を取り違える。加速される質量はひも全体の ρl である）。

- $x = A\cos nt$ の形の解を試す。方程式は $\ddot{x} = +n^2x$ なので、運動は振動するのではなく指数関数的に増大する。
- 終了の条件として $x = l$ ではなく $x = d$ とおく。ひもの端が穴に達するのは、長さ l 全体が垂れ下がったときである。

STEP のその先へ

これは質量分布が変化する問題である。質量そのものは一定だが、重力の影響を受ける部分が位置によって変わるため、指数関数を解にもつ線形方程式が導かれる。もし、静止して積み重なったひもを拾い上げながら、ひもが摩擦のないテーブルの縁から落ちていくのであれば、非弾性的（inelastic）な「衝撃」によって運動量が失われ、エネルギーは保存されない。こうした場合を区別することは、大学の力学における古典的なテーマである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、質量が移動する系や、鎖やロープについて丁寧に扱われている。

解答例

STEP II 1988、第 13 問

力学 ・ 摩擦とつり合い

STEP II 1988、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

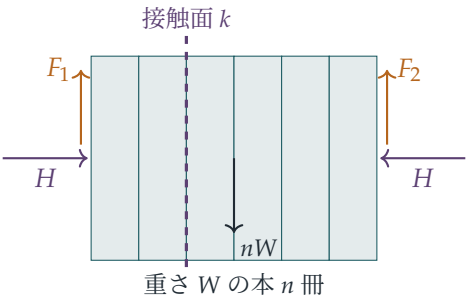
step.maths.org/questions/88-s2-q13

鍵となる考え方

本を支える鉛直方向の力はすべて摩擦力（friction）であり、どの接触点においても摩擦力の大きさはそこでの垂直抗力（normal reaction）の μ 倍を超えられない。したがって必要なものは二つある。すべての接触点における垂直抗力（水平方向のつり合い（equilibrium）から容易に求まる）と、各接触点が担わなければならない摩擦力（適当な本の**かたまり**の鉛直方向のつり合いから求まる）である。そのうえで、どの接触点が最も滑りやすいかを調べる。隣り合う何冊かの本をひとつの物体とみなすと、計算が短くて済む。

解答

モデル化。 同じ本が n 冊あり、それぞれの重さを W、表紙は鉛直であるとする。それぞれの手は水平方向に大きさ $H \leq Q$ の力で押し、上向きの摩擦力を与える。これらを F_1（左手）、F_2（右手）とおく。各手が及ぼす鉛直方向の力はちょうどこの摩擦力なので、$F_1, F_2 \leq P$ が必要である。問題文により回転の効果は無視してよいので、各本あるいは本のかたまりについて力のつり合いだけを考えればよい。



垂直抗力。 本に左から順に $1,2,\ldots,n$ と番号をつけ、本 k と本 $k+1$ の接触面（interface）を接触面 k とする（$1 \le k \le n-1$）。本 $1,\ldots,k$ からなるかたまりにはたらく水平方向の力は、左手が押す力 H と本 $k+1$ からの垂直抗力だけである。よってその垂直抗力も H である。つまり手と本の間であれ本どうしの間であれ、**すべての**接触点で垂直抗力は H であり、したがってどの接触点も大きさ μH までの摩擦力しか与えられない。

手について。 本の列全体について鉛直方向のつり合いを考えると、

$$F_1 + F_2 = nW.$$

F_1, F_2 はいずれも P 以下（腕の力）であり、かつ $\mu H \le \mu Q$ 以下（摩擦）である。$L = \min(P, \mu Q)$ とおく。すると $nW = F_1 + F_2 \le 2L$ なので、

$$n \le \frac{2L}{W} = \frac{2\min(P, \mu Q)}{W}.$$

これは必要条件である。これが成り立つとき、最善の方法はできるだけ強く押して $H = Q$ とし（H を大きくすれば摩擦力の上限がすべて上がるだけである）、荷重を等分して $F_1 = F_2 = \frac{1}{2}nW \le L$ とすることである。このとき両手とも上限の範囲内にある。

? **考えてみよう** 手が本を保持できていても、途中のどこかで本どうしが滑ってしまうことはないだろうか？

本どうしの接触面。 これを直接確かめる。本 $1,\ldots,k$ からなるかたまりに鉛直方向のつり合いを適用する。その重さ kW は、手からの $F_1 = \frac{1}{2}nW$ と、本 $k+1$ からの摩擦力 f_k（上向きを正とする）によって支えられているので、

$$f_k = kW - \tfrac{1}{2}nW = \left(k - \tfrac{n}{2}\right) W.$$

$1 \le k \le n-1$ に対して $\left|k - \frac{n}{2}\right| \le \frac{n}{2} - 1$ が成り立ち、等号は $k = 1$ と $k = n-1$、すなわち両端の本に隣接する接触面で成り立つ。よって接触面が必要とする摩擦力の最大

値は $\left(\frac{n}{2}-1\right)W$ であり、これは各手が与える $\frac{1}{2}nW$ より W だけ小さい。どの接触面も手と同じ上限 μQ をもつので、手が滑らなければ本どうしも滑らない。（物理的には、両端の本はそれぞれ手によって保持されており、その本が内側へ伝える摩擦力は、手の摩擦力から自身の重さを引いたものになっている。）

答え。 本の列を持ち上げられるのは、$nW \le 2\min(P, \mu Q)$ のとき、かつそのときに限る。したがって本の最大冊数は

$$\boxed{n_{\max} = \left\lfloor \frac{2\min(P,\,\mu Q)}{W} \right\rfloor}$$

であり、これは $2P/W$ と $2\mu Q/W$ のどちらも超えない最大の整数である。どちらの上限が効くかによって、図書館員を制約しているものがわかる。$P < \mu Q$ のときは持ち上げる腕の力、$\mu Q < P$ のときは握る力である。

検算

- $W = 10\,\mathrm{N}$、$P = 60\,\mathrm{N}$、$Q = 100\,\mathrm{N}$、$\mu = 0.4$ とする。このとき $\min(60, 40) = 40$ であり、$n_{\max} = 8$ となる。本が 8 冊のとき、各手は 40 N の摩擦力を与え、これはちょうど上限に等しい。最も厳しい接触面で必要な摩擦力は $30\,\mathrm{N} < 40\,\mathrm{N}$ である。9 冊目を加えると、各手から 45 N が必要になる。
- 本が 1 冊（$n = 1$）のときは接触面がなく、$W \le 2\min(P, \mu Q)$ であればよい。これは明らかに正しい。
- コンピュータを用いて、W, P, Q, μ を無作為に 3000 通り選び、不等式の全体（任意の $H \le Q$、任意の分け方 F_1, F_2、すべての接触面）を解いたところ、実現可能な最大の n は常にこの公式と一致した。

よくある間違い

- 腕が及ぼす鉛直方向の力が摩擦力**そのもの**であり、したがって二つの上限 P と μQ が同じ力に課されることを忘れる。
- 確かめずに、真ん中の本が最も弱い箇所だと思い込む。本どうしの間の力は手のところより大きいのではなく、小さい。
- 切り捨て（floor）をせずに $2\min(P, \mu Q)/W$ を答えとしてしまう。答えは本の冊数なので整数でなければならない。

STEP のその先へ

ここでの摩擦力は**静的不定**（statically indeterminate）である。つり合いによって定まるのは $F_1 + F_2$ だけであり、私たちは、すべての接触点を上限内に収める分け方が**存在する**かどうかを問うたのである。このような問題は小さな線形計画問題（linear programme）であり、許容されるつり合いが存在するかを調べるという同じ考え方が、構造物の極限解析（limit analysis）の基礎になっている。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、摩擦とつり合いが丁寧に扱われている様子を見るのによい本である。

解答例

STEP II 1988、第 14 問

力学 ・ 回転する剛体

> **STEP II 1988、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q14

鍵となる考え方

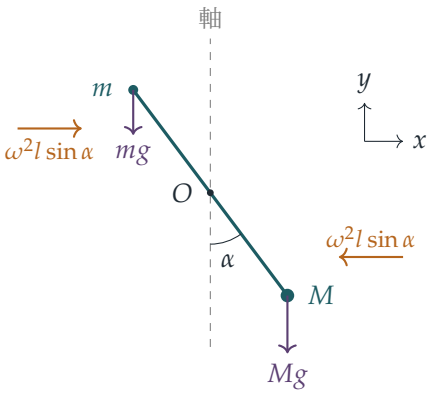
定常状態（steady state）では、棒を含んで回転する鉛直面に対して何も動かないので、各質点は一定の速さで水平な円を描いて回るだけである。これにより各質点の加速度は完全に決まる。すると、ニュートン（Newton）の運動の第 2 法則から、棒が各質点に及ぼす力がわかり、**軽い**棒についての二つの事実で問題は片づく。すなわち、棒にはたらく力はつり合わなければならず、さらに（棒は軸のまわりで自由に振れるので）軸のまわりのそれらの力のモーメント（moment）もつり合わなければならない。

解答

モデル化。 質量は軽い剛体棒に付いた質点とみなし、棒は O でなめらかに支えられていて、軸はそれ自身の方向のまわりに偶力（couple）を及ぼさないとする。棒を含む鉛直面で考える。この面は O を通る鉛直線のまわりを角速度 ω で回転している。この面内で x を水平方向、y を鉛直上向きにとり、原点を O とする。

M が $(l\sin\alpha,\ -l\cos\alpha)$ に、m が $(-l\sin\alpha,\ l\cos\alpha)$ にあるとする。重いほうの質点が下にあるはずであることは、すぐ後で示す。各質点は鉛直軸のまわりの半径 $l\sin\alpha$ の水平な円上を一定の速さで運動するので、その加速度は水平に軸へ向かう向きで大きさ $\omega^2 l\sin\alpha$ である：

$$\mathbf{a}_M = (-\omega^2 l\sin\alpha,\ 0), \qquad \mathbf{a}_m = (\omega^2 l\sin\alpha,\ 0).$$



（琥珀色の矢印は加速度、紫色の矢印は重力を表す。）

棒から受ける力。 棒が M と m に及ぼす力をそれぞれ $\mathbf{R}_M$、$\mathbf{R}_m$ とする。これらは棒の方向を向いているとは限らない。剛体棒は横向きにも押すことができるからである。運動の第 2 法則から $\mathbf{R}_M - Mg\,\mathbf{j} = M\mathbf{a}_M$ となるので、

$$\mathbf{R}_M = \left(-M\omega^2 l \sin\alpha,\ Mg\right), \qquad \mathbf{R}_m = \left(m\omega^2 l \sin\alpha,\ mg\right).$$

運動の第 3 法則により、質点は棒の M 側の端を $-\mathbf{R}_M$ で、m 側の端を $-\mathbf{R}_m$ で押す。

考えてみよう 軸は O で棒に未知の力を及ぼしている。その力を知らずに、どうすればモーメントを考えられるだろうか？

軸のまわりのモーメント。 軸からの力は O にはたらくので、O のまわりのモーメントをもたない。また棒は自由に振れるので、軸はそれ自身の方向（O を通りこの面に垂直な直線）のまわりに偶力を与えない。軽い棒はそれ自体の角運動量（angular momentum）をもたないので、両端にはたらく二つの力のこの直線のまわりのモーメントは打ち消し合わなければならない。点 (x, y) にはたらく力 (F_x, F_y) のモーメントは $xF_y - yF_x$（反時計回りを正）である。$(l\sin\alpha, -l\cos\alpha)$ にはたらく $-\mathbf{R}_M$ については

$$l\sin\alpha\,(-Mg) - (-l\cos\alpha)(M\omega^2 l\sin\alpha) = -Mgl\sin\alpha + M\omega^2 l^2 \sin\alpha\cos\alpha,$$

であり、$(-l\sin\alpha,\, l\cos\alpha)$ にはたらく $-\mathbf{R}_m$ については

$$(-l\sin\alpha)(-mg) - l\cos\alpha\,(-m\omega^2 l\sin\alpha) = mgl\sin\alpha + m\omega^2 l^2 \sin\alpha\cos\alpha.$$

である。その和を 0 とおき、$l\sin\alpha \neq 0$（$\alpha > 0$ より）で割ると

$$(M+m)\,\omega^2 l\cos\alpha = (M-m)\,g \quad\Longrightarrow\quad \omega^2 = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)\frac{g}{l\cos\alpha},$$

となる。ここで $\cos\alpha > 0$ で割った。これが示すべき式である。

逆に M が**上側**の質点だとすると、同じ計算（M と m を入れ替える）から $(M+m)\omega^2 l\cos\alpha = (m-M)g < 0$ となり、これは不可能である。したがって、仮定したとおり重いほうの質点は確かに O より下にある。

軸への反作用。 棒は軽いので、棒にはたらく力の合力は 0 である。軸は棒を $\mathbf{R}_M + \mathbf{R}_m$ で押すので、棒は軸を

$$\mathbf{F} = -(\mathbf{R}_M + \mathbf{R}_m) = \Big((M-m)\,\omega^2 l\sin\alpha,\ -(M+m)\,g\Big).$$

で押す。この力は下向きで、水平成分は M の側へ外向きである。この力が鉛直下向きとなす角を ϕ とすると、ω^2 の値を用いて

$$\begin{aligned}\tan\phi &= \frac{(M-m)\,\omega^2 l\sin\alpha}{(M+m)\,g} = \frac{M-m}{M+m}\cdot\frac{l\sin\alpha}{g}\cdot\frac{M-m}{M+m}\cdot\frac{g}{l\cos\alpha}\\ &= \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\tan\alpha.\end{aligned}$$

となる。$0 \le \phi < \frac{1}{2}\pi$ であるから、$\phi = \tan^{-1}\left[\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\tan\alpha\right]$ であり、これが求める結果である。

検算

- $m = 0$ のとき、この系は長さ l の円錐振り子（conical pendulum）であり、公式はおなじみの $\omega^2 = g/(l\cos\alpha)$ を与える。このとき反作用の角は α となる。棒は糸のように、自身の方向に沿って引くのである。
- $M = m$ のとき、棒は O でつり合っているので $\omega = 0$ であり、反作用は鉛直で大きさは $2Mg$ である。どちらの公式もこれと一致する。
- 数値的には、$M = 3$、$m = 1$、$l = 0.7$、$\alpha = 0.6$、$g = 9.8$ とすると、$\omega^2 \approx 8.48$、反作用の角は約 9.71° となる。棒の角度についての運動方程式を、角 α で静止した状態から数値的に追うと角度は α のまま保たれ、また三次元での質点の位置から加速度を計算しても同じ角度が再現される。

よくある間違い

- 棒が質点に及ぼす力は棒の方向を向いていると思い込むこと。実際はそうではない。剛体棒は横向きの力も伝えるのであり、だからこそモーメントを考えるのである。

- m の加速度も軸に向かう向きであり、したがって M の加速度とは反対側を向くことを忘れること。反作用の水平成分は一部打ち消し合い、$M+m$ ではなく $M-m$ となる。
- 重いほうの質点を上に置くこと。トルクの方程式から、これは起こりえないことがわかる。

STEP のその先へ

O のまわりの棒の角運動量は鉛直な回転軸と平行ではないので、系が回転するにつれてその向きが変わる。これを変化させるには偶力が必要であり、軸は、ここで用いた方向に垂直な方向にその偶力を供給している。これは慣性テンソル（inertia tensor）を用いた剛体力学の出発点であり、つり合いの悪い車輪が軸受けの上でぶれる理由を説明するものである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、この話題が丁寧に扱われている。

解答例

STEP II 1988、第 15 問

確率・統計　・　離散一様分布の和

> **STEP II 1988、問 15**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q15

鍵となる考え方

各試験の得点は $\{0, 1, \ldots, m\}$ 上の一様分布（uniform distribution）に従うので、得点の組はどれも等しい確率で現れる。したがって確率は、条件を満たす得点の組の個数を組の総数で割ったものにすぎない。2 科目の場合の個数は単純に数え上げれば求まり、3 科目の場合の個数は 3 科目目の得点で条件付け（conditioning）をして 2 科目の場合の個数を足し合わせれば求まる（これを**畳み込み**（*convolution*）という）。さらに、各試験での対称性（symmetry）$k \mapsto m - k$ を使えば、最も上の範囲はほとんど労せずに得られる。

始める前に一つ注意しておく。問題文に印刷されている 3 科目の公式には誤植（misprint）がある。以下では正しい公式を導き、印刷されたものとどこが異なるかを指摘する。

解答

各試験の得点を X_1, X_2, X_3 とする。試験は互いに独立に採点されるので、これらは独立（independent）であり、それぞれ $\{0, 1, \ldots, m\}$ 上の一様分布に従う。よって順序対 (X_1, X_2) はどれも確率 $(m+1)^{-2}$ をもち、順序付きの 3 つ組はどれも確率 $(m+1)^{-3}$ をもつ。$\{0, \ldots, m\}$ の得点からなる順序対（3 つ組）のうち和が n となるものの個数を $N_2(n)$（$N_3(n)$）と書く。

2 科目の場合

$X_1 = k$ かつ $X_2 = n-k$ で、どちらも $[0, m]$ に入っていなければならないから、

$$\max(0,\, n-m) \le k \le \min(m,\, n).$$

- $0 \le n \le m$ のとき：k は 0 から n まで動くので、$N_2(n) = n+1$ である。
- $m < n \le 2m$ のとき：k は $n-m$ から m まで動くので、$N_2(n) = m-(n-m)+1 = 2m-n+1$ である。

したがって

$$P(X_1+X_2=n) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{(m+1)^2}, & 0 \le n \le m, \\ \dfrac{2m-n+1}{(m+1)^2}, & m < n \le 2m, \end{cases}$$

となる。これが $m < n \le 2m$ に対して求める結果であり、あわせて $0 \le n \le m$ に対する結果も得られた。この分布は「テント」形であり、$n = m$ まで 1 段ごとに 1 ずつ増え、そのあと減少していく。

3 科目の場合

3 科目目の得点で条件付けをする。$X_3 = k$ ならば $X_1 + X_2 = n-k$ でなければならないので、

$$N_3(n) = \sum_{k=0}^{m} N_2(n-k) = \sum_{j=n-m}^{n} N_2(j),$$

となる。ここで $j = n-k$ であり、$j < 0$ または $j > 2m$ のときは $N_2(j) = 0$ とする。

$0 \le n \le m$ の場合。 寄与するのは $j = 0, 1, \ldots, n$ のみであり（負の j は 0 を与える）、これらはすべてテントの上り坂の部分にある：

$$N_3(n) = \sum_{j=0}^{n}(j+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \qquad P(X_1+X_2+X_3=n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2(m+1)^3}.$$

$m < n \le 2m$ の場合。 このとき $1 \le n-m \le m < n \le 2m$ なので、範囲 $j = n-m, \ldots, n$ はテントの頂上をまたいでいる。そこで頂上で分割する：

$$N_3(n) = \sum_{j=n-m}^{m}(j+1) + \sum_{j=m+1}^{n}(2m-j+1).$$

第 1 の和は $n-m+1$ から $m+1$ までの整数の和である：

$$\sum_{j=n-m}^{m}(j+1) = \frac{(m+1)(m+2) - (n-m)(n-m+1)}{2}.$$

第 2 の和では $i = 2m - j + 1$ とおくと、i は $2m - n + 1$ から m まで動く：

$$\sum_{j=m+1}^{n} (2m - j + 1) = \frac{m(m+1) - (2m-n)(2m-n+1)}{2}.$$

4 つの積を展開すると、

$$\begin{aligned} 2N_3(n) &= (m^2 + 3m + 2) - (n^2 - 2mn + m^2 + n - m) \\ &\quad + (m^2 + m) - (4m^2 - 4mn + n^2 + 2m - n) \\ &= 6mn - 3m^2 - 2n^2 + 3m + 2. \end{aligned}$$

等確率の $(m+1)^3$ 通りの 3 つ組の個数で割って、

$$P(X_1 + X_2 + X_3 = n) = \frac{6mn - 3m^2 - 2n^2 + 3m + 2}{2(m+1)^3}, \qquad m < n \le 2m.$$

考えてみよう これは問題文に印刷された公式とは異なる。どちらが正しいのだろうか？

印刷された公式では $-3m^2$ の代わりに $-4m^2$、$(m+1)^3$ の代わりに $(m+1)^2$ となっているが、どちらも誤植である。具体例を一つ調べれば決着がつく。$m = 1$、$n = 2$ のとき、$\{0, 1\}$ から選んだ 3 つの得点の和が 2 となるのは、等確率の 8 通りのうちちょうど 3 通りなので、確率は $\frac{3}{8}$ である。我々の公式は $\frac{12-3-8+3+2}{16} = \frac{3}{8}$ を与えるが、印刷された公式は $\frac{12-4-8+3+2}{8} = \frac{5}{8}$ を与える。そもそも分母は等確率の結果の個数なので、いずれにせよ $(m+1)^3$ でなければならない。さらなる確認として、$n = m$ のとき中央の公式は $\frac{(m+1)(m+2)}{2(m+1)^3}$ を与え、第 1 の場合と一致する。このとき 2 つの和がつながるので、これは当然そうなるべきである。

$2m < n \le 3m$ の場合。 各得点 X_i を $m - X_i$ で置き換える。これもまた $\{0, \ldots, m\}$ 上の一様分布に従い、新しい 3 つの得点も依然として独立であるから、

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 + X_3 = n) &= P\big((m - X_1) + (m - X_2) + (m - X_3) = n\big) \\ &= P(X_1 + X_2 + X_3 = 3m - n). \end{aligned}$$

$2m < n \le 3m$ のとき $0 \le 3m - n < m$ なので、n を $3m - n$ に置き換えて第 1 の場合を適用できる：

$$P(X_1 + X_2 + X_3 = n) = \frac{(3m - n + 1)(3m - n + 2)}{2(m+1)^3}, \qquad 2m < n \le 3m.$$

（同じ対称性を、$3m - n$ の代わりに $2m - n$ として用いれば、$n \le m$ に対する 2 科目の結果から $n > m$ に対する結果が得られる。）

検算

- 小さい場合：$m = 1$ のとき、3 つの公式は $n = 0, 1, 2, 3$ に対してそれぞれ $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$ を与える。これらの和は 1 であり、公平な硬貨を 3 回投げたときの二項分布（binomial distribution）と一致する。
- 中央の公式は $n \mapsto 3m - n$ に関して対称である：$6mn - 3m^2 - 2n^2$ において n を $3m - n$ に置き換えても値は変わらない。対称性の議論から、そうでなければならない。
- 1 から 8 までのすべての m について全数列挙を行うと、5 つの公式はすべて個数と完全に一致する。たとえば $m = 10$、$n = 15$ ではどちらの方法でも $\frac{91}{1331}$ となる。

よくある間違い

- $N_2(j)$ に 2 通りの公式があることを忘れ、中央の範囲で和の最初から最後まで $j + 1$ を使ってしまう。
- 印刷された中央の公式にたどり着こうとして、計算を「無理やり」合わせてしまう。丁寧な計算が与えられた答えと食い違ったら、自分を疑う前にごく小さな場合で試してみるとよい。

STEP のその先へ

独立な確率変数の和の分布は、それぞれの分布の**畳み込み**であり、我々の和 $\sum_k N_2(n-k)$ はまさにそれである。確率母関数（probability generating function）を使えば、この計算は機械的になる：個数 $N_3(n)$ は $(1 + t + \cdots + t^m)^3$ における t^n の係数である。試験の科目数を増やしていくと、分布の形はテントから滑らかな山へと変わり、正規曲線（normal curve）に近づいていく（中心極限定理（central limit theorem））。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、母関数と中心極限定理をちょうどよい水準で扱っている。

解答例

STEP II 1988、第 16 問

確率・統計 ・ 正規分布

STEP II 1988、問 16

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s2-q16

鍵となる考え方

根に関するすべては、ただ一つの確率変数（random variable）B によって決まる。したがって、X_1 と X_2 についての問いはどれも、B がどの区間にあるかという問いに置き換えればよい。判別式（discriminant）を見れば根が実数になる条件がわかり、解と係数の関係（Vieta's formulas）（和 $-2B$、積 1）を使えば (i) と (ii) の条件は容易に言い換えられる。そのあとは、どの答えも標準正規（standard normal）確率変数についての条件付き確率（conditional probability）または条件付き期待値（conditional expectation）であり、期待値の計算には短い積分が一つ必要なだけである。

解答

以下では一貫して $B \sim \mathrm{N}(0,1)$ とし、その確率密度関数（density）を $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-z^2/2}$、分布関数（distribution function）を Φ とする。根が実数であるという事象を R とおく。

実数解

$X^2 + 2BX + 1$ の判別式は $4B^2 - 4$ であるから、根が実数になるのはちょうど $B^2 \geq 1$、すなわち $|B| \geq 1$ のときである。正規分布の対称性により、

$$\mathrm{P}(R) = \mathrm{P}(|B| \geq 1) = 2\big(1 - \Phi(1)\big) = 2(1 - 0.84134) = 0.31731\ldots \approx 0.317.$$

（重解の場合 $|B| = 1$ を含めるかどうかは結果に影響しない。その確率は 0 だからである。）

根が実数のとき、根は

$$X_{1,2} = -B \pm \sqrt{B^2 - 1}, \qquad X_1 + X_2 = -2B, \qquad X_1 X_2 = 1.$$

小問 (i)

考えてみよう 「両方の根が $\frac{1}{5}$ より大きい」を B についての条件にどう言い換えればよいか。

まず、両方の根が正でなければならない。積は $1 > 0$ なので二つの根は同符号であり、その符号は和 $-2B$ の符号に等しい。よって $B < 0$ が必要であり、R と合わせると $B \le -1$ となる。$b = -B \ge 1$ とおくと、根は $b \pm \sqrt{b^2 - 1}$ であり、どちらも正である。

積が 1 であるから、小さい方の根は大きい方の根の逆数である：

$$b - \sqrt{b^2 - 1} = \frac{1}{b + \sqrt{b^2 - 1}}.$$

したがって、小さい方の根が $\frac{1}{5}$ より大きいことは、大きい方の根が 5 より小さいことと同値であり、このとき大きい方の根も自動的に $\frac{1}{5}$ より大きい。よって条件は

$$\sqrt{b^2 - 1} < 5 - b.$$

これには $b < 5$ が必要であり、$1 \le b < 5$ では両辺とも非負なので、不等式の向きを変えずに両辺を 2 乗できる：

$$b^2 - 1 < 25 - 10b + b^2 \iff 10b < 26 \iff b < 2.6.$$

（$2.6 < 5$ なので、$b \ge 5$ の値はいずれにせよ条件を満たさない。）以上より、根が実数であるという条件のもとで、両方の根が $\frac{1}{5}$ より大きいのはちょうど $-2.6 < B \le -1$ のときであり、

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\big(X_1, X_2 > \tfrac{1}{5} \,\big|\, R\big) &= \frac{\mathrm{P}(-2.6 < B \le -1)}{\mathrm{P}(|B| \ge 1)} = \frac{\Phi(2.6) - \Phi(1)}{2\big(1 - \Phi(1)\big)} \\ &= \frac{0.99534 - 0.84134}{0.31731} = 0.4853\ldots \approx 0.485. \end{aligned}$$

小問 (ii)

$|X_1 + X_2| = 2|B|$ であるから、求めるものは $\mathrm{E}\big(2|B| \,\big|\, |B| \ge 1\big)$ である。事象を条件とする条件付き期待値は、その事象の上で積分し、その事象の確率で割ればよい：

$$\mathrm{E}\big(|B| \,\big|\, |B| \ge 1\big) = \frac{1}{\mathrm{P}(|B| \ge 1)} \int_{|z| \ge 1} |z|\, \phi(z)\, \mathrm{d}z = \frac{2\int_1^\infty z\, \phi(z)\, \mathrm{d}z}{2\big(1 - \Phi(1)\big)},$$

ここで ϕ の対称性を用いた。$z\phi(z)$ は $\phi(z)$ の導関数にマイナスをつけたものなので、この積分は容易である：

$$\int_1^\infty z\phi(z)\,\mathrm{d}z = \Big[-\phi(z)\Big]_1^\infty = \phi(1) = \frac{\mathrm{e}^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} = 0.24197\ldots$$

したがって

$$\mathrm{E}\big(|X_1+X_2|\,\big|\,R\big) = \frac{2\phi(1)}{1-\Phi(1)} = \frac{2\times 0.24197}{0.15866} = 3.050\ldots \approx 3.05.$$

検算

- $B=-2.6$ を試すと、方程式は $X^2-5.2X+1=0$ となり、根はちょうど 5 と $\frac{1}{5}$ である。これは (i) の境界の場合である。
- R の上では $2|B|\geq 2$ なので、(ii) の答えは 2 より大きくなければならない。実際そうなっており、値ももっともらしい。1 より先の正規分布の裾は薄いので、$|B|$ はたいてい 1 をわずかに上回る程度である（その条件付き平均は約 1.53）。
- B として標準正規分布に従う値を 2×10^6 個生成したシミュレーション（simulation）では 0.3177、0.4855、3.049 が得られ、0.317、0.485、3.05 と一致した。

よくある間違い

- 条件付けを忘れること。(i) と (ii) では $\mathrm{P}(R)=0.317$ で割らなければならない。条件なしの確率 $\Phi(2.6)-\Phi(1)=0.154$ は答えではない。
- (i) で $B\geq 1$ を含めてしまうこと。このとき両方の根は負なので、どちらも $\frac{1}{5}$ より大きくはない。
- $\mathrm{E}|X_1+X_2|$ を $|\mathrm{E}(X_1+X_2)|$ として計算してしまうこと。後者は対称性により 0 である。

STEP のその先へ

量 $\phi(1)/(1-\Phi(1))$ は**切断**正規分布（truncated normal distribution）の平均であり、比 $\phi(a)/(1-\Phi(a))$ は逆ミルズ比（inverse Mills ratio）として知られている。これは統計学（たとえば打ち切りデータ（censored data）のモデル）や、正規分布のハザード率（hazard rate）として信頼性理論（reliability theory）に現れる。係数がランダムな多項式は平均していくつの実数解をもつか、といったランダム多項式（random polynomials）に関する問いは、確率論の中で意外なほど豊かな分野をなしている。条件付き期待値

と連続分布については、Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）、または Blitzstein と Hwang による *Introduction to Probability*（確率論入門）を参照するとよい。

解答例

STEP III 1988、第 1 問

純粋数学 ・ 曲線の概形と評価

> **STEP III 1988、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q1

鍵となる考え方

グラフの概形については、因数 $x^2\mathrm{e}^{-x}$ が決して負にならないので、y の符号は $1+x$ だけで決まる。これに加えて、導関数を一度計算し、両端での振る舞いと $x=-1$ の近くでの振る舞いを調べれば、グラフの形全体がわかる。積分については、x^2 を $1+x$ で割るのが最もすっきりした方法である。そうすると被積分関数（integrand）の大部分は積分すると 0 になり、残った部分は二つの簡単な評価ではさみ込むのが容易である。

解答

グラフ

$f(x)=\dfrac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{1+x}$ とおく。これは $x\neq -1$ であるすべての x で定義される。

符号と零点。 $x^2\geq 0$ かつ $\mathrm{e}^{-x}>0$ であるから、$x<-1$ では $f(x)<0$、$x>-1$ では $f(x)\geq 0$ であり、$f(x)=0$ となるのは $x=0$ のときだけである。因数 x^2 があるため、曲線は原点で x 軸を横切るのではなく、x 軸に接する。

漸近線と両端での振る舞い。

- $x\to -1$ のとき、分子は $\mathrm{e}>0$ に、分母は 0 に近づくので、$x=-1$ は垂直漸近線（vertical asymptote）であり、$x\to -1^-$ のとき $f\to -\infty$、$x\to -1^+$ のとき $f\to +\infty$ となる。
- $x\to +\infty$ のとき、指数関数はべき関数よりも速く増大するので、$f(x)\approx x\mathrm{e}^{-x}\to 0^+$ である。したがって $y=0$ は右側での漸近線であり、曲線は上から近づく。

- $x \to -\infty$ のとき、$\dfrac{x^2}{1+x} \approx x \to -\infty$ かつ $\mathrm{e}^{-x} \to +\infty$ であるから、$f(x) \to -\infty$ となり、その減少は非常に速い。

停留点。商の微分法（quotient rule）により、

$$f'(x) = \frac{(2x - x^2)\mathrm{e}^{-x}(1+x) - x^2\mathrm{e}^{-x}}{(1+x)^2} = \frac{\mathrm{e}^{-x}\left(2x + x^2 - x^3 - x^2\right)}{(1+x)^2}$$
$$= \frac{x\left(2 - x^2\right)\mathrm{e}^{-x}}{(1+x)^2}.$$

よって $f'(x) = 0$ となるのは $x = 0$ と $x = \pm\sqrt{2}$ のときである。因数 e^{-x} と $(1+x)^2$ は正であるから、f' の符号は $x(2 - x^2)$ の符号と一致する。

区間	$x < -\sqrt{2}$	$-\sqrt{2} < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < \sqrt{2}$	$x > \sqrt{2}$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$

これから次のことがわかる。

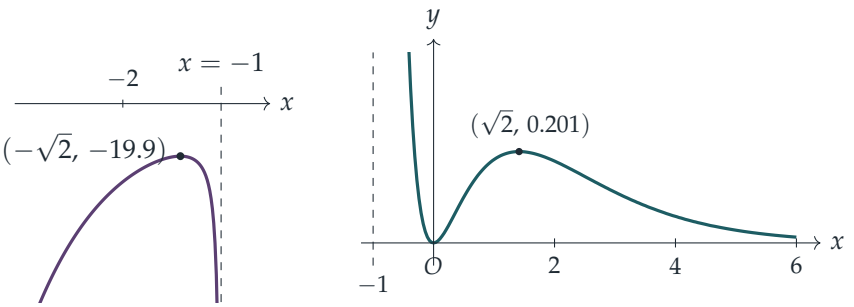
- $x = \sqrt{2}$ で極大（local maximum）となり、そのとき $y = \dfrac{2\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2}-1)\mathrm{e}^{-\sqrt{2}} \approx 0.201$ である。
- 原点で極小（local minimum）となる。
- 左側の枝の $x = -\sqrt{2}$ で極大となり、そのとき $y = \dfrac{2\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}{1-\sqrt{2}} = -2(\sqrt{2}+1)\mathrm{e}^{\sqrt{2}} \approx -19.9$ である。

考えてみよう 完全に軸より下にある枝が、どうして極大をもつことができるのだろうか？

$x < -1$ では、曲線は $x \to -\infty$ のときの $-\infty$ から上がってきて、漸近線 $x = -1$ のところで再び $-\infty$ へと下がっていく。したがって、その途中のどこかで向きを変えなければならない。最も高い点は $x = -\sqrt{2}$ にあり、それでも軸よりかなり下にある。この枝は、軸の下にぶら下がった、高さ約 -19.9 の逆さまの「こぶ」である。

右側では、曲線は $x = -1$ のすぐ右の $+\infty$ から原点の 0 まで下がり、$x = \sqrt{2}$ で小さな極大まで上がったあと、0 へと減衰していく。原点の近くでは下に凸（concave up）、極大点では上に凸（concave down）であるから、$x = \sqrt{2}$ の両側に変曲点（point of inflection）がある（数値的には $x \approx 0.35$ と $x \approx 2.5$ の付近である）。概形を描くだけなら、その正確な位置は必要ない。

二つの枝は縦方向のスケールがまったく異なるので、別々に描く。左側では y は約 -70 まで下がる。右側では、極大値 0.2 が見えるように y 方向のスケールを引き伸ばしてある。



積分

$I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2 \mathrm{e}^{-x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$ とおく。x^2 を $1+x$ で割ると、

$$\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}.$$

ここで $\displaystyle\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$（$u = x$ として部分積分（integration by parts）を行う）、および $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$ であるから、最初の二つの項の寄与は $1 - 1 = 0$ となり、

$$I = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

（三つの積分はいずれも収束（converge）するので、積分をこのように分けてよい。）

$x > 0$ では $0 < \dfrac{1}{1+x} < 1$ であるから、

$$0 < \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x} < \mathrm{e}^{-x} \qquad (x > 0).$$

この不等式は区間全体で等号なしで成り立ち、関数は連続であるから、積分しても等号なしの不等式のままである。

$$0 < I < \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1.$$

よって、求められていたとおり I は 0 と 1 の間にある。

別解。割り算を省くこともできる。$x > 0$ では $\dfrac{x^2}{1+x} < \dfrac{x^2}{x} = x$ であるから、$0 < f(x) < x\mathrm{e}^{-x}$ となり、$0 < I < \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$ が得られる。それでも割り算の方法は知っておく価値がある。I が正確にどこから来るのかを示してくれるからである。

検算

- 無作為に選んだ 1000 個の点で f を数値的に微分した結果は、$f'(x) = x(2 - x^2)\mathrm{e}^{-x}/(1+x)^2$ と一致する。

- $[0, 60]$ 上でシンプソンの公式（Simpson's rule）を用いると $I \approx 0.59635$ が得られ、$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$ からも同じ値が得られる。これは 0 と 1 の間に余裕をもって収まっている。
- 概形からの大まかな見積もり：$x > 0$ では、曲線は高さ約 0.2 のこぶであり、$x = 6$ までにはほとんど消えている。その高さと底辺をもつ三角形の面積は約 0.6 であり、0.596 と整合する。

よくある間違い

- $x = -\sqrt{2}$ の停留点（stationary point）が「もう一方の」枝にあるために見落とすこと、あるいはそこで y が負であるという理由で極小と判断してしまうこと。
- 曲線が原点で軸を横切ると述べること。二重の因数 x^2 のため、曲線は軸に接する。
- $\mathrm{e}^{-x} \leq 1$ だけから $I < 1$ を主張すること。その評価から得られるのは $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x$ であり、これは発散（diverge）する。

STEP のその先へ

I の値は $\mathrm{e}\,E_1(1) \approx 0.5963$ である。ここで $E_1(t) = \int_t^\infty \mathrm{e}^{-u}u^{-1}\,\mathrm{d}u$ は指数積分（exponential integral）である。この数はゴンペルツ定数（Gompertz constant）として知られている。これは初等関数（elementary functions）を用いて表すことができず、そのためこの問題では評価だけが求められているのである。値を求められない積分を、値を求められる積分と比較することによって見積もるのは、解析学（analysis）における中心的な技能である（広義積分（improper integral）に対する「比較判定法（comparison test）」）。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）では、これが丁寧に展開されている。

解答例

STEP III 1988、第 2 問

純粋数学 ・ 線形漸化式

STEP III 1988、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s3-q2

鍵となる考え方

定数係数の線形漸化式（linear recurrence）は 2 次式のようにふるまう。べき x^n がこれを満たすのは、x が特性方程式（auxiliary equation）の根であるとき、かつそのときに限る。漸化式は最初の 2 項が決まればすべての項を決定するので、u_0 と u_1 を合わせるだけで唯一の解が得られる。最後の小問は係数が変数を含むが、因子 $(n+1)$、$(n+2)$、$(n+3)$ を見れば、それらの積で両辺を割ればよいことがわかる。そのうえで簡単な置き換えをすると、最初の種類の定数係数漸化式に帰着する。

解答

（問題文では漸化式の最高次の係数が α と印刷されている。2 次式 ax^2+bx+c と対応させれば、これは明らかに a の誤植であり、そのように読むことにする。）2 次方程式が 2 つの根をもつので、これは確かに 2 次式であり、$a \neq 0$ である。

この式が漸化式を満たすこと

任意の定数 A、B に対して $u_n = A\alpha^n + B\beta^n$ とおく。すると

$$\begin{aligned} au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n &= A\alpha^n\left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right) + B\beta^n\left(a\beta^2 + b\beta + c\right) \\ &= A\alpha^n \cdot 0 + B\beta^n \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

となる。α と β は $ax^2+bx+c=0$ の根だからである。よって漸化式はすべての $n \geq 0$ で成り立つ。

与えられた特定の A と B を用いると、この式は初期値も再現する。$n=0$ のとき

$$A+B=\frac{(u_1-\beta u_0)-(u_1-\alpha u_0)}{\alpha-\beta}=\frac{(\alpha-\beta)u_0}{\alpha-\beta}=u_0,$$

であり、$n=1$ のとき

$$A\alpha+B\beta=\frac{\alpha u_1-\alpha\beta u_0-\beta u_1+\alpha\beta u_0}{\alpha-\beta}=\frac{(\alpha-\beta)u_1}{\alpha-\beta}=u_1.$$

である。根が相異なるので、$\alpha-\beta$ で割ってよい。

これが唯一の解であること

考えてみよう 正確には何について帰納法を用いているのか。また、なぜ2項ずつ扱う必要があるのか。

$u_0, u_1, u_2, \ldots$ を漸化式を満たす任意の数列とし、その u_0 と u_1 から上のように A、B を作る。$w_n=A\alpha^n+B\beta^n$ とおく。n についての数学的帰納法（induction）により、次の命題を証明する。

$$P(n):\quad u_n=w_n \text{ かつ} u_{n+1}=w_{n+1}.$$

新しい項はそれぞれ直前の2項に依存するので、命題は連続する2項を含んでいなければならない。

基底段階。 $P(0)$ は $u_0=w_0$ かつ $u_1=w_1$ を主張するが、これは上で確かめたとおりである。

帰納段階。 $P(n)$ を仮定する。(u_n) と (w_n) はともに漸化式を満たし、$a\neq 0$ であるから

$$u_{n+2}=-\frac{bu_{n+1}+cu_n}{a}=-\frac{bw_{n+1}+cw_n}{a}=w_{n+2}.$$

これと $u_{n+1}=w_{n+1}$ を合わせたものが $P(n+1)$ である。

したがって $P(n)$ はすべての $n\geq 0$ で成り立ち、すべての n について $u_n=A\alpha^n+B\beta^n$ である。漸化式のどの解もこの形をしており、A と B は u_0 と u_1 によって決まる。この式が唯一の解を与える。

数列 v_n

どの係数も、3つの因子 $(n+1)$、$(n+2)$、$(n+3)$ のうち2つの積であり、それぞれ異なる1つが欠けている。$n\geq 0$ で決して0にならない $(n+1)(n+2)(n+3)$ で割ると

$$8\frac{v_{n+2}}{n+3}-2\frac{v_{n+1}}{n+2}-\frac{v_n}{n+1}=0.$$

を得る。どの分数も $v_k/(k+1)$ の形をしている。そこで

$$w_n=\frac{v_n}{n+1},$$

とおくと、漸化式は

$$8w_{n+2} - 2w_{n+1} - w_n = 0, \qquad w_0 = 0, \quad w_1 = \tfrac{1}{2}.$$

となる。特性方程式は $8x^2 - 2x - 1 = 0$、すなわち $(2x-1)(4x+1) = 0$ である。その根 $\alpha = \frac{1}{2}$ と $\beta = -\frac{1}{4}$ は相異なる実数なので、$\alpha - \beta = \frac{3}{4}$ として最初の小問が適用できる。

$$A = \frac{w_1 - \beta w_0}{\alpha - \beta} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}, \qquad B = \frac{w_1 - \alpha w_0}{\beta - \alpha} = \frac{1/2}{-3/4} = -\frac{2}{3}.$$

よって $w_n = \frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)$ である。最初の小問から、これが w_n として、したがって v_n としても唯一の可能性であることもわかる。$n+1$ を掛けて戻すと

$$\boxed{v_n = \frac{2(n+1)}{3}\left(\frac{1}{2^n} - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

検算

この式から $v_0 = \frac{2}{3}(1-1) = 0$、$v_1 = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 1$ となり、条件どおりである。元の漸化式を $n = 0$ と $n = 1$ で手計算すると、$16v_2 = 6v_1 + 6v_0$ より $v_2 = \frac{3}{8}$、続いて $48v_3 = 16v_2 + 12v_1$ より $v_3 = \frac{3}{8}$ を得る。式もこれと一致する：$v_2 = 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) = \frac{3}{8}$、$v_3 = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{64}\right) = \frac{3}{8}$。さらに、$n$ が 41 までの範囲で有理数演算により式が漸化式と厳密に一致することを確かめ、最初の小問についても数百通りのランダムな 2 次式と初期値で確かめた。

よくある間違い

- 帰納法を 1 項ずつ行ってしまう。$u_n = w_n$ だけがわかっていても、u_{n+1} については何も導けない。仮定は連続する 2 項を含んでいなければならない。
- a で割ってよい理由（方程式が 2 つの根をもつので 0 でない）と、$\alpha - \beta$ で割ってよい理由（根が相異なる）を述べ忘れる。
- 最初の小問を v_n に直接適用してしまう。その係数は n に依存するので、最初の小問が適用できるのは尺度を変えた数列 $w_n = v_n/(n+1)$ のほうである。

STEP のその先へ

2 階線形漸化式の解全体は 2 次元のベクトル空間（vector space）をなし、α^n、β^n はその基底（basis）である。これは解 $e^{\alpha x}$ と $e^{\beta x}$ をもつ微分方程式（differential

equation）$ay'' + by' + cy = 0$ とまったく平行している。2×2 行列 M を用いて漸化式を $\mathbf{u}_{n+1} = M\mathbf{u}_n$ と書くと、α と β が M の固有値（eigenvalue）であることがわかり、重根は対角化（diagonalise）できない行列に対応する。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）はまさにこのように固有値を通して差分方程式を扱っており、Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式入門）は微分方程式について平行する理論を展開している。

解答例

STEP III 1988、第 3 問

純粋数学 ・ 複素平面上の軌跡

> **STEP III 1988、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q3

鍵となる考え方

写像 $w = (z+\mathrm{i})/(z-\mathrm{i})$ は逆向きにたどることができる。z について解くと $z = \mathrm{i}(w+1)/(w-1)$ となるので、z に関するどんな条件も w に関する条件に書き換えられる。円の場合は、代わりにパラメータ表示（parametrisation）が役に立つ。このとき $z-\mathrm{i}$ は単に $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ となるからである。実数の場合と純虚数の場合は、絶対値（modulus）と偏角（argument）で考えるとよい。実数 z は i と $-\mathrm{i}$ から等距離にある。

解答

パラメータ表示

曲線 $|z-\mathrm{i}| = 2$ は中心 i、半径 2 の円であるから、

$$z = \mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \qquad -\pi < \theta \leq \pi,$$

あるいは $z = x + \mathrm{i}y$ とおけば $x = 2\cos\theta$、$y = 1 + 2\sin\theta$ である。

逆写像（inverse map）も用いる。$w(z-\mathrm{i}) = z+\mathrm{i}$ から $z(w-1) = \mathrm{i}(w+1)$ が得られるので、$w \neq 1$ のとき

$$z = \frac{\mathrm{i}(w+1)}{w-1}.$$

$w = 1$ を与える z は存在しない。そのためには $z+\mathrm{i} = z-\mathrm{i}$ が必要になるからである。$w \neq 1$ であるどの w も、ちょうど 1 つの $z \neq \mathrm{i}$ から得られる。

小問 (i)

パラメータ表示を代入すると、$z+\mathrm{i}=2\mathrm{i}+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$、$z-\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ であるから、

$$w=\frac{2\mathrm{i}+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=1+\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/2-\theta)}.$$

θ が1周するとき、$\pi/2-\theta$ もすべての角をちょうど1回ずつとる。よって w は円

$$|w-1|=1,$$

すなわち中心1、半径1の円の**全体**を描く。たとえば $z=3\mathrm{i}$ からは $w=2$ が、$z=-\mathrm{i}$ からは $w=0$ が得られる。点 $w=1$ はこの円上にないが、これは $w=1$ が決してとられないことと整合している。

小問 (ii)

$z=x$ が実数ならば、i からの距離と $-\mathrm{i}$ からの距離は等しいので、$|x+\mathrm{i}|=|x-\mathrm{i}|$ であり、

$$|w|=\frac{|x+\mathrm{i}|}{|x-\mathrm{i}|}=1.$$

具体的には、分母と分子に $x+\mathrm{i}$ を掛けて

$$w=\frac{(x+\mathrm{i})^2}{x^2+1}=\frac{x^2-1}{x^2+1}+\mathrm{i}\,\frac{2x}{x^2+1}.$$

考えてみよう 単位円上のすべての点に到達するだろうか？

いや、完全にではない。$|w|=1$ かつ $w\neq 1$ である任意の w をとり、$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ と書く。すると

$$z=\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}+1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}-1}=\mathrm{i}\,\frac{2\cos(\phi/2)}{2\mathrm{i}\sin(\phi/2)}=\cot\tfrac{\phi}{2},$$

となり、これは実数である。したがってそのような点はすべてとられるが、$w=1$ だけは決してとられない。これは $x\to\pm\infty$ のときの極限である。軌跡（locus）は単位円 $|w|=1$ から1点 $w=1$ を除いたものである。たとえば $x=0$ からは $w=-1$ が、$x=1$ からは $w=\mathrm{i}$ が得られる。

小問 (iii)

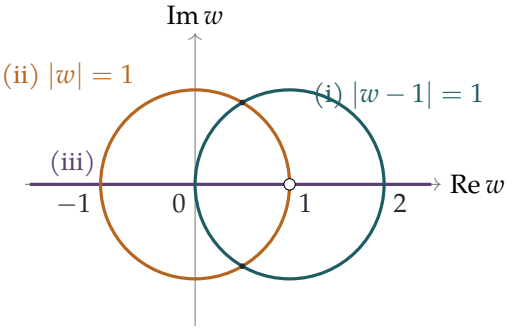
y を実数、$y\neq 1$ として $z=\mathrm{i}y$ ならば、

$$w=\frac{\mathrm{i}(y+1)}{\mathrm{i}(y-1)}=\frac{y+1}{y-1}=1+\frac{2}{y-1},$$

となり、これは実数である。y が1以外の実数全体を動くとき、分数 $2/(y-1)$ は0でないすべての実数値をとるので、w は1以外のすべての実数値をとる。（逆に、$w=u$

が実数で $u \neq 1$ ならば、$z = \mathrm{i}(u+1)/(u-1)$ は純虚数である。）軌跡は実軸から点 $w = 1$ を除いたものである。なお $z = 0$ からは $w = -1$ が得られる。「純虚数」が $z = 0$ を含まないと解釈するならば、$w = -1$ も除かれる。

図



青緑色の円が (i) の軌跡、琥珀色の円（点 1 を除く）が (ii) の軌跡、紫色の軸（点 1 を除く）が (iii) の軌跡である。白抜きの点は決してとられない $w = 1$ を表す。

検算

- (i) の円は実軸と $z = \pm\sqrt{3}$ で交わる。これらは青緑色の円と琥珀色の円の両方の上の点に写るはずであり、実際 $w(\sqrt{3}) = (\sqrt{3}+\mathrm{i})^2/4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \approx 0.5 + 0.866\mathrm{i}$ は $|w| = 1$ 上にも $|w-1| = 1$ 上にもある。
- (i) の円は虚軸と $3\mathrm{i}$ および $-\mathrm{i}$ で交わり、これらは 2 と 0 に写る。これはちょうど青緑色の円が実軸と交わる点である。
- 各軌跡上の 10^4 個のランダムな点で数値的に確かめたところ、$|w-1| = 1$、$|w| = 1$、$\mathrm{Im}\, w = 0$ が成り立ち、逆写像によって z が復元されることも確認できた。

よくある間違い

- (ii) と (iii) で $w = 1$ が欠けていることを忘れる。これは「$z = \infty$」に対応する。
- (i) で x と y に分けて展開し、計算の中で迷子になる。パラメータ表示を使えば $z - \mathrm{i}$ は 1 つの指数関数になり、残りは 1 行で済む。

STEP のその先へ

写像 $z \mapsto (z+\mathrm{i})/(z-\mathrm{i})$ はメビウス変換（Möbius transformation）である。このような写像は常に円と直線を円と直線に写す。これはまさに3つの小問すべてで見いだしたことである。メビウス変換はリーマン球面（Riemann sphere）の上で考えるのが最もわかりやすい。そこでは「無限遠点」を付け加えることで $w=1$ の穴が埋まる。その仲間であるケイリー変換（Cayley transform）$z \mapsto (z-\mathrm{i})/(z+\mathrm{i})$ は、上半平面を単位円板の上に写す。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）には、これらすべてについての美しい幾何学的な解説がある。

解答例

STEP III 1988、第 4 問

純粋数学 ・ 弧長の最適化

STEP III 1988、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s3-q4

鍵となる考え方

道路の全長を関数 $L(b)$ として表し、微分する。鉛直面内にある二つの区間は地表に沿って通らなければならないので、その長さは放物線（parabola）の弧長（arc length）である。半円の長さは πb である。弧長を表す積分をその下端について微分するのに積分計算はまったく必要なく、$L'(b)$ の符号によってすべてが決まる。

（問題文に印刷された断面の式では左辺が $x=$ となっているが、もちろん $z=$ と読むべきである。）

解答

長さを立式する

軸からの距離が b の地点における丘の高さを $h(b)=(a^2-b^2)/(2a)$ とおく。道路は地面の上になければならないので、(x,z) 平面内で $(-R,0)$ から $(-b,h(b))$ に至る経路は一通りしかない。すなわち、$x=-R$ から $x=-a$ までは平らな平面上を通り、続いて $x=-a$ から $x=-b$ まで放物線を登る。区間 (iii) はこれを鏡映したものである。

丘の上では $z=(a^2-x^2)/(2a)$ であるから $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{x}{a}$ となり、$x=b$ から $x=a$ までの弧長は

$$\int_b^a \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x.$$

である。半円 (ii) は高さ $h(b)$ にある水平な半径 b の半円である（$(\pm b,h(b))$ を通る丘の緯線にあたる）から、その長さは πb である。したがって

$$L(b)=2(R-a)+2\int_b^a \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x+\pi b,\qquad 0\le b\le a.$$

この式は $b = 0$ の場合（半円がなく、道路は頂上をまっすぐ越える）や $b = a$ の場合（道路は丘のふもとを回る）も含んでいる。

最小化する

微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）により、下端について微分すると、その点での被積分関数にマイナスを付けたものが得られる：

$$L'(b) = \pi - 2\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}.$$

考えてみよう 停留点（stationary point）はどこにあるか。そしてそれは許される範囲にあるか。

$L'(b) = 0$ となるには $1 + b^2/a^2 = \pi^2/4$、すなわち $b = \frac{a}{2}\sqrt{\pi^2 - 4} \approx 1.21a$ でなければならない。これは a より大きいので、許される範囲 $0 \le b \le a$ の外にある。実際、$0 \le b \le a$ に対して

$$2\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \le 2\sqrt{2} \approx 2.83 < \pi,$$

が成り立つので、区間全体で $L'(b) > 0$ である。L は狭義単調増加であり、最小値は左端点 $b = 0$ でとる。

助言： $b = 0$ とせよ。道路は丘の一方の側をまっすぐ登り、反対側をまっすぐ下るべきであり、半円の回り道をする必要はない。

どれだけ短くなるか

参考までに、原始関数（antiderivative）は

$$\int \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} + \frac{a}{2}\sinh^{-1}\frac{x}{a} + C,$$

である（$x = a\sinh t$ と置換する）。よって

$$L(0) = 2(R - a) + a\left(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\right) \approx 2(R - a) + 2.296a,$$

一方、ふもとを回ると $L(a) = 2(R - a) + \pi a \approx 2(R - a) + 3.142a$ となる。頂上を越えれば約 $0.85a$ 短くなる。

検算

- 答えは R によらない。当然そうあるべきである。平らな区間の長さの合計は、b がいくつであっても $2(R - a)$ だからである。

- 大まかな妥当性の確認：丘の高さは $a/2$、幅は $2a$ しかないので、丘を越えても直線距離 $2a$ からそれほど長くはならないはずである。一方、ふもとを回る半円の長さは πa である。実際、$2.296a$ は $2a$ と πa の間にある。
- 数値的には、$a = 1$、$R = 3$ として $[0, 1]$ の 201 個の点で $L(b)$ を数値積分（quadrature）により計算すると、最小値は $b = 0$ で得られる。また $L'(a) = \pi - 2\sqrt{2} \approx 0.313$ も依然として正である。

よくある間違い

- $L'(b) = 0$ とおいて $b = \frac{a}{2}\sqrt{\pi^2 - 4}$ と答え、それが a より大きいことに気づかない。
- 区間 (i) と (iii) に直線（弦（chord））の長さを用いる。それでは丘の中をトンネルで貫くことになってしまう。
- 閉区間（closed interval）における最小値が端点でとられることもあるのを忘れる。

STEP のその先へ

曲面上の最短経路を求めることは**測地線**（geodesics）の問題であり、変分法（calculus of variations）や微分幾何学（differential geometry）の最初の講義で出会う。回転面（surface of revolution）上では、クレロー（Clairaut）の関係式が測地線を見事に記述する。王の道路の族は、この問題を一つのパラメータで切り取った小さな断面にすぎない。ここで用いた解析学の二つの事実、すなわち積分をその端について微分すること、および閉区間上の連続関数は最小値をとるという事実は、Abbott, *Understanding Analysis* で丁寧に証明されている。

解答例

STEP III 1988、第 5 問

純粋数学 ・ 漸化式とローン

STEP III 1988、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s3-q5

鍵となる考え方

1 日のうちに負債がどう変化するかを書き出してみる。毎日、負債は $1+k$ 倍され（利子（interest））、その後で一定額が加えられる（掘削費用）か差し引かれる（収入）。$S_n = (1+k)S_{n-1} +$ 定数 という形の漸化式（recurrence）は、展開すると等比級数（geometric series）になる。最後の小問は結局、ひとつの比較に帰着する。すなわち、トンネルが開通した時点で、1 日の収入は負債にかかる利子より大きいか、という比較である。

解答

トンネル掘削中の負債

利率 $100k\%$ とは、負債 $£S$ に対する 1 日の利子が $£kS$ であることを意味する。S_n を第 n 日の終わりにおける負債（単位はポンド）とし、$S_0 = 0$ とする。$n \le T$ である第 n 日の終わりに、会社は掘削のために c を、利子のために kS_{n-1} を借りるので、

$$S_n = S_{n-1} + kS_{n-1} + c = (1+k)S_{n-1} + c.$$

$S_0 = 0$ から始めてこれを繰り返し用いると、

$$\begin{aligned} S_n &= c + (1+k)S_{n-1} \\ &= c + c(1+k) + (1+k)^2 S_{n-2} \\ &= \cdots = c[1 + (1+k) + (1+k)^2 + \cdots + (1+k)^{n-1}]. \end{aligned}$$

これは項数 n、公比（common ratio）$1+k \neq 1$（$k>0$ より）の等比級数であるから、

$$S_n = \frac{c[(1+k)^n - 1]}{k}, \qquad n \leq T,$$

となり、示すべき式が得られる。（念のため数学的帰納法（induction）で確かめておく。この式は $S_0 = 0$ を与え、また S_{n-1} について成り立てば $(1+k)S_{n-1} + c = \frac{c}{k}[(1+k)^n - (1+k) + k]$ となり、これは S_n の式である。）

トンネル開通後の負債

第 $T+1$ 日以降はもう掘削を行わない。毎日、負債には利子 kS が加わり、会社は d を支払うので、負債が正である限り

$$S_{T+j} = (1+k)S_{T+j-1} - d.$$

これは c を $-d$ に置き換えた先ほどと同じ漸化式であるが、今度は 0 からではなく S_T から始まる。これを m 回展開すると、

$$\begin{aligned} S_{T+m} &= (1+k)^m S_T - d[1 + (1+k) + \cdots + (1+k)^{m-1}] \\ &= (1+k)^m S_T - \frac{d[(1+k)^m - 1]}{k}. \end{aligned}$$

最初の小問で求めた S_T を代入すると、

$$S_{T+m} = \frac{c[(1+k)^T - 1](1+k)^m - d[(1+k)^m - 1]}{k}.$$

この漸化式は負債をまだ返済している間しか成り立たないので、$S_{T+m} > 0$ が必要である。負債を完済する日には、会社は d 全額ではなく残っている額だけを支払う。

負債を完済するのはいつか

$(1+k)^m$ を含む項をまとめると、

$$S_{T+m} = \frac{d}{k} - \frac{(1+k)^m}{k}\Big(d - c[(1+k)^T - 1]\Big).$$

考えてみよう 条件 $d/c > (1+k)^T - 1$ は、お金の言葉でいうと実際には何を意味しているのだろうか。

両辺に c を掛けると、$d > c[(1+k)^T - 1] = kS_T$ となる。言い換えれば、最初の日の収入が、トンネル開通時の負債にかかる利子より大きいということである。したがって第 $T+1$ 日に負債は減り、それに伴って利子も減るので、負債はますます速く減り続ける。代数計算はこのことを厳密にするものである。

$d > c[(1+k)^T - 1]$ と仮定し、$\delta = d - c[(1+k)^T - 1] > 0$ とおく。すると

$$S_{T+m} = \frac{d - \delta(1+k)^m}{k}.$$

$1+k > 1$ であるから、$m \to \infty$ のとき $(1+k)^m \to \infty$ となり、$\delta(1+k)^m$ はいずれ d を超える。この式は負債が正である間しか成り立たないので、いつまでも成り立ち続けることはできない。残りの負債がその日の利子を加えて d 以下になる最初の日が存在し、その日に会社は負債を完済する。実際、負債は

$$(1+k)^m \geq \frac{d}{\delta}, \qquad \text{すなわち、} \qquad m \geq \frac{\ln(d/\delta)}{\ln(1+k)}.$$

を満たす最小の m について、第 $T+m$ 日に完済される。よって、$d/c > (1+k)^T - 1$ ならば会社はいずれ負債を完済し、示すべきことが示された。

この条件は必要条件（necessary condition）でもある。$d \leq kS_T$ ならば $\delta \leq 0$ であり、$S_T = (d-\delta)/k$ であるから、すべての m について

$$S_{T+m} - S_T = \frac{-\delta[(1+k)^m - 1]}{k} \geq 0$$

となる。負債は S_T を下回ることがないので、決して完済されない。

検算

- $n = 1$ とおくと $S_1 = c$ となる。第 1 日には何も借りていないので利子は発生せず、これは正しい。
- S_{T+m} の式に $m = 0$ を代入すると、当然そうあるべきとおり S_T が得られる。
- $d = kS_T$ がちょうど成り立つならば、$\delta = 0$ であり、すべての m について $S_{T+m} = d/k = S_T$ となる。収入がちょうど利子をまかなうだけで、負債はまったく変化しない。これが境界の場合である。
- $c = 100$、$k = 0.01$、$T = 30$ として 1 日ずつシミュレーションすると $S_T \approx 3478.49$ となり、公式と一致する。閾値は $d > 34.78$ である。$d = 50$ のとき、負債は $m = 120$ 日後に完済され、$\ln(50/15.22) / \ln 1.01 \approx 119.6$ と合致する。

よくある間違い

- 第 1 日に利子を課してしまう、あるいは級数の項を $n+1$ 個数えてしまう。$S_0 = 0$ のとき、最初の日の費用はちょうど c である。
- 第 T 日以降の級数が 0 からではなく S_T から始まることを忘れる。項 $(1+k)^m S_T$ は落としやすい。

▶「d が c より大きい」から負債を完済できる、と言ってしまう。重要なのは、d と開通時の利子 kS_T との比較である。

STEP のその先へ

漸化式 $S_n = aS_{n-1} + b$ は、最も単純な**線形 1 階差分方程式**（*linear first-order difference equation*）である。その解は不動点（fixed point）$b/(1-a)$ に a^n の定数倍を加えたものであり、これはまさに今回の公式の形、すなわち d/k に $(1+k)^m$ の定数倍を加えた形になっている。その定数倍が正か負かによって、負債が増え続けるか返済されるかが決まる。この考え方は、不動点の安定性（stability）や線形常微分方程式（linear ODE）においても再び現れる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）は差分方程式を微分方程式と並べて扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には漸化式に関する STEP の演習がさらに収められている。

解答例

STEP III 1988、第 6 問

純粋数学 ・ 繰り返し微分

STEP III 1988、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s3-q6

鍵となる考え方

積を直接 1988 回微分するのは絶望的であるが、正弦と余弦の積は和に書き換えられる。そうすれば各項 $\sin kx$ は 4 段階の周期で微分され、そのたびに因子 k がかかる。零点については、$\sin 3x$ の前に付く巨大な因子 3^{1988} のために、導関数（derivative）が 0 になりうるのは $\sin 3x$ がほぼ零となるところだけである。そこで $\sin 3x$ の最初の零点のすぐ先を調べ、線形化（linearise）する。

解答

1988 階導関数

積和公式（product-to-sum formula）$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$ により、

$$\mathrm{f}(x) = \sin 2x \cos x = \tfrac{1}{2}\left(\sin 3x + \sin x\right).$$

$\sin kx$ を 4 回微分すると

$$\sin kx \;\to\; k\cos kx \;\to\; -k^2 \sin kx \;\to\; -k^3 \cos kx \;\to\; k^4 \sin kx,$$

となるので、4 回微分するごとに $\sin kx$ は単に k^4 倍される。（同じことであるが、$\sin kx$ の n 階導関数は $k^n \sin\left(kx + \frac{1}{2}n\pi\right)$ である。）$1988 = 4 \times 497$ であるから、

$$\mathrm{f}^{(1988)}(x) = \tfrac{1}{2}\left(3^{1988}\sin 3x + \sin x\right).$$

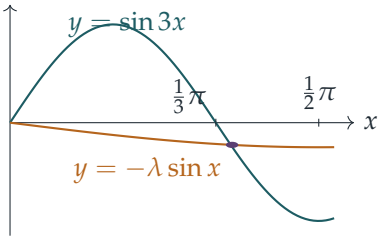
最小の正の零点

次を満たす最小の $x > 0$ を求めればよい。

$$3^{1988}\sin 3x + \sin x = 0. \qquad (*)$$

$(0, \frac{1}{3}\pi]$ に零点はない。 $0 < x < \frac{1}{3}\pi$ のとき $0 < 3x < \pi$ であるから、$\sin 3x$ と $\sin x$ はともに正であり、$(*)$ の左辺は正である。$x = \frac{1}{3}\pi$ では左辺は $0 + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ に等しい。

$\frac{1}{3}\pi$ のすぐ後に零点がある。 $x = \frac{1}{2}\pi$ では左辺は $3^{1988}\sin\frac{3}{2}\pi + 1 = 1 - 3^{1988} < 0$ である。左辺は連続であるから、中間値の定理（intermediate value theorem）により $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ に零点が存在し、最小の正の零点はそれらのうち最初のものである。これを $x = \frac{1}{3}\pi + \epsilon$（ただし $0 < \epsilon < \frac{1}{6}\pi$）と書く。



この図は $(*)$ を $\sin 3x = -\lambda \sin x$（ただし $\lambda = 3^{-1988}$）として表したものである（実際よりはるかに大きく描いてある）。2 つの曲線は、$\sin 3x$ が $\frac{1}{3}\pi$ で零を横切った直後に初めて交わる。実際のごく小さな λ では、交点はほとんど $\frac{1}{3}\pi$ の上まで押し寄せられる。

$\sin(\pi + 3\epsilon) = -\sin 3\epsilon$ であるから、方程式 $(*)$ は次のようになる。

$$3^{1988}\sin 3\epsilon = \sin\left(\tfrac{1}{3}\pi + \epsilon\right). \qquad (**)$$

考えてみよう $\sin 3\epsilon \approx 3\epsilon$ を使ってよいほど ϵ が小さいことは、どうすればわかるか。

$(**)$ の右辺は高々 1 であるから、$\sin 3\epsilon \le 3^{-1988}$ である。$0 < 3\epsilon < \frac{1}{2}\pi$ であり、$[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上で $\sin t \ge \frac{2t}{\pi}$（そこでは正弦曲線は弦より上にある）が成り立つので、$3\epsilon \le \frac{\pi}{2}3^{-1988}$ を得る。したがって ϵ は途方もなく小さく、これによって以下の近似が正当化される。

ϵ がこれほど小さいとき、$\sin 3\epsilon = 3\epsilon\,(1 + O(\epsilon^2))$ かつ $\sin(\frac{1}{3}\pi + \epsilon) = \frac{\sqrt{3}}{2} + O(\epsilon)$ である。これらを $(**)$ に代入すると、

$$3^{1989}\epsilon \approx \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \text{よって} \qquad \epsilon \approx \frac{3^{-1989}\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3^{-1988}\sqrt{3}}{2},$$

であり、相対誤差（relative error）は 3^{-1988} の程度である。

問題文に印刷された値について。 問題文は $\epsilon \approx \frac{1}{2}3^{-1988}\sqrt{3}$ を求めているが、これはここで得た値の 3 倍である。因子 3 は $\sin 3\epsilon \approx 3\epsilon$ から生じるものであり、以下の数値的な検算も 3^{-1988} ではなく 3^{-1989} を裏づけている。したがって問題文には誤植があると思われる。意図されている方法はまさに上のものであり、3 の指数が 1 だけずれているにすぎない。3^{-1989} に到達したのなら、自分の計算を信じてよい。

検算

- 同じ議論は 4 の任意の倍数 n に対して成り立つ。$3^n \sin 3x + \sin x$ の最初の正の零点は $\frac{1}{3}\pi + \epsilon_n$ にあり、$\epsilon_n \approx \frac{1}{2}3^{-(n+1)}\sqrt{3}$ である。$n = 4$ の場合、数値的に解くと $\epsilon_4 = 3.5713 \times 10^{-3}$ となり、予測値 $\frac{1}{2}\sqrt{3}/3^5 = 3.5640 \times 10^{-3}$ と比べて比は 1.0021 である。$n = 8$ では比は 1.000025 であり、$n = 40$ 以降では機械精度（machine precision）の範囲で 1 となる。$\frac{1}{2}\sqrt{3}/3^n$ との比は $\frac{1}{3}$ に収束する。
- 導関数の公式は最初のいくつかの場合で確かめられる。$f^{(4)}(x) = \frac{1}{2}(81\sin 3x + \sin x)$ であり、これは $\frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x)$ を 4 回微分すれば確認できる。

よくある間違い

- 符号や位相を間違える。$\sin kx$ が $+k^n \sin kx$ に戻るのは、4 の倍数回微分したときだけである。
- $(0, \frac{1}{3}\pi)$ に零点がないことを示し忘れる。そこでの符号の議論こそが、$\frac{1}{3}\pi + \epsilon$ を**最小の**正の零点たらしめるのである。
- -3ϵ とすべきところを $\sin(\pi + 3\epsilon) \approx \epsilon$ と書き、符号か因子 3 のどちらかを失う。

STEP のその先へ

後半は**摂動論**（perturbation theory）の簡単な例である。大きなパラメータのために解は既知の根のごく近くに位置せざるをえず、その根のまわりで線形化すると主要な補正項が得られる。誤差の大きさはテイラー級数（Taylor series）の次の項によって制御される。「ほぼ等しい」ということを $O(\cdot)$ 記法と誤差評価によって厳密にすることは、最初に学ぶ解析学の講義の中心的なテーマである。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照せよ。

解答例

STEP III 1988、第 7 問

純粋数学 ・ 微分方程式と直交性

> **STEP III 1988、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q7

この問題は、*Beyond STEP* の第 8.6 節「**量子振動子**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch08/quantum-oscillator.html

鍵となる考え方

前半は純粋な代入の問題である。試行関数を 2 回微分し、x のべきの係数を比較すれば λ が決まる。後半は古典的な「ロンスキアン（Wronskian）の技法」である。組合せ $y_m y_n' - y_n y_m'$ を微分すると、厄介な $\omega^2 x^2$ の項が打ち消し合い、$y_m y_n$ の定数倍だけが残る。$\pm\infty$ での条件によって境界項（boundary terms）が消えるので、この導関数を実数直線全体で積分するのは容易である。

解答

以下、プライムは $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ を表す。方程式を次の形に書いておくと便利である。

$$y_n'' = \left(\omega^2 x^2 - (2n+1)\omega\right) y_n. \tag{$*$}$$

$n = 0$ の場合

$y_0 = \mathrm{e}^{-\lambda x^2}$ とすると、

$$y_0' = -2\lambda x\, \mathrm{e}^{-\lambda x^2}, \qquad y_0'' = (4\lambda^2 x^2 - 2\lambda)\, \mathrm{e}^{-\lambda x^2}.$$

これを $n = 0$ の $(*)$ に代入し、0 でない因子 $\mathrm{e}^{-\lambda x^2}$ で割ると、次が必要である。

$$4\lambda^2 x^2 - 2\lambda = \omega^2 x^2 - \omega \quad \text{すべての} x.$$

定数項を比較すると $\lambda = \frac{1}{2}\omega$ を得る。このとき $4\lambda^2 = \omega^2$ であるから、x^2 の項も一致する。（$4\lambda^2 = \omega^2$ のもう一つの根 $\lambda = -\frac{1}{2}\omega$ は定数項の条件を満たさない。）

$n = 1$ の場合

$y_1 = x\,\mathrm{e}^{-\lambda x^2}$ とすると、

$$\begin{aligned} y_1' &= (1 - 2\lambda x^2)\,\mathrm{e}^{-\lambda x^2}, \\ y_1'' &= \bigl(-4\lambda x - 2\lambda x(1 - 2\lambda x^2)\bigr)\mathrm{e}^{-\lambda x^2} = (4\lambda^2 x^3 - 6\lambda x)\,\mathrm{e}^{-\lambda x^2}. \end{aligned}$$

$n = 1$ の方程式 $(*)$ は $y_1'' = (\omega^2 x^2 - 3\omega)\,x\,\mathrm{e}^{-\lambda x^2}$ を要求する。すなわち

$$4\lambda^2 x^3 - 6\lambda x = \omega^2 x^3 - 3\omega x \quad \text{すべての} x,$$

であり、これもちょうど $\lambda = \frac{1}{2}\omega$ のときに成り立つ。したがって、両方の関数に対して同じ定数が使える。

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\omega, \qquad y_0 = \mathrm{e}^{-\omega x^2/2}, \qquad y_1 = x\,\mathrm{e}^{-\omega x^2/2}.$$

無限遠での条件

$\lambda = \frac{1}{2}\omega > 0$ であるから、（多項式）$\times \mathrm{e}^{-\lambda x^2}$ の形の関数はすべて $x \to \pm\infty$ のとき 0 に収束（converge）する。$\mathrm{e}^{-\lambda x^2}$ は x のどんなべきが増大するよりも速く減衰するからである。関数 y_0、y_0'、y_1、y_1' はいずれもこの形である（多項式はそれぞれ 1、$-2\lambda x$、x、$1 - 2\lambda x^2$）。よって 4 つとも両端で 0 に収束し、要求どおりである。

恒等式

積の微分法（product rule）により、$y_m' y_n'$ の項は打ち消し合う。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigl(y_m y_n' - y_n y_m'\bigr) = y_m' y_n' + y_m y_n'' - y_n' y_m' - y_n y_m'' = y_m y_n'' - y_n y_m''.$$

ここで y_n'' と y_m'' の両方に $(*)$ を用いると、

$$\begin{aligned} y_m y_n'' - y_n y_m'' &= \bigl(\omega^2 x^2 - (2n+1)\omega\bigr) y_m y_n - \bigl(\omega^2 x^2 - (2m+1)\omega\bigr) y_m y_n \\ &= \bigl((2m+1) - (2n+1)\bigr)\omega\, y_m y_n \\ &= 2(m-n)\,\omega\, y_m y_n, \end{aligned}$$

となり、求める結果が得られる。

直交性

> **考えてみよう** 積分が 0 であることを示そうとする前に、そもそもこの無限積分が存在することはどうしてわかるのだろうか？

まず有限区間で考え、両端を別々に無限大へ飛ばす。そうすれば存在は自動的に従う。$W = y_m y_n' - y_n y_m'$ とおく。任意の $S, R > 0$ に対し、恒等式を $-S$ から R まで積分すると

$$2(m-n)\,\omega \int_{-S}^{R} y_m y_n \,\mathrm{d}x = W(R) - W(-S).$$

$R \to \infty$ のとき、与えられた条件により y_m, y_n, y_m', y_n' はいずれも 0 に収束するので、$W(R) \to 0$ である。同様に $S \to \infty$ のとき $W(-S) \to 0$ である。したがって右辺は 0 に収束し、積分 $\int_{-\infty}^{\infty} y_m y_n \,\mathrm{d}x$ は収束して

$$2(m-n)\,\omega \int_{-\infty}^{\infty} y_m y_n \,\mathrm{d}x = 0.$$

$m \neq n$ ならば、$\omega > 0$ であるから $2(m-n)\omega \neq 0$ である。これで割ると

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_m(x)\, y_n(x) \,\mathrm{d}x = 0,$$

となり、示すべきことが得られた。この議論に必要なのは方程式と端での条件だけであることに注意しよう。y_m や y_n の具体的な式は一度も必要なかった。

検算

- $m = 0$、$n = 1$ の場合、結果は直接明らかである。$y_0 y_1 = x\,\mathrm{e}^{-\omega x^2}$ は奇関数（odd function）なので、実数直線全体での積分は 0 である。
- もう少し非自明な確認：$y_2 = (2\omega x^2 - 1)\mathrm{e}^{-\omega x^2/2}$ は $n = 2$ の方程式を満たす（確かめてみよ）。$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\omega x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi/\omega}$ と $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\omega x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\omega}\sqrt{\pi/\omega}$ を用いると、$\int y_0 y_2 \,\mathrm{d}x = 2\omega \cdot \frac{1}{2\omega}\sqrt{\pi/\omega} - \sqrt{\pi/\omega} = 0$ を得る。
- 数値的には、$\lambda = \frac{1}{2}\omega$ のとき、ランダムな点での方程式の残差（residual）は $n = 0, 1, 2$ について 10^{-6} 未満であった。導関数の恒等式は差分（finite differences）により 10^{-4} の精度で成り立った。また、$[-30, 30]$ 上のシンプソンの公式（Simpson's rule）により、$\omega = 0.5, 1, 2.5$ に対して $\int y_0 y_1$、$\int y_0 y_2$、$\int y_1 y_2$ はすべて 10^{-15} より小さくなった。

よくある間違い

- x^2 の係数だけを比較して $\lambda = \pm\frac{1}{2}\omega$ としてしまうこと。定数項により負の符号は除外される（無限遠での減衰からも除外される）。
- 境界項が消える理由を述べ忘れること。まさにここで、y_n と y_n' に関する両方の条件が使われるのである。
- $m - n$ が 0 でないことと $\omega > 0$ であることに触れずに $m - n$ で割ること。

STEP のその先へ

これは量子調和振動子（quantum harmonic oscillator）である。y_n はそのエネルギー状態、$(2n+1)\omega$ は（定数倍を除いて）そのエネルギー準位であり、これらの関数はエルミート多項式（Hermite polynomials）とガウス関数（Gaussian）の積である。直交性の議論はスツルム–リウヴィル理論（Sturm–Liouville theory）の特別な場合である。この理論は、自己随伴（self-adjoint）な微分作用素の固有関数（eigenfunctions）のうち固有値（eigenvalues）が異なるものは常に直交することを示す。これは対称行列の固有ベクトルの場合とまったく同様である。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）は、境界値問題（boundary-value problems）とスツルム–リウヴィル理論を扱っている。

解答例

STEP III 1988、第 8 問

純粋数学 ・ 放物線の接線と法線

> **STEP III 1988、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q8

鍵となる考え方

パラメータ（parameter）t を用いてすべての直線を表し、2 直線ずつの交点を求め、それらの頂点を行列式（determinant）に代入する。行列式は複雑に見えるが、t_1, t_2, t_3 について交代的（antisymmetric）であるから、いずれも $(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)$ の倍数でなければならない。簡単な行基本変形と列基本変形によってこの因数をくくり出すと、2 つの面積の比較が残る。

（問題文では A_3 を求めるよう書かれているが、これは法線三角形の面積 A_2 の誤植である。）

解答

接線と法線

$x = at^2, y = 2at$ に沿って $y^2 = 4ax$ を t で微分すると、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2a}{2at} = \dfrac{1}{t}$ を得る。点 $(at^2, 2at)$ における接線（tangent）は $y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2)$、すなわち

$$ty = x + at^2.$$

である。この形は $t = 0$ のときも成り立つ（頂点における接線は $x = 0$ である）。法線（normal）の傾きは $-t$ であるから、

$$y + tx = 2at + at^3.$$

以下、常に $a \neq 0$ と仮定する。

接線三角形

t_i と t_j における接線の方程式を辺々引くと $(t_i - t_j)y = a(t_i^2 - t_j^2)$ を得る。$t_i \neq t_j$ であるから両辺を割ることができ、$y = a(t_i + t_j)$、さらに $x = t_i y - at_i^2 = at_i t_j$ となる。よって

$$\text{パラメータ} t_i, t_j \text{ における接線の交点は} \big(at_i t_j,\ a(t_i + t_j)\big).$$

接線の傾き $1/t_i$ は互いに異なる（あるいは 1 本が鉛直である）ので、どの 2 本も平行でなく、三角形が存在する。$s = t_1 + t_2 + t_3$ とおく。P_1 に向かい合う頂点は $(at_2t_3,\ a(s - t_1))$ であり、他の頂点も同様である。第 1 列と第 2 列から因数 a をくくり出し、次に第 3 列の $-s$ 倍を第 2 列に加え、さらに第 2 列の符号を反転すると、

$$\det \begin{pmatrix} at_2t_3 & a(s-t_1) & 1 \\ at_1t_3 & a(s-t_2) & 1 \\ at_1t_2 & a(s-t_3) & 1 \end{pmatrix} = -a^2 \det \begin{pmatrix} t_2t_3 & t_1 & 1 \\ t_1t_3 & t_2 & 1 \\ t_1t_2 & t_3 & 1 \end{pmatrix} = a^2 D,$$

となる。ここで第 1 列と第 2 列を入れ替え、

$$D = \det \begin{pmatrix} t_1 & t_2t_3 & 1 \\ t_2 & t_1t_3 & 1 \\ t_3 & t_1t_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

とおいた。D を計算するため、第 1 行を第 1 行 − 第 2 行に、第 2 行を第 2 行 − 第 3 行に置き換える。第 1 行は $(t_1 - t_2,\ t_3(t_2 - t_1),\ 0) = (t_1 - t_2)(1,\ -t_3,\ 0)$ となり、第 2 行は $(t_2 - t_3)(1,\ -t_1,\ 0)$ となる。最後の列に沿って展開すると、

$$D = (t_1 - t_2)(t_2 - t_3) \det \begin{pmatrix} 1 & -t_3 \\ 1 & -t_1 \end{pmatrix} = (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1).$$

したがって

$$A_1 = \tfrac{1}{2} a^2 \left|(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)\right|,$$

であり、t_i は相異なるので、これは 0 でない。

法線三角形

t_i と t_j における法線の方程式を辺々引くと $(t_i - t_j)x = 2a(t_i - t_j) + a(t_i^3 - t_j^3)$ を得るので、$t_i - t_j \neq 0$ で割って

$$x = 2a + a(t_i^2 + t_i t_j + t_j^2), \qquad y = 2at_i + at_i^3 - t_i x = -at_i t_j (t_i + t_j).$$

となる。法線の傾き $-t_i$ は互いに異なるので、やはりどの 2 本も交わる。P_1 に向かい合う頂点については、$t_2 + t_3 = s - t_1$ を用い、$e_1 = t_2t_3$（および $e_2 = t_1t_3, e_3 = t_1t_2$）とおく。すると

$$t_2^2 + t_2t_3 + t_3^2 = (t_2 + t_3)^2 - t_2t_3 = (s - t_1)^2 - e_1, \qquad -t_2t_3(t_2 + t_3) = -se_1 + p,$$

となる。ここで $p = t_1t_2t_3$ である。よってこの頂点は $a\big(2 + (s - t_1)^2 - e_1,\ -se_1 + p\big)$ であり、他の頂点も同様である。ここで a^2 をくくり出し、行列式の値を変えない列基本変形を行う。すなわち第 1 列から第 3 列の 2 倍を引き、第 2 列から第 3 列の p 倍を引き、さらに第 2 列から因数 $-s$ をくくり出す。

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2}\det(\text{法線三角形の頂点}) &= \det\begin{pmatrix}(s-t_i)^2 - e_i & -se_i & 1\end{pmatrix}_{i=1,2,3}\\ &= -s\det\begin{pmatrix}(s-t_i)^2 - e_i & e_i & 1\end{pmatrix}_{i=1,2,3},\end{aligned}$$

ここで各式は典型的な第 i 行を示している。次に第 2 列を第 1 列に加えると $-e_i$ が消え、さらに $(s - t_i)^2 = s^2 - 2st_i + t_i^2$ と展開する。s^2 は第 3 列の倍数なので取り除くことができ、また行列式は第 1 列について線形である。

$$\det\begin{pmatrix}t_i^2 - 2st_i & e_i & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}t_i^2 & e_i & 1\end{pmatrix} - 2s\det\begin{pmatrix}t_i & e_i & 1\end{pmatrix} = E - 2sD,$$

とおく。2 つ目の行列式はちょうど D である。

考えてみよう　行が $(t_i^2,\ e_i,\ 1)$ である行列式 E は、どのように計算すればよいか？

D のときと同じ行基本変形を用いる。第 1 行 − 第 2 行は $(t_1^2 - t_2^2,\ t_3(t_2 - t_1),\ 0) = (t_1 - t_2)(t_1 + t_2,\ -t_3,\ 0)$ であり、第 2 行 − 第 3 行は $(t_2 - t_3)(t_2 + t_3,\ -t_1,\ 0)$ である。よって

$$\begin{aligned}E &= (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)\big[-t_1(t_1 + t_2) + t_3(t_2 + t_3)\big]\\ &= (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)\big[(t_3^2 - t_1^2) + t_2(t_3 - t_1)\big]\\ &= (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)(t_1 + t_2 + t_3) = sD.\end{aligned}$$

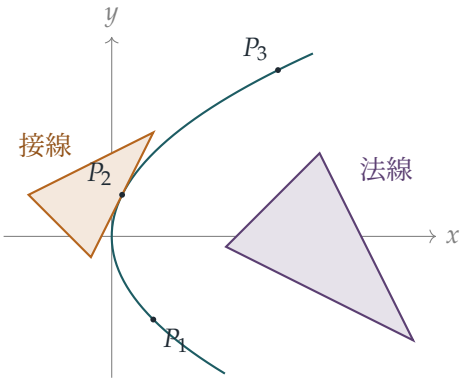
以上をまとめると、

$$\det(\text{法線三角形の頂点}) = a^2 \cdot (-s)\,(sD - 2sD) = a^2s^2D.$$

絶対値の半分をとり、$A_1 = \frac{1}{2}a^2|D|$ と比較すると、

$$A_2 = (t_1 + t_2 + t_3)^2A_1,$$

となり、求める結果が得られた。



図では $a=1$、$t_1,t_2,t_3=-1,\frac{1}{2},2$ としており、$s=\frac{3}{2}$ である。接線三角形（琥珀色）の面積は $\frac{27}{8}$ であり、法線三角形（紫色）の面積は $\frac{243}{32}=\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{27}{8}$ である。

法線が 1 点で交わるのはどのようなときか？

どの 2 本の法線も平行でないので、法線は 2 本ずつ 3 点 Q_{12},Q_{13},Q_{23} で交わる。法線が 1 点で交わる（共点である、concurrent）ならば、これらの点は一致し、三角形の面積は 0 となる。逆に、面積は 0 であるがこれらの点がすべて一致するわけではないと仮定し、たとえば $Q_{12}\neq Q_{13}$ とする。両点とも P_1 における法線上にあるので、それらを通る直線はこの法線である。3 点は同一直線上にある（collinear）ので、Q_{23} も P_1 における法線上にある。すると Q_{23} は 3 本の法線すべての上にあるから、$Q_{23}=Q_{12}$（P_1 と P_2 における法線の唯一の共有点）であり、同様に $Q_{23}=Q_{13}$ となって矛盾する。よって

$$\text{法線が 1 点で交わる}\iff A_2=0\iff (t_1+t_2+t_3)^2A_1=0\iff t_1+t_2+t_3=0,$$

ここで t_i が相異なることから $A_1\neq 0$ であることを用いた。求める条件は $t_1+t_2+t_3=0$ である。

検算

- $t_1,t_2,t_3=0,1,2$、$a=1$ のとき、接線三角形の頂点は $(2,3),(0,2),(0,1)$ であり、面積は 1 となる。また $\frac{1}{2}|D|=\frac{1}{2}|(-1)(-1)(2)|=1$ である。
- $t=1,2,-3$（和は 0、$a=1$）における法線はすべて $(9,-6)$ を通る。たとえば $t=1$ における法線は $y+x=3$ である。
- a と相異なる t_i を無作為に選んだ約 2,800 通りについて、コンピュータで分数を用いて頂点を厳密に計算したところ、毎回 $A_2=(t_1+t_2+t_3)^2A_1$ が確認された。

よくある間違い

- 3 本の直線が実際に三角形をなすことの根拠を示し忘れる。必要なのはどの 2 本も平行でないことであり、ここでは傾きが互いに異なることから従う。
- 理由を示さずに $A_2 = 0$ から 3 本が 1 点で交わると結論づける。面積が 0 であることは 3 つの交点が同一直線上にあることしか意味せず、上の短い議論によってこれを「一致する」にまで強めている。
- 3×3 の行列式をすべて展開してしまう。それも可能ではあるが、符号の誤りはほぼ避けられない。まず行基本変形で $(t_i - t_j)$ をくくり出すべきである。

STEP のその先へ

因数 $(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)$ はヴァンデルモンド行列式（Vandermonde determinant）であり、$E = sD$ に現れるもう一方の因数 $t_1 + t_2 + t_3$ は対称式（symmetric polynomial）である。任意の交代式はヴァンデルモンド積と対称式の積で表され、この事実は行列式や対称関数の理論で繰り返し現れる。法線のなす三角形は放物線の**縮閉線**（evolute）と関係がある。縮閉線とは曲率中心が描く曲線であり、法線の包絡線（envelope）でもある。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、行列式とその行基本変形をよく扱っている。

解答例

STEP III 1988、第 9 問

純粋数学 ・ 群の元の位数

> **STEP III 1988、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q9

鍵となる考え方

小問 (i) は形を変えた除法の原理（division algorithm）である。N を n の倍数と余りの和として表せば、n の最小性から余りは 0 でなければならない。小問 (ii) がうまくいくのは、g による共役（conjugation）が積を保つからであり、共役元の積では内側に現れる $g^{-1}g$ の組が打ち消し合う。小問 (iii) では g による共役を繰り返し施す。$g^5 = e$ であるから、5 回施すと h は自分自身に戻り、これによって h の位数（order）が決まる。

解答

小問 (i)

除法の原理により、q を整数、$0 \leq r < n$ として $N = qn + r$ と書ける（これは 0 や負の整数を含め、任意の整数 N について成り立つ）。すると $g^n = e$ であるから

$$e = g^N = (g^n)^q g^r = e^q g^r = g^r.$$

もし r が正であれば、r は $g^r = e$ を満たす n より小さい正の整数となり、$n = o(g)$ がそのような整数のうち**最小**のものであるという定義に矛盾する。よって $r = 0$ であり、$N = qn$ となるから、n は N を割り切る。

小問 (ii)

$m = 0$ **のとき**：両辺はともに e に等しい。

$m \geq 1$ **のとき**：m に関する帰納法（induction）を用いる。$m = 1$ の場合は明らかであ

る。$gh^m g^{-1} = (ghg^{-1})^m$ が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}(ghg^{-1})^{m+1} &= (ghg^{-1})^m\,(ghg^{-1}) = (gh^m g^{-1})(ghg^{-1}) \\ &= gh^m(g^{-1}g)hg^{-1} = gh^{m+1}g^{-1},\end{aligned}$$

となり、帰納法が完結する（具体的に書き出すと、$(ghg^{-1})(ghg^{-1})\cdots(ghg^{-1})$ は次々と打ち消し合い、途中に現れる $g^{-1}g$ はすべて消える）。

$m \le -1$ **のとき：**まず、ghg^{-1} の逆元は $gh^{-1}g^{-1}$ である。実際、

$$(ghg^{-1})(gh^{-1}g^{-1}) = gh(g^{-1}g)h^{-1}g^{-1} = ghh^{-1}g^{-1} = e.$$

次に、$k \ge 1$ として $m = -k$ と書く。h の代わりに元 h^{-1} に対して正の場合の結果を適用すると

$$gh^m g^{-1} = g(h^{-1})^k g^{-1} = (gh^{-1}g^{-1})^k = \left((ghg^{-1})^{-1}\right)^k = (ghg^{-1})^{-k} = (ghg^{-1})^m.$$

したがって、この等式はすべての整数 m について成り立つ。

小問 (iii)

$ghg^{-1} = h^2$ を用い、さらに $m = 2$ として小問 (ii) を用いると

$$g^2hg^{-2} = g\,(ghg^{-1})\,g^{-1} = gh^2g^{-1} = (ghg^{-1})^2 = (h^2)^2 = h^4,$$

となり、示すべき式が得られる。

同じ操作はどの段階でも使える。すべての $k \ge 0$ について $g^khg^{-k} = h^{2^k}$ が成り立つことを示す。$k = 0$ のときは成り立つ。k のとき成り立つとすると、$m = 2^k$ として小問 (ii) を用いれば

$$g^{k+1}hg^{-(k+1)} = g\,(g^khg^{-k})\,g^{-1} = gh^{2^k}g^{-1} = (ghg^{-1})^{2^k} = (h^2)^{2^k} = h^{2^{k+1}}.$$

$k = 5$ とし、$g^5 = e$（したがって $g^{-5} = e$ でもある）を用い、両辺に h^{-1} を掛けると

$$h = g^5hg^{-5} = h^{32}, \qquad \text{よって} \qquad h^{31} = e$$

が得られる。

> **考えてみよう** $h^{31} = e$ であることはわかった。なぜこれから、$o(h)$ が単に 31 以下というだけでなく、ちょうど 31 であるといえるのだろうか。

小問 (i) により、$o(h)$ は 31 を割り切る。31 は素数（prime）であるから、$o(h)$ は 1 または 31 である。しかし $o(h) = 1$ は $h = e$ を意味し、これは条件により成り立たない。したがって

$$o(h) = 31.$$

このような群（group）は実際に存在するので、条件は矛盾しない。31 を法として、$\{0,1,\ldots,30\}$ の置換（permutation）$h(x)=x+1$ と $g(x)=2x$ を考える。すると $g^5(x)=32x=x$ であり、$ghg^{-1}(x)=2\left(\frac{x}{2}+1\right)=x+2=h^2(x)$ であり、さらに h の位数は確かに 31 である。

検算

- 素数 31 が現れるのは理にかなっている。g による共役は h のべきに対して「指数を 2 倍する」という作用をし、5 回の倍化で元に戻らなければならないから、$o(h)$ を法として $2^5\equiv 1$ となる。言い換えれば、$o(h)$ は $2^5-1=31$ を割り切る。
- 31 を法とする置換 $g(x)=2x$ と $h(x)=x+1$ を用いたコンピュータによる検証で、$g^5=e$、$ghg^{-1}=h^2$、$k=0,\ldots,5$ に対する $g^khg^{-k}=h^{2^k}$、そして $o(h)=31$ が確認された。また、数百個のランダムな置換について、$-12\le m\le 12$ の範囲で (i) と (ii) も検証した。

よくある間違い

- (ii) で $m\ge 1$ の場合だけを証明してしまう。問題文には**任意の整数**とあるので、$m=0$ と負の m にはそれぞれ（短い）議論が必要である。
- $h^{31}=e$ から直ちに $o(h)=31$ と結論してしまう。そこからわかるのは $o(h)\mid 31$ だけであり、31 が素数であることと条件 $h\neq e$ も必要である。

STEP のその先へ

写像 $x\mapsto gxg^{-1}$ は G の**自己同型**（automorphism）（構造を保つ全単射（bijection））であり、小問 (ii) はそのことから導かれる帰結の一つである。小問 (iii) は**半直積**（semidirect product）の小さな例である。g と h で生成される群の位数は $5\times 31=155$ であり、その存在は 31 を法とする 2 の位数が 5 であることに依存している。この構成は、位数の小さな群を分類するうえで中心的な役割を果たす。位数、共役、ラグランジュ（Lagrange）の定理について学ぶには、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）がよい出発点である。

解答例

STEP III 1988、第 10 問

純粋数学 ・ 追跡曲線

STEP III 1988、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s3-q10

この問題は、*Beyond STEP* の第 8.5 節「グレイハウンドを追うグレイハウンド」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch08/pursuit.html

鍵となる考え方

動き回る 4 匹の犬を別々に追跡しようとしてはならない。この設定は中心のまわりの 4 分の 1 回転で変わらないので、犬たちは常に O を中心とする正方形の頂点にいる。正方形は縮みながら回転するが、正方形であることに変わりはない。これにより A の速度と直線 AO のなす角が一定に定まる。そして速度と動径のなす角が一定であることこそ、等角螺旋（equiangular spiral）$r = \lambda \mathrm{e}^{-k\theta}$ を生み出す条件なのである。

解答

犬たちは正方形の上にとどまる

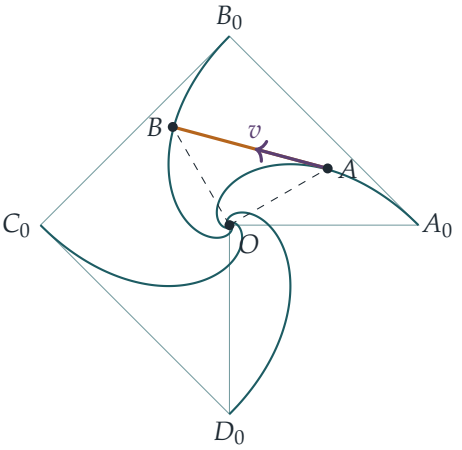
原点 O を正方形の中心にとり、犬に反時計回りに名前をつける。すなわち B は A から反時計回りに 4 分の 1 回転した位置にあり、C は B から同様の位置にあり、以下同様とする。

図全体を O のまわりに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させる。A, B, C, D の出発位置は B, C, D, A の出発位置に移り、「速さ v で次の犬に向かってまっすぐ走る」という規則はどの犬にとっても同じ規則である。したがって、回転させた運動もまた、同じ初期配置から同じ規則に従う運動である。与えられた出発点からの運動は一意である（犬どうしが離れている間、速度は位置の滑らかな関数である）から、回転させた運動は実際の運動に一致する。言い換えれば、各瞬間において B の位置は A の位置を O のまわりに $\frac{\pi}{2}$ だけ回

転させたものである。C と D についても同様である。よって $ABCD$ は常に O を中心とする正方形である。

速度と動径のなす角

A の極座標（polar coordinates）を (r,θ) とする。すると B は $(r,\theta+\frac{\pi}{2})$ にあるので、$OA=OB=r$ かつ $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$ である。三角形 OAB は直角二等辺三角形であるから、$\angle OAB=\frac{\pi}{4}$ となる。



図は、出発点の頂点 A_0,B_0,C_0,D_0 から渦を巻いて内側へ向かう 4 本の経路と、ある瞬間の犬 A と B を示している。A の速度（紫）は AB の向きを向いている。

A の速度は大きさ v で AB の向きを向いており、これは内向きの動径 AO と角 $\frac{\pi}{4}$ をなす。速度を動径方向成分（外向きを正とする）と横断方向成分（θ が増加する向き）に分解すると、

$$\dot{r}=-v\cos\frac{\pi}{4},\qquad r\dot{\theta}=v\sin\frac{\pi}{4}.$$

B は A から見て反時計回りの側にあるので、A は反時計回りに引っ張られる。そのため横断方向成分は正である。

考えてみよう この 2 つの式を割り算してよいのはなぜか。

犬どうしが離れている間は $r\dot{\theta}=v/\sqrt{2}>0$ であるから、θ は時間について狭義単調増加である。したがって経路に沿うパラメータとして t の代わりに θ を用いることができ、連鎖律（chain rule）により

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}}=\frac{-v/\sqrt{2}}{v/(\sqrt{2}r)}=-r.$$

経路を求める

$r > 0$ であるから変数分離（separation of variables）ができる。$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}r}{r} = -\int \mathrm{d}\theta$ より $\ln r = -\theta + c$、すなわち

$$r = \lambda \mathrm{e}^{-\theta}$$

である。ただし $\lambda = \mathrm{e}^{c}$ は定数である。これが求める結果である。始線を OA_0 にとり、出発時に $\theta = 0$ となるようにすれば、λ は A の O からの最初の距離、すなわち一辺 a の正方形では $a/\sqrt{2}$ である。始線を別にとった場合も、λ が定数倍変わるだけである。（犬に時計回りに名前をつけた場合は、θ を時計回りに測れば同じ式が得られる。）

n 匹の犬への一般化

正 n 角形の頂点にいる n 匹の犬（反時計回りに名前をつけ、それぞれが次の犬を追う）についても、$\frac{2\pi}{n}$ の回転を用いて同じ議論が成り立つ。犬たちは常に O を中心とする正 n 角形をなす。よって A が (r,θ) にあれば、次の犬 B は $(r,\theta+\frac{2\pi}{n})$ にある。

三角形 OAB は頂角 $\frac{2\pi}{n}$ の二等辺三角形であるから、各底角は

$$\angle OAB = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}.$$

先ほどと同様に A の速度を分解すると、

$$\dot{r} = -v\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = -v\sin\frac{\pi}{n}, \qquad r\dot{\theta} = v\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = v\cos\frac{\pi}{n}.$$

$n \geq 3$ より $\cos\frac{\pi}{n} > 0$ であるから、やはり θ は一様に増加し、

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -r\tan\frac{\pi}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad r = \lambda\,\mathrm{e}^{-\theta\tan(\pi/n)}.$$

$n = 4$ のとき $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ であり、$r = \lambda\mathrm{e}^{-\theta}$ が再び得られる。各犬は等角螺旋（対数螺旋、logarithmic spiral）に沿って進み、すべての動径と一定の角 $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$ で交わる。

うれしい副産物がある。$\dot{r} = -v\sin\frac{\pi}{n}$ は一定であるから、犬たちは時間 $r_0/(v\sin\frac{\pi}{n})$ の後に O で出会う。ここで r_0 は O からの最初の距離である。その間に各犬が走る距離は有限の $r_0/\sin\frac{\pi}{n}$ である。$\theta \to \infty$ となり、犬は O のまわりを無限回まわるにもかかわらずである。（正方形の場合、これは一辺の長さ a に等しい。）

検算

- $n = 4$ の結果は、一般の公式で $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ とした特別な場合になっている。
- $n \to \infty$ のとき $\tan\frac{\pi}{n} \to 0$ であり、経路は円に近づく。各犬は円周上のほぼ真横にいる隣の犬を追いかけているからである。

- 追跡を数値的にシミュレーションした（$n = 3, 4, 5, 6, 8$ 匹の犬について、半径 1 から出発させ、RK4 を用いた）。計算された r は $\mathrm{e}^{-\theta\tan(\pi/n)}$ と相対誤差 10^{-11} で一致した。$n = 4$ の場合、$r = 0.02$ に達するまでの時間と経路の長さは $1.386 = 0.98\sqrt{2}$ となり、$(1 - 0.02)/\sin\frac{\pi}{4}$ による予測と一致した。

よくある間違い

- 犬たちが正多角形の上にとどまることを先に正当化せずに、$\dot{r}$ と $r\dot{\theta}$ を書き下してしまう。A における角が分かるのは、対称性の議論があるからである。
- 動径 AO と AB のなす角（$\frac{\pi}{4}$）ではなく、多角形の内角（正方形では $\frac{\pi}{2}$）を用いてしまう。
- 速度の横断方向成分が $\dot{\theta}$ ではなく $r\dot{\theta}$ であることを忘れる。

STEP のその先へ

これは古典的な**追跡問題**（*pursuit problem*）である。対称性の段階は、微分方程式（differential equations）における一般原理の一例である。すなわち、方程式と初期データがともにある対称性のもとで不変ならば、解の一意性により解もまた不変でなければならない。すべての動径と一定の角で交わる曲線は等角螺旋である。複素数で表すと $z = \mathrm{e}^{(-k+\mathrm{i})\theta}$ となるので、運動全体は平面の連続的な「回転相似（spiral similarity）」である。Needham の *Visual Complex Analysis*（邦題『ヴィジュアル複素解析』）はこの幾何学的な見方を展開しており、Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）は解の存在と一意性を扱っている。

解答例

STEP III 1988、第 11 問

力学 ・ 摩擦のある梯子のつり合い

> **STEP III 1988、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q11

鍵となる考え方

まず幾何を整理する。地面、斜面（ramp）、はしごは三角形をなし、その角はすでにわかっている。そこから、なめらかな斜面がはしごの上端をどの向きに押すかがわかる。その後は、はしごの問題の定番の手順に従えばよい。2 方向に力を分解し、下端のまわりの力のモーメント（moments）をとり、必要な摩擦力（friction）を μ と垂直抗力（normal reaction）の積と比べるのである。作業員の位置はモーメントの式にしか現れないので、一つの一般的な式で両方の小問に答えられる。

解答

設定

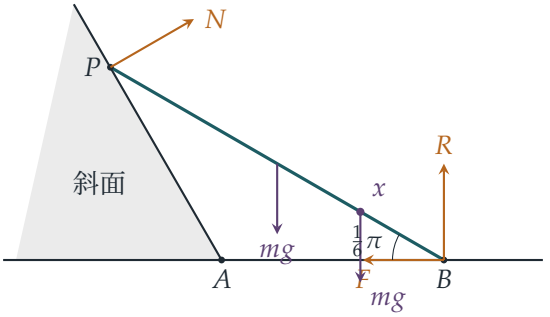
はしごを一様な棒（uniform rod）、作業員を質点（particle）としてモデル化する。A を斜面の下端、B をはしごの下端、P を斜面上にあるはしごの上端とする。

幾何。三角形 ABP において、B における角は $\frac{1}{6}\pi$（はしごの傾き）である。斜面は鉛直方向と $\frac{1}{6}\pi$ をなすので、A の向こう側で水平方向と $\frac{1}{3}\pi$ をなす。したがって三角形の内部の A における角は $\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$ であり、P における角は $\frac{1}{6}\pi$ となる。よってこの三角形は $AP = AB$ の二等辺三角形（isosceles triangle）であり、正弦定理（sine rule）より

$$AB = \frac{l \sin \frac{1}{6}\pi}{\sin \frac{2}{3}\pi} = \frac{l}{\sqrt{3}},$$

となって、与えられた距離と一致する。データに矛盾はなく、P は確かに斜面上にある。

斜面からの抗力の向き。斜面はなめらかなので、斜面がはしごに及ぼす抗力 N は斜面に垂直である。斜面は水平方向と $\frac{1}{3}\pi$ をなすので、その法線は水平方向と $\frac{1}{6}\pi$ をなし、斜面から離れて B の方へ、上向きに向いている。よって N の水平成分 $\frac{\sqrt{3}}{2}N$ ははしごを斜面から遠ざける向きに押し、鉛直成分 $\frac{1}{2}N$ は上向きである。



方程式。作業員が B からはしごに沿って距離 x だけ上った位置にいるとする。B では、地面から上向きの垂直抗力 R と、斜面の方へ向かう水平な摩擦力 F がはたらく（それ以外の水平な力は N の成分だけであり、これは下端を斜面から遠ざける向きに押すので、摩擦力はそれに逆らう向きでなければならない）。

水平方向と鉛直方向に力を分解すると

$$F = \frac{\sqrt{3}}{2}N, \qquad\qquad R + \frac{1}{2}N = 2mg.$$

R と F が消えるように、B のまわりのモーメントをとる。はしごに沿って距離 s だけ上った点と B との水平距離は $s\cos\frac{1}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}s$ である。N の作用線（line of action）は水平方向と $\frac{1}{6}\pi$ をなし、一方 BP は水平方向の反対側に $\frac{1}{6}\pi$ をなすので、N ははしごと角 $\frac{1}{3}\pi$ をなす。B のまわりの N のモーメントは $Nl\sin\frac{1}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}Nl$ である。よって

$$\frac{\sqrt{3}}{2}Nl = mg\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{l}{2} + mg\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x \quad\Longrightarrow\quad N = mg\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{l}\right).$$

？ 考えてみよう N のモーメントがこれほど簡単に求まるのはなぜだろうか？

N ははしごと $\frac{1}{3}\pi$ の角で交わるので、B から N の作用線までの垂直距離は $l\sin\frac{1}{3}\pi$ である。あるいは N を成分に分けてもよい。水平成分 $\frac{\sqrt{3}}{2}N$ は高さ $\frac{1}{2}l$ の位置に、鉛直成分 $\frac{1}{2}N$ は水平距離 $\frac{\sqrt{3}}{2}l$ の位置にはたらく。どちらもモーメントは $\frac{\sqrt{3}}{4}Nl$ であり、合計すると $\frac{\sqrt{3}}{2}Nl$ となる。

すると $0 \le x \le l$ に対して $R = 2mg - \frac{1}{2}N = mg\left(\frac{7}{4} - \frac{x}{2l}\right) > 0$ であり、下端は地面から離れない。はしごが滑らないのは $F \le \mu R$ が成り立つ限りであり、これは

$$\mu \;\ge\; \frac{F}{R} = \frac{\sqrt{3}\,N}{4mg - N} = \frac{\sqrt{3}\,(l + 2x)}{7l - 2x}.$$

を意味する。この比は x について増加する。分子は増加し、正の分母は減少するからである。したがって、作業員が上るにつれて必要な摩擦力は単調に大きくなる。

小問 (i)

作業員が中点に達したとたんにはしごは滑る。よって最大静止摩擦（limiting friction）に達するのはちょうど $x = \frac{1}{2}l$ のときであり、F/R は x について増加するので、それより前には達しない。このとき $N = mg$、$F = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$、$R = \frac{3}{2}mg$ であるから

$$\mu = \frac{F}{R} = \frac{\sqrt{3}/2}{3/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

小問 (ii)

すべての $x \in [0, l]$ に対して $F \leq \mu R$ が成り立てば、作業員は上端に到達できる。F/R は x について増加するので、最悪の場合は $x = l$ である。このとき $N = \frac{3}{2}mg$、$F = \frac{3\sqrt{3}}{4}mg$、$R = \frac{5}{4}mg$ であるから、摩擦係数（coefficient of friction）の最小値は

$$\mu = \frac{3\sqrt{3}/4}{5/4} = \frac{3\sqrt{3}}{5} \approx 1.04.$$

検算

- はしごに誰もいないとき（$x = 0$）、式は $\mu \geq \sqrt{3}/7 \approx 0.247$ を与える。これは当然ながら両方の答えより小さい。
- 力をベクトルとして書き、$l = 1$、$m = 1$、$g = 9.8$ を 3 つのつり合いの式に数値的に代入すると、$N/mg = 1$ と $\frac{3}{2}$、および比 $F/R = 0.57735\ldots$ と $1.03923\ldots$ が再現される。また、はしごに沿った 101 か所の位置で F/R が増加していることも確かめられる。

よくある間違い

- 鉛直な壁の場合のように、斜面からの抗力を水平だとしてしまうこと。ここでは抗力は水平方向から $\frac{1}{6}\pi$ だけ上に傾いており、その上向き成分が R を小さくする。
- 鉛直方向に分解するときに作業員の重さを忘れ、$2mg$ ではなく $R + \frac{1}{2}N = mg$ としてしまうこと。

STEP のその先へ

小問 (ii) は配置に関する小さな最適化問題である。荷重のあらゆる位置にわたって F/R の最悪の場合を求める必要がある。これは技術者が構造物にとって危険な荷重条件を見つける方法と同じである。条件 $F \leq \mu R$ を思い描くのに役立つのが**摩擦円錐**（cone of friction）である。地面からの抗力の合力は法線から角 $\arctan \mu$ 以内になければならず、必要な抗力がその円錐から外れた瞬間にはしごは滑る。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体（rigid body）の静力学と摩擦を丁寧に扱っている。

解答例

STEP III 1988、第 12 問

力学 ・ 斜め衝突

STEP III 1988、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s3-q12

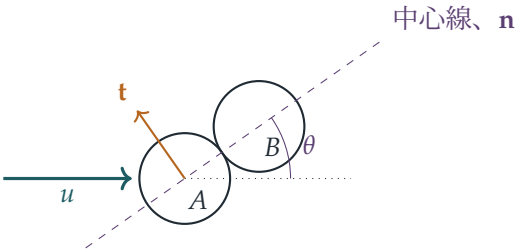
鍵となる考え方

滑らかな球（smooth spheres）どうしの衝突では、力積（impulse）は衝突の瞬間の中心線（line of centres）に沿ってのみはたらく。そこで、すべての速度をこの線に沿った成分とそれに垂直な成分に分解する。垂直成分は変化せず、中心線に沿った方向では通常の 1 次元の衝突が起こる。こうするとすべては、中心線と第 1 の球のもとの速度とのなす角という、ただ一つの未知数で決まる。

解答

設定

2 つの球を、滑らかな台の上を滑る、等しい質量 m の滑らかな球としてモデル化する。したがって、衝突中にはたらく水平方向の力は中心線に沿った接触力積だけである。第 1 の球 A は速さ u で運動しているとし、衝突時に中心線が A の速度となす角を θ とする。ただし $0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi$ である（$\theta = \frac{1}{2}\pi$ のときは球がかすめるだけで何も起こらない）。中心線に沿った（A から B へ向かう）単位ベクトルを $\mathbf{n}$、それに垂直な単位ベクトルを $\mathbf{t}$ とする。



衝突前、A の速度は $\mathbf{n}$ 方向の成分 $u\cos\theta$ と $\mathbf{t}$ 方向の成分 $u\sin\theta$ をもつ。B は静止している。

t 方向：この方向にはどちらの球にも力積がはたらかないので、A は $u\sin\theta$ を、B は 0 を保つ。

n 方向：衝突後の成分を v_A、v_B とする。運動量保存則（conservation of momentum）（質量は約分される）とニュートンの反発の法則（Newton's law of restitution）より

$$v_A + v_B = u\cos\theta, \qquad v_B - v_A = e\,u\cos\theta,$$

であるから

$$v_A = \tfrac{1}{2}(1-e)\,u\cos\theta, \qquad v_B = \tfrac{1}{2}(1+e)\,u\cos\theta.$$

よって衝突後は

$$\mathbf{v}_A = \tfrac{1}{2}(1-e)u\cos\theta\,\mathbf{n} + u\sin\theta\,\mathbf{t}, \qquad \mathbf{v}_B = \tfrac{1}{2}(1+e)u\cos\theta\,\mathbf{n}.$$

2 つの速度のなす角

B は中心線に沿って運動する。2 つの速度のなす角が鋭角であることは、それらの内積（scalar product）が正であることと同値である。ここで

$$\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B = \tfrac{1}{4}(1-e)(1+e)\,u^2\cos^2\theta > 0,$$

である。なぜなら $e<1$、$u\neq 0$ であり、$0\le\theta<\frac{1}{2}\pi$ に対して $\cos\theta>0$ だからである。したがって、2 つの速度のなす角は $\frac{1}{2}\pi$ より小さく、示すべきことが示された。（正面衝突 $\theta=0$ の場合は、両方の球が同じ直線に沿って運動し、なす角は 0 である。）

$e<1$ をどこで用いたかに注意しよう。$e=1$ ならば $v_A=0$ となり、2 つの球はちょうど直角に分かれる。これはスヌーカー（snooker）でよく知られた結果である。

最大の偏向角

A が曲げられる角を ϕ とする。すなわち、$\mathbf{v}_A$ ともとの向き $\cos\theta\,\mathbf{n}+\sin\theta\,\mathbf{t}$ とのなす角である。$k=\frac{1}{2}(1-e)$ とおくと、$0<k\le\frac{1}{2}$ であり、$\mathbf{v}_A = u(k\cos\theta\,\mathbf{n}+\sin\theta\,\mathbf{t})$ である。方向ベクトル $(\cos\theta,\sin\theta)$ と $(k\cos\theta,\sin\theta)$ の内積と 2 次元の外積（cross product）を用いると

$$|\mathbf{v}_A|\cos\phi = u\,(k\cos^2\theta+\sin^2\theta),$$
$$|\mathbf{v}_A|\sin\phi = u\,(\cos\theta\sin\theta - k\cos\theta\sin\theta) = u\,(1-k)\sin\theta\cos\theta.$$

第 1 式は正であるから ϕ は鋭角である。辺々割り算し（さらに分子と分母を $\cos^2\theta$ で割り）、$t=\tan\theta\ge 0$ とおくと

$$\tan\phi = \frac{(1-k)t}{k+t^2}.$$

考えてみよう 面倒な微分をせずに、これを最大化するにはどうすればよいか。

ϕ は鋭角なので、ϕ を最大化することは $\tan\phi$ を最大化することと同じである。$t > 0$ に対して

$$\tan\phi = \frac{1-k}{k/t+t} \quad \text{であり} \quad \frac{k}{t} + t \geq 2\sqrt{k}$$

が相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）より成り立ち、等号はちょうど $t = \sqrt{k}$ のときに成立する。（$t = 0$ のときは $\phi = 0$ である。）よって最大値は $\tan\theta = \sqrt{k}$ のときにとられ、

$$\tan\phi_{\max} = \frac{1-k}{2\sqrt{k}}.$$

これを正弦に直すために、$(1-k)^2 + (2\sqrt{k})^2 = 1 - 2k + k^2 + 4k = (1+k)^2$ に注意する。すると、直角をはさむ 2 辺が $1-k$ と $2\sqrt{k}$ である直角三角形の斜辺は $1+k$ であり、

$$\sin\phi_{\max} = \frac{1-k}{1+k} = \frac{\frac{1}{2}(1+e)}{\frac{1}{2}(3-e)} = \frac{1+e}{3-e},$$

となる。ここで $1-k = \frac{1}{2}(1+e)$ と $1+k = \frac{1}{2}(3-e)$ を用いた。$\phi_{\max}$ は鋭角であるから

$$\phi_{\max} = \sin^{-1}\left(\frac{1+e}{3-e}\right),$$

であり、これが求める結果である。これは、中心線がもとの運動の向きと角 $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1}{2}(1-e)}$ をなすときに起こる。

検算

- $e \to 1$：公式は $\sin^{-1}1 = \frac{1}{2}\pi$ を与え、完全弾性（perfectly elastic）の場合と整合する。このとき A は中心線に沿った速度をすべて失うので、常にその線に直角に運動する。正面衝突に近い衝突では、A はもとの経路にほぼ直角な向きにはじき出される。
- $e = 0$：$\sin\phi_{\max} = \frac{1}{3}$ であるから $\phi_{\max} \approx 0.3398$ rad（19.5°）である。
- $e = \frac{1}{2}$：$\sin\phi_{\max} = \frac{3}{5}$、$\phi_{\max} \approx 0.6435$ rad であり、これは $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{2} \approx 0.4636$ のときに起こる。θ の 200 000 個の値について偏向角を数値的に調べたところ、両方の数値が再現された。また、200 000 回のランダムな衝突のいずれにおいても、2 つの速度のなす角が $\frac{1}{2}\pi$ 以上になることはなかった。

よくある間違い

- 反発の法則を、中心線に沿った成分ではなく速さ全体に適用してしまう。

- A の速度の垂直成分が変化しないことを忘れる。そもそも A が曲げられるのはこの成分のおかげである。
- 逆正接を微分して ϕ そのものを最大化しようとする。$\tan\phi$ で考える方が（ϕ が鋭角なのでこれは正当である）はるかにすっきりする。

STEP のその先へ

ここでの分解は、ニュートンの運動の第 2 法則（Newton's second law）の力積による形である。すなわち、力積は運動量をそのはたらく向きにのみ変化させる。弾性衝突の場合、直角になるという結果は、座標系を用いた鮮やかな議論の特別な場合である。重心系（centre-of-mass frame）では、弾性衝突はそれぞれの球の速さを保ち、向きを変えるだけである。そして実験室系（lab frame）に変換し直すと、起こりうるすべての結果が一度に得られる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、衝突をこのように重心系で扱っている。

解答例

STEP III 1988、第 13 問

力学 ・ 空気抵抗のある放物運動

STEP III 1988、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s3-q13

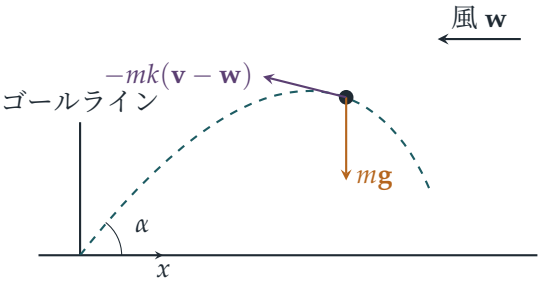
鍵となる考え方

速度に比例する空気抵抗（air resistance）を考えると、運動方程式（equation of motion）は線形（linear）になるので、各成分を積分因子（integrating factor）を用いて解くことができる。最後の部分を見通すうまい方法は、終端速度（terminal velocity）が何であるかを問うことである。速度は初期値から終端速度へ向かって指数関数的に緩和していく。したがって、この二つのベクトルが平行であれば、速度は原点を通る一本の直線から決して外れない。このときボールは同じ直線経路に沿って飛び出し、そして戻ってくる。

解答

運動方程式

ボールを質量 m の質点としてモデル化する。ボールには二つの力がはたらく。重力 $m\mathbf{g}$ と空気抵抗である。空気に対するボールの相対速度は $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ であり、抵抗はこれと逆向きにはたらくので、抵抗は $-mk(\mathbf{v}-\mathbf{w})$ である。



ニュートン（Newton）の運動の第 2 法則より

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = m\mathbf{g} - mk(\mathbf{v} - \mathbf{w}).$$

両辺を m で割って整理すると

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} + k\mathbf{v} = \mathbf{g} + k\mathbf{w},$$

となり、示すべき式が得られる。

時刻 t における位置

ボールを蹴った点を原点とし、x 軸を蹴った向きに水平にとり、y 軸を鉛直上向きにとる。$V = |\mathbf{v}_0|$、$W = |\mathbf{w}|$、$g = |\mathbf{g}|$ とおく。ボールは風に向かって蹴られるので

$$\mathbf{w} = (-W, 0), \qquad \mathbf{g} = (0, -g), \qquad \mathbf{v}_0 = (V\cos\alpha, V\sin\alpha).$$

$\mathbf{v} = (u, v)$ とすると、運動方程式の二つの成分は

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + ku = -kW, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kv = -g.$$

第 1 式に積分因子 e^{kt} を掛けると $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u\,\mathrm{e}^{kt}\right) = -kW\mathrm{e}^{kt}$ となるので、$u\,\mathrm{e}^{kt} = -W\mathrm{e}^{kt} + C$ である。$t = 0$ で $u = V\cos\alpha$ であるから $C = V\cos\alpha + W$ となり、

$$u = -W + (V\cos\alpha + W)\,\mathrm{e}^{-kt}.$$

まったく同様にして

$$v = -\frac{g}{k} + \left(V\sin\alpha + \frac{g}{k}\right)\mathrm{e}^{-kt}.$$

$t = 0$ で $x = y = 0$ であることと $\int_0^t \mathrm{e}^{-ks}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right)$ を用いて、0 から t までもう一度積分すると

$$x = -Wt + \frac{V\cos\alpha + W}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right),$$
$$y = -\frac{g}{k}\,t + \frac{1}{k}\left(V\sin\alpha + \frac{g}{k}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right).$$

$\mathbf{u}_\infty = \mathbf{w} + \mathbf{g}/k$（終端速度、すなわち運動方程式の定数解）とおけば、これはベクトル形式で

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}_\infty t + \frac{1}{k}\left(\mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_\infty\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right).$$

と書ける。

オウンゴール

考えてみよう $\tan\alpha = g/(kW)$ は終端速度について何を述べているか。

終端速度は $\mathbf{u}_\infty = (-W, -g/k) = -W\big(1, g/(kW)\big)$ である。条件は $g/(kW) = \tan\alpha$ を意味するので $\mathbf{u}_\infty = -W(1, \tan\alpha)$ となり、これは $\mathbf{v}_0$ に平行である（向きは逆である）。するとベクトル形式の式から、$\mathbf{r}$ はつねに方向 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ に沿った二つのベクトルの一次結合であることがわかる。したがってボールは直線 $y = x\tan\alpha$ に沿って運動する。

成分から直接これを確かめるには、$g/k = W\tan\alpha$ を用いる。

$$V\sin\alpha + \frac{g}{k} = V\sin\alpha + W\tan\alpha = \tan\alpha\,(V\cos\alpha + W),$$

であるから

$$y = \tan\alpha\left[-Wt + \frac{V\cos\alpha + W}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right)\right] = x\tan\alpha \quad \text{任意の} t \geq 0.$$

が成り立つ。

よってボールが地面の高さ $y = 0$ にあるのは、ちょうど $x = 0$ のときである（$\tan\alpha \neq 0$ であるから）。あとは、これがある $t > 0$ で起こることを確かめればよい。$f(t) = x(t)$ とおく。すると $f(0) = 0$ かつ $f'(0) = V\cos\alpha > 0$ であるから、蹴った直後は $x > 0$ である。また

$$f''(t) = -k(V\cos\alpha + W)\,\mathrm{e}^{-kt} < 0,$$

であるから f は狭義凹（strictly concave）であり、$-Wt$ の項があるので $t \to \infty$ のとき $f(t) \to -\infty$ となる。したがって f はちょうど一つの正の零点 T をもち、そこで $f'(T) < 0$ である（0 から増加した凹関数が再び 0 に戻るときには、減少していなければならない）。

時刻 T において、ボールは原点、すなわち蹴られたゴールライン上の点に戻っており、負の水平速度で、つまりゴールに向かって運動している。ボールは飛び出していった直線を逆にたどって戻り、地面の高さで、クロスバーのはるか下でゴールラインを越える。ゴールキーパーが前に出ていれば、これはオウンゴール（own goal）となる。

検算

- $k \to 0$ のとき $\frac{1}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt}) \to t$ かつ $\frac{1}{k}\big(t - \frac{1}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt})\big) \to \frac{1}{2}t^2$ であるから、$x \to Vt\cos\alpha$、$y \to Vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$ となる。これは通常の放物運動である。
- $t \to \infty$ のとき速度は運動方程式の定数解 $(-W, -g/k)$ に近づく。すなわちボールは最終的に、終端速さで落下しながら風に流されていく。

- 運動方程式をルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で数値積分したところ、V, α, W, k の多数のランダムな選び方について、x と y の式と約 10^{-13} の精度で一致した。$\tan\alpha = g/(kW)$ のとき、計算された経路は $y = x\tan\alpha$ 上にとどまり、$u < 0$ の状態で $x = 0$ に着地した。一方、たとえば $V = 20$、$\alpha = 0.6$、$W = 5$、$k = 0.5$ とすると、ボールはそうはならず 17.1 m 前方に着地した。

よくある間違い

- 抵抗を $-mk(\mathbf{v} - \mathbf{w})$ ではなく（地面に対する）$-mk\mathbf{v}$ としてしまう。
- $\mathbf{w}$ の符号を誤る。ボールは風に**向かって**蹴られるので、$\mathbf{w}$ はゴールの方向を向く。
- $y = x\tan\alpha$ で止めてしまい、ボールが本当に $x = 0$ に戻ってくること、そしてそのときゴールに向かって運動していることを確かめない。

STEP のその先へ

$\mathbf{F}$ を定数とする方程式 $\dot{\mathbf{v}} + k\mathbf{v} = \mathbf{F}$ は、平衡状態へ緩和する線形系の最も簡単な例である。ずれ $\mathbf{v} - \mathbf{F}/k$ は e^{-kt} のように減衰する。線形の抗力（drag）が現実的なのは、遅く小さな物体の場合に限られる。実際のサッカーボールが受ける抗力はおおよそ速さの 2 乗に比例し、そのため方程式は非線形（nonlinear）となり、水平方向と鉛直方向の運動が連成する。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、両方の種類の抗力が論じられている。

解答例

STEP III 1988、第 14 問

力学 ・ なめらかな針金上の運動

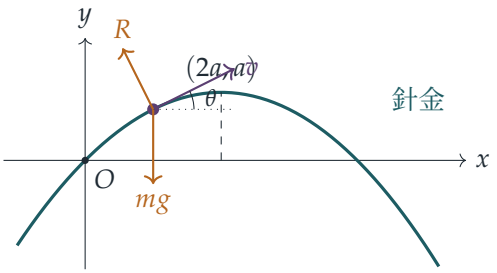
> **STEP III 1988、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q14

鍵となる考え方

針金から力を受けないビーズは、単に重力だけを受けて運動する放物体（projectile）である。したがって小問 (i) は、針金に沿って打ち出された自由な放物体が、針金の放物線をそのままたどることができるか、という問いである。二つの放物線を一致させればよい。小問 (ii) では、針金はなめらか（smooth）なので、エネルギーが保存される。$\tan\theta = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ を用いて、速さと高さを傾きの角 θ で表すところが要である。

解答

ビーズを、固定されたなめらかな針金上の質量 m の質点としてモデル化する。はたらく力は、下向きの重力 mg と、針金に垂直な針金からの垂直抗力（normal reaction）R だけである。



針金について、次の二つの事実を全体を通して用いる。一般の点において

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - \frac{x}{2a},$$

であるから、原点での傾きは 1 であり、ビーズは x 軸から上向きに 45° の方向に出発する。また、針金は下に開いた放物線なので、最高点は $x = 2a$、$y = a$ である。

小問 (i)

運動の間ずっと $R = 0$ であるとする。このとき重力だけがはたらくので、ビーズは初速 V、仰角 45° の放物体とまったく同じように運動する。水平方向の速度は $V/\sqrt{2}$ で一定なので、$x = Vt/\sqrt{2}$ である。また

$$y = \frac{V}{\sqrt{2}}\,t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$t = \sqrt{2}\,x/V$ を消去すると、軌道は

$$y = x - \frac{gx^2}{V^2}.$$

となる。これがビーズの経路となるのは、ビーズが到達するすべての x について、これが針金 $y = x - x^2/(4a)$ と一致する場合に限る。そのためには

$$\frac{g}{V^2} = \frac{1}{4a}, \qquad \text{すなわち} \qquad V = 2\sqrt{ag}.$$

が必要である。

逆に、$V = 2\sqrt{ag}$ とする。この速さで O から 45° の方向に打ち出された自由な質点は、曲線 $y = x - x^2/(4a)$、すなわち針金そのものをたどる。したがって質点は各瞬間に $R = 0$ のまま針金に沿って運動し、この運動は抗力が 0 の場合のビーズの運動方程式（equation of motion）を満たす。$x = Vt/\sqrt{2}$ は一定の割合で増加するので、ビーズは頂点 $(2a, a)$ を越え、その後もずっと反対側を下り続ける。この間ずっとビーズは針金に圧力を及ぼさず、題意は満たされる。求める速さは $V = 2\sqrt{ag}$ である。

考えてみよう 針金上のビーズが、抗力をまったく受けずに運動できるのはなぜだろうか。針金がビーズを支えていなければならないのではないか。

針金が押す必要があるのは、重力だけではビーズが曲線から外れてしまう場合に限られる。それ以外の速さでは、実際に外れてしまう。V が大きいと放物体の放物線はより平らになるので、針金はビーズを下に引かなければならない。V が小さいと放物線はより強く曲がるので、針金はビーズを上に支えなければならない。ちょうど $V = 2\sqrt{ag}$ のときには、曲線に沿うために必要な加速度を重力がすでに与えており、針金がすべきことは何もない。

小問 (ii)

ここでは V は一般の値である。速度は針金の接線（tangent）方向を向くので

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - \frac{x}{2a}, \qquad \text{よって} \qquad x = 2a(1-\tan\theta).$$

（ビーズが滑り戻る場合、速度は接線に沿って逆向きになり、角は π だけ変わる。このとき $\tan\theta$ と $\cos^6\theta$ は変わらないので、以下の議論には影響しない。）

速さを θ で表す。 $x = 2a(1-\tan\theta)$ を t で微分すると

$$\dot{x} = -2a\sec^2\theta\,\dot{\theta}.$$

となる。$\dot{y} = \tan\theta\,\dot{x}$ であるから、速さ v は

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2(1+\tan^2\theta) = \dot{x}^2\sec^2\theta = \frac{4a^2\dot{\theta}^2}{\cos^6\theta}.$$

を満たす。

高さを θ で表す。 $T = \tan\theta$ とおくと $x = 2a(1-T)$ であり、

$$\begin{aligned} y = x - \frac{x^2}{4a} &= 2a(1-T) - a(1-T)^2 \\ &= a(1-T)\big(2-(1-T)\big) \\ &= a(1-T)(1+T) = a(1-\tan^2\theta). \end{aligned}$$

エネルギー。針金はなめらかで、R は速度に垂直なので、R は仕事をせず、力学的エネルギーが保存される（conservation of mechanical energy）。ビーズは O から速さ V で出発するので

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + mgy = \tfrac{1}{2}mV^2, \qquad \text{すなわち} \qquad v^2 + 2gy = V^2.$$

v^2 と y の式を代入すると

$$\frac{4a^2\dot{\theta}^2}{\cos^6\theta} + 2ga(1-\tan^2\theta) = V^2,$$

となり、これが求める結果である。

検算

- $t = 0$ では $\theta = 45^\circ$ なので $\tan^2\theta = 1$ となり、第 2 項は消える。このとき第 1 項は $v^2 = V^2$ であり、確かにそうなるべき値である。

- 小問 (i) の $V^2 = 4ag$ のとき、$\dot{x} = V/\sqrt{2}$ は一定なので $\dot{\theta} = -\dot{x}\cos^2\theta/(2a)$ である。第 1 項は $2ag\sec^2\theta = 2ag(1+\tan^2\theta)$ となる。これに $2ga(1-\tan^2\theta)$ を加えると $4ag = V^2$ となり、二つの小問の結果は整合する。
- 数値的にも、ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）を用いて、針金に沿ったビーズの運動方程式を時間発展させた。$a = 1$、$g = 9.8$、$V = 2\sqrt{9.8}$ のとき、計算された垂直抗力は（単位質量あたり）$x \approx 13$ に至るまでずっと 10^{-15} 未満であった。V を 30% 増やすと、出発時の値はおよそ 4.8 であった。ビーズが滑り戻る場合も含めて V をランダムに選ぶと、(ii) の等式は相対誤差およそ 10^{-13} で成り立った。

よくある間違い

- 打ち出した瞬間に $R = 0$ であることだけを示してしまう。問題が求めているのは**運動の間ずっと**抗力がない運動であり、だからこそ軌道全体を針金と一致させたのである。
- $\tan\theta$ を微分するときに、連鎖律（chain rule）による因子 $\sec^2\theta$ を忘れる。そうすると第 1 項が $\cos^6\theta$ ではなく $\cos^2\theta$ になってしまう。

STEP のその先へ

小問 (ii) は運動の第一積分（first integral）である。エネルギー保存によって、2 階の方程式が、ただ一つの座標（ここでは θ）に関する 1 階の方程式に帰着される。大学 1 年の講義では、これは束縛運動（constrained motion）に対するラグランジュ（Lagrange）流の方法へと発展する。そこでは束縛を記述する座標を一つ選べば、抗力を計算する必要はまったくない。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、束縛運動とエネルギーを用いる方法が丁寧に扱われているのを見るのによい本である。

解答例

STEP III 1988、第 15 問

確率・統計　・　期待値の漸化式

STEP III 1988、問 15

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s3-q15

鍵となる考え方

その日の**最初の**本で条件付け（conditioning）をする。最初の本が棚に置かれると、その日の残りは、棚が短くなった新しい一日とまったく同じように見える。したがって、長さ n の棚に対する期待値（expected value）は、長さ $n-1$ と $n-2$ に対する期待値と結びつく。こうして線形差分方程式（linear difference equation）が得られる。これは二階漸化式（second-order recurrence）とまったく同じように解ける。すなわち、斉次（homogeneous）部分には補助方程式（auxiliary equation）となる二次方程式を用い、右辺の定数 1 に対しては特殊解（particular solution）を加えればよい。

解答

以下では、棚の長さが n である日に棚に置かれる本の冊数を N_n とし、$M(n) = \mathrm{E}(N_n)$ とする。各本は互いに独立に厚いか薄いかが決まり、厚い確率はそれぞれ p である。本は常に棚に収まりきらないほどあると述べられているので、その日は必ず、ある本が収まらないことで終わる。

小問 (i)

$n = 0$ のとき、空きはまったくない。最初の本は厚くても薄くても収まらないので、その本とそれ以降のすべての本はワゴンに置かれる。よって常に $N_0 = 0$ であり、$M(0) = 0$ である。

小問 (ii)

$n = 1$ のとき、最初の本に注目する。

- 薄い場合（確率 q）、その本は収まり、棚は満杯になる。次の本は少なくとも 1 単位を必要とするので収まらず、それ以降はすべてワゴンに置かれる。よって $N_1 = 1$ である。
- 厚い場合（確率 p）、その本は 2 単位を必要とするので収まらず、$N_1 = 0$ である。

したがって $M(1) = q \cdot 1 + p \cdot 0 = q$ である。

小問 (iii)

$n \geq 2$ とし、再び最初の本で条件付けをする。最初の本は高々 $2 \leq n$ 単位しか必要としないので、どちらであっても収まる。

- 薄い場合（確率 q）、その本は棚に置かれ、$n-1$ 単位が残る。
- 厚い場合（確率 p）、その本は棚に置かれ、$n-2$ 単位が残る。

> **考えてみよう** 最初の場合に、その後棚に置かれる本の冊数の期待値がちょうど $M(n-1)$ になるのはなぜか。

最初の本の後、残りの本は順に到着し、最初の本とは独立に同じ確率で厚いか薄いかが決まり、同じ規則で置かれる。すなわち、収まらない本が現れるまで棚に置き、そこで終わる。最初の本が変えたのは空きの大きさだけであり、それは今や $n-1$ 単位である。よってその日の残りは、長さ $n-1$ の棚での一日全体の複製であり、その後棚に置かれる本の冊数の期待値は $M(n-1)$ である。同様に、最初の本が厚い場合には $M(n-2)$ である。（小問 (i) により、これは $n-2 = 0$ のときにも成り立つ。）

最初の本も数に入れると、全期待値の法則（law of total expectation）により

$$\begin{aligned} M(n) &= q\big(1 + M(n-1)\big) + p\big(1 + M(n-2)\big) \\ &= (p+q) + qM(n-1) + pM(n-2), \end{aligned}$$

であり、$p + q = 1$ であるから

$$M(n) - qM(n-1) - pM(n-2) = 1 \qquad (n \geq 2),$$

となり、示すべき式が得られた。

一般項

まず斉次方程式 $M(n)-qM(n-1)-pM(n-2)=0$ を考える。$M(n)=\lambda^n$ とおくと、補助方程式

$$\lambda^2-q\lambda-p=0.$$

が得られる。$q=1-p$ であるから $\lambda=1$ は根であり（$1-q-p=0$）、根の積は $-p$ であるので

$$\lambda^2-q\lambda-p=(\lambda-1)(\lambda+p).$$

となる。よって、任意の A と B に対して、$A(-p)^n$ と定数 B は斉次方程式を満たす。

1 が根であるから、定数では右辺の 1 を作り出せない。そこで Cn を試す。代入すると

$$\begin{aligned}Cn-qC(n-1)-pC(n-2)&=C\big[(1-q-p)n+q+2p\big]\\&=C(q+2p)=C(1+p).\end{aligned}$$

となる。これは $C=\dfrac{1}{1+p}$ のとき 1 に等しく、$1+p>0$ であるからこれで問題ない。よって線形性（linearity）により、A と B が何であっても、$M(n)=A(-p)^n+B+Cn$ はすべての $n\geq 2$ に対して (iii) の方程式を満たす。

次に初期値に合わせる。小問 (i) より

$$M(0)=A+B=0,\qquad \text{よって}B=-A,$$

であり、小問 (ii) より

$$M(1)=-Ap+B+C=-A(1+p)+\frac{1}{1+p}=1-p.$$

である。したがって

$$A(1+p)=\frac{1}{1+p}-(1-p)=\frac{1-(1-p^2)}{1+p}=\frac{p^2}{1+p},$$

となり、

$$A=\frac{p^2}{(1+p)^2},\qquad B=-\frac{p^2}{(1+p)^2},\qquad C=\frac{1}{1+p}.$$

を得る。すなわち

$$M(n)=\frac{n}{1+p}-\frac{p^2}{(1+p)^2}\big(1-(-p)^n\big).$$

である。(i)、(ii)、(iii) によって $M(0)$、$M(1)$、そしてそれ以降の各値が順に定まるので、これは単にありうる解の一つではなく、唯一の解である。

検算

- $p = 0$（すべて薄い）：$M(n) = n$ となり、当然そうなるべき値である。
- $p = 1$（すべて厚い）：$M(n) = \frac{n}{2} - \frac{1}{4}\bigl(1 - (-1)^n\bigr)$ であり、これは偶数の n に対して $\frac{n}{2}$、奇数の n に対して $\frac{n-1}{2}$、すなわち $\lfloor n/2 \rfloor$ である。正しい。
- $p = q = \frac{1}{2}$ として漸化式から直接計算すると $M(2) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ であり、公式からは $\frac{2}{3} - \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$ が得られる。
- n が大きいとき、各本は平均して $1 + p$ 単位を使うので、およそ $n/(1+p)$ 冊が置かれると期待される。公式はこれと一致し、棚の端で無駄になる空きの分だけ有界な補正がつく。

一般項は、$n \le 12$ およびいくつかの p の値について棚に置く過程を厳密に数え上げたものと照合し、さらにシミュレーションでも確認した。たとえば $p = \frac{1}{2}$、$n = 5$ のとき、どちらも $M(5) = \frac{103}{32} \approx 3.219$ を与える。

よくある間違い

- 厚い本が収まらなかった後でも、薄い本ならまだ棚に置けると考えてしまうこと。問題文には以降の本はすべてワゴンに置かれるとあり、まさにそのために $M(1) = q$ となり、それより大きな値にはならないのである。
- 特殊解として定数を試すこと。$\lambda = 1$ は補助方程式の解であるから、定数は斉次部分に吸収されてしまい、Cn が必要になる。

STEP のその先へ

最初の一歩で条件付けをし、残りが同じ問題の小さな複製であることに気づく手法は、**第一ステップ解析**（first-step analysis）と呼ばれる。これはマルコフ連鎖（Markov chain）において、到達時間（hitting time）の期待値や吸収確率（absorption probability）を求める標準的な方法である。今回の答えは**再生定理**（renewal theorem）の例にもなっている。すなわち、大きさがランダムな品物を長さ n に詰めていくと、収まる個数は n を平均の大きさで割ったものと同じように増えていく。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、ランダムウォーク（random walk）に対する差分方程式とマルコフ連鎖の入門の両方を扱っている。

解答例

STEP III 1988、第 16 問

確率・統計 ・ 超幾何分布

> **STEP III 1988、問 16**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q16

鍵となる考え方

非復元抽出（drawing without replacement）では各回の取り出しが互いに従属するので、1 回ずつ順に追っていく方法は煩雑になる。これを回避する考え方が二つある。第一に、順序を考えない選び方を数えることで、赤玉の個数の分布が得られる。第二に、対称性を利用する。壺の中の玉をすべてランダムな順序で取り出し尽くすと想像すれば、どの玉も、指定されたどの位置にも等しい確率で現れる。そこで X を指示変数（indicator variable）X_i の和として書けば、分布をまったく用いずに平均（mean）と分散（variance）が求まる。必要なのは各組の間の共分散（covariance）だけである。

解答

ちょうど k 個が赤である確率

玉はすべて区別できるものと考える。取り出した n 個の玉は大きさ n の集合をなし、そのような集合はどれも同様に確からしいので、同様に確からしい結果は $\binom{M}{n}$ 通りある。赤玉をちょうど k 個含む集合は、m 個の赤玉から k 個を、$M-m$ 個の緑玉から $n-k$ 個を選ぶことで作られる。したがって

$$\mathrm{P}(\text{ちょうど}k\text{ 個が赤}) = \frac{\binom{m}{k}\binom{M-m}{n-k}}{\binom{M}{n}},$$

となる。ただし、$b<0$ または $b>a$ のとき $\binom{a}{b}=0$ とする通常の約束に従う。（これにより、$n-k>M-m$ のような起こりえない場合も扱える。）これが**超幾何**分布（hypergeometric distribution）である。

小問 (i)

壺が空になるまで取り出しを続けると想像する。M 個の（区別できる）玉が出てくる順序は一様ランダムな並べ方であり、$M!$ 通りの順序はすべて同様に確からしい。n 回で取り出しをやめても最初の n 個の位置は変わらないので、全体の並べ方で考えてよい。

位置 i を固定する。特定の玉が位置 i にあるような並べ方の数は $(M-1)!$ であり、これはどの玉についても同じである。よって、位置 i にある玉は M 個の玉のいずれであることも同様に確からしく、

$$\mathrm{P}(X_i = 1) = \frac{m\,(M-1)!}{M!} = \frac{m}{M},$$

となり、示すべきことが示された。

> **考えてみよう** 2 番目の玉の色は、1 番目の玉が何であったかに依存するのではないか？

1 番目の玉が与えられたもとでは、確かに依存する。しかし求めたいのは**条件なしの**確率である。$i = 2$ の場合、全確率の公式（law of total probability）により

$$\mathrm{P}(X_2 = 1) = \frac{m}{M}\cdot\frac{m-1}{M-1} + \frac{M-m}{M}\cdot\frac{m}{M-1} = \frac{m(M-1)}{M(M-1)} = \frac{m}{M}.$$

を得る。対称性による議論は、これと同じ計算をすべての i について一度に行っているのである。

小問 (ii)

位置 $i \neq j$ を固定する（したがって $M \geq 2$ である）。両方の位置に赤玉がある並べ方を数える。位置 i の玉の選び方が m 通り、次に位置 j の玉の選び方が $m-1$ 通りあり、残りの玉の並べ方が $(M-2)!$ 通りある。したがって

$$\mathrm{P}(X_i = 1 \text{ かつ} X_j = 1) = \frac{m(m-1)(M-2)!}{M!} = \frac{m(m-1)}{M(M-1)},$$

となり、示すべきことが示された。言い換えれば、位置 (i, j) にある玉の順序対は、相異なる玉の $M(M-1)$ 通りの順序対のいずれであることも同様に確からしい。

X の平均と分散

X は最初に取り出した n 個のうちの赤玉の個数である。独立性を必要としない期待値の線形性（linearity of expectation）と、$\mathrm{E}(X_i) = \mathrm{P}(X_i = 1)$ であることから、

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) = \frac{nm}{M}.$$

分散については $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2$ を用いる。和の 2 乗を展開し、X_i は 0 または 1 であるから $X_i^2 = X_i$ となることを用いると、

$$X^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i \neq j} X_i X_j = X + \sum_{i \neq j} X_i X_j,$$

となる。ここで第 2 の和は、$i \neq j$ を満たす $n(n-1)$ 個の順序対 (i, j) にわたってとる。$X_i X_j = 1$ となるのは両方の玉が赤であるときに限るので、小問 (ii) より $\mathrm{E}(X_i X_j) = \dfrac{m(m-1)}{M(M-1)}$ である。したがって、$M \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \frac{nm}{M} + \frac{n(n-1)m(m-1)}{M(M-1)} - \frac{n^2m^2}{M^2} \\ &= \frac{nm}{M^2(M-1)}\Big[M(M-1) + (n-1)(m-1)M - nm(M-1)\Big].\end{aligned}$$

括弧の中を展開すると

$$\begin{aligned}&M^2 - M + nmM - nM - mM + M - nmM + nm \\ &\quad = M^2 - nM - mM + nm = (M-m)(M-n).\end{aligned}$$

となる。よって

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{nm(M-m)(M-n)}{M^2(M-1)}.$$

である。（$M = 1$ ならば $n \leq 1$ であり、組は存在せず、X は定数なので $\mathrm{Var}(X) = 0$ である。）

$p = m/M$ とおくと見通しがよくなる。このとき

$$\mathrm{E}(X) = np, \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p) \cdot \frac{M-n}{M-1}.$$

となる。これは二項分布（binomial distribution）の分散に補正因子を掛けたものであり、この因子は $n \geq 2$ のとき 1 より小さい。

検算

- $n = M$ の場合：すべての玉を取り出すので、確実に $X = m$ である。公式は平均 m、分散 0 を与える。これは因子 $M - n$ のためである。
- $n = 1$ の場合：X は $p = m/M$ の単一のベルヌーイ変数（Bernoulli variable）であり、分散は $p(1-p)$ に帰着する。
- $M = 6$、$m = 2$、$n = 3$ の場合：公式から $\mathrm{Var}(X) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3}{36 \cdot 5} = \frac{2}{5}$ を得る。6! 通りの順序をすべて数え上げた結果はこれと正確に一致し、$M \leq 6$ のすべての場合についても一致する。

よくある間違い

- X_i を独立とみなし、二項分布の分散 $np(1-p)$ を答えてしまう。これらは負の相関をもつ。早い段階で赤玉が出ると、後で赤玉が出にくくなるのである。
- 組を順序対として数えるとき、二重和 $\sum_{i \neq j}$ の項数は $\binom{n}{2}$ ではなく $n(n-1)$ であることを忘れる。

STEP のその先へ

個数を指示変数の和として書くことは、確率論で最も強力な技法の一つである。分布そのものを書き下すのが絶望的な場合でも、平均と分散が得られる。因子 $\frac{M-n}{M-1}$ は、標本調査で用いられる**有限母集団修正**（finite population correction）である。これを見れば、1000 人を対象とする世論調査が、一国について、無限母集団についての場合とほぼ同程度の情報をもたらす理由がわかる。Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）は全編を通じて指示変数を用いており、超幾何分布を詳しく扱っている。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

1988 年解答例. 本書全体、すべての章、
すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.