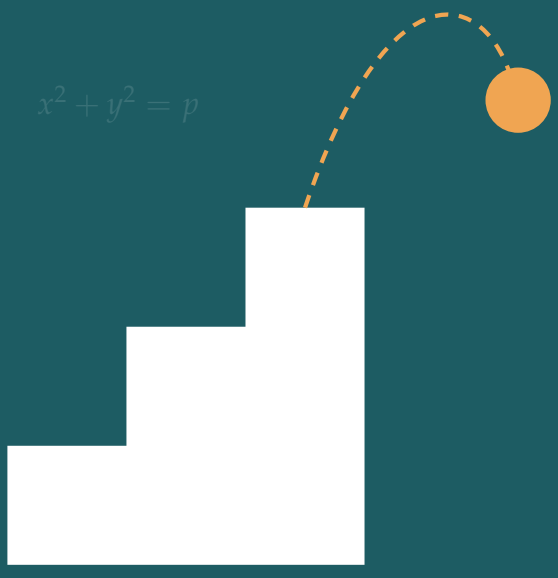
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

STEP I, II と III

1987 年解答例



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

STEP I, II と III

1987 年解答例

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

1987 年解答例

1987 年の STEP 問題（STEP I, II と III）の全 48 問の解答例。見本問題以降のすべての STEP 問題の解答例、書籍 *Beyond STEP* の全体、およびその各章は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

解答を読む前に、まず自分でしっかり問題に取り組んでみよう。すべての答えは数値的に検証してあるが、これだけ多くの解答があれば多少の誤りは避けられない。おかしいと思われる箇所があれば、自分の計算を信じて注意深く確かめてほしい。

英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty への issue として歓迎する。

目次

STEP I

Q1 曲線の概形 純粋数学 . . . 3
Q2 円の充填と面積 純粋数学 . . . 7
Q3 変数分離形の微分方程式 純粋数学 . . . 11
Q4 対数と等比級数 純粋数学 . . . 15
Q5 置換積分 純粋数学 . . . 17
Q6 面積と逆関数 純粋数学 . . . 21
Q7 三角級数 純粋数学 . . . 25
Q8 置換積分 純粋数学 . . . 28
Q9 重心座標 純粋数学 . . . 31
Q10 弾性ひも 力学 . . . 35
Q11 円運動とエネルギー 力学 . . . 39
Q12 はね返りのある放物運動 力学 . . . 43
Q13 変化する力 力学 . . . 47
Q14 確率の等比級数 確率・統計 . . . 51
Q15 連続型確率変数 確率・統計 . . . 55
Q16 ベイズの定理と正規近似 確率・統計 . . . 59

STEP II

Q1 代数的恒等式 純粋数学 . . . 63
Q2 三角関数の恒等式 純粋数学 . . . 66
Q3 共役な無理数 純粋数学 . . . 69
Q4 複素数と図形 純粋数学 . . . 73
Q5 ラグランジュの反転公式による級数 純粋数学 . . . 77
Q6 対称性を用いた定積分 純粋数学 . . . 82

Q7 台形公式と階乗 純粋数学 86
Q8 空間ベクトルと軌跡 純粋数学 90
Q9 直交行列 純粋数学 94
Q10 群の公理 純粋数学 97
Q11 摩擦とモーメント 力学 101
Q12 つり合いとエネルギー 力学 105
Q13 壁との斜め衝突 力学 109
Q14 円錐上のゴムひも 力学 114
Q15 幾何的確率 確率・統計 118
Q16 ベイズの定理 確率・統計 122

STEP III

Q1 階乗の整除性 純粋数学 126
Q2 三角関数の漸化式（積分） 純粋数学 129
Q3 偏角とマチンの公式 純粋数学 132
Q4 回転体の体積 純粋数学 136
Q5 合同算術による暗号 純粋数学 139
Q6 連立微分方程式 純粋数学 143
Q7 逆正接関数の級数 純粋数学 147
Q8 平行四辺形の面積に関する不等式 純粋数学 151
Q9 群の直積 純粋数学 155
Q10 ベルヌーイ多項式 純粋数学 159
Q11 相対速度と最適化 力学 163
Q12 質量が変化する物体の回転 力学 168
Q13 摩擦のある回転棒 力学 172
Q14 重力崩壊 力学 176
Q15 期待費用の最適化 確率・統計 180
Q16 順序統計量とポアソン分布 確率・統計 184

解答例

STEP I 1987、第 1 問

純粋数学 ・ 曲線の概形

> **STEP I 1987、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q1

鍵となる考え方

積の微分法（product rule）で微分すると、決して零にならない因子 e^{ax} と、$\cos bx$ と $\sin bx$ の組合せとの積が残る。したがって停留点（stationary point）はただ一つの方程式 $\tan bx =$ 定数 から得られ、その解は間隔 π/b で等間隔に並ぶ。ある停留点から次の停留点へ移ると、指数関数には一定の因子が掛かり、余弦の符号は反転する。これはまさに等比数列（geometric progression）である。

解答

停留点

積の微分法により、

$$\mathrm{f}'(x) = a\mathrm{e}^{ax}\cos bx - b\mathrm{e}^{ax}\sin bx = \mathrm{e}^{ax}(a\cos bx - b\sin bx).$$

すべての x に対して $\mathrm{e}^{ax} > 0$ であるから、$\mathrm{f}'(x) = 0$ となるのは $a\cos bx = b\sin bx$ のときであり、かつそのときに限る。

> ? **考えてみよう** ここで $\cos bx$ で割ってもよいだろうか。

よい。もし $\cos bx = 0$ ならば $\sin bx = \pm 1$ であり、方程式は $0 = \pm b$ となるが、$b > 0$ であるからこれは成り立たない。よって任意の停留点で $\cos bx \neq 0$ であり、割ると

$$\tan bx = \frac{a}{b}$$

を得る。$\alpha = \arctan(a/b)$ とおく。$a/b > 0$ であるから $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ である。tan は周期

（period）π をもつので、解は $bx = \alpha + n\pi$ であり、停留点は

$$x_n = \frac{\alpha + n\pi}{b}, \qquad n \in \mathbb{Z}, \qquad \text{ただし } \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

にある。直角をはさむ 2 辺が a と b の直角三角形から、$\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である。$\cos(\theta + n\pi) = (-1)^n \cos\theta$ であるから、そこでの f の値は

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x_n) &= \mathrm{e}^{a(\alpha+n\pi)/b}\cos(\alpha + n\pi) \\ &= (-1)^n \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathrm{e}^{a\alpha/b}\,\mathrm{e}^{na\pi/b} \end{aligned}$$

となる。

極大か極小か。 もう一度微分すると、

$$\mathrm{f}''(x) = \mathrm{e}^{ax}((a^2-b^2)\cos bx - 2ab\sin bx).$$

停留点では $b\sin bx = a\cos bx$ であるから $2ab\sin bx = 2a^2\cos bx$ となり、

$$\mathrm{f}''(x_n) = \mathrm{e}^{ax_n}\cos bx_n\,(a^2 - b^2 - 2a^2) = -(a^2+b^2)\,\mathrm{f}(x_n).$$

よって x_n は $\mathrm{f}(x_n) > 0$（n が偶数）のとき極大（maximum）、$\mathrm{f}(x_n) < 0$（n が奇数）のとき極小（minimum）である。停留点は極大、極小、極大、...と交互に現れる。

等比数列

$0 < \alpha < \pi$ であるから、$x_n > 0$ となるのは $n \geq 0$ のときであり、かつそのときに限る。したがって $x > 0$ にある停留点は $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$ であり、各 $n \geq 0$ に対して

$$\frac{\mathrm{f}(x_{n+1})}{\mathrm{f}(x_n)} = \frac{\mathrm{e}^{a(\alpha+(n+1)\pi)/b}\cos(\alpha+(n+1)\pi)}{\mathrm{e}^{a(\alpha+n\pi)/b}\cos(\alpha+n\pi)} = \mathrm{e}^{a\pi/b}\cdot(-1) = -\mathrm{e}^{a\pi/b}$$

となる。ここで $\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$ と $\cos(\alpha+n\pi) \neq 0$ を用いた。この比は n によらないので、値 $\mathrm{f}(x_0), \mathrm{f}(x_1), \ldots$ は初項（first term）$\dfrac{b\,\mathrm{e}^{a\alpha/b}}{\sqrt{a^2+b^2}}$、公比（common ratio）$-\mathrm{e}^{a\pi/b}$ の等比数列をなす。これが示すべきことであった。

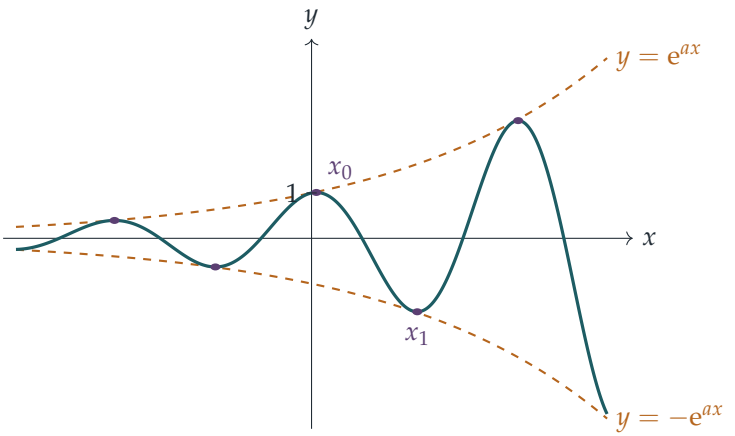
（同じ計算は負の n に対しても成り立つので、実はすべての停留値は両方向に続く一つの等比数列をなす。$x > 0$ に制限するのは、単に自然な初項を定めるためである。）

概形

必要な事実は次のとおりである。

- $-1 \le \cos bx \le 1$ であるから、グラフは曲線 $y = \mathrm{e}^{ax}$ と $y = -\mathrm{e}^{ax}$ の間にある。グラフは $\cos bx = 1$ ($bx = 2m\pi$) となる点で $y = \mathrm{e}^{ax}$ に、$\cos bx = -1$ ($bx = (2m+1)\pi$) となる点で $y = -\mathrm{e}^{ax}$ に接する。これらの点では $\sin bx = 0$ であるから $\mathrm{f}'(x) = \pm a\mathrm{e}^{ax}$ となり、包絡線（envelope）と同じ傾きをもつ。つまり曲線はそこで包絡線に接しているのであって、向きを変えているのではない。
- 零点は $bx = \frac{\pi}{2} + m\pi$ にあり、間隔は π/b である。また $\mathrm{f}(0) = 1$ である。
- $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ であるから、各極値点 $bx = \alpha + n\pi$ は対応する接点 $bx = n\pi$ のすぐ後ろにある。増加していく包絡線が、各山をわずかに右へ引きずるのである。
- $x \to \infty$ のとき振動は限りなく大きくなる。$x \to -\infty$ のときは $\mathrm{e}^{ax} \to 0$ であるから、振動しながら $\mathrm{f}(x) \to 0$ となる。

図は $a = 0.3, b = 2$ の場合であり、包絡線 $y = \pm\mathrm{e}^{ax}$ を破線で示している。



検算

- $a = b = 1$ とすると、$\alpha = \frac{\pi}{4}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$ であり $\mathrm{f}(x_0) = \mathrm{e}^{\pi/4}/\sqrt{2} \approx 1.551$、一方 $\mathrm{f}(x_1) = \mathrm{e}^{5\pi/4}\cos\frac{5\pi}{4} \approx -35.89$ である。比は $\approx -23.14 = -\mathrm{e}^{\pi}$ となる。
- $a \to 0$ とすると関数は $\cos bx$ になる。このとき $\alpha \to 0$ で、極値点は $bx = n\pi$ に移り、比は -1 に近づいて、おなじみの $1, -1, 1, \ldots$ が得られる。
- 数値的に、500 組の無作為な (a, b) に対して、$\mathrm{f}'(x_n) = 0$ であること、$\mathrm{f}(x_n)$ が上の式と一致すること、$\mathrm{f}''(x_n) = -(a^2+b^2)\mathrm{f}(x_n)$ であること、隣り合う値の比が $-\mathrm{e}^{a\pi/b}$ に等しいこと、そして f' がほかに零点をもたないことを確かめた。

よくある間違い

- 極値点を、曲線が包絡線に接する点 $bx = n\pi$ にとってしまう。これらの点での傾きは $\pm ae^{ax} \neq 0$ であり、極値点はそれより少し右にある。
- $bx = \alpha$ だけをとり、$\tan bx = a/b$ の一般解（general solution）$bx = \alpha + n\pi$ を忘れる。
- 比の負号を見落とす。隣り合う停留点の間で余弦の符号が変わるので、値は極大、極小と交互に現れる。

STEP のその先へ

関数 $e^{ax}\cos bx$ は $e^{(a+ib)x}$ の実部（real part）であり、このような関数はまさに、特性方程式（auxiliary equation）が複素数の解をもつ線形微分方程式（linear differential equation）$y'' + py' + qy = 0$ の解である。$a < 0$ のときは減衰振動（damped oscillation）となり（摩擦のある振り子の揺れ）、ここでのように $a > 0$ のときは振動が増大していく不安定な系となる。相続く山の高さの比は一定であり、その比の対数は技術者が対数減衰率（logarithmic decrement）と呼ぶものである。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『初等微分方程式』）は 2 階線形方程式の章でこの内容を展開しており、Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、$e^{(a+ib)x}$ を掛けることがなぜ螺旋を描くのかを示している。

解答例

STEP I 1987、第 2 問

純粋数学 ・ 円の充填と面積

> **STEP I 1987、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q2

鍵となる考え方

小さい円の中心どうしを結ぶ。それらはすべて、2 つの大きい円のちょうど中間にある半径 R の円の上にあり、正 n 角形（regular n-gon）をなす。その各辺は、隣り合う小さい円が接する点を通る。この多角形こそが、Y と呼ばれる部分（その内側）と X と呼ばれる部分（その外側）を分ける境界線である。したがって、どの面積も 3 つの単純な図形、すなわち多角形、円板、そして多角形の頂点によって切り取られる小さい円の扇形（sector）から求められる。

解答

n, R, r の関係

各小円は 2 つの大円の両方に接するので、その中心は共通の中心 O から距離 $R - r + r = R$ にある。すなわち n 個の中心はすべて半径 R の円の上にある。対称性によりそれらは等間隔に並ぶので、隣り合う中心 C_1, C_2 が O に対して張る角は $2\pi/n$ である。

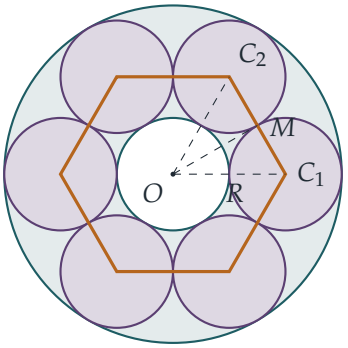
隣り合う 2 円は接するので $C_1C_2 = 2r$ である。$OC_1 = OC_2 = R$ の二等辺三角形（isosceles triangle）OC_1C_2 において、O から C_1C_2 の中点（midpoint）M へ垂線（perpendicular）を下ろすと

$$r = C_1M = R\sin\frac{\pi}{n}.$$

を得る。これが求める関係である。（$n \geq 3$ が必要である。$n = 2$ のとき内側の円の半径は $R - r = 0$ となってしまう。）同じ三角形から

$$OM = R\cos\frac{\pi}{n} = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

も得られる。



図（$n = 6$ の場合）では、中心を結んだ多角形を琥珀色で示している。その辺は、M のような隣り合う円の接点を通る。

面積 Y

この多角形は OC_1C_2 と合同（congruent）な n 個の三角形からなり、その面積はそれぞれ $\frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sqrt{R^2 - r^2}$ である。よって

$$\text{多角形の面積} = nr\sqrt{R^2 - r^2}.$$

多角形の内部には何があるだろうか。その内接円の半径（inradius）は $OM = \sqrt{R^2 - r^2}$ であり、$R^2 - r^2 \geq (R - r)^2$ が成り立つ。これは整理すると $2r(R - r) \geq 0$ となるからである。したがって半径 $R - r$ の内側の円板は多角形の内部にある。各頂点には小円の扇形がある。正 n 角形の内角（interior angle）は $\pi - \frac{2\pi}{n}$ であるから、このような扇形の面積はそれぞれ

$$\tfrac{1}{2}r^2\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = \pi r^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right).$$

である。小円どうし、および小円と内側の円は接するだけなので、これら n 個の扇形と内側の円板は互いに重ならない。多角形から残る部分は、ちょうど内側の円に隣接する n 個の曲辺三角形であり、これらを合わせたものが Y である：

$$Y = nr\sqrt{R^2 - r^2} - \pi(R - r)^2 - n\pi r^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right),$$

これが示すべきことであった。

? **考えてみよう** なぜ辺 C_1C_2 が X と Y を分けるのにふさわしい場所なのだろうか。

辺 C_1C_2 は中心から中心へと接点 M を通って延びるので、円の間のすき間を横切ることがない。内側の円に隣接するすき間はすべてこの辺の O の側にあり、外側の円に隣接するすき間はすべて反対側にある。したがって多角形に沿って切ると 2 種類のすき

間がきれいに分かれ、しかも各小円は 2 本の半径に沿って切られる。扇形が現れるのはそのためである。

面積 X と Z

多角形の外側かつ外側の円の内側の部分からは、各小円の残りの部分を取り除く。その残りは角 $2\pi - (\pi - \frac{2\pi}{n}) = \pi + \frac{2\pi}{n}$ の優角の扇形（reflex sector）であり、面積は $\pi r^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)$ である。よって

$$X = \pi(R+r)^2 - nr\sqrt{R^2 - r^2} - n\pi r^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right).$$

半径 r の n 個の円板から

$$Z = n\pi r^2.$$

$n \to \infty$ のときの極限

足し合わせると、多角形の項は打ち消し合い、扇形の項はまとまって $n\pi r^2$ となる：

$$\begin{aligned} X + Y &= \pi(R+r)^2 - \pi(R-r)^2 - n\pi r^2 \\ &= 4\pi Rr - n\pi r^2. \end{aligned}$$

これは、当然そうあるべきとおり、円環（annulus）の面積から円の面積を引いたものにほかならない。したがって

$$\frac{X+Y}{Z} = \frac{4\pi Rr - n\pi r^2}{n\pi r^2} = \frac{4R}{nr} - 1 = \frac{4}{n\sin(\pi/n)} - 1,$$

ここで $r = R\sin(\pi/n)$ を用いた。$n \to \infty$ のとき $\pi/n \to 0$ かつ $\dfrac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \to 1$ であるから、$n\sin(\pi/n) \to \pi$ となり、

$$\frac{X+Y}{Z} \to \frac{4}{\pi} - 1 \approx 0.273.$$

である。

検算

- $n = 3$, $R = 1$ のとき $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $Y \approx 0.0646$, $X \approx 3.7497$ となる。細かい極座標の格子上で各点を「円の内部」「多角形の内部」「多角形の外部」に分類する数値積分（numerical integration）を行ったところ、$n = 3, 5, 8, 12$ について有効数字（significant figures）4 桁まで一致した。

- 比 $\frac{4}{n\sin(\pi/n)} - 1$ は $n = 10$ で 0.2944、$n = 100$ で 0.27345、$n = 1000$ で 0.273240 である。$4/\pi - 1 = 0.273240\ldots$ に近づいている。
- 発見的に考えると、n が大きいとき円は幅 $2r$ の帯の中に並んだ直径 $2r$ の円板の列のように見える。各 $2r \times 2r$ の正方形のうち円板が πr^2 を占め、すき間が $4r^2 - \pi r^2$ を占めるので、比は $(4 - \pi)/\pi$ となる。

よくある間違い

- 扇形の角として、多角形の内角 $\pi - 2\pi/n$ ではなく外角（exterior angle）$2\pi/n$ を用いてしまう。
- Y において内側の円板を取り除くことを忘れる、あるいはそれが本当に多角形の内部にあることを確かめない。

STEP のその先へ

最後の極限は、姿を変えた $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ である。これは、アルキメデス（Archimedes）が内接多角形と外接多角形の周の長さで π をはさみ込むことを可能にしたのと同じ事実である。この問題はまた、円充填（circle packing）の密度問題の簡単な模型にもなっており、ここでは細い円環のどれだけの割合を円で埋められるかを問うている。このような極限を厳密に扱うには、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）に挑戦してみるとよい。

解答例

STEP I 1987、第 3 問

純粋数学 ・ 変数分離形の微分方程式

> **STEP I 1987、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q3

鍵となる考え方

この方程式は v についてのままでは扱いにくそうに見えるが、左辺には見抜いてほしいと言わんばかりの形が現れている。$x^3v' + x^2v$ は xv の導関数（derivative）の x^2 倍なのである。したがって、示唆された置換（substitution）によって左辺は x^2y' となり、右辺を y で書き直すと、きれいに変数分離（separation of variables）ができる。あとは部分分数分解（partial fractions）と、符号の注意深い選択である。

解答

変数の変換

$y = xv$ とおくと、積の微分法（product rule）により $y' = v + xv'$ であるから、

$$x^3\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + x^2v = x^2\left(x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\right) = x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

右辺については、$x^2v^2 = y^2$ かつ $v = y/x$ であるから、右辺は

$$\frac{1+y^2}{(1+x^2)\,y/x} = \frac{x(1+y^2)}{(1+x^2)\,y}.$$

となる。よって方程式は

$$x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x(1+y^2)}{(1+x^2)\,y}, \qquad \text{すなわち、} \qquad \frac{y}{1+y^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x(1+x^2)},$$

となる。ここでは x^3 で割り（$x = 1$ の近くで考えるので $x > 0$ である）、$y/(1+y^2)$ を掛けた。これで変数が分離された。

積分する

左辺を積分すると $\frac{1}{2}\ln(1+y^2)$ となる。右辺については、部分分数分解により

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2},$$

が得られる。これは右辺を通分すれば容易に確かめられる。したがって、$x > 0$ において

$$\tfrac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C, \qquad \text{よって} \qquad 1+y^2 = \frac{Ax^2}{1+x^2}$$

である。ここで $A = \mathrm{e}^{2C}$ は正の定数である。

$x = 1$ のとき $v = 1$ であるから $y = 1$ でもあり、$2 = A/2$ より $A = 4$ を得る。したがって

$$y^2 = \frac{4x^2}{1+x^2} - 1 = \frac{3x^2-1}{1+x^2}, \qquad v^2 = \frac{y^2}{x^2} = \frac{3x^2-1}{x^2(1+x^2)}.$$

考えてみよう どちらの平方根をとるべきか。また、解はどの範囲で有効か。

もとの方程式では v が分母にあるので、解が $v = 0$ を通ることはありえない。解は連続であるから、$x = 1$ での符号、すなわち正の符号を保ち続ける。よって正の平方根をとる：

$$\boxed{v(x) = \frac{\sqrt{3x^2-1}}{x\sqrt{1+x^2}}}$$

これは $x > 1/\sqrt{3}$ で有効である。x が $1/\sqrt{3}$ まで減少すると v は 0 まで下がり、方程式が意味をなさなくなるので、解をその点より先へ延長することはできない。

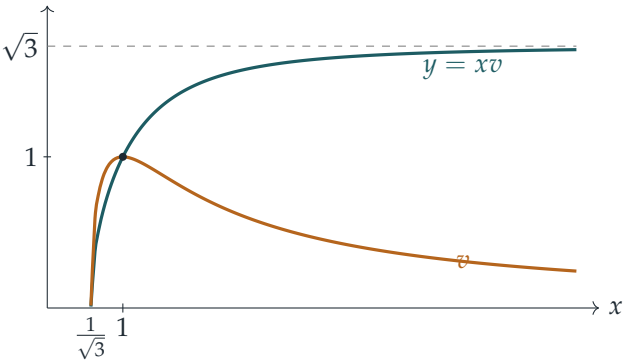
x が大きいとき

分子と分母を x^2 で割ると、

$$v(x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{3-1/x^2}}{\sqrt{1+1/x^2}} \approx \frac{\sqrt{3}}{x},$$

となるので、$x \to \infty$ のとき $v(x) \to 0$ である。言い換えれば $y = xv \to \sqrt{3}$ であり、y のグラフは水平漸近線（horizontal asymptote）$y = \sqrt{3}$ をもち、$v = y/x$ は $\sqrt{3}/x$ のように減衰する。

実は出発点が最大点になっている。$u = x^2$ とおくと、$(3u-1)/(u^2+u)$ の導関数の分子は $-(3u+1)(u-1)$ であるから、v は $x = 1$ で最大値 1 まで増加し、その後 0 に向かって減少する。



検算

- $x = 1$ において：$v = \sqrt{2}/(1 \cdot \sqrt{2}) = 1$ であり、条件を満たす。
- 代入による確認：$1 + y^2 = 4x^2/(1 + x^2)$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると $2yy' = 8x/(1 + x^2)^2$ となり、また $(1 + y^2)/(x(1 + x^2)) = 4x/(1 + x^2)^2$ であるから、確かに $yy'/(1 + y^2) = 1/(x(1 + x^2))$ が成り立つ。
- 数値的には、もとの方程式を $(1, 1)$ からルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で数値的に解き進めると $v(10) \approx 0.172058$ となり、公式と一致する。また $x = 10^4$ では公式から $xv \approx 1.73205 \approx \sqrt{3}$ が得られる。

よくある間違い

- 極限を $\sqrt{3}$ と答えてしまう：それは y の極限であり、問われているのは v の極限で、これは 0 に収束する。
- 定数の指数をとる処理を誤る：$\ln(1 + y^2) = \ln \frac{x^2}{1+x^2} + 2C$ からは $1 + y^2 = Ax^2/(1 + x^2)$ という乗法的な定数が得られるのであって、$x^2/(1 + x^2) + 2C$ ではない。
- 平方根で $\pm$ をつけたまま決めずに終わる：条件 $v(1) = 1$ と $v = 0$ を通れないことから、正の符号に定まる。

STEP のその先へ

ここでの置換がうまくいくのは、両辺に掛け算をしたあと左辺がちょうど導関数の形になっているからであり、これは積分因子（integrating factor）や同次形方程式（homogeneous equation）の背後にあるのと同じ考え方である。符号と定義域に注意を

払う必要があったことは、解の存在と一意性の理論（existence and uniqueness theory）への最初の入り口である。与えられた点を通る解は、方程式が意味をなさなくなる場所（ここでは $v = 0$）に行き当たるまで存在し続ける。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『常微分方程式入門』）では、変数分離形の方程式と、解がどこまで延長できるかという問題が扱われている。

解答例

STEP I 1987、第 4 問

純粋数学 ・ 対数と等比級数

> **STEP I 1987、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q4

鍵となる考え方

扱いにくい底をもつ対数（logarithm）は、自然対数（natural logarithm）に直すのがよい。そうすれば底が単純な係数として現れるからである。ここでの底はすべて 2 の累乗であり、指数 2^n は掛け算の係数として前に下りてくる。各項を $\ln 2$ を用いて表してしまえば、この級数は姿を変えた等比級数（geometric series）にすぎない。

解答

一般項の書き換え

$n \geq 0$ を固定し、$c = \log_{2^{2^n}} \mathrm{e}$ とおく。ヒントにある定義により、これは

$$\left(2^{2^n}\right)^c = \mathrm{e}$$

を意味する。両辺（いずれも正である）の自然対数をとると、

$$c \cdot 2^n \ln 2 = \ln \mathrm{e} = 1, \qquad \text{よって} \qquad \log_{2^{2^n}} \mathrm{e} = \frac{1}{2^n \ln 2}.$$

添字の確認として、$n = 0, 1, 2$ はそれぞれ底 2、4、16 を与え、最初の 3 項と一致する。その値は $\frac{1}{\ln 2}$、$\frac{1}{2\ln 2}$、$\frac{1}{4\ln 2}$ である。

> **考えてみよう** 2^n はどこから出てきたのか？

規則 $\ln(a^k) = k \ln a$ を $a = 2$、$k = 2^n$ として用いたことによる。すなわち、底 2^{2^n} の自然対数は $2^n \ln 2$ である。指数の「塔」があるからこそ各底は直前の底の 2 乗になり、底を 2 乗すると対数は半分になる。

級数の和を求める

したがって、この級数は

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \log_{2^{2^n}} \mathrm{e} = \frac{1}{\ln 2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

となる。これは初項 1、公比（common ratio）$r = -\frac{1}{2}$ の等比級数である。$|r| < 1$ であるから収束（converge）し、その和は $\dfrac{1}{1-r} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$ である。よって

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \log_{2^{2^n}} \mathrm{e} = \frac{2}{3\ln 2} = \frac{1}{\frac{3}{2}\ln 2} = \frac{1}{\ln\left(2^{3/2}\right)} = \frac{1}{\ln(2\sqrt{2})},$$

ここでは再び $\ln(a^k) = k\ln a$ を用い、さらに $2^{3/2} = 2\cdot 2^{1/2} = 2\sqrt{2}$ を用いた。これが求める和である。

検算

数値的には $\frac{1}{\ln(2\sqrt{2})} \approx 0.96180$ である。この級数の部分和（partial sum）は 1.4427、0.7213、1.0820、0.9017、0.9919、0.9468, … であり、この値の両側を行き来しながら、差が毎回半分になっていく。これは交代する等比級数として当然のふるまいである。6o 項までとると、機械精度の範囲で 0.961797 と一致する。

よくある間違い

- $\log_{2^{2^n}}$ を $\log_{2^{2n}}$ と読み違えること。そうすると底は 2、16、256, … となり、誤った公比 $-\frac{1}{4}$ が得られてしまう。最初のいくつかの項と照らし合わせて添字を確認すること。
- $\dfrac{1}{\ln a}$ とすべきところを $\log_a \mathrm{e} = \ln a$ と書いてしまうこと。底の変換公式（change-of-base rule）により $\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$ であり、ここでは $\ln b = 1$ である。

STEP のその先へ

無限和がそもそも「値をもつ」かどうかは、解析学（analysis）の最初の講義における中心的な問題である。等比級数はその基本的な基準となるものであり、比判定法（ratio test）をはじめとする多くの収束判定法は、級数を等比級数と比較することによって機能する。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門）は、この理論を丁寧かつ読みやすく組み立てている。

解答例

STEP I 1987、第 5 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP I 1987、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q5

鍵となる考え方

この置換は、根号の中の二つの因数がどちらも完全平方になるように作られている。すなわち、$x-\alpha$ は $\sin^2\theta$ の定数倍に、$\beta-x$ は同じ定数の $\cos^2\theta$ 倍になる。すると根号はちょうど $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$ と打ち消し合い、一つ目の積分は被積分関数が定数の積分に帰着する。二つ目の積分には余分な因数 $1/x$ が一つ残るが、分子と分母を $\cos^2\theta$ で割れば、$\tan\theta$ を用いた標準的な積分になる。

解答

一つ目の積分（$\alpha<\beta$ の場合）

$x=\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta$ とおく。$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ を用いると、

$$x-\alpha=\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta-\alpha(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=(\beta-\alpha)\sin^2\theta,$$
$$\beta-x=\beta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-\alpha\cos^2\theta-\beta\sin^2\theta=(\beta-\alpha)\cos^2\theta,$$

であり、また

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=-2\alpha\cos\theta\sin\theta+2\beta\sin\theta\cos\theta=2(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta.$$

である。積分区間については、$\theta=0$ のとき $x=\alpha$、$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき $x=\beta$ となる。$(0,\frac{\pi}{2})$ 上で $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta>0$ であるから、θ が $[0,\frac{\pi}{2}]$ を動くとき、x は $[\alpha,\beta]$ をちょうど一度、単調に増加しながら動く。

この範囲では $\sin\theta\geq 0$ かつ $\cos\theta\geq 0$ であり、さらに $\beta-\alpha>0$ であるから、

$$\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2\sin^2\theta\cos^2\theta}=(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta.$$

したがって

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = \int_{0}^{\pi/2} \frac{2(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta}{(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_{0}^{\pi/2} 2\,\mathrm{d}\theta = \pi,$$

となり、示すべき結果が得られた。（被積分関数は両端で発散するので、厳密にはこれは広義積分（improper integral）である。置換後の被積分関数は有界な定数 2 であるから、この置換によって積分が収束（converge）することもわかる。）

考えてみよう $\alpha < \beta$ という条件は、正確にはどこで使ったのだろうか。

平方根をとるところだけである。$\sqrt{(\beta-\alpha)^2}$ が $\beta-\alpha$ に等しいのは、まさに $\beta-\alpha>0$ だからである。一般にはこれは $|\beta-\alpha|$ であり、このことが次の小問の鍵となる。

一つ目の積分（$\alpha > \beta$ の場合）

今度は、積分は大きい方の数 α から小さい方の数 β へと向かう。両者の間の区間では $x-\alpha<0$ かつ $\beta-x<0$ であるから、積はやはり正であり、被積分関数は依然として意味をもつ。

置換はそっくりそのまま通用するが、ただ一点、今度は $\sqrt{(\beta-\alpha)^2} = \alpha-\beta$ となるので、

$$\frac{2(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta}{(\alpha-\beta)\sin\theta\cos\theta} = -2,$$

となり、積分は

$$\int_{0}^{\pi/2} (-2)\,\mathrm{d}\theta = -\pi.$$

である。もっと手早く確かめる方法もある。式 $(x-\alpha)(\beta-x)$ は α と β を入れ替えても変わらないので、被積分関数は、二つの文字の役割を入れ替えた最初の場合と同じ関数である。積分区間の上端と下端を入れ替えると符号が変わるから、β を小さい方の端点として最初の結果を用いると、

$$\int_{\alpha}^{\beta} = -\int_{\beta}^{\alpha} = -\pi,$$

を得る。

二つ目の積分（$0 < \alpha < \beta$ の場合）

まったく同じ置換を行うと、同じ打ち消し合いが起こり、因数 $1/x$ だけが残る。

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = \int_{0}^{\pi/2} \frac{2\,\mathrm{d}\theta}{\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta}.$$

$\alpha, \beta > 0$ であるから、分母は $[0, \frac{\pi}{2}]$ 全体で正であり、これは通常の（広義でない）積分である。これを計算するため、分子と分母を $\cos^2\theta$ で割る（$0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ で有効）。

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{\alpha + \beta\tan^2\theta}.$$

ここで $t = \tan\theta$ とおくと $\mathrm{d}t = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$ であり、θ が 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで動くとき、t は 0 から ∞ まで動く。

$$\int_0^{\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{\alpha + \beta t^2} = \frac{2}{\beta}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \alpha/\beta} = \frac{2}{\beta}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\left[\arctan\left(t\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)\right]_0^{\infty}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha\beta}},$$

となり、示すべき結果が得られた。$\alpha > 0$ という条件は二度必要であった。一つは $1/x$ が $[\alpha, \beta]$ の内部に特異点をもたないようにするため、もう一つは $\sqrt{\beta/\alpha}$ が実数となるようにするためである。

考えてみよう 積分の上端が ∞ になった。これは問題にならないだろうか。

問題にはならない。θ についての積分はまったく普通の積分であり、無限大の上端が現れるのは、$\theta \to \frac{\pi}{2}$ のとき $\tan\theta \to \infty$ となるからにすぎない。arctan は $\frac{\pi}{2}$ に近づくので t についての積分は収束し、$\Theta \to \frac{\pi}{2}$ としたときの $[0, \Theta]$ 上の積分の極限として、θ についての積分に等しい。

検算

- スケーリング：x, α, β をそれぞれ $kx, k\alpha, k\beta$ に置き換えると、一つ目の積分は変わらず、二つ目の積分は k で割られる。二つの答え π と $\pi/\sqrt{\alpha\beta}$ はどちらもこのとおりに振る舞う。
- $\alpha \to \beta$ とする。このとき（ごく短い）区間全体で $1/x \approx 1/\beta$ であるから、二つ目の積分はおよそ π/β になるはずであり、実際 $\pi/\sqrt{\alpha\beta} \to \pi/\beta$ である。
- 数値的には、$\alpha = 2, \beta = 7$ のとき、数値積分により二つ目の積分の値は 0.83963 となり、$\pi/\sqrt{14} = 0.83963$ と一致する。$\alpha < \beta$ を無作為に選んでも一つ目の積分はすべて π となり、端点を入れ替えると $-\pi$ となった。

よくある間違い

- $\alpha > \beta$ のときにも π と答えてしまう。被積分関数は正であるが、積分区間が逆向きなので、答えは $-\pi$ である。

- 三つの因数の符号を確かめずに $\sqrt{(\beta-\alpha)^2\sin^2\theta\cos^2\theta} = (\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta$ と書いてしまう。

STEP のその先へ

この置換には、きれいな幾何学的意味がある。$x = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\beta-\alpha}{2}\cos 2\theta$ であるから、これは $[\alpha, \beta]$ を直径とする半円をパラメータ表示しており、$\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}$ は x の真上におけるその半円の高さである。二つ目の積分は、周回積分（contour integration）による積分計算への最初の入り口である。複素解析（complex analysis）では、どちらの結果も留数定理（residue theorem）から数行で導かれる。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）はこのことを見事に解説しており、広義積分の丁寧な扱いについては Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門）に詳しい。

解答例

STEP I 1987、第 6 問

純粋数学 ・ 面積と逆関数

> **STEP I 1987、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q6

鍵となる考え方

$\mathrm{F}(s)$ は曲線の**下側**、つまり曲線と x 軸の間の面積であり、$\mathrm{G}(t)$ は曲線の**左側**、つまり曲線と y 軸の間の面積である。同じ図に描くと、この二つの領域は合わせて頂点 $(0,0)$ と (s,t) をもつ長方形を覆う。ただし、頂点 (s,t) がちょうど曲線上にない限り、はみ出す部分が残る。後半では、頂点がちょうど曲線上に来るように s を選ぶ。すると、難しい積分 $\int \sin^{-1} y \,\mathrm{d}y$ が、易しい積分 $\int \sin x \,\mathrm{d}x$ からただちに得られる。

解答

不等式 $(*)$

まず、f についての事実を確認する。この関数は連続で、各値を高々一度しかとらないので、狭義単調（strictly monotonic）である（増加してから減少するような連続関数は、中間値の定理（intermediate value theorem）により、ある値を二度とってしまうからである）。$\mathrm{f}(0) = 0$ かつ $\mathrm{f}(x) \geq 0$ であるから、狭義**単調増加**でなければならない。したがって g も増加関数であり、$0 \leq x \leq a$、$0 \leq y \leq \mathrm{f}(a)$ に対して

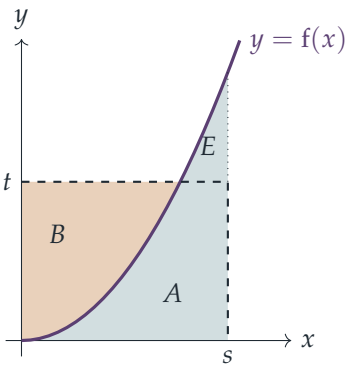
$$y \leq \mathrm{f}(x) \iff \mathrm{g}(y) \leq x.$$

が成り立つ。

二つの領域を次のように定める。

$$A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq s,\ 0 \leq y \leq \mathrm{f}(x)\}, \qquad \text{面積} \mathrm{F}(s),$$
$$B = \{(x,y) : 0 \leq y \leq t,\ 0 \leq x \leq \mathrm{g}(y)\}, \qquad \text{面積} \mathrm{G}(t),$$

また、R を長方形 $0 \leq x \leq s$、$0 \leq y \leq t$ とする。その面積は st である。B の面積が $\mathrm{G}(t)$ となるのは、長さ $\mathrm{g}(y)$ の水平な細長い帯を積分しているからである（「y についての面積」）。



R のすべての点は A または B に属する。実際、$(x, y) \in R$ ならば、$y \leq \mathrm{f}(x)$ であってその点は A に属するか、$y > \mathrm{f}(x)$ すなわち $x < \mathrm{g}(y)$ であってその点は B に属するかのいずれかである。共通部分 $A \cap B$ は曲線の弧そのものにすぎず、その面積はゼロである。よって

$$\mathrm{F}(s) + \mathrm{G}(t) = \text{面積}(A) + \text{面積}(B) \geq \text{面積}(A \cup B) \geq \text{面積}(R) = st,$$

となり、これが $(*)$ である。

考えてみよう 長方形に含まれないのに数えられているのは、正確にはどの部分か？

超過分は、$A \cup B$ のうち R からはみ出した部分 E である。$t < \mathrm{f}(s)$ の場合（図の場合）、B は R の内側にとどまるが、A は領域 $\mathrm{g}(t) < x \leq s$、$t < y \leq \mathrm{f}(x)$ において $y = t$ より上にはみ出す。すべての $x > \mathrm{g}(t)$ に対して $\mathrm{f}(x) > t$ であり、f は連続であるから、この領域の面積は正であり、不等式は狭義の不等号で成り立つ。$t > \mathrm{f}(s)$ の場合も、役割を入れ替えて同じことが起こる。すなわち、B が $x = s$ より右にはみ出す。$t = \mathrm{f}(s)$ の場合は、頂点 (s, t) が曲線上にあり、$A \cup B$ はちょうど R に一致し、超過分は存在しない。

よって、$(*)$ **において等号が成り立つのは** $t = \mathrm{f}(s)$ **のとき、かつそのときに限る**。すなわち、(s, t) が曲線上にあるときである。

$\sin^{-1} y$ の積分

$[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上で $\mathrm{f}(x) = \sin x$ とする。これは連続かつ増加で、原点を通り、第一象限にとどまるので、$a = \frac{1}{2}\pi$、$\mathrm{f}(a) = 1$、$\mathrm{g}(y) = \sin^{-1} y$ として上の議論がすべて適用できる。

$t \in [0,1]$ が与えられたとき、$s = \sin^{-1} t$ とおく。これは $[0, \frac{1}{2}\pi]$ に属する。すると $t = \sin s = \mathrm{f}(s)$ であるから、$(*)$ において等号が成り立つ。

$$\int_0^t \sin^{-1} y \,\mathrm{d}y = \mathrm{G}(t) = st - \mathrm{F}(s).$$

次に、易しいほうの積分を計算する。

$$\mathrm{F}(s) = \int_0^s \sin x \,\mathrm{d}x = 1 - \cos s.$$

$s = \sin^{-1} t$ を代入すると、

$$\int_0^t \sin^{-1} y \,\mathrm{d}y = t \sin^{-1} t - \left(1 - \cos(\sin^{-1} t)\right),$$

となり、求める結果が得られた。

微分による検算

$\sin^{-1} t \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ であるから、その余弦は非負であり、$\cos(\sin^{-1} t) = \sqrt{1-t^2}$ である。したがって右辺は $t \sin^{-1} t - 1 + \sqrt{1-t^2}$ となる。$0 \le t < 1$ に対して、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sin^{-1} t = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ と積の微分法則（product rule）を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t \sin^{-1} t - 1 + \sqrt{1-t^2}\right) &= \sin^{-1} t + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \sin^{-1} t,\end{aligned}$$

となる。これは、微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）により、左辺の導関数（derivative）に等しい。両辺とも $t = 0$ で 0 であるから、$[0,1)$ 上で一致し、連続性により $t = 1$ においても一致する。

検算

- $t = 1$ のとき：公式は $\frac{1}{2}\pi - 1 \approx 0.5708$ を与える。幾何的には、$y = \sin x$ の左側で高さ 1 までの部分の面積は、長方形 $\frac{1}{2}\pi \times 1$ からアーチの下の面積 1 を引いたものである。$[0,1]$ 上での $\sin^{-1} y$ の数値積分は 0.57080 を与える。
- $t = \frac{1}{2}$ のとき：公式は $\frac{\pi}{12} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.12782$ を与え、シンプソンの公式（Simpson's rule）による値と一致する。
- $(*)$ については、$\mathrm{f}(x) = x^2$、$s = 1$、$t = 4$ で試すと $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \frac{1}{3} + \frac{16}{3} = \frac{17}{3} > 4$ となる。一方、$t = 1 = \mathrm{f}(1)$ とすると $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 = st$ となる。

よくある間違い

- 符号を決めずに $\cos(\sin^{-1} t) = \pm\sqrt{1-t^2}$ と書いてしまうこと。$\sin^{-1}$ の値域から、符号は正である。
- $t \neq \mathrm{f}(s)$ のときに不等式が狭義になる理由を説明せず、「領域が長方形を覆う」とだけ述べること。等号成立の条件を答えるには、その説明が必要である。
- f が増加関数でなければならないことを忘れること。図はこの性質に依存している。

STEP のその先へ

不等式 $(*)$ は**ヤングの不等式**（Young's inequality）である。$\mathrm{f}(x) = x^{p-1}$ とすると、$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ のもとで $st \leq \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}$ となる。これは、解析学で最もよく使われる道具の一つであるヘルダーの不等式（Hölder's inequality）を証明する際の鍵となる段階である。F と G の組合せは、ラグランジュ力学とハミルトン力学を結びつけるルジャンドル変換（Legendre transform）を早くも垣間見せるものである。これらすべての背後にある解析学については、Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis* を読んでみるとよい。

解答例

STEP I 1987、第 7 問

純粋数学 ・ 三角級数

> **STEP I 1987、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q7

鍵となる考え方

どちらの級数も、角が等間隔で増えていく正弦の和である。$\sin\big((2k+1)\theta\big)$ のような項に $2\sin\theta$ または $2\cos\theta$ を掛けると、積和公式（product-to-sum formula）によって隣り合う二つの項の**差**または**和**に変わる。そのため級数全体が隣同士で打ち消し合い、ほとんどの項が消える（telescoping）。選ぶべきことは、どちらの因子を掛けるかだけである。ふつうの和には $2\sin\theta$ が、符号が交互に変わる和には $2\cos\theta$ が適している。

解答

準備

$\theta = \dfrac{2\pi}{23}$ とおく。角は $2\pi/23,\ 6\pi/23,\ 10\pi/23, \ldots, 42\pi/23$ であり、毎回 $4\pi/23 = 2\theta$ ずつ増える。$21\theta = 42\pi/23$ であるから、これらの角は

$$(2k+1)\theta \qquad （ただし k = 0, 1, \ldots, 10,$$

と表される。したがって項は 11 個あり、交代級数（alternating series）では第 k 項の符号は $(-1)^k$ である（最後の項 $k = 10$ の符号は $+$ であり、問題と合っている）。よって求めたいのは

$$S_1 = \sum_{k=0}^{10} \sin\big((2k+1)\theta\big), \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{10} (-1)^k \sin\big((2k+1)\theta\big).$$

である。以下では $22\theta = \dfrac{44\pi}{23} = 2\pi - \dfrac{2\pi}{23}$ であること、すなわち

$$\cos 22\theta = \cos\theta, \qquad \sin 22\theta = -\sin\theta.$$

を用いる。

第一の級数

積和公式 $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$ により、

$$2\sin\theta\,\sin\big((2k+1)\theta\big)=\cos(2k\theta)-\cos\big((2k+2)\theta\big).$$

である。$k=0,\dots,10$ について和をとると、$1\le k\le 10$ の各 $\cos(2k\theta)$ は正負の符号で一度ずつ現れて打ち消し合い、

$$2\sin\theta\,S_1=\cos 0-\cos 22\theta=1-\cos\theta.$$

が残る。$0<\theta<\pi$ より $\sin\theta\neq 0$ であるから、両辺を割ることができて

$$S_1=\frac{1-\cos\theta}{2\sin\theta}=\frac{2\sin^2(\theta/2)}{4\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}=\tfrac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2},$$

を得る。ここで $1-\cos\theta=2\sin^2(\theta/2)$ と $\sin\theta=2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$ を用い、$\sin(\theta/2)\neq 0$ で約分した。$\theta/2=\pi/23$ であるから、

$$\boxed{\sin\tfrac{2\pi}{23}+\sin\tfrac{6\pi}{23}+\cdots+\sin\tfrac{42\pi}{23}=\tfrac{1}{2}\tan\tfrac{\pi}{23}.}$$

考えてみよう 交代級数のときは、なぜ再び $2\sin\theta$ を掛けるのではなく $2\cos\theta$ を掛けるのだろうか。

$2\sin\theta$ を掛けると差 $\cos(2k\theta)-\cos((2k+2)\theta)$ が得られるが、符号が交互に変わるため、隣り合う項は打ち消し合わずに**足し合わされて**しまう。$2\cos\theta$ を掛けると**和** $\sin((2k+2)\theta)+\sin(2k\theta)$ が得られ、今度は交互に変わる符号のおかげで打ち消し合いが起こる。

第二の級数

$2\cos A\sin B=\sin(B+A)+\sin(B-A)$ により、

$$2\cos\theta\,\sin\big((2k+1)\theta\big)=\sin\big((2k+2)\theta\big)+\sin(2k\theta).$$

である。これに $(-1)^k$ を掛けて和をとる。$1\le k\le 10$ のとき、$\sin(2k\theta)$ は第 $k-1$ 項から符号 $(-1)^{k-1}$ で、第 k 項から符号 $(-1)^k$ で現れるので打ち消し合う。残るのは $k=0$ からの $\sin 0$ と $k=10$ からの $(-1)^{10}\sin 22\theta$ であり、

$$2\cos\theta\,S_2=\sin 22\theta=-\sin\theta.$$

となる。$0<\theta<\pi/2$ より $\cos\theta\neq 0$ であるから、

$$S_2=-\frac{\sin\theta}{2\cos\theta}=-\tfrac{1}{2}\tan\theta,$$

すなわち

$$\boxed{\sin\tfrac{2\pi}{23} - \sin\tfrac{6\pi}{23} + \cdots - \sin\tfrac{38\pi}{23} + \sin\tfrac{42\pi}{23} = -\tfrac{1}{2}\tan\tfrac{2\pi}{23}.}$$

である。正の値に見える形を好むなら、$\tan(\pi - x) = -\tan x$ より、これは $\frac{1}{2}\tan\frac{21\pi}{23}$ とも書ける。

検算

- 数値的には $\frac{1}{2}\tan(\pi/23) \approx 0.068723$、$-\frac{1}{2}\tan(2\pi/23) \approx -0.140093$ である。11 個の項を直接足し合わせると、有効数字 15 桁まで同じ値が得られる。
- 第二の答えが負であることは納得できる。部分和はおよそ ± 0.5 の間を振れ動き、最後に加える項 $\sin(42\pi/23) \approx -0.27$ そのものが負である。
- 同じ方法で一般の公式 $\sum_{k=0}^{n-1}\sin((2k+1)\theta) = \dfrac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}$ と $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\sin((2k+1)\theta) = (-1)^{n-1}\dfrac{\sin 2n\theta}{2\cos\theta}$ が得られる。$n = 1$ を代入してみよ。どちらも $\sin\theta$ になる。

よくある間違い

- 項の数え間違い。角は $2\pi/23$ ではなく $4\pi/23$ ずつ増えるので、項は 21 個ではなく 11 個である。
- 両方の答えが正になると思い込むこと。π を超える角の正弦は負であり、負の符号は $\sin(44\pi/23) = -\sin(2\pi/23)$ から生じている。

STEP のその先へ

これらの和は等比級数（geometric series）の虚部（imaginary part）である。$S_1 = \operatorname{Im}\sum e^{i(2k+1)\theta}$ であり、S_2 は公比を $-e^{2i\theta}$ とした同様の和である。これにより、どちらの答えにも別の道筋でたどり着ける。ディリクレ核（Dirichlet kernel）のようなこの種の和は、関数を正弦と余弦から組み立てるフーリエ解析（Fourier analysis）の出発点である。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は、回転するベクトルの図を用いて、このような和がなぜそのように振る舞うのかを示している。

解答例

STEP I 1987、第 8 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP I 1987、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q8

鍵となる考え方

置換（substitution）によって変数を変えてよいのは、元の変数がある区間を動くときに、新しい変数も区間を滑らかに一方向へ動く場合に限られる。ここでは $t = 1/x$ が $x = 0$ で発散し、しかもこの点は $[-1, 1]$ のちょうど真ん中にある。したがって「新しい積分範囲」-1 と 1 は、まったく別の t の値の集合を表している。2 つの被積分関数の符号を見るだけで、どこかがおかしいことが確かめられる。

解答

置換がうまくいかない理由

形式的には、$x = 1/t$ とおくと $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ であり、

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2} = \frac{t^4}{(1+t^2)^2}, \qquad \text{よって} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \frac{-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t,$$

となり、$x = \pm 1$ は $t = \pm 1$ に対応する。2 つの積分が等しいことを「示す」なら、このようにするだろう。しかし、これは正しいはずがない。1 つ目の被積分関数（integrand）はいたるところ正なので 1 つ目の積分は正であるが、2 つ目の被積分関数はいたるところ ≤ 0 なので 2 つ目の積分は負である。

> ? **考えてみよう** x が -1 から 1 まで動くとき、$t = 1/x$ は実際にどのような値をとるか？

x が -1 から 0^- まで増加するとき、t は -1 から $-\infty$ まで減少する。$x = 0$ では t はまったく存在しない。そして x が 0^+ から 1 まで動くとき、t は $+\infty$ から 1 まで下り

てくる。したがって x の区間 $[-1,1]$ に対応するのは $t \in (-\infty,-1]\cup[1,\infty)$、すなわち $[-1,1]$ の**外側**であって、$[-1,1]$ そのものではない。置換積分の公式では、$x=\phi(t)$ において ϕ が新しい積分範囲の間にある t の区間全体で微分可能であることが必要だが、$\phi(t)=1/t$ は $t=0\in[-1,1]$ で定義すらされていない。$(-1,1)$ に含まれる t の値は $|x|>1$ に対応し、これは元の範囲の外にある。

正しく使う、つまり半分ずつ別々に適用すると、この置換からたとえば

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \int_\infty^1 \frac{-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t,$$

が得られる。これは正しい等式である（後で確かめる）が、t についての $[-1,1]$ 上の積分については何も教えてくれない。

1 つ目の積分

$x=\tan\theta$ とおくと $\mathrm{d}x=\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$、$1+x^2=\sec^2\theta$ である。tan は $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ 上で滑らかかつ増加なので、この置換は問題ない。すると

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} &= \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{4}\sin 2\theta = \tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \tfrac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)},\end{aligned}$$

となる。ここで $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\tan\theta\cos^2\theta$ を用いた。したがって

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \left[\tfrac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)}\right]_{-1}^1 = 2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}}.$$

2 つ目の積分

分子を $-t^2 = 1-(1+t^2)$ と書き直すと

$$\frac{-t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{1+t^2}.$$

となる。第 1 項を $[-1,1]$ 上で積分すると、前の部分より $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ であり、また $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \big[\arctan t\big]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}$ である。よって

$$\int_{-1}^1 \frac{-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}},$$

であり、これは被積分関数の符号から要請されるとおり負（≈ -0.285）である。一方、1 つ目の積分は約 1.285 である。

検算

- シンプソンの公式（Simpson's rule）で 2 つの積分を計算すると 1.2853981… と −0.2853981… が得られ、$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ および $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$ と一致する。
- 2 つの答えの和は 1 である。これには理由がある。$\frac{1}{(1+x^2)^2}-\frac{x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ であり、これは $\frac{x}{1+x^2}$ の導関数（derivative）であって、$\left[\frac{x}{1+x^2}\right]_{-1}^{1}=1$ となる。
- 半分の区間についての正しい等式も確かめられる：$\int_1^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$。

よくある間違い

- 「$1/t$ は $t=0$ で定義されない」とだけ述べ、x の範囲 $[-1,1]$ が $|t|\geq 1$ に対応することを説明しないこと。本当に重要なのは、2 つの積分がそれぞれ異なる値の集合にわたっているという点である。
- $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ の符号を間違えること。そうすると、誤りを示す決定的な符号の矛盾が見えなくなってしまう。
- $\cos^2\theta$ を積分するときに $\frac{1}{4}\sin 2\theta$ の項を忘れること。

STEP のその先へ

置換積分の公式 $\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t=\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$ は、解析学（analysis）の最初の講義で連鎖律（chain rule）と微積分学の基本定理（Fundamental Theorem of Calculus）から証明される。その証明を見ると、何が必要なのかが正確にわかる。すなわち、ϕ は $[a,b]$ 全体で連続微分可能でなければならない。ここではそれがただ 1 点で成り立たず、その 1 点だけで結果が崩れてしまうのである。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、リーマン積分（Riemann integral）とこれらの定理を丁寧に展開している。

解答例

STEP I 1987、第 9 問

純粋数学 ・ 重心座標

> **STEP I 1987、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q9

鍵となる考え方

A から B に向かって進むことは、ベクトル $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ の何分の一かを加えることにほかならない。これを一度行えば線分上の点が得られる。二度行う、すなわちまず AB に沿って進み、次にその点から C に向かって進むと、三角形全体を掃き尽くすことになる。図示の部分では、各場合を既に理解しているものの形に書き直すのがこつである。すなわち、三角形の場合を反転したものか、点 A に二本の辺ベクトルの実数倍を加えたものかのどちらかに書き直すのである。

解答

AB 上の点

線分（segment）AB 上の点 P には、A から $\overrightarrow{AB}$ に沿って割合 t だけ進むことで到達する。ただし $0 \le t \le 1$ である（$t = 0$ のとき A、$t = 1$ のとき B となる）。よって

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1 - t)\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}.$$

$\rho = 1 - t$、$\sigma = t$ とおく。$0 \le t \le 1$ であるから $\rho \ge 0$ かつ $\sigma \ge 0$ であり、さらに $\rho + \sigma = 1$ である。これが求める形である。逆に、このような組 ρ, σ はどれも、$t = \sigma$ とすることで線分上の点を与える。

PC 上の点と三角形の内部の点

まったく同様にして、線分 PC 上の点 Q の位置ベクトル（position vector）は

$$\mathbf{q} = (1 - s)\mathbf{p} + s\,\mathbf{c}, \qquad 0 \le s \le 1.$$

$\mathbf{p} = \rho\mathbf{a} + \sigma\mathbf{b}$ を代入すると

$$\mathbf{q} = (1-s)\rho\,\mathbf{a} + (1-s)\sigma\,\mathbf{b} + s\,\mathbf{c}.$$

$\lambda = (1-s)\rho$、$\mu = (1-s)\sigma$、$\nu = s$ とおく。いずれも非負の数の積であるから $\lambda, \mu, \nu \geq 0$ である。また

$$\lambda + \mu + \nu = (1-s)(\rho+\sigma) + s = (1-s) + s = 1.$$

考えてみよう 三角形の内部の点がどれも、ある線分 PC 上にあるのはなぜか。

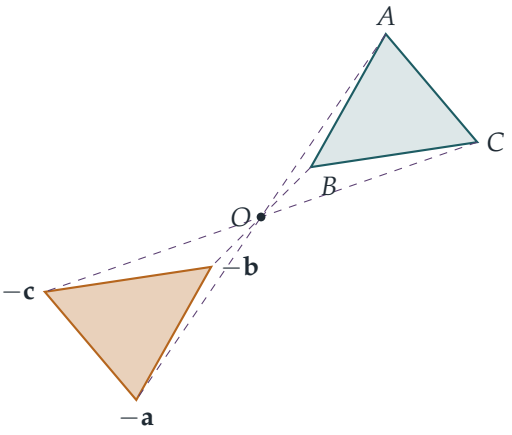
三角形の内部（または周上）の点 X をとる。$X = C$ ならば示すことはない。$s = 1$ とすればよい。そうでなければ、C から X を通る直線を引き、X の先まで延ばす。X は角 ACB の内部にあるから、この直線は CA と CB の間にとどまり、したがって向かい合う辺 AB と、ある点 P で交わらなければならない。X は三角形の中にあるから C と P の間にあり、よって X は線分 PC 上にある。上の計算により、$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}$、ただし $\lambda, \mu, \nu \geq 0$ かつ $\lambda + \mu + \nu = 1$ と表され、これが示すべきことであった。

小問 (i)

$\lambda = -\lambda'$、$\mu = -\mu'$、$\nu = -\nu'$ とおく。条件は $\lambda', \mu', \nu' \geq 0$ かつ $\lambda' + \mu' + \nu' = 1$ となり、点は

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} = -\left(\lambda'\mathbf{a} + \mu'\mathbf{b} + \nu'\mathbf{c}\right).$$

いま示したことにより、括弧の中は三角形 ABC のすべての点を動く（最初の部分の逆の主張により、このような結合はどれも三角形の中にある）。よって求める領域は、X が三角形 ABC の中にあるような点 $-\mathbf{x}$ 全体の集合である。言い換えれば、それは頂点を $-\mathbf{a}$、$-\mathbf{b}$、$-\mathbf{c}$ とする三角形とその内部であり、三角形 ABC を原点 O のまわりに半回転（half-turn）した像である。



琥珀色で塗った三角形が (i) の答えである。各頂点は ABC の頂点を O に関して対称移動したものであり、破線でそれを示している。

小問 (ii)

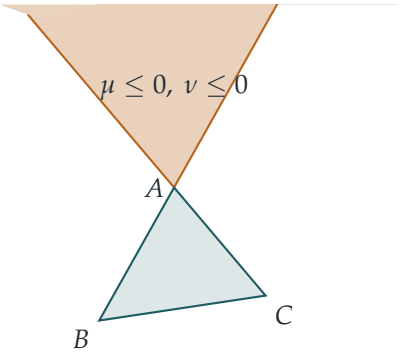
このとき $\lambda = 1 - \mu - \nu$ であるから

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mu(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \nu(\mathbf{c} - \mathbf{a}).$$

A から出発して、$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の実数倍を加えるのである。$m, n \geq 0$ として $\mu = -m$、$\nu = -n$ と書くと、点は

$$\mathbf{a} + m(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + n(\mathbf{a} - \mathbf{c}), \qquad m \geq 0,\ n \geq 0.$$

ベクトル $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ は BA を A の先へ延長した向きを指し、$\mathbf{a} - \mathbf{c}$ は CA を A の先へ延長した向きを指す。平行でない二つのベクトルの非負結合は、ちょうどそれらの間の角を埋め尽くす（$\mathbf{b} - \mathbf{a}$ と $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ は平行でないので、平面上のすべての点はただ一つの組 m, n によって $\mathbf{a} + m(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + n(\mathbf{a} - \mathbf{c})$ と表される）。よって求める領域は、A を頂点とし、BA と CA を A の先へ延長した半直線を境界とする無限に広がる楔形の領域であり、境界の半直線も含む。これは角 BAC の対頂角（vertically opposite angle）である。問題では λ に制限はないが、ここでは自動的に 1 以上になることに注意しておく。



琥珀色の楔形（どこまでも続く）が (ii) の答えである。その縁は、辺 BA と CA を A を越えて延長したものである。青緑色の三角形 ABC は参考のために示してある。

検算

- 頂点：(ii) では、$(\lambda, \mu, \nu) = (1, 0, 0)$ は楔形の先端である A 自身を与える。$(2, -1, 0)$ は $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$、すなわち B の A に関する対称点を与え、これは一方の縁の上にある。(i) では、$(-1, 0, 0)$ は反転した三角形の頂点 $-\mathbf{a}$ を与える。

- 重心：(i) では、$\lambda = \mu = \nu = -\frac{1}{3}$ は ABC の重心（centroid）の -1 倍を与え、これは反転した三角形の重心であって、そうなるべきものである。
- 数値的には、コンピュータで無作為な三角形と、それぞれの条件を満たす無作為な係数を 20,000 組とった。その結果、(i) から得られる点はすべて三角形 $(-\mathbf{a}, -\mathbf{b}, -\mathbf{c})$ の中にあること、(ii) から得られる点はすべて A から見た $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ と $\mathbf{a}-\mathbf{c}$ 方向の座標が非負であること、そして ABC のすべての点がある線分 PC 上の点として分解できることが確かめられた。

よくある間違い

- (i) で、ABC の近くに領域を描いてしまう。係数の和は 1 ではなく -1 であるから、領域は ABC を原点のまわりに半回転したものであり、O の位置に依存する。
- (ii) で、三角形だけを描いてしまう。μ と ν には下限がないので、領域は有界でない。
- BAC の隣の角（たとえば AB と CA の延長との間）を塗ってしまう。それには μ, ν の一方が正である必要がある。

STEP のその先へ

$\lambda + \mu + \nu = 1$ を満たす数の組 (λ, μ, ν) は、三角形に関する点の**重心座標**（barycentric coordinates）である。和が 1 のとき、点は原点の位置に依存しない。実際、すべての位置ベクトルを $\mathbf{d}$ だけずらすと、$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}$ も $(\lambda + \mu + \nu)\mathbf{d} = \mathbf{d}$ だけずれる。(ii) の答えが真に幾何的な領域である一方で、(i) が O に依存するのはこのためである。三角形そのものは A、B、C の**凸包**（convex hull）であり、これは線形計画法（linear programming）や凸最適化（convex optimisation）の核心にある概念である。重心座標の符号によって平面は七つの領域に分かれ、(ii) はそのうちの一つである。こうしたアフィン的な考え方を大学一年次の視点から学ぶには、Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照するとよい。

解答例

STEP I 1987、第 10 問

力学 ・ 弾性ひも

> **STEP I 1987、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q10

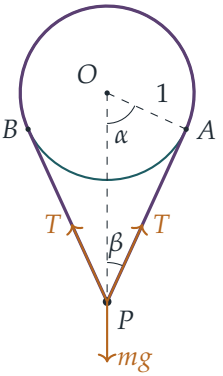
鍵となる考え方

質点がバンドの下側を円柱から引き下ろすので、バンドは二つの部分からなる。上側で円柱に沿って巻きついたままの弧と、円柱から**接線**（*tangent*）**に沿って**離れて質点で交わる二本の直線部分である。すると伸びた長さは純粋に幾何の問題となる。直角三角形から直線部分の長さと、軸において張る角が求まる。円柱はなめらか（smooth）なので、張力（tension）はバンド全体で一定であり、質点での力の分解によってその張力が mg と結びつく。あとはフックの法則（Hooke's law）から λ が得られる。

解答

モデル化

バンドを、フックの法則に従う自然長（natural length）2π の軽い弾性ひも（elastic string）とみなし、円柱（cylinder）はなめらか、質点（particle）は大きさのない点とする。鉛直な断面で考える。円柱は中心 O が軸上にある単位円であり、質点は O の鉛直下方、距離 x の点 P にある。バンドがそもそも円柱から離れるためには $x > 1$ でなければならない。



O を通る鉛直線に関する対称性から、バンドは左右に一つずつある二点 A、B で円柱から離れる。なめらかな曲線から離れるぴんと張ったひもは、その接線に沿って離れるので、PA は A において円に接する。すなわち $OA \perp AP$ である。$\alpha = \angle AOP$、$\beta = \angle APO$ とおく。

伸びた長さ

三角形 OAP は A で直角をなし、$OA = 1$、斜辺 $OP = x$ である。したがって

$$AP = \sqrt{x^2 - 1}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{x}, \qquad \sin\beta = \frac{1}{x}.$$

バンドは、下側を通って A から B に至る部分、すなわち O における角 2α の部分を除いて、至るところで円柱に接している。よって接している弧が張る角は $2\pi - 2\alpha$ であり、単位円上なのでその長さは $2\pi - 2\alpha$ である。二本の直線部分を加えると、伸びた長さは

$$\boxed{L = 2\sqrt{x^2 - 1} + 2\pi - 2\arccos\frac{1}{x}}$$

となる。ここで $x > 1$ であるから、$\arccos(1/x)$ は 0 と $\frac{\pi}{2}$ の間にある。したがって伸びは

$$L - 2\pi = 2\sqrt{x^2 - 1} - 2\arccos\frac{1}{x}.$$

である。

考えてみよう バンドは円柱に沿って曲がっている。なぜ直線部分の張力は弧の部分の張力と等しいのだろうか。

なめらかな面に接しているバンドの微小部分には、円柱から面に垂直な力しかはたらかないので、バンドに沿った張力の変化を釣り合わせるものが何もない。したがって張力 T はバンド全体で一定であり、フックの法則はバンド全体に対して適用できる。

$$T = \frac{\lambda(L - 2\pi)}{2\pi}.$$

（円柱が粗い面であれば、張力は弧に沿って変化しうるので、この段階は成り立たない。）

質点の釣り合い

質点には重力 mg と、PA、PB に沿った張力 T がはたらき、それぞれ鉛直上向きと角 β をなす。水平成分は対称性により打ち消し合う。鉛直方向に分解すると

$$2T\cos\beta = mg, \qquad \text{ただし} \qquad \cos\beta = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x},$$

であるから

$$T = \frac{mgx}{2\sqrt{x^2-1}}.$$

$x = 2$ の場合

このとき $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ なので $\alpha = \frac{\pi}{3}$ であり、$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{3}$ である。伸びた長さは

$$L = 2\sqrt{3} + 2\pi - \frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3}, \qquad \text{よって} \qquad L - 2\pi = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}.$$

張力は $T = \dfrac{2mg}{2\sqrt{3}} = \dfrac{mg}{\sqrt{3}}$ である。フックの法則より

$$\lambda = \frac{2\pi T}{L-2\pi} = \frac{2\pi mg/\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2\pi/3} = \frac{2\pi mg}{6 - 2\pi/\sqrt{3}} = \frac{\pi mg}{3 - \pi/\sqrt{3}},$$

となり、分母と分子に $\sqrt{3}$ を掛けて

$$\boxed{\lambda = \frac{\sqrt{3}\,\pi\, mg}{3\sqrt{3} - \pi} \approx 2.65\, mg.}$$

検算

- $x \to 1^+$ のとき $\arccos(1/x) \to 0$、$\sqrt{x^2-1} \to 0$ なので $L \to 2\pi$ となる。バンドはちょうど円柱の最下部に触れていて伸びておらず、当然の結果である。一方 $T \to \infty$ となるが、これはほぼ水平な二本のひもで重りを支えるには非常に大きな張力が必要であるという事実と合っている。
- $x = 2$ のとき $L = 2\sqrt{3} + 4\pi/3 \approx 7.653$ であり、$2\pi \approx 6.283$ より少し大きい。また λ は mg と同じく力の次元をもつ。
- 別の方法として、$\lambda \approx 2.6484\, mg$ のもとで全位置エネルギー（potential energy）$-mgx + \lambda(L-2\pi)^2/(4\pi)$ を数値的に最小化した。最小値は $x = 2$ でとられ、幾何の計算と張力の計算の両方が確かめられる。

よくある間違い

- 直線部分を P から水平な直径の両端までとしてしまうこと。バンドは接線に沿って離れるので、軸の高さより下で、鉛直下向きから角 $\alpha = \arccos(1/x)$ の位置で円柱から離れる。
- フックの法則に直線部分一本の伸びを用いてしまうこと。張力は一様なので、用いるべきはバンド全体の伸び $L - 2\pi$ を全体の自然長 2π で割ったものである。

STEP のその先へ

なめらかな面のまわりで張力が一定であるという主張は、キャプスタン方程式（capstan equation）の摩擦がない場合にあたる。摩擦係数（coefficient of friction）が μ のとき、角 θ にわたって巻きついたロープの張力は最大で $e^{\mu\theta}$ 倍まで変化しうる。杭に数回巻きつけたロープで船をつなぎとめられるのはこのためである。また、上のエネルギーによる検算は、釣り合いの位置を位置エネルギーの停留点（stationary point）としてとらえる、力学の変分的（variational）な見方への最初の一歩でもある。このような考え方で力、摩擦、位置エネルギーを扱う大学 1 年生向けの教科書として、Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を読むとよい。

解答例

STEP I 1987、第 11 問

力学 ・ 円運動とエネルギー

> **STEP I 1987、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q11

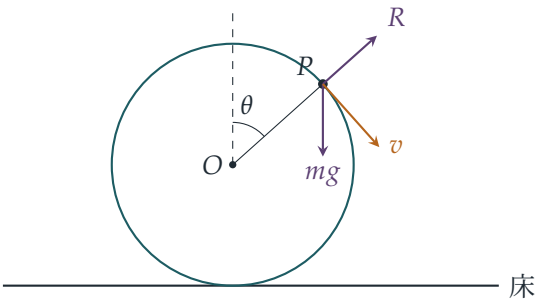
鍵となる考え方

粒子が球面上にある間は円運動をするので、二つの方程式が運動を支配する。エネルギー保存則（conservation of energy）から速さが求まり、半径方向のニュートン（Newton）の第 2 法則（Newton's second law）から垂直抗力（normal reaction）が求まる。接触が失われるのは、ちょうど垂直抗力が 0 になるときである。その後、粒子は放物運動（projectile motion）をするので、水平方向の速度は変わらない。このことと、床に達するまでの全運動に対するエネルギー保存則を組み合わせれば、軌道を求めなくても鉛直方向の速度が得られる。

解答

モデル

粒子を質点（point mass）とみなし、中心が O で床からの高さが r の、なめらかな固定された球（球は床の上に置かれている）の上にあるとする。「そっとずらす」とは、粒子が頂上から無視できるほど小さい速さで動き始めることを意味する。粒子を P とし、OP と鉛直上向きのなす角を θ、粒子の速さを v とする。はたらく力は重力 mg と、OP に沿って外向きにはたらく垂直抗力 R だけである。



接触が失われる位置

粒子は高さ $r - r\cos\theta$ だけ落下しているので、エネルギー保存則より（垂直抗力は運動の向きに垂直なので仕事をしない）

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mgr(1-\cos\theta), \qquad \text{よって} \qquad v^2 = 2gr(1-\cos\theta).$$

接触している間、粒子は半径 r の円周上を運動するので、O に向かう加速度は v^2/r である。O に向かう方向に力を分解すると

$$mg\cos\theta - R = \frac{mv^2}{r} = 2mg(1-\cos\theta), \qquad \text{よって} \qquad R = mg(3\cos\theta - 2).$$

頂上では $R = mg > 0$ であり、θ が増加すると R は減少する。接触が失われるのは $R = 0$ のとき、すなわち

$$\cos\theta = \tfrac{2}{3}, \qquad v^2 = \tfrac{2}{3}gr.$$

のときである。

考えてみよう 速度が水平となす角はどの角か。

速度は円の接線（tangent）方向を向いており、接線は半径 OP に垂直である。半径は鉛直と角 θ をなすので、接線は水平と同じ角 θ をなす（両方の直線を直角だけ回転させればよい）。したがって、球から離れる瞬間、粒子は水平より下向きに角

$$\cos^{-1}\tfrac{2}{3} \approx 48.2^\circ$$

をなして運動している。

床に当たるとき

離れる瞬間の速度の水平成分は

$$v\cos\theta = \sqrt{\tfrac{2}{3}gr}\cdot\tfrac{2}{3}, \qquad \text{よって} \qquad (v\cos\theta)^2 = \tfrac{8}{27}gr.$$

である。それ以降はたらく力は重力だけなので、粒子が床に達するまでこの水平成分は変わらない。（粒子が再び球に触れることはない。R が負になるはずの時点では、球面は粒子が落ちるよりも速く遠ざかるように曲がっており、粒子は O を通る鉛直線から水平距離およそ $1.46r$ の位置に着地するので、球からは十分離れている。）

次に、頂上（高さ $2r$）で静止している状態から床に達するまでの全運動にエネルギー保存則を適用する。粒子が床に当たるときの速さを V とすると

$$\tfrac{1}{2}mV^2 = mg(2r), \qquad \text{よって} \qquad V^2 = 4gr.$$

衝突時の速度の鉛直成分を V_y とすると、$V^2 = (v\cos\theta)^2 + V_y^2$ であるから

$$V_y^2 = 4gr - \tfrac{8}{27}gr = \tfrac{100}{27}gr, \qquad V_y = \frac{10}{3}\sqrt{\frac{gr}{3}}.$$

したがって、床に当たるときの運動量（momentum）の鉛直成分の大きさは

$$mV_y = \frac{10m}{3}\sqrt{\frac{gr}{3}} = \frac{10m\sqrt{3gr}}{9},$$

であり、向きは下向きである。

検算

- 放物運動を直接用いる方法：粒子は高さ $r + r\cos\theta = \tfrac{5}{3}r$ で、下向きの鉛直方向の速さ $v\sin\theta$ で離れる。ここで $\sin\theta = \tfrac{\sqrt{5}}{3}$ なので $(v\sin\theta)^2 = \tfrac{10}{27}gr$ である。さらに $\tfrac{5}{3}r$ 落下すると $2g\cdot\tfrac{5}{3}r = \tfrac{90}{27}gr$ が加わり、やはり $V_y^2 = \tfrac{100}{27}gr$ が得られる。
- $V_y^2 = \tfrac{100}{27}gr \approx 3.70gr$ は $V^2 = 4gr$ より少し小さい。エネルギーの一部が水平方向の運動に残るので、そうでなければならない。
- 運動を数値的に追跡すると（$g = 9.81$、$r = 1.3$、$m = 2$ として）、接触が失われるのは $48.19°$ で、鉛直方向の運動量は 13.745 となり、$\tfrac{10m\sqrt{3gr}}{9}$ と一致する。また、軌道は球の外側にとどまる。

よくある間違い

- 落下の高さを球の頂上からではなく床から測ってしまう。球面上での落下の高さは $r(1-\cos\theta)$ である。
- 離れた後は水平方向の速度が一定であることを忘れ、運動エネルギーがすべて鉛直方向であるかのように $V_y^2 = 4gr$ と書いてしまう。
- 速度が水平と角 $90° - \theta$ をなすとしてしまう。それは接線ではなく半径の角である。

STEP のその先へ

「垂直抗力が 0 になるとき接触が失われる」という条件は、**拘束力**（constraint force）の最初の例である。拘束力とは、粒子を面の上にとどめるように自らを調整する力であり、押すことしかできない。ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）では、このような拘束は最初から組み込まれており、垂直抗力はラグランジュ（Lagrange）の未定乗数（Lagrange multiplier）として現れる。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、円運動とエネルギーを用いた解法を一段上のレベルで練習するのに最適な本である。

解答例

STEP I 1987、第 12 問

力学 ・ はね返りのある放物運動

> **STEP I 1987、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q12

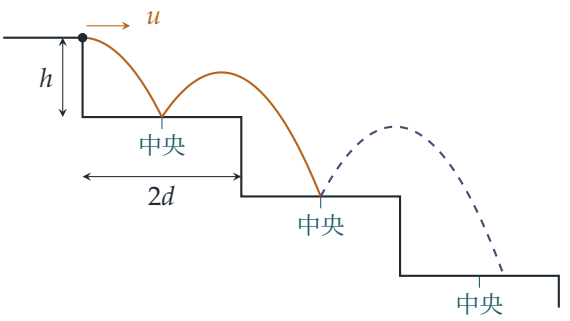
鍵となる考え方

はね返りとはね返りの間、粒子は放物運動をする物体（projectile）である。また（段がなめらかであれば）はね返りによって変わるのは速度の鉛直成分だけで、その向きが反転し大きさが定数倍される。したがって水平方向の速さは決して変わらない。つまり、水平距離によって各飛行の時間が決まり、その飛行時間と段 1 つ分の落差によって鉛直方向の速さが決まる。すべてを最初の落下にかかる時間を単位として測ることができ、そのおかげで計算はごくわずかで済む。

解答

モデル

粒子を質点（point mass）とみなし、空気抵抗を無視する。段はなめらか（smooth）かつ水平であるとする。すると衝突によって水平方向の速度は変わらず、鉛直方向の速度は $-e$ 倍される。粒子が水平方向の速さ u で蹴り出されるとし、最初の飛行の時間を t_1 とする。



実線の弧は最初の 2 回の飛行であり、破線の弧はその次に実際に起こる運動である（最後の部分を参照）。

反発係数（coefficient of restitution）

最初の飛行。粒子は鉛直方向の速度 0 で出発し、h だけ落下し、水平方向に d だけ進む（段の幅の半分であり、最初の段の中央まで）。よって

$$h = \tfrac{1}{2}gt_1^2, \qquad d = ut_1.$$

粒子は下向きの鉛直方向の速さ gt_1 で最初の段に当たり、上向きの鉛直方向の速さ egt_1 ではね返る。水平方向の速さは u のままである。

2 回目の飛行。最初の段の中央から 2 番目の段の中央までは、水平距離 $2d$ である。水平方向の速さは依然として $u = d/t_1$ なので、この飛行にかかる時間は

$$T = \frac{2d}{u} = 2t_1.$$

この時間の間に、粒子はちょうど h だけ低い位置に到達しなければならない。上向きを正とすると

$$\begin{aligned} -h &= (egt_1)(2t_1) - \tfrac{1}{2}g(2t_1)^2 \\ &= (2e-2)\,gt_1^2 \\ &= (2e-2)(2h), \end{aligned}$$

ここで $gt_1^2 = 2h$ を用いた。両辺を h で割ると $-1 = 4e - 4$ となるので

$$e = \tfrac{3}{4}.$$

（この飛行で粒子が最初の段の端の上を通過するとき、その段から $egt_1 \cdot t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}h$ の高さにあるので、確かに端を越える。）

この運動は続けられるか

考えてみよう　このパターンが続くとしたら、それ以降の飛行はどれもどのようなものでなければならないか。

ある段の中央から次の段の中央までの飛行はどれも、水平方向に $2d$ を速さ u で進むので、いずれも時間 $2t_1$ かかり、ちょうど h だけ落下しなければならない。すると上の計算から、各はね返りの直後の上向きの鉛直方向の速さ w は

$$-h = w(2t_1) - 2gt_1^2 = 2wt_1 - 4h, \qquad \text{よって} \qquad w = \frac{3h}{2t_1} = \tfrac{3}{4}gt_1.$$

を満たさなければならない。したがって、どのはね返りの後も粒子は鉛直方向の速さ $\frac{3}{4}gt_1$ ではね返らなければならない。$e = \frac{3}{4}$ であるから、どの段にもちょうど鉛直方向の速さ gt_1 で到達しなければならない。

これは最初の段では成り立つが、2 番目の段では成り立たない。時間 $2t_1$ の飛行の後に 2 番目の段に到達したときの鉛直方向の速度は

$$\tfrac{3}{4}gt_1 - g(2t_1) = -\tfrac{5}{4}gt_1,$$

であるから、粒子は 2 番目の段に gt_1 ではなく下向きの速さ $\frac{5}{4}gt_1$ で当たり、上向きの速さ $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}gt_1 = \frac{15}{16}gt_1 > \frac{3}{4}gt_1$ ではね返る。したがって**不可能である**。粒子がすべての段の中央に当たることはできない。実際、粒子は 3 番目の段の中央を越えてしまう。3 回目の飛行の時間を st_1 とすると

$$-h = \tfrac{15}{16}gt_1(st_1) - \tfrac{1}{2}gs^2t_1^2 \quad\Longrightarrow\quad s^2 - \tfrac{15}{8}s - 1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad s = \frac{15+\sqrt{481}}{16} \approx 2.31,$$

となるので、粒子は水平方向に約 $2.31d$ 進み、3 番目の段の中央から約 $0.31d$ 先に着地する（向こう側の端までは $3d$ あるので、まだその段の上である）。

検算

- $e = \frac{3}{4}$ は g、h、d に依存しないが、これは当然である。階段全体を拡大・縮小しても、軌道の形は何も変わらない。
- $g = 9.8$、$h = d = 1$、$e = 0.75$ として数値シミュレーションを行うと、粒子は $x = 1.000$ と $x = 3.000$（最初の 2 段の中央）に着地し、次に $x \approx 5.308$ に着地する。これは上で予測した $3 + 2.308$ と一致する。
- はね返りがなければ（$e = 0$）、2 回目の飛行では時間 $2t_1$ の間に $4h$ 落下することになる。はね返りによってそのうち $3h$ を補わなければならないので $2t_1 \cdot w = 3h$ となり、求めた結果と一致する。

よくある間違い

- 最初の水平距離を d ではなく $2d$ としてしまう。粒子は端から出発し、最初の段の中央に着地する。
- はね返りの際に水平方向の速さを変えてしまう。なめらかな面では力積（impulse）は鉛直方向なので、変わるのは鉛直成分だけである。
- 各飛行が同じに見えるからといって「可能である」と結論してしまう。到達時の速さが大きくなっていくので、はね返りも大きくなっていく。

STEP のその先へ

はね返る粒子は**離散力学系**（discrete dynamical system）の簡単な例である。あるはね返りの直後の状態が、決まった写像によって次のはね返りの後の状態を定める。運動が繰り返されうるかを問うことは、その写像の不動点（fixed point）を求めることにほかならない。ここでは不動点（はね返りの速さ $\frac{6}{7}gt_1$ で、これでは $\frac{4}{7}h$ しか低い位置に着地しない）が階段と両立しないので、この階段に合う周期運動（periodic motion）は存在しない。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、衝突と力積を丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 1987、第 13 問

力学 ・ 変化する力

> **STEP I 1987、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q13

鍵となる考え方

力の法則は $x = 0$ で切り替わるので、運動はいくつかの段階に分かれ、各段階は単純な線形微分方程式（linear differential equation）に支配される。正の側では、力は変位に比例する復元力（restoring force）であり、これは単振動（simple harmonic motion）である。負の側では、力は速度に比例する抵抗（resistance）であり、速さは指数関数的に減衰する。ある段階の終わりにおける位置と速度が、次の段階の初期条件（initial conditions）になる。本当の問題は段階がいくつあるか、すなわち粒子が再び戻ってくることがあるのかどうかである。

解答

モデル

物体を、与えられた力のみを受けて x 軸上を運動する質点とみなし、$\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ と書く。ニュートン（Newton）の運動の第 2 法則 $m\ddot{x} = \mathrm{F}$ より

$$\ddot{x} = -\mu^2 x \quad (x \geq 0), \qquad\qquad \ddot{x} = -\kappa\dot{x} \quad (x < 0).$$

を得る。質量は約分されて消えるので、答えには関係しない。

第 1 段階：$x \geq 0$ における単振動

$v_0 > 0$ であるから、粒子はただちに $x > 0$ に入り、そこでは $\ddot{x} = -\mu^2 x$ である。これは角振動数（angular frequency）μ の単振動であり、その一般解（general solution）は

$$x = A\cos\mu t + B\sin\mu t.$$

である。$t=0$ で $x=0$ という条件から $A=0$ が得られ、$t=0$ で $\dot{x}=B\mu=v_0$ から $B=v_0/\mu$ が得られる。よって

$$x=\frac{v_0}{\mu}\sin\mu t,\qquad \dot{x}=v_0\cos\mu t.$$

となる。これは $x\geq 0$ である間、すなわち $\sin\mu t\geq 0$ である間、つまり $0\leq t\leq \pi/\mu$ において成り立つ。粒子は $t=\pi/(2\mu)$ で最大変位 v_0/μ に達し、

$$t=T=\frac{\pi}{\mu},\qquad \text{のとき、速度}\qquad \dot{x}=v_0\cos\pi=-v_0.$$

で原点に戻る。この側ではエネルギーが保存される（力 $-m\mu^2x$ はポテンシャルエネルギー（potential energy）$\frac{1}{2}m\mu^2x^2$ から導かれ、これは原点で 0 である）ので、粒子は出発時と同じ速さで戻ってくる。

第 2 段階：$x<0$ における抵抗を受ける運動

粒子は速度 $-v_0$ で $x<0$ に入り、そこでは $\ddot{x}=-\kappa\dot{x}$ である。$u=\dot{x}$ とおくと、これは 1 階の方程式 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t=-\kappa u$ であり、$t=T$ で $u=-v_0$ を満たす解は

$$\dot{x}=-v_0\,\mathrm{e}^{-\kappa(t-T)}.$$

である。$t=T$ で $x=0$ として積分すると

$$x=\int_T^t -v_0\,\mathrm{e}^{-\kappa(s-T)}\,\mathrm{d}s=-\frac{v_0}{\kappa}\left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(t-T)}\right).$$

考えてみよう 粒子は再び $x\geq 0$ に戻って、第 3 段階が始まることがあるだろうか？

ない。速度 $-v_0\mathrm{e}^{-\kappa(t-T)}$ はすべての $t>T$ で負であるから、この段階を通じて x は減少し続ける。したがって、すべての $t>T$ で x は厳密に負であり、上の式は永久に成り立つ。抵抗は粒子を減速させるが、決して向きを反転させることはない。$t\to\infty$ のとき $\mathrm{e}^{-\kappa(t-T)}\to 0$ であるから、粒子は点 $x=-v_0/\kappa$ に限りなく近づくが、決して到達しない。

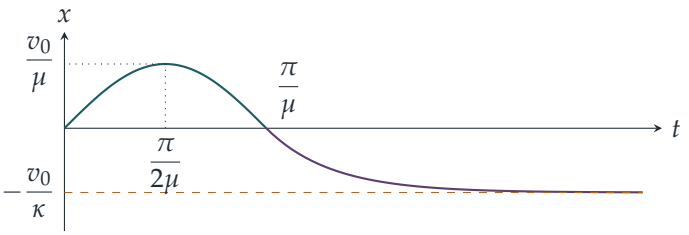
答え

$$x=\begin{cases}\dfrac{v_0}{\mu}\sin\mu t, & 0\leq t\leq\dfrac{\pi}{\mu},\\[2ex] -\dfrac{v_0}{\kappa}\left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(t-\pi/\mu)}\right), & t>\dfrac{\pi}{\mu}.\end{cases}$$

どちらの式も $t=\pi/\mu$ で $x=0$ かつ $\dot{x}=-v_0$ となるので、グラフはそこで滑らかにつながる（傾きが連続である）。ただし $\ddot{x}$ は 0 から κv_0 へと不連続に跳ぶ。

概形

グラフは、軸の上側にある正弦曲線の半分のアーチと、それに続いて原点から同じ傾き $-v_0$ で出発し、漸近線（asymptote）$x = -v_0/\kappa$ に向かって平らになっていく曲線からなる。（図では $\mu = 1$、$\kappa = 1$ としている。）



一般には、山の高さ v_0/μ と漸近線の深さ v_0/κ は互いに独立である。抵抗が弱い（κ が小さい）と、粒子は左へ遠くまで流れていく。

検算

- 単位：μ と κ はどちらも単位 s^{-1} をもつので、v_0/μ と v_0/κ は長さであり、そうでなければならない。
- 極限の場合：$\kappa \to 0$ のとき抵抗はなくなり、実際 $-\frac{v_0}{\kappa}(1 - \mathrm{e}^{-\kappa s}) \to -v_0 s$ となって、速さ v_0 の等速運動になる。
- 数値計算：$\mu = 1.7$、$\kappa = 0.9$、$v_0 = 2.2$ として運動方程式をルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で数値的に解くと、$0 \le t \le 15$ において式と 3×10^{-5} 以内で一致した。粒子は $x = 1.2941 = v_0/\mu$ で最大となり、$x = -2.4444 = -v_0/\kappa$ に落ち着いた。

よくある間違い

- 第 2 段階の時間を $t = \pi/\mu$ からではなく $t = 0$ から測ってしまうこと。指数は $-\kappa(t - \pi/\mu)$ でなければならない。
- 粒子が再び $x \ge 0$ に入るかどうかの確認を忘れること。問題はその後の運動の**すべて**を求めているので、第 3 段階が存在しないという主張には 1 行の根拠が必要である。

STEP のその先へ

ここでは力が $x = 0$ の両側で異なる線形の式で表される、区分線形系（piecewise-linear system）になっている。切り替え点で位置と速度を一致させて解をつなぎ合わせる手法は、微分方程式の最初の講義でこのような系（さらに衝突や摩擦の問題）を扱う標準的な方法である。両方の項を同時に加えた $\ddot{x} + \kappa\dot{x} + \mu^2 x = 0$ は減衰振動子（damped harmonic oscillator）を与え、その不足減衰（underdamped）、臨界減衰（critically damped）、過減衰（overdamped）の各領域は、どの力学の入門講義でも中心的な例である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、減衰振動子を丁寧に扱っている。

解答例

STEP I 1987、第 14 問

確率・統計 ・ 確率の等比級数

> **STEP I 1987、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q14

鍵となる考え方

第 1 試合が終わると、未決着（undecided）のトーナメントにはもはや自由度がまったく残らない。各試合の勝者は審判（referee）と対戦し、トーナメントが未決着のまま続くためには審判が勝たなければならないので、次の勝者は強制的に決まる。したがって、すべては第 1 試合の勝者と、ある選手が初めて 2 連勝するただ一つの時点によって決まる。すると確率は、周期（period） 3 で循環する等比級数（geometric series）に帰着する。

解答

以下を通じて、各試合では前の試合の勝者がその試合の審判と対戦する。前の試合の敗者は審判として休み、その試合には**勝つことができない**。

小問 (i)

第 1 試合では A が B に勝ち、B が第 2 試合の審判を務める。第 2 試合は A 対 C で、C が勝つ。これは起こりうる。第 3 試合は C 対 B で、B が勝つ。これも起こりうる。しかし誰も 2 連勝していないので、ACB の後もトーナメントは未決着であり、続けなければならない。よって ACB は完結したトーナメントの記録では**ない**（それはトーナメントの始まりにすぎない）。

小問 (ii)

A が第 1 試合に勝つと、第 2 試合は B を審判として A 対 C となる。よって B は第 2 試合に勝てず、ABB は**起こりえない**。

小問 (iii)

(i) と同様に最初の 3 試合 ACB は起こりうり、第 3 試合は A を審判とする C 対 B であった。よって第 4 試合は B 対 A であり、B はこれに勝つことができる。このとき B は第 3 試合と第 4 試合に連勝したので、トーナメントは終了する。よって $ACBB$ は完結したトーナメント**である**。これは B が 4 試合で優勝するものである。

5 試合後に未決着である確率

X が第 1 試合に勝つとする。ここで X は A または B であり、もう一方を Y とする。トーナメントが未決着のまま続くためには、各試合は直前の勝者**でない**選手が勝たなければならず、それは直前の審判以外にありえない。これにより記録は

$$XCYXCYX\ldots$$

と強制される。新しい勝者はいずれも直前の試合の審判だからである。具体的には、第 2 試合は X 対 C（審判は Y）なので C が勝たなければならない。第 3 試合は C 対 Y（審判は X）なので Y が勝たなければならない。第 4 試合は Y 対 X なので X が勝たなければならず、以下同様に周期 3 で続く。

第 1 試合はどちらが勝ってもよい。その後、未決着の状態を保つ各試合は確率 $\frac{1}{2}$ で起こる。試合は互いに独立で、各選手の勝つ確率は五分五分だからである。よって

$$P(n\text{ 試合後に未決着}) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}, \qquad P(5\text{ 試合後に未決着}) = \tfrac{1}{16}.$$

誰がいつ優勝するか

トーナメントが第 n 試合（$n \geq 2$）で終わるのは、$n-1$ 試合後に未決着であり、かつ第 $n-1$ 試合の勝者が再び勝つときである。この確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ である。優勝者は第 $n-1$ 試合の勝者、すなわち強制される列の第 $(n-1)$ 文字である。$k = n-1$ とおく。すると次のようになる。

$k \bmod 3$	1	2	0
第 1 試合を A が勝った場合の優勝者	A	C	B
第 1 試合を B が勝った場合の優勝者	B	C	A

よってトーナメントは確率 $\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$ で第 $k+1$ 試合に終わる。$k \equiv 2 \pmod 3$ ならば、こ

の確率はすべて C のものとなる。そうでなければ A と B で等分され、それぞれ $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ ずつとなる。

> **考えてみよう** なぜ $k \equiv 2$ のときには C が確率をすべて得るのに、それ以外のときには半分しか得られないのだろうか。

第 1 試合の勝者が誰であっても、C は常に強制される列の 2 番目の文字である。よって 2 つの場合のどちらでも、同じ時点で C が優勝する。一方 A と B は 2 つの場合で役割が入れ替わるので、それぞれは自分がその位置を占める場合の分しか得られない。

5 試合以内に優勝する確率

ここでは $n = 2,3,4,5$、すなわち $k = 1,2,3,4$ である。

$$
\begin{aligned}
P(A \text{ が優勝、試合数} \leq 5) &= \underbrace{\tfrac{1}{4}}_{k=1} + \underbrace{\tfrac{1}{16}}_{k=3} + \underbrace{\tfrac{1}{32}}_{k=4} = \tfrac{11}{32}, \\
P(B \text{ が優勝、試合数} \leq 5) &= \tfrac{11}{32} \quad (A \text{ と } B \text{ の対称性より}), \\
P(C \text{ が優勝、試合数} \leq 5) &= \underbrace{\tfrac{1}{4}}_{k=2}.
\end{aligned}
$$

確認として、$\frac{11}{32} + \frac{11}{32} + \frac{8}{32} = \frac{15}{16} = 1 - \frac{1}{16}$ であり、これは 5 試合後に未決着である確率と整合する。

最終的な優勝者

$P(\text{undecided after } n \text{ games}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \to 0$（$n$ 試合後に未決着である確率）であるから、トーナメントは確率 1 で終了する。よって $k \geq 1$ のすべてにわたって足し合わせればよい。各剰余類（residue class）は公比 $\frac{1}{8}$ の等比級数を与える。

$$
\begin{aligned}
P(C \text{ が優勝}) &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{256} + \cdots = \frac{1/4}{1 - 1/8} = \frac{2}{7}, \\
P(A \text{ が優勝}) &= \underbrace{\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{32} + \cdots\right)}_{k \equiv 1} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{128} + \cdots\right)}_{k \equiv 0} = \frac{1/4}{7/8} + \frac{1/16}{7/8} = \frac{2}{7} + \frac{1}{14} = \frac{5}{14},
\end{aligned}
$$

となり、題意が示された。対称性（symmetry）より $P(B \text{ が優勝}) = \frac{5}{14}$ でもあり、実際 $\frac{5}{14} + \frac{5}{14} + \frac{2}{7} = 1$ である。

したがって、第 1 試合を休む C は不利である。ほかの 2 人がそれぞれ $\frac{5}{14} \approx 0.357$ であるのに対し、$\frac{2}{7} \approx 0.286$ にとどまる。

検算

- 5 試合以内に優勝する 3 つの確率の和は $\frac{15}{16}$ であり、最終的な優勝確率の和は 1 である。
- 起こりうるすべての試合列を分数を用いて厳密に数え上げる（enumeration）と、$\frac{1}{16}$、$\frac{11}{32}$、$\frac{11}{32}$、$\frac{1}{4}$ が確かめられる。60 試合まで計算すると、A と B については 0.357142…、C については 0.285714… となる。
- C についての手早い別解：C が優勝する確率を c とする。第 1 試合の後、C は確率 $\frac{1}{4}$ で直ちに優勝する。3 試合後に同じ状況に戻った場合（確率 $\frac{1}{8}$）は最初からやり直しとなるので、$c = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}c$ であり、$c = \frac{2}{7}$ を得る。

よくある間違い

- ACB を正しい記録だとしてしまう。その中の各試合は起こりうるが、誰も 2 連勝していないので、トーナメントは終わっていない。
- 直前の敗者が審判を務めるので次の試合に勝てない、ということを忘れる（これにより ABB が除外される）。
- $k \equiv 2$ のときに C に確率の半分しか与えない。C はその時点で**どちらの**場合にも優勝する。

STEP のその先へ

このトーナメントはマルコフ連鎖（Markov chain）である。各試合後の状態は単に「直前に誰が勝ち、誰が審判をしているか」であり、連鎖が吸収（absorption）されたときに優勝者が決まる。検算の節で用いた第一ステップ解析（first-step argument）、すなわち次に起こることで条件づけて確率についての方程式を立てる方法は、吸収確率を求める標準的な方法であり、級数の和を計算せずに済む。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、大学 1 年次の水準でマルコフ連鎖と吸収を導入している。

解答例

STEP I 1987、第 15 問

確率・統計 ・ 連続型確率変数

> **STEP I 1987、問 15**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q15

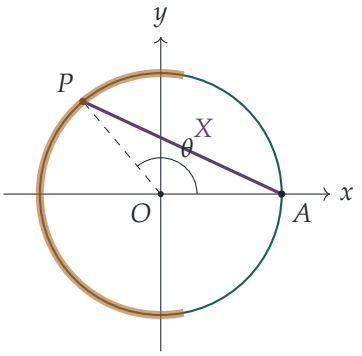
鍵となる考え方

「円周上で一様（uniform）」とは、P が中心においてなす角が一様分布（uniform distribution）に従うという意味である。したがって自然な方針は、θ を $[0, 2\pi)$ 上の一様分布として $P = (\cos\theta, \sin\theta)$ とおくことである。すると $(1, 0)$ からの距離は単位円の弦（chord）となり、半角の公式（half-angle formula）によって一つの正弦で表される。その後は、平均（mean）は一回の積分で求まり、分散（variance）はほとんど積分を必要とせず、確率は角の区間に関する問題となる。

解答

設定

O を原点とし、x 軸の正の向きから OP までの角を θ とする。円周上で P を一様に選ぶことは弧長（arc length）を一様に選ぶことであるから、θ は確率密度（density）$\frac{1}{2\pi}$ をもつ $[0, 2\pi)$ 上の一様分布に従う。$A = (1, 0)$、$P = (\cos\theta, \sin\theta)$ とおく。



このとき、$1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ を用いて

$$X^2 = (\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta = 2 - 2\cos\theta = 4\sin^2\frac{\theta}{2},$$

となる。$0 \le \frac{\theta}{2} < \pi$ より $\sin\frac{\theta}{2} \ge 0$ であるから、正の平方根をとってよい：

$$X = 2\sin\frac{\theta}{2}.$$

平均

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\Big[-4\cos\frac{\theta}{2}\Big]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(4+4) = \frac{4}{\pi}.$$

よって $\mathrm{E}(X) = \dfrac{4}{\pi} \approx 1.273$ である。

分散

考えてみよう $\mathrm{E}(X^2)$ を求めるために $4\sin^2\frac{\theta}{2}$ を積分する必要があるだろうか？

その必要はない。2 乗する前の形の方が扱いやすい。$X^2 = 2 - 2\cos\theta$ であり、$\int_0^{2\pi}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 0$ であるから、$\cos\theta$ の一周にわたる平均は 0 である。したがって $\mathrm{E}(X^2) = 2$ であり、

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 = 2 - \frac{16}{\pi^2} \approx 0.379.$$

X が平均を超える確率

$2\sin\frac{\theta}{2} > \frac{4}{\pi}$、すなわち $\sin\frac{\theta}{2} > \frac{2}{\pi}$ となる確率を求めればよい。$0 < \frac{2}{\pi} < 1$ であるから、これには解がある。$\alpha = \arcsin\frac{2}{\pi}$ とおくと、これは $(0, \frac{\pi}{2})$ に属する。$\frac{\theta}{2}$ が $[0,\pi)$ を動く

とき、正弦は 0 から 1 まで増加したのち再び減少し、$\sin\alpha$ を超えるのはちょうど

$$\alpha < \tfrac{\theta}{2} < \pi - \alpha, \qquad \text{すなわち} \qquad 2\alpha < \theta < 2\pi - 2\alpha.$$

のときである。これは図の太い弧、すなわち円周上で A から見て反対側にある点の集まりである。θ は一様分布に従うから、求める確率はこの区間の長さを 2π で割ったものである：

$$\mathrm{P}\big(X > \mathrm{E}(X)\big) = \frac{2\pi - 4\alpha}{2\pi} = \boxed{1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{2}{\pi}} \approx 0.561.$$

検算

- X のとりうる値の範囲は $[0,2]$ であり、平均 $4/\pi \approx 1.27$ は中点 1 より大きい。これは図と整合する。円周の大きな割合において弦の長さは最大値に近く（P が反対側を通過するとき、X はゆっくりとしか変化しない）、分布は大きな値の側に偏っているからである。
- 同じ理由で、平均を超える確率は $\frac{1}{2}$ より少し大きいはずであり、実際 0.561 はそうなっている。
- 数値的には、等間隔にとった 2×10^5 個の角に対する中点則（midpoint rule）による平均から、平均 1.273240、分散 0.378861、$\mathrm{P} = 0.56066$ が得られ、10^6 点のシミュレーション（simulation）も標本誤差の範囲内で一致する。

よくある間違い

- $\theta \in (-\pi, \pi]$ として $X = 2\sin\frac{\theta}{2}$ とすること。この場合 $\sin\frac{\theta}{2}$ は負になりうるので、$X = 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$ としなければならない。$[0, 2\pi)$ を用いれば絶対値を避けられる。
- P の x 座標が $[-1,1]$ 上の一様分布に従うとみなすこと。円周上で一様とは、x についてではなく、角（弧長）について一様という意味である。

STEP のその先へ

これは確率変数の変換（transformation of a random variable）の最初の例である。X の確率密度関数は $[0,2]$ 上で $f(x) = \dfrac{2}{\pi\sqrt{4-x^2}}$ であり、これは逆正弦型の分布（arcsine law）である。上で求めたすべての答えはこの密度関数から導き直すことができる。またこの問題は、「無作為に」という言葉がいかに捉えにくいものであるかも示唆している。円の弦を無作為に選ぶ方法として自然なものがいくつもあり、それぞれ異なる答

えを与えるのである（ベルトランの逆説（Bertrand's paradox））。どちらの考え方も Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）で展開されている。

解答例

STEP I 1987、第 16 問

確率・統計 ・ ベイズの定理と正規近似

STEP I 1987、問 16

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/87-s1-q16

鍵となる考え方

小問 (i) は、形を変えたベイズの定理（Bayes' theorem）である。2 回続けて同じ投票をしたという事実は、その議員がどちらの党に属するかについての証拠（evidence）になる。保存党（Preservative）の議員は必ずそうするが、進歩党（Progressive）の議員はときどきしかそうしないからである。そこで、まずその議員が保存党員である確率を更新し、それから 3 回目の投票を予測する。小問 (ii) では保存党員の投票は定まった数なので、ランダム性はすべて 40 人の進歩党員から生じる。彼らの賛成票の数は二項分布（binomial distribution）に従い、これを正規分布（normal distribution）で近似するのである。

解答

小問 (i)

選ばれた議員が保存党員であるという事象を R とすると、$P(R) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$、$P(R') = \frac{2}{5}$ である。その議員が最初の 2 回で同じ投票をしたという事象を S_2、3 回目の投票もそれと一致するという事象を S_3 とする。

保存党員は決して考えを変えないので、$P(S_2 \mid R) = 1$ である。進歩党員はランダムに投票し、各投票は独立にそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で賛成または反対となる。1 回目の投票がどちらであっても、2 回目がそれと一致する確率は $\frac{1}{2}$ なので、$P(S_2 \mid R') = \frac{1}{2}$ である。したがって

$$P(S_2) = \tfrac{3}{5} \cdot 1 + \tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{4}{5}, \qquad P(R \mid S_2) = \frac{P(R)\,P(S_2 \mid R)}{P(S_2)} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}.$$

よって、観察した事実のもとでは、その議員が保存党員である確率は $\frac{3}{4}$、進歩党員である確率は $\frac{1}{4}$ である。

考えてみよう 議員はランダムに選ばれたのだから、単に $P(R \mid S_2) = \frac{3}{5}$ としてはいけないのはなぜか？

情報 S_2 は進歩党員よりも保存党員のほうに起こりやすいので、オッズ（odds）を変化させるからである。観察前のオッズは保存党員側に $3:2$ であった。S_2 を観察した後は $3\cdot 1 : 2\cdot \frac{1}{2} = 3:1$ となる。

さて、議員の所属政党が与えられれば、3 回目の投票は、最初の 2 回の投票が政党について教えてくれる情報以上には、それらに依存しない。保存党員は確実に同じ投票を繰り返し、進歩党員は確率 $\frac{1}{2}$ で一致させる。よって

$$P(S_3 \mid S_2) = \tfrac{3}{4}\cdot 1 + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2} = \frac{7}{8}.$$

（同値な計算として、$P(S_3 \mid S_2) = \dfrac{P(S_2 \cap S_3)}{P(S_2)} = \dfrac{\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{7/10}{4/5} = \dfrac{7}{8}$ である。）

小問 (ii)

保存党の政策案に関する採決を考え、100 人の議員全員が投票するものとする。60 人の保存党員のうち割合 α、すなわち 60α 人は常に反対票を投じ、残りの $60(1-\alpha)$ 人は常に賛成票を投じる。賛成票を投じる進歩党員の人数を X とする。各進歩党員は独立に確率 $\frac{1}{2}$ で賛成するので

$$X \sim \mathrm{B}\left(40, \tfrac{1}{2}\right), \qquad E(X) = 20, \qquad \mathrm{Var}(X) = 40\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = 10.$$

100 票の単純過半数（simple majority）とは、賛成が 51 票以上であることを意味する：

$$60(1-\alpha) + X \geq 51 \iff X \geq 60\alpha - 9.$$

$n = 40$ はかなり大きく、$p = \frac{1}{2}$ により二項分布は対称なので、X を $Y \sim \mathrm{N}(20, 10)$ で近似する。ここで $60\alpha - 9$ は整数（議員の人数）であるから、連続性補正（continuity correction）を用いて

$$P(\text{過半数}) = P(X \geq 60\alpha - 9) \approx P(Y > 60\alpha - 9.5) = P\left(Z > \frac{60\alpha - 29.5}{\sqrt{10}}\right),$$

となる。ただし $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ である。

この確率は α が増加すると減少するので、選挙が行われるのは、α がこの確率を 0.8 未満に押し下げるほど大きいとき、かつそのときに限る。数表より $P(Z > -0.8416) = 0.8$

なので、

$$\frac{60\alpha - 29.5}{\sqrt{10}} > -0.8416 \iff 60\alpha > 29.5 - 0.8416\sqrt{10} = 26.84$$

$$\iff \alpha > 0.447.$$

が必要である。60α は議員の人数として整数でなければならないので、とりうる最小の値は $60\alpha = 27$ である。よって、選挙が行われることになる α の最小値は

$$\alpha = \frac{27}{60} = 0.45.$$

これが正しいことを確かめよう。造反者が 26 人のとき過半数となる近似確率は $P(Z > -1.107) \approx 0.866$ であり、27 人のときは $P(Z > -0.791) \approx 0.785 < 0.8$ である。

検算

- (i) において、$\frac{7}{8}$ は当然あるべきとおり、$\frac{1}{2}$（進歩党員とわかっている場合）と 1（保存党員とわかっている場合）の間にある。ランダムに選んだ議員 400,000 人のシミュレーションでは 0.875 が得られた。
- (ii) において、二項分布による厳密な確率は $P(X \geq 17) = 0.8659$（造反者 26 人）、$P(X \geq 18) = 0.7852$（造反者 27 人）である。これらは正規近似の値と小数第 3 位まで一致し、境目が造反者 26 人と 27 人の間、すなわち $\alpha = 0.45$ にあることを裏づけている。

よくある間違い

- (i) で $\frac{3}{5} \cdot 1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$ と答えてしまう。これは、議員がすでに 2 回同じ投票をしているという情報を無視している。
- 単純過半数を「50 票以上」として扱ってしまう。50 対 50 の同数は過半数ではないので、51 票が必要である。
- 連続性補正を省いてしまう。補正をしないと境界は $\alpha > 0.456$ となり、造反者は 27 人ではなく 28 人となるが、これは二項分布による厳密な計算によれば誤りである。

STEP のその先へ

小問 (i) は**ベイズ更新**（Bayesian updating）の小さな例である。データが隠れた「タイプ」についての信念を変化させ、その後の予測は更新された信念にわたる平均（事後予測分布（posterior predictive distribution））として与えられる。小問 (ii) の正規近似

は中心極限定理（central limit theorem）の一例であり、ここでほぼ完全に一致するのは偶然ではない。$p = \frac{1}{2}$ のとき二項分布は対称だからである。これら二つの考え方は、Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）で丁寧に展開されている。

解答例

STEP II 1987、第 1 問

純粋数学 ・ 代数的恒等式

> **STEP II 1987、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q1

鍵となる考え方

どれか一つの文字について代入しようとしてはいけない。そうではなく、右辺を展開（expansion）するのである。平方 a^2, b^2, c^2 は両辺に現れて打ち消し合うので、残るのは x と一次式（linear expression）の積であり、その一次式はちょうど与えられた条件の定数倍になっている。数 7 と 11 がどこから来るのかがわかれば、一般的な結果が導かれる。

解答

展開を一度、一般の形で行っておくと見通しがよい。任意の数 p, q, r に対して

$$(px-a)^2+(qx-b)^2+(rx-c)^2=(p^2+q^2+r^2)x^2-2x(pa+qb+rc)+a^2+b^2+c^2,$$

であるから、

$$(px-a)^2+(qx-b)^2+(rx-c)^2-(a^2+b^2+c^2)=x\big[(p^2+q^2+r^2)x-2(pa+qb+rc)\big]. \qquad (*)$$

小問 (i)

ここでは $(p,q,r)=(1,2,3)$ であるから $p^2+q^2+r^2=14$ となり、$(*)$ は次のようになる。

$$(x-a)^2+(2x-b)^2+(3x-c)^2-(a^2+b^2+c^2)=x\big[14x-2(a+2b+3c)\big].$$

$a+2b+3c=7x$ ならば、括弧の中は $14x-14x=0$ である。よって両辺は等しく、示すべきことが示された。

小問 (ii)

今度は $(p,q,r)=(2,3,3)$ であるから $p^2+q^2+r^2=4+9+9=22$ であり、

$$(2x-a)^2+(3x-b)^2+(3x-c)^2-(a^2+b^2+c^2)=x\big[22x-2(2a+3b+3c)\big].$$

$2a+3b+3c=11x$ ならば、括弧の中は $22x-22x=0$ となり、(ii) が証明される。

> **考えてみよう** なぜ (i) では 7、(ii) では 11 なのか？

これらは $p^2+q^2+r^2$ の半分である。すなわち $7=\frac{1}{2}(1+4+9)$, $11=\frac{1}{2}(4+9+9)$ である。このことから、一般的な主張がどうあるべきかがわかる。

一般的な結果

恒等式（identity）$(*)$ から、次のことが直ちに証明される。

任意の実数 p,q,r,a,b,c,x に対して、

$$2(pa+qb+rc)=(p^2+q^2+r^2)\,x,$$

ならば

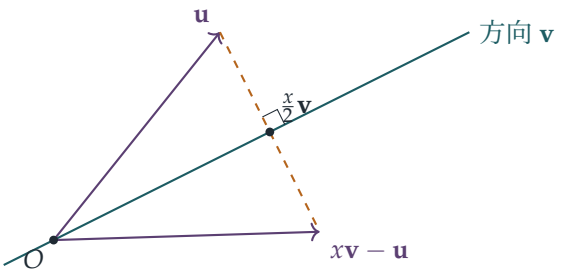
$$a^2+b^2+c^2=(px-a)^2+(qx-b)^2+(rx-c)^2.$$

小問 (i) は $(p,q,r)=(1,2,3)$ の場合であり、小問 (ii) は $(p,q,r)=(2,3,3)$ の場合である。

同じ展開は変数がいくつあっても通用する。$2\sum_{i=1}^{n}p_ia_i=\left(\sum_{i=1}^{n}p_i^2\right)x$ ならば $\sum a_i^2=\sum(p_ix-a_i)^2$ である。また $(*)$ から逆（converse）も得られる。すなわち、$x\neq 0$ かつ恒等式が成り立つならば、条件も成り立たなければならない。

幾何学的には何が起きているのか

$\mathbf{u}=(a,b,c)$, $\mathbf{v}=(p,q,r)$ とおく。条件は $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\frac{x}{2}|\mathbf{v}|^2$ と書け、これは $\frac{x}{2}\mathbf{v}$ が、$\mathbf{u}$ から O を通り方向 $\mathbf{v}$ をもつ直線に下ろした垂線の足（foot of the perpendicular）であることを意味する。このときベクトル $x\mathbf{v}-\mathbf{u}=2\cdot\frac{x}{2}\mathbf{v}-\mathbf{u}$ は、その直線に関する $\mathbf{u}$ の鏡映（reflection）である。鏡映は長さを保つので $|x\mathbf{v}-\mathbf{u}|=|\mathbf{u}|$ となり、これがまさに恒等式である。



検算

(i) で $x = 1, a = b = 0, c = \frac{7}{3}$ としてみる。左辺は $\frac{49}{9}$ であり、右辺は $1 + 4 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 5 + \frac{4}{9} = \frac{49}{9}$ である。さらに、両小問と一般的な結果を、それぞれ 2000 個の無作為な場合（一般の場合は最大 6 変数）について厳密な有理数演算（rational arithmetic）で検証し、$x \neq 0$ かつ条件が成り立たないときには必ず恒等式も成り立たないことを確認した。

よくある間違い

- いきなり $c = \frac{1}{3}(7x - a - 2b)$ を代入してしまう。これでも解けるが、計算が煩雑になり、構造が見えなくなる。
- 一般的な結果を、k と p, q, r の関係を示さずに「$pa + qb + rc = kx$」として述べてしまう。恒等式が成り立つには $k = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 + r^2)$ でなければならない。

STEP のその先へ

この幾何学的な描像は線形代数（linear algebra）の出発点である。写像 $\mathbf{u} \mapsto 2\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} - \mathbf{u}$ は鏡映であり、直交線形写像（orthogonal linear map）である。そして直交写像とは、長さを保つ線形写像にほかならない。このような射影（projection）や鏡映は、最小二乗法（least squares）や、数値計算で用いられるハウスホルダー変換（Householder transformations）の基礎となっている。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、これらの考え方を同じく幾何学的な味わいをもって展開している。

解答例

STEP II 1987、第 2 問

純粋数学 ・ 三角関数の恒等式

STEP II 1987、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/87-s2-q2

鍵となる考え方

この式には $\sin^2 A$、$\sin^2 B$、$\sin^2 C$ しか現れず、しかも $\sin^2 C$ についての**二次式**（quadratic）である。$A \pm B \pm C$ に関する条件は、C が $A+B$ または $A-B$ と結びついていることを意味するので、その二次式の 2 つの解（roots）が $\sin^2(A+B)$ と $\sin^2(A-B)$ であると予想するのは自然である。解と係数の関係（sum and product of the roots）を確かめればこの予想が正しいことがわかり、結果はただちに得られる。

解答

$x = \sin^2 A$、$y = \sin^2 B$、$z = \sin^2 C$ とおき、左辺を E とする。すると

$$E = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy + 4xyz.$$

z について整理すると

$$\begin{aligned} E &= z^2 - 2z(x + y - 2xy) + (x^2 - 2xy + y^2) \\ &= z^2 - 2(x + y - 2xy)\,z + (x - y)^2. \end{aligned}$$

二次式の解

次が成り立つことを示す。

$$E = \big(z - \sin^2(A+B)\big)\big(z - \sin^2(A-B)\big).$$

両辺はともに z についての最高次の係数が 1 の二次式（monic quadratic）であるから、$\sin^2(A+B)$ と $\sin^2(A-B)$ の和と積が正しい値になることを確かめれば十分である。

和。 $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$ を展開して 2 乗すると、足し合わせたときに交差項が打ち消し合う。

$$\begin{aligned}\sin^2(A+B) + \sin^2(A-B) &= 2\sin^2 A \cos^2 B + 2\cos^2 A \sin^2 B \\ &= 2x(1-y) + 2(1-x)y \\ &= 2(x+y-2xy).\end{aligned}$$

積。 和と差の積の公式（difference of two squares）を用いると

$$\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B = x(1-y) - (1-x)y = x - y,$$

となるので、$\sin^2(A+B)\sin^2(A-B) = (x-y)^2$ である。

いずれも E の係数と一致するので、主張は証明された。

> **考えてみよう** $\sin^2 C$ が $\sin^2(A+B)$ または $\sin^2(A-B)$ に等しいことがわかれば十分なのはなぜか？

そうであれば z は 2 つの解のいずれかとなり、E の因数の一方が 0 になるからである。あとは、角に関する条件からまさにこのことが導かれることを示せばよい。

条件を用いる

ある整数 k と符号 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{1, -1\}$ に対して $A + \varepsilon_1 B + \varepsilon_2 C = k\pi$ が成り立つとする。すると

$$C = \varepsilon_2\big(k\pi - (A + \varepsilon_1 B)\big).$$

関数 $\sin^2$ は偶関数（even function）であり周期（period）π をもつので、符号 ε_2 も $k\pi$ もその値を変えない。

$$\sin^2 C = \sin^2(A + \varepsilon_1 B).$$

よって $z = \sin^2(A+B)$（$\varepsilon_1 = 1$ のとき）または $z = \sin^2(A-B)$（$\varepsilon_1 = -1$ のとき）である。いずれの場合も E の因数の一方が 0 となり、したがって

$$E = 0,$$

が示された。■

より簡潔な形（および逆）

各因数は正弦の 2 乗どうしの差であり、$\sin^2 P - \sin^2 Q = \sin(P+Q)\sin(P-Q)$ が成り立つ（上の積の公式で $A = P$、$B = Q$ としたもの）。よって

$$E = \sin(A+B+C)\,\sin(C-A-B)\,\sin(C+A-B)\,\sin(C-A+B).$$

ここに現れる4つの角は、符号を除けばちょうど $A+B+C$、$A+B-C$、$A-B+C$、$A-B-C$ である。これにより結果は見通しのよいものとなる。すなわち、$E=0$ となるのは、4つの角 $A\pm B\pm C$ のいずれかが π の倍数であるとき、かつそのときに限る（if and only if）。

検算

- $A=\frac{\pi}{6}$、$B=\frac{\pi}{3}$、$C=\frac{\pi}{2}$ とすると $A+B-C=0$ である。このとき $x=\frac{1}{4}$、$y=\frac{3}{4}$、$z=1$ であり、$E=\frac{1}{16}+\frac{9}{16}+1-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\frac{3}{8}+\frac{3}{4}=0$。
- $A=0.3$、$B=0.7$、$C=1.1$（特別な関係はない）とすると、E と4つの正弦の積はいずれも 0.05538 となる。したがって、条件を満たさないときこの式は確かに0でない。
- 10^5 組の無作為な3つ組による検証で、この因数分解（factorisation）が正しいこと、および $A\pm B\pm C$ のいずれかを π の倍数に固定すれば常に誤差 10^{-14} 以内で $E=0$ となることが確かめられた。

よくある間違い

- $A+B+C=\pi$（三角形）の場合しか扱わないこと。問題では4通りの符号の組合せのいずれも、また π の任意の倍数も許されている。$\sin^2$ が偶関数であり周期 π をもつことを使えば、それらすべてを一度に処理できる。
- 解の公式で二次方程式を解こうとして、$\sqrt{xy(1-x)(1-y)}$ の扱いに手こずること。予想した解の和と積を確かめる方法なら、平方根や符号の心配をまったくせずに済む。

STEP のその先へ

式 $x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy$ は数学のいたるところに現れる。x,y,z を a^2,b^2,c^2 に置き換えると、これは3辺の長さが a、b、c の三角形の面積の2乗の -16 倍に等しく（ヘロンの公式（Heron's formula））、また3つの長さが三角形をなしうるかどうかを決める、判別式（discriminant）に似た量でもある。対称式（symmetric polynomial）を1つの変数についての二次式とみなし、その解を予想するという手法は、代数学や不変式論（invariant theory）の全体を通じて繰り返し現れる。この種の問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を参照するとよい。

解答例

STEP II 1987、第 3 問

純粋数学 ・ 共役な無理数

> **STEP II 1987、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q3

鍵となる考え方

$\alpha = a + \sqrt{a^2 - b}$、$\beta = a - \sqrt{a^2 - b}$ とおく。これらは互いに共役（conjugate）である。和 $2a$ と積 b がともに整数なので、$\alpha^n + \beta^n$ はつねに整数となる。b に関する条件によって小さいほうの共役 β が 0 と 1 の間（両端を含まない）に入ることが保証されれば、β^n がまさに求める小数部分（fractional part）となり、あとはすべて自然に導かれる。

解答

以下を通して

$$\alpha = a + \sqrt{a^2 - b}, \qquad \beta = a - \sqrt{a^2 - b}, \qquad \text{よって} \qquad \alpha + \beta = 2a, \quad \alpha\beta = a^2 - (a^2 - b) = b.$$

とする。

β の範囲。 まず、平方根は実数である。$b < 2a - 1$ であるから

$$a^2 - b > a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0.$$

この狭義の不等式（strict inequality）の両辺の正の平方根をとると $\sqrt{a^2 - b} > a - 1$ を得る。また $b > 0$ であるから $a^2 - b < a^2$ であり、$\sqrt{a^2 - b} < a$ である。これらを合わせると

$$a - 1 < \sqrt{a^2 - b} < a \quad \Longrightarrow \quad 0 < \beta < 1.$$

（この条件は最良である。実際、$b = 2a - 1$ ならば $\sqrt{a^2 - b} = a - 1$ となり、ちょうど $\beta = 1$ となる。）

小問 (i)

$0 < \beta < 1$ であるから、すべての正の整数 n に対して $0 < \beta^n < 1$ である。M は整数で、$0 \leq s < 1$ として $\beta^n = M + s$ であるから、M は β^n の整数部分（integer part）であり、それは 0 である。したがって

$$M = 0 \qquad \text{かつ} \qquad s = \beta^n.$$

小問 (ii)

$S_n = \alpha^n + \beta^n$ とおく。S_n が整数であることを示す。$d = \sqrt{a^2 - b}$ として、両方のべきを二項定理（binomial theorem）で展開すると

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\left(d^k + (-d)^k\right) = 2 \sum_{k \text{ が偶数}} \binom{n}{k} a^{n-k}(a^2 - b)^{k/2},$$

となる。k が奇数の項は打ち消し合うからである。残った項はどれも整数なので、$S_n \in \mathbb{Z}$ である。（同じことだが、α, β は $t^2 - 2at + b = 0$ の解なので、$S_0 = 2$、$S_1 = 2a$ として $S_n = 2aS_{n-1} - bS_{n-2}$ が成り立つ。）

したがって

$$\alpha^n = S_n - \beta^n, \qquad S_n \in \mathbb{Z}, \quad 0 < \beta^n < 1.$$

考えてみよう なぜこのことから $N = S_n$ かつ $r = \beta^n$ が導かれるのだろうか。

N を整数、$0 \leq r < 1$ とする表示 $\alpha^n = N - r$ は一意的である。N は α^n 以上の最小の整数でなければならないからである。実際、$r, r' \in [0, 1)$ として $N' - r' = N - r$ ならば、$N - N' = r - r'$ は -1 と 1 の間（両端を含まない）にある整数なので 0 である。いま得た式 $S_n - \beta^n$ はこの形をしているので

$$N = S_n = \alpha^n + \beta^n, \qquad r = \beta^n = s.$$

小問 (iii)

$r = \beta^n$、$N = \alpha^n + \beta^n$、$(\alpha\beta)^n = b^n$ を用いると

$$\begin{aligned} r^2 - Nr + b^n &= \beta^{2n} - (\alpha^n + \beta^n)\beta^n + \alpha^n\beta^n \\ &= \beta^{2n} - \alpha^n\beta^n - \beta^{2n} + \alpha^n\beta^n \\ &= 0, \end{aligned}$$

となり、示すべきことが得られた。言い換えれば、r は解が α^n と β^n である方程式 $t^2 - Nt + b^n = 0$ の小さいほうの解である。

最後の小問

$a=8$、$a^2-b=63$ とすると、$b=1$ かつ $\sqrt{63}=3\sqrt{7}$ である。条件 $b<2a-1=15$ が成り立つので、$\alpha=8+3\sqrt{7}$ として以上の議論がすべて適用でき、

$$\left(8+3\sqrt{7}\right)^n = N-r, \qquad N\in\mathbb{Z},$$

となる。α^n は整数 N に r だけ足りない。$b=1$ のとき小問 (iii) から $r(N-r)=1$、すなわち

$$r=\frac{1}{N-r}=\frac{1}{\left(8+3\sqrt{7}\right)^n}=\left(8-3\sqrt{7}\right)^n.$$

特に $r\neq 0$ なので、このべきそのものが整数になることは決してなく、また $r\to 0$ である。さて、$3\sqrt{7}=\sqrt{63}$ は $\sqrt{64}=8$ よりわずかに小さいので

$$8+3\sqrt{7}\approx 16=2^4, \qquad \text{よって} \qquad r=\left(8+3\sqrt{7}\right)^{-n}\approx 16^{-n}=2^{-4n}.$$

したがって n が大きいとき、$\left(8+3\sqrt{7}\right)^n$ はある整数との差がおよそ 2^{-4n} 以内であり、その整数のすぐ下にある。

この「およそ」はどの程度正確なのだろうか。$8+3\sqrt{7}\approx 15.937$ であるから、$c=\log_2(8+3\sqrt{7})\approx 3.994$ として $r=2^{-cn}$ である。指数は $4n$ と 0.2% 以内の誤差で一致しており、これがこの評価が成り立つという意味である。比 $r/2^{-4n}=\left(16/(8+3\sqrt{7})\right)^n$ はゆっくりと増加し、$n=1$ で約 1.004、$n=10$ で 1.04 となる。

検算

- $n=1$：$8+3\sqrt{7}\approx 15.93725$ であり、これは $16-0.06275$ である。また $8-3\sqrt{7}\approx 0.06275$ であり、予想どおりである。さらに $r^2-16r+1=0$ の小さいほうの解は $8-\sqrt{63}$ である。
- $n=2$：$(8+3\sqrt{7})^2=127+48\sqrt{7}\approx 253.99606$ であるから、$N=254=S_2=2\cdot 8\cdot 16-2$ であり、$r\approx 0.003937$ である。これに対し $2^{-8}\approx 0.003906$ である。
- $b<2a-1$ を満たす数千組のランダムな (a,b) と $n\le 7$ についてコンピュータで確かめたところ、$0<\beta^n<1$、$N-\alpha^n=\beta^n$、$r^2-Nr+b^n=0$ が確認された。また $a=8$、$b=1$、$n\le 10$ について高精度計算で確かめたところ、$N-\alpha^n=(8-3\sqrt{7})^n$ が確認された。$n=10$ ではこれは 9.46×10^{-13} であり、$2^{-40}\approx 9.09\times 10^{-13}$ と比較できる。

よくある間違い

- $\beta < 1$ だけを示し、$\beta > 0$（これには $b > 0$ が必要）を忘れること。$M = 0$ を導くには両方が必要である。
- $N - r$ における整数部分と小数部分が一意的である理由を述べずに、$N = \alpha^n + \beta^n$ と断定すること。
- $r/2^{-4n} \to 1$ を期待すること。これは成り立たない。$8 + 3\sqrt{7}$ は 16 に近いが等しくはないので、近似が成り立つのは指数においてである。

STEP のその先へ

数 $\alpha^n + \beta^n$ はトレース（trace）の一例である。α は代数的整数（algebraic integer）であり、その共役が単位区間の内部にあるので、α のべきは指数関数的に整数に近づく。このような数はピゾ数（Pisot number）とよばれる。黄金比（golden ratio）もその一つであり、φ^n がリュカ数（Lucas number）L_n に近いのはこのためである。今回の例はペル方程式（Pell's equation）とも結びついている。$8^2 - 7 \cdot 3^2 = 1$ であるから、$(8, 3)$ は $x^2 - 7y^2 = 1$ の最小の正の解である。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、ペル方程式と連分数（continued fraction）を見事に扱っている。

解答例

STEP II 1987、第 4 問

純粋数学 ・ 複素数と図形

> **STEP II 1987、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q4

鍵となる考え方

$e^{i\theta}$ を掛けることは回転（rotation）であり、正三角形（equilateral triangle）とは、まさに 1 辺を 1 つの頂点のまわりに 60° 回転させたときに得られる図形である。これにより、幾何の問題が α, β, γ についての一次方程式（linear equation）に変わる。どちらの向き（orientation）も許すということは、2 つの一次式の**どちらか一方**が 0 になるということであり、その積が問題文にある対称（symmetric）な二次式である。この式は対称式なので、三次方程式（cubic）の係数（coefficients）で表すことができる。

解答

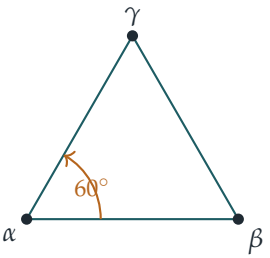
以下を通して $\omega = e^{2\pi i/3}$ とする。したがって $\omega^3 = 1$、$\bar{\omega} = \omega^2$、$1 + \omega + \omega^2 = 0$ である。

$e^{i\theta}$ を掛けること

$z = re^{i\varphi}$ ならば $ze^{i\theta} = re^{i(\varphi+\theta)}$ である。すなわち、絶対値（modulus）は変わらず、偏角（argument）は θ だけ増える。よって点 $ze^{i\theta}$ は、点 z を原点のまわりに角 θ だけ反時計回り（anticlockwise）に回転させた像である。

より一般に、$\gamma - \alpha = e^{i\theta}(\beta - \alpha)$ は、α から γ へのベクトルが、α から β へのベクトルを反時計回りに θ だけ回転させたものであることを表している。つまり、γ は β を α のまわりに θ だけ回転させた像である。

反時計回りの正三角形



相異なる点 α, β, γ がこの順に反時計回りの正三角形をなすのは、γ が β を α のまわりに反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ 回転させて得られるとき、すなわち

$$\gamma - \alpha = e^{i\pi/3}(\beta - \alpha).$$

が成り立つとき、かつそのときに限る。（必要性（necessity）：そのような三角形では $|\alpha\gamma| = |\alpha\beta|$ であり、α における角は、$\alpha\beta$ から $\alpha\gamma$ へ反時計回りに測って $\frac{\pi}{3}$ である。十分性（sufficiency）：この式から $|\alpha\gamma| = |\alpha\beta|$ であり、両者のなす角は $\frac{\pi}{3}$ である。よって三角形は頂角が $60°$ の二等辺三角形（isosceles triangle）であるから正三角形であり、向きは反時計回りである。）

これを対称な形に書くほうがすっきりする。$e^{i\pi/3} = -\omega^2$ である（$e^{7\pi i/3} = e^{i\pi/3}$ を用いると $-\omega^2 = e^{i\pi}e^{4\pi i/3} = e^{i\pi/3}$ となるからである）。よって条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \gamma - \alpha = -\omega^2\beta + \omega^2\alpha \\ \iff \quad & \gamma + \omega^2\beta - (1+\omega^2)\alpha = 0 \\ \iff \quad & \gamma + \omega^2\beta + \omega\alpha = 0, \end{aligned}$$

ここで $1 + \omega^2 = -\omega$ を用いた。ω^2 を掛ける（これは 0 でないので、この操作は可逆である）と、同値な条件

$$\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma = 0.$$

が得られる。簡単な確認をしておこう。$1, \omega, \omega^2$ は反時計回りに並んだ正三角形の頂点であり、実際 $1 + \omega \cdot \omega + \omega^2 \cdot \omega^2 = 1 + \omega^2 + \omega = 0$ である。

どちらの向きでもよい場合

正三角形をなす相異なる 3 点は、α, β, γ の順か α, γ, β の順のいずれかで反時計回りに並ぶ（巡回的に並べ替えても向きは変わらない）。前の部分により、相異なる α, β, γ に対して

$$\begin{aligned} \text{正三角形} & \iff \alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma = 0 \text{ または } \alpha + \omega\gamma + \omega^2\beta = 0 \\ & \iff (\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma)(\alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma) = 0. \end{aligned}$$

考えてみよう この積が求めたい式であることは、どうすればわかるだろうか。

単に展開すればよい。2 乗の項からは $\alpha^2+\omega^3\beta^2+\omega^3\gamma^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ が得られる。交差項は

$$\begin{aligned}\alpha\beta(\omega^2+\omega)+\alpha\gamma(\omega+\omega^2)+\beta\gamma(\omega^2+\omega^4)&=\alpha\beta(\omega+\omega^2)+\gamma\alpha(\omega+\omega^2)+\beta\gamma(\omega^2+\omega)\\&=-\alpha\beta-\gamma\alpha-\beta\gamma,\end{aligned}$$

である。ここで $\omega^4=\omega$ と $\omega+\omega^2=-1$ を用いた。したがって

$$(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta,$$

であり、ゆえに相異なる点 α,β,γ が（ある順序で）正三角形をなすための必要十分条件は

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta=0,$$

である。これが示すべきことであった。

相異なるという条件を外すとどうなるかにも注意しておく価値がある。たとえば $\alpha=\beta$ ならば、この式は $(\alpha-\gamma)^2$ となり、これが 0 になるのは $\gamma=\alpha$ でもあるときに限る。よってこの式が 0 になるのは、3 点が正三角形をなすとき、**または 3 点がすべて一致するとき**、かつそのときに限る。このことを以下で用いる。

三次方程式

$z^3+az^2+bz+c=0$ の解を α,β,γ とする。このとき

$$\alpha+\beta+\gamma=-a,\qquad \beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta=b,\qquad \alpha\beta\gamma=-c.$$

である。この式は対称式なので、これらを用いて表す。

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)&=(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)\\&=a^2-3b.\end{aligned}$$

上の注意により、$a^2=3b$ となるのは、解が正三角形をなすか、すべて等しいとき、かつそのときに限る。3 つの解がすべて t に等しいとは $z^3+az^2+bz+c=(z-t)^3$ ということであり、よって $a=-3t$、$b=3t^2$、$c=-t^3$、すなわち $b=\frac{a^2}{3}$ かつ $c=\frac{a^3}{27}$ である。したがって、解が（本当の）正三角形の頂点にあるための必要十分条件は

$$\boxed{a^2=3b\quad\text{かつ}\quad 27c\neq a^3}$$

である。一致する 3 点を退化した正三角形とみなしてよいなら、条件は単に $a^2=3b$ となる。

これを直接見るうまい方法がある。$z = w - \frac{a}{3}$ と置き換えると z^2 の項が消える。$a^2 = 3b$ のときは一次の項も消え、方程式は $w^3 = \frac{a^3}{27} - c$ となる。その解は 0 でない数の 3 つの立方根であり、これらは $w = 0$、すなわち $z = -\frac{a}{3}$ を中心とする正三角形をなす。この点は解の重心（centroid）である。

検算

- $z^3 - 1 = 0$（$a = b = 0, c = -1$）の解は $1, \omega, \omega^2$ であり、正三角形をなす。実際 $a^2 = 0 = 3b$ かつ $27c = -27 \neq 0$ である。
- $z^3 - z = 0$ の解は $0, \pm 1$ であり、一直線上にある。このとき $a^2 - 3b = 3 \neq 0$ である。
- 数値的に、1000 個のランダムな三角形 $\alpha, \beta, \gamma = \alpha + e^{i\pi/3}(\beta - \alpha)$ について、三角形が反時計回りの正三角形であること、$\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma$ と二次式が（どの順序でも）0 になることを確かめ、さらにランダムな複素数に対して積の恒等式と $a^2 - 3b$ の公式が 10^{-8} 以内の誤差で成り立つことを確かめた。

よくある間違い

- 符号や向きを間違える：$e^{i\pi/3}$ は $-\omega^2$ であって ω ではない。頂点のまわりに ω（すなわち 120°）だけ回転させても正三角形は得られない。
- 三重根（triple root）の場合を忘れる：$a^2 = 3b$ だけでは $z^3 + az^2 + bz + c = (z + \frac{a}{3})^3$ の場合も許してしまい、このとき 3 つの「頂点」は一致する。

STEP のその先へ

条件 $\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma = 0$ は、3 つ組 (α, β, γ) の離散フーリエ変換（discrete Fourier transform）の 1 つの成分であり、z^2 の項を消す工夫は三次方程式を冪根によって解く（solving by radicals）ための第一歩で、これはガロア理論（Galois theory）へとつながる。幾何的には、この結果は、解が正三角形をなすのは導関数（derivative）$3z^2 + 2az + b$ が重心において重根（double root）をもつとき、かつそのときに限ることを述べている。これは導関数の根に関するマーデンの定理（Marden's theorem）の特別な場合である。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析）は、複素数の掛け算の幾何をさらに探究するのにすばらしい本である。

解答例

STEP II 1987、第 5 問

純粋数学 ・ ラグランジュの反転公式による級数

> **STEP II 1987、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q5

鍵となる考え方

ラグランジュ（Lagrange）の恒等式（Lagrange's identity）は、いわば計算機械である。関数 $\phi(y) = y - \mathrm{f}(y)$ を入力し、それを n 乗して $n-1$ 回微分し、足し合わせる。作業のすべては、ϕ が単純な形、理想的には y の単一のべきや単一の指数関数になるように問題を設定することにある。そうすれば ϕ^n の $(n-1)$ 階導関数（derivative）がただちに書き下せるからである。各小問では、解くべき方程式が都合のよい y の値に対して $\mathrm{f}(x) = y$ の形になるように f を選ぶ。

解答

以下を通じて $\phi(y) = y - \mathrm{f}(y)$ と書く。すると恒等式は

$$\mathrm{f}^{-1}(y) = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}} \left[\phi(y)^n\right].$$

となる。$n = 1$ の項には 0 階導関数が現れるが、これは $\phi(y)$ そのものであることに注意する。

繰り返し用いる事実はただ一つで、$m \geq n-1$ を満たす整数 m に対して

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}} y^m = \frac{m!}{(m-n+1)!} y^{m-n+1},$$

が成り立つことである。微分するたびにその時点の指数が係数として前に出て、指数が 1 だけ下がるからである。

小問 (i)

$f(x) = \alpha x$ のとき $\phi(y) = (1-\alpha)y$ であるから、$\phi(y)^n = (1-\alpha)^n y^n$ である。上の公式で $m = n$ として $n-1$ 回微分すると

$$\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\left[(1-\alpha)^n y^n\right] = (1-\alpha)^n\, n!\, y.$$

となる。$n!$ が $\frac{1}{n!}$ と打ち消し合うので、恒等式の右辺は

$$y + \sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha)^n y = y\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha)^n.$$

となる。これは公比（common ratio）$1-\alpha$ の等比級数（geometric series）である。$0 < \alpha < 2$ より $-1 < 1-\alpha < 1$ であるから、この級数は収束（converge）し、その和は

$$y \cdot \frac{1}{1-(1-\alpha)} = \frac{y}{\alpha}.$$

である。一方、$y = \alpha x$ からは直接 $x = y/\alpha$ が得られるので、$f^{-1}(y) = y/\alpha$ である。両者は一致し、この場合に恒等式が成り立つことが確かめられた。条件 $0 < \alpha < 2$ は、ちょうど級数が収束するための条件になっている。

小問 (ii)

方程式は $f(x) = \frac{1}{2}$ であり、

$$f(x) = x - \tfrac{1}{4}x^3, \qquad \text{よって} \qquad \phi(y) = y - f(y) = \tfrac{1}{4}y^3.$$

である。このとき $\phi(y)^n = 4^{-n}y^{3n}$ であり、導関数の公式を $m = 3n$（これは $n-1$ 以上である）として用いると

$$\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\left[4^{-n}y^{3n}\right] = \frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!\,4^n}\,y^{2n+1}.$$

となる。したがってラグランジュの恒等式から

$$f^{-1}(y) = y + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!\,4^n}\,y^{2n+1}.$$

が得られる。先頭の y は、この一般項で $n = 0$ としたものにちょうど等しい。実際 $\frac{0!}{0!\,1!\,4^0}\,y^1 = y$ である。よってこれを和に含めて $n = 0$ から始めることができる：

$$f^{-1}(y) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!\,4^n}\,y^{2n+1}.$$

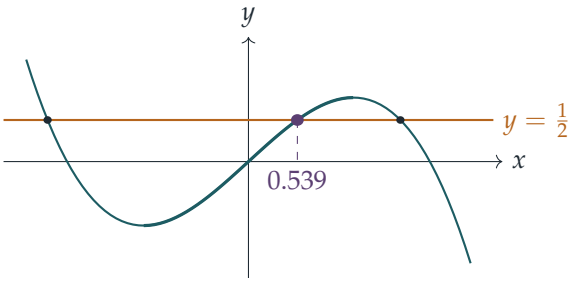
ここで $y = \frac{1}{2}$ とおく。$4^n \cdot 2^{2n+1} = 2^{2n}\cdot 2^{2n+1} = 2^{4n+1}$ であるから

$$x = f^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!\,2^{4n+1}},$$

となり、$f(x) = \frac{1}{2}$ であるから、この x は求めるとおり $\frac{1}{2} = x - \frac{1}{4}x^3$ の根である。

考えてみよう この 3 次方程式は 3 つの実数解をもつ。級数が与えるのはどれか。

関数 f は実数全体では一対一（one-to-one）ではないので、「f^{-1}」は級数が表す分枝（branch）を意味する。この級数は $y+\cdots$ で始まる y のべき級数（power series）であるから、$\mathrm{f}^{-1}(0)=0$ であり、y が小さいとき $\mathrm{f}^{-1}(y)\approx y$ となる。つまりこれは、$\mathrm{f}'(x)=1-\frac{3}{4}x^2>0$ すなわち $|x|<2/\sqrt{3}$ となる、原点を通る増加部分に f を制限したものの逆関数である。最初のいくつかの項は $\frac{1}{2}+\frac{1}{32}+\frac{3}{512}+\cdots\approx 0.537$ であり、和は小数第 4 位まで 0.5392 である。これは下図に印をつけた最小の正の根である。他の根、およそ 1.675 と -2.214 は、曲線の減少部分にある。



曲線の太い部分が原点を通る増加分枝であり、級数はその上の根（プラム色で示したもの）を与える。

小問 (iii)

ここでの工夫は、方程式全体を ϕ が単純になるような $\mathrm{f}(x)=y$ の形にすることである。$x=\mathrm{e}^{\lambda x}$ を

$$x-\mathrm{e}^{\lambda x}=0,$$

と変形し、

$$\mathrm{f}(x)=x-\mathrm{e}^{\lambda x},\qquad \phi(y)=y-\mathrm{f}(y)=\mathrm{e}^{\lambda y},$$

とおく。求めたいのは $x=\mathrm{f}^{-1}(0)$ である。$\phi(y)^n=\mathrm{e}^{n\lambda y}$ であり、1 回微分するごとに $n\lambda$ 倍されるので

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}}\,\mathrm{e}^{n\lambda y}=(n\lambda)^{n-1}\mathrm{e}^{n\lambda y}.$$

となる（$n=1$ のときこれは正しく $\mathrm{e}^{\lambda y}$ となる）。ラグランジュの恒等式から

$$\mathrm{f}^{-1}(y)=y+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n\lambda)^{n-1}}{n!}\,\mathrm{e}^{n\lambda y},$$

が得られ、$y=0$ とおくと

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{n!}\lambda^{n-1}=1+\lambda+\frac{3}{2}\lambda^2+\frac{8}{3}\lambda^3+\frac{125}{24}\lambda^4+\cdots.$$

となる。添字をずらせば、同値な形として $x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^{n-1}}{n!}\lambda^n$ と書ける。

どのような λ に対してこれは収束するか。隣り合う項の比は

$$\frac{(n+1)^n\lambda^n/(n+1)!}{n^{n-1}\lambda^{n-1}/n!}=\lambda\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\to \mathrm{e}\lambda,$$

であるから、比判定法（ratio test）により、級数は $|\lambda|<1/\mathrm{e}$ で収束する。これは自然な境界である。$y=x$ が $y=\mathrm{e}^{\lambda x}$ に接する（tangent）のはちょうど $\lambda=1/\mathrm{e}$ のとき（$x=\mathrm{e}$ において）であり、$\lambda>1/\mathrm{e}$ では実数解がまったく存在しない。$0<\lambda<1/\mathrm{e}$ では正の根が 2 つあり、級数はそのうち小さい方、すなわち $\lambda\to 0$ のとき 1 に近づく方を与える。

検算

- (ii) で、最初の 4 項は $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{32}$、$\frac{3}{512}$、$\frac{3}{2048}$ である。200 項を数値的に足すと 0.539189 となり、$x^3-4x+2=0$ にニュートン法（Newton's method）を適用すると根 0.5391888… が得られ、機械精度で一致する。
- (iii) で $\lambda=0$ とおくと、級数は $x=1$ を与え、確かに $x=\mathrm{e}^0=1$ である。$\lambda=0.2$ に対して級数を計算すると $x\approx 1.29586$ となり、$\mathrm{e}^{0.2\times 1.29586}=1.29586$ である。$\lambda=-0.3$ に対しては 0.78918 となり、これも方程式を満たす。$\lambda=0.2$ のときのもう一方の根はおよそ 12.71 であり、級数の値とは大きく離れている。
- (i) で $\alpha=1$ としてみる。このとき $\phi=0$ であり、和のすべての項が消えて、当然ながら $\mathrm{f}^{-1}(y)=y$ となる。

よくある間違い

- $n=1$ の項では微分を行わない（0 階導関数である）ことを忘れ、その項を落としたり誤って計算したりする。
- (ii) で、単独の y が一般式の $n=0$ の項であることに気づかず、$n=0$ から始まる和と一致させられない。
- (iii) で $\mathrm{f}(x)=x\mathrm{e}^{-\lambda x}$ などを試す。それ自体は正当だが、そうすると ϕ が 2 項の差になり、導関数の計算が煩雑になる。$\phi=\mathrm{e}^{\lambda y}$ と選べば、導関数の計算は自明になる。

STEP のその先へ

これは**ラグランジュの反転定理**（Lagrange inversion theorem）であり、通常は複素解析（complex analysis）（コーシー（Cauchy）の留数定理（residue theorem））や形式的べき級数（formal power series）を用いて証明される。(iii) の係数 $(n+1)^{n-1}/n!$ はランベルト（Lambert）の W 関数（Lambert W function）に現れるものであり、n^{n-1} は n 個の頂点上の根付きラベル付き木（rooted labelled trees）の個数を数える。同様に、(ii) の数 $\frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!}$ は三分木（ternary trees）の個数を数えるもので、カタラン数（Catalan numbers）の仲間である。このようにラグランジュの反転は数え上げ組合せ論（enumerative combinatorics）の中心的な道具である。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は複素解析的な背景を与えてくれ、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）には級数を扱う STEP の演習問題がさらに収められている。

解答例

STEP II 1987、第 6 問

純粋数学 • 対称性を用いた定積分

> **STEP II 1987、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q6

鍵となる考え方

区間 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ は対称なので、まず自然に試すべきは反転 $\theta \mapsto -\theta$ である。これは $\sin\theta$ を $-\sin\theta$ に変え、2 番目の形をただちに与える。2 つの形の平均をとると奇関数部分（odd part）が消え、分母は $\sin^2\theta$ だけを含む形になる。これを少し代数的に変形すると、定数と標準的な $\tan\theta$ の積分とに分けられる。最後の小問は、一見何でもない 1 つのステップに関するものである。すなわち、$\sqrt{\cos^2 2\alpha}$ は $|\cos 2\alpha|$ であって、$\cos 2\alpha$ ではない。

解答

以下を通して $s = \sin 2\alpha$、$c = \cos 2\alpha$ とおく。したがって $s^2 + c^2 = 1$ である。$0 < \alpha < \frac{1}{4}\pi$ のとき $0 < s < 1$ かつ $0 < c < 1$ である。$s < 1$ より分母 $1 \mp s\sin\theta$ は区間全体で正であるから、どの積分も広義積分ではない（proper）。

I の 2 番目の形

$\theta = -\phi$ と置換すると、$\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$ であり、積分の上端と下端が入れ替わる：

$$I = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2(-\phi)}{1 - \sin(-\phi)\,s}\,(-\mathrm{d}\phi) = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\phi}{1 + s\sin\phi}\,\mathrm{d}\phi,$$

ここで $\cos(-\phi) = \cos\phi$ と $\sin(-\phi) = -\sin\phi$ を用いた。ϕ を θ と書き直せば、求める形が得られる。

$\cot^2 2\alpha$ を含む式

I の 2 つの表示を足し合わせると、

$$2I = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2\theta \left(\frac{1}{1 - s\sin\theta} + \frac{1}{1 + s\sin\theta} \right) \mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2\cos^2\theta}{1 - s^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

したがって

$$I = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\theta}{1 - s^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

次に、$1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$ と $1 - s^2 = c^2$ を用いて分母を書き換える：

$$1 - s^2\sin^2\theta = \cos^2\theta + c^2\sin^2\theta.$$

? **考えてみよう** $\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta}$ を、定数と積分できる部分との和にどう分ければよいか？

分子を、分母の定数倍と、$\cos^2\theta$ で割った後に θ に依存しない余りとの和として書くことを目指す。

$$(\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta) - c^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = (1 - c^2)\cos^2\theta = s^2\cos^2\theta,$$

であるから、$s^2(\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta)$ で割ると（$s \neq 0$ なので許される）

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta} = \frac{1}{s^2} - \frac{c^2}{s^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta} = \frac{1}{s^2} - \frac{c^2}{s^2}\cdot\frac{\sec^2\theta}{1 + c^2\tan^2\theta},$$

が得られる。ここで最後のステップでは分子と分母を $\cos^2\theta$ で割った。長さ π の区間で積分し、$c^2/s^2 = \cot^2 2\alpha$ を用いると

$$I = \frac{\pi}{\sin^2 2\alpha} - \cot^2 2\alpha \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sec^2\theta}{1 + \cos^2 2\alpha\tan^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

となり、求める式が得られた。

I の値を求める

残った積分を J とおく。$t = \tan\theta$ と置換すると $\mathrm{d}t = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$ であり、θ が $-\frac{1}{2}\pi$ から $\frac{1}{2}\pi$ まで動くとき、t は実数直線全体を動く。したがって $c \neq 0$ のとき

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + c^2t^2} = \left[\frac{1}{|c|}\arctan\bigl(|c|\,t\bigr) \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{|c|}.$$

（$|c|$ が現れるのは置換 $u = |c|t$ のためである。これにより、積分範囲が $-\infty$ から ∞ へと正しい順序のまま保たれる。）

$0 < \alpha < \frac{1}{4}\pi$ のとき $c > 0$ であるから $J = \pi/c$ であり、

$$I = \frac{\pi}{s^2} - \frac{c^2}{s^2}\cdot\frac{\pi}{c} = \frac{\pi(1-c)}{1-c^2} = \frac{\pi}{1+c} = \frac{\pi}{1+\cos 2\alpha} = \frac{\pi}{2\cos^2\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi\sec^2\alpha,$$

となる。ここで $1-c \neq 0$ で約分し、$1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$ を用いた。これが求める結果である。

$\frac{1}{4}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ の場合

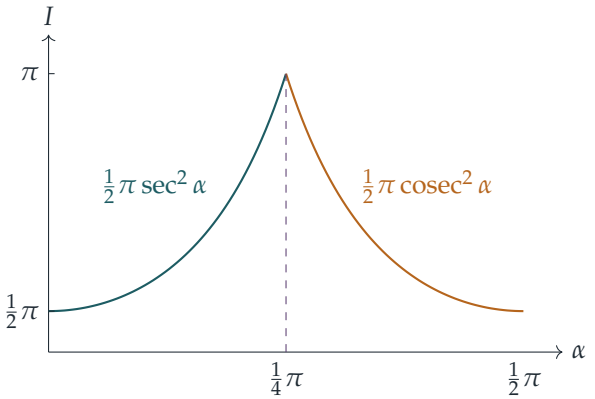
? **考えてみよう** α が $\frac{1}{4}\pi$ を越えると、議論のどこかが変わるだろうか？

ほとんど何も変わらない。依然として $0 < s < 1$ であるから、I を J で表す式までの各ステップはそのまま成り立つ。唯一の違いは、今度は $c = \cos 2\alpha < 0$ となることであり、$|c| = -c$ かつ $J = -\pi/c$ となる。よって

$$I = \frac{\pi}{s^2} + \frac{c^2}{s^2}\cdot\frac{\pi}{c} = \frac{\pi(1+c)}{1-c^2} = \frac{\pi}{1-c} = \frac{\pi}{2\sin^2\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi\operatorname{cosec}^2\alpha,$$

ここで $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$ を用いた。最初の答えを何も考えずに写すと、誤った値になってしまう。

I を α に対してグラフに描くと、2 つの式が $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ でつながり、そこでどちらも π に等しいことがわかる：



検算

▶ $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ では $s = 1$ であり、被積分関数は $\cos^2\theta/(1-\sin\theta) = 1+\sin\theta$ となり、その積分は π である。そこではどちらの式も π を与えており、当然そうなるべきである。

- $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ のとき：$s = \frac{\sqrt{3}}{2}$、$c = \frac{1}{2}$ であるから $I = \pi/(1+c) = \frac{2}{3}\pi$ であり、また $\frac{1}{2}\pi \sec^2 \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}\pi$ である。
- もとの積分に対し、$\frac{1}{4}\pi$ の両側から無作為に選んだ 10 個の α の値でシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると、公式と 10^{-6} より良い精度で一致する。たとえば $\alpha \approx 0.6308$ では、どちらの方法でも $I \approx 2.408759$ となる。
- $\alpha \to 0$ のとき被積分関数は $\cos^2\theta$ に近づき、その積分は $\frac{1}{2}\pi$ であって、$\frac{1}{2}\pi \sec^2 0$ と一致する。

よくある間違い

- 絶対値をつけずに $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+c^2t^2} = \frac{\pi}{c}$ と書いてしまう。$c < 0$ のときこれは負になるが、正の被積分関数に対してそれはありえない。
- $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$ のマイナス符号を落とす、あるいはそれが積分の上端と下端の入れ替えによって打ち消されることを忘れる。
- $t = \tan\theta$ が $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ で定義されないことを心配する。t に関する積分は広義積分（improper integral）であるが収束するので、それで十分である。

STEP のその先へ

答えに見られるきれいな対称性 $\alpha \leftrightarrow \frac{1}{2}\pi - \alpha$ は偶然ではない。I は $\sin 2\alpha$ を通してのみ α に依存し、これはその入れ替えで変わらないが、$\frac{1}{2}\pi \sec^2\alpha$ のような式は変わってしまう。黙って 2 乗したり平方根をとったりする代数計算は、まさにこの種の問題を隠しうる。$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の有理関数を 1 周期にわたって積分すること（ここで平均をとった被積分関数は周期 π をもつので、その一例である）は、大学では単位円に沿った周回積分（contour integration）によって日常的に計算される。そこでは留数定理（residue theorem）のおかげで、ほとんど機械的な計算になる。美しく幾何学的な入門書として、Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）を参照されたい。

解答例

STEP II 1987、第 7 問

純粋数学 ・ 台形公式と階乗

> **STEP II 1987、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q7

鍵となる考え方

$\ln x$ に対して刻み幅 1 で台形公式（trapezium rule）を用いた和は、加え合わせる高さが $\ln 1, \ln 2, \ldots, \ln n$ であるため、ほぼ $\ln n!$ そのものになる。$\ln x$ は上に凸（concave）であるから、どの弦も曲線の下側にあり、台形公式は常に積分を**過小評価する**。この一つの事実が、すべての不等式の向きを決める。最後の小問では、細かい格子での誤差を尺度変換し、別の区間上の刻み幅 1 の誤差に書き直すのがこつである。そうすれば、$\mathrm{g}(kn)$ の背後にある誤差と直接比較できる。

解答

公式の正当化

$[x_0, x_N]$ を幅 h の N 個の帯 $[x_r, x_{r+1}]$ に分割する。各帯で、曲線を $(x_r, \mathrm{f}(x_r))$ と $(x_{r+1}, \mathrm{f}(x_{r+1}))$ を結ぶ直線、すなわち弦（chord）で置き換える。弦の下の領域は面積 $\frac{1}{2}h\{\mathrm{f}(x_r) + \mathrm{f}(x_{r+1})\}$ の台形である。$r = 0, 1, \ldots, N-1$ について加えると、内部の縦座標（ordinate）$\mathrm{f}(x_1), \ldots, \mathrm{f}(x_{N-1})$ はそれぞれ隣り合う二つの台形に現れ、両端の縦座標は一度ずつ現れるので、与えられた公式が得られる。h が小さければ弦は曲線の近くにとどまるので、近似はよい。

刻み幅 1 と $n! \approx \mathrm{g}(n)$

$u = \ln x$、$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$ として部分積分（integration by parts）を行うと、

$$I_n = \int_1^n \ln x \, \mathrm{d}x = \Big[x \ln x\Big]_1^n - \int_1^n 1 \, \mathrm{d}x = n \ln n - n + 1.$$

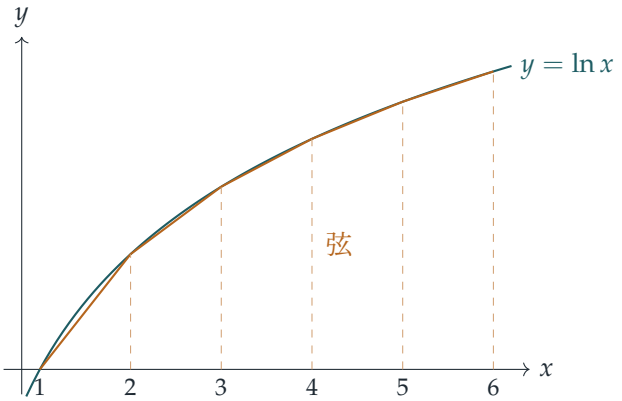
$h=1$ のとき縦座標は $x=1,2,\dots,n$ にあるので、台形和は

$$\begin{aligned} T_n &= \tfrac{1}{2}\{\ln 1 + 2\ln 2 + \cdots + 2\ln(n-1) + \ln n\} \\ &= \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n - \tfrac{1}{2}\ln n = \ln n! - \tfrac{1}{2}\ln n \end{aligned}$$

となる。ここで $\ln 1 = 0$ を用いた。$T_n \approx I_n$ とおくと、

$$\ln n! \approx \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\ln n + 1 - n, \qquad \text{よって} \qquad n! \approx n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{1-n} = \mathrm{g}(n).$$

$n! < \mathrm{g}(n)$ となる理由



$\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln x = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ であるから、曲線 $y=\ln x$ は狭義に上に凸である。すなわち、各帯 $[m, m+1]$ において、弦は端点を除いて曲線の真に下側にある（図を参照）。したがって各台形の面積は、その帯における曲線の下の領域の面積より真に小さく、$n-1 \geq 1$ 個の帯について加えると、

$$T_n < I_n \quad \Longrightarrow \quad \ln n! - \tfrac{1}{2}\ln n < n\ln n - n + 1 \quad \Longrightarrow \quad \ln n! < \ln \mathrm{g}(n).$$

exp は増加関数であるから、$n! < \mathrm{g}(n)$ である。

幅 $1/k$ の帯

今度は $h = 1/k$、$N = k(n-1)$ であり、$r = 0,1,\dots,k(n-1)$ に対して $x_r = 1 + \frac{r}{k} = \frac{k+r}{k}$ である。最後の縦座標は $x_N = n$ である。台形和を「すべての縦座標の和から両端の縦座標の半分ずつを引いたものの h 倍」と書き、$\ln x_0 = 0$ を用いると、

$$T_n^{(k)} = \frac{1}{k}\left\{\sum_{r=0}^{k(n-1)} \ln\frac{k+r}{k} - \tfrac{1}{2}\ln n\right\}.$$

分子 $k+r$ は $k, k+1, \dots, kn$ を動き、分母には k が $k(n-1)+1$ 個あるので、

$$\sum_{r=0}^{k(n-1)} \ln\frac{k+r}{k} = \ln\frac{(kn)!}{(k-1)!} - \big(k(n-1)+1\big)\ln k = \ln\frac{(kn)!}{k!} - k(n-1)\ln k$$

となる。ここで $(k-1)!\,k = k!$ を用いた。$kT_n^{(k)} \approx kI_n = kn\ln n - kn + k$ とおいて整理すると、

$$\begin{aligned}\ln(kn)! &\approx \ln k! + k(n-1)\ln k + \tfrac{1}{2}\ln n + kn\ln n + k(1-n)\\ &= \ln k! + \left(kn+\tfrac{1}{2}\right)\ln n + k(1-n)(1-\ln k),\end{aligned}$$

すなわち、

$$(kn)! \approx k!\, n^{kn+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mathrm{e}}{k}\right)^{k(1-n)} =: A$$

となり、求める結果が得られた。

どちらがより近いか

整数 $a < b$ に対して、誤差 $\displaystyle\int_a^b \ln t\,\mathrm{d}t -$ (刻み幅 1 の台形和、区間 $[a,b]$) を $E(a,b)$ と書く。上で述べた凸性の議論により $E(a,b) > 0$ であり、誤差は隣り合う区間について加法的である：$E(1,b) = E(1,a) + E(a,b)$。

A の導出は、$T_n^{(k)}$ を I_n で置き換えた点を除けば厳密であったから、

$$\ln A - \ln(kn)! = k\left(I_n - T_n^{(k)}\right).$$

同様に、刻み幅 1 の場合の計算で n を kn に置き換えると、$\ln \mathrm{g}(kn) - \ln(kn)! = E(1,kn)$ である。

考えてみよう 幅 $1/k$ の格子での誤差を、幅 1 の格子での誤差とどうすれば比較できるだろうか。

$x = t/k$ と置換する。縦座標 $x_r = (k+r)/k$ は $t = k, k+1, \ldots, kn$ に移り、$\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/k$ であるから、

$$k\left(I_n - T_n^{(k)}\right) = \int_k^{kn} \ln\frac{t}{k}\,\mathrm{d}t \;-\; \left(\text{刻み幅 1 の台形和：関数 } \ln\tfrac{t}{k},\ \text{区間 } [k,kn]\right).$$

$\ln\frac{t}{k} = \ln t - \ln k$ であり、台形公式は定数 $\ln k$ に対して厳密であるから、定数は打ち消し合い、これはちょうど $E(k,kn)$ になる。したがって

$$\ln \mathrm{g}(kn) - \ln(kn)! = E(1,kn) = E(1,k) + E(k,kn) = E(1,k) + \left(\ln A - \ln(kn)!\right).$$

A と $\mathrm{g}(kn)$ はともに $(kn)!$ より大きく、$k \geq 2$ のとき $E(1,k) > 0$ であるから、

$$(kn)! < A < \mathrm{g}(kn) \qquad (k \geq 2).$$

よって、差で測っても比で測っても、新しい近似 A は $\mathrm{g}(kn)$ よりも $(kn)!$ に近い。$k = 1$ のときは $A = 1!\, n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{1-n} = \mathrm{g}(n)$ となり、両者は一致する。言葉で言えば、A は最初の k 個の因数に対して**厳密な**値 $k!$ を用い、残りだけを近似しているので、ln が最も大きく曲がる曲線の始まりの部分から生じる誤差 $E(1,k)$ を避けているのである。

検算

- 最終的な公式で $k=1$ とすると、当然ながら $\mathrm{g}(n)$ に戻る。
- $n=5$ とすると、$5!=120$、$\mathrm{g}(5)=5^{5.5}\mathrm{e}^{-4}\approx 128.0$ であり、確かに $n!<\mathrm{g}(n)$ である。
- $k=3$、$n=5$ とすると、$15!\approx 1.3077\times 10^{12}$、$A\approx 1.3369\times 10^{12}$、$\mathrm{g}(15)\approx 1.4102\times 10^{12}$ であり、$(kn)!<A<\mathrm{g}(kn)$ が確かめられる。
- 比 $\mathrm{g}(kn)/A=\exp E(1,k)$ は k のみに依存し、n にはよらない。$k=3$ のときこれは $\mathrm{g}(3)/3!\approx 1.0548$ であり、上の数値と一致する。

よくある間違い

- 幅 $1/k$ の和で k の個数を数え間違えること。縦座標は $k(n-1)+1$ 個あり、余分の $\ln k$ が $(k-1)!$ を $k!$ に変えるのである。
- 弦が曲線の上側にある図をもとに「$n!<\mathrm{g}(n)$」を論じること。上に凸な関数では弦は下側にあり、台形公式は過小評価する。
- $\ln A$ の誤差が細かい格子での誤差そのものではなく、その k 倍であることを忘れること。

STEP のその先へ

ここでの $\mathrm{g}(n)$ は、スターリング（Stirling）の公式 $n!\sim\sqrt{2\pi n}\,n^n\mathrm{e}^{-n}$ の粗い形である。誤差 $E(1,n)$ は n について増加し、かつ有界である（各帯の誤差は定数の $1/m^2$ 倍以下である）から収束（converge）し、このことが $n!/\mathrm{g}(n)$ が定数 $\sqrt{2\pi}/\mathrm{e}\approx 0.922$ に収束する理由を説明する。オイラー–マクローリンの公式（Euler–Maclaurin formula）はこれを精密にし、完全な漸近級数（asymptotic series）を与える。Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は、リーマン積分（Riemann integral）と、これを支える数値積分公式の誤差評価を扱っている。

解答例

STEP II 1987、第 8 問

純粋数学 • 空間ベクトルと軌跡

STEP II 1987、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/87-s2-q8

鍵となる考え方

各方程式は、位置ベクトル（position vector）が $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ である点 A、B からの距離を用いて書き直すと、何を表しているかがわかるようになる。同値性（equivalence）については、すべてをたった二つの数 $P = |\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2$ と $Q = |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^2$ で表すことができる。すると (i) と (ii) は P と Q についての簡単な二つの一次方程式となり、(iii) と (iv) も同様である。

解答

以下では一貫して、A、B、R を位置ベクトルがそれぞれ $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{r}$ である点とし、M を AB の中点（midpoint）とする。その位置ベクトルは $\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ である。$\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ と仮定し（$\mathbf{a} = \mathbf{b}$ の場合は最後に扱う）、$d = |\mathbf{a}-\mathbf{b}| = AB$ とおく。

小問 (i)

展開すると、

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^2 &= \left(|\mathbf{r}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} + |\mathbf{a}|^2\right) - \left(|\mathbf{r}|^2 - 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{r} + |\mathbf{b}|^2\right) \\ &= -2\Big[(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot\mathbf{r} - \tfrac{1}{2}\left(|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2\right)\Big]. \end{aligned}$$

よって (i) が成り立つのは、ちょうど $|\mathbf{r}-\mathbf{a}| = |\mathbf{r}-\mathbf{b}|$、すなわち $RA = RB$ のときである。軌跡（locus）は AB **の垂直二等分面**（perpendicular bisector plane）、つまり M を通り法線ベクトル（normal）が $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ である平面である。（これが平面であることは直接にもわかる。(i) は $\mathbf{n} = \mathbf{a}-\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ として $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} =$ 定数 の形をしており、$(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2$ であるから $\mathbf{r} = \mathbf{m}$ はこれを満たす。）

小問 (ii)

方程式 (ii) は、$\overrightarrow{RA}$ と $\overrightarrow{RB}$ が垂直であるか、または R が A か B であることを表している。軌跡を特定するために平方完成（completing the square）を行う。

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}-\mathbf{m}|^2 &= |\mathbf{r}|^2 - (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{r} + \tfrac{1}{4}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 \\ &= (\mathbf{a}-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{r}) - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \tfrac{1}{4}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 \\ &= (\mathbf{a}-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{r}) + \tfrac{1}{4}|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2.\end{aligned}$$

よって (ii) は $|\mathbf{r}-\mathbf{m}| = \frac{1}{2}d$ と同値である。軌跡は AB **を直径とする球面**（sphere）、すなわち中心 M、半径 $\frac{1}{2}AB$ の球面である。これは「半円に対する円周角は直角である」という事実の三次元版である。

小問 (iii) と (iv)

方程式 (iii) は $RA = d/\sqrt{2}$ を表している。その軌跡は**中心** A**、半径** $AB/\sqrt{2}$ **の球面**である。同様に、(iv) の軌跡は**中心** B**、半径** $AB/\sqrt{2}$ **の球面**である。

同値性

$P = |\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2$、$Q = |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^2$ とおく。小問 (i) で示したことから、

$$\text{(i)} \iff P = Q.$$

(ii) については、$\mathbf{a}-\mathbf{b} = (\mathbf{a}-\mathbf{r}) - (\mathbf{b}-\mathbf{r})$ と書いて両辺を 2 乗すると、

$$d^2 = |\mathbf{a}-\mathbf{r}|^2 + |\mathbf{b}-\mathbf{r}|^2 - 2(\mathbf{a}-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{r}) = P + Q - 2(\mathbf{a}-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{r}).$$

したがって

$$\text{(ii)} \iff P + Q = d^2.$$

方程式 (iii) と (iv) は $P = \frac{1}{2}d^2$ と $Q = \frac{1}{2}d^2$ を表している。ここで

$$\left(P = Q \text{ かつ} P + Q = d^2\right) \iff P = Q = \tfrac{1}{2}d^2.$$

右向きの含意が成り立つのは、$Q = P$ を代入すると $2P = d^2$ が得られるからである。逆向きについては、$P = Q = \frac{1}{2}d^2$ ならば当然 $P = Q$ かつ $P + Q = d^2$ である。以上のどの段階も「必要十分」であるから、(i) と (ii) を合わせた条件は (iii) と (iv) を合わせた条件と同値であり、示すべきことが示された。

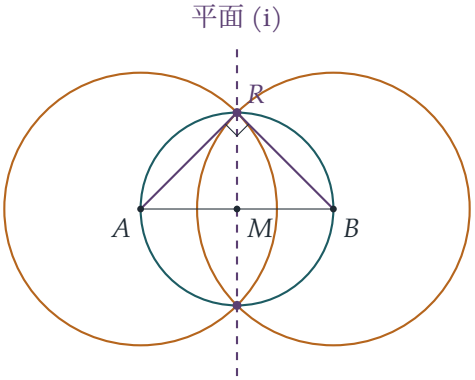
考えてみよう　平面と球面の交わりが、二つの球面の交わりと同じ集合になるのはなぜだろうか？

どちらの組も同じ円を表している。平面 (i) は球面 (ii) の中心 M を通るので、その球面を大円（great circle）で切る。この大円は中心 M、半径 $\frac{1}{2}AB$ で、AB の垂直二等分面上にある。球面 (iii) と (iv) は等しい半径 $AB/\sqrt{2}$ をもち、その和は AB より大きいので、確かに交わる。対称性から、両者は垂直二等分面上にある M を中心とする円で交わる。その半径は、三角形 AMR における三平方の定理（Pythagoras' theorem）より $\sqrt{\frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{4}AB^2} = \frac{1}{2}AB$ であるから、同じ円である。

幾何学的な意味

点 R がこの円上にあるのは、ちょうど三角形 ARB が R を直角とする**直角二等辺三角形**であるときである。(i) と (ii) の組はこれを性質によって表している。すなわち $RA = RB$（二等辺）と $\angle ARB = 90°$（直角）である。(iii) と (iv) の組はこれを辺の長さによって表している。すなわち、斜辺（hypotenuse）が AB である直角二等辺三角形では、他の二辺の長さはともに $AB/\sqrt{2}$ である。上の代数計算は、三平方の定理とその逆（converse）をベクトルの形で述べたものである。恒等式 $d^2 = P + Q - 2(\mathbf{a} - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{r})$ は三角形 ARB における余弦定理（cosine rule）である。

下図は、A と B を含む任意の平面による断面を示している。二等分面は破線、球面 (ii) は青緑の円、球面 (iii) と (iv) は琥珀色の円として現れる。四つすべてが、解となる円が紙面と交わる 2 点で交わる。



退化した場合

$\mathbf{a} = \mathbf{b}$ ならば、(i) は $0 = 0$ となってすべての $\mathbf{r}$ に対して成り立ち、一方 (ii)、(iii)、(iv) はいずれも $\mathbf{r} = \mathbf{a}$ を表す。同値性はなお成り立つが、どの軌跡も 1 点 A に退化（degenerate）する（(i) については空間全体となる）。

検算

$\mathbf{a} = (1,0,0)$、$\mathbf{b} = (-1,0,0)$ とする。すると (i) は平面 $x = 0$、(ii) は $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ である。方程式 (iii) と (iv) は $(x \mp 1)^2 + y^2 + z^2 = 2$ であり、両者を引くと再び $x = 0$ が得られる。四つすべては単位円 $y^2 + z^2 = 1$、$x = 0$ で交わる。たとえば $R = (0,1,0)$ とすると $RA = RB = \sqrt{2}$ かつ $\overrightarrow{RA} \cdot \overrightarrow{RB} = -1 + 1 = 0$ となる。また、上のすべての恒等式を、**a**、**b**、**r** を無作為に選んだ 5000 通りについて有理数演算で厳密に確かめた。予測された円上の無作為な点が四つの方程式をすべて満たすことも確認した。

よくある間違い

- (ii) を「円」と述べてしまう。三次元ではこれは球面であり、(i) の軌跡も直線ではなく平面である。
- 一方向しか証明しない。問題は同値性を求めているので、各段階が逆にたどれることを確かめるか、両方向を証明すること。
- 二つの組が「どちらも円を与える」と述べるだけで、それが**同じ**円であること、すなわち平面・中心・半径がすべて一致することを確かめない。

STEP のその先へ

これらの軌跡はいずれも **r** の二次関数の等位集合（level set）であり、二つの球面の方程式を引いて平面を得るという技法は、二つの球面の**根平面**（radical plane）の考え方である。より一般に、同じ幾何学的対象を異なる連立方程式で表すことは、代数幾何学（algebraic geometry）の出発点である。ここでは空間内の円が二つの方程式によって切り出されており、その役目を果たす方程式の組は数多く存在する。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、ベクトルの代数、特に内積（dot product）と長さ・角との関係を強化するのによい本である。

解答例

STEP II 1987、第 9 問

純粋数学 • 直交行列

> **STEP II 1987、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q9

鍵となる考え方

$\mathbf{B}$ の転置（transpose）をとると、条件 $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \mathbf{I}$ の左辺は両端に逆行列（inverse）が現れる形になる。これらの逆行列はそれ自身正則なので、左から $\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ を、右から $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ を掛けても情報は失われない。残るのは $\mathbf{A}$ と $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ についての多項式の恒等式であり、それはほとんどすぐに簡単になる。注意すべきなのは、示すべきことが「必要十分」であるため、すべての変形が逆にたどれなければならないという点である。

解答

用いる標準的な事実は次のとおりである。

- $(\mathbf{XY})^{\mathrm{T}} = \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$ であり、転置は線形なので、（$\mathbf{I}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}$ より）$(\mathbf{I} \pm \mathbf{A})^{\mathrm{T}} = \mathbf{I} \pm \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ である。
- $\mathbf{X}$ が正則（non-singular）ならば $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$ も正則であり、$(\mathbf{X}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}})^{-1}$ が成り立つ。

ステップ 1：$\mathbf{B}$ の転置。 $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ は正則なので、その転置 $\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ も正則である。積の順序を逆にして、

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \left((\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right)^{\mathrm{T}}(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}).$$

したがって

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\,(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})(\mathbf{I} + \mathbf{A})\,(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}.$$

ステップ 2：逆行列を、逆にたどれる形で払う。 $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$、$\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$、$\mathbf{M} = (\mathbf{I} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})(\mathbf{I} + \mathbf{A})$ とおくと、$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{Q}^{-1}$ である。次が成り立つことを示す。

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{I} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{Q}.$$

（⇒）左から $\mathbf{P}$ を、右から $\mathbf{Q}$ を掛けると、$\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{I}\mathbf{Q} = \mathbf{P}\mathbf{Q}$ となる。
（⇐）左から $\mathbf{P}^{-1}$ を、右から $\mathbf{Q}^{-1}$ を掛けると、$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{I}$ となる。

> ? **考えてみよう** なぜ単に「両辺に掛ける」だけで終わりにしてはいけないのだろうか？

等式の両辺に行列を掛ければ常に正しい等式が得られるが、一般にはその操作を元に戻すことはできない。$\mathbf{X}\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{Z}$ から $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}$ が結論できるのは、$\mathbf{X}$ が逆行列をもつ場合に限られる。ここで逆向きの推論が成り立つのは $\mathbf{P}$ と $\mathbf{Q}$ が逆行列をもつからにほかならず、まさにこの点で $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ が正則である（したがって $\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ も正則である）という仮定が使われている。また、行列の積は可換（commutative）ではないので、$\mathbf{P}$ は左に、$\mathbf{Q}$ は右に置いたままにしなければならないことにも注意しよう。

ステップ 3：展開する。 因数の順序に注意しながら $\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{Q}$ の両辺を展開すると、

$$(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})(\mathbf{I} + \mathbf{A}) = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A},$$
$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}})(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}.$$

$\mathbf{I}$ の項と $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ の項は両辺に現れるので、差をとって

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{Q} \quad \Longleftrightarrow \quad 2(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \mathbf{O} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{O}.$$

これらはいずれも逆にたどれる操作である。両辺に同じ行列を加えたり引いたりすることと、0 でないスカラー 2 または $\frac{1}{2}$ を掛けることだからである。

結論。 ステップ 1〜3 をつなげると、各段階がすべて同値（equivalence）であるから、

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \mathbf{I} \iff (\mathbf{I} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})(\mathbf{I} + \mathbf{A}) = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}})(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \iff \mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{O},$$

となり、これが示すべきことであった。言葉で言えば、$\mathbf{B}$ が直交行列（orthogonal matrix）であるのは、$\mathbf{A}$ が交代行列（skew-symmetric matrix）であるとき、かつそのときに限る。

検算

- 交代行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$ をとる。このとき $\det(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 1 + t^2 \neq 0$ であり、

$$\mathbf{B} = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 1-t^2 & 2t \\ -2t & 1-t^2 \end{pmatrix},$$

  これは回転行列（rotation matrix）である（$t = \tan\frac{\theta}{2}$ とおけばよい）。よって予想どおり $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \mathbf{I}$ となる。

- 1×1 の場合：$a \neq 1$ として $\mathbf{A} = (a)$ とすると $\mathbf{B} = \left(\frac{1+a}{1-a}\right)$ であり、$\mathbf{B}^2 = 1$ より $1 + a = \pm(1 - a)$、すなわち $a = 0$ となる（もう一方の符号は起こりえない）。これは $2a = 0$ と一致する。

- サイズ 1 から 5 までのランダムな行列およそ 2000 個について、厳密な有理数演算で調べた。交代行列 $\mathbf{A}$ はすべて厳密に $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \mathbf{I}$ を与え、それ以外のものは一つも与えなかった。

よくある間違い

- 順序を逆にせずに $\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{I} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$ と書いてしまう。（$\mathbf{I} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ と $(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$ が可換なので、これはたまたま正しいが、そのことには別途根拠が必要である。）

- $(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})(\mathbf{I} + \mathbf{A})$ を展開するときに $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ ではなく $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ と書いてしまう。ここではどちらにしても打ち消し合うが、それは両辺を一貫して展開した場合に限られる。

- 一方向しか証明しない。問題は「必要十分」を求めているので、各段階が逆にたどれる理由を述べること。

STEP のその先へ

写像 $\mathbf{A} \mapsto (\mathbf{I} + \mathbf{A})(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ は**ケイリー変換**（Cayley transform）と呼ばれる。これはベクトル空間（vector space）をなす交代行列を、群（group）をなす直交行列に移し、回転の有理的なパラメータ表示（rational parametrisation）を与える。（$\mathbf{A}$ が実の交代行列ならば $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ は自動的に正則であること、そして得られる直交行列はちょうど固有値（eigenvalue）-1 をもたないものであることが示せる。）これは、リー群（Lie group）がそのリー代数（Lie algebra）とどのように関係しているかを垣間見る最初の例である。直交行列や交代行列についてさらに学ぶには、ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）がよい。

解答例

STEP II 1987、第 10 問

純粋数学 ・ 群の公理

> **STEP II 1987、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q10

鍵となる考え方

すべては添字の上で起こっているので、各演算を添字 $1,2,\ldots,N$ に関するふつうの算術に翻訳する。第 1 の演算は「最大値をとる」ことであり、第 2 の演算は「差の絶対値をとって 1 を加える」ことである。そのうえで、4 つの公理（axioms）、すなわち閉性（closure）、結合法則（associativity）、単位元（identity）の存在、逆元（inverses）の存在を 1 つずつ調べる。成り立たない公理については具体的な反例（counterexample）を 1 つ示せば十分であり、成り立つ公理については一般的な論証が必要である。

解答

以下を通して、$a_j \circ a_k$ の添字を $j \circ k$ と書き、$*$ についても同様に書く。2 つの元が等しいのは、それらの添字が等しいときであり、そのときに限る。

演算 $\circ$

ここでは $a_j \circ a_k = a_{\max(j,k)}$ である。

閉性は成り立つ。 $1 \le j,k \le N$ ならば、$\max(j,k)$ は j と k のいずれかであるから $\{1,\ldots,N\}$ に属し、$a_j \circ a_k \in S$ となる。

結合法則は成り立つ。任意の j,k,l に対して

$$(a_j \circ a_k) \circ a_l = a_{\max(\max(j,k),l)} = a_{\max(j,k,l)} = a_{\max(j,\max(k,l))} = a_j \circ (a_k \circ a_l),$$

である。どちらの括弧のつけ方でも、3 つの添字のうち最大のものが得られるからである。

単位元は存在し、それは a_1 である。 どの添字も 1 以上であるから $\max(1,k) = \max(k,1) = k$ となり、すべての k に対して $a_1 \circ a_k = a_k \circ a_1 = a_k$ が成り立つ。

逆元は存在しない。 a_j の逆元とは、$a_j \circ a_k = a_1$、すなわち $\max(j,k) = 1$ を満たす a_k のことである。しかし $\max(j,k) \geq j$ であるから、$j \geq 2$ のときこれは不可能である。たとえば、どの k に対しても $a_2 \circ a_k$ は a_2 かそれより後の元であり、決して a_1 にはならない。逆元をもつのは a_1 だけである（その逆元は自分自身である）。

したがって、$\circ$ に関して S は閉性、結合法則、単位元の存在を満たすが、逆元の存在は満たさず、群（group）ではない。

> **考えてみよう** ほかの元が単位元になる可能性はないか。もしあれば、逆元についての議論をやり直さなければならない。

その可能性はない。単位元は一意的である。e と e' がともに単位元であるとすると、$e = e \circ e' = e'$ となる。したがって「$a_j \circ a_k$ が単位元に等しい」というときの単位元の候補は a_1 だけであり、上の議論で完結している。

演算 $*$

ここでは $a_j * a_k = a_{|j-k|+1}$ である。$N = 4$ のとき、添字の演算表は次のようになる。

$*$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	2	3
3	3	2	1	2
4	4	3	2	1

この表に見られるパターンは、すべての N について成り立つ。

閉性は成り立つ。 $1 \leq j,k \leq N$ ならば $0 \leq |j-k| \leq N-1$ であるから $1 \leq |j-k|+1 \leq N$ となり、$a_j * a_k \in S$ である。

単位元は存在し、それは a_1 である。 $k \geq 1$ であるから $|1-k| = k-1$ となり、$a_1 * a_k = a_k$ である。同様に $a_k * a_1 = a_k$ も成り立つ（$|j-k| = |k-j|$ であるから、この演算は可換（commutative）である）。

逆元は存在する。 $a_j * a_j = a_{0+1} = a_1$ は単位元であるから、すべての元は自分自身の逆元である（これは表の対角線に 1 が並んでいることに対応する）。

結合法則は成り立たない。 a_2, a_2, a_3 をとる（これには $N \geq 3$ が必要である）。

$$(a_2 * a_2) * a_3 = a_1 * a_3 = a_3,$$
$$a_2 * (a_2 * a_3) = a_2 * a_{|2-3|+1} = a_2 * a_2 = a_1.$$

両者は異なるので、$*$ は結合的ではない。

したがって、$*$ に関して S は閉性、単位元の存在、逆元の存在を満たすが、結合法則は満たさず、やはり群ではない。

考えてみよう $N > 2$ という条件はどこで使われたか。

結合法則の反例においてのみであり、そこでは a_3 を用いている。$N = 2$ のとき、演算表は位数（order）2 の群の演算表であり（a_1 が単位元、$a_2 * a_2 = a_1$）、$*$ は結合的である。一方、$\circ$ については逆元に関する議論に a_2 しか必要ないので、$N = 2$ のときも $\circ$ は群をなさない。

検算

小さな場合を総当たりで調べた。2 から 9 までのすべての N について、結合法則を調べるためにすべての 3 つ組を列挙し、単位元と逆元を直接探索した。$\circ$ について：閉じており、結合的で、単位元は a_1、逆元をもつのは a_1 のみであった。$*$ について：閉じており、単位元は a_1、すべての元が自分自身の逆元であり、結合法則は $N \geq 3$ のすべての場合に（(a_2, a_2, a_3) においても）成り立たず、$N = 2$ のときは成り立った。$N = 3$ の場合は、3×3 の表から手計算で 1 分もあれば確かめられる。

よくある間違い

- 「max」は掛け算とは違うから $\circ$ には単位元がない、と主張してしまう。最小の元を確かめてみよ。a_1 が単位元になっている。
- $*$ の結合法則を一般に証明しようとしたり、a_1 を含む 3 つ組だけを調べたりする（a_1 は単位元なので、そのような 3 つ組では必ず結合法則が成り立つ）。必要なのは具体的な反例 1 つである。
- 閉性を忘れる。当然のことと思い込みやすいが、ここでは $|j - k| \leq N - 1$ という評価が必要である。

STEP のその先へ

$\circ$ に関する S のように、結合的な演算と単位元をもつ集合は**モノイド**（monoid）とよばれる。全順序集合（totally ordered set）上の「max」は代表的な例であり、これは**半束**（semilattice）でもある。$*$ に関する S のように、閉性、単位元、逆元をもつが結合法則を満たさない集合は、結合法則が本当に独立した公理であること、すなわち他の

3 つの公理から導くことができないことを示している。群の公理がどのように連携して働くかについては、Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を参照せよ。

解答例

STEP II 1987、第 11 問

力学 ・ 摩擦とモーメント

> **STEP II 1987、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q11

鍵となる考え方

支点での力は未知であり、しかも求める必要がない。そこで、この力のモーメントが 0 となる支点 O のまわりのモーメント（moment）を考える。棒は三次元的に配置されているが、輪の平面から自然な二つの方向が定まる。平面に垂直な方向（垂直抗力がはたらく方向）と、平面内の方向（摩擦力がはたらく方向）である。重力も同じように分解すれば、一方のモーメントの式から垂直抗力が、もう一方の式から摩擦力が求まる。その比が μ である。

解答

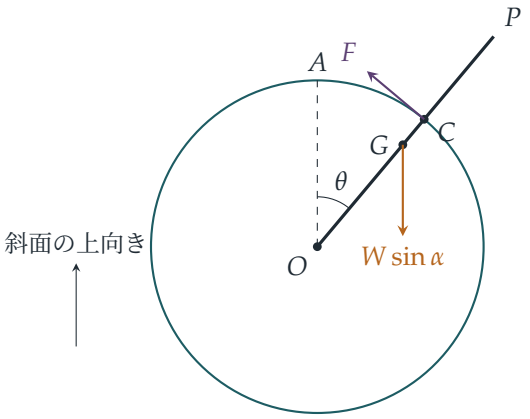
モデル。 棒は重さ W の一様な棒 OP であり、重心（centre of mass）G はその中点にあるので $OG = \frac{1}{2}b$ である。棒は輪の中心 O でなめらかに軸支されている。棒は円周上の点 C で輪の上に載っているので $OC = a$ である。O と C はともに輪の平面上にあるから、棒はこの平面内にある。輪の最高点を A とすると、OA は最大傾斜線（line of greatest slope）に沿ってまっすぐ上を向く。$\angle AOC = \theta$ とする。

力。 棒にはたらく力は次のとおりである。

- G にはたらく重力 W。
- なめらかな支点 O での力。これは未知であるが、O のまわりのモーメントをもたない。
- C での接触力。棒と輪の針金は C で交わる。棒は半径に沿い、針金は接線に沿っており、どちらも平面内にあるので、両者に共通な法線は平面に垂直である。したが

って垂直抗力（normal reaction）R は輪の平面に垂直である。摩擦力（friction）F は平面内にある。棒は O のまわりに回転することでしか動けず、そのとき C は輪の接線方向に動く。よって摩擦力はその接線に沿って、棒に垂直にはたらく。

重力を、平面に垂直な成分 $W\cos\alpha$（平面に向かう向き）と、平面内で最大傾斜線に沿って下向きの成分 $W\sin\alpha$ に分解する。図は平面を真上から見下ろしたもので、A が上にある。R は C において紙面の手前向きである。



O のまわりのモーメント。 支点はなめらかなので、残りの力の O のまわりのモーメントの総和は、O を通る**あらゆる**軸のまわりで 0 である。二つの軸から有用な式が得られる。

平面内にあり、O を通って棒に垂直な軸。この軸のまわりにモーメントをもつのは、平面に垂直な力だけである。それは距離 $\frac{1}{2}b$ にある $W\cos\alpha$ と、距離 a にある R である。平面内の力 F と $W\sin\alpha$ は、この軸と交わるか平行であるから、この軸のまわりのモーメントをもたない。よって

$$R\,a = W\cos\alpha\cdot\tfrac{1}{2}b, \qquad \text{よって} \qquad R = \frac{Wb\cos\alpha}{2a}.$$

平面に垂直で、O を通る軸。今度は平面内の力だけが関係する。棒は斜面の上向きの方向と角 θ をなすので、$W\sin\alpha$ の棒に垂直な成分は $W\sin\alpha\sin\theta$ であり、距離 $\frac{1}{2}b$ の点にはたらく。摩擦力はもともと棒に垂直で、距離 a の点にはたらく。よって

$$F\,a = W\sin\alpha\sin\theta\cdot\tfrac{1}{2}b, \qquad \text{よって} \qquad F = \frac{Wb\sin\alpha\sin\theta}{2a}.$$

重力の平面内成分は棒を A から遠ざけ、輪の下の方へ振り下ろそうとし、摩擦力はこれに逆らう。

? **考えてみよう** 摩擦力には棒に沿った成分もありうるのではないか？

棒に沿った力は O を通るので、O のまわりのモーメントをもたない。この力は回転を助けることも妨げることもできず、また棒に沿った力ならば支点がいくらでも供給できる。起こりうる運動は O のまわりの回転だけなので、限界のつり合い（limiting equilibrium）で問題となる摩擦力は接線方向の成分、すなわち F である。摩擦力はすべて接線方向にはたらくものとする。

限界のつり合い。 限界のつり合いでは $F = \mu R$ であるから

$$\frac{Wb\sin\alpha\sin\theta}{2a} = \mu\frac{Wb\cos\alpha}{2a} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\mu = \tan\alpha\,\sin\theta}$$

となる（$0 \le \theta \le \pi$ とする）。$\tan\alpha\sin\theta \le \mu$ であれば、棒は角 θ の位置でつり合って静止する。a、b、W がすべて消えていることに注意しよう。

検算

- $\theta = 0$ または $\theta = \pi$ のとき、棒は最大傾斜線に沿っている。このとき重力の平面内成分は棒の方向にまっすぐ引くので、摩擦力は不要であり $\mu = 0$ となる。$\alpha = 0$ のときも同様で、輪が水平ならば重力の平面内成分は生じない。
- 摩擦力が最も必要となるのは $\theta = \frac{1}{2}\pi$、すなわち棒が水平のときである。このとき $\mu = \tan\alpha$ となり、傾斜角 α の斜面上のブロックの場合と一致する。
- 数値による検算として、α, θ, a, b, W を 2000 通りランダムに選び、力を三次元ベクトルとして構成した。O のまわりのベクトルのモーメントの式を R と F について解いたところ、F/R は $\tan\alpha\sin\theta$ と 4×10^{-15} 以内で一致した。たとえば $\alpha = 30°$、$\theta = 60°$ のとき $\mu = \frac{1}{2}$ である。

よくある間違い

- 鉛直面内にある輪の**内側**に棒が載っている場合のように、C での垂直抗力を半径方向にとってしまう。ここでは棒は針金をまたいで載っているので、法線は輪の平面に垂直である。
- モーメントを考えずに力を分解してしまう。そうすると支点での力の未知な三成分が入り込むが、問題はそれを求めていない。

STEP のその先へ

ここでは O を通る互いに垂直な二つの軸のまわりのモーメントを考えた。これは、O のまわりのトルク（torque）の総和が 0 であることを表す一つのベクトル方程式 $\sum \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ の近道である。ベクトルとしてのトルクと、三次元における剛体（rigid body）のつり合いの条件は、大学一年次の力学の標準的な内容であり、固定点のまわりの剛体の回転へとつながっていく。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、まさにこの方法でトルクと角運動量をベクトルとして展開している。

解答例

STEP II 1987、第 12 問

力学 ・ つり合いとエネルギー

> **STEP II 1987、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q12

鍵となる考え方

「あらゆる位置で平衡（equilibrium）にある」というのは、位置エネルギー（potential energy）についての主張である。ビーズ（bead）が針金上のどこでも静止できるなら、ビーズが針金に沿って滑っても系の位置エネルギーは変化しえない。したがって、位置エネルギーは針金上で一定でなければならない。このエネルギーをビーズの高さと輪からの距離で表せば、曲線がただちに得られる。後半も同じ事実によってすっきりと解ける。位置エネルギーが一定なので、エネルギー保存則（conservation of energy）により、ビーズと質点の運動エネルギー（kinetic energy）の和は一定である。あとは二つの速さを結びつける幾何的な関係を求めるだけである。

解答

ビーズとつり下げられたおもりを質点とみなし、糸は軽くて伸びないもの、輪と針金はなめらかなものとしてモデル化する。輪を原点 O に置き、y を鉛直上向きにとる。ビーズの位置を極座標（polar coordinates）(r,θ) で表し、θ は水平方向から反時計回りに測るものとする。このとき、ビーズの O に対する高さは $y = r\sin\theta$ である。糸の長さを L とする。

曲線の方程式

O からビーズまでの糸の長さは r なので、つり下げられた質点は輪から距離 $L-r$ だけ下にある。O を基準の高さとすると、系の位置エネルギーは

$$V = mgr\sin\theta - mg(L-r) = mg\left(r + r\sin\theta\right) - mgL.$$

である。針金はなめらかなので、ビーズに働く針金からの抗力は針金に垂直であり、系を針金に沿って動かしうる力はすべて V に由来する。系がある位置で平衡にあるのは、そこで V が針金に沿った移動に関して停留するとき、かつそのときに限る。**あらゆる**位置で平衡にあるということは、針金上のいたるところで $\mathrm{d}V/\mathrm{d}s = 0$（$s$ は弧長（arc length））ということであり、したがって V は針金上で一定である：

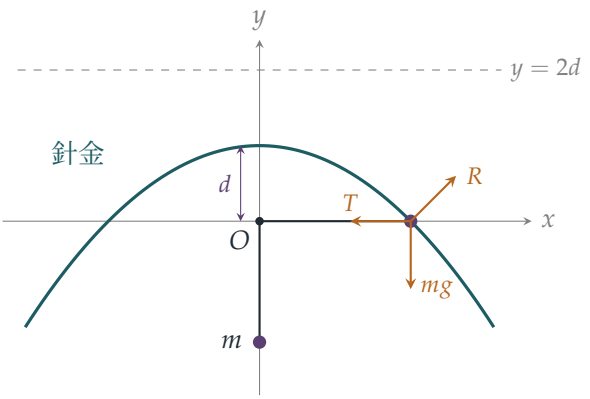
$$r(1+\sin\theta) = c \quad \text{ある定数} c.$$

これは力のつり合いからも確かめられる。平衡状態では、つり下げられた質点によって糸全体に張力（tension）mg が働く（輪はなめらかである）。ビーズについて、O に向かう張力 mg の接線成分は $-mg\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}$ であり、重力の接線成分は $-mg\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$ である。これらが打ち消し合わなければならないので $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(r+y) = 0$ となり、これは先ほどと同じ条件である。

c を求める。$1+\sin\theta \le 2$ より $r = c/(1+\sin\theta) \ge c/2$ であり、等号は $\theta = \frac{\pi}{2}$（輪の真上にある針金上の点）のときに成り立つ。よって輪から針金までの最短距離は $c/2$ であり、$c = 2d$ となる。したがって曲線は

$$\boxed{r(1+\sin\theta) = 2d} \qquad \text{すなわち} \qquad r = \frac{2d}{1+\sin\theta}.$$

である。（θ を鉛直下向きから測る場合、同じ曲線は $r(1-\cos\theta) = 2d$ と表される。）$r = 2d - y$ であるから、針金上のすべての点は、O からの距離と水平線 $y = 2d$ からの距離が等しい。したがって針金は、輪を焦点（focus）とし、輪より高さ $2d$ だけ上にある直線を準線（directrix）とする放物線（parabola）である。直交座標で表すと $x^2 = 4d(d-y)$ であり、頂点（vertex）は $(0, d)$ である。



図ではビーズは輪と同じ高さにある。そこでの放物線の傾きはちょうど -1 なので、張力 $T = mg$、重力 mg、垂直抗力（normal reaction）R がつり合う。

ビーズの速さ

次に、ビーズが速さ u で針金に沿って動くとする。糸はぴんと張ったままで長さは一定なので、つり下げられた質点は依然として輪から距離 $L-r$ だけ下にある。

考えてみよう つり下げられた質点はどれだけの速さで動いているか？

質点の輪からの深さは $L-r$ なので、その速度は鉛直方向で、速さは $|\dot{r}|$ である。$\dot{r}$ はビーズの速度の動径成分にすぎず、ビーズの速さ u 全体ではないことに注意せよ。

運動が始まると張力はもはや mg ではないが、系全体に対して正味の仕事はしない。糸は伸びず輪はなめらかなので、張力がビーズにする仕事は、つり下げられた質点にする仕事によって打ち消される。針金からの抗力はビーズの運動方向に垂直なので仕事をしない。よってエネルギーは保存される：

$$\tfrac{1}{2}mu^2+\tfrac{1}{2}m\dot{r}^2+V=\text{定数}.$$

ところが前半の結果より、針金上では $V=mg\cdot 2d-mgL$ は一定である。したがって

$$u^2+\dot{r}^2=\text{定数}. \qquad (*)$$

次に $\dot{r}$ と u を結びつける。$r=2d/(1+\sin\theta)$ を微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{2d\cos\theta}{(1+\sin\theta)^2}=-\frac{r\cos\theta}{1+\sin\theta},\qquad \text{よって}\qquad \dot{r}^2=r^2\dot{\theta}^2\frac{\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2}=r^2\dot{\theta}^2\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta},$$

となる。ここで $\cos^2\theta=(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$ を用いた。曲線の方程式から $1+\sin\theta=2d/r$、$1-\sin\theta=2-2d/r=2(r-d)/r$ なので、

$$\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{r-d}{d},\qquad \text{となり}\qquad \dot{r}^2=\frac{r-d}{d}r^2\dot{\theta}^2.$$

極座標では速さは $u^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2$ を満たすので、

$$u^2=r^2\dot{\theta}^2\left(\frac{r-d}{d}+1\right)=\frac{r}{d}r^2\dot{\theta}^2,\qquad \text{したがって}\qquad \dot{r}^2=\frac{r-d}{r}u^2.$$

考えてみよう $r=d$ のとき $\dot{r}$ はいくらか？

$r=d$ のときビーズは頂点 $\theta=\frac{\pi}{2}$ にあり、そこでは r が最小値をとり $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta=0$ である。よってそこでは $\dot{r}=0$ であり（公式 $\dot{r}^2=\frac{r-d}{r}u^2$ もそれを示している）、つり下げられた質点は一瞬静止している。したがって $(*)$ の定数は v^2 である：

$$u^2+\frac{r-d}{r}u^2=v^2\quad\Longrightarrow\quad u^2\frac{2r-d}{r}=v^2\quad\Longrightarrow\quad u=\left(\frac{r}{2r-d}\right)^{\frac{1}{2}}v,$$

ここで u と v は速さなので正の平方根をとった。これが求める結果である。

検算

- $r = d$ のとき、公式は当然そうあるべきとおり $u = v$ を与える。
- $r \to \infty$ のとき $u \to v/\sqrt{2}$ である。遠方では放物線の接線はほぼ動径方向を向くので $\dot{r} \approx u$ となり、運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ はビーズと質点に等しく分配される。
- 輪と同じ高さでの平衡：点 $(2d, 0)$ は曲線上にあり、そこでは張力 mg（水平）と重力 mg（鉛直）の合力が 45° の向きとなり、その点での放物線の傾き -1 に垂直である。
- 数値的な確認として、$d = 1.3$、$v = 2$ として、ビーズと質点からなる系の運動方程式を頂点から放物線に沿って数値積分した。$r = 2.8905$ におけるビーズの速さは 1.606309 であり、$\sqrt{r/(2r-d)}\,v$ と約 10^{-8} の精度で一致した。また、静止しているビーズに働く接線方向の力が、針金上の無作為な 1000 点でゼロになることも確かめた。

よくある間違い

- つり下げられた質点の運動エネルギーを忘れ、すべての r に対して $u = v$ としてしまう。位置エネルギーは一定だが、運動エネルギーは分配されている。
- 質点の速さを $|\dot{r}|$ ではなく u としてしまう。糸を輪に通して引き込むのは、ビーズの運動の動径成分だけである。
- θ を別の直線から測っておきながら $r(1 + \sin\theta) = 2d$ と書いてしまう。正しい極方程式であればどの形でもよいが、θ をどの直線から測っているかは明記すること。

STEP のその先へ

系は位置エネルギーが停留する位置で平衡にあるという考え方は**仮想仕事の原理**（principle of virtual work）であり、これはラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）へとつながる。ラグランジュ力学では、運動エネルギーを一つの一般化座標（generalised coordinate）（ここでは θ）で表し、張力を求めることなく、そこから運動方程式が導かれる。この針金上では V が一定なので、ビーズと質点はまるで力がまったく働いていないかのように運動し、今回得た関係式は運動エネルギー $\frac{1}{2}m\,r^2(2r-d)\dot{\theta}^2/d$ の保存にほかならない。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、エネルギーを用いた方法や束縛運動をこのような視点で扱っている。

解答例

STEP II 1987、第 13 問

力学 ・ 壁との斜め衝突

> **STEP II 1987、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q13

鍵となる考え方

なめらかな（smooth）クッションが変えられるのは、速度のうちクッションに垂直な成分だけである。その成分は向きが反転して e 倍され、クッションに沿った成分は変わらない。隣り合う 2 つのクッションはそれぞれ異なる成分に作用するので、各成分はちょうど 1 回ずつ反転して e 倍される。閉じた経路については、座標を用いてパックをクッションからクッションへと追跡し、唯一の自由な量である初めの傾きを、パックが出発点に戻ってくるように選ぶ。

解答

モデル。パックはなめらかなクッションをもつなめらかな水平の台の上を滑る質点であるから、衝突と衝突の間には何も作用せず、一定の速度で直線運動をする。衝突の際、クッションの力積（impulse）はクッションに垂直である（クッションはなめらかだからである）。したがって速度の平行成分は変わらない。ニュートン（Newton）の反発の法則（law of restitution）により、垂直成分は向きが反転して e 倍される。$0 < e \leq 1$ とする。

台の 2 辺に沿って座標軸をとり、台が $0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq B$ となるようにする。

小問 (i)：隣り合う 2 つのクッション

パックの速度を (u, v) とする。隣り合うクッションとは、$x =$ 定数 の形のクッション 1 つと $y =$ 定数 の形のクッション 1 つであり、どちらの順に当たってもよい。x クッションに当たると $(u, v) \mapsto (-eu, v)$ となり、y クッションに当たると $(u, v) \mapsto (u, -ev)$

となる。それぞれに 1 回ずつ当たった後の速度は、順序によらず

$$(-eu,\,-ev) = -e\,(u,v).$$

である。これはもとの速度のスカラー倍であるから、最後の経路はもとの経路に平行であり、題意が示された。パックは今や逆向きに進んでおり、その速さは e 倍に減っている。

小問 (ii)：クッションから出発する閉じた経路

パックがクッション $y=0$ 上の点 $P=(a,0)$ に静止していて、$a:(L-a)=z:1$ であるとする。すなわち

$$a=\frac{zL}{1+z},\qquad L-a=\frac{L}{1+z},\qquad 0<a<L.$$

である。x を右向き、y を上向きにとって台を上から見ると、クッション $y=0$ から時計回りに進んで、$x=0$、次に $y=B$、次に $x=L$ に出会う。比を反対側の端から測る場合は z を $1/z$ に置き換えればよく、議論は変わらない。パックを速度 $(-u,v)$（ただし $u,v>0$）で打ち出し、傾きを $k=v/u$ と書く。4 本の区間での速度は

$$(-u,v)\xrightarrow{x=0}(eu,v)\xrightarrow{y=B}(eu,-ev)\xrightarrow{x=L}(-e^2u,-ev)\xrightarrow{y=0}\cdots$$

である。

- 区間 1、$(a,0)$ から $x=0$ まで：水平距離 a を進み、ak だけ上昇するので、左のクッションに $W_1=(0,\,ak)$ で当たる。
- 区間 2、傾きは $v/(eu)=k/e$：$B-ak$ だけ上昇するので、横に $e(B-ak)/k$ だけ進む。上のクッションに $W_2=\big(e(B/k-a),\,B\big)$ で当たる。
- 区間 3、傾きは $-k$：横に $L-x_{W_2}$ だけ進み、$k(L-x_{W_2})$ だけ下降するので、右のクッションに高さ $y_{W_3}=B-kL+e(B-ak)$ で当たる。
- 区間 4、傾きは k/e：y_{W_3} だけ下降し、$e\,y_{W_3}/k$ だけ戻るので、$y=0$ に

  $$x_{終}=L-\frac{e\,y_{W_3}}{k}=(1+e)L+e^2a-\frac{e(1+e)B}{k}.$$

  で到達する。

$x_{終}=a$ となってほしい。これより $e(1+e)B/k=(1+e)L-(1-e^2)a=(1+e)\big(L-(1-e)a\big)$ となるので

$$k=\frac{eB}{L-(1-e)a}=\frac{B}{L}\cdot\frac{e(1+z)}{1+ez}.$$

である。$L-(1-e)a>L-a>0$ であるから、これはすべての $z>0$ に対して正の数である。

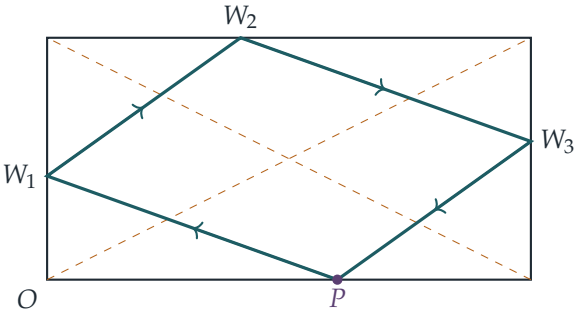
考えてみよう これで終わりだろうか。パックが左、上、右、下の順にクッションに当たると仮定していた。

終わりではない。各衝突点が本当に仮定した辺の上にあることを確かめなければならない。$D = L - (1-e)a = L - a + ea$ とおくと $k = eB/D$ である。このとき

$$y_{W_1} = ak = \frac{eaB}{D},$$
$$x_{W_2} = e\left(\frac{D}{e} - a\right) = L - a,$$
$$y_{W_3} = B(1+e) - k(L+ea) = \frac{B\left[(1+e)(L-a+ea) - eL - e^2a\right]}{D} = \frac{B(L-a)}{D}.$$

である。$0 < a < L$ かつ $e > 0$ であるから、$0 < ea < D$ かつ $0 < L - a < D$ である。よって $0 < y_{W_1} < B, 0 < x_{W_2} < L, 0 < y_{W_3} < B$ が成り立つ。各衝突は仮定した辺の内部（端点を除く部分）で起こり、角には当たらない。したがって、すべての z について、上で求めた傾き k の打球は左、上、右と進み、P に戻ってくる。

小問 (i) により、区間 1 と区間 3 は平行であり、区間 2 と区間 4 も平行である。よって閉じた経路は台に内接する平行四辺形（parallelogram）$PW_1W_2W_3$ である。



破線は対角線である。図の経路は $L = 2B, e = \frac{1}{2}, z = 1.5$ の場合である。

小問 (iii)：任意の内部の点からの 2 つの打球

そのような打球はすべて小問 (*ii*) の経路のいずれかである。パックが内部の点 Q から速度 $\mathbf{w}$ で出発し、4 つのクッション上の点 V_1, V_2, V_3, V_4 で時計回りの順に跳ね返って Q に戻ってくるとする。小問 (i) を 2 回適用すると、4 回跳ね返った後の速度は $(-e)^2\mathbf{w} = e^2\mathbf{w}$ となり、もとと同じ向きを向く。したがって最後の区間 V_4Q と最初の区間 QV_1 は同じ直線上にあり、向きも同じである。よって $V_4 \to Q \to V_1$ は 1 本のまっすぐな区間であり、パックの経路は、クッション上の V_4 から出発し、残りの 3 つのクッションで時計回りに跳ね返って V_4 に戻る閉じた経路である。小問 (ii) の計算は、

そのような経路の傾きが出発点によって決まることを示している。そのような経路はどれも各辺に頂点を 1 つずつもつので、すべて小問 (ii) の平行四辺形 Π_a（$0 < a < L$）であり、Q は Π_a の辺の上にある。逆に、Q がある Π_a の辺の上にあれば、Q からその辺に沿って進行方向に打てばよい。したがって、Q を通る（平行四辺形、辺）の組の個数を数えればよい。

z が変化するとき辺が台をどのように掃くか。 z が 0 から ∞ まで動くと、a は 0 から L まで動く。上の式から、y_{W_1} は 0 から B まで増加し、$x_{W_2} = L - a$ は L から 0 まで減少し、$y_{W_3} = B/\big(1 + ea/(L-a)\big)$ は B から 0 まで減少する。よって Π_a は O を通る対角線として始まり（$a \to 0$ のとき頂点は角 O と (L, B) に集まる）、もう一方の対角線として終わる。ここで 1 本の辺、たとえば PW_1 に注目する。この辺は、角 O において、底辺に沿った長さ a と左辺に沿った長さ y_{W_1} を 2 辺とする三角形を切り取る。この 2 辺はどちらも a について狭義単調増加であるから、これらの三角形は真に入れ子になっており、その斜辺どうしは決して交わらない。三角形は何もない状態から、$(L, 0)$ と $(0, B)$ を結ぶ対角線より下の、台の半分まで連続的に大きくなる。正確に述べると、$Q = (q_1, q_2)$ がその半分の中にあれば、関数

$$f(a) = \frac{q_1}{a} + \frac{q_2}{y_{W_1}(a)}$$

は連続かつ狭義単調減少である。$a \to 0$ のとき ∞ に発散し、$a \to L$ のとき $q_1/L + q_2/B < 1$ に収束（converge）するので、$f(a) = 1$（Q が PW_1 上にあることを意味する）となる a はちょうど 1 つ存在する。Q がその半分の中になければ、すべての a に対して $f(a) > 1$ であり、PW_1 が Q を通ることはない。同じ議論が各辺に当てはまる。

- PW_1 は、$(L, 0)$ と $(0, B)$ を結ぶ対角線より下の台の半分を 1 回掃く。
- W_2W_3 は、その対角線より上の台の半分を 1 回掃く。
- W_1W_2 は、O と (L, B) を結ぶ対角線より上の台の半分を 1 回掃く。
- W_3P は、その対角線より下の台の半分を 1 回掃く。

クッションから離れていて対角線上にない点 Q は、各対角線に関してちょうど一方の側にある。よって、異なる 2 つの平行四辺形に属するちょうど 2 本の辺が Q を通る。これが 2 つの打球である。それぞれの打球はパックをその辺に沿って送り出し、4 つのクッションを時計回りに回って Q に戻らせる。（Q が対角線上にある場合は、2 つの打球のうち 1 つが角に向かう打球に退化する。）

検算

- $e = 1$ のとき、傾きはすべての z に対して $k = B/L$ であるから、すべての辺は対角線に平行である。これは完全弾性のクッションに対して通常の鏡像による展開が与

える結果と一致する。

- $L = 2, B = 1, e = \frac{1}{2}, z = 1$ とすると、$a = 1, k = \frac{1}{3}$ であり、衝突点は $(0, \frac{1}{3})$, $(1, 1)$, $(2, \frac{2}{3})$ である。最後の区間では $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = e/k = \frac{3}{2}$ であるから、$\frac{2}{3}$ 下降する間に 1 だけ戻り、$(1, 0) = P$ に到達する。
- パックを壁から壁へと進める数値シミュレーションで、3 つの小問すべてが成り立つことを確かめた。ランダムな台、e の値、z の値に対して予測どおりの衝突点が得られ、ランダムな内部の点はそれぞれ閉じた経路のちょうど 2 つの上にあった。

よくある間違い

- 鏡像（展開）のテクニックを使うこと：$e < 1$ のとき反射角は入射角に等しくないので、このテクニックは使えない。
- $x_{\text{終}} = a$ から k を求め、各衝突が意図した辺の上で起こることを確かめないこと。
- 小問 (iii) で、Q からの打球が特定の辺に沿って出発しなければならないと仮定すること。最初の区間と最後の区間を 1 本のまっすぐな区間につなげるのは、小問 (i) の議論である。

STEP のその先へ

このような経路は**ビリヤード**（billiards）と呼ばれる。$e = 1$ の場合はそれだけで一つの分野をなしており、反射や展開を用いて研究され、力学系（dynamical systems）へとつながっていく。ここではクッションがエネルギーを失い、写像「1 周する前の速度 $\mapsto$ 1 周した後の速度」は e^2 倍という純粋な拡大縮小になる。パックが 1 周ごとに遅くなるにもかかわらず、すべての e に対して閉軌道が存在するのはこのためである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、力積と反発を丁寧に扱っている。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、同じ趣向の問題がさらに収録されている。

解答例

STEP II 1987、第 14 問

力学 ・ 円錐上のゴムひも

> **STEP II 1987、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q14

鍵となる考え方

輪ゴムは円錐上で常に水平な円であり続けるので、その状態はただ一つの数、すなわち母線（generator）に沿って測った頂点（vertex）からの距離 s によって完全に記述される。そこで、輪ゴムの微小な要素一つの運動を追う。張力（tension）による内向きの引く力は、円錐面に沿った成分と面に垂直な成分に分けられる。面に沿った成分が要素を母線に沿って動かし、面に垂直な成分はなめらかな円錐によって打ち消される。s を長さ x に書き換えると単振動（simple harmonic motion）が得られ、輪ゴムは 4 分の 1 周期（period）の後にたるむ。

解答

モデル化。 輪ゴムを、質量 m が円周上に一様に分布した細い弾性ひも（elastic string）とみなす。円錐はなめらかなので、各要素に及ぼす円錐からの抗力は面に垂直であり、重力は無視する。対称性により、すべての要素は同じように運動するので、輪ゴムは軸を中心とする円のままである。母線に沿って測った頂点からの距離を $s(t)$ とする。各母線は軸と角 α をなすので、円の半径は $s\sin\alpha$ であり、したがって

$$x = 2\pi s \sin\alpha.$$

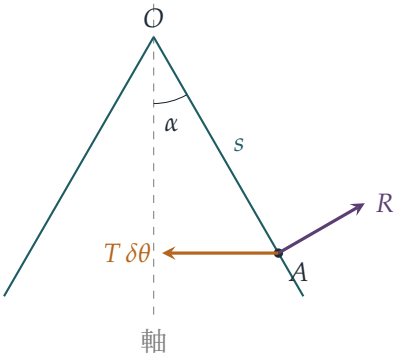
輪ゴムが伸びている間（$x > l$）は、フックの法則（Hooke's law）により張力は $T = \dfrac{\lambda(x-l)}{l}$ である。

一つの要素にはたらく力。 軸に対して中心角 $\delta\theta$ を張る要素をとる。これは輪ゴム全体の $\delta\theta/2\pi$ にあたるので、その質量は $\dfrac{m\,\delta\theta}{2\pi}$ である。この要素には次の二つの力がは

たらく。

- 張力による、問題で与えられた力 $T\,\delta\theta$。これは軸に垂直で、軸に向かう向きである。
- 円錐からの垂直抗力（normal reaction）R。これは要素を通る母線に垂直である。

図は、軸と要素を含む平面を示している。



要素は円錐面上に拘束されているので、母線 OA に沿ってしか動けない。そこで、力をこの方向とそれに垂直な方向に分解する。力 $T\,\delta\theta$ は軸に垂直であり、母線は軸と角 α をなすので、$T\,\delta\theta$ と $\overrightarrow{AO}$ の向きのなす角は $90^\circ - \alpha$ である。よって次が成り立つ。

- $\overrightarrow{AO}$ の向き（頂点に向かう向き）では、$T\,\delta\theta$ の成分は $T\,\delta\theta\cos(90^\circ - \alpha) = T\,\delta\theta\sin\alpha$ であり、R の寄与はない。
- 面に垂直な向きには運動がないので、$R = T\,\delta\theta\cos\alpha$ である。

$R \geq 0$ であるから、輪ゴムは確かに円錐に押しつけられたままである。

考えてみよう 内向きの力 $T\,\delta\theta$ によって半径が縮む、と単純に言えないのはなぜか？

要素は軸に向かってまっすぐ動くことはできない。円錐が邪魔をしているからである。$T\,\delta\theta$ のうち、加速に寄与するのは面に沿った部分だけであり、残りは抗力によって打ち消される。これが因子 $\sin\alpha$ の由来であり、なめらかな斜面上の小球が斜面に沿って $mg\sin\theta$ の力しか受けないのと同じ理由である。

運動方程式。 s が頂点から離れる向きに増加するようにとり、母線に沿った向きに要素についてのニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）を適用すると、

$$\frac{m\,\delta\theta}{2\pi}\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -T\,\delta\theta\sin\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{2\pi T\sin\alpha}{m}.$$

$\delta\theta$ が約分されるので、すべての要素が同じ方程式に従う。これにより、輪ゴムが円のままであることが確かめられる。さて、α は定数で $x = 2\pi s \sin\alpha$ であるから、

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 2\pi \sin\alpha \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{4\pi^2 T \sin^2\alpha}{m} = -\frac{4\pi^2\lambda}{ml}(x-l)\sin^2\alpha,$$

ここで $T = \lambda(x-l)/l$ を用いた。これは輪ゴムが張っている間、すなわち $0 < t < t_0$ において成り立ち、整理すると求める方程式が得られる。 □

t_0 を求める。 $y = x - l$、$\omega^2 = \dfrac{4\pi^2\lambda\sin^2\alpha}{ml}$ とおくと $\ddot{y} = -\omega^2 y$ となり、これは $y = 0$ を中心とする単振動である。初めの長さを $x_0 > l$ とする（輪ゴムは押し込まれたので、伸びた状態から始まる）。輪ゴムは静止状態から放されるので $\dot{y}(0) = 0$ であり、

$$x - l = (x_0 - l)\cos\omega t.$$

輪ゴムがたるむのは x が初めて l まで減少したとき、すなわち初めて $\cos\omega t = 0$ となるときであるから、$\omega t_0 = \frac{\pi}{2}$ である。$\omega = 2\pi\sin\alpha\sqrt{\lambda/(ml)}$ であるから、

$$t_0 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{1}{4\sin\alpha}\sqrt{\frac{ml}{\lambda}}.$$

t_0 が輪ゴムをどれだけ伸ばしたかによらないことに注意しよう。これは単振動に典型的な性質であり、4 分の 1 周期は振幅（amplitude）によらず一定である。

検算

- **単位：**λ は力であるから、ml/λ の単位は $\mathrm{kg\,m/N} = \mathrm{s}^2$ であり、t_0 は時間の単位をもつ。
- **極限の場合：**$\alpha \to \frac{\pi}{2}$ とすると円錐は平面につぶれ、輪ゴムは中心に向かって直接縮み、$t_0 = \frac{1}{4}\sqrt{ml/\lambda}$ となる。$\alpha \to 0$ とすると円錐は円柱となり、張力は面に沿った成分をもたなくなるので、当然 $t_0 \to \infty$ となる。
- **数値計算：**$\alpha = 30°$、$m = 1$、$l = 1$、$\lambda = 4$ のとき、公式から $t_0 = \frac{1}{4}$ が得られる。要素の運動方程式を数値的に時間発展させると（また、細かい多角形で近似した輪ゴムにはたらく張力の合力を 3 次元で直接計算しても）、パラメータを無作為に選んだ場合について、因子 $\sin\alpha$ と t_0 の両方が小数点以下何桁にもわたって再現される。

よくある間違い

- 円錐からの抗力を忘れ、半径 r について $\frac{m\,\delta\theta}{2\pi}\ddot{r} = -T\,\delta\theta$ と書いてしまう。これでは因子 $\sin^2\alpha$ がまるごと抜け落ちる。

- 要素の質量として $\frac{m\,\delta\theta}{2\pi}$ ではなく m を用いてしまう。
- t_0 として 1 周期全体、あるいは半周期を答えてしまう。輪ゴムは最大の伸びの状態から始まるので、自然長（natural length）に達するのは 4 分の 1 周期後である。

STEP のその先へ

与えられた力 $T\,\delta\theta$ は、一般的な事実の微小角版である。すなわち、張力 T がかかり曲率半径（radius of curvature）ρ で曲がっているひもは、単位長さあたり T/ρ の力で横向きに押す。同じ考え方を曲面に拡張すると、シャボン玉の内部の圧力が外部の圧力より大きい理由が説明できる（ラプラス（Laplace）の法則（Laplace's law））。曲面上に拘束された運動は、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）を用いると最もすっきりと扱える。そこでは抗力をまったく登場させる必要がない。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）には、張力のかかったひもや拘束運動に関する問題が数多く収められている。

解答例

STEP II 1987、第 15 問

確率・統計 ・ 幾何的確率

STEP II 1987、問 15

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/87-s2-q15

鍵となる考え方

位置のことは忘れて、**時刻**で考える。それぞれの車両は踏切をある時間区間（interval）のあいだ占有しており、衝突（collision）が起こるのはちょうど二つの区間が重なるときである。この重なりを二つの不等式で書き表すと、(u_1, u_2) 平面における衝突領域は、原点を通る 2 直線にはさまれたくさび形（wedge）になる。u_1, u_2 が $(0, V)$ 上の一様分布（uniform distribution）に従うとき、点 (u_1, u_2) は正方形上に一様に分布するので、求める確率（probability）は正方形のうちくさび形の内部にある部分の割合にほかならない。そして三つの場合分けは、2 直線が正方形のどこから出ていくかに対応している。

解答

衝突の条件

列車とトラックは、それぞれ一定の速さ $u_1, u_2 > 0$ で、1 点で交わる直線道路上を進むものとしてモデル化する（踏切の幅は無視するか、車両の長さに含めて考える）。衝突が起こるのは、それぞれの車両のどこかの部分が同じ瞬間に踏切上にあるとき、かつそのときに限る。

列車の先頭は時刻 d_1/u_1 に踏切に達し、最後尾は時刻 $(d_1 + l_1)/u_1$ に通過するので、列車が踏切を占有するのは

$$\frac{d_1}{u_1} < t < \frac{d_1 + l_1}{u_1}.$$

のときである。同様に、トラックが踏切を占有するのは $d_2/u_2 < t < (d_2 + l_2)/u_2$ のときである。二つの開区間 (a_1, b_1) と (a_2, b_2) が重なるのは、ちょうど一方が他方の終

わる前に始まるとき、すなわち $a_1 < b_2$ かつ $a_2 < b_1$ のときである。よって衝突が起こるのは

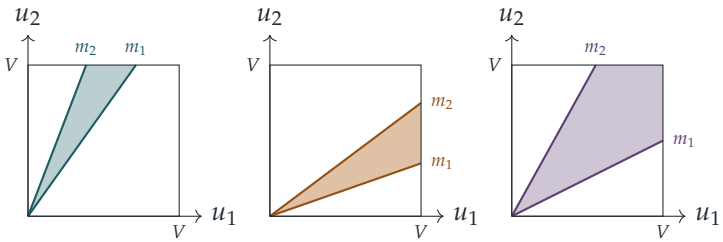
$$\frac{d_1}{u_1} < \frac{d_2 + l_2}{u_2} \quad \text{かつ} \quad \frac{d_2}{u_2} < \frac{d_1 + l_1}{u_1}.$$

のとき、かつそのときに限る。両辺に正の量 $u_1 u_2$ を掛けて整理すると、これは

$$\boxed{\frac{d_2}{d_1 + l_1} u_1 \ < \ u_2 \ < \ \frac{d_2 + l_2}{d_1} u_1.}$$

となる。（不等式が等号で成り立つ場合、車両は先頭と最後尾が接するだけである。これは確率 0 の事象なので、衝突に数えるかどうかは問題にならない。）

$m_1 = \dfrac{d_2}{d_1 + l_1}$、$m_2 = \dfrac{d_2 + l_2}{d_1}$ とおく。$d_2 < d_2 + l_2$ かつ $d_1 + l_1 > d_1$ であるから $m_1 < m_2$ であり、衝突領域は第 1 象限において直線 $y = m_1 x$ と $y = m_2 x$ にはさまれたくさび形である。下の図は、次に必要となる正方形 $0 < x, y < V$ の内部で、この領域を網かけで示したものである。



(A) $d_1 + l_1 \le d_2$　(B) $d_2 + l_2 \le d_1$　(C) それ以外

列車の最後尾がトラックの先頭より近い場合の確率

u_1 と u_2 は独立 (independent) で、それぞれ $(0, V)$ 上の一様分布に従うので、組 (u_1, u_2) は正方形 $(0, V)^2$ 上で一定の同時確率密度（joint density）$1/V^2$ をもつ。よって衝突の確率は

$$\frac{\text{正方形内のくさび形の面積}}{V^2}.$$

である。

考えてみよう 2 直線は、それぞれ正方形のどの辺から出ていくか。

直線 $y = mx$ は、$m \ge 1$ ならば上の辺から（点 $(V/m,\ V)$ で）、$m \le 1$ ならば右の辺から（点 $(V,\ mV)$ で）正方形を出る。この場合は $d_1 + l_1 < d_2$ であるから $m_1 = d_2/(d_1 + l_1) > 1$ であり、したがって $m_2 > m_1 > 1$ も成り立つ。図 (A) のように、2 直線はどちらも上の辺から出ていく。

このとき正方形内のくさび形は、$(0,0)$、$(V/m_2, V)$、$(V/m_1, V)$ を頂点とする三角形

である。上の辺に沿った底辺の長さは $V/m_1 - V/m_2$、高さは V であるから、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{衝突}) &= \frac{1}{V^2}\cdot\frac{1}{2}V\left(\frac{V}{m_1}-\frac{V}{m_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{d_1+l_1}{d_2}-\frac{d_1}{d_2+l_2}\right)\\ &= \frac{(d_1+l_1)(d_2+l_2)-d_1d_2}{2d_2(d_2+l_2)} = \frac{l_1l_2+l_2d_1+l_1d_2}{2d_2(l_2+d_2)},\end{aligned}$$

となる。ここで d_1d_2 の項は打ち消し合う。これが求める結果である。

残りの二つの場合

トラックの最後尾が列車の先頭より近い場合、 $d_2+l_2 < d_1$。このとき $m_2 = (d_2+l_2)/d_1 < 1$ であるから $m_1 < m_2 < 1$ であり、図 (B) のように 2 直線はどちらも右の辺から出ていく。くさび形は $(0,0)$、(V, m_1V)、(V, m_2V) を頂点とする三角形で、辺 $x = V$ 上の底辺は $(m_2 - m_1)V$、高さは V である。よって

$$\mathrm{P}(\text{衝突}) = \frac{1}{2}(m_2-m_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{d_2+l_2}{d_1}-\frac{d_2}{d_1+l_1}\right) = \frac{l_1l_2+l_1d_2+l_2d_1}{2d_1(l_1+d_1)}.$$

これは最初の答えで列車とトラックの役割を入れ替えた（$l_1 \leftrightarrow l_2$、$d_1 \leftrightarrow d_2$）ものであり、そうなるべきである。車両を入れ替えることは、図を直線 $y = x$ に関して折り返すことにあたるからである。

どちらの車両も他方より完全に手前にはない場合、 $d_2 \le d_1 + l_1$ **かつ** $d_1 \le d_2 + l_2$。このとき $m_1 \le 1 \le m_2$ であるから、図 (C) のように直線 $y = m_1x$ は右の辺から、$y = m_2x$ は上の辺から出ていく。正方形から衝突しない二つの三角形を引くのがいちばん簡単である。$y = m_1x$ の下側の三角形の面積は $\frac{1}{2}V\cdot m_1V$、$y = m_2x$ の左側（この直線と u_2 軸の間）の三角形の面積は $\frac{1}{2}V\cdot V/m_2$ である。したがって

$$\mathrm{P}(\text{衝突}) = 1 - \frac{m_1}{2} - \frac{1}{2m_2} = 1 - \frac{d_2}{2(d_1+l_1)} - \frac{d_1}{2(d_2+l_2)}.$$

場合の境目では答えが一致する。$d_2 = d_1 + l_1$（すなわち $m_1 = 1$）では、1 番目と 3 番目の式はどちらも $\frac{1}{2} - \frac{d_1}{2(d_2+l_2)}$ を与え、$d_1 = d_2 + l_2$ でも同様である。どの確率も V によらないことに注意しよう。両方の速さを同じ倍率で変えても、車両が衝突するかどうかは変わらないからである。

検算

- $l_1 = 1$、$l_2 = 2$、$d_1 = 1$、$d_2 = 5$（場合 A）のとき、公式は $\frac{9}{70} \approx 0.1286$ を与える。速さの組を無作為に 4×10^5 組生成したシミュレーションでは 0.1283 となった。場合 B と場合 C のシミュレーション（たとえば $l_1 = l_2 = 1$、$d_1 = 1$、$d_2 = 1.5$ で、値は 0.425）も誤差 0.002 以内で一致した。

- 場合 A で $l_1, l_2 \to 0$ とすると確率は 0 になる。2 点が踏切で出会うのは、ちょうど $u_2/u_1 = d_2/d_1$ のときに限るからである。
- 場合 C で $d_1 = d_2$ とし車両を非常に長くすると、$m_1 \to 0$、$m_2 \to \infty$ となるので確率は 1 に近づく。これは妥当である。

よくある間違い

- 「トラックが踏切を通過し終える前に列車が到着する」のように、不等式を一つしか書かないこと。二つの区間が重なるには**両方**の条件が必要である。
- 領域が四角形である場合 C で、三角形の公式を使ってしまうこと。まず、それぞれの直線が正方形のどこから出ていくかを確かめよう。

STEP のその先へ

ここで用いた方法、すなわち独立な一様確率変数に関する確率を面積に置き換える方法は幾何的確率（geometric probability）と呼ばれ、$\mathrm{P}((X, Y) \in A)$ を同時確率密度の重積分（double integral）として計算する最も簡単な例である。同じ考え方は、ビュフォン（Buffon）の針の問題や、無作為な時刻に到着する 2 人の「出会いの問題」といった古典的な問題の根底にもある。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、同時確率密度とこのような使い方が展開されている。

解答例

STEP II 1987、第 16 問

確率・統計 ・ ベイズの定理

> **STEP II 1987、問 16**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q16

鍵となる考え方

これは最も素朴な形のベイズの定理（Bayes' theorem）である。2 人がともに「はい」と答える状況は 2 通りの経緯で生じうる。主張が正しく 2 人とも本当のことを言っている場合と、主張が誤りで 2 人とも嘘をついている場合である。それぞれの経緯に、その事前確率（prior probability）とその答えの組が得られる確率とを掛けて重みをつけ、全体のうち「正しい」経緯から来る割合がどれだけかを問う。後半も同じように進む。新しい点はただ一つ、友人たちの答えは A についてのみ何かを語っているので、3 つの可能性を A が冷蔵庫の中にあるかどうかで分類しなければならない、ということである。

解答

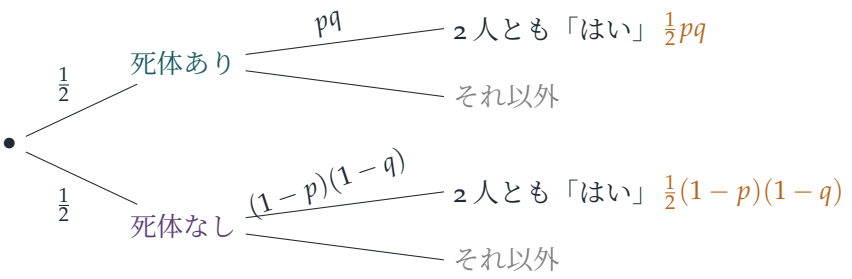
1 つ目の見積もり

冷蔵庫の中に死体があるという事象を F とし、P と Q の 2 人ともが死体があると言う事象を Y とする。今朝の時点では $\Pr(F) = \Pr(F') = \frac{1}{2}$ である。

各友人は「はい／いいえ」で答える質問に答えるものとしてモデル化する。本当のことを言うとは正しい答えを返すことであり、嘘をつくとは誤った答えを返すことである。友人が正直かどうかは冷蔵庫の中身によらず、P と Q は独立（independent）に振る舞う。したがって次が成り立つ。

- 死体がある場合、2 人とも「はい」と言うのはちょうど 2 人とも本当のことを言うときであるから、$\Pr(Y \mid F) = pq$ である。

▶ 死体がない場合、2 人とも「はい」と言うのはちょうど 2 人とも嘘をつくときであるから、$\Pr(Y \mid F') = (1-p)(1-q)$ である。



条件付き確率（conditional probability）の定義（ベイズの定理）により、

$$\Pr(F \mid Y) = \frac{\Pr(F)\Pr(Y \mid F)}{\Pr(F)\Pr(Y \mid F) + \Pr(F')\Pr(Y \mid F')} = \frac{\frac{1}{2}pq}{\frac{1}{2}pq + \frac{1}{2}(1-p)(1-q)}$$
$$= \frac{pq}{pq + 1 - p - q + pq} = \frac{pq}{1 - p - q + 2pq},$$

となり、これが求める見積もりである。事前確率が五分五分であったため、$\frac{1}{2}$ の因子は約分されて消える。

考えてみよう 答えが単に pq、すなわち 2 人とも本当のことを言っている確率にならないのはなぜか。

すでに分かっていることがあるからである。すなわち、2 人の答えは一致した。2 人のうちちょうど 1 人が嘘をつく結果は、一方が「はい」、他方が「いいえ」となるので、もはや起こりえない。残ったものの上で確率を比例配分し直さなければならない。生き残った 2 つの経緯のうち、「2 人とも正直」の重みは pq、「2 人とも嘘」の重みは $(1-p)(1-q)$ である。これらの和で割ることが、まさにその配分し直しにあたる。（事前確率の $\frac{1}{2}$ も役割を果たしている。事前確率が偏っていれば、約分されて消えることはない。）

2 つ目の見積もり

今度は死体が確実にある。同様に確からしい 3 つの可能性は、それぞれ事前確率 $\frac{1}{3}$ をもち、

$$A \text{ のみ}, \qquad B \text{ のみ}, \qquad A \text{ と } B \text{ の両方}.$$

である。2 人の友人がともに A が冷蔵庫の中にあると言う事象を Y_A とする。前と同じモデルにより、2 人の答えは A があるかどうかだけで決まる。

▶「A のみ」と「両方」の場合は A が冷蔵庫の中にあるので、どちらでも $\Pr(Y_A) = pq$ である。

▶「B のみ」の場合は A はないので、$\Pr(Y_A) = (1-p)(1-q)$ である。

よって

$$\begin{aligned}\Pr(\text{両方} \mid Y_A) &= \frac{\frac{1}{3}pq}{\frac{1}{3}pq + \frac{1}{3}(1-p)(1-q) + \frac{1}{3}pq} \\ &= \frac{pq}{2pq + 1 - p - q + pq} = \frac{pq}{1 - p - q + 3pq}.\end{aligned}$$

2 人の報告は B について直接には何も教えてくれないことに注意しよう。その効果は A がある確率を変えることだけである。前半の結果（事前確率を $\frac{1}{2}$ の代わりに $\frac{2}{3}$ としたもの）により、その確率は $2pq/(1-p-q+3pq)$ となる。A があるという条件のもとでは「A のみ」と「両方」は依然として同様に確からしいので、これを半分にする。こうしても同じ答えが得られる。

検算

- $p = q = \frac{1}{2}$ ならば友人たちは何の役にも立たず、答えは事前確率に戻る：$\frac{1}{4}/\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ および $\frac{1}{4}/\frac{3}{4} = \frac{1}{3}$。
- $p = q = 1$ ならば友人たちは決して誤らず、答えは 1（死体はある）と $\frac{1}{2}$（A はあるので、B もあるかどうかは五分五分）になる。
- $p = q = \frac{3}{4}$ のとき、答えは $\frac{9}{10}$ と $\frac{9}{19}$ である。状態と正直さのあらゆる組合せを厳密に数え上げた結果は、ランダムに選んだ 200 組の (p, q) について一致する。$p = 0.7$、$q = 0.6$ として 4×10^5 回の試行のシミュレーションを行うと、後半について 0.4375 が得られ、$\frac{0.42}{0.96} = 0.4375$ と一致した。

よくある間違い

- 「2 人とも嘘」の場合にも 2 つの「はい」が生じることを忘れて、pq と答えてしまう。
- 後半で、分子に「両方」の場合だけを置くのはよいが、分母から「A のみ」の場合を落としてしまう。どちらの場合も A があることと矛盾しない。

STEP のその先へ

これはベイズ更新（Bayesian updating）である。事前の信念に証拠の**尤度**（likelihood）を掛け、それから正規化（normalise）する。これをすっきり書くにはオッズ（odds）の形を用いるとよい。事後オッズ（posterior odds）は、事前オッズに尤度比（likelihood ratio）$\frac{pq}{(1-p)(1-q)}$ を掛けたものに等しい。こう書くと、独立な証人たちはそれぞれの比

を単に掛け合わせればよいことが明らかになる。同じ計算が、医療検査、迷惑メールフィルタ、法廷での証拠の組み合わせの根底にある。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）には条件付き確率についての優れた章があり、まさにこの種のパズルが数多く収められている。

解答例

STEP III 1987、第 1 問

純粋数学 • 階乗の整除性

> **STEP III 1987、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q1

鍵となる考え方

階乗（factorial）$(n-1)! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1)$ には、n より小さいすべての自然数が含まれている。n が n より小さい 2 つの**相異なる**数の積として表せるならば、その 2 数はどちらも階乗の中に現れるので、n はそれを割り切る。したがって、この問題の本質は、どのような n がそのように分解**できない**かという点にある。素数（prime）が分解できないのは明らかであり、素数の平方についてはもう少し詳しく調べる必要がある。最初の十数個の値を手で試してみれば、答えはすぐに見えてくる。

解答

まず実験する

簡単な表を作ってみる価値がある。

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$(n-1)!$	1	1	2	6	24	120	720	5040
$n \mid (n-1)!$?	はい	いいえ	いいえ	いいえ	いいえ	はい	いいえ	はい

割り切れないのは $2, 3, 4, 5, 7$ であり、これはここまでの素数と 4 である。以下、このパターンが続くことを証明する。

主張。 n が $(n-1)!$ を割り切らないのは、n が素数であるか $n = 4$ であるときであり、またそのときに限る。

$n = 1$

このとき $(n-1)! = 0! = 1$ であり、1 は 1 を割り切る。よって $n = 1$ は求める集合に含まれない。

$n = p$ が素数のとき

$(p-1)!$ の各因数 $1, 2, \ldots, p-1$ はいずれも p より小さい正の数であるから、どれも p で割り切れない。p は素数なので、p が積を割り切るならば、因数のいずれかを割り切らなければならない（ユークリッド（Euclid）の補題（Euclid's lemma））。したがって $p \nmid (p-1)!$ であり、すべての素数は求める集合に含まれる。

n が合成数のとき

n の最小の素因数を p とし、$n = pm$ と書く。n は合成数（composite number）であるから $m > 1$ であり、m の素因数はどれも p 以上なので $m \geq p$ である。2 つの場合に分ける。

場合 1：$m > p$ のとき。 このとき $1 < p < m < n$ であるから、p と m は $1, 2, \ldots, n-1$ の中の 2 つの相異なる数である。よって、それらの積 $pm = n$ は $(n-1)!$ を割り切る。

場合 2：$m = p$、すなわち $n = p^2$ のとき。

> **考えてみよう** 場合 1 の議論がここで使えないのはなぜか。また、何で置き換えればよいか。

因数 p は $1, \ldots, n-1$ の中に一度しか現れないので、2 回使うことはできない。そこで代わりに p と $2p$ を用いる。$p \geq 3$ ならば

$$2p < p \cdot p = n,$$

であるから、p と $2p$ は $1, 2, \ldots, n-1$ の中の 2 つの相異なる数である。したがって、それらの積 $2p^2 = 2n$ は $(n-1)!$ を割り切り、よって n も $(n-1)!$ を割り切る。

$p = 2$ のときは、$2p = 4 = n$ が列に含まれないので、この議論は成り立たない。実際、$n = 4$ のとき $3! = 6$ であり、$4 \nmid 6$ である。よって 4 は求める集合に含まれる。

結論

4 以外のすべての合成数 n は $(n-1)!$ を割り切り、$n = 1$ も同様である。したがって、求める集合は

$$\{ n : n \text{ は素数} \} \cup \{4\} = \{2, 3, 4, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}.$$

である。

検算

上の表は $n \le 8$ について主張と一致している。素数の平方も試してみよう。$n = 9$ のとき $8! = 40320 = 9 \times 4480$ であり、場合 2 の予測どおりである（因数 3 と 6 を用いる）。$n \le 2000$ のすべての n について $(n-1)! \bmod n$ を直接計算するコンピュータによる確認でも、主張の例外は見つからない。

よくある間違い

- $a \neq b$ を要求せずに「$a, b < n$ として $n = ab$ と書けば $ab \mid (n-1)!$」と論じること。この議論では $4 \mid 3!$ が誤って「証明」されてしまう。
- $n = 1$ を忘れること。$0! = 1$ であるから、$n = 1$ は集合に含まれない。
- 素数 p が $(p-1)!$ を割り切らない理由を「p が因数の 1 つではないから」とすること。本当の理由は、p が素数であり、どの因数も割り切らないことである。合成数は、因数の 1 つでなくても積を割り切ることがある。

STEP のその先へ

素数については、ウィルソンの定理（Wilson's theorem）と呼ばれる、より精密な事実がある。すなわち $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ である。この問題と合わせると、（非常に遅い）素数判定法（primality test）が得られる。すなわち、$n > 1$ が素数であるのは $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$ であるとき、またそのときに限る。ウィルソンの定理は、各数を p を法とする逆元（inverse）と組にすることで証明される。これは p を法とする整数の群構造（group structure）に初めて触れる機会となる。Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、この内容を見事に解説している。

解答例

STEP III 1987、第 2 問

純粋数学 ・ 三角関数の漸化式（積分）

> **STEP III 1987、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q2

鍵となる考え方

漸化式（reduction formula）は、「境界項（boundary term）」$\cos^m x \cos nx$ を微分し、加法定理（compound-angle identity）を用いて $\sin x \cos nx$ を $\sin(n-1)x$ を含む式に書き換えることで得られる。漸化式が得られれば、どちらの小問もこの境界項を積分の端点で評価する問題になる。0 と π では、偶奇（parity）に応じて境界項が打ち消し合うか残るかが決まる。$\frac{\pi}{2}$ では、因子 $\cos^m x$ によって境界項は消える。

（問題文に印刷された式では $-\cos^m \cos nx$ となっているが、正しくは $-\cos^m x \cos nx$ である。）

解答

漸化式

$\cos^m x \cos nx$ を積の微分法（product rule）で微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\cos^m x \cos nx\right) = -m\cos^{m-1} x \, \sin x \cos nx \; - \; n\cos^m x \sin nx.$$

第 1 項はまだ望む形になっていない。加法定理

$$\sin(n-1)x = \sin nx \cos x - \cos nx \sin x \quad \text{より} \quad \sin x \cos nx = \cos x \sin nx - \sin(n-1)x.$$

これを代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\cos^m x \cos nx\right) &= -m\cos^m x \sin nx + m\cos^{m-1} x \sin(n-1)x - n\cos^m x \sin nx \\ &= -(m+n)\cos^m x \sin nx + m\cos^{m-1} x \sin(n-1)x.\end{aligned}$$

両辺を積分すると（$m-1$、$n-1$ が負でないために $m \geq 1$ かつ $n \geq 1$ が必要である）、

$$\cos^m x \cos nx = -(m+n)I_{m,n} + mI_{m-1,n-1},$$

すなわち

$$(m+n)I_{m,n} = -\cos^m x \cos nx + mI_{m-1,n-1},$$

となり、示すべき式が得られた（通常どおり、任意定数は不定積分の中に含めている）。

小問 (i)

$J_{m,n} = \int_0^\pi \cos^m x \sin nx \, \mathrm{d}x$ とおく。$m, n \geq 1$ のとき、この公式を 0 から π まで適用し、$\cos^m \pi \cos n\pi = (-1)^m(-1)^n$ を用いると、

$$(m+n)J_{m,n} = 1 - (-1)^{m+n} + mJ_{m-1,n-1}.$$

m と n の偶奇が一致すれば $m+n$ は偶数となり、境界項は消えて

$$J_{m,n} = \frac{m}{m+n} J_{m-1,n-1}.$$

さらに $m-1$ と $n-1$ も再び偶奇が一致するので、この操作を続けることができる。

考えてみよう この簡約の連鎖はどこで止まるか。また、そこでの値がなぜゼロになるのか？

各ステップで両方の添字が 1 ずつ減るので、$\min(m,n)$ 回のステップの後には一方の添字が 0 となり、もう一方は偶奇が同じであるから偶数である。したがって、すべての偶数 $k \geq 0$ に対して $J_{k,0} = 0$ かつ $J_{0,k} = 0$ を示せば十分である。

- $J_{k,0} = \int_0^\pi \cos^k x \sin 0 \, \mathrm{d}x = 0$ である。被積分関数が恒等的にゼロだからである。
- 偶数 $k \geq 2$ に対して、$J_{0,k} = \int_0^\pi \sin kx \, \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{k}\cos kx\right]_0^\pi = \frac{1}{k}\left(1-(-1)^k\right) = 0$ である。

よって、$\min(m,n)$ に関する数学的帰納法（induction）により、m, n がともに偶数またはともに奇数のとき $J_{m,n} = 0$ である。

別解： $x = \pi - t$ と置換すると、$\cos^m x$ は $(-1)^m \cos^m t$ に、$\sin nx$ は $-(-1)^n \sin nt$ に移るので、$J_{m,n} = (-1)^{m+n+1} J_{m,n}$ となる。したがって $m+n$ が偶数のとき $J_{m,n} = 0$ でなければならない。被積分関数は $x = \frac{\pi}{2}$ に関して反対称（antisymmetric）なのである。

小問 (ii)

余弦を導入するために $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ と書くと、

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \sin 3x \, \mathrm{d}x = K_{0,3} - K_{2,3}, \qquad K_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin nx \, \mathrm{d}x.$$

$\cos\frac{\pi}{2} = 0$ であるから、$m \geq 1$ のとき境界項は $-\left[\cos^m x \cos nx\right]_0^{\pi/2} = 0 - (-1) = 1$ となる。よって

$$(m+n)K_{m,n} = 1 + mK_{m-1,n-1} \qquad (m, n \geq 1).$$

$K_{0,1} = \int_0^{\pi/2} \sin x \, \mathrm{d}x = 1$ から始めると、

$$3K_{1,2} = 1 + K_{0,1} = 2, \qquad K_{1,2} = \tfrac{2}{3},$$
$$5K_{2,3} = 1 + 2K_{1,2} = \tfrac{7}{3}, \qquad K_{2,3} = \tfrac{7}{15}.$$

また、$\cos\frac{3\pi}{2} = 0$ より $K_{0,3} = \left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$ である。したがって

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \sin 3x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{7}{15} = -\frac{2}{15}.$$

検算

小問 (ii) は積和の公式（product-to-sum formulae）を用いて直接計算することもできる。$\sin^2 x \sin 3x = \frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{4}(\sin 5x + \sin x)$ であり、これを $[0, \frac{\pi}{2}]$ で積分すると $\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5} + 1\right) = -\frac{2}{15}$ となる。負の符号はもっともらしい。$\sin 3x < 0$ となるのは $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ であり、これはちょうど $\sin^2 x$ が最も大きくなる区間だからである。シンプソンの公式（Simpson's rule）による数値計算では -0.133333 が得られ、さらに多くの m, n について漸化式と小問 (i) を数値的に確かめることができる。

よくある間違い

- (ii) で $x = \frac{\pi}{2} - t$ と置換しようとすること。$\sin^2 x$ は $\cos^2 t$ になるが、$\sin 3x$ は $-\cos 3t$ になるので、積分は $I_{m,n}$ の形にならない。
- 漸化式が $m, n \geq 1$ のときにしか使えないことを忘れること。そのため、(i) の連鎖には、添字の一方が 0 に等しい場合の初期段階を別に用意する必要がある。

STEP のその先へ

このような漸化式は、より大きな物語の始まりにすぎない。三角関数の積を 1 周期にわたって積分したものは、フーリエ級数（Fourier series）の背後にある直交関係（orthogonality relations）であり、そこでは (i) のような対称性の議論によって、どの係数が消えるかが一目でわかる。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）には、フーリエ級数とその微分方程式の解法への応用について、読みやすい入門が収められている。

解答例

STEP III 1987、第 3 問

純粋数学 ・ 偏角とマチンの公式

> **STEP III 1987、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q3

この問題は、*Beyond STEP* の第 5.1 節「**マチンの公式**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch05/machin.html

鍵となる考え方

どちらの小問も、複素数（complex number）の極形式（polar form）にもとづいている。(i) では、点 $(|x|, |y|)$ は原点から距離 $|z|$ の位置にあるので、$|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha$ は $|z|$ にコサインを掛けたものになる。(ii) では、複素数の積をとると偏角（argument）は足し合わされる。したがって、$5 - \mathrm{i}$ や $1 + \mathrm{i}$ のような数の積がほとんど実数になることがわかれば、その偏角から逆正接（inverse tangent）の間の恒等式が得られる。本当に注意が必要なのは、偏角に 2π の不定性があることだけである。

解答

小問 (i)

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおく。$r = 0$ ならば $x = y = 0$ であり、どの項も 0 になるので、$r > 0$ と仮定する。

右側の不等式。 両辺とも非負であるから、2 乗どうしを比べれば十分である：

$$(|x| + |y|)^2 = x^2 + y^2 + 2|x||y| \geq x^2 + y^2 = |z|^2,$$

これは $|x||y| \geq 0$ による。非負の平方根をとれば $|z| \leq |x| + |y|$ が得られ、等号が成り立つのはちょうど $x = 0$ または $y = 0$ のときである。

左側の不等式。 点 $(|x|, |y|)$ は境界を含む第 1 象限にあり、原点からの距離は r である

から、ある角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ が存在して

$$|x| = r\cos\varphi, \qquad |y| = r\sin\varphi.$$

となる。すると加法定理（compound-angle formula）により

$$|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha = r(\cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha) = r\cos(\alpha - \varphi) \le r = |z|,$$

となる。任意の実数 α に対して $\cos(\alpha - \varphi) \le 1$ だからである。以上で両方の不等式が証明された。左側の等号は $\alpha = \varphi + 2k\pi$ のとき、すなわち $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ が $(|x|, |y|)$ と同じ向きを指すときに成り立つ。

（左側の不等式の別の示し方：コーシー・シュワルツの不等式（Cauchy–Schwarz inequality）により、$|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha \le \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = |z|$ である。）

小問 (ii)：第 1 の公式

順に展開する：

$$\begin{aligned}(5-\mathrm{i})^2 &= 25 - 10\mathrm{i} - 1 = 24 - 10\mathrm{i},\\ (5-\mathrm{i})^4 &= (24-10\mathrm{i})^2 = 576 - 480\mathrm{i} - 100 = 476 - 480\mathrm{i},\\ (5-\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i}) &= 476 + 476\mathrm{i} - 480\mathrm{i} + 480 = 956 - 4\mathrm{i} = 4(239 - \mathrm{i}).\end{aligned}$$

次に偏角を比べる。$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{5}$ とおく。$5-\mathrm{i}$ は第 4 象限にあるので偏角は $-\theta$ であり、$1+\mathrm{i}$ の偏角は $\frac{\pi}{4}$ である。同様に、$4(239-\mathrm{i})$ の偏角は $-\tan^{-1}\frac{1}{239}$ である。積をとると偏角は 2π の整数倍の差を除いて足し合わされるので、

$$\frac{\pi}{4} - 4\theta = -\tan^{-1}\frac{1}{239} + 2k\pi \quad \text{ある整数} k.$$

が成り立つ。

考えてみよう $k = 0$ であることはどうしてわかるだろうか？

両辺の範囲を評価する。$0 < t < \frac{\pi}{2}$ のとき $\tan t > t$ であるから $0 < \theta < \frac{1}{5}$ であり、したがって $\frac{\pi}{4} - 4\theta$ は $\frac{\pi}{4} - \frac{4}{5} > -1$ と $\frac{\pi}{4} < 1$ の間にある。また $-\tan^{-1}\frac{1}{239}$ は -1 と 0 の間にある。$(-1, 1)$ に属する 2 つの数の差は $2 < 2\pi$ より小さいので、$2k\pi = 0$、すなわち $k = 0$ である。整理すると

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)：第2の公式

同じ考え方で、偏角が

$$\frac{\pi}{4} - 3\tan^{-1}\frac{1}{4} - \tan^{-1}\frac{1}{20} - \tan^{-1}\frac{1}{1985},$$

となる積、すなわち $(4-\mathrm{i})^3(20-\mathrm{i})(1985-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$ を考え、これが正の実数になることを期待する。因数 $1985-\mathrm{i}$ は最後に回す：

$$\begin{aligned}(4-\mathrm{i})^2 &= 16-8\mathrm{i}-1 = 15-8\mathrm{i},\\ (4-\mathrm{i})^3 &= (15-8\mathrm{i})(4-\mathrm{i}) = 60-15\mathrm{i}-32\mathrm{i}-8 = 52-47\mathrm{i},\\ (4-\mathrm{i})^3(20-\mathrm{i}) &= 1040-52\mathrm{i}-940\mathrm{i}-47 = 993-992\mathrm{i},\\ (4-\mathrm{i})^3(20-\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) &= 993+993\mathrm{i}-992\mathrm{i}+992 = 1985+\mathrm{i}.\end{aligned}$$

したがって、ここまでの積は $1985+\mathrm{i}$ であり、最後の因数 $1985-\mathrm{i}$ はその共役複素数（conjugate）である。よって積全体は 1985^2+1 となり、正の実数である。同じことを、最後の因数を除いて偏角で比べると次のようになる：

$$\frac{\pi}{4} - 3\varphi - \psi = \tan^{-1}\frac{1}{1985} + 2k\pi, \qquad \varphi = \tan^{-1}\frac{1}{4},\ \psi = \tan^{-1}\frac{1}{20}.$$

ここでも $k=0$ である。$0<\varphi<\frac{1}{4}$ かつ $0<\psi<\frac{1}{20}$ であるから、左辺は $\frac{\pi}{4}-\frac{4}{5}>-1$ と $\frac{\pi}{4}<1$ の間にあり、一方で右辺から $2k\pi$ を引いたものは $(0,1)$ に属する。整理すると

$$\frac{\pi}{4} = 3\tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{1}{20} + \tan^{-1}\frac{1}{1985}.$$

を得る。

検算

- 絶対値（modulus）は展開の検算に役立つ。$|5-\mathrm{i}|^8\,|1+\mathrm{i}|^2 = 26^4\cdot 2 = 913\,952$ であり、$956^2+4^2 = 913\,952$ も成り立つ。同様に $17^3\cdot 401\cdot 2 = 3\,940\,226 = 1985^2+1$ である。
- 数値的には、$4\tan^{-1}\frac{1}{5}\approx 0.789582$ であり、これから $\tan^{-1}\frac{1}{239}\approx 0.004184$ を引くと $0.785398\approx\frac{\pi}{4}$ となる。また $3\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{20}\approx 0.784894$ であり、これに $\tan^{-1}\frac{1}{1985}\approx 0.000504$ を加えるとやはり $\frac{\pi}{4}$ となる。
- (i) で $z=3-4\mathrm{i}$ を試してみよう。不等式は $3\cos\alpha+4\sin\alpha\le 5\le 7$ となり、$3\cos\alpha+4\sin\alpha = 5\cos(\alpha-\varphi)$ は $\tan\alpha=\frac{4}{3}$ のとき 5 に達する。

よくある間違い

- $\arg(zw) = \arg z + \arg w$ を厳密な等式として書き、2π の整数倍を確認しないこと。最後の等式を正しいものにしているのは、逆正接の値の範囲の評価である。
- $5 - \mathrm{i}$ の代わりに $5 + \mathrm{i}$ を使うこと。このとき $(5+\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i}) = -4 + 956\mathrm{i}$ となり、ほとんど実数ではなく、ほとんど純虚数になってしまう。符号は、積がほとんど実数になるように選ばなければならない。
- (i) で α が任意であること、したがって $\cos\alpha$ や $\sin\alpha$ が負になりうることを忘れること。コサインの形にすれば、すべての α を一度に扱える。

STEP のその先へ

第 1 の公式はマチン（Machin）の公式（1706 年）である。小さな x に対して速く収束（converge）する級数（series）$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ と組み合わせて、π を手計算で多くの桁まで求めるのに使われた。このような公式を見つけることは、ガウス整数（Gaussian integers）$a + b\mathrm{i}$ における因数分解の問題であり、そこでは $1+\mathrm{i}$、$5 \pm \mathrm{i}$、$4 \pm \mathrm{i}$ が素数（prime）のようにふるまう。これは代数的整数論（algebraic number theory）への最初の入口である。Davenport の *The Higher Arithmetic*（高等算術）は 2 つの平方数の和とガウス整数を扱っており、Needham の *Visual Complex Analysis*（ビジュアル複素解析）は複素数の掛け算の幾何学的な意味を示している。

解答例

STEP III 1987、第 4 問

純粋数学 • 回転体の体積

STEP III 1987、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

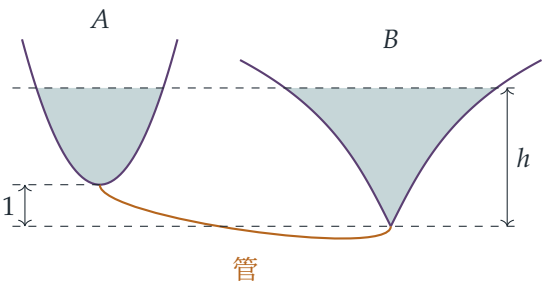
step.maths.org/questions/87-s3-q4

鍵となる考え方

水は一方の漏斗（funnel）からもう一方へ移るだけなので、その体積は保存される（conserved）。どちらの漏斗も y 軸のまわりの回転体（solid of revolution）なので、深さ d までの水の体積は $\int_0^d \pi x^2 \, \mathrm{d}y$ であり、ここで x^2 は y で表しておく。両方の体積を深さの関数として求めてしまえば、残る注意点は二つの異なる基準の高さだけである。すなわち、A と B における深さは 1 単位だけ異なる。

解答

管の体積は無視できるものとし、問題文の二つ目の「閉じる」は「開く」と読み替える（そうでなければ水は移動できない）。y は各漏斗の底から上向きに測る。



深さの関数としての体積

A では曲線は $y = x^2$ なので、高さ y における水平断面は面積 $\pi x^2 = \pi y$ の円板である。A における深さ d の水の体積は

$$V_A(d) = \int_0^d \pi y \, \mathrm{d}y = \frac{\pi d^2}{2}.$$

である。B では、曲線 $y = 2\sinh^{-1} x$（ただし $x > 0$）を逆に解くと $x = \sinh \frac{y}{2}$ となる。$\sinh^2 \frac{y}{2} = \frac{1}{2}(\cosh y - 1)$ を用いると、B における深さ d の水の体積は

$$V_B(d) = \int_0^d \pi \sinh^2 \frac{y}{2} \, \mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} \int_0^d (\cosh y - 1) \, \mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} (\sinh d - d).$$

である。

水の保存

最初、A には深さ 4 の水が入っており、B は空なので、全体積は

$$V_A(4) = \frac{16\pi}{2} = 8\pi.$$

である。最後には、両方の水面が B の底から高さ h のところにある。したがって B における深さは h に等しい。A の底は B の底より 1 単位高いので、A における深さは $h - 1$ である。

考えてみよう そもそも、なぜ二つの水面は同じ高さに落ち着くのだろうか？

二つの漏斗と管は、静止した一続きの水を形づくっている。その圧力は高さのみに依存し、二つの自由表面はどちらも大気圧なので、両者は同じ高さにある。このことは問題文で与えられているが、二つの深さの差がちょうど底の高さの差に等しくなる理由はこれで説明される。

水は増えも減りもしないので、

$$\frac{\pi(h-1)^2}{2} + \frac{\pi}{2}(\sinh h - h) = 8\pi.$$

が成り立つ。$2/\pi$ を掛けて展開すると、

$$\begin{aligned}(h-1)^2 + \sinh h - h &= 16\\ h^2 - 2h + 1 + \sinh h - h &= 16\\ h^2 - 3h + \sinh h &= 15,\end{aligned}$$

となり、これが求める方程式である。

中段の式の左辺が意味のあるモデルとなるのは、A に実際に水が入っている範囲 $h \geq 1$ に限られる。この範囲ではその導関数（derivative）$2(h-1)+\cosh h - 1$ は正なので、方程式の該当する根はちょうど一つである。数値的には $h \approx 3.33$ であり、A の水は深さ 4 から約 2.33 まで下がる。

検算

- 二分法（bisection）により $h \approx 3.3272$ を得る。このとき $V_A(h-1)+V_B(h) \approx 25.1327$ となり、$8\pi \approx 25.1327$ と一致する。
- $\int_0^d \pi \sinh^2(y/2)\,\mathrm{d}y$ にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用した値は、いくつかの d の値について $\frac{\pi}{2}(\sinh d - d)$ と一致する（例えば $d = 1.7$ ではどちらの方法でも 1.48540 となる）。
- 妥当性：$h - 1 < 4$ なので、A の水位は下がっている。水が流れ出たのだから、当然そうでなければならない。

よくある間違い

- 両方の漏斗で深さ h を用いてしまい、A の底が 1 単位高いことを忘れる。この場合は代わりに $h^2 - h + \sinh h = 16$ が得られてしまう。
- $\pi x^2\,\mathrm{d}y$ ではなく $\pi y^2\,\mathrm{d}x$（x 軸のまわりの回転）を積分してしまう。
- $y = 2\sinh^{-1} x$ の逆を $x = 2\sinh y$ や $x = \frac{1}{2}\sinh y$ としてしまう。正しい逆関数は $x = \sinh\frac{y}{2}$ である。

STEP のその先へ

最後の方程式は多項式と双曲線関数（hyperbolic function）が混ざっているので、閉じた形の解（closed-form solution）をもたない。数値的に解くしかなく、上で述べた単調性の議論こそが、二分法やニュートン・ラフソン法（Newton–Raphson）のような方法で物理的に意味のある唯一の根が見つかることを保証している。大学 1 年の数値解析では、中間値の定理（intermediate value theorem）と収束の速さを用いてこのことを厳密に扱う。その背後にある解析学については、Abbott, *Understanding Analysis* を参照のこと。

解答例

STEP III 1987、第 5 問

純粋数学 ・ 合同算術による暗号

STEP III 1987、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/87-s3-q5

鍵となる考え方

この暗号は 2 つの独立したシフト暗号（shift cipher）からなる。偶数番目の位置に対するもの（鍵 n_0）と奇数番目の位置に対するもの（鍵 n_1）であり、どちらにもさらに j だけのずらしが加わっている。まず既知のずらし j を取り除く。すると残るのは、メッセージのそれぞれの半分が 1 つの未知の定数だけずらされたものである。法 50 でのずらしは全単射（bijection）なので、等しい数は等しいまま、異なる数は異なるままに保たれる。3 つある 43 が手がかりとなって n_0 が判明する。その後、法 50 での和をとることで n_1 が定まる。

解答

n_0 と n_1 は法 50 での値だけが意味をもつので、$0 \le n_0, n_1 \le 49$ とする。各 a_k は 0 以上 49 以下であるから、法 50 での剰余（residue）がわかれば a_k は一意に定まる。

既知のずらしを取り除く

偶数番目の位置について、$j = 1, \ldots, 6$ に対して $c_j = b_{2j} - j$ とおく。奇数番目の位置について、$j = 0, \ldots, 5$ に対して $d_j = b_{2j+1} - j$ とおく。このとき

$$a_{2j} \equiv c_j - n_0, \qquad a_{2j+1} \equiv d_j - n_1 \pmod{50}.$$

暗号化されたメッセージから次が得られる。

j	1	2	3	4	5	6
b_{2j}	27	36	35	40	37	48
c_j	26	34	32	36	32	42

j	0	1	2	3	4	5
b_{2j+1}	35	2	15	8	40	24
d_j	35	1	13	5	36	19

n_0 を求める

法 50 で一定の n を引く操作は一対一（one-to-one）である。したがって、偶奇が同じ 2 つの位置の a が等しいのは、対応する c（または d）が等しいとき、かつそのときに限る。

> **考えてみよう** 3 つの 43 はどの位置に入りうるか。

6 個の d_j はすべて異なるので、奇数番目の位置には 6 個の異なる数が入り、そのうち 43 は高々 1 個である。よって少なくとも 2 個の 43 は偶数番目の位置にある。c_j の中で重複しているのは 32 だけであり、それはちょうど 2 回（$j = 3, 5$）現れる。したがって偶数番目の位置にはちょうど 2 個の等しい数が入り、メッセージ中で 2 回以上現れる数は 43 だけなので、それらは 2 個の 43 でなければならない。ゆえに

$$32 - n_0 \equiv 43 \pmod{50} \quad \Longrightarrow \quad n_0 \equiv -11 \equiv 39 \pmod{50}.$$

すると $a_{2j} \equiv c_j - 39 \equiv c_j + 11$ であり、$42 + 11 = 53 \equiv 3$ であるから

$$(a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}, a_{12}) = (37, 45, 43, 47, 43, 3),$$

が得られる。6 個とも、当然そうあるべきとおり、メッセージ中に含まれている。

n_1 を求める

メッセージからこれら 6 個の数を取り除くと、奇数番目の位置の数

$$S = \{1, 7, 23, 24, 39, 43\},$$

が残る。よって $\{d_j - n_1\}$ は法 50 で S に一致しなければならない。

> **考えてみよう** 50 通りの値をすべて試さずに n_1 を求めるにはどうすればよいか。

両辺の総和をとる。2 つの集合が一致するなら、その和は法 50 で一致する。

$$\sum d_j - 6n_1 \equiv \sum_{s \in S} s \pmod{50}, \qquad \text{すなわち} \qquad 109 - 6n_1 \equiv 137.$$

よって $6n_1 \equiv -28 \equiv 22 \pmod{50}$ である。法も割り切る 2 で全体を割ると $3n_1 \equiv 11 \pmod{25}$ となる。$3 \times 17 = 51 \equiv 1$ であるから、$n_1 \equiv 11 \times 17 = 187 \equiv 12 \pmod{25}$ を得る。したがって $n_1 = 12$ または $n_1 = 37$ である。

和の条件は必要条件であるが十分条件ではないので、両方の値を確かめる。$n_1 = 37$ のとき $d_0 - 37 = -2 \equiv 48$ となり、これはメッセージに含まれないので $n_1 = 37$ は不

適である。$n_1 = 12$ のとき

$$(a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, a_{11}) \equiv (23,\ -11,\ 1,\ -7,\ 24,\ 7) \equiv (23,\ 39,\ 1,\ 43,\ 24,\ 7),$$

となり、これはちょうど S である。よって $n_1 = 12$ である。

メッセージ

2 つの半分を交互に並べると、元のメッセージは

$$23,\ 37,\ 39,\ 45,\ 1,\ 43,\ 43,\ 47,\ 24,\ 43,\ 7,\ 3,$$

であり、$n_0 \equiv 39$、$n_1 \equiv 12 \pmod{50}$ である。以上の議論から、この答えが唯一であることがわかる。n_0 は必然的に定まり、n_1 の 2 つの候補のうち条件を満たすのは 1 つだけだったからである。

検算

答えを再び暗号化してみる。たとえば $b_{12} \equiv a_{12} + 39 + 6 = 48$、$b_7 \equiv a_7 + 12 + 3 = 58 \equiv 8$ であり、どちらも正しい。コンピュータで 2500 通りの組 (n_0, n_1) をすべて試すと、与えられた数の集まりに復号される組はちょうど 1 つ $(39, 12)$ だけであり、それが上のメッセージを与えることが確かめられる。

よくある間違い

- 添字を取り違える。奇数番目の位置は b_1 から $j = 0$ で始まるが、偶数番目の位置は b_2 から $j = 1$ で始まる。
- $6n_1 \equiv 22 \pmod{50}$ を、6 が逆元をもつかのように 6 で割ってしまう。$\gcd(6, 50) = 2$ なので 6 は逆元をもたず、この合同式（congruence）は法 50 で 2 つの解をもつ。
- 条件を満たす n_1 の値を見つけただけで、他の値が条件を満たさないことを示さない。問題は方法の説明を求めているので、一意性には論証が必要である。

STEP のその先へ

これはカエサル暗号（Caesar cipher、シフト暗号）であり、ここでの解読法は頻度分析（frequency analysis）の小さな例である。ずらしの操作は、文字の重複のパターンを保つのである。大学の最初の講義では、$6n \equiv 22$ から 2 つの解を得る段階は、線形合同式（linear congruence）$ax \equiv b \pmod{m}$ の理論にあたる。この合同式は、$\gcd(a, m)$

が b を割り切るとき、かつそのときに限り解をもつ。アフィン暗号（affine cipher）$x \mapsto ax + b$ や、さらに進んだ RSA 暗号も同じ考え方の上に築かれている。Davenport の *The Higher Arithmetic*（高等整数論入門）は合同式を見事に解説している。

解答例

STEP III 1987、第 6 問

純粋数学 ・ 連立微分方程式

STEP III 1987、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/87-s3-q6

鍵となる考え方

連立された一階微分方程式（coupled first-order equations）の組は、一つの未知関数に関する一本の二階微分方程式（second-order equation）に直すのが最もよい。第 1 式から y を x と $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ で表すことができ、これを第 2 式に代入すると、x に関する強制振動（forced oscillator）の方程式が残る。そうすると、答えの性質全体は、その振動子の固有振動数（natural frequency）が外力 $2\cos t$ の振動数とどう比較されるかによって決まる。

解答

t に関する導関数をドットで表す。

y の消去

第 1 式より、

$$y = \tfrac{1}{5}\left(\dot{x} + 2x\right), \qquad \text{よって} \qquad \dot{y} = \tfrac{1}{5}\left(\ddot{x} + 2\dot{x}\right).$$

これらをともに第 2 式に代入し、5 を掛けると、

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5ax - 2\left(\dot{x} + 2x\right) = 10\cos t,$$
$$\ddot{x} + (5a - 4)\,x = 10\cos t.$$

$\dot{x}$ の項が打ち消し合うので、減衰（damping）はない。これは固有振動数 $\sqrt{5a-4}$（$5a > 4$ のとき）をもつ純粋な強制振動である。

初期条件の読み替え

与えられているのは $x(0)=0$ と $\dot{y}(0)=0$ であるが、x の方程式に必要なのは $x(0)$ と $\dot{x}(0)$ である。もとの第2式に $t=0$ を代入すると、

$$\dot{y}(0)+a\,x(0)-2y(0)=2 \quad\Longrightarrow\quad 0+0-2y(0)=2 \quad\Longrightarrow\quad y(0)=-1.$$

次に $t=0$ における第1式から $\dot{x}(0)=5y(0)-2x(0)=-5$ を得る。どちらの段階でも a の値を用いていないことに注意すると、

$$x(0)=0, \qquad \dot{x}(0)=-5 \qquad \text{すべての} a.$$

が成り立つ。

> **考えてみよう** 条件は y ではなく $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ についてのものである。これをどう使えばよいか？

微分方程式そのものが、任意の一つの時刻における x、y およびそれらの導関数の値を結びつけている。$t=0$ において、第2式は $\dot{y}(0)$ に関する情報を $y(0)$ に関する情報に変え、さらに第1式がそれを $\dot{x}(0)$ に変える。これはまさに x に関する二階微分方程式が必要とするものである。

$a=1$ の場合

このとき方程式は

$$\ddot{x}+x=10\cos t.$$

となる。余関数（complementary function）は $A\cos t+B\sin t$ である。外力 $\cos t$ はそれ自身が同次方程式（homogeneous equation）の解である（これが共鳴（resonance）である）ので、$C\cos t$ と置いても失敗する。そこで $x_p=t\,(C\cos t+D\sin t)$ と置く。2回微分すると、

$$\ddot{x}_p+x_p=-2C\sin t+2D\cos t,$$

となるので $C=0$、$D=5$ であり、$x_p=5t\sin t$ を得る。したがって

$$x=A\cos t+B\sin t+5t\sin t.$$

条件 $x(0)=0$ より $A=0$ である。すると $\dot{x}=B\cos t+5\sin t+5t\cos t$ であるから、$\dot{x}(0)=B=-5$ となる。ゆえに

$$\boxed{x=5(t-1)\sin t}$$

y については、$\dot{x}=5\sin t+5(t-1)\cos t$ とともに $y=\frac{1}{5}(\dot{x}+2x)$ を用いると、

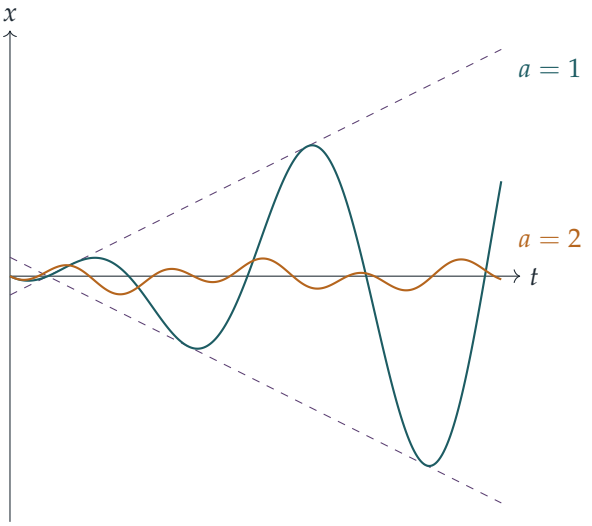
$y=\sin t+(t-1)\cos t+2(t-1)\sin t,$ すなわち $\boxed{y=(t-1)\cos t+(2t-1)\sin t}$

簡単な確認として、$y(0) = -1$ であり、$\dot{y} = \cos t - (t-1)\sin t + 2\sin t + (2t-1)\cos t$ から $\dot{y}(0) = 1 - 1 = 0$ となって、条件を満たしている。

$a > 1$ の場合

このとき $5a - 4 > 1$ であるから、$\omega = \sqrt{5a-4}\,(\omega > 1)$ とおく。方程式 $\ddot{x} + \omega^2 x = 10\cos t$ は、外力の振動数 1 が固有振動数 ω と異なるので、もはや共鳴の状態にはない。したがって次のようになる。

- 余関数は $A\cos\omega t + B\sin\omega t$ であり、周期 2π ではなく周期 $2\pi/\omega$（2π より短い）で振動する。
- 特殊解（particular integral）は単に $\cos t$ の定数倍であり、t の因子をもたないので、$t\sin t$ のような項は現れない。
- よって x（および同様に $y = \frac{1}{5}(\dot{x} + 2x)$）は振動数 1 と ω の正弦波の和である。$a = 1$ のときのように振幅が t に比例して増大しながら振動するのではなく、どちらもすべての t で有界にとどまる。運動が周期的になるのは ω が有理数のときに限られる。一般には、互いに「うなり」（beats）を生じる二つの振動の重ね合わせである。



検算

- $x = 5(t-1)\sin t$ と $y = (t-1)\cos t + (2t-1)\sin t$ をもとの両方の方程式に代入し直すと、恒等的に成り立つ。逐次的な数値解法（$x = 0$、$y = -1$ から始める 4 次のルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method））による解は、$0 \le t \le 10$ において 10^{-10} 以内の精度で公式と一致する。たとえば $x(10) = 45\sin 10 \approx -24.481$ である。

- $a > 1$ のとき、完全な解は $x = \frac{2}{a-1}(\cos t - \cos \omega t) - \frac{5}{\omega} \sin \omega t$ となることがわかる。$a \to 1$ のとき $\omega - 1 \approx \frac{5}{2}(a-1)$ および $\cos t - \cos \omega t \approx (\omega - 1)\, t \sin t$ であり、これから $5t \sin t - 5 \sin t$ が得られる。共鳴の場合の答えは、非共鳴の場合の答えの極限なのである。

よくある間違い

- $\dot{y}(0)$ に関する条件から $y(0) = -1$ を導かずに、$y(0) = 0$ を用いてしまう。
- $a = 1$ のときに特殊解として $C \cos t + D \sin t$ を試してしまう。これは余関数の一部であるから、$0 = 10 \cos t$ が出てきてしまう。
- 新たな任意定数を用いて y を別に解いてしまう。x が求まれば、y は $y = \frac{1}{5}(\dot{x} + 2x)$ によって決まる。

STEP のその先へ

このような線形の連立方程式は、実は $\mathbf{v} = (x, y)$ と定数行列（matrix）M を用いた $\dot{\mathbf{v}} = M\mathbf{v} + \mathbf{f}(t)$ という形をしている。M の固有値（eigenvalues）は、ここでは $\pm\sqrt{4 - 5a}$ であり、外力のない運動が増大するか、減衰するか、振動するかを決める。共鳴は外力の振動数が固有値 $\pm \mathrm{i}$ と一致するときに起こり、それはちょうど $a = 1$ のときである。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は、行列を用いた連立方程式と、共鳴やうなりを伴う強制振動の両方を扱っている。

解答例

STEP III 1987、第 7 問

純粋数学 ・ 逆正接関数の級数

STEP III 1987、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/87-s3-q7

鍵となる考え方

$\tan^{-1} t$ の級数は $1/(1+x^2)$ を積分することで得られ、$1/(1+x^2)$ は公比 $-x^2$ の等比級数（geometric series）の和である。等比級数を有限項で打ち切ると**厳密な**剰余項（remainder）が残り、その剰余項を積分すると誤差項（error term）が得られる。$[0,1]$ 上では因子 $1/(1+x^2)$ は $\frac{1}{2}$ と 1 の間にあるので、誤差は計算の容易な二つの積分の間に挟み込まれる。

解答

恒等式

任意の実数 x に対して、初項 1、公比 $-x^2$ の有限等比級数から

$$\sum_{r=0}^{n}(-x^2)^r = \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2},$$

が成り立つ。公比 $-x^2$ は決して 1 に等しくならないので、これは正しい。整理すると

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

これは近似ではなく厳密な恒等式である。両辺を 0 から t まで積分する。$\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \tan^{-1} t$ および $\int_0^t x^{2r}\,\mathrm{d}x = \frac{t^{2r+1}}{2r+1}$ であるから、

$$\tan^{-1} t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^t \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

となり、示すべき式が得られた。これはすべての実数 t に対して成り立つ。

評価

$S_n(t) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r t^{2r+1}}{2r+1}$ とおく。恒等式より

$$\left|\tan^{-1} t - S_n(t)\right| = \int_0^t \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

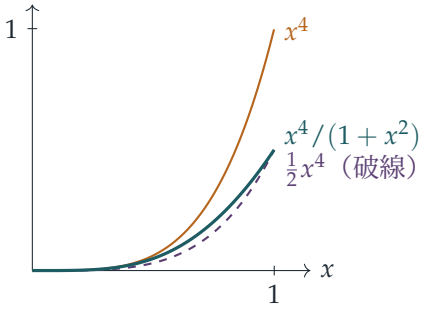
である。ここで右辺の絶対値を外してよいのは、$t \geq 0$ のとき被積分関数（integrand）が非負であり、積分が正の向きに行われるからである。

> **考えてみよう** 閉じた形で計算できない積分は、どのように評価すればよいだろうか。

被積分関数の扱いにくい部分を定数で評価する。$0 \leq x \leq 1$ のとき $1 \leq 1+x^2 \leq 2$ であるから

$$\tfrac{1}{2}x^{2n+2} \leq \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq x^{2n+2}.$$

下の図は $n = 1$ の場合を示している。被積分関数（ティール色）は x^4 と $\frac{1}{2}x^4$ の間に挟まれている。



これらの不等式を 0 から t まで積分すると（$t \geq 0$ なので不等号の向きは保たれる）、

$$\frac{t^{2n+3}}{2(2n+3)} \leq \left|\tan^{-1} t - S_n(t)\right| \leq \frac{t^{2n+3}}{2n+3} \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

これが求める結果である。

π の級数

$t = 1$ とおく。このとき $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$、$S_n(1) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{2r+1}$ である。上からの評価より

$$\left|\pi - 4\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{2r+1}\right| \leq \frac{4}{2n+3} \to 0 \quad \text{ただし} n \to \infty,$$

となるので、$4\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{2r+1} \to \pi$ である。

考えてみよう　二つの評価のうち、近似が**悪い**ことを教えてくれるのはどちらだろうか。

下からの評価である。これは誤差が小さくなり得ないことを述べている。$t=1$ における左側の不等式に 4 を掛けると

$$\left|\pi - 4\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r}{2r+1}\right| \geq \frac{4}{2(2n+3)} = \frac{2}{2n+3}.$$

$n \leq 98$ ならば $2n+3 \leq 199 < 200$ であるから、$\frac{2}{2n+3} > \frac{2}{200} = 10^{-2}$ となる。したがって、すべての $n \leq 98$ に対して誤差は 10^{-2} 以上（実際には真に大きい）である。誤差は $4/(2n+3)$ より小さいので、百項使ってもおよそ小数第 2 位までしか得られない。つまり、この級数は π を計算するには非常に遅い方法である。

検算

- $n=0$、$t=1$ のとき、評価式は $\frac{1}{6} \leq \left|\frac{\pi}{4} - 1\right| \leq \frac{1}{3}$ を与える。実際 $1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.215$ である。
- 数値的には、$n=98$ のとき誤差は $|\pi - 4S_{98}(1)| \approx 0.01010$ で、10^{-2} をわずかに上回る。$n=99$ のときは約 0.0099998 で、わずかに下回る。よって 98 がちょうど境目である。また、ランダムな t と n について数値積分（quadrature）で恒等式を確かめ、数千個のランダムな $t \in [0,1]$ について両側からの評価を確かめた。

よくある間違い

- $1/(1+x^2)$ を**無限**級数に展開して項別積分すること。これには $|x|<1$ であることと、和と積分の順序交換の正当化が必要になる。厳密な剰余項をもつ有限の形を使えば、どちらも避けられる。
- 上からの評価を使って誤差が大きいと論じること。それができるのは下からの評価だけである。

STEP のその先へ

これは積分形の剰余項をもつテイラーの定理（Taylor's theorem）を、一つの関数について手計算で導いたものである。$t=1$ における級数はライプニッツ（Leibniz）級数（あるいはマーダヴァ（Madhava）–グレゴリー（Gregory）級数）である。その誤差がおよそ $1/(2n)$ であることは、項がゆっくり減少する交代級数（alternating series）

に典型的な性質である。マチン（Machin）の公式 $\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$ のような、より速い公式は、同じ級数を小さな t で用いる。そこでは t^{2n+3} が急速に小さくなる。剰余項と収束（convergence）の厳密な扱いについては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照せよ。

解答例

STEP III 1987、第 8 問

純粋数学　・　平行四辺形の面積に関する不等式

> **STEP III 1987、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q8

鍵となる考え方

平行四辺形（parallelogram）の対角線（diagonal）は互いに他を二等分するので、平行四辺形は 4 つの三角形に分けられ、それぞれの面積は $\frac{1}{2}ab\sin C$ を用いてただちに書き下せる。これにより、対角線とそのなす角による面積の公式が得られ、冒頭の 2 つの結果はどちらもそこから直ちに導かれる。集合 A は 2 つの帯状領域（strip）が交わる部分であるから、平行四辺形である。その面積を求めれば、2 つ目の結果から長い方の対角線が長くなければならないことがわかり、その対角線の両端が求める 2 点となる。

解答

対角線による面積の表示

対角線の長さを p と q とし、それらが角 θ で交わるとする。ただし $0 < \theta < \pi$ である。平行四辺形の対角線は互いに他を二等分するので、平行四辺形は 4 つの三角形に分けられ、どの三角形も中心で交わる長さ $\frac{1}{2}p$ と $\frac{1}{2}q$ の 2 辺をもつ。そのうち 2 つの三角形は中心での角が θ であり、残りの 2 つは $\pi - \theta$ である。$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ であるから、各三角形の面積は $\frac{1}{2} \cdot \frac{p}{2} \cdot \frac{q}{2}\sin\theta$ であり、したがって

$$\text{面積} = 4 \cdot \tfrac{1}{8}pq\sin\theta = \tfrac{1}{2}pq\sin\theta.$$

p と q を固定すると、これは $\sin\theta$ が最大のとき、すなわち $\theta = \frac{\pi}{2}$ のときに最大となる。よって面積が最大となるのは対角線が垂直であるときであり、かつそのときに限る。最大面積は $\frac{1}{2}pq$ である。

長い方の対角線による上界

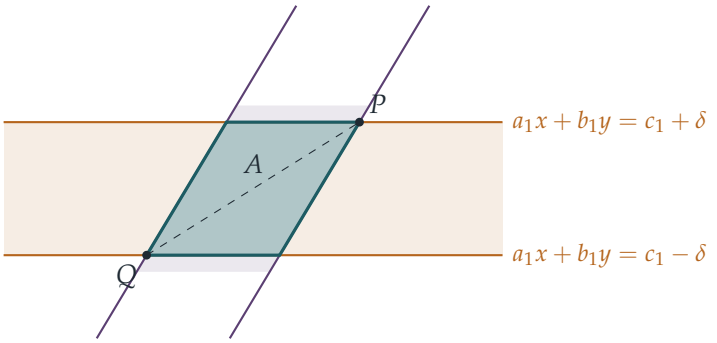
$p \geq q$ とし、p が長い方の対角線（または等しい 2 本のうちの 1 本）であるとする。$\sin\theta \leq 1$、次いで $q \leq p$ を用いると

$$\text{面積} = \tfrac{1}{2}pq\sin\theta \leq \tfrac{1}{2}pq \leq \tfrac{1}{2}p^2.$$

よって面積は長い方の対角線の長さの 2 乗の半分以下である。等号成立には $\sin\theta = 1$ かつ $q = p$ が必要なので、等号が成り立つのは正方形の場合に限る。

集合 A は平行四辺形である

$\delta > 0$ と仮定する。（$\delta = 0$ ならば上界は 0 であり、A の任意の 1 点を 2 回選べばよい。）不等式 $|a_1x + b_1y - c_1| \leq \delta$ は $c_1 - \delta \leq a_1x + b_1y \leq c_1 + \delta$ を意味する。よってこれは、2 本の平行な直線 $a_1x + b_1y = c_1 \pm \delta$ に挟まれた閉じた帯状領域を表す。2 つ目の不等式も同様に 2 つ目の帯状領域を与える。条件 $a_1b_2 \neq a_2b_1$ は、法線ベクトル（normal vector）$\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1)$ と $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2)$ が平行でないことを意味する。したがって 2 つの帯状領域は交差し、$\mathbf{n}_1$ も $\mathbf{n}_2$ も零ベクトルではない。それらの共通部分 A は 2 組の平行な直線で囲まれた平行四辺形である。



図は 1 つ目の帯状領域（琥珀色）と 2 つ目の帯状領域の一部（紫色）を示している。それらの共通部分 A（青緑色）は平行四辺形であり、破線はその長い方の対角線である。

A の面積

点と直線の距離の公式を用いると、平行な直線 $a_1x + b_1y = c_1 \pm \delta$ の間の距離は

$$h_1 = \frac{2\delta}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}},$$

である。同様に、2 つ目の帯状領域の幅は $h_2 = 2\delta/\sqrt{a_2^2 + b_2^2}$ である。2 組の直線のなす角を φ とし、$0 < \varphi < \pi$ とする。A の辺のうち 2 つ目の帯状領域の境界上にあるも

のは、1 つ目の帯状領域を角 φ で横切るので、それぞれの長さは $h_1/\sin\varphi$ である。これら 2 辺の間の距離は h_2 であるから

$$\text{面積} A = \frac{h_1 h_2}{\sin\varphi}.$$

考えてみよう 係数から $\sin\varphi$ をどのように求めればよいか？

2 直線のなす角は、それらの法線のなす角またはその補角に等しく、どちらも正弦は同じである。ベクトル $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1)$ と $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2)$ が張る平行四辺形の面積は $|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|\sin\varphi$ である。この面積は 2×2 の行列式（determinant）の絶対値 $|a_1 b_2 - a_2 b_1|$ にも等しい。よって

$$\sin\varphi = \frac{|a_1 b_2 - a_2 b_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

これを代入すると、平方根は約分されて

$$\text{面積} A = \frac{2\delta}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \cdot \frac{2\delta}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \cdot \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}{|a_1 b_2 - a_2 b_1|} = \frac{4\delta^2}{|a_1 b_2 - a_2 b_1|}.$$

2 つの点

PQ を A の長い方の対角線とし、$P = (x_1, y_1)$、$Q = (x_2, y_2)$ とおく。これらは A の頂点であり、帯状領域は境界の直線を含むので、A に属する。前半で得た上界により

$$\frac{4\delta^2}{|a_1 b_2 - a_2 b_1|} = \text{面積} A \le \tfrac{1}{2} PQ^2,$$

であるから

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = PQ^2 \ge \frac{8\delta^2}{|a_1 b_2 - a_2 b_1|},$$

となり、示すべきことが示された。

検算

- $a_1 = b_2 = 1$、$a_2 = b_1 = 0$ とすると、A は正方形 $|x - c_1| \le \delta$、$|y - c_2| \le \delta$ となる。その対角線の長さの 2 乗は $(2\delta)^2 + (2\delta)^2 = 8\delta^2$ であり、ちょうど上界に一致する。正方形は前半の等号成立の場合なので、これは辻褄が合っている。
- スケーリング：a_1、b_1、c_1 を 2 倍にすると、1 つ目の帯状領域の幅は半分になり、A の面積も半分になり、$|a_1 b_2 - a_2 b_1|$ は 2 倍になる。公式は正しく振る舞う。

- コンピュータで 10^5 個の無作為な場合を検証した。境界の方程式を解いて A の頂点を求めたところ、靴ひも公式（shoelace formula）による面積は毎回 $4\delta^2/|a_1b_2 - a_2b_1|$ に一致した。（長い方の対角線）^{2} と上界の比の最小値は 1.0007 であり、1 を下回ることは一度もなかった。

よくある間違い

- 帯状領域の幅を 2δ としてしまう。$|a_1x + b_1y - c_1| \le \delta$ の幅は $2\delta/\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ である。
- 選んだ点がなぜ A に属するのかを述べ忘れる。それらは頂点であり、A は境界を含むので属するのである。
- A の面積を h_1h_2 と書いてしまう。これは帯状領域が垂直に交わるときにしか正しくない。

STEP のその先へ

この面積の計算は、ある基本的な事実の特別な場合である。すなわち、行列 M で表される線形写像（linear map）はすべての面積を $|\det M|$ 倍する。ここでは写像 $(x, y) \mapsto (a_1x + b_1y,\ a_2x + b_2y)$ が A を面積 $4\delta^2$ の正方形に移すので、A の面積は $4\delta^2/|\det M|$ となる。これは 2 重積分で変数変換をするときに現れるヤコビアン（Jacobian）の因子である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、このように行列式を面積や体積として展開している。

解答例

STEP III 1987、第 9 問

純粋数学 ・ 群の直積

> **STEP III 1987、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q9

鍵となる考え方

$G \times H$ ではすべての演算が成分ごとに行われる。したがって、各群の公理（group axiom）や $G \times H$ の各性質は、G と H それぞれにおける同じ性質に帰着する。真偽を問う小問では、「真」と答えるには一般的な証明が必要であり、「偽」と答えるには確かな反例となる障害が一つあれば十分である。同型（isomorphic）な群は、元の個数や元の位数（order）など、乗法だけを用いて記述できるあらゆる性質が一致する。そこで、それらを比較する。

解答

以下を通じて、e_G と e_H はそれぞれ G と H の単位元（identity）を表し、G と H における逆元（inverse）を g^{-1}、h^{-1} と書く。

$G \times H$ は群である

四つの公理を確かめる。

閉性（*closure*）。$g_1, g_2 \in G$ かつ $h_1, h_2 \in H$ ならば、G と H は閉じているので、$g_1 * g_2 \in G$ かつ $h_1 \circ h_2 \in H$ である。よって $(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 * g_2,\, h_1 \circ h_2) \in G \times H$ である。

結合法則（*associativity*）。任意の三つの元に対して

$$\begin{aligned}\big((g_1, h_1)(g_2, h_2)\big)(g_3, h_3) &= \big((g_1 * g_2) * g_3,\ (h_1 \circ h_2) \circ h_3\big) \\ &= \big(g_1 * (g_2 * g_3),\ h_1 \circ (h_2 \circ h_3)\big) \\ &= (g_1, h_1)\big((g_2, h_2)(g_3, h_3)\big),\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで中央の等号では、G と H における結合法則を用いた。

単位元。 組 (e_G, e_H) は

$$(e_G, e_H)(g,h) = (e_G * g,\ e_H \circ h) = (g,h),$$

を満たし、同様に $(g,h)(e_G, e_H) = (g,h)$ も満たす。よってこれは単位元である。

逆元。 (g,h) が与えられたとき、組 (g^{-1}, h^{-1}) は $G \times H$ に属し、

$$(g,h)(g^{-1},h^{-1}) = (g * g^{-1},\ h \circ h^{-1}) = (e_G, e_H),$$

であり、逆順の積も (e_G, e_H) となる。よってすべての元は逆元をもつ。

四つの公理がすべて成り立つので、$G \times H$ はこの乗法に関して群（group）である。

小問 (i)：真

G と H が可換ならば、$G \times H$ も可換である。 任意の二つの元に対して、G と H における可換性を用いると

$$(g_1,h_1)(g_2,h_2) = (g_1 * g_2,\ h_1 \circ h_2) = (g_2 * g_1,\ h_2 \circ h_1) = (g_2,h_2)(g_1,h_1),$$

となる。

$G \times H$ が可換ならば、G と H も可換である。 任意の $g_1, g_2 \in G$ をとる。$G \times H$ は可換（abelian）であるから

$$(g_1 * g_2,\ e_H) = (g_1,e_H)(g_2,e_H) = (g_2,e_H)(g_1,e_H) = (g_2 * g_1,\ e_H).$$

順序対（ordered pair）が等しいのは第 1 成分が等しいときに限るから、$g_1 * g_2 = g_2 * g_1$ であり、G は可換である。組 (e_G, h_1) と (e_G, h_2) を同様に用いれば、H が可換であることがわかる。

> **考えてみよう** 逆向きの証明で、なぜ単位元 e_H が必要なのだろうか。

g_1 と g_2 から $G \times H$ の元をつくるには、何らかの第 2 成分が必要である。比較で問題になるのは第 1 成分だけなので、固定した $h \in H$ であれば何でもよい。群には必ず単位元が含まれるので、e_H は存在が保証された安全な選択である。

小問 (ii)：真

$\widetilde{G} = \{(g, e_H) : g \in G\}$ とおき、$\phi\colon G \to \widetilde{G}$ を $\phi(g) = (g, e_H)$ で定める。

$\widetilde{G}$ は $G \times H$ の部分群（subgroup）である。実際、単位元 (e_G, e_H) を含む。$(g_1, e_H)(g_2, e_H) = (g_1 * g_2, e_H)$ であるから積について閉じている。$(g, e_H)^{-1} = (g^{-1}, e_H)$ であるから逆元について閉じている。

ϕ は同型写像（isomorphism）である。定義により $\widetilde{G}$ への全射（onto）である。$(g_1, e_H) = (g_2, e_H)$ ならば $g_1 = g_2$ となるから単射（one-to-one）である。また

$$\phi(g_1 * g_2) = (g_1 * g_2,\ e_H) = (g_1, e_H)(g_2, e_H) = \phi(g_1)\phi(g_2).$$

であるから演算を保つ。よって $G \times H$ は G と同型な部分群 $\widetilde{G}$ を含む。

小問 (iii)：偽

両方の群を加法的に表す：$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ は n を法とする加法に関する群である。$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ では、すべての元 $x = (a, b)$ が

$$x + x = (2a, 2b) = (0, 0),$$

を満たすので、すべての元の位数は 1 または 2 である。一方 $\mathbb{Z}_4$ では $1 + 1 = 2 \neq 0$ であるから、1 の位数は 4 である。

同型写像 $\phi\colon \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ が存在したと仮定する。すると

$$\phi(2) = \phi(1 + 1) = \phi(1) + \phi(1) = (0, 0) = \phi(0),$$

となる。ここで、上の計算により $\phi(1) + \phi(1) = (0, 0)$ である。最後の等号は、同型写像が単位元を単位元に写すことによる。こうして $2 \neq 0$ でありながら $\phi(2) = \phi(0)$ となり、ϕ は単射でなく、矛盾である。したがって $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ は $\mathbb{Z}_4$ と同型**ではない**。（要するに、$\mathbb{Z}_4$ は巡回群（cyclic group）であるが、$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ はそうではない。）

小問 (iv)：偽

同型写像は全単射（bijection）であるから、同型な群は元の個数が等しい。n 個のものの並べ方は $n!$ 通りあるので $|S_n| = n!$ であり、各組は g と h を自由に選んで得られるので $|G \times H| = |G|\,|H|$ である。よって

$$|S_2 \times S_3| = 2! \times 3! = 12, \qquad |S_6| = 6! = 720.$$

これらの大きさは異なるので、$S_2 \times S_3$ は S_6 と同型**ではない**。

検算

- 小さな例（$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$、$\mathbb{Z}_2 \times S_3$、$S_3 \times S_3$、$S_2 \times S_3$ など）で総当たりで確かめると、直積は単位元 (e_G, e_H) のもとで四つの公理をすべて満たす。直積が可換となるのは両方の因子が可換であるときに限り、$g \mapsto (g, e_H)$ は単射な準同型写像（homomorphism）である。

- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の元の位数は $1, 2, 2, 2$ であり、$\mathbb{Z}_4$ では $1, 2, 4, 4$ であるから、二つの群は確かに異なる。
- $S_2 \times S_3$ の元を列挙すると 12 個であり、S_6 の 720 個とは異なる。

よくある間違い

- (i) の「必要十分」の一方向だけを証明してしまう。逆向きこそ、第 2 成分に e_H を置く工夫が必要な部分である。
- (ii) で「G は $G \times H$ の部分群である」と述べてしまう。厳密には、G は $G \times H$ の部分集合ですらない。部分群は $G \times \{e_H\}$ であり、これが G と**同型**なのである。
- (iii) で、両方の群の位数がともに 4 であることを指摘して終わりにしてしまう。大きさが等しいことは同型であるための必要条件であって十分条件ではないので、二つの群を区別する性質が必要である。

STEP のその先へ

これは**直積**（direct product）という構成であり、既存の群から新しい群をつくる最も単純な方法である。群論の最初の講義における主要な結果の一つは、すべての有限可換群が巡回群の直積であるというものである。関連する事実として、$\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$ となるのは $\gcd(m, n) = 1$ のときに限る。これは中国剰余定理（Chinese remainder theorem）の群論的な側面である。小問 (iii) は、これが成り立たない最小の例である。さらに詳しくは、Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）を参照のこと。

解答例

STEP III 1987、第 10 問

純粋数学 ・ ベルヌーイ多項式

> **STEP III 1987、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q10

鍵となる考え方

定義の規則は P_n をその導関数（derivative）を通してしか定めないので、帰納法（induction）の対象として自然なのは、差 $P_n(x+1) - P_n(x) - nx^{n-1}$ の**導関数**である。帰納法の仮定（inductive hypothesis）によってこれは消え、定数だけが残る。そしてその定数は積分の条件によって決まる。その後の和は望遠鏡和（telescoping sum）となり、立方和については P_4 を定数項（constant term）の手前まで求めれば十分である。定数項はどのみち打ち消し合うからである。

解答

差の恒等式

$n \geq 1$ に対して

$$Q_n(x) = P_n(x+1) - P_n(x) - nx^{n-1}.$$

とおく。すべての x について $Q_n(x) = 0$ となることを帰納法で証明する。

基底段階（base case） $n = 1$。 $P_1' = 1 \cdot P_0 = 1$ であるから、ある定数 c を用いて $P_1(x) = x + c$ と書ける。すると $P_1(x+1) - P_1(x) = 1 = 1 \cdot x^0$ となるので、$Q_1 \equiv 0$ である。（実際には $\int_0^1 (x+c)\,\mathrm{d}x = 0$ から $c = -\frac{1}{2}$ が得られるが、これは必要ない。）

帰納段階（inductive step）。 $n \geq 2$ かつ $Q_{n-1} \equiv 0$ と仮定する。微分して $P_n' = nP_{n-1}$

を用いると、

$$\begin{aligned} Q_n'(x) &= nP_{n-1}(x+1) - nP_{n-1}(x) - n(n-1)x^{n-2} \\ &= n\big[P_{n-1}(x+1) - P_{n-1}(x) - (n-1)x^{n-2}\big] \\ &= nQ_{n-1}(x) = 0. \end{aligned}$$

よって Q_n は定数であり、$x=0$ における値に等しい。$n \geq 2$ であるから、項 nx^{n-1} は $x=0$ で 0 になり、

$$Q_n(0) = P_n(1) - P_n(0).$$

となる。

? **考えてみよう** $P_n(1) = P_n(0)$ であることはどうしてわかるのか。積分の条件は P_n についてのものであって、その値についてのものではない。

一つ下の段階の積分の条件を使う。微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）により、

$$P_n(1) - P_n(0) = \int_0^1 P_n'(x)\,\mathrm{d}x = n\int_0^1 P_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

となる。$n-1 \geq 1$ であるから、条件 $\int_0^1 P_{n-1}\,\mathrm{d}x = 0$ が適用できるのである。（$n=1$ の場合を別に扱わなければならなかったのは、まさにこのためである：$\int_0^1 P_0\,\mathrm{d}x = 1$。）したがって $Q_n \equiv 0$ となり、帰納法が完結する：

$$P_n(x+1) - P_n(x) = nx^{n-1} \qquad \text{任意の} n \geq 1.$$

累乗の和

恒等式に $x=m$ を代入し、$m = 0, 1, \ldots, k$ について足し合わせる。右辺は望遠鏡和となる：

$$\begin{aligned} n\sum_{m=0}^{k} m^{n-1} &= \sum_{m=0}^{k}\big[P_n(m+1) - P_n(m)\big] \\ &= \big[P_n(1) - P_n(0)\big] + \big[P_n(2) - P_n(1)\big] + \cdots + \big[P_n(k+1) - P_n(k)\big] \\ &= P_n(k+1) - P_n(0), \end{aligned}$$

これが示すべきことであった。（$n=1$ のとき、$m=0$ の項は 0^0 であり、これは 1 と読まなければならない。そうすれば両辺はともに $k+1$ となる。）

立方和

$n=4$ とするので、P_4 が必要である。$P_0=1$ から始めて、毎回積分し、$[0,1]$ 上の積分が 0 になるように定数を選んでいく：

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= x-\tfrac{1}{2}, \\
P_2(x) &= x^2-x+\tfrac{1}{6} && \text{ここで } \textstyle\int_0^1 (x^2-x)\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{6}, \\
P_3(x) &= x^3-\tfrac{3}{2}x^2+\tfrac{1}{2}x && \text{ここで } \textstyle\int_0^1 (x^3-\tfrac{3}{2}x^2+\tfrac{1}{2}x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}=0, \\
P_4(x) &= x^4-2x^3+x^2+c
\end{aligned}$$

ただし c はある定数である。c は必要ない：$P_4(k+1)-P_4(0)$ において打ち消し合うからである。$y=k+1$ とおくと、

$$P_4(y)-P_4(0) = y^4-2y^3+y^2 = y^2(y-1)^2 = (k+1)^2k^2.$$

よって $n=4$ の和の公式から

$$\sum_{m=0}^{k} m^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

が得られる。$k=1000$ とすると $\frac{1}{2}k(k+1) = \frac{1}{2}\cdot 1000\cdot 1001 = 500500$ であるから、

$$\sum_{m=0}^{1000} m^3 = (500500)^2,$$

となり、これが求める結果である。

検算

- 小さな k：$k=2$ とすると $0+1+8=9=\left(\frac{2\cdot 3}{2}\right)^2$ となり、$k=3$ とすると $36=6^2$ となる。
- 同じ方法を $n=2$ で用いると $2\sum m = P_2(k+1)-P_2(0) = (k+1)^2-(k+1) = k(k+1)$ となり、おなじみの三角数（triangular number）の公式が得られる。立方和がこの平方になっていることに注目しよう。これは気づくと嬉しい事実である。
- コンピュータで $P_1,\ldots,P_{12}$ を厳密な分数を用いて構成すると、ランダムな有理数点で差の恒等式が成り立つこと、および $k\le 39$ で和の公式が成り立つことが確かめられる。立方を直接足し合わせると $250\,500\,250\,000 = 500500^2$ となる。（省略した定数は $c=-\frac{1}{30}$ であることがわかる。）

よくある間違い

- Q_n の定数を、Q_n を $[0,1]$ 上で積分することによって決めようとすること。そうすると $\int_1^2 P_n$ が現れるが、これについては何もわかっていない。$x = 0$ で値を求め、P_{n-1} に関する条件を用いるほうがはるかに簡潔である。
- $P_n(1) = P_n(0)$ を示す段階には $n \geq 2$ が必要であり、したがって基底段階は $n = 1$ としてそれを手で確かめなければならないことを忘れること。
- 打ち消し合ってしまう P_4 の定数項を求めるのに時間を費やすこと。

STEP のその先へ

ベルヌーイ多項式（Bernoulli polynomials）は母関数（generating function）$\dfrac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n\geq 0} P_n(x)\dfrac{t^n}{n!}$ をもち、その 0 における値はベルヌーイ数（Bernoulli numbers）$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, \ldots$ である。これらはオイラー＝マクローリンの公式（Euler–Maclaurin formula）の中心をなす。この公式は和を積分およびその誤差項と比較するものである。また、ベルヌーイ多項式はオイラー（Euler）による $\sum 1/n^{2k}$ の計算にも現れる。これらの考え方をさらに学ぶには、Graham、クヌース（Knuth）、Patashnik による *Concrete Mathematics*（邦題『コンピュータの数学』）を読んでみるとよい。この本は累乗の和とベルヌーイ数を詳しく扱っている。

解答例

STEP III 1987、第 11 問

力学 ・ 相対速度と最適化

STEP III 1987、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

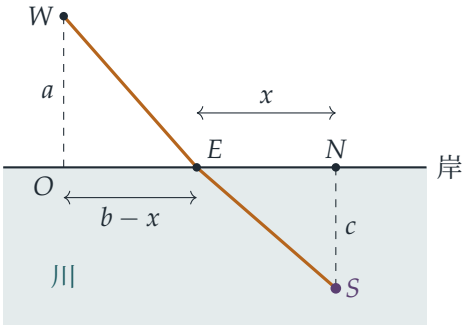
step.maths.org/questions/87-s3-q11

鍵となる考え方

所要時間の合計を 1 変数 x の関数として表し、その導関数（derivative）を 0 とおく。静水の場合、これは光学における屈折（refraction）の問題そのものであり、答えはスネル（Snell）の法則（Snell's law）である。流れがある場合に新たに必要なのは、泳ぐ時間の計算だけである。流れの速度と彼女の泳ぐ速度は大きさが等しいので、その和は菱形（rhombus）の対角線になる。このため、泳ぐ時間は x の意外なほど簡単な関数になる。

解答

女性を質点（particle）とみなし、陸上では一定の速さ u で、水中では水に対して一定の速さ v で、それぞれ直線上を進むとする。岸を X 軸にとり、下流方向を正の向きとし、野原を $Y > 0$ の側とし、女性の位置を $W = (0, a)$ とする。このとき切り株は $S = (b, -c)$ にあり、切り株に最も近い岸の点は $N = (b, 0)$ である。彼女は $E = (b - x, 0)$ で川に入る。これは N から x だけ上流の点である。



走る距離は $WE = \sqrt{a^2 + (b-x)^2}$、泳ぐ距離は $ES = \sqrt{x^2 + c^2}$ である。

静水の場合

所要時間の合計は

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + (b-x)^2}}{u} + \frac{\sqrt{x^2 + c^2}}{v},$$

であるから、

$$T'(x) = -\frac{b-x}{u\sqrt{a^2 + (b-x)^2}} + \frac{x}{v\sqrt{x^2 + c^2}}.$$

関数 $s \mapsto s/\sqrt{k^2 + s^2}$ は増加関数なので、T' の 2 つの項はどちらも x について増加する。よって T' は狭義単調増加であり、T の停留点（stationary point）はちょうど 1 つで、それが最小値（minimum）を与える。$T'(0) < 0 < T'(b)$ であるから、この点は $0 < x < b$ にある。求める方程式は

$$\boxed{\frac{b-x}{u\sqrt{a^2 + (b-x)^2}} = \frac{x}{v\sqrt{x^2 + c^2}}}$$

であり、これは $v(b-x)\sqrt{x^2 + c^2} = ux\sqrt{a^2 + (b-x)^2}$ と同値である。WE と ES が岸の法線（normal）となす角を α、β とすると、この式は $\dfrac{\sin\alpha}{u} = \dfrac{\sin\beta}{v}$ となる。これはスネルの屈折の法則である。

流れのある川の場合

今度は水が下流へ速さ v で流れており、彼女は水に対して速さ v で泳ぐ。直線 ES に沿って進むためには、地面に対する速度が ES の向きになるように、下流方向から下向きに角 θ をなす向きへ泳ぐ方向を選ばなければならない。

考えてみよう 彼女は実際に ES に沿ってどれだけの速さで進むのか。また、なぜ切り株より上流で川に入らなければならないのか。

地面に対する速度は、流れの速度と泳ぐ速度の和である。

$$v\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}\cos\theta\\-\sin\theta\end{pmatrix} = 2v\cos\tfrac{\theta}{2}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\-\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix},$$

ここで $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ と $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ を用いた。幾何的に言えば、2 つの速度は長さが等しいので菱形をなし、その和は 2 つの速度のなす角を二等分する。したがって、地面に対する経路は下流方向から下向きに角 $\phi = \theta/2$ をなす。$0 \le \theta \le \pi$ であるから $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$ となり、彼女は下流へ流されることしかできない。つまり切り株は E より下流になければならず、$x > 0$ である。経路が ES に沿うためには

$$\tan\phi = \frac{c}{x}, \qquad \text{すなわち} \qquad \cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + c^2}},$$

が必要であり、ES に沿った速さは $2v\cos\phi = \dfrac{2vx}{\sqrt{x^2+c^2}}$ である。泳ぐ時間は距離を速さで割ったものである。

$$\frac{\sqrt{x^2+c^2}}{2vx/\sqrt{x^2+c^2}} = \frac{x^2+c^2}{2vx}.$$

よって所要時間の合計は

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2+(b-x)^2}}{u} + \frac{x^2+c^2}{2vx} = \frac{\sqrt{a^2+(b-x)^2}}{u} + \frac{1}{2v}\left(x + \frac{c^2}{x}\right), \qquad x > 0,$$

であり、

$$T'(x) = -\frac{b-x}{u\sqrt{a^2+(b-x)^2}} + \frac{1}{2v}\left(1 - \frac{c^2}{x^2}\right).$$

ここでも $x > 0$ において 2 つの項はどちらも x について狭義単調増加である。また $x \to 0^+$ のとき $T'(x) \to -\infty$ であり、x が十分大きければ $T'(x) > 0$ であるから、停留点はちょうど 1 つで、それが所要時間の最小値を与える。$T'(x) = 0$ とおき、両辺に（正の数である）$2vx^2u\sqrt{a^2+(b-x)^2}$ を掛けると

$$2vx^2(b-x) = u(x^2-c^2)\left[a^2+(b-x)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

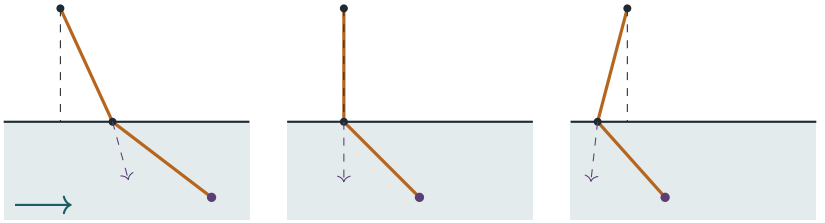
となり、示すべき式が得られる。

3 つの略図

この方程式を解かなくても、x がどこにあるかがわかる。因数 $[a^2+(b-x)^2]^{1/2}$ は正なので、$b-x$ と $x-c$ は同符号でなければならない（あるいは両方とも 0）。

- $b > c$ のとき：$c < x < b$ である。もし $x \le c$ ならば $b-x > 0 \ge x-c$ となり、$x \ge b$ ならば $b-x \le 0 < x-c$ となって、いずれも起こりえない。彼女は $b-x > 0$ の位置、すなわち彼女に最も近い岸の点 O より下流で川に入る。$x > c$ なので、泳ぐ経路が岸となす角は $\phi < 45°$ であり、泳ぐ向き $\theta = 2\phi < 90°$ は下流寄りである。
- $b = c$ のとき：同じ議論により $x = c = b$ である。彼女は O までまっすぐ走り、川を真横に横切る向き（$\theta = 90°$）に泳ぎ、流れによって岸と 45° をなす経路に沿って運ばれる。
- $b < c$ のとき：$b < x < c$ なので $b-x < 0$ である。彼女は川に入るために上流へ走り、45° より急な経路に沿って泳ぎ、泳ぐ向き $\theta > 90°$ は部分的に上流を向く。

下の略図は $a = 3$、$c = 2$、$u = 2$、$v = 1$ とし、$b = 4, 2, 1$ として正確な縮尺で描いたものである。数値的には $x \approx 2.62$、$x = 2$、$x \approx 1.79$ である。流れは右向きであり、E における破線の矢印は、水に対して彼女が泳ぐ向きを表す。



$b > c$　　$b = c$　　$b < c$

検算

- $b = c$ ならば、上で見たとおり、$x = c$ により与えられた方程式の両辺はともに 0 になる。
- 真横に泳ぐ場合（$\theta = 90°$）：横切る方向に v 進むごとに下流へ v 流されるので、経路は 45° をなす。公式によれば、長さ $\sqrt{2}c$ の経路を速さ $2v\cos 45° = \sqrt{2}v$ で進むので、所要時間は c/v となり、当然そうあるべき値に一致する。
- 泳ぐ時間 $(x^2 + c^2)/(2vx)$ は、相加相乗平均の不等式（AM–GM）により $x = c$ で最小となる。これは理にかなっている。走ることに時間がかからないならば、彼女は N から距離 c だけ上流で川に入り、真横に泳げばよい。
- 数値的に、a, b, c, u, v を無作為に 2000 通り選んで T を直接最小化したところ、最小点は常に両方の方程式を満たし、2 番目の場合には常に b と c の間にあった。流れの中を泳ぐ様子を少しずつ追跡する計算でも、泳ぐ時間が確かめられた。たとえば $a = 3$、$b = 4$、$c = 2$、$u = 2$、$v = 1$ のとき $x \approx 2.621$ となる。

よくある間違い

- 切り株に向かってまっすぐ泳ぐかのように、流れの速さを彼女の速さに加えてしまう。実際には、**合成速度**（resultant velocity）が切り株を向くように、狙いをずらして泳がなければならない。
- 流れがある場合は $x > 0$ しかありえないことを忘れる。速さが等しいので、彼女は上流へ少しも進めない。
- x についての方程式を早い段階で 2 乗してしまう。そうすると、x が b と c の間にあることを示す符号の情報が失われる。

STEP のその先へ

最初の答えはスネルの法則であり、これはフェルマー（Fermat）の原理（Fermat's principle）、すなわち「光は所要時間が最小となる経路をとる」という原理から導かれる。経路全体を選んで時間を最小にする問題は、変分法（calculus of variations）の主題である。これに近い問題として、ツェルメロ（Zermelo）の航行問題（Zermelo's navigation problem）がある。これは、場所によって変化する流れの中で、できるだけ早く目的地に着くように船を操る問題である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、相対速度（relative velocity）と運動する座標系を丁寧に扱っている。

解答例

STEP III 1987、第 12 問

力学 ・ 質量が変化する物体の回転

STEP III 1987、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/87-s3-q12

鍵となる考え方

これは可変質量（variable mass）の問題であるから、$F = ma$（あるいはその回転版）をそのまま使うことはできない。確実な方法は基本原理に立ち返ることである。すなわち、時刻 t における支点（pivot）のまわりの角運動量（angular momentum）と、燃焼した燃料がわずかに系から出ていった時刻 $t + \delta t$ における角運動量とを比較する。支点はなめらかで重力は鉛直方向であるから、支点を通る鉛直軸のまわりにモーメント（moment）を及ぼすものは何もなく、その角運動量は保存される。

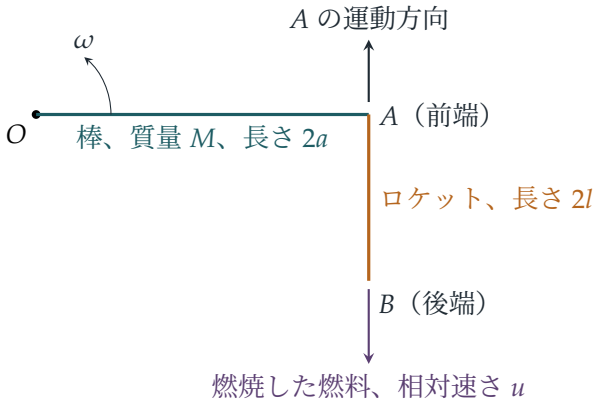
解答

設定

棒とロケットを一様な剛体の棒とみなし、支点 O を通る鉛直軸のまわりに水平面内で回転するとする。棒を OA とし、$OA = 2a$ とする。OA に沿った単位ベクトルを $\mathbf{e}_r$、それに垂直で回転の向きを向く単位ベクトルを $\mathbf{e}_\theta$ とし、鉛直上向きの単位ベクトルを $\mathbf{k}$ とする。よって $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{k}$ である。

ロケットの前端は A にあり、前方、すなわち A の運動方向を向いている。したがってロケットは $\mathbf{e}_\theta$ に沿って置かれ、A から**後方へ**後端 B まで伸びている。ここで

$$\overrightarrow{OB} = 2a\,\mathbf{e}_r - 2l\,\mathbf{e}_\theta.$$



慣性モーメント

端のまわりの棒の慣性モーメント（moment of inertia）は $\frac{1}{3}M(2a)^2 = \frac{4}{3}Ma^2$ である。

ロケットの中心は $2a\,\mathbf{e}_r - l\,\mathbf{e}_\theta$ にあり、O からの距離は $\sqrt{4a^2+l^2}$ である。中心のまわりのロケットの慣性モーメントは $\frac{1}{3}ml^2$ であるから、平行軸の定理（parallel axis theorem）により、ロケットの寄与は $\frac{1}{3}ml^2 + m(4a^2+l^2)$ となる。合計は

$$I = \tfrac{4}{3}Ma^2 + m\left(4a^2 + \tfrac{4}{3}l^2\right).$$

I の変化

$m = 2\alpha l$ かつ $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\alpha\beta$ であるから、$\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\beta$ である。積の微分法則（product rule）を用いて I を微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\left(4a^2 + \tfrac{4}{3}l^2\right) + m\cdot\tfrac{8}{3}l\,\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\\ &= -\alpha\beta\left(4a^2 + \tfrac{4}{3}l^2\right) + 2\alpha l\cdot\tfrac{8}{3}l\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\beta\right) = -\alpha\beta\,(4a^2+4l^2).\end{aligned}$$

$4a^2 + 4l^2 = OB^2$ であることに注意しよう。慣性モーメントは、後端 B から質量を取り除いた場合とちょうど同じ割合で減少する。これは理にかなっている。前端を A に固定したまま一様であり続ける一様なロケットは、後ろから縮むしかないからである。

放出された燃料の角運動量

t から $t+\delta t$ までの短い時間に、質量 $\delta\mu = \alpha\beta\,\delta t$ の燃焼した燃料が B から出ていく。燃焼する前、この燃料はロケットとともに速度 $\mathbf{v}_B = \omega\mathbf{k}\times\overrightarrow{OB}$ で運動していた。燃焼後は、ロケットに対して真後ろに運動するので、その速度は $\mathbf{v}_B - u\,\mathbf{e}_\theta$ である。このとき

O のまわりの角運動量は

$$\begin{aligned}\delta\mu\,\overrightarrow{OB}\times(\mathbf{v}_B-u\,\mathbf{e}_\theta)&=\delta\mu\left[\omega\,OB^2\,\mathbf{k}-(2a\,\mathbf{e}_r-2l\,\mathbf{e}_\theta)\times u\,\mathbf{e}_\theta\right]\\&=\delta\mu\left[\omega(4a^2+4l^2)-2au\right]\mathbf{k},\end{aligned}$$

となる。ここで $\mathbf{e}_\theta\times\mathbf{e}_\theta=\mathbf{0}$ と、$\mathbf{k}$ に垂直な $\mathbf{r}$ に対する $\mathbf{r}\times(\omega\mathbf{k}\times\mathbf{r})=\omega r^2\mathbf{k}$ を用いた。

考えてみよう 排気の項に対して、$\overrightarrow{OB}$ のうち $2a\,\mathbf{e}_r$ の部分だけが効くのはなぜか。

排気の相対速度は $\mathbf{e}_\theta$ に沿っており、ロケットと同じ直線上にある。したがって、$\overrightarrow{OB}$ のロケットに沿った成分はモーメントをもたない。O から排気（および推力）の作用線までの垂直距離は、燃料がロケットのどこから出ていっても、ちょうど $OA=2a$ である。

角運動量保存

支点はなめらかであるから、その抗力は O を通る鉛直軸のまわりにモーメントをもたず、重力も鉛直方向であるからモーメントをもたない。したがって、系全体（花火と、δt の間に燃焼した燃料）のその軸のまわりの角運動量は、t と $t+\delta t$ で等しい：

$$I(t+\delta t)\,\omega(t+\delta t)+\delta\mu\left[\omega(4a^2+4l^2)-2au\right]=I(t)\,\omega(t),$$

ただし $(\delta t)^2$ のオーダーの項を除く。δt で割り、$\delta\mu/\delta t=\alpha\beta$ として $\delta t\to 0$ とすると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega)+\alpha\beta\,\omega(4a^2+4l^2)-2\alpha\beta au=0.$$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega)=I\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+\omega\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ と展開し、$\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\alpha\beta(4a^2+4l^2)$ を用いると、ω を含む 2 つの項はちょうど打ち消し合い、

$$I\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=2\alpha\beta au.$$

が残る。これはまさに「慣性モーメント × 角加速度 = 推力のモーメント」である。推力（thrust）は $\alpha\beta u$ で、ロケットに沿って O から垂直距離 $2a$ のところに作用する。最後に、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}&=\frac{2\alpha\beta au}{\frac{4}{3}Ma^2+2\alpha l\left(4a^2+\frac{4}{3}l^2\right)}=\frac{6\alpha\beta au}{4Ma^2+8\alpha l(3a^2+l^2)}\\&=\frac{3\alpha\beta au}{2\left[Ma^2+2\alpha l(3a^2+l^2)\right]},\end{aligned}$$

となり、求める式が得られた。これは燃料が残っている間、すなわち $l>0$ である間に成り立つ。

検算

- ロケットがない場合（$l \to 0$）、結果は $\frac{4}{3}Ma^2\dot{\omega} = 2a \cdot \alpha\beta u$ となる。推力と腕の長さ（lever arm）の積であり、予想どおりである。
- 次元（dimensions）：$\alpha\beta u$ は力である（α は単位長さあたりの質量、β は速さ）。よって分子は力 × 長さであり、分母は慣性モーメントである。
- 数値的に、$M = 1.3$、$a = 0.7$、$\alpha = 0.9$、$\beta = 0.4$、$u = 2.5$、$l(0) = 1.1$、$\omega(0) = 0.3$ として、後端から 2×10^5 個の小さな塊を放出し、そのたびに角運動量を保存させて運動を逐次計算した。$t = 4.95$ においてこれは $\omega \approx 2.39817$ を与え、公式を積分すると 2.39816 が得られた。

よくある間違い

- 花火だけについて $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega) =$ トルク と書くこと。花火は閉じた系ではないので、燃料が持ち去る角運動量も考慮しない限り、これは誤った答えを与える。
- 排気に、動いているロケットに対する相対速度 u ではなく、後ろ向きの絶対速度 u を与えてしまうこと。
- l が変化することを忘れ、ロケットの慣性モーメントが m と l の両方を通して時間に依存することを見落とすこと。

STEP のその先へ

ここで起きた打ち消し合いは一般的な事実である。局所的な剛体（rigid body）の速度に相対的な排気速度を加えた速度で質量を失う物体について、その運動方程式は、その瞬間の物体に対する通常の運動方程式に、相対速度に由来する「推力」という力を付け加えたものになる。これはロケット方程式（rocket equation）の回転版である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、可変質量系と角運動量をちょうどこの水準で丁寧に扱っている。

解答例

STEP III 1987、第 13 問

力学 ・ 摩擦のある回転棒

STEP III 1987、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/87-s3-q13

鍵となる考え方

質点が棒にくっついている間は、棒と質点は一体の剛体（rigid body）としてヒンジ（hinge）のまわりを回転する。したがって、合成した慣性モーメント（moment of inertia）を用いてエネルギー保存則（conservation of energy）を適用すれば、ただちに $\dot{\theta}^2$ が得られる。すべり始める時刻を求めるには、次に質点だけに注目する。質点はヒンジのまわりに円運動するので、動径方向（radial）と接線方向（transverse）にニュートン（Newton）の運動の第 2 法則を適用すれば、棒が及ぼすべき摩擦力（friction）と垂直抗力（normal reaction）の大きさが正確にわかる。必要な摩擦力が垂直抗力の $\frac{1}{2}$ に達したとき、すべりが始まる。

解答

運動方程式

棒をなめらかなヒンジ O のまわりに回転する一様な剛体棒とし、質点を O から距離 a の位置にある点質量としてモデル化する。質点がすべり出すまでは、質点は O から距離 a の位置にとどまり、棒とともに回転する。

O のまわりの系の慣性モーメントは

$$I = \tfrac{4}{3}(3m)a^2 + ma^2 = 4ma^2 + ma^2 = 5ma^2,$$

である。ここで、長さ $2l$ の一様な棒の一端のまわりの慣性モーメント $\frac{4}{3}Ml^2$ を用いた。

ヒンジはなめらかであり、質点と棒の間の摩擦力と垂直抗力は系の内力であるから、正味の仕事をしない。棒が θ だけ回転したとき、棒の中心と質点（いずれも O から距

離 a）はそれぞれ $a\sin\theta$ だけ下降している。静止状態から動き始めるので、エネルギー保存則より

$$\tfrac{1}{2}(5ma^2)\dot{\theta}^2 = 3mg\,a\sin\theta + mg\,a\sin\theta = 4mga\sin\theta,$$

すなわち

$$5a\dot{\theta}^2 = 8g\sin\theta,$$

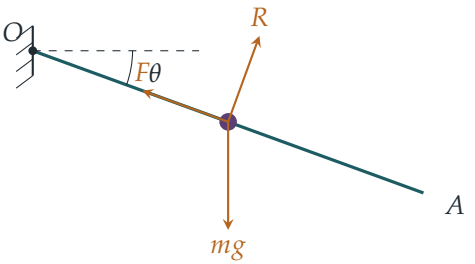
となり、求める式が得られた。これを t で微分すると $10a\dot{\theta}\ddot{\theta} = 8g\cos\theta\,\dot{\theta}$ となるので（運動が始まれば $\dot{\theta} \neq 0$ が成り立つことに注意して）

$$a\ddot{\theta} = \tfrac{4}{5}g\cos\theta.$$

を得る。（O のまわりのモーメントを考えても同じ結果 $5ma^2\ddot{\theta} = 4mga\cos\theta$ が得られる。）

質点がすべり出すとき

次に、質点だけを考える。質点にはたらく力は、重力 mg、棒に垂直な垂直抗力 R、棒に沿った摩擦力 F である。質点は O を中心とする半径 a の円周上を動くので、その加速度は、棒に沿って O に**向かう**成分 $a\dot{\theta}^2$ と、棒に垂直で θ が増加する向きの成分 $a\ddot{\theta}$ をもつ。



F は棒に沿って O に向かう向きにはたらくものとする。これは、後で確かめるように、質点が実際に必要とする向きである。棒に沿った方向で O に向かう向きを正として力を分解する。重力は O から**遠ざかる**向きに成分 $mg\sin\theta$ をもつので

$$F - mg\sin\theta = ma\dot{\theta}^2 = \tfrac{8}{5}mg\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad F = \tfrac{13}{5}mg\sin\theta.$$

棒に垂直な方向で、θ が増加する向き（棒から下向き）を正として分解する。重力の成分は $mg\cos\theta$ であるから

$$mg\cos\theta - R = ma\ddot{\theta} = \tfrac{4}{5}mg\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad R = \tfrac{1}{5}mg\cos\theta.$$

考えてみよう 重力は質点を斜面の下方へ引くように見えるのに、なぜ質点にはヒンジに向かう摩擦力が必要なのだろうか。

はたらいているのは重力だけではない。O のまわりの円運動を続けるためには、質点には O に向かう正味の力 $ma\dot{\theta}^2$ が必要である。重力の棒方向の成分はその逆、すなわち O から遠ざかる向きであるから、摩擦力は向心力（centripetal force）と、重力のその成分を打ち消す力の両方を担わなければならない。そのため F は O に向かう向きに正となり、$\sin\theta$ に比例して増加する。一方、R が小さいのは、棒が質点の下で「落ちていく」からである（$\theta = 0$ では質点は下向きに $\frac{4}{5}g$ の加速度をもつので、棒は質点の重さの $\frac{1}{5}$ しか支えていない）。

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ では F と R はともに正であるから、質点は棒から離れない。質点が棒に対して静止し続けるのは $F \le \frac{1}{2}R$ である間、すなわち

$$\tfrac{13}{5}mg\sin\theta \le \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{5}mg\cos\theta \iff \tan\theta \le \tfrac{1}{26}.$$

である間である。$\theta = 0$ では $F = 0 < \frac{1}{2}R$ であり、$F/R = 13\tan\theta$ は θ について増加するので、質点が初めて（ヒンジから遠ざかる外向きに）すべり始めるのは

$$\tan\theta = \tfrac{1}{26},$$

のときであり、求める結果が得られた。

検算

- $\theta = 0$ ではモーメントの式から角加速度は $\frac{4g}{5a}$ となる。よって質点の加速度は $\frac{4}{5}g$ で g より小さく、$R = \frac{1}{5}mg > 0$ と矛盾しない。
- 剛体としての運動を（$g = 9.81$、$a = 0.7$ として）数値的に時間発展させると、$5a\dot{\theta}^2 = 8g\sin\theta$ が 10^{-12} の精度で再現された。また、計算した質点の加速度から直接求めた摩擦力と抗力は $\frac{13}{5}mg\sin\theta$ および $\frac{1}{5}mg\cos\theta$ と一致した。比 F/R が初めて $\frac{1}{2}$ に達したのは $\theta \approx 0.03845$ rad のときであり、これは $\arctan\frac{1}{26} \approx 2.20^\circ$ である。

よくある間違い

- 向心加速度の項を忘れ、質点が斜面上でつり合っているかのように力を分解してしまう。こうすると角度が誤るだけでなく、摩擦力の向きも逆になる。
- $\frac{1}{3}(3m)(2a)^2$ は正しく使ったのに、慣性モーメントに質点の分 ma^2 を加え忘れる。
- 固定された斜面の場合と同様に $R = mg\cos\theta$ としてしまう。棒は加速しているので、抗力はそれよりずっと小さい。

STEP のその先へ

この問題は、回転座標系（rotating frame）で考えることへの最初の入り口である。棒から見ると、質点には外向きの「遠心力」$ma\dot{\theta}^2$ と「オイラー（Euler）力」$-ma\ddot{\theta}$ がはたらいているように見え、これらの見かけの力（fictitious forces）こそ、ここで求めた項にほかならない。大学の力学ではこれを体系的に展開し、質点がすべり始めた後に現れるコリオリ力（Coriolis force）もあわせて扱う。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の回転と非慣性系（non-inertial frame）を非常に明快に扱っている。

解答例

STEP III 1987、第 14 問

力学 ・ 重力崩壊

STEP III 1987、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/87-s3-q14

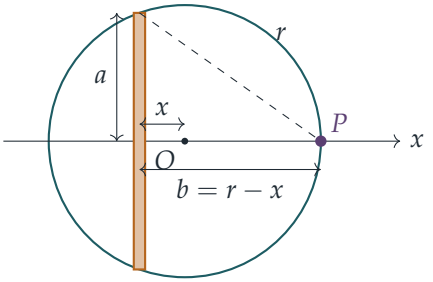
鍵となる考え方

中身の詰まった球は薄い円板を積み重ねたものとみなせるので、球全体から受ける力は、与えられた円板の公式を質点を通る軸に沿って積分（integral）したものになる。平方根は扱いにくそうに見えるが、質点が球の表面にある場合には根号の中の式が因数分解できることに気づけば道が開ける。その後の雲の問題は、連鎖律（chain rule）$\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dr}$ を用いたニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）であり、置換（substitution）$r = R\cos^2\alpha$ は、2 回目の積分で現れる平方根をすっきりさせるために用意されたものである。

解答

球の表面における力

球の中心を原点に、質点 P を x 軸上の $x = r$ に置く。球を軸に垂直な円板に切り分ける。位置 x（ただし $-r \le x \le r$）にある切片は厚さ δx、半径 a（$a^2 = r^2 - x^2$）をもち、P からその軸上で距離 $b = r - x \ge 0$ のところにある。



鍵となる簡略化は平方根の中にある。

$$a^2+b^2=(r^2-x^2)+(r-x)^2=2r^2-2rx=2r(r-x),$$

したがって

$$\frac{b}{(a^2+b^2)^{1/2}}=\frac{r-x}{\sqrt{2r(r-x)}}=\sqrt{\frac{r-x}{2r}}.$$

各円板は P を軸に沿って中心の方へ引くので、力はすべて同じ向きにはたらき、単純に足し合わせればよい。$\delta x\to 0$ とすると、力の合計は

$$\begin{aligned}F&=2\pi mk\rho\int_{-r}^{r}\left(1-\sqrt{\frac{r-x}{2r}}\right)\mathrm{d}x\\&=2\pi mk\rho\left(2r-\frac{1}{\sqrt{2r}}\int_0^{2r}u^{1/2}\,\mathrm{d}u\right)\qquad(u=r-x)\\&=2\pi mk\rho\left(2r-\frac{1}{\sqrt{2r}}\cdot\tfrac{2}{3}(2r)^{3/2}\right)=2\pi mk\rho\left(2r-\tfrac{4}{3}r\right)=\tfrac{4}{3}\pi mk\rho\, r.\end{aligned}$$

球の質量は $M=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$ であるから $\frac{4}{3}\pi\rho=M/r^3$ であり、

$$F=\frac{kmM}{r^2},$$

となる。向きは中心向きであり、これで示された。

雲の運動方程式

雲の粒子を質量 M の連続で一様な球とみなし、その表面上で中心から距離 r にある質量 m の粒子を考える。上の結果より、この粒子にはたらく力は中心向きの kmM/r^2 だけである。r を座標（外向きを正）にとると、ニュートンの運動の第 2 法則より

$$m\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{kmM}{r^2}.$$

ここで $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-v$ であるから $\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ であり、連鎖律より

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}.$$

よって $\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$ であり、m を約して

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}=-\frac{kM}{r^2}.$$

考えてみよう 円板の結果は静止した球についてのものであった。収縮していく雲にそれを使ってよいのはなぜか。

各瞬間の力はその瞬間に質量がどこにあるかだけで決まるので、雲が一様な球のままであり、表面の内側に同じ質量 M があり続けることが必要である。実際そうなっている。半径 λR（$0 < \lambda \leq 1$）で静止状態から出発する粒子の内側には質量 $\lambda^3 M$ があり、$r(t)$ が $\ddot{r} = -kM/r^2$ を満たすならば $\lambda r(t)$ は $\ddot{s} = -k\lambda^3 M/s^2$ を満たす。したがって、どの粒子も表面の半径に対して同じ比率の位置にとどまる。つまり雲は一様な倍率で縮み、一様なままであり、どの粒子も表面の粒子を追い越さない。（粒子の外側の質量が問題になるのは内部の粒子についてだけであり、表面の外側には質量は存在しない。）

静止状態からの収縮

変数分離（separation of variables）を行い、$v = 0$ となる $r = R$ から積分する。

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \int_R^r -\frac{kM}{s^2}\,\mathrm{d}s = kM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = \frac{kM(R-r)}{rR}.$$

加速度はつねに内向きであり、雲は静止状態から出発するので、r は減少し、つねに $v \geq 0$ である。

ここで $r = R\cos^2\alpha$ と置換する。r が R から 0 に向かって減少するにつれて、α は $t = 0$ での 0 から $\frac{\pi}{2}$ に向かって増加するものとする。すると $R - r = R\sin^2\alpha$ であるから

$$v^2 = \frac{2kM\,R\sin^2\alpha}{R^2\cos^2\alpha} = \frac{2kM}{R}\tan^2\alpha, \qquad v = \left(\frac{2kM}{R}\right)^{1/2}\tan\alpha,$$

となる。ここで、$v \geq 0$ であり、$0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ で $\tan\alpha \geq 0$ であるから正の平方根をとった。

考えてみよう α の関数としての v から、α の関数としての t をどうやって得るか。

$v = -\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ と $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} = -2R\cos\alpha\sin\alpha$ を用いる。

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha} = -\frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{2R\sin\alpha\cos\alpha}{(2kM/R)^{1/2}\tan\alpha} = \left(\frac{R^3}{2kM}\right)^{1/2} 2\cos^2\alpha = \left(\frac{R^3}{2kM}\right)^{1/2}(1+\cos 2\alpha).$$

$\alpha = 0$ のとき $t = 0$ として積分すると

$$t = \left(\frac{R^3}{2kM}\right)^{1/2}\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha\right),$$

となり、これが $r = R\cos^2\alpha$ となる時刻である。これで示された。

検算

- 短い時間：α が小さいとき $t \approx 2\alpha(R^3/2kM)^{1/2}$、$R - r \approx R\alpha^2$ であるから $R - r \approx \frac{1}{2}(kM/R^2)\,t^2$ となる。これは静止状態からの一定の加速度 kM/R^2 による運動であ

り、出発直後に予想されるとおりである。

- $\alpha \to \frac{\pi}{2}$ とすると、収縮に要する全時間 $\frac{\pi}{2}(R^3/2kM)^{1/2}$ が得られる。$v \to \infty$ となるにもかかわらず、この値は有限である。
- 数値的には、200 000 枚の薄い円板を足し合わせると、相対誤差約 2×10^{-9} で kmM/r^2 が再現される。$k = 1.7$、$M = 2.3$、$R = 1.9$ として $\ddot{r} = -kM/r^2$ を $\alpha = 0.8$ に対応する時刻まで数値的に進めると $r = 0.922260$ となり、$R\cos^2 0.8 = 0.922260$ と一致する。

よくある間違い

- b を質点からではなく球の中心から測ってしまう。正しくは $b = r - x$ であり、x ではない。
- v が**内向き**の速さであることを忘れる。このため $\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$ の符号が反転する。
- v として負の平方根をとってしまう。すると時間が負になってしまう。

STEP のその先へ

前半は、ニュートンの殻定理（shell theorem）の特別な場合である。殻定理とは、球対称な物体の外側では、重力はすべての質量が中心に集まっているかのようにはたらく、というものである。大学の講義では、重力に関するガウス（Gauss）の法則（Gauss's law）$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho$ を用いてこれを鮮やかに証明する。ここで求めた収縮時間は天体物理学でいう**自由落下時間**（free-fall time）であり、ガス雲がどれほど速く収縮して恒星を形成するかを見積もるのに使われる。また、α による媒介変数表示（parametrisation）は、動径方向のケプラー軌道（Kepler orbits）を記述するものと同じである。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このような考え方で中心力と殻定理を扱っている。

解答例

STEP III 1987、第 15 問

確率・統計 ・ 期待費用の最適化

STEP III 1987、問 15

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/87-s3-q15

鍵となる考え方

E_n を直接最小化するのではなく、検査を 1 回追加すると何が変わるかを考える。「n 回で打ち切る」戦略と「$n+1$ 回で打ち切る」戦略の違いは、それまでに n 回陽性が出ている患者についてしか生じない。そのような患者に対して、追加の検査には £10 かかるが、ステップ症候群の患者の検査結果が陰性であれば £100 の治療費が節約される。したがって $E_{n+1} - E_n$ の符号がすべてを決め、その符号が変わるのは高々 1 回である。

解答

患者がフェンランド熱にかかっているという事象を F とし、$\mathrm{P}(F) = p$ とする。また $S = F'$ をステップ症候群とする。ステップ症候群の患者の検査結果は互いに独立（independent）であり、各回の検査が陽性となる確率は q（ただし $0 < q < 1$）であると仮定する。治療費は誰が受けても £100 である。

小問 (i)

E_n を求める。患者が F であれば、検査は毎回陽性となる。したがって n 回の検査がすべて行われ、そのあと治療が行われるので、費用は $10n + 100$ である。

患者が S であれば、k 回目の検査（$1 \le k \le n$）が行われるのは最初の $k-1$ 回がすべて陽性だったときに限られ、その確率は q^{k-1} である。よって検査回数の期待値は

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q},$$

であり、患者が治療を受けるのは n 回の検査がすべて陽性のときに限られ、その確率

は q^n である。期待値の線形性（linearity of expectation）により、

$$E_n = p\,(10n + 100) + (1 - p)\left(\frac{10(1 - q^n)}{1 - q} + 100q^n\right).$$

これから $E_0 = 100$ も得られる。このときは全員が治療を受けるので、当然そうなるべきである。

差。 F の部分は 10 増える。S の部分では $\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - \dfrac{1 - q^n}{1 - q} = q^n$ であるから、

$$\begin{aligned} E_{n+1} - E_n &= 10p + (1 - p)\big(10q^n + 100q^{n+1} - 100q^n\big) \\ &= 10p + 10(1 - p)q^n(1 + 10q - 10) \\ &= 10p - 10(1 - p)q^n(9 - 10q), \end{aligned}$$

となり、求める式が得られた。

この結果の読み方：確率 p で、$n + 1$ 回目の検査はフェンランド熱の患者に対して無駄に行われる。確率 $(1 - p)q^n$ で、その検査はステップ症候群の患者に行われて £10 かかるが、確率 $1 - q$ で £100 が節約される。正味の節約額の期待値は $100(1 - q) - 10 = 10(9 - 10q)$ である。

数値。 $D_n = E_{n+1} - E_n$ とおく。$p = 10^{-4}$、$q = 10^{-2}$ のとき $9 - 10q = 8.9$、$1 - p = 0.9999$ であるから、

$$D_n = 10^{-3} - 89 \times 0.9999 \times 10^{-2n}.$$

? 考えてみよう D_n の符号が変わる位置を求めれば十分なのはなぜか？

ここで $9 - 10q > 0$ であり、q^n は n が大きくなるにつれて狭義単調減少するので、D_n は n について狭義単調増加する。したがって数列 E_n は $D_n < 0$ である間は減少し、$D_n > 0$ となってからは増加するので、最小となるのは $D_n > 0$ となる最初の n においてである。ここで

$$\begin{aligned} D_2 &= 10^{-3} - 0.0088991 < 0, \\ D_3 &= 10^{-3} - 0.000088991 = 0.000911\ldots > 0. \end{aligned}$$

よって $E_0 > E_1 > E_2 > E_3$ かつ $E_3 < E_4 < E_5 < \cdots$ であり、医師は $n = 3$ を選ぶべきである。（このとき費用の期待値は約 £10.11 であり、すぐに治療する場合の £100 と比べてはるかに小さい。）

小問 (ii)

$q_0 = \frac{9}{10}$ とし、$q > \frac{9}{10}$ と仮定する。このとき $9 - 10q < 0$ であるから、

$$D_n = 10p + 10(1 - p)q^n(10q - 9).$$

どちらの項も、すべての $p \in [0,1]$ に対して非負である。また両方が同時に 0 になることはない。実際、$p > 0$ ならば第 1 項が正であり、$p = 0$ ならば第 2 項は $10q^n(10q - 9) > 0$ である。よってすべての $n \geq 0$ に対して $D_n > 0$ であり、

$$E_0 < E_1 < E_2 < \cdots .$$

が成り立つ。p の値によらず、医師は $n = 0$ を選び、すぐに治療すべきである。

この q_0 の値はこれ以上小さくできない。$q < \frac{9}{10}$ ならば、$D_0 = 10p - 10(1-p)(9-10q)$ は p が十分小さいとき負になるので、少なくとも 1 回検査するほうが $n = 0$ よりよい。言葉で言えば、$q > \frac{9}{10}$ のとき、ステップ症候群の患者の検査が陰性になるのは 10 回に 1 回未満であるから、£10 の検査によって節約される治療費は平均して £10 に満たない。しかもこれは、フェンランド熱の患者の分を数える前の話である。

検算

- $n = 1$ を直接計算する：$E_1 = 10 + 100\big(p + (1-p)q\big)$。$p = 0$ とすると $E_1 - E_0 = 10 - 100(1-q)$ となり、公式の $-10q^0(9 - 10q)$ と一致する。
- $p = 10^{-4}$、$q = 10^{-2}$ のとき、公式から $E_0 = 100$、$E_1 \approx 11.010$、$E_2 \approx 10.1210$、$E_3 \approx 10.11309$、$E_4 \approx 10.11400$ が得られる。最小は $n = 3$ であり、求めた結果と一致する。
- 分数を用いた厳密な数え上げにより、数百組の無作為な (p, q) と $n \leq 8$ について E_n の公式と差の恒等式を確認した。また $p = 0.3$、$q = 0.5$、$n = 2$ のシミュレーションでは平均費用が 63.98 となり、厳密値 64 とよく一致した。

よくある間違い

- ステップ症候群の患者に n 回分すべての検査費用を課してしまう。手続きは最初に陰性が出た時点で終わるので、k 回目の検査が行われる確率は q^{k-1} にすぎない。
- D_n が単調（monotonic）である理由を述べずに、$D_n > 0$ となる最初の n を求めてしまう。それを示さなければ、数列 E_n が後で再び減少する可能性を原理的には否定できない。
- 小問 (ii) で $p = 0$ の場合を忘れる。この場合があるからこそ、条件は $q \geq q_0$ ではなく $q > q_0$ となる。$q = \frac{9}{10}$ かつ $p = 0$ のとき、すべての E_n が 100 に等しくなる。

STEP のその先へ

これは**最適停止**（optimal stopping）と決定理論（decision theory）の小さな例である。費用を伴う一連の行動、確率的な状態、そしていつ止めるかの規則がある。隣り合う戦略を比較し（「限界分析」（marginal analysis））、その差の符号が 1 回しか変わらないことを示すのが、このような問題を扱う標準的な方法である。これらの考え方は、ベイズ決定理論（Bayesian decision theory）や動的計画法（dynamic programming）へとつながっていく。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、それらを支える条件付き期待値（conditional expectation）の道具を扱っている。

解答例

STEP III 1987、第 16 問

確率・統計 ・ 順序統計量とポアソン分布

STEP III 1987、問 16

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/87-s3-q16

鍵となる考え方

小問 (i) では、事象「$A \le k$ かつ $B \ge 1-k$」を直接扱うのは面倒であるが、その余事象（complement）は二つの単純な事象「すべての X_i が k より大きい」と「すべての X_i が $1-k$ より小さい」の和事象（union）である。あとは包除原理（inclusion–exclusion）が仕事をしてくれる。小問 (ii) では、当選者の数は n が非常に大きく p が非常に小さい二項分布（binomial distribution）に従う。これはまさにポアソン分布（Poisson distribution）の出番である。そこで、当選者が 1 人または 2 人であるポアソン確率を最大化し、そのうえで近似によって答えが 60% を超えてしまうことがないことを確かめる。

解答

小問 (i)

E を事象 $A > k$、F を事象 $B < 1-k$ とする。$A > k$ はすべての X_i が k より大きいことを意味し、$B < 1-k$ はすべての X_i が $1-k$ より小さいことを意味する。独立性（independence）より

$$\mathrm{P}(E) = (1-k)^n, \qquad \mathrm{P}(F) = (1-k)^n, \qquad \mathrm{P}(E \cap F) = (1-2k)^n,$$

である。最後の式が成り立つのは、$E \cap F$ がすべての X_i が長さ $1-2k > 0$ の区間 $(k, 1-k)$ に入ることを表すからである。

求める事象は $E \cup F$ の余事象であるから、包除原理により

$$p_n = 1 - \mathrm{P}(E \cup F) = 1 - 2(1-k)^n + (1-2k)^n.$$

$0 < 1-2k < 1-k < 1$ であるから、どちらの累乗も 0 に収束し、したがって

$$p_n \to 1 \quad (\text{極限}) \; n \to \infty.$$

が成り立つ。

コメント。 k をどれほど小さくとっても、観測値が十分多ければ、ある観測値が 0 から k 以内にあり、別の観測値が 1 から k 以内にあることはほぼ確実になる。言い換えれば、標本の最小値は 0 に、最大値は 1 に（確率収束の意味で）収束し、したがって標本の範囲 $B-A$ は区間全体の長さ 1 に近づく。たとえば、未知の一様分布（uniform distribution）の端点の推定量（estimator）として A と B が自然なのはこのためである。

小問 (ii)

$N = 4\,000\,000$ とし、X を当選者の数とする。読者はそれぞれ確率 p で独立に当選するから、$X \sim \mathrm{B}(N,p)$ である。$q = 1-p$ とおく。あなたが職を失わずにすむのはちょうど $X=1$ または $X=2$ のときであり、その確率は

$$K(p) = Npq^{N-1} + \binom{N}{2} p^2 q^{N-2}.$$

である。

ポアソン分布による見方。 N が非常に大きく p が小さいとき、X は近似的に平均 $\lambda = Np$ のポアソン分布に従うから

$$K(p) \approx h(\lambda), \qquad \text{ただし} h(\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda}\Big(\lambda + \frac{\lambda^2}{2}\Big).$$

となる。微分すると

$$h'(\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda}\Big(1 + \lambda - \lambda - \frac{\lambda^2}{2}\Big) = \mathrm{e}^{-\lambda}\Big(1 - \frac{\lambda^2}{2}\Big),$$

であり、これは $0 < \lambda < \sqrt{2}$ で正、$\lambda > \sqrt{2}$ で負である。よって h は $\lambda = \sqrt{2}$ で最大値をとる：

$$h(\sqrt{2}) = \mathrm{e}^{-\sqrt{2}}\big(\sqrt{2}+1\big) \approx 0.2431 \times 2.4142 \approx 0.5869.$$

最善の選択は $p = \sqrt{2}/N \approx 3.5 \times 10^{-7}$ であり、それでも職を守れる確率は約 58.7% にすぎない。これが問題の求めている推論である。

> **考えてみよう** ポアソン分布は近似にすぎない。真の二項確率が 0.6 をわずかに上回ることはありえないだろうか。

ありえない。$K(p)$ を直接評価することができる。$q \le 1$ かつ $\binom{N}{2} \le \frac{1}{2}N^2$ であるから

$$K(p) = q^{N-2}\Big(Npq + \binom{N}{2}p^2\Big) \le q^{N-2}\Big(\lambda + \frac{\lambda^2}{2}\Big).$$

ここで、すべての p に対して $1-p \le \mathrm{e}^{-p}$ が成り立つ（直線 $1-p$ は凸（convex）な曲線 e^{-p} の $p=0$ における接線である）から、$\mu=(N-2)p$ とおくと $q^{N-2} \le \mathrm{e}^{-(N-2)p} = \mathrm{e}^{-\mu}$ である。$c = N/(N-2)$ とおくと、$c>1$ として $\lambda = c\mu$ となる。すると

$$K(p) \le \mathrm{e}^{-\mu}\left(c\mu + \frac{c^2\mu^2}{2}\right) \le c^2\,\mathrm{e}^{-\mu}\left(\mu + \frac{\mu^2}{2}\right) = c^2 h(\mu) \le c^2 h(\sqrt{2}).$$

ここで $c^2 = \left(1-\frac{2}{N}\right)^{-2} < 1.000002$ であるから、どのように p を選んでも

$$K(p) < 1.000002 \times 0.58694 < 0.587 < 0.6.$$

が成り立つ。したがって、p をどう選んでも、職を守れる確率は 60% 未満であり、これが示すべきことであった。

検算

- 小問 (i) で $n=1$ とすると $p_1 = 1-2(1-k)+(1-2k) = 0$ となる。これは正しい。$k<\frac{1}{2}$ のとき、ただ一つの観測値が $\le k$ かつ $\ge 1-k$ となることはありえない。$n=2$ のときは $p_2 = 2k^2$ となり、これは 2 点のうち一方がそれぞれの端の帯に入る確率（順序は問わない）である。
- $n=10$、$k=0.3$ でのシミュレーションでは 0.944 となり、公式の値 0.9436 と一致した。
- $\lambda = Np$ の細かい格子上で厳密な二項確率 $K(p)$ を計算すると、$\lambda \approx 1.414$ で最大値 0.58694 をとり、ポアソンによる値と小数第 5 位まで一致する。

よくある間違い

- $p_n = \mathrm{P}(A \le k)\,\mathrm{P}(B \ge 1-k)$ と書いてしまう。同じ標本の最小値と最大値は独立ではない。
- 二項確率を p について直接最大化しようとする。不可能ではないが計算が煩雑である。$\lambda = Np$ を用いれば、1 行で済む微分の問題になる。
- ポアソン近似で止めてしまい、0.587 が 0.6 に十分近く、何らかの正当化をする価値があることに気づかない。

STEP のその先へ

小問 (i) は**順序統計量**（order statistics）と確率収束（convergence in probability）への最初の入口である。標本の最小値と最大値は台（support）の両端に収束する。小問

(ii) はポアソンの「稀な事象の法則」(law of rare events) であり、ここで用いた評価は、p が小さいとき二項分布とポアソン分布が全変動距離（total variation）の意味で非常に近いという一般的な事実の簡単な例である。どちらの考え方も、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）や、Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）で展開されている。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

1987 年解答例. 本書全体、すべての章、すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.

