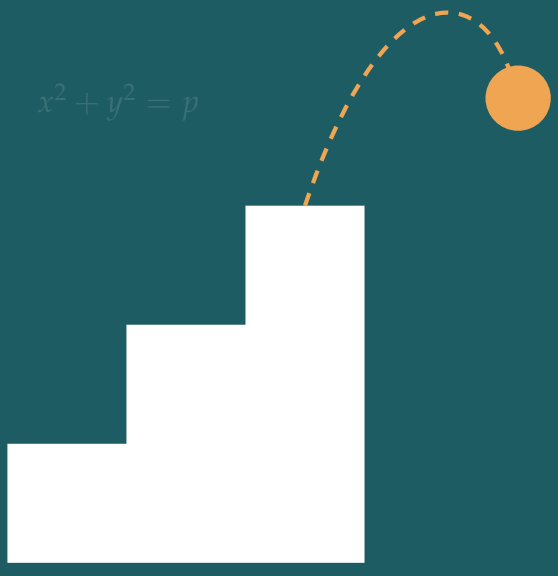
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

第 11 章

振動・回転・運動座標系



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

第 11 章

振動・回転・運動座標系

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

第 11 章：振動・回転・運動座標系

これは *Beyond STEP* 全 13 章のうちの第 11 章である。本書全体、各章単独の PDF、各節の印刷用ワークシート、そしてすべての STEP の問題の詳しい解答は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、`github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty` への issue として歓迎する。

章

11

振動・回転・運動する座標系

揺れるもの、回るもの、そして動いている場所から眺めたもの。

この章の内容

11.1	共鳴	STEP II 1991
11.2	基準振動	STEP III 2014
11.3	本当の振り子	STEP III 1998
11.4	等時曲線	STEP III 1994
11.5	加速する列車の中の重力	STEP II 2021
11.6	バックスピン	STEP III 1997
11.7	棒の中のシンプソンの公式	STEP II 1989
11.8	傾いたつり合い	STEP III 2025
11.9	安全放物線	STEP II 2014
11.10	こちらへ戻ってくるボール	STEP II 2019
11.11	野手はどのように捕球するか	STEP II 1998
11.12	ゴムひもの上のアリ	STEP II 2018
11.13	除雪車問題	STEP III 見本問題（Specimen paper）
11.14	懸垂線ではなく放物線	STEP I 1991
A	演習問題の答え	p. 95

運動を明快に見る

> 若い理論物理学者の経歴とは、調和振動子をますます高い
> 抽象度で扱い続けることにほかならない。
>
> — シドニー・コールマン（Sidney Coleman）の言葉とされる

前章では、保存則（conservation laws）を用いて衝突と重力を理解した。本章では、力学（dynamics）の最初の講義で扱われるほかの大きなテーマに目を向ける。すなわち、振動（oscillation）するもの、回転（rotation）するもの、そして最も有用な視点から運動を記述する技術である。

振動はいたるところにある。振り子とばねは教科書の定番の例であるが、同じ数学が分子の振動、建物の揺れ、ラジオの回路、さらには量子力学（quantum mechanics）における光そのもののふるまいをも記述する。その理由は、安定平衡（stable equilibrium）の近くにあるほとんどすべてのものが、ばねのようにふるまうからである。少しだけ引っ張ると、復元力（restoring force）は変位に比例する。したがって単振動子（simple harmonic oscillator）は、ほとんどあらゆる物理系の第一近似であり、物理学の大部分は、この近似が完全には正しくないときに何が起こるかを理解することから成り立っている。

なぜこれが重要なのか

技術者は、自分が建てるあらゆる構造物の固有振動数（natural frequencies）を知っていなければならない。それを風や交通や地震の振動数から遠ざけておくためである。化学者は分子をその振動によって識別する。ホイヘンス（Huygens）の振り子時計から水晶時計、原子時計に至るまで、時間の計測とは完璧な振動子をつくる技術である。回転は、スヌーカーの球の回転から人工衛星の安定性に至るまで、あらゆるものを支配している。そして、どの基準系（frame of reference）が「自然な」ものかという問いは、重力と加速度の等価性を経て、アインシュタイン（Einstein）の一般相対性理論（general relativity）へとつながった。

本章の最後には、**意外な軌道**としてまとめた 6 つの問題がある。放物体、アリ、野手、除雪車など、そのふるまいが直観の予想とは異なるものを扱う。いずれも短く洗練された問題であり、それぞれの中心にはれっきとした数学的アイデアがある。包絡線（envelope）、単調性（monotonicity）、フィードバック（feedback）、発散（divergence）、

線形微分方程式（linear differential equation）、そして放物線（parabola）と懸垂線（catenary）の違いである。

大学で出会うもの

大学 1 年の力学の講義では、単振動、減衰振動（damped oscillation）、強制振動（forced oscillation）、共鳴（resonance）、そして連成振動子（coupled oscillators）とその基準振動（normal modes）を扱う（ここで線形代数（linear algebra）と力学が出会う）。また、剛体（rigid body）、慣性モーメント（moment of inertia）、転がり運動（rolling）、さらに加速度運動や回転をする座標系における運動を、遠心力（centrifugal force）やコリオリ力（Coriolis force）とともに扱う。その後の講義では、これらすべてがラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）とハミルトン力学（Hamiltonian mechanics）へと発展し、そこでは座標の選び方が中心的なテーマとなる。また、空間に広がった振動である波動（waves）の理論へも発展する。振幅の大きい振り子のような非線形振動（nonlinear oscillations）は、楕円関数（elliptic functions）や第 8 章の力学系（dynamical systems）へとつながる。

本章を貫く問い

> **3 つの大きな問い**
>
> 1. **運動が単純になるのはいつか。**系がただ 1 つの決まった振動数で振動するのはどのようなときか。そうならないときには何が起こるのか。
> 2. **正しい視点とは何か。**どの座標、どの変数、どの基準系を選べば問題がやさしくなるのか。
> 3. **直観は信頼できるか。**運動についての日常的な直観はどこで誤るのか。そして数学はそれをどのように正すのか。

本章は振動から始まる。共鳴（Section 11.1）、基準振動、現実の振り子、そして等時曲線（tautochrone）である。続いて座標系と剛体に移る。加速する列車、回転するビー玉、3 つの質点のようにふるまう棒、そして 3 つの異なる傾きで静止できる立体である。最後の 6 つの節が意外な軌道である。

本章に登場するアイデア

§	主題	アイデア
11.1	強制振動	共鳴とうなり（beats）
11.2	連成振動子	基準振動は固有ベクトル（eigenvectors）である
11.3	現実の振り子	楕円積分（elliptic integrals）、算術幾何平均（AGM）
11.4	等時曲線	弧長（arc length）についての単振動
11.5	運動する座標系	見かけの力（fictitious forces）、等価原理（equivalence principle）
11.6	転がりと滑り	保存される角運動量（angular momentum）
11.7	慣性モーメント	力学的等価性（dynamical equivalence）、シンプソンの公式（Simpson's rule）
11.8	安定性	重心（centre of mass）を通る法線
11.9	放物運動	軌道の包絡線
11.10	放物運動	距離は増加するとは限らない
11.11	捕球	フィードバックの規則
11.12	伸びるロープ	割合と調和級数（harmonic series）
11.13	除雪車	距離の関数としての時間
11.14	吊り橋	懸垂線ではなく放物線

Section 11.6 と Section 11.7 の 2 つの節では回転の力学と慣性モーメントを用いるが、これらは 2019 年に STEP の出題範囲から外された。それでも収録したのは、いずれも優れた問題だからである。どちらの節でも、必要な事実はその場で与えてある。

本章の読み方

計算を始める前に、その問題がどの変数を求めているのかを考えよう。等時曲線では弧長、連成ばねでは $x \pm y$、アリではロープ全体に対する割合、除雪車では距離の関数としての時間である。いずれの場合も、正しい選択をすれば、難しい問題が見慣れた問題に変わる。

11.1 共鳴

問題

STEP II 1991、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/91-s2-q12`

導入

ブランコに乗った子どもをちょうどよいタイミングで押すと、小さな一押しが積み重なって大きな揺れになる。リズムを外して押しても、たいしたことは起こらない。振動する系にはどれも**固有振動数**（natural frequency）があり、その振動数で系を駆動すると、加えた力とは釣り合わないほど大きな応答が生じる。これが**共振**（resonance）である。歌手がワイングラスを割ることができるのも、兵士が橋を渡るときに歩調を乱すのも、ラジオが何千もの放送局の中から一つを選び出せるのも、これが理由である。

この問題では、弾性ひもの上端を揺らし、ひもがたるまずに張ったままでいるのはどのようなときかを問う。答えには因子 $\frac{1}{n-p}$ が含まれ、駆動振動数 p が固有振動数 n に近づくと、この因子は限りなく大きくなる。共振の近くでは、ゆるやかに揺らすだけでひもがたるんでしまうのである。

取りかかる前に

考えてみよう 質点は伸び（extension）c で平衡（equilibrium）の状態にぶら下がっている。ひもの弾性率（modulus）を λ とするとき、λ、a、c、m、g の間にはどのような関係があるか。上端が $b\sin pt$ だけ下がり、質点が x だけ下がったとき、伸びはいくらか。

平衡状態では張力（tension）と重力が等しい：$\frac{\lambda c}{a} = mg$。上端が $b\sin pt$ だけ下に変位し、質点が x だけ下に変位すると、ひもの長さは $x - b\sin pt$ だけ増えるので、伸びは

$c + x - b\sin pt$ である。

順を追って解く

段階 1　運動方程式

下向きを正とすると、質点にはたらく力は重力 mg と、上向きの張力 $\frac{\lambda}{a}(c + x - b\sin pt)$ である。$\frac{\lambda c}{a} = mg$ を用いると、

$$m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{a}(c + x - b\sin pt) = -\frac{\lambda}{a}(x - b\sin pt),$$

となる。$\frac{\lambda}{ma} = \frac{g}{c} = n^2$ であるから、これは $\ddot{x} = -n^2(x - b\sin pt)$ である。 ■

質点は、動く点 $b\sin pt$ に向かってばねのような力で引かれている。駆動がなければ、質点は角振動数（angular frequency）n、すなわち固有振動数で振動する。

段階 2　解を求める

考えてみよう　方程式は $\ddot{x} + n^2x = n^2b\sin pt$ である。$x = C\sin pt$ の形の特解（particular solution）を試してみよ。次に $\ddot{x} + n^2x = 0$ の一般解（general solution）を加えよ。質点はどのような初期条件を満たすか。

$x = C\sin pt$ を代入すると $(-p^2 + n^2)C = n^2b$ となるので、$C = \frac{n^2b}{n^2 - p^2}$ である（$p \neq n$ が必要）。余関数（complementary function）は $D\cos nt + E\sin nt$ である。質点は平衡位置で静止した状態から動き始める。$x(0) = 0$ から $D = 0$ が従い、$\dot{x}(0) = 0$ から $Cp + En = 0$ が得られるので、$E = -\frac{nbp}{n^2 - p^2}$ である。以上をまとめると、

$$x(t) = \frac{bn}{n^2 - p^2}(n\sin pt - p\sin nt).$$ ■

段階 3　張ったままでいる条件

考えてみよう　ひもが張っているのは、伸びが正であるときであり、またそのときに限る。伸び $c + x - b\sin pt$ を t で表せ。

$x(t)$ から $b\sin pt$ を引くと、

$$\begin{aligned} x - b\sin pt &= \frac{b}{n^2 - p^2}\left(n^2\sin pt - np\sin nt - (n^2 - p^2)\sin pt\right) \\ &= \frac{bp}{n^2 - p^2}(p\sin pt - n\sin nt). \end{aligned}$$

したがって、ひもが常に張ったままでいるための必要十分条件は

$$c + \frac{bp}{n^2 - p^2}(p \sin pt - n \sin nt) \geq 0 \qquad \text{すべての} t \geq 0.$$

である。

考えてみよう $p \sin pt - n \sin nt$ はどこまで小さな負の値をとりうるか。

$|\sin| \leq 1$ であるから、$p \sin pt - n \sin nt \geq -(p+n)$ が成り立つ。よって伸びは少なくとも

$$c - \frac{bp(n+p)}{n^2 - p^2} = c - \frac{bp}{n-p},$$

であり、$pb < (n-p)c$ ならばこれは正である。 ■

手を止めて、やってみよう p が n に近づくと、この条件はどうなるか。$p = 0.9n$ のとき、揺らす振幅 b はどれほど小さくなければならないか。$p = 0.99n$ のときはどうか。

振り返り

- **平衡位置から測る。** 平衡状態での伸び c を用いることで、方程式から重力が消えた。
- **特解と余関数の和。** 振動数 p の強制応答と振動数 n の自由振動を足し合わせ、定数は初期条件から定めた。
- **解かずに評価する。** 伸びの最小値を正確に求めたわけではない。十分条件（sufficient condition）を得るには、正弦についての大まかな評価で足りた。

背後にある数学

共振の極限

解において $p \to n$ とする。分子も分母も 0 に近づくが、極限の計算（あるいは p について微分するロピタルの定理（l'Hôpital's rule））により

$$x(t) \to \frac{b}{2}(\sin nt - nt \cos nt).$$

が得られる。項 $nt \cos nt$ は限りなく大きくなる。ちょうど固有振動数で駆動すると、振幅は時間に比例して増加する。一押しごとに、運動と歩調を合わせて揺れが加算されていくからである。共振より少し下では、二つの振動数の位相が合ったりずれたりを繰り返し、うなり（beats）が生じる。振幅は遅い振動数 $n - p$ で膨らんではしぼむ

(図 11.1.1)。ほとんど調弦の合った二本のギターの弦を鳴らしたときにも、同じうなりが聞こえる。

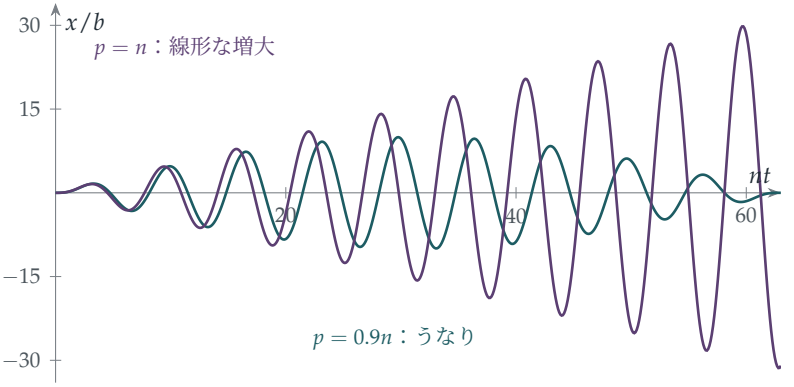


図 11.1.1　質点の応答（たるみは無視する）。揺らす振幅 b を単位としている。$p = 0.9n$（ティール）のとき、応答は b の約 10 倍まで膨らみ、再びしぼむ。うなりの周期は $\frac{2\pi}{n-p}$ である。ちょうど共振する $p = n$（プラム）のとき、振幅は限りなく増大する。

減衰と共振曲線

現実の系は摩擦や空気抵抗によってエネルギーを失い、それが振幅の増大を抑える。減衰（damping）があると、振動数 p の駆動力に対する定常応答の振幅は固有振動数の近くで最大になる。ピークが鋭いほど、減衰は小さい。技術者はこれを **Q 値**（quality factor）Q で表す。大まかに言えば、系がエネルギーの大部分を失うまでに行う振動の回数である。ワイングラスの Q は数千にもなるので、ちょうど固有振動数の音を持続させるとグラスが割れることがある。自動車のサスペンションには意図的に低い Q が与えられており、段差を越えても車体が弾み続けないようになっている。

揺れる橋

1831 年、マンチェスター近郊のブロートン吊り橋を歩調をそろえて行進する兵士の隊列が橋を振動させ、ついには崩落させた。それ以来、軍隊は橋の上では歩調を乱すよう命じられている。2000 年 6 月に開通したロンドンのミレニアム・ブリッジは、群衆が渡り始めるとすぐに横揺れを始めた。歩行者が無意識のうちに揺れに合わせて歩調を調整し、揺れと同じ位相でエネルギーを供給してしまったのである。橋は閉鎖され、ダンパーを取り付けるのに 2 年を要した。1940 年のタコマナローズ橋の有名な崩落はしばしば共振として説明されるが、実際には別の現象、すなわち**空力弾性フラッター**（aeroelastic flutter）であった。これは、風の力が橋自身の運動に依存する現象である。その解析には、自励振動（self-excited oscillation）とリミットサイク

ル（limit cycle）の考え方が必要になる（Section 8.4）。

思考のスキル

強制応答と自由応答を重ね合わせる

周期的な力で駆動される線形方程式の解は、駆動振動数での応答と、初期条件に合うように選んだ固有振動数での自由振動との和である。

これがうまくいくのは線形性（linearity）のおかげであり、解どうしを足し合わせることができる。大学では、同じ原理を多数の駆動振動数の和に適用することで、フーリエ解析（Fourier analysis）、工学における伝達関数（transfer function）、物理学におけるグリーン関数（Green's function）へとつながっていく。

次の一歩

1 **落下するエレベーター。** STEP II 1996、問 11（`step.maths.org/questions/96-s2-q11`）に挑戦してみよ。エレベーターの中で弾性ひもにつるされたおもりを扱う問題で、エレベーターは加速を始め、その後加速をやめる。最終的な振幅が、加速の続く時間によってどのように変わるかに注目せよ。

2 **共振するとき。** $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ のもとで $\ddot{x} + n^2 x = n^2 b \sin nt$ を、特解 $x = Ct\cos nt$ を試すことで直接解け。それが上の極限と一致することを確かめよ。

3 **うなり。** $n\sin pt - p\sin nt$ が二つの項の和として書け、p が n に近いとき、そのうち一方がおよそ $2n\cos\frac{(n+p)t}{2}\sin\frac{(p-n)t}{2}$ になることを示せ。それを用いて、うなりの周期が $\frac{2\pi}{n-p}$ となることを説明せよ。

4 **減衰のある共振。** 小さな $k > 0$ に対して $\ddot{x} + 2k\dot{x} + n^2 x = F\cos pt$ の定常状態（steady state）の振幅を求め、それが $p^2 = n^2 - 2k^2$ のときに最大となることを示せ。

さらに学ぶために

- **A. P. French, *Vibrations and Waves***（MIT Introductory Physics Series）。『振動と波動』。強制振動と共振を扱った第 4 章は、この題材の古典的な解説である。

- **Steven Strogatz, *Sync***（Penguin）。『同期』。ホタルからミレニアム・ブリッジまで、ものごとがどのようにして歩調をそろえるのかを描く。
- **Henry Petroski, *To Engineer Is Human***（Vintage）。『人はだれでもエンジニア』。歴史のコラムで取り上げた橋を含む、工学上の失敗を扱っている。

11.2 基準振動

問題

STEP III 2014、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/14-s3-q10`

導入

ばねにつけた 1 個の質点は、単純で規則正しく上下に振動する。ところが 2 個の質点をばねでつなぐと、運動は複雑に見える。それぞれの質点は不規則にがたがたと動き、エネルギーは一方から他方へと行き来する。しかしその複雑さの中には、完全に単純な二つの運動が隠れている。それが**基準振動**（normal modes）であり、そこでは質点どうしが同じ向きに、あるいはちょうど逆向きに動き、各基準振動はそれぞれ固有の振動数（frequency）で振動する。系のあらゆる運動は、この二つの組合せである。

この問題では、3 本のばねの間にある 2 個の質点の基準振動を求め、さらに驚くべき事実を証明する。一方の質点をずらして静止状態から動かし始めると、系は**決して**もとの位置に戻らないのである。その理由は、二つの振動数の比が $\sqrt{3}$ であり、$\sqrt{3}$ が無理数（irrational）だからである。

取りかかる前に

考えてみよう X が P から距離 $a+x$ の位置にあり、Y が Q から距離 $a+y$ の位置にあるとき、中央のばね XY の長さはいくらか。x と y が正のとき、どのばねが伸びていて、どのばねが縮んでいるか。

三つの長さの和は $3a$ なので、$XY = 3a - (a+x) - (a+y) = a - x - y$ である。$x, y > 0$ のとき、外側のばねは（それぞれ x と y だけ）伸びており、中央のばねは（$x+y$ だけ）縮んでいる。

順を追って解く

段階 1　運動方程式

x は P から Q へ向かう向きを正として測る。ばね PX の伸び（extension）は x なので、その張力（tension）$\frac{\lambda x}{a}$ は X を P の方へ引き戻す。ばね XY の伸びは $-(x+y)$ なので、その張力 $-\frac{\lambda(x+y)}{a}$ は X を Y の方へ引く（負の張力は押す力を表す）。したがって、運動方程式（equation of motion）は

$$m\ddot{x} = -\frac{\lambda x}{a} - \frac{\lambda(x+y)}{a} = -\frac{\lambda}{a}(2x+y). \qquad \blacksquare$$

対称性により（X と Y、P と Q の役割を入れ替えて）、

$$m\ddot{y} = -\frac{\lambda}{a}(2y+x).$$

段階 2　分離

考えてみよう　どちらの方程式にも x と y の両方が含まれている。二つの方程式をどのように組み合わせれば、x と y のただ一つの組合せだけを含む式が得られるか。

辺々引いたり足したりすると、

$$m(\ddot{x}-\ddot{y}) = -\frac{\lambda}{a}(x-y), \qquad m(\ddot{x}+\ddot{y}) = -\frac{3\lambda}{a}(x+y).$$

いずれも単振動（simple harmonic motion）の方程式である。$x-y$ は $\omega^2 = \frac{\lambda}{ma}$ で、$x+y$ は $3\omega^2$ で振動する。

段階 3　初期条件

はじめ $XP = a$、$YQ = \frac{1}{2}a$ なので、$x = 0$、$y = -\frac{1}{2}a$ であり、両方の質点は静止している。よって $t = 0$ において $x - y = \frac{1}{2}a$、$x + y = -\frac{1}{2}a$ で、それらの変化率は 0 である。したがって

$$x - y = \tfrac{1}{2}a\cos\omega t, \qquad x + y = -\tfrac{1}{2}a\cos\sqrt{3}\,\omega t.$$

ゆえに $A = \frac{1}{2}a$、$B = 0$ である。 $\blacksquare$

段階 4　決して戻らない

考えてみよう　y を t で表せ。Y がもとの位置に戻るには $y = -\frac{1}{2}a$ でなければならない。そのとき二つの余弦はそれぞれいくらでなければならないか。

辺々引くと、$y = \frac{1}{2}\big((x+y)-(x-y)\big) = -\frac{1}{4}a\big(\cos\sqrt{3}\,\omega t + \cos\omega t\big)$ である。$y = -\frac{1}{2}a$ となるには $\cos\sqrt{3}\,\omega t + \cos\omega t = 2$ が必要であり、各余弦は高々 1 なので、どちらも 1 に等しくなければならない。すなわち、整数 k、j に対して

$$\omega t = 2\pi k, \qquad \sqrt{3}\,\omega t = 2\pi j$$

である。$t > 0$ ならば $k \geq 1$ であり、辺々割ると $\sqrt{3} = \frac{j}{k}$ となるが、$\sqrt{3}$ は無理数なのでこれは不可能である。したがって Y は決してもとの位置に戻らない。 ■

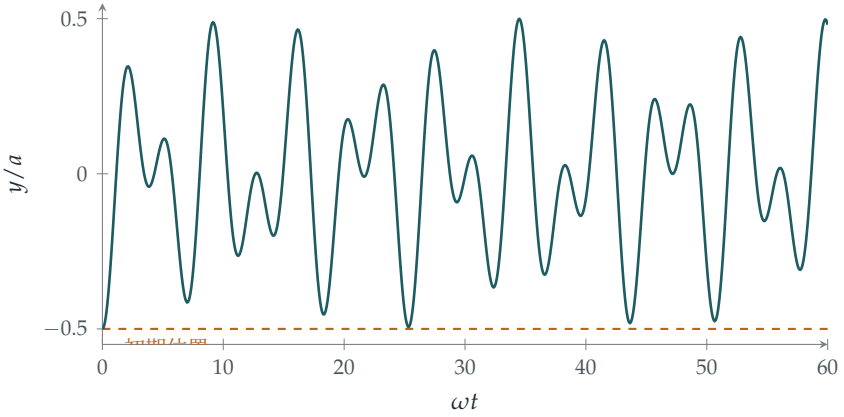


図 11.2.1 質点 Y の変位 y。これは振動数の比が $\sqrt{3}:1$ である二つの振動の和なので、そのパターンは決して繰り返さない。Y は初期位置（破線）に何度も近づき、たとえば $\omega t \approx 25$ 付近（$\omega t \approx 8\pi$、$\sqrt{3}\,\omega t \approx 14\pi$ となるところ）でかなり近づくが、厳密にそこに達することは決してない。

振り返り

- **分離する組合せを見つける。** $x-y$ と $x+y$ は、それぞれ独立した方程式を満たした。
- **対称性がそれを示唆する。** この系は左右を入れ替えても対称なので、対称な組合せと反対称な組合せを考えるのは自然である。
- **無理数性は物理的な帰結をもつ。** 振動数の比が無理数であるために、運動は周期的にならない。

背後にある数学

基準振動は固有ベクトルである

方程式を行列の方程式として書くと、

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = -\frac{\lambda}{a}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

分離する組合せは、この行列の固有ベクトル（eigenvector）である。すなわち、固有値（eigenvalue）1 に対する $(1,-1)$ と、固有値 3 に対する $(1,1)$ である（Section 7.2）。第一の基準振動では $x=-y$ であり、二つの質点は直線上を同じ向きに動き（x と y は反対側の端から測っていることに注意）、中央のばねの長さは変わらない。第二の基準振動では $x=y$ であり、二つの質点は逆向きに動いて中央のばねを縮めたり伸ばしたりするので、振動数が高くなる。振動数の 2 乗は、固有値に $\frac{\lambda}{ma}$ を掛けたものである。

これは質点とばねが何個あっても成り立つ。N 個の連成振動子からなる系には N 個の基準振動があり、それらは対称行列の固有ベクトルで与えられる。そしてスペクトル定理（spectral theorem）により、それらは必ず存在し、互いに直交することが保証される。分子は基準振動で振動しており、化学者はそれを利用して、分子が吸収する赤外線から分子を同定する。建物や橋にも基準振動があり、技術者はそれを風や地震の振動数から遠ざけておかなければならない。さらに質点の個数を無限大にすると、基準振動は振動する弦の倍音となり、これがフーリエ解析（Fourier analysis）の出発点である。

到達はしないが近づく

Y は厳密にもとの位置に戻ることはないが、いくらでも近くまで来る。その理由はクロネッカー（Kronecker）の定理にある。α が無理数ならば、倍数 $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$ を 1 を法として考えると、それらは $[0,1]$ のあらゆる数にいくらでも近づく。よって、ωt が 2π の倍数であり、かつ $\sqrt{3}\,\omega t$ が 2π の倍数と任意の許容誤差以内にあるような時刻を見つけることができる。この運動は**準周期的**（quasi-periodic）であり、トーラス（torus）（各基準振動に一つずつ角度をとったもの）の上を、決して閉じることなく巻きついていく。振動数の比が有理数か無理数かという同じ区別が、太陽系の安定性に関する KAM 定理の核心にある。

思考のスキル

変数を変換して方程式を分離する

方程式が連立している（互いに結びついている）ときは、独立に変化する変数の組合せを探せ。線形の問題では、それが固有ベクトルである。

これは Section 10.6 の重心（centre of mass）と相対座標と同じ考え方である。大学では、これは対角化（diagonalisation）となる。行列が対角行列になるような基底を選べば、連立した方程式の系は独立な方程式へとばらばらに分かれるのである。

次の一歩

1 **エネルギー。** 全エネルギー $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{\lambda}{2a}\left(x^2+y^2+(x+y)^2\right)$ が一定であること、さらにそれが各基準振動に一つずつ対応する二つの項の和に分かれ、それぞれの項が個別に一定であることを示せ。

2 **純粋な基準振動。** 運動が周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ の周期運動になるようにするには、質点をどのように動かし始めればよいか。周期 $\frac{2\pi}{\sqrt{3}\,\omega}$ の場合はどうか。

3 **硬い中央のばね。** 中央のばねの弾性率（modulus）が λ ではなく μ であるとき、二つの基準振動の振動数を求めよ。μ/λ がどのような値のとき、あらゆる運動が周期的になるか。

4 **3 個の質点。** 等しい質量をもつ 3 個の質点が、二つの固定点の間で 4 本の同一のばねによって一直線につながれている。行列とその固有値（$2-\sqrt{2}$、2、$2+\sqrt{2}$）を求め、三つの基準振動を説明せよ。

さらに学ぶために

- **A. P. French, *Vibrations and Waves***（MIT Introductory Physics Series）、第 5 章。連成振動子と基準振動について。
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）、固有値の章。ばねと質点を主要な例として扱っている。
- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）、第 8 章。トーラス上の準周期運動について。

11.3 本当の振り子

問題

STEP III 1998、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/98-s3-q11`

導入

物理を学ぶ者は誰でも、振り子の周期（period）は振れの大きさによらず $2\pi\sqrt{l/g}$ であると教わる。ガリレオ（Galileo）はこれを信じていた。ピサ大聖堂で揺れるランプの時間を自分の脈拍で計ったのがきっかけだと伝えられている。そして、振り子時計が成り立つのもこの性質のおかげである。しかし、これは厳密には正しくない。この公式は近似 $\sin\theta \approx \theta$ から導かれたものであり、大きな弧を描いて振れる振り子はより長い時間がかかる。90° では周期は 18% 長くなり、ほぼ真上の位置から放した振り子はいくらでも長い時間をかけうる。

この問題では、まず厳密な周期を積分として求め、次にほどほどの振れに対する最初の補正を求める。この積分は初等関数では計算できない。それは**楕円積分**（elliptic integral）であり、こうした積分がどのように手なずけられてきたかという物語は、ガウス（Gauss）の算術幾何平均（arithmetic–geometric mean）から楕円曲線（elliptic curve）の理論にまで及ぶ。

取りかかる前に

考えてみよう おもりは半径 l の円周上を動く。その速さと（最下点を基準とした）高さを θ と $\dot{\theta}$ を用いて表すとどうなるか？

速さは $l\dot{\theta}$ であり、最下点からの高さは $l(1-\cos\theta)$ である。糸は仕事をしない（その張力（tension）はつねに運動の方向に垂直である）ので、エネルギーは保存される（エネルギー保存則（conservation of energy））。

順を追って解く

段階 1　エネルギー

最大の角度 γ において、おもりは一瞬静止する。エネルギー保存則より

$$\tfrac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 + mgl(1-\cos\theta) = mgl(1-\cos\gamma),$$

が成り立ち、両辺を ml で割ると $\tfrac{1}{2}l\dot\theta^2 = g(\cos\theta-\cos\gamma)$ を得る。 ■

段階 2　積分としての周期

考えてみよう　$\cos\theta-\cos\gamma$ を半角（half-angle）を用いて表すにはどうすればよいか？　また、$\theta=0$ から $\theta=\gamma$ まで進むのに周期のどれだけの部分が費やされるか？

$\cos\theta = 1-2\sin^2\tfrac{\theta}{2}$ を用いると $\cos\theta-\cos\gamma = 2(\sin^2\tfrac{\gamma}{2}-\sin^2\tfrac{\theta}{2})$ となるので、

$$\dot\theta = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\sin^2\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{1/2}.$$

対称性より、0 から γ までの振れには周期の 4 分の 1 の時間がかかるので、

$$P = 4\int_0^{\gamma}\frac{\mathrm{d}\theta}{\dot\theta} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\gamma}\left(\sin^2\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{-1/2}\mathrm{d}\theta. \qquad ■$$

段階 3　特異点を取り除く

考えてみよう　被積分関数（integrand）は $\theta=\gamma$ で無限大になる。$k=\sin\tfrac{\gamma}{2}$ とおき、$\sin\tfrac{\theta}{2}=k\sin\phi$ と置換する。$0\le\theta\le\gamma$ に対応する ϕ の範囲は何か？　被積分関数はどうなるか？

θ が 0 から γ まで動くとき、ϕ は 0 から $\tfrac{\pi}{2}$ まで動く。微分すると $\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi$ となるので、

$$\mathrm{d}\theta = \frac{2k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}.$$

一方、$\sin^2\tfrac{\gamma}{2}-\sin^2\tfrac{\theta}{2} = k^2(1-\sin^2\phi) = k^2\cos^2\phi$ である。厄介な因子は約分されて消える：

$$P = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{k\cos\phi}\cdot\frac{2k\cos\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}\,\mathrm{d}\phi = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}.$$

$k < 1$ であるから、新しい被積分関数はまったく問題なく振る舞う。これで特異点（singularity）が取り除かれた。

段階 4 最初の補正

考えてみよう k が小さいとき、$(1 - k^2 \sin^2\phi)^{-1/2}$ を二項定理（binomial theorem）で展開せよ。$\int_0^{\pi/2} \sin^2\phi \, d\phi$ の値はいくらか？

1 次の近似で $(1 - k^2 \sin^2\phi)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2\phi$ であり、$\int_0^{\pi/2} \sin^2\phi \, d\phi = \frac{\pi}{4}$ である。よって

$$P \approx 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k^2}{2} \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{k^2}{4}\right).$$

γ が小さいとき $k = \sin\frac{\gamma}{2} \approx \frac{\gamma}{2}$ であるから、$k^2 \approx \frac{\gamma^2}{4}$ となり、

$$P \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\gamma^2}{16}\right). \qquad \blacksquare$$

20° の振れ（$\gamma \approx 0.35$）では補正は 1% 未満であり、60° では約 7% である（図 11.3.1）。

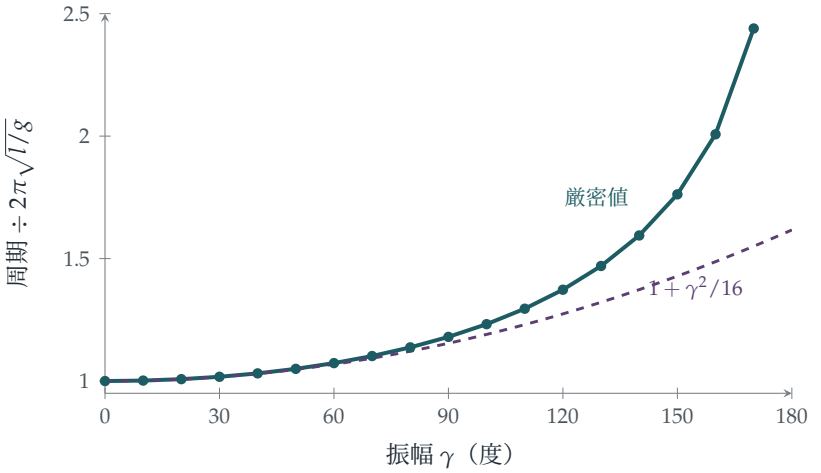


図 11.3.1 振り子の厳密な周期（ティール）を微小角での値との比として振幅（amplitude）に対してプロットし、近似 $1 + \gamma^2/16$（プラム、破線）と比較したもの。近似は約 60° まで非常によい。$\gamma \to 180°$ のとき真の周期は無限大に発散する。真上で釣り合った振り子は、倒れるまでに永遠の時間がかかるのである。

振り返り

- **エネルギーから第一積分が得られる。** 2 階の方程式が 1 階の方程式になり、周期は積分として表された（第一積分（first integral））。
- **置換によって特異点を手なずける。** 被積分関数は折り返し点で発散したが、置換 $\sin\frac{\theta}{2} = k\sin\phi$ によってこの問題が取り除かれた。
- **まず厳密に、それから近似する。** 厳密な公式を求めてから展開した。こうすることで、近似がどれほどよいかもわかる。

背後にある数学

楕円積分

積分

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}}$$

は**第一種完全楕円積分**（complete elliptic integral of the first kind）とよばれる。この名は、これと近い関係にある積分が楕円の周の長さを与えることに由来する。厳密な周期は $P = 4\sqrt{l/g}\,K\bigl(\sin\frac{\gamma}{2}\bigr)$ である。被積分関数を完全に展開し、Section 4.4 のウォリス（Wallis）積分 $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\phi\,\mathrm{d}\phi$ を用いて項別に積分すると、

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\Bigl(1 + \bigl(\tfrac{1}{2}\bigr)^2k^2 + \bigl(\tfrac{1\cdot3}{2\cdot4}\bigr)^2k^4 + \bigl(\tfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\bigr)^2k^6 + \cdots\Bigr).$$

を得る。なじみのある関数を有限回組み合わせても $K(k)$ は得られない。これは真に新しい関数なのである。

ガウスの驚くべき公式

K を計算するには、はるかによい方法がある。Section 2.6 では**算術幾何平均**を学んだ。a と b から始めて、それらを相加平均と相乗平均で置き換えることを繰り返すのであった。ガウスは 1799 年に

$$K(k) = \frac{\pi}{2\,\mathrm{AGM}\bigl(1, \sqrt{1-k^2}\bigr)},$$

であることを発見した。したがって、振幅 γ の振り子の周期は厳密に

$$P = \frac{2\pi\sqrt{l/g}}{\mathrm{AGM}\bigl(1, \cos\frac{\gamma}{2}\bigr)}.$$

となる。AGM は非常に速く収束するので、約 160° までの振れであれば、3〜4 ステップで周期が有効数字 10 桁まで得られる。図 11.3.1 の値もこの方法で計算したものである。180° に近づくと 2 つの初期値 1 と $\cos\frac{\gamma}{2}$ は大きく離れるため、もう 1〜2 ステップ余分にかかるが、179° でも 5 ステップで十分である。ガウスは日記に、この発見は「解析学のまったく新しい分野を開く」と記しており、それは正しかった。楕円積分の逆関数を考えることで、アーベル（Abel）とヤコビ（Jacobi）は**楕円関数**（elliptic function）に到達し、楕円関数はさらに**楕円曲線**へとつながった。楕円曲線は今日、数論（number theory）の中心にあり（フェルマーの最終定理（Fermat's Last Theorem）の証明の鍵であった）、またインターネットの安全を守る暗号（cryptography）の中心にもある。

ガリレオのランプとホイヘンスの時計

振り子の周期は振幅によらないというガリレオの主張は 1602 年ごろになされたもので、彼が調べた小さな振れについてはよい近似であった。ホイヘンス（Huygens）はそれが厳密ではないことに気づき、1659 年に、周期が本当に振幅によらなくなる曲線を発見した。それがサイクロイド（cycloid）であり、Section 11.4 の主題である。1656 年以降に彼が製作した振り子時計によって、時計の誤差は 1 日あたり約 15 分から約 15 秒にまで改善された。海上で経度を求める問題を解決したマリンクロノメーター（marine chronometer）は、のちに振り子をまったく用いなくなったが、振り子時計は 1920 年代まで世界で最も正確な時計であり続けた。

思考のスキル

厳密な積分から級数近似へ

ある量が計算できない積分で与えられているときは、それを扱いやすい形に変形し、被積分関数を展開して項別に積分せよ。

これは物理学者が理想化された結果に対する補正を求める方法であり、**摂動論**（perturbation theory）の出発点でもある。大学では、項別積分（term-by-term integration）が正当化されるのはどのようなときか（一様収束（uniform convergence））、また途中で打ち切ったときの誤差をどう評価するかを学ぶことになる。

次の一歩

1. **つながれた粒子。** STEP III 2015、問 9（`step.maths.org/questions/15-s3-q9`）に挑戦せよ。これは、微小振動であっても周期が振幅に依存する振動子である。振り子の周期は依存しないのに、なぜこの振動子では依存するのか？

2. **次の項。** 二項展開をもう 1 項先まで進め、$P \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\gamma^2}{16} + \frac{11\gamma^4}{3072}\right)$ であることを示せ。

3. **手計算による AGM。** AGM を 3 ステップ用いて振幅 90° の振り子の周期を見積もり、図中の値 1.1803 と比較せよ。

4. **時計。** ある振り子時計は、振幅 4° で正確に時を刻むよう調整されている。振幅が 5° に増えると、1 日に何秒遅れるか？

さらに学ぶために

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics*** (Cambridge University Press)（古典力学入門）。第 4 章で大振幅の振り子を扱っている。
- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM*** (Wiley)（円周率と算術幾何平均）。ガウスの発見とその応用を扱い、π を計算する最速の方法も紹介している。
- **Dava Sobel, *Longitude*** (Fourth Estate)（経度）。振り子のその先にある、海上での時間計測の物語である。

11.4 等時曲線

問題

STEP III 1994、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/94-s3-q9`

導入

お椀の内側で、2 つのビー玉を同時に放す。1 つは縁の近くから、もう 1 つは底のすぐ上からである。どちらが先に底に着くだろうか。普通のお椀では、低いところから出発した方がたいてい先に着く。ところが、どこから出発しても必ず同時に到着するお椀が存在する。それが**等時曲線**（tautochrone、ギリシャ語で「同じ時間」の意）であり、その断面は**サイクロイド**（cycloid）、すなわち転がる車輪の縁上の 1 点が描く曲線である。

ホイヘンス（Huygens）は 1659 年にこのことを発見し、振れ幅によらない周期をもつ振り子時計の設計に用いて、Section 11.3 で見た欠点を正した。この問題では、正しい変数、つまり水平方向の位置ではなく曲線に沿った距離を選ぶことで、等時性を数行で証明する。

取りかかる前に

考えてみよう お椀はなめらかである。粒子にはどのような力がはたらき、そのうちどれが仕事をするか。

重力と垂直抗力（normal reaction）である。垂直抗力は面に垂直であり、したがって運動の向きにも垂直なので、仕事をしない。仕事をするのは重力だけであり、エネルギーは保存される。

順を追って解く

段階 1　曲線に沿ったエネルギー

s は弧長（arc length）なので、面に沿った粒子の速さは $\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{d}t}\right|$ である。エネルギー保存則（conservation of energy）より $\frac{1}{2}m\dot{s}^2 + mgy =$ 定数となるので、$\dot{s}^2 + 2gy$ は一定である。 ■

段階 2　s についての単振動

> **考えてみよう**　$s = 2\sqrt{ky}$ を用いて、y を s の関数で置き換えよ。得られる方程式はどのような運動を表すか。

$y = \frac{s^2}{4k}$ であるから、エネルギーの式は

$$\dot{s}^2 + \frac{g}{2k}s^2 = \text{定数} = \frac{g}{2k}s_0^2,$$

となる。ここで $s_0 = 2\sqrt{kh}$ は出発点での弧長である（粒子は静止状態から出発する）。微分すると $2\dot{s}\ddot{s} + \frac{g}{k}s\dot{s} = 0$ となるので、

$$\ddot{s} = -\frac{g}{2k}\,s.$$

これは変数 s についての単振動（simple harmonic motion）であり、振幅（amplitude）によらず $\omega^2 = \frac{g}{2k}$ である。すなわち $s = s_0\cos\omega t$ となる。

段階 3　底に着くまでの時間

粒子は周期（period）の 4 分の 1 の時間ののちに V（$s = 0$ となる点）に到達する。その時間は

$$\frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2k}{g}} = \pi\sqrt{\frac{k}{2g}},$$

であり、h によらない。 ■

> **手を止めて、やってみよう**　なぜうまくいくのだろうか。曲線に沿った「復元力」（restoring force）は g と傾きの積 $g\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \frac{g}{2k}s$ であり、曲線に沿って測った底からの距離にちょうど比例する。これこそが単振動を特徴づける性質である。高いところから出発した粒子は進む距離が長いが、そのぶん比例して強く押されるのである。

段階 4　2 つの粒子

考えてみよう 粒子はいつ V に到達し、そのときの速さはいくらか。運動量が大きいのはどちらか。

両者は同じ時刻 $T = \pi\sqrt{k/(2g)}$ に、互いに反対側から V に到達する。V における速さは ω と s についての振幅の積であり、$\sqrt{\text{高さ}}$ に比例する。h から放した重い方の粒子の V での速さを U とすると、$\alpha^2 h$ から放した軽い方の粒子の速さは αU である。両者の運動量（momentum）は互いに逆向きの $\alpha m \cdot U$ と $m \cdot \alpha U$ であり、大きさが等しく向きが反対である。衝突時の運動量の総和は 0 である。

考えてみよう 運動量の総和が 0 で反発係数が α のとき、衝突直後の速度はどうなるか。

運動量の総和は 0 のままなので、衝突後も 2 つの粒子は大きさの等しい運動量をもって互いに逆向きに動き、その相対速度の大きさは近づく速さ $\alpha U + U$ の α 倍である。軽い方の粒子（質量 αm）の衝突後の速さを w とすると、重い方（質量 m）の速さは αw であり、$w + \alpha w = \alpha(1+\alpha)U$ となるので $w = \alpha U$ である。各粒子は速さが α 倍になって跳ね返る。質量 αm の粒子は速さ αU で、質量 m の粒子は速さ $\alpha^2 U$ で離れていく。

段階 5　運動の全体像

各粒子はそれぞれ自分の側を登り返し、高さは α^2 倍に減る（高さは速さの 2 乗に比例するからである）。質量 αm の粒子は $\alpha^2 h$ まで、質量 m の粒子は $\alpha^4 h$ まで登る。等時性により、両者は時間 $2T$ 後のまったく同じ瞬間に再び V に戻り、そのときの運動量はやはり大きさが等しく向きが反対である。同じ衝突が、すべての速さを α 倍にして再び起こる。したがって次のことがわかる。

- 粒子は常に V で、時刻 $T, 3T, 5T, \ldots$ に衝突する。
- n 回目の衝突の後、粒子は高さ $\alpha^{2n} h$ と $\alpha^{2n+2} h$ まで上がる。
- 運動は等比級数的に減衰していくが、決して止まらない。衝突は無限回起こり、いつまでも続く。 ■

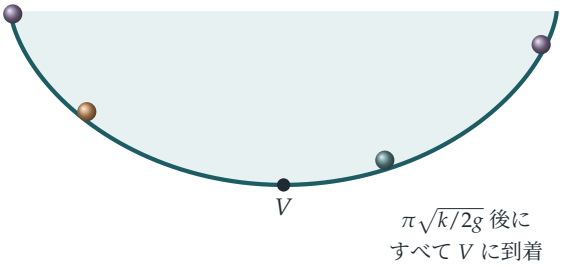


図 11.4.1　等時曲線：直線に沿って転がる車輪の縁上の 1 点が描く、上下を逆にしたサイクロイド。その上のどこから静かに放したビー玉も、最下点 V に同じ瞬間に到達する。半径 R の車輪が生成するサイクロイドでは、弧長と高さは $s^2 = 8Ry$ を満たすので、$k = 2R$ である。

振り返り

- **自然な変数を選ぶ。**弧長 s で表すと、運動はちょうど単振動になる。x や y で表すと複雑になってしまう。
- **エネルギーから方程式が得られる。**エネルギーの式を微分すると、運動方程式が直接得られた。
- **時間についての対称性。**底までの道のりはどれも同じ時間がかかるので、2 つの粒子はいつまでも同期し、衝突はまったく同じように繰り返された。

背後にある数学

なぜサイクロイドなのか

直線の下側を転がる半径 R の車輪は、サイクロイド $x = R(t + \sin t), y = R(1 - \cos t)$ を描く。このとき $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = R(1 + \cos t)$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = R\sin t$ なので、曲線に沿った速さは $R\sqrt{2 + 2\cos t} = 2R\cos\frac{t}{2}$ である。積分すると底からの弧長は $s = 4R\sin\frac{t}{2}$ であり、一方 $y = 2R\sin^2\frac{t}{2}$ である。よって $s^2 = 8Ry$ となり、サイクロイドはまさに $k = 2R$ として $s = 2\sqrt{ky}$ を満たす曲線である。逆に、復元力が s に比例するという条件から、曲線はサイクロイドでなければならないことが導かれる。

最速降下曲線

1696 年、ヨハン・ベルヌーイ（Johann Bernoulli）はヨーロッパの数学者たちに次の問題を挑戦状として出した。ある点から、それより低い（真下ではない）点へ、ビーズが最短時間で滑り降りるのはどのような曲線に沿うときか。その答えである最速降下

曲線（brachistochrone）もまたサイクロイドである。ニュートン（Newton）は問題を受け取ったその晩のうちに解いたと言われている。彼は解答を匿名で発表したが、ベルヌーイは「爪を見れば獅子とわかるように」その作者を見抜いた。この問題は、Section 4.7 で出会った**変分法**（calculus of variations）、すなわち積分で定義される量を最小にする曲線を求める理論の、出発点となった例である。

ホイヘンスのサイクロイド時計

ホイヘンスは、単振り子の周期が振幅に依存するため、単振り子が正確な時を刻まないことを知っていた。著書 *Horologium Oscillatorium*（『振り子時計』、1673 年）で、彼はおもりをサイクロイドに沿って動かす方法を示した。サイクロイドの形をした 2 枚の曲がった「頬板」の間に糸を吊るすと、糸は頬板に巻きつきながら、おもり自身がサイクロイドを描くように動くのである（サイクロイドの**伸開線**（involute）もまたサイクロイドである）。実際には、頬板は摩擦によって、取り除く誤差よりも大きな誤差を生んでしまったため、時計職人たちは代わりに振れ幅を小さく保つことにした。しかしホイヘンスの解析は縮閉線（evolute）と伸開線の理論を生み出し、彼の著書は 17 世紀の力学における偉大な業績の 1 つとなった。

思考のスキル

運動が単純になる変数を見つける

曲線に沿った運動は、曲線に沿った距離で表すと最も単純になることが多い。方程式が線形になる変数を探そう。

大学では、これはラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）における**一般化座標**（generalised coordinates）の考え方になる。系の配置を記述する変数であれば何を用いてもよく、それをうまく選ぶことで問題が解けるようになることがある。

次の一歩

1 **異なる高さ。**等時曲線のお椀の中で、粒子を高さ h から放す。V での速さが、エネルギー保存則から当然そうなるべきとおり $\sqrt{2gh}$ であることを示し、それが ωs_0 と一致することを確かめよ。

2 **普通のお椀。** 半径 R の半球形のお椀で、低い位置から底に着くまでの時間と、縁から底に着くまでの時間を比較せよ。どちらが長いか。（Section 11.3 の結果を用いよ。）

3 **等しい質量。** 問題の後半を、等しい質量 m をもち高さ h_1 と h_2 から放す 2 つの粒子、反発係数 e の場合についてやり直せ。2 つの粒子は依然として常に V で衝突するか。

4 **サイクロイドの弧長。** サイクロイドの 1 つのアーチの長さが $8R$ であり、その下の面積が $3\pi R^2$、つまり転がる円の面積の 3 倍であることを示せ。

さらに学ぶために

- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***（CRC Press）。等時曲線と最速降下曲線を、その歴史とともに扱っている。
- **E. A. Whitman,「Some historical notes on the cycloid」**, *American Mathematical Monthly* 50 (1943)。サイクロイドがなぜ「幾何学者のヘレネ」と呼ばれたのかを述べている。
- **Paul Nahin, *When Least Is Best***（Princeton University Press）。最速降下曲線をはじめとする最適化問題を、歴史とともに語っている。

11.5 加速する列車の中の重力

問題

STEP II 2021、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

導入

列車が駅を出発するとき、体は座席に押しつけられるように感じる。テーブルの上のコーヒーカップでは液面が傾き、床の上のボールは後方へ転がっていく。列車の中から見ると、あたかも重力が傾いて、下向きだけでなくわずかに後ろ向きにもはたらいているかのように見える。アインシュタイン（Einstein）は、これが単なるたとえ以上のものだという気づきを「生涯で最も幸福な考え」と呼んだ。すなわち、重力と加速度は局所的には区別できないのである。

この問題では、加速する列車の中にある曲がった針金にビーズが通されている。列車から見ると、ビーズは正接が a/g である角だけ傾いた重力場の中にあるかのように振る舞う。針金の底はもはや最も低い点ではなく、ビーズは新しい平衡点（equilibrium）のまわりで振動する。

取りかかる前に

考えてみよう 列車は西向き（x の負の向き）に加速度 a で加速している。列車内の観測者にとって、質量 m の物体にはどのような「見かけの力」がはたらいているように見えるか。

列車の座標系では、見かけの力（fictitious force）$-m \times$ (座標系の加速度) を加えれば、ニュートン（Newton）の第 2 法則が成り立つ。座標系は x 方向に加速度 $-a$ で加速しているので、見かけの力は $+ma$ で、東向きである。重力と合わせると、ビーズは単位質量あたり $(a, -g)$ の有効重力を受ける。これは東へ傾いている。

順を追って解く

段階 1　原点では静止できない

原点では針金 $ky = x^2$ は水平である。そこでは垂直抗力（normal reaction）は鉛直向きなので、東向きの見かけの力 ma を打ち消すことができない。針金に沿った合力は $ma \neq 0$ であるから、ビーズは列車に対して静止していることはできない。 ■

段階 2　エネルギーの式

> **考えてみよう**　垂直抗力 $\mathbf{N}$ を含めて、列車の座標系での運動方程式を書け。次に、速度 $(\dot{x}, \dot{y})$ との内積をとれ。なぜ $\mathbf{N}$ は消えるのか。

列車の座標系では

$$m(\ddot{x}, \ddot{y}) = \mathbf{N} + (ma, -mg).$$

針金はなめらかなので $\mathbf{N}$ は針金に垂直であり、したがって針金に沿った向きをもつ速度 $(\dot{x}, \dot{y})$ にも垂直である。速度との内積（dot product）をとると $\mathbf{N}$ が消える：

$$m\dot{x}\ddot{x} + m\dot{y}\ddot{y} = ma\dot{x} - mg\dot{y}, \qquad \text{よって} \qquad \dot{x}(\ddot{x} - a) + \dot{y}(\ddot{y} + g) = 0. \quad ■$$

左辺は $\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - ax + gy$ の導関数であり、したがってこの量は一定である。 ■

これは列車の座標系におけるエネルギー保存（conservation of energy）であり、見かけの力を含めた単位質量あたりのポテンシャルエネルギー（potential energy）$-ax + gy$ をもつ。

段階 3　どこまで上がるか

> **考えてみよう**　ビーズは原点で静止した状態から動き出すので、この定数は 0 である。最高点ではビーズは一瞬静止する。このことからどのような方程式が得られるか。

静止しているとき $\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0$ なので $ax = gy$ である。$y = \frac{x^2}{k}$ とあわせると $ax = \frac{gx^2}{k}$ となるので、（出発点 $x = 0$ を除いて）$x = \frac{ak}{g}$ であり、

$$b = \frac{a^2 k}{g^2}. \quad ■$$

ビーズは針金に沿って東へ上っていき、点 $\left(\frac{ak}{g}, \frac{a^2 k}{g^2}\right)$ に達したのち原点へ戻り、これを繰り返す。

段階 4　最も速い点

考えてみよう 速さの 2 乗を x だけの関数として表せ。それが最大になるのはどこか。

速さの 2 乗は $2(ax - gy) = 2\left(ax - \frac{gx^2}{k}\right)$ であり、これは x の 2 次式で、2 つの折り返し点のちょうど中間 $x = \frac{ak}{2g}$ で最大となる。そこでの速さの 2 乗は $2\left(\frac{a^2k}{2g} - \frac{a^2k}{4g}\right) = \frac{a^2k}{2g}$ なので、最大の速さは

$$a\sqrt{\frac{k}{2g}}. \qquad \blacksquare$$

考えてみよう $x = \frac{ak}{2g}$ における針金の傾きを求めよ。それは有効重力 $(a, -g)$ の向きとどのような関係にあるか。

傾きは $\frac{2x}{k} = \frac{a}{g}$ である。したがってこの点で針金は有効重力に垂直である。すなわち、ここは傾いた重力場における針金の「最も低い」点であり、ビーズはこの点のまわりで振動する（図 11.5.1）。

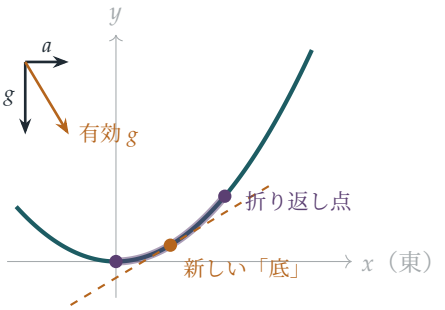


図 11.5.1 列車の座標系における針金 $ky = x^2$（ティール、$k = 1$、$a/g = 0.6$）。有効重力（アンバーの矢印）は、正接が a/g である角だけ東へ傾いている。ビーズは原点と $x = ak/g$ の間を（プラム）、針金が有効重力に垂直となる点のまわりで振動する。この点が新しい最低点の役割を果たす。破線は傾いた重力場における「水平」な線である。

振り返り

- **都合のよい座標系で考え、見かけの力を加える。** 列車の座標系では針金は固定されており、その代償は一定の力が 1 つ加わることだけである。
- **速度との内積をとる。** これにより拘束力（constraint force）が消え、エネルギーの式が得られる。
- **答えを解釈する。** 折り返し点と最も速い点には幾何学的な意味がある。有効重力が

傾いているのである。

背後にある数学

見かけの力

ニュートンの法則は**慣性系**（inertial frame）、すなわち加速していない座標系で成り立つ。加速する座標系でも、見かけの力を加えれば法則を救うことができる。加速度 $\mathbf{A}$ をもつ座標系では $-m\mathbf{A}$ を、回転座標系ではさらに遠心力（centrifugal force）とコリオリ力（Coriolis force）を加えればよい。これらが「見かけの」力と呼ばれるのは、それを及ぼす物体が存在しないからであり、座標系がもたらす産物にすぎない。しかし、その座標系の中にいる者にとってはまったく現実のものである。遠心力は地球を極方向に押しつぶし、コリオリ力はハリケーンの回転の向き（北半球では反時計回り）を決め、長距離砲の砲弾をそらせる。

等価原理

一定の見かけの力 $-m\mathbf{A}$ は、重力とまったく同様に質量に比例する。閉じた箱の中でのどんな実験によっても、箱が惑星の上に静止しているのか、何もない空間で加速しているのかを区別することはできない。これが**等価原理**（equivalence principle）である。アインシュタインはこれを一般相対性理論（general relativity）の出発点とした。加速する箱を横切る光は曲がって見えるので、重力場の中でも光は曲がるはずである。また、加速するロケットの前部と後部の時計は異なる速さで進むので、重力場の中で高さの異なる時計も異なる速さで進むはずである。どちらの予言も確かめられており、後者はすべての GPS 衛星で補正しなければならない。衛星の時計は、この効果だけで地上の時計より 1 日あたり約 45 マイクロ秒速く進むのである。

アインシュタインの最も幸福な考え

1907 年、ベルンの特許局に勤めていたアインシュタインは、特殊相対性理論（special relativity）についての総説を書いていた。そのとき、後に本人が回想したところによれば、「生涯で最も幸福な考え」が浮かんだ。屋根から自由落下する人は自分の重さを感じないだろう、というものである。落下する座標系を選べば、重力は「変換によって消し去る」ことができる。この考えを 1915 年の一般相対性理論にまで仕上げるには、さらに 8 年の歳月と、大量の新しい数学（ガウス（Gauss）とリーマン（Riemann）が発展させた、曲がった空間の微分幾何学（differential geometry））を要した。

思考のスキル

動く座標系で保存量を見つける

一定の加速度をもつ座標系では、一定の見かけの力がはたらく。それはポテンシャルエネルギーに含めることができ、その座標系でエネルギーが保存される。

運動方程式と速度との内積をとって拘束力を消去するという技法は、どんな座標系でも使える。大学では、これは一般的な原理となる。方程式が時間に陽に依存しない系には、保存されるエネルギーが存在するのである。

次の一歩

1. **列車の上の大砲。** STEP I 2000、問 9（`step.maths.org/questions/00-s1-q9`）に挑戦せよ。加速する車両の中で発射された物体を扱う問題で、加速度は重力の傾きのようにはたらく。

2. **向かい風。** STEP II 2006、問 11（`step.maths.org/questions/06-s2-q11`）に挑戦せよ。一定の風に逆らって投げた物体を扱う問題で、物体は着地する前に風で手元へ押し戻されることもある。

3. **列車の中のコーヒー。** 加速する列車の中のコーヒーカップの液面は、水平面に対して角 $\arctan(a/g)$ だけ傾いた平面であることを示せ。

4. **微小振動。** $x = \frac{ak}{2g}$ のまわりでのビーズの微小振動の周期を求めよ。（**ヒント：**新しい底の近くでは、針金はその曲率半径（radius of curvature）に等しい半径の円で近似できる。）

さらに学ぶために

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press）。非慣性系と見かけの力についての章。
- **Albert Einstein, *Relativity: The Special and the General Theory***（さまざまな版がある）。アインシュタイン自身による一般向けの解説で、加速する箱の話も含まれている。
- **Pedro Ferreira, *The Perfect Theory***（Little, Brown）。一般相対性理論の「伝記」である。

11.6 バックスピン

問題

STEP III 1997、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/97-s3-q10`

導入

ビー玉の後ろ側を指で押し下げると、ビー玉は後ろ向きに回転しながら前方へ飛び出す。ビー玉はすべりながら遠ざかり、減速して止まり、そしてまるで気が変わったかのように転がって戻ってくる。スヌーカー（snooker）の選手も「スクリュー」ショットや「ドロー」ショットで同じ効果を利用している。手球の下側を突いて後ろ向きの回転をかけると、手球は的球に当たった所で止まり、そこから戻ってくるのである。

この問題では、ビー玉をぴたりと止めるのに必要な逆回転（backspin）の正確な量と、初速の 7 分の 1 の速さで戻ってくるのに必要な量を求める。計算では速度（linear velocity）と角速度（angular velocity）という二つの量を追跡するが、どちらも同じ一つの摩擦力（frictional force）によって変化する。その背後には美しい近道がある。二つの量のある組み合わせは、摩擦によってまったく変化しないのである。

出題範囲についての注意

回転の力学は 2019 年に STEP の出題範囲から外された。ここで必要なのは次のことだけである。質量 m、半径 a の一様な球の直径のまわりの慣性モーメント（moment of inertia）は $I = \frac{2}{5}ma^2$ であり、トルク（torque）τ は $I\dot{\omega} = \tau$ に従って角速度を変化させる。これは $m\dot{v} = F$ の回転版である。

取りかかる前に

考えてみよう　ビー玉は速さ v で前進し、角速度 ω で後ろ向きに回転している。ビー玉の最下点は台の上をどれだけの速さで動いているか。摩擦はどちら向きにはたらくか。

最下点は、ビー玉全体の運動によって v、後ろ向きの回転によってさらに $a\omega$ の速さで動く（後ろ向きの回転は最下点を前方へ運ぶ）。したがって最下点は前方へ $v + a\omega$ の速さですべっており、摩擦はすべりを妨げる向き、すなわち後ろ向きにはたらく。ビー玉が滑らずに転がる（rolling without slipping）のは $v + a\omega = 0$ のときに限る。

順を追って解く

段階 1　摩擦のはたらき

考えてみよう　後ろ向きの摩擦力を F とする。この力は v にどう影響するか。中心のまわりのトルクは Fa であるが、これは逆回転を強めるか、弱めるか。

摩擦はビー玉を減速させる。$m\dot{v} = -F$ より $v = v_0 - \frac{F}{m}t$ である。また、摩擦はビー玉の最下点で後ろ向きにはたらくので、逆回転を弱める向きのトルク Fa を及ぼす。$I\dot{\omega} = -Fa$ であり、$I = \frac{2}{5}ma^2$ を用いると

$$\omega = \omega_0 - \frac{5F}{2ma}t.$$

ビー玉がすべっている間、v と ω はともに一定の割合で減少する。

段階 2　ぴたりと止まる

考えてみよう　ビー玉が完全に止まるためには、v と ω が同じ瞬間に 0 にならなければならない。それぞれはいつ 0 になるか。

$v = 0$ となるのは $t = \frac{mv_0}{F}$ のとき、$\omega = 0$ となるのは $t = \frac{2ma\omega_0}{5F}$ のときである。これらが等しいのは $v_0 = \frac{2}{5}a\omega_0$、すなわち

$$\frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{2}{5}. \qquad \blacksquare$$

のときである。この瞬間、ビー玉は速度も角速度ももたず、摩擦（すべりがある間しかはたらかない）も消える。こうしてビー玉はその場にとどまる。

段階 3　戻ってくる

考えてみよう 逆回転がもっと大きければ、ω がまだ正である間に v が 0 になる。最下点はまだ前方へすべっているので、摩擦はなお後ろ向きにはたらく。次に何が起こり、すべりはいつ止まるか。

摩擦はビー玉を後ろ向きに押し続けるので v は負になり、一方で ω も減少し続ける。すべりが止まるのは $v + a\omega = 0$ のときである：

$$v_0 + a\omega_0 - \left(\frac{F}{m} + \frac{5F}{2m}\right)t = 0, \qquad t^* = \frac{2m(v_0 + a\omega_0)}{7F}.$$

この瞬間、

$$v = v_0 - \frac{2(v_0 + a\omega_0)}{7} = \frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7}.$$

これ以降ビー玉は滑らずに転がり、摩擦ははたらかなくなり、v は一定に保たれる。速さ $\frac{v_0}{7}$ で転がって戻ってくるためには $5v_0 - 2a\omega_0 = -v_0$ が必要であり、したがって

$$\frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{1}{3}. \qquad \blacksquare$$

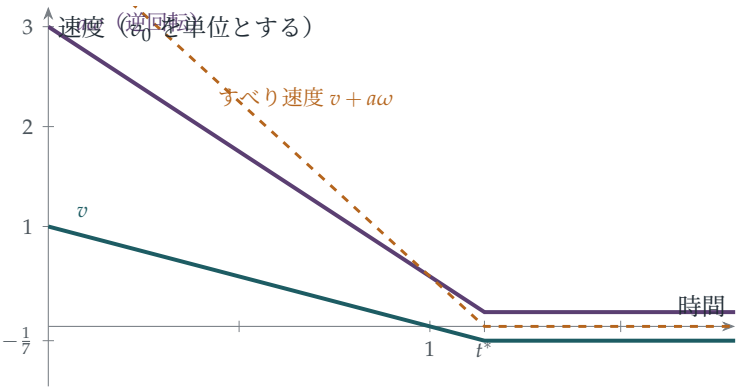


図 11.6.1 $v_0/(a\omega_0) = \frac{1}{3}$ の場合。時間は mv_0/F を単位とする。摩擦は前向きの速度 v（ティール）と逆回転 $a\omega$（プラム）をそれぞれ一定の割合で、2 : 5 の比で減少させる。ビー玉は $t = 1$ で前進をやめるが、まだすべっているので、すべり速度（アンバー）が $t^* = \frac{8}{7}$ で 0 になるまで後ろ向きに押される。その後、ビー玉は $\frac{v_0}{7}$ の速さで転がって戻る。

振り返り

- **二つの量を追跡する。** 摩擦は v と ω の両方を、一定の比の割合で変化させた。
- **力がいつ消えるかを把握する。** 動摩擦はすべりがある間だけはたらき、ビー玉が転がり始めるとはたらかなくなる。

- **すべり速度が鍵となる変数である。**すべり速度は一次関数的に減少し、それが 0 になる時点がすべりから転がりへの切り替わりを示した。

背後にある数学

保存量

最終的な速さを求めるもっと手早い方法がある。台との接触点のまわりのビー玉の角運動量（angular momentum）を考えよう。摩擦はまさに**その点**ではたらくので、その点のまわりのモーメントをもたない。また、垂直抗力と重力はどちらもその点を通る鉛直線に沿ってはたらく。したがって、ビー玉がすべっている間、この角運動量は保存される。その値は mva（中心の運動による分）から $I\omega$（逆回転は負に数える）を引いたものである：

$$L = mav - \tfrac{2}{5}ma^2\omega.$$

速さ V で転がっているときは $a\omega = -V$ であるから、角運動量は $maV + \tfrac{2}{5}maV = \tfrac{7}{5}maV$ となる。これを初期値と等しいとおくと

$$\tfrac{7}{5}maV = mav_0 - \tfrac{2}{5}ma^2\omega_0, \qquad V = \frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7},$$

となり、摩擦力の大きさにも、さらには摩擦力が一定かどうかにも触れることなく、同じ答えが得られる。最終的な速さは保存則だけで決まり、摩擦が決めるのはそこに到達するまでにかかる時間だけである。

スヌーカー、ボウリング、テニス

同じ分析で多くのスポーツが説明できる。中心を突かれたスヌーカーの球は、最初はすべり、やがて転がり始め、最終的に初速の $\tfrac{5}{7}$ の速さになる（公式で $\omega_0 = 0$ とおけばよい）。横回転（sidespin）をかけて投げたテンピンボウリングの球は、レーン上をすべりながら進み、転がり始めたところで「フック」する。順回転（topspin）をかけて打ったテニスボールは急激に沈むが、この場合の主な効果は空気力学的なものである。回転する球は周囲の空気の流れを曲げる。これが**マグヌス効果**（Magnus effect）である。

コリオリとビリヤード

回転座標系における見かけの力（fictitious force）で今日知られるガスパール＝ギュスターヴ・コリオリ（Gaspard-Gustave Coriolis）（Section 11.5）は、1835 年にビリヤードの数学についての一冊の本、*Théorie mathématique des effets du jeu de billard*（『ビリヤードの効果の数学的理論』）を著した。彼はとりわけ、回転をかけて突いた球はま

っすぐ転がり始める前、すべっている間は放物線を描くことを示し、まさにこの問題のスクリューショットを分析した。この本は、このゲームを研究する物理学者たちに今なお引用されている。

思考のスキル

一つの力で変化する二つの量を追跡する

一つの力が複数の量に影響するときは、それぞれがどう変化するかを書き出し、その力でまったく変化しない組み合わせを探せ。

ここでは、摩擦は v と ω を変化させたが、接触点のまわりの角運動量は変化させなかった。大学では、このような組み合わせを見つけることが繰り返し現れるテーマとなる。未知の力が消えるようにモーメントをとる点を選ぶことは、座標系を選ぶことの回転版である。

次の一歩

1. **順回転。** ビー玉が逆回転ではなく前向きの回転 ω_0 をもって動き始めるとき、最終的に転がる速さを求めよ。$v_0/(a\omega_0)$ がどのような値のとき、ビー玉は加速するか。
2. **スヌーカーの球。** 中心を突かれた球が、回転なしで速さ v_0 ですべり始める。最終的に $\frac{5}{7}v_0$ で転がることを示し、失われる運動エネルギー（kinetic energy）の割合を求めよ。（転がる球の運動エネルギーは $\frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ である。）
3. **輪。** 自身の平面内を転がる薄い輪（$I = ma^2$）について、この問題を考え直せ。このとき、$\frac{v_0}{7}$ で戻ってくるのはどのような比 $v_0/(a\omega_0)$ のときか。
4. **ドローショット。** スヌーカーのキューで球のどこを突けば（中心からどれだけの高さか、a を用いて表せ）、球は最初からすべらずに転がるか。（**ヒント：** 力積（impulse）がはたらく間の、接触点のまわりの角運動量を考えよ。）

さらに学ぶために

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press）、第 8 章。角運動量と、すべりを伴う転がりについて。

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press）、剛体（rigid body）の運動に関する章。
- **David Alciatore, *The Illustrated Principles of Pool and Billiards***（Sterling）。多くの図を用いたビリヤードの物理学。

11.7 棒の中のシンプソンの公式

問題

STEP II 1989、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/89-s2-q13`

導入

一様な棒は、押されたり回されたりしたときにどのように振る舞うだろうか。実は、力学におけるあらゆる目的に対して、棒は 3 つの質点とまったく同じように振る舞う。両端にそれぞれ質量の 6 分の 1、中央に 3 分の 2 を置いたものである。棒に対して何をしても（押しても、どの軸のまわりに回しても）、棒とこの 3 つの質点を区別することはできない。

$\frac{1}{6}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{6}$ という数には見覚えがあるかもしれない。これは**シンプソンの公式**（Simpson's rule）$\int_{-a}^{a} f \approx 2a\left(\frac{1}{6}f(-a) + \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{6}f(a)\right)$ の重みであり、A レベル（A level、英国の大学入学資格試験）で学んだことがあるかもしれない数値積分（numerical integration）の方法である。これは偶然ではない。力学的に等価（dynamically equivalent）な系と数値積分の公式は、同じ問題を解いているのである。

出題範囲についての注意

慣性モーメント（moment of inertia）は 2019 年に STEP の出題範囲から外された。物体のある軸のまわりの慣性モーメントは $\sum m_i d_i^2$、すなわち各質量にその軸からの距離の 2 乗を掛けたものの和である（連続体ならば積分になる）。質量 m、長さ $2a$ の一様な棒の、中心を通り棒に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは $\frac{1}{3}ma^2$ である。**平行軸の定理**（parallel axis theorem）によれば、任意の軸のまわりの慣性モーメントは、重心（centre of mass）を通りその軸に平行な軸のまわりのモーメントに md^2 を加えたものに等しい。ここで d は 2 つの軸の間の距離である。

取りかかる前に

> **考えてみよう**　2 つの系が、同じ質量、同じ重心をもち、重心を通るすべての軸のまわりで同じ慣性モーメントをもつとする。このとき、平行軸の定理によって、それ以外のすべての軸のまわりでも慣性モーメントが等しくなるのはなぜか。

どの軸についても、2 つの慣性モーメントはいずれも（O を通る平行な軸のまわりのモーメント）$+md^2$ に等しい。第 1 項は仮定により一致し、m と d は両方の系で同じである。 ■

順を追って解く

段階 1　棒

> **考えてみよう**　両端に質量 p を、中央に質量 q を置く。対称性から重心は正しい位置にある。全質量と、中心を通る垂直な軸のまわりの慣性モーメントからは、どのような条件が得られるか。

$2p + q = m$ が必要であり、中央を通る垂直な軸のまわりの慣性モーメントは $\tfrac{1}{3}ma^2$ でなければならない。すなわち $2pa^2 = \tfrac{1}{3}ma^2$ である。よって $p = \tfrac{1}{6}m$、$q = \tfrac{2}{3}m$ となる。

> **考えてみよう**　これは垂直な軸だけでなく、中心を通るすべての軸について成り立つか。

中心を通り棒と角 ψ をなす軸を考えると、棒に沿って距離 r の位置にある点は、軸から距離 $r\sin\psi$ にある。したがって、（棒についても質点についても）どの慣性モーメントも垂直な軸の場合の値の $\sin^2\psi$ 倍であり、両者はすべての ψ について一致する。（棒を含む平面内にない軸についても同様である。問題になるのは各点の軸からの距離だけであり、O を通る直線上の点については、これは r に比例する。）よって、棒は質量 $\tfrac{1}{6}m$、$\tfrac{2}{3}m$、$\tfrac{1}{6}m$ の質点と力学的に等価である。 ■

段階 2　長方形

> **考えてみよう**　薄板を一辺に平行な細い帯に切り分ける。各帯をそれと等価な 3 つの質点で置き換える。何が得られるか。そして次に何ができるか。

細い帯はそれぞれ棒であり、左端、中心線、右端にその質量の $\tfrac{1}{6}$、$\tfrac{2}{3}$、$\tfrac{1}{6}$ を置いたもの

と等価である。すべての帯について足し合わせると、薄板（lamina）は質量 $\frac{1}{6}M$、$\frac{2}{3}M$、$\frac{1}{6}M$ の 3 本の一様な棒（左の辺、中央、右の辺に沿ったもの）と等価になる。次に、これらの棒をそれぞれ同じ比の 3 つの質点で置き換える。各点の質量は 2 つの分数の積になる（図 11.7.1）。

$$\text{隅：}\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36},\qquad \text{辺の中点：}\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{9},\qquad \text{中心：}\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9},$$

いずれも M 倍である。 ■

（厳密には、各置き換えは薄板全体の中心を通るすべての軸のまわりの慣性モーメントを保たなければならないが、実際に保たれている。各置き換えは、質量、重心、およびその部分の重心を通る軸のまわりの慣性モーメントを保ち、残りは平行軸の定理が引き受けてくれる。）

段階 3 対角線のまわりの正方形

一辺 $2a$ の正方形について、対角線は 2 つの隅と中心を通り、これらは何も寄与しない。残りの 2 つの隅は対角線から距離 $\sqrt{2}a$ に、4 つの辺の中点は距離 $\frac{a}{\sqrt{2}}$ にある。よって

$$I=2\cdot\frac{1}{36}M\cdot 2a^2+4\cdot\frac{1}{9}M\cdot\frac{a^2}{2}=\frac{1}{9}Ma^2+\frac{2}{9}Ma^2=\frac{1}{3}Ma^2.\qquad\blacksquare$$

これは、中心を通り一辺に平行な軸のまわりの慣性モーメントと同じである。（これは偶然ではない。正方形では、中心を通りその平面内にあるすべての軸について同じ答えが得られる。これは演習問題にある対称性の議論からわかる。）

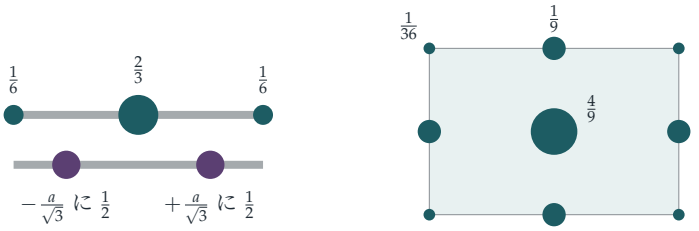
段階 4 一様でない棒

考えてみよう 棒の長さを L とし、一端から距離 x の位置での密度を $\frac{2mx}{L^2}$ とする。$x=0$、$\frac{L}{2}$、L に質量 p_0、p_1、p_2 を置く。全質量、重心、端のまわりの慣性モーメントを一致させると 3 つの方程式が得られる。それはどのようなものか。

棒の全質量は m、軽い端のまわりの 1 次モーメントは $\int_0^L x\cdot\frac{2mx}{L^2}\,dx=\frac{2}{3}mL$、2 次モーメントは $\int_0^L x^2\cdot\frac{2mx}{L^2}\,dx=\frac{1}{2}mL^2$ である。これらを一致させると

$$p_0+p_1+p_2=m,\qquad \frac{1}{2}Lp_1+Lp_2=\frac{2}{3}mL,\qquad \frac{1}{4}L^2p_1+L^2p_2=\frac{1}{2}mL^2.$$

第 2 式を L で割ったものから第 3 式を L^2 で割ったものを引くと $\frac{1}{4}p_1=\frac{1}{6}m$ となるので、$p_1=\frac{2}{3}m$、さらに $p_2=\frac{1}{3}m$、$p_0=0$ である。必要な質点は 2 つだけであり、中点に $\frac{2}{3}m$、重い端に $\frac{1}{3}m$ を置けばよい。 ■



棒の 2 通りの等価な表現　　薄板：$\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$ の積

図 11.7.1　左上：一様な棒は、両端と中心に（その質量に対する割合で）$\frac{1}{6}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{6}$ の質量を置いたものと力学的に等価であり、これはシンプソンの公式の重みである。左下：棒は、中心から距離 $\frac{a}{\sqrt{3}}$ の位置に半分ずつ置いたものとも等価であり、これは 2 点ガウス積分の節点である。右：長方形の薄板は 9 つの質点と等価であり、点の面積は質量に比例している。

振り返り

- **モーメントを一致させる。**力学的に等価であるとは、質量分布の 0 次、1 次、2 次のモーメントを一致させることである。
- **1 次元ずつ組み立てる。**長方形は棒でできた棒であり、その重みは積になる。
- **方程式と未知数を数える。**一致させるべきモーメントが 3 つ、未知の質量が 3 つある。そして、解にたまたま 0 が現れることもある。

背後にある数学

シンプソンの公式

質量分布のモーメントを一致させることは、数値積分の公式を設計することと同じ問題である。$f = 1, x, x^2$ に対して厳密に成り立つ公式 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \approx w_0 f(-a) + w_1 f(0) + w_2 f(a)$ は

$$w_0 + w_1 + w_2 = 2a, \qquad -aw_0 + aw_2 = 0, \qquad a^2 w_0 + a^2 w_2 = \tfrac{2}{3}a^3,$$

を満たさなければならない。これはまさに棒についての条件である（$f = 1, x, x^2$ がそれぞれ質量、1 次モーメント、慣性モーメントの役割を果たす）。解は $w = 2a(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6})$、すなわちシンプソンの公式である。対称性からおまけが得られる。$f = x^3$ に対しても両辺が 0 になるので公式は厳密に成り立ち、したがってシンプソンの公式は 3 次関数を厳密に積分し、滑らかな関数に対する誤差は 4 階導関数に比例する。こうして棒は、3 つの質点と質量、重心、慣性モーメントだけでなく、3 次モーメントでも一致するのである。

ガウス求積と慣性テンソル

質量だけでなく位置も自由に選べるならば、質点は 2 つで足りる。$\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ の各点に質量の半分ずつを置けばよい。確かめると $2\cdot\frac{1}{2}m\cdot\frac{a^2}{3}=\frac{1}{3}ma^2$ である。これは 2 点の**ガウス・ルジャンドル公式**（Gauss–Legendre rule）$\int_{-a}^{a} f \approx a\big(f(-\frac{a}{\sqrt{3}})+f(\frac{a}{\sqrt{3}})\big)$ であり、これも 3 次関数に対して厳密である。カール・フリードリヒ・ガウス（Carl Friedrich Gauss）は 1814 年に、巧みに配置した n 個の点によって $2n-1$ 次の多項式を厳密に積分できることを示した。ガウス求積（Gaussian quadrature）は現在、数値解析の標準的な手法である。

力学では、物体の重心を通るすべての軸のまわりの慣性モーメントは、対称な 3×3 行列である**慣性テンソル**（inertia tensor）に集約される。質量、重心、慣性テンソルが等しい 2 つの物体は、あらゆる力に対してまったく同じように応答する。このため技術者は、シミュレーションにおいて複雑な部品をいくつかの質点で置き換えることができる。慣性テンソルの固有ベクトル（eigenvectors）は**主軸**（principal axes）であり、物体が定常的に回転できる軸である。

思考のスキル

系を等価な系で置き換える

2 つの系が、問題にとって重要なすべての量において一致するならば、複雑なほうを単純なほうで置き換えよ。

ここでは 3 つのモーメントだけが重要だったので、連続な棒を 3 つの質点で置き換えることができた。大学では、この考え方はガウス求積として、電磁気学や重力理論における多重極展開（multipole expansions）として（遠方では、電荷分布や質量分布のいくつかのモーメントだけが重要になる）、また統計学におけるモーメント法（method of moments）として現れる。

次の一歩

1. **シンプソンの公式。** 区間を 1 つだけとったシンプソンの公式を用いて $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ を見積もり、$\frac{\pi}{4}$ と比較せよ。この公式が $\int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x$ と $\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x$ に対しては厳密であるが、$\int_{-1}^{1} x^4\,\mathrm{d}x$ に対してはそうでないことを確かめよ。

2. **すべての軸が同じ。** 正方形の薄板の、中心を通りその平面内にある任意の軸のまわりの慣性モーメントが $\frac{1}{3}Ma^2$ であることを示せ。（ヒント：9 つの等価な質点は

90° の回転に関して対称である。このことから、$\cos\psi$ と $\sin\psi$ の 2 次式について何がいえるか。）

3 **三角形。**質量 M の一様な三角形の薄板が、各辺の中点に置いた質量 $\frac{1}{3}M$ の 3 つの質点と力学的に等価であることを示せ。

4 **立方体。**一様な中身の詰まった立方体について、27 個の質点からなる力学的に等価な系を求め、それを用いて一辺 $2a$ の立方体の、1 つの辺のまわりの慣性モーメントを求めよ。

さらに学ぶために

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press）。剛体と慣性モーメントの章。
- **Endre Süli & David Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis***（Cambridge University Press）。シンプソンの公式とガウス求積を含む、数値積分の章。
- **Philip Davis & Philip Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration***（Dover）。古典的な参考書。

11.8 傾いたつり合い

問題

STEP III 2025、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip`

導入

ラグビーボールをテーブルに置くと、横向きに落ち着く。端を下にして立てても、細心の注意を払えばそのまま釣り合うが、ほんの少しつつくだけで倒れてしまう。テーブルの上に静止している剛体（rigid body）にはいくつかの平衡位置（equilibrium position）があり、そのうちあるものは安定（stable）、あるものは不安定（unstable）である。どの平衡位置が存在するかは、物体の形と重心（centre of mass）だけで決まる。物体はいくつの平衡位置をもちうるだろうか。最も少ない場合はいくつだろうか。

この問題では、上半分がドーム状で下半分が尖った、こまのような形の立体を作り、それが正立や倒立の状態のほかに、3 通りの異なる傾きで静止できることを示す。鍵となるのはただ一つの幾何学的条件である。物体が表面上のある点で静止できるのは、ちょうどその点における表面の法線（normal）が重心を通るときである。その背後には最近の発見がある。安定な位置と不安定な位置をそれぞれ一つずつしかもたない凸（convex）な形、ゴムボツ（Gömböc）である。

取りかかる前に

考えてみよう 立体がテーブルの上に静止しており、曲面上のただ一点 X でテーブルに接している。立体にはたらく力は、重力（重心 G に作用する）と X における抗力（reaction）である。これらが釣り合うのはどのようなときか。

テーブルは X で表面に接している。抗力は X に作用し、テーブルに垂直に、すなわち

表面の法線に沿ってはたらく。重力は G を通って鉛直にはたらく。2 つの力が釣り合うのは同一直線上にはたらくときに限るので、X を通る鉛直線、すなわち X における法線は G を通らなければならない。したがって、**物体が X で接して静止できるのは、ちょうど X における法線が G を通るときである。**

順を追って解く

段階 1　重心

考えてみよう　立体を、半径 x、厚さ δx、高さ y の薄い円筒殻（cylindrical shell）に切り分けよ。殻の体積はいくらか。また、その重心はどこにあるか。

$y = \frac{r^n - x^n}{r^{n-1}}$ とすると、殻の体積は $2\pi x y\,\delta x$ であり、その重心は高さ $\frac{y}{2}$ にある。よって

$$V = \int_0^r 2\pi x y \,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{r^{n-1}}\left(\frac{r^{n+2}}{2} - \frac{r^{n+2}}{n+2}\right) = \frac{n\pi r^3}{n+2},$$

であり、底面に関するモーメント（moment）は

$$\begin{aligned}\int_0^r 2\pi x \cdot \frac{y^2}{2}\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{r^{2n-2}}\int_0^r x(r^n - x^n)^2\,\mathrm{d}x \\ &= \pi r^4\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{2n+2}\right) = \frac{n^2\pi r^4}{2(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

である（括弧内が簡単になるのは $(n+1)(n+2) - 4(n+1) + (n+2) = n^2$ だからである）。割り算すると

$$\bar{y} = \frac{nr}{2(n+1)}. \qquad \blacksquare$$

$n = 2$（放物面（paraboloid））のとき、これはよく知られた結果 $\frac{r}{3}$ になる。$n \to \infty$ とすると立体は円柱に近づき、$\bar{y} \to \frac{r}{2}$ となる。

段階 2　法線が軸と交わる位置

$x = rp$ における曲線の傾きは $-\frac{n x^{n-1}}{r^{n-1}} = -np^{n-1}$ なので、法線の傾きは $\frac{1}{np^{n-1}}$ である。法線に沿って $(rp, r(1-p^n))$ から y 軸まで進むと、x は rp だけ減少し、y は $\frac{rp}{np^{n-1}} = \frac{r}{np^{n-2}}$ だけ減少する。よって

$$Y = r\left(1 - p^n - \frac{1}{np^{n-2}}\right). \qquad \blacksquare$$

考えてみよう $n=4$ のとき、$Y=r\bigl(1-p^4-\frac{1}{4p^2}\bigr)$ である。Y が最大になるのはどこか。$p\to 0$ のとき、また $p=1$ のときはどうなるか。

$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}p}=r\bigl(-4p^3+\frac{1}{2p^3}\bigr)=0$ となるのは $p^6=\frac{1}{8}$、すなわち $p^2=\frac{1}{2}$ のときである。このとき $Y=r\bigl(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\bigr)=\frac{1}{4}r$ である。 ■

$p\to 0$ のとき $Y\to-\infty$ である（頂上付近ではドームが非常に平らなので、法線はほぼ鉛直となり、はるか下方で軸と交わる）。$p=1$ では $Y=-\frac{1}{4}r$ である。したがって、p が 0 から 1 まで動くとき、Y は $-\infty$ から $\frac{1}{4}r$ まで増加し、再び $-\frac{1}{4}r$ まで減少する。

段階 3 こま

考えてみよう 小問 (iii) の立体は、逆さにした放物面（$n=2$）の上にドーム（$n=4$）をのせたものである。その重心はどこにあるか。

段階 1 より、ドームの体積は $\frac{2\pi r^3}{3}$ で、重心は $\frac{2r}{5}$ にある。放物面の体積は $\frac{\pi r^3}{2}$ で、逆さになっているので重心は $-\frac{r}{3}$ にある。よって

$$\bar{y}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}\,r=\frac{\frac{4}{15}-\frac{1}{6}}{\frac{7}{6}}\,r=\frac{3r}{35}.$$

G は $\bigl(0,\frac{3r}{35}\bigr)$ にあり、最も幅の広い位置よりわずかに上にある。

段階 4 平衡位置を数える

考えてみよう 傾いた平衡には、法線が G を通るような点（A でも B でもない）が必要である。表面の各部分において、法線が高さ $\frac{3r}{35}$ で軸と交わる点はいくつあるか。

ドーム。その法線が軸と交わる高さ Y は、$-\infty$ から $\frac{1}{4}r$ まで増加し、$-\frac{1}{4}r$ まで減少する。$-\frac{1}{4}r<\frac{3r}{35}<\frac{1}{4}r$ なので、中間値の定理（intermediate value theorem）により、値 $\frac{3r}{35}$ は増加する部分で 1 回、減少する部分で 1 回とられる。すなわち 2 点である。

尖った底部。$n=2$ の場合の小問 (ii) を x 軸に関して折り返すと、パラメータ p の点における法線は $-r\bigl(1-p^2-\frac{1}{2}\bigr)=r\bigl(p^2-\frac{1}{2}\bigr)$ で軸と交わり、これは $-\frac{1}{2}r$ から $\frac{1}{2}r$ まで増加する。これが $\frac{3r}{35}$ に等しくなるのは、$p^2=\frac{41}{70}$ のときのちょうど 1 回である。

これら 3 点はそれぞれ平衡を与え、3 本の法線は軸と互いに異なる角をなすので、$\overrightarrow{AB}$ は鉛直方向と 0 でない 3 通りの異なる角をなす（図 11.8.1）。 ■

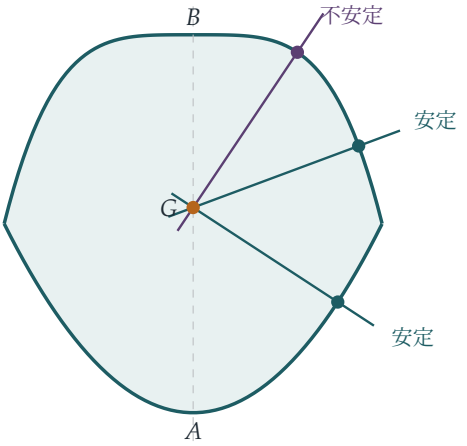


図 11.8.1　小問 (iii) の立体の断面と、その重心 G（琥珀色）。印をつけた 3 点のそれぞれで表面の法線が G を通るので、立体はその点で静止できる。これらの平衡のうち 2 つは安定（そこでは表面が局所的に G に最も近い）、1 つは不安定（局所的に最も遠い）である。

振り返り

- **物理的な条件を幾何に翻訳する。**平衡は「法線が G を通る」という条件になった。
- **解かずに存在を示す。**角度そのものは一度も求めていない。中間値の定理と関数 $Y(p)$ の形から、それがいくつあるかがわかった。
- **一般的な結果を再利用する。**一般の n に対する小問 (ii) によって、小問 (iii) の表面の 2 つの部分をどちらも扱うことができた。

背後にある数学

臨界点としての平衡

立体が点 X で静止しているとき、テーブルから測った G の高さは、G から X における接平面までの距離である。凸な物体では、GX が法線に沿っているとき、これは $|GX|$ に等しい。一般に、平衡とは G から表面までの距離の**臨界点**（critical point）である。$|GX|$ が停留する（stationary）点 X とは、ちょうど法線が G を通る点のことである。安定な平衡はこの距離の極小（local minimum）（G ができるだけ低い）であり、不安定な平衡は極大（local maximum）または鞍点（saddle point）である。

断面に沿って A から B まで回っていくと、G からの距離は次のように変わる。A では大きく（極大：尖った先端で釣り合っており、不安定）、底部の傾いた点では小さく

（極小、安定）、縁では大きく、ドームの下側の傾いた点では小さく（安定）、上側の傾いた点では大きく（不安定）、B では小さい（安定：ドームの頂上で静止する）。図が示すように、極小と極大は交互に現れなければならない。（実は、この問題では数えていない平衡がもう 1 つある。立体は、表面がただ 1 つの法線をもたない鋭い縁の上で、不安定ながら釣り合うことができる。）

ゴムボツ

凸な物体の平衡はどこまで少なくできるだろうか。どんな物体にも、少なくとも 1 つの安定な位置と 1 つの不安定な位置がある。すなわち、表面上で G に最も近い点と最も遠い点である。一様な密度をもつ 2 次元の凸図形は、常に少なくとも 4 つの平衡をもつ（距離の極小 2 つと極大 2 つが交互に並ぶ）。1995 年、ウラジーミル・アーノルド（Vladimir Arnold）は、一様な密度をもつ 3 次元の凸な物体で、平衡がちょうど 2 つ、つまり安定なもの 1 つと不安定なもの 1 つだけであるものが存在するかを問うた。2006 年、Gábor Domokos と Péter Várkonyi がそのような物体を構成した。それが**ゴムボツ**である。どんな向きで置いても、転がったり揺れたりして、ただ 1 つの安定な位置に落ち着く。Domokos はのちに、ある種のカメの甲羅がこの形に近く、ひっくり返されたときに起き上がるのに役立っていることに気づいた。

アルキメデスと浮体

物体の安定性の研究はアルキメデス（Archimedes）にさかのぼる。彼は *On Floating Bodies*（『浮体について』）において、浮かんでいる放物面（船体のモデル）が正立して安定なのはどのようなときで、転覆するのはどのようなときかを、その形と密度によって解析した。幾何学だけで導かれた彼の答えには、ここで用いたのとまさに同じ種類の重心と法線の計算が含まれている。造船技師は今も、**メタセンター**（metacentre）という形で彼の考えを用いている。浮心（centre of buoyancy）を通る鉛直線が船の軸と交わる点が重心より上にあれば、船は安定である。

思考のスキル

ポテンシャルエネルギーの地形

平衡はポテンシャルエネルギー（*potential energy*）の停留点であり、安定な平衡はその極小である。停留点は、解いて求める代わりに数えよ。

ここでは、ポテンシャルエネルギーは G の高さ、すなわち G から表面までの距離に比例していた。大学では、この見方は力学、化学（分子はエネルギーの極小に落ち着く）、そして位相幾何学（topology）を貫いている。位相幾何学では、**モース理論**（Morse theory）によって、曲面上の任意の関数の極小、極大、鞍点の個数が、その曲面の形によって制約されることが示される。

次の一歩

1 **起き上がりこぼし。** STEP II 1996、問 9（`step.maths.org/questions/96-s2-q9`）に挑戦しよう。半球の上に円錐をのせたものが自ら起き上がるのはどのようなときか。（**ヒント**：G は半球の中心に対してどこになければならないか。）

2 **球。** 一様な中実球では、すべての法線が中心を通る。このことは、その平衡について何を意味するか。球の重心が中心からわずかにずれている場合はどうか。

3 **楕円。** 自身を含む平面内で直線上を転がる楕円板は、ちょうど 4 つの平衡をもつことを示し、そのうちどれが安定かを特定せよ。

4 **2 つの放物面。** 小問 (iii) のドームを放物面 $ry = r^2 - x^2$ に置き換え、立体が x 軸に関して対称になるようにする。G が原点にあることを示し、傾いた平衡を求め、それらが等しい傾きの対になって現れる理由を説明せよ。

さらに学ぶために

- **Péter Várkonyi & Gábor Domokos, “Static equilibria of rigid bodies: dice, pebbles, and the Poincaré–Hopf theorem”,** *Journal of Nonlinear Science* 16 (2006)。ゴムボツの論文である。
- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press）。平衡と安定性について。
- **Chris Rorres, “Completing Book II of Archimedes’s *On Floating Bodies*”,** *Mathematical Intelligencer* 26 (2004)。アルキメデスの安定性解析を、現代的な図とともに解説している。

11.9 安全放物線

問題

STEP II 2014、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/14-s2-q10`

導入

ある噴水が、あらゆる方向に同じ速さで水を噴き出しているとする。水の筋はきらめくドームをつくり、その外縁はくっきりしている。内側ではどの点にも水が通過し、外側にはまったく届かない。この縁は放物線であり、**安全放物線**（parabola of safety）とよばれる。その外側にある標的には、与えられた初速の大砲では、どの角度で撃っても命中させられないからである。

驚くべきことに、この境界はそれ自体が軌道（trajectory）の一つではない。それは軌道全体の族の**包絡線**（envelope）、すなわちどの軌道にもちょうど一度ずつ接する曲線であり、Section 8.1 で直線 $y = 0$ が放物線の族に接していたのとまったく同じ状況である。この問題では、二次式（quadratic）の判別式（discriminant）だけを用いてこの曲線を求める。

取りかかる前に

考えてみよう x と y を t で表し、t を消去せよ。$\sec^2\theta$ を $\lambda = \tan\theta$ を用いてどう表せるか。

$x = ut\cos\theta$、$y = ut\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$ に $t = \frac{x}{u\cos\theta}$ を代入すると、$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ を用いて

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta} = \lambda x - \frac{gx^2}{2u^2}(1+\lambda^2),$$

を得る。

順を追って解く

段階 1　x を固定して角度を動かす

> **考えてみよう**　固定した $x>0$ に対して、y を λ の関数とみなせ。それはどのような関数か。λ がすべての実数を動くとき、y はどのような値をとるか。

x を固定すると、y は最高次の係数が負の値 $-\frac{gx^2}{2u^2}$ である λ の二次関数であり、λ についての上に凸な放物線となる。これは最大値をもち、$\lambda\to\pm\infty$ のとき $y\to-\infty$ である。連続であるから、最大値以下のすべての値をとる。最大となるのは $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}=x-\frac{gx^2}{u^2}\lambda=0$、すなわち $\lambda=\frac{u^2}{gx}$ のときであり、そこでは

$$Y=\frac{u^2}{gx}\,x-\frac{gx^2}{2u^2}\left(1+\frac{u^4}{g^2x^2}\right)=\frac{u^2}{2g}-\frac{gx^2}{2u^2}. \qquad \blacksquare$$

である。（同じことを言い換えると、点 (x,y) に到達できるのは、二次方程式 $\frac{gx^2}{2u^2}\lambda^2-x\lambda+\frac{gx^2}{2u^2}+y=0$ が実数解 λ をもつときであり、かつそのときに限る。判別式の条件から $y\le Y$ が得られる。）

段階 2　領域

曲線 $Y=\frac{u^2}{2g}-\frac{gx^2}{2u^2}$ は上に凸な放物線であり、その頂点（vertex）$\left(0,\frac{u^2}{2g}\right)$ は真上に撃ったときに到達する高さである。また、この放物線は $x=\pm\frac{u^2}{g}$、すなわち最大到達距離のところで地面と交わる。この曲線上またはその下側（かつ地面より上）にあるすべての点には到達でき、曲線より上側の点にはどれも到達できない（図 11.9.1）。

> **考えてみよう**　曲線より真に下側にある点を通る軌道はいくつあるか。曲線上の点ではどうか。

曲線より下側の点は、λ についての二次方程式が異なる二つの実数解をもつ場合に対応する。すなわち、高い弾道と低い弾道の二つの発射角がある。曲線上の点は重解に対応する。すなわち軌道はちょうど一つであり、その軌道はその点で曲線に接する。

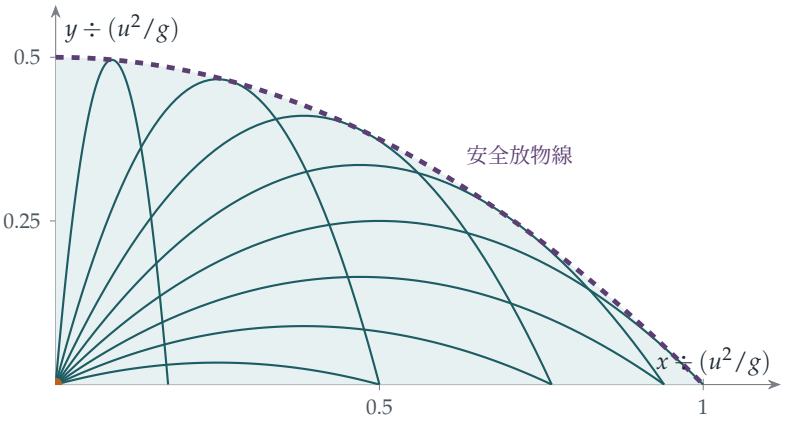


図 11.9.1　一定の速さ u、角度 $15°, 25°, \ldots, 85°$ での軌道（青緑）。どの軌道も破線で示した安全放物線 $y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}$ にちょうど一度ずつ接し、その下側の領域（網掛け部分）がちょうど到達可能な点の集合である。原点 O（琥珀色）は安全放物線の焦点である。

段階 3　最も遠い点

考えてみよう　O から最も遠い到達可能な点（地面上または地面より上）は境界上にある。距離の 2 乗 $x^2 + Y^2$ を x^2 の関数として表せ。それは増加するか、減少するか。

$X = x^2$ とおく。すると

$$x^2 + Y^2 = X + \left(\frac{u^2}{2g} - \frac{gX}{2u^2}\right)^2, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(x^2 + Y^2) = 1 - \frac{g}{u^2}\left(\frac{u^2}{2g} - \frac{gX}{2u^2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{g^2 X}{2u^4} > 0.$$

である。よって境界に沿って外側へ進むほど距離は増加し、最も遠い点は境界が地面と交わる点 $x = \frac{u^2}{g}$ である。最大距離は

$$\frac{u^2}{g},$$

であり、これは $45°$ で撃つ通常の最大到達距離の弾道によって実現される。 ■

振り返り

- **問いを逆転させる。** 与えられた軌道がどこを通るかを問うのではなく、与えられた点をどの軌道が通るかを問う。
- **パラメータについての二次式。** 各点について、$\lambda = \tan\theta$ についての方程式は二次方程式であり、その判別式によってその点に到達できるかどうかが決まる。

- **二つ、一つ、またはゼロ。**内側の点には二つの角度で、境界上の点には一つの角度で到達でき、外側の点にはどの角度でも到達できない。

背後にある数学

包絡線

1 パラメータの曲線族 $F(x, y, \lambda) = 0$ は、しばしば**包絡線**、すなわち族のすべての曲線に接する曲線をもつ。包絡線は $F = 0$ と $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ を連立させて解くことで求められ、これはまさに y を λ について最大化することで行ったことである。包絡線は科学のいたるところに現れる。コーヒーカップの表面に見える明るい光の曲線は反射光線の包絡線であり、**火線**（caustic）とよばれる。超音速機のソニックブームは、機体が発する音波の包絡線である**マッハ円錐**（Mach cone）によって運ばれる。そして Section 8.1 では、微分方程式の解の族の包絡線がそれ自体解、すなわち「特異」な解であった。

焦点

安全放物線には注目すべき性質がある。その焦点（focus）は発射点 O なのである。（放物線 $y = c - \frac{x^2}{4c}$ の焦点は原点であり、ここでは $c = \frac{u^2}{2g}$ である。）各軌道もまた放物線であり、すべての軌道の焦点は O を中心とする半径 $\frac{u^2}{2g}$ の円周上にある。これにはエネルギーによる説明がある。高さ y における物体の速さは $\sqrt{u^2 - 2gy}$ であり、これは準線（directrix）の高さ $\frac{u^2}{2g}$ でゼロになる。そして、準線が同じ直線であり、かつ O を通る放物線の焦点は、その円周上にあるのである。

トリチェリの放物線

ガリレオ（Galileo）は 1609 年ごろ、投げられた物体が放物線を描いて運動すること、そして水平な地面での最大到達距離は 45° で得られることを示した。彼の弟子で、気圧計の発明者としてよく知られるエヴァンジェリスタ・トリチェリ（Evangelista Torricelli）は、1644 年に著書 *De motu gravium* において安全放物線を発見した。砲手にとって、これは「そもそもどの標的が射程内にあるのか」という実際的な問いに答えるものであった。トリチェリはまた、与えられた点を通る軌道は対になって現れ、その角度はその点の方向と鉛直方向に関して対称であること、すなわちこの問題における高い弾道と低い弾道であることも示した。

思考のスキル

曲線族の包絡線

曲線族が覆う領域の境界を求めるには、一点を固定し、どのパラメータの値に対して曲線がその点を通るかを問えばよい。境界とは、解の個数が変化するところである。

点を動かしながら解の個数を数えるという同じ考え方は、光学における火線の研究、力学系における分岐（bifurcation）の研究、そして方程式の解の個数がどのように変化しうるかを分類するカタストロフィー理論（catastrophe theory）の基礎となっている。

次の一歩

1. **爆発する花火。** STEP II 2023、問 10（OCR が配布している 2023 年の過去問一式に収録、`www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip`）に挑戦せよ。この問題では、爆発で飛び散る粒子を、中心が自由落下する球面とみなし、安全放物面（paraboloid of safety）に沿って動く粒子を求める。

2. **斜面に向かって撃つ。** 角度 β で傾いた斜面に沿って上向きに、速さ u で物体を投げるときの最大到達距離を求めよ。（**ヒント：**直線 $y = x\tan\beta$ は安全放物線とどこで交わるか。）最適な角度は、斜面と鉛直方向のなす角を二等分することを示せ。

3. **二つの角度。** 点 P に到達する二つの角度は、OP と鉛直方向のなす角の二等分線に関して対称であることを示せ。

4. **焦点。** 角度 θ の軌道の焦点が $\left(\frac{u^2}{2g}\sin 2\theta, -\frac{u^2}{2g}\cos 2\theta\right)$ であることを示し、これより焦点が O を中心とする円周上にあることを示せ。

さらに学ぶために

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press、古典力学入門）の第 3 章。軌道の包絡線について論じている。
- **J. W. Bruce, P. J. Giblin & C. G. Gibson, “On caustics of plane curves”**, *American Mathematical Monthly* 88 (1981)。幾何学における包絡線と火線について。
- **E. H. Lockwood, *A Book of Curves***（Cambridge University Press、曲線の本）。包絡線、

火線、そして多くの古典的な曲線を、その作図法とともに扱っている。

11.10 こちらへ戻ってくるボール

問題

STEP II 2019、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip`

導入

ボールを前方に投げれば、ボールは着地するまで自分から遠ざかっていく。当然である。真上に投げれば、ボールは戻ってくる。その中間のどこかで何かが変わるはずである。つまり、ボールがいったん遠ざかり、次に近づき、着地する前に再び遠ざかるような角度が存在するはずである。この問題では、その正確な境界値 $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$、すなわち約 $70.5°$ を求める。

この結果は、数学でよく見られる状況の好例である。誰もが単調（monotonic）だと思い込んでいる量が、実はそうではないのである。また、大学で常に用いられる標準的な手法も示している。距離が増加しているかどうかを調べるには、その 2 乗を微分すればよい。そうすれば平方根を避けられる。

取りかかる前に

考えてみよう OP よりも OP^2 を扱う方が簡単なのはなぜか。「OP が増加する」ことと「OP^2 が増加する」ことは同じだろうか。

$OP^2 = x^2 + y^2$ は t の多項式（polynomial）であるが、OP には平方根が含まれる。$OP \geq 0$ であり、2 乗は非負の数の上で増加関数であるから、OP が増加するのは OP^2 が増加するときであり、かつそのときに限る。

順を追って解く

段階 1　距離の 2 乗

$x = ut\cos\alpha$、$y = ut\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$ とすると、

$$OP^2 = u^2t^2\cos^2\alpha + u^2t^2\sin^2\alpha - ugt^3\sin\alpha + \frac{1}{4}g^2t^4 = u^2t^2 - ugt^3\sin\alpha + \frac{1}{4}g^2t^4.$$

> **考えてみよう**　t について微分せよ。因数 t をくくり出すと、何が残るか。それがすべての t に対して正となるのはどのようなときか。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}OP^2 = 2u^2t - 3ugt^2\sin\alpha + g^2t^3 = t(g^2t^2 - 3ug\sin\alpha\, t + 2u^2).$$

$t > 0$ のとき、符号は二次式（quadratic）$g^2t^2 - 3ug\sin\alpha\, t + 2u^2$ の符号と一致する。この二次式の最高次の係数は正であるから、判別式（discriminant）が負ならば、すべての t に対して正となる：

$$9u^2g^2\sin^2\alpha - 8u^2g^2 < 0 \iff \sin^2\alpha < \frac{8}{9} \iff \sin\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

このとき、OP は飛行中ずっと増加する。 ■

段階 2　より急な角度での投射

> **考えてみよう**　$\sin\alpha > \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ならば、この二次式は 2 つの実数解をもつ。それらは正だろうか。小さい方の解は、質点が着地する前だろうか。

解の和は $\frac{3u\sin\alpha}{g} > 0$、積は $\frac{2u^2}{g^2} > 0$ であるから、2 つの解はともに正であり、その間では二次式、したがって $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}OP^2$ は負となる。質点は $T = \frac{2u\sin\alpha}{g}$ で着地する。小さい方の解は

$$t_1 = \frac{u}{2g}(3\sin\alpha - \sqrt{9\sin^2\alpha - 8}) < \frac{u}{2g}\cdot 3\sin\alpha < \frac{2u\sin\alpha}{g} = T.$$

よって、t_1 の直後（かつ着地前）において OP は減少している。 ■

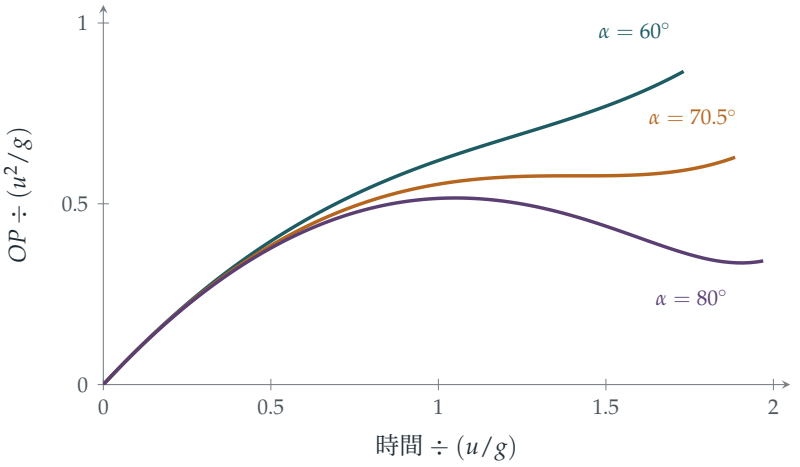


図 11.10.1 3つの角度について、着地するまでの、投げた人からの距離と時間の関係。60°（ティール）では常に増加する。臨界角（critical angle）$\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 70.5°$（アンバー）では一瞬だけ止まる。80°（プラム）では、ボールは遠ざかり、しばらく投げた人の方へ戻ってきて、着地の直前に再び遠ざかる。

段階 3 動く観測者

考えてみよう Q は地面に沿って逆方向に速さ v で O から遠ざかる。Q から測ると、水平方向の隔たりは $x + vt$ となる。これは計算にどのような影響を与えるか。

隔たり QP の水平成分は $(u\cos\alpha + v)t$、鉛直成分は $ut\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$ である。よって

$$QP^2 = \big((u\cos\alpha + v)^2 + u^2\sin^2\alpha\big)t^2 - ugt^3\sin\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4,$$

となり、これは先ほどの式の第1項で u^2 を $w^2 = (u\cos\alpha + v)^2 + u^2\sin^2\alpha$ に置き換えたものと同じである。導関数（derivative）は $t\big(g^2t^2 - 3ug\sin\alpha\, t + 2w^2\big)$ であり、これがすべての $t > 0$ に対して正となる条件は、両辺から $8u^2\sin^2\alpha$ を消去すると

$$9u^2\sin^2\alpha < 8w^2 \quad\Longleftrightarrow\quad u^2\sin^2\alpha < 8(u\cos\alpha + v)^2,$$

となる。平方根をとると（$u\sin\alpha$ と $u\cos\alpha + v$ はともに正である）、これは $u\sin\alpha < 2\sqrt{2}(u\cos\alpha + v)$ となり、整理すると

$$2\sqrt{2}\,v > (\sin\alpha - 2\sqrt{2}\cos\alpha)u. \qquad \blacksquare$$

（このとき導関数はすべての $t > 0$ に対して正となるので、これは QP が飛行中ずっと増加するための十分条件である。）

振り返り

- **2 乗を微分する。**距離の 2 乗は多項式であり、その導関数は距離の導関数と同じ符号をもつ。
- **常に正である二次式。**「すべての時刻で増加する」という条件は、判別式の条件になった。
- **新しい問題を古い問題として見る。**動く観測者によって変わったのは係数 1 つだけだったので、先の解析がそのまま適用できた。

背後にある数学

幾何学的な見方

OP が減少するのは、P の速度が「内向き」、すなわちベクトル $\overrightarrow{OP}$ と鈍角（obtuse angle）をなすとき、つまり $\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{v} < 0$ のときであり、かつそのときに限る。急な角度で投げた場合、飛行の最高点付近では、質点は投げた人のはるか上方かつわずかに前方にあり、ほぼ水平に遠ざかる向きに動いているが、落下し始めている。$\overrightarrow{OP}$ の方向を基準にして、速度の下向きの成分が外向きの成分を上回ると、質点は近づいてくる。浅い角度で投げた場合、質点は常に十分前方にあるので、その速度が O の方へ向くことはない。臨界的な場合とは、ちょうど 1 つの瞬間に速度が $\overrightarrow{OP}$ と垂直（perpendicular）になる場合であり、これが図 11.10.1 において距離が一瞬止まる瞬間である。

単調性は自明ではない

「明らかに」増加すると思える量の多くは、実は増加しない。地球から月までの距離は振動する。曲がりくねった道路を走る 2 台の車の間の距離は、一方が常に前にいても減少することがある。捕食者の個体数は、獲物が増えている間に減少することがある。ある量が単調であることを証明するには、通常、導関数の符号が一定であることを示す。ここでの手法（多項式に帰着させ、その解または判別式を調べる）は、それを行う標準的な方法である。解析学では、単調性はしばしば収束（convergence）を証明する鍵となる。第 2 章で見たように、有界な単調数列は収束する。

思考のスキル

導関数を通して単調性を調べる

ある量が常に増加するかどうかを判定するには、それ（またはその 2 乗のように扱いやすい関数）を微分し、導関数の符号が変わり得るかどうかを問えばよい。

大学では、この種の符号に関する議論は、不等式の証明、最大値・最小値の位置の特定、そして微分方程式（differential equation）の解の安定性（stability）の研究に用いられる。安定性の研究では、常に減少する量（Section 8.2 のように）が、系が落ち着くことを証明する。

次の一歩

1. **どこまで近づくか。** $\alpha = 80^\circ$ のとき、OP が極大（local maximum）・極小（local minimum）となる時刻と、そのときの距離を u^2/g を単位として求めよ。

2. **斜面上で。** 水平面と角 β をなす斜面を上る向きにボールを投げ、斜面上に着地する場合について、小問 (i) を繰り返せ。（斜面から測った）臨界角は変わるか。

3. **空気抵抗がある場合。** ボールが速度に比例する抵抗も受けるとする。計算せずに、臨界角は 70.5° より大きくなると予想されるか、小さくなると予想されるか。それはなぜか。

4. **高い所から投げる。** ボールを崖の上から投げ、はるか下に着地する場合、どのような角度に対しても OP は最終的には増加することを示し、ある段階で OP が減少するような角度が存在するかどうかを調べよ。

さらに学ぶために

- **James Walker, *The Flying Circus of Physics***（Wiley）。日常の物理に関する意外なパズルが何百も収められている。
- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press）。第 3 章は放物運動を扱い、直観に反する問題がいくつか含まれている。
- **J. M. Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***（Cambridge University Press）。あるものが常に別のものより大きいことを証明する技法を扱う。

11.11 野手はどのように捕球するか

問題

STEP II 1998、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/98-s2-q11`

導入

ボールが外野へ高く打ち上げられる。うまい野手はすぐに走り出し、ボールが落ちてくるちょうどそのときにその地点へ到着する。なぜそんなことができるのだろうか。放物運動（projectile motion）の方程式を一瞬のうちに頭の中で解ける人などいないし、そもそも野手はボールの速さも角度も知らない。それでも野手は、そしてフリスビーをキャッチする犬も、これを日常的にやってのけるのである。

1968 年、物理学者 Seville Chapman がひとつの答えを提案した。この問題はそれを証明するものである。野手がボールの仰角（angle of elevation）θ を見ていて、$\tan\theta$ が**一定の割合で**増加するように動けば、ボールが落ちる地点にぴったり到着する。物理の知識は何もいらない。必要なのは、ボールが一定の速さより速く上がって見えるか遅く上がって見えるかに気づく能力だけである。難しい予測の問題が、単純なフィードバック（feedback）の規則に置き換えられるのである。

取りかかる前に

考えてみよう 打者を原点に、野手を距離 D の位置に置く。ボールが (x, y) にあるとき、$\tan\theta$ はいくらか。

ボールは野手の目の高さより y だけ上にあり、野手の前方、水平距離 $D - x$ のところにある（ボールは野手に向かってくる）。したがって $\tan\theta = \frac{y}{D-x}$ である。

順を追って解く

段階 1　完璧な位置にいる野手

> **考えてみよう**　ボールの水平方向の速さを U、鉛直方向の初速を W とし、ボールが時刻 T に（目の高さに）落ちてくるとする。x、y、D を U、W、T、g、t で表せ。y を因数分解できるか。

$x = Ut$、$y = Wt - \frac{1}{2}gt^2$ であり、ボールは $T = \frac{2W}{g}$ に目の高さに戻ってくる。そこに野手がいるので $D = UT$ である。$W = \frac{1}{2}gT$ であるから、

$$y = \tfrac{1}{2}gt(T - t), \qquad D - x = U(T - t).$$

因数 $T - t$ が約分できて、

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{U(T-t)} = \frac{g}{2U}\,t.$$

よって $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tan\theta = \frac{g}{2U}$ であり、これは定数である。 ■

段階 2　走る野手

> **考えてみよう**　今度は野手が距離 D_0 の位置から出発し、打者に向かって速さ v で走るとする。このとき野手の位置は $D_0 - vt$ である。野手は時刻 T にボールを捕る。D_0 はいくらか。同じ計算を繰り返せ。

時刻 T にボールを捕るには、野手はボールが落ちる地点にいなければならない。すなわち $D_0 - vT = UT$ であり、$D_0 = (U + v)T$ である。野手とボールの水平距離は $D_0 - vt - Ut = (U + v)(T - t)$ であり、ここでも因数が約分できる：

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{(U+v)(T-t)} = \frac{g}{2(U+v)}\,t.$$

したがって、ちょうどよい速さで走っていれば、$\tan\theta$ は一定の割合で増加する。

> **考えてみよう**　問題が求めているのは逆（converse）である。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tan\theta$ が一定になるように走れば、野手はボールを捕れるだろうか。

野手が速さ v で走り、$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{D_0-(U+v)t}$ が一定の割合 c で増加するとしよう。すると $\tan\theta = ct$ である（$t = 0$ で 0 となるからである）。このとき

$$\tfrac{1}{2}g(T - t) = c(D_0 - (U + v)t) \quad \text{任意の} t.$$

t の係数と定数項を比較する（comparing coefficients）と、$\frac{1}{2}g = c(U + v)$ および $\frac{1}{2}gT = cD_0$ を得る。辺々割ると $D_0 = (U + v)T$ となり、これはまさに時刻 T に落下地

点にいるための条件である。したがって野手は、$\tan\theta$ が一定の割合で上がり続けるように v を選べばよく、そうすればボールを捕ることができる。 ■

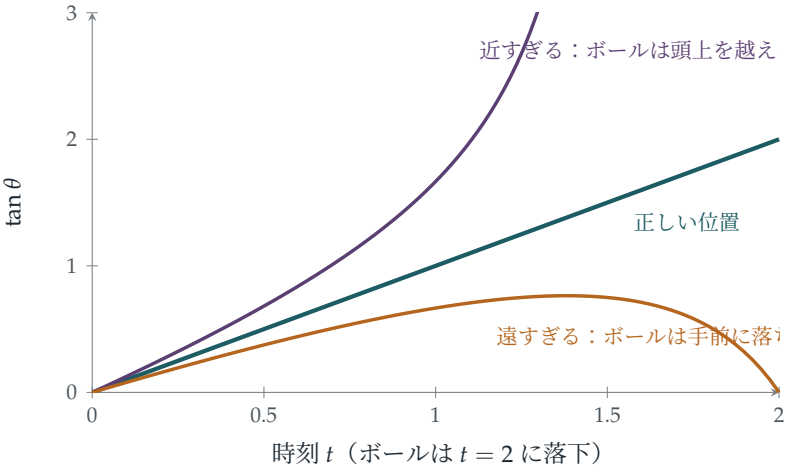


図 11.11.1　距離 2 の地点に落ちるボール（$g = 2$、水平方向の速さ 1）を、静止した野手が見たときの様子。正しい位置では、$\tan\theta$ は直線的に上昇する（ティール）。近すぎる位置に立つと、$\tan\theta$ は加速しながら上昇し、ボールは頭上を越えていく（プラム）。後ろに下がりすぎると、上昇はしだいに遅くなり、やがて下降する（アンバー）。規則：ボールの像が一定の割合で上昇するように動け。

振り返り

- **共通因数を探せ。**高さと水平距離のどちらにも $T - t$ が含まれており、それを約分することで $\tan\theta$ が一次式になった。
- **逆を証明せよ。**この規則がうまくいくこと（捕球につながること）を示すには、係数を比較する逆向きの議論が必要であった。
- **知覚しやすい不変量（invariant）。**$\tan\theta$ が一定の割合で上がっているかどうかは目で判断できるが、落下地点はそうはいかない。

背後にある数学

光学的加速度の打ち消し

Chapman の規則は現在、**光学的加速度の打ち消し**（optical acceleration cancellation）と呼ばれている。野手は「光学的加速度」$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\tan\theta$ を 0 に保つように動くのである。ボ

ールの像が加速しながら上がっていけば、ボールは頭上を越えるので後ろに下がる。減速していけば、ボールは手前に落ちるので前に走る（図 11.11.1）。この戦略はボールがどこに落ちるかを教えてはくれないが、野手をそこへ導いてくれる。これはフィードバック制御則（feedback control law）であり、誘導ミサイルを操縦する制御則と同類のものである。ミサイルは**比例航法**（proportional navigation）を用いて、目標への視線角を一定に保つ。これは同じ考え方を横方向に適用したものである。

野手が実際にしていること

実際の野手は Chapman の規則を使っているのだろうか。1990 年代に、野球の外野手の頭にカメラを取り付けて行われた実験では、結果はまちまちであった。Michael McBeath らは 1995 年に *Science* 誌上で、横方向に打たれたボールに対しては、野手は視野の中でボールの像が直線上を動き続けるような曲線経路を走っており（「線形光学的軌道」）、これによってもやはり捕球に至ると論じた。その後の研究では、両方の戦略、さらにそれらを組み合わせたものが使われていること、また野手は一定の速さで走るとは限らないことが示唆されている。2004 年の研究では、フリスビーをキャッチする犬が同じ光学的規則と整合する経路をたどることがわかった。細部はどうであれ、驚くべき結論は揺るがない。捕球に予測は必要なく、必要なのは適切なフィードバックだけなのである。

Chapman の論文

Seville Chapman の「Catching a baseball」（野球のボールを捕る）は 1968 年に *American Journal of Physics* 誌に掲載された 3 ページの論文であり、本質的にこの問題の計算そのものが書かれている。Chapman は、この戦略が空気抵抗のない場合にしか成り立たないこと、そして実際の野球のボールの軌道は抗力と回転によってゆがめられ、事情が複雑になることを指摘している。それでも、脳が視野の単純な不変量を利用して複雑な制御問題を解いているという考え方は、心理学やロボット工学において重要なものとなった。

思考のスキル

観察しやすい不変量を見つけよ

ある量を予測するのが難しいときは、それに関連していて、直接観察でき、しかも物事が順調に進んでいるときにちょうど単純なふるまいをする量を探せ。

ここでは落下地点を予測するのは難しかったが、$\tan\theta$ の変化率を監視するのは容易であった。大学では、これはフィードバック制御の考え方であり、必要な情報を表す観測量をどう選ぶかという考え方でもある。

次の一歩

1. **後ろ向きに走る。**ボールが野手の出発位置より後ろに落ちる場合、野手は打者から遠ざかる向きに走るべきであり、同じ規則が成り立つことを示せ。

2. **θ そのものではない。**完璧な位置にいる野手について、$\frac{d\theta}{dt}$ は一定でないことを示せ。なぜ見るべき量は $\tan\theta$ なのか。

3. **目の高さ。**ボールが野手の目の高さより h だけ低い位置から打たれた場合、うまく位置取りした野手にとって、$\tan\theta$ は依然として t の一次式か。（野手は目の高さで捕球するものとする。）

4. **空気抵抗。**速度に比例する空気抵抗があると、水平方向の速度は指数関数的に減衰する。うまく位置取りした野手にとって、$\tan\theta$ は依然として t の一次式か。

さらに学ぶために

- **Seville Chapman, “Catching a baseball”**, *American Journal of Physics* 36 (1968). （野球のボールを捕る）
- **Michael McBeath, Dennis Shaffer & Mary Kaiser, “How baseball outfielders determine where to run to catch fly balls”**, *Science* 268 (1995). （野球の外野手はフライを捕るためにどこへ走るかをどう決めるか）
- **Dennis Shaffer et al., “How dogs navigate to catch Frisbees”**, *Psychological Science* 15 (2004). （犬はフリスビーを捕るためにどう進路をとるか）

11.12 ゴムひもの上のアリ

問題

STEP II 2018、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/18-s2-q10`

導入

長さ 1 キロメートルのゴムのロープの上を、1 匹の蟻が毎秒 1 センチメートルの速さで歩き始める。ロープは 1 秒ごとに、さらに 1 キロメートルずつ一様に引き伸ばされる。ロープの先端は毎秒 1000 メートルという、蟻の 10 万倍の速さで遠ざかっていく。蟻はいつか先端にたどり着けるだろうか。

驚くべきことに、答えは「たどり着ける」である。引き伸ばしは蟻も一緒に運んでいく。ロープ全体に対する蟻の進み具合を**割合**で見ると、その増え方は小さくなっていくが、それらの割合を足し合わせたものは調和級数（harmonic series）のように振る舞い、調和級数は発散する（diverge）のである（Section 2.3）。蟻は到着する。ただし、それは宇宙の年齢すらかすむほどの時間が経ったあとである。この問題では連続版を厳密に解き、到着までの時間が速さの比について指数関数的に増大することを示す。

取りかかる前に

考えてみよう 紐は一様に引き伸ばされる。つまり、紐のどの部分も同じ倍率で伸びる。時刻 t における紐の長さは $a+ut$ である。杭から距離 x の位置にある点が、全長の $\frac{x}{a+ut}$ の割合のところにあるとすると、その点はどれだけの速さで動くか。

紐の上の各点は、全長に対して常に同じ割合 f の位置にあるので、杭からの距離は $f(a+ut)$ であり、その速さは $fu = \frac{ux}{a+ut}$ である。杭に近い点はほとんど動かず、先端は速さ u で動く。

順を追って解く

段階 1　蟻の方程式

蟻は紐に対して速さ v で動き、さらにその下にある紐の速さが加わる：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v + \frac{ux}{a+ut}.$$

> **考えてみよう**　$\frac{x}{a+ut}$ を商の微分法（quotient rule）で微分し、$\dot{x}$ の式を用いよ。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{a+ut}\right) = \frac{\dot{x}}{a+ut} - \frac{ux}{(a+ut)^2} = \frac{1}{a+ut}\left(v + \frac{ux}{a+ut}\right) - \frac{ux}{(a+ut)^2} = \frac{v}{a+ut}. \qquad \blacksquare$$

蟻が進んだ紐の割合は $\frac{v}{a+ut}$、すなわち蟻自身の速さを現在の長さで割ったものの割合で増加する。引き伸ばしは完全に消えてしまう。引き伸ばしは誰の割合も変えないからである。

段階 2　先端への到達

> **考えてみよう**　0 から t まで積分せよ。割合が 1 になるのはいつか。

蟻は杭から出発するので、

$$\frac{x}{a+ut} = \int_0^t \frac{v\,\mathrm{d}s}{a+us} = \frac{v}{u}\ln\frac{a+ut}{a}.$$

蟻が先端に到達するのは割合が 1 になるときである。$\ln\frac{a+uT}{a} = \frac{u}{v} = k$ より $a+uT = ae^k$、すなわち

$$uT = a(e^k - 1). \qquad \blacksquare$$

対数（logarithm）は限りなく大きくなるので、ロープがどれほど速く引き伸ばされても、蟻は必ず到着する。

段階 3　帰り道

> **考えてみよう**　帰り道では、紐に対する蟻の速さは $-v$ である。このとき割合の変化率はどうなるか。蟻は時刻 T に割合 1 の位置から出発する。

$-v$ として同じ計算を行うと $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{a+ut}\right) = -\frac{v}{a+ut}$ となるので、

$$\frac{x}{a+ut} = 1 - \frac{v}{u}\ln\frac{a+ut}{a+uT}.$$

割合が 0 になるのは $a+ut=(a+uT)e^k$ のときである。$a+uT=ae^k$ であるから、帰りにかかる時間は

$$t-T=\frac{(a+uT)(e^k-1)}{u}=\frac{ae^k\cdot uT/a}{u}=Te^k. \qquad \blacksquare$$

帰り道には行きの e^k 倍の時間がかかる。蟻が折り返す時点で、紐は最初の e^k 倍の長さになっているからである。

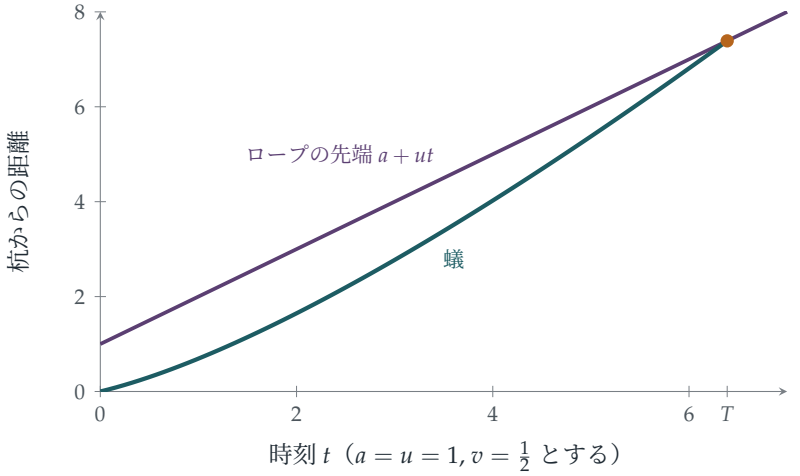


図 11.12.1　先端（紫）が蟻の歩く速さの 2 倍で動くロープ（$k=2$）の上を歩く蟻（青緑）。蟻は引き伸ばしによって運ばれ、杭からの距離はどんどん速く増えていく。蟻は $T=e^2-1\approx 6.39$ で先端に到達する。

振り返り

- **適切な変数を使う。**ロープのうち進んだ割合こそが自然な量であった。引き伸ばしはこれを変えないからである。
- **姿を変えた積分因子。**$\frac{1}{a+ut}$ を掛けることで、線形微分方程式（linear differential equation）がある関数の導関数そのものの形になった。これは積分因子（integrating factor）の方法にほかならない。
- **発散は速さに勝る。**割合は対数のように増加し、対数は有界でないので、蟻は必ず到着する。

背後にある数学

調和級数による設定

このパズルは、ふつう離散的な引き伸ばしの形で語られる。ロープの長さは 1 km で、蟻は最初の 1 秒で 1 cm 歩く。次にロープが 1 km 引き伸ばされ、蟻はまた 1 cm 歩く。以下同様である。n 秒目に蟻は長さ n km のロープのうち 1 cm、すなわち割合 $\frac{1}{100\,000\,n}$ だけ進む。引き伸ばしは割合を変えないので、N 秒後に蟻が進んだのはロープ全体の

$$\frac{1}{100\,000}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}\right)\approx\frac{\ln N+0.577}{100\,000}$$

である。蟻が到着するのは $H_N\approx 100\,000$ となるとき、すなわち約 $e^{100\,000}$ 秒後であり、これは 43 000 桁を超える数である。（比較のために言えば、宇宙の年齢は約 4×10^{17} 秒である。）連続版の答えもこれと合致する。$k=\frac{u}{v}=100\,000$ であり、$T\approx\frac{a}{u}e^{k}$ となる。

膨張する宇宙の中の光

ロープの上の蟻は、膨張する宇宙を横切る光のモデルである。遠方の銀河は空間そのものの膨張に運ばれて我々から遠ざかり、それらの銀河からの光は、蟻が伸びていくロープの上を歩くように、膨張する空間の**中を**速さ c で我々に向かって進む。遠方の銀河からの光がいつか我々に届くかどうかは、膨張率が時間とともにどう変化するかによる。ロープのように一定の割合で膨張する宇宙では、光はいつか必ず届く。我々の宇宙がそう見えるように膨張が加速する宇宙では、その光が決して我々に届かない銀河が存在する。すなわち**宇宙の事象の地平面**（cosmic event horizon）が存在するのである。蟻の場合にこれに相当するのは、先端の速さが長さに比例して増えるように指数関数的に引き伸ばされるロープである（演習問題で試してみよ）。

ガードナーの蟻

このパズルは、1972 年にフランスの数学者 Denys Wilquin がゴムバンドの上の芋虫という形で考案したものらしい。そしてマーティン・ガードナー（Martin Gardner）が *Scientific American* 誌のコラムや著書 *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*（『タイムトラベルとその他の数学的困惑』）で紹介し、広く知られるようになった。直観に反するにもかかわらず証明は容易な結果の例として最もよく知られたものの一つであり、調和級数の発散を示す例として好んで用いられている。

思考のスキル

厄介な要素の影響を受けない量を見つける

問題のある部分（ここでは引き伸ばし）がすべてを変えてしまうときには、それが変えずに残す量を探せ。

引き伸ばしはあらゆる距離を変えるが、割合は一切変えない。割合を使って考えることで、問題から引き伸ばしが取り除かれた。大学では、この考え方は宇宙論や流体力学における**共動座標**（comoving coordinates）として現れ、より一般には、変換のもとでの不変量（invariant）の探求として現れる。

次の一歩

1. **中間地点。**蟻がロープの中間地点にいるのはいつか。それは時刻 $\frac{T}{2}$ より前か後か。
2. **指数関数的な引き伸ばし。**代わりに、ロープの長さが $ae^{\lambda t}$ であるとする。蟻が先端に到達するのは $v > \lambda a$ のときに限ることを示せ。（これが宇宙の事象の地平面である。）
3. **加速するロープ。**長さが $a + \frac{1}{2}bt^2$ のとき、蟻は必ず到着するか。
4. **離散版のパズル。**離散版において、蟻がロープの 1% を進むのに何秒かかるか。$H_N \approx \ln N + 0.577$ を用いよ。

さらに学ぶために

- **Martin Gardner, *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments***（W. H. Freeman）。ゴムのロープの上の蟻の話を収録している。
- **Julian Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant***（Princeton University Press）。オイラー定数を探る本。調和級数と蟻の話を扱っている。
- **Barbara Ryden, *Introduction to Cosmology***（Cambridge University Press）。膨張する空間、地平面、共動座標を学部レベルで解説している。

11.13 除雪車問題

問題

STEP III Specimen paper、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/spec-s3-q11`

導入

雪が一定の割合で降り続いている。1 台の除雪車が道路を走り出すが、出会う雪がしだいに深くなるので、だんだん遅くなっていく。少し遅れて 2 台目の除雪車が、除雪された道を追いかける。2 台目が出会うのは 1 台目が通過した後に積もった雪だけであり、それはより浅いので、2 台目はより速く進み、やがて追いつく。それはいつか。

これは、Ralph Agnew が 1942 年に発表した有名な問題の一変形であり、微分方程式（differential equation）の問題の中でも最もよく知られたものの一つになった。この問題の面白さは、2 台目の除雪車の速さが *1 台目が各地点を通過した時刻*に依存する点にある。そのため小問 (i) の解が小問 (ii) の方程式に入り込んでくる。そしてこの方程式は、時刻を距離の関数として表す、いわば「逆さま」に書いたときに最もうまく扱える。

取りかかる前に

考えてみよう 1 台目の除雪車は時刻 t に深さ $h+kt$ の雪に出会う。その速さはいくらか。x を t の関数として求めるのと、t を x の関数として求めるのとでは、どちらが易しいか。

速さは $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{\alpha(h+kt)}$ である。これはきれいに変数分離（separation of variables）できる。逆数をとると $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\alpha(h+kt)}{k}$ となり、これは x の関数としての t についての単純な線形（linear）方程式である。1 台目についてはどちらの方法でもよいが、2 台目については逆さまの形が不可欠である。

順を追って解く

段階 1　1 台目の除雪車

$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \alpha\left(\dfrac{h}{k} + t\right)$ より、量 $\dfrac{h}{k} + t$ は x について指数関数的に増加する。すなわち $\dfrac{h}{k} + t = Ce^{\alpha x}$ である。$x = 0$ のとき $t = 0$ であるから $C = \dfrac{h}{k}$ となり、

$$t_1(x) = \frac{h}{k}\left(e^{\alpha x} - 1\right). \qquad \blacksquare$$

1 台目の除雪車は指数関数的に遅くなる。すなわち、等しい距離を進むのにかかる時間が指数関数的に増えていく。

段階 2　2 台目の除雪車の方程式

> **考えてみよう**　2 台目の除雪車は時刻 t に位置 y に到達する。そこでの雪の深さはいくらか。（1 台目が通過した直後の深さはいくらだったか。）

1 台目の除雪車は時刻 $t_1(y)$ に位置 y の雪をすべて除去した。それ以降、雪は割合 k で積もったので、時刻 t における深さは $z = k\bigl(t - t_1(y)\bigr)$ である。したがって 2 台目の除雪車の速さは

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{\alpha k\bigl(t - t_1(y)\bigr)} = \frac{1}{\alpha\bigl(t - t_1(y)\bigr)},$$

であり、逆数をとると

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = t - \frac{h}{k}\left(e^{\alpha y} - 1\right). \qquad \blacksquare$$

段階 3　解く

> **考えてみよう**　これは t について線形である：$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} - \alpha t = -\dfrac{\alpha h}{k}\left(e^{\alpha y} - 1\right)$。どのような積分因子（integrating factor）がうまくいくか。初期条件は何か。

$e^{-\alpha y}$ を掛けると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(te^{-\alpha y}\right) = -\frac{\alpha h}{k}\left(1 - e^{-\alpha y}\right), \qquad te^{-\alpha y} = -\frac{\alpha h}{k}y - \frac{h}{k}e^{-\alpha y} + C.$$

2 台目の除雪車は時刻 $t = T$ に $y = 0$ を出発するので $T = -\dfrac{h}{k} + C$ であり、$C = T + \dfrac{h}{k}$ を得る。両辺に $e^{\alpha y}$ を掛け戻して整理すると、

$$t_2(y) = \frac{h}{k}\left(e^{\alpha y} - 1\right) + \left(T - \frac{\alpha h y}{k}\right)e^{\alpha y}. \qquad \blacksquare$$

（問題の指示どおり確かめるには、微分して代入すればよい。各項はまとまって $\alpha\bigl(t - t_1(y)\bigr)$ となる。）

段階 4 衝突

考えてみよう 2 台の除雪車は、同じ時刻に同じ地点に達したときに衝突する。$t_2(y)$ と $t_1(y)$ を比較せよ。

差は $t_2(y) - t_1(y) = \left(T - \frac{\alpha h y}{k}\right) e^{\alpha y}$ であり、これは位置 y における 2 台の除雪車の時間差である。これが 0 になるのは

$$y = \frac{kT}{\alpha h}. \qquad \blacksquare$$

のときである。この地点で 2 台目の除雪車は 1 台目に追いつく。このとき 2 台目の前方の雪の深さは 0 であり、このモデルでは 2 台目の速さは無限大になる（図 11.13.1）。

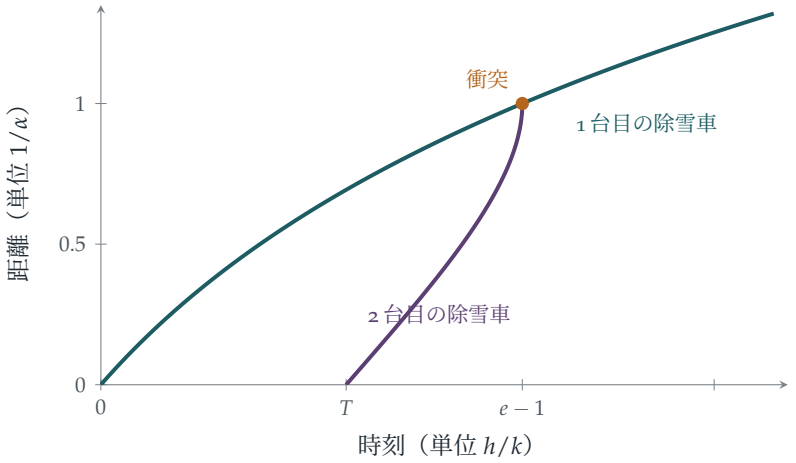


図 11.13.1 2 台の除雪車の距離と時刻の関係（$T = \frac{h}{k}$ の場合。すなわち 2 台目は雪の深さが 2 倍になった時点で出発する）。1 台目の除雪車（青緑）は雪が深くなるにつれて遅くなる。2 台目（紫）は部分的に除雪された道を遅れて出発し、差を詰めながら加速して、距離 $\frac{kT}{\alpha h} = \frac{1}{\alpha}$、時刻 $(e-1)\frac{h}{k}$ で 1 台目に追いつく。

振り返り

- **方程式を逆さまにする。** t を位置の関数とすると、どちらの方程式も線形になった。
- **一つの解が次の問題に入り込む。** 1 台目の除雪車の時刻表 $t_1(y)$ が、2 台目の除雪車の方程式に現れた。
- **二度解かずに比較する。** 衝突の条件は差 $t_2 - t_1$ から得られ、その差は単純な因数をもっていた。

背後にある数学

Agnew の除雪車

Ralph Palmer Agnew が 1942 年の教科書 *Differential Equations* で示した版では、ある朝、雪が激しく一定の割合で降り始める。正午に除雪車が出発し、最初の 1 時間で 2 マイル、次の 1 時間で 1 マイル進む。雪が降り始めたのはいつか。除雪車の速さは雪の深さに反比例し、深さは降り始めからの経過時間に比例する。答え（下の演習問題を参照）には黄金比（golden ratio）が関わり、雪が降り始めたのは正午の約 37 分前である。その後、この問題のように除雪車が 2 台登場する版が生まれた。

伝わっていく情報

2 台目の除雪車の運動は、道路に記録された履歴、すなわち各地点が最後に除雪された時刻に依存する。これは**記憶**（memory）をもつ系の簡単な例であり、ある場所での状態が、以前そこで起こったことに依存する。交通流、氷河の運動、森林火災の広がりはいずれもこの性質をもち、その数学である一階偏微分方程式（first-order partial differential equation）とその**特性曲線**（characteristics）の理論は、大学 2 年次の標準的な話題である。時刻を位置の関数として書く（「波面はいつここに到達するか」）という発想は、まさにこうした問題に用いられる**到達時刻**（arrival times）の方法そのものである。

思考のスキル

独立変数を選ぶ

微分方程式は、変数の役割を入れ替えるとずっと簡単になることがある。変化率が、ある場所で何かが起こった時刻に依存するのであれば、時刻を場所の関数として書け。

ここでは、どちらの方程式も $t(y)$ について書くと線形になった。大学では、どの変数を独立変数（independent variable）とするかを選ぶ自由（そして都合のよいときにそれを変える自由）が、流体力学のホドグラフ法（hodograph method）から幾何学における弧長（arc length）をパラメータとして用いる手法まで、絶えず活用される。

次の一歩

1. **Agnew の問題。** 正午より前の未知の時刻に、雪が一定の割合で降り始める。速さが雪の深さに反比例する除雪車が正午に出発し、最初の 1 時間で 2 マイル、次の 1 時間で 1 マイル進む。雪が正午の t_0 時間前に降り始めたとすると $\left(1+\frac{2}{t_0}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{t_0}\right)^3$ が成り立つことを示し、$\frac{1}{t_0}$ が黄金比であることを導き、雪が降り始めた時刻を求めよ。

2. **確認。** $t_2(y)$ が小問 (ii) の微分方程式を満たすことを、微分によって確かめよ。

3. **時間差。** $kT > h$ ならば、時間差 $t_2(y) - t_1(y)$ は初めに増加し、その後減少して 0 になることを示し、それが最大になる位置を求めよ。$kT \le h$ のときはどうなるか。その意味を解釈せよ。

4. **3 台の除雪車。** 3 台目の除雪車が時刻 $2T$ に出発する。その運動の方程式を書け。3 台目が 2 台目に追いつくのは、2 台目が 1 台目に追いつくより前か後か。

さらに学ぶために

- **Ralph Palmer Agnew, *Differential Equations***（McGraw-Hill, 1942）。除雪車問題の原典。
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***（CRC Press）。数多くの問題とともに除雪車問題を論じている。
- **Richard Haberman, *Mathematical Models***（SIAM）。交通流と特性曲線を、取り組みやすい水準で扱っている。

11.14 懸垂線ではなく放物線

問題

STEP I 1991、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/91-s1-q10`

導入

鎖の両端を持って垂らすと、鎖は**懸垂線**（catenary、ラテン語の「鎖」に由来する）とよばれる曲線を描く。ガリレオ（Galileo）はこれを放物線（parabola）だと考えたが、そうではないことを 1646 年に十代のホイヘンス（Huygens）が示した。ところが、吊り橋（suspension bridge）のように、等間隔に並んだ支柱で重い路面を鎖から吊り下げると、鎖は**本当に**放物線をなす。違いは重さの分布の仕方にある。懸垂線では重さは曲がった鎖そのものに沿って分布し、橋では水平方向に均等に分布するのである。

この問題では、各節点で力を分解する（resolving forces）ことだけで、放物線になることを証明する。鍵となるのは、張力（tension）の水平成分（horizontal component）が鎖のどこでも同じであり、そのため各部分の傾きがその部分の支える重さに比例するという事実である。その結果、美しい規則性が現れる。隣り合う節点の間の落差は奇数 $1, 3, 5, 7, \ldots$ の順に増え、その部分和（partial sum）は平方数になるのである。

取りかかる前に

考えてみよう 各節点 A_i には三つの力がはたらく。隣り合う二つの部分の張力と、支柱から吊り下がる重さ w である。重さが影響を与えられないのは、張力のどの成分か。

重さは鉛直方向にはたらくので、各節点で二つの張力の水平成分はつり合わなければならない。したがって、張力の水平成分（これを H とおく）は鎖のどの部分でも同じである。

順を追って解く

段階 1　各節点での方程式

部分 $A_{i-1}A_i$ が水平より下向きに角 ϕ_i をなす（A_{i-1} から中央に向かう向きで測る）とする。すると、その張力 T_i の水平成分は $T_i\cos\phi_i$、鉛直成分は $T_i\sin\phi_i$ である。$1 \le i \le n$ について A_i で力を分解すると、

$$T_i\cos\phi_i = T_{i+1}\cos\phi_{i+1} = H, \qquad T_i\sin\phi_i - T_{i+1}\sin\phi_{i+1} = w.$$

（外側の部分は上向きかつ外向きに、より大きな鉛直成分で引き、内側の部分は内向きかつわずかに下向きに引く。その差が支柱を支えている。）

> **考えてみよう**　中央の節点 A_{n+1} では何が起こるか。橋の対称性を用いよ。

対称性により、A_{n+1} で出会う二つの部分は互いに鏡像であるから、それぞれが支柱の重さの半分を支える。すなわち $T_{n+1}\sin\phi_{n+1} = \tfrac{1}{2}w$ である。

段階 2　重さから傾きへ

中央から外側へ順にたどると、鉛直成分は

$$T_{n+1}\sin\phi_{n+1} = \tfrac{1}{2}w, \quad T_n\sin\phi_n = \tfrac{3}{2}w, \quad \dots, \quad T_1\sin\phi_1 = \tfrac{2n+1}{2}w.$$

となる。それぞれを H で割ると、傾きは $\tan\phi_i = \frac{(2(n+1-i)+1)w}{2H}$ である。部分 $A_{i-1}A_i$ の傾きは $\frac{y_{i-1}-y_i}{h}$ とも表せるので、

$$\frac{y_n - y_{n+1}}{h} = \frac{w}{2H}, \qquad \frac{y_{n-1}-y_n}{h} = \frac{3w}{2H}, \qquad \dots, \qquad \frac{y_0 - y_1}{h} = \frac{(2n+1)w}{2H}.$$

逆数をとって奇数を掛けると、$\frac{h}{y_n - y_{n+1}}$、$\frac{3h}{y_{n-1}-y_n}$、…、$\frac{(2n+1)h}{y_0-y_1}$ はいずれも $\frac{2H}{w}$ に等しい。 ■

段階 3　放物線

> **考えてみよう**　j で中央から外側へ数えた節点の番号を表し、A_{n+1-j} が A_{n+1} から水平距離 jh にあるようにする。それは A_{n+1} よりどれだけ高い位置にあるか。

$c = \frac{wh}{2H}$ として落差を足し合わせると、

$$y_{n+1-j} - y_{n+1} = c(1 + 3 + 5 + \cdots + (2j-1)) = cj^2.$$

x を中央から測ると $x = jh$ であるから、最も低い節点からの高さは $\frac{c}{h^2}x^2 = \frac{w}{2Hh}x^2$ である。対称性により反対側でも同じことが成り立ち、両端の支点（$j = n+1$）も同じ

式を満たす。したがって、すべての点は放物線

$$y = y_{n+1} + \frac{w}{2Hh}(x - x_{n+1})^2. \qquad \blacksquare$$

上にある。

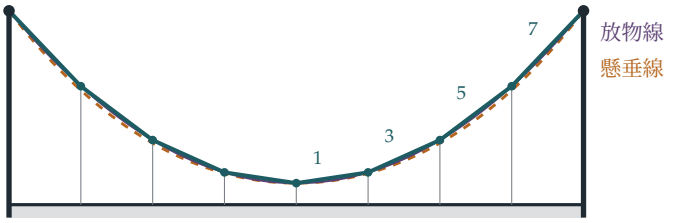


図 11.14.1　水平方向に等間隔で等しい荷重を支える鎖（ティール）。その節点は放物線（プラム）上にあり、中央から外側へ向かう隣り合う節点間の落差の比は 1 : 3 : 5 : 7 である。同じ両端と最下点をもち、自重だけで垂れ下がる自由な鎖は懸垂線（アンバー、破線）を描く。懸垂線は底の部分でより平らで、支点の近くでより急である。

振り返り

- **一定であるものを見つける。**荷重が鉛直方向だけなら、水平方向の張力はどこでも同じである。
- **中央から積み上げる。**各部分はそこから中央までの重さをすべて支えるので、鉛直成分は w ずつ増える。
- **奇数の和は平方数になる。**$1 + 3 + \cdots + (2j - 1) = j^2$ によって、傾きの列が放物線に変わった。

背後にある数学

放物線か懸垂線か

この議論を連続的にしたものは、両方の曲線を説明してくれる。一定の水平張力 H のもとにある鎖 $y(x)$ について、張力の鉛直成分は Hy' であり、短い区間ではそこで担う荷重の分だけ変化する。すなわち $H\,\mathrm{d}y' = \mathrm{d}W$ である。

- 荷重が**水平方向に**均等に分布している場合（重い路面で、道路の単位長さあたりの重さが ρ）、$Hy'' = \rho$ となるので、y は二次式、つまり放物線である。
- 荷重が鎖の自重で、**鎖に沿って**均等に分布している場合（鎖の単位長さあたり ρ）、$Hy'' = \rho\sqrt{1 + y'^2}$ となり、その解は懸垂線 $y = c\cosh\frac{x}{c}$（ただし $c = H/\rho$）である。

鎖がほぼ水平な底の付近では、二つの曲線はほとんど同じである。違いが出るのは支点の近くで、そこでは鎖が急になり、同じ水平距離により多くの鎖が含まれる。実際の吊り橋では路面がケーブルよりはるかに重いので、ケーブルの形は放物線にきわめて近い。

逆さにした鎖とアーチ

鎖には純粋な引張りだけがはたらいている。その形を上下逆さにすると、純粋な圧縮だけがはたらき、曲がろうとする傾向のないアーチが得られる。ロバート・フック（Robert Hooke）は 1675 年にこれをアナグラムの形で発表した。解読すると「しなやかな線が垂れ下がるように、ただし上下を逆にすれば、剛なアーチが立つ。」となる。クリストファー・レン（Christopher Wren）とフックはこの考えをセント・ポール大聖堂のドームに用いた。また、アントニ・ガウディ（Antoni Gaudí）は、重りを付けた紐を天井から吊るし、それを上下逆さに撮影することで、バルセロナのサグラダ・ファミリア（Sagrada Família）を設計した。セントルイスのゲートウェイ・アーチは（重み付きの）逆さ懸垂線である。

懸垂線の挑戦状

1690 年、ヤコブ・ベルヌーイ（Jakob Bernoulli）は数学者たちに、垂れ下がる鎖の形を求めよという挑戦状を出した。一年のうちに、弟のヨハン・ベルヌーイ（Johann Bernoulli）、ライプニッツ（Leibniz）、そしてホイヘンスが解を発表した。ヨハン・ベルヌーイは後に、問題を出した兄自身は解けなかったと、得意げに回想している。懸垂線は新しい微積分学の最初の勝利の一つであり、双曲線関数（hyperbolic functions）cosh と sinh へとつながった。これらは 18 世紀に Vincenzo Riccati とランベルト（Johann Heinrich Lambert）によって体系的に研究された。

思考のスキル

すべての節点で力を分解する

節点とまっすぐな部材からなる構造では、各節点で力のつり合いを考えよ。一定に保たれる成分と積み上がる荷重が、しばしば形を明らかにする。

大学では、これは工学におけるトラス（truss）や骨組構造の解析となり、連続極限ではケーブル、梁、膜の微分方程式（differential equation）となる。離散的な鎖から連続的な鎖への移行は、Section 10.3 で見た和から積分への移行と

同じ手法である。

次の一歩

1 **支柱の数が偶数の場合。**支柱を $2n$ 本にして問題を解き直せ。このとき鎖の最下点は中央の水平な部分になる。節点はやはり放物線上にあるか。

2 **張力。**鎖の張力の最大値を H、w、n を用いて求めよ。それはどこで生じるか。

3 **懸垂線。**$y = c\cosh\frac{x}{c}$ が $y'' = \frac{1}{c}\sqrt{1+y'^2}$ を満たすことを確かめよ。また、$x = 0$ から $x = X$ までの懸垂線の長さが $c\sinh\frac{X}{c}$ であることを示せ。

4 **ガリレオの誤り。**長さ $2L$ の鎖が、距離 $2d$ だけ離れた二つの支点の間に垂れ下がっている。L が d よりわずかに大きいだけのとき、懸垂線のたるみは放物線のたるみとほぼ同じであることを示せ。ガリレオの実験で違いが明らかにならなかったのはなぜか。

さらに学ぶために

- **E. H. Lockwood, *A Book of Curves***（Cambridge University Press）。懸垂線、放物線とその仲間の曲線。
- **Jacques Heyman, *The Stone Skeleton***（Cambridge University Press）。石造のアーチやドームがなぜ立っていられるのかを、フックの鎖から説き起こす。
- **David Billington, *The Tower and the Bridge***（Princeton University Press）。橋の芸術と工学。

本章で学んだこと

本章は、揺れるもの、回るもの、そして動く場所から眺めたものから始まった。そこで三つの問いを立てた。運動が単純になるのはどのようなときか。正しい視点とは何か。直観は信頼できるか。本章の 14 問が明らかにしたことを以下にまとめる。

1. 運動が単純になるのはどのようなときか

振幅（amplitude）によらないただ一つの振動数をもつ単振動（simple harmonic motion）は、理想的な運動である。これを固有振動数（natural frequency）で駆動すると共振（resonance）が起こった（Section 11.1）。共振からわずかにずれるとうなり（beats）が生じ、ちょうど共振するときには振幅は限りなく増大する。二つの連成振動子（coupled oscillators）は、実は互いに独立な二つの単振動子が姿を変えたものであった（Section 11.2）。ただしその振動数の比は無理数 $\sqrt{3}$ であり、そのため全体の運動は決して繰り返さない。現実の振り子はまったく単純ではない（Section 11.3）。その周期（period）は振幅とともに増大し、それは楕円積分（elliptic integral）で表される。この積分は、ガウス（Gauss）の算術幾何平均（arithmetic–geometric mean）によって驚くほど速く計算できる。そして等時曲線（tautochrone）（Section 11.4）は、軌道をサイクロイド（cycloid）の形に曲げることで、運動を再び厳密に単純にできることを示した。

2. 正しい視点とは何か

ほとんどすべての問題は、適切な変数あるいは適切な座標系を選ぶことで解けた。

- **座標。**弧長（arc length）を用いると等時曲線は単純になった。組合せ $x \pm y$ はばねの連成を解きほぐした。ロープのうち進んだ部分の割合を考えると、アリの問題から伸びの影響が消えた（Section 11.12）。時刻を距離の関数として書くと、除雪車の方程式は線形になった（Section 11.13）。
- **座標系。**加速する列車の中では（Section 11.5）、見かけの力（fictitious force）によって重力が傾き、ビーズは新たな最下点のまわりで振動した。アインシュタイン（Einstein）はこの観察を一般相対性理論（general relativity）へと発展させた。
- **モーメントをとる点。**回転するビー玉では（Section 11.6）、接触点のまわりの角運動量（angular momentum）が保存された。摩擦力がその点にはたらくからである。これにより、摩擦力を知らなくても最終的な速さが求まった。

- **等価な系。**棒はちょうど三つの質点のようにふるまい（Section 11.7）、その重みはシンプソン（Simpson）の公式（Simpson's rule）の重みである。また、立体の平衡点は、その法線（normal）が重心（centre of mass）を通る点である（Section 11.8）。

3. 直観は信頼できるか

多くの場合、信頼できない。大砲の弾が届く領域の境界は、一本の軌道ではなく、軌道全体の包絡線（envelope）である（Section 11.9）。十分に急な角度で投げたボールは、着地する前にこちらへ戻ってくる（Section 11.10）。野手は、ボールの見かけの像が一定の割合で上昇し続けるようにすることで、落下地点を予測しなくてもボールを捕ることができる（Section 11.11）。自分の歩く速さの 10 万倍の速さで伸ばされるロープの上をゆっくり歩くアリも、それでも端にたどり着く（Section 11.12）。垂れ下がった鎖は放物線ではないが、橋を支える鎖は放物線になる（Section 11.14）。いずれの場合も、短い計算が、自信はあるが誤った直観を正確な主張に置き換え、たいていはその理由の説明も与えてくれた。

4. 振動と座標系のための道具箱

手法	用いた場面
特殊解（particular solution）と余関数（complementary function）	共振（11.1）
固有ベクトル（eigenvector）による分離	基準振動（normal modes）（11.2）
エネルギー積分と置換	振り子（11.3）
自然な変数	等時曲線（11.4）、アリ（11.12）
見かけの力	列車（11.5）
ある点のまわりの角運動量	バックスピン（11.6）
モーメントの一致	シンプソンの棒（11.7）
停留点（stationary point）の個数を数える	傾いた平衡（11.8）
判別式（discriminant）と包絡線	安全放物線（11.9）
導関数の符号	戻ってくるボール（11.10）
係数比較	野手（11.11）
積分因子（integrating factor）	アリ（11.12）、除雪車（11.13）
節点での力の分解	橋（11.14）

この先へ

- 続く二つの章では確率と統計を扱う。まずは Section 12.1 から始める。

- 基準振動は固有ベクトルであり（Section 7.2）、Section 8.6 の量子調和振動子（quantum harmonic oscillator）は、本章の振動子を量子力学（quantum mechanics）で扱ったものである。
- リミットサイクル（limit cycle）（Section 8.4）は自ら持続する振動であり、カオス（chaos）（Section 8.7）は非線形（nonlinear）振動子が駆動されたときに起こりうる現象である。

大学入学前にさらに先へ進みたい人へ

- **A. P. French, *Vibrations and Waves***：振動、共振、基準振動への定番の入門書。
- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***：回転、座標系、そして意外な結果をもつ数多くの問題を扱う。
- **Steven Strogatz, *Sync***：ホタルから橋まで、振動子がどのように足並みをそろえるかを描く。
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***：等時曲線、最速降下線（brachistochrone）、除雪車の問題を、その歴史とともに扱う。

コールマン（Coleman）は、物理学者の経歴とは調和振動子をますます抽象的なやり方で扱い続けることにほかならない、と冗談を言った。本章ではその理由を示そうとしてきた。振動子は存在する中で最も単純な運動であり、正しい視点を選べば、ほとんどあらゆるものが振動子のように見える。その視点、すなわち変数、座標系、あるいは組合せを見つけられるようになることこそ、力学が教えてくれる最も有用なスキルである。

「次の一歩」の解答

以下は簡潔な解答とヒントであり、完全な解答ではない。結果と鍵となるステップを示しているので、自分の答えの確認に使ってほしい。答えを見る前に、それぞれの問題にきちんと取り組むこと。

11.1 共鳴

1. エレベーターの座標系（frame of reference）では、重力は実質的に $g-f$ となり、糸のばね定数（stiffness）は $\frac{mg}{a}$ である（mg のもとで a だけ伸びるから）。よって $\ddot{y}+\frac{g}{a}y=g-f$ であり、はじめに $y=a, \dot{y}=0$ である。新しいつり合いの位置（equilibrium）は $a-\frac{af}{g}$ なので、$y=a-\frac{af}{g}(1-\cos\omega t)$ となる。振幅（amplitude）は $\frac{af}{g}$ であり、最小の伸び $a(1-\frac{2f}{g})$ は正である。エレベーターの加速が止まると、つり合いの位置は a に戻り、粒子は変位 $-\frac{af}{g}(1-\cos\omega T)$ の位置にあって、速度 $-\frac{af}{g}\omega\sin\omega T$ をもつ。新しい振幅は $\frac{af}{g}\sqrt{(1-\cos\omega T)^2+\sin^2\omega T}=\frac{2af}{g}\left|\sin\frac{1}{2}\omega T\right|$ である。

2. $x=Ct\cos nt$ とすると $\ddot{x}+n^2x=-2Cn\sin nt$ となるので、$C=-\frac{nb}{2}$ である。初期条件を満たすように $\frac{b}{2}\sin nt$ を加えると、$x=\frac{b}{2}(\sin nt-nt\cos nt)$ となる。問題文の式に p についてロピタルの定理（L'Hôpital's rule）を適用すると、$p\to n$ のとき同じ結果が得られる。

3. $n\sin pt-p\sin nt=n(\sin pt-\sin nt)+(n-p)\sin nt=2n\cos\frac{(n+p)t}{2}\sin\frac{(p-n)t}{2}+(n-p)\sin nt$ である。第 2 項は小さい。第 1 項は、ゆっくり変化する包絡線（envelope）$\left|\sin\frac{(n-p)t}{2}\right|$ の内側での速い振動であり、この包絡線は $\frac{2\pi}{n-p}$ ごとに繰り返す。

4. 振幅は $\frac{F}{\sqrt{(n^2-p^2)^2+4k^2p^2}}$ である。分母を p^2 について最小化すると $-2(n^2-p^2)+4k^2=0$ となるので、$p^2=n^2-2k^2$ である。

11.2 基準振動

1. 微分すると、エネルギーの変化率は $\dot{x}\left(m\ddot{x}+\frac{\lambda}{a}(2x+y)\right)+\dot{y}\left(m\ddot{y}+\frac{\lambda}{a}(x+2y)\right)=0$ である。$u=x-y, v=x+y$ とおくと、エネルギーは $\left(\frac{m}{4}\dot{u}^2+\frac{\lambda}{4a}u^2\right)+\left(\frac{m}{4}\dot{v}^2+\frac{3\lambda}{4a}v^2\right)$ となり、それぞれの括弧は単振動子（simple harmonic oscillator）のエネルギー

なので、それぞれが一定である。

2. 周期（period）$\frac{2\pi}{\omega}$ の場合：$x=-y$ かつ $\dot{x}=-\dot{y}$ から始める（こうすると $v\equiv 0$ となる）。周期 $\frac{2\pi}{\sqrt{3}\omega}$ の場合：$x=y$ かつ $\dot{x}=\dot{y}$ から始める。

3. X にはたらく力は $-\frac{\lambda}{a}x-\frac{\mu}{a}(x+y)$ である。振動モード（mode）$x-y$ は依然として $\omega^2=\frac{\lambda}{ma}$ をもち、$x+y$ は $\frac{\lambda+2\mu}{ma}$ をもつようになる。すべての運動が周期的になるのは、ちょうど振動数（frequency）の比 $\sqrt{1+2\mu/\lambda}$ が有理数であるときである。

4. 行列は $\frac{k}{m}\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$ であり、$2-\sqrt{2}$, 2, $2+\sqrt{2}$ に対する固有ベクトル（eigenvector）はそれぞれ $(1,\sqrt{2},1)$, $(1,0,-1)$, $(1,-\sqrt{2},1)$ である。各モードは次のとおりである：3 つすべてが同じ向きに振れ、真ん中が最も大きく振れる。外側の 2 つが逆向きに振れ、真ん中は静止している。真ん中が外側の 2 つと逆向きに振れる。

11.3 本当の振り子

1. エネルギー：$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{\lambda}{2a}\left(\sqrt{x^2+a^2}-a\right)^2=\frac{1}{2}mv^2$。最大変位では $\sqrt{x^2+a^2}=a+\frac{v}{k}$ なので、$x_{\max}=\sqrt{\frac{2av}{k}+\frac{v^2}{k^2}}$ である。v が小さいとき、伸びはおよそ $\frac{x^2}{2a}$ なので、$\dot{x}^2\approx v^2-\frac{k^2x^4}{4a^2}$ となる。$x=Xu$, $X=\sqrt{2av/k}$ とおくと、周期 $4\int_0^X\frac{\mathrm{d}x}{\dot{x}}$ は $\frac{4X}{v}\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}}$ となる。復元力（restoring force）は x ではなく x^3 に比例する（$x=0$ で糸はちょうど自然長にある）ので、単振動の極限は存在しない。

2. $m=\sin^2\frac{\gamma}{2}\approx\frac{\gamma^2}{4}-\frac{\gamma^4}{48}$ として、$(1-m\sin^2\phi)^{-1/2}\approx 1+\frac{m}{2}\sin^2\phi+\frac{3m^2}{8}\sin^4\phi$ である。ϕ について平均をとると $1+\frac{m}{4}+\frac{9m^2}{64}$ となり、γ^4 の項は $-\frac{1}{192}+\frac{9}{1024}=\frac{11}{3072}$ である。

3. 1 と $\cos 45^\circ=0.70711$ から始めると、$(0.85355, 0.84090)$、次に $(0.84722, 0.84720)$、さらに 0.847213 となる。周期の倍率は $\frac{1}{0.847213}=1.18034$ である。

4. 周期の倍率は $\frac{1}{16}(\gamma_5^2-\gamma_4^2)\approx 1.71\times 10^{-4}$（ラジアンで計算）だけ変化するので、時計は 1 日におよそ 15 秒遅れる。

11.4 等時曲線

1. $y=\frac{s^2}{4k}$ なので $\ddot{s}=-g\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=-\frac{g}{2k}s$ となり、これは $\omega^2=\frac{g}{2k}$ の単振動である。$s_0=2\sqrt{kh}$ から、V での速さは $\omega s_0=\sqrt{2gh}$ である。

2. お椀は長さ R の振り子（pendulum）である。小さな高さから放すと、底まで

の時間は $\frac{\pi}{2}\sqrt{R/g}$ である。縁（$\gamma = 90°$）から放すと、その 1.180 倍、およそ $1.85\sqrt{R/g}$ となる。

3. はい。両者は 4 分の 1 周期後に V に達し、そこで衝突する。どのような速度で離れても、それぞれは s について同じ周期の単振動を行うので、ちょうど半周期後にそれぞれ V に戻り、再び V で衝突する。（V で静止したまま残された粒子は、単にそこにとどまる。）

4. $x = R(\theta - \sin\theta)$, $y = R(1 - \cos\theta)$ とすると $\mathrm{d}s = 2R\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta$ なので、1 つの弧（arch）の長さは $\int_0^{2\pi} 2R\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 8R$ である。面積は $\int y\,\mathrm{d}x = R^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = 3\pi R^2$ である。

11.5 加速する列車の中の重力

1. 客車の座標系では、単位質量あたり a の後ろ向き（南向き）の力がはたらき、これは発射の向きである。飛行時間を $\frac{2V\sin\theta}{g}$ として、到達距離（range）は $\frac{V^2}{g}\left(\sin 2\theta + \frac{a}{g}(1-\cos 2\theta)\right)$ である。その導関数が 0 になるのは $\tan 2\theta = -\frac{g}{a}$ のときなので、$2\theta \approx \frac{\pi}{2} + \frac{a}{g}$ である。最大値は $\frac{V^2}{g}\left(\sqrt{1+a^2/g^2} + \frac{a}{g}\right) \approx \frac{V^2}{g} + \frac{V^2 a}{g^2}$ である。

2. $x = ut\cos\theta - \frac{1}{2}ft^2$ であり、$t = \frac{2u\sin\theta}{g}$ で着地し、そのとき $x = \frac{2u^2\sin\theta}{g^2}(g\cos\theta - f\sin\theta)$ である。水平方向の速度 $u\cos\theta - ft$ が着地前に負になるのは $\tan\theta > \frac{g}{2f}$ のときなので、$\alpha = \tan^{-1}\frac{g}{2f}$ である。$f = g, \theta = 45°$ のとき、加速度は初速度とちょうど逆向きである：投射体は直線 $y = x$ に沿ってまっすぐ上がり、止まり、まっすぐ O に戻ってくる。

3. 実効的な重力（effective gravity）は、下向きの g と後ろ向きの a を合わせたものである。自由表面（free surface）はこれに垂直なので、$\tan^{-1}\frac{a}{g}$ だけ傾く。

4. 実効的な重力の大きさは $\sqrt{g^2+a^2}$ であり、$x = \frac{ak}{2g}$ で傾きは $\frac{a}{g}$、曲率半径（radius of curvature）は $\rho = \frac{k}{2}\left(1+\frac{a^2}{g^2}\right)^{3/2}$ である。周期は $2\pi\sqrt{\rho/\sqrt{g^2+a^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{k(g^2+a^2)}{2g^3}}$ であり、$a = 0$ のとき $2\pi\sqrt{\frac{k}{2g}}$ に帰着する。

11.6 バックスピン

1. 摩擦は接点にはたらくので、その点のまわりの角運動量（angular momentum）は保存される：$maV + \frac{2}{5}ma^2\frac{V}{a} = mav_0 + \frac{2}{5}ma^2\omega_0$。よって $V = \frac{5v_0 + 2a\omega_0}{7}$ であり、これが v_0 を超えるのは $\frac{v_0}{a\omega_0} < 1$ のときである。

2. $V = \frac{5}{7}v_0$ である。最終的なエネルギーは $\frac{1}{2}m\left(\frac{5}{7}v_0\right)^2\left(1+\frac{2}{5}\right) = \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2}mv_0^2$ なので、エネルギーの $\frac{2}{7}$ が失われる。

3. $I = ma^2$ として同じ議論をすると $V = \frac{1}{2}(v_0 - a\omega_0)$ となる。$V = -\frac{v_0}{7}$ とおくと $\frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{7}{9}$ を得る。

4. 中心から高さ h のところに撃力（impulse）J を加えると、$mv = J$ かつ $\frac{2}{5}ma^2\omega = Jh$ となる。転がる（rolling）ためには $v = a\omega$ が必要なので、$h = \frac{2}{5}a$ である。

11.7 棒の中のシンプソンの公式

1. $\frac{1}{6}\left(1 + 4 \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2}\right) = \frac{47}{60} \approx 0.7833$ であり、これを $\frac{\pi}{4} \approx 0.7854$ と比べる。$\int_{-1}^{1}$ に対して、公式 $\frac{1}{3}\big(\mathrm{f}(-1) + 4\mathrm{f}(0) + \mathrm{f}(1)\big)$ は x^3 に対して 0、x^2 に対して $\frac{2}{3}$ を与える（どちらも正確）が、x^4 に対しても $\frac{2}{3}$ を与えてしまい、その積分は $\frac{2}{5}$ である。

2. 角度 ψ の軸のまわりの慣性モーメント（moment of inertia）は二次形式（quadratic form）$A\cos^2\psi + B\sin^2\psi + 2C\sin\psi\cos\psi$ である。$\psi \mapsto \psi + 90^\circ$ に関する不変性から $A = B$ かつ $C = 0$ が従うので、どの軸についても同じ値となる：それは辺に平行な軸のまわりの値 $\frac{1}{3}Ma^2$ である。

3. 面積の $\frac{1}{3}$ をそれぞれの中点に置くと、三角形上であらゆる二次式が正確に積分される（直角三角形上で $1, x, x^2, xy$ を確かめよ）。よって 3 つの粒子は、薄板（lamina）と同じ質量、重心（centre of mass）、二次モーメント（second moment）をもつ。

4. 各方向について、$-a, 0, a$ における棒の重み $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$ の積をとる：頂点に $\frac{M}{216}$、辺の中点に $\frac{M}{54}$、面の中心に $\frac{2M}{27}$、中心に $\frac{8M}{27}$ である。中心を通り辺に平行な軸のまわりでは $I = M\left(\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{3}\right) = \frac{2}{3}Ma^2$ である。平行軸の定理（parallel axis theorem）により、辺のまわりでは $\frac{2}{3}Ma^2 + M(\sqrt{2}a)^2 = \frac{8}{3}Ma^2$ となる。

11.8 傾いたつり合い

1. 共通の面から円錐（cone）の側に向かって測ると、G は $\frac{-\frac{2}{3}\cdot\frac{3a}{8} + \frac{\lambda}{3}\cdot\frac{\lambda a}{4}}{\frac{2}{3}+\frac{\lambda}{3}} = \frac{a(\lambda^2-3)}{4(2+\lambda)}$ にある。半球上では、接点における法線は常に面の中心を通るので、G がその中心より下にあるとき、すなわち $\lambda < \sqrt{3}$ のとき、おもちゃは起き上がる。横倒しになったとき、おもちゃは円錐の母線（generator）と縁でテーブルに接し、G を通る鉛直線が頂点と縁の間にあればその状態にとどまる。そのためには G の高さが $-\frac{a}{\lambda}$ 以上であることが必要であり、これは $\lambda^3 + \lambda + 8 > 0$ に帰着する：これは常に成り立つ。

2. 一様な球では、あらゆる点がつり合いの位置である（中立（neutral））。重心が中心からわずかにずれていれば、つり合いの位置はちょうど 2 つになる：G が最も低いとき（安定（stable））と、G が最も高いとき（不安定（unstable））である。

3. つり合いの位置は法線が中心を通るところ、すなわち軸の 4 つの端で生じる。短

軸（minor axis）の端で静止するのは安定であり（G ができるだけ低い）、長軸（major axis）の端では不安定である。

4. 対称性により G は原点にある。$n = 2$ のとき $Y = r\left(\frac{1}{2} - p^2\right)$ であり、傾いたつり合いでは法線が G を通る必要があるので、$Y = 0$ かつ $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。そこでの傾きは $-\sqrt{2}$ なので、$\overrightarrow{AB}$ は $\tan^{-1}\sqrt{2} \approx 54.7°$ だけ傾き、もう一方の放物面（paraboloid）上で静止するときは 125.3° となる。両者は x 軸に関して互いに鏡映であり、これが傾きが対になる理由である。

11.9 安全放物線

1. 各粒子は $ut\,\hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{2}gt^2\mathbf{j}$ にあり、これは $-\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j}$ を中心とする半径 ut の球面である。$(0, \frac{u^2}{2g})$ から水平に発射された粒子は $y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}$ に沿って動く：これはちょうど安全放物線（parabola of safety）である。角度 α で発射された粒子は、時刻 $\frac{u}{g\sin\alpha}$ に $x = \frac{u^2}{g\tan\alpha}$ でこれに接する。水平に発射された粒子はそこへ達するのに $\frac{x}{u}$ かかるので、時刻 $\frac{u(1-\cos\alpha)}{g\sin\alpha} = \frac{u}{g}\tan\frac{\alpha}{2}$ に発射されなければならない（これには、接点が地面より上にあるように $\alpha \geq 45°$ であることが必要である）。

2. 直線と安全放物線が交わるのは $R\sin\beta = \frac{u^2}{2g} - \frac{gR^2\cos^2\beta}{2u^2}$ のところであり、$R = \frac{u^2}{g(1+\sin\beta)}$ を得る。最大のときは問題 3 の 2 つの角が一致するので、最適な角は二等分線の方向、すなわち $45° + \frac{1}{2}\beta$ である。

3. $\lambda = \tan\theta$ とおくと、2 つの値は $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{2u^2}{gx}$ および $\lambda_1\lambda_2 = 1 + \frac{2u^2y}{gx^2}$ を満たす。よって $\tan(\theta_1 + \theta_2) = -\frac{x}{y}$ であり、$\theta_1 + \theta_2 = 90° + \varphi$ となる。ここで φ は OP の仰角（elevation）である。OP と鉛直線の二等分線は $\frac{1}{2}(90° + \varphi)$ の角をなす。

4. 頂点は $\left(\frac{u^2}{2g}\sin 2\theta, \frac{u^2}{2g}\sin^2\theta\right)$ にあり、焦点距離（focal length）は $\frac{u^2\cos^2\theta}{2g}$ なので、焦点（focus）の高さは $\frac{u^2}{2g}(\sin^2\theta - \cos^2\theta)$ である。O からの距離は θ によらず $\frac{u^2}{2g}$ である。

11.10 こちらへ戻ってくるボール

1. $u = g = 1$ となる単位系で $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}OP^2 = t(t^2 - 3t\sin\alpha + 2)$ であり、その根は $t \approx 1.050$（極大（local maximum）、$OP \approx 0.516\frac{u^2}{g}$）と $t \approx 1.904$（極小（local minimum）、$OP \approx 0.336\frac{u^2}{g}$）である。ボールは $t \approx 1.970$ で着地する。

2. 斜面に沿った方向と斜面に垂直な方向に分解すると、$OP^2 = u^2t^2 - ugt^3\sin(\alpha' + \beta) + \frac{1}{4}g^2t^4$ となる。ここで α' は斜面から測った角である。これは水平な地面の場合の式で $\alpha = \alpha' + \beta$ としたものである。よって条件 $\sin(\alpha' + \beta) > \frac{2\sqrt{2}}{3}$ は**水平面**から測った角に関するものであり、斜面から測ると、臨界角は $70.5° - \beta$ に下がる（ただし、ボールがまだ着地していなければである）。

3. 小さくなる。空気抵抗（drag）は水平方向の運動を弱め、下降をより急にするので、ボールはより鉛直に近い向きで落ちて戻ってくる。そのため OP が縮みやすくなる。

4. OP^2 の式は着地点を含まないので、OP がある時間減少するのは、前と同じくちょうど $\sin\alpha > \frac{2\sqrt{2}}{3}$ のときである（そして飛行時間が長くなるので、減少する段階は必ず着地前に起こる）。やがて落下が支配的になり、OP は増加する。

11.11 野手はどのように捕球するか

1. 彼女が D_0 に立ち、打者（batsman）から遠ざかる向きに速度 v で走るとすると、ボールは彼女の前方 $D_0 + vt - Ut$ の距離にある。捕球するには $D_0 + vT = UT$ が必要であり、そのとき距離は $(U-v)(T-t)$ なので、$\tan\theta = \frac{gt}{2(U-v)}$ となり、やはり一次式である。ボールが彼女の後方に落ちるなら、$UT > D_0$ かつ $v > 0$ である：彼女は後ろへ走る。

2. $\theta = \tan^{-1}\frac{gt}{2U}$ なので $\dot\theta = \frac{g/2U}{1+(gt/2U)^2}$ となり、これは減少する。$\tan\theta$ が一次式になるのは、高さ $\frac{1}{2}gt(T-t)$ と距離 $U(T-t)$ が共通因数 $T-t$ をもつからである。

3. はい。彼女の目の高さを基準としたボールの高さは、捕球の時点で 0 となる二次式なので、$(T-t)(c+dt)$ と因数分解される。これを $U(T-t)$ で割ると一次関数が残る（これは負から始まる：彼女は最初、下を見る）。

4. いいえ。空気抵抗があると、水平距離は $\frac{U}{k}(\mathrm{e}^{-kt} - \mathrm{e}^{-kT})$ となり、高さはこれに t の一次関数を掛けたものにはならないので、$\tan\theta$ はもはや一次式ではない。

11.12 ゴムひもの上のアリ

1. $\frac{x}{a+ut} = \frac{1}{k}\ln\frac{a+ut}{a}$ であり、これは $t = \frac{a}{u}(\mathrm{e}^{k/2}-1)$ で $\frac{1}{2}$ となる。$\frac{T}{2} = \frac{a}{2u}(\mathrm{e}^{k/2}-1)(\mathrm{e}^{k/2}+1)$ であり、$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{k/2}+1) > 1$ なので、これは $\frac{T}{2}$ より前である。

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{x}{L} = \frac{v}{L} = \frac{v}{a}\mathrm{e}^{-\lambda t}$ なので $\frac{x}{L} = \frac{v}{a\lambda}(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})$ となり、これが 1 に達するのは $v > \lambda a$ のときに限る。

3. $\frac{x}{L} = v\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{a+\frac{1}{2}bs^2}$ であり、これは $\frac{v\pi}{\sqrt{2ab}}$ に収束（converge）する。よってアリが到達するのは $v > \frac{\sqrt{2ab}}{\pi}$ のときに限る。

4. $\frac{H_N}{100\,000} = \frac{1}{100}$ が必要なので、$H_N = 1000$ であり、$N \approx \mathrm{e}^{999.4} \approx 10^{434}$ 秒である。

11.13 除雪車問題

1. 正午から時間 t 後の積雪の深さは $t+t_0$ に比例するので、進んだ距離は $c\ln\frac{t+t_0}{t_0}$ である。条件 $x(1)=2$ と $x(2)=3$ から $\left(1+\frac{1}{t_0}\right)^3 = \left(1+\frac{2}{t_0}\right)^2$ を得る。$u = \frac{1}{t_0}$ と

おくとこれは $u^2 - u - 1 = 0$ に帰着するので、$u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ であり、$t_0 \approx 0.618$ 時間である：雪が降り始めたのはおよそ 11:23 である。

2. $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = \frac{\alpha h}{k}\mathrm{e}^{\alpha y} - \frac{\alpha h}{k}\mathrm{e}^{\alpha y} + \alpha\big(T - \frac{\alpha h y}{k}\big)\mathrm{e}^{\alpha y}$ であり、$\alpha\big(t - (\mathrm{e}^{\alpha y} - 1)\frac{h}{k}\big)$ もこれと同じである。

3. 間隔は $\big(T - \frac{\alpha h y}{k}\big)\mathrm{e}^{\alpha y}$ であり、その導関数は $y = \frac{kT-h}{\alpha h}$ で 0 になる。$kT > h$ ならば、間隔はそこまで増加し、その後 $y = \frac{kT}{\alpha h}$ で 0 まで縮む。$kT \le h$ ならば、導関数 $\alpha\mathrm{e}^{\alpha y}\big(T - \frac{h}{k} - \frac{\alpha h y}{k}\big)$ はすべての $y > 0$ で負なので、間隔は最初から縮む。2 台目の除雪車（snowplough）は深さ $k\times$（間隔）の雪に直面する。これが同じ場所で 1 台目が出会った雪より深い間は、2 台目はさらに遅れていく。

4. $\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}t_3}{\mathrm{d}y} = t_3 - t_2(y)$ である。$t_3 = t_2 + g$ とおくと $g = \mathrm{e}^{\alpha y}\big(T - \alpha T y + \frac{\alpha^2 h y^2}{2k}\big)$ を得る。$kT \ge 2h$ ならば、これは 2 台目が 1 台目に追いつく前に $y = \frac{k}{\alpha h}\big(T - \sqrt{T^2 - 2hT/k}\big)$ で 0 となる。$kT < 2h$ ならば、先に 2 台目が 1 台目に追いつく。

11.14 懸垂線ではなく放物線

1. はい。水平方向の張力（tension）H は依然として一定であり、中央の区間の傾きは 0 で、そこから傾きは $\frac{w}{H}$ ずつ増えていく。水平な区間の中点から x を測ると、k 番目の継ぎ目は $x = (k - \frac{1}{2})h$ にあり、最も低い継ぎ目より $\frac{wh}{2H}k(k-1)$ だけ高い。これは $\frac{w}{2Hh}\big(x^2 - \frac{h^2}{4}\big)$ であり、放物線である。

2. 張力は $\sqrt{H^2 + V^2}$ であり、鉛直成分 V が最大のところで最大となる：それは両端の区間であり、そこで V は荷重の半分 $\frac{(2n+1)w}{2}$ を支える。よって $T_{\max} = \sqrt{H^2 + \frac{1}{4}(2n+1)^2 w^2}$ である。

3. $y' = \sinh\frac{x}{c}$ であり、$y'' = \frac{1}{c}\cosh\frac{x}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{1 + \sinh^2\frac{x}{c}}$ である。長さは $\int_0^X \cosh\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x = c\sinh\frac{X}{c}$ である。

4. たるみ s の浅い曲線では、懸垂線（catenary）と放物線の長さはどちらもおよそ $2d + \frac{4s^2}{3d}$ なので、どちらも $s \approx \sqrt{\frac{3}{2}d(L-d)}$ を与える。両者は s^4 の次数でしか違わない。ほとんどぴんと張った鎖では、その差はガリレオ（Galileo）が測定できたどんなものよりもはるかに小さい。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

全 13 章のうちの第 11 章。 本書全体、すべての章、すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.