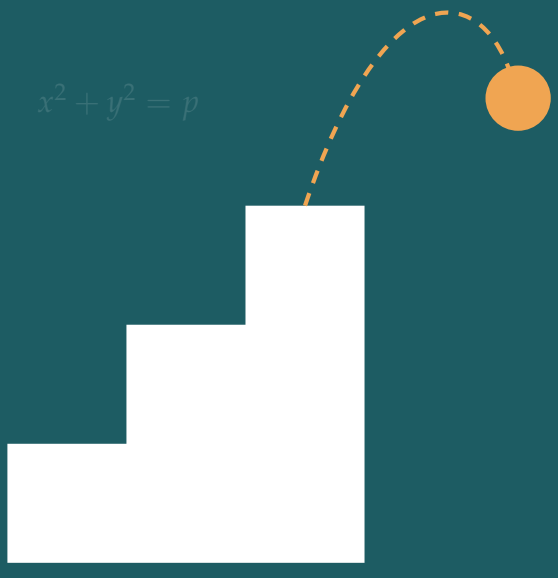
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

第 10 章

保存則（conservation laws）、衝突、重力



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

第 10 章

保存則（conservation laws）、衝突、重力

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

第 10 章：保存則（conservation laws）、衝突、重力

これは *Beyond STEP* 全 13 章のうちの第 10 章である。本書全体、各章単独の PDF、各節の印刷用ワークシート、そしてすべての STEP の問題の詳しい解答は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、`github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty` への issue として歓迎する。

章

10

保存則・衝突・重力

決して変わらないものがある。それが何かを知ることが、物理学の半分である。

この章の内容

10.1	ニュートンのゆりかご	STEP II 1990
10.2	重ねたボールの効果	STEP II 2010
10.3	ロケットと大砲	STEP III 2017
10.4	分子とピストン	STEP I 2002
10.5	有限時間に無限回の跳ね返り	STEP III 2002
10.6	二体が一体になる	STEP III 2004
10.7	球殻の内部の重力	STEP III 1999
10.8	三角形をなす三つの星	STEP I 1999
A	演習問題の答え	p. 63

変わらないもの

> 現在までに知られているあらゆる自然現象を支配する事実、あるいはお望みなら法則と呼んでもよいが、そういうものが一つある。この法則には、知られている限り例外がない。
>
> — リチャード・ファインマン（Richard Feynman）、エネルギー保存について、*The Feynman Lectures on Physics*（『ファインマン物理学』、1963）

学校で学ぶ力学は、たいてい力の問題である。図を描き、力を分解し、$F = ma$ を適用する。斜面上の物体ならそれでうまくいく。しかし、1000 分の 1 秒しか続かない衝突で、その間の力が巨大でしかも未知である場合や、進みながら質量が変わるロケット、互いに同時に引き合う三つの星の場合には、それではうまくいかない。これらすべてにおいて、前に進む道は、力について問うのをやめ、代わりに何が**変わり得ないか**を問うことである。

運動量（momentum）は、外力がはたらかない限り保存される。エネルギーは弾性衝突（elastic collision）で保存され、それ以外の衝突ではその損失を測ることができる。質量、角運動量（angular momentum）、重心（centre of mass）の運動も同様の規則に従う。これらの法則がすべてを教えてくれるわけではないが、常に成り立ち、細部まで解析するには複雑すぎる系にも適用でき、しかも計算を始める前に可能性の大部分を排除してくれることが多い。

保存則はなぜ重要か

保存則（conservation law）は、物理学で最も信頼できる道具である。ベータ崩壊（beta decay）と呼ばれる放射性の過程では、放出される粒子のエネルギーの合計が合わなかった。ヴォルフガング・パウリ（Wolfgang Pauli）はエネルギー保存則を捨てる代わりに、1930 年、失われたエネルギーを運ぶ目に見えない粒子の存在を予言し、26 年後にニュートリノ（neutrino）が検出された。技術者は、衝突防護柵やエアバッグ、ロケットを、運動量とエネルギーの収支によって設計する。天文学者は、重心の動きを観測することで星の質量を量り、惑星を発見する。そして 1918 年、エミー・ネーター（Emmy Noether）は、なぜこれらの法則が成り立つのかを説明した。各保存則は自然の対称性（symmetry）の影なのである。運動量が保存されるのは物理法則がどこでも同じだからであり、エネルギーが保存されるのは物理法則がいつでも同じだからである。

本章の第二のテーマは重力である。重力は、ニュートン（Newton）が天上と地上を統一するために用いた力であり、保存則の自然な相棒でもある。軌道、スイングバイ、収縮する雲は、いずれもエネルギーと運動量、そして球に関するある驚くべき事実一つによって理解される。

大学で出会うこと

大学 1 年の力学の講義はここから始まる。質点系、重心と換算質量（reduced mass）、さまざまな座標系（frame）から見た衝突、ロケットのような可変質量系（variable-mass system）、そして重力のもとでの物体の運動、すなわちケプラーの法則（Kepler's laws）、軌道、脱出速度（escape velocity）に出会うことになる。その後の講義では、力学をラグランジュ（Lagrange）とハミルトン（Hamilton）の言葉で定式化し直す。そこではネーターの定理（Noether's theorem）が厳密な命題となり、保存則はただ一つの関数の対称性から読み取れるようになる。さらにその先には、天体力学（celestial mechanics）と三体問題（three-body problem）、気体分子運動論（kinetic theory）と統計力学（statistical mechanics）（ここで Section 10.4 のピストンは気体の理論となる）、そしてアインシュタイン（Einstein）の重力理論が控えている。

本章を貫く問い

三つの大きな問い

1. **保存則だけで何が決まるか。**運動量とエネルギーが結果を決定するのはどのようなときで、可能性を排除するだけにとどまるのはどのようなときか。
2. **小さな段階はどのように積み重なるか。**衝突や発射といった単純な出来事が何度も、あるいは無限回繰り返されると、何が起こるか。
3. **多くの物体をどう手なずけるか。**どのような座標の選び方、どのような対称性によって、互いに作用し合う複数の物体の問題を解ける問題に変えられるか。

本章は衝突から始まる。ニュートンのゆりかご（Newton's cradle）に何ができて何ができないか（Section 10.1）、そして球の連なりがどのように速さを増幅するか（Section 10.2）を見る。続いて繰り返される過程を追う。トラックから発射される砲とロケット方程式（rocket equation）、ピストンに当たって加速していく分子、そして有限の時間に無限回跳ねるパックである。最後の三つの節では、引き合う、あるいは反発し合う物体を扱う。重心と換算質量、球殻の重力、そしてラグランジュの回転する星の三角形である。

本章で扱う考え方

§	話題	考え方
10.1	ニュートンのゆりかご	制約としての保存則
10.2	積み重ねた球	一つの衝突の反復、スイングバイ（slingshot）
10.3	ロケット	可変質量、ロケット方程式
10.4	気体分子運動論	断熱不変量（adiabatic invariant）
10.5	非弾性衝突（inelastic collision）	有限時間内の無限回の跳ね返り
10.6	二体問題（two-body problem）	重心と換算質量
10.7	ニュートン力学の重力	殻定理（shell theorem）、自由落下による収縮（free-fall collapse）
10.8	三体問題	ラグランジュの正三角形解（equilateral solution）

本章の読み方

計算する前に、何が保存されるのか、そしてどの座標系においてかを書き出すこと。次に、別の場所から見れば問題がもっと簡単に見えないかを問うこと。重心から、動くピストンから、跳ねる球から見るのである。本章の問題の多くは、適切な座標系をとればほとんど自明になる。そして力学の仕事の大部分は、その座標系を見つけることにある。

10.1 ニュートンのゆりかご

問題

STEP II 1990、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/90-s2-q14`

導入

ニュートンのゆりかご（Newton's cradle）の球を 1 個引いて放すと、反対側の端から球が 1 個飛び出す。2 個引けば 2 個飛び出す。なぜだろうか。なぜ 2 倍の速さで 1 個、あるいは 3 分の 2 の速さで 3 個、とはならないのか。どちらでも運動量はつじつまが合うはずである。

答えは、力学の二大保存則から始まる。運動量（momentum）とエネルギー（energy）を合わせると、どちらか一方だけの場合よりもはるかに強い制約となり、思いつく結果の大部分が排除される。この問題では保存則を制約として用いる。何が起こるかを計算するためではなく、何が起こりうるかを判定するためである。保存則を「起こりうるすべての結果が従わねばならない規則」とみなすこの考え方は、物理学全体を貫いている。

取りかかる前に

考えてみよう 質量 m のビー玉が速さ u で、静止している質量 M のビー玉に衝突し、運動エネルギー（kinetic energy）が保存されるとする。衝突後の速度はいくらか。$M = m$ の場合はどうなるか。

衝突後の速度を p, q とする。運動量保存より $mp + Mq = mu$、エネルギー保存より $mp^2 + Mq^2 = mu^2$ である。これらを $m(u - p) = Mq$ および $m(u - p)(u + p) = Mq^2$

と書き直して割ると、$u+p=q$ を得る。したがって

$$p=\frac{m-M}{m+M}\,u,\qquad q=\frac{2m}{m+M}\,u.$$

$M=m$ のとき、1 個目のビー玉は止まり、2 個目が速さ u で動き出す。つまり 2 個は単に速度を交換するのである。等しい質量のビー玉が一列に運動を受け渡していくのはこのためである。

順を追って解く

段階 1　最後の 2 個だけが動く場合

考えてみよう　衝突後に A_n（速度 p）と A_{n+1}（速度 q）だけが動くと仮定する。保存則を書き下せ。p の符号を制約するのはどのビー玉の運動か。

運動量保存とエネルギー保存より

$$mp+\lambda mq=mu,\qquad \tfrac12 mp^2+\tfrac12\lambda mq^2=\tfrac12 mu^2.$$

これは質量 m のビー玉が質量 λm のビー玉に衝突するときの方程式と同じであるから、（A_n が A_{n+1} をすり抜けることを要する解 $p=u,q=0$ を除いて）

$$p=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\,u,\qquad q=\frac{2}{1+\lambda}\,u.$$

$\lambda<1$ ならば両者とも正で $p<q$ である。A_n は A_{n+1} を追いかけるがより遅いので両者は離れていき、すべてつじつまが合う。$\lambda>1$ ならば $p<0$ となり、A_n は後ろ向きに動く。しかし A_{n-1} がそのすぐ後ろに接して静止しており、A_n はそれをすり抜けることはできない。よってこの運動は不可能である。 ■

段階 2　3 個のビー玉

考えてみよう　次に、A_{n-1},A_n,A_{n+1} だけがそれぞれ速度 a,b,c で動くと仮定する。どのビー玉が静止していて、どれがどれの後ろにあるかを考えると、a,b,c はどのような不等式を満たさなければならないか。

ビー玉 A_{n-2} は A_{n-1} の後ろで静止している（$n\ge 3$ よりこれは存在する）ので、$a\ge 0$ である。また、どのビー玉も前のビー玉を追い越すことはできないので、$a\le b\le c$ である。まとめると $0\le a\le b\le c$ となる。保存則は

$$a+b+\lambda c=u,\qquad a^2+b^2+\lambda c^2=u^2.$$

考えてみよう 運動量の式を 2 乗して、エネルギーの式と比べよ。何が残るか。

2 乗すると $u^2 = a^2 + b^2 + \lambda^2 c^2 + 2ab + 2\lambda ac + 2\lambda bc$ である。ここからエネルギーの式を引くと

$$0 = \lambda(\lambda - 1)c^2 + 2ab + 2\lambda c(a + b).$$

$\lambda > 1$ かつ $a, b, c \geq 0$ であるから、右辺の各項はすべて非負であり、したがってすべての項が 0 である。特に $c = 0$ であり、すると $0 \leq a \leq b \leq c$ より $a = b = 0$ となる。しかしこのとき運動量の総和は mu ではなく 0 となる。これは矛盾であり、この運動は不可能である。 ■

手を止めて、やってみよう この議論の構造に注目しよう。運動量の式を 2 乗すると $2ab$ のような交差項が現れるが、エネルギーの式にはそれがない。その差は、運動がどれだけ「広がっているか」を測っている。$\lambda > 1$ のとき、同じ議論によって、$A_k, \ldots, A_{n+1}$ だけが非負の速度で動くような**任意の**結果が排除される理由がわかるだろうか。

段階 3 動くことのできる 2 個のビー玉

考えてみよう 前向きに動くビー玉がすべて遠い端になければならず、それがうまくいかないのなら、あるビー玉が**後ろ向きに**動くのかもしれない。後ろ向きに動くことができるのはどのビー玉か。

後ろに何もないのは A_0 だけである。そこで、A_0 が速度 p（負でもよい）で、A_{n+1} が速度 q で動き、他はすべて静止していると仮定してみる。保存則はやはり質量 m と λm の衝突のものと同じであるから

$$p = -\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\,u, \qquad q = \frac{2}{\lambda + 1}\,u.$$

A_0 は跳ね返り、A_{n+1} は前へ動き、その間のビー玉は静止したままである。これはすべてつじつまが合う。あたかも A_0 が A_{n+1} に直接衝突したかのようであり、その間に並ぶ等しいビー玉は完璧な伝令の役目を果たしている。 ■

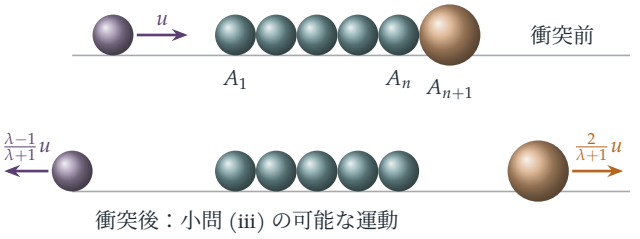


図 10.1.1　等しいビー玉（ティール）が並び、最後により重いビー玉（アンバー、$\lambda > 1$）がある。衝突後、A_0 は跳ね返り、重いビー玉は動き出し、その間のビー玉はすべて静止したままとなる。あたかも A_0 が A_{n+1} に直接衝突したかのようである。

振り返り

- **制約としての保存則。**衝突を細かく追うことは一度もしなかった。運動量、エネルギー、そして幾何学的条件によって、どの結果が許されるかを問うたのである。
- **物理的な不等式が重要である。**「ビー玉は互いにすり抜けられない」ということから不等式 $0 \le a \le b \le c$ が得られ、小問 (i) と (ii) を排除したのは保存則ではなくこの不等式であった。
- **2 乗して引く。**運動量の 2 乗とエネルギーを比べると、0 にならなければならない交差項の和が得られる。

背後にある数学

なぜ球が 1 個だけ飛び出すのか

等しい球からなるニュートンのゆりかごで、k 個の球がそろって速さ w で飛び出すとする。運動量保存より $kw = u$、エネルギー保存より $kw^2 = u^2$ である。割り算をすると $w = u$ かつ $k = 1$ となる。したがって、飛び出す球がそろって動く結果のうち、両方の法則を満たすのは「1 個の球が元の速さで飛び出す」ものだけである。半分の速さの 2 個の球は運動量は正しいがエネルギーは半分しかない。2 倍の速さの 1 個の球が正しい運動量をもつのは、それが球の半分である場合に限られる。

しかし、これで決着がつくわけではない。n 個の球があれば未知の速度は n 個あるのに保存則は 2 つしかないので、両方を満たす結果は無数にある（3 個の球が異なる速さで動くものを 1 つ見つけてみよ）。実際にどれが起こるかは、接触中に球がどのように変形するかによる。1980 年代初頭、Frank Herrmann とその共同研究者たちは、おなじみの振る舞いは衝撃が列に沿って広がることなく伝わることに依存しており、そ

れはわずかな隙間を空けて並べた硬い鋼球で起こることを示した。柔らかい球や、互いにきつく押しつけられた球では、ゆりかごの振る舞いはそれほどきれいではなくなり、精密な測定によれば、他の球も常にわずかに動いている。

保存則と対称性

保存則はどこから来るのだろうか。1918 年、エミー・ネーター（Emmy Noether）は、現代物理学の基礎の 1 つとなる定理を証明した。物理系の連続的な対称性（symmetry）のそれぞれから、保存量が 1 つ得られるというものである。物理法則がここでも 1 メートル左でも同じであれば（空間並進に関する対称性）、運動量が保存される。今日も明日も同じであれば（時間並進に関する対称性）、エネルギーが保存される。どの向きにも同じであれば（回転対称性）、角運動量が保存される。ネーターの定理には、大学 2 年次のラグランジュ力学の講義で出会うことになるだろう。本章では全体を通してその帰結を用いる。

ホイヘンス（Huygens）、レン（Wren）、ウォリス（Wallis）

1668 年、王立協会は物体の衝突の問題に対する解答を募った。ジョン・ウォリスは非弾性衝突を扱い、クリストファー・レンとクリスティアーン・ホイヘンスはそれぞれ独立に弾性衝突（elastic collision）の場合を解いた。ホイヘンスの鍵となる洞察は、座標系を変えることであった。重心とともに動く船から衝突を眺めると、2 つの等しい球は単に速さが逆向きになって跳ね返るだけであり、その後、岸の座標系に戻せばよい。彼はまた、ある量、すなわち質量と速さの 2 乗の積の和が衝突の前後で等しいことにも気づいていた。もっとも、運動エネルギーがそれ自体として保存量であると認められるまでには、さらに 1 世紀を要した。

思考のスキル

保存量を使って可能性を排除する

過程が複雑すぎて追いきれないときは、変化しえない量を列挙し、それらがどの結果を許すかを調べよ。

これは、物理学者が粒子加速器での衝突について推論する方法である。そこでは詳細な相互作用はわからないが、運動量、エネルギー、電荷はつり合わなければならない。不等式（ここでは、ビー玉が互いにすり抜けられないこと）と組み合わせれば、ある結果が不可能であることを証明できる。

次の一歩

1 **同じ問題をもう一度。** STEP I 2006、問 11（`step.maths.org/questions/06-s1-q11`）に挑戦してみよう。溝の中に粒子が一列に並び、端により重い粒子がある。どのような最終状態が可能か。

2 **衝突を追う。** 小問 (iii) の衝突を、A_0 が A_1 に衝突するところから始まる、2 個のビー玉どうしの別々の衝突の連続としてモデル化せよ。その連続を最後まで追い、小問 (iii) で求めた運動に行き着くことを示せ。

3 **2 個の球を当てる。** 5 個の等しい球からなるゆりかごで、2 個の球をそろって放し、残りの 3 個に速さ u で衝突させる。「2 個の球が速さ u で飛び出す」が両方の保存則と矛盾しないことを示し、さらに矛盾しない別の結果を 1 つ求めよ。

4 **軽い端。** $\lambda < 1$ の場合について、2 個のビー玉どうしの衝突の連続を追え。A_n と A_{n+1} 以外に、最終的に動いているビー玉はあるか。

さらに学ぶために

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press）、第 5 章。運動量とエネルギーの保存について、衝突に関する多くの問題とともに扱っている。
- **Frank Herrmann & Peter Schmälzle,「Simple explanation of a well-known collision experiment」**, *American Journal of Physics* 49 (1981)。ニュートンのゆりかごがなぜうまく働くのかを説明している。
- **Dwight Neuenschwander, *Emmy Noether's Wonderful Theorem***（Johns Hopkins University Press）。対称性と保存則の結びつきについての、読みやすい解説である。

10.2 重ねたボールの効果

問題

STEP II 2010、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/10-s2-q10`

導入

バスケットボールの上にテニスボールを載せて持ち、両方を一緒に落としてみよう。バスケットボールが床で跳ね返ると、テニスボールは落とした高さの何倍もの高さまで飛び上がり、ときには天井に届くほどである。屋外で試してみるとよい。

この問題の小問 (i) は、1 回の衝突には速さの上限があることを示す。ぶつかってくる球がどれほど重くても、静止している球を、ぶつかってくる球の速さの 2 倍を超える速さで送り出すことはできない。小問 (ii) は、この上限を破る方法を示す。次々に軽くなっていく球の列に運動を受け渡していけば、各段階で速さが掛け算的に増えていくのである。同じ考え方によって宇宙探査機は外惑星まで送り届けられており、また超新星（supernova）の仕組みの一部としても提案されたことがある。

取りかかる前に

考えてみよう Section 10.1 より：速さ u で運動する質量 M が、静止している質量 m に弾性衝突（elastic collision）するとき、衝突後の m の速さはいくらか。

そこで得た結果（質量の役割を入れ替えたもの）から、ぶつけられた粒子の速さは $\frac{2M}{M+m}u$ である。別の覚え方もある。弾性衝突では**相対速度**（relative velocity）が逆向きになる。重い球がほとんど減速しないならば、軽い球は重い球の速さより約 u だけ速く離れていかなければならず、つまり速さは約 $2u$ となる。

順を追って解く

段階 1　速さの上限

$M = bm$ とすると、衝突後の A の速さは

$$v_A = \frac{2bm}{bm + m}\,u = \frac{2b}{b+1}\,u.$$

である。

> **考えてみよう**　$\frac{2b}{b+1}$ と 2 の大小はどうなるか。$b \to \infty$ とするとどうなるか。

すべての b に対して $\frac{2b}{b+1} = 2 - \frac{2}{b+1} < 2$ であるから、B がどれほど重くても、A の速さはつねに $2u$ より小さい。$b \to \infty$ のとき速さは $2u$ に近づく。無限に重い球は、動く壁のように A を跳ね返すことになるのである。 ■

段階 2　列に沿って受け渡す

> **考えてみよう**　小問 (ii) では、各粒子は次の粒子の λ 倍の重さである。列の中の各衝突について、小問 (i) から何がいえるか。

B_1（質量 $\lambda^n m$）は B_2（質量 $\lambda^{n-1} m$）に衝突する。B_2 は B_1 の λ 分の 1 の重さである。$b = \lambda$ として小問 (i) を用いると、B_2 は速さ $\frac{2\lambda}{\lambda+1}u$ で動き出す。次に B_2 が B_3 に衝突する。B_3 もやはり λ 分の 1 の重さであり、B_3 は速さ $\left(\frac{2\lambda}{\lambda+1}\right)^2 u$ で動き出す。このような衝突を n 回繰り返し、最後に B_n が A に衝突すると、

$$v_A = \left(\frac{2\lambda}{\lambda+1}\right)^n u.$$

となる。（その後に B どうしが衝突しても、A をさらに押し出すことしかできない。A に前方からぶつかるものは何もないので、A を減速させることはできないのである。）

> **考えてみよう**　$\frac{2\lambda}{\lambda+1}$ は 1 より大きいか、小さいか。

$\lambda > 1$ より $2\lambda > \lambda + 1$ であるから、比 $r = \frac{2\lambda}{\lambda+1}$ は 1 を超え、$n \to \infty$ のとき $r^n \to \infty$ となる。よって n を十分大きくとれば、A をいくらでも速く動かすことができる。 ■

段階 3　20 倍の速さ

$\lambda = 4$ のとき $r = \frac{8}{5} = 1.6$ であり、$1.6^n > 20$ となることが必要である。底を 10 とする対数（logarithm）をとると

$$\log_{10} 1.6 = \log_{10} 16 - 1 = 4\log_{10} 2 - 1 \approx 0.20412, \qquad \log_{10} 20 = 1 + \log_{10} 2 \approx 1.30103,$$

であるから、$n > \frac{1.30103}{0.20412} \approx 6.37$ が必要である。最小値は $n = 7$ である。（実際、$1.6^6 \approx 16.8$、$1.6^7 \approx 26.8$ である。） ■

振り返り

- **一つの結果を繰り返し用いる。** 小問 (i) を小問 (ii) で n 回用いることで、有界な増加が非有界な増加に変わった。
- **決して到達しない極限。** 上限 $2u$ には近づくが決して到達しないので、正しい主張は狭義の不等式（strict inequality）である。
- **対数は累乗を積に変える。** 何段階必要かという問いは、割り算に帰着された。

背後にある数学

バスケットボールとテニスボール

二つの球を高さ H から一緒に落とし、速さ $U = \sqrt{2gH}$ で床に達するとする。すべてが完全弾性的で、バスケットボールのほうがはるかに重いと仮定する。バスケットボールは床で跳ね返って上向きに速さ U をもち、すぐに、まだ速さ U で落下しているテニスボールと出会う。バスケットボールの座標系（frame）では、テニスボールは $2U$ で近づき、非常に重い物体で跳ね返って $2U$ で離れていく。地面の座標系に戻すと、これは上向きに $2U + U = 3U$ である（図 10.2.1）。到達する高さは打ち出す速さの 2 乗に比例するので、テニスボールは $9H$ まで上がる。

実際の球は完全弾性的ではない。反発係数（coefficient of restitution）を e、質量比を M/m とすると、テニスボールは速さ $\frac{Me(2+e)-m}{M+m}U$ で離れていく。演習問題にある STEP I 2014 Q10 では、測定された高さから逆算して質量比を求める。

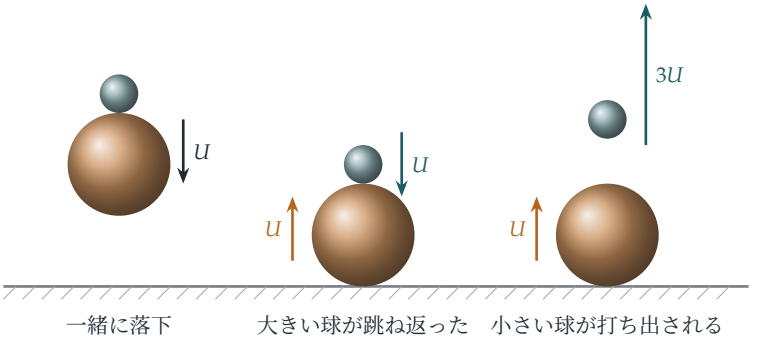


図 10.2.1　積み重ねた球の効果。球は完全弾性的で、下の球のほうがはるかに重いとする。大きい球は速さ U で跳ね上がり、U で落ちてくる小さい球と出会う。大きい球から見ると、小さい球は $2U$ で到着して $2U$ で離れるので、地面の座標系では $3U$ で離れ、もとの高さの 9 倍まで達する。

スイングバイ

惑星のそばを通過する宇宙探査機は惑星に触れることはないが、重力は非常に重い物体との非常に柔らかい弾性衝突のようにはたらく。これをスイングバイ（gravitational slingshot）という。惑星の座標系では、探査機は回り込んで、到着したときと同じ速さで離れていく。惑星が速さ V で探査機に向かって動いているならば、太陽の座標系では、探査機はテニスボールとまったく同じように最大 $2V$ の速さを得ることができる。1977 年に打ち上げられた 2 機のボイジャー探査機は、外惑星がまれにしか起こらない配置に並んだ機会を利用して木星から土星へ（ボイジャー 2 号はさらに天王星と海王星へ）と進み、遭遇のたびに速さを得た。こうした重力アシストがなければ、海王星までの旅には 12 年ではなく約 30 年かかっていたであろう。エネルギーは惑星から供給され、惑星は測定できないほどわずかに減速する。

スーパーボールと超新星

1968 年、W. R. Mellen は *American Journal of Physics* 誌で、大きさが次第に小さくなるいくつかの球を積み重ねて作る「スーパーボール跳ね返り発射体」を紹介し、一番上の球が衝突時の速さの何倍もの速さで打ち出されうることを指摘した。天体物理学者は、これと重力崩壊型超新星との大まかな類似を指摘している。星の外層が落ち込んで、硬く高密度な中心核で跳ね返り、衝撃波（shock wave）が運動量をますます密度の低い物質へと外向きに運び、それを莫大な速さにまで加速するのである。積み重ねた球の効果の実演は、この考え方を学生に説明するのに用いられるが、実際の超新星には、跳ねる球よりはるかに多くの物理、たとえばニュートリノ（neutrino）がかかわっている。

思考のスキル

一つの結果を繰り返し用いる

ある過程が一つの単純な段階の繰り返しであるとき、その段階を一度だけ解き、それを合成せよ。

1 段階あたりの増幅率が 2 未満であっても、増幅率は掛け合わされるので、多くの段階を経ると非有界になる。大学では、これが伝達行列（transfer matrix）、多段増幅器、多段式ロケット（Section 10.3）の背後にある考え方である。連鎖全体の増幅率は、各要素の増幅率の積なのである。

次の一歩

1 **現実の場合。** STEP I 2014、問 10（`step.maths.org/questions/14-s1-q10`）に挑戦してみよう。具体的な数値と不完全な跳ね返りを扱う、積み重ねた球の問題である。

2 **非弾性的な連鎖。** STEP I 2017、問 10（`step.maths.org/questions/17-s1-q10`）に挑戦してみよう。質量が等比数列的に増えていく粒子の列に沿って衝突を伝えていく問題である。各粒子がちょうど 2 回の衝突にかかわるのはどのような場合か。

3 **3 個の球。** 完全弾性的な 3 個の球を、それぞれが下の球よりはるかに軽くなるように積み重ねる。一番上の球は $7U$ で離れ、$49H$ まで上がることを示せ。球が k 個のとき、一番上の球は $(2^k - 1)U$ で離れることを示せ。

4 **エネルギーはどこから来るのか。** 小問 (ii) で、A の速さが非有界であるにもかかわらず、運動エネルギー（kinetic energy）の総和が保存されることを示せ。重い粒子たちはどうなるか。

さらに学ぶために

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press）、第 5 章。積み重ねた球の問題が含まれている。
- **W. R. Mellen, “Superball rebound projectiles”**, *American Journal of Physics* 36 (1968)。短くて楽しい論文である。
- **Gary Flandro, “Fast reconnaissance missions to the outer solar system utilizing energy**

derived from the gravitational field of Jupiter”, *Astronautica Acta* 12 (1966)。ボイジャーの「グランドツアー」を提案した論文である。

10.3 ロケットと大砲

問題

STEP III 2017、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/17-s3-q11`

導入

宇宙空間にあるロケットには、押し返す相手が何もない。ロケットは質量を後方へ放り出すことで前進し、あとは運動量保存則（conservation of momentum）がすべてを決める。後部から砲を撃つトラックは、ロケットをばらばらに分解したものである。一つ一つの弾丸が排気の塊なのである。

では、砲は一斉に撃つべきか、それとも一つずつ順に撃つべきか。この問題ははっきりした答えを与えるが、何を比べているのかを注意深く見てほしい。一斉に撃つほうがトラックの速さは大きくなるが、使うエネルギーも多くなる。つまり、二つの場合で砲は同じ仕事をしているわけではない。何を固定するかを変えると、答えは逆転する。この点を整理していくと、宇宙飛行において最も重要な方程式であるツィオルコフスキー（Tsiolkovsky）の**ロケット方程式**（rocket equation）にたどり着き、さらに実際のロケットがなぜ多段式なのかという理由にも行き着く。

取りかかる前に

考えてみよう 砲を撃つ前、トラックは速度 V で動いている。発射後の弾丸の速度は $V - v$ である（すなわち、後ろ向きに速さ $v - V$）。**発射前のトラックに対する**弾丸の相対速度はいくらか。

それは $(V - v) - V = -v$ である。したがって、各砲は発射直前のトラックの速度に対して速さ v で弾丸を後方へ撃ち出す。これがこの問題で固定されている規則である。答えを決めるのはこの規則なので、よく覚えておくこと。

順を追って解く

段階 1　一斉に発射する

系ははじめ静止しており、運動量は 0 である。発射後、トラック（質量 M）は前向きに速さ u で動き、n 個の弾丸は後ろ向きに速さ v で動く（発射前は $V=0$ だからである）。よって

$$Mu - nmv = 0, \qquad u = \frac{nmv}{M}.$$

得られる運動エネルギー（kinetic energy）は

$$K = \tfrac{1}{2}Mu^2 + \tfrac{1}{2}nmv^2 = \tfrac{1}{2}\frac{n^2m^2v^2}{M} + \tfrac{1}{2}nmv^2 = \tfrac{1}{2}nmv^2\Big(1+\frac{nm}{M}\Big). \qquad \blacksquare$$

段階 2　一つずつ発射する

考えてみよう　第 r 番目の砲を撃つ直前、残りの弾丸を載せたトラックの質量はいくらで、速さはいくらか。第 r 回目の発射について運動量保存の式を書け。

第 r 回目の発射の前、トラックは $n-r+1$ 個の弾丸を載せているので、質量は $M+(n-r+1)m$、速さは u_{r-1} である。発射後、$n-r$ 個の弾丸を載せたトラックの速さは u_r となり、撃ち出された弾丸の速度は $u_{r-1}-v$ である。運動量は保存されるから

$$\big(M+(n-r+1)m\big)u_{r-1} = \big(M+(n-r)m\big)u_r + m(u_{r-1}-v).$$

mu_{r-1} の項を整理すると $\big(M+(n-r)m\big)(u_r-u_{r-1}) = mv$ となり、これが $(*)$ である。$\blacksquare$

増分を足し合わせると

$$u_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{mv}{M+(n-r)m} = \frac{mv}{M} + \frac{mv}{M+m} + \cdots + \frac{mv}{M+(n-1)m}.$$

最初の項以外はすべて $\frac{mv}{M}$ より小さく、$n>1$ であるから、$u_n < \frac{nmv}{M} = u$ である。 $\blacksquare$

手を止めて、やってみよう　ここではなぜ一つずつ撃つほうが不利なのだろうか。最初の砲を撃つとき、その砲はトラックとまだ撃たれていない $n-1$ 個の弾丸をまとめて加速しなければならない。そのため、何も載せていないトラックに対して撃つ場合よりも、速さの増加が小さくなるのである。

段階 3　エネルギーの収支

考えてみよう 第 r 回目の発射における運動エネルギーの変化を書け。$u_r^2 - u_{r-1}^2$ を含む項を簡単にするのに、$(*)$ はどのように役立つか。

運動エネルギーの変化は

$$K_r - K_{r-1} = \tfrac{1}{2}\big(M + (n-r)m\big)u_r^2 + \tfrac{1}{2}m(u_{r-1} - v)^2 - \tfrac{1}{2}\big(M + (n-r+1)m\big)u_{r-1}^2.$$

後ろの二つの項をまとめると $\tfrac{1}{2}m(v^2 - 2vu_{r-1}) - \tfrac{1}{2}\big(M + (n-r)m\big)u_{r-1}^2$ となる。次に、平方の差（difference of squares）を因数分解し、$(*)$ を用いると

$$\tfrac{1}{2}\big(M + (n-r)m\big)(u_r^2 - u_{r-1}^2) = \tfrac{1}{2}mv(u_r + u_{r-1}).$$

したがって

$$K_r - K_{r-1} = \tfrac{1}{2}mv(u_r + u_{r-1}) + \tfrac{1}{2}mv^2 - mvu_{r-1} = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}mv(u_r - u_{r-1}). \qquad \blacksquare$$

$r = 1$ から n まで和をとると、増分 $u_r - u_{r-1}$ は望遠鏡和（telescoping sum）として打ち消し合い、u_n だけが残る。

$$K_n = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu_n. \qquad \blacksquare$$

最後に、$K = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}nmv^2 \cdot \tfrac{nm}{M} = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu$ であり、$u_n < u$ であるから $K_n < K$ である。 $\blacksquare$

振り返り

- **各段階ごとの運動量。** 一回一回の発射は、荷を載せたトラックと一個の弾丸という小さな二体問題であった。
- **望遠鏡和。** 増分 $(*)$ とエネルギーの増分は、きれいに足し合わされた。
- **結論を注意深く読む。** 一斉に撃つほうが速さは大きくなるが、エネルギーも多くかかる。この問題は、異なる量の仕事をする二つの過程を比べているのである。

背後にある数学

何を固定すべきか

実際の砲やロケットエンジンは、弾丸が離れた直後に測った**自分自身**に対する相対速度が一定になるように弾丸を撃ち出す。この問題では、基準は**発射前の**トラックの速さである。弾丸が小さければこの違いはごくわずかだが、n 個の弾丸をすべて一斉に撃つ場合には大きな違いになる。小問 (i) では、重い弾丸の塊が、あたかもトラック

がまったく反動（recoil）を受けないかのように速さ v で後方へ投げ出されており、そのためには多くのエネルギーが必要となる。

そうではなく、すべての弾丸が**発射後の**トラックに対して速さ v で離れるとすると、結論は逆転する。一斉に撃つと $u = \frac{nmv}{M+nm}$ となり、一つずつ撃つと $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{mv}{M+km}$ となる。各項は $\frac{mv}{M+nm}$ 以上であるから、後者のほうが大きい。今度は一つずつ撃つほうが有利である。各弾丸はすでに動いているトラックから押し出され、後の砲ほど加速すべき質量が少なくて済むからである。（演習問題で確かめよ。）

ロケット方程式

次に、全質量 $\mu = nm$ を一定に保ったまま、弾丸を非常に小さく、非常に多くしていく。これは燃料を連続的に燃やすロケットである。u_n を表す和は積分（integral）になる（どちらの規約でも同じ極限が得られる）。

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{mv}{M + km} \;\to\; \int_0^{\mu} \frac{v\,\mathrm{d}s}{M + s} = v \ln \frac{M+\mu}{M}.$$

これが**ツィオルコフスキーのロケット方程式**である。排気がロケットに対して速さ v で噴出するロケットは、次の速さを得る。

$$\Delta u = v \ln \frac{m_{\text{initial}}}{m_{\text{final}}}.$$

図 10.3.1 は三つの答えを比較したものである。問題となるのは対数である。排気速度（exhaust speed）が約 4.5 km/s（優れた化学燃料）のとき、約 7.8 km/s の軌道速度（orbital speed）に達するには、質量比（mass ratio）が $e^{7.8/4.5} \approx 5.7$ でなければならず、空気抵抗と重力を考慮すれば 10 以上に近くなる。ロケットのほとんどすべては燃料なのである。

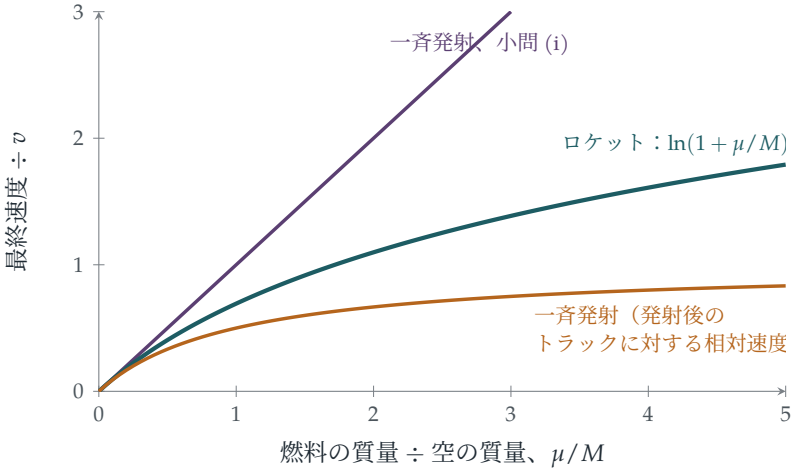


図 10.3.1　燃料と空の質量の比に対する最終速度。すべてを一斉に撃つと、問題の規約では μ/M（紫）となるが、排気速度を反動を受けるトラックに対して測ると $\frac{\mu/M}{1+\mu/M}$（琥珀色）にすぎない。連続的に噴射するロケットはその間にあり、$\ln(1+\mu/M)$（青緑）となる。この図は不等式 $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$ を表している。

ロケットが多段式である理由

対数は多段化（staging）の理由も説明する。途中で空になった燃料タンクを切り離すロケットは、もはやその無駄な質量を加速する必要がない。各段で得られる速さは（砲の場合と同じように）**足し合わされる**一方、各段の速さの増加はその段の質量の**比**で決まる。したがって、ロケットを複数の段に分けると、同じ全質量の一段式ロケットでは到達できない速さに達することができる。宇宙飛行士を月へ運んだサターン V（Saturn V）は三段式であり、その第一段は 3 分足らずで約 2000 トンの燃料を燃やした。

ツィオルコフスキー

コンスタンチン・ツィオルコフスキーは、ロシアの地方都市カルーガの耳の不自由な教師であった。彼は 1903 年、「Exploration of outer space by means of reaction devices」（反作用装置による宇宙空間の探査）と題する論文でロケット方程式を発表した。彼は多段式ロケット、液体水素と液体酸素の燃料、宇宙ステーションについて、それらが実際に作れるようになる何十年も前に考察していた。この方程式はそれ以前にも、あまり目立たないところに現れていた（William Moore が 1810 年にその一つの形を導いている）が、それが宇宙飛行にとって何を意味するかを初めて見抜いたのはツィオルコフスキーであった。「地球は人類のゆりかごである。しかし、人は

いつまでもゆりかごの中で暮らすことはできない」と彼は書いている。

思考のスキル

離散的な過程から極限へ

連続的な過程は、多くの小さな離散的段階の極限（*limit*）として理解できることが多い。離散的な問題を厳密に解き、それから段階の幅を小さくしていく。すると和は積分になる。

ここでは n 門の砲がロケットになり、和が対数になった。大学では、物理法則を導くたびに同じ手法を目にするだろう。小さな要素を解析し、その結果を足し合わせて積分や微分方程式（differential equation）にするのである。

次の一歩

1. **もう一つの規約。** 各弾丸が発射後のトラックに対して速さ v で離れるとして、小問 (i) と (ii) をやり直せ。このときは一つずつ撃つほうが最終速度が大きくなることを示せ。

2. **塵の雲の中の彗星。** STEP III 2009、問 11（`step.maths.org/questions/09-s3-q11`）に挑戦せよ。ロケットと同様の可変質量（variable mass）の問題であるが、彗星は質量を失うのではなく得ていく。彗星の速さが近づいていく値に注目せよ。

3. **二段式。** 排気速度 v、空の質量 M、燃料の質量 $9M$ のロケットがある。その最終速度を求めよ。次に、これを空の質量 $\frac{1}{2}M$、燃料 $4.5M$ の二つの段に分け、第一段は空になった時点で切り離すとする。最終速度を比較せよ。

4. **不等式。** 区間 $[0, x]$ 上で $\frac{1}{1+s}$ を 1 および $\frac{1}{1+x}$ と比較することにより、$x \geq 0$ に対して $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$ を証明せよ。

さらに学ぶために

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press）、第 4 章。運動量、可変質量、ロケット方程式。
- **George Sutton & Oscar Biblarz, *Rocket Propulsion Elements***（Wiley）。工学の標準的な

教科書。冒頭の数章は、この節を読んだ後なら読みこなせる。

- **Hermann Oberth, *Ways to Spaceflight***（NASA による英訳、オンラインで無料公開）。宇宙開発の先駆者オーベルト（Oberth）自身による解説。

10.4 分子とピストン

問題

STEP I 2002、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/02-s1-q10`

導入

自転車のタイヤに空気を入れたあと、空気入れに触れてみると熱くなっている。気体は圧縮すると温まる。これはディーゼルエンジン（燃料を圧縮だけで点火する）、冷蔵庫、そして星の形成の背後にある原理である。では、なぜ圧縮すると気体は熱くなるのだろうか。温度とは分子の運動エネルギー（kinetic energy）の平均であるから、問いは「なぜ分子は速くなるのか」ということになる。

この問題は、ただ一つの分子を使ってこの問いに答える。分子は前進してくるピストン（piston）に跳ね返されるたびに、動いているラケットに打ち返されたテニスボールと同じように、少しずつ速さを増す。跳ね返りを正確に追っていくと、隠れた法則が現れる。分子の速さとシリンダーの長さの積が、ほぼ一定に保たれるのである。これは**断熱不変量**（adiabatic invariant）と呼ばれる量であり、物理で学ぶ気体の法則の微視的な起源となっている。

取りかかる前に

? **考えてみよう** 速さ w で動くボールが、速さ u でこちらに向かって動いてくる壁に当たり、弾性的に（elastically）跳ね返る。跳ね返ったあとの速さはいくらか。（壁とともに動く座標系（frame）で考えよ。）

壁の座標系では、ボールは $w+u$ で近づき、非常に重い物体に弾性的に跳ね返されるので $w+u$ で離れていく。地面の座標系に戻ると、壁は跳ね返ったボールと同じ向きに u で動いているから、ボールの速さは $w+2u$ となる。前進するピストンに跳ね返

されるたびに、速さは $2u$ ずつ増えるのである。（静止しているシリンダーの端で跳ね返っても、速さは変わらない。）

順を追って解く

段階 1　n 回跳ね返ったあとの速さ

粒子ははじめ速さ v である。ピストンとの衝突のたびに $2u$ が加わり、端との衝突では速さは変わらない。よって、ピストンと n 回衝突したあとの速さは

$$v_n = v + 2nu. \qquad \blacksquare$$

段階 2　長さについての漸化式

> **考えてみよう**　n 回目と $(n+1)$ 回目の衝突の間に、粒子はピストンから端まで行って戻ってくる。粒子が進む距離はいくらか。ピストンが動く距離はいくらか。

時間 t_n の間にピストンは ut_n だけ動くので、$d_n - d_{n+1} = ut_n$ である。その間に粒子は速さ v_n で、ピストンから端まで（距離 d_n）進み、そこからピストンまで（距離 d_{n+1}）戻る。よって $d_n + d_{n+1} = v_n t_n$ である。一方の式を他方で割ると t_n が消去され、漸化式（recurrence）

$$\frac{d_n + d_{n+1}}{d_n - d_{n+1}} = \frac{v_n}{u}, \qquad \text{よって} \qquad d_{n+1}(v_n + u) = d_n(v_n - u).$$

が得られる。$v_n = v + 2nu$ を代入すると

$$d_{n+1} = \frac{v + (2n-1)u}{v + (2n+1)u}\, d_n. \qquad \blacksquare$$

段階 3　次々に打ち消し合う積

> **考えてみよう**　d_n を、d_1 にこのような分数 $n-1$ 個の積を掛けた形で書け。何が約分されるか。

$$d_n = d_1 \cdot \frac{v+u}{v+3u} \cdot \frac{v+3u}{v+5u} \cdots \frac{v+(2n-3)u}{v+(2n-1)u} = \frac{v+u}{v+(2n-1)u}\, d_1. \qquad \blacksquare$$

各分子が直前の分母と約分され、最初の分子と最後の分母だけが残る。このように次々と打ち消し合う計算を、テレスコーピング（telescoping）という。

段階 4 $v = u$ **の場合**

このとき $d_n = \frac{2u}{2nu} d_1 = \frac{d_1}{n}$ であり、

$$ut_n = d_n - d_{n+1} = d_1\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{d_1}{n(n+1)}. \qquad \blacksquare$$

これらを足し合わせると $u(t_1 + t_2 + \cdots) = d_1\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots\right) = d_1$ となる。つまり、ピストンは最初の衝突から時間 d_1/u でシリンダーの端に到達する。当然そうでなければならない。そこに到達するまでに、粒子は無限回跳ね返るのである（図 10.4.1）。

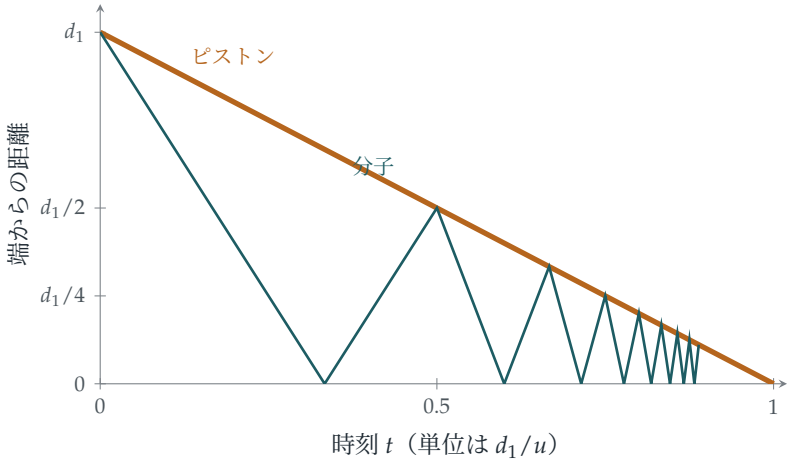


図 10.4.1 $v = u$ の場合の時空図：シリンダーの端からの距離を時刻に対して描いたもの。ピストン（琥珀色）は一定の速さで前進し、分子（青緑色）はピストンと端の間を跳ね返り続ける。ジグザグは次第に急に（速く）、短くなっていく。ピストンとの n 回目の衝突は距離 d_1/n の位置で起こるので、分子の速さはおおよそ 1/(長さ) に比例する。

振り返り

- **衝突は座標系を変えて考える。** ピストンの座標系では、跳ね返りは自明である。
- **二つの式を立て、未知数を消去する。** 同じ時間に粒子とピストンが進む距離から、t_n を含まない漸化式が得られた。
- **テレスコーピング。** $\frac{1}{n(n+1)}$ の和と同様に、積が一気につぶれた。

背後にある数学

断熱不変量

速さに長さを掛けてみよう。

$$v_n d_n = (v + 2nu) \cdot \frac{v+u}{v+(2n-1)u}\, d_1 \approx (v+u) d_1$$

が、n が大きいとき、あるいは u が v よりはるかに小さいときに成り立つ。したがって

$$\text{速さ} \times \text{長さ} \approx \text{一定}.$$

ピストンが分子に比べてゆっくり動くならば、ピストンがどれだけ動いても積 vd はほとんど変化しない。このように、系をゆっくり変化させたときにほぼ一定に保たれる量を**断熱不変量**という。一般に、往復運動の断熱不変量は $\oint p\,\mathrm{d}q$、すなわち運動量を一周期にわたって積分したものである。ここではそれは $mv \times 2d$ となる。

一つの分子から気体へ

$v \propto 1/d$ であるから、運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ は $1/d^2$ に比例する。多数の分子が一方向に沿って運動する気体では、温度は運動エネルギーの平均に比例するので $T \propto 1/d^2$ となる。つまり、長さを半分にすると温度は 4 倍になる。三次元では、エネルギーは三つの運動方向に分配され、同じ議論（ファインマン（Feynman）が**講義録**で述べているもの）によって、単原子気体の断熱圧縮の法則

$$TV^{2/3} = \text{一定}, \qquad \text{すなわち} \qquad pV^{5/3} = \text{一定}.$$

が導かれる。指数 $\frac{5}{3}$ は、単原子気体の比熱比 γ として知られる値である。自転車の空気入れの中の空気を体積の 5 分の 1 まで、素早く、熱が逃げないように圧縮したとすると、絶対温度は $5^{0.4} \approx 1.9$ 倍になる（空気の分子は二原子分子なので、代わりに $\gamma = 1.4$ となる）。つまり 20°C から約 280°C になる。空気入れがそこまで熱くならないのは、圧縮がゆっくりで、熱が逃げていくからにすぎない。

フェルミの宇宙線

1949 年、エンリコ・フェルミ（Enrico Fermi）は、宇宙から莫大なエネルギーをもって飛来する粒子である宇宙線が、まさにこの問題の分子と同じしくみで加速されていると提唱した。すなわち、星間ガス雲の中を動く磁場に何度も跳ね返され、そのたびに少しずつエネルギーを得るというのである。現在では、この「フェルミ加速」は超新星残骸の衝撃波で起こっていると考えられている。そこでは粒子が、ピストンと壁の間を行き来する分子のように、衝撃波を何度も往復して横切る。断熱不変量は量子力学の誕生にも一役買った。1916 年、パウル・エーレンフェスト（Paul Ehrenfest）は、ゆっくりとした変化によって系が量子状態の間を飛び移ることはありえないか

ら、量子化される量は断熱不変量でなければならないと論じたのである。

思考のスキル

物理的な過程から漸化式を作る

過程が繰り返されるときは、一周期を正確に記述し、ある周期から次の周期へ状態がどう変わるかを書き下せ。

ここでの状態は、各衝突における（速さ、長さ）の組であった。漸化式は厳密に解くことができ、その解からほぼ保存される量が明らかになった。大学では、同じ方法（一周期を調べ、漸化式あるいは「回帰写像」を作る）が、軌道、振動子、そしてSection 8.7の反復写像に用いられる。

次の一歩

1 **不変量を厳密に。** $v_n d_n - (v+u)d_1 = \frac{u(v+u)d_1}{v+(2n-1)u}$ を示し、$n \to \infty$ のとき $v_n d_n \to (v+u)d_1$ となることを導け。

2 **ピストンを引き抜く。** ピストンを速さ $u < v$ で引き抜く場合について、問題を考え直せ。粒子が遅くなることを示し、$v_n d_n$ を求めよ。（膨張する気体は冷える。）

3 **エネルギー。** $v = u$ の場合、ピストンが端に近づくにつれて分子の速さは限りなく大きくなる。n 番目の周期の間にピストンにはたらく平均の力（運動量の変化を t_n で割ったもの）を求め、それが n^3 のように増大することを示せ。このことは、ピストンを最後まで押し込むのに必要な仕事について何を意味するか。

4 **弾むボール。** 重力のもとで床の上を弾性的に弾むボールがあり、床をゆっくりと持ち上げていく。この運動の断熱不変量を推測せよ。（**ヒント：** vd に相当するのは、平均の速さと跳ね上がる高さの積、あるいは同じことだが、エネルギーと跳ね返りの間の時間の積である。）

さらに学ぶために

- **Richard Feynman, Robert Leighton & Matthew Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. I**（『ファインマン物理学』、オンラインで無料公開）、第 39 章「The kinetic theory of gases」（気体分子運動論）。同じピストンの議論を三次元に拡張している。

- **Stephen Blundell & Katherine Blundell, *Concepts in Thermal Physics***（Oxford University Press、熱物理学の入門書）。断熱過程と気体分子運動論を大学 1 年生の水準で扱っている。
- **Lev Landau & Evgeny Lifshitz, *Mechanics***（Butterworth-Heinemann、ランダウ＝リフシッツ『力学』）、§49。断熱不変量の簡潔な解説。もう少し先で読むとよい。

10.5 有限時間に無限回の跳ね返り

問題

STEP III 2002、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/02-s3-q11`

導入

エレアのゼノン（Zeno of Elea）は、壁には決してたどり着けないと論じた。まず距離の半分を進まなければならず、次に残りの半分を進まなければならず、これが永遠に続くからである。このパラドックスの解決、すなわち無限に多くの段階が有限の合計時間で済みうるということは、収束（converge）する無限級数（infinite series）にほかならない。この問題はゼノンのパラドックスを現実のものにしている。くさびの角に向かって滑っていくパックは、壁で無限回はね返るにもかかわらず、有限の時間で角に到達するのである。

自然界でも同じことが起こる。はね返り係数（coefficient of restitution）が 1 より小さいボールを床ではずませると、有限の時間内に無限回はずんだのち静止する。粒状体（granular materials）（砂、穀物、雪）のコンピュータ・シミュレーションでは、この「非弾性崩壊（inelastic collapse）」が実際に厄介な問題となる。コンピュータは有限の時間内に無限回の衝突を処理するよう求められてしまうからである。

取りかかる前に

考えてみよう はね返り係数 e のなめらかな壁に粒子が衝突するとき、速度の壁に沿った成分はどうなるか。壁に垂直な成分はどうなるか。

なめらかな壁は壁に沿った方向には力を及ぼさないので、速度の壁に平行な成分は変わらない。垂直な成分は向きが逆になり、e 倍される。したがって、粒子が壁と角 α を

なして到達し、角 β をなして離れるとすると、

$$\tan\beta = e\tan\alpha,$$

であり、平行な成分は変わらないので、（入射の速さ）$\cos\alpha$ =（反射の速さ）$\cos\beta$ が成り立つ。

順を追って解く

段階 1　離れる角

考えてみよう　粒子は壁 OA 上の点 M_1 に、OA と角 θ（O から遠い側で測る）をなして到達する。粒子は OA とどのような角 φ をなして離れるか。三角形 OM_1N_1 を用いて、φ を θ で表せ。

粒子は M_1 を O の側に向かって、壁と角 φ をなして離れるので、角 OM_1N_1 は φ である。三角形 OM_1N_1 において、O における角は 30° である。N_1 において角 M_1N_1B は θ であり、O、N_1、B は一直線上にあるので、角 ON_1M_1 は $180^\circ-\theta$ である。三角形の内角の和は 180° であるから、

$$30^\circ+\varphi+(180^\circ-\theta)=180^\circ,\qquad \text{よって}\qquad \varphi=\theta-30^\circ.$$

（特に $\theta>30^\circ$ である。）はね返りの法則 $\tan\varphi = e\tan\theta$ から

$$e=\frac{\tan(\theta-30^\circ)}{\tan\theta},$$

が得られ、平行な成分の保存 $u_1\cos\theta = v_1\cos\varphi$ から

$$\frac{v_1}{u_1}=\frac{\cos\theta}{\cos(\theta-30^\circ)}.$$ ■

が得られる。

段階 2　同じパターンの繰り返し

考えてみよう　N_1 において、粒子は壁 OB と角 θ（O から遠い側で測る）をなして到達する。これを M_1 への到達と比べよ。次に何が起こるか。

N_1 における状況は、M_1 における状況の鏡像である。粒子は O から遠い側で、壁と角 θ をなして壁に出会う。したがって粒子は角 $\theta-30^\circ$ をなして離れ、再び OA に角 θ をなして出会い、これが永遠に続く。どのはね返りも最初のはね返りを縮小した写しである。三角形 OM_kN_k、ON_kM_{k+1}、… はそれぞれ直前の三角形と相似であり（図 10.5.1）、速さはどのはね返りでも同じ倍率で掛けられる。

段階 3 二つの比

考えてみよう O からの距離は、一つのはね返りから次のはね返りまでにどんな倍率 ρ で縮むか。速さはどんな倍率 k で縮むか。では、各区間にかかる時間はどんな倍率で縮むか。

三角形 OM_1N_1 における正弦定理（sine rule）から

$$\rho = \frac{ON_1}{OM_1} = \frac{\sin\varphi}{\sin(180^\circ - \theta)} = \frac{\sin(\theta - 30^\circ)}{\sin\theta}.$$

次の三角形のすべての長さはこの三角形の長さの ρ 倍なので、経路の各区間の長さは直前の区間の ρ 倍である。速さは各はね返りで $k = \frac{\cos\theta}{\cos(\theta-30^\circ)}$ 倍される。時間は長さを速さで割ったものなので、各区間にかかる時間は直前の区間の

$$\frac{\rho}{k} = \frac{\sin(\theta - 30^\circ)\cos(\theta - 30^\circ)}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin(2\theta - 60^\circ)}{\sin 2\theta}$$

倍である。

段階 4 等比級数

合計時間は $T_1(1 + r + r^2 + \cdots)$ である。ここで T_1 は最初の区間にかかる時間であり、$r = \frac{\sin(2\theta-60^\circ)}{\sin 2\theta}$ である。これは $0 < r < 1$ ならば有限である。

考えてみよう $\sin(2\theta - 60^\circ) < \sin 2\theta$ となるのはどのようなときか。恒等式 $\sin X - \sin Y = 2\cos\frac{1}{2}(X + Y)\sin\frac{1}{2}(X - Y)$ を用いよ。

$$\sin 2\theta - \sin(2\theta - 60^\circ) = 2\cos(2\theta - 30^\circ)\sin 30^\circ = \cos(2\theta - 30^\circ),$$

これは $2\theta - 30^\circ < 90^\circ$、すなわち $\theta < 60^\circ$ のとき正である。また $\theta > 30^\circ$ より $r > 0$ である。したがって $30^\circ < \theta < 60^\circ$ のとき、この等比級数（geometric series）は収束する。粒子は無限回はね返り、O からの距離は毎回倍率 $\rho < 1$ で縮み、有限の時間 $\frac{T_1}{1-r}$ の後に O に到達する。 ■

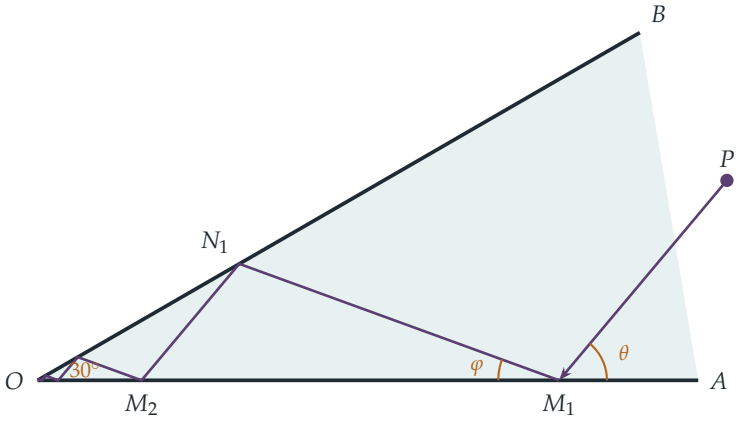


図 10.5.1　$\theta = 50^\circ$ のときのくさび内の経路。このとき $\varphi = 20^\circ$、$e = \tan 20^\circ / \tan 50^\circ \approx 0.31$ である。各はね返りは直前のはね返りを $\rho \approx 0.45$ 倍に縮小した写しであり、各区間にかかる時間は直前の区間の約 0.65 倍である。粒子は無限回はね返ったのち、有限の時間で O に到達する。

振り返り

- **自己相似性（self-similarity）。**一つのはね返りを理解すれば、それ以降のはね返りはすべてその縮小された写しなので、無限に続く過程全体が二つの比に帰着した。
- **比を正しく組み合わせる。**距離は ρ 倍、速さは k 倍に縮むので、時間は ρ/k 倍に縮む。
- **無限回の出来事、有限の合計。**公比が 1 より小さい等比級数は収束する。

背後にある数学

$\theta \geq 60^\circ$ のとき

$\theta = 60^\circ$ のとき、比はちょうど 1 である。どの区間にも同じ時間がかかり、粒子は O にいくらでも近づくものの、決して到達しない。（速さと区間の長さがどちらも同じ倍率で縮むためである。）$\theta > 60^\circ$ のときは、区間にかかる時間はどんどん長くなる。いずれの場合も粒子は O に近づき、無限回はね返るが、有限の時間で到達するのは $\theta < 60^\circ$ のときだけである。値 $e = \tan 30^\circ / \tan 60^\circ = \frac{1}{3}$ がその境目である。

はずむボールと非弾性崩壊

同じ現象の最も簡単な例として、床に落としたボールは高さ e^2H まで上がり、次に e^4H まで上がり、と続く。はね返りの間隔はそれぞれのはね返りでの速さに比例し、速さは倍率 e で縮むので、合計時間は等比級数になる。最初の落下にかかる時間を $T_0 = \sqrt{2H/g}$ とすると、ボールは

$$T_0 + 2eT_0 + 2e^2T_0 + \cdots = T_0\,\frac{1+e}{1-e}.$$

の後にはずむのをやめる。無限回はずんで、そして静止するのである。1992 年、Sean McNamara と William Young は、一直線上に並んだ多数の非弾性粒子のシミュレーションでも同じことが起こることを示した。粒子の集団が有限の時間内に無限回の衝突を起こしうるのであり、これが「非弾性崩壊」である。砂や粒状流のシミュレーションでは、これを避けるための特別な規則を組み込まなければならない。また、この現象は粒状気体が自発的にクラスターを形成する理由の説明にも役立っている。

ゼノンと収束

紀元前 450 年頃のゼノンのパラドックスは、二千年にわたって哲学者たちを悩ませた。数学的な解決、すなわち無限和が有限の値をもちうるということが厳密にされたのは、ようやく 19 世紀になってからである。このとき、コーシー（Cauchy）、ワイエルシュトラス（Weierstrass）らが極限を用いて収束を定義した（第 2 章の主題である）。この問題の驚くべき点は、過程が**物理的に**無限であることである。有限の時間内に、本当に無限回の衝突が起こるのである。多角形の中のビリヤードや衝突する粒子の運動を研究する数学者は、このような振る舞いを**ゼノン現象**と呼ぶ。これは、衝突する剛体球の系がすべての時刻にわたって矛盾なく定まった運動をもつことを証明する際の難所の一つである。

思考のスキル

無限に続く過程を足し合わせる

過程が一定の倍率で繰り返されるとき、加法的な量（時間、距離、エネルギー）の合計は等比級数になる。収束するかどうかは公比から判定する。

ここでの鍵は、正しい比を見つけることであった。距離の比でも速さの比でもなく、時間の比である。大学では、同じ推論が反復法の収束、フラクタルの理論、そして問題を繰り返し半分にするアルゴリズムの解析を支配している。

次の一歩

1. **移動距離の合計。** 30° と 90° の間のすべての θ について、M_1 から O までに移動する距離の合計が有限であることを示し、それを OM_1 と θ で表せ。

2. **ほかのくさび。** 30° の代わりに角 α のくさびについて、この問題をもう一度考えよ。$\varphi = \theta - \alpha$ を示し、粒子が有限の時間で O に到達するための θ の条件を求めよ。

3. **弾性的な壁。** $e = 1$ のとき、粒子が O に到達することはあるか。（ヒント：くさびをその壁に関して繰り返し折り返し、経路が直線になるようにせよ。30° のくさびの写しは O のまわりにいくつ収まるか。）

4. **はずむボール。** ボールを高さ 1 m から $e = 0.8$ で落とす。ボールはどれだけの時間はずみ続け、合計でどれだけの距離を移動するか。（$g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ とせよ。）

さらに学ぶために

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press）、第 5 章。はずむボールや無限に続く衝突の列に関する問題がいくつか収められている。
- **Sean McNamara & William Young,「Inelastic collapse and clumping in a one-dimensional granular medium」**, *Physics of Fluids A* 4 (1992).
- **Serge Tabachnikov, *Geometry and Billiards***（American Mathematical Society、オンラインで無料公開）。ビリヤードの数学を扱い、演習問題で用いた折り返しの技法も含まれている。

10.6 二体が一体になる

問題

STEP III 2004、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/04-s3-q11`

導入

2 つの物体が互いに引き合ったり反発し合ったりする。地球と月、2 つの恒星、陽子と電子がその例である。それぞれの物体の運動はもう一方の位置に依存するので、方程式は連立しており、2 つの運動を同時に求めなければならないように見える。ニュートン（Newton）による大きな簡略化は、変数を取り替えることであった。2 つの位置の代わりに、まったく力がはたらいていないかのように運動する**重心**（centre of mass）と、質量を修正した 1 個の粒子のように運動する**相対距離**（separation）を用いるのである。こうして 1 つの難しい問題が 2 つのやさしい問題になる。

この問題では、直線上の 2 粒子についてこの分離を実行する。その途中で小さな奇跡が起こる。相対距離が t の 2 次式の平方根になるのである。その理由は、出題された問題そのものとはまったく関係がなく、平面内の運動とこそ深く関係している。

取りかかる前に

考えてみよう それぞれの粒子についてニュートンの第 2 法則を書き下せ。それぞれの力はどちら向きにはたらくか。

力は斥力なので、（左側にある）P を左向きに、（右側にある）Q を右向きに押す。

$$2\ddot{x}_1 = -\frac{2}{z^3}, \qquad 1 \cdot \ddot{x}_2 = +\frac{2}{z^3}.$$

どちらの式も $z = x_2 - x_1$ を含むので、これらは連立している。

順を追って解く

段階 1　相対距離

> **考えてみよう**　2 つの方程式をどのように組み合わせれば z だけを含む式になるか。

辺々引くと、$\ddot{z} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{z^3}$ である。 ■

相対距離は、力 $\frac{2}{z^3}$ で押される質量 $\frac{2}{3}$ の 1 個の粒子のようにふるまう。数 $\frac{2}{3} = \frac{2\times 1}{2+1}$ は換算質量（reduced mass）$\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ である。

段階 2　相対距離に対するエネルギー

> **考えてみよう**　$\ddot{z} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$ として変数を分離し、積分せよ。z と $v = \dot{z}$ の初期値は何か。

$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = \frac{3}{z^3}$ を積分すると $\frac{1}{2}v^2 = -\frac{3}{2z^2} + C$ となる。初めに $z = 1$、$\dot{z} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = 0 - 1 = -1$ であるから $\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + C$ となり、$C = 2$ を得る。

$$v^2 = 4 - \frac{3}{z^2}.$$

（これは相対距離に対するエネルギー保存（conservation of energy）である。換算質量 1 あたりの運動エネルギーとポテンシャルエネルギー $\frac{3}{2z^2}$ の和が一定となる。）

段階 3　意外なほど簡単な解

> **考えてみよう**　示すべき答えは $z^2 = 4t^2 - 2t + 1$ である。そこで z の代わりに $w = z^2$ を考えよ。$\dot{w}^2$ を w で表すとどうなるか。

$w = z^2$ とすると $\dot{w} = 2z\dot{z}$ であるから、

$$\dot{w}^2 = 4z^2\dot{z}^2 = 4z^2\left(4 - \frac{3}{z^2}\right) = 16w - 12.$$

これを微分すると $2\dot{w}\ddot{w} = 16\dot{w}$ となるので、（$\dot{w} \neq 0$ である限り）$\ddot{w} = 8$ である。したがって w は t の 2 次式 $w = 4t^2 + \alpha t + \beta$ である。初めに $w = 1$、$\dot{w} = 2z\dot{z} = -2$ であるから $\beta = 1$、$\alpha = -2$ となり、

$$z = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}. \qquad \blacksquare$$

（直接確かめることもできる：$\dot{w}^2 = (8t-2)^2 = 64t^2 - 32t + 4 = 16(4t^2 - 2t + 1) - 12$。）2 粒子は $t = \frac{1}{4}$ で最も近づき、そのとき $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。その後は永遠に離れていく。

段階 4 重心

考えてみよう $2x_1 + x_2$ はどのような方程式を満たすか。なぜそれが調べるべき自然な組合せなのか。

2 つの運動方程式を加えると $2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^3} = 0$ となる。2 つの力は大きさが等しく向きが反対である（ニュートンの第 3 法則）から、全運動量（total momentum）$2\dot{x}_1 + \dot{x}_2$ は一定である。その初期値は $2 \times 1 + 0 = 2$ であり、$2x_1 + x_2$ の初期値は 1 であるから、

$$2x_1 + x_2 = 1 + 2t.$$

重心 $\frac{2x_1+x_2}{3}$ は速さ $\frac{2}{3}$ で一様に動く。これを $x_2 - x_1 = z$ と組み合わせると、

$$x_1 = \frac{1 + 2t - \sqrt{4t^2 - 2t + 1}}{3}, \qquad x_2 = \frac{1 + 2t + 2\sqrt{4t^2 - 2t + 1}}{3}. \qquad \blacksquare$$

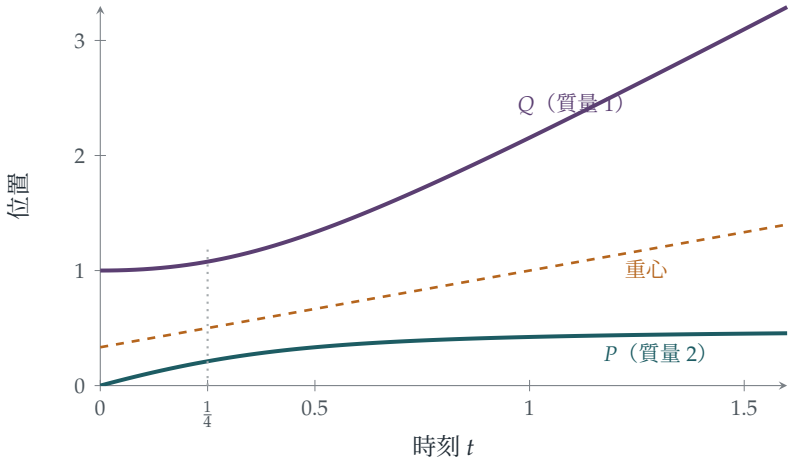


図 10.6.1 時刻に対する P（ティール）と Q（プラム）の位置。P は Q に向かって進むが、斥力によって減速して向きを変え、一定の位置に近づいていく。一方 Q は押しやられる。最接近は $t = \frac{1}{4}$ である。重心（アンバー、破線）は終始一定の速さで動く。

振り返り

- **変数を取り替えて連立を解きほぐす。** 方程式の差は z だけを含み、重みつきの和は重心だけを含んでいた。
- **エネルギー積分。** $\ddot{z} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$ と書くことで、2 階の方程式が 1 階の方程式、すなわちエネルギー保存の式に変わった。

- **未知関数を取り替える。** z に対する方程式は扱いにくかったが、z^2 に対する方程式は自明であった。

背後にある数学

なぜ z^2 は 2 次式になるのか

$\ddot{z} = k/z^3$ の形の任意の力の法則について、同じ計算により $\frac{d^2}{dt^2}(z^2) = 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 2\dot{z}^2 + \frac{2k}{z^2} =$ 定数となる。$\frac{1}{2}\dot{z}^2 + \frac{k}{2z^2}$ が保存されるエネルギーだからである。したがって z^2 はつねに t の 2 次式である。それはなぜか。

隠れた理由はこうである。**平面**内を、力を受けずに直線上を一定の速さで運動する粒子を考える。原点からの距離 r は、$r^2 = (x_0 + at)^2 + (y_0 + bt)^2$ であるから、$r^2 =$ (2 次式、変数t) を満たす。また極座標（polar coordinates）では動径方向の運動方程式は $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0$ であり、角運動量（angular momentum）$h = r^2\dot{\theta}$ が一定であることから、これは

$$\ddot{r} = \frac{h^2}{r^3}.$$

となる。逆 3 乗の斥力は、まさに隠れた回転運動による**遠心力**（centrifugal）の効果なのである。この問題では、$z^2 = 4t^2 - 2t + 1 = (2t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ は、原点から距離 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ のところを通る直線上を速さ 2 で動く点の、原点からの距離の 2 乗である。1 次元で反発し合う粒子は、2 次元における自由運動の影なのである。

二体問題

この問題の方法は、2 物体間の力が相対距離だけに依存し、2 物体を結ぶ直線に沿ってはたらくものであれば、1 次元に限らず 3 次元でも通用する。重心は等速運動をし、相対位置ベクトル $\mathbf{r}$ は $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ として $\mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ に従う。重力の場合、これは**ケプラー問題**（Kepler problem）であり、ニュートンが『*Principia*』（プリンキピア）で解いた。相対位置は楕円、放物線、双曲線のいずれかを描く。地球と太陽はともに共通の重心のまわりを公転しており、その重心は太陽の内部にある。地球と月は地球の中心から約 4700 km の点のまわりを回っており、その点は地球の内部にあるが中心からはかなり離れている。地球が月ごとに揺れ動くのはこのためである。天文学者は、恒星のまさにこの揺れを検出することで、ほかの恒星のまわりの惑星を発見している。

可積分系

1969 年、Francesco Calogero は、直線上にある多数の粒子が逆 2 乗のポテンシャル（すなわち逆 3 乗の力）で互いに反発し合う系を研究し、驚くべきことに、粒子の個

数によらずこの系が厳密に解けることを発見した。1975 年、Jürgen Moser は、時間発展しても固有値（eigenvalues）が一定に保たれる行列、すなわち Section 7.7 の *Lax 対*（Lax pairs）を用いてその理由を説明した。*Calogero–Moser 系*は現在、**可積分系**（integrable system）、つまり完全に解けるだけの十分な数の保存量をもつ系の中心的な例となっており、力学をランダム行列、場の量子論、ソリトン（solitons）の理論と結びつけている。

思考のスキル

連立を解きほぐす座標を選ぶ

2 つの量が連立しているときは、連立していない組合せを探せ。適切な定数で重みをつけた和や差によって、問題が独立な部分に分かれることが多い。

重心座標と相対座標はその最初の例である。大学では同じ考え方が、行列の対角化（diagonalising）（基準振動（normal modes）、Section 11.2）として、偏微分方程式（partial differential equations）の変数分離（separation of variables）として、また量子力学の中で現れる。

次の一歩

1. **糸で結ばれた 2 つの質点。**STEP III 2023、問 9（OCR が配布している 2023 年の過去問一式に収録、`www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip`）に挑戦せよ。糸で結ばれた 2 粒子の運動を、重心を用いて分離しながら追う問題である。一方の粒子が後ろ向きに動くのはいつかに注目せよ。

2. **引力。**力を引力 $\frac{2}{z^3}$ にして同じ問題を解け。z^2 がやはり t の 2 次式であることを示し、2 粒子が衝突する時刻を求めよ。

3. **隠れた平面。**この問題の運動について、原点からの距離が $z(t)$ となる平面内の直線と、掃過される角 $\theta(t)$ を求めよ。$z^2\dot{\theta}$ が一定であり、$(z^2\dot{\theta})^2 = 3$ であることを確かめよ。

4. **ケプラーの第 3 法則。**質量 m_1 と m_2 の 2 つの恒星が、距離 a を保ちながら重力のもとで重心のまわりを円運動している。周期 T が $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1+m_2)}$ を満たすことを示せ。

さらに学ぶために

- **John Taylor, *Classical Mechanics***（University Science Books）、第 8 章。二体問題、換算質量、軌道。
- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press）、第 10 章、中心力について。
- **Francesco Calogero, *Classical Many-Body Problems Amenable to Exact Treatments***（Springer）。意欲的な読者向け：厳密に解ける系の世界。

10.7 球殻の内部の重力

問題

STEP III 1999、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/99-s3-q9`

導入

中が空洞の惑星を想像してほしい。内部には何もなく、岩石でできた薄い球殻（spherical shell）だけがある惑星である。その内側で壁の近くに立てば、すぐそばの岩石の方へ引き寄せられると思うかもしれない。しかし実際には、体は宙に浮く。球殻の内部では、球殻による重力（gravitational pull）はどこでもちょうど 0 になるのである。球殻の手前側は近いが、向こう側は大きい。この二つの効果が完全に打ち消し合う。

これがニュートン（*Newton*）の殻定理（*shell theorem*）である。ニュートンはこれを証明するのに何年もかかったが、この定理は彼の重力理論に欠かせないものであった。対になる結果（球の外側では、全質量が中心に集まっているかのように引力がはたらく）と合わせると、地球や太陽を点とみなしてよいことが正当化される。演習問題と「背後にある数学」の節では、この定理を使って、ガスの雲が収縮して恒星になるまでにかかる時間を計算する。

取りかかる前に

考えてみよう 円環上で直径の両端に位置する二つの小さな部分を考えよ。それらが質点に及ぼす力を図示せよ。どの成分が打ち消し合い、どの成分が足し合わされるか。

二つの部分は質点から等しい距離にある。それらの引力の軸方向の成分は等しく、足し合わされる。軸に垂直な成分は大きさが等しく向きが逆なので、打ち消し合う。円

環全体をこのように対にしていくと、合力は軸方向で、円環の中心に向かう。

順を追って解く

段階 1　円環

円環のどの部分も質点から距離 $\sqrt{x^2+r^2}$ にあり、その部分へ向かう直線は軸と角 ψ をなす。ここで $\cos\psi = \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$ である。質量 δm の部分は大きさ $\frac{G\,\delta m}{x^2+r^2}$ の力で引き、そのうち軸方向の成分は $\frac{G\,\delta m}{x^2+r^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$ である。どの部分も距離と角が同じなので、これらの成分を単純に足し合わせると

$$\frac{Gmx}{(x^2+r^2)^{3/2}}. \qquad \blacksquare$$

となる。

段階 2　球殻を円環に切り分ける

> **考えてみよう**　球殻の中心を O とし、質点を軸上で O から距離 b の位置に置く。球殻を軸に垂直な薄い円環に切り分け、各円環を、その上の点が O において軸となす角 ϕ で表す。円環の半径、位置、質量はそれぞれいくらか。

角 ϕ の円環の半径は $a\sin\phi$ であり、その中心は軸に沿って O から距離 $a\cos\phi$、したがって質点から距離 $a\cos\phi - b$ の位置にある。幅は $a\,\delta\phi$ なので、面積は $2\pi a\sin\phi\cdot a\,\delta\phi$ であり、これは球殻の面積 $4\pi a^2$ の $\frac{1}{2}\sin\phi\,\delta\phi$ 倍にあたる。よって質量は $\frac{1}{2}M\sin\phi\,\delta\phi$ である。段階 1 より、この円環は質点を軸に沿って $\phi = 0$ の端の方へ、大きさ

$$\frac{G\cdot\frac{1}{2}M\sin\phi\,\delta\phi\,(a\cos\phi - b)}{\left((a\cos\phi-b)^2 + a^2\sin^2\phi\right)^{3/2}} = \frac{GM}{2}\cdot\frac{(a\cos\phi-b)\sin\phi\,\delta\phi}{(a^2-2ab\cos\phi+b^2)^{3/2}}.$$

の力で引く。（符号は自動的に正しく処理される。質点より先にある $a\cos\phi > b$ の円環は一方の向きに引き、質点より後ろにある円環は逆の向きに引く。）

段階 3　適切な変数

> **考えてみよう**　分母には $s^2 = a^2 - 2ab\cos\phi + b^2$ が含まれる。s は幾何学的に何を表すか。$\mathrm{d}s$ を $\mathrm{d}\phi$ で表すとどうなるか。

余弦定理（cosine rule）より、s は質点から円環までの距離である。微分すると $2s\,\mathrm{d}s = 2ab\sin\phi\,\mathrm{d}\phi$ となり、$s^2 = a^2 - 2ab\cos\phi + b^2$ を $a\cos\phi$ について解くと $a\cos\phi -$

$b = \frac{a^2-b^2-s^2}{2b}$ を得る。よって力の総和は

$$\frac{GM}{2}\int \frac{a^2-b^2-s^2}{2b\,s^3}\cdot\frac{s\,\mathrm{d}s}{ab} = \frac{GM}{4ab^2}\int_{a-b}^{a+b}\Big(\frac{a^2-b^2}{s^2}-1\Big)\mathrm{d}s,$$

である。ここで s は $a-b$（最も近い点、$\phi=0$）から $a+b$（最も遠い点、$\phi=\pi$）まで動く。

段階 4 **力は消える**

$$\int_{a-b}^{a+b}\Big(\frac{a^2-b^2}{s^2}-1\Big)\mathrm{d}s = (a^2-b^2)\Big(\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}\Big)-2b = (a^2-b^2)\cdot\frac{2b}{a^2-b^2}-2b = 0.$$

球殻は質点に力を及ぼさない。 ■

手を止めて、やってみよう 質点が球殻の**外側**にあり、$b>a$ のときは何が変わるか。s の範囲の端は $b-a$ と $b+a$ になる。最後の行を計算し直し、力が中心に向かう大きさ $\frac{GM}{b^2}$ の力になること、すなわち全質量が中心に集中しているかのようになることを示せ。

振り返り

- **まず対称性。** 向かい合う部分を対にすることで、計算する前に力の向きがわかった。
- **より単純な形から組み立てる。** 点から円環を作り、円環から球殻を作った。
- **物理に合った変数を選ぶ。** 角 ϕ から距離 s に変数を変えたことで、扱いにくい積分が自明な積分になった。

背後にある数学

ニュートンの円錐による議論

ニュートン自身の証明（**プリンキピア**、第 I 巻、命題 70）は積分をまったく使わない。質点を頂点とする細い二重円錐を描き、球殻を二つの小片で切り取る（図 10.7.1）。小片の面積は、質点からの距離の 2 乗 r_1^2 と r_2^2 に比例する（弦は両端で円と等しい角をなすので、二つの小片は円錐と等しい角をなす）。したがって小片の質量は r_1^2 と r_2^2 に比例し、質量を距離の 2 乗で割ったものに比例する引力は、大きさが**等しく**向きが逆になる。質点を通るどの二重円錐でも打ち消し合うので、力の総和は 0 である。この打ち消し合いを成り立たせているのは、まさに逆二乗則（inverse-square law）である。距離のほかのべきであれば、球殻は質点を押すか引くかすることになる。

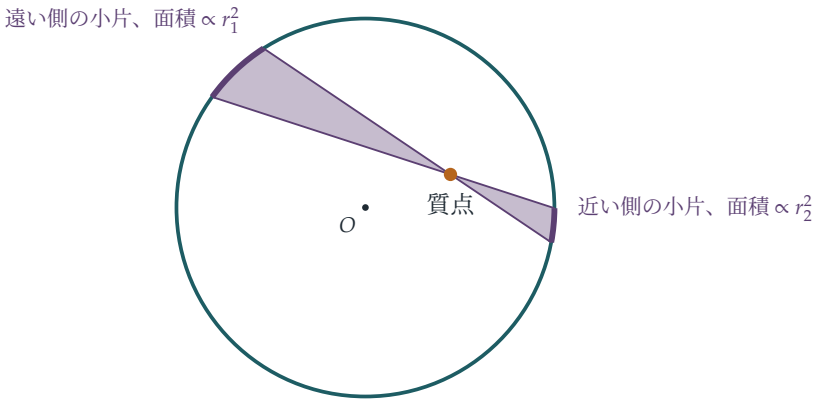


図 10.7.1　ニュートンの議論。質点から出る細い二重円錐が球殻を二つの小片で切り取る。遠い側の小片は距離の 2 乗の比だけ大きいが、その引力はちょうど同じ比だけ弱い。二つの引力は打ち消し合い、ほかのどの対も同様である。球殻の内部では重力が消える。

収縮する雲

STEP III 1987 Q14 は、この定理を逆向きに使う。一様な球の外側では、表面にある質点にはたらく引力は、全質量が中心にあるかのように GMm/r^2 である。いま、半径 R、質量 M の一様な球状の塵の雲が静止しているとし、それが自身の重力で収縮するとする。表面の質点が感じるのはその内側の質量だけであり、すべてが内側へ落ちていく間それは M のままである。よって内向きの速さ $v = -\dot{r}$ は

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM}{r^2}, \qquad \text{したがって} \qquad v^2 = 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right).$$

を満たす。置換（substitution）$r = R\cos^2\alpha$（演習問題の一つ）により、半径 r に達するまでの時間は $\sqrt{\frac{R^3}{2GM}}\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$ となる。雲全体は $\alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき一点に収縮する。それまでの時間が**自由落下時間**（free-fall time）

$$t_{\mathrm{ff}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R^3}{2GM}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}},$$

である。ここで ρ は密度である。驚くべきことに、時間は密度だけで決まるので、雲のどの殻も同じ瞬間に中心に達する（図 10.7.2）。1 立方メートルあたり約 10^{-17} kg の典型的な星間雲では、t_{ff} はおよそ 700 000 年である。これが恒星が形成される時間の尺度を決めている。

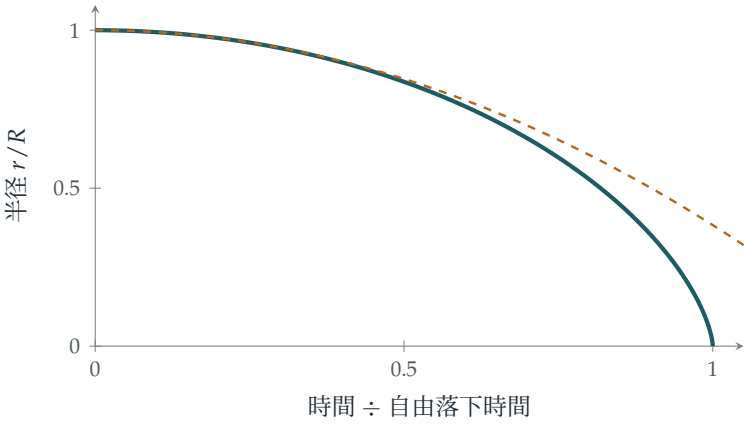


図 10.7.2　収縮する一様な塵の雲の半径と時間の関係（ティール色）。初めは落とした石のようにゆっくりと動き（琥珀色の破線の放物線は等加速度による近似 $r = R - \frac{1}{2}\frac{GM}{R^2}t^2$ である）、その後急激に加速して $t = t_{\mathrm{ff}}$ で 0 に達する。この曲線はサイクロイド（cycloid）の半分である。

ニュートンの遅れとガウスの法則

ニュートンは 1660 年代までに逆二乗則を得ていたが、重力理論を発表したのは 1687 年になってからであった。一部の歴史家によれば、その理由の一つは、殻定理を証明するまでは地球を質点（point mass）とみなすことを正当化できなかったことにある。それを証明してしまうと、**プリンキピア**の残りの部分はそこから導かれた。今日では、この定理は**ガウス（*Gauss*）の法則**（Gauss's law）から簡単に導かれる。ガウスの法則とは、任意の閉曲面を通って外へ流れ出る重力場の総量は、その内部の質量に比例する、というものである。球殻の内部に、同じ中心をもつ球面をとる。その内部には質量がないので、そこを通る流れの総量は 0 である。それだけでは場が 0 になるとはいえない（一様な場は、一方の側から流れ込み反対側から流れ出るので、どの閉曲面を通る流れの総量も 0 である）。しかしここでは対称性が助けになる。場は中心へまっすぐ向かうか中心からまっすぐ離れる向きであり、球面上のどこでも強さが等しくなければならない。したがって流れの総量が 0 ならば場も 0 である。同じ法則が電場も支配する。帯電した金属の殻の内部に電場がないのも、自動車が雷から人を守ってくれるのも、このためである。

思考のスキル

和としての積分

連続的な物体の効果を求めるには、効果がわかっている小片に切り分けて足し合わせよ。小片の選び方には対称性を使え。

点から円環ができ、円環から球殻ができ、球殻から中身の詰まった球ができる。大学では、あらゆる場（重力場、電場、磁場）がこのようにして源から計算され、それはガウスの定理やストークス（Stokes）の定理のベクトル解析へとつながっていく。

次の一歩

1. **球殻の外側。**先ほどの囲みの問いを完成させ、球殻の外側では力が $\frac{GM}{b^2}$ であることを示せ。これより、質量 M の中身の詰まった一様な球は、外側の質点を、その質量が中心にあるかのように引くことを導け。

2. **収縮時間。**STEP III 1987、問 14（`step.maths.org/questions/87-s3-q14`）に取り組んでみよ。塵の雲が自身の重力で収縮するのにかかる時間を求める問題であり、積分は三角関数による置換で計算できる。

3. **地球を貫くトンネル。**一様な中身の詰まった球の内部で、中心から距離 b の点における力が $\frac{GMb}{a^3}$ であり、b に比例することを示せ。これより、地球の中心を通るトンネルに落とした球は周期（period）$2\pi\sqrt{a^3/(GM)}$、すなわち約 84 分で振動（oscillate）することを導け。これは地表すれすれを回る人工衛星の周期と同じである。

4. **別の力の法則。**もし重力が逆三乗則に従うとしたら、球殻の内部での力はやはり 0 になるだろうか。（$\frac{1}{s^2}$ の代わりに $\frac{1}{s^3}$ として段階 3 をやり直せ。）

さらに学ぶために

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press）。重力を扱った章で、殻定理も含まれる。
- **Subrahmanyan Chandrasekhar, *Newton's Principia for the Common Reader***（Oxford University Press）。命題 70 と 71 を含むニュートンの証明を、ノーベル賞受賞者が解説

している。

- **Andrew Pontzen, *The Universe in a Box***（Riverhead）。重力、収縮、シミュレーションによって宇宙の構造がどのように説明されるかを述べている。

10.8 三角形をなす三つの星

問題

STEP I 1999、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/99-s1-q11`

導入

重力で引き合う 2 つの物体の運動は、ニュートン（Newton）が示し、Section 10.6 で説明したとおり、完全に解くことができる。各物体は共通の重心（centre of mass）のまわりを円錐曲線（conic）を描いて運動する。互いに束縛されていれば楕円（ellipse）、互いから脱出するのに十分なエネルギーをもっていれば放物線（parabola）または双曲線（hyperbola）である。ところが、3 つ目の物体を加えるとすべてが変わる。**三体問題**（three-body problem）には、よく知られた関数で表される一般解が存在しない。さらに 1890 年、ポアンカレ（Henri Poincaré）は、その解がカオス的（chaotic）になりうることを発見した。これが数学におけるカオスの最初の登場である。

それでも、特殊な解の中には完全に単純なものもある。1772 年、ラグランジュ（Joseph-Louis Lagrange）は、正三角形の頂点に置かれた 3 つの物体が、三角形が車輪のように回るかたちで剛体的に回転しうることを見いだした。この問題では、質量が等しい場合についてその解を求める。ラグランジュの三角形は単なる珍しい現象ではない。太陽、木星、そして何千もの「トロヤ群」（Trojan）小惑星がまさにこの配置をなしており、今日では宇宙望遠鏡も同様の点に配置されている。

取りかかる前に

考えてみよう　星が角速度（angular velocity）ω で半径 R の円周上を運動するためには、星にはたらく力の合計はどのようでなければならないか。

その大きさは $m\omega^2 R$ で、向きは円の中心を向いていなければならない。したがって、各星にはたらく重力の合計が三角形の中心を向いていることを確かめ、その大きさをちょうどよくする ω を求めればよい。

順を追って解く

段階 1　幾何

考えてみよう　1 辺の長さが a の正三角形の各頂点は、中心からどれだけ離れているか。

中心は各中線（median）上にあり、頂点から中線の長さの 3 分の 2 の位置にある。中線の長さは $a\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ であるから、各頂点から中心までの距離は

$$R = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

である。対称性より、三角形の中心は 3 つの等しい質量の星の重心である。

段階 2　1 つの星にはたらく力

考えてみよう　他の 2 つの星はそれぞれ大きさ $\frac{\gamma m^2}{a^2}$ の力で引く。2 つの引力のなす角はいくらか。それらの合力（resultant）は何であり、どの向きを向くか。

2 つの引力は、その星で交わる三角形の 2 辺に沿った向きであるから、なす角は 60° である。対称性より、合力はこの角の二等分線（bisector）上にあり、二等分線は中心を通る。各引力は二等分線と 30° の角をなすので、合力の大きさは

$$2\cdot\frac{\gamma m^2}{a^2}\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}\,\gamma m^2}{a^2},$$

であり、向きは中心を向く（図 10.8.1）。

段階 3　角速度

合力を $m\omega^2 R$ に等しいとおくと

$$m\omega^2 \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\gamma m^2}{a^2}, \qquad \text{よって} \qquad \omega^2 = \frac{3\gamma m}{a^3}.$$

この角速度のもとでは、同じ計算が（対称性により）各星に当てはまるので、3 つの星はすべて中心のまわりを円運動し、三角形は剛体的に保たれる。 ■

段階 4 中心に置かれた 4 つ目の星

考えてみよう 中心に置かれた質量 λm の星は、各頂点から距離 $\frac{a}{\sqrt{3}}$ にある。この星は頂点にある各星にどのような追加の力を及ぼすか。重心は動くか。中心の星には正味の力がはたらくか。

中心の星は重心を変えず、また対称性によりこの星が受ける 3 つの引力は打ち消し合うので、この星は静止したままである。中心の星は頂点にある各星を、大きさ $\frac{\gamma\lambda m^2}{(a/\sqrt{3})^2} = \frac{3\gamma\lambda m^2}{a^2}$ の力で中心に向かって引く。頂点の星にはたらく内向きの力の合計は $(\sqrt{3}+3\lambda)\frac{\gamma m^2}{a^2}$ となるので

$$m\omega^2 \frac{a}{\sqrt{3}} = (\sqrt{3}+3\lambda)\frac{\gamma m^2}{a^2}, \qquad \omega^2 = \frac{(3+3\sqrt{3}\,\lambda)\gamma m}{a^3} = \frac{3\gamma m}{a^3}(1+\sqrt{3}\,\lambda). \qquad ■$$

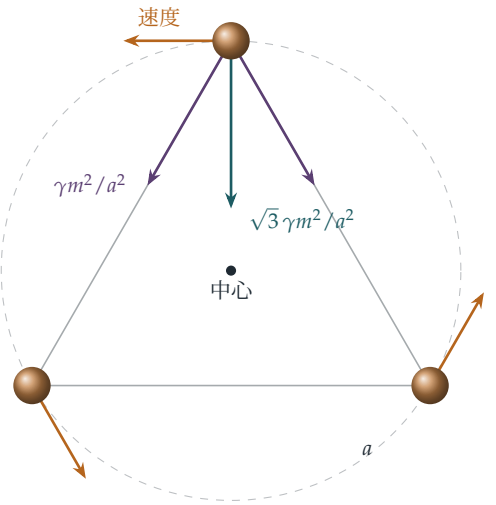


図 10.8.1 正三角形の頂点に置かれた、質量の等しい 3 つの星。上の星にはたらく 2 つの引力（紫）は、中心に向かう 1 つの力（青緑）に合成される。各星が適切な速さ（琥珀色）で破線の円周上を運動すれば、三角形全体が剛体的に回転する。これが三体問題に対するラグランジュの正三角形解である。

振り返り

- **対称な解を推測する。**三体問題を解いたわけではない。対称性の高い運動を推測し、それがニュートンの法則で許されることを確かめたのである。
- **対称性が向きを決める。**合力は二等分線上になければならなかったので、計算が必要なのはその大きさだけであった。
- **すべての物体を確かめる。**対称性により、1 つの星を確かめれば 3 つすべてを確かめたことになった。中心の星には別の（簡単な）確認が必要であった。

背後にある数学

姿を変えたケプラーの法則

答えを $\omega^2 a^3 = \gamma(3m)$ と書いてみよう。距離 a だけ離れて円軌道を描く 2 つの物体については、ケプラーの第 3 法則（Kepler's third law、Section 10.6 の演習問題）により $\omega^2 a^3 = \gamma(m_1 + m_2)$ が成り立つ。右辺に現れるのは全質量である。3 つの星も、全質量を $3m$ として同じ法則に従う。実際ラグランジュは、正三角形解が等しい質量の場合に限らず**任意の** 3 つの質量に対して存在することを示した。三角形は重心のまわりを $\omega^2 a^3 = \gamma(m_1 + m_2 + m_3)$ を満たして回転する。その数年前にはオイラー（Euler）が、3 つの物体が回転する 1 本の直線上に並ぶ別の解の族を見いだしていた。これら 5 つの配置（ラベルの付け方の違いを除いて、一直線上のものが 3 つ、三角形のものが 2 つ）が、3 つの物体が同じ形を保つ唯一の配置である。

ラグランジュ点

m_1 を太陽、m_2 を惑星、m_3 をごく小さな小惑星としよう。正三角形解によれば、小惑星は太陽と惑星とともに正三角形をなす第 3 の頂点、すなわち軌道上で惑星の前方または後方に位置することができる。これらが**ラグランジュ点**（Lagrange points）L_4 と L_5 であり、オイラーの一直線上の解からは L_1、L_2、L_3 が得られる。木星には、その L_4 点と L_5 点の周辺に集まる「トロヤ群」小惑星が 1 万個以上知られている。ジェームズ・ウェッブ宇宙望遠鏡（James Webb Space Telescope）は、地球から 1.5 百万 km 先にある太陽–地球系の L_2 点の近くを周回しており、そこでは太陽、地球、月をすべて日よけの背後に保つことができる。

安定性

スターメイカーたちの三角形は長続きするだろうか。質量が等しい場合は、続かない。ごくわずかな乱れが成長し、星々は飛び散るか衝突する。ラウス（Edward Routh）は

1875 年、ラグランジュの三角形が安定（stable）であるのは 1 つの質量が支配的な場合に限ること、正確には

$$27(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1) < (m_1 + m_2 + m_3)^2.$$

が成り立つときに限ることを示した。太陽と木星についてはこれが余裕をもって成り立ち、それゆえトロヤ群は生き残っている。3 つの等しい質量では $27 \times 3m^2 > 9m^2$ であるから、この配置は不安定である。

ポアンカレの誤りと 8 の字解

1887 年、スウェーデン国王オスカル 2 世（Oscar II）は、多体問題の解に対して懸賞を設けた。1889 年、ポアンカレは三体問題に関する長大な論文でこの賞を得たが、論文の印刷中に編集者が議論の欠陥を見つけた。それを修正する過程で、ポアンカレは、ある解が「あまりに驚くべき複雑さで、図を描こうと試みることさえできない」ふるまいをすることを発見した。これがカオスの最初の一端である。印刷済みの冊子は回収されて廃棄され、その費用はポアンカレが負担した。新しい特殊解は今なお見つかり続けている。1993 年に Cristopher Moore が数値的に発見し、2000 年に Alain Chenciner と Richard Montgomery が証明したように、3 つの等しい質量は 8 の字形の曲線上を互いに追いかけ合うことができる。その後、計算機によって何千もの周期軌道（periodic orbit）が新たに見つかっている。

思考のスキル

対称な解を推測し、確かめる

問題が難しすぎて一般には解けないときは、できるだけ対称性の高い解を探そう。対称な推測によって多くの未知数が *1* つか *2* つに減り、その確認はしばしば容易である。

これは数学と物理学における強力な戦略である。対称な平衡状態、定常状態、進行波、剛体的に回転する配置は、多くの場合最初に見つかる解であり、残りの解を調べる出発点となる。そして次に問うべきは常に、その対称な解が安定かどうかである。

次の一歩

1 **正方形に並んだ 4 つの星。**質量 m の 4 つの星が 1 辺 a の正方形の頂点に置かれている。これらが $\omega^2 = \frac{(4+\sqrt{2})\gamma m}{2a^3}$ で中心のまわりを剛体的に回転しうることを示せ。

2 **2 つの等しい星と 1 つの惑星。**質量 M の 2 つの星が距離 a だけ離れて、重心のまわりを周回している。質量の無視できる惑星が中心にある。この惑星は平衡（equilibrium）状態にあるか。2 つの星を結ぶ直線に沿った微小な変位に対して安定か。その直線に垂直な変位に対してはどうか。

3 **等しくない質量。**質量 m_1、m_2、m_3 の 3 つの星が 1 辺 a の正三角形の頂点にあり、重心 G のまわりを回転している。m_1 の位置を P_1 とするとき、m_1 にはたらく重力が $\frac{\gamma m_1(m_1+m_2+m_3)}{a^3}\overrightarrow{P_1G}$ であることを示せ（**ヒント：**力をベクトルで表し、重心の定義を用いよ）。これからラグランジュの結果を導け。

4 **n 個の星。**n 個の等しい星が、半径 R の円に内接する正 n 角形の頂点にある。剛体的な回転に対する ω^2 を、$\frac{1}{\sin(k\pi/n)}$ の k についての和として求めよ。

さらに学ぶために

- **June Barrow-Green, *Poincaré and the Three Body Problem***（American Mathematical Society）。懸賞の経緯と、ポアンカレによるカオスの発見の物語。
- **Richard Montgomery,「A new solution to the three-body problem」**, *Notices of the American Mathematical Society* 48 (2001)。発見者の 1 人による 8 の字解の解説。オンラインで無料で読める。
- **Florin Diacu & Philip Holmes, *Celestial Encounters***（Princeton University Press）。三体問題とカオスの一般向けの歴史。

これまでに学んだこと

この章の冒頭で、決して変わらないものがあり、それがどれなのかを知ることが物理学の半分である、と述べた。そして三つの問いを立てた。保存則（conservation law）はそれだけで何を決められるのか。小さな一歩はどのように積み重なるのか。多くの物体をどう扱えばよいのか。本章の八つの問題が示したことを以下にまとめる。

1. 保存則はそれだけで何を決められるのか

一直線上で弾性衝突（elastic collision）する二つの物体については、運動量（momentum）とエネルギーによって結果が完全に決まり、この一つの結果を何度も繰り返し使った。しかし物体が三つ以上になると、そうはいかない。Section 10.1 では、一列に並んだビー玉について、両方の保存則と矛盾しない結果が数多くあり、そのいくつかを排除するには、さらに別の物理的事実（ビー玉は互いにすり抜けられない）が必要であった。運動量の 2 乗からエネルギーを引くと交差項（cross terms）の和が得られ、それが 0 にならなければならなかった。これは、ある種の運動が不可能であることを証明する不等式による議論である。そして、ニュートンのゆりかご（Newton's cradle）のおなじみの振る舞いは、保存則を超えた細部、すなわち衝撃が球の中をどのように伝わるかに依存していることがわかった。

保存則は、隠れた仮定を明らかにすることもあった。Section 10.3 では、銃を一度にすべて撃つほうが一つずつ撃つよりも大きな速さが得られたが、それはより多くのエネルギーを使っていたからにすぎず、固定すべき量を正しく選ぶと結論は逆転した。

2. 小さな一歩はどのように積み重なるのか

いくつかの節では、一つの単純な操作を繰り返した。Section 10.2 では、速さをせいぜい 2 倍にしかできない衝突が、次々と軽くなっていく球の連鎖を通じて、際限のない増幅となった。これはバスケットボールとテニスボールの原理であり、重力スリングショット（gravitational slingshot）の原理でもある。Section 10.3 では、多数の小さな噴射が積分となり、ツィオルコフスキー（Tsiolkovsky）の対数が現れた。これは、ロケットの大部分が燃料である理由、そしてロケットが多段式である理由を説明する。Section 10.4 では、動くピストンで跳ね返るたびに分子の速さに $2u$ が加わり、厳密な漸化式（recurrence）によって、速さと長さの積がほぼ一定に保たれることが明らかになった。これが断熱不変量（adiabatic invariant）であり、圧縮された気体が熱くな

る理由である。そして Section 10.5 では、無限回の跳ね返りが有限の時間で終わった。それぞれの時間が収束する等比級数（geometric series）をなしていたからである。

3. 多くの物体をどう扱えばよいのか

座標をうまく選び、対称性を活用することによってである。Section 10.6 では、重心（centre of mass）は等速で動き、相対位置は換算質量（reduced mass）をもつ一つの粒子のように振る舞った。さらに、隠れた平面の存在によって、距離の 2 乗が時間の 2 次式になる理由まで説明できた。Section 10.7 では、対称性と積分により、球殻（spherical shell）はその内部には重力を及ぼさず、外部に対しては質点として働くことが示された。これによって、収縮する塵の雲をただ一つの方程式で扱うことができ、星形成の速さを決める自由落下時間（free-fall time）が得られた。そして Section 10.8 では、対称性を仮定した推測によって、解くことのできない三体問題（three-body problem）の特殊な場合が解けた。ラグランジュ（Lagrange）の回転する三角形であり、トロヤ群小惑星（Trojan asteroids）として実現している。

4. 力学の道具箱

手法	使った場面
制約としての保存則	ニュートンのゆりかご（10.1）
座標系の変換	衝突（10.2）、ピストン（10.4）
一つの結果の反復	積み重ねた球（10.2）
質量が変化する場合の運動量	ロケット（10.3）
和から積分へ	ロケット方程式（10.3）、球殻（10.7）
漸化式と打ち消し合う和（telescoping）	ピストン（10.4）
等比級数	くさび（10.5）
重心と換算質量	二体問題（10.6）
エネルギー積分 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$	二体問題（10.6）、収縮（10.7）
対称性を仮定した推測	三つの星（10.8）

この先へ

- 第 11 章では、保存から振動と回転へと話題を移す。共鳴（resonance）、基準振動（normal modes）、実際の振り子、そして加速する座標系や回転する座標系での運動を扱う。
- Section 8.2 のエネルギー法と Section 8.4 のリミットサイクル（limit cycle）は、同じ考え方を微分方程式の側から見たものである。

- ポアンカレ（Poincaré）が三体問題の中に見いだしたカオス（chaos）は、Section 8.7の主題である。

大学入学前にさらに先へ進みたい人へ

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***：大学1年生向けの古典的な教科書。歯ごたえがあるが、それだけの価値がある。
- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***：数百題の問題を収め、その多くは本章の問題と同じくらい意外性に富んでいる。
- **リチャード・ファインマン（Richard Feynman）, *The Character of Physical Law***（邦題『物理法則はいかにして発見されたか』）：保存則、対称性、重力について一般向けに行った講義。
- **Dwight Neuenschwander, *Emmy Noether's Wonderful Theorem***：対称性からなぜ保存則が導かれるのかを解説する。

ファインマンは、エネルギー保存則には知られている例外が一つもないと述べた。本章では、保存則にどれほどのことができるかを示そうとしてきた。不可能な結果を排除し、隠れた不変量を明らかにし、どうしようもなく複雑な系を理解できる系へと変えることである。しかし同時に、その限界も示してきた。保存則は制約を与えるが、常に結果を決めるわけではない。保存則が及ばないところでは、力や対称性、座標系の細部がその役割を引き継がなければならない。

「次の一歩」の解答

以下は完全な解答ではなく、簡潔な答えとヒントである。自分の解答を確かめられるように、結果と鍵となる一歩を示してある。答えを見る前に、まずは各問題にきちんと取り組んでほしい。

10.1 ニュートンのゆりかご

1. すべての衝突が終わった後では、動いている粒子のすぐ後ろに、それより遅い粒子が続くことはない。したがって、ちょうど 1 個だけが動くなら、それは A_n である。しかし $\lambda \neq 1$ のとき、$\lambda m v = m u$ と $\lambda m v^2 = m u^2$ は両立しない。A_{n-1} と A_n だけが動くなら、方程式は m と λm の衝突の方程式になり、A_{n-1} の速度は $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}u < 0$ となる。ところがそうすると、それは A_{n-2} に衝突してしまう。3 個の粒子が動く場合は、小問 (ii) とまったく同様に否定される。動く 2 個は、速さ $\frac{\lambda-1}{\lambda+1}u$ で後ろ向きに進む A_0 と、速さ $\frac{2u}{\lambda+1}$ で前向きに進む A_n である。

2. 等しいビー玉どうしは速度を交換するので、速さ u は A_n まで受け渡される。次に A_n が A_{n+1} に衝突する。A_{n+1} は速さ $\frac{2u}{1+\lambda}$ で離れ、A_n は速さ $\frac{\lambda-1}{\lambda+1}u$ で跳ね返る。この後ろ向きの速度は列を逆にたどって A_0 まで受け渡され、A_0 はその速さで後ろ向きに離れていく。

3. 「2 個が速さ u で飛び出す」場合、運動量（momentum）は $2mu$、エネルギーは mu^2 で、衝突前と同じである。それ以上衝突が起こらない別の解として、最後の 3 個の球がそれぞれ $\frac{u}{3}$、$\frac{u}{3}$、$\frac{4u}{3}$ で動き出すものがある（検算：合計は $2u$、2 乗の合計は $2u^2$）。実際のニュートンのゆりかごが前者を選ぶのは、球どうしがわずかに離れていて、衝突が 1 組ずつ起こるからである。

4. 速さは A_n まで受け渡され、A_n はより軽い A_{n+1} に衝突する。A_{n+1} は速さ $\frac{2u}{1+\lambda}$ で離れ、A_n はそれより遅い速さ $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}u$ で後に続く。ほかには何も動かない。

10.2 重ねたボールの効果

1. 球は速さ $U = \sqrt{2gH}$ で床に達し、速さ eU で跳ね返って高さ e^2H まで上がる。小さい球を上に載せた場合、速さ eU で上昇する大きい球が、速さ U で下降する小さい球と出会う。運動量保存と反発係数（coefficient of restitution）の式から、小さい球の上向きの速さは $w = U\frac{Me(2+e)-m}{M+m}$ となる。その中心は高さ $2R + r = 0.45$

から出発して 4.5 まで上がるので、$\frac{w^2}{2g} = 4.05$ であり、$\frac{w}{U} = \sqrt{\frac{4.05}{1.8}} = 1.5$ となる。$e = \frac{2}{3}$ のとき $\frac{16}{9}M - m = 1.5(M + m)$ であるから、$M = 9m$ を得る。

2. 運動量保存と反発係数の式から、P_1 の速さは $\frac{1+e}{1+\lambda}u$ となる。各衝突は同じ質量比でこれを繰り返すので、P_n は速さ $\left(\frac{1+e}{1+\lambda}\right)^n u$ で動く。速さ s の粒子は、次の粒子に衝突した後に速さ $\frac{1-\lambda e}{1+\lambda}s$ となり、衝突された粒子のほうは、自身の次の衝突によって速さ $\frac{(1+e)(1-\lambda e)}{(1+\lambda)^2}s$ まで減速される。$\lambda e < 1$ のとき、1 番目の粒子が 2 番目の粒子に再び追いつくのは $\frac{1-\lambda e}{1+\lambda} > \frac{(1+e)(1-\lambda e)}{(1+\lambda)^2}$、すなわち $\lambda > e$ のときに限る。よって $e > \lambda$ ならば、各粒子は 1 回衝突され、1 回衝突する。$\lambda e = 1$ ならば、各粒子は次の粒子に衝突した後、その場で停止する。

3. 一番下の球は速さ U で跳ね返り、（速さ U で下降している）真ん中の球と出会う。相対速度は $2U$ なので、真ん中の球は速さ $3U$ で離れる。一番上の球は相対速度 $4U$ でこれと出会い、速さ $7U$ で離れて高さ $49H$ まで上がる。一般に $u_{j+1} = 2u_j + U$ であるから、$u_j + U = 2^j U$ となる。

4. 弾性衝突（elastic collision）では運動エネルギー（kinetic energy）が保存される。A のエネルギーは $\frac{1}{2}m\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda}\right)^{2n}u^2$ であり、最初のエネルギーは $\frac{1}{2}\lambda^n m u^2$ である。$\frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2} < 1$ なので、A がもともとあった以上のエネルギーを得ることは決してない。重い粒子はそれぞれ速さの $\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$ 倍を保って前向きに動き続け、残りのエネルギーを持ち続ける。

10.3 ロケットと大砲

1. 一度にすべて発射する場合、$Mu = nm(v - u)$ より $u = \frac{nmv}{M+nm}$ である。1 個ずつ発射する場合、第 r 回目の発射で $\big(M + (n - r + 1)m\big)(u_r - u_{r-1}) = mv$ となるので、$u_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{mv}{M+jm}$ であり、最後の項を除くすべての項は $\frac{mv}{M+nm}$ より大きい。したがって $u_n > u$ である。

2. 運動量保存より $M(1 + bx)v = MV$ である。すると $(1 + bx)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = V$ なので、$x + \frac{1}{2}bx^2 = Vt$ であり、$x = \frac{\sqrt{1+2bVt}-1}{b}$ となる。力が働く場合は、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(M(1+bx)v\big) = Mf$ から $(1 + bx)v = ft + V$ を得る。一定の速さ c で動くには $x = ct$ かつ $(1 + bct)c = ft + V$ が必要なので、$c = V$ かつ $bV^2 = f$ である。そうでなければ $x + \frac{1}{2}bx^2 = \frac{1}{2}ft^2 + Vt$ となるので、$x \sim t\sqrt{f/b}$ であり、$v \to \sqrt{f/b}$ となる。

3. 1 段式では $v \ln 10 \approx 2.30v$ である。2 段式では $v \ln \frac{10}{5.5} + v \ln \frac{5}{0.5} \approx 0.60v + 2.30v = 2.90v$ である。

4. $0 \le s \le x$ のとき $\frac{1}{1+x} \le \frac{1}{1+s} \le 1$ である。これを $[0, x]$ で積分すればよい。

10.4 分子とピストン

1. 漸化式（recurrence relation）は順に打ち消し合って $d_n = \frac{(v+u)d_1}{v+(2n-1)u}$ となるので、$v_n d_n = \frac{(v+2nu)(v+u)d_1}{v+(2n-1)u}$ であり、これは $(v+u)d_1$ を $\frac{u(v+u)d_1}{v+(2n-1)u} \to 0$ だけ上回る。

2. u を $-u$ に置き換える。後退するピストンで跳ね返るたびに $2u$ だけ失うので、（粒子がまだピストンに追いつける間は）$v_n = v - 2nu$、$d_n = \frac{(v-u)d_1}{v-(2n-1)u}$ であり、$v_n d_n = \frac{(v-2nu)(v-u)d_1}{v-(2n-1)u}$ となる。これもやはり $(v-u)d_1$ に近い。

3. $v = u$ のとき $v_n = (2n+1)u$ である。第 n 回目の衝突で運動量は $m(v_{n-1} + v_n) = 4nmu$ だけ変化し、$t_n = \frac{d_1}{un(n+1)}$ なので、平均の力は $\frac{4mu^2n^2(n+1)}{d_1}$ であり、その大きさは n^3 の程度である。各周期での仕事はおよそ力 $\times\, ut_n$、すなわちほぼ $4nmu^2$ であり、これらを足し合わせると無限大になる。ピストンを奥まで押し込むには無限の仕事が必要になるのであり、これは分子のエネルギー $\frac{1}{2}m(2n+1)^2u^2$ が限りなく大きくなることと対応している。

4. 不変量（invariant）は $\oint p\,\mathrm{d}q = 2\int_0^h m\sqrt{2g(h-z)}\,\mathrm{d}z \propto h^{3/2}$ である。ここで h は床から測った跳ね上がりの高さである。したがって床がゆっくり上昇するとき、$h^{3/2}$（同じことであるが v^3、あるいはエネルギーと周期の積）はほぼ一定に保たれる。

10.5 有限時間に無限回の跳ね返り

1. 正弦定理（sine rule）より $M_1N_1 = \frac{OM_1 \sin 30^\circ}{\sin\theta}$ であり、続く各区間は比 $\rho = \frac{\sin(\theta-30^\circ)}{\sin\theta} < 1$ で縮んでいく。合計は $\frac{M_1N_1}{1-\rho} = \frac{OM_1}{2\big(\sin\theta - \sin(\theta-30^\circ)\big)} = \frac{OM_1}{4\sin 15^\circ \cos(\theta-15^\circ)}$ である。

2. 三角形 OM_1N_1 の角から $\varphi = \theta - \alpha$ を得る。時間の比は $\frac{\rho}{k} = \frac{\sin(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha)}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin(2\theta-2\alpha)}{\sin 2\theta}$ であり、これが 1 より小さくなるのは、ちょうど $\alpha < \theta < 45^\circ + \frac{1}{2}\alpha$ のときである。

3. くさびをその壁で折り返していくと、経路は 1 本の直線に展開される。O のまわりにはくさびの複製が 12 個収まり、O を通らない直線はそのうち高々 6 個しか横切らない。したがって、粒子が O に向けてまっすぐ打ち出されない限り、跳ね返りは有限回で終わり、粒子は外へ抜け出す。

4. まず $t_0 = \sqrt{2/9.8} \approx 0.452$ 秒間落下する。各回の跳ね返りは $2e^k t_0$ だけ続くので、全時間は $t_0\big(1 + \frac{2e}{1-e}\big) = 9t_0 \approx 4.07$ 秒である。移動距離は $1 + 2\sum_{k\ge1} e^{2k} = 1 + \frac{2(0.64)}{0.36} \approx 4.56\,\mathrm{m}$ である。

10.6 二体が一体になる

1. 糸は張ったままで、相対速度は糸に垂直であり、その大きさは一定値 u なので、$\theta = \frac{ut}{r}$ である。運動量保存より $my + MY = mut$ となる。$A = G - \frac{M}{m+M}\overrightarrow{AB}$ かつ $\overrightarrow{AB} = r(\cos\theta, -\sin\theta)$ であるから、$y = \frac{1}{m+M}\left(mut + Mr\sin\frac{ut}{r}\right)$ である。すると $\dot{y} = \frac{u}{m+M}\left(m + M\cos\frac{ut}{r}\right)$ であり、これは $\cos\frac{ut}{r} < -\frac{m}{M}$ のとき負になる。これは $M > m$ ならば起こりうる。

2. 今度は $\ddot{z} = -\frac{3}{z^3}$ なので、（$z = 1$、$\dot{z} = -1$ を用いて）$\dot{z}^2 = \frac{3}{z^2} - 2$ である。$w = z^2$ とおくと $\ddot{w} = 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = -4$ なので、$z^2 = 1 - 2t - 2t^2$ となる。2 つが衝突するのは $t = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0.366$ のときである。

3. $\mathbf{p} = (1, 0)$、$\mathbf{q} = (-1, \sqrt{3})$ とすると $z^2 = 4t^2 - 2t + 1 = |\mathbf{p} + \mathbf{q}t|^2$ である。これは $(1, 0)$ を通り方向 $(-1, \sqrt{3})$ をもつ直線であり、$\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}t}{1-t}$ である。すると $z^2\dot{\theta} = |\mathbf{p} \times \mathbf{q}| = \sqrt{3}$ となる。この斥力は、角運動量（angular momentum）$h = \sqrt{3}$ をもつ平面内の自由運動における「遠心力（centrifugal）」項 $\frac{h^2}{z^3}$ そのものである。

4. 2 つの星は重心（centre of mass）からそれぞれ距離 $\frac{m_2 a}{m_1+m_2}$ と $\frac{m_1 a}{m_1+m_2}$ の位置にある。1 つ目の星について $\frac{Gm_1m_2}{a^2} = m_1\omega^2\frac{m_2 a}{m_1+m_2}$ なので、$\omega^2 = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}$ であり、$T = \frac{2\pi}{\omega}$ である。

10.7 球殻の内部の重力

1. 外側（$b > a$）では、段階 3 と同じ積分を s について $b - a$ から $b + a$ まで行うことになり、$\frac{GM}{b^2}$ を得る。中身の詰まった球は同心の球殻の和集合であり、各球殻はその質量が中心に集まっているかのように働く。

2. $r = R\cos^2\alpha$ とおくと $\frac{1}{r} - \frac{1}{R} = \frac{\tan^2\alpha}{R}$ なので、速さは $\sqrt{2GM/R}\tan\alpha$ である。すると $\mathrm{d}t = \frac{2R\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{2GM/R}\tan\alpha} = \sqrt{\frac{R^3}{2GM}}\,2\cos^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha$ となるので、これを積分すればよい。

3. （殻定理（shell theorem）により）引力を及ぼすのは半径 b の内側にある質量 $M\frac{b^3}{a^3}$ だけであり、引力は $\frac{GMb}{a^3}$ となる。これは $\omega^2 = \frac{GM}{a^3}$ の単振動（simple harmonic motion）であり、$a = 6.37 \times 10^6\,\mathrm{m}$、$GM = 3.99 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3\,s^{-2}}$ とすると、周期は $2\pi\sqrt{a^3/GM} \approx 84$ 分である。半径 a の人工衛星では $\omega^2 a = \frac{GM}{a^2}$ であり、同じ ω となる。

4. 成り立たない。$\frac{1}{s^3}$ の場合、被積分関数はもはや定数に簡単化されず、球殻の近い側が勝つ。すなわち、粒子は球殻の最も近い部分のほうへ引かれる。厳密な打ち消し合いが起こるのは逆二乗則（inverse-square law）の場合だけである（球殻の微小部分の面積は s^2 に比例して増え、力の減少をちょうど相殺する）。

10.8 三角形をなす三つの星

1. 各星は中心から $\frac{a}{\sqrt{2}}$ の距離にある。隣り合う 2 つの星は、中心向きの成分の合計が $\frac{2\gamma m^2}{a^2}\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}\gamma m^2}{a^2}$ の引力を及ぼし、向かい側の星は $\frac{\gamma m^2}{2a^2}$ の引力を及ぼす。$\frac{\gamma m^2}{a^2}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right) = m\omega^2\frac{a}{\sqrt{2}}$ とおくと、$\omega^2 = \frac{(4+\sqrt{2})\gamma m}{2a^3}$ を得る。

2. 中心では引力が打ち消し合うので、惑星は平衡（equilibrium）の状態にある。星を結ぶ直線に沿っては不安定である。一方の星に向かって距離 x だけ動くと、およそ $\frac{32\gamma Mx}{a^3}$ の外向きの合力が働く。公転面に垂直な方向には安定であり、およそ $\frac{16\gamma Mz}{a^3}$ の復元力が働く。（公転面内で直線に垂直な方向には重力が復元力として働くが、回転によってこの運動は不安定な方向の運動と結びついてしまう。）

3. m_1 に働く力は $\frac{\gamma m_1}{a^3}\big(m_2(P_2-P_1)+m_3(P_3-P_1)\big)$ である。$m_1P_1+m_2P_2+m_3P_3 = (m_1+m_2+m_3)G$ であるから、これは $\frac{\gamma m_1(m_1+m_2+m_3)}{a^3}(G-P_1)$ となる。どの星も、G からの距離に比例し、しかも同じ比例定数で G のほうへ引かれるので、すべての星が $\omega^2 = \frac{\gamma(m_1+m_2+m_3)}{a^3}$ で剛体のように回転できる。

4. k 個先の星は距離 $2R\sin\frac{k\pi}{n}$ の位置にあり、その引力の中心向きの成分は $\sin\frac{k\pi}{n}$ 倍である。よって $m\omega^2R = \frac{\gamma m^2}{4R^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin(k\pi/n)}$ であり、$\omega^2 = \frac{\gamma m}{4R^3}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin(k\pi/n)}$ を得る。$n=3$、$R=\frac{a}{\sqrt{3}}$ のとき、これは $\frac{3\gamma m}{a^3}$ となる。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

全 13 章のうちの第 10 章。 本書全体、すべての章、すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.