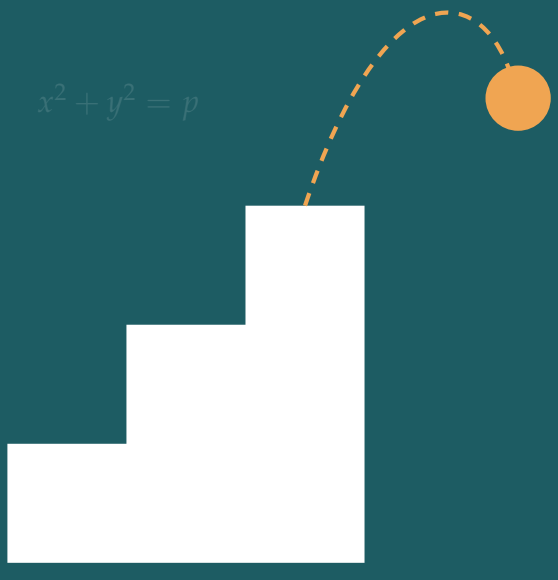
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

第 8 章

微分方程式（differential equations）と力学系（dynamical systems）



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

第 8 章

微分方程式（differential equations）と力学系（dynamical systems）

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

第 8 章：微分方程式（differential equations）と力学系（dynamical systems）

これは *Beyond STEP* 全 13 章のうちの第 8 章である。本書全体、各章単独の PDF、各節の印刷用ワークシート、そしてすべての STEP の問題の詳しい解答は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、`github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty` への issue として歓迎する。

章

8

微分方程式と力学系

ほとんどの微分方程式は解けない。それでも理解すること、そこに技がある。

この章の内容

8.1	解が一意でないとき	STEP III 1994
8.2	解かずに評価する	STEP III 2013
8.3	個体群の収穫	STEP II 1995
8.4	渦を巻いて円に近づく	STEP III 2015
8.5	グレイハウンドを追うグレイハウンド	STEP III 1988
8.6	量子振動子	STEP III 1988
8.7	解けるカオス	STEP I 2014
8.8	周期 3 ならばカオス	STEP III 2025
A	演習問題の答え	p. 63

変化の規則

自然は積分の困難を笑う。

— ピエール＝シモン・ラプラス（Pierre-Simon Laplace）の言葉とされる

学校では、微分方程式（differential equation）は解くべきものである。変数を分離する（separation of variables）か、積分因子（integrating factor）を見つけるか、$e^{\lambda x}$ の形の解を推測するかして、最後には公式が得られる。教科書の方程式は、この方法がうまくいくように選ばれているのである。残念ながら、現実世界から生じるほとんどすべての微分方程式（三つの惑星の運動、天気、捕食者と被食者の個体群、大きな振幅で揺れる振り子）には、既知の関数で書き下せる解が存在しない。

本章では、その代わりに何をすればよいかを扱う。「公式は何か？」と問うのではなく、公式がなくても答えられる問いを立てる。そもそも解は存在するのか、そしてそれは一つだけか。解は有界にとどまるか。定常状態や繰り返す周期に落ち着くのか、それともいつまでもさまよい続けるのか。長い時間の後にどうなるのか。解くことから理解することへのこの視点の転換は、1880 年代にポアンカレ（Henri Poincaré）によって始められ、今日**力学系**（dynamical systems）と呼ばれる分野を生み出した。

微分方程式はなぜ重要か

微分方程式は科学の言語である。ニュートン（Newton）の第二法則は微分方程式であり、電磁気学のマクスウェル（Maxwell）方程式、量子力学のシュレーディンガー（Schrödinger）方程式、そして天気予報や航空機の設計に用いられる流体の方程式もまたそうである。疫学者は病気の広がりを、生態学者は魚の資源量を、経済学者は経済成長を、そして技術者はサーモスタットから自動操縦装置に至るあらゆる制御系の応答を、微分方程式で表す。ある量が現在の状態に依存する速さで変化するときには必ず微分方程式があり、たいていそれは誰にも厳密には解けないものである。

こうした連続的なモデルと並んで、時間が一歩ずつ進む離散的なモデルもある。今年の個体数が来年の個体数を決めるといったものである。このような**反復写像**（iterated map）は書き下すのはより簡単だが、最後の二つの節で見るように、同じくらい激しい振る舞いを示しうる。1970 年代の偉大な発見の一つは、ごく単純な規則が**カオス**（chaos）、すなわち完全に決定されていながら実際上は予測できない振る舞いを生み出しうるということであった。

大学で出会うこと

大学 1 年の微分方程式の講義では標準的な解法を学ぶが、本章のような問いも導入される。解が存在するのはいつか、また解が初期値によって一意に定まるのはいつかを教えてくれる存在と一意性の定理（existence and uniqueness theorem）に出会うであろう。すべての解を一度に描いた図である**相図**（phase portrait）を描くこと、そして線形化（linearisation）によって平衡点（equilibrium）を安定（stable）か不安定（unstable）かに分類することを学ぶ。その後の講義はさらに先へ進む。**非線形力学**（nonlinear dynamics）はリミットサイクル（limit cycle）、分岐（bifurcation）、カオスを研究し、**数理生物学**（mathematical biology）はそれらを個体群や感染症に応用する。そして偏微分方程式（partial differential equation）、フーリエ級数（Fourier series）、直交関数（orthogonal functions）の理論（Section 8.6 でその一端を垣間見る）は、量子力学と応用数学の多くを支えている。

本章を貫く問い

三つの大きな問い

1. **現在は未来を決定するか？**微分方程式が初期値とともに与えられたとき、解がちょうど一つ存在するのはどのような場合か。
2. **解かずに何がわかるか？**公式が存在しないとき、どうすれば解を評価し、解が落ち着く先を見つけ、その形を記述できるか。
3. **長い時間の後に何が起こるか？**解は定常状態に落ち着くのか、周期に近づくのか、それともカオス的に振る舞うのか。そしてそれをどう見分けるのか。

本章はまず一意性と、それが成り立たないときに何が起こるか（Section 8.1）から始め、続いて方程式を解かずに理解するための道具を展開する。増加しえないエネルギーのような量、平衡点とその安定性、そして問題の対称性に合わせた座標である。二つの節では、これらの考え方を物理的な問題に応用する。正方形の中で互いを追いかける犬と、量子調和振動子（quantum harmonic oscillator）である。本章の最後は離散写像を扱う。そこでは公式がカオスを明らかにし、また長さ 3 の周期がただ一つあるだけで、あらゆる長さの周期が存在することが強制される。

本章の考え方

§	主題	考え方
8.1	一意性	包絡線（envelope）と特異解（singular solution）、解の貼り合わせ
8.2	エネルギー法	決して増加しない量
8.3	個体群モデル	平衡点、安定性、転換点（tipping point）
8.4	リミットサイクル	極座標とベルヌーイ（Bernoulli）型の置換
8.5	追跡曲線（pursuit curve）	対称性により四体を一体に帰着する
8.6	直交関数	ロンスキアン（Wronskian）と直交性
8.7	カオス	変数変換：ロジスティック写像（logistic map）は姿を変えた角の倍化である
8.8	周期軌道	区間の被覆、シャルコフスキー（Sharkovskii）の定理

本章の読み方

何かを解く前に、まず図を描くこと。微分方程式 $y' = F(y)$ については、F が正、負、零になるところに印をつけ、y 軸上に矢印を描く。写像 $x \mapsto \mathrm{f}(x)$ については、そのグラフを直線 $y = x$ とともに描き、クモの巣図法（cobweb method）でいくつかの数列をたどる。こうした図は 1 分もあれば描けるし、たいていは計算を始める前に、答えがどのような形になるべきかを教えてくれる。

8.1 解が一意でないとき

問題

STEP III 1994、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/94-s3-q4`

導入

微分方程式（differential equation）とは、ある量がどのように変化するかを定める規則である。たとえばニュートン（Newton）の法則は、惑星が今どこにあるかが与えられれば、それがどう動くかを教えてくれる。古典物理学の描く世界像では、これで十分である。つまり、現在の世界の状態がわかれば、法則によってその未来はすべて決まる。ラプラス（Pierre-Simon Laplace）は、あらゆる位置と速度を知っていれば何もかも予言できる知性を思い描いた。この世界像は、ある数学的な仮定の上に成り立っている。それは、微分方程式に初期条件を与えれば、解が**ただ一つ**存在するという仮定である。

この問題は、その仮定が成り立たないことがあると示している。一見何の変哲もない方程式 $(y')^2 = 4y$ には、x 軸に沿って進み、自ら選んだ瞬間にそこから離れていく解がある。点によっては、そこを通る解が無数に存在する。現在を知っても未来は決まらないのである。一意性（uniqueness）がちょうどどのようなときに成り立つかを明らかにすることは、大学の微分方程式の講義で最初に学ぶ定理の一つである。

取りかかる前に

考えてみよう 両辺の平方根をとると $y' = \pm 2\sqrt{y}$ となる。$y = (x-c)^2$ を試してみよう。これは方程式を満たすか。もっと簡単な解はないだろうか。

$y = (x-c)^2$ ならば $y' = 2(x-c)$ であり、$(y')^2 = 4(x-c)^2 = 4y$ となる。よって、放物線 $y = (x-c)^2$ はどれも、すべての x に対して解である。さらに $y = 0$ も解である。

実際 $(0)^2 = 4 \times 0$ である。この最後の解を覚えておいてほしい。これが問題全体の鍵となる。

順を追って解く

段階 1　一点を通る解

考えてみよう　放物線 $y = (x-c)^2$ のうち、(a, b^2) を通るのはどれか。

$(a-c)^2 = b^2$ が必要であるから $a - c = \pm b$、すなわち $c = a - b$ または $c = a + b$ である。$b \neq 0$ よりこの二つは異なり、次の二つの解が得られる。

$$y = (x - a + b)^2 \qquad \text{および} \qquad y = (x - a - b)^2. \qquad \blacksquare$$

（見落とした解がないことも確かめておくべきである。$y > 0$ となる範囲では、$y' = \pm 2\sqrt{y}$ の符号は一定であり、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{y} = \frac{y'}{2\sqrt{y}} = \pm 1$ となるので $\sqrt{y} = \pm(x-c)$ であり、これらの放物線が得られる。したがって、与えられた点の近くで、y が正である限り、解はこの二つしかない。しかし、解が x 軸に達すると、第 3 段階で見るように零解とつなぎ合わせることができ、すべての x で定義された解がさらに無数に得られる。問題の「二つの解」とは、この二つの放物線のことである。）

段階 2　二つの点と共通の解

原点を通る解は $y = x^2$（$c = 0$ の放物線）でなければならない。これは $x = 1$ と $x = -1$ で高さ 1 を通る。そこで $(a_1, 1) = (1, 1)$、$(a_2, 1) = (-1, 1)$ とおく。

$(1, 1)$ を通る解は（$a = 1$、$b = \pm 1$ として）$y = x^2$ と $y = (x-2)^2$ である。$(-1, 1)$ を通る解は $y = (x+2)^2$ と $y = x^2$ である。原点を通る解は、どちらの場合も同じ曲線 $y = x^2$ である。 $\blacksquare$

段階 3　解の族全体と共通接線

手を止めて、やってみよう　さまざまな c について、放物線 $y = (x-c)^2$ をいくつか描いてみよう。それらすべてに接する直線はどれか。その直線自身は解だろうか。

放物線 $y = (x-c)^2$ はどれも頂点 $(c, 0)$ で x 軸に接するので、x 軸は族全体の共通接線、すなわち族の**包絡線**（envelope）である（図 8.1.1）。そして x 軸 $y = 0$ はそれ自身が微分方程式の解である。これは放物線のどれでもなく、別個の**特異解**（singular solution）である。

段階 4 なぜ重要なのか

考えてみよう 原点から出発しよう。原点を通る解はどれか。しばらく x 軸に沿って進み、その後そこから離れる解を作れるだろうか。

原点を通る解として $y = x^2$ と $y = 0$ がある。しかし、実際にはもっと多くのことが言える。各放物線は x 軸と接する（そこではどちらも傾きが 0 である）ので、解の断片を滑らかにつなぎ合わせることができる。任意の $c_1 \leq 0 \leq c_2$ に対して、

$$y = \begin{cases} (x - c_1)^2 & x < c_1, \\ 0 & c_1 \leq x \leq c_2, \\ (x - c_2)^2 & x > c_2 \end{cases}$$

は至るところで $(y')^2 = 4y$ を満たす微分可能な関数であり、原点を通る。x 軸上のどの点を通る解も無数に存在する。解は好きなだけ $y = 0$ にとどまり、それから離れていくことができるのである。共通接線こそが、一意性が崩れる場所である。 ■

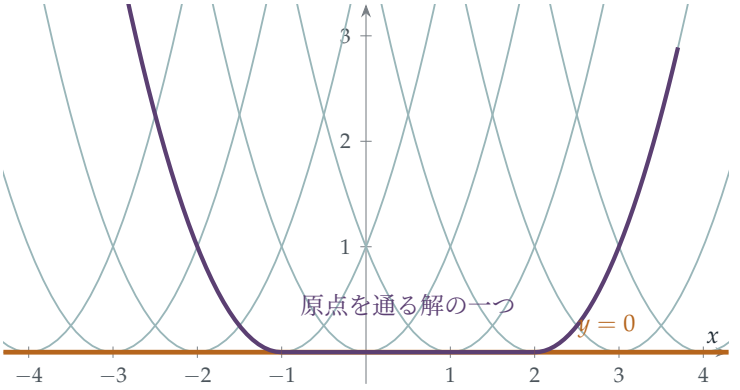


図 8.1.1 $(y')^2 = 4y$ の解 $y = (x - c)^2$（ティール）はどれも x 軸に接する。x 軸はそれらの包絡線であり、それ自身も解である（アンバー）。断片をつなぎ合わせると、さらに別の解が得られる。たとえばプラム色の解は、放物線に沿って軸まで下り、軸に沿って進み、自ら選んだ時刻に再び軸を離れる。x 軸上のどの点を通る解も無数に存在する。

振り返り

- **まず簡単な解を探す。** $y = (x - c)^2$ と $y = 0$ を試すことで、全体像が見えた。
- **包絡線は特異解を与える。** 解の族の共通接線は、それ自身が族に属さない解になることがある。
- **つなぎ合わせ。** 二つの解が接するところでは、それらをつないで新しい微分可能な

解を作ることができる。こうして一意性の破れが広がっていく。

背後にある数学

解はいつ一意か

ピカール–リンデレーフの定理（1890–1894 年ごろにピカール（Émile Picard）とリンデレーフ（Ernst Lindelöf）が証明した）によれば、F が y について**リプシッツ連続**（Lipschitz）であるとき、すなわち $|F(x,y_1)-F(x,y_2)| \le L|y_1-y_2|$ を満たす定数 L が存在するとき、方程式 $y'=F(x,y)$ は $y(x_0)=y_0$ のもとで x_0 の近くにただ一つの解をもつ。おおまかに言えば、y が変化するとき F が無限に速く変化してはならないということである。我々の方程式は $y'=\pm 2\sqrt{y}$ であり、$\sqrt{y}$ は $y=0$ で傾きが無限大になる。そこではリプシッツ連続ではなく、まさにそこで一意性が破れるのである。（ペアノ（Giuseppe Peano）は 1886 年に、F が連続であるだけで解の**存在**（existence）は保証されるが、一意性は保証されないことを示した。）ピカール–リンデレーフの定理の証明では、Section 2.2 の縮小写像の原理（contraction mapping principle）によって収束する反復法を用いる。

水漏れするバケツ

物理的な例を挙げよう。底に穴のあいたバケツは、トリチェリ（Torricelli）の法則に従って空になる。水の高さ h は $h'=-k\sqrt{h}$ を満たす。時間を順方向に進める限り、何も問題はない。バケツは空になり、空のままである。しかし時間を逆向きにたどってみよう。空のバケツを見つけても、方程式からはそれがいつ空になったのかがわからない。常に $h=0$ である解も、ある時刻まで満杯で、その後水が抜けた解も、すべて「今は空である」ことと矛盾しない。一意性の破れは、過去についての情報が失われたという事実の数学的な影なのである。

ノートンのドーム

2003 年、哲学者 John Norton は、摩擦のないドームで、その頂上にぴったり置かれた球がニュートンの法則に従って $r''=\sqrt{r}$ という形の方程式を満たすような形状のものを考えた。一つの解は、球が永遠に頂上にとどまるというものである。しかし別の解もあり、それらでは球が任意の時間だけ頂上にとどまった後、何の原因もなく自発的に任意の方向へ転がり落ちる。この例は今も議論が続いている。古典力学は本当に決定論的（deterministic）なのだろうか。数学的には、これはまさにこの問題と同じ種類の一意性の破れである。

思考のスキル

一意性を仮定しない

解を一つ見つけても、それが唯一の解であることにはならない。特に方程式に滑らかでない関数が含まれる場合には、ほかに解がないかを問うこと。

大学では、存在と一意性の定理が、どのような条件が必要かを正確に教えてくれる。ここでは、零で傾きが無限大になる平方根があるだけで、一意性を壊すのに十分であった。

次の一歩

1 **二つの増加率。** STEP II 2018、問 8（`step.maths.org/questions/18-s2-q8`）に取り組んでみよう。この問題では、二つの成長方程式を置換によって解く。そのうえで、なぜ $y = 0$ も同じ初期値をもつ解なのか、そしてそれが一意性について何を意味するのかを考えてみよう。

2 **水漏れするバケツ。** $h(0) = h_0 > 0$ のもとで $h' = -k\sqrt{h}$ を解け。バケツが空になるのはいつか。ある T について $h(T) = 0$ であり、すべての $t \geq T$ について $h(t) = 0$ となる、異なる二つの解を書け。

3 **一意性の回復。** $y(0) = 0$ のもとで $y' = 2y$ の解は $y = 0$ のみであることを示せ。（ヒント：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ye^{-2x})$ を考えよ。）$2\sqrt{y}$ にはなくて $2y$ にはある性質は何か。

4 **3 乗。** 原点を通る $y' = 3y^{2/3}$ の解をすべて求めよ。

さらに学ぶために

- **Morris Hirsch, Stephen Smale & Robert Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos***（Academic Press）。存在と一意性、そしてこの章の内容の多くを扱っている。
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***（CRC Press）。歴史的な話題に富んだ古典的名著。特異解と包絡線を論じている。
- **John Norton, 「The dome: an unexpectedly simple failure of determinism」**, *Philosophy of Science* 75 (2008)。短く読みやすい。

8.2 解かずに評価する

問題

STEP III 2013、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/13-s3-q7`

導入

ほとんどの微分方程式（differential equation）は解くことができない。$y'' + y^3 = 0$ の解を見慣れた関数で表す公式は存在しないし、小問 (iii) の怪物のような方程式についてはなおさらである。それでも、解については多くのことがいえる。解が有界（bounded）であること、振動（oscillate）すること、ある状態に落ち着くことなどである。鍵は、解とその導関数から作られる量で、決して増加しないものを見つけることである。そうすれば解は閉じ込められる。

物理学では、そのような量はふつう**エネルギー**（energy）である。お椀の中を転がる球は、出発した高さより高く登ることはできない。エネルギーは保存されるか、摩擦（friction）があれば減少するからである。この問題は同じ論法を三つの方程式に適用する。最後の方程式は、「エネルギー」を自分で作り出さなければならないように選ばれている。この方法は 1892 年にリャプノフ（Aleksandr Lyapunov）によって導入されたもので、微分方程式の研究において最も重要な道具の一つである。

取りかかる前に

考えてみよう 小問 (i) では、y を粒子の位置、x を時刻と考えよう。すると $y'' = -y^3$ は力 $-y^3$ に対するニュートン（Newton）の運動法則である。運動エネルギーと位置エネルギーは何か。

運動エネルギー（kinetic energy）は（質量を 1 として）$\frac{1}{2}(y')^2$ であり、力 $-y^3$ はポテンシャル $V(y) = \frac{1}{4}y^4$ から生じる。力は $-V'(y)$ だからである。全エネルギーは

$\frac{1}{2}(y')^2 + \frac{1}{4}y^4$ であり、これは E のちょうど半分である。エネルギー保存則（conservation of energy）とは、まさに E が一定であるという主張にほかならない。

順を追って解く

段階 1　保存

連鎖律（chain rule）により、

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = 2y'y'' + 2y^3y' = 2y'(y'' + y^3) = 0.$$

よって E は一定であり、$x = 0$ での値 $\mathrm{E} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ に等しい。$(y')^2 \geq 0$ であるから $\frac{1}{2}y^4 \leq \frac{1}{2}$ となり、$y^4 \leq 1$、すなわち $|y| \leq 1$ である。 ■

解は -1 と 1 の間を振動し、(y, y') 平面上で閉曲線 $(y')^2 + \frac{1}{2}y^4 = \frac{1}{2}$ を描く（図 8.2.1）。

段階 2　散逸

> **考えてみよう**　$\mathrm{E} = (v')^2 + 2\cosh v$ を微分せよ。微分方程式を用いて v'' を置き換えよ。結果の符号はどうなるか。

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = 2v'v'' + 2\sinh v\, v' = 2v'(v'' + \sinh v) = 2v'(-xv') = -2x(v')^2 \leq 0 \quad \text{ただし} x \geq 0.$$

項 xv' は摩擦のようにはたらき、エネルギーを奪う。よって $x \geq 0$ に対して $\mathrm{E}(x) \leq \mathrm{E}(0)$ である。$x = 0$ では $\cosh(\ln 3) = \frac{3 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{5}{3}$ であるから、$\mathrm{E}(0) = \frac{10}{3}$ である。したがって

$$2\cosh v \leq (v')^2 + 2\cosh v = \mathrm{E}(x) \leq \tfrac{10}{3}, \qquad \text{よって} \qquad \cosh v(x) \leq \tfrac{5}{3}.$$ ■

段階 3　エネルギーを作り出す

小問 (iii) にはヒントがない。増加しない関数 $\mathrm{E} = (w')^2 + F(w)$ を見つける必要がある。

> **考えてみよう**　$\mathrm{E} = (w')^2 + F(w)$ ならば $\mathrm{E}' = 2w'w'' + F'(w)w'$ である。方程式を用いて w'' を置き換えたとき、$(w')^2$ の定数倍ならぬ関数倍だけが残るようにするには、$F'(w)$ をどう選べばよいか。

$\mathrm{E}' = 2w'\big(w'' + w\cosh w + 2\sinh w\big)$ としたいので、$F'(w) = 2(w\cosh w + 2\sinh w)$ が必要である。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}(w\sinh w) = \sinh w + w\cosh w$ であるから、次のようにとればよい。

$$F(w) = 2w\sinh w + 2\cosh w, \qquad \mathrm{E} = (w')^2 + 2w\sinh w + 2\cosh w.$$

すると、方程式を用いて

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = -2(5\cosh x - 4\sinh x - 3)(w')^2.$$

> **手を止めて、やってみよう** すべての x に対して $5\cosh x - 4\sinh x - 3 \geq 0$ であることを示せ（e^x を用いて書き表し、完全平方（perfect square）を探せ）。そのうえで議論を完成させよ。

$5\cosh x - 4\sinh x - 3 = \frac{5}{2}(e^x + e^{-x}) - 2(e^x - e^{-x}) - 3 = \frac{1}{2}e^x - 3 + \frac{9}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}\left(e^{x/2} - 3e^{-x/2}\right)^2 \geq 0$ である。よって E は決して増加しない。$x = 0$ では $\mathrm{E}(0) = \frac{1}{2} + 0 + 2 = \frac{5}{2}$ である。すべての w に対して $w\sinh w \geq 0$（二つの因数は同符号）であるから、

$$2\cosh w \leq (w')^2 + 2w\sinh w + 2\cosh w = \mathrm{E}(x) \leq \tfrac{5}{2}, \qquad \text{よって} \qquad \cosh w(x) \leq \tfrac{5}{4}. \quad \blacksquare$$

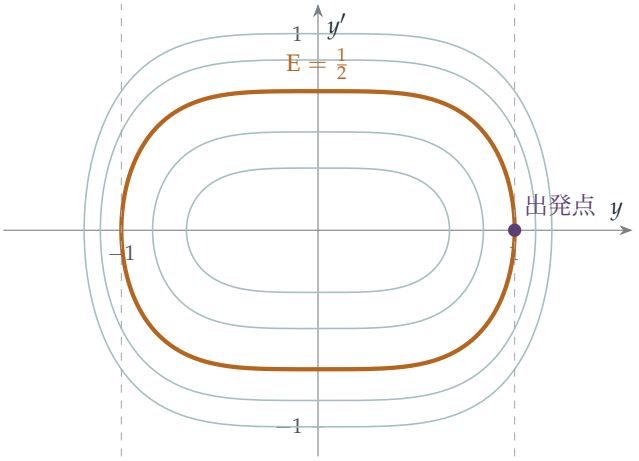


図 8.2.1 (y, y') 平面におけるエネルギー $\mathrm{E} = (y')^2 + \frac{1}{2}y^4$ の等高線（level curves）。E は一定であるから、$y = 1$、$y' = 0$ から出発する小問 (i) の解は永久に曲線 $\mathrm{E} = \frac{1}{2}$（琥珀色）の上にとどまり、したがって帯状領域 $|y| \leq 1$（破線）から決して出ない。このことは、y の公式を一度も求めずにわかる。

振り返り

- **y' を掛ける。** どの小問でも、E' は $2y'$ と方程式の左辺の積に、残りの項を加えたものであった。その残りの項によって、E が保存されるか減少するかが決まった。
- **エネルギーが位置を抑える。** 運動エネルギーの部分 $(y')^2$ は非負であるから、E の上界は位置エネルギーの部分の上界となり、したがって y の上界となる。

- **隠れた平方を見抜く。**小問 (iii) の減衰（damping）係数は符号が変わりそうに見えたが、実は完全平方が姿を変えたものであった。

背後にある数学

リャプノフ関数

1892 年の博士論文において、リャプノフは運動の**安定性**（stability）を研究した。系が平衡点（equilibrium）からわずかに乱されたとき、もとに戻るのか、それとも離れていってしまうのか。彼の「第二の方法」は、平衡点で最小となり、解に沿って決して増加しない関数を見つけることであった。この関数は現在**リャプノフ関数**（Lyapunov function）とよばれている。そのような関数があれば、平衡点の近くから出発した解は平衡点の近くにとどまる。この方法の美しさは、解の公式を必要とせず、微分方程式そのものだけを用いる点にあり、それこそがこの問題が示していることである。リャプノフ関数は今日、航空機の制御システムから電力網、生態系に至るまで、あらゆるものの安定性を証明するのに使われている。

物理学と工学におけるエネルギー

小問 (i) は非線形振動子（nonlinear oscillator）である。ばねに似ているが、復元力が変位の 3 乗に比例する。単振動（simple harmonic oscillator）とは異なり、その周期は振幅に依存する（振動が大きいほど速い）が、それでもエネルギー保存によって閉じ込められている。小問 (ii) では時間とともに大きくなる減衰が加わり、エネルギーが失われていく。工学では、エネルギーを用いる方法によって、構造物が自らの揺れで壊れないことや、制御システムが制御不能な振動を起こさないことが示される。偏微分方程式（partial differential equation）の理論では、この種の「エネルギー評価」（energy estimates）が、解が存在して良い振る舞いをすることを証明するための主要な道具である。流体の流れの方程式に関する問題は、ミレニアム懸賞問題（Millennium Prize Problems）の一つ（ナビエ–ストークス問題（Navier–Stokes problem））も含めて、このような評価が得られるかどうかに帰着する。

思考のスキル

増加しえない量を見つける

方程式が解けないときは、解から作られる量で、その導関数の符号が定まるものを探せ。その量が解を抑えてくれる。

探索の手がかりになるのは、物理（「エネルギーは何か」）と代数（「導関数がきれいにまとまるには何を加えればよいか」）である。小問 (iii) は、頼れる物理的直観がないときの代数的な道筋を示している。

次の一歩

1. **単振動。** $y(0) = A$、$y'(0) = 0$ のもとでの $y'' + y = 0$ について、保存されるエネルギーを求め、$|y| \le A$ を導け。厳密解と照らし合わせて確かめよ。

2. **振り子。** 振り子（pendulum）の角度 θ は（適当な単位のもとで）$\theta'' + \sin\theta = 0$ を満たす。$(\theta')^2 - 2\cos\theta$ が一定であることを示せ。振り子が角度 θ_0（ただし $|\theta_0| \le \pi$）で静止した状態から動き始めるとき、$|\theta|$ が決して $|\theta_0|$ を超えないことを示せ。$|\theta_0| > \pi$ のときは何がうまくいかなくなるか。

3. **減衰。** $k > 0$ として $y'' + 2ky' + y = 0$ について、$(y')^2 + y^2$ が減少することを示せ。これは必ず 0 に収束するか。

4. **脱出。** $y(0) = 1$、$y'(0) = 0$ のもとでの $y'' - y^3 = 0$ について、保存量を求め、それによって y が有界であるとはいえないことを示せ。何がうまくいかないのか。

さらに学ぶために

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。『非線形ダイナミクスとカオス』。第 6 章と第 7 章で、相平面（phase plane）、保存系、リャプノフ関数を扱っている。
- **D. W. Jordan & P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations***（Oxford University Press）。『非線形常微分方程式』。エネルギーを用いる方法の例を数多く含む、学部向けの定番教科書である。
- **Keith Devlin, *The Millennium Problems***（Basic Books）。『ミレニアム問題』。ナビエ–ストークス問題についての親しみやすい解説を含む。

8.3 個体群の収穫

問題

STEP II 1995、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/95-s2-q8`

導入

食料が無制限にある個体群は指数関数的に（exponentially）増加する。しかし現実の個体群はやがて場所が足りなくなる。個体数が環境の支えうる上限、すなわち**環境収容力**（carrying capacity）に近づくにつれて、増加は鈍っていく。これを表す最も単純なモデルが**ロジスティック方程式**（logistic equation）であり、問題の前半で扱われる。この方程式は、シャーレの中の細菌から新しい技術の普及に至るまで、あらゆるものを記述する。

問題の後半は、実用上きわめて重大な問いを投げかける。個体群を一定の割合で収穫（harvesting）し続けると何が起こるだろうか。ある閾値より下であれば、個体群は新しい、より低い平衡点（equilibrium）に落ち着く。しかし収穫をその閾値を超えて増やすと、たとえわずかであっても平衡点は消え、個体数はゼロへと崩壊する。これが漁業資源の崩壊の背後にある数学であり、漁獲枠が存在する理由である。

取りかかる前に

考えてみよう 何かを解く前に、増加率 $(2K - x)x$ を x の関数としてグラフに描いてみよう。それはどこでゼロになるか。どこで正になるか。そこから x がどのように振る舞うかについて何がわかるか。

増加率は $x = 0$ と $x = 2K$ でゼロとなり、その間では正、$2K$ より先では負である。したがって、0 と $2K$ の間から出発した個体群は $2K$ に向かって増加し、$2K$ より上から出発した個体群はそこへ向かって減少する。環境収容力は $2K$ であり、増加が最も速い

のは $x = K$ のときで、そのときの増加率は K^2 である。方程式を解かなくても、長期的な振る舞いを予測できるのである。

順を追って解く

段階 1　ロジスティック方程式を解く

考えてみよう　変数分離（separation of variables）を行うと $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2K-x)x} = \int \mathrm{d}t$ となる。左辺を部分分数（partial fractions）に分解せよ。

$\displaystyle\frac{1}{(2K-x)x} = \frac{1}{2K}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2K-x}\right)$ であるから、

$$\frac{1}{2K}\ln\frac{x}{2K-x} = t + C.$$

$t = 0$ のとき $x = K$ であるから、$\ln 1 = 0$ より $C = 0$ である。すると $\frac{x}{2K-x} = e^{2Kt}$ となり、

$$x = \frac{2Ke^{2Kt}}{1+e^{2Kt}} = \frac{2K}{1+e^{-2Kt}} = K + K\frac{1-e^{-2Kt}}{1+e^{-2Kt}}. \qquad \blacksquare$$

を得る。この分数は $\tanh(Kt)$ であるから、$x = K + K\tanh Kt$ となる。これは K から $2K$ へ向かって上昇する S 字形の曲線である。$t \to \infty$ のとき $e^{-2Kt} \to 0$ であり、$x \to 2K$ となる。

段階 2　収穫

細菌を割合 L で取り除くと、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (2K-x)x - L.$$

となる。

考えてみよう　$(2K-x)x - L$ を平方完成せよ。その零点はどこにあるか。

$(2K-x)x - L = K^2 - L - (x-K)^2 = \alpha^2 - (x-K)^2 = \big(\alpha - (x-K)\big)\big(\alpha + (x-K)\big)$ である。平衡点は $x = K \pm \alpha$ である。

手を止めて、やってみよう　ここで $y = x - K + \alpha$ と置換しよう。y はどのような方程式を満たすか。もとのロジスティック方程式と比べてみよ。

$y = x - K + \alpha$ とすると $x - K = y - \alpha$ であるから、$\alpha + (x-K) = y$ かつ $\alpha - (x-K) =$

$2\alpha - y$ である。よって

$$\frac{dy}{dt} = (2\alpha - y)y,$$

となり、これは K を α に置き換えた、再びロジスティック方程式である。初期値は $y(0) = K - K + \alpha = \alpha$ であり、前半の $x(0) = K$ とまったく同じ形をしている。したがって段階 1 により（K を α に置き換えて）$y(t) = \alpha + \alpha \tanh \alpha t \to 2\alpha$ となり、ゆえに

$$x(t) = K + \alpha \tanh \alpha t \to K + \alpha. \qquad \blacksquare$$

振り返り

- **まず定性的に考える。**増加率の符号から、何も解かないうちに長期的な振る舞いが予測できた。
- **平方完成によって平衡点が明らかになる。**収穫のある方程式の平衡点は $K \pm \alpha$ であった。
- **置換によって新しい問題を既知の問題に帰着させる。**変数をずらすことで、収穫のある方程式は、すでに解いたロジスティック方程式に変わった。

背後にある数学

転換点（tipping point）

収穫のある方程式には $K + \alpha$ と $K - \alpha$ の二つの平衡点がある。上の平衡点は**安定**（stable）である。すなわち、それよりわずかに上または下にある個体群はそこへ戻っていく。下の平衡点は**不安定**（unstable）である。すなわち、$K - \alpha$ をわずかに下回る個体群は減少して絶滅に至る。収穫率 L が増加すると $\alpha = \sqrt{K^2 - L}$ は小さくなり、二つの平衡点は互いに近づく。$L = K^2$ で両者は一つに合わさり、$L > K^2$ では平衡点はまったく存在せず、どのような個体群も崩壊する（図 8.3.1）。これは**サドル・ノード分岐**（saddle-node bifurcation）と呼ばれ、最も単純な種類の**転換点**である。その厄介な点は、何の劇的な前兆もないことである。L が K^2 に近づいても平衡個体数はゆるやかに減少するだけであり、そして突然、平衡点が存在しなくなる。その後で収穫を減らしても役に立たないかもしれない。個体数がすでに不安定な閾値を下回っている可能性があるからである。

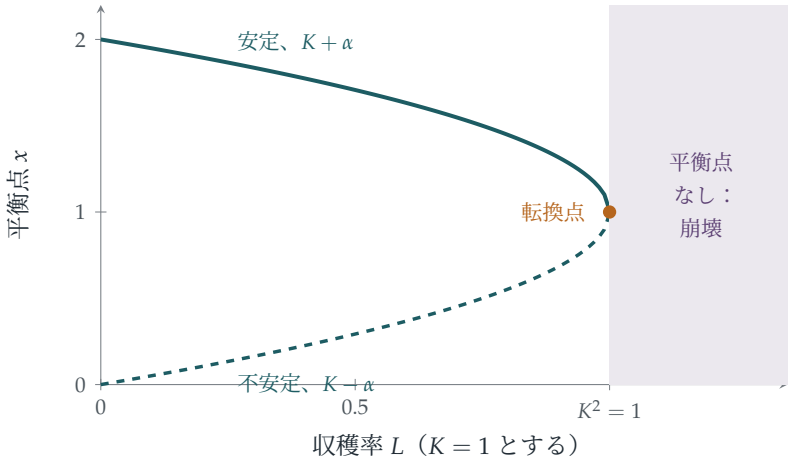


図 8.3.1　収穫率 L に対する平衡個体数（$K=1$）。安定な平衡点（実線）と不安定な閾値（破線）は L が増加するにつれて互いに近づき、$L=K^2$ で出会う。それを超えると平衡点は存在せず、個体群はその大きさにかかわらず崩壊する。

最大持続生産量

個体群が持ちこたえられる最大の収穫はどれだけだろうか。それは $L=K^2$、すなわち増加率 $(2K-x)x$ の最大値であり、個体数を環境収容力の半分である K に保つときに達成される。水産科学は 20 世紀半ばに、この「最大持続生産量」（maximum sustainable yield）を資源管理の目標として採用した。しかし、ちょうど最大値で収穫するということは、系をちょうど転換点に置くということであり、そこでは K をほんのわずか過大に見積もったり、不漁の年が一度あったりするだけで崩壊が起こる。ニューファンドランド（Newfoundland）沖のグランドバンクス（Grand Banks）のタラ漁場は、500 年にわたって世界有数の豊かな漁場であったが、1990 年代初めに崩壊した。1992 年、カナダ政府は禁漁措置を導入し、数万人が職を失った。資源は今なお完全には回復していない。

他の場面でのロジスティック成長

ロジスティック方程式は、1838 年にフェルフルスト（Pierre-François Verhulst）が人口のモデルとして提案したものである。同じ S 字形の曲線は、感染症の初期段階での広がり、新技術の普及、自己触媒的な化学反応、腫瘍の成長などを記述する。その離散時間版であるロジスティック**写像**（logistic map）はまったく異なる振る舞いを示し、カオス的（chaotic）になりうる。これについては Section 8.7 で見ることにする。

思考のスキル

平衡点とその安定性

方程式 $x' = f(x)$ について、平衡点は f の零点であり、それらの間での f の符号から解がどちらへ動くかがわかる。

f が正から負へ変わる平衡点は安定であり、負から正へ変わる平衡点は不安定である。f のグラフを描くだけで、何も解かずに重要な問いに答えられることが多い。

次の一歩

1. **低い値から出発する。** 収穫があり $K^2 > L$ のとき、$x(0) < K - \alpha$ ならば個体数は有限時間でゼロに達することを示せ。（ヒント：$y(0) < 0$ のとき y はどう振る舞うか。）

2. **過剰収穫。** $L > K^2$ のとき、$\beta = \sqrt{L - K^2}$ とおく。$x(0) = 2K$ のもとで $x' = -(x - K)^2 - \beta^2$ を解き、個体数がゼロに達する時刻を求めよ。

3. **比例収穫。** 代わりに、個体群の一定の割合を取り除くとする：$x' = (2K - x)x - hx$。平衡点を求め、すべての $h < 2K$ に対して個体群が存続することを示せ。この方策はなぜより安全なのか。

4. **到達時刻。** 収穫のない場合に、個体数が $\frac{3}{2}K$ に達する時刻を求めよ。

さらに学ぶために

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。『非線形力学とカオス』。第 3 章は分岐を扱っており、この収穫モデルが演習問題として取り上げられている。

- **Nicholas Britton, *Essential Mathematical Biology***（Springer）。『数理生物学の基礎』。学部生向けの個体群モデル。

- **Mark Kurlansky, *Cod: A Biography of the Fish That Changed the World***（Penguin）。『タラ：世界を変えた魚の歴史』。タラ漁業とその崩壊の歴史。

8.4 渦を巻いて円に近づく

問題

STEP III 2015、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/15-s3-q8`

導入

自然界の多くの系は、どのように始まったかによらず、規則正しいリズムに落ち着いていく。心臓の鼓動、コオロギの鳴き声、一定の力で弓を引いたバイオリンの弦、捕食者と被食者の個体数の周期などがその例である。少し乱しても、それらは同じリズムに戻ってくる。微分方程式（differential equation）の言葉でいえば、それらの解は閉じたループに近づいていく。このループを**極限サイクル**（limit cycle）という。

この問題では、極限サイクルを一つ実際に構成する。方程式は x と y のままでは手に負えないように見えるが、極座標（polar coordinates）に移ると解ける形にまで簡単になる。そして解は、内側からも外側からも単位円に巻きつくように近づく螺旋であることがわかる。問題の対称性に合った座標を選ぶという鍵となる一手は、本書を通じて繰り返し用いてきたものである。

取りかかる前に

考えてみよう どちらの方程式にも、$x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ と $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$ という組合せが形を変えて含まれている。これらは極座標ではどう表されるか。

$r^2 = x^2 + y^2$ であるから、微分すると $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r$ が得られる。また $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = r^2\,\mathrm{d}\theta$ である（これは Section 4.9 の面積公式である）。この二つの恒等式のおかげで、変数変換はほとんど苦労なく行える。方程式を、これらの組合せだけが現れるように書き直せばよい。

順を追って解く

段階 1　小問 (i) を極座標で

方程式を $(y+x)\,dy-(y-x)\,dx=0$ と書き、整理し直すと

$$(x\,dx+y\,dy)+(x\,dy-y\,dx)=0.$$

> **考えてみよう**　展開して、この整理が正しいことを確かめよ。次に、上の二つの恒等式を用いよ。

$(y+x)\,dy-(y-x)\,dx = y\,dy+x\,dy-y\,dx+x\,dx$ であり、これは上の式そのものである。極座標で表すと $r\,dr+r^2\,d\theta=0$ となり、$r^2\,d\theta$ で割ると（$r>0$ として）

$$\frac{dr}{d\theta}+r=0. \qquad \blacksquare$$

解は $r=Ce^{-\theta}$ である。これは**対数螺旋**（logarithmic spiral）であり、θ が増加すると原点に向かって巻き込み、θ が減少すると無限遠へ広がっていく。

段階 2　小問 (ii)

> **手を止めて、やってみよう**　新しい方程式は、元の方程式に $x^2+y^2=r^2$ を含む項を付け加えたものである。同じように書き直して、$\frac{dr}{d\theta}$ を求めよ。

方程式は $\bigl(y+x-xr^2\bigr)\,dy-\bigl(y-x-yr^2\bigr)\,dx=0$、すなわち

$$\bigl[(y+x)\,dy-(y-x)\,dx\bigr]-r^2\bigl(x\,dy-y\,dx\bigr)=0.$$

最初の括弧は前と同じく $r\,dr+r^2\,d\theta$ であり、二つ目の括弧は $r^2\,d\theta$ である。よって $r\,dr+r^2(1-r^2)\,d\theta=0$ となり、

$$\frac{dr}{d\theta}=r^3-r.$$

> **考えてみよう**　これは r について線形ではないが、$u=r^{-2}$ については線形になる。u はどのような方程式を満たすか。

$u=r^{-2}$ とおくと、$\frac{du}{d\theta}=-2r^{-3}\frac{dr}{d\theta}=-2r^{-3}(r^3-r)=-2+2u$ である。よって $\frac{du}{d\theta}-2u=-2$ であり、その解は $u=1+Ae^{2\theta}$ である。したがって

$$r^2=\frac{1}{1+Ae^{2\theta}}. \qquad \blacksquare$$

段階 3　3 種類の解

- $A = 0$ **のとき：**$r = 1$ である。単位円は解である。
- $A > 0$ **のとき：**常に $r < 1$ である。$\theta \to -\infty$ のとき $r \to 1$、$\theta \to +\infty$ のとき $r \to 0$ である。曲線は円と原点の間を螺旋を描いて進む。
- $A < 0$ **のとき：**$r > 1$ であり、この式が意味をもつのは $1 + Ae^{2\theta} > 0$、すなわち $\theta < \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{1}{A}\right)$ の範囲だけである。$\theta \to -\infty$ のとき $r \to 1$、θ がその上限に近づくとき $r \to \infty$ である。曲線は円と無限遠の間を螺旋を描いて進む。

こうして、どの解曲線も $\theta \to -\infty$ のとき、内側または外側から単位円に近づく（図 8.4.1）。

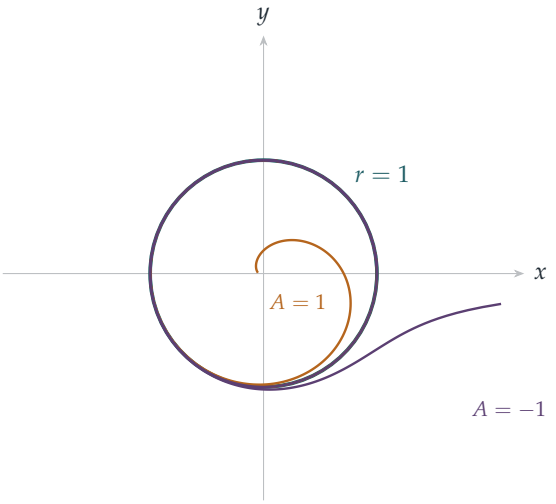


図 8.4.1　小問 (ii) の解。単位円（青緑）は解である。$A = 1$ の解（琥珀色）はその内側にあり、円から（$\theta \to -\infty$ のとき）原点に向かって螺旋を描く。$A = -1$ の解（紫）は外側にあり、円から無限遠へ螺旋を描いて広がる。逆向き（θ が減少する向き）に見れば、どの解も円に巻きついていく。これが極限サイクルである。

振り返り

- **対称性を利用する。**方程式はすべての方向を同等に扱っており、極座標によってそのことがはっきり見えるようになった。
- **定番の組合せを見抜く。**$x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r$ と $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = r^2\,\mathrm{d}\theta$ が仕事の大部分を担った。
- **置換によって線形化する。**非線形方程式 $r' = r^3 - r$ は、$u = r^{-2}$ について線形になった（ベルヌーイ型微分方程式（Bernoulli equation））。

背後にある数学

極限サイクル

アンリ・ポアンカレ（Henri Poincaré）は 1880 年代、平面上の微分方程式の定性的な振る舞いを研究する中で極限サイクルを導入した。問題の方程式を、平面上を動く点の軌跡を記述するものと解釈してみよう。単位円は孤立した閉軌道（closed orbit）であり、その近くの軌道はすべてそれに向かって巻きついていく（時間の向きによっては、それから離れていく）。1926 年、オランダの技術者 Balthasar van der Pol は真空管を含む電気回路に極限サイクルを見いだし、同様の方程式が心臓の鼓動を記述すると提唱した。極限サイクルは、自律的に維持される安定なリズムをもつあらゆる系のモデルとなる。概日時計、神経インパルス、捕食者と被食者の個体数の周期などである。

平面にカオスはない

ポアンカレ–ベンディクソンの定理（Poincaré–Bendixson theorem）によれば、平面上の滑らかな系において、有界な領域にとどまり、平衡点（equilibrium）に近づかない軌道は、必ず閉軌道に近づく。したがって 2 次元では、長時間の振る舞いは平衡点とサイクルに限られる。軌道は互いに交われないので、カオス（chaos）が入り込む余地はないのである。カオスには少なくとも 3 次元が必要であり、これは 1963 年にエドワード・ローレンツ（Edward Lorenz）が、対流を表す有名な 3 変数のモデル（「バタフライ」）によって発見したことである。離散時間では、Section 8.7 で見るように、1 次元でさえカオスが起こりうる。

未解決問題

1900 年、ダフィット・ヒルベルト（David Hilbert）は第 16 問題の一部として、次のように問うた。P と Q が n 次の多項式であるとき、系 $x' = P(x,y)$、$y' = Q(x,y)$ がもちうる極限サイクルの個数の最大値はいくつか。これは $n = 2$ の場合でさえいまだにわかっていない。この場合、極限サイクルを 4 個もつ系は知られているが、それより多く存在しうるかどうかはわかっていない。ヒルベルトの問題のうち、完全に未解決のまま残っているごく少数の一つである。

思考のスキル

> **対称性に合わせて座標を変える**
>
> 問題が回転対称性をもつなら極座標を用いよ。別の対称性をもつなら、それを尊重する座標を見つけよ。
>
> 適切な座標によって、手に負えない方程式が変数分離形に変わり、解の幾何学的な姿（円と螺旋）も一目瞭然になった。

次の一歩

1. **螺旋。** 小問 (i) の解 $r = e^{-\theta}$ について、曲線が原点から出るすべての半直線と同じ角度 45° で交わることを示せ。（対数螺旋が**等角螺旋**（equiangular spiral）とも呼ばれるのはこのためである。）

2. **極座標の恒等式。** $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r$ および $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = r^2\,\mathrm{d}\theta$ を証明せよ。

3. **時間に関する系。** 系 $\dot r = r(1 - r^2)$、$\dot\theta = 1$ を考える。$r(0) > 0$ であるすべての解が、$t \to \infty$ のとき単位円に近づくことを示せ。また、この系を x と y で表せ。

4. **二つのサイクル。** $\dot r = f(r)$、$\dot\theta = 1$ の形の系で、$r = 1$ と $r = 2$ に極限サイクルをもち、一方が引き寄せ、他方が反発するものを求めよ。

さらに学ぶために

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。『非線形力学とカオス』。第 7 章で極限サイクルとポアンカレ–ベンディクソンの定理を扱っている。
- **Steven Strogatz, *Sync***（Hyperion）。自然界のリズムと同期についての一般向けの本。
- **James Gleick, *Chaos: Making a New Science***（Penguin）。ローレンツとカオスの発見の物語。

8.5 グレイハウンドを追うグレイハウンド

問題

STEP III 1988、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/88-s3-q10`

導入

正方形の野原の四隅に 4 匹の犬が立っている。どの犬も自分の左隣の犬を追いかける。犬たちはどこで出会い、それまでにどれだけ時間がかかり、どのような経路をたどるのだろうか。経路は中心のまわりを無限回巻きつく美しいらせんである。それにもかかわらず、各犬が走る距離は有限であり、ちょうど正方形の 1 辺の長さに等しい。

これは**追跡問題**（pursuit problem）であり、1732 年にピエール・ブーゲ（Pierre Bouguer）が海賊船を追う船について初めて研究した種類の問題である。これを解けるようにする鍵は対称性（symmetry）である。1 匹の犬に起こることはすべての犬に起こるので、4 匹の犬は常に正方形をなす。このことに気づけば、微分方程式（differential equation）はほとんどひとりでに書き下せる。

取りかかる前に

考えてみよう 対称性から考えて、4 匹の犬は各瞬間にどのような図形をなすか。その中心はどこか。

この状況は正方形の中心のまわりの 4 分の 1 回転（$A \to B \to C \to D \to A$ と移す）によって変わらないので、犬たちは常に同じ中心 O をもつ正方形をなす。正方形は回転しながら縮んでいくが、正方形であり続ける。特に、A と B は常に O から同じ距離 r にあり、OB は常に OA より 4 分の 1 回転だけ先にある。

順を追って解く

段階 1　運動の向き

考えてみよう　A は B に向かって走る。三角形 OAB において、AB は AO（中心へ向かう向き）とどのような角をなすか。

三角形 OAB は $OA = OB$ であり、O における角が直角なので、残りの 2 つの角は 45° である。したがって、大きさ v の A の速度は内向きの動径方向と 45° の角をなし、B の側、すなわち θ が増加する向きに傾いている（B が A から反時計回りの位置にあるように角を定めた場合）。

段階 2　微分方程式

考えてみよう　A の速度を動径成分と横断成分に分けよ。極座標（polar coordinates）では、動径方向の速度は $\dot r$、横断方向の速度は $r\dot\theta$ である。

動径成分（内向き）は $v\cos 45^\circ$、横断成分は $v\sin 45^\circ$ であるから、

$$\dot r = -\frac{v}{\sqrt{2}}, \qquad r\dot\theta = \frac{v}{\sqrt{2}}.$$

割り算をすると $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{\dot r}{\dot\theta} = -r$ となるので、$r = \lambda e^{-\theta}$ である。ここで、最初に $\theta = 0$ とすれば、λ は中心からの最初の距離である。 ■

段階 3　n 匹の犬

手を止めて、やってみよう　正 n 角形の場合、三角形 OAB の O における角はいくらか。AB は AO とどのような角をなすか。段階 2 を繰り返せ。

O における角は $\dfrac{2\pi}{n}$ なので、等しい 2 つの底角は $\dfrac{1}{2}\left(\pi - \dfrac{2\pi}{n}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{n}$ である。速度は内向きの動径とこの角をなすので、

$$\dot r = -v\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = -v\sin\frac{\pi}{n}, \qquad r\dot\theta = v\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = v\cos\frac{\pi}{n}.$$

よって $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -r\tan\dfrac{\pi}{n}$ であり、

$$r = \lambda e^{-\theta\tan(\pi/n)}. \qquad \blacksquare$$

$n = 4$ のとき $\tan\dfrac{\pi}{4} = 1$ となり、正方形の場合が再び得られる。

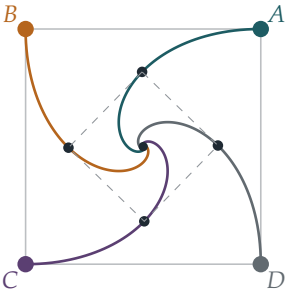


図 8.5.1　正方形の四隅から互いを追いかける 4 匹の犬。各犬は（それぞれの出発方向を基準として）対数らせん $r = \lambda e^{-\theta}$ をたどり、中心のまわりを無限回巻きつく。各瞬間に犬たちは正方形（破線、途中のある時刻のものを示す）をなし、回転しながら縮んで、最後に中心で出会う。

振り返り

- **対称性によって多体を 1 体に帰着させる。**配置が正方形であり続けるので、互いに影響し合う 4 匹の犬が、単純な規則に従う 1 つの粒子に置き換わった。
- **中心のまわりの運動には極座標を使う。**速度の動径成分（radial component）と横断成分（transverse component）、すなわち $\dot{r}$ と $r\dot{\theta}$ から、方程式が直接得られた。
- **割り算で時間を消去する。**比 $\dot{r}/\dot{\theta}$ から、各点にいつ到達するかを知らなくても経路の形が得られた。

背後にある数学

無限回の回転、有限の距離

動径方向の速さ $\dot{r} = -v\sin\frac{\pi}{n}$ は一定なので、犬たちは時間 $T = \frac{r_0}{v\sin(\pi/n)}$ の後に中心に到達し、それぞれ距離 $vT = \frac{r_0}{\sin(\pi/n)}$ を走ることになる。1 辺 s の正 n 角形では $r_0 = \frac{s}{2\sin(\pi/n)}$ なので、各犬が走る距離は

$$\frac{s}{2\sin^2(\pi/n)}.$$

である。4 匹の場合、これはちょうど s であり、各犬はまさに 1 辺の長さだけ走る。（これを鮮やかに見る方法がある。B の速度は常に AB に垂直なので、距離 AB を変化させない。差を縮めるのは AB に沿ってまっすぐ速さ v で進む A の運動だけであり、最初の差は s である。）3 匹の場合は距離は $\frac{2}{3}s$、6 匹の場合は $2s$ である。それでもど

の場合も、$r \to 0$ のとき $\theta \to \infty$ となるので、らせんは中心のまわりを無限回巻きつく。無限回巻きつく有限の長さの曲線は逆説ではない。巻きが十分速く小さくなるからである。

対数らせん

曲線 $r = \lambda e^{-k\theta}$ は**対数らせん**（logarithmic spiral）または**等角らせん**（equiangular spiral）と呼ばれ、中心から出るすべての半直線と同じ角度で交わる。形を保ったまま成長すると、この曲線が生じるので、オウムガイの殻や一部の銀河の腕など、自然界にも現れる。ヤコブ・ベルヌーイ（Jacob Bernoulli）はこの曲線に魅了され、どの尺度で見ても同じに見えるという性質にちなんで、*Eadem mutata resurgo*（「変えられても、私は同じものとして甦る」）という銘とともに墓石に刻むよう頼んだ。ところが石工が刻んだのはアルキメデスのらせん（Archimedean spiral）であった。

実際の追跡

常に標的にまっすぐ向かう「純追跡」（pure pursuit）は、ミサイルや捕食者にとって最も単純な誘導則である。しかし最良ではない。標的がこれから**いるであろう**位置に向かうほうが（「比例航法」（proportional navigation））効率がよく、現代のミサイルも、トンボやハヤブサのような一部の捕食者も、実際にそうしている。追跡と回避の数学は、20 世紀に**微分ゲーム**（differential games）という名のもとで独立した分野となった。

思考のスキル

> **対称性を活かして多体問題を簡単にする**
>
> 系が対称であり、規則がその対称性を保つならば、対称性は永遠に保たれ、一部分だけを追えばよい。
>
> この考え方は力学や動力学の多くの問題を解く。これは対称性と保存則（conservation）の深いつながりの簡単な一例である。

次の一歩

1. **鮮やかな論法。** 4 匹の犬の問題で、距離 AB がちょうど速さ v で減少する理由を丁寧に説明し、犬たちが時間 s/v の後に出会うことを導け。

2. **3 匹の犬。** 3 匹の犬が 1 辺 s の正三角形の頂点から出発する。各経路の方程式、出会うまでの時間、各犬が走る距離を求めよ。

3. **何回転するか。** 4 匹の犬が中心から 100 m の位置から出発するとき、1 回転した後に中心からどれだけ近くにいるか。何回転した後に中心から 1 mm 以内に入るか。

4. **2 匹の犬。** $n = 2$（向かい合う 2 匹の犬）のときはどうなるか。公式はなお意味をもつか。

さらに学ぶために

- **Paul Nahin, *Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion***（Princeton University Press）。追跡曲線について、ブーゲからミサイルまであらゆることを扱う。
- **Eli Maor, *e: The Story of a Number***（Princeton University Press）。対数らせんとベルヌーイの墓石の話を含む。
- **D'Arcy Thompson, *On Growth and Form***（Cambridge University Press）。らせん状の成長を含む、自然界の数学についての古典的名著。

8.6 量子振動子

問題

STEP III 1988、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/88-s3-q7`

導入

ばねにつけたおもりは、どんなエネルギーでも振動できる。少し引いて放してもよいし、大きく引いて放してもよい。ところが 1900 年、プランク（Max Planck）は、熱い物体が放つ光の色を説明するには、振動する原子が一定の大きさの段階ごとに、特定のエネルギーしかとれないと考えるほかないことに気づいた。原子の尺度では、エネルギーは**量子**（*quanta*）として現れるのである。その 25 年後、量子力学（quantum mechanics）がその理由を説明した。

この問題にはその説明が含まれている。この微分方程式（differential equation）は、単位を取り替えると、ばねのようなポテンシャルの中にある量子的な粒子に対するシュレーディンガー方程式（Schrödinger equation）、すなわち**量子調和振動子**（*quantum harmonic oscillator*）の方程式になる。この方程式が無限遠で減衰するような性質のよい解をもつのは、エネルギーが $n = 0, 1, 2, \ldots$ で番号づけられた特別な値をとるときだけであり、それらは等間隔に並ぶ。さらに、異なる n に対する解は互いに**直交**（*orthogonal*）する。すなわち、フーリエ級数（Fourier series）における $\sin mx$ と $\sin nx$ と同じように、それらの積の積分は 0 になる。量子振動子は、分子、固体、光の物理学の出発点である。

取りかかる前に

考えてみよう　$e^{-\lambda x^2}$ のような関数を推測として試すのが妥当なのはなぜか。$x \to \pm\infty$ のとき、$e^{-\lambda x^2}$ とその導関数はどうなるか。

$|x|$ が大きいとき、方程式は $y'' \approx \omega^2 x^2 y$ で支配される。一方、ガウス関数（Gaussian）$e^{-\lambda x^2}$ は x が大きいとき $y'' \approx 4\lambda^2 x^2 y$ を満たすので、$4\lambda^2 = \omega^2$ ならば一致する。$\lambda > 0$ のとき、ガウス関数とそのすべての導関数は x のどんな累乗よりも速く 0 に減衰する。したがって境界条件（boundary conditions）は自動的に満たされ、手間がかかるのは方程式に合わせる部分である。

順を追って解く

段階 1　基底状態

考えてみよう　$y_0 = e^{-\lambda x^2}$ を 2 回微分し、$n = 0$ とした方程式に代入して、x^2 の係数と定数項を比較せよ。

$y_0' = -2\lambda x e^{-\lambda x^2}$ であり、$y_0'' = (4\lambda^2 x^2 - 2\lambda) e^{-\lambda x^2}$ である。$n = 0$ のとき、方程式はすべての x について

$$4\lambda^2 x^2 - 2\lambda - \omega^2 x^2 = -\omega$$

が成り立つことを要求する。係数を比較すると $4\lambda^2 = \omega^2$ かつ $2\lambda = \omega$ である。$y_0 \to 0$ となるように $\lambda > 0$ をとれば、$\lambda = \tfrac{\omega}{2}$ のとき両方が成り立つ。また、$x \to \pm\infty$ のとき $y_0, y_0' \to 0$ である。 ■

段階 2　第一励起状態

$y_1 = x e^{-\lambda x^2}$ について、$y_1' = (1 - 2\lambda x^2) e^{-\lambda x^2}$ であり、$y_1'' = (4\lambda^2 x^3 - 6\lambda x) e^{-\lambda x^2}$ である。$n = 1$ のとき、方程式は

$$4\lambda^2 x^3 - 6\lambda x - \omega^2 x^3 = -3\omega x,$$

を要求するが、これは同じ $\lambda = \tfrac{\omega}{2}$ で成り立つ。ここでも y_1 と y_1' は $\pm\infty$ で減衰する。 ■

段階 3　恒等式

考えてみよう $y_m y_n' - y_n y_m'$ を積の微分法（product rule）で微分せよ。4 つの項のうち 2 つが打ち消し合う。そのうえで、微分方程式を使って y_n'' と y_m'' を置き換えよ。

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y_m y_n' - y_n y_m') = y_m' y_n' + y_m y_n'' - y_n' y_m' - y_n y_m'' = y_m y_n'' - y_n y_m''$ である。方程式から $y_n'' = (\omega^2 x^2 - (2n+1)\omega) y_n$ であり、m についても同様である。よって

$$y_m y_n'' - y_n y_m'' = y_m y_n [\omega^2 x^2 - (2n+1)\omega - \omega^2 x^2 + (2m+1)\omega] = 2(m-n)\omega y_m y_n. \qquad \blacksquare$$

段階 4 直交性

手を止めて、やってみよう この恒等式を $-\infty$ から ∞ まで積分せよ。左辺はどうなるか。

各 y と y' は両端で 0 に近づくので、左辺の積分は $\left[y_m y_n' - y_n y_m'\right]_{-\infty}^{\infty} = 0 - 0 = 0$ となる。したがって $2(m-n)\omega \int_{-\infty}^{\infty} y_m y_n \,\mathrm{d}x = 0$ であり、$m \neq n$ かつ $\omega > 0$ であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_m(x) y_n(x) \,\mathrm{d}x = 0. \qquad \blacksquare$$

y_0 と y_1 については直接確かめるのもやさしい。$y_0 y_1 = x e^{-\omega x^2}$ は奇関数（odd function）だからである。しかしこの恒等式は、関数を具体的に知らなくても、あらゆる組についてこのことを証明する。

振り返り

- **係数を比較する。** 推測した形を代入し、方程式がすべての x について成り立つことを要求すると、λ が決まった。
- **ロンスキアンの技法。** 組合せ $y_m y_n' - y_n y_m'$ の導関数では、2 階導関数を方程式によって置き換えることができ、簡単な式が残る。この組合せはロンスキアン（Wronskian）とよばれる。
- **境界条件が境界項を消す。** 無限遠での減衰により、積分した左辺が 0 となり、それが直交性を与えた。

背後にある数学

シュレーディンガー方程式

1926 年、シュレーディンガー（Erwin Schrödinger）は、量子的な粒子は**波動関数**（*wave function*）$\psi(x)$ によって記述されると提唱した。ポテンシャル $V(x)$ の中にあるエネルギー E の粒子に対して、波動関数は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V(x)\psi = E\psi.$$

を満たす。ばねの場合は $V(x) = \frac{1}{2}m\Omega^2 x^2$ であり、x の尺度を取り替えると、これはちょうど問題の方程式になり、$E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\Omega$ となる。ψ が無限遠で減衰する（つまり粒子がどこかに存在する）という物理的な要請は、これらのエネルギーに対してしか満たされない。これが**量子化**（*quantisation*）であり、数学から自然に導かれるのである。最低のエネルギーが 0 ではなく $\frac{1}{2}\hbar\Omega$ であることに注意しよう。量子振動子は完全に静止することが決してできない。この**零点エネルギー**（*zero-point energy*）は実在し、測定することもできる。液体ヘリウムが通常の圧力のもとでは絶対零度においても凍らないのは、このためである。

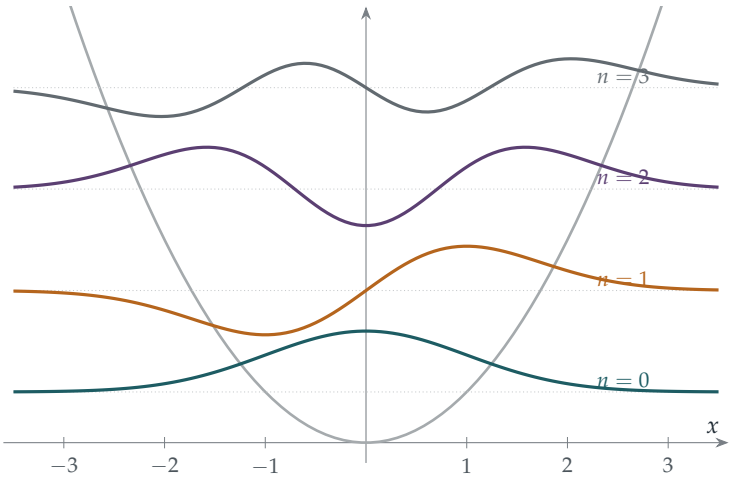


図 8.6.1　量子調和振動子（$\omega = 1$ の場合）。放物線はポテンシャルエネルギーを表す。各波動関数 y_n は、そのエネルギー準位 $n + \frac{1}{2}$ の高さに描かれている。準位は等間隔に並び、最低の準位は 0 より上にある。関数 y_n は n 回 0 を横切り、どの 2 つも互いに直交する。

エルミート関数とスツルム–リウヴィル理論

一般の解は $y_n = H_n(\sqrt{\omega}x)e^{-\omega x^2/2}$ であり、ここで H_n は n 次の多項式で、**エルミート多項式**（*Hermite polynomial*）とよばれる（図 8.6.1）。直交性はこの方程式に特有のものではない。方程式が適切な境界条件のもとで $(py')' + qy = -\lambda w y$ の形に書けるときはいつでも、異なる λ の値に属する解は、段階 4 とまったく同じ議論によって直交する。これが**スツルム–リウヴィル理論**（*Sturm–Liouville theory*）（1830 年代）であり、フーリエ級数の正弦関数（Section 3.7）、太鼓の膜の振動、静電気学のルジャンドル多項式（Legendre polynomials）、水素原子の波動関数などを包括する。Section 4.7 の固有値問題（eigenvalue problem）もその一例である。そこで求めた臨界値が固有値 λ であり、直交する関数はその系の自然な「モード」である。

思考のスキル

恒等式から直交性を導く

関連する方程式の 2 つの解が直交することを示すには、境界条件によって積分が 0 になり、しかもそれらの積の定数倍に等しくなるような、ある関数の導関数の形の式を見つけよ。

これは積分を直接計算するよりもはるかに強力である。解を具体的に書き下せない場合でも、すべての組について一度に通用するからである。

次の一歩

1. **次の状態。** $\lambda = \frac{\omega}{2}$ のとき、$y_2 = (4\lambda x^2 - 1)e^{-\lambda x^2}$ が $n = 2$ とした方程式を満たすことを示せ。また、$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega x^2}\,dx = \sqrt{\pi/\omega}$ と $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\omega x^2}\,dx = \frac{1}{2\omega}\sqrt{\pi/\omega}$ を用いて、$\int_{-\infty}^{\infty} y_0 y_2\,dx = 0$ を直接確かめよ。

2. **ほかのエネルギーはない。** n を一般の数 ν に置き換えて、$y = e^{-\lambda x^2}$ を試せ。これがうまくいくのは $\nu = 0$ のときに限ることを示せ。（実際、減衰する解が存在するのは ν が 0 以上の整数のときに限る。）

3. **正弦波。** $y(0) = y(\pi) = 0$ のもとでの $y'' = -n^2 y$ から出発し、同じ方法を用いて、$m \neq n$ のとき $\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = 0$ となることを示せ。

4. **はしご。** y_n が方程式の解ならば、$y_{n+1} = \omega x y_n - y_n'$ は n を $n+1$ に置き換えた方程式の解であることを示せ。これを用いて、y_0 から y_1 と y_2 を作れ。（これは量子

力学における「上昇演算子（raising operator）」である。）

さらに学ぶために

- **David Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics***（Cambridge University Press）。『量子力学入門』。大学学部の物理学の標準的な教科書であり、第 2 章で調和振動子を扱っている。
- **Richard Feynman, *QED: The Strange Theory of Light and Matter***（Princeton University Press）。『光と物質のふしぎな理論』。量子力学の大家の一人による一般向けの解説である。
- **Mary Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences***（Wiley）。『自然科学者のための数学的方法』。数学と物理学を学ぶ学生に向けて、エルミート多項式とスツルム–リウヴィル理論を扱っている。

8.7 解けるカオス

問題

STEP I 2014、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/14-s1-q6`

導入

規則 $u_{n+1} = ku_n(1 - u_n)$ は**ロジスティック写像**（logistic map）とよばれ、資源が限られた環境における個体数の最も単純なモデルである。u_n は n 年目の個体数を環境が支えうる最大数に対する割合で表したもの、k は増殖率であり、因子 $1 - u_n$ は過密の効果を表す。1976 年、生物学者ロバート・メイ（Robert May）は『*Nature*』誌に「Simple mathematical models with very complicated dynamics」（非常に複雑な振る舞いをする単純な数学モデル）という短い論文を発表した。メイは、k を 4 に向けて大きくしていくと、このたった 1 行の規則が、一定の値に落ち着く状態から、振動する状態を経て、まったくでたらめに見える振る舞いへと移り変わることを示した。これは**カオス**（chaos）の原点となる例の一つとなった。

カオス的な系は、ふつう解くことができない。u_n を与える公式は存在せず、u_{100} を求めるにはそれより前の項をすべて計算するしかない。この問題はその例外を見つけるものである。最もカオス的な値である $k = 4$ では、公式が**存在する**のである。しかもその公式は、なぜこの数列が予測不能なのかを正確に説明してくれる。

取りかかる前に

考えてみよう $s = \sin^2\theta$ として、式 $4s(1 - s)$ をどこかで見たことはないだろうか。$\sin^2\theta$、$\cos^2\theta$、$\sin 2\theta$ を結びつける恒等式は何か。

$s = \sin^2\theta$ ならば $1 - s = \cos^2\theta$ であるから、$4s(1 - s) = 4\sin^2\theta\cos^2\theta = (2\sin\theta\cos\theta)^2 = \sin^2 2\theta$ となる。写像 $s \mapsto 4s(1 - s)$ は、2 倍角の公式（double-

angle formula）が姿を変えたものなのである。

順を追って解く

段階 1　規則性を予想する

$u_0 = \sin^2\theta$ とすると、上の恒等式から

$$u_1 = 4\sin^2\theta\cos^2\theta = \sin^2 2\theta, \qquad u_2 = 4\sin^2 2\theta\cos^2 2\theta = \sin^2 4\theta.$$

> **考えてみよう**　各ステップで角はどうなっているか。u_n についてどのような予想が立つか。

角は毎回 2 倍になっているので、$u_n = \sin^2(2^n\theta)$ と予想できる。

段階 2　証明する

> **考えてみよう**　ある項から次の項を定める規則で定義された数列について、そのすべての項に関する主張を示すには、どの証明法が適しているか。

数学的帰納法（induction）である。$u_0 = \sin^2\theta = \sin^2(2^0\theta)$ であるから、$n = 0$ のとき主張は成り立つ。ある n について $u_n = \sin^2(2^n\theta)$ が成り立つと仮定すると、

$$u_{n+1} = 4\sin^2(2^n\theta)(1 - \sin^2(2^n\theta)) = \left(2\sin(2^n\theta)\cos(2^n\theta)\right)^2 = \sin^2(2^{n+1}\theta),$$

となり、これは $n+1$ のときの主張である。よって、すべての $n \geq 0$ について $u_n = \sin^2(2^n\theta)$ が成り立つ。 ■

$[0,1]$ に属するどの初期値 u も $\sin^2\theta$ の形に書ける（$\theta = \arcsin\sqrt{u}$ とすればよい）ことに注意しよう。したがって、これで $k = 4$ のロジスティック写像が、$[0,1]$ のあらゆる初期値について解けたことになる。

段階 3　変数を変換する

> **考えてみよう**　$v_n = \alpha u_n + \beta$ を v_{n+1} の規則に代入せよ。その結果が $u_{n+1} = 4u_n - 4u_n^2$ となる必要がある。条件はいくつ得られ、未知数はいくつあるか。

代入すると

$$\alpha u_{n+1} + \beta = -p(\alpha u_n + \beta)^2 + q(\alpha u_n + \beta) + r,$$

であるから

$$u_{n+1} = -p\alpha\, u_n^2 + (q - 2p\beta)\, u_n + \frac{-p\beta^2 + q\beta + r - \beta}{\alpha}.$$

これが $4u_n - 4u_n^2$ となるためには、次の 3 つが必要である。

$$p\alpha = 4, \qquad q - 2p\beta = 4, \qquad -p\beta^2 + (q-1)\beta + r = 0.$$

最初の 2 つから $\alpha = 4/p$、$\beta = (q-4)/(2p)$ と定まる。未知数はもう残っていないので、3 つ目の式は p、q、r に対する本当の意味での条件となる。β を代入して $4p$ を掛けると

$$-(q-4)^2 + 2(q-1)(q-4) + 4pr = 0,$$

となり、展開すると $-(q^2 - 8q + 16) + (2q^2 - 10q + 8) + 4pr = 0$、すなわち $q^2 - 2q - 8 + 4pr = 0$、つまり

$$4pr = 8 + 2q - q^2. \qquad \blacksquare$$

> **手を止めて、やってみよう** 方程式は 3 つあるのに未知数は 2 つしかない。条件が現れるのはこのためである。計算する前に、一般の 2 次写像がいつも $(*)$ と同値になるとは限らない理由がわかるだろうか。（1 次の変数変換で変えられるものと変えられないものを考えてみよ。）

段階 4　具体例

$v_{n+1} = -v_n^2 + 2v_n + 2$ では $p = 1$、$q = 2$、$r = 2$ であり、$4pr = 8 = 8 + 4 - 4$ であるから条件は成り立つ。このとき $\alpha = 4$、$\beta = -1$ であるから $v_n = 4u_n - 1$ であり、u_n は $(*)$ を満たす。$v_0 = 1$ より $u_0 = \frac{1}{2} = \sin^2\frac{\pi}{4}$ であるから

$$u_n = \sin^2\!\left(\frac{2^n\pi}{4}\right), \qquad v_n = 4\sin^2\!\left(\frac{2^n\pi}{4}\right) - 1 = 1 - 2\cos\!\left(\frac{2^n\pi}{2}\right).$$

これより $v_0 = 1$、$v_1 = 3$ であり、すべての $n \geq 2$ について $v_n = -1$ となる。（直接確かめると、$-1 + 2 + 2 = 3$、次に $-9 + 6 + 2 = -1$、さらに $-1 - 2 + 2 = -1$ である。）$\blacksquare$

この特別な初期値は、角が π の倍数に行き着いて数列が止まるように選ばれている。そのせいで面白い部分が隠れてしまっているが、それを次に見ていこう。

振り返り

- **変装を見抜く。** 写像 $s \mapsto 4s(1-s)$ は、$s = \sin^2\theta$ と書いたとたんに角の 2 倍化になった。
- **予想し、帰納法で証明する。** 2 つの項から規則性が見え、帰納法でそれを証明した。
- **方程式と未知数の個数を数える。** 1 次の置き換えには自由なパラメータが 2 つあり、2 次式には係数が 3 つある。したがって条件が 1 つ余るはずである。

背後にある数学

数列が予測不能である理由

公式 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$ を得たことで、話は終わったように見える。どの項も直接計算できるからである。しかし、この公式が何を言っているかをよく見てみよう。$\sin^2$ は周期 π をもつので、意味をもつのは $2^n\theta$ を π を法（modulo）として見た値だけである。$0 \le x < 1$ として $\theta = \pi x$ と書き、x を 2 進法（binary）で表す。

$$x = 0.b_1b_2b_3\ldots \quad (\text{基数}2).$$

2 を掛けると小数点が 1 桁右にずれ、その結果を 1 を法として見ると、小数点を越えた桁が捨てられる。したがって u_n は、x の 2 進表記の b_{n+1} 以降の桁だけで決まる。ロジスティック写像は 1 ステップごとに初期値の桁を 1 つ新たに読み込み、先頭の桁を 1 つ捨てていくのである。

これが**初期値鋭敏性**（sensitive dependence on initial conditions）であり、カオスを特徴づける性質である。2 進法で 20 桁（10 進法でおよそ 6 桁）まで一致する 2 つの初期値からは、たいてい、およそ 20 ステップまでは一致し、その後はまったく無関係になる数列が生じる（図 8.7.1）。u_{100} を予測するには、u_0 を 2 進法で 100 桁まで知る必要がある。初期の角の誤差は、どれほど小さくても、ステップごとに 2 倍になる。（個体数 u そのものの誤差が毎回まったく同じ倍率で増えるわけではない。写像は $[0,1]$ のある部分を他の部分より強く引き伸ばすからである。しかし平均すれば同じ割合で増大する。）公式はこの状況を救ってはくれない。単にその仕組みを目に見えるようにするだけである。

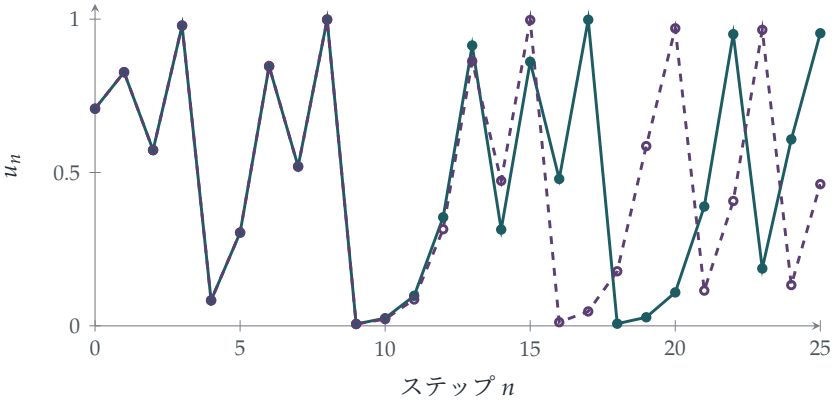


図 8.7.1　$k = 4$ のロジスティック写像による 2 つの数列。初期値は $\sin^2(1)$（ティール）と $\sin^2(1.00001)$（プラム、破線）である。およそ 10 ステップまでは区別がつかず、ステップ 12 までには目に見えて異なり、その後は無関係になる。ステップ 12 までに、角の差 10^{-5} は 12 回 2 倍されて、およそ $2^{12} \times 10^{-5} \approx 0.04$ になっている。

いたるところにある周期点

この公式からは、写像のすべての周期軌道（cycle）も求められる。数列が N ステップ後に初期値に戻るのは、ちょうど $\sin^2(2^N\theta) = \sin^2\theta$、すなわち $2^N\theta \equiv \pm\theta \pmod{\pi}$ のときである。したがって $\theta = m\pi/(2^N - 1)$ または $\theta = m\pi/(2^N + 1)$ は、周期が N の約数となる点を与える。たとえば $\theta = \pi/5$ は $4\theta \equiv -\theta$ を満たすので、$\sin^2\frac{\pi}{5} \to \sin^2\frac{2\pi}{5} \to \sin^2\frac{4\pi}{5} = \sin^2\frac{\pi}{5}$ は周期 2 の軌道である。あらゆる周期の周期点（periodic point）が存在し、しかもそれらは $[0,1]$ において稠密（dense）である。つまり、どれほど小さな区間の中にも、数列が繰り返しになる初期値が存在する。それにもかかわらず、誤差は 2 倍になっていくので、どの周期点も不安定である。近くのものをすべて遠ざける周期点が稠密に存在すること、これがカオスの第二の特徴である。

カオスへの道

k がもっと小さいときには公式は存在せず、振る舞いは k によって劇的に変わる（図 8.7.2）。$1 < k < 3$ では、$(0,1)$ から出発するどの数列も不動点（fixed point）$1 - 1/k$ に落ち着く。$k = 3$ でこの不動点は不安定になり、代わって周期 2 の軌道が現れる（これが STEP II 2002 Q5 の主題である。演習問題を参照）。$k = 1 + \sqrt{6} \approx 3.449$ で周期 2 の軌道は周期 4 の軌道に取って代わられ、さらに周期 8 の軌道へと続く。この周期倍分岐（period doubling）はどんどん速く起こるようになり、$k \approx 3.5699$ で周期が無限大となってカオスが始まる。カオス領域の内部には秩序の「窓」がある。最もはっきりしたものは $k = 3.83$ 付近にあり、周期 3 の軌道を含む。これが Section 8.8 の主題である。

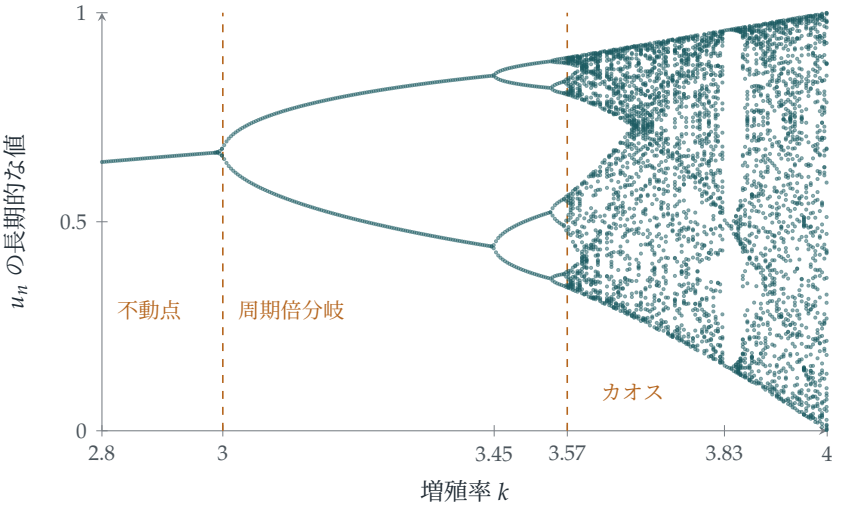


図 8.7.2　ロジスティック写像の分岐図（bifurcation diagram）。各 k について、$u_0 = 0.31416$ から写像を 300 回反復し、その次の 40 個の値をプロットした。ただ一つの不動点が $k = 3$ で周期 2 の軌道に分かれ、続いて周期 4、8、…と分かれていき、$k = 3.57$ 付近でカオスが始まる。$k = 3.83$ 付近の白っぽい縦の隙間が、安定な周期 3 の軌道を含む窓である。$k = 4$ では値が $[0, 1]$ 全体を埋め尽くす。

ファイゲンバウム定数

1975 年、ロスアラモスで研究していたファイゲンバウム（Mitchell Feigenbaum）は、プログラム可能なポケット電卓を使って、周期が倍になる k の値 $k_1 = 3$、$k_2 \approx 3.4495$、$k_3 \approx 3.5441$、$k_4 \approx 3.5644$、…を測定した。彼は、その間隔が一定の比で縮んでいくこと、

$$\frac{k_n - k_{n-1}}{k_{n+1} - k_n} \to 4.6692\ldots,$$

に気づいた。さらに驚くべきことに、同じ数 4.6692… が $x \mapsto k\sin(\pi x)$ についても、また山が一つで頂上が放物線のように丸い（**2 次の極大**（quadratic maximum）をもつ）他のあらゆる滑らかな写像についても現れることを発見した。この定数はそのクラス全体に対して**普遍的**（universal）なのである。頂上がもっと平らな山をもつ写像、たとえば $-x^4$ のような形の写像には、それ固有の普遍定数がある。この定数はその後、水滴がしたたる蛇口、加熱された流体、電子回路などの実験でも測定されている。その理由を説明するには相転移の物理学から借りてきた考え方が必要であり、1982 年になってようやく Oscar Lanford が計算機の助けを借りて厳密なものにした。

同じ技法が3度

小問 (ii) の置き換えは**共役**（conjugacy）の一例である。2つの写像は、変数変換によって一方が他方に変わるとき共役であるといい、そのとき両者はまったく同じ力学的振る舞いをもつ。この問題は、条件を満たすすべての2次写像が $k = 4$ のロジスティック写像と共役であり、そのロジスティック写像がさらに $u = \sin^2\theta$ を通して角の2倍化の変装したものであることを示している。（厳密には、この最後のつながりは**半共役**（semiconjugacy）である。θ と $\pi - \theta$ は同じ u を与えるので、この変数変換は1対1（one-to-one）ではない。ロジスティック写像が真の意味で共役になるのは**テント写像**（tent map）、すなわち $t \le \frac{1}{2}$ のとき $t \mapsto 2t$、$t \ge \frac{1}{2}$ のとき $t \mapsto 2 - 2t$ で定まる写像であり、そのときの変換 $u = \sin^2\frac{\pi t}{2}$ は $[0,1]$ 上で1対1である。）Section 2.8 では、$x = 2\cos\theta$ とおくと各ステップで角が2倍になることによって解ける $x \mapsto x^2 - 2$ に出会った。これも条件を満たしている（確かめてみよ）。つまり、これらはすべて同じ写像が姿を変えたものなのである。Section 8.8 では、この仲間の3番目のメンバーとして、直線からできた写像である**テント写像**が登場する。

思考のスキル

変数を変換して構造を見抜く

うまい置き換えをすると、複雑な規則が単純なものに変わることがある。問題を、すでに理解しているものに変えてくれる変数変換を探そう。

ここでは $u = \sin^2\theta$ によって2次写像が角の2倍化に変わり、1次の置き換えによって2次式の族全体が一つの写像にまとめられた。大学では、共役は中心的な道具である。力学系（dynamical systems）でも、線形代数でも（行列の対角化（diagonalising）とは、その行列が単純になる座標を選ぶことである）、群論（group theory）でも用いられる。

次の一歩

1. **ロジスティック写像の周期軌道。** STEP II 2002、問5（`step.maths.org/questions/02-s2-q5`）に取り組んでみよ。そのうえで、周期2の軌道が存在するのは $k > 3$ のときに限ることを示せ。

2. **2乗して2を引く。** $v_{n+1} = v_n^2 - 2$ が小問 (ii) の条件を満たすことを示せ（$p = -1$ として $-pv_n^2 + qv_n + r$ の形に書くこと）。α と β を求め、その答えが $v_n = 2\cos(2^n\phi)$

と一致することを確かめよ。

3 **周期 3 の軌道。**公式 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$ を用いて、$u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$ の周期 3 の軌道を求めよ。（**ヒント：**$\theta = \pi/7$ または $\theta = \pi/9$ を試してみよ。）周期がちょうど 3 である点はいくつあるか。

4 **失われる桁。**計算機は数を 2 進法でおよそ 53 桁まで記憶する。計算機で $u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$ を反復すると、およそ何ステップで計算値が真の数列とまったく無関係になるか。そうなったとき、計算された数列は役に立たないのだろうか。

さらに学ぶために

- **Robert May,** 「**Simple mathematical models with very complicated dynamics**」, *Nature* 261 (1976)。古典的な論文であり、今でも非常に読みやすい。
- **James Gleick,** ***Chaos: Making a New Science*** (Penguin)。メイ、ファイゲンバウム、そしてカオスの発見の物語である。
- **Steven Strogatz,** ***Nonlinear Dynamics and Chaos*** (CRC Press)、第 10 章。1 次元写像、ロジスティック写像、ファイゲンバウム定数を、大学 1 年生の水準で扱っている。
- **Ian Stewart,** ***Does God Play Dice?*** (Penguin)。カオスについての一般向けの解説書で、ロジスティック写像についての優れた章がある。

8.8 周期 3 ならばカオス

問題

STEP III 2025、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip`

導入

1975 年、リー（Tien-Yien Li）とヨーク（James Yorke）は『*American Mathematical Monthly*』に、数学史上もっとも有名な題名の一つをもつ論文を発表した。その題名は「Period three implies chaos」（周期 3 はカオスを導く）である。彼らは、区間からそれ自身への連続関数（continuous function）が周期（period）3 の点（ちょうど 3 ステップ後に初めて元に戻る初期値）をもつならば、その関数は**あらゆる**周期の点をもつことを証明した。1、2、4、5、17、1000、そのすべてである。この論文はまた、「カオス（chaos）」という言葉を数学に持ち込んだ。

2025 年に出題されたこの問題は、この定理を実際に手を動かしてたどる旅である。関数 $f(x) = 7 - 2|x|$ は 2 本の直線からできているので、すべてを正確に計算できる。その 2-サイクル（2-cycle）と 3-サイクルを求め、その過程で、一つのサイクルの存在がなぜ残りのサイクルの存在を強制するのかが見えてくる。

取りかかる前に

考えてみよう $y = 7 - 2|x|$ のグラフはどのような形か。直線 $y = x$ とどこで交わるか。区間（interval）$[-7, 7]$ をどこへ写すか。

グラフは頂点が $(0, 7)$ にある逆 V 字形で、傾きは ± 2 である。$y = x$ とは、$x = 7 - 2x$（ただし $x \geq 0$）のとき、すなわち $x = \frac{7}{3}$ で交わり、また $x = 7 + 2x$（ただし $x < 0$）のとき、すなわち $x = -7$ で交わる。これらが**不動点**（fixed point）である。そこから始めると、数列はまったく動かない。また $f(-7) = f(7) = -7$、$f(0) = 7$ であるから、f

は $[-7,7]$ をそれ自身の上へ写す。区間を 2 倍の長さに引き伸ばし、半分に折りたたむのである。

順を追って解く

段階 1　$\mathrm{f}\circ\mathrm{f}$ のグラフ

> **考えてみよう**　x が -7 から 7 まで動くとき、$\mathrm{f}(x)$ は -7 から 7 まで増加し、再び -7 まで減少する。では $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$ はどうなるか。

x が -7 から 0 まで動くとき、$\mathrm{f}(x)$ は $[-7,7]$ 全体を動くので、$\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$ は V 字をまるごと 1 つ描く。すなわち -7 から 7 まで上がり、再び下がる。x が 0 から 7 まで動くときも同じことが起こる。したがって $[-7,7]$ 上で $\mathrm{f}\circ\mathrm{f}$ のグラフは上下逆の W 字形になる。傾き ± 4 の 4 本の線分からなり、どれも高さ -7 と 7 の間を結び、$x = \pm\frac{7}{2}$（$\mathrm{f}(x)=0$ となる点）で山、$x=0$ で -7 までの谷をもつ（図 8.8.1）。$[-7,7]$ の外では、どちらのグラフも急激に下がっていく。

段階 2　$\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$ を解く

> **考えてみよう**　4 本の線分はそれぞれ対角線 $y=x$ とちょうど 1 回ずつ交わる。そのうち 2 つの交点はすでにわかっている。なぜか。入れ子になった絶対値を展開せずに、残りの 2 つを求めるにはどうすればよいか。

不動点 $\frac{7}{3}$ と -7 は当然 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$ を満たす。それ以外の解 p は、$q = \mathrm{f}(p) \neq p$ として 2-サイクル $p \to q \to p$ に属する。符号で場合分けしてみよう。p と q がともに正ならば $q = 7-2p$、$p = 7-2q$ であり、これから $p = q = \frac{7}{3}$ となってしまう。ともに負ならば、同じ議論で -7 となる。したがって一方は正、他方は負であり、$p > 0 > q$ としてよい。このとき

$$q = 7 - 2p, \qquad p = 7 + 2q.$$

よって $p = 7 + 14 - 4p$ より $p = \frac{21}{5}$、$q = -\frac{7}{5}$ であり、確かに $q<0$ を満たす。

$[-7,7]$ の外には解はない。実際、$x > 7$ のとき $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = 21 - 4x < x$ であり、$x < -7$ のとき $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = 21 + 4x < x$ である。したがって 4 つの解は

$$x = -7, \quad -\frac{7}{5}, \quad \frac{7}{3}, \quad \frac{21}{5}. \qquad \blacksquare$$

である。数列がちょうど周期 2 をもつのは、$a = \frac{21}{5}$ または $a = -\frac{7}{5}$ のときである。（不動点では数列は定数であり、周期は 1 である。）

段階 3　遅れてサイクルに到着する

$a = \frac{28}{5}$ とすると、$u_1 = 7 - \frac{56}{5} = -\frac{21}{5}$、$u_2 = 7 - \frac{42}{5} = -\frac{7}{5}$、$u_3 = 7 - \frac{14}{5} = \frac{21}{5}$、$u_4 = -\frac{7}{5}$、以下同様である。$u_2$ 以降の数列は 2-サイクルであるが、$u_0 = \frac{28}{5}$ と $u_1 = -\frac{21}{5}$ はサイクルに含まれない。 ■

考えてみよう $\frac{28}{5}$ を自分で見つけるにはどうすればよかったか。逆向きに考えてみよう。f によって $-\frac{7}{5}$ に写される数はどれか。

$f(x) = -\frac{7}{5}$ は $|x| = \frac{21}{5}$ を意味するので、$x = \pm\frac{21}{5}$ である。一方はサイクルに含まれ、もう一方の $-\frac{21}{5}$ がサイクルへの入口となる。次に $f(x) = -\frac{21}{5}$ は $|x| = \frac{28}{5}$ を意味する。f は 2 対 1 の写像なので、$(-7,7)$ のすべての点は 2 つの逆像（preimage）をもち、したがってどのサイクルにも、そこへ流れ込む初期値の木が付随している。

段階 4 3-サイクル

手を止めて、やってみよう $a = 1$ と $a = -\frac{7}{9}$ から始まる数列を計算せよ。

$a = 1$ からは $1 \to 5 \to -3 \to 1$ となる。$a = -\frac{7}{9}$ からは $-\frac{7}{9} \to \frac{49}{9} \to -\frac{35}{9} \to -\frac{7}{9}$ となる。どちらも 3-サイクルである。

考えてみよう $f(f(f(x))) = x$ は解をいくつもちうるか。段階 1 と同様に、そのグラフの形を考えよ。

段階 1 の議論を繰り返すと、f をもう一度適用するたびに線分の本数は 2 倍になる。したがって $[-7,7]$ 上で $f \circ f \circ f$ のグラフは、傾き ± 8 の 8 本の線分からなるジグザグであり、どの線分も -7 から 7 までの高さ全体にわたる（図 8.8.2）。各線分は対角線とちょうど 1 回交わるので、$[-7,7]$ にはちょうど 8 個の解があり、（前と同様に）その外には解はない。すでに 8 個、すなわち 2 つの不動点と 2 つの 3-サイクルの 6 点が見つかっている。よって解は

$$x = -7,\ \frac{7}{3},\ 1,\ 5,\ -3,\ -\frac{7}{9},\ \frac{49}{9},\ -\frac{35}{9}. \qquad ■$$

である。

段階 5 3-サイクルへの遅れた到着

サイクル $1 \to 5 \to -3$ から逆向きにたどる。u_3 はサイクルに含まれるが u_2 は含まれないようにしたい。1 の逆像は $|x| = 3$ を満たすので $x = \pm 3$ であり、-3 はサイクルに含まれるから $u_2 = 3$ とする。3 の逆像は $|x| = 2$ を満たすので、$u_1 = 2$ とする。2 の逆像は $|x| = \frac{5}{2}$ を満たすので、$u_0 = \frac{5}{2}$ とする。すると

$$\frac{5}{2} \to 2 \to 3 \to 1 \to 5 \to -3 \to 1 \to \cdots,$$

となり、$\frac{5}{2}$、2、3 のいずれもサイクルに含まれない。よって $a = \frac{5}{2}$ が条件を満たす。■

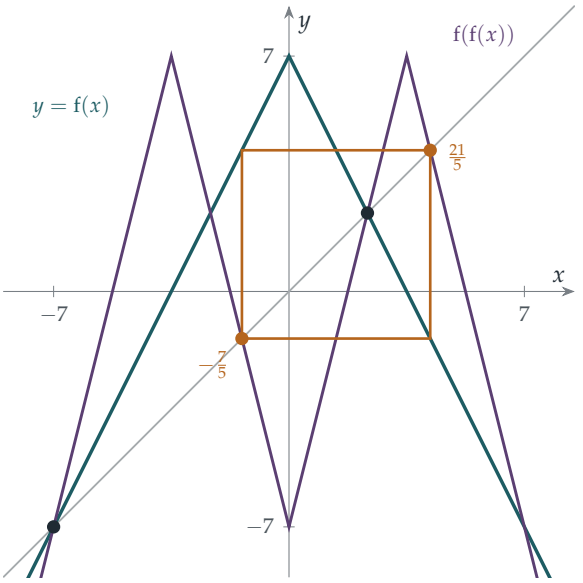


図 8.8.1　$y = \mathrm{f}(x)$（青緑）、$y = \mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$（紫）、$y = x$（灰色）のグラフ。紫のグラフは対角線と 4 回交わる。不動点 -7 と $\frac{7}{3}$（黒）、および 2-サイクル $\frac{21}{5} \leftrightarrow -\frac{7}{5}$（琥珀色）である。琥珀色の正方形は 2-サイクルの**クモの巣図**（cobweb）である。f のグラフまで縦に進み、対角線まで横に進み、これを繰り返す。

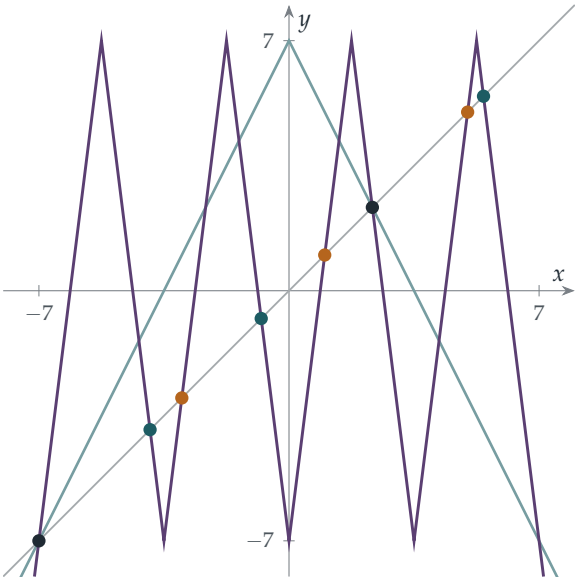


図 8.8.2　$[-7,7]$ 上の $y = f(f(f(x)))$ のグラフ（紫）は、傾き ± 8 の 8 本の線分からなるジグザグであり、各線分は対角線と 1 回ずつ交わる。8 つの交点は、2 つの不動点（黒）、3-サイクル $1 \to 5 \to -3$（琥珀色）、3-サイクル $-\frac{7}{9} \to \frac{49}{9} \to -\frac{35}{9}$（青緑）である。

振り返り

- **形で数える。** 入れ子になった絶対値を展開する代わりに、グラフの線分の本数を数えた。これによって探すべき解の個数がわかり、したがってすべて見つけ終えたときにそれがわかった。
- **サイクルの構造を利用する。** $f(f(x)) = x$ の解は不動点か、2 つ組で現れる。$f(f(f(x))) = x$ の解は不動点か、3 つ組で現れる。
- **逆向きに考える。** (i)(d) と (ii)(c) の「遅れた到着」は逆像によって構成した。

背後にある数学

あらゆる長さのサイクル

段階 4 の数え方は、何ステップの場合にも通用する。f を n 回適用したものを f^n と書く。$[-7,7]$ 上で f^n のグラフは、高さ全体にわたる 2^n 本の線分からなるので、$f^n(x) = x$ はちょうど 2^n 個の解をもつ。そのうちいくつかは n を割り切るより短い周期 d をも

つが、各 d についてそれらは高々 2^d 個であり、

$$2^n > 2^{n/2} + 2^{n/3} + \cdots + 2^1 \quad (n \text{ の約数 } d < n \text{ についての和})$$

が成り立つ。なぜなら、n より小さい約数はすべて $n/2$ 以下であり、$2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{\lfloor n/2 \rfloor} < 2^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} \leq 2^n$ だからである。したがって、すべての n について周期がちょうど n である点が存在する。この関数はあらゆる長さのサイクルをもつ。

なぜ周期 3 がすべてを強制するのか

リーとヨークの定理によれば、これは私たちの関数に特有のことではない。区間からそれ自身への連続関数 g が 3-サイクルをもてば、**どのような**ものであっても、あらゆる長さのサイクルをもつ。証明には中間値の定理（intermediate value theorem）しか使わない。そして私たちの 3-サイクルが、その筋道を示してくれる。

考えてみよう サイクル $1 \to 5 \to -3$ の点の間にある 2 つの区間を $I_1 = [-3, 1]$、$I_2 = [1, 5]$ とする。f はそれぞれをどこへ写すか。

I_2 上で f は $f(1) = 5$ から $f(5) = -3$ まで減少するので、$f(I_2) = [-3, 5] = I_1 \cup I_2$ である。I_1 上で f は $f(-3) = 1$ から $f(0) = 7$ まで増加し、$f(1) = 5$ まで減少するので、$f(I_1) = [1, 7]$ であり、これは I_2 を含む。使ったのはサイクルの 3 点だけであることに注意しよう。$a < b < c$ である 3-サイクル $a \to b \to c$ をもつ連続関数はどれも、同じように区間を覆う。どの区間がどの区間を覆うかを図にまとめることができる（図 8.8.3）：

$$I_1 \to I_2, \qquad I_2 \to I_1, \qquad I_2 \to I_2.$$

定理は次の 2 つの事実から従う。どちらも中間値の定理の帰結である。

- $g(I) \supseteq I$ ならば、g は I 内に不動点をもつ。（$g(x) - x$ に中間値の定理を適用すればよい。）
- $g(I) \supseteq J$ ならば、$g(I') = J$ をちょうど満たす、より小さい閉区間 $I' \subseteq I$ が存在する。

周期 n の点を見つけるには、図の中でループ $I_2 \to I_2 \to \cdots \to I_2 \to I_1 \to I_2$ をたどる。I_2 の中で $n-1$ ステップ進み、1 ステップだけ I_1 に出て戻ってくるのである。2 つ目の事実を繰り返し使うと、I_2 を縮めて、軌道がこの遍歴（itinerary）に従う初期値の区間を得ることができ、g^n はその区間を I_2 全体の上へ写す。1 つ目の事実から、$g^n(x) = x$ を満たし、ステップ $n-1$ でのみ I_1 を訪れる点 x が得られる。その周期は n より小さくはなりえない。もしそうなら、I_1 への訪問がもっと早く繰り返されるはずだからである。（I_1 と I_2 は点 1 を共有しているので、一つだけ微妙な点がある。それが問題を起こさないことの確認は演習とする。）

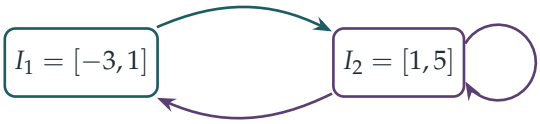


図 8.8.3 3-サイクルの被覆図（covering diagram）。ある区間から別の区間への矢印は、1つ目の区間の像が2つ目の区間を含むことを意味する。図の中のどのループも関数のサイクルを与える。ループ $I_2 \to I_2$ は不動点を、$I_1 \to I_2 \to I_1$ は2-サイクルを与え、I_2 のループを $n-1$ 回まわってから I_1 を訪れると、長さ n のサイクルが得られる。

シャルコフスキーの定理

リーとヨークが最初だったわけではない。1964年、ウクライナの数学者シャルコフスキー（Oleksandr Sharkovskii）は、はるかに完全な結果をすでに証明していた。それはロシア語で『*Ukrainian Mathematical Journal*』に発表され、西側では10年間知られていなかった。正の整数を次のように並べる。

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots,\ \ 2\cdot 3,\ 2\cdot 5,\ \ldots,\ \ 2^2\cdot 3,\ 2^2\cdot 5,\ \ldots,\ \ \ldots,\ \ 2^3,\ 2^2,\ 2,\ 1 :$$

まず3以上の奇数、次に奇数の2倍、次に奇数の4倍、以下同様に続き、最後に2の累乗を減少する順に並べる。シャルコフスキーの定理によれば、区間上の連続関数が長さ m のサイクルをもてば、この並びで m より後にくるすべての長さのサイクルをもつ。3が先頭にあるので、周期3はあらゆる周期を導く。しかもこの定理は最良である。すなわち、どの m についても、長さ m のサイクルをもち、並びでそれより前にくる長さのサイクルをもたない関数が存在する。末尾の2の累乗は、Section 8.7 のロジスティック写像における周期倍分岐のカスケード（period-doubling cascade）そのものであり、3-サイクルはそこで $k = 1+\sqrt{8}$ において現れる。

テント写像とロジスティック写像

$[0,1]$ を $[-7,7]$ の上へ写す置換 $x = 14y - 7$ を行う。簡単な計算により、f はテント写像（tent map）

$$T(y) = \begin{cases} 2y & 0 \le y \le \tfrac{1}{2}, \\ 2 - 2y & \tfrac{1}{2} \le y \le 1, \end{cases}$$

になることがわかる。さらに置換 $u = \sin^2(\pi y/2)$ を行うと、テント写像はロジスティック写像（logistic map）$u \mapsto 4u(1-u)$ に変わる。つまりこの問題の関数は、Section 8.7 のカオス的なロジスティック写像をまっすぐに伸ばしたものである。$\mathrm{f}^3(x) = x$ の8個の解は、$[0, \tfrac{\pi}{2}]$ における $\sin^2(8\theta) = \sin^2\theta$ の8個の解に対応する。

思考のスキル

中間値の定理による存在証明

解が存在することを示すのに、いつもそれを見つける必要があるわけではない。連続関数の符号が変わること、あるいはある区間がそれ自身を覆うように写されることを示せばよい。

この問題では、すべての解を計算することができた。しかしリーとヨークの定理は、まったく計算できない関数にも適用でき、中間値の定理と、どの区間がどの区間を覆うかを表す図だけを使って、無限個のサイクルの存在を証明する。大学では、このような構成を伴わない存在証明という議論のスタイルが、解析学（中間値の定理そのもの）、位相幾何学（不動点定理）、そして力学系の至るところに現れる。

次の一歩

1. **4-サイクル。** 被覆図を使って、f の 4-サイクルがどこにあるはずかを予想せよ（I_2 で 3 ステップ、I_1 で 1 ステップ）。次にそれを正確に求めよ。（**ヒント：**このサイクルは 3 つの正の点と 1 つの負の点をもつ。4 つの一次方程式を書き下せ。）

2. **微妙な点。** 周期 3 が周期 n を導くことの証明において、$n \geq 4$ のとき、得られた点 x が点 1（あるいは元の 3-サイクルのどの点）にもなりえない理由を説明せよ。

3. **周期 3 なしの周期 5。** $g(1) = 3$、$g(3) = 4$、$g(4) = 2$、$g(2) = 5$、$g(5) = 1$ を満たし、これらの点を直線で結んだ $[1,5]$ 上の連続関数のグラフをかけ。区間 $[1,2]$、$[2,3]$、$[3,4]$、$[4,5]$ についてその被覆図をかけ。長さ 3 のループは見つかるか。（シャルコフスキーの定理によれば、3-サイクルは存在しない。）

4. **テント写像。** $x = 14y - 7$ によって f がテント写像になることを確かめよ。次に、テント写像は y を 2 進法で書いたものを 2 倍し、先頭の桁が 1 のときはすべての桁を反転させることを示し、これを用いてその 3-サイクルを求めよ。

さらに学ぶために

- **Tien-Yien Li & James Yorke, “Period three implies chaos”**, *American Mathematical Monthly* 82 (1975). 短く、中間値の定理を知っていれば読める。
- **Robert Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*** (CRC Press). 学部生向

けに書かれており、テント写像、ロジスティック写像、シャルコフスキーの定理を完全な証明つきで扱っている。

- **Keith Burns & Boris Hasselblatt, "The Sharkovsky theorem: a natural direct proof"**, *American Mathematical Monthly* 118 (2011). 被覆図を用いた現代的な証明。

この章で学んだこと

この章は、ほとんどの微分方程式（differential equation）は解くことができず、それでも理解することこそが腕の見せどころである、という話から始まった。そこで三つの問いを立てた。現在は未来を決定するのか。解かずに何がわかるのか。長い時間が経つと何が起こるのか。この章の八つの問題が示したことを以下にまとめる。

1. 現在は未来を決定するのか

たいていはそうであるが、いつもではない。Section 8.1 では、方程式 $(y')^2 = 4y$ が x 軸上のすべての点を通る解を無数にもっていた。解は好きなだけ $y = 0$ にとどまり、その後に離れていくことができたのである。原因は平方根にあった。平方根は 0 で傾きが無限大になり、ピカール–リンデレーフの定理（Picard–Lindelöf theorem）のリプシッツ条件（Lipschitz condition）を満たさなくなる。同じ仕組みによって、水の漏れるバケツを見てもいつ空になったかはわからないことが説明でき、古典力学における決定論（determinism）をめぐるパズルであるノートンのドーム（Norton's dome）の背後にも、この仕組みがある。

未来が決定されている場合でも、それが予測できるとは限らない。Section 8.7 のロジスティック写像（logistic map）には $u_n = \sin^2(2^n\theta)$ という厳密な式があるが、それでも一歩ごとに初期角 θ の誤差は 2 倍になり、初期値の誤差も平均して同じ速さで増大する。原理的に決定されていることと、実際に予測できることとは別である。

2. 解かずに何がわかるのか

非常に多くのことがわかる。

- **エネルギー。** Section 8.2 では、方程式に y' を掛けることで増加しえない量が得られ、それによって誰にも解けない方程式の解を評価することができた。このような量はリャプノフ関数（Lyapunov function）とよばれ、安定性（stability）を証明するための主要な道具である。
- **平衡点と安定性。** Section 8.3 では、増加率の符号から魚の個体数の行く末が予測でき、ある閾値を超えて漁獲すると突然の崩壊が起こることがわかった。

- **適切な座標。** Section 8.4 では、極座標（polar coordinates）によって連立系が r についての一つの方程式になり、すべての解が円に巻きついていくことがわかった。Section 8.5 では、対称性によって追いかけ合う 4 匹の犬を 1 匹の問題に帰着させ、割り算で時間を消去することで、それらの軌跡の形が得られた。
- **恒等式から得られる構造。** Section 8.6 では、ロンスキアン（Wronskian）によって、どの解も一度も積分することなく、方程式の解どうしが直交する（orthogonal）ことが示された。
- **数え上げと被覆。** Section 8.8 では、グラフの区分を数えることですべての周期軌道が見つかり、中間値の定理（intermediate value theorem）によってあらゆる長さの周期軌道の存在が証明された。

3. 長い時間が経つと何が起こるのか

この章では、あらゆる種類の長期的な振る舞いが現れた。解は安定な平衡点に落ち着いたり（Section 8.3）、繰り返す周期軌道に近づいたり（Section 8.4）、有限時間で一点に渦を巻いて吸い込まれたり（Section 8.5）、カオス的に振る舞ったりした（Section 8.7）。ロジスティック写像では、ただ一つのパラメータによって系はこれらすべてを経ていく。まず不動点、次にファイゲンバウム（Feigenbaum）の普遍定数に支配される周期倍分岐（period doubling）の連鎖、そして最後にカオスであり、その中には 3 周期軌道のような秩序の窓が現れる。さらに Section 8.8 では、ひとたび 3 周期軌道が現れれば、あらゆる長さの周期軌道が存在しなければならないことが示された。これは、整数に対するシャルコフスキー（Sharkovskii）の順序への第一歩である。

4. 微分方程式と力学系のための道具箱

手法	使った場面
特異解を探す	解の非一意性（8.1）
増加しえない量	解の評価（8.2）
増加率の符号	漁獲（8.3）
対称性に合った座標	リミットサイクル（limit cycle）（8.4）、追跡（8.5）
置換による線形化	ベルヌーイ方程式（Bernoulli equation）（8.4）
ロンスキアン	直交性（8.6）
共役（conjugacy）	ロジスティック写像（8.7）
数学的帰納法（induction）	$u_n = \sin^2(2^n\theta)$（8.7）
グラフの区分を数える	f^n の周期軌道（8.8）
中間値の定理	周期 3（8.8）

この先へ

- エネルギーと保存則は、Section 10.1 をはじめとする力学の章で再び登場する。
- 未知関数が複数ある線形微分方程式は固有ベクトル（eigenvector）によって解かれ、Section 11.2 で振動系を支配する。初等関数（elementary function）では解けない非線形の振り子は Section 11.3 で扱う。
- 写像を反復して不動点を求めることで、Section 12.15 では家系の姓が途絶えるかどうかが決まる。また、ランダムな数列の長期的な振る舞いは Section 12.16 の主題である。

大学入学前にさらに先へ進みたい人へ

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（非線形力学とカオス）：力学系の最初の一冊として最良の本であり、応用例と図が豊富である。この本に基づく Strogatz の講義の録画がオンラインで無料公開されている。
- **James Gleick, *Chaos: Making a New Science***（カオス：新しい科学をつくる）：カオスがどのように発見されたかの物語である。
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***（応用と歴史的注釈つき微分方程式）：歴史的な話題に富んだ、定評ある入門講義である。
- **Robert Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems***（カオス力学系入門）：反復写像を、証明つきで大学 1 年生の水準で扱う。

ラプラス（Laplace）は、現在を正確に知っていれば未来全体を計算できると考えた。この章では、その夢がどこで終わるのかを見てきた。一意性は成り立たないことがある。そして一意性が成り立つ場合でも、カオスはごくわずかな不確かさを増幅し、ついには予測を不可能にしてしまう。しかし同時にこの章は、式がなくても多くのことが理解できることも示した。解の評価、平衡点、周期軌道とその安定性、そしてカオスそのものの構造である。「方程式を解く」から「解を理解する」へと移ることは、大学の数学の講義が求める考え方の転換のうちで、最も重要なものの一つである。

「次の一歩」の解答

ここに載せるのは完全な解答ではなく、簡潔な答えとヒントである。結果と鍵となるステップを示しているので、自分の解答を確かめるのに使ってほしい。答えを見る前に、それぞれの問題にきちんと取り組むこと。

8.1 解が一意でないとき

1. $y = v^2$ とおくと $2vv' = \alpha v - \beta v^2$ となるので、$v' = \frac{1}{2}(\alpha - \beta v)$ であり、$y_1 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta t/2}\right)^2$ である。$y = v^3$ とおくと $v' = \frac{1}{3}(\alpha - \beta v)$ であり、$y_1 = \frac{\alpha^3}{\beta^3}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta t/3}\right)^3$ である。定数関数 $y = 0$ は両辺をともに 0 にする。導出の途中で v で割ったときに、この解が失われたのである。

2. $2\sqrt{h} = 2\sqrt{h_0} - kt$ より $h = \left(\sqrt{h_0} - \frac{1}{2}kt\right)^2$ であり、バケツは $T = \frac{2\sqrt{h_0}}{k}$ で空になる。$h \equiv 0$ と、$t \le T$ で $h = \frac{k^2}{4}(T - t)^2$、$t \ge T$ で $h = 0$ とする関数は、どちらも方程式を満たし、T 以降は 0 である。空のバケツを見ても、それがいつ空になったのかはわからないのである。

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y\mathrm{e}^{-2x}) = (y' - 2y)\mathrm{e}^{-2x} = 0$ より $y = C\mathrm{e}^{2x}$ であり、$y(0) = 0$ から $C = 0$ が従う。関数 $2y$ はリプシッツ連続（Lipschitz）である（変化量は高々 $2|y_1 - y_2|$）。一方、$2\sqrt{y}$ は 0 で傾きが無限大になる。

4. 任意の $b \le 0 \le a$（$b = -\infty$ や $a = \infty$ も許す）に対して、$x < b$ で $y = (x - b)^3$、$b \le x \le a$ で $y = 0$、$x > a$ で $y = (x - a)^3$ とすればよい。$a = b = 0$ の場合が $y = x^3$ である。

8.2 解かずに評価する

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((y')^2 + y^2\right) = 2y'(y'' + y) = 0$ より $(y')^2 + y^2 = A^2$ となり、$|y| \le A$ である。厳密解は $A\cos x$ である。

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\theta')^2 - 2\cos\theta\right) = 2\theta'(\theta'' + \sin\theta) = 0$ である。静止状態から始めると $(\theta')^2 = 2(\cos\theta - \cos\theta_0) \ge 0$ なので、$\cos\theta \ge \cos\theta_0$ である。$|\theta_0| < \pi$ ならば、連続性により θ は $[-|\theta_0|, |\theta_0|]$ にとどまる。$|\theta_0| = \pi$ のときは、振り子（pendulum）は真上を向いた状態で釣り合い、そのままとどまる。$|\theta_0| > \pi$、たとえば $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$ ならば、$\theta''(0) = -\sin\frac{3\pi}{2} = 1 > 0$ なので、θ は増加し始める。このとき振り子の実

際の角度は $\theta_0 - 2\pi = -\frac{\pi}{2}$ であり、そこから測って $\pm\frac{\pi}{2}$ の間を振れるのである。

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((y')^2 + y^2\right) = 2y'(y'' + y) = -4k(y')^2 \leq 0$ である。実際に 0 に収束（tend to zero）するが、単調性（monotonicity）だけではこれは示せない。たとえば明示的な解が必要であり、その指数 $-k \pm \sqrt{k^2 - 1}$ の実部は負である。

4. $(y')^2 - \frac{1}{2}y^4$ は定数であり、$-\frac{1}{2}$ に等しい。これから $(y')^2 = \frac{1}{2}(y^4 - 1)$ が得られるが、これは何の上界も与えない。「ポテンシャル」$-\frac{1}{2}y^4$ には y を閉じ込める井戸がなく、実際 y は有限時間で発散（blow up）する。

8.3 個体群の収穫

1. 方程式は $x' = \alpha^2 - (x - K)^2$ であり、これは $y' = y(2\alpha - y)$ となる。$w = \frac{1}{y}$ とおくと $w' = 1 - 2\alpha w$ なので、$w = \frac{1}{2\alpha} + Ce^{-2\alpha t}$ である。$y(0) < 0$ ならば $w(0) < 0 < \frac{1}{2\alpha}$ なので、w は有限時間で 0 を通過し、$y \to -\infty$ となる。x はそれより前に 0 に達する。

2. $z = x - K$ とおくと $z' = -(z^2 + \beta^2)$ なので、$\tan^{-1}\frac{z}{\beta} = \tan^{-1}\frac{K}{\beta} - \beta t$ である。個体数は $t = \frac{2}{\beta}\tan^{-1}\frac{K}{\beta}$ で 0（$z = -K$）に達する。

3. $x' = x(2K - h - x)$ の平衡点（equilibrium）は 0 と $2K - h$ である。$h < 2K$ のとき、これは正の環境収容力（carrying capacity）をもつロジスティック方程式（logistic equation）であり、正の解はすべて $2K - h$ に収束する。漁獲量は個体数が減るにつれて減るので、個体数を 0 に追い込むことは決してない。

4. $x = K + K\tanh Kt$ であり、$\tanh Kt = \frac{1}{2}$ より $t = \frac{1}{K}\tanh^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\ln 3}{2K}$ である。

8.4 渦を巻いて円に近づく

1. 曲線と動径のなす角 ψ は $\tan\psi = \frac{r}{\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta} = -1$ を満たし、これはすべての点で同じである。つまり、曲線はすべての半直線と 45° で交わる。

2. $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(x^2 + y^2) = r\,\mathrm{d}r$ である。また、$x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = r\cos\theta(\sin\theta\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta) - r\sin\theta(\cos\theta\,\mathrm{d}r - r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta) = r^2\,\mathrm{d}\theta$ である。

3. $s = r^2$ とおくと $\dot{s} = 2s(1 - s)$ というロジスティック方程式になるので、任意の $s(0) > 0$ に対して $s \to 1$ となる。直交座標（Cartesian coordinates）で書くと、$\dot{x} = x(1 - x^2 - y^2) - y$、$\dot{y} = y(1 - x^2 - y^2) + x$ である。

4. $\dot{r} = r(r - 1)(r - 2)$、$\dot{\theta} = 1$ である。0 と 1 の間では $\dot{r} > 0$、1 と 2 の間では $\dot{r} < 0$、2 より外側では $\dot{r} > 0$ である。したがって $r = 1$ は吸引的であり、$r = 2$ は反発的である。

8.5 グレイハウンドを追うグレイハウンド

1. 対称性により、犬たちは常に正方形をなす。A は AB に沿って速さ v で走るので、距離を v の割合で縮める。B は AB に垂直な BC に沿って走るので、1 次の範囲では距離を変えない。したがって AB はちょうど v の割合で s から 0 まで縮み、それにかかる時間は $\frac{s}{v}$ である。

2. $r = \lambda e^{-\sqrt{3}\theta}$ である。距離は $v - v\cos 120^\circ = \frac{3}{2}v$ の割合で縮むので、時間 $\frac{2s}{3v}$ 後に出会い、それぞれ $\frac{2s}{3}$ だけ走る（これは $n = 3$ のときの $\frac{s}{2\sin^2(\pi/n)}$ と一致する）。

3. 1 周するごとに r は $e^{-2\pi} \approx \frac{1}{535}$ 倍になる。1 周後には約 19 cm、2 周後には約 0.35 mm となるので、2 周で十分である。

4. 2 匹の犬は互いに向かってまっすぐ走り、時間 $\frac{s}{2v}$ 後に中央で出会う。このとき公式は破綻する。$\tan\frac{\pi}{2}$ は無限大であり、これはまったく回転しないという事実に対応している。

8.6 量子振動子

1. これは（面倒ではあるが）直接の微分計算である。あるいは問 4 から従う。$2\lambda = \omega$ のとき、$\int y_0 y_2 = \int (2\omega x^2 - 1)e^{-\omega x^2}\,dx = 2\omega \cdot \frac{1}{2\omega}\sqrt{\frac{\pi}{\omega}} - \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} = 0$ である。

2. $y'' = (4\lambda^2 x^2 - 2\lambda)y$ なので、方程式が成り立つには $4\lambda^2 = \omega^2$ かつ $2\lambda = (2\nu + 1)\omega$ が必要である。（減衰するように）$\lambda = \frac{\omega}{2} > 0$ とすると、$\nu = 0$ である。

3. $\frac{d}{dx}(y_m y_n' - y_n y_m') = y_m y_n'' - y_n y_m'' = (m^2 - n^2) y_m y_n$ である。これを 0 から π まで積分する。y_m と y_n は両端で 0 になるので左辺は 0 となり、また $m^2 \neq n^2$ である。

4. $c = (2n + 1)\omega$ とおくと、$y_n'' = (\omega^2 x^2 - c)y_n$ である。$z = \omega x y_n - y_n'$ を 2 回微分し、この式（とその導関数）を用いると $z'' - \omega^2 x^2 z = -(c + 2\omega)z$ が得られ、$c + 2\omega = (2n + 3)\omega$ である。$y_0 = e^{-\omega x^2/2}$ から、$2\omega x e^{-\omega x^2/2}$、続いて $2\omega(2\omega x^2 - 1)e^{-\omega x^2/2}$ が得られ、これらはそれぞれ y_1 と y_2 の定数倍である。

8.7 解けるカオス

1. (i) 数学的帰納法（induction）による。$0 < x < 1$ ならば $0 < x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$ なので、$0 < kx(1 - x) < 1$ である。(ii) $a = ka(1 - a)$ より $k = \frac{1}{1-a}$ である。(iii) $x_1 = ka(1 - a) = ab$ とすると、条件 $x_2 = a$ は $kab(1 - ab) = a$ となる。$k = \frac{b}{1-a}$ を用いると、これは $ab^3 - b^2 + 1 - a = 0$ となる。根 $b = 1$ は不動点（fixed point）$(x_1 = a)$ に対応するので、これを因数としてくくり出すと $ab^2 + (a - 1)b + (a - 1) = 0$ となる。これを b について解けば、$k = \frac{b}{1-a}$ が得られる。同じことを別の形で言えば、2-周期軌道（2-cycle）の 2 点は $k^2x^2 - k(k + 1)x + (k + 1) = 0$ の根であり、その判別式（discriminant）$k^2(k + 1)(k - 3)$ は $k > 3$ のときに限り正である。

2. $p=-1$、$q=0$、$r=-2$ のとき、$4pr=8=8+2q-q^2$ である。係数を比較すると $\alpha=\frac{4}{p}=-4$、$\beta=\frac{q-4}{2p}=2$ となるので、$v_n=2-4\sin^2(2^n\theta)=2\cos(2^{n+1}\theta)$ であり、これは $\phi=2\theta$ とした $2\cos(2^n\phi)$ である。

3. $u_3=u_0$ となるには $\sin^2 8\theta=\sin^2\theta$ が必要なので、$8\theta=\pm\theta+k\pi$ である。$\theta=\frac{\pi}{7}$ のとき、周期軌道は $\sin^2\frac{\pi}{7}\to\sin^2\frac{2\pi}{7}\to\sin^2\frac{4\pi}{7}\to\sin^2\frac{8\pi}{7}=\sin^2\frac{\pi}{7}$ である。$\theta=\frac{\pi}{9}$ のときは $\sin^2\frac{\pi}{9}$、$\sin^2\frac{2\pi}{9}$、$\sin^2\frac{4\pi}{9}$ である。写像 $u\mapsto u_3$ は $2^3=8$ 個の不動点をもつ。そのうち 2 個（0 と $\frac{3}{4}$）は元の写像自身の不動点なので、ちょうど周期 3 の点が 6 個残る。すなわち、3-周期軌道が 2 つある。

4. 各ステップで θ は 2 倍になり、そのたびに精度が 2 進数で 1 桁ずつ失われるので、およそ 50 ステップ後には、計算値は真の値と何の関係もなくなる。それでも計算値は無意味ではない。計算された数列は、わずかに異なる初期値から出発した真の軌道（orbit）の近くにとどまる（**シャドーイング性**（shadowing property））ので、その統計的性質は依然として正しいのである。

8.8 周期 3 ならばカオス

1. a、b、$c>0$、$d<0$ とすると、$b=7-2a$、$c=7-2b$、$d=7-2c$、$a=7+2d$ である。これを解くと $17a=49$ となるので、周期軌道は $\frac{49}{17}\to\frac{21}{17}\to\frac{77}{17}\to-\frac{35}{17}\to\frac{49}{17}$ であり、3 点が $I_2=[1,5]$ に、1 点が $I_1=[-3,1]$ に属する。

2. 見つかった点の遍歴（itinerary）は $I_2,I_2,\ldots,I_2,I_1$（I_2 にいるステップが $n-1\geq 3$ 回）である。周期軌道 $1\to5\to-3$ はこの遍歴をたどれない。-3 は I_2 に属さないので、1（2 番目の像が -3）も、5（最初の像が -3）も、-3 自身も、その点ではありえない。

3. 被覆図（covering diagram）は、$[1,2]\to[3,4],[4,5]$、$[2,3]\to[4,5]$、$[3,4]\to[2,3],[3,4]$、$[4,5]\to[1,2]$ である。長さ 3 のループは $[3,4]\to[3,4]\to[3,4]$ ただ 1 つであり、これが与えるのは不動点であって、3-周期軌道ではない。

4. $x=14y-7$ とおくと $\frac{f(x)+7}{14}=1-|2y-1|$ となり、これはテント写像（tent map）である。2 倍すると 2 進数の各桁が左にずれる。押し出された桁が 1 ならば結果は $2-2y$ となり、これは残りの桁を反転させる。3-周期軌道は $\frac{2}{7}\to\frac{4}{7}\to\frac{6}{7}$ と $\frac{2}{9}\to\frac{4}{9}\to\frac{8}{9}$（すなわち $x=-3,1,5$ と $x=-\frac{35}{9},-\frac{7}{9},\frac{49}{9}$）であり、2 進数では $\frac{2}{7}=0.\overline{010}$、$\frac{2}{9}=0.\overline{001110}$ である。

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.