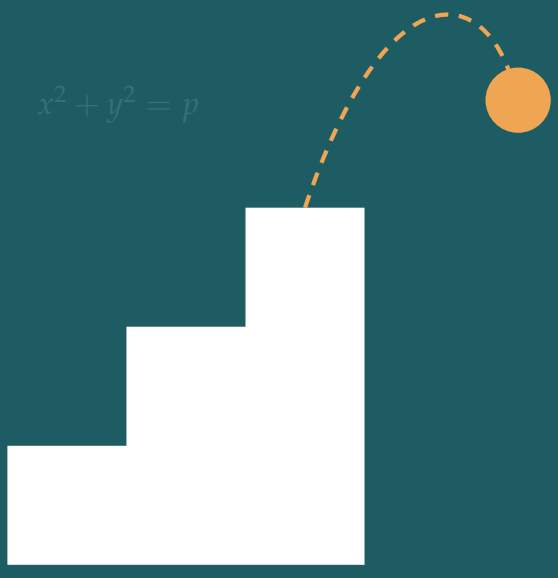
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

第 7 章

線形代数と幾何学



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

第 7 章

線形代数と幾何学

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

第 7 章：線形代数と幾何学

これは *Beyond STEP* 全 13 章のうちの第 7 章である。本書全体、各章単独の PDF、各節の印刷用ワークシート、そしてすべての STEP の問題の詳しい解答は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、`github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty` への issue として歓迎する。

章

7

線形代数と幾何

行列（*matrix*）は数の表ではない。それは空間の変換であり、独自の生命をもっている。

この章の内容

7.1 行列では成り立たない法則 STEP II 1993

7.2 向きを変えずに伸ばす STEP III 1990

7.3 行列式を行列式たらしめるもの STEP II 2019

7.4 もとに戻る行列 STEP II 2020

7.5 三次元の回転 STEP III 2022

7.6 双曲的回転と相対性理論 STEP III 1991

7.7 決して変わらない量 STEP III 2024

7.8 四つの平方数 STEP III 1994

7.9 正多面体はただ五つ STEP III 1999

A 演習問題の答え p. 65

空間の変換

> われわれは基底を用いずに考え、基底を用いずに書く。だが、いざという段になると、研究室の扉を閉めて猛烈な勢いで行列の計算をするのだ。
>
> — アーヴィング・カプランスキー（Irving Kaplansky）、自身とポール・ハルモス（Paul Halmos）の線形代数への取り組み方について

学校では、行列はふつう連立方程式（simultaneous equations）を解くための道具として、あるいは点を変換するための手順として登場する。すなわち、行列に列ベクトル（column vector）を掛け、新しい座標を読み取るというものである。どちらも役に立つが、これらの見方は、行列が数学で最も重要な考え方の一つである理由を覆い隠してしまう。行列とは**線形変換**（linear transformation）、すなわち空間を引き伸ばし、回転し、鏡映し、ずらす（剪断する）方法である。そして行列は、数と同じように足したり、掛けたり、累乗したり、微分したりすることができる。ところが、行列は数とは違う。その積は掛ける順序に依存し、零でない行列どうしを掛けて零になることもある。さらに行列には、隠れた不変量（invariant）——トレース（trace）、行列式（determinant）、固有値（eigenvalue）——があり、それらは行列がどのように書き表されるかによらず、その本質的なふるまいをとらえている。

線形代数はなぜ重要か

線形代数（linear algebra）は、おそらく数学の中で最も広く使われている分野である。ビデオゲームから映画のアニメーションに至るまで、あらゆるコンピュータグラフィックスのエンジンは行列を掛け合わせる機械である。キャラクターのあらゆる回転も、あらゆるカメラアングルも、あらゆる透視投影も、一つの行列なのである。インターネットの検索エンジンや推薦システムは、固有ベクトル（eigenvector）の上に築かれている。技術者は橋や建物の振動数を固有値から求め、統計学者はデータの中の主要なパターンを固有値によって見つけ出す。量子力学は、すべて線形代数の言葉で書かれている。そして現代の機械学習は、その核心において、膨大な量の行列の掛け算にほかならない。

この遍在性には理由がある。線形の問題は完全に解くことのできる問題であり、ほとんどすべての非線形の問題は、十分に拡大して見れば線形に見える。これが微積分の

考え方であり、それはつまり、線形代数がほとんどあらゆるものの局所的なふるまいを記述する言語だということである。

大学で出会うこと

線形代数は、解析学（analysis）と並んで大学 1 年目の二本柱の一つである。**ベクトル空間**（vector space）――足し算とスカラー倍ができる集合のことで、平面や 3 次元空間はその最初の例にすぎない――と、それらの間の**線形写像**（linear map）に出会い、行列とは座標を用いて書き表した線形写像にすぎないことを学ぶ。行列式、固有値と固有ベクトル、そして対称行列は回転によって対角化（diagonalise）できることを述べる**スペクトル定理**（spectral theorem）を学ぶ。その後の講義では、これらがいたるところで使われる。微分方程式（第 8 章）において、幾何学（回転や鏡映が群をなす）において、連続的な対称性を記述する**リー群**（Lie group）の理論において、そして無限次元の線形代数である関数解析（functional analysis）においてである。

この章を貫く問い

三つの大きな問い

1. **行列はどのような点で数に似ていて、どのような点で異なるのか？**算術のどの規則が生き残り、どの規則が成り立たなくなるのか？
2. **行列は実際には何をしているのか？**変換の幾何をどのようにして見ることができ、どのような数が座標によらずにそれをとらえるのか？
3. **何が変わらずに保たれるのか？**変換や運動によってどのような量が保存され、それらは何を教えてくれるのか？

この章は行列の代数の規則（Section 7.1）から始まり、続いて変換の幾何へと進む。固有ベクトル、行列式、有限位数（finite order）の行列、3 次元の回転、そして特殊相対性理論（special relativity）の双曲的回転（hyperbolic rotation）である。さらに、時間発展する行列の保存量（conserved quantity）、行列式から得られる四平方恒等式（four-square identity）を扱い、最後に、数え上げの議論であるオイラー（Euler）の公式によって正多面体（Platonic solids）を分類して締めくくる。

この章に登場する考え方

§	主題	考え方
7.1	成り立たない規則	非可換性（non-commutativity）；零因子（zero divisor）
7.2	固有ベクトル	変換によって向きが回転しない方向
7.3	行列式	乗法性による特徴づけ；符号付き面積
7.4	有限位数の行列	トレース、行列式とケイリー・ハミルトン（Cayley–Hamilton）の定理
7.5	3 次元の回転	外積から導くロドリゲス（Rodrigues）の公式
7.6	ローレンツブースト（Lorentz boost）	双曲的な角は足し合わされる
7.7	保存量	交換子（commutator）のトレースは零である
7.8	四つの平方	行列式の乗法性
7.9	正多面体	二重数え上げ（double counting）とオイラーの公式

この章の読み方

この章に出てくるすべての行列について、それが何をするのかを図に描いてみよう。単位正方形、単位円、あるいはいくつかのベクトルをとり、それらの像をスケッチするのである。2 分ほどのスケッチで、計算を始める前に答え（固有ベクトル、反例、不変な直線）が見えてくることがよくあり、また後で計算を検算する助けにもなる。

7.1 行列では成り立たない法則

問題

STEP II 1993、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/93-s2-q6`

導入

行列（matrix）は足すことも掛けることもできるので、数と同じように扱いたくなる。この問題はその誘惑を試すものである。数については正しい四つの「規則」を挙げ、そのうちどれが行列でも成り立つかを問う。ほとんどは成り立たず、その成り立たなさ方から学ぶことは多い。行列の積は可換（commutative）ではない。零でない行列どうしの積が零になることがある。そして、行列についての二次方程式（quadratic equation）は無限に多くの解をもちうる。

これらの不成立は欠陥ではない。むしろ行列が役に立つ理由そのものである。行列は空間の変換を表し、二つの変換を異なる順序で行えば、実際に異なる結果が得られる。1925 年、ハイゼンベルク（Werner Heisenberg）は、量子力学（quantum mechanics）に現れる量が数ではなく行列のようにふるまうこと、そして $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ が成り立たないことこそが不確定性原理（uncertainty principle）の数学的な姿であることを発見した。

取りかかる前に

考えてみよう 実数について、$ab = 0$ ならば $a = 0$ または $b = 0$ であるのはなぜか。その議論は数のどの性質を使っているか。また、その性質は行列でも成り立つか。

$ab = 0$ かつ $a \neq 0$ ならば、両辺を a で割って $b = 0$ を得る。この議論には、零でないすべての数が逆数をもつことが必要である。零でない行列は逆行列（inverse）をもつ

とは限らない（行列式（determinant）が零の行列はもたない）ので、この議論は破綻する。**幾何的な**描像も念頭に置いておくとよい。行列は平面の変換であり、積 $\mathbf{AB}$ は「まず $\mathbf{B}$ を行い、次に $\mathbf{A}$ を行う」ことを意味する。

順を追って解く

段階 1　$\mathbf{AB} = 0$ だが $\mathbf{BA} \neq 0$ となりうるか

考えてみよう　幾何的に考えよう。$\mathbf{B}$ がすべてを一本の直線の中へ送り、その直線を $\mathbf{A}$ が零へ押しつぶすようにしたい。しかし逆の順序では、$\mathbf{A}$ が残したものを $\mathbf{B}$ がすべて消してしまってはいけない。

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。これは x 軸への射影（projection）であり、y 軸を零へ送る。また $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。これは (x, y) を $(0, x)$、すなわち y 軸上へ送る。このとき

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

よって、この主張は**偽**である（図 7.1.1）。 ■

段階 2　二乗の差

すべての積の順序を保ったまま、注意深く展開すると

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} - \mathbf{BA} - \mathbf{B}^2.$$

これが $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$ に等しくなるのは、ちょうど $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ のときである。段階 1 の行列では $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = -\mathbf{BA} \neq \mathbf{0}$ であるから、この主張は**偽**である。 ■

段階 3　$\mathbf{AX} = 0$ の零でない解

考えてみよう　$\det \mathbf{A} \neq 0$ ならば、$\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ に対して何ができるか。$\det \mathbf{A} = 0$ ならば、$\mathbf{Av} = \mathbf{0}$ を満たす零でない列ベクトル $\mathbf{v}$ を見つけられるか。

$\det \mathbf{A} \neq 0$ ならば $\mathbf{A}^{-1}$ が存在し、$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ となる。したがって零でない解は存在しない。

$\det \mathbf{A} = 0$ ならば、$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$、$ad = bc$ と書ける。ベクトル $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}$ は

$\mathbf{A}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab - ba \\ cb - da \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ を満たし、もう一方についても同様である。$\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ であるから、少なくとも一方は零でない。それを $\mathbf{v}$ とする。すると、二つの列がともに $\mathbf{v}$ である行列 $\mathbf{X}$ は零でなく、$\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ を満たす。よって、この主張は**真**である。 ■

段階 4 平方根はいくつあるか

> **手を止めて、やってみよう** $\mathbf{X}^2 + \mathbf{AX} + \mathbf{B} = \mathbf{0}$ が無限に多くの解をもつような、零でない $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ を求めよ。（ヒント：左辺を完全平方 $(\mathbf{X} - \mathbf{I})^2$ にし、二乗すると零になる行列について考えよ。）

$\mathbf{A} = -2\mathbf{I}$、$\mathbf{B} = \mathbf{I}$ とする。どちらも零ではない。方程式は $(\mathbf{X} - \mathbf{I})^2 = \mathbf{0}$ となる。$\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ を満たす任意の行列 $\mathbf{N}$ から解 $\mathbf{X} = \mathbf{I} + \mathbf{N}$ が得られ、そのような $\mathbf{N}$ は無限に存在する。

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{N}^2 = \mathbf{0}\ ,\ \text{任意の実数} t.$$

したがって、すべての t に対して $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は解であり、この主張は**偽**である。 ■

振り返り

- **順序が重要である。**どの展開でも積の順序を保たなければならない。$\mathbf{AB}$ と $\mathbf{BA}$ は通常異なる。
- **零因子。**零でない行列どうしの積が零になりうる。このことが「二次方程式の根は高々二つ」という議論の根拠を崩す。
- **変換として考える。**どの反例も、行列が平面に何をするかを思い描くことで容易に見つかった。

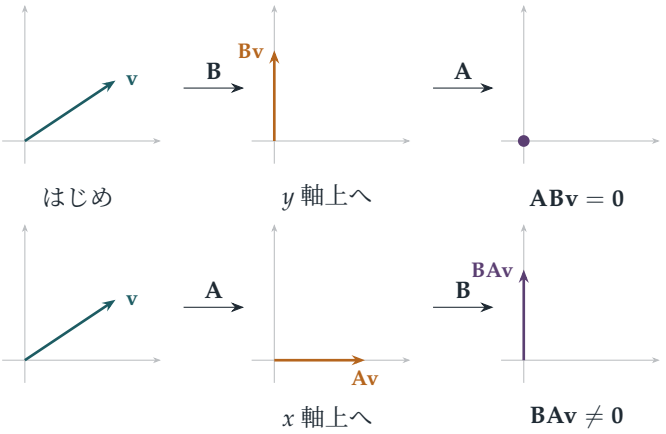


図 7.1.1　$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ なのに $\mathbf{BA} \neq \mathbf{0}$ となる理由。上段：$\mathbf{B}$ はすべてのベクトルを y 軸上へ送り、それを $\mathbf{A}$（x 軸への射影）が零へ押しつぶす。下段：逆の順序では、$\mathbf{A}$ が x 成分を残し、$\mathbf{B}$ がそれを y 軸上へ移すので、零にならずに残る。

背後にある数学

代数としての行列

ケイリー（Arthur Cayley）は 1858 年に行列の代数を導入し、行列を単なる係数の表ではなく、足したり掛けたりできる一つの対象として扱った。彼はすぐに積が可換でないことに気づき、**ケイリー–ハミルトンの定理**（Cayley–Hamilton theorem）を証明した。すなわち、すべての正方行列は自身の固有方程式（characteristic equation）を満たす。トレース（trace）が t、行列式が d である 2×2 行列については、これは $\mathbf{M}^2 - t\mathbf{M} + d\mathbf{I} = \mathbf{0}$ を意味し、本章ではこの事実を繰り返し用いる（Section 7.4）。2×2 実行列の全体は**環**（ring）をなす。足し算、引き算、掛け算ができるが、掛け算は可換ではなく、**零因子**（zero divisor）、すなわち積が零になる零でない元が存在する。

無限に多くの平方根

段階 4 はさらに印象的にできる。方程式 $\mathbf{X}^2 = \mathbf{I}$ は明らかな解 $\pm\mathbf{I}$ をもつが、それだけでなく、原点を通る直線に関する平面のすべての鏡映（reflection）$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ も解である。二回鏡映すれば何も変わらないからである。つまり $\mathbf{I}$ の平方根が円周ひとつ分だけ存在する。数を係数とする n 次多項式の根が高々 n 個であるのは、数に零因子がないからである。行列には零因子があり、この個数の評価は成り立たなくなる。

物理学における非可換性

古典力学では、位置 x と運動量（momentum）p は数であり、$xp = px$ である。量子力学ではこれらは演算子（operator、無限行列）となり、$xp - px = \mathrm{i}\hbar$ を満たす。ここで $\hbar$ はプランク定数（Planck's constant）を 2π で割ったものである。このただ一つの非可換関係から、ハイゼンベルクの不確定性原理、すなわち位置と運動量を同時に正確に知ることはできないという原理が導かれる。1925 年にハイゼンベルクが量子力学の規則を発見したとき、彼は行列が何であるかを知らなかった。ハイゼンベルクが考案した奇妙な乗法の規則が行列の積であることに気づいたのは、マックス・ボルン（Max Born）であった。

思考のスキル

なじみの規則を新しい場面で試す

新しい種類の対象に出会ったら、なじみのある規則のうちどれがまだ成り立つかを確かめ、それぞれの規則がどの性質に依存しているのかを正確に突き止めよ。

「$ab = 0$ ならば $a = 0$ または $b = 0$」という規則は割り算に依存し、「$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$」は可換性に依存する。それぞれの規則が何に支えられているかを知っていれば、いつまだそれを使えるかがわかる。

次の一歩

1. **いつ可換になるか。** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と可換なすべての 2×2 行列を求めよ。

2. **零の平方根。** $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ を満たすすべての 2×2 実行列 $\mathbf{N}$ を求めよ。（ヒント：ケイリー–ハミルトンの定理を用いて $\operatorname{tr}\mathbf{N} = \det\mathbf{N} = 0$ を示せ。）

3. **鏡映。** すべての鏡映行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ の二乗が $\mathbf{I}$ になることを示し、その鏡映の軸となる直線を求めよ。

4. **ケイリー–ハミルトン。** すべての 2×2 行列が $\mathbf{M}^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{M})\mathbf{M} + (\det\mathbf{M})\mathbf{I} = \mathbf{0}$ を満たすことを、直接計算によって証明せよ。

さらに学ぶために

- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）。最も広く読まれている線形代数の入門書であり、理解を重視している。
- **Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right***（Springer、オンラインで無料公開）。行列よりも線形写像（linear map）を中心に据えた、より抽象的な取り組み方。
- **Jim Baggott, *The Quantum Story***（Oxford University Press）。ハイゼンベルクの行列力学を含む、量子力学の歴史。

7.2 向きを変えずに伸ばす

問題

STEP III 1990、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/90-s3-q6`

導入

行列による変換は、ふつうすべてのベクトルを新しい向きへ動かす。しかし多くの行列には、まったく向きを変えず、その方向に沿って伸ばしたり縮めたりするだけの特別な方向がいくつかある。これがその行列の**固有ベクトル**（eigenvector）であり（ドイツ語の *eigen*、「自身の」「固有の」に由来する）、伸縮の倍率が**固有値**（eigenvalue）である。固有ベクトルが十分にあるとき、変換の正体ははっきりする。この問題の行列のような対称行列ではいつもそうなる。適切な座標で見れば、変換は 2 本の軸に沿った伸縮にすぎない。

この問題では、ある特定の行列の固有ベクトルを求め、それを用いて行列が円をどう変えるかを理解する。固有ベクトルは応用数学全体の中でも最も役に立つ考え方の一つである。橋の固有振動、回転する物体の主軸、原子のエネルギー準位、データの集まりの中で最も重要な方向、さらに Google の初期の PageRank アルゴリズムによるウェブページの順位づけも、固有ベクトルによって記述される。

取りかかる前に

考えてみよう T があるベクトルを「向きは変えずにスカラー倍する」とはどういうことか。式で書いてみよ。

それは、ある数 λ に対して $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ が成り立つということである。このとき $\mathbf{v}$ は固有値 λ に対する固有ベクトルである。問題に出てくる 2 つのベクトル $(1, 2)$ と $(2, -1)$ が直交していることに注意しよう。これは偶然ではない。この行列は**対称**（symmetric）

であり、対称行列の固有ベクトルは必ず直交するのである。

順を追って解く

段階 1　固有ベクトル

$$T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\frac{2}{5}\begin{pmatrix}9-4\\-2+12\end{pmatrix}=\frac{2}{5}\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\qquad T\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\frac{2}{5}\begin{pmatrix}20\\-10\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}.$$

よって、$(1,2)$ は 2 倍に、$(2,-1)$ は 4 倍に伸ばされる。 ■

段階 2　円の像

> **考えてみよう**　E の方程式を求めるには、x と y を X と Y で表し（逆行列を求める）、$x^2+y^2=1$ に代入すればよい。

行列 $\frac{2}{5}\begin{pmatrix}9&-2\\-2&6\end{pmatrix}$ の行列式（determinant）は $\frac{4}{25}(54-4)=8$ であり、逆行列（inverse matrix）は $\frac{1}{20}\begin{pmatrix}6&2\\2&9\end{pmatrix}$ である。したがって $x=\frac{6X+2Y}{20}$、$y=\frac{2X+9Y}{20}$ であり、$x^2+y^2=1$ は

$$(6X+2Y)^2+(2X+9Y)^2=400\quad\Longrightarrow\quad 40X^2+60XY+85Y^2=400,$$

となる。これを 5 で割ると $8X^2+12XY+17Y^2=80$ である。 ■

> **考えてみよう**　E はどのような図形で、その面積はいくらか。固有ベクトルを用いよ。

単位円はどの方向にも半径 1 である。$(2,-1)$ の方向には 4 倍に、それに垂直な方向 $(1,2)$ には 2 倍に伸ばされる。よって E は、固有ベクトルの方向に沿った半軸（semi-axis）の長さが 4 と 2 の楕円（ellipse）であり（図 7.2.1）、その面積は $\pi\times4\times2=8\pi$ である。（同じことだが、任意の線形写像は面積を $|\det T|=8$ 倍し、円の面積は π である。）

段階 3　X の最大値

> **考えてみよう**　C 上では $X=\frac{2}{5}(9x-2y)$ である。$x^2+y^2=1$ のとき、$9x-2y$ はどこまで大きくなりうるか。

$9x-2y$ は $(9,-2)$ と単位ベクトル (x,y) の内積（dot product）であるから、その最大値は $|(9,-2)| = \sqrt{85}$ であり、(x,y) が $(9,-2)$ の向きを向くときに達成される。よって X の最大値は $\frac{2}{5}\sqrt{85} = 2\sqrt{\frac{85}{25}} = 2\sqrt{\frac{17}{5}}$ である。 ■

段階 4 接線

> **手を止めて、やってみよう** C 上の点 $\frac{1}{5}(3,4)$ における接線は $3x+4y=5$ である。線形写像は接線を接線に写す。これを用いて E の接線を求めよ。

$x = \frac{6X+2Y}{20}$、$y = \frac{2X+9Y}{20}$ を $3x+4y=5$ に代入すると

$$\frac{3(6X+2Y)+4(2X+9Y)}{20} = 5 \quad \Longrightarrow \quad 26X+42Y = 100,$$

すなわち $13X+21Y=50$ である。 ■

（検算：接点そのものは $T(\frac{3}{5},\frac{4}{5}) = (\frac{38}{25},\frac{36}{25})$ であり、$13\cdot\frac{38}{25}+21\cdot\frac{36}{25} = \frac{494+756}{25} = 50$ となる。）

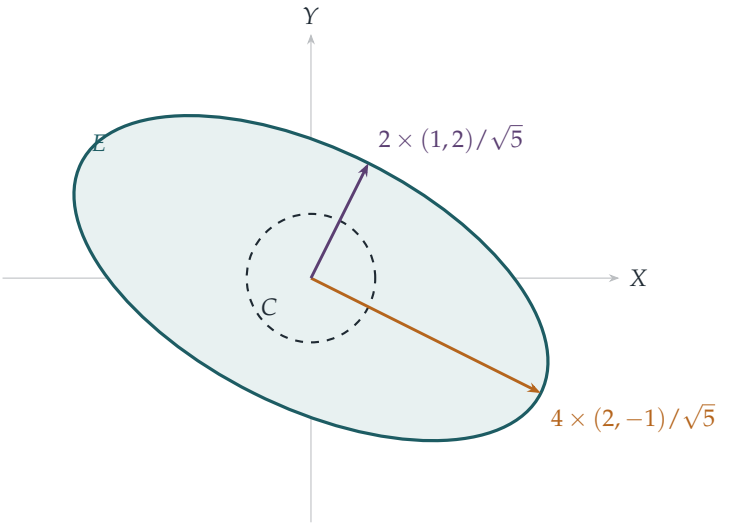


図 7.2.1 単位円 C（破線）と、その T による像 E。固有ベクトル $(2,-1)$ の方向には円が 4 倍に、それに垂直な固有ベクトル $(1,2)$ の方向には 2 倍に伸ばされる。よって E は、それらの方向に沿った半軸の長さが 4 と 2 で、面積が 8π の楕円である。

振り返り

- **固有ベクトルは自然な軸である。**固有ベクトルが与える座標では、T は 4 倍と 2 倍

の伸縮にすぎず、円に対する作用は一目瞭然である。

- **行列式は面積を測る。** E の面積は C の面積の $|\det T|$ 倍である。
- **線形写像は接することを保つ。** 円の接線を変換すると、ほとんど計算せずに楕円の接線が得られた。

背後にある数学

スペクトル定理

実対称行列はすべて、互いに直交する固有ベクトルを必要なだけそろえて持ち、その固有値は実数である。これが**スペクトル定理**（spectral theorem）であり、線形代数の最初の講義における中心的な結果の一つである。この定理は、対称な線形写像（linear map）はどれも、適切な直交座標で見れば各軸に沿った伸縮にすぎないことを述べている。同じことだが、$8X^2 + 12XY + 17Y^2$ のような二次形式（quadratic form）はどれも、回転によって $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$ の形に直すことができる。中心をもつ二次曲線がすべて、直交する軸をもつ楕円か双曲線（hyperbola）になるのはこのためである（**主軸定理**（principal axis theorem））。この考え方は 1820 年代のコーシー（Cauchy）にさかのぼる。コーシーはこれを用いて、二次曲面の主軸や固体内部の応力の主軸を求めた。

この定理を成り立たせているのは対称性である。対称でない行列はそれほど素直ではない。90° の回転はすべての方向を回してしまうので実の固有ベクトルを一つも持たず、せん断（shear）$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は固有ベクトルの方向を一つしか持たないので、どのような 2 本の軸に沿った伸縮にもならない。

いたるところに現れる固有ベクトル

固有ベクトルが現れる場面をいくつか挙げておく。

- **振動。** 質点とばねからなる系は**基準振動**（normal mode）で振動する。これは、すべての部分が単一の振動数でそろって動く振動のパターンである。基準振動はある行列の固有ベクトルであり、振動数は固有値から得られる（Section 11.2）。
- **データ。** データ点の集まりが最も大きく広がっている方向は、その共分散行列（covariance matrix）の固有ベクトルである。それを求めることが**主成分分析**（principal component analysis）であり、統計学や機械学習の基本的な道具の一つである（Section 13.7）。

- **量子力学。** ある量を測定したときに得られうる結果は行列（または作用素）の固有値であり、原子のエネルギー準位も固有値である。
- **ウェブ検索。** 検索エンジン Google のもとになったアイデアである PageRank は、ページ間のリンクを表す巨大な行列の、固有値 1 に対する固有ベクトルの成分によってページを順位づける。

思考のスキル

> **変換に適した座標を選ぶ**
>
> 線形変換を理解するには、それが回転させない方向を見つけよ。その座標では変換は単純になる。
>
> これは、Section 5.6 でフェルマー点を原点に選んだことや、Section 2.8 で写像を簡単にするために変数変換をしたことと同じ考え方である。適切な座標を選べば、構造がはっきりと見えてくる。

次の一歩

1. **固有値を求める。** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$ の解であることを示し、問題の行列について $\lambda = 2$ と 4 が得られることを確かめよ。
2. **直交する固有ベクトル。** $\mathbf{M}$ が対称で、$\lambda \neq \mu$ として $\mathbf{Mu} = \lambda\mathbf{u}$、$\mathbf{Mv} = \mu\mathbf{v}$ ならば、$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ であることを示せ。（ヒント：$\mathbf{v} \cdot \mathbf{Mu}$ を 2 通りに計算せよ。）
3. **回転。** 回転行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ は、θ が π の整数倍でない限り実の固有ベクトルを持たないことを示せ。その複素固有値は何か。
4. **累乗。** 固有ベクトルを用いて $T^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を求めよ。（ヒント：$(1,0)$ を $(1,2)$ と $(2,-1)$ の一次結合で表せ。）

さらに学ぶために

- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）。第 6 章は固有値とその応用へのすぐれた入門である。

- **Kurt Bryan & Tanya Leise, "The $25,000,000,000 eigenvector: the linear algebra behind Google"**, *SIAM Review* 48 (2006)。（250 億ドルの固有ベクトル：Google を支える線形代数）読みやすく、無料で入手できる。
- **3Blue1Brown, *Essence of Linear Algebra***（動画シリーズ、オンラインで無料公開）。この節で扱った幾何学的な考え方そのものを、美しいアニメーションで見せてくれる。

7.3 行列式を行列式たらしめるもの

問題

STEP II 2019、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip`

導入

2×2 行列（matrix）の行列式（determinant）は $ad - bc$ である。この公式はどこから来たのか、そしてなぜそれほど重要なのか。一つの答えは、行列式とはその行列が面積を何倍に拡大するかを表す倍率だ、というものである。この問題で探るもう一つの答えは、行列式は行列の積を通常の数の積に変える関数として本質的に**唯一の**ものだ、というものである：$\det(\mathbf{MN}) = \det \mathbf{M} \det \mathbf{N}$。

この問題では、その性質一つだけ（と、自明な場合を除くための二つの穏やかな条件）をもつ未知の関数 f が与えられ、それがどのように振る舞わなければならないかを一歩ずつ導くことが求められる。Section 6.5 の導分（derivation）と同様に、これは対象をその性質だけから特定する演習である。最後には、f は行を入れ替えると符号が変わり、特異行列（singular matrix）上では 0 となり、剪断（shear）上では 1 に等しいことが強制される。これはまさに行列式の振る舞いである。

取りかかる前に

? **考えてみよう** 問題中のそれぞれの特別な行列は何をするか。一般の $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して **JM**、**MJ**、**KM**、**PM** を計算せよ。

JM は **M** の行を入れ替え、**MJ** は列を入れ替える。**KM** は第 2 行を k 倍する。**PM** は第 2 行を第 1 行に加える。これらはガウスの消去法（Gaussian elimination）における**基本行変形**（elementary row operations）である。f は積を積に移すので、これらの特

別な行列上での f の値がわかれば、各行変形に対して f がどう変化するかがわかる。

順を追って解く

段階 1　単位行列

$\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \mathrm{f}(\mathbf{MI}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})\,\mathrm{f}(\mathbf{I})$。$\mathrm{f}(\mathbf{M}) \neq 0$ であるから、両辺を割って $\mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$ を得る。 ■

段階 2　入れ替え

$\mathbf{J}^2 = \mathbf{I}$ であるから $\mathrm{f}(\mathbf{J})^2 = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$ となり、$\mathrm{f}(\mathbf{J}) = \pm 1$ を得る。$\mathrm{f}(\mathbf{J}) \neq 1$ であるから $\mathrm{f}(\mathbf{J}) = -1$ である。

さて、$\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \mathbf{JM}$ であるから、その値は $\mathrm{f}(\mathbf{J})\mathrm{f}(\mathbf{M}) = -\mathrm{f}(\mathbf{M})$ である。また、$\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = \mathbf{JMJ}$（行を入れ替え、次に列を入れ替える）であるから、その値は $\mathrm{f}(\mathbf{J})^2\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})$ である。 ■

段階 3　従属な行

> **考えてみよう**　まず、二つの行が等しい行列 $\mathbf{B}$ を考えよ。$\mathbf{JB}$ は何か。それは $\mathrm{f}(\mathbf{B})$ について何を語るか。

$\mathbf{B}$ の二つの行がともに (a, b) ならば、それらを入れ替えても何も変わらない：$\mathbf{JB} = \mathbf{B}$。よって $\mathrm{f}(\mathbf{B}) = \mathrm{f}(\mathbf{J})\mathrm{f}(\mathbf{B}) = -\mathrm{f}(\mathbf{B})$ となり、$\mathrm{f}(\mathbf{B}) = 0$ が強制される。

次に、$\mathbf{A}$ の行が (a, b) と $k(a, b)$ ならば、二つの行がともに (a, b) である $\mathbf{B}$ を用いて $\mathbf{A} = \mathbf{KB}$ と書ける。よって $\mathrm{f}(\mathbf{A}) = \mathrm{f}(\mathbf{K})\mathrm{f}(\mathbf{B}) = 0$ である。■（これには第 2 行が零となる $k = 0$ の場合も含まれる。）

段階 4　剪断

> **手を止めて、やってみよう**　$\mathbf{P}^2$ と $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK}$ を計算せよ。両者が等しくなるように k を選べ。それにより $\mathrm{f}(\mathbf{P})$ について何がわかるか。

$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であり、$k \neq 0$ のとき

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

である。$k = 2$ とすると $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K} = \mathbf{P}^2$ となる。両辺の f をとり、$\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1})\mathrm{f}(\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$ を用いると

$$\mathrm{f}(\mathbf{P}) = \mathrm{f}(\mathbf{P})^2,$$

となるので、$\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 0$ または 1 である。しかし $\mathbf{P}$ は可逆（invertible）であり、$\mathrm{f}(\mathbf{P})\mathrm{f}(\mathbf{P}^{-1}) = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$ であるから $\mathrm{f}(\mathbf{P}) \neq 0$ である。したがって $\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 1$ である。 ■

振り返り

- **特別な元が関数を明らかにする。**乗法的な性質を $\mathbf{I}$、$\mathbf{J}$、$\mathbf{K}$、$\mathbf{P}$ に適用することで、それぞれにおける f の値と、各行変形の効果がわかった。
- **自分自身の変換に等しい元。**等しい行をもつ行列は行の入れ替えで変わらないが、行の入れ替えは f の符号を変える。よってそこでは f は 0 でなければならない。
- **共役（conjugation）は f を保つ。** $\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{P})$。これは代数学で何度も繰り返し用いられる事実である。

背後にある数学

乗法的な関数はすべて行列式の関数である

問題は $\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 1$ で終わっているが、議論は完結させることができる。すべての可逆行列は基本行列（行の入れ替え、行のスカラー倍、剪断）の積であり、この問題はそれぞれの上で f がどう振る舞うかを示している。このことから、ある一変数実関数 ϕ で $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ を満たすものを用いて $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \phi(\det \mathbf{M})$ と書けることが従う。行列式そのものは $\phi(x) = x$ の場合であるが、$\phi(x) = x^3$ や $\phi(x) = |x|^{1/2}\operatorname{sign}(x)$ でもよい。言い換えれば、**行列式は行列上の乗法的（*multiplicative*）な関数として本質的に新しい唯一のものである。**群論（group theory）の言葉でいえば、行列式は、可逆行列の群について可換群（commutative group）から見えるすべてを捉えている。

面積としての行列式

幾何学的には、2×2 行列は単位正方形を平行四辺形（parallelogram）に移し、$\det \mathbf{M}$ はその**符号付き面積**（signed area）である。向き（orientation）が保たれれば正、反転すれば負となる（図 7.3.1）。すると乗法的な性質には明白な意味がある：二つの変換を続けて行うと、それぞれの面積の拡大率が掛け合わされるのである。行の入れ替えは向きを反転させるので $\det \mathbf{J} = -1$ となる。剪断は正方形をずらして同じ面積の平行四辺形にするので $\det \mathbf{P} = 1$ となる。そして従属な行をもつ行列は正方形を平たく押

しつぶすので、その行列式は 0 となる。問題のどの段階にも、対応する図がある。



単位正方形　　剪断 **P**
面積 1　　入れ替え **J**
面積 −1（裏返し）　　従属な行
面積 0

図 7.3.1　符号付き面積としての行列式。二つの基底ベクトル（basis vectors）の像（琥珀色、紫色）が平行四辺形を張る。剪断は面積を保ち、基底ベクトルの入れ替えは向きを反転させ、従属な行（または列）は正方形を一本の直線上につぶす。二つの変換を続けて行うと符号付き面積が掛け合わされる。これが性質 $\mathrm{f}(\mathbf{MN}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})\mathrm{f}(\mathbf{N})$ である。

高次元の行列式

$n \times n$ 行列に対して、行列式は符号付き体積の拡大率であり、次の三つの性質によって特徴づけられる：各行について線形であること、二つの行を入れ替えると符号が変わること、単位行列上で 1 に等しいこと。これらだけからおなじみの展開公式を導くことができ、ガウスの消去法はそれを効率よく計算する方法を与える。行列式は、重積分（multiple integrals）の変数変換（change of variables）の公式（**ヤコビアン**（Jacobian））、逆行列の公式、そして Section 5.4 で見たように多項式の判別式（discriminant）に現れる。

思考のスキル

未知の関数を特別な入力で探る

関数がある性質を通してしか知られていないときは、思いつく限り最も単純な特別な入力にその性質を適用し、何が強制されるかを見よ。

ここでは単位行列、入れ替え、スカラー倍、剪断だけで、ほぼすべてを決定するのに十分であった。自分自身の 2 乗、逆、共役に等しくなる入力を選ぶのは特に効果的である。

次の一歩

1 **他の例。** $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = (\det \mathbf{M})^3$ が問題のすべての条件を満たすこと、および $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = |\det \mathbf{M}|$ は乗法的な性質を満たすが $\mathrm{f}(\mathbf{J}) \neq 1$ は満たさないことを示せ。

2 **列変形。** 第 2 列が第 1 列の定数倍であるような任意の行列上でも f が 0 となることを示せ。

3 **スカラー倍。** $\mathbf{K}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ とする。$\mathrm{f}\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{f}(\mathbf{K}_k)$ であること、および $\mathrm{f}(\mathbf{K}_k)\mathrm{f}(\mathbf{K}_l) = \mathrm{f}(\mathbf{K}_{kl})$ であることを示せ。

4 **行列式への帰着。** やや難 すべての可逆な 2×2 行列が、$\mathbf{J}$、$\mathbf{K}_k$、$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の形の行列の積として書けることを示せ。これより、$\mathrm{f}(\mathbf{M})$ は $\det \mathbf{M}$ のみに依存することを導け。

さらに学ぶために

- **Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right***（Springer、オンラインで無料公開）。この問題と同じ精神で、行列式をその性質から定義している。
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）。第 5 章で、三つの規則から行列式を展開している。
- **3Blue1Brown「The determinant」**（動画、オンラインで無料公開）。面積による解釈を、美しいアニメーションで示している。

7.4 もとに戻る行列

問題

STEP II 2020、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip`

導入

変換の中には、十分な回数だけ繰り返すと、すべてをもとの位置に戻すものがある。90° の回転（rotation）は 4 回で、鏡映（reflection）は 2 回でそうなる。では、どのような 2×2 行列がこの性質、すなわちある n について $\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$ となる性質をもつのだろうか。また、それはどうすれば判定できるのだろうか。

この問題の驚くべき点は、**トレース**（trace）と**行列式**（determinant）という二つの数だけで判定が決まることである。四つの成分を知る必要はなく、$a + d$ と $ad - bc$ だけがわかればよい。しかもこの答えは、現実の世界に対して印象的な帰結をもたらす。結晶は 2 回、3 回、4 回、6 回対称性はもちうるが、5 回対称性は決してもたない理由を説明するのである。これは 2 世紀にわたって成り立っていた結晶学の「法則」であったが、1982 年のある発見によって覆され、その発見はノーベル賞を受賞した。

取りかかる前に

考えてみよう すべての 2×2 行列は $\mathbf{M}^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{M})\mathbf{M} + (\det\mathbf{M})\mathbf{I} = \mathbf{0}$ を満たす（ケイリー・ハミルトンの定理（Cayley–Hamilton theorem）。展開して計算すれば確かめられる）。このことは、$\mathbf{M}^2$ に関する問いにどう役立つだろうか。

この式は $\mathbf{M}^2$ を $\mathbf{M}$ と $\mathbf{I}$ で表す。すなわち $\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - d\mathbf{I}$ である。ただし $t = \operatorname{tr}\mathbf{M}$、$d = \det\mathbf{M}$ とする。したがって、$\mathbf{M}^2$ に関する条件は、$\mathbf{M}$、t、d を結びつける条件に書き換えられる。これがこの問題全体の鍵である。

順を追って解く

段階 1　2 乗のトレース

$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$ であるから、$\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2) = a^2 + 2bc + d^2 = (a+d)^2 - 2(ad-bc)$ である。 ■

段階 2　$\pm\mathbf{I}$ の平方根

> **考えてみよう**　$\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$ と仮定する。これを $\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - d\mathbf{I}$ に代入せよ。$t \neq 0$ ならば、$\mathbf{M}$ について何がいえるだろうか。

$\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$ ならば $\mathbf{I} = t\mathbf{M} - d\mathbf{I}$ であるから、$t\mathbf{M} = (1+d)\mathbf{I}$ となる。$t \neq 0$ ならば $\mathbf{M}$ は $\mathbf{I}$ の定数倍であり、これを $c\mathbf{I}$ とおくと $c^2 = 1$ であるから $\mathbf{M} = \pm\mathbf{I}$ となるが、これは除外されている。よって $t = 0$ であり、このとき $(1+d)\mathbf{I} = \mathbf{0}$ であるから $d = -1$ である。

逆に、$t = 0$ かつ $d = -1$ ならば $\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - d\mathbf{I} = \mathbf{I}$ であり、$\operatorname{tr}(\pm\mathbf{I}) = \pm 2 \neq 0$ であるから $\mathbf{M} \neq \pm\mathbf{I}$ である。 ■

$\mathbf{M}^2 = -\mathbf{I}$ の場合：代入すると $t\mathbf{M} = (d-1)\mathbf{I}$ を得る。$t \neq 0$ ならば $\mathbf{M} = c\mathbf{I}$ かつ $c^2 = -1$ となるが、これは実数 c では不可能である。よって $t = 0$ かつ $d = 1$ である。逆に、$t = 0$ かつ $d = 1$ ならば $\mathbf{M}^2 = -\mathbf{I}$ となる。 ■

段階 3　4 乗根

> **手を止めて、やってみよう**　$\mathbf{N} = \mathbf{M}^2$ とおくと、$\mathbf{M}^4 = \mathbf{I}$ は $\mathbf{N}^2 = \mathbf{I}$ を意味する。小問 (ii) により、$\mathbf{N} = \pm\mathbf{I}$ であるか、または $\operatorname{tr}\mathbf{N} = 0$ かつ $\det\mathbf{N} = -1$ である。二つ目の場合が起こりえないのはなぜだろうか。

$\det\mathbf{N} = \det(\mathbf{M}^2) = (\det\mathbf{M})^2 \geq 0$ であるから、$\det\mathbf{N} \neq -1$ である。よって $\mathbf{N} = \mathbf{M}^2 = \pm\mathbf{I}$ である。逆は明らかである。 ■

$\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$ の場合：小問 (ii) を $\mathbf{N} = \mathbf{M}^2$ に適用すると、これが成り立つのは $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2) = 0$ かつ $\det(\mathbf{M}^2) = 1$ のとき、すなわち $t^2 - 2d = 0$ かつ $d^2 = 1$ のときに限る。$t^2 = 2d \geq 0$ であるから $d = 1$ でなければならず、このとき $t^2 = 2$ である。したがって

$$\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I} \iff \det\mathbf{M} = 1 \text{ かつ } \operatorname{tr}\mathbf{M} = \pm\sqrt{2}. \qquad \blacksquare$$

段階 4　回転ではない $\mathbf{I}$ の 8 乗根

$\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$ を満たす行列はすべて $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$ を満たす。45° の回転はトレースが $\sqrt{2}$、行列

式が 1 である。そこで、トレースと行列式が同じで、回転ではない別の行列を求めたい。次の行列をとる。

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{tr}\mathbf{M} = \sqrt{2}, \quad \det\mathbf{M} = 1.$$

段階 3 により $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$ であるから、$\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$ である。しかし $\mathbf{M}$ は回転でも鏡映でもない。回転や鏡映は長さを保つが、$\mathbf{M}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ の長さは $\sqrt{3} \neq 1$ だからである。■

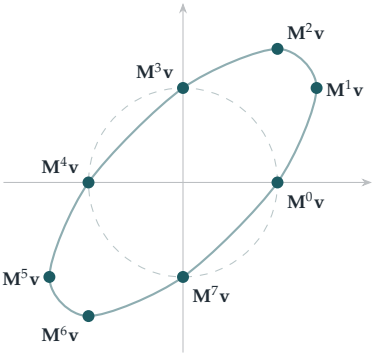


図 7.4.1 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ による $\mathbf{v} = (1,0)$ の軌道（orbit）。8 回で出発点に戻る。点は円（破線）の上にはないので $\mathbf{M}$ は回転ではないが、楕円の上にはある。つまり $\mathbf{M}$ は、斜交座標で見た 45° の回転なのである。

振り返り

- **ケイリー・ハミルトンの定理は、累乗を一次結合に変える。** 2×2 行列の累乗はすべて $\mathbf{M}$ と $\mathbf{I}$ の一次結合であり、その係数はトレースと行列式だけで決まる。
- **2 乗の行列式は負にならない。**この単純な事実によって、小問 (iii) の一つの場合がまるごと除外された。
- **トレースと行列式は不変量（invariant）である。**トレースと行列式が等しい二つの行列（ただし $\mathbf{I}$ の定数倍でないもの）は、見かけが似ているかどうかにかかわらず、累乗に関して同じようにふるまう。

背後にある数学

相似な行列

段階 4 の $\mathbf{M}$ が「姿を変えた回転」であるのはなぜだろうか。二つの行列 $\mathbf{M}$ と $\mathbf{R}$ は、ある正則行列 $\mathbf{S}$ について $\mathbf{M} = \mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{S}^{-1}$ となるとき**相似**（similar）であるという。このとき二つの行列は、異なる座標で同じ変換を表している。相似な行列はトレースと行列式が等しく、（$\mathbf{I}$ の定数倍でない 2×2 行列については）その逆も成り立つ。したがって、トレースが $\sqrt{2}$ で行列式が 1 である実行列はすべて 45° の回転と相似であり、$\mathbf{S}$ によって与えられる斜交座標では単に回転するだけである（図 7.4.1）。一般に、$\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$ を満たす実 2×2 行列は、つねに回転または鏡映と相似である。

結晶に 5 回対称性がない理由

結晶とは、原子が規則正しく繰り返し並んだものである。結晶の回転対称性は原子の格子をそれ自身に移すので、格子に基づく座標では**整数**成分の行列で表される。したがって、そのトレースは整数である。一方、角 θ の回転のトレースはどの座標でも $2\cos\theta$ であり、$2\cos\theta$ が整数となるのはそれが $-2, -1, 0, 1$ または 2 のとき、すなわち位数 2、3、4、6（および 1）の回転の場合に限る。5 回対称性には $2\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ が必要であるが、これは整数ではない。これが**結晶学的制限定理**（crystallographic restriction theorem）である。1982 年、ダン・シェヒトマン（Dan Shechtman）は見かけ上 5 回対称性をもつ合金を観測し、当初は嘲笑された。しかしそれは**準結晶**（quasicrystal）であることが判明した。準結晶は、ペンローズ（Penrose）・タイリングのように秩序はあるが周期的ではないため、この定理の対象外なのである。彼は 2011 年にノーベル化学賞を受賞した。

思考のスキル

本質的なふるまいをとらえる不変量を探す

多くのパラメータをもつ対象についての問題では、視点を変えても変わらないいくつかの組合せだけで十分ではないかと問うてみよ。

ここでは、問い（「$\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$ となるか？」）が座標に依存しないため、四つの成分がトレースと行列式という二つの不変量に帰着された。適切な不変量を見つけることは、分類問題の鍵となることが多い。

次の一歩

1 **位数 3 の回転。** STEP II 2021、問 7（OCR が配布している 2021 年の過去問一式に収録、`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`）に挑戦せよ。この問題は、珍しい性質をもつ回転行列から始まり、3 乗が単位行列となるすべての実 2×2 行列についての事実で終わる。

2 **位数 6。** $\mathbf{M}^6=\mathbf{I}$ であるが $\mathbf{M}^2\neq\mathbf{I}$ かつ $\mathbf{M}^3\neq\mathbf{I}$ となるための、トレースと行列式に関する条件を求めよ。

3 **結晶学的制限。** $\mathbf{M}$ が整数成分をもち、$\det\mathbf{M}=1$ であり、ある n について $\mathbf{M}^n=\mathbf{I}$ ならば、$\operatorname{tr}\mathbf{M}\in\{-2,-1,0,1,2\}$ であることを示せ。また、位数 6 の整数行列を一つ求めよ。

4 **累乗に対するケイリー・ハミルトンの定理。** $\mathbf{M}^2=t\mathbf{M}-d\mathbf{I}$ を用いて $\mathbf{M}^3$ と $\mathbf{M}^4$ を $p\mathbf{M}+q\mathbf{I}$ の形で表し、これを用いて $\mathbf{M}^4=-\mathbf{I}$ となるための条件を導き直せ。

さらに学ぶために

- **M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry***（Springer）。『群と対称性』。結晶学的制限と壁紙模様の分類を含む。
- **Marjorie Senechal, *Quasicrystals and Geometry***（Cambridge University Press）。『準結晶と幾何学』。準結晶と非周期的秩序の数学。
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）。『線形代数入門』。相似な行列とケイリー・ハミルトンの定理。

7.5 三次元の回転

問題

STEP III 2022、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip`

導入

2 次元では、点の回転（rotation）は簡単である。$e^{i\theta}$ を掛ければよい。3 次元ではずっと難しくなる。掛けるべき 1 つの複素数は存在せず、異なる軸のまわりの回転は可換（commute）ではない。しかも「点 $(1,2,2)$ を通る軸のまわりに 37° 回転する」という行列を書き下すのは、いかにも骨が折れそうに見える。

この問題では、任意の軸と任意の角に対するその行列を、外積（cross product）から組み立てる。得られる結果は**ロドリゲスの回転公式**（Rodrigues' rotation formula）であり、1840 年にオランド・ロドリゲス（Olinde Rodrigues）が発表したものである。この公式はロボット工学、コンピュータグラフィックス、宇宙機の航法で日常的に使われており、美しい事実を明らかにしてくれる。すなわち、$\mathbf{n}$ との外積をとることは「$\mathbf{n}$ のまわりの 90° 回転」であり、$\mathbf{n}$ のまわりのあらゆる回転はそこから組み立てられる。ちょうど $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ が i を掛ける操作から組み立てられているのと同じである。

取りかかる前に

考えてみよう $\mathbf{r}$ が $\mathbf{n}$ に垂直なとき、$\mathbf{n} \times \mathbf{r}$ は幾何学的にどのように見えるか。$\mathbf{r}$ が $\mathbf{n}$ に平行なときはどうか。

$\mathbf{r} \parallel \mathbf{n}$ ならば $\mathbf{n} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$ である。$\mathbf{r} \perp \mathbf{n}$ ならば、$\mathbf{n} \times \mathbf{r}$ は $\mathbf{r}$ と同じ長さをもち（$|\mathbf{n}| = 1$ でなす角が 90° だから）、両者に垂直であり、右手の法則（right-hand rule）により、$\mathbf{r}$ を $\mathbf{n}$ のまわりに（$\mathbf{n}$ の先から見て）反時計回りに 90° 回転したものである。したがって f は $\mathbf{r}$ の $\mathbf{n}$ 方向の成分（component）を消し、垂直な成分を 90° 回転させる。この描像

で問題全体が説明できる。

順を追って解く

段階 1　2 回外積をとる

$\mathrm{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \times \mathbf{r} = (bz - cy,\ cx - az,\ ay - bx)$ である。これにもう一度 $\mathbf{n} = (a, b, c)$ との外積をとると、$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))$ の x 成分は

$$b(ay - bx) - c(cx - az) = -x(b^2 + c^2) + aby + acz. \qquad \blacksquare$$

$a^2 + b^2 + c^2 = 1$ より、これは $-x(1 - a^2) + aby + acz = a(ax + by + cz) - x$ となり、$(\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}$ の x 成分に等しい。ほかの成分も対称性から同様に得られるので、$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r})) = (\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}$ である。 ■

> **考えてみよう**　$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$ と書く。ここで $\mathbf{r}_{\parallel} = (\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n}$ は $\mathbf{n}$ 方向の成分である。$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))$ をこれらを用いて表すとどうなるか。

$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r})) = \mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{r} = -\mathbf{r}_{\perp}$ である。f を 2 回施すと、平行な部分は消え、垂直な部分は $\mathbf{n}$ のまわりに 180° 回転する。これは単に向きを反転させることにほかならない（図 7.5.1）。これは $\mathrm{i}^2 = -1$ の類似である。

段階 2　回転

> **考えてみよう**　$\mathrm{g}(\mathbf{n})$ を計算せよ。次に、$\mathbf{r} \perp \mathbf{n}$ のとき、そのような $\mathbf{r}$ に対して $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r})) = -\mathbf{r}$ となることを用いて $\mathrm{g}(\mathbf{r})$ を計算せよ。

$\mathrm{f}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ より $\mathrm{g}(\mathbf{n}) = \mathbf{n}$ である。つまり軸は動かない。$\mathbf{r} \perp \mathbf{n}$ ならば $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r})) = -\mathbf{r}$ であり、

$$\mathrm{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} + \sin\theta\,(\mathbf{n} \times \mathbf{r}) - (1 - \cos\theta)\mathbf{r} = \cos\theta\,\mathbf{r} + \sin\theta\,(\mathbf{n} \times \mathbf{r}).$$

$\mathbf{n} \times \mathbf{r}$ は $\mathbf{r}$ を $\mathbf{n}$ のまわりに 90° 回したもので長さも等しいから、これは $\mathbf{r}$ を $\mathbf{n}$ のまわりに角 θ だけ回転したものであり、平面における $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)z$ とまったく同じである。g は線形（linear）であり、どのベクトルも $\mathbf{n}$ の実数倍と $\mathbf{n}$ に垂直なベクトルの和として表せるので、g は**原点を通り $\mathbf{n}$ 方向を向く軸のまわりの角 θ の回転**である（$\mathbf{n}$ の先端から見て反時計回り）。 ■

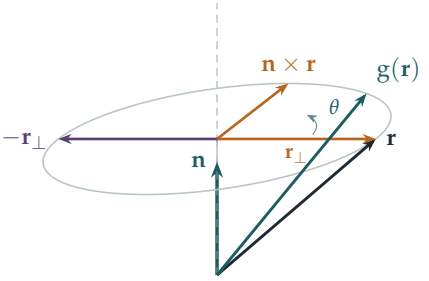


図 7.5.1　ロドリゲスの公式。ベクトル $\mathbf{r}$ は、軸 $\mathbf{n}$ 方向の部分と、それに垂直な部分 $\mathbf{r}_\perp$ に分かれる。後者は円を描く。$\mathbf{n}$ との外積をとると $\mathbf{r}_\perp$ は 90° 回転し（琥珀色）、2 回とると $-\mathbf{r}_\perp$ になる（紫）。回転後のベクトル $g(\mathbf{r})$ は $\mathbf{r}_\parallel + \cos\theta\,\mathbf{r}_\perp + \sin\theta\,(\mathbf{n}\times\mathbf{r})$ である。

段階 3　鏡映

> **手を止めて、やってみよう**　小問 (i) を用いて $h(\mathbf{s}) = -\mathbf{s} - 2f(f(\mathbf{s}))$ を簡単にせよ。$\mathbf{n}$ 方向のベクトルと、$\mathbf{n}$ に垂直なベクトルは、それぞれどう変換されるか。

$h(\mathbf{s}) = -\mathbf{s} - 2\big((\mathbf{n}.\mathbf{s})\mathbf{n} - \mathbf{s}\big) = \mathbf{s} - 2(\mathbf{n}.\mathbf{s})\mathbf{n}$ である。$\mathbf{n}$ に垂直なベクトルは変わらず、$h(\mathbf{n}) = -\mathbf{n}$ となる。よって h は**原点を通り $\mathbf{n}$ に垂直な平面に関する鏡映**（reflection）である。 ■

振り返り

- **平行な部分と垂直な部分に分解する。** $\mathbf{r}$ を $\mathbf{n}$ に沿う成分とそれを横切る成分に分けた途端、どの段階も明快になった。
- **線形性が作業を減らす。**線形写像（linear map）を特定するには、うまく選んだいくつかのベクトルをどう写すかがわかれば十分である。
- **複素数の類似。** $\mathbf{n}$ に垂直なベクトルの上では、f は i を掛ける操作のようにふるまう。すなわち $f^2 = -1$ であり、$g = \cos\theta + \sin\theta\, f$ である。

背後にある数学

オイラーの回転定理

原点を固定する 3 次元空間の回転はすべて、原点を通るある軸のまわりの回転である。これはオイラー（Euler）が 1775 年に証明した。行列の言葉でいえば、3×3 の回転行列はすべて固有値（eigenvalue）1 の固有ベクトル（eigenvector）をもち、それが軸である。ロドリゲスの公式はその逆を与える。すなわち、任意の軸 $\mathbf{n}$ と角 θ に対して、回転行列は

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin\theta\,\mathbf{K} + (1 - \cos\theta)\,\mathbf{K}^2, \qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

で与えられる。ここで $\mathbf{K}$ は $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{r}$ の行列である。$\mathbf{K}^3 = -\mathbf{K}$ であるから、指数級数（exponential series）$e^{\theta\mathbf{K}} = \mathbf{I} + \theta\mathbf{K} + \frac{\theta^2}{2!}\mathbf{K}^2 + \cdots$ はちょうどこの公式にまとまる。これは $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ の 3 次元版である。回転と「無限小回転」$\mathbf{K}$ の指数関数とのこの結びつきが、**リー群**（Lie groups）の理論の出発点である。

回転は可換ではない

本を水平に持ち、鉛直な軸のまわりに 90° 回転させてから、水平な軸のまわりに 90° 回転させてみよう。次に最初からやり直し、2 つの回転を逆の順序で行う。本は異なる位置に落ち着く。2 次元とは異なり、3 次元における回転の合成（composition）は可換ではない。これが Section 6.7 の四元数（quaternions）が役に立つ理由の 1 つである。$\mathbf{n}$ のまわりの角 θ の回転は四元数 $\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(a\mathrm{i} + b\mathrm{j} + c\mathrm{k})$ に対応し、回転の合成は四元数の積になり、非可換性がはじめから組み込まれている。ロドリゲス自身は 1840 年の論文で、ハミルトン（Hamilton）が四元数を考案する 3 年前に、回転の合成公式を見いだしていた。

思考のスキル

不変な部分に分ける

変換を理解するには、その変換が単純に扱う部分に空間を分けよ。ここでは、軸（そのまま残る）と、それに垂直な平面（回転する）である。

これは Section 7.2 の固有ベクトルと同じ考え方である。変換が保つ部分空間を見つけ、それぞれの部分の上で変換を調べるのである。

次の一歩

1 **平面の回転。** STEP III 2017、問 2（`step.maths.org/questions/17-s3-q2`）に挑戦せよ。複素数を用いて、平面の 2 つの回転を合成すると、1 つの例外を除いて回転になることを示す問題である。その例外を見つけ、そのとき合成が何になるかを求めよ。

2 **具体的な回転。** 方向 $(1,1,1)$ の軸のまわりの 120° 回転の行列を求めよ。それが座標軸を巡回的に入れ替えることを示せ。

3 **K のべき。** $\mathbf{K}^2\mathbf{r} = (\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}$ および $\mathbf{K}^3 = -\mathbf{K}$ を示し、指数級数からロドリゲスの公式を導け。

4 **2 回の鏡映で回転になる。** 原点を通り、互いに角 α をなす 2 つの平面に関して順に鏡映を行うと、それらの交線のまわりの角 2α の回転になることを示せ。

さらに学ぶために

- **Simon Altmann, *Rotations, Quaternions, and Double Groups***（Dover）。3 次元の回転についての決定版で、ロドリゲスの貢献も扱っている。
- **Simon Altmann,「Hamilton, Rodrigues, and the quaternion scandal」**, *Mathematics Magazine* 62 (1989)。短く生き生きとした歴史の読み物。
- **John Stillwell, *Naive Lie Theory***（Springer）。学部生向けに回転、四元数、リー群を解説している。

7.6 双曲的回転と相対性理論

問題

STEP III 1991、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/91-s3-q6`

導入

回転行列（rotation matrix）$\begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix}$ は点を円 $x^2 + y^2 = 1$ に沿って動かし、u だけ回転してから w だけ回転することは、$u + w$ だけ回転することに等しい。cos と sin を cosh と sinh に置き換え、符号を一つ調整すると、この問題の行列が得られる。この行列は点を円ではなく双曲線（hyperbola）$x^2 - y^2 = 1$ に沿って動かし、やはりその「角」は加法的である。これが**双曲線回転**（hyperbolic rotation）である。

これは単なる珍しい話ではない。x を時間、y を距離（光の速さが 1 となる単位で測る）と見なすと、この行列は**ローレンツ・ブースト**（Lorentz boost）になる。すなわち、アインシュタイン（Einstein）の特殊相対性理論（special relativity）で見いだされた、互いに一定の速度で運動する二人の観測者の測定値を結びつける変換である。「双曲角」u は**ラピディティ**（rapidity）であり、ラピディティが加法的であるという事実が、Section 3.8 で出会った奇妙な速度の合成則を説明する。

取りかかる前に

考えてみよう $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$ に相当する、$\cosh u$ と $\sinh u$ が満たす恒等式は何か。また、$\cosh(u + v)$ と $\sinh(u + v)$ の加法定理はどうなるか。

$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ であり、

$$\cosh(u+v) = \cosh u \cosh v + \sinh u \sinh v,$$
$$\sinh(u+v) = \sinh u \cosh v + \cosh u \sinh v.$$

これらは定義 $\cosh u = \tfrac{1}{2}(e^u + e^{-u})$ と $\sinh u = \tfrac{1}{2}(e^u - e^{-u})$ から確かめられる。点 $(\cos v, \sin v)$ が円上にあるのとちょうど同じように、点 $(\cosh v, \sinh v)$ は双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上にある。

順を追って解く

段階 1　双曲線は不変である

$$\begin{aligned} x'^2 - y'^2 &= (x\cosh u + y\sinh u)^2 - (x\sinh u + y\cosh u)^2 \\ &= (x^2 - y^2)(\cosh^2 u - \sinh^2 u) = x^2 - y^2, \end{aligned}$$

交差項 $2xy\cosh u \sinh u$ が打ち消し合うからである。よって T は $x^2 - y^2$ を保ち、特に双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ をそれ自身に写す。 ■

> **考えてみよう**　原点を通る直線のうち、それ自身に写されるものはどれか。（固有ベクトル（eigenvector）を探せ。）

$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = (\cosh u + \sinh u)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = e^u\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ および $T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = e^{-u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ である。よって直線 $y = x$ と $y = -x$ はそれぞれそれ自身に写される。一方は e^u 倍に引き伸ばされ、他方は e^{-u} 倍に縮められる。これらは双曲線の漸近線（asymptote）である。 ■

段階 2　双曲角の加法

傾き（gradient）$\tanh v$ の直線は方向ベクトル（direction vector）$(\cosh v, \sinh v)$ をもつ。その像の方向は

$$T\begin{pmatrix}\cosh v\\ \sinh v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh u\cosh v + \sinh u\sinh v\\ \sinh u\cosh v + \cosh u\sinh v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh(u+v)\\ \sinh(u+v)\end{pmatrix},$$

であり、その傾きは $\tanh(u+v)$ である。線形写像（linear map）は平行な直線を平行な直線に写すので、このことは直線が原点を通るかどうかによらず成り立つ。したがって $v' = v + u$ である。 ■

段階 3　角が保たれるのはいつか

考えてみよう 傾き m_1, m_2 の二直線のなす角 ψ は $\tan\psi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$ を満たす。$m_i = \tanh v_i$ のとき、これを簡単にせよ。（ヒント：すべてを分母 $\cosh v_1 \cosh v_2$ でまとめよ。）

$\tanh v_1 - \tanh v_2 = \dfrac{\sinh(v_1 - v_2)}{\cosh v_1 \cosh v_2}$ と $1 + \tanh v_1 \tanh v_2 = \dfrac{\cosh(v_1 + v_2)}{\cosh v_1 \cosh v_2}$ を用いると、

$$\tan\psi = \left|\frac{\sinh(v_1 - v_2)}{\cosh(v_1 + v_2)}\right|.$$

変換の後、$v_1 - v_2$ は変わらず、$v_1 + v_2$ は $v_1 + v_2 + 2u$ になる。

手を止めて、やってみよう $\cosh(v_1 + v_2) = \cosh(v_1 + v_2 + 2u)$ となるのはどのようなときか。

二直線が平行でない（$v_1 \neq v_2$）と仮定すると、角が等しくなるのは $\cosh(v_1 + v_2) = \cosh(v_1 + v_2 + 2u)$ のとき、かつそのときに限る。cosh は偶関数（even function）であり、$[0, \infty)$ で狭義単調増加（strictly increasing）であるから、これは $v_1 + v_2 = \pm(v_1 + v_2 + 2u)$ を意味する。正の符号からは $u = 0$ が得られるが、これは除外されているので、

$$v_1 + v_2 = -u. \qquad \blacksquare$$

段階 4 図で見る

$v_1 + v_2 = -u$ のとき、変換後の角は $v_1' = v_1 + u = -v_2$ および $v_2' = v_2 + u = -v_1$ である。よって ℓ_1 の像の傾きは $-\tanh v_2$ であり、これは ℓ_2 を x 軸に関して折り返したものである。同様に ℓ_2 の像は ℓ_1 を折り返したものである。原点を通る直線については、この変換は二直線を入れ替えて折り返すので、両者のなす角が変わらないことがわかる（図 7.6.1）。

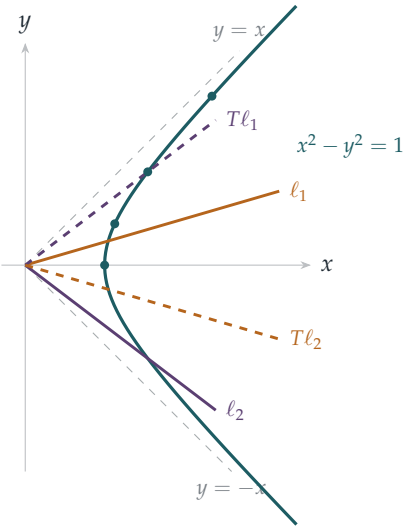


図 7.6.1　$u = 0.7$ の双曲線回転を、原点を通り $v_1 = 0.3, v_2 = -1.0$ である直線 ℓ_1, ℓ_2 に施したもの。$v_1 + v_2 = -u$ となっている。ℓ_1 の像（紫の破線）は ℓ_2 の鏡像であり、ℓ_2 の像（琥珀色の破線）は ℓ_1 の鏡像であるから、二直線のなす角は保たれる。双曲線上の青緑の点は双曲角について等間隔に並んでいる（$v = 0, 0.5, 1, 1.5$）。T はそれぞれの点を、双曲線に沿って 0.7 だけ先の点へ動かす。

振り返り

- **不変な二次形式。**回転が $x^2 + y^2$ を保つのとちょうど同じように、T は $x^2 - y^2$ を保つ。二次形式（quadratic form）の不変性である。
- **固有ベクトルは漸近線である。**不変に保たれる直線は $y = \pm x$ であり、それぞれ $e^{\pm u}$ 倍に伸縮される。
- **双曲角は加法的である。**方向を $\tanh v$ でパラメータ表示すると、T の作用は単純な加法 $v \mapsto v + u$ になった。

背後にある数学

特殊相対性理論

アインシュタインの特殊相対性理論（1905 年）では、互いに一定の速度で運動する観測者たちは時間と距離について意見が一致しないが、量 $t^2 - x^2$（光の速さを $c = 1$

とする）については全員が一致する。これが**時空間隔**（spacetime interval）である。これを保つ変換が**ローレンツ変換**（Lorentz transformation）であり、空間が一次元の場合、それはちょうどこの問題の行列で、x を時間、y を距離としたものになる。速度 $v = \tanh u$ で運動する観測者は、この行列によって我々の座標と結びつく座標を用いる。ここで $\cosh u = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ は、時間の遅れ（time dilation）を表す有名な因子 γ である。ミンコフスキー（Minkowski）は 1908 年に、これによって時空が、マイナス符号を含む「距離」をもつ四次元の幾何学になることを見抜いた。「これより先、空間それ自体、そして時間それ自体は、単なる影へと消え去る運命にある。」

この問題の物理的な意味

- **不変な直線** $y = \pm x$ は光線の経路である。これはすべての観測者にとって同じである。光の速さが誰にとっても同じであるということこそ、相対性理論の根本原理である。
- **双曲線** $x^2 - y^2 = 1$ は、あらゆる一定速度で運動する観測者が測ったときに、原点から「固有時」（proper time）で一単位離れた事象の集合である。
- **ラピディティの加法。** 原点を通る傾き $\tanh v$ の直線は、速度 $\tanh v$ で運動する物体の経路である。ラピディティ u のブーストは、その速度を $\tanh(v+u) = \frac{\tanh v + \tanh u}{1 + \tanh v \tanh u}$ に変える。これは Section 3.8 で見たアインシュタインの速度合成の公式である。速度は加法的ではないが、ラピディティは加法的なのである。

さらに Section 5.8 では、同じ加法公式をポアンカレ円板（Poincaré disc）における距離の規則として見た。相対性理論において可能な速度全体の集合は、ラピディティで測ると双曲空間になるのである。

思考のスキル

適切なパラメータ表示を見つける

変換が単純になるようなパラメータで対象を記述せよ。

方向をその傾きで記述すると、T は込み入った式で作用する。傾きが $\tanh v$ となる v で記述すると、T は単に u を加えるだけになる。同じ考え方によって、回転は角を用いると単純になり、Section 2.8 では写像 $x \mapsto x^2 - 2$ が単純になった。このようなパラメータ表示（parametrisation）の選び方が鍵である。

次の一歩

1. **ブーストの合成。** $T(u)$ を問題の行列とするとき、$T(u)T(w) = T(u+w)$ を示せ。$T(u)^{-1}$ は何か。

2. **時間の遅れ。** 宇宙船が光の速さの 0.8 倍で進んでいる。そのラピディティ u と $\cosh u$ を求めよ。地球で 10 年が経過するとき、宇宙船ではどれだけの時間が経過するか。（$t_{\text{宇宙船}} = t_{\text{地球}} / \cosh u$ を用いよ。）

3. **双曲線の面積。** 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$、x 軸、および原点と $(\cosh v, \sinh v)$ を結ぶ線分で囲まれた部分の面積が $\frac{v}{2}$ であることを示せ。これは円の場合の対応する面積が $\frac{\theta}{2}$ であることとちょうど同じである。T がこのような面積を保たなければならないのはなぜか。

4. **スクイーズ。** 座標を $p = x + y,\ q = x - y$ に変換せよ。T が $p \mapsto e^{u}p,\ q \mapsto e^{-u}q$ となり、双曲線が $pq = 1$ となることを示せ。この座標で、変換を幾何学的に説明せよ。

さらに学ぶために

- **Edwin Taylor & John Wheeler, *Spacetime Physics*** (W. H. Freeman)。ラピディティと時空図を用いた特殊相対性理論の本で、A レベル（A level、英国の大学入学資格試験）の数学を学んだ生徒向けである。
- **Tevian Dray, *The Geometry of Special Relativity*** (CRC Press)。相対性理論を双曲線の三角法として扱っており、まさにこの節と同じ精神で書かれている。
- **Albert Einstein, *Relativity: The Special and the General Theory***（さまざまな版がある）。アインシュタイン自身による一般向けの解説で、今でも非常に読みやすい。

7.7 決して変わらない量

問題

STEP III 2024、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip`

導入

物理学における最も深い事実のいくつかは**保存則**（conservation laws）である。運動がどれほど複雑であっても、エネルギー、運動量、角運動量は変わらない。系に十分多くの保存量があれば、その運動は厳密に解くことができる。保存量が少なすぎると、運動はカオス的になりうる。

この問題は、保存量を作り出す驚くべき方法を示している。行列が $\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ に従って時間変化するならば、その成分がどれほど激しく変化しても、そのトレース（trace）と行列式（determinant）、したがって固有値（eigenvalues）は決して変わらない。このような組 $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ は**ラックス対**（Lax pair）と呼ばれる。この名は、互いにすり抜けても形を変えない孤立波である**ソリトン**（solitons）の驚くべき振る舞いを説明するために、1968 年にこの考え方を導入したピーター・ラックス（Peter Lax）にちなむ。

取りかかる前に

考えてみよう 式 $\mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ は $\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ の**交換子**（commutator）と呼ばれる。これが零になるのはどのようなときか。小問 (i) を踏まえると、そのトレースはいくらか。

交換子が零になるのは、$\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ が可換であるときに限る。また小問 (i) より、そのトレースは常に $\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) - \operatorname{tr}(\mathbf{NM}) = 0$ である。このただ一つの事実が、この問題に現れるすべての保存則の出発点である。

順を追って解く

段階 1　トレース

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$、$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とすると、$\mathbf{MN}$ の対角成分は $ap + br$ と $cq + ds$ であるから、$\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = ap + br + cq + ds$ である。$\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ の役割を入れ替えると $pa + qc + rb + sd$ となり、これは同じものである。また明らかに $\operatorname{tr}(\mathbf{M} + \mathbf{N}) = \operatorname{tr}\mathbf{M} + \operatorname{tr}\mathbf{N}$ である。 ■

段階 2　行列式の導関数

考えてみよう　積の微分法則を用いて $\det\mathbf{M} = ad - bc$ を微分せよ。次に $\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ を用いて、$\mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}$ とそのトレースを計算せよ。

導関数をドットで表すと、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\mathbf{M} = \dot{a}d + a\dot{d} - \dot{b}c - b\dot{c}$ である。また

$$\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}} = \frac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{a} & \dot{b} \\ \dot{c} & \dot{d} \end{pmatrix}$$

の対角成分は $\frac{d\dot{a} - b\dot{c}}{\det\mathbf{M}}$ と $\frac{-c\dot{b} + a\dot{d}}{\det\mathbf{M}}$ である。これらの和は $\frac{1}{\det\mathbf{M}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\mathbf{M}$ である。 ■

段階 3　三つの保存量

考えてみよう　$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ のトレースをとれ。行列式については小問 (ii) を用いよ。$\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{MN} - \mathbf{NM})$ はどうなるか。

トレース：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{tr}\mathbf{M} = \operatorname{tr}\dot{\mathbf{M}} = \operatorname{tr}(\mathbf{MN}) - \operatorname{tr}(\mathbf{NM}) = 0$。

行列式：小問 (ii) より

$$\frac{1}{\det\mathbf{M}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\mathbf{M} = \operatorname{tr}\bigl(\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{MN} - \mathbf{NM})\bigr) = \operatorname{tr}\mathbf{N} - \operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{NM}) = \operatorname{tr}\mathbf{N} - \operatorname{tr}\mathbf{N} = 0,$$

である。ここで小問 (i) を $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{NM})) = \operatorname{tr}((\mathbf{NM})\mathbf{M}^{-1}) = \operatorname{tr}\mathbf{N}$ の形で用いた。

2 乗のトレース：$\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2) = (\operatorname{tr}\mathbf{M})^2 - 2\det\mathbf{M}$ である（Section 7.4 を参照）。右辺の二つの項はともに一定であるから、これも一定である。 ■

段階 4　陽な解

手を止めて、やってみよう $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ として $\mathbf{N} = t\mathbf{I} + t\mathbf{E}$ とおき、$\mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ を計算して、a、b、c、d についての微分方程式を書き下せ。それらを c、次に a と d、最後に b の順に解け。

$t\mathbf{I}$ の部分はすべての行列と可換であるから、$\mathbf{MN} - \mathbf{NM} = t(\mathbf{ME} - \mathbf{EM})$ である。ここで $\mathbf{ME} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$、$\mathbf{EM} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ であるから、

$$\dot{a} = -tc, \qquad \dot{b} = t(a - d), \qquad \dot{c} = 0, \qquad \dot{d} = tc.$$

よって $c = C$ は定数である。すると $a = A - \frac{1}{2}Ct^2$、$d = D + \frac{1}{2}Ct^2$ となり、さらに $\dot{b} = t(A - D - Ct^2)$ より $b = B + \frac{1}{2}(A - D)t^2 - \frac{1}{4}Ct^4$ となる。したがって

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A - \frac{1}{2}Ct^2 & B + \frac{1}{2}(A - D)t^2 - \frac{1}{4}Ct^4 \\ C & D + \frac{1}{2}Ct^2 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

検算：トレースは $A + D$ であり、行列式は $(A - \frac{1}{2}Ct^2)(D + \frac{1}{2}Ct^2) - C\big(B + \frac{1}{2}(A - D)t^2 - \frac{1}{4}Ct^4\big) = AD - BC$ である。予告どおり一定である（図 7.7.1）。

段階 5 別の方程式

考えてみよう $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN}$ ならば $\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}$ であり、小問 (ii) より $\operatorname{tr}\mathbf{N}$ は $\det\mathbf{M}$ の対数微分である。$\mathbf{M}$ のトレースが一定のまま、行列式が変化することはありうるか。

もちろんありうる。$|t| < 1$ に対して $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$ とする（このとき $\det\mathbf{M} = 1 - t^2 \neq 0$）。そのトレースは常に 2 である。$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN}$ となるように $\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}$ と定めると、

$$\mathbf{N} = \frac{1}{1 - t^2}\begin{pmatrix} 1 & -t \\ -t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - t^2}\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix},$$

となる。これは正則であり、$t \neq 0$ のとき $\operatorname{tr}\mathbf{N} = \frac{-2t}{1 - t^2} \neq 0$ である。よって答えは**否**であり、$\operatorname{tr}\mathbf{N}$ は零である必要はない。 $\blacksquare$

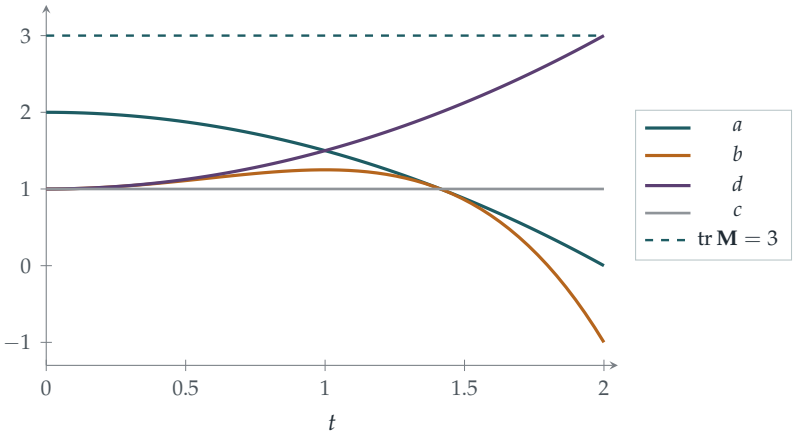


図 7.7.1　段階 4 で求めた $\mathbf{M}(t)$ の成分（$A = 2$、$B = 1$、$C = 1$、$D = 1$）。c 以外の成分はすべて変化するが、トレースは常に 3、行列式は常に 1 のままである。したがって固有値 $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ は決して変わらない。この流れは**等スペクトル**（isospectral）である。

振り返り

- **交換子のトレースは零である。** $\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = \operatorname{tr}(\mathbf{NM})$ から、すべての保存則が導かれた。
- **対数微分。** 小問 (ii) により、行列式の導関数が、線形で扱いやすいトレースに置き換えられた。
- **陽な解で保存を確かめる。** $\mathbf{M}(t)$ の式は、そのトレースと行列式が一定であることを確認して検算した。

背後にある数学

ソリトンとラックス対

1834 年、スコットランドの技術者 John Scott Russell は、エディンバラ近郊のユニオン運河を進む孤立波を馬で追いかけ、それが 1 マイル以上にわたって形を崩さずに進むのを観察した。このような波は**コルテヴェーク–ド・フリース（*KdV*）方程式**（Korteweg–de Vries equation）で記述される。1960 年代には、Norman Zabusky と Martin Kruskal による計算機実験によって、この「ソリトン」二つが衝突しても、まるで粒子のように形を変えずに抜け出てくることが示された。これを説明するに

は無限に多くの保存量が必要であった。1968 年にピーター・ラックスは、KdV 方程式が一対の微分作用素 L と P を用いて $\dot{L} = LP - PL$ と書けることを示した。すると、まさにこの問題と同じように L の固有値が保存され、それらが無限個の保存則を与える。ラックス対をもつ系は**可積分**（integrable）と呼ばれ、厳密に解くことのできる数少ない非線形系の一つである。

等スペクトル流

$\mathbf{M}$ のトレースと行列式は特性多項式（characteristic polynomial）$\lambda^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{M})\lambda + \det\mathbf{M}$ を決定するから、$\mathbf{M}$ の固有値は時間とともに変化しない。流れ $\dot{\mathbf{M}} = [\mathbf{M}, \mathbf{N}]$ は、固有値を固定した行列の集合の中で $\mathbf{M}$ を動かしていく。実際、解は常にある正則行列 $\mathbf{S}(t)$ を用いて $\mathbf{M}(t) = \mathbf{S}(t)^{-1}\mathbf{M}(0)\mathbf{S}(t)$ の形に書ける。すなわち、行列は常に初期値と相似（similar）である。同じ考え方は物理学全体に通じている。量子力学では、観測量 $\mathbf{A}$ は $\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\mathbf{H}, \mathbf{A}]$ に従って時間発展する。ここで $\mathbf{H}$ はエネルギーであり、したがってエネルギーと可換なものはすべて保存される。

ヤコビの公式

小問 (ii) は任意のサイズの正則行列に対して成り立ち、**ヤコビ（*Jacobi*）の公式**と呼ばれる。$\det\mathbf{M}$ は負になりうるので、対数を使わずに $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\mathbf{M} = \det\mathbf{M}\,\operatorname{tr}\!\left(\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}\right)$ と書くのが最も安全である。対数を用いた形 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\det\mathbf{M} = \operatorname{tr}\!\left(\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}\right)$ には $\det\mathbf{M} > 0$ が必要である（一般には $\ln|\det\mathbf{M}|$ を用いる）。この帰結として、定数行列 $\mathbf{A}$ に対して $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{A}\mathbf{M}$ ならば、$\det\mathbf{M}(t) = e^{t\operatorname{tr}\mathbf{A}}\det\mathbf{M}(0)$ となる。微分方程式の研究では、これは相空間（phase space）における体積がどのように増減するかを教えてくれる。古典力学の方程式ではトレースが零であり、体積は保存される。これは**リウヴィルの定理**（Liouville's theorem）として知られる結果である。

思考のスキル

変わらないものを見つける

何かが時間発展するときには、そこから作られる量で一定に保たれるものを探せ。それらは運動を制約し、しばしばその構造を明らかにする。

ここでは、変化率が交換子であったために、トレースと行列式が保存された。力学では、保存量は対称性から生じ（ネーター（Noether）の定理）、それらを見つけることが問題を解く第一歩となることが多い。

次の一歩

1. **解を確かめる。** 段階 4 の行列 $\mathbf{M}(t)$ が $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ を満たすことを、微分して確かめよ。

2. **相似。** $\mathbf{M}_0$ を定数行列とし、$\mathbf{S}(t)$ が $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{SN}$ を満たすとき、$\mathbf{M}(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}_0\mathbf{S}$ ならば $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ であることを示せ。（ヒント：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{S}^{-1} = -\mathbf{S}^{-1}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{S}^{-1}$。）

3. **体積の増大。** $\mathbf{M}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ とする。$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN}$ となる $\mathbf{N}$ を求め、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\det\mathbf{M} = \operatorname{tr}\mathbf{N}$ を確かめよ。

4. **高次の累乗。** $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ のとき、任意の正の整数 k に対して $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{tr}(\mathbf{M}^k) = 0$ であることを直接示せ。

さらに学ぶために

- **P. G. Drazin & R. S. Johnson, *Solitons: An Introduction***（Cambridge University Press）。ラックス対も含む、学部生向けの標準的な入門書。
- **Thierry Dauxois & Michel Peyrard, *Physics of Solitons***（Cambridge University Press）。Scott Russell の波の話も収められている。
- **Dwight Neuenschwander, *Emmy Noether's Wonderful Theorem***（Johns Hopkins University Press）。対称性がどのように保存則を与えるかを解説している。

7.8 四つの平方数

問題

STEP III 1994、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/94-s3-q8`

導入

7 は 2 つの平方数の和（sum of squares）としても、3 つの平方数の和としても表せない。しかし 4 つの平方数の和としては表せる：$7 = 4 + 1 + 1 + 1$。1770 年、ジョゼフ＝ルイ・ラグランジュ（Joseph-Louis Lagrange）は、**すべての**正の整数が 4 つの平方数の和として表せることを証明した（0^2 も許す）。この定理は 1621 年にバシェ（Bachet）によって予想され、フェルマー（Fermat）も主張していたが、彼はいつものように証明を残さなかった。オイラー（Euler）は 40 年にわたってこの問題に取り組んだが、完全には解決できなかった。

1748 年にオイラーが発見した鍵となる道具が、この問題の中にある。それは、4 つの平方数の和どうしの積は、それ自身もまた 4 つの平方数の和になるという事実である。これにより、ラグランジュの定理は素数（prime）についてだけ証明すればよく、残りは掛け合わせることで従う。この問題では、複素行列の行列式（determinant）からわずか数行でこの恒等式（identity）を導く。これらの行列は、実は Section 6.7 の四元数（quaternions）が姿を変えたものである。

取りかかる前に

考えてみよう 2 つの平方数の場合を思い出そう。複素数（complex number）$z = a + b\mathrm{i}$, $w = p + q\mathrm{i}$ に対して $|z|^2|w|^2 = |zw|^2$ が成り立つので、$(a^2 + b^2)(p^2 + q^2)$ は 2 つの平方数の和になる。行列を使って、これを 4 つの平方数に拡張するにはどうすればよいだろうか？

考え方は、4 つの実数からつくられる一種の「数」で、その「大きさの 2 乗」が $a^2+b^2+c^2+d^2$ であり、しかも乗法的（multiplicative）であるようなものを見つけることである。行列は行列式に関して乗法的である：$\det(\mathbf{AB}) = \det\mathbf{A}\det\mathbf{B}$。そこで、$a,b,c,d$ からつくられ、行列式が $a^2+b^2+c^2+d^2$ となり、さらにそのような行列どうしの積が再び同じ形になるような行列がほしい。

順を追って解く

段階 1　行列式は 4 つの平方数の和である

考えてみよう　$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix}$ の行列式は何か？$z_1 = a+b\mathrm{i}$, $z_2 = c+d\mathrm{i}$ とすると、それは a,b,c,d を用いてどう表されるか？

$\det = z_1z_1^* + z_2z_2^* = |z_1|^2 + |z_2|^2 = a^2+b^2+c^2+d^2$ である。同様に、$z_3 = p+q\mathrm{i}$, $z_4 = r+s\mathrm{i}$ とすると、2 つ目の行列の行列式は $p^2+q^2+r^2+s^2$ である。

段階 2　積も同じ形をもつ

掛け合わせると、

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_3 & z_4 \\ -z_4^* & z_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1z_3 - z_2z_4^* & z_1z_4 + z_2z_3^* \\ -z_2^*z_3 - z_1^*z_4^* & -z_2^*z_4 + z_1^*z_3^* \end{pmatrix}.$$

$w_1 = z_1z_3 - z_2z_4^*$, $w_2 = z_1z_4 + z_2z_3^*$ とおくと、下の行は $(-w_2^*, w_1^*)$ となるので、積は $\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ -w_2^* & w_1^* \end{pmatrix}$ であり、同じ形をしている。その行列式は $|w_1|^2+|w_2|^2$ であり、行列式は積を保つから、

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2) = |w_1|^2 + |w_2|^2.$$

段階 3　4 つの平方数を読み取る

手を止めて、やってみよう　$w_1 = (a+b\mathrm{i})(p+q\mathrm{i}) - (c+d\mathrm{i})(r-s\mathrm{i})$ と $w_2 = (a+b\mathrm{i})(r+s\mathrm{i}) + (c+d\mathrm{i})(p-q\mathrm{i})$ を展開し、実部と虚部に分けよ。

$$w_1 = (ap - bq - cr - ds) + \mathrm{i}(aq + bp + cs - dr),$$
$$w_2 = (ar - bs + cp + dq) + \mathrm{i}(as + br - cq + dp).$$

よって

$$L_1 = ap - bq - cr - ds, \qquad L_2 = aq + bp + cs - dr,$$
$$L_3 = ar - bs + cp + dq, \qquad L_4 = as + br - cq + dp,$$

とおけば、いずれも a,b,c,d についても p,q,r,s についても 1 次式であり、$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2) = L_1^2+L_2^2+L_3^2+L_4^2$ が成り立つ。 ■

たとえば、$7 = 2^2+1^2+1^2+1^2$, $3 = 1^2+1^2+1^2+0^2$ である。$(a,b,c,d) = (2,1,1,1)$, $(p,q,r,s) = (1,1,1,0)$ とすると、上の式から $(L_1,L_2,L_3,L_4) = (0,2,4,1)$ が得られ、実際 $0^2+2^2+4^2+1^2 = 21 = 7\times 3$ となっている。

振り返り

- **乗法性が仕事をする。**この恒等式は $\det(\mathbf{AB}) = \det\mathbf{A}\det\mathbf{B}$ から得られた。これは、2 つの平方数の恒等式が $|zw| = |z||w|$ から得られるのとまったく同じである。
- **積について閉じていること。**特別な形 $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix}$ は積によって保たれる。このおかげで、結果が再び 4 つの平方数の和になるのである。
- **丁寧な計算の管理が大切である。**最後の段階は機械的だが間違えやすい。符号と共役（conjugate）は注意深く扱わなければならない。

背後にある数学

ラグランジュの四平方定理

ラグランジュの証明の概略は次のとおりである。オイラーの恒等式により、すべての素数 p が 4 つの平方数の和であることを示せば十分である。数え上げの議論により、$m < p$ を満たすある倍数 mp が 4 つの平方数の和であることがわかる。次に巧妙な「降下法（descent）」によって、$1 < m < p$ で mp が 4 つの平方数の和ならば、より小さいある m' についても $m'p$ が 4 つの平方数の和であることが示される。これを繰り返せば $m = 1$ に到達する（Section 1.5 のフェルマーの降下法と比べてみよ）。1834 年、ヤコビ（Jacobi）はさらに先へ進み、n を 4 つの平方数の和として表す方法の正確な個数を求めた。それは、n の約数（divisor）のうち 4 の倍数でないものの和の 8 倍である。たとえば、1 の表し方は 8 通りある（4 つの位置のどれかに ± 1 を置く）。

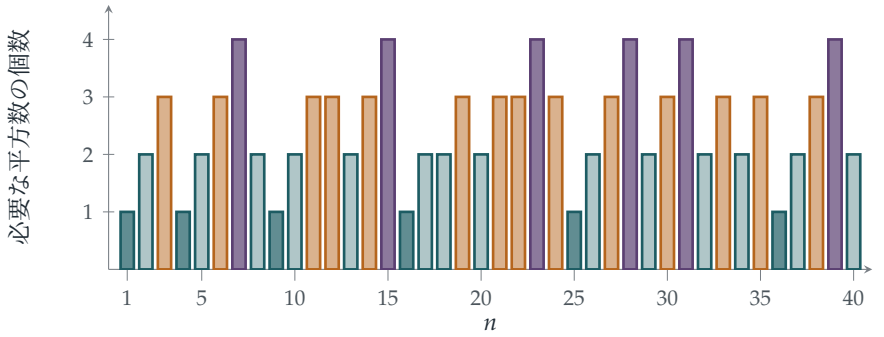


図 7.8.1　1 から 40 までの各 n をつくるのに必要な平方数の最小個数。ラグランジュの定理により、どの数も高々 4 個で足りる。4 個必要な数（紫）は $7, 15, 23, 28, 31, 39, \ldots$ であり、ルジャンドル（Legendre）とガウス（Gauss）の定理により、これはちょうど $4^k(8m+7)$ の形の数である。

2 つ、3 つ、4 つ

次元ごとの様子は微妙である。2 つの平方数の和は複素数から生じ、ある数が 2 つの平方数の和となるのは、$4k+3$ の形の素因数がすべて偶数乗で現れるときであり、かつそのときに限る（Section 1.6）。4 つの平方数の和は四元数から生じ、すべての数がそう表せる。ところが 3 つの平方数の和には積の恒等式がまったくない（乗法的な大きさをもつ 3 次元の数の体系は存在しない。ハミルトン（Hamilton）が 3 つ組で失敗したのはそのためである。Section 6.7 を参照）。そして定理もより難しい。ルジャンドルとガウスは、$n = 4^k(8m+7)$ でない限り n は 3 つの平方数の和であることを示した（図 7.8.1）。4 より先では、8 次元の八元数（octonions）が 8 つの平方数の恒等式を与える。これは Degen と Graves によって発見された。そしてフルヴィッツ（Hurwitz）は 1898 年に、この種の恒等式が存在するのは 1, 2, 4, 8 個の平方数の場合に限ることを証明した。

ウェアリングの問題

ラグランジュの定理は、1770 年にエドワード・ウェアリング（Edward Waring）が提起した問題の最初の場合である。その問題とは、各 k に対して、すべての正の整数が高々 $g(k)$ 個の k 乗数の和として表せるような数 $g(k)$ が存在するか、というものである。ダフィット・ヒルベルト（David Hilbert）は 1909 年に、そのような数が存在することを証明した。現在では $g(2) = 4$, $g(3) = 9$（たとえば $23 = 2 \cdot 2^3 + 7 \cdot 1^3$ には 9 個の立方数が必要である）、$g(4) = 19$ であることがわかっている。

思考のスキル

乗法的な構造を見つける

ある性質が積によって保たれることを示すには、その性質が対象の「大きさ」になっていて、しかも大きさが乗法的であるような代数的構造（複素数、四元数、行列）を見つけよ。

そのような構造が見つかれば、積の恒等式はおのずと得られ、すべての数についての問題は素数についての問題に帰着される。

次の一歩

1. **具体例。** $(a,b,c,d) = (p,q,r,s) = (2,1,1,1)$ として $L_1, \ldots, L_4$ の式を用い、$49 = 7 \times 7$ を 4 つの平方数の和として表し、答えを確かめよ。それは自明な $49 = 7^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$ と同じだろうか？

2. **4 つの中の 2 つ。** $c = d = r = s = 0$ のとき、この恒等式が Section 1.6 の 2 つの平方数の恒等式に帰着することを示せ。

3. **4 つの平方数が必要な数。** 平方数を 8 を法として（modulo）考えることにより、$8m + 7$ の形の数は 3 つの平方数の和として表せないことを示せ。

4. **ヤコビの公式。** 2 を 4 つの平方数の和として表す方法（順序と符号を区別する）を数え上げ、その答えが $8 \times (1 + 2) = 24$ であることを確かめよ。

さらに学ぶために

- **Harold Davenport, *The Higher Arithmetic***（Cambridge University Press）。第 V 章でラグランジュの四平方定理を証明している。
- **John Conway & Derek Smith, *On Quaternions and Octonions***（A. K. Peters）。四元数の算術を扱い、四元数の整数を用いた四平方定理の証明も含む。
- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***、「Representing numbers as sums of two squares」の章（数を 2 つの平方数の和として表す）。本節と対をなす、2 つの平方数の話である。

7.9 正多面体はただ五つ

問題

STEP III 1999、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/99-s3-q4`

導入

正多角形（regular polygon）は無限に多く存在する。正三角形、正方形、正五角形と、辺の数がいくつであっても正多角形がある。それならば正多面体（regular polyhedron）も無限に多くあると思うかもしれない。しかし実際にはちょうど 5 つしかない。正四面体（tetrahedron）、立方体（cube）、正八面体（octahedron）、正十二面体（dodecahedron）、正二十面体（icosahedron）である。プラトン（Plato）はこのうち 4 つを四元素（火、土、空気、水）に、残る 1 つを宇宙に対応させた。史上最も大きな影響を与えた数学書であるユークリッド（Euclid）の『原論』（*Elements*）は、これ以外に正多面体が存在しないことの証明で締めくくられている。ケプラー（Kepler）はこれらを用いて太陽系の模型を作った。

この問題では、オイラー（Euler）が 1750 年に発見した一つの驚くべき公式、すなわち任意の凸多面体（convex polyhedron）について $V - E + F = 2$ が成り立つという公式から、この分類をわずか数行で証明する。数え上げに関する公式が図形に関する定理に姿を変え、数 2 が球面の「指紋」であることが明らかになる。

取りかかる前に

考えてみよう 立方体でオイラーの公式を確かめよ。頂点（vertex）、辺（edge）、面（face）はそれぞれいくつあるか。正方形を底面とする角錐ではどうか。

立方体では $V = 8$、$E = 12$、$F = 6$ であり、$8 - 12 + 6 = 2$ となる。正方形を底面とする角錐は頂点が 5 個、辺が 8 本、面が 5 枚であり、$5 - 8 + 5 = 2$ となる。この公式は、

穴のない多面体であれば、どれほど不規則な形であっても成り立つ。

> **考えてみよう**　正多面体では、各面は m 本の辺をもち、各辺はちょうど 2 枚の面に接する。このことから E と F の間にどのような等式が得られるか。同様に、E と V の間にはどうか。

辺と面の接続（incidence）を 2 通りに数える。F 枚の面はそれぞれ m 本の辺をもち、各辺は（それが接する 2 枚の面それぞれについて 1 回ずつ）2 回数えられるので、$mF = 2E$ である。同様に、各頂点には n 本の辺が集まり、各辺には端点が 2 つあるので、$nV = 2E$ である。この「同じものを 2 通りに数える」手法を**二重数え上げ**（double counting）という。

順を追って解く

段階 1　F を表す式

$mF = 2E$ と $nV = 2E$ から、$E = \frac{mF}{2}$、$V = \frac{mF}{n}$ である。これらをオイラーの公式に代入すると、

$$\frac{mF}{n} - \frac{mF}{2} + F = 2 \quad\Longrightarrow\quad F\,\frac{2m - mn + 2n}{2n} = 2 \quad\Longrightarrow\quad F = \frac{4n}{2m + 2n - mn}.$$

また $4 - (n-2)(m-2) = 4 - (mn - 2m - 2n + 4) = 2m + 2n - mn = h$ である。よって $F = \frac{4n}{h}$ である。 ■

段階 2　m と n はどのような値をとりうるか

> **考えてみよう**　m（面の辺の数）と n（頂点に集まる面の数）の最小値はそれぞれいくつか。また $F > 0$ であることから、h の符号はどうでなければならないか。

多角形には少なくとも 3 本の辺が必要なので $m \geq 3$ であり、立体の各頂点には少なくとも 3 枚の面が集まらなければならないので $n \geq 3$ である。$F > 0$ であるから $h > 0$、すなわち $(n-2)(m-2) < 4$ が必要である。2 つの因数はともに 1 以上なので、$(m-2, n-2)$ としてありうるのは $(1,1)$、$(1,2)$、$(2,1)$、$(1,3)$、$(3,1)$ のみである。

> **手を止めて、やってみよう**　5 つの場合それぞれについて、h、F、さらに $E = \frac{mF}{2}$ と $V = \frac{mF}{n}$ を計算せよ。それぞれどの立体であるかを特定せよ。

m	n	h	F	E	V	立体
3	3	3	4	6	4	正四面体
3	4	2	8	12	6	正八面体
4	3	2	6	12	8	立方体
3	5	1	20	30	12	正二十面体
5	3	1	12	30	20	正十二面体

ありうるのはこれらだけなので、正多面体は高々 5 種類である。そして 5 種類すべてが実際に存在する（ユークリッドはそれぞれの作図法を示している）。 ■

振り返り

- **二重数え上げ。** 辺と面、辺と頂点の接続を 2 通りに数えることで、$mF = 2E$ と $nV = 2E$ が得られた。
- **正値性から得られる不等式。** $F > 0$ という単純な条件によって、無限にあった候補が 5 つにまで絞られた。
- **存在は別問題である。** この議論で示されるのは高々 5 種類であるということであり、それぞれが実際に存在することは、作図によって確かめなければならない。

背後にある数学

オイラーの公式と位相幾何学

オイラーは 1750 年に $V - E + F = 2$ を述べたが、その証明には不備があった。この公式には、証明の試み、反例（counterexample）、そしてその修正が繰り返された興味深い歴史がある。中央に正方形の穴が貫通した「額縁」型の多面体では $V - E + F = 0$ となり、2 つの立方体を 1 つの頂点で接合した多面体では $V - E + F = 3$ となる。ラカトシュ・イムレ（Imre Lakatos）はこの歴史を題材に、数学の概念が反例によってどのように研ぎ澄まされていくかを論じた有名な書物 *Proofs and Refutations*（『証明と論駁』）を著した。最終的な解決は、$V - E + F$ が位相幾何学（topology）というゆるやかな意味での曲面の形にのみ依存する、というものである。すなわち、球面に変形できる任意の曲面ではこの値は 2 であり、トーラス（torus、ドーナツの表面）では 0、g 個の穴をもつ曲面では $2 - 2g$ である。この数は**オイラー標数**（Euler characteristic）と呼ばれ、伸ばしたり曲げたりしても変わらない性質を研究する位相幾何学の、最初期の概念の一つであった。

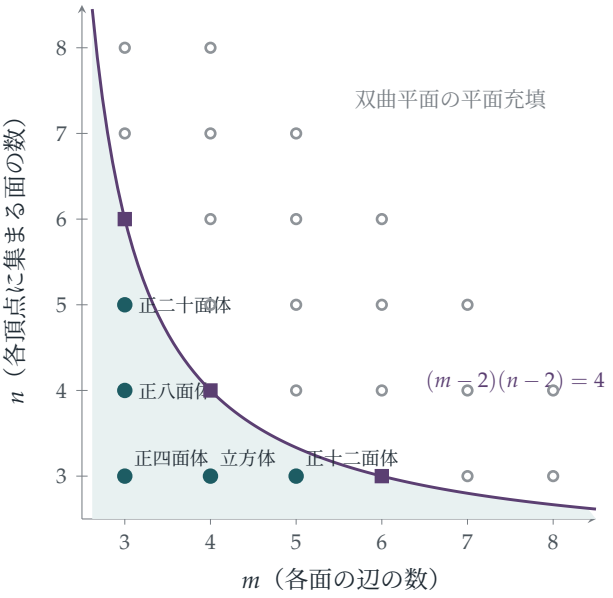


図 7.9.1　$m, n \geq 3$ を満たす組 (m, n) としてありうるもの。曲線 $(m-2)(n-2) = 4$ の下側（網掛け部分）にあるのが 5 つのプラトン立体（緑青色）である。曲線上にあるのは平坦な平面の 3 つの平面充填（紫の四角）であり、それぞれ正三角形（$m = 3$、$n = 6$）、正方形（4, 4）、正六角形（6, 3）によるものである。曲線より上側の各点（白抜きの丸）は、双曲平面の正則な平面充填を与える。

球面の先へ

$h = 0$ や $h < 0$ のときはどうなるだろうか。$(m-2)(n-2) = 4$ のときは $(3, 6)$、$(4, 4)$、$(6, 3)$ の 3 つの解がある。すなわち、6 枚の正三角形、4 枚の正方形、あるいは 3 枚の正六角形が 1 点に集まり、その角の和がちょうど 360° になる。これらは平坦な平面の 3 つの正則な平面充填（tiling）であり、浴室の床のタイルや蜂の巣に見られる模様である。そして $(m-2)(n-2) > 4$ のときは、1 つの頂点に集まる角の和が 360° を超える。これは平坦な平面では不可能だが、Section 5.8 で扱った双曲平面（hyperbolic plane）ではまったく問題なく実現できる。双曲平面の正則な平面充填は無限に多く存在し、図 7.9.1 の曲線より上側の各点に 1 つずつ対応する。エッシャー（Escher）の木版画 *Circle Limit*（『円の極限』）連作は、そのうちのいくつかを描いたものである。このように、プラトン立体の分類は、実は幾何学全体を貫く三分法（trichotomy）——球面、平面、双曲平面——の最初の場合なのである。

対称性の群

プラトン立体の対称性は群（group）をなす。正四面体では 12 個の回転、立方体と正八面体では 24 個の回転（この 2 つは双対（dual）である。つまり面と頂点を入れ替える、$m \leftrightarrow n$）、正十二面体と正二十面体では 60 個の回転である。位数 60 の正二十面体群は、Section 6.4 で触れたように、五次方程式（quintic）が冪根（radicals）によって解けないことの原因となる「単純」群（simple group）である。フェリックス・クライン（Felix Klein）は、正二十面体と五次方程式の解法とを結びつける一冊の本 *Lectures on the Icosahedron*（『正二十面体講義』、1884 年）を著している。

思考のスキル

二重数え上げ

同じ集まりを 2 通りの方法で数え、その結果を等しいとおく。

ここでの集まりは、辺がその面上にあるような（辺, 面）の組全体の集合であった。二重数え上げは組合せ論（combinatorics）における最も強力な道具の一つであり、第 9 章の随所で再び登場する。

次の一歩

1. **双対性。** m と n を入れ替えると、V と F が入れ替わり、E は変わらないことを示せ。どのプラトン立体どうしが互いに双対か。自己双対なのはどれか。

2. **サッカーボール。** 伝統的なサッカーボールは 12 枚の正五角形と 20 枚の正六角形からなり、各頂点には 3 枚の面が集まる。二重数え上げとオイラーの公式を用いて、$V - E + F = 2$ を確かめよ。さらに一般に、五角形と六角形からなり各頂点に 3 枚ずつ集まるこのような多面体は、ちょうど 12 枚の五角形をもつことを示せ。

3. **トーラス。**「額縁」型の多面体（正方形の穴があいた四角いブロック）を作り、V、E、F を数えよ。$V - E + F = 0$ となることを確かめよ。

4. **頂点に集まる角。** 正 m 角形の内角は $180^\circ\left(1 - \frac{2}{m}\right)$ である。凸な立体の 1 つの頂点のまわりにそれが n 個収まる（和が 360° 未満となる）のは、$(m-2)(n-2) < 4$ のとき、かつそのときに限ることを示せ。これにより分類の第二の証明が得られる。

さらに学ぶために

- **David Richeson, *Euler's Gem***（Princeton University Press）。$V - E + F = 2$ の歴史と、それがどのように位相幾何学へとつながったかを描く。シックスフォーム（sixth form、英国の大学進学準備課程）の生徒にとって最適な一冊である。
- **Imre Lakatos, *Proofs and Refutations***（Cambridge University Press）。オイラーの公式と証明の本質をめぐる対話篇。
- **H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes***（Dover）。正多面体とその高次元の仲間についての古典的名著。

学んだこと

本章は、行列（matrix）とはそれ自体で独自の性格をもつ空間の変換である、という話から始まり、三つの問いを立てた。行列は数とどこが似ていてどこが違うのか、行列は実際に何をしているのか、そして何が変わらずに保たれるのか、である。本章の九つの問題が明らかにしたことをここでまとめる。

1. 行列は数とどこが似ていて、どこが違うのか

行列は足し算もかけ算もできるが、Section 7.1 では、なじみのある規則のうちどれが成り立たなくなるかを見た。かけ算は可換（commutative）ではないので、$(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ は $\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2$ になるとは限らない。零因子（zero divisor）が存在するので、$\mathbf{AB}=\mathbf{0}$ であっても $\mathbf{BA}=\mathbf{0}$ とは限らない。さらに、行列の二次方程式は無限に多くの解をもちうる。こうした規則の破れには、いずれも行列が平面に対して何をするかという観点から幾何学的な説明がついた。一方で決定的に重要なのは、行列式（determinant）が積を保つこと、すなわち $\det(\mathbf{AB})=\det\mathbf{A}\det\mathbf{B}$ が成り立つことである。Section 7.3 では、この性質が本質的に行列式を**特徴づける**ことを示し、Section 7.8 ではこれを用いてオイラー（Euler）の四平方恒等式（four-square identity）を証明した。これは、すべての自然数は四つの平方数の和で表せるというラグランジュ（Lagrange）の定理の鍵となる段階である。

2. 行列は実際に何をしているのか

いくつかの節では、適切な視点を見つけることでこの問いに答えた。

- **固有ベクトル**（eigenvector）（Section 7.2）は、行列によって向きが変わらない方向である。固有ベクトルを座標軸にとると、対称行列（symmetric matrix）は単なる引き伸ばしにすぎず、円の像は楕円（ellipse）となって、その軸と面積を直接読み取ることができる。
- **行列式**（Section 7.3）は符号付きの面積の拡大率である。ずれ変換（shear）は面積を保ち、入れ替えは向き（orientation）を反転させ、特異行列（singular matrix）は平面を押しつぶして平らにしてしまう。
- **トレースと行列式**（Section 7.4）は、ケイリー・ハミルトンの定理（Cayley–Hamilton theorem）を通して、行列が数回の操作の後に単位行列（identity）に戻るかどうか

を決定する。$\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$ をみたす行列は回転とは限らないが、それは斜交座標で見た回転なのである。そして整数行列のトレース（trace）は整数であるから、結晶は五回対称性をもちえない。

- **三次元の回転**（Section 7.5）は、ロドリゲスの公式（Rodrigues' formula）によって外積（cross product）から組み立てられる。これは $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ の三次元版である。
- **双曲線回転**（hyperbolic rotation）（Section 7.6）は、点を双曲線に沿って動かし、その双曲角を足し合わせる。これは特殊相対性理論（special relativity）におけるローレンツ・ブースト（Lorentz boost）であり、その不変直線は光の経路である。

3. 何が変わらずに保たれるのか

不変量（invariant）はいたるところに現れた。回転は $x^2 + y^2$ を保ち、ローレンツ・ブーストは $x^2 - y^2$ を保ち、相似な行列（similar matrices）は同じトレースと行列式をもつ。Section 7.7 では、$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ にしたがって時間発展する行列は、成分がどれほど変化してもトレースと行列式、したがって固有値（eigenvalue）を一定に保った。これがソリトン（soliton）の保存則（conservation law）の背後にある仕組みである。そして Section 7.9 では、不変量は $V - E + F = 2$ という一つの数であった。これはすべての凸多面体（convex polyhedron）について成り立ち、正多面体をわずか五種類に絞り込む。この数、すなわちオイラー標数（Euler characteristic）は、位相幾何学（topology）における最初の不変量の一つであった。

4. 線形代数の道具箱

手法	使った場面
幾何学的な反例	成り立たない規則（7.1）
自然な軸としての固有ベクトル	楕円（7.2）、ブースト（7.6）
特別な行列で探りを入れる	行列式（7.3）
ケイリー・ハミルトンの定理	有限位数（7.4）
平行成分と垂直成分への分解	ロドリゲスの公式（7.5）
適切なパラメータの選択	ラピディティ（7.6）
$\mathrm{tr}(\mathbf{MN}) = \mathrm{tr}(\mathbf{NM})$	保存量（7.7）
行列式の乗法性	四平方和（7.8）
二重数え上げ	プラトンの立体（7.9）

この先へ

- Section 11.2 では、固有値と固有ベクトルがばねと質点からなる系の振動を支配する。
- Section 13.7 では、共分散行列（covariance matrix）の固有ベクトルが統計学に登場する。
- 微分方程式（differential equation）と力学系（dynamical system）は第 8 章の主題である。

大学入学前にさらに先へ進みたい人へ

- **3Blue1Brown, *Essence of Linear Algebra***（線形代数の本質）：行列が何をしているのかを見せてくれる無料の動画シリーズ。まずはこれを見るとよい。
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（線形代数入門）：理解と応用を強く重視した、定番の入門書。
- **Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right***：線形写像（linear map）を中心に据えた、より抽象的なアプローチ。オンラインで無料公開されている。
- **David Richeson, *Euler's Gem***（オイラーの宝石）：オイラーの公式と位相幾何学の誕生。

カプランスキー（Kaplansky）は冗談めかして、自分とハルモス（Halmos）は座標を使わずに考えるが、人目のないところでは行列を使って「猛烈に」計算している、と語った。この言葉は本章が示そうとしてきたことをよく表している。行列は具体的で計算可能なものだが、あらゆる計算の背後には幾何学（引き伸ばし、回転、射影（projection）、ブースト）があり、さらにそれをどう書き表すかによらない不変量がある。この二つの見方の間を自在に行き来できるようになることは、数学者が身につけうる最も価値のあるスキルの一つである。

「次の一歩」の解答

以下は完全な解答ではなく、簡潔な答えとヒントである。自分の解答を確かめられるよう、結果と鍵となる段階を示してある。見る前に、まずそれぞれの問題にきちんと取り組んでほしい。

7.1 行列では成り立たない法則

1. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ として $\mathbf{XP}$ と $\mathbf{PX}$ を比較すると、$c = 0$ かつ $a = d$ でなければならない。すなわち行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ である。

2. ケイリー・ハミルトンの定理（Cayley–Hamilton theorem）より $\mathbf{N}^2 = t\mathbf{N} - d\mathbf{I}$ であるから、$t\mathbf{N} = d\mathbf{I}$ となる。$t \neq 0$ ならば $\mathbf{N}$ は $\mathbf{I}$ の定数倍であり、$\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ から $\mathbf{N} = \mathbf{0}$ となって $t \neq 0$ に矛盾する。よって $t = 0$ であり、このとき $d = 0$ である。答えは $a^2 + bc = 0$ を満たす $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ である。

3. 2 乗した行列の対角成分は $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$、非対角成分は 0 である。不動ベクトルは $(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2})$ であるから、これは原点を通り角 $\frac{\theta}{2}$ をなす直線に関する鏡映（reflection）である。

4. $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると $\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix}$ である。これから $(a+d)\mathbf{M}$ を引き、$(ad - bc)\mathbf{I}$ を加えると $\mathbf{0}$ になる。

7.2 向きを変えずに伸ばす

1. $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ で $\mathbf{Mu} = \lambda\mathbf{u}$ となるためには $\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ が必要であり、これがその 2 次方程式である。ここではトレース（trace）が 6、行列式（determinant）が $\frac{4}{25}(54 - 4) = 8$ であるから、$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ となる。固有値（eigenvalue）は $\lambda = 2$（$(1, 2)$ に対して）と 4（$(2, -1)$ に対して）である。

2. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{Mu} = \lambda\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ であり、$\mathbf{M}$ は対称行列（symmetric matrix）であるから $\mathbf{v} \cdot \mathbf{Mu} = \mathbf{Mv} \cdot \mathbf{u} = \mu\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ である。したがって $(\lambda - \mu)\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ となる。

3. 特性方程式（characteristic equation）$\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0$ の判別式（discriminant）

は $-4\sin^2\theta$ であり、θ が π の整数倍でない限り負である。固有値は $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}$ である。

4. $(1,0) = \frac{1}{5}(1,2) + \frac{2}{5}(2,-1)$ であるから、$T^n(1,0) = \frac{2^n}{5}(1,2) + \frac{2\cdot 4^n}{5}(2,-1) = \frac{1}{5}\big(2^n + 4^{n+1},\, 2^{n+1} - 2\cdot 4^n\big)$ である。$n = 1$ のとき、これは期待どおり $(\frac{18}{5}, -\frac{4}{5})$ となる。

7.3 行列式を行列式たらしめるもの

1. $(\det\mathbf{MN})^3 = (\det\mathbf{M})^3(\det\mathbf{N})^3$ であるが、$(\det\mathbf{J})^3 = -1 \neq 1$ である。関数 $|\det\mathbf{M}|$ は乗法的（multiplicative）であるが、$|\det\mathbf{J}| = 1$ である。

2. $\begin{pmatrix} a & \lambda a \\ c & \lambda c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ であり、2 番目の因子の第 2 行は第 1 行の 0 倍であるから、その f の値は 0 である。

3. $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{J}\mathbf{K}_k\mathbf{J}$ であるから、その値は $\mathrm{f}(\mathbf{J})^2\mathrm{f}(\mathbf{K}_k) = \mathrm{f}(\mathbf{K}_k)$ である。また $\mathbf{K}_k\mathbf{K}_l = \mathbf{K}_{kl}$ である。

4. 行基本変形（row reduction）により、任意の正則（invertible）行列は基本行列（elementary matrix）の積として表される。基本行列とは、行の入れ替え（$\mathbf{J}$）、行の定数倍（$\mathbf{K}_k$ または $\mathbf{J}\mathbf{K}_k\mathbf{J}$）、せん断（shear）（$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ またはその $\mathbf{J}$ による共役）である。せん断は $\mathrm{f} = 1$ を満たす（小問 (iv) と同様に、$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K}$ を用いる）。また $\mathbf{J}$ はせん断と $\mathbf{K}_{-1}$ の積であるから、$\mathrm{f}(\mathbf{K}_{-1}) = \mathrm{f}(\mathbf{J}) = -1$ である。よって $\mathrm{g}(k) = \mathrm{f}(\mathbf{K}_k)$ とおくと $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \mathrm{g}(\det\mathbf{M})$ である。特異（singular）な $\mathbf{M}$ については、小問 (iii) より $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = 0$ である。

7.4 もとに戻る行列

1. $|1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}|^2 = 2 + 2\cos\phi = 1$ より $\phi = \pm\frac{2\pi}{3}$ であるから、$\mathbf{R}^3 = \mathbf{I}$ である。$\mathbf{S}$ について：その固有値は 1 の 3 乗根である。もし両方とも 1 ならば、$x^3 - 1$ は相異なる根をもつので、$\mathbf{S}$ は対角化可能（diagonalisable）であり、$\mathbf{I}$ に等しくなる。実行列の実数でない固有値は共役（conjugate）な組で現れるから、固有値は $\mathrm{e}^{\pm 2\pi\mathrm{i}/3}$ であり、$\det\mathbf{S} = 1$、$\operatorname{tr}\mathbf{S} = -1$ である。

2. 固有値は原始 6 乗根（primitive sixth root）$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/3}$ でなければならない（6 乗根をほかに選んで共役と組にすると、$\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$ または $\mathbf{M}^3 = \mathbf{I}$ となる）。よって $\operatorname{tr}\mathbf{M} = 1$、$\det\mathbf{M} = 1$ である。

3. 固有値は積が 1 である 1 の冪根（root of unity）であるから、$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}$（または両方とも ± 1）であり、トレース $2\cos\theta$ は $[-2,2]$ に属する整数である。位数（order）6 の例：$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$。

4. $\mathbf{M}^3 = (t^2 - d)\mathbf{M} - td\mathbf{I}$、$\mathbf{M}^4 = (t^3 - 2td)\mathbf{M} - d(t^2 - d)\mathbf{I}$ である。$\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$ となるためには（$\mathbf{M}$ は $\mathbf{I}$ の定数倍ではありえないので）、$t(t^2 - 2d) = 0$ かつ $d(t^2 - d) = 1$ である。$t = 0$ とすると $-d^2 = 1$ となり不可能である。よって $t^2 = 2d$、$d^2 = 1$ であり、$d = 1$、$t^2 = 2$ である。

7.5 三次元の回転

1. $z \mapsto a + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - a)$ である。合成（composite）は $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}z + k$、ただし $k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}a(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) + b(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})$ である。$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)} \neq 1$ ならば、これは不動点（fixed point）$c = \frac{k}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}}$ をもつ。$\theta + \phi = 2\pi$ ならば、これは $(b - a)(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})$ による平行移動（translation）である。
2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$：これは $(1, 1, 1)$ を固定し、トレースは $0 = 1 + 2\cos 120^\circ$ であり、$\mathbf{i} \to \mathbf{j} \to \mathbf{k} \to \mathbf{i}$ と移す。
3. $\mathbf{K}^2\mathbf{r} = \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}$ であり、さらに $\mathbf{K}^3\mathbf{r} = \mathbf{n} \times \big((\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}\big) = -\mathbf{K}\mathbf{r}$ である。級数において、奇数乗の項からは $(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots)\mathbf{K} = \sin\theta\,\mathbf{K}$ が、偶数乗の項（$\mathbf{K}^2$ 以降）からは $(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \cdots)\mathbf{K}^2 = (1 - \cos\theta)\mathbf{K}^2$ が得られる。
4. 合成は交線上のすべての点を固定し、行列式は $(-1)^2 = 1$ である。その交線に垂直な各平面上では、これは角 α をなす 2 直線に関する鏡映の積であり、2α の回転である。

7.6 双曲的回転と相対性理論

1. $T(u)T(w)$ の成分は $\cosh u \cosh w + \sinh u \sinh w = \cosh(u + w)$ および $\sinh u \cosh w + \cosh u \sinh w = \sinh(u + w)$ である。よって $T(u)^{-1} = T(-u)$ である。
2. $\tanh u = 0.8$ より $u = \frac{1}{2}\ln\frac{1.8}{0.2} = \ln 3 \approx 1.099$、$\cosh u = \frac{1}{2}(3 + \frac{1}{3}) = \frac{5}{3}$ である。宇宙船上では $10 \times \frac{3}{5} = 6$ 年が経過する。
3. 面積は $\frac{1}{2}\oint(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$ である。直線の辺からの寄与はなく、双曲線（hyperbola）に沿っては $x = \cosh s$、$y = \sinh s$ として被積分関数が $(\cosh^2 s - \sinh^2 s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}s$ となるので、$\frac{v}{2}$ が得られる。T の行列式は $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ であるから、T は面積を保つ。また T は双曲線をそれ自身に移し、パラメータ v の点を $v + u$ の点に移す。
4. $x' + y' = (\cosh u + \sinh u)(x + y) = \mathrm{e}^u p$、$x' - y' = \mathrm{e}^{-u} q$ であり、また $x^2 - y^2 = pq$ である。この座標では T はスクイーズ写像（squeeze mapping）である。すなわ

ち漸近線（asymptote）$y = x$ に沿って e^{u} 倍に引き伸ばし、$y = -x$ に沿って e^{-u} 倍に縮める写像であり、各双曲線 $pq =$ 一定に沿って点を滑らせる。

7.7 決して変わらない量

1. $\dot{a} = -Ct = -tc$、$\dot{d} = Ct = tc$、$\dot{c} = 0$、$\dot{b} = (A - D)t - Ct^3 = t(a - d)$ であり、これは $\mathbf{MN} - \mathbf{NM} = t \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix}$ と一致する。
2. $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{SN}$ を用いると、$\dot{\mathbf{M}} = -\mathbf{S}^{-1}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}_0\mathbf{S} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}_0\dot{\mathbf{S}} = -\mathbf{NM} + \mathbf{MN}$ である。
3. $\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ であり、$\ln\det\mathbf{M} = 2t - t = t$ で、その導関数は $1 = \operatorname{tr}\mathbf{N}$ である。
4. トレースの巡回性（cyclic property）により $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{tr}(\mathbf{M}^k) = \sum_j \operatorname{tr}(\mathbf{M}^j\dot{\mathbf{M}}\mathbf{M}^{k-1-j}) = k\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{k-1}\dot{\mathbf{M}})$ であり、再び巡回性により $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{k-1}(\mathbf{MN} - \mathbf{NM})) = \operatorname{tr}(\mathbf{M}^k\mathbf{N}) - \operatorname{tr}(\mathbf{M}^{k-1}\mathbf{NM}) = 0$ である。

7.8 四つの平方数

1. $(L_1, L_2, L_3, L_4) = (1, 4, 4, 4)$ であり、$1 + 16 + 16 + 16 = 49$ である。これは $7^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$ とは異なる表し方である。
2. $c = d = r = s = 0$ とすると、$L_1 = ap - bq$、$L_2 = aq + bp$、$L_3 = L_4 = 0$ となり、これは $(a^2 + b^2)(p^2 + q^2) = (ap - bq)^2 + (aq + bp)^2$ である。
3. 平方数は 8 を法として（modulo 8）0、1、4 のいずれかである。これらを 3 つ足した和は 8 を法として $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ となり、決して 7 にはならない。
4. $2 = (\pm1)^2 + (\pm1)^2 + 0^2 + 0^2$ である。0 でない 2 つの位置の選び方が（6 通り）、それらの符号の選び方が（4 通り）あり、計 24 通りとなる。2 は 4 で割り切れないから、ヤコビ（Jacobi）の公式により $8\sigma(2) = 8 \times 3 = 24$ である。

7.9 正多面体はただ五つ

1. $h = 2m + 2n - mn$ とすると、$V = \frac{4m}{h}$、$E = \frac{2mn}{h}$、$F = \frac{4n}{h}$ である。m と n を入れ替えると V と F が入れ替わる。立方体と正八面体は互いに双対（dual）であり、正十二面体と正二十面体も同様である。正四面体は自己双対（self-dual）である。
2. $F = 32$、$E = \frac{1}{2}(12 \cdot 5 + 20 \cdot 6) = 90$、$V = \frac{1}{3}(180) = 60$ であり、$60 - 90 + 32 = 2$ である。一般に、五角形が P 個、六角形が H 個のとき、$E = \frac{1}{2}(5P + 6H)$、$V = \frac{1}{3}(5P + 6H)$ であるから、$V - E + F = -\frac{1}{6}(5P + 6H) + P + H = \frac{P}{6}$ となる。これが 2 に等しいので、$P = 12$ である。

3. （穴の開いた）上面と底面をそれぞれ 4 つの台形（trapezium）に分割する。すると $V = 16$、$F = 4+4+4+4 = 16$、$E = 12+12+8 = 32$ となり、$V - E + F = 0$ である。

4. $180°n(1 - \frac{2}{m}) < 360°$ は $n(m-2) < 2m$、すなわち $mn - 2m - 2n < 0$、つまり $(m-2)(n-2) < 4$ である。$m, n \geq 3$ のもとで、解は $(3,3)$、$(3,4)$、$(4,3)$、$(3,5)$、$(5,3)$ である。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

全 13 章のうちの第 7 章。 本書全体、すべての章、すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.