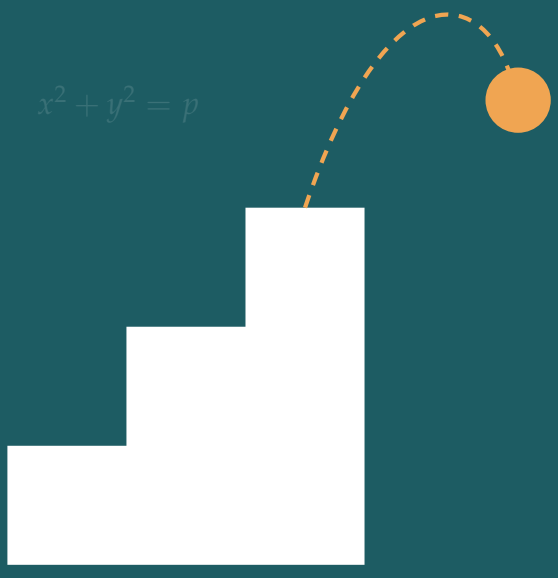
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

第 5 章

複素数（complex numbers）



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

第 5 章

複素数（complex numbers）

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

第 5 章：複素数（complex numbers）

これは *Beyond STEP* 全 13 章のうちの第 5 章である。本書全体、各章単独の PDF、各節の印刷用ワークシート、そしてすべての STEP の問題の詳しい解答は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、`github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty` への issue として歓迎する。

章

5

複素数

実数の領域における二つの真理を結ぶ最短の道は、複素数の領域を通る。

この章の内容

5.1 マチンの公式 STEP III 1987

5.2 1の累乗根によるフィルター STEP I 1990

5.3 $z^{2n}+1$ の因数分解 STEP III 2013

5.4 正多角形の中の距離 STEP III 2016

5.5 有理角になりそうでならない角 STEP III 2022

5.6 フェルマー点 STEP III 2000

5.7 写像としての複素指数関数 STEP II 1997

5.8 円板に隠れた距離 STEP III 2013

A 演習問題の答え p. 59

虚の数が導く実の答え

> 実数の領域における二つの真理を結ぶ最短の道は、複素数の領域を通る。
>
> — ジャック・アダマール（Jacques Hadamard）

1545年、ジェロラモ・カルダーノ（Gerolamo Cardano）は三次方程式（cubic equation）の解の公式を発表し、そこで不穏な事実に出会った。三つの立派な実数解をもつ三次方程式であっても、公式を使うと途中で負の数の平方根をとらなければならない場合があったのである。最後にはその平方根は打ち消し合い、実数の答えが残る。しかし計算の途中には、当時のあらゆる基準からすれば存在しないはずの量が現れていた。カルダーノはこの操作を「精妙であると同時に役に立たない」と評した。その後二世紀にわたって、数学者たちはこれらの「虚」の数（imaginary number）を、たまたまうまくいく技巧として、不安を抱えながら使い続けた。

複素数（complex number）がまっとうな数として認められるようになったのは、19世紀初頭、カスパー・ヴェッセル（Caspar Wessel）、ジャン＝ロベール・アルガン（Jean-Robert Argand）、そしてガウス（Gauss）が、複素数を平面上の点として描いたときである。そうなってみると、複素数は技巧どころか、ひとつの啓示であることがわかった。複素数は現実の現象がなぜそのように振る舞うのかを説明し、まさにアダマールの言葉どおり、実数についての結果へ至る最短の道を与え続けている。

複素数はなぜ重要なのか

すべての多項式方程式は複素数の範囲に解をもつ。これが**代数学の基本定理**（fundamental theorem of algebra）である。したがって複素数は、厳密な意味で、代数が完結する場なのである。複素数はまた、回転と振動を語るための自然な言語でもある。絶対値（modulus）が1の複素数を掛けると平面が回転するので、角度や波、周期的な振る舞いが関わるものは何であれ、複素数を使うと簡単になる。電気工学者は交流電流の解析に複素数を用いる。物理学者は複素数なしには量子力学を書き下すことすらできない。携帯電話からMRIスキャナーに至るまで、信号処理は複素フーリエ変換（Fourier transform）の上に成り立っている。そして純粋数学においては、複素変数の関数が驚くほど堅固で美しいものであることがわかる。複素関数は、ほんの小さな領域での値がわかれば、いたるところでの値が決まってしまうのである。

大学で出会うこと

複素数は大学に入って最初の週から使うことになるが、大きな飛躍は**複素解析**（complex analysis）とともに訪れる。これはふつう 2 年次に学ぶ。その中心となる対象は**正則**（holomorphic）関数、すなわち微分可能な複素関数であり、その理論は驚きに満ちている。正則関数はすべて自動的に無限回微分可能であり、そのテイラー級数（Taylor series）に等しい。閉曲線に沿った積分は、関数が発散する点だけを調べれば計算できる（コーシー（Cauchy）の留数定理（residue theorem））。これにより、他のどんな方法も受けつけない実積分を計算することができる。この理論はさらに、等角写像（conformal map）（Section 5.7）、リーマン面（Riemann surface）、そして素数の分布を支配するリーマンゼータ関数（Riemann zeta function）（Section 1.2）へとつながっていく。並行して、1 の冪根（roots of unity）の代数（Section 5.2、Section 5.3）はガロア理論（Galois theory）へとつながり、複素数を用いた幾何学は Section 5.8 の非ユークリッド幾何学（non-Euclidean geometry）へとつながる。

この章を貫く問い

三つの大きな問い

1. **複素数は実数の問題にどう役立つのか。**複素平面を経由する回り道が、なぜ π や二項係数（binomial coefficient）や余弦についての事実を生み出すのだろうか。
2. **1 の冪根の何が特別なのか。**$z^n = 1$ の解は、なぜ和にも積にも、多角形にも角度にも、繰り返し現れるのだろうか。
3. **複素関数はどのような姿をしているのか。**入力も出力も平面上の点であるような関数を、どうすれば図に描けるのだろうか。そして、そこからどのような幾何が見えてくるのだろうか。

この章では、まず偏角（argument）と掛け算（マチン（Machin）の公式）から始め、1 の冪根の代数（フィルター、因数分解、多角形の距離、無理数の角度）を経て、複素数を用いた幾何学（フェルマー（Fermat）点）へ進み、最後に写像としての複素関数（指数関数、そして単位円板（unit disc）に隠れた距離）を扱う。

この章で扱う考え方

§	話題	考え方
5.1	マチンの公式	複素数を掛けると偏角が足される
5.2	3 つおきの二項係数	1 の冪根にわたって平均をとると、剰余（residue）ごとに選り分けられる
5.3	余弦の積	根を用いて因数分解し、それから代入する
5.4	正多角形の弦	距離は絶対値である。$z^n - 1 = \prod(z - \omega^k)$
5.5	$\cos^{-1}\frac{1}{3}$ は無理数（irrational）である	ド・モアブル（De Moivre）の定理、偶奇（parity）、最小反例（minimal counterexample）
5.6	フェルマー点（Fermat point）	回転は掛け算である。座標をうまく選ぶ
5.7	写像としての e^w	複素関数を図示する。多対一の写像
5.8	隠れた距離	双曲幾何学（hyperbolic geometry）における三角不等式（triangle inequality）としての不等式

この章の読み方

図を描くこと。この章のほとんどすべての結果には幾何学的な意味があり、複素平面を手早くスケッチすれば（1 の冪根がどこにあるか、掛け算がどちら向きに回転させるか、格子線がどこへ移るか）、代数計算に入る前に何をすべきかが見えてくることが多い。そのうえで、代数計算は丁寧に行うこと。図は、符号や 2π の倍数について誤解を招くことがあるからである。

5.1 マチンの公式

問題

STEP III 1987、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/87-s3-q3`

導入

1706 年、ロンドンの数学者ジョン・マチン（John Machin）は、π を小数点以下 100 桁まで手計算で求めた。それ以前には、これに迫る記録を残した者すらいなかった。その秘密が小問 (ii) の公式である。この公式は、正接（tangent）がごく小さな分数となるような角を用いて $\frac{\pi}{4}$ を表している。分数が小さければ、級数（series）$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ は非常に速く収束（converge）する。マチンの公式とその変種は、コンピュータと Section 2.6 の方法がそれに取って代わるまで、二世紀半にわたって π を計算する標準的な方法であり続けた。

この公式は三角関数の恒等式（identity）が生んだ奇跡のように見える。しかしこの問題は、それが実は複素数（complex number）の積についての事実であることを示している。すなわち、複素数を掛け合わせると、その偏角（argument）は足し合わされる。整数を成分とする複素数の掛け算をひとつ行うだけで、全体が証明できてしまうのである。

取りかかる前に

考えてみよう $5 - \mathrm{i}$ の偏角は何か。$1 + \mathrm{i}$ の偏角はどうか。複素数を掛け合わせると、偏角はどうなるか。

$\arg(5 - \mathrm{i}) = -\tan^{-1}\frac{1}{5}$ は小さな負の角であり、$\arg(1 + \mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}$ である。複素数を掛け合わせると、絶対値（modulus）は掛け合わされ、偏角は（2π の整数倍の差を除いて）

足し合わされる。したがって

$$\arg((5-\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i})) = \frac{\pi}{4} - 4\tan^{-1}\frac{1}{5} \quad \text{（ただし}2\pi\text{ の整数倍の差がありうる）．}$$

この積を計算し、その偏角を別の方法で求めることができれば、恒等式が得られる。

順を追って解く

段階 1　絶対値の評価

考えてみよう　上からの評価については、両辺を 2 乗してみよ。下からの評価については、$|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha$ を 2 つのベクトルの内積とみなしてみよ。

上からの評価： $(|x|+|y|)^2 = x^2+y^2+2|x||y| \geq x^2+y^2 = |z|^2$ であり、両辺はともに負でないから、$|z| \leq |x|+|y|$ である。

下からの評価： $|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha$ は、長さ $|z|$ のベクトル $(|x|,|y|)$ と単位ベクトル（unit vector）$(\cos\alpha, \sin\alpha)$ との内積（dot product）である。内積は 2 つのベクトルの長さの積以下であるから、これは $|z|$ 以下である。（代数的には、$|z|^2 - (|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha)^2 = (|x|\sin\alpha - |y|\cos\alpha)^2 \geq 0$ である。） ■

段階 2　鍵となる掛け算

考えてみよう　$(5-\mathrm{i})^2$ を計算し、それを 2 乗し、さらに $1+\mathrm{i}$ を掛けよ。

$(5-\mathrm{i})^2 = 25 - 10\mathrm{i} - 1 = 24 - 10\mathrm{i}$ である。次に $(24-10\mathrm{i})^2 = 576 - 480\mathrm{i} - 100 = 476 - 480\mathrm{i}$ となる。最後に

$$(476-480\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 476 + 476\mathrm{i} - 480\mathrm{i} + 480 = 956 - 4\mathrm{i}.$$

手を止めて、やってみよう　ここで偏角を比べよ。$956-4\mathrm{i}$ の偏角は何か。余分な 2π の整数倍が現れないと確信できるのはなぜか。

$956 - 4\mathrm{i} = 4(239-\mathrm{i})$ であり、その偏角は $-\tan^{-1}\frac{1}{239}$ である。よって、ある整数 k に対して

$$\frac{\pi}{4} - 4\tan^{-1}\frac{1}{5} = -\tan^{-1}\frac{1}{239} + 2k\pi$$

が成り立つ。ところが $0 < \tan^{-1}\frac{1}{5} < \frac{1}{5}$ であるから、左辺は $\frac{\pi}{4} - \frac{4}{5}$ と $\frac{\pi}{4}$ の間、すなわちおよそ -0.02 と 0.79 の間にある。一方、右辺から $2k\pi$ を除いたものは -0.005 と 0 の間にある。2π はこの差よりはるかに大きいから、$k = 0$ である。整理すると

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}. \qquad \blacksquare$$

図 5.1.1 は、何が起きたかを示している。45° から出発して、$5-\mathrm{i}$ を掛けるたびに時計回りにおよそ 11.3° 回転し、4 回掛けたあとには実軸（real axis）をわずか 0.24° だけ通り越している。

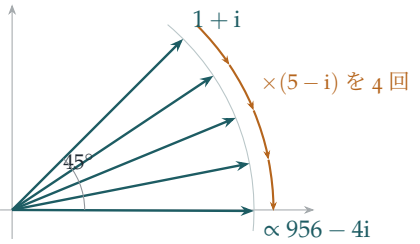


図 5.1.1　$1+\mathrm{i}$ に $5-\mathrm{i}$ を 4 回掛ける。掛けるたびに時計回りに $\tan^{-1}\frac{1}{5}\approx 11.31°$ だけ回転する（拡大も起こるが、ここでは無視している）。4 回の回転で 45° は $-0.24°$ に移る。これは $956-4\mathrm{i}$ の偏角であり、$-\tan^{-1}\frac{1}{239}$ に等しい。

段階 3　2 つ目の公式

考えてみよう　同様に考えると、今度はどのような積を計算すればよいか。

$(4+\mathrm{i})^3(20+\mathrm{i})(1985+\mathrm{i})$ を考える。その偏角は $3\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{20}+\tan^{-1}\frac{1}{1985}$ である。さて $(4+\mathrm{i})^2=15+8\mathrm{i}$ であるから、$(4+\mathrm{i})^3=(15+8\mathrm{i})(4+\mathrm{i})=52+47\mathrm{i}$ となる。次に $(52+47\mathrm{i})(20+\mathrm{i})=1040+52\mathrm{i}+940\mathrm{i}-47=993+992\mathrm{i}$ であり、

$$(993+992\mathrm{i})(1985+\mathrm{i})=(1971105-992)+(993+1969120)\mathrm{i}=1970113+1970113\mathrm{i}.$$

実部（real part）と虚部（imaginary part）が等しいから、偏角は $\frac{\pi}{4}$ である。3 つの角はいずれも小さな正の角であり（その和は $3\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{1985}<1<2\pi$ より小さい）、2π の整数倍を気にする必要はない。よって公式が従う。 ■

振り返り

- **掛け算で偏角は足し合わされる。**このただひとつの事実によって、ガウス整数の積が角どうしの恒等式に変わった。
- **2π の整数倍に注意する。**偏角は 2π の整数倍の差を除いてしか定まらないので、どの恒等式でも、その整数倍を確定させるために大きさの評価が必要であった。
- **整数が仕事をする。**計算はすべて整数で行われ、π についての恒等式は近似を一切用いずに厳密に得られた。

背後にある数学

手計算で π を求める

マチンの公式はなぜ計算にこれほど適しているのだろうか。級数 $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ は $|x| \le 1$ で収束するが、$x = 1$ では収束が非常に遅い。$\frac{\pi}{4}$ を小数点以下 3 桁求めるだけでも、$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$ をおよそ 1000 項とる必要がある。$x = \frac{1}{5}$ とすると、各項は前の項のおよそ 25 分の 1 になり、1 項あたりおよそ 1.4 桁ずつ精度が上がる。$x = \frac{1}{239}$ なら、1 項あたりおよそ 4.8 桁である。マチンの 100 桁は、1 つ目の級数をわずか約 70 項、2 つ目の級数を約 20 項とるだけで得られた。1873 年、William Shanks はマチン型の公式を用いて 707 桁を計算し、その計算に何年も費やした。ところが 1944 年に、彼が小数第 528 位で誤りを犯しており、それ以降の桁がすべて間違っていたことが判明した。

再びガウス整数

a, b を整数として $a + b\mathrm{i}$ の形に表される数は、Section 1.6 で扱った**ガウス整数**（Gaussian integers）である。$5 - \mathrm{i}$ がこれほどうまく働く理由は、ある因数分解（factorisation）にある。$239^2 + 1 = 57122 = 2 \times 13^4$ であり、これをガウス整数の中で書くと $(239 + \mathrm{i})(239 - \mathrm{i}) = (1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})\,(3 + 2\mathrm{i})^4 (3 - 2\mathrm{i})^4$ となる。そして $5 - \mathrm{i} = (1 - \mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i})$ は、これと同じガウス素数（Gaussian primes）からできている。マチン型の公式を見つけることは、実は $n^2 + 1$ の形の数を因数分解する問題なのである。1899 年、Carl Størmer はまさにこの考え方を用いて、a, b, m, n を整数とする $\frac{\pi}{4} = a \tan^{-1} \frac{1}{m} + b \tan^{-1} \frac{1}{n}$ の形の公式は 4 つしかないことを証明した。それはマチンの公式と、オイラー（Euler）、Hermann、Hutton がそれぞれ見つけた 3 つの公式である。

回転

絶対値 1 の複素数を掛けることは、平面の回転（rotation）である。だからこそ複素数は、この章の後半で扱う幾何学から、電気工学における交流、量子力学の波動関数に至るまで、回転や角度が関わるあらゆるものにとって自然な言語となっている。Section 4.2 では $\tan^{-1}$ の加法定理（addition formula）が巧妙な置換から得られたが、ここでは複素数の掛け算から得られる。この 2 つは、同じ事実を異なる側面から見たものである。

思考のスキル

角度を複素数の掛け算に翻訳する

角の和についての恒等式は、積の偏角についての恒等式である。積を厳密に計算し、その偏角を読み取れ。

複素数の計算は機械的かつ厳密に行えるが、逆三角関数（inverse trigonometric functions）の式変形は誤りを犯しやすい。一方から他方へ翻訳することが、しばしば証明への最短の道となる。

次の一歩

1 **いとこにあたる問題。** STEP II 2000、問 4（`step.maths.org/questions/00-s2-q4`）に挑戦してみよ。この節と同じ方法、すなわち複素数を掛け合わせて偏角を読み取る方法で、$\frac{\pi}{4}$ についての別の逆正接の公式を証明する問題である。

2 **オイラーの公式。** $(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})$ を考えることにより、$\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$ を示せ。

3 **Hutton の公式。** $\frac{\pi}{4}=2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$ を示せ。

4 **何項必要か。** マチンの公式を用いて π を小数点以下 20 桁まで求めるには、それぞれの級数を何項とる必要があるか見積もれ。そのうえで、最初の数桁を電卓で実際に計算してみよ。

さらに学ぶために

- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM***（Wiley）。マチン型の公式の歴史も扱っている。
- **Jörg Arndt & Christoph Haenel, *Pi Unleashed***（Springer）。π を計算する新旧の方法を生き生きと紹介している。
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。複素数を幾何学的に捉えるための最良の本である。第 1 章では、掛け算を回転と拡大として扱っている。

5.2 1 の累乗根によるフィルター

問題

STEP I 1990、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/90-s1-q2`

導入

パスカルの三角形（Pascal's triangle）のある行に並ぶ二項係数（binomial coefficient）の和は 2^n である。$(1+x)^n$ に $x=1$ を代入すればよい。代わりに $x=-1$ を代入すると交代和が得られ、その値は 0 である。この二つを加えると、偶数番目の係数の和は 2^{n-1}、すなわちちょうど半分であることがわかる。つまり、偶数番目の項と奇数番目の項は全体をちょうど二等分するのである。

では、3 つおきの係数についてはどうだろうか。位置 $0, 3, 6, \ldots$ だけを取り出せるような実数 x は存在しない。しかし、複素数ならば存在する。1 の 3 乗根（cube roots of unity）はフィルターの役割を果たす。すなわち、1、ω、ω^2 にわたって平均をとると、累乗 ω^k は k が 3 の倍数のとき 1、そうでないとき 0 を与える。この考え方は **1 の冪根フィルター**（roots-of-unity filter）と呼ばれ、これまでに考案された中で最も重要なアルゴリズムの一つである**離散フーリエ変換**（discrete Fourier transform）の小さな雛形になっている。

取りかかる前に

考えてみよう ω は $z^3-1=0$ の解である。z^3-1 を因数分解せよ。そこからなぜ $1+\omega+\omega^2=0$ が得られるのか。

$z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$ である。$\omega^3=1$ かつ $\omega\neq 1$ であるから、ω は第 2 の因数の根でなければならない。すなわち $\omega^2+\omega+1=0$ である。幾何学的には、1、ω、ω^2 は原点を中心とする正三角形の頂点であり、それらの和は三角形の重心、すなわち 0

である。

順を追って解く

段階 1　絶対値と偏角

$1+\omega+\omega^2=0$ より $1+\omega^2=-\omega$ である。$\omega=e^{2\pi\mathrm{i}/3}$ であるから、$-\omega=e^{\mathrm{i}\pi}e^{2\pi\mathrm{i}/3}=e^{5\pi\mathrm{i}/3}=e^{-\pi\mathrm{i}/3}$ となる。したがって $1+\omega^2$ の絶対値（modulus）は 1、偏角（argument）は $-\frac{\pi}{3}$ である。同様に $1+\omega=-\omega^2=e^{\pi\mathrm{i}/3}$ であり、絶対値は 1、偏角は $\frac{\pi}{3}$ である。

段階 2　フィルター

> **考えてみよう**　k が 3 の倍数のとき、$1+\omega^k+\omega^{2k}$ の値はいくらか。そうでないときはどうか。

$3\mid k$ ならば $\omega^k=1$ であり、和は 3 である。そうでなければ ω^k は ω または ω^2 であり、いずれの場合も $1+\omega^k+\omega^{2k}=1+\omega+\omega^2=0$ となる。よって式 $\frac{1}{3}(1+\omega^k+\omega^{2k})$ は $3\mid k$ のとき 1、それ以外のとき 0 である。つまりこれは 3 の倍数を検出する装置になっている。

> **手を止めて、やってみよう**　$r=1,2,3$ について $(1+\omega^r)^n$ を二項定理（binomial theorem）でそれぞれ展開し、足し合わせよ。何が得られるか。

$\omega^3=1$ であるから、

$$(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n+(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\omega^k+\omega^{2k}+1)=3\sum_{3\mid k}\binom{n}{k}.$$

一方、段階 1 より

$$(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n+2^n=e^{n\pi\mathrm{i}/3}+e^{-n\pi\mathrm{i}/3}+2^n=2\cos\frac{n\pi}{3}+2^n.$$

これを 3 で割れば求める公式が得られる。 ■

段階 3　二つの計算

$n=25$ のとき、$\frac{25\pi}{3}=8\pi+\frac{\pi}{3}$ であるから $\cos\frac{25\pi}{3}=\frac{1}{2}$ となり、

$$\binom{25}{0}+\binom{25}{3}+\cdots+\binom{25}{24}=\frac{33554432+1}{3}=11184811.$$

考えてみよう 二つ目の和では、$k \equiv 2 \pmod 3$ となる位置が必要である。$k \equiv 0$ ではなく $k \equiv 2$ を検出するには、フィルターをどう修正すればよいか。

検出装置をずらせばよい。$\frac{1}{3}(1+\omega^{k-2}+\omega^{2(k-2)})$ は、$k \equiv 2 \pmod 3$ のときに限り 1 となる。$\omega^{-2}=\omega$、$\omega^{-4}=\omega^2$ であるから、

$$\sum_{k\equiv 2}\binom{n}{k} = \frac{1}{3}\Big(2^n+\omega(1+\omega)^n+\omega^2(1+\omega^2)^n\Big).$$

$n=24$ のとき $(1+\omega)^{24}=e^{8\pi i}=1$ であり、同様に $(1+\omega^2)^{24}=1$ であるから、括弧内は $2^{24}+\omega+\omega^2=2^{24}-1$ となる。$2^{24}=16777216$ を用いて、

$$\binom{24}{2}+\binom{24}{5}+\cdots+\binom{24}{23} = \frac{16777215}{3} = 5592405. \qquad \blacksquare$$

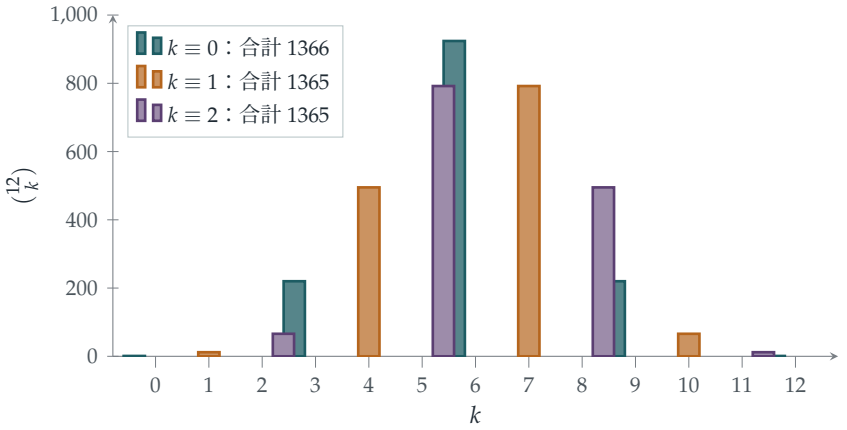


図 5.2.1 パスカルの三角形の第 12 行を、k を 3 で割った余りによって色分けしたもの。三つの類の合計はそれぞれ 1366、1365、1365 であり、いずれも $2^{12}=4096$ のほぼちょうど 3 分の 1 である。$\frac{4096}{3}$ からのわずかなずれ $+\frac{2}{3}$、$-\frac{1}{3}$、$-\frac{1}{3}$ は、1 の冪根フィルターによって正確に予測される。

振り返り

- **1 の冪根にわたる平均は剰余によって項をふるい分ける。** $\frac{1}{3}\sum_r \omega^{rk}$ は、3 が k を割り切るかどうかに応じて 1 または 0 となる。多項式の 1 の冪根における値を足し合わせると、3 つおきの係数が取り出される。
- **フィルターをずらす。** 平均をとる前に ω^{-rj} を掛けると、$k \equiv j$ となる係数が取り出される。
- **実数の答えのための複素数。** 答えは整数であり、問題も整数についてのものであっ

たが、その道筋は複素平面を経由していた。

背後にある数学

離散フーリエ変換

3 を任意の N に、ω を $e^{2\pi i/N}$ に置き換える。数の列 $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$ に対して、数

$$\hat{a}_r = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \, \omega^{rk}$$

はその**離散フーリエ変換**をなし、フィルターの恒等式 $\sum_r \omega^{rk} = N$ または 0 のおかげで、$\hat{a}_r$ から a_k を復元することができる。この変換は信号をその構成周波数に分解する。1965 年、James Cooley と John Tukey は、これを N^2 ステップではなくおよそ $N \log_2 N$ ステップで計算する方法、すなわち**高速フーリエ変換**（fast Fourier transform）を発表した。ガウス（Gauss）は 1805 年に本質的に同じ考えを見出していたが、公表することはなかった。FFT は音声・画像の圧縮（MP3 や JPEG）、携帯電話の信号、医療用スキャナー、巨大な数の乗算などに用いられており、しばしば 20 世紀で最も重要なアルゴリズムの一つに数えられる。

母関数

このフィルターは、より大きな考え方の一例である。数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ は、多項式またはべき級数（power series）$A(x) = \sum a_k x^k$、すなわちその**母関数**（generating function）としてまとめることができ、数列に対する操作は関数に対する操作になる。1 での値をとれば数列の和が得られ、1 の冪根での値をとれば剰余類（residue class）が取り出され、微分すれば各項に k の重みが付く。これにより多くの数え上げの問題が代数の問題に変わり、第 9 章では中心的な手法となる。同じフィルターを 5 乗根を用いて $(1+x)^n$ に適用すると、正五角形や黄金比（golden ratio）とのつながりが見えてくる。1 の冪根の代数については Section 6.1 でさらに追究する。

思考のスキル

対称性を使ってふるい分ける

和の中からある条件を満たす項を取り出すには、欲しい項では 1、それ以外では 0 となる関数を、対称的な平均から組み立てればよい。

1 の冪根にわたる平均はその古典的な例である。「対称性の群にわたって平均をとり、欲しい部分を分離する」という同じ原理は、1 の冪根フィルターから群の表現論（representation theory）に至るまで、代数学のいたるところに現れる。

次の一歩

1. **偶数番目。** 1 の平方根（1 と -1）によるフィルターを用いて、$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots = 2^{n-1}$ を示せ。

2. **残りの剰余。** $\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\binom{n}{7}+\cdots$ の公式を求め、三つの公式の和が 2^n になることを確かめよ。

3. **4 つおき。** i を用いて、$\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\cdots = \frac{1}{4}\left(2^n + 2^{n/2+1}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$ を示せ。

4. **割り切れる条件。** $\{1,2,\ldots,12\}$ の部分集合のうち、要素の個数が 3 で割り切れるものはいくつあるか。要素の和が 3 で割り切れるものはいくつあるか。（後者のヒント：$\prod_{j=1}^{12}(1+x^j)$ を 1 の 3 乗根で考えよ。）

さらに学ぶために

- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology***（A. K. Peters；オンラインで無料公開）。母関数への楽しい入門書であり、1 の冪根フィルターは早い段階で登場する。
- **Arthur Benjamin & Jennifer Quinn, *Proofs That Really Count***（Mathematical Association of America）。二項係数の恒等式を数え上げによって証明する。
- **T. W. Körner, *Fourier Analysis***（Cambridge University Press）。離散フーリエ変換と FFT を扱っている。

5.3 $z^{2n}+1$ の因数分解

問題

STEP III 2013、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/13-s3-q4`

導入

$\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{5\pi}{8}\cos\frac{7\pi}{8}$ の値はいくらだろうか。各因数は入れ子になった平方根を含む扱いにくい数だが、積はちょうど $\frac{1}{8}$ になる。等間隔の角における余弦の積は、このように何度でも簡単な数に帰着する。本問はその理由を明らかにするものである。鍵は、これらの角を多項式の根の偏角（argument）とみなし、多項式を因数分解（factorise）し、巧みに選んだ値を代入することにある。

複素数の範囲では、すべての多項式は一次因数（linear factor）の積に完全に因数分解される。実数の範囲では、実数でない根は共役（conjugate）な組として現れ、それらが組み合わさって実数係数の二次因数になる。ここではどちらの事実も見ることができる。とくに後者によって、実数解を一つももたない $z^{2n}+1$ を、実数係数の二次式の積として書くことができるのである。

取りかかる前に

考えてみよう $z^{2n}=-1$ の解は複素平面（complex plane）上のどこにあるか。$n=2$ と $n=4$ の場合について図示せよ。

解はすべて絶対値（modulus）が 1 であり、偏角 θ は $2n\theta=\pi+2m\pi$ を満たすので、θ は $\frac{\pi}{2n}$ の奇数倍である。これらは単位円（unit circle）上の正 $2n$ 角形をなし、どの頂点も実軸上にないような向きに回転している（図 5.3.1）。これらは、実軸に関して互いに鏡像となる共役な組 $e^{\pm i\theta}$ に分かれる。

順を追って解く

段階 1　共役な組から実数係数の二次式が得られる

$(z - e^{\mathrm{i}\theta})(z - e^{-\mathrm{i}\theta}) = z^2 - (e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta})z + 1 = z^2 - 2z\cos\theta + 1.$ ■

段階 2　因数分解

$-\pi < \theta \le \pi$ を満たす -1 の $2n$th 乗根は $e^{\pm \mathrm{i}\theta_k}$ であり、ここで

$$\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

である。これらは $2n$ 個の相異なる数で、いずれも $2n$ 次多項式 $z^{2n}+1$ の根であるから、これらが根のすべてであり、

$$z^{2n} + 1 = \prod_{k=1}^{n} (z - e^{\mathrm{i}\theta_k})(z - e^{-\mathrm{i}\theta_k}) = \prod_{k=1}^{n} (z^2 - 2z\cos\theta_k + 1).$$ ■

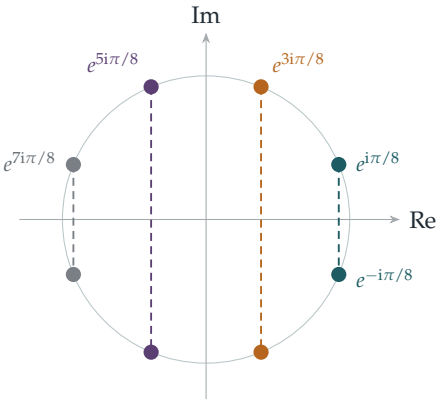


図 5.3.1　$z^8 = -1$ の 8 個の解（$n = 4$ の場合）。これらは破線で結ばれた 4 組の共役な組に分かれ、各組は $z^8 + 1$ の実数係数の二次因数 $z^2 - 2z\cos\theta_k + 1$ を一つずつ与える。

段階 3　$z = \mathrm{i}$ を代入する

考えてみよう　$\mathrm{i}^2 - 2\mathrm{i}\cos\theta + 1$ はいくらか。また、n が偶数のとき $\mathrm{i}^{2n} + 1$ はいくらか。

各因数は

$$\mathrm{i}^2 - 2\mathrm{i}\cos\theta_k + 1 = -2\mathrm{i}\cos\theta_k,$$

となるので、右辺は $(-2\mathrm{i})^n \prod_k \cos\theta_k$ である。左辺は $\mathrm{i}^{2n} + 1 = (-1)^n + 1$ であり、n が

偶数のときこれは 2 である。さらに n が偶数のとき、

$$(-2\mathrm{i})^n = 2^n(-\mathrm{i})^n = 2^n\bigl((-\mathrm{i})^2\bigr)^{n/2} = 2^n(-1)^{n/2}.$$

したがって

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\theta_k = \frac{2}{2^n(-1)^{n/2}} = (-1)^{\frac{1}{2}n}2^{1-n}. \qquad \blacksquare$$

$n=4$ とすると、これは導入で見た積 $(-1)^2 2^{-3} = \frac{1}{8}$ になる。

段階 4　n が奇数のとき

考えてみよう　n が奇数のとき、角 θ_k のうち一つは $\frac{\pi}{2}$ に等しい。それはどれか。また、そのために $z=\mathrm{i}$ の代入がこのままでは役に立たないのはなぜか。

$k=\frac{n+1}{2}$ のとき $\theta_k = \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$ であるから、その因数は z^2+1 となり、これは $z=\mathrm{i}$ で消える。すると両辺はともに 0 となり、何の情報も得られない。これを回避するには、先にこの因数で割っておけばよい。与えられた恒等式はまさにそれを行っている。

手を止めて、やってみよう　因数分解の両辺を $1+z^2$ で割り、$z=\mathrm{i}$ を代入して整理せよ。残った余弦を組にする必要がある。

因数 z^2+1（$k=\frac{n+1}{2}$ の項）で割ると、

$$1 - z^2 + z^4 - \cdots + z^{2n-2} = \prod_{k\neq\frac{n+1}{2}}\bigl(z^2 - 2z\cos\theta_k + 1\bigr).$$

$z=\mathrm{i}$ では、左辺の各項は $(-z^2)^j = 1^j = 1$ であり、項は n 個あるので、左辺は n である。右辺は $(-2\mathrm{i})^{n-1}\prod_{k\neq\frac{n+1}{2}}\cos\theta_k$ である。$n-1$ は偶数なので、$(-2\mathrm{i})^{n-1} = 2^{n-1}(-1)^{(n-1)/2}$ である。

ここで角を組にする。$\theta_{n+1-k} = \pi - \theta_k$ であるから、$\cos\theta_{n+1-k} = -\cos\theta_k$ である。残った $n-1$ 個の因数は、このような組を $\frac{n-1}{2}$ 個なし（$k=1,\dots,\frac{n-1}{2}$）、各組は $-\cos^2\theta_k$ を与える。よって

$$n = 2^{n-1}(-1)^{(n-1)/2}\cdot(-1)^{(n-1)/2}\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\cos^2\theta_k = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\cos^2\theta_k,$$

となり、$\prod\cos^2\theta_k = n2^{1-n}$ が得られる。最後の因数（$k=\frac{n-1}{2}$）は、問題文にあるとおり $\cos^2\frac{(n-2)\pi}{2n}$ である。 $\blacksquare$

$n=3$ で確かめよう：$\cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} = 3\cdot 2^{-2}$。

振り返り

- **根がわかれば多項式がわかる。**多項式は根によって（定数倍を除いて）決まるので、$z^{2n}+1$ の根を列挙することでその因数分解が得られた。
- **巧みな値を代入する。**$z=\mathrm{i}$ とおくと、各二次因数が余弦の定数倍になった。
- **代入して $0=0$ になったら、先に割る。**n が奇数のときは一つの因数が $z=\mathrm{i}$ で消えるので、代入の前にそれを取り除いた。

背後にある数学

代数学の基本定理

$z^{2n}+1$ が $\mathbb{C}$ 上で一次因数の積に完全に因数分解できることは、**代数学の基本定理**（fundamental theorem of algebra）の特別な場合である。すなわち、複素数係数の定数でない多項式はすべて複素数の根をもち、したがって一次因数の積に完全に因数分解される。広く受け入れられた最初の証明は、ガウス（Gauss）が 1799 年の博士論文で与えたものであり、彼はその後も何度かこの定理に立ち返って新たな証明を与えた。この定理の帰結として、実数係数の多項式はすべて実数係数の一次因数と二次因数の積に因数分解される。実数でない根は、段階 1 で見たとおり共役な組として現れるからである。この定理は名前こそ「代数学」だが、中身は解析学的である。どの証明も連続性など実数の何らかの性質を用いており、最も鮮やかな証明の一つを、複素解析（complex analysis）の最初の講義で目にすることになるだろう。

正弦と余弦の積

この方法からは、恒等式の一群が得られる。z^n-1 を $z^{2n}+1$ の代わりに用いると

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}},$$

が得られる。これは幾何学的な形で Section 5.4 において証明されている。このような恒等式は、振動系の解析（ばねでつながれた n 個の質点の振動数には $\sin\frac{k\pi}{2(n+1)}$ が現れる）や、数え上げの問題（ある種のグラフの全域木（spanning tree）の個数や、長方形のドミノタイリング（domino tiling）の数は余弦の積で与えられる）に現れる。$m\times n$ の長方形のドミノタイリングの数に対するカステレイン（Kasteleyn）の 1961 年の公式は、$\cos^2\frac{j\pi}{m+1}$ と $\cos^2\frac{k\pi}{n+1}$ を含む式の二重積である。

思考のスキル

根から積へ

等間隔の角における三角関数の値の積を求めるには、それらが簡単な多項式の根から来ていることを見抜き、因数分解して、都合のよい値を代入せよ。

値の選び方こそが腕の見せどころである。ここでは $z=\mathrm{i}$ によって各二次因数が余弦になった。別の値（たとえば $z=1$ や $z=-1$）を選べば、別の恒等式が得られる。

次の一歩

1 **七角形にまつわる積。** 小問 (ii) で $n=7$ として、$\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{14}\cos\frac{5\pi}{14}=\frac{\sqrt{7}}{8}$ を示せ。次に、$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{8}$ を示せ。（**ヒント：** $\cos\theta=\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$ を使って角を関係づけるか、恒等式 $\sin 2x=2\sin x\cos x$ を繰り返し用いよ。）

2 **別の代入。** 因数分解に $z=1$ を代入して、

$$\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}=2^{\frac{1}{2}-n}.$$

を示せ。

3 **z^6+1 を因数分解する。** z^6+1 を実数係数の三つの二次式の積で表し、展開して答えを確かめよ。

4 **正弦。** $z^{2n}-1$ を同様に因数分解し、z^2-1 で割ることにより、

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

を示せ。

さらに学ぶために

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。第 2 章で 1 の冪根（roots of unity）と多項式を、美しい図とともに扱っている。
- **Benjamin Fine & Gerhard Rosenberger, *The Fundamental Theorem of Algebra***（Springer）。解析学、代数学、位相幾何学によるこの定理のいくつかの証明を、学部生向けに解説している。

- **Paul Nahin, *An Imaginary Tale***（Princeton University Press）。$\sqrt{-1}$ の歴史。1 の冪根とその応用も扱っている。

5.4 正多角形の中の距離

問題

STEP III 2016、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/16-s3-q7`

導入

半径 1 の円に内接する正七角形を描く。ひとつの頂点から他の頂点へ 6 本の弦（chord）を引き、その長さを測る。6 本の長さをすべて掛け合わせると、答えはちょうど 7 になる。正 100 角形では、ひとつの頂点から引いた 99 本の弦の長さの積はちょうど 100 である。

なぜこれほどきれいな結果が成り立つのだろうか。弦の長さそのものは複雑である（$2\sin\frac{\pi}{7}$、$2\sin\frac{2\pi}{7}$ など）。この問題は、この結果がある単純な代数的恒等式、すなわち z^n-1 の 1 の冪根（roots of unity）による因数分解（factorisation）の幾何学的な影であること、そして平面上の距離が複素数の絶対値（modulus）であることを示している。

取りかかる前に

考えてみよう 多角形の頂点を n 乗して 1 になる複素数、すなわち $X_k=\omega^k$ に置く。点 P が z であるとき、$|PX_k|$ を z で表すとどうなるか。すると、すべての距離の積はどうなるか。

$|PX_k|=|z-\omega^k|$ であり、これらすべての積は $|(z-1)(z-\omega)\cdots(z-\omega^{n-1})|$ である。問題の最初の部分によれば、これは $|z^n-1|$ に等しい。n 個の距離の積が、ひとつの絶対値になったのである。あとは z をうまく選ぶだけである。

順を追って解く

段階 1　因数分解

各 ω^k は $(\omega^k)^n = (\omega^n)^k = 1$ を満たすので、$1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$ は $z^n - 1$ の根である。これらは互いに異なる（偏角 $\frac{2\pi k}{n}$ が 0 以上 2π 未満の範囲で互いに異なる）ので、これらは最高次の係数が 1 であるこの n 次多項式（polynomial）の n 個の根のすべてであり、$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \omega^k)$ が成り立つ。 ■

段階 2　垂直二等分線上の点

$X_k = \omega^k$ となるように図を回転させる。$X_0 = 1$ と $X_1 = \omega$ から等距離にある点全体は X_0X_1 の垂直二等分線（perpendicular bisector）をなし、これは O を通り角 $\frac{\pi}{n}$ をなす直線である。

> **考えてみよう**　したがって、ある実数 t（正でも負でもよい）を用いて P は $z = te^{i\pi/n}$ と表され、$|OP| = |t|$ である。z^n はどうなるか。

$z^n = t^n e^{i\pi} = -t^n$ である。よって

$$|PX_0| \times \cdots \times |PX_{n-1}| = |z^n - 1| = |-t^n - 1| = |t^n + 1|.$$

n が偶数ならば $t^n = |t|^n \geq 0$ であるから、これは $|OP|^n + 1$ である。 ■

> **手を止めて、やってみよう**　n が奇数のときはどうなるか。$t > 0$ の場合と $t < 0$ の場合を分けて考え、それぞれの場合が幾何学的に何を意味するかを述べよ。

n が奇数ならば、t^n は t と同じ符号をもつ。

- $t \geq 0$、すなわち P が O に関して X_0X_1 の中点と同じ側にあるとき、積は $|OP|^n + 1$ である。
- $t < 0$、すなわち P が O に関して反対側（辺 X_0X_1 に向かい合う頂点の側）にあるとき、$t^n = -|OP|^n$ であり、積は $\left|1 - |OP|^n\right|$ である。

n が奇数のとき、O を通り X_0X_1 に垂直な直線は、反対側にあるひとつの頂点を通る。2 番目の場合、P がその頂点であるとき（$|OP| = 1$）積は 0 になるが、これは当然である。そのとき距離のひとつが 0 になるからである。

段階 3　頂点から引いた弦

考えてみよう 今度は $P = X_0$ であり、距離のひとつ $|X_0X_0|$ が 0 なので、$|z^n - 1| = 0$ は役に立たない。$\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ を根にもち、1 を根にもたない多項式は何か。

$z^n - 1$ を $z - 1$ で割ると

$$(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1}) = \frac{z^n-1}{z-1} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}.$$

右辺は多項式なので、この式はすべての z について成り立ち、$z = 1$ でも成り立つ。そのとき右辺は n に等しい。$z = 1$ で絶対値をとると

$$|X_0X_1| \times |X_0X_2| \times \cdots \times |X_0X_{n-1}| = |1-\omega|\,|1-\omega^2|\cdots|1-\omega^{n-1}| = n. \qquad \blacksquare$$

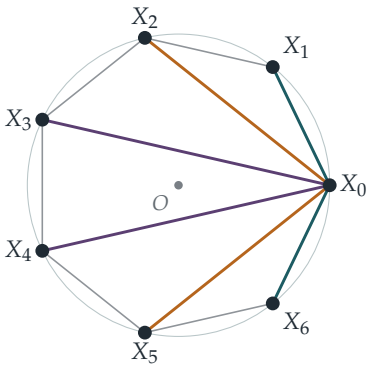


図 5.4.1 半径 1 の円に内接する正七角形。X_0 から引いた 6 本の弦の長さは $2\sin\frac{k\pi}{7}$ であり、約 0.868（青緑）、1.564（琥珀色）、1.950（紫）がそれぞれ 2 回ずつ現れる。その積はちょうど 7 である。

振り返り

- **距離は絶対値である。** $|PX_k| = |z - \omega^k|$ であるから、距離の積は積の絶対値であり、その積は閉じた形で表せた。
- **対称性を使って座標を選ぶ。** 頂点が 1 の冪根になるように回転させ、O を通る対称軸を使うことで、z^n が簡単に計算できた。
- **代入の前に 0 になる因数を約分する。** Section 5.3 と同様に、注目する点で 0 になる因数を割り去ることで、代入が可能になった。

背後にある数学

コーツの定理

小問 (i) はロジャー・コーツ（Roger Cotes）の定理である。コーツはケンブリッジの才気あふれる若き数学者で、ニュートン（Newton）の『*Principia*』（プリンキピア）第 2 版を編集し、1716 年に三十三歳で亡くなった（ニュートンは「彼が生きていたなら、我々は何事かを知りえたであろう」と述べた）。コーツは、P が O から正 n 角形の頂点を通る半直線上にあるとき、P から各頂点までの距離の積は $\big||OP|^n - 1\big|$ であり、P が辺の中点を通る半直線上にあるときは $|OP|^n + 1$ であることを発見した。彼はこれを用いて、複素数を使わずに $x^n \pm 1$ を実数係数の 2 次式の積に因数分解した。これは有理関数の積分に必要だったのである。この定理は彼の死後、1722 年に出版された。

正弦の積

$|1 - \omega^k| = |e^{-\mathrm{i}\pi k/n} - e^{\mathrm{i}\pi k/n}| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$ であるから、小問 (ii) は

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

を意味する。これは Section 5.3 の余弦の積と対をなすものである。関連する積から $z^n - 1$ の**判別式**（discriminant）が得られる。すなわち、相異なる n 乗して 1 になる複素数のすべての組の間の距離の 2 乗の積は n^n である。判別式は多項式の根がどれだけ離れているかを測るもので、多項式の代数や数体の代数において中心的な役割を果たす。これについては第 6 章で取り上げる。

静電気学と等間隔配置

物理的な解釈もある。円周上に n 個の等しい電荷を置く。ポテンシャルエネルギー（2 次元静電気学の対数ポテンシャルによる）を最小にする配置は正多角形であり、そのエネルギーにはまさに $\sum \ln|X_jX_k|$、すなわち距離の積の対数が現れる。「できるだけ散らばった」点は、数値解析（Section 3.6 。そこでは最良の補間点が正多角形から $x = \cos\theta$ によって得られる）やランダム行列の理論において重要である。

思考のスキル

複素数を使って幾何を代数に変える

平面上の点は複素数であり、距離は絶対値であり、正多角形は 1 の冪根である。距離の積は多項式の絶対値になる。

この翻訳によって、$z^n - 1$ の因数分解のような代数的恒等式で、直接見抜くのが非常に難しい幾何学的事実を証明できるようになる。

次の一歩

1. **小さな場合を確かめる。** 正方形（$n = 4$）と正三角形（$n = 3$）について、小問 (ii) を直接確かめよ。

2. **頂点を通る場合。** P が O から X_0 を通る半直線上にあるとき、$|PX_0| \times \cdots \times |PX_{n-1}| = \bigl||OP|^n - 1\bigr|$ であることを示せ。

3. **平均距離。** 小問 (ii) と Section 3.2 の相加相乗平均の不等式（AM–GM inequality）を用いて、X_0 から引いた $n-1$ 本の弦の長さの平均が $n^{1/(n-1)}$ 以上であることを示せ。$n = 6$ のときの実際の平均 $\frac{1}{n-1}\sum_{k} 2\sin\frac{k\pi}{n}$ を求め、比較せよ。

4. **すべての弦。** やや難 単位円に内接する正 n 角形の $\binom{n}{2}$ 本の弦すべての長さの積が $n^{n/2}$ であることを示せ。

さらに学ぶために

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*** (Oxford University Press)。複素数を用いた幾何を、美しい図版とともに解説している。
- **Ross Honsberger, *Mathematical Gems*** (Mathematical Association of America)。正多角形に関する優美な問題がいくつか収められている。
- **Ronald Gowing, *Roger Cotes: Natural Philosopher*** (Cambridge University Press)。コーツとその数学についての伝記である。

5.5 有理角になりそうでならない角

問題

STEP III 2022、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip`

導入

学校の幾何で出会う角は、たいてい度数が整数である：$30°, 45°, 60°$。その余弦は $\frac{\sqrt{3}}{2}$ や $\frac{1}{2}$ のような数になる。では逆向きはどうだろうか。余弦が $\frac{1}{3}$ のような簡単な分数であるとき、その角はきれいな度数になるだろうか。

角 $\cos^{-1}\frac{1}{3} \approx 70.528779\ldots°$ は科学のいたるところに現れる。これは正四面体（regular tetrahedron）の隣り合う二つの面のなす角であり、その補角（supplement）$109.47°$ はメタン分子の結合どうしのなす角である。この問題は、この角の度数が有理数（rational number）でないことを証明する。$70\frac{1}{2}$ でもなく、$\frac{1411}{20}$ でもなく、どんな分数でもない。その小数展開は決して循環しない。一見すると地味なこの事実が、1900 年にダフィット・ヒルベルト（David Hilbert）が提出した有名な問題の一つを解決したのである。

取りかかる前に

考えてみよう θ が有理数であり、たとえば $\theta = \frac{p}{q}$ 度であったとする。$\sin(k\theta) = 0$ となる正の整数 k を求めよ。

$k = 180q$ とすれば $k\theta = 180p$ 度となり、これは半回転の整数倍なので $\sin(k\theta) = 0$ である。したがって有理数の角には、必ず $180°$ の倍数に一致する倍数が存在する。θ が無理数（irrational）であることを証明するには、$k\theta$ の正弦が 0 になるような倍数が**一つもない**ことを示せば十分である。小問 (ii) では、そのような k が存在するならその最小のものをとり、矛盾（contradiction）を導くことでこれを示す。これは再び

Section 1.3 の整列原理（well-ordering principle）である。

順を追って解く

段階 1　倍角の公式

> **考えてみよう**　$\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k$ と書き、$\cos^k\theta$ をくくり出せ。括弧の中には何が残るか。

$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k = \cos^k\theta\,(1 + \mathrm{i}\tan\theta)^k = \cos^k\theta \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mathrm{i}^j \tan^j\theta$ である。虚部は奇数 $j = 2m+1$ の項から生じ、そのとき $\mathrm{i}^j = \mathrm{i}(-1)^m$ である：

$$\begin{aligned}\sin k\theta &= \cos^k\theta \sum_{m} (-1)^m \binom{k}{2m+1} \tan^{2m+1}\theta \\ &= \sin\theta\cos^{k-1}\theta \sum_{m} (-1)^m \binom{k}{2m+1} \tan^{2m}\theta.\end{aligned}$$

$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$ であるから、これが求める公式である。 ■偶数 $j = 2m$ の項から生じる実部からは、次が得られる。

$$\cos k\theta = \cos^k\theta \left(1 - \binom{k}{2}(\sec^2\theta - 1) + \binom{k}{4}(\sec^2\theta - 1)^2 - \cdots\right).$$

段階 2　偶奇性

ここで $\sec\theta = a$ は奇数の整数なので、$\sec^2\theta - 1 = a^2 - 1$ は**偶数**の整数である。また θ は 0° と 90° の間に（両端を含まずに）あるので、$\sin\theta \neq 0$ かつ $\cos\theta \neq 0$ である。

> **考えてみよう**　$\sin(k\theta) = 0$ ならば、括弧 $k - \binom{k}{3}(a^2-1) + \cdots$ は 0 でなければならない。最初の項以外はすべて $a^2 - 1$ の倍数である。このことから k について何がわかるか。

括弧は、k に偶数 $a^2 - 1$ の倍数の和を加えたものである。もし k が奇数なら括弧は奇数となるが、奇数の整数が 0 になることはない。よって k は偶数でなければならない。

すると $\sin(k\theta) = 2\sin(\tfrac{1}{2}k\theta)\cos(\tfrac{1}{2}k\theta) = 0$ である。ところが $\tfrac{1}{2}k$ は k より小さい正の整数なので、k の最小性より $\sin(\tfrac{1}{2}k\theta) \neq 0$ である。ゆえに $\cos(\tfrac{1}{2}k\theta) = 0$ である。 ■

段階 3　矛盾

> **手を止めて、やってみよう** $m = \frac{1}{2}k$ として余弦の公式を適用せよ。なぜ $\cos(m\theta)$ は決して 0 にならないのか。

段階 1 より、$\cos(m\theta) = a^{-m}\left(1 - \binom{m}{2}(a^2-1) + \binom{m}{4}(a^2-1)^2 - \cdots\right)$ である。括弧は 1 に偶数 a^2-1 の倍数を加えたものなので奇数であり、特に 0 ではない。よって $\cos(m\theta) \neq 0$ となり、段階 2 に矛盾する。

したがって、$\sin(k\theta) = 0$ となる正の整数 k は存在しない（もし一つでも存在すれば最小のものが存在するはずだが、その最小のものが存在しえないことをいま示した）。**取りかかる前に**で述べた観察により、θ の度数は有理数ではありえない。 ■

段階 4 余接の場合

> **考えてみよう** $\cot\phi = \frac{1}{b}$ のとき、$\sec^2\phi - 1$ はいくらか。それは偶数か。

$\tan\phi = b$ なので $\sec^2\phi - 1 = \tan^2\phi = b^2$ であり、b が偶数だからこれは偶数（実は 4 の倍数）である。また $0^\circ < \phi < 90^\circ$ なので、$\sin\phi$ と $\cos\phi$ は 0 でない。あとはまったく同じ議論が成り立つ。k を $\sin(k\phi) = 0$ となる最小の正の整数とすると、括弧 $k - \binom{k}{3}b^2 + \cdots$ は 0 でなければならず、k は偶数となる。すると $\cos(\frac{1}{2}k\phi) = 0$ となるが、余弦の括弧 $1 - \binom{m}{2}b^2 + \cdots$ は奇数である。これは矛盾なので、ϕ は無理数である。
■

たとえば、$\cot^{-1}\frac{1}{2} = \tan^{-1}2 \approx 63.43^\circ$ は無理数である。

振り返り

- **有理数の角には周期的な倍数がある。**この言い換えによって、無理数性がすべての k に対する $\sin(k\theta)$ についての主張に変わった。
- **偶奇性の議論。**2 を法として考えることで、ある整数が奇数であり、したがって 0 でないことが示された。単純だが決定的である。
- **最小の反例。**最小の k を仮定し、それより小さいもの（ここでは $\frac{1}{2}k$）が存在しなければならないことを示すのは、第 1 章の整列原理による議論である。

背後にある数学

無理数回転

θ の度数が有理数なら、θ ずつ回転を繰り返すと、いずれ出発点に戻ってくる。θ が無理数なら決して戻らず、しかも驚くべきことが起こる。点 $k\theta$（360° を法として考える）は円周上に**一様に**広がり、どんな角にもいくらでも近づくのである。これは**一様分布定理**（equidistribution theorem）であり、1910 年ごろにワイル（Hermann Weyl）、シェルピンスキ（Wacław Sierpiński）、Piers Bohl によってそれぞれ独立に証明された。図 5.5.1 は $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ の最初の 40 個の倍数を示している。すでに円周を埋めつつあり、どれ一つとして重ならない。

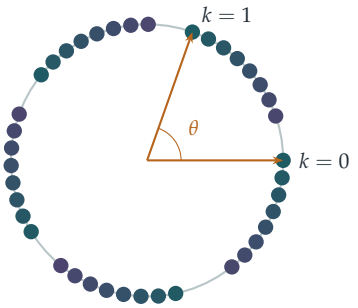


図 5.5.1　$k = 0, 1, \ldots, 39$ に対する角 $k\theta$ の点。ただし $\theta = \cos^{-1}\frac{1}{3} \approx 70.53°$ である（k が増えるにつれて色がティールからプラムへ変化する）。θ が無理数なので、どの点も二度と重ならず、点は円周全体に一様に広がっていく。

ヒルベルトの第 3 問題

1900 年、ヒルベルトは新しい世紀に向けて 23 の問題を挙げた。その第 3 問題は次のようなものである：体積の等しい二つの多面体があるとき、一方をつねに有限個の多面体の断片に切り分けて、もう一方に組み立て直すことができるか。（平面上の多角形については答えは「できる」であり、これはウォレス–ボヤイ–ゲルヴィンの定理（Wallace–Bolyai–Gerwien theorem）である。）1 年もたたないうちに、ヒルベルトの学生であったデーン（Max Dehn）は答えが**否**であることを示した。正四面体を切り分けて、同じ体積の立方体に組み立て直すことはできないのである。デーンの証明では、各多面体にその辺の長さと二面角（dihedral angle）から作られる量を対応させる。この量は現在**デーン不変量**（Dehn invariant）と呼ばれ、切り分けて組み立て直しても変わらない。立方体ではこれは 0 であり、正四面体では 0 でない。それはまさに、二面角 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ が 180° の有理数倍でないからである。そしてそれこそが、この問題で証明

したことなのである。

ニーヴンの定理

この話はどこまで広がるのだろうか。1956 年、ニーヴン（Ivan Niven）は、θ の度数が有理数で $\cos\theta$ も有理数ならば、$\cos\theta$ は $0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ のいずれかであることを証明した。したがって、余弦が有理数となる「きれいな」角は $0°, 60°, 90°, 120°, 180°$ とその仲間だけである。証明では、$2\cos\theta$ が整数係数のモニック多項式（monic polynomial）の根、すなわち**代数的整数**（algebraic integer）であるという事実を用いる。これは Section 1.3 の終わりで触れた考え方である。

思考のスキル

0 にならないことを偶奇性で証明する

整数の式が決して 0 にならないことを示すには、それがつねに奇数であることを示せばよい：2 を法として還元するのである。

最小反例（minimal counterexample）と組み合わせることで、この単純な考え方が深い事実を証明した。小さな数を法として還元し、方程式の成立を否定するのは、Section 1.5 にもあるように、整数論で最もよく使われる手法の一つである。

次の一歩

1. **正四面体。**正四面体の二つの面のなす角が $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ であること、およびメタン分子の二つの結合のなす角（正四面体の中心から二つの頂点へ向かう線分のなす角）が $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$ であることを示せ。

2. **3–4–5 の三角形。**3–4–5 の三角形の最小の角の度数が無理数であることを示せ。（ヒント：その角は $\cot^{-1}\frac{4}{3}$ である。上の議論を修正するか、ガウス整数（Gaussian integer）$4+3\mathrm{i}$ の累乗を考え、どれも実数にならないことを示せ。）

3. **なぜ a は奇数なのか。**$a=2$ のとき、議論のどこが破綻するか。$\cos^{-1}\frac{1}{2}$ は有理数か。

4. **小さな場合のニーヴンの定理。**$0°$ から $90°$ までの整数の度数 θ で、$\cos\theta$ が有理数となるものをすべて求め、その一覧がニーヴンの定理と一致することを確かめよ。

さらに学ぶために

- **Ivan Niven, *Irrational Numbers***（Mathematical Association of America）。『無理数』。三角関数の有理数値に関するニーヴンの定理を収録している。
- **Martin Aigner & Günter Ziegler, *Proofs from THE BOOK***、ヒルベルトの第 3 問題の章。『天書の証明』。デーンによる解決の美しい解説である。
- **Benjamin Yandell, *The Honors Class: Hilbert's Problems and Their Solvers***（A. K. Peters）。ヒルベルトの問題とそれを解いた人々。23 の問題すべての背後にある物語を描いている。

5.6 フェルマー点

問題

STEP III 2000、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/00-s3-q3`

導入

3 つの村を結ぶ道路網を、できるだけ短く作りたい。分岐点はどこに置けばよいだろうか。1640 年ごろ、フェルマー（Pierre de Fermat）は、三角形の内部の点 P で $PA + PB + PC$ を最小にするものを求める問題を提起し、トリチェリ（Evangelista Torricelli）がこれを解いた。答えは、3 つの辺がいずれも 120° の角をなして見える点である。

この問題では、複素数（complex number）を用いて、その点を求める美しい作図法を証明する。三角形の各辺の外側に正三角形（equilateral triangle）を作り、新しくできた各頂点を、もとの三角形の向かい合う頂点と結ぶ。すると 3 本の直線は 1 点で交わる。これが**フェルマー点**（Fermat point）である。しかも 3 本の線分の長さはすべて等しく、その長さが道路の総延長の最小値になっている。複素数と、$e^{\mathrm{i}\pi/3}$ に関するひとつの恒等式を使えば、全体はわずか数行の計算で済む。

取りかかる前に

考えてみよう A、B、C はどこにあるか。それぞれの偏角はいくらか。OA、OB、OC は互いにどのような角をなすか。

$A = p$ は実軸の正の部分にある（偏角（argument）は 0°）。$B = q\alpha^2 = qe^{2\pi\mathrm{i}/3}$ の偏角は 120° である。$C = -r\alpha = re^{\mathrm{i}\pi}e^{\mathrm{i}\pi/3}$ の偏角は 240° である。したがって原点は三角形の内部の点であり、そこから 3 つの頂点は互いに 120° の角をなす方向に、それぞれ距離 p、q、r のところに見える。つまり、作り方からして原点こそがフェルマー点なの

である。この問題は、正三角形を用いた作図によってこの点が求まることを示すものである。

順を追って解く

段階 1　鍵となる恒等式

$\alpha^3 = e^{i\pi} = -1$ であるから、α は $z^3+1 = (z+1)(z^2-z+1)$ の根である。$\alpha \neq -1$ より $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$、すなわち $1+\alpha^2 = \alpha$ である。 ■

ここから導かれる 2 つの式が役に立つ。$1-\alpha = -\alpha^2$ と $\alpha - \alpha^2 = 1$ である。また $1-\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = e^{-i\pi/3}$ であり、これは α の共役複素数（complex conjugate）である。

段階 2　回転としての正三角形

> **考えてみよう**　三角形 CAN は正三角形で、頂点は時計回りに名前がつけられている。C に立ったとき、A からどうすれば N に移れるか。$N-C$ を $A-C$ を用いて表せ。

C、A、N の順に時計回りに進むので、点 N は A を C のまわりに時計回りに 60° 回転（rotation）させて得られる。$e^{-i\pi/3} = 1-\alpha$ を掛けることは時計回りに 60° 回転させることであるから、

$$\begin{aligned} N = C + (1-\alpha)(A-C) &= -r\alpha + (1-\alpha)(p+r\alpha) \\ &= (1-\alpha)p + r(\alpha - \alpha^2 - \alpha) = (1-\alpha)p - \alpha^2 r. \end{aligned}$$ ■

（反時計回りではなく時計回りに回転させることで、N は CA に関して原点と反対側、すなわち三角形の外側に置かれる。）

> **手を止めて、やってみよう**　同じ方法で L と M を求め、小問 1 の恒等式を用いて簡単にせよ。

同様に $L = A + (1-\alpha)(B-A)$、$M = B + (1-\alpha)(C-B)$ であるから、

$$\begin{aligned} L &= p + (1-\alpha)(q\alpha^2 - p) = \alpha p + (\alpha^2 - \alpha^3)q = \alpha p + (\alpha^2+1)q = \alpha(p+q), \\ M &= q\alpha^2 + (1-\alpha)(-r\alpha - q\alpha^2) = q\alpha^3 + r(\alpha^2 - \alpha) = -q - r. \end{aligned}$$

さらに $1-\alpha = -\alpha^2$ を用いると、$N = -\alpha^2 p - \alpha^2 r = -\alpha^2(p+r)$ である。

段階 3　原点を通る 3 本の直線

考えてみよう $L=\alpha(p+q)$ と $C=-r\alpha$ を比べよ。何に気づくか。M と A、N と B についても同じことをせよ。

L は α の正の実数倍であり、C は α の負の実数倍である。したがって L と C は O を通る同一直線上で O をはさんで反対側にあり、線分 LC は原点を通る。その長さは $|L-C|=|\alpha|(p+q+r)=p+q+r$ である。

同様に、$M=-(q+r)$ と $A=p$ は実軸上で O をはさんで反対側にあるので、MA は O を通り、長さは $p+q+r$ である。また $N=-\alpha^2(p+r)$ と $B=q\alpha^2$ は、O を通り α^2 の方向に伸びる直線上で互いに反対側にあるので、NB は O を通り、長さは $p+q+r$ である。 ■

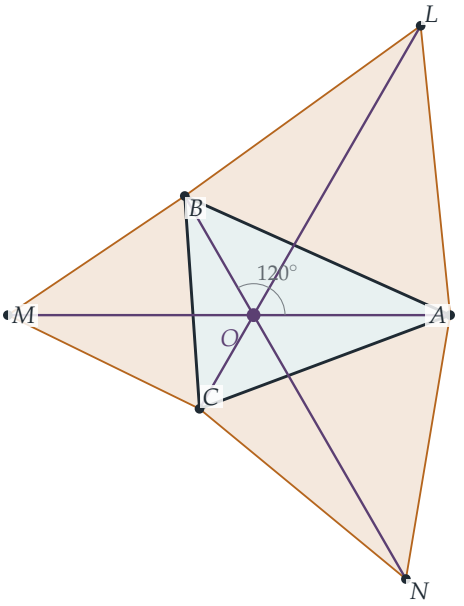


図 5.6.1　$p=2$、$q=1.4$、$r=1.1$ のときのフェルマー点。ABC の各辺の外側に正三角形（琥珀色）を作る。直線 LC、MA、NB（紫）はすべて原点 O を通る。O からは ABC の各辺が 120° の角をなして見え、3 本の線分の長さはいずれも $p+q+r=4.5$ である。

振り返り

- **回転は掛け算である。**正三角形を作ることは、ある頂点を別の頂点のまわりに 60° 回転させることであり、それは $e^{\pm i\pi/3}$ を掛けることにほかならない。
- **座標の巧みな選び方。**フェルマー点を原点に置き、頂点を 1、α^2、$-\alpha$ の方向に並べたことで、すべての式が劇的に簡単になった。

- **ひとつの恒等式を繰り返し使う。**式の簡略化はすべて $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$ と $\alpha^3 = -1$ から得られた。

背後にある数学

フェルマー点で距離の和が最小になる理由

なぜ $PA + PB + PC$ は、各辺が 120° の角をなして見える点で最小になるのだろうか。ここに見事な論法がある。図全体を B のまわりに 60° 回転させ、A を L'（AB 上に作った正三角形の頂点）に、P を P' に移す。三角形 BPP' は正三角形であるから $PB = PP'$ であり、また $PA = P'L'$ である。よって $PA + PB + PC = L'P' + P'P + PC$ となり、これは L' から C へ至る折れ線の長さである。これは $|L'C|$ 以上であり、等号が成り立つのは折れ線がまっすぐなとき、すなわち P における角がすべて 120° のときに限る。したがって総延長の最小値は、問題で求めたとおり $|LC| = p + q + r$ である。（これは三角形のどの角も 120° より小さい場合に成り立つ。そうでない場合、最小となるのは鈍角（obtuse angle）の頂点である。）

石けん膜とシュタイナー木

3 本の杭（A、B、C を表す）をつけた枠を石けん水に浸すと、石けん膜は表面張力（surface tension）によるエネルギーを最小にしようとして、フェルマー点で 120° の角をなして交わる 3 枚の膜を作る。点の数がもっと多い場合、それらを結ぶ最短のネットワークは**シュタイナー木**（Steiner tree）であり、3 本の辺が 120° で交わる分岐点が新たに加わる。シュタイナー木を求めることは一般には計算量的に難しい（NP 困難（NP-hard）な問題である）が、道路網やパイプライン、コンピュータチップの配線の設計など、実用上重要である。

ナポレオンの定理

同じ配置には、もうひとつの宝石が隠れている。任意の三角形の各辺の上に作った 3 つの正三角形の**中心**は、正三角形をなすのである。これは伝統的にナポレオン・ボナパルト（Napoleon Bonaparte、熱心なアマチュア数学者であった）の功績とされ、ナポレオンの定理（Napoleon's theorem）と呼ばれるが、彼が発見したという証拠はない。この定理も、$1 + \alpha^2 = \alpha$ を用いれば複素数で短く証明できる。

思考のスキル

問題に合った座標を選ぶ

最も重要な点を原点に置き、問題の対称性に合わせて配置せよ。うまく選べば、計算はほとんど自明になる。

ここでは原点をフェルマー点とし、3つの頂点は（符号を除いて）-1 の3乗根の方向に並んでいた。ほかの座標を使えば、同じ計算がはるかに煩雑になったであろう。

次の一歩

1. **頂点の名前のつけ方を確かめる。** 正三角形の頂点を反時計回りに名づけた（内側に作った）場合、3本の直線は一般には O を通らないことを示せ。

2. **ナポレオンの定理。** 正三角形 ABL の中心が $\frac{1}{3}(A+B+L)$ であることを示せ。上で求めた式を用いて、3つの中心が正三角形をなすことを示せ。

3. **最小値。** $p=2$、$q=1.4$、$r=1.1$ のとき、P を各頂点および重心（centroid）$\frac{1}{3}(A+B+C)$ に置いて $PA+PB+PC$ を計算し、いずれも 4.5 より大きいことを確かめよ。

4. **正三角形の判定。** z_1、z_2、z_3 が（どちらの向きであれ）正三角形をなすための必要十分条件は $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$ であることを示せ。

さらに学ぶために

- **Richard Courant & Herbert Robbins, *What Is Mathematics?***（Oxford University Press）。邦題『数学とは何か』。第7章でフェルマー点、シュタイナー木、石けん膜を論じている。
- **Liang-shin Hahn, *Complex Numbers and Geometry***（Mathematical Association of America）。多くの幾何の定理を、まさにこの水準の複素数を用いて証明している。
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。邦題『ヴィジュアル複素解析』。第1章にナポレオンの定理をはじめとする幾何の結果が収められている。

5.7 写像としての複素指数関数

問題

STEP II 1997、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/97-s2-q5`

導入

指数関数（exponential function）は、曲線 $y = e^x$ としてよく知っているであろう。しかし、複素変数の関数は曲線として描くことができない。入力は平面上の点であり、出力もまた平面上の点だからである。これを思い描くには、**写像**（map）として捉えればよい。すなわち、一方の平面のすべての点を他方の平面の点へと移し、その過程で引き伸ばしたり曲げたりする変換である。

問題の式は $z = e^u(\cos v + \mathrm{i}\sin v) = e^{u+\mathrm{i}v} = e^w$ である。写像として見ると、複素指数関数は驚くべきことをする。平面の水平な帯状領域を巻き上げて平面全体（原点を除く）にし、鉛直な直線を円に巻きつけ、水平な直線を半直線として広げるのである。さらに、巻きつくために一対一（one-to-one）ではない。各点に無限個の点が移るのである。これこそが、複素対数関数が「多価」（multi-valued）である理由であり、複素解析（complex analysis）で最初に出会う驚きの一つである。

取りかかる前に

考えてみよう $z = e^u(\cos v + \mathrm{i}\sin v)$ の絶対値（modulus）と偏角（argument）を u と v で表すとどうなるか。

$|z| = e^u$ であり、$\arg z = v$（2π の整数倍の差を除いて）である。したがって、w の実部 u は原点からの距離を指数的に定め、虚部 v は方向を定める。この一つの観察で、問題のほぼすべての部分に答えられる。

順を追って解く

段階 1　$e^w = \mathrm{i}e$ を解く

考えてみよう　$\mathrm{i}e$ の絶対値と偏角は何か。

$|\mathrm{i}e| = e$ かつ $\arg(\mathrm{i}e) = \frac{\pi}{2}$ である。よって $e^u = e$ すなわち $u = 1$ であり、任意の整数 k に対して $v = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ であればよい。解は

$$w = 1 + \mathrm{i}\left(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

である。解は無限個あり、縦方向に 2π ずつ間隔をあけて並んでいる。

段階 2　格子線の像

鉛直な直線 $u = c$ の上では、v が変化しても $|z| = e^c$ は一定である。したがって像は原点を中心とする半径 e^c の**円**であり、v がすべての実数を動くとき、この円を無限回なぞる。

水平な直線 $v = d$ の上では、$\arg z = d$ は一定で、$|z| = e^u$ はすべての正の値をとる。したがって像は、原点から角 d の方向に伸びる開いた**半直線**（ray）であり、原点そのものは含まない。直線 $v = d$ と $v = d + 2\pi$ は同じ半直線を与える。

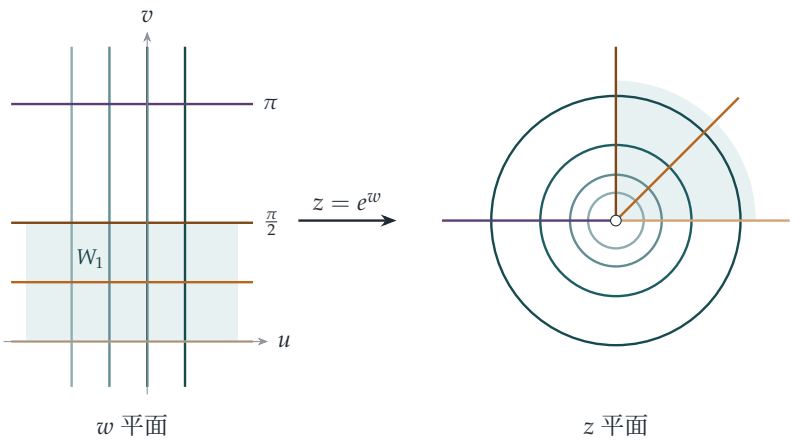


図 5.7.1　写像としての複素指数関数。w 平面の鉛直な直線 $u = c$（青緑）は半径 e^c の円に移り、水平な直線 $v = d$（琥珀色、紫）は角 d の半直線に移る。影をつけた帯状領域 $W_1 = \{0 < v < \frac{\pi}{2}\}$ はちょうど第 1 象限の上に移る。どちらの図でも格子線が直角に交わっていることに注目せよ。この写像は角を保つのである。原点（白丸）には決して到達しない。

段階 3　一対一となる部分

考えてみよう 第 1 象限 $x>0, y>0$ に移る点 w はどれか。その集合が大きすぎて、第 1 象限と一対一に対応しないのはなぜか。

z が開いた第 1 象限にあるのは、絶対値は任意で、$\arg z$ が（2π を法として）0 と $\frac{\pi}{2}$ の間に厳密にあるとき、かつそのときに限る。したがって w は $0<v<\frac{\pi}{2}$ または $2\pi<v<\frac{5\pi}{2}$ または …を満たさなければならない。これは無限個の水平な帯状領域であり、それぞれが第 1 象限全体の上に移る。一つの帯状領域の内部では u と v は $|z|$ と $\arg z$ によって一意に定まるので、どの帯状領域も第 1 象限と一対一に対応する。よって次のようにとればよい。

$$W_1=\{u+\mathrm{i}v : 0<v<\tfrac{\pi}{2}\},\qquad W_2=\{u+\mathrm{i}v : 2\pi<v<\tfrac{5\pi}{2}\}.$$

手を止めて、やってみよう 次に、穴あき円板 $0<|z|<1$ と一対一に対応する w 平面の集合を二つ求めよ。

$|z|<1$ は $e^u<1$、すなわち $u<0$ を意味する。また、すべての偏角がちょうど一度ずつ覆われなければならないので、v は長さがちょうど 2π で、一方の端点を含み他方を含まない区間を動けばよい。たとえば

$$W_3=\{u+\mathrm{i}v : u<0,\ 0\le v<2\pi\},\qquad W_4=\{u+\mathrm{i}v : u<0,\ -\pi<v\le\pi\}.$$

である。これらは一方の辺を含み他方の辺を含まない半帯状領域である。（両方の辺を含めると正の実軸上の点に二度到達し、どちらも含めなければそれらの点に到達しない。）■

振り返り

- **絶対値と偏角が変数を分離する。** $|e^w|=e^{\operatorname{Re} w}$ かつ $\arg e^w=\operatorname{Im} w$ であるから、w の実部と虚部はそれぞれ独立に距離と方向を定める。
- **複素関数を写像として思い描く。** 格子線の行き先を追うことで、グラフとして描けない関数の姿がはっきりと見えてくる。
- **周期性は単射性を壊す。** $e^{w+2\pi\mathrm{i}}=e^w$ であるから、この写像は多対一であり、逆関数をもつためには高さ 2π の帯状領域に制限しなければならない。

背後にある数学

複素対数関数

実数直線上では、ln は exp の逆関数である。複素平面では、各 $z \neq 0$ に対して $e^w = z$ は $2\pi i$ の整数倍ずつ異なる無限個の解 w をもつので、「$\log z$」は一つの数ではない。本当の関数を得るには**分枝**（branch）を選ばなければならない。これは W_3 や W_4 のような帯状領域を選ぶことである。**主枝**（principal branch）は $-\pi < \arg z \leq \pi$ をとるものである。どの分枝にも、原点から伸びる半直線に沿ってどこかに不連続な跳びがあり、これを**分枝切断**（branch cut）という。リーマン（Bernhard Riemann）は 1851 年の学位論文において、対数関数が平面上に住むと考えるのをやめることでこの問題を解決した。対数関数は無限に続くらせん階段、すなわち**リーマン面**（Riemann surface）の上に住み、その上では一価かつ滑らかなのである。リーマン面は今日、幾何学、整数論、弦理論の中心をなしている。

角は保たれる

図 5.7.1 をもう一度見てみよう。鉛直と水平の格子線は直角に交わり、それらが移った先の円と半直線も直角に交わっている。これは偶然ではない。複素関数は、導関数が 0 でないところではどこでも、曲線どうしのなす角を保つのである。このような写像を**等角写像**（conformal map）という。局所的には、等角写像は回転と拡大縮小にすぎず、それはまさに複素数 $f'(z)$ を掛けることが行う操作である。等角写像は、複雑な領域を答えのわかっている単純な領域に変換することで、流体の流れ、静電気学、熱伝導の問題を解くのに用いられる。

メルカトルの地図

ここで、この節と Section 4.8 を結ぶ意外な事実を紹介しよう。1569 年のメルカトル（Gerardus Mercator）の地図は、一定の方位角で進む航路が直線になるように作られており、そのためには角を保つ必要がある。まず地球を（北極から）立体射影（stereographic projection）で平面に写し、次に複素対数をとると、その結果はちょうどメルカトル図法になる。log によって半直線と円がそれぞれ水平と鉛直の直線になるのと同じように、経線は鉛直な直線に、緯線は水平な直線になるのである。この節の指数写像を逆向きにたどったものが、航海士の海図の数学なのである。

思考のスキル

関数を変換として視覚化する

関数をグラフとして描けないときは、その関数が何をするかを描け。単純な曲線の格子を追い、それらがどこへ行くかを見よ。

複素関数では、水平な直線と鉛直な直線、あるいは円と半直線の像を調べれば、たいていすべてがわかる。写像が図形に何をするかというこの考え方は、幾何学と解析学の全体を貫いている。

次の一歩

1 **方程式を解く。** $e^w = -1$ を満たす複素数 w をすべて求めよ。また、$e^w = 1 + \mathrm{i}$ を満たす w をすべて求めよ。

2 **正方形の像。** 頂点が $0, 1, 1+\mathrm{i}, \mathrm{i}$ である正方形の $z = e^w$ による像を求め、図示せよ。

3 **直角。** 円 $|z| = e^c$ と半直線 $\arg z = d$ が直角に交わることを直接示し、これが直線 $u = c$ と $v = d$ が垂直であることと整合する理由を説明せよ。

4 **2 乗。** c と d を 0 でない実数とする。写像 $z \mapsto z^2$ による直線 $x = c$ と $y = d$ の像を求めよ。それらが放物線であり、交わる点ではどこでも直角に交わることを示せ。（$c = 0$ または $d = 0$ のときはどうなるか。）

さらに学ぶために

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*** (Oxford University Press)。第 2 章と第 4 章で、指数関数、対数関数、等角写像を見事な図とともに扱っている。
- **Hilary Priestley, *Introduction to Complex Analysis*** (Oxford University Press)。大学初年級向けのわかりやすい教科書である。
- **Ian Stewart & David Tall, *Complex Analysis*** (Cambridge University Press)。幾何学に重点を置いた、もう一つの優れた大学向け入門書である。

5.8 円板に隠れた距離

問題

STEP III 2013、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/13-s3-q6`

導入

一見すると、これは絶対値（modulus）と共役複素数（complex conjugate）を操作する練習問題で、最後に奇妙な形の不等式が出てくるだけに見える。いったい誰が $\frac{|z-w|}{|1-zw^*|}$ などに関心をもつのだろうか？

それは、これが距離だからである。z と w の通常の距離ではなく、別の幾何学における距離である。その幾何学では、単位円板がそれだけで無限に広がる宇宙全体となり、直線は円弧であり、三角形の内角の和は $180°$ より小さい。これが**双曲幾何学**（hyperbolic geometry）である。ユークリッド（Euclid）の平行線公準（parallel postulate）を証明しようとする二千年にわたる試みの末、19 世紀に発見された。そして、この問題の不等式は、姿を変えたこの幾何学の三角不等式（triangle inequality）であることがわかる。さらに驚くべきことに、右辺は特殊相対性理論（special relativity）における速度の合成公式であり、これは Section 3.8 で扱った。

取りかかる前に

? **考えてみよう** $|z-w| \leq |z|+|w|$ は図からどのように導かれるか？（z と $-w$ をベクトルとして考えよ。）

$z-w = z+(-w)$ である。原点から z を矢印として描き、次に z の先端から $-w$ を矢印として描く。原点から最終的な点への矢印が $z-w$ であり、3 本の矢印は辺の長さが $|z|$、$|w|$、$|z-w|$ の三角形をなす。三角形の 1 辺の長さは、他の 2 辺の長さの和以下である。

また、任意の複素数 a に対して $|a|^2 = aa^*$ であることを思い出そう。これにより、問題中のすべての絶対値を代数的な式に変換できる。

順を追って解く

段階 1　絶対値の展開

考えてみよう　$|z-w|^2 = (z-w)(z^*-w^*)$ を展開せよ。$(|z|+|w|)^2$ と比較せよ。

$|z-w|^2 = zz^* - zw^* - z^*w + ww^* = |z|^2 + |w|^2 - zw^* - z^*w$ である。一方、$(|z|+|w|)^2 - E = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 - zw^* - z^*w - 2|zw|$ であり、$|z||w| = |zw|$ であるから、これは同じ式である。 ■

$E = (zw^*) + (zw^*)^* + 2|zw| = 2\,\mathrm{Re}(zw^*) + 2|zw|$ であり、これは実数である。また、三角不等式により $E = (|z|+|w|)^2 - |z-w|^2 \geq 0$ である。 ■

段階 2　第 2 の恒等式

$|1 - zw^*|^2 = (1-zw^*)(1-z^*w) = 1 - zw^* - z^*w + |z|^2|w|^2$ であり、一方 $(1+|zw|)^2 - E = 1 + 2|zw| + |zw|^2 - zw^* - z^*w - 2|zw|$ であるから、両者は同じである。 ■

段階 3　不等式

考えてみよう　$A = (|z|+|w|)^2$、$B = (1+|zw|)^2$ とおく。不等式を 2 乗すると $\frac{A-E}{B-E} \leq \frac{A}{B}$ となる。これはどのようなときに成り立つか？

示すべき不等式の両辺はともに 0 以上であるから、これは両辺を 2 乗した不等式 $\frac{A-E}{B-E} \leq \frac{A}{B}$ と同値である。$B - E = |1-zw^*|^2 > 0$ と仮定して分母を払うと、

$$(A-E)B \leq A(B-E) \iff -EB \leq -EA \iff E(B-A) \geq 0.$$

$E \geq 0$ であるから、これは $B \geq A$、すなわち $1 + |zw| \geq |z| + |w|$ のときには常に成り立つ。

手を止めて、やってみよう　$1 + |z||w| - |z| - |w|$ が因数分解できることを示せ。これが 0 以上となるのはどのようなときか？

$1 + |z||w| - |z| - |w| = (1-|z|)(1-|w|)$ である。$|z| > 1$ かつ $|w| > 1$ ならば、両方の因数が負であるから積は正である。よって $B \geq A$ となり、不等式が成り立つ。 ■

逆に $|z| < 1$ かつ $|w| < 1$ の場合も、両方の因数が正であるから積はやはり正であり、同じ議論が通用する。つまり**はい**、この場合にも不等式は成り立つ。（どちらの場合も $|zw^*| \neq 1$ であるから $1 - zw^* \neq 0$ となり、左辺は定義される。）不等式が成り立たないことがありうるのは、一方が単位円の内側に、もう一方が外側にある混合した場合である。

振り返り

- $|a|^2 = aa^*$**。** すべての恒等式は、共役複素数どうしの積を展開することから得られた。これは絶対値を代数的に扱うための標準的な方法である。
- **一つの量の符号に帰着させる。** 2 乗して分母を払った後、不等式全体は $(1 - |z|)(1 - |w|)$ の符号だけで決まった。
- **他の場合も確かめる。** 最後の問いは $|z|, |w| < 1$ の場合についてであったが、同じ因数分解ですぐに答えが得られた。

背後にある数学

非ユークリッド幾何学

二千年もの間、数学者たちはユークリッドの第 5 公準（直線上にない点を通り、その直線に平行な直線はちょうど 1 本存在する）を、ほかの公理から証明しようと試みてきた。1820 年代から 1830 年代にかけて、ロバチェフスキー（Nikolai Lobachevsky）、ボヤイ（János Bolyai）、そして（公表はしなかったが）ガウス（Gauss）は、それが不可能であることに気づいた。平行線が無数に存在する、完全に無矛盾な幾何学があるのである。1882 年、ポアンカレ（Henri Poincaré）は単位円板の内部にその美しいモデルを見いだした。点は開円板の点であり、「直線」は直径、および境界の円と直角に交わる円弧である。そして z と w の距離は

$$d(z, w) = 2 \tanh^{-1} \rho(z, w), \qquad \text{ただし} \qquad \rho(z, w) = \frac{|z - w|}{|1 - zw^*|}.$$

である。点が境界の円に近づくにつれて、中心からの距離は無限大に発散する。この円板は、ゆがんだレンズを通して見た無限に広がる平面全体なのである。

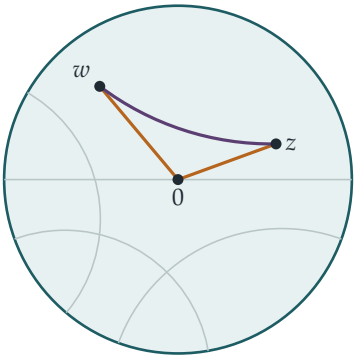


図 5.8.1　ポアンカレ円板。双曲的な「直線」は、直径、または境界と直角に交わる円の弧である（灰色）。頂点が 0、z、w の双曲三角形は、2 辺が直径に沿い（琥珀色）、1 辺が円弧に沿っている（紫色）。問題の不等式は、紫色の辺の双曲的な長さが、他の 2 辺の長さの和を超えないことを述べている。

姿を変えた三角不等式

$|z|, |w| < 1$ の場合に、この問題が何を証明したのかを見てみよう。$|z| = \tanh a$、$|w| = \tanh b$ とおくと、0 から z および w までの双曲的距離は $2a$ と $2b$ である。すると Section 3.8 の tanh の加法定理により、

$$\frac{|z| + |w|}{1 + |zw|} = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b} = \tanh(a + b).$$

よって、この不等式は $\tanh\left(\frac{1}{2}d(z, w)\right) \leq \tanh(a + b)$、すなわち

$$d(z, w) \leq 2a + 2b = d(z, 0) + d(0, w).$$

を意味する。これは双曲的距離に関する三角不等式である（図 5.8.1）。相対論的な速度の合成公式と双曲幾何学は、実は同じものである。特殊相対性理論で可能な速度全体の集合は、適切な距離の概念を与えると、双曲空間**そのもの**になる。この話題には Section 7.6 で再び戻る。

円板の対称性

なぜ ρ が適切な量なのだろうか？$|a| < 1$ に対して、写像 $z \mapsto \dfrac{z - a}{1 - a^* z}$ は単位円板をそれ自身に写し、双曲的距離を保ち、a を中心に移す。これらは平行移動の双曲幾何学における類似物であり、$\rho(z, w)$ は、w を中心に移したときのちょうど |移動後のz| に等しい。これらの**メビウス変換**（Möbius transformations）は、複素解析の中心的な話題である。エッシャー（M. C. Escher）の木版画 *Circle Limit*（『円の極限』）は、数学者コクセター（H. S. M. Coxeter）の図に着想を得たもので、合同な魚や天使によるポア

ンカレ円板の敷き詰めを描いている。双曲的距離は縁の近くで発散するため、それらの図形は縁に向かって小さくなっていく。

思考のスキル

> **式が何を意味するかを問う**
>
> ある代数的な式が繰り返し現れるときには、それが距離、角、確率、対称性といった意味をもつかどうかを問うてみよ。
>
> ここでは、奇妙な絶対値の比が別の幾何学における距離であり、奇妙な不等式がその三角不等式であることがわかった。意味を見抜くことで、結果がなぜ正しいのか、そしてそれがどこへつながるのかが明らかになる。

次の一歩

1. **数値による確認。** $z = \frac{1}{2}$、$w = -\frac{1}{2}$ とする。不等式の両辺を計算せよ。次に双曲的距離 $d(z,0)$、$d(0,w)$、$d(z,w)$ を計算し、この場合は三角不等式で等号が成り立つことを確かめよ。それはなぜか？

2. **混合した場合。** $|z| < 1 < |w|$ であって、不等式が成り立たないような z、w を求めよ。

3. **等長変換（isometry）。** $|a| < 1$ として $f(z) = \dfrac{z - a}{1 - a^* z}$ とする。$|z| = 1$ ならば $|f(z)| = 1$ であること、および $f(a) = 0$ であることを示せ。また $\rho(f(z), f(w)) = \rho(z,w)$ を示せ。

4. **無限遠は近い。** 0 から r（$0 < r < 1$）までの双曲的距離が $\ln \frac{1+r}{1-r}$ であり、$r \to 1$ のとき無限大に発散することを示せ。中心からの双曲的距離が 10 であるためには、点は境界にどれほど近くなければならないか？

さらに学ぶために

- **Caroline Series、「Hyperbolic geometry」講義ノート**（ウォーリック大学、無料で公開）。ポアンカレ円板から始まる、わかりやすい入門講義。
- **Jeremy Gray, *Ideas of Space***（Oxford University Press）。ユークリッドからアインシュタイン（Einstein）に至る非ユークリッド幾何学の歴史。

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。第 6 章で非ユークリッド幾何学とメビウス変換を、美しい図とともに扱っている。

学んだこと

本章は、実数の答えを得るために虚数の段階を経なければならないことがあるという、カルダノ（Cardano）の不穏な発見から始まった。そして三つの問いを立てた。複素数（complex numbers）は実数の問題にどう役立つのか、単位根（roots of unity）の何が特別なのか、そして複素関数（complex function）はどのような姿をしているのか、である。本章の八つの問題が明らかにしたことをまとめておこう。

1. 複素数は実数の問題にどう役立つのか

実数についての事実が、複素平面（complex plane）を経由すると短く証明できるという場面に、何度も出会った。

- **角は積になる。** π に関するマチン（Machin）の公式は、$(5-\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i})$ が $239-\mathrm{i}$ の実数倍であるという主張にほかならず、整数の計算だけで確かめられる（Section 5.1）。
- **数え上げは平均になる。** 二項係数（binomial coefficient）を三つおきに足した和は、$(1+x)^n$ に1の3乗根を代入することで求まった（Section 5.2）。
- **三角関数の積は多項式の値になる。** 等間隔の角における余弦の積は、$z^{2n}+1$ を因数分解して $z=\mathrm{i}$ とおくことで得られた（Section 5.3）。
- **幾何は代数になる。** 距離は絶対値になり、正 n 角形の一つの頂点から引いた弦（chord）の長さの積は $|1+1+\cdots+1|=n$ となった（Section 5.4）。また回転は乗法になり、フェルマー点（Fermat point）の作図は恒等式 $1+\alpha^2=\alpha$ に帰着した（Section 5.6）。
- **ド・モアブルの定理から無理性を導く。** $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^k$ を展開して偶奇を論じることで、$\cos^{-1}\frac{1}{3}$ が有理数の度数ではないことが示された。これは、ヒルベルト（Hilbert）の第3問題に対するデーン（Dehn）の解決における鍵となる事実である（Section 5.5）。

2. 単位根の何が特別なのか

1の n 乗根は正 n 角形の頂点であり、最も単純な多項式 z^n-1 の根であり、乗法について群（group）をなす。この三つの事実を合わせると、単位根がいたるところに現れる理由が説明できる。円周上に均等に並んでいるので、その和は0になる。こ

れが Section 5.2 のフィルターを与え、一般には離散フーリエ変換（discrete Fourier transform）につながる。$z^n - 1$ の根であるので、単位根にわたる積は簡単な多項式の値になる（Section 5.3、Section 5.4）。そして乗法について閉じているので、単位根のべきは巡回する。$\cos^{-1}\frac{1}{3}$ のような角で成り立たないのは、まさにこの性質である（Section 5.5）。第 6 章では単位根が代数学の中心となり、ガロア理論（Galois theory）へと向かっていく。

3. 複素関数はどのような姿をしているのか

Section 5.7 では、e^w を帯状の領域を巻き取って平面にする写像として思い描いた。この写像は縦の直線を円に、横の直線を半直線に移し、無限回巻きつくので、対数は多価（many-valued）になる。また、この写像が角を保つこと、すなわち**等角**写像（conformal map）の最初の例であること、そしてメルカトル（Mercator）の海図の基礎にあることも見た。Section 5.8 では、奇妙に見えた不等式が双曲幾何学（hyperbolic geometry）における三角不等式（triangle inequality）であることがわかった。そこでは単位円板（unit disc）が無限に広い平面であり、直線は円弧であり、距離は相対論的な速度の合成則に従って合わさる。

4. 複素数の道具箱

手法	使った場面
乗法では偏角（argument）が足される	マチンの公式（5.1）
2π の倍数の確認	マチンの公式（5.1）
単位根にわたる平均	三つおきの係数（5.2）
根を用いて因数分解し、代入する	余弦の積（5.3）、弦（5.4）
0 になる因数で割る	5.3、5.4
ド・モアブルの定理（De Moivre's theorem）	倍角の公式（5.5）
偶奇と最小反例（minimal counterexample）	無理数の角（5.5）
乗法としての回転	正三角形（5.6）
格子の写像	指数関数による写像（5.7）
$\lvert a\rvert^2 = aa^*$	ポアンカレ円板（Poincaré disc）の不等式（5.8）

この先へ

- 単位根は第 6 章の原動力となる。Section 6.1 の円分多項式（cyclotomic polynomials）や、Section 6.2 のガウス（Gauss）による正 17 角形の作図もそこに含まれる。

- 双曲幾何学、tanh、相対性理論の間のつながりは Section 7.6 で展開される。
- マチンの公式に登場したガウス整数（Gaussian integers）は、Section 1.6 の主題であった。

大学入学前にさらに先へ進みたい人のために

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（『ヴィジュアル複素解析』）：これまでに書かれた複素数の本の中で最も美しい一冊であり、図が満載である。まず第 1 章から読むとよい。
- **Paul Nahin, *An Imaginary Tale***（『虚数の話』）：カルダノから現代物理学に至るまでの $\sqrt{-1}$ の歴史。
- **Liang-shin Hahn, *Complex Numbers and Geometry***（『複素数と幾何学』）：複素数を用いたユークリッド幾何学で、ちょうど本章と同じ水準である。
- **Hilary Priestley, *Introduction to Complex Analysis***（『複素解析入門』）：大学の講義を初めてのぞいてみるために。

カルダノは、自らの虚の量を、精妙であると同時に役に立たないものだと考えていた。それから 5 世紀が過ぎた今、虚数が現れない数学や物理学の分野を見つけるほうが難しい。本章の教訓はアダマール（Hadamard）の言葉に尽きる。実数についての問題が難しいときは、実数直線の外へ一歩踏み出してみよ。複素平面はより広く、そこでは複雑に見える多くのことが、実は単純であるとわかるのである。

「次の一歩」の解答

ここに載せるのは簡潔な答えとヒントであり、完全な解答ではない。結果と鍵となるステップを示してあるので、自分の答えを確かめるのに使ってほしい。見る前に、まずそれぞれの問題にしっかり取り組むこと。

5.1 マチンの公式

1. $(5-\mathrm{i})^2(1+\mathrm{i}) = (24-10\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 34+14\mathrm{i}$ であり、その偏角（argument）は $\tan^{-1}\frac{7}{17}$ である。この偏角は $-2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\frac{\pi}{4}$ にも等しい。

2. $(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i}) = 5+5\mathrm{i}$ であり、偏角は $\frac{\pi}{4}$ である。

3. $(3+\mathrm{i})^2(7+\mathrm{i}) = (8+6\mathrm{i})(7+\mathrm{i}) = 50+50\mathrm{i}$ である。

4. 級数は交代級数（alternating series）なので、誤差は最初に省いた項より小さい。$16\tan^{-1}\frac{1}{5}$ については、省いた項 $\frac{16}{(2N+1)5^{2N+1}}$ を 5×10^{-21} 未満にする必要があり、そのためには $N=14$ 項が必要である。$4\tan^{-1}\frac{1}{239}$ については 4 項で足りる。電卓を使うと、$16\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot5^3}+\frac{1}{5\cdot5^5}\right)-\frac{4}{239}\approx3.14162$ となる。

5.2 1 の累乗根によるフィルター

1. $(1+1)^n+(1-1)^n = 2\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\cdots\right)$ なので、$n\geq1$ のとき和は 2^{n-1} である。

2. 平均をとる前に ω^{-1} と ω^{-2} を掛ける：$\frac{1}{3}\left(2^n+\omega^{-1}(1+\omega)^n+\omega^{-2}(1+\omega^2)^n\right)$。$1+\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ なので、これは $\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$ に等しい。3 つ目の剰余（residue）からは $\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n+2)\pi}{3}\right)$ が得られ、3 つの余弦 $\cos x+\cos(x-\frac{2\pi}{3})+\cos(x+\frac{2\pi}{3})$ の和は 0 である。

3. $j=0,1,2,3$ について $(1+\mathrm{i}^j)^n$ の平均をとる：和は $\frac{1}{4}\left(2^n+(1+\mathrm{i})^n+0+(1-\mathrm{i})^n\right)$ であり、$(1\pm\mathrm{i})^n = 2^{n/2}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}n\pi/4}$ である。

4. 個数による場合：$\frac{1}{3}(2^{12}+2\cos4\pi) = 1366$。和による場合：$\prod(1+\omega^j)$ は 2、$1+\omega$、$1+\omega^2$ の因数をそれぞれ 4 つずつもち、$(1+\omega)(1+\omega^2)=1$ なので、これは 16 に等しい（ω^2 での積も同様である）。求める個数は $\frac{1}{3}(4096+16+16) = 1376$ である。

5.3 $z^{2n}+1$ の因数分解

1. 小問 (ii) で $n=7$ とすると $\cos^2\frac{\pi}{14}\cos^2\frac{3\pi}{14}\cos^2\frac{5\pi}{14}=\frac{7}{64}$ が得られ、3 つの余弦はすべて正である。2 つ目については、$c=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$ とおく。すると $8c\sin\frac{\pi}{7}=\sin\frac{8\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}$ なので、$c=-\frac{1}{8}$ である。また、$\cos\frac{4\pi}{7}=-\cos\frac{3\pi}{7}$ である。

2. $z=1$ では $2=\prod\bigl(2-2\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\bigr)=\prod 4\sin^2\frac{(2k-1)\pi}{4n}$ となるので、正弦の積（すべて正）は $\sqrt{2/4^n}=2^{\frac{1}{2}-n}$ である。

3. $z^6+1=(z^2-\sqrt{3}z+1)(z^2+1)(z^2+\sqrt{3}z+1)$ であり、外側の 2 つを掛けると z^4-z^2+1 になる。

4. $z^{2n}=1$ の根は ±1 と、$1\le k\le n-1$ に対する共役（conjugate）な組 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}k\pi/n}$ であるから、$\frac{z^{2n}-1}{z^2-1}=\prod_{k=1}^{n-1}\bigl(z^2-2z\cos\frac{k\pi}{n}+1\bigr)$ である。$z\to1$ とすると、左辺は n に収束し、右辺は $\prod 4\sin^2\frac{k\pi}{2n}$ となる。

5.4 正多角形の中の距離

1. 正方形：$\sqrt{2}\times2\times\sqrt{2}=4$。正三角形：$\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$。

2. $X_k=\omega^k$ とし、$P=r$ を正の実軸上にとる。すると $\prod|r-\omega^k|=|r^n-1|$ である。

3. 相加・相乗平均の不等式（AM–GM）により、平均は相乗平均 $n^{1/(n-1)}$ 以上である。$n=6$ のとき弦（chord）の長さは 1、$\sqrt{3}$、2、$\sqrt{3}$、1 であり、その平均は $\frac{4+2\sqrt{3}}{5}\approx1.493$ であるのに対し、$6^{1/5}\approx1.431$ である。

4. 小問 (ii) により、各頂点から出る $n-1$ 本の弦の長さの積は n である。n 個すべての頂点について掛け合わせると n^n となり、これは各弦を 2 回ずつ数えているので、$\binom{n}{2}$ 本の弦の長さの積は $n^{n/2}$ である。

5.5 有理角になりそうでならない角

1. 頂点を $(1,1,1)$、$(1,-1,-1)$、$(-1,1,-1)$、$(-1,-1,1)$ とし、中心を O とする。2 つの結合ベクトル（bond vector）の内積（dot product）は -1、長さは $\sqrt{3}$ なので、結合角は $\cos^{-1}(-\frac{1}{3})$ である。面の外向き法線（outward normal）は向かい合う頂点へのベクトルの符号を変えたものなので、外向き法線どうしのなす角も $\cos^{-1}(-\frac{1}{3})$ であり、面どうしのなす角はその補角（supplement）$\cos^{-1}\frac{1}{3}$ である。

2. $(4+3\mathrm{i})^k=a_k+\mathrm{i}b_k$ とおく。$4+3\mathrm{i}$ とその共役は $t^2-8t+25$ の根なので $b_{k+1}=8b_k-25b_{k-1}\equiv3b_k\pmod5$ であり、$b_1=3$ だから $b_k\equiv3^k\not\equiv0\pmod5$ である。したがって、どのべき乗も実数にならない。もしこの角が度数で有理数なら、その倍数のどれかが 180° の倍数となり、対応するべき乗は実数になるはずである。

3. $a = 2$ のとき $a^2 - 1 = 3$ は奇数なので、偶奇（parity）による議論は成り立たない。実際、$\cos^{-1}\frac{1}{2} = 60^\circ$ は有理数であり、$k = 3$ のとき正弦の括弧の中は $3 - \binom{3}{3} \cdot 3 = 0$ となる。

4. 0°、60°、90° であり、余弦はそれぞれ 1、$\frac{1}{2}$、0 である。ニーヴンの定理（Niven's theorem）によれば、180° の有理数倍における cos の値のうち有理数になるものは 0、$\pm\frac{1}{2}$、± 1 だけである。

5.6 フェルマー点

1. 内側に作ると、頂点は $A + (1 - \bar{\alpha})(B - A)$ などとなる。$p = 2$、$q = 1.4$、$r = 1.1$ の例では、C と新しい L を通る直線は O を通らず（判定条件 $\mathrm{Im}(\bar{C}L') = 0$ が成り立たない）、他の 2 本も同様である。

2. 正三角形の中心はその重心（centroid）である。$L = \alpha(p + q)$、$M = -(q + r)$、$N = -\alpha^2(p + r)$ とすると、ABL、BCM、CAN の中心 G_1、G_2、G_3 は $G_3 - G_1 = \alpha(G_2 - G_1)$ を満たし（$\alpha^2 = \alpha - 1$ を用いて展開する）、これは $G_1G_2G_3$ が正三角形であることを意味する。この例では、その 1 辺の長さは $\frac{p+q+r}{\sqrt{3}} \approx 2.598$ である。

3. $PA + PB + PC$ は A で約 5.68、B で 5.13、C で 4.89、重心で 4.54 であり、いずれも 4.5 を超える。

4. 正三角形である（向きはどちらでもよい）ことは、$z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0$ または $z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3 = 0$ が成り立つことと同値である。ここで $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ である。$\omega + \omega^2 = -1$ を用いると、2 つの左辺の積は $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_2z_3 - z_3z_1$ となる。

5.7 写像としての複素指数関数

1. k を整数として、$\mathrm{e}^w = -1$ となるのは $w = (2k + 1)\pi\mathrm{i}$ のとき、$\mathrm{e}^w = 1 + \mathrm{i}$ となるのは $w = \frac{1}{2}\ln 2 + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$ のときである。

2. 領域 $1 \le |z| \le \mathrm{e}$、$0 \le \arg z \le 1$（1 ラジアン）、すなわち円環（annulus）の一部である。下の辺は実軸上の $[1, \mathrm{e}]$ に、右の辺は半径 e の円弧に、上の辺は角 1 の方向に伸びる動径方向の線分に、左の辺は単位円の弧に移る。

3. 半直線は半径に沿っており、円の接線は半径に垂直である。これが直線 $u = c$ と $v = d$ の関係に一致するのは、e^w が角を保つ（その導関数が決して 0 にならない）からである。

4. $(x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$ である。直線 $x = c$ は $u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2}$ に、$y = d$ は $u = \frac{v^2}{4d^2} - d^2$ に移る。これらは左向きと右向きに開いた放物線（parabola）で、どちらも焦点（focus）は 0 である。両者を等しいとおくと $v^2 = 4c^2d^2$ となるので、

2 曲線は $u = c^2 - d^2$、$v = \pm 2cd$ の 2 点で交わる。$v = 2cd$（直線どうしが交わる点 $c + \mathrm{i}d$ の像）では傾き $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$ は $-\frac{d}{c}$ と $\frac{c}{d}$ であり、$v = -2cd$ では $\frac{d}{c}$ と $-\frac{c}{d}$ である。どちらの場合も積は -1 である。（2 つ目の交点は、1 本目の直線上の点 $c - \mathrm{i}d$ の像であり、2 本目の直線上の点 $-c + \mathrm{i}d$ の像でもある。2 乗する写像は z と $-z$ を同じ点に移すからである。）$c = 0$ のとき $x = 0$ の像は半直線 $u \le 0$、$v = 0$ であり、$d = 0$ のとき $y = 0$ の像は半直線 $u \ge 0$、$v = 0$ である。これらは放物線ではない。直線どうしが 0 以外の点で交わるときは、半直線はやはりもう一方の像と直角に交わるが、$c = d = 0$ のときは両方の像が実軸に沿って並ぶ。0 ではこの写像は角を 2 倍にする（その導関数 $2z$ がそこで 0 になる）ので、座標軸どうしのなす直角は平角になる。

5.8 円板に隠れた距離

1. 両辺とも $\frac{1}{5/4} = \frac{4}{5}$ に等しい。すると $d(z,0) = d(0,w) = 2\tanh^{-1}\frac{1}{2} = \ln 3$、$d(z,w) = 2\tanh^{-1}\frac{4}{5} = \ln 9$ なので、等号が成り立つ。0 は z から w への双曲的な線分（hyperbolic line segment、ここでは直径）上にある。

2. 小問 (i) と (ii) より、$E > 0$ のとき不等式は $|z| + |w| \le 1 + |zw|$、すなわち $(1 - |z|)(1 - |w|) \ge 0$ と同値である。混合の場合にはこれは成り立たない。例えば $z = \frac{1}{2}$、$w = 3$ とすると、左辺は $\frac{5/2}{1/2} = 5$、右辺は $\frac{7/2}{5/2} = \frac{7}{5}$ である。

3. $|z| = 1$ ならば $|1 - a^* z| = |\bar{z} - a^*| = |z - a|$ である。直接計算すると $f(z) - f(w) = \frac{(1-|a|^2)(z-w)}{(1-a^*z)(1-a^*w)}$、$1 - f(z)f(w)^* = \frac{(1-|a|^2)(1-zw^*)}{(1-a^*z)(1-aw^*)}$ であり、割って絶対値をとると $\rho(f(z), f(w)) = \rho(z,w)$ が得られる。

4. $d(0,r) = 2\tanh^{-1} r = \ln\frac{1+r}{1-r}$ であり、$r \to 1$ のとき ∞ に発散する。距離を 10 にするには $r = \tanh 5 \approx 0.99991$ が必要であり、これは縁から約 9×10^{-5} 以内の位置である。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

全 13 章のうちの第 5 章。 本書全体、すべての章、すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.