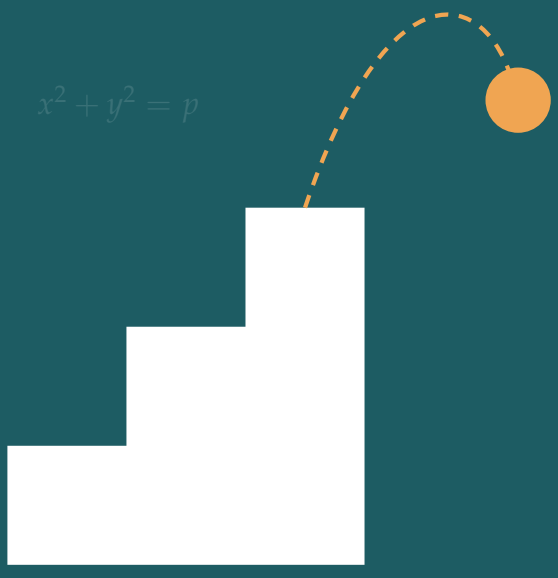
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

第 4 章

微積分をきちんと



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

第 4 章

微積分をきちんと

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

第 4 章：微積分をきちんと

これは *Beyond STEP* 全 13 章のうちの第 4 章である。本書全体、各章単独の PDF、各節の印刷用ワークシート、そしてすべての STEP の問題の詳しい解答は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、`github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty` への issue として歓迎する。

章

4

きちんと学ぶ微分積分学

積分は解析学・幾何学・数論が出会う場所であり、数学で最も美しい公式のいくつかが住む場所である。

この章の内容

4.1	積分とは何か？	STEP III 1989
4.2	積分から三角関数を構成する	STEP III 2017
4.3	22/7 は π より大きい	STEP I 1997
4.4	ウォリス、ベータ、そして二分の一の階乗	STEP II 1995
4.5	2 年生の夢	STEP III 2009
4.6	公式で表せない積分	STEP III 2016
4.7	変分法	STEP III 2014
4.8	球形のパンを切る	STEP I 2001
4.9	ホールディッチの定理	STEP III 2011
A	演習問題の答え	p. 67

原始関数にとどまらない積分

> 導関数をもたない関数という嘆かわしい災いから、私は恐怖と戦慄をもって目を背ける。
>
> — シャルル・エルミート（Charles Hermite）、1893 年の書簡より

高校生に積分（integration）とは何かと尋ねれば、おそらく「微分（differentiation）の逆」という答えが返ってくるだろう。これは**微分積分学の基本定理**（fundamental theorem of calculus）と呼ばれるすばらしい事実であり、学校で出会う積分の大半を型どおりの計算にしてくれる。しかしこれは積分についての定理であって、積分の定義ではない。そして、積分を面白くしているものの大部分を覆い隠してしまっている。

積分は微分よりもおよそ二千年古い。アルキメデス（Archimedes）は、導関数を考えた者がまだ誰もいなかったはるか昔に、薄い切片を足し合わせることで放物線の弓形の面積や球の表面積を求めた。また、積分は微分には届かない場所にまで及ぶ。まともな関数であれば機械的な規則で微分できるが、ほとんどの関数は式の形で積分することが**できない**。すると自然な疑問が生じる。どのようなときに積分でき、できないときにはどうすればよいのか。積分は新しい関数を定義し、数どうしの不等式を証明し、ほかに記述のしようがない面積や体積を計算し、無限和や無限積（infinite product）の正確な値を与える。本章はこれらすべてを扱う。

積分とは本当は何か

本章は出発点、すなわち定義から始める（Section 4.1）。積分とは薄い長方形の和の極限である。原始関数（antiderivative）を使わずにこの定義から $\int_0^a x^5\,\mathrm{d}x$ を計算するだけでもかなりの仕事であり、それによって基本定理のありがたみがわかる。精密な定義が得られると、精密な問いが生まれる。どのような関数が可積分（integrable）なのか。その答えと、そこから生じた問題が、20 世紀初頭にルベーグ（Lebesgue）の積分論を生み、これが現代の確率論の基礎となった。

ものを証明する積分

本章で最も驚くべき結果のいくつかは、面積とは何の関係もなさそうな事実を積分を使って証明するものである。正の関数のある一つの積分が $\frac{22}{7} - \pi$ に等しく、これにより $\pi < \frac{22}{7}$ が一行で証明される（Section 4.3）。$\sin t$ のべきからは、π についてのウォ

リス（Wallis）の無限積と、$\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ という値が導かれる（Section 4.4）。x^x の積分は和 $\sum(-1)^{n+1}n^{-n}$ に姿を変える（Section 4.5）。そしてただ一つの積分 $\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ を用いて、三角法を一から組み立てることができる（Section 4.2）。

大学で出会うもの

大学 1 年の**解析学**（Analysis）の講義では、積分の定義から出発して微分積分学の基本定理をきちんと証明する。その後の講義はいくつかの方向へ発展していく。**測度論**（measure theory）と**ルベーグ積分**（Lebesgue integral）は、積分と極限の相性をよくし、確率論の土台となる。**ベクトル解析**（vector calculus）では曲線・曲面・立体上で積分を行い、グリーン（Green）の定理やストークス（Stokes）の定理がそれらを結びつける（Section 4.9 でその一端を味わえる）。**複素解析**（complex analysis）は、複素平面を経由する回り道によって実積分を計算する。**変分法**（calculus of variations）は、どの関数が積分の値を最小にするかを問い（Section 4.7）、物理学における最小作用の原理（principle of least action）へとつながる。そして**微分代数**（differential algebra）は、そもそもどの積分が式で表せるのかを説明する（Section 4.6）。

本章を貫く問い

三つの大きな問い

1. **積分とは何か。また、どのような関数が積分をもつのか。**和の極限としての定義は、原始関数とどのように結びつくのか。
2. **積分によって何が証明できるのか。**面積から、π について、階乗について、無限和について、どのようにして何かがわかるのか。
3. **式が存在しないとき、何ができるのか。**積分が式で表せないことをどのようにして知り、それでも何を計算できるのか。

本章で扱う考え方

§	主題	考え方
4.1	積分の定義	下和と上和（lower and upper sums）、望遠鏡和（telescoping）
4.2	$\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ から作る三角法	積分を保つ置換
4.3	$\frac{22}{7} > \pi$	正の量の積分として表した不等式
4.4	ウォリスと $\left(\frac{1}{2}\right)!$	漸化式（reduction formula）、不変量（invariant）、はさみうち（squeeze）
4.5	$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x$	級数展開（series expansion）と項別積分（term-by-term integration）
4.6	式で表せない積分	多項式の代数による不可能性の証明
4.7	変分法	積分の中での平方完成（completing the square）
4.8	アルキメデスの帽子箱定理（hat-box theorem）	被積分関数（integrand）を簡単にすると幾何が見えてくる
4.9	Holditch の定理	境界上の積分による面積、消去

本章の読み方

いくつかの節には、重いが型どおりの計算が含まれている。多項式の割り算、部分積分（integration by parts）、積の展開などである。本文を読む前に、これらを紙と鉛筆で自分の手で実行してみること。そのうえで、計算をうまくいかせた考え方、つまり不変量、対称性、打ち消し合いを探してほしい。計算は試験官が確かめるものであり、考え方はあなたが覚えていて再び使うものである。

4.1 積分とは何か？

問題

STEP III 1989、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/89-s3-q10`

導入

読者は何年も積分を計算してきたはずである。$\int_0^a x^5\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}a^6$ であることも、「積分は微分の逆である」から知っている。しかしそれは定理であって、定義ではない。では、積分（integral）とは**そもそも**何なのか。

正直に答えれば、積分とは面積であり、細い長方形の面積の和の極限（limit）として定義されるものである。この問題では、その定義だけから積分を計算することが求められる。原始関数（antiderivative）も微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）も使わず、長方形を足し合わせて極限をとることしか許されない。これは予想以上に難しい。そしてまさにそのことが、この計算を簡単にしてくれる微分積分学の基本定理がいかに驚くべき結果であるかを物語っている。

取りかかる前に

考えてみよう 小問 (iii) の二つの和は、幅 $\frac{a}{n}$ の長方形の面積の和である。増加関数（increasing function）f について、どちらの和が曲線の下の面積を過小に見積もり、どちらが過大に見積もるか。

一つ目の和は、各帯の**左端** $x = \frac{ra}{n}$（$r = 0, \ldots, n-1$）での高さを用いている。増加関数ではこれが帯の中で最も低い点なので、長方形は曲線の下に収まる。これが**下和**（lower sum）である。二つ目の和は右端 $r = 1, \ldots, n$ を用いるので、長方形は曲線の上にはみ出す。これが**上和**（upper sum）である（図 4.1.1）。定義によれば、帯を細くしていったときに両方の和が同じ極限に近づくならば、積分が存在する。

$f(x) = x^5$ の場合、どちらの和にも $\sum r^5$ が現れる。小問 (i) と (ii) は、この和を上と下から評価するものである。

順を追って解く

段階 1　望遠鏡和

考えてみよう　連続する六つの整数の積を $P(r) = r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)$ とおく。$P(r) - P(r-1)$ はどうなるか。

$P(r)$ と $P(r-1) = (r-1)r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)$ は五つの因数 $r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)$ を共有しているので、

$$\begin{aligned} P(r) - P(r-1) &= r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)[(r+5) - (r-1)] \\ &= 6\,r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4). \end{aligned}$$

$r = 1$ から n まで和をとると、右辺は隣り合う項が打ち消し合う望遠鏡和（telescoping sum）となり、$P(n) - P(0) = P(n)$ に帰着する。よって

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) = \tfrac{1}{6}P(n) = \tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5).$$

■

すべての $r \geq 1$ について $r^5 < r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)$ であるから、不等式（inequality）が従う。 ■

段階 2　下からの評価

手を止めて、やってみよう　段階 1 の方法を、下がっていく連続する五つの整数の積 $r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)$ に応用せよ。$r = 0$ から $n-1$ までの和を求め、r^5 と比較せよ。

$Q(r) = (r-5)(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r$ とおく。すると $Q(r+1) - Q(r) = (r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r[(r+1) - (r-5)] = 6\,(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r$ である。$r = 0$ から $n-1$ まで和をとると、打ち消し合って $Q(n) - Q(0) = Q(n)$ となるので、

$$\sum_{r=0}^{n-1} (r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r = \tfrac{1}{6}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n.$$

ここで項ごとに比較する。$r = 0$ のときは両辺とも 0 である。$1 \leq r \leq 4$ のときは積が 0 の因数を含むが、$r^5 > 0$ である。$r \geq 5$ のときはすべての因数が正で r 以下であり、そ

のうちいくつかは真に小さいので、積は r^5 より小さい。$n>1$ であるから和には $r=1$ の項が含まれ、そこでは不等号が厳密に成り立つ。よって

$$\sum_{r=0}^{n-1} r^5 > \tfrac{1}{6}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n. \qquad \blacksquare$$

段階 3 積分

> **考えてみよう** $\mathrm{f}(x)=x^5$ に対する下和と上和を $\sum r^5$ を用いて表せ。分母には n の何乗が現れるか。

$\mathrm{f}(x)=x^5$ のとき、

$$L_n=\sum_{r=0}^{n-1}\frac{a}{n}\left(\frac{ra}{n}\right)^5=\frac{a^6}{n^6}\sum_{r=0}^{n-1}r^5, \qquad U_n=\frac{a^6}{n^6}\sum_{r=1}^{n}r^5.$$

小問 (i) と (ii)、および $L_n<U_n$ より、

$$\frac{a^6}{6}\cdot\frac{(n-5)(n-4)\cdots n}{n^6} < L_n < U_n < \frac{a^6}{6}\cdot\frac{n(n+1)\cdots(n+5)}{n^6}.$$

二つの分数はいずれも、$\frac{n-3}{n}=1-\frac{3}{n}$ や $\frac{n+3}{n}=1+\frac{3}{n}$ のような六つの因数の積であり、各因数は 1 に収束（converge）する。よって外側の評価はどちらも $\frac{a^6}{6}$ に収束し、はさみうちの原理（squeeze theorem）により L_n と U_n も同じ値に収束する。両方の極限が存在して一致するので、定義により

$$\int_0^a x^5\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{6}a^6. \qquad \blacksquare$$

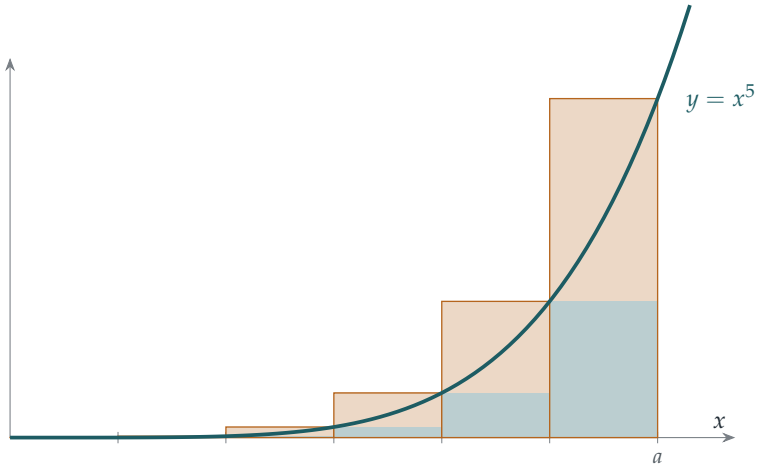


図 4.1.1 $[0,a]$ 上の x^5 に対する、$n=6$ 本の帯による下和と上和。下和は青緑色の部分（曲線の下にある長方形）の面積であり、上和はそれに琥珀色の部分を加えたものである。両者の差はちょうど最後の最も高い長方形の面積 $\frac{a}{n}\mathrm{f}(a)$ に等しく、n が大きくなると 0 に近づく。

振り返り

- **またしても望遠鏡和。**連続する整数の積の和は、第 2 章の和や積とまったく同じように打ち消し合って消えた。
- **評価してから、はさみうち。**$\sum r^5$ の正確な値（$\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$ である）は一度も求めなかった。両側からの評価だけで十分であった。
- **定義がすべてを担う。**原始関数はどこにも現れなかった。すべては、和の極限としての積分の定義から導かれた。

背後にある数学

リーマンの定義

細い帯を足し合わせて面積を求めるという発想は、アルキメデス（Archimedes）にまでさかのぼる。彼は紀元前 250 年ごろ、まさにこの議論の一種によって放物線の下の面積を求めた。ニュートン（Newton）とライプニッツ（Leibniz）は積分を微分の逆として捉え直し、その後一世紀半にわたって、ほとんどの人はそのように積分を考えていた。1854 年、ベルンハルト・リーマン（Bernhard Riemann）は、今日でも大学の講義が出発点とする定義を与えた。$[a,b]$ を小さな区間に分割し、（幅）×（その区間内のどこかでの f の高さ）の和をつくり、区間を細かくしていったときにそのような和がすべて一つの極限に近づくならば、f は可積分（integrable）であるという。この問題での形、すなわち等幅の帯と左右の端点を用いるものは、増加関数に対して有効な特別な場合である。一般の場合は、ジャン＝ガストン・ダルブー（Jean-Gaston Darboux）の「上和と下和」によってすっきりと扱える。

すべての関数が積分をもつわけではない

厳密な定義があれば、どのような関数が可積分であるかを問うことができる。閉区間上の連続関数（continuous function）はすべて可積分であり、増加関数もすべて可積分である。しかし、ディリクレ（Dirichlet）の関数、すなわち x が有理数（rational number）ならば $f(x)=1$、無理数（irrational number）ならば 0 とする関数を考えてみよう。どれほど細い帯にも有理数と無理数の両方が含まれるので、上和はつねに 1、下和はつねに 0 となる。両者は決して一致せず、$\int_0^1 f$ はリーマンの意味では存在しない。1902 年、アンリ・ルベーグ（Henri Lebesgue）は、この関数も扱える（そのルベーグ積分は 0 である）うえに、極限操作に対してはるかに扱いやすい、より強力な積分を考案した。ルベーグ積分（Lebesgue integral）は現代の確率論（probability theory）

の基礎であり、大学の 2、3 年次で出会うことになる。

離散的な微分積分

段階 1 の望遠鏡和は、姿を変えた微分積分である。「上昇階乗」（rising factorial）$r(r+1)\cdots(r+k-1)$ は、和をとる操作に対して、x^k が積分に対して振る舞うのとまったく同じように振る舞う。和をとると因数の個数が一つ増え、新しい因数の個数で割られる。これは $\int x^k\,\mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1}$ とちょうど対応している。和と積分、差分と導関数の間のこの類似は**差分法**（calculus of finite differences）と呼ばれ、和を計算するための強力な道具である。

思考のスキル

> **定義から出発する**
>
> 「定義を用いて」何かを証明せよと言われたら、定義以外は何も使わないこと。証明しようとしている事柄に依存する定理も、使い慣れた近道も使わない。
>
> これは意外なほど難しく、近道にどれほどの価値があるかをはっきりと教えてくれる。大学では、どの講義も最初の数週間はこのように進む。まず定義があり、次に、定義から直接議論しなくて済むようにしてくれる定理が続くのである。

次の一歩

1. **積分としての極限。** STEP III 1999、問 3（`step.maths.org/questions/99-s3-q3`）に挑戦せよ。この問題では和の極限を積分に書き換える。それぞれの和について、曲線の下にある長方形を見つけよ。

2. **アルキメデスの放物線。** $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ と小問 (iii) の定義を用いて、$\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}a^3$ を証明せよ。

3. **上昇階乗。** すべての正の整数 k に対して $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r(r+1)\cdots(r+k-1) = \frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{k+1}$ が成り立つことを示せ。

4. **正確な和。** 恒等式 $r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) = r^5 + 10r^4 + 35r^3 + 50r^2 + 24r$ と、$k \le 4$ に対する $\sum r^k$ の既知の公式を用いて、$\sum_{r=1}^{n} r^5$ を正確に求めよ。

さらに学ぶために

- **David Bressoud, *A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integration***（Cambridge University Press）。リーマン積分からルベーグ積分に至る物語を、各段階を必然とした問題を通して語る。
- **Michael Spivak, *Calculus***（Cambridge University Press）。第 13 章では、ここでの方法とまったく同じように、上和と下和によって積分を定義している。
- **Graham, Knuth & Patashnik, *Concrete Mathematics***（Addison-Wesley）。第 2 章では、上昇階乗と下降階乗（falling factorial）を用いて差分法を展開している。

4.2 積分から三角関数を構成する

問題

STEP III 2017、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/17-s3-q6`

導入

π とは何だろうか。学校では、円周の長さと直径の比が π であり、sin と cos は三角形によって定義される。幾何学としてはそれで十分であるが、厄介な疑問が残る。曲線に沿った「長さ」とは正確には何なのか。なぜ $\sin x$ はあのようなマクローリン級数（Maclaurin series）をもつのか。加法定理（addition formula）が、図に描ける角だけでなくすべての角で成り立つことを、どうやって知るのか。

この問題は、まったく異なる入り口を示してくれる。三角形も円も忘れてしまおう。出発点はただ一つの積分 $\mathrm{T}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ であり、これに必要なのは Section 4.1 で扱った積分の定義だけである。π を $2\mathrm{T}_\infty$ と定義する。そして置換（substitution）だけを用いて、$\mathrm{T}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ と $\mathrm{T}(\sqrt{2}-1) = \frac{\pi}{8}$ を証明する。これらは、$\arctan\sqrt{3} = 60^\circ$ および $\tan 22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{2}-1$ として知られている事実である。三角法を無から作り直すのである。

取りかかる前に

実は $\mathrm{T}(x) = \arctan x$ であり、$\mathrm{T}_\infty = \frac{\pi}{2}$ であることを、読者はひそかに知っている。問題はこの知識を使うことを禁じており、そこにこそ意味がある。すべてを積分から導かなければならないのである。とはいえ、ひそかな知識は有用な道しるべになる。

? **考えてみよう** 小問 (i) と (ii) は、それぞれどの三角関数の恒等式（identity）に対応しているだろうか。（$\arctan x + \arctan\frac{1}{x}$ と、$\tan(A+B)$ の公式を考えてみよ。）

小問 (i) は $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ である。小問 (ii) は加法定理 $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ が姿を変えたものである。すなわち、$u = \tan A$、$a = \tan B$ とおけば $v = \tan(A+B)$ となる。この問題では、これらの恒等式を幾何学を一切使わずに積分から証明する。

順を追って解く

段階 1　反転 $u \mapsto 1/u$

$\mathrm{T}(x)$ において $u = 1/w$ と置換する。すると $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}w/w^2$ であり、$\dfrac{1}{1+u^2} = \dfrac{w^2}{w^2+1}$ であるから、

$$\mathrm{T}(x) = \int_{\infty}^{1/x} \frac{w^2}{w^2+1} \cdot \left(-\frac{1}{w^2}\right) \mathrm{d}w = \int_{1/x}^{\infty} \frac{\mathrm{d}w}{1+w^2} = \mathrm{T}_{\infty} - \mathrm{T}(x^{-1}). \qquad \blacksquare$$

言い換えれば、$\frac{1}{1+u^2}$ のグラフの下の 0 から x までの面積は、$\frac{1}{x}$ から ∞ までの面積に等しい（図 4.2.1）。

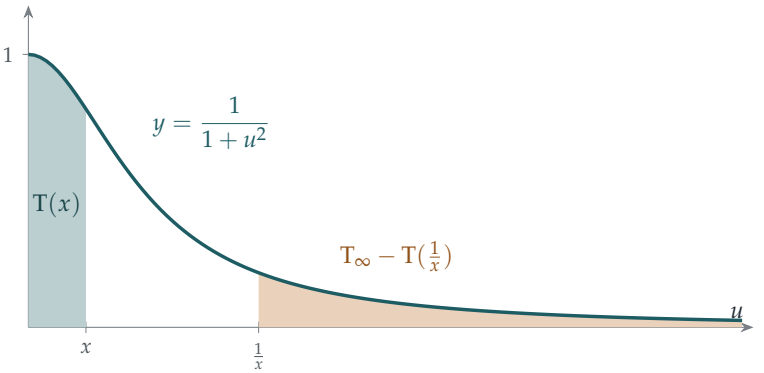


図 4.2.1　置換 $u = 1/w$ により、$\frac{1}{1+u^2}$ のグラフの下にある二つの影をつけた部分の面積が等しいことがわかる。すなわち、0 から x までの部分（青緑）と、$\frac{1}{x}$ から先へ無限に延びる部分（琥珀色）である。ここでは $x = \frac{1}{2}$ としている。

段階 2　加法の置換

考えてみよう　$v = \dfrac{u+a}{1-au}$ を商の微分法（quotient rule）で微分せよ。次に $1+v^2$ を一つの分数として計算し、両者を比べよ。

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{(1-au)+a(u+a)}{(1-au)^2} = \frac{1+a^2}{(1-au)^2},$$
$$1+v^2 = \frac{(1-au)^2+(u+a)^2}{(1-au)^2} = \frac{(1+a^2)(1+u^2)}{(1-au)^2}.$$

割り算をすると、$\dfrac{1+v^2}{1+u^2} = \dfrac{1+a^2}{(1-au)^2} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$ である。 ■

考えてみよう これは $\dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \dfrac{\mathrm{d}v}{1+v^2}$ ということである。つまり、置換 $u \mapsto v$ は被積分関数（integrand）をまったく変えない。では、$\mathrm{T}(x)$ の積分区間の端はどうなるだろうか。

u が 0 から x まで動くとき（$x < \frac{1}{a}$ とする。このとき区間全体で $1-au>0$ であり、v は連続かつ増加する）、v は a から $\frac{x+a}{1-ax}$ まで動く。したがって

$$\mathrm{T}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_a^{(x+a)/(1-ax)} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = \mathrm{T}\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) - \mathrm{T}(a). \quad ■$$

段階 3 さらに二つの恒等式

小問 (i) と二回組み合わせると、

$$\mathrm{T}(x^{-1}) = \mathrm{T}_\infty - \mathrm{T}(x) = \mathrm{T}_\infty - \mathrm{T}\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) + \mathrm{T}(a) = 2\mathrm{T}_\infty - \mathrm{T}\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) - \mathrm{T}(a^{-1}). \quad ■$$

ここで文字を置き換える。$y = 1/x$、$b = 1/a$ とおく。条件 $x < 1/a$ は $1/y < b$、すなわち $y > 1/b$ となり、

$$\frac{x+a}{1-ax} = \frac{1/y+1/b}{1-1/(by)} = \frac{b+y}{by-1}.$$

よって $\mathrm{T}(y) = 2\mathrm{T}_\infty - \mathrm{T}\left(\dfrac{y+b}{by-1}\right) - \mathrm{T}(b)$ である。 ■

段階 4 特殊値

手を止めて、やってみよう 最後の恒等式において、引数 $\frac{y+b}{by-1}$ が y 自身に等しくなるように y と b を選べ。何が得られるだろうか。

$y = b = \sqrt{3}$ とする。このとき $y > \frac{1}{b}$ であり、$\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{3-1} = \sqrt{3}$ である。恒等式は $\mathrm{T}(\sqrt{3}) = 2\mathrm{T}_\infty - 2\mathrm{T}(\sqrt{3})$ となるので、

$$\mathrm{T}(\sqrt{3}) = \tfrac{2}{3}\mathrm{T}_\infty. \quad ■$$

考えてみよう $\sqrt{2}-1$ については、加法の恒等式で $x=a=\sqrt{2}-1$ としてみよ。$\frac{2x}{1-x^2}$ はいくつになるか。また、$\mathrm{T}(1)$ はいくつか。

$x=a=\sqrt{2}-1$ とすると（$x^2=3-2\sqrt{2}<1$ であるから $x<\frac{1}{a}$ が成り立つ）、加法の恒等式により $2\mathrm{T}(x)=\mathrm{T}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ となる。ここで $1-x^2=2\sqrt{2}-2=2(\sqrt{2}-1)=2x$ であるから $\frac{2x}{1-x^2}=1$ であり、$2\mathrm{T}(\sqrt{2}-1)=\mathrm{T}(1)$ を得る。最後に、小問 (i) で $x=1$ とすると $\mathrm{T}(1)=\mathrm{T}_\infty-\mathrm{T}(1)$ となるから、$\mathrm{T}(1)=\frac{1}{2}\mathrm{T}_\infty$ である。したがって

$$\mathrm{T}(\sqrt{2}-1)=\tfrac{1}{4}\mathrm{T}_\infty. \qquad \blacksquare$$

振り返り

- **被積分関数を保つ置換。**鍵となる二つのステップでは、どちらも $\frac{du}{1+u^2}$ を変えない置換を用いた。動いたのは積分区間の端だけである。積分のこのような「対称性」は強力な道具である。
- **不動点。**$\mathrm{T}(\sqrt{3})$ の値は、ある式がそれ自身に等しくなるような数を選ぶことで得られた。こうして恒等式が方程式に変わったのである。
- **定義は解析学から得られる。**三角形は一度も使わなかったが、それでも $\frac{\pi}{3}$ と $\frac{\pi}{8}$ を導き出せた（π は $2\mathrm{T}_\infty$ として定義した）。

背後にある数学

初等関数を構成する

厳密な解析学の講義では、関数 exp、sin、cos、ln の存在を単に仮定することはできない。それらは**構成**されなければならず、その性質も証明されなければならない。標準的な方法は三つある。冪級数（power series）によって定義する方法（$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots$）。演習問題にある 1986 年の見本問題のように、微分方程式（differential equation）の解として定義する方法（$\mathrm{f}'=\mathrm{f}$、$\mathrm{f}(0)=1$ によって exp が定まる）。あるいは、ここで行ったように、逆関数（inverse function）を積分で定義する方法である。すなわち $\ln x=\int_1^x\frac{du}{u}$、$\arctan x=\int_0^x\frac{du}{1+u^2}$ とし、そのうえで $\pi=2\int_0^\infty\frac{du}{1+u^2}$ と定義する。どの方法にもそれぞれの長所があり、これらがすべて同じ関数を与えることを証明するのは、やりがいのある演習である。Section 3.8 の関数方程式（functional equation）による方法と比べてみよ。

円を越えて：楕円積分

積分による方法は、三角形による方法では不可能な形で一般化できる。1718 年、ジュリオ・ファニャーノ（Giulio Fagnano）は 8 の字形の曲線であるレムニスケート（lemniscate）の弧長（arc length）を研究した。これは $\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}}$ に帰着する。ファニャーノは、ちょうど我々の置換が T を 2 倍にしたように、弧を 2 倍にする置換を発見した。1751 年にファニャーノの研究を読んだオイラー（Euler）は完全な加法定理を見いだし、これがやがてアーベル（Abel）とヤコビ（Jacobi）を経て、楕円関数（elliptic function）の理論へとつながった。楕円関数とはこのような積分の逆関数であり、sin と cos が円に対してもつ役割を、レムニスケートに対して果たすものである。同じ積分には、ガウス（Gauss）の算術幾何平均（AGM）に関する研究（Section 2.6）でも出会った。楕円関数は今日、数論（number theory）の中心にある。Section 1.9 の楕円曲線（elliptic curve）は、その幾何学的な影である。

π を計算する

加法の恒等式は、π を計算するための最も有名な公式群の基礎でもある。これを繰り返し適用すると、たとえば $\mathrm{T}(1) = 4\mathrm{T}(\frac{1}{5}) - \mathrm{T}(\frac{1}{239})$ が示される。これが 1706 年のマチン（Machin）の公式である。級数 $\mathrm{T}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ と組み合わせることで、この公式は π の 100 桁を与え、その後 2 世紀半にわたって最良の方法であり続けた。これが Section 5.1 の主題である。

思考のスキル

積分の対称性

被積分関数を変えない置換を探せ。それらは、その積分が定める関数についての恒等式に変わる。

ここでは $u \mapsto 1/u$ と $u \mapsto \frac{u+a}{1-au}$ が $\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ を保ち、それぞれ反転の公式と加法定理を与える。同じ考え方をほかの積分に適用したものが、特殊関数（special functions）の理論の根底にある。

次の一歩

1 **指数関数と余弦関数。** STEP II Specimen paper、問 6（`step.maths.org/questions/spec-s2-q6`）に挑戦せよ。この問題は、指数関数と余弦関数の加法定理を、それ

らの微分方程式だけから導く。（**ヒント**：余弦関数については、0 になるはずの二つの組合せを見つけ、それらの平方の和が一定であることを示せ。）

2 **逆正弦関数。**STEP III 2007、問 7（`step.maths.org/questions/07-s3-q7`）に挑戦せよ。この問題は、逆正弦関数（inverse sine）をこの節の積分と同じように扱い、置換によって両者を結びつける。

3 **初期のマチン型公式。**加法の恒等式を用いて、$\mathrm{T}(\frac{1}{2}) + \mathrm{T}(\frac{1}{3}) = \mathrm{T}(1) = \frac{1}{2}\mathrm{T}_\infty$ を示せ。

4 T_∞ **は有限である。**すべての $x \geq 1$ に対して $\mathrm{T}(x) \leq 1 + \int_1^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2} < 2$ であることを示し、$0 < x < 1$ に対しても $\mathrm{T}(x) < 2$ となる理由を説明せよ。さらに、単調収束定理（monotone convergence theorem）（Section 2.2）から T_∞ が存在することを導け。

さらに学ぶために

- **Tom Körner, *Calculus for the Ambitious***（Cambridge University Press）。初等関数を厳密に構成し、さまざまな方法について論じている。
- **Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis***（McGraw-Hill）。邦訳『現代解析学』。有名な「baby Rudin」である。第 8 章の序論では、冪級数から exp、sin、cos をわずか数ページで見事に構成している。上級向け。
- **Victor Prasolov & Yuri Solovyev, *Elliptic Functions and Elliptic Integrals***（American Mathematical Society）。レムニスケートがどこへつながっていくのかを知りたい人に。上級向け。

4.3 22/7 は π より大きい

問題

STEP I 1997、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/97-s1-q6`

導入

何世代にもわたって、生徒たちは π は「だいたい $\frac{22}{7}$」だと教わってきた。これは非常によい近似（approximation）である。実際、$\frac{22}{7} = 3.142857\ldots$、$\pi = 3.141592\ldots$ である。では、$\frac{22}{7}$ は大きすぎるのか、それとも小さすぎるのか。そして、誰かが計算してくれた π の数字の並びを単に調べるのではなく、それを**証明**できるだろうか。

この問題は、数学全体の中でも最も美しい証明の一つを与えてくれる。正の関数の積分はただ一つで、それゆえ正でなければならないが、その値がちょうど $\frac{22}{7} - \pi$ に等しいことがわかるのである。被積分関数（integrand）が正であるから積分も正であり、したがって $\frac{22}{7} > \pi$ となる。証明全体はわずか数行に収まり、あまりに鮮やかなので、数学 T シャツのパズルとして登場するほどである。

取りかかる前に

考えてみよう なぜ $\int_0^1 \frac{\text{多項式}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ から π が出てくるのだろうか。この形の簡単な積分のうち、それ単独で π を与えるものはどれか。

$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ である。多項式（polynomial）を $1+x^2$ で割ると、多項式の商（積分すると有理数（rational number）になる）と、定数の余り（remainder）を $1+x^2$ で割ったもの（積分すると π の有理数倍になる）の和が得られる。問題の最初の部分は、まさにこの割り算を行うことを求めている。

順を追って解く

段階 1　多項式の割り算

まず展開する。$(1-x)^4 = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4$ であるから、

$$x^4(1-x)^4 = x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4.$$

> **考えてみよう**　筆算による割り算か係数比較（comparing coefficients）によって、x^2+1 で割れ。余りは何か。

$(a_6x^6 + \cdots + a_0)(x^2+1) + b$ の係数を高次の項から比較すると、$a_6 = 1$、$a_5 = -4$、$a_4 + a_6 = 6$ より $a_4 = 5$、$a_3 + a_5 = -4$ より $a_3 = 0$、$a_2 + a_4 = 1$ より $a_2 = -4$、$a_1 + a_3 = 0$ より $a_1 = 0$、$a_0 + a_2 = 0$ より $a_0 = 4$、そして最後に $a_1 = 0$（x の係数）と $a_0 + b = 0$ より $b = -4$ となる。すなわち、

$$x^4(1-x)^4 = (x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4)(x^2+1) - 4.$$

段階 2　積分

$1 + x^2$ で割ると、

$$\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2},$$

であるから、

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{7} - \frac{4}{6} + \frac{5}{5} - \frac{4}{3} + 4 - 4\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 4 - \pi.$$

ここで $-\frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -2$ であるから、有理数の部分は $\frac{1}{7} + 3 = \frac{22}{7}$ となり、積分の値は $\frac{22}{7} - \pi$ である。 ■

段階 3　積分の評価

> **考えてみよう**　被積分関数は $(0,1)$ で正であるから、直ちに $\frac{22}{7} > \pi$ が得られる。π の下界（lower bound）を得るには、積分の**上界**が必要である。$[0,1]$ において $\frac{1}{1+x^2}$ はどこまで大きくなりうるか。

$[0,1]$ において $1 \le 1 + x^2 \le 2$ であるから、

$$\tfrac{1}{2}x^4(1-x)^4 \le \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} \le x^4(1-x)^4,$$

であり、端点を除いて狭義の不等号が成り立つ。

手を止めて、やってみよう $\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x$ を計算し、証明を完成させよ。

展開式を項別に積分すると、

$$\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9} - \frac{4}{8} + \frac{6}{7} - \frac{4}{6} + \frac{1}{5} = \frac{1}{630}.$$

（公分母 2520 で通分すると、$280 - 1260 + 2160 - 1680 + 504 = 4$ であり、$\frac{4}{2520} = \frac{1}{630}$ となる。）したがって、

$$0 < \frac{22}{7} - \pi < \frac{1}{630},$$

すなわち $\frac{22}{7} > \pi > \frac{22}{7} - \frac{1}{630}$ である。 ■

数値的には $\frac{22}{7} - \frac{1}{630} = 3.14127\ldots$ であるから、$3.1412 < \pi < 3.1429$ が証明されたことになる。さらに左側の不等式も用いると $\frac{1}{1260} < \frac{22}{7} - \pi$ となり、上界は $\pi < 3.14207$ に改善される。

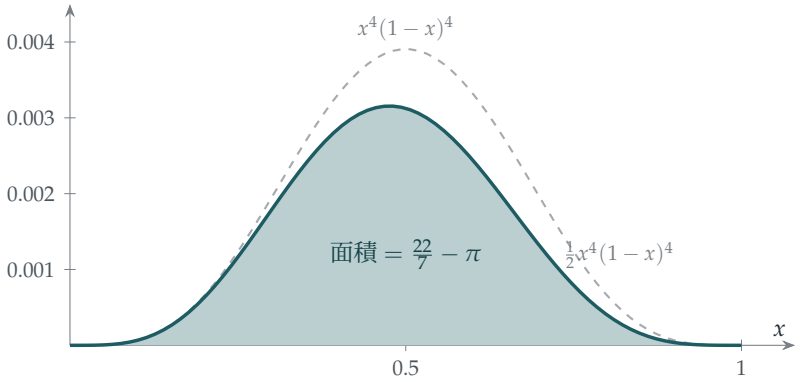


図 4.3.1 被積分関数 $\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}$（青緑）は正であるが非常に小さく、その最大値は約 0.003 である。網掛け部分の面積はちょうど $\frac{22}{7} - \pi \approx 0.00126$ である。被積分関数は $\frac{1}{2}x^4(1-x)^4$（点線）と $x^4(1-x)^4$（破線）の間にあり、それらの面積はそれぞれ $\frac{1}{1260}$ と $\frac{1}{630}$ である。

振り返り

- **正値性が不等式を証明する。** 正の関数の積分は正である。積分が $\frac{22}{7} - \pi$ であるとわかった時点で、不等式は直ちに従った。
- **小さな被積分関数、鋭い評価。** 因子 $x^4(1-x)^4$ は $[0,1]$ 上で非常に小さく（高々 $\frac{1}{256}$）、そのため積分は小さくなり、評価も鋭くなる。
- **有理数と π の倍数の和。** Section 2.9 と同様に、「有理数 + 定数の有理数倍」という形の積分が小さければ、その定数のよい有理数近似が得られる。

背後にある数学

歴史をもつ証明

アルキメデス（Archimedes）は紀元前 250 年頃、円に内接および外接する 96 角形の周の長さを計算することによって $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ を証明した（Section 2.5 の多角形と比較せよ）。積分による証明はずっと新しい。これは D. P. Dalzell によって 1944 年に発表され、1968 年にアメリカの学部生向けのパットナム数学競技会（Putnam competition）で問題として出題されたことで有名になった。その魅力は、数値計算をまったく必要としない点にある。不等式 $\frac{22}{7} > \pi$ は、正の関数の積分は正であるという事実からおのずと導かれるのである。

同じ考え方によるさらによい近似

この方法は一般化できる。$x^4(1-x)^4$ の代わりに $x^8(1-x)^8$ を用いると、同様の割り算により

$$\int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 4\pi - \frac{188684}{15015},$$

が得られ、これから $\pi > \frac{47171}{15015} = 3.1415917\ldots$ が証明される。これは有効数字（significant figures）6 桁まで正しい。2009 年に Stephen Lucas は、被積分関数が非負であるこの種の積分の族を見いだし、有効数字 7 桁まで正しい $\frac{355}{113}$ を含む、他の有名な近似についての不等式を証明した。

近似と無理性

なぜ π は $\frac{22}{7}$ や $\frac{355}{113}$ のような非常によい分数近似をもつのだろうか。すべての無理数（irrational number）には、それとの差が $\frac{1}{q^2}$ 以内である分数 $\frac{p}{q}$ が無限に多く存在する。そして π の場合は、その連分数（continued fraction）$[3;7,15,1,292,\ldots]$ が大きな項 292 を含むため、たまたま早い段階で格別によい近似がいくつか現れるのである（Section 2.2 を参照）。この問題に現れるような積分をどんどん小さくしていくことは、ある数が分数によって**あまりよく近似できない**こと、したがって無理数であることを示す証明の出発点となる。アイヴァン・ニーヴン（Ivan Niven）による π が無理数であることの有名な 1 ページの証明（1947 年）では、$\frac{x^n(1-x)^n}{n!}\sin(\pi x)$ の積分が用いられている。これは Section 2.9 に現れた積分の三角関数版である。

思考のスキル

不等式を正の関数の積分として表す

$A > B$ を証明するには、積分が $A - B$ となる正の関数を見つけよ。

これにより、不等式は一つの恒等式と一つの自明な事実に置き換わる。これは解析学で最も有用な技法の一つであり、積分の代わりに平方和を用いた同じ考え方によって、Section 3.2 では相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM）を証明した。

次の一歩

1. **数値を確かめる。** $\frac{22}{7} - \pi$ を有効数字 4 桁で計算し、それが $\frac{1}{1260}$ と $\frac{1}{630}$ の間にあることを確かめよ。

2. **ベータ積分。** 公式 $\int_0^1 x^n(1-x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$（Section 4.4 で証明した）を用いて、$\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{630}$ を確かめよ。

3. **下からの近似。**
$$\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \quad \text{および} \quad \int_0^1 \frac{x^2(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi - \frac{47}{15},$$
を示し、$\pi > 3$ および $\pi > \frac{47}{15}$ を導け。これらが $\frac{22}{7}$ より精度が低いのはなぜか。

4. **さらに進んで。** やや難 上に挙げた $\int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ に関する等式を確かめよ。（割り算は数式処理システムに任せてよい。要点は、余りが 16 となり、4π が得られることを見ることである。）

さらに学ぶために

- **Petr Beckmann, *A History of π*（St Martin's Press）。『π の歴史』。アルキメデスの多角形による方法の詳細をはじめ、多くの話題を扱う。**
- **Stephen Lucas, "Approximations to π derived from integrals with nonnegative integrands", *American Mathematical Monthly* 116 (2009)。非負の被積分関数をもつ積分から導かれる π の近似についての論文。短く読みやすい。**
- **Ivan Niven, *Irrational Numbers*（Mathematical Association of America）。『無理数』。π が無理数であることのニーヴンによる証明を収録している。**

4.4 ウォリス、ベータ、そして二分の一の階乗

問題

STEP II 1995、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/95-s2-q4`

導入

$\left(\frac{1}{2}\right)!$ とは何だろうか。これは無意味な問いに聞こえる。$n!$ は $1 \times 2 \times \cdots \times n$ を意味するのであって、「半分の個数」の項を掛け合わせることなどできないからである。ところが、自然な答えが存在し、それは

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

である。π はどこから現れるのか。この問題で扱う $\sin t$ の累乗の積分からである。その過程で、この問題は π に関する最も古く、最も不思議な公式の一つ、すなわち 1655 年のジョン・ウォリス（John Wallis）による無限積（infinite product）

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots,$$

を証明する。さらに、確率論や統計学に携わる者なら誰もが使う $n!$ に関するスターリング（Stirling）の公式に隠れた定数も求める。

取りかかる前に

考えてみよう u_0 と u_1 はいくらか。また、n が大きいとき、$[0, \frac{\pi}{2}]$ 上の $\sin^n t$ のグラフはおおよそどのような形をしているか。

$u_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ であり、$u_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t\,\mathrm{d}t = 1$ である。n が大きいとき、$\sin^n t$ は、$\sin t$ が 1 に近い $t = \frac{\pi}{2}$ の付近を除いてきわめて小さい。グラフは右端に張りついた細

い尖りになるのである（図 4.4.1）。したがって、n が大きくなるにつれて u_n は小さくなる。この問題では、その減り方が正確に $\sqrt{\pi/(2n)}$ のようになることを示す。

順を追って解く

段階 1　漸化式を導く

考えてみよう　$\int \sin t \cdot \sin^{n-1} t \, dt$ を、$\sin t$ を積分し $\sin^{n-1} t$ を微分する形で部分積分（integration by parts）せよ。新しい被積分関数には $\cos^2 t$ が含まれる。どうすれば $\sin t$ の累乗に戻せるだろうか。

$dv = \sin t \, dt$（よって $v = -\cos t$）、$w = \sin^{n-1} t$（よって $w' = (n-1)\sin^{n-2} t \cos t$）とおくと、

$$u_n = \Big[-\cos t \sin^{n-1} t\Big]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} t \cos^2 t \, dt.$$

を得る。$n \geq 2$ のとき境界項は 0 である。$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ と書けば、積分は $u_{n-2} - u_n$ となるので、$u_n = (n-1)(u_{n-2} - u_n)$、すなわち

$$n u_n = (n-1) u_{n-2}. \qquad \blacksquare$$

である。両辺に u_{n-1} を掛けると $n u_n u_{n-1} = (n-1) u_{n-1} u_{n-2}$ を得る。 $\blacksquare$

段階 2　不変量

考えてみよう　この関係式は、量 $n u_n u_{n-1}$ が n を一つ減らしても変わらないことを述べている。$n = 1$ のとき、この量はいくらか。

これを繰り返し用いると、$n u_n u_{n-1} = (n-1) u_{n-1} u_{n-2} = \cdots = 1 \cdot u_1 u_0 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2}$ となる。よって、すべての $n \geq 1$ に対して $n u_n u_{n-1} = \frac{1}{2}\pi$ である。 $\blacksquare$

段階 3　はさみうち

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ のとき $0 < \sin t < 1$ であるから、$\sin^n t < \sin^{n-1} t$ が成り立つ。つまり、$\sin^n t$ のグラフは端点を除いて $\sin^{n-1} t$ のグラフの下側にある。積分すると $0 < u_n < u_{n-1}$ を得る。

手を止めて、やってみよう　$u_n < u_{n-1}$ と $n u_n u_{n-1} = \frac{1}{2}\pi$ を用いて、$n u_n^2$ をはさみ込め。

u_{n-1} をより小さい u_n で置き換えると $n u_n^2 < n u_n u_{n-1} = \frac{1}{2}\pi$ を得る。u_n をより大きい

u_{n-1} で置き換えると $\frac{1}{2}\pi = nu_n u_{n-1} < nu_{n-1}^2$ を得る。よって $nu_n^2 < \frac{1}{2}\pi < nu_{n-1}^2$ である。 ■

右側の不等式を n の代わりに $n+1$ として適用すると $\frac{1}{2}\pi < (n+1)u_n^2$ となり、$nu_n^2 > \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{2}\pi$ を得る。両者を合わせて

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{2}\pi < nu_n^2 < \frac{1}{2}\pi. \qquad \blacksquare$$

である。$\frac{n}{n+1} \to 1$ であるから、はさみうちの原理（squeeze theorem）により $nu_n^2 \to \frac{1}{2}\pi$ である。 ■

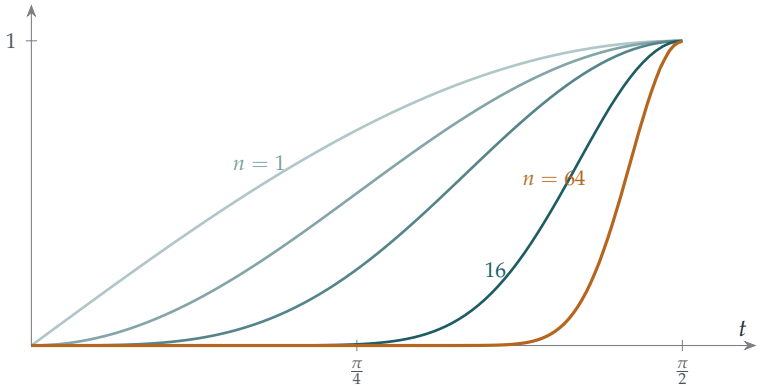


図 4.4.1　$n = 1, 2, 4, 16, 64$ に対する $\sin^n t$ のグラフ。n が大きくなるにつれて、曲線の下の面積 u_n は小さくなり、$t = \frac{\pi}{2}$ の付近に集中する。この問題は $u_n \approx \sqrt{\pi/(2n)}$ であることを示す。$n = 64$ のとき、これは約 0.157 である。

振り返り

- **漸化式（reduction formula）。**部分積分によって u_n が u_{n-2} に帰着されたので、すべての u_n は u_0 と u_1 から定まる。
- **不変量（invariant）を探せ。**積 $nu_n u_{n-1}$ は変わらなかった。Section 2.6 の算術幾何平均（AGM）の操作で積分が変わらなかったのと同じである。
- **単調性（monotonicity）と不変量を組み合わせると、はさみうちができる。**$u_n < u_{n-1}$ であることと $nu_n u_{n-1}$ の正確な値がわかっていたので、nu_n^2 を同じ極限をもつ二つの量の間にはさみ込むことができた。

背後にある数学

ウォリスの積

漸化式を u_0 または u_1 までたどると、具体的な値が得られる：

$$u_{2m} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m}\cdot\frac{\pi}{2},\qquad u_{2m+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2m+1)}.$$

はさみうちにより $u_{2m}/u_{2m+1}\to 1$ がわかる。この比を書き下して整理すると、ウォリスの積

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty}\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{2m\cdot 2m}{(2m-1)(2m+1)}.$$

を得る。ジョン・ウォリスは 1655 年、大胆な補間（interpolation）の手法によってこれを見いだした。指数が整数である積分の表に当てはめることで、$\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}\,dx$ が「どうあるべきか」を推測したのである。これは、ヴィエト（Viète）の無限積（Section 2.5）に次ぐ、数学における最初期の無限積の一つであり、有理数のみを用いたものとしては最初のものであった。

半分の階乗

ウォリスの補間の考え方は、1729 年にオイラー（Euler）によって厳密なものとなった。彼は、現在**ガンマ関数**（*Gamma function*）と呼ばれる関数

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt,$$

を見いだした。この関数は $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$（部分積分による）を満たし、整数 n に対しては $\Gamma(n+1) = n!$ となる。これは階乗（factorial）をすべての正の実数へなめらかに拡張するものである。これと密接に関係する**ベータ関数**（*Beta function*）

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

は、Section 4.3 や Section 2.9 の積分を含み、さらに置換 $x=\sin^2 t$ を行えば、ここでの u_n も含む。特に $\int_0^1 x^{1/2}(1-x)^{1/2}\,dx = \frac{\pi}{8}$（演習 2）であり、これから $\Gamma(\frac{3}{2})^2/\Gamma(3) = \frac{\pi}{8}$、すなわち $\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ が得られる。同じことであるが、$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ である。これは有名なガウス積分（Gaussian integral）$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ と同じ事実であり、正規分布（normal distribution）の式に π が現れる理由でもある。

スターリングの公式

スターリングの公式（Stirling's formula）は $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$ であることを述べている。$(n/e)^n$ の部分は比較的容易に得られるが、定数 $\sqrt{2\pi}$ を求めるのはより難しい。その標準的な求め方がまさにこの問題である。u_{2m} の具体的な値には $(2m)!/(m!)^2$ が含まれ、極限 $nu_n^2 \to \frac{\pi}{2}$ によってこの定数が確定するのである。確率論を経由して同じ定数に至るまったく別の道筋は、Section 12.23 にある。

思考のスキル

積分から得られる漸化式

部分積分を用いると、パラメータ n をもつ積分を、より小さいパラメータをもつ同じ積分と関係づけられることが多い。そうして得られた漸化式（*recurrence*）は、解くこともできるし、$n \to \infty$ のときの振る舞いを調べることもできる。

漸化式によって変わらない量と、n に関する単調性に注目せよ。この二つを組み合わせると、具体的な式がなくても極限が得られることが多い。

次の一歩

1 **ウォリスの積。** u_{2m} と u_{2m+1} の具体的な値、および $u_{2m+1} < u_{2m} < u_{2m-1}$ を用いて、ウォリスの積を証明せよ。

2 **ベータ積分。** STEP II 2013、問 2（`step.maths.org/questions/13-s2-q2`）に挑戦せよ。この問題では漸化式を用いて $\int_0^1 x^n(1-x)^n\,\mathrm{d}x$ を求め、そのうえで $n = \frac{1}{2}$ のときにその答えから何が示唆されるかを問う。半分の階乗を初めて垣間見ることになる。

3 **ベータ関数。** STEP III 2025、問 1（OCR が配布している 2025 年の過去問一式に収録、`www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip`）に挑戦せよ。この問題では一般のベータ積分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$ について、その対称性と漸化式を導き、それらを用いて $[0,\infty)$ 上の積分を求める。

4 **中心二項係数（central binomial coefficients）。** やや難 $u_{2m} = \binom{2m}{m}\dfrac{\pi}{2^{2m+1}}$ を示し、$nu_n^2 \to \frac{\pi}{2}$ を用いて、m が大きいとき $\binom{2m}{m} \approx \dfrac{4^m}{\sqrt{\pi m}}$ となることを導け。$m = 10$ の場合にこれを確かめよ。

さらに学ぶために

- **Julian Havil, *Gamma***（Princeton University Press）。ガンマ関数とその歴史を扱っている。
- **Philip J. Davis,「Leonhard Euler's integral: a historical profile of the Gamma function」**（オイラーの積分：ガンマ関数の歴史的概観）, *American Mathematical Monthly* 66 (1959)。受賞歴のある古典的な論文で、この節を学んだ後なら読みこなせる。
- **Emil Artin, *The Gamma Function***（Dover）。解析学をある程度学んだ後に読むとよい、短く美しいモノグラフである。

4.5 2年生の夢

問題

STEP III 2009、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/09-s3-q8`

導入

誰でも遅かれ早かれ、$(a+b)^2 \neq a^2+b^2$ であることを学ぶ。この誤った等式は、冗談めかして「新入生の夢」（freshman's dream）と呼ばれている。この問題で証明するのは、同じくらい初心者の間違いのように見える次の等式である。

$$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots,$$

そしてその姉妹版 $\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ である。x^x の積分が n^{-n} の和に化ける。話がうますぎて本当とは思えない。だからこそ、これは**二年生の夢**（sophomore's dream）と呼ばれるのである。しかし、これは正しく、1697 年にヨハン・ベルヌーイ（Johann Bernoulli）が発見した。

証明には、大学で絶えず出会うことになる三つの考え方が使われる。指数関数と累乗を比べる極限（limit）、漸化式（reduction formula）、そして関数をべき級数（power series）に展開して項別に積分すること（term-by-term integration）である。

取りかかる前に

? **考えてみよう** 関数 x^x は、$x=0$ では既知のどの式によっても定義されない（0^0 は定まらない）。x が上から 0 に近づくとき、この関数はどのように振る舞うだろうか。電卓で $x=0.1$、0.01、0.001 を試してみよ。

$0.1^{0.1} \approx 0.794$、$0.01^{0.01} \approx 0.955$、$0.001^{0.001} \approx 0.993$ である。どうやら 1 に近づくようだ。

小問 (i) はこれを証明するものであり、これによって被積分関数（integrand）が 0 の近くで行儀よく振る舞い、積分が意味をもつことがわかる。$(0,1]$ における x^x のグラフは 1 の近くから始まり、下がって最小値をとったあと、$x=1$ で 1 に戻る（図 4.5.1）。

順を追って解く

段階 1　累乗は対数に勝つ

考えてみよう　$x \to 0^+$ のとき $\ln x \to -\infty$ である。どのような置換をすれば、$x \to 0^+$ が $t \to \infty$ に変わり、$x^m (\ln x)^n$ が $e^{-mt} t^n$ のような形に変わるだろうか。

$x = e^{-t}$ とおく。$x \to 0^+$ のとき $t \to \infty$ であり、$\ln x = -t$ であるから、

$$x^m (\ln x)^n = e^{-mt} (-t)^n = (-1)^n e^{-mt} t^n \to 0.$$

言葉で言えば、$x \to 0$ のとき、x の任意の正の累乗が 0 に近づく速さは、$\ln x$ の任意の累乗が発散する速さに勝る、ということである。 ■

$m = n = 1$ とすれば $x \ln x \to 0$ であり、指数関数（exponential function）は連続（continuous）であるから、$x^x = e^{x \ln x} \to e^0 = 1$ である。 ■

段階 2　漸化式

考えてみよう　$I_{n+1} = \int_0^1 x^m (\ln x)^{n+1} \, dx$ を部分積分（integration by parts）せよ。どちらの因子を積分すべきだろうか。$x = 0$ における境界項（boundary term）はどうなるだろうか。

x^m を積分し、$(\ln x)^{n+1}$ を微分すると、

$$I_{n+1} = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1} (\ln x)^{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{(n+1)(\ln x)^n}{x} \, dx.$$

$x = 1$ では $\ln 1 = 0$ であるから境界項は 0 である。$x \to 0$ のときは、小問 (i)（$m+1$ と $n+1$ を用いる）により 0 に収束する。残った積分は $\frac{n+1}{m+1} I_n$ であるから、

$$I_{n+1} = -\frac{n+1}{m+1} I_n. \qquad ■$$

$I_0 = \int_0^1 x^m \, dx = \frac{1}{m+1}$ から始めて、この式を n 回適用すれば、

$$I_n = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^n} \cdot \frac{1}{m+1} = \frac{(-1)^n \, n!}{(m+1)^{n+1}}. \qquad ■$$

段階 3 級数

考えてみよう e^y の級数を用いて $x^x = e^{x\ln x}$ を展開せよ。各項はどのような形になるだろうか。m をどの値にすれば小問 (ii) の積分が現れるだろうか。

すべての y について $e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ であるから、

$$x^x = e^{x\ln x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n (\ln x)^n}{n!}.$$

手を止めて、やってみよう 小問 (ii) を $m = n$ として用い（$n = 0$ は別に扱う）、0 から 1 まで項別に積分せよ。何が得られるだろうか。

$n = 0$ の項は 1 であり、積分すると 1 になる。$n \geq 1$ については、小問 (ii) で $m = n$ とすると $\int_0^1 x^n (\ln x)^n \, dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$ となるので、第 n 項の寄与は $\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ である。これらを足し合わせると、

$$\int_0^1 x^x \, dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots . \qquad \blacksquare$$

（$n = 0$ の項も同じパターン $\frac{1}{1^1}$ に当てはまる。）項は極めて速く小さくなる。7 項とれば、値 0.783430… が小数第 6 位まで得られる。

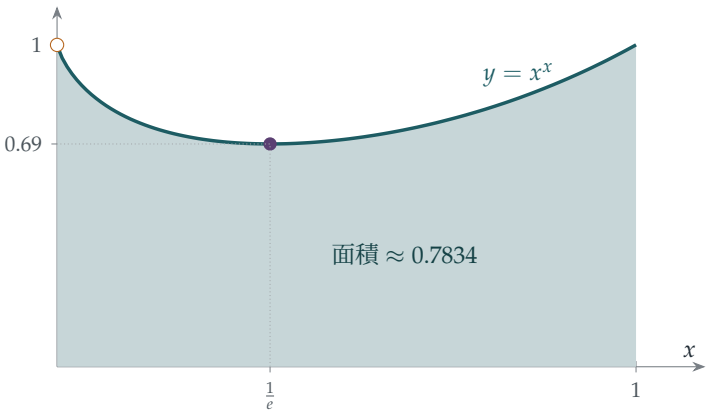


図 4.5.1 $(0, 1]$ における x^x のグラフ。$x \to 0$ のとき 1 に近づき（白丸）、$x = \frac{1}{e}$ で最小値 $e^{-1/e} \approx 0.692$ をとり、$x = 1$ で 1 に戻る。網かけ部分の面積は $\sum (-1)^{n+1} n^{-n} \approx 0.7834$ である。

振り返り

- **置換して増加の速さを比べる。** $x = e^{-t}$ とおくことで、0 における極限が、なじみのある ∞ における極限に変わった。

- **境界項は確認が必要である。**漸化式は $x = 0$ で境界項が消えることに依存しており、そこで小問 (i) が使われた。
- **級数にしてから積分する。**被積分関数をべき級数に展開して各項を積分することで、初等的な原始関数（antiderivative）をもたない積分が、速く収束する和に変わった。

背後にある数学

和と積分の交換

ステージ 3 では、無限和と積分をさりげなく交換した。すなわち $\int \sum = \sum \int$ である。これはいつでも許されるわけではない。大学では、これが成り立たない例や、どのようなときに安全かを述べる定理に出会うことになる。最も簡単な定理は、級数が**一様収束**（uniform convergence）するとき、すなわち級数の残りの部分をすべての x で同時に小さくできるときには安全である、というものである。ここでは $(0,1]$ 上で $|x \ln x| \le \frac{1}{e}$ であるから、x が何であっても、第 n 項の大きさは高々 $\frac{e^{-n}}{n!}$ である。これらの上界の和は収束するので、残りの部分は一様に小さく、交換は正当化される。この議論は**ワイエルシュトラス**（*Weierstrass*）**の M 判定法**（Weierstrass M-test）と呼ばれ、解析学の主力となる道具の一つである。

なぜ「夢」が成り立つのか

この恒等式は特別である。$\frac{(x\ln x)^n}{n!}$ における累乗と、積分 $\int_0^1 x^n (\ln x)^n \, dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$ とがぴったり対応し、$n!$ が完全に打ち消し合うことに依存しているのである。その根底では、この積分は姿を変えたガンマ関数 (Gamma function) である。置換 $x = e^{-t/(n+1)}$ によって、これは $\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} \int_0^\infty t^n e^{-t} \, dt = \frac{(-1)^n \, \Gamma(n+1)}{(n+1)^{n+1}}$ となり、Section 4.4 とつながる。

名前の由来

「二年生の夢」という名前は、Jonathan Borwein とその共著者たちが 2004 年の著書 *Experimentation in Mathematics* の中で、「新入生の夢」$(a+b)^n = a^n + b^n$ と対をなすものとして名づけた。（興味深いことに、「新入生の夢」はある種の数の体系では正しい。素数 p を法とする算術（arithmetic modulo a prime）では、中間の二項係数（binomial coefficient）がすべて p で割り切れるので、$(a+b)^p = a^p + b^p$ が成り立つのである。）Borwein は**実験数学**（experimental mathematics）の先駆者であった。実験数学では、このような恒等式をコンピュータを使って発見し、そのあとで人の手で証明する。

思考のスキル

展開して項別に積分する

被積分関数が、各項を積分できるようなべき級数をもつならば、各項を積分して結果を足し合わせよ。

これは、初等的な原始関数をもたない積分を計算する強力な方法である。和と積分の交換が正当化されるかどうかを常に問うこと。たいていは正当化されるが、その理由を知っておくべきである。

次の一歩

1 **姉妹版。** $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \approx 1.2913$ を示せ。

2 **最小値。** x^x は $(0,\infty)$ において $x = \frac{1}{e}$ で最小値 $e^{-1/e}$ をとることを示せ。

3 **何項必要か。** 項が減少する交代級数（alternating series）では、途中で打ち切ったときの誤差は、最初に省いた項よりも小さい。$\int_0^1 x^x\,dx$ の級数で小数第 6 位まで求めるには、何項必要だろうか。

4 **いとこ。** 同じ方法を用いて、$\displaystyle\int_0^1 x^2 \ln x\,dx = -\frac{1}{9}$ であること、および $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ であることを示せ。（Section 2.4 により、これは $-\frac{\pi^2}{6}$ である。）

さらに学ぶために

- **Jonathan Borwein, David Bailey & Roland Girgensohn, *Experimentation in Mathematics***（A. K. Peters）。名前の出典であり、コンピュータによって発見された恒等式がほかにも数多く載っている。
- **William Dunham, *The Calculus Gallery***（Princeton University Press）。ニュートン（Newton）からルベーグ（Lebesgue）に至る解析学の傑作を集めた本で、ベルヌーイの業績も含まれている。
- **Mary Hart, *Guide to Analysis***（Palgrave）。一様収束と、和と積分を交換できる条件について明快に解説している。

4.6 公式で表せない積分

問題

STEP III 2016、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/16-s3-q3`

導入

微分（differentiation）は機械的な作業である。規則があり、通常の部品から組み立てられた関数であれば、その規則を当てはめるだけで微分できる。積分（integration）はそうはいかない。どんな技法も受けつけない積分に出会い、自分の工夫が足りないだけなのかと悩んだ経験は誰にでもあるだろう。実は、その答えが「誰にも工夫のしようがない、なぜなら**公式が存在しない**からだ」ということもある。

この問題は、ある特別な場合についてそのことを証明する。積分 $\int \frac{e^x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ は面積としては確かに存在する。しかし、それを（有理関数（rational function））$\times e^x$ という形、すなわち部分積分（integration by parts）から予想される形に書くことはできない。何かを見つけるのではなく、何かが不可能であることを証明するというのは、それまでとは異なる、きわめて数学らしい営みである。

取りかかる前に

考えてみよう $\int \mathrm{f}(x)e^x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}e^x + \mathrm{C}$ であるとすると、P と Q はどのような等式を満たさなければならないか。（右辺を微分してみよ。）

微分すると $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}e^x\right) = \dfrac{\mathrm{P'Q} - \mathrm{PQ'} + \mathrm{PQ}}{\mathrm{Q}^2}\,e^x$ となり、これが $\mathrm{f}(x)e^x$ に等しくなければならない。したがって、問題全体は多項式（polynomial）の恒等式（identity）

$$\mathrm{P'Q} - \mathrm{PQ'} + \mathrm{PQ} = \mathrm{f}\,\mathrm{Q}^2.$$

についての問題になる。積分についての問いが、多項式、すなわちその因数と次数についての問いに変わったのである。

順を追って解く

段階 1　因数 $x+1$

$\mathrm{f}(x)=\dfrac{x^3-2}{(x+1)^2}$ のとき、恒等式の両辺に $(x+1)^2$ を掛けると

$$(x+1)^2(\mathrm{P}'\mathrm{Q}-\mathrm{P}\mathrm{Q}'+\mathrm{P}\mathrm{Q})=(x^3-2)\,\mathrm{Q}^2. \tag{†}$$

> **考えてみよう**　(†) に $x=-1$ を代入せよ。何が起こらなければならないか。

左辺は $x=-1$ で 0 である。右辺は $(-1-2)\,\mathrm{Q}(-1)^2=-3\,\mathrm{Q}(-1)^2$ である。よって $\mathrm{Q}(-1)=0$ であり、因数定理（factor theorem）により $x+1$ は Q の因数である。 ■

段階 2　次数

P の次数（degree）を p、Q の次数を q とする。

> **考えてみよう**　$\mathrm{P}'\mathrm{Q}-\mathrm{P}\mathrm{Q}'+\mathrm{P}\mathrm{Q}$ において、次数が最も高い項はどれか。それは他の項と打ち消し合いうるか。

PQ の次数は $p+q$ であり、$\mathrm{P}'\mathrm{Q}$ と $\mathrm{P}\mathrm{Q}'$ の次数は高々 $p+q-1$ である。よって (†) の左辺の次数はちょうど $2+p+q$ であり、右辺の次数は $3+2q$ である。両者を等しいとおいて $p=q+1$ を得る。 ■

段階 3　P を求める

$\mathrm{Q}=x+1$ のとき $\mathrm{Q}'=1$ であり、P の次数は 2 である。(†) を $(x+1)^2$ で割ると

$$\mathrm{P}'(x+1)-\mathrm{P}+\mathrm{P}(x+1)=x^3-2, \qquad \text{すなわち、} \qquad (x+1)\mathrm{P}'+x\mathrm{P}=x^3-2.$$

$\mathrm{P}=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ とおいてみる。左辺は

$$(x+1)(2\alpha x+\beta)+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x=\alpha x^3+(2\alpha+\beta)x^2+(2\alpha+\beta+\gamma)x+\beta.$$

となる。x^3-2 と係数を比較すると、$\alpha=1$、$2\alpha+\beta=0$ より $\beta=-2$、さらに $\gamma=0$ である。定数項 $\beta=-2$ とも矛盾しない。よって

$$\mathrm{P}(x)=x^2-2x, \qquad \int \frac{x^3-2}{(x+1)^2}\,e^x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2-2x}{x+1}\,e^x+\mathrm{C}. \qquad \blacksquare$$

（望むなら微分して確かめてみよ。商の微分法のよい練習になる。）

段階 4 不可能性

次に、P と Q が共通因数をもたないとして、$\int \frac{e^x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}e^x + C$ と仮定する。恒等式は

$$(x+1)\bigl(\mathrm{P}'\mathrm{Q} - \mathrm{P}\mathrm{Q}' + \mathrm{P}\mathrm{Q}\bigr) = \mathrm{Q}^2.$$

となる。段階 1 と同様に、$x=-1$ を代入すると $\mathrm{Q}(-1)=0$ がわかる。$\mathrm{Q} = (x+1)^k\mathrm{R}$ と書く。ただし $k \geq 1$、$\mathrm{R}(-1)\neq 0$ である（因数 $x+1$ をできるだけ多くくくり出す）。

> **手を止めて、やってみよう** $\mathrm{Q} = (x+1)^k\mathrm{R}$ を代入し、因数 $(x+1)$ をできるだけ多く約分してから、$x=-1$ を代入せよ。$\mathrm{P}(-1)$ について何がわかるか。

このとき $\mathrm{Q}' = k(x+1)^{k-1}\mathrm{R} + (x+1)^k\mathrm{R}'$ であり、

$$\mathrm{P}'\mathrm{Q} - \mathrm{P}\mathrm{Q}' + \mathrm{P}\mathrm{Q} = (x+1)^{k-1}\Bigl[(x+1)\bigl(\mathrm{P}'\mathrm{R} - \mathrm{P}\mathrm{R}' + \mathrm{P}\mathrm{R}\bigr) - k\mathrm{P}\mathrm{R}\Bigr].$$

となる。よって恒等式は $(x+1)^k\bigl[(x+1)(\mathrm{P}'\mathrm{R} - \mathrm{P}\mathrm{R}' + \mathrm{P}\mathrm{R}) - k\mathrm{P}\mathrm{R}\bigr] = (x+1)^{2k}\mathrm{R}^2$ となる。$(x+1)^k$ で割ると

$$(x+1)\bigl(\mathrm{P}'\mathrm{R} - \mathrm{P}\mathrm{R}' + \mathrm{P}\mathrm{R}\bigr) - k\mathrm{P}\mathrm{R} = (x+1)^k\mathrm{R}^2.$$

$k \geq 1$ であるから、$x=-1$ とすると $-k\,\mathrm{P}(-1)\mathrm{R}(-1) = 0$ を得る。$k\neq 0$ かつ $\mathrm{R}(-1)\neq 0$ であるから、$\mathrm{P}(-1)=0$ でなければならない。しかしそうすると $x+1$ は P と Q の両方を割り切り、両者が共通因数をもたないという仮定に矛盾する。よって、そのような P と Q は存在しない。 ■

振り返り

- **代数の言葉に翻訳する。**「これはこの形で積分できるか」という問いが、「この多項式の恒等式は解をもつか」という問いになった。
- **特別な点で値を求める。**$x=-1$ を代入することで、因数についての情報を 3 度にわたって引き出した。
- **既約分数を用いた背理法。**Section 1.3 の $\sqrt{2}$ の場合と同じく、分数が既約（lowest terms）であると仮定し、共通因数を見つけることで矛盾を導いた。これが背理法（proof by contradiction）である。

背後にある数学

極と対数

小問 (ii) の背後には単純な描像がある。被積分関数 $\frac{e^x}{x+1}$ は $x=-1$ に 1 位の極（simple pole）をもつ。すなわち、その近くでは $\frac{e^{-1}}{x+1}$ のように振る舞う。$\frac{1}{x+1}$ を積分すると $\ln|x+1|$ になるから、原始関数（antiderivative）は -1 の近くで $e^{-1}\ln|x+1|$ のように振る舞い、対数的に $-\infty$ へ向かうはずである（図 4.6.1）。ところが、有理関数に e^x を掛けたものは $(x+1)^{-k}$ のようなべきの形でしか発散できず、その導関数は位数 $k+1\geq 2$ の極をもち、1 位の極になることはない。対数的な振る舞いは有理関数からは生み出せないのである。段階 4 の代数的議論は、この観察を厳密にしたものである。これに対して小問 (i) では、被積分関数は 2 位の極（double pole）をもつ。これはまさに 1 位の極をもつ関数の導関数の姿であり、そのため有理的な答えが可能だったのである。

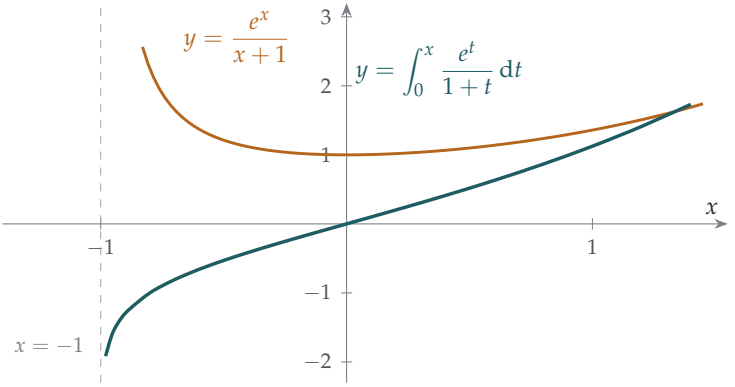


図 4.6.1　被積分関数 $\frac{e^x}{x+1}$（琥珀色）は $x=-1$ に 1 位の極をもつ。その原始関数（青緑色、数値計算による）は問題なく存在するが、$x\to -1^+$ のとき $e^{-1}\ln(x+1)$ のように対数的に $-\infty$ へ向かう。有理関数に e^x を掛けたものは、このような振る舞いをすることができない。

リウヴィルとリッシュのアルゴリズム

1830 年代、ジョゼフ・リウヴィル（Joseph Liouville）は、どのような積分が初等関数（elementary functions。多項式、指数関数、対数関数、累乗根、三角関数から通常の演算によって組み立てられる関数）で表せるかについての理論を築いた。その成果の一つによれば、f と g が有理関数で g が定数でないとき、$\int \mathrm{f}(x)e^{\mathrm{g}(x)}\,\mathrm{d}x$ が初等関数となるのは、ある有理関数 R によって $\mathrm{R}(x)e^{\mathrm{g}(x)}$（に定数を加えたもの）に等しい場合に限る。（g に関する条件は重要である。$\mathrm{g}=0$、$\mathrm{f}(x)=\frac{1}{x}$ のとき積分は $\ln|x|$ であり、これ

は初等関数ではあるが有理関数ではない。）したがって、有理的な形を否定したこの問題は、実は $\int \frac{e^x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ がそもそも初等関数ではないことを証明しているのである。同じ定理の変形版により、$\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ や $\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ も初等関数でないことが示される。1969年、Robert Risch はリウヴィルの考えをアルゴリズムに仕立て上げた。これは広いクラスの関数について、初等的な積分が存在するかどうかを判定し、存在すればそれを求めるものである。その変形版は数式処理システム（computer algebra systems）の内部で動いている。

特殊関数

積分が初等的な形をもたないとき、数学者はそれに名前をつけ、新しい関数として研究する。Section 3.9 でランベルト（Lambert）の W 関数を扱ったのと同じである。ここでの積分は本質的に**指数積分**（exponential integral）$\mathrm{Ei}(x)$ である。これは熱伝導に現れるほか、**対数積分**（logarithmic integral）$\mathrm{li}(x) = \mathrm{Ei}(\ln x)$ にも現れる。対数積分は、x 以下の素数の個数に対する最良の簡単な近似式である（Section 1.2）。$x < 0$ のときは $\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$ である。$x > 0$ のときは、この積分は $t = 0$ の無限に高い尖りを通過してしまうので、尖りのまわりの小さな区間 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ を取り除いて $\varepsilon \to 0$ とすることで $\mathrm{Ei}(x)$ を定義する。これが**コーシー（*Cauchy*）の主値**（Cauchy principal value）である。

思考のスキル

不可能性を証明する

何かができないことを示すには、それができると仮定し、その仮定を正確な代数の言葉に翻訳し、矛盾を導く。

難しいのは翻訳の部分、すなわち「できる」とは正確には何を意味するのかを言い表すことである。ここでは、それは「共通因数をもたない多項式 P、Q でこの恒等式を満たすものが存在する」ことを意味した。数学における最も深い結果の多くは、この種の不可能性の証明である。

次の一歩

1 **うまくいく二つの例。** $\displaystyle\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{e^x}{x+1} + C$ および $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x-1}{x+1}e^x + C$ を示せ。

2 **ガウス型関数。** $\displaystyle\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{P}(x)e^{-x^2} + C$ となる多項式 P は存在しないことを示せ。（**ヒント**：微分して次数を比較せよ。）

3 **もう一つの極。** 小問 (ii) の議論を応用して、$\displaystyle\int \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x$ は $\dfrac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}e^x + C$ の形ではないことを示せ。

4 **どのようなときに可能か。** f を多項式とし、ある多項式 P について $\displaystyle\int \frac{\mathrm{f}(x)}{(x+1)^2}\,e^x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{P}(x)}{x+1}\,e^x + C$ が成り立つとする。$(x+1)\mathrm{P}' + x\mathrm{P} = \mathrm{f}$ を示し、この式とその導関数の $x=-1$ における値を考えることで、$\mathrm{f}(-1)+\mathrm{f}'(-1)=0$ を示せ。この条件が $\mathrm{f}(x)=x^3-2$ および練習問題 1 の例について成り立つことを確かめよ。 やや難 この条件が十分条件でもあることを示せるか。

さらに学ぶために

- **Brian Conrad, “Impossibility theorems for elementary integration”**（初等積分の不可能性定理）。リウヴィルの定理を例とともに解説した講義ノートで、無料で入手できる。
- **Elena Anne Marchisotto & Gholam-Ali Zakeri, “An invitation to integration in finite terms”**（有限の形での積分への招待）、*The College Mathematics Journal* 25 (1994)。リウヴィルの理論へのやさしい入門。
- **Manuel Bronstein, *Symbolic Integration I***（Springer）（記号積分 I）。数式処理システムが実際にどのように積分を行うかを解説している。上級者向け。

4.7 変分法

問題

STEP III 2014、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/14-s3-q4`

導入

学校で扱う最適化問題のほとんどは、最良の**数**を求めるものである。たとえば、面積を最大にする x の値を求める、といった問題である。これに対して**変分法**（calculus of variations）は、最良の**関数**を求める。2 点を結ぶどの曲線に沿えば、ビーズは最も速く滑り落ちるか。吊るした鎖はどのような形になるか。光はレンズの中をどの経路で進むか。いずれの場合も、最適化すべき量は積分であり、未知のものは関数全体である。

この問題では、興味深い例のうち最も単純なものを調べる。積分 $J = \int_0^1 ((y')^2 - a^2 y^2)\,\mathrm{d}x$ では、二つの項がせめぎ合っている。傾きの大きさは値を押し上げ、関数の大きさは値を押し下げる。a が小さければ常に傾きの項が勝ち、どの関数に対しても $J \geq 0$ となる。しかし、このつり合いが崩れる臨界値が a には存在し、問題はそれを正確に求める。それは $a = \frac{\pi}{2}$ である。この π がどこから来るのかが、この節の主題となる。

取りかかる前に

考えてみよう $I \geq 0$ が自明でないのはなぜか。$y(1) = 0$ を満たす $y = 1 - x$ で試してみよ。

I は二つの正の量の差なので、正にも負にもなりうる。$y = 1 - x$ の場合、$\int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1$ かつ $\int_0^1 (1-x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ なので、$I = \frac{2}{3} > 0$ である。しかし、もっと巧妙な関数を選べば、$\int (y')^2$ に比べて $\int y^2$ を大きくできるかもしれない。この問題の工夫は、I を**平方**の積分として表すことにある。平方の積分は明らかに非負である。これは積分における「平方完成」（completing the square）である。

順を追って解く

段階 1　平方完成

I_1 の中の平方を展開すると

$$I_1 = \int_0^1 ((y')^2 + 2yy' \tan x + y^2 \tan^2 x)\,\mathrm{d}x,$$

となるので

$$I - I_1 = -\int_0^1 (y^2 + y^2 \tan^2 x + 2yy' \tan x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 (y^2 \sec^2 x + 2yy' \tan x)\,\mathrm{d}x.$$

> **考えてみよう**　被積分関数 $y^2 \sec^2 x + 2yy' \tan x$ はある関数の導関数そのものである。何の導関数か。

積の微分法則により $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2 \tan x) = 2yy' \tan x + y^2 \sec^2 x$ である。よって

$$I - I_1 = -\Big[y^2 \tan x\Big]_0^1 = -(y(1)^2 \tan 1 - y(0)^2 \tan 0) = 0,$$

となる。ここで $y(1) = 0$ かつ $\tan 0 = 0$ を用いた。したがって、平方の積分であることから $I = I_1 \geq 0$ である。 ■

段階 2　$I = 0$ となるのはいつか

> **考えてみよう**　連続で非負の関数の積分が 0 であるとき、その関数について何がいえるか。それでは、$I = 0$ のとき y はどのような方程式を満たさなければならないか。

積分が 0 である連続な非負関数は恒等的に 0 でなければならない（もしある点で正なら、その点のまわりの小区間でも正となり、積分に正の寄与をするからである）。したがって、$I = 0$ ならば $[0,1]$ 上で $y' + y\tan x = 0$ が成り立つ。$\sec x$ を掛けると、これは $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{\cos x}\right) = \frac{y'\cos x + y\sin x}{\cos^2 x} = 0$ を意味するので、$y = C\cos x$ である。すると $y(1) = C\cos 1 = 0$ であり、$\cos 1 \neq 0$ より $C = 0$ となる。したがって、$I = 0$ となるのは $y \equiv 0$ のときに限る。 ■

段階 3　一般の場合

> **考えてみよう**　$\int_0^1 (y' + ay\tan bx)^2\,\mathrm{d}x$ を用いて段階 1 を繰り返せ。残りの項がある関数の導関数そのものになるためには、b はどうあるべきか。

この積分を K とおく。すると

$$J - K = -\int_0^1 (a^2y^2 + a^2y^2\tan^2 bx + 2ayy'\tan bx)\,\mathrm{d}x$$
$$= -\int_0^1 (a^2y^2\sec^2 bx + 2ayy'\tan bx)\,\mathrm{d}x.$$

一方、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ay^2\tan bx) = 2ayy'\tan bx + aby^2\sec^2 bx$ である。これらがちょうど一致するのは $ab = a^2$、すなわち $b = a$ のときである。このとき

$$J - K = -\Big[ay^2\tan ax\Big]_0^1 = -a\,y(1)^2\tan a = 0,$$

となるので、$J = K \geq 0$ である。

> **手を止めて、やってみよう** この議論はどこで破綻しうるか。（区間 $0 \leq x \leq 1$ における $\tan ax$ に注目せよ。）

この議論では、$[0,1]$ のすべての x に対して $\tan ax$ が定義されていて連続であることが必要である。そうでなければ K が存在しないかもしれず、微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）を適用できない。x が $[0,1]$ を動くとき ax は $[0,a]$ を動き、そこで tan が連続であるのはちょうど $a < \frac{\pi}{2}$ のときである。したがって、この証明は

$$a < k = \frac{\pi}{2}. \qquad \blacksquare$$

に対して有効である。

段階 4 臨界の場合

> **考えてみよう** $a = \frac{\pi}{2}$ のとき、この証明は破綻する。段階 2 では、$I = 0$ とする関数は $y' + y\tan x = 0$ を満たすはずであった。今回それに対応する方程式は何か。また、その解は何か。

対応する方程式は $y' + ay\tan ax = 0$ であり、その解は $y = C\cos ax$ である。$a = \frac{\pi}{2}$ のとき、$y = \cos\frac{\pi x}{2}$ は $y(1) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ を満たす。直接確かめると

$$J = \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \left(\sin^2\frac{\pi x}{2} - \cos^2\frac{\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \cos\pi x\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{\pi^2}{4}\left[\frac{\sin\pi x}{\pi}\right]_0^1 = 0. \qquad \blacksquare$$

したがって、臨界値においては、0 でない関数が J をちょうど 0 にする。

振り返り

- **積分における平方完成。**ある関数の導関数そのものを足して引くことで、J は平方の積分と、消える境界項との和に変わった。
- **道具が使えなくなる場所を確かめる。**この方法が使えたのは、区間上で $\tan ax$ が有限である間だけであった。方法が破綻した点 $a = \frac{\pi}{2}$ こそが、まさに臨界値であった。
- **極端な場合は微分方程式を解く。**$J = 0$ を与える関数は 1 階の方程式 $y' + ay\tan ax = 0$ から得られ、さらに $y'' + a^2 y = 0$ も満たす。

背後にある数学

最速降下線（brachistochrone）と一分野の誕生

1696 年、ヨハン・ベルヌーイ（Johann Bernoulli）はヨーロッパの数学者たちに挑戦状を出した。ある点から別の点へビーズが最短時間で滑り落ちる曲線を求めよ、というものである。解答はニュートン（Newton）（匿名で、一晩のうちに。ベルヌーイは「爪を見ればライオンとわかる」と述べた）、ライプニッツ（Leibniz）、ロピタル（l'Hôpital）、ヤコブ・ベルヌーイ（Jakob Bernoulli）から寄せられた。答えはサイクロイド（cycloid）である。1750 年代、オイラー（Euler）と若きジョゼフ＝ルイ・ラグランジュ（Joseph-Louis Lagrange）は、こうした個別の工夫を一般的な方法へとまとめ上げた。y が $\int F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$ を停留させるならば、y は**オイラー＝ラグランジュ方程式**（Euler–Lagrange equation）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

を満たす。ここでの J では $F = (y')^2 - a^2 y^2$ であり、オイラー＝ラグランジュ方程式は $y'' + a^2 y = 0$、すなわち単振動の方程式となる。

なぜ $\pi/2$ なのか

$a < \frac{\pi}{2}$ のとき、J の最小値は 0 であり、それを達成するのは $y \equiv 0$ だけである。$a = \frac{\pi}{2}$ では最小値はやはり 0 であるが、それを達成する関数がもう一つ現れる。$a > \frac{\pi}{2}$ のときは、同じ関数 $y = \cos\frac{\pi x}{2}$ が

$$J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{a^2}{2} < 0,$$

を与え、y を定数倍で大きくすれば、J はいくらでも小さな負の値にできる。つまり最小値はまったく存在しない（図 4.7.1）。臨界値とは、$y'' + a^2 y = 0$ が境界条件（$y(1) = 0$ と、自由端における「自然な」条件 $y'(0) = 0$）を満たす 0 でない解をもつような最初の a である。これは**固有値問題**（eigenvalue problem）であり、$a^2 = \frac{\pi^2}{4}$ はその最小固有値である。Section 3.7 と比べてみよ。そこでは長さ π の区間の両端で関数を固定し、臨界値は 1 であった。ここでは区間の長さは 1 で、固定されているのは一方の端だけである。これは長さ 2 の区間の半分のようなものなので、臨界値となる a は $\frac{\pi}{2}$ になる。

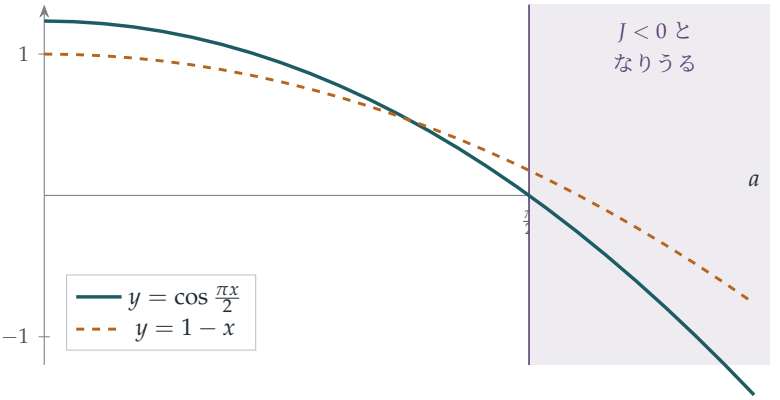


図 4.7.1　$y(1) = 0$ を満たす二つの試験関数について、a に対する J の値を示したもの。$y = 1 - x$ の場合、$J = 1 - \frac{a^2}{3}$ が負になるのは $a > \sqrt{3}$ のときだけである。$y = \cos \frac{\pi x}{2}$ の場合、$J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{a^2}{2}$ は $a > \frac{\pi}{2}$ となった途端に負になり、これより良い関数は存在しない。実際、$a < \frac{\pi}{2}$ のときはどの y に対しても $J \geq 0$ である。

物理学と最小作用の原理

変分法は、自然そのものを記述するものであることが明らかになった。18 世紀から 19 世紀にかけて、運動の法則は次のように述べられることがわかってきた。力学系は、**作用**（action）とよばれる積分を停留させるように運動する。同様に、光は所要時間が最小となる経路に沿って進み（フェルマー（Fermat）の原理）、これによって屈折が説明される。20 世紀には、リチャード・ファインマン（Richard Feynman）の「経路の総和」を通じて、同じ考え方が量子力学の基礎となった。この問題に現れる 2 次の積分はその最も単純な例であり、そこから導かれる固有値問題は、Section 8.6 で量子振動子のエネルギー準位として再び現れる。

思考のスキル

平方完成をし、それから境界に注意せよ

2 次の式が非負であることを示すには、それを平方と、制御できる何かとの和として書け。積分の場合、その「何か」はある関数の導関数そのものであることが多く、積分すると境界項になる。

そして、方法がどこで使えなくなるかを常に問え。ここで破綻した点は偶然ではなかった。それはこの問題で最も重要な数であった。

次の一歩

1. **臨界値を超えて。** $a > \frac{\pi}{2}$ ならば、$y = \cos\frac{\pi x}{2}$ が $J < 0$ を与えることを示せ。

2. **オイラー＝ラグランジュ方程式。** やや難 y が、$y(1) = 0$ を満たす関数の中で J を最小にするとする。$\eta(1) = 0$ を満たす任意の関数 η と任意の数 ε に対して $J(y+\varepsilon\eta) \geq J(y)$ が成り立つ。$J(y+\varepsilon\eta)$ を ε のべきで展開し、$\int_0^1 (y'\eta' - a^2 y\eta)\,\mathrm{d}x = 0$ を導け。部分積分を用いて、$y'' + a^2 y = 0$ かつ $y'(0) = 0$ であることを示せ（y は十分滑らかであると仮定せよ）。

3. **より長い区間。** 置換を用いて、$y(L) = 0$ ならば、すべての y に対して $\int_0^L \left((y')^2 - a^2 y^2\right)\mathrm{d}x \geq 0$ が成り立つのはちょうど $a \leq \frac{\pi}{2L}$ のときであり、0 でない y が等号を与えるのは $a = \frac{\pi}{2L}$ のときに限ることを示せ。

4. **サイクロイド。** 最速降下線問題を調べ、サイクロイドの媒介変数表示を求めよ。上下を逆さにしたサイクロイド上のどこからビーズを静かに放しても、最下点に達するまでの時間が同じであることを示せ（**等時曲線**（tautochrone）の性質。1659 年にホイヘンス（Huygens）が発見した）。

さらに学ぶために

- **Paul Nahin, *When Least Is Best***（Princeton University Press）。最速降下線を含む最適化の歴史と数学を、学生向けに書いたもの。
- **Richard Feynman, *The Feynman Lectures on Physics***（『ファインマン物理学』）, Volume II, Chapter 19（「The principle of least action」、最小作用の原理）。オンラインで無料で読める。

- **Bruce van Brunt, *The Calculus of Variations***（Springer）。学部生向けの教科書。最初のいくつかの章は A レベル（A level、英国の大学入学資格試験）の微分積分だけで読める。

4.8 球形のパンを切る

問題

STEP I 2001、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/01-s1-q6`

導入

球形のパンを、等しい厚さの切れに切り分ける。中央付近の切れは厚みのある円板で、縁にパンの耳（crust）が細い帯状についている。両端付近の切れは小さな帽子のような形で、ほとんど耳ばかりに見える。端の切れのほうが耳が多いに違いない、と思うだろう。

そうではない。中央に近いところで切っても端に近いところで切っても、どの切れにもまったく同じ面積の耳がついている。中央の細い帯は周の長さは大きいが、ほぼ垂直に立っている。端の帽子は周の長さは小さいが、急な傾きをもつので、その耳はより広い幅にわたって引き伸ばされている。この二つの効果がちょうど打ち消し合うのである。これはアルキメデス（Archimedes）の定理であり、彼はこの定理をたいへん大切にしていたので、自分の墓に円柱に内接する球を刻むよう頼んだほどである。問題の後半は少し遊び心のある規則の話であるが、同じ計算に基づいている。

取りかかる前に

考えてみよう 半径 a の球は、どの曲線を x 軸のまわりに回転させれば得られるか。その曲線について $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ はどうなるか。

半円 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \le x \le a$ を回転させると球が得られる。このとき $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{y}$ である。このことを覚えておこう。傾きは両端（$x \to \pm a$）では急で、中央では緩やかである。これはまさに導入で述べた効果である。

順を追って解く

段階 1　耳の面積の公式が簡単になる

考えてみよう　半円について $y\sqrt{1+(y')^2}$ を計算せよ。驚くべきことが起こる。

$y' = -x/y$ より、

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2 + x^2}{y^2} = \frac{a^2}{y^2},$$

したがって $y\sqrt{1+(y')^2} = y \cdot \frac{a}{y} = a$ となり、定数である！よって、任意の二つの平面 $x = x_1$ と $x = x_2$ の間の耳の面積は

$$2\pi \int_{x_1}^{x_2} a \, \mathrm{d}x = 2\pi a (x_2 - x_1).$$

となる。これは平面の間の距離だけで決まり、平面の位置にはよらない。

段階 2　耳の面積は切れの数に比例する

パンを厚さ h の切れに切り分けると、各切れの耳の面積は $2\pi a h$ で、すべての切れで等しい。一方の端からでも、両端からでも、どこからでも何切れか食べれば、残った耳の面積は $2\pi a h$ に残った切れの数を掛けたものである。 ■

段階 3　耳が多いための条件

問題のヒントは一方の端から切れを食べたときに残るパンについて述べているので、それに従おう。切れを端 $x = a$ から食べていき、残りが $x = -a$ から $x = -a + t$ までであるとする。「何切れ食べた後でも」という規則は、パンをどれだけ細かく切っても成り立つべきなので、t は 0 から $2a$ までの任意の値をとれるものとして扱う。（段階 4 では両端から食べる場合を考える。）

考えてみよう　与えられた公式を使って V を計算せよ。置換 $s = x + a$ を使うと計算がすっきりするかもしれない。

$s = x + a$ とおくと $y^2 = a^2 - x^2 = a^2 - (s-a)^2 = 2as - s^2$ であるから、

$$V = \pi \int_0^t (2as - s^2)\, \mathrm{d}s = \pi \left(at^2 - \frac{t^3}{3} \right), \qquad A = 2\pi a t,$$

となり、

$$\frac{V}{A} = \frac{at^2 - t^3/3}{2at} = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{6a}.$$

である。

> **手を止めて、やってみよう** 規則は何切れ食べた後でも $V/A < 1$ であること、すなわち $0 < t \le 2a$ を満たすすべての t について $V/A < 1$ であることを要求している。この範囲における $\frac{t}{2} - \frac{t^2}{6a}$ の最大値はいくらか。

t で微分すると、$\frac{1}{2} - \frac{t}{3a} = 0$ となるのは $t = \frac{3a}{2}$ のときであり、これは範囲 $(0, 2a]$ の内部にある。また、これは最大値を与える（この式は t について上に凸の放物線である）。最大値は

$$\frac{3a}{4} - \frac{9a^2/4}{6a} = \frac{3a}{4} - \frac{3a}{8} = \frac{3a}{8}.$$

である。耳の多いパンであるためにはすべての t について $V/A < 1$ でなければならず、特に $t = \frac{3a}{2}$ においてもそうであるから、$\frac{3a}{8} < 1$、すなわち $a < \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ メートルである。 ■

段階 4 問題の先へ：$2\frac{2}{3}$ で十分か

> **考えてみよう** 問題が求めているのは、半径が満たさなければならない条件だけである。$a < \frac{8}{3}$ は十分条件でもあるだろうか。両端から切れを食べる場合はどうなるか。

十分ではない。両端から食べると中央に帯が残るが、中央の帯は端の帽子よりも、耳に対してパンの量が多い。帯 $-\frac{w}{2} \le x \le \frac{w}{2}$ については

$$V = \pi \int_{-w/2}^{w/2} (a^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi\left(a^2 w - \frac{w^3}{12}\right), \qquad A = 2\pi a w, \qquad \frac{V}{A} = \frac{a}{2} - \frac{w^2}{24a},$$

であり、薄い帯ではこれは $\frac{a}{2}$ に近い。たとえば、$2\frac{2}{3}$ を十分下回る半径 2.4 メートルのパンを四切れに切り、両端の二切れを食べると、$w = a$ の帯が残り、$\frac{V}{A} = \frac{11a}{24} = 1.1$ となる。実際、どのような切れの組についても $\frac{V}{A} < \frac{a}{2}$ であるから、どこから切れを食べてもよいとすると、パンが耳の多いパンであるのはちょうど $a \le 2$ メートルのときである。問題の $2\frac{2}{3}$ は正しい必要条件（necessary condition）であるが、規則は問題が匂わせているよりも厳しいのである。

振り返り

- **積分する前に簡単にせよ。**耳の面積の被積分関数（integrand）は複雑に見えたが、実は定数であった。被積分関数は、取りかかる前に必ず簡単にしておこう。
- **「任意の」を注意深く読め。**条件は何切れ食べた後でも成り立たなければならなかったので、パン全体についての値（$\frac{a}{3}$ である）ではなく、V/A の最大値が必要であった。

- **簡単な計算から意外な答え。**耳の面積が等しいという性質はありそうにないように聞こえるが、計算はたった二行である。

背後にある数学

アルキメデスの帽子箱定理

アルキメデスは『球と円柱について』（*On the Sphere and Cylinder*）において、二つの平行な平面に挟まれた球の帯の面積が、球に外接する円柱（cylinder）からその平面が切り取る帯の面積に等しいことを証明した（図 4.8.1）。我々の計算はまさにこの定理である。半径 a の円柱は単位長さあたり $2\pi a$ の耳の面積をもち、球も同じである。球全体をとると、その表面積（surface area）は円柱の側面積 $2\pi a \times 2a = 4\pi a^2$ に等しい。アルキメデスは、このことを、球の体積が円柱の体積の三分の二であるという事実とともに、自らの最高の業績とみなしていた。紀元前 75 年にシラクサを訪れたキケロ（Cicero）は、墓に刻まれた球と円柱を探すことで、草に覆われたその墓を見つけ出した。

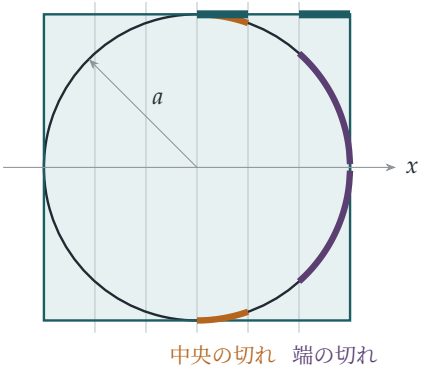


図 4.8.1　外接円柱の中に置かれた半径 a の球形のパンを等しい厚さの切れに切り分けたときの断面。中央の切れ（琥珀色）は、軸から遠く、短くほぼ水平な耳の弧をもつ。端の切れ（紫）は、軸に近く、長く急な耳の弧をもつ。x 軸のまわりに回転させると、どちらも対応する円柱の帯（青緑）とまったく同じ耳の面積、すなわち $2\pi a$ に厚さを掛けたものを与える。

地球の地図

帽子箱定理を使うと、面積を保つ地球の地図を描くことができる。地球儀上の各点を水平に外側へ外接円柱上に射影し、それから円柱を切り開いて平らにする。球の帯は同じ面積をもつ円柱の帯に写され、任意の領域についても同じことが成り立つ。これ

がランベルト（*Lambert*）正積円筒図法（1772 年）である。極付近では形が大きくゆがむが、面積は正確である。これに対し、おなじみのメルカトル（Mercator）図法ではグリーンランドがアフリカと同じくらいの大きさに見える（実際には約十四分の一である）。ガウス（Gauss）の有名な定理である**驚異の定理**（*Theorema Egregium*、1827 年）は、球の地図で面積と形の両方を保つものは存在しないことを示している。地球の平面地図はどれも、何かをゆがめなければならないのである。

球面上の無作為な点

実用的な帰結を一つ紹介しよう。球面上の点を一様に無作為に選ぶには、緯度と経度を一様に選べばよいと考えるかもしれないが、そうすると点は極の付近に密集してしまう。帽子箱定理は正しい方法を与える。高さ x を $-a$ から a の間で一様に選び、経度を 0 から 2π の間で一様に選べばよい。面積は高さに比例するので、これはちょうど一様分布になる。物理学やコンピュータグラフィックスのシミュレーションでは、この方法が使われている。（驚くべきことに、これが成り立つのは三次元の場合だけである。四次元以上の球面についての対応する主張は成り立たない。）

思考のスキル

隠れた単純さを探せ

計算の結果、定数のような思いがけず単純なものが出てきたら、立ち止まってその理由を問え。たいていは幾何学的な理由があり、それを見つけることにこそ本当の理解がある。

ここで被積分関数 $y\sqrt{1+(y')^2}$ が定数になったのは、球面上では傾きの急さと軸からの距離がちょうど互いに補い合うからである。それがアルキメデスの定理である。

次の一歩

1. **パン全体。** 切っていないパン全体について $V/A = \frac{a}{3}$ であることを示せ。問題の条件が $\frac{a}{3} < 1$ よりも満たしにくいのはなぜか。

2. **熱帯。** 地球の表面のうち、南緯 23.4° から北緯 23.4° の間にある部分の割合はいくらか。（地球を球とみなせ。面積は高さに比例するので、必要なのは $\sin 23.4°$ だけである。）

3 **他の形。**放物面（paraboloid）の形をしたパン（$y = \sqrt{x}$ を x 軸のまわりに回転させたもの）では、一切れあたりの耳の面積が定数に**ならない**ことを示せ。どのような曲線 $y(x)$ について $y\sqrt{1 + (y')^2}$ は定数になるか。（微分方程式（differential equation）を解け。）

4 **体積。**体積の公式を使って、アルキメデスが見出したとおり、球の体積が外接円柱の体積の三分の二であることを示せ。

さらに学ぶために

- **Sherman Stein, *Archimedes: What Did He Do Besides Cry Eureka?***（Mathematical Association of America）。アルキメデスの数学を現代の読者向けに解説した本。
- **Timothy Gowers, *Mathematics: A Very Short Introduction***（Oxford University Press）。幾何学の章で曲面の幾何学を紹介している。
- **John Snyder, *Flattening the Earth***（University of Chicago Press）。地図投影法の二千年の歴史。

4.9 ホールディッチの定理

問題

STEP III 2011、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/11-s3-q5`

導入

任意の卵形の曲線をとる。凸（convex）でありさえすれば形は何でもよい。その内側で一定の長さの棒を、両端を曲線上に保ったまま一周させる。棒の上に一点を印し、棒を長さ a と b の部分に分ける。棒が一周すると、この点はひとまわり小さな卵形を描く。二つの曲線にはさまれた環状の領域の面積はいくらか。

驚くべきことに、答えは**もとの曲線の形によらず** πab である。細長い卵形でも、卵の形でも、丸みを帯びた三角形でも、環状の領域の面積はつねに同じであり、棒の上の点の位置だけで決まる。この結果は 1858 年に、ケンブリッジ大学ゴンヴィル・アンド・キーズ・カレッジ（Gonville and Caius College, Cambridge）のフェローであった Hamnet Holditch 牧師によって発見されたもので、初等幾何学において最も意外な定理の一つである。この問題では、面積を表すただ一つの公式を用いてこれを証明する。

取りかかる前に

考えてみよう 最も簡単な場合に定理を確かめよ。$\mathcal{C}$ が半径 R の円であるとき、P はどのような曲線を描くか。また、環状の領域の面積はいくらか。

対称性により、P は同じ中心をもつ、ある半径 r の円を描く。棒 AB は P を通る大きい円の弦（chord）であり、**方べきの定理**（intersecting chords theorem、「power of a point」とも呼ばれる）によれば、P を通る任意の弦について $PA \times PB = R^2 - r^2$ が成り立つ。よって $ab = R^2 - r^2$ であり、環状の領域の面積は $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi ab$ となる。定理は、これが円に限らずすべての凸曲線について成り立つと主張しているのである。

順を追って解く

段階 1　座標から面積を求める

考えてみよう　$x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ とし、これらはすべて t の関数であるとする。ドットが $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ を表すとき、$x\dot{y} - y\dot{x}$ を計算せよ。

$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}$、$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}$ である。したがって

$$x\dot{y} - y\dot{x} = r\cos\theta\,(\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}) - r\sin\theta\,(\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}) = r^2\dot{\theta}.$$

よって $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int r^2\dot{\theta}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int (x\dot{y} - y\dot{x})\,\mathrm{d}t$ である。 ■

この公式には極座標（polar coordinates）は必要なく、媒介変数（parameter）の関数としての直交座標の位置さえあればよい。点が O を囲む閉曲線を反時計回りに一周するとき、この公式は曲線の内部の面積を与える。

段階 2　棒の両端

棒は A から B へ向かって $(\cos t, \sin t)$ の方向を向いており、P は A から距離 a、B から距離 b の位置にある。よって

$$A = (x - a\cos t,\ y - a\sin t), \qquad B = (x + b\cos t,\ y + b\sin t).$$

段階 3　OA が掃く面積

考えてみよう　$(*)$ を A に適用せよ。$x_A\dot{y}_A - y_A\dot{x}_A$ を展開し、項を a の累乗ごとに整理せよ。

$x_A = x - a\cos t$、$y_A = y - a\sin t$ とすると、$\dot{x}_A = \dot{x} + a\sin t$、$\dot{y}_A = \dot{y} - a\cos t$ である。展開すると

$$\begin{aligned} x_A\dot{y}_A - y_A\dot{x}_A &= (x - a\cos t)(\dot{y} - a\cos t) - (y - a\sin t)(\dot{x} + a\sin t) \\ &= (x\dot{y} - y\dot{x}) + a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) - a[(x + \dot{y})\cos t + (y - \dot{x})\sin t]. \end{aligned}$$

0 から 2π まで積分して半分にすると、第 1 項は $[P]$ を、第 2 項は $\frac{1}{2}a^2 \cdot 2\pi = \pi a^2$ を、第 3 項は $-af$ を与える。よって

$$[A] = [P] + \pi a^2 - af. \qquad ■$$

手を止めて、やってみよう 次に $[B]$ を求めよ。（ヒント：B は、A の式の a を何に置き換えれば得られるか。）

$B = (x + b\cos t, y + b\sin t)$ は、A の式で a を $-b$ に置き換えたものである。よって

$$[B] = [P] + \pi b^2 + bf.$$

段階 4　f を消去する

考えてみよう A も B も同じ曲線 $\mathcal{C}$ を一周する。このことから $[A]$ と $[B]$ について何がわかるか。

t が 0 から 2π まで動くとき、A と B はいずれも $\mathcal{C}$ を反時計回りに一周するので、$[A] = [B] =$ 面積$(\mathcal{C})$ である。二つの式を等置すると

$$\pi a^2 - af = \pi b^2 + bf \quad\Longrightarrow\quad f(a+b) = \pi(a^2 - b^2) \quad\Longrightarrow\quad f = \pi(a-b).$$

P は $\mathcal{D}$ を一周するので $[P] =$ 面積$(\mathcal{D})$ であり、

$$\text{面積}(\mathcal{C}) - \text{面積}(\mathcal{D}) = [A] - [P] = \pi a^2 - a\pi(a-b) = \pi ab. \qquad \blacksquare$$

曲線の形に依存する謎めいた量 f は、一度も計算されなかった。消去されたのである。

振り返り

- **問題に合った公式。** 面積の公式 $(*)$ に必要なのは、媒介変数の関数としての座標だけであった。これはまさに棒の運動を記述する方法そのものである。
- **二つの式に一つの未知量。** f は計算できなかったが、f を含む等式が二つあったので、連立方程式を解くときのように f を消去できた。
- **まず特別な場合を試す。** 円の場合を調べたことで、取りかかる前に答え πab が得られ、目指すべきものがわかった。

背後にある数学

グリーンの定理とプラニメータ

公式 $(*)$ は**グリーンの定理**（Green's theorem）の特別な場合である。グリーンの定理は、閉曲線に沿った積分と、その内部の領域上の積分とを結びつける。面積に関する形では、曲線で囲まれた面積は $\frac{1}{2}\oint (x\,dy - y\,dx)$ であると述べており、これは境界を一周するだけで計算できる積分である。技術者たちはこれを**プラニメータ**（planimeter、面積計）として利用した。プラニメータは 19 世紀に発明された機械式の器具で（最も成功したのは Jakob Amsler による 1854 年の設計である）、地図や図面上の図形の境界を指針でなぞると、車輪が囲まれた面積を記録する。プラニメータは、デジタルな方法に取って代わられるまで、土地の面積の測定や、インジケータ線図から蒸気機関のする仕事を求める計算など、さまざまな用途に用いられた。Holditch の定理はこれと密接に関係しており、棒はプラニメータの腕のようなものである。

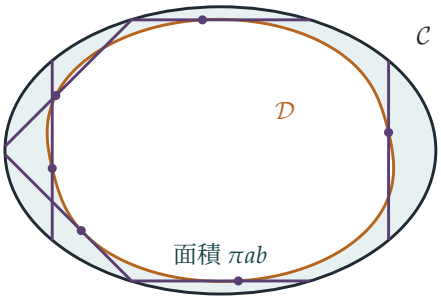


図 4.9.1　半軸の長さが 3 と 2 の楕円（ellipse）と、$a = 1$、$b = 1.5$ である長さ 2.5 の棒に対する Holditch の定理。棒のいくつかの位置（紫）を、点 P とともに示している。P が描く曲線 $\mathcal{D}$（琥珀色）は数値計算によって求めたものであり、二つの曲線にはさまれた網掛けの環状の領域の面積は、定理の予測どおり $4.7124\ldots = 1.5\pi$ である。

細かな条件

Holditch は条件にあまり注意を払わずに定理を述べたが、実際にはいくつかの条件が必要である。棒は両端を曲線上に保ったまま一周できなければならず、また描かれる曲線 $\mathcal{D}$ は一度だけなぞられる単純閉曲線（simple closed curve）でなければならない。$\mathcal{C}$ の幅に比べて棒が長すぎると、$\mathcal{D}$ は自分自身と交わることがあり、公式が与える「面積」は、ある領域を二重に、あるいは負の符号をつけて数えてしまう。この問題では、$\mathcal{D}$ が O を含む凸曲線であると仮定することで、こうした難点を避けている。

定理が成り立つ条件を正確に突き止めることは、美しいアイデアをいかに厳密なものにしなければならないかを示すよい例であり、これは第 3 章のテーマでもある。

思考のスキル

計算できないものは消去する

ある量が複雑すぎて計算できないときは、それを含む二つの異なる等式を探し、その量を消去せよ。

ここでは f は曲線のあらゆる細部に依存していたが、$[A]$ と $[B]$ の両方の式に現れ、$[A] = [B]$ という事実によって消えた。答え πab が曲線によらないものになりえたのは、曲線に依存する部分が打ち消し合ったからにほかならない。

次の一歩

1 **楕円の面積。** $x = p\cos t$、$y = q\sin t$ として $(*)$ を用い、半軸の長さが p と q の楕円の面積が πpq であることを示せ。

2 **円の場合。** 方べきの定理を証明せよ。すなわち、円の二本の弦が P で交わるとき、それぞれの弦が分けられてできる二つの線分の長さの積は等しいことを示せ。これを用いて、円に対する Holditch の定理を導け。

3 **中点。** $f = \pi(a - b)$ から、P が棒の中点（midpoint）であるとき $f = 0$ となることを示せ。このとき、環状の領域の面積を棒の長さ L を用いて表せ。

4 **三角形。** やや難 頂点が $(0,0)$、(x_1, y_1)、(x_2, y_2) である三角形の境界をなぞることにより、$(*)$ を用いてその面積を求め、それが $\frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$ に等しいことを示せ。これは任意の多角形の面積を与える「靴ひも公式」（shoelace formula）の出発点である。

さらに学ぶために

- **Mark Levi, *The Mathematical Mechanic***（Princeton University Press）。棒や車輪やばねを使った物理的な推論によって数学の結果を証明する本であり、この節の精神に通じる。
- **H. M. Schey, *Div, Grad, Curl, and All That***（Norton）。グリーンの定理を含む、ベクト

ル解析への気軽な入門書。

- **Hamnet Holditch,「Geometrical theorem」**, *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 2 (1858)。原論文。短い一段落だけのもので、細かな条件は一切書かれていない。

学んだこと

この章は、積分とは本当は何なのか、積分によって何が証明できるのか、そして積分に公式がないときにはどうすればよいのか、という問いから始まった。章の 9 つの問題がこれらの問いにどう答えたかを、ここでまとめておこう。

1. 積分とは何か、そしてどんな関数が積分をもつのか

Section 4.1 では、積分（integral）を細い長方形による下方和（lower sum）と上方和（upper sum）の共通の極限として定義し、その定義だけを用いて $\int_0^a x^5\,dx$ を計算した。これにはかなりの手間がかかった。連続する整数の積の和を打ち消し合う和（telescoping sum）として扱い、両側から評価し、はさみうち（squeeze）を用いたのである。この手間こそが、微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）がどれほど多くのものを無償で与えてくれるかを示す尺度である。

定義からはまた、すべての関数が可積分（integrable）であるわけではないこともわかった。有理数で 1、無理数で 0 をとるディリクレ（Dirichlet）の関数は、上方和がすべて 1、下方和がすべて 0 になる。このような問題がきっかけとなって、ルベーグ（Lebesgue）はより強力な積分論を築いた。それには大学に入ってから出会うことになる。

2. 積分によって何が証明できるのか

面積よりはるかに多くのことが証明できる。

- **数の間の不等式。** 正の関数の積分が $\frac{22}{7} - \pi$ に等しいので、$\frac{22}{7} > \pi$ である（Section 4.3）。「$A - B$ を正の関数の積分として表す」という考え方は、単純であると同時に非常に役に立つ。
- **無限積と特殊値。** $\int \sin^n t\,dt$ の漸化式（reduction formula）、不変量（invariant）、そしてはさみうちから、ウォリス（Wallis）の積、スターリング（Stirling）の公式に現れる定数、そして $\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ が得られた（Section 4.4）。
- **無限級数。** x^x をべき級数（power series）に展開して項別積分（term-by-term integration）することで、「二年生の夢」（sophomore's dream）が得られた（Section 4.5）。

- **三角関数の基礎。** $\mathrm{T}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ および $\pi = 2\mathrm{T}(\infty)$ と定義すると、置換だけで加法定理（addition formula）や $\mathrm{T}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ のような特殊値が導かれた（Section 4.2）。
- **幾何。** 被積分関数が定数に簡約されることから、アルキメデス（Archimedes）の帽子箱定理（hat-box theorem）が明らかになり（Section 4.8）、面積の公式を境界に沿った積分として書くことで、Holditch の驚くべき定理が証明された（Section 4.9）。
- **最適な関数。** 積分の中で平方完成（completing the square）を行うことで、$\int \left((y')^2 - a^2y^2\right)$ が非負でなければならないのはどのような場合かが正確にわかり、臨界値 $\frac{\pi}{2}$ は固有値（eigenvalue）であることが判明した（Section 4.7）。

3. 公式がないとき、何ができるのか

Section 4.6 では、$\int \frac{e^x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ が有理関数（rational function）と e^x の積として表せないことを証明した。さらにリウヴィル（Liouville）の理論によれば、この積分は初等関数による公式をまったくもたない。極（pole）という観点から見ると、その理由は、原始関数（antiderivative）が $x = -1$ の近くで対数のように振る舞わなければならず、有理関数にはそれができないということである。それでもこの積分はきちんと存在し、計算することもできる。数値的に計算することも、級数によって計算すること（Section 4.5 の $\int x^x$ のように）もできるし、Section 3.9 で W 関数に対して行ったように、名前を与えて新しい関数として研究することもできる。

4. 積分の道具箱

手法	用いた場面
定義に基づく計算	長方形による $\int_0^a x^5$（4.1）
打ち消し合う和	連続する整数の積の和（4.1）
積分を保つ置換	$\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ からの三角関数（4.2）
多項式の割り算	$\frac{22}{7} - \pi$（4.3）
正値性と被積分関数の評価	$\pi < \frac{22}{7}$（4.3）
漸化式	$\int \sin^n t$（4.4）、$\int x^m (\ln x)^n$（4.5）
不変量とはさみうち	$nu_n u_{n-1} = \frac{\pi}{2}$（4.4）
項別積分	二年生の夢（4.5）
因数と次数による議論	有理関数の原始関数が存在しないこと（4.6）
平方完成	変分法（4.7）
積分する前に簡約する	球形のパン（4.8）
境界積分としての面積	Holditch の定理（4.9）

この先へ

- Section 4.4 のガンマ関数（Gamma function）とベータ関数（Beta function）、そしてスターリングの公式の定数 $\sqrt{2\pi}$ は、Section 12.23 で確率の文脈に再び現れる。
- Section 4.7 の固有値問題は、Section 8.6 で量子調和振動子（quantum harmonic oscillator）となる。
- Section 4.2 の加法定理から組み立てられるマチン（Machin）の公式は、Section 5.1 の主題である。
- 第 5 章では複素数（complex number）を扱う。複素数を用いると、この章の積分の多くになぜ π が現れるのかが説明できる。

大学に入る前にさらに先へ進みたい人へ

- **Paul Nahin, *Inside Interesting Integrals***（Springer）：巧妙な積分と、その背後にある技法がふんだんに詰まった一冊。
- **William Dunham, *The Calculus Gallery***：ニュートン（Newton）からルベーグまでの解析学の傑作集。
- **Michael Spivak, *Calculus***：積分の定義と基本定理をきちんと扱っている。
- **Sherman Stein, *Archimedes***：積分の古代における起源を知るために。

エルミート（Hermite）は導関数をもたない関数に尻込みしたが、積分はそのような問題を抱えたことがない。積分は寛大であり、微分では扱えない関数をも受け入れ、そして驚きを生み出し続ける。この章を貫くテーマがひとつあるとすれば、それは、積分は単に面積を求めるための技法ではないということである。積分は、数や関数や図形についての事実を表現し証明するための言語であり、これから先の数学人生を通して、君はこの言語を話し続けることになるだろう。

「次の一歩」の解答

以下は略解とヒントであり、完全な解答ではない。結果と鍵となるステップを示してあるので、自分の答えの確認に用いてほしい。答えを見る前に、各問題にきちんと取り組むこと。

4.1 積分とは何か？

1. この和は、$[1,2]$ 上で $y=\mathrm{f}(x)$ の下にある幅 $\frac{1}{n}$ の n 個の長方形の面積の総和である。$\mathrm{f}(x)=\frac{1}{x}$ とすると、$\frac{1}{n}\sum\frac{1}{1+m/n}=\sum\frac{1}{n+m}\to\ln 2$ となる。2 番目の和は $\frac{1}{n}\sum\frac{1}{1+(m/n)^2}\to\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$ である。

2. n 個の帯に分けたときの上和（upper sum）は $\frac{a}{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{ra}{n}\right)^2=\frac{a^3(n+1)(2n+1)}{6n^2}$ であり、下和（lower sum）は最初の因数の $n+1$ を $n-1$ に置き換えたものである。いずれも $\frac{a^3}{3}$ に収束する。

3. 各項は次々に打ち消し合う（telescope）：$r(r+1)\cdots(r+k)-(r-1)r\cdots(r+k-1)=(k+1)\,r(r+1)\cdots(r+k-1)$。

4. $\sum_{r=1}^{n}r^5=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$。

4.2 積分から三角関数を構成する

1. 導関数（derivative）は $-\mathrm{f}(a-x)\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(a-x)\mathrm{f}(x)=0$ であるから、$\mathrm{f}(a-x)\mathrm{f}(x)=\mathrm{f}(a)$ である。ここで $a=x+y$ とおけばよい。余弦（cosine）については、y を固定して $p(x)=\mathrm{c}(x+y)-\mathrm{c}(x)\mathrm{c}(y)+\mathrm{s}(x)\mathrm{s}(y)$、$q(x)=\mathrm{s}(x+y)-\mathrm{s}(x)\mathrm{c}(y)-\mathrm{c}(x)\mathrm{s}(y)$ とおく。すると $p'=-q$、$q'=p$ となるから p^2+q^2 は定数であり、$x=0$ でその値は 0 である。

2. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=(1+u^2)^{-3/2}$、$\sqrt{1-y^2}=(1+u^2)^{-1/2}$ であるから、$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ となる。よって $\mathrm{S}(\frac{1}{\sqrt{2}})=\mathrm{T}(1)$ であり、小問 (i) で $x=1$ とすると $\mathrm{T}(1)=\frac{1}{2}\mathrm{T}_\infty$ が得られる。

3. $a=\frac{1}{2}$、$x=\frac{1}{3}$ とすると $\frac{x+a}{1-ax}=1$ となるので、$\mathrm{T}(\frac{1}{3})=\mathrm{T}(1)-\mathrm{T}(\frac{1}{2})$ である。

4. $[0,1]$ 上で $\frac{1}{1+u^2}\le 1$、$[1,x]$ 上で $\le\frac{1}{u^2}$ であるから、$x\ge 1$ のとき $\mathrm{T}(x)\le 1+(1-\frac{1}{x})<2$ であり、$0<x<1$ のとき $\mathrm{T}(x)<\mathrm{T}(1)\le 1$ である。（評価 $1+\int_1^x u^{-2}\,\mathrm{d}u$ は

$x < 1$ では成り立たない。$x = \frac{1}{2}$ ではこれは 0 に等しい。）T は増加かつ有界（bounded）であるから、極限（limit）をもつ。

4.3 22/7 は π より大きい

1. $\frac{22}{7} - \pi \approx 0.001264$ であり、これは $\frac{1}{1260} \approx 0.000794$ と $\frac{1}{630} \approx 0.001587$ の間にある。
2. $\frac{(4!)^2}{9!} = \frac{576}{362\,880} = \frac{1}{630}$。
3. $\frac{x(1-x)^2}{1+x^2} = x - 2 + \frac{2}{1+x^2}$ であり、これを積分すると $\frac{1}{2} - 2 + \frac{\pi}{2}$ となる。同様に $\frac{x^2(1-x)^4}{1+x^2} = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4 + \frac{4}{1+x^2}$ であり、これを積分すると $\frac{1}{5} - 1 + \frac{5}{3} - 4 + \pi = \pi - \frac{47}{15}$ となる。どちらの積分も正である。これらの被積分関数（integrand）は $\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}$（その最大値は約 0.003）よりずっと大きいので、誤差 $\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \approx 0.07$ および $\pi - \frac{47}{15} \approx 0.008$ も大きくなる。
4. 多項式の割り算（polynomial division）を行うと剰余（remainder）$\frac{16}{1+x^2}$ が残り、これを積分すると 4π になる。積分の値は $4\pi - \frac{188684}{15015} \approx 3.6 \times 10^{-6}$ であるから、$\pi \approx 3.14159174$ である。

4.4 ウォリス、ベータ、そして二分の一の階乗

1. $u_{2m} = \frac{1\cdot3\cdots(2m-1)}{2\cdot4\cdots2m} \cdot \frac{\pi}{2}$、$u_{2m+1} = \frac{2\cdot4\cdots2m}{3\cdot5\cdots(2m+1)}$ である。すると $1 < \frac{u_{2m}}{u_{2m+1}} < \frac{u_{2m-1}}{u_{2m+1}} = \frac{2m+1}{2m}$ であるから、この比は 1 に収束し、これを整理すると $\frac{\pi}{2} = \prod_{k\geq1} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}$ となる。
2. 部分積分（integration by parts）により $I_n = \frac{n}{n+1} \int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$ が得られ、$x^{n+1}(1-x)^{n-1} = x^n(1-x)^{n-1} - x^n(1-x)^n$ と書いて対称性（symmetry）を用いると $I_n = \frac{n}{2(2n+1)} I_{n-1}$ が導かれる。帰納法（induction）により $\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ を得る。$x = \sin^2\theta$ とおくと $I_{1/2} = \int_0^{\pi/2} 2\sin^2\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8}$ である。この公式からは $\big((\frac{1}{2})!\big)^2/2! = \frac{\pi}{8}$ が示唆されるので、$(\frac{1}{2})! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$（これは $\Gamma(\frac{3}{2})$ である）となる。
3. 対称性は $x \mapsto 1-x$ から、漸化式（recurrence）は $x^p = x^{p-1} - x^{p-1}(1-x)$ から得られる。また $x = \frac{t}{1+t}$ とおくと $1 - x = \frac{1}{1+t}$、$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$ である。この積分は $\mathrm{b}(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$ であり、漸化式と対称性を用いて $\mathrm{b}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$ に帰着させると $\frac{3\pi}{256}$ を得る。
4. 小問 (i) で求めた明示的な値から、$u_{2m} = \frac{(2m)!}{(2^m m!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \binom{2m}{m} \frac{\pi}{2^{2m+1}}$ である。さらに $2mu_{2m}^2 \to \frac{\pi}{2}$ から $\binom{2m}{m}^2 \approx \frac{4^{2m}}{\pi m}$ が得られる。$m = 10$ のとき、$\binom{20}{10} = 184\,756$ に対して $\frac{4^{10}}{\sqrt{10\pi}} \approx 187\,079$（約 1.3% 大きい）である。

4.5 2年生の夢

1. $x^{-x} = e^{-x\ln x} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-x\ln x)^n}{n!}$ であり、$\int_0^1 \frac{x^n(-\ln x)^n}{n!}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ である（$x = e^{-u}$ と置換（substitution）する）。よってこの積分は $\sum_{n\geq 1} n^{-n} \approx 1.2913$ である。

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^x = x^x(\ln x + 1)$ であり、これは $x = \frac{1}{e}$ で 0 になる。そのときの値は $(e^{-1})^{e^{-1}} = e^{-1/e} \approx 0.692$ である。

3. 各項は $\frac{1}{n^n}$ である。7 項で打ち切ると誤差は $\frac{1}{8^8} \approx 6 \times 10^{-8}$ より小さく、これで十分である。6 項で打ち切った場合の評価 $\frac{1}{7^7} \approx 1.2 \times 10^{-6}$ では足りない。よって 7 項必要である。

4. 部分積分により、$\int_0^1 x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3 \ln x}{3}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{9}$ である。一般に $\int_0^1 x^n \ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n+1)^2}$ であり、また $\frac{\ln x}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n \ln x$ である。

4.6 公式で表せない積分

1. 微分すると、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{e^x}{x+1} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$、また $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{(x-1)e^x}{x+1} = e^x\left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}\right) = \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^2}$ である。

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{P}e^{-x^2}\right) = (\mathrm{P}' - 2x\mathrm{P})e^{-x^2}$ であり、$\mathrm{P}' - 2x\mathrm{P}$ の次数（degree）は（$\mathrm{P} \neq 0$ のとき）$\deg \mathrm{P} + 1 \geq 1$ であるから、これが 1 に等しくなることはない。

3. $\mathrm{R} = \mathrm{P}/\mathrm{Q}$（既約な形）が 0 において位数（order）$k \geq 1$ の極（pole）をもつとすると、$\mathrm{R}' + \mathrm{R}$ はそこで位数 $k+1 \geq 2$ の極をもつが、$\frac{1}{x}$ の極の位数は 1 である。R が 0 に極をもたなければ、$\mathrm{R}' + \mathrm{R}$ も極をもたない。いずれにせよ $(\mathrm{R}e^x)' \neq \frac{e^x}{x}$ である。

4. $\frac{\mathrm{P}e^x}{x+1}$ を微分すると $e^x\frac{(x+1)\mathrm{P}' + x\mathrm{P}}{(x+1)^2}$ となる。$x = -1$ において $\mathrm{f}(-1) = -\mathrm{P}(-1)$ であり、$\mathrm{f}' = (x+1)\mathrm{P}'' + (x+1)\mathrm{P}' + \mathrm{P}$ から $\mathrm{f}'(-1) = \mathrm{P}(-1)$ を得る。$x^3 - 2$ については $-3 + 3 = 0$、x については $-1 + 1 = 0$、$x^2 + 1$ については $2 - 2 = 0$ である。この条件は十分条件でもある。次数 d 未満の多項式から次数 d 以下の多項式への写像 $\mathrm{P} \mapsto (x+1)\mathrm{P}' + x\mathrm{P}$ は単射（injective）であるから、その像（image）の次元（dimension）は d である。そしてこの像は、$\mathrm{f}(-1) + \mathrm{f}'(-1) = 0$ を満たす f 全体のなす d 次元空間に含まれるので、その空間全体に一致する。

4.7 変分法

1. $y = \cos\frac{\pi x}{2}$ とすると、$J = \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \sin^2 - a^2\int_0^1 \cos^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - a^2\right) < 0$ である。

2. $J(y + \varepsilon\eta) = J(y) + 2\varepsilon\int_0^1 (y'\eta' - a^2 y\eta) + \varepsilon^2 J(\eta)$ である。$\varepsilon = 0$ で最小となるためには、1 次の項（linear term）が消えなければならない。部分積分すると、$\eta(1) = 0$

を満たすすべての η に対して $-y'(0)\eta(0) - \int_0^1 (y'' + a^2 y)\eta = 0$ となり、これから $y'' + a^2 y = 0$ かつ $y'(0) = 0$ が従う。

3. $x = Lu$ とおくと $\int_0^L \left((y')^2 - a^2 y^2\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{L}\int_0^1 \left((Y')^2 - (aL)^2 Y^2\right) \mathrm{d}u$ であるから、条件は $aL \le \frac{\pi}{2}$ である。（$aL = \frac{\pi}{2}$ のときも本文と同様に積分が負になることはないが、$y = \cos\frac{\pi x}{2L}$ のときに 0 となる。$aL > \frac{\pi}{2}$ のときは、同じ関数によって積分は負になる。）

4. サイクロイド（cycloid）は $x = R(\theta - \sin\theta)$、$y = R(1 - \cos\theta)$ である。等時曲線（tautochrone）については Section 11.4 を参照のこと。弧長（arc length）を用いて表すと、運動はちょうど単振動（simple harmonic motion）になる。

4.8 球形のパンを切る

1. $V/A = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{3}$ である。しかし、高さ t の残りの部分については $A = 2\pi a t$、$V = \frac{1}{3}\pi t^2(3a - t)$ であるから $V/A = \frac{t(3a-t)}{6a}$ となり、これは $t = \frac{3}{2}a$ のとき最大値 $\frac{3a}{8}$ をとる。これは $\frac{a}{3}$ より大きい。

2. この帯の高さは、球の高さ $2R$ のうち $2R\sin 23.4^\circ$ であるから、その割合は $\sin 23.4^\circ \approx 0.40$ である。

3. $y = \sqrt{x}$ のとき $y\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{x + \frac{1}{4}}$ であり、定数ではない。$y\sqrt{1 + (y')^2} = c$ からは $(y')^2 = \frac{c^2}{y^2} - 1$ が得られ、その解は $y = c$（円柱（cylinder））と円 $(x - x_0)^2 + y^2 = c^2$（球）である。

4. 球の体積は $\frac{4}{3}\pi a^3$、円柱の体積は $\pi a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3$ であり、その比は $\frac{2}{3}$ である。

4.9 ホールディッチの定理

1. $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (p\cos t \cdot q\cos t + q\sin t \cdot p\sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot 2\pi pq = \pi pq$。

2. 2 本の弦（chord）の端点を結んでできる三角形は相似（similar）である（同じ弧に対する角は等しい）から、$PA \cdot PB = PC \cdot PD$ である。半径 R の円において P が中心から距離 r にあるとき、P を通る直径を考えると $(R - r)(R + r)$ となるので、$ab = R^2 - r^2$ であり、環状領域（ring）の面積は $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi ab$ である。

3. $a = b$ ならば $f = \pi(a - b) = 0$ であり、環状領域の面積は $\pi a^2 = \frac{\pi L^2}{4}$ となる。これは棒を直径とする円の面積である。

4. O を通る 2 辺に沿っては $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = 0$ である。3 番目の辺を $0 \le s \le 1$ として $(x_1, y_1) + s(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ と媒介変数表示（parametrisation）すると、これは $(x_1 y_2 - x_2 y_1)\,\mathrm{d}s$ となる。よって面積は $\frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$ である。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

全 13 章のうちの第 4 章。 本書全体、すべての章、すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.