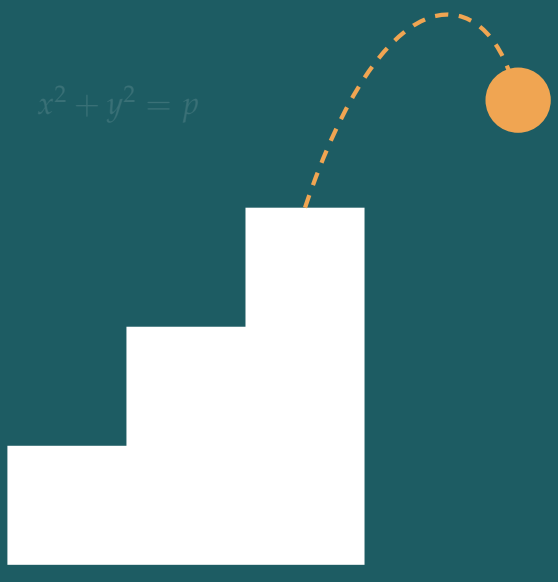
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

第 3 章

関数・不等式・厳密性（Functions, Inequalities and Rigour）



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

第 3 章

関数・不等式・厳密性（Functions, Inequalities and Rigour）

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

第 3 章：関数・不等式・厳密性（Functions, Inequalities and Rigour）

これは *Beyond STEP* 全 13 章のうちの第 3 章である。本書全体、各章単独の PDF、各節の印刷用ワークシート、そしてすべての STEP の問題の詳しい解答は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、`github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty` への issue として歓迎する。

章

3

関数・不等式・厳密さ

何かが正しいと知っていることと、なぜ正しいのかを知っていることは同じではない。その違いにこそ数学は宿っている。

この章の内容

3.1 誤りを見抜け STEP I 1991

3.2 相加・相乗平均を逆向きに STEP II 1993

3.3 凸性の威力 STEP II 2007

3.4 不等式を証明する面積 STEP III 2011

3.5 π^e か e^π か？ STEP II 2013

3.6 傾きの上界 STEP I 1988

3.7 $\pi^2 \leq 10$ STEP II 2014

3.8 加法定理から関数を決める STEP III 2019

3.9 新しい関数を発明する STEP II 2021

A 演習問題の答え p. 69

正しさを確かめる

> 数学は理解するものではない。ただ慣れるものである。
>
> — ジョン・フォン・ノイマン（John von Neumann）

1 = 2 の「証明」を一つ示そう。$a = b$ とする。このとき $a^2 = ab$ であるから $a^2 - b^2 = ab - b^2$ となり、これを因数分解すると $(a+b)(a-b) = b(a-b)$ である。両辺の $a-b$ を約分すると $a+b = b$ となり、$a = b$ であるからこれは $2b = b$ を意味し、したがって $2 = 1$ である。

おそらく問題点には気づいたであろう。$a = b$ であるから、「$a-b$ を約分する」ことは 0 で割ることにほかならない。しかし、どの段階もいかにもっともらしく見えたか、そして誤りがいかにたやすくありふれた操作の中に隠れていたかに注意してほしい。実際の数学における実際の誤りがこれほど明白であることはまれであり、史上最も偉大な数学者たちでさえそうした誤りに欺かれてきた。本章のテーマは、そうした誤りを見抜くための思考の習慣である。すなわち、正確な定義、定理の慎重な使用、そしてあまりに簡単すぎるように見える論証に対する健全な疑いである。

なぜ厳密さが重要なのか

学校での数学は、主として答えを求めることである。大学での数学は、主として**自分の答えが正しいと知ること**、そしてそれを他人に納得させられることである。この転換は学校の数学と大学の数学のあいだにある最大の変化であり、戸惑いを覚えることもあるだろう。「明らかに」成り立つことを証明するのに、なぜ 1 ページも費やすのか、と。

その答えは、「明らか」というものが当てにならないからである。解析学（analysis）の歴史は、明らかに見えたのに誤っていた結果であふれている。たとえば、連続関数（continuous function）は、孤立した数点を除けば微分可能（differentiable）でなければならないという主張（アンペール（André-Marie Ampère）は 1806 年にその「証明」を発表したが、1872 年にワイエルシュトラス（Weierstrass）は**いたるところで**微分可能でない連続関数を発見した）、連続関数の収束する和は連続であるという主張（コーシー（Cauchy）はこれを信じていたが、アーベル（Abel）が反例（counterexample）を見つけた）、収束する級数（convergent series）の項は和を変えずに並べ替えることができるという主張（一般にはできない）などである。厳密さ（rigour）は杓子定規な

細かさではない。正しいものと、もっともらしいだけのものとを見分ける唯一の確かな方法なのである。

不等式：解析学の道具

本章の第二のテーマは**不等式**（inequality）である。学校の数学では、ほとんどの結果は等式、すなわち「これはあれに等しい」という形をしている。解析学では、ほとんどの結果は不等式、すなわち「これは高々あれである」という形をしている。数列が収束することを証明するには、誤差がどんな許容値よりも**小さい**ことを示す。積分が存在することを証明するには、ある和が**有界**であることを示す。近似がどれほど良いかを評価するには、誤差を上から押さえる。プロの解析学者は等式よりもはるかに多くの時間を不等式の証明に費やしており、本章で出会う古典的な不等式（AM–GM、イェンセン（Jensen）、ヤング（Young）、ヘルダー（Hölder）、コーシー–シュワルツ（Cauchy–Schwarz））は、まさに商売道具なのである。

これらの不等式は、それ自体としても目を見張るものである。関数に関するたった一つの不等式が、うまく選んだ例と組み合わせることで $\pi^2 \leq 10$ を証明する（Section 3.7）。対数関数のグラフの形に関する事実から、π^e と e^π のどちらが大きいかが決着する（Section 3.5）。ある化学者が抱いた測定誤差に関する疑問が、数学で最も重要な多項式のいくつかへとつながっていく（Section 3.6）。

大学で出会うもの

厳密さは、大学 1 年次の**解析学**のテーマであり、また**数と集合**（Numbers and Sets）や**基礎**（Foundations）などと呼ばれることの多い、証明を正確に書く方法を学ぶ講義のテーマでもある。そこでは連続性と微分可能性の形式的な定義に出会い、また正確な仮定をもつ定理（中間値の定理（intermediate value theorem）、平均値の定理（mean value theorem）、最大値・最小値の定理（extreme value theorem））に出会う。これらの定理では仮定が本当に重要である。さらに進んだ講義では、本章の不等式がそれぞれ一つの分野へと発展していく。**関数解析**（functional analysis）は、Section 3.4 や Section 3.7 に出てくるような積分によって測られる関数の空間を研究する。**凸解析**（convex analysis）や**最適化**（optimisation）は Section 3.3 から生まれる。**近似理論**（approximation theory）は Section 3.6 から生まれる。そして Section 3.9 に出てくるような**特殊関数**（special functions）は、応用数学や物理学のいたるところに現れる。

本章を貫く問い

三つの大きな問い

1. **論証が正しいことをどうやって知るのか？**もっともらしい論証が破綻するよくあるパターンにはどのようなものがあり、それをどう確かめればよいのか。
2. **不等式はどうやって証明するのか？**古典的な不等式はどこから来るのか、そしてどれを使うべきかをどう選ぶのか。
3. **関数とは、本当のところ何なのか？**関数を、式によってではなく、その関数がもつ性質によって定義することはできるのか。また、既存の関数では足りないとき、新しい関数を作り出すことはできるのか。

本章はまず誤りを見つけることから始まり（Section 3.1）、続いて古典的な不等式を、それぞれ異なる角度から扱っていく。風変わりな帰納法（induction）、凸性（convexity）、面積、グラフの形、多項式補間（polynomial interpolation）、そしてテスト関数（test function）である。最後に、性質によって定義される関数を扱う二つの節で締めくくる。加法定理（addition law）から定まる e^x と $\tanh x$、そして逆関数として定義されるまったく新しい関数である。

本章に登場する考え方

§	主題	考え方
3.1	もっともらしい誤った論証	計算・論理・隠れた仮定の点検
3.2	AM–GM	前進後退帰納法
3.3	イェンセンの不等式	凹（concave）な曲線は弦より上にある
3.4	ヤングの不等式	図の中で面積を比べる
3.5	π^e か e^π か？	一つの関数に帰着させ、そのグラフを調べる
3.6	2 次関数の傾き	未知のものを既知のもので表す
3.7	$\pi^2 \leq 10$	一般的な不等式にテスト関数を代入する
3.8	e^x と $\tanh x$	関数方程式（functional equation）によって定義される関数
3.9	W 関数	逆関数として関数を作り出す

本章の読み方

これまでと同様、解答を読む前にまず各問題に挑戦してほしい。本章ではさらにもう一つのことを試してほしい。各解答を読んだあと、振り返って、不注意な学生が間違

えそうな一つか二つの段階を探すのである。隠れた仮定はどこに紛れ込みうるか。どの定理のどの仮定を確認する必要があるか。このように批判的かつ能動的に読むことこそ、大学に入る前に身につけられる最も有益な習慣である。

3.1 誤りを見抜け

問題

STEP I 1991、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/91-s1-q6`

導入

試験問題の多くは、論証を組み立てることを求める。この問題は逆に、二つの論証を示し、それを分解して検討することを求めている。これはまったく別の技能であり、大学で最もよく使う技能でもある。自分の答案を見直すとき、本に書かれた証明を読んでそれを信じてよいか判断するとき、友人の答案を採点するとき、論文を査読するとき、いずれもこの技能が必要になる。

ここに挙げた論証は、学ぶところの多い形で誤っている。どの段階も、これまで何度も見てきたものと**同じように見える**。計算の誤りを含む段階もあるが、より深刻なのは**論理**の誤り、すなわち計算が正しくても結論が導かれないという誤りである。こうした誤りこそが専門的な数学の場にまで生き残るものであり、それを見抜くことがこの章の主題である。

取りかかる前に

考えてみよう 「各段階を批判せよ」と言われたとき、各段階で何を確かめればよいだろうか。取りかかる前に一覧を作ってみよう。

よいチェックリストには少なくとも三つの問いが含まれる。**計算は正しいか。この段階はそれまでの段階から導かれるか。隠れた仮定（関数が連続（*continuous*）である、極限（*limit*）が存在する、停留点（*stationary point*）は極大か極小でなければならない、など）はないか。**問題はさらに、結論がそれでも正しい可能性があるかどうかも問うている。誤った論証が正しい結論をもつこともあるので、これは別に確かめる必要が

ある。

順を追って解く

段階 1　導関数は正しいか

> **考えてみよう**　商の微分法（quotient rule）を用いて g を微分せよ。$g'(x)=0$ となるのはどこか。$x=1$ と $x=-1$ を直接確かめよ。

商の微分法により、

$$g'(x)=\frac{6x^2(x^4+4)-(2x^3+3)\cdot 4x^3}{(x^4+4)^2}=\frac{-2x^6-12x^3+24x^2}{(x^4+4)^2}=\frac{-2x^2(x^4+6x-12)}{(x^4+4)^2}.$$

よって $g'(x)=0$ となるのは $x=0$ または $x^4+6x-12=0$ のときである。$x=1$ では $x^4+6x-12=-5$、$x=-1$ では -17 である。どちらも停留点ではない。最初の主張は**誤り**である。

4 次式（quartic）$x^4+6x-12$ は $x=0$ で -12 であり、両方向で $+\infty$ に発散するので、正の根と負の根を（少なくとも）一つずつもつ。第 2 次導関数（second derivative）$12x^2$ は非負なのでこの関数は凸（convex）であり、零を横切るのは高々 2 回である。したがって実数解はちょうど二つである。数値的には $x\approx 1.386$ と $x\approx -2.247$ である。

段階 2　値は正しいか

$g(0)=\frac{3}{4}$ は正しく、$g(1)=\frac{5}{5}=1$ も正しい。しかし $g(-1)=\frac{-2+3}{1+4}=\frac{1}{5}$ であり、1 ではない。論証自身の枠組みの中でさえ計算の誤りがある。g を偶関数（even function）と思い込んでいたようである。

段階 3　値を比べればどれが極大かわかるか

> **考えてみよう**　ある関数がちょうど二つの停留点をもち、その値が $\frac{3}{4}$ と 1 であるとする。このとき、前者が極小（local minimum）で後者が極大（local maximum）であるといえるだろうか。

いえない。停留点の**種類**は局所的な性質であり、その点の近くで関数がどう振る舞うかによって決まる。別の点での値と比べて大きいか小さいかで決まるものではない。極大値が極小値より小さい関数（$x+2\sin x$ を考えよ）もあれば、極大でも極小でもない停留点もある。ここでは、$x=0$ の近くで因数 $x^4+6x-12$ は -12 に近いので、

$$g'(x)=\frac{-2x^2(x^4+6x-12)}{(x^4+4)^2}>0 \qquad \text{十分小さい} x\neq 0.$$

導関数（derivative）は 0 の両側で正である。つまり $x = 0$ は極小ではなく、停留点である**変曲点**（point of inflection）である。

段階 4 停留値は関数の値の範囲を限るか

> **手を止めて、やってみよう** 停留点が正しく求められていたとしても、g のすべての値が最小の停留値と最大の停留値の間にあると結論できないのはなぜか。$g(x) < \frac{3}{4}$ となる x の値を一つ見つけよ。

停留点は**局所的な**振る舞いしか表さない。大域的な振る舞いは、定義域の端、ここでは $x \to \pm\infty$ のときに何が起こるかにも依存する。$x \to \pm\infty$ のとき $g(x) \to 0$ であり、また $2x^3 + 3 < 0$ すなわち $x < -\sqrt[3]{3/2} \approx -1.14$ のときは常に $g(x) < 0$ であるから、この関数は負の値をとる。たとえば $g(-2) = \frac{-13}{20}$ である。したがって結論 $\frac{3}{4} \le g(x) \le 1$ は**誤り**である（図 3.1.1）。

正しくは次のとおりである。g は増加して $x \approx 1.386$ で約 1.083 の最大値をとり、その後 0 に向かって減少する。左側では、0 から減少して $x \approx -2.247$ で約 -0.668 の最小値をとり、その後増加して $x = 0$（ここで接線が水平な変曲点をもつ）を通り、最大値まで増加する。よってすべての x について $-0.668 \lesssim g(x) \lesssim 1.083$ である。

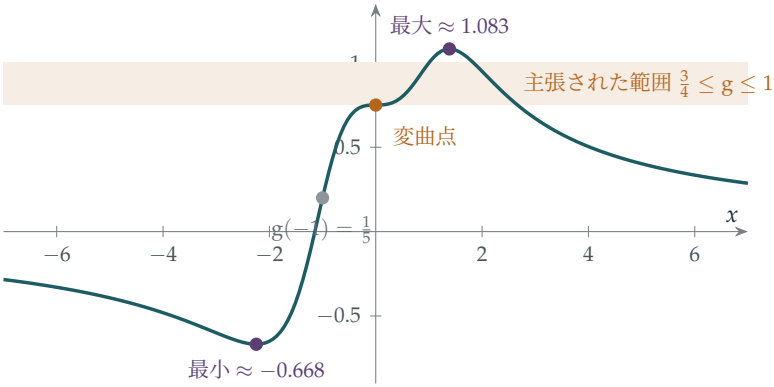


図 3.1.1 $g(x) = \frac{2x^3+3}{x^4+4}$ の正しいグラフ。論証が主張する範囲（琥珀色の帯）はあらゆる点で誤っている。$x = -1$ は停留点ではなく、$g(-1) = \frac{1}{5}$ である。$x = 0$ は極小ではなく変曲点である。そして関数は帯から大きくはみ出し、1 を超える最大値と 0 を下回る最小値をとる。

段階 5 積分

> **考えてみよう** $-3(1-x)^{-4}$ を微分せよ。$(1-x)^{-3}$ になるだろうか。

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-3(1-x)^{-4}\right] = -3\cdot(-4)(1-x)^{-5}\cdot(-1) = -12(1-x)^{-5}$ である。指数も係数も誤っている。正しい原始関数（antiderivative）は

$$\int (1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(1-x)^{-2} + C,$$

であり、微分すれば確かめられる。

考えてみよう　正しい原始関数を用いると、$\left[\tfrac{1}{2}(1-x)^{-2}\right]_{-1}^{3} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} = 0$ となる。結局、答えは正しかったのだろうか。本当にそうだろうか。

正しくない。微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ は、被積分関数が区間 $[a,b]$ 全体で連続であることを必要とする。ここで $(1-x)^{-3}$ は $[-1,3]$ の内部にある $x=1$ で定義されず、$x=1$ の近くでは非常に大きな値をとる。この積分は**広義積分**（improper integral）として扱い、問題の点で分割しなければならない。

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\tfrac{1}{2}(1-x)^{-2}\right]_{-1}^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{1}{8}\right) = +\infty.$$

-1 から 1 までの積分は無限大であり（1 から 3 までの積分は $-\infty$ である）、したがって $\int_{-1}^{3}(1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x$ は**存在しない**。結論「$=0$」が誤りであるのは、真の値が別の値だからではなく、値そのものが存在しないからである。 ■

振り返り

- **三種類の誤り。**計算の誤り（導関数、$g(-1)$、原始関数）、論理の誤り（値を比べて停留点を分類すること、停留値を大域的な上界・下界とみなすこと）、そして隠れた仮定（微分積分学の基本定理における連続性）。
- **答えは正しく、理由は誤り。**小問 (ii) で原始関数を正しく直すと答え 0 が再び得られるが、論証はやはり成り立たない。答えが正しく見えても、推論が健全である証拠にはならない。
- **局所と大域。**導関数からわかるのは、ある点の近くでの振る舞いである。大域的な結論を得るには、定義域の端や関数がおかしな振る舞いをする点で何が起こるかなど、さらに多くのことが必要である。

背後にある数学

偉大な数学者が誤ったとき

まさにこの種の誤りを、解析学の創始者たちも犯していた。1821 年の『*Cours d'analyse*』（解析教程）で、コーシー（Augustin-Louis Cauchy）は連続関数の収束する和は常に連続であると「証明」した。1826 年、アーベル（Niels Henrik Abel）は反例を指摘した。フーリエ級数（Fourier series）

$$\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \cdots$$

はすべての x で収束し、各項は連続であるが、その和は $x = \pm\pi$ で跳ぶ（$-\pi < x < \pi$ では $x/2$ に等しい）。コーシーの論証のどこが誤っていたのかを正確に突き止めるには数十年を要し、その結果として生まれたのが**一様収束**（uniform convergence）の概念である。これは今ではすべての解析学の学生が学ぶ。隠れた仮定、とりわけ二つの極限の順序を入れ替えることに関わる仮定は、解析学全体で最もよくある誤りの原因である。

仮定をもつ定理

この問題に含まれる誤りのうち二つは、定理の仮定を無視したことから生じている。

- **最大値・最小値の定理**（extreme value theorem）は、有界閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数は最大値と最小値をとることを述べている。それを求めるには、区間の端点、停留点、そして関数が微分可能でない点を調べる。$[-1, 1]$ 上の $|x|$ の最小値は 0 でとられるが、これは端点でも停留点でもない。f が区間の内部のいたるところで微分可能であれば、内部でとる最大値・最小値は停留点でとられなければならない。実数全体では調べるべき端点がなく、関数が最大値をもたないこともある。その代わりに $x \to \pm\infty$ での振る舞いを調べなければならない。
- **微分積分学の基本定理**は、被積分関数が $[a, b]$ 上で連続であることを必要とする。連続でない場合、積分はそれでも存在することもあれば（$\int_0^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x$ を試してみよ）、存在しないこともあり（ここでのように）、極限を用いて確かめなければならない。

大学で出会う定理には、すべて仮定の正確な一覧がついている。定理を使う前に毎回それを確かめることも、訓練の一部である。

発散する積分の値

小問 (ii) には興味深い補足がある。区間 $[-1,3]$ は問題の点 $x=1$ に関して対称であり、$(1-x)^{-3}$ はその点に関して「奇関数」的である。対称な隙間 $(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$ を取り除いて $\varepsilon\to 0$ とすると、二つの無限大の部分が打ち消し合い、確かに 0 が得られる。これを**コーシーの主値**（Cauchy principal value）といい、物理学や複素解析で実際に役立つものである。しかしそれは意図的に選ばれた**別の定義**であり、偶然そこにたどり着いた論証は何も証明していない。

思考のスキル

論証を批判的に読む

各段階について三つのことを確かめよ。計算は正しいか、その段階は論理的に導かれるか、そして何が言明されないまま仮定されているか。

そのうえで結論を別に確かめよ。誤った論証が正しい結論をもつこともあり、「正しい」答えが成り立たない論証から得られることもある。同じ厳しさで自分の答案も検討せよ。最も信じてしまいやすい論証は、自分自身の論証なのである。

次の一歩

1. **嘘をつく置換。** STEP I 1987、問 8（`step.maths.org/questions/87-s1-q8`）に挑戦せよ。置換積分によって、正の積分が負の積分に等しいことが示されるように見える。論証がどこで破綻するかを正確に突き止め、そのうえで両方の積分を正しく計算せよ。

2. **真か偽か。** STEP I 1998、問 3（`step.maths.org/questions/98-s1-q3`）に挑戦せよ。証明するか反証するかを求める四つの主張がある。それぞれについて、書き始める前にどちらになると予想するかを決めておこう。

3. **すべての馬は同じ色である。** 帰納法（induction）によるこの「証明」の誤りを見つけよ。任意の 1 頭の馬はそれ自身と同じ色である。$n+1$ 頭の馬が与えられたとき、帰納法の仮定により最初の n 頭は同じ色であり、最後の n 頭も同じ色である。二つの群は重なり合っているので、$n+1$ 頭すべてが同じ色である。

4 **存在する積分。** 被積分関数が 0 で定義されていないにもかかわらず $\int_{-1}^{1} |x|^{-1/2}\,\mathrm{d}x$ が存在することを示し、その値を求めよ。

さらに学ぶために

- **E. A. Maxwell, *Fallacies in Mathematics***（Cambridge University Press）。もっともらしく見える誤った論証を分野別にまとめた古典的な本で、シックスフォーム（sixth form、英国の大学進学準備課程）の生徒向けに書かれている。
- **Bernard Gelbaum & John Olmsted, *Counterexamples in Analysis***（Dover）。定理の仮定がなぜ重要なのかを示す数百の例を収めている。解析学の講義を受け始めたら、ところどころ拾い読みするとよい。
- **Imre Lakatos, *Proofs and Refutations***（Cambridge University Press）。数学者が証明の誤りをどのように見つけ、修正するのかを描いた見事な対話篇。

3.2 相加・相乗平均を逆向きに

問題

STEP II 1993、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/93-s2-q8`

導入

相加平均と相乗平均の不等式（arithmetic mean–geometric mean inequality、AM–GM）は、おそらく数学で最も役に立つ不等式である。この不等式によれば、正の数に対しては、通常の平均はつねに「積による平均」以上であり、等号はすべての数が等しいときに限って成り立つ。微積分（calculus）を使わずに最適化（optimisation）問題を解くことができ、ほかの不等式の証明にも使われ、解析学のあらゆる分野に現れる。

この問題では、1821 年にコーシー（Augustin-Louis Cauchy）が与えた、奇妙で美しい帰納法（induction）によってこの不等式を証明する。n から $n+1$ へ進むのではなく、2 から 4、8、16 へと跳び、2 の累乗だけを押さえたうえで、**逆向きに下りて**あいだの数を埋めるのである。「帰納法」は教科書で習う形よりもずっと柔軟な考え方であることを思い出させてくれる。

取りかかる前に

オンラインのアーカイブにあるこの試験問題には誤植があり、「$b_1 = a_2$」となっている。もちろん正しくは $b_1 = a_1$ である。b たちは a たちに、それらの平均の複製を付け加えて数を増やしたものだ、というのが意図である。

考えてみよう n 個から $n+1$ 個へ進むよりも、2^m 個から 2^{m+1} 個へ進むほうが易しいのはなぜだろうか。

2^{m+1} 個の数は自然に 2^m 個ずつの 2 つの組に分かれるので、それぞれの半分に帰納法の仮定を適用し、2 つの数の場合を使って両者を合わせればよいからである。n から

$n+1$ へ進む場合には、これほど対称的な手がかりは得られない。

順を追って解く

段階 1　2つの数

$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - a_1a_2 = \frac{a_1^2+2a_1a_2+a_2^2-4a_1a_2}{4} = \frac{(a_1-a_2)^2}{4} \geq 0.$ ■

段階 2　倍にする

$m=1$ の場合は段階 1 である。2^m 個の数に対して $(*)$ が成り立つと仮定し、2^{m+1} 個の正の数をとる。

> **考えてみよう**　2^{m+1} 個の数を前半と後半に分け、それぞれの相加平均を P, Q とする。帰納法の仮定はそれぞれの半分について何を述べているか。

それぞれの半分に $(*)$ を適用すると、

$$a_1 \cdots a_{2^m} \leq P^{2^m} \qquad \text{かつ} \qquad a_{2^m+1} \cdots a_{2^{m+1}} \leq Q^{2^m}.$$

これらを掛け合わせると（すべて正である）、2^{m+1} 個の数すべての積は $(PQ)^{2^m}$ 以下である。ここで 2 つの数の場合から $PQ \leq \left(\frac{P+Q}{2}\right)^2$ が得られ、$\frac{P+Q}{2}$ はちょうど 2^{m+1} 個の数すべての平均である。したがって

$$a_1 \cdots a_{2^{m+1}} \leq (PQ)^{2^m} \leq \left(\frac{P+Q}{2}\right)^{2^{m+1}} = \left(\frac{a_1+\cdots+a_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}\right)^{2^{m+1}},$$

となり、これは $m+1$ に対する $(*)$ である。帰納法により、項の個数が 2 の累乗であれば AM–GM が成り立つ。 ■

段階 3　すき間を埋める

次に任意の n をとり、$2^m > n$ となる m を選ぶ。列 $a_1, \ldots, a_n$ に、その平均 A の複製を $2^m - n$ 個付け加える。

> **考えてみよう**　付け加えたあとの列 $b_1, \ldots, b_{2^m}$ の平均はいくらか。

和は $(a_1+\cdots+a_n) + (2^m-n)A = nA + (2^m-n)A = 2^m A$ なので、平均は A そのものである。平均の複製を付け加えても平均は変わらない。よって b たちに $(*)$ を適用すると

$$a_1 \cdots a_n \cdot A^{2^m-n} \leq A^{2^m}.$$

手を止めて、やってみよう 証明を完成させよ。

両辺を A^{2^m-n}（これは正である）で割ると $a_1 \cdots a_n \le A^n$ となる。n 乗根をとって、

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \le A = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}. \qquad \blacksquare$$

振り返り

- **別の道筋に沿った帰納法。** 段階 2 は m についての帰納法であり、$n = 2, 4, 8, \ldots$ を押さえる。段階 3 は、任意の 2 の累乗から、それより小さい任意の n へ下りる方法である（図 3.2.1）。
- **平均で補う。** 平均を変えずに列を延ばすという技法は覚えておく価値がある。任意の n についての問題を、都合のよい n についての問題に変える方法なのである。
- **等号はいつ成り立つか。** 証明をさかのぼると、等号が成り立つには 2 つの数の場合を使ったすべての箇所で等号が成り立つ必要があり、それはすべての数が等しいときに限られる。

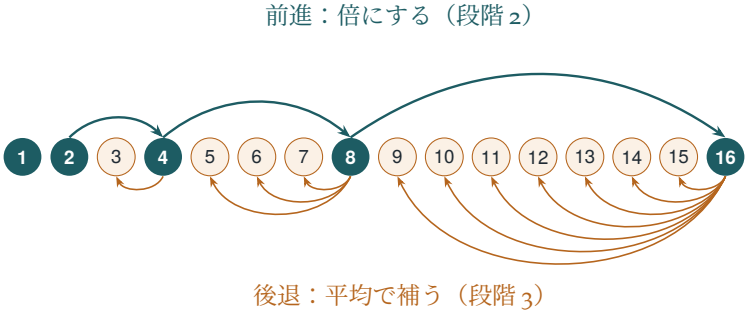


図 3.2.1 コーシーの前進・後退帰納法。青緑の矢印は、倍にしていくことで $2, 4, 8, 16, \ldots$ 個の数に対する AM–GM を証明する。琥珀色の矢印は、列を次の 2 の累乗まで補うことで、それ以外のすべての n を埋める。

背後にある数学

コーシーの帰納法

コーシーはこの証明を著書 *Cours d'analyse*（『解析教程』、1821 年）で発表した。この本は、第 2 章で論じた解析学の厳密な扱いの出発点となったものである。この手法は

現在**前進・後退帰納法**（forward–backward induction）と呼ばれている。無限個の場合からなる列（ここでは 2 の累乗）について命題を証明し、次に n の場合から $n-1$ の場合が導かれることを示す。この 2 つを合わせれば、すべての n に到達する。本節の段階 3 では 2^m から n へ一気に下りたが、1 段ずつ下りることもできる。$n-1$ 個の数にその平均の複製を 1 個付け加えれば、n の場合から $n-1$ の場合が導かれることがわかる。

---

1 つの不等式の多くの証明

AM–GM には何十通りもの証明があり、それらを比べることは数学のさまざまな流儀を知るよい方法である。

- **凸性による証明。** 対数関数は凹関数（concave function）なので、対数の平均は平均の対数以下である。指数をとればこれが AM–GM であり、Section 3.3 の主題でもある。
- **ポリア（George Pólya）の証明。** $e^{x-1} \geq x$ を使う（$x=1$ における e^{x-1} の接線は曲線の下側にある）。A を平均として、これを各 a_i/A に適用して掛け合わせると、$\prod \frac{a_i}{A} \leq e^{\sum (a_i/A - 1)} = e^{0} = 1$ となる。ポリアは、この証明を夢の中で思いついたと語っている。
- **均す方法による証明。** 2 つの数が等しくなければ、その両方をそれらの平均で置き換える。相加平均は変わらず、2 つの数の場合から積は増える。これを繰り返すと、すべての数が平均へと近づいていく。

微積分を使わない最適化

AM–GM を使うと、多くの最適化問題が 1 行で解ける。表面積が与えられた箱のうち、体積が最大となるのはどれか。周の長さが与えられた長方形のうち、面積が最大となるのはどれか。（正方形である。2 つの数の場合から $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ であり、等号は $x=y$ のときに成り立つ。）等号成立条件は最適値がどこにあるかを教えてくれ、不等式はそれが単なる停留点（stationary point）ではなく本当に最適値であることを教えてくれる。Section 3.1 での注意と比べてみよ。

思考のスキル

柔軟な帰納法

帰納法は $1, 2, 3, \ldots$ と進む必要はない。すべての場合に到達する道筋であれば、どんな道筋に沿って帰納法を行ってもよい。倍にしていく方法、累積帰納法（*strong induction*）、あるいは部分列に沿って前進してから後退してすき間を埋める方法などである。

n から $n+1$ への素直な一歩が難しいときは、どんな一歩なら易しいか、そしてその一歩ですべての場合に到達できるかを考えよ。

次の一歩

1 **1段下りる。** n 個の数に対して AM–GM が成り立つならば、$n-1$ 個の数に対しても成り立つことを、平均の複製を 1 個付け加えることで直接示せ。

2 **増加数列。** $n+1$ 個の数 $1+\frac{1}{n}, \ldots, 1+\frac{1}{n}, 1$（$1+\frac{1}{n}$ が n 個）に AM–GM を適用して、$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ を示せ。

3 **最良の箱。** ふたのある直方体の箱の表面積が S である。互いに異なる 3 つの面の面積に AM–GM を用いて、体積が $(S/6)^{3/2}$ 以下であり、等号は立方体のときに成り立つことを示せ。

4 **調和平均。** 数 $1/a_i$ に AM–GM を適用して、調和平均（harmonic mean）$\dfrac{n}{1/a_1 + \cdots + 1/a_n}$ が相乗平均以下であることを示せ。

さらに学ぶために

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***（Cambridge University Press）。不等式について問題を軸に展開するすばらしい本で、ちょうどこの水準から始まる。第 2 章は AM–GM を扱っている。
- **Hardy, Littlewood & Pólya, *Inequalities***（Cambridge University Press）。20 世紀の偉大な解析学者 3 人による古典的な参考書である。
- **Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies***（Springer）。第 7 章はオリンピックの不等式の問題を大量に集めたものである。

3.3 凸性の威力

問題

STEP II 2007、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/07-s2-q7`

導入

Section 3.2 では、巧妙な帰納法（induction）を用いて AM–GM（相加・相乗平均の不等式）を証明した。ここでは、それがはるかに大きな事実の特別な場合として、わずか一行で導かれる。その大きな事実とは**凹性**（concavity）である。凹性とは、丘の頂上のように下向きに曲がった曲線の形のことである。このような曲線についてのただ一つの幾何学的事実、すなわち曲線がその弦（chord）より上にあるという事実が、三角形に関する事実から AM–GM、さらには確率論、情報理論、経済学における不等式に至るまで、驚くほど多様な不等式を証明することがわかる。

大学では、この考え方は**凸性**（convexity）となり、現代数学を貫く大きな統一的テーマの一つとなる。凸最適化（convex optimisation）のように、凸性の上に丸ごと築かれた分野もある。

取りかかる前に

? **考えてみよう** $(0, \pi)$ 上の $y = \sin x$ のように、下向きに曲がった曲線を描いてみよ。その上に 2 点をとり、直線で結ぶ。弦は曲線の上にあるか、下にあるか。

下である。凹（concave）な曲線では、どの弦も両端点の間で曲線の下にある。二つの関数値の平均は弦の中点の高さであり、平均における関数値はその中点の真上にある曲線の高さである。したがって「弦は曲線の下にある」ということは、まさに $n = 2$

の場合のイェンセン（Jensen）の不等式である：

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \le f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

n 個の点の場合、点 $(x_k, f(x_k))$ の平均はそれらの重心（centre of mass）であり、これは曲線の下側の領域の内部にあるので、やはり曲線の下にある（図 3.3.1）。

順を追って解く

段階 1　凹性の確認

$0 < x < \pi$ において $\frac{d^2}{dx^2}\sin x = -\sin x < 0$ であり、$x > 0$ において $\frac{d^2}{dx^2}\ln x = -\frac{1}{x^2} < 0$ である。 ■

段階 2　三角形

> **考えてみよう**　どの関数を、どの点に用いるか。またそれらの平均は何か。三角形の角は、その関数が凹である区間に入っているか。

$f(x) = \sin x$ とし、3 点 A, B, C をとる。いずれも 0 と π の間に厳密に含まれ、そこで sin は凹である。また、それらの平均は $\frac{A+B+C}{3} = \frac{\pi}{3}$ である。イェンセンの不等式より

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \le \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

よって $\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$ であり、等号が成り立つのはちょうど正三角形（equilateral triangle）のときである。 ■

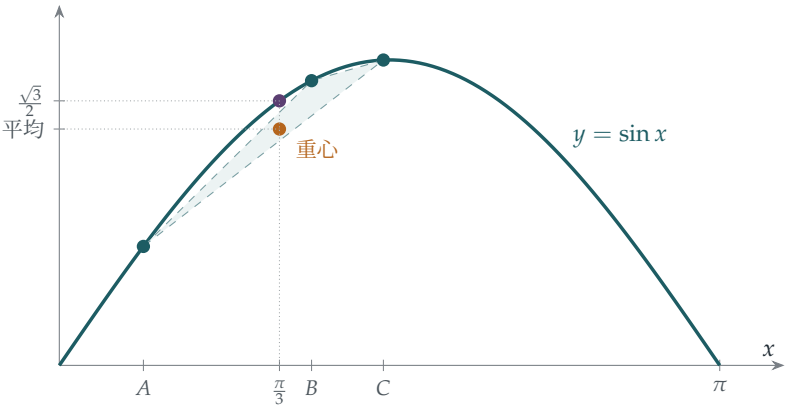


図 3.3.1　三角形の三つの角 $A = 0.4$、$B = 1.2$、$C = \pi - 1.6$ に対する、$\sin x$ についてのイェンセンの不等式。曲線上の 3 点の重心（琥珀色）は網掛けの三角形の内部にあり、したがって曲線の下にある。その高さは $\sin A$、$\sin B$、$\sin C$ の平均であり、その真上の曲線の高さは $\sin \frac{\pi}{3}$ である。

段階 3　一行で示す AM–GM

考えてみよう　AM–GM は積と和を比較するものである。積を和に変える凹関数はどれか。

対数である。$\mathrm{f} = \ln$ と正の数 $t_1, \ldots, t_n$ にイェンセンの不等式を適用すると

$$\frac{\ln t_1 + \cdots + \ln t_n}{n} \leq \ln\left(\frac{t_1 + \cdots + t_n}{n}\right).$$

左辺は $\ln\left(\sqrt[n]{t_1 \cdots t_n}\right)$ である。ln は増加関数なので両辺から取り除くことができ、これがまさに AM–GM である。等号が成り立つのは、すべての t_k が等しいときに限る。■

段階 4　AM–GM を使う

考えてみよう　(a) では、左辺は 4 項の和であり、右辺には 3 変数の積が含まれる。いくつの項に AM–GM を適用すべきか。また、16 はなぜ役に立つのか。

4 つの正の数 x^4、y^4、z^4、16 に AM–GM を適用すると

$$\frac{x^4 + y^4 + z^4 + 16}{4} \geq \sqrt[4]{16\, x^4 y^4 z^4} = 2xyz.$$

両辺に 4 を掛けて $x^4 + y^4 + z^4 + 16 \geq 8xyz$ を得る。■

手を止めて、やってみよう 次に、$x^5+y^5+z^5-5xyz$ の最小値を求めよ。（ヒント：$x^5y^5z^5$ の5乗根が欲しいので、5つの数が必要である。残りの二つは何にすべきか。）

$x^5, y^5, z^5, 1, 1$ に AM–GM を適用すると

$$\frac{x^5+y^5+z^5+1+1}{5} \geq \sqrt[5]{x^5y^5z^5} = xyz,$$

よって $x^5+y^5+z^5-5xyz \geq -2$ である。等号は $x^5=y^5=z^5=1$、すなわち $x=y=z=1$ のときに成り立ち、このとき式の値は $3-5=-2$ である。したがって最小値は -2 である。 ■

等号条件が二重の役割を果たしていることに注意せよ。等号条件によって、この下界が実際に達成されることがわかり、-2 が単なる下界ではなく最小値であることが示されるのである。

振り返り

- **一つの考え方、多くの不等式。** 凹な曲線についての一つの幾何学的事実から、三角形に関する結果と AM–GM が得られた。必要な計算は二階導関数（second derivative）の確認だけであった。
- **関数と点を選ぶ。** イェンセンの不等式を使うとは、どの関数に、どの点で適用するかを決めることである。積を和に変える対数は、特によく使われる。
- **項を補って合わせる。** (b) では、1 を二つ加えることで AM–GM が問題にうまく合った。これは Section 3.2 で平均を補ったのと同じである。

背後にある数学

凸関数

大学では、凸（convex）関数（凹を上下逆にしたもの）の標準的な定義は導関数にまったく触れない。f が凸であるとは

$$\mathrm{f}\big(tx_1+(1-t)x_2\big) \leq t\,\mathrm{f}(x_1)+(1-t)\,\mathrm{f}(x_2) \qquad \text{任意の} x_1, x_2 \text{と} 0 \leq t \leq 1,$$

が成り立つことであり、これはまさに弦が曲線より上にあることを述べている。この定義は、$|x|$ のような微分可能（differentiable）でない関数や多変数関数に対しても意味をもつ。デンマークの技術者であり数学者であったヨハン・イェンセン（Johan

Jensen）は、1906 年、自らの名を冠する不等式とともに、凸関数をそれ自体一つの研究対象として確立した。

いたるところに現れる凸性

凸性は、数学とその応用のいたるところに現れる。

- **確率論。**イェンセンの不等式によれば、凹関数 f と任意の確率変数（random variable）X に対して $\mathrm{E}[\mathrm{f}(X)] \leq \mathrm{f}(\mathrm{E}[X])$ が成り立つ。経済学では、f を凹な「効用（utility）」関数とすると、これによって、人々が £0 か £200 かが五分五分の賭けよりも確実な £100 を好む理由、そして保険が存在する理由が説明される。
- **情報理論。**データ圧縮の基礎にある、エントロピー（entropy）が一様分布（uniform distribution）で最大になるという事実の証明は、ln に対するイェンセンの不等式である。
- **最適化。**凸関数には大域的最小値（global minimum）以外に局所最小値（local minima）がないので、「坂を下る」ことで必ず最良の答えが見つかる。凸最適化問題が効率よく解けるのはこのためであり、問題を凸な形に書き直すことに多大な努力が注がれるのもこのためである。

Section 3.4 では、凸性の別の側面、すなわち関数とその逆関数の間の幾何学的な双対性（duality）を見ることになる。

思考のスキル

一般原理を見つける

いくつかの結果が似た証明をもつときは、その背後にある一つの原理を探せ。そして、その原理を一度だけ証明し、何度も適用せよ。

AM–GM も、正弦についての三角形の不等式も、ほかの多くの不等式も、すべて「凹な曲線はその弦より上にある」の具体例である。原理を見抜くことで、寄せ集めの技巧が一つの方法へと変わる。

次の一歩

1 **定義。**STEP II 2018、問 2（`step.maths.org/questions/18-s2-q2`）の小問 (i) と

(ii) は、上の囲みにある弦による凹性の定義から出発し、3 点に対するイェンセンの不等式を導くものである。

2 **正弦の積。** STEP II 2018、問 2（`step.maths.org/questions/18-s2-q2`）の小問 (iii) に取り組んでみよ。

3 **鋭角三角形。** $\tan x$ が $(0, \frac{\pi}{2})$ 上で凸であることを示し、鋭角三角形（acute-angled triangle）において $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$ が成り立つことを導け。

4 **冪平均（power means）。** x^2 が凸であることを示し、$\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^2 \leq \frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}$ を導け。これを、数の集まりの分散（variance）についての主張として解釈せよ。

さらに学ぶために

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***（Cambridge University Press）。第 6 章は凸性とイェンセンの不等式を扱っている。
- **Claudi Alsina & Roger Nelsen, *When Less Is More: Visualizing Basic Inequalities***（Mathematical Association of America）。図によって証明される不等式を集めたもので、その多くが凸性を用いている。
- **Stephen Boyd & Lieven Vandenberghe, *Convex Optimization***（Cambridge University Press）。現代の古典で、オンラインで無料で読める。最初の数章では、凸性が実践においてなぜ重要なのかが示されている。

3.4 不等式を証明する面積

問題

STEP III 2011、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/11-s3-q4`

導入

切手に収まるほど単純な図で証明できる不等式がある。原点を通る増加曲線を描く。その曲線の下側の面積と左側の面積を合わせると、必ずある長方形を覆う。このひとつの観察から**ヤングの不等式**（Young's inequality）$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ が得られ、これがさらに、解析学で最も重要な道具のうちの二つであるヘルダーの不等式（Hölder's inequality）とコーシー・シュワルツの不等式（Cauchy–Schwarz inequality）への鍵となる。

この図には、より深い考え方も含まれている。図は関数とその逆関数（inverse function）を完全に対称な形で組にしており、この組み合わせを一般化したものが**ルジャンドル変換**（Legendre transform）である。ルジャンドル変換は、古典力学の二つの偉大な定式化を結びつけ、また熱力学の二つの主要な記述を結びつける。

取りかかる前に

考えてみよう $\int_0^a \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ は曲線と x 軸の間の面積である。同じ図において、$\int_0^b \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$ はどの部分の面積を表すか。

$x = \mathrm{f}^{-1}(y)$ のグラフは、$y = \mathrm{f}(x)$ と同じ曲線を横から見たものである。したがって $\int_0^b \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$ は、高さ 0 から高さ b までの、曲線と y 軸の間の面積である。これがわかれば、小問 (i) は図を描くだけの問題になる。

順を追って解く

段階 1　図

考えてみよう　$(0,0)$ と (a,b) を頂点とする長方形を描け。0 から a までの曲線の下側の領域をある色で、0 から b までの曲線の左側の領域を別の色で塗れ。二つの領域は長方形を覆うか。重なりもはみ出しもなくなるのはどのようなときか。

二つの領域を合わせると長方形 $[0,a]\times[0,b]$ 全体を覆い、通常はその外側の面積も一部含む（図 3.4.1）。長方形内の各点 (x,y) は、曲線の下側にある（$x\le a$ なので第一の領域に属する）か、曲線の左側にある（$y\le b$ なので第二の領域に属する）かのいずれかである。したがって塗られた面積の合計は、少なくとも長方形の面積 ab 以上である。これが $(*)$ である。

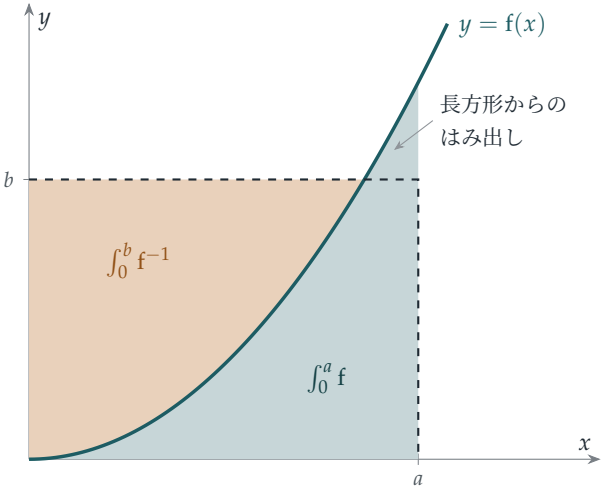


図 3.4.1　図で見るヤングの不等式。0 から a までの曲線の下側の面積（青緑）と、0 から b までの曲線の左側の面積（琥珀色）を合わせると、面積 ab の破線の長方形を覆い、さらに余りが出る。はみ出しがなくなるのは、頂点 (a,b) が曲線上にあるときであり、またそのときに限る。

はみ出しは、曲線と長方形の頂点の間にある、曲線で囲まれた小さな領域である。これが消えるのは、曲線が頂点 (a,b) を通るとき、すなわち

$$b=\mathrm{f}(a).$$

のときであり、またそのときに限る。

段階 2　ヤングの不等式

考えてみよう $\mathrm{f}(x) = x^{p-1}$ のとき、$\mathrm{f}^{-1}(y)$ は何か。二つの積分を計算し、$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を用いて二つ目を整理せよ。

$p > 1$ なので、$\mathrm{f}(x) = x^{p-1}$ は連続かつ増加で $\mathrm{f}(0) = 0$ を満たし、$\mathrm{f}^{-1}(y) = y^{1/(p-1)}$ である。このとき

$$\int_0^a x^{p-1}\,\mathrm{d}x = \frac{a^p}{p}, \qquad \int_0^b y^{1/(p-1)}\,\mathrm{d}y = \frac{b^{1+1/(p-1)}}{1+1/(p-1)}.$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ より $q = \frac{p}{p-1}$ であるから、$1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1} = q$ となり、二つ目の積分は $\frac{b^q}{q}$ である。よって $(*)$ は

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \qquad \blacksquare$$

となる。等号は $b = \mathrm{f}(a) = a^{p-1}$ のときに成り立つはずである。確かめよう。このとき $ab = a^p$ であり、$b^q = a^{(p-1)q} = a^p$ であるから、右辺は $a^p\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = a^p$ となる。 $\blacksquare$

$p = q = 2$ とすると $ab \le \frac{a^2+b^2}{2}$ となる。これは Section 3.2 で扱った二数の相加相乗平均の不等式（AM–GM inequality）が姿を変えたものである。

段階 3 逆正弦関数

次に、$[0, \frac{\pi}{2}]$ 上で $\mathrm{f}(x) = \sin x$ とする。これは連続かつ増加で $\mathrm{f}(0) = 0$ を満たし、$[0,1]$ 上で $\mathrm{f}^{-1} = \arcsin$ である。

考えてみよう $\int_0^a \sin x\,\mathrm{d}x$ は易しい。$\arcsin y$ はどのように積分すればよいか。

$\int_0^a \sin x\,\mathrm{d}x = 1 - \cos a$ である。逆正弦関数については、$\arcsin y \times 1$ とみて部分積分（integration by parts）を行う。

$$\int_0^b \arcsin y\,\mathrm{d}y = \Big[y \arcsin y\Big]_0^b - \int_0^b \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = b\arcsin b + \sqrt{1-b^2} - 1.$$

これらを加えると、$(*)$ から $ab \le b\arcsin b + \sqrt{1-b^2} - \cos a$ が得られる。 $\blacksquare$

手を止めて、やってみよう ここから $\arcsin(t^{-1})$ に関する不等式を導け。a としてどの値を選べばよいか。（できるだけ単純な値を試してみよ。）

$a = 0$ とすると、$0 \le b\arcsin b + \sqrt{1-b^2} - 1$、すなわち $b\arcsin b \ge 1 - \sqrt{1-b^2}$ となる。（これは単に $\int_0^b \arcsin y\,\mathrm{d}y \ge 0$ を述べているにすぎない。）$t \ge 1$ として $b = 1/t$ とおくと $0 < b \le 1$ であり、両辺を b で割ると

$$\arcsin\left(\frac{1}{t}\right) \ge t\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}\right) = t - \sqrt{t^2-1}. \qquad \blacksquare$$

振り返り

- **証明としての図。**小問 (i) は、正しい図が見えれば、それだけで完全な証明になる。幾何学的な事実を積分の間の不等式に翻訳することは、強力な手法である。
- **一般的な結果を特殊化する。**一つの一般的な不等式から、f の選び方を変えることで、ヤングの不等式と arcsin に関する不等式が得られた。
- **最も単純な選択が正しい選択であることもある。**最後の導出では $a = 0$ を用いたが、このとき不等式はほとんど自明である。易しい場合を必ず試してみること。

背後にある数学

ヤングからヘルダーへ

William Henry Young は 1912 年にこの不等式を発表した。その重要性は、それが何を導くかにある。$\sum a_i^p = 1$ かつ $\sum b_i^q = 1$ と仮定する。各組にヤングの不等式を適用して加えると

$$\sum a_i b_i \le \frac{\sum a_i^p}{p} + \frac{\sum b_i^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

となる。和が 1 になるように a たちと b たちを定数倍すると、**ヘルダーの不等式**が得られる。すなわち、正の数に対して

$$\sum a_i b_i \le \Big(\sum a_i^p\Big)^{1/p} \Big(\sum b_i^q\Big)^{1/q}.$$

が成り立つ。$p = q = 2$ とすると、これは**コーシー・シュワルツの不等式** $\sum a_i b_i \le \sqrt{\sum a_i^2}\sqrt{\sum b_i^2}$ であり、二つのベクトル（vector）のなす角の余弦が 1 以下であることを述べている。ヘルダーの不等式は L^p 空間の理論の基礎である。L^p 空間とは、「距離」を $\left(\int |f|^p\right)^{1/p}$ で測る関数の空間であり、関数解析（functional analysis）や確率論の講義で出会うことになる。

ルジャンドル変換

図 3.4.1 の図は、f と f^{-1} を完全に対称に扱っている。$F(a) = \int_0^a \mathrm{f}$、$G(b) = \int_0^b \mathrm{f}^{-1}$ とおく。不等式は $F(a) + G(b) \ge ab$ であり、曲線上で等号が成り立つから

$$G(b) = \max_a \big(ab - F(a)\big).$$

である。凸関数（convex function）F を新しい凸関数 G に変えるこの操作が**ルジャンドル変換**であり、これを二回適用すると F に戻る。力学では、ルジャンドル変換は位

置と速度の関数であるラグランジアン（Lagrangian）を、位置と運動量の関数であるハミルトニアン（Hamiltonian）に変換する。これらはニュートン（Newton）の法則の二つの同値な定式化であり、大学二年次の講義で出会うことになる。熱力学では、内部エネルギー、エンタルピー、自由エネルギーの間の変換を与える。$F(a) = a^p/p$ のとき変換は $G(b) = b^q/q$ となり、これこそがヤングの不等式の二つの指数が $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ で結ばれている理由である。

思考のスキル

図から得られる不等式

積分は面積である。うまく選んだ図の中で面積を比べると、代数的には見抜きにくい不等式を証明できることがある。

ある領域が別の領域を明らかに含んでいる図や、いくつかの領域が第三の領域を明らかに覆っている図を探すこと。そのうえで、それぞれの面積を積分に翻訳する。

次の一歩

1 **1987 年版。** STEP I 1987、問 6（`step.maths.org/questions/87-s1-q6`）に挑戦せよ。同じ種類の図を用いて逆関数を積分する問題である。答えは微分して確かめること。

2 **コーシー・シュワルツ。** $p = q = 2$ のヤングの不等式を用いて、正の数に対して $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$ を証明せよ。（**ヒント**：まず二つの平方根がともに 1 に等しい場合を扱え。）

3 **指数関数版。** $(*)$ において $\mathrm{f}(x) = e^x - 1$ とし、$a, b \ge 0$ に対して

$$ab \le e^a - 1 - a + (1 + b)\ln(1 + b) - b.$$

を示せ。等号が成り立つのはどのようなときか。

4 **この評価はどれほどよいか。** やや難 電卓を用いて、$t = 1, 2, 10$ について $\arcsin(1/t)$ と $t - \sqrt{t^2 - 1}$ を比較せよ。t が大きいとき、$t - \sqrt{t^2 - 1} \approx \frac{1}{2t}$ である一方、$\arcsin(1/t) \approx \frac{1}{t}$ であることを示せ。評価がちょうど 2 倍ずれるのはなぜか。（$a = 0$ のときの図を見よ。はみ出しのうちどれだけが無駄になっているか。）

さらに学ぶために

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***（Cambridge University Press）。『コーシー・シュワルツ・マスタークラス』。第 1 章と第 9 章でコーシー・シュワルツの不等式とヘルダーの不等式を扱い、その途中でヤングの不等式にも触れている。
- **Roger Nelsen, *Proofs Without Words***（Mathematical Association of America）。『言葉のいらない証明』。ヤングの不等式をはじめ、図による証明を数多く収めている。
- **V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics***（Springer）。『古典力学の数学的方法』。第 14 節で、まさにこの図を用いてルジャンドル変換を説明している。高度な内容だが、該当する節は短い。

3.5 π^e か e^π か？

問題

STEP II 2013、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/13-s2-q1`

導入

π^e と e^π はどちらが大きいだろうか。電卓を使えば一瞬で答えが出る。$e^\pi \approx 23.14$、$\pi^e \approx 22.46$ である。しかし電卓が教えてくれるのは、大きいという**事実**だけであって、**なぜ**そうなるのかは教えてくれない。また、似たような無数の問いに一度に答えることもできない。3^π は π^3 より大きいだろうか。自明な $n = m$ 以外に、$n^m = m^n$ を満たす整数の組はあるだろうか。

実は、これらの問いはすべて、ただ一つの曲線 $y = \ln x$ と、それと交わる直線についての問いなのである。この問題は、注意深く描いた図が、式変形では手に負えなさそうな大小比較をいかに決着させるか、そして数 e がいかにして自然な境目として現れるかを示してくれる。

取りかかる前に

考えてみよう 対数（logarithm）をとると、$a^b = b^a$ は $b \ln a = a \ln b$ と同値である。これを、一方の辺には a だけが、もう一方の辺には b だけが現れるように変形せよ。

$b \ln a = a \ln b$ は

$$\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}.$$

と同値である。したがって、a^b と b^a の比較はすべて、ただ一つの関数（function）$h(x) = \frac{\ln x}{x}$ の a と b における値の比較になる。そして $\frac{\ln a}{a}$ は、原点と曲線 $y = \ln x$ 上の点 $(a, \ln a)$ を結ぶ直線の傾き（gradient）である。この問題が直線についての問題に

なっているのはそのためである。

順を追って解く

段階 1　原点を通る接線

考えてみよう　$y = mx$ が $x = x_0$ で $y = \ln x$ に接する（touch）とき、どのような二つの式が成り立たなければならないか。

直線と曲線は交わらなければならず、$mx_0 = \ln x_0$ が成り立ち、さらに傾きが等しく、$m = 1/x_0$ でなければならない。後者を前者に代入すると $1 = \ln x_0$ となるので、$x_0 = e$、$m = 1/e$ である。原点から引いた接線（tangent）は点 $(e, 1)$ で曲線に接する。

一方、$y = mx$ が $x = a$ と $x = b$ で曲線と交わるならば、$\ln a = ma$ かつ $\ln b = mb$ であるから $\frac{\ln a}{a} = m = \frac{\ln b}{b}$ となり、$b \ln a = a \ln b$、したがって $a^b = b^a$ が得られる。 ■

図について述べておく。原点を通り、接線よりわずかに傾きの小さい直線は、接点の両側で一回ずつ、計二回曲線と交わる。よって $a < e < b$ である。傾きが $1/e$ より大きい直線は曲線とまったく交わらない。$\ln x$ は上に凸（concave）であり、その全体が接線 $y = x/e$ の下側にあるからである。

段階 2　原点より上で y 軸と交わる直線

考えてみよう　今度は直線を $y = mx + c$、ただし $c > 0$ とする。$\frac{\ln p}{p}$ と $\frac{\ln q}{q}$ を m と c で表せ。

$\ln p = mp + c$ と $\ln q = mq + c$ から

$$\frac{\ln p}{p} = m + \frac{c}{p}, \qquad \frac{\ln q}{q} = m + \frac{c}{q}.$$

である。$c > 0$ かつ $p < q$ であるから $\frac{c}{p} > \frac{c}{q}$ となり、$\frac{\ln p}{p} > \frac{\ln q}{q}$ である。両辺に $pq > 0$ を掛けると $q \ln p > p \ln q$ となるので、$p^q > q^p$ である。 ■

幾何学的に言えば、二点を通る直線が原点より上で y 軸と交わるとき、原点から見て点 $(p, \ln p)$ は点 $(q, \ln q)$ よりも急な角度に見える、ということである。

段階 3　e より右側にある弦

考えてみよう　$e \le p < q$ のとき、$(p, \ln p)$ から $(q, \ln q)$ への弦の傾きは、p における曲線の傾きより小さい。それはなぜか。また、そのことからなぜ弦の

? y 切片が正になるのか。

$\ln x$ は上に凸なので、その傾き $1/x$ は減少する。したがって p から q への弦（chord）は p における接線よりも傾きが小さい。すなわち、その傾き s は $s < \frac{1}{p}$ を満たす。弦の y 切片（y-intercept）は、$p \geq e$ を用いると

$$c = \ln p - sp > \ln p - \frac{1}{p} \cdot p = \ln p - 1 \geq 0,$$

となる。よって、弦は原点より上で y 軸と交わる。 ■

手を止めて、やってみよう このことと Stage 2 を用いて、π^e と e^π のどちらが大きいかを判定せよ。

$p = e$、$q = \pi$ とする。両者を結ぶ弦の切片は正であるから、Stage 2 により $p^q > q^p$、すなわち

$$e^\pi > \pi^e.$$

である。

段階 4 接線に平行な弦

次に、p から q への弦の傾きがちょうど $\frac{1}{e}$、つまり接線 $y = \frac{x}{e}$ の傾きと等しいとする。

? **考えてみよう** この弦は $(e, 1)$ における接線に平行である。$\ln x$ は上に凸なので、曲線はその接線の下側にある。弦は原点より上で y 軸と交わるか、それとも下で交わるか。

弦はある c を用いて直線 $y = \frac{x}{e} + c$ と表される。その両端は曲線上にあり、曲線は接線 $y = \frac{x}{e}$ 上またはその下側にあって、接線と接するのは $x = e$ においてのみである。両端がともに $x = e$ にあることはありえないので、少なくとも一方は接線より真に下側にある。したがって、この平行な弦全体が接線の下側にあり、$c < 0$ となる。そこで $c < 0$ として Stage 2 を繰り返すと、不等式の向きが逆になり、$\frac{\ln p}{p} < \frac{\ln q}{q}$、よって $q^p > p^q$ が得られる。 ■

振り返り

- **一つの関数に帰着させる。** a^b と b^a の比較は、$h(x) = \frac{\ln x}{x}$ として $h(a)$ と $h(b)$ の比較になった。
- **根拠のある図。**「図を用いて」という指示のそれぞれが、正確な事実によって裏づ

けられていた。すなわち、ln が上に凸であること（弦は曲線の下側、接線は曲線の上側にある）と、切片の符号である。

- **e の特別な役割。** 原点から引いた接線は $x = e$ で接し、そこがこれらすべての比較の境目となる。

背後にある数学

$\frac{\ln x}{x}$ のグラフ

この問題のすべては、$h(x) = \frac{\ln x}{x}$ のグラフ（図 3.5.1）に見て取ることができる。その導関数（derivative）は $h'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ であるから、h は $(0, e)$ で増加し、$x = e$ で最大値（maximum）$\frac{1}{e}$ をとり、その後は 0 に向かって減少する。0 と $\frac{1}{e}$ の間の高さ m にある水平な直線はグラフと二回交わり、その交点 $a < e < b$ は $h(a) = h(b)$、すなわちまさに $a^b = b^a$ を満たす。e より右側では h は減少するので、$e \le p < q$ ならば $h(p) > h(q)$、すなわち $p^q > q^p$ である。特に $e^\pi > \pi^e$ であり、さらに一般に $x \neq e$ であるすべての x について $e^x > x^e$ が成り立つ。この勝負で e に勝てる数は他にない。

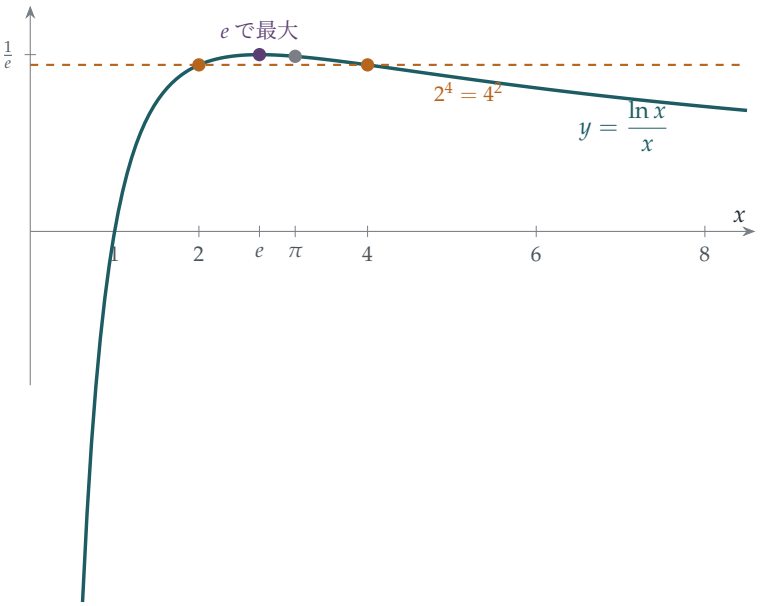


図 3.5.1　$h(x) = \frac{\ln x}{x}$ のグラフ。$x = e$ で最大値 $\frac{1}{e}$ まで上昇し、その後は下降する。$h(e) > h(\pi)$ であるから $e^\pi > \pi^e$ が得られる。高さ $\frac{\ln 2}{2}$ の水平な直線（琥珀色）はグラフと $x = 2$ および $x = 4$ で交わる。これが $n^m = m^n$ を満たす相異なる整数の唯一の組である。

$x^y = y^x$ のすべての解

$x^y = y^x$ を満たす相異なる正の実数の組はどのようなものだろうか。うまい工夫ですべてを求めることができる。$t > 1$ として $y = tx$ とおく。すると $x^{tx} = (tx)^x$ から $x^t = tx$ が得られ、$x^{t-1} = t$、よって

$$x = t^{1/(t-1)}, \qquad y = t^{t/(t-1)}.$$

となる。$t = 1 + \frac{1}{n}$ とおくと $x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$、$y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ となる。$n = 1$ のときこれは $(2, 4)$ であり、$n = 2$ のときは $\left(\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right)$ で、実際に $\left(\frac{9}{4}\right)^{27/8} = \left(\frac{27}{8}\right)^{9/4}$ が成り立つ。$n \to \infty$ のとき両者はともに e に収束（converge）し、そこで二つの枝が出会う。この問題は 1728 年にダニエル・ベルヌーイ（Daniel Bernoulli）とクリスティアン・ゴールドバッハ（Christian Goldbach）の往復書簡で議論され、のちにオイラー（Euler）も取り上げた。

最も経済的な底

関数 $x^{1/x} = e^{h(x)}$ もまた $x = e$ で最大となる。このことは、ある興味深い問いに答えてくれる。記数法の「コスト」を、底と必要な桁数の積で測るとすると、最も経済的な底は e であり、整数の中では 3 である（2 をわずかに上回る）。1958 年のソ連の Setun のように、3 を底とする実験的なコンピュータもいくつか作られた。

思考のスキル

変形して変数を分離し、一つの関数を調べる

二つの量が複雑に絡み合った不等式や方程式は、しばしば一つの関数の二点における値についての主張になる。

その関数が得られれば、そのグラフ（どこで増加し、どこで減少し、どこで最大になるか）がすべての問いに一度に答えてくれる。ここでは、a^b と b^a の比較が $h(a)$ と $h(b)$ の比較になった。

次の一歩

1 **整数の場合。** STEP I 1988、問 1（`step.maths.org/questions/88-s1-q1`）に挑戦せよ。

2 **さらなる比較。** STEP II 2025、問 3（OCR が配布している 2025 年の過去問一式に収録、`www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip`）に挑戦せよ。この節のグラフを用いて a^b と b^a のさらなる比較を決着させる問題であり、その中には e の数値的な評価が決め手となるものも含まれる。

3 **一行の証明。** $x \neq 0$ に対して成り立つ $e^x > 1 + x$ に $x = \frac{\pi}{e} - 1$ を代入して、$e^\pi > \pi^e$ を直接証明せよ。

さらに学ぶために

- **Eli Maor, *e: The Story of a Number***（Princeton University Press）。『不思議な数 e の物語』。e の歴史を述べた本で、方程式 $x^y = y^x$ も扱っている。
- **Paul Nahin, *An Imaginary Tale***（Princeton University Press）。『虚数の話』。$\sqrt{-1}$ だけを扱った本ではなく、まさにこの種の興味深い計算が満載である。
- **Michael Spivak, *Calculus***（Cambridge University Press）。第 11 章では、導関数を用いてグラフの形を理解する方法が完全な厳密さをもって扱われている。

3.6 傾きの上界

問題

STEP I 1988、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/88-s1-q7`

導入

ある区間で関数の値が -1 と 1 の間にとどまることがわかっているとき、その関数の傾きの大きさについて何かいえるだろうか。一般の関数については、何もいえない。$\sin(1000x)$ は -1 と 1 の間にとどまるが、傾きは 1000 にもなる。しかし 2 次関数（quadratic）はそのように激しく振動することはできない。この問題は、箱 $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ に閉じ込められた 2 次関数は箱の内部で傾きが 4 を超えることはなく、しかも 4 が最良の値であることを示すものである。

この問題には意外な由来がある。1887 年、周期表（periodic table）で有名な化学者メンデレーエフ（Dmitri Mendeleev）は、溶液の密度が濃度にどのように依存するかを研究しており、データに 2 次関数を当てはめていた。彼はデータの誤差が曲線の傾きにどれほど悪影響を及ぼしうるかを知る必要があり、まさにこの問題の結果を証明した。その 2 年後、若きマルコフ（Andrei Markov）が任意の次数の多項式（polynomial）について一般の問題を解決し、その答えは数学において最も重要な多項式のいくつかへとまっすぐにつながっていった。

取りかかる前に

考えてみよう $\mathrm{f}'(x)$ の公式は、f の 3 つの値、すなわち $-1, 0, 1$ における値しか用いていない。なぜ 3 つの値だけで 2 次関数の導関数（derivative）が決まるのだろうか。

2 次関数は 3 つの係数をもつので、任意の 3 点における値によって決まる。したがっ

て、その導関数も係数の関数であるから、それら3つの値によって表せるはずである。公式はその表し方を教えてくれる。そしてこれこそが必要なものである。というのも、仮定 $|f(x)| \le 1$ は f の**値**についての情報を与える一方で、結論はその**導関数**についてのものだからである。

順を追って解く

段階 1　公式

$f(1) = a+b+c$、$f(-1) = a-b+c$、$f(0) = c$ である。よって右辺は

$$(a+b+c)\left(x+\tfrac{1}{2}\right) + (a-b+c)\left(x-\tfrac{1}{2}\right) - 2cx$$

となる。x の係数は $(a+b+c)+(a-b+c)-2c = 2a$ であり、定数項は $\tfrac{1}{2}(a+b+c) - \tfrac{1}{2}(a-b+c) = b$ である。よって右辺は $2ax+b = f'(x)$ である。 ■

段階 2　上界

考えてみよう　公式の両辺の絶対値をとり、三角不等式と $|f(1)|, |f(-1)|, |f(0)| \le 1$ を用いよ。$|f'(x)|$ に対して、x の関数としてどのような上界が得られるか。

三角不等式（triangle inequality）$|u+v+w| \le |u|+|v|+|w|$ により、

$$|f'(x)| \le |f(1)|\,|x+\tfrac{1}{2}| + |f(-1)|\,|x-\tfrac{1}{2}| + 2|f(0)|\,|x| \le |x+\tfrac{1}{2}| + |x-\tfrac{1}{2}| + 2|x|.$$

手を止めて、やってみよう　$|x| \le 1$ のとき $|x+\tfrac{1}{2}| + |x-\tfrac{1}{2}| + 2|x| \le 4$ であることを示せ。（符号に応じて場合分けせよ。）

$|x| \le \tfrac{1}{2}$ ならば、$x+\tfrac{1}{2} \ge 0$ かつ $x-\tfrac{1}{2} \le 0$ であるから $|x+\tfrac{1}{2}| + |x-\tfrac{1}{2}| = (x+\tfrac{1}{2}) - (x-\tfrac{1}{2}) = 1$ となり、合計は $1+2|x| \le 2$ である。

$\tfrac{1}{2} \le |x| \le 1$ ならば、2つの括弧の中身はどちらも x と同じ符号をもつので $|x+\tfrac{1}{2}| + |x-\tfrac{1}{2}| = 2|x|$ となり、合計は $4|x| \le 4$ である。

いずれの場合も $|f'(x)| \le 4$ である。 ■

この上界が達成されるのは $x = \pm 1$ においてのみである。区間の中央の半分では、傾きは高々 2 である。

段階 3　極端な例

考えてみよう $x = 1$ で上界が達成されるためには、段階 2 のすべての不等式で等号が成り立たなければならない。$f(1)$、$f(-1)$、$f(0)$ はどのような値をとり、それぞれどの符号でなければならないか。

$x = 1$ では、公式は $f'(1) = \frac{3}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(-1) - 2f(0)$ となる。これを 4 に等しくするには、$f(1) = 1$、$f(-1) = 1$、$f(0) = -1$ でなければならない。$(-1, 1)$、$(0, -1)$、$(1, 1)$ を通る 2 次関数は

$$f(x) = 2x^2 - 1$$

であるから、$a = 2, b = 0, c = -1$ である。$|x| \le 1$ において $x^2 \in [0, 1]$ であるから $2x^2 - 1 \in [-1, 1]$ であり、さらに $f'(1) = 4$ である。 ■

振り返り

- **求めたいものを、わかっているもので表す。**公式は導関数を f の値で書き直した。仮定が情報を与えていたのはまさにその値である。
- **三角不等式。**和を絶対値の和で上から抑えるのは、解析学で最もよく使われる手法の一つである。
- **等号成立条件から極値的な場合を見つける。**すべての不等式で等号が成り立つのはいつかを問うことで、例 $2x^2 - 1$ が直接得られた。

背後にある数学

マルコフの不等式とチェビシェフ多項式

マルコフは 1889 年に、p が n 次の多項式で $[-1, 1]$ 上で $|p(x)| \le 1$ を満たすならば

$$|p'(x)| \le n^2 \qquad \text{ただし} |x| \le 1$$

であることを証明した。$n = 2$ の場合、これは我々の上界 4 である。極端な場合を与えるのは、

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta.$$

によって定義される**チェビシェフ多項式**（Chebyshev polynomials）T_n である。たとえば $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ から我々の極端な 2 次関数 $T_2(x) = 2x^2 - 1$ が得られ、$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ から $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ が得られる。$T_n(x) = \cos n\theta$ であるから、これらの多項式は n 次の多項式に可能な限り多く -1 と 1 の間を振動し、両端では可能な限り急な傾きをもつ（図 3.6.1）。マルコフの弟ウラジーミル（Vladimir）

は、1892 年にこの結果を高階導関数へと拡張した。

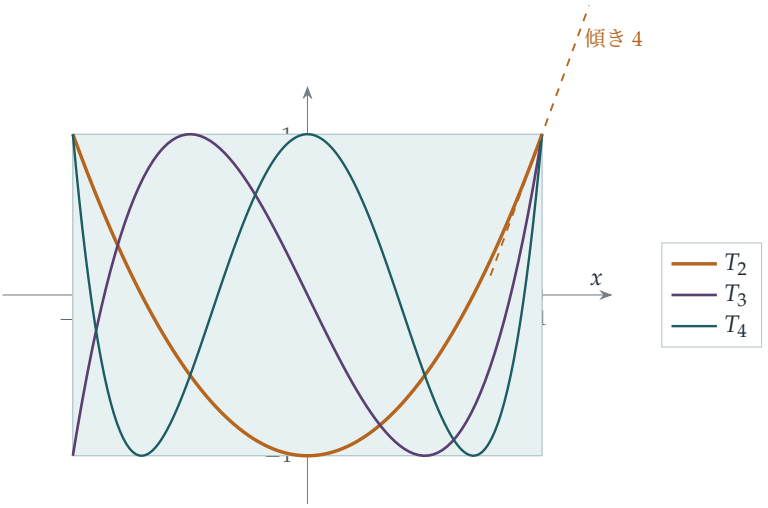


図 3.6.1　チェビシェフ多項式 $T_2 = 2x^2 - 1$、$T_3 = 4x^3 - 3x$、$T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$ は箱 $|x| \le 1, |y| \le 1$ の内部にとどまり、その上辺と下辺に可能な限り多く接する。これらは両端において、同じ次数の多項式の中で最も急な傾きをもつ：$T_n'(1) = n^2$。破線は $x = 1$ における T_2 の接線（tangent）であり、傾きは 4 である。

補間

問題の公式は**ラグランジュ補間**（Lagrange interpolation）の一例である。いくつかの点における関数の値が与えられたとき、それらを通る次数最小のただ一つの多項式を書き下し、それを用いて関数やその導関数を近似するのである。ここでは 3 点は $-1, 0, 1$ である。このような公式は数値解析（numerical analysis）のあらゆる場面で用いられており、たとえば測定データから導関数を推定するのに使われる。マルコフの不等式は、それに付随する警告である。すなわち、値のわずかな誤差が導関数では最大 n^2 倍にまで拡大されうるのであり、これはまさにメンデレーエフが懸念していた問題である。

実用におけるチェビシェフ多項式

チェビシェフ多項式は近似理論（approximation theory）の主力となる道具である。等間隔の点ではなく T_n の根において関数を補間すると、誤差を抑えることができる。等間隔の点を用いると、高次の補間は区間の両端付近でとんでもなく大きく外れることがある（ルンゲ（Runge）現象）。関数をマシン精度いっぱいまで計算したり、微分方

程式を非常に高い精度で解いたりするソフトウェアは、内部でチェビシェフ展開を用いていることが多い。

思考のスキル

未知のものを既知のもので表す

仮定がある種類の量について述べ、結論が別の種類の量についてのものであるときは、両者を結びつける恒等式を探し、各項ごとに上から抑えよ。

そして上界が得られたら、それが最良かどうかを問え。等号成立の場合を逆にたどると、たいていは極端な例にたどり着く。そしてその極端な例は、それ自体として興味深いことが多い。

次の一歩

1. **一般的な考え方。** f が 2 次関数ならば $f(x) = f(-1)\dfrac{x(x-1)}{2} + f(0)(1-x^2) + f(1)\dfrac{x(x+1)}{2}$ であることを示し、これを微分して問題の公式を導け。

2. **一意性。** やや難 $[-1,1]$ 上で $|f(x)| \le 1$ を満たし、かつ $[-1,1]$ のどこかで $|f'(x)| = 4$ となる 2 次関数は $\pm(2x^2-1)$ に限ることを示せ。

3. **チェビシェフ多項式。** $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ を用いて $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ であることを確かめ、$T_3'(1) = 9$ を確認せよ。また $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ を示し、T_4 を求めよ。

4. **T_n の傾き。** $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ を θ について微分することにより $T_n'(\cos\theta) = \dfrac{n\sin n\theta}{\sin\theta}$ を示し、$\theta \to 0$ とすることで $T_n'(1) = n^2$ を導け。

さらに学ぶために

- **Lloyd N. Trefethen, *Approximation Theory and Approximation Practice*** (SIAM)。チェビシェフ多項式と補間についての美しい現代的な本で、優秀な高校生でも読むことができ、全編にわたってコンピュータによる実験が盛り込まれている。
- **Peter Borwein & Tamás Erdélyi, *Polynomials and Polynomial Inequalities*** (Springer)。マルコフの不等式とその仲間たちの全体像を知るための本。上級者向け。

- **George M. Phillips, *Interpolation and Approximation by Polynomials***（Springer）。ラグランジュ補間、チェビシェフ多項式、マルコフ型の不等式を扱う大学学部向けの教科書。

3.7 $\pi^2 \leq 10$

問題

STEP II 2014、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/14-s2-q2`

導入

π が 3 より少し大きいことは、どの生徒も知っている。では、その上界を**証明**するにはどうすればよいだろうか。アルキメデス（Archimedes）は多角形を用いてこれを行った。この問題はまったく思いがけない方法でそれを行う。関数についての一般的な不等式（inequality）をとり、そこに単純な放物線を代入して、$\pi^2 \leq 10$ を読み取るのである。関数の選び方を変えると、有名な近似 $\pi \leq \frac{22}{7}$ が得られる。

不等式 $(*)$ は**ウィルティンガーの不等式**（Wirtinger's inequality）である。これは、両端で 0 に固定された関数は、「急」でなければ「大きく」なれないことを述べている。その背後には、数理物理学の中心的な考え方の一つがある。弦の振動、量子粒子のエネルギー準位、そして固有値（eigenvalue）の理論である。

取りかかる前に

考えてみよう $[0, \pi]$ の両端で 0 となる関数が、中央で大きな値をとるならば、なぜ急でなければならないのだろうか。条件 $f(0) = f(\pi) = 0$ はなぜ重要なのだろうか。

距離 π の範囲内で 0 からある高さ H まで上がり、再び 0 まで下がるには、関数は平均して少なくとも $H/(\pi/2)$ の割合で上昇しなければならない。したがって、その導関数（derivative）がいたるところで小さいということはありえない。端での条件がなければ、このような制約はない。定数関数は導関数が 0 のまま、いくらでも大きくできる。不等式 $(*)$ は、「大きさ」と「急さ」を 2 乗の積分で測ることによって、このこと

を精密に述べたものである。

順を追って解く

段階 1　正弦波

考えてみよう　$\int_0^{\pi} \sin^2 nx\,\mathrm{d}x$ はいくらか。また $\int_0^{\pi} \cos^2 nx\,\mathrm{d}x$ はいくらか。（$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ を用いよ。）

$\int_0^{\pi} \cos 2nx\,\mathrm{d}x = 0$ であるから、どちらも $\frac{\pi}{2}$ である。$\mathrm{f}(x) = \sin nx$ とすると $\mathrm{f}'(x) = n\cos nx$ であるから、$n \geq 1$ より

$$\int_0^{\pi} \mathrm{f}^2 = \frac{\pi}{2} \leq \frac{n^2\pi}{2} = \int_0^{\pi} (\mathrm{f}')^2,$$

が成り立つ。■$n = 1$ のとき等号が成り立つことに注意しよう。つまり、この不等式はこれ以上改良できないほど精密なのである。

段階 2　端の条件が重要である

考えてみよう　$\mathrm{f}(0) \neq 0$ であって $(*)$ が成り立たない単純な関数を見つけよ。次に、$\mathrm{f}(0) = 0$ であるが $\mathrm{f}(\pi) \neq 0$ であるような関数を見つけよ。

定数関数 $\mathrm{f}(x) = 1$ は $\mathrm{f}(0) = 1 \neq 0$ を満たし、$\int_0^{\pi} 1\,\mathrm{d}x = \pi > 0 = \int_0^{\pi} 0\,\mathrm{d}x$ である。

2 つ目については、$\mathrm{f}(x) = x$ は $\mathrm{f}(0) = 0$ であるが $\mathrm{f}(\pi) = \pi$ であり、

$$\int_0^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{3} \approx 10.3 > \pi = \int_0^{\pi} 1^2\,\mathrm{d}x.$$

となる。よって、どちらの場合も $(*)$ は成り立たない。 ■

段階 3　放物線

考えてみよう　$x = 0$ と $x = \pi$ で 0 となる 2 次式はどれか。（定数倍を除けば一つしかない。なぜ定数倍は問題にならないのだろうか。）

その 2 次式は $x(\pi - x)$ の定数倍でなければならない。また f を定数 k 倍すると $(*)$ の両辺はともに k^2 倍されるので、$\mathrm{f}(x) = x(\pi - x)$、すなわち $a = -1, b = \pi, c = 0$ としてよい。このとき $\mathrm{f}'(x) = \pi - 2x$ であり、置換 $u = x - \frac{\pi}{2}$（これにより両方の被積分

関数（integrand）が偶関数（even function）になる）を用いると、

$$\int_0^{\pi} x^2(\pi - x)^2\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\pi^2}{4} - u^2\right)^2 du = \frac{\pi^5}{30},$$
$$\int_0^{\pi} (\pi - 2x)^2\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4u^2\,du = \frac{\pi^3}{3}.$$

となる。（1 つ目については、$h = \frac{\pi}{2}$ として $\int_{-h}^{h}(h^2-u^2)^2\,du = 2(h^5 - \frac{2}{3}h^5 + \frac{1}{5}h^5) = \frac{16}{15}h^5$ である。）したがって $(*)$ は $\frac{\pi^5}{30} \le \frac{\pi^3}{3}$、すなわち

$$\pi^2 \le 10. \qquad \blacksquare$$

を意味する。

段階 4 三角関数による選択

考えてみよう $f(x) = p\sin\frac{1}{2}x + q\cos\frac{1}{2}x + r$ に対して、$f(0) = 0$ と $f(\pi) = 0$ は p, q, r にどのような条件を課すか。

$f(0) = q + r = 0$ かつ $f(\pi) = p + r = 0$ である。よって $p = q = -r$ であり、定数倍を調整して $f(x) = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} - 1$ とする。

手を止めて、やってみよう この関数について $\int_0^{\pi} f^2$ と $\int_0^{\pi}(f')^2$ を計算せよ。π についてどのような不等式が得られるか。

$s = \sin\frac{x}{2}, c = \cos\frac{x}{2}$ とおく。すると $(s+c)^2 = 1 + 2sc = 1 + \sin x$ であるから、

$$f^2 = (s+c)^2 - 2(s+c) + 1 = 2 + \sin x - 2\sin\tfrac{x}{2} - 2\cos\tfrac{x}{2}.$$

となる。$\int_0^{\pi}\sin x = 2$、$\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2} = 2$、$\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2} = 2$ を用いると、

$$\int_0^{\pi} f^2\,dx = 2\pi + 2 - 4 - 4 = 2\pi - 6.$$

である。また $f' = \frac{1}{2}(c - s)$ であるから $(f')^2 = \frac{1}{4}(1 - \sin x)$ となり、$\int_0^{\pi}(f')^2\,dx = \frac{1}{4}(\pi - 2)$ である。ここで $(*)$ より

$$2\pi - 6 \le \frac{\pi - 2}{4} \quad\Longrightarrow\quad 8\pi - 24 \le \pi - 2 \quad\Longrightarrow\quad \pi \le \frac{22}{7}. \qquad \blacksquare$$

が得られる。

段階 5 どちらがよいか

$\pi \le \frac{22}{7}$ から $\pi^2 \le \frac{484}{49} \approx 9.878$ が得られ、これは $\pi^2 \le 10$ よりもよい。（真の値は $\pi^2 \approx 9.870$ である。）これは $\frac{22}{7}$ が π の**上界**であることを証明しているのであって、それが π に等しくないことは、まったく別の積分を用いて Section 4.3 で示される。

振り返り

- **一般的な不等式と、特定の関数。**試験関数を選ぶことで、すべての関数についての主張が、ある一つの数についての主張に変わった。
- **スケーリング。**$(*)$ の両辺は同じ倍率で変化するので、それぞれの関数族における自由な定数を固定することができた。
- **よりよい試験関数は、よりよい評価を与える。**試験関数が極値をとる場合である $\sin x$ に近いほど、不等式は等号に近くなり、評価もよくなる（図 3.7.1）。

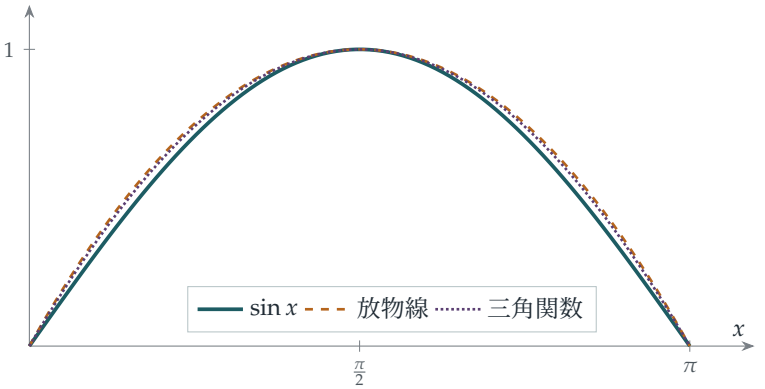


図 3.7.1　この節に登場する 3 つの関数。いずれも最大値が 1 となるように定数倍してある。$(*)$ で等号を与える極値の場合 $\sin x$（実線）、$\pi^2 \le 10$ を与える放物線 $x(\pi - x)$（破線）、そして $\pi \le \frac{22}{7}$ を与える $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} - 1$（点線）である。どちらの試験関数も $\sin x$ に非常に近く、それゆえに評価がこれほどよいのである。

背後にある数学

フーリエ級数による証明

なぜ $(*)$ は成り立つのだろうか。大学では、$[0, \pi]$ 上の「性質のよい」関数で両端で 0 となるものは、**フーリエ正弦級数**（Fourier sine series）

$$\mathrm{f}(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots .$$

として表せることを学ぶ。$m \neq n$ のとき $\int_0^\pi \sin mx \sin nx \, \mathrm{d}x = 0$ であるから、2 乗して積分すると交差項はすべて消え、

$$\int_0^\pi \mathrm{f}^2 = \frac{\pi}{2}\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots\right), \qquad \int_0^\pi (\mathrm{f}')^2 = \frac{\pi}{2}\left(1^2 b_1^2 + 2^2 b_2^2 + 3^2 b_3^2 + \cdots\right).$$

が得られる。右側の各項は左側の対応する項以上であるから、これで $(*)$ が証明され、さらに等号が成り立つのは f が $\sin x$ の定数倍であるときに限ることもわかる。問題の小問 (i) は、項が一つだけの場合にあたる。

振動する弦と量子粒子

比 $\int (f')^2 / \int f^2$ はレイリー商（Rayleigh quotient）と呼ばれ、$(*)$ は、0 と π で固定された関数に対して、この比のとりうる最小値が 1 であることを述べている。この数には物理的な意味がある。両端を固定された弦では、$\int (f')^2$ は伸びのエネルギーを、$\int f^2$ は変位の大きさを表し、この比の最小値が、弦の出せる最も低い音を決める。量子力学では、同じ最小値が、箱に閉じ込められた粒子の最低エネルギーとなる。両端で固定された波は曲がらざるをえないので、これは 0 にはなりえない。レイリー卿（Lord Rayleigh）はまさにこの技法、すなわち試験関数を推測して比を計算するという方法を用いて、振動系の振動数を評価した。極値の場合が最小値を与えるので、どのような推測も真の最低振動数の上界を与え、よい推測は非常に精度の高い上界を与えるのである。

変分法

積分の比を最小にする関数を求めることは、変分法（calculus of variations）の問題である。そこでは未知のものが数ではなく、関数全体である。ここでの最小化関数 $\sin x$ は微分方程式（differential equation）$f'' + f = 0$ を満たすが、これは偶然ではない。積分を最小化すると、必ず最小化関数についての微分方程式が導かれるのである。この考え方には Section 4.7 で再び立ち返る。

思考のスキル

試験関数

ある関数のクラスに属するすべての関数について成り立つ不等式は、巧みに選んだ関数に適用することで、特定の数についての情報を与えることができる。

技は選び方にある。極値の場合に近い試験関数（test function）は、ほぼ最良の結果を与える。この考え方は、固有値の評価から有限要素法（finite element method）に至るまで、解析学、物理学、工学を貫いている。

次の一歩

1. **4次式。** $(*)$ で $f(x) = x^2(\pi - x)^2$ を用いよ。これからは $\pi^2 \le 12$ しか得られないことを示せ。なぜこの試験関数は放物線より劣るのだろうか。（その形を $\sin x$ と比べてみよ。）

2. **2つの正弦波。** $f(x) = \sin x + \sin 2x$ について、両辺を計算して $(*)$ を直接確かめよ。

3. **別の区間。** 置換によって、$g(0) = g(L) = 0$ ならば $\displaystyle\int_0^L g^2 \le \frac{L^2}{\pi^2}\int_0^L (g')^2$ であることを示せ。これは長さの異なる弦について何を意味するか。

4. **レイリーの方法。** やや難 $f(x) = x(\pi - x) + \lambda x^2(\pi - x)^2$ とし、π^2 に対する評価ができるだけよくなるように λ を選べ。（計算は重い。数式処理システムを使うとよい。）

さらに学ぶために

- **T. W. Körner, *Fourier Analysis***（Cambridge University Press）。フーリエ級数とその応用について、ケンブリッジの解析学者が書いた、すばらしく話題豊富な本である。
- **Hardy, Littlewood & Pólya, *Inequalities***（Cambridge University Press）。第7章でウィルティンガーの不等式とその仲間を論じている。
- **Richard Feynman, *The Feynman Lectures on Physics***、第II巻第19章（「The principle of least action」、最小作用の原理）。積分の最小化についてのファインマン（Feynman）の講義で、全編を通して物理的直観に満ちている。オンラインで無料で読める。

3.8 加法定理から関数を決める

問題

STEP III 2019、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip`

導入

e^x とは何なのか、どうすればわかるだろうか。学校では、複利（compound interest）を通して導入されたり、自分自身が導関数（derivative）となる関数として導入されたり、$\lim(1+x/n)^n$ として導入されたりする。この問題は別の答えを与える。e^{kx} は、加法を乗法に変える、すなわち $\mathrm{f}(x+y)=\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y)$ を満たす**唯一の**微分可能な関数なのである。この規則と、ただ一つの数 $\mathrm{f}'(0)$ だけで、関数は完全に決まってしまう。

後半では、もっと奇妙な規則 $\mathrm{g}(x+y)=\frac{\mathrm{g}(x)+\mathrm{g}(y)}{1+\mathrm{g}(x)\mathrm{g}(y)}$ について同じことを行う。この式に見覚えがあるとしたら、それは当然である。これは特殊相対性理論（special relativity）におけるアインシュタイン（Einstein）の速度の合成則で、光速を 1 としたものなのである。この規則から必然的に導かれる関数は tanh であり、そのことから、なぜどんなものも光速を超えて加速できないのかが説明される。

取りかかる前に

$\mathrm{f}(x+y)=\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y)$ のように、未知のものが関数であるような等式を**関数方程式**（functional equation）という。

? **考えてみよう** この等式は**すべての** x と y について成り立つ。まず試してみるべき最も有用なことは何だろうか。

特殊な値である。$y=0$ とおく（あるいは $x=y$ や $y=-x$ とおく）と、手間をかけずに多くの情報が得られることが多い。前半も後半も、そこから始まる。

順を追って解く

段階 1　零での値

$x = y = 0$ とおくと $f(0) = f(0)^2$ となるので、$f(0) = 0$ または 1 である。

> **考えてみよう**　$f(0) = 0$ だとすると、何がまずいのだろうか。

$f(0) = 0$ ならば、$y = 0$ とおくと、すべての x について $f(x) = f(x)f(0) = 0$ となる。すると f は恒等的に零となり、$f'(0) = 0$ であるが、これは $f'(0) = k \neq 0$ に矛盾する。よって $f(0) = 1$ である。 ■

段階 2　零での微分係数からすべての点での導関数へ

> **考えてみよう**　$(*)$ において $f(x+h) = f(x)f(h)$ と書き換えよ。極限の外に出せるものは何だろうか。

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} = f(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - 1}{h} \\
&= f(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = f(x)\, f'(0) = k\, f(x).
\end{aligned}
$$

■

関数方程式のおかげで、0 の近くでの振る舞いを他のあらゆる点へ運ぶことができるのである。

段階 3　$f' = kf$ を解く

$u(x) = f(x)e^{-kx}$ を考える。すると $u'(x) = \big(f'(x) - kf(x)\big)e^{-kx} = 0$ であるから u は定数であり、$u(0) = f(0) = 1$ である。したがって

$$
f(x) = e^{kx}. \qquad \blacksquare
$$

（変数分離（separation of variables）により $\int \frac{df}{f} = \int k\,dx$ としても同じ答えが得られるが、そのためには $f(x) \neq 0$ が必要である。u を使う工夫なら、その心配がない。）

段階 4　第二の規則

> **考えてみよう**　g についての規則で $y = 0$ とおけ。そこから $g(0)$ について何がわかるだろうか。$|g(x)| < 1$ はどこで効いてくるのだろうか。

$y = 0$ とおくと $g(x)\big(1 + g(x)g(0)\big) = g(x) + g(0)$ となり、これを整理すると $g(0)\big(g(x)^2 - 1\big) = 0$ となる。$|g(x)| < 1$ であるから括弧の中が零になることはな

く、よって $\mathrm{g}(0)=0$ である。

> **手を止めて、やってみよう** では、規則を用いて $\mathrm{g}(x+h)-\mathrm{g}(x)$ を計算し、整理してから h で割り、$h\to 0$ とせよ。

$$\mathrm{g}(x+h)-\mathrm{g}(x)=\frac{\mathrm{g}(x)+\mathrm{g}(h)-\mathrm{g}(x)-\mathrm{g}(x)^2\mathrm{g}(h)}{1+\mathrm{g}(x)\mathrm{g}(h)}=\frac{\mathrm{g}(h)\bigl(1-\mathrm{g}(x)^2\bigr)}{1+\mathrm{g}(x)\mathrm{g}(h)}.$$

h で割る。$h\to 0$ のとき $\frac{\mathrm{g}(h)}{h}=\frac{\mathrm{g}(h)-\mathrm{g}(0)}{h}\to \mathrm{g}'(0)=k$ であり、また $\mathrm{g}(h)\to \mathrm{g}(0)=0$ である（微分可能な関数は連続（continuous）である）から、分母は 1 に収束する。したがって

$$\mathrm{g}'(x)=k\bigl(1-\mathrm{g}(x)^2\bigr). \qquad \blacksquare$$

段階 5 これを解く

> **考えてみよう** 変数を分離せよ。$|g|<1$ において導関数が $\frac{1}{1-g^2}$ となる関数は何だろうか。

$|\mathrm{g}|<1$ であるから割り算ができて、$\dfrac{\mathrm{g}'}{1-\mathrm{g}^2}=k$ となる。関数 $\operatorname{artanh} g=\frac{1}{2}\ln\frac{1+g}{1-g}$ の導関数は $\frac{1}{1-g^2}$ であるから、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{artanh}\mathrm{g}(x)=k$ であり、$\operatorname{artanh}\mathrm{g}(x)=kx+C$ となる。$\mathrm{g}(0)=0$ より $C=0$ であるから

$$\mathrm{g}(x)=\tanh kx. \qquad \blacksquare$$

確認：加法定理 $\tanh(A+B)=\dfrac{\tanh A+\tanh B}{1+\tanh A\tanh B}$ は、与えられた規則そのものである。

振り返り

- **まず特殊な値を。** $y=0$ とおくことで $\mathrm{f}(0)$ と $\mathrm{g}(0)$ が求まった。
- **一点からすべての点へ。** 加法法則によって 0 での微分係数をすべての x へ運び、関数方程式を微分方程式（differential equation）に変えた。
- **一意性（uniqueness）。** この議論は、e^{kx} と $\tanh kx$ がうまくいくことを確かめるだけではない。それらが**唯一の**可能性であることを示しているのである。関数方程式が定義になりうるのは、このためである。

背後にある数学

相対性理論における速度

日常生活では、列車が速さ u で走っていて、その中を前向きに速さ v で歩けば、地面に対する速さは $u+v$ である。アインシュタインは 1905 年に、これが近似にすぎないことを示した。c を光速とすると、正しい規則は

$$u \oplus v = \frac{u+v}{1+uv/c^2}.$$

である。速さを c に対する割合で測れば、これはまさに g の規則である。ここで得た結果は、各速度を $v=\tanh\phi$ と書けば、速度の合成は ϕ を**足し合わせる**ことになる、ということを意味している。量 $\phi=\operatorname{artanh} v$ を**ラピディティ**（rapidity）という。ロケットエンジンによる一回ごとの加速はラピディティを一定量だけ増やすが、すべての ϕ について $\tanh\phi<1$ であるから、速度は光速にどんどん近づくものの、決して到達しない（図 3.8.1）。$0.9c$ と $0.9c$ を合成すると、$1.8c$ ではなく $\frac{1.8}{1.81}c\approx 0.9945c$ になる。

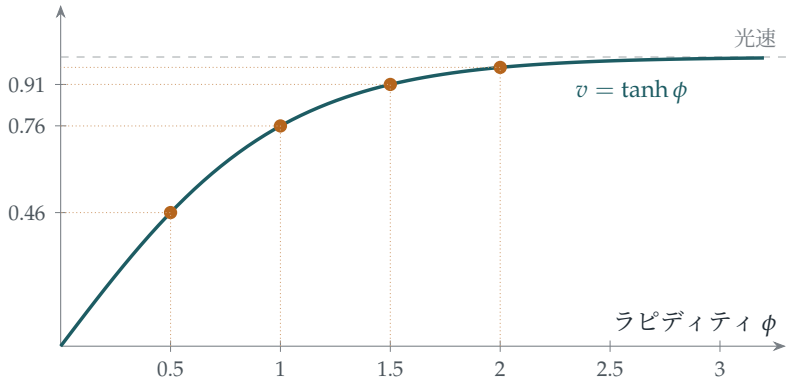


図 3.8.1　ラピディティに対する速度（光速に対する割合）。ラピディティを等しい幅で増やす（エンジンによる等しい加速がもたらすのはまさにこれである）と、速度の増加はどんどん小さくなる：0.46, 0.76, 0.91, 0.96, …となり、決して 1 には達しない。

コーシーの関数方程式

最も単純な関数方程式は $f(x+y)=f(x)+f(y)$ であり、1821 年にコーシー（Cauchy）が研究した。f が微分可能ならば、この問題の方法によって $f(x)=kx$ が示される。実は連続性だけで十分である。しかし、正則性の仮定を一切置かなければ、まったく異

様な別の解が存在し、そのグラフは平面全体に稠密に散らばっている。ハメル（Georg Hamel）は 1905 年にそれらを構成した。その構成には**選択公理**（axiom of choice）が必要であり、そうした解のどれ一つとして具体的に書き下すことはできない。問題が f の微分可能性を強く求めている理由の一つはここにある。この仮定は形式的なものではないのである。

準同型

$f(x+y) = f(x)f(y)$ は、f が実数の加法を正の実数の乗法に変え、両者の構造を保つことを述べている。大学一年の代数の言葉でいえば、f は $(\mathbb{R}, +)$ から $(\mathbb{R}_{>0}, \times)$ への**群準同型**（group homomorphism）であり、対数関数はその逆写像である。数学における最も重要な関数の多くは、このように、それらが保つ構造によって特徴づけられる。Section 7.6 では tanh の幾何学的な意味に出会う。tanh は「双曲角」（hyperbolic angle）を測るものであり、その加法定理は双曲的回転の合成から生じるのである。

思考のスキル

関数をその性質によって定義する

式の代わりに、関数が従う規則によってその関数を記述し、その規則に従う関数がただ一つであることを証明する。

数学者が exp, sin, cos をはじめとする多くの関数を考えるとき、しばしばこのように捉える。つまり式としてではなく、関数方程式や微分方程式のただ一つの解として捉えるのである。そうすることで、それらの計算の仕方だけでなく、なぜそれらが重要なのかがわかる。

次の一歩

1 **正接の規則。** g は微分可能で $g'(0) = k \neq 0$ であり、両辺が定義されるときには常に $g(x+y) = \dfrac{g(x)+g(y)}{1-g(x)g(y)}$ が成り立つとする。$g'(x) = k\bigl(1+g(x)^2\bigr)$ を示し、$x = 0$ の近くで $g(x) = \tan kx$ であることを導け。

2 **コーシーの方程式。** f が微分可能で、すべての x, y について $f(x+y) = f(x)+f(y)$ が成り立つならば、$f(x) = kx$ であることを示せ。

3 **導関数を使わずに。** やや難 $f(x+y) = f(x)f(y)$ と $f(1) = a > 0$ だけを仮定する。正の整数 n について $f(n) = a^n$ であることを示し、次に $f(1/n) = a^{1/n}$ を示し、さらにすべての正の有理数 q について $f(q) = a^q$ であることを示せ。（これより先に進むには、なぜ連続性が必要なのだろうか。）

4 **ロケット科学。** あるロケットは、噴射するたびに、その時点での自分の座標系に対して速さを $0.5c$ だけ増やすことができる。静止状態から始めて、2回、3回、4回噴射した後の（出発点に対する）速さはいくらか。ラピディティを用いよ。

さらに学ぶために

- **Christopher Small, *Functional Equations and How to Solve Them*** (Springer)。『関数方程式とその解き方』。問題を解く人に向けた、読みやすい入門書である。
- **Edwin Taylor & John Wheeler, *Spacetime Physics*** (W. H. Freeman)。『時空の物理学』。特殊相対性理論への古典的な入門書で、全体を通してラピディティを用いている。
- **Tom Körner, *Calculus for the Ambitious*** (Cambridge University Press)。『意欲ある人のための微積分』。指数関数や三角関数をその性質から定義しており、まさにこの節の精神に沿った本である。

3.9 新しい関数を発明する

問題

STEP II 2021、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

導入

$e^{-x} = 5x$ を解くことができるだろうか。電卓に入っているどの関数を使っても解けない。式変形をしても埒が明かない。x が指数関数（exponential function）の中と外の両方に現れていて、どうしても分離できないのである。試行錯誤を重ねれば数値的な答えは得られるが、「公式」は存在しない。

本当にそうだろうか。この問題は大胆な一歩を踏み出す。ある種の方程式が既知の関数では解けないならば、それを解く**新しい関数を発明すればよい**というのである。これはまさに、数学者たちが $\sqrt{x}$（x^2 の逆関数）、$\ln x$（e^x の逆関数）、$\arcsin x$ について行ってきたことである。ここで登場する新しい関数は xe^x の逆関数（inverse function）であり、現在では**ランベルトの W 関数**（Lambert W function）と呼ばれている。この関数を手にすれば、$x^x = 10$ から物理法則に至るまで、驚くほど多様な方程式を厳密に解くことができる。

取りかかる前に

考えてみよう 方程式を「解く」とは、実際にはどういう意味だろうか。$x = \sqrt{2}$ は $x^2 = 2$ の解なのだろうか、それとも単に解に付けた名前にすぎないのだろうか。

その両方である。$\sqrt{2}$ は「平方すると 2 になる正の数」に付けた名前である。これを答えとして認めるのは、関数 $\sqrt{\ }$ がよく理解されており、計算が容易で、その性質が知られているからである。ある答えが「公式」とみなされるかどうかは、どの関数に名

前を付けることに合意しているかによって決まる。この問題は、そのリストに関数をもう一つ加えるのである。

順を追って解く

段階 1　曲線 $y = xe^x$

$\frac{dy}{dx} = e^x + xe^x = (1+x)e^x$ であり、これが 0 になるのは $x = -1$ のときだけで、そのとき $y = -e^{-1}$ である。導関数（derivative）は $x < -1$ で負、$x > -1$ で正であるから、これは最小値（minimum）である。

> **考えてみよう**　$x \to +\infty$ のとき、また $x \to -\infty$ のとき、xe^x はどうなるだろうか。曲線は座標軸とどこで交わるだろうか。

$x \to \infty$ のとき $xe^x \to \infty$ である。$x \to -\infty$ のとき、指数関数的な減衰が一次関数的な増大に勝つので、$xe^x \to 0$ であり、下側から近づく。曲線は原点を通る。したがって曲線は、負の x 軸のすぐ下から現れ、最小点 $(-1, -\frac{1}{e})$ まで下がり、その後 $(0,0)$ を通って上昇し、急激に上へ伸びていく（図 3.9.1）。

段階 2　逆関数

逆関数をもつためには f は単射（one-to-one）でなければならないので、狭義単調増加（strictly increasing）または狭義単調減少（strictly decreasing）である範囲に制限しなければならない。右側の部分を含むそのような最大の区間は $[-1, \infty)$ であるから、$a = -1$ である。$[-1,\infty)$ において f は $-\frac{1}{e}$ から ∞ まで増加するので、逆関数 g は $[-\frac{1}{e}, \infty)$ 上で定義され、$g(-\frac{1}{e}) = -1$ から増加し、$g(0) = 0$ を通り、ゆっくりと増大する（x が大きいところでは $\ln x$ よりもさらにゆっくりである）。そのグラフは $y = xe^x$ の右側の部分を直線 $y = x$ に関して対称移動したものであり、$(-\frac{1}{e}, -1)$ において鉛直な接線（vertical tangent）をもつ。

g を特徴づける性質は

$$g(z)\, e^{g(z)} = z, \qquad g(z) \geq -1.$$

である。したがって (iii) のどの小問でも方針は同じである。方程式を (何か) $e^{(\text{同じ何か})} =$ (ある数) の形に変形すればよい。

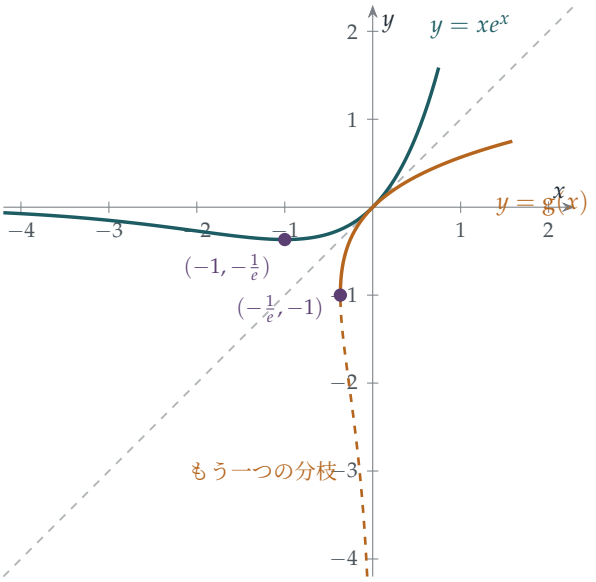


図 3.9.1　曲線 $y = xe^x$（青緑）は $(-1, -\frac{1}{e})$ で最小値をとる。$x \geq -1$ に制限して $y = x$ に関して対称移動すると、逆関数 g（琥珀色、実線）、すなわちランベルトの W 関数が得られる。琥珀色の破線は $y = xe^x$ の左側の部分を対称移動したものであり、小問 (iii) の二つ目の解に必要となる第二の分枝（branch）である。

段階 3　四つの方程式

(a) $e^{-x} = 5x$。両辺に e^x を掛けて 5 で割ると $xe^x = \frac{1}{5}$ となる。よって $x = g\left(\frac{1}{5}\right) \approx 0.169$ である。xe^x は $x < 0$ で負であるから解はすべて正であり、xe^x は $x > 0$ で増加するので、これが唯一の解である。

> **考えてみよう**　(b) と (c) では、未知数は $x \ln x$ の形で現れる。どのような置換（substitution）をすれば $x \ln x$ を ue^u の形に変えられるだろうか。

$x = e^u$ とおくと、$\ln x = u$ であり、$x \ln x = ue^u$ となる。

(b) $2x \ln x + 1 = 0$ は $ue^u = -\frac{1}{2}$ となる。しかし、すべての実数 u に対して $ue^u \geq -\frac{1}{e} \approx -0.368$ であり、$-\frac{1}{2} < -\frac{1}{e}$ である。したがって**実数解は存在しない**。

(c) $3x \ln x + 1 = 0$ は $ue^u = -\frac{1}{3}$ となり、$-\frac{1}{e} < -\frac{1}{3} < 0$ である。高さ $-\frac{1}{3}$ の水平な直線は、$u = -1$ における最小点の両側で一回ずつ、すなわち**二回** $y = ue^u$ と交わる。右側の解は $u = g\left(-\frac{1}{3}\right)$ であり、

$$x = e^{g(-1/3)} \approx 0.538.$$

を得る。もう一方の解は $u < -1 < g\left(-\frac{1}{3}\right)$ を満たし、$x = e^u$ は u について増加するので、求めた解は二つのうち**大きいほう**である（もう一方はおよそ 0.220 である）。

> **手を止めて、やってみよう**　では (d) の $x = 3\ln x$ に挑戦してみよう（ヒント：両辺を指数の肩に乗せ、「何か」が x の定数倍であるような (何か) $e^{\text{何か}}$ の形を目指す）。

(d) $x = 3\ln x$ は $e^{x/3} = x$ を意味するので $xe^{-x/3} = 1$ であり、両辺に $-\frac{1}{3}$ を掛けると

$$\left(-\frac{x}{3}\right) e^{-x/3} = -\frac{1}{3}.$$

となる。したがって $-\frac{x}{3}$ は、(c) で求めた $ue^u = -\frac{1}{3}$ の二つの解のどちらかである。g によって与えられるほうをとると、$x = -3\,\mathrm{g}\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 1.857$ である。もう一方の解は、もう一つの解 $u < \mathrm{g}(-\frac{1}{3})$ から得られ、より大きな $x = -3u$ を与える。したがって今度は、求めた解は二つのうち**小さいほう**である（もう一方はおよそ 4.536 である）。 ■

段階 4　$x^x = 10$

対数をとると $x\ln x = \ln 10$ となる。$x = e^u$ とおくとこれは $ue^u = \ln 10$ となるので、$u = \mathrm{g}(\ln 10)$ であり、

$$x = e^{\mathrm{g}(\ln 10)} \approx 2.506.$$

である。$\mathrm{g}(z)e^{\mathrm{g}(z)} = z$ であるから、これを $x = \dfrac{\ln 10}{\mathrm{g}(\ln 10)}$ と書くこともできる。 ■

振り返り

- **足りない関数に名前を付ける。**方程式が既知の関数で解けないとき、新しい関数を逆関数として定義するのは正当な手段であり、しばしば見通しをよくしてくれる。
- **標準形に変形する。**(iii) と (iv) のすべての小問は、$x = e^u$ や $u = -\frac{x}{3}$ といった置換を用いることで、$ue^u =$ 定数 に帰着した。
- **グラフで解の個数を数える。**$ue^u = c$ の解が 0 個、1 個、2 個のいずれであるかは、c が最小値 $-\frac{1}{e}$ に対してどこにあるかだけで決まる。

背後にある数学

長い歴史と新しい名前をもつ関数

ヨハン・ハインリッヒ・ランベルト（Johann Heinrich Lambert）は 1758 年にこの種の方程式を研究し、オイラー（Euler）は 1783 年にそれをさらに発展させた。しかしこの関数には、1990 年代になるまで標準的な名前がなかった。名前が必要になったの

は、数式処理システム（computer algebra system）Maple の開発者たちである。1996 年、Robert Corless、Gaston Gonnet、David Hare、David Jeffrey、そしてドナルド・クヌース（Donald Knuth）は、論文「On the Lambert W function」を発表し、この関数の性質と応用をまとめた。この論文は数千回引用され、W は現在ではほとんどの数学ソフトウェアに組み込まれている。問題中の関数 g は**主枝**（principal branch）W_0 である。図 3.9.1 の破線の曲線は (c) と (d) の二つ目の解を与えたものであり、もう一つの実数の分枝 W_{-1} である。

W が現れるところ

- **ウィーンの変位則（Wien's displacement law）。**高温の物体が最も強く放射する波長は、その温度に反比例する。その比例定数は $5(1-e^{-x}) = x$ を解くことで得られ、その正の解は $x = 5 + W(-5e^{-5}) \approx 4.965$ である。約 5800 K の太陽が黄白色に見え、より低温の赤色矮星が赤く見えるのはこのためである。
- **冪の塔（power tower）。**無限の冪の塔 $x^{x^{x^{\cdots}}}$ は $e^{-e} \le x \le e^{1/e}$ のとき収束（converge）し、その値は $\dfrac{W(-\ln x)}{-\ln x}$ である。
- **人口モデルと感染症モデル。**最も単純なモデルにおける感染症の最終規模や、いくつかの成長モデルにおいて人口が所定の値に達するまでの時間は、いずれも W によって与えられる。

初等関数

W は本当に新しい関数なのだろうか。それとも exp、ln、累乗根、三角関数を用いて書き表せるのだろうか。答えは、本当に新しい関数である。1830 年代のリウヴィル（Joseph Liouville）にさかのぼる定理により、W は**初等関数**（elementary function）ではないことが示される。同じ理論により、$\int e^{-x^2}\,dx$ のような一見何でもない積分も初等関数の範囲では計算できないことがわかる。正規分布（normal distribution）が独自の特殊関数を必要とするのはこのためである。

思考のスキル

解としての逆関数

方程式 $\mathrm{f}(x) = c$ は、f を単射になるように制限しさえすれば、$x = \mathrm{f}^{-1}(c)$ によって解ける。どの解が得られるかは、その制限の仕方によって決まる。

見た目の異なる多くの方程式が、実は同じ方程式の姿を変えたものである。共通の形を明らかにする置換を見つけることが、鍵となる一歩である。

次の一歩

1 **2 と 4、そしてもう一つ。** 方程式 $x^2 = 2^x$ には明らかな解 $x = 2$ と $x = 4$ がある（Section 3.5 と比較せよ）。この方程式には負の解もあり、それが

$$x = -\frac{2}{\ln 2}\,\mathrm{g}\left(\frac{\ln 2}{2}\right) \approx -0.767.$$

であることを示せ。

2 **導関数。** $\mathrm{g}(x)e^{\mathrm{g}(x)} = x$ を陰関数微分（implicit differentiation）することにより、$x \neq 0$ のとき

$$\mathrm{g}'(x) = \frac{\mathrm{g}(x)}{x\big(1 + \mathrm{g}(x)\big)}.$$

であることを示せ。$x = -\frac{1}{e}$ では何が起こるだろうか。

3 **積分。** 置換 $x = we^w$ を用いて、$\displaystyle\int_0^e \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x = e - 1$ を示せ。

4 **冪の塔。** 冪の塔 $T = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}$ が収束すると仮定して、$T = \sqrt{2}^{T}$ を示し、$T = 2$ または $T = 4$ であることを導け。どちらが正しいだろうか（数列 $t_1 = \sqrt{2}$, $t_{n+1} = \sqrt{2}^{t_n}$ の最初のいくつかの項を計算し、Section 2.2 のくもの巣図（cobweb diagram）について考えてみよ）。

さらに学ぶために

- **Robert Corless et al., “On the Lambert W function”**, *Advances in Computational Mathematics* 5 (1996)。この関数に名前を与えた論文である。この節を学んだ後であれば、最初のいくつかの節は読むことができる。

- **Brian Hayes, “Why W?”**, *American Scientist* 93 (2005)。この関数の歴史と用途についての生き生きとしたエッセイ。オンラインで無料で読める。
- **Brian Conrad, “Impossibility theorems for elementary integration”**。リウヴィルの理論を解説した講義ノートで、オンラインで入手できる。上級者向け。

本章で学んだこと

本章は、$1 = 2$ の「証明」と三つの問いから始まった。議論が正しいことをどうすれば確かめられるか、不等式をどう証明するか、そして関数とは本当は何なのか、という問いである。ここでは、本章の九つの問題から何を学んだかをまとめる。

1. 議論が正しいことをどうすれば確かめられるか

Section 3.1 ではチェックリストを手に入れた。各段階で次の三つを問うのである。**計算は正しいか。その段階は論理的に導かれているか。何が明言されないまま仮定されているか。**そこで扱った誤りは典型的なものであった。二つの停留点（stationary point）での値を比べても、どちらが極大であるかについては何もわからない。無限区間上では、停留値は関数を上下から押さえる限界にはならない。微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）には連続な被積分関数（integrand）が必要である。そして議論は、偶然に「正しそうに見える」答えにたどり着くこともある。

同じ注意深さは本章の残りの部分にも通じていた。Section 3.7 では、仮定（hypothesis）$(f(0) = f(\pi) = 0)$を外すと不等式が成り立たなくなることを反例（counterexample）によって示した。Section 3.8 では、関数が微分可能（differentiable）であるという仮定が本質的であった。この仮定がなければ、コーシー（Cauchy）の関数方程式（functional equation）には、誰も書き下せないような奇妙な解が存在する。また Section 3.6 と Section 3.3 では、等号成立条件（equality condition）から、評価が最良であるかどうかがわかった。これこそ、注意深い数学者が必ず問う種類の問いである。

2. 不等式をどう証明するか

古典的な不等式にいくつもの方向から出会い、それらが互いにどう関係しているかを見た。

- **平方は非負である。**二数の相加・相乗平均の不等式（AM–GM）は、$(a-b)^2 \geq 0$ にほかならない。コーシーの前進・後退帰納法（forward–backward induction）は、ここから一般の場合を組み立てた（Section 3.2）。
- **凸性（convexity）。**上に凸（concave）な曲線は、その弦（chord）より上にある。この一つの事実からイェンゼン（Jensen）の不等式が得られ、対数に適用すれば相加・相乗平均の不等式が一行で導かれる。$\sin x$ に適用すれば三角形に関する鋭い不等

式が得られる（Section 3.3）。

- **面積。**曲線の下の面積とその横の面積を合わせると、長方形を覆う。ここからヤング（Young）の不等式が得られ、それがヘルダー（Hölder）の不等式やコーシー＝シュワルツ（Cauchy–Schwarz）の不等式へとつながる（Section 3.4）。
- **グラフの形。**a^b と b^a の比較を、$\frac{\ln x}{x}$ の二点での値の比較に書き直すことで、π^e と e^π の大小が決着した（Section 3.5）。
- **補間（interpolation）と三角不等式（triangle inequality）。**導関数を関数値で表し、項ごとに評価することで、二次式に対するマルコフ（Markov）の不等式が得られた（Section 3.6）。
- **テスト関数（test function）。**一般的な不等式を巧みに選んだ関数に適用することで、$\pi^2 \le 10$ と $\pi \le \frac{22}{7}$ が得られた（Section 3.7）。

これらの中からどれを選ぶかは、練習を重ねることで身につくスキルである。大まかな目安を挙げておく。積と和があれば相加・相乗平均の不等式を、関数値の平均があればイェンゼンの不等式を、関数とその逆関数（inverse function）があればヤングの不等式を考える。同じ形をした二つの式の比較であれば、その背後にある一つの関数を探すとよい。

3. 関数とは本当は何なのか

最後の二つの節は、この問いに二通りの仕方で答えた。Section 3.8 では、e^{kx} と $\tanh kx$ はそもそも式で与えられたのではなかった。それらは、ある加法定理を満たす**唯一の**微分可能な関数として現れたのである。これは式よりも深い種類の理解である。なぜこれらの関数が、複利やアインシュタイン（Einstein）の速度の合成則のような場面に繰り返し現れるのかを説明してくれるからである。Section 3.9 ではさらに進んで、xe^x の逆関数という新しい関数を**発明**した。手持ちの関数だけでは、自然に現れる方程式の族を解くのに足りなかったからである。電卓にあるどの関数も、かつては同じように新しいものだったのである。

4. 厳密さ（rigour）と不等式のための道具箱

手法	使った場面
すべての段階とすべての仮定を確認する	もっともらしいが誤った議論（3.1）
局所的な振る舞いと大域的な振る舞い	停留点と無限遠での極限（3.1）
前進・後退帰納法	相加・相乗平均の不等式（3.2）
余分な項を補う	相加・相乗平均の不等式（3.2、3.3）
イェンゼンの不等式	三角形、相加・相乗平均の不等式（3.3）
面積の比較	ヤングの不等式（3.4）
変数を分離して一つの関数にまとめる	π^e と e^π の比較（3.5）
三角不等式と等号成立の場合	マルコフの不等式（3.6）
テスト関数	$\pi^2 \leq 10$（3.7）
関数方程式	e^x と $\tanh x$（3.8）
逆関数と置換	W 関数（3.9）

この先へ

- Section 3.7 で垣間見た変分法（calculus of variations）は、Section 4.7 の主題である。
- tanh とその加法定理の背後にある幾何学は、Section 7.6 で扱う。
- 第 4 章では、本章の注意深い姿勢を積分そのものに向け、積分とは実際に何であるかというところから出発する。

大学入学前にさらに先へ進みたい人へ

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***：不等式への最良の入門書であり、全体が問題によって組み立てられている。
- **Daniel Velleman, *How to Prove It***：正しい証明の書き方を体系的に解説した手引きである。
- **Michael Spivak, *Calculus***：基礎から積み上げる厳密な微分積分学の本である。ケンブリッジの学生の多くが、入学前の夏に読んでいる。
- **E. A. Maxwell, *Fallacies in Mathematics***：どこが誤っているかを見抜く練習のための本である。

フォン・ノイマン（von Neumann）は、数学では物事を理解するのではなく、ただ慣

れるだけだと冗談を言った。これにはいくらかの真実がある。本章の厳密な定義や注意深い議論は、最初は奇妙に感じられるかもしれない。しかし、それに慣れることこそが、計算ができる学生を、確信をもてる数学者へと変えるのである。$1 = 2$ の証明にだまされることは、もう二度とないだろう。数学の学位課程の目標は、より微妙なあらゆる誤りを、それと同じくらい容易に見抜けるようにすることである。

「次の一歩」の解答

ここに載せるのは完全な解答ではなく、簡潔な答えとヒントである。結果と鍵となる手順を示しているので、自分の答案を確かめるのに使ってほしい。答えを見る前に、それぞれの演習問題にしっかり取り組むこと。

3.1 誤りを見抜け

1. x が -1 から 1 まで動くとき、x は 0 を通過し、そこでは $t = 1/x$ が定義されない。つまり、この置換（substitution）は区間上で連続（continuous）でない。正しくは $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$（$x = \tan\theta$ とおく）であり、一方 $\int_{-1}^{1} \frac{-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$ である。

2. (a) 正しい。両辺の対数はともに $\ln a \ln b$ である。(b) 誤り。$\theta = 0$ のとき $\cos 0 = 1 \neq \sin 1$ である。（実際、$|\sin\theta \pm \cos\theta| \le \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$ であるから、両者が等しくなることはない。）(c) 誤り。定数でない多項式は有界でなく（unbounded）、また定数が 1 と -1 の両方から 10^{-6} 以内にあることはできない。(d) 正しい。相加相乗平均の不等式（AM–GM）より $x^4 + x^{-4} \ge 2$ であり、等号は $x = 1$ のとき成り立つ。

3. $n = 1$ から $n = 2$ への段階が成り立たない。2 頭の馬では、「最初の 1 頭」と「最後の 1 頭」が重ならない。

4. $\int_{\varepsilon}^{1} x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \to 2$ であるから、対称性により積分は（極限として）存在し、その値は 4 である。

3.2 相加・相乗平均を逆向きに

1. $a_1, \dots, a_{n-1}$ の平均が A、幾何平均（geometric mean）が G であるとき、n 番目の数として A を加える。平均は A のままなので $(G^{n-1}A)^{1/n} \le A$ となり、これから $G \le A$ が得られる。

2. この $n+1$ 個の数の平均は $1 + \frac{1}{n+1}$、幾何平均は $(1+\frac{1}{n})^{n/(n+1)}$ であり、すべてが等しいわけではないので、不等式は等号なしで成り立つ。両辺を $n+1$ 乗せよ。

3. 各面の面積は ab, bc, ca であり、$S = 2(ab + bc + ca)$ である。相加相乗平均の不等式より $\frac{S}{6} \ge (abc)^{2/3} = V^{2/3}$ であり、等号は $ab = bc = ca$、すなわち立方体のと

きに成り立つ。

4. $1/a_i$ に相加相乗平均の不等式を用いると $\frac{1}{n}\sum \frac{1}{a_i} \geq \frac{1}{G}$ となる。両辺の逆数をとれ。

3.3 凸性の威力

1. $\mathrm{f}'' < 0$ ならば傾きは減少するので、曲線は各弦（chord）の上側にある。$t = \frac{1}{3}$ とすると、$\mathrm{f}\big(\frac{u+v+w}{3}\big) \geq \frac{1}{3}\mathrm{f}(u) + \frac{2}{3}\mathrm{f}\big(\frac{v+w}{2}\big) \geq \frac{1}{3}\big(\mathrm{f}(u) + \mathrm{f}(v) + \mathrm{f}(w)\big)$ である。

2. $(\ln \sin x)'' = -\operatorname{cosec}^2 x < 0$ であるから、$\ln \sin$ は $(0, \pi)$ で凹（concave）である。イェンセンの不等式（Jensen）より $\frac{1}{3}\ln(\sin A \sin B \sin C) \leq \ln \sin \frac{\pi}{3}$ となるので、積は高々 $\big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big)^3$ である。

3. $(0, \frac{\pi}{2})$ 上で $(\tan x)'' = 2\sec^2 x \tan x > 0$ である。イェンセンの不等式より $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\tan \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$ となる。

4. $(x^2)'' = 2 > 0$ である。イェンセンの不等式からこの不等式が得られ、これは分散（variance）$\frac{1}{n}\sum a_i^2 - \bar{a}^2$ が非負であることを表している。

3.4 不等式を証明する面積

1. $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上の $\mathrm{f} = \sin$ について、等号は $b = \mathrm{f}(a)$ のとき成り立つ。$a = \arcsin t, b = t$ とすると、$t \arcsin t = (1 - \cos(\arcsin t)) + \int_0^t \arcsin y \, \mathrm{d}y$ である。結果の右辺を微分すると $\arcsin t + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t$ となる。

2. $p = q = 2$ としたヤングの不等式（Young's inequality）より $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ である。$\sum a_i^2 = \sum b_i^2 = 1$ ならば、これらを足し合わせて $\sum a_i b_i \leq 1$ を得る。一般の場合は、これを $a_i / \sqrt{\sum a_j^2}$ と $b_i / \sqrt{\sum b_j^2}$ に適用すればよい。

3. $\int_0^a (e^x - 1)\,\mathrm{d}x = e^a - 1 - a$ および $\int_0^b \ln(1+y)\,\mathrm{d}y = (1+b)\ln(1+b) - b$ である。等号は $b = e^a - 1$ のとき成り立つ。

4. $t = 1$ のとき 1.571 対 1、$t = 2$ のとき 0.524 対 0.268、$t = 10$ のとき 0.1002 対 0.0501 である。t が大きいとき、$t - \sqrt{t^2 - 1} = \frac{1}{t + \sqrt{t^2-1}} \approx \frac{1}{2t}$ である。この評価は $a = 0$ の場合から得られるもので、そのとき $(*)$ は単に $0 \leq \int_0^b \arcsin y \, \mathrm{d}y$ を述べているにすぎない。b が小さいとき、この面積はおよそ $\frac{b^2}{2}$ であり、これは $b \arcsin b \approx b^2$ の半分であるから、これを捨てることで因子 2 を失うのである。

3.5 π^e か e^π か？

1. $n^m = m^n$ は $h(n) = h(m)$ を意味する。h は $(1, e)$ で増加し、その後は減少するので、2 つのうち一方は e より小さい。それは 2 でなければならず（$h(1) = 0$ とい

う値は再びとられないから)、するともう一方は 4 である。よって、そのような組は $\{2,4\}$ のみである。

2. $e < 3 < \pi$ であり、そこで h は減少するので $h(3) > h(\pi)$、すなわち $3^\pi > \pi^3$ である。$\frac{9}{4}$ と $\sqrt{5}$ はともに e より小さく、$\frac{9}{4} > \sqrt{5}$ であるから $h(\frac{9}{4}) > h(\sqrt{5})$ となり、2 つ目が得られる。$1 < x < 2$ のとき、$3 < x+2 < 4$ であるから $h(x) < h(2) = h(4) < h(x+2)$ となり、$x^{x+2} < (x+2)^x$ である。最後に、$9^{\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}}$ および $\sqrt{2}^9 = 16\sqrt{2} = (2\sqrt{2})^3$ である。$e^2 < 8$ であるから $e < 2\sqrt{2} < 3$ であり、そこで h は減少するので $h(2\sqrt{2}) > h(3)$ となる。これより $(2\sqrt{2})^3 > 3^{2\sqrt{2}}$ が得られ、$\sqrt{2}^9$ の方が大きい。

3. $e^{\pi/e-1} > \frac{\pi}{e}$ であるから $e^{\pi/e} > \pi$ である。両辺を e 乗せよ。

3.6 傾きの上界

1. 両辺は $x = -1, 0, 1$ で一致する二次式(quadratic)であるから、等しい(ラグランジュ補間(Lagrange interpolation))。微分すると $\mathrm{f}(-1)(x-\frac{1}{2}) - 2\mathrm{f}(0)x + \mathrm{f}(1)(x+\frac{1}{2})$ が得られる。

2. $[-1,1]$ 上で $|\mathrm{f}'(x)| \le |x-\frac{1}{2}| + 2|x| + |x+\frac{1}{2}| \le 4$ であり、等号が成り立つのは $x = \pm 1$ のときに限られ、しかも $\mathrm{f}(1), \mathrm{f}(-1), -\mathrm{f}(0)$ がすべて 1 に等しいか、すべて -1 に等しいときに限られる。二次式はこれら 3 つの値で決まるので、$\pm(2x^2-1)$ が得られる。

3. $T_3(\cos\theta) = \cos 3\theta$ から $4x^3 - 3x$ が得られ、$T_3'(1) = 12 - 3 = 9$ である。$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$ から $T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$ が得られ、$T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$ である。

4. $-\sin\theta\, T_n'(\cos\theta) = -n\sin n\theta$ である。$\theta \to 0$ のとき $\frac{n\sin n\theta}{\sin\theta} \to n^2$ となる。

3.7 $\pi^2 \le 10$

1. $\int_0^\pi \mathrm{f}^2 = \frac{\pi^9}{630}$ および $\int_0^\pi (\mathrm{f}')^2 = \frac{2\pi^7}{105}$ であるから、$(*)$ より $\pi^2 \le 12$ が得られる。この四次式(quartic)は $\sin x$ と比べて両端付近では平らすぎ、中央では尖りすぎているので、大きさに対する傾きの比が最適な値から遠くなる。

2. $\int_0^\pi (\sin x + \sin 2x)^2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$(交差項の積分は 0 である)であり、$\int_0^\pi (\cos x + 2\cos 2x)^2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$ である。

3. $\mathrm{g}(x) = \mathrm{f}(\pi x/L)$ とおく。左辺は $\frac{L}{\pi}$ 倍になり、$\int(\mathrm{g}')^2$ は $\frac{\pi}{L}$ 倍になる。弦の振動では、最低振動数は $\frac{1}{L}$ に比例する。すなわち、弦の長さを半分にすると音の高さ(振動数)は 2 倍になる。

4. 評価 $\pi^2 \le \int (\mathrm{f}')^2 / \int \mathrm{f}^2$（適切な単位で）は $\lambda \approx 1.133/\pi^2$ で最小となり、$\pi^2 \le 9.86975$ が得られる。真の値は 9.86960 である。

3.8 加法定理から関数を決める

1. $x = y = 0$ とおくと $\mathrm{g}(0) = 0$ が得られる。y について微分して $y = 0$ とおくと $\mathrm{g}'(x) = k(1 + \mathrm{g}(x)^2)$ となるので、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan \mathrm{g}(x) = k$ であり、$\mathrm{g}(x) = \tan kx$ である。

2. y について微分すると $\mathrm{f}'(x + y) = \mathrm{f}'(y)$ となるので、f' は定数 k である。また $\mathrm{f}(0) = 0$ である（$x = y = 0$ とおく）。

3. $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x/2)^2 \ge 0$ であり、f が 0 になることはない（もしそうなれば、至るところで 0 になる）。数学的帰納法（induction）より $\mathrm{f}(n) = a^n$ である。$\mathrm{f}(1/n)^n = \mathrm{f}(1) = a$ と $\mathrm{f}(1/n) > 0$ から $a^{1/n}$ が得られ、さらに $\mathrm{f}(m/n) = \mathrm{f}(1/n)^m$ である。連続性がなければ、無理数における値には何の制約もない。実際、「ハメル基底（Hamel basis）」を用いて構成される、a^x ではない奇妙な解が存在する。

4. 1 回の噴射ごとにラピディティ（rapidity）$\phi = \operatorname{artanh} \frac{1}{2}$ が加わるので、k 回噴射した後の速さは $\tanh k\phi = \frac{3^k - 1}{3^k + 1}$ である。すなわち $0.8c$、$\frac{13}{14}c \approx 0.929c$、$\frac{40}{41}c \approx 0.976c$ となる。

3.9 新しい関数を発明する

1. $x = -1$ のとき $x^2 - 2^x = \frac{1}{2} > 0$ であり、$x = 0$ のときこれは -1 である。よって負の解が存在する。$x = -2u/\ln 2$ とおくと、$x^2 = 2^x$ は（$x < 0$ であるから $x = -2^{x/2}$ として）$ue^u = \frac{\ln 2}{2}$ となる。よって $u = \mathrm{g}\left(\frac{\ln 2}{2}\right)$ であり、$x \approx -0.7667$ である。

2. $\mathrm{g}' e^{\mathrm{g}} (1 + \mathrm{g}) = 1$ であり、$e^{\mathrm{g}} = x/\mathrm{g}$ である。$x = -\frac{1}{e}$ のとき $\mathrm{g} = -1$ であり、傾きは無限大である（グラフはそこで垂直になる）。

3. $x = we^w$ とおくと $\mathrm{d}x = (1 + w)e^w \, \mathrm{d}w$ であり、w は 0 から 1 まで動く。よって $\int_0^1 w(1 + w)e^w \, \mathrm{d}w = \left[(w^2 - w + 1)e^w\right]_0^1 = e - 1$ である。

4. $T = \sqrt{2}^{\,T}$ は $\frac{\ln T}{T} = \frac{\ln 2}{2}$ を意味するので、$T = 2$ または 4 である。項 $1.414, 1.633, 1.761, \ldots$ は増加し、2 未満にとどまる（$t_n < 2$ ならば $t_{n+1} < \sqrt{2}^{\,2} = 2$）ので、$T = 2$ である。不動点（fixed point）4 は反発的（repelling）である。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

全 13 章のうちの第 3 章。 本書全体、すべての章、すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.