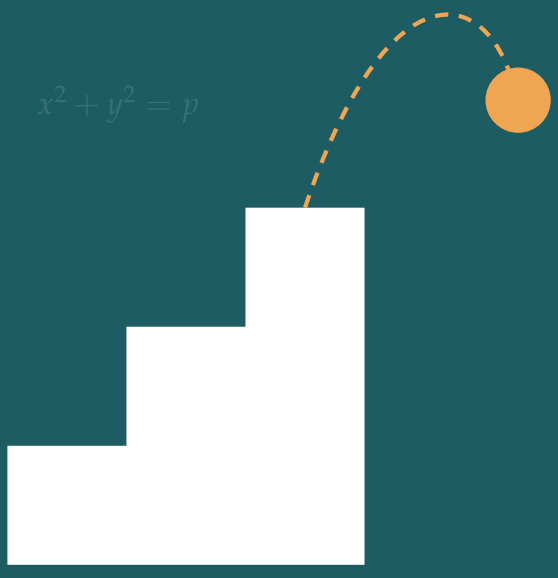
STEP 対策 · 大学の数学

Beyond STEP

第 2 章

数列（sequence）・級数（series）・収束（convergence）



KEITH McNULTY

Beyond STEP

大学数学への入り口としての
STEP 過去問

第 2 章

数列（sequence）・級数（series）・収束（convergence）

Keith McNulty

Beyond STEP：大学数学への入り口としての STEP 過去問

第 2 章：数列（sequence）・級数（series）・収束（convergence）

これは *Beyond STEP* 全 13 章のうちの第 2 章である。本書全体、各章単独の PDF、各節の印刷用ワークシート、そしてすべての STEP の問題の詳しい解答は、`beyondstep.keithmcnulty.org` で無料で閲覧・ダウンロードできる。

2026 年 11 月、オンラインにて初版発行。

本 PDF のうち著者自身の著作物（本文、解答、図、演習問題とその答えを含む）はすべて、クリエイティブ・コモンズ CC0 1.0 全世界（Creative Commons CC0 1.0 Universal）ライセンスのもとでパブリックドメインに提供されている。許可を求めることなく、いかなる目的でも複製、改変、共有してよい。詳しくは `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0` を参照のこと。

ここで扱う STEP の問題の著作権は Cambridge University Press & Assessment に帰属する。問題そのものは転載しておらず、各問題には公式の出典である STEP Support Programme の問題データベース、または OCR の過去問へのリンクを付している。

誤りの指摘は、`github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty` への issue として歓迎する。

章

2

数列・級数・収束

無限こそ数学が面白くなる場所であり、そして最も誤りやすい場所でもある。

この章の内容

2.1	「いずれは」とは何を意味するか	STEP III 2015
2.2	極限としての黄金比	STEP II 2013
2.3	発散する級数と、収束するその親戚	STEP III 2014
2.4	$\pi^2/6$	STEP III 2018
2.5	ヴィエトの無限積	STEP III 2022
2.6	算術幾何平均	STEP II 2024
2.7	6 桁か、600 桁か	STEP II 2023
2.8	2 乗して 2 を引く	STEP III 2021
2.9	e に迫る分数	STEP II 2021
A	演習問題の答え	p. 71

無限を飼いならす

> 無限！　これほど深く人間の精神を揺り動かした問いはほかにない。
>
> — ヒルベルト（David Hilbert）

2500年前、エレアのゼノン（Zeno of Elea）は運動が不可能であると論じた。部屋を横切って歩くには、まず半分まで歩き、次に残りの半分を歩き、さらにその半分を歩き、と永遠に続けなければならない。これは無限個の作業であり、有限の時間で終えられるはずがない、というのである。人は実際に部屋を横切れるのだから、ゼノンが間違っていることは誰もが知っていた。しかし、彼が**なぜ**間違っているのかを正確に説明できる者は、非常に長い間いなかった。答えは、無限和 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ が有限の値1をもつということである。だが、そもそも無限個の数を足し合わせて何かになるとは、どういう**意味**なのだろうか。

この問いは二千年にわたって数学の中心にあり続けた。17世紀にニュートン（Newton）とライプニッツ（Leibniz）はこの問いの上に微積分（calculus）を築いたが、ついに完全な答えを出すことはなかった。その後継者たちは見事な結果を生み出す一方で、とんでもない誤りも生み出した。史上最高の計算家であるオイラー（Euler）は、平然と $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$ と書いた。また別の者たちは、同じ無限級数（infinite series）について互いに矛盾することを「証明」した。正しい結果と誤った結果を区別できるほど精密な定義を数学者が手にしたのは、19世紀になって、コーシー（Cauchy）やワイエルシュトラス（Weierstrass）らの仕事によってであった。それらの定義こそが本章の主題である。

なぜ重要なのか

あなたがこれから計算に使うほとんどすべての数は、何かの極限（limit）である。電卓は $\sqrt{2}$ や π や e そのものを知っているわけではない。電卓が知っているのは、それらにどんどん近づいていく手順であり、十分近づいたところで計算を止めるのである。手順が**どれくらい速く**近づくかを理解しているかどうかが、1ミリ秒で終わるアルゴリズムと永遠に終わらないアルゴリズムとの違いを生む。同じ考え方は、天気予報、航空機の設計、金融商品の価格付けに使われるコンピュータ・シミュレーションの基盤にもなっている。そして最も純粋な側面では、極限の研究は数学で最も美しい公式

のいくつかへと導く。本章では

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},$$

を証明する。これはオイラーを有名にした結果であり、今なおほとんど魔法のように見える。

大学で出会うもの

ほとんどすべての大学で、**解析学**（Analysis）は最初に履修する科目の一つであり、多くの学生にとって最大の衝撃となる。学校の数学では極限を計算することを学ぶが、解析学では精密な定義から出発して、極限についての事柄を**証明**することを学ぶ。数列（sequence）が収束する（converge）とはどういうことかを、Section 2.1 に登場する「任意の $\varepsilon > 0$ に対して」と「N が存在して」という言い回しを用いて定義する。有界な単調増加数列（bounded increasing sequence）はすべて収束することを証明し、それが実数のもつ性質である**完備性**（completeness）に依存しており、有理数にはこの性質がないことを知るだろう。級数（series）の収束判定法を学び、さらに同じ考え方を用いて、連続性、微分、積分に厳密な意味を与える。

その後の科目は、この土台の上にさまざまな方向へと発展していく。**数値解析**（numerical analysis）は、近似がどれくらい速く収束するか、そしてどうすればより速くできるかを問う（Section 2.7、Section 2.6）。**力学系**（dynamical systems）は、ある規則を何度も繰り返し適用したときに何が起こるかを研究する。極限に到達することもあれば、カオスを生み出すこともある（Section 2.2、Section 2.8）。**複素解析**（complex analysis）は、なぜ π がこれほど多くの無限和や無限積に現れるのかを説明する（Section 2.4、Section 2.5）。そして**解析的整数論**（analytic number theory）は、Section 2.9 のように、極限を用いて整数に関する問いに答える。

本章を貫く問い

三つの大きな問い

1. **無限の過程が答えをもつとはどういうことか。**数列が極限に「近づく」こと、あるいは無限和がある数に「なる」ことを、どうすれば正確に言い表せるか。
2. **何に収束するかを知らずに、収束することをどうやって証明できるか。**そして、極限が存在することがわかったら、それをどうやって求めるか。
3. **どれくらい速いか。**二つの過程が同じ極限をもちながら、まったく異なる

> 速さでそこに近づくことがある。それはなぜか、そしてその速さをどう測るか。

最初の節（Section 2.1）は言葉についての節であり、数学者が「いずれは」ということをどのように正確に表現するかを扱う。続く五つの節は有名な極限を扱う。連分数（continued fraction）としての黄金比（golden ratio）、発散する級数とその収束する親戚、$\pi^2/6$、$2/\pi$ に対するヴィエト（Viète）の積、そしてガウス（Gauss）の算術幾何平均（arithmetic–geometric mean）である。最後の三つの節は速さと構造を扱う。一次収束と二次収束の比較、爆発するかカオス的にさまようかのどちらかになる反復、そして e に迫っていく積分の族である。

収束のための道具

少数の道具に、それぞれ異なる場面で何度も出会うことになる。

§	主題	道具
2.1	「いずれは小さくなる」	量化子：m を構成する、命題を否定する
2.2	黄金比	単調で有界な部分列
2.3	調和級数と Kempner 級数	ブロックごとの比較
2.4	$\pi^2/6$	多項式の根、そしてはさみうち
2.5	ヴィエトの積	望遠鏡和、そして一つの簡単な極限
2.6	算術幾何平均	互いに挟み込む二つの数列；不変量
2.7	$\sqrt{2}$ の近似	誤差の漸化式：一次と二次
2.8	$x \mapsto x^2 - 2$	写像を単純にする置換
2.9	e を表す分数	小さいが零ではない積分

本章の読み方

第 1 章と同様に、各節は出題されたままの STEP の問題から始まる。読み進める前に、まず自分で解いてみてほしい。本章の問題では、どの道具を使うべきかが問題文に示されていることが多い（「〜を考えることにより」「〜の定理を用いてよい」など）。解き進めながら、同じ少数の道具がいかに繰り返し現れるかに注目してほしい。大学では、それを自分で選ばなければならないからである。

いくつかの問題では、極限が存在すること、あるいは無限和や無限積が収束することを仮定するよう求められる。そのような場合には、それを証明するために何が必要かを各節で説明する。「明らかにうまくいく」と「うまくいくことを証明できる」との間の隔たりを意識することが、解析学者のように考えるための第一歩である。

2.1 「いずれは」とは何を意味するか

問題

STEP III 2015、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/15-s3-q2`

導入

大学で最初に学ぶ解析学（analysis）の講義に出てくる命題は、ほとんどすべてが同じ形をしている。すなわち、「何かが**存在して、すべての**何々について、ある条件が成り立つ」という形である。「数列が L に収束する」とは、任意の許容誤差 $\varepsilon > 0$ に対して、ある番号 N が**存在して、すべての** $n \geq N$ について $|a_n - L| < \varepsilon$ となる、という意味である。この形を自在に扱える学生にとって解析学は刺激的であり、そうでない学生にとっては不可解なものになる。

この問題は、そうした語り方への穏やかで見事に設計された入門である。問題は「最終的に小さい（eventually smaller than）」という新しい概念を一つだけ定義し、それについて真か偽かを問う問いを四つ投げかける。四つのうち一つは偽であり、それが偽である理由こそ、量化子（quantifier）を含む命題を初めて**否定**（negate）しようとする大学一年生の大半が陥る罠そのものである。

取りかかる前に

定義をゆっくり読むこと。$(s_n) \leq (t_n)$ は、すべての n について $s_n \leq t_n$ であるという意味ではない。**ある番号から先では**それが成り立つ、という意味である。最初のいくつかの項はまったく関係がない。どちらの数列の最初の百万項を変えても、$(s_n) \leq (t_n)$ が成り立つかどうかには影響しない。

> **考えてみよう**　定義には「ある正の整数 m が存在して」という語句が含まれている。$(s_n) \le (t_n)$ を証明するには、正確には何を示せばよいか。それが**偽**であることを証明するには、何を示さなければならないか。

証明するには、適切な m を**具体的に挙げ**、そのうえで**すべての** $n \ge m$ で条件が成り立つことを示せばよい。反証するには、**どの** m もうまくいかないこと、すなわち誰がどんな m を提案しても、ある $n \ge m$ で $s_n > t_n$ となることを示さなければならない。この二つ目の形は小問 (ii) のために覚えておくこと。

順を追って解く

段階 1　一次関数と二次関数の比較

小問 (i) は、最終的に $1000n \le n^2$ となるかを問うている。$n > 0$ であるから、これは $1000 \le n$ と同値である。よって $m = 1000$ とすればよい。実際、すべての $n \ge 1000$ について $n^2 = n \cdot n \ge 1000n$ である。この命題は**真**である。 ■

最初の 999 項では $1000n$ が n^2 よりはるかに大きいが、それは問題にならない。「最終的に」は有限個の項を無視するのである。

段階 2　「最終的に小さい」は通常の「小さい」と同じように振る舞うか

通常の数では、$a \le b$ でないならば $b < a$ であり、したがって当然 $b \le a$ である。小問 (ii) は、この新しい関係についても同じことが成り立つかを問うている。

> **考えてみよう**　「$(s_n) \le (t_n)$ **ではない**」とは実際には何を意味するか。先頭に「ではない」を付けずに、すべて書き下してみよ。

「ある m が存在して、すべての $n \ge m$ について $s_n \le t_n$」という命題が偽になるのは、ちょうど次の場合である。

$$\text{任意の } m \text{ に対して、ある } n \ge m \text{ で } s_n > t_n \text{ となるものが存在する。}$$

言い換えれば、$s_n > t_n$ が**無限回**起こるということである。これは「ある番号以降つねに $s_n > t_n$」よりもはるかに弱い。二つの数列は大小を入れ替え続けるかもしれないのである。

> **手を止めて、やってみよう**　大小を永遠に入れ替え続け、どちらも他方より最終的に小さくはならないような、正の数からなる二つの数列を見つけよ。

$s_n = 2 + (-1)^n$ とおくと $s_n = 1, 3, 1, 3, \ldots$ であり、すべての n について $t_n = 2$ とする。任意の m に対して $s_n = 3 > 2 = t_n$ となる偶数 $n \geq m$ が存在するので、$(s_n) \leq (t_n)$ ではない。しかし同様に、任意の m に対して $t_n = 2 > 1 = s_n$ となる奇数 $n \geq m$ が存在するので、$(t_n) \leq (s_n)$ でもない。この命題は**偽**である。 ■

段階 3 連鎖させる

> **考えてみよう** 小問 (iii) では、二つの仮定それぞれに対して一つずつ、合わせて二つの m の値が与えられる。それらは異なるかもしれない。結論にはどちらを使えばよいか。

すべての $n \geq m_1$ について $s_n \leq t_n$ であり、すべての $n \geq m_2$ について $t_n \leq u_n$ であるとする。$n \geq \max(m_1, m_2)$ ならば両方の不等式が成り立つので、$s_n \leq t_n \leq u_n$ である。よって $m = \max(m_1, m_2)$ とすればよく、この命題は**真**である。 ■

二つのしきい値のうち大きい方をとるというのは、解析学で何百回も使うことになる手法である。たとえば、二つの収束（converge）する数列の和が収束することもこうして証明する。

段階 4 二次関数と指数関数の比較

まずいくつかの値を試してみる。

n	1	2	3	4	5	6	7	8
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256

したがって $n^2 \leq 2^n$ は $n = 1, 2$ では成り立ち、$n = 3$ では成り立たず、$n = 4$ 以降は成り立ち続けるように見える（図 2.1.1）。自然な予想は $m = 4$ である。

> **考えてみよう** すべての $n \geq 4$ について $n^2 \leq 2^n$ であることを数学的帰納法（induction）で証明するには、$n^2 \leq 2^n$ から $(n+1)^2 \leq 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$ を導く必要がある。$(n+1)^2$ と n^2 の間にどのような不等式があれば、この段階がうまくいくか。

$(n+1)^2 \leq 2n^2$ がわかれば十分である。そうすれば $(n+1)^2 \leq 2n^2 \leq 2 \cdot 2^n$ となるからである。ここで $2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2$ であり、これは $n \geq 3$ のとき正である。よって次のようになる。

- 基底段階：$4^2 = 16 = 2^4$。
- 帰納段階：$n \geq 4$ かつ $n^2 \leq 2^n$ ならば、$(n+1)^2 \leq 2n^2 \leq 2^{n+1}$。

したがってすべての $n \geq 4$ について $n^2 \leq 2^n$ であり、この命題は $m = 4$ として**真**である。 ■

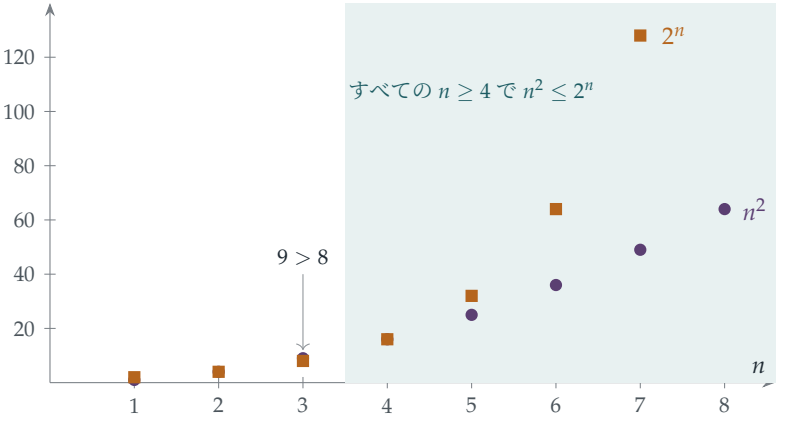


図 2.1.1　n^2（紫の丸）と 2^n（琥珀色の四角）の比較。二つの数列は最初の数項で二度交差するが、$n = 4$ 以降は 2^n が永遠に上回り続ける。これがまさに $m = 4$ として $(n^2) \leq (2^n)$ が成り立つということの意味である。

振り返り

- **「存在する」を証明するとは、具体的に挙げることである。**小問 (i)、(iii)、(iv) では、証明は m を挙げてそれを確かめることであった。
- **否定すると量化子が入れ替わる。**「(ある m が存在して、すべての $n \geq m$ について P) ではない」は「すべての m に対して、ある $n \geq m$ が存在して、P でない」となる。これを正しく扱えるかどうかを試しているのが小問 (ii) である。
- **新しい関係が古い関係と同じように振る舞うとは限らない。**「最終的に小さい」は $\leq$ と同様に推移的 (transitive) であるが、$\leq$ とは異なり、すべての数列の組を比較できるわけではない。

背後にある数学

解析学の言葉

ニュートン (Newton) とライプニッツ (Leibniz) 以後のおよそ 150 年間、数学者たちは極限 (limit) や無限小 (infinitesimal) を見事に使いこなしたが、それが正確に何を意味するのかを述べることはできなかった。1734 年、バークリー (Berkeley) 司

教は無限小を「消え去った量の亡霊」と嘲笑したが、彼の指摘にも一理あった。その修復は 19 世紀に行われた。コーシー（Augustin-Louis Cauchy）、続いてワイエルシュトラス（Karl Weierstrass）が、「限りなく近づく」という曖昧な言い方を、「任意の」と「存在する」から組み立てられた命題に置き換えたのである。現代の定義

$$a_n \to L \iff \text{任意の} \varepsilon > 0 \text{ に対してある} N \text{ が存在して、} |a_n - L| < \varepsilon \text{ がすべての次で成立：} n \geq N$$

は、先頭に量化子が一つ多いことを除けば、この問題の定義とまったく同じ形をしている。これは大学の解析学の講義で最初に出会うものである。

増大度

小問 (iv) は、有名な階段の小さな一段である。任意の固定された $k > 0$ と $c > 1$ に対して

$$(\ln n) \leq (n^k), \qquad (n^k) \leq (c^n), \qquad (c^n) \leq (n!), \qquad (n!) \leq (n^n),$$

が成り立ち、実はそれぞれの数列は次の数列より最終的に小さいだけでなく、次の数列の**任意の定数倍**よりも最終的に小さい。ハーディ（G. H. Hardy）はこの種の比較について、*Orders of Infinity*（『無限の位数』、1910 年）という一冊の本を書いた。今日ではこれは計算機科学の日常的な言葉であり、「このアルゴリズムは $O(n^2)$ ステップかかる」とは、ステップ数が最終的に n^2 の定数倍以下になるという意味である。n^2 と 2^n の違いは、終了するプログラムと、太陽が燃え尽きるまでに終了しないプログラムとの違いである。

全順序でない順序

小問 (ii) は、「最終的に小さい」が**全順序**（total order）ではないことを示している。すなわち、まったく比較できない数列の組が存在する。このような、推移的ではあるがすべてを比較するわけではない関係は**前順序**（preorder）や**半順序**（partial order）と呼ばれ、いたるところに現れる。整数の整除関係、集合の包含関係、「部分群である」という関係はいずれもその例である。ある関係がどの性質をもち、どの性質をもたないかを見分けることは、数学者としての訓練の一部である。

思考のスキル

量化子を扱う

「ある m が存在して、すべての $n \geq m$ について…」を証明するには、m を挙げてから、すべての n を確かめる。反証するには、任意の m に対して、ある $n \geq m$ で成り立たないことを示す。

命題に量化子が複数含まれるときは、証明や反証を試みる前にそれをすべて書き下し、左から順に否定していくこと。すなわち、「すべての」は「存在する」に、「存在する」は「すべての」に変わり、最後の条件は否定される。

次の一歩

1. **見本問題で準備運動。** 1987 年の最初の STEP の前に公表された問題である STEP III Specimen paper、問 2（`step.maths.org/questions/spec-s3-q2`）に挑戦せよ。（最後の部分のヒント：二項展開（binomial expansion）の次の項を使え。）

2. **両方向。** $(s_n) \leq (t_n)$ かつ $(t_n) \leq (s_n)$ ならば、十分大きいすべての n について $s_n = t_n$ であることを証明せよ。

3. **無限大への競走。** 正の数からなる二つの増加（increasing）数列で、どちらも無限大に発散し、どちらも他方より最終的に小さくはならないものを見つけよ。

4. **階段を上る。** 具体的な m を挙げて $(2^n) \leq (n!)$ を示せ。次に $(n^{10}) \leq (2^n)$ を示し、条件を満たす最小の m を求めよ。（二つ目の部分では表計算ソフトが役に立つ。答えは驚くほど大きい。）

さらに学ぶために

- **Lara Alcock, *How to Study for a Mathematics Degree***（Oxford University Press）。『数学の学位を取るための学び方』。第 3 章は、まさにこの種の論理的な言葉と、それが新入生にとってなぜ難しいのかを扱っている。

- **Lara Alcock, *How to Think About Analysis***（Oxford University Press）。『解析学の考え方』。大学一年次の解析学の定義への親しみやすい案内書である。

- **Daniel Velleman, *How to Prove It***（Cambridge University Press）。『証明の方法』。論理、量化子、証明への体系的な入門書である。

2.2 極限としての黄金比

問題

STEP II 2013、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/13-s2-q6`

導入

次の式を書き、その値は何かを考えてみよう。

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

すぐに思いつく答えはこうである。これを x とおくと、最初の分数線の下の部分は再び x であるから $x=1+1/x$ となり、ここから $x^2=x+1$、そして $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$、すなわち黄金比（golden ratio）φ が得られる。

しかし、この議論は正しいのだろうか。この議論は、無限に続く式が何かを**意味する**こと、つまり式を組み立てていく過程がただ一つの数に落ち着くことを前提としている。同じ手口を $1-1+1-1+\cdots$ に使うと（「これを S とおくと $S=1-S$ だから $S=\frac{1}{2}$」）、ばかげた結論が出てしまう。この問題は、この作業をきちんと行う方法を示している。そこで使うのは、極限を前もって知らずに収束（convergence）を証明するために STEP の受験者が持っている唯一の道具、すなわち**単調数列**（monotone sequence）である。

取りかかる前に

いくつかの項を計算してみよう。$u_1=1$ とすると、

$$1,\quad 2,\quad \frac{3}{2},\quad \frac{5}{3},\quad \frac{8}{5},\quad \frac{13}{8},\quad \frac{21}{13},\quad \frac{34}{21},\quad \cdots$$

> **考えてみよう**　分子と分母に見覚えはないだろうか。また、小数で見てみよう：$1, 2, 1.5, 1.667, 1.6, 1.625, 1.615, \ldots$。この数列は増加しているだろうか。減少しているだろうか。

これらは連続するフィボナッチ数（Fibonacci numbers）の比である。この数列は増加でも減少でもない。行き過ぎたり足りなかったりを繰り返しながら、ジグザグに進む。したがって、与えられた定理は増加数列に関するものなので、数列全体には適用できない。しかし、奇数番目の項 $1, 1.5, 1.6, 1.615, \ldots$ は増加し、偶数番目の項 $2, 1.667, 1.625, \ldots$ は減少しているように見える。これがこの問題の方針である。

順を追って解く

段階 1　2 項離れた項を比べる

小問 (i) では、2 項離れた u_{n+2} と u_n を比べる。最初に自然に思いつくのは、$(*)$ を使ってそれぞれを一つ前の項で表すことである。

> **考えてみよう**　$(*)$ を 2 回使って、$u_{n+2} - u_n$ を $u_{n+1} - u_{n-1}$ で表し、さらに $u_{n+1} - u_{n-1}$ を $u_n - u_{n-2}$ で表せ。

$(*)$ より

$$u_{n+2} - u_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_{n-1}} = -\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{u_{n+1}u_{n-1}},$$

であり、同様に $u_{n+1} - u_{n-1} = -\dfrac{u_n - u_{n-2}}{u_n u_{n-2}}$ である。これらを合わせると、2 つの負号が打ち消し合って

$$u_{n+2} - u_n = \frac{u_n - u_{n-2}}{u_{n+1}u_n \cdot u_{n-1}u_{n-2}}.$$

最後に、$(*)$ より $u_{n+1}u_n = u_n + 1$ および $u_{n-1}u_{n-2} = u_{n-2} + 1$ であるから、求める式が得られる。（u_{n-2} が存在するためには $n \geq 3$ が必要である。）　■

段階 2　落とし穴

> **手を止めて、やってみよう**　すべての n について $1 \leq u_n \leq 2$ であることを証明せよ。

$u_1 = 1$ については成り立つ。$1 \leq u_n \leq 2$ ならば $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_n} \leq 1$ であるから $\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 2$ となり、これは確かに 1 と 2 の間にある。数学的帰納法（induction）により、すべての n について $1 \leq u_n \leq 2$ である。　■

特に、すべての u_n は正であるから、小問 (i) の分母 $(1+u_n)(1+u_{n-2})$ は正である。

段階 3 2 つの単調な部分列

考えてみよう 小問 (i) の式は、$u_{n+2}-u_n$ が u_n-u_{n-2} の正の定数倍であることを示している。このことから、u_3-u_1、u_5-u_3、u_7-u_5、...の符号について何がわかるだろうか。

これらはすべて同じ符号である！$u_3-u_1=\frac{3}{2}-1>0$ であるから、小問 (i) と数学的帰納法により $u_5>u_3$、$u_7>u_5$ などが成り立つ。つまり奇数番目の項は増加する。これらは 2 で上に有界であるから、定理により極限（limit）に収束する。その極限を L とおく。

同様に $u_4-u_2=\frac{5}{3}-2<0$ であるから、偶数番目の項は減少する。これらは 1 で下に有界である。定理は増加数列について述べられているが、$-u_2,-u_4,-u_6,\ldots$ は増加し -1 で上に有界であるから収束し、したがって偶数番目の項も収束する。その極限を M とおく。

段階 4 極限を求める

考えてみよう L を求めるには、u_{n+2} と u_n を直接結びつける等式が必要である。$(*)$ からそれを導けるだろうか。

$(*)$ を 2 回適用すると

$$u_{n+2}=1+\frac{1}{u_{n+1}}=1+\frac{1}{1+1/u_n}=1+\frac{u_n}{u_n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+1}.$$

奇数の値をとりながら $n\to\infty$ とすると、u_n も u_{n+2} も L に収束するから

$$L=\frac{2L+1}{L+1}\quad\Longrightarrow\quad L^2+L=2L+1\quad\Longrightarrow\quad L^2-L-1=0.$$

解は $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ であり、$L\geq 1$ であるから $L=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi$ でなければならない。偶数の値についてまったく同じ議論を行うと、$M=\varphi$ が得られる。

考えてみよう 奇数番目の項は φ に収束し、偶数番目の項も φ に収束する。なぜこれで数列全体が φ に収束するといえるのだろうか。

直観的には、どの項も奇数番目か偶数番目のどちらかであり、どちらの種類の項も φ に近づいていくからである。厳密にいえば次のとおりである。任意の許容誤差 $\varepsilon>0$ が与えられたとき、奇数番目の項はある番号 N_1 以降で φ との差が ε 以内になり、偶数番目の項はある番号 N_2 以降でそうなる。したがって $\max(N_1,N_2)$ 以降ではすべて

の項が φ との差 ε 以内にあり、これがまさに収束の意味である。（これは Section 2.1 で扱った「大きいほうのしきい値をとる」という手法である。）

段階 5　別の値から始める

$u_1 = 3$ とすると、数列は

$$3,\quad \frac{4}{3},\quad \frac{7}{4},\quad \frac{11}{7},\quad \frac{18}{11},\quad \frac{29}{18},\quad \dots$$

となる。このとき $u_1 = 3$ は $[1,2]$ の外にあるので、小問 (ii) の帰納法は出発できない。しかし $u_2 = \frac{4}{3}$ はその中にあるので、そこから帰納法が機能し、すべての $n \geq 2$ について $1 \leq u_n \leq 2$ となる。小問 (i) では u_{n-2} 以降の項しか使わず、それらが正であることしか必要としないが、実際にそれらはすべて正である。今回は $u_3 - u_1 = \frac{7}{4} - 3 < 0$ かつ $u_4 - u_2 = \frac{11}{7} - \frac{4}{3} > 0$ であるから、奇数番目の項は減少し、偶数番目の項は増加する。役割は入れ替わるが、それぞれの部分列（subsequence）はやはり単調かつ有界である。極限は同じ方程式を満たし、どちらも正であるから、どちらも φ である。結論は変わらない。 ■

振り返り

- **数列が単調でないときは、単調な部分を探せ。**奇数番目と偶数番目の項に分けることで、ジグザグの数列が性質のよい 2 つの数列になった。
- **まず収束を証明し、次に極限を求めよ。**等式 $L = (2L+1)/(L+1)$ が正当なのは、L が存在するとわかってからである。導入での手早い議論が飛ばしていたのは、まさにこの段階である。
- **どちらの解かを確認せよ。**極限の方程式には解が 2 つあったが、小問 (ii) の評価によってどちらが正しいかがわかった。

背後にある数学

蜘蛛の巣図と不動点

$u_{n+1} = f(u_n)$ で定まる数列はどれも、**蜘蛛の巣図**（cobweb diagram）として描くことができる（図 2.2.1）。$y = f(x)$ と $y = x$ のグラフをかく。x 軸上の u_1 から出発し、曲線まで垂直に進み（高さ $u_2 = f(u_1)$）、次に直線 $y = x$ まで水平に進み（これで $x = u_2$ に移る）、再び曲線まで垂直に進む、ということを繰り返す。ここで $f(x) = 1 + 1/x$ は減少関数であり、そのために経路は、行き過ぎと不足を交互に繰

り返しながら、曲線と直線の交点、すなわち $f(\varphi) = \varphi$ となる**不動点**（fixed point）φ に向かって渦を巻くように内側へ進んでいく。

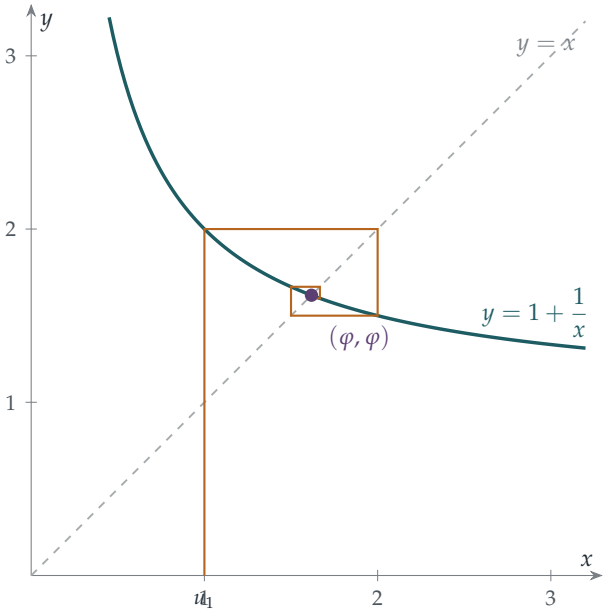


図 2.2.1　$u_1 = 1$ から始めた $u_{n+1} = 1 + 1/u_n$ の蜘蛛の巣図。経路は曲線まで上がり、直線 $y = x$ まで横に進むことを何度も繰り返す。曲線が右下がりであるため、経路は両側を交互に行き来しながら、不動点 $\varphi \approx 1.618$ に向かって渦を巻くように近づく。これが奇数番目と偶数番目の項のジグザグである。

どれだけ速く、そしてなぜ

小問 (i) の因子 $(1 + u_n)(1 + u_{n-2})$ はどこから来るのだろうか。不動点の近くでは $u_{n+1} - \varphi = f(u_n) - f(\varphi) \approx f'(\varphi)(u_n - \varphi)$ であり、$f'(\varphi) = -1/\varphi^2 \approx -0.38$ である。したがって、1 ステップごとに誤差はおよそ -0.38 倍される。符号が反転し（ジグザグ）、大きさが縮む（収束）のである。2 ステップでは誤差は $1/\varphi^4 \approx 0.146$ 倍され、これはまさに $1/\big((1 + u_n)(1 + u_{n-2})\big)$ の極限である。大学ではこれが**縮小写像定理**（contraction mapping theorem）になる。不動点の近くで $|f'| \le k < 1$ ならば、反復はその不動点に収束し、誤差は少なくとも等比数列的に縮小する。これは数学で最も有用な定理の一つであり、微分方程式に解が存在することを証明するのにも使われる（第 8 章）。Section 2.8 では、不動点が引きつける性質を**もたない**写像に出会い、まったく異なる結果を見ることになる。

最も無理な数

項 $u_n = F_{n+1}/F_n$ は、その大きさの分数としては φ の最良の近似である。しかし「最良」といっても、あまりよい近似ではない。φ は、他のどの数よりも分数で近似しにくいのである。その理由は連分数（continued fraction）表示 $[1;1,1,1,\ldots]$ に表れている。連分数に大きな数が現れると非常によい近似が得られる（$\pi = [3;7,15,1,292,\ldots]$ と、優れた近似 $\frac{355}{113}$ を思い出そう）が、φ はどこまでも可能な限り小さな数しか現れない。フルヴィッツ（Adolf Hurwitz）は1891年に、すべての無理数（irrational number）x に対して $|x - p/q| < 1/(\sqrt{5}\,q^2)$ を満たす分数が無限に多く存在すること、そして $\sqrt{5}$ はこれ以上改良できないことを証明した。改良できないのは、まさに φ があるためである。この「最大の無理性」こそが、ヒマワリの種の螺旋模様に黄金角が現れる理由である。

思考のスキル

単調かつ有界ならば収束する

極限を知らずに数列が収束することを示すには、単調かつ有界な数列を見つけるか、数列を単調かつ有界な部分に分けよ。

極限が存在するとわかって初めて、漸化式（recurrence relation）で「$n \to \infty$ とする」ことによって極限を求めてよい。大学では、この定理は実数の**完備性**（completeness）、すなわち $\mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}$ から区別する性質から導かれるものであり、公理からの証明を学ぶことになる。

次の一歩

1. **内に潜むフィボナッチ数列。** $F_1 = F_2 = 1$、$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ とするとき、$u_n = F_{n+1}/F_n$ であることを証明せよ。

2. **誤差は縮む。** $u_{n+1} - \varphi = -\dfrac{u_n - \varphi}{\varphi\, u_n}$ を示し、すべての n について $|u_n - \varphi| \le \varphi^{-(n-1)}$ であることを導け。（$\varphi^2 = \varphi + 1$ および $u_n \ge 1$ を用いよ。）

3. **数列を途切れさせる。** $u_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ならば数列は定数であることを示せ。また、ある $u_n = 0$ となって数列が続けられなくなるような初項 u_1 の値をすべて求めよ。（ヒント：$u_n = 0$ から逆にたどれ。）

4 **$\sqrt{2}$ の親戚。** $v_1 = 1$、$v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+v_n}$ とする。この問題の方法を応用して $v_n \to \sqrt{2}$ を示し、$\sqrt{2}$ を連分数で表せ。

さらに学ぶために

- **Mario Livio, *The Golden Ratio*** (Broadway)。φ の歴史を、本物の数学と数多くの俗説とを区別しながら描いている。
- **C. D. Olds, *Continued Fractions*** (Mathematical Association of America)。優秀な高校生向けに書かれた、短くて非常に読みやすい入門書。
- **J. C. Burkill, *A First Course in Mathematical Analysis*** (Cambridge University Press)。単調数列と完備性を厳密に扱っており、演習問題も豊富である。

2.3 発散する級数と、収束するその親戚

問題

STEP III 2014、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/14-s3-q8`

導入

調和級数（harmonic series）$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ は、各項が 0 に近づくにもかかわらず和は限りなく大きくなる級数の、最も有名な例である。その増え方はおそろしく遅い。10 を超えるには 12,000 項以上が必要であり、100 を超えるにはおよそ 1.5×10^{43} 項が必要である。それでも、いずれはどんな数も超えていく。

では、分母に数字 2 を含む項をすべて取り除いてみよう。$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{12}$、$\frac{1}{20}$ から $\frac{1}{29}$ まで、$\frac{1}{32}$ などが消える。もともと無限大になる和なのだから、項の 1 割ほどを取り除いても大差はないと予想するかもしれない。ところが実際には、残った項の和は 80 未満になるのである。この驚くべき事実は 1914 年に A. J. Kempner によって証明された。この問題は、和をブロックに切り分けるという、たった一つの見事に単純なアイデアでそこへ導いてくれる。

取りかかる前に

考えてみよう 最初の不等式は、$r=k^n$ から $r=k^{n+1}-1$ までの項からなるブロックについてのものである。$k=2$、$n=3$ のとき、それはどの項で、何個あるか。

それは $f(8), f(9), \ldots, f(15)$ の 8 項である。一般に、ブロックは k^n から $k^{n+1}-1$ までなので、項の個数は $k^{n+1}-k^n=k^n(k-1)$ である。この不等式は、ブロックの和が（項の個数）×（とりうる最小の項）と（項の個数）×（最大の項）の間にあることを述べている。

順を追って解く

段階 1　ブロックを評価する

f は減少関数（decreasing function）なので、ブロック内のすべての項は

$$f(k^{n+1}) < f(k^{n+1}-1) \le f(r) \le f(k^n) \qquad (k^n \le r \le k^{n+1}-1)$$

を満たす。$k^n(k-1)$ 個の項を足し合わせれば、求める不等式が得られる。 ■

段階 2　調和級数

考えてみよう　$k=2$、$f(r)=1/r$ のとき、2^n から $2^{n+1}-1$ までのブロックに対する二つの評価はどうなるか。

下からの評価は $2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$、上からの評価は $2^n \cdot \frac{1}{2^n} = 1$ である。したがって、どれほど先のブロックであっても、**すべての**ブロックは $\frac{1}{2}$ 以上 1 以下の寄与をする（図 2.3.1）。$n = 0, 1, \dots, N$ のブロックはちょうどつながって $r=1$ から $r = 2^{N+1}-1$ までの和になるので、$N+1$ 個のブロックを足し合わせると

$$\frac{N+1}{2} \le \sum_{r=1}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{r} \le N+1$$

を得る。$N \to \infty$ のとき左辺は限りなく大きくなるので、部分和（partial sum）は有界でなく、級数は発散（diverge）する。 ■

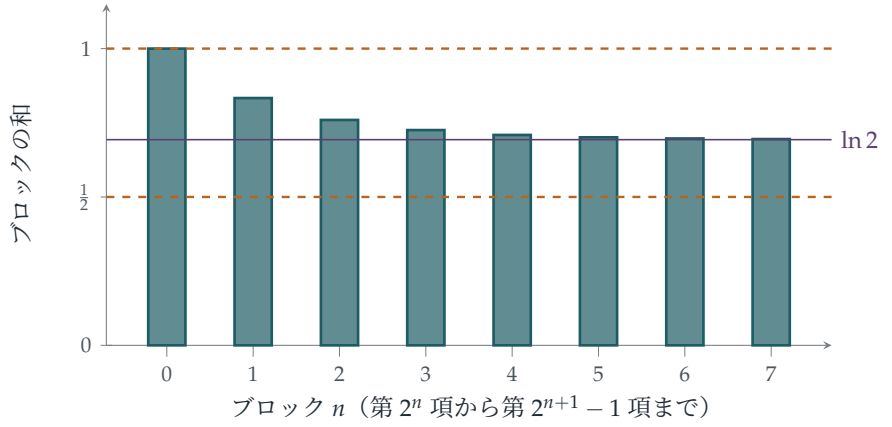


図 2.3.1　調和級数を $1, 2, 4, 8, \dots$ 項ずつのブロックに切り分けたもの。どのブロックの和も $\frac{1}{2}$ と 1 の間にあり（琥珀色の破線）、実際にはブロックの和は $\ln 2 \approx 0.693$ に近づいていく（紫色）。それぞれ $\frac{1}{2}$ 以上の値をもつブロックが無限個あれば、その合計は有限にはなりえない。

段階 3 立方数の逆数の和

次に、$k=2$ のまま $f(r)=1/r^3$ とする。ブロック n に対する上からの評価は

$$2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^3} = \frac{1}{4^n}$$

である。$n=0,1,2,\ldots$ のブロックはすべての正の整数をちょうど 1 回ずつ覆うので、

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^3} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} = 1\tfrac{1}{3}. \qquad \blacksquare$$

（厳密には、これはすべての部分和が $\frac{4}{3}$ 以下であることを示している。上に有界な単調増加数列は収束（converge）するので、無限和は存在し、その値は $\frac{4}{3}$ 以下である。真の値は $1.2020\ldots$ である。）

段階 4 2 を含まない数を数える

考えてみよう 先頭の 0 を許す（たとえば 7 を 007 と書く）とき、0 から 999 までの整数のうち、数字 $0,1,3,4,5,6,7,8,9$ だけを使って書けるものはいくつあるか。

3 つの桁それぞれに 9 通りの選び方があるので、そのような文字列は 9^3 個ある。これらは 0 から 999 までの 2 を含まない数とちょうど対応しており、（正でない）0 を除くと、$S(1000)$ には $9^3-1=728$ 個の数が残る。 $\blacksquare$

段階 5 Kempner の級数

ここで、ブロックの考え方を桁数で定めたブロックに適用する。これは $k=10$ とするのと同じことである。

手を止めて、やってみよう 2 を含まない d 桁の数はいくつあるか。また、d 桁の数の最小値はいくつか。

最上位の桁は $1,3,4,\ldots,9$ のいずれか（0 でも 2 でもない 8 通り）であり、残りの $d-1$ 個の桁はそれぞれ 9 通りである。よってそのような数は $8\times 9^{d-1}$ 個あり、いずれも 10^{d-1} 以上である。したがって、$S(n)$ に属する d 桁の数が $\sigma(n)$ に寄与する量は高々

$$8\times 9^{d-1}\times\frac{1}{10^{d-1}} = 8\left(\frac{9}{10}\right)^{d-1}$$

である。すべての桁数 $d=1,2,3,\ldots$ について足し合わせると、

$$\sigma(n) \le \sum_{d=1}^{\infty} 8\left(\frac{9}{10}\right)^{d-1} = \frac{8}{1-\frac{9}{10}} = 80.$$

真の不等号については、ほとんどの評価がまったく精密でないことに注意すればよい（たとえば $\frac{1}{3} < 1$ であるのに、1桁の項はすべて1で評価している）。よって、すべての n について $\sigma(n) < 80$ である。 ■

振り返り

- **項をまとめる。**どちらの和も、1項ずつ扱うのは容易でない。適切な大きさのブロックにまとめることで、それぞれを等比級数（geometric series）と比較できた。
- **適切なブロックは問題によって異なる。**$1/r$ と $1/r^3$ には2の累乗が、10進法の数字に関する問題には10の累乗が適していた。
- **有界かつ単調増加。**どちらの収束の証明も、Section 2.2 と同じ原理に基づいている。正の項の部分和は単調増加するので、上からの評価さえあればよいのである。

背後にある数学

凝縮判定法

この問題の最初の不等式は、**コーシー（*Cauchy*）の凝縮判定法**（condensation test）の核心である。f が正で減少関数ならば、

$$\sum_{r=1}^{\infty} f(r) \text{ が収束する} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n f(2^n) \text{ が収束する。}$$

この判定法は、難しい級数を易しい級数に変えてくれる。$f(r) = 1/r^p$ に適用すると $\sum 2^n \cdot 2^{-np} = \sum (2^{1-p})^n$ となり、これは $p > 1$ のときに限り収束する等比級数である。$1/(r \ln r)$ に適用すればこれさえも発散することがわかり、$1/(r(\ln r)^2)$ に適用すればこちらは収束することがわかる。この議論はニコル・オレーム（Nicole Oresme）にさかのぼる。オレームは1350年ごろ、まさに図 2.3.1 のブロックを用いて調和級数の発散を証明した。

調和級数はどれほどゆっくり発散するか

図 2.3.1 からは、各ブロックがおよそ $\ln 2$ ずつ寄与することがうかがえる。したがって、最初の N 項の和はおよそ $\log_2 N \times \ln 2 = \ln N$ になるはずである。実際、

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} = \ln N + \gamma + (0 \text{ に収束する項})$$

が成り立つ。ここで $\gamma = 0.5772\ldots$ はオイラー・マスケローニ定数（Euler–Mascheroni constant）である。γ が有理数（rational number）かどうかは誰にもわかっていない。この公式は大学 1 年次の解析学で積分を用いて証明することになる。また、調和数は Section 9.11 と Section 11.12 にも再び登場する。

ほとんどの数は 2 を含む

なぜ Kempner の級数は収束するのだろうか。それは、大きな数の中では「2 を含まない数」が非常にまれだからである。10^d 未満の数のうち 2 を含まないものの割合は高々 $(0.9)^d$ であり、これは 0 に収束する。100 桁の数のうち、数字 2 を含まないものは 0.003% にも満たない。つまり、取り除いているのは項の 1 割ではなく、ほとんどすべてなのである。80 という評価はかなり甘い。1979 年、Robert Baillie は加速法を用いてこの和を小数点以下何桁にもわたって計算し、その値はおよそ 19.257 であることを示した。

累乗の逆数の和

小問 (ii) の和は $\zeta(3)$ であり、これは Section 1.2 で出会ったリーマン（Riemann）ゼータ関数（zeta function）の値である。Section 2.4 では $\zeta(2) = \pi^2/6$ を正確に求めることになるし、オイラー（Euler）は $\zeta(4), \zeta(6), \ldots$ の公式を見つけた。しかし、$\zeta(3)$ の公式は誰にも見つかっていない。1978 年、Roger Apéry は Section 2.9 のものとよく似た積分を用いて $\zeta(3)$ が無理数（irrational number）であることを証明し、数学界を驚かせた。$\zeta(5)$ が無理数かどうかは今なおわかっていない。

思考のスキル

ブロックによる比較

正の項からなる級数が収束するかどうかを判定するには、項がほぼ一定とみなせるブロックにまとめ、各ブロックを単純な級数と比較せよ。

比較判定法（comparison test）は大学 1 年次の解析学の基本中の基本である。スキルの要は、何と比較するかを選ぶことにある。ここでは、項の変化が一定の倍率以内に収まる、大きさ 2^n や 10^d のブロックを用いた。

次の一歩

1. **遅さを実感する。** $\sum_{r \le N} 1/r \approx \ln N + 0.5772$ を用いて、調和級数が 10 を超えるのに何項必要か、また 100 を超えるのに何項必要かを見積もれ。

2. **判定法を使ってみる。** 小問 (i) の方法を $f(r) = 1/r^2$ に用いて、$\sum 1/r^2 \le 2$ を示せ。さらに、第 1 項を別に扱うことで評価を改善せよ。

3. **収束と発散の境目。** $k = 2$ のブロック不等式を用いて、$\sum_{r \ge 2} \dfrac{1}{r \ln r}$ が発散し、$\sum_{r \ge 2} \dfrac{1}{r (\ln r)^2}$ が収束することを示せ。

4. **さらに除外する。** やや難 10 進法で表したときに 2 も 7 も含まない正の整数の逆数の和は 35 未満であることを示せ。（35 がどこから来るかわかるだろうか。）

さらに学ぶために

- **Julian Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant***（Princeton University Press）。『ガンマ：オイラーの定数を探る』。調和級数、γ をはじめ多くの話題を、力のある高校生向けに書いた本である。

- **Mary Hart, *Guide to Analysis***（Palgrave）。『解析学ガイド』。級数と比較判定法についてのわかりやすい章を含む、簡潔な大学 1 年次向けの教科書である。

- **Robert Baillie,「Sums of reciprocals of integers missing a given digit」**, *American Mathematical Monthly* 86 (1979)。「特定の数字を含まない整数の逆数の和」。この節を読み終えた後なら読める短い論文である。

2.4 $\pi^2/6$

問題

STEP III 2018、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/18-s3-q7`

導入

1650 年、ピエトロ・メンゴリ（Pietro Mengoli）は単純な問いを立てた。

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots ?$$

の値はいくつか。各項は十分速く小さくなるので、この和は収束（converge）する（Section 2.3 で、和が高々 2 であることを示した）。しかし、その値を求められる者はいなかった。ベルヌーイ兄弟（Bernoulli brothers）も挑んだが失敗し、ヤコブ・ベルヌーイ（Jacob Bernoulli）は公に助けを求めたほどである。この問題は、ベルヌーイ家の故郷の都市にちなんで**バーゼル問題**（Basel problem）と呼ばれるようになった。

1734 年、若きオイラー（Leonhard Euler）がこれを解き、その答えによって一躍名を上げた。和は $\pi^2/6$ である。円に関する数である π が、平方の逆数の和に現れるのはいったいなぜだろうか。この問題は、A レベル（A level、英国の大学入学資格試験）の範囲を超えるものを何も使わずに、完全で厳密な証明を与える。使うのは、ド・モアブルの定理（De Moivre's theorem）、多項式（polynomial）の根（roots）の和、そしてはさみうち（squeeze）である。

取りかかる前に

細部に入る前に、全体の方針を見ておく価値がある。

- 小問 (i) では、数 $\cot^2\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right)$ を根にもつ多項式をつくる。
- 小問 (ii) では、それらの根を個別には知らないまま、係数（coefficients）を用いて

足し合わせる。

- 小問 (iii) では、小さい θ に対して $\cot\theta \approx 1/\theta$ が成り立つことを用いて、$\cot^2$ の値の和を $1/m^2$ の値の和に置き換え、はさみうちにする。

> **考えてみよう**　多項式 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ が根 $r_1, \ldots, r_n$ をもつとき、$r_1 + \cdots + r_n$ を係数で表すとどうなるか。

答えは $-a_{n-1}/a_n$ である。この事実が小問 (ii) の原動力となる。

順を追って解く

段階 1　ド・モアブルの定理

> **考えてみよう**　$\cot\theta + \mathrm{i}$ を一つの分数で表せ。分子について何に気づくか。

$\cot\theta + \mathrm{i} = \dfrac{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}{\sin\theta}$ であり、同様に $\cot\theta - \mathrm{i} = \dfrac{\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta}{\sin\theta}$ である。ド・モアブルの定理より、

$$(\cot\theta \pm \mathrm{i})^{2n+1} = \frac{\cos(2n+1)\theta \pm \mathrm{i}\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta}.$$

差をとると余弦は打ち消し合い、正弦は 2 倍になる。これを $2\mathrm{i}$ で割ると

$$\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta}. \qquad \blacksquare$$

を得る。

段階 2　多項式

今度は左辺を二項定理（binomial theorem）で展開する。$c = \cot\theta$、$N = 2n+1$ とおく。

> **考えてみよう**　$(c+\mathrm{i})^N - (c-\mathrm{i})^N$ において、二つの二項展開のどの項が打ち消し合い、どの項が 2 倍になるか。

i^j を含む項は、一つ目の展開では $+$ の符号で、二つ目の展開では $(-1)^j$ を伴って現れる。したがって、j が偶数の項は打ち消し合い、j が奇数の項は 2 倍になる。

$$(c+\mathrm{i})^N - (c-\mathrm{i})^N = 2\sum_{j\ \text{奇数}} \binom{N}{j} c^{N-j}\,\mathrm{i}^j.$$

$j = 2k+1$ とすると、$\mathrm{i}^j = \mathrm{i}\,(-1)^k$ かつ $c^{N-j} = c^{2n-2k} = (c^2)^{n-k}$ である。$2\mathrm{i}$ で割ると

$$\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta} = \binom{2n+1}{1}x^n - \binom{2n+1}{3}x^{n-1} + \cdots + (-1)^n,$$

となる。ただし $x = \cot^2\theta$ である。

> **手を止めて、やってみよう** どのような θ に対して左辺は 0 になるか。これを用いて、多項式の相異なる n 個の根を求めよ。

左辺が 0 になるのは、$\sin(2n+1)\theta = 0$ かつ $\sin\theta \neq 0$ のときであり、たとえば $m = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\theta = \frac{m\pi}{2n+1}$ のときである。これらの角はすべて 0 と $\frac{\pi}{2}$ の間（両端を含まない）にあり、そこで cot は正かつ狭義単調減少であるから、n 個の値 $\cot^2\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right)$ はすべて異なる。n 次の多項式の根は高々 n 個であるから、これらが根のすべてである。 ■

段階 3 根を足し合わせる

根の和は、係数を用いて $-(\text{係数}x^{n-1})/(\text{係数}x^n)$ と表される。

$$\sum_{m=1}^{n} \cot^2\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right) = \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6\,(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3}. \qquad \blacksquare$$

$n = 1$ で確かめると、$\cot^2(\pi/3) = \frac{1}{3}$ であり、$\frac{1\times 1}{3} = \frac{1}{3}$ である。

段階 4 はさみうち

$0 < \sin\theta < \theta < \tan\theta$ から逆数をとり（不等号の向きが逆になる）、2 乗すると

$$\cot^2\theta < \frac{1}{\theta^2} < \frac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \cot^2\theta.$$

> **考えてみよう** $\theta = \frac{m\pi}{2n+1}$ とおき、$m = 1, \ldots, n$ について足し合わせよ。外側の二つの和はどうなるか。真ん中の和は $\sum 1/m^2$ とどう関係するか。

真ん中の和は $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{m^2\pi^2}$ である。小問 (ii) より左の和は $\frac{n(2n-1)}{3}$ であり、右の和は $n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}$ である。全体に $\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}$ を掛けると

$$\frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} < \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2} < \frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}.$$

$n \to \infty$ のとき、$\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2}$ と $\frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}$ はともに $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ に収束する（分子と分母を n^2 で割ればよい）。よって両側の評価はともに $\frac{\pi^2}{6}$ に収束し、その間に挟まれた部分和（partial sums）も $\frac{\pi^2}{6}$ に収束しなければならない（図 2.4.1）。 ■

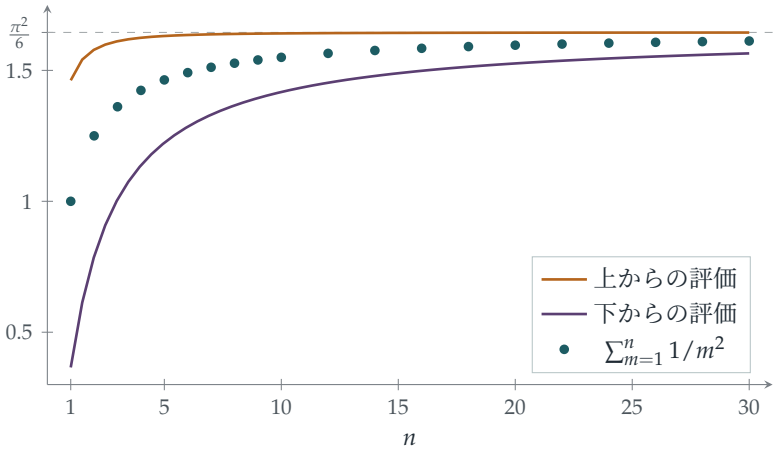


図 2.4.1　小問 (iii) のはさみうち。$\sum 1/m^2$ の部分和（ティール色の点）は、下からの評価（プラム色）と上からの評価（アンバー色）の間に挟まれており、両方の評価は $\pi^2/6 \approx 1.645$ に収束する。

振り返り

- **係数から情報を得る。** 根 $\cot^2(m\pi/(2n+1))$ をより簡単な形で求めることは一度もなかったが、それらの和は正確に求められた。
- **近似してから挟む。** $\cot\theta$ は $1/\theta$ に近似的に等しいにすぎないが、その誤差は両方向の厳密な不等式によって制御されていた。
- **有限から無限へ。** 最後の段階までは、すべて有限和を扱っていた。無限和が現れたのは、不等式において $n \to \infty$ としたときだけであり、これが無限を扱う安全な方法である。

背後にある数学

オイラーの大胆な議論

1734 年のオイラー自身の議論は、現代の基準では厳密ではなかったが、目を見張るものであった。根 $\pm a, \pm b, \pm c, \ldots$ をもち、0 における値が 1 である多項式は、$(1 - x^2/a^2)(1 - x^2/b^2)\cdots$ と因数分解される。関数 $\frac{\sin x}{x}$ は 0 における値が 1 で、根 $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ をもつ。そこでオイラーは、これを「無限次の多項式」とみなして

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots .$$

と書いた。右辺の x^2 の係数は $-\frac{1}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots\right)$ であり、一方マクローリン級数（Maclaurin series）$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{6}+\cdots$ からは $-\frac{1}{6}$ である。両者を比べると $\pi^2/6$ が得られる。私たちの STEP の証明は、同じ考え方の有限で厳密な版である。すなわち、根が π の倍数と結びついた多項式と、その 2 番目の係数である。

平方の逆数を越えて

オイラーはさらに $\sum 1/m^4=\pi^4/90$、$\sum 1/m^6=\pi^6/945$ を見いだし、一般に $\sum 1/m^{2k}$ は π^{2k} の有理数倍であって、**ベルヌーイ数**（Bernoulli numbers）が関わることを示した。奇数乗の場合は事情がまったく異なる。Section 2.3 で見たように、$\sum 1/m^3$ の公式は誰も知らない。これらの和はリーマンゼータ関数（Riemann zeta function）の値 $\zeta(2),\zeta(4),\ldots$ であり、この関数の複素数の引数に対するふるまいが素数の分布を支配している（Section 1.2）。

再び出会う場所

大学では、$\zeta(2)=\pi^2/6$ の証明に少なくともあと三つ出会うだろう。**フーリエ級数**（Fourier series）（関数を正弦と余弦の和として表すもの）による証明、二重積分（double integral）による証明、そして複素解析（complex analysis）による証明である。また、この数は確率にも現れる。無作為に選んだ二つの整数が公約数をもたない（互いに素である）確率は $6/\pi^2\approx 0.61$ である。（素数 p が両方を割り切る確率は $1/p^2$ であるから、どの素数も両方を割り切らない確率は $\prod_p(1-1/p^2)$ であり、オイラーはこの積が $1/\zeta(2)$ に等しいことを示した。）確率の極限に π が現れる別の例は、Section 12.23 の主題である。

思考のスキル

はさみうちと、根の対称式

極限を求めるには、その量を、同じ極限をもつ二つのより簡単な式で挟み込め。

そして、扱いにくい数の和（あるいは積）が必要なときは、それらを根にもつ多項式を探してみよう。係数が、それらの対称な組合せ（symmetric functions）をただで与えてくれる。

次の一歩

1 **1992 年版。** STEP III 1992、問 8（`step.maths.org/questions/92-s3-q8`）に挑戦せよ。この節のものと似た多項式を用いて、正接の 2 乗の和や余割の 2 乗の和を正確に求める問題である。（**ヒント**：根が r_i である多項式がわかっているとき、根が $1/r_i$ である多項式は何か。）

2 **奇数の平方。** $\sum 1/m^2 = \pi^2/6$ から $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$ を導け。

3 **4 乗。** やや難 $\sum r_i^2 = (\sum r_i)^2 - 2\sum_{i<j} r_i r_j$ と多項式の係数を用いて $\sum_{m=1}^{n} \cot^4\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right)$ を求め、はさみうちの議論を応用して $\sum 1/m^4 = \pi^4/90$ を証明せよ。

4 **どれくらい速いか。** 小問 (iii) の下からの評価を用いて、$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2} < \frac{\pi^2}{4n}$ を示せ。部分和が $\pi^2/6$ との差 0.001 以内に入るには、この評価によればどれだけ大きな n をとれば十分か。実際の誤差は $1/n$ に近いが、それと比較せよ。

さらに学ぶために

- **William Dunham, *Euler: The Master of Us All*** (Mathematical Association of America)。『オイラー：われら皆の師』。第 3 章では、バーゼル問題の物語が数学的内容も含めて余すところなく語られている。
- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***、第 9 章「Three times $\pi^2/6$」（$\pi^2/6$ を三通りで）。この節の証明も収められている。
- **Paul Nahin, *Dr. Euler's Fabulous Formula*** (Princeton University Press)。『オイラー博士の素敵な数式』。複素数、フーリエ級数、そしてこのような和を扱っている。

2.5 ヴィエトの無限積

問題

STEP III 2022、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip`

導入

この問題の最後の行は、数学で最も美しい公式の一つであり、この種の公式としては最も古いものの一つでもある。この公式は 1593 年にフランスの法律家であり数学者でもあったヴィエト（François Viète）によって発表された。π を無限の過程の結果として**厳密に**表したのは、これが史上初めてであった。ヴィエト以前には π は近似することしかできなかったが、ヴィエト以後は、どこまでも続ければすべての桁を与える公式によって π を定義できるようになったのである。

この公式は不思議な姿をしている。2 の入れ子になった平方根は、いったいどこから出てくるのだろうか。この問題は、それが倍角公式（double-angle formula）を繰り返し用いることから生じることを明らかにし、その途中で、同じ仕組みからもう一つの、あまり知られていない $\ln 2$ の公式も導く。

取りかかる前に

考えてみよう sinh の倍角公式はどのようなものか。（自信がなければ、$\sinh 2y$ と $\sinh y \cosh y$ を指数関数で表して比べてみよ。）

$\sin 2y = 2\sin y \cos y$ とまったく同様に、$\sinh 2y = 2\sinh y \cosh y$ である。この一つの恒等式（identity）を何度も繰り返し使うことが、問題全体を動かす原動力となる。問題は最後の小問までは双曲線関数（hyperbolic function）を扱い、最後の小問で通常の三角関数に切り替える。

順を追って解く

段階 1　繰り返し半分にする

$n = 1$ の場合は、$y = x/2$ とした倍角公式そのものである：

$$\sinh x = 2\cosh\left(\frac{x}{2}\right)\sinh\left(\frac{x}{2}\right).$$

> **考えてみよう**　n のときに公式が成り立つと仮定する。最後の因数は $\sinh(x/2^n)$ である。$n+1$ の場合の公式を得るには、これをどう書き換えればよいか。

これに倍角公式を適用すると $\sinh(x/2^n) = 2\cosh(x/2^{n+1})\sinh(x/2^{n+1})$ となる。これを代入すると

$$\sinh x = 2^{n+1}\cosh\left(\frac{x}{2}\right)\cdots\cosh\left(\frac{x}{2^n}\right)\cosh\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\sinh\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right),$$

となり、これは $n+1$ の場合の公式である。数学的帰納法（induction）により、すべての n について成り立つ。 ■

後半の主張を導くには、両辺を x で割り、さらに両辺に $\dfrac{x/2^n}{\sinh(x/2^n)}$ を掛ければよい。右辺では $2^n\sinh(x/2^n)\cdot\dfrac{x/2^n}{x\,\sinh(x/2^n)} = 1$ となり、cosh の積だけが残る。 ■

段階 2　極限

級数（series）展開から、$y \neq 0$ のとき

$$\frac{\sinh y}{y} = 1 + \frac{y^2}{3!} + \frac{y^4}{5!} + \cdots,$$

であり、これは $y \to 0$ のとき 1 に近づく。よってその逆数 $y/\sinh y$ も 1 に近づく。（もっと慎重に議論したければ次のようにする。残りの項 $\frac{y^2}{3!} + \frac{y^4}{5!} + \cdots$ に現れる階乗はどれも 6 以上なので、$0 < |y| < 1$ のとき残りの項は高々 $\frac{1}{6}(y^2 + y^4 + \cdots) = \frac{y^2}{6(1-y^2)}$ であり、これは 0 に近づく。）

ここで、小問 (i) において x を固定して $n \to \infty$ とする。すると $y = x/2^n \to 0$ なので、左辺は $\dfrac{\sinh x}{x} \times 1$ に近づく。右辺は部分積（partial product）であり、したがってこれは $\dfrac{\sinh x}{x}$ に近づく。これこそが無限積（infinite product）の意味するところである。 ■

段階 3　$\ln 2$ の公式

$x = \ln 2$ とすると $e^{x/2} = \sqrt{2}$ なので

$$\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2^{1/2} + 2^{-1/2}}{2} = \frac{2+1}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

同様に $e^{x/4} = 2^{1/4}$ なので $\cosh(x/4) = \dfrac{2^{1/4} + 2^{-1/4}}{2}$ であり、分子と分母に $2^{1/4}$ を掛けると $\dfrac{2^{1/2}+1}{2 \times 2^{1/4}}$ となる。 ■

考えてみよう $\cosh(x/2^k)$ の一般的なパターンはどうなるか。分母 $2 \times 2^{1/2^k}$ をすべて掛け合わせると何が起こるか。

同じ計算により、すべての $k \geq 1$ について

$$\cosh\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1 + 2^{1/2^{k-1}}}{2} \times 2^{-1/2^k}.$$

が得られる。($k = 1$ のときこれは $\frac{1+2}{2} \times 2^{-1/2} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ であり、先ほどと一致する。) $k = 1, 2, 3, \ldots$ にわたって掛け合わせると、2 の累乗はまとまって $2^{-(1/2+1/4+1/8+\cdots)} = 2^{-1}$ となり、最初の分数は $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ である。したがって無限積は

$$\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1+2^{1/2}}{2} \times \frac{1+2^{1/4}}{2} \times \frac{1+2^{1/8}}{2} \cdots.$$

となる。一方、$\sinh(\ln 2) = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$ なので $\dfrac{\sinh x}{x} = \dfrac{3}{4 \ln 2}$ である。両辺の因数 $\frac{3}{4}$ が打ち消し合い、

$$\frac{1}{\ln 2} = \frac{1+2^{1/2}}{2} \times \frac{1+2^{1/4}}{2} \times \frac{1+2^{1/8}}{2} \cdots. \quad ■$$

が残る。

段階 4 ヴィエトの公式

考えてみよう 小問 (iv) には π が含まれているので、双曲線関数ではなく通常の三角関数から来ているはずである。小問 (i) と (ii) の議論は、sinh と cosh の代わりに sin と cos を用いてもすべてそのまま成り立つだろうか。

成り立つ。帰納法で用いたのは倍角公式だけであり、$\sin 2y = 2 \sin y \cos y$ である。極限で用いたのは $y \to 0$ のとき $\frac{\sin y}{y} \to 1$ となることだけであり、これは $\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \cdots$ から同様に従う。したがって $x \neq 0$ のとき（さらに、途中でどの因数も 0 にならないよう x は π の倍数でないとする）

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{8}\right) \cdots.$$

手を止めて、やってみよう 左辺が $2/\pi$ となるように x を選び、最初のいくつかの因数を計算せよ。半角公式（half-angle formula）$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$（$0 \le \theta \le \pi$ のとき）が役に立つ。

$x = \frac{\pi}{2}$ とする。すると $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$ であり、因数は $\cos\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{8}, \cos\frac{\pi}{16}, \ldots$ である。最初の因数は $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ である。ある因数が $\cos\theta = \frac{c}{2}$ であれば、半角公式により次の因数は

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+c/2}{2}} = \frac{\sqrt{2+c}}{2}.$$

となる。よって分子は $\sqrt{2}$、$\sqrt{2+\sqrt{2}}$、$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$、…と続き、それぞれ直前のものに 2 を加えて平方根をとったものである。これがヴィエトの公式である。 ■

振り返り

- **積の打ち消し合い。** 小問 (i) の恒等式は、ある種の和が打ち消し合って縮む（telescoping）のとまったく同様に、潰れていく積である。
- **まず有限の恒等式、次に極限。** Section 2.4 と同様に、すべての段階は有限の n について厳密であり、必要な極限はごく単純な $\frac{\sin y}{y} \to 1$ だけであった。
- **双曲線関数と三角関数は双子である。** 同じ証明がどちらにも通用したのは、両者が同じ倍角公式と同じ小さい角での極限を満たすからである。これは偶然ではない。Section 5.7 で見るように、$\cosh(ix) = \cos x$ なのである。

背後にある数学

アルキメデスの多角形

ヴィエトの公式には、アルキメデス（Archimedes）にまでさかのぼる幾何学的な意味がある。半径 1 の円に内接する 2^n 辺の正多角形（regular polygon）の面積は $A_n = 2^{n-1}\sin\frac{2\pi}{2^n}$ である。辺の数を 2 倍にすると、面積は

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{2^n \sin(\pi/2^n)}{2^{n-1}\cdot 2\sin(\pi/2^n)\cos(\pi/2^n)} = \frac{1}{\cos(\pi/2^n)}.$$

倍になる。正方形（$A_2 = 2$）から出発して限りなく 2 倍を繰り返すと、面積は円の面積 π に近づく。よって $\pi = 2 \div \left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots\right)$ となり、これがヴィエトの公式である。積の各因数は、図 2.5.1 の連続する二つの多角形の面積の比である。

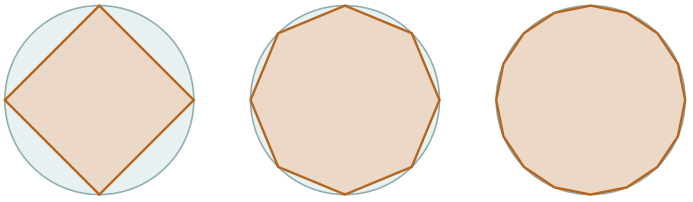


図 2.5.1　半径 1 の円に内接する、辺の数が 4、8、16 の正多角形。辺の数を 2 倍にするたびに、面積はヴィエトの積の因数を一つずつ余分に割ったものになり、面積は π に向かって増加していく。

無限積

ヴィエトの積は、数学における最初の無限積であった。その後にも続くものがあった。ジョン・ウォリス（John Wallis）は 1655 年に $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$ を発見し、オイラー（Euler）による $\frac{\sin x}{x}$ の積表示は Section 2.4 に登場した。大学では、無限積がどのような場合に収束（converge）するかを学ぶ。おおまかに言えば、小さな正の a_n に対する $\prod(1 + a_n)$ は $\sum a_n$ と同じように振る舞う。$\ln(1 + a_n) \approx a_n$ だからである。ここでは $1 - \cos(\pi/2^n) \approx \frac{1}{2}(\pi/2^n)^2$ であり、これは毎回 4 分の 1 ずつ小さくなるので、積は速く収束する。

どれくらい速いか

n 個の因数を掛けた後の部分積はちょうど $\dfrac{1}{2^n \sin(\pi/2^{n+1})}$ に等しく、その誤差はおよそ $\frac{\pi^2}{6 \cdot 4^{n+1}}$ の $\frac{2}{\pi}$ 倍である。新しい因数を一つ加えるごとに答えの精度はおよそ 4 倍になり、小数でおよそ 0.6 桁ずつ得られる。因数を 10 個とれば、$2/\pi$ が小数第 6 位まで正しく求まる。これは悪くないが、各段階で正しい桁数を 2 倍にする Section 2.6 の方法の速さにはとても及ばない。

思考のスキル

恒等式を繰り返し適用する

$f(x)$ と $f(x/2)$ を結びつける恒等式は、何度でも繰り返し適用できる。その結果は、極限をとると、しばしば無限和や無限積になる。

n 段階後の「残り」の項（ここでは $2^n \sinh(x/2^n)$）に注目し、その極限を別に求めよ。このパターンは、無限積からフラクタルの構成に至るまで、解析学のいたるところに現れる。

次の一歩

1 **1990 年版。** STEP I 1990、問 8（`step.maths.org/questions/90-s1-q8`）に取り組んでみよ。この問題は、sin の倍角公式以外は何も使わずに、本節とは別の道筋でヴィエトの積に到達する。どちらの方法がより自然だと感じるだろうか。

2 **別の角度。** $\frac{\sin x}{x}$ の積表示で $x = \frac{\pi}{3}$ として、$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ を無限積で表し、最初の二つの因数を簡単にせよ。

3 **因数はいくつ必要か。** 電卓を用いて、π を小数第 4 位まで正しく求めるにはヴィエトの積の因数がいくつ必要かを調べよ。また、因数を一つ増やすごとにおよそ 0.6 桁ずつ精度が上がる理由を説明せよ。

4 $\ln 3$ **の公式。** $x = \ln 3$ として小問 (iii) を繰り返し、$\frac{1}{\ln 3}$ を無限積で表せ。$\frac{1}{\ln 3}$ を小数第 2 位まで求めるには因数がいくつ必要か。この積がヴィエトの積よりも収束が遅いのはなぜか。

さらに学ぶために

- **Petr Beckmann, *A History of* π**（St Martin's Press）。『π の歴史』。アルキメデス、ヴィエト、ウォリスらの物語が熱のこもった筆致で語られる。
- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM***（Wiley）。『π と算術幾何平均』。Section 2.6 の方法を含む、π の計算の本格的な数学。本章を読み終えていれば、第 1 章は十分に読める。
- **Eli Maor, *Trigonometric Delights***（Princeton University Press）。『三角法の楽しみ』。ヴィエトとその積についての章がある。

2.6 算術幾何平均

問題

STEP II 2024、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip`

導入

2 つの正の数、たとえば $\sqrt{2}$ と 1 をとる。これらを、その相加平均（arithmetic mean）と相乗平均（geometric mean）で置き換える。これを何度も繰り返す。すると次のようになる。

n	x_n（相加平均）	y_n（相乗平均）
0	1.4142135623730950488	1
1	1.2071067811865475244	1.1892071150027210667
2	1.1981569480946342956	1.1981235214931201226
3	1.1981402347938772091	1.1981402346773072058
4	1.1981402347355922074	1.1981402347355922074

わずか 4 回の操作で、2 つの数は小数第 20 位まで一致する。この共通の極限が**算術幾何平均**（arithmetic–geometric mean）$M(\sqrt{2},1) = 1.19814\ldots$ である。

1799 年 5 月 30 日、21 歳のガウス（Carl Friedrich Gauss）は日記に、$1/M(\sqrt{2},1)$ が、まったく別の問題、すなわちレムニスケート（lemniscate）と呼ばれる曲線の弧長（arc length）に現れる定数と小数第 11 位まで一致することに気づいた、と書き記した。「これはきっと、解析学のまったく新しい分野を切り開くであろう」と彼は書いている。実際にそのとおりになった。本問は、ガウスの発見の背後にある鍵となる事実を証明するものである。すなわち、算術幾何平均（AGM）を用いると、通常のどの方法でも計算できない積分の値が求まるのである。

取りかかる前に

考えてみよう　相異なる2つの正の数の相加平均が、つねに相乗平均より大きいのはなぜか。1行で証明できるだろうか。

これは相加相乗平均の不等式（AM–GM inequality）であり、小問 (i) のヒントがその1行の証明を与えている。$x \neq y$ のとき $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 > 0$ であり、これを展開すると $x+y > 2\sqrt{xy}$ となる。小問 (i) のすべては、この事実と、それぞれの平均がもとの2数の間にあるという事実から導かれる。

順を追って解く

段階 1　2つの数列が挟み込まれる

$y_n < x_n$ ならば $\sqrt{x_n} \neq \sqrt{y_n}$ であるから $x_n - 2\sqrt{x_n y_n} + y_n > 0$ であり、これは $x_{n+1} > y_{n+1}$ を意味する。$y_0 < x_0$ であるから、数学的帰納法（induction）により、すべての n について $y_n < x_n$ が成り立つ。

考えてみよう　x_n と y_n の相加平均が x_n より小さく、相乗平均が y_n より大きいのはなぜか。

$y_n < x_n$ であるから、$x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} < \frac{x_n+x_n}{2} = x_n$ であり、$y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > \sqrt{y_n y_n} = y_n$ である。したがって

$$y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < x_2 < x_1 < x_0.$$

y_n は単調増加（increasing）で、上から x_0 で抑えられている（bounded above）から、問題文の定理により、ある極限 M に収束する。

差については、

$$x_{n+1} - y_{n+1} < x_{n+1} - y_n = \frac{x_n + y_n}{2} - y_n = \frac{1}{2}(x_n - y_n),$$

であり、前半の結果よりこれは正である。よって差は各段階で少なくとも半分になる。すなわち $0 < x_n - y_n < (x_0 - y_0)/2^n$ であり、これは0に収束する。

最後に、$x_n = y_n + (x_n - y_n)$ は M に収束する数列と0に収束する数列の和であるから、$x_n \to M$ も成り立つ。 ■

段階 2　置換積分

この置換（substitution）は唐突に見えるが、根号の中の2つの括弧がいずれも完全平方式（あるいはそれに近いもの）になるように設計されている。

考えてみよう $t = \frac{1}{2}\left(x - \frac{pq}{x}\right)$ として $t^2 + pq$ を計算せよ。次に $t^2 + \frac{1}{4}(p+q)^2$ を計算せよ。どちらかはきれいに因数分解できるだろうか。

まず、

$$t^2 + pq = \frac{1}{4}\left(x^2 - 2pq + \frac{p^2q^2}{x^2}\right) + pq = \frac{1}{4}\left(x + \frac{pq}{x}\right)^2.$$

次に、

$$\begin{aligned} t^2 + \tfrac{1}{4}(p+q)^2 &= \frac{1}{4}\left(x^2 - 2pq + \frac{p^2q^2}{x^2} + p^2 + 2pq + q^2\right) \\ &= \frac{x^4 + (p^2+q^2)x^2 + p^2q^2}{4x^2} = \frac{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}{4x^2}. \end{aligned}$$

また $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{pq}{x^2}\right) = \dfrac{x^2+pq}{2x^2}$ である。

手を止めて、やってみよう これらを組み合わせよ。x が 0 から ∞ まで動くとき、t はどう動くか。t についての積分は何になるか。

x が 0 から ∞ まで増加するとき、t は（導関数が正であるから）$-\infty$ から ∞ まで増加する。$x > 0$ に対して

$$\sqrt{\left(t^2 + \tfrac{1}{4}(p+q)^2\right)\left(t^2 + pq\right)} = \frac{\sqrt{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}}{2x} \cdot \frac{x^2+pq}{2x},$$

であるから、

$$\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\cdots}} = \frac{x^2+pq}{2x^2} \cdot \frac{4x^2}{(x^2+pq)\sqrt{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}}\,\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}}.$$

よって t についての積分は $2\mathrm{I}(p,q)$ に等しい。

一方、t についての積分は、p と q をそれぞれ $\frac{1}{2}(p+q) = \mathrm{a}(p,q)$ と $\sqrt{pq} = \mathrm{g}(p,q)$ で置き換えた I とまったく同じ形をしている。ただし積分範囲は実数全体である。被積分関数は t について偶関数（even）であるから、t についての積分は $2\mathrm{I}\big(\mathrm{a}(p,q), \mathrm{g}(p,q)\big)$ である。両者を比べて、

$$\mathrm{I}(p,q) = \mathrm{I}\big(\mathrm{a}(p,q), \mathrm{g}(p,q)\big). \qquad \blacksquare$$

段階 3 積分の値を求める

考えてみよう (x_0, y_0) から始めて、この恒等式を繰り返し適用せよ。n 回適用すると $\mathrm{I}(x_0, y_0)$ は何に等しくなるか。$n \to \infty$ のとき何が起こるか。

すべての n について $\mathrm{I}(x_0,y_0)=\mathrm{I}(x_1,y_1)=\mathrm{I}(x_2,y_2)=\cdots=\mathrm{I}(x_n,y_n)$ である。$n\to\infty$ のとき 2 つの引数はいずれも M に収束し、

$$\mathrm{I}(M,M)=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{M^2+x^2}=\left[\frac{1}{M}\arctan\frac{x}{M}\right]_0^{\infty}=\frac{\pi}{2M}.$$

したがって

$$\mathrm{I}(x_0,y_0)=\frac{\pi}{2M}. \qquad \blacksquare$$

問題文では「$\mathrm{I}(x_n,y_n)\to\mathrm{I}(M,M)$」という段階を認めてよいことになっているが、これはきれいに正当化できる。p または q を大きくすると被積分関数は小さくなり、また $y_n<x_n$ であるから、

$$\frac{\pi}{2x_n}=\mathrm{I}(x_n,x_n)<\mathrm{I}(x_n,y_n)<\mathrm{I}(y_n,y_n)=\frac{\pi}{2y_n}.$$

両側の評価はともに $\frac{\pi}{2M}$ に収束し、しかも $\mathrm{I}(x_n,y_n)$ はすべての n について同じ数 $\mathrm{I}(x_0,y_0)$ であるから、これは $\frac{\pi}{2M}$ に等しくなければならない。Section 2.4 と同様、ここでもはさみうちの原理が用いられている。

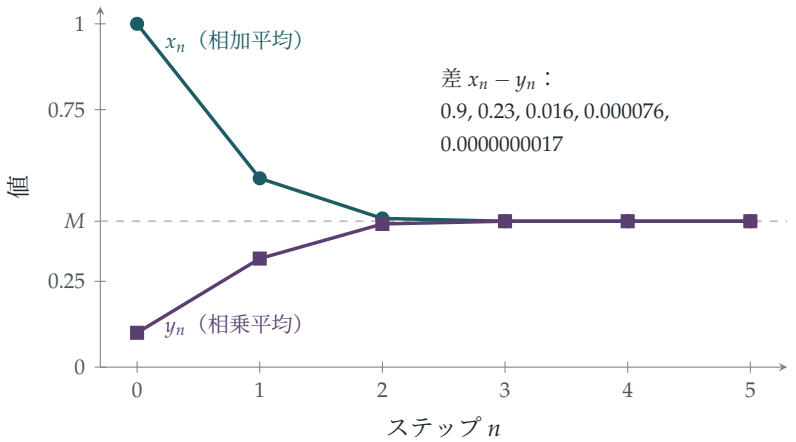


図 2.6.1　$x_0=1$ と $y_0=0.1$ の算術幾何平均。相加平均 x_n（ティール）は減少し、相乗平均 y_n（プラム）は増加して、共通の極限 $M=0.425040709\ldots$ に驚くほど速く近づく。いったん近くなると、正しい桁数は各ステップでおよそ 2 倍になる。

振り返り

- **挟み込まれる 2 つの単調数列。**一方は増加し、他方は減少し、その差は 0 に縮む。これは 2 つの数列が共通の極限をもつことを示す最も明快な方法である。
- **不変量。**$\mathrm{I}(x_n,y_n)$ という量はステップごとに決して変化しない。他のすべてが動く

中で変わらないものを見つけることは、数学における最も強力な考え方の一つである。

- **巧妙な置換は当て推量ではなく、設計されたものである。**この置換は、根号の中の式が因数分解できるように選ばれていた。

背後にある数学

問題が認めるよりも速い

小問 (i) は差が各ステップで少なくとも半分になることを示しており、これはステップごとにおよそ 2 進数 1 桁ずつ精度が上がることを意味する。しかし導入の表は、はるかに劇的なことを示している。正しい桁数が各ステップでおよそ 2 倍になっているのである（$2, 4, 10, 21, 43, \ldots$）。実際、

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{1}{2}\bigl(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}\bigr)^2 = \frac{(x_n - y_n)^2}{2\bigl(\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n}\bigr)^2},$$

であるから、各段階の差はおよそ直前の差の 2 乗の定数倍である。これを**二次収束**（quadratic convergence）といい、Section 2.7 できちんと学ぶ。

楕円積分

本問の積分 $\mathrm{I}(p, q)$ は、姿を変えた**完全楕円積分**（complete elliptic integral）である。これは楕円の弧長を計算する際に現れる種類の積分であり、読者の知っている関数を用いて表すことはできない。その最も有名な応用は振り子（pendulum）である。周期を表す A レベル（A level、英国の大学入学資格試験）の公式 $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ は、振れ幅が小さい場合の近似にすぎない。角度 θ_0 から放した振り子の正確な周期は

$$T = \frac{2\pi\sqrt{L/g}}{M\bigl(1, \cos\frac{\theta_0}{2}\bigr)},$$

であり、これは算術幾何平均によって値が求まる楕円積分である。$\theta_0 = 90^\circ$ のとき、真の周期は簡単な公式の予測より約 18% 長い。ガウスの日記の記述はレムニスケート、すなわち 8 の字形の曲線に関するものであった。その全弧長には $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$ が現れ、この積分は姿を変えた $\mathrm{I}(\sqrt{2}, 1)$ に等しいので、算術幾何平均によって値が求まるのである。

π の計算

1976 年、Richard Brent と Eugene Salamin はそれぞれ独立に、ガウスの考えを、正しい桁数が各ステップで 2 倍になる π の計算アルゴリズムへと仕立てた。25 ステップで数千万桁が得られる。この種のアルゴリズムは 1980 年代から 1990 年代にかけて π の記録的な計算に用いられ、現在では高精度が必要なあらゆる場面で、このような二次収束するアルゴリズムが標準となっている。ステップごとに約 0.6 桁しか精度が上がらない Section 2.5 のヴィエト（Viète）の積と比べてみるとよい。

思考のスキル

不変量を探す

ある操作が多くのものを一度に変えるときは、変わらない量を探せ。そしてその量を、すべてが単純になる操作の最後で評価せよ。

ここでは操作が算術幾何平均のステップであり、不変量（invariant）が積分 I であった。操作の最後では 2 つの引数が等しくなり、積分は初等的に計算できた。不変量は、力学におけるエネルギー保存（第 10 章）から、ある種のパズルが解けないことの証明に至るまで、数学のあらゆるところに現れる。

次の一歩

1. **二次収束。** 恒等式 $x_{n+1} - y_{n+1} = \dfrac{(x_n - y_n)^2}{2(\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n})^2}$ を証明し、$x_{n+1} - y_{n+1} \le \dfrac{(x_n - y_n)^2}{8y_0}$ を導け。

2. **手計算。** 電卓を使って $M(2,1)$ を小数第 6 位まで求めよ。何ステップ必要だったか。

3. **スケーリング。** $\lambda > 0$ に対して $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda M(x,y)$ であること、および $\mathrm{I}(\lambda p, \lambda q) = \lambda^{-1}\mathrm{I}(p,q)$ であることを示せ。これら 2 つの事実が $\mathrm{I}(x_0, y_0) = \pi/(2M)$ と矛盾しないことを確かめよ。

4. **振り子。** 上の公式を用いて、60° から放した振り子の周期が、小振幅での予測よりどれだけ長いかを有効数字 3 桁で求めよ。

さらに学ぶために

- **David Cox,「The arithmetic–geometric mean of Gauss」**, *L'Enseignement Mathématique* 30 (1984)（ガウスの算術幾何平均）。歴史と数学についての古典的な解説である。最初の数節は微積分の知識だけで読める。
- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM*** (Wiley)（円周率と算術幾何平均）。算術幾何平均と π の高速計算についての決定版といえる本である。
- **Jonathan Borwein & Keith Devlin, *The Computer as Crucible*** (A. K. Peters)（るつぼとしてのコンピュータ）。実験数学を扱い、ガウスの発見のように数値の一致に気づくことから生まれた発見も紹介している。

2.7 6 桁か、600 桁か

問題

STEP II 2023、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip`

導入

$\sqrt{2}$ を近似する簡単な方法を二つ考える。どちらも 1 から出発し、使うのは足し算、掛け算、割り算だけである。10 ステップ後、一つ目は小数点以下およそ 8 桁まで正しい。二つ目は 700 桁以上まで正しい。

この違いは、二つ目の方法が $\sqrt{2}$ についてより巧妙だからではない。違いは誤差の**形**にある。一つ目では各ステップで誤差に一定の分数が掛かるが、二つ目では各ステップで誤差が **2 乗**される。この問題はこのことを厳密に述べ、その過程で数値解析（numerical analysis）の中心的な考え方の一つを導入する。数値解析は、あらゆる電卓、あらゆる天気予報、あらゆる工学シミュレーションを支える分野である。

取りかかる前に

それぞれの数列の最初の数項を分数で計算してみよう。

$$x_n:\quad 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \dots \qquad y_n:\quad 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{17}{12},\ \frac{577}{408},\ \frac{665857}{470832},\ \dots$$

考えてみよう 二つのリストについて何か気づくことはあるだろうか。（両方に現れる分数に注目せよ。）

y_n はすべて x のリストに現れるが、その位置はどんどん先になっていく。$y_2 = x_3$、$y_3 = x_7$ であり、一般に $y_n = x_{2^n-1}$ である。二つ目の方法は、同じ近似の列を指数関数的な速さで飛ばしながら進んでいるのである。このことを覚えておいてほしい。最後に理由を説明する。

順を追って解く

段階 1　一つ目の方法の値は常に 1 以上である

$x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n + 1}$ と書ける。$x_n \geq 1$ ならば $x_n + 1 > 0$ であるから、$x_{n+1} > 1$ である。$x_0 = 1$ であるから、帰納法（induction）により、すべての n について $x_n \geq 1$ が成り立つ。 ■

段階 2　一つ目の方法の誤差

> **考えてみよう**　この問題では、誤差を $x_n - \sqrt{2}$ ではなく $x_n^2 - 2$ で測っている。$x_{n+1}^2 - 2$ を x_n を用いて一つの分数で表せ。分子について何に気づくだろうか。

$$x_{n+1}^2 - 2 = \frac{(x_n + 2)^2 - 2(x_n + 1)^2}{(x_n + 1)^2} = \frac{x_n^2 + 4x_n + 4 - 2x_n^2 - 4x_n - 2}{(x_n + 1)^2} = \frac{2 - x_n^2}{(x_n + 1)^2}.$$

分子はちょうど $-(x_n^2 - 2)$ である。したがって $x_{n+1}^2 - 2$ と $x_n^2 - 2$ は異符号であり（近似値は $\sqrt{2}$ の両側を交互に行き来する）、また $x_n \geq 1$ より $(x_n + 1)^2 \geq 4$ であるから、

$$|x_{n+1}^2 - 2| = \frac{|x_n^2 - 2|}{(x_n + 1)^2} \leq \frac{1}{4} |x_n^2 - 2|. \qquad \blacksquare$$

段階 3　10 ステップ

これを 10 回適用すると、$|x_{10}^2 - 2| \leq 4^{-10} |x_0^2 - 2| = 4^{-10} = \frac{1}{1048576} < 10^{-6}$ となる。符号については、$x_0^2 - 2 = -1 < 0$ であり、符号は交互に変わるので、偶数の n ではすべて $x_n^2 - 2 < 0$ である。よって $x_{10}^2 < 2$ であり、これらを合わせて $2 - 10^{-6} \leq x_{10}^2 \leq 2$ を得る。 ■

x_n^2 の誤差は各ステップで高々 $\frac{1}{4}$ 倍になる。これを **1 次収束**（linear convergence）という。1 ステップごとに一定の桁数だけ正しい桁が増える（ここでは少なくとも $\log_{10} 4 \approx 0.6$ 桁であり、実際には 0.77 桁に近い）。

段階 4　二つ目の方法の誤差

> **考えてみよう**　$y_{n+1} - \sqrt{2}$ を一つの分数で表せ。分子を見ると完全平方式が思い浮かぶはずである。

$$y_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{y_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}\, y_n}{2y_n} = \frac{(y_n - \sqrt{2})^2}{2y_n}. \qquad \blacksquare$$

$y_n > 0$ ならば右辺は 0 以上であるから、$y_{n+1} \geq \sqrt{2} > 1$ である。$y_0 = 1$ であるから、帰納法により、すべての n について $y_n \geq 1$ が成り立つ。 ■（実際には、すべての $n \geq 1$ について $y_n \geq \sqrt{2}$ である。最初のステップの後、二つ目の方法は常に上から $\sqrt{2}$ に近づく。）

段階 5 誤差の 2 乗

$e_n = y_n - \sqrt{2}$ とおく。$n \geq 1$ のとき $e_n \geq 0$ であり、$y_n \geq 1$ であるから $e_{n+1} = \dfrac{e_n^2}{2y_n} \leq \dfrac{e_n^2}{2}$ である。

> **手を止めて、やってみよう** $r = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ とするとき、$n \geq 1$ について $e_n \leq 2r^{2^n}$ であることを帰納法で証明せよ。初期段階は注意深く確かめること。

初期段階：$e_1 = \dfrac{(1-\sqrt{2})^2}{2 \cdot 1} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{2}$ であり、一方 $2r^2 = 2 \cdot \dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{4} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{2}$ である。両者は等しいので、初期段階は（等号で）成り立つ。

帰納段階：$e_n \leq 2r^{2^n}$ ならば

$$e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{2} \leq \frac{4r^{2^{n+1}}}{2} = 2r^{2^{n+1}}. \qquad \blacksquare$$

段階 6 600 桁

$\sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$ であるから $r < \frac{1}{4}$ であり、

$$0 \leq y_{10} - \sqrt{2} \leq 2\left(\frac{1}{4}\right)^{2^{10}} = 2 \cdot 2^{-2048} = 2^{-2047}.$$

ここで $2^{10} = 1024 > 10^3$ であるから、$2^{-2047} < 2^{-2040} = (2^{10})^{-204} < 10^{-612}$ であり、これは確かに 10^{-600} より小さい。 ■

振り返り

- **誤差の漸化式を求める。** どちらの小問も、新しい誤差を古い誤差の厳密な関数として書くことで解けた。残りはすべてそこから導かれた。
- **1 次と 2 次。**「新しい誤差 $\leq$ 定数 $\times$ 古い誤差」からは、1 ステップごとに一定の桁数だけ正しい桁が増える。「新しい誤差 $\leq$ 定数 $\times$（古い誤差）^{2}」では、1 ステップごとに正しい桁数が 2 倍になる（図 2.7.1）。
- **2 乗された量が符号を決める。** 小問 (ii) では、1 ステップ後の誤差は 2 乗を正の量で割ったものなので、決して負にならない。つまり反復は上から近づく。

背後にある数学

ニュートン法

二つ目の方法は、$f(y) = y^2 - 2$ に**ニュートン法**（Newton's method）を適用したものである。ニュートン（Newton）法は、推測値 y を、y における接線が軸と交わる点で置き換えることを繰り返して、f の根を求める。

$$y_{\text{new}} = y - \frac{f(y)}{f'(y)} = y - \frac{y^2 - 2}{2y} = \frac{y^2 + 2}{2y}.$$

単根（simple root）α の近くでは、テイラー展開（Taylor expansion）により新しい誤差はおよそ $\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \times (\text{古い誤差})^2$ であることがわかる。これがニュートン法が 2 次収束（quadratic convergence）する理由である。この特別な場合、すなわち「y と $2/y$ の平均をとる」方法はバビロニア人に知られていた。紀元前 1700 年頃の粘土板で、現在 YBC 7289 と呼ばれているものには、$\sqrt{2}$ が 60 進法で、誤差 100 万分の 1 未満で記されている。

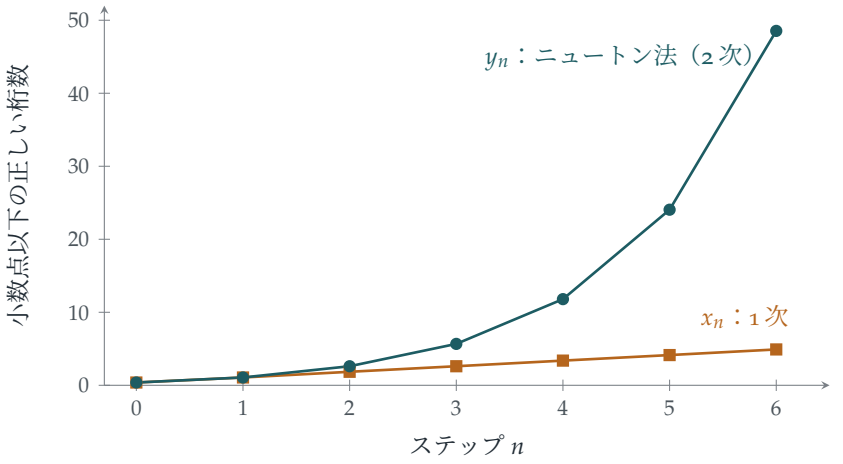


図 2.7.1　それぞれの方法で n ステップ後に得られる $\sqrt{2}$ の小数点以下の正しい桁数。1 次の方法は 1 ステップごとに約 0.77 桁ずつ増える。ニュートン法では各ステップで正しい桁数がおよそ 2 倍になり、$n = 10$ では約 780 桁に達する。

不動点と収束の速さ

どちらの方法も $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ を満たす g によって $u_{n+1} = g(u_n)$ という形をしているので、$\sqrt{2}$ は**不動点**（fixed point）である。これは Section 2.2 のクモの巣図と同じ状況

である。不動点 α の近くでは、誤差は各ステップでおよそ $g'(\alpha)$ 倍される。一つ目の方法では $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$ であり、$g'(\sqrt{2}) = -\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2} = -(3-2\sqrt{2}) \approx -0.17$ である。負の符号は符号が交互に変わることを説明し、0.17 という値は 1 ステップあたり 0.77 桁という増え方を説明する（$\log_{10}(1/0.17) \approx 0.77$）。ニュートン法では $g'(\alpha) = 0$ なので、1 次の項が消え、誤差は次の項、すなわち 2 乗の項で決まる。$g'(\alpha) = 0$ となる反復を設計することこそ、高速な数値計算法の技である。

同じ分数が現れる理由

分数 $x_n = p_n/q_n$ は $p_{n+1} = p_n + 2q_n$、$q_{n+1} = p_n + q_n$ を満たし、さらに $p_n^2 - 2q_n^2 = \pm 1$（符号は交互）を満たす。これらは**ペル方程式**（Pell's equation）$p^2 - 2q^2 = \pm 1$ の解であり、連分数（continued fraction）$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$ の近似分数（convergents）である。これらは $1 + \sqrt{2}$ のべきから得られる：$p_n + q_n\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^{n+1}$。ニュートン法の 1 ステップは $p + q\sqrt{2}$ を 2 乗する（確かめてみよ：$(p+q\sqrt{2})^2 = p^2 + 2q^2 + 2pq\sqrt{2}$ であり、$\frac{p^2+2q^2}{2pq}$ はちょうど p/q にニュートン法の式を適用したものである）。2 乗すると指数が 2 倍になる。これが $y_n = x_{2^n-1}$ となる理由である。同じ「2 乗」のパターンが Section 2.8 の反復も動かしている。

思考のスキル

> **答えではなく誤差を解析する**
>
> 近似の振る舞いを理解するには、あるステップでの誤差が直前のステップの誤差にどう依存するかを書き下せ。
>
> これが数値解析の出発点である。答えそのもの（$\sqrt{2}$）はどちらの方法でも同じである。異なるのは、そして実際に重要なのは、誤差がどのように変化していくかである。

次の一歩

1. **ペル方程式。** $y_n = p/q$ が既約分数で $p^2 - 2q^2 = 1$ を満たすならば、$y_{n+1} = \dfrac{p^2+2q^2}{2pq}$ もこの方程式を満たすことを示せ。また $577^2 - 2 \times 408^2 = 1$ を確かめよ。

2. **立方根。** $f(y) = y^3 - 2$ に対するニュートン法を書き下し、$\alpha = \sqrt[3]{2}$ とするとき新しい誤差が $\dfrac{(y_n-\alpha)^2(2y_n+\alpha)}{3y_n^2}$ であることを示せ。これより、$y_n > \alpha$ ならば新しい

誤差は古い誤差の 2 乗の高々 $\frac{1}{a}$ 倍であることを導け。（**ヒント**：$\alpha^3 = 2$ を用いよ。）

3 **割らずに割り算をする。** $f(y) = \frac{1}{y} - a$ に対するニュートン法から $y_{n+1} = y_n(2 - ay_n)$ が得られ、これには割り算が不要であることを示せ。$e_n = 1 - ay_n$ とするとき、$e_{n+1} = e_n^2$ であることを示せ。（コンピュータのプロセッサは、このような反復を用いて割り算を行う。）

4 **ニュートン法がうまくいかないとき。** 唯一の根が 0 である $f(y) = y^{1/3}$ にニュートン法を適用せよ。どこから始めても、各ステップで根からの距離が 2 倍になることを示せ。誤差の公式のどの仮定が成り立っていないか。

さらに学ぶために

- **Endre Süli & David Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis***（Cambridge University Press）。『数値解析入門』。学部向けの標準的な教科書で、第 1 章で不動点反復とニュートン法を扱っている。
- **Nick Higham (ed.), *The Princeton Companion to Applied Mathematics***（Princeton University Press）。『プリンストン応用数学事典』。ニュートン法や数値解析についての短い記事が、専門家によって幅広い読者向けに書かれている。
- **David Fowler & Eleanor Robson, “Square root approximations in Old Babylonian mathematics: YBC 7289 in context”,** *Historia Mathematica* 25 (1998)。古バビロニア数学における平方根の近似を YBC 7289 の文脈で論じた論文。

2.8 2乗して2を引く

問題

STEP III 2021、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

導入

「2 乗して 2 を引く」というのは、数列（sequence）を生成する規則としてはほとんど最も単純なものである。ところがこの規則は、実数直線を二つの世界に分けてしまう。$[-2,2]$ の外から出発すると、数は指数関数よりも速く無限大へと爆発する。内側から出発すると、数は永遠にその中に閉じ込められ、ある厳密な意味で完全に予測不可能な仕方でさまよい続ける。これは**カオス**（chaos）の最も単純な例の一つである。

同じ規則を非常に大きな整数で実行したものが、ルーカス–レーマー判定法（Lucas–Lehmer test）の心臓部である。これはメルセンヌ数 $2^p - 1$ が素数であるかどうかを効率よく判定する方法であり、現在の記録となっている素数をはじめ、既知の最大級の素数のほとんどを発見してきた。本問では発散する側の話を探究し、数列を完全に解けるものにする隠れた公式を見つける。

取りかかる前に

いくつかの初期値で試してみよう。$a = 3$ のとき：$3, 7, 47, 2207, \ldots$。$a = 1$ のとき：$1, -1, -1, -1, \ldots$。$a = 0$ のとき：$0, -2, 2, 2, 2, \ldots$。$a = 0.3$ のとき：$0.3, -1.91, 1.648, 0.716, -1.487, 0.211, \ldots$。

> **考えてみよう** $[-2,2]$ の中の数が決して外へ逃げ出せないのはなぜか。$-2 \le x \le 2$ のとき、$x^2 - 2$ の最大値と最小値はいくらか。

$-2 \le x \le 2$ ならば $0 \le x^2 \le 4$ であるから、$-2 \le x^2 - 2 \le 2$ となる。区間 $[-2,2]$ はそれ自身の中へ写される。これが小問 (ii) の半分になる。

順を追って解く

段階 1　発散

考えてみよう　小問 (i) には 4^{n-1} が現れており、2 からの超過分が各ステップで少なくとも 4 倍になることを示唆している。$x_n = 2 + d$ とおく。x_{n+1} を d で表すとどうなるか。

$x_{n+1} = (2+d)^2 - 2 = 2 + 4d + d^2$ である。したがって $d \geq 0$ ならば、新しい 2 からの超過分は $4d + d^2 \geq 4d$ である。

ここで数学的帰納法（induction）を用いる。$n = 1$ のとき、$x_1 = a = 2 + 4^0(a-2)$ である。$x_n \geq 2 + 4^{n-1}(a-2)$ ならば、$d = x_n - 2 \geq 4^{n-1}(a-2) \geq 0$ であるから、

$$x_{n+1} - 2 \geq 4d \geq 4^n(a-2). \qquad \blacksquare$$

段階 2　$|a| > 2$ のとき、かつそのときに限り発散する

考えてみよう　「〜のとき、かつそのときに限り」（if and only if）とは、二つの別々の証明が必要だということである。小問 (i) でほぼ得られているのはどちらの向きで、何が足りないか。

$|a| > 2$ ならば：$a > 2$ のときは、小問 (i) より $x_n \geq 2 + 4^{n-1}(a-2) \to \infty$ である。$a < -2$ のときは、最初の 1 ステップで符号が定まる。すなわち $x_2 = a^2 - 2 > 4 - 2 = 2$ であり、x_2 以降の数列は $x_2 > 2$ から出発した同じ数列であるから、無限大に発散する。

逆向き：$|a| \leq 2$ ならば $a \in [-2, 2]$ であり、上で見たことからすべての項が $[-2, 2]$ にとどまる。有界（bounded）な数列は無限大に発散し得ない。 $\blacksquare$

段階 3　隠れた公式

小問 (iii) は手ごわそうに見える。取りかかる前に、x_n の公式を見つけておく価値がある。

考えてみよう　$a > 2$ ならば、$a = t + \dfrac{1}{t}$ となる数 $t > 1$ が存在する（なぜか）。x_2 と x_3 を t で表すとどうなるか。

関数 $t + 1/t$ は、t が 1 から ∞ まで動くとき 2 から ∞ まで増加するので、どの $a > 2$ も

この形に書ける。すると

$$x_2 = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 2 = t^2 + \frac{1}{t^2}, \qquad x_3 = \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)^2 - 2 = t^4 + \frac{1}{t^4},$$

であり、帰納法により

$$x_n = t^{2^{n-1}} + t^{-2^{n-1}}.$$

2乗して2を引くことは、単に指数を2倍することにすぎない。これで問題は扱いやすくなる。

段階4 積が次々に打ち消し合う

考えてみよう $\left(t - \frac{1}{t}\right)\left(t + \frac{1}{t}\right)$ はいくらか。その結果に $t^2 + \frac{1}{t^2}$ を掛けるとどうなるか。

$\left(t - \frac{1}{t}\right)\left(t + \frac{1}{t}\right) = t^2 - \frac{1}{t^2}$ であり、さらに $\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right)\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) = t^4 - \frac{1}{t^4}$ であり、以下同様である。各因子 x_k は、二つのべきの差における指数を2倍する。したがって

$$\left(t - \frac{1}{t}\right) x_1 x_2 \cdots x_n = t^{2^n} - t^{-2^n}.$$

手を止めて、やってみよう $x_{n+1}^2 - 4$ を t で表し、この積と比べよ。

$$x_{n+1}^2 - 4 = \left(t^{2^n} + t^{-2^n}\right)^2 - 4 = \left(t^{2^n} - t^{-2^n}\right)^2.$$

$t > 1$ より $t^{2^n} - t^{-2^n} > 0$ であるから、$\sqrt{x_{n+1}^2 - 4} = t^{2^n} - t^{-2^n} = \left(t - \frac{1}{t}\right) x_1 x_2 \cdots x_n$ である。よって

$$\frac{\sqrt{x_{n+1}^2 - 4}}{x_{n+1}} = \frac{\left(t - \frac{1}{t}\right) x_1 \cdots x_n}{x_{n+1}},$$

であり、これがすべての n について y_n に等しくなるのは、ちょうど $A = t - \frac{1}{t}$ のときである。最後に、$\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 4 = a^2 - 4$ であるから、条件は $A = \sqrt{a^2 - 4}$、すなわち

$$a = \sqrt{A^2 + 4}.$$

である（$A > 0$ であるから、これは要求どおり2より大きい）。 ■

段階5 y_n は収束するか

この a の値に対して、

$$y_n = \frac{\sqrt{x_{n+1}^2 - 4}}{x_{n+1}} = \sqrt{1 - \frac{4}{x_{n+1}^2}}.$$

小問 (ii) より $x_{n+1} \to \infty$ であるから、$\frac{4}{x_{n+1}^2} \to 0$ となり、$y_n \to 1$ である。数列は 1 に収束する。 ■

つまり無限積（infinite product）$x_1 x_2 x_3 \cdots$ は、x_{n+1}/A とちょうど同じ速さで増大する。急速に増大する項の積について、その正確な増大の速さが求められたのである。

振り返り

- **不変領域（invariant region）。**$[-2, 2]$ はそれ自身の中へ写され、この一つの事実だけで小問 (ii) の半分が片づく。
- **線形化（linearise）する置き換え。**$a = t + 1/t$ と書くことで、「2 乗して 2 を引く」が「指数を 2 倍する」に変わった。込み入った非線形のふるまいが単純なものになったのである。
- **再び、次々に打ち消し合う（telescoping）構造。**Section 2.5 の積と同様に、多くの因子の積が、各因子が次の因子とうまくかみ合うことによってつぶれた。

背後にある数学

秩序とカオス

$[-2, 2]$ の内側では何が起こるのか。そこでは $a = t + 1/t$ はうまくいかない（$|a| \geq 2$ が必要である）が、三角関数による類似がうまくいく。$a = 2\cos\theta$ と書くのである。すると $x_2 = 4\cos^2\theta - 2 = 2\cos 2\theta$ であり、一般に

$$x_n = 2\cos\left(2^{n-1}\theta\right).$$

となる。つまり区間の内側では、この写像（map）は単に**角を 2 倍する**だけである。無害に聞こえるが、角の 2 倍はカオス的である。θ/π を 2 進法（binary）で書くと、2 倍することは小数点を 1 桁右へずらし、先頭の桁を捨てることにあたる。50 ステップ後には x_n は θ/π の 2 進展開の第 51 桁に依存するので、初期値の誤差が 10^{-15}（一般的なコンピュータの精度）であっても、50 ステップ後の答えはまったく信頼できなくなる。この初期値鋭敏性（sensitive dependence on initial conditions）こそがカオスの特徴であり、図 2.8.1 に示されている。写像 $x \mapsto x^2 - 2$ は、変数変換によって有名なロジスティック写像（logistic map）$x \mapsto 4x(1-x)$ と同値であり、これには Section 8.7 で再会する。

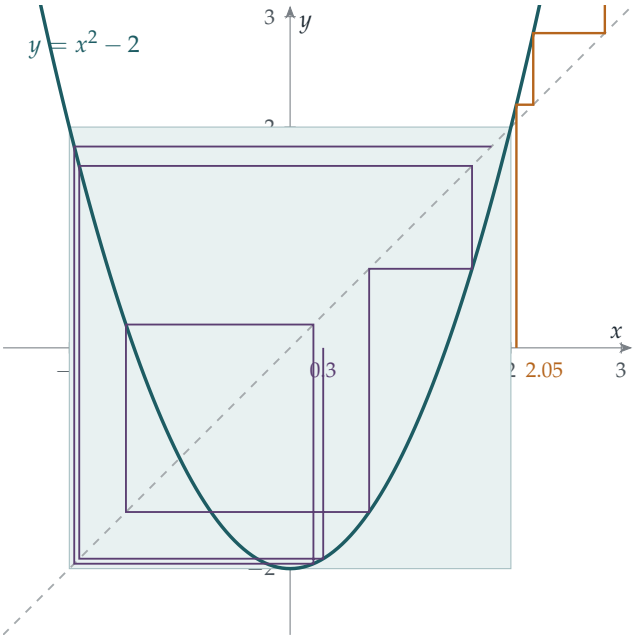


図 2.8.1　$x_{n+1} = x_n^2 - 2$ のクモの巣図（cobweb diagram）。0.3 から出発した軌道（紫）は、網かけの正方形 $[-2,2]^2$ に永遠にとどまり、カオス的にさまよう。そのすぐ外の 2.05 から出発した軌道（琥珀色）は逃げ出す：$2.05, 2.20, 2.85, 6.13, \ldots$

最大の素数を見つける

メルセンヌ数（Mersenne number）とは $M_p = 2^p - 1$ のことである。1876 年にエドゥアール・リュカ（Édouard Lucas）が発見し、1930 年にデリック・レーマー（Derrick Lehmer）が完成させた、M_p が素数かどうか（p は奇素数）を判定する見事な方法がある。$s_0 = 4$ から出発し、毎回 M_p を法として簡約しながら、2 乗して 2 を引くことを繰り返す。このとき

$$M_p \text{ は素数} \iff s_{p-2} \equiv 0 \pmod{M_p}.$$

$M_7 = 127$ の場合：$s = 4, 14, 194 \equiv 67, 67^2 - 2 \equiv 42, 42^2 - 2 \equiv 111, 111^2 - 2 \equiv 0$ であるから、127 は素数である。本問との関係は置き換えにある。$t = 2 + \sqrt{3}$ とすると $4 = t + 1/t$ であるから、$s_k = (2+\sqrt{3})^{2^k} + (2-\sqrt{3})^{2^k}$ となり、判定法の証明では Section 1.6 のガウス整数（Gaussian integers）とよく似た、$a + b\sqrt{3}$ の形の数の算術を用いる。各ステップで必要なのは 2 乗 1 回だけなので、この判定法は極めて高速である。既知の最大級の素数のほとんどが、現在の記録保持者も含めてメルセンヌ素数であるのはこのためである（すべてがそうではない。$a^{2^n} + 1$ のような他の特別な形にも、それぞれ独自の高速判定法がある）。執筆時点での記録は 2024 年に発見された

$2^{136279841}-1$ であり、41 百万桁を超える数である。

マンデルブロ集合

-2 を任意の定数 c に置き換え、複素数も許すことにする：$z \mapsto z^2 + c$。0 の軌道が有界にとどまるような c 全体の集合が**マンデルブロ集合**（Mandelbrot set）である。本問の写像は $c = -2$ であり、これはマンデルブロ集合の最も左の点である。そして軌道が有界にとどまる初期値全体の集合（その**ジュリア集合**（Julia set））は、小問 (ii) で見つけた区間 $[-2, 2]$ にちょうど一致する。他のほとんどすべての c に対しては、この集合はフラクタル（fractal）になる。

思考のスキル

> **変数を変換して写像を単純にする**
>
> 反復が複雑に見えるときは、それを 2 倍や定数の加算のような単純なものに変える置き換えを探せ。
>
> ここでは $x = t + 1/t$ や $x = 2\cos\theta$ によって、$x \mapsto x^2 - 2$ が 2 倍に変わった。力学系（dynamical systems）の理論ではこれを**共役**（conjugacy）と呼び、それを見つけることが系を完全に理解する鍵となることが多い。

次の一歩

1. **区間の内側。** $a = 2\cos\theta$ ならば $x_n = 2\cos(2^{n-1}\theta)$ であることを証明せよ。$x_3 = a$ であるが $x_2 \neq a$ となる a の値をすべて求めよ（**ヒント**：2π を法として $4\theta \equiv \pm\theta$ となればよい）。

2. **手計算によるルーカス–レーマー判定法。** この判定法を用いて、$M_5 = 31$ は素数であり、$M_{11} = 2047$ は素数でないことを示せ（M_{11} では 9 ステップが必要であり、電卓があると便利である。2047 を素因数分解して結論を確かめよ）。

3. **具体例。** $A = \frac{3}{2}$ とする。a と t を求め、公式 $y_1 = \sqrt{x_2^2 - 4}/x_2$ を数値的に確かめよ。

4. **次々に打ち消し合う和。** やや難 $a = t + 1/t$、$t > 1$ のとき、

$$\frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_n} = \frac{t - t^{-1}}{t^{2^n} - t^{-2^n}}.$$

であることを示せ。恒等式 $\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z^2-1}=\dfrac{z}{z^2-1}$ を $z=t^{2^n}$ として用いて、

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_2x_3}+\cdots=\frac{1}{t}.$$

を導け。$a=3$ のときにこれを数値的に確かめよ。

さらに学ぶために

- **Ian Stewart, *Does God Play Dice?***（Penguin）。ロジスティック写像を含む、カオスについての古典的な一般向け解説書。
- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。大学学部向けの定番の入門書。第10章は本問のような1次元写像を扱っている。
- **Marcus du Sautoy, *The Music of the Primes***（Fourth Estate）。メルセンヌ素数探索の物語を含む。

2.9 e に迫る分数

問題

STEP II 2021、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

導入

e をよく近似する分数はどうすれば見つかるだろうか。級数（series）$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots$ を途中で打ち切るという手もあるが、そうして得られる分数は、分母の大きさの割にはそれほど良い近似ではない。この問題は、はるかに巧妙なことを行う。積分の族を作り、そのどれもが「整数 + 整数 × e」の形をした小さな数になるようにするのである。$a+be$ が非常に小さければ e は $-a/b$ にきわめて近く、こうして積分から優れた分数の列 $\frac{19}{7}, \frac{193}{71}, \frac{2721}{1001}, \ldots$が得られる。

小さいと同時に「対象とする数の整数係数の結合」の形をした積分を使うという同じ手法は、数学における最も深い無理性（irrationality）の証明のいくつかの背後にある。e が超越数であることのエルミート（Hermite）による証明や、$\zeta(3)$ が無理数であることのアペリー（Apéry）による証明もその例である。

取りかかる前に

区間 $[0,1]$ 上の被積分関数（integrand）$\frac{t^n(1-t)^n}{n!}e^t$ を見てみよう。

考えてみよう $[0,1]$ 上での $t(1-t)$ の最大値はいくつか。そこから、n が大きくなるときの T_n の大きさについて何がわかるか。

$t(1-t)$ の最大値は $t=\frac{1}{2}$ における $\frac{1}{4}$ である。したがって被積分関数は高々 $\frac{e}{4^n n!}$ であり、これは驚くほど速く小さくなる（図 2.9.1）。この小ささが話の半分である。残りの半分、すなわち T_n が $a_n + b_n e$ という特別な形をもつことは、部分積分（integration

by parts）から得られる。

順を追って解く

段階 1　2回微分する

$p(t) = t^n(1-t)^n$ とおく。積の微分法則（product rule）により

$$p'(t) = nt^{n-1}(1-t)^n - nt^n(1-t)^{n-1} = nt^{n-1}(1-t)^{n-1}(1-2t).$$

> **考えてみよう**　もう一度微分せよ。2つの項が現れるので、共通因数 $nt^{n-2}(1-t)^{n-2}$ をくくり出す。求められている形に合わせるには、$(1-2t)^2$ を $t(1-t)$ を用いて書き直す必要がある。どうすればよいか。

$n\,[t(1-t)]^{n-1}(1-2t)$ を積の微分法則で微分する（$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[t(1-t)] = 1-2t$ に注意）：

$$\begin{aligned} p''(t) &= n(n-1)[t(1-t)]^{n-2}(1-2t)^2 - 2n[t(1-t)]^{n-1} \\ &= nt^{n-2}(1-t)^{n-2}\Big[(n-1)(1-2t)^2 - 2t(1-t)\Big]. \end{aligned}$$

ここで $(1-2t)^2 = 1-4t+4t^2 = 1-4t(1-t)$ であるから、括弧の中は $(n-1) - 4(n-1)t(1-t) - 2t(1-t) = (n-1) - 2(2n-1)t(1-t)$ となる。 ■

段階 2　2回部分積分する

> **考えてみよう**　$p(t)$ は $t=0$ でも $t=1$ でも 0 である。$n \geq 2$ のとき、$p'(t)$ はどうか。$p(t)e^t$ を部分積分するとき、なぜそれが重要なのか。

$n \geq 2$ のとき、$p'(t)$ は因数 $t^{n-1}(1-t)^{n-1}$ を含むので、やはり両端で 0 になる。2回部分積分すると、境界項はすべて 0 である：

$$\int_0^1 p\,e^t\,\mathrm{d}t = \Big[p\,e^t\Big]_0^1 - \int_0^1 p'\,e^t\,\mathrm{d}t = -\Big[p'\,e^t\Big]_0^1 + \int_0^1 p''\,e^t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 p''\,e^t\,\mathrm{d}t.$$

段階 1 より $p''(t) = n(n-1)\,t^{n-2}(1-t)^{n-2} - 2n(2n-1)\,t^{n-1}(1-t)^{n-1}$ である。これを $n!$ で割ると

$$\frac{p''(t)}{n!} = \frac{t^{n-2}(1-t)^{n-2}}{(n-2)!} - 2(2n-1)\frac{t^{n-1}(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

e^t を掛けて積分すると、$T_n = T_{n-2} - 2(2n-1)T_{n-1}$ が得られる。 ■

段階 3　整数の構造

$T_0 = \int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t = e-1$ である。$T_1 = \int_0^1 (t-t^2)e^t\,\mathrm{d}t$ については、部分積分により $\int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t = 1$、$\int_0^1 t^2e^t\,\mathrm{d}t = e-2$ となるので、$T_1 = 1-(e-2) = 3-e$ である。

> **考えてみよう** $T_0 = -1+1\cdot e$、$T_1 = 3+(-1)\cdot e$ である。なぜすべての T_n が、整数 a_n, b_n を用いて $a_n + b_n e$ の形になるのか。

累積帰納法（strong induction）による。$T_{n-2} = a_{n-2}+b_{n-2}e$、$T_{n-1} = a_{n-1}+b_{n-1}e$ で係数が整数ならば

$$T_n = (a_{n-2} - 2(2n-1)a_{n-1}) + (b_{n-2} - 2(2n-1)b_{n-1})e,$$

であり、新しい係数もまた整数である。 ■

段階 4 小さいからこそ情報をもつ

$0 < t < 1$ のとき被積分関数は正であり、$t^n(1-t)^n \le 1$ かつ $e^t < e$ である。したがって

$$0 < T_n < \int_0^1 \frac{e}{n!}\,\mathrm{d}t = \frac{e}{n!}.$$

> **手を止めて、やってみよう** $0 < a_n + b_n e < \dfrac{e}{n!}$ を $|b_n|$ で割れ。これは e と $-a_n/b_n$ の距離について何を語っているか。

$|b_n|$ は正の整数であるから 1 以上であり、$|b_n|$ で割ると

$$\left| e - \left(\frac{-a_n}{b_n}\right)\right| = \frac{|a_n + b_n e|}{|b_n|} < \frac{e}{n!\,|b_n|} \le \frac{e}{n!}.$$

右辺は 0 に収束するので、$-a_n/b_n \to e$ である。 ■

漸化式（recurrence）から計算した最初のいくつかを示す：

n	2	3	4	5	6
$-a_n/b_n$	$\frac{19}{7}$	$\frac{193}{71}$	$\frac{2721}{1001}$	$\frac{49171}{18089}$	$\frac{1084483}{398959}$
誤差	4×10^{-3}	3×10^{-5}	1×10^{-7}	3×10^{-10}	5×10^{-13}

分数 $\frac{2721}{1001}$ は、分母がわずか 4 桁であるにもかかわらず、小数第 6 位まで正しい。

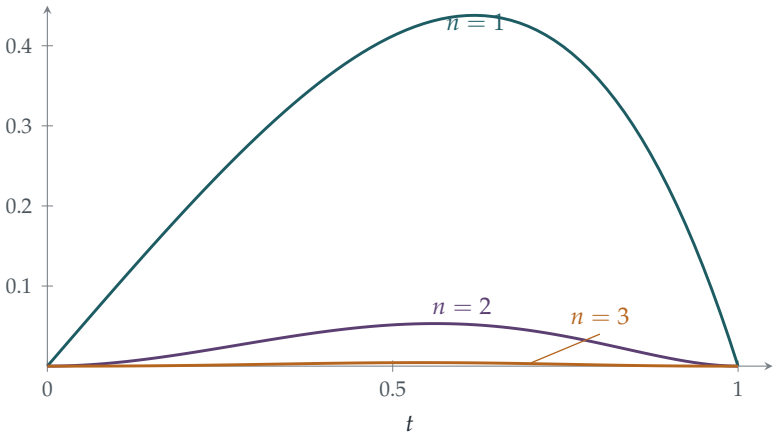


図 2.9.1　$n = 1, 2, 3$ に対する被積分関数 $\frac{t^n(1-t)^n}{n!}e^t$。いずれも $(0,1)$ 上で正なので、各 T_n は正である。しかも非常に速く小さくなり、$n = 3$ では曲線がほとんど見えないほどである。正であってしかもごく小さいこと、それこそがこの議論に必要なことである。

振り返り

- **漸化式を生み出す装置としての部分積分。** 多項式とその導関数が両端で 0 になったので、部分積分によって境界項のないすっきりした漸化式が得られた。
- **構造と大きさを組み合わせる。** 漸化式によって T_n が $a_n + b_n e$ の形であることがわかり、評価によってそれが小さいことがわかった。どちらか一方だけでは、e の近似について何も言えない。
- **必要のないものは計算しない。** 問題は a_n と b_n を求めなくてよいと述べており、実際に議論の中でそれらの値は一度も必要にならなかった。必要だったのは、それらが整数であるということだけである。

背後にある数学

e が無理数であることの別証明

この問題は、ある有名な定理のすぐ手前で止まっている。p, q を正の整数として $e = p/q$ と仮定する。すると

$$q\,T_n = q a_n + b_n p$$

は**整数**である。ところが $0 < q\,T_n < \dfrac{qe}{n!}$ であり、n が大きければ右辺は 1 より小さい。

すると qT_n は 0 と 1 の間に厳密に挟まれた整数ということになり、これは不可能である。よって e は無理数（irrational number）である。これは Section 1.4 で見た「整数を 0 と 1 の間に閉じ込める」という考え方を、級数の代わりに積分で実現したものである。$t^n(1-t)^n$ のような多項式を含む、まさにこの種の積分を用いて、シャルル・エルミートは 1873 年に e が**超越数**（transcendental number）であること、すなわち整数係数のどんな多項式の根にもならないことを証明した。

連分数

表の分数は単に良い近似であるだけではない。それらは**最良**の近似の一部なのである。オイラー（Euler）が発見した e の連分数（continued fraction）展開には、美しい規則性がある：

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots],$$

そしてその近似分数（convergent）は $2, 3, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{7}, \frac{87}{32}, \frac{106}{39}, \frac{193}{71}, \ldots, \frac{2721}{1001}, \ldots$ である。私たちの $-a_n/b_n$ は、ちょうど 3 つおきの近似分数になっている。これより小さい分母をもつ分数で、e にこれ以上近いものは存在しない。オイラーが見出したこの規則性そのものが、e が無理数であることの最初の証明であった。有限の連分数をもつのは有理数だけだからである。

アペリーの奇跡

1978 年、ロジェ・アペリー（Roger Apéry）は、オイラー以来未解決であった問題（Section 2.3 を参照）、すなわち $\zeta(3) = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots$ が無理数であることの証明を発表した。その証明はあまりに意外なものであったため、聴衆は当初それを信じなかった。1 年後、Frits Beukers は次の形の積分を用いた短い証明を見つけた：

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{-\ln(xy)}{1-xy}\, P_n(x) P_n(y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

ここで P_n は $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^n(1-x)^n\right)$ から作られる。これらの積分は小さく、正であり、「整数 + 整数 $\times\, \zeta(3)$」を制御された分母で割った形をしている。まさにこの問題と同じ戦略である。$\zeta(5)$ や $e + \pi$ が無理数かどうかは、いまだにわかっていない。

思考のスキル

小さいがゼロではない

ある量がいくつかの数の整数係数の結合であることがわかっており、しかも小さいがゼロではないこともわかっているならば、その量は情報をもっている。近似についての情報であり、ときには無理性についての情報でもある。

この型は「構造は代数から、大きさは解析から」とまとめられる。これは数論の至るところに現れ、解析と代数が最も実り豊かに出会う場面の一つである。

次の一歩

1. **漸化式を回してみる。** $n = 2, 3, 4$ について漸化式から a_n と b_n を計算し、表の分数を確かめよ。b_n の符号が交互に変わることを示せ。

2. **より鋭い評価。** $0 < T_n < \dfrac{e}{4^n\, n!}$ を示せ。これによって $-a_n/b_n$ の誤差評価はどれだけ改善されるか。

3. **無理性の証明。** 上の囲みの議論を丁寧に書き下せ。$T_n > 0$ であることは、正確にはどこで使われているか。

4. **別の重み。** やや難 e^t を e^{2t} に置き換えて（すなわち $U_n = \int_0^1 \frac{t^n(1-t)^n}{n!} e^{2t}\,\mathrm{d}t$ として）問題をやり直せ。U_n の漸化式を求め、U_n が 1 と e^2 の有理数係数の結合であることを示し、この議論で e^2 が無理数であることがなお証明できるかどうかを調べよ。（Section 1.4 と比較せよ。）

さらに学ぶために

- **Ivan Niven, *Irrational Numbers*** (Mathematical Association of America)。無理性の証明についての古典的な小著で、エルミートの方法も扱っている。
- **Alfred van der Poorten, 「A proof that Euler missed」**, *The Mathematical Intelligencer* 1 (1979)。アペリーの証明とその受け止められ方を生き生きと描いた記事。
- **Julian Havil, *The Irrationals*** (Princeton University Press)。数学に関心のある一般読者向けに書かれた無理数の歴史。

学んだこと

私たちはゼノン（Zeno）から出発し、無限の過程について三つの問いを立てた。無限の過程が答えをもつとはどういう意味か、答えをもつことをどう証明するか、そしてどれほど速く答えに近づくか、である。九つの STEP の問題を経た今、どこまで来たかを振り返ろう。

1. 無限の過程が答えをもつとはどういう意味か

Section 2.1 では、そのための言葉を学んだ。数列（sequence）の長期的な振る舞いについての命題は、「ある点 m が存在して、すべての $n \geq m$ に対して…」という形をしている。これを証明するとは m を具体的に示すことであり、否定するとは、どのような m を提案してもうまくいかないことを示すことである。極限（limit）の定義では、先頭にもう一つ量化子（quantifier）「任意の許容誤差 $\varepsilon > 0$ に対して」が加わる。これによってゼノンの逆理（paradox）は解消する。$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ は、どんなに小さな許容誤差を与えても、ある点から先では 1 との差がその範囲に収まる。「和は 1 である」とは、まさにそれだけのことを意味している。

この言葉は、無意味な議論を防ぐ役割も果たす。「無限に続く式を x とおく」という手早い議論は、Section 2.2 で黄金比（golden ratio）について正しい答えを与えたが、それは極限が存在することを別に証明できたからにすぎない。同じ議論を $1 - 1 + 1 - \cdots$ に当てはめると、何の意味ももたない答えが出てくる。

2. 極限を知らずに収束をどう証明するか

この章のほとんどの節では、少数の道具のいずれかを用いた。

- **単調かつ有界。** 上に有界（bounded）な単調（monotone）増加数列は必ず収束（converge）する（Section 2.2、Section 2.6）。正の項からなる級数の部分和（partial sums）についても同様である（Section 2.3）。大学では、これが実は実数そのものについての命題であることを学ぶ。それは**完備性**（completeness）とよばれる性質である。
- **比較。** 正の項からなる級数は、収束する級数より小さければ収束し、発散する級数より大きければ発散する。項をいくつかのまとまりに分けると比較が容易になり、調和級数（harmonic series）は発散するのに対し、それを間引いた Kempner の級

数は収束することがわかった（Section 2.3）。

- **はさみうち。**求めたい量を、同じ極限をもつ二つのより簡単な量ではさむ。このようにして $\sum 1/m^2 = \pi^2/6$ を証明し（Section 2.4）、AGM の積分を厳密に評価した（Section 2.6）。
- **有限段階での厳密な式。**Section 2.5 と Section 2.8 では、打ち消し合い（telescoping）によって n ステップ後の厳密な式を求め、最後の最後になって初めて $n \to \infty$ とした。

極限が存在することがわかれば、黄金比についての $L = (2L+1)/(L+1)$ のように、漸化式（recurrence）で「$n \to \infty$ とする」ことによって極限を求められる場合が多い。ただし順序が重要である。まず存在、次に値である。

3. どれほど速いか

ここでは、この章はいくつかの驚きを用意していた。ヴィエト（Viète）の無限積（Section 2.5）は、因子一つごとに約 0.6 桁ずつ精度が上がる。Section 2.7 の $\sqrt{2}$ を求める単純な方法は、1 ステップごとに約 0.8 桁ずつ精度が上がる。ニュートン（Newton）法と AGM（Section 2.6）は、1 ステップごとに正しい桁数を 2 倍にする。ニュートン法を 10 ステップ行えば、$\sqrt{2}$ の 700 桁以上が得られる。違いは誤差の漸化式の形にある。「新しい誤差 $\approx$ 定数 $\times$ 古い誤差」（一次収束、linear）と「新しい誤差 $\approx$ 定数 $\times$（古い誤差）^{2}」（二次収束、quadratic）の違いである。そして Section 2.8 では反対の極端な例を見た。2 よりわずかに大きい値から始めると、写像 $x \mapsto x^2 - 2$ は数を指数関数よりも速く遠ざけ、一方 $[-2, 2]$ の内部では微小な誤差を増幅し、ついには予測可能性がすべて失われる。

速さは理論にとっても重要である。Section 2.9 の積分は e に非常に速く近づく分数を生み出し、それによって e が無理数（irrational）であることが証明される。どんな分数 p/q も、他の分数によってそれほど速く近づかれることはありえないのである。

4. 解析学の道具箱

手法	用いた場面
量化子を満たす値を示す・量化子を否定する	「いずれは」（2.1）
有界な単調数列	黄金比（2.2）、AGM（2.6）
比較と凝集（condensation）	調和級数と Kempner の級数（2.3）
はさみうち	$\pi^2/6$（2.4）、AGM の積分（2.6）
解の対称式（symmetric functions）	$\cot^2$ の値の和（2.4）
打ち消し合う和と積	ヴィエト（2.5）、x^2-2（2.8）
不変量（invariants）	AGM の積分（2.6）
誤差の漸化式	一次収束と二次収束（2.7）
写像を簡単にする変数変換	$a=t+1/t$、$a=2\cos\theta$（2.8）
小さいが 0 でない整数の組合せ	e の近似（2.9）

これらの道具の多くに「使ってよい定理」が添えられていたことに注意しよう。STEP では、単調収束定理（monotone convergence theorem）が与えられたり、極限が存在すると仮定するよう指示されたりすることが多い。大学では、それらの定理を実数の公理（axioms）から証明することになり、議論がひそかに極限の存在を仮定しているときには、自分でそれに気づくことが求められる。解答を読むときには、**正確にはどこで極限をとったのか、そしてそれは正当化されていたか**と問う習慣をつけるとよい。

この先へ

この章の考え方は、本書の残りの部分全体に通じている。

- 不動点（fixed point）とくもの巣図（cobweb diagram）は Section 8.7 で再び登場し、そこではカオス的な写像が厳密な解をもつことがわかる。
- 調和数（harmonic numbers）$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ は、確率では Section 9.11 に、力学では Section 11.12 に現れる。
- 確率から生じる、極限の中に π が現れるもう一つの例は Section 12.23 にある。
- 極限に対する慎重な態度は第 3 章のテーマであり、その章は Section 3.1、すなわち正しく見えるが実は誤っている議論から始まる。

大学に入る前にさらに先へ進みたいなら

- **Lara Alcock, *How to Think About Analysis***：大学 1 年生の解析学（analysis）がどのようなものか、そしてどう向き合えばよいかを説く。

- **David Bressoud, *A Radical Approach to Real Analysis***：数学者に慎重さを強いた難問から出発し、歴史を通して解析学を教える。
- **Tom Körner, *Calculus for the Ambitious***（Cambridge University Press）：ケンブリッジの解析学者が、まさに本書の読者のような人のために書いた本。
- **Julian Havil, *Gamma*** と **William Dunham, *Euler: The Master of Us All***：この章に登場した多くの級数の背後にある物語。

ゼノンは、無限があるために運動は不可能だと考えた。数学者たちが彼に答えるまでには二千年を要し、その答えは、これまでに見いだされた中で最も強力な考え方の一つとなった。終わることのない過程について、厳密な命題を述べる方法である。あなたは今、その言葉の最初のいくつかの単語を知っている。それを流暢に話せるようになる場所が、解析学なのである。

「次の一歩」の解答

これらは完全な解答ではなく、簡潔な答えとヒントである。結果と鍵となるステップを示してあるので、自分の答えを確かめるのに使ってほしい。答えを見る前に、各問題にしっかり取り組むこと。

2.1 「いずれは」とは何を意味するか

1. $(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \cdots$ の項はすべて非負であるから、$(1+x)^n \geq 1+nx > nx$ である。$y = 1+x$ とおくと、$n > K/(y-1)$ ならば $y^n > n(y-1) > K$ となる。次の項を用いると $y^n > \binom{n}{2}(y-1)^2$ であるから、$n > 1 + 2K/(y-1)^2$ ならば $y^n/n > \frac{1}{2}(n-1)(y-1)^2 > K$ となる。

2. $n \geq m_1$ で $s_n \leq t_n$ が成り立ち、$n \geq m_2$ で $t_n \leq s_n$ が成り立つならば、$n \geq \max(m_1, m_2)$ で $s_n = t_n$ である。

3. たとえば、偶数 n に対して $s_n = n + 0.6$、奇数 n に対して $s_n = n$ とし、奇数 n に対して $t_n = n + 0.6$、偶数 n に対して $t_n = n$ とすればよい。どちらも増加し、それぞれが他方を無限回上回る。

4. $n \geq 4$ のとき $2^n \leq n!$ である（帰納法（induction）による：$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \leq (n+1)\,n!$）。$n^{10} \leq 2^n$ については、2 から 58 までのすべての n で不等式は成り立たず、$n \geq 59$ のすべてで成り立つ。よって最小の m は 59 である。

2.2 極限としての黄金比

1. 帰納法による：$u_1 = 1 = F_2/F_1$ であり、$u_n = F_{n+1}/F_n$ ならば $u_{n+1} = 1 + F_n/F_{n+1} = F_{n+2}/F_{n+1}$ である。

2. $\varphi - 1 = 1/\varphi$ であるから、$u_{n+1} - \varphi = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\varphi} = -\frac{u_n - \varphi}{\varphi u_n}$ である。$u_n \geq 1$ より $|u_{n+1} - \varphi| \leq |u_n - \varphi|/\varphi$ であり、さらに $|u_1 - \varphi| < 1$ であるから、$|u_n - \varphi| \leq \varphi^{-(n-1)}$ となる。

3. $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ は $\psi^2 = \psi + 1$ を満たすので、$1 + 1/\psi = \psi$ である。逆向きにたどると $u_{n-1} = \frac{1}{u_n - 1}$ であり、0 から始めると $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, -\frac{5}{8}, \ldots$ が得られる。すなわち、ある $k \geq 1$ に対して $u_1 = -F_{k-1}/F_k$ である。これらの値は ψ に近づく。

4. 不動点（fixed point）は $v = 1 + \frac{1}{1+v}$、すなわち $v^2 = 2$ を満たす。誤差には毎回

$-\frac{1}{(1+v_n)(1+\sqrt{2})}$ が掛かり、その大きさは高々 $\frac{1}{2(1+\sqrt{2})}$ であるから、$v_n \to \sqrt{2}$ である。また、$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}$ である。

2.3 発散する級数と、収束するその親戚

1. $\ln N + 0.5772 = 10$ より $N \approx 12\,400$ である。100 を超えるにはおよそ $e^{99.4} \approx 1.5 \times 10^{43}$ 項が必要である。

2. $k = 2$ のとき、ブロック n は高々 $2^n \cdot 4^{-n} = 2^{-n}$ であるから、和は高々 $\sum_{n \geq 0} 2^{-n} = 2$ である。$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$ を正確に足し、$r = 4$ 以降のブロックを $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2}$ で上から評価すると、約 1.86 が得られる（真の値は $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.645$ である）。

3. $1/(r \ln r)$ については、2^n から $2^{n+1} - 1$ までのブロックは少なくとも $\frac{2^n}{2^{n+1}(n+1)\ln 2} = \frac{1}{2(n+1)\ln 2}$ であり、これらの和は調和級数（harmonic series）と同様に振る舞うので発散（divergence）する。$1/(r(\ln r)^2)$ については、ブロックは高々 $\frac{1}{n^2(\ln 2)^2}$ であり、$\sum \frac{1}{n^2}$ は収束（convergence）する。

4. 使える数字は、最上位の桁が 7 通り、それ以外の各桁が 8 通りであるから、使える d 桁の数は高々 $7 \cdot 8^{d-1}$ 個であり、それぞれ 10^{d-1} 以上である。よって和は高々 $\sum_{d \geq 1} 7(0.8)^{d-1} = \frac{7}{1-0.8} = 35$ である。

2.4 $\pi^2/6$

1. 値 $\tan^2 = 1/\cot^2$ は係数を逆順にした多項式（reversed polynomial）$\sum_j (-1)^j \binom{2n+1}{2j+1} y^j$ の根であり、その根の和は $\binom{2n+1}{2n-1} = n(2n+1)$ である。さらに $\operatorname{cosec}^2 = 1 + \cot^2$ より $n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}$ が得られる。

2. 偶数番目の項の和は $\frac{1}{4}\sum \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{24}$ であるから、奇数番目の項の和は $\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$ である。

3. 根について $e_1 = \frac{n(2n-1)}{3}$、$e_2 = \binom{2n+1}{5} / \binom{2n+1}{1}$ であり、$\sum \cot^4 = e_1^2 - 2e_2 = \frac{n(2n-1)(4n^2+10n-9)}{45}$ が得られる。$\cot^4\theta < \theta^{-4} < (1 + \cot^2\theta)^2$ ではさみうち（squeezing）をして $n \to \infty$ とすると、$\frac{\pi^4}{90}$ が得られる。

4. 下からの評価により $\sum_{m \leq n} \frac{1}{m^2} > \frac{\pi^2 n(2n-1)}{3(2n+1)^2}$ であるから、誤差は $\frac{\pi^2(6n+1)}{6(2n+1)^2} < \frac{\pi^2}{4n}$ より小さい。これにより $n \geq 2468$ で精度 0.001 が保証される。実際には $n \approx 1000$ で十分である。

2.5 ヴィエトの無限積

1. $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ を繰り返し用いると、積は次々に打ち消し合う（telescopes）。$n \to \infty$ とし（このとき $2^n \sin(\alpha/2^n) \to \alpha$）、$\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ と $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta}$ を用いて $\alpha = \frac{\pi}{2}$ とおけばよい。

2. $\frac{\sin(\pi/3)}{\pi/3} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{24}\cdots$ であり、$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$、$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ である。

3. 8 個の因子で 3.14157 が得られ、四捨五入すると 3.1416 となる。n 個の因子を掛けた後の誤差はおよそ $\frac{\pi^3}{6\cdot 4^{n+1}}$ である。省かれた因子が $\cos\frac{\pi}{2^{j+1}} \approx 1 - \frac{\pi^2}{2\cdot 4^{j+1}}$ だからである。各因子は誤差をおよそ 4 で割り、$\log_{10} 4 \approx 0.6$ である。

4. $x = \ln a$ とすると、同じ議論により

$$\frac{a-1}{\ln a} = \prod_{j\geq 1} \frac{1 + a^{1/2^j}}{2},$$

が得られるので、$\frac{1}{\ln 3} = \frac{1}{2}\prod_{j\geq 1}\frac{1+3^{1/2^j}}{2}$ である。七つの因子で 0.906 が得られ、四捨五入すると 0.91 となる（真の値は 0.9102 である）。この場合、因子は $1 + \frac{\ln 3}{2^{j+1}}$ のように 1 に近づくので、新しい因子は誤差を半分にするだけである（約 0.3 桁）。一方、ヴィエト（Viète）の因子は $1 - \frac{\pi^2}{2\cdot 4^{j+1}}$ のように 1 に近づき、誤差を四分の一にする。

2.6 算術幾何平均

1. $x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n})^2 = \frac{(x_n - y_n)^2}{2(\sqrt{x_n}+\sqrt{y_n})^2}$ であり、$(\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n})^2 \geq 4y_n \geq 4y_0$ である。

2. $M(2,1) = 1.456791$ である。三回のステップの後には、x_3 と y_3 はすでに小数第七位まで一致する。

3. 反復の各ステップで値は λ 倍されるので、$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda M(x,y)$ である。積分において $x = \lambda u$ と置換すると $\mathrm{I}(\lambda p, \lambda q) = \lambda^{-1}\mathrm{I}(p,q)$ が得られる。$\mathrm{I} = \frac{\pi}{2M}$ の両辺はともに λ^{-1} 倍される。

4. $M(1, \cos 30^\circ) \approx 0.9318$ であるから、周期（period）は 1.073 倍に長くなる。すなわち約 7.32% 長くなる。

2.7 6 桁か、600 桁か

1. $(p^2+2q^2)^2 - 2(2pq)^2 = (p^2-2q^2)^2 = 1$ である。また、$577^2 - 2\times 408^2 = 332\,929 - 332\,928 = 1$ である。

2. $y_{n+1} = \frac{2y_n^3+2}{3y_n^2}$ であり、$y_{n+1} - \alpha = \frac{2y^3-3\alpha y^2+\alpha^3}{3y^2} = \frac{(y-\alpha)^2(2y+\alpha)}{3y^2}$ である。$y > \alpha$ ならば $\frac{2y+\alpha}{3y^2} < \frac{3y}{3y^2} = \frac{1}{y} < \frac{1}{\alpha}$ である。

3. $y - \frac{1/y-a}{-1/y^2} = y + y - ay^2 = y(2-ay)$ であり、$1 - ay(2-ay) = (1-ay)^2$ である。

4. $y - \frac{y^{1/3}}{\frac{1}{3}y^{-2/3}} = y - 3y = -2y$ である。誤差の公式が成り立つには、根の近くで f' が零でなく、f'' が有界であることが必要である。ここでは f' は 0 で無限大となる。

2.8 2 乗して 2 を引く

1. $(2\cos u)^2 - 2 = 2\cos 2u$ であるから、帰納法により $x_n = 2\cos(2^{n-1}\theta)$ である。$x_3 = a$ となるには $4\theta \equiv \pm\theta$、すなわち 3θ または $5\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$ が必要である。$x_2 = a$ となる場合（不動点 $a = 2$ と $a = -1$）は除外するので、$\theta = \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$ が残り、$a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ または $a = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ となる。これらは 2-サイクルをなす二点である。

2. M_5 に対しては、数列は 4、14、$194 \equiv 8$、$62 \equiv 0$ となり、素数（prime）である。M_{11} に対しては 4、14、194、788、701、119、1877、240、282、$1736 \neq 0$ となり、合成数（composite）である。実際、$2047 = 23 \times 89$ である。

3. $A = t - \frac{1}{t} = \frac{3}{2}$ より $t = 2$、$a = \frac{5}{2}$ である。このとき $x_2 = \frac{17}{4}$、$y_1 = \frac{Ax_1}{x_2} = \frac{15}{17}$ であり、$\frac{\sqrt{x_2^2-4}}{x_2} = \frac{15/4}{17/4} = \frac{15}{17}$ である。

4. $x_k = t^{2^{k-1}} + t^{-2^{k-1}}$ であり、$x_1 \cdots x_n$ に $t - t^{-1}$ を掛けると次々に打ち消し合って $t^{2^n} - t^{-2^n}$ となる。和は $(t-t^{-1})\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{t^{2^n}-1} - \frac{1}{t^{2^{n+1}}-1}\right) = \frac{t-t^{-1}}{t^2-1} = \frac{1}{t}$ となる。$a = 3$ のとき $t = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$、$\frac{1}{t} \approx 0.3820$ であり、級数 $\frac{1}{3} + \frac{1}{21} + \frac{1}{987} + \cdots$ もこれと一致する。

2.9 e に迫る分数

1. $T_0 = e - 1$、$T_1 = 3 - e$、$T_2 = 7e - 19$、$T_3 = 193 - 71e$、$T_4 = 1001e - 2721$ であり、これから $\frac{19}{7}$、$\frac{193}{71}$、$\frac{2721}{1001}$ が得られる。$b_n = b_{n-2} - 2(2n-1)b_{n-1}$ であり、（帰納的に）b_{n-1} は b_{n-2} と逆の符号をもつから、b_n は b_{n-2} と同じ符号をもつ。

2. $t(1-t) \leq \frac{1}{4}$ であるから $T_n < \frac{e}{4^n n!}$ である。$-a_n/b_n$ の誤差は $T_n/|b_n|$ であり、今度は 4^n 倍改善される。

3. $e = \frac{p}{q}$ ならば、$qT_n = qa_n + pb_n$ は整数である。$T_n > 0$ よりこれは**正の**整数であり、したがって 1 以上である。しかし n が大きいとき $qT_n < \frac{qe}{n!} < 1$ である。

4. 部分積分（integration by parts）を二回行うと（境界項は消える）、$U_n = \frac{1}{4}\left(U_{n-2} - 2(2n-1)U_{n-1}\right)$ となり、$U_0 = \frac{e^2-1}{2}$、$U_1 = \frac{1}{2}$ である。したがって整数 A_n、B_n を

用いて $2^{2n+1}U_n = A_n + B_n e^2$ と表され、一方で $0 < U_n < \frac{e^2}{4^n n!}$ である。$e^2 = \frac{p}{q}$ ならば、$q2^{2n+1}U_n$ は $\frac{2qe^2}{n!}$ より小さい正の整数となるが、n が大きいときこれは不可能である。よってこの議論により、e^2 が無理数（irrational）であることが確かに示される。

Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

全 13 章のうちの第 2 章。 本書全体、すべての章、すべての解答は、次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

beyondstep.keithmcnulty.org

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.