Beyond STEP

数学記号

数学の文章はわずかな記号に多くの意味を詰め込んでおり、大学の講義では、学校の教科書ではほとんど見かけない記号が数多く使われる。以下の表は本書で用いる記号を分野別にまとめ、それぞれの意味と読み方を示したものである。大半の記号は、大学で学び始めて数週間もすれば自然に使いこなせるようになる。それまでは、ここで調べればよい。

最初から知っておくとよい約束事が二つある。第一に、本書は STEP にならい、決まった意味をもつ一部の文字をイタリック体ではなく立体で印刷する。自然対数の底を表す e、$\sqrt{-1}$ を表す i、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ の d、そして $\mathrm{f}(x)$ や $\mathrm{P}(A)$ のような関数の名前である。イタリック体の文字は変数を表す。第二に、同じ記号が文脈によって異なる意味をもつことがある。その代表が $\equiv$ と $\sim$ であり、該当する箇所は表の中で指摘してある。

論理と証明

記号	意味	例または読み方
$P \Rightarrow Q$	P ならば Q（P implies Q）：P が真ならば Q も真である	$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$；「$P$ ならば Q」
$P \Leftarrow Q$	Q ならば P	「Q のとき P」
$P \iff Q$	P と Q は同値（if and only if）：互いに他を導く	$x^2 = 4 \iff x = \pm 2$；「iff」とも書く
$\forall$	すべての、任意の（for all）	$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$
$\exists$	存在する（there exists）	$\exists n \in \mathbb{Z}$ で $n^2 = 9$
$\neg P$	P でない、P の否定（negation）	「$\forall x,\ P(x)$」の否定は「$\exists x$ で $\neg P(x)$」
$:=$	左辺を右辺で定義する（is defined to equal）	$\mathrm{f}(x) := x^2 + 1$
■	証明の終わり。QED とも書く	ラテン語 *quod erat demonstrandum*（「これが示すべきことであった」）に由来する

集合と数の体系

記号	意味	例または読み方
$\{\dots\}$	要素（element）を列挙した集合（set）	$\{1,2,3\}$
$\{x:\dots\}$	……を満たすすべての x の集合。$\{x \mid \dots\}$ とも書く	$\{x : x^2 < 2\}$；「$x^2 < 2$ を満たす x の集合」
$x \in A$	x は A の要素である	$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$；「$\sqrt{2}$ は $\mathbb{R}$ に属する」
$x \notin A$	x は A の要素でない	$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
$A \subseteq B$	A は B の部分集合（subset）：A のすべての要素が B に属する	$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$
$A \cup B$	和集合（union）：A または B（あるいは両方）に属する要素	$\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$
$A \cap B$	共通部分（intersection）：A と B の両方に属する要素	$\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\}$
$A \setminus B$	A の要素のうち B に属さないもの	$\{1,2,3\} \setminus \{2\} = \{1,3\}$
A'	補集合（complement）：A に属さないものすべて	A^{c} や $\bar{A}$ とも書く
$\varnothing$	空集合（empty set）：要素をもたない集合	$\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 0\} = \varnothing$
$\lvert A \rvert$	有限集合 A の要素の個数	$\lvert\{a,b,c\}\rvert = 3$
$A \times B$	$a \in A, b \in B$ である組 (a,b) 全体の集合	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ は平面であり、$\mathbb{R}^2$ とも書く
$\mathbb{N}$	自然数（natural numbers）$1,2,3,\dots$	0 を含める著者もいる
$\mathbb{Z}$	整数（integers）$\dots,-2,-1,0,1,2,\dots$	ドイツ語の *Zahlen*（「数」）に由来する
$\mathbb{Q}$	有理数（rational numbers）、すなわち分数	*quotient*（商）に由来する
$\mathbb{R}$	実数（real numbers）	
$\mathbb{C}$	複素数（complex numbers）	
$\mathbb{H}$	四元数（quaternions）	ハミルトン（Hamilton）にちなむ（Section 6.7）
$\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$	$a,b \in \mathbb{Z}$ である数 $a + b\mathrm{i}$	ガウス整数（Gaussian integers、Section 1.6）
$[a,b]$	閉区間（closed interval）：$a \le x \le b$	端点を含む
(a,b)	開区間（open interval）：$a < x < b$	端点を含まない。組や点を表すこともある

数、整除性、近似

記号	意味	例または読み方
$a \mid b$	a は b を割り切る（divides）：b は a の整数倍である	$3 \mid 12$；「3 は 12 を割り切る」
$a \nmid b$	a は b を割り切らない	$5 \nmid 12$
$a \equiv b \pmod{n}$	a と b を n で割った余りが等しい	$17 \equiv 2 \pmod{5}$；「17 は 5 を法として 2 と合同（congruent）である」
$\equiv$	（法を伴わない場合）恒等的に等しい（identically equal）：すべての値に対して成り立つ	$(x+1)^2 \equiv x^2 + 2x + 1$
$\lfloor x \rfloor$	床関数（floor）：$\leq x$ である最大の整数	$\lfloor 3.7 \rfloor = 3, \lfloor -3.7 \rfloor = -4$
$\lceil x \rceil$	天井関数（ceiling）：$\geq x$ である最小の整数	$\lceil 3.2 \rceil = 4$
$n!$	n の階乗（factorial）$1 \times 2 \times \cdots \times n$	約束により $0! = 1$
$\binom{n}{r}$	二項係数（binomial coefficient）$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$	英語では「n choose r」と読む。${}^{n}\mathrm{C}_{r}$ とも書く
$\approx$	ほぼ等しい	$\pi \approx 3.1416$
$\sim$	漸近的に等しい（asymptotic）：比が 1 に近づく	$n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n$（ただし「確率と統計」も参照）
$\propto$	比例する（proportional）	$v \propto 1/d$
$\pm, \mp$	プラスまたはマイナス；マイナスまたはプラス	$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$
$0.\overline{01}$	循環小数（recurring decimal）の繰り返す数字	$0.\overline{01} = 0.010101\ldots$

関数

記号	意味	例または読み方
$f : A \to B$	f は集合 A から集合 B への関数（function）である	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dots$	x を……に移す	$x \mapsto x^2 - 2$；「x を $x^2 - 2$ に写す」
$f \circ g$	合成（composition）：g を施してから f を施す	$(f \circ g)(x) = f(g(x))$
f^{-1}	f の逆関数（inverse function）	$1/f$ ではない
f^n	本書では通常、f を n 回施したもの	$f^3(x) = f(f(f(x)))$；ただし $\sin^2 x$ は $(\sin x)^2$ を意味する
$\lvert x \rvert$	絶対値（modulus または absolute value）	$\lvert -3 \rvert = 3$
$\exp x$	指数関数（exponential function）e^x	
$\ln x$	e を底とする自然対数（natural logarithm）	大学ではしばしば $\log x$ と書く
sec, cosec, cot	$1/\cos$, $1/\sin$, $1/\tan$	
arcsin, arccos, arctan	逆三角関数（inverse trigonometric functions）	$\sin^{-1}$ などとも書く
sinh, cosh, tanh	双曲線関数（hyperbolic functions）：$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\tanh = \sinh / \cosh$	英語ではそれぞれ「shine」（または「sinch」）、「cosh」、「than」（または「tanch」）と読む
artanh	tanh の逆関数	$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$
max, min	最大値、最小値	$\max(3, 7) = 7$
$\Gamma(x)$	ガンマ関数（gamma function）	$\Gamma(n+1) = n!$（Section 4.4）

和、極限、微分積分

記号	意味	例または読み方
$\sum$	和（sum）	$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$
$\prod$	積（product）	$\prod_{k=1}^{n} k = n!$
∞	無限大（infinity）：数ではなく、「限りなく」を表す略記	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$
$x \to a$	x は a に近づく（tends to）	$n \to \infty$ のとき $\frac{1}{n} \to 0$
$\lim$	極限（limit）	$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
$\mathrm{f}'(x), \mathrm{f}''(x)$	1 階導関数と 2 階導関数（first and second derivatives）	「エフダッシュ」または「エフプライム」
$\dot{x}, \ddot{x}$	時間についての導関数	$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$；「$x$ ドット」「x ツードット」
$\frac{\partial f}{\partial x}$	偏導関数（partial derivative）：ほかの変数を固定して x について微分する	「ラウンド f ラウンド x」
$\int_a^b$	a から b までの定積分（definite integral）	
$\oint$	閉曲線を一周する積分	$\oint p\,\mathrm{d}q$（Section 10.4）
$\delta x, \Delta x$	x の微小な変化；x の変化	
ε, δ	解析学（analysis）で小さな正の数に慣習的に用いる名前	「任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して……」

複素数

記号	意味	例または読み方
i	-1 の平方根の一つ	工学では j と書く
$\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$	実部（real part）と虚部（imaginary part）	$z = 3 + 4\mathrm{i}$ ならば $\operatorname{Re} z = 3, \operatorname{Im} z = 4$
$z^*, \bar{z}$	共役複素数（complex conjugate）	$(3+4\mathrm{i})^* = 3 - 4\mathrm{i}$；どちらの記法も使われる
$\lvert z \rvert$	絶対値：0 からの距離	$\lvert 3 + 4\mathrm{i} \rvert = 5$
$\arg z$	偏角（argument）：正の実軸からの角	$\arg \mathrm{i} = \frac{\pi}{2}$
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$	$\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$
ω	慣習的に、1 の虚数立方根（complex cube root of unity）	$\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}, 1 + \omega + \omega^2 = 0$

ベクトルと行列

記号	意味	例または読み方
$\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AB}$	ベクトル（vector）；A から B へのベクトル	手書きでは $\underline{a}$ と書く
$\hat{\mathbf{n}}$	単位ベクトル（unit vector）：長さ 1 のベクトル	「n ハット」
$\lvert\mathbf{a}\rvert$	$\mathbf{a}$ の長さ（大きさ）	
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$	内積（scalar product、dot product）	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta$
$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$	外積（vector product、cross product）	$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の両方に垂直
$\mathbf{M}$	行列（matrix）	
$\mathbf{I}$	単位行列（identity matrix）	すべての $\mathbf{v}$ に対して $\mathbf{Iv} = \mathbf{v}$
$\mathbf{M}^{-1}$	逆行列（inverse matrix）	$\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{I}$
$\det\mathbf{M}$	$\mathbf{M}$ の行列式（determinant）	$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$
$\operatorname{tr}\mathbf{M}$	トレース（trace）：対角成分の和	$\operatorname{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$
λ	慣習的に、固有値（eigenvalue）	$\mathbf{Mv} = \lambda\mathbf{v}$

確率と統計

記号	意味	例または読み方
$\mathrm{P}(A)$	事象 A の確率（probability）	
$\mathrm{P}(A \mid B)$	B が与えられたときの A の確率	$\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A \cap B)/\mathrm{P}(B)$；「$B$ のもとでの A」
$\mathrm{E}(X)$	X の期待値（expectation）、すなわち平均	μ とも書く
$\mathrm{Var}(X)$	X の分散（variance）	$\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$；$\sigma^2$ とも書く
$\mathrm{Cov}(X, Y)$	共分散（covariance）	$\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$
$\mathrm{Corr}(X, Y)$	相関係数（correlation）	$\mathrm{Cov}(X, Y)/\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$；$\rho$ とも書く
$X \sim \ldots$	X は分布……に従う	$X \sim \mathrm{B}(16, \frac{1}{2})$；「$X$ は……に従う」
$\mathrm{B}(n, p)$	二項分布（binomial distribution）	n 回の試行における成功の回数
$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$	平均 μ、分散 σ^2 の正規分布（normal distribution）	
$\mathrm{f}(x), \mathrm{F}(x)$	確率密度関数（probability density function）；累積分布関数（cumulative distribution function）	$\mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(X \leq x)$
$\mathrm{G}(t)$	確率母関数（probability generating function）	$\mathrm{G}(t) = \mathrm{E}(t^X)$
$\mathrm{M}_X(\theta)$	積率母関数（moment generating function）	$\mathrm{M}_X(\theta) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta X})$
$\bar{x}$	標本の平均	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$
$\hat{\theta}$	未知の量 θ の推定値（estimate）	「シータハット」

ギリシャ文字

ギリシャ文字は数学のあらゆる場面で使われ、慣習的な意味をもつことも多い。下の表には小文字と大文字（ただし、アルファの A のようにローマ字と同じ形の大文字は、独立した記号として使われないので省いた）、名前、そして典型的な用法を示す。

文字	名前	典型的な用法
α	アルファ（alpha）	角；方程式の解
β	ベータ（beta）	角；方程式の解；ベータ関数
γ, Γ	ガンマ（gamma）	オイラー（Euler）の定数 $\gamma \approx 0.5772$；ガンマ関数 Γ；相対性理論では $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$
δ, Δ	デルタ（delta）	小さな量；変化を表す Δ、あるいは三角形や判別式（discriminant）を表す Δ
ε, ϵ	イプシロン（epsilon）	小さな正の量；力学では位相角
ζ	ゼータ（zeta）	$s > 1$ に対するリーマン（Riemann）のゼータ関数 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$（より高度な手法によって、$s = 1$ を除くほかの値にも拡張される）
η	エータ（eta）	効率；小さな量
θ, Θ	シータ（theta）	角；統計における未知の母数（parameter）
ι	イオタ（iota）	ほとんど使われない
κ	カッパ（kappa）	曲率（curvature）；定数
λ, Λ	ラムダ（lambda）	固有値；ポアソン（Poisson）分布の発生率などの母数；波長
μ	ミュー（mu）	平均；摩擦係数（coefficient of friction）
ν	ニュー（nu）	振動数
ξ, Ξ	クシー（xi）	変数や確率的な量
π, Π	パイ（pi）	$\pi \approx 3.14159$；積を表す Π
ρ	ロー（rho）	密度；相関係数；原点からの距離
σ, Σ	シグマ（sigma）	標準偏差（standard deviation）；和を表す Σ
τ	タウ（tau）	時間；トルク（torque）
υ, Υ	ウプシロン（upsilon）	ほとんど使われない
ϕ, φ, Φ	ファイ（phi）	角；黄金比（golden ratio）$\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$；ラピディティ（rapidity）；標準正規分布の分布関数を表す Φ
χ	カイ（chi）	χ^2（カイ二乗）分布
ψ, Ψ	プサイ（psi）	量子力学（quantum mechanics）における波動関数（wave function）
ω, Ω	オメガ（omega）	角速度（angular velocity）または角振動数（angular frequency）；1 の立方根；標本空間（sample space）を表す Ω

力学

記号	意味	例または読み方
g	重力加速度（acceleration due to gravity）	地表で約 $9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
G	万有引力定数（gravitational constant）	二つの質量の間にはたらく力は Gm_1m_2/r^2
e	反発係数（coefficient of restitution）。イタリック体で書き、e と混同しないこと	衝突の方向に沿って、遠ざかる速さ $= e\times$ 近づく速さ
ω	角速度；角振動数	単振動（simple harmonic motion）では $\ddot{x} = -\omega^2 x$
I	慣性モーメント（moment of inertia）	回転のエネルギー $\frac{1}{2}I\omega^2$（Section 11.7）
c	光の速さ	約 $3\times10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
$\hbar$	プランク（Planck）定数を 2π で割ったもの	「エイチバー」（Section 8.6）