はじめに

> 私はこの本で数学を教えることはできない。しかし、問題を
> 少しずつ削り取っていく読者自身の多大な努力が、やがて
> その内にいる数学者の姿を現すだろうと信じている。
>
> — Stephen Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*

本書は難問の本であり、その背後にあるものについての本である。全 136 節は、どれも過去の STEP の問題から始まる。しかし問題は入口にすぎない。良い STEP の問題のほとんどすべての背後には、大学で本格的に出会うことになる数学がある。本書のねらいは、読者をその扉の向こうへと連れ出し、そこに何があるかを見せることである。

STEP とは何か、そしてなぜ存在するのか

STEP（Sixth Term Examination Paper）は、学校の最終学年の夏に受験する一連の数学の試験である。1987 年にケンブリッジ大学（University of Cambridge）によって導入され、同大学で数学を学ぶべき者を決める助けとなることがその役目である。ケンブリッジ大学の数学科の合格内定（offer）のほとんどすべては STEP の成績を条件としており、長年のあいだに他の大学、とくにウォーリック大学（Warwick）も STEP を利用してきた。当初は多くの科目で STEP の試験があったが、2001 年までに数学だけが残った。その歴史の大半を通じて、試験は I、II、III の 3 種類であった。Paper I は 2019 年を最後に出題されなくなり、現在の受験者は Paper II と Paper III を受験する。この試験は長年ケンブリッジ・アセスメント（Cambridge Assessment）によって運営され、2024 年からは OCR が実施している。

STEP の問題用紙は、学校の試験とはまったく似ていない。短い必答問題が 10 問並ぶのではなく、長い問題が十数問あり、受験者はそのうち 6 問に取り組む。4 問で実質的な進展を得られる優秀な受験者は、非常に良い成績を収めるだろう。各小問の配点は示されておらず、練習したことのある作業を求められることもまれである。問われるのは、すでに知っている数学を新しい場面で使うことである。

STEP を誰よりもよく知っていた Stephen Siklos は、その目的を次のように述べている。第一に、STEP はハードルである。STEP での成功は、大学の数学の学位課程での成功を驚くほどよく予測することがわかっている（彼の報告によれば、STEP の順位とケンブリッジ大学 1 年次の試験の順位との相関（correlation）は 0.63 であり、この種

のものとしては非常に高い)。第二に、STEP は準備である。STEP が評価する考え方のスタイルは、学部の数学のスタイルそのものである。そして第三に、STEP は意欲の試験である。STEP の準備には本当の努力が必要であり、その努力を惜しむ学生は、厳しい数学の学位課程を楽しめそうにない。

Stephen Siklos

STEP について書こうとすれば、Stephen Siklos について書かずにはいられない。彼はケンブリッジの数学者であり、スティーヴン・ホーキング（Stephen Hawking）のもとで研究生として初期宇宙と重力波（gravitational waves）の数学に取り組んだのち、応用数学・理論物理学科（Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics）の講師となり、のちにジーザス・カレッジ（Jesus College）のシニア・チューター（Senior Tutor)、さらにプレジデント（President）を務めた。1987 年に STEP 数学が始まったときにその主任試験官（Senior Examiner）となり、2019 年 8 月に亡くなるまで 32 年間その職にあった。その間、彼は問題を起草し、「他人の問題を形に整え」（彼自身の言葉であり、長年にわたって興味と楽しみの源だったと語っていた作業である)、すべての試験問題を精査し、採点を監督した。また、学校からの支援を受けられない生徒に無料で手助けを提供する STEP イースター・スクール（STEP Easter School）と STEP サポート・プログラム（STEP Support Programme）の原動力でもあった。ある追悼記事は、ケンブリッジの数学の入学試験を、出身校にかかわらずあらゆる生徒にとって手の届くものにするために、彼が誰よりも多くのことをしたと述べている。

彼の著書 *Advanced Problems in Mathematics: Preparing for University*（大学への準備のための数学の発展問題）は Open Book Publishers から無料でオンライン公開されており、今なお STEP への最良の入門書である。強く勧めたい。その中で彼が書いた 2 つのことが、本書を形づくっている。1 つ目は、良い STEP の問題とは何かについての彼の見解である。それは、最初の小問でなじみのない考え方を示し、後の小問でそれをより難しい状況で再び使わせることで理解を示させる問題であり、あるいは自分で見つけなければならないパラメータに答えが依存する問題であり、あるいは特殊な場合から始めて一般的な結果で終わる問題である。まさにこうした問題こそがどこかへ通じていくのであり、本書の問題の大部分はこれらの種類に属する。2 つ目は、解答は「羽毛布団ではなく踏み切り板」であるべきだという彼の主張である。まず自分で格闘したことのない解答を読んでも、何も学べない。

私と STEP との出会い

私が初めて STEP に出会ったのは 1990 年代初めのことで、数学の先生が特別な挑戦としていくつかの過去問をくれたのである。私は合格内定のためではなく楽しみのためにそれらに取り組み、本番の試験を受けることはなかったが、それらの問題が並外れ

て難しかったことを覚えている。自分が学んだ何ものとも無関係に思え、1ページにわたって続き、取りかかることはできても解き終えることはめったにない問題ばかりであった。そして、ついに何かがうまくいったときに、学校の数学が見せてくれなかったものを見たという感覚も覚えている。

何年も経ってから、私は反対側からSTEPに戻ってきた。生徒のSTEP対策を手伝うようになったのである。彼らと何百もの問題に取り組むうちに、私は試験問題を違った目で見るようになった。すべての問題が珠玉というわけではない。率直に言えば、単なる長い持久力のテストのような問題もある。1ページにわたる注意深い式変形や、骨は折れるが型どおりの計算があり、最後に得られる洞察も喜びもあまりない。持久力は大切であり、大学の数学でも必要とされるが、そうした問題がSTEPを特別なものにしているわけではない。

STEPを特別なものにしているのは、1987年以来出題されてきた1,500を超える問題の中に、真に美しい問題が何百も散らばっていることである。私の言わんとすることを説明する最良の方法は、そのいくつかを見せることである。

いくつかの珠玉の問題

以下は本書で後に出会う問題のうちの7問であり、本書の範囲全体にわたるように選んだ。組合せ論（combinatorics）から2問、力学系（dynamical systems）から2問、力学（mechanics）から2問、確率（probability）から1問である。どの問題も思い描けるものから始まり、にわかには信じがたいかもしれないもので終わり、大学で本格的に研究される数学へと通じている。

混沌の中に隠れた秩序。紙の上に6個の点を描き、すべての2点の組を線で結ぶ。線は全部で15本になる。それぞれの線を金色か銀色に好きなように塗る。ここで、3辺がすべて同じ色である三角形ができないようにしてみよう。何度やっても失敗するはずである。点が5個なら可能である（五角形の辺を金色に、5本の対角線を銀色に塗ればよい）が、6個では、どれほど巧妙に塗っても不可能である。1989年のSTEP Iの問題はこれを証明させるもので、ヒントはただ1つ、1つの点から出る5本の線に着目せよ、というものである。そのうち3本は同じ色でなければならず、そこから先の証明は数行で済む。線の塗り方は$2^{15} = 32\,768$通りあるが、この論法は1つの場合も確かめることなく、それらすべてを一度に片付けてしまう。

この結果は、1928年にラムゼー（Frank Ramsey）が証明したラムゼーの定理（Ramsey's theorem）の最小の場合である。この定理は、完全な無秩序は不可能であること、すなわち十分大きな構造は、どれほど無計画に組み立てられていても、完全な秩序をもつ部分を含むことを述べている。「十分大きい」とはどのくらいか。すべて1色で結ばれた4個の点を保証するには18個の点が必要であり、これは1955年に証明された。5個

の点については、誰も答えを知らない。答えは 43 と 46 の間のどこかにあり、その上界が証明されたのは 2024 年になってのことである。エルデシュ（Paul Erdős）は冗談で、もし宇宙人がこの数を教えなければ地球を破壊すると脅してきたら、すべてのコンピュータと数学者を総動員して取り組むべきだが、6 個の場合の答えを求められたら、宇宙人を倒すことを試みるべきだと言った。ラムゼー理論には大学の組合せ論やグラフ理論（graph theory）の講義で出会うことになり、この STEP の証明の原動力である鳩の巣原理（pigeonhole principle）には、履修するほとんどすべての講義で出会うことになる（Section 9.2）。

奇妙なサイコロ。 普通のサイコロ 2 個では、和が 7 になるのが最も起こりやすく、2 と 12 が最も起こりにくい。場合の数はおなじみの $1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1$ 通りというパターンになる。正の整数を使って 2 個のサイコロに目をつける方法で、すべての和についてまったく同じ確率を与えるものは他にあるだろうか。ありそうにないが、ちょうど 1 つだけある。一方のサイコロに $1, 2, 2, 3, 3, 4$、もう一方に $1, 3, 4, 5, 6, 8$ をつけるものである。これは *Sicherman* **のサイコロ**（Sicherman dice）と呼ばれ、発見者の George Sicherman にちなんで名づけられ、1978 年にマーティン・ガードナー（Martin Gardner）によって有名になった。出た目の和だけで決まるゲームであれば、普通のサイコロとこれを取り替えても、誰にも気づかれることはない。

1993 年の問題は、この考え方に反対側から迫る。目のつけ方が変わった 2 個のサイコロについて、それぞれの和が何通りの出方で出るかを示した表を与え、目のつけ方を突き止めさせるのである。痕跡から犯罪を再構成する探偵のようなものである。続いてこの節では、この分野全体を簡単にしてしまう考え方を示す。それぞれのサイコロを多項式（polynomial）に変え、k の目の面ごとに項 x^k を対応させるのである。2 個のサイコロを振ることは、それらの多項式を掛け合わせることに対応する。$x^i \times x^j = x^{i+j}$ によって面の数が足されるからである。同じ和をもつ新しいサイコロを見つけることは、36 を 6×6 ではなく 4×9 と分けられるのと同じように、多項式を別の仕方で因数分解（factorise）することに帰着する。そして多項式は、整数と同様に、それ以上分解できない因子への分解がただ 1 通りしかないので、この因数分解によって Sicherman のサイコロが唯一の代替であることも証明される。数え上げの問題を多項式に符号化するこの技法、すなわち**母関数**（generating function）は組合せ論で最も強力な道具の 1 つであり、その背後にある一意分解（unique factorisation）は大学の最初の代数学の講義の中心的なテーマである（Section 9.6）。

公式をもつカオス。 0 と 1 の間の数から始め、それに 4 と、1 からその数を引いたものとを掛け、これを繰り返す。すなわち $u_{n+1} = 4u_n(1 - u_n)$ である。これは**ロジスティック写像**（logistic map）であり、増加するが食料の供給によって制限される個体数の粗いモデルである。規則はこれ以上ないほど単純であるにもかかわらず、生成される数は目に見えるパターンなしに跳ね回り、小数第 10 位まで一致する 2 つの初期値で

も、たいてい数十ステップのうちにまったく異なる数列を生む。生物学者のロバート・メイ（Robert May）は 1976 年に、「Simple mathematical models with very complicated dynamics」（非常に複雑な力学をもつ単純な数理モデル）という題の有名な論文でこれに注目を集め、以来これはカオス（chaos）の標準的な例となった。ふつうはコンピュータで調べられるものである。

2014 年の問題は意外なことを明らかにする。この数列には厳密な公式があるのである。初期値が $\sin^2\theta$ ならば $u_n = \sin^2(2^n\theta)$ であり、これは 2 倍角の公式（double angle formulae）と数学的帰納法（induction）だけで証明できる（この公式は 1940 年代にウラム（Stanisław Ulam）とフォン・ノイマン（John von Neumann）に知られていた）。厳密な公式があればカオスは飼いならされると思うかもしれない。ところが実際には、公式はカオスを完全に説明してしまう。各ステップで角は 2 倍になるので、角のどんなにわずかな不確かさも各ステップで 2 倍になり、初期値の誤差も平均してそれと同じ速さで増大する。50 ステップ後には、誤差はおよそ 1000 兆倍になっている。角を π に対する割合として 2 進法で書くと、このことが鮮やかに見える。写像の各ステップは 2 進法の各桁を 1 つ左へずらし、先頭の桁を捨てる。したがってこの数列は初期値の桁を 1 つずつ読み出していくのであり、100 ステップ先を予測するには初期値を 2 進法で 100 桁まで知る必要がある。同じ公式によって写像のすべての周期軌道（cycle）も求められ、あらゆる長さの周期軌道が存在し、それらが $[0,1]$ に稠密に詰まっていて、そのどれもが不安定（unstable）であることもわかる。これが力学系の分野であり、大学の微分方程式（differential equations）の講義で、さらに後にはカオスそのものの講義で出会うことになる（Section 8.7）。

周期 3 はカオスを意味する。関数 $f(x) = 7 - 2|x|$ をとり、ある数から始めて、得られた答えを繰り返し代入し直していく。1 から始めると $1, 5, -3, 1, 5, -3, \ldots$ となり、長さ 3 の周期軌道が得られる。2025 年の問題は、f、$f(f(x))$、$f(f(f(x)))$ のグラフを描き、それらが直線 $y = x$ と交わる点を見つけることによって、このような周期軌道を探させる。f を 1 回多く適用するごとにグラフのジグザグの数は 2 倍になり、この節ではその観察を、この関数が**あらゆる**長さ、すなわち 2、3、4、100、100 万の周期軌道をもつことの証明へと仕上げる。

これはこの関数に特有の性質ではない。1975 年に Tien-Yien Li と James Yorke は、長さ 3 の周期軌道をもつ**任意の**連続関数（continuous function）は他のあらゆる長さの周期軌道をもたなければならないことを証明した。その論文には「Period three implies chaos」（周期 3 はカオスを意味する）という心惹かれる題がつけられていた。証明に必要なのは中間値の定理（intermediate value theorem）だけである。これは、符号が変わる連続関数は 0 を横切らなければならないと論じるたびにすでに使っている定理である。それに加えて、関数がどの区間をどの区間の上に引き伸ばすかを示す巧妙な図が使われる。後になって、ウクライナの数学者シャルコフスキー（Oleksandr Sharkovsky）

が 1964 年により強い結果を証明していたことがわかった。彼は 3,5,7,9,... で始まる自然数の奇妙な順序づけを見いだし、ある長さの周期軌道が存在すれば、その順序でそれより後に来るあらゆる長さの周期軌道が存在することを示したのである。中間値の定理は、大学の解析学（analysis）の講義で最初に注意深く証明される結果の 1 つである。この問題は、その定理にどれほどのことができるかを示している（Section 8.8）。

自転車の空気入れはなぜ温まるのか。自転車のタイヤに空気を入れてから空気入れに触ってみると、温かくなっている。気体を圧縮すると温まるのであり、ディーゼルエンジンが火花なしに燃料に点火できるのもこのためである。しかし、なぜだろうか。2002 年の問題は、空気入れの端と押し込まれるピストンの間を行ったり来たりする空気分子 1 個を追跡することによって、この問いに答える。分子が前進してくるピストンで跳ね返るたびに、動いているラケットで打たれたテニスボールのように、少し速さを増す。この問題では、1 回の跳ね返りを正確に記述し、それを各衝突時のシリンダーの長さについての漸化式（recurrence）に直し、その漸化式を解くことが求められる。

解いてみると、隠れた法則が現れる。分子の速さとシリンダーの長さの積がほとんど変化しないのである。長さを半分にすれば速さは 2 倍になる。温度は分子のエネルギーを測るものなので、気体は温まる。系をゆっくりと変化させたときにほぼ一定に保たれるこのような量は**断熱不変量**（adiabatic invariant）と呼ばれ、もう少し手を加えれば、同じ論法から、大学の熱力学（thermodynamics）で出会う気体の断熱圧縮の法則が導かれる。この考え方の射程は長い。フェルミ（Enrico Fermi）は 1949 年に、宇宙線はまさにこの仕組みによって、つまり宇宙空間の動く磁場の間で繰り返し跳ね返ることによって、莫大なエネルギーを得ているのだと提唱した。また、エーレンフェスト（Paul Ehrenfest）は 1916 年に、断熱不変量こそ量子力学（quantum mechanics）が量子化すべき量であると論じた。自転車の空気入れについての問題が、統計物理学、天体物理学、そして量子論の始まりにまで触れているのである（Section 10.4）。

戻ってくるボール。ボールを前方へそっと投げると、着地するまで着実に遠ざかっていく。常識的には、いつでもそうなるはずである。ボールは常に前へ進んでいるのだから、どうして近づくことができようか。しかし、十分に急な角度、つまり水平から約 70.5° より大きい角度で投げると、奇妙なことが起こる。落下してくる飛行の一部の間、水平方向にはまだ遠ざかっているにもかかわらず、ボールは投げた人に**近づく**のである。高さが減る速さが、水平距離が増える速さを上回るのである。

2019 年の問題は、これを証明し、臨界角を正確に求めさせる。その方法は何度も繰り返し使うことになるものである。距離そのものではなくその 2 乗を微分する。こうすれば平方根を避けられる。その導関数（derivative）は時刻の 2 次式になり、距離が減少することがあるかという問いは、その 2 次式が実数解をもつかという問いに変わる。判別式（discriminant）が答えを与え、臨界角は正弦がちょうど $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ となる角である

ことがわかる。この教訓は放物運動をはるかに超えて広がる。「明らかに」増加する量の多くは実は増加しない。そして大学では、導関数の符号を調べることによって何かが単調（monotonic）であることを示すのは、不等式を証明するとき、数列が収束（converge）することを証明するとき、微分方程式の解が落ち着くことを示すときの重要な一歩である（Section 11.10）。

最後の乗客。ある列車は全席が予約で埋まっている。最初に乗り込む乗客は自分の切符を無視して、無作為に選んだ席に座る。その後の乗客はみな、自分の席が空いていればそこに座り、空いていなければ空いている席を無作為に選んで座る。最後に乗り込む乗客が自分の席が空いているのを見つける確率はいくらか。席が 100 あると、可能性は目もくらむほどに枝分かれする。席を奪われた乗客が別の乗客の席を奪い、その乗客がさらに別の乗客の席を奪い、という連鎖がどこまでも続きうる。直接計算するのは絶望的に見える。それでも答えは、席の数にかかわらず、ちょうど $\frac{1}{2}$ である。

2021 年の問題は段階を追ってこの答えにたどり着く。席が 2 つと 3 つの場合の答えを求め、最初の乗客がどこに座るかで条件付け（conditioning）をして漸化式を立て、数学的帰納法によって答えが常に $\frac{1}{2}$ であることを証明させるのである。これは申し分のない証明であるが、答えが**なぜ**これほど単純なのかという疑問が残る。そこでこの節では、それを説明する 1 行の論法を示す。乗客が無作為に選ばなければならないときには、いつでも最初の乗客の席と最後の乗客の席はまったく同じように扱われる。どちらかが埋まるまで、この過程は 2 つの席を区別できないのである。したがって最後に残る空席がどちらである確率も等しい。そして最後の空席はこの 2 つのうちのどちらかでなければならない。他のすべての席は、最後の乗客が乗り込む前に、その持ち主か、席を奪われた誰かによって埋められているからである。このように、何ページもの計算を 1 つの観察で置き換える対称性（symmetry）による論法は、大学の確率論の至るところに現れる（Section 12.5）。

これらを合わせると、このような問題は数学の学位課程 1 年次の主要な分野のすべてに触れている。数論（number theory）、解析学、微積分学（calculus）、複素数、代数学（algebra）、線形代数（linear algebra）、微分方程式、組合せ論、力学、確率、統計である。

本書の目的

この観察こそが本書の存在理由である。STEP 対策のほとんどは、まったく当然のことながら、試験に合格することを目指している。技法を学び、過去問を練習し、速さと持久力を身につける。本書もそれを目指しており、本書に取り組めば STEP の力は上がるだろう。しかし本書の真の目的は別のところにある。それは、**大学の数学を視野に入れて** STEP の準備をする手助けをすることである。つまり、それぞれの問題を乗り越えるべき障害ではなく誘いとして捉え、その誘いをたどれるところまでたどって

いくことである。

STEP で最も良い成績を収め、その後大学で大きく伸びる学生は、ほとんどの場合、数学をそれ自体のために愛する人たちである。彼らは難問が解ける瞬間を楽しむ。ある技法がうまくいくということだけでなく、なぜうまくいくのかを知りたがる。答えが $\frac{1}{2}$ や $\frac{1}{e}$ や $\pi^2/6$ のように怪しいほど単純になったとき、もっと深い何かが起きていると疑い、それを探しに行く。本書が育てようとしているのはこうした習慣である。それぞれの問題は、何らかの発見、すなわち問題そのものよりも大きな考え方、定理、思考法へと通じるものとして選ばれている。

思考法は定理と同じくらい重要である。大学の数学は、学校の数学ではめったに求められない仕方で考えることを求める。計算するのではなく証明すること、背理法（proof by contradiction）や無限降下法（infinite descent）で論じること、同じものを 2 通りに数えること、決して変化しない量を見つけること、反例（counterexample）を構成すること、何かを実際に見つけることなくその存在を示すこと、である。STEP の問題は、しばしばそうと明言することなく、まさにこうした習慣を鍛える。本書ではどの節でも、その核心にある思考のスキルに名前をつけているので、再び出会ったときにそれと気づくことができる。

本書の構成

本書は 13 の章からなる。章は、問題がどの STEP の試験から来たかではなく、問題が導く大学の数学の分野によって構成されている。

- **純粋数学**（第 1 章から第 9 章）：数論と証明、数列・級数と収束、関数・不等式と厳密さ、きちんとした微積分、複素数、代数と構造、線形代数と幾何学、微分方程式と力学系、そして数え上げと偶然である。最後の章では確率の試験に出た組合せ論的な問題も扱う。
- **力学**（第 10 章と第 11 章）：保存則・衝突と重力、そして振動・回転と動く座標系である。後者は意外な軌道を集めたもので締めくくられる。
- **確率と統計**（第 12 章と第 13 章）：条件付けについての明晰な思考から中心極限定理（central limit theorem）までの確率、そして統計と世界の中のランダムネスである。

各章は小論で始まる。その分野がなぜ重要か、大学でそこで何に出会うか、そして章全体を貫く 3 つの大きな問いである。各章の終わりにはまとめがあり、それらの問いに立ち返り、使われた方法の道具箱、他の章への手がかり、大学入学前に読むべきものの提案を示す。各章の最後には練習問題の簡単な解答がある。第 1 章の前には、本書に出てくる用語のうち学校ではなじみがないと思われるものの用語集と、本書で使

う数学記号の表がある。言葉や記号でつまずいたら、そこで調べてほしい。

すべての節は同じ形式に従う。最初は**問題**である。出題されたとおりの STEP の問題の、公式の出典へのリンクである。**導入**では、その問題が見た目以上に面白い理由を説明する。**取りかかる前に**では、最初の足がかりを与える。**順を追って解く**は段階を追った誘導つきの解答であり、途中に**自問してみよう**や**手を止めて考えよう**という見出しの囲みが挟まれる。これらは良い教師がその時点で問いかけるであろう問いであり、読み飛ばすためではなく答えるためにある。**振り返り**では鍵となる手順を拾い出す。**背後にある数学**は節の中心であり、問題の背後にある大学の数学、その歴史と意外な点を扱う。**思考のスキル**では、その問題が鍛える心の習慣に名前をつける。**次の一歩**では発展問題を示し、関連する STEP の問題が含まれることも多い。**さらに学ぶために**では、優秀な高校生や大学 1 年生が読みこなせる水準の本や記事を紹介する。

本書では 136 問を詳しく扱うが、STEP ではこれまでに 1,500 を超える問題が出題されている。ウェブサイトには、見本問題（specimen papers）から 2025 年までのそのすべてについて解答がある。それらは本書と同じ精神で書かれているが、はるかに短い。各解答では、問題を解く鍵となる考え方、小問ごとの完全な解答、答えについて行えるいくつかの検算、犯しやすい間違い、そしてその問題が触れる大学の数学への手がかりを示す。本書で詳しく扱っている問題については、解答にその旨が記され、リンクが張られている。

いくつかの節では、群（groups）、慣性モーメント（moments of inertia）、積率母関数（moment generating functions）など、現行の STEP の出題範囲（specification）に含まれない題材を用いている。それらは、問題があまりにも良いので外すに忍びないために収録したものであり、各節で必要な事項を示している。

学生のための本書の使い方

- **まず問題に取り組む。**節の冒頭のリンクから問題を開き、読む間は手元に置いておくこと。解答では全体を通じて問題の各小問や文言に言及するからである。先を読む前に、どの問題にも少なくとも 30 分は誠実に取り組むこと。行き詰まるのは失敗のしるしではない。そこでこそ学びが起きるのである。完全に行き詰まったら、**取りかかる前に**を読み、もう一度挑戦すること。
- **囲みの問いに答える。**本文が問いかけてきたら、手を止めて紙の上で答えること。誘導つきの解答は、鉛筆を手にして読むように書かれている。
- **「背後にある数学」の部分を読み飛ばさない。**試験には出ないが、それこそが本書の存在理由であり、記憶に残るのもその部分である。
- **節はどの順序で読んでもよい。**各節は独立しており、相互参照によって他の場所にある関連する考え方へ導かれる。好奇心の赴くままに進むこと。

- **練習問題に挑戦してから解答を確認する。**各章の終わりの解答は簡潔で、結果と鍵となる一歩を示すだけであり、完全な記述ではない。
- **解答を踏み切り板として使う。**過去問で練習するときは、ウェブサイトで解答を開く前にそれぞれの問題にきちんと取り組み、再び手が動き出すのに必要なところまでだけ読むこと。鍵となる考え方で十分なら、解答を閉じて自分で問題を解き終えること。
- **ワークシートを使う。**ウェブサイトには各節の印刷用ワークシートがある。問題へのリンク、順番に並んだヒント、**背後にある数学**の部分、そして練習問題が載っており、画面から離れて取り組むことができる。
- **本書の外へ読み進める。** Siklos の本、STEP サポート・プログラム、そして過去問そのものは、いずれも無料で手に入る。各節のさらに学ぶための文献は、大学入学前でも読めるものを選んである。

教師のための本書の使い方

- **発展的な学習の題材として。**各節は独立した 1 回分の授業になる。問題、それを通る誘導された道筋、そしてその後に向かう興味深い行き先がある。思考のスキルは、一連の授業のテーマとしてよく機能する。
- **議論の手引きとして。自問してみよう**と**手を止めて考えよう**の囲みは、クラスや小グループへの自然な問いかけになる。次の段階を明かす前に投げかけるとよい。
- **ワークシートとともに。**各ワークシートには、問題へのリンク、順番に並んだヒント、**背後にある数学**の部分、そして発展問題が載っている。生徒はヒントをいくつ使うかを自分で選べる。
- **STEP 対策のために。**見本問題から 2025 年までの 3 つの試験すべてからの問題を収録しており、その多くは練習問題で関連する問題を伴っている。章末のまとめと道具箱は、生徒が分野を越えたつながりを見る助けになる。
- **STEP の支援を受けられない生徒のために。**本書は、意志の強い生徒が独りで取り組めるように書かれている。学校が STEP 対策を提供していない場合、本書がその役割の多くを果たせる。

著作権と訂正

本書のうち私自身の著作物である部分、すなわち本文、誘導つきの解答、図、練習問題、解答は、Creative Commons CC0 1.0 Universal ライセンスのもとでパブリックドメインに供されている。いかなる目的であっても、許可を求めることなく複製、改変、共有してよい。STEP の問題そのものの著作権は Cambridge University Press &

Assessment に帰属し、このライセンスの対象ではない。そのため、問題は本書には転載していない。代わりに、各節から公式の出典にある問題へリンクしている。見本問題と 1987 年から 2018 年までの試験については STEP サポート・プログラムの問題データベースへ、2019 年以降の各年の試験については OCR のダウンロードページへのリンクである。さらに別の STEP の問題を用いる練習問題も、同じ方法でリンクしている。

数学的に正しいものにするよう努めたが、これだけの分量の本には必ず誤りが含まれている。どんなに小さなものでも誤りを見つけたら、本書の GitHub リポジトリ `github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty` に issue として報告してほしい。訂正は届きしだい本書のウェブサイトに反映される。

始める前に、最後にひとこと

Siklos は自著の序文を、ミケランジェロ（Michelangelo）の**ダビデ像**の話で締めくくっている。何十年も手つかずのまま放置されていた大理石の塊から彫り出された像である。そして、自分には数学を教えることはできないが、問題を少しずつ削り取っていく懸命な努力が、読者の内にいる数学者の姿を現すだろうと述べた。私にはこれ以上うまく言うことはできない。本書が差し出すのは、大理石と、いくつかの道具と、他の人たちがその内側に見いだしたものの絵が少々である。削るのは読者自身である。本書をまとめるのを私が楽しんだのと同じくらい、読者もそれを楽しんでくれることを願っている。

Keith McNulty
2026 年 11 月