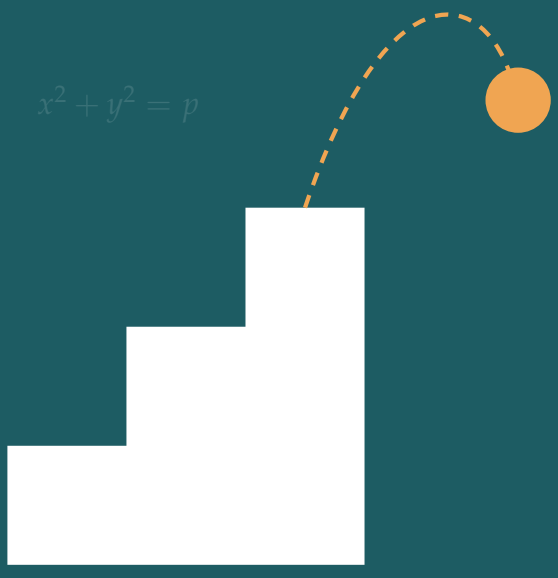
STEP 対策 · 大学の数学

# Beyond STEP

STEP の過去問を入り口に
大学の数学へ



KEITH McNULTY

# Beyond STEP

Past STEP questions as a doorway
to university mathematics

Keith McNulty

**Beyond STEP: Past STEP questions as a doorway to university mathematics**

First published online November 2026. This version: 2026年11月月18日.

Everything in this book that is the author's own work, including the text, guided solutions, figures, exercises and answers, is dedicated to the public domain under the Creative Commons CC0 1.0 Universal licence: you may copy, adapt and share it for any purpose, without asking permission. See `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`.

The STEP questions discussed in this book are the copyright of Cambridge University Press & Assessment. They are not reproduced here: each section links to its question at an official source, the STEP Support Programme's question database or OCR's past papers.

The book is also available free online, with printable worksheets for every section, at `beyondstep.keithmcnulty.org`. Corrections are welcome as issues at `github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty`.

この版は英語版から機械翻訳したものであり、日本語を母語とする数学教師による校閲はまだ受けていない。不明確な箇所については英語の原文を正とする。

# 目次

**はじめに** 1

**用語集** 13

**数学記号** 27

**1 数論と証明** **37**

1.1 素数を生み出す工場 43

1.2 素数はどれほどまばらか？ 53

1.3 最小の反例 61

1.4 $e$ は無理数であり、$e^2$ もまた無理数である 67

1.5 無限降下法 75

1.6 二つの平方数の和 81

1.7 因数分解が破綻するとき 87

1.8 有理数を数える 93

1.9 三次曲線の接線 99

振り返り 105

練習問題の解答 109

**2 数列・級数・収束** **115**

2.1 「いずれは」とは何を意味するか 121

2.2 極限としての黄金比 127

2.3 発散する級数と、収束するその親戚 135

2.4 $\pi^2/6$ 141

2.5 ヴィエトの無限積 147

2.6 算術幾何平均 153

2.7 6 桁か、600 桁か 161

2.8 2 乗して 2 を引く 167

2.9 e に迫る分数 . . . 175
振り返り . . . 181
練習問題の解答 . . . 185

**3 関数・不等式・厳密さ 191**

3.1 誤りを見抜け . . . 197
3.2 相加・相乗平均を逆向きに . . . 205
3.3 凸性の威力 . . . 211
3.4 不等式を証明する面積 . . . 217
3.5 $\pi^e$ か $e^\pi$ か？ . . . 223
3.6 傾きの上界 . . . 229
3.7 $\pi^2 \leq 10$ . . . 235
3.8 加法定理から関数を決める . . . 241
3.9 新しい関数を発明する . . . 247
振り返り . . . 255
練習問題の解答 . . . 259

**4 きちんと学ぶ微分積分学 263**

4.1 積分とは何か？ . . . 269
4.2 積分から三角関数を構成する . . . 275
4.3 22/7 は $\pi$ より大きい . . . 281
4.4 ウォリス、ベータ、そして二分の一の階乗 . . . 287
4.5 2 年生の夢 . . . 293
4.6 公式で表せない積分 . . . 299
4.7 変分法 . . . 305
4.8 球形のパンを切る . . . 313
4.9 ホールディッチの定理 . . . 319
振り返り . . . 325
練習問題の解答 . . . 329

**5 複素数 333**

5.1 マチンの公式 339

5.2 1 の累乗根によるフィルター 345

5.3 $z^{2n}+1$ の因数分解 351

5.4 正多角形の中の距離 357

5.5 有理角になりそうでならない角 363

5.6 フェルマー点 369

5.7 写像としての複素指数関数 375

5.8 円板に隠れた距離 381

振り返り 387

練習問題の解答 391

**6 代数と構造 395**

6.1 1 の累乗根を根にもつ多項式 401

6.2 ガウスの正 17 角形 407

6.3 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ を根にもつ多項式 413

6.4 四次方程式を解く 419

6.5 公理から考える微分 425

6.6 部分群の和集合 431

6.7 四元数群 437

6.8 特異行列からなる群 443

振り返り 449

練習問題の解答 453

**7 線形代数と幾何 457**

7.1 行列では成り立たない法則 463

7.2 向きを変えずに伸ばす 469

7.3 行列式を行列式たらしめるもの 475

7.4 もとに戻る行列 481

7.5 三次元の回転 . . . 487
7.6 双曲的回転と相対性理論 . . . 493
7.7 決して変わらない量 . . . 499
7.8 四つの平方数 . . . 505
7.9 正多面体はただ五つ . . . 511
振り返り . . . 517
練習問題の解答 . . . 521

**8 微分方程式と力学系 527**

8.1 解が一意でないとき . . . 533
8.2 解かずに評価する . . . 539
8.3 個体群の収穫 . . . 545
8.4 渦を巻いて円に近づく . . . 551
8.5 グレイハウンドを追うグレイハウンド . . . 557
8.6 量子振動子 . . . 563
8.7 解けるカオス . . . 569
8.8 周期 3 ならばカオス . . . 577
振り返り . . . 587
練習問題の解答 . . . 591

**9 数え上げと確率 595**

9.1 平面を分割する直線 . . . 601
9.2 ミニチュア版ラムゼーの定理 . . . 607
9.3 柵の杭を塗り分ける . . . 613
9.4 関数としての数列 . . . 619
9.5 両替の仕方 . . . 625
9.6 奇妙なサイコロ . . . 631
9.7 等しい累乗和 . . . 637
9.8 誰も自分のシャツを受け取らない . . . 643

9.9 誕生日問題 649
9.10 いつでもおつりを渡せる 655
9.11 全種類を集める 661
9.12 ランダムな部分集合 667
9.13 いかさまサイコロ 673
振り返り 679
練習問題の解答 683

**10 保存則・衝突・重力 691**

10.1 ニュートンのゆりかご 697
10.2 重ねたボールの効果 703
10.3 ロケットと大砲 709
10.4 分子とピストン 717
10.5 有限時間に無限回の跳ね返り 723
10.6 二体が一体になる 729
10.7 球殻の内部の重力 735
10.8 三角形をなす三つの星 743
振り返り 749
練習問題の解答 753

**11 振動・回転・運動する座標系 759**

11.1 共鳴 765
11.2 基準振動 771
11.3 本当の振り子 777
11.4 等時曲線 783
11.5 加速する列車の中の重力 789
11.6 バックスピン 795
11.7 棒の中のシンプソンの公式 801
11.8 傾いたつり合い 807

11.9 安全放物線 813
11.10 こちらへ戻ってくるボール 819
11.11 野手はどのように捕球するか 825
11.12 ゴムひもの上のアリ 831
11.13 除雪車問題 837
11.14 懸垂線ではなく放物線 843
振り返り 849
練習問題の解答 853

**12 確率 861**

12.1 正確な条件付け 867
12.2 基準率の誤謬 873
12.3 「ランダム」とは何を意味するか？ 879
12.4 二つずつなら独立、全体では独立でない 885
12.5 最後の乗客の座席 891
12.6 もう1枚の硬貨 897
12.7 勝ち抜き戦で誰と誰が当たるか 903
12.8 ペニーのゲーム 909
12.9 偏った硬貨から公平な判定を 915
12.10 ひもの端を結ぶ 921
12.11 切手、カップ、そして $e$ 927
12.12 いつ探すのをやめるか 933
12.13 三つ巴の決闘 939
12.14 混合戦略 945
12.15 絶滅か爆発か 951
12.16 マルコフ連鎖を順向きにも逆向きにも 957
12.17 バナッハのマッチ箱 963
12.18 無記憶性 969
12.19 平面上のランダムな点 975

12.20 ビュフォンの針 . . . 981
12.21 棒を折る . . . 987
12.22 平均をもたない分布 . . . 993
12.23 確率から導くスターリングの公式 . . . 999
12.24 中心極限定理 . . . 1005
12.25 多数の中の最大値 . . . 1011
振り返り . . . 1017
練習問題の解答 . . . 1021

**13 世界における統計とランダムネス 1031**

13.1 見出しを読み解く . . . 1037
13.2 ハタネズミを数える . . . 1043
13.3 ドイツ戦車問題 . . . 1049
13.4 平均か中央値か？ . . . 1055
13.5 答えにくい質問をする . . . 1061
13.6 積み重なる誤差 . . . 1067
13.7 相関をつくり出す . . . 1073
振り返り . . . 1079
練習問題の解答 . . . 1083

# はじめに

> 私はこの本で数学を教えることはできない。しかし、問題を
> 少しずつ削り取っていく読者自身の多大な努力が、やがて
> その内にいる数学者の姿を現すだろうと信じている。
>
> — Stephen Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*

本書は難問の本であり、その背後にあるものについての本である。全 136 節は、どれも過去の STEP の問題から始まる。しかし問題は入口にすぎない。良い STEP の問題のほとんどすべての背後には、大学で本格的に出会うことになる数学がある。本書のねらいは、読者をその扉の向こうへと連れ出し、そこに何があるかを見せることである。

### STEP とは何か、そしてなぜ存在するのか

STEP（Sixth Term Examination Paper）は、学校の最終学年の夏に受験する一連の数学の試験である。1987 年にケンブリッジ大学（University of Cambridge）によって導入され、同大学で数学を学ぶべき者を決める助けとなることがその役目である。ケンブリッジ大学の数学科の合格内定（offer）のほとんどすべては STEP の成績を条件としており、長年のあいだに他の大学、とくにウォーリック大学（Warwick）も STEP を利用してきた。当初は多くの科目で STEP の試験があったが、2001 年までに数学だけが残った。その歴史の大半を通じて、試験は I、II、III の 3 種類であった。Paper I は 2019 年を最後に出題されなくなり、現在の受験者は Paper II と Paper III を受験する。この試験は長年ケンブリッジ・アセスメント（Cambridge Assessment）によって運営され、2024 年からは OCR が実施している。

STEP の問題用紙は、学校の試験とはまったく似ていない。短い必答問題が 10 問並ぶのではなく、長い問題が十数問あり、受験者はそのうち 6 問に取り組む。4 問で実質的な進展を得られる優秀な受験者は、非常に良い成績を収めるだろう。各小問の配点は示されておらず、練習したことのある作業を求められることもまれである。問われるのは、すでに知っている数学を新しい場面で使うことである。

STEP を誰よりもよく知っていた Stephen Siklos は、その目的を次のように述べている。第一に、STEP はハードルである。STEP での成功は、大学の数学の学位課程での成功を驚くほどよく予測することがわかっている（彼の報告によれば、STEP の順位とケンブリッジ大学 1 年次の試験の順位との相関（correlation）は 0.63 であり、この種

のものとしては非常に高い)。第二に、STEP は準備である。STEP が評価する考え方のスタイルは、学部の数学のスタイルそのものである。そして第三に、STEP は意欲の試験である。STEP の準備には本当の努力が必要であり、その努力を惜しむ学生は、厳しい数学の学位課程を楽しめそうにない。

#### Stephen Siklos

STEP について書こうとすれば、Stephen Siklos について書かずにはいられない。彼はケンブリッジの数学者であり、スティーヴン・ホーキング（Stephen Hawking）のもとで研究生として初期宇宙と重力波（gravitational waves）の数学に取り組んだのち、応用数学・理論物理学科（Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics）の講師となり、のちにジーザス・カレッジ（Jesus College）のシニア・チューター（Senior Tutor)、さらにプレジデント（President）を務めた。1987 年に STEP 数学が始まったときにその主任試験官（Senior Examiner）となり、2019 年 8 月に亡くなるまで 32 年間その職にあった。その間、彼は問題を起草し、「他人の問題を形に整え」（彼自身の言葉であり、長年にわたって興味と楽しみの源だったと語っていた作業である)、すべての試験問題を精査し、採点を監督した。また、学校からの支援を受けられない生徒に無料で手助けを提供する STEP イースター・スクール（STEP Easter School）と STEP サポート・プログラム（STEP Support Programme）の原動力でもあった。ある追悼記事は、ケンブリッジの数学の入学試験を、出身校にかかわらずあらゆる生徒にとって手の届くものにするために、彼が誰よりも多くのことをしたと述べている。

彼の著書 *Advanced Problems in Mathematics: Preparing for University*（大学への準備のための数学の発展問題）は Open Book Publishers から無料でオンライン公開されており、今なお STEP への最良の入門書である。強く勧めたい。その中で彼が書いた 2 つのことが、本書を形づくっている。1 つ目は、良い STEP の問題とは何かについての彼の見解である。それは、最初の小問でなじみのない考え方を示し、後の小問でそれをより難しい状況で再び使わせることで理解を示させる問題であり、あるいは自分で見つけなければならないパラメータに答えが依存する問題であり、あるいは特殊な場合から始めて一般的な結果で終わる問題である。まさにこうした問題こそがどこかへ通じていくのであり、本書の問題の大部分はこれらの種類に属する。2 つ目は、解答は「羽毛布団ではなく踏み切り板」であるべきだという彼の主張である。まず自分で格闘したことのない解答を読んでも、何も学べない。

### 私と STEP との出会い

私が初めて STEP に出会ったのは 1990 年代初めのことで、数学の先生が特別な挑戦としていくつかの過去問をくれたのである。私は合格内定のためではなく楽しみのためにそれらに取り組み、本番の試験を受けることはなかったが、それらの問題が並外れ

て難しかったことを覚えている。自分が学んだ何ものとも無関係に思え、1ページにわたって続き、取りかかることはできても解き終えることはめったにない問題ばかりであった。そして、ついに何かがうまくいったときに、学校の数学が見せてくれなかったものを見たという感覚も覚えている。

何年も経ってから、私は反対側からSTEPに戻ってきた。生徒のSTEP対策を手伝うようになったのである。彼らと何百もの問題に取り組むうちに、私は試験問題を違った目で見るようになった。すべての問題が珠玉というわけではない。率直に言えば、単なる長い持久力のテストのような問題もある。1ページにわたる注意深い式変形や、骨は折れるが型どおりの計算があり、最後に得られる洞察も喜びもあまりない。持久力は大切であり、大学の数学でも必要とされるが、そうした問題がSTEPを特別なものにしているわけではない。

STEPを特別なものにしているのは、1987年以来出題されてきた1,500を超える問題の中に、真に美しい問題が何百も散らばっていることである。私の言わんとすることを説明する最良の方法は、そのいくつかを見せることである。

### いくつかの珠玉の問題

以下は本書で後に出会う問題のうちの7問であり、本書の範囲全体にわたるように選んだ。組合せ論（combinatorics）から2問、力学系（dynamical systems）から2問、力学（mechanics）から2問、確率（probability）から1問である。どの問題も思い描けるものから始まり、にわかには信じがたいかもしれないもので終わり、大学で本格的に研究される数学へと通じている。

**混沌の中に隠れた秩序。**紙の上に6個の点を描き、すべての2点の組を線で結ぶ。線は全部で15本になる。それぞれの線を金色か銀色に好きなように塗る。ここで、3辺がすべて同じ色である三角形ができないようにしてみよう。何度やっても失敗するはずである。点が5個なら可能である（五角形の辺を金色に、5本の対角線を銀色に塗ればよい）が、6個では、どれほど巧妙に塗っても不可能である。1989年のSTEP Iの問題はこれを証明させるもので、ヒントはただ1つ、1つの点から出る5本の線に着目せよ、というものである。そのうち3本は同じ色でなければならず、そこから先の証明は数行で済む。線の塗り方は$2^{15} = 32\,768$通りあるが、この論法は1つの場合も確かめることなく、それらすべてを一度に片付けてしまう。

この結果は、1928年にラムゼー（Frank Ramsey）が証明したラムゼーの定理（Ramsey's theorem）の最小の場合である。この定理は、完全な無秩序は不可能であること、すなわち十分大きな構造は、どれほど無計画に組み立てられていても、完全な秩序をもつ部分を含むことを述べている。「十分大きい」とはどのくらいか。すべて1色で結ばれた4個の点を保証するには18個の点が必要であり、これは1955年に証明された。5個

の点については、誰も答えを知らない。答えは 43 と 46 の間のどこかにあり、その上界が証明されたのは 2024 年になってのことである。エルデシュ（Paul Erdős）は冗談で、もし宇宙人がこの数を教えなければ地球を破壊すると脅してきたら、すべてのコンピュータと数学者を総動員して取り組むべきだが、6 個の場合の答えを求められたら、宇宙人を倒すことを試みるべきだと言った。ラムゼー理論には大学の組合せ論やグラフ理論（graph theory）の講義で出会うことになり、この STEP の証明の原動力である鳩の巣原理（pigeonhole principle）には、履修するほとんどすべての講義で出会うことになる（Section 9.2）。

**奇妙なサイコロ。** 普通のサイコロ 2 個では、和が 7 になるのが最も起こりやすく、2 と 12 が最も起こりにくい。場合の数はおなじみの $1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1$ 通りというパターンになる。正の整数を使って 2 個のサイコロに目をつける方法で、すべての和についてまったく同じ確率を与えるものは他にあるだろうか。ありそうにないが、ちょうど 1 つだけある。一方のサイコロに $1, 2, 2, 3, 3, 4$、もう一方に $1, 3, 4, 5, 6, 8$ をつけるものである。これは *Sicherman* **のサイコロ**（Sicherman dice）と呼ばれ、発見者の George Sicherman にちなんで名づけられ、1978 年にマーティン・ガードナー（Martin Gardner）によって有名になった。出た目の和だけで決まるゲームであれば、普通のサイコロとこれを取り替えても、誰にも気づかれることはない。

1993 年の問題は、この考え方に反対側から迫る。目のつけ方が変わった 2 個のサイコロについて、それぞれの和が何通りの出方で出るかを示した表を与え、目のつけ方を突き止めさせるのである。痕跡から犯罪を再構成する探偵のようなものである。続いてこの節では、この分野全体を簡単にしてしまう考え方を示す。それぞれのサイコロを多項式（polynomial）に変え、$k$ の目の面ごとに項 $x^k$ を対応させるのである。2 個のサイコロを振ることは、それらの多項式を掛け合わせることに対応する。$x^i \times x^j = x^{i+j}$ によって面の数が足されるからである。同じ和をもつ新しいサイコロを見つけることは、36 を $6 \times 6$ ではなく $4 \times 9$ と分けられるのと同じように、多項式を別の仕方で因数分解（factorise）することに帰着する。そして多項式は、整数と同様に、それ以上分解できない因子への分解がただ 1 通りしかないので、この因数分解によって Sicherman のサイコロが唯一の代替であることも証明される。数え上げの問題を多項式に符号化するこの技法、すなわち**母関数**（generating function）は組合せ論で最も強力な道具の 1 つであり、その背後にある一意分解（unique factorisation）は大学の最初の代数学の講義の中心的なテーマである（Section 9.6）。

**公式をもつカオス。** 0 と 1 の間の数から始め、それに 4 と、1 からその数を引いたものとを掛け、これを繰り返す。すなわち $u_{n+1} = 4u_n(1 - u_n)$ である。これは**ロジスティック写像**（logistic map）であり、増加するが食料の供給によって制限される個体数の粗いモデルである。規則はこれ以上ないほど単純であるにもかかわらず、生成される数は目に見えるパターンなしに跳ね回り、小数第 10 位まで一致する 2 つの初期値で

も、たいてい数十ステップのうちにまったく異なる数列を生む。生物学者のロバート・メイ（Robert May）は 1976 年に、「Simple mathematical models with very complicated dynamics」（非常に複雑な力学をもつ単純な数理モデル）という題の有名な論文でこれに注目を集め、以来これはカオス（chaos）の標準的な例となった。ふつうはコンピュータで調べられるものである。

2014 年の問題は意外なことを明らかにする。この数列には厳密な公式があるのである。初期値が $\sin^2\theta$ ならば $u_n = \sin^2(2^n\theta)$ であり、これは 2 倍角の公式（double angle formulae）と数学的帰納法（induction）だけで証明できる（この公式は 1940 年代にウラム（Stanisław Ulam）とフォン・ノイマン（John von Neumann）に知られていた）。厳密な公式があればカオスは飼いならされると思うかもしれない。ところが実際には、公式はカオスを完全に説明してしまう。各ステップで角は 2 倍になるので、角のどんなにわずかな不確かさも各ステップで 2 倍になり、初期値の誤差も平均してそれと同じ速さで増大する。50 ステップ後には、誤差はおよそ 1000 兆倍になっている。角を $\pi$ に対する割合として 2 進法で書くと、このことが鮮やかに見える。写像の各ステップは 2 進法の各桁を 1 つ左へずらし、先頭の桁を捨てる。したがってこの数列は初期値の桁を 1 つずつ読み出していくのであり、100 ステップ先を予測するには初期値を 2 進法で 100 桁まで知る必要がある。同じ公式によって写像のすべての周期軌道（cycle）も求められ、あらゆる長さの周期軌道が存在し、それらが $[0,1]$ に稠密に詰まっていて、そのどれもが不安定（unstable）であることもわかる。これが力学系の分野であり、大学の微分方程式（differential equations）の講義で、さらに後にはカオスそのものの講義で出会うことになる（Section 8.7）。

**周期 3 はカオスを意味する。**関数 $f(x) = 7 - 2|x|$ をとり、ある数から始めて、得られた答えを繰り返し代入し直していく。1 から始めると $1, 5, -3, 1, 5, -3, \ldots$ となり、長さ 3 の周期軌道が得られる。2025 年の問題は、f、$f(f(x))$、$f(f(f(x)))$ のグラフを描き、それらが直線 $y = x$ と交わる点を見つけることによって、このような周期軌道を探させる。f を 1 回多く適用するごとにグラフのジグザグの数は 2 倍になり、この節ではその観察を、この関数が**あらゆる**長さ、すなわち 2、3、4、100、100 万の周期軌道をもつことの証明へと仕上げる。

これはこの関数に特有の性質ではない。1975 年に Tien-Yien Li と James Yorke は、長さ 3 の周期軌道をもつ**任意の**連続関数（continuous function）は他のあらゆる長さの周期軌道をもたなければならないことを証明した。その論文には「Period three implies chaos」（周期 3 はカオスを意味する）という心惹かれる題がつけられていた。証明に必要なのは中間値の定理（intermediate value theorem）だけである。これは、符号が変わる連続関数は 0 を横切らなければならないと論じるたびにすでに使っている定理である。それに加えて、関数がどの区間をどの区間の上に引き伸ばすかを示す巧妙な図が使われる。後になって、ウクライナの数学者シャルコフスキー（Oleksandr Sharkovsky）

が 1964 年により強い結果を証明していたことがわかった。彼は 3,5,7,9,... で始まる自然数の奇妙な順序づけを見いだし、ある長さの周期軌道が存在すれば、その順序でそれより後に来るあらゆる長さの周期軌道が存在することを示したのである。中間値の定理は、大学の解析学（analysis）の講義で最初に注意深く証明される結果の 1 つである。この問題は、その定理にどれほどのことができるかを示している（Section 8.8）。

**自転車の空気入れはなぜ温まるのか。**自転車のタイヤに空気を入れてから空気入れに触ってみると、温かくなっている。気体を圧縮すると温まるのであり、ディーゼルエンジンが火花なしに燃料に点火できるのもこのためである。しかし、なぜだろうか。2002 年の問題は、空気入れの端と押し込まれるピストンの間を行ったり来たりする空気分子 1 個を追跡することによって、この問いに答える。分子が前進してくるピストンで跳ね返るたびに、動いているラケットで打たれたテニスボールのように、少し速さを増す。この問題では、1 回の跳ね返りを正確に記述し、それを各衝突時のシリンダーの長さについての漸化式（recurrence）に直し、その漸化式を解くことが求められる。

解いてみると、隠れた法則が現れる。分子の速さとシリンダーの長さの積がほとんど変化しないのである。長さを半分にすれば速さは 2 倍になる。温度は分子のエネルギーを測るものなので、気体は温まる。系をゆっくりと変化させたときにほぼ一定に保たれるこのような量は**断熱不変量**（adiabatic invariant）と呼ばれ、もう少し手を加えれば、同じ論法から、大学の熱力学（thermodynamics）で出会う気体の断熱圧縮の法則が導かれる。この考え方の射程は長い。フェルミ（Enrico Fermi）は 1949 年に、宇宙線はまさにこの仕組みによって、つまり宇宙空間の動く磁場の間で繰り返し跳ね返ることによって、莫大なエネルギーを得ているのだと提唱した。また、エーレンフェスト（Paul Ehrenfest）は 1916 年に、断熱不変量こそ量子力学（quantum mechanics）が量子化すべき量であると論じた。自転車の空気入れについての問題が、統計物理学、天体物理学、そして量子論の始まりにまで触れているのである（Section 10.4）。

**戻ってくるボール。**ボールを前方へそっと投げると、着地するまで着実に遠ざかっていく。常識的には、いつでもそうなるはずである。ボールは常に前へ進んでいるのだから、どうして近づくことができようか。しかし、十分に急な角度、つまり水平から約 70.5° より大きい角度で投げると、奇妙なことが起こる。落下してくる飛行の一部の間、水平方向にはまだ遠ざかっているにもかかわらず、ボールは投げた人に**近づく**のである。高さが減る速さが、水平距離が増える速さを上回るのである。

2019 年の問題は、これを証明し、臨界角を正確に求めさせる。その方法は何度も繰り返し使うことになるものである。距離そのものではなくその 2 乗を微分する。こうすれば平方根を避けられる。その導関数（derivative）は時刻の 2 次式になり、距離が減少することがあるかという問いは、その 2 次式が実数解をもつかという問いに変わる。判別式（discriminant）が答えを与え、臨界角は正弦がちょうど $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ となる角である

ことがわかる。この教訓は放物運動をはるかに超えて広がる。「明らかに」増加する量の多くは実は増加しない。そして大学では、導関数の符号を調べることによって何かが単調（monotonic）であることを示すのは、不等式を証明するとき、数列が収束（converge）することを証明するとき、微分方程式の解が落ち着くことを示すときの重要な一歩である（Section 11.10）。

**最後の乗客。**ある列車は全席が予約で埋まっている。最初に乗り込む乗客は自分の切符を無視して、無作為に選んだ席に座る。その後の乗客はみな、自分の席が空いていればそこに座り、空いていなければ空いている席を無作為に選んで座る。最後に乗り込む乗客が自分の席が空いているのを見つける確率はいくらか。席が 100 あると、可能性は目もくらむほどに枝分かれする。席を奪われた乗客が別の乗客の席を奪い、その乗客がさらに別の乗客の席を奪い、という連鎖がどこまでも続きうる。直接計算するのは絶望的に見える。それでも答えは、席の数にかかわらず、ちょうど $\frac{1}{2}$ である。

2021 年の問題は段階を追ってこの答えにたどり着く。席が 2 つと 3 つの場合の答えを求め、最初の乗客がどこに座るかで条件付け（conditioning）をして漸化式を立て、数学的帰納法によって答えが常に $\frac{1}{2}$ であることを証明させるのである。これは申し分のない証明であるが、答えが**なぜ**これほど単純なのかという疑問が残る。そこでこの節では、それを説明する 1 行の論法を示す。乗客が無作為に選ばなければならないときには、いつでも最初の乗客の席と最後の乗客の席はまったく同じように扱われる。どちらかが埋まるまで、この過程は 2 つの席を区別できないのである。したがって最後に残る空席がどちらである確率も等しい。そして最後の空席はこの 2 つのうちのどちらかでなければならない。他のすべての席は、最後の乗客が乗り込む前に、その持ち主か、席を奪われた誰かによって埋められているからである。このように、何ページもの計算を 1 つの観察で置き換える対称性（symmetry）による論法は、大学の確率論の至るところに現れる（Section 12.5）。

これらを合わせると、このような問題は数学の学位課程 1 年次の主要な分野のすべてに触れている。数論（number theory）、解析学、微積分学（calculus）、複素数、代数学（algebra）、線形代数（linear algebra）、微分方程式、組合せ論、力学、確率、統計である。

### 本書の目的

この観察こそが本書の存在理由である。STEP 対策のほとんどは、まったく当然のことながら、試験に合格することを目指している。技法を学び、過去問を練習し、速さと持久力を身につける。本書もそれを目指しており、本書に取り組めば STEP の力は上がるだろう。しかし本書の真の目的は別のところにある。それは、**大学の数学を視野に入れて** STEP の準備をする手助けをすることである。つまり、それぞれの問題を乗り越えるべき障害ではなく誘いとして捉え、その誘いをたどれるところまでたどって

いくことである。

STEP で最も良い成績を収め、その後大学で大きく伸びる学生は、ほとんどの場合、数学をそれ自体のために愛する人たちである。彼らは難問が解ける瞬間を楽しむ。ある技法がうまくいくということだけでなく、なぜうまくいくのかを知りたがる。答えが $\frac{1}{2}$ や $\frac{1}{e}$ や $\pi^2/6$ のように怪しいほど単純になったとき、もっと深い何かが起きていると疑い、それを探しに行く。本書が育てようとしているのはこうした習慣である。それぞれの問題は、何らかの発見、すなわち問題そのものよりも大きな考え方、定理、思考法へと通じるものとして選ばれている。

思考法は定理と同じくらい重要である。大学の数学は、学校の数学ではめったに求められない仕方で考えることを求める。計算するのではなく証明すること、背理法（proof by contradiction）や無限降下法（infinite descent）で論じること、同じものを 2 通りに数えること、決して変化しない量を見つけること、反例（counterexample）を構成すること、何かを実際に見つけることなくその存在を示すこと、である。STEP の問題は、しばしばそうと明言することなく、まさにこうした習慣を鍛える。本書ではどの節でも、その核心にある思考のスキルに名前をつけているので、再び出会ったときにそれと気づくことができる。

### 本書の構成

本書は 13 の章からなる。章は、問題がどの STEP の試験から来たかではなく、問題が導く大学の数学の分野によって構成されている。

- **純粋数学**（第 1 章から第 9 章）：数論と証明、数列・級数と収束、関数・不等式と厳密さ、きちんとした微積分、複素数、代数と構造、線形代数と幾何学、微分方程式と力学系、そして数え上げと偶然である。最後の章では確率の試験に出た組合せ論的な問題も扱う。
- **力学**（第 10 章と第 11 章）：保存則・衝突と重力、そして振動・回転と動く座標系である。後者は意外な軌道を集めたもので締めくくられる。
- **確率と統計**（第 12 章と第 13 章）：条件付けについての明晰な思考から中心極限定理（central limit theorem）までの確率、そして統計と世界の中のランダムネスである。

各章は小論で始まる。その分野がなぜ重要か、大学でそこで何に出会うか、そして章全体を貫く 3 つの大きな問いである。各章の終わりにはまとめがあり、それらの問いに立ち返り、使われた方法の道具箱、他の章への手がかり、大学入学前に読むべきものの提案を示す。各章の最後には練習問題の簡単な解答がある。第 1 章の前には、本書に出てくる用語のうち学校ではなじみがないと思われるものの用語集と、本書で使

う数学記号の表がある。言葉や記号でつまずいたら、そこで調べてほしい。

すべての節は同じ形式に従う。最初は**問題**である。出題されたとおりの STEP の問題の、公式の出典へのリンクである。**導入**では、その問題が見た目以上に面白い理由を説明する。**取りかかる前に**では、最初の足がかりを与える。**順を追って解く**は段階を追った誘導つきの解答であり、途中に**自問してみよう**や**手を止めて考えよう**という見出しの囲みが挟まれる。これらは良い教師がその時点で問いかけるであろう問いであり、読み飛ばすためではなく答えるためにある。**振り返り**では鍵となる手順を拾い出す。**背後にある数学**は節の中心であり、問題の背後にある大学の数学、その歴史と意外な点を扱う。**思考のスキル**では、その問題が鍛える心の習慣に名前をつける。**次の一歩**では発展問題を示し、関連する STEP の問題が含まれることも多い。**さらに学ぶために**では、優秀な高校生や大学 1 年生が読みこなせる水準の本や記事を紹介する。

本書では 136 問を詳しく扱うが、STEP ではこれまでに 1,500 を超える問題が出題されている。ウェブサイトには、見本問題（specimen papers）から 2025 年までのそのすべてについて解答がある。それらは本書と同じ精神で書かれているが、はるかに短い。各解答では、問題を解く鍵となる考え方、小問ごとの完全な解答、答えについて行えるいくつかの検算、犯しやすい間違い、そしてその問題が触れる大学の数学への手がかりを示す。本書で詳しく扱っている問題については、解答にその旨が記され、リンクが張られている。

いくつかの節では、群（groups）、慣性モーメント（moments of inertia）、積率母関数（moment generating functions）など、現行の STEP の出題範囲（specification）に含まれない題材を用いている。それらは、問題があまりにも良いので外すに忍びないために収録したものであり、各節で必要な事項を示している。

### 学生のための本書の使い方

- **まず問題に取り組む。**節の冒頭のリンクから問題を開き、読む間は手元に置いておくこと。解答では全体を通じて問題の各小問や文言に言及するからである。先を読む前に、どの問題にも少なくとも 30 分は誠実に取り組むこと。行き詰まるのは失敗のしるしではない。そこでこそ学びが起きるのである。完全に行き詰まったら、**取りかかる前に**を読み、もう一度挑戦すること。
- **囲みの問いに答える。**本文が問いかけてきたら、手を止めて紙の上で答えること。誘導つきの解答は、鉛筆を手にして読むように書かれている。
- **「背後にある数学」の部分を読み飛ばさない。**試験には出ないが、それこそが本書の存在理由であり、記憶に残るのもその部分である。
- **節はどの順序で読んでもよい。**各節は独立しており、相互参照によって他の場所にある関連する考え方へ導かれる。好奇心の赴くままに進むこと。

- **練習問題に挑戦してから解答を確認する。**各章の終わりの解答は簡潔で、結果と鍵となる一歩を示すだけであり、完全な記述ではない。
- **解答を踏み切り板として使う。**過去問で練習するときは、ウェブサイトで解答を開く前にそれぞれの問題にきちんと取り組み、再び手が動き出すのに必要なところまでだけ読むこと。鍵となる考え方で十分なら、解答を閉じて自分で問題を解き終えること。
- **ワークシートを使う。**ウェブサイトには各節の印刷用ワークシートがある。問題へのリンク、順番に並んだヒント、**背後にある数学**の部分、そして練習問題が載っており、画面から離れて取り組むことができる。
- **本書の外へ読み進める。** Siklos の本、STEP サポート・プログラム、そして過去問そのものは、いずれも無料で手に入る。各節のさらに学ぶための文献は、大学入学前でも読めるものを選んである。

### 教師のための本書の使い方

- **発展的な学習の題材として。**各節は独立した 1 回分の授業になる。問題、それを通る誘導された道筋、そしてその後に向かう興味深い行き先がある。思考のスキルは、一連の授業のテーマとしてよく機能する。
- **議論の手引きとして。自問してみよう**と**手を止めて考えよう**の囲みは、クラスや小グループへの自然な問いかけになる。次の段階を明かす前に投げかけるとよい。
- **ワークシートとともに。**各ワークシートには、問題へのリンク、順番に並んだヒント、**背後にある数学**の部分、そして発展問題が載っている。生徒はヒントをいくつ使うかを自分で選べる。
- **STEP 対策のために。**見本問題から 2025 年までの 3 つの試験すべてからの問題を収録しており、その多くは練習問題で関連する問題を伴っている。章末のまとめと道具箱は、生徒が分野を越えたつながりを見る助けになる。
- **STEP の支援を受けられない生徒のために。**本書は、意志の強い生徒が独りで取り組めるように書かれている。学校が STEP 対策を提供していない場合、本書がその役割の多くを果たせる。

### 著作権と訂正

本書のうち私自身の著作物である部分、すなわち本文、誘導つきの解答、図、練習問題、解答は、Creative Commons CC0 1.0 Universal ライセンスのもとでパブリックドメインに供されている。いかなる目的であっても、許可を求めることなく複製、改変、共有してよい。STEP の問題そのものの著作権は Cambridge University Press &

Assessment に帰属し、このライセンスの対象ではない。そのため、問題は本書には転載していない。代わりに、各節から公式の出典にある問題へリンクしている。見本問題と 1987 年から 2018 年までの試験については STEP サポート・プログラムの問題データベースへ、2019 年以降の各年の試験については OCR のダウンロードページへのリンクである。さらに別の STEP の問題を用いる練習問題も、同じ方法でリンクしている。

数学的に正しいものにするよう努めたが、これだけの分量の本には必ず誤りが含まれている。どんなに小さなものでも誤りを見つけたら、本書の GitHub リポジトリ `github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty` に issue として報告してほしい。訂正は届きしだい本書のウェブサイトに反映される。

### 始める前に、最後にひとこと

Siklos は自著の序文を、ミケランジェロ（Michelangelo）の**ダビデ像**の話で締めくくっている。何十年も手つかずのまま放置されていた大理石の塊から彫り出された像である。そして、自分には数学を教えることはできないが、問題を少しずつ削り取っていく懸命な努力が、読者の内にいる数学者の姿を現すだろうと述べた。私にはこれ以上うまく言うことはできない。本書が差し出すのは、大理石と、いくつかの道具と、他の人たちがその内側に見いだしたものの絵が少々である。削るのは読者自身である。本書をまとめるのを私が楽しんだのと同じくらい、読者もそれを楽しんでくれることを願っている。

*Keith McNulty*
2026 年 11 月

# 用語集

大学の数学には独自の語彙があり、その多くは読者にとって初めて目にするものであろう。この用語集は、本書に現れる語のうち学校ではまず出会わないものを集め、それぞれに短い説明を付け、役に立つ場合にはその考え方が使われている節、あるいはきちんと説明されている節を示したものである。説明は理解の手がかりとなることを意図したものであって、厳密な定義ではない。注意深い定義をもつ語については、示した節でその定義を与えている。

**集合**、**関数**、**証明**のようにすでになじみのある語もいくつかあるが、大学ではこれらを学校よりも注意深く用いるので、その理由から収録している。項目中で**斜体**で示した語には、それ自身の項目がある。

### A

**断熱不変量（adiabatic invariant）** 系をゆっくりと変化させたとき、ほぼ一定に保たれる量。ゆっくりと圧縮されるシリンダーの中で跳ね返る分子は、その速さとシリンダーの長さの積をほぼ一定に保つ（Section 10.4）。

**代数的数（algebraic number）** 整数係数（正、負、零のいずれでもよい）で、すべてが零ではない多項式方程式の根となる数。$\sqrt{2}$、i、$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ は代数的数である。代数的数でない数は**超越数**である（Section 6.3）。

**解析学（analysis）** 微積分に厳密な基礎を与える数学の分野。極限、連続性、微分、積分、無限級数を、すべて正確に定義し、第一原理から証明する。第 2 章から第 4 章はその入門である。

**角運動量（angular momentum）** 運動量の回転版。軸のまわりを回転する物体については、**慣性モーメント**と角速度の積であり、外部からの回転させる作用がなければ保存される（Section 11.6）。

**算術幾何平均（arithmetic–geometric mean）** 2 つの数の組を、その相加平均と相乗平均の組で置き換えることを繰り返して得られる 2 つの数列の共通の極限。驚くほど速く収束する（Section 2.6）。

**結合的（associative）** 演算 $*$ が結合的であるとは、すべての $a$、$b$、$c$ に対して $(a*b)*c = a*(b*c)$ が成り立つことであり、このとき括弧を省略できる。数の加法と乗法は

結合的であるが、減法はそうではない。

**漸近的（asymptotic）** 2 つの式が漸近的であるとは、$n \to \infty$ のときそれらの比が 1 に近づくことであり、$f(n) \sim g(n)$ と書く。スターリング（Stirling）の公式は $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n$ を主張するが、両辺の差は限りなく大きくなる（Section 12.23）。

**公理（axiom）** 証明なしに出発点として認め、そこから他のすべてを導く命題。大学の代数学の多くは、短い公理の一覧から出発し、そこから何が導かれるかを問う（Section 7.3、Section 6.5）。

## B

**基底段階（base case）** 帰納法による証明の最初の段階。最小の値、通常は $n = 0$ または $n = 1$ について命題が正しいことを確かめる。続いて帰納段階で、ある値で正しければ次の値でも正しいことを示す。

**基準率の誤り（base-rate fallacy）** そもそもそれがどれほどありふれたものであったかを無視し、証拠だけから何かの確率を判断してしまう誤り。病気が十分にまれであれば、精度の高い検査で陽性と出ても、誤った警報である可能性のほうが高いことがある。そうなるかどうかは、病気がどれほどまれで、検査がどれほど正確かによって決まる（Section 12.2）。

**基底（basis）** 空間のどのベクトルもそれらの一次結合としてただ 1 通りに表せるようなベクトルの集合。平面では $\mathbf{i}$ と $\mathbf{j}$ が基底をなし、平行でない任意の 2 つのベクトルの組も基底をなす。基底に含まれるベクトルの個数がその空間の次元である（Section 6.3）。

**ベイズの定理（Bayes' theorem）** 条件付き確率の向きを逆にする規則：$\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(B \mid A)\,\mathrm{P}(A)/\mathrm{P}(B)$。証拠に照らして信念をどう更新すればよいかを教えてくれる（Section 12.2）。

**偏り（bias）** 推定量が偏っているとは、多くの標本にわたって平均すると高すぎたり低すぎたりすることである。期待値が推定しようとしている量にちょうど等しいとき、その推定量は不偏であるという（Section 13.3）。

**全単射（bijection）** 一対一の対応。一方の集合のすべての元を、もう一方の集合のちょうど 1 つの元と組にし、どちら側にも余りが出ないような規則。2 つの有限集合の大きさが等しいのは、それらの間に全単射が存在するときであり、かつそのときに限る。無限集合の大きさはこの考え方で定義される（Section 1.8、Section 9.10）。

**二項演算（binary operation）** 2 つの対象を組み合わせて 3 つめの対象を与える規則。数の加法、行列の乗法、関数の合成などがその例である。

**界（bound）** 数の集合や数列の上界とは、そのどれもがそれを超えないような数のことであり、下界とは、そのどれもがそれを下回らないような数のことである。上界と下界の両方をもつ数列は**有界**であるという（Section 2.2）。

**分岐過程（branching process）** 各個体が互いに独立に、ランダムな数の子孫をもつような個体群のモデル。中心となる問いは家系が絶えるかどうかであり、その答えは**確率母関数**から得られる（Section 12.15）。

## C

**変分法（calculus of variations）** 未知のものが関数や曲線全体であり、それをある量ができるだけ小さく、あるいはできるだけ大きくなるように選ぶ問題の研究。最短経路、最速で滑り降りる曲線、最大の面積を囲む曲線などがその例である（Section 4.7）。

**懸垂線（catenary）** 垂れ下がった鎖の形で、$y = a\cosh(x/a)$ のグラフである。放物線のように見えるが、放物線ではない（Section 11.14）。

**コーシー分布（Cauchy distribution）** 釣鐘形のグラフをもつ連続分布で、裾が非常に重いために平均をもたない。この分布からの標本の平均は、1 回の観測値と比べて少しも信頼できるものにならない（Section 12.22）。コーシー（Cauchy）にちなむ。

**中心極限定理（central limit theorem）** 同じ分布に従い分散が有限である多数の独立な確率的な量の和は、適切に平行移動し尺度を調整すると、その共通の分布が何であっても近似的に正規分布に従う、という定理。分布が異なる量についても、そのうちの少数が和を支配しない限り、成り立つ形がある。釣鐘形の曲線があらゆるところに現れる理由を説明する（Section 12.24）。

**カオス（chaos）** 決定論的な系の振る舞いで、初期点にきわめて敏感なため、長期的な予測が事実上不可能になるもの。非常に近い 2 つの初期点が、まったく異なる未来へとつながる（Section 8.7、Section 8.8）。

**閉じている（closed）** 集合がある演算について閉じているとは、集合の 2 つの元を組み合わせると常にその集合の元が得られることである。偶数全体は加法について閉じているが、奇数全体はそうではない。

**可換（commutative）** 演算 $*$ が可換であるとは、常に $a * b = b * a$ が成り立つことである。数の乗法は可換であるが、行列の乗法や**四元数**の乗法はそうではない（Section 7.1、Section 6.7）。

**完備性（completeness）** 実数がすき間をもたないという性質。すなわち、上に有界な増加数列はすべて実数に収束する。分数の列が $\sqrt{2}$ に近づいていくことがある

ので、有理数はこの性質をもたない。**解析学**の多くはこの性質に基づいている（Section 2.2）。

**合同（congruence）** $a \equiv b \pmod{n}$ は「$n$ を法として $a$ は $b$ と合同である」と読み、$a$ と $b$ を $n$ で割った余りが等しいことを意味する。同値な言い方をすれば、$n$ が $a-b$ を割り切ることである。合同式を用いた計算を**合同算術**という（Section 1.5）。

**予想（conjecture）** 正しいと信じられているが、まだ証明されていない命題。

**保存則（conservation law）** エネルギー、運動量、角運動量のような量が、系の時間発展によって変化しないという主張。保存則を使うと、細部を追わずに問題を解けることが多い（Section 10.1）。

**連続（continuous）** 関数が連続であるとは、入力の小さな変化が出力の小さな変化しか生まないことである。くだけた言い方をすれば、そのグラフをペンを紙から離さずに描けることである。正確には、$x \to a$ のとき $\mathrm{f}(x) \to \mathrm{f}(a)$ となるならば、f は $a$ で連続である（Section 3.1、Section 8.8）。

**背理法（proof by contradiction）** 命題が偽であると仮定し、そこから不可能なことを導く証明。典型例は $\sqrt{2}$ が無理数であることの証明である（Section 1.3）。

**対偶（contrapositive）**「$P$ ならば $Q$」の対偶は「$Q$ でないならば $P$ でない」である。この 2 つの命題は論理的に同値であり、対偶を証明するほうが易しいことが多い。これは**逆**「$Q$ ならば $P$」とは異なり、逆は偽であることも十分ありうる。

**収束する（converge）** 数列が収束するとは、その項がある定まった数、すなわちその**極限**に、いくらでも近づき、しかも近いままであり続けることである。級数が収束するとは、その**部分和**が収束することである。収束しない数列や級数は**発散する**という（Section 2.1、Section 2.3）。

**凸（convex）** 関数が凸であるとは、$x^2$ や $\mathrm{e}^x$ のように、グラフ上の任意の 2 点を結ぶ弦がグラフ上またはグラフより上にあることである。相加相乗平均の不等式（AM–GM）をはじめ、多くの不等式が凸性から導かれる（Section 3.3）。

**系（corollary）** 証明したばかりの**定理**からすぐに導かれる結果。

**相関（correlation）** $-1$ と 1 の間の数で、2 つの確率的な量が直線的な関係にどれだけ近いかを測るもの。**共分散**を 2 つの標準偏差で割って尺度を調整したものである（Section 13.7）。

**可算（countable）** 集合が可算であるとは、その元を 1 番目、2 番目、3 番目、……と、場合によっては限りなく、並べ上げられることである。整数全体、そして意外なことに分数全体も可算であるが、実数全体は可算ではない（Section 1.8）。

**反例（counterexample）** 一般的な命題が偽であることを示すただ 1 つの例。主張を支持する例がどれほど多くても、反例が 1 つあればその主張を否定するのに十分である。

**共分散（covariance）** $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ であり、2 つの確率的な量がどのように連動して変化するかを測るもの。独立な量については零になるが、共分散が零であっても独立であるとは限らない（Section 12.4、Section 13.7）。

**サイクル（cycle）** 関数を繰り返し適用したときに順に巡る点の集合：$x_1 \mapsto x_2 \mapsto \cdots \mapsto x_n \mapsto x_1$。数 $n$ をその**周期**といい、これらの点を**周期点**という（Section 8.8）。

**サイクロイド（cycloid）** 転がる車輪の縁上の 1 点が描く曲線。上下を逆さにすると、最速降下曲線であると同時に、どこから滑り降りても同じ時間がかかる曲線でもある（Section 11.4）。

**円分多項式（cyclotomic polynomial）** 根がちょうど 1 の**原始** $n$ 乗根全体であるような多項式 $\Phi_n(x)$。整数係数をもち**既約**であって、$x^n - 1$ は $n$ のすべての約数 $d$ についての $\Phi_d(x)$ の積に等しい。たとえば $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ である（Section 6.1）。

## D

**完全順列（derangement）** どの要素ももとの位置にとどまらないような、並びの並べ替え（Section 9.8）。

**導分（derivation）** 関数（あるいは他の対象）に対する演算 $D$ で、$D(f+g) = Df + Dg$ と積の法則 $D(fg) = f\,Dg + g\,Df$ を満たすもの。微分が標準的な例であり、微分の性質の多くはこの 2 つの規則だけから導かれる（Section 6.5）。

**行列式（determinant）** 正方行列から計算される数で、対応する変換が面積や体積を何倍にするかを表す。行列が逆行列をもたないとき、かつそのときに限り零になる（Section 7.3）。

**微分可能（differentiable）** 関数がある点で微分可能であるとは、そこでグラフがきちんと定まった接線をもち、導関数を定める極限が存在することである。微分可能な関数はすべて**連続**であるが、逆は成り立たない。$|x|$ は連続であるが、0 で微分可能ではない。

**次元（dimension）** **基底**に含まれるベクトルの個数。すなわち、**ベクトル空間**における独立な方向の数。

**発散する（diverge）** **収束する**を参照。

**力学系（dynamical system）** 系の状態が時間とともにどう変化するかを記述する規則で、一歩ずつ変化するもの（$x_{n+1} = f(x_n)$ で定義される数列）と、連続的に変化するもの（微分方程式）がある。第 8 章はこれを扱う。

## E

**固有値、固有ベクトル（eigenvalue, eigenvector）** 零でないベクトル $\mathbf{v}$ が行列 $\mathbf{M}$ の固有ベクトルであるとは、ある数 $\lambda$ に対して $\mathbf{M}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ が成り立つことであり、この数を固有値という。すなわち、変換は $\mathbf{v}$ の向きを変えずに伸縮する（Section 7.2）。

**包絡線（envelope）** 曲線の族のすべての曲線に接する曲線。一定の速さで投げたボールのすべての軌道の包絡線は**安全放物線**であり、ボールが到達しうる領域の境界になっている（Section 11.9）。

**平衡（equilibrium）** 変化しない系の状態。小さな乱れが小さいままであれば**安定**であり、さらに摩擦のある振り子の場合のように乱れが減衰して消えるならば**漸近安定**である。摩擦のない振り子がまっすぐ下に垂れた状態は安定であるが、小さく押すと永久に揺れ続ける。小さな乱れのうちに増大するものがあれば**不安定**である（Section 8.3、Section 11.8）。

**推定量（estimator）** 個体群の大きさや分布の平均のような未知の量の推測値を、データから計算する規則（Section 13.3）。

**オイラー標数（Euler characteristic）** $V$ 個の頂点、$E$ 本の辺、$F$ 個の面をもつ多面体に対する数 $V - E + F$ で、穴のない多面体では常に 2 になる（Section 7.9）。オイラー（Euler）にちなむ。

**存在証明（existence proof）** 何かが存在することの証明で、それをどうやって見つけるかを必ずしも示さないもの。**鳩の巣原理**と**中間値の定理**はいずれも存在証明を与える。

**期待値（expectation）** 確率的な量 $X$ の平均値で、$\mathrm{E}(X)$ と書く。多数回の独立な繰り返しにおける長期的な平均である。期待値は加法的であり、$X$ と $Y$ が独立であってもなくても $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$ が成り立つ（Section 9.11）。

**極値原理（extremal principle）** ある種類の対象のうち最小のもの、最大のもの、最初のもの、最後のものに注目し、それが結論か矛盾のどちらかを導く性質をもつことを示す戦略（Section 1.3）。

## F

**体（field）** 通常の規則がすべて成り立つもとで、加法、減法、乗法、除法（零による除法を除く）ができる数の体系。有理数、実数、複素数はいずれも体であり、素数を法とする整数も体である。整数は、常に割り算ができるとは限らないので体ではない（Section 6.3）。

**体の拡大（field extension）** 小さい体を含む大きい体。たとえば、$a$、$b$ を有理数とする数 $a + b\sqrt{2}$ の全体は有理数全体を含む。その**次数**とは、小さい体上の**ベクトル空間**としての**次元**である（Section 6.3）。

**不動点（fixed point）** $f(x) = x$ を満たす点 $x$ で、関数がその場所から動かさない点。グラフ上では、不動点は $y = f(x)$ が $y = x$ と交わるところである（Section 2.2、Section 8.8）。

**座標系（frame of reference）** 位置や運動を測る立場。**慣性系**とはニュートン（Newton）の第 1 法則が成り立つ座標系のことである。加速している列車のような加速度系では、余分な力がはたらいているように見える（Section 11.5）。

**関数（function）** ある集合（**定義域**）の各元に、別の集合（**終域**）のちょうど 1 つの元を対応させる規則。大学では関数と式は同じものではない。多くの重要な関数は式をもたず、関数を定めない式もある。

**関数方程式（functional equation）** $f(x + y) = f(x)f(y)$ のように、未知のものが関数である方程式（Section 3.8）。

**代数学の基本定理（fundamental theorem of algebra）** 複素数係数をもつ次数 1 以上の多項式はすべて複素数の根をもち、したがって複素数の範囲で一次因数の積に完全に分解される。

## G

**ガンマ関数（gamma function）** 階乗を整数でない数に拡張する関数 $\Gamma$。整数 $n$ に対して $\Gamma(n+1) = n!$ であり、$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ である。後者は、ある意味で $(-\frac{1}{2})! = \sqrt{\pi}$ であることを述べている（Section 4.4）。

**ガウス整数（Gaussian integer）** $a$ と $b$ を整数とする複素数 $a + b\mathrm{i}$。通常の整数とよく似た振る舞いをし、独自の素数と素因数分解の一意性をもつ（Section 1.6）。ガウス（Gauss）にちなむ。

**母関数（generating function）** 係数が数列の項であるような冪級数 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$。乗法などの級数に対する演算が、数列に対する有用な演算に対応する

（Section 9.4）。**確率母関数**はランダムな整数の確率に対してこれを行うものであり（Section 9.6、Section 12.15）、**積率母関数**はその近い親戚である（Section 12.24）。

**群（group）** 結合的で、単位元をもち、すべての元に逆元が存在するような二項演算を備えた集合。図形の対称性全体は群をなし、零でない複素数全体も乗法について群をなす。群は対称性の言語である（Section 6.6、Section 6.7）。

### H

**双曲幾何学（hyperbolic geometry）** 与えられた直線上にない点を通り、その直線と決して交わらない直線が無限に多く存在し、三角形の内角の和が $\pi$ より小さくなる幾何学。距離の測り方を適切に定めた円板がそのモデルとなる（Section 5.8）。

### I

**単位元、恒等式（identity）** 演算 $*$ の単位元とは、すべての $a$ に対して $e*a = a*e = a$ を満たす元 $e$ のことである。加法では 0、乗法では 1、行列の乗法では単位行列 $\mathbf{I}$ がそれにあたる。これとは別に、恒等式とは、$\cos^2\theta + \sin^2\theta \equiv 1$ のように、変数のすべての値に対して成り立つ等式のことである。

**〜のとき、かつそのときに限り（if and only if）** 「$P$ であるのは $Q$ であるとき、かつそのときに限る」は、しばしば「$P$ iff $Q$」や $P \iff Q$ と書かれ、$P$ と $Q$ がともに真であるか、ともに偽であることを意味する。これを証明するには、両方向それぞれについて 1 つずつ、2 つの議論が必要である。

**独立（independent）** 2 つの事象が独立であるとは、一方が起こったことを知っても他方の確率が変わらないこと、すなわち $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ が成り立つことである。3 つ以上の事象は、全体としては独立でなくても、どの 2 つも独立であることがある（Section 12.4）。

**数学的帰納法（induction）** すべての整数 $n$ について命題を証明する方法。最初の値について証明し（**基底段階**）、次に、ある値で正しければ必ず次の値でも正しいことを証明する（**帰納段階**）。**強い帰納法**では、帰納段階で直前の値だけでなく、それより小さいすべての値についての命題を用いてよい（Section 1.2）。

**無限降下法（infinite descent）** 背理法の一形態。問題の整数解があればそれより小さい解が得られ、したがって正の整数の限りなく減少する列が得られることを示す。そのような列は存在しえない（Section 1.5）。

**中間値の定理（intermediate value theorem）** 連続関数が値 $a$ と $b$ をとるならば、その間のすべての値をとる。したがって、符号が変わる連続関数は必ず根をもつ

(Section 8.8)。

**不変量（invariant）** ある過程が進む間、あるいはある変換のもとで変化しない量。不変量を見つけることは、何かが不可能であることを証明したり、すべての段階を追わずに問題を解いたりするための最も強力な方法の 1 つである（Section 7.7、Section 10.4）。

**逆元、逆関数（inverse）** 単位元 $e$ をもつ演算に関する元 $a$ の逆元とは、$a * b = b * a = e$ を満たす元 $b$ のことである。逆関数は関数の作用を元に戻すもので、$\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{f}(x)) = x$ が成り立つ。

**無理数（irrational）** $\sqrt{2}$、$\pi$、e のように、$p$ と $q$ を整数（$q \neq 0$）とする分数 $\frac{p}{q}$ の形に書けない実数（Section 1.4）。

**既約（irreducible）** 多項式が既約であるとは、同じ種類の係数をもつ、より次数の低い 2 つの多項式の積として書けないことである。$x^2 - 2$ は有理数の範囲では既約であるが、実数の範囲では $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ と因数分解される（Section 6.1）。

**同型（isomorphic）** 2 つの**群**などの 2 つの構造が同型であるとは、それらの間に演算をぴったり対応させる**全単射**が存在することである。つまり、ラベルが異なるだけで同じ構造である（Section 6.7、Section 6.8）。

**反復（iteration）** 同じ関数を何度も繰り返し適用し、$x_1 = \mathrm{f}(x_0)$、$x_2 = \mathrm{f}(x_1)$、……とすること。数列 $x_0$、$x_1$、$x_2$、... を $x_0$ の**軌道**という（Section 8.7）。

## L

**大数の法則（law of large numbers）** 確率的な量の多数回の独立な繰り返しの平均は、**期待値**が存在するならば、その期待値に近づくという定理（Section 12.22）。

**補題（lemma）** 主として、より大きな**定理**へ向かう一段階として証明される結果。

**極限（limit）** 数列や関数がいくらでも近づき、しかも近いままであり続ける値。この考え方を正確にしたことは 19 世紀の数学の偉大な業績の 1 つであり、**解析学**の出発点である（Section 2.1）。

**リミットサイクル（limit cycle）** 系の運動における閉じたループで、近くの運動がそれに向かって（あるいはそれから離れて）渦を巻くもの。心臓の鼓動や時計の規則正しいリズムがその例である（Section 8.4）。

**線形写像（linear map）** ベクトル空間の間の関数 $T$ で、$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ と $T(\lambda \mathbf{u}) = \lambda T(\mathbf{u})$ を満たすもの。線形写像はすべて行列で表すことができ、線形代数はこれを研究する分野である（Section 7.2）。

**ロジスティック写像（logistic map）** 規則 $u_{n+1} = ru_n(1-u_n)$ で、食料の供給によって制限される個体群の簡単なモデルであり、**カオス**の標準的な例である（Section 8.7）。

### M

**マルコフ連鎖（Markov chain）** 状態の間を一歩ずつ移動するランダムな過程で、次の一歩の確率が、その過程がどのようにしてそこに至ったかによらず、現在の状態だけで決まるもの（Section 12.16）。マルコフ（Markov）にちなむ。

**最尤法（maximum likelihood）** 未知の量を推定する方法の 1 つで、観測されたデータが最も起こりやすくなる値を選ぶ（Section 13.2）。

**無記憶性（memoryless）** ランダムな待ち時間が無記憶性をもつとは、すでにどれだけ長く待っていても、残りの待ち時間が最初と同じ分布に従うことである。指数分布は、無記憶性をもつ唯一の連続分布である（Section 12.18）。

**最小多項式（minimal polynomial）** 有理数係数で最高次の係数が 1 であり、与えられた代数的数を根にもつ多項式のうち、次数が最も低いもの。$\sqrt{2}$ の最小多項式は $x^2 - 2$ である（Section 6.3）。

**合同算術（modular arithmetic）** **合同**を参照。

**慣性モーメント（moment of inertia）** 質量の回転版。物体の軸のまわりの回転の速さを変えることがどれほど難しいかを表す量である。質量がどれだけあるかだけでなく、その質量が軸からどれだけ離れているかによっても決まる（Section 11.7）。

**単調（monotonic）** 数列や関数が単調であるとは、決して減少しない（増加）か、決して増加しない（減少）ことである。有界な単調数列は必ず収束する（Section 2.2、Section 11.10）。

### N

**必要十分（necessary and sufficient）** $P$ なしに $Q$ が起こりえないとき（$Q \Rightarrow P$）、$P$ は $Q$ の必要条件であるという。$P$ が $Q$ を保証するとき（$P \Rightarrow Q$）、十分条件であるという。その両方である条件は $Q$ と同値である。

**基準振動（normal modes）** 系のすべての部分が同じ振動数でそろって動くような、特別な振動のパターン。系のどの振動も、その基準振動の組み合わせである（Section 11.2）。

## O

**位数（order）** 群の元 $g$ の位数とは、$g^n$ が単位元となるような最小の正の整数 $n$ のこと、すなわち、もとに戻るまでに何回適用しなければならないかを表す数である（Section 7.4）。加法に関する整数全体における数 1 のように、そのような $n$ が存在しないとき、$g$ は無限位数をもつという。有限群の位数とは、その群の元の個数である。

**直交（orthogonal）** 垂直であること。大学ではこの語はベクトル以外にも拡張して用いられ、適切な範囲で $\int \mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x = 0$ となるとき、2 つの関数 f と g は直交するということがある（Section 8.6）。

## P

**パラメータ（parameter）** ロジスティック写像における $r$ のように、1 つの問題の中では固定されているが、問題ごとに変わりうる量。STEP の問題の多くは、答えがパラメータにどのように依存するかを問う。

**部分和（partial sum）** 級数の最初の $n$ 項の和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$。部分和が収束するとき、級数は収束する（Section 2.3）。

**鳩の巣原理（pigeonhole principle）** $n$ 個より多い対象を $n$ 個の箱に入れると、少なくとも 2 つの対象を含む箱がある。単純ではあるが、驚くべき存在の結果をいくつも証明する（Section 9.2）。

**ポアソン過程（Poisson process）** 時間または空間の中で、ランダムに、互いに独立に、一定の平均の割合で起こる事象のモデル。放射性崩壊、電話の着信、空の星などがその例である（Section 12.19、Section 12.18）。ポアソン（Poisson）にちなむ。

**1 の原始冪根（primitive root of unity）** 1 の $n$ 乗根であって、その累乗によって 1 の $n$ 乗根 $n$ 個がすべて得られるもの。同値な言い方をすれば、より小さいどの $m$ に対しても 1 の $m$ 乗根にならないものである（Section 6.1）。

**確率密度関数（probability density function）** 連続的な確率的な量に対して、区間上の積分がその区間に値をとる確率を与える関数 f。

**証明（proof）** 定義、公理、すでに証明された結果から出発して、命題が正しいことを示す完全な論理的議論。大学では、正しい答えを与える計算であっても、各段階が正当化されていなければ証明ではない。

### Q

**四元数（quaternions）** 1843 年にハミルトン（William Rowan Hamilton）が発見した数の体系で、i、j、k と書かれる $-1$ の 3 つの平方根によって複素数を拡張したものであり、これらは $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ を満たす。その乗法は**可換**ではない。3 次元の回転を記述するのに用いられる（Section 6.7、Section 7.5）。

### R

**確率変数（random variable）** 硬貨を 10 回投げたときの表の回数のように、ランダムな試行の結果によって値が定まる量。

**ランダムウォーク（random walk）** 硬貨を投げた結果に応じて 1 マス左か右に動くコマのように、ランダムな歩みを次々につなげてできる経路（Section 9.10、Section 12.17）。

**ラピディティ（rapidity）** 特殊相対性理論における速さの尺度で、速度とは異なり、同じ向きの運動を組み合わせるときに単純に足し合わされるもの。$c$ を光速とすると、速度 $v$ のラピディティは $\operatorname{artanh}(v/c)$ である（Section 7.6）。

**漸化式（recurrence relation）** フィボナッチ数（Fibonacci numbers）に対する $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ のように、数列の各項をそれより前の項で表す等式。

**共鳴（resonance）** ぶらんこに乗った子どもをぶらんこの揺れに合わせて押すときのように、系自身の固有振動数で、あるいはそれに近い振動数で周期的に押されたときに生じる大きな応答（Section 11.1）。

**リーマン積分（Riemann integral）** 積分の正確な定義で、細い長方形の面積の和の極限として、その極限が存在するときに定めるもの（Section 4.1）。リーマン（Riemann）にちなむ。

**厳密性（rigour）** すべての段階が正当化され、明らかに見えるとか、試した例で正しかったとかいう理由で何かを当然とみなすことのない議論の水準（第 3 章）。

**1 の冪根（root of unity）** 複素数 $z$ で、ある正の整数 $n$ に対して $z^n = 1$ を満たすもの。1 の $n$ 乗根は $k = 0$、1、…、$n-1$ に対する $e^{2\pi i k/n}$ であり、これらは単位円上で正 $n$ 角形をなす（Section 5.2）。

### S

**標本空間（sample space）** ランダムな試行のすべての起こりうる結果の集合。事象はその部分集合である（Section 12.1）。

**集合（set）** 対象の集まり（その対象を**元**という）を 1 つのものとして考えたもの。元の順序は問題にならず、重複も問題にならない。$\{1,2,3\}$ と $\{3,1,2,2\}$ は同じ集合である。

**単振動（simple harmonic motion）** 加速度が定点からの変位に比例し、その定点に向かう運動で、$\ddot{x} = -\omega^2 x$ と表される。解は $x = A\cos(\omega t + \varepsilon)$ であり、周期 $2\pi/\omega$ は振れの大きさによらない（Section 11.4）。

**安定、不安定（stable, unstable）** **平衡**を参照。

**スターリングの公式（Stirling's formula）** 近似式 $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n$ で、$n$ が大きくなるにつれて相対誤差が零に近づく（Section 12.23）。

**部分群（subgroup）** **群**の部分集合で、同じ演算のもとでそれ自身が群になるもの（Section 6.6）。

**対称性による議論（symmetry argument）** 問題の中に 2 つの量を区別するものが何もないことから、それらが等しくなければならないと結論する議論。うまい対称性の議論は、何ページもの計算に取って代わることがある（Section 12.5）。

### T

**定理（theorem）** 証明された重要な命題。それほど重要でない結果は**命題**、定理への途中で証明される結果は**補題**、すぐに導かれる帰結は**系**と呼ばれることが多い。

**トレース（trace）** 正方行列の主対角線上の成分の和。**行列式**と同様に、行列を別の**基底**に関して書き直しても変わらず、**固有値**の和に等しい（Section 7.4、Section 7.7）。

**超越数（transcendental）** **代数的数**でない数。すなわち、すべてが零ではない整数係数のどんな多項式方程式の根にもならない数である。e と $\pi$ は超越数であるが、それを証明するのは難しい（Section 1.4）。

**三角不等式（triangle inequality）** 実数、複素数、ベクトルに対する $|a+b| \le |a| + |b|$。三角形の 1 辺の長さが、他の 2 辺の長さの和を超えることはない、ということである。

### U

**素因数分解の一意性（unique factorisation）** 1 より大きいすべての整数が、因数の順序の違いを除いてただ 1 通りに素数の積として書けるという性質。見かけほど明らかなことではなく、これが成り立たない数の体系もある（Section 1.7）。

**一意性定理（uniqueness theorem）** 問題の解が 1 つしかないことを述べる定理。微分

方程式では、方程式の性質がよくないと一意性が成り立たないことがあり、そのとき 1 つの初期点からいくつもの異なる未来が生じる（Section 8.1）。

### V

**ベクトル空間（vector space）** ベクトルと呼ばれる対象の集まりで、平面上の矢印についてのなじみのある規則に従って、互いに足し合わせたり数を掛けたりできるもの。多項式全体、関数全体、多くの微分方程式の解全体はいずれもベクトル空間をなすので、それらに線形代数の方法を適用できる（Section 6.3）。

### W

**矛盾なく定義される（well-defined）** 対象や規則が矛盾なく定義されているとは、その定義が本当にあいまいさのないただ 1 つのものを指定していること、たとえば、途中で行った任意の選択に依存しないことである。

**整列原理（well-ordering principle）** 正の整数からなる空でない集合はすべて最小の元をもつ。これは帰納法の原理と同値であり、「最小の反例をとる」で始まるすべての議論の背後にある（Section 1.3）。

**一般性を失わずに（without loss of generality）** しばしば WLOG と略される言い回しで、他の場合はラベルを付け替えれば同じになるので、議論では 1 つの場合だけを考える、という意味である。「一般性を失わずに $a \leq b$ としてよい」とは、$a > b$ の場合には両者の名前を入れ替えればよい、という意味である。

# 数学記号

数学の文章はわずかな記号に多くの意味を詰め込んでおり、大学の講義では、学校の教科書ではほとんど見かけない記号が数多く使われる。以下の表は本書で用いる記号を分野別にまとめ、それぞれの意味と読み方を示したものである。大半の記号は、大学で学び始めて数週間もすれば自然に使いこなせるようになる。それまでは、ここで調べればよい。

最初から知っておくとよい約束事が二つある。第一に、本書は STEP にならい、決まった意味をもつ一部の文字をイタリック体ではなく立体で印刷する。自然対数の底を表す e、$\sqrt{-1}$ を表す i、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ の d、そして $\mathrm{f}(x)$ や $\mathrm{P}(A)$ のような関数の名前である。イタリック体の文字は変数を表す。第二に、同じ記号が文脈によって異なる意味をもつことがある。その代表が $\equiv$ と $\sim$ であり、該当する箇所は表の中で指摘してある。

### 論理と証明

| 記号 | 意味 | 例または読み方 |
|---|---|---|
| $P \Rightarrow Q$ | $P$ ならば $Q$（$P$ implies $Q$）：$P$ が真ならば $Q$ も真である | $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$；「$P$ ならば $Q$」 |
| $P \Leftarrow Q$ | $Q$ ならば $P$ | 「$Q$ のとき $P$」 |
| $P \iff Q$ | $P$ と $Q$ は同値（if and only if）：互いに他を導く | $x^2 = 4 \iff x = \pm 2$；「iff」とも書く |
| $\forall$ | すべての、任意の（for all） | $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ |
| $\exists$ | 存在する（there exists） | $\exists n \in \mathbb{Z}$ で $n^2 = 9$ |
| $\neg P$ | $P$ でない、$P$ の否定（negation） | 「$\forall x,\ P(x)$」の否定は「$\exists x$ で $\neg P(x)$」 |
| $:=$ | 左辺を右辺で定義する（is defined to equal） | $\mathrm{f}(x) := x^2 + 1$ |
| ■ | 証明の終わり。QED とも書く | ラテン語 *quod erat demonstrandum*（「これが示すべきことであった」）に由来する |

## 集合と数の体系

| 記号 | 意味 | 例または読み方 |
|---|---|---|
| $\{\dots\}$ | 要素（element）を列挙した集合（set） | $\{1,2,3\}$ |
| $\{x:\dots\}$ | ……を満たすすべての $x$ の集合。$\{x \mid \dots\}$ とも書く | $\{x : x^2 < 2\}$；「$x^2 < 2$ を満たす $x$ の集合」 |
| $x \in A$ | $x$ は $A$ の要素である | $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$；「$\sqrt{2}$ は $\mathbb{R}$ に属する」 |
| $x \notin A$ | $x$ は $A$ の要素でない | $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ |
| $A \subseteq B$ | $A$ は $B$ の部分集合（subset）：$A$ のすべての要素が $B$ に属する | $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ |
| $A \cup B$ | 和集合（union）：$A$ または $B$（あるいは両方）に属する要素 | $\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$ |
| $A \cap B$ | 共通部分（intersection）：$A$ と $B$ の両方に属する要素 | $\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\}$ |
| $A \setminus B$ | $A$ の要素のうち $B$ に属さないもの | $\{1,2,3\} \setminus \{2\} = \{1,3\}$ |
| $A'$ | 補集合（complement）：$A$ に属さないものすべて | $A^c$ や $\bar{A}$ とも書く |
| $\varnothing$ | 空集合（empty set）：要素をもたない集合 | $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 0\} = \varnothing$ |
| $\lvert A \rvert$ | 有限集合 $A$ の要素の個数 | $\lvert\{a,b,c\}\rvert = 3$ |
| $A \times B$ | $a \in A, b \in B$ である組 $(a,b)$ 全体の集合 | $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ は平面であり、$\mathbb{R}^2$ とも書く |
| $\mathbb{N}$ | 自然数（natural numbers）$1,2,3,\dots$ | 0 を含める著者もいる |
| $\mathbb{Z}$ | 整数（integers）$\dots,-2,-1,0,1,2,\dots$ | ドイツ語の *Zahlen*（「数」）に由来する |
| $\mathbb{Q}$ | 有理数（rational numbers）、すなわち分数 | *quotient*（商）に由来する |
| $\mathbb{R}$ | 実数（real numbers） | |
| $\mathbb{C}$ | 複素数（complex numbers） | |
| $\mathbb{H}$ | 四元数（quaternions） | ハミルトン（Hamilton）にちなむ（Section 6.7） |
| $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ | $a,b \in \mathbb{Z}$ である数 $a + b\mathrm{i}$ | ガウス整数（Gaussian integers、Section 1.6） |
| $[a,b]$ | 閉区間（closed interval）：$a \le x \le b$ | 端点を含む |
| $(a,b)$ | 開区間（open interval）：$a < x < b$ | 端点を含まない。組や点を表すこともある |

## 数、整除性、近似

| 記号 | 意味 | 例または読み方 |
|---|---|---|
| $a \mid b$ | $a$ は $b$ を割り切る（divides）：$b$ は $a$ の整数倍である | $3 \mid 12$；「3 は 12 を割り切る」 |
| $a \nmid b$ | $a$ は $b$ を割り切らない | $5 \nmid 12$ |
| $a \equiv b \pmod{n}$ | $a$ と $b$ を $n$ で割った余りが等しい | $17 \equiv 2 \pmod{5}$；「17 は 5 を法として 2 と合同（congruent）である」 |
| $\equiv$ | （法を伴わない場合）恒等的に等しい（identically equal）：すべての値に対して成り立つ | $(x+1)^2 \equiv x^2 + 2x + 1$ |
| $\lfloor x \rfloor$ | 床関数（floor）：$\leq x$ である最大の整数 | $\lfloor 3.7 \rfloor = 3, \lfloor -3.7 \rfloor = -4$ |
| $\lceil x \rceil$ | 天井関数（ceiling）：$\geq x$ である最小の整数 | $\lceil 3.2 \rceil = 4$ |
| $n!$ | $n$ の階乗（factorial）$1 \times 2 \times \cdots \times n$ | 約束により $0! = 1$ |
| $\binom{n}{r}$ | 二項係数（binomial coefficient）$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ | 英語では「$n$ choose $r$」と読む。${}^{n}\mathrm{C}_{r}$ とも書く |
| $\approx$ | ほぼ等しい | $\pi \approx 3.1416$ |
| $\sim$ | 漸近的に等しい（asymptotic）：比が 1 に近づく | $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n$（ただし「確率と統計」も参照） |
| $\propto$ | 比例する（proportional） | $v \propto 1/d$ |
| $\pm, \mp$ | プラスまたはマイナス；マイナスまたはプラス | $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$ |
| $0.\overline{01}$ | 循環小数（recurring decimal）の繰り返す数字 | $0.\overline{01} = 0.010101\ldots$ |

## 関数

| 記号 | 意味 | 例または読み方 |
|---|---|---|
| $f : A \to B$ | f は集合 $A$ から集合 $B$ への関数（function）である | $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \dots$ | $x$ を……に移す | $x \mapsto x^2 - 2$；「$x$ を $x^2 - 2$ に写す」 |
| $f \circ g$ | 合成（composition）：g を施してから f を施す | $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ |
| $f^{-1}$ | f の逆関数（inverse function） | $1/f$ ではない |
| $f^n$ | 本書では通常、f を $n$ 回施したもの | $f^3(x) = f(f(f(x)))$；ただし $\sin^2 x$ は $(\sin x)^2$ を意味する |
| $\lvert x \rvert$ | 絶対値（modulus または absolute value） | $\lvert -3 \rvert = 3$ |
| $\exp x$ | 指数関数（exponential function）$e^x$ | |
| $\ln x$ | e を底とする自然対数（natural logarithm） | 大学ではしばしば $\log x$ と書く |
| sec, cosec, cot | $1/\cos$, $1/\sin$, $1/\tan$ | |
| arcsin, arccos, arctan | 逆三角関数（inverse trigonometric functions） | $\sin^{-1}$ などとも書く |
| sinh, cosh, tanh | 双曲線関数（hyperbolic functions）：$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\tanh = \sinh / \cosh$ | 英語ではそれぞれ「shine」（または「sinch」）、「cosh」、「than」（または「tanch」）と読む |
| artanh | tanh の逆関数 | $\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ |
| max, min | 最大値、最小値 | $\max(3, 7) = 7$ |
| $\Gamma(x)$ | ガンマ関数（gamma function） | $\Gamma(n+1) = n!$（Section 4.4） |

## 和、極限、微分積分

| 記号 | 意味 | 例または読み方 |
|---|---|---|
| $\sum$ | 和（sum） | $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ |
| $\prod$ | 積（product） | $\prod_{k=1}^{n} k = n!$ |
| $\infty$ | 無限大（infinity）：数ではなく、「限りなく」を表す略記 | $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ |
| $x \to a$ | $x$ は $a$ に近づく（tends to） | $n \to \infty$ のとき $\frac{1}{n} \to 0$ |
| $\lim$ | 極限（limit） | $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ |
| $\mathrm{f}'(x), \mathrm{f}''(x)$ | 1 階導関数と 2 階導関数（first and second derivatives） | 「エフダッシュ」または「エフプライム」 |
| $\dot{x}, \ddot{x}$ | 時間についての導関数 | $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$；「$x$ ドット」「$x$ ツードット」 |
| $\frac{\partial f}{\partial x}$ | 偏導関数（partial derivative）：ほかの変数を固定して $x$ について微分する | 「ラウンド $f$ ラウンド $x$」 |
| $\int_a^b$ | $a$ から $b$ までの定積分（definite integral） | |
| $\oint$ | 閉曲線を一周する積分 | $\oint p\,\mathrm{d}q$（Section 10.4） |
| $\delta x, \Delta x$ | $x$ の微小な変化；$x$ の変化 | |
| $\varepsilon, \delta$ | 解析学（analysis）で小さな正の数に慣習的に用いる名前 | 「任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して……」 |

## 複素数

| 記号 | 意味 | 例または読み方 |
|---|---|---|
| $\mathrm{i}$ | $-1$ の平方根の一つ | 工学では j と書く |
| $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ | 実部（real part）と虚部（imaginary part） | $z = 3 + 4\mathrm{i}$ ならば $\operatorname{Re} z = 3, \operatorname{Im} z = 4$ |
| $z^*, \bar{z}$ | 共役複素数（complex conjugate） | $(3+4\mathrm{i})^* = 3 - 4\mathrm{i}$；どちらの記法も使われる |
| $\lvert z \rvert$ | 絶対値：0 からの距離 | $\lvert 3 + 4\mathrm{i} \rvert = 5$ |
| $\arg z$ | 偏角（argument）：正の実軸からの角 | $\arg \mathrm{i} = \frac{\pi}{2}$ |
| $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ | $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ | $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$ |
| $\omega$ | 慣習的に、1 の虚数立方根（complex cube root of unity） | $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}, 1 + \omega + \omega^2 = 0$ |

## ベクトルと行列

| 記号 | 意味 | 例または読み方 |
|---|---|---|
| $\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AB}$ | ベクトル（vector）；$A$ から $B$ へのベクトル | 手書きでは $\underline{a}$ と書く |
| $\hat{\mathbf{n}}$ | 単位ベクトル（unit vector）：長さ 1 のベクトル | 「$n$ ハット」 |
| $\lvert\mathbf{a}\rvert$ | $\mathbf{a}$ の長さ（大きさ） | |
| $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ | 内積（scalar product、dot product） | $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta$ |
| $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ | 外積（vector product、cross product） | $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の両方に垂直 |
| $\mathbf{M}$ | 行列（matrix） | |
| $\mathbf{I}$ | 単位行列（identity matrix） | すべての $\mathbf{v}$ に対して $\mathbf{Iv} = \mathbf{v}$ |
| $\mathbf{M}^{-1}$ | 逆行列（inverse matrix） | $\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{I}$ |
| $\det\mathbf{M}$ | $\mathbf{M}$ の行列式（determinant） | $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ |
| $\operatorname{tr}\mathbf{M}$ | トレース（trace）：対角成分の和 | $\operatorname{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$ |
| $\lambda$ | 慣習的に、固有値（eigenvalue） | $\mathbf{Mv} = \lambda\mathbf{v}$ |

### 確率と統計

| 記号 | 意味 | 例または読み方 |
|---|---|---|
| $\mathrm{P}(A)$ | 事象 $A$ の確率（probability） | |
| $\mathrm{P}(A \mid B)$ | $B$ が与えられたときの $A$ の確率 | $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A \cap B)/\mathrm{P}(B)$；「$B$ のもとでの $A$」 |
| $\mathrm{E}(X)$ | $X$ の期待値（expectation）、すなわち平均 | $\mu$ とも書く |
| $\mathrm{Var}(X)$ | $X$ の分散（variance） | $\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$；$\sigma^2$ とも書く |
| $\mathrm{Cov}(X, Y)$ | 共分散（covariance） | $\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ |
| $\mathrm{Corr}(X, Y)$ | 相関係数（correlation） | $\mathrm{Cov}(X, Y)/\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$；$\rho$ とも書く |
| $X \sim \ldots$ | $X$ は分布……に従う | $X \sim \mathrm{B}(16, \frac{1}{2})$；「$X$ は……に従う」 |
| $\mathrm{B}(n, p)$ | 二項分布（binomial distribution） | $n$ 回の試行における成功の回数 |
| $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ | 平均 $\mu$、分散 $\sigma^2$ の正規分布（normal distribution） | |
| $\mathrm{f}(x), \mathrm{F}(x)$ | 確率密度関数（probability density function）；累積分布関数（cumulative distribution function） | $\mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(X \leq x)$ |
| $\mathrm{G}(t)$ | 確率母関数（probability generating function） | $\mathrm{G}(t) = \mathrm{E}(t^X)$ |
| $\mathrm{M}_X(\theta)$ | 積率母関数（moment generating function） | $\mathrm{M}_X(\theta) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta X})$ |
| $\bar{x}$ | 標本の平均 | $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$ |
| $\hat{\theta}$ | 未知の量 $\theta$ の推定値（estimate） | 「シータハット」 |

### ギリシャ文字

ギリシャ文字は数学のあらゆる場面で使われ、慣習的な意味をもつことも多い。下の表には小文字と大文字（ただし、アルファの A のようにローマ字と同じ形の大文字は、独立した記号として使われないので省いた）、名前、そして典型的な用法を示す。

| 文字 | 名前 | 典型的な用法 |
|---|---|---|
| $\alpha$ | アルファ（alpha） | 角；方程式の解 |
| $\beta$ | ベータ（beta） | 角；方程式の解；ベータ関数 |
| $\gamma, \Gamma$ | ガンマ（gamma） | オイラー（Euler）の定数 $\gamma \approx 0.5772$；ガンマ関数 $\Gamma$；相対性理論では $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ |
| $\delta, \Delta$ | デルタ（delta） | 小さな量；変化を表す $\Delta$、あるいは三角形や判別式（discriminant）を表す $\Delta$ |
| $\varepsilon, \epsilon$ | イプシロン（epsilon） | 小さな正の量；力学では位相角 |
| $\zeta$ | ゼータ（zeta） | $s > 1$ に対するリーマン（Riemann）のゼータ関数 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$（より高度な手法によって、$s = 1$ を除くほかの値にも拡張される） |
| $\eta$ | エータ（eta） | 効率；小さな量 |
| $\theta, \Theta$ | シータ（theta） | 角；統計における未知の母数（parameter） |
| $\iota$ | イオタ（iota） | ほとんど使われない |
| $\kappa$ | カッパ（kappa） | 曲率（curvature）；定数 |
| $\lambda, \Lambda$ | ラムダ（lambda） | 固有値；ポアソン（Poisson）分布の発生率などの母数；波長 |
| $\mu$ | ミュー（mu） | 平均；摩擦係数（coefficient of friction） |
| $\nu$ | ニュー（nu） | 振動数 |
| $\xi, \Xi$ | クシー（xi） | 変数や確率的な量 |
| $\pi, \Pi$ | パイ（pi） | $\pi \approx 3.14159$；積を表す $\Pi$ |
| $\rho$ | ロー（rho） | 密度；相関係数；原点からの距離 |
| $\sigma, \Sigma$ | シグマ（sigma） | 標準偏差（standard deviation）；和を表す $\Sigma$ |
| $\tau$ | タウ（tau） | 時間；トルク（torque） |
| $\upsilon, \Upsilon$ | ウプシロン（upsilon） | ほとんど使われない |
| $\phi, \varphi, \Phi$ | ファイ（phi） | 角；黄金比（golden ratio）$\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$；ラピディティ（rapidity）；標準正規分布の分布関数を表す $\Phi$ |
| $\chi$ | カイ（chi） | $\chi^2$（カイ二乗）分布 |
| $\psi, \Psi$ | プサイ（psi） | 量子力学（quantum mechanics）における波動関数（wave function） |
| $\omega, \Omega$ | オメガ（omega） | 角速度（angular velocity）または角振動数（angular frequency）；1 の立方根；標本空間（sample space）を表す $\Omega$ |

## 力学

| 記号 | 意味 | 例または読み方 |
|---|---|---|
| $g$ | 重力加速度（acceleration due to gravity） | 地表で約 $9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ |
| $G$ | 万有引力定数（gravitational constant） | 二つの質量の間にはたらく力は $Gm_1m_2/r^2$ |
| $e$ | 反発係数（coefficient of restitution）。イタリック体で書き、e と混同しないこと | 衝突の方向に沿って、遠ざかる速さ $= e\times$ 近づく速さ |
| $\omega$ | 角速度；角振動数 | 単振動（simple harmonic motion）では $\ddot{x} = -\omega^2 x$ |
| $I$ | 慣性モーメント（moment of inertia） | 回転のエネルギー $\frac{1}{2}I\omega^2$（Section 11.7） |
| $c$ | 光の速さ | 約 $3\times10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ |
| $\hbar$ | プランク（Planck）定数を $2\pi$ で割ったもの | 「エイチバー」（Section 8.6） |

章

# 1

# 数論と証明

整数は数学で最も古い対象であり、今なお数学の最も深い秘密のいくつかを抱えている。

**この章の内容**


| | | |
|---|---|---|
| **1.1** | 素数を生み出す工場 | STEP II 2002 |
| **1.2** | 素数はどれほどまばらか？ | STEP III 2016 |
| **1.3** | 最小の反例 | STEP III 2015 |
| **1.4** | $e$ は無理数であり、$e^2$ もまた無理数である | STEP III 2024 |
| **1.5** | 無限降下法 | STEP III 2022 |
| **1.6** | 二つの平方数の和 | STEP II 2023 |
| **1.7** | 因数分解が破綻するとき | STEP I 2016 |
| **1.8** | 有理数を数える | STEP III 2020 |
| **1.9** | 三次曲線の接線 | STEP I 2009 |
| **A** | 演習問題の答え | p. 109 |

# なぜ整数なのか

> 数学は科学の女王であり、数論は数学の女王である。
>
> — カール・フリードリヒ・ガウス（Carl Friedrich Gauss）

整数（whole numbers）は、誰もが最初に出会う数学的対象である。字が読めるようになる前から、私たちは数を数えることを覚えた。それにもかかわらず、整数についてのごく単純な問いが、恐ろしく難しいことがある。2 より大きいすべての偶数は、2 つの素数（prime）の和で表せるだろうか。答えは誰にもわからない。クリスティアン・ゴールドバッハ（Christian Goldbach）が 1742 年にこの問いを立て、コンピュータは $4 \times 10^{18}$ を超えるところまで確かめたが、いまだに証明されていない。11 と 13、101 と 103 のように、差が 2 である素数の組は無限に存在するだろうか。これも誰にもわからない。もっとも 2013 年には、ほとんど無名の数学者であった張益唐（Yitang Zhang）が、差が高々 70 百万である素数の組が無限に存在することを証明して世界を驚かせた。この値はその後 246 まで引き下げられている。ピエール・ド・フェルマー（Pierre de Fermat）は 1637 年、$n \geq 3$ のとき $x^n + y^n = z^n$ は正の整数解をもたない、と本の余白に書き付けた。アンドリュー・ワイルズ（Andrew Wiles）が 1994 年にフェルマーの正しさを証明するまでには、350 年以上の歳月と、これまでに生み出された中でも最も高度な数学のいくつかが必要であった。

子どもにも理解できる問いと、何世紀もかかりうる答え。この組み合わせこそが、数論（number theory）を病みつきにさせるものである。そしてこれは、数論がつねに**証明**（proof）の訓練の場であり続けてきた理由でもある。整数は無限に存在するので、すべての場合を確かめることはできない。そのようなときは、すべての場合を一度に扱える論証を見つけなければならない。これから先の数学人生で使うことになる証明の技法の多くは、もともと整数についての問いを通して磨かれたものである。

### 純粋で、役に立たず、そしてインターネットを支えるもの

1940 年、ケンブリッジの数学者ハーディ（G. H. Hardy）は、数論はあらゆる数学の中で最も純粋なものであり、日常生活からあまりにかけ離れているので実用には使えず、したがって**有害な**用途にも使えない、といくらか誇らしげに書いた。これほど見当違いの予言もなかなかない。オンラインで買い物をするとき、安全なメッセージを送るとき、スマートフォンのロックを解除するとき、私たちは数論に頼っている。RSA 暗号（1977 年）は、2 つの大きな素数を掛け合わせるのは簡単だが、その積からもとの素

数を復元するのは絶望的に難しいと考えられている、という事実に基づいている。現代の暗号方式は、この章の最後に登場する曲線そのものの算術を利用している。18 世紀と 19 世紀の「役に立たない」数学は、21 世紀の安全を支えるものとなったのである。

### 大学で出会うもの

大学で数学を学ぶなら、数論は最初に訪れる場所のひとつであり、最後に行き着く場所のひとつでもある。

- **最初の学期には**、ほぼ間違いなく「数と集合（*Numbers and Sets*）」や「数学の基礎（*Foundations*）」といった名前の講義を受けることになる。そこでは証明をきちんと書く方法を学ぶが、その素材の多くは数論である。帰納法（induction）、ユークリッドの互除法（Euclidean algorithm）、合同算術（modular arithmetic）、フェルマーの小定理（Fermat's Little Theorem）、中国剰余定理（Chinese Remainder Theorem）、そして無限集合の中には他より大きいものがあるという驚くべき事実などである。
- **群論**（group theory）では（通常は 1 年目に学ぶ）、数論の多くの事実が、対称性についてのただひとつの定理、すなわちラグランジュの定理（Lagrange's Theorem）の影であることを知るだろう。
- **2 年目には**、**数論**の講義で、平方剰余の相互法則（quadratic reciprocity、ガウスの「黄金定理」）、連分数（continued fractions）、ペル方程式（Pell's equation）を扱うのが普通である。
- **その先には**さらに進むことができる。ガウス整数（Gaussian integers）のような新しい数の体系によって素因数分解の一意性（unique factorisation）を救い出す**代数的整数論**（algebraic number theory）、微積分と複素解析（complex analysis）を用いて素数を数える**解析的整数論**（analytic number theory）、そしてフェルマーの最終定理（Fermat's Last Theorem）の証明や、賞金 100 万ドルの 7 つのミレニアム懸賞問題（Millennium Prize Problems）のひとつの背後にある**楕円曲線**（elliptic curves）の理論である。

### この章を貫く問い

この章の 9 つの STEP の問題は、3 つの大きな問いのまわりを巡っている。問題に取り組む間、これらを頭の片隅に置いておいてほしい。章の最後で再びこれらに立ち返る。

1. **素数はいくつあり、どのように分布しているのか。**素数が無限に存在することは誰もが知っている。しかし、素数はどれほどまばらになっていくのか。そして、どのような論証がそれを教えてくれるのか。

2. **ある数が分数ではないことは、どうすれば証明できるのか。**ある数が有理数（rational）であることを示すには、例をひとつ挙げればよい。しかし無理数（irrational）であることを示すには、無限に多くの可能性を排除しなければならない。そんなことがいったいどうすればできるのか。

3. **どの方程式が整数解をもつのか。そして、数の体系を変えると何が起こるのか。**方程式が解をまったくもたないことを示せる場合もある。また、整数を理解する最善の方法が、整数の外に出て、複素数の世界や曲線の上に踏み出すことである場合もある。

### 証明についての章

これら 3 つの問いの底には、第 4 のテーマが流れている。それは**どのように証明するか**である。各節は、異なる証明の方法が実際に働くところを示すという理由もあって選ばれており、全体として大学 1 年生にとって十分な道具箱になっている。

| § | テーマ | 考え方 |
|---|---|---|
| 1.1 | フェルマー数（Fermat numbers） | 無限に多くの素数を**必要とする**無限の数の族 |
| 1.2 | 素数の積 | 強帰納法（strong induction）、二項係数（binomial coefficients）に隠された情報 |
| 1.3 | 再び $\sqrt{2}$ | 「最小のものをとれ」：整列原理（well-ordering principle） |
| 1.4 | $e$ と $e^2$ | 整数を 0 と 1 の間に厳密に閉じ込める |
| 1.5 | 解をもたない方程式 | 無限降下法（infinite descent）、法 $n$（modulo $n$）で考える |
| 1.6 | 2 つの平方数の和 | 舞台を変える：複素数 |
| 1.7 | 奇妙な数の体系 | 当然と思っていることを疑う |
| 1.8 | 分数を並べ上げる | 全単射（bijection）を構成する、逆向きの降下法 |
| 1.9 | 立方数と曲線 | 幾何で算術を解く |

### この章の読み方

各節は、出題されたままの STEP の問題へのリンクから始まる。読み進める前に、まず少なくとも 30 分は自分で取り組んでみてほしい。読んだだけの問題よりも、苦労して格闘した問題からのほうが、はるかに多くを学べる。読み進めるときには、**自問してみよう**の枠は答えが示される前に立ち止まって考えるよう促すものであり、**手を止めて考えよう**の枠は鍵となる考え方に手が届く瞬間を示している。そして各節の**背後**

**にある数学**の部分では、試験の先にある、大学で出会う数学を見渡す。

各節はおおむね後になるほど高度になるが、互いにほぼ独立している。ある節に興味を引かれなければ、先に進み、後で戻ってくればよい。

# 1.1 素数を生み出す工場

**問題**

**STEP II 2002、問 3**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/02-s2-q3`

## 導入

素数（prime）が無限に存在することは、ほぼ間違いなくすでに知っているだろう。ユークリッド（Euclid）が紀元前 300 年頃に証明したもので、誰もが最初に出会う証明の一つである。では、なぜ STEP の問題がそれをもう一度証明させるのだろうか。

それは、この証明がまったく異なる仕組みで働くからである。ユークリッドの議論は「素数の有限なリストを一つ与えよ。それが不完全であることを示してみせよう」というものである。一方この証明は「ここに、あらかじめ書き下された一つの具体的な数列がある。そのどの項も、他のどの項にも含まれない素数を含んでいる」と主張する。これは新しい素数を次々と生み出す機械であり、それが機能する理由は、問題が導いてくれる美しく単純な恒等式にある。

その途中で、フェルマー本人さえも欺いた数に出会うことになる。

## 取りかかる前に

まず問題を一通り読み、その構成に注目しよう。四つの段階からなっている。

1. いくつかの例を計算する。
2. パターンを見つけ（というより、教えてもらい）、それらの例で確かめる。
3. そのパターンを一般に証明する。
4. そのパターンを二度使う。まず公約数（common factor）についての結論を導き、次に素数についての結論を導く。

この「例 → 予想（conjecture）→ 証明 → 帰結」という構造は、実際に多くの数学が行われる方法そのものであり、STEP の問題もしばしばこの流れに従う。これに気づいたら、前半の小問は単なる準備運動ではないことが多い。後で必要になる直観を養う場所なのである。

> ? **考えてみよう**　最後の行は**無限に多くの素数**について問うている。中ほどでは**公約数**について問うている。「どの二つのフェルマー数も共通の約数をもたない」ことと「素数は無限に存在する」こととは、いったいどうつながりうるのだろうか。

この問いを心に留めておこう。後で戻ってくる。

## 順を追って解く

### 段階 1　数の感触をつかむ

記法に注意しよう。$2^{2^n}$ は $2^{(2^n)}$ を意味し、$(2^2)^n$ ではない。指数そのものが 2 の累乗なので、これらの数は**非常に**速く大きくなる。

$$F_0 = 2^1 + 1 = 3, \qquad F_2 = 2^4 + 1 = 17,$$
$$F_1 = 2^2 + 1 = 5, \qquad F_3 = 2^8 + 1 = 257.$$

> ? **考えてみよう**　これら四つの数について、何に気づくだろうか。

すべて素数である。（257 を確かめよう。これは 2, 3, 5, 7, 11 のいずれでも、また 13 でも割り切れず、$17^2 = 289 > 257$ なので、ここで調べるのをやめてよい。）次の $F_4 = 2^{16} + 1 = 65537$ も素数である。ピエール・ド・フェルマー（Pierre de Fermat）は 1640 年にまさにこのことに気づき、この形の数は**すべて**素数であると予想した。このことを覚えておこう。彼が正しかったかどうかは後で見る。

### 段階 2　恒等式を確かめる

次に、小さな $k$ について $(*)$ を確かめよう。

- $k = 1$：左辺は単に $F_0 = 3$ であり、$F_1 - 2 = 3$ である。✓
- $k = 2$：$F_0 F_1 = 3 \times 5 = 15$ であり、$F_2 - 2 = 15$ である。✓
- $k = 3$：$F_0 F_1 F_2 = 15 \times 17 = 255$ であり、$F_3 - 2 = 255$ である。✓

**考えてみよう** $k=2$ から $k=3$ への移り変わりを見てみよう。15 に 17 を掛けて 255 を得た。フェルマー数（Fermat number）の言葉で言えば、$(F_2-2)\times F_2$ を計算して $F_3-2$ を得たことになる。これは偶然だろうか。

この観察こそが、証明全体の縮図である。なぜそれが成り立つはずなのかを見ていこう。

### 段階 3 恒等式を証明する

**手を止めて、やってみよう** 先を読む前に、

$$(F_k-2)\,F_k = F_{k+1}-2.$$

を直接示してみよう。**ヒント：**すべてを 2 の累乗で表してみよ。$F_k-2$ はどのような形をしているか。

$F_k-2=2^{2^k}-1$ かつ $F_k=2^{2^k}+1$ であるから、

$$(F_k-2)\,F_k=\left(2^{2^k}-1\right)\left(2^{2^k}+1\right).$$

**考えてみよう** これは $(a-1)(a+1)$ の形の積である。これは何に等しいか。

これは平方の差（difference of two squares）$a^2-1$ である。$a=2^{2^k}$ とすると、

$$a^2=\left(2^{2^k}\right)^2=2^{2\cdot 2^k}=2^{2^{k+1}},$$

したがって

$$(F_k-2)\,F_k=2^{2^{k+1}}-1=F_{k+1}-2. \tag{†}$$

これが原動力である。2 乗することが何をしているかに注目しよう。2 乗は指数を 2 倍にし、$2^k$ を 2 倍すると $2^{k+1}$ になる。フェルマー数の定義は、平方の差による因数分解にぴったり合うように作られているのである。

ここまで来れば、帰納法（induction）はほとんど自動的である。

**考えてみよう** 帰納法のステップでは、正確には何を示す必要があるか。

ある $k\geq 1$ について $(*)$、すなわち

$$F_0F_1\cdots F_{k-1}=F_k-2,$$

が成り立つと仮定し、$k+1$ についても成り立つこと、すなわち

$$F_0F_1\cdots F_{k-1}F_k=F_{k+1}-2.$$

を示したい。仮定の両辺に $F_k$ を掛け、(†) を用いると

$$F_0F_1\cdots F_{k-1}F_k = (F_k-2)\,F_k = F_{k+1}-2.$$

となる。$k=1$ はすでに確かめたので、数学的帰納法により $(*)$ はすべての $k\geq 1$ について成り立つ。 ■

> **考えてみよう**　帰納法をまったく使わずに済ませることはできただろうか。

できる。その方法を見ておく価値がある。$F_0-2=1$ から出発して、(†) を繰り返し適用すると

$$F_k-2 = (F_{k-1}-2)F_{k-1} = (F_{k-2}-2)F_{k-2}F_{k-1} = \cdots = (F_0-2)\,F_0F_1\cdots F_{k-1}.$$

となる。$F_0-2=1$ であるから、これで示された。この「展開」は実は同じ帰納法をすべて書き下したものにすぎないが、こちらのほうが見通しやすいと感じる人もいる。

### 段階 4　共通の約数はない

$m\neq n$ ならば $F_m$ と $F_n$ が 1 より大きい公約数をもたないことを示したい。

> **考えてみよう**　ある数 $d$ が $F_m$ と $F_n$ の両方を割り切るとし、$m<n$ とする。$F_m$ は $(*)$ のどこに現れるか。

$(*)$ で $k=n$ とすると

$$F_0F_1\cdots F_m\cdots F_{n-1} = F_n-2.$$

$m<n$ であるから、$F_m$ は左辺の因数の一つである。よって $d$ が $F_m$ を割り切るならば、$d$ は左辺全体を割り切る。すなわち、$d$ は $F_n-2$ を割り切る。

> **考えてみよう**　さて、$d$ は $F_n$ と $F_n-2$ の両方を割り切る。ほかに何を割り切らなければならないか。

それらの差である。$d$ は $F_n-(F_n-2)=2$ を割り切る。よって $d=1$ または $d=2$ である。

> **考えてみよう**　$d$ は 2 でありうるか。

ありえない。どのフェルマー数も 2 の累乗に 1 を加えたものなので奇数である。したがって $d=1$ であり、相異なる二つのフェルマー数が 1 より大きい共通の約数をもつことはない。 ■

数学者はこれを、フェルマー数は**どの二つも互いに素**（pairwise coprime）であるという。

### 段階 5 素数は無限に存在する

ここで、最初に立てた問いに戻ろう。

> **考えてみよう** 1 より大きいすべての整数は、少なくとも一つの素因数（prime factor）をもつ。各フェルマー数から素因数を一つずつ選ぶ。選んだ素数について何が言えるか。

$p_n$ を $F_n$ を割り切る任意の素数とする。もしこれらのうち二つが等しい、たとえば $m \neq n$ で $p_m = p_n$ であるとすると、その素数は $F_m$ と $F_n$ の 1 より大きい公約数となるが、これは先ほど不可能であると示した。したがって素数

$$p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ \dots$$

はすべて**相異なる**。フェルマー数は無限に存在するので、相異なる素数も無限に存在する。 ■

各フェルマー数を**どの**素数が割り切るのかを知る必要はまったくなかったし、フェルマー数自身が素数かどうかさえ知る必要がなかったことに注目しよう。必要だったのは、それらが決して共通の約数をもたないということだけである。各フェルマー数は、他のどれも使えない素数を少なくとも一つ「使い切る」ことを強いられているのである。

| $n$ | $F_n = 2^{2^n} + 1$ | 素因数分解 |
|---|---|---|
| 0 | 3 | 素数 |
| 1 | 5 | 素数 |
| 2 | 17 | 素数 |
| 3 | 257 | 素数 |
| 4 | 65 537 | 素数 |
| 5 | 4 294 967 297 | $641 \times 6\,700\,417$ |
| 6 | 18 446 744 073 709 551 617 | $274\,177 \times 67\,280\,421\,310\,721$ |

**図 1.1.1** 最初のいくつかのフェルマー数。フェルマーはこれらがすべて素数であると推測したが、オイラー（Euler）が 1732 年に $F_5$ の約数 641 を見つけた。$F_4$ より先のフェルマー数で素数であると知られているものは一つもない。それでも恒等式 $(*)$ は、異なるフェルマー数の素因数が決して重ならないことを示している。各行が新しい素数をもたらすのである。

## 振り返り

何がこの議論をうまく機能させたのかを立ち止まって確かめておく価値がある。同じ考え方は本書で何度も現れるからである。

- **例は飾りではなかった。** $15 \times 17 = 255$ が「$(F_2 - 2) \times F_2 = F_3 - 2$」であると見抜くことこそが、鍵となる考え方だったのである。問題が小さな場合を与えてくれたら、数値が一致するかどうかだけでなく、各ステップが何をしているのかを問おう。
- **一つの恒等式がすべての仕事をした。** すべては $(a-1)(a+1) = a^2 - 1$ から流れ出た。難しそうに見える STEP の問題は、しばしば一つの単純な代数計算によって動いている。
- **最後の議論は大きさではなく構造についてのものである。** 新しい素数を一つも見つけることなく、素数が無限に存在することを証明した。その代わりに、無限個の数の族を作り上げるには無限に多くの素数が**必要である**ことを示したのである。

## 背後にある数学

### フェルマーは正しかったか

正しくなかった。1732 年、レオンハルト・オイラー（Leonhard Euler）は

$$F_5 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417.$$

であることを示した。オイラーは偶然 641 を見つけたのではない。彼は $F_n$ の素因数はきわめて特殊な形をしていなければならないこと（$n = 5$ のときは、64 の倍数に 1 を加えた数でなければならないこと）を証明し、それによって候補を大幅に絞り込んだのである。このことは演習 4 で自分で証明できる。

それ以来、これまでに調べることができた $F_5$ から $F_{32}$ までのすべてのフェルマー数は、合成数（composite）であることが判明している。知られている限りでは、$F_0$ から $F_4$ までが**唯一の**フェルマー素数かもしれないが、それを証明できた者はいない。これは正真正銘の未解決問題である。

愉快なひねりは、私たちの証明はそのことをまったく気にしないという点である。素数であれ合成数であれ、フェルマー数はやはり無限に多くの素数を生み出すのである。

### フェルマー素数と多角形の作図

フェルマー素数は、まったく思いがけない場所に現れる。古代ギリシャ人は定規とコンパスで正三角形と正五角形を作図する方法を知っていたが、$3 = F_0$ かつ $5 = F_1$ であることに注目しよう。二千年もの間、辺の数が素数であるそれ以外の正多角形を作図できた者はいなかった。そして 1796 年、19 歳のカール・フリードリヒ・ガウス（Carl Friedrich Gauss）が正 *17* **角形**の作図法を示した。そして $17 = F_2$ である。

ガウスはさらに進んだ。正 $N$ 角形が定規とコンパスで作図できるのは、$N$ が 2 の累乗と**相異なるフェルマー素数**の積であるときであり、かつそのときに限る。（Pierre Wantzel が 1837 年に証明を完成させた。）つまり、どの多角形が作図できるかは、フェルマー素数がいくつあるかに依存するのである。ガウスの 17 角形の背後にある鍵となる計算には Section 6.2（STEP II 1991, Question 4）で出会うことになる。そして物語の全貌は、大学の学部課程の白眉の一つである**ガロア理論**（Galois theory）に属している。

### 一つの定理、多くの証明

数学者はなぜ同じ定理を何度も証明しようとするのだろうか。それは、異なる証明が異なることを明らかにするからである。この証明は通常、クリスティアン・ゴールドバッハ（Christian Goldbach）が 1730 年にオイラーに宛てた手紙によるものとされるが、これは、1 より大きい整数からなり、どの二つも互いに素であるような**任意の**無限数列が、無限に多くの素数の存在を導くことを示している。フェルマー数はその便利な一例にすぎない。（演習 3 で別の例を扱う。）

この証明はまた、ユークリッドの証明よりも多くのことを教えてくれる。素数 $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ は $n$ 個の**相異なる**素数であり、それぞれ $F_{n-1}$ 以下である。したがって、$2^{2^{n-1}} + 1$ 以下の素数は少なくとも $n$ 個ある。これは素数がどのように分布しているかについての**定量的**（quantitative）な主張である。非常に弱い主張ではある（実際にはずっと良いことが成り立つ）が、素数がどのようにまばらになっていくかを正確に記述する、19 世紀数学の偉大な成果の一つである**素数定理**（Prime Number Theorem）への第一歩なのである。Section 1.2 でその次の一歩を踏み出す。

## 思考のスキル

**構造的な性質から議論を組み立てる**

種類 $A$ の対象が無限に存在することを示すには、種類 $B$ の対象を無限に見つけ、そのそれぞれが自分専用の種類 $A$ の対象を必要とするようにせよ。

ここでは A = 素数、B = フェルマー数であり、「自分専用のものを必要とする」とは「他のどれとも共有しない素因数をもつ」ことを意味する。同じパターンは、数え上げの議論や、線形代数（無限に多くの一次独立なベクトルがあれば次元は無限になる）、そして解析学にも現れる。

また、帰納法、とりわけ「$k$ から $k+1$ へのステップは実際に何をしているのか」と問う習慣も練習した。この問いは、形式的なひな形よりも役に立つことが多い。

## 次の一歩

1 **ユークリッドの証明。** 素数が無限に存在することのユークリッドによる証明を書き出せ。それはどのような意味で「背理法（contradiction）による」証明であり、フェルマー数による証明はどのような意味で「構成的（constructive）」な証明であるか。

2 **一の位の数字。** $n \geq 2$ のとき、フェルマー数 $F_n$ の一の位は 7 であることを示せ。

3 **シルベスター（Sylvester）の数列。** $a_1 = 2$、$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$ と定める。この数列は $2, 3, 7, 43, 1807, \ldots$ と始まる。

   (a) $a_{n+1} - 1 = a_1 a_2 \cdots a_n$ を示せ。

   (b) 各項はどの二つも互いに素であることを導き、それにより素数が無限に存在することの別証明を与えよ。

   (c) やや難 $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} = 1 - \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$ を示せ。

4 **オイラーの技法。** この問題ではフェルマーの小定理（*Fermat's Little Theorem*）を用いる。すなわち、$p$ が素数で $p \nmid a$ ならば $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ である。素数 $p$ が $F_n$ を割り切るとする。

   (a) $2^{2^n} \equiv -1 \pmod{p}$ を示し、それにより $2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod{p}$ を示せ。

   (b) $d$ を $2^d \equiv 1 \pmod{p}$ を満たす最小の正の整数とする。$d$ は $2^{n+1}$ を割り切るが $2^n$ は割り切らないことを示し、$d = 2^{n+1}$ であると結論せよ。

(c) フェルマーの小定理を用いて、$d$ が $p-1$ を割り切ることを示せ。それにより $p \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$ を導け。

(d) $n = 5$ のとき、これは $F_5$ の任意の素因数が $64k+1$ の形をしていることを意味する。641 がこの形であることを確かめよ。641 より小さいこの形の素数はいくつあるか。

**5 素数の上界。一つの定理、多くの証明**の議論を用いて、$n$ 番目の素数は $2^{2^{n-1}}+1$ 以下であることを示せ。$n = 5$ のとき、この上界はどの程度良いか。

## さらに学ぶために

- **Martin Aigner & Günter M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK***（Springer）、第 1 章「Six proofs of the infinity of primes」（素数が無限に存在することの六つの証明）。この証明が、ユークリッドの証明や、位相空間論を用いるものを含む他の四つの証明とともに収められている。大学入学前に読める最良の本の一つである。
- **Harold Davenport, *The Higher Arithmetic***（Cambridge University Press）、第 1–2 章。素数と素因数分解への見事な筆致の入門書であり、大学入学前の夏に読むのに理想的である。
- **Michal Křížek, Florian Luca & Lawrence Somer, *17 Lectures on Fermat Numbers***（Springer, 2001）。オイラーによる因数分解からガウスの多角形まで、フェルマー数のすべてが書かれている。最初のほうの章を拾い読みするとよい。
- **Ian Stewart, *Why Beauty Is Truth***（Basic Books）、ガウスについての章。17 角形の物語が一般読者向けに語られている。

# 1.2 素数はどれほどまばらか？

**問題**

**STEP III 2016、問 5**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/16-s3-q5`

## 導入

Section 1.1 では、素数（prime）が無限に存在することを見た。しかし「無限に存在する」というのは大ざっぱな主張である。素数は確かにまばらになっていく。100 未満の素数は 25 個あるが、900 と 1000 の間には 14 個しかない。では、素数は**どの程度**まばらになるのだろうか。

この問題で証明するのは、一見ごく控えめな事実である。$n$ 以下のすべての素数を掛け合わせると、その積は $4^n$ より小さい。しかしこの何気ない不等式（inequality）こそが「どの程度まばらか」という問いに答えるための最初の本格的な一歩であり、1932 年に若きポール・エルデシュ（Paul Erdős）が与えた、数学で最も有名な短い証明の一つにおける鍵となる補題（lemma）なのである。

## 取りかかる前に

記号 $P_{r,s}$ は煩わしく見えるが、考え方は単純で、ある範囲にある素数を掛け合わせるだけである。例をしっかり理解しておこう。$P_{3,7}$ は 3 より大きく 7 以下の素数、すなわち 5 と 7 を用いるので、35 となる。

? **考えてみよう** 小問 (iv) では、**すべての** $n \geq 2$ について命題を証明することが求められている。小問 (iii) では、$2m$ までのすべての $k$ について命題が成り立つと仮定している。これはどのような帰納法（induction）だろうか。

これは**強い**帰納法（strong induction）である。$n$ の場合を証明するために、直前の場合だけでなく、それ以前の**すべての**場合を仮定してよい。このことを覚えておこう。

問題がこのように構成されているのはそのためである。

## 順を追って解く

### 段階 1　二項係数（binomial coefficient）はそれほど大きくない

**考えてみよう**　$(1+x)^{2m+1}$ の二項展開（binomial expansion）で $x=1$ とおくと何が得られるか。

次が得られる。

$$2^{2m+1} = \binom{2m+1}{0} + \binom{2m+1}{1} + \cdots + \binom{2m+1}{2m+1}.$$

すべての項は正なので、どの項も $2^{2m+1}$ より小さい。しかしこれでは少し足りない。欲しいのは $2^{2m}$、つまりその半分である。

**考えてみよう**　パスカルの三角形（Pascal's triangle）は左右対称である。和の中で $\binom{2m+1}{m}$ と等しい項は他にどれか。

対称性より $\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1}$ であり、これらは和の中の**異なる 2 つの項**である（$m \neq m+1$ だから）。したがって

$$2\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} < 2^{2m+1},$$

となる。和には $\binom{2m+1}{0} = 1$ など他の正の項も含まれているので、不等号は等号を含まない。2 で割ると $\binom{2m+1}{m} < 2^{2m}$ を得る。 ■

### 段階 2　その二項係数を割り切る素数はどれか

二項係数を書き下すと、

$$\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{m!\,(m+1)!} = \frac{(m+2)(m+3)\cdots(2m+1)}{m!}.$$

**考えてみよう**　$p$ を $m+1 < p \le 2m+1$ を満たす素数とする。$p$ は分子を割り切るか。分母を割り切ることはあり得るか。

分子 $(m+2)(m+3)\cdots(2m+1)$ は因数の一つとして $p$ 自身を含むので、$p$ はこれを割り切る。分母 $m!$ はすべて $p$ より小さい数の積である。$p$ は素数なので、どれも $p$ で割り切れない数の積を割り切ることはできない。よって $p$ は分子を割り切るが分母は割り切らず、したがって二項係数全体（これが整数であることを思い出そう）を割り切る。

**手を止めて、やってみよう** これで、この範囲にある各素数が $\binom{2m+1}{m}$ を割り切ることがわかった。では、なぜそれらの積 $P_{m+1,2m+1}$ もこれを割り切るといえるのか。（注意：4 と 6 がともにある数を割り切っても、24 がその数を割り切るとは限らない。）

違いは、ここでの素数が**相異なる素数**であることにある。相異なる素数 $p_1, p_2, \ldots$ がそれぞれ $N$ を割り切るならば、それらの積も $N$ を割り切る。実際、$N = p_1 N_1$ と書くと、$p_2$ は $p_1 N_1$ を割り切るが $p_1$ は割り切らないので、$N_1$ を割り切る。以下同様である。（ここでは、素数がある積を割り切るならばその因数のいずれかを割り切る、という事実を用いている。この事実には少し立ち止まって敬意を払う価値がある。Section 1.7 では、これに相当する性質が成り立たない世界を紹介する。）

よって $P_{m+1,2m+1}$ は $\binom{2m+1}{m}$ を割り切り、正の数の約数はその数を超えないので、

$$P_{m+1,\,2m+1} \le \binom{2m+1}{m} < 2^{2m}. \qquad \blacksquare$$

### 段階 3 積を分割する

**考えてみよう** $2m+1$ 以下のすべての素数の積 $P_{1,2m+1}$ を、すでにわかっている積からどのように組み立てられるか。

$2m+1$ 以下の素数を、$m+1$ 以下のものと $m+1$ より大きいものに分ける。

$$P_{1,2m+1} = P_{1,m+1} \times P_{m+1,2m+1}.$$

2 つ目の因数は段階 2 より $2^{2m} = 4^m$ より小さい。1 つ目については、2 から $2m$ までのすべての $k$ について $P_{1,k} < 4^k$ を仮定してよく、$k = m+1$ はこの範囲に入っている（$m \ge 1$ より $2 \le m+1 \le 2m$ だから）。したがって

$$P_{1,2m+1} < 4^{m+1} \times 4^m = 4^{2m+1}. \qquad \blacksquare$$

ここで強い帰納法がその真価を発揮する。$2m+1$ の場合を扱うのに必要だったのは、直前の場合ではなく、およそ**半分**の大きさである $m+1$ の場合だったのである。

### 段階 4 すべての $n$

**考えてみよう** 小問 (iii) は奇数を扱っている。偶数 $n = 2m+2$ の場合はどうなるか。それは素数だろうか。

まず出発点を確認する。$P_{1,2} = 2 < 16$、$P_{1,3} = 6 < 64$ である。次に、$n \ge 4$ として、2 から $n-1$ までのすべての $k$ について $P_{1,k} < 4^k$ が成り立つと仮定する。

- $n$ が偶数ならば、$n$ は（2 より大きいので）素数ではなく、$n$ 以下の素数は $n-1$ 以下の素数と同じである。よって $P_{1,n} = P_{1,n-1} < 4^{n-1} < 4^n$ となる。
- $n$ が奇数ならば、$m \geq 2$ として $n = 2m+1$ と書く。すると小問 (iii) により直ちに $P_{1,n} < 4^n$ を得る。

強い帰納法により、すべての $n \geq 2$ について $P_{1,n} < 4^n$ が成り立つ。 ■

## 振り返り

- **二項係数は数論的な情報を担っている。** $\binom{2m+1}{m}$ は（$4^m$ 未満という）小さな一つの数でありながら、多くの素数で割り切れざるを得ない。多くの素数を小さな数に押し込むことで、それらの素数がそれほど多くはあり得ないことがわかるのである。
- **問題が自らを半分にするとき、強い帰納法は自然な道具である。** $2m+1$ の場合は $m+1$ の場合に依存していた。
- **小さな場合は別に確認する必要がある。** 帰納法が回り始めるのは $n \geq 4$ からなので、$n = 2$ と 3 は手で確かめなければならなかった。

## 背後にある数学

### $4^n$ から素数定理（Prime Number Theorem）へ

結果の対数（logarithm）をとると $\ln P_{1,n} < n \ln 4$、すなわち

$$\sum_{p \leq n} \ln p < (\ln 4)\, n \approx 1.39\, n.$$

となる。1850 年代にパフヌティ・チェビシェフ（Pafnuty Chebyshev）は、まさにこの種の評価を上からも下からも証明し、$\sum_{p \leq n} \ln p$ が $n$ に比例して増大することを示した。ガウス（Gauss）はそれ以前、およそ 15 歳のときにすでに、数表から $n$ 以下の素数の個数はおよそ $n/\ln n$ であると予想していた。これが**素数定理**となり、1896 年にジャック・アダマール（Jacques Hadamard）とシャルル・ド・ラ・ヴァレ・プーサン（Charles de la Vallée Poussin）が複素解析（complex analysis）を用いてついに証明した。対数の形で述べると

$$\sum_{p \leq n} \ln p \sim n,$$

であり、したがって $n$ 以下の素数の積はおよそ $e^n$ である。我々の上界 $4^n$ はまったく的外れではない。図 1.2.1 に 3 つすべてを示す。

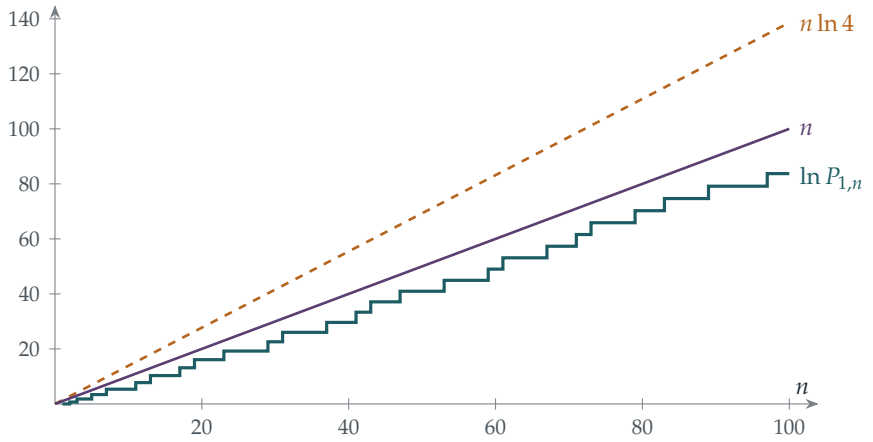



**図 1.2.1**　$n$ 以下のすべての素数の積の対数（青緑）。各素数 $p$ で $\ln p$ だけ跳ね上がる。本節では、これが $n \ln 4$（琥珀色、破線）より下にとどまることを証明する。素数定理によれば、これは $n$（紫）と同じように増大する。

### ベルトランの仮説（Bertrand's postulate）

1845 年にジョゼフ・ベルトラン（Joseph Bertrand）は、すべての $n \geq 1$ について $n$ と $2n$ の間に必ず素数が存在すると予想した。チェビシェフは 1852 年にこれを証明した。その 80 年後、19 歳のポール・エルデシュが美しい初等的証明を見いだした。その鍵となる要素は、この問題の補題と、**中央二項係数** $\binom{2n}{n}$ を割り切る素数がどれかを注意深く調べることである。Martin Aigner と Günter Ziegler は、数学で最も優美な証明を集めた *Proofs from THE BOOK* の第 2 章としてこの証明を選んだ。

### この先へ

素数の正確な分布は、リーマンゼータ関数（Riemann zeta function）

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots,$$

の零点によって支配されている。この関数には Section 2.4 で、ずっと控えめな姿で出会うことになる。そこでは $\zeta(2) = \pi^2/6$ である。これらの零点がどこにあるかを正確に予言する**リーマン予想**（Riemann Hypothesis）が正しければ、素数定理の誤差を可能な限り厳しく押さえ込むことができる。これはおそらく数学で最も有名な未解決問題であり、ミレニアム懸賞問題（Millennium Prize Problems）の一つでもある。

## 思考のスキル

**強い帰納法と、巧妙な対象から情報を引き出すこと**

$n$ の場合が $n-1$ よりずっと小さい場合に依存するときは、それ以前のすべての場合を一度に仮定せよ。

ここでのもう一つの考え方はより繊細で、数論（number theory）に極めて特徴的なものである。ある範囲の**すべての**素数について何かを示すには、それらの素数のどれもが割り切らなければならず、しかもそれほど大きくないことも示せるような一つの対象（ここでは二項係数）を見つけるのである。

## 次の一歩

1. **数の感覚をつかむ。** $n = 10, 20, 30$ について $P_{1,n}$ を計算し、$4^n$ および $e^n$ と比較せよ。（ここでは電卓を使ってよい。）

2. **中央二項係数。** $\binom{2m}{m}$ が $(1+1)^{2m}$ の展開における $2m+1$ 個の項の中で最大であることを示し、$\binom{2m}{m} \geq \dfrac{4^m}{2m+1}$ を導け。

3. **素数はそれほど多くない。** $\pi(n)$ を $n$ 以下の素数の個数とする。$\sqrt{n}$ と $n$ の間にある素数はすべて $\sqrt{n}$ より大きく、それらの積は $P_{1,n} < 4^n$ 以下である。これより

$$\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) < \frac{2 \ln 4}{\ln n}\, n,$$

   を導き、さらに $\pi(n) < 2.8\, n / \ln n + \sqrt{n}$ を導け。これを素数定理の $\pi(n) \approx n / \ln n$ と比較せよ。

4. **ベルトランの仮説を確かめる。** $n = 1, 2, \ldots, 50$ のそれぞれについて $n$ と $2n$ の間にある素数を見つけることで、ベルトランの仮説を確かめよ。各素数が直前の素数の 2 倍未満であるような短い素数のリストを使って、効率よく確かめられるだろうか。

## さらに学ぶために

- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***、第 2 章「Bertrand's postulate」（ベルトランの仮説）。
- **Marcus du Sautoy, *The Music of the Primes***（Fourth Estate）。素数定理とリーマン予

想の歴史を一般向けに描いた本。

- **G. J. O. Jameson, *The Prime Number Theorem***（Cambridge University Press）。厳密でありながら平易で、学部生向けに書かれている。最初の数章は A レベル（A level、英国の大学入学資格試験）程度の微積分しか必要としない。

# 1.3 最小の反例

**問題**

**STEP III 2015、問 5**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/15-s3-q5`

## 導入

$\sqrt{2}$ が無理数（irrational）であることの証明は、おそらく見たことがあるだろう。$\sqrt{2} = a/b$ を既約分数と仮定し、両辺を 2 乗して、$a$ が偶数であること、続いて $b$ も偶数であることを導き、矛盾を得るというものである。これは立派な証明である。しかし、この証明は**偶数**に関する技巧に頼っており、それがそのまま一般化できるかどうかは明らかでない。$\sqrt[3]{2}$ ならどうだろうか。$\sqrt{7}$ ならどうだろうか。

この問題は別の証明を与えるものであり、その中心にある考え方はほとんど拍子抜けするほど単純である。それは**最小のものに注目せよ**ということである。同じ考え方は、姿を変えて、この章で何度も再登場する。

## 取りかかる前に

これは STEP の問題としては珍しいものである。証明の骨組みが与えられ、欠けている根拠を埋めることが求められている。これはまさに、大学生が数学の読み方を身につけるやり方そのものである。教科書の証明にはしばしば「明らかに」や「このことから〜が従う」と書かれており、それが本当にそうなっているかを確かめるのも読み手の仕事の一部である。

? **考えてみよう** ステップ 4 では「$k$ を $S$ に属する最小の正の整数と定める」とある。なぜそうしてよいのだろうか。$S$ が正の**実数**の集合であったとしても、それは許されるだろうか。

正の整数からなる空でない集合には、必ず最小元が存在する。これを**整列性原理**

（well-ordering principle）といい、数学的帰納法（mathematical induction）の原理と同値である。正の実数の集合に対しては、これは**成り立たない**。実際、集合 $\{x : x > 0\}$ には最小元がない。したがって、ステップ 4 はステップ 3（集合が空でないこと）と、$S$ が整数からなることに依存している。

## 順を追って解く

### 段階 1　ステップ 3：$S$ は空でない

> **考えてみよう**　正の整数 $a, b$ によって $\sqrt{2} = a/b$ と書けるとき、$S$ の元を一つ具体的に書き出せるだろうか。

$\sqrt{2} = a/b$ ならば $b\sqrt{2} = a$ であり、これは整数である。よって $b$ は $S$ に属し、$S$ は空でない。

### 段階 2　ステップ 5：より小さい元

さて、$k$ は $S$ の最小元であるから、$k\sqrt{2}$ は整数である。これを $j$ とおく。

> **手を止めて、やってみよう**　$(\sqrt{2}-1)k$ が $S$ に属することを示すには、三つのことを確かめなければならない。それは何だろうか。

$(\sqrt{2}-1)k$ が (a) 整数であり、(b) 正であり、(c) $\sqrt{2}$ を掛けると整数になる、ということを示す必要がある。

- (a) $(\sqrt{2}-1)k = k\sqrt{2} - k = j - k$ であり、これは整数どうしの差である。
- (b) $\sqrt{2} > 1$ より $\sqrt{2} - 1 > 0$ であるから、$(\sqrt{2}-1)k > 0$ である。
- (c) $(\sqrt{2}-1)k \cdot \sqrt{2} = 2k - k\sqrt{2} = 2k - j$ であり、これは整数である。

よって $(\sqrt{2}-1)k \in S$ である。

### 段階 3　ステップ 6：矛盾

> **考えてみよう**　$\sqrt{2} - 1$ はどのくらいの大きさだろうか。

$1 < \sqrt{2} < 2$ であるから $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ であり、したがって $(\sqrt{2}-1)k < k$ である。こうして、$S$ の最小元である $k$ よりも小さい $S$ の元が見つかった。これは不可能であるから、ステップ 1 の仮定は誤りであった。すなわち $\sqrt{2}$ は無理数である。 ■

「既約分数」も、偶数・奇数に関する性質も一切使わなかったことに注意しよう。証明全体は三つの事実の上に成り立っている。$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$ が整数であること、$\sqrt{2}$ が連続する二つの整数の真に間にあること、そして整数が整列性をもつことである。

### 段階 4 立方根：二つの数を結びつける

$c = 2^{1/3}$ とおくと、$c^2 = 2^{2/3}$ かつ $c^3 = 2$ である。

> **考えてみよう** $c$ が有理数（rational）ならば、$c^2$ も有理数だろうか。また、$c^2$ が有理数ならば、掛け算と割り算だけを使って $c$ に戻れるだろうか。

$c$ が有理数ならば、$c^2 = c\times c$ も有理数である。逆に、$c^2$ が有理数ならば、$2/c^2 = c^3/c^2 = c$ も有理数である。よって、$2^{1/3}$ が有理数であることと $2^{2/3}$ が有理数であることは同値である。 ■

### 段階 5 議論を応用する

> **考えてみよう** 小問 (i) での鍵は $(\sqrt{2})^2 = 2$ が整数であることであった。そのため、$S$ の元に $\sqrt{2}$ を 2 回掛けると整数に戻る。$c = 2^{1/3}$ の場合は 3 回掛ける必要がある。集合 $S$ をどのように変えればよいだろうか。

$c$ が有理数であると仮定する。このとき $c^2$ も有理数である。

$$S = \{n \text{ は正の整数} : nc \text{ と} nc^2 \text{ はともに整数}\}.$$

と定める。

- **$S$ は空でない。** $c = a/b, c^2 = a'/b'$ とすると、$bb'$ は $S$ に属する。
- **$k$ をその最小元とし、** $(c-1)k$ を考える。$1 < c < 2$（$1^3 < 2 < 2^3$ による）であるから、$0 < (c-1)k < k$ である。
- **これは整数である：** $(c-1)k = kc - k$。
- **$c$ を掛けると：** $(c-1)k\cdot c = kc^2 - kc$ であり、これは整数である。
- **$c^2$ を掛けると：** $(c-1)k\cdot c^2 = kc^3 - kc^2 = 2k - kc^2$ であり、これは整数である。

よって $(c-1)k \in S$ であり、しかも $k$ より小さい。これは矛盾である。したがって $2^{1/3}$ は無理数であり、段階 4 により $2^{2/3}$ も無理数である。 ■

## 振り返り

- **「最小のものをとる」は証明の技法である。** 反例が存在すると仮定し、その最小のも

のをとって、さらに小さい反例を作り出す。これを**極端原理**（extremal principle）、あるいは**最小反例**（minimal counterexample）による議論という。

- **集合 $S$ が帳簿係を務めた。**分子と分母をあれこれ操作する代わりに、「よい」乗数をすべて一つの集合にまとめたのである。
- **一般化とは、何が本当に証明を成り立たせていたのかを問うことであった。**$\sqrt{2}$ の場合は $\sqrt{2}$ を 1 回掛ければよく、$\sqrt[3]{2}$ の場合は 2 回必要であった。このことに気づいたおかげで、$S$ をどう定義し直せばよいかが正確にわかった。

## 背後にある数学

### 図に描ける証明

小問 (i) の背後には、Stanley Tennenbaum による美しい図がある。$\sqrt{2} = a/b$ ならば $a^2 = 2b^2$ である。つまり、一辺 $a$ の正方形は、一辺 $b$ の正方形 2 個と同じ面積をもつ。図 1.3.1 のように、二つの $b$ の正方形を $a$ の正方形の向かい合う隅に置く。すると、それらは小さな正方形の部分で重なり、また覆われない小さな正方形が二つ残る。面積が等しいことから、重なった部分は覆われない二つの正方形を合わせたものに等しくなければならず、同じ性質をもつ**より小さい**整数の組が得られる。より小さい組がいつまでも続くことはありえないので、そのような正方形は存在しない。より小さい組はちょうど $(2b - a,\ a - b)$ であり、これは私たちの $(\sqrt{2} - 1)k$ のステップが姿を変えたものにほかならない。

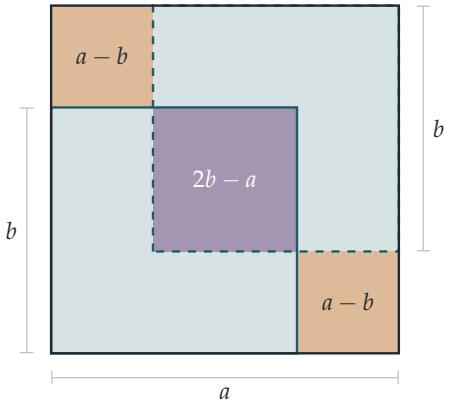



**図 1.3.1** Tennenbaum の証明。一辺 $b$ の二つの正方形（ティール色）が、一辺 $a$ の正方形の向かい合う隅に置かれている。$a^2 = 2b^2$ ならば、2 回数えられた面積（プラム色の重なり）は数えられなかった面積（二つのアンバー色の隅）に等しくなければならないので、$(2b - a)^2 = 2(a - b)^2$ となる。これはより小さい解である。

### 整列性、帰納法、降下法

整列性原理と帰納法の原理は論理的に同値である。すなわち、それぞれが他方から証明できる。大学では、どちらも自然数の基礎として用いられるのを目にするだろう。Section 1.5 では、同じ原理を別の形、すなわちフェルマー（Fermat）の**無限降下法**（method of infinite descent）として用いる。それは、正の整数からなる狭義単調減少の無限数列は存在しない、という形である。

### どこまで通用するか

この議論によって、$N$ が平方数（perfect square）でないときには必ず $\sqrt{N}$ が無理数であること（演習を参照）、さらに一般に、整数の $n$ 乗根は整数であるか無理数であるかのいずれかであることが証明できる。大学では、これは**代数的整数**（algebraic integers）に関する主張となる。すなわち、$x^3 - 2 = 0$ のような、整数係数のモニック多項式（monic polynomial）の方程式を満たす有理数は、整数でなければならない。この考え方には Section 6.3 で再び出会うことになる。

ピタゴラス学派（Pythagoreans）が $\sqrt{2}$ の無理性を明かしたヒッパソス（Hippasus）を溺死させたという伝説は、おそらく事実ではない。確かなのは、この発見によってギリシャの数学者たちが数の研究と長さの研究を切り離さざるをえなくなったということである。この分裂が癒やされるには、19 世紀、そしてデデキント（Dedekind）による実数の構成を待たなければならなかった。

## 思考のスキル

**極端原理**

あることが決して起こらないことを示したいときは、それが起こると仮定し、その最小の（あるいは最大の、あるいは最も単純な）例を選び、それを用いてさらに小さい例を作れ。

「最小」が何を意味するかの選び方こそが、創造的なステップである。ここでは、それは $n\sqrt{2}$ を整数にする最小の $n$ であった。

## 次の一歩

1. **ほかの平方根。** この議論を応用して、$\sqrt{3}$ が無理数であることを示せ。$\sqrt{2}-1$ の役割を果たすのはどの数か。

2. **平方数でないものすべて。** $N$ を平方数でない正の整数とし、$m$ を $m < \sqrt{N} < m+1$ を満たす整数とする。$(\sqrt{N}-m)k$ を考えることにより、$\sqrt{N}$ が無理数であることを証明せよ。

3. **誤りを見つけよ。** この議論を $\sqrt{4}$ に対して実行してみよ。正確にはどのステップで破綻するか。

4. **Tennenbaum の図。** 図 1.3.1 を用いて、$a^2 = 2b^2$ ならば $(2b-a)^2 = 2(a-b)^2$ であることを示せ。また、この恒等式を代数的にも確かめよ。

## さらに学ぶために

- **Daniel Velleman, *How to Prove It***（Cambridge University Press）。帰納法や整列性を含む、証明への徹底した入門書。
- **R. P. Burn, *A Pathway into Number Theory***（Cambridge University Press）。注意深く順序立てられた問題だけで構成された本。大学 1 年次の講義への準備として理想的である。
- **John Conway & Joseph Shipman,「Extreme proofs I: the irrationality of $\sqrt{2}$」**(*Mathematical Intelligencer*, 2013)。一つの事実に対する多くの証明を、機知に富んだ筆致で比較している。

# 1.4 $e$ は無理数であり、$e^2$ もまた無理数である

この節では 2 つの問題を扱う。1 つ目は 1997 年の問題で、$e$ が無理数（irrational）であることを証明する。2 つ目は 2024 年の問題で、同じ考え方をより巧妙にした形を用いて $e^2$ が無理数であることを証明する。こちらは本当に難しくなる。

**ウォームアップ**

**STEP III 1997、問 7**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/97-s3-q7`

**本題**

**STEP III 2024、問 7**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip`

## 導入

Section 1.3 では、$\sqrt{2}$ が単純な方程式 $x^2 = 2$ を満たすという事実を用いて、$\sqrt{2}$ が無理数であることを証明した。しかし $e$ は、知られている限りそのような方程式を満たさない。手がかりは次の級数（series）だけである。

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots .$$

級数から、ある数が分数でないことがどうしてわかるのだろうか。

その答えは、数論（number theory）で最も役に立つ考え方の 1 つである。すなわち、**整数は 0 と 1 の間に（両端を除いて）存在しえない**。ある量が整数であり、しかも 0 より大きく 1 より小さいことを示せれば、矛盾（contradiction）が得られる。この節の内容はすべて、この主題の変奏である。

## 取りかかる前に

**考えてみよう**　$e = p/q$ と仮定する。$e$ に $q$ を掛けると整数になる。では、$q!$ を掛けると $e$ の級数の各項はどうなるか。

$k \le q$ であれば、$\dfrac{1}{k!}$ に $q!$ を掛けると整数になる。したがって $q!\,e$ は、整数の部分（最初の $q+1$ 項）と「裾」（tail、それ以降のすべて）に分かれる。$e = p/q$ ならば $q!\,e$ 自身が整数なので、裾も整数でなければならない。方針は、裾が 0 と 1 の間に（両端を除いて）あることを示すことである。

## 順を追って解く

### 段階 1　ウォームアップ：$e$ は無理数である

級数 $b_n$ は初項と公比がともに $\frac{1}{n+1}$ の等比級数（geometric series）であるから、

$$b_n = \frac{1/(n+1)}{1 - 1/(n+1)} = \frac{1}{n}.$$

**考えてみよう**　$a_n$ と $b_n$ を項ごとに比べよ。どちらが大きいか。

初項は等しい。それ以降は $(n+1)(n+2) > (n+1)^2$ であり、一般に $k \ge 2$ に対して $(n+1)(n+2)\cdots(n+k) > (n+1)^k$ が成り立つので、$a_n$ の 2 項目以降の各項は $b_n$ の対応する項より小さい。よって $0 < a_n < b_n = 1/n$ である。

ここで $a_n$ が実際には何であるかを見てみよう。$e$ の級数に $n!$ を掛けると

$$n!\,e = \underbrace{\frac{n!}{0!} + \frac{n!}{1!} + \cdots + \frac{n!}{n!}}_{\text{整数}} + \underbrace{\frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \cdots}_{= a_n}.$$

$0 < a_n < 1$ であるから、$n!\,e$ の整数部分は最初のまとまりであり、$a_n$ は小数部分（fractional part）である。すなわち $a_n = n!\,e - [n!\,e]$ である。

**手を止めて、やってみよう**　では証明を完成させよう。$e = p/q$ と仮定する。$n$ をどの値に選べばよいか。

$n = q$ とする。すると $q!\,e = (q-1)!\,p$ は整数なので、その小数部分 $a_q$ は 0 である。しかし $a_q > 0$ である。これは矛盾であり、$e$ は無理数である。 ■

この証明は、1815 年ごろのフーリエ（Fourier）によるものである。

### 段階 2 $e^2$ が難しい理由

> **考えてみよう** 同じ考え方を $e^2$ に試してみよ。その級数は $\sum 2^k/k!$ である。$n!$ を掛けて裾を見ると、何がうまくいかないか。

今度は裾が $\dfrac{2^{n+1}}{n+1} + \dfrac{2^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \cdots$ となり、2 のべきがすべてを台無しにする。裾はもはや小さくないのである。$n!$ を掛けても、分子の $2^k$ には何の効果もない。

2024 年の問題の工夫は、$e^2$ をまったく扱わないようにすることである。$e^2 = p/q$ ならば

$$qe = \frac{p}{e}.$$

こうすると 2 つの数 $e$ と $1/e$ が得られ、どちらも階乗（factorial）による級数をもち、厄介な 2 のべきを含まない。

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}, \qquad \frac{1}{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

### 段階 3 2 つの裾

小問 (i) はウォームアップそのものであり、$0 < f(n) < 1/n$ である。

小問 (ii) の $g(n)$ は、項の大きさが減少していく**交代級数**（alternating series）である。

> **考えてみよう** $t_1 > t_2 > t_3 > \cdots > 0$ である交代級数 $t_1 - t_2 + t_3 - \cdots$ について、和が 0 と $t_1$ の間にあるのはなぜか。

項を 2 つずつ組にすると、$(t_1 - t_2) + (t_3 - t_4) + \cdots$ は正の括弧の和なので正である。組み方を変えると、$t_1 - (t_2 - t_3) - (t_4 - t_5) - \cdots$ は $t_1$ から正の括弧を引いたものなので $t_1$ より小さい。ここでは $t_1 = \frac{1}{n+1}$ であり、各項は前の項を 1 より大きい数で割ったものなので項は減少する。よって $0 < g(n) < \frac{1}{n+1}$ である。

### 段階 4 再び整数

ウォームアップとまったく同様に、$e$ に $(2n)!$ を掛けて裾を切り離すと

$$(2n)!\, e = (\text{整数}) + f(2n).$$

よって $(2n)!\, e - f(2n)$ は整数である。$1/e$ についても同じことを行うと

$$\frac{(2n)!}{e} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{(2n)!}{k!} + \sum_{k=2n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2n)!}{k!}.$$

**考えてみよう**　裾の最初の項 $k = 2n+1$ の符号は何か。裾は $g(2n)$ とどのような関係にあるか。

裾の最初の項は $k = 2n+1$ で奇数なので、負である。裾は

$$-\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} - \cdots = -g(2n).$$

よって $\dfrac{(2n)!}{e} + g(2n)$ は整数である。 ■

問題で $n$ ではなく $2n$ を用いているのはこのためである。偶数の階乗を掛けると、$1/e$ の裾は予測どおりの符号をもち、ちょうど $-g$ になる。

### 段階 5　矛盾

$qe = p/e$ と仮定する。両辺に $(2n)!$ を掛け、段階 4 を用いると

$$q\bigl(\text{整数} + f(2n)\bigr) = p\bigl(\text{整数} - g(2n)\bigr).$$

整理すると、$qf(2n) + pg(2n)$ は整数の組合せに等しいので整数である。これが小問 (iv) である。

**手を止めて、やってみよう**　では段階 3 で得た評価を使おう。$n$ が非常に大きいとき、$qf(2n) + pg(2n)$ はどうなるか。

$f(2n)$ と $g(2n)$ はどちらも正なので、$qf(2n) + pg(2n) > 0$ である。また

$$qf(2n) + pg(2n) < \frac{q}{2n} + \frac{p}{2n+1} < \frac{p+q}{2n}.$$

$n > (p+q)/2$ と選ぶ。すると $qf(2n) + pg(2n)$ は 0 と 1 の間に（両端を除いて）ある整数となる。これはありえないので、$e^2$ は無理数である。 ■

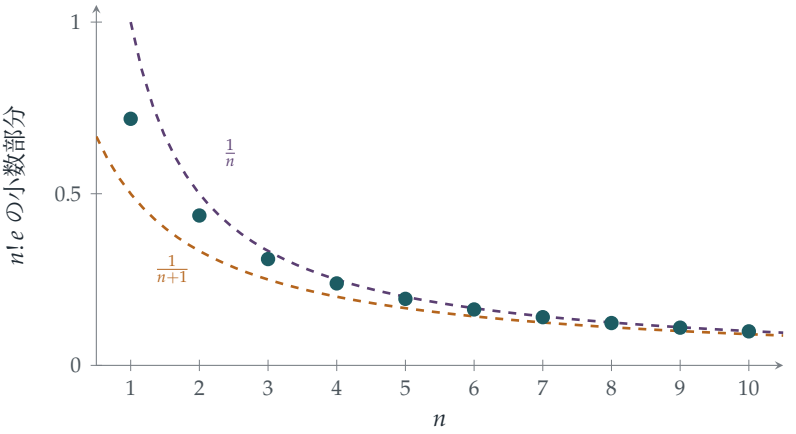



**図 1.4.1**　裾 $a_n = n!\,e - [n!\,e]$（青緑色）。これは $n!\,e$ の小数部分である。これは常に $\frac{1}{n+1}$ と $\frac{1}{n}$ の間に（両端を除いて）あり、決して 0 にはならないが、1 より小さい。もし $e$ が分数 $\frac{p}{q}$ であれば、$n \geq q$ であるすべての $n$ に対して $n!\,e$ は整数となり、青緑色の点は 0 になるはずである。

## 振り返り

- **原動力は「0 と 1 の間に（両端を除いて）整数は存在しない」ことである。**どちらの証明も、整数でなければならない量を作り、それを挟み込んでいる。
- **階乗は裾を小さくする。** $n!$ を掛けることで級数の初めの部分が整数になり、$1/n$ のように小さくなる裾が残った。
- **正面から攻めてうまくいかなければ、式を変形せよ。** $e^2 = p/q$ に正面から取り組む代わりに、$qe = p/e$ と書き直し、難しさを扱いやすい 2 つの数に分散させた。
- **細部が重要である。** $n$ ではなく $2n$ を選んだことで、裾の符号が定まった。多くの証明は、このような小さな細部にかかっている。

## 背後にある数学

### $e$ はどれほど無理数なのか

リウヴィル（Liouville）は 1840 年に、$e^2$ が無理数であること、さらには整数係数の二次方程式（quadratic equation）を満たさないことを証明した。1873 年、エルミート（Hermite）ははるかに先へ進み、$e$ が**超越数**（transcendental）であること、すなわち整数係数の**いかなる**多項式（polynomial）の根でもないことを証明した。その証明は、

まさに上の議論を高度にしたものである。つまり、整数を作り、それが 0 と 1 の間に（両端を除いて）あることを示すのである。その 9 年後、リンデマン（Lindemann）はエルミートの方法を応用して $\pi$ が超越数であることを示し、定規とコンパスによる「円積問題」という古代からの問題が不可能であることをついに証明した。

### まだわかっていないこと

これらの方法がこれほど強力であるにもかかわらず、きまりが悪いほど単純な問題が未解決のまま残っている。$e+\pi$ は無理数か。$e\pi$ はどうか。誰も知らない。ただし、少なくとも一方は超越数でなければならない（演習 4）。$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots$ は無理数か。答えは「はい」である。アペリー（Apéry）が 1978 年にこれを証明し、数学界を驚かせた。$\zeta(5)$ はどうか。誰も知らない。

### 近似

これらの証明の背後には、より深い考え方がある。それは、ある数が分数によって**あまりにもよく**近似できるならば、その数は無理数である、というものである。$e$ の級数の部分和（partial sums）は、非常に速く $e$ に非常に近づく分数である。分数は、他の分数によってそれほどよく近似されることはありえない。これが**ディオファントス近似**（Diophantine approximation）の出発点であり、数論のこの分野については Section 2.9 でさらに探究できる。そこでは別の種類の積分から、$e$ にさらに迫るよりよい分数が得られる。

## 思考のスキル

**整数を挟み込む**

ある数が無理数であることを証明するには、それが分数であると仮定し、そこから整数でなければならない量を作り、その量が 0 と 1 の間に（両端を除いて）あることを示せ。

腕の見せどころは、その量の選び方にある。ここでは階乗を掛けることで級数の大部分が整数になり、小さいが正である裾が残った。

## 次の一歩

**1** **$1/e$ だけを用いる。** $1/e = p/q$ と仮定し、$1/e$ の交代級数だけを用いて、$e$ が無理数であることを証明せよ。

**2** **$\sin 1$ は無理数である。** $\sin 1 = 1 - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{5!} - \cdots$ を用いて、$\sin 1$ が無理数であることを証明せよ。（適当な奇数の階乗を掛けよ。）

**3** **なぜ $\pi$ ではうまくいかないのか。** この方法が $\pi$ に直接は使えない理由を説明せよ。次に、級数の代わりに積分を用いて $\pi$ が無理数であることを示した、ニーヴン（Niven）による 1 ページの証明（1947 年）を調べよ。これは優秀な A レベル（A level、英国の大学入学資格試験）の生徒の手の届く範囲にある。

**4** **どちらか一方は超越数である。** やや難 $e$ と $\pi$ が $x^2 - (e+\pi)x + e\pi = 0$ の根であることを示せ。係数が代数的数（algebraic number）である多項式の根はそれ自身代数的であること、および $\pi$ が代数的でないこと（リンデマン）は仮定してよい。$e+\pi$ と $e\pi$ の少なくとも一方が超越数であることを導け。

## さらに学ぶために

- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***（『天書の証明』）、第 8 章「Some irrational numbers」（いくつかの無理数）。まさにこれらの考え方を用いて、$e$、$e^2$、$e^4$、$\pi^2$ が無理数であることを証明している。
- **Ivan Niven, *Irrational Numbers***（Mathematical Association of America）。$\sqrt{2}$ から超越性までを扱う、短い古典的名著である。
- **Julian Havil, *The Irrationals***（Princeton University Press）。無理数の歴史を読みやすく描いた本である。

# 1.5 無限降下法

**問題**

**STEP III 2022、問 2**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip`

## 導入

ある方程式が整数解を**もたない**ことは、どうすれば証明できるだろうか。すべての可能性を試すことはできない。候補は無限にあるからである。1630 年代、フェルマー（Fermat）はその方法を見つけた。解が存在すれば、そこから**より小さい**数でできた別の解が得られ、さらにそこからもっと小さい解が得られ、これが果てしなく続くことを示すのである。しかし、正の整数がいつまでも小さくなり続けることはできない。したがって、そもそも解は存在しなかったことになる。

フェルマーはこれを**無限降下法**（method of infinite descent）と呼び、大いに誇りにしていた。これは Section 1.3 で扱った整列原理（well-ordering principle）の裏返しであり、方程式が解をもたないことを証明するための主要な道具の一つとして今も使われている。

## 取りかかる前に

四つの小問はすべて同じ形をしている。解があると仮定し、それを小さくし、矛盾（contradiction）を導く。問題は、**どうやって**小さくするかである。

? **考えてみよう** 小問 (i) の $a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0$ を見てみよう。三つの項のうち二つは明らかに偶数（even）である。このことから残りの一つについて何がわかるか。

このような観察こそ、あらゆる降下法の出発点である。ある種の整除性（divisibility）が否応なく課されるのである。

## 順を追って解く

### 段階 1  最初の降下

$a^3 = -2b^3 - 4c^3$ であるから $a^3$ は偶数であり、したがって $a$ は偶数である（奇数の 3 乗は奇数だからである）。$a = 2p$ とおく。すると $|p| = |a|/2 < |a|$ であり、代入すると

$$8p^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4p^3 + b^3 + 2c^3 = 0.$$

となる。

> **考えてみよう**  新しい方程式は $4p^3 + b^3 + 2c^3 = 0$ である。係数は同じで、並びが巡回しただけである。同じ手法をもう一度使えるだろうか。

今度は $b^3 = -4p^3 - 2c^3$ が偶数であるから、$|q| < |b|$ を満たす $q$ を用いて $b = 2q$ と書け、2 で割ると $2p^3 + 4q^3 + c^3 = 0$ を得る。もう一度、$c$ は偶数でなければならない。$|r| < |c|$ を満たす $r$ を用いて $c = 2r$ と書き、2 で割ると

$$p^3 + 2q^3 + 4r^3 = 0.$$

となる。これは $a$、$b$、$c$ の代わりに $p$、$q$、$r$ を入れた**もとの**方程式である。それぞれの大きさは半分になっており、しかもどれも 0 ではない。0 でない数を半分にしても 0 にはならないからである。

> **手を止めて、やってみよう**  これを、0 でない解が存在しないことの証明にまとめよ。正確には、何が「最小」であると仮定すべきだろうか。

0 でない整数からなるすべての解の中から、$|a|$ ができるだけ小さいものを一つ選ぶ（解が一つでも存在すれば、整列原理によってこれが可能である）。上の議論により、$|p| < |a|$ を満たす 0 でない別の解が得られ、最小性（minimality）に矛盾する。よって、0 でない解は存在しない。 ■

同じことを次のように言い換えることもできる。一つの解から、$|a| > |p| > \cdots$ となる解の無限列を作ることができる。これは正の整数からなる狭義単調減少の無限列であり、そのようなものは存在しない。

### 段階 2  別の素数

> **考えてみよう**  $9a^3 + 10b^3 + 6c^3 = 0$ では、偶奇性（parity）は明らかには役に立たない。係数 9、10、6 を見よう。そのうち二つを割り切る素数はどれか。

素数 3 は 9 と 6 を割り切るので、3 は $10b^3$ を割り切り、したがって 3 は $b$ を割り切る。

$b = 3q$ とおいて 3 で割ると

$$3a^3 + 90q^3 + 2c^3 = 0.$$

となる。今度は 3 が $2c^3$ を割り切るので $c = 3r$ と書け、再び 3 で割ると $a^3 + 30q^3 + 18r^3 = 0$ を得る。よって 3 は $a$ を割り切る。$a = 3p$ とおき、もう一度 3 で割ると

$$9p^3 + 10q^3 + 6r^3 = 0.$$

となる。これはまさにもとの方程式であり、数はより小さく、しかも 0 でない。同じ降下の議論により、0 でない解は存在しない。 ■

### 段階 3　3 を法とする平方数

> **考えてみよう**　すべての整数は $3n$、$3n+1$、$3n-1$ のいずれかの形をしている。それらの平方は、3 を法として（modulo）いくつになるか。

$(3n \pm 1)^2 = 9n^2 \pm 6n + 1 = 3(3n^2 \pm 2n) + 1$ であり、これは 3 の倍数より 1 大きい。また $(3n)^2$ は 3 の倍数である。したがって、平方数を 3 で割った余りは 0 または 1 であり、2 になることは決してない。

ここで $a^2 + b^2$ が 3 の倍数であるとすると、余りの組合せは $0+0$、$0+1$、$1+0$、$1+1$ であり、それぞれ 0、1、1、2 となる。3 の倍数になるのは最初の場合だけなので、$a$ と $b$ はともに 3 の倍数でなければならない。

> **考えてみよう**　$a^2 + b^2 = 3c^2$ かつ $a = 3p$、$b = 3q$ のとき、$c$ について何が言えるか。

$9p^2 + 9q^2 = 3c^2$ となるので、$c^2 = 3(p^2 + q^2)$ は 3 の倍数であり、したがって $c = 3r$ と書ける。すると $9p^2 + 9q^2 = 27r^2$ より $p^2 + q^2 = 3r^2$ となる。同じ方程式で、数はより小さい。ここでも降下法が使える。 ■

### 段階 4　ひとひねり：方程式が変わる

> **考えてみよう**　$a^2 + b^2 + c^2 = 4abc$ では、右辺は 4 の倍数である。4 を法とする平方数はどうなるか。

偶数の平方は 4 の倍数であり、奇数の平方は 4 の倍数より 1 大きい（$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$）。したがって $a^2 + b^2 + c^2$ を 4 で割った余りは、$a$、$b$、$c$ のうち奇数がいくつあるかに応じて 0、1、2、3 のいずれかとなる。右辺は 4 の倍数であるから、奇数のものは**一つもあってはならない**。$a = 2p$、$b = 2q$、$c = 2r$ とおくと

$$4(p^2 + q^2 + r^2) = 32\,pqr \quad \Longrightarrow \quad p^2 + q^2 + r^2 = 8\,pqr.$$

となる。

> **考えてみよう**　これはもとと同じ方程式ではない。4 が 8 になっている。それでも降下法はうまくいくだろうか。

ここでの工夫は、**より強い主張を証明する**ことである。次の形の方程式をすべて考える。

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^m\, xyz \qquad \text{ただし} m \geq 2.$$

このような $m$ ならどれでも右辺は 4 の倍数であるから、まったく同じ議論によって $x$、$y$、$z$ はすべて偶数であることがわかる。それらを半分にすると $2^{m+1}$ の方程式の解が得られ、これもまたこの形をしている。こうして、$m$ の方程式の 0 でない解から、$m+1$ の方程式のより小さい 0 でない解が得られる。この族に属する**どの**方程式の解でもよいので、その中で $|x|$ が最小のものをとれば矛盾が生じる。特に、$a^2 + b^2 + c^2 = 4abc$ は 0 でない解をもたない。 ■

証明したい主張がそれ自身の帰納法（induction）を支えるには弱すぎることがあり、その場合の処方箋は、それ自身を支え**られる**より一般的な主張を証明することである。これは大学で驚くほどよく使われる手法である。

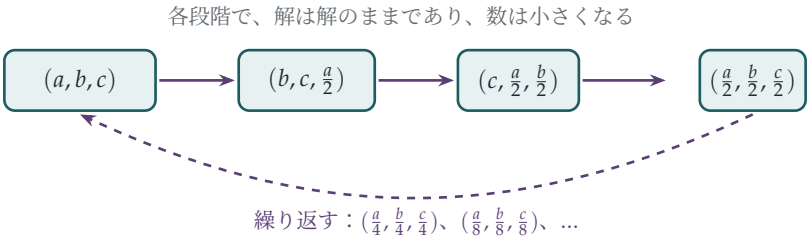



**図 1.5.1**　小問 (i) の降下。$a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0$ の解から、三つの段階を経て、すべての成分が半分になった別の解が得られる。これを永遠に繰り返すと、正の整数の果てしない減少列 $|a| > |\frac{a}{2}| > |\frac{a}{4}| > \cdots$ が得られることになるが、これは不可能である。したがって、そもそも解は存在しなかったのである。

## 振り返り

- **降下法には整除性の源が必要である。**毎回、すべての変数を割り切らざるを得ない素数 $p$（ここでは 2 または 3）を見つけ、それで割った。
- **それを見つけるには $n$ を法として考えればよい。**2、3、4 を法とする余りを調べることで、「何かうまくいくものはあるか」という問いが、短い有限個の確認に変わった。
- **方程式が変わるなら、一般化せよ。**小問 (iv) では、降下の操作で閉じた方程式の

族全体が必要であった。

## 背後にある数学

### フェルマー、降下法、そして最終定理

フェルマーは無限降下法を用いて、$x^4 + y^4 = z^2$ が正の整数解をもたないことを証明した。これは有名な「最終定理」（Last Theorem）のうち彼が証明を残した唯一の場合であり、$x^n + y^n = z^n$ の $n = 4$ の場合を解決するものである。のちにオイラー（Euler）が $n = 3$ の場合に降下法を用いた（その証明には欠陥があったが、後に補われた）。降下法は今でも現代の理論の出発点である。Section 1.9 に出てくるような曲線に関するモーデル–ヴェイユの定理（Mordell–Weil theorem）の証明は、高度に洗練された降下法なのである。

### 局所的障害

この節の証明はどれも、ある数を法とする余りを調べることで成り立っていた。ある $n$ について方程式が $n$ を法として解をもたないか、あるいは実数解をもたなければ、整数解ももたないことは確かである。このような理由を**局所的障害**（local obstructions）といい、大学では、$p, p^2, p^3, \ldots$ を法とするすべての余りを一度に調べる方法である **$p$ 進数**（$p$-adic numbers）に出会うことになる。

ハッセ(Hasse)とミンコフスキー(Minkowski)による見事な定理によれば、$a^2 + b^2 = 3c^2$ のような**二次**方程式については、局所的障害が唯一の障害である。すなわち、解をもたない「局所的」な理由がなければ、実際に有理数解が存在する。三次方程式では、これは劇的に破綻する。1951 年、セルマー（Ernst Selmer）は

$$3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$$

が任意の整数を法として解をもち、実数解ももつにもかかわらず、0 でない整数解をもたないことを示した。「局所から大域へ」の原理（local-to-global principle）がいつ、なぜ破綻するのかを解明することは、現代の整数論の大きなテーマの一つである。

### 解をもつ方程式

小問 (iv) には有名な親類がある。$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$、すなわち**マルコフ方程式**（Markov equation）である。この方程式は正の整数解を無限に多くもち、$(1,1,1)$、$(1,1,2)$、$(1,2,5)$、$(1,5,13)$、$(2,5,29)$ と続く。そしてこれらの解は、無理数が分数によってどれほどよく近似できるかという問題と結びついている。演習 4 を参照せよ。

## 思考のスキル

**無限降下法**

方程式が解をもたないことを示すには、任意の解から真に小さい解が得られることを示せばよい。そうすれば、最小の解は存在し得ない。

これを、$n$ を法として考えて降下を推し進める整除性を見つける方法と組み合わせよう。また、主張が降下の操作で保たれない場合には、それを一般化する用意をしておこう。

## 次の一歩

1. **STEP I の準備運動。**（*STEP I 2010* 問題 *8*）$a^3 + 3b^3 = 9c^3$ の整数解は $a = b = c = 0$ のみであることを示せ。次に、一の位の数字を考えることにより、$p^4 + 2q^4 = 5r^4$ についても同じことを示せ。

2. **降下を必要としない法。** $4$ を法として考えるだけで、$x^2 + y^2 = 4z + 3$ が整数解を一つももたないことを示せ。

3. **有理点。** 小問 (iii) を用いて、円 $x^2 + y^2 = 3$ 上には**有理数**座標をもつ点（有理点、rational point）が存在しないことを示せ（$(1,1)$ を含む $x^2 + y^2 = 2$ と対比せよ）。

4. **マルコフの三つ組。** $(x, y, z)$ が $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ を満たすならば、$(x, y, 3xy - z)$ もこれを満たすことを示せ。$(1,1,1)$ から出発して、上に挙げた三つ組を生成せよ（この「跳躍」の手法は降下法の逆である）。

## さらに学ぶために

- **Harold Davenport, *The Higher Arithmetic***（『数論の高みへ』）、第 2 章および第 5 章。
- **Joseph Silverman, *A Friendly Introduction to Number Theory***（Pearson）（『やさしい数論入門』）。非常に読みやすい。$x^4 + y^4 = z^2$ に対するフェルマーの降下法による証明も載っている。
- **Simon Singh, *Fermat's Last Theorem***（Fourth Estate）（『フェルマーの最終定理』）。フェルマーの余白の書き込みからワイルズ（Wiles）の証明に至るまでの物語を、一般の読者向けに描いている。

# 1.6 二つの平方数の和

**問題**

**STEP II 2023、問 7**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip`

## 導入

どのような整数が 2 つの平方数の和（sum of two squares）として表せるだろうか。$5 = 1^2 + 2^2$ や $13 = 2^2 + 3^2$ は表せるが、3、7、21 は表せない。ここで不思議な事実がある。$65 = 5 \times 13$ は、$1^2 + 8^2$ と $4^2 + 7^2$ という **2 通り**の異なる方法で 2 つの平方数の和として表せるのである。このような数を 2 つ掛け合わせると、なぜまたこのような数になるのか。そして、なぜ 2 通りになるのか。

答えは思いがけない方向からやってくる。この問題では、整数の世界を離れて**複素数**を扱うことが求められる。複素数の世界では 2 つの平方数の和は単純なものとなり、一見すると不可解な計算もほとんど機械的なものになる。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $a$ と $b$ を整数として $z = a + ib$ とするとき、$|z|^2$ は何か。

それは $a^2 + b^2$、すなわち 2 つの平方数の和である。したがって「$N$ は 2 つの平方数の和である」とは、ちょうど「実部と虚部がともに整数であるような複素数 $z$ を用いて $N = |z|^2$ と書ける」ということである。このような複素数は**ガウス整数**（Gaussian integers）とよばれる。この言い換えをしっかり覚えておいてほしい。問題全体がこれにかかっている。

## 順を追って解く

### 段階 1　絶対値は掛け算される

**考えてみよう**　$zw$ を $a$、$b$、$c$、$d$ を用いて書き表せ。$|zw|^2$ について何を示せばよいか。

$zw = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc)$ であるから、

$$|zw|^2 = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2,$$

となる。交差項 $-2abcd$ と $+2abcd$ が打ち消し合うからである。そしてこれは因数分解できる。

$$a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = |z|^2|w|^2.$$

平方根をとって、$|zw| = |z||w|$ を得る。 ■

これを整数についての主張として読んでみよう。

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2. \tag{$\star$}$$

**2 つの平方数の和どうしの積は、2 つの平方数の和である。**しかも、その 2 つの平方数が何であるかを複素数が正確に教えてくれるのである。

### 段階 2　これを使う

小問 (ii)：$5 = |2+\mathrm{i}|^2$ であり、$221 = 10^2 + 11^2 = |10 + 11\mathrm{i}|^2$ である。そこで掛け合わせると、

$$(2+\mathrm{i})(10+11\mathrm{i}) = 20 + 22\mathrm{i} + 10\mathrm{i} - 11 = 9 + 32\mathrm{i},$$

となり、$5 \times 221 = 9^2 + 32^2$ を得る。（検算：$81 + 1024 = 1105$。）

**考えてみよう**　代わりに $10+11\mathrm{i}$ に $2-\mathrm{i}$ を掛けるとどうなるか。これは $2+\mathrm{i}$ と同じ絶対値（modulus）をもつ。

$(2-\mathrm{i})(10+11\mathrm{i}) = 20 + 22\mathrm{i} - 10\mathrm{i} + 11 = 31 + 12\mathrm{i}$ であるから、$1105 = 31^2 + 12^2$ とも表せる。$2+\mathrm{i}$ を選ぶか、その共役（conjugate）を選ぶかによって、**異なる**表し方が得られるのである。これで導入で述べた 65 の 2 通りの表し方が説明できる（図 1.6.1）。すなわち $65 = |(2+\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})|^2 = |4+7\mathrm{i}|^2$ と $65 = |(2-\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})|^2 = |8+\mathrm{i}|^2$ である。

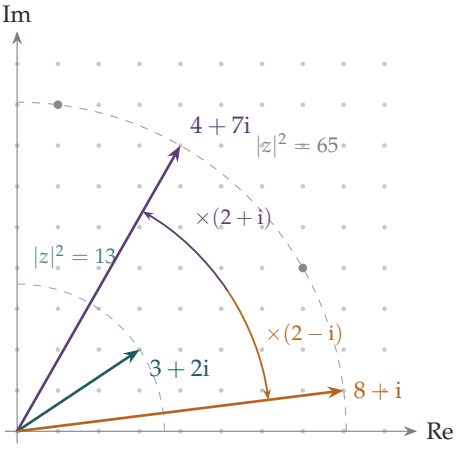



**図 1.6.1**　$2 \pm \mathrm{i}$ を掛けると、長さは $\sqrt{5}$ 倍され、約 26.6° だけ回転する。回転の向きは $2+\mathrm{i}$ なら反時計回り、$2-\mathrm{i}$ なら時計回りである。円 $|z|^2 = 13$ 上の $3+2\mathrm{i}$ から出発すると、2 通りの選び方によって円 $|z|^2 = 65$ 上の異なる格子点（lattice point）に行き着く。灰色の点は、それらを直線 $y = x$ に関して対称移動したものである。

### 段階 3　まず因数分解する

**考えてみよう**　8045 の末尾は 5 である。このことから何がわかるか。

$8045 = 5 \times 1609$ である。1609 を 2 つの平方数の和として表す必要があるが、1609 のすぐ下の平方数を試していけば、すぐに $1609 = 40^2 + 3^2$ が見つかる。すると

$$(2+\mathrm{i})(40+3\mathrm{i}) = 77 + 46\mathrm{i}, \qquad \text{よって} \qquad 8045 = 77^2 + 46^2,$$

となり、共役を用いれば $8045 = 83^2 + 34^2$ も得られる。

小問 (iv) はもっと速く片付く。$36 = 6^2 + 0^2$ であり、6 を掛けることは単に拡大するだけなので、$36 \times 50805 = 612^2 + 1206^2$ となる。

### 段階 4　3 通りの表し方

**考えてみよう**　25 は 2 つの平方数の和として 2 通り以上に表せる。符号の違いと入れ替えを除いて、絶対値が 5 のガウス整数はいくつあるか。

$25 = 5^2 + 0^2 = 3^2 + 4^2$ であり、これらは 5、$3+4\mathrm{i}$、$3-4\mathrm{i}$ に対応する。次に 1002082 について考える。$1001^2 = 1002001$ であるから、$1002082 = 1001^2 + 9^2$ である。$1001 + 9\mathrm{i}$

に 3 つのそれぞれを掛けると、次のようになる。

$$\begin{aligned} 5\,(1001+9\mathrm{i}) &= 5005+45\mathrm{i}, \\ (3+4\mathrm{i})(1001+9\mathrm{i}) &= 2967+4031\mathrm{i}, \\ (3-4\mathrm{i})(1001+9\mathrm{i}) &= 3039-3977\mathrm{i}. \end{aligned}$$

よって、3 つの組 $(r,s)$ は $(45,5005)$、$(2967,4031)$、$(3039,3977)$ である。

### 段階 5　割り算

> **手を止めて、やってみよう**　小問 (vi) では、この仕組みを逆向きに動かす。$109 = 10^2+3^2$ と $1002037 = 1001^2+6^2$ はわかっている。探索をせずに、9193 を 2 つの平方数の和として表すにはどうすればよいだろうか。

ガウス整数を掛けると絶対値が掛け算されるのなら、**割る**と絶対値も割り算されるはずである。試してみると

$$\frac{1001+6\mathrm{i}}{10+3\mathrm{i}} = \frac{(1001+6\mathrm{i})(10-3\mathrm{i})}{109} = \frac{10028-2943\mathrm{i}}{109} = 92-27\mathrm{i}.$$

割り切れるので、$9193 = 92^2+27^2$ である。（検算：$8464+729=9193$。）

> **考えてみよう**　代わりに $10-3\mathrm{i}$ で割るとどうなるか。

$(1001+6\mathrm{i})(10+3\mathrm{i})/109 = (9992+3063\mathrm{i})/109$ となり、9992/109 は整数ではないから、これはガウス整数**ではない**。2 つの「109 の因数」のうち一方だけが $1001+6\mathrm{i}$ を割り切るのであり、これはちょうど、与えられた整数を割り切る素数が一部の素数に限られるのと同じである。ガウス整数には、それ自身の素数とそれ自身の素因数分解があるのである。

## 振り返り

- **言い換え、解き、言い戻す。**「2 つの平方数の和」は「ガウス整数の絶対値の 2 乗」になった。その言葉で考えると、問題はやさしかった。
- **まず因数分解する。**どの小問も、大きな数をより小さな数に分解し、その表し方を簡単に見つけることから始まった。
- **共役が新しい答えを与える。**表し方の個数は、ある因数とその共役のどちらを選ぶか、その選び方が何通りあるかによって決まる。

## 背後にある数学

### フェルマーの二平方定理

どのような素数が 2 つの平方数の和になるだろうか。$2 = 1^2 + 1^2$、5、13、17、29、37、41 はそうであり、3、7、11、19、23、31 はそうではない。規則はこうである。2 を除けば、素数が 2 つの平方数の和になるのは、それを 4 で割った余りが 1 であるとき、かつそのときに限る。フェルマー（Fermat）は 1640 年にこれを述べ、オイラー（Euler）が 1749 年に証明した。ガウス整数の言葉でいえば、これは次のことを意味する。素数 $p \equiv 1 \pmod 4$ は $p = (a + bi)(a - bi)$ と**分解する**（split）が、素数 $p \equiv 3 \pmod 4$ は素数のままである。たとえば $5 = (2 + i)(2 - i)$ であるが、3 はまったく因数分解できない。

1990 年、ドン・ザギエ（Don Zagier）は二平方定理の証明を発表した。それはたった 1 文の長さであることで有名である。この証明は解説つきで *Proofs from THE BOOK* に収められている。

### 独自の素数をもつ新しい数の体系

ガウス（Gauss）は、ガウス整数が通常の整数と驚くほどよく似た振る舞いをすることに気づいた。除法の原理（division algorithm）とユークリッドの互除法（Euclidean algorithm）があり、すべてのガウス整数はガウス素数（Gaussian prime）の積に（$\pm 1$ や $\pm i$ を掛ける違いを除いて）**一意的に**分解される。これを $(\star)$ と組み合わせると、ある数が 2 つの平方数の和として何通りに表せるかを、その素因数分解（prime factorisation）だけから正確に数えることができる。

大学では、これは**代数的整数論**（algebraic number theory）への入り口となる。代数的整数論とは、通常の整数を理解するために $\mathbb{Z}[i]$ や $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ のような数の体系を研究する分野である。Section 1.7 では、この分野がなぜ生み出される必要があったのかを示す。このような体系のすべてがガウス整数ほど行儀がよいわけではないのである。

### 四平方とその先

すべての正の整数は *4 つの*平方数の和である（ラグランジュ（Lagrange）、1770 年）。その証明は $(\star)$ の四平方版に基づいており、それは $(\star)$ が複素数から得られるのと同じようにして、ハミルトン（Hamilton）の**四元数**（quaternions）から得られる。これは Section 7.8 で扱う。

## 思考のスキル

### 舞台を変える

ある数の体系では扱いにくい問題も、より大きな体系では自然なものになることがある。

2 つの平方数の和は、整数の中では扱いにくいが、複素数の中では単なる絶対値にすぎない。数学者はこのようにして絶えず数の体系を拡張してきた。整数から有理数へ、有理数から実数へ、実数から複素数へ。拡張のたびに、古い問題のいくつかがやさしくなるのである。

## 次の一歩

1. **障害。** $4k+3$ の形の数は 2 つの平方数の和にならないことを示せ。(4 を法として平方数はどうなるか?)

2. **2 通り。** 65 と 85 をそれぞれ 2 つの平方数の和として 2 通りに表し、その答えをガウス整数を用いて説明せよ。

3. **4 通り。** $1105 = 5 \times 13 \times 17$ である。1105 を 2 つの正の平方数の和として表す 4 通りの異なる方法を求めよ。なぜ 4 通りなのか。

4. **ガウス素数。** やや難 $a, b, c, d$ を整数として $3 = (a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})$ ならば、一方の因数の絶対値は 1 であることを示せ。(絶対値の 2 乗をとれ。) これにより、3 がガウス素数であることがわかる。

## さらに学ぶために

- **John Stillwell, *Elements of Number Theory***(Springer)。歴史を交えながら、ガウス整数とその先へと積み上げていく。
- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***、第 4 章 "Representing numbers as sums of two squares"(数を 2 つの平方数の和として表す)。
- **Joseph Silverman, *A Friendly Introduction to Number Theory***、平方和とガウス整数に関する章。

# 1.7 因数分解が破綻するとき

**問題**

**STEP I 2016、問 7**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/16-s1-q7`

## 導入

1 より大きいすべての整数は、ちょうど 1 通りに素数（prime）の積として書ける。$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ であり、これ以外の書き方はない。この事実はあまりに何度も使ってきたので、証明が必要とは思えないほど自明に感じられるだろう。

この問題では、一見まったく自然に見えるのに、その「自明な」事実が成り立たない小さな数の世界を作る。STEP I の問題なので数学的には易しいが、得られる教訓は深い。それはまさに、1847 年にフェルマーの最終定理（Fermat's Last Theorem）の有名な証明の試みを打ち破り、代数学のまったく新しい分野の誕生につながった教訓なのである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $S$ と $T$ の最初のいくつかの要素を書き出せ。小問 (iv) の定義によれば、$S$ のどの要素が$S$-**素数**（$S$-prime）か。

$S = \{1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, \ldots\}$ であり、$T = \{3, 7, 11, 15, 19, 23, \ldots\}$ である。$S$ の数は、（1 以外の）より小さい $S$ の要素の積として書けないとき、$S$-素数であるという。3 は $S$ に属さないので、通常の整数では $9 = 3 \times 3$ であるにもかかわらず、9 は $S$-素数であることに注意せよ。「素数」であるかどうかは、どの数を使ってよいかによって決まるのである。

## 順を追って解く

### 段階 1　和集合、共通部分、積

$S \cup T$ は正の奇数全体の集合である。すべての奇数は 4 で割った余りが 1 または 3 だからである。$S \cap T$ は空集合である。2 つの異なる余りをもつ数は存在しないからである。

> **考えてみよう**　$S$ の一般の要素はどのように書けるか。そのような要素 2 つの積は何か。

$S$ の要素は $a \geq 0$ として $4a+1$ の形であり、

$$(4a+1)(4b+1) = 16ab + 4a + 4b + 1 = 4(4ab + a + b) + 1 \in S.$$

よって $S$ は乗法について閉じている（closed under multiplication）。$T$ については

$$(4a+3)(4b+3) = 16ab + 12a + 12b + 9 = 4(4ab + 3a + 3b + 2) + 1,$$

となり、これは$T$ **ではなく** $S$ に属する。例えば $3 \times 7 = 21 \in S$ である。よって $T$ は乗法について閉じていない。

### 段階 2　$T$ に属する素因数

> **考えてみよう**　$T$ に属する素数でない数をとる。その素因数はすべて奇数である。もしそれらがすべて $S$ に属していたら、どうなるか。

この数は奇数なので、その素因数はすべて奇数であり、$S$ か $T$ に属する。もしそれらが**すべて** $S$ に属するならば、$S$ は乗法について閉じているので、それらの積は $S$ に属する。しかしその積は考えている数そのものであり、$T$ に属する。よって、少なくとも 1 つの素因数は $T$ に属する。 ■

### 段階 3　奇数個の因数

> **考えてみよう**　$T$ の要素を偶数個掛け合わせると、積はどこに属するか。奇数個ならばどうか。

$T$ の数 2 つの積は $S$ の数になり、$S$ の数どうしの積は $S$ の数になるので、偶数個の $T$ の因数の積は $S$ に属する。奇数個の場合は（$S$ の要素）$\times$（$T$ の要素 1 つ）となり、同様の計算によりこれは $T$ に属する。

次に $t \in T$ をとる。$t$ が $T$-素数ならば、証明は終わりである。そうでなければ、$t$ を $T$ の要素の積として書く。各因数は 1 より大きいので、$t$ より小さい。それらのうち $T$-素

数でないものはさらに分解でき、以下同様である。因数は毎回小さくなるので、この操作は終わり（ここでも整列性（well-ordering）による）、$t$ は $T$-素数の積として表される。積は $T$ に属するので、因数の個数は奇数でなければならない。 ■

#### 段階 4 2通りの因数分解

> **手を止めて、やってみよう** $S$-素数への本質的に異なる 2 通りの因数分解をもつ $S$ の数を見つけよ。**ヒント：**9 のように、通常の素因数が $S$ に含まれないというだけの理由で $S$-素数となっている数を使え。

$S$-素数は $5, 9, 13, 17, 21, 29, 33, 37, 41, 49, \ldots$ と続く。ここで $21 = 3 \times 7$、$9 = 3 \times 3$、$49 = 7 \times 7$ はいずれも $S$-素数である。3 と 7 は $S$ に属さないからである。そして

$$441 = 21 \times 21 = 9 \times 49.$$

これは 441 の $S$-素数への 2 通りの異なる因数分解である（図 1.7.1）。$S$ では素因数分解の一意性（unique factorisation）が成り立たない。 ■

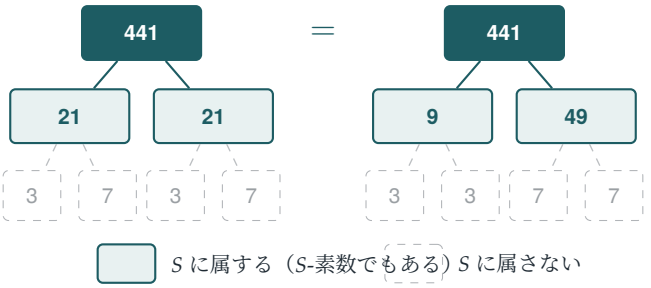



**図 1.7.1** 441 の $S$-素数への 2 通りの因数分解。通常の整数ではどちらの木も $3 \times 3 \times 7 \times 7$ まで続くが、3 と 7 は $S$ に属さないので、$S$ の中では因数分解は 2 段目で止まり、しかも両者は異なる。

## 振り返り

- **「素数」であるかどうかは体系による。** 9 と 21 は整数の中では合成数だが、$S$ の中では素数である。それらを因数分解するのに必要な数が欠けているからである。
- **閉じているかどうかが重要である。** $S$ は乗法について閉じているが、$T$ はそうではない。このただ 1 つの違いが、小問 (iii) と (iv) の鍵となった。
- **自明な事実が定理であることもある。** 整数における素因数分解の一意性には証明が必要である。この問題はその理由を示している。よく似た体系において、それは偽なのである。

## 背後にある数学

### 整数を特別なものにしているもの

通常の整数では、なぜ因数分解がうまくいくのか。鍵となる事実は**ユークリッドの補題**（Euclid's lemma）である。すなわち、素数 $p$ が積 $ab$ を割り切るならば、$p$ は $a$ を割り切るか、または $p$ は $b$ を割り切る。これはユークリッドの互除法（Euclidean algorithm）を用いて証明され、まさに $S$ で成り立たない性質である。そこでは、$S$-素数 9 は $21 \times 21 = 441$ を割り切る（$441 = 9 \times 49$ だから）が、9 は $S$ において 21 を割り切らない。大学 1 年で、ユークリッドの補題を注意深く証明し、そこから素因数分解の一意性が導かれることを学ぶだろう。

#### フェルマーの最終定理の誤った証明

1847 年 3 月 1 日、ガブリエル・ラメ（Gabriel Lamé）はパリ科学アカデミーで、フェルマーの最終定理を証明したと発表した。彼のアイデアは、1 の複素冪根（complex roots of unity）を用いて $x^n + y^n$ を

$$x^n + y^n = (x+y)(x+\zeta y)(x+\zeta^2 y)\cdots(x+\zeta^{n-1}y), \qquad \zeta = e^{2\pi \mathrm{i}/n}$$

（$n$ が奇数のとき）と因数分解し、各括弧の素因数について議論するというものであった。ジョゼフ・リウヴィル（Joseph Liouville）はすぐに異議を唱えた。$\zeta$ から作られる数が一意に因数分解されると言えるのはなぜか、と。数週間後、エルンスト・クンマー（Ernst Kummer）が、それらがしばしば一意に因数分解されないことをすでに示していたことが明らかになった。最初に破綻するのは $n = 23$ のときである。

クンマーは、素因数分解の一意性を回復させる追加の対象である「理想数」（ideal numbers）を考案して救えるものを救い、広い範囲の指数に対してフェルマーの最終定理を証明した。リヒャルト・デデキント（Richard Dedekind）はクンマーの理想数を**イデアル**（ideals）へと発展させた。これは現代代数学の中心的な概念の 1 つである。

---

### 覚えておきたい小さな例

数の体系 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ において

$$6 = 2 \times 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5}),$$

であり、4 つの因数はいずれもこの体系で「素数」である（演習 3）。これを、因数分解が一意である Section 1.6 のガウス整数（Gaussian integers）と比べてみよ。この種の体系のうちどれが素因数分解の一意性をもつかは、深い問題である。ガウス（Gauss）

は、$\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ の形の体系とその近い仲間のうち、それをもつのは 9 つだけであると予想した。これは最終的に、1952 年から 1967 年にかけて Heegner、Baker、Stark によって証明された。

## 思考のスキル

**当然と思っていることを疑う**

ある事実が証明するまでもなく自明に感じられるときは、それが何に依存しているかを問い、それが成り立たない状況を探せ。

反例、すなわち「自明な」事実が偽となる世界を作ることは、証明に本当に必要なものを見つけ出す最良の方法の 1 つである。大学の代数学の多くは、整数のよく知られた性質のうちどれがより一般の体系でも生き残るかを問うことから成っている。

## 次の一歩

1 **別の例。** 693 が $S$-素数への 2 通りの異なる因数分解をもつことを示せ。このような例を作る一般的な方法を見つけられるか。

2 **偶数。** $E = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ とする。どの数が $E$-素数か。60 が $E$-素数への因数分解を 2 通り以上もつことを示せ。

3 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$。**ノルム** (norm) $N(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$ を定義する。$N(zw) = N(z)N(w)$ を示せ。ノルムが 2 または 3 となる元が存在しないことを示すことにより、2、3、$1 \pm \sqrt{-5}$ は $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ においてこれ以上因数分解できないことを導け。

4 **ユークリッドの補題の応用。** やや難 ユークリッドの補題（素数が $ab$ を割り切るならば、それは $a$ または $b$ を割り切る）を仮定して、1 より大きいすべての整数は、因数の順序を除いて、ただ 1 通りの素因数分解しかもたないことを証明せよ。

## さらに学ぶために

- **Ian Stewart & David Tall, *Algebraic Number Theory and Fermat's Last Theorem*** (CRC Press)。『代数的整数論とフェルマーの最終定理』。冒頭の数章では、ラメ、クンマー、イデアルの物語が、意欲的な大学 1 年生がついていける水準で語られている。

- **John Stillwell, *Elements of Number Theory***。『数論の基礎』。整数とガウス整数における素因数分解の一意性を、並べて比較している。
- **Harold Edwards, *Fermat's Last Theorem: A Genetic Introduction***（Springer）。『フェルマーの最終定理：発生的入門』。意欲的な読者向けで、クンマーの仕事をその歴史を通して解説している。

# 1.8 有理数を数える

**問題**

**STEP III 2020、問 8**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip`

## 導入

正の分数をすべて、一つずつ順に並べて、どの分数もちょうど一回ずつ現れるようにできるだろうか。それは不可能に思える。どの二つの分数の間にも無数の分数があるので、書き出すべき「次の」分数というものが存在しないからである。しかしカントール（Cantor）は 1870 年代に、それでも並べることができると示した。これは、ある厳密な意味において、分数は整数より多くはないということを意味する。

カントールのリストは不格好であった。$\frac{1}{2}$ だけでなく $\frac{2}{4}$ も含まれていて、重複を消していく必要があったのである。この問題では、ばかばかしいほど単純な規則をもつ数列から、重複のまったくないリストを作る。このリストは 2000 年に Neil Calkin と Herbert Wilf によって発表されたが、数列そのものは 1858 年に Moritz Stern によって研究されていた。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 何かを証明する前に、最初の 15 項ほどを計算してみよう。比 $u_n/u_{n+1}$ について何に気づくだろうか。

数列は

$$1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1,\ 4,\ 3,\ 5,\ 2,\ 5,\ 3,\ 4,\ 1,\ 5,\ \ldots$$

と始まり、比 $u_n/u_{n+1}$ は

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{5}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{1},\ \ldots$$

となる。どの分数も既約分数（lowest terms）の形で現れ、重複するものはない。この問題は、これが永遠に続くこと、そしてどの正の分数もいずれ現れることを証明せよというものである。

## 順を追って解く

### 段階 1　奇数番目が偶数番目に勝る

隣り合う二項は $(u_{2k}, u_{2k+1})$ または $(u_{2k+1}, u_{2k+2})$ のいずれかである。

> **考えてみよう**　これらの組をそれぞれ $u_k$ と $u_{k+1}$ を用いて表せ。どちらの項が大きいか。

$(u_{2k}, u_{2k+1}) = (u_k,\ u_k + u_{k+1})$ であり、$(u_{2k+1}, u_{2k+2}) = (u_k + u_{k+1},\ u_{k+1})$ である。すべての項は正の整数である（簡単な帰納法（induction）で示せる）から、$u_k + u_{k+1}$ は $u_k$ と $u_{k+1}$ のどちらよりも大きい。唯一の例外は最初の組 $(u_1, u_2) = (1, 1)$ であり、$u_1$ は直接定義されているので、どちらの形にも当てはまらない。 ■

### 段階 2　隣り合う項は互いに素である

> **考えてみよう**　$d > 1$ が $u_{2k}$ と $u_{2k+1}$ の両方、すなわち $u_k$ と $u_k + u_{k+1}$ の両方を割り切るとする。$d$ はほかに何を割り切るか。

$d$ は $(u_k + u_{k+1}) - u_k = u_{k+1}$ を割り切るので、$d$ は数列のより前にある隣り合う組 $u_k, u_{k+1}$ を割り切る。もう一方の場合もまったく同様である。$d$ が $u_k + u_{k+1}$ と $u_{k+1}$ を割り切るならば、$d$ は $u_k$ を割り切る。

したがって、隣り合う組の公約数は、より前の組へ、さらに前の組へと受け渡されていく。位置が永遠に減り続けることはできない（またしても整列性（well-ordering）である）から、最終的に $d$ は最初の組 $u_1 = u_2 = 1$ を割り切らなければならなくなる。これは $d > 1$ に対しては不可能である。よって、隣り合う組はすべて互いに素（coprime）である。 ■

### 段階 3　同じ組が二度現れることはない

> **手を止めて、やってみよう**　段階 1 から有用なことがわかる。隣り合う組 $(a, b)$ を見れば、$a$ が奇数番目にあるか偶数番目にあるかを判定できるのである。どのようにしてか。さらに、段階 2 の意味で、その直前に来る組を復元できるだろうか。

$a < b$ ならば、（段階 1 により）$b$ は奇数番目にあるので、ある $k$ に対してこの組は $(u_{2k}, u_{2k+1}) = (u_k, u_k + u_{k+1})$ であり、「親」の組 $(u_k, u_{k+1})$ は $(a,\ b-a)$ である。$a > b$ ならば、この組は $(u_{2k+1}, u_{2k+2})$ であり、その親は $(a-b,\ b)$ である。$a = b$ ならば、段階 1 よりこの組はまさに最初の組 $(1,1)$ でなければならない。

よって、最初の組以外の隣り合う組はそれぞれ、その親の組と**親の位置**を決定する（この構造は図 1.8.1 の木として見ることができる）。子が $2k$ 番目または $2k+1$ 番目にあるとき、親は $k$ 番目にある。いま、$(a,b)$ が二つの異なる位置に現れたとしよう。するとそれらの親は同じ組が二つの位置に現れたものとなり、**その**親もまた同様であり、以下同様である。これをさかのぼっていくと、最終的に $(1,1)$ が 1 番目以外の位置に見つかることになるが、これは段階 1 により否定される。 ■

### 段階 4 互いに素な組はすべて現れる

> **考えてみよう** 互いに素なある組 $(a,b)$ が、隣り合う二項として決して現れないとする。そのような組のうち、どれに注目すべきだろうか。

「欠けている」互いに素な組のうち、$a+b$ の値が最小のものをとる。すなわち最小反例（minimal counterexample）である。これは実際に現れる $(1,1)$ ではありえないので、$a \neq b$ である（互いに素かつ等しいならば $a = b = 1$ となる）。

- $a > b$ の場合：組 $(a-b, b)$ は互いに素であり（$a-b$ と $b$ の公約数は $a$ を割り切る）、その和 $a$ は $a+b$ より小さい。最小性によりこの組は現れ、その位置を $k, k+1$ とする。しかしすると $u_{2k+1} = u_k + u_{k+1} = a$ かつ $u_{2k+2} = u_{k+1} = b$ となり、結局 $(a,b)$ は現れることになる。
- $a < b$ の場合：同様に $(a, b-a)$ がある位置 $k, k+1$ に現れ、すると $(u_{2k}, u_{2k+1}) = (a,b)$ となる。

いずれの場合も矛盾である。よって、互いに素な正の整数の組はすべて、隣り合う二項として現れる。 ■

（問題の小問 (iv) は、これを無限降下法（descent）の形で述べている。すなわち、欠けている組があれば、より小さな欠けている組が生じるというものである。これは同じ議論を逆向きに読んだものにほかならない。）

### 段階 5 すべての分数のリスト

すべての正の有理数（rational number）は、$a, b$ が互いに素であるような既約分数 $a/b$ としてただ一通りに表せる。段階 4 により、$(a,b)$ はある隣り合う組 $(u_n, u_{n+1})$ として現れるので、$f(n) = a/b$ である。すなわち $f$ の値域はすべての正の有理数である。段階 3 によりそれは一度しか現れず、段階 2 によりすべての値 $f(n)$ はすでに既約分数の

形であるから、異なる二つの $n$ が同じ分数を与えることはない。したがって $f$ は正の整数全体から正の有理数全体への全単射（bijection）であり、逆関数をもつ。 ■

## 振り返り

- **降下法とその逆。**公約数や重複する組は、数列の始まりへと**さかのぼって**追跡された。欠けている組は、最小反例を用いて**前向きに**組み立てることで処理された。
- **全単射には二つの半分が必要である。**「すべての分数が現れる」（全射（onto））と「どの分数も二度は現れない」（単射（one-to-one））は別々の主張であり、別々に証明される。
- **まず計算せよ。**15 項を書き出したことで主張が信じられるものになり、証明を推し進めた親子構造が見えてきた。

## 背後にある数学

### Calkin–Wilf 木

正の分数を木の形に並べる。一番上に $\frac{1}{1}$ を置き、各分数 $\frac{a}{b}$ に二つの子、すなわち左に $\frac{a}{a+b}$、右に $\frac{a+b}{b}$ を与える。この木を一行ずつ、左から右へ読むと、ちょうどこの問題のリスト $f(1), f(2), f(3), \ldots$ が得られる（図 1.8.1）。段階 3 はすべての分数がただ一つの親をもつことを述べ、段階 4 はすべての分数が木の中にあることを述べている。2003 年に Moshe Newman は、木すら必要ないことを発見した。リストの各分数は、一つ前の分数から

$$x_{n+1} = \frac{1}{2\lfloor x_n \rfloor - x_n + 1}.$$

によって計算できるのである。

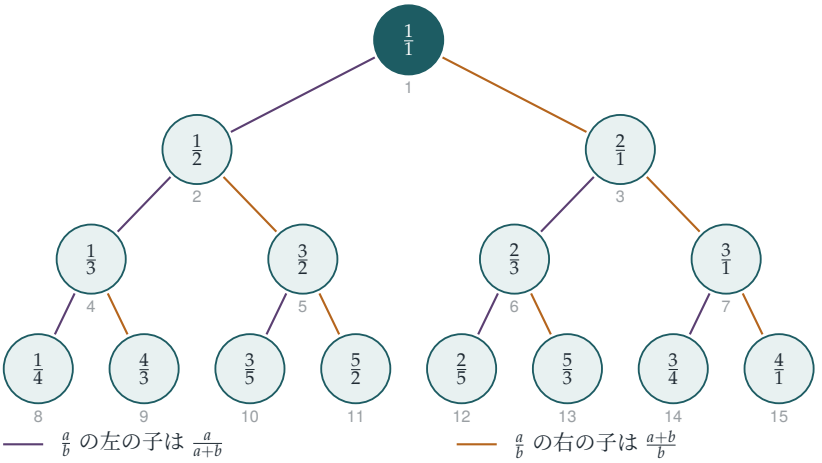



**図 1.8.1**　Calkin–Wilf 木の最初の 4 行。一行ずつ、左から右へ読むと $f(1), f(2), f(3), \ldots$ が得られる。灰色の小さな数は位置 $n$ である。すべての正の分数が既約分数の形でちょうど一回ずつ現れる。

### 無限の大きさの違い

このように並べ上げることのできる集合を**可算**（countable）であるという。分数は可算である。分数は整数よりはるかに多いように思えるので、これは驚くべきことである。大学の最初の学期には、カントールの**対角線論法**（diagonal argument）にも出会うだろう。これは**実数**が可算でないこと、すなわち実数のどんなリストも必ずどれかを取りこぼすことを示すものである。したがって、無限には本当に異なる大きさがあり、実数は有理数より真に大きな無限をなす。これは大学 1 年次の講義で出会う結果の中でも、とりわけ驚くべきものの一つである。

### Stern の数列

数列 $u_n$ は *Stern* **の二原子数列**（Stern's diatomic sequence）であり、ほかにもさまざまな顔をもつ。たとえば $u_{n+1}$ は、各べきを高々 2 回まで用いて $n$ を 2 のべきの和として表す方法の数に等しい。この数列は *Stern–Brocot* **木**（Stern–Brocot tree）や、無理数の最良有理近似を与える連分数（continued fraction）とも深く関係している。

## 思考のスキル

### 全単射を構成する

二つの集合が同じ大きさであることを示すには、両者を過不足なく対応させよ。すなわち、対象の集合のすべての元に対応がつくこと（全射）と、どの元にも二重に対応がつかないこと（単射）を証明せよ。

全単射は有限・無限を問わず数え上げの基礎であり、大学では絶えず用いることになる。ここでは、どちらの半分も、構造をその出発点までさかのぼることで証明された。

## 次の一歩

1. **分数を見つける。** $f(n) = \frac{3}{5}$ となるのはどの $n$ か。また $f(n) = \frac{5}{3}$ となるのはどの $n$ か。親の規則を用いて $\frac{1}{1}$ までさかのぼれ。

2. **Newman の公式。** $x_1 = 1$ から始めて、Newman の公式がリストの最初の 10 個の分数を生み出すことを確かめよ。

3. **カントールの対角線論法。** 0 と 1 の間のすべての実数を小数で書いたリストがあるとする。リストの $n$ 番目の数と $n$ 桁目が異なるような小数を構成せよ。これがリストの不完全さを示すのはなぜか。（$0.0999\ldots = 0.1$ のような小数にはどのような注意が必要か。）

4. **可算和集合。** やや難 正の整数の組 $(m, n)$ 全体の集合が可算であることを、正の整数全体との全単射を具体的に与えることで示せ。（$2^{m-1}(2n-1)$ を試してみよ。）

## さらに学ぶために

- **Neil Calkin & Herbert Wilf,「Recounting the rationals」**（*American Mathematical Monthly*, 2000）。4 ページで、全編が読みやすい。
- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***（邦訳『天書の証明』）、第 17 章「Sets, functions, and the continuum hypothesis」（集合、関数、連続体仮説）。Calkin–Wilf 木が取り上げられている。
- **Ian Stewart & David Tall, *The Foundations of Mathematics***（Oxford University Press）。大学 1 年次の講義と同様に、可算性、カントール、実数を扱う。

# 1.9 三次曲線の接線

**問題**

**STEP I 2009、問 2**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/09-s1-q2`

## 導入

一見すると、これはありふれた座標幾何の問題である。微分して接線（tangent）を求め、三次方程式（cubic equation）を解く。ところが最後の一行では、ある立方数（cube）をほかの三つの立方数の和として表すことが求められ、幾何がまるで魔法のようにそれを生み出してくれる。

曲線上の既知の点を通る直線を引いて新しい点を見つけるというこの技法は、3 世紀のアレクサンドリアのディオファントス（Diophantus）にまでさかのぼる。現代の数学者の手によって、それは**楕円曲線**（elliptic curves）の理論となった。この理論は現代の数論（number theory）の中心に位置し、フェルマーの最終定理（Fermat's Last Theorem）の証明の土台となり、さらに世界のインターネット通信の大部分の安全を支えている。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 点 $(-a, b)$ はこの曲線上にある。なぜか。また、そのことは立方数の和とどう関係するのか。

代入すると $(-a)^3 + a^3 + b^3 = b^3$ となるので、確かに曲線上にある。$y^3 = x^3 + a^3 + b^3$ 上の**有理数**（rational）座標をもつ点こそ、まさに求めたいものである。$x = q/s'$、$y = p/s'$ ならば、分母を払うことで立方数どうしの関係式が得られる。方針は、見つけやすい一つの点から出発し、幾何を用いてもっと見つけにくい点を探すことである。

## 順を追って解く

### 段階 1  接線

$y^3 = x^3 + a^3 + b^3$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると $3y^2\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$ であるから、$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2}$ となる。$(-a, b)$ における傾き（gradient）は $a^2/b^2$ であるから、接線は

$$y - b = \frac{a^2}{b^2}(x + a) \quad\Longrightarrow\quad b^2 y - b^3 = a^2 x + a^3 \quad\Longrightarrow\quad b^2 y - a^2 x = a^3 + b^3. \qquad \blacksquare$$

### 段階 2  接線が曲線と再び交わる点

$a = 1$、$b = 2$ のとき、曲線は $y^3 = x^3 + 9$ であり、$(-1, 2)$ における接線は $4y - x = 9$、すなわち $y = \dfrac{x+9}{4}$ である。これを曲線の式に代入すると

$$\frac{(x+9)^3}{64} = x^3 + 9 \quad\Longrightarrow\quad x^3 + 27x^2 + 243x + 729 = 64x^3 + 576,$$

となり、整理すると $63x^3 - 27x^2 - 243x - 153 = 0$、両辺を 9 で割ると $7x^3 - 3x^2 - 27x - 17 = 0$ を得る。 $\blacksquare$

### 段階 3  三次方程式を解く

> **考えてみよう**  この三次方程式の根の一つは、計算をしなくてもすでにわかっている。それはどれか。また、なぜそれは**二重に**現れるはずなのか。

接線は $x = -1$ で曲線に接しており（図 1.9.1）、「接する」とは重根（repeated root）をもつということである。これは、放物線の接線が放物線と二次方程式の重根で交わるのとまったく同じである。したがって $(x+1)^2$ が因数になるはずである。確かめると、$7(-1)^3 - 3(1) - 27(-1) - 17 = -7 - 3 + 27 - 17 = 0$ であり、導関数 $21x^2 - 6x - 27$ も $x = -1$ で 0 になる。割り算をすると

$$7x^3 - 3x^2 - 27x - 17 = (x+1)^2(7x - 17).$$

> **手を止めて、やってみよう**  したがって、接線は $x = \frac{17}{7}$ で再び曲線と交わる。$y$ を求め、この点を立方数どうしの関係式に書き直せ。

$y = \dfrac{17/7 + 9}{4} = \dfrac{80/7}{4} = \dfrac{20}{7}$ である。点 $\left(\frac{17}{7}, \frac{20}{7}\right)$ は $y^3 = x^3 + 9$ 上にあるから

$$\frac{20^3}{7^3} = \frac{17^3}{7^3} + 9 \quad\Longrightarrow\quad 20^3 = 17^3 + 9 \times 7^3.$$

**考えてみよう** $9 \times 7^3$ を二つの立方数の和として表したい。9 がどこから来たのかを思い出そう。

$9 = a^3 + b^3 = 1^3 + 2^3$ であるから、$9 \times 7^3 = 7^3 + 14^3$ となる。したがって

$$20^3 = 17^3 + 14^3 + 7^3.$$

検算：$8000 = 4913 + 2744 + 343$。 ■

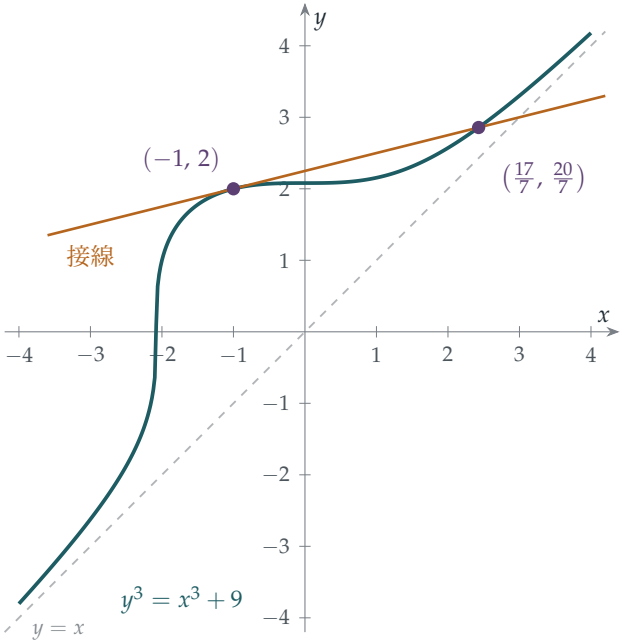



**図 1.9.1** 曲線 $y^3 = x^3 + 9$（青緑）は、原点から遠く離れたところで直線 $y = x$ に近づく。有理点 $(-1, 2)$ における接線（琥珀色）はその点で曲線に接しており、これは二重の交点として数えられる。そして接線はもう一度、別の有理点 $\left(\frac{17}{7}, \frac{20}{7}\right)$ で曲線と交わる。

## 振り返り

- **接することは重根を意味する。**これにより、明らかな根が見当たらない三次方程式が、すぐに因数分解できるものに変わった。
- **新しい根は自動的に有理数になる。**三つの根のうち二つが有理数であれば（ここではどちらも $-1$）、根の和 $\frac{3}{7}$ が有理数であることから、三つ目の根も有理数でなければならない。これがこの方法の核心である。
- **幾何が数論の答えを生み出した。**立方数を探し回ったわけではない。一本の接線が

それを見つけてくれたのである。

## 背後にある数学

### 弦と接線の方法

$y^3 = x^3 + 9$ や、より標準的な形 $y^2 = x^3 + Ax + B$ のような三次曲線を考える。その上にある有理数座標の点を二つ知っていれば、それらを通る直線は曲線とちょうどもう一点で交わり、その点も有理数座標をもつ（**振り返り**での議論による）。一点しか知らなければ、代わりにその点での接線を使えばよい。いずれにしても、既知の有理点から新しい有理点が生まれる。

驚くべきことに、この「弦（chord）と接線」による構成は、曲線上の点を**足し合わせる**方法に仕立てることができ、そのとき有理点全体は**群**（group）をなす。群とは、大学 1 年次で学ぶ代数的構造である。Louis Mordell は 1922 年に、この群が有限個の点で生成されることを証明した。すなわち、有理点がどれだけたくさんあっても、そのすべては有限個の点から弦と接線を用いて作り出せる。彼の証明は、Section 1.5 で扱ったフェルマー（Fermat）の無限降下法（descent）の一種である。

### 今日の楕円曲線

このような曲線は**楕円曲線**とよばれる（楕円であるからではなく、楕円の弧長との歴史的なつながりによる）。楕円曲線は現代数学のいたるところに現れる。

- **フェルマーの最終定理。** 1980 年代、Gerhard Frey は、$x^n + y^n = z^n$ の解が存在すれば、非常に奇妙な楕円曲線が生じることに気づいた。1994 年、アンドリュー・ワイルズ（Andrew Wiles）はそのような奇妙な曲線が存在しえないことを証明し、こうしてフェルマーの最終定理を証明した。
- **バーチ・スウィンナートン＝ダイアー予想（Birch and Swinnerton-Dyer conjecture）。** 有理点のなす群には、生成元（generator）がいくつ必要なのだろうか。1960 年代に、ケンブリッジで行われた数学における最初期のコンピュータ実験をもとに立てられた予想は、素数を法として点を数えることから作られる関数を用いて、その答えを予言している。これは七つのミレニアム懸賞問題（Millennium Prize Problems）の一つである。
- **暗号（cryptography）。** 有限の数の体系の上の楕円曲線では、点 $P$ を自分自身に $n$ 回足す計算は、$n$ が何百桁もあっても速く行える（高い累乗を二乗の繰り返しで計算するのと同じように、$P$ を繰り返し 2 倍すればよい）。ところが、$P$ と結果 $nP$ が与えられたとき、$n$ を求めることはきわめて難しいと考えられている。これが**楕円曲**

線離散対数問題（elliptic-curve discrete logarithm problem）である。この非対称性が、今日のオンライン通信の多くを守っている。

### 同じ次数の累乗の和

三つの正の立方数の和となる最小の立方数は $6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3$ である。接線の方法で見つかった $20^3 = 7^3 + 14^3 + 17^3$ はその倍数ではなく、この方法を繰り返すと新しい恒等式が次々に得られる（ただし負の数を含むものもある）。ある $k$ 乗数を作るには、$k$ 乗数がいくつ必要だろうか。オイラー（Euler）は 1769 年に、ある $k$ 乗数を作るには少なくとも $k$ 個の $k$ 乗数が必要であると予想した。4 乗と 5 乗については、この予想は誤りであった。1966 年、Leon Lander と Thomas Parkin はコンピュータによる探索で

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$$

を発見し、1988 年には Noam Elkies が楕円曲線を用いて 4 乗の場合の反例を見つけた。

## 思考のスキル

**幾何で数論を解く**

**方程式の整数解や有理数解を求めるには、方程式を曲線とみなし、既知の点を通る直線を探せ。**

その背後にある代数は単純である。有理数係数の多項式の根が一つを除いてすべて有理数であれば、残りの根も有理数である。このように図と式の間を行き来することは、数学者がもちうる最も強力な習慣の一つである。

## 次の一歩

1. **円上の有理点。** $(-1, 0)$ を通り傾きが $t$ の直線は、円 $x^2 + y^2 = 1$ ともう一点で交わる。その点が $\left(\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}, \dfrac{2t}{1 + t^2}\right)$ であることを示し、これを用いてピタゴラス数（Pythagorean triples）を無数に作れ。

2. **交わらない弦。** 点 $(1, 2)$ と $(2, 1)$ は $x^3 + y^3 = 9$ 上にある。これらを通る直線は、曲線とほかの点では交わらないことを示せ。「三つ目の点」はどこへ行ったのだろうか。（無限遠点（point at infinity）について調べてみよ。）

3. **技法を繰り返す。** $\left(\frac{17}{7}, \frac{20}{7}\right)$ における $y^3 = x^3 + 9$ の接線と、それが曲線と交わる三つ目の点を求めよ。（数式処理システム（computer algebra system）を使うとよい。

数がいかに急速に大きくなるかに注目せよ。）

4 **タクシー数（taxicab numbers）。** $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ である。$(1, 12)$ と $(9, 10)$ を通る直線が曲線 $x^3 + y^3 = 1729$ と交わる三つ目の点を求め、$p^3 = q^3 + r^3 + s^3$ の形の新しい恒等式を導け。

## さらに学ぶために

- **Joseph Silverman & John Tate, *Rational Points on Elliptic Curves***（Springer）。邦題『楕円曲線論入門』。学部生向けに書かれており、第 1 章は A レベル（A level、英国の大学入学資格試験）を超える知識を必要としない。
- **Avner Ash & Robert Gross, *Elliptic Tales***（Princeton University Press）。バーチ・スウィンナートン＝ダイアー予想へと至る一般向けの解説書。
- **Simon Singh, *Fermat's Last Theorem***。邦題『フェルマーの最終定理』。楕円曲線が 350 年来の難問を解決するに至った経緯を描く。

# 本章で学んだこと

本章の冒頭で、整数について三つの問いを立て、その根底に流れる四つ目のテーマ、すなわち「どのように証明するか」を扱うと約束した。九つの STEP の問題を通して、どこまで到達できたかを確かめてみよう。

### 1. 素数はいくつあり、どのように分布しているか

Section 1.1 では、新しい素数（prime）を一つも見つけることなく、素数が無限に存在することを証明した。互いに共通の因数をもたない数の無限族、すなわちフェルマー（Fermat）数（Fermat numbers）を構成したのである。そのため、それぞれの数は自分だけの素数を必要とする。これは大きさではなく**構造**についての証明である。

Section 1.2 ではさらに進んで、$n$ 以下のすべての素数の積が $4^n$ より小さいことを示した。これは本章で初めての**定量的**（quantitative）な主張であり、素数がどれほど密に詰まりうるかを制限するものである。対数をとると、これは $\sum_{p \le n} \ln p < 1.39\, n$ を意味する。一方、素数定理（Prime Number Theorem）によれば、真の値はおよそ $n$ である。STEP レベルの議論でも、すでにかなり近いところまで迫っていたのである。

まだ**行っていない**のは、素数がどのように分布しているかを正確に求めることである。これはリーマン（Riemann）ゼータ関数（Riemann zeta function）によって支配されており、それを精密に述べたものがリーマン予想（Riemann Hypothesis）、すなわち数学で最も有名な未解決問題である。読者はいまや、それが何についての問題なのかを理解するのに十分な知識をもっている。

### 2. ある数が分数でないことはどのように証明できるか

まったく異なる三つの方法を見た。

- **最小のものをとる**（Section 1.3）。もし $\sqrt{2}$ が分数であれば、$k\sqrt{2}$ を整数にする最小の正の整数 $k$ が存在する。しかしそのとき $(\sqrt{2}-1)k$ はそれより小さな整数となる。同じ議論で立方根も扱うことができた。
- **整数を 0 と 1 の間に閉じ込める**（Section 1.4）。もし $e$ や $e^2$ が分数であれば、階乗を掛けることで 0 と 1 の間に厳密に挟まれた整数が得られてしまう。これは、$e$ と $\pi$ が超越数（transcendental）であることを示したエルミート（Hermite）とリンデ

マン（Lindemann）の証明の背後にある考え方である。

- **起こりえない整除関係を見つける**（Section 1.5、演習 3）。$x^2 + y^2 = 3$ 上に有理点（rational point）が存在しないことを示すのは、$x$ が有理数のとき $\sqrt{3 - x^2}$ が決して有理数にならないことを示すのと同じである。

そして、まだわかっていないことがどれほど多いかも学んだ。$e + \pi$ が無理数（irrational）であることさえ、いまだに誰も証明できていないのである。

### 3. どの方程式が整数解をもつか

答えが**存在しない**である場合もある。Section 1.5 では、それを証明するフェルマーの方法を見た。すなわち、どんな解からもより小さな解が際限なく作られてしまうというものである。うまく選んだ素数を法（modulo）として考えることで、どの整除関係を利用すればよいかがわかった。

答えが**存在し、しかもそれを作り出す仕組みがある**という場合もある。Section 1.6 では、複素数によって二つの平方数の和が乗法の規則に変わった。Section 1.9 では、三次曲線の接線から $20^3 = 17^3 + 14^3 + 7^3$ が得られた。

そして、正しい一手が**数の体系を変えること**である場合もある。ガウス整数（Gaussian integers）を用いると、二つの平方数の和は簡単に扱えた。しかし Section 1.7 は警告を与えた。一見まったく妥当に見える体系でも、数が二通りの異なる方法で「素数」に分解されうるのである。1847 年に無視されたこの警告は、イデアル（ideal）と現代代数学の誕生へとつながった。

Section 1.8 はさらに独自のひねりを加えた。整数よりはるかに多く存在するように思える分数も、一つずつ並べ上げることができるのである。無限には、最初に見えるよりも多くの構造がある。

### 4. 証明の道具箱

本章で用いた方法を以下にまとめる。これらはどれも、大学の数学の講義で何度も繰り返し現れるものである。

| 方法 | 用いた箇所 |
|---|---|
| 数学的帰納法（induction）と強い帰納法（strong induction） | フェルマー数（1.1）、素数の積（1.2） |
| 整列性（well-ordering）、最小反例（minimal counterexample） | $\sqrt{2}$ と $\sqrt[3]{2}$（1.3）、分数の列挙（1.8） |
| 無限降下法（infinite descent） | 解をもたない方程式（1.5）、互いに素な組（1.8） |
| 背理法（proof by contradiction） | 全体を通して、特に 1.3 と 1.4 |
| $n$ を法とする計算 | 1.5、1.7 |
| 評価とはさみうち（bounding and squeezing） | 1.2、1.4 |
| 全単射（bijection）の構成 | 1.8 |
| 反例（counterexample）の構成 | 一意的でない因数分解（1.7） |
| 舞台を変える | 複素数（1.6）、幾何（1.9） |

問題を振り返ると、STEP の出題者がしばしば最初の一歩を与えてくれていたことに気づくだろう。「二項展開（binomial expansion）を考えることにより…」「複素数 $2+i$ と $10+11i$ を考えることにより…」といった具合である。大学では、こうした手助けは次第になくなり、正しい最初の一歩を**見つけること**そのものが求められる技能となる。最良の準備は、まさにこれまで行ってきたことである。すなわち、問題を解き終えたら、そのヒントが**なぜ**うまくいったのかを自問し、次回は自分で思いつけるようにすることである。

### 次はどこへ

本章のいくつかの話題は、本書の別の箇所でも続いていく。

- 分数による $e$ の近似は Section 2.9 で再び登場し、リーマンゼータ関数は Section 2.4 で $\zeta(2) = \pi^2/6$ として現れる。
- ラメ（Lamé）の誤った証明に現れた 1 の冪根（roots of unity）は Chapter 5 の主題であり、Section 1.1 で約束したガウス（Gauss）による正 17 角形の作図は Section 6.2 で扱う。
- Section 1.6 の恒等式（identity）の四平方版は、四元数（quaternion）を通じて Section 7.8 に登場する。

**大学入学前にさらに先へ進みたい人へ**

- **Harold Davenport, *The Higher Arithmetic***：初等整数論（elementary number theory）への入門書として、一冊選ぶならこれが最良である。

- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***：第 1–4 章、第 8 章、第 17 章は本章と直接つながっている。
- **Joseph Silverman, *A Friendly Introduction to Number Theory***：本章の内容のほぼすべてとそれ以上を、ゆっくりとしたペースで扱っている。
- **Marcus du Sautoy, *The Music of the Primes***（邦題『素数の音楽』）と **Simon Singh, *Fermat's Last Theorem***（邦題『フェルマーの最終定理』）：数学の背後にある人間の物語である。

整数論には人を引き込む性質がある。その問いは初日に尋ねられるほど単純でありながら、一生をかけて取り組めるほど深い。本章のいくつかの節を読んで、この先どうなるのかを知りたくなったのであれば、それこそがまさに本章の狙いである。

# 「次の一歩」の解答

ここに示すのは簡潔な答えとヒントであり、完全な解答ではない。結果と鍵となる段階を示してあるので、自分の答えを確かめるのに使ってほしい。見る前に、それぞれの演習問題にきちんと取り組むこと。

## 1.1 素数を生み出す工場

1. 素数（prime）が $p_1, \dots, p_k$ ですべてだと仮定すると、$p_1 \cdots p_k + 1$ はこのリストにない素因数（prime factor）をもち、矛盾（contradiction）が生じる。フェルマー数（Fermat number）を用いた証明は構成的（constructive）である。どの 2 つも互いに素（pairwise coprime）な無限個の数 $F_0, F_1, \dots$ を具体的に示し、そのそれぞれが新しい素数を与えるからである。

2. $n \geq 2$ のとき $2^n$ は 4 の倍数なので $2^{2^n} = 16^{2^{n-2}}$ であり、16 の累乗はどれも一の位が 6 である。したがって $F_n$ の一の位は 7 である。

3. (a) 数学的帰納法（induction）による：$a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1) = a_n \cdot a_1 \cdots a_{n-1}$。(b) $a_m$ と $a_n$（$m < n$）の公約数（common factor）は $a_1 \cdots a_{n-1} = a_n - 1$ と $a_n$ をともに割り切るので 1 である。よって各項は、他のどの項とも共有しない素因数をもつ。(c) $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$ であり、和は次々に打ち消し合って（telescoping）$1 - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$ となる。

4. (a) $p \mid F_n$ より $2^{2^n} \equiv -1$ である。両辺を 2 乗すると $2^{2^{n+1}} \equiv 1$ となる。(b) $d$ は $2^e \equiv 1$ を満たすすべての $e$ を割り切るので $d \mid 2^{n+1}$ である。また（$p$ は奇数なので）$2^{2^n} \equiv -1 \not\equiv 1$ であるから $d \nmid 2^n$ である。よって $d = 2^{n+1}$ である。(c) $2^{p-1} \equiv 1$ なので $2^{n+1} \mid p - 1$ である。(d) $641 = 64 \times 10 + 1$。641 未満で $64k + 1$ の形の素数は 193、257、449、577 である。試すべき候補はわずか 4 つであり、こうしてオイラー（Euler）は 641 を見つけた。

5. $n$ 番目の素数は、$F_0, \dots, F_{n-1}$ の素因数のうち最大のもの以下であるから、$p_n \leq F_{n-1} = 2^{2^{n-1}} + 1$ である。$n = 5$ のときこの上界は 65 537 であるが、$p_5 = 11$ である。正しいが、極めて弱い評価である。

### 1.2 素数はどれほどまばらか？

1. $P_{1,10} = 210$、$P_{1,20} = 9\,699\,690$、$P_{1,30} = 6\,469\,693\,230$ である。$4^{30} \approx 1.15 \times 10^{18}$ および $e^{30} \approx 1.07 \times 10^{13}$ と比べると、この積は $4^n$ よりはるかに小さく、おおよそ $e^n$ のように増大する（実際 $\ln P_{1,n} \sim n$ であり、これは素数定理（Prime Number Theorem）の一つの形である）。

2. $\binom{2m}{k+1} / \binom{2m}{k} = \frac{2m-k}{k+1}$ であり、これはちょうど $k < m$ のときに 1 を超えるので、二項係数（binomial coefficient）は中央まで増加し、その後減少する。和が $4^m$ となる $2m+1$ 個の項のうち最大のものは、それらの平均以上である。

3. $(\sqrt{n}, n]$ に含まれる素数はどれも $\sqrt{n}$ を超え、それらの積は $4^n$ より小さいので、$(\sqrt{n})^{\pi(n)-\pi(\sqrt{n})} < 4^n$ である。両辺の対数をとればよい。$2\ln 4 \approx 2.77$ かつ $\pi(\sqrt{n}) \le \sqrt{n}$ なので、求める評価が従う。この評価は正しい形 $n/\ln n$ をもつが、定数は真の値 1 ではなく 2.8 である。

4. 素数 $2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83$ を用いる。どれも直前の素数の 2 倍より小さい。$n \le 50$ である任意の $n$ に対して、このリストで $n$ より大きい最初の素数は、直前の素数（これは $n$ 以下である）の 2 倍より小さいので、$n$ と $2n$ の間にある。

### 1.3 最小の反例

1. $k\sqrt{3}$ が整数となる最小の正の整数 $k$ があるとすると、$k' = (\sqrt{3}-1)k$ はそれより小さい正の整数であり、しかも $k'\sqrt{3} = 3k - k\sqrt{3}$ は整数である。ここでは数 $\sqrt{3}-1$ が $\sqrt{2}-1$ の役割を果たしている。

2. $0 < \sqrt{N} - m < 1$ とすると、$k' = (\sqrt{N}-m)k$ は $k$ より小さい正の整数であり、$k'\sqrt{N} = kN - mk\sqrt{N}$ は整数である。これは矛盾である。

3. $N = 4$ のとき $m = 2 = \sqrt{4}$ なので $\sqrt{N} - m = 0$ となり、$k' = 0$ は正の整数ではない。「$0 < \sqrt{N} - m$」という段階が成り立たない。

4. 図において、一辺 $a$ の正方形の内部で重なり合う一辺 $b$ の 2 つの正方形は、一辺 $2b - a$ の中央の正方形を 2 重に覆い、一辺 $a - b$ の 2 つの正方形を覆わずに残す。代数的には $(2b-a)^2 - 2(a-b)^2 = 2b^2 - a^2 = 0$ である。

### 1.4 $e$ は無理数であり、$e^2$ もまた無理数である

1. $\frac{1}{e} = \frac{p}{q}$ とすると、$\frac{1}{e} = \sum_{k \ge 0} \frac{(-1)^k}{k!}$ の両辺に $q!$ を掛ける。$k \le q$ の項は整数であり、残りの和 $\sum_{k>q} (-1)^k q!/k!$ は項が減少する交代級数（alternating series）なので、その絶対値は 0 と $\frac{1}{q+1}$ の間に厳密にある。よって $q!/e$ は整数ではなく、矛盾である。

2. $\sin 1 = \frac{p}{q}$ とすると、$2n+1 \geq q$ として両辺に $(2n+1)!$ を掛ける。左辺は整数であり、級数の $\frac{1}{(2n+1)!}$ までの項も整数である。残りの和は交代級数で、その初項の大きさは $\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} < 1$ なので、整数ではない。

3. この方法には、$\frac{1}{k!}$ のように、残りの和が分母の増大よりも速く小さくなる、有理数の項からなる級数が必要である。$\pi$ についてはそのような級数は知られていない。ニーヴン（Niven）の証明は $\int_0^\pi \frac{x^n(\pi-x)^n}{n!} \sin x \, \mathrm{d}x$ を用いる。もし $\pi$ が有理数ならば、これは十分大きな $n$ に対して 1 より小さい正の整数となってしまう。

4. $x^2 - (e+\pi)x + e\pi$ の根は $e$ と $\pi$ である。$e+\pi$ と $e\pi$ がともに代数的（algebraic）であれば、$\pi$ は代数的な係数をもつ多項式の根となり、したがって代数的となって、リンデマン（Lindemann）の定理に矛盾する。

### 1.5 無限降下法

1. $3 \mid a$ である。$a = 3a_1$ とおくと $9a_1^3 + b^3 = 3c^3$ となるので $3 \mid b$、さらに $3a_1^3 + 9b_1^3 = c^3$ となるので $3 \mid c$ であり、$(a_1, b_1, c_1)$ はより小さい解となる。これが無限降下法（descent）である。$p^4 + 2q^4 = 5r^4$ について：4 乗数は 5 を法として（modulo）0 か 1 である（一の位が 0、1、5、6 のいずれかである）ので、$p^4 + 2q^4 \equiv 0$ から $5 \mid p$ かつ $5 \mid q$ が導かれる。すると $5^4 \mid 5r^4$ なので $5 \mid r$ となり、再び無限降下法が使える。

2. 平方数は 4 を法として 0 か 1 なので、$x^2 + y^2$ は 0、1、2 のいずれかであり、3 になることはない。

3. 有理点（rational point）$(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ があれば、$c \neq 0$ で $a^2 + b^2 = 3c^2$ となるが、これは小問 (iii) で否定されている。

4. $x$、$y$ を固定すると、この方程式は 2 次方程式 $z^2 - 3xyz + (x^2 + y^2) = 0$ であり、その 2 つの根の和は $3xy$ である。$(1,1,1)$ から $(1,1,2)$ が得られる。$(1,2)$ の反対側にある 1 を置き換えると $3 \cdot 1 \cdot 2 - 1 = 5$ となり、$(1,2,5)$ が得られる。続いて $(1,5,13)$ と $(2,5,29)$ が得られる。

### 1.6 二つの平方数の和

1. 平方数は 4 を法として 0 か 1 なので、2 つの平方数の和が 4 を法として 3 になることはない。

2. $65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$、$85 = 2^2 + 9^2 = 6^2 + 7^2$ である。$65 = (2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})$ と分解すると、$(2+\mathrm{i})(3+2\mathrm{i}) = 4+7\mathrm{i}$、$(2+\mathrm{i})(3-2\mathrm{i}) = 8-\mathrm{i}$ となる。同様に 85 については、$(2+\mathrm{i})(4\pm\mathrm{i})$ から $7+6\mathrm{i}$ と $9-2\mathrm{i}$ が得られる。

3. $1105 = 4^2 + 33^2 = 9^2 + 32^2 = 12^2 + 31^2 = 23^2 + 24^2$ である。5、13、17 はそれぞ

れ、ガウス整数（Gaussian integer）とその共役（conjugate）の積に分解する。各組から因数を 1 つずつ選ぶと 8 個の積が得られ、それらは互いに共役なもの同士（同じ平方和を与える）で対になるので、4 個が残る。

4. 絶対値の 2 乗をとると $9 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$ となる。3 は 2 つの平方数の和ではないので、一方の因数は 1 である。

### 1.7 因数分解が破綻するとき

1. $693 = 9 \times 77 = 21 \times 33$ であり、4 つの因数はすべて $S$ 素数である。作り方：$4k+3$ の形の 4 つの素数 $p, q, r, s$ をとる。すると $(pq)(rs) = (pr)(qs)$ により、$S$ 素数への 2 通りの分解が得られる。

2. $E$ 素数は $2 \pmod 4$ である数である（2 つの偶数の積にはなりえないからである）。$60 = 2 \times 30 = 6 \times 10$。

3. $N(zw) = N(z)N(w)$ は $(ac-5bd)^2 + 5(ad+bc)^2$ を展開すれば確かめられる。$a^2+5b^2$ が 2 や 3 になることはない。$N(2) = 4$、$N(3) = 9$、$N(1 \pm \sqrt{-5}) = 6$ なので、単数（unit）でない元への分解には、ノルム（norm）が 2 または 3 の因数が必要になる。

4. 2 通りの異なる分解 $p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$ をもつ最小の数を $n$ とする。ユークリッド（Euclid）の補題により $p_1$ はある $q_j$ を割り切るので、$p_1 = q_j$ である。これを約すと、2 通りの異なる分解をもつより小さい数が得られ、矛盾する。

### 1.8 有理数を数える

1. $\frac{3}{5}$：親をたどると $(3,5) \leftarrow (3,2) \leftarrow (1,2) \leftarrow (1,1)$ となり、位置は $1 \to 2 \to 5 \to 10$ なので $f(10) = \frac{3}{5}$ である。$\frac{5}{3}$：$(5,3) \leftarrow (2,3) \leftarrow (2,1) \leftarrow (1,1)$ であり、位置は $1 \to 3 \to 6 \to 13$ なので $f(13) = \frac{5}{3}$ である。

2. Newman の規則 $x_{n+1} = \frac{1}{2\lfloor x_n \rfloor - x_n + 1}$ からは 1、$\frac{1}{2}$、2、$\frac{1}{3}$、$\frac{3}{2}$、$\frac{2}{3}$、3、$\frac{1}{4}$、$\frac{4}{3}$、$\frac{3}{5}$ が得られ、これは $f(1), \ldots, f(10)$ と一致する。

3. $n$ 番目の数の小数第 $n$ 位が 5 でなければ、新しい数の小数第 $n$ 位を 5 とし、5 ならば 4 とする。こうしてできる小数はリストのどの数とも異なり、しかも 0 と 9 を避けているので小数展開がただ 1 通りであるから、確かに異なる数である。

4. すべての正の整数は、2 の累乗と奇数の積 $2^{m-1}(2n-1)$ としてただ 1 通りに表せるので、$(m,n) \mapsto 2^{m-1}(2n-1)$ は全単射（bijection）である。

### 1.9 三次曲線の接線

1. $y = t(x+1)$ を $x^2 + y^2 = 1$ に代入すると $(1+t^2)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0$ となり、その根は $-1$ と $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ である。$t = \frac{q}{p}$ とするとその点は $\left(\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}, \frac{2pq}{p^2+q^2}\right)$ となり、三つ組 $(p^2-q^2, 2pq, p^2+q^2)$ が得られる。

2. 直線は $x + y = 3$ であり、$x^3 + (3-x)^3 = 9$ は $9x^2 - 27x + 18 = 0$ に帰着する。3 次の項が打ち消し合い、$x = 1, 2$ だけが残るのである。この直線は漸近線（asymptote）$y = -x$ に平行であり、第 3 の交点は無限遠にある。

3. 接線（tangent）の傾きは $\frac{x^2}{y^2} = \frac{289}{400}$ であり、接線は曲線と再び $\left(-\frac{188479}{90391}, -\frac{36520}{90391}\right)$ で交わる。分母を払うと $188479^3 = 36520^3 + 90391^3 + 180782^3$ となる。

4. この直線は $x^3 + y^3 = 1729$ と再び $\left(-\frac{37}{3}, \frac{46}{3}\right)$ で交わるので、$46^3 = 37^3 + 27 \times 1729 = 37^3 + 3^3 + 36^3$ である（$27 = 3^3$ と $27 \times 1728 = 36^3$ を用いた）。

章

# 2

# 数列・級数・収束

無限こそ数学が面白くなる場所であり、そして最も誤りやすい場所でもある。

**この章の内容**


| | | |
|---|---|---|
| **2.1** | 「いずれは」とは何を意味するか | STEP III 2015 |
| **2.2** | 極限としての黄金比 | STEP II 2013 |
| **2.3** | 発散する級数と、収束するその親戚 | STEP III 2014 |
| **2.4** | $\pi^2/6$ | STEP III 2018 |
| **2.5** | ヴィエトの無限積 | STEP III 2022 |
| **2.6** | 算術幾何平均 | STEP II 2024 |
| **2.7** | 6 桁か、600 桁か | STEP II 2023 |
| **2.8** | 2 乗して 2 を引く | STEP III 2021 |
| **2.9** | e に迫る分数 | STEP II 2021 |
| **A** | 演習問題の答え | p. 185 |

# 無限を飼いならす

> 無限！　これほど深く人間の精神を揺り動かした問いはほかにない。
>
> — ヒルベルト（David Hilbert）

2500年前、エレアのゼノン（Zeno of Elea）は運動が不可能であると論じた。部屋を横切って歩くには、まず半分まで歩き、次に残りの半分を歩き、さらにその半分を歩き、と永遠に続けなければならない。これは無限個の作業であり、有限の時間で終えられるはずがない、というのである。人は実際に部屋を横切れるのだから、ゼノンが間違っていることは誰もが知っていた。しかし、彼が**なぜ**間違っているのかを正確に説明できる者は、非常に長い間いなかった。答えは、無限和 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ が有限の値1をもつということである。だが、そもそも無限個の数を足し合わせて何かになるとは、どういう**意味**なのだろうか。

この問いは二千年にわたって数学の中心にあり続けた。17世紀にニュートン（Newton）とライプニッツ（Leibniz）はこの問いの上に微積分（calculus）を築いたが、ついに完全な答えを出すことはなかった。その後継者たちは見事な結果を生み出す一方で、とんでもない誤りも生み出した。史上最高の計算家であるオイラー（Euler）は、平然と $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$ と書いた。また別の者たちは、同じ無限級数（infinite series）について互いに矛盾することを「証明」した。正しい結果と誤った結果を区別できるほど精密な定義を数学者が手にしたのは、19世紀になって、コーシー（Cauchy）やワイエルシュトラス（Weierstrass）らの仕事によってであった。それらの定義こそが本章の主題である。

### なぜ重要なのか

あなたがこれから計算に使うほとんどすべての数は、何かの極限（limit）である。電卓は $\sqrt{2}$ や $\pi$ や $e$ そのものを知っているわけではない。電卓が知っているのは、それらにどんどん近づいていく手順であり、十分近づいたところで計算を止めるのである。手順が**どれくらい速く**近づくかを理解しているかどうかが、1ミリ秒で終わるアルゴリズムと永遠に終わらないアルゴリズムとの違いを生む。同じ考え方は、天気予報、航空機の設計、金融商品の価格付けに使われるコンピュータ・シミュレーションの基盤にもなっている。そして最も純粋な側面では、極限の研究は数学で最も美しい公式

のいくつかへと導く。本章では

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},$$

を証明する。これはオイラーを有名にした結果であり、今なおほとんど魔法のように見える。

### 大学で出会うもの

ほとんどすべての大学で、**解析学**（Analysis）は最初に履修する科目の一つであり、多くの学生にとって最大の衝撃となる。学校の数学では極限を計算することを学ぶが、解析学では精密な定義から出発して、極限についての事柄を**証明**することを学ぶ。数列（sequence）が収束する（converge）とはどういうことかを、Section 2.1 に登場する「任意の $\varepsilon > 0$ に対して」と「$N$ が存在して」という言い回しを用いて定義する。有界な単調増加数列（bounded increasing sequence）はすべて収束することを証明し、それが実数のもつ性質である**完備性**（completeness）に依存しており、有理数にはこの性質がないことを知るだろう。級数（series）の収束判定法を学び、さらに同じ考え方を用いて、連続性、微分、積分に厳密な意味を与える。

その後の科目は、この土台の上にさまざまな方向へと発展していく。**数値解析**（numerical analysis）は、近似がどれくらい速く収束するか、そしてどうすればより速くできるかを問う（Section 2.7、Section 2.6）。**力学系**（dynamical systems）は、ある規則を何度も繰り返し適用したときに何が起こるかを研究する。極限に到達することもあれば、カオスを生み出すこともある（Section 2.2、Section 2.8）。**複素解析**（complex analysis）は、なぜ $\pi$ がこれほど多くの無限和や無限積に現れるのかを説明する（Section 2.4、Section 2.5）。そして**解析的整数論**（analytic number theory）は、Section 2.9 のように、極限を用いて整数に関する問いに答える。

### 本章を貫く問い

**三つの大きな問い**

1. **無限の過程が答えをもつとはどういうことか。**数列が極限に「近づく」こと、あるいは無限和がある数に「なる」ことを、どうすれば正確に言い表せるか。
2. **何に収束するかを知らずに、収束することをどうやって証明できるか。**そして、極限が存在することがわかったら、それをどうやって求めるか。
3. **どれくらい速いか。**二つの過程が同じ極限をもちながら、まったく異なる

> 速さでそこに近づくことがある。それはなぜか、そしてその速さをどう測るか。

最初の節（Section 2.1）は言葉についての節であり、数学者が「いずれは」ということをどのように正確に表現するかを扱う。続く五つの節は有名な極限を扱う。連分数（continued fraction）としての黄金比（golden ratio）、発散する級数とその収束する親戚、$\pi^2/6$、$2/\pi$ に対するヴィエト（Viète）の積、そしてガウス（Gauss）の算術幾何平均（arithmetic–geometric mean）である。最後の三つの節は速さと構造を扱う。一次収束と二次収束の比較、爆発するかカオス的にさまようかのどちらかになる反復、そして $e$ に迫っていく積分の族である。

### 収束のための道具

少数の道具に、それぞれ異なる場面で何度も出会うことになる。

| § | 主題 | 道具 |
|---|---|---|
| 2.1 | 「いずれは小さくなる」 | 量化子：$m$ を構成する、命題を否定する |
| 2.2 | 黄金比 | 単調で有界な部分列 |
| 2.3 | 調和級数と Kempner 級数 | ブロックごとの比較 |
| 2.4 | $\pi^2/6$ | 多項式の根、そしてはさみうち |
| 2.5 | ヴィエトの積 | 望遠鏡和、そして一つの簡単な極限 |
| 2.6 | 算術幾何平均 | 互いに挟み込む二つの数列；不変量 |
| 2.7 | $\sqrt{2}$ の近似 | 誤差の漸化式：一次と二次 |
| 2.8 | $x \mapsto x^2 - 2$ | 写像を単純にする置換 |
| 2.9 | $e$ を表す分数 | 小さいが零ではない積分 |

### 本章の読み方

第 1 章と同様に、各節は出題されたままの STEP の問題から始まる。読み進める前に、まず自分で解いてみてほしい。本章の問題では、どの道具を使うべきかが問題文に示されていることが多い（「〜を考えることにより」「〜の定理を用いてよい」など）。解き進めながら、同じ少数の道具がいかに繰り返し現れるかに注目してほしい。大学では、それを自分で選ばなければならないからである。

いくつかの問題では、極限が存在すること、あるいは無限和や無限積が収束することを仮定するよう求められる。そのような場合には、それを証明するために何が必要かを各節で説明する。「明らかにうまくいく」と「うまくいくことを証明できる」との間の隔たりを意識することが、解析学者のように考えるための第一歩である。

# 2.1 「いずれは」とは何を意味するか

**問題**

**STEP III 2015、問 2**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/15-s3-q2`

## 導入

大学で最初に学ぶ解析学（analysis）の講義に出てくる命題は、ほとんどすべてが同じ形をしている。すなわち、「何かが**存在して、すべての**何々について、ある条件が成り立つ」という形である。「数列が $L$ に収束する」とは、任意の許容誤差 $\varepsilon > 0$ に対して、ある番号 $N$ が**存在して、すべての** $n \geq N$ について $|a_n - L| < \varepsilon$ となる、という意味である。この形を自在に扱える学生にとって解析学は刺激的であり、そうでない学生にとっては不可解なものになる。

この問題は、そうした語り方への穏やかで見事に設計された入門である。問題は「最終的に小さい（eventually smaller than）」という新しい概念を一つだけ定義し、それについて真か偽かを問う問いを四つ投げかける。四つのうち一つは偽であり、それが偽である理由こそ、量化子（quantifier）を含む命題を初めて**否定**（negate）しようとする大学一年生の大半が陥る罠そのものである。

## 取りかかる前に

定義をゆっくり読むこと。$(s_n) \leq (t_n)$ は、すべての $n$ について $s_n \leq t_n$ であるという意味ではない。**ある番号から先では**それが成り立つ、という意味である。最初のいくつかの項はまったく関係がない。どちらの数列の最初の百万項を変えても、$(s_n) \leq (t_n)$ が成り立つかどうかには影響しない。

**考えてみよう**　定義には「ある正の整数 $m$ が存在して」という語句が含まれている。$(s_n) \le (t_n)$ を証明するには、正確には何を示せばよいか。それが**偽**であることを証明するには、何を示さなければならないか。

証明するには、適切な $m$ を**具体的に挙げ**、そのうえで**すべての** $n \ge m$ で条件が成り立つことを示せばよい。反証するには、**どの** $m$ もうまくいかないこと、すなわち誰がどんな $m$ を提案しても、ある $n \ge m$ で $s_n > t_n$ となることを示さなければならない。この二つ目の形は小問 (ii) のために覚えておくこと。

## 順を追って解く

### 段階 1　一次関数と二次関数の比較

小問 (i) は、最終的に $1000n \le n^2$ となるかを問うている。$n > 0$ であるから、これは $1000 \le n$ と同値である。よって $m = 1000$ とすればよい。実際、すべての $n \ge 1000$ について $n^2 = n \cdot n \ge 1000n$ である。この命題は**真**である。 ■

最初の 999 項では $1000n$ が $n^2$ よりはるかに大きいが、それは問題にならない。「最終的に」は有限個の項を無視するのである。

### 段階 2　「最終的に小さい」は通常の「小さい」と同じように振る舞うか

通常の数では、$a \le b$ でないならば $b < a$ であり、したがって当然 $b \le a$ である。小問 (ii) は、この新しい関係についても同じことが成り立つかを問うている。

**考えてみよう**　「$(s_n) \le (t_n)$ **ではない**」とは実際には何を意味するか。先頭に「ではない」を付けずに、すべて書き下してみよ。

「ある $m$ が存在して、すべての $n \ge m$ について $s_n \le t_n$」という命題が偽になるのは、ちょうど次の場合である。

$$\text{任意の } m \text{ に対して、ある } n \ge m \text{ で } s_n > t_n \text{ となるものが存在する。}$$

言い換えれば、$s_n > t_n$ が**無限回**起こるということである。これは「ある番号以降つねに $s_n > t_n$」よりもはるかに弱い。二つの数列は大小を入れ替え続けるかもしれないのである。

**手を止めて、やってみよう**　大小を永遠に入れ替え続け、どちらも他方より最終的に小さくはならないような、正の数からなる二つの数列を見つけよ。

$s_n = 2 + (-1)^n$ とおくと $s_n = 1, 3, 1, 3, \ldots$ であり、すべての $n$ について $t_n = 2$ とする。任意の $m$ に対して $s_n = 3 > 2 = t_n$ となる偶数 $n \geq m$ が存在するので、$(s_n) \leq (t_n)$ ではない。しかし同様に、任意の $m$ に対して $t_n = 2 > 1 = s_n$ となる奇数 $n \geq m$ が存在するので、$(t_n) \leq (s_n)$ でもない。この命題は**偽**である。 ■

### 段階 3 連鎖させる

> **考えてみよう** 小問 (iii) では、二つの仮定それぞれに対して一つずつ、合わせて二つの $m$ の値が与えられる。それらは異なるかもしれない。結論にはどちらを使えばよいか。

すべての $n \geq m_1$ について $s_n \leq t_n$ であり、すべての $n \geq m_2$ について $t_n \leq u_n$ であるとする。$n \geq \max(m_1, m_2)$ ならば両方の不等式が成り立つので、$s_n \leq t_n \leq u_n$ である。よって $m = \max(m_1, m_2)$ とすればよく、この命題は**真**である。 ■

二つのしきい値のうち大きい方をとるというのは、解析学で何百回も使うことになる手法である。たとえば、二つの収束（converge）する数列の和が収束することもこうして証明する。

### 段階 4 二次関数と指数関数の比較

まずいくつかの値を試してみる。

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^2$ | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 |
| $2^n$ | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 |

したがって $n^2 \leq 2^n$ は $n = 1, 2$ では成り立ち、$n = 3$ では成り立たず、$n = 4$ 以降は成り立ち続けるように見える（図 2.1.1）。自然な予想は $m = 4$ である。

> **考えてみよう** すべての $n \geq 4$ について $n^2 \leq 2^n$ であることを数学的帰納法（induction）で証明するには、$n^2 \leq 2^n$ から $(n+1)^2 \leq 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$ を導く必要がある。$(n+1)^2$ と $n^2$ の間にどのような不等式があれば、この段階がうまくいくか。

$(n+1)^2 \leq 2n^2$ がわかれば十分である。そうすれば $(n+1)^2 \leq 2n^2 \leq 2 \cdot 2^n$ となるからである。ここで $2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2$ であり、これは $n \geq 3$ のとき正である。よって次のようになる。

- 基底段階：$4^2 = 16 = 2^4$。
- 帰納段階：$n \geq 4$ かつ $n^2 \leq 2^n$ ならば、$(n+1)^2 \leq 2n^2 \leq 2^{n+1}$。

したがってすべての $n \geq 4$ について $n^2 \leq 2^n$ であり、この命題は $m = 4$ として真である。 ■

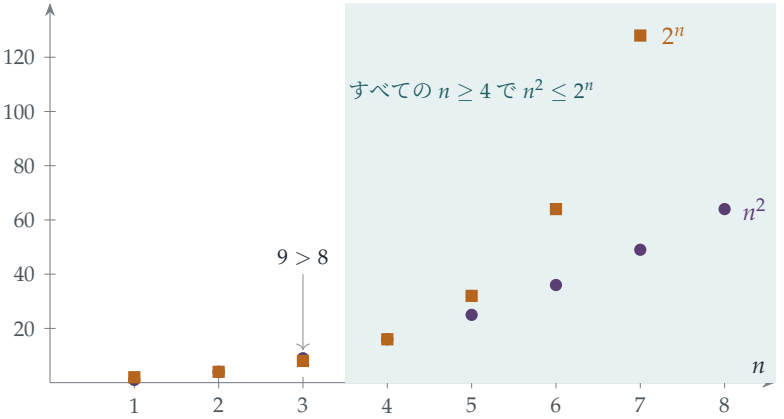



**図 2.1.1**　$n^2$（紫の丸）と $2^n$（琥珀色の四角）の比較。二つの数列は最初の数項で二度交差するが、$n = 4$ 以降は $2^n$ が永遠に上回り続ける。これがまさに $m = 4$ として $(n^2) \leq (2^n)$ が成り立つということの意味である。

## 振り返り

- **「存在する」を証明するとは、具体的に挙げることである。**小問 (i)、(iii)、(iv) では、証明は $m$ を挙げてそれを確かめることであった。
- **否定すると量化子が入れ替わる。**「(ある $m$ が存在して、すべての $n \geq m$ について $P$) ではない」は「すべての $m$ に対して、ある $n \geq m$ が存在して、$P$ でない」となる。これを正しく扱えるかどうかを試しているのが小問 (ii) である。
- **新しい関係が古い関係と同じように振る舞うとは限らない。**「最終的に小さい」は $\leq$ と同様に推移的 (transitive) であるが、$\leq$ とは異なり、すべての数列の組を比較できるわけではない。

## 背後にある数学

### 解析学の言葉

ニュートン (Newton) とライプニッツ (Leibniz) 以後のおよそ 150 年間、数学者たちは極限 (limit) や無限小 (infinitesimal) を見事に使いこなしたが、それが正確に何を意味するのかを述べることはできなかった。1734 年、バークリー (Berkeley) 司

教は無限小を「消え去った量の亡霊」と嘲笑したが、彼の指摘にも一理あった。その修復は 19 世紀に行われた。コーシー（Augustin-Louis Cauchy）、続いてワイエルシュトラス（Karl Weierstrass）が、「限りなく近づく」という曖昧な言い方を、「任意の」と「存在する」から組み立てられた命題に置き換えたのである。現代の定義

$$a_n \to L \iff \text{任意の} \varepsilon > 0 \text{ に対してある} N \text{ が存在して、} |a_n - L| < \varepsilon \text{ がすべての次で成立：} n \geq N$$

は、先頭に量化子が一つ多いことを除けば、この問題の定義とまったく同じ形をしている。これは大学の解析学の講義で最初に出会うものである。

---

### 増大度

小問 (iv) は、有名な階段の小さな一段である。任意の固定された $k > 0$ と $c > 1$ に対して

$$(\ln n) \leq (n^k), \qquad (n^k) \leq (c^n), \qquad (c^n) \leq (n!), \qquad (n!) \leq (n^n),$$

が成り立ち、実はそれぞれの数列は次の数列より最終的に小さいだけでなく、次の数列の**任意の定数倍**よりも最終的に小さい。ハーディ（G. H. Hardy）はこの種の比較について、*Orders of Infinity*（『無限の位数』、1910 年）という一冊の本を書いた。今日ではこれは計算機科学の日常的な言葉であり、「このアルゴリズムは $O(n^2)$ ステップかかる」とは、ステップ数が最終的に $n^2$ の定数倍以下になるという意味である。$n^2$ と $2^n$ の違いは、終了するプログラムと、太陽が燃え尽きるまでに終了しないプログラムとの違いである。

### 全順序でない順序

小問 (ii) は、「最終的に小さい」が**全順序**（total order）ではないことを示している。すなわち、まったく比較できない数列の組が存在する。このような、推移的ではあるがすべてを比較するわけではない関係は**前順序**（preorder）や**半順序**（partial order）と呼ばれ、いたるところに現れる。整数の整除関係、集合の包含関係、「部分群である」という関係はいずれもその例である。ある関係がどの性質をもち、どの性質をもたないかを見分けることは、数学者としての訓練の一部である。

## 思考のスキル

### 量化子を扱う

「ある $m$ が存在して、すべての $n \geq m$ について…」を証明するには、$m$ を挙げてから、すべての $n$ を確かめる。反証するには、任意の $m$ に対して、ある $n \geq m$ で成り立たないことを示す。

命題に量化子が複数含まれるときは、証明や反証を試みる前にそれをすべて書き下し、左から順に否定していくこと。すなわち、「すべての」は「存在する」に、「存在する」は「すべての」に変わり、最後の条件は否定される。

## 次の一歩

1. **見本問題で準備運動。** 1987 年の最初の STEP の前に公表された問題である STEP III Specimen paper、問 2（`step.maths.org/questions/spec-s3-q2`）に挑戦せよ。（最後の部分のヒント：二項展開（binomial expansion）の次の項を使え。）

2. **両方向。** $(s_n) \leq (t_n)$ かつ $(t_n) \leq (s_n)$ ならば、十分大きいすべての $n$ について $s_n = t_n$ であることを証明せよ。

3. **無限大への競走。** 正の数からなる二つの増加（increasing）数列で、どちらも無限大に発散し、どちらも他方より最終的に小さくはならないものを見つけよ。

4. **階段を上る。** 具体的な $m$ を挙げて $(2^n) \leq (n!)$ を示せ。次に $(n^{10}) \leq (2^n)$ を示し、条件を満たす最小の $m$ を求めよ。（二つ目の部分では表計算ソフトが役に立つ。答えは驚くほど大きい。）

## さらに学ぶために

- **Lara Alcock, *How to Study for a Mathematics Degree***（Oxford University Press）。『数学の学位を取るための学び方』。第 3 章は、まさにこの種の論理的な言葉と、それが新入生にとってなぜ難しいのかを扱っている。
- **Lara Alcock, *How to Think About Analysis***（Oxford University Press）。『解析学の考え方』。大学一年次の解析学の定義への親しみやすい案内書である。
- **Daniel Velleman, *How to Prove It***（Cambridge University Press）。『証明の方法』。論理、量化子、証明への体系的な入門書である。

# 2.2 極限としての黄金比

**問題**

**STEP II 2013、問 6**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/13-s2-q6`

## 導入

次の式を書き、その値は何かを考えてみよう。

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

すぐに思いつく答えはこうである。これを $x$ とおくと、最初の分数線の下の部分は再び $x$ であるから $x=1+1/x$ となり、ここから $x^2=x+1$、そして $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$、すなわち黄金比（golden ratio）$\varphi$ が得られる。

しかし、この議論は正しいのだろうか。この議論は、無限に続く式が何かを**意味する**こと、つまり式を組み立てていく過程がただ一つの数に落ち着くことを前提としている。同じ手口を $1-1+1-1+\cdots$ に使うと（「これを $S$ とおくと $S=1-S$ だから $S=\frac{1}{2}$」）、ばかげた結論が出てしまう。この問題は、この作業をきちんと行う方法を示している。そこで使うのは、極限を前もって知らずに収束（convergence）を証明するために STEP の受験者が持っている唯一の道具、すなわち**単調数列**（monotone sequence）である。

## 取りかかる前に

いくつかの項を計算してみよう。$u_1=1$ とすると、

$$1,\quad 2,\quad \frac{3}{2},\quad \frac{5}{3},\quad \frac{8}{5},\quad \frac{13}{8},\quad \frac{21}{13},\quad \frac{34}{21},\quad \cdots$$

> **考えてみよう**　分子と分母に見覚えはないだろうか。また、小数で見てみよう：$1, 2, 1.5, 1.667, 1.6, 1.625, 1.615, \ldots$。この数列は増加しているだろうか。減少しているだろうか。

これらは連続するフィボナッチ数（Fibonacci numbers）の比である。この数列は増加でも減少でもない。行き過ぎたり足りなかったりを繰り返しながら、ジグザグに進む。したがって、与えられた定理は増加数列に関するものなので、数列全体には適用できない。しかし、奇数番目の項 $1, 1.5, 1.6, 1.615, \ldots$ は増加し、偶数番目の項 $2, 1.667, 1.625, \ldots$ は減少しているように見える。これがこの問題の方針である。

## 順を追って解く

### 段階 1　2 項離れた項を比べる

小問 (i) では、2 項離れた $u_{n+2}$ と $u_n$ を比べる。最初に自然に思いつくのは、$(*)$ を使ってそれぞれを一つ前の項で表すことである。

> **考えてみよう**　$(*)$ を 2 回使って、$u_{n+2} - u_n$ を $u_{n+1} - u_{n-1}$ で表し、さらに $u_{n+1} - u_{n-1}$ を $u_n - u_{n-2}$ で表せ。

$(*)$ より

$$u_{n+2} - u_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_{n-1}} = -\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{u_{n+1}u_{n-1}},$$

であり、同様に $u_{n+1} - u_{n-1} = -\dfrac{u_n - u_{n-2}}{u_n u_{n-2}}$ である。これらを合わせると、2 つの負号が打ち消し合って

$$u_{n+2} - u_n = \frac{u_n - u_{n-2}}{u_{n+1}u_n \cdot u_{n-1}u_{n-2}}.$$

最後に、$(*)$ より $u_{n+1}u_n = u_n + 1$ および $u_{n-1}u_{n-2} = u_{n-2} + 1$ であるから、求める式が得られる。（$u_{n-2}$ が存在するためには $n \geq 3$ が必要である。）　■

### 段階 2　落とし穴

> **手を止めて、やってみよう**　すべての $n$ について $1 \leq u_n \leq 2$ であることを証明せよ。

$u_1 = 1$ については成り立つ。$1 \leq u_n \leq 2$ ならば $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_n} \leq 1$ であるから $\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 2$ となり、これは確かに 1 と 2 の間にある。数学的帰納法（induction）により、すべての $n$ について $1 \leq u_n \leq 2$ である。　■

特に、すべての $u_n$ は正であるから、小問 (i) の分母 $(1+u_n)(1+u_{n-2})$ は正である。

### 段階 3 2 つの単調な部分列

**考えてみよう** 小問 (i) の式は、$u_{n+2}-u_n$ が $u_n-u_{n-2}$ の正の定数倍であることを示している。このことから、$u_3-u_1$、$u_5-u_3$、$u_7-u_5$、...の符号について何がわかるだろうか。

これらはすべて同じ符号である！$u_3-u_1=\frac{3}{2}-1>0$ であるから、小問 (i) と数学的帰納法により $u_5>u_3$、$u_7>u_5$ などが成り立つ。つまり奇数番目の項は増加する。これらは 2 で上に有界であるから、定理により極限（limit）に収束する。その極限を $L$ とおく。

同様に $u_4-u_2=\frac{5}{3}-2<0$ であるから、偶数番目の項は減少する。これらは 1 で下に有界である。定理は増加数列について述べられているが、$-u_2,-u_4,-u_6,\ldots$ は増加し $-1$ で上に有界であるから収束し、したがって偶数番目の項も収束する。その極限を $M$ とおく。

### 段階 4 極限を求める

**考えてみよう** $L$ を求めるには、$u_{n+2}$ と $u_n$ を直接結びつける等式が必要である。$(*)$ からそれを導けるだろうか。

$(*)$ を 2 回適用すると

$$u_{n+2}=1+\frac{1}{u_{n+1}}=1+\frac{1}{1+1/u_n}=1+\frac{u_n}{u_n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+1}.$$

奇数の値をとりながら $n\to\infty$ とすると、$u_n$ も $u_{n+2}$ も $L$ に収束するから

$$L=\frac{2L+1}{L+1}\quad\Longrightarrow\quad L^2+L=2L+1\quad\Longrightarrow\quad L^2-L-1=0.$$

解は $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ であり、$L\geq 1$ であるから $L=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi$ でなければならない。偶数の値についてまったく同じ議論を行うと、$M=\varphi$ が得られる。

**考えてみよう** 奇数番目の項は $\varphi$ に収束し、偶数番目の項も $\varphi$ に収束する。なぜこれで数列全体が $\varphi$ に収束するといえるのだろうか。

直観的には、どの項も奇数番目か偶数番目のどちらかであり、どちらの種類の項も $\varphi$ に近づいていくからである。厳密にいえば次のとおりである。任意の許容誤差 $\varepsilon>0$ が与えられたとき、奇数番目の項はある番号 $N_1$ 以降で $\varphi$ との差が $\varepsilon$ 以内になり、偶数番目の項はある番号 $N_2$ 以降でそうなる。したがって $\max(N_1,N_2)$ 以降ではすべて

の項が $\varphi$ との差 $\varepsilon$ 以内にあり、これがまさに収束の意味である。(これは Section 2.1 で扱った「大きいほうのしきい値をとる」という手法である。)

#### 段階 5 別の値から始める

$u_1 = 3$ とすると、数列は

$$3,\quad \frac{4}{3},\quad \frac{7}{4},\quad \frac{11}{7},\quad \frac{18}{11},\quad \frac{29}{18},\quad \dots$$

となる。このとき $u_1 = 3$ は $[1,2]$ の外にあるので、小問 (ii) の帰納法は出発できない。しかし $u_2 = \frac{4}{3}$ はその中にあるので、そこから帰納法が機能し、すべての $n \geq 2$ について $1 \leq u_n \leq 2$ となる。小問 (i) では $u_{n-2}$ 以降の項しか使わず、それらが正であることしか必要としないが、実際にそれらはすべて正である。今回は $u_3 - u_1 = \frac{7}{4} - 3 < 0$ かつ $u_4 - u_2 = \frac{11}{7} - \frac{4}{3} > 0$ であるから、奇数番目の項は減少し、偶数番目の項は増加する。役割は入れ替わるが、それぞれの部分列 (subsequence) はやはり単調かつ有界である。極限は同じ方程式を満たし、どちらも正であるから、どちらも $\varphi$ である。結論は変わらない。 ■

## 振り返り

- **数列が単調でないときは、単調な部分を探せ。** 奇数番目と偶数番目の項に分けることで、ジグザグの数列が性質のよい 2 つの数列になった。
- **まず収束を証明し、次に極限を求めよ。** 等式 $L = (2L+1)/(L+1)$ が正当なのは、$L$ が存在するとわかってからである。導入での手早い議論が飛ばしていたのは、まさにこの段階である。
- **どちらの解かを確認せよ。** 極限の方程式には解が 2 つあったが、小問 (ii) の評価によってどちらが正しいかがわかった。

## 背後にある数学

#### 蜘蛛の巣図と不動点

$u_{n+1} = f(u_n)$ で定まる数列はどれも、**蜘蛛の巣図** (cobweb diagram) として描くことができる (図 2.2.1)。$y = f(x)$ と $y = x$ のグラフをかく。$x$ 軸上の $u_1$ から出発し、曲線まで垂直に進み (高さ $u_2 = f(u_1)$)、次に直線 $y = x$ まで水平に進み (これで $x = u_2$ に移る)、再び曲線まで垂直に進む、ということを繰り返す。ここで $f(x) = 1 + 1/x$ は減少関数であり、そのために経路は、行き過ぎと不足を交互に繰

り返しながら、曲線と直線の交点、すなわち $f(\varphi) = \varphi$ となる**不動点**（fixed point）$\varphi$ に向かって渦を巻くように内側へ進んでいく。

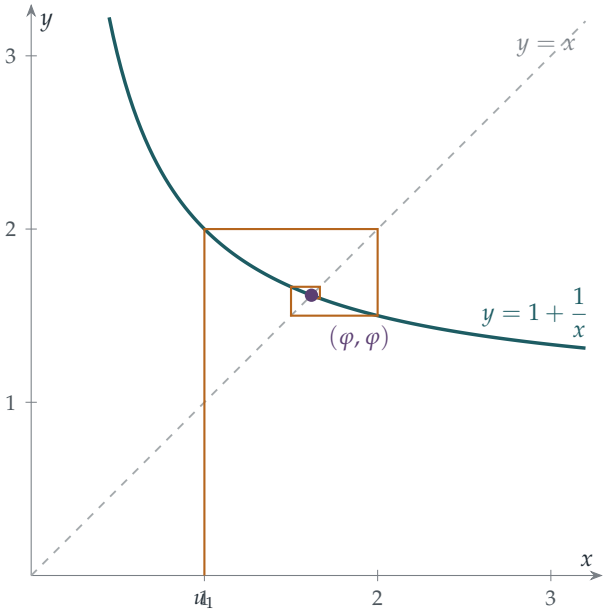



**図 2.2.1**　$u_1 = 1$ から始めた $u_{n+1} = 1 + 1/u_n$ の蜘蛛の巣図。経路は曲線まで上がり、直線 $y = x$ まで横に進むことを何度も繰り返す。曲線が右下がりであるため、経路は両側を交互に行き来しながら、不動点 $\varphi \approx 1.618$ に向かって渦を巻くように近づく。これが奇数番目と偶数番目の項のジグザグである。

### どれだけ速く、そしてなぜ

小問 (i) の因子 $(1 + u_n)(1 + u_{n-2})$ はどこから来るのだろうか。不動点の近くでは $u_{n+1} - \varphi = f(u_n) - f(\varphi) \approx f'(\varphi)(u_n - \varphi)$ であり、$f'(\varphi) = -1/\varphi^2 \approx -0.38$ である。したがって、1 ステップごとに誤差はおよそ $-0.38$ 倍される。符号が反転し（ジグザグ）、大きさが縮む（収束）のである。2 ステップでは誤差は $1/\varphi^4 \approx 0.146$ 倍され、これはまさに $1/\big((1 + u_n)(1 + u_{n-2})\big)$ の極限である。大学ではこれが**縮小写像定理**（contraction mapping theorem）になる。不動点の近くで $|f'| \le k < 1$ ならば、反復はその不動点に収束し、誤差は少なくとも等比数列的に縮小する。これは数学で最も有用な定理の一つであり、微分方程式に解が存在することを証明するのにも使われる（第 8 章）。Section 2.8 では、不動点が引きつける性質を**もたない**写像に出会い、まったく異なる結果を見ることになる。

### 最も無理な数

項 $u_n = F_{n+1}/F_n$ は、その大きさの分数としては $\varphi$ の最良の近似である。しかし「最良」といっても、あまりよい近似ではない。$\varphi$ は、他のどの数よりも分数で近似しにくいのである。その理由は連分数（continued fraction）表示 $[1;1,1,1,\ldots]$ に表れている。連分数に大きな数が現れると非常によい近似が得られる（$\pi = [3;7,15,1,292,\ldots]$ と、優れた近似 $\frac{355}{113}$ を思い出そう）が、$\varphi$ はどこまでも可能な限り小さな数しか現れない。フルヴィッツ（Adolf Hurwitz）は1891年に、すべての無理数（irrational number）$x$ に対して $|x - p/q| < 1/(\sqrt{5}\,q^2)$ を満たす分数が無限に多く存在すること、そして $\sqrt{5}$ はこれ以上改良できないことを証明した。改良できないのは、まさに $\varphi$ があるためである。この「最大の無理性」こそが、ヒマワリの種の螺旋模様に黄金角が現れる理由である。

## 思考のスキル

**単調かつ有界ならば収束する**

極限を知らずに数列が収束することを示すには、単調かつ有界な数列を見つけるか、数列を単調かつ有界な部分に分けよ。

極限が存在するとわかって初めて、漸化式（recurrence relation）で「$n \to \infty$ とする」ことによって極限を求めてよい。大学では、この定理は実数の**完備性**（completeness）、すなわち $\mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}$ から区別する性質から導かれるものであり、公理からの証明を学ぶことになる。

## 次の一歩

1. **内に潜むフィボナッチ数列。** $F_1 = F_2 = 1$、$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ とするとき、$u_n = F_{n+1}/F_n$ であることを証明せよ。

2. **誤差は縮む。** $u_{n+1} - \varphi = -\dfrac{u_n - \varphi}{\varphi\, u_n}$ を示し、すべての $n$ について $|u_n - \varphi| \le \varphi^{-(n-1)}$ であることを導け。（$\varphi^2 = \varphi + 1$ および $u_n \ge 1$ を用いよ。）

3. **数列を途切れさせる。** $u_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ならば数列は定数であることを示せ。また、ある $u_n = 0$ となって数列が続けられなくなるような初項 $u_1$ の値をすべて求めよ。（ヒント：$u_n = 0$ から逆にたどれ。）

**4** **$\sqrt{2}$ の親戚。** $v_1 = 1$、$v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+v_n}$ とする。この問題の方法を応用して $v_n \to \sqrt{2}$ を示し、$\sqrt{2}$ を連分数で表せ。

## さらに学ぶために

- **Mario Livio, *The Golden Ratio*** (Broadway)。$\varphi$ の歴史を、本物の数学と数多くの俗説とを区別しながら描いている。
- **C. D. Olds, *Continued Fractions*** (Mathematical Association of America)。優秀な高校生向けに書かれた、短くて非常に読みやすい入門書。
- **J. C. Burkill, *A First Course in Mathematical Analysis*** (Cambridge University Press)。単調数列と完備性を厳密に扱っており、演習問題も豊富である。

# 2.3 発散する級数と、収束するその親戚

**問題**

**STEP III 2014、問 8**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/14-s3-q8`

## 導入

調和級数（harmonic series）$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ は、各項が 0 に近づくにもかかわらず和は限りなく大きくなる級数の、最も有名な例である。その増え方はおそろしく遅い。10 を超えるには 12,000 項以上が必要であり、100 を超えるにはおよそ $1.5\times10^{43}$ 項が必要である。それでも、いずれはどんな数も超えていく。

では、分母に数字 2 を含む項をすべて取り除いてみよう。$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{12}$、$\frac{1}{20}$ から $\frac{1}{29}$ まで、$\frac{1}{32}$ などが消える。もともと無限大になる和なのだから、項の 1 割ほどを取り除いても大差はないと予想するかもしれない。ところが実際には、残った項の和は 80 未満になるのである。この驚くべき事実は 1914 年に A. J. Kempner によって証明された。この問題は、和をブロックに切り分けるという、たった一つの見事に単純なアイデアでそこへ導いてくれる。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 最初の不等式は、$r=k^n$ から $r=k^{n+1}-1$ までの項からなるブロックについてのものである。$k=2$、$n=3$ のとき、それはどの項で、何個あるか。

それは $f(8), f(9), \ldots, f(15)$ の 8 項である。一般に、ブロックは $k^n$ から $k^{n+1}-1$ までなので、項の個数は $k^{n+1}-k^n=k^n(k-1)$ である。この不等式は、ブロックの和が（項の個数）×（とりうる最小の項）と（項の個数）×（最大の項）の間にあることを述べている。

## 順を追って解く

### 段階 1　ブロックを評価する

$f$ は減少関数（decreasing function）なので、ブロック内のすべての項は

$$f(k^{n+1}) < f(k^{n+1}-1) \le f(r) \le f(k^n) \qquad (k^n \le r \le k^{n+1}-1)$$

を満たす。$k^n(k-1)$ 個の項を足し合わせれば、求める不等式が得られる。 ■

### 段階 2　調和級数

**考えてみよう**　$k=2$、$f(r)=1/r$ のとき、$2^n$ から $2^{n+1}-1$ までのブロックに対する二つの評価はどうなるか。

下からの評価は $2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$、上からの評価は $2^n \cdot \frac{1}{2^n} = 1$ である。したがって、どれほど先のブロックであっても、**すべての**ブロックは $\frac{1}{2}$ 以上 1 以下の寄与をする（図 2.3.1）。$n = 0, 1, \dots, N$ のブロックはちょうどつながって $r=1$ から $r = 2^{N+1}-1$ までの和になるので、$N+1$ 個のブロックを足し合わせると

$$\frac{N+1}{2} \le \sum_{r=1}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{r} \le N+1$$

を得る。$N \to \infty$ のとき左辺は限りなく大きくなるので、部分和（partial sum）は有界でなく、級数は発散（diverge）する。 ■

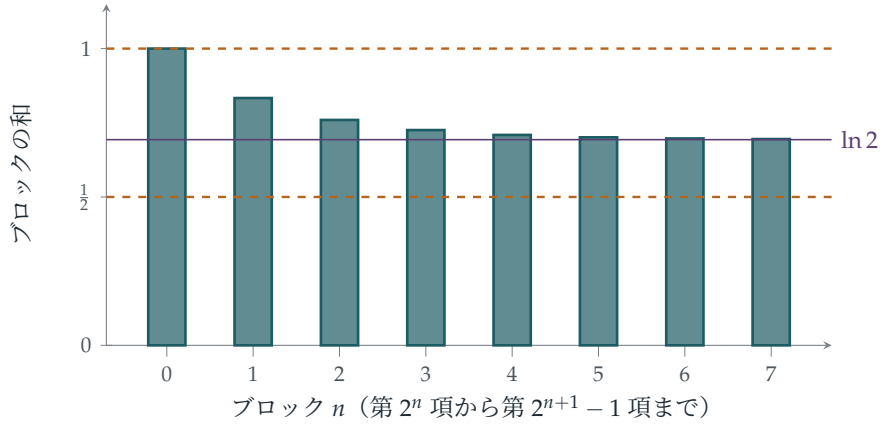



**図 2.3.1**　調和級数を $1, 2, 4, 8, \dots$ 項ずつのブロックに切り分けたもの。どのブロックの和も $\frac{1}{2}$ と 1 の間にあり（琥珀色の破線）、実際にはブロックの和は $\ln 2 \approx 0.693$ に近づいていく（紫色）。それぞれ $\frac{1}{2}$ 以上の値をもつブロックが無限個あれば、その合計は有限にはなりえない。

### 段階 3 立方数の逆数の和

次に、$k=2$ のまま $f(r)=1/r^3$ とする。ブロック $n$ に対する上からの評価は

$$2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^3} = \frac{1}{4^n}$$

である。$n=0,1,2,\ldots$ のブロックはすべての正の整数をちょうど 1 回ずつ覆うので、

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^3} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} = 1\tfrac{1}{3}. \qquad \blacksquare$$

（厳密には、これはすべての部分和が $\frac{4}{3}$ 以下であることを示している。上に有界な単調増加数列は収束（converge）するので、無限和は存在し、その値は $\frac{4}{3}$ 以下である。真の値は $1.2020\ldots$ である。）

### 段階 4 2 を含まない数を数える

**考えてみよう** 先頭の 0 を許す（たとえば 7 を 007 と書く）とき、0 から 999 までの整数のうち、数字 $0,1,3,4,5,6,7,8,9$ だけを使って書けるものはいくつあるか。

3 つの桁それぞれに 9 通りの選び方があるので、そのような文字列は $9^3$ 個ある。これらは 0 から 999 までの 2 を含まない数とちょうど対応しており、（正でない）0 を除くと、$S(1000)$ には $9^3-1=728$ 個の数が残る。 $\blacksquare$

### 段階 5 Kempner の級数

ここで、ブロックの考え方を桁数で定めたブロックに適用する。これは $k=10$ とするのと同じことである。

**手を止めて、やってみよう** 2 を含まない $d$ 桁の数はいくつあるか。また、$d$ 桁の数の最小値はいくつか。

最上位の桁は $1,3,4,\ldots,9$ のいずれか（0 でも 2 でもない 8 通り）であり、残りの $d-1$ 個の桁はそれぞれ 9 通りである。よってそのような数は $8\times 9^{d-1}$ 個あり、いずれも $10^{d-1}$ 以上である。したがって、$S(n)$ に属する $d$ 桁の数が $\sigma(n)$ に寄与する量は高々

$$8\times 9^{d-1}\times\frac{1}{10^{d-1}} = 8\left(\frac{9}{10}\right)^{d-1}$$

である。すべての桁数 $d=1,2,3,\ldots$ について足し合わせると、

$$\sigma(n) \le \sum_{d=1}^{\infty} 8\left(\frac{9}{10}\right)^{d-1} = \frac{8}{1-\frac{9}{10}} = 80.$$

真の不等号については、ほとんどの評価がまったく精密でないことに注意すればよい（たとえば $\frac{1}{3} < 1$ であるのに、1桁の項はすべて1で評価している）。よって、すべての $n$ について $\sigma(n) < 80$ である。 ■

## 振り返り

- **項をまとめる。**どちらの和も、1項ずつ扱うのは容易でない。適切な大きさのブロックにまとめることで、それぞれを等比級数（geometric series）と比較できた。
- **適切なブロックは問題によって異なる。**$1/r$ と $1/r^3$ には2の累乗が、10進法の数字に関する問題には10の累乗が適していた。
- **有界かつ単調増加。**どちらの収束の証明も、Section 2.2と同じ原理に基づいている。正の項の部分和は単調増加するので、上からの評価さえあればよいのである。

## 背後にある数学

### 凝縮判定法

この問題の最初の不等式は、**コーシー（*Cauchy*）の凝縮判定法**（condensation test）の核心である。$f$ が正で減少関数ならば、

$$\sum_{r=1}^{\infty} f(r) \text{ が収束する} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n f(2^n) \text{ が収束する。}$$

この判定法は、難しい級数を易しい級数に変えてくれる。$f(r) = 1/r^p$ に適用すると $\sum 2^n \cdot 2^{-np} = \sum (2^{1-p})^n$ となり、これは $p > 1$ のときに限り収束する等比級数である。$1/(r \ln r)$ に適用すればこれさえも発散することがわかり、$1/(r(\ln r)^2)$ に適用すればこちらは収束することがわかる。この議論はニコル・オレーム（Nicole Oresme）にさかのぼる。オレームは1350年ごろ、まさに図2.3.1のブロックを用いて調和級数の発散を証明した。

### 調和級数はどれほどゆっくり発散するか

図2.3.1からは、各ブロックがおよそ $\ln 2$ ずつ寄与することがうかがえる。したがって、最初の $N$ 項の和はおよそ $\log_2 N \times \ln 2 = \ln N$ になるはずである。実際、

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} = \ln N + \gamma + (0 \text{ に収束する項})$$

が成り立つ。ここで $\gamma = 0.5772\ldots$ はオイラー・マスケローニ定数（Euler–Mascheroni constant）である。$\gamma$ が有理数（rational number）かどうかは誰にもわかっていない。この公式は大学 1 年次の解析学で積分を用いて証明することになる。また、調和数は Section 9.11 と Section 11.12 にも再び登場する。

### ほとんどの数は 2 を含む

なぜ Kempner の級数は収束するのだろうか。それは、大きな数の中では「2 を含まない数」が非常にまれだからである。$10^d$ 未満の数のうち 2 を含まないものの割合は高々 $(0.9)^d$ であり、これは 0 に収束する。100 桁の数のうち、数字 2 を含まないものは 0.003% にも満たない。つまり、取り除いているのは項の 1 割ではなく、ほとんどすべてなのである。80 という評価はかなり甘い。1979 年、Robert Baillie は加速法を用いてこの和を小数点以下何桁にもわたって計算し、その値はおよそ 19.257 であることを示した。

### 累乗の逆数の和

小問 (ii) の和は $\zeta(3)$ であり、これは Section 1.2 で出会ったリーマン（Riemann）ゼータ関数（zeta function）の値である。Section 2.4 では $\zeta(2) = \pi^2/6$ を正確に求めることになるし、オイラー（Euler）は $\zeta(4), \zeta(6), \ldots$ の公式を見つけた。しかし、$\zeta(3)$ の公式は誰にも見つかっていない。1978 年、Roger Apéry は Section 2.9 のものとよく似た積分を用いて $\zeta(3)$ が無理数（irrational number）であることを証明し、数学界を驚かせた。$\zeta(5)$ が無理数かどうかは今なおわかっていない。

## 思考のスキル

**ブロックによる比較**

正の項からなる級数が収束するかどうかを判定するには、項がほぼ一定とみなせるブロックにまとめ、各ブロックを単純な級数と比較せよ。

比較判定法（comparison test）は大学 1 年次の解析学の基本中の基本である。スキルの要は、何と比較するかを選ぶことにある。ここでは、項の変化が一定の倍率以内に収まる、大きさ $2^n$ や $10^d$ のブロックを用いた。

## 次の一歩

1. **遅さを実感する。** $\sum_{r \le N} 1/r \approx \ln N + 0.5772$ を用いて、調和級数が 10 を超えるのに何項必要か、また 100 を超えるのに何項必要かを見積もれ。

2. **判定法を使ってみる。** 小問 (i) の方法を $f(r) = 1/r^2$ に用いて、$\sum 1/r^2 \le 2$ を示せ。さらに、第 1 項を別に扱うことで評価を改善せよ。

3. **収束と発散の境目。** $k = 2$ のブロック不等式を用いて、$\sum_{r \ge 2} \dfrac{1}{r \ln r}$ が発散し、$\sum_{r \ge 2} \dfrac{1}{r (\ln r)^2}$ が収束することを示せ。

4. **さらに除外する。** やや難 10 進法で表したときに 2 も 7 も含まない正の整数の逆数の和は 35 未満であることを示せ。（35 がどこから来るかわかるだろうか。）

## さらに学ぶために

- **Julian Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant***（Princeton University Press）。『ガンマ：オイラーの定数を探る』。調和級数、$\gamma$ をはじめ多くの話題を、力のある高校生向けに書いた本である。

- **Mary Hart, *Guide to Analysis***（Palgrave）。『解析学ガイド』。級数と比較判定法についてのわかりやすい章を含む、簡潔な大学 1 年次向けの教科書である。

- **Robert Baillie,「Sums of reciprocals of integers missing a given digit」**, *American Mathematical Monthly* 86 (1979)。「特定の数字を含まない整数の逆数の和」。この節を読み終えた後なら読める短い論文である。

# 2.4 $\pi^2/6$

**問題**

**STEP III 2018、問 7**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/18-s3-q7`

## 導入

1650 年、ピエトロ・メンゴリ（Pietro Mengoli）は単純な問いを立てた。

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots ?$$

の値はいくつか。各項は十分速く小さくなるので、この和は収束（converge）する（Section 2.3 で、和が高々 2 であることを示した）。しかし、その値を求められる者はいなかった。ベルヌーイ兄弟（Bernoulli brothers）も挑んだが失敗し、ヤコブ・ベルヌーイ（Jacob Bernoulli）は公に助けを求めたほどである。この問題は、ベルヌーイ家の故郷の都市にちなんで**バーゼル問題**（Basel problem）と呼ばれるようになった。

1734 年、若きオイラー（Leonhard Euler）がこれを解き、その答えによって一躍名を上げた。和は $\pi^2/6$ である。円に関する数である $\pi$ が、平方の逆数の和に現れるのはいったいなぜだろうか。この問題は、A レベル（A level、英国の大学入学資格試験）の範囲を超えるものを何も使わずに、完全で厳密な証明を与える。使うのは、ド・モアブルの定理（De Moivre's theorem）、多項式（polynomial）の根（roots）の和、そしてはさみうち（squeeze）である。

## 取りかかる前に

細部に入る前に、全体の方針を見ておく価値がある。

- 小問 (i) では、数 $\cot^2\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right)$ を根にもつ多項式をつくる。
- 小問 (ii) では、それらの根を個別には知らないまま、係数（coefficients）を用いて

足し合わせる。

- 小問 (iii) では、小さい $\theta$ に対して $\cot\theta \approx 1/\theta$ が成り立つことを用いて、$\cot^2$ の値の和を $1/m^2$ の値の和に置き換え、はさみうちにする。

> **考えてみよう**　多項式 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ が根 $r_1, \ldots, r_n$ をもつとき、$r_1 + \cdots + r_n$ を係数で表すとどうなるか。

答えは $-a_{n-1}/a_n$ である。この事実が小問 (ii) の原動力となる。

## 順を追って解く

### 段階 1　ド・モアブルの定理

> **考えてみよう**　$\cot\theta + \mathrm{i}$ を一つの分数で表せ。分子について何に気づくか。

$\cot\theta + \mathrm{i} = \dfrac{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}{\sin\theta}$ であり、同様に $\cot\theta - \mathrm{i} = \dfrac{\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta}{\sin\theta}$ である。ド・モアブルの定理より、

$$(\cot\theta \pm \mathrm{i})^{2n+1} = \frac{\cos(2n+1)\theta \pm \mathrm{i}\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta}.$$

差をとると余弦は打ち消し合い、正弦は 2 倍になる。これを $2\mathrm{i}$ で割ると

$$\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta}. \qquad \blacksquare$$

を得る。

### 段階 2　多項式

今度は左辺を二項定理（binomial theorem）で展開する。$c = \cot\theta$、$N = 2n+1$ とおく。

> **考えてみよう**　$(c+\mathrm{i})^N - (c-\mathrm{i})^N$ において、二つの二項展開のどの項が打ち消し合い、どの項が 2 倍になるか。

$\mathrm{i}^j$ を含む項は、一つ目の展開では $+$ の符号で、二つ目の展開では $(-1)^j$ を伴って現れる。したがって、$j$ が偶数の項は打ち消し合い、$j$ が奇数の項は 2 倍になる。

$$(c+\mathrm{i})^N - (c-\mathrm{i})^N = 2\sum_{j\ \text{奇数}} \binom{N}{j} c^{N-j}\,\mathrm{i}^j.$$

$j = 2k+1$ とすると、$\mathrm{i}^j = \mathrm{i}\,(-1)^k$ かつ $c^{N-j} = c^{2n-2k} = (c^2)^{n-k}$ である。$2\mathrm{i}$ で割ると

$$\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta} = \binom{2n+1}{1}x^n - \binom{2n+1}{3}x^{n-1} + \cdots + (-1)^n,$$

となる。ただし $x = \cot^2\theta$ である。

> **手を止めて、やってみよう** どのような $\theta$ に対して左辺は 0 になるか。これを用いて、多項式の相異なる $n$ 個の根を求めよ。

左辺が 0 になるのは、$\sin(2n+1)\theta = 0$ かつ $\sin\theta \neq 0$ のときであり、たとえば $m = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\theta = \frac{m\pi}{2n+1}$ のときである。これらの角はすべて 0 と $\frac{\pi}{2}$ の間（両端を含まない）にあり、そこで cot は正かつ狭義単調減少であるから、$n$ 個の値 $\cot^2\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right)$ はすべて異なる。$n$ 次の多項式の根は高々 $n$ 個であるから、これらが根のすべてである。 ■

### 段階 3 根を足し合わせる

根の和は、係数を用いて $-(\text{係数}x^{n-1})/(\text{係数}x^n)$ と表される。

$$\sum_{m=1}^{n} \cot^2\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right) = \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6\,(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3}. \qquad \blacksquare$$

$n = 1$ で確かめると、$\cot^2(\pi/3) = \frac{1}{3}$ であり、$\frac{1\times 1}{3} = \frac{1}{3}$ である。

### 段階 4 はさみうち

$0 < \sin\theta < \theta < \tan\theta$ から逆数をとり（不等号の向きが逆になる）、2 乗すると

$$\cot^2\theta < \frac{1}{\theta^2} < \frac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \cot^2\theta.$$

> **考えてみよう** $\theta = \frac{m\pi}{2n+1}$ とおき、$m = 1, \ldots, n$ について足し合わせよ。外側の二つの和はどうなるか。真ん中の和は $\sum 1/m^2$ とどう関係するか。

真ん中の和は $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{m^2\pi^2}$ である。小問 (ii) より左の和は $\frac{n(2n-1)}{3}$ であり、右の和は $n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}$ である。全体に $\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}$ を掛けると

$$\frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} < \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2} < \frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}.$$

$n \to \infty$ のとき、$\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2}$ と $\frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}$ はともに $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ に収束する（分子と分母を $n^2$ で割ればよい）。よって両側の評価はともに $\frac{\pi^2}{6}$ に収束し、その間に挟まれた部分和（partial sums）も $\frac{\pi^2}{6}$ に収束しなければならない（図 2.4.1）。 ■

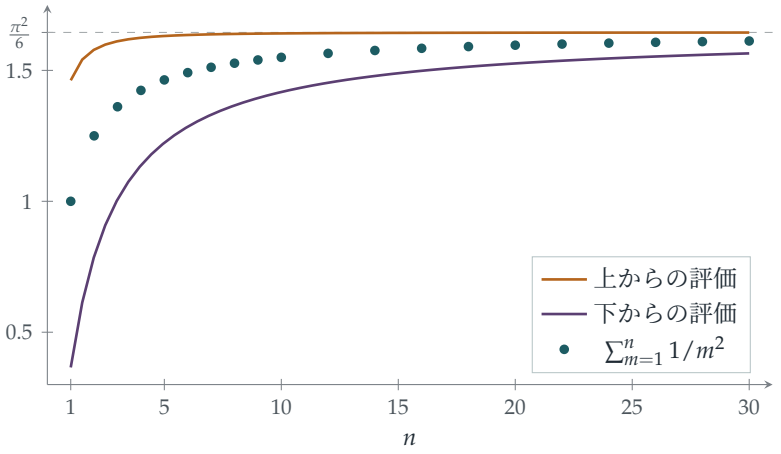



**図 2.4.1**　小問 (iii) のはさみうち。$\sum 1/m^2$ の部分和（ティール色の点）は、下からの評価（プラム色）と上からの評価（アンバー色）の間に挟まれており、両方の評価は $\pi^2/6 \approx 1.645$ に収束する。

## 振り返り

- **係数から情報を得る。** 根 $\cot^2(m\pi/(2n+1))$ をより簡単な形で求めることは一度もなかったが、それらの和は正確に求められた。
- **近似してから挟む。** $\cot\theta$ は $1/\theta$ に近似的に等しいにすぎないが、その誤差は両方向の厳密な不等式によって制御されていた。
- **有限から無限へ。** 最後の段階までは、すべて有限和を扱っていた。無限和が現れたのは、不等式において $n \to \infty$ としたときだけであり、これが無限を扱う安全な方法である。

## 背後にある数学

### オイラーの大胆な議論

1734 年のオイラー自身の議論は、現代の基準では厳密ではなかったが、目を見張るものであった。根 $\pm a, \pm b, \pm c, \ldots$ をもち、0 における値が 1 である多項式は、$(1 - x^2/a^2)(1 - x^2/b^2)\cdots$ と因数分解される。関数 $\frac{\sin x}{x}$ は 0 における値が 1 で、根 $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ をもつ。そこでオイラーは、これを「無限次の多項式」とみなして

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots .$$

と書いた。右辺の $x^2$ の係数は $-\frac{1}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots\right)$ であり、一方マクローリン級数（Maclaurin series）$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{6}+\cdots$ からは $-\frac{1}{6}$ である。両者を比べると $\pi^2/6$ が得られる。私たちの STEP の証明は、同じ考え方の有限で厳密な版である。すなわち、根が $\pi$ の倍数と結びついた多項式と、その 2 番目の係数である。

### 平方の逆数を越えて

オイラーはさらに $\sum 1/m^4=\pi^4/90$、$\sum 1/m^6=\pi^6/945$ を見いだし、一般に $\sum 1/m^{2k}$ は $\pi^{2k}$ の有理数倍であって、**ベルヌーイ数**（Bernoulli numbers）が関わることを示した。奇数乗の場合は事情がまったく異なる。Section 2.3 で見たように、$\sum 1/m^3$ の公式は誰も知らない。これらの和はリーマンゼータ関数（Riemann zeta function）の値 $\zeta(2),\zeta(4),\ldots$ であり、この関数の複素数の引数に対するふるまいが素数の分布を支配している（Section 1.2）。

### 再び出会う場所

大学では、$\zeta(2)=\pi^2/6$ の証明に少なくともあと三つ出会うだろう。**フーリエ級数**（Fourier series）（関数を正弦と余弦の和として表すもの）による証明、二重積分（double integral）による証明、そして複素解析（complex analysis）による証明である。また、この数は確率にも現れる。無作為に選んだ二つの整数が公約数をもたない（互いに素である）確率は $6/\pi^2\approx 0.61$ である。（素数 $p$ が両方を割り切る確率は $1/p^2$ であるから、どの素数も両方を割り切らない確率は $\prod_p(1-1/p^2)$ であり、オイラーはこの積が $1/\zeta(2)$ に等しいことを示した。）確率の極限に $\pi$ が現れる別の例は、Section 12.23 の主題である。

## 思考のスキル

**はさみうちと、根の対称式**

極限を求めるには、その量を、同じ極限をもつ二つのより簡単な式で挟み込め。

そして、扱いにくい数の和（あるいは積）が必要なときは、それらを根にもつ多項式を探してみよう。係数が、それらの対称な組合せ（symmetric functions）をただで与えてくれる。

## 次の一歩

1 **1992 年版。** STEP III 1992、問 8（`step.maths.org/questions/92-s3-q8`）に挑戦せよ。この節のものと似た多項式を用いて、正接の 2 乗の和や余割の 2 乗の和を正確に求める問題である。（**ヒント**：根が $r_i$ である多項式がわかっているとき、根が $1/r_i$ である多項式は何か。）

2 **奇数の平方。** $\sum 1/m^2 = \pi^2/6$ から $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$ を導け。

3 **4 乗。** やや難 $\sum r_i^2 = (\sum r_i)^2 - 2\sum_{i<j} r_i r_j$ と多項式の係数を用いて $\sum_{m=1}^{n} \cot^4\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right)$ を求め、はさみうちの議論を応用して $\sum 1/m^4 = \pi^4/90$ を証明せよ。

4 **どれくらい速いか。** 小問 (iii) の下からの評価を用いて、$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2} < \frac{\pi^2}{4n}$ を示せ。部分和が $\pi^2/6$ との差 0.001 以内に入るには、この評価によればどれだけ大きな $n$ をとれば十分か。実際の誤差は $1/n$ に近いが、それと比較せよ。

## さらに学ぶために

- **William Dunham, *Euler: The Master of Us All*** (Mathematical Association of America)。『オイラー：われら皆の師』。第 3 章では、バーゼル問題の物語が数学的内容も含めて余すところなく語られている。
- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***、第 9 章「Three times $\pi^2/6$」（$\pi^2/6$ を三通りで）。この節の証明も収められている。
- **Paul Nahin, *Dr. Euler's Fabulous Formula*** (Princeton University Press)。『オイラー博士の素敵な数式』。複素数、フーリエ級数、そしてこのような和を扱っている。

# 2.5 ヴィエトの無限積

**問題**

**STEP III 2022、問 4**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip`

## 導入

この問題の最後の行は、数学で最も美しい公式の一つであり、この種の公式としては最も古いものの一つでもある。この公式は 1593 年にフランスの法律家であり数学者でもあったヴィエト（François Viète）によって発表された。$\pi$ を無限の過程の結果として**厳密に**表したのは、これが史上初めてであった。ヴィエト以前には $\pi$ は近似することしかできなかったが、ヴィエト以後は、どこまでも続ければすべての桁を与える公式によって $\pi$ を定義できるようになったのである。

この公式は不思議な姿をしている。2 の入れ子になった平方根は、いったいどこから出てくるのだろうか。この問題は、それが倍角公式（double-angle formula）を繰り返し用いることから生じることを明らかにし、その途中で、同じ仕組みからもう一つの、あまり知られていない $\ln 2$ の公式も導く。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** sinh の倍角公式はどのようなものか。（自信がなければ、$\sinh 2y$ と $\sinh y \cosh y$ を指数関数で表して比べてみよ。）

$\sin 2y = 2\sin y \cos y$ とまったく同様に、$\sinh 2y = 2\sinh y \cosh y$ である。この一つの恒等式（identity）を何度も繰り返し使うことが、問題全体を動かす原動力となる。問題は最後の小問までは双曲線関数（hyperbolic function）を扱い、最後の小問で通常の三角関数に切り替える。

## 順を追って解く

### 段階 1　繰り返し半分にする

$n = 1$ の場合は、$y = x/2$ とした倍角公式そのものである：

$$\sinh x = 2\cosh\left(\frac{x}{2}\right)\sinh\left(\frac{x}{2}\right).$$

> **考えてみよう**　$n$ のときに公式が成り立つと仮定する。最後の因数は $\sinh(x/2^n)$ である。$n+1$ の場合の公式を得るには、これをどう書き換えればよいか。

これに倍角公式を適用すると $\sinh(x/2^n) = 2\cosh(x/2^{n+1})\sinh(x/2^{n+1})$ となる。これを代入すると

$$\sinh x = 2^{n+1}\cosh\left(\frac{x}{2}\right)\cdots\cosh\left(\frac{x}{2^n}\right)\cosh\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\sinh\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right),$$

となり、これは $n+1$ の場合の公式である。数学的帰納法（induction）により、すべての $n$ について成り立つ。 ■

後半の主張を導くには、両辺を $x$ で割り、さらに両辺に $\dfrac{x/2^n}{\sinh(x/2^n)}$ を掛ければよい。右辺では $2^n\sinh(x/2^n)\cdot\dfrac{x/2^n}{x\,\sinh(x/2^n)} = 1$ となり、cosh の積だけが残る。 ■

### 段階 2　極限

級数（series）展開から、$y \neq 0$ のとき

$$\frac{\sinh y}{y} = 1 + \frac{y^2}{3!} + \frac{y^4}{5!} + \cdots,$$

であり、これは $y \to 0$ のとき 1 に近づく。よってその逆数 $y/\sinh y$ も 1 に近づく。（もっと慎重に議論したければ次のようにする。残りの項 $\frac{y^2}{3!} + \frac{y^4}{5!} + \cdots$ に現れる階乗はどれも 6 以上なので、$0 < |y| < 1$ のとき残りの項は高々 $\frac{1}{6}(y^2 + y^4 + \cdots) = \frac{y^2}{6(1-y^2)}$ であり、これは 0 に近づく。）

ここで、小問 (i) において $x$ を固定して $n \to \infty$ とする。すると $y = x/2^n \to 0$ なので、左辺は $\dfrac{\sinh x}{x} \times 1$ に近づく。右辺は部分積（partial product）であり、したがってこれは $\dfrac{\sinh x}{x}$ に近づく。これこそが無限積（infinite product）の意味するところである。 ■

### 段階 3　$\ln 2$ の公式

$x = \ln 2$ とすると $e^{x/2} = \sqrt{2}$ なので

$$\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2^{1/2} + 2^{-1/2}}{2} = \frac{2+1}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

同様に $e^{x/4} = 2^{1/4}$ なので $\cosh(x/4) = \dfrac{2^{1/4} + 2^{-1/4}}{2}$ であり、分子と分母に $2^{1/4}$ を掛けると $\dfrac{2^{1/2}+1}{2 \times 2^{1/4}}$ となる。 ■

**考えてみよう** $\cosh(x/2^k)$ の一般的なパターンはどうなるか。分母 $2 \times 2^{1/2^k}$ をすべて掛け合わせると何が起こるか。

同じ計算により、すべての $k \geq 1$ について

$$\cosh\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1 + 2^{1/2^{k-1}}}{2} \times 2^{-1/2^k}.$$

が得られる。($k = 1$ のときこれは $\frac{1+2}{2} \times 2^{-1/2} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ であり、先ほどと一致する。) $k = 1, 2, 3, \ldots$ にわたって掛け合わせると、2 の累乗はまとまって $2^{-(1/2+1/4+1/8+\cdots)} = 2^{-1}$ となり、最初の分数は $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ である。したがって無限積は

$$\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1+2^{1/2}}{2} \times \frac{1+2^{1/4}}{2} \times \frac{1+2^{1/8}}{2} \cdots.$$

となる。一方、$\sinh(\ln 2) = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$ なので $\dfrac{\sinh x}{x} = \dfrac{3}{4 \ln 2}$ である。両辺の因数 $\frac{3}{4}$ が打ち消し合い、

$$\frac{1}{\ln 2} = \frac{1+2^{1/2}}{2} \times \frac{1+2^{1/4}}{2} \times \frac{1+2^{1/8}}{2} \cdots. \quad ■$$

が残る。

### 段階 4 ヴィエトの公式

**考えてみよう** 小問 (iv) には $\pi$ が含まれているので、双曲線関数ではなく通常の三角関数から来ているはずである。小問 (i) と (ii) の議論は、sinh と cosh の代わりに sin と cos を用いてもすべてそのまま成り立つだろうか。

成り立つ。帰納法で用いたのは倍角公式だけであり、$\sin 2y = 2 \sin y \cos y$ である。極限で用いたのは $y \to 0$ のとき $\frac{\sin y}{y} \to 1$ となることだけであり、これは $\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \cdots$ から同様に従う。したがって $x \neq 0$ のとき（さらに、途中でどの因数も 0 にならないよう $x$ は $\pi$ の倍数でないとする）

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{8}\right) \cdots.$$

**手を止めて、やってみよう** 左辺が $2/\pi$ となるように $x$ を選び、最初のいくつかの因数を計算せよ。半角公式（half-angle formula）$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$（$0 \le \theta \le \pi$ のとき）が役に立つ。

$x = \frac{\pi}{2}$ とする。すると $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$ であり、因数は $\cos\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{8}, \cos\frac{\pi}{16}, \ldots$ である。最初の因数は $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ である。ある因数が $\cos\theta = \frac{c}{2}$ であれば、半角公式により次の因数は

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+c/2}{2}} = \frac{\sqrt{2+c}}{2}.$$

となる。よって分子は $\sqrt{2}$、$\sqrt{2+\sqrt{2}}$、$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$、…と続き、それぞれ直前のものに 2 を加えて平方根をとったものである。これがヴィエトの公式である。 ■

## 振り返り

- **積の打ち消し合い。** 小問 (i) の恒等式は、ある種の和が打ち消し合って縮む（telescoping）のとまったく同様に、潰れていく積である。
- **まず有限の恒等式、次に極限。** Section 2.4 と同様に、すべての段階は有限の $n$ について厳密であり、必要な極限はごく単純な $\frac{\sin y}{y} \to 1$ だけであった。
- **双曲線関数と三角関数は双子である。** 同じ証明がどちらにも通用したのは、両者が同じ倍角公式と同じ小さい角での極限を満たすからである。これは偶然ではない。Section 5.7 で見るように、$\cosh(ix) = \cos x$ なのである。

## 背後にある数学

### アルキメデスの多角形

ヴィエトの公式には、アルキメデス（Archimedes）にまでさかのぼる幾何学的な意味がある。半径 1 の円に内接する $2^n$ 辺の正多角形（regular polygon）の面積は $A_n = 2^{n-1}\sin\frac{2\pi}{2^n}$ である。辺の数を 2 倍にすると、面積は

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{2^n \sin(\pi/2^n)}{2^{n-1}\cdot 2\sin(\pi/2^n)\cos(\pi/2^n)} = \frac{1}{\cos(\pi/2^n)}.$$

倍になる。正方形（$A_2 = 2$）から出発して限りなく 2 倍を繰り返すと、面積は円の面積 $\pi$ に近づく。よって $\pi = 2 \div \left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots\right)$ となり、これがヴィエトの公式である。積の各因数は、図 2.5.1 の連続する二つの多角形の面積の比である。

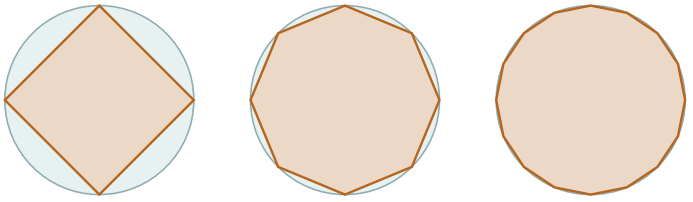



**図 2.5.1**　半径 1 の円に内接する、辺の数が 4、8、16 の正多角形。辺の数を 2 倍にするたびに、面積はヴィエトの積の因数を一つずつ余分に割ったものになり、面積は $\pi$ に向かって増加していく。

### 無限積

ヴィエトの積は、数学における最初の無限積であった。その後にも続くものがあった。ジョン・ウォリス（John Wallis）は 1655 年に $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$ を発見し、オイラー（Euler）による $\frac{\sin x}{x}$ の積表示は Section 2.4 に登場した。大学では、無限積がどのような場合に収束（converge）するかを学ぶ。おおまかに言えば、小さな正の $a_n$ に対する $\prod(1 + a_n)$ は $\sum a_n$ と同じように振る舞う。$\ln(1 + a_n) \approx a_n$ だからである。ここでは $1 - \cos(\pi/2^n) \approx \frac{1}{2}(\pi/2^n)^2$ であり、これは毎回 4 分の 1 ずつ小さくなるので、積は速く収束する。

### どれくらい速いか

$n$ 個の因数を掛けた後の部分積はちょうど $\dfrac{1}{2^n \sin(\pi/2^{n+1})}$ に等しく、その誤差はおよそ $\frac{\pi^2}{6 \cdot 4^{n+1}}$ の $\frac{2}{\pi}$ 倍である。新しい因数を一つ加えるごとに答えの精度はおよそ 4 倍になり、小数でおよそ 0.6 桁ずつ得られる。因数を 10 個とれば、$2/\pi$ が小数第 6 位まで正しく求まる。これは悪くないが、各段階で正しい桁数を 2 倍にする Section 2.6 の方法の速さにはとても及ばない。

## 思考のスキル

**恒等式を繰り返し適用する**

$f(x)$ と $f(x/2)$ を結びつける恒等式は、何度でも繰り返し適用できる。その結果は、極限をとると、しばしば無限和や無限積になる。

$n$ 段階後の「残り」の項（ここでは $2^n \sinh(x/2^n)$）に注目し、その極限を別に求めよ。このパターンは、無限積からフラクタルの構成に至るまで、解析学のいたるところに現れる。

## 次の一歩

1 **1990 年版。** STEP I 1990、問 8（`step.maths.org/questions/90-s1-q8`）に取り組んでみよ。この問題は、sin の倍角公式以外は何も使わずに、本節とは別の道筋でヴィエトの積に到達する。どちらの方法がより自然だと感じるだろうか。

2 **別の角度。** $\frac{\sin x}{x}$ の積表示で $x = \frac{\pi}{3}$ として、$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ を無限積で表し、最初の二つの因数を簡単にせよ。

3 **因数はいくつ必要か。** 電卓を用いて、$\pi$ を小数第 4 位まで正しく求めるにはヴィエトの積の因数がいくつ必要かを調べよ。また、因数を一つ増やすごとにおよそ 0.6 桁ずつ精度が上がる理由を説明せよ。

4 $\ln 3$ **の公式。** $x = \ln 3$ として小問 (iii) を繰り返し、$\frac{1}{\ln 3}$ を無限積で表せ。$\frac{1}{\ln 3}$ を小数第 2 位まで求めるには因数がいくつ必要か。この積がヴィエトの積よりも収束が遅いのはなぜか。

## さらに学ぶために

- **Petr Beckmann, *A History of* π**（St Martin's Press）。『π の歴史』。アルキメデス、ヴィエト、ウォリスらの物語が熱のこもった筆致で語られる。
- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM***（Wiley）。『π と算術幾何平均』。Section 2.6 の方法を含む、$\pi$ の計算の本格的な数学。本章を読み終えていれば、第 1 章は十分に読める。
- **Eli Maor, *Trigonometric Delights***（Princeton University Press）。『三角法の楽しみ』。ヴィエトとその積についての章がある。

# 2.6 算術幾何平均

**問題**

**STEP II 2024、問 8**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip`

## 導入

2 つの正の数、たとえば $\sqrt{2}$ と 1 をとる。これらを、その相加平均（arithmetic mean）と相乗平均（geometric mean）で置き換える。これを何度も繰り返す。すると次のようになる。

| $n$ | $x_n$（相加平均） | $y_n$（相乗平均） |
|---|---|---|
| 0 | 1.4142135623730950488 | 1 |
| 1 | 1.2071067811865475244 | 1.1892071150027210667 |
| 2 | 1.1981569480946342956 | 1.1981235214931201226 |
| 3 | 1.1981402347938772091 | 1.1981402346773072058 |
| 4 | 1.1981402347355922074 | 1.1981402347355922074 |

わずか 4 回の操作で、2 つの数は小数第 20 位まで一致する。この共通の極限が**算術幾何平均**（arithmetic–geometric mean）$M(\sqrt{2},1) = 1.19814\ldots$ である。

1799 年 5 月 30 日、21 歳のガウス（Carl Friedrich Gauss）は日記に、$1/M(\sqrt{2},1)$ が、まったく別の問題、すなわちレムニスケート（lemniscate）と呼ばれる曲線の弧長（arc length）に現れる定数と小数第 11 位まで一致することに気づいた、と書き記した。「これはきっと、解析学のまったく新しい分野を切り開くであろう」と彼は書いている。実際にそのとおりになった。本問は、ガウスの発見の背後にある鍵となる事実を証明するものである。すなわち、算術幾何平均（AGM）を用いると、通常のどの方法でも計算できない積分の値が求まるのである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう**　相異なる 2 つの正の数の相加平均が、つねに相乗平均より大きいのはなぜか。1 行で証明できるだろうか。

これは相加相乗平均の不等式（AM–GM inequality）であり、小問 (i) のヒントがその 1 行の証明を与えている。$x \neq y$ のとき $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 > 0$ であり、これを展開すると $x + y > 2\sqrt{xy}$ となる。小問 (i) のすべては、この事実と、それぞれの平均がもとの 2 数の間にあるという事実から導かれる。

## 順を追って解く

### 段階 1　2 つの数列が挟み込まれる

$y_n < x_n$ ならば $\sqrt{x_n} \neq \sqrt{y_n}$ であるから $x_n - 2\sqrt{x_n y_n} + y_n > 0$ であり、これは $x_{n+1} > y_{n+1}$ を意味する。$y_0 < x_0$ であるから、数学的帰納法（induction）により、すべての $n$ について $y_n < x_n$ が成り立つ。

**考えてみよう**　$x_n$ と $y_n$ の相加平均が $x_n$ より小さく、相乗平均が $y_n$ より大きいのはなぜか。

$y_n < x_n$ であるから、$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} < \frac{x_n + x_n}{2} = x_n$ であり、$y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > \sqrt{y_n y_n} = y_n$ である。したがって

$$y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < x_2 < x_1 < x_0.$$

$y_n$ は単調増加（increasing）で、上から $x_0$ で抑えられている（bounded above）から、問題文の定理により、ある極限 $M$ に収束する。

差については、

$$x_{n+1} - y_{n+1} < x_{n+1} - y_n = \frac{x_n + y_n}{2} - y_n = \frac{1}{2}(x_n - y_n),$$

であり、前半の結果よりこれは正である。よって差は各段階で少なくとも半分になる。すなわち $0 < x_n - y_n < (x_0 - y_0)/2^n$ であり、これは 0 に収束する。

最後に、$x_n = y_n + (x_n - y_n)$ は $M$ に収束する数列と 0 に収束する数列の和であるから、$x_n \to M$ も成り立つ。 ■

### 段階 2　置換積分

この置換（substitution）は唐突に見えるが、根号の中の 2 つの括弧がいずれも完全平方式（あるいはそれに近いもの）になるように設計されている。

**考えてみよう** $t = \frac{1}{2}\left(x - \frac{pq}{x}\right)$ として $t^2 + pq$ を計算せよ。次に $t^2 + \frac{1}{4}(p+q)^2$ を計算せよ。どちらかはきれいに因数分解できるだろうか。

まず、

$$t^2 + pq = \frac{1}{4}\left(x^2 - 2pq + \frac{p^2q^2}{x^2}\right) + pq = \frac{1}{4}\left(x + \frac{pq}{x}\right)^2.$$

次に、

$$\begin{aligned} t^2 + \tfrac{1}{4}(p+q)^2 &= \frac{1}{4}\left(x^2 - 2pq + \frac{p^2q^2}{x^2} + p^2 + 2pq + q^2\right) \\ &= \frac{x^4 + (p^2+q^2)x^2 + p^2q^2}{4x^2} = \frac{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}{4x^2}. \end{aligned}$$

また $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{pq}{x^2}\right) = \dfrac{x^2+pq}{2x^2}$ である。

**手を止めて、やってみよう** これらを組み合わせよ。$x$ が 0 から $\infty$ まで動くとき、$t$ はどう動くか。$t$ についての積分は何になるか。

$x$ が 0 から $\infty$ まで増加するとき、$t$ は（導関数が正であるから）$-\infty$ から $\infty$ まで増加する。$x > 0$ に対して

$$\sqrt{\left(t^2 + \tfrac{1}{4}(p+q)^2\right)\left(t^2 + pq\right)} = \frac{\sqrt{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}}{2x} \cdot \frac{x^2+pq}{2x},$$

であるから、

$$\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\cdots}} = \frac{x^2+pq}{2x^2} \cdot \frac{4x^2}{(x^2+pq)\sqrt{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}}\,\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}}.$$

よって $t$ についての積分は $2\mathrm{I}(p,q)$ に等しい。

一方、$t$ についての積分は、$p$ と $q$ をそれぞれ $\frac{1}{2}(p+q) = \mathrm{a}(p,q)$ と $\sqrt{pq} = \mathrm{g}(p,q)$ で置き換えた I とまったく同じ形をしている。ただし積分範囲は実数全体である。被積分関数は $t$ について偶関数（even）であるから、$t$ についての積分は $2\mathrm{I}\big(\mathrm{a}(p,q), \mathrm{g}(p,q)\big)$ である。両者を比べて、

$$\mathrm{I}(p,q) = \mathrm{I}\big(\mathrm{a}(p,q), \mathrm{g}(p,q)\big). \qquad \blacksquare$$

### 段階 3 積分の値を求める

**考えてみよう** $(x_0, y_0)$ から始めて、この恒等式を繰り返し適用せよ。$n$ 回適用すると $\mathrm{I}(x_0, y_0)$ は何に等しくなるか。$n \to \infty$ のとき何が起こるか。

すべての $n$ について $\mathrm{I}(x_0,y_0)=\mathrm{I}(x_1,y_1)=\mathrm{I}(x_2,y_2)=\cdots=\mathrm{I}(x_n,y_n)$ である。$n\to\infty$ のとき 2 つの引数はいずれも $M$ に収束し、

$$\mathrm{I}(M,M)=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{M^2+x^2}=\left[\frac{1}{M}\arctan\frac{x}{M}\right]_0^{\infty}=\frac{\pi}{2M}.$$

したがって

$$\mathrm{I}(x_0,y_0)=\frac{\pi}{2M}. \qquad \blacksquare$$

問題文では「$\mathrm{I}(x_n,y_n)\to\mathrm{I}(M,M)$」という段階を認めてよいことになっているが、これはきれいに正当化できる。$p$ または $q$ を大きくすると被積分関数は小さくなり、また $y_n<x_n$ であるから、

$$\frac{\pi}{2x_n}=\mathrm{I}(x_n,x_n)<\mathrm{I}(x_n,y_n)<\mathrm{I}(y_n,y_n)=\frac{\pi}{2y_n}.$$

両側の評価はともに $\frac{\pi}{2M}$ に収束し、しかも $\mathrm{I}(x_n,y_n)$ はすべての $n$ について同じ数 $\mathrm{I}(x_0,y_0)$ であるから、これは $\frac{\pi}{2M}$ に等しくなければならない。Section 2.4 と同様、ここでもはさみうちの原理が用いられている。

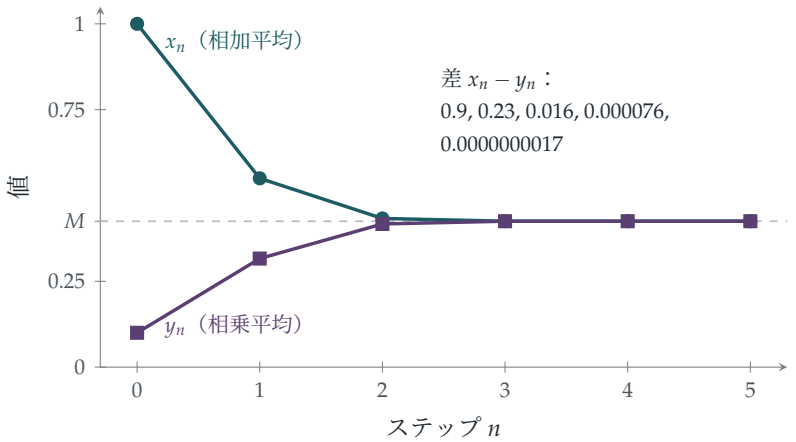



**図 2.6.1**　$x_0=1$ と $y_0=0.1$ の算術幾何平均。相加平均 $x_n$（ティール）は減少し、相乗平均 $y_n$（プラム）は増加して、共通の極限 $M=0.425040709\ldots$ に驚くほど速く近づく。いったん近くなると、正しい桁数は各ステップでおよそ 2 倍になる。

## 振り返り

- **挟み込まれる 2 つの単調数列。**一方は増加し、他方は減少し、その差は 0 に縮む。これは 2 つの数列が共通の極限をもつことを示す最も明快な方法である。
- **不変量。**$\mathrm{I}(x_n,y_n)$ という量はステップごとに決して変化しない。他のすべてが動く

中で変わらないものを見つけることは、数学における最も強力な考え方の一つである。

- **巧妙な置換は当て推量ではなく、設計されたものである。**この置換は、根号の中の式が因数分解できるように選ばれていた。

## 背後にある数学

### 問題が認めるよりも速い

小問 (i) は差が各ステップで少なくとも半分になることを示しており、これはステップごとにおよそ 2 進数 1 桁ずつ精度が上がることを意味する。しかし導入の表は、はるかに劇的なことを示している。正しい桁数が各ステップでおよそ 2 倍になっているのである（$2, 4, 10, 21, 43, \ldots$）。実際、

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{1}{2}\bigl(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}\bigr)^2 = \frac{(x_n - y_n)^2}{2\bigl(\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n}\bigr)^2},$$

であるから、各段階の差はおよそ直前の差の 2 乗の定数倍である。これを**二次収束**（quadratic convergence）といい、Section 2.7 できちんと学ぶ。

### 楕円積分

本問の積分 $\mathrm{I}(p, q)$ は、姿を変えた**完全楕円積分**（complete elliptic integral）である。これは楕円の弧長を計算する際に現れる種類の積分であり、読者の知っている関数を用いて表すことはできない。その最も有名な応用は振り子（pendulum）である。周期を表す A レベル（A level、英国の大学入学資格試験）の公式 $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ は、振れ幅が小さい場合の近似にすぎない。角度 $\theta_0$ から放した振り子の正確な周期は

$$T = \frac{2\pi\sqrt{L/g}}{M\bigl(1, \cos\frac{\theta_0}{2}\bigr)},$$

であり、これは算術幾何平均によって値が求まる楕円積分である。$\theta_0 = 90^\circ$ のとき、真の周期は簡単な公式の予測より約 18% 長い。ガウスの日記の記述はレムニスケート、すなわち 8 の字形の曲線に関するものであった。その全弧長には $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$ が現れ、この積分は姿を変えた $\mathrm{I}(\sqrt{2}, 1)$ に等しいので、算術幾何平均によって値が求まるのである。

### $\pi$ の計算

1976 年、Richard Brent と Eugene Salamin はそれぞれ独立に、ガウスの考えを、正しい桁数が各ステップで 2 倍になる $\pi$ の計算アルゴリズムへと仕立てた。25 ステップで数千万桁が得られる。この種のアルゴリズムは 1980 年代から 1990 年代にかけて $\pi$ の記録的な計算に用いられ、現在では高精度が必要なあらゆる場面で、このような二次収束するアルゴリズムが標準となっている。ステップごとに約 0.6 桁しか精度が上がらない Section 2.5 のヴィエト（Viète）の積と比べてみるとよい。

## 思考のスキル

**不変量を探す**

ある操作が多くのものを一度に変えるときは、変わらない量を探せ。そしてその量を、すべてが単純になる操作の最後で評価せよ。

ここでは操作が算術幾何平均のステップであり、不変量（invariant）が積分 I であった。操作の最後では 2 つの引数が等しくなり、積分は初等的に計算できた。不変量は、力学におけるエネルギー保存（第 10 章）から、ある種のパズルが解けないことの証明に至るまで、数学のあらゆるところに現れる。

## 次の一歩

1. **二次収束。** 恒等式 $x_{n+1} - y_{n+1} = \dfrac{(x_n - y_n)^2}{2(\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n})^2}$ を証明し、$x_{n+1} - y_{n+1} \le \dfrac{(x_n - y_n)^2}{8y_0}$ を導け。

2. **手計算。** 電卓を使って $M(2,1)$ を小数第 6 位まで求めよ。何ステップ必要だったか。

3. **スケーリング。** $\lambda > 0$ に対して $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda M(x,y)$ であること、および $\mathrm{I}(\lambda p, \lambda q) = \lambda^{-1}\mathrm{I}(p,q)$ であることを示せ。これら 2 つの事実が $\mathrm{I}(x_0, y_0) = \pi/(2M)$ と矛盾しないことを確かめよ。

4. **振り子。** 上の公式を用いて、$60^\circ$ から放した振り子の周期が、小振幅での予測よりどれだけ長いかを有効数字 3 桁で求めよ。

## さらに学ぶために

- **David Cox,「The arithmetic–geometric mean of Gauss」**, *L'Enseignement Mathématique* 30 (1984)（ガウスの算術幾何平均）。歴史と数学についての古典的な解説である。最初の数節は微積分の知識だけで読める。
- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM*** (Wiley)（円周率と算術幾何平均）。算術幾何平均と $\pi$ の高速計算についての決定版といえる本である。
- **Jonathan Borwein & Keith Devlin, *The Computer as Crucible*** (A. K. Peters)（るつぼとしてのコンピュータ）。実験数学を扱い、ガウスの発見のように数値の一致に気づくことから生まれた発見も紹介している。

# 2.7 6 桁か、600 桁か

**問題**

**STEP II 2023、問 5**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip`

## 導入

$\sqrt{2}$ を近似する簡単な方法を二つ考える。どちらも 1 から出発し、使うのは足し算、掛け算、割り算だけである。10 ステップ後、一つ目は小数点以下およそ 8 桁まで正しい。二つ目は 700 桁以上まで正しい。

この違いは、二つ目の方法が $\sqrt{2}$ についてより巧妙だからではない。違いは誤差の**形**にある。一つ目では各ステップで誤差に一定の分数が掛かるが、二つ目では各ステップで誤差が **2 乗**される。この問題はこのことを厳密に述べ、その過程で数値解析（numerical analysis）の中心的な考え方の一つを導入する。数値解析は、あらゆる電卓、あらゆる天気予報、あらゆる工学シミュレーションを支える分野である。

## 取りかかる前に

それぞれの数列の最初の数項を分数で計算してみよう。

$$x_n:\quad 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \dots \qquad y_n:\quad 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{17}{12},\ \frac{577}{408},\ \frac{665857}{470832},\ \dots$$

**考えてみよう** 二つのリストについて何か気づくことはあるだろうか。（両方に現れる分数に注目せよ。）

$y_n$ はすべて $x$ のリストに現れるが、その位置はどんどん先になっていく。$y_2 = x_3$、$y_3 = x_7$ であり、一般に $y_n = x_{2^n-1}$ である。二つ目の方法は、同じ近似の列を指数関数的な速さで飛ばしながら進んでいるのである。このことを覚えておいてほしい。最後に理由を説明する。

## 順を追って解く

### 段階 1　一つ目の方法の値は常に 1 以上である

$x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n + 1}$ と書ける。$x_n \geq 1$ ならば $x_n + 1 > 0$ であるから、$x_{n+1} > 1$ である。$x_0 = 1$ であるから、帰納法（induction）により、すべての $n$ について $x_n \geq 1$ が成り立つ。 ■

### 段階 2　一つ目の方法の誤差

> **考えてみよう**　この問題では、誤差を $x_n - \sqrt{2}$ ではなく $x_n^2 - 2$ で測っている。$x_{n+1}^2 - 2$ を $x_n$ を用いて一つの分数で表せ。分子について何に気づくだろうか。

$$x_{n+1}^2 - 2 = \frac{(x_n + 2)^2 - 2(x_n + 1)^2}{(x_n + 1)^2} = \frac{x_n^2 + 4x_n + 4 - 2x_n^2 - 4x_n - 2}{(x_n + 1)^2} = \frac{2 - x_n^2}{(x_n + 1)^2}.$$

分子はちょうど $-(x_n^2 - 2)$ である。したがって $x_{n+1}^2 - 2$ と $x_n^2 - 2$ は異符号であり（近似値は $\sqrt{2}$ の両側を交互に行き来する）、また $x_n \geq 1$ より $(x_n + 1)^2 \geq 4$ であるから、

$$|x_{n+1}^2 - 2| = \frac{|x_n^2 - 2|}{(x_n + 1)^2} \leq \frac{1}{4} |x_n^2 - 2|. \qquad \blacksquare$$

### 段階 3　10 ステップ

これを 10 回適用すると、$|x_{10}^2 - 2| \leq 4^{-10} |x_0^2 - 2| = 4^{-10} = \frac{1}{1048576} < 10^{-6}$ となる。符号については、$x_0^2 - 2 = -1 < 0$ であり、符号は交互に変わるので、偶数の $n$ ではすべて $x_n^2 - 2 < 0$ である。よって $x_{10}^2 < 2$ であり、これらを合わせて $2 - 10^{-6} \leq x_{10}^2 \leq 2$ を得る。 ■

$x_n^2$ の誤差は各ステップで高々 $\frac{1}{4}$ 倍になる。これを **1 次収束**（linear convergence）という。1 ステップごとに一定の桁数だけ正しい桁が増える（ここでは少なくとも $\log_{10} 4 \approx 0.6$ 桁であり、実際には 0.77 桁に近い）。

### 段階 4　二つ目の方法の誤差

> **考えてみよう**　$y_{n+1} - \sqrt{2}$ を一つの分数で表せ。分子を見ると完全平方式が思い浮かぶはずである。

$$y_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{y_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}\, y_n}{2y_n} = \frac{(y_n - \sqrt{2})^2}{2y_n}. \qquad \blacksquare$$

$y_n > 0$ ならば右辺は 0 以上であるから、$y_{n+1} \geq \sqrt{2} > 1$ である。$y_0 = 1$ であるから、帰納法により、すべての $n$ について $y_n \geq 1$ が成り立つ。 ■（実際には、すべての $n \geq 1$ について $y_n \geq \sqrt{2}$ である。最初のステップの後、二つ目の方法は常に上から $\sqrt{2}$ に近づく。）

#### 段階 5 誤差の 2 乗

$e_n = y_n - \sqrt{2}$ とおく。$n \geq 1$ のとき $e_n \geq 0$ であり、$y_n \geq 1$ であるから $e_{n+1} = \dfrac{e_n^2}{2y_n} \leq \dfrac{e_n^2}{2}$ である。

> **手を止めて、やってみよう** $r = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ とするとき、$n \geq 1$ について $e_n \leq 2r^{2^n}$ であることを帰納法で証明せよ。初期段階は注意深く確かめること。

初期段階：$e_1 = \dfrac{(1-\sqrt{2})^2}{2 \cdot 1} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{2}$ であり、一方 $2r^2 = 2 \cdot \dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{4} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{2}$ である。両者は等しいので、初期段階は（等号で）成り立つ。

帰納段階：$e_n \leq 2r^{2^n}$ ならば

$$e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{2} \leq \frac{4r^{2^{n+1}}}{2} = 2r^{2^{n+1}}. \qquad \blacksquare$$

#### 段階 6 600 桁

$\sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$ であるから $r < \frac{1}{4}$ であり、

$$0 \leq y_{10} - \sqrt{2} \leq 2\left(\frac{1}{4}\right)^{2^{10}} = 2 \cdot 2^{-2048} = 2^{-2047}.$$

ここで $2^{10} = 1024 > 10^3$ であるから、$2^{-2047} < 2^{-2040} = (2^{10})^{-204} < 10^{-612}$ であり、これは確かに $10^{-600}$ より小さい。 ■

## 振り返り

- **誤差の漸化式を求める。** どちらの小問も、新しい誤差を古い誤差の厳密な関数として書くことで解けた。残りはすべてそこから導かれた。
- **1 次と 2 次。**「新しい誤差 $\leq$ 定数 $\times$ 古い誤差」からは、1 ステップごとに一定の桁数だけ正しい桁が増える。「新しい誤差 $\leq$ 定数 $\times$（古い誤差）$^2$」では、1 ステップごとに正しい桁数が 2 倍になる（図 2.7.1）。
- **2 乗された量が符号を決める。** 小問 (ii) では、1 ステップ後の誤差は 2 乗を正の量で割ったものなので、決して負にならない。つまり反復は上から近づく。

## 背後にある数学

### ニュートン法

二つ目の方法は、$f(y) = y^2 - 2$ に**ニュートン法**（Newton's method）を適用したものである。ニュートン（Newton）法は、推測値 $y$ を、$y$ における接線が軸と交わる点で置き換えることを繰り返して、$f$ の根を求める。

$$y_{\text{new}} = y - \frac{f(y)}{f'(y)} = y - \frac{y^2 - 2}{2y} = \frac{y^2 + 2}{2y}.$$

単根（simple root）$\alpha$ の近くでは、テイラー展開（Taylor expansion）により新しい誤差はおよそ $\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \times (\text{古い誤差})^2$ であることがわかる。これがニュートン法が 2 次収束（quadratic convergence）する理由である。この特別な場合、すなわち「$y$ と $2/y$ の平均をとる」方法はバビロニア人に知られていた。紀元前 1700 年頃の粘土板で、現在 YBC 7289 と呼ばれているものには、$\sqrt{2}$ が 60 進法で、誤差 100 万分の 1 未満で記されている。

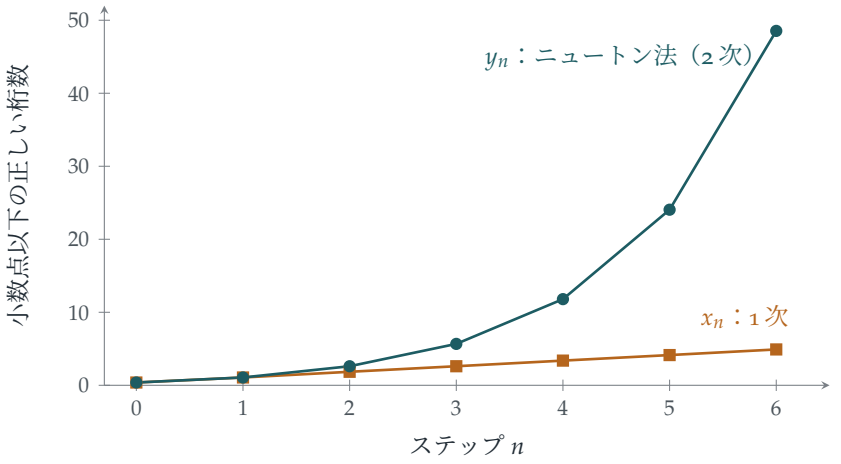



**図 2.7.1**　それぞれの方法で $n$ ステップ後に得られる $\sqrt{2}$ の小数点以下の正しい桁数。1 次の方法は 1 ステップごとに約 0.77 桁ずつ増える。ニュートン法では各ステップで正しい桁数がおよそ 2 倍になり、$n = 10$ では約 780 桁に達する。

### 不動点と収束の速さ

どちらの方法も $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ を満たす $g$ によって $u_{n+1} = g(u_n)$ という形をしているので、$\sqrt{2}$ は**不動点**（fixed point）である。これは Section 2.2 のクモの巣図と同じ状況

である。不動点 $\alpha$ の近くでは、誤差は各ステップでおよそ $g'(\alpha)$ 倍される。一つ目の方法では $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$ であり、$g'(\sqrt{2}) = -\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2} = -(3-2\sqrt{2}) \approx -0.17$ である。負の符号は符号が交互に変わることを説明し、0.17 という値は 1 ステップあたり 0.77 桁という増え方を説明する（$\log_{10}(1/0.17) \approx 0.77$）。ニュートン法では $g'(\alpha) = 0$ なので、1 次の項が消え、誤差は次の項、すなわち 2 乗の項で決まる。$g'(\alpha) = 0$ となる反復を設計することこそ、高速な数値計算法の技である。

### 同じ分数が現れる理由

分数 $x_n = p_n/q_n$ は $p_{n+1} = p_n + 2q_n$、$q_{n+1} = p_n + q_n$ を満たし、さらに $p_n^2 - 2q_n^2 = \pm 1$（符号は交互）を満たす。これらは**ペル方程式**（Pell's equation）$p^2 - 2q^2 = \pm 1$ の解であり、連分数（continued fraction）$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$ の近似分数（convergents）である。これらは $1 + \sqrt{2}$ のべきから得られる：$p_n + q_n\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^{n+1}$。ニュートン法の 1 ステップは $p + q\sqrt{2}$ を 2 **乗**する（確かめてみよ：$(p+q\sqrt{2})^2 = p^2 + 2q^2 + 2pq\sqrt{2}$ であり、$\frac{p^2+2q^2}{2pq}$ はちょうど $p/q$ にニュートン法の式を適用したものである）。2 乗すると指数が 2 倍になる。これが $y_n = x_{2^n-1}$ となる理由である。同じ「2 乗」のパターンが Section 2.8 の反復も動かしている。

## 思考のスキル

> **答えではなく誤差を解析する**
>
> 近似の振る舞いを理解するには、あるステップでの誤差が直前のステップの誤差にどう依存するかを書き下せ。
>
> これが数値解析の出発点である。答えそのもの（$\sqrt{2}$）はどちらの方法でも同じである。異なるのは、そして実際に重要なのは、誤差がどのように変化していくかである。

## 次の一歩

1. **ペル方程式。** $y_n = p/q$ が既約分数で $p^2 - 2q^2 = 1$ を満たすならば、$y_{n+1} = \dfrac{p^2+2q^2}{2pq}$ もこの方程式を満たすことを示せ。また $577^2 - 2 \times 408^2 = 1$ を確かめよ。

2. **立方根。** $f(y) = y^3 - 2$ に対するニュートン法を書き下し、$\alpha = \sqrt[3]{2}$ とするとき新しい誤差が $\dfrac{(y_n-\alpha)^2(2y_n+\alpha)}{3y_n^2}$ であることを示せ。これより、$y_n > \alpha$ ならば新しい

誤差は古い誤差の2乗の高々 $\frac{1}{\alpha}$ 倍であることを導け。（**ヒント**：$\alpha^3 = 2$ を用いよ。）

3 **割らずに割り算をする。** $f(y) = \frac{1}{y} - a$ に対するニュートン法から $y_{n+1} = y_n(2 - ay_n)$ が得られ、これには割り算が不要であることを示せ。$e_n = 1 - ay_n$ とするとき、$e_{n+1} = e_n^2$ であることを示せ。（コンピュータのプロセッサは、このような反復を用いて割り算を行う。）

4 **ニュートン法がうまくいかないとき。** 唯一の根が0である $f(y) = y^{1/3}$ にニュートン法を適用せよ。どこから始めても、各ステップで根からの距離が2倍になることを示せ。誤差の公式のどの仮定が成り立っていないか。

## さらに学ぶために

- **Endre Süli & David Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis***（Cambridge University Press）。『数値解析入門』。学部向けの標準的な教科書で、第1章で不動点反復とニュートン法を扱っている。
- **Nick Higham (ed.), *The Princeton Companion to Applied Mathematics***（Princeton University Press）。『プリンストン応用数学事典』。ニュートン法や数値解析についての短い記事が、専門家によって幅広い読者向けに書かれている。
- **David Fowler & Eleanor Robson, “Square root approximations in Old Babylonian mathematics: YBC 7289 in context”,** *Historia Mathematica* 25 (1998)。古バビロニア数学における平方根の近似を YBC 7289 の文脈で論じた論文。

# 2.8 2乗して2を引く

**問題**

**STEP III 2021、問 8**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

## 導入

「2 乗して 2 を引く」というのは、数列（sequence）を生成する規則としてはほとんど最も単純なものである。ところがこの規則は、実数直線を二つの世界に分けてしまう。$[-2,2]$ の外から出発すると、数は指数関数よりも速く無限大へと爆発する。内側から出発すると、数は永遠にその中に閉じ込められ、ある厳密な意味で完全に予測不可能な仕方でさまよい続ける。これは**カオス**（chaos）の最も単純な例の一つである。

同じ規則を非常に大きな整数で実行したものが、ルーカス–レーマー判定法（Lucas–Lehmer test）の心臓部である。これはメルセンヌ数 $2^p - 1$ が素数であるかどうかを効率よく判定する方法であり、現在の記録となっている素数をはじめ、既知の最大級の素数のほとんどを発見してきた。本問では発散する側の話を探究し、数列を完全に解けるものにする隠れた公式を見つける。

## 取りかかる前に

いくつかの初期値で試してみよう。$a = 3$ のとき：$3, 7, 47, 2207, \ldots$。$a = 1$ のとき：$1, -1, -1, -1, \ldots$。$a = 0$ のとき：$0, -2, 2, 2, 2, \ldots$。$a = 0.3$ のとき：$0.3, -1.91, 1.648, 0.716, -1.487, 0.211, \ldots$。

> **考えてみよう** $[-2,2]$ の中の数が決して外へ逃げ出せないのはなぜか。$-2 \le x \le 2$ のとき、$x^2 - 2$ の最大値と最小値はいくらか。

$-2 \le x \le 2$ ならば $0 \le x^2 \le 4$ であるから、$-2 \le x^2 - 2 \le 2$ となる。区間 $[-2,2]$ はそれ自身の中へ写される。これが小問 (ii) の半分になる。

## 順を追って解く

### 段階 1　発散

**考えてみよう**　小問 (i) には $4^{n-1}$ が現れており、2 からの超過分が各ステップで少なくとも 4 倍になることを示唆している。$x_n = 2 + d$ とおく。$x_{n+1}$ を $d$ で表すとどうなるか。

$x_{n+1} = (2+d)^2 - 2 = 2 + 4d + d^2$ である。したがって $d \geq 0$ ならば、新しい 2 からの超過分は $4d + d^2 \geq 4d$ である。

ここで数学的帰納法（induction）を用いる。$n = 1$ のとき、$x_1 = a = 2 + 4^0(a-2)$ である。$x_n \geq 2 + 4^{n-1}(a-2)$ ならば、$d = x_n - 2 \geq 4^{n-1}(a-2) \geq 0$ であるから、

$$x_{n+1} - 2 \geq 4d \geq 4^n(a-2). \qquad \blacksquare$$

### 段階 2　$|a| > 2$ のとき、かつそのときに限り発散する

**考えてみよう**　「〜のとき、かつそのときに限り」（if and only if）とは、二つの別々の証明が必要だということである。小問 (i) でほぼ得られているのはどちらの向きで、何が足りないか。

**$|a| > 2$ ならば：**$a > 2$ のときは、小問 (i) より $x_n \geq 2 + 4^{n-1}(a-2) \to \infty$ である。$a < -2$ のときは、最初の 1 ステップで符号が定まる。すなわち $x_2 = a^2 - 2 > 4 - 2 = 2$ であり、$x_2$ 以降の数列は $x_2 > 2$ から出発した同じ数列であるから、無限大に発散する。

**逆向き：**$|a| \leq 2$ ならば $a \in [-2, 2]$ であり、上で見たことからすべての項が $[-2, 2]$ にとどまる。有界（bounded）な数列は無限大に発散し得ない。 $\blacksquare$

### 段階 3　隠れた公式

小問 (iii) は手ごわそうに見える。取りかかる前に、$x_n$ の公式を見つけておく価値がある。

**考えてみよう**　$a > 2$ ならば、$a = t + \dfrac{1}{t}$ となる数 $t > 1$ が存在する（なぜか）。$x_2$ と $x_3$ を $t$ で表すとどうなるか。

関数 $t + 1/t$ は、$t$ が 1 から $\infty$ まで動くとき 2 から $\infty$ まで増加するので、どの $a > 2$ も

この形に書ける。すると

$$x_2 = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 2 = t^2 + \frac{1}{t^2}, \qquad x_3 = \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)^2 - 2 = t^4 + \frac{1}{t^4},$$

であり、帰納法により

$$x_n = t^{2^{n-1}} + t^{-2^{n-1}}.$$

2乗して2を引くことは、単に指数を2倍することにすぎない。これで問題は扱いやすくなる。

### 段階4 積が次々に打ち消し合う

**考えてみよう** $\left(t - \frac{1}{t}\right)\left(t + \frac{1}{t}\right)$ はいくらか。その結果に $t^2 + \frac{1}{t^2}$ を掛けるとどうなるか。

$\left(t - \frac{1}{t}\right)\left(t + \frac{1}{t}\right) = t^2 - \frac{1}{t^2}$ であり、さらに $\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right)\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) = t^4 - \frac{1}{t^4}$ であり、以下同様である。各因子 $x_k$ は、二つのべきの差における指数を2倍する。したがって

$$\left(t - \frac{1}{t}\right) x_1 x_2 \cdots x_n = t^{2^n} - t^{-2^n}.$$

**手を止めて、やってみよう** $x_{n+1}^2 - 4$ を $t$ で表し、この積と比べよ。

$$x_{n+1}^2 - 4 = \left(t^{2^n} + t^{-2^n}\right)^2 - 4 = \left(t^{2^n} - t^{-2^n}\right)^2.$$

$t > 1$ より $t^{2^n} - t^{-2^n} > 0$ であるから、$\sqrt{x_{n+1}^2 - 4} = t^{2^n} - t^{-2^n} = \left(t - \frac{1}{t}\right) x_1 x_2 \cdots x_n$ である。よって

$$\frac{\sqrt{x_{n+1}^2 - 4}}{x_{n+1}} = \frac{\left(t - \frac{1}{t}\right) x_1 \cdots x_n}{x_{n+1}},$$

であり、これがすべての $n$ について $y_n$ に等しくなるのは、ちょうど $A = t - \frac{1}{t}$ のときである。最後に、$\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 4 = a^2 - 4$ であるから、条件は $A = \sqrt{a^2 - 4}$、すなわち

$$a = \sqrt{A^2 + 4}.$$

である（$A > 0$ であるから、これは要求どおり2より大きい）。 ■

### 段階5 $y_n$ は収束するか

この $a$ の値に対して、

$$y_n = \frac{\sqrt{x_{n+1}^2 - 4}}{x_{n+1}} = \sqrt{1 - \frac{4}{x_{n+1}^2}}.$$

小問 (ii) より $x_{n+1} \to \infty$ であるから、$\frac{4}{x_{n+1}^2} \to 0$ となり、$y_n \to 1$ である。数列は 1 に収束する。 ■

つまり無限積（infinite product）$x_1 x_2 x_3 \cdots$ は、$x_{n+1}/A$ とちょうど同じ速さで増大する。急速に増大する項の積について、その正確な増大の速さが求められたのである。

## 振り返り

- **不変領域（invariant region）。**$[-2, 2]$ はそれ自身の中へ写され、この一つの事実だけで小問 (ii) の半分が片づく。
- **線形化（linearise）する置き換え。**$a = t + 1/t$ と書くことで、「2 乗して 2 を引く」が「指数を 2 倍する」に変わった。込み入った非線形のふるまいが単純なものになったのである。
- **再び、次々に打ち消し合う（telescoping）構造。**Section 2.5 の積と同様に、多くの因子の積が、各因子が次の因子とうまくかみ合うことによってつぶれた。

## 背後にある数学

### 秩序とカオス

$[-2, 2]$ の内側では何が起こるのか。そこでは $a = t + 1/t$ はうまくいかない（$|a| \geq 2$ が必要である）が、三角関数による類似がうまくいく。$a = 2\cos\theta$ と書くのである。すると $x_2 = 4\cos^2\theta - 2 = 2\cos 2\theta$ であり、一般に

$$x_n = 2\cos\left(2^{n-1}\theta\right).$$

となる。つまり区間の内側では、この写像（map）は単に**角を 2 倍する**だけである。無害に聞こえるが、角の 2 倍はカオス的である。$\theta/\pi$ を 2 進法（binary）で書くと、2 倍することは小数点を 1 桁右へずらし、先頭の桁を捨てることにあたる。50 ステップ後には $x_n$ は $\theta/\pi$ の 2 進展開の第 51 桁に依存するので、初期値の誤差が $10^{-15}$（一般的なコンピュータの精度）であっても、50 ステップ後の答えはまったく信頼できなくなる。この初期値鋭敏性（sensitive dependence on initial conditions）こそがカオスの特徴であり、図 2.8.1 に示されている。写像 $x \mapsto x^2 - 2$ は、変数変換によって有名なロジスティック写像（logistic map）$x \mapsto 4x(1-x)$ と同値であり、これには Section 8.7 で再会する。

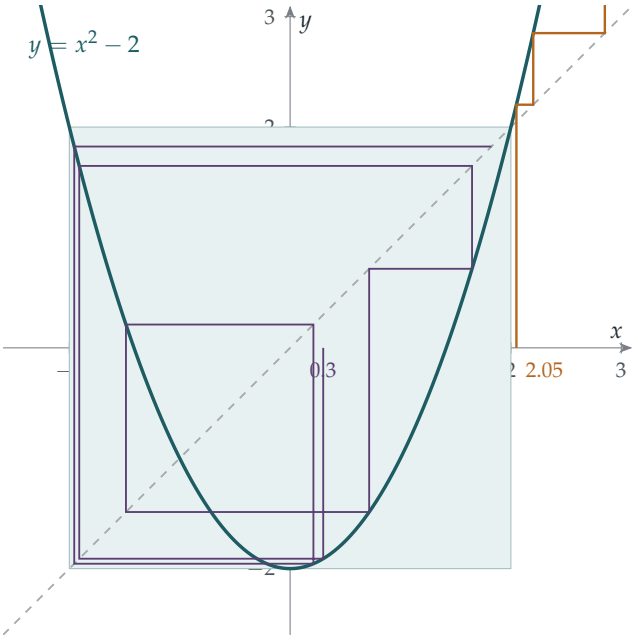



**図 2.8.1** $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ のクモの巣図（cobweb diagram）。0.3 から出発した軌道（紫）は、網かけの正方形 $[-2,2]^2$ に永遠にとどまり、カオス的にさまよう。そのすぐ外の 2.05 から出発した軌道（琥珀色）は逃げ出す：$2.05, 2.20, 2.85, 6.13, \ldots$

### 最大の素数を見つける

**メルセンヌ数**（Mersenne number）とは $M_p = 2^p - 1$ のことである。1876 年にエドゥアール・リュカ（Édouard Lucas）が発見し、1930 年にデリック・レーマー（Derrick Lehmer）が完成させた、$M_p$ が素数かどうか（$p$ は奇素数）を判定する見事な方法がある。$s_0 = 4$ から出発し、毎回 $M_p$ を法として簡約しながら、2 乗して 2 を引くことを繰り返す。このとき

$$M_p \text{ は素数} \iff s_{p-2} \equiv 0 \pmod{M_p}.$$

$M_7 = 127$ の場合：$s = 4, 14, 194 \equiv 67, 67^2 - 2 \equiv 42, 42^2 - 2 \equiv 111, 111^2 - 2 \equiv 0$ であるから、127 は素数である。本問との関係は置き換えにある。$t = 2 + \sqrt{3}$ とすると $4 = t + 1/t$ であるから、$s_k = (2+\sqrt{3})^{2^k} + (2-\sqrt{3})^{2^k}$ となり、判定法の証明では Section 1.6 のガウス整数（Gaussian integers）とよく似た、$a + b\sqrt{3}$ の形の数の算術を用いる。各ステップで必要なのは 2 乗 1 回だけなので、この判定法は極めて高速である。既知の最大級の素数のほとんどが、現在の記録保持者も含めてメルセンヌ素数であるのはこのためである（すべてがそうではない。$a^{2^n} + 1$ のような他の特別な形にも、それぞれ独自の高速判定法がある）。執筆時点での記録は 2024 年に発見された

$2^{136279841}-1$ であり、41 百万桁を超える数である。

### マンデルブロ集合

$-2$ を任意の定数 $c$ に置き換え、複素数も許すことにする：$z \mapsto z^2 + c$。0 の軌道が有界にとどまるような $c$ 全体の集合が**マンデルブロ集合**（Mandelbrot set）である。本問の写像は $c = -2$ であり、これはマンデルブロ集合の最も左の点である。そして軌道が有界にとどまる初期値全体の集合（その**ジュリア集合**（Julia set））は、小問 (ii) で見つけた区間 $[-2, 2]$ にちょうど一致する。他のほとんどすべての $c$ に対しては、この集合はフラクタル（fractal）になる。

## 思考のスキル

**変数を変換して写像を単純にする**

反復が複雑に見えるときは、それを 2 倍や定数の加算のような単純なものに変える置き換えを探せ。

ここでは $x = t + 1/t$ や $x = 2\cos\theta$ によって、$x \mapsto x^2 - 2$ が 2 倍に変わった。力学系（dynamical systems）の理論ではこれを**共役**（conjugacy）と呼び、それを見つけることが系を完全に理解する鍵となることが多い。

## 次の一歩

1. **区間の内側。** $a = 2\cos\theta$ ならば $x_n = 2\cos(2^{n-1}\theta)$ であることを証明せよ。$x_3 = a$ であるが $x_2 \neq a$ となる $a$ の値をすべて求めよ（**ヒント**：$2\pi$ を法として $4\theta \equiv \pm\theta$ となればよい）。

2. **手計算によるルーカス–レーマー判定法。** この判定法を用いて、$M_5 = 31$ は素数であり、$M_{11} = 2047$ は素数でないことを示せ（$M_{11}$ では 9 ステップが必要であり、電卓があると便利である。2047 を素因数分解して結論を確かめよ）。

3. **具体例。** $A = \frac{3}{2}$ とする。$a$ と $t$ を求め、公式 $y_1 = \sqrt{x_2^2 - 4}/x_2$ を数値的に確かめよ。

4. **次々に打ち消し合う和。** やや難 $a = t + 1/t$、$t > 1$ のとき、

$$\frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_n} = \frac{t - t^{-1}}{t^{2^n} - t^{-2^n}}.$$

であることを示せ。恒等式 $\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z^2-1} = \frac{z}{z^2-1}$ を $z = t^{2^n}$ として用いて、

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_2 x_3} + \cdots = \frac{1}{t}.$$

を導け。$a = 3$ のときにこれを数値的に確かめよ。

## さらに学ぶために

- **Ian Stewart, *Does God Play Dice?***（Penguin）。ロジスティック写像を含む、カオスについての古典的な一般向け解説書。
- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。大学学部向けの定番の入門書。第10章は本問のような1次元写像を扱っている。
- **Marcus du Sautoy, *The Music of the Primes***（Fourth Estate）。メルセンヌ素数探索の物語を含む。

# 2.9 e に迫る分数

**問題**

**STEP II 2021、問 8**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

## 導入

$e$ をよく近似する分数はどうすれば見つかるだろうか。級数（series）$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots$ を途中で打ち切るという手もあるが、そうして得られる分数は、分母の大きさの割にはそれほど良い近似ではない。この問題は、はるかに巧妙なことを行う。積分の族を作り、そのどれもが「整数 + 整数 × $e$」の形をした小さな数になるようにするのである。$a+be$ が非常に小さければ $e$ は $-a/b$ にきわめて近く、こうして積分から優れた分数の列 $\frac{19}{7}, \frac{193}{71}, \frac{2721}{1001}, \ldots$が得られる。

小さいと同時に「対象とする数の整数係数の結合」の形をした積分を使うという同じ手法は、数学における最も深い無理性（irrationality）の証明のいくつかの背後にある。$e$ が超越数であることのエルミート（Hermite）による証明や、$\zeta(3)$ が無理数であることのアペリー（Apéry）による証明もその例である。

## 取りかかる前に

区間 $[0,1]$ 上の被積分関数（integrand）$\frac{t^n(1-t)^n}{n!}e^t$ を見てみよう。

**考えてみよう** $[0,1]$ 上での $t(1-t)$ の最大値はいくつか。そこから、$n$ が大きくなるときの $T_n$ の大きさについて何がわかるか。

$t(1-t)$ の最大値は $t=\frac{1}{2}$ における $\frac{1}{4}$ である。したがって被積分関数は高々 $\frac{e}{4^n n!}$ であり、これは驚くほど速く小さくなる（図 2.9.1）。この小ささが話の半分である。残りの半分、すなわち $T_n$ が $a_n + b_n e$ という特別な形をもつことは、部分積分（integration

by parts）から得られる。

## 順を追って解く

### 段階 1　2回微分する

$p(t) = t^n(1-t)^n$ とおく。積の微分法則（product rule）により

$$p'(t) = nt^{n-1}(1-t)^n - nt^n(1-t)^{n-1} = nt^{n-1}(1-t)^{n-1}(1-2t).$$

> **考えてみよう**　もう一度微分せよ。2つの項が現れるので、共通因数 $nt^{n-2}(1-t)^{n-2}$ をくくり出す。求められている形に合わせるには、$(1-2t)^2$ を $t(1-t)$ を用いて書き直す必要がある。どうすればよいか。

$n\,[t(1-t)]^{n-1}(1-2t)$ を積の微分法則で微分する（$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[t(1-t)] = 1-2t$ に注意）：

$$\begin{aligned} p''(t) &= n(n-1)[t(1-t)]^{n-2}(1-2t)^2 - 2n[t(1-t)]^{n-1} \\ &= nt^{n-2}(1-t)^{n-2}\Big[(n-1)(1-2t)^2 - 2t(1-t)\Big]. \end{aligned}$$

ここで $(1-2t)^2 = 1-4t+4t^2 = 1-4t(1-t)$ であるから、括弧の中は $(n-1) - 4(n-1)t(1-t) - 2t(1-t) = (n-1) - 2(2n-1)t(1-t)$ となる。 ■

### 段階 2　2回部分積分する

> **考えてみよう**　$p(t)$ は $t=0$ でも $t=1$ でも 0 である。$n \geq 2$ のとき、$p'(t)$ はどうか。$p(t)e^t$ を部分積分するとき、なぜそれが重要なのか。

$n \geq 2$ のとき、$p'(t)$ は因数 $t^{n-1}(1-t)^{n-1}$ を含むので、やはり両端で 0 になる。2回部分積分すると、境界項はすべて 0 である：

$$\int_0^1 p\,e^t\,\mathrm{d}t = \Big[p\,e^t\Big]_0^1 - \int_0^1 p'\,e^t\,\mathrm{d}t = -\Big[p'\,e^t\Big]_0^1 + \int_0^1 p''\,e^t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 p''\,e^t\,\mathrm{d}t.$$

段階 1 より $p''(t) = n(n-1)\,t^{n-2}(1-t)^{n-2} - 2n(2n-1)\,t^{n-1}(1-t)^{n-1}$ である。これを $n!$ で割ると

$$\frac{p''(t)}{n!} = \frac{t^{n-2}(1-t)^{n-2}}{(n-2)!} - 2(2n-1)\frac{t^{n-1}(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

$e^t$ を掛けて積分すると、$T_n = T_{n-2} - 2(2n-1)T_{n-1}$ が得られる。 ■

### 段階 3　整数の構造

$T_0 = \int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t = e-1$ である。$T_1 = \int_0^1 (t-t^2)e^t\,\mathrm{d}t$ については、部分積分により $\int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t = 1$、$\int_0^1 t^2e^t\,\mathrm{d}t = e-2$ となるので、$T_1 = 1-(e-2) = 3-e$ である。

> **考えてみよう** $T_0 = -1+1\cdot e$、$T_1 = 3+(-1)\cdot e$ である。なぜすべての $T_n$ が、整数 $a_n, b_n$ を用いて $a_n + b_n e$ の形になるのか。

累積帰納法（strong induction）による。$T_{n-2} = a_{n-2} + b_{n-2}e$、$T_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-1}e$ で係数が整数ならば

$$T_n = (a_{n-2} - 2(2n-1)a_{n-1}) + (b_{n-2} - 2(2n-1)b_{n-1})e,$$

であり、新しい係数もまた整数である。 ■

### 段階 4 小さいからこそ情報をもつ

$0 < t < 1$ のとき被積分関数は正であり、$t^n(1-t)^n \le 1$ かつ $e^t < e$ である。したがって

$$0 < T_n < \int_0^1 \frac{e}{n!}\,\mathrm{d}t = \frac{e}{n!}.$$

> **手を止めて、やってみよう** $0 < a_n + b_n e < \dfrac{e}{n!}$ を $|b_n|$ で割れ。これは $e$ と $-a_n/b_n$ の距離について何を語っているか。

$|b_n|$ は正の整数であるから 1 以上であり、$|b_n|$ で割ると

$$\left| e - \left(\frac{-a_n}{b_n}\right)\right| = \frac{|a_n + b_n e|}{|b_n|} < \frac{e}{n!\,|b_n|} \le \frac{e}{n!}.$$

右辺は 0 に収束するので、$-a_n/b_n \to e$ である。 ■

漸化式（recurrence）から計算した最初のいくつかを示す：

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $-a_n/b_n$ | $\frac{19}{7}$ | $\frac{193}{71}$ | $\frac{2721}{1001}$ | $\frac{49171}{18089}$ | $\frac{1084483}{398959}$ |
| 誤差 | $4\times10^{-3}$ | $3\times10^{-5}$ | $1\times10^{-7}$ | $3\times10^{-10}$ | $5\times10^{-13}$ |

分数 $\frac{2721}{1001}$ は、分母がわずか 4 桁であるにもかかわらず、小数第 6 位まで正しい。

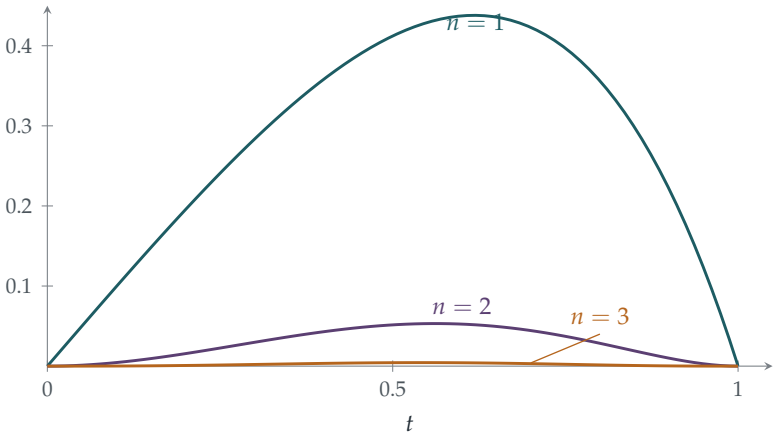



**図 2.9.1**　$n = 1, 2, 3$ に対する被積分関数 $\frac{t^n(1-t)^n}{n!}e^t$。いずれも $(0,1)$ 上で正なので、各 $T_n$ は正である。しかも非常に速く小さくなり、$n = 3$ では曲線がほとんど見えないほどである。正であってしかもごく小さいこと、それこそがこの議論に必要なことである。

## 振り返り

- **漸化式を生み出す装置としての部分積分。** 多項式とその導関数が両端で 0 になったので、部分積分によって境界項のないすっきりした漸化式が得られた。
- **構造と大きさを組み合わせる。** 漸化式によって $T_n$ が $a_n + b_n e$ の形であることがわかり、評価によってそれが小さいことがわかった。どちらか一方だけでは、$e$ の近似について何も言えない。
- **必要のないものは計算しない。** 問題は $a_n$ と $b_n$ を求めなくてよいと述べており、実際に議論の中でそれらの値は一度も必要にならなかった。必要だったのは、それらが整数であるということだけである。

## 背後にある数学

### $e$ が無理数であることの別証明

この問題は、ある有名な定理のすぐ手前で止まっている。$p, q$ を正の整数として $e = p/q$ と仮定する。すると

$$q\,T_n = q a_n + b_n p$$

は**整数**である。ところが $0 < q\,T_n < \dfrac{qe}{n!}$ であり、$n$ が大きければ右辺は 1 より小さい。

すると $qT_n$ は 0 と 1 の間に厳密に挟まれた整数ということになり、これは不可能である。よって $e$ は無理数（irrational number）である。これは Section 1.4 で見た「整数を 0 と 1 の間に閉じ込める」という考え方を、級数の代わりに積分で実現したものである。$t^n(1-t)^n$ のような多項式を含む、まさにこの種の積分を用いて、シャルル・エルミートは 1873 年に $e$ が**超越数**（transcendental number）であること、すなわち整数係数のどんな多項式の根にもならないことを証明した。

---

### 連分数

表の分数は単に良い近似であるだけではない。それらは**最良**の近似の一部なのである。オイラー（Euler）が発見した $e$ の連分数（continued fraction）展開には、美しい規則性がある：

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots],$$

そしてその近似分数（convergent）は $2, 3, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{7}, \frac{87}{32}, \frac{106}{39}, \frac{193}{71}, \ldots, \frac{2721}{1001}, \ldots$ である。私たちの $-a_n/b_n$ は、ちょうど 3 つおきの近似分数になっている。これより小さい分母をもつ分数で、$e$ にこれ以上近いものは存在しない。オイラーが見出したこの規則性そのものが、$e$ が無理数であることの最初の証明であった。有限の連分数をもつのは有理数だけだからである。

### アペリーの奇跡

1978 年、ロジェ・アペリー（Roger Apéry）は、オイラー以来未解決であった問題（Section 2.3 を参照）、すなわち $\zeta(3) = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots$ が無理数であることの証明を発表した。その証明はあまりに意外なものであったため、聴衆は当初それを信じなかった。1 年後、Frits Beukers は次の形の積分を用いた短い証明を見つけた：

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{-\ln(xy)}{1-xy}\, P_n(x) P_n(y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

ここで $P_n$ は $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^n(1-x)^n\right)$ から作られる。これらの積分は小さく、正であり、「整数 + 整数 $\times\, \zeta(3)$」を制御された分母で割った形をしている。まさにこの問題と同じ戦略である。$\zeta(5)$ や $e + \pi$ が無理数かどうかは、いまだにわかっていない。

## 思考のスキル

### 小さいがゼロではない

ある量がいくつかの数の整数係数の結合であることがわかっており、しかも小さいがゼロではないこともわかっているならば、その量は情報をもっている。近似についての情報であり、ときには無理性についての情報でもある。

この型は「構造は代数から、大きさは解析から」とまとめられる。これは数論の至るところに現れ、解析と代数が最も実り豊かに出会う場面の一つである。

## 次の一歩

1. **漸化式を回してみる。** $n = 2, 3, 4$ について漸化式から $a_n$ と $b_n$ を計算し、表の分数を確かめよ。$b_n$ の符号が交互に変わることを示せ。

2. **より鋭い評価。** $0 < T_n < \dfrac{e}{4^n\, n!}$ を示せ。これによって $-a_n/b_n$ の誤差評価はどれだけ改善されるか。

3. **無理性の証明。** 上の囲みの議論を丁寧に書き下せ。$T_n > 0$ であることは、正確にはどこで使われているか。

4. **別の重み。** やや難 $e^t$ を $e^{2t}$ に置き換えて（すなわち $U_n = \int_0^1 \frac{t^n(1-t)^n}{n!} e^{2t}\,\mathrm{d}t$ として）問題をやり直せ。$U_n$ の漸化式を求め、$U_n$ が $1$ と $e^2$ の有理数係数の結合であることを示し、この議論で $e^2$ が無理数であることがなお証明できるかどうかを調べよ。（Section 1.4 と比較せよ。）

## さらに学ぶために

- **Ivan Niven, *Irrational Numbers*** (Mathematical Association of America)。無理性の証明についての古典的な小著で、エルミートの方法も扱っている。
- **Alfred van der Poorten, 「A proof that Euler missed」**, *The Mathematical Intelligencer* 1 (1979)。アペリーの証明とその受け止められ方を生き生きと描いた記事。
- **Julian Havil, *The Irrationals*** (Princeton University Press)。数学に関心のある一般読者向けに書かれた無理数の歴史。

# 学んだこと

私たちはゼノン（Zeno）から出発し、無限の過程について三つの問いを立てた。無限の過程が答えをもつとはどういう意味か、答えをもつことをどう証明するか、そしてどれほど速く答えに近づくか、である。九つの STEP の問題を経た今、どこまで来たかを振り返ろう。

### 1. 無限の過程が答えをもつとはどういう意味か

Section 2.1 では、そのための言葉を学んだ。数列（sequence）の長期的な振る舞いについての命題は、「ある点 $m$ が存在して、すべての $n \geq m$ に対して…」という形をしている。これを証明するとは $m$ を具体的に示すことであり、否定するとは、どのような $m$ を提案してもうまくいかないことを示すことである。極限（limit）の定義では、先頭にもう一つ量化子（quantifier）「任意の許容誤差 $\varepsilon > 0$ に対して」が加わる。これによってゼノンの逆理（paradox）は解消する。$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ は、どんなに小さな許容誤差を与えても、ある点から先では 1 との差がその範囲に収まる。「和は 1 である」とは、まさにそれだけのことを意味している。

この言葉は、無意味な議論を防ぐ役割も果たす。「無限に続く式を $x$ とおく」という手早い議論は、Section 2.2 で黄金比（golden ratio）について正しい答えを与えたが、それは極限が存在することを別に証明できたからにすぎない。同じ議論を $1 - 1 + 1 - \cdots$ に当てはめると、何の意味ももたない答えが出てくる。

### 2. 極限を知らずに収束をどう証明するか

この章のほとんどの節では、少数の道具のいずれかを用いた。

- **単調かつ有界。** 上に有界（bounded）な単調（monotone）増加数列は必ず収束（converge）する（Section 2.2、Section 2.6）。正の項からなる級数の部分和（partial sums）についても同様である（Section 2.3）。大学では、これが実は実数そのものについての命題であることを学ぶ。それは**完備性**（completeness）とよばれる性質である。
- **比較。** 正の項からなる級数は、収束する級数より小さければ収束し、発散する級数より大きければ発散する。項をいくつかのまとまりに分けると比較が容易になり、調和級数（harmonic series）は発散するのに対し、それを間引いた Kempner の級

数は収束することがわかった（Section 2.3）。

- **はさみうち。**求めたい量を、同じ極限をもつ二つのより簡単な量ではさむ。このようにして $\sum 1/m^2 = \pi^2/6$ を証明し（Section 2.4）、AGM の積分を厳密に評価した（Section 2.6）。
- **有限段階での厳密な式。**Section 2.5 と Section 2.8 では、打ち消し合い（telescoping）によって $n$ ステップ後の厳密な式を求め、最後の最後になって初めて $n \to \infty$ とした。

極限が存在することがわかれば、黄金比についての $L = (2L+1)/(L+1)$ のように、漸化式（recurrence）で「$n \to \infty$ とする」ことによって極限を求められる場合が多い。ただし順序が重要である。まず存在、次に値である。

### 3. どれほど速いか

ここでは、この章はいくつかの驚きを用意していた。ヴィエト（Viète）の無限積（Section 2.5）は、因子一つごとに約 0.6 桁ずつ精度が上がる。Section 2.7 の $\sqrt{2}$ を求める単純な方法は、1 ステップごとに約 0.8 桁ずつ精度が上がる。ニュートン（Newton）法と AGM（Section 2.6）は、1 ステップごとに正しい桁数を 2 倍にする。ニュートン法を 10 ステップ行えば、$\sqrt{2}$ の 700 桁以上が得られる。違いは誤差の漸化式の形にある。「新しい誤差 $\approx$ 定数 $\times$ 古い誤差」（一次収束、linear）と「新しい誤差 $\approx$ 定数 $\times$（古い誤差）$^2$」（二次収束、quadratic）の違いである。そして Section 2.8 では反対の極端な例を見た。2 よりわずかに大きい値から始めると、写像 $x \mapsto x^2 - 2$ は数を指数関数よりも速く遠ざけ、一方 $[-2, 2]$ の内部では微小な誤差を増幅し、ついには予測可能性がすべて失われる。

速さは理論にとっても重要である。Section 2.9 の積分は $e$ に非常に速く近づく分数を生み出し、それによって $e$ が無理数（irrational）であることが証明される。どんな分数 $p/q$ も、他の分数によってそれほど速く近づかれることはありえないのである。

### 4. 解析学の道具箱

| 手法 | 用いた場面 |
|---|---|
| 量化子を満たす値を示す・量化子を否定する | 「いずれは」（2.1） |
| 有界な単調数列 | 黄金比（2.2）、AGM（2.6） |
| 比較と凝集（condensation） | 調和級数と Kempner の級数（2.3） |
| はさみうち | $\pi^2/6$（2.4）、AGM の積分（2.6） |
| 解の対称式（symmetric functions） | $\cot^2$ の値の和（2.4） |
| 打ち消し合う和と積 | ヴィエト（2.5）、$x^2-2$（2.8） |
| 不変量（invariants） | AGM の積分（2.6） |
| 誤差の漸化式 | 一次収束と二次収束（2.7） |
| 写像を簡単にする変数変換 | $a=t+1/t$、$a=2\cos\theta$（2.8） |
| 小さいが 0 でない整数の組合せ | $e$ の近似（2.9） |

これらの道具の多くに「使ってよい定理」が添えられていたことに注意しよう。STEP では、単調収束定理（monotone convergence theorem）が与えられたり、極限が存在すると仮定するよう指示されたりすることが多い。大学では、それらの定理を実数の公理（axioms）から証明することになり、議論がひそかに極限の存在を仮定しているときには、自分でそれに気づくことが求められる。解答を読むときには、**正確にはどこで極限をとったのか、そしてそれは正当化されていたか**と問う習慣をつけるとよい。

### この先へ

この章の考え方は、本書の残りの部分全体に通じている。

- 不動点（fixed point）とくもの巣図（cobweb diagram）は Section 8.7 で再び登場し、そこではカオス的な写像が厳密な解をもつことがわかる。
- 調和数（harmonic numbers）$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ は、確率では Section 9.11 に、力学では Section 11.12 に現れる。
- 確率から生じる、極限の中に $\pi$ が現れるもう一つの例は Section 12.23 にある。
- 極限に対する慎重な態度は第 3 章のテーマであり、その章は Section 3.1、すなわち正しく見えるが実は誤っている議論から始まる。

**大学に入る前にさらに先へ進みたいなら**

- **Lara Alcock, *How to Think About Analysis***：大学 1 年生の解析学（analysis）がどのようなものか、そしてどう向き合えばよいかを説く。

- **David Bressoud, *A Radical Approach to Real Analysis***：数学者に慎重さを強いた難問から出発し、歴史を通して解析学を教える。
- **Tom Körner, *Calculus for the Ambitious***（Cambridge University Press）：ケンブリッジの解析学者が、まさに本書の読者のような人のために書いた本。
- **Julian Havil, *Gamma*** と **William Dunham, *Euler: The Master of Us All***：この章に登場した多くの級数の背後にある物語。

ゼノンは、無限があるために運動は不可能だと考えた。数学者たちが彼に答えるまでには二千年を要し、その答えは、これまでに見いだされた中で最も強力な考え方の一つとなった。終わることのない過程について、厳密な命題を述べる方法である。あなたは今、その言葉の最初のいくつかの単語を知っている。それを流暢に話せるようになる場所が、解析学なのである。

# 「次の一歩」の解答

これらは完全な解答ではなく、簡潔な答えとヒントである。結果と鍵となるステップを示してあるので、自分の答えを確かめるのに使ってほしい。答えを見る前に、各問題にしっかり取り組むこと。

## 2.1 「いずれは」とは何を意味するか

1. $(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \cdots$ の項はすべて非負であるから、$(1+x)^n \geq 1+nx > nx$ である。$y = 1+x$ とおくと、$n > K/(y-1)$ ならば $y^n > n(y-1) > K$ となる。次の項を用いると $y^n > \binom{n}{2}(y-1)^2$ であるから、$n > 1 + 2K/(y-1)^2$ ならば $y^n/n > \frac{1}{2}(n-1)(y-1)^2 > K$ となる。

2. $n \geq m_1$ で $s_n \leq t_n$ が成り立ち、$n \geq m_2$ で $t_n \leq s_n$ が成り立つならば、$n \geq \max(m_1, m_2)$ で $s_n = t_n$ である。

3. たとえば、偶数 $n$ に対して $s_n = n + 0.6$、奇数 $n$ に対して $s_n = n$ とし、奇数 $n$ に対して $t_n = n + 0.6$、偶数 $n$ に対して $t_n = n$ とすればよい。どちらも増加し、それぞれが他方を無限回上回る。

4. $n \geq 4$ のとき $2^n \leq n!$ である（帰納法（induction）による：$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \leq (n+1)\,n!$）。$n^{10} \leq 2^n$ については、2 から 58 までのすべての $n$ で不等式は成り立たず、$n \geq 59$ のすべてで成り立つ。よって最小の $m$ は 59 である。

## 2.2 極限としての黄金比

1. 帰納法による：$u_1 = 1 = F_2/F_1$ であり、$u_n = F_{n+1}/F_n$ ならば $u_{n+1} = 1 + F_n/F_{n+1} = F_{n+2}/F_{n+1}$ である。

2. $\varphi - 1 = 1/\varphi$ であるから、$u_{n+1} - \varphi = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\varphi} = -\frac{u_n - \varphi}{\varphi u_n}$ である。$u_n \geq 1$ より $|u_{n+1} - \varphi| \leq |u_n - \varphi|/\varphi$ であり、さらに $|u_1 - \varphi| < 1$ であるから、$|u_n - \varphi| \leq \varphi^{-(n-1)}$ となる。

3. $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ は $\psi^2 = \psi + 1$ を満たすので、$1 + 1/\psi = \psi$ である。逆向きにたどると $u_{n-1} = \frac{1}{u_n - 1}$ であり、0 から始めると $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, -\frac{5}{8}, \ldots$ が得られる。すなわち、ある $k \geq 1$ に対して $u_1 = -F_{k-1}/F_k$ である。これらの値は $\psi$ に近づく。

4. 不動点（fixed point）は $v = 1 + \frac{1}{1+v}$、すなわち $v^2 = 2$ を満たす。誤差には毎回

$-\frac{1}{(1+v_n)(1+\sqrt{2})}$ が掛かり、その大きさは高々 $\frac{1}{2(1+\sqrt{2})}$ であるから、$v_n \to \sqrt{2}$ である。また、$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\cdots}}$ である。

## 2.3 発散する級数と、収束するその親戚

1. $\ln N + 0.5772 = 10$ より $N \approx 12\,400$ である。100 を超えるにはおよそ $e^{99.4} \approx 1.5 \times 10^{43}$ 項が必要である。

2. $k = 2$ のとき、ブロック $n$ は高々 $2^n \cdot 4^{-n} = 2^{-n}$ であるから、和は高々 $\sum_{n\ge 0} 2^{-n} = 2$ である。$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$ を正確に足し、$r = 4$ 以降のブロックを $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2}$ で上から評価すると、約 1.86 が得られる（真の値は $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.645$ である）。

3. $1/(r \ln r)$ については、$2^n$ から $2^{n+1} - 1$ までのブロックは少なくとも $\frac{2^n}{2^{n+1}(n+1)\ln 2} = \frac{1}{2(n+1)\ln 2}$ であり、これらの和は調和級数（harmonic series）と同様に振る舞うので発散（divergence）する。$1/(r(\ln r)^2)$ については、ブロックは高々 $\frac{1}{n^2(\ln 2)^2}$ であり、$\sum \frac{1}{n^2}$ は収束（convergence）する。

4. 使える数字は、最上位の桁が 7 通り、それ以外の各桁が 8 通りであるから、使える $d$ 桁の数は高々 $7 \cdot 8^{d-1}$ 個であり、それぞれ $10^{d-1}$ 以上である。よって和は高々 $\sum_{d\ge 1} 7(0.8)^{d-1} = \frac{7}{1-0.8} = 35$ である。

## 2.4 $\pi^2/6$

1. 値 $\tan^2 = 1/\cot^2$ は係数を逆順にした多項式（reversed polynomial）$\sum_j (-1)^j \binom{2n+1}{2j+1} y^j$ の根であり、その根の和は $\binom{2n+1}{2n-1} = n(2n+1)$ である。さらに $\operatorname{cosec}^2 = 1 + \cot^2$ より $n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}$ が得られる。

2. 偶数番目の項の和は $\frac{1}{4}\sum \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{24}$ であるから、奇数番目の項の和は $\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$ である。

3. 根について $e_1 = \frac{n(2n-1)}{3}$、$e_2 = \binom{2n+1}{5}/\binom{2n+1}{1}$ であり、$\sum \cot^4 = e_1^2 - 2e_2 = \frac{n(2n-1)(4n^2+10n-9)}{45}$ が得られる。$\cot^4\theta < \theta^{-4} < (1+\cot^2\theta)^2$ ではさみうち（squeezing）をして $n \to \infty$ とすると、$\frac{\pi^4}{90}$ が得られる。

4. 下からの評価により $\sum_{m\le n} \frac{1}{m^2} > \frac{\pi^2 n(2n-1)}{3(2n+1)^2}$ であるから、誤差は $\frac{\pi^2(6n+1)}{6(2n+1)^2} < \frac{\pi^2}{4n}$ より小さい。これにより $n \ge 2468$ で精度 0.001 が保証される。実際には $n \approx 1000$ で十分である。

### 2.5 ヴィエトの無限積

1. $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ を繰り返し用いると、積は次々に打ち消し合う（telescopes）。$n \to \infty$ とし（このとき $2^n \sin(\alpha/2^n) \to \alpha$）、$\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ と $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta}$ を用いて $\alpha = \frac{\pi}{2}$ とおけばよい。

2. $\frac{\sin(\pi/3)}{\pi/3} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{24}\cdots$ であり、$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$、$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ である。

3. 8 個の因子で 3.14157 が得られ、四捨五入すると 3.1416 となる。$n$ 個の因子を掛けた後の誤差はおよそ $\frac{\pi^3}{6\cdot 4^{n+1}}$ である。省かれた因子が $\cos\frac{\pi}{2^{j+1}} \approx 1 - \frac{\pi^2}{2\cdot 4^{j+1}}$ だからである。各因子は誤差をおよそ 4 で割り、$\log_{10} 4 \approx 0.6$ である。

4. $x = \ln a$ とすると、同じ議論により

$$\frac{a-1}{\ln a} = \prod_{j\geq 1} \frac{1 + a^{1/2^j}}{2},$$

が得られるので、$\frac{1}{\ln 3} = \frac{1}{2}\prod_{j\geq 1}\frac{1+3^{1/2^j}}{2}$ である。七つの因子で 0.906 が得られ、四捨五入すると 0.91 となる（真の値は 0.9102 である）。この場合、因子は $1 + \frac{\ln 3}{2^{j+1}}$ のように 1 に近づくので、新しい因子は誤差を半分にするだけである（約 0.3 桁）。一方、ヴィエト（Viète）の因子は $1 - \frac{\pi^2}{2\cdot 4^{j+1}}$ のように 1 に近づき、誤差を四分の一にする。

### 2.6 算術幾何平均

1. $x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n})^2 = \frac{(x_n - y_n)^2}{2(\sqrt{x_n}+\sqrt{y_n})^2}$ であり、$(\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n})^2 \geq 4y_n \geq 4y_0$ である。

2. $M(2,1) = 1.456791$ である。三回のステップの後には、$x_3$ と $y_3$ はすでに小数第七位まで一致する。

3. 反復の各ステップで値は $\lambda$ 倍されるので、$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda M(x,y)$ である。積分において $x = \lambda u$ と置換すると $\mathrm{I}(\lambda p, \lambda q) = \lambda^{-1}\mathrm{I}(p,q)$ が得られる。$\mathrm{I} = \frac{\pi}{2M}$ の両辺はともに $\lambda^{-1}$ 倍される。

4. $M(1, \cos 30^\circ) \approx 0.9318$ であるから、周期（period）は 1.073 倍に長くなる。すなわち約 7.32% 長くなる。

### 2.7 6 桁か、600 桁か

1. $(p^2+2q^2)^2 - 2(2pq)^2 = (p^2-2q^2)^2 = 1$ である。また、$577^2 - 2\times 408^2 = 332\,929 - 332\,928 = 1$ である。

2. $y_{n+1} = \frac{2y_n^3+2}{3y_n^2}$ であり、$y_{n+1} - \alpha = \frac{2y^3-3\alpha y^2+\alpha^3}{3y^2} = \frac{(y-\alpha)^2(2y+\alpha)}{3y^2}$ である。$y > \alpha$ ならば $\frac{2y+\alpha}{3y^2} < \frac{3y}{3y^2} = \frac{1}{y} < \frac{1}{\alpha}$ である。

3. $y - \frac{1/y-a}{-1/y^2} = y + y - ay^2 = y(2-ay)$ であり、$1 - ay(2-ay) = (1-ay)^2$ である。

4. $y - \frac{y^{1/3}}{\frac{1}{3}y^{-2/3}} = y - 3y = -2y$ である。誤差の公式が成り立つには、根の近くで $f'$ が零でなく、$f''$ が有界であることが必要である。ここでは $f'$ は 0 で無限大となる。

## 2.8 2 乗して 2 を引く

1. $(2\cos u)^2 - 2 = 2\cos 2u$ であるから、帰納法により $x_n = 2\cos(2^{n-1}\theta)$ である。$x_3 = a$ となるには $4\theta \equiv \pm\theta$、すなわち $3\theta$ または $5\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$ が必要である。$x_2 = a$ となる場合（不動点 $a = 2$ と $a = -1$）は除外するので、$\theta = \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$ が残り、$a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ または $a = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ となる。これらは 2-サイクルをなす二点である。

2. $M_5$ に対しては、数列は 4、14、$194 \equiv 8$、$62 \equiv 0$ となり、素数（prime）である。$M_{11}$ に対しては 4、14、194、788、701、119、1877、240、282、$1736 \neq 0$ となり、合成数（composite）である。実際、$2047 = 23 \times 89$ である。

3. $A = t - \frac{1}{t} = \frac{3}{2}$ より $t = 2$、$a = \frac{5}{2}$ である。このとき $x_2 = \frac{17}{4}$、$y_1 = \frac{Ax_1}{x_2} = \frac{15}{17}$ であり、$\frac{\sqrt{x_2^2-4}}{x_2} = \frac{15/4}{17/4} = \frac{15}{17}$ である。

4. $x_k = t^{2^{k-1}} + t^{-2^{k-1}}$ であり、$x_1 \cdots x_n$ に $t - t^{-1}$ を掛けると次々に打ち消し合って $t^{2^n} - t^{-2^n}$ となる。和は $(t-t^{-1})\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{t^{2^n}-1} - \frac{1}{t^{2^{n+1}}-1}\right) = \frac{t-t^{-1}}{t^2-1} = \frac{1}{t}$ となる。$a = 3$ のとき $t = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$、$\frac{1}{t} \approx 0.3820$ であり、級数 $\frac{1}{3} + \frac{1}{21} + \frac{1}{987} + \cdots$ もこれと一致する。

## 2.9 e に迫る分数

1. $T_0 = e - 1$、$T_1 = 3 - e$、$T_2 = 7e - 19$、$T_3 = 193 - 71e$、$T_4 = 1001e - 2721$ であり、これから $\frac{19}{7}$、$\frac{193}{71}$、$\frac{2721}{1001}$ が得られる。$b_n = b_{n-2} - 2(2n-1)b_{n-1}$ であり、（帰納的に）$b_{n-1}$ は $b_{n-2}$ と逆の符号をもつから、$b_n$ は $b_{n-2}$ と同じ符号をもつ。

2. $t(1-t) \leq \frac{1}{4}$ であるから $T_n < \frac{e}{4^n n!}$ である。$-a_n/b_n$ の誤差は $T_n/|b_n|$ であり、今度は $4^n$ 倍改善される。

3. $e = \frac{p}{q}$ ならば、$qT_n = qa_n + pb_n$ は整数である。$T_n > 0$ よりこれは**正の**整数であり、したがって 1 以上である。しかし $n$ が大きいとき $qT_n < \frac{qe}{n!} < 1$ である。

4. 部分積分（integration by parts）を二回行うと（境界項は消える）、$U_n = \frac{1}{4}\left(U_{n-2} - 2(2n-1)U_{n-1}\right)$ となり、$U_0 = \frac{e^2-1}{2}$、$U_1 = \frac{1}{2}$ である。したがって整数 $A_n$、$B_n$ を

用いて $2^{2n+1}U_n = A_n + B_n e^2$ と表され、一方で $0 < U_n < \frac{e^2}{4^n n!}$ である。$e^2 = \frac{p}{q}$ ならば、$q2^{2n+1}U_n$ は $\frac{2qe^2}{n!}$ より小さい正の整数となるが、$n$ が大きいときこれは不可能である。よってこの議論により、$e^2$ が無理数（irrational）であることが確かに示される。

章

# 3

# 関数・不等式・厳密さ

何かが正しいと知っていることと、なぜ正しいのかを知っていることは同じではない。その違いにこそ数学は宿っている。

**この章の内容**


| | | |
|---|---|---|
| **3.1** | 誤りを見抜け | STEP I 1991 |
| **3.2** | 相加・相乗平均を逆向きに | STEP II 1993 |
| **3.3** | 凸性の威力 | STEP II 2007 |
| **3.4** | 不等式を証明する面積 | STEP III 2011 |
| **3.5** | $\pi^e$ か $e^\pi$ か？ | STEP II 2013 |
| **3.6** | 傾きの上界 | STEP I 1988 |
| **3.7** | $\pi^2 \leq 10$ | STEP II 2014 |
| **3.8** | 加法定理から関数を決める | STEP III 2019 |
| **3.9** | 新しい関数を発明する | STEP II 2021 |
| **A** | 演習問題の答え | p. 259 |

# 正しさを確かめる

> 数学は理解するものではない。ただ慣れるものである。
>
> — ジョン・フォン・ノイマン（John von Neumann）

1 = 2 の「証明」を一つ示そう。$a = b$ とする。このとき $a^2 = ab$ であるから $a^2 - b^2 = ab - b^2$ となり、これを因数分解すると $(a+b)(a-b) = b(a-b)$ である。両辺の $a-b$ を約分すると $a+b = b$ となり、$a = b$ であるからこれは $2b = b$ を意味し、したがって $2 = 1$ である。

おそらく問題点には気づいたであろう。$a = b$ であるから、「$a-b$ を約分する」ことは 0 で割ることにほかならない。しかし、どの段階もいかにもっともらしく見えたか、そして誤りがいかにたやすくありふれた操作の中に隠れていたかに注意してほしい。実際の数学における実際の誤りがこれほど明白であることはまれであり、史上最も偉大な数学者たちでさえそうした誤りに欺かれてきた。本章のテーマは、そうした誤りを見抜くための思考の習慣である。すなわち、正確な定義、定理の慎重な使用、そしてあまりに簡単すぎるように見える論証に対する健全な疑いである。

### なぜ厳密さが重要なのか

学校での数学は、主として答えを求めることである。大学での数学は、主として**自分の答えが正しいと知ること**、そしてそれを他人に納得させられることである。この転換は学校の数学と大学の数学のあいだにある最大の変化であり、戸惑いを覚えることもあるだろう。「明らかに」成り立つことを証明するのに、なぜ 1 ページも費やすのか、と。

その答えは、「明らか」というものが当てにならないからである。解析学（analysis）の歴史は、明らかに見えたのに誤っていた結果であふれている。たとえば、連続関数（continuous function）は、孤立した数点を除けば微分可能（differentiable）でなければならないという主張（アンペール（André-Marie Ampère）は 1806 年にその「証明」を発表したが、1872 年にワイエルシュトラス（Weierstrass）は**いたるところで**微分可能でない連続関数を発見した）、連続関数の収束する和は連続であるという主張（コーシー（Cauchy）はこれを信じていたが、アーベル（Abel）が反例（counterexample）を見つけた）、収束する級数（convergent series）の項は和を変えずに並べ替えることができるという主張（一般にはできない）などである。厳密さ（rigour）は杓子定規な

細かさではない。正しいものと、もっともらしいだけのものとを見分ける唯一の確かな方法なのである。

### 不等式：解析学の道具

本章の第二のテーマは**不等式**（inequality）である。学校の数学では、ほとんどの結果は等式、すなわち「これはあれに等しい」という形をしている。解析学では、ほとんどの結果は不等式、すなわち「これは高々あれである」という形をしている。数列が収束することを証明するには、誤差がどんな許容値よりも**小さい**ことを示す。積分が存在することを証明するには、ある和が**有界**であることを示す。近似がどれほど良いかを評価するには、誤差を上から押さえる。プロの解析学者は等式よりもはるかに多くの時間を不等式の証明に費やしており、本章で出会う古典的な不等式（AM–GM、イェンセン（Jensen）、ヤング（Young）、ヘルダー（Hölder）、コーシー–シュワルツ（Cauchy–Schwarz））は、まさに商売道具なのである。

これらの不等式は、それ自体としても目を見張るものである。関数に関するたった一つの不等式が、うまく選んだ例と組み合わせることで $\pi^2 \leq 10$ を証明する（Section 3.7）。対数関数のグラフの形に関する事実から、$\pi^e$ と $e^\pi$ のどちらが大きいかが決着する（Section 3.5）。ある化学者が抱いた測定誤差に関する疑問が、数学で最も重要な多項式のいくつかへとつながっていく（Section 3.6）。

### 大学で出会うもの

厳密さは、大学1年次の**解析学**のテーマであり、また**数と集合**（Numbers and Sets）や**基礎**（Foundations）などと呼ばれることの多い、証明を正確に書く方法を学ぶ講義のテーマでもある。そこでは連続性と微分可能性の形式的な定義に出会い、また正確な仮定をもつ定理（中間値の定理（intermediate value theorem）、平均値の定理（mean value theorem）、最大値・最小値の定理（extreme value theorem））に出会う。これらの定理では仮定が本当に重要である。さらに進んだ講義では、本章の不等式がそれぞれ一つの分野へと発展していく。**関数解析**（functional analysis）は、Section 3.4 や Section 3.7 に出てくるような積分によって測られる関数の空間を研究する。**凸解析**（convex analysis）や**最適化**（optimisation）は Section 3.3 から生まれる。**近似理論**（approximation theory）は Section 3.6 から生まれる。そして Section 3.9 に出てくるような**特殊関数**（special functions）は、応用数学や物理学のいたるところに現れる。

## 本章を貫く問い

### 三つの大きな問い

1. **論証が正しいことをどうやって知るのか？**もっともらしい論証が破綻するよくあるパターンにはどのようなものがあり、それをどう確かめればよいのか。
2. **不等式はどうやって証明するのか？**古典的な不等式はどこから来るのか、そしてどれを使うべきかをどう選ぶのか。
3. **関数とは、本当のところ何なのか？**関数を、式によってではなく、その関数がもつ性質によって定義することはできるのか。また、既存の関数では足りないとき、新しい関数を作り出すことはできるのか。

本章はまず誤りを見つけることから始まり（Section 3.1）、続いて古典的な不等式を、それぞれ異なる角度から扱っていく。風変わりな帰納法（induction）、凸性（convexity）、面積、グラフの形、多項式補間（polynomial interpolation）、そしてテスト関数（test function）である。最後に、性質によって定義される関数を扱う二つの節で締めくくる。加法定理（addition law）から定まる $e^x$ と $\tanh x$、そして逆関数として定義されるまったく新しい関数である。

## 本章に登場する考え方

| § | 主題 | 考え方 |
|---|---|---|
| 3.1 | もっともらしい誤った論証 | 計算・論理・隠れた仮定の点検 |
| 3.2 | AM–GM | 前進後退帰納法 |
| 3.3 | イェンセンの不等式 | 凹（concave）な曲線は弦より上にある |
| 3.4 | ヤングの不等式 | 図の中で面積を比べる |
| 3.5 | $\pi^e$ か $e^\pi$ か？ | 一つの関数に帰着させ、そのグラフを調べる |
| 3.6 | 2 次関数の傾き | 未知のものを既知のもので表す |
| 3.7 | $\pi^2 \leq 10$ | 一般的な不等式にテスト関数を代入する |
| 3.8 | $e^x$ と $\tanh x$ | 関数方程式（functional equation）によって定義される関数 |
| 3.9 | W 関数 | 逆関数として関数を作り出す |

## 本章の読み方

これまでと同様、解答を読む前にまず各問題に挑戦してほしい。本章ではさらにもう一つのことを試してほしい。各解答を読んだあと、振り返って、不注意な学生が間違

えそうな一つか二つの段階を探すのである。隠れた仮定はどこに紛れ込みうるか。どの定理のどの仮定を確認する必要があるか。このように批判的かつ能動的に読むことこそ、大学に入る前に身につけられる最も有益な習慣である。

# 3.1 誤りを見抜け

**問題**

**STEP I 1991、問 6**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/91-s1-q6`

## 導入

試験問題の多くは、論証を組み立てることを求める。この問題は逆に、二つの論証を示し、それを分解して検討することを求めている。これはまったく別の技能であり、大学で最もよく使う技能でもある。自分の答案を見直すとき、本に書かれた証明を読んでそれを信じてよいか判断するとき、友人の答案を採点するとき、論文を査読するとき、いずれもこの技能が必要になる。

ここに挙げた論証は、学ぶところの多い形で誤っている。どの段階も、これまで何度も見てきたものと**同じように見える**。計算の誤りを含む段階もあるが、より深刻なのは**論理**の誤り、すなわち計算が正しくても結論が導かれないという誤りである。こうした誤りこそが専門的な数学の場にまで生き残るものであり、それを見抜くことがこの章の主題である。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 「各段階を批判せよ」と言われたとき、各段階で何を確かめればよいだろうか。取りかかる前に一覧を作ってみよう。

よいチェックリストには少なくとも三つの問いが含まれる。**計算は正しいか。この段階はそれまでの段階から導かれるか。隠れた仮定（関数が連続（*continuous*）である、極限（*limit*）が存在する、停留点（*stationary point*）は極大か極小でなければならない、など）はないか。**問題はさらに、結論がそれでも正しい可能性があるかどうかも問うている。誤った論証が正しい結論をもつこともあるので、これは別に確かめる必要が

ある。

## 順を追って解く

### 段階 1　導関数は正しいか

> **考えてみよう**　商の微分法（quotient rule）を用いて g を微分せよ。$g'(x)=0$ となるのはどこか。$x=1$ と $x=-1$ を直接確かめよ。

商の微分法により、

$$g'(x)=\frac{6x^2(x^4+4)-(2x^3+3)\cdot 4x^3}{(x^4+4)^2}=\frac{-2x^6-12x^3+24x^2}{(x^4+4)^2}=\frac{-2x^2(x^4+6x-12)}{(x^4+4)^2}.$$

よって $g'(x)=0$ となるのは $x=0$ または $x^4+6x-12=0$ のときである。$x=1$ では $x^4+6x-12=-5$、$x=-1$ では $-17$ である。どちらも停留点ではない。最初の主張は**誤り**である。

4 次式（quartic）$x^4+6x-12$ は $x=0$ で $-12$ であり、両方向で $+\infty$ に発散するので、正の根と負の根を（少なくとも）一つずつもつ。第 2 次導関数（second derivative）$12x^2$ は非負なのでこの関数は凸（convex）であり、零を横切るのは高々 2 回である。したがって実数解はちょうど二つである。数値的には $x\approx 1.386$ と $x\approx -2.247$ である。

### 段階 2　値は正しいか

$g(0)=\frac{3}{4}$ は正しく、$g(1)=\frac{5}{5}=1$ も正しい。しかし $g(-1)=\frac{-2+3}{1+4}=\frac{1}{5}$ であり、1 ではない。論証自身の枠組みの中でさえ計算の誤りがある。g を偶関数（even function）と思い込んでいたようである。

### 段階 3　値を比べればどれが極大かわかるか

> **考えてみよう**　ある関数がちょうど二つの停留点をもち、その値が $\frac{3}{4}$ と 1 であるとする。このとき、前者が極小（local minimum）で後者が極大（local maximum）であるといえるだろうか。

いえない。停留点の**種類**は局所的な性質であり、その点の近くで関数がどう振る舞うかによって決まる。別の点での値と比べて大きいか小さいかで決まるものではない。極大値が極小値より小さい関数（$x+2\sin x$ を考えよ）もあれば、極大でも極小でもない停留点もある。ここでは、$x=0$ の近くで因数 $x^4+6x-12$ は $-12$ に近いので、

$$g'(x)=\frac{-2x^2(x^4+6x-12)}{(x^4+4)^2}>0 \qquad \text{十分小さい} x\neq 0.$$

導関数（derivative）は 0 の両側で正である。つまり $x = 0$ は極小ではなく、停留点である**変曲点**（point of inflection）である。

### 段階 4 停留値は関数の値の範囲を限るか

> **手を止めて、やってみよう** 停留点が正しく求められていたとしても、g のすべての値が最小の停留値と最大の停留値の間にあると結論できないのはなぜか。$g(x) < \frac{3}{4}$ となる $x$ の値を一つ見つけよ。

停留点は**局所的な**振る舞いしか表さない。大域的な振る舞いは、定義域の端、ここでは $x \to \pm\infty$ のときに何が起こるかにも依存する。$x \to \pm\infty$ のとき $g(x) \to 0$ であり、また $2x^3 + 3 < 0$ すなわち $x < -\sqrt[3]{3/2} \approx -1.14$ のときは常に $g(x) < 0$ であるから、この関数は負の値をとる。たとえば $g(-2) = \frac{-13}{20}$ である。したがって結論 $\frac{3}{4} \le g(x) \le 1$ は**誤り**である（図 3.1.1）。

正しくは次のとおりである。g は増加して $x \approx 1.386$ で約 1.083 の最大値をとり、その後 0 に向かって減少する。左側では、0 から減少して $x \approx -2.247$ で約 $-0.668$ の最小値をとり、その後増加して $x = 0$（ここで接線が水平な変曲点をもつ）を通り、最大値まで増加する。よってすべての $x$ について $-0.668 \lesssim g(x) \lesssim 1.083$ である。

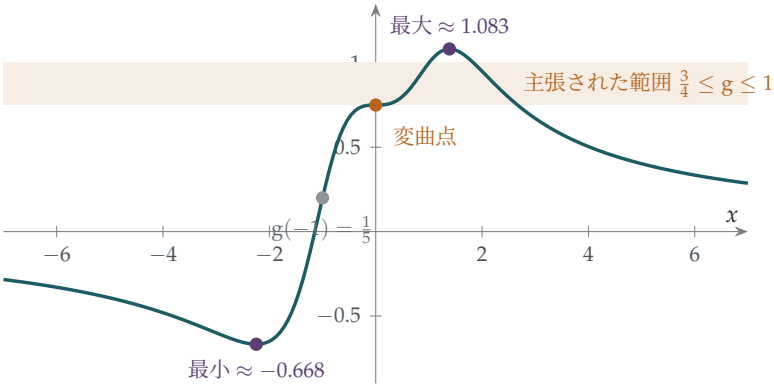



**図 3.1.1** $g(x) = \frac{2x^3+3}{x^4+4}$ の正しいグラフ。論証が主張する範囲（琥珀色の帯）はあらゆる点で誤っている。$x = -1$ は停留点ではなく、$g(-1) = \frac{1}{5}$ である。$x = 0$ は極小ではなく変曲点である。そして関数は帯から大きくはみ出し、1 を超える最大値と 0 を下回る最小値をとる。

### 段階 5 積分

> **考えてみよう** $-3(1-x)^{-4}$ を微分せよ。$(1-x)^{-3}$ になるだろうか。

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-3(1-x)^{-4}\right] = -3\cdot(-4)(1-x)^{-5}\cdot(-1) = -12(1-x)^{-5}$ である。指数も係数も誤っている。正しい原始関数（antiderivative）は

$$\int (1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(1-x)^{-2} + C,$$

であり、微分すれば確かめられる。

**考えてみよう**　正しい原始関数を用いると、$\left[\tfrac{1}{2}(1-x)^{-2}\right]_{-1}^{3} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} = 0$ となる。結局、答えは正しかったのだろうか。本当にそうだろうか。

正しくない。微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ は、被積分関数が区間 $[a,b]$ 全体で連続であることを必要とする。ここで $(1-x)^{-3}$ は $[-1,3]$ の内部にある $x=1$ で定義されず、$x=1$ の近くでは非常に大きな値をとる。この積分は**広義積分**（improper integral）として扱い、問題の点で分割しなければならない。

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\tfrac{1}{2}(1-x)^{-2}\right]_{-1}^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{1}{8}\right) = +\infty.$$

$-1$ から 1 までの積分は無限大であり（1 から 3 までの積分は $-\infty$ である）、したがって $\int_{-1}^{3}(1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x$ は**存在しない**。結論「$=0$」が誤りであるのは、真の値が別の値だからではなく、値そのものが存在しないからである。 ■

## 振り返り

- **三種類の誤り。**計算の誤り（導関数、g(−1)、原始関数）、論理の誤り（値を比べて停留点を分類すること、停留値を大域的な上界・下界とみなすこと）、そして隠れた仮定（微分積分学の基本定理における連続性）。
- **答えは正しく、理由は誤り。**小問 (ii) で原始関数を正しく直すと答え 0 が再び得られるが、論証はやはり成り立たない。答えが正しく見えても、推論が健全である証拠にはならない。
- **局所と大域。**導関数からわかるのは、ある点の近くでの振る舞いである。大域的な結論を得るには、定義域の端や関数がおかしな振る舞いをする点で何が起こるかなど、さらに多くのことが必要である。

## 背後にある数学

### 偉大な数学者が誤ったとき

まさにこの種の誤りを、解析学の創始者たちも犯していた。1821 年の『*Cours d'analyse*』（解析教程）で、コーシー（Augustin-Louis Cauchy）は連続関数の収束する和は常に連続であると「証明」した。1826 年、アーベル（Niels Henrik Abel）は反例を指摘した。フーリエ級数（Fourier series）

$$\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \cdots$$

はすべての $x$ で収束し、各項は連続であるが、その和は $x = \pm\pi$ で跳ぶ（$-\pi < x < \pi$ では $x/2$ に等しい）。コーシーの論証のどこが誤っていたのかを正確に突き止めるには数十年を要し、その結果として生まれたのが**一様収束**（uniform convergence）の概念である。これは今ではすべての解析学の学生が学ぶ。隠れた仮定、とりわけ二つの極限の順序を入れ替えることに関わる仮定は、解析学全体で最もよくある誤りの原因である。

### 仮定をもつ定理

この問題に含まれる誤りのうち二つは、定理の仮定を無視したことから生じている。

- **最大値・最小値の定理**（extreme value theorem）は、有界閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数は最大値と最小値をとることを述べている。それを求めるには、区間の端点、停留点、そして関数が微分可能でない点を調べる。$[-1, 1]$ 上の $|x|$ の最小値は 0 でとられるが、これは端点でも停留点でもない。f が区間の内部のいたるところで微分可能であれば、内部でとる最大値・最小値は停留点でとられなければならない。実数全体では調べるべき端点がなく、関数が最大値をもたないこともある。その代わりに $x \to \pm\infty$ での振る舞いを調べなければならない。
- **微分積分学の基本定理**は、被積分関数が $[a, b]$ 上で連続であることを必要とする。連続でない場合、積分はそれでも存在することもあれば（$\int_0^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x$ を試してみよ）、存在しないこともあり（ここでのように）、極限を用いて確かめなければならない。

大学で出会う定理には、すべて仮定の正確な一覧がついている。定理を使う前に毎回それを確かめることも、訓練の一部である。

### 発散する積分の値

小問 (ii) には興味深い補足がある。区間 $[-1,3]$ は問題の点 $x=1$ に関して対称であり、$(1-x)^{-3}$ はその点に関して「奇関数」的である。対称な隙間 $(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$ を取り除いて $\varepsilon\to 0$ とすると、二つの無限大の部分が打ち消し合い、確かに 0 が得られる。これを**コーシーの主値**（Cauchy principal value）といい、物理学や複素解析で実際に役立つものである。しかしそれは意図的に選ばれた**別の定義**であり、偶然そこにたどり着いた論証は何も証明していない。

## 思考のスキル

**論証を批判的に読む**

各段階について三つのことを確かめよ。計算は正しいか、その段階は論理的に導かれるか、そして何が言明されないまま仮定されているか。

そのうえで結論を別に確かめよ。誤った論証が正しい結論をもつこともあり、「正しい」答えが成り立たない論証から得られることもある。同じ厳しさで自分の答案も検討せよ。最も信じてしまいやすい論証は、自分自身の論証なのである。

## 次の一歩

1. **嘘をつく置換。** STEP I 1987、問 8（`step.maths.org/questions/87-s1-q8`）に挑戦せよ。置換積分によって、正の積分が負の積分に等しいことが示されるように見える。論証がどこで破綻するかを正確に突き止め、そのうえで両方の積分を正しく計算せよ。

2. **真か偽か。** STEP I 1998、問 3（`step.maths.org/questions/98-s1-q3`）に挑戦せよ。証明するか反証するかを求める四つの主張がある。それぞれについて、書き始める前にどちらになると予想するかを決めておこう。

3. **すべての馬は同じ色である。** 帰納法（induction）によるこの「証明」の誤りを見つけよ。任意の 1 頭の馬はそれ自身と同じ色である。$n+1$ 頭の馬が与えられたとき、帰納法の仮定により最初の $n$ 頭は同じ色であり、最後の $n$ 頭も同じ色である。二つの群は重なり合っているので、$n+1$ 頭すべてが同じ色である。

4 **存在する積分。**被積分関数が 0 で定義されていないにもかかわらず $\int_{-1}^{1} |x|^{-1/2}\,\mathrm{d}x$ が存在することを示し、その値を求めよ。

## さらに学ぶために

- **E. A. Maxwell, *Fallacies in Mathematics***（Cambridge University Press）。もっともらしく見える誤った論証を分野別にまとめた古典的な本で、シックスフォーム（sixth form、英国の大学進学準備課程）の生徒向けに書かれている。
- **Bernard Gelbaum & John Olmsted, *Counterexamples in Analysis***（Dover）。定理の仮定がなぜ重要なのかを示す数百の例を収めている。解析学の講義を受け始めたら、ところどころ拾い読みするとよい。
- **Imre Lakatos, *Proofs and Refutations***（Cambridge University Press）。数学者が証明の誤りをどのように見つけ、修正するのかを描いた見事な対話篇。

# 3.2 相加・相乗平均を逆向きに

**問題**

**STEP II 1993、問 8**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/93-s2-q8`

## 導入

相加平均と相乗平均の不等式（arithmetic mean–geometric mean inequality、AM–GM）は、おそらく数学で最も役に立つ不等式である。この不等式によれば、正の数に対しては、通常の平均はつねに「積による平均」以上であり、等号はすべての数が等しいときに限って成り立つ。微積分（calculus）を使わずに最適化（optimisation）問題を解くことができ、ほかの不等式の証明にも使われ、解析学のあらゆる分野に現れる。

この問題では、1821 年にコーシー（Augustin-Louis Cauchy）が与えた、奇妙で美しい帰納法（induction）によってこの不等式を証明する。$n$ から $n+1$ へ進むのではなく、2 から 4、8、16 へと跳び、2 の累乗だけを押さえたうえで、**逆向きに下りて**あいだの数を埋めるのである。「帰納法」は教科書で習う形よりもずっと柔軟な考え方であることを思い出させてくれる。

## 取りかかる前に

オンラインのアーカイブにあるこの試験問題には誤植があり、「$b_1 = a_2$」となっている。もちろん正しくは $b_1 = a_1$ である。$b$ たちは $a$ たちに、それらの平均の複製を付け加えて数を増やしたものだ、というのが意図である。

**考えてみよう** $n$ 個から $n+1$ 個へ進むよりも、$2^m$ 個から $2^{m+1}$ 個へ進むほうが易しいのはなぜだろうか。

$2^{m+1}$ 個の数は自然に $2^m$ 個ずつの 2 つの組に分かれるので、それぞれの半分に帰納法の仮定を適用し、2 つの数の場合を使って両者を合わせればよいからである。$n$ から

$n+1$ へ進む場合には、これほど対称的な手がかりは得られない。

## 順を追って解く

### 段階 1　2つの数

$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - a_1a_2 = \frac{a_1^2+2a_1a_2+a_2^2-4a_1a_2}{4} = \frac{(a_1-a_2)^2}{4} \geq 0.$ ■

### 段階 2　倍にする

$m=1$ の場合は段階 1 である。$2^m$ 個の数に対して $(*)$ が成り立つと仮定し、$2^{m+1}$ 個の正の数をとる。

> **考えてみよう**　$2^{m+1}$ 個の数を前半と後半に分け、それぞれの相加平均を $P, Q$ とする。帰納法の仮定はそれぞれの半分について何を述べているか。

それぞれの半分に $(*)$ を適用すると、

$$a_1 \cdots a_{2^m} \leq P^{2^m} \qquad \text{かつ} \qquad a_{2^m+1} \cdots a_{2^{m+1}} \leq Q^{2^m}.$$

これらを掛け合わせると（すべて正である）、$2^{m+1}$ 個の数すべての積は $(PQ)^{2^m}$ 以下である。ここで 2 つの数の場合から $PQ \leq \left(\frac{P+Q}{2}\right)^2$ が得られ、$\frac{P+Q}{2}$ はちょうど $2^{m+1}$ 個の数すべての平均である。したがって

$$a_1 \cdots a_{2^{m+1}} \leq (PQ)^{2^m} \leq \left(\frac{P+Q}{2}\right)^{2^{m+1}} = \left(\frac{a_1+\cdots+a_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}\right)^{2^{m+1}},$$

となり、これは $m+1$ に対する $(*)$ である。帰納法により、項の個数が 2 の累乗であれば AM–GM が成り立つ。 ■

### 段階 3　すき間を埋める

次に任意の $n$ をとり、$2^m > n$ となる $m$ を選ぶ。列 $a_1, \ldots, a_n$ に、その平均 $A$ の複製を $2^m - n$ 個付け加える。

> **考えてみよう**　付け加えたあとの列 $b_1, \ldots, b_{2^m}$ の平均はいくらか。

和は $(a_1+\cdots+a_n) + (2^m-n)A = nA + (2^m-n)A = 2^m A$ なので、平均は $A$ そのものである。平均の複製を付け加えても平均は変わらない。よって $b$ たちに $(*)$ を適用すると

$$a_1 \cdots a_n \cdot A^{2^m-n} \leq A^{2^m}.$$

**手を止めて、やってみよう** 証明を完成させよ。

両辺を $A^{2^m-n}$（これは正である）で割ると $a_1 \cdots a_n \le A^n$ となる。$n$ 乗根をとって、

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \le A = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}. \qquad \blacksquare$$

## 振り返り

- **別の道筋に沿った帰納法。** 段階 2 は $m$ についての帰納法であり、$n = 2, 4, 8, \ldots$ を押さえる。段階 3 は、任意の 2 の累乗から、それより小さい任意の $n$ へ下りる方法である（図 3.2.1）。
- **平均で補う。** 平均を変えずに列を延ばすという技法は覚えておく価値がある。任意の $n$ についての問題を、都合のよい $n$ についての問題に変える方法なのである。
- **等号はいつ成り立つか。** 証明をさかのぼると、等号が成り立つには 2 つの数の場合を使ったすべての箇所で等号が成り立つ必要があり、それはすべての数が等しいときに限られる。

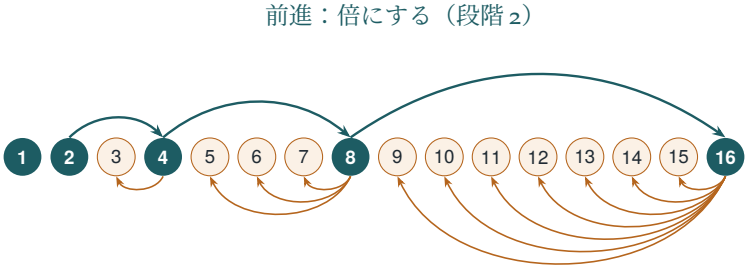



**図 3.2.1** コーシーの前進・後退帰納法。青緑の矢印は、倍にしていくことで $2, 4, 8, 16, \ldots$ 個の数に対する AM–GM を証明する。琥珀色の矢印は、列を次の 2 の累乗まで補うことで、それ以外のすべての $n$ を埋める。

## 背後にある数学

### コーシーの帰納法

コーシーはこの証明を著書 *Cours d'analyse*（『解析教程』、1821 年）で発表した。この本は、第 2 章で論じた解析学の厳密な扱いの出発点となったものである。この手法は

現在**前進・後退帰納法**（forward–backward induction）と呼ばれている。無限個の場合からなる列（ここでは2の累乗）について命題を証明し、次に $n$ の場合から $n-1$ の場合が導かれることを示す。この2つを合わせれば、すべての $n$ に到達する。本節の段階3では $2^m$ から $n$ へ一気に下りたが、1段ずつ下りることもできる。$n-1$ 個の数にその平均の複製を1個付け加えれば、$n$ の場合から $n-1$ の場合が導かれることがわかる。

---

### 1つの不等式の多くの証明

AM–GM には何十通りもの証明があり、それらを比べることは数学のさまざまな流儀を知るよい方法である。

- **凸性による証明。** 対数関数は凹関数（concave function）なので、対数の平均は平均の対数以下である。指数をとればこれが AM–GM であり、Section 3.3 の主題でもある。
- **ポリア（George Pólya）の証明。** $e^{x-1} \geq x$ を使う（$x=1$ における $e^{x-1}$ の接線は曲線の下側にある）。$A$ を平均として、これを各 $a_i/A$ に適用して掛け合わせると、$\prod \frac{a_i}{A} \leq e^{\sum (a_i/A - 1)} = e^0 = 1$ となる。ポリアは、この証明を夢の中で思いついたと語っている。
- **均す方法による証明。** 2つの数が等しくなければ、その両方をそれらの平均で置き換える。相加平均は変わらず、2つの数の場合から積は増える。これを繰り返すと、すべての数が平均へと近づいていく。

### 微積分を使わない最適化

AM–GM を使うと、多くの最適化問題が1行で解ける。表面積が与えられた箱のうち、体積が最大となるのはどれか。周の長さが与えられた長方形のうち、面積が最大となるのはどれか。（正方形である。2つの数の場合から $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ であり、等号は $x=y$ のときに成り立つ。）等号成立条件は最適値がどこにあるかを教えてくれ、不等式はそれが単なる停留点（stationary point）ではなく本当に最適値であることを教えてくれる。Section 3.1 での注意と比べてみよ。

## 思考のスキル

### 柔軟な帰納法

帰納法は $1, 2, 3, \ldots$ と進む必要はない。すべての場合に到達する道筋であれば、どんな道筋に沿って帰納法を行ってもよい。倍にしていく方法、累積帰納法（*strong induction*）、あるいは部分列に沿って前進してから後退してすき間を埋める方法などである。

$n$ から $n+1$ への素直な一歩が難しいときは、どんな一歩なら易しいか、そしてその一歩ですべての場合に到達できるかを考えよ。

## 次の一歩

1 **1段下りる。** $n$ 個の数に対して AM–GM が成り立つならば、$n-1$ 個の数に対しても成り立つことを、平均の複製を 1 個付け加えることで直接示せ。

2 **増加数列。** $n+1$ 個の数 $1+\frac{1}{n}, \ldots, 1+\frac{1}{n}, 1$（$1+\frac{1}{n}$ が $n$ 個）に AM–GM を適用して、$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ を示せ。

3 **最良の箱。** ふたのある直方体の箱の表面積が $S$ である。互いに異なる 3 つの面の面積に AM–GM を用いて、体積が $(S/6)^{3/2}$ 以下であり、等号は立方体のときに成り立つことを示せ。

4 **調和平均。** 数 $1/a_i$ に AM–GM を適用して、調和平均（harmonic mean）$\dfrac{n}{1/a_1 + \cdots + 1/a_n}$ が相乗平均以下であることを示せ。

## さらに学ぶために

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***（Cambridge University Press）。不等式について問題を軸に展開するすばらしい本で、ちょうどこの水準から始まる。第 2 章は AM–GM を扱っている。
- **Hardy, Littlewood & Pólya, *Inequalities***（Cambridge University Press）。20 世紀の偉大な解析学者 3 人による古典的な参考書である。
- **Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies***（Springer）。第 7 章はオリンピックの不等式の問題を大量に集めたものである。

# 3.3 凸性の威力

**問題**

**STEP II 2007、問 7**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/07-s2-q7`

## 導入

Section 3.2 では、巧妙な帰納法（induction）を用いて AM–GM（相加・相乗平均の不等式）を証明した。ここでは、それがはるかに大きな事実の特別な場合として、わずか一行で導かれる。その大きな事実とは**凹性**（concavity）である。凹性とは、丘の頂上のように下向きに曲がった曲線の形のことである。このような曲線についてのただ一つの幾何学的事実、すなわち曲線がその弦（chord）より上にあるという事実が、三角形に関する事実から AM–GM、さらには確率論、情報理論、経済学における不等式に至るまで、驚くほど多様な不等式を証明することがわかる。

大学では、この考え方は**凸性**（convexity）となり、現代数学を貫く大きな統一的テーマの一つとなる。凸最適化（convex optimisation）のように、凸性の上に丸ごと築かれた分野もある。

## 取りかかる前に

? **考えてみよう** $(0, \pi)$ 上の $y = \sin x$ のように、下向きに曲がった曲線を描いてみよ。その上に 2 点をとり、直線で結ぶ。弦は曲線の上にあるか、下にあるか。

下である。凹（concave）な曲線では、どの弦も両端点の間で曲線の下にある。二つの関数値の平均は弦の中点の高さであり、平均における関数値はその中点の真上にある曲線の高さである。したがって「弦は曲線の下にある」ということは、まさに $n = 2$

の場合のイェンセン（Jensen）の不等式である：

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \le f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

$n$ 個の点の場合、点 $(x_k, f(x_k))$ の平均はそれらの重心（centre of mass）であり、これは曲線の下側の領域の内部にあるので、やはり曲線の下にある（図 3.3.1）。

## 順を追って解く

### 段階 1　凹性の確認

$0 < x < \pi$ において $\frac{d^2}{dx^2}\sin x = -\sin x < 0$ であり、$x > 0$ において $\frac{d^2}{dx^2}\ln x = -\frac{1}{x^2} < 0$ である。 ■

### 段階 2　三角形

> **考えてみよう**　どの関数を、どの点に用いるか。またそれらの平均は何か。三角形の角は、その関数が凹である区間に入っているか。

$f(x) = \sin x$ とし、3 点 $A, B, C$ をとる。いずれも 0 と $\pi$ の間に厳密に含まれ、そこで sin は凹である。また、それらの平均は $\frac{A+B+C}{3} = \frac{\pi}{3}$ である。イェンセンの不等式より

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \le \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

よって $\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$ であり、等号が成り立つのはちょうど正三角形（equilateral triangle）のときである。 ■

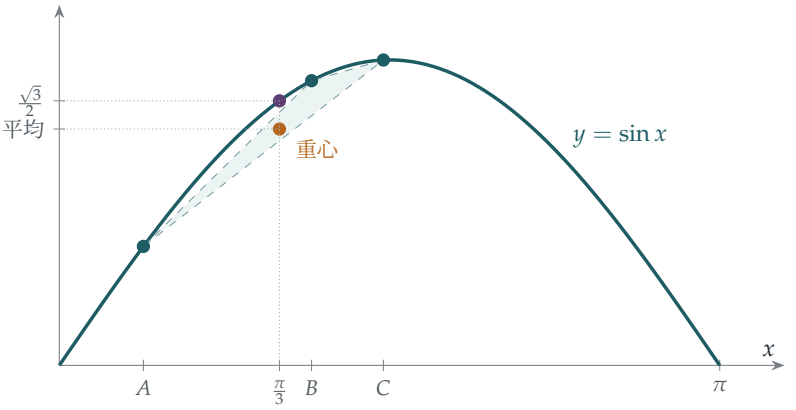



**図 3.3.1**　三角形の三つの角 $A = 0.4$、$B = 1.2$、$C = \pi - 1.6$ に対する、$\sin x$ についてのイェンセンの不等式。曲線上の 3 点の重心（琥珀色）は網掛けの三角形の内部にあり、したがって曲線の下にある。その高さは $\sin A$、$\sin B$、$\sin C$ の平均であり、その真上の曲線の高さは $\sin \frac{\pi}{3}$ である。

### 段階 3　一行で示す AM–GM

**考えてみよう**　AM–GM は積と和を比較するものである。積を和に変える凹関数はどれか。

対数である。$\mathrm{f} = \ln$ と正の数 $t_1, \dots, t_n$ にイェンセンの不等式を適用すると

$$\frac{\ln t_1 + \cdots + \ln t_n}{n} \le \ln\left(\frac{t_1 + \cdots + t_n}{n}\right).$$

左辺は $\ln\left(\sqrt[n]{t_1 \cdots t_n}\right)$ である。ln は増加関数なので両辺から取り除くことができ、これがまさに AM–GM である。等号が成り立つのは、すべての $t_k$ が等しいときに限る。■

### 段階 4　AM–GM を使う

**考えてみよう**　(a) では、左辺は 4 項の和であり、右辺には 3 変数の積が含まれる。いくつの項に AM–GM を適用すべきか。また、16 はなぜ役に立つのか。

4 つの正の数 $x^4$、$y^4$、$z^4$、16 に AM–GM を適用すると

$$\frac{x^4 + y^4 + z^4 + 16}{4} \ge \sqrt[4]{16\, x^4 y^4 z^4} = 2xyz.$$

両辺に 4 を掛けて $x^4 + y^4 + z^4 + 16 \ge 8xyz$ を得る。■

**手を止めて、やってみよう** 次に、$x^5+y^5+z^5-5xyz$ の最小値を求めよ。（ヒント：$x^5y^5z^5$ の5乗根が欲しいので、5つの数が必要である。残りの二つは何にすべきか。）

$x^5, y^5, z^5, 1, 1$ に AM–GM を適用すると

$$\frac{x^5+y^5+z^5+1+1}{5} \geq \sqrt[5]{x^5y^5z^5} = xyz,$$

よって $x^5+y^5+z^5-5xyz \geq -2$ である。等号は $x^5=y^5=z^5=1$、すなわち $x=y=z=1$ のときに成り立ち、このとき式の値は $3-5=-2$ である。したがって最小値は $-2$ である。 ■

等号条件が二重の役割を果たしていることに注意せよ。等号条件によって、この下界が実際に達成されることがわかり、$-2$ が単なる下界ではなく最小値であることが示されるのである。

## 振り返り

- **一つの考え方、多くの不等式。** 凹な曲線についての一つの幾何学的事実から、三角形に関する結果と AM–GM が得られた。必要な計算は二階導関数（second derivative）の確認だけであった。
- **関数と点を選ぶ。** イェンセンの不等式を使うとは、どの関数に、どの点で適用するかを決めることである。積を和に変える対数は、特によく使われる。
- **項を補って合わせる。** (b) では、1 を二つ加えることで AM–GM が問題にうまく合った。これは Section 3.2 で平均を補ったのと同じである。

## 背後にある数学

### 凸関数

大学では、凸（convex）関数（凹を上下逆にしたもの）の標準的な定義は導関数にまったく触れない。f が凸であるとは

$$\mathrm{f}\big(tx_1+(1-t)x_2\big) \leq t\,\mathrm{f}(x_1)+(1-t)\,\mathrm{f}(x_2) \qquad \text{任意の} x_1, x_2 \text{と} 0 \leq t \leq 1,$$

が成り立つことであり、これはまさに弦が曲線より上にあることを述べている。この定義は、$|x|$ のような微分可能（differentiable）でない関数や多変数関数に対しても意味をもつ。デンマークの技術者であり数学者であったヨハン・イェンセン（Johan

Jensen）は、1906 年、自らの名を冠する不等式とともに、凸関数をそれ自体一つの研究対象として確立した。

### いたるところに現れる凸性

凸性は、数学とその応用のいたるところに現れる。

- **確率論。**イェンセンの不等式によれば、凹関数 f と任意の確率変数（random variable）$X$ に対して $\mathrm{E}[\mathrm{f}(X)] \leq \mathrm{f}(\mathrm{E}[X])$ が成り立つ。経済学では、f を凹な「効用（utility）」関数とすると、これによって、人々が £0 か £200 かが五分五分の賭けよりも確実な £100 を好む理由、そして保険が存在する理由が説明される。
- **情報理論。**データ圧縮の基礎にある、エントロピー（entropy）が一様分布（uniform distribution）で最大になるという事実の証明は、ln に対するイェンセンの不等式である。
- **最適化。**凸関数には大域的最小値（global minimum）以外に局所最小値（local minima）がないので、「坂を下る」ことで必ず最良の答えが見つかる。凸最適化問題が効率よく解けるのはこのためであり、問題を凸な形に書き直すことに多大な努力が注がれるのもこのためである。

Section 3.4 では、凸性の別の側面、すなわち関数とその逆関数の間の幾何学的な双対性（duality）を見ることになる。

## 思考のスキル

**一般原理を見つける**

いくつかの結果が似た証明をもつときは、その背後にある一つの原理を探せ。そして、その原理を一度だけ証明し、何度も適用せよ。

AM–GM も、正弦についての三角形の不等式も、ほかの多くの不等式も、すべて「凹な曲線はその弦より上にある」の具体例である。原理を見抜くことで、寄せ集めの技巧が一つの方法へと変わる。

## 次の一歩

1 **定義。**STEP II 2018、問 2（`step.maths.org/questions/18-s2-q2`）の小問 (i) と

(ii) は、上の囲みにある弦による凹性の定義から出発し、3点に対するイェンセンの不等式を導くものである。

2 **正弦の積。** STEP II 2018、問2（`step.maths.org/questions/18-s2-q2`）の小問 (iii) に取り組んでみよ。

3 **鋭角三角形。** $\tan x$ が $(0, \frac{\pi}{2})$ 上で凸であることを示し、鋭角三角形（acute-angled triangle）において $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$ が成り立つことを導け。

4 **冪平均（power means）。** $x^2$ が凸であることを示し、$\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^2 \leq \frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}$ を導け。これを、数の集まりの分散（variance）についての主張として解釈せよ。

## さらに学ぶために

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***（Cambridge University Press）。第6章は凸性とイェンセンの不等式を扱っている。
- **Claudi Alsina & Roger Nelsen, *When Less Is More: Visualizing Basic Inequalities***（Mathematical Association of America）。図によって証明される不等式を集めたもので、その多くが凸性を用いている。
- **Stephen Boyd & Lieven Vandenberghe, *Convex Optimization***（Cambridge University Press）。現代の古典で、オンラインで無料で読める。最初の数章では、凸性が実践においてなぜ重要なのかが示されている。

# 3.4 不等式を証明する面積

**問題**

**STEP III 2011、問 4**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/11-s3-q4`

## 導入

切手に収まるほど単純な図で証明できる不等式がある。原点を通る増加曲線を描く。その曲線の下側の面積と左側の面積を合わせると、必ずある長方形を覆う。このひとつの観察から**ヤングの不等式**（Young's inequality）$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ が得られ、これがさらに、解析学で最も重要な道具のうちの二つであるヘルダーの不等式（Hölder's inequality）とコーシー・シュワルツの不等式（Cauchy–Schwarz inequality）への鍵となる。

この図には、より深い考え方も含まれている。図は関数とその逆関数（inverse function）を完全に対称な形で組にしており、この組み合わせを一般化したものが**ルジャンドル変換**（Legendre transform）である。ルジャンドル変換は、古典力学の二つの偉大な定式化を結びつけ、また熱力学の二つの主要な記述を結びつける。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $\int_0^a \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ は曲線と $x$ 軸の間の面積である。同じ図において、$\int_0^b \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$ はどの部分の面積を表すか。

$x = \mathrm{f}^{-1}(y)$ のグラフは、$y = \mathrm{f}(x)$ と同じ曲線を横から見たものである。したがって $\int_0^b \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$ は、高さ 0 から高さ $b$ までの、曲線と $y$ 軸の間の面積である。これがわかれば、小問 (i) は図を描くだけの問題になる。

## 順を追って解く

### 段階 1　図

**考えてみよう**　$(0,0)$ と $(a,b)$ を頂点とする長方形を描け。0 から $a$ までの曲線の下側の領域をある色で、0 から $b$ までの曲線の左側の領域を別の色で塗れ。二つの領域は長方形を覆うか。重なりもはみ出しもなくなるのはどのようなときか。

二つの領域を合わせると長方形 $[0,a]\times[0,b]$ 全体を覆い、通常はその外側の面積も一部含む（図 3.4.1）。長方形内の各点 $(x,y)$ は、曲線の下側にある（$x\le a$ なので第一の領域に属する）か、曲線の左側にある（$y\le b$ なので第二の領域に属する）かのいずれかである。したがって塗られた面積の合計は、少なくとも長方形の面積 $ab$ 以上である。これが $(*)$ である。

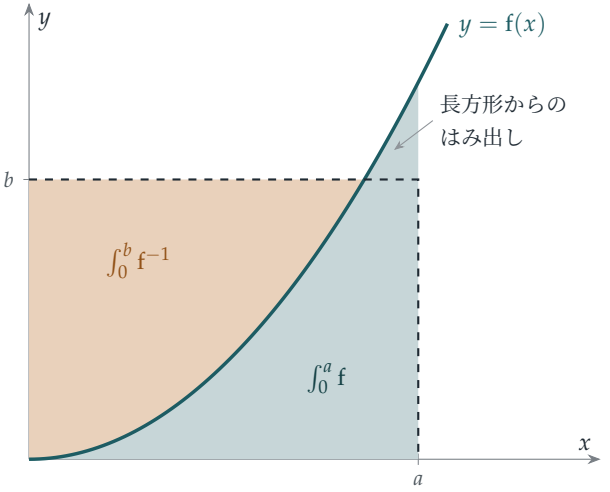



**図 3.4.1**　図で見るヤングの不等式。0 から $a$ までの曲線の下側の面積（青緑）と、0 から $b$ までの曲線の左側の面積（琥珀色）を合わせると、面積 $ab$ の破線の長方形を覆い、さらに余りが出る。はみ出しがなくなるのは、頂点 $(a,b)$ が曲線上にあるときであり、またそのときに限る。

はみ出しは、曲線と長方形の頂点の間にある、曲線で囲まれた小さな領域である。これが消えるのは、曲線が頂点 $(a,b)$ を通るとき、すなわち

$$b=\mathrm{f}(a).$$

のときであり、またそのときに限る。

### 段階 2　ヤングの不等式

**考えてみよう** $\mathrm{f}(x) = x^{p-1}$ のとき、$\mathrm{f}^{-1}(y)$ は何か。二つの積分を計算し、$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を用いて二つ目を整理せよ。

$p > 1$ なので、$\mathrm{f}(x) = x^{p-1}$ は連続かつ増加で $\mathrm{f}(0) = 0$ を満たし、$\mathrm{f}^{-1}(y) = y^{1/(p-1)}$ である。このとき

$$\int_0^a x^{p-1}\,\mathrm{d}x = \frac{a^p}{p}, \qquad \int_0^b y^{1/(p-1)}\,\mathrm{d}y = \frac{b^{1+1/(p-1)}}{1+1/(p-1)}.$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ より $q = \frac{p}{p-1}$ であるから、$1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1} = q$ となり、二つ目の積分は $\frac{b^q}{q}$ である。よって $(*)$ は

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \qquad \blacksquare$$

となる。等号は $b = \mathrm{f}(a) = a^{p-1}$ のときに成り立つはずである。確かめよう。このとき $ab = a^p$ であり、$b^q = a^{(p-1)q} = a^p$ であるから、右辺は $a^p\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = a^p$ となる。 $\blacksquare$

$p = q = 2$ とすると $ab \le \frac{a^2+b^2}{2}$ となる。これは Section 3.2 で扱った二数の相加相乗平均の不等式（AM–GM inequality）が姿を変えたものである。

### 段階 3 逆正弦関数

次に、$[0, \frac{\pi}{2}]$ 上で $\mathrm{f}(x) = \sin x$ とする。これは連続かつ増加で $\mathrm{f}(0) = 0$ を満たし、$[0,1]$ 上で $\mathrm{f}^{-1} = \arcsin$ である。

**考えてみよう** $\int_0^a \sin x\,\mathrm{d}x$ は易しい。$\arcsin y$ はどのように積分すればよいか。

$\int_0^a \sin x\,\mathrm{d}x = 1 - \cos a$ である。逆正弦関数については、$\arcsin y \times 1$ とみて部分積分（integration by parts）を行う。

$$\int_0^b \arcsin y\,\mathrm{d}y = \Big[y \arcsin y\Big]_0^b - \int_0^b \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = b\arcsin b + \sqrt{1-b^2} - 1.$$

これらを加えると、$(*)$ から $ab \le b\arcsin b + \sqrt{1-b^2} - \cos a$ が得られる。 $\blacksquare$

**手を止めて、やってみよう** ここから $\arcsin(t^{-1})$ に関する不等式を導け。$a$ としてどの値を選べばよいか。（できるだけ単純な値を試してみよ。）

$a = 0$ とすると、$0 \le b\arcsin b + \sqrt{1-b^2} - 1$、すなわち $b\arcsin b \ge 1 - \sqrt{1-b^2}$ となる。（これは単に $\int_0^b \arcsin y\,\mathrm{d}y \ge 0$ を述べているにすぎない。）$t \ge 1$ として $b = 1/t$ とおくと $0 < b \le 1$ であり、両辺を $b$ で割ると

$$\arcsin\left(\frac{1}{t}\right) \ge t\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}\right) = t - \sqrt{t^2-1}. \qquad \blacksquare$$

## 振り返り

- **証明としての図。**小問 (i) は、正しい図が見えれば、それだけで完全な証明になる。幾何学的な事実を積分の間の不等式に翻訳することは、強力な手法である。
- **一般的な結果を特殊化する。**一つの一般的な不等式から、f の選び方を変えることで、ヤングの不等式と arcsin に関する不等式が得られた。
- **最も単純な選択が正しい選択であることもある。**最後の導出では $a = 0$ を用いたが、このとき不等式はほとんど自明である。易しい場合を必ず試してみること。

## 背後にある数学

### ヤングからヘルダーへ

William Henry Young は 1912 年にこの不等式を発表した。その重要性は、それが何を導くかにある。$\sum a_i^p = 1$ かつ $\sum b_i^q = 1$ と仮定する。各組にヤングの不等式を適用して加えると

$$\sum a_i b_i \le \frac{\sum a_i^p}{p} + \frac{\sum b_i^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

となる。和が 1 になるように $a$ たちと $b$ たちを定数倍すると、**ヘルダーの不等式**が得られる。すなわち、正の数に対して

$$\sum a_i b_i \le \left(\sum a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum b_i^q\right)^{1/q}.$$

が成り立つ。$p = q = 2$ とすると、これは**コーシー・シュワルツの不等式** $\sum a_i b_i \le \sqrt{\sum a_i^2}\sqrt{\sum b_i^2}$ であり、二つのベクトル（vector）のなす角の余弦が 1 以下であることを述べている。ヘルダーの不等式は $L^p$ 空間の理論の基礎である。$L^p$ 空間とは、「距離」を $\left(\int |f|^p\right)^{1/p}$ で測る関数の空間であり、関数解析（functional analysis）や確率論の講義で出会うことになる。

### ルジャンドル変換

図 3.4.1 の図は、f と $\mathrm{f}^{-1}$ を完全に対称に扱っている。$F(a) = \int_0^a \mathrm{f}$、$G(b) = \int_0^b \mathrm{f}^{-1}$ とおく。不等式は $F(a) + G(b) \ge ab$ であり、曲線上で等号が成り立つから

$$G(b) = \max_a \bigl(ab - F(a)\bigr).$$

である。凸関数（convex function）$F$ を新しい凸関数 $G$ に変えるこの操作が**ルジャンドル変換**であり、これを二回適用すると $F$ に戻る。力学では、ルジャンドル変換は位

置と速度の関数であるラグランジアン（Lagrangian）を、位置と運動量の関数であるハミルトニアン（Hamiltonian）に変換する。これらはニュートン（Newton）の法則の二つの同値な定式化であり、大学二年次の講義で出会うことになる。熱力学では、内部エネルギー、エンタルピー、自由エネルギーの間の変換を与える。$F(a) = a^p/p$ のとき変換は $G(b) = b^q/q$ となり、これこそがヤングの不等式の二つの指数が $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ で結ばれている理由である。

## 思考のスキル

### 図から得られる不等式

**積分は面積である。うまく選んだ図の中で面積を比べると、代数的には見抜きにくい不等式を証明できることがある。**

ある領域が別の領域を明らかに含んでいる図や、いくつかの領域が第三の領域を明らかに覆っている図を探すこと。そのうえで、それぞれの面積を積分に翻訳する。

## 次の一歩

1 **1987 年版。** STEP I 1987、問 6（`step.maths.org/questions/87-s1-q6`）に挑戦せよ。同じ種類の図を用いて逆関数を積分する問題である。答えは微分して確かめること。

2 **コーシー・シュワルツ。** $p = q = 2$ のヤングの不等式を用いて、正の数に対して $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$ を証明せよ。（**ヒント**：まず二つの平方根がともに 1 に等しい場合を扱え。）

3 **指数関数版。** $(*)$ において $\mathrm{f}(x) = e^x - 1$ とし、$a, b \ge 0$ に対して

$$ab \le e^a - 1 - a + (1 + b)\ln(1 + b) - b.$$

を示せ。等号が成り立つのはどのようなときか。

4 **この評価はどれほどよいか。** やや難 電卓を用いて、$t = 1, 2, 10$ について $\arcsin(1/t)$ と $t - \sqrt{t^2 - 1}$ を比較せよ。$t$ が大きいとき、$t - \sqrt{t^2 - 1} \approx \frac{1}{2t}$ である一方、$\arcsin(1/t) \approx \frac{1}{t}$ であることを示せ。評価がちょうど 2 倍ずれるのはなぜか。（$a = 0$ のときの図を見よ。はみ出しのうちどれだけが無駄になっているか。）

## さらに学ぶために

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***（Cambridge University Press）。『コーシー・シュワルツ・マスタークラス』。第 1 章と第 9 章でコーシー・シュワルツの不等式とヘルダーの不等式を扱い、その途中でヤングの不等式にも触れている。
- **Roger Nelsen, *Proofs Without Words***（Mathematical Association of America）。『言葉のいらない証明』。ヤングの不等式をはじめ、図による証明を数多く収めている。
- **V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics***（Springer）。『古典力学の数学的方法』。第 14 節で、まさにこの図を用いてルジャンドル変換を説明している。高度な内容だが、該当する節は短い。

# 3.5 $\pi^e$ か $e^\pi$ か？

**問題**

**STEP II 2013、問 1**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/13-s2-q1`

## 導入

$\pi^e$ と $e^\pi$ はどちらが大きいだろうか。電卓を使えば一瞬で答えが出る。$e^\pi \approx 23.14$、$\pi^e \approx 22.46$ である。しかし電卓が教えてくれるのは、大きいという**事実**だけであって、**なぜ**そうなるのかは教えてくれない。また、似たような無数の問いに一度に答えることもできない。$3^\pi$ は $\pi^3$ より大きいだろうか。自明な $n = m$ 以外に、$n^m = m^n$ を満たす整数の組はあるだろうか。

実は、これらの問いはすべて、ただ一つの曲線 $y = \ln x$ と、それと交わる直線についての問いなのである。この問題は、注意深く描いた図が、式変形では手に負えなさそうな大小比較をいかに決着させるか、そして数 $e$ がいかにして自然な境目として現れるかを示してくれる。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 対数（logarithm）をとると、$a^b = b^a$ は $b \ln a = a \ln b$ と同値である。これを、一方の辺には $a$ だけが、もう一方の辺には $b$ だけが現れるように変形せよ。

$b \ln a = a \ln b$ は

$$\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}.$$

と同値である。したがって、$a^b$ と $b^a$ の比較はすべて、ただ一つの関数（function）$h(x) = \frac{\ln x}{x}$ の $a$ と $b$ における値の比較になる。そして $\frac{\ln a}{a}$ は、原点と曲線 $y = \ln x$ 上の点 $(a, \ln a)$ を結ぶ直線の傾き（gradient）である。この問題が直線についての問題に

なっているのはそのためである。

## 順を追って解く

### 段階 1　原点を通る接線

> **考えてみよう**　$y = mx$ が $x = x_0$ で $y = \ln x$ に接する（touch）とき、どのような二つの式が成り立たなければならないか。

直線と曲線は交わらなければならず、$mx_0 = \ln x_0$ が成り立ち、さらに傾きが等しく、$m = 1/x_0$ でなければならない。後者を前者に代入すると $1 = \ln x_0$ となるので、$x_0 = e$、$m = 1/e$ である。原点から引いた接線（tangent）は点 $(e, 1)$ で曲線に接する。

一方、$y = mx$ が $x = a$ と $x = b$ で曲線と交わるならば、$\ln a = ma$ かつ $\ln b = mb$ であるから $\frac{\ln a}{a} = m = \frac{\ln b}{b}$ となり、$b \ln a = a \ln b$、したがって $a^b = b^a$ が得られる。 ■

図について述べておく。原点を通り、接線よりわずかに傾きの小さい直線は、接点の両側で一回ずつ、計二回曲線と交わる。よって $a < e < b$ である。傾きが $1/e$ より大きい直線は曲線とまったく交わらない。$\ln x$ は上に凸（concave）であり、その全体が接線 $y = x/e$ の下側にあるからである。

### 段階 2　原点より上で $y$ 軸と交わる直線

> **考えてみよう**　今度は直線を $y = mx + c$、ただし $c > 0$ とする。$\frac{\ln p}{p}$ と $\frac{\ln q}{q}$ を $m$ と $c$ で表せ。

$\ln p = mp + c$ と $\ln q = mq + c$ から

$$\frac{\ln p}{p} = m + \frac{c}{p}, \qquad \frac{\ln q}{q} = m + \frac{c}{q}.$$

である。$c > 0$ かつ $p < q$ であるから $\frac{c}{p} > \frac{c}{q}$ となり、$\frac{\ln p}{p} > \frac{\ln q}{q}$ である。両辺に $pq > 0$ を掛けると $q \ln p > p \ln q$ となるので、$p^q > q^p$ である。 ■

幾何学的に言えば、二点を通る直線が原点より上で $y$ 軸と交わるとき、原点から見て点 $(p, \ln p)$ は点 $(q, \ln q)$ よりも急な角度に見える、ということである。

### 段階 3　$e$ より右側にある弦

> **考えてみよう**　$e \le p < q$ のとき、$(p, \ln p)$ から $(q, \ln q)$ への弦の傾きは、$p$ における曲線の傾きより小さい。それはなぜか。また、そのことからなぜ弦の

? $y$ 切片が正になるのか。

$\ln x$ は上に凸なので、その傾き $1/x$ は減少する。したがって $p$ から $q$ への弦（chord）は $p$ における接線よりも傾きが小さい。すなわち、その傾き $s$ は $s < \frac{1}{p}$ を満たす。弦の $y$ 切片（$y$-intercept）は、$p \geq e$ を用いると

$$c = \ln p - sp > \ln p - \frac{1}{p} \cdot p = \ln p - 1 \geq 0,$$

となる。よって、弦は原点より上で $y$ 軸と交わる。 ■

**手を止めて、やってみよう** このことと Stage 2 を用いて、$\pi^e$ と $e^\pi$ のどちらが大きいかを判定せよ。

$p = e$、$q = \pi$ とする。両者を結ぶ弦の切片は正であるから、Stage 2 により $p^q > q^p$、すなわち

$$e^\pi > \pi^e.$$

である。

#### 段階 4 接線に平行な弦

次に、$p$ から $q$ への弦の傾きがちょうど $\frac{1}{e}$、つまり接線 $y = \frac{x}{e}$ の傾きと等しいとする。

? **考えてみよう** この弦は $(e, 1)$ における接線に平行である。$\ln x$ は上に凸なので、曲線はその接線の下側にある。弦は原点より上で $y$ 軸と交わるか、それとも下で交わるか。

弦はある $c$ を用いて直線 $y = \frac{x}{e} + c$ と表される。その両端は曲線上にあり、曲線は接線 $y = \frac{x}{e}$ 上またはその下側にあって、接線と接するのは $x = e$ においてのみである。両端がともに $x = e$ にあることはありえないので、少なくとも一方は接線より真に下側にある。したがって、この平行な弦全体が接線の下側にあり、$c < 0$ となる。そこで $c < 0$ として Stage 2 を繰り返すと、不等式の向きが逆になり、$\frac{\ln p}{p} < \frac{\ln q}{q}$、よって $q^p > p^q$ が得られる。 ■

## 振り返り

- **一つの関数に帰着させる。** $a^b$ と $b^a$ の比較は、$h(x) = \frac{\ln x}{x}$ として $h(a)$ と $h(b)$ の比較になった。
- **根拠のある図。**「図を用いて」という指示のそれぞれが、正確な事実によって裏づ

けられていた。すなわち、ln が上に凸であること（弦は曲線の下側、接線は曲線の上側にある）と、切片の符号である。

- **$e$ の特別な役割。** 原点から引いた接線は $x = e$ で接し、そこがこれらすべての比較の境目となる。

## 背後にある数学

### $\frac{\ln x}{x}$ のグラフ

この問題のすべては、$h(x) = \frac{\ln x}{x}$ のグラフ（図 3.5.1）に見て取ることができる。その導関数（derivative）は $h'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ であるから、$h$ は $(0, e)$ で増加し、$x = e$ で最大値（maximum）$\frac{1}{e}$ をとり、その後は 0 に向かって減少する。0 と $\frac{1}{e}$ の間の高さ $m$ にある水平な直線はグラフと二回交わり、その交点 $a < e < b$ は $h(a) = h(b)$、すなわちまさに $a^b = b^a$ を満たす。$e$ より右側では $h$ は減少するので、$e \le p < q$ ならば $h(p) > h(q)$、すなわち $p^q > q^p$ である。特に $e^\pi > \pi^e$ であり、さらに一般に $x \neq e$ であるすべての $x$ について $e^x > x^e$ が成り立つ。この勝負で $e$ に勝てる数は他にない。

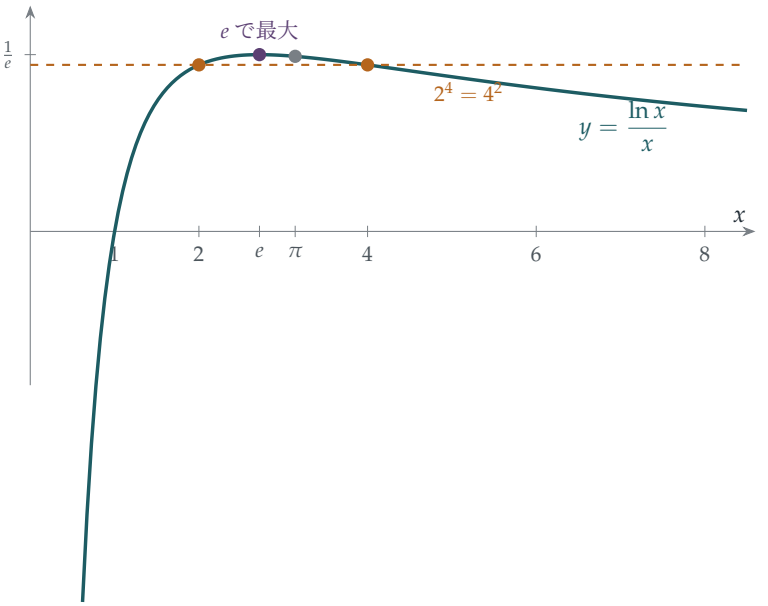



**図 3.5.1**　$h(x) = \frac{\ln x}{x}$ のグラフ。$x = e$ で最大値 $\frac{1}{e}$ まで上昇し、その後は下降する。$h(e) > h(\pi)$ であるから $e^\pi > \pi^e$ が得られる。高さ $\frac{\ln 2}{2}$ の水平な直線（琥珀色）はグラフと $x = 2$ および $x = 4$ で交わる。これが $n^m = m^n$ を満たす相異なる整数の唯一の組である。

### $x^y = y^x$ のすべての解

$x^y = y^x$ を満たす相異なる正の実数の組はどのようなものだろうか。うまい工夫ですべてを求めることができる。$t > 1$ として $y = tx$ とおく。すると $x^{tx} = (tx)^x$ から $x^t = tx$ が得られ、$x^{t-1} = t$、よって

$$x = t^{1/(t-1)}, \qquad y = t^{t/(t-1)}.$$

となる。$t = 1 + \frac{1}{n}$ とおくと $x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$、$y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ となる。$n = 1$ のときこれは $(2, 4)$ であり、$n = 2$ のときは $\left(\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right)$ で、実際に $\left(\frac{9}{4}\right)^{27/8} = \left(\frac{27}{8}\right)^{9/4}$ が成り立つ。$n \to \infty$ のとき両者はともに $e$ に収束（converge）し、そこで二つの枝が出会う。この問題は 1728 年にダニエル・ベルヌーイ（Daniel Bernoulli）とクリスティアン・ゴールドバッハ（Christian Goldbach）の往復書簡で議論され、のちにオイラー（Euler）も取り上げた。

### 最も経済的な底

関数 $x^{1/x} = e^{h(x)}$ もまた $x = e$ で最大となる。このことは、ある興味深い問いに答えてくれる。記数法の「コスト」を、底と必要な桁数の積で測るとすると、最も経済的な底は $e$ であり、整数の中では 3 である（2 をわずかに上回る）。1958 年のソ連の Setun のように、3 を底とする実験的なコンピュータもいくつか作られた。

## 思考のスキル

**変形して変数を分離し、一つの関数を調べる**

二つの量が複雑に絡み合った不等式や方程式は、しばしば一つの関数の二点における値についての主張になる。

その関数が得られれば、そのグラフ（どこで増加し、どこで減少し、どこで最大になるか）がすべての問いに一度に答えてくれる。ここでは、$a^b$ と $b^a$ の比較が $h(a)$ と $h(b)$ の比較になった。

## 次の一歩

1 **整数の場合。** STEP I 1988、問 1（`step.maths.org/questions/88-s1-q1`）に挑戦せよ。

2 **さらなる比較。** STEP II 2025、問 3（OCR が配布している 2025 年の過去問一式に収録、`www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip`）に挑戦せよ。この節のグラフを用いて $a^b$ と $b^a$ のさらなる比較を決着させる問題であり、その中には $e$ の数値的な評価が決め手となるものも含まれる。

3 **一行の証明。** $x \neq 0$ に対して成り立つ $e^x > 1 + x$ に $x = \frac{\pi}{e} - 1$ を代入して、$e^\pi > \pi^e$ を直接証明せよ。

## さらに学ぶために

- **Eli Maor, *e: The Story of a Number***（Princeton University Press）。『不思議な数 e の物語』。$e$ の歴史を述べた本で、方程式 $x^y = y^x$ も扱っている。
- **Paul Nahin, *An Imaginary Tale***（Princeton University Press）。『虚数の話』。$\sqrt{-1}$ だけを扱った本ではなく、まさにこの種の興味深い計算が満載である。
- **Michael Spivak, *Calculus***（Cambridge University Press）。第 11 章では、導関数を用いてグラフの形を理解する方法が完全な厳密さをもって扱われている。

# 3.6 傾きの上界

**問題**

**STEP I 1988、問 7**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/88-s1-q7`

## 導入

ある区間で関数の値が $-1$ と $1$ の間にとどまることがわかっているとき、その関数の傾きの大きさについて何かいえるだろうか。一般の関数については、何もいえない。$\sin(1000x)$ は $-1$ と $1$ の間にとどまるが、傾きは 1000 にもなる。しかし 2 次関数（quadratic）はそのように激しく振動することはできない。この問題は、箱 $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ に閉じ込められた 2 次関数は箱の内部で傾きが 4 を超えることはなく、しかも 4 が最良の値であることを示すものである。

この問題には意外な由来がある。1887 年、周期表（periodic table）で有名な化学者メンデレーエフ（Dmitri Mendeleev）は、溶液の密度が濃度にどのように依存するかを研究しており、データに 2 次関数を当てはめていた。彼はデータの誤差が曲線の傾きにどれほど悪影響を及ぼしうるかを知る必要があり、まさにこの問題の結果を証明した。その 2 年後、若きマルコフ（Andrei Markov）が任意の次数の多項式（polynomial）について一般の問題を解決し、その答えは数学において最も重要な多項式のいくつかへとまっすぐにつながっていった。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $\mathrm{f}'(x)$ の公式は、f の 3 つの値、すなわち $-1, 0, 1$ における値しか用いていない。なぜ 3 つの値だけで 2 次関数の導関数（derivative）が決まるのだろうか。

2 次関数は 3 つの係数をもつので、任意の 3 点における値によって決まる。したがっ

て、その導関数も係数の関数であるから、それら3つの値によって表せるはずである。公式はその表し方を教えてくれる。そしてこれこそが必要なものである。というのも、仮定 $|f(x)| \le 1$ は f の**値**についての情報を与える一方で、結論はその**導関数**についてのものだからである。

## 順を追って解く

### 段階 1　公式

$f(1) = a+b+c$、$f(-1) = a-b+c$、$f(0) = c$ である。よって右辺は

$$(a+b+c)\left(x+\tfrac{1}{2}\right) + (a-b+c)\left(x-\tfrac{1}{2}\right) - 2cx$$

となる。$x$ の係数は $(a+b+c)+(a-b+c)-2c = 2a$ であり、定数項は $\tfrac{1}{2}(a+b+c) - \tfrac{1}{2}(a-b+c) = b$ である。よって右辺は $2ax+b = f'(x)$ である。 ■

### 段階 2　上界

**考えてみよう**　公式の両辺の絶対値をとり、三角不等式と $|f(1)|, |f(-1)|, |f(0)| \le 1$ を用いよ。$|f'(x)|$ に対して、$x$ の関数としてどのような上界が得られるか。

三角不等式（triangle inequality）$|u+v+w| \le |u|+|v|+|w|$ により、

$$|f'(x)| \le |f(1)|\,|x+\tfrac{1}{2}| + |f(-1)|\,|x-\tfrac{1}{2}| + 2|f(0)|\,|x| \le |x+\tfrac{1}{2}| + |x-\tfrac{1}{2}| + 2|x|.$$

**手を止めて、やってみよう**　$|x| \le 1$ のとき $|x+\tfrac{1}{2}| + |x-\tfrac{1}{2}| + 2|x| \le 4$ であることを示せ。（符号に応じて場合分けせよ。）

$|x| \le \tfrac{1}{2}$ ならば、$x+\tfrac{1}{2} \ge 0$ かつ $x-\tfrac{1}{2} \le 0$ であるから $|x+\tfrac{1}{2}| + |x-\tfrac{1}{2}| = (x+\tfrac{1}{2}) - (x-\tfrac{1}{2}) = 1$ となり、合計は $1+2|x| \le 2$ である。

$\tfrac{1}{2} \le |x| \le 1$ ならば、2つの括弧の中身はどちらも $x$ と同じ符号をもつので $|x+\tfrac{1}{2}| + |x-\tfrac{1}{2}| = 2|x|$ となり、合計は $4|x| \le 4$ である。

いずれの場合も $|f'(x)| \le 4$ である。 ■

この上界が達成されるのは $x = \pm 1$ においてのみである。区間の中央の半分では、傾きは高々 2 である。

### 段階 3　極端な例

**考えてみよう** $x = 1$ で上界が達成されるためには、段階 2 のすべての不等式で等号が成り立たなければならない。$f(1)$、$f(-1)$、$f(0)$ はどのような値をとり、それぞれどの符号でなければならないか。

$x = 1$ では、公式は $f'(1) = \frac{3}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(-1) - 2f(0)$ となる。これを 4 に等しくするには、$f(1) = 1$、$f(-1) = 1$、$f(0) = -1$ でなければならない。$(-1, 1)$、$(0, -1)$、$(1, 1)$ を通る 2 次関数は

$$f(x) = 2x^2 - 1$$

であるから、$a = 2, b = 0, c = -1$ である。$|x| \le 1$ において $x^2 \in [0, 1]$ であるから $2x^2 - 1 \in [-1, 1]$ であり、さらに $f'(1) = 4$ である。 ■

## 振り返り

- **求めたいものを、わかっているもので表す。**公式は導関数を $f$ の値で書き直した。仮定が情報を与えていたのはまさにその値である。
- **三角不等式。**和を絶対値の和で上から抑えるのは、解析学で最もよく使われる手法の一つである。
- **等号成立条件から極値的な場合を見つける。**すべての不等式で等号が成り立つのはいつかを問うことで、例 $2x^2 - 1$ が直接得られた。

## 背後にある数学

### マルコフの不等式とチェビシェフ多項式

マルコフは 1889 年に、$p$ が $n$ 次の多項式で $[-1, 1]$ 上で $|p(x)| \le 1$ を満たすならば

$$|p'(x)| \le n^2 \qquad \text{ただし} |x| \le 1$$

であることを証明した。$n = 2$ の場合、これは我々の上界 4 である。極端な場合を与えるのは、

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta.$$

によって定義される**チェビシェフ多項式**（Chebyshev polynomials）$T_n$ である。たとえば $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ から我々の極端な 2 次関数 $T_2(x) = 2x^2 - 1$ が得られ、$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ から $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ が得られる。$T_n(x) = \cos n\theta$ であるから、これらの多項式は $n$ 次の多項式に可能な限り多く $-1$ と 1 の間を振動し、両端では可能な限り急な傾きをもつ（図 3.6.1）。マルコフの弟ウラジーミル（Vladimir）

は、1892 年にこの結果を高階導関数へと拡張した。

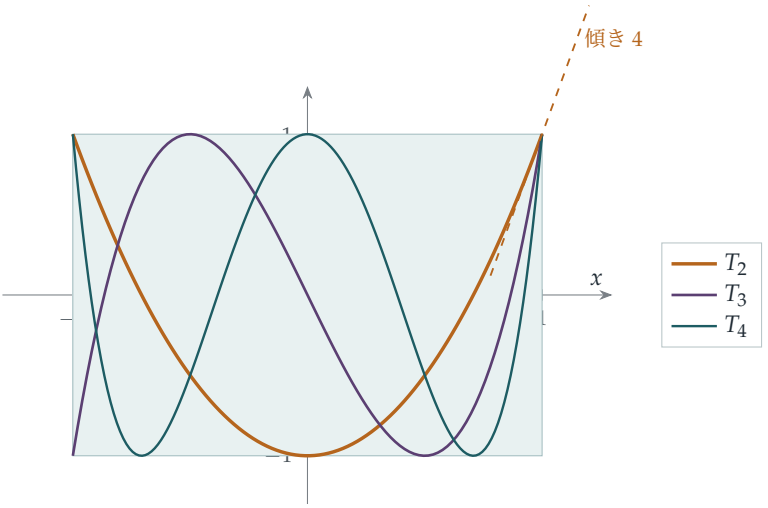



**図 3.6.1**　チェビシェフ多項式 $T_2 = 2x^2 - 1$、$T_3 = 4x^3 - 3x$、$T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$ は箱 $|x| \le 1, |y| \le 1$ の内部にとどまり、その上辺と下辺に可能な限り多く接する。これらは両端において、同じ次数の多項式の中で最も急な傾きをもつ：$T_n'(1) = n^2$。破線は $x = 1$ における $T_2$ の接線（tangent）であり、傾きは 4 である。

### 補間

問題の公式は**ラグランジュ補間**（Lagrange interpolation）の一例である。いくつかの点における関数の値が与えられたとき、それらを通る次数最小のただ一つの多項式を書き下し、それを用いて関数やその導関数を近似するのである。ここでは 3 点は $-1, 0, 1$ である。このような公式は数値解析（numerical analysis）のあらゆる場面で用いられており、たとえば測定データから導関数を推定するのに使われる。マルコフの不等式は、それに付随する警告である。すなわち、値のわずかな誤差が導関数では最大 $n^2$ 倍にまで拡大されうるのであり、これはまさにメンデレーエフが懸念していた問題である。

### 実用におけるチェビシェフ多項式

チェビシェフ多項式は近似理論（approximation theory）の主力となる道具である。等間隔の点ではなく $T_n$ の根において関数を補間すると、誤差を抑えることができる。等間隔の点を用いると、高次の補間は区間の両端付近でとんでもなく大きく外れることがある（ルンゲ（Runge）現象）。関数をマシン精度いっぱいまで計算したり、微分方

程式を非常に高い精度で解いたりするソフトウェアは、内部でチェビシェフ展開を用いていることが多い。

## 思考のスキル

**未知のものを既知のもので表す**

仮定がある種類の量について述べ、結論が別の種類の量についてのものであるときは、両者を結びつける恒等式を探し、各項ごとに上から抑えよ。

そして上界が得られたら、それが最良かどうかを問え。等号成立の場合を逆にたどると、たいていは極端な例にたどり着く。そしてその極端な例は、それ自体として興味深いことが多い。

## 次の一歩

1. **一般的な考え方。** $f$ が 2 次関数ならば $f(x) = f(-1)\dfrac{x(x-1)}{2} + f(0)(1-x^2) + f(1)\dfrac{x(x+1)}{2}$ であることを示し、これを微分して問題の公式を導け。

2. **一意性。** やや難 $[-1,1]$ 上で $|f(x)| \le 1$ を満たし、かつ $[-1,1]$ のどこかで $|f'(x)| = 4$ となる 2 次関数は $\pm(2x^2-1)$ に限ることを示せ。

3. **チェビシェフ多項式。** $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ を用いて $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ であることを確かめ、$T_3'(1) = 9$ を確認せよ。また $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ を示し、$T_4$ を求めよ。

4. **$T_n$ の傾き。** $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ を $\theta$ について微分することにより $T_n'(\cos\theta) = \dfrac{n\sin n\theta}{\sin\theta}$ を示し、$\theta \to 0$ とすることで $T_n'(1) = n^2$ を導け。

## さらに学ぶために

- **Lloyd N. Trefethen, *Approximation Theory and Approximation Practice*** (SIAM)。チェビシェフ多項式と補間についての美しい現代的な本で、優秀な高校生でも読むことができ、全編にわたってコンピュータによる実験が盛り込まれている。
- **Peter Borwein & Tamás Erdélyi, *Polynomials and Polynomial Inequalities*** (Springer)。マルコフの不等式とその仲間たちの全体像を知るための本。上級者向け。

- **George M. Phillips, *Interpolation and Approximation by Polynomials***（Springer）。ラグランジュ補間、チェビシェフ多項式、マルコフ型の不等式を扱う大学学部向けの教科書。

# 3.7 $\pi^2 \leq 10$

**問題**

**STEP II 2014、問 2**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/14-s2-q2`

## 導入

$\pi$ が 3 より少し大きいことは、どの生徒も知っている。では、その上界を**証明**するにはどうすればよいだろうか。アルキメデス（Archimedes）は多角形を用いてこれを行った。この問題はまったく思いがけない方法でそれを行う。関数についての一般的な不等式（inequality）をとり、そこに単純な放物線を代入して、$\pi^2 \leq 10$ を読み取るのである。関数の選び方を変えると、有名な近似 $\pi \leq \frac{22}{7}$ が得られる。

不等式 $(*)$ は**ウィルティンガーの不等式**（Wirtinger's inequality）である。これは、両端で 0 に固定された関数は、「急」でなければ「大きく」なれないことを述べている。その背後には、数理物理学の中心的な考え方の一つがある。弦の振動、量子粒子のエネルギー準位、そして固有値（eigenvalue）の理論である。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $[0, \pi]$ の両端で 0 となる関数が、中央で大きな値をとるならば、なぜ急でなければならないのだろうか。条件 $f(0) = f(\pi) = 0$ はなぜ重要なのだろうか。

距離 $\pi$ の範囲内で 0 からある高さ $H$ まで上がり、再び 0 まで下がるには、関数は平均して少なくとも $H/(\pi/2)$ の割合で上昇しなければならない。したがって、その導関数（derivative）がいたるところで小さいということはありえない。端での条件がなければ、このような制約はない。定数関数は導関数が 0 のまま、いくらでも大きくできる。不等式 $(*)$ は、「大きさ」と「急さ」を 2 乗の積分で測ることによって、このこと

を精密に述べたものである。

## 順を追って解く

### 段階 1　正弦波

> **考えてみよう**　$\int_0^{\pi} \sin^2 nx\,\mathrm{d}x$ はいくらか。また $\int_0^{\pi} \cos^2 nx\,\mathrm{d}x$ はいくらか。（$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ を用いよ。）

$\int_0^{\pi} \cos 2nx\,\mathrm{d}x = 0$ であるから、どちらも $\frac{\pi}{2}$ である。$\mathrm{f}(x) = \sin nx$ とすると $\mathrm{f}'(x) = n\cos nx$ であるから、$n \geq 1$ より

$$\int_0^{\pi} \mathrm{f}^2 = \frac{\pi}{2} \leq \frac{n^2\pi}{2} = \int_0^{\pi} (\mathrm{f}')^2,$$

が成り立つ。■$n = 1$ のとき等号が成り立つことに注意しよう。つまり、この不等式はこれ以上改良できないほど精密なのである。

### 段階 2　端の条件が重要である

> **考えてみよう**　$\mathrm{f}(0) \neq 0$ であって $(*)$ が成り立たない単純な関数を見つけよ。次に、$\mathrm{f}(0) = 0$ であるが $\mathrm{f}(\pi) \neq 0$ であるような関数を見つけよ。

定数関数 $\mathrm{f}(x) = 1$ は $\mathrm{f}(0) = 1 \neq 0$ を満たし、$\int_0^{\pi} 1\,\mathrm{d}x = \pi > 0 = \int_0^{\pi} 0\,\mathrm{d}x$ である。

2 つ目については、$\mathrm{f}(x) = x$ は $\mathrm{f}(0) = 0$ であるが $\mathrm{f}(\pi) = \pi$ であり、

$$\int_0^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{3} \approx 10.3 > \pi = \int_0^{\pi} 1^2\,\mathrm{d}x.$$

となる。よって、どちらの場合も $(*)$ は成り立たない。 ■

### 段階 3　放物線

> **考えてみよう**　$x = 0$ と $x = \pi$ で 0 となる 2 次式はどれか。（定数倍を除けば一つしかない。なぜ定数倍は問題にならないのだろうか。）

その 2 次式は $x(\pi - x)$ の定数倍でなければならない。また $\mathrm{f}$ を定数 $k$ 倍すると $(*)$ の両辺はともに $k^2$ 倍されるので、$\mathrm{f}(x) = x(\pi - x)$、すなわち $a = -1, b = \pi, c = 0$ としてよい。このとき $\mathrm{f}'(x) = \pi - 2x$ であり、置換 $u = x - \frac{\pi}{2}$（これにより両方の被積分

関数（integrand）が偶関数（even function）になる）を用いると、

$$\int_0^{\pi} x^2(\pi - x)^2\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\pi^2}{4} - u^2\right)^2 du = \frac{\pi^5}{30},$$
$$\int_0^{\pi} (\pi - 2x)^2\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4u^2\,du = \frac{\pi^3}{3}.$$

となる。（1 つ目については、$h = \frac{\pi}{2}$ として $\int_{-h}^{h}(h^2-u^2)^2\,du = 2(h^5 - \frac{2}{3}h^5 + \frac{1}{5}h^5) = \frac{16}{15}h^5$ である。）したがって $(*)$ は $\frac{\pi^5}{30} \le \frac{\pi^3}{3}$、すなわち

$$\pi^2 \le 10. \qquad \blacksquare$$

を意味する。

### 段階 4 三角関数による選択

**考えてみよう** $f(x) = p\sin\frac{1}{2}x + q\cos\frac{1}{2}x + r$ に対して、$f(0) = 0$ と $f(\pi) = 0$ は $p, q, r$ にどのような条件を課すか。

$f(0) = q + r = 0$ かつ $f(\pi) = p + r = 0$ である。よって $p = q = -r$ であり、定数倍を調整して $f(x) = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} - 1$ とする。

**手を止めて、やってみよう** この関数について $\int_0^{\pi} f^2$ と $\int_0^{\pi}(f')^2$ を計算せよ。$\pi$ についてどのような不等式が得られるか。

$s = \sin\frac{x}{2}, c = \cos\frac{x}{2}$ とおく。すると $(s+c)^2 = 1 + 2sc = 1 + \sin x$ であるから、

$$f^2 = (s+c)^2 - 2(s+c) + 1 = 2 + \sin x - 2\sin\tfrac{x}{2} - 2\cos\tfrac{x}{2}.$$

となる。$\int_0^{\pi}\sin x = 2$、$\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2} = 2$、$\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2} = 2$ を用いると、

$$\int_0^{\pi} f^2\,dx = 2\pi + 2 - 4 - 4 = 2\pi - 6.$$

である。また $f' = \frac{1}{2}(c - s)$ であるから $(f')^2 = \frac{1}{4}(1 - \sin x)$ となり、$\int_0^{\pi}(f')^2\,dx = \frac{1}{4}(\pi - 2)$ である。ここで $(*)$ より

$$2\pi - 6 \le \frac{\pi - 2}{4} \quad\Longrightarrow\quad 8\pi - 24 \le \pi - 2 \quad\Longrightarrow\quad \pi \le \frac{22}{7}. \qquad \blacksquare$$

が得られる。

### 段階 5 どちらがよいか

$\pi \le \frac{22}{7}$ から $\pi^2 \le \frac{484}{49} \approx 9.878$ が得られ、これは $\pi^2 \le 10$ よりもよい。（真の値は $\pi^2 \approx 9.870$ である。）これは $\frac{22}{7}$ が $\pi$ の**上界**であることを証明しているのであって、それが $\pi$ に等しくないことは、まったく別の積分を用いて Section 4.3 で示される。

## 振り返り

- **一般的な不等式と、特定の関数。**試験関数を選ぶことで、すべての関数についての主張が、ある一つの数についての主張に変わった。
- **スケーリング。**$(*)$ の両辺は同じ倍率で変化するので、それぞれの関数族における自由な定数を固定することができた。
- **よりよい試験関数は、よりよい評価を与える。**試験関数が極値をとる場合である $\sin x$ に近いほど、不等式は等号に近くなり、評価もよくなる（図 3.7.1）。

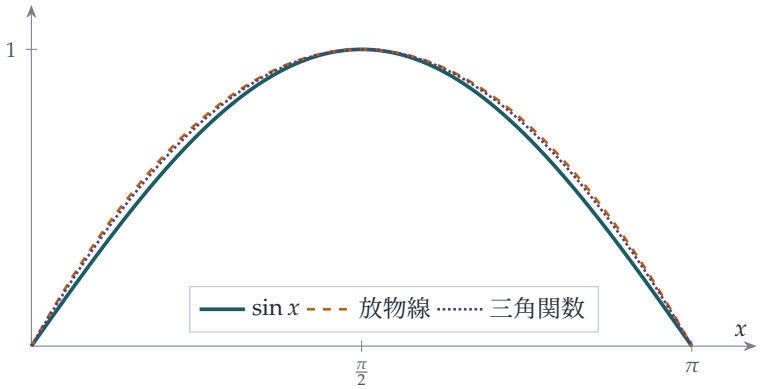



**図 3.7.1**　この節に登場する 3 つの関数。いずれも最大値が 1 となるように定数倍してある。$(*)$ で等号を与える極値の場合 $\sin x$（実線）、$\pi^2 \le 10$ を与える放物線 $x(\pi - x)$（破線）、そして $\pi \le \frac{22}{7}$ を与える $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} - 1$（点線）である。どちらの試験関数も $\sin x$ に非常に近く、それゆえに評価がこれほどよいのである。

## 背後にある数学

### フーリエ級数による証明

なぜ $(*)$ は成り立つのだろうか。大学では、$[0, \pi]$ 上の「性質のよい」関数で両端で 0 となるものは、**フーリエ正弦級数**（Fourier sine series）

$$\mathrm{f}(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots .$$

として表せることを学ぶ。$m \neq n$ のとき $\int_0^\pi \sin mx \sin nx \, \mathrm{d}x = 0$ であるから、2 乗して積分すると交差項はすべて消え、

$$\int_0^\pi \mathrm{f}^2 = \frac{\pi}{2}\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots\right), \qquad \int_0^\pi (\mathrm{f}')^2 = \frac{\pi}{2}\left(1^2 b_1^2 + 2^2 b_2^2 + 3^2 b_3^2 + \cdots\right).$$

が得られる。右側の各項は左側の対応する項以上であるから、これで $(*)$ が証明され、さらに等号が成り立つのは f が $\sin x$ の定数倍であるときに限ることもわかる。問題の小問 (i) は、項が一つだけの場合にあたる。

### 振動する弦と量子粒子

比 $\int (f')^2 / \int f^2$ はレイリー商（Rayleigh quotient）と呼ばれ、$(*)$ は、0 と $\pi$ で固定された関数に対して、この比のとりうる最小値が 1 であることを述べている。この数には物理的な意味がある。両端を固定された弦では、$\int (f')^2$ は伸びのエネルギーを、$\int f^2$ は変位の大きさを表し、この比の最小値が、弦の出せる最も低い音を決める。量子力学では、同じ最小値が、箱に閉じ込められた粒子の最低エネルギーとなる。両端で固定された波は曲がらざるをえないので、これは 0 にはなりえない。レイリー卿（Lord Rayleigh）はまさにこの技法、すなわち試験関数を推測して比を計算するという方法を用いて、振動系の振動数を評価した。極値の場合が最小値を与えるので、どのような推測も真の最低振動数の上界を与え、よい推測は非常に精度の高い上界を与えるのである。

### 変分法

積分の比を最小にする関数を求めることは、**変分法**（calculus of variations）の問題である。そこでは未知のものが数ではなく、関数全体である。ここでの最小化関数 $\sin x$ は微分方程式（differential equation）$f'' + f = 0$ を満たすが、これは偶然ではない。積分を最小化すると、必ず最小化関数についての微分方程式が導かれるのである。この考え方には Section 4.7 で再び立ち返る。

## 思考のスキル

**試験関数**

**ある関数のクラスに属するすべての関数について成り立つ不等式は、巧みに選んだ関数に適用することで、特定の数についての情報を与えることができる。**

技は選び方にある。極値の場合に近い試験関数（test function）は、ほぼ最良の結果を与える。この考え方は、固有値の評価から有限要素法（finite element method）に至るまで、解析学、物理学、工学を貫いている。

## 次の一歩

1. **4次式。** $(*)$ で $f(x) = x^2(\pi - x)^2$ を用いよ。これからは $\pi^2 \le 12$ しか得られないことを示せ。なぜこの試験関数は放物線より劣るのだろうか。（その形を $\sin x$ と比べてみよ。）

2. **2つの正弦波。** $f(x) = \sin x + \sin 2x$ について、両辺を計算して $(*)$ を直接確かめよ。

3. **別の区間。** 置換によって、$g(0) = g(L) = 0$ ならば $\displaystyle\int_0^L g^2 \le \frac{L^2}{\pi^2}\int_0^L (g')^2$ であることを示せ。これは長さの異なる弦について何を意味するか。

4. **レイリーの方法。** やや難 $f(x) = x(\pi - x) + \lambda x^2(\pi - x)^2$ とし、$\pi^2$ に対する評価ができるだけよくなるように $\lambda$ を選べ。（計算は重い。数式処理システムを使うとよい。）

## さらに学ぶために

- **T. W. Körner, *Fourier Analysis***（Cambridge University Press）。フーリエ級数とその応用について、ケンブリッジの解析学者が書いた、すばらしく話題豊富な本である。
- **Hardy, Littlewood & Pólya, *Inequalities***（Cambridge University Press）。第7章でウィルティンガーの不等式とその仲間を論じている。
- **Richard Feynman, *The Feynman Lectures on Physics***、第II巻第19章（「The principle of least action」、最小作用の原理）。積分の最小化についてのファインマン（Feynman）の講義で、全編を通して物理的直観に満ちている。オンラインで無料で読める。

# 3.8 加法定理から関数を決める

**問題**

**STEP III 2019、問 2**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip`

## 導入

$e^x$ とは何なのか、どうすればわかるだろうか。学校では、複利（compound interest）を通して導入されたり、自分自身が導関数（derivative）となる関数として導入されたり、$\lim(1+x/n)^n$ として導入されたりする。この問題は別の答えを与える。$e^{kx}$ は、加法を乗法に変える、すなわち $\mathrm{f}(x+y)=\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y)$ を満たす**唯一の**微分可能な関数なのである。この規則と、ただ一つの数 $\mathrm{f}'(0)$ だけで、関数は完全に決まってしまう。

後半では、もっと奇妙な規則 $\mathrm{g}(x+y)=\frac{\mathrm{g}(x)+\mathrm{g}(y)}{1+\mathrm{g}(x)\mathrm{g}(y)}$ について同じことを行う。この式に見覚えがあるとしたら、それは当然である。これは特殊相対性理論（special relativity）におけるアインシュタイン（Einstein）の速度の合成則で、光速を 1 としたものなのである。この規則から必然的に導かれる関数は tanh であり、そのことから、なぜどんなものも光速を超えて加速できないのかが説明される。

## 取りかかる前に

$\mathrm{f}(x+y)=\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y)$ のように、未知のものが関数であるような等式を**関数方程式**（functional equation）という。

? **考えてみよう** この等式は**すべての** $x$ と $y$ について成り立つ。まず試してみるべき最も有用なことは何だろうか。

特殊な値である。$y=0$ とおく（あるいは $x=y$ や $y=-x$ とおく）と、手間をかけずに多くの情報が得られることが多い。前半も後半も、そこから始まる。

## 順を追って解く

### 段階 1　零での値

$x = y = 0$ とおくと $f(0) = f(0)^2$ となるので、$f(0) = 0$ または $1$ である。

> **考えてみよう**　$f(0) = 0$ だとすると、何がまずいのだろうか。

$f(0) = 0$ ならば、$y = 0$ とおくと、すべての $x$ について $f(x) = f(x)f(0) = 0$ となる。すると $f$ は恒等的に零となり、$f'(0) = 0$ であるが、これは $f'(0) = k \neq 0$ に矛盾する。よって $f(0) = 1$ である。 ■

### 段階 2　零での微分係数からすべての点での導関数へ

> **考えてみよう**　$(*)$ において $f(x+h) = f(x)f(h)$ と書き換えよ。極限の外に出せるものは何だろうか。

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} = f(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - 1}{h} \\
&= f(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = f(x)\, f'(0) = k\, f(x). \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

関数方程式のおかげで、$0$ の近くでの振る舞いを他のあらゆる点へ運ぶことができるのである。

### 段階 3　$f' = kf$ を解く

$u(x) = f(x)e^{-kx}$ を考える。すると $u'(x) = \big(f'(x) - kf(x)\big)e^{-kx} = 0$ であるから $u$ は定数であり、$u(0) = f(0) = 1$ である。したがって

$$
f(x) = e^{kx}. \qquad \blacksquare
$$

（変数分離（separation of variables）により $\int \frac{df}{f} = \int k\,dx$ としても同じ答えが得られるが、そのためには $f(x) \neq 0$ が必要である。$u$ を使う工夫なら、その心配がない。）

### 段階 4　第二の規則

> **考えてみよう**　$g$ についての規則で $y = 0$ とおけ。そこから $g(0)$ について何がわかるだろうか。$|g(x)| < 1$ はどこで効いてくるのだろうか。

$y = 0$ とおくと $g(x)\big(1 + g(x)g(0)\big) = g(x) + g(0)$ となり、これを整理すると $g(0)\big(g(x)^2 - 1\big) = 0$ となる。$|g(x)| < 1$ であるから括弧の中が零になることはな

く、よって $\mathrm{g}(0)=0$ である。

> **手を止めて、やってみよう** では、規則を用いて $\mathrm{g}(x+h)-\mathrm{g}(x)$ を計算し、整理してから $h$ で割り、$h\to 0$ とせよ。

$$\mathrm{g}(x+h)-\mathrm{g}(x)=\frac{\mathrm{g}(x)+\mathrm{g}(h)-\mathrm{g}(x)-\mathrm{g}(x)^2\mathrm{g}(h)}{1+\mathrm{g}(x)\mathrm{g}(h)}=\frac{\mathrm{g}(h)\bigl(1-\mathrm{g}(x)^2\bigr)}{1+\mathrm{g}(x)\mathrm{g}(h)}.$$

$h$ で割る。$h\to 0$ のとき $\frac{\mathrm{g}(h)}{h}=\frac{\mathrm{g}(h)-\mathrm{g}(0)}{h}\to \mathrm{g}'(0)=k$ であり、また $\mathrm{g}(h)\to \mathrm{g}(0)=0$ である（微分可能な関数は連続（continuous）である）から、分母は 1 に収束する。したがって

$$\mathrm{g}'(x)=k\bigl(1-\mathrm{g}(x)^2\bigr). \qquad \blacksquare$$

### 段階 5 これを解く

> **考えてみよう** 変数を分離せよ。$|g|<1$ において導関数が $\frac{1}{1-g^2}$ となる関数は何だろうか。

$|\mathrm{g}|<1$ であるから割り算ができて、$\dfrac{\mathrm{g}'}{1-\mathrm{g}^2}=k$ となる。関数 $\operatorname{artanh} g=\frac{1}{2}\ln\frac{1+g}{1-g}$ の導関数は $\frac{1}{1-g^2}$ であるから、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{artanh}\mathrm{g}(x)=k$ であり、$\operatorname{artanh}\mathrm{g}(x)=kx+C$ となる。$\mathrm{g}(0)=0$ より $C=0$ であるから

$$\mathrm{g}(x)=\tanh kx. \qquad \blacksquare$$

確認：加法定理 $\tanh(A+B)=\dfrac{\tanh A+\tanh B}{1+\tanh A\tanh B}$ は、与えられた規則そのものである。

## 振り返り

- **まず特殊な値を。** $y=0$ とおくことで $\mathrm{f}(0)$ と $\mathrm{g}(0)$ が求まった。
- **一点からすべての点へ。** 加法法則によって 0 での微分係数をすべての $x$ へ運び、関数方程式を微分方程式（differential equation）に変えた。
- **一意性（uniqueness）。** この議論は、$e^{kx}$ と $\tanh kx$ がうまくいくことを確かめるだけではない。それらが**唯一の**可能性であることを示しているのである。関数方程式が定義になりうるのは、このためである。

## 背後にある数学

### 相対性理論における速度

日常生活では、列車が速さ $u$ で走っていて、その中を前向きに速さ $v$ で歩けば、地面に対する速さは $u+v$ である。アインシュタインは 1905 年に、これが近似にすぎないことを示した。$c$ を光速とすると、正しい規則は

$$u \oplus v = \frac{u+v}{1+uv/c^2}.$$

である。速さを $c$ に対する割合で測れば、これはまさに g の規則である。ここで得た結果は、各速度を $v=\tanh\phi$ と書けば、速度の合成は $\phi$ を**足し合わせる**ことになる、ということを意味している。量 $\phi=\operatorname{artanh} v$ を**ラピディティ**（rapidity）という。ロケットエンジンによる一回ごとの加速はラピディティを一定量だけ増やすが、すべての $\phi$ について $\tanh\phi<1$ であるから、速度は光速にどんどん近づくものの、決して到達しない（図 3.8.1）。$0.9c$ と $0.9c$ を合成すると、$1.8c$ ではなく $\frac{1.8}{1.81}c\approx 0.9945c$ になる。

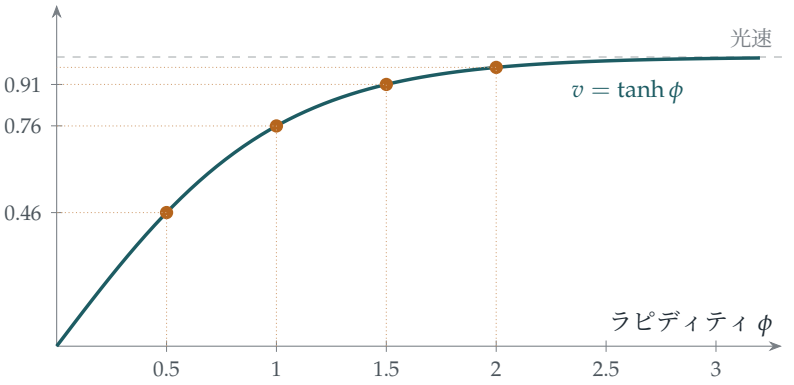



**図 3.8.1**　ラピディティに対する速度（光速に対する割合）。ラピディティを等しい幅で増やす（エンジンによる等しい加速がもたらすのはまさにこれである）と、速度の増加はどんどん小さくなる：0.46, 0.76, 0.91, 0.96, …となり、決して 1 には達しない。

### コーシーの関数方程式

最も単純な関数方程式は $f(x+y)=f(x)+f(y)$ であり、1821 年にコーシー（Cauchy）が研究した。f が微分可能ならば、この問題の方法によって $f(x)=kx$ が示される。実は連続性だけで十分である。しかし、正則性の仮定を一切置かなければ、まったく異

様な別の解が存在し、そのグラフは平面全体に稠密に散らばっている。ハメル（Georg Hamel）は 1905 年にそれらを構成した。その構成には**選択公理**（axiom of choice）が必要であり、そうした解のどれ一つとして具体的に書き下すことはできない。問題が f の微分可能性を強く求めている理由の一つはここにある。この仮定は形式的なものではないのである。

### 準同型

$f(x+y) = f(x)f(y)$ は、f が実数の加法を正の実数の乗法に変え、両者の構造を保つことを述べている。大学一年の代数の言葉でいえば、f は $(\mathbb{R}, +)$ から $(\mathbb{R}_{>0}, \times)$ への**群準同型**（group homomorphism）であり、対数関数はその逆写像である。数学における最も重要な関数の多くは、このように、それらが保つ構造によって特徴づけられる。Section 7.6 では tanh の幾何学的な意味に出会う。tanh は「双曲角」（hyperbolic angle）を測るものであり、その加法定理は双曲的回転の合成から生じるのである。

## 思考のスキル

**関数をその性質によって定義する**

**式の代わりに、関数が従う規則によってその関数を記述し、その規則に従う関数がただ一つであることを証明する。**

数学者が exp, sin, cos をはじめとする多くの関数を考えるとき、しばしばこのように捉える。つまり式としてではなく、関数方程式や微分方程式のただ一つの解として捉えるのである。そうすることで、それらの計算の仕方だけでなく、なぜそれらが重要なのかがわかる。

## 次の一歩

1 **正接の規則。** g は微分可能で $g'(0) = k \neq 0$ であり、両辺が定義されるときには常に $g(x+y) = \dfrac{g(x)+g(y)}{1-g(x)g(y)}$ が成り立つとする。$g'(x) = k\bigl(1+g(x)^2\bigr)$ を示し、$x = 0$ の近くで $g(x) = \tan kx$ であることを導け。

2 **コーシーの方程式。** f が微分可能で、すべての $x, y$ について $f(x+y) = f(x)+f(y)$ が成り立つならば、$f(x) = kx$ であることを示せ。

3 **導関数を使わずに。** やや難 $f(x+y)=f(x)f(y)$ と $f(1)=a>0$ だけを仮定する。正の整数 $n$ について $f(n)=a^n$ であることを示し、次に $f(1/n)=a^{1/n}$ を示し、さらにすべての正の有理数 $q$ について $f(q)=a^q$ であることを示せ。（これより先に進むには、なぜ連続性が必要なのだろうか。）

4 **ロケット科学。** あるロケットは、噴射するたびに、その時点での自分の座標系に対して速さを $0.5c$ だけ増やすことができる。静止状態から始めて、2回、3回、4回噴射した後の（出発点に対する）速さはいくらか。ラピディティを用いよ。

## さらに学ぶために

- **Christopher Small, *Functional Equations and How to Solve Them*** (Springer)。『関数方程式とその解き方』。問題を解く人に向けた、読みやすい入門書である。
- **Edwin Taylor & John Wheeler, *Spacetime Physics*** (W. H. Freeman)。『時空の物理学』。特殊相対性理論への古典的な入門書で、全体を通してラピディティを用いている。
- **Tom Körner, *Calculus for the Ambitious*** (Cambridge University Press)。『意欲ある人のための微積分』。指数関数や三角関数をその性質から定義しており、まさにこの節の精神に沿った本である。

# 3.9 新しい関数を発明する

**問題**

**STEP II 2021、問 4**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

## 導入

$e^{-x} = 5x$ を解くことができるだろうか。電卓に入っているどの関数を使っても解けない。式変形をしても埒が明かない。$x$ が指数関数（exponential function）の中と外の両方に現れていて、どうしても分離できないのである。試行錯誤を重ねれば数値的な答えは得られるが、「公式」は存在しない。

本当にそうだろうか。この問題は大胆な一歩を踏み出す。ある種の方程式が既知の関数では解けないならば、それを解く**新しい関数を発明すればよい**というのである。これはまさに、数学者たちが $\sqrt{x}$（$x^2$ の逆関数）、$\ln x$（$e^x$ の逆関数）、$\arcsin x$ について行ってきたことである。ここで登場する新しい関数は $xe^x$ の逆関数（inverse function）であり、現在では**ランベルトの $W$ 関数**（Lambert W function）と呼ばれている。この関数を手にすれば、$x^x = 10$ から物理法則に至るまで、驚くほど多様な方程式を厳密に解くことができる。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 方程式を「解く」とは、実際にはどういう意味だろうか。$x = \sqrt{2}$ は $x^2 = 2$ の解なのだろうか、それとも単に解に付けた名前にすぎないのだろうか。

その両方である。$\sqrt{2}$ は「平方すると 2 になる正の数」に付けた名前である。これを答えとして認めるのは、関数 $\sqrt{\ }$ がよく理解されており、計算が容易で、その性質が知られているからである。ある答えが「公式」とみなされるかどうかは、どの関数に名

前を付けることに合意しているかによって決まる。この問題は、そのリストに関数をもう一つ加えるのである。

## 順を追って解く

### 段階 1　曲線 $y = xe^x$

$\frac{dy}{dx} = e^x + xe^x = (1+x)e^x$ であり、これが 0 になるのは $x = -1$ のときだけで、そのとき $y = -e^{-1}$ である。導関数（derivative）は $x < -1$ で負、$x > -1$ で正であるから、これは最小値（minimum）である。

> **考えてみよう**　$x \to +\infty$ のとき、また $x \to -\infty$ のとき、$xe^x$ はどうなるだろうか。曲線は座標軸とどこで交わるだろうか。

$x \to \infty$ のとき $xe^x \to \infty$ である。$x \to -\infty$ のとき、指数関数的な減衰が一次関数的な増大に勝つので、$xe^x \to 0$ であり、下側から近づく。曲線は原点を通る。したがって曲線は、負の $x$ 軸のすぐ下から現れ、最小点 $(-1, -\frac{1}{e})$ まで下がり、その後 $(0,0)$ を通って上昇し、急激に上へ伸びていく（図 3.9.1）。

### 段階 2　逆関数

逆関数をもつためには f は単射（one-to-one）でなければならないので、狭義単調増加（strictly increasing）または狭義単調減少（strictly decreasing）である範囲に制限しなければならない。右側の部分を含むそのような最大の区間は $[-1, \infty)$ であるから、$a = -1$ である。$[-1, \infty)$ において f は $-\frac{1}{e}$ から $\infty$ まで増加するので、逆関数 g は $[-\frac{1}{e}, \infty)$ 上で定義され、$g(-\frac{1}{e}) = -1$ から増加し、$g(0) = 0$ を通り、ゆっくりと増大する（$x$ が大きいところでは $\ln x$ よりもさらにゆっくりである）。そのグラフは $y = xe^x$ の右側の部分を直線 $y = x$ に関して対称移動したものであり、$(-\frac{1}{e}, -1)$ において鉛直な接線（vertical tangent）をもつ。

g を特徴づける性質は

$$g(z)\, e^{g(z)} = z, \qquad g(z) \geq -1.$$

である。したがって (iii) のどの小問でも方針は同じである。方程式を (何か) $e^{(\text{同じ何か})} =$ (ある数) の形に変形すればよい。

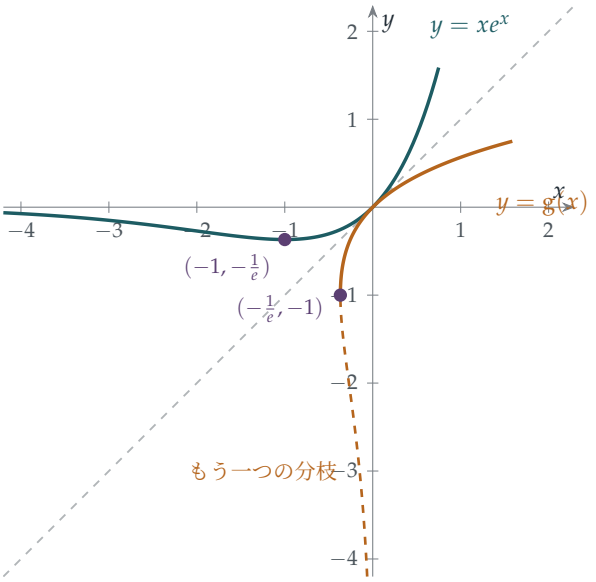



**図 3.9.1**　曲線 $y = xe^x$（青緑）は $(-1, -\frac{1}{e})$ で最小値をとる。$x \geq -1$ に制限して $y = x$ に関して対称移動すると、逆関数 g（琥珀色、実線）、すなわちランベルトの W 関数が得られる。琥珀色の破線は $y = xe^x$ の左側の部分を対称移動したものであり、小問 (iii) の二つ目の解に必要となる第二の分枝（branch）である。

### 段階 3　四つの方程式

**(a)** $e^{-x} = 5x$。両辺に $e^x$ を掛けて 5 で割ると $xe^x = \frac{1}{5}$ となる。よって $x = g\left(\frac{1}{5}\right) \approx 0.169$ である。$xe^x$ は $x < 0$ で負であるから解はすべて正であり、$xe^x$ は $x > 0$ で増加するので、これが唯一の解である。

**考えてみよう**　(b) と (c) では、未知数は $x \ln x$ の形で現れる。どのような置換（substitution）をすれば $x \ln x$ を $ue^u$ の形に変えられるだろうか。

$x = e^u$ とおくと、$\ln x = u$ であり、$x \ln x = ue^u$ となる。

**(b)** $2x \ln x + 1 = 0$ は $ue^u = -\frac{1}{2}$ となる。しかし、すべての実数 $u$ に対して $ue^u \geq -\frac{1}{e} \approx -0.368$ であり、$-\frac{1}{2} < -\frac{1}{e}$ である。したがって**実数解は存在しない**。

**(c)** $3x \ln x + 1 = 0$ は $ue^u = -\frac{1}{3}$ となり、$-\frac{1}{e} < -\frac{1}{3} < 0$ である。高さ $-\frac{1}{3}$ の水平な直線は、$u = -1$ における最小点の両側で一回ずつ、すなわち**二回** $y = ue^u$ と交わる。右側の解は $u = g\left(-\frac{1}{3}\right)$ であり、

$$x = e^{g(-1/3)} \approx 0.538.$$

を得る。もう一方の解は $u < -1 < g\left(-\frac{1}{3}\right)$ を満たし、$x = e^u$ は $u$ について増加するので、求めた解は二つのうち**大きいほう**である（もう一方はおよそ 0.220 である）。

**手を止めて、やってみよう** では (d) の $x = 3\ln x$ に挑戦してみよう（ヒント：両辺を指数の肩に乗せ、「何か」が $x$ の定数倍であるような (何か) $e^{\text{何か}}$ の形を目指す）。

**(d)** $x = 3\ln x$ は $e^{x/3} = x$ を意味するので $xe^{-x/3} = 1$ であり、両辺に $-\frac{1}{3}$ を掛けると

$$\left(-\frac{x}{3}\right) e^{-x/3} = -\frac{1}{3}.$$

となる。したがって $-\frac{x}{3}$ は、(c) で求めた $ue^u = -\frac{1}{3}$ の二つの解のどちらかである。g によって与えられるほうをとると、$x = -3\,\mathrm{g}\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 1.857$ である。もう一方の解は、もう一つの解 $u < \mathrm{g}(-\frac{1}{3})$ から得られ、より大きな $x = -3u$ を与える。したがって今度は、求めた解は二つのうち**小さいほう**である（もう一方はおよそ 4.536 である）。 ■

**段階 4** $x^x = 10$

対数をとると $x\ln x = \ln 10$ となる。$x = e^u$ とおくとこれは $ue^u = \ln 10$ となるので、$u = \mathrm{g}(\ln 10)$ であり、

$$x = e^{\mathrm{g}(\ln 10)} \approx 2.506.$$

である。$\mathrm{g}(z)e^{\mathrm{g}(z)} = z$ であるから、これを $x = \dfrac{\ln 10}{\mathrm{g}(\ln 10)}$ と書くこともできる。 ■

## 振り返り

- **足りない関数に名前を付ける。**方程式が既知の関数で解けないとき、新しい関数を逆関数として定義するのは正当な手段であり、しばしば見通しをよくしてくれる。
- **標準形に変形する。**(iii) と (iv) のすべての小問は、$x = e^u$ や $u = -\frac{x}{3}$ といった置換を用いることで、$ue^u =$ 定数 に帰着した。
- **グラフで解の個数を数える。**$ue^u = c$ の解が 0 個、1 個、2 個のいずれであるかは、$c$ が最小値 $-\frac{1}{e}$ に対してどこにあるかだけで決まる。

## 背後にある数学

### 長い歴史と新しい名前をもつ関数

ヨハン・ハインリッヒ・ランベルト（Johann Heinrich Lambert）は 1758 年にこの種の方程式を研究し、オイラー（Euler）は 1783 年にそれをさらに発展させた。しかしこの関数には、1990 年代になるまで標準的な名前がなかった。名前が必要になったの

は、数式処理システム（computer algebra system）Maple の開発者たちである。1996 年、Robert Corless、Gaston Gonnet、David Hare、David Jeffrey、そしてドナルド・クヌース（Donald Knuth）は、論文「On the Lambert W function」を発表し、この関数の性質と応用をまとめた。この論文は数千回引用され、W は現在ではほとんどの数学ソフトウェアに組み込まれている。問題中の関数 g は**主枝**（principal branch）$W_0$ である。図 3.9.1 の破線の曲線は (c) と (d) の二つ目の解を与えたものであり、もう一つの実数の分枝 $W_{-1}$ である。

---

### W が現れるところ

- **ウィーンの変位則（Wien's displacement law）。**高温の物体が最も強く放射する波長は、その温度に反比例する。その比例定数は $5(1-e^{-x}) = x$ を解くことで得られ、その正の解は $x = 5 + W(-5e^{-5}) \approx 4.965$ である。約 5800 K の太陽が黄白色に見え、より低温の赤色矮星が赤く見えるのはこのためである。
- **冪の塔（power tower）。**無限の冪の塔 $x^{x^{x^{\cdots}}}$ は $e^{-e} \le x \le e^{1/e}$ のとき収束（converge）し、その値は $\dfrac{W(-\ln x)}{-\ln x}$ である。
- **人口モデルと感染症モデル。**最も単純なモデルにおける感染症の最終規模や、いくつかの成長モデルにおいて人口が所定の値に達するまでの時間は、いずれも W によって与えられる。

### 初等関数

$W$ は本当に新しい関数なのだろうか。それとも exp、ln、累乗根、三角関数を用いて書き表せるのだろうか。答えは、本当に新しい関数である。1830 年代のリウヴィル（Joseph Liouville）にさかのぼる定理により、$W$ は**初等関数**（elementary function）ではないことが示される。同じ理論により、$\int e^{-x^2}\,dx$ のような一見何でもない積分も初等関数の範囲では計算できないことがわかる。正規分布（normal distribution）が独自の特殊関数を必要とするのはこのためである。

## 思考のスキル

### 解としての逆関数

方程式 $\mathrm{f}(x) = c$ は、f を単射になるように制限しさえすれば、$x = \mathrm{f}^{-1}(c)$ によって解ける。どの解が得られるかは、その制限の仕方によって決まる。

見た目の異なる多くの方程式が、実は同じ方程式の姿を変えたものである。共通の形を明らかにする置換を見つけることが、鍵となる一歩である。

## 次の一歩

1 **2 と 4、そしてもう一つ。** 方程式 $x^2 = 2^x$ には明らかな解 $x = 2$ と $x = 4$ がある（Section 3.5 と比較せよ）。この方程式には負の解もあり、それが

$$x = -\frac{2}{\ln 2}\,\mathrm{g}\left(\frac{\ln 2}{2}\right) \approx -0.767.$$

であることを示せ。

2 **導関数。** $\mathrm{g}(x)e^{\mathrm{g}(x)} = x$ を陰関数微分（implicit differentiation）することにより、$x \neq 0$ のとき

$$\mathrm{g}'(x) = \frac{\mathrm{g}(x)}{x\big(1 + \mathrm{g}(x)\big)}.$$

であることを示せ。$x = -\frac{1}{e}$ では何が起こるだろうか。

3 **積分。** 置換 $x = we^w$ を用いて、$\displaystyle\int_0^e \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x = e - 1$ を示せ。

4 **冪の塔。** 冪の塔 $T = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}$ が収束すると仮定して、$T = \sqrt{2}^{T}$ を示し、$T = 2$ または $T = 4$ であることを導け。どちらが正しいだろうか（数列 $t_1 = \sqrt{2}$, $t_{n+1} = \sqrt{2}^{t_n}$ の最初のいくつかの項を計算し、Section 2.2 のくもの巣図（cobweb diagram）について考えてみよ）。

## さらに学ぶために

- **Robert Corless et al., “On the Lambert W function”**, *Advances in Computational Mathematics* 5 (1996)。この関数に名前を与えた論文である。この節を学んだ後であれば、最初のいくつかの節は読むことができる。

- **Brian Hayes, “Why W?”**, *American Scientist* 93 (2005)。この関数の歴史と用途についての生き生きとしたエッセイ。オンラインで無料で読める。
- **Brian Conrad, “Impossibility theorems for elementary integration”**。リウヴィルの理論を解説した講義ノートで、オンラインで入手できる。上級者向け。

# 本章で学んだこと

本章は、$1 = 2$ の「証明」と三つの問いから始まった。議論が正しいことをどうすれば確かめられるか、不等式をどう証明するか、そして関数とは本当は何なのか、という問いである。ここでは、本章の九つの問題から何を学んだかをまとめる。

### 1. 議論が正しいことをどうすれば確かめられるか

Section 3.1 ではチェックリストを手に入れた。各段階で次の三つを問うのである。**計算は正しいか。その段階は論理的に導かれているか。何が明言されないまま仮定されているか。**そこで扱った誤りは典型的なものであった。二つの停留点（stationary point）での値を比べても、どちらが極大であるかについては何もわからない。無限区間上では、停留値は関数を上下から押さえる限界にはならない。微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）には連続な被積分関数（integrand）が必要である。そして議論は、偶然に「正しそうに見える」答えにたどり着くこともある。

同じ注意深さは本章の残りの部分にも通じていた。Section 3.7 では、仮定（hypothesis）$(f(0) = f(\pi) = 0)$を外すと不等式が成り立たなくなることを反例（counterexample）によって示した。Section 3.8 では、関数が微分可能（differentiable）であるという仮定が本質的であった。この仮定がなければ、コーシー（Cauchy）の関数方程式（functional equation）には、誰も書き下せないような奇妙な解が存在する。また Section 3.6 と Section 3.3 では、等号成立条件（equality condition）から、評価が最良であるかどうかがわかった。これこそ、注意深い数学者が必ず問う種類の問いである。

### 2. 不等式をどう証明するか

古典的な不等式にいくつもの方向から出会い、それらが互いにどう関係しているかを見た。

- **平方は非負である。**二数の相加・相乗平均の不等式（AM–GM）は、$(a-b)^2 \geq 0$ にほかならない。コーシーの前進・後退帰納法（forward–backward induction）は、ここから一般の場合を組み立てた（Section 3.2）。
- **凸性（convexity）。**上に凸（concave）な曲線は、その弦（chord）より上にある。この一つの事実からイェンゼン（Jensen）の不等式が得られ、対数に適用すれば相加・相乗平均の不等式が一行で導かれる。$\sin x$ に適用すれば三角形に関する鋭い不等

式が得られる（Section 3.3）。

- **面積。**曲線の下の面積とその横の面積を合わせると、長方形を覆う。ここからヤング（Young）の不等式が得られ、それがヘルダー（Hölder）の不等式やコーシー＝シュワルツ（Cauchy–Schwarz）の不等式へとつながる（Section 3.4）。
- **グラフの形。**$a^b$ と $b^a$ の比較を、$\frac{\ln x}{x}$ の二点での値の比較に書き直すことで、$\pi^e$ と $e^\pi$ の大小が決着した（Section 3.5）。
- **補間（interpolation）と三角不等式（triangle inequality）。**導関数を関数値で表し、項ごとに評価することで、二次式に対するマルコフ（Markov）の不等式が得られた（Section 3.6）。
- **テスト関数（test function）。**一般的な不等式を巧みに選んだ関数に適用することで、$\pi^2 \le 10$ と $\pi \le \frac{22}{7}$ が得られた（Section 3.7）。

これらの中からどれを選ぶかは、練習を重ねることで身につくスキルである。大まかな目安を挙げておく。積と和があれば相加・相乗平均の不等式を、関数値の平均があればイェンゼンの不等式を、関数とその逆関数（inverse function）があればヤングの不等式を考える。同じ形をした二つの式の比較であれば、その背後にある一つの関数を探すとよい。

### 3. 関数とは本当は何なのか

最後の二つの節は、この問いに二通りの仕方で答えた。Section 3.8 では、$e^{kx}$ と $\tanh kx$ はそもそも式で与えられたのではなかった。それらは、ある加法定理を満たす**唯一の**微分可能な関数として現れたのである。これは式よりも深い種類の理解である。なぜこれらの関数が、複利やアインシュタイン（Einstein）の速度の合成則のような場面に繰り返し現れるのかを説明してくれるからである。Section 3.9 ではさらに進んで、$xe^x$ の逆関数という新しい関数を**発明**した。手持ちの関数だけでは、自然に現れる方程式の族を解くのに足りなかったからである。電卓にあるどの関数も、かつては同じように新しいものだったのである。

### 4. 厳密さ（rigour）と不等式のための道具箱

| 手法 | 使った場面 |
|---|---|
| すべての段階とすべての仮定を確認する | もっともらしいが誤った議論（3.1） |
| 局所的な振る舞いと大域的な振る舞い | 停留点と無限遠での極限（3.1） |
| 前進・後退帰納法 | 相加・相乗平均の不等式（3.2） |
| 余分な項を補う | 相加・相乗平均の不等式（3.2、3.3） |
| イェンゼンの不等式 | 三角形、相加・相乗平均の不等式（3.3） |
| 面積の比較 | ヤングの不等式（3.4） |
| 変数を分離して一つの関数にまとめる | $\pi^e$ と $e^\pi$ の比較（3.5） |
| 三角不等式と等号成立の場合 | マルコフの不等式（3.6） |
| テスト関数 | $\pi^2 \leq 10$（3.7） |
| 関数方程式 | $e^x$ と $\tanh x$（3.8） |
| 逆関数と置換 | W 関数（3.9） |

### この先へ

- Section 3.7 で垣間見た変分法（calculus of variations）は、Section 4.7 の主題である。
- tanh とその加法定理の背後にある幾何学は、Section 7.6 で扱う。
- 第 4 章では、本章の注意深い姿勢を積分そのものに向け、積分とは実際に何であるかというところから出発する。

#### 大学入学前にさらに先へ進みたい人へ

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***：不等式への最良の入門書であり、全体が問題によって組み立てられている。
- **Daniel Velleman, *How to Prove It***：正しい証明の書き方を体系的に解説した手引きである。
- **Michael Spivak, *Calculus***：基礎から積み上げる厳密な微分積分学の本である。ケンブリッジの学生の多くが、入学前の夏に読んでいる。
- **E. A. Maxwell, *Fallacies in Mathematics***：どこが誤っているかを見抜く練習のための本である。

フォン・ノイマン（von Neumann）は、数学では物事を理解するのではなく、ただ慣

れるだけだと冗談を言った。これにはいくらかの真実がある。本章の厳密な定義や注意深い議論は、最初は奇妙に感じられるかもしれない。しかし、それに慣れることこそが、計算ができる学生を、確信をもてる数学者へと変えるのである。$1 = 2$ の証明にだまされることは、もう二度とないだろう。数学の学位課程の目標は、より微妙なあらゆる誤りを、それと同じくらい容易に見抜けるようにすることである。

# 「次の一歩」の解答

ここに載せるのは完全な解答ではなく、簡潔な答えとヒントである。結果と鍵となる手順を示しているので、自分の答案を確かめるのに使ってほしい。答えを見る前に、それぞれの演習問題にしっかり取り組むこと。

## 3.1 誤りを見抜け

1. $x$ が $-1$ から $1$ まで動くとき、$x$ は $0$ を通過し、そこでは $t = 1/x$ が定義されない。つまり、この置換（substitution）は区間上で連続（continuous）でない。正しくは $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$（$x = \tan\theta$ とおく）であり、一方 $\int_{-1}^{1} \frac{-t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$ である。

2. (a) 正しい。両辺の対数はともに $\ln a \ln b$ である。(b) 誤り。$\theta = 0$ のとき $\cos 0 = 1 \neq \sin 1$ である。（実際、$|\sin\theta \pm \cos\theta| \le \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$ であるから、両者が等しくなることはない。）(c) 誤り。定数でない多項式は有界でなく（unbounded）、また定数が $1$ と $-1$ の両方から $10^{-6}$ 以内にあることはできない。(d) 正しい。相加相乗平均の不等式（AM–GM）より $x^4 + x^{-4} \ge 2$ であり、等号は $x = 1$ のとき成り立つ。

3. $n = 1$ から $n = 2$ への段階が成り立たない。2 頭の馬では、「最初の 1 頭」と「最後の 1 頭」が重ならない。

4. $\int_{\varepsilon}^{1} x^{-1/2}\,dx = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \to 2$ であるから、対称性により積分は（極限として）存在し、その値は $4$ である。

## 3.2 相加・相乗平均を逆向きに

1. $a_1, \dots, a_{n-1}$ の平均が $A$、幾何平均（geometric mean）が $G$ であるとき、$n$ 番目の数として $A$ を加える。平均は $A$ のままなので $(G^{n-1}A)^{1/n} \le A$ となり、これから $G \le A$ が得られる。

2. この $n+1$ 個の数の平均は $1 + \frac{1}{n+1}$、幾何平均は $(1+\frac{1}{n})^{n/(n+1)}$ であり、すべてが等しいわけではないので、不等式は等号なしで成り立つ。両辺を $n+1$ 乗せよ。

3. 各面の面積は $ab, bc, ca$ であり、$S = 2(ab + bc + ca)$ である。相加相乗平均の不等式より $\frac{S}{6} \ge (abc)^{2/3} = V^{2/3}$ であり、等号は $ab = bc = ca$、すなわち立方体のと

きに成り立つ。

4. $1/a_i$ に相加相乗平均の不等式を用いると $\frac{1}{n}\sum \frac{1}{a_i} \geq \frac{1}{G}$ となる。両辺の逆数をとれ。

### 3.3 凸性の威力

1. $\mathrm{f}'' < 0$ ならば傾きは減少するので、曲線は各弦（chord）の上側にある。$t = \frac{1}{3}$ とすると、$\mathrm{f}\big(\frac{u+v+w}{3}\big) \geq \frac{1}{3}\mathrm{f}(u) + \frac{2}{3}\mathrm{f}\big(\frac{v+w}{2}\big) \geq \frac{1}{3}\big(\mathrm{f}(u) + \mathrm{f}(v) + \mathrm{f}(w)\big)$ である。

2. $(\ln \sin x)'' = -\operatorname{cosec}^2 x < 0$ であるから、$\ln \sin$ は $(0, \pi)$ で凹（concave）である。イェンセンの不等式（Jensen）より $\frac{1}{3}\ln(\sin A \sin B \sin C) \leq \ln \sin \frac{\pi}{3}$ となるので、積は高々 $\big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big)^3$ である。

3. $(0, \frac{\pi}{2})$ 上で $(\tan x)'' = 2\sec^2 x \tan x > 0$ である。イェンセンの不等式より $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\tan \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$ となる。

4. $(x^2)'' = 2 > 0$ である。イェンセンの不等式からこの不等式が得られ、これは分散（variance）$\frac{1}{n}\sum a_i^2 - \bar{a}^2$ が非負であることを表している。

### 3.4 不等式を証明する面積

1. $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上の $\mathrm{f} = \sin$ について、等号は $b = \mathrm{f}(a)$ のとき成り立つ。$a = \arcsin t$, $b = t$ とすると、$t \arcsin t = (1 - \cos(\arcsin t)) + \int_0^t \arcsin y \, \mathrm{d}y$ である。結果の右辺を微分すると $\arcsin t + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t$ となる。

2. $p = q = 2$ としたヤングの不等式（Young's inequality）より $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ である。$\sum a_i^2 = \sum b_i^2 = 1$ ならば、これらを足し合わせて $\sum a_i b_i \leq 1$ を得る。一般の場合は、これを $a_i / \sqrt{\sum a_j^2}$ と $b_i / \sqrt{\sum b_j^2}$ に適用すればよい。

3. $\int_0^a (e^x - 1)\,\mathrm{d}x = e^a - 1 - a$ および $\int_0^b \ln(1+y)\,\mathrm{d}y = (1+b)\ln(1+b) - b$ である。等号は $b = e^a - 1$ のとき成り立つ。

4. $t = 1$ のとき 1.571 対 1、$t = 2$ のとき 0.524 対 0.268、$t = 10$ のとき 0.1002 対 0.0501 である。$t$ が大きいとき、$t - \sqrt{t^2 - 1} = \frac{1}{t + \sqrt{t^2-1}} \approx \frac{1}{2t}$ である。この評価は $a = 0$ の場合から得られるもので、そのとき $(*)$ は単に $0 \leq \int_0^b \arcsin y \, \mathrm{d}y$ を述べているにすぎない。$b$ が小さいとき、この面積はおよそ $\frac{b^2}{2}$ であり、これは $b \arcsin b \approx b^2$ の半分であるから、これを捨てることで因子 2 を失うのである。

### 3.5 $\pi^e$ か $e^\pi$ か？

1. $n^m = m^n$ は $h(n) = h(m)$ を意味する。$h$ は $(1, e)$ で増加し、その後は減少するので、2つのうち一方は $e$ より小さい。それは 2 でなければならず（$h(1) = 0$ とい

う値は再びとられないから)、するともう一方は 4 である。よって、そのような組は $\{2,4\}$ のみである。

2. $e < 3 < \pi$ であり、そこで $h$ は減少するので $h(3) > h(\pi)$、すなわち $3^\pi > \pi^3$ である。$\frac{9}{4}$ と $\sqrt{5}$ はともに $e$ より小さく、$\frac{9}{4} > \sqrt{5}$ であるから $h(\frac{9}{4}) > h(\sqrt{5})$ となり、2 つ目が得られる。$1 < x < 2$ のとき、$3 < x+2 < 4$ であるから $h(x) < h(2) = h(4) < h(x+2)$ となり、$x^{x+2} < (x+2)^x$ である。最後に、$9^{\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}}$ および $\sqrt{2}^9 = 16\sqrt{2} = (2\sqrt{2})^3$ である。$e^2 < 8$ であるから $e < 2\sqrt{2} < 3$ であり、そこで $h$ は減少するので $h(2\sqrt{2}) > h(3)$ となる。これより $(2\sqrt{2})^3 > 3^{2\sqrt{2}}$ が得られ、$\sqrt{2}^9$ の方が大きい。

3. $e^{\pi/e-1} > \frac{\pi}{e}$ であるから $e^{\pi/e} > \pi$ である。両辺を $e$ 乗せよ。

### 3.6 傾きの上界

1. 両辺は $x = -1, 0, 1$ で一致する二次式(quadratic)であるから、等しい(ラグランジュ補間(Lagrange interpolation))。微分すると $\mathrm{f}(-1)(x-\frac{1}{2}) - 2\mathrm{f}(0)x + \mathrm{f}(1)(x+\frac{1}{2})$ が得られる。

2. $[-1,1]$ 上で $|\mathrm{f}'(x)| \le |x-\frac{1}{2}| + 2|x| + |x+\frac{1}{2}| \le 4$ であり、等号が成り立つのは $x = \pm 1$ のときに限られ、しかも $\mathrm{f}(1), \mathrm{f}(-1), -\mathrm{f}(0)$ がすべて 1 に等しいか、すべて $-1$ に等しいときに限られる。二次式はこれら 3 つの値で決まるので、$\pm(2x^2-1)$ が得られる。

3. $T_3(\cos\theta) = \cos 3\theta$ から $4x^3 - 3x$ が得られ、$T_3'(1) = 12 - 3 = 9$ である。$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$ から $T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$ が得られ、$T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$ である。

4. $-\sin\theta\, T_n'(\cos\theta) = -n\sin n\theta$ である。$\theta \to 0$ のとき $\frac{n\sin n\theta}{\sin\theta} \to n^2$ となる。

### 3.7 $\pi^2 \le 10$

1. $\int_0^\pi \mathrm{f}^2 = \frac{\pi^9}{630}$ および $\int_0^\pi (\mathrm{f}')^2 = \frac{2\pi^7}{105}$ であるから、$(*)$ より $\pi^2 \le 12$ が得られる。この四次式(quartic)は $\sin x$ と比べて両端付近では平らすぎ、中央では尖りすぎているので、大きさに対する傾きの比が最適な値から遠くなる。

2. $\int_0^\pi (\sin x + \sin 2x)^2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$(交差項の積分は 0 である)であり、$\int_0^\pi (\cos x + 2\cos 2x)^2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$ である。

3. $\mathrm{g}(x) = \mathrm{f}(\pi x/L)$ とおく。左辺は $\frac{L}{\pi}$ 倍になり、$\int(\mathrm{g}')^2$ は $\frac{\pi}{L}$ 倍になる。弦の振動では、最低振動数は $\frac{1}{L}$ に比例する。すなわち、弦の長さを半分にすると音の高さ(振動数)は 2 倍になる。

4. 評価 $\pi^2 \le \int(\mathrm{f}')^2 / \int \mathrm{f}^2$（適切な単位で）は $\lambda \approx 1.133/\pi^2$ で最小となり、$\pi^2 \le 9.86975$ が得られる。真の値は 9.86960 である。

### 3.8 加法定理から関数を決める

1. $x = y = 0$ とおくと $\mathrm{g}(0) = 0$ が得られる。$y$ について微分して $y = 0$ とおくと $\mathrm{g}'(x) = k(1 + \mathrm{g}(x)^2)$ となるので、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan \mathrm{g}(x) = k$ であり、$\mathrm{g}(x) = \tan kx$ である。

2. $y$ について微分すると $\mathrm{f}'(x + y) = \mathrm{f}'(y)$ となるので、$\mathrm{f}'$ は定数 $k$ である。また $\mathrm{f}(0) = 0$ である（$x = y = 0$ とおく）。

3. $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x/2)^2 \ge 0$ であり、f が 0 になることはない（もしそうなれば、至るところで 0 になる）。数学的帰納法（induction）より $\mathrm{f}(n) = a^n$ である。$\mathrm{f}(1/n)^n = \mathrm{f}(1) = a$ と $\mathrm{f}(1/n) > 0$ から $a^{1/n}$ が得られ、さらに $\mathrm{f}(m/n) = \mathrm{f}(1/n)^m$ である。連続性がなければ、無理数における値には何の制約もない。実際、「ハメル基底（Hamel basis）」を用いて構成される、$a^x$ ではない奇妙な解が存在する。

4. 1 回の噴射ごとにラピディティ（rapidity）$\phi = \operatorname{artanh} \frac{1}{2}$ が加わるので、$k$ 回噴射した後の速さは $\tanh k\phi = \frac{3^k - 1}{3^k + 1}$ である。すなわち $0.8c$、$\frac{13}{14}c \approx 0.929c$、$\frac{40}{41}c \approx 0.976c$ となる。

### 3.9 新しい関数を発明する

1. $x = -1$ のとき $x^2 - 2^x = \frac{1}{2} > 0$ であり、$x = 0$ のときこれは $-1$ である。よって負の解が存在する。$x = -2u/\ln 2$ とおくと、$x^2 = 2^x$ は（$x < 0$ であるから $x = -2^{x/2}$ として）$ue^u = \frac{\ln 2}{2}$ となる。よって $u = \mathrm{g}\left(\frac{\ln 2}{2}\right)$ であり、$x \approx -0.7667$ である。

2. $\mathrm{g}' e^{\mathrm{g}}(1 + \mathrm{g}) = 1$ であり、$e^{\mathrm{g}} = x/\mathrm{g}$ である。$x = -\frac{1}{e}$ のとき $\mathrm{g} = -1$ であり、傾きは無限大である（グラフはそこで垂直になる）。

3. $x = we^w$ とおくと $\mathrm{d}x = (1 + w)e^w \,\mathrm{d}w$ であり、$w$ は 0 から 1 まで動く。よって $\int_0^1 w(1 + w)e^w \,\mathrm{d}w = \left[(w^2 - w + 1)e^w\right]_0^1 = e - 1$ である。

4. $T = \sqrt{2}^T$ は $\frac{\ln T}{T} = \frac{\ln 2}{2}$ を意味するので、$T = 2$ または 4 である。項 $1.414, 1.633, 1.761, \ldots$ は増加し、2 未満にとどまる（$t_n < 2$ ならば $t_{n+1} < \sqrt{2}^2 = 2$）ので、$T = 2$ である。不動点（fixed point）4 は反発的（repelling）である。

章

# 4

# きちんと学ぶ微分積分学

積分は解析学・幾何学・数論が出会う場所であり、数学で最も美しい公式のいくつかが住む場所である。

**この章の内容**


| | | |
|---|---|---|
| **4.1** | 積分とは何か？ | STEP III 1989 |
| **4.2** | 積分から三角関数を構成する | STEP III 2017 |
| **4.3** | 22/7 は $\pi$ より大きい | STEP I 1997 |
| **4.4** | ウォリス、ベータ、そして二分の一の階乗 | STEP II 1995 |
| **4.5** | 2 年生の夢 | STEP III 2009 |
| **4.6** | 公式で表せない積分 | STEP III 2016 |
| **4.7** | 変分法 | STEP III 2014 |
| **4.8** | 球形のパンを切る | STEP I 2001 |
| **4.9** | ホールディッチの定理 | STEP III 2011 |
| **A** | 演習問題の答え | p. 329 |

# 原始関数にとどまらない積分

> 導関数をもたない関数という嘆かわしい災いから、私は恐怖と戦慄をもって目を背ける。
>
> — シャルル・エルミート（Charles Hermite）、1893 年の書簡より

高校生に積分（integration）とは何かと尋ねれば、おそらく「微分（differentiation）の逆」という答えが返ってくるだろう。これは**微分積分学の基本定理**（fundamental theorem of calculus）と呼ばれるすばらしい事実であり、学校で出会う積分の大半を型どおりの計算にしてくれる。しかしこれは積分についての定理であって、積分の定義ではない。そして、積分を面白くしているものの大部分を覆い隠してしまっている。

積分は微分よりもおよそ二千年古い。アルキメデス（Archimedes）は、導関数を考えた者がまだ誰もいなかったはるか昔に、薄い切片を足し合わせることで放物線の弓形の面積や球の表面積を求めた。また、積分は微分には届かない場所にまで及ぶ。まともな関数であれば機械的な規則で微分できるが、ほとんどの関数は式の形で積分することが**できない**。すると自然な疑問が生じる。どのようなときに積分でき、できないときにはどうすればよいのか。積分は新しい関数を定義し、数どうしの不等式を証明し、ほかに記述のしようがない面積や体積を計算し、無限和や無限積（infinite product）の正確な値を与える。本章はこれらすべてを扱う。

### 積分とは本当は何か

本章は出発点、すなわち定義から始める（Section 4.1）。積分とは薄い長方形の和の極限である。原始関数（antiderivative）を使わずにこの定義から $\int_0^a x^5\,\mathrm{d}x$ を計算するだけでもかなりの仕事であり、それによって基本定理のありがたみがわかる。精密な定義が得られると、精密な問いが生まれる。どのような関数が可積分（integrable）なのか。その答えと、そこから生じた問題が、20 世紀初頭にルベーグ（Lebesgue）の積分論を生み、これが現代の確率論の基礎となった。

### ものを証明する積分

本章で最も驚くべき結果のいくつかは、面積とは何の関係もなさそうな事実を積分を使って証明するものである。正の関数のある一つの積分が $\frac{22}{7} - \pi$ に等しく、これにより $\pi < \frac{22}{7}$ が一行で証明される（Section 4.3）。$\sin t$ のべきからは、$\pi$ についてのウォ

リス（Wallis）の無限積と、$\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ という値が導かれる（Section 4.4）。$x^x$ の積分は和 $\sum(-1)^{n+1}n^{-n}$ に姿を変える（Section 4.5）。そしてただ一つの積分 $\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ を用いて、三角法を一から組み立てることができる（Section 4.2）。

### 大学で出会うもの

大学 1 年の**解析学**（Analysis）の講義では、積分の定義から出発して微分積分学の基本定理をきちんと証明する。その後の講義はいくつかの方向へ発展していく。**測度論**（measure theory）と**ルベーグ積分**（Lebesgue integral）は、積分と極限の相性をよくし、確率論の土台となる。**ベクトル解析**（vector calculus）では曲線・曲面・立体上で積分を行い、グリーン（Green）の定理やストークス（Stokes）の定理がそれらを結びつける（Section 4.9 でその一端を味わえる）。**複素解析**（complex analysis）は、複素平面を経由する回り道によって実積分を計算する。**変分法**（calculus of variations）は、どの関数が積分の値を最小にするかを問い（Section 4.7）、物理学における最小作用の原理（principle of least action）へとつながる。そして**微分代数**（differential algebra）は、そもそもどの積分が式で表せるのかを説明する（Section 4.6）。

### 本章を貫く問い

**三つの大きな問い**

1. **積分とは何か。また、どのような関数が積分をもつのか。**和の極限としての定義は、原始関数とどのように結びつくのか。
2. **積分によって何が証明できるのか。**面積から、$\pi$ について、階乗について、無限和について、どのようにして何かがわかるのか。
3. **式が存在しないとき、何ができるのか。**積分が式で表せないことをどのようにして知り、それでも何を計算できるのか。

## 本章で扱う考え方

| § | 主題 | 考え方 |
|---|---|---|
| 4.1 | 積分の定義 | 下和と上和（lower and upper sums）、望遠鏡和（telescoping） |
| 4.2 | $\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ から作る三角法 | 積分を保つ置換 |
| 4.3 | $\frac{22}{7} > \pi$ | 正の量の積分として表した不等式 |
| 4.4 | ウォリスと $\left(\frac{1}{2}\right)!$ | 漸化式（reduction formula）、不変量（invariant）、はさみうち（squeeze） |
| 4.5 | $\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x$ | 級数展開（series expansion）と項別積分（term-by-term integration） |
| 4.6 | 式で表せない積分 | 多項式の代数による不可能性の証明 |
| 4.7 | 変分法 | 積分の中での平方完成（completing the square） |
| 4.8 | アルキメデスの帽子箱定理（hat-box theorem） | 被積分関数（integrand）を簡単にすると幾何が見えてくる |
| 4.9 | Holditch の定理 | 境界上の積分による面積、消去 |

## 本章の読み方

いくつかの節には、重いが型どおりの計算が含まれている。多項式の割り算、部分積分（integration by parts）、積の展開などである。本文を読む前に、これらを紙と鉛筆で自分の手で実行してみること。そのうえで、計算をうまくいかせた考え方、つまり不変量、対称性、打ち消し合いを探してほしい。計算は試験官が確かめるものであり、考え方はあなたが覚えていて再び使うものである。

# 4.1 積分とは何か？

**問題**

**STEP III 1989、問 10**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/89-s3-q10`

## 導入

読者は何年も積分を計算してきたはずである。$\int_0^a x^5\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}a^6$ であることも、「積分は微分の逆である」から知っている。しかしそれは定理であって、定義ではない。では、積分（integral）とは**そもそも**何なのか。

正直に答えれば、積分とは面積であり、細い長方形の面積の和の極限（limit）として定義されるものである。この問題では、その定義だけから積分を計算することが求められる。原始関数（antiderivative）も微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）も使わず、長方形を足し合わせて極限をとることしか許されない。これは予想以上に難しい。そしてまさにそのことが、この計算を簡単にしてくれる微分積分学の基本定理がいかに驚くべき結果であるかを物語っている。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 小問 (iii) の二つの和は、幅 $\frac{a}{n}$ の長方形の面積の和である。増加関数（increasing function）f について、どちらの和が曲線の下の面積を過小に見積もり、どちらが過大に見積もるか。

一つ目の和は、各帯の**左端** $x = \frac{ra}{n}$（$r = 0, \ldots, n-1$）での高さを用いている。増加関数ではこれが帯の中で最も低い点なので、長方形は曲線の下に収まる。これが**下和**（lower sum）である。二つ目の和は右端 $r = 1, \ldots, n$ を用いるので、長方形は曲線の上にはみ出す。これが**上和**（upper sum）である（図 4.1.1）。定義によれば、帯を細くしていったときに両方の和が同じ極限に近づくならば、積分が存在する。

$f(x) = x^5$ の場合、どちらの和にも $\sum r^5$ が現れる。小問 (i) と (ii) は、この和を上と下から評価するものである。

## 順を追って解く

### 段階 1　望遠鏡和

**考えてみよう**　連続する六つの整数の積を $P(r) = r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)$ とおく。$P(r) - P(r-1)$ はどうなるか。

$P(r)$ と $P(r-1) = (r-1)r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)$ は五つの因数 $r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)$ を共有しているので、

$$\begin{aligned} P(r) - P(r-1) &= r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)[(r+5) - (r-1)] \\ &= 6\,r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4). \end{aligned}$$

$r = 1$ から $n$ まで和をとると、右辺は隣り合う項が打ち消し合う望遠鏡和（telescoping sum）となり、$P(n) - P(0) = P(n)$ に帰着する。よって

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) = \tfrac{1}{6}P(n) = \tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5).$$

■

すべての $r \geq 1$ について $r^5 < r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)$ であるから、不等式（inequality）が従う。 ■

### 段階 2　下からの評価

**手を止めて、やってみよう**　段階 1 の方法を、下がっていく連続する五つの整数の積 $r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)$ に応用せよ。$r = 0$ から $n-1$ までの和を求め、$r^5$ と比較せよ。

$Q(r) = (r-5)(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r$ とおく。すると $Q(r+1) - Q(r) = (r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r[(r+1) - (r-5)] = 6\,(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r$ である。$r = 0$ から $n-1$ まで和をとると、打ち消し合って $Q(n) - Q(0) = Q(n)$ となるので、

$$\sum_{r=0}^{n-1} (r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r = \tfrac{1}{6}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n.$$

ここで項ごとに比較する。$r = 0$ のときは両辺とも 0 である。$1 \leq r \leq 4$ のときは積が 0 の因数を含むが、$r^5 > 0$ である。$r \geq 5$ のときはすべての因数が正で $r$ 以下であり、そ

のうちいくつかは真に小さいので、積は $r^5$ より小さい。$n>1$ であるから和には $r=1$ の項が含まれ、そこでは不等号が厳密に成り立つ。よって

$$\sum_{r=0}^{n-1} r^5 > \tfrac{1}{6}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n. \qquad \blacksquare$$

### 段階 3 積分

> **考えてみよう** $\mathrm{f}(x)=x^5$ に対する下和と上和を $\sum r^5$ を用いて表せ。分母には $n$ の何乗が現れるか。

$\mathrm{f}(x)=x^5$ のとき、

$$L_n=\sum_{r=0}^{n-1}\frac{a}{n}\left(\frac{ra}{n}\right)^5=\frac{a^6}{n^6}\sum_{r=0}^{n-1}r^5, \qquad U_n=\frac{a^6}{n^6}\sum_{r=1}^{n}r^5.$$

小問 (i) と (ii)、および $L_n<U_n$ より、

$$\frac{a^6}{6}\cdot\frac{(n-5)(n-4)\cdots n}{n^6} < L_n < U_n < \frac{a^6}{6}\cdot\frac{n(n+1)\cdots(n+5)}{n^6}.$$

二つの分数はいずれも、$\frac{n-3}{n}=1-\frac{3}{n}$ や $\frac{n+3}{n}=1+\frac{3}{n}$ のような六つの因数の積であり、各因数は 1 に収束（converge）する。よって外側の評価はどちらも $\frac{a^6}{6}$ に収束し、はさみうちの原理（squeeze theorem）により $L_n$ と $U_n$ も同じ値に収束する。両方の極限が存在して一致するので、定義により

$$\int_0^a x^5\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{6}a^6. \qquad \blacksquare$$

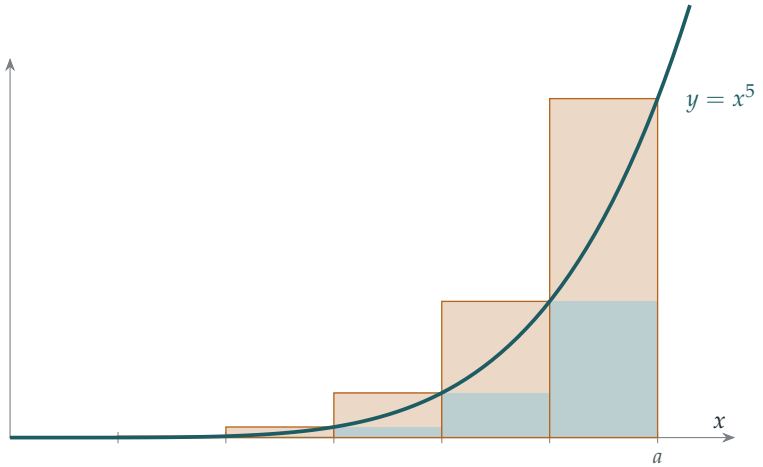



**図 4.1.1** $[0,a]$ 上の $x^5$ に対する、$n=6$ 本の帯による下和と上和。下和は青緑色の部分（曲線の下にある長方形）の面積であり、上和はそれに琥珀色の部分を加えたものである。両者の差はちょうど最後の最も高い長方形の面積 $\frac{a}{n}\mathrm{f}(a)$ に等しく、$n$ が大きくなると 0 に近づく。

## 振り返り

- **またしても望遠鏡和。**連続する整数の積の和は、第 2 章の和や積とまったく同じように打ち消し合って消えた。
- **評価してから、はさみうち。**$\sum r^5$ の正確な値（$\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$ である）は一度も求めなかった。両側からの評価だけで十分であった。
- **定義がすべてを担う。**原始関数はどこにも現れなかった。すべては、和の極限としての積分の定義から導かれた。

## 背後にある数学

### リーマンの定義

細い帯を足し合わせて面積を求めるという発想は、アルキメデス（Archimedes）にまでさかのぼる。彼は紀元前 250 年ごろ、まさにこの議論の一種によって放物線の下の面積を求めた。ニュートン（Newton）とライプニッツ（Leibniz）は積分を微分の逆として捉え直し、その後一世紀半にわたって、ほとんどの人はそのように積分を考えていた。1854 年、ベルンハルト・リーマン（Bernhard Riemann）は、今日でも大学の講義が出発点とする定義を与えた。$[a,b]$ を小さな区間に分割し、（幅）×（その区間内のどこかでの f の高さ）の和をつくり、区間を細かくしていったときにそのような和がすべて一つの極限に近づくならば、f は可積分（integrable）であるという。この問題での形、すなわち等幅の帯と左右の端点を用いるものは、増加関数に対して有効な特別な場合である。一般の場合は、ジャン＝ガストン・ダルブー（Jean-Gaston Darboux）の「上和と下和」によってすっきりと扱える。

### すべての関数が積分をもつわけではない

厳密な定義があれば、どのような関数が可積分であるかを問うことができる。閉区間上の連続関数（continuous function）はすべて可積分であり、増加関数もすべて可積分である。しかし、ディリクレ（Dirichlet）の関数、すなわち $x$ が有理数（rational number）ならば $f(x)=1$、無理数（irrational number）ならば 0 とする関数を考えてみよう。どれほど細い帯にも有理数と無理数の両方が含まれるので、上和はつねに 1、下和はつねに 0 となる。両者は決して一致せず、$\int_0^1 f$ はリーマンの意味では存在しない。1902 年、アンリ・ルベーグ（Henri Lebesgue）は、この関数も扱える（そのルベーグ積分は 0 である）うえに、極限操作に対してはるかに扱いやすい、より強力な積分を考案した。ルベーグ積分（Lebesgue integral）は現代の確率論（probability theory）

の基礎であり、大学の 2、3 年次で出会うことになる。

### 離散的な微分積分

段階 1 の望遠鏡和は、姿を変えた微分積分である。「上昇階乗」（rising factorial）$r(r+1)\cdots(r+k-1)$ は、和をとる操作に対して、$x^k$ が積分に対して振る舞うのとまったく同じように振る舞う。和をとると因数の個数が一つ増え、新しい因数の個数で割られる。これは $\int x^k\,\mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1}$ とちょうど対応している。和と積分、差分と導関数の間のこの類似は**差分法**（calculus of finite differences）と呼ばれ、和を計算するための強力な道具である。

## 思考のスキル

**定義から出発する**

「定義を用いて」何かを証明せよと言われたら、定義以外は何も使わないこと。証明しようとしている事柄に依存する定理も、使い慣れた近道も使わない。

これは意外なほど難しく、近道にどれほどの価値があるかをはっきりと教えてくれる。大学では、どの講義も最初の数週間はこのように進む。まず定義があり、次に、定義から直接議論しなくて済むようにしてくれる定理が続くのである。

## 次の一歩

1 **積分としての極限。** STEP III 1999、問 3（`step.maths.org/questions/99-s3-q3`）に挑戦せよ。この問題では和の極限を積分に書き換える。それぞれの和について、曲線の下にある長方形を見つけよ。

2 **アルキメデスの放物線。** $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ と小問 (iii) の定義を用いて、$\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}a^3$ を証明せよ。

3 **上昇階乗。** すべての正の整数 $k$ に対して $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r(r+1)\cdots(r+k-1) = \frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{k+1}$ が成り立つことを示せ。

4 **正確な和。** 恒等式 $r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) = r^5 + 10r^4 + 35r^3 + 50r^2 + 24r$ と、$k \le 4$ に対する $\sum r^k$ の既知の公式を用いて、$\sum_{r=1}^{n} r^5$ を正確に求めよ。

## さらに学ぶために

- **David Bressoud, *A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integration***（Cambridge University Press）。リーマン積分からルベーグ積分に至る物語を、各段階を必然とした問題を通して語る。
- **Michael Spivak, *Calculus***（Cambridge University Press）。第 13 章では、ここでの方法とまったく同じように、上和と下和によって積分を定義している。
- **Graham, Knuth & Patashnik, *Concrete Mathematics***（Addison-Wesley）。第 2 章では、上昇階乗と下降階乗（falling factorial）を用いて差分法を展開している。

# 4.2 積分から三角関数を構成する

**問題**

**STEP III 2017、問 6**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/17-s3-q6`

## 導入

$\pi$ とは何だろうか。学校では、円周の長さと直径の比が $\pi$ であり、sin と cos は三角形によって定義される。幾何学としてはそれで十分であるが、厄介な疑問が残る。曲線に沿った「長さ」とは正確には何なのか。なぜ $\sin x$ はあのようなマクローリン級数（Maclaurin series）をもつのか。加法定理（addition formula）が、図に描ける角だけでなくすべての角で成り立つことを、どうやって知るのか。

この問題は、まったく異なる入り口を示してくれる。三角形も円も忘れてしまおう。出発点はただ一つの積分 $\mathrm{T}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ であり、これに必要なのは Section 4.1 で扱った積分の定義だけである。$\pi$ を $2\mathrm{T}_\infty$ と定義する。そして置換（substitution）だけを用いて、$\mathrm{T}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ と $\mathrm{T}(\sqrt{2}-1) = \frac{\pi}{8}$ を証明する。これらは、$\arctan\sqrt{3} = 60^\circ$ および $\tan 22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{2}-1$ として知られている事実である。三角法を無から作り直すのである。

## 取りかかる前に

実は $\mathrm{T}(x) = \arctan x$ であり、$\mathrm{T}_\infty = \frac{\pi}{2}$ であることを、読者はひそかに知っている。問題はこの知識を使うことを禁じており、そこにこそ意味がある。すべてを積分から導かなければならないのである。とはいえ、ひそかな知識は有用な道しるべになる。

? **考えてみよう** 小問 (i) と (ii) は、それぞれどの三角関数の恒等式（identity）に対応しているだろうか。（$\arctan x + \arctan\frac{1}{x}$ と、$\tan(A+B)$ の公式を考えてみよ。）

小問 (i) は $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ である。小問 (ii) は加法定理 $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ が姿を変えたものである。すなわち、$u = \tan A$、$a = \tan B$ とおけば $v = \tan(A+B)$ となる。この問題では、これらの恒等式を幾何学を一切使わずに積分から証明する。

## 順を追って解く

### 段階 1　反転 $u \mapsto 1/u$

$\mathrm{T}(x)$ において $u = 1/w$ と置換する。すると $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}w/w^2$ であり、$\dfrac{1}{1+u^2} = \dfrac{w^2}{w^2+1}$ であるから、

$$\mathrm{T}(x) = \int_{\infty}^{1/x} \frac{w^2}{w^2+1} \cdot \left(-\frac{1}{w^2}\right) \mathrm{d}w = \int_{1/x}^{\infty} \frac{\mathrm{d}w}{1+w^2} = \mathrm{T}_{\infty} - \mathrm{T}(x^{-1}). \qquad \blacksquare$$

言い換えれば、$\frac{1}{1+u^2}$ のグラフの下の 0 から $x$ までの面積は、$\frac{1}{x}$ から $\infty$ までの面積に等しい（図 4.2.1）。

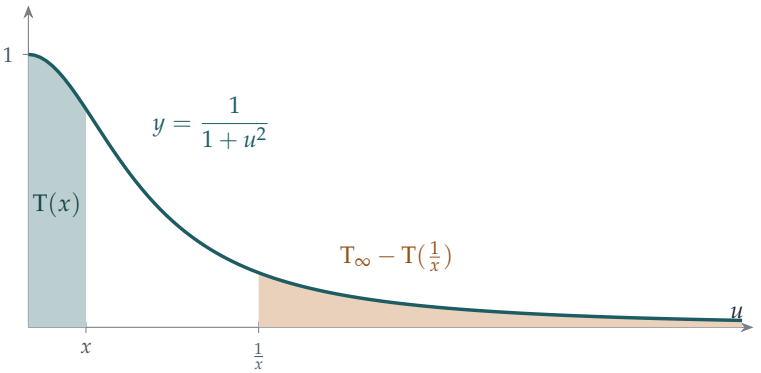



**図 4.2.1**　置換 $u = 1/w$ により、$\frac{1}{1+u^2}$ のグラフの下にある二つの影をつけた部分の面積が等しいことがわかる。すなわち、0 から $x$ までの部分（青緑）と、$\frac{1}{x}$ から先へ無限に延びる部分（琥珀色）である。ここでは $x = \frac{1}{2}$ としている。

### 段階 2　加法の置換

**考えてみよう**　$v = \dfrac{u+a}{1-au}$ を商の微分法（quotient rule）で微分せよ。次に $1+v^2$ を一つの分数として計算し、両者を比べよ。

$$\frac{dv}{du} = \frac{(1-au)+a(u+a)}{(1-au)^2} = \frac{1+a^2}{(1-au)^2},$$
$$1+v^2 = \frac{(1-au)^2+(u+a)^2}{(1-au)^2} = \frac{(1+a^2)(1+u^2)}{(1-au)^2}.$$

割り算をすると、$\dfrac{1+v^2}{1+u^2} = \dfrac{1+a^2}{(1-au)^2} = \dfrac{dv}{du}$ である。 ■

**考えてみよう** これは $\dfrac{du}{1+u^2} = \dfrac{dv}{1+v^2}$ ということである。つまり、置換 $u \mapsto v$ は被積分関数（integrand）をまったく変えない。では、$\mathrm{T}(x)$ の積分区間の端はどうなるだろうか。

$u$ が 0 から $x$ まで動くとき（$x < \frac{1}{a}$ とする。このとき区間全体で $1-au>0$ であり、$v$ は連続かつ増加する）、$v$ は $a$ から $\frac{x+a}{1-ax}$ まで動く。したがって

$$\mathrm{T}(x) = \int_0^x \frac{du}{1+u^2} = \int_a^{(x+a)/(1-ax)} \frac{dv}{1+v^2} = \mathrm{T}\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) - \mathrm{T}(a). \quad ■$$

### 段階 3 さらに二つの恒等式

小問 (i) と二回組み合わせると、

$$\mathrm{T}(x^{-1}) = \mathrm{T}_\infty - \mathrm{T}(x) = \mathrm{T}_\infty - \mathrm{T}\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) + \mathrm{T}(a) = 2\mathrm{T}_\infty - \mathrm{T}\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) - \mathrm{T}(a^{-1}). \quad ■$$

ここで文字を置き換える。$y = 1/x$、$b = 1/a$ とおく。条件 $x < 1/a$ は $1/y < b$、すなわち $y > 1/b$ となり、

$$\frac{x+a}{1-ax} = \frac{1/y + 1/b}{1 - 1/(by)} = \frac{b+y}{by-1}.$$

よって $\mathrm{T}(y) = 2\mathrm{T}_\infty - \mathrm{T}\left(\dfrac{y+b}{by-1}\right) - \mathrm{T}(b)$ である。 ■

### 段階 4 特殊値

**手を止めて、やってみよう** 最後の恒等式において、引数 $\frac{y+b}{by-1}$ が $y$ 自身に等しくなるように $y$ と $b$ を選べ。何が得られるだろうか。

$y = b = \sqrt{3}$ とする。このとき $y > \frac{1}{b}$ であり、$\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{3-1} = \sqrt{3}$ である。恒等式は $\mathrm{T}(\sqrt{3}) = 2\mathrm{T}_\infty - 2\mathrm{T}(\sqrt{3})$ となるので、

$$\mathrm{T}(\sqrt{3}) = \tfrac{2}{3}\mathrm{T}_\infty. \quad ■$$

**考えてみよう**　$\sqrt{2}-1$ については、加法の恒等式で $x=a=\sqrt{2}-1$ としてみよ。$\frac{2x}{1-x^2}$ はいくつになるか。また、$\mathrm{T}(1)$ はいくつか。

$x=a=\sqrt{2}-1$ とすると（$x^2=3-2\sqrt{2}<1$ であるから $x<\frac{1}{a}$ が成り立つ）、加法の恒等式により $2\mathrm{T}(x)=\mathrm{T}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ となる。ここで $1-x^2=2\sqrt{2}-2=2(\sqrt{2}-1)=2x$ であるから $\frac{2x}{1-x^2}=1$ であり、$2\mathrm{T}(\sqrt{2}-1)=\mathrm{T}(1)$ を得る。最後に、小問 (i) で $x=1$ とすると $\mathrm{T}(1)=\mathrm{T}_\infty-\mathrm{T}(1)$ となるから、$\mathrm{T}(1)=\frac{1}{2}\mathrm{T}_\infty$ である。したがって

$$\mathrm{T}(\sqrt{2}-1)=\tfrac{1}{4}\mathrm{T}_\infty. \qquad \blacksquare$$

## 振り返り

- **被積分関数を保つ置換。**鍵となる二つのステップでは、どちらも $\frac{du}{1+u^2}$ を変えない置換を用いた。動いたのは積分区間の端だけである。積分のこのような「対称性」は強力な道具である。
- **不動点。**$\mathrm{T}(\sqrt{3})$ の値は、ある式がそれ自身に等しくなるような数を選ぶことで得られた。こうして恒等式が方程式に変わったのである。
- **定義は解析学から得られる。**三角形は一度も使わなかったが、それでも $\frac{\pi}{3}$ と $\frac{\pi}{8}$ を導き出せた（$\pi$ は $2\mathrm{T}_\infty$ として定義した）。

## 背後にある数学

### 初等関数を構成する

厳密な解析学の講義では、関数 exp、sin、cos、ln の存在を単に仮定することはできない。それらは**構成**されなければならず、その性質も証明されなければならない。標準的な方法は三つある。冪級数（power series）によって定義する方法（$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots$）。演習問題にある 1986 年の見本問題のように、微分方程式（differential equation）の解として定義する方法（$\mathrm{f}'=\mathrm{f}$、$\mathrm{f}(0)=1$ によって exp が定まる）。あるいは、ここで行ったように、逆関数（inverse function）を積分で定義する方法である。すなわち $\ln x=\int_1^x\frac{du}{u}$、$\arctan x=\int_0^x\frac{du}{1+u^2}$ とし、そのうえで $\pi=2\int_0^\infty\frac{du}{1+u^2}$ と定義する。どの方法にもそれぞれの長所があり、これらがすべて同じ関数を与えることを証明するのは、やりがいのある演習である。Section 3.8 の関数方程式（functional equation）による方法と比べてみよ。

### 円を越えて：楕円積分

積分による方法は、三角形による方法では不可能な形で一般化できる。1718 年、ジュリオ・ファニャーノ（Giulio Fagnano）は 8 の字形の曲線である**レムニスケート**（lemniscate）の弧長（arc length）を研究した。これは $\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}}$ に帰着する。ファニャーノは、ちょうど我々の置換が T を 2 倍にしたように、弧を 2 倍にする置換を発見した。1751 年にファニャーノの研究を読んだオイラー（Euler）は完全な加法定理を見いだし、これがやがてアーベル（Abel）とヤコビ（Jacobi）を経て、**楕円関数**（elliptic function）の理論へとつながった。楕円関数とはこのような積分の逆関数であり、sin と cos が円に対してもつ役割を、レムニスケートに対して果たすものである。同じ積分には、ガウス（Gauss）の算術幾何平均（AGM）に関する研究（Section 2.6）でも出会った。楕円関数は今日、数論（number theory）の中心にある。Section 1.9 の楕円曲線（elliptic curve）は、その幾何学的な影である。

### $\pi$ を計算する

加法の恒等式は、$\pi$ を計算するための最も有名な公式群の基礎でもある。これを繰り返し適用すると、たとえば $\mathrm{T}(1) = 4\mathrm{T}(\frac{1}{5}) - \mathrm{T}(\frac{1}{239})$ が示される。これが 1706 年のマチン（Machin）の公式である。級数 $\mathrm{T}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ と組み合わせることで、この公式は $\pi$ の 100 桁を与え、その後 2 世紀半にわたって最良の方法であり続けた。これが Section 5.1 の主題である。

## 思考のスキル

#### 積分の対称性

**被積分関数を変えない置換を探せ。それらは、その積分が定める関数についての恒等式に変わる。**

ここでは $u \mapsto 1/u$ と $u \mapsto \frac{u+a}{1-au}$ が $\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ を保ち、それぞれ反転の公式と加法定理を与える。同じ考え方をほかの積分に適用したものが、特殊関数（special functions）の理論の根底にある。

## 次の一歩

1 **指数関数と余弦関数。** STEP II Specimen paper、問 6（`step.maths.org/questions/spec-s2-q6`）に挑戦せよ。この問題は、指数関数と余弦関数の加法定理を、それ

らの微分方程式だけから導く。（**ヒント：**余弦関数については、0 になるはずの二つの組合せを見つけ、それらの平方の和が一定であることを示せ。）

2 **逆正弦関数。**STEP III 2007、問 7（`step.maths.org/questions/07-s3-q7`）に挑戦せよ。この問題は、逆正弦関数（inverse sine）をこの節の積分と同じように扱い、置換によって両者を結びつける。

3 **初期のマチン型公式。**加法の恒等式を用いて、$\mathrm{T}(\frac{1}{2}) + \mathrm{T}(\frac{1}{3}) = \mathrm{T}(1) = \frac{1}{2}\mathrm{T}_\infty$ を示せ。

4 $\mathrm{T}_\infty$ **は有限である。**すべての $x \geq 1$ に対して $\mathrm{T}(x) \leq 1 + \int_1^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2} < 2$ であることを示し、$0 < x < 1$ に対しても $\mathrm{T}(x) < 2$ となる理由を説明せよ。さらに、単調収束定理（monotone convergence theorem）（Section 2.2）から $\mathrm{T}_\infty$ が存在することを導け。

## さらに学ぶために

- **Tom Körner, *Calculus for the Ambitious***（Cambridge University Press）。初等関数を厳密に構成し、さまざまな方法について論じている。
- **Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis***（McGraw-Hill）。邦訳『現代解析学』。有名な「baby Rudin」である。第 8 章の序論では、冪級数から exp、sin、cos をわずか数ページで見事に構成している。上級向け。
- **Victor Prasolov & Yuri Solovyev, *Elliptic Functions and Elliptic Integrals***（American Mathematical Society）。レムニスケートがどこへつながっていくのかを知りたい人に。上級向け。

# 4.3 22/7 は $\pi$ より大きい

**問題**

**STEP I 1997、問 6**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/97-s1-q6`

## 導入

何世代にもわたって、生徒たちは $\pi$ は「だいたい $\frac{22}{7}$」だと教わってきた。これは非常によい近似（approximation）である。実際、$\frac{22}{7} = 3.142857\ldots$、$\pi = 3.141592\ldots$ である。では、$\frac{22}{7}$ は大きすぎるのか、それとも小さすぎるのか。そして、誰かが計算してくれた $\pi$ の数字の並びを単に調べるのではなく、それを**証明**できるだろうか。

この問題は、数学全体の中でも最も美しい証明の一つを与えてくれる。正の関数の積分はただ一つで、それゆえ正でなければならないが、その値がちょうど $\frac{22}{7} - \pi$ に等しいことがわかるのである。被積分関数（integrand）が正であるから積分も正であり、したがって $\frac{22}{7} > \pi$ となる。証明全体はわずか数行に収まり、あまりに鮮やかなので、数学 T シャツのパズルとして登場するほどである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** なぜ $\int_0^1 \frac{\text{多項式}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ から $\pi$ が出てくるのだろうか。この形の簡単な積分のうち、それ単独で $\pi$ を与えるものはどれか。

$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ である。多項式（polynomial）を $1+x^2$ で割ると、多項式の商（積分すると有理数（rational number）になる）と、定数の余り（remainder）を $1+x^2$ で割ったもの（積分すると $\pi$ の有理数倍になる）の和が得られる。問題の最初の部分は、まさにこの割り算を行うことを求めている。

## 順を追って解く

### 段階 1　多項式の割り算

まず展開する。$(1-x)^4 = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4$ であるから、

$$x^4(1-x)^4 = x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4.$$

> **考えてみよう**　筆算による割り算か係数比較（comparing coefficients）によって、$x^2+1$ で割れ。余りは何か。

$(a_6x^6 + \cdots + a_0)(x^2+1) + b$ の係数を高次の項から比較すると、$a_6 = 1$、$a_5 = -4$、$a_4 + a_6 = 6$ より $a_4 = 5$、$a_3 + a_5 = -4$ より $a_3 = 0$、$a_2 + a_4 = 1$ より $a_2 = -4$、$a_1 + a_3 = 0$ より $a_1 = 0$、$a_0 + a_2 = 0$ より $a_0 = 4$、そして最後に $a_1 = 0$（$x$ の係数）と $a_0 + b = 0$ より $b = -4$ となる。すなわち、

$$x^4(1-x)^4 = (x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4)(x^2+1) - 4.$$

### 段階 2　積分

$1 + x^2$ で割ると、

$$\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2},$$

であるから、

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{7} - \frac{4}{6} + \frac{5}{5} - \frac{4}{3} + 4 - 4\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 4 - \pi.$$

ここで $-\frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -2$ であるから、有理数の部分は $\frac{1}{7} + 3 = \frac{22}{7}$ となり、積分の値は $\frac{22}{7} - \pi$ である。 ■

### 段階 3　積分の評価

> **考えてみよう**　被積分関数は $(0,1)$ で正であるから、直ちに $\frac{22}{7} > \pi$ が得られる。$\pi$ の下界（lower bound）を得るには、積分の上界が必要である。$[0,1]$ において $\frac{1}{1+x^2}$ はどこまで大きくなりうるか。

$[0,1]$ において $1 \le 1 + x^2 \le 2$ であるから、

$$\tfrac{1}{2}x^4(1-x)^4 \le \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} \le x^4(1-x)^4,$$

であり、端点を除いて狭義の不等号が成り立つ。

**手を止めて、やってみよう** $\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x$ を計算し、証明を完成させよ。

展開式を項別に積分すると、

$$\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9} - \frac{4}{8} + \frac{6}{7} - \frac{4}{6} + \frac{1}{5} = \frac{1}{630}.$$

（公分母 2520 で通分すると、$280 - 1260 + 2160 - 1680 + 504 = 4$ であり、$\frac{4}{2520} = \frac{1}{630}$ となる。）したがって、

$$0 < \frac{22}{7} - \pi < \frac{1}{630},$$

すなわち $\frac{22}{7} > \pi > \frac{22}{7} - \frac{1}{630}$ である。 ■

数値的には $\frac{22}{7} - \frac{1}{630} = 3.14127\ldots$ であるから、$3.1412 < \pi < 3.1429$ が証明されたことになる。さらに左側の不等式も用いると $\frac{1}{1260} < \frac{22}{7} - \pi$ となり、上界は $\pi < 3.14207$ に改善される。

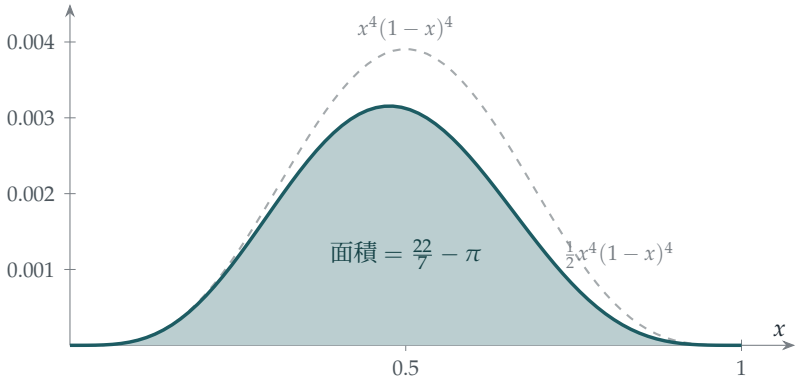



**図 4.3.1** 被積分関数 $\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}$（青緑）は正であるが非常に小さく、その最大値は約 0.003 である。網掛け部分の面積はちょうど $\frac{22}{7} - \pi \approx 0.00126$ である。被積分関数は $\frac{1}{2}x^4(1-x)^4$（点線）と $x^4(1-x)^4$（破線）の間にあり、それらの面積はそれぞれ $\frac{1}{1260}$ と $\frac{1}{630}$ である。

## 振り返り

- **正値性が不等式を証明する。** 正の関数の積分は正である。積分が $\frac{22}{7} - \pi$ であるとわかった時点で、不等式は直ちに従った。
- **小さな被積分関数、鋭い評価。** 因子 $x^4(1-x)^4$ は $[0,1]$ 上で非常に小さく（高々 $\frac{1}{256}$）、そのため積分は小さくなり、評価も鋭くなる。
- **有理数と $\pi$ の倍数の和。** Section 2.9 と同様に、「有理数 + 定数の有理数倍」という形の積分が小さければ、その定数のよい有理数近似が得られる。

## 背後にある数学

### 歴史をもつ証明

アルキメデス（Archimedes）は紀元前 250 年頃、円に内接および外接する 96 角形の周の長さを計算することによって $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ を証明した（Section 2.5 の多角形と比較せよ）。積分による証明はずっと新しい。これは D. P. Dalzell によって 1944 年に発表され、1968 年にアメリカの学部生向けのパットナム数学競技会（Putnam competition）で問題として出題されたことで有名になった。その魅力は、数値計算をまったく必要としない点にある。不等式 $\frac{22}{7} > \pi$ は、正の関数の積分は正であるという事実からおのずと導かれるのである。

### 同じ考え方によるさらによい近似

この方法は一般化できる。$x^4(1-x)^4$ の代わりに $x^8(1-x)^8$ を用いると、同様の割り算により

$$\int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 4\pi - \frac{188684}{15015},$$

が得られ、これから $\pi > \frac{47171}{15015} = 3.1415917\ldots$ が証明される。これは有効数字（significant figures）6 桁まで正しい。2009 年に Stephen Lucas は、被積分関数が非負であるこの種の積分の族を見いだし、有効数字 7 桁まで正しい $\frac{355}{113}$ を含む、他の有名な近似についての不等式を証明した。

### 近似と無理性

なぜ $\pi$ は $\frac{22}{7}$ や $\frac{355}{113}$ のような非常によい分数近似をもつのだろうか。すべての無理数（irrational number）には、それとの差が $\frac{1}{q^2}$ 以内である分数 $\frac{p}{q}$ が無限に多く存在する。そして $\pi$ の場合は、その連分数（continued fraction）$[3;7,15,1,292,\ldots]$ が大きな項 292 を含むため、たまたま早い段階で格別によい近似がいくつか現れるのである（Section 2.2 を参照）。この問題に現れるような積分をどんどん小さくしていくことは、ある数が分数によって**あまりよく近似できない**こと、したがって無理数であることを示す証明の出発点となる。アイヴァン・ニーヴン（Ivan Niven）による $\pi$ が無理数であることの有名な 1 ページの証明（1947 年）では、$\frac{x^n(1-x)^n}{n!}\sin(\pi x)$ の積分が用いられている。これは Section 2.9 に現れた積分の三角関数版である。

## 思考のスキル

### 不等式を正の関数の積分として表す

$A > B$ を証明するには、積分が $A - B$ となる正の関数を見つけよ。

これにより、不等式は一つの恒等式と一つの自明な事実に置き換わる。これは解析学で最も有用な技法の一つであり、積分の代わりに平方和を用いた同じ考え方によって、Section 3.2 では相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM）を証明した。

## 次の一歩

1. **数値を確かめる。** $\frac{22}{7} - \pi$ を有効数字 4 桁で計算し、それが $\frac{1}{1260}$ と $\frac{1}{630}$ の間にあることを確かめよ。

2. **ベータ積分。** 公式 $\int_0^1 x^n(1-x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$（Section 4.4 で証明した）を用いて、$\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{630}$ を確かめよ。

3. **下からの近似。**
$$\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \quad \text{および} \quad \int_0^1 \frac{x^2(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi - \frac{47}{15},$$
を示し、$\pi > 3$ および $\pi > \frac{47}{15}$ を導け。これらが $\frac{22}{7}$ より精度が低いのはなぜか。

4. **さらに進んで。** やや難 上に挙げた $\int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ に関する等式を確かめよ。（割り算は数式処理システムに任せてよい。要点は、余りが 16 となり、$4\pi$ が得られることを見ることである。）

## さらに学ぶために

- **Petr Beckmann, *A History of π*** (St Martin's Press)。『π の歴史』。アルキメデスの多角形による方法の詳細をはじめ、多くの話題を扱う。
- **Stephen Lucas, "Approximations to π derived from integrals with nonnegative integrands"**, *American Mathematical Monthly* 116 (2009)。非負の被積分関数をもつ積分から導かれる π の近似についての論文。短く読みやすい。
- **Ivan Niven, *Irrational Numbers*** (Mathematical Association of America)。『無理数』。π が無理数であることのニーヴンによる証明を収録している。

# 4.4 ウォリス、ベータ、そして二分の一の階乗

**問題**

**STEP II 1995、問 4**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/95-s2-q4`

## 導入

$\left(\frac{1}{2}\right)!$ とは何だろうか。これは無意味な問いに聞こえる。$n!$ は $1 \times 2 \times \cdots \times n$ を意味するのであって、「半分の個数」の項を掛け合わせることなどできないからである。ところが、自然な答えが存在し、それは

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

である。$\pi$ はどこから現れるのか。この問題で扱う $\sin t$ の累乗の積分からである。その過程で、この問題は $\pi$ に関する最も古く、最も不思議な公式の一つ、すなわち 1655 年のジョン・ウォリス（John Wallis）による無限積（infinite product）

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots,$$

を証明する。さらに、確率論や統計学に携わる者なら誰もが使う $n!$ に関するスターリング（Stirling）の公式に隠れた定数も求める。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $u_0$ と $u_1$ はいくらか。また、$n$ が大きいとき、$[0, \frac{\pi}{2}]$ 上の $\sin^n t$ のグラフはおおよそどのような形をしているか。

$u_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ であり、$u_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t\,\mathrm{d}t = 1$ である。$n$ が大きいとき、$\sin^n t$ は、$\sin t$ が 1 に近い $t = \frac{\pi}{2}$ の付近を除いてきわめて小さい。グラフは右端に張りついた細

い尖りになるのである（図 4.4.1）。したがって、$n$ が大きくなるにつれて $u_n$ は小さくなる。この問題では、その減り方が正確に $\sqrt{\pi/(2n)}$ のようになることを示す。

## 順を追って解く

### 段階 1　漸化式を導く

**考えてみよう**　$\int \sin t \cdot \sin^{n-1} t \, dt$ を、$\sin t$ を積分し $\sin^{n-1} t$ を微分する形で部分積分（integration by parts）せよ。新しい被積分関数には $\cos^2 t$ が含まれる。どうすれば $\sin t$ の累乗に戻せるだろうか。

$dv = \sin t \, dt$（よって $v = -\cos t$）、$w = \sin^{n-1} t$（よって $w' = (n-1)\sin^{n-2} t \cos t$）とおくと、

$$u_n = \Big[-\cos t \sin^{n-1} t\Big]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} t \cos^2 t \, dt.$$

を得る。$n \geq 2$ のとき境界項は 0 である。$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ と書けば、積分は $u_{n-2} - u_n$ となるので、$u_n = (n-1)(u_{n-2} - u_n)$、すなわち

$$nu_n = (n-1)u_{n-2}. \qquad \blacksquare$$

である。両辺に $u_{n-1}$ を掛けると $nu_n u_{n-1} = (n-1)u_{n-1}u_{n-2}$ を得る。 $\blacksquare$

### 段階 2　不変量

**考えてみよう**　この関係式は、量 $nu_n u_{n-1}$ が $n$ を一つ減らしても変わらないことを述べている。$n = 1$ のとき、この量はいくらか。

これを繰り返し用いると、$nu_n u_{n-1} = (n-1)u_{n-1}u_{n-2} = \cdots = 1 \cdot u_1 u_0 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2}$ となる。よって、すべての $n \geq 1$ に対して $nu_n u_{n-1} = \frac{1}{2}\pi$ である。 $\blacksquare$

### 段階 3　はさみうち

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ のとき $0 < \sin t < 1$ であるから、$\sin^n t < \sin^{n-1} t$ が成り立つ。つまり、$\sin^n t$ のグラフは端点を除いて $\sin^{n-1} t$ のグラフの下側にある。積分すると $0 < u_n < u_{n-1}$ を得る。

**手を止めて、やってみよう**　$u_n < u_{n-1}$ と $nu_n u_{n-1} = \frac{1}{2}\pi$ を用いて、$nu_n^2$ をはさみ込め。

$u_{n-1}$ をより小さい $u_n$ で置き換えると $nu_n^2 < nu_n u_{n-1} = \frac{1}{2}\pi$ を得る。$u_n$ をより大きい

$u_{n-1}$ で置き換えると $\frac{1}{2}\pi = nu_n u_{n-1} < nu_{n-1}^2$ を得る。よって $nu_n^2 < \frac{1}{2}\pi < nu_{n-1}^2$ である。 ■

右側の不等式を $n$ の代わりに $n+1$ として適用すると $\frac{1}{2}\pi < (n+1)u_n^2$ となり、$nu_n^2 > \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2}\pi$ を得る。両者を合わせて

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{2}\pi < nu_n^2 < \frac{1}{2}\pi. \qquad \blacksquare$$

である。$\frac{n}{n+1} \to 1$ であるから、はさみうちの原理（squeeze theorem）により $nu_n^2 \to \frac{1}{2}\pi$ である。 ■

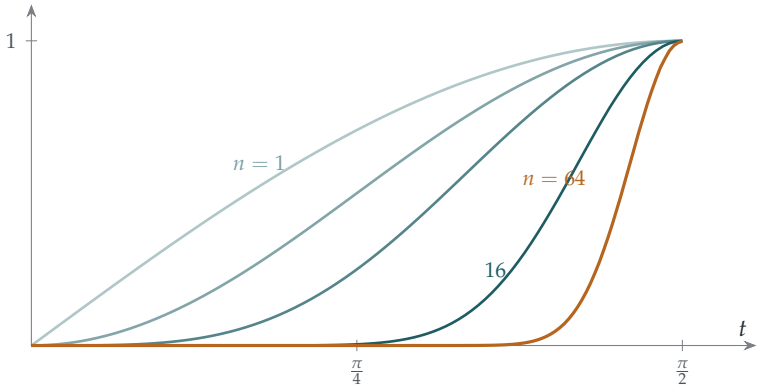



**図 4.4.1** $n = 1, 2, 4, 16, 64$ に対する $\sin^n t$ のグラフ。$n$ が大きくなるにつれて、曲線の下の面積 $u_n$ は小さくなり、$t = \frac{\pi}{2}$ の付近に集中する。この問題は $u_n \approx \sqrt{\pi/(2n)}$ であることを示す。$n = 64$ のとき、これは約 0.157 である。

## 振り返り

- **漸化式（reduction formula）。**部分積分によって $u_n$ が $u_{n-2}$ に帰着されたので、すべての $u_n$ は $u_0$ と $u_1$ から定まる。
- **不変量（invariant）を探せ。**積 $nu_n u_{n-1}$ は変わらなかった。Section 2.6 の算術幾何平均（AGM）の操作で積分が変わらなかったのと同じである。
- **単調性（monotonicity）と不変量を組み合わせると、はさみうちができる。**$u_n < u_{n-1}$ であることと $nu_n u_{n-1}$ の正確な値がわかっていたので、$nu_n^2$ を同じ極限をもつ二つの量の間にはさみ込むことができた。

## 背後にある数学

### ウォリスの積

漸化式を $u_0$ または $u_1$ までたどると、具体的な値が得られる：

$$u_{2m} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m}\cdot\frac{\pi}{2},\qquad u_{2m+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2m+1)}.$$

はさみうちにより $u_{2m}/u_{2m+1}\to 1$ がわかる。この比を書き下して整理すると、ウォリスの積

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty}\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{2m\cdot 2m}{(2m-1)(2m+1)}.$$

を得る。ジョン・ウォリスは 1655 年、大胆な補間（interpolation）の手法によってこれを見いだした。指数が整数である積分の表に当てはめることで、$\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}\,dx$ が「どうあるべきか」を推測したのである。これは、ヴィエト（Viète）の無限積（Section 2.5）に次ぐ、数学における最初期の無限積の一つであり、有理数のみを用いたものとしては最初のものであった。

### 半分の階乗

ウォリスの補間の考え方は、1729 年にオイラー（Euler）によって厳密なものとなった。彼は、現在**ガンマ関数**（*Gamma function*）と呼ばれる関数

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt,$$

を見いだした。この関数は $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$（部分積分による）を満たし、整数 $n$ に対しては $\Gamma(n+1) = n!$ となる。これは階乗（factorial）をすべての正の実数へなめらかに拡張するものである。これと密接に関係する**ベータ関数**（*Beta function*）

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

は、Section 4.3 や Section 2.9 の積分を含み、さらに置換 $x=\sin^2 t$ を行えば、ここでの $u_n$ も含む。特に $\int_0^1 x^{1/2}(1-x)^{1/2}\,dx = \frac{\pi}{8}$（演習 2）であり、これから $\Gamma(\frac{3}{2})^2/\Gamma(3) = \frac{\pi}{8}$、すなわち $\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ が得られる。同じことであるが、$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ である。これは有名なガウス積分（Gaussian integral）$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ と同じ事実であり、正規分布（normal distribution）の式に $\pi$ が現れる理由でもある。

### スターリングの公式

スターリングの公式（Stirling's formula）は $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$ であることを述べている。$(n/e)^n$ の部分は比較的容易に得られるが、定数 $\sqrt{2\pi}$ を求めるのはより難しい。その標準的な求め方がまさにこの問題である。$u_{2m}$ の具体的な値には $(2m)!/(m!)^2$ が含まれ、極限 $nu_n^2 \to \frac{\pi}{2}$ によってこの定数が確定するのである。確率論を経由して同じ定数に至るまったく別の道筋は、Section 12.23 にある。

## 思考のスキル

**積分から得られる漸化式**

部分積分を用いると、パラメータ $n$ をもつ積分を、より小さいパラメータをもつ同じ積分と関係づけられることが多い。そうして得られた漸化式（*recurrence*）は、解くこともできるし、$n \to \infty$ のときの振る舞いを調べることもできる。

漸化式によって変わらない量と、$n$ に関する単調性に注目せよ。この二つを組み合わせると、具体的な式がなくても極限が得られることが多い。

## 次の一歩

1 **ウォリスの積。** $u_{2m}$ と $u_{2m+1}$ の具体的な値、および $u_{2m+1} < u_{2m} < u_{2m-1}$ を用いて、ウォリスの積を証明せよ。

2 **ベータ積分。** STEP II 2013、問 2（`step.maths.org/questions/13-s2-q2`）に挑戦せよ。この問題では漸化式を用いて $\int_0^1 x^n(1-x)^n\,\mathrm{d}x$ を求め、そのうえで $n = \frac{1}{2}$ のときにその答えから何が示唆されるかを問う。半分の階乗を初めて垣間見ることになる。

3 **ベータ関数。** STEP III 2025、問 1（OCR が配布している 2025 年の過去問一式に収録、`www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip`）に挑戦せよ。この問題では一般のベータ積分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$ について、その対称性と漸化式を導き、それらを用いて $[0,\infty)$ 上の積分を求める。

4 **中心二項係数（central binomial coefficients）。** やや難 $u_{2m} = \binom{2m}{m}\dfrac{\pi}{2^{2m+1}}$ を示し、$nu_n^2 \to \frac{\pi}{2}$ を用いて、$m$ が大きいとき $\binom{2m}{m} \approx \dfrac{4^m}{\sqrt{\pi m}}$ となることを導け。$m = 10$ の場合にこれを確かめよ。

## さらに学ぶために

- **Julian Havil, *Gamma***（Princeton University Press）。ガンマ関数とその歴史を扱っている。
- **Philip J. Davis,「Leonhard Euler's integral: a historical profile of the Gamma function」**（オイラーの積分：ガンマ関数の歴史的概観）, *American Mathematical Monthly* 66 (1959)。受賞歴のある古典的な論文で、この節を学んだ後なら読みこなせる。
- **Emil Artin, *The Gamma Function***（Dover）。解析学をある程度学んだ後に読むとよい、短く美しいモノグラフである。

# 4.5 2年生の夢

**問題**

**STEP III 2009、問 8**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/09-s3-q8`

## 導入

誰でも遅かれ早かれ、$(a+b)^2 \neq a^2+b^2$ であることを学ぶ。この誤った等式は、冗談めかして「新入生の夢」（freshman's dream）と呼ばれている。この問題で証明するのは、同じくらい初心者の間違いのように見える次の等式である。

$$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots,$$

そしてその姉妹版 $\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ である。$x^x$ の積分が $n^{-n}$ の和に化ける。話がうますぎて本当とは思えない。だからこそ、これは**二年生の夢**（sophomore's dream）と呼ばれるのである。しかし、これは正しく、1697 年にヨハン・ベルヌーイ（Johann Bernoulli）が発見した。

証明には、大学で絶えず出会うことになる三つの考え方が使われる。指数関数と累乗を比べる極限（limit）、漸化式（reduction formula）、そして関数をべき級数（power series）に展開して項別に積分すること（term-by-term integration）である。

## 取りかかる前に

? **考えてみよう** 関数 $x^x$ は、$x=0$ では既知のどの式によっても定義されない（$0^0$ は定まらない）。$x$ が上から 0 に近づくとき、この関数はどのように振る舞うだろうか。電卓で $x=0.1$、$0.01$、$0.001$ を試してみよ。

$0.1^{0.1} \approx 0.794$、$0.01^{0.01} \approx 0.955$、$0.001^{0.001} \approx 0.993$ である。どうやら 1 に近づくようだ。

小問 (i) はこれを証明するものであり、これによって被積分関数（integrand）が 0 の近くで行儀よく振る舞い、積分が意味をもつことがわかる。$(0,1]$ における $x^x$ のグラフは 1 の近くから始まり、下がって最小値をとったあと、$x=1$ で 1 に戻る（図 4.5.1）。

## 順を追って解く

### 段階 1　累乗は対数に勝つ

**考えてみよう**　$x \to 0^+$ のとき $\ln x \to -\infty$ である。どのような置換をすれば、$x \to 0^+$ が $t \to \infty$ に変わり、$x^m (\ln x)^n$ が $e^{-mt} t^n$ のような形に変わるだろうか。

$x = e^{-t}$ とおく。$x \to 0^+$ のとき $t \to \infty$ であり、$\ln x = -t$ であるから、

$$x^m (\ln x)^n = e^{-mt}(-t)^n = (-1)^n e^{-mt} t^n \to 0.$$

言葉で言えば、$x \to 0$ のとき、$x$ の任意の正の累乗が 0 に近づく速さは、$\ln x$ の任意の累乗が発散する速さに勝る、ということである。 ■

$m = n = 1$ とすれば $x \ln x \to 0$ であり、指数関数（exponential function）は連続（continuous）であるから、$x^x = e^{x \ln x} \to e^0 = 1$ である。 ■

### 段階 2　漸化式

**考えてみよう**　$I_{n+1} = \int_0^1 x^m (\ln x)^{n+1}\,dx$ を部分積分（integration by parts）せよ。どちらの因子を積分すべきだろうか。$x=0$ における境界項（boundary term）はどうなるだろうか。

$x^m$ を積分し、$(\ln x)^{n+1}$ を微分すると、

$$I_{n+1} = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{(n+1)(\ln x)^n}{x}\,dx.$$

$x=1$ では $\ln 1 = 0$ であるから境界項は 0 である。$x \to 0$ のときは、小問 (i)（$m+1$ と $n+1$ を用いる）により 0 に収束する。残った積分は $\frac{n+1}{m+1} I_n$ であるから、

$$I_{n+1} = -\frac{n+1}{m+1} I_n. \qquad ■$$

$I_0 = \int_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{m+1}$ から始めて、この式を $n$ 回適用すれば、

$$I_n = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^n} \cdot \frac{1}{m+1} = \frac{(-1)^n\, n!}{(m+1)^{n+1}}. \qquad ■$$

### 段階 3 級数

**考えてみよう** $e^y$ の級数を用いて $x^x = e^{x\ln x}$ を展開せよ。各項はどのような形になるだろうか。$m$ をどの値にすれば小問 (ii) の積分が現れるだろうか。

すべての $y$ について $e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ であるから、

$$x^x = e^{x\ln x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n (\ln x)^n}{n!}.$$

**手を止めて、やってみよう** 小問 (ii) を $m = n$ として用い（$n = 0$ は別に扱う）、0 から 1 まで項別に積分せよ。何が得られるだろうか。

$n = 0$ の項は 1 であり、積分すると 1 になる。$n \geq 1$ については、小問 (ii) で $m = n$ とすると $\int_0^1 x^n (\ln x)^n \, dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$ となるので、第 $n$ 項の寄与は $\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ である。これらを足し合わせると、

$$\int_0^1 x^x \, dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots . \qquad \blacksquare$$

（$n = 0$ の項も同じパターン $\frac{1}{1^1}$ に当てはまる。）項は極めて速く小さくなる。7 項とれば、値 0.783430… が小数第 6 位まで得られる。

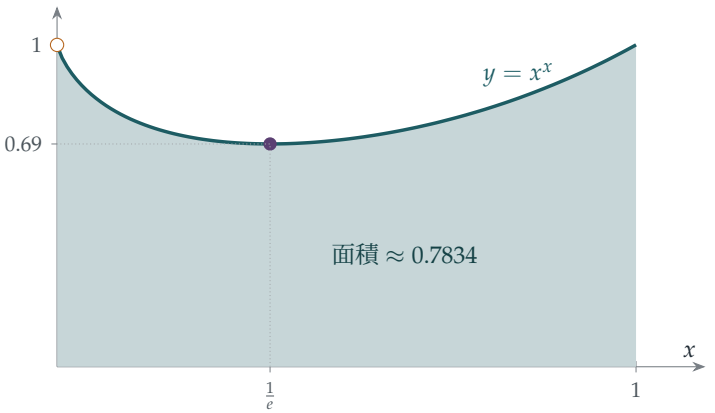



**図 4.5.1** $(0, 1]$ における $x^x$ のグラフ。$x \to 0$ のとき 1 に近づき（白丸）、$x = \frac{1}{e}$ で最小値 $e^{-1/e} \approx 0.692$ をとり、$x = 1$ で 1 に戻る。網かけ部分の面積は $\sum (-1)^{n+1} n^{-n} \approx 0.7834$ である。

## 振り返り

- **置換して増加の速さを比べる。** $x = e^{-t}$ とおくことで、0 における極限が、なじみのある $\infty$ における極限に変わった。

- **境界項は確認が必要である。**漸化式は $x = 0$ で境界項が消えることに依存しており、そこで小問 (i) が使われた。
- **級数にしてから積分する。**被積分関数をべき級数に展開して各項を積分することで、初等的な原始関数（antiderivative）をもたない積分が、速く収束する和に変わった。

## 背後にある数学

### 和と積分の交換

ステージ 3 では、無限和と積分をさりげなく交換した。すなわち $\int \sum = \sum \int$ である。これはいつでも許されるわけではない。大学では、これが成り立たない例や、どのようなときに安全かを述べる定理に出会うことになる。最も簡単な定理は、級数が**一様収束**（uniform convergence）するとき、すなわち級数の残りの部分をすべての $x$ で同時に小さくできるときには安全である、というものである。ここでは $(0,1]$ 上で $|x \ln x| \le \frac{1}{e}$ であるから、$x$ が何であっても、第 $n$ 項の大きさは高々 $\frac{e^{-n}}{n!}$ である。これらの上界の和は収束するので、残りの部分は一様に小さく、交換は正当化される。この議論は**ワイエルシュトラス**（*Weierstrass*）**の $M$ 判定法**（Weierstrass M-test）と呼ばれ、解析学の主力となる道具の一つである。

### なぜ「夢」が成り立つのか

この恒等式は特別である。$\frac{(x\ln x)^n}{n!}$ における累乗と、積分 $\int_0^1 x^n (\ln x)^n \, dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$ とがぴったり対応し、$n!$ が完全に打ち消し合うことに依存しているのである。その根底では、この積分は姿を変えたガンマ関数 (Gamma function) である。置換 $x = e^{-t/(n+1)}$ によって、これは $\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} \int_0^\infty t^n e^{-t} \, dt = \frac{(-1)^n \, \Gamma(n+1)}{(n+1)^{n+1}}$ となり、Section 4.4 とつながる。

### 名前の由来

「二年生の夢」という名前は、Jonathan Borwein とその共著者たちが 2004 年の著書 *Experimentation in Mathematics* の中で、「新入生の夢」$(a+b)^n = a^n + b^n$ と対をなすものとして名づけた。（興味深いことに、「新入生の夢」はある種の数の体系では正しい。素数 $p$ を法とする算術（arithmetic modulo a prime）では、中間の二項係数（binomial coefficient）がすべて $p$ で割り切れるので、$(a+b)^p = a^p + b^p$ が成り立つのである。）Borwein は**実験数学**（experimental mathematics）の先駆者であった。実験数学では、このような恒等式をコンピュータを使って発見し、そのあとで人の手で証明する。

## 思考のスキル

### 展開して項別に積分する

被積分関数が、各項を積分できるようなべき級数をもつならば、各項を積分して結果を足し合わせよ。

これは、初等的な原始関数をもたない積分を計算する強力な方法である。和と積分の交換が正当化されるかどうかを常に問うこと。たいていは正当化されるが、その理由を知っておくべきである。

## 次の一歩

1 **姉妹版。** $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \approx 1.2913$ を示せ。

2 **最小値。** $x^x$ は $(0,\infty)$ において $x = \frac{1}{e}$ で最小値 $e^{-1/e}$ をとることを示せ。

3 **何項必要か。** 項が減少する交代級数（alternating series）では、途中で打ち切ったときの誤差は、最初に省いた項よりも小さい。$\int_0^1 x^x\,dx$ の級数で小数第 6 位まで求めるには、何項必要だろうか。

4 **いとこ。** 同じ方法を用いて、$\displaystyle\int_0^1 x^2 \ln x\,dx = -\frac{1}{9}$ であること、および $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ であることを示せ。（Section 2.4 により、これは $-\frac{\pi^2}{6}$ である。）

## さらに学ぶために

- **Jonathan Borwein, David Bailey & Roland Girgensohn, *Experimentation in Mathematics***（A. K. Peters）。名前の出典であり、コンピュータによって発見された恒等式がほかにも数多く載っている。
- **William Dunham, *The Calculus Gallery***（Princeton University Press）。ニュートン（Newton）からルベーグ（Lebesgue）に至る解析学の傑作を集めた本で、ベルヌーイの業績も含まれている。
- **Mary Hart, *Guide to Analysis***（Palgrave）。一様収束と、和と積分を交換できる条件について明快に解説している。

# 4.6 公式で表せない積分

**問題**

**STEP III 2016、問 3**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/16-s3-q3`

## 導入

微分（differentiation）は機械的な作業である。規則があり、通常の部品から組み立てられた関数であれば、その規則を当てはめるだけで微分できる。積分（integration）はそうはいかない。どんな技法も受けつけない積分に出会い、自分の工夫が足りないだけなのかと悩んだ経験は誰にでもあるだろう。実は、その答えが「誰にも工夫のしようがない、なぜなら**公式が存在しない**からだ」ということもある。

この問題は、ある特別な場合についてそのことを証明する。積分 $\int \frac{e^x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ は面積としては確かに存在する。しかし、それを（有理関数（rational function））$\times e^x$ という形、すなわち部分積分（integration by parts）から予想される形に書くことはできない。何かを見つけるのではなく、何かが不可能であることを証明するというのは、それまでとは異なる、きわめて数学らしい営みである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $\int \mathrm{f}(x)e^x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}e^x + \mathrm{C}$ であるとすると、P と Q はどのような等式を満たさなければならないか。（右辺を微分してみよ。）

微分すると $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}e^x\right) = \dfrac{\mathrm{P'Q} - \mathrm{PQ'} + \mathrm{PQ}}{\mathrm{Q}^2}\,e^x$ となり、これが $\mathrm{f}(x)e^x$ に等しくなければならない。したがって、問題全体は多項式（polynomial）の恒等式（identity）

$$\mathrm{P'Q} - \mathrm{PQ'} + \mathrm{PQ} = \mathrm{f}\,\mathrm{Q}^2.$$

についての問題になる。積分についての問いが、多項式、すなわちその因数と次数についての問いに変わったのである。

## 順を追って解く

### 段階 1　因数 $x+1$

$\mathrm{f}(x)=\dfrac{x^3-2}{(x+1)^2}$ のとき、恒等式の両辺に $(x+1)^2$ を掛けると

$$(x+1)^2(\mathrm{P}'\mathrm{Q}-\mathrm{P}\mathrm{Q}'+\mathrm{P}\mathrm{Q})=(x^3-2)\,\mathrm{Q}^2. \tag{†}$$

**考えてみよう**　(†) に $x=-1$ を代入せよ。何が起こらなければならないか。

左辺は $x=-1$ で 0 である。右辺は $(-1-2)\,\mathrm{Q}(-1)^2=-3\,\mathrm{Q}(-1)^2$ である。よって $\mathrm{Q}(-1)=0$ であり、因数定理（factor theorem）により $x+1$ は Q の因数である。 ■

### 段階 2　次数

P の次数（degree）を $p$、Q の次数を $q$ とする。

**考えてみよう**　$\mathrm{P}'\mathrm{Q}-\mathrm{P}\mathrm{Q}'+\mathrm{P}\mathrm{Q}$ において、次数が最も高い項はどれか。それは他の項と打ち消し合いうるか。

PQ の次数は $p+q$ であり、$\mathrm{P}'\mathrm{Q}$ と $\mathrm{P}\mathrm{Q}'$ の次数は高々 $p+q-1$ である。よって (†) の左辺の次数はちょうど $2+p+q$ であり、右辺の次数は $3+2q$ である。両者を等しいとおいて $p=q+1$ を得る。 ■

### 段階 3　P を求める

$\mathrm{Q}=x+1$ のとき $\mathrm{Q}'=1$ であり、P の次数は 2 である。(†) を $(x+1)^2$ で割ると

$$\mathrm{P}'(x+1)-\mathrm{P}+\mathrm{P}(x+1)=x^3-2, \qquad \text{すなわち、} \qquad (x+1)\mathrm{P}'+x\mathrm{P}=x^3-2.$$

$\mathrm{P}=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ とおいてみる。左辺は

$$(x+1)(2\alpha x+\beta)+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x=\alpha x^3+(2\alpha+\beta)x^2+(2\alpha+\beta+\gamma)x+\beta.$$

となる。$x^3-2$ と係数を比較すると、$\alpha=1$、$2\alpha+\beta=0$ より $\beta=-2$、さらに $\gamma=0$ である。定数項 $\beta=-2$ とも矛盾しない。よって

$$\mathrm{P}(x)=x^2-2x, \qquad \int \frac{x^3-2}{(x+1)^2}\,e^x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2-2x}{x+1}\,e^x+\mathrm{C}. \qquad \blacksquare$$

（望むなら微分して確かめてみよ。商の微分法のよい練習になる。）

### 段階 4 不可能性

次に、P と Q が共通因数をもたないとして、$\int \frac{e^x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}e^x + C$ と仮定する。恒等式は

$$(x+1)\bigl(\mathrm{P}'\mathrm{Q} - \mathrm{P}\mathrm{Q}' + \mathrm{P}\mathrm{Q}\bigr) = \mathrm{Q}^2.$$

となる。段階 1 と同様に、$x=-1$ を代入すると $\mathrm{Q}(-1)=0$ がわかる。$\mathrm{Q} = (x+1)^k\mathrm{R}$ と書く。ただし $k \geq 1$、$\mathrm{R}(-1)\neq 0$ である（因数 $x+1$ をできるだけ多くくくり出す）。

> **手を止めて、やってみよう** $\mathrm{Q} = (x+1)^k\mathrm{R}$ を代入し、因数 $(x+1)$ をできるだけ多く約分してから、$x=-1$ を代入せよ。$\mathrm{P}(-1)$ について何がわかるか。

このとき $\mathrm{Q}' = k(x+1)^{k-1}\mathrm{R} + (x+1)^k\mathrm{R}'$ であり、

$$\mathrm{P}'\mathrm{Q} - \mathrm{P}\mathrm{Q}' + \mathrm{P}\mathrm{Q} = (x+1)^{k-1}\Bigl[(x+1)\bigl(\mathrm{P}'\mathrm{R} - \mathrm{P}\mathrm{R}' + \mathrm{P}\mathrm{R}\bigr) - k\mathrm{P}\mathrm{R}\Bigr].$$

となる。よって恒等式は $(x+1)^k\bigl[(x+1)(\mathrm{P}'\mathrm{R} - \mathrm{P}\mathrm{R}' + \mathrm{P}\mathrm{R}) - k\mathrm{P}\mathrm{R}\bigr] = (x+1)^{2k}\mathrm{R}^2$ となる。$(x+1)^k$ で割ると

$$(x+1)\bigl(\mathrm{P}'\mathrm{R} - \mathrm{P}\mathrm{R}' + \mathrm{P}\mathrm{R}\bigr) - k\mathrm{P}\mathrm{R} = (x+1)^k\mathrm{R}^2.$$

$k \geq 1$ であるから、$x=-1$ とすると $-k\,\mathrm{P}(-1)\mathrm{R}(-1) = 0$ を得る。$k\neq 0$ かつ $\mathrm{R}(-1)\neq 0$ であるから、$\mathrm{P}(-1)=0$ でなければならない。しかしそうすると $x+1$ は P と Q の両方を割り切り、両者が共通因数をもたないという仮定に矛盾する。よって、そのような P と Q は存在しない。 ■

## 振り返り

- **代数の言葉に翻訳する。**「これはこの形で積分できるか」という問いが、「この多項式の恒等式は解をもつか」という問いになった。
- **特別な点で値を求める。**$x=-1$ を代入することで、因数についての情報を 3 度にわたって引き出した。
- **既約分数を用いた背理法。**Section 1.3 の $\sqrt{2}$ の場合と同じく、分数が既約（lowest terms）であると仮定し、共通因数を見つけることで矛盾を導いた。これが背理法（proof by contradiction）である。

## 背後にある数学

### 極と対数

小問 (ii) の背後には単純な描像がある。被積分関数 $\frac{e^x}{x+1}$ は $x=-1$ に **1 位の極**（simple pole）をもつ。すなわち、その近くでは $\frac{e^{-1}}{x+1}$ のように振る舞う。$\frac{1}{x+1}$ を積分すると $\ln|x+1|$ になるから、原始関数（antiderivative）は $-1$ の近くで $e^{-1}\ln|x+1|$ のように振る舞い、対数的に $-\infty$ へ向かうはずである（図 4.6.1）。ところが、有理関数に $e^x$ を掛けたものは $(x+1)^{-k}$ のようなべきの形でしか発散できず、その導関数は位数 $k+1\geq 2$ の極をもち、1 位の極になることはない。対数的な振る舞いは有理関数からは生み出せないのである。段階 4 の代数的議論は、この観察を厳密にしたものである。これに対して小問 (i) では、被積分関数は **2 位の極**（double pole）をもつ。これはまさに 1 位の極をもつ関数の導関数の姿であり、そのため有理的な答えが可能だったのである。

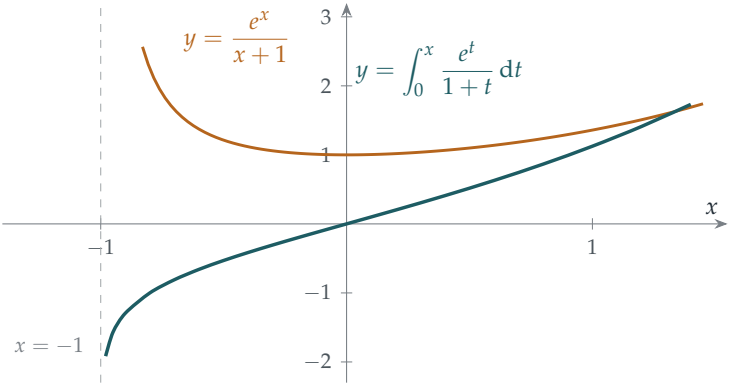



**図 4.6.1**　被積分関数 $\frac{e^x}{x+1}$（琥珀色）は $x=-1$ に 1 位の極をもつ。その原始関数（青緑色、数値計算による）は問題なく存在するが、$x\to -1^+$ のとき $e^{-1}\ln(x+1)$ のように**対数的に** $-\infty$ へ向かう。有理関数に $e^x$ を掛けたものは、このような振る舞いをすることができない。

### リウヴィルとリッシュのアルゴリズム

1830 年代、ジョゼフ・リウヴィル（Joseph Liouville）は、どのような積分が**初等関数**（elementary functions。多項式、指数関数、対数関数、累乗根、三角関数から通常の演算によって組み立てられる関数）で表せるかについての理論を築いた。その成果の一つによれば、f と g が有理関数で g が定数でないとき、$\int \mathrm{f}(x)e^{\mathrm{g}(x)}\,\mathrm{d}x$ が初等関数となるのは、ある有理関数 R によって $\mathrm{R}(x)e^{\mathrm{g}(x)}$（に定数を加えたもの）に等しい場合に限る。（g に関する条件は重要である。$\mathrm{g}=0$、$\mathrm{f}(x)=\frac{1}{x}$ のとき積分は $\ln|x|$ であり、これ

は初等関数ではあるが有理関数ではない。）したがって、有理的な形を否定したこの問題は、実は $\int \frac{e^x}{x+1}\,dx$ がそもそも初等関数ではないことを証明しているのである。同じ定理の変形版により、$\int e^{-x^2}\,dx$ や $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ も初等関数でないことが示される。1969年、Robert Risch はリウヴィルの考えをアルゴリズムに仕立て上げた。これは広いクラスの関数について、初等的な積分が存在するかどうかを判定し、存在すればそれを求めるものである。その変形版は数式処理システム（computer algebra systems）の内部で動いている。

### 特殊関数

積分が初等的な形をもたないとき、数学者はそれに名前をつけ、新しい関数として研究する。Section 3.9 でランベルト（Lambert）の W 関数を扱ったのと同じである。ここでの積分は本質的に**指数積分**（exponential integral）$\mathrm{Ei}(x)$ である。これは熱伝導に現れるほか、**対数積分**（logarithmic integral）$\mathrm{li}(x) = \mathrm{Ei}(\ln x)$ にも現れる。対数積分は、$x$ 以下の素数の個数に対する最良の簡単な近似式である（Section 1.2）。$x < 0$ のときは $\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt$ である。$x > 0$ のときは、この積分は $t = 0$ の無限に高い尖りを通過してしまうので、尖りのまわりの小さな区間 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ を取り除いて $\varepsilon \to 0$ とすることで $\mathrm{Ei}(x)$ を定義する。これが**コーシー（*Cauchy*）の主値**（Cauchy principal value）である。

## 思考のスキル

**不可能性を証明する**

**何かができないことを示すには、それができると仮定し、その仮定を正確な代数の言葉に翻訳し、矛盾を導く。**

難しいのは翻訳の部分、すなわち「できる」とは正確には何を意味するのかを言い表すことである。ここでは、それは「共通因数をもたない多項式 P、Q でこの恒等式を満たすものが存在する」ことを意味した。数学における最も深い結果の多くは、この種の不可能性の証明である。

## 次の一歩

1 **うまくいく二つの例。** $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx = \frac{e^x}{x+1} + C$ および $\int \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^2}\,dx = \frac{x-1}{x+1}e^x + C$ を示せ。

**2** **ガウス型関数。** $\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{P}(x)e^{-x^2} + C$ となる多項式 $\mathrm{P}$ は存在しないことを示せ。（**ヒント**：微分して次数を比較せよ。）

**3** **もう一つの極。** 小問 (ii) の議論を応用して、$\displaystyle\int \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x$ は $\dfrac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}e^x + C$ の形ではないことを示せ。

**4** **どのようなときに可能か。** $\mathrm{f}$ を多項式とし、ある多項式 $\mathrm{P}$ について $\displaystyle\int \frac{\mathrm{f}(x)}{(x+1)^2}\,e^x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{P}(x)}{x+1}\,e^x + C$ が成り立つとする。$(x+1)\mathrm{P}' + x\mathrm{P} = \mathrm{f}$ を示し、この式とその導関数の $x=-1$ における値を考えることで、$\mathrm{f}(-1)+\mathrm{f}'(-1)=0$ を示せ。この条件が $\mathrm{f}(x)=x^3-2$ および練習問題 1 の例について成り立つことを確かめよ。 やや難 この条件が十分条件でもあることを示せるか。

## さらに学ぶために

- **Brian Conrad, “Impossibility theorems for elementary integration”**（初等積分の不可能性定理）。リウヴィルの定理を例とともに解説した講義ノートで、無料で入手できる。
- **Elena Anne Marchisotto & Gholam-Ali Zakeri, “An invitation to integration in finite terms”**（有限の形での積分への招待）、*The College Mathematics Journal* 25 (1994)。リウヴィルの理論へのやさしい入門。
- **Manuel Bronstein, *Symbolic Integration I***（Springer）（記号積分 I）。数式処理システムが実際にどのように積分を行うかを解説している。上級者向け。

# 4.7 変分法

**問題**

**STEP III 2014、問 4**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/14-s3-q4`

## 導入

学校で扱う最適化問題のほとんどは、最良の**数**を求めるものである。たとえば、面積を最大にする $x$ の値を求める、といった問題である。これに対して**変分法**（calculus of variations）は、最良の**関数**を求める。2 点を結ぶどの曲線に沿えば、ビーズは最も速く滑り落ちるか。吊るした鎖はどのような形になるか。光はレンズの中をどの経路で進むか。いずれの場合も、最適化すべき量は積分であり、未知のものは関数全体である。

この問題では、興味深い例のうち最も単純なものを調べる。積分 $J = \int_0^1 ((y')^2 - a^2 y^2)\,\mathrm{d}x$ では、二つの項がせめぎ合っている。傾きの大きさは値を押し上げ、関数の大きさは値を押し下げる。$a$ が小さければ常に傾きの項が勝ち、どの関数に対しても $J \geq 0$ となる。しかし、このつり合いが崩れる臨界値が $a$ には存在し、問題はそれを正確に求める。それは $a = \frac{\pi}{2}$ である。この $\pi$ がどこから来るのかが、この節の主題となる。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $I \geq 0$ が自明でないのはなぜか。$y(1) = 0$ を満たす $y = 1 - x$ で試してみよ。

$I$ は二つの正の量の差なので、正にも負にもなりうる。$y = 1 - x$ の場合、$\int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1$ かつ $\int_0^1 (1-x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ なので、$I = \frac{2}{3} > 0$ である。しかし、もっと巧妙な関数を選べば、$\int (y')^2$ に比べて $\int y^2$ を大きくできるかもしれない。この問題の工夫は、$I$ を**平方**の積分として表すことにある。平方の積分は明らかに非負である。これは積分における「平方完成」（completing the square）である。

## 順を追って解く

### 段階 1　平方完成

$I_1$ の中の平方を展開すると

$$I_1 = \int_0^1 ((y')^2 + 2yy' \tan x + y^2 \tan^2 x)\,\mathrm{d}x,$$

となるので

$$I - I_1 = -\int_0^1 (y^2 + y^2 \tan^2 x + 2yy' \tan x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 (y^2 \sec^2 x + 2yy' \tan x)\,\mathrm{d}x.$$

**考えてみよう**　被積分関数 $y^2 \sec^2 x + 2yy' \tan x$ はある関数の導関数そのものである。何の導関数か。

積の微分法則により $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2 \tan x) = 2yy' \tan x + y^2 \sec^2 x$ である。よって

$$I - I_1 = -\Big[y^2 \tan x\Big]_0^1 = -(y(1)^2 \tan 1 - y(0)^2 \tan 0) = 0,$$

となる。ここで $y(1) = 0$ かつ $\tan 0 = 0$ を用いた。したがって、平方の積分であることから $I = I_1 \geq 0$ である。 ■

### 段階 2　$I = 0$ となるのはいつか

**考えてみよう**　連続で非負の関数の積分が 0 であるとき、その関数について何がいえるか。それでは、$I = 0$ のとき $y$ はどのような方程式を満たさなければならないか。

積分が 0 である連続な非負関数は恒等的に 0 でなければならない（もしある点で正なら、その点のまわりの小区間でも正となり、積分に正の寄与をするからである）。したがって、$I = 0$ ならば $[0,1]$ 上で $y' + y\tan x = 0$ が成り立つ。$\sec x$ を掛けると、これは $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{\cos x}\right) = \frac{y'\cos x + y\sin x}{\cos^2 x} = 0$ を意味するので、$y = C\cos x$ である。すると $y(1) = C\cos 1 = 0$ であり、$\cos 1 \neq 0$ より $C = 0$ となる。したがって、$I = 0$ となるのは $y \equiv 0$ のときに限る。 ■

### 段階 3　一般の場合

**考えてみよう**　$\int_0^1 (y' + ay\tan bx)^2\,\mathrm{d}x$ を用いて段階 1 を繰り返せ。残りの項がある関数の導関数そのものになるためには、$b$ はどうあるべきか。

この積分を $K$ とおく。すると

$$J - K = -\int_0^1 (a^2y^2 + a^2y^2\tan^2 bx + 2ayy'\tan bx)\,\mathrm{d}x$$
$$= -\int_0^1 (a^2y^2\sec^2 bx + 2ayy'\tan bx)\,\mathrm{d}x.$$

一方、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ay^2\tan bx) = 2ayy'\tan bx + aby^2\sec^2 bx$ である。これらがちょうど一致するのは $ab = a^2$、すなわち $b = a$ のときである。このとき

$$J - K = -\Big[ay^2\tan ax\Big]_0^1 = -a\,y(1)^2\tan a = 0,$$

となるので、$J = K \geq 0$ である。

> **手を止めて、やってみよう** この議論はどこで破綻しうるか。（区間 $0 \leq x \leq 1$ における $\tan ax$ に注目せよ。）

この議論では、$[0,1]$ のすべての $x$ に対して $\tan ax$ が定義されていて連続であることが必要である。そうでなければ $K$ が存在しないかもしれず、微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）を適用できない。$x$ が $[0,1]$ を動くとき $ax$ は $[0,a]$ を動き、そこで tan が連続であるのはちょうど $a < \frac{\pi}{2}$ のときである。したがって、この証明は

$$a < k = \frac{\pi}{2}. \qquad \blacksquare$$

に対して有効である。

### 段階 4 臨界の場合

> **考えてみよう** $a = \frac{\pi}{2}$ のとき、この証明は破綻する。段階 2 では、$I = 0$ とする関数は $y' + y\tan x = 0$ を満たすはずであった。今回それに対応する方程式は何か。また、その解は何か。

対応する方程式は $y' + ay\tan ax = 0$ であり、その解は $y = C\cos ax$ である。$a = \frac{\pi}{2}$ のとき、$y = \cos\frac{\pi x}{2}$ は $y(1) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ を満たす。直接確かめると

$$J = \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \left(\sin^2\frac{\pi x}{2} - \cos^2\frac{\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \cos\pi x\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{\pi^2}{4}\left[\frac{\sin\pi x}{\pi}\right]_0^1 = 0. \qquad \blacksquare$$

したがって、臨界値においては、0 でない関数が $J$ をちょうど 0 にする。

## 振り返り

- **積分における平方完成。**ある関数の導関数そのものを足して引くことで、$J$ は平方の積分と、消える境界項との和に変わった。
- **道具が使えなくなる場所を確かめる。**この方法が使えたのは、区間上で $\tan ax$ が有限である間だけであった。方法が破綻した点 $a = \frac{\pi}{2}$ こそが、まさに臨界値であった。
- **極端な場合は微分方程式を解く。**$J = 0$ を与える関数は 1 階の方程式 $y' + ay\tan ax = 0$ から得られ、さらに $y'' + a^2 y = 0$ も満たす。

## 背後にある数学

### 最速降下線（brachistochrone）と一分野の誕生

1696 年、ヨハン・ベルヌーイ（Johann Bernoulli）はヨーロッパの数学者たちに挑戦状を出した。ある点から別の点へビーズが最短時間で滑り落ちる曲線を求めよ、というものである。解答はニュートン（Newton）（匿名で、一晩のうちに。ベルヌーイは「爪を見ればライオンとわかる」と述べた）、ライプニッツ（Leibniz）、ロピタル（l'Hôpital）、ヤコブ・ベルヌーイ（Jakob Bernoulli）から寄せられた。答えはサイクロイド（cycloid）である。1750 年代、オイラー（Euler）と若きジョゼフ＝ルイ・ラグランジュ（Joseph-Louis Lagrange）は、こうした個別の工夫を一般的な方法へとまとめ上げた。$y$ が $\int F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$ を停留させるならば、$y$ は**オイラー＝ラグランジュ方程式**（Euler–Lagrange equation）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

を満たす。ここでの $J$ では $F = (y')^2 - a^2 y^2$ であり、オイラー＝ラグランジュ方程式は $y'' + a^2 y = 0$、すなわち単振動の方程式となる。

### なぜ $\pi/2$ なのか

$a < \frac{\pi}{2}$ のとき、$J$ の最小値は 0 であり、それを達成するのは $y \equiv 0$ だけである。$a = \frac{\pi}{2}$ では最小値はやはり 0 であるが、それを達成する関数がもう一つ現れる。$a > \frac{\pi}{2}$ のときは、同じ関数 $y = \cos\frac{\pi x}{2}$ が

$$J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{a^2}{2} < 0,$$

を与え、$y$ を定数倍で大きくすれば、$J$ はいくらでも小さな負の値にできる。つまり最小値はまったく存在しない（図 4.7.1）。臨界値とは、$y'' + a^2 y = 0$ が境界条件（$y(1) = 0$ と、自由端における「自然な」条件 $y'(0) = 0$）を満たす 0 でない解をもつような最初の $a$ である。これは**固有値問題**（eigenvalue problem）であり、$a^2 = \frac{\pi^2}{4}$ はその最小固有値である。Section 3.7 と比べてみよ。そこでは長さ $\pi$ の区間の両端で関数を固定し、臨界値は 1 であった。ここでは区間の長さは 1 で、固定されているのは一方の端だけである。これは長さ 2 の区間の半分のようなものなので、臨界値となる $a$ は $\frac{\pi}{2}$ になる。

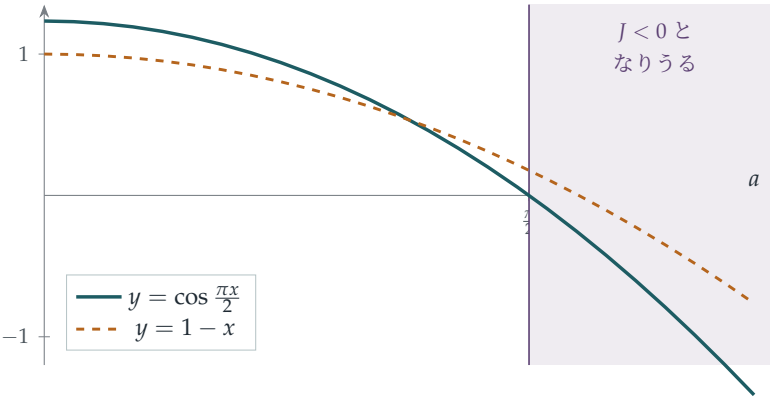



**図 4.7.1**　$y(1) = 0$ を満たす二つの試験関数について、$a$ に対する $J$ の値を示したもの。$y = 1 - x$ の場合、$J = 1 - \frac{a^2}{3}$ が負になるのは $a > \sqrt{3}$ のときだけである。$y = \cos \frac{\pi x}{2}$ の場合、$J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{a^2}{2}$ は $a > \frac{\pi}{2}$ となった途端に負になり、これより良い関数は存在しない。実際、$a < \frac{\pi}{2}$ のときはどの $y$ に対しても $J \geq 0$ である。

### 物理学と最小作用の原理

変分法は、自然そのものを記述するものであることが明らかになった。18 世紀から 19 世紀にかけて、運動の法則は次のように述べられることがわかってきた。力学系は、**作用**（action）とよばれる積分を停留させるように運動する。同様に、光は所要時間が最小となる経路に沿って進み（フェルマー（Fermat）の原理）、これによって屈折が説明される。20 世紀には、リチャード・ファインマン（Richard Feynman）の「経路の総和」を通じて、同じ考え方が量子力学の基礎となった。この問題に現れる 2 次の積分はその最も単純な例であり、そこから導かれる固有値問題は、Section 8.6 で量子振動子のエネルギー準位として再び現れる。

## 思考のスキル

**平方完成をし、それから境界に注意せよ**

2 次の式が非負であることを示すには、それを平方と、制御できる何かとの和として書け。積分の場合、その「何か」はある関数の導関数そのものであることが多く、積分すると境界項になる。

そして、方法がどこで使えなくなるかを常に問え。ここで破綻した点は偶然ではなかった。それはこの問題で最も重要な数であった。

## 次の一歩

1 **臨界値を超えて。** $a > \frac{\pi}{2}$ ならば、$y = \cos\frac{\pi x}{2}$ が $J < 0$ を与えることを示せ。

2 **オイラー＝ラグランジュ方程式。** やや難 $y$ が、$y(1) = 0$ を満たす関数の中で $J$ を最小にするとする。$\eta(1) = 0$ を満たす任意の関数 $\eta$ と任意の数 $\varepsilon$ に対して $J(y+\varepsilon\eta) \geq J(y)$ が成り立つ。$J(y+\varepsilon\eta)$ を $\varepsilon$ のべきで展開し、$\int_0^1 (y'\eta' - a^2 y\eta)\,\mathrm{d}x = 0$ を導け。部分積分を用いて、$y'' + a^2 y = 0$ かつ $y'(0) = 0$ であることを示せ（$y$ は十分滑らかであると仮定せよ）。

3 **より長い区間。** 置換を用いて、$y(L) = 0$ ならば、すべての $y$ に対して $\int_0^L \left((y')^2 - a^2 y^2\right)\mathrm{d}x \geq 0$ が成り立つのはちょうど $a \leq \frac{\pi}{2L}$ のときであり、0 でない $y$ が等号を与えるのは $a = \frac{\pi}{2L}$ のときに限ることを示せ。

4 **サイクロイド。** 最速降下線問題を調べ、サイクロイドの媒介変数表示を求めよ。上下を逆さにしたサイクロイド上のどこからビーズを静かに放しても、最下点に達するまでの時間が同じであることを示せ（**等時曲線**（tautochrone）の性質。1659 年にホイヘンス（Huygens）が発見した）。

## さらに学ぶために

- **Paul Nahin, *When Least Is Best***（Princeton University Press）。最速降下線を含む最適化の歴史と数学を、学生向けに書いたもの。
- **Richard Feynman, *The Feynman Lectures on Physics***（『ファインマン物理学』）, Volume II, Chapter 19（「The principle of least action」、最小作用の原理）。オンラインで無料で読める。

- **Bruce van Brunt, *The Calculus of Variations***（Springer）。学部生向けの教科書。最初のいくつかの章は A レベル（A level、英国の大学入学資格試験）の微分積分だけで読める。

# 4.8 球形のパンを切る

**問題**

**STEP I 2001、問 6**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/01-s1-q6`

## 導入

球形のパンを、等しい厚さの切れに切り分ける。中央付近の切れは厚みのある円板で、縁にパンの耳（crust）が細い帯状についている。両端付近の切れは小さな帽子のような形で、ほとんど耳ばかりに見える。端の切れのほうが耳が多いに違いない、と思うだろう。

そうではない。中央に近いところで切っても端に近いところで切っても、どの切れにもまったく同じ面積の耳がついている。中央の細い帯は周の長さは大きいが、ほぼ垂直に立っている。端の帽子は周の長さは小さいが、急な傾きをもつので、その耳はより広い幅にわたって引き伸ばされている。この二つの効果がちょうど打ち消し合うのである。これはアルキメデス（Archimedes）の定理であり、彼はこの定理をたいへん大切にしていたので、自分の墓に円柱に内接する球を刻むよう頼んだほどである。問題の後半は少し遊び心のある規則の話であるが、同じ計算に基づいている。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 半径 $a$ の球は、どの曲線を $x$ 軸のまわりに回転させれば得られるか。その曲線について $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ はどうなるか。

半円 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \le x \le a$ を回転させると球が得られる。このとき $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{y}$ である。このことを覚えておこう。傾きは両端（$x \to \pm a$）では急で、中央では緩やかである。これはまさに導入で述べた効果である。

## 順を追って解く

### 段階 1　耳の面積の公式が簡単になる

**考えてみよう**　半円について $y\sqrt{1+(y')^2}$ を計算せよ。驚くべきことが起こる。

$y' = -x/y$ より、

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2 + x^2}{y^2} = \frac{a^2}{y^2},$$

したがって $y\sqrt{1+(y')^2} = y \cdot \frac{a}{y} = a$ となり、定数である！よって、任意の二つの平面 $x = x_1$ と $x = x_2$ の間の耳の面積は

$$2\pi \int_{x_1}^{x_2} a \, \mathrm{d}x = 2\pi a (x_2 - x_1).$$

となる。これは平面の間の距離だけで決まり、平面の位置にはよらない。

### 段階 2　耳の面積は切れの数に比例する

パンを厚さ $h$ の切れに切り分けると、各切れの耳の面積は $2\pi a h$ で、すべての切れで等しい。一方の端からでも、両端からでも、どこからでも何切れか食べれば、残った耳の面積は $2\pi a h$ に残った切れの数を掛けたものである。 ■

### 段階 3　耳が多いための条件

問題のヒントは一方の端から切れを食べたときに残るパンについて述べているので、それに従おう。切れを端 $x = a$ から食べていき、残りが $x = -a$ から $x = -a + t$ までであるとする。「何切れ食べた後でも」という規則は、パンをどれだけ細かく切っても成り立つべきなので、$t$ は 0 から $2a$ までの任意の値をとれるものとして扱う。（段階 4 では両端から食べる場合を考える。）

**考えてみよう**　与えられた公式を使って $V$ を計算せよ。置換 $s = x + a$ を使うと計算がすっきりするかもしれない。

$s = x + a$ とおくと $y^2 = a^2 - x^2 = a^2 - (s-a)^2 = 2as - s^2$ であるから、

$$V = \pi \int_0^t (2as - s^2)\, \mathrm{d}s = \pi \left( at^2 - \frac{t^3}{3} \right), \qquad A = 2\pi a t,$$

となり、

$$\frac{V}{A} = \frac{at^2 - t^3/3}{2at} = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{6a}.$$

である。

> **手を止めて、やってみよう** 規則は何切れ食べた後でも $V/A < 1$ であること、すなわち $0 < t \le 2a$ を満たすすべての $t$ について $V/A < 1$ であることを要求している。この範囲における $\frac{t}{2} - \frac{t^2}{6a}$ の最大値はいくらか。

$t$ で微分すると、$\frac{1}{2} - \frac{t}{3a} = 0$ となるのは $t = \frac{3a}{2}$ のときであり、これは範囲 $(0, 2a]$ の内部にある。また、これは最大値を与える（この式は $t$ について上に凸の放物線である）。最大値は

$$\frac{3a}{4} - \frac{9a^2/4}{6a} = \frac{3a}{4} - \frac{3a}{8} = \frac{3a}{8}.$$

である。耳の多いパンであるためにはすべての $t$ について $V/A < 1$ でなければならず、特に $t = \frac{3a}{2}$ においてもそうであるから、$\frac{3a}{8} < 1$、すなわち $a < \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ メートルである。 ■

### 段階 4 問題の先へ：$2\frac{2}{3}$ で十分か

> **考えてみよう** 問題が求めているのは、半径が満たさなければならない条件だけである。$a < \frac{8}{3}$ は十分条件でもあるだろうか。両端から切れを食べる場合はどうなるか。

十分ではない。両端から食べると中央に帯が残るが、中央の帯は端の帽子よりも、耳に対してパンの量が多い。帯 $-\frac{w}{2} \le x \le \frac{w}{2}$ については

$$V = \pi \int_{-w/2}^{w/2} (a^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi\left(a^2 w - \frac{w^3}{12}\right), \qquad A = 2\pi a w, \qquad \frac{V}{A} = \frac{a}{2} - \frac{w^2}{24a},$$

であり、薄い帯ではこれは $\frac{a}{2}$ に近い。たとえば、$2\frac{2}{3}$ を十分下回る半径 2.4 メートルのパンを四切れに切り、両端の二切れを食べると、$w = a$ の帯が残り、$\frac{V}{A} = \frac{11a}{24} = 1.1$ となる。実際、どのような切れの組についても $\frac{V}{A} < \frac{a}{2}$ であるから、どこから切れを食べてもよいとすると、パンが耳の多いパンであるのはちょうど $a \le 2$ メートルのときである。問題の $2\frac{2}{3}$ は正しい必要条件（necessary condition）であるが、規則は問題が匂わせているよりも厳しいのである。

## 振り返り

- **積分する前に簡単にせよ。** 耳の面積の被積分関数（integrand）は複雑に見えたが、実は定数であった。被積分関数は、取りかかる前に必ず簡単にしておこう。
- **「任意の」を注意深く読め。** 条件は何切れ食べた後でも成り立たなければならなかったので、パン全体についての値（$\frac{a}{3}$ である）ではなく、$V/A$ の最大値が必要であった。

- **簡単な計算から意外な答え。**耳の面積が等しいという性質はありそうにないように聞こえるが、計算はたった二行である。

## 背後にある数学

### アルキメデスの帽子箱定理

アルキメデスは『球と円柱について』（*On the Sphere and Cylinder*）において、二つの平行な平面に挟まれた球の帯の面積が、球に外接する円柱（cylinder）からその平面が切り取る帯の面積に等しいことを証明した（図 4.8.1）。我々の計算はまさにこの定理である。半径 $a$ の円柱は単位長さあたり $2\pi a$ の耳の面積をもち、球も同じである。球全体をとると、その表面積（surface area）は円柱の側面積 $2\pi a \times 2a = 4\pi a^2$ に等しい。アルキメデスは、このことを、球の体積が円柱の体積の三分の二であるという事実とともに、自らの最高の業績とみなしていた。紀元前 75 年にシラクサを訪れたキケロ（Cicero）は、墓に刻まれた球と円柱を探すことで、草に覆われたその墓を見つけ出した。

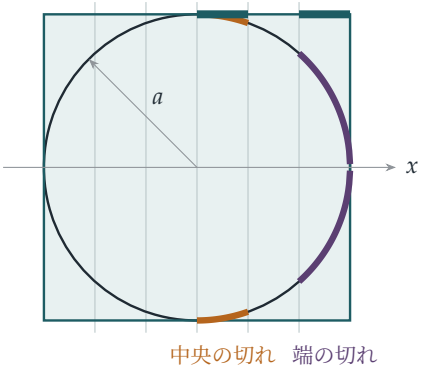



**図 4.8.1**　外接円柱の中に置かれた半径 $a$ の球形のパンを等しい厚さの切れに切り分けたときの断面。中央の切れ（琥珀色）は、軸から遠く、短くほぼ水平な耳の弧をもつ。端の切れ（紫）は、軸に近く、長く急な耳の弧をもつ。$x$ 軸のまわりに回転させると、どちらも対応する円柱の帯（青緑）とまったく同じ耳の面積、すなわち $2\pi a$ に厚さを掛けたものを与える。

### 地球の地図

帽子箱定理を使うと、面積を保つ地球の地図を描くことができる。地球儀上の各点を水平に外側へ外接円柱上に射影し、それから円柱を切り開いて平らにする。球の帯は同じ面積をもつ円柱の帯に写され、任意の領域についても同じことが成り立つ。これ

がランベルト（*Lambert*）正積円筒図法（1772 年）である。極付近では形が大きくゆがむが、面積は正確である。これに対し、おなじみのメルカトル（Mercator）図法ではグリーンランドがアフリカと同じくらいの大きさに見える（実際には約十四分の一である）。ガウス（Gauss）の有名な定理である**驚異の定理**（*Theorema Egregium*、1827 年）は、球の地図で面積と形の両方を保つものは存在しないことを示している。地球の平面地図はどれも、何かをゆがめなければならないのである。

### 球面上の無作為な点

実用的な帰結を一つ紹介しよう。球面上の点を一様に無作為に選ぶには、緯度と経度を一様に選べばよいと考えるかもしれないが、そうすると点は極の付近に密集してしまう。帽子箱定理は正しい方法を与える。高さ $x$ を $-a$ から $a$ の間で一様に選び、経度を 0 から $2\pi$ の間で一様に選べばよい。面積は高さに比例するので、これはちょうど一様分布になる。物理学やコンピュータグラフィックスのシミュレーションでは、この方法が使われている。（驚くべきことに、これが成り立つのは三次元の場合だけである。四次元以上の球面についての対応する主張は成り立たない。）

## 思考のスキル

**隠れた単純さを探せ**

計算の結果、定数のような思いがけず単純なものが出てきたら、立ち止まってその理由を問え。たいていは幾何学的な理由があり、それを見つけることにこそ本当の理解がある。

ここで被積分関数 $y\sqrt{1+(y')^2}$ が定数になったのは、球面上では傾きの急さと軸からの距離がちょうど互いに補い合うからである。それがアルキメデスの定理である。

## 次の一歩

1. **パン全体。** 切っていないパン全体について $V/A = \frac{a}{3}$ であることを示せ。問題の条件が $\frac{a}{3} < 1$ よりも満たしにくいのはなぜか。

2. **熱帯。** 地球の表面のうち、南緯 23.4° から北緯 23.4° の間にある部分の割合はいくらか。（地球を球とみなせ。面積は高さに比例するので、必要なのは $\sin 23.4°$ だけである。）

3 **他の形。**放物面（paraboloid）の形をしたパン（$y = \sqrt{x}$ を $x$ 軸のまわりに回転させたもの）では、一切れあたりの耳の面積が定数に**ならない**ことを示せ。どのような曲線 $y(x)$ について $y\sqrt{1 + (y')^2}$ は定数になるか。（微分方程式（differential equation）を解け。）

4 **体積。**体積の公式を使って、アルキメデスが見出したとおり、球の体積が外接円柱の体積の三分の二であることを示せ。

## さらに学ぶために

- **Sherman Stein, *Archimedes: What Did He Do Besides Cry Eureka?***（Mathematical Association of America）。アルキメデスの数学を現代の読者向けに解説した本。
- **Timothy Gowers, *Mathematics: A Very Short Introduction***（Oxford University Press）。幾何学の章で曲面の幾何学を紹介している。
- **John Snyder, *Flattening the Earth***（University of Chicago Press）。地図投影法の二千年の歴史。

# 4.9 ホールディッチの定理

**問題**

**STEP III 2011、問 5**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/11-s3-q5`

## 導入

任意の卵形の曲線をとる。凸（convex）でありさえすれば形は何でもよい。その内側で一定の長さの棒を、両端を曲線上に保ったまま一周させる。棒の上に一点を印し、棒を長さ $a$ と $b$ の部分に分ける。棒が一周すると、この点はひとまわり小さな卵形を描く。二つの曲線にはさまれた環状の領域の面積はいくらか。

驚くべきことに、答えは**もとの曲線の形によらず** $\pi ab$ である。細長い卵形でも、卵の形でも、丸みを帯びた三角形でも、環状の領域の面積はつねに同じであり、棒の上の点の位置だけで決まる。この結果は 1858 年に、ケンブリッジ大学ゴンヴィル・アンド・キーズ・カレッジ（Gonville and Caius College, Cambridge）のフェローであった Hamnet Holditch 牧師によって発見されたもので、初等幾何学において最も意外な定理の一つである。この問題では、面積を表すただ一つの公式を用いてこれを証明する。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 最も簡単な場合に定理を確かめよ。$\mathcal{C}$ が半径 $R$ の円であるとき、$P$ はどのような曲線を描くか。また、環状の領域の面積はいくらか。

対称性により、$P$ は同じ中心をもつ、ある半径 $r$ の円を描く。棒 $AB$ は $P$ を通る大きい円の弦（chord）であり、**方べきの定理**（intersecting chords theorem、「power of a point」とも呼ばれる）によれば、$P$ を通る任意の弦について $PA \times PB = R^2 - r^2$ が成り立つ。よって $ab = R^2 - r^2$ であり、環状の領域の面積は $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi ab$ となる。定理は、これが円に限らずすべての凸曲線について成り立つと主張しているのである。

## 順を追って解く

### 段階 1　座標から面積を求める

**考えてみよう**　$x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ とし、これらはすべて $t$ の関数であるとする。ドットが $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ を表すとき、$x\dot{y} - y\dot{x}$ を計算せよ。

$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}$、$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}$ である。したがって

$$x\dot{y} - y\dot{x} = r\cos\theta\,(\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}) - r\sin\theta\,(\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}) = r^2\dot{\theta}.$$

よって $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int r^2\dot{\theta}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int (x\dot{y} - y\dot{x})\,\mathrm{d}t$ である。 ■

この公式には極座標（polar coordinates）は必要なく、媒介変数（parameter）の関数としての直交座標の位置さえあればよい。点が $O$ を囲む閉曲線を反時計回りに一周するとき、この公式は曲線の内部の面積を与える。

### 段階 2　棒の両端

棒は $A$ から $B$ へ向かって $(\cos t, \sin t)$ の方向を向いており、$P$ は $A$ から距離 $a$、$B$ から距離 $b$ の位置にある。よって

$$A = (x - a\cos t,\ y - a\sin t), \qquad B = (x + b\cos t,\ y + b\sin t).$$

### 段階 3　$OA$ が掃く面積

**考えてみよう**　$(*)$ を $A$ に適用せよ。$x_A\dot{y}_A - y_A\dot{x}_A$ を展開し、項を $a$ の累乗ごとに整理せよ。

$x_A = x - a\cos t$、$y_A = y - a\sin t$ とすると、$\dot{x}_A = \dot{x} + a\sin t$、$\dot{y}_A = \dot{y} - a\cos t$ である。展開すると

$$\begin{aligned} x_A\dot{y}_A - y_A\dot{x}_A &= (x - a\cos t)(\dot{y} - a\cos t) - (y - a\sin t)(\dot{x} + a\sin t) \\ &= (x\dot{y} - y\dot{x}) + a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) - a[(x + \dot{y})\cos t + (y - \dot{x})\sin t]. \end{aligned}$$

$0$ から $2\pi$ まで積分して半分にすると、第 1 項は $[P]$ を、第 2 項は $\frac{1}{2}a^2 \cdot 2\pi = \pi a^2$ を、第 3 項は $-af$ を与える。よって

$$[A] = [P] + \pi a^2 - af. \qquad ■$$

**手を止めて、やってみよう** 次に $[B]$ を求めよ。（ヒント：$B$ は、$A$ の式の $a$ を何に置き換えれば得られるか。）

$B = (x + b\cos t, y + b\sin t)$ は、$A$ の式で $a$ を $-b$ に置き換えたものである。よって

$$[B] = [P] + \pi b^2 + bf.$$

### 段階 4 $f$ を消去する

**考えてみよう** $A$ も $B$ も同じ曲線 $\mathcal{C}$ を一周する。このことから $[A]$ と $[B]$ について何がわかるか。

$t$ が 0 から $2\pi$ まで動くとき、$A$ と $B$ はいずれも $\mathcal{C}$ を反時計回りに一周するので、$[A] = [B] =$ 面積$(\mathcal{C})$ である。二つの式を等置すると

$$\pi a^2 - af = \pi b^2 + bf \quad \Longrightarrow \quad f(a+b) = \pi(a^2 - b^2) \quad \Longrightarrow \quad f = \pi(a-b).$$

$P$ は $\mathcal{D}$ を一周するので $[P] =$ 面積$(\mathcal{D})$ であり、

$$\text{面積}(\mathcal{C}) - \text{面積}(\mathcal{D}) = [A] - [P] = \pi a^2 - a\pi(a-b) = \pi ab. \qquad \blacksquare$$

曲線の形に依存する謎めいた量 $f$ は、一度も計算されなかった。消去されたのである。

## 振り返り

- **問題に合った公式。** 面積の公式 $(*)$ に必要なのは、媒介変数の関数としての座標だけであった。これはまさに棒の運動を記述する方法そのものである。
- **二つの式に一つの未知量。** $f$ は計算できなかったが、$f$ を含む等式が二つあったので、連立方程式を解くときのように $f$ を消去できた。
- **まず特別な場合を試す。** 円の場合を調べたことで、取りかかる前に答え $\pi ab$ が得られ、目指すべきものがわかった。

## 背後にある数学

### グリーンの定理とプラニメータ

公式 $(*)$ は**グリーンの定理**（Green's theorem）の特別な場合である。グリーンの定理は、閉曲線に沿った積分と、その内部の領域上の積分とを結びつける。面積に関する形では、曲線で囲まれた面積は $\frac{1}{2}\oint(x\,dy - y\,dx)$ であると述べており、これは境界を一周するだけで計算できる積分である。技術者たちはこれを**プラニメータ**（planimeter、面積計）として利用した。プラニメータは 19 世紀に発明された機械式の器具で（最も成功したのは Jakob Amsler による 1854 年の設計である）、地図や図面上の図形の境界を指針でなぞると、車輪が囲まれた面積を記録する。プラニメータは、デジタルな方法に取って代わられるまで、土地の面積の測定や、インジケータ線図から蒸気機関のする仕事を求める計算など、さまざまな用途に用いられた。Holditch の定理はこれと密接に関係しており、棒はプラニメータの腕のようなものである。

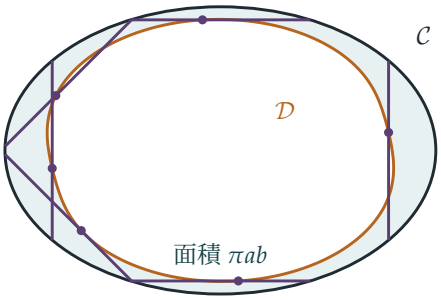



**図 4.9.1**　半軸の長さが 3 と 2 の楕円（ellipse）と、$a = 1$、$b = 1.5$ である長さ 2.5 の棒に対する Holditch の定理。棒のいくつかの位置（紫）を、点 $P$ とともに示している。$P$ が描く曲線 $\mathcal{D}$（琥珀色）は数値計算によって求めたものであり、二つの曲線にはさまれた網掛けの環状の領域の面積は、定理の予測どおり $4.7124\ldots = 1.5\pi$ である。

### 細かな条件

Holditch は条件にあまり注意を払わずに定理を述べたが、実際にはいくつかの条件が必要である。棒は両端を曲線上に保ったまま一周できなければならず、また描かれる曲線 $\mathcal{D}$ は一度だけなぞられる単純閉曲線（simple closed curve）でなければならない。$\mathcal{C}$ の幅に比べて棒が長すぎると、$\mathcal{D}$ は自分自身と交わることがあり、公式が与える「面積」は、ある領域を二重に、あるいは負の符号をつけて数えてしまう。この問題では、$\mathcal{D}$ が $O$ を含む凸曲線であると仮定することで、こうした難点を避けている。

定理が成り立つ条件を正確に突き止めることは、美しいアイデアをいかに厳密なものにしなければならないかを示すよい例であり、これは第 3 章のテーマでもある。

## 思考のスキル

**計算できないものは消去する**

ある量が複雑すぎて計算できないときは、それを含む二つの異なる等式を探し、その量を消去せよ。

ここでは $f$ は曲線のあらゆる細部に依存していたが、$[A]$ と $[B]$ の両方の式に現れ、$[A] = [B]$ という事実によって消えた。答え $\pi ab$ が曲線によらないものになりえたのは、曲線に依存する部分が打ち消し合ったからにほかならない。

## 次の一歩

1 **楕円の面積。** $x = p\cos t$、$y = q\sin t$ として $(*)$ を用い、半軸の長さが $p$ と $q$ の楕円の面積が $\pi pq$ であることを示せ。

2 **円の場合。** 方べきの定理を証明せよ。すなわち、円の二本の弦が $P$ で交わるとき、それぞれの弦が分けられてできる二つの線分の長さの積は等しいことを示せ。これを用いて、円に対する Holditch の定理を導け。

3 **中点。** $f = \pi(a - b)$ から、$P$ が棒の中点（midpoint）であるとき $f = 0$ となることを示せ。このとき、環状の領域の面積を棒の長さ $L$ を用いて表せ。

4 **三角形。** やや難 頂点が $(0,0)$、$(x_1, y_1)$、$(x_2, y_2)$ である三角形の境界をなぞることにより、$(*)$ を用いてその面積を求め、それが $\frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$ に等しいことを示せ。これは任意の多角形の面積を与える「靴ひも公式」（shoelace formula）の出発点である。

## さらに学ぶために

- **Mark Levi, *The Mathematical Mechanic***（Princeton University Press）。棒や車輪やばねを使った物理的な推論によって数学の結果を証明する本であり、この節の精神に通じる。
- **H. M. Schey, *Div, Grad, Curl, and All That***（Norton）。グリーンの定理を含む、ベクト

ル解析への気軽な入門書。

- **Hamnet Holditch,「Geometrical theorem」**, *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 2 (1858)。原論文。短い一段落だけのもので、細かな条件は一切書かれていない。

# 学んだこと

この章は、積分とは本当は何なのか、積分によって何が証明できるのか、そして積分に公式がないときにはどうすればよいのか、という問いから始まった。章の 9 つの問題がこれらの問いにどう答えたかを、ここでまとめておこう。

### 1. 積分とは何か、そしてどんな関数が積分をもつのか

Section 4.1 では、積分（integral）を細い長方形による下方和（lower sum）と上方和（upper sum）の共通の極限として定義し、その定義だけを用いて $\int_0^a x^5\,dx$ を計算した。これにはかなりの手間がかかった。連続する整数の積の和を打ち消し合う和（telescoping sum）として扱い、両側から評価し、はさみうち（squeeze）を用いたのである。この手間こそが、微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）がどれほど多くのものを無償で与えてくれるかを示す尺度である。

定義からはまた、すべての関数が可積分（integrable）であるわけではないこともわかった。有理数で 1、無理数で 0 をとるディリクレ（Dirichlet）の関数は、上方和がすべて 1、下方和がすべて 0 になる。このような問題がきっかけとなって、ルベーグ（Lebesgue）はより強力な積分論を築いた。それには大学に入ってから出会うことになる。

### 2. 積分によって何が証明できるのか

面積よりはるかに多くのことが証明できる。

- **数の間の不等式。** 正の関数の積分が $\frac{22}{7} - \pi$ に等しいので、$\frac{22}{7} > \pi$ である（Section 4.3）。「$A - B$ を正の関数の積分として表す」という考え方は、単純であると同時に非常に役に立つ。
- **無限積と特殊値。** $\int \sin^n t\,dt$ の漸化式（reduction formula）、不変量（invariant）、そしてはさみうちから、ウォリス（Wallis）の積、スターリング（Stirling）の公式に現れる定数、そして $\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ が得られた（Section 4.4）。
- **無限級数。** $x^x$ をべき級数（power series）に展開して項別積分（term-by-term integration）することで、「二年生の夢」（sophomore's dream）が得られた（Section 4.5）。

- **三角関数の基礎。** $\mathrm{T}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ および $\pi = 2\mathrm{T}(\infty)$ と定義すると、置換だけで加法定理（addition formula）や $\mathrm{T}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ のような特殊値が導かれた（Section 4.2）。
- **幾何。** 被積分関数が定数に簡約されることから、アルキメデス（Archimedes）の帽子箱定理（hat-box theorem）が明らかになり（Section 4.8）、面積の公式を境界に沿った積分として書くことで、Holditch の驚くべき定理が証明された（Section 4.9）。
- **最適な関数。** 積分の中で平方完成（completing the square）を行うことで、$\int \left((y')^2 - a^2y^2\right)$ が非負でなければならないのはどのような場合かが正確にわかり、臨界値 $\frac{\pi}{2}$ は固有値（eigenvalue）であることが判明した（Section 4.7）。

### 3. 公式がないとき、何ができるのか

Section 4.6 では、$\int \frac{e^x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ が有理関数（rational function）と $e^x$ の積として表せないことを証明した。さらにリウヴィル（Liouville）の理論によれば、この積分は初等関数による公式をまったくもたない。極（pole）という観点から見ると、その理由は、原始関数（antiderivative）が $x = -1$ の近くで対数のように振る舞わなければならず、有理関数にはそれができないということである。それでもこの積分はきちんと存在し、計算することもできる。数値的に計算することも、級数によって計算すること（Section 4.5 の $\int x^x$ のように）もできるし、Section 3.9 で W 関数に対して行ったように、名前を与えて新しい関数として研究することもできる。

### 4. 積分の道具箱

| 手法 | 用いた場面 |
|---|---|
| 定義に基づく計算 | 長方形による $\int_0^a x^5$（4.1） |
| 打ち消し合う和 | 連続する整数の積の和（4.1） |
| 積分を保つ置換 | $\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ からの三角関数（4.2） |
| 多項式の割り算 | $\frac{22}{7} - \pi$（4.3） |
| 正値性と被積分関数の評価 | $\pi < \frac{22}{7}$（4.3） |
| 漸化式 | $\int \sin^n t$（4.4）、$\int x^m (\ln x)^n$（4.5） |
| 不変量とはさみうち | $nu_n u_{n-1} = \frac{\pi}{2}$（4.4） |
| 項別積分 | 二年生の夢（4.5） |
| 因数と次数による議論 | 有理関数の原始関数が存在しないこと（4.6） |
| 平方完成 | 変分法（4.7） |
| 積分する前に簡約する | 球形のパン（4.8） |
| 境界積分としての面積 | Holditch の定理（4.9） |

### この先へ

- Section 4.4 のガンマ関数（Gamma function）とベータ関数（Beta function）、そしてスターリングの公式の定数 $\sqrt{2\pi}$ は、Section 12.23 で確率の文脈に再び現れる。
- Section 4.7 の固有値問題は、Section 8.6 で量子調和振動子（quantum harmonic oscillator）となる。
- Section 4.2 の加法定理から組み立てられるマチン（Machin）の公式は、Section 5.1 の主題である。
- 第 5 章では複素数（complex number）を扱う。複素数を用いると、この章の積分の多くになぜ $\pi$ が現れるのかが説明できる。

**大学に入る前にさらに先へ進みたい人へ**

- **Paul Nahin, *Inside Interesting Integrals***（Springer）：巧妙な積分と、その背後にある技法がふんだんに詰まった一冊。
- **William Dunham, *The Calculus Gallery***：ニュートン（Newton）からルベーグまでの解析学の傑作集。
- **Michael Spivak, *Calculus***：積分の定義と基本定理をきちんと扱っている。
- **Sherman Stein, *Archimedes***：積分の古代における起源を知るために。

エルミート（Hermite）は導関数をもたない関数に尻込みしたが、積分はそのような問題を抱えたことがない。積分は寛大であり、微分では扱えない関数をも受け入れ、そして驚きを生み出し続ける。この章を貫くテーマがひとつあるとすれば、それは、積分は単に面積を求めるための技法ではないということである。積分は、数や関数や図形についての事実を表現し証明するための言語であり、これから先の数学人生を通して、君はこの言語を話し続けることになるだろう。

# 「次の一歩」の解答

以下は略解とヒントであり、完全な解答ではない。結果と鍵となるステップを示してあるので、自分の答えの確認に用いてほしい。答えを見る前に、各問題にきちんと取り組むこと。

## 4.1 積分とは何か？

1. この和は、$[1,2]$ 上で $y=\mathrm{f}(x)$ の下にある幅 $\frac{1}{n}$ の $n$ 個の長方形の面積の総和である。$\mathrm{f}(x)=\frac{1}{x}$ とすると、$\frac{1}{n}\sum\frac{1}{1+m/n}=\sum\frac{1}{n+m}\to\ln 2$ となる。2 番目の和は $\frac{1}{n}\sum\frac{1}{1+(m/n)^2}\to\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$ である。

2. $n$ 個の帯に分けたときの上和（upper sum）は $\frac{a}{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{ra}{n}\right)^2=\frac{a^3(n+1)(2n+1)}{6n^2}$ であり、下和（lower sum）は最初の因数の $n+1$ を $n-1$ に置き換えたものである。いずれも $\frac{a^3}{3}$ に収束する。

3. 各項は次々に打ち消し合う（telescope）：$r(r+1)\cdots(r+k)-(r-1)r\cdots(r+k-1)=(k+1)\,r(r+1)\cdots(r+k-1)$。

4. $\sum_{r=1}^{n}r^5=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$。

## 4.2 積分から三角関数を構成する

1. 導関数（derivative）は $-\mathrm{f}(a-x)\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(a-x)\mathrm{f}(x)=0$ であるから、$\mathrm{f}(a-x)\mathrm{f}(x)=\mathrm{f}(a)$ である。ここで $a=x+y$ とおけばよい。余弦（cosine）については、$y$ を固定して $p(x)=\mathrm{c}(x+y)-\mathrm{c}(x)\mathrm{c}(y)+\mathrm{s}(x)\mathrm{s}(y)$、$q(x)=\mathrm{s}(x+y)-\mathrm{s}(x)\mathrm{c}(y)-\mathrm{c}(x)\mathrm{s}(y)$ とおく。すると $p'=-q$、$q'=p$ となるから $p^2+q^2$ は定数であり、$x=0$ でその値は 0 である。

2. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=(1+u^2)^{-3/2}$、$\sqrt{1-y^2}=(1+u^2)^{-1/2}$ であるから、$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ となる。よって $\mathrm{S}(\frac{1}{\sqrt{2}})=\mathrm{T}(1)$ であり、小問 (i) で $x=1$ とすると $\mathrm{T}(1)=\frac{1}{2}\mathrm{T}_\infty$ が得られる。

3. $a=\frac{1}{2}$、$x=\frac{1}{3}$ とすると $\frac{x+a}{1-ax}=1$ となるので、$\mathrm{T}(\frac{1}{3})=\mathrm{T}(1)-\mathrm{T}(\frac{1}{2})$ である。

4. $[0,1]$ 上で $\frac{1}{1+u^2}\le 1$、$[1,x]$ 上で $\le\frac{1}{u^2}$ であるから、$x\ge 1$ のとき $\mathrm{T}(x)\le 1+(1-\frac{1}{x})<2$ であり、$0<x<1$ のとき $\mathrm{T}(x)<\mathrm{T}(1)\le 1$ である。（評価 $1+\int_1^x u^{-2}\,\mathrm{d}u$ は

$x < 1$ では成り立たない。$x = \frac{1}{2}$ ではこれは 0 に等しい。）T は増加かつ有界（bounded）であるから、極限（limit）をもつ。

### 4.3 22/7 は $\pi$ より大きい

1. $\frac{22}{7} - \pi \approx 0.001264$ であり、これは $\frac{1}{1260} \approx 0.000794$ と $\frac{1}{630} \approx 0.001587$ の間にある。
2. $\frac{(4!)^2}{9!} = \frac{576}{362\,880} = \frac{1}{630}$。
3. $\frac{x(1-x)^2}{1+x^2} = x - 2 + \frac{2}{1+x^2}$ であり、これを積分すると $\frac{1}{2} - 2 + \frac{\pi}{2}$ となる。同様に $\frac{x^2(1-x)^4}{1+x^2} = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4 + \frac{4}{1+x^2}$ であり、これを積分すると $\frac{1}{5} - 1 + \frac{5}{3} - 4 + \pi = \pi - \frac{47}{15}$ となる。どちらの積分も正である。これらの被積分関数（integrand）は $\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}$（その最大値は約 0.003）よりずっと大きいので、誤差 $\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \approx 0.07$ および $\pi - \frac{47}{15} \approx 0.008$ も大きくなる。
4. 多項式の割り算（polynomial division）を行うと剰余（remainder）$\frac{16}{1+x^2}$ が残り、これを積分すると $4\pi$ になる。積分の値は $4\pi - \frac{188684}{15015} \approx 3.6 \times 10^{-6}$ であるから、$\pi \approx 3.14159174$ である。

### 4.4 ウォリス、ベータ、そして二分の一の階乗

1. $u_{2m} = \frac{1\cdot3\cdots(2m-1)}{2\cdot4\cdots2m} \cdot \frac{\pi}{2}$、$u_{2m+1} = \frac{2\cdot4\cdots2m}{3\cdot5\cdots(2m+1)}$ である。すると $1 < \frac{u_{2m}}{u_{2m+1}} < \frac{u_{2m-1}}{u_{2m+1}} = \frac{2m+1}{2m}$ であるから、この比は 1 に収束し、これを整理すると $\frac{\pi}{2} = \prod_{k\geq1} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}$ となる。
2. 部分積分（integration by parts）により $I_n = \frac{n}{n+1} \int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$ が得られ、$x^{n+1}(1-x)^{n-1} = x^n(1-x)^{n-1} - x^n(1-x)^n$ と書いて対称性（symmetry）を用いると $I_n = \frac{n}{2(2n+1)} I_{n-1}$ が導かれる。帰納法（induction）により $\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ を得る。$x = \sin^2\theta$ とおくと $I_{1/2} = \int_0^{\pi/2} 2\sin^2\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8}$ である。この公式からは $\big((\frac{1}{2})!\big)^2/2! = \frac{\pi}{8}$ が示唆されるので、$(\frac{1}{2})! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$（これは $\Gamma(\frac{3}{2})$ である）となる。
3. 対称性は $x \mapsto 1-x$ から、漸化式（recurrence）は $x^p = x^{p-1} - x^{p-1}(1-x)$ から得られる。また $x = \frac{t}{1+t}$ とおくと $1 - x = \frac{1}{1+t}$、$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$ である。この積分は $\mathrm{b}(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$ であり、漸化式と対称性を用いて $\mathrm{b}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$ に帰着させると $\frac{3\pi}{256}$ を得る。
4. 小問 (i) で求めた明示的な値から、$u_{2m} = \frac{(2m)!}{(2^m m!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \binom{2m}{m} \frac{\pi}{2^{2m+1}}$ である。さらに $2mu_{2m}^2 \to \frac{\pi}{2}$ から $\binom{2m}{m}^2 \approx \frac{4^{2m}}{\pi m}$ が得られる。$m = 10$ のとき、$\binom{20}{10} = 184\,756$ に対して $\frac{4^{10}}{\sqrt{10\pi}} \approx 187\,079$（約 1.3% 大きい）である。

### 4.5 2年生の夢

1. $x^{-x} = e^{-x\ln x} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-x\ln x)^n}{n!}$ であり、$\int_0^1 \frac{x^n(-\ln x)^n}{n!}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ である（$x = e^{-u}$ と置換（substitution）する）。よってこの積分は $\sum_{n\geq 1} n^{-n} \approx 1.2913$ である。

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^x = x^x(\ln x + 1)$ であり、これは $x = \frac{1}{e}$ で 0 になる。そのときの値は $(e^{-1})^{e^{-1}} = e^{-1/e} \approx 0.692$ である。

3. 各項は $\frac{1}{n^n}$ である。7 項で打ち切ると誤差は $\frac{1}{8^8} \approx 6\times 10^{-8}$ より小さく、これで十分である。6 項で打ち切った場合の評価 $\frac{1}{7^7} \approx 1.2\times 10^{-6}$ では足りない。よって 7 項必要である。

4. 部分積分により、$\int_0^1 x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3\ln x}{3}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{9}$ である。一般に $\int_0^1 x^n \ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n+1)^2}$ であり、また $\frac{\ln x}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n \ln x$ である。

### 4.6 公式で表せない積分

1. 微分すると、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{e^x}{x+1} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$、また $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{(x-1)e^x}{x+1} = e^x\left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}\right) = \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^2}$ である。

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{P}e^{-x^2}\right) = (\mathrm{P}' - 2x\mathrm{P})e^{-x^2}$ であり、$\mathrm{P}' - 2x\mathrm{P}$ の次数（degree）は（$\mathrm{P}\neq 0$ のとき）$\deg \mathrm{P} + 1 \geq 1$ であるから、これが 1 に等しくなることはない。

3. $\mathrm{R} = \mathrm{P}/\mathrm{Q}$（既約な形）が 0 において位数（order）$k \geq 1$ の極（pole）をもつとすると、$\mathrm{R}' + \mathrm{R}$ はそこで位数 $k+1 \geq 2$ の極をもつが、$\frac{1}{x}$ の極の位数は 1 である。R が 0 に極をもたなければ、$\mathrm{R}' + \mathrm{R}$ も極をもたない。いずれにせよ $(\mathrm{R}e^x)' \neq \frac{e^x}{x}$ である。

4. $\frac{\mathrm{P}e^x}{x+1}$ を微分すると $e^x\frac{(x+1)\mathrm{P}' + x\mathrm{P}}{(x+1)^2}$ となる。$x = -1$ において $\mathrm{f}(-1) = -\mathrm{P}(-1)$ であり、$\mathrm{f}' = (x+1)\mathrm{P}'' + (x+1)\mathrm{P}' + \mathrm{P}$ から $\mathrm{f}'(-1) = \mathrm{P}(-1)$ を得る。$x^3 - 2$ については $-3+3=0$、$x$ については $-1+1=0$、$x^2+1$ については $2-2=0$ である。この条件は十分条件でもある。次数 $d$ 未満の多項式から次数 $d$ 以下の多項式への写像 $\mathrm{P}\mapsto (x+1)\mathrm{P}' + x\mathrm{P}$ は単射（injective）であるから、その像（image）の次元（dimension）は $d$ である。そしてこの像は、$\mathrm{f}(-1) + \mathrm{f}'(-1) = 0$ を満たす f 全体のなす $d$ 次元空間に含まれるので、その空間全体に一致する。

### 4.7 変分法

1. $y = \cos\frac{\pi x}{2}$ とすると、$J = \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \sin^2 - a^2\int_0^1 \cos^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - a^2\right) < 0$ である。

2. $J(y+\varepsilon\eta) = J(y) + 2\varepsilon\int_0^1 (y'\eta' - a^2 y\eta) + \varepsilon^2 J(\eta)$ である。$\varepsilon = 0$ で最小となるためには、1 次の項（linear term）が消えなければならない。部分積分すると、$\eta(1) = 0$

を満たすすべての $\eta$ に対して $-y'(0)\eta(0) - \int_0^1 (y'' + a^2 y)\eta = 0$ となり、これから $y'' + a^2 y = 0$ かつ $y'(0) = 0$ が従う。

3. $x = Lu$ とおくと $\int_0^L \left((y')^2 - a^2 y^2\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{L}\int_0^1 \left((Y')^2 - (aL)^2 Y^2\right) \mathrm{d}u$ であるから、条件は $aL \le \frac{\pi}{2}$ である。（$aL = \frac{\pi}{2}$ のときも本文と同様に積分が負になることはないが、$y = \cos\frac{\pi x}{2L}$ のときに 0 となる。$aL > \frac{\pi}{2}$ のときは、同じ関数によって積分は負になる。）

4. サイクロイド（cycloid）は $x = R(\theta - \sin\theta)$、$y = R(1 - \cos\theta)$ である。等時曲線（tautochrone）については Section 11.4 を参照のこと。弧長（arc length）を用いて表すと、運動はちょうど単振動（simple harmonic motion）になる。

### 4.8 球形のパンを切る

1. $V/A = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{3}$ である。しかし、高さ $t$ の残りの部分については $A = 2\pi a t$、$V = \frac{1}{3}\pi t^2(3a - t)$ であるから $V/A = \frac{t(3a-t)}{6a}$ となり、これは $t = \frac{3}{2}a$ のとき最大値 $\frac{3a}{8}$ をとる。これは $\frac{a}{3}$ より大きい。

2. この帯の高さは、球の高さ $2R$ のうち $2R\sin 23.4^\circ$ であるから、その割合は $\sin 23.4^\circ \approx 0.40$ である。

3. $y = \sqrt{x}$ のとき $y\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{x + \frac{1}{4}}$ であり、定数ではない。$y\sqrt{1 + (y')^2} = c$ からは $(y')^2 = \frac{c^2}{y^2} - 1$ が得られ、その解は $y = c$（円柱（cylinder））と円 $(x - x_0)^2 + y^2 = c^2$（球）である。

4. 球の体積は $\frac{4}{3}\pi a^3$、円柱の体積は $\pi a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3$ であり、その比は $\frac{2}{3}$ である。

### 4.9 ホールディッチの定理

1. $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (p\cos t \cdot q\cos t + q\sin t \cdot p\sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot 2\pi pq = \pi pq$。

2. 2 本の弦（chord）の端点を結んでできる三角形は相似（similar）である（同じ弧に対する角は等しい）から、$PA \cdot PB = PC \cdot PD$ である。半径 $R$ の円において $P$ が中心から距離 $r$ にあるとき、$P$ を通る直径を考えると $(R - r)(R + r)$ となるので、$ab = R^2 - r^2$ であり、環状領域（ring）の面積は $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi ab$ である。

3. $a = b$ ならば $f = \pi(a - b) = 0$ であり、環状領域の面積は $\pi a^2 = \frac{\pi L^2}{4}$ となる。これは棒を直径とする円の面積である。

4. $O$ を通る 2 辺に沿っては $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = 0$ である。3 番目の辺を $0 \le s \le 1$ として $(x_1, y_1) + s(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ と媒介変数表示（parametrisation）すると、これは $(x_1 y_2 - x_2 y_1)\,\mathrm{d}s$ となる。よって面積は $\frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$ である。

章

# 5

# 複素数

実数の領域における二つの真理を結ぶ最短の道は、複素数の領域を通る。

**この章の内容**


**5.1** マチンの公式 STEP III 1987

**5.2** 1の累乗根によるフィルター STEP I 1990

**5.3** $z^{2n}+1$ の因数分解 STEP III 2013

**5.4** 正多角形の中の距離 STEP III 2016

**5.5** 有理角になりそうでならない角 STEP III 2022

**5.6** フェルマー点 STEP III 2000

**5.7** 写像としての複素指数関数 STEP II 1997

**5.8** 円板に隠れた距離 STEP III 2013

**A** 演習問題の答え p. 391

# 虚の数が導く実の答え

実数の領域における二つの真理を結ぶ最短の道は、複素数の領域を通る。

— ジャック・アダマール（Jacques Hadamard）

1545年、ジェロラモ・カルダーノ（Gerolamo Cardano）は三次方程式（cubic equation）の解の公式を発表し、そこで不穏な事実に出会った。三つの立派な実数解をもつ三次方程式であっても、公式を使うと途中で負の数の平方根をとらなければならない場合があったのである。最後にはその平方根は打ち消し合い、実数の答えが残る。しかし計算の途中には、当時のあらゆる基準からすれば存在しないはずの量が現れていた。カルダーノはこの操作を「精妙であると同時に役に立たない」と評した。その後二世紀にわたって、数学者たちはこれらの「虚」の数（imaginary number）を、たまたまうまくいく技巧として、不安を抱えながら使い続けた。

複素数（complex number）がまっとうな数として認められるようになったのは、19世紀初頭、カスパー・ヴェッセル（Caspar Wessel）、ジャン＝ロベール・アルガン（Jean-Robert Argand）、そしてガウス（Gauss）が、複素数を平面上の点として描いたときである。そうなってみると、複素数は技巧どころか、ひとつの啓示であることがわかった。複素数は現実の現象がなぜそのように振る舞うのかを説明し、まさにアダマールの言葉どおり、実数についての結果へ至る最短の道を与え続けている。

## 複素数はなぜ重要なのか

すべての多項式方程式は複素数の範囲に解をもつ。これが**代数学の基本定理**（fundamental theorem of algebra）である。したがって複素数は、厳密な意味で、代数が完結する場なのである。複素数はまた、回転と振動を語るための自然な言語でもある。絶対値（modulus）が1の複素数を掛けると平面が回転するので、角度や波、周期的な振る舞いが関わるものは何であれ、複素数を使うと簡単になる。電気工学者は交流電流の解析に複素数を用いる。物理学者は複素数なしには量子力学を書き下すことすらできない。携帯電話からMRIスキャナーに至るまで、信号処理は複素フーリエ変換（Fourier transform）の上に成り立っている。そして純粋数学においては、複素変数の関数が驚くほど堅固で美しいものであることがわかる。複素関数は、ほんの小さな領域での値がわかれば、いたるところでの値が決まってしまうのである。

### 大学で出会うこと

複素数は大学に入って最初の週から使うことになるが、大きな飛躍は**複素解析**（complex analysis）とともに訪れる。これはふつう 2 年次に学ぶ。その中心となる対象は**正則**（holomorphic）関数、すなわち微分可能な複素関数であり、その理論は驚きに満ちている。正則関数はすべて自動的に無限回微分可能であり、そのテイラー級数（Taylor series）に等しい。閉曲線に沿った積分は、関数が発散する点だけを調べれば計算できる（コーシー（Cauchy）の留数定理（residue theorem））。これにより、他のどんな方法も受けつけない実積分を計算することができる。この理論はさらに、等角写像（conformal map）（Section 5.7）、リーマン面（Riemann surface）、そして素数の分布を支配するリーマンゼータ関数（Riemann zeta function）（Section 1.2）へとつながっていく。並行して、1 の冪根（roots of unity）の代数（Section 5.2、Section 5.3）はガロア理論（Galois theory）へとつながり、複素数を用いた幾何学は Section 5.8 の非ユークリッド幾何学（non-Euclidean geometry）へとつながる。

### この章を貫く問い

**三つの大きな問い**

1. **複素数は実数の問題にどう役立つのか。**複素平面を経由する回り道が、なぜ $\pi$ や二項係数（binomial coefficient）や余弦についての事実を生み出すのだろうか。
2. **1 の冪根の何が特別なのか。**$z^n = 1$ の解は、なぜ和にも積にも、多角形にも角度にも、繰り返し現れるのだろうか。
3. **複素関数はどのような姿をしているのか。**入力も出力も平面上の点であるような関数を、どうすれば図に描けるのだろうか。そして、そこからどのような幾何が見えてくるのだろうか。

この章では、まず偏角（argument）と掛け算（マチン（Machin）の公式）から始め、1 の冪根の代数（フィルター、因数分解、多角形の距離、無理数の角度）を経て、複素数を用いた幾何学（フェルマー（Fermat）点）へ進み、最後に写像としての複素関数（指数関数、そして単位円板（unit disc）に隠れた距離）を扱う。

## この章で扱う考え方

| § | 話題 | 考え方 |
|---|---|---|
| 5.1 | マチンの公式 | 複素数を掛けると偏角が足される |
| 5.2 | 3つおきの二項係数 | 1の冪根にわたって平均をとると、剰余（residue）ごとに選り分けられる |
| 5.3 | 余弦の積 | 根を用いて因数分解し、それから代入する |
| 5.4 | 正多角形の弦 | 距離は絶対値である。$z^n - 1 = \prod(z - \omega^k)$ |
| 5.5 | $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ は無理数（irrational）である | ド・モアブル（De Moivre）の定理、偶奇（parity）、最小反例（minimal counterexample） |
| 5.6 | フェルマー点（Fermat point） | 回転は掛け算である。座標をうまく選ぶ |
| 5.7 | 写像としての $e^w$ | 複素関数を図示する。多対一の写像 |
| 5.8 | 隠れた距離 | 双曲幾何学（hyperbolic geometry）における三角不等式（triangle inequality）としての不等式 |

## この章の読み方

図を描くこと。この章のほとんどすべての結果には幾何学的な意味があり、複素平面を手早くスケッチすれば（1の冪根がどこにあるか、掛け算がどちら向きに回転させるか、格子線がどこへ移るか）、代数計算に入る前に何をすべきかが見えてくることが多い。そのうえで、代数計算は丁寧に行うこと。図は、符号や $2\pi$ の倍数について誤解を招くことがあるからである。

# 5.1 マチンの公式

**問題**

**STEP III 1987、問 3**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/87-s3-q3`

## 導入

1706 年、ロンドンの数学者ジョン・マチン（John Machin）は、$\pi$ を小数点以下 100 桁まで手計算で求めた。それ以前には、これに迫る記録を残した者すらいなかった。その秘密が小問 (ii) の公式である。この公式は、正接（tangent）がごく小さな分数となるような角を用いて $\frac{\pi}{4}$ を表している。分数が小さければ、級数（series）$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ は非常に速く収束（converge）する。マチンの公式とその変種は、コンピュータと Section 2.6 の方法がそれに取って代わるまで、二世紀半にわたって $\pi$ を計算する標準的な方法であり続けた。

この公式は三角関数の恒等式（identity）が生んだ奇跡のように見える。しかしこの問題は、それが実は複素数（complex number）の積についての事実であることを示している。すなわち、複素数を掛け合わせると、その偏角（argument）は足し合わされる。整数を成分とする複素数の掛け算をひとつ行うだけで、全体が証明できてしまうのである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $5 - \mathrm{i}$ の偏角は何か。$1 + \mathrm{i}$ の偏角はどうか。複素数を掛け合わせると、偏角はどうなるか。

$\arg(5 - \mathrm{i}) = -\tan^{-1}\frac{1}{5}$ は小さな負の角であり、$\arg(1 + \mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}$ である。複素数を掛け合わせると、絶対値（modulus）は掛け合わされ、偏角は（$2\pi$ の整数倍の差を除いて）

足し合わされる。したがって

$$\arg((5-\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i})) = \frac{\pi}{4} - 4\tan^{-1}\frac{1}{5} \quad \text{（ただし}2\pi\text{ の整数倍の差がありうる）．}$$

この積を計算し、その偏角を別の方法で求めることができれば、恒等式が得られる。

## 順を追って解く

### 段階 1　絶対値の評価

**考えてみよう**　上からの評価については、両辺を 2 乗してみよ。下からの評価については、$|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha$ を 2 つのベクトルの内積とみなしてみよ。

**上からの評価：** $(|x|+|y|)^2 = x^2+y^2+2|x||y| \geq x^2+y^2 = |z|^2$ であり、両辺はともに負でないから、$|z| \leq |x|+|y|$ である。

**下からの評価：** $|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha$ は、長さ $|z|$ のベクトル $(|x|,|y|)$ と単位ベクトル（unit vector）$(\cos\alpha, \sin\alpha)$ との内積（dot product）である。内積は 2 つのベクトルの長さの積以下であるから、これは $|z|$ 以下である。（代数的には、$|z|^2 - (|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha)^2 = (|x|\sin\alpha - |y|\cos\alpha)^2 \geq 0$ である。）　■

### 段階 2　鍵となる掛け算

**考えてみよう**　$(5-\mathrm{i})^2$ を計算し、それを 2 乗し、さらに $1+\mathrm{i}$ を掛けよ。

$(5-\mathrm{i})^2 = 25 - 10\mathrm{i} - 1 = 24 - 10\mathrm{i}$ である。次に $(24-10\mathrm{i})^2 = 576 - 480\mathrm{i} - 100 = 476 - 480\mathrm{i}$ となる。最後に

$$(476-480\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 476 + 476\mathrm{i} - 480\mathrm{i} + 480 = 956 - 4\mathrm{i}.$$

**手を止めて、やってみよう**　ここで偏角を比べよ。$956-4\mathrm{i}$ の偏角は何か。余分な $2\pi$ の整数倍が現れないと確信できるのはなぜか。

$956 - 4\mathrm{i} = 4(239-\mathrm{i})$ であり、その偏角は $-\tan^{-1}\frac{1}{239}$ である。よって、ある整数 $k$ に対して

$$\frac{\pi}{4} - 4\tan^{-1}\frac{1}{5} = -\tan^{-1}\frac{1}{239} + 2k\pi$$

が成り立つ。ところが $0 < \tan^{-1}\frac{1}{5} < \frac{1}{5}$ であるから、左辺は $\frac{\pi}{4} - \frac{4}{5}$ と $\frac{\pi}{4}$ の間、すなわちおよそ $-0.02$ と $0.79$ の間にある。一方、右辺から $2k\pi$ を除いたものは $-0.005$ と $0$ の間にある。$2\pi$ はこの差よりはるかに大きいから、$k = 0$ である。整理すると

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}. \qquad ■$$

図 5.1.1 は、何が起きたかを示している。45° から出発して、$5-\mathrm{i}$ を掛けるたびに時計回りにおよそ 11.3° 回転し、4 回掛けたあとには実軸（real axis）をわずか 0.24° だけ通り越している。

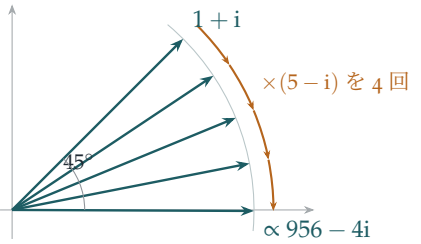



**図 5.1.1**　$1+\mathrm{i}$ に $5-\mathrm{i}$ を 4 回掛ける。掛けるたびに時計回りに $\tan^{-1}\frac{1}{5}\approx 11.31°$ だけ回転する（拡大も起こるが、ここでは無視している）。4 回の回転で 45° は −0.24° に移る。これは $956-4\mathrm{i}$ の偏角であり、$-\tan^{-1}\frac{1}{239}$ に等しい。

### 段階 3　2 つ目の公式

**考えてみよう**　同様に考えると、今度はどのような積を計算すればよいか。

$(4+\mathrm{i})^3(20+\mathrm{i})(1985+\mathrm{i})$ を考える。その偏角は $3\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{20}+\tan^{-1}\frac{1}{1985}$ である。さて $(4+\mathrm{i})^2=15+8\mathrm{i}$ であるから、$(4+\mathrm{i})^3=(15+8\mathrm{i})(4+\mathrm{i})=52+47\mathrm{i}$ となる。次に $(52+47\mathrm{i})(20+\mathrm{i})=1040+52\mathrm{i}+940\mathrm{i}-47=993+992\mathrm{i}$ であり、

$$(993+992\mathrm{i})(1985+\mathrm{i})=(1971105-992)+(993+1969120)\mathrm{i}=1970113+1970113\mathrm{i}.$$

実部（real part）と虚部（imaginary part）が等しいから、偏角は $\frac{\pi}{4}$ である。3 つの角はいずれも小さな正の角であり（その和は $3\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{1985}<1<2\pi$ より小さい）、$2\pi$ の整数倍を気にする必要はない。よって公式が従う。 ■

## 振り返り

- **掛け算で偏角は足し合わされる。**このただひとつの事実によって、ガウス整数の積が角どうしの恒等式に変わった。
- **$2\pi$ の整数倍に注意する。**偏角は $2\pi$ の整数倍の差を除いてしか定まらないので、どの恒等式でも、その整数倍を確定させるために大きさの評価が必要であった。
- **整数が仕事をする。**計算はすべて整数で行われ、$\pi$ についての恒等式は近似を一切用いずに厳密に得られた。

## 背後にある数学

### 手計算で $\pi$ を求める

マチンの公式はなぜ計算にこれほど適しているのだろうか。級数 $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ は $|x| \le 1$ で収束するが、$x = 1$ では収束が非常に遅い。$\frac{\pi}{4}$ を小数点以下 3 桁求めるだけでも、$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$ をおよそ 1000 項とる必要がある。$x = \frac{1}{5}$ とすると、各項は前の項のおよそ 25 分の 1 になり、1 項あたりおよそ 1.4 桁ずつ精度が上がる。$x = \frac{1}{239}$ なら、1 項あたりおよそ 4.8 桁である。マチンの 100 桁は、1 つ目の級数をわずか約 70 項、2 つ目の級数を約 20 項とるだけで得られた。1873 年、William Shanks はマチン型の公式を用いて 707 桁を計算し、その計算に何年も費やした。ところが 1944 年に、彼が小数第 528 位で誤りを犯しており、それ以降の桁がすべて間違っていたことが判明した。

### 再びガウス整数

$a, b$ を整数として $a + b\mathrm{i}$ の形に表される数は、Section 1.6 で扱った**ガウス整数**（Gaussian integers）である。$5 - \mathrm{i}$ がこれほどうまく働く理由は、ある因数分解（factorisation）にある。$239^2 + 1 = 57122 = 2 \times 13^4$ であり、これをガウス整数の中で書くと $(239 + \mathrm{i})(239 - \mathrm{i}) = (1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})\,(3 + 2\mathrm{i})^4 (3 - 2\mathrm{i})^4$ となる。そして $5 - \mathrm{i} = (1 - \mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i})$ は、これと同じガウス素数（Gaussian primes）からできている。マチン型の公式を見つけることは、実は $n^2 + 1$ の形の数を因数分解する問題なのである。1899 年、Carl Størmer はまさにこの考え方を用いて、$a, b, m, n$ を整数とする $\frac{\pi}{4} = a \tan^{-1} \frac{1}{m} + b \tan^{-1} \frac{1}{n}$ の形の公式は 4 つしかないことを証明した。それはマチンの公式と、オイラー（Euler）、Hermann、Hutton がそれぞれ見つけた 3 つの公式である。

### 回転

絶対値 1 の複素数を掛けることは、平面の回転（rotation）である。だからこそ複素数は、この章の後半で扱う幾何学から、電気工学における交流、量子力学の波動関数に至るまで、回転や角度が関わるあらゆるものにとって自然な言語となっている。Section 4.2 では $\tan^{-1}$ の加法定理（addition formula）が巧妙な置換から得られたが、ここでは複素数の掛け算から得られる。この 2 つは、同じ事実を異なる側面から見たものである。

## 思考のスキル

### 角度を複素数の掛け算に翻訳する

角の和についての恒等式は、積の偏角についての恒等式である。積を厳密に計算し、その偏角を読み取れ。

複素数の計算は機械的かつ厳密に行えるが、逆三角関数（inverse trigonometric functions）の式変形は誤りを犯しやすい。一方から他方へ翻訳することが、しばしば証明への最短の道となる。

## 次の一歩

1 **いとこにあたる問題。** STEP II 2000、問 4（`step.maths.org/questions/00-s2-q4`）に挑戦してみよ。この節と同じ方法、すなわち複素数を掛け合わせて偏角を読み取る方法で、$\frac{\pi}{4}$ についての別の逆正接の公式を証明する問題である。

2 **オイラーの公式。** $(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})$ を考えることにより、$\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$ を示せ。

3 **Hutton の公式。** $\frac{\pi}{4}=2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$ を示せ。

4 **何項必要か。** マチンの公式を用いて $\pi$ を小数点以下 20 桁まで求めるには、それぞれの級数を何項とる必要があるか見積もれ。そのうえで、最初の数桁を電卓で実際に計算してみよ。

## さらに学ぶために

- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM***（Wiley）。マチン型の公式の歴史も扱っている。
- **Jörg Arndt & Christoph Haenel, *Pi Unleashed***（Springer）。$\pi$ を計算する新旧の方法を生き生きと紹介している。
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。複素数を幾何学的に捉えるための最良の本である。第 1 章では、掛け算を回転と拡大として扱っている。

# 5.2 1 の累乗根によるフィルター

**問題**

**STEP I 1990、問 2**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/90-s1-q2`

## 導入

パスカルの三角形（Pascal's triangle）のある行に並ぶ二項係数（binomial coefficient）の和は $2^n$ である。$(1+x)^n$ に $x=1$ を代入すればよい。代わりに $x=-1$ を代入すると交代和が得られ、その値は 0 である。この二つを加えると、偶数番目の係数の和は $2^{n-1}$、すなわちちょうど半分であることがわかる。つまり、偶数番目の項と奇数番目の項は全体をちょうど二等分するのである。

では、3 つおきの係数についてはどうだろうか。位置 $0, 3, 6, \ldots$ だけを取り出せるような実数 $x$ は存在しない。しかし、複素数ならば存在する。1 の 3 乗根（cube roots of unity）はフィルターの役割を果たす。すなわち、1、$\omega$、$\omega^2$ にわたって平均をとると、累乗 $\omega^k$ は $k$ が 3 の倍数のとき 1、そうでないとき 0 を与える。この考え方は **1 の冪根フィルター**（roots-of-unity filter）と呼ばれ、これまでに考案された中で最も重要なアルゴリズムの一つである**離散フーリエ変換**（discrete Fourier transform）の小さな雛形になっている。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $\omega$ は $z^3-1=0$ の解である。$z^3-1$ を因数分解せよ。そこからなぜ $1+\omega+\omega^2=0$ が得られるのか。

$z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$ である。$\omega^3=1$ かつ $\omega\neq 1$ であるから、$\omega$ は第 2 の因数の根でなければならない。すなわち $\omega^2+\omega+1=0$ である。幾何学的には、1、$\omega$、$\omega^2$ は原点を中心とする正三角形の頂点であり、それらの和は三角形の重心、すなわち 0

である。

## 順を追って解く

### 段階 1　絶対値と偏角

$1+\omega+\omega^2=0$ より $1+\omega^2=-\omega$ である。$\omega=e^{2\pi\mathrm{i}/3}$ であるから、$-\omega=e^{\mathrm{i}\pi}e^{2\pi\mathrm{i}/3}=e^{5\pi\mathrm{i}/3}=e^{-\pi\mathrm{i}/3}$ となる。したがって $1+\omega^2$ の絶対値（modulus）は 1、偏角（argument）は $-\frac{\pi}{3}$ である。同様に $1+\omega=-\omega^2=e^{\pi\mathrm{i}/3}$ であり、絶対値は 1、偏角は $\frac{\pi}{3}$ である。

### 段階 2　フィルター

> **考えてみよう**　$k$ が 3 の倍数のとき、$1+\omega^k+\omega^{2k}$ の値はいくらか。そうでないときはどうか。

$3\mid k$ ならば $\omega^k=1$ であり、和は 3 である。そうでなければ $\omega^k$ は $\omega$ または $\omega^2$ であり、いずれの場合も $1+\omega^k+\omega^{2k}=1+\omega+\omega^2=0$ となる。よって式 $\frac{1}{3}(1+\omega^k+\omega^{2k})$ は $3\mid k$ のとき 1、それ以外のとき 0 である。つまりこれは 3 の倍数を検出する装置になっている。

> **手を止めて、やってみよう**　$r=1,2,3$ について $(1+\omega^r)^n$ を二項定理（binomial theorem）でそれぞれ展開し、足し合わせよ。何が得られるか。

$\omega^3=1$ であるから、

$$(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n+(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\omega^k+\omega^{2k}+1)=3\sum_{3\mid k}\binom{n}{k}.$$

一方、段階 1 より

$$(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n+2^n=e^{n\pi\mathrm{i}/3}+e^{-n\pi\mathrm{i}/3}+2^n=2\cos\frac{n\pi}{3}+2^n.$$

これを 3 で割れば求める公式が得られる。 ■

### 段階 3　二つの計算

$n=25$ のとき、$\frac{25\pi}{3}=8\pi+\frac{\pi}{3}$ であるから $\cos\frac{25\pi}{3}=\frac{1}{2}$ となり、

$$\binom{25}{0}+\binom{25}{3}+\cdots+\binom{25}{24}=\frac{33554432+1}{3}=11184811.$$

**考えてみよう** 二つ目の和では、$k \equiv 2 \pmod 3$ となる位置が必要である。$k \equiv 0$ ではなく $k \equiv 2$ を検出するには、フィルターをどう修正すればよいか。

検出装置をずらせばよい。$\frac{1}{3}(1+\omega^{k-2}+\omega^{2(k-2)})$ は、$k \equiv 2 \pmod 3$ のときに限り 1 となる。$\omega^{-2}=\omega$、$\omega^{-4}=\omega^2$ であるから、

$$\sum_{k\equiv 2}\binom{n}{k} = \frac{1}{3}\Big(2^n+\omega(1+\omega)^n+\omega^2(1+\omega^2)^n\Big).$$

$n=24$ のとき $(1+\omega)^{24}=e^{8\pi i}=1$ であり、同様に $(1+\omega^2)^{24}=1$ であるから、括弧内は $2^{24}+\omega+\omega^2=2^{24}-1$ となる。$2^{24}=16777216$ を用いて、

$$\binom{24}{2}+\binom{24}{5}+\cdots+\binom{24}{23} = \frac{16777215}{3} = 5592405. \qquad \blacksquare$$

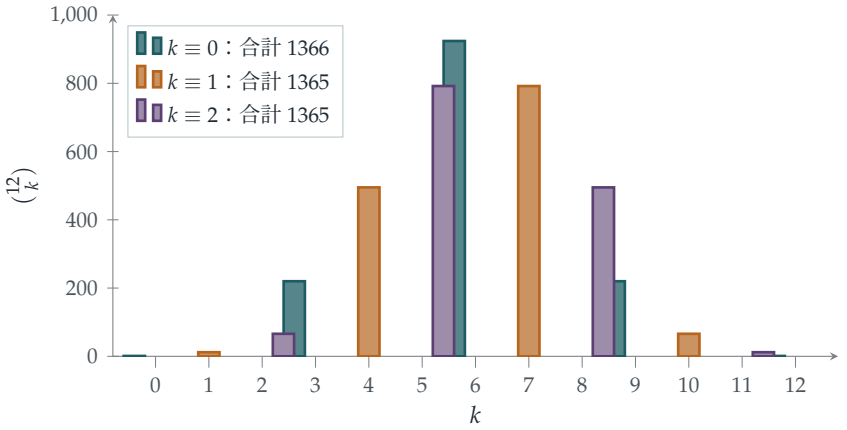



**図 5.2.1** パスカルの三角形の第 12 行を、$k$ を 3 で割った余りによって色分けしたもの。三つの類の合計はそれぞれ 1366、1365、1365 であり、いずれも $2^{12}=4096$ のほぼちょうど 3 分の 1 である。$\frac{4096}{3}$ からのわずかなずれ $+\frac{2}{3}$、$-\frac{1}{3}$、$-\frac{1}{3}$ は、1 の冪根フィルターによって正確に予測される。

## 振り返り

- **1 の冪根にわたる平均は剰余によって項をふるい分ける。** $\frac{1}{3}\sum_r \omega^{rk}$ は、3 が $k$ を割り切るかどうかに応じて 1 または 0 となる。多項式の 1 の冪根における値を足し合わせると、3 つおきの係数が取り出される。
- **フィルターをずらす。** 平均をとる前に $\omega^{-rj}$ を掛けると、$k \equiv j$ となる係数が取り出される。
- **実数の答えのための複素数。** 答えは整数であり、問題も整数についてのものであっ

たが、その道筋は複素平面を経由していた。

## 背後にある数学

### 離散フーリエ変換

3 を任意の $N$ に、$\omega$ を $e^{2\pi i/N}$ に置き換える。数の列 $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$ に対して、数

$$\hat{a}_r = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \, \omega^{rk}$$

はその**離散フーリエ変換**をなし、フィルターの恒等式 $\sum_r \omega^{rk} = N$ または 0 のおかげで、$\hat{a}_r$ から $a_k$ を復元することができる。この変換は信号をその構成周波数に分解する。1965 年、James Cooley と John Tukey は、これを $N^2$ ステップではなくおよそ $N \log_2 N$ ステップで計算する方法、すなわち**高速フーリエ変換**（fast Fourier transform）を発表した。ガウス（Gauss）は 1805 年に本質的に同じ考えを見出していたが、公表することはなかった。FFT は音声・画像の圧縮（MP3 や JPEG）、携帯電話の信号、医療用スキャナー、巨大な数の乗算などに用いられており、しばしば 20 世紀で最も重要なアルゴリズムの一つに数えられる。

### 母関数

このフィルターは、より大きな考え方の一例である。数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ は、多項式またはべき級数（power series）$A(x) = \sum a_k x^k$、すなわちその**母関数**（generating function）としてまとめることができ、数列に対する操作は関数に対する操作になる。1 での値をとれば数列の和が得られ、1 の冪根での値をとれば剰余類（residue class）が取り出され、微分すれば各項に $k$ の重みが付く。これにより多くの数え上げの問題が代数の問題に変わり、第 9 章では中心的な手法となる。同じフィルターを 5 乗根を用いて $(1+x)^n$ に適用すると、正五角形や黄金比（golden ratio）とのつながりが見えてくる。1 の冪根の代数については Section 6.1 でさらに追究する。

## 思考のスキル

### 対称性を使ってふるい分ける

和の中からある条件を満たす項を取り出すには、欲しい項では 1、それ以外では 0 となる関数を、対称的な平均から組み立てればよい。

1 の冪根にわたる平均はその古典的な例である。「対称性の群にわたって平均をとり、欲しい部分を分離する」という同じ原理は、1 の冪根フィルターから群の表現論（representation theory）に至るまで、代数学のいたるところに現れる。

## 次の一歩

1 **偶数番目。** 1 の平方根（1 と $-1$）によるフィルターを用いて、$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots = 2^{n-1}$ を示せ。

2 **残りの剰余。** $\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\binom{n}{7}+\cdots$ の公式を求め、三つの公式の和が $2^n$ になることを確かめよ。

3 **4 つおき。** i を用いて、$\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\cdots = \frac{1}{4}\left(2^n + 2^{n/2+1}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$ を示せ。

4 **割り切れる条件。** $\{1,2,\ldots,12\}$ の部分集合のうち、要素の個数が 3 で割り切れるものはいくつあるか。要素の和が 3 で割り切れるものはいくつあるか。（後者のヒント：$\prod_{j=1}^{12}(1+x^j)$ を 1 の 3 乗根で考えよ。）

## さらに学ぶために

- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology***（A. K. Peters；オンラインで無料公開）。母関数への楽しい入門書であり、1 の冪根フィルターは早い段階で登場する。
- **Arthur Benjamin & Jennifer Quinn, *Proofs That Really Count***（Mathematical Association of America）。二項係数の恒等式を数え上げによって証明する。
- **T. W. Körner, *Fourier Analysis***（Cambridge University Press）。離散フーリエ変換と FFT を扱っている。

# 5.3 $z^{2n}+1$ の因数分解

**問題**

**STEP III 2013、問 4**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/13-s3-q4`

## 導入

$\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{5\pi}{8}\cos\frac{7\pi}{8}$ の値はいくらだろうか。各因数は入れ子になった平方根を含む扱いにくい数だが、積はちょうど $\frac{1}{8}$ になる。等間隔の角における余弦の積は、このように何度でも簡単な数に帰着する。本問はその理由を明らかにするものである。鍵は、これらの角を多項式の根の偏角（argument）とみなし、多項式を因数分解（factorise）し、巧みに選んだ値を代入することにある。

複素数の範囲では、すべての多項式は一次因数（linear factor）の積に完全に因数分解される。実数の範囲では、実数でない根は共役（conjugate）な組として現れ、それらが組み合わさって実数係数の二次因数になる。ここではどちらの事実も見ることができる。とくに後者によって、実数解を一つももたない $z^{2n}+1$ を、実数係数の二次式の積として書くことができるのである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $z^{2n}=-1$ の解は複素平面（complex plane）上のどこにあるか。$n=2$ と $n=4$ の場合について図示せよ。

解はすべて絶対値（modulus）が 1 であり、偏角 $\theta$ は $2n\theta=\pi+2m\pi$ を満たすので、$\theta$ は $\frac{\pi}{2n}$ の奇数倍である。これらは単位円（unit circle）上の正 $2n$ 角形をなし、どの頂点も実軸上にないような向きに回転している（図 5.3.1）。これらは、実軸に関して互いに鏡像となる共役な組 $e^{\pm i\theta}$ に分かれる。

## 順を追って解く

### 段階 1　共役な組から実数係数の二次式が得られる

$(z - e^{\mathrm{i}\theta})(z - e^{-\mathrm{i}\theta}) = z^2 - (e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta})z + 1 = z^2 - 2z\cos\theta + 1.$ ■

### 段階 2　因数分解

$-\pi < \theta \le \pi$ を満たす $-1$ の $2n$th 乗根は $e^{\pm \mathrm{i}\theta_k}$ であり、ここで

$$\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

である。これらは $2n$ 個の相異なる数で、いずれも $2n$ 次多項式 $z^{2n}+1$ の根であるから、これらが根のすべてであり、

$$z^{2n} + 1 = \prod_{k=1}^{n} (z - e^{\mathrm{i}\theta_k})(z - e^{-\mathrm{i}\theta_k}) = \prod_{k=1}^{n} (z^2 - 2z\cos\theta_k + 1).$$ ■

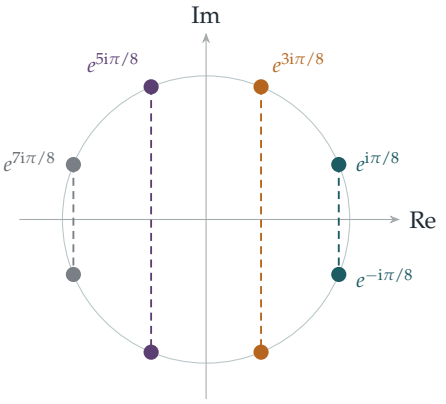



**図 5.3.1**　$z^8 = -1$ の 8 個の解（$n = 4$ の場合）。これらは破線で結ばれた 4 組の共役な組に分かれ、各組は $z^8 + 1$ の実数係数の二次因数 $z^2 - 2z\cos\theta_k + 1$ を一つずつ与える。

### 段階 3　$z = \mathrm{i}$ を代入する

**考えてみよう**　$\mathrm{i}^2 - 2\mathrm{i}\cos\theta + 1$ はいくらか。また、$n$ が偶数のとき $\mathrm{i}^{2n} + 1$ はいくらか。

各因数は

$$\mathrm{i}^2 - 2\mathrm{i}\cos\theta_k + 1 = -2\mathrm{i}\cos\theta_k,$$

となるので、右辺は $(-2\mathrm{i})^n \prod_k \cos\theta_k$ である。左辺は $\mathrm{i}^{2n} + 1 = (-1)^n + 1$ であり、$n$ が

偶数のときこれは 2 である。さらに $n$ が偶数のとき、

$$(-2\mathrm{i})^n = 2^n(-\mathrm{i})^n = 2^n\bigl((-\mathrm{i})^2\bigr)^{n/2} = 2^n(-1)^{n/2}.$$

したがって

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\theta_k = \frac{2}{2^n(-1)^{n/2}} = (-1)^{\frac{1}{2}n}2^{1-n}. \qquad \blacksquare$$

$n=4$ とすると、これは導入で見た積 $(-1)^2 2^{-3} = \frac{1}{8}$ になる。

### 段階 4　$n$ が奇数のとき

**考えてみよう**　$n$ が奇数のとき、角 $\theta_k$ のうち一つは $\frac{\pi}{2}$ に等しい。それはどれか。また、そのために $z=\mathrm{i}$ の代入がこのままでは役に立たないのはなぜか。

$k=\frac{n+1}{2}$ のとき $\theta_k = \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$ であるから、その因数は $z^2+1$ となり、これは $z=\mathrm{i}$ で消える。すると両辺はともに 0 となり、何の情報も得られない。これを回避するには、先にこの因数で割っておけばよい。与えられた恒等式はまさにそれを行っている。

**手を止めて、やってみよう**　因数分解の両辺を $1+z^2$ で割り、$z=\mathrm{i}$ を代入して整理せよ。残った余弦を組にする必要がある。

因数 $z^2+1$（$k=\frac{n+1}{2}$ の項）で割ると、

$$1 - z^2 + z^4 - \cdots + z^{2n-2} = \prod_{k\neq\frac{n+1}{2}}\bigl(z^2 - 2z\cos\theta_k + 1\bigr).$$

$z=\mathrm{i}$ では、左辺の各項は $(-z^2)^j = 1^j = 1$ であり、項は $n$ 個あるので、左辺は $n$ である。右辺は $(-2\mathrm{i})^{n-1}\prod_{k\neq\frac{n+1}{2}}\cos\theta_k$ である。$n-1$ は偶数なので、$(-2\mathrm{i})^{n-1} = 2^{n-1}(-1)^{(n-1)/2}$ である。

ここで角を組にする。$\theta_{n+1-k} = \pi - \theta_k$ であるから、$\cos\theta_{n+1-k} = -\cos\theta_k$ である。残った $n-1$ 個の因数は、このような組を $\frac{n-1}{2}$ 個なし（$k=1,\dots,\frac{n-1}{2}$）、各組は $-\cos^2\theta_k$ を与える。よって

$$n = 2^{n-1}(-1)^{(n-1)/2}\cdot(-1)^{(n-1)/2}\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\cos^2\theta_k = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\cos^2\theta_k,$$

となり、$\prod\cos^2\theta_k = n2^{1-n}$ が得られる。最後の因数（$k=\frac{n-1}{2}$）は、問題文にあるとおり $\cos^2\frac{(n-2)\pi}{2n}$ である。 $\blacksquare$

$n=3$ で確かめよう：$\cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} = 3\cdot 2^{-2}$。

## 振り返り

- **根がわかれば多項式がわかる。**多項式は根によって（定数倍を除いて）決まるので、$z^{2n}+1$ の根を列挙することでその因数分解が得られた。
- **巧みな値を代入する。**$z=\mathrm{i}$ とおくと、各二次因数が余弦の定数倍になった。
- **代入して $0=0$ になったら、先に割る。**$n$ が奇数のときは一つの因数が $z=\mathrm{i}$ で消えるので、代入の前にそれを取り除いた。

## 背後にある数学

### 代数学の基本定理

$z^{2n}+1$ が $\mathbb{C}$ 上で一次因数の積に完全に因数分解できることは、**代数学の基本定理**（fundamental theorem of algebra）の特別な場合である。すなわち、複素数係数の定数でない多項式はすべて複素数の根をもち、したがって一次因数の積に完全に因数分解される。広く受け入れられた最初の証明は、ガウス（Gauss）が 1799 年の博士論文で与えたものであり、彼はその後も何度かこの定理に立ち返って新たな証明を与えた。この定理の帰結として、実数係数の多項式はすべて実数係数の一次因数と二次因数の積に因数分解される。実数でない根は、段階 1 で見たとおり共役な組として現れるからである。この定理は名前こそ「代数学」だが、中身は解析学的である。どの証明も連続性など実数の何らかの性質を用いており、最も鮮やかな証明の一つを、複素解析（complex analysis）の最初の講義で目にすることになるだろう。

### 正弦と余弦の積

この方法からは、恒等式の一群が得られる。$z^n-1$ を $z^{2n}+1$ の代わりに用いると

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}},$$

が得られる。これは幾何学的な形で Section 5.4 において証明されている。このような恒等式は、振動系の解析（ばねでつながれた $n$ 個の質点の振動数には $\sin\frac{k\pi}{2(n+1)}$ が現れる）や、数え上げの問題（ある種のグラフの全域木（spanning tree）の個数や、長方形のドミノタイリング（domino tiling）の数は余弦の積で与えられる）に現れる。$m\times n$ の長方形のドミノタイリングの数に対するカステレイン（Kasteleyn）の 1961 年の公式は、$\cos^2\frac{j\pi}{m+1}$ と $\cos^2\frac{k\pi}{n+1}$ を含む式の二重積である。

## 思考のスキル

### 根から積へ

等間隔の角における三角関数の値の積を求めるには、それらが簡単な多項式の根から来ていることを見抜き、因数分解して、都合のよい値を代入せよ。

値の選び方こそが腕の見せどころである。ここでは $z=\mathrm{i}$ によって各二次因数が余弦になった。別の値（たとえば $z=1$ や $z=-1$）を選べば、別の恒等式が得られる。

## 次の一歩

1 **七角形にまつわる積。** 小問 (ii) で $n=7$ として、$\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{14}\cos\frac{5\pi}{14}=\frac{\sqrt{7}}{8}$ を示せ。次に、$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{8}$ を示せ。（**ヒント：** $\cos\theta=\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$ を使って角を関係づけるか、恒等式 $\sin 2x=2\sin x\cos x$ を繰り返し用いよ。）

2 **別の代入。** 因数分解に $z=1$ を代入して、

$$\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}=2^{\frac{1}{2}-n}.$$

を示せ。

3 **$z^6+1$ を因数分解する。** $z^6+1$ を実数係数の三つの二次式の積で表し、展開して答えを確かめよ。

4 **正弦。** $z^{2n}-1$ を同様に因数分解し、$z^2-1$ で割ることにより、

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

を示せ。

## さらに学ぶために

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。第 2 章で 1 の冪根（roots of unity）と多項式を、美しい図とともに扱っている。
- **Benjamin Fine & Gerhard Rosenberger, *The Fundamental Theorem of Algebra***（Springer）。解析学、代数学、位相幾何学によるこの定理のいくつかの証明を、学部生向けに解説している。

- **Paul Nahin, *An Imaginary Tale***（Princeton University Press）。$\sqrt{-1}$ の歴史。1 の冪根とその応用も扱っている。

# 5.4 正多角形の中の距離

**問題**

**STEP III 2016、問 7**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/16-s3-q7`

## 導入

半径 1 の円に内接する正七角形を描く。ひとつの頂点から他の頂点へ 6 本の弦（chord）を引き、その長さを測る。6 本の長さをすべて掛け合わせると、答えはちょうど 7 になる。正 100 角形では、ひとつの頂点から引いた 99 本の弦の長さの積はちょうど 100 である。

なぜこれほどきれいな結果が成り立つのだろうか。弦の長さそのものは複雑である（$2\sin\frac{\pi}{7}$、$2\sin\frac{2\pi}{7}$ など）。この問題は、この結果がある単純な代数的恒等式、すなわち $z^n - 1$ の 1 の冪根（roots of unity）による因数分解（factorisation）の幾何学的な影であること、そして平面上の距離が複素数の絶対値（modulus）であることを示している。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 多角形の頂点を $n$ 乗して 1 になる複素数、すなわち $X_k = \omega^k$ に置く。点 $P$ が $z$ であるとき、$|PX_k|$ を $z$ で表すとどうなるか。すると、すべての距離の積はどうなるか。

$|PX_k| = |z - \omega^k|$ であり、これらすべての積は $|(z-1)(z-\omega)\cdots(z-\omega^{n-1})|$ である。問題の最初の部分によれば、これは $|z^n - 1|$ に等しい。$n$ 個の距離の積が、ひとつの絶対値になったのである。あとは $z$ をうまく選ぶだけである。

## 順を追って解く

### 段階 1　因数分解

各 $\omega^k$ は $(\omega^k)^n = (\omega^n)^k = 1$ を満たすので、$1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$ は $z^n - 1$ の根である。これらは互いに異なる（偏角 $\frac{2\pi k}{n}$ が 0 以上 $2\pi$ 未満の範囲で互いに異なる）ので、これらは最高次の係数が 1 であるこの $n$ 次多項式（polynomial）の $n$ 個の根のすべてであり、$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \omega^k)$ が成り立つ。 ■

### 段階 2　垂直二等分線上の点

$X_k = \omega^k$ となるように図を回転させる。$X_0 = 1$ と $X_1 = \omega$ から等距離にある点全体は $X_0X_1$ の垂直二等分線（perpendicular bisector）をなし、これは $O$ を通り角 $\frac{\pi}{n}$ をなす直線である。

> **考えてみよう**　したがって、ある実数 $t$（正でも負でもよい）を用いて $P$ は $z = te^{i\pi/n}$ と表され、$|OP| = |t|$ である。$z^n$ はどうなるか。

$z^n = t^n e^{i\pi} = -t^n$ である。よって

$$|PX_0| \times \cdots \times |PX_{n-1}| = |z^n - 1| = |-t^n - 1| = |t^n + 1|.$$

$n$ が偶数ならば $t^n = |t|^n \geq 0$ であるから、これは $|OP|^n + 1$ である。 ■

> **手を止めて、やってみよう**　$n$ が奇数のときはどうなるか。$t > 0$ の場合と $t < 0$ の場合を分けて考え、それぞれの場合が幾何学的に何を意味するかを述べよ。

$n$ が奇数ならば、$t^n$ は $t$ と同じ符号をもつ。

- $t \geq 0$、すなわち $P$ が $O$ に関して $X_0X_1$ の中点と同じ側にあるとき、積は $|OP|^n + 1$ である。
- $t < 0$、すなわち $P$ が $O$ に関して反対側（辺 $X_0X_1$ に向かい合う頂点の側）にあるとき、$t^n = -|OP|^n$ であり、積は $\left|1 - |OP|^n\right|$ である。

$n$ が奇数のとき、$O$ を通り $X_0X_1$ に垂直な直線は、反対側にあるひとつの頂点を通る。2 番目の場合、$P$ がその頂点であるとき（$|OP| = 1$）積は 0 になるが、これは当然である。そのとき距離のひとつが 0 になるからである。

### 段階 3　頂点から引いた弦

**考えてみよう** 今度は $P = X_0$ であり、距離のひとつ $|X_0X_0|$ が 0 なので、$|z^n - 1| = 0$ は役に立たない。$\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ を根にもち、1 を根にもたない多項式は何か。

$z^n - 1$ を $z - 1$ で割ると

$$(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1}) = \frac{z^n-1}{z-1} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}.$$

右辺は多項式なので、この式はすべての $z$ について成り立ち、$z = 1$ でも成り立つ。そのとき右辺は $n$ に等しい。$z = 1$ で絶対値をとると

$$|X_0X_1| \times |X_0X_2| \times \cdots \times |X_0X_{n-1}| = |1-\omega|\,|1-\omega^2|\cdots|1-\omega^{n-1}| = n. \qquad \blacksquare$$

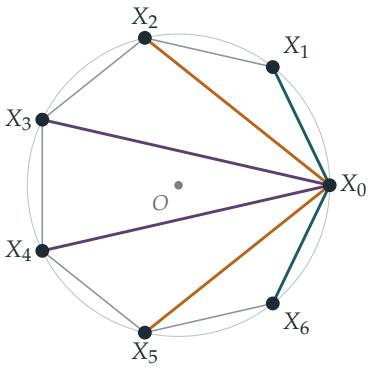



**図 5.4.1** 半径 1 の円に内接する正七角形。$X_0$ から引いた 6 本の弦の長さは $2\sin\frac{k\pi}{7}$ であり、約 0.868（青緑）、1.564（琥珀色）、1.950（紫）がそれぞれ 2 回ずつ現れる。その積はちょうど 7 である。

## 振り返り

- **距離は絶対値である。** $|PX_k| = |z - \omega^k|$ であるから、距離の積は積の絶対値であり、その積は閉じた形で表せた。
- **対称性を使って座標を選ぶ。** 頂点が 1 の冪根になるように回転させ、$O$ を通る対称軸を使うことで、$z^n$ が簡単に計算できた。
- **代入の前に 0 になる因数を約分する。** Section 5.3 と同様に、注目する点で 0 になる因数を割り去ることで、代入が可能になった。

## 背後にある数学

### コーツの定理

小問 (i) はロジャー・コーツ（Roger Cotes）の定理である。コーツはケンブリッジの才気あふれる若き数学者で、ニュートン（Newton）の『*Principia*』（プリンキピア）第 2 版を編集し、1716 年に三十三歳で亡くなった（ニュートンは「彼が生きていたなら、我々は何事かを知りえたであろう」と述べた）。コーツは、$P$ が $O$ から正 $n$ 角形の頂点を通る半直線上にあるとき、$P$ から各頂点までの距離の積は $\bigl||OP|^n - 1\bigr|$ であり、$P$ が辺の中点を通る半直線上にあるときは $|OP|^n + 1$ であることを発見した。彼はこれを用いて、複素数を使わずに $x^n \pm 1$ を実数係数の 2 次式の積に因数分解した。これは有理関数の積分に必要だったのである。この定理は彼の死後、1722 年に出版された。

### 正弦の積

$|1 - \omega^k| = |e^{-\mathrm{i}\pi k/n} - e^{\mathrm{i}\pi k/n}| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$ であるから、小問 (ii) は

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

を意味する。これは Section 5.3 の余弦の積と対をなすものである。関連する積から $z^n - 1$ の**判別式**（discriminant）が得られる。すなわち、相異なる $n$ 乗して 1 になる複素数のすべての組の間の距離の 2 乗の積は $n^n$ である。判別式は多項式の根がどれだけ離れているかを測るもので、多項式の代数や数体の代数において中心的な役割を果たす。これについては第 6 章で取り上げる。

### 静電気学と等間隔配置

物理的な解釈もある。円周上に $n$ 個の等しい電荷を置く。ポテンシャルエネルギー（2 次元静電気学の対数ポテンシャルによる）を最小にする配置は正多角形であり、そのエネルギーにはまさに $\sum \ln|X_jX_k|$、すなわち距離の積の対数が現れる。「できるだけ散らばった」点は、数値解析（Section 3.6 。そこでは最良の補間点が正多角形から $x = \cos\theta$ によって得られる）やランダム行列の理論において重要である。

## 思考のスキル

**複素数を使って幾何を代数に変える**

平面上の点は複素数であり、距離は絶対値であり、正多角形は $1$ の冪根である。距離の積は多項式の絶対値になる。

この翻訳によって、$z^n - 1$ の因数分解のような代数的恒等式で、直接見抜くのが非常に難しい幾何学的事実を証明できるようになる。

## 次の一歩

1. **小さな場合を確かめる。** 正方形（$n = 4$）と正三角形（$n = 3$）について、小問 (ii) を直接確かめよ。

2. **頂点を通る場合。** $P$ が $O$ から $X_0$ を通る半直線上にあるとき、$|PX_0| \times \cdots \times |PX_{n-1}| = \bigl||OP|^n - 1\bigr|$ であることを示せ。

3. **平均距離。** 小問 (ii) と Section 3.2 の相加相乗平均の不等式（AM–GM inequality）を用いて、$X_0$ から引いた $n-1$ 本の弦の長さの平均が $n^{1/(n-1)}$ 以上であることを示せ。$n = 6$ のときの実際の平均 $\frac{1}{n-1}\sum_{k} 2\sin\frac{k\pi}{n}$ を求め、比較せよ。

4. **すべての弦。** やや難 単位円に内接する正 $n$ 角形の $\binom{n}{2}$ 本の弦すべての長さの積が $n^{n/2}$ であることを示せ。

## さらに学ぶために

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*** (Oxford University Press)。複素数を用いた幾何を、美しい図版とともに解説している。
- **Ross Honsberger, *Mathematical Gems*** (Mathematical Association of America)。正多角形に関する優美な問題がいくつか収められている。
- **Ronald Gowing, *Roger Cotes: Natural Philosopher*** (Cambridge University Press)。コーツとその数学についての伝記である。

# 5.5 有理角になりそうでならない角

**問題**

**STEP III 2022、問 8**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip`

## 導入

学校の幾何で出会う角は、たいてい度数が整数である：$30°, 45°, 60°$。その余弦は $\frac{\sqrt{3}}{2}$ や $\frac{1}{2}$ のような数になる。では逆向きはどうだろうか。余弦が $\frac{1}{3}$ のような簡単な分数であるとき、その角はきれいな度数になるだろうか。

角 $\cos^{-1}\frac{1}{3} \approx 70.528779\ldots°$ は科学のいたるところに現れる。これは正四面体（regular tetrahedron）の隣り合う二つの面のなす角であり、その補角（supplement）$109.47°$ はメタン分子の結合どうしのなす角である。この問題は、この角の度数が有理数（rational number）でないことを証明する。$70\frac{1}{2}$ でもなく、$\frac{1411}{20}$ でもなく、どんな分数でもない。その小数展開は決して循環しない。一見すると地味なこの事実が、1900 年にダフィット・ヒルベルト（David Hilbert）が提出した有名な問題の一つを解決したのである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $\theta$ が有理数であり、たとえば $\theta = \frac{p}{q}$ 度であったとする。$\sin(k\theta) = 0$ となる正の整数 $k$ を求めよ。

$k = 180q$ とすれば $k\theta = 180p$ 度となり、これは半回転の整数倍なので $\sin(k\theta) = 0$ である。したがって有理数の角には、必ず $180°$ の倍数に一致する倍数が存在する。$\theta$ が無理数（irrational）であることを証明するには、$k\theta$ の正弦が 0 になるような倍数が**一つもない**ことを示せば十分である。小問 (ii) では、そのような $k$ が存在するならその最小のものをとり、矛盾（contradiction）を導くことでこれを示す。これは再び

Section 1.3 の整列原理（well-ordering principle）である。

## 順を追って解く

### 段階 1　倍角の公式

> **考えてみよう**　$\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k$ と書き、$\cos^k\theta$ をくくり出せ。括弧の中には何が残るか。

$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k = \cos^k\theta\,(1 + \mathrm{i}\tan\theta)^k = \cos^k\theta \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mathrm{i}^j \tan^j\theta$ である。虚部は奇数 $j = 2m+1$ の項から生じ、そのとき $\mathrm{i}^j = \mathrm{i}(-1)^m$ である：

$$\begin{aligned}\sin k\theta &= \cos^k\theta \sum_{m} (-1)^m \binom{k}{2m+1} \tan^{2m+1}\theta \\ &= \sin\theta\cos^{k-1}\theta \sum_{m} (-1)^m \binom{k}{2m+1} \tan^{2m}\theta.\end{aligned}$$

$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$ であるから、これが求める公式である。 ■偶数 $j = 2m$ の項から生じる実部からは、次が得られる。

$$\cos k\theta = \cos^k\theta \left(1 - \binom{k}{2}(\sec^2\theta - 1) + \binom{k}{4}(\sec^2\theta - 1)^2 - \cdots\right).$$

### 段階 2　偶奇性

ここで $\sec\theta = a$ は奇数の整数なので、$\sec^2\theta - 1 = a^2 - 1$ は**偶数**の整数である。また $\theta$ は $0^\circ$ と $90^\circ$ の間に（両端を含まずに）あるので、$\sin\theta \neq 0$ かつ $\cos\theta \neq 0$ である。

> **考えてみよう**　$\sin(k\theta) = 0$ ならば、括弧 $k - \binom{k}{3}(a^2-1) + \cdots$ は 0 でなければならない。最初の項以外はすべて $a^2 - 1$ の倍数である。このことから $k$ について何がわかるか。

括弧は、$k$ に偶数 $a^2 - 1$ の倍数の和を加えたものである。もし $k$ が奇数なら括弧は奇数となるが、奇数の整数が 0 になることはない。よって $k$ は偶数でなければならない。

すると $\sin(k\theta) = 2\sin(\tfrac{1}{2}k\theta)\cos(\tfrac{1}{2}k\theta) = 0$ である。ところが $\tfrac{1}{2}k$ は $k$ より小さい正の整数なので、$k$ の最小性より $\sin(\tfrac{1}{2}k\theta) \neq 0$ である。ゆえに $\cos(\tfrac{1}{2}k\theta) = 0$ である。 ■

### 段階 3　矛盾

> **手を止めて、やってみよう** $m = \frac{1}{2}k$ として余弦の公式を適用せよ。なぜ $\cos(m\theta)$ は決して 0 にならないのか。

段階 1 より、$\cos(m\theta) = a^{-m}\left(1 - \binom{m}{2}(a^2-1) + \binom{m}{4}(a^2-1)^2 - \cdots\right)$ である。括弧は 1 に偶数 $a^2-1$ の倍数を加えたものなので奇数であり、特に 0 ではない。よって $\cos(m\theta) \neq 0$ となり、段階 2 に矛盾する。

したがって、$\sin(k\theta) = 0$ となる正の整数 $k$ は存在しない（もし一つでも存在すれば最小のものが存在するはずだが、その最小のものが存在しえないことをいま示した）。**取りかかる前に**で述べた観察により、$\theta$ の度数は有理数ではありえない。 ■

### 段階 4 余接の場合

> **考えてみよう** $\cot\phi = \frac{1}{b}$ のとき、$\sec^2\phi - 1$ はいくらか。それは偶数か。

$\tan\phi = b$ なので $\sec^2\phi - 1 = \tan^2\phi = b^2$ であり、$b$ が偶数だからこれは偶数（実は 4 の倍数）である。また $0^\circ < \phi < 90^\circ$ なので、$\sin\phi$ と $\cos\phi$ は 0 でない。あとはまったく同じ議論が成り立つ。$k$ を $\sin(k\phi) = 0$ となる最小の正の整数とすると、括弧 $k - \binom{k}{3}b^2 + \cdots$ は 0 でなければならず、$k$ は偶数となる。すると $\cos(\frac{1}{2}k\phi) = 0$ となるが、余弦の括弧 $1 - \binom{m}{2}b^2 + \cdots$ は奇数である。これは矛盾なので、$\phi$ は無理数である。
■

たとえば、$\cot^{-1}\frac{1}{2} = \tan^{-1}2 \approx 63.43^\circ$ は無理数である。

## 振り返り

- **有理数の角には周期的な倍数がある。**この言い換えによって、無理数性がすべての $k$ に対する $\sin(k\theta)$ についての主張に変わった。
- **偶奇性の議論。**2 を法として考えることで、ある整数が奇数であり、したがって 0 でないことが示された。単純だが決定的である。
- **最小の反例。**最小の $k$ を仮定し、それより小さいもの（ここでは $\frac{1}{2}k$）が存在しなければならないことを示すのは、第 1 章の整列原理による議論である。

## 背後にある数学

### 無理数回転

$\theta$ の度数が有理数なら、$\theta$ ずつ回転を繰り返すと、いずれ出発点に戻ってくる。$\theta$ が無理数なら決して戻らず、しかも驚くべきことが起こる。点 $k\theta$（360° を法として考える）は円周上に**一様に**広がり、どんな角にもいくらでも近づくのである。これは**一様分布定理**（equidistribution theorem）であり、1910 年ごろにワイル（Hermann Weyl）、シェルピンスキ（Wacław Sierpiński）、Piers Bohl によってそれぞれ独立に証明された。図 5.5.1 は $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ の最初の 40 個の倍数を示している。すでに円周を埋めつつあり、どれ一つとして重ならない。

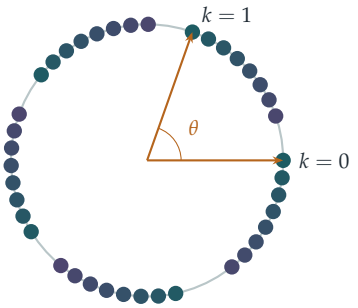



**図 5.5.1**　$k = 0, 1, \ldots, 39$ に対する角 $k\theta$ の点。ただし $\theta = \cos^{-1}\frac{1}{3} \approx 70.53°$ である（$k$ が増えるにつれて色がティールからプラムへ変化する）。$\theta$ が無理数なので、どの点も二度と重ならず、点は円周全体に一様に広がっていく。

### ヒルベルトの第 3 問題

1900 年、ヒルベルトは新しい世紀に向けて 23 の問題を挙げた。その第 3 問題は次のようなものである：体積の等しい二つの多面体があるとき、一方をつねに有限個の多面体の断片に切り分けて、もう一方に組み立て直すことができるか。（平面上の多角形については答えは「できる」であり、これはウォレス–ボヤイ–ゲルヴィンの定理（Wallace–Bolyai–Gerwien theorem）である。）1 年もたたないうちに、ヒルベルトの学生であったデーン（Max Dehn）は答えが**否**であることを示した。正四面体を切り分けて、同じ体積の立方体に組み立て直すことはできないのである。デーンの証明では、各多面体にその辺の長さと二面角（dihedral angle）から作られる量を対応させる。この量は現在**デーン不変量**（Dehn invariant）と呼ばれ、切り分けて組み立て直しても変わらない。立方体ではこれは 0 であり、正四面体では 0 でない。それはまさに、二面角 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ が 180° の有理数倍でないからである。そしてそれこそが、この問題で証明

したことなのである。

### ニーヴンの定理

この話はどこまで広がるのだろうか。1956 年、ニーヴン（Ivan Niven）は、$\theta$ の度数が有理数で $\cos\theta$ も有理数ならば、$\cos\theta$ は $0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ のいずれかであることを証明した。したがって、余弦が有理数となる「きれいな」角は $0°, 60°, 90°, 120°, 180°$ とその仲間だけである。証明では、$2\cos\theta$ が整数係数のモニック多項式（monic polynomial）の根、すなわち**代数的整数**（algebraic integer）であるという事実を用いる。これは Section 1.3 の終わりで触れた考え方である。

## 思考のスキル

#### 0 にならないことを偶奇性で証明する

整数の式が決して 0 にならないことを示すには、それがつねに奇数であることを示せばよい：2 を法として還元するのである。

最小反例（minimal counterexample）と組み合わせることで、この単純な考え方が深い事実を証明した。小さな数を法として還元し、方程式の成立を否定するのは、Section 1.5 にもあるように、整数論で最もよく使われる手法の一つである。

## 次の一歩

1. **正四面体。**正四面体の二つの面のなす角が $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ であること、およびメタン分子の二つの結合のなす角（正四面体の中心から二つの頂点へ向かう線分のなす角）が $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$ であることを示せ。

2. **3–4–5 の三角形。**3–4–5 の三角形の最小の角の度数が無理数であることを示せ。（ヒント：その角は $\cot^{-1}\frac{4}{3}$ である。上の議論を修正するか、ガウス整数（Gaussian integer）$4+3\mathrm{i}$ の累乗を考え、どれも実数にならないことを示せ。）

3. **なぜ $a$ は奇数なのか。**$a=2$ のとき、議論のどこが破綻するか。$\cos^{-1}\frac{1}{2}$ は有理数か。

4. **小さな場合のニーヴンの定理。**$0°$ から $90°$ までの整数の度数 $\theta$ で、$\cos\theta$ が有理数となるものをすべて求め、その一覧がニーヴンの定理と一致することを確かめよ。

## さらに学ぶために

- **Ivan Niven, *Irrational Numbers***（Mathematical Association of America）。『無理数』。三角関数の有理数値に関するニーヴンの定理を収録している。
- **Martin Aigner & Günter Ziegler, *Proofs from THE BOOK***、ヒルベルトの第 3 問題の章。『天書の証明』。デーンによる解決の美しい解説である。
- **Benjamin Yandell, *The Honors Class: Hilbert's Problems and Their Solvers***（A. K. Peters）。ヒルベルトの問題とそれを解いた人々。23 の問題すべての背後にある物語を描いている。

# 5.6 フェルマー点

**問題**

**STEP III 2000、問 3**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/00-s3-q3`

## 導入

3 つの村を結ぶ道路網を、できるだけ短く作りたい。分岐点はどこに置けばよいだろうか。1640 年ごろ、フェルマー（Pierre de Fermat）は、三角形の内部の点 $P$ で $PA + PB + PC$ を最小にするものを求める問題を提起し、トリチェリ（Evangelista Torricelli）がこれを解いた。答えは、3 つの辺がいずれも 120° の角をなして見える点である。

この問題では、複素数（complex number）を用いて、その点を求める美しい作図法を証明する。三角形の各辺の外側に正三角形（equilateral triangle）を作り、新しくできた各頂点を、もとの三角形の向かい合う頂点と結ぶ。すると 3 本の直線は 1 点で交わる。これが**フェルマー点**（Fermat point）である。しかも 3 本の線分の長さはすべて等しく、その長さが道路の総延長の最小値になっている。複素数と、$e^{\mathrm{i}\pi/3}$ に関するひとつの恒等式を使えば、全体はわずか数行の計算で済む。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $A$、$B$、$C$ はどこにあるか。それぞれの偏角はいくらか。$OA$、$OB$、$OC$ は互いにどのような角をなすか。

$A = p$ は実軸の正の部分にある（偏角（argument）は 0°）。$B = q\alpha^2 = qe^{2\pi\mathrm{i}/3}$ の偏角は 120° である。$C = -r\alpha = re^{\mathrm{i}\pi}e^{\mathrm{i}\pi/3}$ の偏角は 240° である。したがって原点は三角形の内部の点であり、そこから 3 つの頂点は互いに 120° の角をなす方向に、それぞれ距離 $p$、$q$、$r$ のところに見える。つまり、作り方からして原点こそがフェルマー点なの

である。この問題は、正三角形を用いた作図によってこの点が求まることを示すものである。

## 順を追って解く

### 段階 1　鍵となる恒等式

$\alpha^3 = e^{i\pi} = -1$ であるから、$\alpha$ は $z^3+1 = (z+1)(z^2-z+1)$ の根である。$\alpha \neq -1$ より $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$、すなわち $1+\alpha^2 = \alpha$ である。 ■

ここから導かれる 2 つの式が役に立つ。$1-\alpha = -\alpha^2$ と $\alpha - \alpha^2 = 1$ である。また $1-\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = e^{-i\pi/3}$ であり、これは $\alpha$ の共役複素数（complex conjugate）である。

### 段階 2　回転としての正三角形

> **考えてみよう**　三角形 $CAN$ は正三角形で、頂点は時計回りに名前がつけられている。$C$ に立ったとき、$A$ からどうすれば $N$ に移れるか。$N-C$ を $A-C$ を用いて表せ。

$C$、$A$、$N$ の順に時計回りに進むので、点 $N$ は $A$ を $C$ のまわりに時計回りに $60^\circ$ 回転（rotation）させて得られる。$e^{-i\pi/3} = 1-\alpha$ を掛けることは時計回りに $60^\circ$ 回転させることであるから、

$$\begin{aligned} N &= C + (1-\alpha)(A-C) = -r\alpha + (1-\alpha)(p+r\alpha) \\ &= (1-\alpha)p + r(\alpha - \alpha^2 - \alpha) = (1-\alpha)p - \alpha^2 r. \end{aligned}$$ ■

（反時計回りではなく時計回りに回転させることで、$N$ は $CA$ に関して原点と反対側、すなわち三角形の外側に置かれる。）

> **手を止めて、やってみよう**　同じ方法で $L$ と $M$ を求め、小問 1 の恒等式を用いて簡単にせよ。

同様に $L = A + (1-\alpha)(B-A)$、$M = B + (1-\alpha)(C-B)$ であるから、

$$\begin{aligned} L &= p + (1-\alpha)(q\alpha^2 - p) = \alpha p + (\alpha^2 - \alpha^3)q = \alpha p + (\alpha^2+1)q = \alpha(p+q), \\ M &= q\alpha^2 + (1-\alpha)(-r\alpha - q\alpha^2) = q\alpha^3 + r(\alpha^2 - \alpha) = -q - r. \end{aligned}$$

さらに $1-\alpha = -\alpha^2$ を用いると、$N = -\alpha^2 p - \alpha^2 r = -\alpha^2(p+r)$ である。

### 段階 3　原点を通る 3 本の直線

**考えてみよう** $L=\alpha(p+q)$ と $C=-r\alpha$ を比べよ。何に気づくか。$M$ と $A$、$N$ と $B$ についても同じことをせよ。

$L$ は $\alpha$ の正の実数倍であり、$C$ は $\alpha$ の負の実数倍である。したがって $L$ と $C$ は $O$ を通る同一直線上で $O$ をはさんで反対側にあり、線分 $LC$ は原点を通る。その長さは $|L-C|=|\alpha|(p+q+r)=p+q+r$ である。

同様に、$M=-(q+r)$ と $A=p$ は実軸上で $O$ をはさんで反対側にあるので、$MA$ は $O$ を通り、長さは $p+q+r$ である。また $N=-\alpha^2(p+r)$ と $B=q\alpha^2$ は、$O$ を通り $\alpha^2$ の方向に伸びる直線上で互いに反対側にあるので、$NB$ は $O$ を通り、長さは $p+q+r$ である。 ■

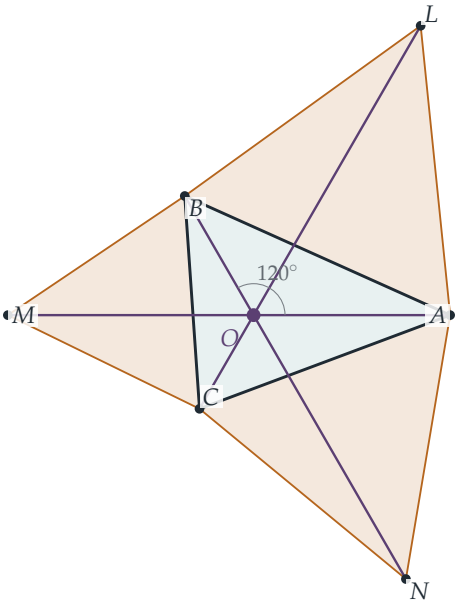



**図 5.6.1**　$p=2$、$q=1.4$、$r=1.1$ のときのフェルマー点。$ABC$ の各辺の外側に正三角形（琥珀色）を作る。直線 $LC$、$MA$、$NB$（紫）はすべて原点 $O$ を通る。$O$ からは $ABC$ の各辺が 120° の角をなして見え、3 本の線分の長さはいずれも $p+q+r=4.5$ である。

## 振り返り

- **回転は掛け算である。**正三角形を作ることは、ある頂点を別の頂点のまわりに 60° 回転させることであり、それは $e^{\pm i\pi/3}$ を掛けることにほかならない。
- **座標の巧みな選び方。**フェルマー点を原点に置き、頂点を 1、$\alpha^2$、$-\alpha$ の方向に並べたことで、すべての式が劇的に簡単になった。

▶ **ひとつの恒等式を繰り返し使う。**式の簡略化はすべて $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$ と $\alpha^3 = -1$ から得られた。

## 背後にある数学

### フェルマー点で距離の和が最小になる理由

なぜ $PA + PB + PC$ は、各辺が 120° の角をなして見える点で最小になるのだろうか。ここに見事な論法がある。図全体を $B$ のまわりに 60° 回転させ、$A$ を $L'$（$AB$ 上に作った正三角形の頂点）に、$P$ を $P'$ に移す。三角形 $BPP'$ は正三角形であるから $PB = PP'$ であり、また $PA = P'L'$ である。よって $PA + PB + PC = L'P' + P'P + PC$ となり、これは $L'$ から $C$ へ至る折れ線の長さである。これは $|L'C|$ 以上であり、等号が成り立つのは折れ線がまっすぐなとき、すなわち $P$ における角がすべて 120° のときに限る。したがって総延長の最小値は、問題で求めたとおり $|LC| = p + q + r$ である。（これは三角形のどの角も 120° より小さい場合に成り立つ。そうでない場合、最小となるのは鈍角（obtuse angle）の頂点である。）

### 石けん膜とシュタイナー木

3 本の杭（$A$、$B$、$C$ を表す）をつけた枠を石けん水に浸すと、石けん膜は表面張力（surface tension）によるエネルギーを最小にしようとして、フェルマー点で 120° の角をなして交わる 3 枚の膜を作る。点の数がもっと多い場合、それらを結ぶ最短のネットワークは**シュタイナー木**（Steiner tree）であり、3 本の辺が 120° で交わる分岐点が新たに加わる。シュタイナー木を求めることは一般には計算量的に難しい（NP 困難（NP-hard）な問題である）が、道路網やパイプライン、コンピュータチップの配線の設計など、実用上重要である。

### ナポレオンの定理

同じ配置には、もうひとつの宝石が隠れている。任意の三角形の各辺の上に作った 3 つの正三角形の**中心**は、正三角形をなすのである。これは伝統的にナポレオン・ボナパルト（Napoleon Bonaparte、熱心なアマチュア数学者であった）の功績とされ、ナポレオンの定理（Napoleon's theorem）と呼ばれるが、彼が発見したという証拠はない。この定理も、$1 + \alpha^2 = \alpha$ を用いれば複素数で短く証明できる。

## 思考のスキル

### 問題に合った座標を選ぶ

最も重要な点を原点に置き、問題の対称性に合わせて配置せよ。うまく選べば、計算はほとんど自明になる。

ここでは原点をフェルマー点とし、3つの頂点は（符号を除いて）$-1$ の3乗根の方向に並んでいた。ほかの座標を使えば、同じ計算がはるかに煩雑になったであろう。

## 次の一歩

1. **頂点の名前のつけ方を確かめる。** 正三角形の頂点を反時計回りに名づけた（内側に作った）場合、3本の直線は一般には $O$ を通らないことを示せ。

2. **ナポレオンの定理。** 正三角形 $ABL$ の中心が $\frac{1}{3}(A+B+L)$ であることを示せ。上で求めた式を用いて、3つの中心が正三角形をなすことを示せ。

3. **最小値。** $p=2$、$q=1.4$、$r=1.1$ のとき、$P$ を各頂点および重心（centroid）$\frac{1}{3}(A+B+C)$ に置いて $PA+PB+PC$ を計算し、いずれも $4.5$ より大きいことを確かめよ。

4. **正三角形の判定。** $z_1$、$z_2$、$z_3$ が（どちらの向きであれ）正三角形をなすための必要十分条件は $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$ であることを示せ。

## さらに学ぶために

- **Richard Courant & Herbert Robbins, *What Is Mathematics?***（Oxford University Press）。邦題『数学とは何か』。第7章でフェルマー点、シュタイナー木、石けん膜を論じている。
- **Liang-shin Hahn, *Complex Numbers and Geometry***（Mathematical Association of America）。多くの幾何の定理を、まさにこの水準の複素数を用いて証明している。
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。邦題『ヴィジュアル複素解析』。第1章にナポレオンの定理をはじめとする幾何の結果が収められている。

# 5.7 写像としての複素指数関数

**問題**

**STEP II 1997、問 5**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/97-s2-q5`

## 導入

指数関数（exponential function）は、曲線 $y = e^x$ としてよく知っているであろう。しかし、複素変数の関数は曲線として描くことができない。入力は平面上の点であり、出力もまた平面上の点だからである。これを思い描くには、**写像**（map）として捉えればよい。すなわち、一方の平面のすべての点を他方の平面の点へと移し、その過程で引き伸ばしたり曲げたりする変換である。

問題の式は $z = e^u(\cos v + \mathrm{i}\sin v) = e^{u+\mathrm{i}v} = e^w$ である。写像として見ると、複素指数関数は驚くべきことをする。平面の水平な帯状領域を巻き上げて平面全体（原点を除く）にし、鉛直な直線を円に巻きつけ、水平な直線を半直線として広げるのである。さらに、巻きつくために一対一（one-to-one）ではない。各点に無限個の点が移るのである。これこそが、複素対数関数が「多価」（multi-valued）である理由であり、複素解析（complex analysis）で最初に出会う驚きの一つである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $z = e^u(\cos v + \mathrm{i}\sin v)$ の絶対値（modulus）と偏角（argument）を $u$ と $v$ で表すとどうなるか。

$|z| = e^u$ であり、$\arg z = v$（$2\pi$ の整数倍の差を除いて）である。したがって、$w$ の実部 $u$ は原点からの距離を指数的に定め、虚部 $v$ は方向を定める。この一つの観察で、問題のほぼすべての部分に答えられる。

## 順を追って解く

### 段階 1　$e^w = \mathrm{i}e$ を解く

**考えてみよう**　$\mathrm{i}e$ の絶対値と偏角は何か。

$|\mathrm{i}e| = e$ かつ $\arg(\mathrm{i}e) = \frac{\pi}{2}$ である。よって $e^u = e$ すなわち $u = 1$ であり、任意の整数 $k$ に対して $v = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ であればよい。解は

$$w = 1 + \mathrm{i}\left(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

である。解は無限個あり、縦方向に $2\pi$ ずつ間隔をあけて並んでいる。

### 段階 2　格子線の像

鉛直な直線 $u = c$ の上では、$v$ が変化しても $|z| = e^c$ は一定である。したがって像は原点を中心とする半径 $e^c$ の**円**であり、$v$ がすべての実数を動くとき、この円を無限回なぞる。

水平な直線 $v = d$ の上では、$\arg z = d$ は一定で、$|z| = e^u$ はすべての正の値をとる。したがって像は、原点から角 $d$ の方向に伸びる開いた**半直線**（ray）であり、原点そのものは含まない。直線 $v = d$ と $v = d + 2\pi$ は同じ半直線を与える。

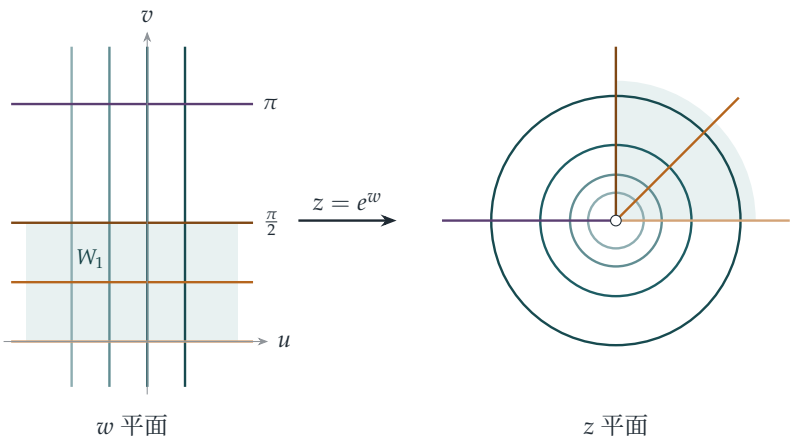



**図 5.7.1**　写像としての複素指数関数。$w$ 平面の鉛直な直線 $u = c$（青緑）は半径 $e^c$ の円に移り、水平な直線 $v = d$（琥珀色、紫）は角 $d$ の半直線に移る。影をつけた帯状領域 $W_1 = \{0 < v < \frac{\pi}{2}\}$ はちょうど第 1 象限の上に移る。どちらの図でも格子線が直角に交わっていることに注目せよ。この写像は角を保つのである。原点（白丸）には決して到達しない。

### 段階 3　一対一となる部分

**考えてみよう** 第 1 象限 $x>0, y>0$ に移る点 $w$ はどれか。その集合が大きすぎて、第 1 象限と一対一に対応しないのはなぜか。

$z$ が開いた第 1 象限にあるのは、絶対値は任意で、$\arg z$ が（$2\pi$ を法として）0 と $\frac{\pi}{2}$ の間に厳密にあるとき、かつそのときに限る。したがって $w$ は $0<v<\frac{\pi}{2}$ または $2\pi<v<\frac{5\pi}{2}$ または …を満たさなければならない。これは無限個の水平な帯状領域であり、それぞれが第 1 象限全体の上に移る。一つの帯状領域の内部では $u$ と $v$ は $|z|$ と $\arg z$ によって一意に定まるので、どの帯状領域も第 1 象限と一対一に対応する。よって次のようにとればよい。

$$W_1=\{u+\mathrm{i}v : 0<v<\tfrac{\pi}{2}\},\qquad W_2=\{u+\mathrm{i}v : 2\pi<v<\tfrac{5\pi}{2}\}.$$

**手を止めて、やってみよう** 次に、穴あき円板 $0<|z|<1$ と一対一に対応する $w$ 平面の集合を二つ求めよ。

$|z|<1$ は $e^u<1$、すなわち $u<0$ を意味する。また、すべての偏角がちょうど一度ずつ覆われなければならないので、$v$ は長さがちょうど $2\pi$ で、一方の端点を含み他方を含まない区間を動けばよい。たとえば

$$W_3=\{u+\mathrm{i}v : u<0,\ 0\le v<2\pi\},\qquad W_4=\{u+\mathrm{i}v : u<0,\ -\pi<v\le\pi\}.$$

である。これらは一方の辺を含み他方の辺を含まない半帯状領域である。（両方の辺を含めると正の実軸上の点に二度到達し、どちらも含めなければそれらの点に到達しない。）■

## 振り返り

- **絶対値と偏角が変数を分離する。** $|e^w|=e^{\operatorname{Re} w}$ かつ $\arg e^w=\operatorname{Im} w$ であるから、$w$ の実部と虚部はそれぞれ独立に距離と方向を定める。
- **複素関数を写像として思い描く。** 格子線の行き先を追うことで、グラフとして描けない関数の姿がはっきりと見えてくる。
- **周期性は単射性を壊す。** $e^{w+2\pi\mathrm{i}}=e^w$ であるから、この写像は多対一であり、逆関数をもつためには高さ $2\pi$ の帯状領域に制限しなければならない。

## 背後にある数学

### 複素対数関数

実数直線上では、ln は exp の逆関数である。複素平面では、各 $z \neq 0$ に対して $e^w = z$ は $2\pi i$ の整数倍ずつ異なる無限個の解 $w$ をもつので、「$\log z$」は一つの数ではない。本当の関数を得るには**分枝**（branch）を選ばなければならない。これは $W_3$ や $W_4$ のような帯状領域を選ぶことである。**主枝**（principal branch）は $-\pi < \arg z \leq \pi$ をとるものである。どの分枝にも、原点から伸びる半直線に沿ってどこかに不連続な跳びがあり、これを**分枝切断**（branch cut）という。リーマン（Bernhard Riemann）は 1851 年の学位論文において、対数関数が平面上に住むと考えるのをやめることでこの問題を解決した。対数関数は無限に続くらせん階段、すなわち**リーマン面**（Riemann surface）の上に住み、その上では一価かつ滑らかなのである。リーマン面は今日、幾何学、整数論、弦理論の中心をなしている。

### 角は保たれる

図 5.7.1 をもう一度見てみよう。鉛直と水平の格子線は直角に交わり、それらが移った先の円と半直線も直角に交わっている。これは偶然ではない。複素関数は、導関数が 0 でないところではどこでも、曲線どうしのなす角を保つのである。このような写像を**等角写像**（conformal map）という。局所的には、等角写像は回転と拡大縮小にすぎず、それはまさに複素数 $f'(z)$ を掛けることが行う操作である。等角写像は、複雑な領域を答えのわかっている単純な領域に変換することで、流体の流れ、静電気学、熱伝導の問題を解くのに用いられる。

### メルカトルの地図

ここで、この節と Section 4.8 を結ぶ意外な事実を紹介しよう。1569 年のメルカトル（Gerardus Mercator）の地図は、一定の方位角で進む航路が直線になるように作られており、そのためには角を保つ必要がある。まず地球を（北極から）立体射影（stereographic projection）で平面に写し、次に複素対数をとると、その結果はちょうどメルカトル図法になる。log によって半直線と円がそれぞれ水平と鉛直の直線になるのと同じように、経線は鉛直な直線に、緯線は水平な直線になるのである。この節の指数写像を逆向きにたどったものが、航海士の海図の数学なのである。

## 思考のスキル

### 関数を変換として視覚化する

関数をグラフとして描けないときは、その関数が何をするかを描け。単純な曲線の格子を追い、それらがどこへ行くかを見よ。

複素関数では、水平な直線と鉛直な直線、あるいは円と半直線の像を調べれば、たいていすべてがわかる。写像が図形に何をするかというこの考え方は、幾何学と解析学の全体を貫いている。

## 次の一歩

1. **方程式を解く。** $e^w = -1$ を満たす複素数 $w$ をすべて求めよ。また、$e^w = 1 + \mathrm{i}$ を満たす $w$ をすべて求めよ。

2. **正方形の像。** 頂点が $0, 1, 1+\mathrm{i}, \mathrm{i}$ である正方形の $z = e^w$ による像を求め、図示せよ。

3. **直角。** 円 $|z| = e^c$ と半直線 $\arg z = d$ が直角に交わることを直接示し、これが直線 $u = c$ と $v = d$ が垂直であることと整合する理由を説明せよ。

4. **2 乗。** $c$ と $d$ を 0 でない実数とする。写像 $z \mapsto z^2$ による直線 $x = c$ と $y = d$ の像を求めよ。それらが放物線であり、交わる点ではどこでも直角に交わることを示せ。（$c = 0$ または $d = 0$ のときはどうなるか。）

## さらに学ぶために

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*** (Oxford University Press)。第 2 章と第 4 章で、指数関数、対数関数、等角写像を見事な図とともに扱っている。
- **Hilary Priestley, *Introduction to Complex Analysis*** (Oxford University Press)。大学初年級向けのわかりやすい教科書である。
- **Ian Stewart & David Tall, *Complex Analysis*** (Cambridge University Press)。幾何学に重点を置いた、もう一つの優れた大学向け入門書である。

# 5.8 円板に隠れた距離

**問題**

**STEP III 2013、問 6**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/13-s3-q6`

## 導入

一見すると、これは絶対値（modulus）と共役複素数（complex conjugate）を操作する練習問題で、最後に奇妙な形の不等式が出てくるだけに見える。いったい誰が $\frac{|z-w|}{|1-zw^*|}$ などに関心をもつのだろうか？

それは、これが距離だからである。$z$ と $w$ の通常の距離ではなく、別の幾何学における距離である。その幾何学では、単位円板がそれだけで無限に広がる宇宙全体となり、直線は円弧であり、三角形の内角の和は $180°$ より小さい。これが**双曲幾何学**（hyperbolic geometry）である。ユークリッド（Euclid）の平行線公準（parallel postulate）を証明しようとする二千年にわたる試みの末、19 世紀に発見された。そして、この問題の不等式は、姿を変えたこの幾何学の三角不等式（triangle inequality）であることがわかる。さらに驚くべきことに、右辺は特殊相対性理論（special relativity）における速度の合成公式であり、これは Section 3.8 で扱った。

## 取りかかる前に

? **考えてみよう** $|z-w| \leq |z|+|w|$ は図からどのように導かれるか？（$z$ と $-w$ をベクトルとして考えよ。）

$z-w = z+(-w)$ である。原点から $z$ を矢印として描き、次に $z$ の先端から $-w$ を矢印として描く。原点から最終的な点への矢印が $z-w$ であり、3 本の矢印は辺の長さが $|z|$、$|w|$、$|z-w|$ の三角形をなす。三角形の 1 辺の長さは、他の 2 辺の長さの和以下である。

また、任意の複素数 $a$ に対して $|a|^2 = aa^*$ であることを思い出そう。これにより、問題中のすべての絶対値を代数的な式に変換できる。

## 順を追って解く

### 段階 1　絶対値の展開

**考えてみよう**　$|z-w|^2 = (z-w)(z^*-w^*)$ を展開せよ。$(|z|+|w|)^2$ と比較せよ。

$|z-w|^2 = zz^* - zw^* - z^*w + ww^* = |z|^2 + |w|^2 - zw^* - z^*w$ である。一方、$(|z|+|w|)^2 - E = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 - zw^* - z^*w - 2|zw|$ であり、$|z||w| = |zw|$ であるから、これは同じ式である。 ■

$E = (zw^*) + (zw^*)^* + 2|zw| = 2\,\mathrm{Re}(zw^*) + 2|zw|$ であり、これは実数である。また、三角不等式により $E = (|z|+|w|)^2 - |z-w|^2 \geq 0$ である。 ■

### 段階 2　第 2 の恒等式

$|1 - zw^*|^2 = (1-zw^*)(1-z^*w) = 1 - zw^* - z^*w + |z|^2|w|^2$ であり、一方 $(1+|zw|)^2 - E = 1 + 2|zw| + |zw|^2 - zw^* - z^*w - 2|zw|$ であるから、両者は同じである。 ■

### 段階 3　不等式

**考えてみよう**　$A = (|z|+|w|)^2$、$B = (1+|zw|)^2$ とおく。不等式を 2 乗すると $\frac{A-E}{B-E} \leq \frac{A}{B}$ となる。これはどのようなときに成り立つか？

示すべき不等式の両辺はともに 0 以上であるから、これは両辺を 2 乗した不等式 $\frac{A-E}{B-E} \leq \frac{A}{B}$ と同値である。$B - E = |1-zw^*|^2 > 0$ と仮定して分母を払うと、

$$(A-E)B \leq A(B-E) \iff -EB \leq -EA \iff E(B-A) \geq 0.$$

$E \geq 0$ であるから、これは $B \geq A$、すなわち $1 + |zw| \geq |z| + |w|$ のときには常に成り立つ。

**手を止めて、やってみよう**　$1 + |z||w| - |z| - |w|$ が因数分解できることを示せ。これが 0 以上となるのはどのようなときか？

$1 + |z||w| - |z| - |w| = (1-|z|)(1-|w|)$ である。$|z| > 1$ かつ $|w| > 1$ ならば、両方の因数が負であるから積は正である。よって $B \geq A$ となり、不等式が成り立つ。 ■

逆に $|z| < 1$ かつ $|w| < 1$ の場合も、両方の因数が正であるから積はやはり正であり、同じ議論が通用する。つまり**はい**、この場合にも不等式は成り立つ。（どちらの場合も $|zw^*| \neq 1$ であるから $1 - zw^* \neq 0$ となり、左辺は定義される。）不等式が成り立たないことがありうるのは、一方が単位円の内側に、もう一方が外側にある混合した場合である。

## 振り返り

- $|a|^2 = aa^*$**。** すべての恒等式は、共役複素数どうしの積を展開することから得られた。これは絶対値を代数的に扱うための標準的な方法である。
- **一つの量の符号に帰着させる。** 2 乗して分母を払った後、不等式全体は $(1 - |z|)(1 - |w|)$ の符号だけで決まった。
- **他の場合も確かめる。** 最後の問いは $|z|, |w| < 1$ の場合についてであったが、同じ因数分解ですぐに答えが得られた。

## 背後にある数学

### 非ユークリッド幾何学

二千年もの間、数学者たちはユークリッドの第 5 公準（直線上にない点を通り、その直線に平行な直線はちょうど 1 本存在する）を、ほかの公理から証明しようと試みてきた。1820 年代から 1830 年代にかけて、ロバチェフスキー（Nikolai Lobachevsky）、ボヤイ（János Bolyai）、そして（公表はしなかったが）ガウス（Gauss）は、それが不可能であることに気づいた。平行線が無数に存在する、完全に無矛盾な幾何学があるのである。1882 年、ポアンカレ（Henri Poincaré）は単位円板の内部にその美しいモデルを見いだした。点は開円板の点であり、「直線」は直径、および境界の円と直角に交わる円弧である。そして $z$ と $w$ の距離は

$$d(z, w) = 2 \tanh^{-1} \rho(z, w), \qquad \text{ただし} \qquad \rho(z, w) = \frac{|z - w|}{|1 - zw^*|}.$$

である。点が境界の円に近づくにつれて、中心からの距離は無限大に発散する。この円板は、ゆがんだレンズを通して見た無限に広がる平面全体なのである。

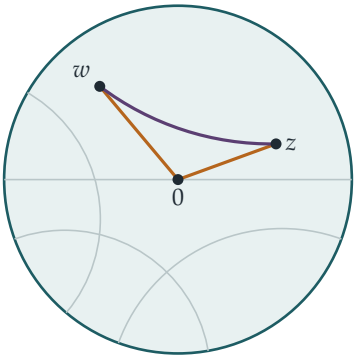



**図 5.8.1**　ポアンカレ円板。双曲的な「直線」は、直径、または境界と直角に交わる円の弧である（灰色）。頂点が 0、$z$、$w$ の双曲三角形は、2 辺が直径に沿い（琥珀色）、1 辺が円弧に沿っている（紫色）。問題の不等式は、紫色の辺の双曲的な長さが、他の 2 辺の長さの和を超えないことを述べている。

### 姿を変えた三角不等式

$|z|, |w| < 1$ の場合に、この問題が何を証明したのかを見てみよう。$|z| = \tanh a$、$|w| = \tanh b$ とおくと、0 から $z$ および $w$ までの双曲的距離は $2a$ と $2b$ である。すると Section 3.8 の tanh の加法定理により、

$$\frac{|z| + |w|}{1 + |zw|} = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b} = \tanh(a + b).$$

よって、この不等式は $\tanh\left(\frac{1}{2} d(z, w)\right) \le \tanh(a + b)$、すなわち

$$d(z, w) \le 2a + 2b = d(z, 0) + d(0, w).$$

を意味する。これは双曲的距離に関する三角不等式である（図 5.8.1）。相対論的な速度の合成公式と双曲幾何学は、実は同じものである。特殊相対性理論で可能な速度全体の集合は、適切な距離の概念を与えると、双曲空間**そのもの**になる。この話題には Section 7.6 で再び戻る。

### 円板の対称性

なぜ $\rho$ が適切な量なのだろうか？$|a| < 1$ に対して、写像 $z \mapsto \dfrac{z - a}{1 - a^* z}$ は単位円板をそれ自身に写し、双曲的距離を保ち、$a$ を中心に移す。これらは平行移動の双曲幾何学における類似物であり、$\rho(z, w)$ は、$w$ を中心に移したときのちょうど |移動後の$z$| に等しい。これらの**メビウス変換**（Möbius transformations）は、複素解析の中心的な話題である。エッシャー（M. C. Escher）の木版画 *Circle Limit*（『円の極限』）は、数学者コクセター（H. S. M. Coxeter）の図に着想を得たもので、合同な魚や天使によるポア

ンカレ円板の敷き詰めを描いている。双曲的距離は縁の近くで発散するため、それらの図形は縁に向かって小さくなっていく。

## 思考のスキル

### 式が何を意味するかを問う

ある代数的な式が繰り返し現れるときには、それが距離、角、確率、対称性といった意味をもつかどうかを問うてみよ。

ここでは、奇妙な絶対値の比が別の幾何学における距離であり、奇妙な不等式がその三角不等式であることがわかった。意味を見抜くことで、結果がなぜ正しいのか、そしてそれがどこへつながるのかが明らかになる。

## 次の一歩

1 **数値による確認。** $z = \frac{1}{2}$、$w = -\frac{1}{2}$ とする。不等式の両辺を計算せよ。次に双曲的距離 $d(z,0)$、$d(0,w)$、$d(z,w)$ を計算し、この場合は三角不等式で等号が成り立つことを確かめよ。それはなぜか？

2 **混合した場合。** $|z| < 1 < |w|$ であって、不等式が成り立たないような $z$、$w$ を求めよ。

3 **等長変換（isometry）。** $|a| < 1$ として $f(z) = \dfrac{z - a}{1 - a^* z}$ とする。$|z| = 1$ ならば $|f(z)| = 1$ であること、および $f(a) = 0$ であることを示せ。また $\rho(f(z), f(w)) = \rho(z,w)$ を示せ。

4 **無限遠は近い。** 0 から $r$（$0 < r < 1$）までの双曲的距離が $\ln \frac{1+r}{1-r}$ であり、$r \to 1$ のとき無限大に発散することを示せ。中心からの双曲的距離が 10 であるためには、点は境界にどれほど近くなければならないか？

## さらに学ぶために

- **Caroline Series、「Hyperbolic geometry」講義ノート**（ウォーリック大学、無料で公開）。ポアンカレ円板から始まる、わかりやすい入門講義。
- **Jeremy Gray, *Ideas of Space***（Oxford University Press）。ユークリッドからアインシュタイン（Einstein）に至る非ユークリッド幾何学の歴史。

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。第 6 章で非ユークリッド幾何学とメビウス変換を、美しい図とともに扱っている。

# 学んだこと

本章は、実数の答えを得るために虚数の段階を経なければならないことがあるという、カルダノ（Cardano）の不穏な発見から始まった。そして三つの問いを立てた。複素数（complex numbers）は実数の問題にどう役立つのか、単位根（roots of unity）の何が特別なのか、そして複素関数（complex function）はどのような姿をしているのか、である。本章の八つの問題が明らかにしたことをまとめておこう。

### 1. 複素数は実数の問題にどう役立つのか

実数についての事実が、複素平面（complex plane）を経由すると短く証明できるという場面に、何度も出会った。

- **角は積になる。** $\pi$ に関するマチン（Machin）の公式は、$(5-\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i})$ が $239-\mathrm{i}$ の実数倍であるという主張にほかならず、整数の計算だけで確かめられる（Section 5.1）。
- **数え上げは平均になる。** 二項係数（binomial coefficient）を三つおきに足した和は、$(1+x)^n$ に1の3乗根を代入することで求まった（Section 5.2）。
- **三角関数の積は多項式の値になる。** 等間隔の角における余弦の積は、$z^{2n}+1$ を因数分解して $z=\mathrm{i}$ とおくことで得られた（Section 5.3）。
- **幾何は代数になる。** 距離は絶対値になり、正 $n$ 角形の一つの頂点から引いた弦（chord）の長さの積は $|1+1+\cdots+1|=n$ となった（Section 5.4）。また回転は乗法になり、フェルマー点（Fermat point）の作図は恒等式 $1+\alpha^2=\alpha$ に帰着した（Section 5.6）。
- **ド・モアブルの定理から無理性を導く。** $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^k$ を展開して偶奇を論じることで、$\cos^{-1}\frac{1}{3}$ が有理数の度数ではないことが示された。これは、ヒルベルト（Hilbert）の第3問題に対するデーン（Dehn）の解決における鍵となる事実である（Section 5.5）。

### 2. 単位根の何が特別なのか

1の $n$ 乗根は正 $n$ 角形の頂点であり、最も単純な多項式 $z^n-1$ の根であり、乗法について群（group）をなす。この三つの事実を合わせると、単位根がいたるところに現れる理由が説明できる。円周上に均等に並んでいるので、その和は0になる。こ

れが Section 5.2 のフィルターを与え、一般には離散フーリエ変換（discrete Fourier transform）につながる。$z^n - 1$ の根であるので、単位根にわたる積は簡単な多項式の値になる（Section 5.3、Section 5.4）。そして乗法について閉じているので、単位根のべきは巡回する。$\cos^{-1}\frac{1}{3}$ のような角で成り立たないのは、まさにこの性質である（Section 5.5）。第 6 章では単位根が代数学の中心となり、ガロア理論（Galois theory）へと向かっていく。

### 3. 複素関数はどのような姿をしているのか

Section 5.7 では、$e^w$ を帯状の領域を巻き取って平面にする写像として思い描いた。この写像は縦の直線を円に、横の直線を半直線に移し、無限回巻きつくので、対数は多価（many-valued）になる。また、この写像が角を保つこと、すなわち**等角**写像（conformal map）の最初の例であること、そしてメルカトル（Mercator）の海図の基礎にあることも見た。Section 5.8 では、奇妙に見えた不等式が双曲幾何学（hyperbolic geometry）における三角不等式（triangle inequality）であることがわかった。そこでは単位円板（unit disc）が無限に広い平面であり、直線は円弧であり、距離は相対論的な速度の合成則に従って合わさる。

### 4. 複素数の道具箱

| 手法 | 使った場面 |
|---|---|
| 乗法では偏角（argument）が足される | マチンの公式（5.1） |
| $2\pi$ の倍数の確認 | マチンの公式（5.1） |
| 単位根にわたる平均 | 三つおきの係数（5.2） |
| 根を用いて因数分解し、代入する | 余弦の積（5.3）、弦（5.4） |
| 0 になる因数で割る | 5.3、5.4 |
| ド・モアブルの定理（De Moivre's theorem） | 倍角の公式（5.5） |
| 偶奇と最小反例（minimal counterexample） | 無理数の角（5.5） |
| 乗法としての回転 | 正三角形（5.6） |
| 格子の写像 | 指数関数による写像（5.7） |
| $\lvert a\rvert^2 = aa^*$ | ポアンカレ円板（Poincaré disc）の不等式（5.8） |

### この先へ

- 単位根は第 6 章の原動力となる。Section 6.1 の円分多項式（cyclotomic polynomials）や、Section 6.2 のガウス（Gauss）による正 17 角形の作図もそこに含まれる。

- 双曲幾何学、tanh、相対性理論の間のつながりは Section 7.6 で展開される。
- マチンの公式に登場したガウス整数（Gaussian integers）は、Section 1.6 の主題であった。

**大学入学前にさらに先へ進みたい人のために**

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（『ヴィジュアル複素解析』）：これまでに書かれた複素数の本の中で最も美しい一冊であり、図が満載である。まず第 1 章から読むとよい。
- **Paul Nahin, *An Imaginary Tale***（『虚数の話』）：カルダノから現代物理学に至るまでの $\sqrt{-1}$ の歴史。
- **Liang-shin Hahn, *Complex Numbers and Geometry***（『複素数と幾何学』）：複素数を用いたユークリッド幾何学で、ちょうど本章と同じ水準である。
- **Hilary Priestley, *Introduction to Complex Analysis***（『複素解析入門』）：大学の講義を初めてのぞいてみるために。

カルダノは、自らの虚の量を、精妙であると同時に役に立たないものだと考えていた。それから 5 世紀が過ぎた今、虚数が現れない数学や物理学の分野を見つけるほうが難しい。本章の教訓はアダマール（Hadamard）の言葉に尽きる。実数についての問題が難しいときは、実数直線の外へ一歩踏み出してみよ。複素平面はより広く、そこでは複雑に見える多くのことが、実は単純であるとわかるのである。

# 「次の一歩」の解答

ここに載せるのは簡潔な答えとヒントであり、完全な解答ではない。結果と鍵となるステップを示してあるので、自分の答えを確かめるのに使ってほしい。見る前に、まずそれぞれの問題にしっかり取り組むこと。

## 5.1 マチンの公式

1. $(5-\mathrm{i})^2(1+\mathrm{i}) = (24-10\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 34+14\mathrm{i}$ であり、その偏角（argument）は $\tan^{-1}\frac{7}{17}$ である。この偏角は $-2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\frac{\pi}{4}$ にも等しい。

2. $(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i}) = 5+5\mathrm{i}$ であり、偏角は $\frac{\pi}{4}$ である。

3. $(3+\mathrm{i})^2(7+\mathrm{i}) = (8+6\mathrm{i})(7+\mathrm{i}) = 50+50\mathrm{i}$ である。

4. 級数は交代級数（alternating series）なので、誤差は最初に省いた項より小さい。$16\tan^{-1}\frac{1}{5}$ については、省いた項 $\frac{16}{(2N+1)5^{2N+1}}$ を $5\times10^{-21}$ 未満にする必要があり、そのためには $N=14$ 項が必要である。$4\tan^{-1}\frac{1}{239}$ については 4 項で足りる。電卓を使うと、$16\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot5^3}+\frac{1}{5\cdot5^5}\right)-\frac{4}{239}\approx3.14162$ となる。

## 5.2 1 の累乗根によるフィルター

1. $(1+1)^n+(1-1)^n = 2\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\cdots\right)$ なので、$n\geq1$ のとき和は $2^{n-1}$ である。

2. 平均をとる前に $\omega^{-1}$ と $\omega^{-2}$ を掛ける：$\frac{1}{3}\left(2^n+\omega^{-1}(1+\omega)^n+\omega^{-2}(1+\omega^2)^n\right)$。$1+\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ なので、これは $\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$ に等しい。3 つ目の剰余（residue）からは $\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n+2)\pi}{3}\right)$ が得られ、3 つの余弦 $\cos x+\cos(x-\frac{2\pi}{3})+\cos(x+\frac{2\pi}{3})$ の和は 0 である。

3. $j=0,1,2,3$ について $(1+\mathrm{i}^j)^n$ の平均をとる：和は $\frac{1}{4}\left(2^n+(1+\mathrm{i})^n+0+(1-\mathrm{i})^n\right)$ であり、$(1\pm\mathrm{i})^n = 2^{n/2}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}n\pi/4}$ である。

4. 個数による場合：$\frac{1}{3}(2^{12}+2\cos4\pi) = 1366$。和による場合：$\prod(1+\omega^j)$ は 2、$1+\omega$、$1+\omega^2$ の因数をそれぞれ 4 つずつもち、$(1+\omega)(1+\omega^2)=1$ なので、これは 16 に等しい（$\omega^2$ での積も同様である）。求める個数は $\frac{1}{3}(4096+16+16) = 1376$ である。

### 5.3 $z^{2n}+1$ の因数分解

1. 小問 (ii) で $n=7$ とすると $\cos^2\frac{\pi}{14}\cos^2\frac{3\pi}{14}\cos^2\frac{5\pi}{14}=\frac{7}{64}$ が得られ、3 つの余弦はすべて正である。2 つ目については、$c=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$ とおく。すると $8c\sin\frac{\pi}{7}=\sin\frac{8\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}$ なので、$c=-\frac{1}{8}$ である。また、$\cos\frac{4\pi}{7}=-\cos\frac{3\pi}{7}$ である。

2. $z=1$ では $2=\prod\bigl(2-2\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\bigr)=\prod 4\sin^2\frac{(2k-1)\pi}{4n}$ となるので、正弦の積（すべて正）は $\sqrt{2/4^n}=2^{\frac{1}{2}-n}$ である。

3. $z^6+1=(z^2-\sqrt{3}z+1)(z^2+1)(z^2+\sqrt{3}z+1)$ であり、外側の 2 つを掛けると $z^4-z^2+1$ になる。

4. $z^{2n}=1$ の根は $\pm1$ と、$1\le k\le n-1$ に対する共役（conjugate）な組 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}k\pi/n}$ であるから、$\frac{z^{2n}-1}{z^2-1}=\prod_{k=1}^{n-1}\bigl(z^2-2z\cos\frac{k\pi}{n}+1\bigr)$ である。$z\to1$ とすると、左辺は $n$ に収束し、右辺は $\prod 4\sin^2\frac{k\pi}{2n}$ となる。

### 5.4 正多角形の中の距離

1. 正方形：$\sqrt{2}\times2\times\sqrt{2}=4$。正三角形：$\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$。

2. $X_k=\omega^k$ とし、$P=r$ を正の実軸上にとる。すると $\prod|r-\omega^k|=|r^n-1|$ である。

3. 相加・相乗平均の不等式（AM–GM）により、平均は相乗平均 $n^{1/(n-1)}$ 以上である。$n=6$ のとき弦（chord）の長さは 1、$\sqrt{3}$、2、$\sqrt{3}$、1 であり、その平均は $\frac{4+2\sqrt{3}}{5}\approx1.493$ であるのに対し、$6^{1/5}\approx1.431$ である。

4. 小問 (ii) により、各頂点から出る $n-1$ 本の弦の長さの積は $n$ である。$n$ 個すべての頂点について掛け合わせると $n^n$ となり、これは各弦を 2 回ずつ数えているので、$\binom{n}{2}$ 本の弦の長さの積は $n^{n/2}$ である。

### 5.5 有理角になりそうでならない角

1. 頂点を $(1,1,1)$、$(1,-1,-1)$、$(-1,1,-1)$、$(-1,-1,1)$ とし、中心を $O$ とする。2 つの結合ベクトル（bond vector）の内積（dot product）は $-1$、長さは $\sqrt{3}$ なので、結合角は $\cos^{-1}(-\frac{1}{3})$ である。面の外向き法線（outward normal）は向かい合う頂点へのベクトルの符号を変えたものなので、外向き法線どうしのなす角も $\cos^{-1}(-\frac{1}{3})$ であり、面どうしのなす角はその補角（supplement）$\cos^{-1}\frac{1}{3}$ である。

2. $(4+3\mathrm{i})^k=a_k+\mathrm{i}b_k$ とおく。$4+3\mathrm{i}$ とその共役は $t^2-8t+25$ の根なので $b_{k+1}=8b_k-25b_{k-1}\equiv3b_k\pmod5$ であり、$b_1=3$ だから $b_k\equiv3^k\not\equiv0\pmod5$ である。したがって、どのべき乗も実数にならない。もしこの角が度数で有理数なら、その倍数のどれかが $180^\circ$ の倍数となり、対応するべき乗は実数になるはずである。

3. $a = 2$ のとき $a^2 - 1 = 3$ は奇数なので、偶奇（parity）による議論は成り立たない。実際、$\cos^{-1}\frac{1}{2} = 60^\circ$ は有理数であり、$k = 3$ のとき正弦の括弧の中は $3 - \binom{3}{3} \cdot 3 = 0$ となる。

4. $0^\circ$、$60^\circ$、$90^\circ$ であり、余弦はそれぞれ 1、$\frac{1}{2}$、0 である。ニーヴンの定理（Niven's theorem）によれば、$180^\circ$ の有理数倍における cos の値のうち有理数になるものは 0、$\pm\frac{1}{2}$、$\pm 1$ だけである。

## 5.6 フェルマー点

1. 内側に作ると、頂点は $A + (1 - \bar{\alpha})(B - A)$ などとなる。$p = 2$、$q = 1.4$、$r = 1.1$ の例では、$C$ と新しい $L$ を通る直線は $O$ を通らず（判定条件 $\mathrm{Im}(\bar{C}L') = 0$ が成り立たない）、他の 2 本も同様である。

2. 正三角形の中心はその重心（centroid）である。$L = \alpha(p + q)$、$M = -(q + r)$、$N = -\alpha^2(p + r)$ とすると、$ABL$、$BCM$、$CAN$ の中心 $G_1$、$G_2$、$G_3$ は $G_3 - G_1 = \alpha(G_2 - G_1)$ を満たし（$\alpha^2 = \alpha - 1$ を用いて展開する）、これは $G_1G_2G_3$ が正三角形であることを意味する。この例では、その 1 辺の長さは $\frac{p+q+r}{\sqrt{3}} \approx 2.598$ である。

3. $PA + PB + PC$ は $A$ で約 5.68、$B$ で 5.13、$C$ で 4.89、重心で 4.54 であり、いずれも 4.5 を超える。

4. 正三角形である（向きはどちらでもよい）ことは、$z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0$ または $z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3 = 0$ が成り立つことと同値である。ここで $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ である。$\omega + \omega^2 = -1$ を用いると、2 つの左辺の積は $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_2z_3 - z_3z_1$ となる。

## 5.7 写像としての複素指数関数

1. $k$ を整数として、$\mathrm{e}^w = -1$ となるのは $w = (2k + 1)\pi\mathrm{i}$ のとき、$\mathrm{e}^w = 1 + \mathrm{i}$ となるのは $w = \frac{1}{2}\ln 2 + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$ のときである。

2. 領域 $1 \le |z| \le \mathrm{e}$、$0 \le \arg z \le 1$（1 ラジアン）、すなわち円環（annulus）の一部である。下の辺は実軸上の $[1, \mathrm{e}]$ に、右の辺は半径 e の円弧に、上の辺は角 1 の方向に伸びる動径方向の線分に、左の辺は単位円の弧に移る。

3. 半直線は半径に沿っており、円の接線は半径に垂直である。これが直線 $u = c$ と $v = d$ の関係に一致するのは、$\mathrm{e}^w$ が角を保つ（その導関数が決して 0 にならない）からである。

4. $(x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$ である。直線 $x = c$ は $u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2}$ に、$y = d$ は $u = \frac{v^2}{4d^2} - d^2$ に移る。これらは左向きと右向きに開いた放物線（parabola）で、どちらも焦点（focus）は 0 である。両者を等しいとおくと $v^2 = 4c^2d^2$ となるので、

2 曲線は $u = c^2 - d^2$、$v = \pm 2cd$ の 2 点で交わる。$v = 2cd$（直線どうしが交わる点 $c + \mathrm{i}d$ の像）では傾き $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$ は $-\frac{d}{c}$ と $\frac{c}{d}$ であり、$v = -2cd$ では $\frac{d}{c}$ と $-\frac{c}{d}$ である。どちらの場合も積は $-1$ である。（2 つ目の交点は、1 本目の直線上の点 $c - \mathrm{i}d$ の像であり、2 本目の直線上の点 $-c + \mathrm{i}d$ の像でもある。2 乗する写像は $z$ と $-z$ を同じ点に移すからである。）$c = 0$ のとき $x = 0$ の像は半直線 $u \le 0$、$v = 0$ であり、$d = 0$ のとき $y = 0$ の像は半直線 $u \ge 0$、$v = 0$ である。これらは放物線ではない。直線どうしが 0 以外の点で交わるときは、半直線はやはりもう一方の像と直角に交わるが、$c = d = 0$ のときは両方の像が実軸に沿って並ぶ。0 ではこの写像は角を 2 倍にする（その導関数 $2z$ がそこで 0 になる）ので、座標軸どうしのなす直角は平角になる。

## 5.8 円板に隠れた距離

1. 両辺とも $\frac{1}{5/4} = \frac{4}{5}$ に等しい。すると $d(z,0) = d(0,w) = 2\tanh^{-1}\frac{1}{2} = \ln 3$、$d(z,w) = 2\tanh^{-1}\frac{4}{5} = \ln 9$ なので、等号が成り立つ。0 は $z$ から $w$ への双曲的な線分（hyperbolic line segment、ここでは直径）上にある。

2. 小問 (i) と (ii) より、$E > 0$ のとき不等式は $|z| + |w| \le 1 + |zw|$、すなわち $(1 - |z|)(1 - |w|) \ge 0$ と同値である。混合の場合にはこれは成り立たない。例えば $z = \frac{1}{2}$、$w = 3$ とすると、左辺は $\frac{5/2}{1/2} = 5$、右辺は $\frac{7/2}{5/2} = \frac{7}{5}$ である。

3. $|z| = 1$ ならば $|1 - a^* z| = |\bar{z} - a^*| = |z - a|$ である。直接計算すると $f(z) - f(w) = \frac{(1-|a|^2)(z-w)}{(1-a^*z)(1-a^*w)}$、$1 - f(z)f(w)^* = \frac{(1-|a|^2)(1-zw^*)}{(1-a^*z)(1-aw^*)}$ であり、割って絶対値をとると $\rho(f(z), f(w)) = \rho(z,w)$ が得られる。

4. $d(0,r) = 2\tanh^{-1} r = \ln\frac{1+r}{1-r}$ であり、$r \to 1$ のとき $\infty$ に発散する。距離を 10 にするには $r = \tanh 5 \approx 0.99991$ が必要であり、これは縁から約 $9 \times 10^{-5}$ 以内の位置である。

章

# 6

# 代数と構造

代数のあらゆる巧妙な技巧の背後には構造がある。そして構造を理解することは、どれほど多くの技巧を知ることよりも価値がある。

**この章の内容**


| | | |
|---|---|---|
| **6.1** | 1 の累乗根を根にもつ多項式 | STEP III 2010 |
| **6.2** | ガウスの正 17 角形 | STEP II 1991 |
| **6.3** | $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ を根にもつ多項式 | STEP II 2023 |
| **6.4** | 四次方程式を解く | STEP III 2017 |
| **6.5** | 公理から考える微分 | STEP II 1992 |
| **6.6** | 部分群の和集合 | STEP II 1988 |
| **6.7** | 四元数群 | STEP III 1993 |
| **6.8** | 特異行列からなる群 | STEP III 1996 |
| **A** | 演習問題の答え | p. 453 |

# 方程式から構造へ

数学とは、異なるものに同じ名前を与える技術である。

— アンリ・ポアンカレ（Henri Poincaré）

その歴史の大部分において、代数とは方程式を解くことであった。バビロニア人は 4000 年前に 2 次方程式（quadratic）を解き、16 世紀のイタリアの数学者たちは 3 次方程式（cubic）と 4 次方程式（quartic）を解いた。そしてその後 300 年近くにわたり、5 次方程式（quintic）はあらゆる試みを退け続けた。1820 年代から 1830 年代にかけてついに得られた解決は、代数を根本から変えた。アーベル（Niels Henrik Abel）は 5 次方程式に対する一般的な解の公式が存在しないことを証明し、ガロア（Évariste Galois）はどの方程式が解けるのかを正確に説明した。彼が調べたのは方程式そのものではなく、**その根の対称性**であった。そのために彼は新しい種類の数学的対象を発明しなければならなかった。それが群（group）である。

答えを計算することから構造を研究することへ、という転換こそが本章の主題である。現代の代数は「解は何か？」と問う代わりに、「これはどのような種類の対象であり、どのような演算が許されるのか？」と問う。その答えは、昔の技巧がなぜうまくいったのかを説明し、さらに技巧だけでは決して決着のつかなかった問題をも解決するのである。

### なぜ構造が重要なのか

2000 年もの間あらゆる試みを退けてきた、古代からの三つの問題がある。定規とコンパス（ruler and compasses）を用いて、立方体の体積を 2 倍にすること、任意の角を三等分すること、正 7 角形を作図すること、である。いずれも不可能であり、19 世紀に見出されたその証明は、巧妙な作図ではなく構造についての議論である。すなわち、定規とコンパスで到達できる数の体（field）の**次数**（degree）についての議論である（Section 6.3）。同じ理論によって、正 17 角形がなぜ作図**できる**のか（Section 6.2）、そして 4 次方程式は解けるのに 5 次方程式はなぜ解けないのか（Section 6.4）も説明される。

構造はまた、分野を越えて通用する。群の公理（axiom）を満たすものには、結晶の対称性、多項式の根の置換（permutation）、3 次元空間の回転、ルービックキューブの操作、楕円曲線（elliptic curve）上の点などがある。公理から一度証明された定理は、そ

のすべてにおいて成り立つ。ポアンカレの言う「異なるものに同じ名前を与える」というこの経済性こそが、抽象代数学（abstract algebra）をこれほど強力なものにしているのである。

### 大学で出会うこと

1 年次には**群**（三つの公理を満たす演算をもつ集合）に出会い、たいていは**環**（ring）と**体**（加法と乗法をもつ集合）にも出会う。部分群（subgroup）の大きさは群の大きさを割り切るというラグランジュ（Lagrange）の定理を証明し、置換、対称群、行列群に出会うことになる。2 年次と 3 年次には、これらが次のものへとつながっていく。体と群を結びつけ、方程式と作図に関する古典的な問題に答える**ガロア理論**（Galois theory）、行列を通して群を研究する**表現論**（representation theory）、そして Section 1.7 の考え方が確かな基礎の上に置かれる**代数的整数論**（algebraic number theory）である。本章の最後の三つの節は群を扱う。群はもはや STEP の出題範囲には含まれていない（2019 年に削除された）が、問題はそれだけで完結しており、各節では必要な定義を与えている。

### 本章を貫く問い

**三つの大きな問い**

1. **何から何を作ることができるか？**有理数から平方根をとることで、あるいは方程式を解くことで、どのような数に到達できるのか。そして、ある数に到達**できない**ことはどのように証明するのか。
2. **方程式の解の公式はなぜうまくいくのか？** 2 次方程式、3 次方程式、4 次方程式に解の公式があることの隠れた理由は何か。そして次数が 5 になると何が変わるのか。
3. **抽象化によって何が得られるのか？**対象を、それが従う規則だけによって記述すると何が起こるのか。

## 本章で扱う考え方

| § | 主題 | 考え方 |
|---|---|---|
| 6.1 | 円分多項式（cyclotomic polynomial） | 1 の冪根（root of unity）を位数で分類する |
| 6.2 | 正 17 角形 | ガウス（Gauss）周期：和と積から 2 次方程式が得られる |
| 6.3 | 最小多項式（minimal polynomial） | 根号（radical）を消去する；次数は掛け合わされる |
| 6.4 | 4 次方程式を解く | 対称関数（symmetric function）；分解 3 次式（resolvent cubic） |
| 6.5 | 公理からの微分 | 規則によって決定される演算 |
| 6.6 | 部分群の和集合 | 群の公理から論じる |
| 6.7 | 四元数群（quaternion group） | 演算を行列で表現する |
| 6.8 | 特異行列（singular matrix）からなる群 | 定義を文字どおりに読む |

## 本章の読み方

これらの問題の多くは力ずくで解くことができる。すべてを展開し、係数を比較し、すべての場合を確かめればよい。必要ならまずそうしてみるとよい。そのうえで振り返り、何が力ずくの方法を成功させたのか、その背後に構造的な理由があるのかを問うてみてほしい。構造的な理由はたいていより短く、常により多くのことを明らかにしてくれる。そして力ずくの方法が通用しなくなったときに必要となるのは、まさにそれなのである。

# 6.1 1 の累乗根を根にもつ多項式

**問題**

**STEP III 2010、問 3**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/10-s3-q3`

## 導入

1 の $n$ 乗根（$n$th roots of unity）、すなわち $z^n = 1$ の解は、正 $n$ 角形の頂点に並んでいる。しかし、それらはすべて同じ性質をもつわけではない。たとえば 1 の 12 乗根のうち、1 はすでに 1 の 1 乗根であり、$-1$ は 1 の平方根、$\mathrm{i}$ は 4 乗根である。12 個のうち 4 個だけ、すなわち**原始的**（primitive）なものだけが、1 に戻るまでに 12 ステップすべてを必要とする。

1 の冪根を、必要なステップ数によって分類し、それぞれの類から多項式を作ると、**円分多項式**（cyclotomic polynomials、ギリシャ語で「円を分割する」の意）が得られる。素数が整数の基本的な構成要素であるのと同じように、円分多項式は $z^n - 1$ の基本的な構成要素である。円分多項式は、ガウス（Gauss）による正 17 角形の作図（Section 6.2）や 1 の冪根フィルター（Section 5.2）、さらには現代整数論の多くの部分の背後にある。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 1 の $n$ 乗根はどれも $z^n = 1$ を満たす。しかし、1 を与える最小の正の冪は $n$ より小さいかもしれない。四つの 1 の 4 乗根 $1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}$ のそれぞれについて、その最小の冪はいくつか？

$1^1 = 1$、$(-1)^2 = 1$ であり、$\mathrm{i}^4 = (-\mathrm{i})^4 = 1$ で、これより小さい冪では 1 にならない。したがって最小の冪はそれぞれ $1, 4, 2, 4$ である。この最小の冪をその 1 の冪根の**位数**（order）とよび、原始 $n$ 乗根とはちょうど位数が $n$ であるもののことである。この問

題全体を通じて鍵となる事実は、**どの $1$ の冪根もただ一つの位数をもつ**ということである。

## 順を追って解く

### 段階 1　最初のいくつか

原始 $4$ 乗根は $\mathrm{i}$ と $-\mathrm{i}$ であるから、$C_4(x) = (x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}) = x^2+1$ である。 ■

> **考えてみよう**　位数が $1, 2, 3, 5$ および $6$ である $1$ の冪根はそれぞれどれか？（$1$ の $6$ 乗根を図示し、位数によって分類してみよ。）

位数 $1$：$1$ のみであるから、$C_1(x) = x-1$。位数 $2$：$-1$ のみであるから、$C_2(x) = x+1$。

位数 $3$：$1$ 以外の $1$ の $3$ 乗根、すなわち $\frac{x^3-1}{x-1}$ の根である。よって $C_3(x) = x^2+x+1$。

位数 $5$：$1$ 以外の $5$ 乗根であり、これは $\frac{x^5-1}{x-1}$ の根であるから、$C_5(x) = x^4+x^3+x^2+x+1$。

位数 $6$：$6$ 乗根 $e^{k\pi\mathrm{i}/3}$, $k = 0,\dots,5$ のうち、$k = 0, 3$ のものは位数がそれぞれ $1, 2$ であり、$k = 2, 4$ のものは位数 $3$ である。残るのは $e^{\pm\pi\mathrm{i}/3}$ であるから、

$$C_6(x) = (x - e^{\mathrm{i}\pi/3})(x - e^{-\mathrm{i}\pi/3}) = x^2 - 2x\cos\tfrac{\pi}{3} + 1 = x^2 - x + 1. \qquad \blacksquare$$

### 段階 2　$x^4+1$ を与える $n$ はどれか？

$x^4+1=0$ の根は $x^4 = -1$ を満たすので、$x^8 = 1$ であるが $x^4 \neq 1$ である。その位数は $8$ を割り切るが $4$ を割り切らないので、$8$ である。逆に、位数 $8$ の根は $x^8 = 1$, $x^4 \neq 1$ を満たすので、$x^4 = -1$ である。原始 $8$ 乗根は $4$ 個あり、$x^4+1$ の根も $4$ 個あるから、$n = 8$ である。 ■

### 段階 3　素数の場合

$p$ が素数ならば、$1$ の $p$ 乗根の位数は $p$ を割り切るので、$1$ または $p$ である。したがって $1$ 以外の $p$ 乗根はすべて原始的であり、

$$C_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1. \qquad \blacksquare$$

### 段階 4　円分多項式は他の二つの円分多項式の積にならない

**手を止めて、やってみよう** $C_q = C_r C_s$ と仮定する。$C_r$ の根を一つとる。その位数はいくつか？この恒等式はその位数について何を教えてくれるか？そこから何が導かれるか？

$C_r$ の根（$e^{2\pi i/r}$ は原始的であるから、少なくとも一つは存在する）はどれも $C_r C_s = C_q$ の根であるから、位数は $q$ である。しかしその位数は $r$ でもあり、1 の冪根の位数はただ一つであるから、$r = q$ である。すると $C_q = C_q C_s$ となり、$C_q$ は零多項式ではないから、$C_s = 1$ である。しかし $C_s$ は少なくとも一つの根 $e^{2\pi i/s}$ をもつので、これは不可能である。よって、このような $q, r, s$ は存在しない。 ■

## 振り返り

- **位数で分類する。** どの 1 の冪根もただ一つの位数をもち、位数でまとめることで $z^n - 1$ の根は互いに交わらない類に分かれる。
- **根によって多項式を定める。** 各 $C_n$ は、どの数がその根であるかを正確に述べることで決定された。
- **一意性から不可能性が導かれる。** 小問 (iv) で必要だったのは、一つの根が二つの異なる位数をもつことはない、というただ一つの考え方だけであった。

## 背後にある数学

### $x^n - 1$ の因数分解

1 の $n$ 乗根はどれも、$n$ を割り切るある位数 $d$ をもつ。また $d \mid n$ のとき、位数 $d$ の 1 の $d$ 乗根はどれも 1 の $n$ 乗根である。したがって $x^n - 1$ の根は位数によって類に分かれ、

$$x^n - 1 = \prod_{d \mid n} C_d(x)$$

が得られる。たとえば $x^6 - 1 = C_1 C_2 C_3 C_6 = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ である。図 6.1.1 は、12 個の 1 の 12 乗根をこのように分類したものである。原始 $n$ 乗根の個数、すなわち $C_n$ の次数は、1 から $n$ までの $k$ のうち $n$ と共通因数をもたないものの個数であり、これが**オイラーのトーシェント関数**（Euler's totient function）$\varphi(n)$ である。次数を比較すると、恒等式 $\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$ が得られる。

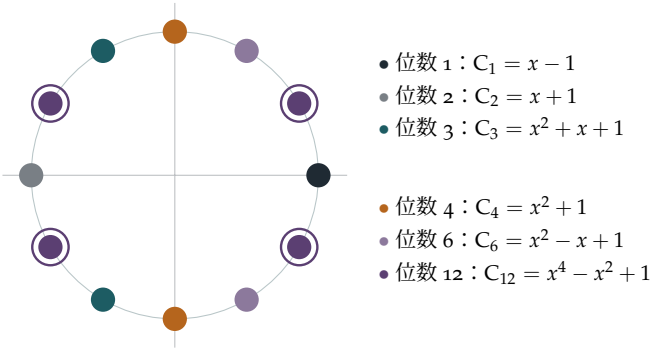



**図 6.1.1**　12 個の 1 の 12 乗根を位数によって色分けしたもの。4 個の原始 12 乗根（丸で囲んだもの）は $C_{12}$ の根である。すべての類を合わせると $x^{12} - 1 = C_1C_2C_3C_4C_6C_{12}$ となり、次数は $1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 = 12$ である。

### 整数係数と、ある意外な事実

定義からは明らかではないが、どの円分多項式も**整数**係数をもつ。（$x^n - 1$ の因数分解と数学的帰納法（induction）を用いる。$C_n$ は $x^n - 1$ をそれ以前の円分多項式の積で割ったものであり、整数係数の多項式をモニック（monic、最高次の係数が 1）な整数係数多項式で筆算により割っても、係数は整数のままである。）長い間、知られていた例はすべて係数が $0, 1, -1$ のいずれかであった。最初の例外は $C_{105}$ で、これは項 $-2x^7$ を含み、1883 年に Migotti によって発見された。$105 = 3 \times 5 \times 7$ は、相異なる三つの奇素因数をもつ最小の数である。実は、円分多項式の係数はいくらでも大きくなりうる。

### 既約性

小問 (iv) は、円分多項式が他の二つの円分多項式の積にならないことを示している。実はもっと強いことが成り立つ。$C_n$ は、より低い次数の有理数係数多項式の積にはまったく因数分解できないのである。ガウスはこれを $n$ が素数の場合に証明し（これは大学の最初の代数の講義で学ぶ**アイゼンシュタインの判定法**（Eisenstein's criterion）から導かれる）、クロネッカー（Kronecker）とデデキント（Dedekind）が一般の $n$ の場合に証明した。この**既約性**（irreducibility）こそが、円分多項式を 1 の冪根に関連する多項式の中の「素数」たらしめているものであり、1 の冪根のガロア理論（Galois theory）の出発点でもある。

## 思考のスキル

### 分類してから組み立てる

問題に現れる対象を、ただ一つに定まる明確な不変量（*invariant*）によって類に分け、類ごとに構造を組み立てよ。

ここでの不変量は 1 の冪根の位数であった。各根はちょうど一つの位数をもつので類は重ならず、$x^n - 1$ はそれらの類にわたる積に分解される。同じパターン（一意的な不変量が互いに交わらない分解を与えること）は、素因数分解（prime factorisation）や有限アーベル群（finite abelian groups）の分類の根底にもある。

## 次の一歩

1 **因数分解を確かめる。** $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1) = x^6 - 1$ であること、および $x^{12} - 1$ が図 6.1.1 のように因数分解されることを確かめよ。

2 **素数の 2 倍。** $p$ が奇素数ならば $\mathrm{C}_{2p}(x) = \mathrm{C}_p(-x)$ であることを示せ。$p = 3$ の場合にこれを確かめよ。

3 **トーシェント関数。** 素数 $p$ に対して $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ であること、および $\mathrm{C}_{p^k}(x) = \mathrm{C}_p\left(x^{p^{k-1}}\right)$ であることを示せ。これを用いて $\mathrm{C}_9$ を求めよ。

4 **少し長い問題。** やや難 $x^{15} - 1 = \mathrm{C}_1\mathrm{C}_3\mathrm{C}_5\mathrm{C}_{15}$ を用いて、$\mathrm{C}_{15}(x) = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$ であることを示せ。

## さらに学ぶために

- **Ian Stewart, *Galois Theory***（CRC Press）。学部生向けの標準的な入門書（『ガロア理論』）。円分多項式と正多角形が早い段階で登場する。
- **Harold Davenport, *The Higher Arithmetic***（Cambridge University Press）。1 の冪根とその算術を扱っている（『高等算術』）。
- **Marcus du Sautoy, *Finding Moonshine***（Fourth Estate）。対称性と群論についての一般向けの読み物で、ガロアの物語も含まれている。

# 6.2 ガウスの正 17 角形

**問題**

**STEP II 1991、問 4**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/91-s2-q4`

## 導入

1796 年 3 月 30 日、ゲッティンゲン（Göttingen）の 18 歳の学生が、生涯にわたって書き続けることになる数学日記の最初の記述を残した。彼は、正 17 角形（regular 17-sided polygon）を定規とコンパス（ruler and compasses）で作図する方法を発見したのである。古代ギリシャ人は、辺の数が 3, 4, 5, 15 の正多角形と、それらの辺の数を 2 倍にしたものの作図法を知っていたが、それから二千年の間、新たに一つでも付け加えた者はいなかった。カール・フリードリヒ・ガウス（Carl Friedrich Gauss）は後に、この発見によって文献学者ではなく数学者になる決心をしたと語っており、墓石に正 17 角形を刻むよう頼んだとも伝えられている。

この作図の核心は、本問の後半部分にある。すなわち、ある特定の四つの余弦の和が $\frac{\sqrt{17}-1}{4}$ に等しいという事実であり、これは平方根しか含まない数である。平方根から組み立てられる長さは定規とコンパスで作図でき、ガウスは同じ種類の手順をさらに三回重ねることで、$\cos\frac{2\pi}{17}$ そのものを作図することができた。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $\cos\frac{2\pi}{5}$ に関する前半部分が、なぜ 17 角形についての問題に登場するのだろうか。

これは準備運動であり、同じ考え方をより小さな多角形に適用している。五角形の場合、和 $\cos\phi + \cos 2\phi$ は有理数係数の二次方程式（quadratic）を満たすので、二次方程式を解くことで求められる。17 角形の場合も、四つの余弦の和 $z$ が二次

方程式を満たすことが分かる。どちらの場合も、鍵は余弦どうしを掛け合わせ、$\cos A\cos B = \tfrac{1}{2}(\cos(A+B)+\cos(A-B))$ を用いて、積を同じ角の余弦の和に戻すことである。

## 順を追って解く

### 段階 1　正五角形

**考えてみよう**　$y^2 = (\cos\phi + \cos 2\phi)^2$ を展開し、各積を和に直したうえで、$5\phi = 2\pi$ を用いて $3\phi$ や $4\phi$ のような角を簡約せよ。

$$y^2 = \cos^2\phi + 2\cos\phi\cos 2\phi + \cos^2 2\phi = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\phi) + (\cos 3\phi + \cos\phi) + \tfrac{1}{2}(1+\cos 4\phi).$$

$5\phi = 2\pi$ であるから、$\cos 3\phi = \cos(2\pi - 2\phi) = \cos 2\phi$ かつ $\cos 4\phi = \cos\phi$ である。よって

$$y^2 = 1 + \tfrac{1}{2}(\cos\phi + \cos 2\phi) + (\cos\phi + \cos 2\phi) = 1 + \tfrac{3}{2}y,$$

すなわち $2y^2 = 3y + 2$ である。 ■$2y^2 - 3y - 2 = (2y+1)(y-2) = 0$ の解は $y = 2$ と $y = -\tfrac{1}{2}$ である。しかし $y = 2$ となるには二つの余弦がともに $1$ に等しくなければならず、そうはならないので、$y = -\tfrac{1}{2}$ である。 ■

### 段階 2　1 の 17 乗根の和は 0 である

$\sum_{k=0}^{16}\cos k\theta$ は $\sum_{k=0}^{16}\omega^k$ の実部である。ここで $\omega = e^{i\theta}$ は $1$ の原始 17 乗根（primitive root of unity）である。この等比級数（geometric series）の和は $\frac{\omega^{17}-1}{\omega-1} = 0$ である。■

したがって $\sum_{k=1}^{16}\cos k\theta = -1$ である。$\cos(17-k)\theta = \cos k\theta$ であるから項は二つずつ組になり、

$$\sum_{k=1}^{8}\cos k\theta = -\tfrac{1}{2}.$$

### 段階 3　余弦を二つのグループに分ける

**考えてみよう**　$z = \cos\theta + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 8\theta$ とし、残りの四つの余弦の和 $\cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 6\theta + \cos 7\theta$ を $z'$ とする。$z + z'$ はいくらか。

段階 2 より $z + z' = -\tfrac{1}{2}$ である。さらに $zz'$ も求められれば、$z$ と $z'$ はある二次方程式の解となる。

**手を止めて、やってみよう** $zz'$ を計算せよ。これを 16 個の積 $\cos a\theta \cos b\theta$ に展開し、それぞれを二つの余弦の和に直して、$\cos\theta, \cos 2\theta, \ldots, \cos 8\theta$ のそれぞれが何回現れるかを数えよ。（角は $\cos k\theta = \cos(17-k)\theta$ と $\cos(-k\theta) = \cos k\theta$ を用いて簡約する。）

各積は $\cos a\theta \cos b\theta = \frac{1}{2}(\cos(a+b)\theta + \cos(a-b)\theta)$ となるので、$zz'$ は 32 個の余弦の和の $\frac{1}{2}$ 倍である。$a \in \{1,2,4,8\}$、$b \in \{3,5,6,7\}$ となる 16 組を順に調べていく。たとえば $a=1, b=3$ からは $\cos 4\theta$ と $\cos 2\theta$ が得られ、$a=8, b=7$ からは $\cos 15\theta = \cos 2\theta$ と $\cos\theta$ が得られる。十六組すべてについてこれを実行すると、$\cos\theta, \ldots, \cos 8\theta$ のそれぞれがちょうど四回ずつ現れる。したがって

$$zz' = \tfrac{1}{2} \times 4 \times \sum_{k=1}^{8} \cos k\theta = 2 \times \left(-\tfrac{1}{2}\right) = -1.$$

### 段階 4 二次方程式

よって $z$ と $z'$ は $t^2 + \frac{1}{2}t - 1 = 0$、すなわち $4t^2 + 2t - 4 = 0$ の解であり、その解は $t = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$ である。どちらが $z$ だろうか。数値的には $\cos\theta \approx 0.932$, $\cos 2\theta \approx 0.739$, $\cos 4\theta \approx 0.092$, $\cos 8\theta \approx -0.983$ であるから、$z \approx 0.78 > 0$ である。ゆえに

$$z = \frac{-1+\sqrt{17}}{4} = -\frac{1-\sqrt{17}}{4}. \qquad \blacksquare$$

## 振り返り

- **積を和に直す。** 余弦の積和公式（product-to-sum formula）によって、$y^2$ と $zz'$ が同じ余弦たちの和に変わり、計算がその中で閉じた。
- **和と積から二次方程式が得られる。** $z+z'$ と $zz'$ が分かることは、$z$ と $z'$ を解にもつ二次方程式が分かることと同じである。
- **正しい分け方が肝心である。** 八つの余弦を $\{1,2,4,8\}$ と $\{3,5,6,7\}$ に分けたことで、$zz'$ の中にどの添字も等しい回数だけ現れた。でたらめに分けたのではうまくいかない。

## 背後にある数学

### ガウス周期

なぜ $\{1,2,4,8\}$ なのか。17 を法として、3 の累乗 $3^0, 3^1, 3^2, \ldots$ は 0 でないすべての剰余（residue）を巡る。

$$1,3,9,10,13,5,15,11,16,14,8,7,4,12,2,6.$$

一つおきに $3^0, 3^2, 3^4, \ldots$ をとると 1, 9, 13, 15, 16, 8, 4, 2 が得られ、これらは 17 を法として $\pm1$, $\pm2$, $\pm4$, $\pm8$ であり、ちょうど $z$ に現れる角である。残りの半分からは $\pm3, \pm5, \pm6, \pm7$ が得られ、これは $z'$ に現れる角である。ガウスは、このような類にわたる $\omega^k$ の和を**周期**（*periods*）と呼んだ。$17-1=16=2^4$ であるから、剰余は四回半分に分けることができ、各段階で周期は、前の段階の周期を係数に含む二次方程式を満たす。四つの二次方程式、つまり四つの平方根によって、有理数から $\cos\frac{2\pi}{17}$ まで降りていくことができる。

$$\cos\tfrac{2\pi}{17} = \tfrac{1}{16}\Big(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}} \\ +2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\Big).$$

どの段階も平方根しか含まず、平方根は（相似な三角形や半円を用いて）定規とコンパスで作図できるので、正 17 角形は作図可能である。

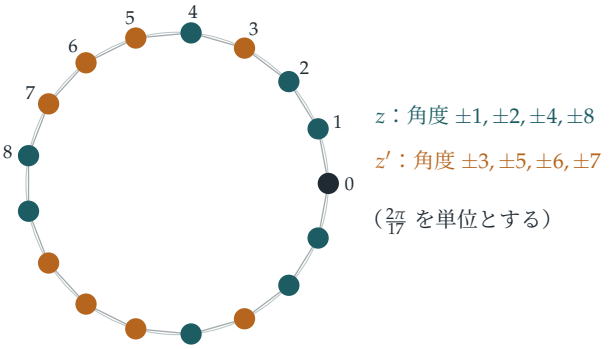



**図 6.2.1**　正 17 角形の頂点を、ガウスの二つの周期に分けたもの。ティール色の頂点は（$\frac{2\pi}{17}$ を単位として）角度 $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$ の位置にあり、それらの $x$ 座標の和は $2z=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ である。琥珀色の頂点からは $2z'=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ が得られる。

### どの多角形が作図できるか

ガウスが主張し、1837 年にヴァンツェル（Pierre Wantzel）が証明したところによれば、正 $n$ 角形が定規とコンパスで作図できるのは、$n$ が 2 の累乗と相異なる**フェルマー素数**（*Fermat primes*）、すなわち $2^{2^m}+1$ の形の素数の積との積であるとき、かつそのときに限る。知られているフェルマー素数は 3, 5, 17, 257, 65537 であり、これらは Section 1.1 のフェルマー数である。（フェルマー（Fermat）はこの形の数がすべて素数であると予想したが、オイラー（Euler）は $2^{32}+1$ が 641 で割り切れることを示した。それ以降、新たなフェルマー素数は一つも見つかっていない。）したがって正 257 角形と正 65537 角形は作図可能である。19 世紀には Johann Hermes が約十年をかけて正 65537 角形の作図法を詳細に書き上げ、その手稿はゲッティンゲンに保管されている。正 7 角形と正 11 角形は作図できない。7 と 11 はフェルマー素数ではないからである（$7-1=6$ と $11-1=10$ は 2 の累乗ではない）。正 9 角形も作図できない。$9=3^2$ ではフェルマー素数 3 が重複するからである。ヴァンツェルの証明には、Section 6.3 で扱う体の拡大次数（field degrees）の理論が用いられる。

## 思考のスキル

> **和と積を計算して二次方程式を見つける**
>
> ある量を求めるには、それに自然な相棒を組み合わせ、両者の和と積を計算して、得られる二次方程式を解けばよい。
>
> 腕の見せどころは、和も積も計算できるように相棒を選ぶことにある。本問では、相棒は 17 を法とする剰余の対称性から得られ、この考え方を四回繰り返すことで、ガウスは作図法にたどり着いた。

## 次の一歩

1. **正七角形。** STEP II 1995、問 6（`step.maths.org/questions/95-s2-q6`）に取り組んでみよう。この問題は、1 の累乗根をグループに分けるというガウスの考え方を 1 の 7 乗根に適用し、余弦の和と正弦の和の正確な値を求めるものである。正弦の和の符号を決めるところが微妙な一歩である。

2. **正五角形。** $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ を示し、それを用いて正五角形の定規とコンパスによる作図法を説明せよ。

3 **もう一方の周期。** $z' = \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 6\theta + \cos 7\theta = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$ であることを数値的に確かめよ。

4 **生成元。** 17 を法とする 3 の累乗は 0 でないすべての剰余を与えるが、2 の累乗はそうではないことを示せ。2 の累乗はどの剰余を与えるか。

## さらに学ぶために

- **Ian Stewart, *Galois Theory***（CRC Press）。『ガロア理論』。定規とコンパスによる作図と正 17 角形を扱う章がある。
- **Richard Courant & Herbert Robbins, *What Is Mathematics?***（Oxford University Press）。『数学とは何か』。第 3 章は、正 17 角形を含む作図についての、初等的で見事な解説である。
- **Daniel Kehlmann, *Measuring the World***（Quercus）。『世界の測量』。ガウスとフンボルト（Alexander von Humboldt）を描いた喜劇的な小説であり、息抜きに最適である。

# 6.3 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ を根にもつ多項式

**問題**

**STEP II 2023、問 4**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip`

## 導入

$\sqrt{2}$ は整数係数の多項式 $x^2-2$ の根である。$\sqrt{3}$ も同様に $x^2-3$ の根である。では、$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ もまた何らかの整数係数多項式の根になるだろうか。$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ や $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ ではどうだろうか。

整数係数多項式の根となる数を**代数的**（algebraic）な数という。この問題は、実際に手を動かして根号を消去していくことで、代数的な数の和が代数的であることを示している。現れる次数 4、8、6、9 は偶然ではない。これらはそれぞれの数がどれほど「複雑」かを測るものであり、この尺度、すなわち**体の拡大次数**（degree of a field extension）こそが、古代ギリシアの立方体倍積問題と角の三等分問題に最終的な決着をつけたのである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $\sqrt{2}$ を根にもつ多項式を見つけるには、$x=\sqrt{2}$ の両辺を 2 乗して平方根を取り除く。では、異なる 2 つの平方根を 1 つずつ取り除くにはどうすればよいだろうか。

一方の平方根を片側に孤立させて 2 乗すれば、それは消える。次にもう一方を孤立させて再び 2 乗する。2 乗するたびに次数は 2 倍になりうる。これがこの問題の戦略のすべてである。根号を 1 つずつ消去していくのである。

## 順を追って解く

### 段階 1  2 つの平方根

$(x-\sqrt{2})^2=3$ ならば $x^2-2\sqrt{2}\,x+2=3$ であるから、$x^2-1=2\sqrt{2}\,x$ となる。2 乗すると残りの平方根が消える。$(x^2-1)^2=8x^2$、すなわち

$$x^4-10x^2+1=0. \qquad \blacksquare$$

そして $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は $(x-\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2=3$ を満たすので、$\mathrm{f}(\sqrt{2}+\sqrt{3})=0$ である。 $\blacksquare$

### 段階 2  3 つの平方根

**考えてみよう**  $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ とおくと、$x-\sqrt{5}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は f の根である。$\mathrm{f}(x-\sqrt{5})=0$ を $P(x)+\sqrt{5}\,Q(x)=0$ の形に書け。そのあと $\sqrt{5}$ をどのように消去すればよいだろうか。

$(x-\sqrt{5})^2=x^2+5-2\sqrt{5}x$ および $(x-\sqrt{5})^4=\bigl(x^2+5-2\sqrt{5}x\bigr)^2=x^4+30x^2+25-4\sqrt{5}\,x(x^2+5)$ を用いて展開すると

$$\mathrm{f}(x-\sqrt{5})=\bigl(x^4+30x^2+25\bigr)-4\sqrt{5}\,x(x^2+5)-10\bigl(x^2+5\bigr)+20\sqrt{5}\,x+1.$$

整理すると $P(x)=x^4+20x^2-24$、$Q(x)=-4x^3-20x+20x=-4x^3$ である。よって $x^4+20x^2-24=4\sqrt{5}\,x^3$ となる。2 乗して

$$\bigl(x^4+20x^2-24\bigr)^2=80x^6,$$

これを展開すると

$$\mathrm{g}(x)=x^8-40x^6+352x^4-960x^2+576. \qquad \blacksquare$$

（確認：$400-48=352$ を用いると $(x^4+20x^2-24)^2=x^8+40x^6+352x^4-960x^2+576$ であり、ここから $80x^6$ を引けば g が得られる。）

### 段階 3  3 次方程式の根と平方根

**考えてみよう**  $x=a+\sqrt{2}$ ならば、$x-\sqrt{2}$ は $t^3-3t+1$ の根である。代入し、$\sqrt{2}$ を含む項と含まない項に分けてから 2 乗せよ。

$(x-\sqrt{2})^3=x^3-3\sqrt{2}\,x^2+6x-2\sqrt{2}$ であるから

$$(x-\sqrt{2})^3-3(x-\sqrt{2})+1=\bigl(x^3+3x+1\bigr)-\sqrt{2}\bigl(3x^2-1\bigr)=0.$$

したがって $(x^3+3x+1)^2 = 2(3x^2-1)^2$ である。展開すると $x^6+6x^4+2x^3+9x^2+6x+1 = 18x^4-12x^2+2$ となるので

$$\mathrm{h}(x) = x^6 - 12x^4 + 2x^3 + 21x^2 + 6x - 1. \qquad \blacksquare$$

用いたのは $a$ が $t^3-3t+1$ の根であるという事実だけなので、同じ議論が $b+\sqrt{2}$ と $c+\sqrt{2}$ についても成り立つ。（h の残りの 3 つの根は $a-\sqrt{2}$、$b-\sqrt{2}$、$c-\sqrt{2}$ であり、これらは 2 乗したときに入り込んだものである。）

### 段階 4　2 つの立方根

> **手を止めて、やってみよう**　$x = \sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ とおく。両辺を 3 乗せよ。その結果を $x$ とただ 1 つの立方根を用いて表せるだろうか。

$u = \sqrt[3]{2}$、$v = \sqrt[3]{3}$ として $(u+v)^3 = u^3+v^3+3uv(u+v)$ を用いると

$$x^3 = 2+3+3\sqrt[3]{6}\,x, \qquad \text{したがって} \qquad x^3 - 5 = 3\sqrt[3]{6}\,x.$$

もう一度 3 乗すれば最後の立方根が消える。$(x^3-5)^3 = 27\cdot 6\,x^3 = 162x^3$ である。$(x^3-5)^3 = x^9-15x^6+75x^3-125$ と展開して

$$\mathrm{k}(x) = x^9 - 15x^6 - 87x^3 - 125. \qquad \blacksquare$$

## 振り返り

- **根号は 1 つずつ消去する。**根号を孤立させ、適切な累乗をとり、これを繰り返す。
- **有理部分と無理部分を分ける。**式を $P+\sqrt{5}\,Q$ の形に書き、$P^2 = 5Q^2$ を用いるのが鍵となる一手である。
- **2 乗すると余分な根が加わる。**2 乗するたびに、$a+\sqrt{2}$ に対する $a-\sqrt{2}$ のような「共役」（conjugate）な根が入り込む。最終的な多項式はそれらすべてを根にもつ。

## 背後にある数学

### 体とその次数

$p$、$q$ を有理数とする数 $p+q\sqrt{2}$ 全体の集合 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ は、加法、減法、乗法、（0 でない数による）除法について閉じている。すなわち、これは**体**（field）である。これは $\mathbb{Q}$ 上の 2 次元の「ベクトル空間」（vector space）であり、基底（basis）は $1, \sqrt{2}$ である。

そこで、これは $\mathbb{Q}$ 上**次数**（degree）2 をもつという。$\sqrt{3}$ を添加すると $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ が得られ、その基底は $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$、次数は 4 である。さらに $\sqrt{5}$ も添加すると次数は 8 になる（図 6.3.1）。**塔法則**（tower law）とは、体の塔をのぼるにつれて次数が掛け合わされるという法則である。ある数が生成する体の次数は、その数の**最小多項式**（minimal polynomial）、すなわちその数が満たす有理数係数多項式のうち次数が最小のものの次数に等しい。この問題の多項式 f と g は最小多項式であることが示せるので、$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ の次数は 4、$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ の次数は 8 である。実際、ただ 1 つの数 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ が次数 8 の体全体を生成するのである。

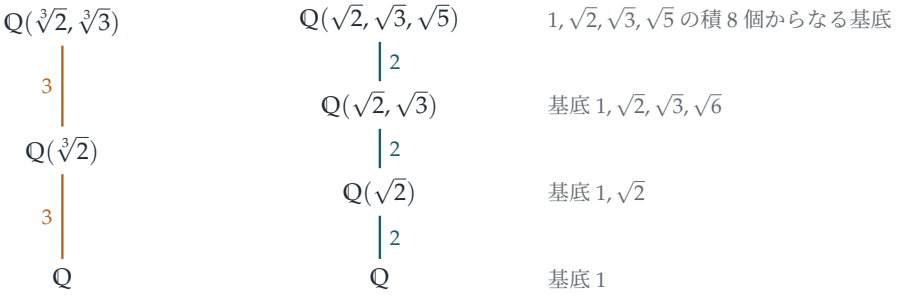



**図 6.3.1**　体の塔。右：平方根を 1 つ添加するごとに次数は 2 倍になり、$2\times2\times2=8$ が得られる。これは g の次数である。左：立方根を 1 つ添加するごとに次数は 3 倍になり、$3\times3=9$ が得られる。これは k の次数である。塔をのぼると次数は掛け合わされる。この**塔法則**こそが、定規とコンパスによる作図の不可能性の証明の鍵である。

### 立方体倍積問題

定規とコンパスによる作図（ruler-and-compass construction）で得られる長さは、有理数から出発して 1 次方程式と 2 次方程式を繰り返し解くことで得られるものに限られる。そのような各段階は次数 1 または 2 の体の拡大を与えるので、塔法則により、作図可能な長さはすべて次数が 2 の累乗である体に属し、それ自身の次数も 2 の累乗となる。ところが $\sqrt[3]{2}$ の最小多項式は $x^3-2$ であり、その次数は 3 である。3 は 2 の累乗ではないから $\sqrt[3]{2}$ は作図不可能であり、紀元前 430 年ごろに提起された、定規とコンパスで立方体の体積を 2 倍にするというデロスの問題は不可能である。ヴァンツェル（Pierre Wantzel）は 1837 年にこれを証明し、あわせて一般の角の三等分が不可能であることと、作図可能な正多角形の分類（Section 6.2）も示した。2000 年にわたる試みは、次数に関する議論によって終止符を打たれたのである。

### 代数的数は体をなす

この問題の方法は、具体例を通じて、代数的数の和が代数的であることを示している。一般には、これは線形代数を用いて証明される。$\alpha$ と $\beta$ の次数をそれぞれ $m$、$n$ とすると、数 $\alpha^i\beta^j$（$i<m$、$j<n$）全体は次元が高々 $mn$ の空間を張るので、$mn+1$ 個の累乗 $1, \alpha+\beta, (\alpha+\beta)^2, \ldots$ は一次従属（linearly dependent）でなければならない。これにより次数が高々 $mn$ の多項式が得られる。ここで得た次数 $4=2\times2$、$6=3\times2$、$9=3\times3$ はまさにこのパターンに当てはまる。代数的でない数を**超越的**（transcendental）な数という。$e$ と $\pi$ はその例であり（エルミート（Hermite）、1873 年、およびリンデマン（Lindemann）、1882 年）、$\pi$ が超越数であるというリンデマンの定理によって、円積問題もまた不可能であることが証明された。

## 思考のスキル

**消去し、そして測る**

根号を含む式が満たす多項式を求めるには、根号を孤立させて累乗をとることで、根号を 1 つずつ取り除く。

そのうえで、次数が何を教えてくれるかを問う。最小多項式の次数はその数の不変量であり、次数を比較することは、何かが不可能であることを証明するための最も強力な方法の一つである。

## 次の一歩

1. **原始元（primitive element）。** $y=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ とする。$y^3=11\sqrt{2}+9\sqrt{3}$ を示し、$\sqrt{2}=\frac{1}{2}(y^3-9y)$ を導け。したがって、すべての数 $p+q\sqrt{2}+r\sqrt{3}+s\sqrt{6}$ は $y$ の多項式として表せる。

2. **種類の異なる根号。** $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ を根にもつ、次数 6 の整数係数多項式を求めよ。

3. **既約性（irreducibility）。** $x^4-10x^2+1$ は有理数の根をもたず、整数係数の 2 つの 2 次式の積として表せないことを示せ。（**ヒント：** $(x^2+ax+b)(x^2-ax+c)$ を試してみよ。）これより $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ の次数が 4 であることを導け。

4. **角の三等分（trisection）。** $\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ を示し、$\cos20^\circ$ が $8x^3-6x-1=0$ の根であることを導け。この 3 次方程式が有理数の根をもたないと仮定して（これを確かめよ）、$60^\circ$ の角を定規とコンパスで三等分できない理由を説明せよ。

## さらに学ぶために

- **Ian Stewart, *Galois Theory***（CRC Press）。『ガロア理論』。体の拡大、塔法則、古典的な作図問題を、大学生向けに解説している。
- **Richard Courant & Herbert Robbins, *What Is Mathematics?***（Oxford University Press）。『数学とは何か』。第 3 章では、予備知識なしでギリシアの三大問題の不可能性を証明している。
- **Robin Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond***（Springer）。定規とコンパスによる作図を現代代数学の観点から扱っている。

# 6.4 四次方程式を解く

**問題**

**STEP III 2017、問 3**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/17-s3-q3`

## 導入

二次方程式（quadratic equation）の解の公式は誰もが学ぶ。三次方程式（cubic）や四次方程式（quartic）にも解の公式は存在する。それらは 16 世紀のイタリアで、秘密の勝負と先取権をめぐる激しい論争のさなかに発見された。ジェロラモ・カルダーノ（Gerolamo Cardano）は 1545 年の著書 *Ars Magna*（『アルス・マグナ』）で両方の解法を発表した。三次方程式の解法はニコロ・タルタリア（Niccolò Tartaglia）から得たもので、タルタリアはカルダーノに秘密を守ると誓わせていた。四次方程式の解法はカルダーノ自身の弟子ロドヴィコ・フェラーリ（Lodovico Ferrari）によるものである。その後およそ三百年にわたって、数学者たちは五次方程式（quintic）の解の公式を探し求めたが、ついに見つけることはできなかった。

この問題は四次方程式を解く仕掛けを示しており、しかもその仕掛けには深い意味がある。四つの根を、考えられる三通りの方法で二つずつ組にし、そこから三つの新しい量を作る。この三つの量はある三次方程式を満たし、それは解くことができる。そしてこれらの量から元の根が求まるのである。これがなぜうまくいくのか、すなわち四つの根は三つの量に帰着できるのに、五つの根は同じように帰着できないのはなぜか、という問いこそが、ガロア（Galois）を群論（group theory）の創始へと導いたのである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう**　四つの対象 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を二つの組に分ける方法は何通りあるか。

三通りある。$\{\alpha\beta, \gamma\delta\}$、$\{\alpha\gamma, \beta\delta\}$、$\{\alpha\delta, \beta\gamma\}$ である（図 6.4.1）。問題に現れる三つの量 $\alpha\beta + \gamma\delta$ などは、これら三つの組分けに対応している。四つの根をどのように並べ替えても、三つの組分けが互いに入れ替わるだけである。したがって、三つの量についての対称式（symmetric expression）はどれも四つの根についての対称式であり、$p, q, r, s$ を用いて表せる。これが、三つの量が $p, q, r, s$ のみを含む係数をもつ三次方程式を満たす理由である。

## 順を追って解く

### 段階 1　欠けている係数

**考えてみよう**　三次方程式 $y^3 + Ay^2 + By + C = 0$ において、根の和を $A$ で表すとどうなるか。また、$(\alpha\beta + \gamma\delta) + (\alpha\gamma + \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)$ を四次方程式の係数で表すとどうなるか。

三次方程式の根の和は $-A$ である。三つの量の和は、$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ から二つずつ選んだ積六つすべての和であり、四次式 $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$ についてこれは $q$ に等しい。よって $A = -q$ である。

### 段階 2　具体的な三次方程式

$p = 0, q = 3, r = -6, s = 10$ のとき、三次方程式は

$$y^3 - 3y^2 + (0 - 40)y + (120 - 0 - 36) = y^3 - 3y^2 - 40y + 84 = 0.$$

となる。

**考えてみよう**　84 の小さな約数を試してみよ。

$y = 2$ とすると $8 - 12 - 80 + 84 = 0$ となる。割り算をすると $y^3 - 3y^2 - 40y + 84 = (y - 2)(y^2 - y - 42) = (y - 2)(y - 7)(y + 6)$ である。最大の根は 7 なので、$\alpha\beta + \gamma\delta = 7$ である。 ■

### 段階 3　根の組

$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$ であり、これは二つずつの積六つすべての和から

$\alpha\beta+\gamma\delta$ を引いたもの、すなわち $q-7=3-7=-4$ である。

また $\alpha\beta\cdot\gamma\delta=\alpha\beta\gamma\delta=s=10$ である。よって $\alpha\beta$ と $\gamma\delta$ は和が 7、積が 10 であり、$t^2-7t+10=(t-2)(t-5)$ の根である。$\alpha\beta>\gamma\delta$ とすると、$\alpha\beta=5, \gamma\delta=2$ である。■

#### 段階 4 四次方程式を解く

> **手を止めて、やってみよう** $\alpha+\beta$ と $\gamma+\delta$ を求めよ。両者の和（$p$ から）と積（段階 3 から）はわかっている。どちらがどちらかを決めるには $r$ を用いよ。

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-p=0$ かつ $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=-4$ なので、$\{\alpha+\beta,\gamma+\delta\}=\{2,-2\}$ である。係数 $r$ からは三つずつの積四つの和が得られる：$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-r=6$。これは $\alpha\beta(\gamma+\delta)+\gamma\delta(\alpha+\beta)=5(\gamma+\delta)+2(\alpha+\beta)$ と書ける。$\alpha+\beta=2$ ならばこれは $-10+4=-6$ となり、$\alpha+\beta=-2$ ならば $10-4=6$ となる。よって $\alpha+\beta=-2$, $\gamma+\delta=2$ である。

すると $\alpha,\beta$ は $t^2+2t+5=0$ の根であり、$-1\pm2\mathrm{i}$ となる。また $\gamma,\delta$ は $t^2-2t+2=0$ の根であり、$1\pm\mathrm{i}$ となる。四つの根は

$$x=-1\pm2\mathrm{i},\qquad x=1\pm\mathrm{i}.\qquad\blacksquare$$

である。検算：$(x^2+2x+5)(x^2-2x+2)=x^4+3x^2-6x+10$。

## 振り返り

- **対称式。**どの段階でも、解と係数の関係（relations between roots and coefficients）、すなわち根の和や積を用いた。
- **次数を下げる。**四次方程式の問題が三次方程式（**分解三次方程式**（resolvent cubic））に、さらに二つの二次方程式になった。
- **すべての情報を使う。**$p$ と $q$ から和と積が得られ、$s$ によって $\alpha\beta$ と $\gamma\delta$ が分けられ、$r$ によってどの組がどちらの和に対応するかが決まった。

## 背後にある数学

#### 仕掛けがうまくいく理由：根の置換

1770 年、ジョゼフ＝ルイ・ラグランジュ（Joseph-Louis Lagrange）は、三次方程式や四次方程式の解法がなぜうまくいくのかを問い、その答えを根の**置換**（permutation）

に見いだした。四つの根を並べ替える方法は 24 通りある。そのどれによっても、三つの量 $y_1 = \alpha\beta + \gamma\delta$, $y_2 = \alpha\gamma + \beta\delta$, $y_3 = \alpha\delta + \beta\gamma$ は互いに入れ替わるだけである。四つの根の並べ替えはそれぞれ、三つの組分けの並べ替えを引き起こすのである（図 6.4.1）。したがって、これらの量は根について対称な係数をもつ次数 3 の多項式を満たす。現代の言葉でいえば、対称群（symmetric group）$S_4$（24 個の置換すべて）から $S_3$（組分けの 6 個の置換）への全射な群準同型（group homomorphism）が存在し、それこそが四次方程式を三次方程式に帰着できる理由である。

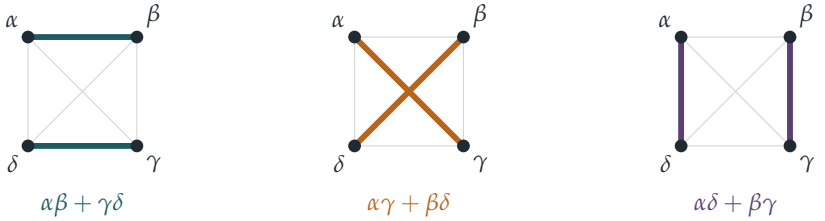



**図 6.4.1**　四つの根を二つの組に分ける三通りの方法と、それに対応する分解三次方程式の根。$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ をどのように並べ替えても、これら三つの図が互いに入れ替わるだけである。そのため、三つの量は四次方程式の係数で表せる係数をもつ三次方程式を満たす。

### 五次方程式

五つの根の場合について、ラグランジュは根の置換のもとで少数の値しかとらない同様の量を探したが、役に立つものは見つからなかった。1799 年にパオロ・ルフィニ（Paolo Ruffini）が、そして 1824 年にニールス・ヘンリック・アーベル（Niels Henrik Abel）が（証明を完成させて）、四則演算と冪根（radicals）だけを用いた五次方程式の根の一般的な公式は存在しないことを示した。その数年後、エヴァリスト・ガロアは、どの多項式が冪根によって解けるのかを正確に説明した。それは、**根の対称性のなす群**がある特定の仕方でより単純な部分に分解できるような多項式である。対称群 $S_4$ はそのように分解できる（$S_3$ やより小さな群を経由して）が、$S_5$ はできない。$S_5$ には、それ以上分解できない大きさ 60 の「単純」（simple）な部分が含まれているからである。ガロアは 1832 年、二十歳で決闘により命を落とす前夜に、自らの理論を急いで書き上げた。この理論は今日、数学の学位課程における至宝の一つであり、通常は三年次に学ぶ。

### 三次方程式を解く

三次方程式そのものも同様の仕掛けで解ける。被約三次式（depressed cubic）$x^3 - 3px + q$ を二つの完全立方（perfect cube）の組み合わせとして書くと、二次方程式に帰着される。これが演習にある 2011 年の問題の方法であり、カルダーノの公式と同値である。三次方程式が三つの実数解をもつときでも、この公式は途中で複素数（complex numbers）を必要とする。この現象が、数学者たちに複素数を真剣に扱うことを迫ったのである（第 5 章の導入を参照）。

## 思考のスキル

**対称性が複雑さを減らす**

根から作ったいくつかの量が、根を置換したときに互いに入れ替わるだけならば、それらの量は係数を計算できるより低い次数の多項式を満たす。

これがガロア理論（Galois theory）の萌芽である。すなわち、方程式を理解するには、その根の対称性を理解せよ、ということである。

## 次の一歩

1. **三次方程式を確かめる。** $y_1 = \alpha\beta + \gamma\delta$ などとするとき、$y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = pr - 4s$ であることを確かめよ。（展開して、$\sum\alpha = -p, \sum\alpha\beta\gamma = -r, \alpha\beta\gamma\delta = s$ を用いよ。）

2. **立方の和としての三次方程式。** STEP III 2011、問 3（`step.maths.org/questions/11-s3-q3`）に取り組んでみよ。この問題は、三次式を二つの立方の組み合わせとして書くことで三次方程式を解くもので、本節とはまったく異なる道筋である。答えを数値的に確かめよ。

3. **もう一つの四次方程式。** 本節の方法を用いて $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2 = 0$ を解け。（分解三次方程式の根の一つは小さな整数である。）

4. **置換を数える。** $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の 24 個の置換のうち、組分け $\{\alpha\beta, \gamma\delta\}$ を自分自身に移すものをすべて求めよ。それが 8 個あることを示せ。（これらは $S_4$ の部分群（subgroup）をなす。）

## さらに学ぶために

- **Mario Livio, *The Equation That Couldn't Be Solved*** (Simon & Schuster)。五次方程式と群論誕生の物語を、一般の読者向けに描いたもの。
- **Ian Stewart, *Why Beauty Is Truth: A History of Symmetry*** (Basic Books)。バビロニアの方程式からガロア、そしてその先までを扱う。
- **Ian Stewart, *Galois Theory*** (CRC Press)。学部生向けの教科書で、まさにこの内容を扱う歴史的な序章がある。

# 6.5 公理から考える微分

**問題**

**STEP II 1992、問 4**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/92-s2-q4`

## 導入

微分（differentiation）とは何か。学校では極限（limit）$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ によって定義され、そのあとで規則を学ぶ。和の導関数（derivative）は導関数の和であること、積の法則（product rule）などである。この問題はその順序をひっくり返す。極限のことは完全に忘れよう。ある演算について知っているのは、それが和の法則、積の法則、定数に関する規則に従い、$x$ を 1 に写すということだけだとする。すると、少なくとも多項式（polynomial）の上では、それは微分で**なければならない**ことを、この問題は示している。

これは微積分に対する代数学者の見方である。すなわち、演算は公式によってではなく、それが従う規則によって特徴づけられる。積の法則に従う演算は**導分**（derivation）とよばれ、代数学、幾何学、物理学のいたるところに現れる。意外なことに、同じ考え方が現代の機械学習（machine learning）システムを訓練するソフトウェアの内部でも働いている。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 規則 (i) は積の法則である。積の法則から、定数について何がわかるだろうか。（定数を積とみなしてみよう。）

数 1 は $1\times 1$ に等しい。$1\times 1$ に積の法則を適用すると $\Diamond 1$ がそれ自身と関係づけられ、そこからそれが 0 でなければならないことが導かれる。一般に、このような公理（axiom）を扱うときのこつは、巧みに選んだ単純な入力に公理を適用することである。

## 順を追って解く

### 段階 1　定数

> **考えてみよう**　$\mathrm{f} = \mathrm{g} = 1$ として規則 (i) を適用せよ。次に、ほかの定数に対しては規則 (iv) を用いよ。

$\Diamond 1 = \Diamond(1 \cdot 1) = 1 \cdot \Diamond 1 + 1 \cdot \Diamond 1 = 2\Diamond 1$ であるから、$\Diamond 1 = 0$ である。任意の定数（constant）$\lambda$ に対して、規則 (iv) より $\Diamond \lambda = \Diamond(\lambda \cdot 1) = \lambda \Diamond 1 = 0$ である。 ■

### 段階 2　累乗

規則 (iii) を用いると $\Diamond x^2 = \Diamond(x \cdot x) = x\Diamond x + x\Diamond x = 2x$ である。さらに

$$\Diamond x^3 = \Diamond(x^2 \cdot x) = x\Diamond x^2 + x^2 \Diamond x = x \cdot 2x + x^2 = 3x^2.$$

> **手を止めて、やってみよう**　すべての正の整数 $n$ について $\Diamond x^n = n x^{n-1}$ であることを、数学的帰納法（induction）によって証明せよ。

$n = 1$ の場合は規則 (iii) そのものである。$\Diamond x^n = n x^{n-1}$ ならば

$$\Diamond x^{n+1} = \Diamond(x^n \cdot x) = x\Diamond x^n + x^n \Diamond x = x \cdot n x^{n-1} + x^n = (n+1)x^n. \qquad \blacksquare$$

### 段階 3　すべての多項式

一般の多項式は $\mathrm{h}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ である。規則 (ii)（を繰り返し適用したもの）と規則 (iv) により

$$\begin{aligned} \Diamond \mathrm{h}(x) &= \Diamond a_0 + a_1 \Diamond x + a_2 \Diamond x^2 + \cdots + a_m \Diamond x^m \\ &= a_1 + 2a_2 x + \cdots + m a_m x^{m-1} = \mathrm{h}'(x). \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

## 振り返り

- **公理が演算を決定する。**極限に一切触れない 4 つの規則が、多項式上の $\Diamond$ を完全に決定した。
- **生成元（generators）。**すべての多項式は、定数と $x$ から加法と乗法を用いて組み立てられる。構成要素に対して $\Diamond$ が何をするか、そしてそれが組み立てのための演算とどう関わるかがわかれば、それはいたるところで決まる。

- **構成に沿った帰納法。** 証明は多項式の組み立て方をなぞっていた。まず乗法の繰り返しによって累乗を扱い、次に和を扱ったのである。

## 背後にある数学

### 導分

ある代数系の上の演算 $D$ が加法的であり、積の法則 $D(fg) = fD(g) + gD(f)$ を満たすとき、それを**導分**という。この問題が示すのは、多項式の上では、定数を 0 に写す導分は $D(x)$ によって完全に決定されるということである。実際 $D(h) = h'(x)\,D(x)$ であり、自由に選べるのは多項式 $D(x)$ だけである。規則 (iii) は $D(x) = 1$ と定めている。導分は数学のさまざまな場面に現れる。幾何学では、曲面上の**ベクトル場**（vector field）を、その曲面上の関数に対する導分として定義できる（ベクトル場の方向に関数を微分するのである）。代数学では、ある構造の導分はその「無限小の対称性」を測る。物理学では、量子力学の交換子（commutator）$[A, B] = AB - BA$ が各引数について導分になっている。

### 極限を使わない微積分

代数的な導関数は、極限がまったく意味をもたない状況でも機能する。素数 $p$ を法とする算術のような有限体（finite field）の上には極限は存在しないが、多項式の形式的導関数（formal derivative）は同じ規則によって定義され、それでもなお重根（repeated root）を検出できる。多項式 $f$ が重根をもつのは、$f$ と $f'$ が共通因数をもつときであり、かつそのときに限る。たとえば、$p \nmid n$ のとき $x^n - 1$ が重根をもたないことはこのようにして示される。これは、Section 6.1 の円分多項式（cyclotomic polynomial）を有限体上で定義するのに必要な事実である。同じ考え方は符号理論（coding theory）や暗号理論（cryptography）でも用いられている。

### 自動微分

ここで現代的な応用を紹介しよう。$\varepsilon^2 = 0$ だが $\varepsilon \neq 0$ であるような数 $\varepsilon$ を考え出し、**二重数**（dual numbers）$a + b\varepsilon$ で計算を行う。すると $(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = ac + (ad + bc)\varepsilon$ となり、$\varepsilon$ の部分はまさに積の法則に従う。したがって、任意の多項式について

$$f(x + \varepsilon) = f(x) + f'(x)\,\varepsilon,$$

が成り立ち、二重数 $x + \varepsilon$ において $f$ を評価すると、値と導関数の値が同時に、しかも正確に計算される。極限は不要であり、小さな差をとることによる丸め誤差も生じない（図 6.5.1）。これを**フォワードモード自動微分**（forward-mode automatic

differentiation）という。その親戚であるリバースモードは、数十億のパラメータをもつニューラルネットワーク（neural networks）を訓練するのに使われるアルゴリズム（**誤差逆伝播法**（backpropagation））である。このようなシステムが学習するたびに、積の法則と連鎖律（chain rule）を導分として一歩ずつ適用しているのである。

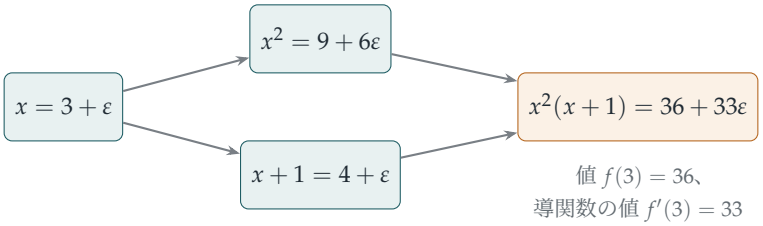



**図 6.5.1**　二重数（$\varepsilon^2 = 0$）を用いた、$x = 3$ における $f(x) = x^2(x+1)$ の自動微分。各段階は問題の規則に従っている。すなわち $(3+\varepsilon)^2 = 9 + 6\varepsilon$、$(9+6\varepsilon)(4+\varepsilon) = 36 + (9+24)\varepsilon$ である。$\varepsilon$ の係数は $f'(3) = 3 \cdot 9 + 2 \cdot 3 = 33$ であり、正確に計算されている。

## 思考のスキル

### 性質によって特徴づける

演算をそれが従う規則によって記述し、その規則が演算をただ一つに決定することを示す。

これは公理的方法（axiomatic method）であり、大学の代数学の中心にある。その強みは、公理から証明したことが、それを満たすあらゆる演算に当てはまる点にある。多項式の微分であれ、曲面上の関数の微分であれ、まだ発明されていない何かであれ、である。

## 次の一歩

1. **別の導分。** $\Diamond$ が規則 (i)、(ii)、(iv) を満たすが、1 の代わりに $\Diamond x = x$ であるとする。$\Diamond \mathrm{h}(x) = x\,\mathrm{h}'(x)$ を示せ。$\Diamond$ は $x^n$ をどう写すか。

2. **商の法則。** 規則 (i) が引き続き成り立つと仮定して、$\Diamond$ を有理関数（rational functions）$\mathrm{f}/\mathrm{g}$ に拡張する。$\mathrm{g} \cdot \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{g}} = \mathrm{f}$ に規則 (i) を適用して、商の法則（quotient rule）を導け。

**3** **重根。** $(x-a)^2$ が多項式 f を割り切るならば、$x-a$ は f′ を割り切ることを示せ。これを用いて、$x^n-1$ が重根をもたないことを示せ。

**4** **二重数。** 二重数を用いて、$f(x)=(x^2+1)^3$ に対する $f(2)$ と $f'(2)$ を計算し、連鎖律で検算せよ。

## さらに学ぶために

- **Peter Cameron, *Introduction to Algebra***（Oxford University Press）。大学 1 年次の水準で環（rings）、多項式、体（fields）を扱い、形式的導関数も取り上げている。
- **Andreas Griewank & Andrea Walther, *Evaluating Derivatives***（SIAM）。自動微分に関する標準的な文献。上級者向け。
- **Michael Nielsen, *Neural Networks and Deep Learning***（オンラインで無料公開）。第 2 章で誤差逆伝播法がわかりやすく解説されている。

# 6.6 部分群の和集合

**問題**

**STEP II 1988、問 9**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/88-s2-q9`

## 導入

これは本書でもっとも短い問題の一つであり、同時に大学の数学らしさがもっともよく表れた問題の一つでもある。題材は対称性を記述する数学の言語である**群**（group）で、問われているのはパズルのような問いである。すなわち、群をその内部にあるより小さな二つの群で覆い尽くすことはできるだろうか。答えは「できない」であり、証明はわずか 3 行で済む。ところが、小さな群が三つあれば覆うことができる。これは意外な事実である。

群論は 2019 年まで STEP の出題範囲に含まれており、現在では大学 1 年次の定番の内容である。この問題に必要なのは以下に述べる定義だけであり、群論の研究者がどのように考えるかを初めて味わうのにうってつけである。公理（axiom）だけを用いた、短く巧妙な議論である。

## 取りかかる前に

**群**とは、演算（積の形 $ab$ で書く）をもつ集合 $G$ であって、次の条件を満たすものである。

- 演算は**結合的**（associative）である：$(ab)c = a(bc)$。
- すべての $a$ に対して $ea = ae = a$ を満たす**単位元**（identity）$e$ が存在する。
- すべての $a$ に対して、$aa^{-1} = a^{-1}a = e$ を満たす**逆元**（inverse）$a^{-1}$ が存在する。

例としては、加法に関する整数全体（正の数、負の数、0）、乗法に関する 0 でない実数

全体、合成に関する正方形の回転全体などがある。$G$ の**部分群**（subgroup）とは、$G$ の部分集合 $K$ であって、同じ演算に関してそれ自身が群となるものである。すなわち、$K$ は $e$ を含み、$a, b \in K$ ならば $ab \in K$ かつ $a^{-1} \in K$ が成り立つ。

> **考えてみよう**　$K$ が部分群で、$a \in K$ だが $b \notin K$ であるとき、$ab$ は $K$ に属しうるだろうか。

属しえない。もし $ab \in K$ ならば、$b = a^{-1}(ab)$ は $K$ の二つの元の積となり、したがって $K$ に属してしまう。このささやかな観察が証明のすべてである。

## 順を追って解く

### 段階 1　二つの部分群では覆えない

背理法（proof by contradiction）を用いる。$G = G_1 \cup G_2$ であるが、$G_1$ も $G_2$ も $G$ 全体ではないと仮定する。

> **考えてみよう**　$G_1 \neq G$ であるから、$G_1$ に属さない元が存在する。その元はどこに属さなければならないか。$G_2$ についても同様である。次に、その二つの元を掛け合わせてみよ。

$a \notin G_1$ を満たす $a \in G$ をとる。すべての元は $G_1$ または $G_2$ に属するので、$a \in G_2$ である。また $b \notin G_2$ を満たす $b \in G$ をとると、$b \in G_1$ である。積 $ab$ を考える。これは $G_1$ または $G_2$ に属する。

- $ab \in G_1$ の場合：$b \in G_1$ であるから、$a = (ab)b^{-1} \in G_1$ となり矛盾する。
- $ab \in G_2$ の場合：$a \in G_2$ であるから、$b = a^{-1}(ab) \in G_2$ となり矛盾する。

いずれの場合も矛盾が生じるので、$G_1 = G$ または $G_2 = G$ である。 ■

$G$ が有限であることは一度も使っていないことに注意しよう。この結果はすべての群について成り立つ。

### 段階 2　三つの部分群なら覆える

> **手を止めて、やってみよう**　三つの部分群の和集合（union）となる群であって、どの部分群も群全体ではないものを見つけよ。（**ヒント**：すべての元が自分自身の逆元であるような小さな群を試してみよ。）

**クラインの四元群**（Klein four-group）$V = \{e, a, b, c\}$ を考える。規則は $a^2 = b^2 = c^2 = e$

および $ab = ba = c$、$bc = cb = a$、$ca = ac = b$ である。（具体的には、正方形でない長方形の四つの対称変換、すなわち何もしない変換、180° の回転、二つの軸それぞれに関する鏡映である。あるいは、ビット 0、1 の組 $(x, y)$ 全体に 2 を法とする加法を考えたものでもよい。）その三つの部分群

$$H_1 = \{e, a\}, \qquad H_2 = \{e, b\}, \qquad H_3 = \{e, c\}$$

はいずれも 2 個の元からなり、どれも群全体ではないが、合わせると $V$ のすべての元を含む（図 6.6.1）。 ■

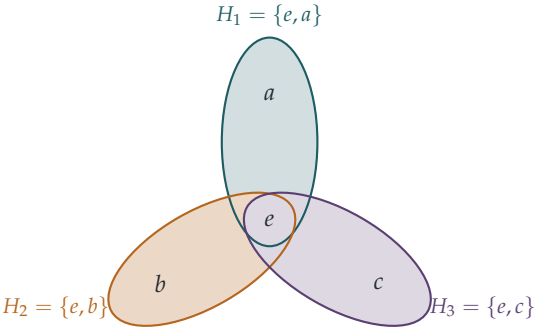



**図 6.6.1** クラインの四元群 $\{e, a, b, c\}$ は、位数（order）2 の三つの部分群の和集合である。これらの部分群は単位元 $e$ だけを共有している。問題の前半により、どの群も二つの真部分群（proper subgroup）だけの和集合にはなりえない。

## 振り返り

- **証拠となる元を選び、組み合わせる。**証明では、各部分群の外にある元を一つずつ選び、それらを掛け合わせた。この「それぞれから一つずつとって組み合わせる」という手法は、代数学できわめてよく使われる。
- **閉じていることの威力。**用いた部分群の性質は、積と逆元について閉じている（closed）ということだけであった。
- **必要な仮定を確かめる。**有限性は与えられていたが、使われなかった。ある仮定が不要であると気づくことも、証明を理解することの一部である。

## 背後にある数学

### 対称性の言語

群は 19 世紀に、いくつもの方向から同時に生まれた。多項式の根の置換に関するガロア（Galois）の研究（Section 6.4）、置換に関するコーシー（Cauchy）の研究、そして幾何学や結晶学における対称性の研究である。上で述べた抽象的な定義、すなわち三つの公理を満たすものはすべて群であるという定義は、19 世紀末までに確立した。その威力は一般性にある。この問題のように公理から証明された定理は、数の群、行列の群、対称変換の群、置換の群のすべてについて同時に成り立つのである。今日、群はいたるところに現れる。素粒子物理学（標準模型は対称性の群の上に築かれている）、化学（分子の対称性がスペクトルを決める）、暗号理論（楕円曲線の群、Section 1.9）、そしてルービックキューブの解法などである。

### いくつの部分群が必要か

この問題からは自然な問いが生まれる。和集合が群全体となるような真部分群の個数の最小値はいくつか。この問題により、それが 2 になることはない。1926 年に Gaetano Scorza は、群が三つの真部分群の和集合となるのは、クラインの四元群を「商」（quotient）としてもつときであり、かつそのときに限ることを示した。1994 年に J. H. E. Cohn はこの一般的な問題を研究していくつかの予想を立て、1997 年に M. J. Tomkinson は、この最小値が 7 となる群は存在しないことを証明した。一方、3 から 6 までの数はすべて実際に現れる。述べるのは簡単だが驚くほど奥が深い、このような問いは群論に典型的なものである。

### ベクトル空間

同様の議論により、実数上のベクトル空間（vector space）（平面や 3 次元空間など）は、有限個の真部分空間（proper subspace）の和集合には決してならないことが示される。つまり、平面は原点を通る有限個の直線の和集合にはならない。しかし有限体（finite field）上ではそれが可能である。二つの元からなる体の上の平面は、まさにクラインの四元群そのものであり、その三本の直線の和集合となっている。

## 思考のスキル

### 公理から議論する

抽象代数学では、対象について、それが満たす公理以外には何もわからないことが多い。証明はそれらの公理だけを用いなければならない。

このため、議論はここでのように短く簡潔なものにならざるをえず、そしてあらゆる場合に適用できるものとなる。慣れるには少し時間がかかるが、これは大学1年次の代数学の授業でもっとも特徴的な体験の一つである。

## 次の一歩

1. **群であることを確かめる。** クラインの四元群の乗積表を書き出し、群の公理を確かめよ。また、乗法に関する群 $\{1, i, -1, -i\}$ とは同じでないことを示せ。（ヒント：自分自身の逆元となっている元はどれか。）

2. **巡回群。** すべての元がある一つの元 $g$ のべきであるとき、その群は**巡回群**（cyclic group）であるという。巡回群は、いくつあっても真部分群の和集合にはならないことを示せ。（ヒント：$g$ を含む部分群はどれか。）

3. **整数全体。** $(\mathbb{Z}, +)$ が部分群 $2\mathbb{Z}$（偶数全体）と $3\mathbb{Z}$（3の倍数全体）の和集合ではないことを直接示せ。また、何らかの二つの真部分群の和集合になることはあるか。

4. **平面内の直線。** やや難 平面 $\mathbb{R}^2$ は原点を通る有限個の直線の和集合ではないことを示せ。（ヒント：各直線は、放物線 $y = x^2$ 上の点を原点以外には高々一つしか含まない。）

## さらに学ぶために

- **M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry***（Springer）。幾何学的な例を軸に展開される、美しい図版入りの入門書（『群と対称性』）。
- **Nathan Carter, *Visual Group Theory***（Mathematical Association of America）。図を通して群を学ぶ本で、大学入学前に最適である（『目で見る群論』）。
- **Peter Neumann, Gabrielle Stoy & Edward Thompson, *Groups and Geometry***（Oxford University Press）。オックスフォード大学1年次の古典的な教科書（『群と幾何学』）。

# 6.7 四元数群

**問題**

**STEP III 1993、問 5**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/93-s3-q5`

## 導入

1843 年 10 月 16 日、ダブリンのロイヤル運河沿いを妻と散歩していたハミルトン（William Rowan Hamilton）は、何年も追い求めていたひらめきを得た。彼は、複素数が数の組（対）を掛け合わせるのと同じように、三つ組の数を掛け合わせようとしては失敗していた。そのとき突然、答えには $4$ つの数と、順序が意味をもつ乗法、すなわち $ij \neq ji$ となる乗法が必要だと気づいたのである。彼はその規則をブルーム橋の石に刻みつけた。

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1.$$

これが**四元数**（quaternions）である。この問題では、四元数を複素数の組から構成し、その中にねじれた乗法をもつ 8 個の元からなる小さな群（group）を見いだす。今日、四元数はあらゆるコンピュータゲーム、フライトシミュレータ、宇宙船の誘導システムにおいて、3 次元の回転を記述するのに用いられている。

## 取りかかる前に

群の定義については Section 6.6 を参照せよ。さらに 2 つの用語を導入する。群の元 $g$ の**位数**（order）とは、$g^n = e$ となる最小の正の整数 $n$ のことである。また、2 つの群が**同型**（isomorphic）であるとは、演算を保つ 1 対 1 の対応がそれらの間に存在することであり、つまり両者は「ラベルが違うだけの同じ群」である。

? **考えてみよう** 組 $(z_1, z_2)$ を「数」$z_1 + z_2\mathrm{j}$ を表すものと考えよ。ここで j は新しい記号で、$\mathrm{j}^2 = -1$ を満たし、複素数 $w$ に対して $\mathrm{j}w = w^*\mathrm{j}$ を満たすとす

? る。これらの規則を用いて $(z_1 + z_2\mathrm{j})(w_1 + w_2\mathrm{j})$ を計算せよ。$\circ$ の式が得られるだろうか。

$(z_1 + z_2\mathrm{j})(w_1 + w_2\mathrm{j}) = z_1w_1 + z_1w_2\mathrm{j} + z_2\mathrm{j}w_1 + z_2\mathrm{j}w_2\mathrm{j} = z_1w_1 + z_1w_2\mathrm{j} + z_2w_1^*\mathrm{j} + z_2w_2^*\mathrm{j}^2$ であり、これは $(z_1w_1 - z_2w_2^*) + (z_1w_2 + z_2w_1^*)\mathrm{j}$ に等しい。その通りである。演算 $\circ$ は、姿を変えた四元数の乗法なのである。

## 順を追って解く

### 段階 1　行列による結合法則の証明

$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ を直接確かめるのは長い計算になる。もっと鮮やかな方法がある。

? **考えてみよう**　$(z_1, z_2)$ に複素行列 $M = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix}$ を対応させる。行列の積 $M(z_1,z_2)\,M(w_1,w_2)$ の第 1 行は何か。

積の第 1 行は $(z_1w_1 - z_2w_2^*,\ z_1w_2 + z_2w_1^*)$ であり、これはちょうど $(z_1,z_2) \circ (w_1,w_2)$ である。第 2 行は $(-(z_1w_2 + z_2w_1^*)^*,\ (z_1w_1 - z_2w_2^*)^*)$ であるから、積も同じ特別な形をしている。したがって $M(a \circ b) = M(a)M(b)$ である。行列の乗法は結合法則（associativity）を満たし、$M$ は 1 対 1 である（第 1 行から $z_1$、$z_2$ を読み取れる）から、$\circ$ は結合法則を満たす。 ■

### 段階 2　可換ではない

$(0,1) \circ (\mathrm{i},0) = (0 \cdot \mathrm{i} - 1 \cdot 0,\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot \mathrm{i}^*) = (0, -\mathrm{i})$ であるが、$(\mathrm{i},0) \circ (0,1) = (0,\mathrm{i})$ である。よって $\circ$ は可換（commutative）ではない。

次の 4 つの特別な積は定義から直ちに従う。

$$(z,0) \circ (w,0) = (zw,0), \qquad (z,0) \circ (0,w) = (0,zw),$$
$$(0,z) \circ (w,0) = (0,zw^*), \qquad (0,z) \circ (0,w) = (-zw^*,0).$$

### 段階 3　8 個の元からなる群

四元数の記法では $A = 1$、$C = \mathrm{i}$、$B = \mathrm{j}$、$D = \mathrm{ij} = \mathrm{k}$ であり、$E, G, F, H$ はそれぞれの符号を変えたものである。$S_1$ のすべての元は、$u \in \{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$ として $(u,0)$ または $(0,u)$ の形をしている。

**考えてみよう** 4 つの特別な積を用いて、$S_1$ が閉じていることを示せ。単位元は何か。

4 つの特別な積により、$(u,0)$ または $(0,u)$ の形の 2 つの元の積は再びこれらのいずれかの形になり、その第 1 成分または第 2 成分は $uv$、$uv^*$ または $-uv^*$ である。$\{1,\mathrm{i},-1,-\mathrm{i}\}$ は乗法、共役（conjugation）、符号の反転について閉じている（closed）から、積は $S_1$ に属する。単位元（identity）は $A=(1,0)$ である。実際、$(1,0)\circ(w_1,w_2)=(w_1,w_2)$ かつ $(w_1,w_2)\circ(1,0)=(w_1,w_2)$ である。

**手を止めて、やってみよう** 各元の位数と逆元を求めよ。

$A$ の位数は 1 である。$E\circ E=(-1,0)\circ(-1,0)=(1,0)$ であるから、$E$ の位数は 2 である。$C=(\mathrm{i},0)$ については $C\circ C=(-1,0)=E$ であるから、$C$ の位数は 4 であり、$C^{-1}=C^3=E\circ C=G$ である。$B=(0,1)$ については $B\circ B=(-1\cdot 1^*,0)=(-1,0)=E$ であるから、$B$ の位数は 4 であり、$B^{-1}=F$ である。同様に $D\circ D=(-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}^*,0)=(-\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i}),0)=(-1,0)=E$ であるから、$D$ の位数は 4 で、逆元は $H$ である。そして $G$、$F$、$H$ はそれぞれ $C$、$B$、$D$ の逆元（inverse）であり、これらの位数も 4 である。まとめると次のようになる。

| 元 | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ | $H$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 逆元 | $A$ | $F$ | $G$ | $H$ | $E$ | $B$ | $C$ | $D$ |
| 位数 | 1 | 4 | 4 | 4 | 2 | 4 | 4 | 4 |

閉じていること、結合法則（第 1 段階）、単位元、逆元がそろったので、$S_1$ は群である。■これを**四元数群**（quaternion group）$Q_8$ という。

### 段階 4 部分群

$\{A,B,E,F\}=\{1,\mathrm{j},-1,-\mathrm{j}\}$ は $B$ のべきからなる。すなわち $B^1=B$、$B^2=E$、$B^3=F$、$B^4=A$ である。よってこれは閉じていて逆元を含むから、部分群（subgroup）であり、位数 4 の**巡回群**（cyclic group）である。行列 $J=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ は $J^2=-I$、$J^3=-J$、$J^4=I$ を満たすから、これも位数 4 の巡回群を生成する。$B^k\leftrightarrow J^k$ という対応は同型写像（isomorphism）である。■（実際、$J$ はちょうど $M(0,1)$、つまり $B$ に対応する行列である。）

## 振り返り

▶ **行列で表現する。**直接確かめるのは骨の折れる結合法則が、行列の乗法から受け継

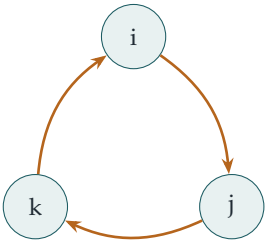
がれた。

- **式の背後にある構造を見つける。**奇妙な演算 ∘ は四元数の乗法であり、そのことに気づくとすべてが易しくなった。
- **位数と逆元が群を特徴づける。**位数の表を見るだけで、$Q_8$ が普通でない群であることがわかる。位数 2 の元が 1 個、位数 4 の元が 6 個あるのである。

## 背後にある数学

### 複素数の先へ

実数は、加法・乗法・除法ができる 1 次元の数の体系であり、複素数は 2 次元の体系である。ハミルトンの四元数は 4 次元であり、やはり除法はできるが、乗法はもはや可換ではない（図 6.7.1）。1878 年、フロベニウス（Ferdinand Frobenius）は、$\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$、$\mathbb{H}$（ハミルトンにちなむ）の 3 つが、結合的な乗法をもつ実数上の有限次元「多元体」（division algebras）のすべてであることを証明した。結合法則を諦める代わりに、実数・複素数・四元数と同様に大きさが乗法的である、すなわち $|xy| = |x|\,|y|$ という性質を保つことにすると、もうちょうど 1 つだけ存在する。1840 年代に John Graves とケイリー（Arthur Cayley）が発見した 8 次元の**八元数**（octonions）である。1898 年、フルヴィッツ（Adolf Hurwitz）は、このような体系がこの 4 つに限ることを証明した。（大きさに関する条件を外すと、ほかにもっと奇妙な非結合的多元体が存在するが、ボット（Raoul Bott）、ミルナー（John Milnor）、ケルヴェア（Michel Kervaire）による 1958 年の深い定理によれば、有限次元の実多元体の次元は必ず 1、2、4、8 のいずれかである。）




矢印の向き：$ij = k,\ jk = i,\ ki = j$

矢印と逆向き：$ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j$

さらに $i^2 = j^2 = k^2 = -1$

**図 6.7.1**　ハミルトンの乗法規則。i、j、k のうち 2 つを矢印の向きに掛けると残りの 1 つが得られ、矢印と逆向きに掛けると残りの 1 つの符号を変えたものが得られる。8 個の元 $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ が、この問題の四元数群 $Q_8$ をなす。

### 3 次元の回転

絶対値が 1 の四元数は 3 次元空間の回転を記述する。単位ベクトルの軸 $\mathbf{u}$ のまわりの角 $\theta$ の回転は $q = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(u_1\mathrm{i} + u_2\mathrm{j} + u_3\mathrm{k})$ に対応し、ベクトル $\mathbf{v}$（$v_1\mathrm{i} + v_2\mathrm{j} + v_3\mathrm{k}$ と表す）に $\mathbf{v} \mapsto q\mathbf{v}q^{-1}$ によって作用する。回転の合成は四元数の乗法にほかならない。この方法は行列や角度を用いるよりも効率的で数値的に安定しており、さらに「ジンバルロック」（gimbal lock）を回避できる。ジンバルロックとは自由度が 1 つ失われる現象で、アポロ計画の宇宙飛行士たちは、ジャイロスコープに基づく航法装置でこれに対処しなければならなかった。半角 $\frac{\theta}{2}$ は、深い事実への手がかりでもある。360° 回転すると $q = -1$ となり、1 にはならないのである。これは物理学者が電子のふるまい（スピン（spin））の中に見ている事実である。

### 4 つの平方数

四元数の絶対値は、複素数の場合と同様に乗法的であり、$|pq| = |p||q|$ が成り立つ。これを成分で書き下すと、オイラー（Euler）の**四平方恒等式**（four-square identity）が得られる。すなわち、4 つの平方数の和どうしの積は、それ自身 4 つの平方数の和である。これは、すべての正の整数が 4 つの平方数の和であるというラグランジュ（Lagrange）の定理の鍵となるステップである。この定理は Section 7.8 で証明する。これは Section 1.6 の二平方の結果の 4 次元版にあたる。

## 思考のスキル

> **抽象的な対象を具体的に表現する**
>
> 抽象的な演算について考えにくいときは、それがなじみのある演算になるような具体的なモデル、たとえば行列を見つけよ。
>
> そうすれば結合法則のような性質は労せずして得られる。群を行列で表現して研究するというこの考え方は、**表現論**（representation theory）という大きく美しい分野へと発展していく。

## 次の一歩

1 **ハミルトンの規則。** 組を用いて、$C \circ B = D$ および $B \circ C = H$、すなわち $\mathrm{ij} = \mathrm{k}$ および $\mathrm{ji} = -\mathrm{k}$ を確かめよ。

**2** **位数 2 の元はただ 1 つ。** $E = -1$ が $Q_8$ における唯一の位数 2 の元であることを示せ。このことから、$Q_8$ は正方形の対称性の群（位数 2 の元を 5 個もつ）と同型でないことを導け。

**3** **4 つの平方数。** $\det M(z_1, z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2$ を示せ。$\det(M_1 M_2) = \det M_1 \det M_2$ を用いて、4 つの平方数の和どうしの積は 4 つの平方数の和であることを導け。

**4** **部分群。** $Q_8$ の部分群をすべて求めよ。$\{A\}$ 以外のすべての部分群は $E$ を含むこと、および $Q_8$ が位数 4 の 3 つの巡回部分群の和集合であることを示せ（Section 6.6 と比較せよ）。

## さらに学ぶために

- **John Conway & Derek Smith, *On Quaternions and Octonions***（A. K. Peters）。四元数と八元数の幾何と算術。高度だが非常に興味深い。
- **John Baez,「The octonions」**, *Bulletin of the American Mathematical Society* 39 (2002)。オンラインでも無料で読める。すばらしい概説であり、序論は今すぐにでも読める。
- **Andrew Hanson, *Visualizing Quaternions***（Morgan Kaufmann）。回転のための四元数と、そのグラフィックスへの応用。

# 6.8 特異行列からなる群

**問題**

**STEP III 1996、問 6**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/96-s3-q6`

## 導入

行列式（determinant）が 0 である行列は逆行列（inverse）をもたない、ということは誰もが学ぶ。それならば、すべての元が逆元をもつ行列の群（group）には、正則でない行列、すなわち特異行列（singular matrix）は含まれえないはずではないか。

実は含まれうるのである。からくりは「逆」という言葉にある。群において $\mathbf{A}$ の逆元とは、$\mathbf{A}$ と演算して**その群の**単位元（identity）を与える元のことであり、群の単位元が単位行列 $\mathbf{I}$ でなければならないとはどこにも書かれていない。この問題では、すべての行列が特異であり、単位元そのものも行列式 0 の行列であるような群を構成する。これは定義を文字どおりに読むことの教訓であり、抽象的な構造と、それに初めて出会ったときのなじみ深い例との違いについての教訓でもある。

## 取りかかる前に

群の定義については Section 6.6 を参照せよ。

? **考えてみよう** 小問 (i) において、単位行列 $\mathbf{I}$ は $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ の形をしていない。では、$S$ の単位元は何でありうるだろうか。

それは $S$ のある行列 $\mathbf{E}$ であって、$S$ のすべての $\mathbf{X}$ に対して $\mathbf{EX} = \mathbf{XE} = \mathbf{X}$ を満たすものでなければならない。これは $\mathbf{E}$ がこの特別な形の行列にどう作用するかだけに関する条件であり、すべての行列に関する条件ではない。方程式を解いて求めればよい。

## 順を追って解く

### 段階 1　演算について閉じていること

4 つの成分がすべて $a$ である行列を $\mathbf{M}_a$ と書く。すると

$$\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ab & 2ab \\ 2ab & 2ab \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{2ab},$$

であり、$a, b \neq 0$ のとき $2ab \neq 0$ である。よって $S$ は演算について閉じている（closed）。■

### 段階 2　群の公理

> **考えてみよう**　行列の積は結合的である。単位元については $\mathbf{M}_e\mathbf{M}_a = \mathbf{M}_a$ を解け。逆元については $\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_e$ を解け。

結合法則（associativity）は行列の積から受け継がれる。**単位元**：すべての $a$ に対して $\mathbf{M}_e\mathbf{M}_a = \mathbf{M}_{2ea} = \mathbf{M}_a$ となるのは、ちょうど $e = \tfrac{1}{2}$ のときである。公式の対称性から $\mathbf{M}_a\mathbf{M}_{1/2} = \mathbf{M}_a$ も成り立つ。よって

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

が $S$ の単位元である。**逆元**：$b = \tfrac{1}{4a}$ のとき $\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_{2ab} = \mathbf{M}_{1/2}$ であり、この $b$ は $0$ でないから、$\mathbf{M}_{1/(4a)}$ が $S$ における $\mathbf{M}_a$ の逆元である。よって $S$ は群である。■どの元も行列式は $a^2 - a^2 = 0$ である。

### 段階 3　特異性は広がる

> **手を止めて、やってみよう**　$\mathbf{A} \in G$ が特異であるとし、$\mathbf{B}$ を $G$ の任意の元とする。$\mathbf{B}$ を $\mathbf{A}$ を含む積として表し、行列式をとってみよ。

$\mathbf{A}^{-1}$ で、群 $G$ における $\mathbf{A}$ の逆元を表す（行列としての逆行列とは限らない）。すると $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ は $G$ の元であり、

$$\mathbf{AC} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{EB} = \mathbf{B}.$$

行列式をとると $\det\mathbf{B} = \det\mathbf{A}\,\det\mathbf{C} = 0$ である。よって $G$ のすべての元は特異である。■特に、行列の群のある 1 つの元が行列として正則（invertible）であれば、すべての元が正則である。行列の群は、すべてが正則であるか、すべてが特異であるかのどちらかである。

### 段階 4 $3\times 3$ の例

> **考えてみよう** 小問 (i) を $3\times 3$ 行列に一般化できるだろうか。あるいは、3 つの座標のうち 2 つを「無視する」行列を使って、もっと簡単なものを見つけられるだろうか。

次をとる。

$$G=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} : a\neq 0\right\}.$$

左上隅の成分が $a$ と $b$ である行列の積は、左上隅の成分が $ab$ である行列なので、$G$ は演算について閉じている。積は結合的である。単位元は左上隅の成分が 1 の行列であり、左上隅が $a$ の行列の逆元は左上隅が $\frac{1}{a}$ の行列である。よって $G$ は群であり、どの元も行列式は 0 である。■（別の例：9 つの成分がすべて $a\neq 0$ に等しい $3\times 3$ 行列の全体。その単位元はすべての成分が $\frac{1}{3}$ の行列である。）

## 振り返り

- **定義を文字どおりに読む。**群の単位元とは、**その群の中で**単位元としてはたらく元のことであり、なじみ深い単位行列である必要はない。
- **構造を方程式から求める。**$S$ の単位元と逆元は、推測ではなく方程式を解くことで求めた。
- **行列式は乗法的である。**この 1 つの性質だけで、特異性が 1 つの元からすべての元へ広がることが示された。

## 背後にある数学

### 冪等元と隠れた可逆性

任意の行列の群の単位元 $\mathbf{E}$ は $\mathbf{E}^2=\mathbf{E}$ を満たす。すなわち**冪等**（idempotent）である。幾何学的には、冪等行列は**射影**（projection）である。つまり、すべてのベクトルをある部分空間（subspace）の上に写し、その部分空間内のベクトルは動かさない。小問 (i) では、$\mathbf{E}$ は平面を直線 $y=x$ の上に射影し、各行列 $\mathbf{M}_a$ はまずその直線上に射影してから、直線に沿って $2a$ 倍に伸縮する（図 6.8.1）。直線上では、群は可逆な伸縮として作用し、直線に垂直な方向は単に無視している。したがって $S$ の正体は、平面内の直線上に住む、乗法に関する 0 でない実数全体の群（対応 $\mathbf{M}_a\mapsto 2a$ による）である。

これは一般に成り立つ。すなわち、どんな行列の群も、基底を取り替えれば、その単位元の像の上に作用する正則行列の群に、0 を詰めて埋め込んだものになっている。

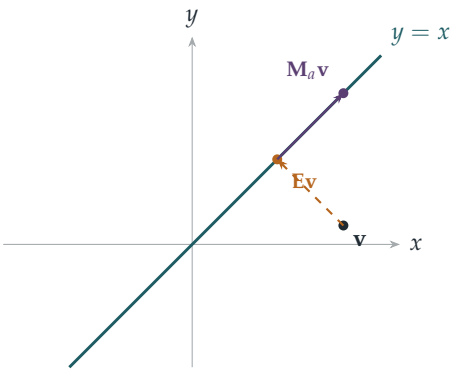



**図 6.8.1**　小問 (i) の行列のはたらき。単位元 $\mathbf{E}$ はすべてのベクトル $\mathbf{v}$ を直線 $y = x$ の上に射影する（琥珀色の破線）。各 $\mathbf{M}_a$ は同じ射影を行ったのち、直線に沿って $2a$ 倍に伸縮する（紫色。ここでは $2a = \frac{16}{9}$）。直線そのものの上では、群は通常の可逆な拡大・縮小として作用する。

### 抽象と具体

人々が最初に研究した群は具体的なものであった。置換、対称性、正則行列などである。抽象的な定義（3 つの公理を満たす演算をもつ集合）は、それらから抽出されたものである。この問題は抽象的な見方の価値を示している。$S$ と乗法に関する 0 でない実数全体の群とは**同型**（isomorphic）であり、一方は特異行列からなり他方は数からなるにもかかわらず、装いが違うだけの同じ群なのである。見かけの異なる 2 つの構造がいつ「同じ」であるかを見抜くことは代数学の中心的なスキルの 1 つであり、同型という概念は、数学者がそれを厳密にするための手段である。

## 思考のスキル

**なじみ深い対象についての暗黙の仮定を疑う**

なじみ深い対象が抽象的な定義の中に現れたら、そのなじみ深い性質のうちどれが定義で実際に要求されているかを確かめよ。

「行列の群の単位元は $\mathbf{I}$ である」というのは当然のように聞こえるが、定義の一部ではない。そしてこの仮定を捨てることで、真に新しい例が得られた。この

ような仮定を疑うことこそ、多くの新しい数学的構造が発見されてきた方法である。

## 次の一歩

1 **同型写像。**写像 $\mathbf{M}_a \mapsto 2a$ が、$S$ から 0 でない実数全体への一対一対応（one-to-one correspondence）であって、行列の積を数の積に移すことを示せ。

2 **群にならない例。**$a \neq 0$ である行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 全体の集合は積について閉じているが、群ではないことを示せ。（**ヒント：**単位元を探してみよ。左単位元はあるか。右単位元はあるか。）

3 **冪等行列。**$\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$ を満たす $2 \times 2$ 実行列 $\mathbf{E}$ をすべて求めよ。また、それらを幾何学的に説明せよ。

4 **すべての成分が等しい行列。**すべての成分が $a \neq 0$ に等しい $n \times n$ 行列全体は積について群をなすことを示し、その単位元を求めよ。

## さらに学ぶために

- **M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry*** (Springer)。行列の群と同型を、多くの幾何学的な例とともに扱う。
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*** (Wellesley-Cambridge)。射影と冪等行列がわかりやすく説明されている。
- **Joseph Gallian, *Contemporary Abstract Algebra*** (CRC Press)。風変わりな群の例を多く含む、親しみやすい入門書。

# これまでに学んだこと

本章は、代数学が方程式を解くことから構造を調べることへと移り変わったことから出発し、三つの問いを立てた。何から何が作れるのか、方程式の解の公式はなぜうまくいくのか、そして抽象化によって何が得られるのか、である。本章の八つの問題が示したことを以下にまとめる。

### 1. 何から何が作れるか？

Section 6.3 では、冪根（radical）を一つずつ消去することで、$\sqrt{2}+\sqrt{3}$、$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$、$\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ を根にもつ多項式を求めた。その次数（degree）はそれぞれ 4、8、9 であった。これらの次数は不変量（invariant）であり、その数が生成する体（field）の次数にほかならない。体の塔（tower of fields）を上るにつれて次数は掛け算で積み重なるので、平方根だけでたどり着ける数の次数は 2 の冪になる。このただ一つの事実から、立方体の倍積（doubling the cube）が不可能であること（$\sqrt[3]{2}$ の次数は 3 である）、そして $60^\circ$ の角は三等分（trisection）できないことが証明される。

逆の方向として、Section 6.2 では何かが作図できる仕組みを見た。1 の 17 乗根（roots of unity）をガウス（Gauss）の周期に分けると、和 $\cos\frac{2\pi}{17}+\cos\frac{4\pi}{17}+\cos\frac{8\pi}{17}+\cos\frac{16\pi}{17}$ は $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ を根にもつ二次方程式を満たした。さらに三つの二次方程式を経て $\cos\frac{2\pi}{17}$ に至り、こうして正 17 角形の作図が得られる。これら二つの節の土台にあったのが、Section 6.1 の円分多項式（cyclotomic polynomial）である。円分多項式は $x^n-1$ を構成する基本単位であり、1 の冪根をその位数（order）によって分類することで得られた。

### 2. 方程式の解の公式はなぜうまくいくのか？

Section 6.4 では四次方程式（quartic）の秘密を明らかにした。四つの根から、根の組の作り方それぞれに対応する三つの量 $\alpha\beta+\gamma\delta$、$\alpha\gamma+\beta\delta$、$\alpha\delta+\beta\gamma$ を作る。根をどのように並べ替えても、これら三つの量が入れ替わるだけなので、これらは係数のわかっている三次方程式（cubic）を満たす。その三次方程式を解き、続いて二つの二次方程式を解けば根が得られた。ラグランジュ（Lagrange）は、これがうまくいくのは四つの対象の置換（permutation）が三通りの組分けにどう作用するかによることを見抜いた。ガロア（Galois）は、五つの根に対してこれがうまくいかないのは、五つの対象の置換全体のなす群（group）が、それ以上分解できない部分を含んでいるからだと

見抜いた。解の公式とは、群の構造が落とす影なのである。

### 3. 抽象化によって何が得られるか？

最後の四つの節では、対象をそれが従う規則によって記述した。

- Section 6.5 では、四つの規則（加法性（additivity）、積の法則（product rule）、定数についての規則、$\Diamond x = 1$）によって、極限を一切使わずに、ある演算が微分でなければならないことが導かれた。同じ規則が、現代のソフトウェアにおける自動微分（automatic differentiation）を支えている。
- Section 6.6 では、群の公理（group axioms）から出発するわずか三行の議論によって、どんな群も二つの真部分群（proper subgroup）の和集合にはならないことが、すべての群について一度に示された。
- Section 6.7 では、複素数の組に対する奇妙な演算が、実はハミルトン（Hamilton）の四元数（quaternion）の乗法であることがわかり、それを行列で表すことで結合法則（associativity）が自動的に成り立った。
- Section 6.8 では、群の定義を文字どおりに読むことで、特異行列（singular matrix）からなる群が得られた。その単位元（identity）は単位行列ではなく、しかもその群は「本当は」0 でない実数全体のなす群が姿を変えたものであった。

いずれの場合も、抽象的な見方によって、計算だけでは見えにくくなっていたであろう事柄が説明されたのである。

### 4. 代数学の道具箱

| 手法 | 使った場面 |
|---|---|
| ただ一つに定まる不変量による分類 | 1 の冪根の位数による分類（6.1） |
| 和と積から二次方程式を作る | ガウス周期（6.2）、四次方程式（6.4） |
| 積和公式（product-to-sum formulas） | 正 17 角形（6.2） |
| 冪根の消去 | 最小多項式（minimal polynomial）（6.3） |
| 次数と塔法則（tower law） | 作図の不可能性（6.3） |
| 根の対称式（symmetric functions） | 分解三次方程式（resolvent cubic）（6.4） |
| 公理による演算の決定 | 導分（derivation）（6.5） |
| 群の公理からの議論 | 部分群の和集合（6.6） |
| 行列表現（matrix representation） | 四元数（6.7） |
| 同型（isomorphism） | 特異行列からなる群（6.8） |

### この先へ

- 四元数は、Section 7.8 のラグランジュの四平方定理（four-square theorem）へとつながる。
- 独自の規則をもつ代数的対象としての行列は、第 7 章の主題である。
- ガウス整数（Gaussian integers）のように、素因数分解（factorisation）が一意に定まらないことがある数の体系の算術は、Section 1.7 のテーマであった。

#### 大学に入る前にさらに先へ進みたい人のために

- **Mario Livio, *The Equation That Couldn't Be Solved***：五次方程式（quintic）、ガロア、そして群論の誕生を描く。
- **Nathan Carter, *Visual Group Theory***：図を通して群を学ぶ。最初に読むのに理想的な一冊。
- **M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry***：幾何学を土台にした大学初年級の講義。
- **Ian Stewart, *Galois Theory***：物語の全貌に挑む準備ができたときに。

ガロアは決闘の末に二十歳で世を去り、数十ページの原稿を遺した。数学の世界がそれを理解するには何十年もの歳月を要した。ガロアが見抜いたのは、方程式の最も深い秘密はその係数ではなく、解のもつ対称性の中にあるということであった。異なるものに同じ名前を与え、それらが共有する構造を調べるというこの洞察は、今や数学のあらゆる分野に行き渡っている。読者はそれが多項式、多角形、四元数、行列の中で働く様子を見てきた。大学に進めば、ほとんどあらゆる場所でそれに出会うことになるだろう。

# 「次の一歩」の解答

これらは完全な解答ではなく、簡潔な答えとヒントである。結果と鍵となる手順を示してあるので、自分の解答を確かめるのに使ってほしい。答えを見る前に、まずそれぞれの演習問題にきちんと取り組むこと。

## 6.1 1 の累乗根を根にもつ多項式

1. $(x-1)(x+1) = x^2-1$ かつ $(x^2+x+1)(x^2-x+1) = x^4+x^2+1$ であり、これらの積は $x^6-1$ である。同様に $x^{12}-1 = (x^6-1)(x^6+1)$ であり、$x^6+1 = (x^2+1)(x^4-x^2+1) = C_4C_{12}$ である。

2. $2p$ の約数（divisor）は $1, 2, p, 2p$ であるから、$C_{2p} = \frac{x^{2p}-1}{(x-1)(x+1)C_p(x)} = \frac{x^p+1}{x+1}$ である。また、$p$ は奇数であるから $C_p(-x) = \frac{(-x)^p-1}{-x-1} = \frac{x^p+1}{x+1}$ である。$p=3$ のとき：$C_6 = x^2-x+1 = C_3(-x)$。

3. $p^k$ 以下の数のうち $p^k$ と共通の因数をもつものは、$p$ の倍数 $p^{k-1}$ 個である。原始 $p^k$ 乗根（primitive $p^k$th root）は、$x^{p^k}-1$ の根のうち $x^{p^{k-1}}-1$ の根でないものであるから、$C_{p^k} = \frac{x^{p^k}-1}{x^{p^{k-1}}-1} = C_p\left(x^{p^{k-1}}\right)$ である。よって $C_9 = x^6+x^3+1$ である。

4. $C_{15} = \frac{(x^{15}-1)(x-1)}{(x^3-1)(x^5-1)}$ である。$(x-1)(x^2+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ に問題文の 8 次式（octic）を掛けると $x^{15}-1$ になることを、展開して確かめよ。

## 6.2 ガウスの正 17 角形

1. $\eta+\eta'$ は実数でない 6 つの 7 乗根すべての和であり、$-1$ である。$\eta\eta'$ を展開すると、指数が $4, 6, 0, 5, 0, 1, 0, 2, 3 \pmod 7$ である 9 つの項 $\alpha^{a+b}$ が得られる。すなわち 1 が 3 つと、実数でない各根が 1 回ずつ現れるので、$\eta\eta' = 3-1 = 2$ である。よって $\eta, \eta'$ は $\frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$ である。$\eta$ の実部から余弦の和が得られる。$\eta$ の虚部は $\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}$ であり、$\sin\frac{4\pi}{7} = \sin\frac{3\pi}{7} > \sin\frac{\pi}{7}$ であるから正である。したがって虚部は $+\frac{\sqrt{7}}{2}$ である。

2. $\zeta = e^{2\pi i/5}$ とすると、周期（period）$\zeta+\zeta^4 = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ と $\zeta^2+\zeta^3$ の和は $-1$、積は $-1$ であるから、これらは $t^2+t-1=0$ の根であり、正のほうから $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ が得られる。作図（construction）するには：単位円の中で、直角をはさむ 2 辺が 1 と $\frac{1}{2}$ である直角三角形の斜辺は $\frac{\sqrt{5}}{2}$ である。これから $\frac{1}{2}$ を引いて半分にする

と $\cos\frac{2\pi}{5}$ が得られる。その距離の点で軸に立てた垂線は、$(1,0)$ に隣り合う頂点で円と交わる。この弦を円周に沿って順に移していけばよい。

3. どちらも小数第 5 位までで $-1.28078$ である。

4. 3 のべきは $3,9,10,13,5,15,11,16,14,8,7,4,12,2,6,1$ であり、16 個すべてが現れる。2 のべきは 8 回で繰り返し（$2^8 = 256 \equiv 1$）、$\{1,2,4,8,9,13,15,16\}$ を与える。これは 17 を法（modulo）とする 0 でない平方数全体である。

### 6.3 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ を根にもつ多項式

1. $y^3 = 2\sqrt{2}+6\sqrt{3}+9\sqrt{2}+3\sqrt{3} = 11\sqrt{2}+9\sqrt{3}$ であり、$9y = 9\sqrt{2}+9\sqrt{3}$ であるから、$y^3 - 9y = 2\sqrt{2}$ である。すると $\sqrt{3} = y - \sqrt{2}$ と $\sqrt{6} = \sqrt{2}\sqrt{3}$ も $y$ の多項式（polynomial）で表される。

2. $x - \sqrt{2} = \sqrt[3]{3}$ とおいて両辺を 3 乗すると、$x^3 + 6x - 3 = \sqrt{2}(3x^2+2)$ となる。さらに 2 乗すると $x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1 = 0$ が得られる。

3. 有理数解の候補は $\pm 1$ だけであり、どちらも解ではない。$x^3$ の項がないので、モニック（monic）な 2 次式への因数分解は $(x^2+ax+b)(x^2-ax+c)$ の形になり、$a(c-b) = 0$、$b+c-a^2 = -10$、$bc = 1$ となる。$a = 0$ ならば $b+c = -10$ かつ $bc = 1$ となるが、これは整数では不可能である。$b = c = \pm 1$ ならば $a^2 = 12$ または 8 となり、これも不可能である。よってこの 4 次式は既約（irreducible）であり、$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ の次数（degree）は 4 である。

4. ド・モアブル（De Moivre）の定理より $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ であり、$\theta = 20^\circ$ とすると $\frac{1}{2} = 4c^3 - 3c$ となる。候補 $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}$ はどれも解ではない。よって $\cos 20^\circ$ の次数は 3 であるが、作図可能な（constructible）長さの次数はすべて 2 のべきであるから、$60^\circ$ から $20^\circ$ を作図することはできない。

### 6.4 四次方程式を解く

1. $y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1$ は 12 個の項 $\alpha^2\beta\gamma$（1 つの根の 2 乗とほかの 2 つの根の積）の和である。また $\left(\sum\alpha\right)\left(\sum\alpha\beta\gamma\right)$ は、この 12 個の項に $4\alpha\beta\gamma\delta$ を加えたものである。よってこの和は $(-p)(-r) - 4s$ である。

2. 係数を比較すると $a+b = 1$、$a\alpha + b\beta = 0$、$a\alpha^2 + b\beta^2 = -p$ が得られ、これは $\alpha \neq \beta$ のとき解ける。2 つの条件が保証しているのはまさにこのことである。$p \neq 0$ により $t$ の方程式は真の 2 次方程式になり（$p = 0$ ならば $-qt = 0$ に退化し、根は 0 だけになる）、$q^2 \neq 4p^3$ によりその判別式（discriminant）$q^2 - 4p^3$ は 0 でなくなる。$x^3 - 24x + 48$ では $p = 8$、$q = 48$ であり、$8t^2 - 48t + 64 = 0$ から $\alpha = 2$、$\beta = 4$ が得られる。すると $\left(\frac{x-2}{x-4}\right)^3 = -\frac{b}{a} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}$ であるから

$x-2=2^{-1/3}(x-4)$ となり、これを整理すると与えられた根 $x\approx -5.6946$ が得られる。

3. 分解 3 次式（resolvent cubic）は $y^3-7y^2+16y-12=(y-3)(y-2)^2$ である。根 $y=3$ から $(x^2-2x+1)(x^2-2x+2)$ が導かれるので、根は 1（2 回）と $1\pm \mathrm{i}$ である。

4. どちらかの組の中で入れ替えるか否か（4 通り）、2 つの組どうしを入れ替えるか否か（2 通り）により、恒等置換、$(\alpha\beta)$、$(\gamma\delta)$、$(\alpha\beta)(\gamma\delta)$、$(\alpha\gamma)(\beta\delta)$、$(\alpha\delta)(\beta\gamma)$、$(\alpha\gamma\beta\delta)$、$(\alpha\delta\beta\gamma)$ が得られる。これは正方形の対称群（symmetry group）と同じ構造をもつ群である。

### 6.5 公理から考える微分

1. 定数は依然として 0 に写り、規則 (i) と帰納法（induction）により $\Diamond x^n = x^{n-1}\Diamond x + x\Diamond x^{n-1} = nx^n$ である。線形性（linearity）により $\Diamond \mathrm{h} = x\mathrm{h}'$ である。

2. $\Diamond \mathrm{f} = \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{g}}\Diamond \mathrm{g} + \mathrm{g}\Diamond\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{g}}$ であるから、$\Diamond\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{g}} = \frac{\mathrm{g}\Diamond \mathrm{f} - \mathrm{f}\Diamond \mathrm{g}}{\mathrm{g}^2}$ である。

3. $\mathrm{f}=(x-a)^2\mathrm{g}$ ならば $\mathrm{f}'=(x-a)\big(2\mathrm{g}+(x-a)\mathrm{g}'\big)$ である。$x^n-1$ の重根（repeated root）は $nx^{n-1}$ の根でもあるはずなので 0 となるが、0 は $x^n-1$ の根ではない。

4. $(2+\varepsilon)^2+1=5+4\varepsilon$ であり、$(5+4\varepsilon)^3=125+300\varepsilon$ である。よって $f(2)=125$、$f'(2)=300$ である。合成関数の微分法（chain rule）によっても $3(x^2+1)^2\cdot 2x = 3\cdot 25\cdot 4 = 300$ となる。

### 6.6 部分群の和集合

1. $V=\{e,a,b,c\}$ とすると、$a^2=b^2=c^2=e$ であり、$a,b,c$ のうちどの 2 つの積も残りの 1 つになる。どの元も自分自身が逆元（inverse）である。$\{1,\mathrm{i},-1,-\mathrm{i}\}$ では i の逆元は $-\mathrm{i}$ であるから、この 2 つの群（group）は異なる。

2. $g$ が真部分群（proper subgroup）$H$ に含まれるならば、$g$ のすべてのべきも $H$ に含まれるので、$H$ は群全体になってしまう。

3. 1 は偶数でも 3 の倍数でもない。より一般に、$\mathbb{Z}$ は（1 で生成される）巡回群（cyclic group）であるから、前の演習問題により、いくつの真部分群の和集合（union）にもならない。

4. 直線 $y=mx$ が $y=x^2$ と交わるのは $x=0$ と $x=m$ だけであり、直線 $x=0$ が交わるのは原点だけである。よって $k$ 本の直線は、$t\neq 0$ である無数の点 $(t,t^2)$ のうち高々 $k$ 個しか含まない。

### 6.7 四元数群

1. $C \circ B = (\mathrm{i}, 0) \circ (0, 1) = (0, \mathrm{i}) = D$ であり、$B \circ C = (0, 1) \circ (\mathrm{i}, 0) = (0, \mathrm{i}^*) = (0, -\mathrm{i}) = H$ である。

2. $A$ の位数（order）は 1、$E$ の位数は 2 である。残りの 6 つはどれも 2 乗すると $E$ になるので、位数は 4 である。正方形の対称群には位数 2 の元が 5 つ（4 つの鏡映と半回転）あるので、2 つの群は同型（isomorphic）ではない。

3. $\det M = z_1 z_1^* + z_2 z_2^* = |z_1|^2 + |z_2|^2$ であり、これは 4 つの実数の平方の和である。$M(z)M(w)$ は $z \circ w$ の行列であるから、行列式（determinant）を掛け合わせると $(a_1^2 + \cdots + a_4^2)(b_1^2 + \cdots + b_4^2)$ は $|u_1|^2 + |u_2|^2$ と表され、これもまた 4 つの平方の和である。

4. 部分群は $\{A\}$、$\{A, E\}$、$\{A, E, C, G\}$、$\{A, E, B, F\}$、$\{A, E, D, H\}$、$Q_8$ である。$A$ 以外のどの元もそのべきとして $E$ をもつので、$\{A\}$ 以外のどの部分群も $E$ を含む。位数 4 の 3 つの部分群を合わせると、8 つの元すべてを含む。

### 6.8 特異行列からなる群

1. $\mathbf{M}_a \mathbf{M}_b = \mathbf{M}_{2ab}$ であり、$2(2ab) = (2a)(2b)$ である。この写像は一対一（one-to-one）であり、0 でない実数全体への全射（onto）である。

2. $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ であり $ac \neq 0$ であるから、この集合は閉じている（closed）。$\begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ の形の行列はすべて左単位元（left identity）である。しかし $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ として $\mathbf{XE} = \mathbf{X}$ となるには $e = 1$ かつ $f = b/a$ が必要であり、これは $\mathbf{X}$ に依存する。よって右単位元は存在せず、単位元も存在しないので、群ではない。

3. $\mathbf{0}$、$\mathbf{I}$、および $bc = a(1 - a)$ を満たす行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 - a \end{pmatrix}$（トレース 1、行列式 0）である。これらは、平面をある直線へ別の直線に沿って写す射影（projection）である。

4. 成分がすべて $a$ である行列 $\mathbf{J}_a$ は $\mathbf{J}_a \mathbf{J}_b = \mathbf{J}_{nab}$ を満たす。単位元は $\mathbf{J}_{1/n}$ であり、$\mathbf{J}_a$ の逆元は $\mathbf{J}_{1/(n^2 a)}$ である。

章

# 7

# 線形代数と幾何

行列（*matrix*）は数の表ではない。それは空間の変換であり、独自の生命をもっている。

**この章の内容**


| | | |
|---|---|---|
| **7.1** | 行列では成り立たない法則 | STEP II 1993 |
| **7.2** | 向きを変えずに伸ばす | STEP III 1990 |
| **7.3** | 行列式を行列式たらしめるもの | STEP II 2019 |
| **7.4** | もとに戻る行列 | STEP II 2020 |
| **7.5** | 三次元の回転 | STEP III 2022 |
| **7.6** | 双曲的回転と相対性理論 | STEP III 1991 |
| **7.7** | 決して変わらない量 | STEP III 2024 |
| **7.8** | 四つの平方数 | STEP III 1994 |
| **7.9** | 正多面体はただ五つ | STEP III 1999 |
| **A** | 演習問題の答え | p. 521 |

# 空間の変換

われわれは基底を用いずに考え、基底を用いずに書く。だが、いざという段になると、研究室の扉を閉めて猛烈な勢いで行列の計算をするのだ。

— アーヴィング・カプランスキー（Irving Kaplansky）、自身とポール・ハルモス（Paul Halmos）の線形代数への取り組み方について

学校では、行列はふつう連立方程式（simultaneous equations）を解くための道具として、あるいは点を変換するための手順として登場する。すなわち、行列に列ベクトル（column vector）を掛け、新しい座標を読み取るというものである。どちらも役に立つが、これらの見方は、行列が数学で最も重要な考え方の一つである理由を覆い隠してしまう。行列とは**線形変換**（linear transformation）、すなわち空間を引き伸ばし、回転し、鏡映し、ずらす（剪断する）方法である。そして行列は、数と同じように足したり、掛けたり、累乗したり、微分したりすることができる。ところが、行列は数とは違う。その積は掛ける順序に依存し、零でない行列どうしを掛けて零になることもある。さらに行列には、隠れた不変量（invariant）——トレース（trace）、行列式（determinant）、固有値（eigenvalue）——があり、それらは行列がどのように書き表されるかによらず、その本質的なふるまいをとらえている。

### 線形代数はなぜ重要か

線形代数（linear algebra）は、おそらく数学の中で最も広く使われている分野である。ビデオゲームから映画のアニメーションに至るまで、あらゆるコンピュータグラフィックスのエンジンは行列を掛け合わせる機械である。キャラクターのあらゆる回転も、あらゆるカメラアングルも、あらゆる透視投影も、一つの行列なのである。インターネットの検索エンジンや推薦システムは、固有ベクトル（eigenvector）の上に築かれている。技術者は橋や建物の振動数を固有値から求め、統計学者はデータの中の主要なパターンを固有値によって見つけ出す。量子力学は、すべて線形代数の言葉で書かれている。そして現代の機械学習は、その核心において、膨大な量の行列の掛け算にほかならない。

この遍在性には理由がある。線形の問題は完全に解くことのできる問題であり、ほとんどすべての非線形の問題は、十分に拡大して見れば線形に見える。これが微積分の

考え方であり、それはつまり、線形代数がほとんどあらゆるものの局所的なふるまいを記述する言語だということである。

### 大学で出会うこと

線形代数は、解析学（analysis）と並んで大学 1 年目の二本柱の一つである。**ベクトル空間**（vector space）——足し算とスカラー倍ができる集合のことで、平面や 3 次元空間はその最初の例にすぎない——と、それらの間の**線形写像**（linear map）に出会い、行列とは座標を用いて書き表した線形写像にすぎないことを学ぶ。行列式、固有値と固有ベクトル、そして対称行列は回転によって対角化（diagonalise）できることを述べる**スペクトル定理**（spectral theorem）を学ぶ。その後の講義では、これらがいたるところで使われる。微分方程式（第 8 章）において、幾何学（回転や鏡映が群をなす）において、連続的な対称性を記述する**リー群**（Lie group）の理論において、そして無限次元の線形代数である関数解析（functional analysis）においてである。

### この章を貫く問い

**三つの大きな問い**

1. **行列はどのような点で数に似ていて、どのような点で異なるのか？**算術のどの規則が生き残り、どの規則が成り立たなくなるのか？
2. **行列は実際には何をしているのか？**変換の幾何をどのようにして見ることができ、どのような数が座標によらずにそれをとらえるのか？
3. **何が変わらずに保たれるのか？**変換や運動によってどのような量が保存され、それらは何を教えてくれるのか？

この章は行列の代数の規則（Section 7.1）から始まり、続いて変換の幾何へと進む。固有ベクトル、行列式、有限位数（finite order）の行列、3 次元の回転、そして特殊相対性理論（special relativity）の双曲的回転（hyperbolic rotation）である。さらに、時間発展する行列の保存量（conserved quantity）、行列式から得られる四平方恒等式（four-square identity）を扱い、最後に、数え上げの議論であるオイラー（Euler）の公式によって正多面体（Platonic solids）を分類して締めくくる。

## この章に登場する考え方

| § | 主題 | 考え方 |
|---|---|---|
| 7.1 | 成り立たない規則 | 非可換性（non-commutativity）；零因子（zero divisor） |
| 7.2 | 固有ベクトル | 変換によって向きが回転しない方向 |
| 7.3 | 行列式 | 乗法性による特徴づけ；符号付き面積 |
| 7.4 | 有限位数の行列 | トレース、行列式とケイリー・ハミルトン（Cayley–Hamilton）の定理 |
| 7.5 | 3 次元の回転 | 外積から導くロドリゲス（Rodrigues）の公式 |
| 7.6 | ローレンツブースト（Lorentz boost） | 双曲的な角は足し合わされる |
| 7.7 | 保存量 | 交換子（commutator）のトレースは零である |
| 7.8 | 四つの平方 | 行列式の乗法性 |
| 7.9 | 正多面体 | 二重数え上げ（double counting）とオイラーの公式 |

## この章の読み方

この章に出てくるすべての行列について、それが何をするのかを図に描いてみよう。単位正方形、単位円、あるいはいくつかのベクトルをとり、それらの像をスケッチするのである。2 分ほどのスケッチで、計算を始める前に答え（固有ベクトル、反例、不変な直線）が見えてくることがよくあり、また後で計算を検算する助けにもなる。

# 7.1 行列では成り立たない法則

**問題**

**STEP II 1993、問 6**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/93-s2-q6`

## 導入

行列（matrix）は足すことも掛けることもできるので、数と同じように扱いたくなる。この問題はその誘惑を試すものである。数については正しい四つの「規則」を挙げ、そのうちどれが行列でも成り立つかを問う。ほとんどは成り立たず、その成り立たなさ方から学ぶことは多い。行列の積は可換（commutative）ではない。零でない行列どうしの積が零になることがある。そして、行列についての二次方程式（quadratic equation）は無限に多くの解をもちうる。

これらの不成立は欠陥ではない。むしろ行列が役に立つ理由そのものである。行列は空間の変換を表し、二つの変換を異なる順序で行えば、実際に異なる結果が得られる。1925 年、ハイゼンベルク（Werner Heisenberg）は、量子力学（quantum mechanics）に現れる量が数ではなく行列のようにふるまうこと、そして $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ が成り立たないことこそが不確定性原理（uncertainty principle）の数学的な姿であることを発見した。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 実数について、$ab = 0$ ならば $a = 0$ または $b = 0$ であるのはなぜか。その議論は数のどの性質を使っているか。また、その性質は行列でも成り立つか。

$ab = 0$ かつ $a \neq 0$ ならば、両辺を $a$ で割って $b = 0$ を得る。この議論には、零でないすべての数が逆数をもつことが必要である。零でない行列は逆行列（inverse）をもつ

とは限らない（行列式（determinant）が零の行列はもたない）ので、この議論は破綻する。**幾何的な**描像も念頭に置いておくとよい。行列は平面の変換であり、積 $\mathbf{AB}$ は「まず $\mathbf{B}$ を行い、次に $\mathbf{A}$ を行う」ことを意味する。

## 順を追って解く

### 段階 1　$\mathbf{AB} = 0$ だが $\mathbf{BA} \neq 0$ となりうるか

**考えてみよう**　幾何的に考えよう。$\mathbf{B}$ がすべてを一本の直線の中へ送り、その直線を $\mathbf{A}$ が零へ押しつぶすようにしたい。しかし逆の順序では、$\mathbf{A}$ が残したものを $\mathbf{B}$ がすべて消してしまってはいけない。

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。これは $x$ 軸への射影（projection）であり、$y$ 軸を零へ送る。また $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。これは $(x, y)$ を $(0, x)$、すなわち $y$ 軸上へ送る。このとき

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

よって、この主張は**偽**である（図 7.1.1）。 ■

### 段階 2　二乗の差

すべての積の順序を保ったまま、注意深く展開すると

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} - \mathbf{BA} - \mathbf{B}^2.$$

これが $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$ に等しくなるのは、ちょうど $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ のときである。段階 1 の行列では $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = -\mathbf{BA} \neq \mathbf{0}$ であるから、この主張は**偽**である。 ■

### 段階 3　$\mathbf{AX} = 0$ の零でない解

**考えてみよう**　$\det \mathbf{A} \neq 0$ ならば、$\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ に対して何ができるか。$\det \mathbf{A} = 0$ ならば、$\mathbf{Av} = \mathbf{0}$ を満たす零でない列ベクトル $\mathbf{v}$ を見つけられるか。

$\det \mathbf{A} \neq 0$ ならば $\mathbf{A}^{-1}$ が存在し、$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ となる。したがって零でない解は存在しない。

$\det \mathbf{A} = 0$ ならば、$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$、$ad = bc$ と書ける。ベクトル $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}$ は

$\mathbf{A}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab - ba \\ cb - da \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ を満たし、もう一方についても同様である。$\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ であるから、少なくとも一方は零でない。それを $\mathbf{v}$ とする。すると、二つの列がともに $\mathbf{v}$ である行列 $\mathbf{X}$ は零でなく、$\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ を満たす。よって、この主張は**真**である。 ■

#### 段階 4 平方根はいくつあるか

> **手を止めて、やってみよう** $\mathbf{X}^2 + \mathbf{AX} + \mathbf{B} = \mathbf{0}$ が無限に多くの解をもつような、零でない $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ を求めよ。（ヒント：左辺を完全平方 $(\mathbf{X} - \mathbf{I})^2$ にし、二乗すると零になる行列について考えよ。）

$\mathbf{A} = -2\mathbf{I}$、$\mathbf{B} = \mathbf{I}$ とする。どちらも零ではない。方程式は $(\mathbf{X} - \mathbf{I})^2 = \mathbf{0}$ となる。$\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ を満たす任意の行列 $\mathbf{N}$ から解 $\mathbf{X} = \mathbf{I} + \mathbf{N}$ が得られ、そのような $\mathbf{N}$ は無限に存在する。

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{N}^2 = \mathbf{0}\text{，任意の実数}t.$$

したがって、すべての $t$ に対して $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は解であり、この主張は**偽**である。 ■

## 振り返り

- **順序が重要である。**どの展開でも積の順序を保たなければならない。$\mathbf{AB}$ と $\mathbf{BA}$ は通常異なる。
- **零因子。**零でない行列どうしの積が零になりうる。このことが「二次方程式の根は高々二つ」という議論の根拠を崩す。
- **変換として考える。**どの反例も、行列が平面に何をするかを思い描くことで容易に見つかった。

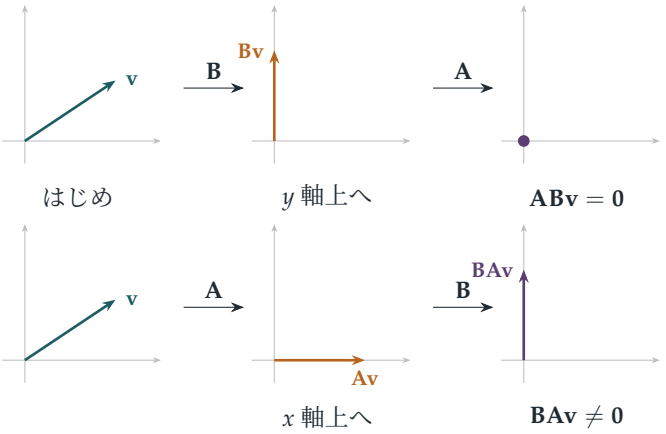



**図 7.1.1**　$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ なのに $\mathbf{BA} \neq \mathbf{0}$ となる理由。上段：$\mathbf{B}$ はすべてのベクトルを $y$ 軸上へ送り、それを $\mathbf{A}$（$x$ 軸への射影）が零へ押しつぶす。下段：逆の順序では、$\mathbf{A}$ が $x$ 成分を残し、$\mathbf{B}$ がそれを $y$ 軸上へ移すので、零にならずに残る。

## 背後にある数学

### 代数としての行列

ケイリー（Arthur Cayley）は 1858 年に行列の代数を導入し、行列を単なる係数の表ではなく、足したり掛けたりできる一つの対象として扱った。彼はすぐに積が可換でないことに気づき、**ケイリー–ハミルトンの定理**（Cayley–Hamilton theorem）を証明した。すなわち、すべての正方行列は自身の固有方程式（characteristic equation）を満たす。トレース（trace）が $t$、行列式が $d$ である $2 \times 2$ 行列については、これは $\mathbf{M}^2 - t\mathbf{M} + d\mathbf{I} = \mathbf{0}$ を意味し、本章ではこの事実を繰り返し用いる（Section 7.4）。$2 \times 2$ 実行列の全体は**環**（ring）をなす。足し算、引き算、掛け算ができるが、掛け算は可換ではなく、**零因子**（zero divisor）、すなわち積が零になる零でない元が存在する。

### 無限に多くの平方根

段階 4 はさらに印象的にできる。方程式 $\mathbf{X}^2 = \mathbf{I}$ は明らかな解 $\pm\mathbf{I}$ をもつが、それだけでなく、原点を通る直線に関する平面のすべての鏡映（reflection）$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ も解である。二回鏡映すれば何も変わらないからである。つまり $\mathbf{I}$ の平方根が円周ひとつ分だけ存在する。数を係数とする $n$ 次多項式の根が高々 $n$ 個であるのは、数に零因子がないからである。行列には零因子があり、この個数の評価は成り立たなくなる。

### 物理学における非可換性

古典力学では、位置 $x$ と運動量（momentum）$p$ は数であり、$xp = px$ である。量子力学ではこれらは演算子（operator、無限行列）となり、$xp - px = \mathrm{i}\hbar$ を満たす。ここで $\hbar$ はプランク定数（Planck's constant）を $2\pi$ で割ったものである。このただ一つの非可換関係から、ハイゼンベルクの不確定性原理、すなわち位置と運動量を同時に正確に知ることはできないという原理が導かれる。1925 年にハイゼンベルクが量子力学の規則を発見したとき、彼は行列が何であるかを知らなかった。ハイゼンベルクが考案した奇妙な乗法の規則が行列の積であることに気づいたのは、マックス・ボルン（Max Born）であった。

## 思考のスキル

**なじみの規則を新しい場面で試す**

新しい種類の対象に出会ったら、なじみのある規則のうちどれがまだ成り立つかを確かめ、それぞれの規則がどの性質に依存しているのかを正確に突き止めよ。

「$ab = 0$ ならば $a = 0$ または $b = 0$」という規則は割り算に依存し、「$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$」は可換性に依存する。それぞれの規則が何に支えられているかを知っていれば、いつまだそれを使えるかがわかる。

## 次の一歩

1. **いつ可換になるか。** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と可換なすべての $2 \times 2$ 行列を求めよ。
2. **零の平方根。** $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ を満たすすべての $2 \times 2$ 実行列 $\mathbf{N}$ を求めよ。（ヒント：ケイリー–ハミルトンの定理を用いて $\operatorname{tr}\mathbf{N} = \det\mathbf{N} = 0$ を示せ。）
3. **鏡映。** すべての鏡映行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ の二乗が $\mathbf{I}$ になることを示し、その鏡映の軸となる直線を求めよ。
4. **ケイリー–ハミルトン。** すべての $2 \times 2$ 行列が $\mathbf{M}^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{M})\mathbf{M} + (\det\mathbf{M})\mathbf{I} = \mathbf{0}$ を満たすことを、直接計算によって証明せよ。

## さらに学ぶために

- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）。最も広く読まれている線形代数の入門書であり、理解を重視している。
- **Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right***（Springer、オンラインで無料公開）。行列よりも線形写像（linear map）を中心に据えた、より抽象的な取り組み方。
- **Jim Baggott, *The Quantum Story***（Oxford University Press）。ハイゼンベルクの行列力学を含む、量子力学の歴史。

# 7.2 向きを変えずに伸ばす

**問題**

**STEP III 1990、問 6**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/90-s3-q6`

## 導入

行列による変換は、ふつうすべてのベクトルを新しい向きへ動かす。しかし多くの行列には、まったく向きを変えず、その方向に沿って伸ばしたり縮めたりするだけの特別な方向がいくつかある。これがその行列の**固有ベクトル**（eigenvector）であり（ドイツ語の *eigen*、「自身の」「固有の」に由来する）、伸縮の倍率が**固有値**（eigenvalue）である。固有ベクトルが十分にあるとき、変換の正体ははっきりする。この問題の行列のような対称行列ではいつもそうなる。適切な座標で見れば、変換は 2 本の軸に沿った伸縮にすぎない。

この問題では、ある特定の行列の固有ベクトルを求め、それを用いて行列が円をどう変えるかを理解する。固有ベクトルは応用数学全体の中でも最も役に立つ考え方の一つである。橋の固有振動、回転する物体の主軸、原子のエネルギー準位、データの集まりの中で最も重要な方向、さらに Google の初期の PageRank アルゴリズムによるウェブページの順位づけも、固有ベクトルによって記述される。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $T$ があるベクトルを「向きは変えずにスカラー倍する」とはどういうことか。式で書いてみよ。

それは、ある数 $\lambda$ に対して $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ が成り立つということである。このとき $\mathbf{v}$ は固有値 $\lambda$ に対する固有ベクトルである。問題に出てくる 2 つのベクトル $(1, 2)$ と $(2, -1)$ が直交していることに注意しよう。これは偶然ではない。この行列は**対称**（symmetric）

であり、対称行列の固有ベクトルは必ず直交するのである。

## 順を追って解く

### 段階 1　固有ベクトル

$$T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\frac{2}{5}\begin{pmatrix}9-4\\-2+12\end{pmatrix}=\frac{2}{5}\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\qquad T\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\frac{2}{5}\begin{pmatrix}20\\-10\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}.$$

よって、$(1,2)$ は 2 倍に、$(2,-1)$ は 4 倍に伸ばされる。 ■

### 段階 2　円の像

**考えてみよう**　$E$ の方程式を求めるには、$x$ と $y$ を $X$ と $Y$ で表し（逆行列を求める）、$x^2+y^2=1$ に代入すればよい。

行列 $\frac{2}{5}\begin{pmatrix}9&-2\\-2&6\end{pmatrix}$ の行列式（determinant）は $\frac{4}{25}(54-4)=8$ であり、逆行列（inverse matrix）は $\frac{1}{20}\begin{pmatrix}6&2\\2&9\end{pmatrix}$ である。したがって $x=\frac{6X+2Y}{20}$、$y=\frac{2X+9Y}{20}$ であり、$x^2+y^2=1$ は

$$(6X+2Y)^2+(2X+9Y)^2=400\quad\Longrightarrow\quad 40X^2+60XY+85Y^2=400,$$

となる。これを 5 で割ると $8X^2+12XY+17Y^2=80$ である。 ■

**考えてみよう**　$E$ はどのような図形で、その面積はいくらか。固有ベクトルを用いよ。

単位円はどの方向にも半径 1 である。$(2,-1)$ の方向には 4 倍に、それに垂直な方向 $(1,2)$ には 2 倍に伸ばされる。よって $E$ は、固有ベクトルの方向に沿った半軸（semi-axis）の長さが 4 と 2 の楕円（ellipse）であり（図 7.2.1）、その面積は $\pi\times4\times2=8\pi$ である。（同じことだが、任意の線形写像は面積を $|\det T|=8$ 倍し、円の面積は $\pi$ である。）

### 段階 3　$X$ の最大値

**考えてみよう**　$C$ 上では $X=\frac{2}{5}(9x-2y)$ である。$x^2+y^2=1$ のとき、$9x-2y$ はどこまで大きくなりうるか。

$9x-2y$ は $(9,-2)$ と単位ベクトル $(x,y)$ の内積（dot product）であるから、その最大値は $|(9,-2)| = \sqrt{85}$ であり、$(x,y)$ が $(9,-2)$ の向きを向くときに達成される。よって $X$ の最大値は $\frac{2}{5}\sqrt{85} = 2\sqrt{\frac{85}{25}} = 2\sqrt{\frac{17}{5}}$ である。 ■

### 段階 4 接線

> **手を止めて、やってみよう** $C$ 上の点 $\frac{1}{5}(3,4)$ における接線は $3x+4y=5$ である。線形写像は接線を接線に写す。これを用いて $E$ の接線を求めよ。

$x = \frac{6X+2Y}{20}$、$y = \frac{2X+9Y}{20}$ を $3x+4y=5$ に代入すると

$$\frac{3(6X+2Y)+4(2X+9Y)}{20} = 5 \quad \Longrightarrow \quad 26X+42Y = 100,$$

すなわち $13X+21Y=50$ である。 ■

（検算：接点そのものは $T(\frac{3}{5},\frac{4}{5}) = (\frac{38}{25},\frac{36}{25})$ であり、$13\cdot\frac{38}{25}+21\cdot\frac{36}{25} = \frac{494+756}{25} = 50$ となる。）

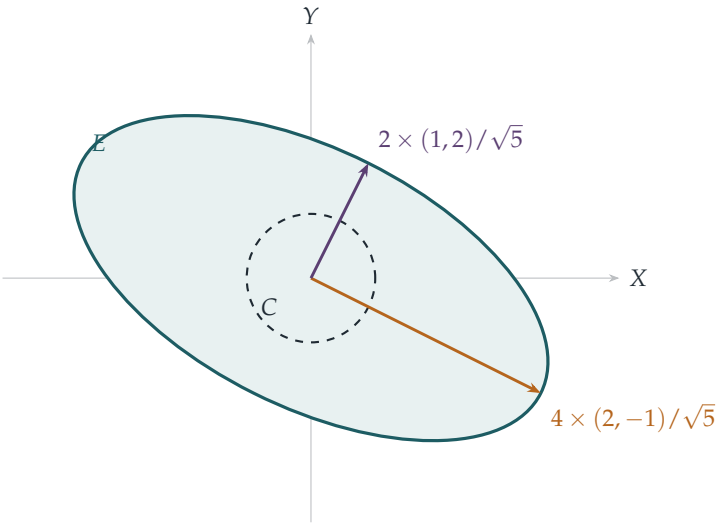



**図 7.2.1** 単位円 $C$（破線）と、その $T$ による像 $E$。固有ベクトル $(2,-1)$ の方向には円が 4 倍に、それに垂直な固有ベクトル $(1,2)$ の方向には 2 倍に伸ばされる。よって $E$ は、それらの方向に沿った半軸の長さが 4 と 2 で、面積が $8\pi$ の楕円である。

## 振り返り

- **固有ベクトルは自然な軸である。**固有ベクトルが与える座標では、$T$ は 4 倍と 2 倍

の伸縮にすぎず、円に対する作用は一目瞭然である。

- **行列式は面積を測る。** $E$ の面積は $C$ の面積の $|\det T|$ 倍である。
- **線形写像は接することを保つ。** 円の接線を変換すると、ほとんど計算せずに楕円の接線が得られた。

## 背後にある数学

### スペクトル定理

実対称行列はすべて、互いに直交する固有ベクトルを必要なだけそろえて持ち、その固有値は実数である。これが**スペクトル定理**（spectral theorem）であり、線形代数の最初の講義における中心的な結果の一つである。この定理は、対称な線形写像（linear map）はどれも、適切な直交座標で見れば各軸に沿った伸縮にすぎないことを述べている。同じことだが、$8X^2 + 12XY + 17Y^2$ のような二次形式（quadratic form）はどれも、回転によって $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$ の形に直すことができる。中心をもつ二次曲線がすべて、直交する軸をもつ楕円か双曲線（hyperbola）になるのはこのためである（**主軸定理**（principal axis theorem））。この考え方は 1820 年代のコーシー（Cauchy）にさかのぼる。コーシーはこれを用いて、二次曲面の主軸や固体内部の応力の主軸を求めた。

この定理を成り立たせているのは対称性である。対称でない行列はそれほど素直ではない。90° の回転はすべての方向を回してしまうので実の固有ベクトルを一つも持たず、せん断（shear）$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は固有ベクトルの方向を一つしか持たないので、どのような 2 本の軸に沿った伸縮にもならない。

### いたるところに現れる固有ベクトル

固有ベクトルが現れる場面をいくつか挙げておく。

- **振動。** 質点とばねからなる系は**基準振動**（normal mode）で振動する。これは、すべての部分が単一の振動数でそろって動く振動のパターンである。基準振動はある行列の固有ベクトルであり、振動数は固有値から得られる（Section 11.2）。
- **データ。** データ点の集まりが最も大きく広がっている方向は、その共分散行列（covariance matrix）の固有ベクトルである。それを求めることが**主成分分析**（principal component analysis）であり、統計学や機械学習の基本的な道具の一つである（Section 13.7）。

- **量子力学。** ある量を測定したときに得られうる結果は行列（または作用素）の固有値であり、原子のエネルギー準位も固有値である。
- **ウェブ検索。** 検索エンジン Google のもとになったアイデアである PageRank は、ページ間のリンクを表す巨大な行列の、固有値 1 に対する固有ベクトルの成分によってページを順位づける。

## 思考のスキル

**変換に適した座標を選ぶ**

線形変換を理解するには、それが回転させない方向を見つけよ。その座標では変換は単純になる。

これは、Section 5.6 でフェルマー点を原点に選んだことや、Section 2.8 で写像を簡単にするために変数変換をしたことと同じ考え方である。適切な座標を選べば、構造がはっきりと見えてくる。

## 次の一歩

1. **固有値を求める。** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$ の解であることを示し、問題の行列について $\lambda = 2$ と $4$ が得られることを確かめよ。
2. **直交する固有ベクトル。** $\mathbf{M}$ が対称で、$\lambda \neq \mu$ として $\mathbf{Mu} = \lambda\mathbf{u}$、$\mathbf{Mv} = \mu\mathbf{v}$ ならば、$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ であることを示せ。（ヒント：$\mathbf{v} \cdot \mathbf{Mu}$ を 2 通りに計算せよ。）
3. **回転。** 回転行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ は、$\theta$ が $\pi$ の整数倍でない限り実の固有ベクトルを持たないことを示せ。その複素固有値は何か。
4. **累乗。** 固有ベクトルを用いて $T^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を求めよ。（ヒント：$(1,0)$ を $(1,2)$ と $(2,-1)$ の一次結合で表せ。）

## さらに学ぶために

- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）。第 6 章は固有値とその応用へのすぐれた入門である。

- **Kurt Bryan & Tanya Leise, “The $25,000,000,000 eigenvector: the linear algebra behind Google”**, *SIAM Review* 48 (2006)。（250 億ドルの固有ベクトル：Google を支える線形代数）読みやすく、無料で入手できる。
- **3Blue1Brown, *Essence of Linear Algebra***（動画シリーズ、オンラインで無料公開）。この節で扱った幾何学的な考え方そのものを、美しいアニメーションで見せてくれる。

# 7.3 行列式を行列式たらしめるもの

**問題**

**STEP II 2019、問 8**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip`

## 導入

$2 \times 2$ 行列（matrix）の行列式（determinant）は $ad - bc$ である。この公式はどこから来たのか、そしてなぜそれほど重要なのか。一つの答えは、行列式とはその行列が面積を何倍に拡大するかを表す倍率だ、というものである。この問題で探るもう一つの答えは、行列式は行列の積を通常の数の積に変える関数として本質的に**唯一の**ものだ、というものである：$\det(\mathbf{MN}) = \det \mathbf{M} \det \mathbf{N}$。

この問題では、その性質一つだけ（と、自明な場合を除くための二つの穏やかな条件）をもつ未知の関数 f が与えられ、それがどのように振る舞わなければならないかを一歩ずつ導くことが求められる。Section 6.5 の導分（derivation）と同様に、これは対象をその性質だけから特定する演習である。最後には、f は行を入れ替えると符号が変わり、特異行列（singular matrix）上では 0 となり、剪断（shear）上では 1 に等しいことが強制される。これはまさに行列式の振る舞いである。

## 取りかかる前に

? **考えてみよう** 問題中のそれぞれの特別な行列は何をするか。一般の $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して **JM**、**MJ**、**KM**、**PM** を計算せよ。

**JM** は **M** の行を入れ替え、**MJ** は列を入れ替える。**KM** は第 2 行を $k$ 倍する。**PM** は第 2 行を第 1 行に加える。これらはガウスの消去法（Gaussian elimination）における**基本行変形**（elementary row operations）である。f は積を積に移すので、これらの特

別な行列上での $\mathrm{f}$ の値がわかれば、各行変形に対して $\mathrm{f}$ がどう変化するかがわかる。

## 順を追って解く

### 段階 1　単位行列

$\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \mathrm{f}(\mathbf{MI}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})\,\mathrm{f}(\mathbf{I})$。$\mathrm{f}(\mathbf{M}) \neq 0$ であるから、両辺を割って $\mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$ を得る。 ■

### 段階 2　入れ替え

$\mathbf{J}^2 = \mathbf{I}$ であるから $\mathrm{f}(\mathbf{J})^2 = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$ となり、$\mathrm{f}(\mathbf{J}) = \pm 1$ を得る。$\mathrm{f}(\mathbf{J}) \neq 1$ であるから $\mathrm{f}(\mathbf{J}) = -1$ である。

さて、$\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \mathbf{JM}$ であるから、その値は $\mathrm{f}(\mathbf{J})\mathrm{f}(\mathbf{M}) = -\mathrm{f}(\mathbf{M})$ である。また、$\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = \mathbf{JMJ}$（行を入れ替え、次に列を入れ替える）であるから、その値は $\mathrm{f}(\mathbf{J})^2\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})$ である。 ■

### 段階 3　従属な行

> **考えてみよう**　まず、二つの行が等しい行列 $\mathbf{B}$ を考えよ。$\mathbf{JB}$ は何か。それは $\mathrm{f}(\mathbf{B})$ について何を語るか。

$\mathbf{B}$ の二つの行がともに $(a, b)$ ならば、それらを入れ替えても何も変わらない：$\mathbf{JB} = \mathbf{B}$。よって $\mathrm{f}(\mathbf{B}) = \mathrm{f}(\mathbf{J})\mathrm{f}(\mathbf{B}) = -\mathrm{f}(\mathbf{B})$ となり、$\mathrm{f}(\mathbf{B}) = 0$ が強制される。

次に、$\mathbf{A}$ の行が $(a, b)$ と $k(a, b)$ ならば、二つの行がともに $(a, b)$ である $\mathbf{B}$ を用いて $\mathbf{A} = \mathbf{KB}$ と書ける。よって $\mathrm{f}(\mathbf{A}) = \mathrm{f}(\mathbf{K})\mathrm{f}(\mathbf{B}) = 0$ である。■（これには第 2 行が零となる $k = 0$ の場合も含まれる。）

### 段階 4　剪断

> **手を止めて、やってみよう**　$\mathbf{P}^2$ と $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK}$ を計算せよ。両者が等しくなるように $k$ を選べ。それにより $\mathrm{f}(\mathbf{P})$ について何がわかるか。

$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であり、$k \neq 0$ のとき

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

である。$k = 2$ とすると $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K} = \mathbf{P}^2$ となる。両辺の f をとり、$\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1})\mathrm{f}(\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$ を用いると

$$\mathrm{f}(\mathbf{P}) = \mathrm{f}(\mathbf{P})^2,$$

となるので、$\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 0$ または 1 である。しかし $\mathbf{P}$ は可逆（invertible）であり、$\mathrm{f}(\mathbf{P})\mathrm{f}(\mathbf{P}^{-1}) = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$ であるから $\mathrm{f}(\mathbf{P}) \neq 0$ である。したがって $\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 1$ である。 ■

## 振り返り

- **特別な元が関数を明らかにする。**乗法的な性質を $\mathbf{I}$、$\mathbf{J}$、$\mathbf{K}$、$\mathbf{P}$ に適用することで、それぞれにおける f の値と、各行変形の効果がわかった。
- **自分自身の変換に等しい元。**等しい行をもつ行列は行の入れ替えで変わらないが、行の入れ替えは f の符号を変える。よってそこでは f は 0 でなければならない。
- **共役（conjugation）は f を保つ。** $\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{P})$。これは代数学で何度も繰り返し用いられる事実である。

## 背後にある数学

### 乗法的な関数はすべて行列式の関数である

問題は $\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 1$ で終わっているが、議論は完結させることができる。すべての可逆行列は基本行列（行の入れ替え、行のスカラー倍、剪断）の積であり、この問題はそれぞれの上で f がどう振る舞うかを示している。このことから、ある一変数実関数 $\phi$ で $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ を満たすものを用いて $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \phi(\det \mathbf{M})$ と書けることが従う。行列式そのものは $\phi(x) = x$ の場合であるが、$\phi(x) = x^3$ や $\phi(x) = |x|^{1/2}\operatorname{sign}(x)$ でもよい。言い換えれば、**行列式は行列上の乗法的（*multiplicative*）な関数として本質的に新しい唯一のものである。**群論（group theory）の言葉でいえば、行列式は、可逆行列の群について可換群（commutative group）から見えるすべてを捉えている。

### 面積としての行列式

幾何学的には、$2 \times 2$ 行列は単位正方形を平行四辺形（parallelogram）に移し、$\det \mathbf{M}$ はその**符号付き面積**（signed area）である。向き（orientation）が保たれれば正、反転すれば負となる（図 7.3.1）。すると乗法的な性質には明白な意味がある：二つの変換を続けて行うと、それぞれの面積の拡大率が掛け合わされるのである。行の入れ替えは向きを反転させるので $\det \mathbf{J} = -1$ となる。剪断は正方形をずらして同じ面積の平行四辺形にするので $\det \mathbf{P} = 1$ となる。そして従属な行をもつ行列は正方形を平たく押

しつぶすので、その行列式は 0 となる。問題のどの段階にも、対応する図がある。



単位正方形　　剪断 **P**<br>面積 1　　入れ替え **J**<br>面積 −1（裏返し）　　従属な行<br>面積 0

**図 7.3.1**　符号付き面積としての行列式。二つの基底ベクトル（basis vectors）の像（琥珀色、紫色）が平行四辺形を張る。剪断は面積を保ち、基底ベクトルの入れ替えは向きを反転させ、従属な行（または列）は正方形を一本の直線上につぶす。二つの変換を続けて行うと符号付き面積が掛け合わされる。これが性質 $\mathrm{f}(\mathbf{MN}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})\mathrm{f}(\mathbf{N})$ である。

### 高次元の行列式

$n \times n$ 行列に対して、行列式は符号付き体積の拡大率であり、次の三つの性質によって特徴づけられる：各行について線形であること、二つの行を入れ替えると符号が変わること、単位行列上で 1 に等しいこと。これらだけからおなじみの展開公式を導くことができ、ガウスの消去法はそれを効率よく計算する方法を与える。行列式は、重積分（multiple integrals）の変数変換（change of variables）の公式（**ヤコビアン**（Jacobian））、逆行列の公式、そして Section 5.4 で見たように多項式の判別式（discriminant）に現れる。

## 思考のスキル

**未知の関数を特別な入力で探る**

関数がある性質を通してしか知られていないときは、思いつく限り最も単純な特別な入力にその性質を適用し、何が強制されるかを見よ。

ここでは単位行列、入れ替え、スカラー倍、剪断だけで、ほぼすべてを決定するのに十分であった。自分自身の 2 乗、逆、共役に等しくなる入力を選ぶのは特に効果的である。

## 次の一歩

1 **他の例。** $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = (\det \mathbf{M})^3$ が問題のすべての条件を満たすこと、および $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = |\det \mathbf{M}|$ は乗法的な性質を満たすが $\mathrm{f}(\mathbf{J}) \neq 1$ は満たさないことを示せ。

2 **列変形。** 第 2 列が第 1 列の定数倍であるような任意の行列上でも f が 0 となることを示せ。

3 **スカラー倍。** $\mathbf{K}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ とする。$\mathrm{f}\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{f}(\mathbf{K}_k)$ であること、および $\mathrm{f}(\mathbf{K}_k)\mathrm{f}(\mathbf{K}_l) = \mathrm{f}(\mathbf{K}_{kl})$ であることを示せ。

4 **行列式への帰着。** やや難 すべての可逆な $2 \times 2$ 行列が、$\mathbf{J}$、$\mathbf{K}_k$、$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の形の行列の積として書けることを示せ。これより、$\mathrm{f}(\mathbf{M})$ は $\det \mathbf{M}$ のみに依存することを導け。

## さらに学ぶために

- **Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right***（Springer、オンラインで無料公開）。この問題と同じ精神で、行列式をその性質から定義している。
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）。第 5 章で、三つの規則から行列式を展開している。
- **3Blue1Brown「The determinant」**（動画、オンラインで無料公開）。面積による解釈を、美しいアニメーションで示している。

# 7.4 もとに戻る行列

**問題**

**STEP II 2020、問 6**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip`

## 導入

変換の中には、十分な回数だけ繰り返すと、すべてをもとの位置に戻すものがある。90° の回転（rotation）は 4 回で、鏡映（reflection）は 2 回でそうなる。では、どのような $2 \times 2$ 行列がこの性質、すなわちある $n$ について $\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$ となる性質をもつのだろうか。また、それはどうすれば判定できるのだろうか。

この問題の驚くべき点は、**トレース**（trace）と**行列式**（determinant）という二つの数だけで判定が決まることである。四つの成分を知る必要はなく、$a + d$ と $ad - bc$ だけがわかればよい。しかもこの答えは、現実の世界に対して印象的な帰結をもたらす。結晶は 2 回、3 回、4 回、6 回対称性はもちうるが、5 回対称性は決してもたない理由を説明するのである。これは 2 世紀にわたって成り立っていた結晶学の「法則」であったが、1982 年のある発見によって覆され、その発見はノーベル賞を受賞した。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** すべての $2 \times 2$ 行列は $\mathbf{M}^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{M})\mathbf{M} + (\det\mathbf{M})\mathbf{I} = \mathbf{0}$ を満たす（ケイリー・ハミルトンの定理（Cayley–Hamilton theorem）。展開して計算すれば確かめられる）。このことは、$\mathbf{M}^2$ に関する問いにどう役立つだろうか。

この式は $\mathbf{M}^2$ を $\mathbf{M}$ と $\mathbf{I}$ で表す。すなわち $\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - d\mathbf{I}$ である。ただし $t = \operatorname{tr}\mathbf{M}$、$d = \det\mathbf{M}$ とする。したがって、$\mathbf{M}^2$ に関する条件は、$\mathbf{M}$、$t$、$d$ を結びつける条件に書き換えられる。これがこの問題全体の鍵である。

## 順を追って解く

### 段階 1　2 乗のトレース

$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$ であるから、$\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2) = a^2 + 2bc + d^2 = (a+d)^2 - 2(ad-bc)$ である。 ■

### 段階 2　$\pm\mathbf{I}$ の平方根

> **考えてみよう**　$\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$ と仮定する。これを $\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - d\mathbf{I}$ に代入せよ。$t \neq 0$ ならば、$\mathbf{M}$ について何がいえるだろうか。

$\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$ ならば $\mathbf{I} = t\mathbf{M} - d\mathbf{I}$ であるから、$t\mathbf{M} = (1+d)\mathbf{I}$ となる。$t \neq 0$ ならば $\mathbf{M}$ は $\mathbf{I}$ の定数倍であり、これを $c\mathbf{I}$ とおくと $c^2 = 1$ であるから $\mathbf{M} = \pm\mathbf{I}$ となるが、これは除外されている。よって $t = 0$ であり、このとき $(1+d)\mathbf{I} = \mathbf{0}$ であるから $d = -1$ である。

逆に、$t = 0$ かつ $d = -1$ ならば $\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - d\mathbf{I} = \mathbf{I}$ であり、$\operatorname{tr}(\pm\mathbf{I}) = \pm 2 \neq 0$ であるから $\mathbf{M} \neq \pm\mathbf{I}$ である。 ■

$\mathbf{M}^2 = -\mathbf{I}$ の場合：代入すると $t\mathbf{M} = (d-1)\mathbf{I}$ を得る。$t \neq 0$ ならば $\mathbf{M} = c\mathbf{I}$ かつ $c^2 = -1$ となるが、これは実数 $c$ では不可能である。よって $t = 0$ かつ $d = 1$ である。逆に、$t = 0$ かつ $d = 1$ ならば $\mathbf{M}^2 = -\mathbf{I}$ となる。 ■

### 段階 3　4 乗根

> **手を止めて、やってみよう**　$\mathbf{N} = \mathbf{M}^2$ とおくと、$\mathbf{M}^4 = \mathbf{I}$ は $\mathbf{N}^2 = \mathbf{I}$ を意味する。小問 (ii) により、$\mathbf{N} = \pm\mathbf{I}$ であるか、または $\operatorname{tr}\mathbf{N} = 0$ かつ $\det\mathbf{N} = -1$ である。二つ目の場合が起こりえないのはなぜだろうか。

$\det\mathbf{N} = \det(\mathbf{M}^2) = (\det\mathbf{M})^2 \geq 0$ であるから、$\det\mathbf{N} \neq -1$ である。よって $\mathbf{N} = \mathbf{M}^2 = \pm\mathbf{I}$ である。逆は明らかである。 ■

$\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$ の場合：小問 (ii) を $\mathbf{N} = \mathbf{M}^2$ に適用すると、これが成り立つのは $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2) = 0$ かつ $\det(\mathbf{M}^2) = 1$ のとき、すなわち $t^2 - 2d = 0$ かつ $d^2 = 1$ のときに限る。$t^2 = 2d \geq 0$ であるから $d = 1$ でなければならず、このとき $t^2 = 2$ である。したがって

$$\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I} \iff \det\mathbf{M} = 1 \text{ かつ } \operatorname{tr}\mathbf{M} = \pm\sqrt{2}. \qquad \blacksquare$$

### 段階 4　回転ではない $\mathbf{I}$ の 8 乗根

$\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$ を満たす行列はすべて $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$ を満たす。45° の回転はトレースが $\sqrt{2}$、行列

式が 1 である。そこで、トレースと行列式が同じで、回転ではない別の行列を求めたい。次の行列をとる。

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{tr}\mathbf{M} = \sqrt{2}, \quad \det\mathbf{M} = 1.$$

段階 3 により $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$ であるから、$\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$ である。しかし $\mathbf{M}$ は回転でも鏡映でもない。回転や鏡映は長さを保つが、$\mathbf{M}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ の長さは $\sqrt{3} \neq 1$ だからである。■

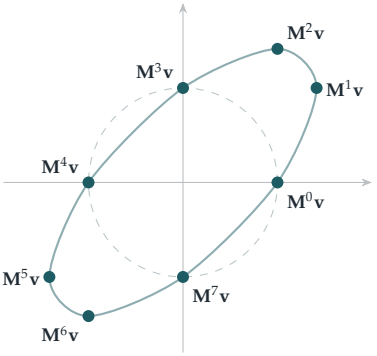



**図 7.4.1** $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ による $\mathbf{v} = (1,0)$ の軌道（orbit）。8 回で出発点に戻る。点は円（破線）の上にはないので $\mathbf{M}$ は回転ではないが、楕円の上にはある。つまり $\mathbf{M}$ は、斜交座標で見た 45° の回転なのである。

## 振り返り

- **ケイリー・ハミルトンの定理は、累乗を一次結合に変える。** $2 \times 2$ 行列の累乗はすべて $\mathbf{M}$ と $\mathbf{I}$ の一次結合であり、その係数はトレースと行列式だけで決まる。
- **2 乗の行列式は負にならない。**この単純な事実によって、小問 (iii) の一つの場合がまるごと除外された。
- **トレースと行列式は不変量（invariant）である。**トレースと行列式が等しい二つの行列（ただし $\mathbf{I}$ の定数倍でないもの）は、見かけが似ているかどうかにかかわらず、累乗に関して同じようにふるまう。

## 背後にある数学

### 相似な行列

段階 4 の **M** が「姿を変えた回転」であるのはなぜだろうか。二つの行列 **M** と **R** は、ある正則行列 **S** について $\mathbf{M} = \mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{S}^{-1}$ となるとき**相似**（similar）であるという。このとき二つの行列は、異なる座標で同じ変換を表している。相似な行列はトレースと行列式が等しく、（**I** の定数倍でない $2 \times 2$ 行列については）その逆も成り立つ。したがって、トレースが $\sqrt{2}$ で行列式が 1 である実行列はすべて 45° の回転と相似であり、**S** によって与えられる斜交座標では単に回転するだけである（図 7.4.1）。一般に、$\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$ を満たす実 $2 \times 2$ 行列は、つねに回転または鏡映と相似である。

### 結晶に 5 回対称性がない理由

結晶とは、原子が規則正しく繰り返し並んだものである。結晶の回転対称性は原子の格子をそれ自身に移すので、格子に基づく座標では**整数**成分の行列で表される。したがって、そのトレースは整数である。一方、角 $\theta$ の回転のトレースはどの座標でも $2\cos\theta$ であり、$2\cos\theta$ が整数となるのはそれが $-2, -1, 0, 1$ または 2 のとき、すなわち位数 2、3、4、6（および 1）の回転の場合に限る。5 回対称性には $2\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ が必要であるが、これは整数ではない。これが**結晶学的制限定理**（crystallographic restriction theorem）である。1982 年、ダン・シェヒトマン（Dan Shechtman）は見かけ上 5 回対称性をもつ合金を観測し、当初は嘲笑された。しかしそれは**準結晶**（quasicrystal）であることが判明した。準結晶は、ペンローズ（Penrose）・タイリングのように秩序はあるが周期的ではないため、この定理の対象外なのである。彼は 2011 年にノーベル化学賞を受賞した。

## 思考のスキル

**本質的なふるまいをとらえる不変量を探す**

多くのパラメータをもつ対象についての問題では、視点を変えても変わらないいくつかの組合せだけで十分ではないかと問うてみよ。

ここでは、問い（「$\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$ となるか？」）が座標に依存しないため、四つの成分がトレースと行列式という二つの不変量に帰着された。適切な不変量を見つけることは、分類問題の鍵となることが多い。

## 次の一歩

1 **位数 3 の回転。** STEP II 2021、問 7（OCR が配布している 2021 年の過去問一式に収録、`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`）に挑戦せよ。この問題は、珍しい性質をもつ回転行列から始まり、3 乗が単位行列となるすべての実 $2\times 2$ 行列についての事実で終わる。

2 **位数 6。** $\mathbf{M}^6=\mathbf{I}$ であるが $\mathbf{M}^2\neq\mathbf{I}$ かつ $\mathbf{M}^3\neq\mathbf{I}$ となるための、トレースと行列式に関する条件を求めよ。

3 **結晶学的制限。** $\mathbf{M}$ が整数成分をもち、$\det\mathbf{M}=1$ であり、ある $n$ について $\mathbf{M}^n=\mathbf{I}$ ならば、$\operatorname{tr}\mathbf{M}\in\{-2,-1,0,1,2\}$ であることを示せ。また、位数 6 の整数行列を一つ求めよ。

4 **累乗に対するケイリー・ハミルトンの定理。** $\mathbf{M}^2=t\mathbf{M}-d\mathbf{I}$ を用いて $\mathbf{M}^3$ と $\mathbf{M}^4$ を $p\mathbf{M}+q\mathbf{I}$ の形で表し、これを用いて $\mathbf{M}^4=-\mathbf{I}$ となるための条件を導き直せ。

## さらに学ぶために

- **M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry***（Springer）。『群と対称性』。結晶学的制限と壁紙模様の分類を含む。
- **Marjorie Senechal, *Quasicrystals and Geometry***（Cambridge University Press）。『準結晶と幾何学』。準結晶と非周期的秩序の数学。
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）。『線形代数入門』。相似な行列とケイリー・ハミルトンの定理。

# 7.5 三次元の回転

**問題**

**STEP III 2022、問 7**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip`

## 導入

2 次元では、点の回転（rotation）は簡単である。$e^{i\theta}$ を掛ければよい。3 次元ではずっと難しくなる。掛けるべき 1 つの複素数は存在せず、異なる軸のまわりの回転は可換（commute）ではない。しかも「点 $(1,2,2)$ を通る軸のまわりに $37°$ 回転する」という行列を書き下すのは、いかにも骨が折れそうに見える。

この問題では、任意の軸と任意の角に対するその行列を、外積（cross product）から組み立てる。得られる結果は**ロドリゲスの回転公式**（Rodrigues' rotation formula）であり、1840 年にオランド・ロドリゲス（Olinde Rodrigues）が発表したものである。この公式はロボット工学、コンピュータグラフィックス、宇宙機の航法で日常的に使われており、美しい事実を明らかにしてくれる。すなわち、$\mathbf{n}$ との外積をとることは「$\mathbf{n}$ のまわりの $90°$ 回転」であり、$\mathbf{n}$ のまわりのあらゆる回転はそこから組み立てられる。ちょうど $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ が $i$ を掛ける操作から組み立てられているのと同じである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $\mathbf{r}$ が $\mathbf{n}$ に垂直なとき、$\mathbf{n}\times\mathbf{r}$ は幾何学的にどのように見えるか。$\mathbf{r}$ が $\mathbf{n}$ に平行なときはどうか。

$\mathbf{r} \parallel \mathbf{n}$ ならば $\mathbf{n}\times\mathbf{r} = \mathbf{0}$ である。$\mathbf{r} \perp \mathbf{n}$ ならば、$\mathbf{n}\times\mathbf{r}$ は $\mathbf{r}$ と同じ長さをもち（$|\mathbf{n}| = 1$ でなす角が $90°$ だから）、両者に垂直であり、右手の法則（right-hand rule）により、$\mathbf{r}$ を $\mathbf{n}$ のまわりに（$\mathbf{n}$ の先から見て）反時計回りに $90°$ 回転したものである。したがって f は $\mathbf{r}$ の $\mathbf{n}$ 方向の成分（component）を消し、垂直な成分を $90°$ 回転させる。この描像

で問題全体が説明できる。

## 順を追って解く

### 段階 1　2 回外積をとる

$\mathrm{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \times \mathbf{r} = (bz - cy,\ cx - az,\ ay - bx)$ である。これにもう一度 $\mathbf{n} = (a, b, c)$ との外積をとると、$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))$ の $x$ 成分は

$$b(ay - bx) - c(cx - az) = -x(b^2 + c^2) + aby + acz. \qquad \blacksquare$$

$a^2 + b^2 + c^2 = 1$ より、これは $-x(1 - a^2) + aby + acz = a(ax + by + cz) - x$ となり、$(\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}$ の $x$ 成分に等しい。ほかの成分も対称性から同様に得られるので、$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r})) = (\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}$ である。 ■

> **考えてみよう**　$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$ と書く。ここで $\mathbf{r}_{\parallel} = (\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n}$ は $\mathbf{n}$ 方向の成分である。$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))$ をこれらを用いて表すとどうなるか。

$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r})) = \mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{r} = -\mathbf{r}_{\perp}$ である。f を 2 回施すと、平行な部分は消え、垂直な部分は $\mathbf{n}$ のまわりに 180° 回転する。これは単に向きを反転させることにほかならない（図 7.5.1）。これは $\mathrm{i}^2 = -1$ の類似である。

### 段階 2　回転

> **考えてみよう**　$\mathrm{g}(\mathbf{n})$ を計算せよ。次に、$\mathbf{r} \perp \mathbf{n}$ のとき、そのような $\mathbf{r}$ に対して $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r})) = -\mathbf{r}$ となることを用いて $\mathrm{g}(\mathbf{r})$ を計算せよ。

$\mathrm{f}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ より $\mathrm{g}(\mathbf{n}) = \mathbf{n}$ である。つまり軸は動かない。$\mathbf{r} \perp \mathbf{n}$ ならば $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r})) = -\mathbf{r}$ であり、

$$\mathrm{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} + \sin\theta\,(\mathbf{n} \times \mathbf{r}) - (1 - \cos\theta)\mathbf{r} = \cos\theta\,\mathbf{r} + \sin\theta\,(\mathbf{n} \times \mathbf{r}).$$

$\mathbf{n} \times \mathbf{r}$ は $\mathbf{r}$ を $\mathbf{n}$ のまわりに 90° 回したもので長さも等しいから、これは $\mathbf{r}$ を $\mathbf{n}$ のまわりに角 $\theta$ だけ回転したものであり、平面における $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)z$ とまったく同じである。g は線形（linear）であり、どのベクトルも $\mathbf{n}$ の実数倍と $\mathbf{n}$ に垂直なベクトルの和として表せるので、g は**原点を通り $\mathbf{n}$ 方向を向く軸のまわりの角 $\theta$ の回転**である（$\mathbf{n}$ の先端から見て反時計回り）。 ■

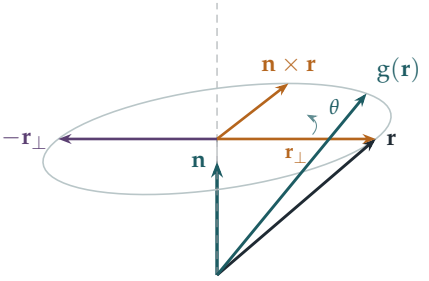



**図 7.5.1**　ロドリゲスの公式。ベクトル $\mathbf{r}$ は、軸 $\mathbf{n}$ 方向の部分と、それに垂直な部分 $\mathbf{r}_\perp$ に分かれる。後者は円を描く。$\mathbf{n}$ との外積をとると $\mathbf{r}_\perp$ は 90° 回転し（琥珀色）、2 回とると $-\mathbf{r}_\perp$ になる（紫）。回転後のベクトル $g(\mathbf{r})$ は $\mathbf{r}_\parallel + \cos\theta\,\mathbf{r}_\perp + \sin\theta\,(\mathbf{n}\times\mathbf{r})$ である。

### 段階 3　鏡映

> **手を止めて、やってみよう**　小問 (i) を用いて $h(\mathbf{s}) = -\mathbf{s} - 2f(f(\mathbf{s}))$ を簡単にせよ。$\mathbf{n}$ 方向のベクトルと、$\mathbf{n}$ に垂直なベクトルは、それぞれどう変換されるか。

$h(\mathbf{s}) = -\mathbf{s} - 2\big((\mathbf{n}.\mathbf{s})\mathbf{n} - \mathbf{s}\big) = \mathbf{s} - 2(\mathbf{n}.\mathbf{s})\mathbf{n}$ である。$\mathbf{n}$ に垂直なベクトルは変わらず、$h(\mathbf{n}) = -\mathbf{n}$ となる。よって h は**原点を通り $\mathbf{n}$ に垂直な平面に関する鏡映**（reflection）である。 ■

## 振り返り

- **平行な部分と垂直な部分に分解する。** $\mathbf{r}$ を $\mathbf{n}$ に沿う成分とそれを横切る成分に分けた途端、どの段階も明快になった。
- **線形性が作業を減らす。**線形写像（linear map）を特定するには、うまく選んだいくつかのベクトルをどう写すかがわかれば十分である。
- **複素数の類似。** $\mathbf{n}$ に垂直なベクトルの上では、f は i を掛ける操作のようにふるまう。すなわち $f^2 = -1$ であり、$g = \cos\theta + \sin\theta\, f$ である。

## 背後にある数学

### オイラーの回転定理

原点を固定する 3 次元空間の回転はすべて、原点を通るある軸のまわりの回転である。これはオイラー（Euler）が 1775 年に証明した。行列の言葉でいえば、$3 \times 3$ の回転行列はすべて固有値（eigenvalue）1 の固有ベクトル（eigenvector）をもち、それが軸である。ロドリゲスの公式はその逆を与える。すなわち、任意の軸 $\mathbf{n}$ と角 $\theta$ に対して、回転行列は

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin\theta\,\mathbf{K} + (1 - \cos\theta)\,\mathbf{K}^2, \qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

で与えられる。ここで $\mathbf{K}$ は $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{r}$ の行列である。$\mathbf{K}^3 = -\mathbf{K}$ であるから、指数級数（exponential series）$e^{\theta\mathbf{K}} = \mathbf{I} + \theta\mathbf{K} + \frac{\theta^2}{2!}\mathbf{K}^2 + \cdots$ はちょうどこの公式にまとまる。これは $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ の 3 次元版である。回転と「無限小回転」$\mathbf{K}$ の指数関数とのこの結びつきが、**リー群**（Lie groups）の理論の出発点である。

### 回転は可換ではない

本を水平に持ち、鉛直な軸のまわりに 90° 回転させてから、水平な軸のまわりに 90° 回転させてみよう。次に最初からやり直し、2 つの回転を逆の順序で行う。本は異なる位置に落ち着く。2 次元とは異なり、3 次元における回転の合成（composition）は可換ではない。これが Section 6.7 の四元数（quaternions）が役に立つ理由の 1 つである。$\mathbf{n}$ のまわりの角 $\theta$ の回転は四元数 $\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(a\mathrm{i} + b\mathrm{j} + c\mathrm{k})$ に対応し、回転の合成は四元数の積になり、非可換性がはじめから組み込まれている。ロドリゲス自身は 1840 年の論文で、ハミルトン（Hamilton）が四元数を考案する 3 年前に、回転の合成公式を見いだしていた。

## 思考のスキル

### 不変な部分に分ける

変換を理解するには、その変換が単純に扱う部分に空間を分けよ。ここでは、軸（そのまま残る）と、それに垂直な平面（回転する）である。

これは Section 7.2 の固有ベクトルと同じ考え方である。変換が保つ部分空間を見つけ、それぞれの部分の上で変換を調べるのである。

## 次の一歩

1 **平面の回転。** STEP III 2017、問 2（`step.maths.org/questions/17-s3-q2`）に挑戦せよ。複素数を用いて、平面の 2 つの回転を合成すると、1 つの例外を除いて回転になることを示す問題である。その例外を見つけ、そのとき合成が何になるかを求めよ。

2 **具体的な回転。** 方向 $(1,1,1)$ の軸のまわりの $120^\circ$ 回転の行列を求めよ。それが座標軸を巡回的に入れ替えることを示せ。

3 **K のべき。** $\mathbf{K}^2\mathbf{r} = (\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}$ および $\mathbf{K}^3 = -\mathbf{K}$ を示し、指数級数からロドリゲスの公式を導け。

4 **2 回の鏡映で回転になる。** 原点を通り、互いに角 $\alpha$ をなす 2 つの平面に関して順に鏡映を行うと、それらの交線のまわりの角 $2\alpha$ の回転になることを示せ。

## さらに学ぶために

- **Simon Altmann, *Rotations, Quaternions, and Double Groups***（Dover）。3 次元の回転についての決定版で、ロドリゲスの貢献も扱っている。
- **Simon Altmann,「Hamilton, Rodrigues, and the quaternion scandal」**, *Mathematics Magazine* 62 (1989)。短く生き生きとした歴史の読み物。
- **John Stillwell, *Naive Lie Theory***（Springer）。学部生向けに回転、四元数、リー群を解説している。

# 7.6 双曲的回転と相対性理論

**問題**

**STEP III 1991、問 6**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/91-s3-q6`

## 導入

回転行列（rotation matrix）$\begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix}$ は点を円 $x^2 + y^2 = 1$ に沿って動かし、$u$ だけ回転してから $w$ だけ回転することは、$u + w$ だけ回転することに等しい。cos と sin を cosh と sinh に置き換え、符号を一つ調整すると、この問題の行列が得られる。この行列は点を円ではなく双曲線（hyperbola）$x^2 - y^2 = 1$ に沿って動かし、やはりその「角」は加法的である。これが**双曲線回転**（hyperbolic rotation）である。

これは単なる珍しい話ではない。$x$ を時間、$y$ を距離（光の速さが 1 となる単位で測る）と見なすと、この行列は**ローレンツ・ブースト**（Lorentz boost）になる。すなわち、アインシュタイン（Einstein）の特殊相対性理論（special relativity）で見いだされた、互いに一定の速度で運動する二人の観測者の測定値を結びつける変換である。「双曲角」$u$ は**ラピディティ**（rapidity）であり、ラピディティが加法的であるという事実が、Section 3.8 で出会った奇妙な速度の合成則を説明する。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$ に相当する、$\cosh u$ と $\sinh u$ が満たす恒等式は何か。また、$\cosh(u + v)$ と $\sinh(u + v)$ の加法定理はどうなるか。

$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ であり、

$$\cosh(u+v) = \cosh u \cosh v + \sinh u \sinh v,$$
$$\sinh(u+v) = \sinh u \cosh v + \cosh u \sinh v.$$

これらは定義 $\cosh u = \tfrac{1}{2}(e^u + e^{-u})$ と $\sinh u = \tfrac{1}{2}(e^u - e^{-u})$ から確かめられる。点 $(\cos v, \sin v)$ が円上にあるのとちょうど同じように、点 $(\cosh v, \sinh v)$ は双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上にある。

## 順を追って解く

### 段階 1　双曲線は不変である

$$\begin{aligned} x'^2 - y'^2 &= (x\cosh u + y\sinh u)^2 - (x\sinh u + y\cosh u)^2 \\ &= (x^2 - y^2)(\cosh^2 u - \sinh^2 u) = x^2 - y^2, \end{aligned}$$

交差項 $2xy\cosh u \sinh u$ が打ち消し合うからである。よって $T$ は $x^2 - y^2$ を保ち、特に双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ をそれ自身に写す。 ■

> **考えてみよう**　原点を通る直線のうち、それ自身に写されるものはどれか。（固有ベクトル（eigenvector）を探せ。）

$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = (\cosh u + \sinh u)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = e^u\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ および $T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = e^{-u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ である。よって直線 $y = x$ と $y = -x$ はそれぞれそれ自身に写される。一方は $e^u$ 倍に引き伸ばされ、他方は $e^{-u}$ 倍に縮められる。これらは双曲線の漸近線（asymptote）である。 ■

### 段階 2　双曲角の加法

傾き（gradient）$\tanh v$ の直線は方向ベクトル（direction vector）$(\cosh v, \sinh v)$ をもつ。その像の方向は

$$T\begin{pmatrix}\cosh v\\ \sinh v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh u\cosh v + \sinh u\sinh v\\ \sinh u\cosh v + \cosh u\sinh v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh(u+v)\\ \sinh(u+v)\end{pmatrix},$$

であり、その傾きは $\tanh(u+v)$ である。線形写像（linear map）は平行な直線を平行な直線に写すので、このことは直線が原点を通るかどうかによらず成り立つ。したがって $v' = v + u$ である。 ■

### 段階 3　角が保たれるのはいつか

**考えてみよう** 傾き $m_1, m_2$ の二直線のなす角 $\psi$ は $\tan\psi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$ を満たす。$m_i = \tanh v_i$ のとき、これを簡単にせよ。（ヒント：すべてを分母 $\cosh v_1 \cosh v_2$ でまとめよ。）

$\tanh v_1 - \tanh v_2 = \dfrac{\sinh(v_1 - v_2)}{\cosh v_1 \cosh v_2}$ と $1 + \tanh v_1 \tanh v_2 = \dfrac{\cosh(v_1 + v_2)}{\cosh v_1 \cosh v_2}$ を用いると、

$$\tan\psi = \left|\frac{\sinh(v_1 - v_2)}{\cosh(v_1 + v_2)}\right|.$$

変換の後、$v_1 - v_2$ は変わらず、$v_1 + v_2$ は $v_1 + v_2 + 2u$ になる。

**手を止めて、やってみよう** $\cosh(v_1 + v_2) = \cosh(v_1 + v_2 + 2u)$ となるのはどのようなときか。

二直線が平行でない（$v_1 \neq v_2$）と仮定すると、角が等しくなるのは $\cosh(v_1 + v_2) = \cosh(v_1 + v_2 + 2u)$ のとき、かつそのときに限る。cosh は偶関数（even function）であり、$[0, \infty)$ で狭義単調増加（strictly increasing）であるから、これは $v_1 + v_2 = \pm(v_1 + v_2 + 2u)$ を意味する。正の符号からは $u = 0$ が得られるが、これは除外されているので、

$$v_1 + v_2 = -u. \qquad \blacksquare$$

### 段階 4 図で見る

$v_1 + v_2 = -u$ のとき、変換後の角は $v_1' = v_1 + u = -v_2$ および $v_2' = v_2 + u = -v_1$ である。よって $\ell_1$ の像の傾きは $-\tanh v_2$ であり、これは $\ell_2$ を $x$ 軸に関して折り返したものである。同様に $\ell_2$ の像は $\ell_1$ を折り返したものである。原点を通る直線については、この変換は二直線を入れ替えて折り返すので、両者のなす角が変わらないことがわかる（図 7.6.1）。

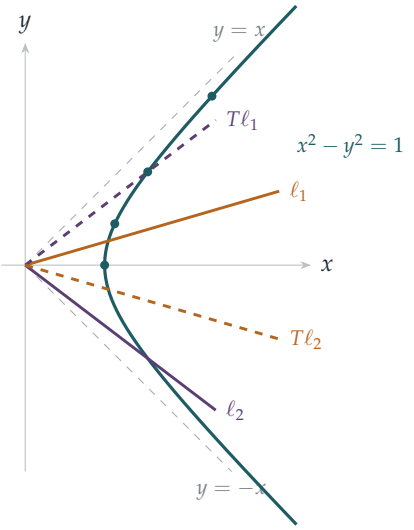



**図 7.6.1**　$u = 0.7$ の双曲線回転を、原点を通り $v_1 = 0.3, v_2 = -1.0$ である直線 $\ell_1, \ell_2$ に施したもの。$v_1 + v_2 = -u$ となっている。$\ell_1$ の像（紫の破線）は $\ell_2$ の鏡像であり、$\ell_2$ の像（琥珀色の破線）は $\ell_1$ の鏡像であるから、二直線のなす角は保たれる。双曲線上の青緑の点は双曲角について等間隔に並んでいる（$v = 0, 0.5, 1, 1.5$）。$T$ はそれぞれの点を、双曲線に沿って 0.7 だけ先の点へ動かす。

## 振り返り

- **不変な二次形式。**回転が $x^2 + y^2$ を保つのとちょうど同じように、$T$ は $x^2 - y^2$ を保つ。二次形式（quadratic form）の不変性である。
- **固有ベクトルは漸近線である。**不変に保たれる直線は $y = \pm x$ であり、それぞれ $e^{\pm u}$ 倍に伸縮される。
- **双曲角は加法的である。**方向を $\tanh v$ でパラメータ表示すると、$T$ の作用は単純な加法 $v \mapsto v + u$ になった。

## 背後にある数学

### 特殊相対性理論

アインシュタインの特殊相対性理論（1905 年）では、互いに一定の速度で運動する観測者たちは時間と距離について意見が一致しないが、量 $t^2 - x^2$（光の速さを $c = 1$

とする）については全員が一致する。これが**時空間隔**（spacetime interval）である。これを保つ変換が**ローレンツ変換**（Lorentz transformation）であり、空間が一次元の場合、それはちょうどこの問題の行列で、$x$ を時間、$y$ を距離としたものになる。速度 $v = \tanh u$ で運動する観測者は、この行列によって我々の座標と結びつく座標を用いる。ここで $\cosh u = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ は、時間の遅れ（time dilation）を表す有名な因子 $\gamma$ である。ミンコフスキー（Minkowski）は 1908 年に、これによって時空が、マイナス符号を含む「距離」をもつ四次元の幾何学になることを見抜いた。「これより先、空間それ自体、そして時間それ自体は、単なる影へと消え去る運命にある。」

---

#### この問題の物理的な意味

- **不変な直線** $y = \pm x$ は光線の経路である。これはすべての観測者にとって同じである。光の速さが誰にとっても同じであるということこそ、相対性理論の根本原理である。
- **双曲線** $x^2 - y^2 = 1$ は、あらゆる一定速度で運動する観測者が測ったときに、原点から「固有時」（proper time）で一単位離れた事象の集合である。
- **ラピディティの加法。** 原点を通る傾き $\tanh v$ の直線は、速度 $\tanh v$ で運動する物体の経路である。ラピディティ $u$ のブーストは、その速度を $\tanh(v+u) = \frac{\tanh v + \tanh u}{1 + \tanh v \tanh u}$ に変える。これは Section 3.8 で見たアインシュタインの速度合成の公式である。速度は加法的ではないが、ラピディティは加法的なのである。

さらに Section 5.8 では、同じ加法公式をポアンカレ円板（Poincaré disc）における距離の規則として見た。相対性理論において可能な速度全体の集合は、ラピディティで測ると双曲空間になるのである。

## 思考のスキル

---

#### 適切なパラメータ表示を見つける

変換が単純になるようなパラメータで対象を記述せよ。

方向をその傾きで記述すると、$T$ は込み入った式で作用する。傾きが $\tanh v$ となる $v$ で記述すると、$T$ は単に $u$ を加えるだけになる。同じ考え方によって、回転は角を用いると単純になり、Section 2.8 では写像 $x \mapsto x^2 - 2$ が単純になった。このようなパラメータ表示（parametrisation）の選び方が鍵である。

## 次の一歩

1 **ブーストの合成。** $T(u)$ を問題の行列とするとき、$T(u)T(w) = T(u+w)$ を示せ。$T(u)^{-1}$ は何か。

2 **時間の遅れ。** 宇宙船が光の速さの 0.8 倍で進んでいる。そのラピディティ $u$ と $\cosh u$ を求めよ。地球で 10 年が経過するとき、宇宙船ではどれだけの時間が経過するか。（$t_{\text{宇宙船}} = t_{\text{地球}} / \cosh u$ を用いよ。）

3 **双曲線の面積。** 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$、$x$ 軸、および原点と $(\cosh v, \sinh v)$ を結ぶ線分で囲まれた部分の面積が $\frac{v}{2}$ であることを示せ。これは円の場合の対応する面積が $\frac{\theta}{2}$ であることとちょうど同じである。$T$ がこのような面積を保たなければならないのはなぜか。

4 **スクイーズ。** 座標を $p = x + y, q = x - y$ に変換せよ。$T$ が $p \mapsto e^{u}p, q \mapsto e^{-u}q$ となり、双曲線が $pq = 1$ となることを示せ。この座標で、変換を幾何学的に説明せよ。

## さらに学ぶために

- **Edwin Taylor & John Wheeler, *Spacetime Physics*** (W. H. Freeman)。ラピディティと時空図を用いた特殊相対性理論の本で、A レベル（A level、英国の大学入学資格試験）の数学を学んだ生徒向けである。
- **Tevian Dray, *The Geometry of Special Relativity*** (CRC Press)。相対性理論を双曲線の三角法として扱っており、まさにこの節と同じ精神で書かれている。
- **Albert Einstein, *Relativity: The Special and the General Theory***（さまざまな版がある）。アインシュタイン自身による一般向けの解説で、今でも非常に読みやすい。

# 7.7 決して変わらない量

**問題**

**STEP III 2024、問 5**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip`

## 導入

物理学における最も深い事実のいくつかは**保存則**（conservation laws）である。運動がどれほど複雑であっても、エネルギー、運動量、角運動量は変わらない。系に十分多くの保存量があれば、その運動は厳密に解くことができる。保存量が少なすぎると、運動はカオス的になりうる。

この問題は、保存量を作り出す驚くべき方法を示している。行列が $\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ に従って時間変化するならば、その成分がどれほど激しく変化しても、そのトレース（trace）と行列式（determinant）、したがって固有値（eigenvalues）は決して変わらない。このような組 $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ は**ラックス対**（Lax pair）と呼ばれる。この名は、互いにすり抜けても形を変えない孤立波である**ソリトン**（solitons）の驚くべき振る舞いを説明するために、1968 年にこの考え方を導入したピーター・ラックス（Peter Lax）にちなむ。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 式 $\mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ は $\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ の**交換子**（commutator）と呼ばれる。これが零になるのはどのようなときか。小問 (i) を踏まえると、そのトレースはいくらか。

交換子が零になるのは、$\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ が可換であるときに限る。また小問 (i) より、そのトレースは常に $\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) - \operatorname{tr}(\mathbf{NM}) = 0$ である。このただ一つの事実が、この問題に現れるすべての保存則の出発点である。

## 順を追って解く

### 段階 1　トレース

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$、$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とすると、$\mathbf{MN}$ の対角成分は $ap + br$ と $cq + ds$ であるから、$\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = ap + br + cq + ds$ である。$\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ の役割を入れ替えると $pa + qc + rb + sd$ となり、これは同じものである。また明らかに $\operatorname{tr}(\mathbf{M} + \mathbf{N}) = \operatorname{tr}\mathbf{M} + \operatorname{tr}\mathbf{N}$ である。 ■

### 段階 2　行列式の導関数

? **考えてみよう**　積の微分法則を用いて $\det\mathbf{M} = ad - bc$ を微分せよ。次に $\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ を用いて、$\mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}$ とそのトレースを計算せよ。

導関数をドットで表すと、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\mathbf{M} = \dot{a}d + a\dot{d} - \dot{b}c - b\dot{c}$ である。また

$$\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}} = \frac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{a} & \dot{b} \\ \dot{c} & \dot{d} \end{pmatrix}$$

の対角成分は $\frac{d\dot{a} - b\dot{c}}{\det\mathbf{M}}$ と $\frac{-c\dot{b} + a\dot{d}}{\det\mathbf{M}}$ である。これらの和は $\frac{1}{\det\mathbf{M}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\mathbf{M}$ である。 ■

### 段階 3　三つの保存量

? **考えてみよう**　$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ のトレースをとれ。行列式については小問 (ii) を用いよ。$\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{MN} - \mathbf{NM})$ はどうなるか。

トレース：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{tr}\mathbf{M} = \operatorname{tr}\dot{\mathbf{M}} = \operatorname{tr}(\mathbf{MN}) - \operatorname{tr}(\mathbf{NM}) = 0$。

行列式：小問 (ii) より

$$\frac{1}{\det\mathbf{M}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\mathbf{M} = \operatorname{tr}\bigl(\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{MN} - \mathbf{NM})\bigr) = \operatorname{tr}\mathbf{N} - \operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{NM}) = \operatorname{tr}\mathbf{N} - \operatorname{tr}\mathbf{N} = 0,$$

である。ここで小問 (i) を $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{NM})) = \operatorname{tr}((\mathbf{NM})\mathbf{M}^{-1}) = \operatorname{tr}\mathbf{N}$ の形で用いた。

2 乗のトレース：$\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2) = (\operatorname{tr}\mathbf{M})^2 - 2\det\mathbf{M}$ である（Section 7.4 を参照）。右辺の二つの項はともに一定であるから、これも一定である。 ■

### 段階 4　陽な解

**手を止めて、やってみよう** $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ として $\mathbf{N} = t\mathbf{I} + t\mathbf{E}$ とおき、$\mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ を計算して、$a$、$b$、$c$、$d$ についての微分方程式を書き下せ。それらを $c$、次に $a$ と $d$、最後に $b$ の順に解け。

$t\mathbf{I}$ の部分はすべての行列と可換であるから、$\mathbf{MN} - \mathbf{NM} = t(\mathbf{ME} - \mathbf{EM})$ である。ここで $\mathbf{ME} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$、$\mathbf{EM} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ であるから、

$$\dot{a} = -tc, \qquad \dot{b} = t(a - d), \qquad \dot{c} = 0, \qquad \dot{d} = tc.$$

よって $c = C$ は定数である。すると $a = A - \frac{1}{2}Ct^2$、$d = D + \frac{1}{2}Ct^2$ となり、さらに $\dot{b} = t(A - D - Ct^2)$ より $b = B + \frac{1}{2}(A - D)t^2 - \frac{1}{4}Ct^4$ となる。したがって

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A - \frac{1}{2}Ct^2 & B + \frac{1}{2}(A - D)t^2 - \frac{1}{4}Ct^4 \\ C & D + \frac{1}{2}Ct^2 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

検算：トレースは $A + D$ であり、行列式は $(A - \frac{1}{2}Ct^2)(D + \frac{1}{2}Ct^2) - C\big(B + \frac{1}{2}(A - D)t^2 - \frac{1}{4}Ct^4\big) = AD - BC$ である。予告どおり一定である（図 7.7.1）。

### 段階 5 別の方程式

**考えてみよう** $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN}$ ならば $\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}$ であり、小問 (ii) より $\operatorname{tr}\mathbf{N}$ は $\det\mathbf{M}$ の対数微分である。$\mathbf{M}$ のトレースが一定のまま、行列式が変化することはありうるか。

もちろんありうる。$|t| < 1$ に対して $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$ とする（このとき $\det\mathbf{M} = 1 - t^2 \neq 0$）。そのトレースは常に 2 である。$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN}$ となるように $\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}$ と定めると、

$$\mathbf{N} = \frac{1}{1 - t^2}\begin{pmatrix} 1 & -t \\ -t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - t^2}\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix},$$

となる。これは正則であり、$t \neq 0$ のとき $\operatorname{tr}\mathbf{N} = \frac{-2t}{1 - t^2} \neq 0$ である。よって答えは**否**であり、$\operatorname{tr}\mathbf{N}$ は零である必要はない。 $\blacksquare$

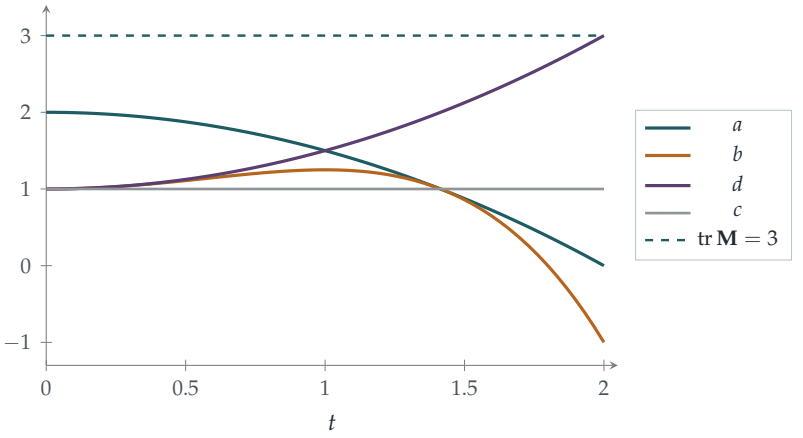



**図 7.7.1**　段階 4 で求めた $\mathbf{M}(t)$ の成分（$A = 2$、$B = 1$、$C = 1$、$D = 1$）。$c$ 以外の成分はすべて変化するが、トレースは常に 3、行列式は常に 1 のままである。したがって固有値 $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ は決して変わらない。この流れは**等スペクトル**（isospectral）である。

## 振り返り

- **交換子のトレースは零である。** $\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = \operatorname{tr}(\mathbf{NM})$ から、すべての保存則が導かれた。
- **対数微分。** 小問 (ii) により、行列式の導関数が、線形で扱いやすいトレースに置き換えられた。
- **陽な解で保存を確かめる。** $\mathbf{M}(t)$ の式は、そのトレースと行列式が一定であることを確認して検算した。

## 背後にある数学

### ソリトンとラックス対

1834 年、スコットランドの技術者 John Scott Russell は、エディンバラ近郊のユニオン運河を進む孤立波を馬で追いかけ、それが 1 マイル以上にわたって形を崩さずに進むのを観察した。このような波は**コルテヴェーク–ド・フリース（*KdV*）方程式**（Korteweg–de Vries equation）で記述される。1960 年代には、Norman Zabusky と Martin Kruskal による計算機実験によって、この「ソリトン」二つが衝突しても、まるで粒子のように形を変えずに抜け出てくることが示された。これを説明するに

は無限に多くの保存量が必要であった。1968 年にピーター・ラックスは、KdV 方程式が一対の微分作用素 $L$ と $P$ を用いて $\dot{L} = LP - PL$ と書けることを示した。すると、まさにこの問題と同じように $L$ の固有値が保存され、それらが無限個の保存則を与える。ラックス対をもつ系は**可積分**（integrable）と呼ばれ、厳密に解くことのできる数少ない非線形系の一つである。

### 等スペクトル流

$\mathbf{M}$ のトレースと行列式は特性多項式（characteristic polynomial）$\lambda^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{M})\lambda + \det\mathbf{M}$ を決定するから、$\mathbf{M}$ の固有値は時間とともに変化しない。流れ $\dot{\mathbf{M}} = [\mathbf{M}, \mathbf{N}]$ は、固有値を固定した行列の集合の中で $\mathbf{M}$ を動かしていく。実際、解は常にある正則行列 $\mathbf{S}(t)$ を用いて $\mathbf{M}(t) = \mathbf{S}(t)^{-1}\mathbf{M}(0)\mathbf{S}(t)$ の形に書ける。すなわち、行列は常に初期値と相似（similar）である。同じ考え方は物理学全体に通じている。量子力学では、観測量 $\mathbf{A}$ は $\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\mathbf{H}, \mathbf{A}]$ に従って時間発展する。ここで $\mathbf{H}$ はエネルギーであり、したがってエネルギーと可換なものはすべて保存される。

### ヤコビの公式

小問 (ii) は任意のサイズの正則行列に対して成り立ち、**ヤコビ（*Jacobi*）の公式**と呼ばれる。$\det\mathbf{M}$ は負になりうるので、対数を使わずに $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\mathbf{M} = \det\mathbf{M}\,\operatorname{tr}\!\left(\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}\right)$ と書くのが最も安全である。対数を用いた形 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\det\mathbf{M} = \operatorname{tr}\!\left(\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}\right)$ には $\det\mathbf{M} > 0$ が必要である（一般には $\ln|\det\mathbf{M}|$ を用いる）。この帰結として、定数行列 $\mathbf{A}$ に対して $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{A}\mathbf{M}$ ならば、$\det\mathbf{M}(t) = e^{t\operatorname{tr}\mathbf{A}}\det\mathbf{M}(0)$ となる。微分方程式の研究では、これは相空間（phase space）における体積がどのように増減するかを教えてくれる。古典力学の方程式ではトレースが零であり、体積は保存される。これは**リウヴィルの定理**（Liouville's theorem）として知られる結果である。

## 思考のスキル

**変わらないものを見つける**

何かが時間発展するときには、そこから作られる量で一定に保たれるものを探せ。それらは運動を制約し、しばしばその構造を明らかにする。

ここでは、変化率が交換子であったために、トレースと行列式が保存された。力学では、保存量は対称性から生じ（ネーター（Noether）の定理）、それらを見つけることが問題を解く第一歩となることが多い。

## 次の一歩

1. **解を確かめる。** 段階 4 の行列 $\mathbf{M}(t)$ が $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbf{M}$ を満たすことを、微分して確かめよ。

2. **相似。** $\mathbf{M}_0$ を定数行列とし、$\mathbf{S}(t)$ が $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{S}\mathbf{N}$ を満たすとき、$\mathbf{M}(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}_0\mathbf{S}$ ならば $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbf{M}$ であることを示せ。（ヒント：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{S}^{-1} = -\mathbf{S}^{-1}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{S}^{-1}$。）

3. **体積の増大。** $\mathbf{M}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ とする。$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{N}$ となる $\mathbf{N}$ を求め、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\det\mathbf{M} = \operatorname{tr}\mathbf{N}$ を確かめよ。

4. **高次の累乗。** $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbf{M}$ のとき、任意の正の整数 $k$ に対して $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{tr}(\mathbf{M}^k) = 0$ であることを直接示せ。

## さらに学ぶために

- **P. G. Drazin & R. S. Johnson, *Solitons: An Introduction***（Cambridge University Press）。ラックス対も含む、学部生向けの標準的な入門書。
- **Thierry Dauxois & Michel Peyrard, *Physics of Solitons***（Cambridge University Press）。Scott Russell の波の話も収められている。
- **Dwight Neuenschwander, *Emmy Noether's Wonderful Theorem***（Johns Hopkins University Press）。対称性がどのように保存則を与えるかを解説している。

# 7.8 四つの平方数

**問題**

**STEP III 1994、問 8**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/94-s3-q8`

## 導入

7 は 2 つの平方数の和（sum of squares）としても、3 つの平方数の和としても表せない。しかし 4 つの平方数の和としては表せる：$7 = 4 + 1 + 1 + 1$。1770 年、ジョゼフ＝ルイ・ラグランジュ（Joseph-Louis Lagrange）は、**すべての**正の整数が 4 つの平方数の和として表せることを証明した（$0^2$ も許す）。この定理は 1621 年にバシェ（Bachet）によって予想され、フェルマー（Fermat）も主張していたが、彼はいつものように証明を残さなかった。オイラー（Euler）は 40 年にわたってこの問題に取り組んだが、完全には解決できなかった。

1748 年にオイラーが発見した鍵となる道具が、この問題の中にある。それは、4 つの平方数の和どうしの積は、それ自身もまた 4 つの平方数の和になるという事実である。これにより、ラグランジュの定理は素数（prime）についてだけ証明すればよく、残りは掛け合わせることで従う。この問題では、複素行列の行列式（determinant）からわずか数行でこの恒等式（identity）を導く。これらの行列は、実は Section 6.7 の四元数（quaternions）が姿を変えたものである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 2 つの平方数の場合を思い出そう。複素数（complex number）$z = a + b\mathrm{i}$, $w = p + q\mathrm{i}$ に対して $|z|^2|w|^2 = |zw|^2$ が成り立つので、$(a^2 + b^2)(p^2 + q^2)$ は 2 つの平方数の和になる。行列を使って、これを 4 つの平方数に拡張するにはどうすればよいだろうか？

考え方は、4 つの実数からつくられる一種の「数」で、その「大きさの 2 乗」が $a^2+b^2+c^2+d^2$ であり、しかも乗法的（multiplicative）であるようなものを見つけることである。行列は行列式に関して乗法的である：$\det(\mathbf{AB}) = \det\mathbf{A}\det\mathbf{B}$。そこで、$a,b,c,d$ からつくられ、行列式が $a^2+b^2+c^2+d^2$ となり、さらにそのような行列どうしの積が再び同じ形になるような行列がほしい。

## 順を追って解く

### 段階 1　行列式は 4 つの平方数の和である

**考えてみよう**　$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix}$ の行列式は何か？$z_1 = a+b\mathrm{i}$, $z_2 = c+d\mathrm{i}$ とすると、それは $a,b,c,d$ を用いてどう表されるか？

$\det = z_1z_1^* + z_2z_2^* = |z_1|^2 + |z_2|^2 = a^2+b^2+c^2+d^2$ である。同様に、$z_3 = p+q\mathrm{i}$, $z_4 = r+s\mathrm{i}$ とすると、2 つ目の行列の行列式は $p^2+q^2+r^2+s^2$ である。

### 段階 2　積も同じ形をもつ

掛け合わせると、

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_3 & z_4 \\ -z_4^* & z_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1z_3 - z_2z_4^* & z_1z_4 + z_2z_3^* \\ -z_2^*z_3 - z_1^*z_4^* & -z_2^*z_4 + z_1^*z_3^* \end{pmatrix}.$$

$w_1 = z_1z_3 - z_2z_4^*$, $w_2 = z_1z_4 + z_2z_3^*$ とおくと、下の行は $(-w_2^*, w_1^*)$ となるので、積は $\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ -w_2^* & w_1^* \end{pmatrix}$ であり、同じ形をしている。その行列式は $|w_1|^2+|w_2|^2$ であり、行列式は積を保つから、

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2) = |w_1|^2 + |w_2|^2.$$

### 段階 3　4 つの平方数を読み取る

**手を止めて、やってみよう**　$w_1 = (a+b\mathrm{i})(p+q\mathrm{i}) - (c+d\mathrm{i})(r-s\mathrm{i})$ と $w_2 = (a+b\mathrm{i})(r+s\mathrm{i}) + (c+d\mathrm{i})(p-q\mathrm{i})$ を展開し、実部と虚部に分けよ。

$$w_1 = (ap - bq - cr - ds) + \mathrm{i}(aq + bp + cs - dr),$$
$$w_2 = (ar - bs + cp + dq) + \mathrm{i}(as + br - cq + dp).$$

よって

$$L_1 = ap - bq - cr - ds, \qquad L_2 = aq + bp + cs - dr,$$
$$L_3 = ar - bs + cp + dq, \qquad L_4 = as + br - cq + dp,$$

とおけば、いずれも $a,b,c,d$ についても $p,q,r,s$ についても 1 次式であり、$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2) = L_1^2+L_2^2+L_3^2+L_4^2$ が成り立つ。 ■

たとえば、$7 = 2^2+1^2+1^2+1^2$, $3 = 1^2+1^2+1^2+0^2$ である。$(a,b,c,d) = (2,1,1,1)$, $(p,q,r,s) = (1,1,1,0)$ とすると、上の式から $(L_1,L_2,L_3,L_4) = (0,2,4,1)$ が得られ、実際 $0^2+2^2+4^2+1^2 = 21 = 7\times 3$ となっている。

## 振り返り

- **乗法性が仕事をする。**この恒等式は $\det(\mathbf{AB}) = \det\mathbf{A}\det\mathbf{B}$ から得られた。これは、2 つの平方数の恒等式が $|zw| = |z||w|$ から得られるのとまったく同じである。
- **積について閉じていること。**特別な形 $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix}$ は積によって保たれる。このおかげで、結果が再び 4 つの平方数の和になるのである。
- **丁寧な計算の管理が大切である。**最後の段階は機械的だが間違えやすい。符号と共役（conjugate）は注意深く扱わなければならない。

## 背後にある数学

### ラグランジュの四平方定理

ラグランジュの証明の概略は次のとおりである。オイラーの恒等式により、すべての素数 $p$ が 4 つの平方数の和であることを示せば十分である。数え上げの議論により、$m < p$ を満たすある倍数 $mp$ が 4 つの平方数の和であることがわかる。次に巧妙な「降下法（descent）」によって、$1 < m < p$ で $mp$ が 4 つの平方数の和ならば、より小さいある $m'$ についても $m'p$ が 4 つの平方数の和であることが示される。これを繰り返せば $m = 1$ に到達する（Section 1.5 のフェルマーの降下法と比べてみよ）。1834 年、ヤコビ（Jacobi）はさらに先へ進み、$n$ を 4 つの平方数の和として表す方法の正確な個数を求めた。それは、$n$ の約数（divisor）のうち 4 の倍数でないものの和の 8 倍である。たとえば、1 の表し方は 8 通りある（4 つの位置のどれかに $\pm 1$ を置く）。

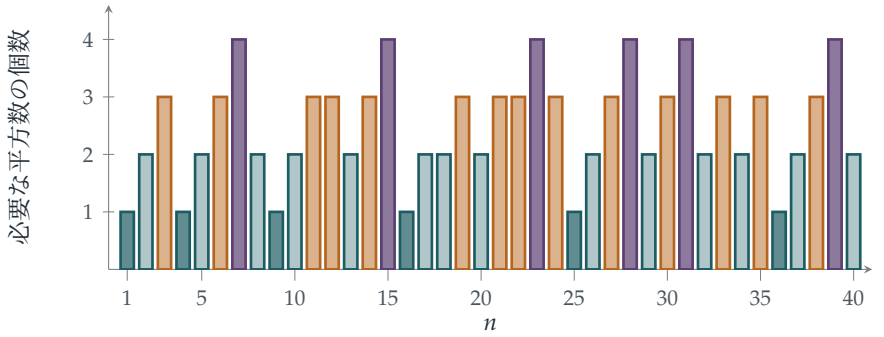



**図 7.8.1**　1 から 40 までの各 $n$ をつくるのに必要な平方数の最小個数。ラグランジュの定理により、どの数も高々 4 個で足りる。4 個必要な数（紫）は $7, 15, 23, 28, 31, 39, \ldots$ であり、ルジャンドル（Legendre）とガウス（Gauss）の定理により、これはちょうど $4^k(8m+7)$ の形の数である。

### 2 つ、3 つ、4 つ

次元ごとの様子は微妙である。2 つの平方数の和は複素数から生じ、ある数が 2 つの平方数の和となるのは、$4k+3$ の形の素因数がすべて偶数乗で現れるときであり、かつそのときに限る（Section 1.6）。4 つの平方数の和は四元数から生じ、すべての数がそう表せる。ところが 3 つの平方数の和には積の恒等式がまったくない（乗法的な大きさをもつ 3 次元の数の体系は存在しない。ハミルトン（Hamilton）が 3 つ組で失敗したのはそのためである。Section 6.7 を参照）。そして定理もより難しい。ルジャンドルとガウスは、$n = 4^k(8m+7)$ でない限り $n$ は 3 つの平方数の和であることを示した（図 7.8.1）。4 より先では、8 次元の八元数（octonions）が 8 つの平方数の恒等式を与える。これは Degen と Graves によって発見された。そしてフルヴィッツ（Hurwitz）は 1898 年に、この種の恒等式が存在するのは 1, 2, 4, 8 個の平方数の場合に限ることを証明した。

### ウェアリングの問題

ラグランジュの定理は、1770 年にエドワード・ウェアリング（Edward Waring）が提起した問題の最初の場合である。その問題とは、各 $k$ に対して、すべての正の整数が高々 $g(k)$ 個の $k$ 乗数の和として表せるような数 $g(k)$ が存在するか、というものである。ダフィット・ヒルベルト（David Hilbert）は 1909 年に、そのような数が存在することを証明した。現在では $g(2) = 4$, $g(3) = 9$（たとえば $23 = 2 \cdot 2^3 + 7 \cdot 1^3$ には 9 個の立方数が必要である）、$g(4) = 19$ であることがわかっている。

## 思考のスキル

**乗法的な構造を見つける**

ある性質が積によって保たれることを示すには、その性質が対象の「大きさ」になっていて、しかも大きさが乗法的であるような代数的構造（複素数、四元数、行列）を見つけよ。

そのような構造が見つかれば、積の恒等式はおのずと得られ、すべての数についての問題は素数についての問題に帰着される。

## 次の一歩

1. **具体例。** $(a,b,c,d) = (p,q,r,s) = (2,1,1,1)$ として $L_1, \ldots, L_4$ の式を用い、$49 = 7 \times 7$ を 4 つの平方数の和として表し、答えを確かめよ。それは自明な $49 = 7^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$ と同じだろうか？

2. **4 つの中の 2 つ。** $c = d = r = s = 0$ のとき、この恒等式が Section 1.6 の 2 つの平方数の恒等式に帰着することを示せ。

3. **4 つの平方数が必要な数。** 平方数を 8 を法として（modulo）考えることにより、$8m + 7$ の形の数は 3 つの平方数の和として表せないことを示せ。

4. **ヤコビの公式。** 2 を 4 つの平方数の和として表す方法（順序と符号を区別する）を数え上げ、その答えが $8 \times (1 + 2) = 24$ であることを確かめよ。

## さらに学ぶために

- **Harold Davenport, *The Higher Arithmetic***（Cambridge University Press）。第 V 章でラグランジュの四平方定理を証明している。
- **John Conway & Derek Smith, *On Quaternions and Octonions***（A. K. Peters）。四元数の算術を扱い、四元数の整数を用いた四平方定理の証明も含む。
- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***、「Representing numbers as sums of two squares」の章（数を 2 つの平方数の和として表す）。本節と対をなす、2 つの平方数の話である。

# 7.9 正多面体はただ五つ

**問題**

**STEP III 1999、問 4**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/99-s3-q4`

## 導入

正多角形（regular polygon）は無限に多く存在する。正三角形、正方形、正五角形と、辺の数がいくつであっても正多角形がある。それならば正多面体（regular polyhedron）も無限に多くあると思うかもしれない。しかし実際にはちょうど 5 つしかない。正四面体（tetrahedron）、立方体（cube）、正八面体（octahedron）、正十二面体（dodecahedron）、正二十面体（icosahedron）である。プラトン（Plato）はこのうち 4 つを四元素（火、土、空気、水）に、残る 1 つを宇宙に対応させた。史上最も大きな影響を与えた数学書であるユークリッド（Euclid）の『原論』（*Elements*）は、これ以外に正多面体が存在しないことの証明で締めくくられている。ケプラー（Kepler）はこれらを用いて太陽系の模型を作った。

この問題では、オイラー（Euler）が 1750 年に発見した一つの驚くべき公式、すなわち任意の凸多面体（convex polyhedron）について $V - E + F = 2$ が成り立つという公式から、この分類をわずか数行で証明する。数え上げに関する公式が図形に関する定理に姿を変え、数 2 が球面の「指紋」であることが明らかになる。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 立方体でオイラーの公式を確かめよ。頂点（vertex）、辺（edge）、面（face）はそれぞれいくつあるか。正方形を底面とする角錐ではどうか。

立方体では $V = 8$、$E = 12$、$F = 6$ であり、$8 - 12 + 6 = 2$ となる。正方形を底面とする角錐は頂点が 5 個、辺が 8 本、面が 5 枚であり、$5 - 8 + 5 = 2$ となる。この公式は、

穴のない多面体であれば、どれほど不規則な形であっても成り立つ。

> **考えてみよう**　正多面体では、各面は $m$ 本の辺をもち、各辺はちょうど 2 枚の面に接する。このことから $E$ と $F$ の間にどのような等式が得られるか。同様に、$E$ と $V$ の間にはどうか。

辺と面の接続（incidence）を 2 通りに数える。$F$ 枚の面はそれぞれ $m$ 本の辺をもち、各辺は（それが接する 2 枚の面それぞれについて 1 回ずつ）2 回数えられるので、$mF = 2E$ である。同様に、各頂点には $n$ 本の辺が集まり、各辺には端点が 2 つあるので、$nV = 2E$ である。この「同じものを 2 通りに数える」手法を**二重数え上げ**（double counting）という。

## 順を追って解く

### 段階 1　$F$ を表す式

$mF = 2E$ と $nV = 2E$ から、$E = \frac{mF}{2}$、$V = \frac{mF}{n}$ である。これらをオイラーの公式に代入すると、

$$\frac{mF}{n} - \frac{mF}{2} + F = 2 \quad\Longrightarrow\quad F\,\frac{2m - mn + 2n}{2n} = 2 \quad\Longrightarrow\quad F = \frac{4n}{2m + 2n - mn}.$$

また $4 - (n-2)(m-2) = 4 - (mn - 2m - 2n + 4) = 2m + 2n - mn = h$ である。よって $F = \frac{4n}{h}$ である。 ■

### 段階 2　$m$ と $n$ はどのような値をとりうるか

> **考えてみよう**　$m$（面の辺の数）と $n$（頂点に集まる面の数）の最小値はそれぞれいくつか。また $F > 0$ であることから、$h$ の符号はどうでなければならないか。

多角形には少なくとも 3 本の辺が必要なので $m \geq 3$ であり、立体の各頂点には少なくとも 3 枚の面が集まらなければならないので $n \geq 3$ である。$F > 0$ であるから $h > 0$、すなわち $(n-2)(m-2) < 4$ が必要である。2 つの因数はともに 1 以上なので、$(m-2, n-2)$ としてありうるのは $(1,1)$、$(1,2)$、$(2,1)$、$(1,3)$、$(3,1)$ のみである。

> **手を止めて、やってみよう**　5 つの場合それぞれについて、$h$、$F$、さらに $E = \frac{mF}{2}$ と $V = \frac{mF}{n}$ を計算せよ。それぞれどの立体であるかを特定せよ。

| $m$ | $n$ | $h$ | $F$ | $E$ | $V$ | 立体 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 3 | 4 | 6 | 4 | 正四面体 |
| 3 | 4 | 2 | 8 | 12 | 6 | 正八面体 |
| 4 | 3 | 2 | 6 | 12 | 8 | 立方体 |
| 3 | 5 | 1 | 20 | 30 | 12 | 正二十面体 |
| 5 | 3 | 1 | 12 | 30 | 20 | 正十二面体 |

ありうるのはこれらだけなので、正多面体は高々 5 種類である。そして 5 種類すべてが実際に存在する（ユークリッドはそれぞれの作図法を示している）。 ■

## 振り返り

- **二重数え上げ。** 辺と面、辺と頂点の接続を 2 通りに数えることで、$mF = 2E$ と $nV = 2E$ が得られた。
- **正値性から得られる不等式。** $F > 0$ という単純な条件によって、無限にあった候補が 5 つにまで絞られた。
- **存在は別問題である。** この議論で示されるのは高々 5 種類であるということであり、それぞれが実際に存在することは、作図によって確かめなければならない。

## 背後にある数学

### オイラーの公式と位相幾何学

オイラーは 1750 年に $V - E + F = 2$ を述べたが、その証明には不備があった。この公式には、証明の試み、反例（counterexample）、そしてその修正が繰り返された興味深い歴史がある。中央に正方形の穴が貫通した「額縁」型の多面体では $V - E + F = 0$ となり、2 つの立方体を 1 つの頂点で接合した多面体では $V - E + F = 3$ となる。ラカトシュ・イムレ（Imre Lakatos）はこの歴史を題材に、数学の概念が反例によってどのように研ぎ澄まされていくかを論じた有名な書物 *Proofs and Refutations*（『証明と論駁』）を著した。最終的な解決は、$V - E + F$ が位相幾何学（topology）というゆるやかな意味での曲面の形にのみ依存する、というものである。すなわち、球面に変形できる任意の曲面ではこの値は 2 であり、トーラス（torus、ドーナツの表面）では 0、$g$ 個の穴をもつ曲面では $2 - 2g$ である。この数は**オイラー標数**（Euler characteristic）と呼ばれ、伸ばしたり曲げたりしても変わらない性質を研究する位相幾何学の、最初期の概念の一つであった。

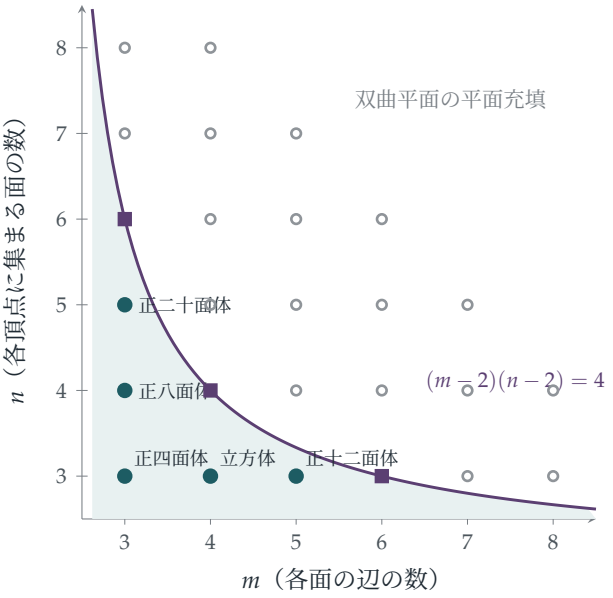



**図 7.9.1**　$m, n \geq 3$ を満たす組 $(m, n)$ としてありうるもの。曲線 $(m-2)(n-2) = 4$ の下側（網掛け部分）にあるのが 5 つのプラトン立体（緑青色）である。曲線上にあるのは平坦な平面の 3 つの平面充填（紫の四角）であり、それぞれ正三角形（$m = 3$、$n = 6$）、正方形（4, 4）、正六角形（6, 3）によるものである。曲線より上側の各点（白抜きの丸）は、双曲平面の正則な平面充填を与える。

## 球面の先へ

$h = 0$ や $h < 0$ のときはどうなるだろうか。$(m-2)(n-2) = 4$ のときは $(3, 6)$、$(4, 4)$、$(6, 3)$ の 3 つの解がある。すなわち、6 枚の正三角形、4 枚の正方形、あるいは 3 枚の正六角形が 1 点に集まり、その角の和がちょうど 360° になる。これらは平坦な平面の 3 つの正則な平面充填（tiling）であり、浴室の床のタイルや蜂の巣に見られる模様である。そして $(m-2)(n-2) > 4$ のときは、1 つの頂点に集まる角の和が 360° を超える。これは平坦な平面では不可能だが、Section 5.8 で扱った双曲平面（hyperbolic plane）ではまったく問題なく実現できる。双曲平面の正則な平面充填は無限に多く存在し、図 7.9.1 の曲線より上側の各点に 1 つずつ対応する。エッシャー（Escher）の木版画 *Circle Limit*（『円の極限』）連作は、そのうちのいくつかを描いたものである。このように、プラトン立体の分類は、実は幾何学全体を貫く三分法（trichotomy）——球面、平面、双曲平面——の最初の場合なのである。

### 対称性の群

プラトン立体の対称性は群（group）をなす。正四面体では 12 個の回転、立方体と正八面体では 24 個の回転（この 2 つは双対（dual）である。つまり面と頂点を入れ替える、$m \leftrightarrow n$）、正十二面体と正二十面体では 60 個の回転である。位数 60 の正二十面体群は、Section 6.4 で触れたように、五次方程式（quintic）が冪根（radicals）によって解けないことの原因となる「単純」群（simple group）である。フェリックス・クライン（Felix Klein）は、正二十面体と五次方程式の解法とを結びつける一冊の本 *Lectures on the Icosahedron*（『正二十面体講義』、1884 年）を著している。

## 思考のスキル

**二重数え上げ**

同じ集まりを 2 通りの方法で数え、その結果を等しいとおく。

ここでの集まりは、辺がその面上にあるような（辺, 面）の組全体の集合であった。二重数え上げは組合せ論（combinatorics）における最も強力な道具の一つであり、第 9 章の随所で再び登場する。

## 次の一歩

1. **双対性。** $m$ と $n$ を入れ替えると、$V$ と $F$ が入れ替わり、$E$ は変わらないことを示せ。どのプラトン立体どうしが互いに双対か。自己双対なのはどれか。

2. **サッカーボール。** 伝統的なサッカーボールは 12 枚の正五角形と 20 枚の正六角形からなり、各頂点には 3 枚の面が集まる。二重数え上げとオイラーの公式を用いて、$V - E + F = 2$ を確かめよ。さらに一般に、五角形と六角形からなり各頂点に 3 枚ずつ集まるこのような多面体は、ちょうど 12 枚の五角形をもつことを示せ。

3. **トーラス。**「額縁」型の多面体（正方形の穴があいた四角いブロック）を作り、$V$、$E$、$F$ を数えよ。$V - E + F = 0$ となることを確かめよ。

4. **頂点に集まる角。** 正 $m$ 角形の内角は $180^\circ\left(1 - \frac{2}{m}\right)$ である。凸な立体の 1 つの頂点のまわりにそれが $n$ 個収まる（和が $360^\circ$ 未満となる）のは、$(m-2)(n-2) < 4$ のとき、かつそのときに限ることを示せ。これにより分類の第二の証明が得られる。

## さらに学ぶために

- **David Richeson, *Euler's Gem***（Princeton University Press）。$V - E + F = 2$ の歴史と、それがどのように位相幾何学へとつながったかを描く。シックスフォーム（sixth form、英国の大学進学準備課程）の生徒にとって最適な一冊である。
- **Imre Lakatos, *Proofs and Refutations***（Cambridge University Press）。オイラーの公式と証明の本質をめぐる対話篇。
- **H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes***（Dover）。正多面体とその高次元の仲間についての古典的名著。

# 学んだこと

本章は、行列（matrix）とはそれ自体で独自の性格をもつ空間の変換である、という話から始まり、三つの問いを立てた。行列は数とどこが似ていてどこが違うのか、行列は実際に何をしているのか、そして何が変わらずに保たれるのか、である。本章の九つの問題が明らかにしたことをここでまとめる。

### 1. 行列は数とどこが似ていて、どこが違うのか

行列は足し算もかけ算もできるが、Section 7.1 では、なじみのある規則のうちどれが成り立たなくなるかを見た。かけ算は可換（commutative）ではないので、$(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ は $\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2$ になるとは限らない。零因子（zero divisor）が存在するので、$\mathbf{AB}=\mathbf{0}$ であっても $\mathbf{BA}=\mathbf{0}$ とは限らない。さらに、行列の二次方程式は無限に多くの解をもちうる。こうした規則の破れには、いずれも行列が平面に対して何をするかという観点から幾何学的な説明がついた。一方で決定的に重要なのは、行列式（determinant）が積を保つこと、すなわち $\det(\mathbf{AB})=\det\mathbf{A}\det\mathbf{B}$ が成り立つことである。Section 7.3 では、この性質が本質的に行列式を**特徴づける**ことを示し、Section 7.8 ではこれを用いてオイラー（Euler）の四平方恒等式（four-square identity）を証明した。これは、すべての自然数は四つの平方数の和で表せるというラグランジュ（Lagrange）の定理の鍵となる段階である。

### 2. 行列は実際に何をしているのか

いくつかの節では、適切な視点を見つけることでこの問いに答えた。

- **固有ベクトル**（eigenvector）（Section 7.2）は、行列によって向きが変わらない方向である。固有ベクトルを座標軸にとると、対称行列（symmetric matrix）は単なる引き伸ばしにすぎず、円の像は楕円（ellipse）となって、その軸と面積を直接読み取ることができる。
- **行列式**（Section 7.3）は符号付きの面積の拡大率である。ずれ変換（shear）は面積を保ち、入れ替えは向き（orientation）を反転させ、特異行列（singular matrix）は平面を押しつぶして平らにしてしまう。
- **トレースと行列式**（Section 7.4）は、ケイリー・ハミルトンの定理（Cayley–Hamilton theorem）を通して、行列が数回の操作の後に単位行列（identity）に戻るかどうか

を決定する。$\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$ をみたす行列は回転とは限らないが、それは斜交座標で見た回転なのである。そして整数行列のトレース（trace）は整数であるから、結晶は五回対称性をもちえない。

- **三次元の回転**（Section 7.5）は、ロドリゲスの公式（Rodrigues' formula）によって外積（cross product）から組み立てられる。これは $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ の三次元版である。
- **双曲線回転**（hyperbolic rotation）（Section 7.6）は、点を双曲線に沿って動かし、その双曲角を足し合わせる。これは特殊相対性理論（special relativity）におけるローレンツ・ブースト（Lorentz boost）であり、その不変直線は光の経路である。

### 3. 何が変わらずに保たれるのか

不変量（invariant）はいたるところに現れた。回転は $x^2 + y^2$ を保ち、ローレンツ・ブーストは $x^2 - y^2$ を保ち、相似な行列（similar matrices）は同じトレースと行列式をもつ。Section 7.7 では、$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ にしたがって時間発展する行列は、成分がどれほど変化してもトレースと行列式、したがって固有値（eigenvalue）を一定に保った。これがソリトン（soliton）の保存則（conservation law）の背後にある仕組みである。そして Section 7.9 では、不変量は $V - E + F = 2$ という一つの数であった。これはすべての凸多面体（convex polyhedron）について成り立ち、正多面体をわずか五種類に絞り込む。この数、すなわちオイラー標数（Euler characteristic）は、位相幾何学（topology）における最初の不変量の一つであった。

### 4. 線形代数の道具箱

| 手法 | 使った場面 |
|---|---|
| 幾何学的な反例 | 成り立たない規則（7.1） |
| 自然な軸としての固有ベクトル | 楕円（7.2）、ブースト（7.6） |
| 特別な行列で探りを入れる | 行列式（7.3） |
| ケイリー・ハミルトンの定理 | 有限位数（7.4） |
| 平行成分と垂直成分への分解 | ロドリゲスの公式（7.5） |
| 適切なパラメータの選択 | ラピディティ（7.6） |
| $\mathrm{tr}(\mathbf{MN}) = \mathrm{tr}(\mathbf{NM})$ | 保存量（7.7） |
| 行列式の乗法性 | 四平方和（7.8） |
| 二重数え上げ | プラトンの立体（7.9） |

### この先へ

- Section 11.2 では、固有値と固有ベクトルがばねと質点からなる系の振動を支配する。
- Section 13.7 では、共分散行列（covariance matrix）の固有ベクトルが統計学に登場する。
- 微分方程式（differential equation）と力学系（dynamical system）は第 8 章の主題である。

**大学入学前にさらに先へ進みたい人へ**

- **3Blue1Brown, *Essence of Linear Algebra***（線形代数の本質）：行列が何をしているのかを見せてくれる無料の動画シリーズ。まずはこれを見るとよい。
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（線形代数入門）：理解と応用を強く重視した、定番の入門書。
- **Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right***：線形写像（linear map）を中心に据えた、より抽象的なアプローチ。オンラインで無料公開されている。
- **David Richeson, *Euler's Gem***（オイラーの宝石）：オイラーの公式と位相幾何学の誕生。

カプランスキー（Kaplansky）は冗談めかして、自分とハルモス（Halmos）は座標を使わずに考えるが、人目のないところでは行列を使って「猛烈に」計算している、と語った。この言葉は本章が示そうとしてきたことをよく表している。行列は具体的で計算可能なものだが、あらゆる計算の背後には幾何学（引き伸ばし、回転、射影（projection）、ブースト）があり、さらにそれをどう書き表すかによらない不変量がある。この二つの見方の間を自在に行き来できるようになることは、数学者が身につけうる最も価値のあるスキルの一つである。

# 「次の一歩」の解答

以下は完全な解答ではなく、簡潔な答えとヒントである。自分の解答を確かめられるよう、結果と鍵となる段階を示してある。見る前に、まずそれぞれの問題にきちんと取り組んでほしい。

## 7.1 行列では成り立たない法則

1. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ として $\mathbf{XP}$ と $\mathbf{PX}$ を比較すると、$c = 0$ かつ $a = d$ でなければならない。すなわち行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ である。

2. ケイリー・ハミルトンの定理（Cayley–Hamilton theorem）より $\mathbf{N}^2 = t\mathbf{N} - d\mathbf{I}$ であるから、$t\mathbf{N} = d\mathbf{I}$ となる。$t \neq 0$ ならば $\mathbf{N}$ は $\mathbf{I}$ の定数倍であり、$\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ から $\mathbf{N} = \mathbf{0}$ となって $t \neq 0$ に矛盾する。よって $t = 0$ であり、このとき $d = 0$ である。答えは $a^2 + bc = 0$ を満たす $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ である。

3. 2 乗した行列の対角成分は $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$、非対角成分は 0 である。不動ベクトルは $(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2})$ であるから、これは原点を通り角 $\frac{\theta}{2}$ をなす直線に関する鏡映（reflection）である。

4. $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると $\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix}$ である。これから $(a+d)\mathbf{M}$ を引き、$(ad - bc)\mathbf{I}$ を加えると $\mathbf{0}$ になる。

## 7.2 向きを変えずに伸ばす

1. $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ で $\mathbf{Mu} = \lambda\mathbf{u}$ となるためには $\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ が必要であり、これがその 2 次方程式である。ここではトレース（trace）が 6、行列式（determinant）が $\frac{4}{25}(54 - 4) = 8$ であるから、$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ となる。固有値（eigenvalue）は $\lambda = 2$（$(1, 2)$ に対して）と 4（$(2, -1)$ に対して）である。

2. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{Mu} = \lambda\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ であり、$\mathbf{M}$ は対称行列（symmetric matrix）であるから $\mathbf{v} \cdot \mathbf{Mu} = \mathbf{Mv} \cdot \mathbf{u} = \mu\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ である。したがって $(\lambda - \mu)\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ となる。

3. 特性方程式（characteristic equation）$\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0$ の判別式（discriminant）

は $-4\sin^2\theta$ であり、$\theta$ が $\pi$ の整数倍でない限り負である。固有値は $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}$ である。

4. $(1,0) = \frac{1}{5}(1,2) + \frac{2}{5}(2,-1)$ であるから、$T^n(1,0) = \frac{2^n}{5}(1,2) + \frac{2\cdot 4^n}{5}(2,-1) = \frac{1}{5}\big(2^n + 4^{n+1},\, 2^{n+1} - 2\cdot 4^n\big)$ である。$n = 1$ のとき、これは期待どおり $(\frac{18}{5}, -\frac{4}{5})$ となる。

### 7.3 行列式を行列式たらしめるもの

1. $(\det\mathbf{MN})^3 = (\det\mathbf{M})^3(\det\mathbf{N})^3$ であるが、$(\det\mathbf{J})^3 = -1 \neq 1$ である。関数 $|\det\mathbf{M}|$ は乗法的（multiplicative）であるが、$|\det\mathbf{J}| = 1$ である。

2. $\begin{pmatrix} a & \lambda a \\ c & \lambda c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ であり、2 番目の因子の第 2 行は第 1 行の 0 倍であるから、その f の値は 0 である。

3. $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{J}\mathbf{K}_k\mathbf{J}$ であるから、その値は $\mathrm{f}(\mathbf{J})^2\mathrm{f}(\mathbf{K}_k) = \mathrm{f}(\mathbf{K}_k)$ である。また $\mathbf{K}_k\mathbf{K}_l = \mathbf{K}_{kl}$ である。

4. 行基本変形（row reduction）により、任意の正則（invertible）行列は基本行列（elementary matrix）の積として表される。基本行列とは、行の入れ替え（$\mathbf{J}$）、行の定数倍（$\mathbf{K}_k$ または $\mathbf{J}\mathbf{K}_k\mathbf{J}$）、せん断（shear）（$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ またはその $\mathbf{J}$ による共役）である。せん断は $\mathrm{f} = 1$ を満たす（小問 (iv) と同様に、$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K}$ を用いる）。また $\mathbf{J}$ はせん断と $\mathbf{K}_{-1}$ の積であるから、$\mathrm{f}(\mathbf{K}_{-1}) = \mathrm{f}(\mathbf{J}) = -1$ である。よって $\mathrm{g}(k) = \mathrm{f}(\mathbf{K}_k)$ とおくと $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \mathrm{g}(\det\mathbf{M})$ である。特異（singular）な $\mathbf{M}$ については、小問 (iii) より $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = 0$ である。

### 7.4 もとに戻る行列

1. $|1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}|^2 = 2 + 2\cos\phi = 1$ より $\phi = \pm\frac{2\pi}{3}$ であるから、$\mathbf{R}^3 = \mathbf{I}$ である。$\mathbf{S}$ について：その固有値は 1 の 3 乗根である。もし両方とも 1 ならば、$x^3 - 1$ は相異なる根をもつので、$\mathbf{S}$ は対角化可能（diagonalisable）であり、$\mathbf{I}$ に等しくなる。実行列の実数でない固有値は共役（conjugate）な組で現れるから、固有値は $\mathrm{e}^{\pm 2\pi\mathrm{i}/3}$ であり、$\det\mathbf{S} = 1$、$\operatorname{tr}\mathbf{S} = -1$ である。

2. 固有値は原始 6 乗根（primitive sixth root）$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/3}$ でなければならない（6 乗根をほかに選んで共役と組にすると、$\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$ または $\mathbf{M}^3 = \mathbf{I}$ となる）。よって $\operatorname{tr}\mathbf{M} = 1$、$\det\mathbf{M} = 1$ である。

3. 固有値は積が 1 である 1 の冪根（root of unity）であるから、$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}$（または両方とも $\pm 1$）であり、トレース $2\cos\theta$ は $[-2,2]$ に属する整数である。位数（order）6 の例：$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$。

4. $\mathbf{M}^3 = (t^2 - d)\mathbf{M} - td\mathbf{I}$、$\mathbf{M}^4 = (t^3 - 2td)\mathbf{M} - d(t^2 - d)\mathbf{I}$ である。$\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$ となるためには（$\mathbf{M}$ は $\mathbf{I}$ の定数倍ではありえないので）、$t(t^2 - 2d) = 0$ かつ $d(t^2 - d) = 1$ である。$t = 0$ とすると $-d^2 = 1$ となり不可能である。よって $t^2 = 2d$、$d^2 = 1$ であり、$d = 1$、$t^2 = 2$ である。

### 7.5 三次元の回転

1. $z \mapsto a + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - a)$ である。合成（composite）は $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}z + k$、ただし $k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}a(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) + b(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})$ である。$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)} \neq 1$ ならば、これは不動点（fixed point）$c = \frac{k}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}}$ をもつ。$\theta + \phi = 2\pi$ ならば、これは $(b - a)(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})$ による平行移動（translation）である。
2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$：これは $(1, 1, 1)$ を固定し、トレースは $0 = 1 + 2\cos 120^\circ$ であり、$\mathbf{i} \to \mathbf{j} \to \mathbf{k} \to \mathbf{i}$ と移す。
3. $\mathbf{K}^2\mathbf{r} = \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}$ であり、さらに $\mathbf{K}^3\mathbf{r} = \mathbf{n} \times \big((\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}\big) = -\mathbf{K}\mathbf{r}$ である。級数において、奇数乗の項からは $(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots)\mathbf{K} = \sin\theta\,\mathbf{K}$ が、偶数乗の項（$\mathbf{K}^2$ 以降）からは $(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \cdots)\mathbf{K}^2 = (1 - \cos\theta)\mathbf{K}^2$ が得られる。
4. 合成は交線上のすべての点を固定し、行列式は $(-1)^2 = 1$ である。その交線に垂直な各平面上では、これは角 $\alpha$ をなす 2 直線に関する鏡映の積であり、$2\alpha$ の回転である。

### 7.6 双曲的回転と相対性理論

1. $T(u)T(w)$ の成分は $\cosh u \cosh w + \sinh u \sinh w = \cosh(u + w)$ および $\sinh u \cosh w + \cosh u \sinh w = \sinh(u + w)$ である。よって $T(u)^{-1} = T(-u)$ である。
2. $\tanh u = 0.8$ より $u = \frac{1}{2}\ln\frac{1.8}{0.2} = \ln 3 \approx 1.099$、$\cosh u = \frac{1}{2}(3 + \frac{1}{3}) = \frac{5}{3}$ である。宇宙船上では $10 \times \frac{3}{5} = 6$ 年が経過する。
3. 面積は $\frac{1}{2}\oint(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$ である。直線の辺からの寄与はなく、双曲線（hyperbola）に沿っては $x = \cosh s$、$y = \sinh s$ として被積分関数が $(\cosh^2 s - \sinh^2 s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}s$ となるので、$\frac{v}{2}$ が得られる。$T$ の行列式は $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ であるから、$T$ は面積を保つ。また $T$ は双曲線をそれ自身に移し、パラメータ $v$ の点を $v + u$ の点に移す。
4. $x' + y' = (\cosh u + \sinh u)(x + y) = \mathrm{e}^u p$、$x' - y' = \mathrm{e}^{-u} q$ であり、また $x^2 - y^2 = pq$ である。この座標では $T$ はスクイーズ写像（squeeze mapping）である。すなわ

ち漸近線（asymptote）$y = x$ に沿って $\mathrm{e}^{u}$ 倍に引き伸ばし、$y = -x$ に沿って $\mathrm{e}^{-u}$ 倍に縮める写像であり、各双曲線 $pq =$ 一定に沿って点を滑らせる。

### 7.7 決して変わらない量

1. $\dot{a} = -Ct = -tc$、$\dot{d} = Ct = tc$、$\dot{c} = 0$、$\dot{b} = (A - D)t - Ct^3 = t(a - d)$ であり、これは $\mathbf{MN} - \mathbf{NM} = t \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix}$ と一致する。
2. $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{SN}$ を用いると、$\dot{\mathbf{M}} = -\mathbf{S}^{-1}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}_0\mathbf{S} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}_0\dot{\mathbf{S}} = -\mathbf{NM} + \mathbf{MN}$ である。
3. $\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ であり、$\ln\det\mathbf{M} = 2t - t = t$ で、その導関数は $1 = \operatorname{tr}\mathbf{N}$ である。
4. トレースの巡回性（cyclic property）により $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{tr}(\mathbf{M}^k) = \sum_j \operatorname{tr}(\mathbf{M}^j\dot{\mathbf{M}}\mathbf{M}^{k-1-j}) = k\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{k-1}\dot{\mathbf{M}})$ であり、再び巡回性により $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{k-1}(\mathbf{MN} - \mathbf{NM})) = \operatorname{tr}(\mathbf{M}^k\mathbf{N}) - \operatorname{tr}(\mathbf{M}^{k-1}\mathbf{NM}) = 0$ である。

### 7.8 四つの平方数

1. $(L_1, L_2, L_3, L_4) = (1, 4, 4, 4)$ であり、$1 + 16 + 16 + 16 = 49$ である。これは $7^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$ とは異なる表し方である。
2. $c = d = r = s = 0$ とすると、$L_1 = ap - bq$、$L_2 = aq + bp$、$L_3 = L_4 = 0$ となり、これは $(a^2 + b^2)(p^2 + q^2) = (ap - bq)^2 + (aq + bp)^2$ である。
3. 平方数は 8 を法として（modulo 8）0、1、4 のいずれかである。これらを 3 つ足した和は 8 を法として $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ となり、決して 7 にはならない。
4. $2 = (\pm1)^2 + (\pm1)^2 + 0^2 + 0^2$ である。0 でない 2 つの位置の選び方が（6 通り）、それらの符号の選び方が（4 通り）あり、計 24 通りとなる。2 は 4 で割り切れないから、ヤコビ（Jacobi）の公式により $8\sigma(2) = 8 \times 3 = 24$ である。

### 7.9 正多面体はただ五つ

1. $h = 2m + 2n - mn$ とすると、$V = \frac{4m}{h}$、$E = \frac{2mn}{h}$、$F = \frac{4n}{h}$ である。$m$ と $n$ を入れ替えると $V$ と $F$ が入れ替わる。立方体と正八面体は互いに双対（dual）であり、正十二面体と正二十面体も同様である。正四面体は自己双対（self-dual）である。
2. $F = 32$、$E = \frac{1}{2}(12 \cdot 5 + 20 \cdot 6) = 90$、$V = \frac{1}{3}(180) = 60$ であり、$60 - 90 + 32 = 2$ である。一般に、五角形が $P$ 個、六角形が $H$ 個のとき、$E = \frac{1}{2}(5P + 6H)$、$V = \frac{1}{3}(5P + 6H)$ であるから、$V - E + F = -\frac{1}{6}(5P + 6H) + P + H = \frac{P}{6}$ となる。これが 2 に等しいので、$P = 12$ である。

3. （穴の開いた）上面と底面をそれぞれ 4 つの台形（trapezium）に分割する。すると $V = 16$、$F = 4+4+4+4 = 16$、$E = 12+12+8 = 32$ となり、$V - E + F = 0$ である。

4. $180^\circ n(1 - \frac{2}{m}) < 360^\circ$ は $n(m-2) < 2m$、すなわち $mn - 2m - 2n < 0$、つまり $(m-2)(n-2) < 4$ である。$m, n \geq 3$ のもとで、解は $(3,3)$、$(3,4)$、$(4,3)$、$(3,5)$、$(5,3)$ である。

章

# 8

# 微分方程式と力学系

ほとんどの微分方程式は解けない。それでも理解すること、そこに技がある。

**この章の内容**


| | | |
|---|---|---|
| **8.1** | 解が一意でないとき | STEP III 1994 |
| **8.2** | 解かずに評価する | STEP III 2013 |
| **8.3** | 個体群の収穫 | STEP II 1995 |
| **8.4** | 渦を巻いて円に近づく | STEP III 2015 |
| **8.5** | グレイハウンドを追うグレイハウンド | STEP III 1988 |
| **8.6** | 量子振動子 | STEP III 1988 |
| **8.7** | 解けるカオス | STEP I 2014 |
| **8.8** | 周期 3 ならばカオス | STEP III 2025 |
| **A** | 演習問題の答え | p. 591 |

# 変化の規則

自然は積分の困難を笑う。

— ピエール＝シモン・ラプラス（Pierre-Simon Laplace）の言葉とされる

学校では、微分方程式（differential equation）は解くべきものである。変数を分離する（separation of variables）か、積分因子（integrating factor）を見つけるか、$e^{\lambda x}$ の形の解を推測するかして、最後には公式が得られる。教科書の方程式は、この方法がうまくいくように選ばれているのである。残念ながら、現実世界から生じるほとんどすべての微分方程式（三つの惑星の運動、天気、捕食者と被食者の個体群、大きな振幅で揺れる振り子）には、既知の関数で書き下せる解が存在しない。

本章では、その代わりに何をすればよいかを扱う。「公式は何か？」と問うのではなく、公式がなくても答えられる問いを立てる。そもそも解は存在するのか、そしてそれは一つだけか。解は有界にとどまるか。定常状態や繰り返す周期に落ち着くのか、それともいつまでもさまよい続けるのか。長い時間の後にどうなるのか。解くことから理解することへのこの視点の転換は、1880 年代にポアンカレ（Henri Poincaré）によって始められ、今日**力学系**（dynamical systems）と呼ばれる分野を生み出した。

### 微分方程式はなぜ重要か

微分方程式は科学の言語である。ニュートン（Newton）の第二法則は微分方程式であり、電磁気学のマクスウェル（Maxwell）方程式、量子力学のシュレーディンガー（Schrödinger）方程式、そして天気予報や航空機の設計に用いられる流体の方程式もまたそうである。疫学者は病気の広がりを、生態学者は魚の資源量を、経済学者は経済成長を、そして技術者はサーモスタットから自動操縦装置に至るあらゆる制御系の応答を、微分方程式で表す。ある量が現在の状態に依存する速さで変化するときには必ず微分方程式があり、たいていそれは誰にも厳密には解けないものである。

こうした連続的なモデルと並んで、時間が一歩ずつ進む離散的なモデルもある。今年の個体数が来年の個体数を決めるといったものである。このような**反復写像**（iterated map）は書き下すのはより簡単だが、最後の二つの節で見るように、同じくらい激しい振る舞いを示しうる。1970 年代の偉大な発見の一つは、ごく単純な規則が**カオス**（chaos）、すなわち完全に決定されていながら実際上は予測できない振る舞いを生み出しうるということであった。

## 大学で出会うこと

大学 1 年の微分方程式の講義では標準的な解法を学ぶが、本章のような問いも導入される。解が存在するのはいつか、また解が初期値によって一意に定まるのはいつかを教えてくれる存在と一意性の定理（existence and uniqueness theorem）に出会うであろう。すべての解を一度に描いた図である**相図**（phase portrait）を描くこと、そして線形化（linearisation）によって平衡点（equilibrium）を安定（stable）か不安定（unstable）かに分類することを学ぶ。その後の講義はさらに先へ進む。**非線形力学**（nonlinear dynamics）はリミットサイクル（limit cycle）、分岐（bifurcation）、カオスを研究し、**数理生物学**（mathematical biology）はそれらを個体群や感染症に応用する。そして偏微分方程式（partial differential equation）、フーリエ級数（Fourier series）、直交関数（orthogonal functions）の理論（Section 8.6 でその一端を垣間見る）は、量子力学と応用数学の多くを支えている。

## 本章を貫く問い

### 三つの大きな問い

1. **現在は未来を決定するか？**微分方程式が初期値とともに与えられたとき、解がちょうど一つ存在するのはどのような場合か。
2. **解かずに何がわかるか？**公式が存在しないとき、どうすれば解を評価し、解が落ち着く先を見つけ、その形を記述できるか。
3. **長い時間の後に何が起こるか？**解は定常状態に落ち着くのか、周期に近づくのか、それともカオス的に振る舞うのか。そしてそれをどう見分けるのか。

本章はまず一意性と、それが成り立たないときに何が起こるか（Section 8.1）から始め、続いて方程式を解かずに理解するための道具を展開する。増加しえないエネルギーのような量、平衡点とその安定性、そして問題の対称性に合わせた座標である。二つの節では、これらの考え方を物理的な問題に応用する。正方形の中で互いを追いかける犬と、量子調和振動子（quantum harmonic oscillator）である。本章の最後は離散写像を扱う。そこでは公式がカオスを明らかにし、また長さ 3 の周期がただ一つあるだけで、あらゆる長さの周期が存在することが強制される。

## 本章の考え方

| § | 主題 | 考え方 |
|---|---|---|
| 8.1 | 一意性 | 包絡線（envelope）と特異解（singular solution）、解の貼り合わせ |
| 8.2 | エネルギー法 | 決して増加しない量 |
| 8.3 | 個体群モデル | 平衡点、安定性、転換点（tipping point） |
| 8.4 | リミットサイクル | 極座標とベルヌーイ（Bernoulli）型の置換 |
| 8.5 | 追跡曲線（pursuit curve） | 対称性により四体を一体に帰着する |
| 8.6 | 直交関数 | ロンスキアン（Wronskian）と直交性 |
| 8.7 | カオス | 変数変換：ロジスティック写像（logistic map）は姿を変えた角の倍化である |
| 8.8 | 周期軌道 | 区間の被覆、シャルコフスキー（Sharkovskii）の定理 |

## 本章の読み方

何かを解く前に、まず図を描くこと。微分方程式 $y' = F(y)$ については、$F$ が正、負、零になるところに印をつけ、$y$ 軸上に矢印を描く。写像 $x \mapsto \mathrm{f}(x)$ については、そのグラフを直線 $y = x$ とともに描き、クモの巣図法（cobweb method）でいくつかの数列をたどる。こうした図は 1 分もあれば描けるし、たいていは計算を始める前に、答えがどのような形になるべきかを教えてくれる。

# 8.1 解が一意でないとき

**問題**

**STEP III 1994、問 4**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/94-s3-q4`

## 導入

微分方程式（differential equation）とは、ある量がどのように変化するかを定める規則である。たとえばニュートン（Newton）の法則は、惑星が今どこにあるかが与えられれば、それがどう動くかを教えてくれる。古典物理学の描く世界像では、これで十分である。つまり、現在の世界の状態がわかれば、法則によってその未来はすべて決まる。ラプラス（Pierre-Simon Laplace）は、あらゆる位置と速度を知っていれば何もかも予言できる知性を思い描いた。この世界像は、ある数学的な仮定の上に成り立っている。それは、微分方程式に初期条件を与えれば、解が**ただ一つ**存在するという仮定である。

この問題は、その仮定が成り立たないことがあると示している。一見何の変哲もない方程式 $(y')^2 = 4y$ には、$x$ 軸に沿って進み、自ら選んだ瞬間にそこから離れていく解がある。点によっては、そこを通る解が無数に存在する。現在を知っても未来は決まらないのである。一意性（uniqueness）がちょうどどのようなときに成り立つかを明らかにすることは、大学の微分方程式の講義で最初に学ぶ定理の一つである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 両辺の平方根をとると $y' = \pm 2\sqrt{y}$ となる。$y = (x-c)^2$ を試してみよう。これは方程式を満たすか。もっと簡単な解はないだろうか。

$y = (x-c)^2$ ならば $y' = 2(x-c)$ であり、$(y')^2 = 4(x-c)^2 = 4y$ となる。よって、放物線 $y = (x-c)^2$ はどれも、すべての $x$ に対して解である。さらに $y = 0$ も解である。

実際 $(0)^2 = 4 \times 0$ である。この最後の解を覚えておいてほしい。これが問題全体の鍵となる。

## 順を追って解く

### 段階 1　一点を通る解

**考えてみよう**　放物線 $y = (x-c)^2$ のうち、$(a, b^2)$ を通るのはどれか。

$(a-c)^2 = b^2$ が必要であるから $a - c = \pm b$、すなわち $c = a - b$ または $c = a + b$ である。$b \neq 0$ よりこの二つは異なり、次の二つの解が得られる。

$$y = (x - a + b)^2 \qquad \text{および} \qquad y = (x - a - b)^2. \qquad \blacksquare$$

（見落とした解がないことも確かめておくべきである。$y > 0$ となる範囲では、$y' = \pm 2\sqrt{y}$ の符号は一定であり、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{y} = \frac{y'}{2\sqrt{y}} = \pm 1$ となるので $\sqrt{y} = \pm(x-c)$ であり、これらの放物線が得られる。したがって、与えられた点の近くで、$y$ が正である限り、解はこの二つしかない。しかし、解が $x$ 軸に達すると、第 3 段階で見るように零解とつなぎ合わせることができ、すべての $x$ で定義された解がさらに無数に得られる。問題の「二つの解」とは、この二つの放物線のことである。）

### 段階 2　二つの点と共通の解

原点を通る解は $y = x^2$（$c = 0$ の放物線）でなければならない。これは $x = 1$ と $x = -1$ で高さ 1 を通る。そこで $(a_1, 1) = (1, 1)$、$(a_2, 1) = (-1, 1)$ とおく。

$(1, 1)$ を通る解は（$a = 1$、$b = \pm 1$ として）$y = x^2$ と $y = (x-2)^2$ である。$(-1, 1)$ を通る解は $y = (x+2)^2$ と $y = x^2$ である。原点を通る解は、どちらの場合も同じ曲線 $y = x^2$ である。 $\blacksquare$

### 段階 3　解の族全体と共通接線

**手を止めて、やってみよう**　さまざまな $c$ について、放物線 $y = (x-c)^2$ をいくつか描いてみよう。それらすべてに接する直線はどれか。その直線自身は解だろうか。

放物線 $y = (x-c)^2$ はどれも頂点 $(c, 0)$ で $x$ 軸に接するので、$x$ 軸は族全体の共通接線、すなわち族の**包絡線**（envelope）である（図 8.1.1）。そして $x$ 軸 $y = 0$ はそれ自身が微分方程式の解である。これは放物線のどれでもなく、別個の**特異解**（singular solution）である。

### 段階 4 なぜ重要なのか

**考えてみよう** 原点から出発しよう。原点を通る解はどれか。しばらく $x$ 軸に沿って進み、その後そこから離れる解を作れるだろうか。

原点を通る解として $y = x^2$ と $y = 0$ がある。しかし、実際にはもっと多くのことが言える。各放物線は $x$ 軸と接する（そこではどちらも傾きが 0 である）ので、解の断片を滑らかにつなぎ合わせることができる。任意の $c_1 \leq 0 \leq c_2$ に対して、

$$y = \begin{cases} (x - c_1)^2 & x < c_1, \\ 0 & c_1 \leq x \leq c_2, \\ (x - c_2)^2 & x > c_2 \end{cases}$$

は至るところで $(y')^2 = 4y$ を満たす微分可能な関数であり、原点を通る。$x$ 軸上のどの点を通る解も無数に存在する。解は好きなだけ $y = 0$ にとどまり、それから離れていくことができるのである。共通接線こそが、一意性が崩れる場所である。 ■

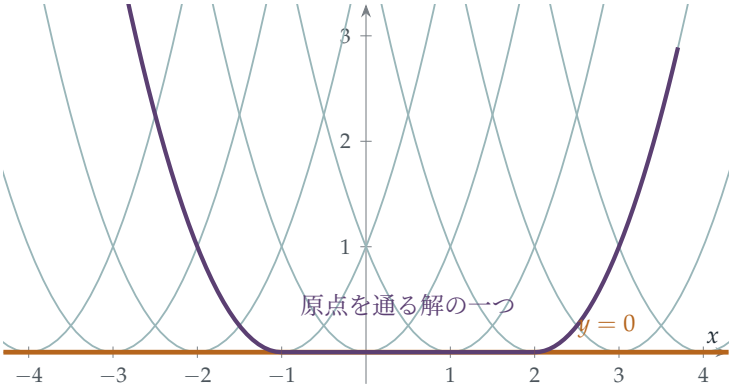



**図 8.1.1** $(y')^2 = 4y$ の解 $y = (x - c)^2$（ティール）はどれも $x$ 軸に接する。$x$ 軸はそれらの包絡線であり、それ自身も解である（アンバー）。断片をつなぎ合わせると、さらに別の解が得られる。たとえばプラム色の解は、放物線に沿って軸まで下り、軸に沿って進み、自ら選んだ時刻に再び軸を離れる。$x$ 軸上のどの点を通る解も無数に存在する。

## 振り返り

- **まず簡単な解を探す。** $y = (x - c)^2$ と $y = 0$ を試すことで、全体像が見えた。
- **包絡線は特異解を与える。** 解の族の共通接線は、それ自身が族に属さない解になることがある。
- **つなぎ合わせ。** 二つの解が接するところでは、それらをつないで新しい微分可能な

解を作ることができる。こうして一意性の破れが広がっていく。

## 背後にある数学

### 解はいつ一意か

**ピカール–リンデレーフの定理**（1890–1894 年ごろにピカール（Émile Picard）とリンデレーフ（Ernst Lindelöf）が証明した）によれば、$F$ が $y$ について**リプシッツ連続**（Lipschitz）であるとき、すなわち $|F(x,y_1)-F(x,y_2)| \le L|y_1-y_2|$ を満たす定数 $L$ が存在するとき、方程式 $y'=F(x,y)$ は $y(x_0)=y_0$ のもとで $x_0$ の近くにただ一つの解をもつ。おおまかに言えば、$y$ が変化するとき $F$ が無限に速く変化してはならないということである。我々の方程式は $y'=\pm 2\sqrt{y}$ であり、$\sqrt{y}$ は $y=0$ で傾きが無限大になる。そこではリプシッツ連続ではなく、まさにそこで一意性が破れるのである。（ペアノ（Giuseppe Peano）は 1886 年に、$F$ が連続であるだけで解の**存在**（existence）は保証されるが、一意性は保証されないことを示した。）ピカール–リンデレーフの定理の証明では、Section 2.2 の縮小写像の原理（contraction mapping principle）によって収束する反復法を用いる。

### 水漏れするバケツ

物理的な例を挙げよう。底に穴のあいたバケツは、トリチェリ（Torricelli）の法則に従って空になる。水の高さ $h$ は $h'=-k\sqrt{h}$ を満たす。時間を順方向に進める限り、何も問題はない。バケツは空になり、空のままである。しかし時間を逆向きにたどってみよう。空のバケツを見つけても、方程式からはそれがいつ空になったのかがわからない。常に $h=0$ である解も、ある時刻まで満杯で、その後水が抜けた解も、すべて「今は空である」ことと矛盾しない。一意性の破れは、過去についての情報が失われたという事実の数学的な影なのである。

### ノートンのドーム

2003 年、哲学者 John Norton は、摩擦のないドームで、その頂上にぴったり置かれた球がニュートンの法則に従って $r''=\sqrt{r}$ という形の方程式を満たすような形状のものを考えた。一つの解は、球が永遠に頂上にとどまるというものである。しかし別の解もあり、それらでは球が任意の時間だけ頂上にとどまった後、何の原因もなく自発的に任意の方向へ転がり落ちる。この例は今も議論が続いている。古典力学は本当に決定論的（deterministic）なのだろうか。数学的には、これはまさにこの問題と同じ種類の一意性の破れである。

## 思考のスキル

**一意性を仮定しない**

解を一つ見つけても、それが唯一の解であることにはならない。特に方程式に滑らかでない関数が含まれる場合には、ほかに解がないかを問うこと。

大学では、存在と一意性の定理が、どのような条件が必要かを正確に教えてくれる。ここでは、零で傾きが無限大になる平方根があるだけで、一意性を壊すのに十分であった。

## 次の一歩

1 **二つの増加率。** STEP II 2018、問 8（`step.maths.org/questions/18-s2-q8`）に取り組んでみよう。この問題では、二つの成長方程式を置換によって解く。そのうえで、なぜ $y = 0$ も同じ初期値をもつ解なのか、そしてそれが一意性について何を意味するのかを考えてみよう。

2 **水漏れするバケツ。** $h(0) = h_0 > 0$ のもとで $h' = -k\sqrt{h}$ を解け。バケツが空になるのはいつか。ある $T$ について $h(T) = 0$ であり、すべての $t \geq T$ について $h(t) = 0$ となる、異なる二つの解を書け。

3 **一意性の回復。** $y(0) = 0$ のもとで $y' = 2y$ の解は $y = 0$ のみであることを示せ。（ヒント：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ye^{-2x})$ を考えよ。）$2\sqrt{y}$ にはなくて $2y$ にはある性質は何か。

4 **3 乗。** 原点を通る $y' = 3y^{2/3}$ の解をすべて求めよ。

## さらに学ぶために

- **Morris Hirsch, Stephen Smale & Robert Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos***（Academic Press）。存在と一意性、そしてこの章の内容の多くを扱っている。
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***（CRC Press）。歴史的な話題に富んだ古典的名著。特異解と包絡線を論じている。
- **John Norton, 「The dome: an unexpectedly simple failure of determinism」**, *Philosophy of Science* 75 (2008)。短く読みやすい。

# 8.2 解かずに評価する

**問題**

**STEP III 2013、問 7**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/13-s3-q7`

## 導入

ほとんどの微分方程式（differential equation）は解くことができない。$y'' + y^3 = 0$ の解を見慣れた関数で表す公式は存在しないし、小問 (iii) の怪物のような方程式についてはなおさらである。それでも、解については多くのことがいえる。解が有界（bounded）であること、振動（oscillate）すること、ある状態に落ち着くことなどである。鍵は、解とその導関数から作られる量で、決して増加しないものを見つけることである。そうすれば解は閉じ込められる。

物理学では、そのような量はふつう**エネルギー**（energy）である。お椀の中を転がる球は、出発した高さより高く登ることはできない。エネルギーは保存されるか、摩擦（friction）があれば減少するからである。この問題は同じ論法を三つの方程式に適用する。最後の方程式は、「エネルギー」を自分で作り出さなければならないように選ばれている。この方法は 1892 年にリャプノフ（Aleksandr Lyapunov）によって導入されたもので、微分方程式の研究において最も重要な道具の一つである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 小問 (i) では、$y$ を粒子の位置、$x$ を時刻と考えよう。すると $y'' = -y^3$ は力 $-y^3$ に対するニュートン（Newton）の運動法則である。運動エネルギーと位置エネルギーは何か。

運動エネルギー（kinetic energy）は（質量を 1 として）$\frac{1}{2}(y')^2$ であり、力 $-y^3$ はポテンシャル $V(y) = \frac{1}{4}y^4$ から生じる。力は $-V'(y)$ だからである。全エネルギーは

$\frac{1}{2}(y')^2 + \frac{1}{4}y^4$ であり、これは E のちょうど半分である。エネルギー保存則（conservation of energy）とは、まさに E が一定であるという主張にほかならない。

## 順を追って解く

### 段階 1　保存

連鎖律（chain rule）により、

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = 2y'y'' + 2y^3y' = 2y'(y'' + y^3) = 0.$$

よって E は一定であり、$x = 0$ での値 $\mathrm{E} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ に等しい。$(y')^2 \geq 0$ であるから $\frac{1}{2}y^4 \leq \frac{1}{2}$ となり、$y^4 \leq 1$、すなわち $|y| \leq 1$ である。 ■

解は $-1$ と $1$ の間を振動し、$(y, y')$ 平面上で閉曲線 $(y')^2 + \frac{1}{2}y^4 = \frac{1}{2}$ を描く（図 8.2.1）。

### 段階 2　散逸

> **考えてみよう**　$\mathrm{E} = (v')^2 + 2\cosh v$ を微分せよ。微分方程式を用いて $v''$ を置き換えよ。結果の符号はどうなるか。

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = 2v'v'' + 2\sinh v\, v' = 2v'(v'' + \sinh v) = 2v'(-xv') = -2x(v')^2 \leq 0 \quad \text{ただし} x \geq 0.$$

項 $xv'$ は摩擦のようにはたらき、エネルギーを奪う。よって $x \geq 0$ に対して $\mathrm{E}(x) \leq \mathrm{E}(0)$ である。$x = 0$ では $\cosh(\ln 3) = \frac{3 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{5}{3}$ であるから、$\mathrm{E}(0) = \frac{10}{3}$ である。したがって

$$2\cosh v \leq (v')^2 + 2\cosh v = \mathrm{E}(x) \leq \tfrac{10}{3}, \qquad \text{よって} \qquad \cosh v(x) \leq \tfrac{5}{3}.$$ ■

### 段階 3　エネルギーを作り出す

小問 (iii) にはヒントがない。増加しない関数 $\mathrm{E} = (w')^2 + F(w)$ を見つける必要がある。

> **考えてみよう**　$\mathrm{E} = (w')^2 + F(w)$ ならば $\mathrm{E}' = 2w'w'' + F'(w)w'$ である。方程式を用いて $w''$ を置き換えたとき、$(w')^2$ の定数倍ならぬ関数倍だけが残るようにするには、$F'(w)$ をどう選べばよいか。

$\mathrm{E}' = 2w'\big(w'' + w\cosh w + 2\sinh w\big)$ としたいので、$F'(w) = 2(w\cosh w + 2\sinh w)$ が必要である。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}(w\sinh w) = \sinh w + w\cosh w$ であるから、次のようにとればよい。

$$F(w) = 2w\sinh w + 2\cosh w, \qquad \mathrm{E} = (w')^2 + 2w\sinh w + 2\cosh w.$$

すると、方程式を用いて

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = -2(5\cosh x - 4\sinh x - 3)(w')^2.$$

**手を止めて、やってみよう** すべての $x$ に対して $5\cosh x - 4\sinh x - 3 \geq 0$ であることを示せ（$e^x$ を用いて書き表し、完全平方（perfect square）を探せ）。そのうえで議論を完成させよ。

$5\cosh x - 4\sinh x - 3 = \frac{5}{2}(e^x + e^{-x}) - 2(e^x - e^{-x}) - 3 = \frac{1}{2}e^x - 3 + \frac{9}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}\left(e^{x/2} - 3e^{-x/2}\right)^2 \geq 0$ である。よって E は決して増加しない。$x = 0$ では $\mathrm{E}(0) = \frac{1}{2} + 0 + 2 = \frac{5}{2}$ である。すべての $w$ に対して $w\sinh w \geq 0$（二つの因数は同符号）であるから、

$$2\cosh w \leq (w')^2 + 2w\sinh w + 2\cosh w = \mathrm{E}(x) \leq \tfrac{5}{2}, \qquad \text{よって} \qquad \cosh w(x) \leq \tfrac{5}{4}. \quad \blacksquare$$

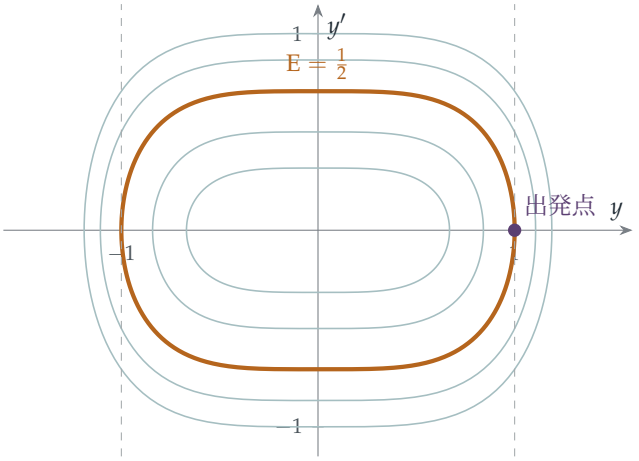



**図 8.2.1** $(y, y')$ 平面におけるエネルギー $\mathrm{E} = (y')^2 + \frac{1}{2}y^4$ の等高線（level curves）。E は一定であるから、$y = 1$、$y' = 0$ から出発する小問 (i) の解は永久に曲線 $\mathrm{E} = \frac{1}{2}$（琥珀色）の上にとどまり、したがって帯状領域 $|y| \leq 1$（破線）から決して出ない。このことは、$y$ の公式を一度も求めずにわかる。

## 振り返り

- **$y'$ を掛ける。** どの小問でも、$\mathrm{E}'$ は $2y'$ と方程式の左辺の積に、残りの項を加えたものであった。その残りの項によって、E が保存されるか減少するかが決まった。
- **エネルギーが位置を抑える。** 運動エネルギーの部分 $(y')^2$ は非負であるから、E の上界は位置エネルギーの部分の上界となり、したがって $y$ の上界となる。

▶ **隠れた平方を見抜く。**小問 (iii) の減衰（damping）係数は符号が変わりそうに見えたが、実は完全平方が姿を変えたものであった。

## 背後にある数学

### リャプノフ関数

1892 年の博士論文において、リャプノフは運動の**安定性**（stability）を研究した。系が平衡点（equilibrium）からわずかに乱されたとき、もとに戻るのか、それとも離れていってしまうのか。彼の「第二の方法」は、平衡点で最小となり、解に沿って決して増加しない関数を見つけることであった。この関数は現在**リャプノフ関数**（Lyapunov function）とよばれている。そのような関数があれば、平衡点の近くから出発した解は平衡点の近くにとどまる。この方法の美しさは、解の公式を必要とせず、微分方程式そのものだけを用いる点にあり、それこそがこの問題が示していることである。リャプノフ関数は今日、航空機の制御システムから電力網、生態系に至るまで、あらゆるものの安定性を証明するのに使われている。

### 物理学と工学におけるエネルギー

小問 (i) は非線形振動子（nonlinear oscillator）である。ばねに似ているが、復元力が変位の 3 乗に比例する。単振動（simple harmonic oscillator）とは異なり、その周期は振幅に依存する（振動が大きいほど速い）が、それでもエネルギー保存によって閉じ込められている。小問 (ii) では時間とともに大きくなる減衰が加わり、エネルギーが失われていく。工学では、エネルギーを用いる方法によって、構造物が自らの揺れで壊れないことや、制御システムが制御不能な振動を起こさないことが示される。偏微分方程式（partial differential equation）の理論では、この種の「エネルギー評価」（energy estimates）が、解が存在して良い振る舞いをすることを証明するための主要な道具である。流体の流れの方程式に関する問題は、ミレニアム懸賞問題（Millennium Prize Problems）の一つ（ナビエ–ストークス問題（Navier–Stokes problem））も含めて、このような評価が得られるかどうかに帰着する。

## 思考のスキル

### 増加しえない量を見つける

方程式が解けないときは、解から作られる量で、その導関数の符号が定まるものを探せ。その量が解を抑えてくれる。

探索の手がかりになるのは、物理（「エネルギーは何か」）と代数（「導関数がきれいにまとまるには何を加えればよいか」）である。小問 (iii) は、頼れる物理的直観がないときの代数的な道筋を示している。

## 次の一歩

1. **単振動。** $y(0) = A$、$y'(0) = 0$ のもとでの $y'' + y = 0$ について、保存されるエネルギーを求め、$|y| \le A$ を導け。厳密解と照らし合わせて確かめよ。

2. **振り子。** 振り子（pendulum）の角度 $\theta$ は（適当な単位のもとで）$\theta'' + \sin\theta = 0$ を満たす。$(\theta')^2 - 2\cos\theta$ が一定であることを示せ。振り子が角度 $\theta_0$（ただし $|\theta_0| \le \pi$）で静止した状態から動き始めるとき、$|\theta|$ が決して $|\theta_0|$ を超えないことを示せ。$|\theta_0| > \pi$ のときは何がうまくいかなくなるか。

3. **減衰。** $k > 0$ として $y'' + 2ky' + y = 0$ について、$(y')^2 + y^2$ が減少することを示せ。これは必ず 0 に収束するか。

4. **脱出。** $y(0) = 1$、$y'(0) = 0$ のもとでの $y'' - y^3 = 0$ について、保存量を求め、それによって $y$ が有界であるとはいえないことを示せ。何がうまくいかないのか。

## さらに学ぶために

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。『非線形ダイナミクスとカオス』。第 6 章と第 7 章で、相平面（phase plane）、保存系、リャプノフ関数を扱っている。
- **D. W. Jordan & P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations***（Oxford University Press）。『非線形常微分方程式』。エネルギーを用いる方法の例を数多く含む、学部向けの定番教科書である。
- **Keith Devlin, *The Millennium Problems***（Basic Books）。『ミレニアム問題』。ナビエ–ストークス問題についての親しみやすい解説を含む。

# 8.3 個体群の収穫

**問題**

**STEP II 1995、問 8**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/95-s2-q8`

## 導入

食料が無制限にある個体群は指数関数的に（exponentially）増加する。しかし現実の個体群はやがて場所が足りなくなる。個体数が環境の支えうる上限、すなわち**環境収容力**（carrying capacity）に近づくにつれて、増加は鈍っていく。これを表す最も単純なモデルが**ロジスティック方程式**（logistic equation）であり、問題の前半で扱われる。この方程式は、シャーレの中の細菌から新しい技術の普及に至るまで、あらゆるものを記述する。

問題の後半は、実用上きわめて重大な問いを投げかける。個体群を一定の割合で収穫（harvesting）し続けると何が起こるだろうか。ある閾値より下であれば、個体群は新しい、より低い平衡点（equilibrium）に落ち着く。しかし収穫をその閾値を超えて増やすと、たとえわずかであっても平衡点は消え、個体数はゼロへと崩壊する。これが漁業資源の崩壊の背後にある数学であり、漁獲枠が存在する理由である。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 何かを解く前に、増加率 $(2K - x)x$ を $x$ の関数としてグラフに描いてみよう。それはどこでゼロになるか。どこで正になるか。そこから $x$ がどのように振る舞うかについて何がわかるか。

増加率は $x = 0$ と $x = 2K$ でゼロとなり、その間では正、$2K$ より先では負である。したがって、0 と $2K$ の間から出発した個体群は $2K$ に向かって増加し、$2K$ より上から出発した個体群はそこへ向かって減少する。環境収容力は $2K$ であり、増加が最も速い

のは $x = K$ のときで、そのときの増加率は $K^2$ である。方程式を解かなくても、長期的な振る舞いを予測できるのである。

## 順を追って解く

### 段階 1　ロジスティック方程式を解く

**考えてみよう**　変数分離（separation of variables）を行うと $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2K-x)x} = \int \mathrm{d}t$ となる。左辺を部分分数（partial fractions）に分解せよ。

$\displaystyle\frac{1}{(2K-x)x} = \frac{1}{2K}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2K-x}\right)$ であるから、

$$\frac{1}{2K}\ln\frac{x}{2K-x} = t + C.$$

$t = 0$ のとき $x = K$ であるから、$\ln 1 = 0$ より $C = 0$ である。すると $\frac{x}{2K-x} = e^{2Kt}$ となり、

$$x = \frac{2Ke^{2Kt}}{1+e^{2Kt}} = \frac{2K}{1+e^{-2Kt}} = K + K\frac{1-e^{-2Kt}}{1+e^{-2Kt}}. \qquad \blacksquare$$

を得る。この分数は $\tanh(Kt)$ であるから、$x = K + K\tanh Kt$ となる。これは $K$ から $2K$ へ向かって上昇する S 字形の曲線である。$t \to \infty$ のとき $e^{-2Kt} \to 0$ であり、$x \to 2K$ となる。

### 段階 2　収穫

細菌を割合 $L$ で取り除くと、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (2K-x)x - L.$$

となる。

**考えてみよう**　$(2K-x)x - L$ を平方完成せよ。その零点はどこにあるか。

$(2K-x)x - L = K^2 - L - (x-K)^2 = \alpha^2 - (x-K)^2 = \big(\alpha - (x-K)\big)\big(\alpha + (x-K)\big)$ である。平衡点は $x = K \pm \alpha$ である。

**手を止めて、やってみよう**　ここで $y = x - K + \alpha$ と置換しよう。$y$ はどのような方程式を満たすか。もとのロジスティック方程式と比べてみよ。

$y = x - K + \alpha$ とすると $x - K = y - \alpha$ であるから、$\alpha + (x-K) = y$ かつ $\alpha - (x-K) =$

$2\alpha - y$ である。よって

$$\frac{dy}{dt} = (2\alpha - y)y,$$

となり、これは $K$ を $\alpha$ に置き換えた、再びロジスティック方程式である。初期値は $y(0) = K - K + \alpha = \alpha$ であり、前半の $x(0) = K$ とまったく同じ形をしている。したがって段階 1 により（$K$ を $\alpha$ に置き換えて）$y(t) = \alpha + \alpha \tanh \alpha t \to 2\alpha$ となり、ゆえに

$$x(t) = K + \alpha \tanh \alpha t \to K + \alpha. \qquad \blacksquare$$

## 振り返り

- **まず定性的に考える。**増加率の符号から、何も解かないうちに長期的な振る舞いが予測できた。
- **平方完成によって平衡点が明らかになる。**収穫のある方程式の平衡点は $K \pm \alpha$ であった。
- **置換によって新しい問題を既知の問題に帰着させる。**変数をずらすことで、収穫のある方程式は、すでに解いたロジスティック方程式に変わった。

## 背後にある数学

### 転換点（tipping point）

収穫のある方程式には $K + \alpha$ と $K - \alpha$ の二つの平衡点がある。上の平衡点は**安定**（stable）である。すなわち、それよりわずかに上または下にある個体群はそこへ戻っていく。下の平衡点は**不安定**（unstable）である。すなわち、$K - \alpha$ をわずかに下回る個体群は減少して絶滅に至る。収穫率 $L$ が増加すると $\alpha = \sqrt{K^2 - L}$ は小さくなり、二つの平衡点は互いに近づく。$L = K^2$ で両者は一つに合わさり、$L > K^2$ では平衡点はまったく存在せず、どのような個体群も崩壊する（図 8.3.1）。これは**サドル・ノード分岐**（saddle-node bifurcation）と呼ばれ、最も単純な種類の**転換点**である。その厄介な点は、何の劇的な前兆もないことである。$L$ が $K^2$ に近づいても平衡個体数はゆるやかに減少するだけであり、そして突然、平衡点が存在しなくなる。その後で収穫を減らしても役に立たないかもしれない。個体数がすでに不安定な閾値を下回っている可能性があるからである。

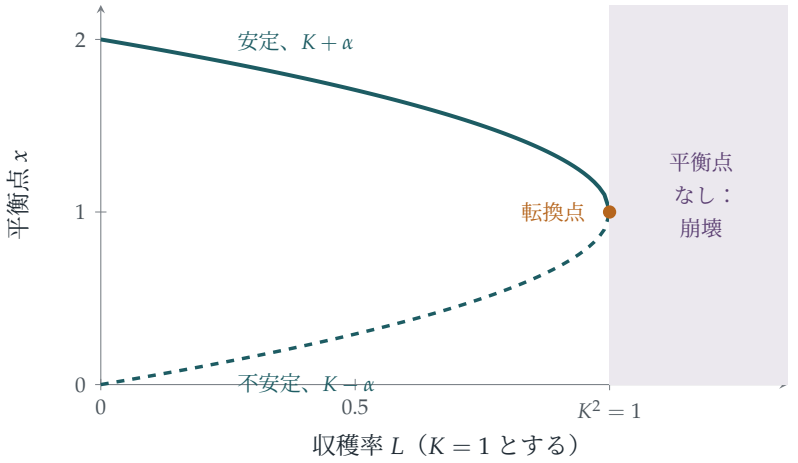



**図 8.3.1**　収穫率 $L$ に対する平衡個体数（$K=1$）。安定な平衡点（実線）と不安定な閾値（破線）は $L$ が増加するにつれて互いに近づき、$L=K^2$ で出会う。それを超えると平衡点は存在せず、個体群はその大きさにかかわらず崩壊する。

### 最大持続生産量

個体群が持ちこたえられる最大の収穫はどれだけだろうか。それは $L=K^2$、すなわち増加率 $(2K-x)x$ の最大値であり、個体数を環境収容力の半分である $K$ に保つときに達成される。水産科学は 20 世紀半ばに、この「最大持続生産量」（maximum sustainable yield）を資源管理の目標として採用した。しかし、ちょうど最大値で収穫するということは、系をちょうど転換点に置くということであり、そこでは $K$ をほんのわずか過大に見積もったり、不漁の年が一度あったりするだけで崩壊が起こる。ニューファンドランド（Newfoundland）沖のグランドバンクス（Grand Banks）のタラ漁場は、500 年にわたって世界有数の豊かな漁場であったが、1990 年代初めに崩壊した。1992 年、カナダ政府は禁漁措置を導入し、数万人が職を失った。資源は今なお完全には回復していない。

### 他の場面でのロジスティック成長

ロジスティック方程式は、1838 年にフェルフルスト（Pierre-François Verhulst）が人口のモデルとして提案したものである。同じ S 字形の曲線は、感染症の初期段階での広がり、新技術の普及、自己触媒的な化学反応、腫瘍の成長などを記述する。その離散時間版であるロジスティック**写像**（logistic map）はまったく異なる振る舞いを示し、カオス的（chaotic）になりうる。これについては Section 8.7 で見ることにする。

## 思考のスキル

**平衡点とその安定性**

方程式 $x' = f(x)$ について、平衡点は $f$ の零点であり、それらの間での $f$ の符号から解がどちらへ動くかがわかる。

$f$ が正から負へ変わる平衡点は安定であり、負から正へ変わる平衡点は不安定である。$f$ のグラフを描くだけで、何も解かずに重要な問いに答えられることが多い。

## 次の一歩

1. **低い値から出発する。** 収穫があり $K^2 > L$ のとき、$x(0) < K - \alpha$ ならば個体数は有限時間でゼロに達することを示せ。（ヒント：$y(0) < 0$ のとき $y$ はどう振る舞うか。）

2. **過剰収穫。** $L > K^2$ のとき、$\beta = \sqrt{L - K^2}$ とおく。$x(0) = 2K$ のもとで $x' = -(x - K)^2 - \beta^2$ を解き、個体数がゼロに達する時刻を求めよ。

3. **比例収穫。** 代わりに、個体群の一定の割合を取り除くとする：$x' = (2K - x)x - hx$。平衡点を求め、すべての $h < 2K$ に対して個体群が存続することを示せ。この方策はなぜより安全なのか。

4. **到達時刻。** 収穫のない場合に、個体数が $\frac{3}{2}K$ に達する時刻を求めよ。

## さらに学ぶために

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。『非線形力学とカオス』。第 3 章は分岐を扱っており、この収穫モデルが演習問題として取り上げられている。
- **Nicholas Britton, *Essential Mathematical Biology***（Springer）。『数理生物学の基礎』。学部生向けの個体群モデル。
- **Mark Kurlansky, *Cod: A Biography of the Fish That Changed the World***（Penguin）。『タラ：世界を変えた魚の歴史』。タラ漁業とその崩壊の歴史。

# 8.4 渦を巻いて円に近づく

**問題**

**STEP III 2015、問 8**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/15-s3-q8`

## 導入

自然界の多くの系は、どのように始まったかによらず、規則正しいリズムに落ち着いていく。心臓の鼓動、コオロギの鳴き声、一定の力で弓を引いたバイオリンの弦、捕食者と被食者の個体数の周期などがその例である。少し乱しても、それらは同じリズムに戻ってくる。微分方程式（differential equation）の言葉でいえば、それらの解は閉じたループに近づいていく。このループを**極限サイクル**（limit cycle）という。

この問題では、極限サイクルを一つ実際に構成する。方程式は $x$ と $y$ のままでは手に負えないように見えるが、極座標（polar coordinates）に移ると解ける形にまで簡単になる。そして解は、内側からも外側からも単位円に巻きつくように近づく螺旋であることがわかる。問題の対称性に合った座標を選ぶという鍵となる一手は、本書を通じて繰り返し用いてきたものである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** どちらの方程式にも、$x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ と $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$ という組合せが形を変えて含まれている。これらは極座標ではどう表されるか。

$r^2 = x^2 + y^2$ であるから、微分すると $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r$ が得られる。また $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = r^2\,\mathrm{d}\theta$ である（これは Section 4.9 の面積公式である）。この二つの恒等式のおかげで、変数変換はほとんど苦労なく行える。方程式を、これらの組合せだけが現れるように書き直せばよい。

## 順を追って解く

### 段階 1　小問 (i) を極座標で

方程式を $(y+x)\,dy-(y-x)\,dx=0$ と書き、整理し直すと

$$(x\,dx+y\,dy)+(x\,dy-y\,dx)=0.$$

> **考えてみよう**　展開して、この整理が正しいことを確かめよ。次に、上の二つの恒等式を用いよ。

$(y+x)\,dy-(y-x)\,dx = y\,dy+x\,dy-y\,dx+x\,dx$ であり、これは上の式そのものである。極座標で表すと $r\,dr+r^2\,d\theta=0$ となり、$r^2\,d\theta$ で割ると（$r>0$ として）

$$\frac{dr}{d\theta}+r=0. \qquad \blacksquare$$

解は $r=Ce^{-\theta}$ である。これは**対数螺旋**（logarithmic spiral）であり、$\theta$ が増加すると原点に向かって巻き込み、$\theta$ が減少すると無限遠へ広がっていく。

### 段階 2　小問 (ii)

> **手を止めて、やってみよう**　新しい方程式は、元の方程式に $x^2+y^2=r^2$ を含む項を付け加えたものである。同じように書き直して、$\frac{dr}{d\theta}$ を求めよ。

方程式は $\bigl(y+x-xr^2\bigr)\,dy-\bigl(y-x-yr^2\bigr)\,dx=0$、すなわち

$$\bigl[(y+x)\,dy-(y-x)\,dx\bigr]-r^2\bigl(x\,dy-y\,dx\bigr)=0.$$

最初の括弧は前と同じく $r\,dr+r^2\,d\theta$ であり、二つ目の括弧は $r^2\,d\theta$ である。よって $r\,dr+r^2(1-r^2)\,d\theta=0$ となり、

$$\frac{dr}{d\theta}=r^3-r.$$

> **考えてみよう**　これは $r$ について線形ではないが、$u=r^{-2}$ については線形になる。$u$ はどのような方程式を満たすか。

$u=r^{-2}$ とおくと、$\frac{du}{d\theta}=-2r^{-3}\frac{dr}{d\theta}=-2r^{-3}(r^3-r)=-2+2u$ である。よって $\frac{du}{d\theta}-2u=-2$ であり、その解は $u=1+Ae^{2\theta}$ である。したがって

$$r^2=\frac{1}{1+Ae^{2\theta}}. \qquad \blacksquare$$

### 段階 3　3 種類の解

- $A = 0$ **のとき：**$r = 1$ である。単位円は解である。
- $A > 0$ **のとき：**常に $r < 1$ である。$\theta \to -\infty$ のとき $r \to 1$、$\theta \to +\infty$ のとき $r \to 0$ である。曲線は円と原点の間を螺旋を描いて進む。
- $A < 0$ **のとき：**$r > 1$ であり、この式が意味をもつのは $1 + Ae^{2\theta} > 0$、すなわち $\theta < \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{1}{A}\right)$ の範囲だけである。$\theta \to -\infty$ のとき $r \to 1$、$\theta$ がその上限に近づくとき $r \to \infty$ である。曲線は円と無限遠の間を螺旋を描いて進む。

こうして、どの解曲線も $\theta \to -\infty$ のとき、内側または外側から単位円に近づく（図 8.4.1）。

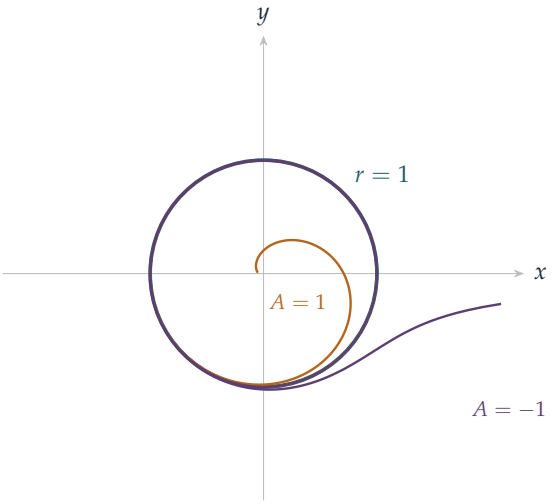



**図 8.4.1**　小問 (ii) の解。単位円（青緑）は解である。$A = 1$ の解（琥珀色）はその内側にあり、円から（$\theta \to -\infty$ のとき）原点に向かって螺旋を描く。$A = -1$ の解（紫）は外側にあり、円から無限遠へ螺旋を描いて広がる。逆向き（$\theta$ が減少する向き）に見れば、どの解も円に巻きついていく。これが極限サイクルである。

## 振り返り

- **対称性を利用する。**方程式はすべての方向を同等に扱っており、極座標によってそのことがはっきり見えるようになった。
- **定番の組合せを見抜く。**$x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r$ と $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = r^2\,\mathrm{d}\theta$ が仕事の大部分を担った。
- **置換によって線形化する。**非線形方程式 $r' = r^3 - r$ は、$u = r^{-2}$ について線形になった（ベルヌーイ型微分方程式（Bernoulli equation））。

## 背後にある数学

### 極限サイクル

アンリ・ポアンカレ（Henri Poincaré）は 1880 年代、平面上の微分方程式の定性的な振る舞いを研究する中で極限サイクルを導入した。問題の方程式を、平面上を動く点の軌跡を記述するものと解釈してみよう。単位円は孤立した閉軌道（closed orbit）であり、その近くの軌道はすべてそれに向かって巻きついていく（時間の向きによっては、それから離れていく）。1926 年、オランダの技術者 Balthasar van der Pol は真空管を含む電気回路に極限サイクルを見いだし、同様の方程式が心臓の鼓動を記述すると提唱した。極限サイクルは、自律的に維持される安定なリズムをもつあらゆる系のモデルとなる。概日時計、神経インパルス、捕食者と被食者の個体数の周期などである。

### 平面にカオスはない

**ポアンカレ–ベンディクソンの定理**（Poincaré–Bendixson theorem）によれば、平面上の滑らかな系において、有界な領域にとどまり、平衡点（equilibrium）に近づかない軌道は、必ず閉軌道に近づく。したがって 2 次元では、長時間の振る舞いは平衡点とサイクルに限られる。軌道は互いに交われないので、カオス（chaos）が入り込む余地はないのである。カオスには少なくとも 3 次元が必要であり、これは 1963 年にエドワード・ローレンツ（Edward Lorenz）が、対流を表す有名な 3 変数のモデル（「バタフライ」）によって発見したことである。離散時間では、Section 8.7 で見るように、1 次元でさえカオスが起こりうる。

### 未解決問題

1900 年、ダフィット・ヒルベルト（David Hilbert）は第 16 問題の一部として、次のように問うた。$P$ と $Q$ が $n$ 次の多項式であるとき、系 $x' = P(x,y)$、$y' = Q(x,y)$ がもちうる極限サイクルの個数の最大値はいくつか。これは $n = 2$ の場合でさえいまだにわかっていない。この場合、極限サイクルを 4 個もつ系は知られているが、それより多く存在しうるかどうかはわかっていない。ヒルベルトの問題のうち、完全に未解決のまま残っているごく少数の一つである。

## 思考のスキル

**対称性に合わせて座標を変える**

問題が回転対称性をもつなら極座標を用いよ。別の対称性をもつなら、それを尊重する座標を見つけよ。

適切な座標によって、手に負えない方程式が変数分離形に変わり、解の幾何学的な姿（円と螺旋）も一目瞭然になった。

## 次の一歩

1. **螺旋。** 小問 (i) の解 $r = e^{-\theta}$ について、曲線が原点から出るすべての半直線と同じ角度 $45^\circ$ で交わることを示せ。（対数螺旋が**等角螺旋**（equiangular spiral）とも呼ばれるのはこのためである。）

2. **極座標の恒等式。** $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r$ および $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = r^2\,\mathrm{d}\theta$ を証明せよ。

3. **時間に関する系。** 系 $\dot{r} = r(1 - r^2)$、$\dot{\theta} = 1$ を考える。$r(0) > 0$ であるすべての解が、$t \to \infty$ のとき単位円に近づくことを示せ。また、この系を $x$ と $y$ で表せ。

4. **二つのサイクル。** $\dot{r} = f(r)$、$\dot{\theta} = 1$ の形の系で、$r = 1$ と $r = 2$ に極限サイクルをもち、一方が引き寄せ、他方が反発するものを求めよ。

## さらに学ぶために

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。『非線形力学とカオス』。第 7 章で極限サイクルとポアンカレ–ベンディクソンの定理を扱っている。
- **Steven Strogatz, *Sync***（Hyperion）。自然界のリズムと同期についての一般向けの本。
- **James Gleick, *Chaos: Making a New Science***（Penguin）。ローレンツとカオスの発見の物語。

# 8.5 グレイハウンドを追うグレイハウンド

**問題**

**STEP III 1988、問 10**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/88-s3-q10`

## 導入

正方形の野原の四隅に 4 匹の犬が立っている。どの犬も自分の左隣の犬を追いかける。犬たちはどこで出会い、それまでにどれだけ時間がかかり、どのような経路をたどるのだろうか。経路は中心のまわりを無限回巻きつく美しいらせんである。それにもかかわらず、各犬が走る距離は有限であり、ちょうど正方形の 1 辺の長さに等しい。

これは**追跡問題**（pursuit problem）であり、1732 年にピエール・ブーゲ（Pierre Bouguer）が海賊船を追う船について初めて研究した種類の問題である。これを解けるようにする鍵は対称性（symmetry）である。1 匹の犬に起こることはすべての犬に起こるので、4 匹の犬は常に正方形をなす。このことに気づけば、微分方程式（differential equation）はほとんどひとりでに書き下せる。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 対称性から考えて、4 匹の犬は各瞬間にどのような図形をなすか。その中心はどこか。

この状況は正方形の中心のまわりの 4 分の 1 回転（$A \to B \to C \to D \to A$ と移す）によって変わらないので、犬たちは常に同じ中心 $O$ をもつ正方形をなす。正方形は回転しながら縮んでいくが、正方形であり続ける。特に、$A$ と $B$ は常に $O$ から同じ距離 $r$ にあり、$OB$ は常に $OA$ より 4 分の 1 回転だけ先にある。

## 順を追って解く

### 段階 1　運動の向き

**考えてみよう**　$A$ は $B$ に向かって走る。三角形 $OAB$ において、$AB$ は $AO$（中心へ向かう向き）とどのような角をなすか。

三角形 $OAB$ は $OA = OB$ であり、$O$ における角が直角なので、残りの 2 つの角は $45^\circ$ である。したがって、大きさ $v$ の $A$ の速度は内向きの動径方向と $45^\circ$ の角をなし、$B$ の側、すなわち $\theta$ が増加する向きに傾いている（$B$ が $A$ から反時計回りの位置にあるように角を定めた場合）。

### 段階 2　微分方程式

**考えてみよう**　$A$ の速度を動径成分と横断成分に分けよ。極座標（polar coordinates）では、動径方向の速度は $\dot r$、横断方向の速度は $r\dot\theta$ である。

動径成分（内向き）は $v\cos 45^\circ$、横断成分は $v\sin 45^\circ$ であるから、

$$\dot r = -\frac{v}{\sqrt{2}}, \qquad r\dot\theta = \frac{v}{\sqrt{2}}.$$

割り算をすると $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{\dot r}{\dot\theta} = -r$ となるので、$r = \lambda e^{-\theta}$ である。ここで、最初に $\theta = 0$ とすれば、$\lambda$ は中心からの最初の距離である。 ■

### 段階 3　$n$ 匹の犬

**手を止めて、やってみよう**　正 $n$ 角形の場合、三角形 $OAB$ の $O$ における角はいくらか。$AB$ は $AO$ とどのような角をなすか。段階 2 を繰り返せ。

$O$ における角は $\dfrac{2\pi}{n}$ なので、等しい 2 つの底角は $\dfrac{1}{2}\left(\pi - \dfrac{2\pi}{n}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{n}$ である。速度は内向きの動径とこの角をなすので、

$$\dot r = -v\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = -v\sin\frac{\pi}{n}, \qquad r\dot\theta = v\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = v\cos\frac{\pi}{n}.$$

よって $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -r\tan\dfrac{\pi}{n}$ であり、

$$r = \lambda e^{-\theta\tan(\pi/n)}. \qquad \blacksquare$$

$n = 4$ のとき $\tan\dfrac{\pi}{4} = 1$ となり、正方形の場合が再び得られる。

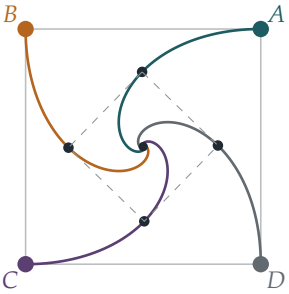



**図 8.5.1**　正方形の四隅から互いを追いかける 4 匹の犬。各犬は（それぞれの出発方向を基準として）対数らせん $r = \lambda e^{-\theta}$ をたどり、中心のまわりを無限回巻きつく。各瞬間に犬たちは正方形（破線、途中のある時刻のものを示す）をなし、回転しながら縮んで、最後に中心で出会う。

## 振り返り

- **対称性によって多体を 1 体に帰着させる。**配置が正方形であり続けるので、互いに影響し合う 4 匹の犬が、単純な規則に従う 1 つの粒子に置き換わった。
- **中心のまわりの運動には極座標を使う。**速度の動径成分（radial component）と横断成分（transverse component）、すなわち $\dot{r}$ と $r\dot{\theta}$ から、方程式が直接得られた。
- **割り算で時間を消去する。**比 $\dot{r}/\dot{\theta}$ から、各点にいつ到達するかを知らなくても経路の形が得られた。

## 背後にある数学

### 無限回の回転、有限の距離

動径方向の速さ $\dot{r} = -v\sin\frac{\pi}{n}$ は一定なので、犬たちは時間 $T = \frac{r_0}{v\sin(\pi/n)}$ の後に中心に到達し、それぞれ距離 $vT = \frac{r_0}{\sin(\pi/n)}$ を走ることになる。1 辺 $s$ の正 $n$ 角形では $r_0 = \frac{s}{2\sin(\pi/n)}$ なので、各犬が走る距離は

$$\frac{s}{2\sin^2(\pi/n)}.$$

である。4 匹の場合、これはちょうど $s$ であり、各犬はまさに 1 辺の長さだけ走る。（これを鮮やかに見る方法がある。$B$ の速度は常に $AB$ に垂直なので、距離 $AB$ を変化させない。差を縮めるのは $AB$ に沿ってまっすぐ速さ $v$ で進む $A$ の運動だけであり、最初の差は $s$ である。）3 匹の場合は距離は $\frac{2}{3}s$、6 匹の場合は $2s$ である。それでもど

の場合も、$r \to 0$ のとき $\theta \to \infty$ となるので、らせんは中心のまわりを無限回巻きつく。無限回巻きつく有限の長さの曲線は逆説ではない。巻きが十分速く小さくなるからである。

### 対数らせん

曲線 $r = \lambda e^{-k\theta}$ は**対数らせん**（logarithmic spiral）または**等角らせん**（equiangular spiral）と呼ばれ、中心から出るすべての半直線と同じ角度で交わる。形を保ったまま成長すると、この曲線が生じるので、オウムガイの殻や一部の銀河の腕など、自然界にも現れる。ヤコブ・ベルヌーイ（Jacob Bernoulli）はこの曲線に魅了され、どの尺度で見ても同じに見えるという性質にちなんで、*Eadem mutata resurgo*（「変えられても、私は同じものとして甦る」）という銘とともに墓石に刻むよう頼んだ。ところが石工が刻んだのはアルキメデスのらせん（Archimedean spiral）であった。

### 実際の追跡

常に標的にまっすぐ向かう「純追跡」（pure pursuit）は、ミサイルや捕食者にとって最も単純な誘導則である。しかし最良ではない。標的がこれから**いるであろう**位置に向かうほうが（「比例航法」（proportional navigation））効率がよく、現代のミサイルも、トンボやハヤブサのような一部の捕食者も、実際にそうしている。追跡と回避の数学は、20 世紀に**微分ゲーム**（differential games）という名のもとで独立した分野となった。

## 思考のスキル

**対称性を活かして多体問題を簡単にする**

系が対称であり、規則がその対称性を保つならば、対称性は永遠に保たれ、一部分だけを追えばよい。

この考え方は力学や動力学の多くの問題を解く。これは対称性と保存則（conservation）の深いつながりの簡単な一例である。

## 次の一歩

1 **鮮やかな論法。** 4 匹の犬の問題で、距離 $AB$ がちょうど速さ $v$ で減少する理由を丁寧に説明し、犬たちが時間 $s/v$ の後に出会うことを導け。

2 **3 匹の犬。** 3 匹の犬が 1 辺 $s$ の正三角形の頂点から出発する。各経路の方程式、出会うまでの時間、各犬が走る距離を求めよ。

3 **何回転するか。** 4 匹の犬が中心から 100 m の位置から出発するとき、1 回転した後に中心からどれだけ近くにいるか。何回転した後に中心から 1 mm 以内に入るか。

4 **2 匹の犬。** $n = 2$（向かい合う 2 匹の犬）のときはどうなるか。公式はなお意味をもつか。

## さらに学ぶために

- **Paul Nahin, *Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion***（Princeton University Press）。追跡曲線について、ブーゲからミサイルまであらゆることを扱う。
- **Eli Maor, *e: The Story of a Number***（Princeton University Press）。対数らせんとベルヌーイの墓石の話を含む。
- **D'Arcy Thompson, *On Growth and Form***（Cambridge University Press）。らせん状の成長を含む、自然界の数学についての古典的名著。

# 8.6 量子振動子

**問題**

**STEP III 1988、問 7**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/88-s3-q7`

## 導入

ばねにつけたおもりは、どんなエネルギーでも振動できる。少し引いて放してもよいし、大きく引いて放してもよい。ところが 1900 年、プランク（Max Planck）は、熱い物体が放つ光の色を説明するには、振動する原子が一定の大きさの段階ごとに、特定のエネルギーしかとれないと考えるほかないことに気づいた。原子の尺度では、エネルギーは**量子**（*quanta*）として現れるのである。その 25 年後、量子力学（quantum mechanics）がその理由を説明した。

この問題にはその説明が含まれている。この微分方程式（differential equation）は、単位を取り替えると、ばねのようなポテンシャルの中にある量子的な粒子に対するシュレーディンガー方程式（Schrödinger equation）、すなわち**量子調和振動子**（*quantum harmonic oscillator*）の方程式になる。この方程式が無限遠で減衰するような性質のよい解をもつのは、エネルギーが $n = 0, 1, 2, \ldots$ で番号づけられた特別な値をとるときだけであり、それらは等間隔に並ぶ。さらに、異なる $n$ に対する解は互いに**直交**（*orthogonal*）する。すなわち、フーリエ級数（Fourier series）における $\sin mx$ と $\sin nx$ と同じように、それらの積の積分は 0 になる。量子振動子は、分子、固体、光の物理学の出発点である。

## 取りかかる前に

**考えてみよう**　$e^{-\lambda x^2}$ のような関数を推測として試すのが妥当なのはなぜか。$x \to \pm\infty$ のとき、$e^{-\lambda x^2}$ とその導関数はどうなるか。

$|x|$ が大きいとき、方程式は $y'' \approx \omega^2 x^2 y$ で支配される。一方、ガウス関数（Gaussian）$e^{-\lambda x^2}$ は $x$ が大きいとき $y'' \approx 4\lambda^2 x^2 y$ を満たすので、$4\lambda^2 = \omega^2$ ならば一致する。$\lambda > 0$ のとき、ガウス関数とそのすべての導関数は $x$ のどんな累乗よりも速く $0$ に減衰する。したがって境界条件（boundary conditions）は自動的に満たされ、手間がかかるのは方程式に合わせる部分である。

## 順を追って解く

### 段階 1　基底状態

**考えてみよう**　$y_0 = e^{-\lambda x^2}$ を 2 回微分し、$n = 0$ とした方程式に代入して、$x^2$ の係数と定数項を比較せよ。

$y_0' = -2\lambda x e^{-\lambda x^2}$ であり、$y_0'' = (4\lambda^2 x^2 - 2\lambda) e^{-\lambda x^2}$ である。$n = 0$ のとき、方程式はすべての $x$ について

$$4\lambda^2 x^2 - 2\lambda - \omega^2 x^2 = -\omega$$

が成り立つことを要求する。係数を比較すると $4\lambda^2 = \omega^2$ かつ $2\lambda = \omega$ である。$y_0 \to 0$ となるように $\lambda > 0$ をとれば、$\lambda = \tfrac{\omega}{2}$ のとき両方が成り立つ。また、$x \to \pm\infty$ のとき $y_0, y_0' \to 0$ である。 ■

### 段階 2　第一励起状態

$y_1 = x e^{-\lambda x^2}$ について、$y_1' = (1 - 2\lambda x^2) e^{-\lambda x^2}$ であり、$y_1'' = (4\lambda^2 x^3 - 6\lambda x) e^{-\lambda x^2}$ である。$n = 1$ のとき、方程式は

$$4\lambda^2 x^3 - 6\lambda x - \omega^2 x^3 = -3\omega x,$$

を要求するが、これは同じ $\lambda = \tfrac{\omega}{2}$ で成り立つ。ここでも $y_1$ と $y_1'$ は $\pm\infty$ で減衰する。 ■

### 段階 3　恒等式

**考えてみよう** $y_m y_n' - y_n y_m'$ を積の微分法（product rule）で微分せよ。4 つの項のうち 2 つが打ち消し合う。そのうえで、微分方程式を使って $y_n''$ と $y_m''$ を置き換えよ。

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y_m y_n' - y_n y_m') = y_m' y_n' + y_m y_n'' - y_n' y_m' - y_n y_m'' = y_m y_n'' - y_n y_m''$ である。方程式から $y_n'' = (\omega^2 x^2 - (2n+1)\omega) y_n$ であり、$m$ についても同様である。よって

$$y_m y_n'' - y_n y_m'' = y_m y_n [\omega^2 x^2 - (2n+1)\omega - \omega^2 x^2 + (2m+1)\omega] = 2(m-n)\omega y_m y_n. \qquad \blacksquare$$

### 段階 4 直交性

**手を止めて、やってみよう** この恒等式を $-\infty$ から $\infty$ まで積分せよ。左辺はどうなるか。

各 $y$ と $y'$ は両端で 0 に近づくので、左辺の積分は $\left[y_m y_n' - y_n y_m'\right]_{-\infty}^{\infty} = 0 - 0 = 0$ となる。したがって $2(m-n)\omega \int_{-\infty}^{\infty} y_m y_n \,\mathrm{d}x = 0$ であり、$m \neq n$ かつ $\omega > 0$ であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_m(x) y_n(x) \,\mathrm{d}x = 0. \qquad \blacksquare$$

$y_0$ と $y_1$ については直接確かめるのもやさしい。$y_0 y_1 = x e^{-\omega x^2}$ は奇関数（odd function）だからである。しかしこの恒等式は、関数を具体的に知らなくても、あらゆる組についてこのことを証明する。

## 振り返り

- **係数を比較する。** 推測した形を代入し、方程式がすべての $x$ について成り立つことを要求すると、$\lambda$ が決まった。
- **ロンスキアンの技法。** 組合せ $y_m y_n' - y_n y_m'$ の導関数では、2 階導関数を方程式によって置き換えることができ、簡単な式が残る。この組合せはロンスキアン（Wronskian）とよばれる。
- **境界条件が境界項を消す。** 無限遠での減衰により、積分した左辺が 0 となり、それが直交性を与えた。

## 背後にある数学

### シュレーディンガー方程式

1926 年、シュレーディンガー（Erwin Schrödinger）は、量子的な粒子は**波動関数**（*wave function*）$\psi(x)$ によって記述されると提唱した。ポテンシャル $V(x)$ の中にあるエネルギー $E$ の粒子に対して、波動関数は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V(x)\psi = E\psi.$$

を満たす。ばねの場合は $V(x) = \frac{1}{2}m\Omega^2 x^2$ であり、$x$ の尺度を取り替えると、これはちょうど問題の方程式になり、$E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\Omega$ となる。$\psi$ が無限遠で減衰する（つまり粒子がどこかに存在する）という物理的な要請は、これらのエネルギーに対してしか満たされない。これが**量子化**（*quantisation*）であり、数学から自然に導かれるのである。最低のエネルギーが 0 ではなく $\frac{1}{2}\hbar\Omega$ であることに注意しよう。量子振動子は完全に静止することが決してできない。この**零点エネルギー**（*zero-point energy*）は実在し、測定することもできる。液体ヘリウムが通常の圧力のもとでは絶対零度においても凍らないのは、このためである。

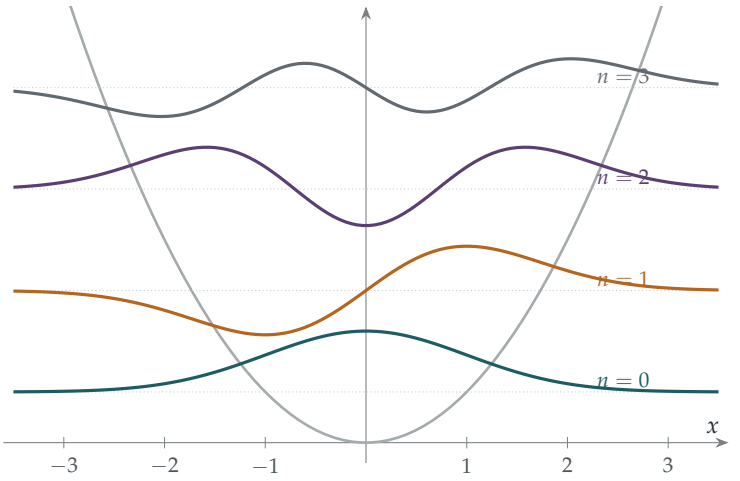



**図 8.6.1**　量子調和振動子（$\omega = 1$ の場合）。放物線はポテンシャルエネルギーを表す。各波動関数 $y_n$ は、そのエネルギー準位 $n + \frac{1}{2}$ の高さに描かれている。準位は等間隔に並び、最低の準位は 0 より上にある。関数 $y_n$ は $n$ 回 0 を横切り、どの 2 つも互いに直交する。

### エルミート関数とスツルム–リウヴィル理論

一般の解は $y_n = H_n(\sqrt{\omega}x)e^{-\omega x^2/2}$ であり、ここで $H_n$ は $n$ 次の多項式で、**エルミート多項式**（*Hermite polynomial*）とよばれる（図 8.6.1）。直交性はこの方程式に特有のものではない。方程式が適切な境界条件のもとで $(py')' + qy = -\lambda w y$ の形に書けるときはいつでも、異なる $\lambda$ の値に属する解は、段階 4 とまったく同じ議論によって直交する。これが**スツルム–リウヴィル理論**（*Sturm–Liouville theory*）（1830 年代）であり、フーリエ級数の正弦関数（Section 3.7）、太鼓の膜の振動、静電気学のルジャンドル多項式（Legendre polynomials）、水素原子の波動関数などを包括する。Section 4.7 の固有値問題（eigenvalue problem）もその一例である。そこで求めた臨界値が固有値 $\lambda$ であり、直交する関数はその系の自然な「モード」である。

## 思考のスキル

**恒等式から直交性を導く**

関連する方程式の 2 つの解が直交することを示すには、境界条件によって積分が 0 になり、しかもそれらの積の定数倍に等しくなるような、ある関数の導関数の形の式を見つけよ。

これは積分を直接計算するよりもはるかに強力である。解を具体的に書き下せない場合でも、すべての組について一度に通用するからである。

## 次の一歩

1. **次の状態。** $\lambda = \frac{\omega}{2}$ のとき、$y_2 = (4\lambda x^2 - 1)e^{-\lambda x^2}$ が $n = 2$ とした方程式を満たすことを示せ。また、$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega x^2}\,dx = \sqrt{\pi/\omega}$ と $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\omega x^2}\,dx = \frac{1}{2\omega}\sqrt{\pi/\omega}$ を用いて、$\int_{-\infty}^{\infty} y_0 y_2\,dx = 0$ を直接確かめよ。

2. **ほかのエネルギーはない。** $n$ を一般の数 $\nu$ に置き換えて、$y = e^{-\lambda x^2}$ を試せ。これがうまくいくのは $\nu = 0$ のときに限ることを示せ。（実際、減衰する解が存在するのは $\nu$ が 0 以上の整数のときに限る。）

3. **正弦波。** $y(0) = y(\pi) = 0$ のもとでの $y'' = -n^2 y$ から出発し、同じ方法を用いて、$m \neq n$ のとき $\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = 0$ となることを示せ。

4. **はしご。** $y_n$ が方程式の解ならば、$y_{n+1} = \omega x y_n - y_n'$ は $n$ を $n+1$ に置き換えた方程式の解であることを示せ。これを用いて、$y_0$ から $y_1$ と $y_2$ を作れ。（これは量子

力学における「上昇演算子（raising operator）」である。）

## さらに学ぶために

- **David Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics***（Cambridge University Press）。『量子力学入門』。大学学部の物理学の標準的な教科書であり、第 2 章で調和振動子を扱っている。
- **Richard Feynman, *QED: The Strange Theory of Light and Matter***（Princeton University Press）。『光と物質のふしぎな理論』。量子力学の大家の一人による一般向けの解説である。
- **Mary Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences***（Wiley）。『自然科学者のための数学的方法』。数学と物理学を学ぶ学生に向けて、エルミート多項式とスツルム–リウヴィル理論を扱っている。

# 8.7 解けるカオス

**問題**

**STEP I 2014、問 6**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/14-s1-q6`

## 導入

規則 $u_{n+1} = ku_n(1 - u_n)$ は**ロジスティック写像**（logistic map）とよばれ、資源が限られた環境における個体数の最も単純なモデルである。$u_n$ は $n$ 年目の個体数を環境が支えうる最大数に対する割合で表したもの、$k$ は増殖率であり、因子 $1 - u_n$ は過密の効果を表す。1976 年、生物学者ロバート・メイ（Robert May）は『*Nature*』誌に「Simple mathematical models with very complicated dynamics」（非常に複雑な振る舞いをする単純な数学モデル）という短い論文を発表した。メイは、$k$ を 4 に向けて大きくしていくと、このたった 1 行の規則が、一定の値に落ち着く状態から、振動する状態を経て、まったくでたらめに見える振る舞いへと移り変わることを示した。これは**カオス**（chaos）の原点となる例の一つとなった。

カオス的な系は、ふつう解くことができない。$u_n$ を与える公式は存在せず、$u_{100}$ を求めるにはそれより前の項をすべて計算するしかない。この問題はその例外を見つけるものである。最もカオス的な値である $k = 4$ では、公式が**存在する**のである。しかもその公式は、なぜこの数列が予測不能なのかを正確に説明してくれる。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $s = \sin^2\theta$ として、式 $4s(1 - s)$ をどこかで見たことはないだろうか。$\sin^2\theta$、$\cos^2\theta$、$\sin 2\theta$ を結びつける恒等式は何か。

$s = \sin^2\theta$ ならば $1 - s = \cos^2\theta$ であるから、$4s(1 - s) = 4\sin^2\theta\cos^2\theta = (2\sin\theta\cos\theta)^2 = \sin^2 2\theta$ となる。写像 $s \mapsto 4s(1 - s)$ は、2 倍角の公式（double-

angle formula）が姿を変えたものなのである。

## 順を追って解く

### 段階 1　規則性を予想する

$u_0 = \sin^2\theta$ とすると、上の恒等式から

$$u_1 = 4\sin^2\theta\cos^2\theta = \sin^2 2\theta, \qquad u_2 = 4\sin^2 2\theta\cos^2 2\theta = \sin^2 4\theta.$$

> **考えてみよう**　各ステップで角はどうなっているか。$u_n$ についてどのような予想が立つか。

角は毎回 2 倍になっているので、$u_n = \sin^2(2^n\theta)$ と予想できる。

### 段階 2　証明する

> **考えてみよう**　ある項から次の項を定める規則で定義された数列について、そのすべての項に関する主張を示すには、どの証明法が適しているか。

数学的帰納法（induction）である。$u_0 = \sin^2\theta = \sin^2(2^0\theta)$ であるから、$n = 0$ のとき主張は成り立つ。ある $n$ について $u_n = \sin^2(2^n\theta)$ が成り立つと仮定すると、

$$u_{n+1} = 4\sin^2(2^n\theta)(1 - \sin^2(2^n\theta)) = \left(2\sin(2^n\theta)\cos(2^n\theta)\right)^2 = \sin^2(2^{n+1}\theta),$$

となり、これは $n+1$ のときの主張である。よって、すべての $n \geq 0$ について $u_n = \sin^2(2^n\theta)$ が成り立つ。 ■

$[0,1]$ に属するどの初期値 $u$ も $\sin^2\theta$ の形に書ける（$\theta = \arcsin\sqrt{u}$ とすればよい）ことに注意しよう。したがって、これで $k = 4$ のロジスティック写像が、$[0,1]$ のあらゆる初期値について解けたことになる。

### 段階 3　変数を変換する

> **考えてみよう**　$v_n = \alpha u_n + \beta$ を $v_{n+1}$ の規則に代入せよ。その結果が $u_{n+1} = 4u_n - 4u_n^2$ となる必要がある。条件はいくつ得られ、未知数はいくつあるか。

代入すると

$$\alpha u_{n+1} + \beta = -p(\alpha u_n + \beta)^2 + q(\alpha u_n + \beta) + r,$$

であるから

$$u_{n+1} = -p\alpha\, u_n^2 + (q - 2p\beta)\, u_n + \frac{-p\beta^2 + q\beta + r - \beta}{\alpha}.$$

これが $4u_n - 4u_n^2$ となるためには、次の 3 つが必要である。

$$p\alpha = 4, \qquad q - 2p\beta = 4, \qquad -p\beta^2 + (q-1)\beta + r = 0.$$

最初の 2 つから $\alpha = 4/p$、$\beta = (q-4)/(2p)$ と定まる。未知数はもう残っていないので、3 つ目の式は $p$、$q$、$r$ に対する本当の意味での条件となる。$\beta$ を代入して $4p$ を掛けると

$$-(q-4)^2 + 2(q-1)(q-4) + 4pr = 0,$$

となり、展開すると $-(q^2 - 8q + 16) + (2q^2 - 10q + 8) + 4pr = 0$、すなわち $q^2 - 2q - 8 + 4pr = 0$、つまり

$$4pr = 8 + 2q - q^2. \qquad \blacksquare$$

> **手を止めて、やってみよう** 方程式は 3 つあるのに未知数は 2 つしかない。条件が現れるのはこのためである。計算する前に、一般の 2 次写像がいつも $(*)$ と同値になるとは限らない理由がわかるだろうか。（1 次の変数変換で変えられるものと変えられないものを考えてみよ。）

#### 段階 4 具体例

$v_{n+1} = -v_n^2 + 2v_n + 2$ では $p = 1$、$q = 2$、$r = 2$ であり、$4pr = 8 = 8 + 4 - 4$ であるから条件は成り立つ。このとき $\alpha = 4$、$\beta = -1$ であるから $v_n = 4u_n - 1$ であり、$u_n$ は $(*)$ を満たす。$v_0 = 1$ より $u_0 = \frac{1}{2} = \sin^2\frac{\pi}{4}$ であるから

$$u_n = \sin^2\!\left(\frac{2^n\pi}{4}\right), \qquad v_n = 4\sin^2\!\left(\frac{2^n\pi}{4}\right) - 1 = 1 - 2\cos\!\left(\frac{2^n\pi}{2}\right).$$

これより $v_0 = 1$、$v_1 = 3$ であり、すべての $n \geq 2$ について $v_n = -1$ となる。（直接確かめると、$-1 + 2 + 2 = 3$、次に $-9 + 6 + 2 = -1$、さらに $-1 - 2 + 2 = -1$ である。）$\blacksquare$

この特別な初期値は、角が $\pi$ の倍数に行き着いて数列が止まるように選ばれている。そのせいで面白い部分が隠れてしまっているが、それを次に見ていこう。

## 振り返り

- **変装を見抜く。** 写像 $s \mapsto 4s(1-s)$ は、$s = \sin^2\theta$ と書いたとたんに角の 2 倍化になった。
- **予想し、帰納法で証明する。** 2 つの項から規則性が見え、帰納法でそれを証明した。
- **方程式と未知数の個数を数える。** 1 次の置き換えには自由なパラメータが 2 つあり、2 次式には係数が 3 つある。したがって条件が 1 つ余るはずである。

## 背後にある数学

### 数列が予測不能である理由

公式 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$ を得たことで、話は終わったように見える。どの項も直接計算できるからである。しかし、この公式が何を言っているかをよく見てみよう。$\sin^2$ は周期 $\pi$ をもつので、意味をもつのは $2^n\theta$ を $\pi$ を法（modulo）として見た値だけである。$0 \le x < 1$ として $\theta = \pi x$ と書き、$x$ を 2 進法（binary）で表す。

$$x = 0.b_1b_2b_3\ldots \quad (\text{基数}2).$$

2 を掛けると小数点が 1 桁右にずれ、その結果を 1 を法として見ると、小数点を越えた桁が捨てられる。したがって $u_n$ は、$x$ の 2 進表記の $b_{n+1}$ 以降の桁だけで決まる。ロジスティック写像は 1 ステップごとに初期値の桁を 1 つ新たに読み込み、先頭の桁を 1 つ捨てていくのである。

これが**初期値鋭敏性**（sensitive dependence on initial conditions）であり、カオスを特徴づける性質である。2 進法で 20 桁（10 進法でおよそ 6 桁）まで一致する 2 つの初期値からは、たいてい、およそ 20 ステップまでは一致し、その後はまったく無関係になる数列が生じる（図 8.7.1）。$u_{100}$ を予測するには、$u_0$ を 2 進法で 100 桁まで知る必要がある。初期の角の誤差は、どれほど小さくても、ステップごとに 2 倍になる。（個体数 $u$ そのものの誤差が毎回まったく同じ倍率で増えるわけではない。写像は $[0,1]$ のある部分を他の部分より強く引き伸ばすからである。しかし平均すれば同じ割合で増大する。）公式はこの状況を救ってはくれない。単にその仕組みを目に見えるようにするだけである。

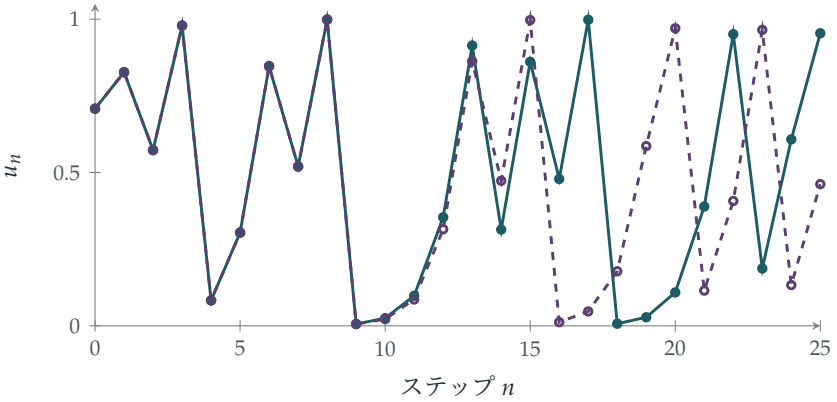



**図 8.7.1**　$k = 4$ のロジスティック写像による 2 つの数列。初期値は $\sin^2(1)$（ティール）と $\sin^2(1.00001)$（プラム、破線）である。およそ 10 ステップまでは区別がつかず、ステップ 12 までには目に見えて異なり、その後は無関係になる。ステップ 12 までに、角の差 $10^{-5}$ は 12 回 2 倍されて、およそ $2^{12} \times 10^{-5} \approx 0.04$ になっている。

### いたるところにある周期点

この公式からは、写像のすべての周期軌道（cycle）も求められる。数列が $N$ ステップ後に初期値に戻るのは、ちょうど $\sin^2(2^N\theta) = \sin^2\theta$、すなわち $2^N\theta \equiv \pm\theta \pmod{\pi}$ のときである。したがって $\theta = m\pi/(2^N - 1)$ または $\theta = m\pi/(2^N + 1)$ は、周期が $N$ の約数となる点を与える。たとえば $\theta = \pi/5$ は $4\theta \equiv -\theta$ を満たすので、$\sin^2\frac{\pi}{5} \to \sin^2\frac{2\pi}{5} \to \sin^2\frac{4\pi}{5} = \sin^2\frac{\pi}{5}$ は周期 2 の軌道である。あらゆる周期の周期点（periodic point）が存在し、しかもそれらは $[0,1]$ において稠密（dense）である。つまり、どれほど小さな区間の中にも、数列が繰り返しになる初期値が存在する。それにもかかわらず、誤差は 2 倍になっていくので、どの周期点も不安定である。近くのものをすべて遠ざける周期点が稠密に存在すること、これがカオスの第二の特徴である。

### カオスへの道

$k$ がもっと小さいときには公式は存在せず、振る舞いは $k$ によって劇的に変わる（図 8.7.2）。$1 < k < 3$ では、$(0,1)$ から出発するどの数列も不動点（fixed point）$1 - 1/k$ に落ち着く。$k = 3$ でこの不動点は不安定になり、代わって周期 2 の軌道が現れる（これが STEP II 2002 Q5 の主題である。演習問題を参照）。$k = 1 + \sqrt{6} \approx 3.449$ で周期 2 の軌道は周期 4 の軌道に取って代わられ、さらに周期 8 の軌道へと続く。この周期倍分岐（period doubling）はどんどん速く起こるようになり、$k \approx 3.5699$ で周期が無限大となってカオスが始まる。カオス領域の内部には秩序の「窓」がある。最もはっきりしたものは $k = 3.83$ 付近にあり、周期 3 の軌道を含む。これが Section 8.8 の主題である。

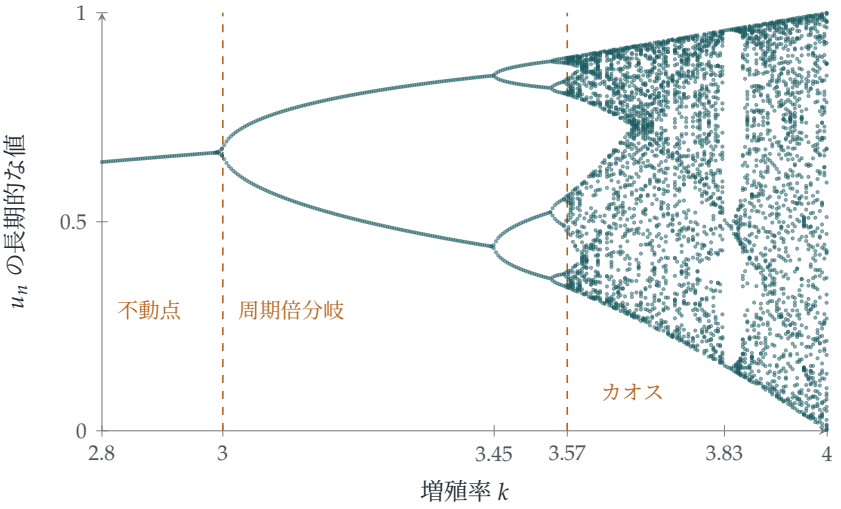



**図 8.7.2**　ロジスティック写像の分岐図（bifurcation diagram）。各 $k$ について、$u_0 = 0.31416$ から写像を 300 回反復し、その次の 40 個の値をプロットした。ただ一つの不動点が $k = 3$ で周期 2 の軌道に分かれ、続いて周期 4、8、...と分かれていき、$k = 3.57$ 付近でカオスが始まる。$k = 3.83$ 付近の白っぽい縦の隙間が、安定な周期 3 の軌道を含む窓である。$k = 4$ では値が $[0, 1]$ 全体を埋め尽くす。

### ファイゲンバウム定数

1975 年、ロスアラモスで研究していたファイゲンバウム（Mitchell Feigenbaum）は、プログラム可能なポケット電卓を使って、周期が倍になる $k$ の値 $k_1 = 3$、$k_2 \approx 3.4495$、$k_3 \approx 3.5441$、$k_4 \approx 3.5644$、...を測定した。彼は、その間隔が一定の比で縮んでいくこと、

$$\frac{k_n - k_{n-1}}{k_{n+1} - k_n} \to 4.6692\ldots,$$

に気づいた。さらに驚くべきことに、同じ数 4.6692... が $x \mapsto k\sin(\pi x)$ についても、また山が一つで頂上が放物線のように丸い（**2 次の極大**（quadratic maximum）をもつ）他のあらゆる滑らかな写像についても現れることを発見した。この定数はそのクラス全体に対して**普遍的**（universal）なのである。頂上がもっと平らな山をもつ写像、たとえば $-x^4$ のような形の写像には、それ固有の普遍定数がある。この定数はその後、水滴がしたたる蛇口、加熱された流体、電子回路などの実験でも測定されている。その理由を説明するには相転移の物理学から借りてきた考え方が必要であり、1982 年になってようやく Oscar Lanford が計算機の助けを借りて厳密なものにした。

### 同じ技法が3度

小問 (ii) の置き換えは**共役**（conjugacy）の一例である。2つの写像は、変数変換によって一方が他方に変わるとき共役であるといい、そのとき両者はまったく同じ力学的振る舞いをもつ。この問題は、条件を満たすすべての2次写像が $k = 4$ のロジスティック写像と共役であり、そのロジスティック写像がさらに $u = \sin^2\theta$ を通して角の2倍化の変装したものであることを示している。（厳密には、この最後のつながりは**半共役**（semiconjugacy）である。$\theta$ と $\pi - \theta$ は同じ $u$ を与えるので、この変数変換は1対1（one-to-one）ではない。ロジスティック写像が真の意味で共役になるのは**テント写像**（tent map）、すなわち $t \le \frac{1}{2}$ のとき $t \mapsto 2t$、$t \ge \frac{1}{2}$ のとき $t \mapsto 2 - 2t$ で定まる写像であり、そのときの変換 $u = \sin^2\frac{\pi t}{2}$ は $[0,1]$ 上で1対1である。）Section 2.8 では、$x = 2\cos\theta$ とおくと各ステップで角が2倍になることによって解ける $x \mapsto x^2 - 2$ に出会った。これも条件を満たしている（確かめてみよ）。つまり、これらはすべて同じ写像が姿を変えたものなのである。Section 8.8 では、この仲間の3番目のメンバーとして、直線からできた写像である**テント写像**が登場する。

## 思考のスキル

**変数を変換して構造を見抜く**

うまい置き換えをすると、複雑な規則が単純なものに変わることがある。問題を、すでに理解しているものに変えてくれる変数変換を探そう。

ここでは $u = \sin^2\theta$ によって2次写像が角の2倍化に変わり、1次の置き換えによって2次式の族全体が一つの写像にまとめられた。大学では、共役は中心的な道具である。力学系（dynamical systems）でも、線形代数でも（行列の対角化（diagonalising）とは、その行列が単純になる座標を選ぶことである）、群論（group theory）でも用いられる。

## 次の一歩

1. **ロジスティック写像の周期軌道。** STEP II 2002、問5（`step.maths.org/questions/02-s2-q5`）に取り組んでみよ。そのうえで、周期2の軌道が存在するのは $k > 3$ のときに限ることを示せ。

2. **2乗して2を引く。** $v_{n+1} = v_n^2 - 2$ が小問 (ii) の条件を満たすことを示せ（$p = -1$ として $-pv_n^2 + qv_n + r$ の形に書くこと）。$\alpha$ と $\beta$ を求め、その答えが $v_n = 2\cos(2^n\phi)$

と一致することを確かめよ。

3 **周期 3 の軌道。**公式 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$ を用いて、$u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$ の周期 3 の軌道を求めよ。（**ヒント：**$\theta = \pi/7$ または $\theta = \pi/9$ を試してみよ。）周期がちょうど 3 である点はいくつあるか。

4 **失われる桁。**計算機は数を 2 進法でおよそ 53 桁まで記憶する。計算機で $u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$ を反復すると、およそ何ステップで計算値が真の数列とまったく無関係になるか。そうなったとき、計算された数列は役に立たないのだろうか。

## さらに学ぶために

- **Robert May,** 「**Simple mathematical models with very complicated dynamics**」, *Nature* 261 (1976)。古典的な論文であり、今でも非常に読みやすい。
- **James Gleick,** ***Chaos: Making a New Science*** (Penguin)。メイ、ファイゲンバウム、そしてカオスの発見の物語である。
- **Steven Strogatz,** ***Nonlinear Dynamics and Chaos*** (CRC Press)、第 10 章。1 次元写像、ロジスティック写像、ファイゲンバウム定数を、大学 1 年生の水準で扱っている。
- **Ian Stewart,** ***Does God Play Dice?*** (Penguin)。カオスについての一般向けの解説書で、ロジスティック写像についての優れた章がある。

# 8.8 周期 3 ならばカオス

**問題**

**STEP III 2025、問 2**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip`

## 導入

1975 年、リー（Tien-Yien Li）とヨーク（James Yorke）は『*American Mathematical Monthly*』に、数学史上もっとも有名な題名の一つをもつ論文を発表した。その題名は「Period three implies chaos」（周期 3 はカオスを導く）である。彼らは、区間からそれ自身への連続関数（continuous function）が周期（period）3 の点（ちょうど 3 ステップ後に初めて元に戻る初期値）をもつならば、その関数は**あらゆる**周期の点をもつことを証明した。1、2、4、5、17、1000、そのすべてである。この論文はまた、「カオス（chaos）」という言葉を数学に持ち込んだ。

2025 年に出題されたこの問題は、この定理を実際に手を動かしてたどる旅である。関数 $f(x) = 7 - 2|x|$ は 2 本の直線からできているので、すべてを正確に計算できる。その 2-サイクル（2-cycle）と 3-サイクルを求め、その過程で、一つのサイクルの存在がなぜ残りのサイクルの存在を強制するのかが見えてくる。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $y = 7 - 2|x|$ のグラフはどのような形か。直線 $y = x$ とどこで交わるか。区間（interval）$[-7, 7]$ をどこへ写すか。

グラフは頂点が $(0, 7)$ にある逆 V 字形で、傾きは $\pm 2$ である。$y = x$ とは、$x = 7 - 2x$（ただし $x \geq 0$）のとき、すなわち $x = \frac{7}{3}$ で交わり、また $x = 7 + 2x$（ただし $x < 0$）のとき、すなわち $x = -7$ で交わる。これらが**不動点**（fixed point）である。そこから始めると、数列はまったく動かない。また $f(-7) = f(7) = -7$、$f(0) = 7$ であるから、f

は $[-7,7]$ をそれ自身の上へ写す。区間を 2 倍の長さに引き伸ばし、半分に折りたたむのである。

## 順を追って解く

### 段階 1　$\mathrm{f}\circ\mathrm{f}$ のグラフ

**考えてみよう**　$x$ が $-7$ から $7$ まで動くとき、$\mathrm{f}(x)$ は $-7$ から $7$ まで増加し、再び $-7$ まで減少する。では $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$ はどうなるか。

$x$ が $-7$ から $0$ まで動くとき、$\mathrm{f}(x)$ は $[-7,7]$ 全体を動くので、$\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$ は V 字をまるごと 1 つ描く。すなわち $-7$ から $7$ まで上がり、再び下がる。$x$ が $0$ から $7$ まで動くときも同じことが起こる。したがって $[-7,7]$ 上で $\mathrm{f}\circ\mathrm{f}$ のグラフは上下逆の W 字形になる。傾き $\pm 4$ の 4 本の線分からなり、どれも高さ $-7$ と $7$ の間を結び、$x=\pm\frac{7}{2}$（$\mathrm{f}(x)=0$ となる点）で山、$x=0$ で $-7$ までの谷をもつ（図 8.8.1）。$[-7,7]$ の外では、どちらのグラフも急激に下がっていく。

### 段階 2　$\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))=x$ を解く

**考えてみよう**　4 本の線分はそれぞれ対角線 $y=x$ とちょうど 1 回ずつ交わる。そのうち 2 つの交点はすでにわかっている。なぜか。入れ子になった絶対値を展開せずに、残りの 2 つを求めるにはどうすればよいか。

不動点 $\frac{7}{3}$ と $-7$ は当然 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))=x$ を満たす。それ以外の解 $p$ は、$q=\mathrm{f}(p)\neq p$ として 2-サイクル $p\to q\to p$ に属する。符号で場合分けしてみよう。$p$ と $q$ がともに正ならば $q=7-2p$、$p=7-2q$ であり、これから $p=q=\frac{7}{3}$ となってしまう。ともに負ならば、同じ議論で $-7$ となる。したがって一方は正、他方は負であり、$p>0>q$ としてよい。このとき

$$q=7-2p,\qquad p=7+2q.$$

よって $p=7+14-4p$ より $p=\frac{21}{5}$、$q=-\frac{7}{5}$ であり、確かに $q<0$ を満たす。

$[-7,7]$ の外には解はない。実際、$x>7$ のとき $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))=21-4x<x$ であり、$x<-7$ のとき $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))=21+4x<x$ である。したがって 4 つの解は

$$x=-7,\quad -\tfrac{7}{5},\quad \tfrac{7}{3},\quad \tfrac{21}{5}.\qquad\blacksquare$$

である。数列がちょうど周期 2 をもつのは、$a=\frac{21}{5}$ または $a=-\frac{7}{5}$ のときである。（不動点では数列は定数であり、周期は 1 である。）

### 段階 3　遅れてサイクルに到着する

$a = \frac{28}{5}$ とすると、$u_1 = 7 - \frac{56}{5} = -\frac{21}{5}$、$u_2 = 7 - \frac{42}{5} = -\frac{7}{5}$、$u_3 = 7 - \frac{14}{5} = \frac{21}{5}$、$u_4 = -\frac{7}{5}$、以下同様である。$u_2$ 以降の数列は2-サイクルであるが、$u_0 = \frac{28}{5}$ と $u_1 = -\frac{21}{5}$ はサイクルに含まれない。 ■

**考えてみよう** $\frac{28}{5}$ を自分で見つけるにはどうすればよかったか。逆向きに考えてみよう。f によって $-\frac{7}{5}$ に写される数はどれか。

$f(x) = -\frac{7}{5}$ は $|x| = \frac{21}{5}$ を意味するので、$x = \pm\frac{21}{5}$ である。一方はサイクルに含まれ、もう一方の $-\frac{21}{5}$ がサイクルへの入口となる。次に $f(x) = -\frac{21}{5}$ は $|x| = \frac{28}{5}$ を意味する。f は2対1の写像なので、$(-7,7)$ のすべての点は2つの逆像（preimage）をもち、したがってどのサイクルにも、そこへ流れ込む初期値の木が付随している。

### 段階4 3-サイクル

**手を止めて、やってみよう** $a = 1$ と $a = -\frac{7}{9}$ から始まる数列を計算せよ。

$a = 1$ からは $1 \to 5 \to -3 \to 1$ となる。$a = -\frac{7}{9}$ からは $-\frac{7}{9} \to \frac{49}{9} \to -\frac{35}{9} \to -\frac{7}{9}$ となる。どちらも3-サイクルである。

**考えてみよう** $f(f(f(x))) = x$ は解をいくつもちうるか。段階1と同様に、そのグラフの形を考えよ。

段階1の議論を繰り返すと、f をもう一度適用するたびに線分の本数は2倍になる。したがって $[-7,7]$ 上で $f \circ f \circ f$ のグラフは、傾き $\pm 8$ の8本の線分からなるジグザグであり、どの線分も $-7$ から7までの高さ全体にわたる（図 8.8.2）。各線分は対角線とちょうど1回交わるので、$[-7,7]$ にはちょうど8個の解があり、（前と同様に）その外には解はない。すでに8個、すなわち2つの不動点と2つの3-サイクルの6点が見つかっている。よって解は

$$x = -7,\ \frac{7}{3},\ 1,\ 5,\ -3,\ -\frac{7}{9},\ \frac{49}{9},\ -\frac{35}{9}. \qquad ■$$

である。

### 段階5 3-サイクルへの遅れた到着

サイクル $1 \to 5 \to -3$ から逆向きにたどる。$u_3$ はサイクルに含まれるが $u_2$ は含まれないようにしたい。1の逆像は $|x| = 3$ を満たすので $x = \pm 3$ であり、$-3$ はサイクルに含まれるから $u_2 = 3$ とする。3の逆像は $|x| = 2$ を満たすので、$u_1 = 2$ とする。2の逆像は $|x| = \frac{5}{2}$ を満たすので、$u_0 = \frac{5}{2}$ とする。すると

$$\frac{5}{2} \to 2 \to 3 \to 1 \to 5 \to -3 \to 1 \to \cdots,$$

となり、$\frac{5}{2}$、2、3 のいずれもサイクルに含まれない。よって $a = \frac{5}{2}$ が条件を満たす。■

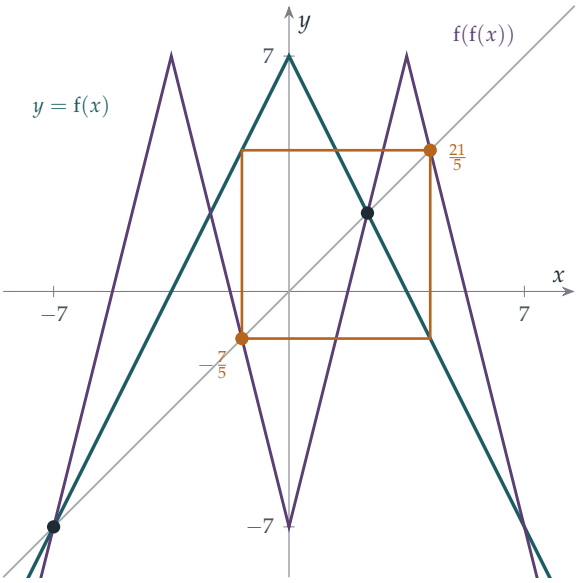



**図 8.8.1**　$y = \mathrm{f}(x)$（青緑）、$y = \mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$（紫）、$y = x$（灰色）のグラフ。紫のグラフは対角線と 4 回交わる。不動点 $-7$ と $\frac{7}{3}$（黒）、および 2-サイクル $\frac{21}{5} \leftrightarrow -\frac{7}{5}$（琥珀色）である。琥珀色の正方形は 2-サイクルの**クモの巣図**（cobweb）である。f のグラフまで縦に進み、対角線まで横に進み、これを繰り返す。

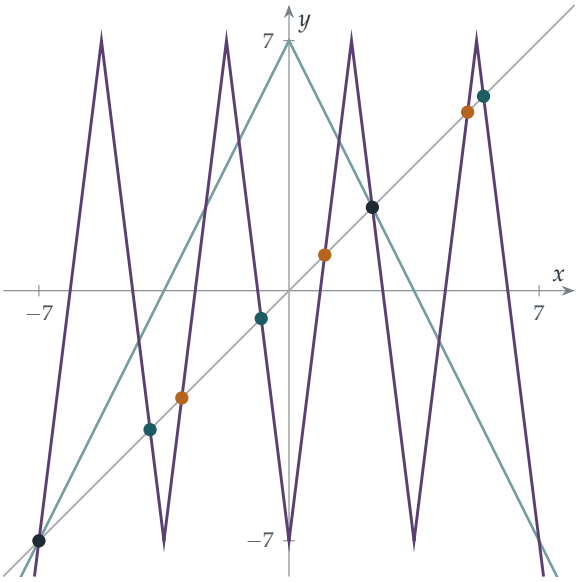



**図 8.8.2**　$[-7,7]$ 上の $y = f(f(f(x)))$ のグラフ（紫）は、傾き $\pm 8$ の 8 本の線分からなるジグザグであり、各線分は対角線と 1 回ずつ交わる。8 つの交点は、2 つの不動点（黒）、3-サイクル $1 \to 5 \to -3$（琥珀色）、3-サイクル $-\frac{7}{9} \to \frac{49}{9} \to -\frac{35}{9}$（青緑）である。

## 振り返り

- **形で数える。** 入れ子になった絶対値を展開する代わりに、グラフの線分の本数を数えた。これによって探すべき解の個数がわかり、したがってすべて見つけ終えたときにそれがわかった。
- **サイクルの構造を利用する。** $f(f(x)) = x$ の解は不動点か、2 つ組で現れる。$f(f(f(x))) = x$ の解は不動点か、3 つ組で現れる。
- **逆向きに考える。** (i)(d) と (ii)(c) の「遅れた到着」は逆像によって構成した。

## 背後にある数学

### あらゆる長さのサイクル

段階 4 の数え方は、何ステップの場合にも通用する。f を $n$ 回適用したものを $f^n$ と書く。$[-7,7]$ 上で $f^n$ のグラフは、高さ全体にわたる $2^n$ 本の線分からなるので、$f^n(x) = x$ はちょうど $2^n$ 個の解をもつ。そのうちいくつかは $n$ を割り切るより短い周期 $d$ をも

つが、各 $d$ についてそれらは高々 $2^d$ 個であり、

$$2^n > 2^{n/2} + 2^{n/3} + \cdots + 2^1 \quad (n \text{ の約数 } d < n \text{ についての和})$$

が成り立つ。なぜなら、$n$ より小さい約数はすべて $n/2$ 以下であり、$2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{\lfloor n/2 \rfloor} < 2^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} \leq 2^n$ だからである。したがって、すべての $n$ について周期がちょうど $n$ である点が存在する。この関数はあらゆる長さのサイクルをもつ。

### なぜ周期 3 がすべてを強制するのか

リーとヨークの定理によれば、これは私たちの関数に特有のことではない。区間からそれ自身への連続関数 g が 3-サイクルをもてば、**どのような**ものであっても、あらゆる長さのサイクルをもつ。証明には中間値の定理（intermediate value theorem）しか使わない。そして私たちの 3-サイクルが、その筋道を示してくれる。

**考えてみよう** サイクル $1 \to 5 \to -3$ の点の間にある 2 つの区間を $I_1 = [-3, 1]$、$I_2 = [1, 5]$ とする。f はそれぞれをどこへ写すか。

$I_2$ 上で f は $f(1) = 5$ から $f(5) = -3$ まで減少するので、$f(I_2) = [-3, 5] = I_1 \cup I_2$ である。$I_1$ 上で f は $f(-3) = 1$ から $f(0) = 7$ まで増加し、$f(1) = 5$ まで減少するので、$f(I_1) = [1, 7]$ であり、これは $I_2$ を含む。使ったのはサイクルの 3 点だけであることに注意しよう。$a < b < c$ である 3-サイクル $a \to b \to c$ をもつ連続関数はどれも、同じように区間を覆う。どの区間がどの区間を覆うかを図にまとめることができる（図 8.8.3）：

$$I_1 \to I_2, \qquad I_2 \to I_1, \qquad I_2 \to I_2.$$

定理は次の 2 つの事実から従う。どちらも中間値の定理の帰結である。

- $g(I) \supseteq I$ ならば、g は $I$ 内に不動点をもつ。（$g(x) - x$ に中間値の定理を適用すればよい。）
- $g(I) \supseteq J$ ならば、$g(I') = J$ をちょうど満たす、より小さい閉区間 $I' \subseteq I$ が存在する。

周期 $n$ の点を見つけるには、図の中でループ $I_2 \to I_2 \to \cdots \to I_2 \to I_1 \to I_2$ をたどる。$I_2$ の中で $n-1$ ステップ進み、1 ステップだけ $I_1$ に出て戻ってくるのである。2 つ目の事実を繰り返し使うと、$I_2$ を縮めて、軌道がこの遍歴（itinerary）に従う初期値の区間を得ることができ、$g^n$ はその区間を $I_2$ 全体の上へ写す。1 つ目の事実から、$g^n(x) = x$ を満たし、ステップ $n-1$ でのみ $I_1$ を訪れる点 $x$ が得られる。その周期は $n$ より小さくはなりえない。もしそうなら、$I_1$ への訪問がもっと早く繰り返されるはずだからである。（$I_1$ と $I_2$ は点 1 を共有しているので、一つだけ微妙な点がある。それが問題を起こさないことの確認は演習とする。）

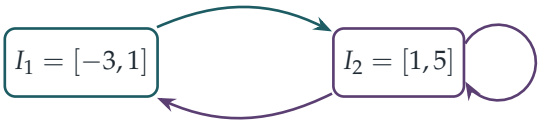



**図 8.8.3** 3-サイクルの被覆図（covering diagram）。ある区間から別の区間への矢印は、1つ目の区間の像が2つ目の区間を含むことを意味する。図の中のどのループも関数のサイクルを与える。ループ $I_2 \to I_2$ は不動点を、$I_1 \to I_2 \to I_1$ は2-サイクルを与え、$I_2$ のループを $n-1$ 回まわってから $I_1$ を訪れると、長さ $n$ のサイクルが得られる。

### シャルコフスキーの定理

リーとヨークが最初だったわけではない。1964年、ウクライナの数学者シャルコフスキー（Oleksandr Sharkovskii）は、はるかに完全な結果をすでに証明していた。それはロシア語で『*Ukrainian Mathematical Journal*』に発表され、西側では10年間知られていなかった。正の整数を次のように並べる。

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots,\ \ 2\cdot 3,\ 2\cdot 5,\ \ldots,\ \ 2^2\cdot 3,\ 2^2\cdot 5,\ \ldots,\ \ \ldots,\ \ 2^3,\ 2^2,\ 2,\ 1\,:$$

まず3以上の奇数、次に奇数の2倍、次に奇数の4倍、以下同様に続き、最後に2の累乗を減少する順に並べる。シャルコフスキーの定理によれば、区間上の連続関数が長さ $m$ のサイクルをもてば、この並びで $m$ より後にくるすべての長さのサイクルをもつ。3が先頭にあるので、周期3はあらゆる周期を導く。しかもこの定理は最良である。すなわち、どの $m$ についても、長さ $m$ のサイクルをもち、並びでそれより前にくる長さのサイクルをもたない関数が存在する。末尾の2の累乗は、Section 8.7 のロジスティック写像における周期倍分岐のカスケード（period-doubling cascade）そのものであり、3-サイクルはそこで $k = 1+\sqrt{8}$ において現れる。

---

### テント写像とロジスティック写像

$[0,1]$ を $[-7,7]$ の上へ写す置換 $x = 14y - 7$ を行う。簡単な計算により、f はテント写像（tent map）

$$T(y) = \begin{cases} 2y & 0 \le y \le \tfrac{1}{2}, \\ 2 - 2y & \tfrac{1}{2} \le y \le 1, \end{cases}$$

になることがわかる。さらに置換 $u = \sin^2(\pi y/2)$ を行うと、テント写像はロジスティック写像（logistic map）$u \mapsto 4u(1-u)$ に変わる。つまりこの問題の関数は、Section 8.7 のカオス的なロジスティック写像をまっすぐに伸ばしたものである。$\mathrm{f}^3(x) = x$ の8個の解は、$[0, \tfrac{\pi}{2}]$ における $\sin^2(8\theta) = \sin^2\theta$ の8個の解に対応する。

## 思考のスキル

### 中間値の定理による存在証明

解が存在することを示すのに、いつもそれを見つける必要があるわけではない。連続関数の符号が変わること、あるいはある区間がそれ自身を覆うように写されることを示せばよい。

この問題では、すべての解を計算することができた。しかしリーとヨークの定理は、まったく計算できない関数にも適用でき、中間値の定理と、どの区間がどの区間を覆うかを表す図だけを使って、無限個のサイクルの存在を証明する。大学では、このような構成を伴わない存在証明という議論のスタイルが、解析学（中間値の定理そのもの）、位相幾何学（不動点定理）、そして力学系の至るところに現れる。

## 次の一歩

1. **4-サイクル。** 被覆図を使って、f の 4-サイクルがどこにあるはずかを予想せよ（$I_2$ で 3 ステップ、$I_1$ で 1 ステップ）。次にそれを正確に求めよ。（**ヒント：**このサイクルは 3 つの正の点と 1 つの負の点をもつ。4 つの一次方程式を書き下せ。）

2. **微妙な点。** 周期 3 が周期 $n$ を導くことの証明において、$n \geq 4$ のとき、得られた点 $x$ が点 1（あるいは元の 3-サイクルのどの点）にもなりえない理由を説明せよ。

3. **周期 3 なしの周期 5。** $g(1) = 3$、$g(3) = 4$、$g(4) = 2$、$g(2) = 5$、$g(5) = 1$ を満たし、これらの点を直線で結んだ $[1,5]$ 上の連続関数のグラフをかけ。区間 $[1,2]$、$[2,3]$、$[3,4]$、$[4,5]$ についてその被覆図をかけ。長さ 3 のループは見つかるか。（シャルコフスキーの定理によれば、3-サイクルは存在しない。）

4. **テント写像。** $x = 14y - 7$ によって f がテント写像になることを確かめよ。次に、テント写像は $y$ を 2 進法で書いたものを 2 倍し、先頭の桁が 1 のときはすべての桁を反転させることを示し、これを用いてその 3-サイクルを求めよ。

## さらに学ぶために

- **Tien-Yien Li & James Yorke, “Period three implies chaos”**, *American Mathematical Monthly* 82 (1975). 短く、中間値の定理を知っていれば読める。
- **Robert Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*** (CRC Press). 学部生向

けに書かれており、テント写像、ロジスティック写像、シャルコフスキーの定理を完全な証明つきで扱っている。

- **Keith Burns & Boris Hasselblatt, "The Sharkovsky theorem: a natural direct proof"**, *American Mathematical Monthly* 118 (2011). 被覆図を用いた現代的な証明。

# この章で学んだこと

この章は、ほとんどの微分方程式（differential equation）は解くことができず、それでも理解することこそが腕の見せどころである、という話から始まった。そこで三つの問いを立てた。現在は未来を決定するのか。解かずに何がわかるのか。長い時間が経つと何が起こるのか。この章の八つの問題が示したことを以下にまとめる。

### 1. 現在は未来を決定するのか

たいていはそうであるが、いつもではない。Section 8.1 では、方程式 $(y')^2 = 4y$ が $x$ 軸上のすべての点を通る解を無数にもっていた。解は好きなだけ $y = 0$ にとどまり、その後に離れていくことができたのである。原因は平方根にあった。平方根は 0 で傾きが無限大になり、ピカール–リンデレーフの定理（Picard–Lindelöf theorem）のリプシッツ条件（Lipschitz condition）を満たさなくなる。同じ仕組みによって、水の漏れるバケツを見てもいつ空になったかはわからないことが説明でき、古典力学における決定論（determinism）をめぐるパズルであるノートンのドーム（Norton's dome）の背後にも、この仕組みがある。

未来が決定されている場合でも、それが予測できるとは限らない。Section 8.7 のロジスティック写像（logistic map）には $u_n = \sin^2(2^n\theta)$ という厳密な式があるが、それでも一歩ごとに初期角 $\theta$ の誤差は 2 倍になり、初期値の誤差も平均して同じ速さで増大する。原理的に決定されていることと、実際に予測できることとは別である。

### 2. 解かずに何がわかるのか

非常に多くのことがわかる。

- **エネルギー。** Section 8.2 では、方程式に $y'$ を掛けることで増加しえない量が得られ、それによって誰にも解けない方程式の解を評価することができた。このような量はリャプノフ関数（Lyapunov function）とよばれ、安定性（stability）を証明するための主要な道具である。
- **平衡点と安定性。** Section 8.3 では、増加率の符号から魚の個体数の行く末が予測でき、ある閾値を超えて漁獲すると突然の崩壊が起こることがわかった。

- **適切な座標。** Section 8.4 では、極座標（polar coordinates）によって連立系が $r$ についての一つの方程式になり、すべての解が円に巻きついていくことがわかった。Section 8.5 では、対称性によって追いかけ合う 4 匹の犬を 1 匹の問題に帰着させ、割り算で時間を消去することで、それらの軌跡の形が得られた。
- **恒等式から得られる構造。** Section 8.6 では、ロンスキアン（Wronskian）によって、どの解も一度も積分することなく、方程式の解どうしが直交する（orthogonal）ことが示された。
- **数え上げと被覆。** Section 8.8 では、グラフの区分を数えることですべての周期軌道が見つかり、中間値の定理（intermediate value theorem）によってあらゆる長さの周期軌道の存在が証明された。

### 3. 長い時間が経つと何が起こるのか

この章では、あらゆる種類の長期的な振る舞いが現れた。解は安定な平衡点に落ち着いたり（Section 8.3）、繰り返す周期軌道に近づいたり（Section 8.4）、有限時間で一点に渦を巻いて吸い込まれたり（Section 8.5）、カオス的に振る舞ったりした（Section 8.7）。ロジスティック写像では、ただ一つのパラメータによって系はこれらすべてを経ていく。まず不動点、次にファイゲンバウム（Feigenbaum）の普遍定数に支配される周期倍分岐（period doubling）の連鎖、そして最後にカオスであり、その中には 3 周期軌道のような秩序の窓が現れる。さらに Section 8.8 では、ひとたび 3 周期軌道が現れれば、あらゆる長さの周期軌道が存在しなければならないことが示された。これは、整数に対するシャルコフスキー（Sharkovskii）の順序への第一歩である。

### 4. 微分方程式と力学系のための道具箱

| 手法 | 使った場面 |
|---|---|
| 特異解を探す | 解の非一意性（8.1） |
| 増加しえない量 | 解の評価（8.2） |
| 増加率の符号 | 漁獲（8.3） |
| 対称性に合った座標 | リミットサイクル（limit cycle）（8.4）、追跡（8.5） |
| 置換による線形化 | ベルヌーイ方程式（Bernoulli equation）（8.4） |
| ロンスキアン | 直交性（8.6） |
| 共役（conjugacy） | ロジスティック写像（8.7） |
| 数学的帰納法（induction） | $u_n = \sin^2(2^n\theta)$（8.7） |
| グラフの区分を数える | $f^n$ の周期軌道（8.8） |
| 中間値の定理 | 周期 3（8.8） |

### この先へ

- エネルギーと保存則は、Section 10.1 をはじめとする力学の章で再び登場する。
- 未知関数が複数ある線形微分方程式は固有ベクトル（eigenvector）によって解かれ、Section 11.2 で振動系を支配する。初等関数（elementary function）では解けない非線形の振り子は Section 11.3 で扱う。
- 写像を反復して不動点を求めることで、Section 12.15 では家系の姓が途絶えるかどうかが決まる。また、ランダムな数列の長期的な振る舞いは Section 12.16 の主題である。

#### 大学入学前にさらに先へ進みたい人へ

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（非線形力学とカオス）：力学系の最初の一冊として最良の本であり、応用例と図が豊富である。この本に基づく Strogatz の講義の録画がオンラインで無料公開されている。
- **James Gleick, *Chaos: Making a New Science***（カオス：新しい科学をつくる）：カオスがどのように発見されたかの物語である。
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***（応用と歴史的注釈つき微分方程式）：歴史的な話題に富んだ、定評ある入門講義である。
- **Robert Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems***（カオス力学系入門）：反復写像を、証明つきで大学 1 年生の水準で扱う。

ラプラス（Laplace）は、現在を正確に知っていれば未来全体を計算できると考えた。この章では、その夢がどこで終わるのかを見てきた。一意性は成り立たないことがある。そして一意性が成り立つ場合でも、カオスはごくわずかな不確かさを増幅し、ついには予測を不可能にしてしまう。しかし同時にこの章は、式がなくても多くのことが理解できることも示した。解の評価、平衡点、周期軌道とその安定性、そしてカオスそのものの構造である。「方程式を解く」から「解を理解する」へと移ることは、大学の数学の講義が求める考え方の転換のうちで、最も重要なものの一つである。

# 「次の一歩」の解答

ここに載せるのは完全な解答ではなく、簡潔な答えとヒントである。結果と鍵となるステップを示しているので、自分の解答を確かめるのに使ってほしい。答えを見る前に、それぞれの問題にきちんと取り組むこと。

## 8.1 解が一意でないとき

1. $y = v^2$ とおくと $2vv' = \alpha v - \beta v^2$ となるので、$v' = \frac{1}{2}(\alpha - \beta v)$ であり、$y_1 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta t/2}\right)^2$ である。$y = v^3$ とおくと $v' = \frac{1}{3}(\alpha - \beta v)$ であり、$y_1 = \frac{\alpha^3}{\beta^3}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta t/3}\right)^3$ である。定数関数 $y = 0$ は両辺をともに 0 にする。導出の途中で $v$ で割ったときに、この解が失われたのである。

2. $2\sqrt{h} = 2\sqrt{h_0} - kt$ より $h = \left(\sqrt{h_0} - \frac{1}{2}kt\right)^2$ であり、バケツは $T = \frac{2\sqrt{h_0}}{k}$ で空になる。$h \equiv 0$ と、$t \le T$ で $h = \frac{k^2}{4}(T - t)^2$、$t \ge T$ で $h = 0$ とする関数は、どちらも方程式を満たし、$T$ 以降は 0 である。空のバケツを見ても、それがいつ空になったのかはわからないのである。

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y\mathrm{e}^{-2x}) = (y' - 2y)\mathrm{e}^{-2x} = 0$ より $y = C\mathrm{e}^{2x}$ であり、$y(0) = 0$ から $C = 0$ が従う。関数 $2y$ はリプシッツ連続（Lipschitz）である（変化量は高々 $2|y_1 - y_2|$）。一方、$2\sqrt{y}$ は 0 で傾きが無限大になる。

4. 任意の $b \le 0 \le a$（$b = -\infty$ や $a = \infty$ も許す）に対して、$x < b$ で $y = (x - b)^3$、$b \le x \le a$ で $y = 0$、$x > a$ で $y = (x - a)^3$ とすればよい。$a = b = 0$ の場合が $y = x^3$ である。

## 8.2 解かずに評価する

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((y')^2 + y^2\right) = 2y'(y'' + y) = 0$ より $(y')^2 + y^2 = A^2$ となり、$|y| \le A$ である。厳密解は $A\cos x$ である。

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\theta')^2 - 2\cos\theta\right) = 2\theta'(\theta'' + \sin\theta) = 0$ である。静止状態から始めると $(\theta')^2 = 2(\cos\theta - \cos\theta_0) \ge 0$ なので、$\cos\theta \ge \cos\theta_0$ である。$|\theta_0| < \pi$ ならば、連続性により $\theta$ は $[-|\theta_0|, |\theta_0|]$ にとどまる。$|\theta_0| = \pi$ のときは、振り子（pendulum）は真上を向いた状態で釣り合い、そのままとどまる。$|\theta_0| > \pi$、たとえば $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$ ならば、$\theta''(0) = -\sin\frac{3\pi}{2} = 1 > 0$ なので、$\theta$ は増加し始める。このとき振り子の実

際の角度は $\theta_0 - 2\pi = -\frac{\pi}{2}$ であり、そこから測って $\pm\frac{\pi}{2}$ の間を振れるのである。

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((y')^2 + y^2\right) = 2y'(y'' + y) = -4k(y')^2 \leq 0$ である。実際に 0 に収束（tend to zero）するが、単調性（monotonicity）だけではこれは示せない。たとえば明示的な解が必要であり、その指数 $-k \pm \sqrt{k^2 - 1}$ の実部は負である。

4. $(y')^2 - \frac{1}{2}y^4$ は定数であり、$-\frac{1}{2}$ に等しい。これから $(y')^2 = \frac{1}{2}(y^4 - 1)$ が得られるが、これは何の上界も与えない。「ポテンシャル」$-\frac{1}{2}y^4$ には $y$ を閉じ込める井戸がなく、実際 $y$ は有限時間で発散（blow up）する。

### 8.3 個体群の収穫

1. 方程式は $x' = \alpha^2 - (x - K)^2$ であり、これは $y' = y(2\alpha - y)$ となる。$w = \frac{1}{y}$ とおくと $w' = 1 - 2\alpha w$ なので、$w = \frac{1}{2\alpha} + Ce^{-2\alpha t}$ である。$y(0) < 0$ ならば $w(0) < 0 < \frac{1}{2\alpha}$ なので、$w$ は有限時間で 0 を通過し、$y \to -\infty$ となる。$x$ はそれより前に 0 に達する。

2. $z = x - K$ とおくと $z' = -(z^2 + \beta^2)$ なので、$\tan^{-1}\frac{z}{\beta} = \tan^{-1}\frac{K}{\beta} - \beta t$ である。個体数は $t = \frac{2}{\beta}\tan^{-1}\frac{K}{\beta}$ で 0（$z = -K$）に達する。

3. $x' = x(2K - h - x)$ の平衡点（equilibrium）は 0 と $2K - h$ である。$h < 2K$ のとき、これは正の環境収容力（carrying capacity）をもつロジスティック方程式（logistic equation）であり、正の解はすべて $2K - h$ に収束する。漁獲量は個体数が減るにつれて減るので、個体数を 0 に追い込むことは決してない。

4. $x = K + K\tanh Kt$ であり、$\tanh Kt = \frac{1}{2}$ より $t = \frac{1}{K}\tanh^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\ln 3}{2K}$ である。

### 8.4 渦を巻いて円に近づく

1. 曲線と動径のなす角 $\psi$ は $\tan\psi = \frac{r}{\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta} = -1$ を満たし、これはすべての点で同じである。つまり、曲線はすべての半直線と 45° で交わる。

2. $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2 + y^2) = r\,\mathrm{d}r$ である。また、$x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = r\cos\theta(\sin\theta\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta) - r\sin\theta(\cos\theta\,\mathrm{d}r - r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta) = r^2\,\mathrm{d}\theta$ である。

3. $s = r^2$ とおくと $\dot{s} = 2s(1 - s)$ というロジスティック方程式になるので、任意の $s(0) > 0$ に対して $s \to 1$ となる。直交座標（Cartesian coordinates）で書くと、$\dot{x} = x(1 - x^2 - y^2) - y$、$\dot{y} = y(1 - x^2 - y^2) + x$ である。

4. $\dot{r} = r(r - 1)(r - 2)$、$\dot{\theta} = 1$ である。0 と 1 の間では $\dot{r} > 0$、1 と 2 の間では $\dot{r} < 0$、2 より外側では $\dot{r} > 0$ である。したがって $r = 1$ は吸引的であり、$r = 2$ は反発的である。

### 8.5 グレイハウンドを追うグレイハウンド

1. 対称性により、犬たちは常に正方形をなす。$A$ は $AB$ に沿って速さ $v$ で走るので、距離を $v$ の割合で縮める。$B$ は $AB$ に垂直な $BC$ に沿って走るので、1 次の範囲では距離を変えない。したがって $AB$ はちょうど $v$ の割合で $s$ から 0 まで縮み、それにかかる時間は $\frac{s}{v}$ である。

2. $r = \lambda e^{-\sqrt{3}\theta}$ である。距離は $v - v\cos 120^\circ = \frac{3}{2}v$ の割合で縮むので、時間 $\frac{2s}{3v}$ 後に出会い、それぞれ $\frac{2s}{3}$ だけ走る（これは $n = 3$ のときの $\frac{s}{2\sin^2(\pi/n)}$ と一致する）。

3. 1 周するごとに $r$ は $e^{-2\pi} \approx \frac{1}{535}$ 倍になる。1 周後には約 19 cm、2 周後には約 0.35 mm となるので、2 周で十分である。

4. 2 匹の犬は互いに向かってまっすぐ走り、時間 $\frac{s}{2v}$ 後に中央で出会う。このとき公式は破綻する。$\tan\frac{\pi}{2}$ は無限大であり、これはまったく回転しないという事実に対応している。

### 8.6 量子振動子

1. これは（面倒ではあるが）直接の微分計算である。あるいは問 4 から従う。$2\lambda = \omega$ のとき、$\int y_0 y_2 = \int (2\omega x^2 - 1)e^{-\omega x^2}\,dx = 2\omega \cdot \frac{1}{2\omega}\sqrt{\frac{\pi}{\omega}} - \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} = 0$ である。

2. $y'' = (4\lambda^2 x^2 - 2\lambda)y$ なので、方程式が成り立つには $4\lambda^2 = \omega^2$ かつ $2\lambda = (2\nu + 1)\omega$ が必要である。（減衰するように）$\lambda = \frac{\omega}{2} > 0$ とすると、$\nu = 0$ である。

3. $\frac{d}{dx}(y_m y_n' - y_n y_m') = y_m y_n'' - y_n y_m'' = (m^2 - n^2) y_m y_n$ である。これを 0 から $\pi$ まで積分する。$y_m$ と $y_n$ は両端で 0 になるので左辺は 0 となり、また $m^2 \neq n^2$ である。

4. $c = (2n + 1)\omega$ とおくと、$y_n'' = (\omega^2 x^2 - c)y_n$ である。$z = \omega x y_n - y_n'$ を 2 回微分し、この式（とその導関数）を用いると $z'' - \omega^2 x^2 z = -(c + 2\omega)z$ が得られ、$c + 2\omega = (2n + 3)\omega$ である。$y_0 = e^{-\omega x^2/2}$ から、$2\omega x e^{-\omega x^2/2}$、続いて $2\omega(2\omega x^2 - 1)e^{-\omega x^2/2}$ が得られ、これらはそれぞれ $y_1$ と $y_2$ の定数倍である。

### 8.7 解けるカオス

1. (i) 数学的帰納法（induction）による。$0 < x < 1$ ならば $0 < x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$ なので、$0 < kx(1 - x) < 1$ である。(ii) $a = ka(1 - a)$ より $k = \frac{1}{1-a}$ である。(iii) $x_1 = ka(1 - a) = ab$ とすると、条件 $x_2 = a$ は $kab(1 - ab) = a$ となる。$k = \frac{b}{1-a}$ を用いると、これは $ab^3 - b^2 + 1 - a = 0$ となる。根 $b = 1$ は不動点（fixed point）$(x_1 = a)$ に対応するので、これを因数としてくくり出すと $ab^2 + (a - 1)b + (a - 1) = 0$ となる。これを $b$ について解けば、$k = \frac{b}{1-a}$ が得られる。同じことを別の形で言えば、2-周期軌道（2-cycle）の 2 点は $k^2x^2 - k(k + 1)x + (k + 1) = 0$ の根であり、その判別式（discriminant）$k^2(k + 1)(k - 3)$ は $k > 3$ のときに限り正である。

2. $p=-1$、$q=0$、$r=-2$ のとき、$4pr = 8 = 8+2q-q^2$ である。係数を比較すると $\alpha = \frac{4}{p} = -4$、$\beta = \frac{q-4}{2p} = 2$ となるので、$v_n = 2 - 4\sin^2(2^n\theta) = 2\cos(2^{n+1}\theta)$ であり、これは $\phi = 2\theta$ とした $2\cos(2^n\phi)$ である。

3. $u_3 = u_0$ となるには $\sin^2 8\theta = \sin^2\theta$ が必要なので、$8\theta = \pm\theta + k\pi$ である。$\theta = \frac{\pi}{7}$ のとき、周期軌道は $\sin^2\frac{\pi}{7} \to \sin^2\frac{2\pi}{7} \to \sin^2\frac{4\pi}{7} \to \sin^2\frac{8\pi}{7} = \sin^2\frac{\pi}{7}$ である。$\theta = \frac{\pi}{9}$ のときは $\sin^2\frac{\pi}{9}$、$\sin^2\frac{2\pi}{9}$、$\sin^2\frac{4\pi}{9}$ である。写像 $u \mapsto u_3$ は $2^3 = 8$ 個の不動点をもつ。そのうち 2 個（0 と $\frac{3}{4}$）は元の写像自身の不動点なので、ちょうど周期 3 の点が 6 個残る。すなわち、3-周期軌道が 2 つある。

4. 各ステップで $\theta$ は 2 倍になり、そのたびに精度が 2 進数で 1 桁ずつ失われるので、およそ 50 ステップ後には、計算値は真の値と何の関係もなくなる。それでも計算値は無意味ではない。計算された数列は、わずかに異なる初期値から出発した真の軌道（orbit）の近くにとどまる（**シャドーイング性**（shadowing property））ので、その統計的性質は依然として正しいのである。

## 8.8 周期 3 ならばカオス

1. $a$、$b$、$c > 0$、$d < 0$ とすると、$b = 7-2a$、$c = 7-2b$、$d = 7-2c$、$a = 7+2d$ である。これを解くと $17a = 49$ となるので、周期軌道は $\frac{49}{17} \to \frac{21}{17} \to \frac{77}{17} \to -\frac{35}{17} \to \frac{49}{17}$ であり、3 点が $I_2 = [1,5]$ に、1 点が $I_1 = [-3,1]$ に属する。

2. 見つかった点の遍歴（itinerary）は $I_2, I_2, \ldots, I_2, I_1$（$I_2$ にいるステップが $n-1 \geq 3$ 回）である。周期軌道 $1 \to 5 \to -3$ はこの遍歴をたどれない。$-3$ は $I_2$ に属さないので、1（2 番目の像が $-3$）も、5（最初の像が $-3$）も、$-3$ 自身も、その点ではありえない。

3. 被覆図（covering diagram）は、$[1,2] \to [3,4]$, $[4,5]$、$[2,3] \to [4,5]$、$[3,4] \to [2,3]$, $[3,4]$、$[4,5] \to [1,2]$ である。長さ 3 のループは $[3,4] \to [3,4] \to [3,4]$ ただ 1 つであり、これが与えるのは不動点であって、3-周期軌道ではない。

4. $x = 14y - 7$ とおくと $\frac{f(x)+7}{14} = 1 - |2y-1|$ となり、これはテント写像（tent map）である。2 倍すると 2 進数の各桁が左にずれる。押し出された桁が 1 ならば結果は $2-2y$ となり、これは残りの桁を反転させる。3-周期軌道は $\frac{2}{7} \to \frac{4}{7} \to \frac{6}{7}$ と $\frac{2}{9} \to \frac{4}{9} \to \frac{8}{9}$（すなわち $x = -3, 1, 5$ と $x = -\frac{35}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{49}{9}$）であり、2 進数では $\frac{2}{7} = 0.\overline{010}$、$\frac{2}{9} = 0.\overline{001110}$ である。

章

# 9

# 数え上げと確率

数え上げは最も古い数学である。それを巧みに行うことは、今なお最も難しいことの一つである。

この章の内容


| | | |
|---|---|---|
| 9.1 | 平面を分割する直線 | STEP II 1990 |
| 9.2 | ミニチュア版ラムゼーの定理 | STEP I 1989 |
| 9.3 | 柵の杭を塗り分ける | STEP II 1995 |
| 9.4 | 関数としての数列 | STEP I 2016 |
| 9.5 | 両替の仕方 | STEP I 1997 |
| 9.6 | 奇妙なサイコロ | STEP I 1993 |
| 9.7 | 等しい累乗和 | STEP I 1992 |
| 9.8 | 誰も自分のシャツを受け取らない | STEP II 2016 |
| 9.9 | 誕生日問題 | STEP II 2007 |
| 9.10 | いつでもおつりを渡せる | STEP I 2011 |
| 9.11 | 全種類を集める | STEP II 1994 |
| 9.12 | ランダムな部分集合 | STEP III 2019 |
| 9.13 | いかさまサイコロ | STEP I 1999 |
| A | 演習問題の答え | p. 683 |

# 数え上げの技法

> 組合せ論は位相幾何学のスラム街である。
>
> — J. H. C. ホワイトヘッド（Whitehead）、1950 年代の言葉。今日この見方をとる者はいない。

誰でも数を数えることはできる。しかし、硬貨で £1 を作る方法は何通りあるか、10 人を誰も自分の席に座らないように座らせる方法は何通りあるか、地図を 4 色で塗り分ける方法は何通りあるか、と問われると、単純な数え上げはたちまち行き詰まる。場合が多すぎて書き出せないうえに、場合どうしが重なり合うからである。数え上げと配置の数学である**組合せ論**（combinatorics）とは、こうした問題を、書き出さずに解けるように整理する技法なのである。

ホワイトヘッドの言葉が示すように、組合せ論は長いあいだ、本格的な学問というより巧妙な小技の寄せ集めとみなされていた。それが変わったのは 20 世紀後半のことである。その原動力の一つは計算機科学であった。アルゴリズムが要する手順の数を数えることは、組合せ論の問題だからである。もう一つは、代数学、幾何学、確率論との深いつながりが発見されたことであった。今日、組合せ論は数学で最も活発な分野の一つである。2022 年、ジューン・フー（June Huh）は数学における最高の栄誉であるフィールズ賞（Fields Medal）を受賞したが、その受賞理由の一部は、Section 9.3 に登場する彩色多項式（chromatic polynomial）に関する 1968 年の予想を、代数幾何学の考え方を用いて証明したことであった。

### なぜ数え上げが重要なのか

最も素朴な形の確率は、数え上げにほかならない。すべての結果が同様に確からしいとき、事象の確率は、その事象が起こる場合の数を全体の場合の数で割ったものである。したがって、トランプ、さいころ、くじに関する問題はすべて数え上げの問題であり、まさにこの理由から、本章の後半は確率分野の問題から採られている。しかし、数え上げが重要なのはゲームにとどまらない。計算機科学者は、アルゴリズムに必要な演算の回数や、アルゴリズムが失敗しうる仕方の数を数える。化学者は分子のとりうる構造を数える。生物学者は DNA 鎖の折りたたまれ方を数える。暗号学者は、攻撃者が試さなければならない鍵の数を数え、さらに Section 9.9 で見るように、何かが二つ一致するまでにいくつ必要かを数える。

### 大学で出会うこと

多くの大学では、1 年次または 2 年次に組合せ論あるいは離散数学の講義が開かれており、その主題は本章の主題と同じである。数え上げの基本原理（積の法則、全単射（bijection）、包除原理（inclusion–exclusion）、鳩の巣原理（pigeonhole principle））や、漸化式（recurrence relation）の立て方と解き方を学ぶ。数列を関数に、数え上げを代数に変える**母関数**（generating function）にも出会う。彩色からラムゼー理論（Ramsey theory）に至るまでのグラフ（graph）を学び、部分集合の束のような半順序集合（partially ordered set）を学ぶ。確率論の講義でも同じ道具が、期待値の線形性（linearity of expectation）とともに、ランダムな構造の解析に用いられる。さらに先へ進むと、組合せ論は代数学（対称関数、表現論）、整数論（分割、加法的組合せ論）、計算機科学（アルゴリズムの解析、計算量理論）とつながっていく。

### 本章を貫く問い

**三つの大きな問い**

1. **書き出さずにどう数えるか？**どのような構造（漸化式、全単射、母関数）を使えば、膨大な集まりを正確に数えられるか。
2. **何かが必ず起こるのはいつか？**大きさだけで、ある模様や一致や組み合わせが必然的に生じるのはどのようなときか。
3. **数え上げと確率は互いにどう助け合うのか？**確率を求めるのに数え上げが最適なのはどのようなときか。また、個数を求めるのに確率が最適なのはどのようなときか。

本章は前半と後半の二つに分かれる。最初の 7 つの節は純粋数学分野の問題から採られている。まず漸化式（平面を分割する直線、柵の支柱の塗り分け）と鳩の巣原理（ラムゼーの定理）から始め、次に母関数を展開して、それを用いて硬貨の組み合わせを数え、風変わりなさいころを設計し、べき乗和が等しくなるように数をチームに分ける。後半の 6 つの節は、確率分野の問題から採った古典的な数え上げの問題である。完全順列（derangement）と $1/e$ の出現、誕生日問題、投票問題（ballot problem）とその鏡像原理（reflection principle）、クーポン収集問題（coupon collector problem）、ランダムな部分集合、そして、どの合計も同様に確からしくなるようにさいころに細工することの不可能性を扱う。

## 本章に登場する考え方

| § | 話題 | 考え方 |
|---|---|---|
| 9.1 | 平面の領域 | もう一つ加えると何が変わるか |
| 9.2 | ラムゼー理論 | 鳩の巣原理 |
| 9.3 | グラフの彩色 | 連立漸化式、彩色多項式 |
| 9.4 | 母関数 | 数列が関数になる |
| 9.5 | 分割 | 係数による数え上げ |
| 9.6 | シッヘルマンのさいころ（Sicherman dice） | 多項式の因数分解 |
| 9.7 | トゥエ–モース列（Thue–Morse sequence） | 重根が釣り合った和を生む |
| 9.8 | 完全順列 | 包除原理、$1/e$ |
| 9.9 | 偶然の一致 | 余事象、平方根の法則 |
| 9.10 | 投票問題 | 鏡像原理 |
| 9.11 | クーポン収集問題 | 期待値の線形性、$n \ln n$ |
| 9.12 | ランダムな部分集合 | 要素を一つずつ考える |
| 9.13 | 細工したさいころ | 相加・相乗平均の不等式（AM–GM）による不可能性の証明 |

## 本章の読み方

必ず小さな場合から始めること。直線を 3 本引いてみる、3 枚のカードの 6 通りの並べ方を書き出してみる、5p を作る方法を数えてみる。小さな場合は推測の手がかりとなるデータを与えてくれるし、最後には公式の検算にも役立つ。しかし、理由がわかるまでは規則性を信用してはならない。Section 9.1 には、$1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ と続きながら次の項が 31 となる有名な数列が登場する。

# 9.1 平面を分割する直線

**問題**

**STEP II 1990、問 4**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/90-s2-q4`

## 導入

ピースの大きさがそろっていなくてよいなら、$n$ 回のまっすぐな切れ目でピザを何切れに分けられるだろうか。1 回切れば 2 切れ、2 回で 4 切れ、3 回で 7 切れ（8 ではない。実際に試してみよ）、4 回で 11 切れである。数列 $1, 2, 4, 7, 11, 16, \ldots$ は**怠惰な仕出し屋の数列**（lazy caterer's sequence）として知られており、この問題はその一般項を求めるものである。

この問題は、組合せ論（combinatorics）全体を貫く手法への最初の入門となる。すべてを一度に数えようとしてはならない。その代わりに、対象を一つ増やしたときに何が変わるかを問うのである。そして答えは、Section 7.9 でプラトンの立体とともに出会ったオイラー（Euler）の公式 $V - E + F = 2$ の特別な場合であることがわかる。

## 取りかかる前に

**手を止めて、やってみよう** 直線を一般の位置（general position）に保ちながら（どの 2 本も平行でなく、どの 3 本も 1 点を通らない）、$n = 1, 2, 3, 4$ の場合を丁寧に描け。それぞれの場合について、線分（segment）と領域（region）の個数を数えよ。規則性を推測できるだろうか。

次のようになるはずである。

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 線分 | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 |
| 領域 | 1 | 2 | 4 | 7 | 11 |

線分の個数は $n^2$ のように見える。領域の個数は $1, 2, 3, 4$ ずつ増えている。つまり、階差が自然数になっている。

## 順を追って解く

### 段階 1　線分を数える

> **考えてみよう**　1 本の直線に注目せよ。他の直線のうち何本がそれと交わり、それを何個の部分に分けるか。

各直線は他の $n-1$ 本の直線のそれぞれと交わり（どれもその直線と平行ではない）、しかも交点は $n-1$ 個の相異なる点である（どの 3 本も 1 点で交わらない）。これら $n-1$ 個の点は、その直線を $n$ 個の線分に分ける。両端にある 2 つの無限に伸びる部分と、その間にある $n-2$ 個の有限の線分である。直線が $n$ 本あるので、全体では

$$n \times n = n^2 \text{ 個の線分.} \qquad \blacksquare$$

となる。これは直接的な数え上げであり、帰納法（induction）は必要ない。線分を直線ごとに数えたのである。

### 段階 2　直線を 1 本加えると何が起こるか

> **考えてみよう**　$n-1$ 本の直線が引かれているとし、そこに $n$ 本目を加える。新しい直線は他の直線によって $n$ 個の線分に分けられる。各線分は、それが通過する領域に対して何をするか。

新しい直線を引くと、その $n$ 個の線分はそれぞれ既存の領域の一つを通り抜け、それを 2 つに分ける（図 9.1.1）。異なる線分は異なる領域にある。なぜなら、ある領域から別の領域へ移るには、新しい直線は既存の直線と交わらなければならないからである。したがって、$n$ 本目の直線を加えると、領域の個数はちょうど $n$ だけ増える。

$$R(n) = R(n-1) + n.$$

### 段階 3　漸化式を解く

$R(0) = 1$（直線がなければ領域は 1 つ）から出発すると、

$$R(n) = 1 + (1 + 2 + \cdots + n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

これを帰納法の形で述べると次のようになる。$\frac{1}{2}(1 + 1 + 2) = 2$ であるから、$n = 1$ のとき公式は成り立つ。また、$R(n-1) = \frac{1}{2}\big((n-1)^2 + (n-1) + 2\big) = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$ ならば、$R(n) = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2) + n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ である。 ■

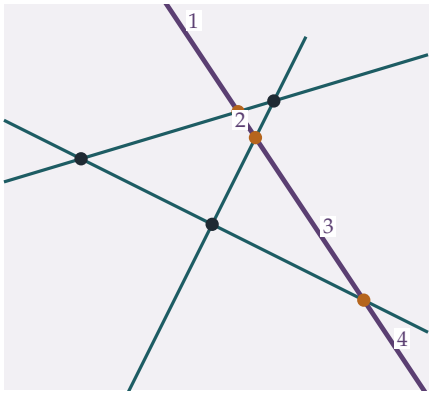



**図 9.1.1**　3 本の直線（ティール）は平面を 7 個の領域に分ける。4 本目の直線（プラム）は琥珀色の点で他の 3 本と交わり、それらの点によって 1 から 4 の番号をつけた 4 個の線分に分けられる。各線分は 1 つの領域を 2 つに分けるので、4 本目の直線によって領域は 4 個増え、11 個となる。

## 振り返り

- **一度に一つずつ数える。**線分は直線ごとに数え、領域は新しい直線 1 本が付け加えるものによって数えた。
- **幾何的な一歩を漸化式に変える。**「新しい線分はそれぞれ 1 つの領域を分ける」という観察が、$R(n) = R(n-1) + n$ になった。
- **一般の位置は重要である。**平行な直線や、1 点を通る 3 本の直線があると、領域の数は少なくなる。それぞれの仮定がどこで使われたかを確かめよ。

## 背後にある数学

### 姿を変えたオイラーの公式

ここでは第二の証明を示す。これは答えを単に導くだけでなく、その理由を説明するものである。直線の配置を地図とみなそう。交点を**頂点**（vertex）、線分を**辺**（edge）、

領域を**面**（face）とする。頂点は $V = \binom{n}{2}$ 個（直線の各組に 1 つ）、辺は $E = n^2$ 本ある。無限に伸びる線分には端が 1 つしかないので、それらがすべて集まる「無限遠」の頂点を 1 つ追加する。すると、図は球面上に描かれた地図になる（平面を球に巻きつけ、無限遠が頂上にくる様子を想像せよ）。Section 7.9 のオイラーの公式 $V - E + F = 2$ から

$$\left(\binom{n}{2} + 1\right) - n^2 + F = 2, \qquad \text{よって} \qquad F = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} + 1 = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

まったく異なる方向から、同じ数が得られた。領域はまた、種類によってきれいに分けられる。そのうち $2n$ 個は非有界であり（隣り合う無限半直線の各組の間に 1 つずつ）、残りの $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2) - 2n = \binom{n-1}{2}$ 個は有界である。

### 二項係数と高次元

この公式は

$$R(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2},$$

と書くことができ、これは偶然ではない。どの直線も水平にならないように図を回転させる。下に有界な領域には最低点があり、それは交点でなければならない。また、各交点はちょうど 1 つの領域（そのすぐ上にある領域）の最低点である。これにより、直線の各組に 1 つずつ、$\binom{n}{2}$ 個の領域が得られる。それ以外の領域はどこまでも下に伸びているので、すべての交点よりはるか下に引いた水平線と交わる。$n$ 本の直線はその水平線を $n + 1$ 個の区間に分け、そのような領域のそれぞれに 1 つずつ区間がある。合計で $\binom{n}{2} + n + 1$ となる。3 次元では、一般の位置にある $n$ 枚の平面は空間を

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}$$

個の部分に分け（**ケーキ数**（cake numbers）$1, 2, 4, 8, 15, 26, \ldots$）、この規則性はあらゆる次元で続く。証明は同じ帰納法である。新しい平面は他の平面によって、平面上の直線と同じ配置の領域に分けられ、それらの領域のそれぞれが空間の一部分を 2 つに分ける。

#### シュタイナーと超平面配置

直線や平面によって分けられる領域の個数の公式は、1826 年にヤコブ・シュタイナー（Jakob Steiner）によって発見された。今日、これは**超平面配置**（hyperplane arrangements）の理論の出発点となっている。この理論は、一般の位置にないものも含め、直線、平面、およびそれらの高次元版の任意の集まりが作る領域を数えるものである。1975 年の Thomas Zaslavsky による注目すべき定理は、どの超平面どうしが交わるかを記述する多項式を用いて、任意の配置の領域の個数を数える。同じ考え方は機械学習にも現れる。「ReLU」ユニットで構成されたニューラルネットワーク

は、超平面によって入力空間を領域に分け、その領域の個数は、ネットワークがどれほど複雑な関数を表現できるかの尺度となる。

## 思考のスキル

> **一つ増やしたときに何が変わるかを問う**
>
> $n$ 個の対象からなる配置を数えるには、それを $n-1$ 個の配置と比べよ。全体よりも変化のほうがはるかに数えやすいことが多い。
>
> これは、証明のためだけでなく発見のための道具として帰納法を使うことである。組合せ論で最もよく使われる手の一つであり、幾何的な問題を解くことのできる漸化式に変えてくれる。

## 次の一歩

1. **円。** どの 2 つも 2 点で交わり、どの 3 つも 1 点を通らない $n$ 個の円は、平面を $n^2 - n + 2$ 個の領域に分けることを示せ。

2. **平行な直線。** $n$ 本の直線のうち $k$ 本が互いにすべて平行である（それ以外は一般の位置にある）とき、領域はいくつあるか。

3. **ケーキ数。** 一般の位置にある $n$ 枚の平面が空間を $\frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6)$ 個の領域に分けることを、帰納法によって証明せよ。

4. **崩れる規則性。** 円周上に $n$ 個の点をとり、すべての 2 点の組を弦で結ぶ。ただし、円の内部でどの 3 本の弦も 1 点を通らないものとする。$n = 1, 2, 3, 4, 5$ のとき、領域は $1, 2, 4, 8, 16$ 個になる。$n = 6$ のときの領域の個数を数えよ。（ヒント：オイラーの公式を用いよ。4 点の組それぞれから交点が 1 つできる。）その個数が $1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$ であることを示せ。

## さらに学ぶために

- **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics***（Addison-Wesley）、第 1 章。まさにこの問題と、その「ピザ」版および「ジグ」版から始まる。

- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics***（World Scientific）。親しみやすい入門書で、帰納法、グラフ、オイラーの公式の章がある。
- **Richard Guy, "The strong law of small numbers"**、*American Mathematical Monthly* 95 (1988)。一見明らかに見えて実は誤りである規則性が数多く紹介されており、演習問題の円の問題も含まれている。

# 9.2 ミニチュア版ラムゼーの定理

**問題**

**STEP I 1989、問 4**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/89-s1-q4`

## 導入

6 人が集まるパーティーでは、互いに全員が知り合いである 3 人か、互いに全員が見知らぬ者同士である 3 人が必ず存在する。これは 6 人が誰であっても保証される。5 人ではこれは保証されない。このささやかな事実は**ラムゼーの定理**（Ramsey's theorem）の最初の場合であり、現代の組合せ論（combinatorics）を貫く原理を捉えている。すなわち、**完全な無秩序は不可能である**。十分に大きな構造は、どのように色を塗られ、どのように配置されていようとも、高度に秩序立った部分を必ず含むのである。

証明はわずか 4 行で済む。しかし、自然に浮かぶ次の問い（互いに知り合いである 4 人か、互いに見知らぬ 4 人を保証するには何人必要か。5 人ならどうか）は、数学で最も難しい未解決問題のいくつかにつながっている。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 6 個の点が意味をもつのは、どの 2 点の組がどの色で結ばれているかという点だけであり、幾何学的な配置は目くらましにすぎない。線分は全部で何本あり、各点からは何本出ているか。

線分は $\binom{6}{2} = 15$ 本あり、各点からは 5 本ずつ出ている。（一般の位置（general position）にあるという条件は、どの 3 点も本物の三角形をなすことを保証しているにすぎない。この問題は実際には、6 頂点の**完全グラフ**（complete graph）$K_6$ の辺（edge）を 2 色で塗り分ける問題である。）

## 順を追って解く

### 段階 1　5 本の線分と 2 つの色

> **考えてみよう**　$A$ からは 5 本の線分が出ており、それぞれ金色か銀色である。それらの色について確実にいえることは何か。

少なくとも 3 本は同じ色である。もし金色が高々 2 本、銀色も高々 2 本であれば、線分は高々 4 本しかないことになる。これが**鳩の巣原理**（pigeonhole principle）である。5 個の物を 2 つの箱に入れると、ある箱には少なくとも 3 個が入る。（必要なら色の名前を入れ替えて）$AB$、$AC$、$AD$ がすべて金色であるとしよう。

### 段階 2　反対側の端に目を向ける

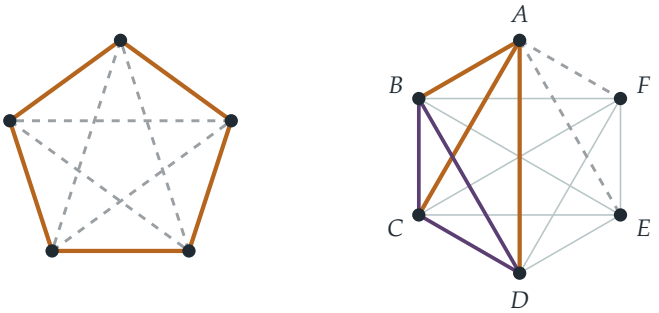
> **考えてみよう**　次に三角形 $BCD$ を見よ。その辺のうちどれか 1 本でも金色であったらどうなるか。1 本も金色でなかったらどうなるか。

三角形 $BCD$ のある辺、たとえば $BC$ が金色であれば、$ABC$ は 3 辺 $AB$、$AC$、$BC$ がすべて金色となる。$BCD$ のどの辺も金色でなければ、$BC$、$CD$、$DB$ はすべて銀色であり、$BCD$ は銀色の三角形となる。いずれにしても単色の三角形が存在する（図 9.2.1 右）。 ■

### 段階 3　5 点では足りない

> **考えてみよう**　5 点の場合、各点から出る線分は 4 本しかない。各点がちょうど 2 本ずつ各色の線分をもつように色を塗るにはどうすればよいか。

5 点を正五角形の頂点に置く（一般の位置にしたければ、平面から少しだけ持ち上げればよい）。五角形の 5 本の辺を金色に、5 本の対角線を銀色に塗る（図 9.2.1 左）。金色の辺は長さ 5 の閉路（5-cycle）をなし、三角形を含まない。銀色の辺は五芒星（pentagram）をなすが、これもまた長さ 5 の閉路であり、三角形を含まない。したがって単色の三角形は存在しない。 ■




5 点：単色の三角形はない　　6 点：$BCD$ に注目する

**図 9.2.1**　左：五角形を金色（実線）、五芒星を銀色（破線）に塗った 5 点には単色の三角形がない。右：6 点の場合、$A$ から出る 5 本の線分のうち 3 本は同じ色であり、たとえば $B$、$C$、$D$ への線分が金色であるとする。このとき三角形 $BCD$（紫）がすべてを決める。金色の辺が 1 本でもあれば $A$ とともに金色の三角形ができ、金色の辺が 1 本もなければ $BCD$ が銀色の三角形となる。

## 振り返り

- **無関係なものを取り除く。**空間内の点は色付きのグラフになった。意味をもったのは辺の色だけである。
- **鳩の巣原理。**5 本の辺と 2 つの色から、同じ色の辺が 3 本あることが導かれた。
- **適切な対象での場合分け。**金色の辺が 3 本見つかれば、その反対側の端がなす三角形がすべてを決着させた。
- **最良性。**五角形の例は、6 という数をそれ以上小さくできないことを示している。よい定理には、それが最良であることを示す例が伴うものである。

## 背後にある数学

### ラムゼー数

ラムゼー数（Ramsey number）$R(s,t)$ とは、$K_N$ の辺を金色と銀色でどのように塗り分けても、金色の $K_s$（$s$ 個の点からなる集合で、それらの間の辺がすべて金色であるもの）か銀色の $K_t$ が必ず含まれるような最小の $N$ のことである。この問題は $R(3,3) = 6$ を示したことになる。6 点では必ず成り立ち、五角形の例は 5 点では成り立たないことを示している。

フランク・ラムゼー（Frank Ramsey）は 1928 年に、これらの数が常に存在すること、

すなわち任意の $s$ と $t$ に対して条件を満たす $N$ が存在することを証明した。その証明は上の議論を一般化した帰納法（induction）であり、$R(s,t) \le R(s-1,t) + R(s,t-1)$ を示すものである。しかし、正確な値を求めることは途方もなく難しい。

$$R(3,3) = 6, \qquad R(4,4) = 18, \qquad 43 \le R(5,5) \le 46.$$

$R(4,4)$ の値は 1955 年に求められた。膨大なコンピュータ探索にもかかわらず、$R(5,5)$ はいまだに分かっていない。上界（upper bound）46 が証明されたのは、ようやく 2024 年のことである。コンピュータで $K_{43}$ のすべての塗り分けを単純に調べることはできない。塗り分けは $2^{903}$ 通りあり、宇宙に存在する原子の数よりはるかに多いのである。

### エルデシュと宇宙人

ラムゼー理論の発展に誰よりも貢献したポール・エルデシュ（Paul Erdős）は、次のような話を好んで語った。宇宙人が地球に侵攻してきて、$R(5,5)$ の値を教えなければ地球を滅ぼすと脅したとしよう。そのときは、あらゆるコンピュータと数学者を総動員すべきであり、そうすれば値が見つかるかもしれない。しかし、もし彼らが $R(6,6)$ を求めてきたら、宇宙人を滅ぼすことを試みるべきだ、と。エルデシュはまた 1947 年に、驚くべき方法を用いて $R(k,k) > 2^{k/2}$ を証明した。彼は、$2^{k/2}$ 個未満の点の上で**ランダムに**色を塗ったグラフが単色の $K_k$ を含まない確率が正であることを示したのである。したがって、どのように構成すればよいかは誰にも分からないにもかかわらず、条件を満たす塗り分けが存在しなければならない。この**確率的方法**（probabilistic method）は、今日では組合せ論における最も強力な道具の一つとなっている。

---

## 混沌からの秩序

ラムゼーの定理には多くの親戚があり、どれも同じ考え方、すなわち十分に大きな構造は秩序を避けられないという考え方を表している。**ファン・デル・ヴェルデンの定理**（van der Waerden's theorem）は、整数を有限個の色で塗り分けると、いくらでも長い単色の等差数列（arithmetic progression）が存在することを述べている。**エルデシュ–セケレシュの定理**（Erdős–Szekeres theorem）は、相異なる $n^2+1$ 個の数からなる任意の数列が、長さ $n+1$ の増加部分列または減少部分列（subsequence）を含むことを述べている。そしてラムゼー自身は論理学の問題に関心をもっていた。彼はこの定理を、論理的な命題の真偽の判定に関する論文の中で、補題（lemma）として証明したのである。

## 思考のスキル

**鳩の巣原理**

$kn$ 個より多くの物を $n$ 個の箱に入れると、ある箱には $k$ 個より多くの物が入る。

この原理は自明であるが、うまく使うのは一つの技芸である。腕の見せどころは、何を物とし、何を箱とするかの選び方にある。ここでは、1 点から出る 5 本の辺が物であり、2 つの色が箱であった。大学では、鳩の巣原理による議論は、整数論（無理数の分数による近似）、解析学（ボルツァーノ–ワイエルシュトラスの定理（Bolzano–Weierstrass theorem））、そして組合せ論の至るところに現れる。

## 次の一歩

1 **少なくとも 2 つ。** $K_6$ の任意の 2 色による塗り分けにおいて、実は単色の三角形が少なくとも 2 つ存在することを示せ。（**ヒント：**「二色の角」、すなわち共通の頂点で色の異なる 2 辺の組を数えよ。金色の辺を $g$ 本、銀色の辺を $5-g$ 本もつ点は、このような角 $g(5-g) \leq 6$ 個の頂点となっている。単色でない三角形はそれぞれ、このような角をちょうど 2 つ含む。）

2 **3 色。** $K_{17}$ の辺を 3 色で塗り分けると、単色の三角形が存在することを示せ。（**ヒント：**ある点は同じ色の辺を少なくとも 6 本もつ。）

3 **3 と 4。** $R(3,4) \leq 10$ を示せ。すなわち、$K_{10}$ を金色と銀色でどのように塗り分けても、金色の三角形か銀色の $K_4$ が存在することを示せ。（**ヒント：**各点は、金色の辺を少なくとも 4 本もつか、銀色の辺を少なくとも 6 本もつかのいずれかである。）実際には $R(3,4) = 9$ である。

4 **単調部分列。** $n = 2$ の場合のエルデシュ–セケレシュの定理を証明せよ。すなわち、相異なる 5 個の数からなる任意の数列は、長さ 3 の増加部分列または減少部分列を含むことを示せ。また、どちらも含まない 4 個の数からなる数列を求めよ。

## さらに学ぶために

- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics***（World Scientific）。鳩の巣原理とラムゼー理論の章。

- **Ronald Graham & Joel Spencer,「Ramsey theory」**, *Scientific American*（1990年7月）。第一線の研究者2人による一般向けの入門記事。
- **Noga Alon & Joel Spencer, *The Probabilistic Method***（Wiley）。エルデシュの方法に関する標準的な本。第1章は取り組みやすい。
- **Paul Hoffman, *The Man Who Loved Only Numbers***（Fourth Estate）。エルデシュの伝記（邦訳『放浪の天才数学者エルデシュ』）。

# 9.3 柵の杭を塗り分ける

**問題**

**STEP II 1995、問 2**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/95-s2-q2`

## 導入

一列に並んだ柱を塗るのは簡単である。最初の柱は 3 通り、残りの柱はそれぞれ 2 通り（直前の柱の色以外なら何でもよい）であるから、$3 \times 2^{n-1}$ 通りとなる。ところが、この列を曲げて円にすると、意外なほど扱いにくくなる。最後の柱は隣の柱だけでなく最初の柱とも異なる色でなければならず、それによって使えない色が 1 つ減るのか、まったく減らないのかは、それまでの塗り方すべてに依存するからである。

この問題では、古典的な工夫によってこの困難を回避する。最後の柱の色によって数え上げを場合分けし、それぞれの場合が互いにどう結びつくかを調べるのである。答えの $2^n + 2(-1)^n$ は**彩色多項式**（chromatic polynomial）の最初の例であり、四色定理（four colour theorem）の背後にある数学の一部をなしている。

## 取りかかる前に

**手を止めて、やってみよう** 円形に並んだ 3 本の柱、4 本の柱の塗り方をそれぞれ数えよ。$3 \times 2^{n-1}$ は数えすぎになっているか。なっているとすれば、どれだけ多いか。

円形に並んだ 3 本の柱は互いにすべて隣り合っているので、3 つとも異なる色でなければならない。よって $3! = 6$ 通りである。円形に並んだ 4 本の柱では 18 通りである（最後に確かめられる）。一列の場合の $3 \times 2^2 = 12$ と $3 \times 2^3 = 24$ と比べると、円形の場合には、最後の柱が最初の柱と同じ色になる塗り方が除かれていることがわかる。

## 順を追って解く

### 段階 1　2 種類の塗り方

**考えてみよう**　$n+1$ 本の柱の塗り方で、最初と最後の柱が赤であるものを考える。最後の柱を取り除く。残った最初の $n$ 本の柱の塗り方について、何がいえるか。

柱 $n$ は赤である柱 $n+1$ の隣にあるので、柱 $n$ は赤ではない。柱 $n+1$ を取り除くと、最初が赤で最後が赤でない $n$ 本の柱の塗り方、すなわち $s_n$ 通りの塗り方のうちの 1 つが残る。逆に、$s_n$ 通りの塗り方のどれも、柱 $n+1$ を赤に塗ることで、ちょうど 1 通りに延長できる。したがって、この 2 つの集合はちょうど 1 対 1 に対応し、$r_{n+1} = s_n$ である。

**考えてみよう**　$r_n + s_n$ は何か。

最初の柱が赤である塗り方は、最後の柱が赤であるか赤でないかのどちらかであるから、$r_n + s_n$ は最初が赤である $n$ 本の柱の塗り方すべての個数である。最初の柱より後の柱はそれぞれ 2 通りの選び方があるので、$r_n + s_n = 2^{n-1}$ となる。よって

$$r_{n+1} + r_n = s_n + r_n = 2^{n-1}. \qquad \blacksquare$$

### 段階 2　数学的帰納法による公式の証明

$n = 1$ のとき柱は 1 本で赤に塗られるので $r_1 = 1$ であり、公式は $\frac{1}{3}(1+2) = 1$ を与える。$r_n$ について公式が成り立つと仮定する。このとき

$$r_{n+1} = 2^{n-1} - r_n = 2^{n-1} - \frac{2^{n-1} + 2(-1)^{n-1}}{3} = \frac{2 \cdot 2^{n-1} - 2(-1)^{n-1}}{3} = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3},$$

となり、これは $r_{n+1}$ に対する公式である。 $\blacksquare$

**手を止めて、やってみよう**　この公式はどこから来たのか。漸化式（recurrence）$r_{n+1} + r_n = 2^{n-1}$ は微分方程式に似ている。すなわち、「特殊解」（particular solution）$c \cdot 2^n$ に、$r_{n+1} + r_n = 0$ を満たす「余関数」（complementary function）$A(-1)^n$ を加えたものである。$c$ と $A$ を求めよ。

### 段階 3　円形の場合

**考えてみよう** $n$ 本の柱が円形に並んでいるとき、柱 1 の色を固定し、たとえば赤とする。ここで柱 $n$ と柱 1 の間で円を切り、まっすぐ一列に伸ばす。一列の塗り方のうち、円形の正しい塗り方に対応するのはどれか。

まっすぐに伸ばすと、円は赤から始まる $n$ 本の柱の列になり、最後の柱は柱 1 とも異なる色でなければならない。つまり最後の柱は赤ではない。これらはちょうど $s_n$ 通りの塗り方である。柱 1 は 3 色のどれでもよいので、円形の塗り方の総数は

$$3s_n = 3(2^{n-1} - r_n) = 3 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} - 2(-1)^{n-1} = 2^n + 2(-1)^n. \qquad \blacksquare$$

確認：$n = 3$ のとき $8 - 2 = 6$、$n = 4$ のとき $16 + 2 = 18$ となる。

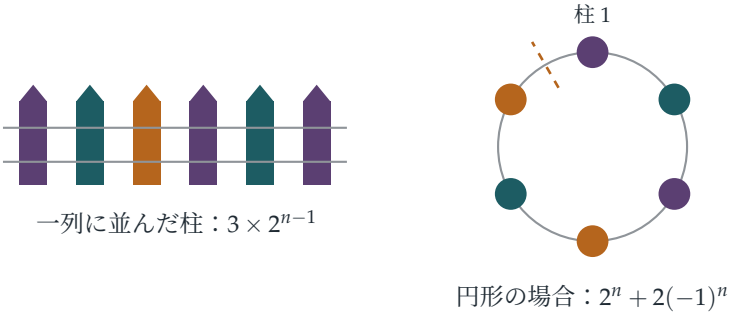



**図 9.3.1** 左：一列の場合、最初より後の各柱は直前の柱と異なる色であればよい。右：円形の場合、最後の柱は柱 1 とも異なる色でなければならない。破線のところで円を切ると、円形の塗り方は、最初と最後の柱の色が異なる一列の塗り方、すなわち問題で数えた $s_n$ 通りの塗り方のうちの 1 つに変わる。

## 振り返り

- **互いに結びつく場合に分ける。**最後の柱が赤かどうかを記録することで、2 つの数列 $r_n$ と $s_n$ が得られ、それらは簡単な漸化式で結ばれていた。
- **全単射（bijection）。**$r_{n+1} = s_n$ は計算によってではなく、塗り方を 1 対 1 に対応させることで証明した。
- **円を切る。**循環的な問題が、両端に条件のついた一列の問題になった。

## 背後にある数学

### 彩色多項式

柱とその隣接関係は**グラフ**（graph）をなす。一列の場合は道（path）、円形の場合は閉路（cycle）である。**正しい彩色**（proper colouring）とは、隣り合う頂点に異なる色を塗る塗り方である。$k$ 色による正しい彩色の個数は $k$ の多項式であり、これをそのグラフの**彩色多項式**という。これは 1912 年にバーコフ（George Birkhoff）によって導入された。問題の議論を $k$ 色で繰り返すと

$$\text{道：} k(k-1)^{n-1}, \qquad \text{閉路：} (k-1)^n + (-1)^n(k-1).$$

が得られる。$k = 3$ のとき、閉路の公式は $2^n + 2(-1)^n$ となる。バーコフは、あらゆる地図のグラフの彩色多項式が $k = 4$ で正であることを示すことによって、四色定理（どんな地図も、隣り合う国が異なる色になるように 4 色で塗り分けられる）を証明しようとした。この方法は結局成功しなかった。四色定理は 1976 年に Kenneth Appel と Wolfgang Haken によって、計算機を大規模に援用して最終的に証明された。彩色多項式は今なお活発な研究分野であり、統計物理学と意外なつながりをもっている。統計物理学では、彩色多項式は磁性の**ポッツ模型**（Potts model）として現れるのである。

### 行列による同じ数え上げ

第 7 章の線形代数を用いて、答えを別の見方で捉えることもできる。対角成分が 0 でそれ以外の成分が 1 である $3 \times 3$ 行列を $\mathbf{M}$ とする。すなわち、$(i, j)$ 成分は、色 $i$ の次に色 $j$ が来てよいとき 1 である。すると、$\mathbf{M}^{n-1}$ の $(i, j)$ 成分は、色 $i$ で始まり色 $j$ で終わる一列の塗り方の個数を表すので、$r_n$ は $\mathbf{M}^{n-1}$ の対角成分の 1 つである。円形の塗り方は、$n$ ステップ後に出発点に戻る列であるから、円形の塗り方の個数は $\mathbf{M}^n$ の**トレース**（trace）である。$\mathbf{J}$ をすべての成分が 1 である行列として $\mathbf{M} = \mathbf{J} - \mathbf{I}$ であるから、$\mathbf{M}$ の固有値（eigenvalue）は $3 - 1 = 2$（固有ベクトル（eigenvector）$(1, 1, 1)$）と $-1$（重複度 2）であり、$\mathbf{M}^n$ のトレースは固有値の $n$ 乗の和である：

$$\operatorname{tr} \mathbf{M}^n = 2^n + (-1)^n + (-1)^n = 2^n + 2(-1)^n.$$

この**転送行列**（transfer matrix）法は、1 ステップずつ組み立てられる配置を数えるために、組合せ論や統計物理学の至るところで用いられている。

## 思考のスキル

### 連立漸化式を立てる

1 つの数列だけでは簡単な漸化式を満たさないとき、少しだけ余分な情報（ここでは最後の柱の色）を記録し、場合どうしを結ぶ漸化式を求めよ。

これが状態（state）という考え方である。先へ進むために知る必要のあることだけを正確に記録し、それ以外は記録しない。これは計算機科学における動的計画法（dynamic programming）、確率論におけるマルコフ連鎖（Markov chain）（Section 12.16）、そして転送行列法の基礎となっている。

## 次の一歩

1 **$k$ 色の場合。** この問題を $k$ 色で考え直せ。$r_{n+1} = s_n$ が依然として成り立ち、$r_{n+1} + r_n = (k-1)^{n-1}$ となることを示し、$r_n$ を求め、閉路の彩色多項式 $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$ を導け。

2 **赤が 2 つ続かない。** 一列に並んだ $n$ 本の柱を赤または白に塗るとき、隣り合う 2 本の柱がともに赤にならない塗り方は何通りあるか。（フィボナッチ（Fibonacci）数が現れるはずである。）

3 **車輪。** 円形に並んだすべての柱に隣接する中心の柱を加える（これを「車輪」という）。これを 4 色で塗る方法は何通りあるか。（ヒント：中心は 1 色を使い、円は残りの 3 色を使わなければならない。）

4 **ネックレス。** 円形の 2 つの塗り方について、一方が他方を回転したものであるとき同じものとみなすことにすると、$n = 4$ のとき異なる塗り方は何通りあるか。$n = 5$ のときはどうか。（これがバーンサイド（*Burnside*）の補題の出発点である。）

## さらに学ぶために

- **Robin Wilson, *Introduction to Graph Theory***（Pearson）。『グラフ理論入門』。定番の入門書であり、彩色と四色問題を扱っている。
- **Robin Wilson, *Four Colours Suffice***（Penguin）。『四色で十分』。一般読者向けの、四色定理の物語。
- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology***（オンラインで無料公開）。『母関数学』。漸化

式とその解き方を、転送行列法も含めて解説している。

# 9.4 関数としての数列

**問題**

**STEP I 2016、問 8**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/16-s1-q8`

## 導入

電卓で 1/89 を計算してみよう。0.011235955… となる。数字は 0, 1, 1, 2, 3, 5 と始まり、これはフィボナッチ数（Fibonacci numbers）である。これは偶然だろうか。偶然ではない。この問題はその理由を明らかにする。

ここで使う考え方は、組合せ論（combinatorics）で最も強力なものの一つである。無限数列をとり、その項を冪級数（power series）の係数として用いることで、数列全体を一つの関数にまとめてしまうのである。すると数列についての事実は関数についての事実となり、代数や微積分を使って扱えるようになる。ハーバート・ウィルフ（Herbert Wilf）はこれを印象的な言葉で表した。「母関数とは、数列を並べて見せるために吊るす物干しロープである。」

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 母関数（generating function）が $\frac{1}{1-x}$ である数列は何か。$\frac{1}{1-2x}$ ではどうか。数列の母関数に $x$ を掛けると、数列はどうなるか。

等比級数（geometric series）$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ は数列 1, 1, 1, … の母関数であり、$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + \cdots$ は 2 の冪の母関数である。$x$ を掛けると、すべての項が一つずつ後ろにずれる。$x \cdot \frac{1}{1-x} = x + x^2 + \cdots$ は 0, 1, 1, 1, … の母関数である。

## 順を追って解く

### 段階 1　自然数と三角数

**考えてみよう**　$(1-x)^{-2}$ を二項級数で展開せよ。$x^n$ の係数は何か。

二項級数（binomial series）により

$$(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n\ge 0} (n+1)x^n,$$

であるから、$x(1-x)^{-2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots = \sum n x^n$ となる。これは $u_n = n$ の母関数である。

同様に、$(1-x)^{-3}$ における $x^n$ の係数は $\frac{(-3)(-4)\cdots(-3-n+1)}{n!}(-1)^n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ であるから、

$$x(1-x)^{-3} = \sum_{n\ge 1} \frac{n(n+1)}{2}\, x^n = x + 3x^2 + 6x^3 + 10x^4 + \cdots,$$

となり、これは三角数（triangle numbers）$u_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ の母関数である。

**考えてみよう**　$n^2$ を $n$ と $\frac{1}{2}n(n+1)$ を用いて表すにはどうすればよいか。

$n^2 = 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - n$ であり、母関数は数列と同じように足し合わせられるので、

$$\sum n^2 x^n = \frac{2x}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2x - x(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}. \qquad \blacksquare$$

### 段階 2　漸化式が方程式になる

**考えてみよう**　$u_n = k u_{n-1}$ の両辺に $x^n$ を掛け、$n \ge 1$ のすべての $n$ について足し合わせよ。各辺は $\mathrm{f}$ を用いてどう表されるか。

左辺は $\sum_{n\ge 1} u_n x^n = \mathrm{f}(x) - u_0 = \mathrm{f}(x) - a$ である。右辺は $kx\sum_{n\ge 1} u_{n-1}x^{n-1} = kx\,\mathrm{f}(x)$ である。よって $\mathrm{f}(x) = a + kx\,\mathrm{f}(x)$ であり、

$$\mathrm{f}(x) = \frac{a}{1-kx}. \qquad \blacksquare$$

もちろん $u_n = ak^n$ である。$\frac{a}{1-kx}$ を等比級数として展開すれば、このことが確かめられる。

### 段階 3　フィボナッチ数

漸化式（recurrence）$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$（$n \geq 2$）にも同じことを行う。

$$\sum_{n\geq 2} u_n x^n = x \sum_{n\geq 2} u_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n\geq 2} u_{n-2} x^{n-2},$$

すなわち

$$\mathrm{f}(x) - u_0 - u_1 x = x\big(\mathrm{f}(x) - u_0\big) + x^2\,\mathrm{f}(x).$$

$u_0 = 0$、$u_1 = 1$ とすると、これは $\mathrm{f}(x) - x = x\,\mathrm{f}(x) + x^2\,\mathrm{f}(x)$ を意味するので、

$$\mathrm{f}(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}. \qquad \blacksquare$$

### 段階 4　1/89 の説明

> **手を止めて、やってみよう**　収束（convergence）の問題は無視して（ここでは問題ない。この級数は $|x| < 0.618$ で収束する）、f に $x = \frac{1}{10}$ を代入せよ。何が得られるか。

$$\frac{1}{10}F_1 + \frac{1}{100}F_2 + \frac{1}{1000}F_3 + \cdots = \mathrm{f}\Big(\frac{1}{10}\Big) = \frac{1/10}{1 - 1/10 - 1/100} = \frac{10}{89}.$$

10 で割ると $\frac{1}{89} = \sum F_n/10^{n+1}$ となる。フィボナッチ数が小数の各位に順に置かれ、9 より大きくなると互いに重なり合う（図 9.4.1）。1/89 の最初のほうの桁にはフィボナッチ数が現れるが、後のほうの桁は繰り上がりによってぼやけてしまう。

```
0.  1
0.    1
0.      2
0.        3
0.          5
0.            8
0.            1 3
0.              2 1
0.                3 4
0.                  5 5
 ⋮
0. 0 1 1 2 3 5 9 5 5 0 5
```

**図 9.4.1**　$n = 1, 2, 3, \ldots$ について $F_n/10^{n+1}$ を足し合わせる。各フィボナッチ数の末尾は、一つ前のものより小数点以下で一桁右にくる。2 桁になると互いに重なり、繰り上がりによって小数第 7 位以降の数字が変わる。$\frac{1}{89} = 0.01123595505\ldots$。

## 振り返り

- **数列を関数に変える。**無限数列全体が一つの有理関数（rational function）になった。
- **漸化式は方程式になる。**$x^n$ を掛けて和をとることで、規則 $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ が、代数的に解ける f についての方程式に変わった。
- **古いものから新しいものを作る。**母関数を足したり、ずらしたり、微分したりすることで、一から始めることなく新しい母関数が得られた。

## 背後にある数学

### 母関数から公式へ

母関数は数列を符号化するだけではない。数列を求めることもできる。分母は $1 - x - x^2 = (1 - \varphi x)(1 - \psi x)$ と因数分解される。ここで $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ と $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ は $t^2 = t + 1$ の解である。部分分数分解（partial fractions）により

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1}{1 - \varphi x} - \frac{1}{1 - \psi x}\Big),$$

となり、それぞれの分数を等比級数として展開すると

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}.$$

これが**ビネ（*Binet*）の公式**である。$|\psi| < 1$ であるから第 2 項は非常に小さく、したがって $F_n$ は $\varphi^n/\sqrt{5}$ に最も近い整数である。また、隣り合うフィボナッチ数の比は黄金比（golden ratio）に収束する（Section 2.2 の主題である）。同じ方法で、定数係数の線形漸化式（linear recurrence）はどれも解くことができる。演習には STEP I 2004 の例を含めてある。

### 母関数がこれほど役に立つ理由

真の威力は掛け算をするときに現れる。積 $\mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)$ における $x^n$ の係数は $\sum_k u_k v_{n-k}$ であり、これは $n$ を二つの部分に分けるすべての方法にわたる和である。これはまさに、二つの部品から組み立てられたものを数えるのに必要なものである。続く二つの節では、これを用いて両替の方法の数を数え（Section 9.5）、普通のさいころと同じ目の和の分布をもつ、奇妙な目のさいころを見つける（Section 9.6）。確率論では、同じ考え方から**確率母関数**（probability generating function）が得られ、独立な確率変数（independent random variables）の和を積に変える。

### ド・モアブル、オイラー、ラプラス

アブラーム・ド・モアブル（Abraham de Moivre）は 1720 年代に、本質的には上の方法によって、母関数を用いて線形漸化式を解いた。レオンハルト・オイラー（Leonhard Euler）は 1748 年に、自然数の分割（partitions）を研究するために母関数を用い、ピエール＝シモン・ラプラス（Pierre-Simon Laplace）は母関数を著書 *Théorie analytique des probabilités*（『確率の解析的理論』、1812 年）の基礎に据えた。20 世紀には母関数は組合せ論の中心的な道具となり、現在では解析的な方法（母関数を複素変数（complex variable）の関数として調べること）により、厳密に解くにはあまりに複雑な数え上げの問題に対しても、精密な評価が得られるようになっている。

## 思考のスキル

### 表現を変える

数列についての問題は、その数列を関数や行列や図に変えると易しくなることがある。

母関数は漸化式を代数に、数え上げを掛け算に翻訳する。大学ではこうした翻訳に数多く出会うだろう。フーリエ級数（Fourier series）は関数を数列に変え、ラプラス変換（Laplace transform）は微分方程式（differential equation）を代数に変え、行列（matrix）は幾何を計算に変える。

## 次の一歩

1 **2 桁ずつ。**STEP II 2022、問 3（OCR が配布している 2022 年の過去問一式に収録、`www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip`）に挑戦せよ。$\frac{1}{89}$ の小数展開がフィボナッチ数で始まる理由を説明し、さらに、小数展開にこのパターンが 2 桁ずつ現れる分数を求める問題である。

2 **漸化式を解く。**STEP I 2004、問 7（`step.maths.org/questions/04-s1-q7`）に挑戦せよ。母関数と部分分数分解を用いて線形漸化式を解き、次にその方法を逆向きにたどる問題である。

3 **数を数える。**$\frac{1}{9801} = 0.00\,01\,02\,03\,04\ldots$ となり、2 桁ずつの区切りが 1 ずつ増えていくことを示せ。このパターンが最初に崩れるのはどこか。また、それはなぜか。

**4 平方の和。** $\frac{1}{1-x}\mathrm{f}(x)$ が部分和（partial sums）$u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ の母関数であることを説明せよ。このことと小問 (i) の答えを用いて、$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ の公式を求めよ。

## さらに学ぶために

- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology***（A K Peters、オンラインで無料公開）。母関数への古典的な入門書。この節の後に読むには第 1 章が最適である。
- **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics***（Addison-Wesley、邦訳『コンピュータの数学』）、第 7 章。
- **Philippe Flajolet & Robert Sedgewick, *Analytic Combinatorics***（Cambridge University Press、オンラインで無料公開。『解析的組合せ論』）。大学 1 年の水準をはるかに超えるが、冒頭の数ページを読めば、この分野がどこへ向かうのかがわかる。

# 9.5 両替の仕方

**問題**

**STEP I 1997、問 1**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/97-s1-q1`

## 導入

これは本書でいちばん易しい問題に見える。可能性を書き並べればよいだけだからである。しかし、書き並べる作業はすぐに手に負えなくなる。イギリスの硬貨で 20p を作る方法は 41 通り、50p を作る方法は 451 通り、£1 を作る方法は 4563 通りもある。この問題が本当に求めているのは**体系**、すなわち、何も漏らさず、何も二重に数えないように数え方を整理する方法である。

その体系の背後には美しい数学がある。各硬貨は等比級数（geometric series）に対応し、$n$ ペンスを作る方法の数はそれらの積の係数（coefficient）になる。そして同じ考え方をすべての自然数に一度に適用すると、整数論で最も奥深い話題の一つであるオイラー（Euler）の**分割**（partitions）の理論が得られる。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 2p 硬貨と 1p 硬貨だけを使って $n$ ペンスを作る方法は何通りあるか。答えが 2p 硬貨を何枚使うかだけで決まるのはなぜか。

2p 硬貨の枚数を決めれば、残りはすべて 1p 硬貨でなければならない。したがって、2p 硬貨の枚数としてあり得る各値 $0, 1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor$ に対して、ちょうど 1 通りずつの方法がある。よって方法は $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ 通りである。これを $a(n)$ とおく。たとえば $a(10) = 6$、$a(5) = 3$ である。

## 順を追って解く

### 段階 1　10 ペンス

**考えてみよう**　大きい硬貨から順に数え方を整理せよ。10p 硬貨は何枚使えるか。それを決めたとき、5p 硬貨は何枚使えるか。

- 10p 硬貨 1 枚：1 通り。
- 10p なし、5p 2 枚：1 通り。
- 10p なし、5p 1 枚：残りの 5p 分を 2p と 1p で作る。これは $a(5) = 3$ 通り。
- 10p も 5p もなし：10p 分を 2p と 1p で作る。これは $a(10) = 6$ 通り。

合計は $1 + 1 + 3 + 6 = 11$ である。 ■

### 段階 2　一層ずつ積み上げる

**考えてみよう**　5p、2p、1p 硬貨で $n$ ペンスを作る方法の数を $b(n)$ とする。$b(n)$ を関数 $a$ を用いて表すにはどうすればよいか。

5p 硬貨の枚数 $k$ を選ぶと、残りの $n - 5k$ ペンスは 2p と 1p 硬貨で作られる。したがって

$$b(n) = a(n) + a(n-5) + a(n-10) + \cdots .$$

これより次の表が得られる。

| $n$ | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a(n)$ | 1 | 3 | 6 | 8 | 11 |
| $b(n) = a(n) + b(n-5)$ | 1 | 4 | 10 | 18 | 29 |

同様に、10p 硬貨も使う方法の数を $c(n)$ とすると $c(n) = b(n) + b(n-10) + \cdots$ であるから、$c(10) = 10 + 1 = 11$（段階 1 と一致する）、$c(20) = b(20) + b(10) + b(0) = 29 + 10 + 1 = 40$ となる。

### 段階 3　20 ペンス

最後に 20p 硬貨を考える。これを使う（1 通り）か、使わない（$c(20)$ 通り）かのどちらかである。よって

$$40 + 1 = 41 \text{ 通り}. \qquad \blacksquare$$

**手を止めて、やってみよう** 構造に注目せよ。新しい硬貨を加えるたびに層が一つ増え、各層は、一つ前の層を新しい硬貨の額面の間隔で足し合わせたものになっている。£1 や £100 に対して、コンピュータがこの計算をどのように実行するか想像できるだろうか。

## 振り返り

- **最大の部分で整理する。**最も大きい硬貨の枚数を先に固定することで、数え方が体系的になった。
- **表を作る。**新しい硬貨を加えるたびに、前の行から計算される新しい行が加わった。これは動的計画法（dynamic programming）であり、コンピュータがこの種のものを数える標準的な方法である。
- **既知の場合と照合する。**表は 10p の場合の 11 通りを再現した。

## 背後にある数学

### 等比級数としての硬貨

この問題を代数に変える考え方を述べよう。使う 5p 硬貨の枚数は $0, 1, 2, \ldots$ であり、それぞれ $0, 5, 10, \ldots$ ペンスに寄与する。これを次の級数として記録する。

$$1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots = \frac{1}{1 - x^5}.$$

各硬貨について同じことを行い、掛け合わせる。

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})} = \sum_{n} w(n) x^n.$$

括弧を展開すると、各項 $x^n$ は各括弧から一つずつ項を選ぶこと、すなわち各硬貨の枚数を選ぶことで、合計額が $n$ となる場合から生じる。したがって $x^n$ の係数 $w(n)$ は、$n$ ペンスを作る方法の数にちょうど等しい。段階 2 の表は、この積を括弧一つずつ展開していたにすぎない。これは Section 9.4 の母関数（generating function）の考え方であり、その威力が発揮されるのが掛け算である。母関数の積は、選択の組合せを数えるのである。

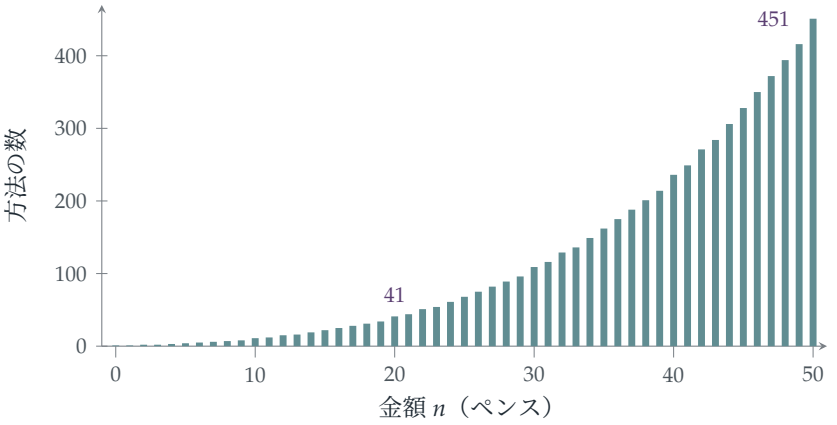



**図 9.5.1**　1p、2p、5p、10p、20p、50p 硬貨で $n$ ペンスを作る方法の数。5 と 10 の倍数のところでの跳ね上がりは、新しい硬貨が初めて使えるようになる場所を示している。硬貨が 6 種類のとき、方法の数はおおよそ $n^5$ のように増加する。一般には、硬貨の種類の数より 1 小さい次数の多項式のように増加する。

## 分割

すべての正の整数が硬貨として使えるとしたらどうなるだろうか。このとき、順序を無視して $n$ を正の整数の和として表す方法の数が**分割数**（partition number）$p(n)$ である。たとえば $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$ であるから $p(4) = 5$ である。オイラーは 1748 年に

$$\sum_{n\geq 0} p(n)x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots},$$

であることを見抜き、これを用いて驚くべき恒等式を発見した。その一つは、$n$ を**相異なる**部分の和として表す方法の数が、**奇数**の部分の和として表す方法の数に等しいというものである。（その証明は母関数を使えばわずか 1 行の代数計算である。演習で試してみよ。）

### ハーディ、ラマヌジャンと $p(200)$

分割数は急速に増加する。$p(10) = 42$、$p(100) = 190\,569\,292$ である。1918 年、G. H. ハーディ（Hardy）とシュリニヴァーサ・ラマヌジャン（Srinivasa Ramanujan）は $p(n)$ に対する驚くべき公式を発見した。それは無限級数であり、その第 1 項は

$$p(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}}\, e^{\pi\sqrt{2n/3}}.$$

である。これを検証するため、Percy MacMahon はオイラーの恒等式を用いて $p(200) = 3\,972\,999\,029\,388$ を手計算で求めた。ハーディとラマヌジャンの級数の最初の数項は、誤差 1 未満で正しい答えを与えた。ラマヌジャンはまた、$p(5n+4)$ は常に 5 で、$p(7n+5)$ は 7 で、$p(11n+6)$ は 11 で割り切れることも発見した。このような規則性がほかに存在しない理由が解明されたのは、21 世紀になってからである。

## 思考のスキル

### 係数を通して数える

対象が独立な選択の組合せで作られるとき、各選択を一つの因子とすれば、全体の大きさが $n$ である対象の個数は、その積における $x^n$ の係数になる。

これにより、数え上げが代数に変わる。大学では、これが数え上げ組合せ論（enumerative combinatorics）の基礎となり、また確率母関数（probability generating functions）が独立な確率変数の和を扱う仕組みでもある。

## 次の一歩

1 **2 種類の 6。** STEP II 2012、問 1（`step.maths.org/questions/12-s2-q1`）に挑戦せよ。これは等比級数の積を用いて数える問題である。最後に、その係数が答えとなるような硬貨の数え上げ問題を述べよ。

2 **相異なる部分と奇数の部分。** $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$ が相異なる部分への分割の母関数であることを示せ。$1+x^k = \frac{1-x^{2k}}{1-x^k}$ を用いて、これが $\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}$ に等しいことを示し、オイラーの定理を導け。$n=6$ の場合に確かめよ。

3 **公式。** 1p、2p、5p 硬貨だけを用いて $n$ ペンスを作る方法の数は、$\frac{(n+4)^2}{20}$ に最も近い整数であることを示せ。（まず小さい $n$ で確かめよ。）

4 **順序を区別する。** 1p 硬貨と 2p 硬貨を 1 枚ずつ投入口に入れて $n$ ペンスにする方法は、順序を区別すると何通りあるか。（この数列には以前に出会っているはずである。）

## さらに学ぶために

- **George Andrews & Kimmo Eriksson, *Integer Partitions***（Cambridge University Press）。

学部生向けの、短く読みやすい入門書。

- **ポリア（George Pólya），「On picture-writing」**, *American Mathematical Monthly* 63 (1956)。1 ドルを両替する問題（方法は 292 通りある）を用いて母関数を説明した、ポリアによる古典的な解説。
- **Robert Kanigel, *The Man Who Knew Infinity***（Abacus）。ラマヌジャンの生涯と、ハーディとの共同研究を描いた伝記。

# 9.6 奇妙なサイコロ

**問題**

**STEP I 1993、問 1**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/93-s1-q1`

## 導入

2 個の 6 面サイコロに正の整数を書き込んで、2 から 12 までのどの合計も普通のサイコロとちょうど同じ回数だけ出るようにする方法は、普通の書き方以外にあるだろうか。1978 年、マーティン・ガードナー（Martin Gardner）は『*Scientific American*』誌上で、そのような方法がちょうど 1 つだけあることを紹介した。1, 2, 2, 3, 3, 4 と書かれたサイコロと、1, 3, 4, 5, 6, 8 と書かれたサイコロの組である。これはジョージ・シッカーマン（George Sicherman）大佐が発見したもので、現在では**シッカーマンのサイコロ**（Sicherman dice）として販売されている。このサイコロでモノポリー（Monopoly）を遊んでも、普通のサイコロで遊ぶのとまったく区別がつかない。

この問題は準備運動であり、合計の表から 2 個のサイコロにどのように数が書かれているかを推定するものである。これを系統的に行う方法も、シッカーマンのサイコロが唯一の風変わりな組であることの証明（proof）も、どちらも各サイコロを多項式（polynomial）に置き換えることから得られる。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 1 個目のサイコロには $i$ と書かれた面が $p_i$ 面、2 個目のサイコロには $j$ と書かれた面が $q_j$ 面あるとする。合計 $t$ を出す方法は何通りあるか。

その方法の数は $\sum_i p_i q_{t-i}$ である。1 個目のサイコロの目 $i$ を選ぶと、2 個目は $t-i$ を出さなければならないからである。最初のサイコロの組では、合計 6 は $1+5$（$1\times 1$

通り)、$2+4$（$2\times1$ 通り)、$3+3$（$2\times2$ 通り）から得られ、それ以外はない。1 個目のサイコロには 4 も 5 もなく、2 個目には 0 がないからである。よって $1+2+4=7$ 通りである。 ■

## 順を追って解く

### 段階 1　両端から

2 個のサイコロを $A, B$ とし、それぞれについて $i$ と書かれた面の数を $a_i, b_i$ とする。

> **考えてみよう**　合計 2 を出す方法も、合計 12 を出す方法もない。このことから 1 の面と 6 の面について何がいえるか。合計 3 を出す方法は 2 通りある。1 の面をもつのはどちらのサイコロか。

合計 2 が出ないことから $a_1b_1=0$ である。すなわち、1 の面をもつサイコロは高々 1 個である。合計 3 は $1+2$ か $2+1$ でしか得られず、それが 2 通りあるので、どちらかのサイコロは確かに 1 の面をもつ。それを $A$ とすれば $b_1=0$ である。このとき

$$\text{合計3}:\quad a_1b_2=2,\qquad \text{よって}(a_1,b_2)=(2,1)\ \text{または}(1,2).$$

同様に、合計 12 が出ないことから $a_6b_6=0$ である。

### 段階 2　小さい合計から順に

> **考えてみよう**　$b_1=0$ に注意して、合計 4 についての式を書け。2 つの場合のそれぞれで、その式から何がわかるか。

合計 4 は $1+3$ または $2+2$ であり（$b_1=0$ なので $3+1$ はありえない)、$a_1b_3+a_2b_2=1$ である。

- **場合 (a)**：$a_1=2, b_2=1$ のとき、$2b_3+a_2=1$ より $b_3=0, a_2=1$。
- **場合 (b)**：$a_1=1, b_2=2$ のとき、$b_3+2a_2=1$ より $a_2=0, b_3=1$。

合計 5：$a_1b_4+a_2b_3+a_3b_2=1$。

- 場合 (a)：$2b_4+0+a_3=1$ より $b_4=0, a_3=1$。ここまでで $A$ は 1,1,2,3、$B$ は 2 をもつ。$B$ の残りの 5 面は 5 と 6 である。
- 場合 (b)：$b_4+0+2a_3=1$ より $a_3=0, b_4=1$。ここまでで $A$ は 1、$B$ は 2,2,3,4 をもつ。$A$ の残りの 5 面は 4,5,6 のいずれかであり、$B$ の残りの 2 面は 5,6 のいずれかである。

### 段階 3 場合 (a) は成り立たない

**考えてみよう** 場合 (a) について、合計 7 の式を書き、$b_5 + b_6 = 5$ を用いよ。

合計 7：$a_1b_6 + a_2b_5 + a_3b_4 + a_4b_3 + a_5b_2 = 2b_6 + b_5 + 0 + 0 + a_5 = 3$。$b_6 = 5 - b_5$ を代入すると $10 - b_5 + a_5 = 3$ となり、$b_5 = 7 + a_5 \geq 7$ である。しかし $B$ には 6 面しかない。よって場合 (a) はありえない。

### 段階 4 場合 (b) は成り立つ

**考えてみよう** 場合 (b) について、合計 6 と 11、および $a_6b_6 = 0$ を用いよ。

合計 6：$a_1b_5 + a_4b_2 = b_5 + 2a_4 = 4$（他の積は $a_2 = a_3 = 0$ または $b_1 = 0$ を含む）。$b_5 \leq 2$ であり、$b_5 = 4 - 2a_4$ は偶数なので、$b_5 = 0, a_4 = 2$ または $b_5 = 2, a_4 = 1$ である。

- $b_5 = 0$ ならば $B$ は $2,2,3,4,6,6$ であるから $a_6 = 0$ となり、$A$ は $1,4,4,5,5,5$ である。しかしこのとき合計 7 は $a_1b_6 + a_4b_3 + a_5b_2 = 2 + 2 + 6 = 10$ 通りとなり、3 通りではない。
- $b_5 = 2$ ならば $B$ は $2,2,3,4,5,5$ で $b_6 = 0$ であり、$A$ は $1,4$ と、5 と 6 からなる 4 面である。合計 11：$a_6b_5 = 2a_6 = 6$ より $a_6 = 3, a_5 = 1$。

したがって、ありうるのは次のものだけである。

$$A:\ 1,4,5,6,6,6, \qquad B:\ 2,2,3,4,5,5.$$

最後に、これらのサイコロが表全体を与えることを確かめなければならない。ここまでの推論では合計の一部しか使っていないからである。実際に展開する（あるいは後述の多項式を用いる）と、表のすべての値が確認できる。 ■

## 振り返り

- **両端から始める。**最小と最大の合計には積が 1 つか 2 つしか現れないので、最も強い情報が得られる。
- **場合分け（case analysis）をして、つぶしていく。**合計を 1 つ調べるごとに可能性が絞られ、最後に 1 つの場合だけが残った。
- **十分性（sufficiency）を確かめる。**推論によってサイコロがどうでなければならないかがわかり、最後の確認によってそれが実際に条件を満たすことがわかった。

## 背後にある数学

### 多項式としてのサイコロ

各サイコロを、$i$ と書かれた面 1 つにつき項 $x^i$ を 1 つもつ多項式として表す。普通のサイコロは $x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$ であり、問題のサイコロは

$$A(x)=x+x^4+x^5+3x^6,\qquad B(x)=2x^2+x^3+x^4+2x^5.$$

である。掛け合わせると、面の各組は $x^i x^j=x^{i+j}$ を与えるので、$A(x)B(x)$ における $x^t$ の係数は合計 $t$ を出す方法の数になる。これは再び Section 9.4 の母関数（generating function）の考え方である。合計の表はまさに積 $A(x)B(x)$ にほかならず、先ほどの場合分けによる推論は、それを因数分解する一つの方法だったのである。

### シッカーマンのサイコロ

普通のサイコロ 2 個の場合、積は $(x+x^2+\cdots+x^6)^2$ である。合計が同じになるサイコロの組はどれも、$P(x)Q(x)=(x+\cdots+x^6)^2$ を満たす多項式 $P(x),Q(x)$ をもたなければならない。そこで因数分解すると

$$x+x^2+\cdots+x^6=x(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2),$$

となり、これらの因数は（整数係数の多項式として）これ以上分解できない。よって $P$ と $Q$ はそれぞれ因数 $x,1+x,1+x+x^2,1-x+x^2$ から作られ、各因数は全体でちょうど 2 回ずつ現れる。次の 3 つの条件によって選び方が絞られる。

- 各サイコロは 6 面をもつので $P(1)=Q(1)=6$ である。各因数は $x=1$ で値 $1,2,3,1$ をとるので、各サイコロは $1+x$ と $1+x+x^2$ を 1 つずつもつ。
- 0 と書かれた面はないので $P(0)=Q(0)=0$ である。よって各サイコロは因数 $x$ を 1 つずつもつ。
- 残る自由度は、2 つの $1-x+x^2$ をどう分けるかだけである。1 つずつ分ければ普通のサイコロになる。両方を一方のサイコロに入れると

$$x(1+x)(1+x+x^2)=x+2x^2+2x^3+x^4,$$
$$x(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2)^2=x+x^3+x^4+x^5+x^6+x^8.$$

  となる。

これがシッカーマンのサイコロ $1,2,2,3,3,4$ と $1,3,4,5,6,8$ であり（図 9.6.1）、この議論によって、これが普通のサイコロ以外の唯一の組であることが証明される。鍵となる事実は、多項式も整数と同様に既約元（irreducible）の積へ一意に分解される（unique factorisation）ということである。ここで整数論と組合せ論が出会うのである。

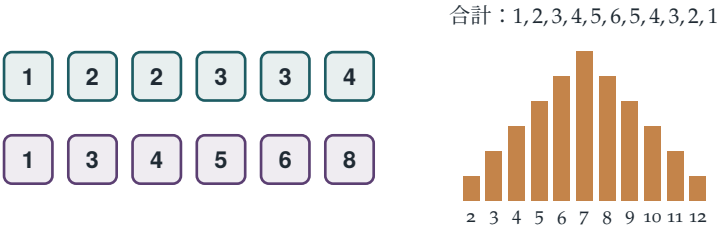



**図 9.6.1**　シッカーマンのサイコロ。2 個を同時に投げると、2 から 12 までのすべての合計が、普通のサイコロ 2 個とまったく同じ頻度で出る（右）。合計 2 は 1 通り、合計 3 は 2 通り、というように続き、合計 7 は 6 通りである。

#### 確率母関数

確率論では、同じ考え方が**確率母関数**（probability generating function）として現れる。値 $0, 1, 2, \ldots$ をとる確率変数（random variable）$X$ に対して $G(t) = E(t^X) = \sum P(X = k)t^k$ と定め、$X$ と $Y$ が独立（independent）ならば $E(t^{X+Y}) = E(t^X)E(t^Y)$ が成り立つ。独立な確率変数の和は、母関数の積に対応するのである。STEP III 2003 Q14（演習問題にある）はこの方法でシッカーマンのサイコロを求めており、Section 9.13 では関連する議論を用いて、2 個のサイコロにどのような偏りをもたせても、すべての合計を同じ確率にすることはできないことを示す。

## 思考のスキル

### 数え上げの問題を多項式に置き換える

対象が値の足し算によって組み合わさるときは、各対象を $x$ の多項式で表せ。組み合わせることは掛け算になり、組み合わせについての問いは因数分解についての問いになる。

ここでは、サイコロについての問いが多項式の一意分解の問題になった。大学では、このような置き換えがいたるところに現れる。組合せ論にも、確率論にも、そして代数学にも現れる。代数学では、多項式は整数と似た算術をもつ環（ring）として、それ自体が研究対象となる。

## 次の一歩

1 **四面体のサイコロ。** STEP III 2003、問 14（`step.maths.org/questions/03-s3-q14`）

に挑戦せよ。これは 4 面のサイコロについてシッカーマンの問いを考えるものである。（**ヒント：**$x + x^2 + x^3 + x^4 = x(1 + x)(1 + x^2)$。）

2 **表の確認。**$(x + x^4 + x^5 + 3x^6)(2x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5)$ を展開し、問題の表と照らし合わせよ。

3 **3 個のサイコロ。**正の整数が書かれた 6 面サイコロ 3 個で、すべてが標準のものではなく、合計の分布が標準のサイコロ 3 個と同じになるものは存在するか。（**ヒント：**今度は $(x + \cdots + x^6)^3$ の因数に $1 - x + x^2$ が 3 つ含まれる。）

4 **硬貨と八面体。**$1, \ldots, 8$ と書かれた 8 面サイコロと、1,2 と書かれた 2 面の「サイコロ」（硬貨）がある。合計が同じになるように、これらに別の数を書き直すことはできるか。

## さらに学ぶために

- **Martin Gardner, *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers***（Mathematical Association of America）。シッカーマンのサイコロについてのコラムを収録している。
- **Joseph Gallian & David Rusin, 「Cyclotomic polynomials and nonstandard dice」**（円分多項式と非標準的なサイコロ）、*Discrete Mathematics* 27 (1979)。任意の面数のサイコロについての一般論である。
- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology***（オンラインで無料公開）、第 1 章。

# 9.7 等しい累乗和

**問題**

**STEP I 1992、問 5**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/92-s1-q5`

## 導入

1 から 16 までの数を、8 個ずつの 2 組に分けてみよう：

$$\{1,4,6,7,10,11,13,16\} \quad と \quad \{2,3,5,8,9,12,14,15\}.$$

どちらの組も和は 68 である。平方の和はどちらも 748 である。立方の和はどちらも 9248 である。偶然の一致としか思えないが、実はこれは果てしなく続くパターンの第 3 段階にすぎない。1 から 32 までを正しく分ければ、4 乗の和まで一致するのである。

この分け方は 1851 年に Eugène Prouhet が見つけたもので、その背後にある規則である**トゥエ–モース数列**（Thue–Morse sequence）は、驚くほど多様な場面に現れる。数論、計算理論、チェス、そして交代で物を取るときの最も公平な順番などである。この問題では、ある多項式とその導関数を通してこの数列を掘り起こす。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 多項式（polynomial）$\mathrm{p}(x) = \sum c_k x^k$ が $\mathrm{p}(1) = 0$ を満たすとき、係数（coefficient）について何がいえるか。$\mathrm{p}'(1) = 0$ ならばどうか。

$\mathrm{p}(1) = \sum c_k$ であるから、$\mathrm{p}(1) = 0$ は係数の和が 0 であることを意味する。また $\mathrm{p}'(x) = \sum k c_k x^{k-1}$ であるから、$\mathrm{p}'(1) = \sum k c_k$ である。係数がすべて $\pm 1$ ならば、これらの条件は、$+1$ の位置と $-1$ の位置が同じ個数あり、しかもその和が等しいことを意味する。

## 順を追って解く

### 段階 1　三重根

**考えてみよう**　$1-x^2$ と $1-x^4$ を因数分解せよ。因数（factor）$1-x$ はいくつ現れるか。

$1-x^2=(1-x)(1+x)$ かつ $1-x^4=(1-x)(1+x)(1+x^2)$ であるから、

$$\mathrm{p}_0(x)=(1-x)^3(1+x)^2(1+x^2),$$

となり、$(1-x)^3$ は因数である。 ■

### 段階 2　1 における導関数の値

**考えてみよう**　$(1-x)^3$ が $\mathrm{p}_0$ を割り切るとき、$(1-x)$ の何乗が $\mathrm{p}_0'$ を割り切るか。さらに $\mathrm{p}_1=x\mathrm{p}_0'$ と $\mathrm{p}_1'$ についてはどうか。

$\mathrm{p}_0(x)=(1-x)^3\mathrm{q}(x)$ とおく。積の微分法（product rule）により $\mathrm{p}_0'(x)=-3(1-x)^2\mathrm{q}(x)+(1-x)^3\mathrm{q}'(x)$ であり、これは $(1-x)^2$ を因数にもつ。よって $\mathrm{p}_0'(1)=0$ である。すると $\mathrm{p}_1(x)=x\mathrm{p}_0'(x)$ も $(1-x)^2$ を因数にもち、同じ議論により $\mathrm{p}_1'$ は $(1-x)$ を因数にもつ。したがって $\mathrm{p}_1'(1)=0$ である。 ■

### 段階 3　係数を読み取る

展開すると $(1-x)(1-x^2)=1-x-x^2+x^3$ であり、さらに

$$\mathrm{p}_0(x)=1-x-x^2+x^3-x^4+x^5+x^6-x^7.$$

となる。

**考えてみよう**　$\mathrm{p}_0'(1)$ と $\mathrm{p}_1'(1)$ を係数 $c_k$ で表すとどうなるか。

$\mathrm{p}_1(x)=x\mathrm{p}_0'(x)=\sum kc_kx^k$ であるから、$\mathrm{p}_1'(1)=\sum k^2c_k$ である。係数は $k=0,3,5,6$ で $+1$、$k=1,2,4,7$ で $-1$ である。よって $\mathrm{p}_0'(1)=0$ と $\mathrm{p}_1'(1)=0$ は

$$0+3+5+6=1+2+4+7\quad(=14),$$
$$0^2+3^2+5^2+6^2=1^2+2^2+4^2+7^2\quad(=70),$$

を意味し、0 を除けば、これが求める等式である。 ■

### 段階 4　因数をもう一つ

> **手を止めて、やってみよう** 立方の和まで釣り合わせるには、$(1-x)$ の因数が 4 つ必要である。$\mathrm{p}_0$ の代わりにどの多項式を使えばよいか。

$\mathrm{P}(x)=(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)$ をとる。これは $(1-x)^4$ を因数にもつ。その係数は $\mathrm{p}_0(x)-x^8\mathrm{p}_0(x)$ の係数であり、0 から 7 までの符号のパターンに、8 から 15 までの符号を反転させた同じパターンが続く：

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_k$ | + | − | − | + | − | + | + | − | − | + | + | − | + | − | − | + |

段階 2 の議論をもう一度適用すれば、$r=0,1,2,3$ に対して $\sum c_k k^r=0$ であることがわかる。+ の位置 $\{0,3,5,6,9,10,12,15\}$ と − の位置 $\{1,2,4,7,8,11,13,14\}$ をとる。$r=1,2,3$ では 0 からの項は 0 なので、除いてよい。よって並べ方

$$a_1,\dots,a_8=1,2,4,7,8,11,13,14,\qquad a_9,\dots,a_{15}=3,5,6,9,10,12,15$$

が条件を満たす。どちらの半分も和は 60、平方の和は 620、立方の和は 7200 である。■

## 振り返り

- **導関数は重根を検出する。** 因数 $(1-x)^m$ があれば、最初の $m-1$ 個の導関数は $x=1$ で 0 になる。
- **微分する前に $x$ を掛けること**で、$\sum kc_k$ が $\sum k^2c_k$ に変わり、さらに高い冪へと進める。
- **倍化。** 因数 $(1-x^{2^m})$ を一つ加えるごとに長さが 2 倍になり、釣り合う冪が一つ増えた。

## 背後にある数学

### トゥエ–モース数列

$(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)\cdots$ の係数の符号は**トゥエ–モース数列**をなす。+ を 0、− を 1 と書くと次のようになる：

$$0\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\ \dots$$

互いに同値な 3 通りの記述がある。

- **倍化：** 0 から始め、手元の列の補数（complement、0 と 1 を入れ替えたもの）を後ろにつなげることを繰り返す：$0\to 01\to 0110\to 01101001\to\cdots$。

- **2 進数の桁：**第 $k$ 項は、$k$ を 2 進法（binary）で書いたときの 1 の個数が偶数なら 0、奇数なら 1 である。（$x^k$ の符号が $(-1)^{2\text{進表記中の}1\text{の個数}k}$ となるのはこのためである。積から $x^k$ を作るには、$k$ の 2 進表記を構成する因数 $x^{2^m}$ を選ぶことになり、その一つ一つが負の符号をもたらす。）
- **多項式：**問題にあるとおり、$\prod_m (1 - x^{2^m})$ の係数。

$0, 1, \ldots, 2^N - 1$ をトゥエ–モース数列で分けると、$r < N$ を満たすすべての $r$ について $r$ 乗の和が等しい 2 つの集合が得られる（図 9.7.1）。これは *Prouhet–Tarry–Escott* **問題**（Prouhet–Tarry–Escott problem）、すなわち $r = 1, \ldots, k$ に対して $r$ 乗の和が等しくなる、異なる 2 つの整数の集合を見つける問題である。Prouhet の解は $2^{k+1}$ 個の数を使う。本当に必要な数の個数がどこまで少なくできるかは、有名な未解決問題（open problem）である。




$1 + 4 + 6 + 7 + 10 + 11 + 13 + 16 = 68$

$2 + 3 + 5 + 8 + 9 + 12 + 14 + 15 = 68$

平方和：$748 = 748$　　立方和：$9248 = 9248$　　4 乗和：$122\,692 \neq 121\,156$

**図 9.7.1**　トゥエ–モース数列で分けた 1 から 16 までの数。2 つの集合は和、平方の和、立方の和がそれぞれ等しいが、4 乗の和は等しくない。そのためには 1 から 32 までが必要である。色を左から右へ読むと、青緑–紫–紫–青緑、紫–青緑–青緑–紫、…というパターンになる。

### 最も公平な交代の仕方

2 人の子どもが、山積みのお菓子から良いものから順に交代で選んでいく。$ABABAB\ldots$ と交互に選ぶと、各ペアで $A$ が常に良い方を取ることになり、系統的に有利になる。$ABBA$ の順の方が公平であり、$ABBABAAB$ はさらに公平である。これがトゥエ–モース数列であり、冪の和が釣り合うことがまさにその理由である。お菓子の価値が位置の滑らかな関数で与えられるとき、その関数を多項式として展開すると、トゥエ–モース順がその主要な項を打ち消すことがわかる。同じ考え方はサッカーの PK 戦（penalty shoot-out）にも提案されており（サッカーの競技規則を定める団体が 2017 年から試行した「$ABBA$」方式）、テニスのタイブレーク（tie-break）におけるサーブの順番にも使われている。

#### トゥーエ、モース、ユーワ

この数列は何度も発見されてきた。Prouhet は 1851 年にこれを用いた。トゥーエ（Axel Thue）は 1912 年、繰り返しパターンを含まない数列を研究する中でこれを再発見し

た。この数列は同じブロックを 3 回続けて含むことがない（「立方自由」（cube-free）である）。モース（Marston Morse）は 1921 年、曲面上の測地線（geodesic）の研究で再びこれを見いだした。そしてチェスの世界チャンピオンであるマックス・ユーワ（Max Euwe）は 1929 年、これを用いて、当時施行されていた同一局面の繰り返しによる引き分けの規則では無限に長い対局を防げないことを示した。今日では、$n$ の 2 進数の桁を読む単純な機械によって計算される数列である**自動数列**（automatic sequences）の理論における中心的な例となっている。

## 思考のスキル

### 組合せ的な性質を多項式に符号化する

幂の和が釣り合うかどうかは、$+$ と $-$ の符号がどこに来るかで決まる。それらの符号を係数とする多項式を考えれば、その性質は根についての命題に変わる。

この問題では探索をする必要がまったくない。$x = 1$ における重根がすべての仕事をしてくれる。組合せ的な対象を試行錯誤で見つけるのではなく代数を使って作り出すことは、大学の組合せ論で繰り返し現れる考え方である。

## 次の一歩

1 **ずらし。** STEP II 2025、問 8（OCR が配布している 2025 年の過去問一式に収録、`www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip`）に挑戦してみよう。和と平方の和が釣り合う分け方から、一方のリストをずらして組み合わせることで、立方の和まで釣り合うより大きな分け方を作る方法がわかる。

2 **平方数の平方和。**（これも STEP II, 2025 より。）集合 $A = \{1, 3, 4, 5, 9, 11\}$ と $B = \{2, 6, 7, 8, 10\}$ は、和が等しく、平方の和も等しい。すべての正の整数 $n$ について、$\{n^2, (n+1)^2, \ldots, (n+11)^2\}$ を和の等しい 2 つの集合に分けよ。（**ヒント：** 2 つ目の集合に 0 を加えよ。）

3 **平行移動不変性（translation invariance）。** 2 つの数の集合が $r = 0, 1, \ldots, k$ について $r$ 乗の和が等しいならば、すべての要素に同じ数 $c$ を加えて得られる集合もそうであることを示せ。このことから、問題の集合 $\{1, \ldots, 15\}$ を任意の連続する 16 個の整数に置き換えてもよいのはなぜか。

**4** **公平なお菓子。** お菓子の価値が $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{8}$ であるとする。順番 $ABABABAB$ と $ABBABAAB$ のそれぞれについて、$A$ が得る合計を比較せよ。

## さらに学ぶために

- **Jean-Paul Allouche & Jeffrey Shallit,「The ubiquitous Prouhet–Thue–Morse sequence」**, *Sequences and Their Applications* 所収（Springer, 1999）。この数列のさまざまな登場場面を概観したサーベイ。オンラインで無料で読める。
- **Matt Parker, *Things to Make and Do in the Fourth Dimension***（Penguin）。冪の和が等しくなる例をはじめ、数にまつわるさまざまな不思議を収める。
- **Joshua Cooper & Aaron Dutle,「Greedy Galois games」**, *American Mathematical Monthly* 120 (2013)。公平な交代とトゥエ–モース数列について。

# 9.8 誰も自分のシャツを受け取らない

**問題**

**STEP II 2016、問 12**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/16-s2-q12`

## 導入

11 人のサッカーチームが大急ぎで着替え、ユニフォームを無作為につかみ取ったとする。誰ひとり自分のユニフォームを着ていない確率はいくらか。では、それが 50 人の選手団だったら、あるいは 100 万人の群衆だったらどうか。間違える人が増えるのだから確率は上がるのだろうか。それとも、偶然正しいものを取る人も増えるのだから下がるのだろうか。驚くべきことに、確率はほとんど変わらない。5 人以上であれば、その確率は $1/e \approx 0.368$ との差が 0.5 パーセント以内に収まるのである。

これは組合せ確率論（combinatorial probability）における最古の問題であり、1708 年にピエール・ド・モンモール（Pierre de Montmort）が *problème des rencontres*（一致の問題）として提起したものである。本問はこれを**包除原理**（inclusion–exclusion principle）、すなわち重なり合うものを数えるための道具を用いて解く。そしてその答えは、数学において $e$ が現れる最も意外な場面のひとつなのである。

## 取りかかる前に

**手を止めて、やってみよう** $n = 3$ の場合を試してみよ。カード 1, 2, 3 の並べ方 6 通りをすべて書き出し、どのカードも自分の位置にないものがいくつあるか数えよ。根気があれば、$n = 4$ の場合も試してみよ（並べ方は 24 通りある）。

$n = 3$ のとき、どのカードも自分の位置にないのは 231 と 312 だけであるから、確率は

$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ である。$n = 4$ のときは 24 通りのうち 9 通りがそのような並べ方であり、確率は $\frac{3}{8} = 0.375$ となる。どのカードも元の位置にない並べ方を**完全順列**（derangement）という。

## 順を追って解く

### 段階 1　3 つの事象に対する包除原理

> **考えてみよう**　2 つの事象に対する公式が使えるように、$A \cup B \cup C$ を 2 つの事象の和として表すにはどうすればよいか。

$A \cup B$ をひとつの事象とみなし、それと $C$ に公式を適用すると

$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A \cup B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}((A \cup B) \cap C).$$

ここで $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ であり、公式をもう一度適用すると $\mathrm{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \mathrm{P}(A \cap C) + \mathrm{P}(B \cap C) - \mathrm{P}(A \cap B \cap C)$ となる。$\mathrm{P}(A \cup B)$ も展開して項を整理すれば、結果が得られる。 ■

4 つの事象についても同じパターンが続く。4 つの単独の確率を足し、6 つの 2 つずつの共通部分を引き、4 つの 3 つずつの共通部分を足し、最後に $\mathrm{P}(A \cap B \cap C \cap D)$ を引けばよい。

### 段階 2　各確率

> **考えてみよう**　カード $i$ が位置 $i$ にあるとき、残りのカードの並べ方は何通りあるか。カード $i$ と $j$ がともに固定されているときはどうか。

並べ方は全部で $n!$ 通りあり、どれも同様に確からしい。カード $i$ が位置 $i$ に固定されているとき、他の $n-1$ 枚のカードはどのような順でもよいから、$(n-1)!$ 通りである。したがって

$$\mathrm{P}(E_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}, \qquad \mathrm{P}(E_i \cap E_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)},$$

$$\mathrm{P}(E_i \cap E_j \cap E_k) = \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}.$$

一般に、指定された $k$ 枚のカードがすべて自分の位置にある確率は $\frac{(n-k)!}{n!}$ である。

### 段階 3　足し合わせる

> **考えてみよう** $\mathrm{P}(E_1 \cup \cdots \cup E_n)$ に対する包除原理の式において、$k$ 個の事象の共通部分を含む項はいくつあり、その合計はいくらか。

$k$ 個の事象の選び方は $\binom{n}{k}$ 通りあり、それぞれの共通部分の確率は $\frac{(n-k)!}{n!}$ である。よって $k$ 重の項の合計は

$$\binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}.$$

$k!$ 以外はすべて約分される。符号を交互につけると

$$\mathrm{P}(\text{少なくとも1枚のカードが自分の位置にある}) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}. \qquad \blacksquare$$

したがって、完全順列となる確率は

$$d_n = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

### 段階 4 ちょうど1枚

> **考えてみよう** ちょうど1枚のカードが自分の位置にあるとき、それはどのカードであり、他のカードはどうなっていなければならないか。

自分の位置にあるカードを選ぶ（$n$ 通り）。カード $i$ が自分の位置にある確率は $\frac{1}{n}$ であり、そのもとで残りの $n-1$ 枚のカードはそれらの間で完全順列をなさなければならず、その確率は $d_{n-1}$ である。したがって

$$\mathrm{P}(\text{ちょうど1枚}) = n\cdot\frac{1}{n}\cdot d_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}. \qquad \blacksquare$$

## 振り返り

- **数えすぎてから修正する。** $\mathrm{P}(E_i)$ を足し合わせると、2枚のカードが固定された並べ方は2回数えられる。2つずつの組を引けばこれは修正されるが、3つずつの組については引きすぎになる。以下同様である。
- **対称性により項が等しくなる。** $k$ 重の共通部分はどれも同じ確率をもつので、公式の各層はひとつの数と二項係数（binomial coefficient）の積になる。
- **より小さな場合に帰着させる。**「ちょうど1枚」は $n-1$ 枚のカードの完全順列の問題になった。

## 背後にある数学

### $e$ はどこから来るのか

級数 $\sum(-1)^k/k!$ は、指数級数（exponential series）$e^x = \sum x^k/k!$ に $x = -1$ を代入したものである。したがって $n \to \infty$ のとき

$$d_n \to e^{-1} \approx 0.3679,$$

となり、ちょうど 1 枚が一致する確率も同じ極限に近づく。この収束は驚くほど速い（図 9.8.1）。$1/n!$ の項で打ち切ったときの誤差は $1/(n+1)!$ より小さいので、$n = 7$ の時点ですでに答えは小数第 4 位まで $1/e$ と一致する。実際、$n$ 個の対象の完全順列の個数 $n!\,d_n$ は、$n!/e$ に最も近い整数にちょうど等しい。

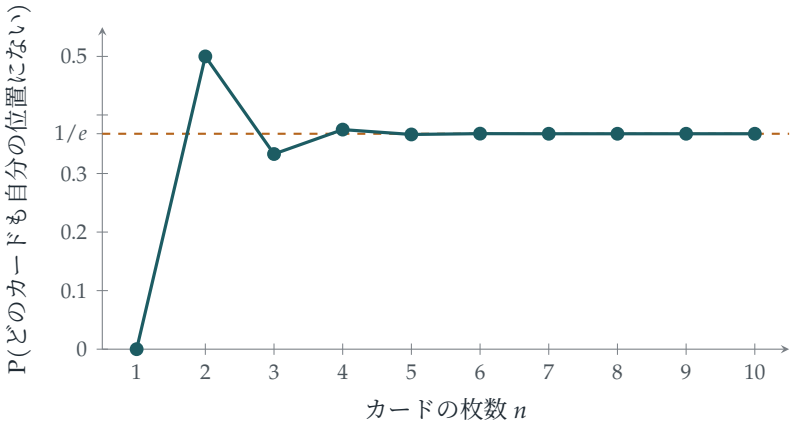



**図 9.8.1**　$n$ 枚のカードを無作為に並べ替えたとき、どのカードも自分の位置にない確率。値は $1/e$ の上下を交互に行き来し、$n = 6$ 以降はこの縮尺では $1/e$ と区別がつかない。

### 一致の個数はポアソン分布に従う

さらに多くのことが成り立つ。自分の位置にあるカードの枚数を $N$ とする。このとき各 $k$ について $\mathrm{P}(N = k) \to \frac{e^{-1}}{k!}$ となる。すなわち、一致の個数は極限において平均 1 の**ポアソン分布**（Poisson distribution）に従う。平均が 1 である理由は計算なしでもわかる。$N$ は $E_1, \ldots, E_n$ の指示変数（indicator variable）の和であり、それぞれの期待値（expectation）は $\frac{1}{n}$ である。そして事象が独立（independent）でなくても期待値は加法的である。STEP III 2004 Q12（演習問題を参照）では、分散（variance）も 1 であることを示す。ポアソン分布は、起こりにくい事象がほぼ独立に多数あるときに必ず現れる。完全順列はその古典的な例であり、第 12 章の Section 12.11 の主題でもある。

#### モンモールの *treize* ゲーム

フランスの貴族ピエール・レモン・ド・モンモール（Pierre Rémond de Montmort）は、著書 *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*（『偶然のゲームに関する解析の試論』、1708 年）で賭けごとを研究した。*treize*（13）というゲームでは、プレイヤーが「1、2、3、…」と数を唱えながら 13 枚のカードを配り、配ったカードが唱えた数と一度でも一致すれば勝ちとなる。モンモールは勝つ確率を求め、ニコラウス・ベルヌーイ（Nicolaus Bernoulli）との書簡のやりとりを通じて、1713 年までに一般的な公式が確立された。オイラー（Euler）は 1753 年にこれを再発見した。包除原理はその後、ド・モアブル（Abraham de Moivre）によって、また一般的な形では 19 世紀にシルベスター（James Joseph Sylvester）によって定式化された。

## 思考のスキル

**包除原理**

**重なり合う集合の和集合の要素を数えるには、各集合の大きさを足し、2 つずつの重なりを引き、3 つずつの重なりを足し、以下同様に続ければよい。**

本問のように、対称性によって同じ大きさの重なりがすべて等しくなるとき、最も威力を発揮する。大学では、組合せ論（combinatorics）、確率論、そして整数論（number theory）で現れる。整数論では、与えられた素数のどれでも割り切れない整数を数えるのに使われ、オイラーのトーシェント関数（Euler's totient function）やメビウス関数（Möbius function）につながる。

## 次の一歩

1 **ユニフォーム。** STEP III 2004、問 12（`step.maths.org/questions/04-s3-q12`）に挑戦せよ。この問題では、自分のユニフォームを着ている選手の人数を指示変数を用いて数え、平均と分散を求め、その結果をポアソン分布と比較する。

2 **漸化式。** $n$ 個の対象の完全順列の個数を $D_n$ とする。カード 1 がどこへ行くか、そしてその位置にあったカードが位置 1 へ行くかどうかを考えることにより、漸化式（recurrence）$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$ を示せ。$D_3 = 2$、$D_4 = 9$ と照らし合わせて確かめよ。

3 **ちょうど $k$ 枚。** ちょうど $k$ 枚のカードが自分の位置にある確率は $\frac{1}{k!}d_{n-k}$ であり、それが $\frac{e^{-1}}{k!}$ に近づくことを示せ。

4 **互いに素な整数。** 包除原理を用いて、1 から 30 までの整数のうち 2、3、5 のいずれでも割り切れないものの個数を求めよ。その答えは $30\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$ とどのような関係にあるか。

## さらに学ぶために

- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***（Oxford University Press）。包除原理と一致の問題を扱う大学 1 年生向けの教科書。
- **William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1**（Wiley）、第 IV 章。一致の問題のさまざまな変形を収めた古典。
- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics***（World Scientific）。包除原理について。

# 9.9 誕生日問題

**問題**

**STEP II 2007、問 13**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/07-s2-q13`

## 導入

部屋に何人いれば、その中の誰か 2 人の誕生日が一致する確率（probability）が半分を超えるだろうか。多くの人は 365 の半分の 180 前後と予想する。答えは 23 である。30 人のクラスなら誕生日が一致する組がある確率は 70%、50 人のパーティーなら 97% になる。

この意外さは、2 つの異なる問いを混同することから生じる。「**自分と**同じ誕生日の人はいるか」（こちらは確かに約 253 人が必要である）と、「**誰か 2 人の**誕生日が一致するか」である。23 人いれば組は $\binom{23}{2} = 253$ 通りあり、どの組も一致する可能性をもつ。この問題はその直観を厳密なものにする。そして同じ数学が、銀行口座を守る暗号（cryptography）の安全性を決めているのである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** どの 2 人の客も誕生日が一致しない確率の方が計算しやすいのはなぜか。客を一列に並べてみよ。2 人目が 1 人目の誕生日を避ける確率はいくらか。3 人目がその 2 人の誕生日をともに避ける確率はどうか。

「少なくとも 2 人が一致する」には、互いに重なり合う多くの場合が含まれる（2 人が一致する、3 人が一致する、異なる 2 組がそれぞれ一致する、...）。その余事象（complement）である「全員異なる」は、ただ 1 つのすっきりした事象である。2 人目が 1 人目の誕生日を避ける確率は $\frac{364}{365}$ であり、そのもとで 3 人目が 2 人の誕生日をともに避ける確率は $\frac{363}{365}$ である。以下同様である。

## 順を追って解く

### 段階 1　有用な近似

**考えてみよう**　$x=0$ における $y=e^{-x}$ の接線（tangent line）は何か。

$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2}-\cdots$ であるから、$x$ が小さいとき $e^{-x}\approx 1-x$ である。$x=r/n$ とおくと、

$$\frac{n-r}{n}=1-\frac{r}{n}\approx e^{-r/n}. \qquad \blacksquare$$

誤差はおよそ $\frac{r^2}{2n^2}$ であり、$r$ が $n$ よりずっと小さければ小さい。

### 段階 2　誕生日が一致する確率

$k$ 人の誕生日がすべて異なる確率は

$$\frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdots\frac{365-(k-1)}{365}=\prod_{r=0}^{k-1}\frac{365-r}{365}.$$

である。各因数にこの近似を用い、指数関数の積は指数の和になることを使うと、

$$\prod_{r=0}^{k-1}e^{-r/365}=\exp\Bigl(-\frac{0+1+\cdots+(k-1)}{365}\Bigr)=\exp\Bigl(-\frac{k(k-1)}{730}\Bigr).$$

よって、誕生日が一致する組が少なくとも 1 つある確率は近似的に $1-e^{-k(k-1)/730}$ である。 $\blacksquare$

**考えてみよう**　指数に注目せよ。$\frac{k(k-1)}{730}=\binom{k}{2}\Big/365$ である。これは言葉で言うと何を意味するか。

これは客の組の数に、ある特定の組の誕生日が一致する確率 $\frac{1}{365}$ を掛けたもの、すなわち一致する組の数の期待値（expected number）である。この近似は、一致がない確率が $e^{-(\text{一致の個数の期待値})}$ であることを述べており、Section 9.8 と同様に、ここにもポアソン分布（Poisson distribution）の気配が現れている。

### 段階 3　23 人

$1-e^{-k(k-1)/730}\ge\frac{1}{2}$、すなわち $e^{-k(k-1)/730}\le\frac{1}{2}$ となる必要があるから、

$$\frac{k(k-1)}{730}\ge\ln 2\approx\frac{253}{365},\qquad\text{すなわち}\qquad k(k-1)\ge 506.$$

$22\times 21=462$、$23\times 22=506$ であるから、最小の値は $k=23$ である。 $\blacksquare$

（客が 23 人のときの正確な確率は 0.507、22 人のときは 0.476 であるから、この近似は正しい答えを与えている。）

### 段階 4 主催者と誕生日が一致する場合

> **考えてみよう** 各客について、主催者と誕生日が一致しない確率はいくらか。この点に関して、客どうしは互いに独立であるか。

各客は独立に確率 $\frac{364}{365} \approx e^{-1/365}$ で主催者の誕生日を外す。よって $k$ 人の客の誰も主催者と誕生日が一致しない確率は $\left(\frac{364}{365}\right)^k \approx e^{-k/365}$ であり、

$$e^{-k/365} \le \tfrac{1}{2}, \qquad \text{すなわち} \qquad k \ge 365 \ln 2 \approx 253.$$

が必要である。したがって客は 253 人必要である。 ■

この対比こそが要点である。特定の 1 人と一致させるには 253 人の客が必要だが、どこかの組が一致するには 23 人で足りる。23 人いれば 253 組ができるからである。

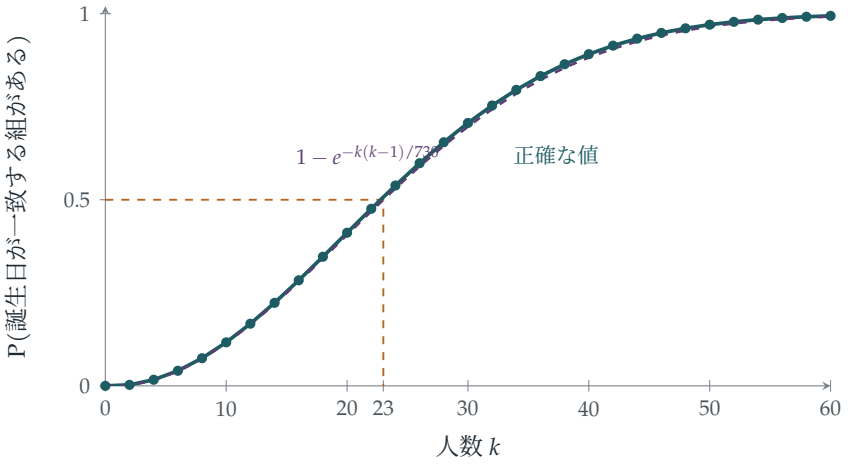



**図 9.9.1** $k$ 人のうち少なくとも 2 人の誕生日が一致する確率。正確な値（ティール）と近似 $1 - e^{-k(k-1)/730}$（プラム、破線）。両者は非常に近く、どちらも $k = 22$ と $k = 23$ の間で $\frac{1}{2}$ を超える。

## 振り返り

- **余事象を使う。**「全員異なる」はただ 1 つの積であったが、「少なくとも 1 組一致する」は煩雑であった。
- **線形化（linearise）してから指数関数にする。**各因数 $1 - x$ を $e^{-x}$ で置き換えることで、積が和に変わった。

- **組を数える。** 指数は、組の数に 1 組が一致する確率を掛けたものであった。$k(k-1)$ に現れる 2 乗こそが、このパラドックス（paradox）の説明のすべてである。

## 背後にある数学

### 平方根則

365 の代わりに、等確率な $n$ 個の日があるとすると、同じ議論から

$$\mathrm{P}(\text{一致がある、人数}k) \approx 1 - e^{-k^2/(2n)},$$

が得られる。よって一致が起こりやすくなるのは、$k$ が $n$ ではなく $\sqrt{n}$ 程度になったときである。より正確には、確率が $\frac{1}{2}$ に達するのは $k \approx 1.18\sqrt{n}$ のときであり、最初の重複が起こるまでに出会う必要のある人数の期待値は約 $\sqrt{\pi n/2}$ である（$n = 365$ なら約 24.6）。この**平方根則**（square-root law）こそが、偶然の一致がこれほどありふれている理由である。大量の出来事の集まりの中では、特定の一致はどれも起こりにくいにもかかわらず、何らかの組が何らかの形で一致する可能性は高いのである。

### 誕生日攻撃

コンピュータは、ファイルが改ざんされていないことを**ハッシュ**（hash）を計算して確認する。ハッシュとは、たとえば $n = 2^{128}$ 通りの値をとる指紋のようなものである。同じハッシュをもつ 2 つの文書（無害な契約書と不正な契約書）を作りたい偽造者は、$2^{128}$ 個の文書を試す必要はない。誕生日の議論により、それぞれの変種を約 $\sqrt{2^{128}} = 2^{64}$ 個ずつ生成すれば、おそらく一致が見つかる。この**誕生日攻撃**（birthday attack）があるために、現代のハッシュ関数は 256 ビット以上を用いる。平方根則によってビット数の半分が失われるからである。同様の計算により、2 台のコンピュータが偶然同じものを選ぶことが決してないようにするには、ランダムな識別子をどれだけ長くすべきかも決められる。

#### 最初に問うたのは誰か

誕生日問題（birthday problem）は通常、1939 年にこれを論じたリヒャルト・フォン・ミーゼス（Richard von Mises）に帰せられるが、それ以前から知られていた。Harold Davenport もそれ以前にこれを知っていたが、あまりに簡単に思えたので発表しなかったと言われている。Warren Weaver の語るところによれば、彼は第二次世界大戦中、陸軍将校たちとの夕食会でこれを実演するのを好んだ。その場にいた 22 人のうち 2 人の誕生日が一致するほうに賭けて負けたが、そのときウェイトレスが、自分の誕生日が将校の 1 人と同じであることを明かしたという。

## 思考のスキル

**余事象を計算し、注意深く近似する**

「少なくとも *1* つ」が複雑なときは、「*1* つもない」確率を求めよ。積が扱いにくいときは、各因数を指数関数で近似し、指数を足し合わせよ。

どちらの手法も大学では標準的なものである。2 つ目の $1 - x \approx e^{-x}$ は、ポアソン近似の理論や、正確に計算するには複雑すぎる量を見積もるための漸近的手法（asymptotic methods）の出発点である。

## 次の一歩

1 **最初の重複。** STEP II 2014、問 13（`step.maths.org/questions/14-s2-q13`）に挑戦せよ。乱数生成器から最初に重複して現れる値を調べる問題で、形を変えた誕生日問題である。その確率から 2 つの意外な恒等式が導かれる。

2 **3 人が一致。** 誰か 3 人の誕生日が一致する確率が半分を超えるには、おおよそ何人必要か。（ヒント：誕生日が一致する 3 人組の個数の期待値は $\binom{k}{3}/365^2$ である。これを約 $\ln 2$ とおけ。）真の答えは 88 である。

3 **ニアミス。** 2 人の誕生日が同じ日または隣り合う日である確率が半分になるには、何人必要か。

4 **偏りのある誕生日。** 現実の誕生日は一様ではない。各日の確率が $p_1, \ldots, p_{365}$ であるとき、2 人の誕生日が一致する確率は $\sum p_i^2$ であり、これはすべての $p_i$ が等しいときに最小となることを示せ。（よって一様でないことは、一致をより起こりやすくするだけである。）

## さらに学ぶために

- **William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1**（Wiley）、第 II 章。誕生日問題とその近似。
- **Persi Diaconis & Frederick Mosteller, “Methods for studying coincidences”**, *Journal of the American Statistical Association* 84 (1989)。偶然の一致がありふれている理由。非常に読みやすい。
- **David Hand, *The Improbability Principle***（Bantam）。平方根則をはじめ、起こりそう

にないことが絶えず起こる理由を解説する。

# 9.10 いつでもおつりを渡せる

**問題**

**STEP I 2011、問 12**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/11-s1-q12`

## 導入

$\frac{m}{m+1}$、$\frac{m-1}{m+1}$、$\frac{m-2}{m+1}$ という規則性は見過ごせない。£2 硬貨を持つ人が $n$ 人いれば、答えはきっと $\frac{m-n+1}{m+1}$ だろう。実際そのとおりであり、最も鮮やかな証明は組合せ論の中でも屈指の美しいアイデア、すなわち**鏡像原理**（reflection principle）による。これは、図の一部を直線に関して折り返すことで、難しい数え上げ（釣り銭が途中で尽きない列の個数）を易しい数え上げに変えてしまう方法である。

この問題はさまざまな姿で現れる。勝者が一度も相手に後れをとらない開票（1887 年のベルトラン（Bertrand）の投票問題）、決して破産しない賭博者、正しく対応する括弧などである。$m = n$ のとき、この数え上げは**カタラン数**（Catalan numbers）を与える。カタラン数は、組合せ論において二項係数（binomial coefficients）に次いで最もよく現れる数列といってよいだろう。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** £1 の客が来るたびに硬貨が 1 枚増え、£2 の客が来るたびに（釣り銭として）1 枚減る。行き詰まるのはどのようなときか。

手元にある £1 硬貨の枚数を追っていく。この枚数は £1 の客ごとに 1 増え、£2 の客ごとに 1 減る。行き詰まるのは、ちょうど硬貨を 1 枚も持っていないときに £2 の客が来た場合であり、このとき枚数は $-1$ になってしまう。したがって、成功するための必要十分条件は、列のどの時点においても、それまでの £1 の客の人数がそれまでの £2 の客の人数以上であることである。

## 順を追って解く

### 段階 1　£2 硬貨が 1 枚の場合

$n = 1$ のとき、失敗するのは £2 の客が先頭にいる場合に限る。£2 の客は $m+1$ 個の位置のどこにも等確率でいるから、

$$\mathrm{P}(\text{成功}) = 1 - \frac{1}{m+1} = \frac{m}{m+1}. \qquad \blacksquare$$

### 段階 2　£2 硬貨が 2 枚の場合

**考えてみよう**　先頭の人は £1 硬貨を持っていなければならない。2 番目の人については何が起こりうるか。また、それぞれの場合にどのような状況が残るか。

先頭の人が £1 硬貨を持っている確率は $\frac{m}{m+2}$ であり、そうでなければその場で失敗する。先頭が £1 なら手元に硬貨が 1 枚あり、残りの列には £1 の人が $m-1$ 人、£2 の人が 2 人いる。

- 2 番目の人が £1 硬貨を持っている場合（確率 $\frac{m-1}{m+1}$）、手元の硬貨は 2 枚になり、2 枚の £2 硬貨がいつ来ても釣り銭を渡せる。成功は確実である。
- 2 番目の人が £2 硬貨を持っている場合（確率 $\frac{2}{m+1}$）、手元の硬貨は 0 枚に戻り、£1 の人が $m-1$ 人、£2 の人が 1 人残る。小問 (i) で $m$ を $m-1$ に置き換えれば、成功する確率は $\frac{m-1}{m}$ である。

よって

$$\mathrm{P}(\text{成功}) = \frac{m}{m+2}\left(\frac{m-1}{m+1} + \frac{2}{m+1}\cdot\frac{m-1}{m}\right) = \frac{m}{m+2}\cdot\frac{m-1}{m+1}\cdot\frac{m+2}{m} = \frac{m-1}{m+1}. \qquad \blacksquare$$

**手を止めて、やってみよう**　同じ方法を $n = 3$ で試してみよ。うまくいくが、場合分けが膨れ上がる。成功する列を一度にまとめて数える方法はないだろうか。

### 段階 3　列を経路として見る

**考えてみよう**　対応した人数に対して手元の硬貨の枚数をグラフに描いてみよ。列はどのような図になるか。成功する列はどのような図になるか。

列は、$m$ 個の上り段（£1）と $n$ 個の下り段（£2）からなり、高さ 0 から始まって高さ $m-n$ で終わる経路である。このような経路は $\binom{m+n}{n}$ 個あり、どれも等確率である。列が成功するのは、その経路が一度も 0 より下に行かないときに限る。したがって、数えるべきは**悪い**経路、すなわち高さ $-1$ に触れる経路である。

### 段階 4 折り返し

**考えてみよう** 悪い経路を 1 つとる。それが初めて $-1$ に触れる時点を見つけ、その時点**より前**の部分を直線 $y=-1$ に関して折り返せ。新しい経路はどこから始まり、どこで終わるか。

折り返した経路は $-2$（直線 $y=-1$ に関する 0 の鏡像）から始まり、元の経路と同じ $m-n$ で終わる（図 9.10.1）。逆に、$-2$ から $m-n$ へ向かうどの経路も、どこかで必ず $y=-1$ を横切る（$m \geq n$ より、下から始まって上で終わるからである）。初めて $y=-1$ に達するまでの部分を折り返せば、0 から始まる悪い経路に戻る。したがって、0 から始まる悪い経路は、$-2$ から $m-n$ へ向かう**すべての**経路とちょうど 1 対 1 に対応する。

$-2$ から $m-n$ へ $m+n$ 段で進む経路は $m-n+2$ だけ上昇するから、上り段が $m+1$ 個、下り段が $n-1$ 個である。このような経路は $\binom{m+n}{n-1}$ 個ある。ゆえに

$$\mathrm{P}(\text{失敗}) = \frac{\binom{m+n}{n-1}}{\binom{m+n}{n}} = \frac{n!\,m!}{(n-1)!\,(m+1)!} = \frac{n}{m+1},$$

であり、

$$\mathrm{P}(\text{成功}) = 1 - \frac{n}{m+1} = \frac{m-n+1}{m+1}.$$

$n=3$ のとき、これは $\frac{m-2}{m+1}$ である。 ■

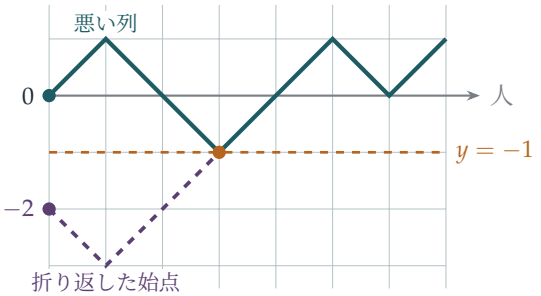



**図 9.10.1** £1 硬貨が $m=4$ 枚、£2 硬貨が $n=3$ 枚の列を経路として描いたもの（ティール）。この経路は 3 人目（アンバー）で初めて $-1$ に達し、そこで釣り銭が渡せなくなる。その点までの経路を直線 $y=-1$ に関して折り返すと、$-2$ から同じ終点へ向かう経路（プラム、破線）が得られる。悪い列と $-2$ から始まる経路とのこの対応が鏡像原理である。

## 振り返り

- **適切な状態を見つける。**意味をもつのは手元の硬貨の枚数だけであり、これによって列が経路（歩み）に変わった。
- **最初の数歩で条件づける。**小問 (i) と (ii) は、最初の数人がどうするかを考えて、より小さな場合に帰着させることで解いた。
- **全単射で余事象を数える。**悪い経路を直接数えるのは難しかったが、折り返しによって、数えやすい集合と全単射（bijection）で対応づけることができた。

## 背後にある数学

### カタラン数

$m = n$（£1 硬貨がぎりぎり足りる場合）のとき、成功する列の個数は

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

であり、これは第 $n$ **カタラン数** $C_n$：$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, \ldots$ である。リチャード・スタンレー（Richard Stanley）の著書 *Catalan Numbers* には、カタラン数が数える対象が 200 以上も挙げられている。その中には、$n$ 組の括弧を正しく並べる方法の数（「(())()」はよいが「())(()」はだめである。これは「(」を £1、「)」を £2 とみれば硬貨の議論そのものである）、$n+2$ 角形を互いに交わらない対角線で三角形に分割する方法の数、$n+1$ 個の因数の積に括弧をつける方法の数などがある。

### ランダムウォーク

列はランダムウォーク（random walk）であり、鏡像原理はランダムウォークを調べるための基本的な道具の 1 つである。たとえば鏡像原理から、0 から出発する公平なランダムウォークはいつか必ず 0 に戻ること、また最初の $2n$ 歩の間ずっと正であり続ける確率が $\frac{1}{2}\binom{2n}{n}2^{-2n} \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi n}}$ であることがわかる。連続版では、同じ折り返しの議論を**ブラウン運動**（Brownian motion）に適用すると、その最大値の分布が得られる。これは、株価がある障壁を一度でも越えるかどうかで支払いが決まる、ある種の金融オプションの価格づけの基礎になっている。

#### ベルトランの投票問題

1887 年、ジョゼフ・ベルトラン（Joseph Bertrand）は次の問いを立てた。候補者 $A$ が $a$ 票、$B$ が $b < a$ 票を得る選挙において、開票の間ずっと $A$ が真に $B$ をリードし

ている確率はいくらか。答え $\frac{a-b}{a+b}$ は同じ年にデジレ・アンドレ（Désiré André）によって証明され、その議論は通常、鏡像原理として記憶されている（ただし歴史家たちは、アンドレの実際の証明は少し異なる全単射を用いていたと指摘している）。本問のくじ引きの問題は、同点を許す変形版である。すなわち成功とは、£1 の人数が £2 の人数を一度も**下回らない**ことである。演習問題の 1 つで、ベルトランの答えを本問の答えから導く。

## 思考のスキル

**全単射による数え上げ**

**ある集合の要素を数えるには、数えられる集合との *1* 対 *1* 対応を見つけよ。**

折り返しによって、悪い列を、別の始点から出発する制約のない経路と対応づけた。全単射による証明は組合せ論で最も満足感のある証明である。2 つの数が等しいことを単に示すだけでなく、**なぜ**等しいのかを説明してくれるからである。大学では組合せ論のいたるところで全単射による証明に出会い、ランダムウォークやブラウン運動の研究で再び鏡像原理に出会うだろう。

## 次の一歩

1 **3 枚の場合を場合分けで。** 小問 (ii) と同様に、列の最初の数人で条件づけて小問 (iii) を証明せよ。鏡像原理がどれほどの手間を省いてくれるかがわかるだろう。

2 **ベルトランの投票問題。** ある選挙で $A$ は $a$ 票、$B$ は $b < a$ 票を得る。開票の間ずっと $A$ が真にリードしている確率が $\frac{a-b}{a+b}$ であることを示せ。（**ヒント**：最初の 1 票は $A$ でなければならない。その後、$A$ が $B$ に後れをとる差は決して…を超えてはならない。）

3 **括弧。** 3 組の括弧の正しい並べ方 5 通りと、五角形を三角形に分割する方法 5 通りをすべて書き出せ。両者の間の全単射を見つけられるか。

4 **£5 紙幣。** 価格 £1 のチケットを買う列に、£1 硬貨を持つ人が $m$ 人、£5 紙幣を持つ人が $n$ 人いる。鏡像原理ではもはや簡単な答えが得られない理由を説明せよ。（この一般化ははるかに難しい。）

## さらに学ぶために

- **ウィリアム・フェラー（William Feller）, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1**（Wiley）、第 III 章。ランダムウォークと鏡像原理についての古典的な解説。
- **Richard Stanley, *Catalan Numbers***（Cambridge University Press）。200 を超える解釈を演習問題とともに収録。
- **Marc Renault,「Lost (and found) in translation: André's actual method and its application to the generalized ballot problem」**, *American Mathematical Monthly* 115 (2008)。鏡像原理の歴史。

# 9.11 全種類を集める

**問題**

**STEP II 1994、問 13**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/94-s2-q13`

## 導入

あるサッカーのステッカーアルバムには集めるべきステッカーが 600 種類あり、ステッカーは 1 枚ずつ無作為に売られている。アルバムを埋めるには、何枚買うことを見込めばよいだろうか。最初の数百枚はすぐに集まる。ほとんどすべてのステッカーが新しいからである。しかしアルバムが埋まってくるにつれて新しいステッカーは出にくくなり、最後の 1 枚だけで平均 600 回の購入が必要になる。合計はおよそ 4200 枚、アルバムの大きさの 7 倍にもなる。

これが**クーポン・コレクター問題**（coupon collector's problem）である。その答えは二つの考え方を組み合わせたものである。一つは成功するまでの待ち時間であり、もう一つは調和級数（harmonic series）$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ で、これは $\ln n$ のように増大する。調和級数が発散（diverge）することは Section 2.3 で見た。ここでは、その増え方の遅さこそが、コレクションを完成させるために支払う代価となる。

## 取りかかる前に

? **考えてみよう** 各袋がそれぞれ独立に確率 $p$ で新しいカードをくれるとき、最初の新しいカードが出るまで（その袋を含めて）開ける袋の数の期待値（expectation）はいくらか。

袋の数 $X$ は**幾何分布**（geometric distribution）に従う：$\mathrm{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p$。その期待値は $\frac{1}{p}$ である。（これをすばやく確かめる一つの方法：$\mathrm{E}(X) = 1 + (1-p)\mathrm{E}(X)$。1 袋開けると、確率 $1-p$ で振り出しに戻るからである。）新しいカードが 3 回に 1 回

出るなら、3 袋待つことが見込まれる。

## 順を追って解く

### 段階 1　新しいカードを待つ

すでに $r$ 種類の異なるカードを持っているとき、1 袋から新しいカードが出る確率は、それまでの袋とは独立に $\frac{n-r}{n}$ である。したがって、次の新しいカードが出るまでの袋の数の期待値は

$$\frac{1}{(n-r)/n} = \frac{n}{n-r}. \qquad \blacksquare$$

### 段階 2　和と積分を比べる

> **考えてみよう**　区間 $r \le x \le r+1$ において、$\frac{1}{x}$ はどの二つの値の間にあるか。それは曲線の下の面積について何を教えてくれるか。

$\frac{1}{x}$ は減少関数なので、$[r, r+1]$ 上で $\frac{1}{r+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{r}$ である。長さ 1 の区間で積分すると

$$\frac{1}{r+1} \le \int_{r}^{r+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \le \frac{1}{r}. \qquad \blacksquare$$

図で見ると（図 9.11.1）、曲線の下の面積は、高さ $\frac{1}{r+1}$ の長方形と高さ $\frac{1}{r}$ の長方形の間に挟まれている。これらを $r = 1$ から $r = n-1$ まで足し合わせると、積分はつながって $\int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln n$ となり、したがって

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \le \ln n \le 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}. \qquad \blacksquare$$

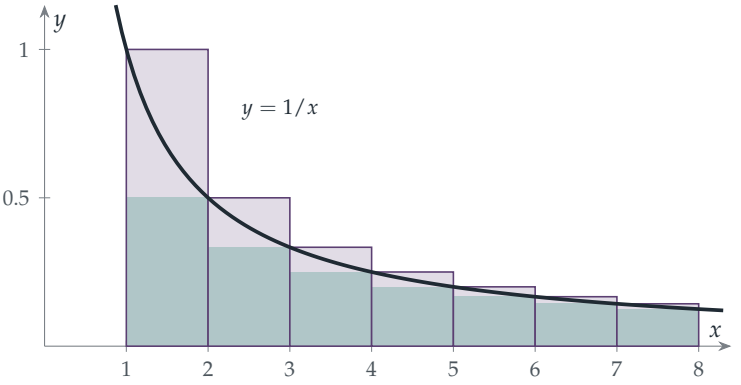



**図 9.11.1** 各区間 $[r, r+1]$ において、$y = 1/x$ の下の面積は、ティール色の長方形（高さ $\frac{1}{r+1}$）と、それより大きいプラム色の長方形（高さ $\frac{1}{r}$）の間にある。足し合わせると、$\ln n$ は $\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ と $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}$ の間にある。曲線とプラム色の長方形の間の隙間を合計すると有限の値になる。それがオイラーの定数（Euler's constant）$\gamma \approx 0.577$ である。

### 段階 3 セットを完成させる

**考えてみよう** 袋の総数は、最初のカード、2 枚目の新しいカード、……のそれぞれを待つ時間の和である。その期待値はいくらか。

$r$ 種類の異なるカードから $r+1$ 種類になるまでに必要な袋の数を $X_r$ とする。総数は $X_0 + X_1 + \cdots + X_{n-1}$ であり、期待値は足し合わせられるので、

$$\mathrm{E}(\text{総数}) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{n}{n-r} = n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + 1\right) = nH_n,$$

ここで $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ は第 $n$ **調和数**（harmonic number）である。段階 2 より $\ln n + \frac{1}{n} \le H_n \le \ln n + 1$ なので、$n$ が大きいとき $H_n$ はおよそ $\ln n$ であり、私が食べることになると見込まれるのはおよそ

$$n \ln n \text{ 袋.} \qquad \blacksquare$$

## 振り返り

- **長い待ち時間を段階に分ける。**全体の時間は $n$ 個の待ち時間に分かれ、そのそれぞれは単純な幾何分布型であった。
- **期待値は加法的である。**総数の分布は一度も必要とせず、各部分の期待値だけで済んだ。

- **和を積分と比べる。**図によって、値を求められない和が、誤差高々 1 の対数に置き換わった。

## 背後にある数学

### この評価はどれほど良いか

この比較はさらに精密にできる。図 9.11.1 において曲線と上側の長方形の間にある影の付いた隙間は、面積の合計が有限なので、$H_n - \ln n$ はある極限に収束（converge）する。

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) = 0.5772156649\ldots,$$

これが**オイラーの定数**である。（$\gamma$ が有理数かどうかは誰も知らない。）したがって袋の数の期待値は $n\ln n + \gamma n + \frac{1}{2} + \cdots$ である。600 種類のステッカーアルバムでは $600 \times (\ln 600 + 0.577) \approx 4185$ となり、これが導入で挙げた数値である。

時間はどこに費やされるのだろうか。各段階はきわめて不均等である。セットの前半を集めるのにかかるのはわずか約 $n\ln 2 \approx 0.69n$ 袋であるのに対し、最後の 1 枚だけで平均 $n$ 袋かかる。労力の大部分は最後の数枚に費やされる。コレクターたちがダブったカードを交換するのはこのためである。

### 集中

期待値は出発点にすぎない。総数はどれくらいばらつくのだろうか。総数の分散（variance）は $\sum nr/(n-r)^2$ であり、これはおよそ $\frac{\pi^2}{6}n^2$ である（Section 2.4 の和 $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$ が現れる）。したがって標準偏差（standard deviation）はおよそ $1.28n$ であり、$n$ が大きいときには平均 $n\ln n$ よりもずっと小さい。つまり総数はその平均の周りに**集中**（concentrated）している。ポール・エルデシュ（Paul Erdős）とアルフレッド・レーニ（Alfréd Rényi）は 1961 年に、より精密に、総数から $n\ln n$ を引いて $n$ で割ったものが極限分布をもつことを示した。それが**ガンベル分布**（Gumbel distribution）であり、多数の確率的な量の最大値も記述する分布である（Section 12.25）。

#### 至るところにクーポン

この問題はアブラーム・ド・モアブル（Abraham de Moivre、1712 年）とラプラス（Laplace）にさかのぼる。現在ではさまざまな姿で現れる。システムのすべての部品を確かめるには、無作為なテストが何回必要か。ネットワーク上のランダムウォークがすべての頂点を訪れるまでどれくらいかかるか。コンピュータのハッシュ表を何回探索しなければならないか。いずれの場合も答えには $n\ln n$ が現れる。生物学で

は、同じ計算によって、ゲノム全体を網羅するのに必要なシーケンシングの「リード」の数が見積もられる。

## 思考のスキル

**期待値の線形性**

和の期待値は期待値の和である。各部分が独立であるかどうかは関係ない。複雑な確率的な量を単純な部分に分けよ。

これは確率論で最も役に立つ事実の一つである。期待値の線形性（linearity of expectation）は、ここではクーポン・コレクター問題を $n$ 個の幾何分布型の待ち時間に帰着させた。Section 9.8 では、何の計算もなしに一致の個数の期待値を与えた。大学では、同じ考え方がアルゴリズムの解析や組合せ論（combinatorics）における確率的手法（probabilistic method）を支えている。

## 次の一歩

1 **セットの半分。** $\frac{n}{2}$ 種類の異なるカードを集めるのに必要な袋の数の期待値（$n$ は偶数）が $n(H_n - H_{n/2})$ であること、そしてこれがおよそ $n \ln 2$ であることを示せ。

2 **異なるカードの数。** $k$ 袋を開けた後に持っている異なるカードの種類数の期待値が $n\big(1-(1-\frac{1}{n})^k\big)$ であることを示せ。（**ヒント**：各カードについて、それを持っている確率を求め、足し合わせよ。）セットの 95% を集めるにはおよそ何袋必要か。

3 **二人のコレクター。** 二人の子どもが同じセットを集めており、一方にとってのダブりが他方にとっては新しいカードになりうるように袋を共有する。両方のセットを完成させるのに必要な袋の数の期待値がおよそ $n(\ln n + \ln\ln n)$ であることを示せ。（これは難しい。まず、それが $2n \ln n$ よりずっと小さいことを納得せよ。）

4 **より精密な評価。** 長方形の代わりに台形公式（trapezium rule）の図を用いて、$H_n - \ln n$ が減少し、$H_n - \ln n - \frac{1}{2n}$ が増加することを示せ。小さな $n$ の値から $0.5 < \gamma < 0.7$ を導け。

## さらに学ぶために

- **Geoffrey Grimmett & David Stirzaker, *One Thousand Exercises in Probability***（Oxford

University Press）。クーポン・コレクター問題のさまざまな変種が収められている。

- **Julian Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant***（Princeton University Press）。$\gamma$ と調和級数のすべてを、親しみやすい水準で解説している。
- **Michael Mitzenmacher & Eli Upfal, *Probability and Computing***（Cambridge University Press）。クーポン・コレクター問題と、そのコンピュータ科学における応用。

# 9.12 ランダムな部分集合

**問題**

**STEP III 2019、問 12**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip`

## 導入

$\{1, 2, \ldots, 100\}$ の部分集合（subset）を二つ、まったくランダムに選ぶ。それらが共通の要素を一つももたない確率はどのくらいだろうか。直観は「かなり高い。たいていの集合の組は異なるのだから」と言うかもしれない。実際には、その確率は $\left(\frac{3}{4}\right)^{100}$、およそ $3 \times 10^{-13}$ である。ランダムな集合は大きく（全体のおよそ半分を含み）、そのためほとんど必ず重なり合うのである。

この問題は短いが、その核にある一つの考え方は強力である。集合を全体として考えるのではなく、要素を一つずつ考えるのである。ランダムな部分集合とは、各要素に一回ずつ、合計 $n$ 回の独立（independent）な硬貨投げにすぎず、ランダムな部分集合に関するあらゆる問いは、それらの硬貨投げに関する問いに帰着する。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $\{1, \ldots, n\}$ の部分集合を、「はい／いいえ」で答える $n$ 個の問いへの答えの列で表すにはどうすればよいか。

各要素 $i$ について、「$i$ はその集合に含まれるか」という問いに答える。部分集合が決まれば答えが決まり、答えが決まれば部分集合が決まる。各要素について選択肢は 2 通りなので、部分集合は全部で $2^n$ 個ある。部分集合を一様ランダムに選ぶことは、各問いに公平な硬貨を独立に投げて答えることと同じである。

## 順を追って解く

### 段階 1　一つの要素

硬貨投げによる記述から、$\mathrm{P}(1 \in A_1) = \frac{1}{2}$ である。実際、$2^n$ 個の部分集合のうちちょうど半分が 1 を含む。1 を含まない各部分集合に、それに 1 を加えて得られる部分集合を対応させればよい。

### 段階 2　互いに素な集合

> **考えてみよう**　$A_1 \cap A_2 = \varnothing$ となるためには、各要素 $i$ について何が成り立たなければならないか。一つの要素について、その確率はいくらか。なぜ要素ごとの確率を掛け合わせてよいのか。

$A_1$ と $A_2$ が互いに素（disjoint）であるのは、両方に属する要素が一つもないときであり、またそのときに限る。一つの要素 $i$ については、等確率の四つの可能性がある。どちらの集合にも属さない、$A_1$ のみに属する、$A_2$ のみに属する、両方に属する、の四つである（図 9.12.1 左）。禁じられるのは最後のものだけなので、$i$ が両方には属さない確率は $\frac{3}{4}$ である。異なる要素は異なる独立な硬貨投げによって決まるので、

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 = \varnothing) = \left(\frac{3}{4}\right)^n. \qquad \blacksquare$$

三つの集合の場合、要素 $i$ が三つすべてに属する確率は $\frac{1}{8}$ なので、$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing) = \left(\frac{7}{8}\right)^n$ である。一般に、

$$\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_m = \varnothing) = \left(1 - \frac{1}{2^m}\right)^n. \qquad \blacksquare$$

### 段階 3　包含関係

> **考えてみよう**　$A_1 \subseteq A_2$ となるためには、一つの要素についての四つの可能性のうちどれが禁じられるか。

$A_1 \subseteq A_2$ が成り立たないのは、$A_1$ には属するが $A_2$ には属さない要素が存在するときであり、またそのときに限る。ここでも四つのうち一つのパターンが禁じられるので、

$$\mathrm{P}(A_1 \subseteq A_2) = \left(\frac{3}{4}\right)^n,$$

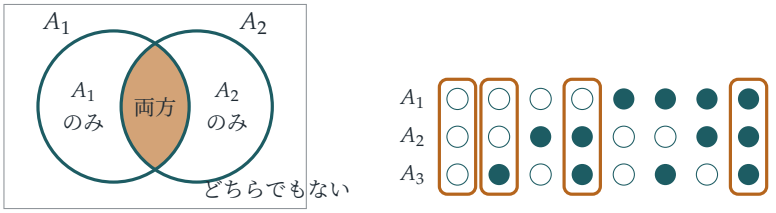
となり、互いに素である確率と同じになる。これは偶然ではない。$A_1 \subseteq A_2$ となるのは $A_1$ と $A_2$ の補集合（complement）が互いに素であるときであり、またそのときに限る。そして、ランダムな集合の補集合もまたランダムな集合なのである。

**考えてみよう** $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$ となるためには、一つの要素について、所属の仕方（各集合に属するか属さないか）の 8 通りのパターンのうちどれが許されるか。

鎖（chain）$A_1, A_2, A_3$ を順にたどると、要素はいったん属したら、その後も属し続けなければならない。したがって許されるパターンは「属さない、属さない、属さない」「属さない、属さない、属する」「属さない、属する、属する」「属する、属する、属する」の 8 通り中 4 通りである（図 9.12.1 右）。よって $\mathrm{P}(A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3) = \left(\frac{4}{8}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ である。

$m$ 個の集合からなる鎖については、許されるパターンは、その要素が最初に属する集合（$A_1, \ldots, A_m$ のいずれか、あるいはどれにも属さない）によって決まるので、$2^m$ 通りのパターンのうち $m+1$ 通りが許される。

$$\mathrm{P}(A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_m) = \left(\frac{m+1}{2^m}\right)^n. \qquad \blacksquare$$




各要素：等確率の 4 通りの位置　$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$ で許されるもの：8 通り中 4 通り

**図 9.12.1**　左：$S$ の要素は、$A_1$ と $A_2$ に対して四つの位置のいずれかにあり、それぞれの確率は $\frac{1}{4}$ である。互いに素であることは「両方」（琥珀色）を禁じ、$A_1 \subseteq A_2$ は「$A_1$ のみ」を禁じる。右：$A_1$、$A_2$、$A_3$ への所属の仕方の 8 通りのパターン（塗りつぶした円は「属する」を表す）。鎖 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$ が許すのは、枠で囲んだ四つのパターンだけであり、そこでは要素はいったん属したら属し続ける。

## 振り返り

- **要素ごとに分解する。**集合全体についての各条件（互いに素、包含、鎖）は、それぞれの要素についての個別の条件であった。
- **要素間の独立性。**各要素は独立な硬貨投げによって決まるので、確率は掛け合わされる。
- **パターンを数える。**どの答えも（許されるパターンの数 ÷ すべてのパターンの数）$^n$ であった。

## 背後にある数学

### 確率を使わずに数える

選び方の総数を掛けると、各確率は個数に変わる。$A_1 \subseteq A_2$ を満たす順序対 $(A_1, A_2)$ の個数は $4^n \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 3^n$ である。これらの組は直接数えることもできる。$A_2$ の大きさ $k$ を選び、次に $A_2$ そのものを $\binom{n}{k}$ 通りの方法で選び、さらに $A_1$ をその $2^k$ 個の部分集合のいずれかとして選ぶ。したがって

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n,$$

となり、これは $(1+2)^n$ に対する二項定理（binomial theorem）である。同じものを二通りの方法で、一度は要素ごとに、一度は大きさごとに数えることで、恒等式が証明される。これが**二重数え上げ**（*double counting*）の方法であり、Section 7.9 で正多面体とともに出会ったものである。同様に、鎖 $A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_m$ の個数は $(m+1)^n$ である。

### 部分集合の束

$\{1, \ldots, n\}$ の部分集合全体は、包含関係によって順序づけると、**ブール束**（*Boolean lattice*）と呼ばれる構造をなす。これは $n$ 次元の立方体として図示できる。各部分集合は頂点であり、その「はい／いいえ」の答えの列によってラベルづけされ、辺に沿って移動することは要素を一つ加えるか取り除くことに対応する。鎖は上向きに進む経路である。部分集合の族に条件を課したとき、その族がどこまで大きくなりうるかを記述する深い結果がある。**シュペルナー**（*Sperner*）**の定理**（1928 年）は、どの集合も他の集合を含まないような族のうち最大のものは $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 個の集合からなることを主張する。**エルデシュ–コー–ラドー**（*Erdős–Ko–Rado*）**の定理**（1961 年）は、どの二つも重なり合うように $k$ 元集合を最大でいくつ選べるかを述べる。どちらも組合せ論（combinatorics）の最初の講義で標準的に扱われるものであり、部分集合を硬貨投げとして見る視点は、それらの最も鮮やかな証明のいくつかを与える。

#### ブールの代数

ジョージ・ブール（George Boole）の *The Laws of Thought*（『思考の法則』、1854 年）は、論理的な命題を集合として扱い、「かつ」「または」「でない」を共通部分、和集合、補集合として扱った。集合を「はい／いいえ」の答えの列として符号化することは、まさにコンピュータが集合を表現する方法である。$\{1, \ldots, 64\}$ の部分集合は一つの 64 ビットの数であり、共通部分は「ビットごとの AND」命令である。この問題の方法、すなわち要素（ビット）を一つずつ考えることは、こうした演算を解析する方法そのものである。

## 思考のスキル

### 要素を一つずつ考える

対象が各要素についての独立な選択から構成されているとき、各要素に個別に課される条件の確率は積で表される。

この方法により、$2^n$ 個の部分集合についての問いが、4 通りや 8 通りのパターンについての問いに変わった。大学では、組合せ論（集合や多重集合（multiset）の母関数（generating function））、確率論（独立な座標）、計算機科学（ビットごとの推論）の中で再び現れる。

## 次の一歩

1 **被覆。** $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 = S)$ および $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = S)$ を求めよ。

2 **同じ大きさ。** $\mathrm{P}(|A_1| = |A_2|) = \binom{2n}{n}/4^n$ を示せ。（**ヒント：** $|A_1| = |A_2|$ となるのは $|A_1| + |S \setminus A_2| = n$ のときであり、またそのときに限る。）さらに、$n$ が大きいとき、これがおよそ $1/\sqrt{\pi n}$ であることを示せ。

3 **三つへの分割。** $S$ の互いに素な部分集合の順序対 $(A, B)$ の個数が $3^n$ であることを示し、互いに素な部分集合の順序を考えない組 $\{A, B\}$ の個数を求めよ。

4 **小さい $n$ に対するシュペルナーの定理。** $n = 3$ および $n = 4$ のそれぞれについて、どの集合も他の集合を含まないような $\{1, \ldots, n\}$ の部分集合の族のうち最大のものを求めよ。

## さらに学ぶために

- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics***（World Scientific）。部分集合と半順序集合に関する章。
- **Béla Bollobás, *Combinatorics: Set Systems, Hypergraphs, Families of Vectors and Combinatorial Probability***（Cambridge University Press）。シュペルナーの定理から始まる、部分集合の族についての短く優美な本。
- **Peter Cameron, *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms***（Cambridge University Press）。二通りに数えることに重点を置いた入門書。

# 9.13 いかさまサイコロ

**問題**

**STEP I 1999、問 12**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/99-s1-q12`

## 導入

公正なさいころを二つ振ると、合計が 7 になる確率は合計が 2 になる確率の六倍である。ボードゲームの設計者は、そうでなければよいのにと思うことがある。さいころに細工をして（load、特定の目が出やすくなるように重りを入れて）、2 から 12 までのどの合計も同じ確率 $\frac{1}{11}$ で出るようにできないだろうか。十二個の確率は自由に選べるのだから、余地は十分にありそうに見える。

答えは「できない」であり、その証明は珠玉である。十一通りの合計のうち三つと、不等式 $x + \frac{1}{x} \geq 2$ しか使わないのである。これは何かが**不可能**であることを証明する方法の手本である。不可能性の証明は、何かが可能であることを示すよりも難しく、そしてより面白いことが多い。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $x > 0$ に対して $x + \frac{1}{x} \geq 2$ をどのように証明するか。等号が成り立つのはどのようなときか。

$x > 0$ を掛けると、不等式は $x^2 + 1 \geq 2x$、すなわち $(x-1)^2 \geq 0$ となり、これは正しい。等号は $x = 1$ のときに限り成り立つ。（別解として、$x + \frac{1}{x} - 2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ としてもよい。）これは最も単純な形の相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）である。すなわち、$x$ と $\frac{1}{x}$ の相加平均は、それらの相乗平均 1 以上である。

## 順を追って解く

### 段階 1  両端の合計

> **考えてみよう**  合計 2 を出す方法は何通りあるか。合計 12 はどうか。それらの確率を $q_i$ と $r_j$ を用いて表せ。

合計 2 には両方のさいころで 1 が、12 には両方で 6 が必要であるから、$\mathrm{P}(2) = q_1 r_1$、$\mathrm{P}(12) = q_6 r_6$ である。

背理法（proof by contradiction）のために、十一通りの合計がすべて等確率、すなわちそれぞれ確率 $\frac{1}{11}$ であると仮定する。このとき

$$q_1 r_1 = \frac{1}{11}, \qquad q_6 r_6 = \frac{1}{11}.$$

特に、$q_1$、$r_1$、$q_6$、$r_6$ の四つはすべて正である。

### 段階 2  真ん中の合計

> **考えてみよう**  合計 7 の作り方は六通りある。そのうち 1 と 6 の目だけを含むのはどの二つか。上の等式を用いて、それらの確率を表せ。

合計 7 には結果 $(1,6)$ と $(6,1)$ が含まれるから

$$\mathrm{P}(7) \geq q_1 r_6 + q_6 r_1.$$

ここでステージ 1 の等式を用いて比を導入する。$q_1 = \frac{1}{11 r_1}$、$q_6 = \frac{1}{11 r_6}$ であるから

$$q_1 r_6 + q_6 r_1 = \frac{1}{11}\left(\frac{r_6}{r_1} + \frac{r_1}{r_6}\right) \geq \frac{1}{11} \times 2 = \frac{2}{11},$$

となる。ここで $x = r_6 / r_1 > 0$ として $x + \frac{1}{x} \geq 2$ を用いた。よって $\mathrm{P}(7) \geq \frac{2}{11}$ となり、$\mathrm{P}(7) = \frac{1}{11}$ に矛盾する。したがって、合計がすべて等確率になることはありえない。$\blacksquare$

> **手を止めて、やってみよう**  何が証明をうまく機能させたかを見てみよう。2 と 12 を 7 と同じくらい出やすくすると、1 と 6 の目がかなり出やすくなければならない。すると「混ざった」結果 $(1,6)$ と $(6,1)$ だけで、7 が出やすくなりすぎてしまうのである。図 9.13.1 に関係するマスを示す。




**図 9.13.1**　二つのさいころの 36 通りの結果。各マスには合計を記してある。証明では四隅のマスだけを用いる。琥珀色の二つの確率の積は濃い青緑色の二つの確率の積に等しく、$q_1r_1q_6r_6 = q_1r_6 \cdot q_6r_1$ であり、相加平均・相乗平均の不等式により、青緑色の組の和は琥珀色の組の相乗平均の二倍以上である。

### 段階 3　一つのさいころを二回振る

> **考えてみよう**　一つのさいころを二回振るとき、二つの目が一致する確率を $q_j$ を用いて表せ。公正なさいころではいくらか。

二回の目が一致する確率は $q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_6^2$ である。公正なさいころではこれは $6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$ であり、すでに $\frac{1}{36}$ よりずっと大きい。

> **考えてみよう**　細工によって $\sum q_j^2$ を $\frac{1}{6}$ より小さくできるか。$\sum q_j = 1$ であることはわかっている。

$q_j = \frac{1}{6} + e_j$ とおく。ここで偏差 $e_j$ の和は 0 である。すると

$$\sum q_j^2 = \sum\left(\frac{1}{36} + \frac{e_j}{3} + e_j^2\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\sum e_j + \sum e_j^2 = \frac{1}{6} + \sum e_j^2 \geq \frac{1}{6}.$$

よって同じ目が続く確率はつねに $\frac{1}{6}$ 以上であり、等号は公正なさいころの場合に限り成り立つ。まして $\frac{1}{36}$ 未満になることはありえない。 ■

## 振り返り

- **背理法。**すべての合計が等確率であると仮定し、不可能なことを導いた。
- **必要なものだけを使う。**十一個の等式のうち、三つで十分であった。正しい等式を選ぶことが鍵となる一歩であった。
- **不等式は不可能性を証明する。**小問 (i) では相加平均・相乗平均の不等式が、小問

(ii) では「平方和は負でない」ことが、可能性の族全体を一挙に排除した。

## 背後にある数学

### 多項式による証明

ここでは Section 9.6 の母関数（generating function）を用いた、まったく別の証明を紹介する。$Q(x) = q_1 x + \cdots + q_6 x^6$、$R(x) = r_1 x + \cdots + r_6 x^6$ とおく。すべての合計の確率が $\frac{1}{11}$ であるとすると

$$Q(x)R(x) = \frac{x^2 + x^3 + \cdots + x^{12}}{11} = \frac{x^2}{11}\bigl(1 + x + \cdots + x^{10}\bigr).$$

ここで $Q(x)/x$ は実数係数の 5 次多項式であり、奇数次の実数係数多項式はすべて実数解をもつ（グラフが $-\infty$ から $+\infty$ へ、あるいはその逆へ向かうからである）。よって左辺は 0 でない実数解をもつ。ところが $1 + x + \cdots + x^{10} = \frac{x^{11}-1}{x-1}$ であり、その解は 1 以外の 11 乗の単位根（roots of unity）で、そのどれも実数ではない。これは矛盾である。同じ議論により、$n - 1$ が奇数のとき、すなわち $n$ が偶数のとき、二つの $n$ 面さいころにどのような細工をしても合計を等確率にはできないことがわかる。（$n$ が奇数のときは多項式による議論にはさらに工夫が必要であるが、上の相加平均・相乗平均の不等式による証明はすべての $n \geq 2$ で通用する。）

### 衝突確率

小問 (ii) の量 $\sum q_j^2$、すなわち独立な二回の抽出が一致する確率は、分布の**衝突確率**（collision probability）とよばれる。小問 (ii) は、これが一様分布のとき最小になることを示している。衝突確率は分布がどれほど集中しているかを測る量である。生態学では、$q_j$ をある生息地における種 $j$ の割合として、$\sum q_j^2$ はシンプソンの多様度指数（Simpson's index）である。経済学では市場集中度を表すハーフィンダール指数（Herfindahl index）であり、暗号理論ではパスワードの分布がどれほど推測されやすいかを測る。さらにこれは Section 9.9 の最後で述べたこと、すなわち誕生日の確率が不均等であれば誕生日が一致する確率は大きくなるしかない、ということを説明している。

#### 不可能性の証明

数学で最も有名な結果のいくつかは、何かができないことを主張するものである。2 乗して 2 になる分数は存在しない。定規とコンパスによる作図で任意の角を三等分することはできない。冪根を用いた公式ですべての五次方程式を解くことはできない。あらゆる数学的命題の真偽を判定するアルゴリズムは存在しない。これらはどれ

もその分野を変えた。なぜなら、どの方法もうまくいかないことを証明するには、方法の全体を理解しなければならないからである。細工したさいころの問題はその縮図である。あらゆる細工を排除するために、どの細工も従わねばならない不変な性質（相加平均・相乗平均の不等式）が必要であった。

## 思考のスキル

**背理法と不等式で不可能性を証明する**

どのようなパラメータの選び方もうまくいかないことを示すには、うまくいく選び方があると仮定し、互いに衝突する少数の条件を選び出し、不等式を用いてそれらが同時には成り立たないことを示す。

大学では、背理法と不等式の組合せは、対象が存在しないことを証明する標準的な方法である。解析学でも、組合せ論でも、最適化でもそうであり、最適化では相加平均・相乗平均の不等式やコーシー＝シュワルツ（Cauchy–Schwarz）の不等式のような不等式が、達成できることの限界を定める。

## 次の一歩

1 **コーシー＝シュワルツの不等式。** コーシー＝シュワルツの不等式 $\left(\sum a_j b_j\right)^2 \le \sum a_j^2 \sum b_j^2$ を $a_j = q_j$、$b_j = 1$ として用い、小問 (ii) の一行の証明を与えよ。

2 **異なる二つのさいころ。** 異なる二つの細工したさいころをそれぞれ一回ずつ振るとき、同じ目が出る確率は $\frac{1}{6}$ より小さくなりうるか。0 になりうるか。

3 **別の目をもつさいころでの一様な合計。** 目の数の付け方が異なれば、二つのさいころで合計を等確率にできることを示せ。一方のさいころの目を $0, 1, 2, 3, 4, 5$、もう一方を $0, 6, 12, 18, 24, 30$ としてみよ。どのような合計が現れるか。これが問題と矛盾しないのはなぜか。

4 **三つのさいころ。** 目が 1 から 6 である三つの細工した六面さいころで、3 から 18 までのすべての合計を等確率にできるか。（**ヒント**：合計 3、8、13、18 と、六つの数に対する相加平均・相乗平均の不等式を用いよ。今回、多項式による証明がうまくいかないのはなぜか。）

## さらに学ぶために

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***（Cambridge University Press）。相加平均・相乗平均の不等式から始まる、不等式への美しい入門書。
- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***（Oxford University Press）。母関数と、上のような証明におけるその使い方。
- **Ian Stewart, *Galois Theory***（CRC Press）、冒頭の数章。五次方程式に関する、あらゆる不可能性の証明の中で最も有名なもの。

# 学んだこと

本章の冒頭で、数えることは最も古い数学であり、それを巧みに行うことは今なお最も難しいことの一つである、と述べた。そして 3 つの問いを立てた。列挙せずにどう数えるか、何かが必ず起こるのはどのようなときか、数え上げと確率はどのように助け合うのか。本章の 13 問が示したことを以下にまとめる。

### 1. 列挙せずに数えるには？

本章では一揃いの道具を積み上げてきた。

- **漸化式（recurrence）。**平面に直線を 1 本加える（Section 9.1）、あるいは柵に支柱を 1 本加える（Section 9.3）と、個数は単純な形で変化し、解くことのできる漸化式が得られた。少しだけ余分な情報、すなわち最後の支柱の色を記録しておくことで、漸化式が閉じた形になった。
- **母関数（generating function）。**数列をべき級数（power series）としてまとめると、漸化式は代数の問題に変わり（Section 9.4）、$1/89 = 0.01123\ldots$ となる理由が説明でき、組合せの数え上げは多項式の掛け算になった。Section 9.5 の硬貨、Section 9.6 のさいころ、そして Section 9.7 の釣り合ったべき乗和がその例であり、最後の例では $x = 1$ における重根がすべての役割を果たした。
- **全単射（bijection）。**Section 9.10 の鏡像原理（reflection principle）は、条件を満たさない列を制約のない経路と対応させることで数え上げた。また、ランダムな集合の補集合（complement）をとることで、部分集合が互いに素な対に変わった（Section 9.12）。
- **包除原理（inclusion–exclusion）。**多く数えすぎてから補正することで、攪乱順列（derangement）の個数が求まった（Section 9.8）。
- **二重数え上げ（double counting）。**オイラー（Euler）の公式による領域の数え上げ（Section 9.1）や、大きさごとに分けた部分集合の対の数え上げ（Section 9.12）は、異なる道筋から同じ答えを与え、その途中で恒等式を証明した。

### 2. 何かが必ず起こるのはどのようなときか？

いくつかの節で、大きさだけで構造が強制されることを見た。6 人の中には、互いに友人である 3 人か、互いに見知らぬ 3 人が必ずいる（Section 9.2）。これは鳩の巣原理（pigeonhole principle）による。ただし 5 人では足りない。23 人いれば、誕生日が一致する人がいる確率は半分を超える（Section 9.9）。ペアの数が人数の 2 乗のように増えるからである。大きな集合のランダムな部分集合どうしは、ほぼ確実に共通部分をもつ（Section 9.12）。そして、どう工夫しても**起こりえない**こともある。2 個のさいころにどのような偏りをつけても、すべての和を等確率にすることはできない（Section 9.13）。また、Sicherman のもの以外に、通常の和の分布を再現するさいころの目の付け方は存在しない（Section 9.6）。

### 3. 数え上げと確率はどのように助け合うのか？

本章の後半では、確率は数え上げによって求められた。攪乱順列は包除原理で、誕生日問題（birthday problem）は積で、投票問題（ballot problem）は鏡像によって求めた。しかし、逆向きの流れもあった。期待値の線形性（linearity of expectation）は、クーポン収集問題（coupon collector）の $nH_n$（Section 9.11）や、シャッフルにおける一致の個数の期待値を、数え上げをまったくせずに与えた。ランダムな部分集合を $n$ 回の硬貨投げとみなすと（Section 9.12）、$3^n$ や $(m+1)^n$ のような個数が 1 行の計算で求まった。そして Section 9.2 のエルデシュ（Erdős）の確率的方法（probabilistic method）は、ランダムな彩色が正の確率でうまくいくことを示すことによって、よい彩色が存在することを証明した。2 つの定数がどこからともなく現れた。攪乱順列となる確率の極限に現れる $e$ と、コレクションを完成させるコストに現れるオイラーの $\gamma$ である。

### 4. 数え上げの道具箱

| 手法 | 使った場所 |
|---|---|
| 1つ加えると何が変わるか | 直線（9.1）、柵の支柱（9.3） |
| 鳩の巣原理 | ラムゼー（Ramsey、9.2） |
| 連立漸化式（coupled recurrences） | 柵の支柱（9.3） |
| 母関数 | 9.4, 9.5, 9.6, 9.7, 9.13 |
| 両極端からの場合分け | 奇妙なさいころ（9.6）、偏りのあるさいころ（9.13） |
| 包除原理 | 攪乱順列（9.8） |
| 補集合と指数関数による近似 | 誕生日（9.9） |
| 鏡像原理 | 投票問題（9.10） |
| 期待値の線形性 | クーポン（9.11）、一致（9.8） |
| 1要素ずつ考える | ランダムな部分集合（9.12） |
| 相加相乗平均の不等式（AM–GM）による背理法 | 偏りのあるさいころ（9.13） |

### この先へ

- 攪乱順列のポアソン（Poisson）極限は Section 12.11 で再び登場し、確率変数の母関数は Section 12.15 で家系図の研究の原動力となる。
- 連立漸化式は Section 12.16 でマルコフ連鎖（Markov chain）になる。
- クーポン収集問題に現れるガンベル分布（Gumbel distribution）は、Section 12.25 で多数の確率的な量のうち最大のものを記述する。

#### 大学入学前にさらに先へ進みたい人へ

- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics***：本章のほぼすべての考え方を扱う、親しみやすい入門書。
- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology***：母関数についての古典。オンラインで無料で読める。
- **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics***：和、漸化式、母関数を、ウィットに富んだ語り口と豊富な演習問題で扱う。
- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***：大学1年次の確率論のうち、数え上げの側面を扱う。

ホワイトヘッド（Whitehead）は組合せ論（combinatorics）を「位相幾何学のスラム街」と呼んだ。本章では、今ではなぜ誰もそうは言わないのかを示そうとしてきた。

巧みな数え上げの背後には、必ずそれをはるかに超えて広がる考え方があった。母関数、全単射、漸化式、不等式である。こうした考え方が数え上げを代数学、解析学、確率論と結びつける。新たな小技を一つ探すのではなく、こうした考え方を探すことを身につけることこそが、数え上げを数学へと変えるのである。

# 「次の一歩」の解答

ここに示すのは完全な解答ではなく、簡潔な答えとヒントである。結果と鍵となる一歩を示すので、自分の解答を確かめるのに使ってほしい。答えを見る前に、それぞれの問題にしっかり取り組むこと。

## 9.1 平面を分割する直線

1. 円が 1 つなら領域（region）は 2 個である。$n$ 番目の円は他の円と $2(n-1)$ 個の点で交わり、これらの点によって $2(n-1)$ 本の弧に分けられる。各弧は 1 つの領域を 2 つに分ける。よって $R_n = R_{n-1} + 2(n-1)$ であり、$n^2 - n + 2$ を得る。

2. 各直線は、その上にある交点の個数に 1 を加えた数だけ領域を増やす。よって総数は $1 + n +$ (交点の個数) である。$k$ 本の平行線によって交点が $\binom{k}{2}$ 個失われるので、答えは $1 + n + \binom{n}{2} - \binom{k}{2}$ である。

3. $n$ 番目の平面は、他の平面によって一般の位置（general position）にある $n-1$ 本の直線で切られ、$\frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$ 個の部分に分けられる。各部分は空間の領域を 1 つずつ 2 つに分ける。これらを $\frac{1}{6}\big((n-1)^3 + 5(n-1) + 6\big)$ に加えると $\frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6)$ を得る。

4. $n = 6$ のとき、領域は 32 個ではなく 31 個である。円の内部で、このグラフの頂点（vertex）の個数は $V = n + \binom{n}{4}$（各交点は 4 点から生じる）、辺（edge）の本数は $E = n + \binom{n}{2} + 2\binom{n}{4}$（円の弧と弦があり、各交点が断片を 2 つずつ増やす）である。オイラー（Euler）の公式 $V - E + F = 2$ は外側も数えるので、領域の個数は $F - 1 = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$ である。

## 9.2 ミニチュア版ラムゼーの定理

1. 2 色の角（bichromatic angle）は高々 $6 \times 6 = 36$ 個である。単色（one-colour）でない三角形はそのような角をちょうど 2 つ含むので、そのような三角形は高々 18 個である。$\binom{6}{3} = 20$ なので、少なくとも 2 個の三角形は単色である。

2. 1 点からは 16 本の辺が出るので、少なくとも 6 本は同じ色である。その色を赤とし、これらの辺が点 $P_1, \ldots, P_6$ へ向かうとする。$P_i$ どうしを結ぶ辺に赤いものがあれば、赤い三角形ができる。なければ、$P_i$ は 2 色に塗られた $K_6$ をなし、そこには単色の三角形がある。

3. 点 $v$ からは 9 本の辺が出るので、金の辺が少なくとも 4 本あるか、銀の辺が少なくとも 6 本ある。金の辺で結ばれた隣接点が 4 個ある場合：それらの間に金の辺があれば $v$ と合わせて金の三角形ができ、なければそれらは銀の $K_4$ をなす。銀の辺で結ばれた隣接点が 6 個ある場合：それらの中に単色の三角形がある。それが金ならそれで終わりであり、銀なら $v$ と合わせて銀の $K_4$ をなす。

4. 各項に $(i, d)$ というラベルをつける。これは、その項で終わる最長の増加部分列（increasing subsequence）と最長の減少部分列の長さである。2 つの項について、後の項のほうが $i$ か $d$ が大きいので、ラベルはすべて異なる。長さ 3 の部分列が存在しなければ、5 個の項に対してラベルは 4 通りしかない。どちらも存在しない例：$2, 1, 4, 3$。

## 9.3 柵の杭を塗り分ける

1. 以前と同様に $r_{n+1} = s_n$ であり（杭（post）$n$ が赤でなければ杭 $n+1$ を赤にできる）、最初の杭以外の各杭には $k-1$ 通りの選び方があるので $r_n + s_n = (k-1)^{n-1}$ である。よって $r_{n+1} + r_n = (k-1)^{n-1}$ であり、$r_n = \frac{(k-1)^{n-1} + (k-1)(-1)^{n-1}}{k}$ となる。円の場合：杭 1 の色の選び方が $k$ 通りあり、その後は同じ色で終わる $n+1$ 本の杭の列を考えればよいので、$kr_{n+1} = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$ を得る。

2. $2, 3, 5, 8, \ldots$：$a_n$ 通りとすると、白で終わる列は長さ $n-1$ の任意の列を延長したものであり、赤で終わる列は白で終わる長さ $n-2$ の列を延長したものなので、$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ である。答えは $F_{n+2}$ である。

3. 中心の色の選び方が 4 通りあり、その後に $n$ 頂点の閉路（cycle）を 3 色で塗り分けるので、$4\left(2^n + 2(-1)^n\right)$ である。

4. $n = 4$ のとき：塗り方は 18 通りである。4 分の 1 回転で固定されるものはなく、半回転では向かい合う杭が同じ色である 6 通りが固定されるので、首飾り（necklace）は $\frac{1}{4}(18 + 0 + 6 + 0) = 6$ 個である。$n = 5$ のとき：塗り方は 30 通りで、どの回転もどの塗り方も固定しないので 6 個である。

## 9.4 関数としての数列

1. 残りの部分の和は高々 $F_7 \sum_{r \geq 7} 2^{r-7} 10^{-r} = \frac{13 \times 10^{-7}}{0.8} < 2 \times 10^{-6}$ である。$\sum F_r 10^{-r} = \frac{10}{89}$ であり、最初の 6 項の和は 0.112358 なので、$\frac{10}{89}$ は 0.112358 と 0.112360 の間にある。よって $\frac{1}{89} = 0.011235\ldots$ である。2 桁ずつの区切りを使うと $\sum F_r 100^{-r-1} = \frac{1}{9899}$ となる。

2. 漸化式（recurrence relation）の和をとると $\mathrm{f}(x)(1 - 7x + 10x^2) = 2 - 7x$ となり、$\frac{2-7x}{(1-2x)(1-5x)}$ は問題に述べられた通りに分解される。$b_n$ について：$10p + 5q = 40$

と $40p+10q=100$ から $p=1, q=6$ を得る。$t^2=t+6$ の根は 3 と $-2$ であり、$b_n = 4\cdot 3^n + (-2)^n$ である。

3. $\sum nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ であり、$x=\frac{1}{100}$ のときこれは $\frac{100}{9801}$ となるので、$\frac{1}{9801} = \sum n\cdot 100^{-n-1}$ である。このパターンは区切り 98 のところで崩れる：100 の区切りが 99 に 1 を繰り上げ、それがさらに 98 に繰り上がるので、展開は ...96 97 99 00 01... となる。

4. $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots$ を掛けると、$x^n$ の係数は $u_0+\cdots+u_n$ となる。平方数の母関数（generating function）は $\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ なので、部分和（partial sum）の母関数は $\frac{x+x^2}{(1-x)^4}$ であり、$x^n$ の係数は $\binom{n+2}{3}+\binom{n+1}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ である。

## 9.5 両替の仕方

1. $x^{24}$ の係数は $6a+6b+3c=24$ の解の個数である：$s=a+b$ が 0 から 4 のそれぞれの値について $s+1$ 通りの選び方があるので、15 となる。一般に、$x^n$ の係数は $n=3m$ でなければ 0 であり、$n=3m$ のときは $k=\lfloor m/2\rfloor$ として $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ である。余分な因数があると、係数は部分和になる：$x^{24}, x^{25}, x^{66}$ に対してそれぞれ 55, 55, 650 である。これらは、1p 硬貨、3p 硬貨、および 2 種類の異なる 6p 硬貨を使って支払う方法の数を数えている。

2. 各部分（part）$k$ は 1 回使うか、まったく使わないかである。この積は次々に打ち消し合う：$\prod \frac{1-x^{2k}}{1-x^k}$ では偶数の指数をもつ因数がすべて分母から約分され、$\prod \frac{1}{1-x^{\text{奇数}}}$ が残る。これは奇数の部分への分割（partition）の母関数である。$n=6$ の場合：$6, 5+1, 4+2, 3+2+1$ と、$5+1, 3+3, 3+1+1+1, 1+1+1+1+1+1$ であり、それぞれ 4 つずつある。

3. $n=0,1,2,\ldots$ に対する値は $1,1,2,2,3,4,5,6,7,8,10,\ldots$ であり、$\frac{(n+4)^2}{20}$ とこれらの差は常に $\frac{1}{2}$ 以内である（$n=60$ まで確認済み。証明には $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$ の部分分数分解（partial fractions）を用いる）。

4. 最後の硬貨は 1p か 2p なので $c_n = c_{n-1}+c_{n-2}$ である：これはフィボナッチ（Fibonacci）数であり、$c_n = F_{n+1}$ となる。

## 9.6 奇妙なサイコロ

1. 各さいころは、因数 $1+x, 1+x, 1+x^2, 1+x^2$ のうちいくつかの積で $x=1$ における値が 4 となるものに $x$ を掛けたものなので、因数を 2 つとる。標準的な組を除くと、唯一の選択肢は $x(1+x)^2$ と $x(1+x^2)^2$ であり、目は 1,2,2,3 と 1,3,3,5 である。

2. 積は $2x^3+x^4+x^5+4x^6+3x^7+8x^8+6x^9+5x^{10}+6x^{11}$ であり、表と一致する。

3. 可能である：シッカーマン（Sicherman）の組 $1,2,2,3,3,4$ と $1,3,4,5,6,8$ に、標準的なさいころを 1 つ合わせればよい。

4. $(x+x^2)(x+\cdots+x^8) = x^2(1+x)^2(1+x^2)(1+x^4)$ である。硬貨には値が 2 となる因数が必要である：標準的な選び方 $x(1+x)$ のほかに、$x(1+x^2)$（目は $1,3$ で、八面体は $1,2,2,3,5,6,6,7$）または $x(1+x^4)$（目は $1,5$ で、八面体は $1,2,2,3,3,4,4,5$）とすることができる。

## 9.7 等しい累乗和

1. $\sum(c+b_k)^3 - \sum(c+a_k)^3 = 3c^2\left(\sum b_k - \sum a_k\right) + 3c\left(\sum b_k^2 - \sum a_k^2\right) + \sum b_k^3 - \sum a_k^3$ であり、最初の 2 つの括弧は 0 になる。$\{1,4,6,7\}, \{2,3,5,8\}$ から始めて $c=8$ とすると、$\{1,4,6,7,10,11,13,16\}$ と $\{2,3,5,8,9,12,14,15\}$ を得る。

2. $A$ と $B\cup\{0\}$ はどちらも要素の個数が 6、和が 33、平方和が 253 である。したがって $\sum_{a\in A}(n+a)^2 = \sum_{b\in B\cup\{0\}}(n+b)^2$ となり、これが $\{n^2,\ldots,(n+11)^2\}$ を 2 つに分ける。

3. $(x+c)^r$ を二項定理（binomial theorem）で展開すると、$r$ 次以下のべきだけが現れ、それらの和は一致する。問題の集合は、2 番目の集合に 0 を加えると $\{0,\ldots,15\}$ となり、平行移動すれば任意の連続する 16 個の整数が得られる。

4. $ABABABAB$ では、$A$ は約 1.676、$B$ は約 1.042 を得る。$ABBABAAB$ では、$A$ は約 1.560、$B$ は約 1.158 を得る：まだ等しくはないが、かなり近い。

## 9.8 誰も自分のシャツを受け取らない

1. $\mathrm{E}(C_1) = \frac{1}{m}, \mathrm{Var}(C_1) = \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2}$ であり、$\mathrm{Cov}(C_1,C_2) = \frac{1}{m(m-1)} - \frac{1}{m^2} = \frac{1}{m^2(m-1)}$ である。すると $\mathrm{E}(N)=1$ であり、$\mathrm{Var}(N) = m\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m^2}\right) + m(m-1)\frac{1}{m^2(m-1)} = 1$ となる。$m=4$ のとき $\mathrm{P}(N=0) = \frac{9}{24} = 0.375$ であり、これは $\mathrm{e}^{-1} \approx 0.368$ に近い。

2. カード 1 はある位置 $i$ に行く（$n-1$ 通り）。カード $i$ が位置 1 に行くなら、残りは $n-2$ 枚の完全順列（derangement）である。そうでなければ、位置 1 をカード $i$ の禁止された場所とみなすと、$n-1$ 枚の完全順列が得られる。確認：$D_3 = 2(1+0) = 2$, $D_4 = 3(2+1) = 9$。

3. 固定される $k$ 枚のカードを選び、残りを完全順列にする：$\binom{n}{k}\frac{D_{n-k}}{n!} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{D_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{d_{n-k}}{k!}$ であり、これは $\frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$ に近づく。

4. $30-(15+10+6)+(5+3+2)-1 = 8$ であり、これは $30\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$ に等しい：包除原理（inclusion–exclusion）の和が因数分解されるのである（これはオイラーの $\varphi(30)$ である）。

### 9.9 誕生日問題

1. $\mathrm{P}(X=r)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-2}{n}\right)\frac{r-1}{n}$ であり、これらの和は 1 である。期待値（expectation）については、$\mathrm{P}(Y=r)$ は $\mathrm{P}(Y\geq 1),\ldots,\mathrm{P}(Y\geq r)$ のそれぞれで 1 回ずつ数えられる。$Q_k=\mathrm{P}(X>k)=\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)$ とおく。すると $\mathrm{E}(X)=\sum(k+1)\frac{k}{n}Q_k$ であり、また $\mathrm{E}(X)=1+\sum Q_k$ でもある。$\sum\frac{k}{n}Q_k=1$ を用いて引き算すると、$\sum Q_k\left(1-\frac{k^2}{n}\right)=0$ を得る。

2. $\binom{k}{3}\approx 365^2\ln 2$ から $k\approx 82$ を得る。この近似は 3 つ組どうしの従属性を無視しており、正しい答えは 88 である。

3. 14 人である。（各ペアが「近い」確率は $\frac{3}{365}$ であり、$\binom{k}{2}\frac{3}{365}\approx\ln 2$ から $k\approx 14$ を得る。正確に数えると、確率は 14 人で約 0.537、13 人で約 0.483 である。）

4. 2 人が日 $i$ を共有する確率は $p_i^2$ であり、これらを足し合わせる。コーシー・シュワルツ（Cauchy–Schwarz）の不等式より $1=\left(\sum p_i\right)^2\leq 365\sum p_i^2$ であり、等号はすべての $p_i$ が等しいときに限り成り立つ。

### 9.10 いつでもおつりを渡せる

1. 最初の人は £1 硬貨を持っていなければならない。続く数人について条件づけると多くの場合に分かれ（各 £2 の客の後で手元にどの硬貨があるか）、それぞれが小問 (i) と小問 (ii) の答えで終わる。それらをまとめると $\frac{m-2}{m+1}$ を得る。鏡像原理（reflection principle）を使えば 1 行で済む。

2. 最初の票は $A$ への票でなければならない。$A$ で始まる開票のうち悪いもの（同数になるもの）は、最初に同数になるまでの部分を反転することで、$B$ で始まる開票と対応する。よって良い開票の数は $\binom{a+b-1}{a-1}-\binom{a+b-1}{a}$ であり、これを $\binom{a+b}{a}$ で割ると $\frac{a-b}{a+b}$ を得る。

3. $((()))$, $(()())$, $(())()$, $()(())$, $()()()$。全単射（bijection）：最初の括弧の組は、列をその内側の部分とその後ろの部分に分ける。これに対応して、固定された辺の上にある三角形は、多角形を 2 つの小さな多角形に分ける。両方について再帰的に繰り返せばよい。

4. £5 の客はおつりとして £1 硬貨を 4 枚必要とするので、経路は 1 上がるか 4 下がる。経路は障壁に触れずに飛び越えることができるので、鏡像によって悪い経路を単純な集合と対応させることはもはやできない。

### 9.11 全種類を集める

1. 待ち時間の期待値は $\frac{n}{n}+\frac{n}{n-1}+\cdots+\frac{n}{n/2+1}=n(H_n-H_{n/2})\approx n(\ln n-\ln\frac{n}{2})=n\ln 2$ である。

2. 各カードが欠けている確率は $(1-\frac{1}{n})^k$ であり、これを $n$ 枚のカードについて足し合わせる。95% にするには $(1-\frac{1}{n})^k \approx \mathrm{e}^{-k/n} = 0.05$ とすればよいので、$k \approx n\ln 20 \approx 3n$ である。

3. $t$ 袋を開けた後、あるカードが見られた回数が 2 回未満である確率は約 $\mathrm{e}^{-t/n}(1+\frac{t}{n})$ である。2 人の子どもがともに集め終わるのは、おおよそそのようなカードの個数の期待値 $n\mathrm{e}^{-t/n}(1+\frac{t}{n})$ が約 1 まで下がるときであり、これから $\frac{t}{n} \approx \ln n + \ln\ln n$ を得る。これは $2\ln n$ よりはるかに小さい。

4. $\frac{1}{n+1} < \ln\frac{n+1}{n}$（$[n, n+1]$ 上の $\frac{1}{x}$ のグラフの下の面積）なので、$H_n - \ln n$ は減少する。凸性（convexity）より台形は面積を過大評価するので $\ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$ であり、したがって $H_n - \ln n - \frac{1}{2n}$ は増加する。$n=1$ とすると $\gamma > \frac{1}{2}$、$n=4$ とすると $\gamma < H_4 - \ln 4 \approx 0.697$ である。

## 9.12 ランダムな部分集合

1. 各要素は少なくとも 1 つの集合に含まれなければならない：$\left(\frac{3}{4}\right)^n$ であり、一般には $\left(1-2^{-m}\right)^n$ である。

2. $|S \setminus A_2|$ は $|A_2|$ と同じ分布をもち、$A_1$ と独立であるので、求める確率は $|A_1| + |S \setminus A_2| = n$ となる確率に等しい。組 $(A_1, S \setminus A_2)$ は $2n$ 個の要素からなる集合のランダムな部分集合に対応し、その大きさが $n$ である確率は $\binom{2n}{n}/4^n$ である。スターリング（Stirling）の公式（またはウォリス（Wallis）の公式、Section 4.4）により、これは $\approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ となる。

3. 各要素は $A$ に入るか、$B$ に入るか、どちらにも入らないかのいずれかである：$3^n$。$A = B$ となる順序対は $(\varnothing, \varnothing)$ だけなので、順序を考えない組は $\frac{3^n-1}{2}+1 = \frac{3^n+1}{2}$ 個ある。

4. $n=3$ では 3 個の集合（すべての 1 元集合、またはすべての 2 元集合）。$n=4$ では 6 個の集合（すべての 2 元集合）。一般には $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ である（シュペルナー（Sperner）の定理）。

## 9.13 いかさまサイコロ

1. $1 = \left(\sum q_j\right)^2 \le 6\sum q_j^2$ なので、P(同じ目) $= \sum q_j^2 \ge \frac{1}{6} > \frac{1}{36}$ である。

2. どちらも可能である：確率は $\sum q_j r_j$ であり、たとえば一方のさいころが常に 1 を、他方が常に 2 を出すなら 0 になる。

3. 合計は $0, 1, \ldots, 35$ がそれぞれちょうど 1 回ずつ現れるので、一様である。問題では両方のさいころに 1 から 6 までの数が書かれていることを要求しているが、ここではそうなっていない。

4. 不可能である。$\mathrm{P}(3) = q_1r_1s_1$, $\mathrm{P}(18) = q_6r_6s_6$ とおくと、どちらも $\frac{1}{16}$ である。$\mathrm{P}(8)+\mathrm{P}(13)$ は 6 つの項 $q_1r_1s_6, \ldots, q_1r_6s_6$（1 が 2 つと 6 が 1 つ、または 6 が 2 つと 1 が 1 つ）を含み、それらの積は $(\mathrm{P}(3)\mathrm{P}(18))^3$ である。相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM）より $\mathrm{P}(8)+\mathrm{P}(13) \geq 6 \cdot \frac{1}{16} > \frac{2}{16}$ となる。与えられた多項式による証明がそのままではうまくいかないのは、$1+x+\cdots+x^{15}$ が実数の根 $-1$ を**もつ**からである。（これは修正できる：実係数の 5 次式が 3 つあれば実数の根が 3 つ必要だが、$-1$ は単根にすぎない。）

章

# 10

# 保存則・衝突・重力

決して変わらないものがある。それが何かを知ることが、物理学の半分である。

この章の内容


| | | |
|---|---|---|
| 10.1 | ニュートンのゆりかご | STEP II 1990 |
| 10.2 | 重ねたボールの効果 | STEP II 2010 |
| 10.3 | ロケットと大砲 | STEP III 2017 |
| 10.4 | 分子とピストン | STEP I 2002 |
| 10.5 | 有限時間に無限回の跳ね返り | STEP III 2002 |
| 10.6 | 二体が一体になる | STEP III 2004 |
| 10.7 | 球殻の内部の重力 | STEP III 1999 |
| 10.8 | 三角形をなす三つの星 | STEP I 1999 |
| A | 演習問題の答え | p. 753 |

# 変わらないもの

> 現在までに知られているあらゆる自然現象を支配する事実、あるいはお望みなら法則と呼んでもよいが、そういうものが一つある。この法則には、知られている限り例外がない。
>
> — リチャード・ファインマン（Richard Feynman）、エネルギー保存について、*The Feynman Lectures on Physics*（『ファインマン物理学』、1963）

学校で学ぶ力学は、たいてい力の問題である。図を描き、力を分解し、$F = ma$ を適用する。斜面上の物体ならそれでうまくいく。しかし、1000 分の 1 秒しか続かない衝突で、その間の力が巨大でしかも未知である場合や、進みながら質量が変わるロケット、互いに同時に引き合う三つの星の場合には、それではうまくいかない。これらすべてにおいて、前に進む道は、力について問うのをやめ、代わりに何が**変わり得ないか**を問うことである。

運動量（momentum）は、外力がはたらかない限り保存される。エネルギーは弾性衝突（elastic collision）で保存され、それ以外の衝突ではその損失を測ることができる。質量、角運動量（angular momentum）、重心（centre of mass）の運動も同様の規則に従う。これらの法則がすべてを教えてくれるわけではないが、常に成り立ち、細部まで解析するには複雑すぎる系にも適用でき、しかも計算を始める前に可能性の大部分を排除してくれることが多い。

### 保存則はなぜ重要か

保存則（conservation law）は、物理学で最も信頼できる道具である。ベータ崩壊（beta decay）と呼ばれる放射性の過程では、放出される粒子のエネルギーの合計が合わなかった。ヴォルフガング・パウリ（Wolfgang Pauli）はエネルギー保存則を捨てる代わりに、1930 年、失われたエネルギーを運ぶ目に見えない粒子の存在を予言し、26 年後にニュートリノ（neutrino）が検出された。技術者は、衝突防護柵やエアバッグ、ロケットを、運動量とエネルギーの収支によって設計する。天文学者は、重心の動きを観測することで星の質量を量り、惑星を発見する。そして 1918 年、エミー・ネーター（Emmy Noether）は、なぜこれらの法則が成り立つのかを説明した。各保存則は自然の対称性（symmetry）の影なのである。運動量が保存されるのは物理法則がどこでも同じだからであり、エネルギーが保存されるのは物理法則がいつでも同じだからである。

本章の第二のテーマは重力である。重力は、ニュートン（Newton）が天上と地上を統一するために用いた力であり、保存則の自然な相棒でもある。軌道、スイングバイ、収縮する雲は、いずれもエネルギーと運動量、そして球に関するある驚くべき事実一つによって理解される。

### 大学で出会うこと

大学 1 年の力学の講義はここから始まる。質点系、重心と換算質量（reduced mass）、さまざまな座標系（frame）から見た衝突、ロケットのような可変質量系（variable-mass system）、そして重力のもとでの物体の運動、すなわちケプラーの法則（Kepler's laws）、軌道、脱出速度（escape velocity）に出会うことになる。その後の講義では、力学をラグランジュ（Lagrange）とハミルトン（Hamilton）の言葉で定式化し直す。そこではネーターの定理（Noether's theorem）が厳密な命題となり、保存則はただ一つの関数の対称性から読み取れるようになる。さらにその先には、天体力学（celestial mechanics）と三体問題（three-body problem）、気体分子運動論（kinetic theory）と統計力学（statistical mechanics）（ここで Section 10.4 のピストンは気体の理論となる）、そしてアインシュタイン（Einstein）の重力理論が控えている。

### 本章を貫く問い

**三つの大きな問い**

1. **保存則だけで何が決まるか。**運動量とエネルギーが結果を決定するのはどのようなときで、可能性を排除するだけにとどまるのはどのようなときか。
2. **小さな段階はどのように積み重なるか。**衝突や発射といった単純な出来事が何度も、あるいは無限回繰り返されると、何が起こるか。
3. **多くの物体をどう手なずけるか。**どのような座標の選び方、どのような対称性によって、互いに作用し合う複数の物体の問題を解ける問題に変えられるか。

本章は衝突から始まる。ニュートンのゆりかご（Newton's cradle）に何ができて何ができないか（Section 10.1）、そして球の連なりがどのように速さを増幅するか（Section 10.2）を見る。続いて繰り返される過程を追う。トラックから発射される砲とロケット方程式（rocket equation）、ピストンに当たって加速していく分子、そして有限の時間に無限回跳ねるパックである。最後の三つの節では、引き合う、あるいは反発し合う物体を扱う。重心と換算質量、球殻の重力、そしてラグランジュの回転する星の三角形である。

### 本章で扱う考え方

| § | 話題 | 考え方 |
|---|---|---|
| 10.1 | ニュートンのゆりかご | 制約としての保存則 |
| 10.2 | 積み重ねた球 | 一つの衝突の反復、スイングバイ（slingshot） |
| 10.3 | ロケット | 可変質量、ロケット方程式 |
| 10.4 | 気体分子運動論 | 断熱不変量（adiabatic invariant） |
| 10.5 | 非弾性衝突（inelastic collision） | 有限時間内の無限回の跳ね返り |
| 10.6 | 二体問題（two-body problem） | 重心と換算質量 |
| 10.7 | ニュートン力学の重力 | 殻定理（shell theorem）、自由落下による収縮（free-fall collapse） |
| 10.8 | 三体問題 | ラグランジュの正三角形解（equilateral solution） |

### 本章の読み方

計算する前に、何が保存されるのか、そしてどの座標系においてかを書き出すこと。次に、別の場所から見れば問題がもっと簡単に見えないかを問うこと。重心から、動くピストンから、跳ねる球から見るのである。本章の問題の多くは、適切な座標系をとればほとんど自明になる。そして力学の仕事の大部分は、その座標系を見つけることにある。

# 10.1 ニュートンのゆりかご

**問題**

**STEP II 1990、問 14**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/90-s2-q14`

## 導入

ニュートンのゆりかご（Newton's cradle）の球を 1 個引いて放すと、反対側の端から球が 1 個飛び出す。2 個引けば 2 個飛び出す。なぜだろうか。なぜ 2 倍の速さで 1 個、あるいは 3 分の 2 の速さで 3 個、とはならないのか。どちらでも運動量はつじつまが合うはずである。

答えは、力学の二大保存則から始まる。運動量（momentum）とエネルギー（energy）を合わせると、どちらか一方だけの場合よりもはるかに強い制約となり、思いつく結果の大部分が排除される。この問題では保存則を制約として用いる。何が起こるかを計算するためではなく、何が起こりうるかを判定するためである。保存則を「起こりうるすべての結果が従わねばならない規則」とみなすこの考え方は、物理学全体を貫いている。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 質量 $m$ のビー玉が速さ $u$ で、静止している質量 $M$ のビー玉に衝突し、運動エネルギー（kinetic energy）が保存されるとする。衝突後の速度はいくらか。$M = m$ の場合はどうなるか。

衝突後の速度を $p, q$ とする。運動量保存より $mp + Mq = mu$、エネルギー保存より $mp^2 + Mq^2 = mu^2$ である。これらを $m(u - p) = Mq$ および $m(u - p)(u + p) = Mq^2$

と書き直して割ると、$u+p=q$ を得る。したがって

$$p=\frac{m-M}{m+M}\,u,\qquad q=\frac{2m}{m+M}\,u.$$

$M=m$ のとき、1 個目のビー玉は止まり、2 個目が速さ $u$ で動き出す。つまり 2 個は単に速度を交換するのである。等しい質量のビー玉が一列に運動を受け渡していくのはこのためである。

## 順を追って解く

### 段階 1　最後の 2 個だけが動く場合

**考えてみよう**　衝突後に $A_n$（速度 $p$）と $A_{n+1}$（速度 $q$）だけが動くと仮定する。保存則を書き下せ。$p$ の符号を制約するのはどのビー玉の運動か。

運動量保存とエネルギー保存より

$$mp+\lambda mq=mu,\qquad \tfrac12 mp^2+\tfrac12\lambda mq^2=\tfrac12 mu^2.$$

これは質量 $m$ のビー玉が質量 $\lambda m$ のビー玉に衝突するときの方程式と同じであるから、（$A_n$ が $A_{n+1}$ をすり抜けることを要する解 $p=u,q=0$ を除いて）

$$p=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\,u,\qquad q=\frac{2}{1+\lambda}\,u.$$

$\lambda<1$ ならば両者とも正で $p<q$ である。$A_n$ は $A_{n+1}$ を追いかけるがより遅いので両者は離れていき、すべてつじつまが合う。$\lambda>1$ ならば $p<0$ となり、$A_n$ は後ろ向きに動く。しかし $A_{n-1}$ がそのすぐ後ろに接して静止しており、$A_n$ はそれをすり抜けることはできない。よってこの運動は不可能である。 ■

### 段階 2　3 個のビー玉

**考えてみよう**　次に、$A_{n-1},A_n,A_{n+1}$ だけがそれぞれ速度 $a,b,c$ で動くと仮定する。どのビー玉が静止していて、どれがどれの後ろにあるかを考えると、$a,b,c$ はどのような不等式を満たさなければならないか。

ビー玉 $A_{n-2}$ は $A_{n-1}$ の後ろで静止している（$n\ge 3$ よりこれは存在する）ので、$a\ge 0$ である。また、どのビー玉も前のビー玉を追い越すことはできないので、$a\le b\le c$ である。まとめると $0\le a\le b\le c$ となる。保存則は

$$a+b+\lambda c=u,\qquad a^2+b^2+\lambda c^2=u^2.$$

**考えてみよう** 運動量の式を 2 乗して、エネルギーの式と比べよ。何が残るか。

2 乗すると $u^2 = a^2 + b^2 + \lambda^2 c^2 + 2ab + 2\lambda ac + 2\lambda bc$ である。ここからエネルギーの式を引くと

$$0 = \lambda(\lambda - 1)c^2 + 2ab + 2\lambda c(a + b).$$

$\lambda > 1$ かつ $a, b, c \geq 0$ であるから、右辺の各項はすべて非負であり、したがってすべての項が 0 である。特に $c = 0$ であり、すると $0 \leq a \leq b \leq c$ より $a = b = 0$ となる。しかしこのとき運動量の総和は $mu$ ではなく 0 となる。これは矛盾であり、この運動は不可能である。 ■

**手を止めて、やってみよう** この議論の構造に注目しよう。運動量の式を 2 乗すると $2ab$ のような交差項が現れるが、エネルギーの式にはそれがない。その差は、運動がどれだけ「広がっているか」を測っている。$\lambda > 1$ のとき、同じ議論によって、$A_k, \ldots, A_{n+1}$ だけが非負の速度で動くような**任意の**結果が排除される理由がわかるだろうか。

### 段階 3 動くことのできる 2 個のビー玉

**考えてみよう** 前向きに動くビー玉がすべて遠い端になければならず、それがうまくいかないのなら、あるビー玉が**後ろ向きに**動くのかもしれない。後ろ向きに動くことができるのはどのビー玉か。

後ろに何もないのは $A_0$ だけである。そこで、$A_0$ が速度 $p$（負でもよい）で、$A_{n+1}$ が速度 $q$ で動き、他はすべて静止していると仮定してみる。保存則はやはり質量 $m$ と $\lambda m$ の衝突のものと同じであるから

$$p = -\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\,u, \qquad q = \frac{2}{\lambda + 1}\,u.$$

$A_0$ は跳ね返り、$A_{n+1}$ は前へ動き、その間のビー玉は静止したままである。これはすべてつじつまが合う。あたかも $A_0$ が $A_{n+1}$ に直接衝突したかのようであり、その間に並ぶ等しいビー玉は完璧な伝令の役目を果たしている。 ■

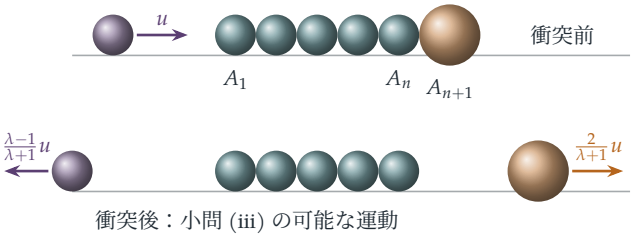



**図 10.1.1**　等しいビー玉（ティール）が並び、最後により重いビー玉（アンバー、$\lambda > 1$）がある。衝突後、$A_0$ は跳ね返り、重いビー玉は動き出し、その間のビー玉はすべて静止したままとなる。あたかも $A_0$ が $A_{n+1}$ に直接衝突したかのようである。

## 振り返り

- **制約としての保存則。**衝突を細かく追うことは一度もしなかった。運動量、エネルギー、そして幾何学的条件によって、どの結果が許されるかを問うたのである。
- **物理的な不等式が重要である。**「ビー玉は互いにすり抜けられない」ということから不等式 $0 \le a \le b \le c$ が得られ、小問 (i) と (ii) を排除したのは保存則ではなくこの不等式であった。
- **2 乗して引く。**運動量の 2 乗とエネルギーを比べると、0 にならなければならない交差項の和が得られる。

## 背後にある数学

### なぜ球が 1 個だけ飛び出すのか

等しい球からなるニュートンのゆりかごで、$k$ 個の球がそろって速さ $w$ で飛び出すとする。運動量保存より $kw = u$、エネルギー保存より $kw^2 = u^2$ である。割り算をすると $w = u$ かつ $k = 1$ となる。したがって、飛び出す球がそろって動く結果のうち、両方の法則を満たすのは「1 個の球が元の速さで飛び出す」ものだけである。半分の速さの 2 個の球は運動量は正しいがエネルギーは半分しかない。2 倍の速さの 1 個の球が正しい運動量をもつのは、それが球の半分である場合に限られる。

しかし、これで決着がつくわけではない。$n$ 個の球があれば未知の速度は $n$ 個あるのに保存則は 2 つしかないので、両方を満たす結果は無数にある（3 個の球が異なる速さで動くものを 1 つ見つけてみよ）。実際にどれが起こるかは、接触中に球がどのように変形するかによる。1980 年代初頭、Frank Herrmann とその共同研究者たちは、おなじみの振る舞いは衝撃が列に沿って広がることなく伝わることに依存しており、そ

れはわずかな隙間を空けて並べた硬い鋼球で起こることを示した。柔らかい球や、互いにきつく押しつけられた球では、ゆりかごの振る舞いはそれほどきれいではなくなり、精密な測定によれば、他の球も常にわずかに動いている。

### 保存則と対称性

保存則はどこから来るのだろうか。1918 年、エミー・ネーター（Emmy Noether）は、現代物理学の基礎の 1 つとなる定理を証明した。物理系の連続的な対称性（symmetry）のそれぞれから、保存量が 1 つ得られるというものである。物理法則がここでも 1 メートル左でも同じであれば（空間並進に関する対称性）、運動量が保存される。今日も明日も同じであれば（時間並進に関する対称性）、エネルギーが保存される。どの向きにも同じであれば（回転対称性）、角運動量が保存される。ネーターの定理には、大学 2 年次のラグランジュ力学の講義で出会うことになるだろう。本章では全体を通してその帰結を用いる。

#### ホイヘンス（Huygens）、レン（Wren）、ウォリス（Wallis）

1668 年、王立協会は物体の衝突の問題に対する解答を募った。ジョン・ウォリスは非弾性衝突を扱い、クリストファー・レンとクリスティアーン・ホイヘンスはそれぞれ独立に弾性衝突（elastic collision）の場合を解いた。ホイヘンスの鍵となる洞察は、座標系を変えることであった。重心とともに動く船から衝突を眺めると、2 つの等しい球は単に速さが逆向きになって跳ね返るだけであり、その後、岸の座標系に戻せばよい。彼はまた、ある量、すなわち質量と速さの 2 乗の積の和が衝突の前後で等しいことにも気づいていた。もっとも、運動エネルギーがそれ自体として保存量であると認められるまでには、さらに 1 世紀を要した。

## 思考のスキル

**保存量を使って可能性を排除する**

過程が複雑すぎて追いきれないときは、変化しえない量を列挙し、それらがどの結果を許すかを調べよ。

これは、物理学者が粒子加速器での衝突について推論する方法である。そこでは詳細な相互作用はわからないが、運動量、エネルギー、電荷はつり合わなければならない。不等式（ここでは、ビー玉が互いにすり抜けられないこと）と組み合わせれば、ある結果が不可能であることを証明できる。

## 次の一歩

1 **同じ問題をもう一度。** STEP I 2006、問 11（`step.maths.org/questions/06-s1-q11`）に挑戦してみよう。溝の中に粒子が一列に並び、端により重い粒子がある。どのような最終状態が可能か。

2 **衝突を追う。** 小問 (iii) の衝突を、$A_0$ が $A_1$ に衝突するところから始まる、2 個のビー玉どうしの別々の衝突の連続としてモデル化せよ。その連続を最後まで追い、小問 (iii) で求めた運動に行き着くことを示せ。

3 **2 個の球を当てる。** 5 個の等しい球からなるゆりかごで、2 個の球をそろって放し、残りの 3 個に速さ $u$ で衝突させる。「2 個の球が速さ $u$ で飛び出す」が両方の保存則と矛盾しないことを示し、さらに矛盾しない別の結果を 1 つ求めよ。

4 **軽い端。** $\lambda < 1$ の場合について、2 個のビー玉どうしの衝突の連続を追え。$A_n$ と $A_{n+1}$ 以外に、最終的に動いているビー玉はあるか。

## さらに学ぶために

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press）、第 5 章。運動量とエネルギーの保存について、衝突に関する多くの問題とともに扱っている。
- **Frank Herrmann & Peter Schmälzle,「Simple explanation of a well-known collision experiment」**, *American Journal of Physics* 49 (1981)。ニュートンのゆりかごがなぜうまく働くのかを説明している。
- **Dwight Neuenschwander, *Emmy Noether's Wonderful Theorem***（Johns Hopkins University Press）。対称性と保存則の結びつきについての、読みやすい解説である。

# 10.2 重ねたボールの効果

**問題**

**STEP II 2010、問 10**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/10-s2-q10`

## 導入

バスケットボールの上にテニスボールを載せて持ち、両方を一緒に落としてみよう。バスケットボールが床で跳ね返ると、テニスボールは落とした高さの何倍もの高さまで飛び上がり、ときには天井に届くほどである。屋外で試してみるとよい。

この問題の小問 (i) は、1 回の衝突には速さの上限があることを示す。ぶつかってくる球がどれほど重くても、静止している球を、ぶつかってくる球の速さの 2 倍を超える速さで送り出すことはできない。小問 (ii) は、この上限を破る方法を示す。次々に軽くなっていく球の列に運動を受け渡していけば、各段階で速さが掛け算的に増えていくのである。同じ考え方によって宇宙探査機は外惑星まで送り届けられており、また超新星（supernova）の仕組みの一部としても提案されたことがある。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** Section 10.1 より：速さ $u$ で運動する質量 $M$ が、静止している質量 $m$ に弾性衝突（elastic collision）するとき、衝突後の $m$ の速さはいくらか。

そこで得た結果（質量の役割を入れ替えたもの）から、ぶつけられた粒子の速さは $\frac{2M}{M+m}u$ である。別の覚え方もある。弾性衝突では**相対速度**（relative velocity）が逆向きになる。重い球がほとんど減速しないならば、軽い球は重い球の速さより約 $u$ だけ速く離れていかなければならず、つまり速さは約 $2u$ となる。

## 順を追って解く

### 段階 1　速さの上限

$M = bm$ とすると、衝突後の $A$ の速さは

$$v_A = \frac{2bm}{bm + m}\,u = \frac{2b}{b+1}\,u.$$

である。

> **考えてみよう**　$\frac{2b}{b+1}$ と 2 の大小はどうなるか。$b \to \infty$ とするとどうなるか。

すべての $b$ に対して $\frac{2b}{b+1} = 2 - \frac{2}{b+1} < 2$ であるから、$B$ がどれほど重くても、$A$ の速さはつねに $2u$ より小さい。$b \to \infty$ のとき速さは $2u$ に近づく。無限に重い球は、動く壁のように $A$ を跳ね返すことになるのである。 ■

### 段階 2　列に沿って受け渡す

> **考えてみよう**　小問 (ii) では、各粒子は次の粒子の $\lambda$ 倍の重さである。列の中の各衝突について、小問 (i) から何がいえるか。

$B_1$（質量 $\lambda^n m$）は $B_2$（質量 $\lambda^{n-1} m$）に衝突する。$B_2$ は $B_1$ の $\lambda$ 分の 1 の重さである。$b = \lambda$ として小問 (i) を用いると、$B_2$ は速さ $\frac{2\lambda}{\lambda+1}u$ で動き出す。次に $B_2$ が $B_3$ に衝突する。$B_3$ もやはり $\lambda$ 分の 1 の重さであり、$B_3$ は速さ $\left(\frac{2\lambda}{\lambda+1}\right)^2 u$ で動き出す。このような衝突を $n$ 回繰り返し、最後に $B_n$ が $A$ に衝突すると、

$$v_A = \left(\frac{2\lambda}{\lambda+1}\right)^n u.$$

となる。（その後に $B$ どうしが衝突しても、$A$ をさらに押し出すことしかできない。$A$ に前方からぶつかるものは何もないので、$A$ を減速させることはできないのである。）

> **考えてみよう**　$\frac{2\lambda}{\lambda+1}$ は 1 より大きいか、小さいか。

$\lambda > 1$ より $2\lambda > \lambda + 1$ であるから、比 $r = \frac{2\lambda}{\lambda+1}$ は 1 を超え、$n \to \infty$ のとき $r^n \to \infty$ となる。よって $n$ を十分大きくとれば、$A$ をいくらでも速く動かすことができる。 ■

### 段階 3　20 倍の速さ

$\lambda = 4$ のとき $r = \frac{8}{5} = 1.6$ であり、$1.6^n > 20$ となることが必要である。底を 10 とする対数（logarithm）をとると

$$\log_{10} 1.6 = \log_{10} 16 - 1 = 4\log_{10} 2 - 1 \approx 0.20412, \qquad \log_{10} 20 = 1 + \log_{10} 2 \approx 1.30103,$$

であるから、$n > \frac{1.30103}{0.20412} \approx 6.37$ が必要である。最小値は $n = 7$ である。（実際、$1.6^6 \approx 16.8$、$1.6^7 \approx 26.8$ である。） ■

## 振り返り

- **一つの結果を繰り返し用いる。** 小問 (i) を小問 (ii) で $n$ 回用いることで、有界な増加が非有界な増加に変わった。
- **決して到達しない極限。** 上限 $2u$ には近づくが決して到達しないので、正しい主張は狭義の不等式（strict inequality）である。
- **対数は累乗を積に変える。** 何段階必要かという問いは、割り算に帰着された。

## 背後にある数学

### バスケットボールとテニスボール

二つの球を高さ $H$ から一緒に落とし、速さ $U = \sqrt{2gH}$ で床に達するとする。すべてが完全弾性的で、バスケットボールのほうがはるかに重いと仮定する。バスケットボールは床で跳ね返って上向きに速さ $U$ をもち、すぐに、まだ速さ $U$ で落下しているテニスボールと出会う。バスケットボールの座標系（frame）では、テニスボールは $2U$ で近づき、非常に重い物体で跳ね返って $2U$ で離れていく。地面の座標系に戻すと、これは上向きに $2U + U = 3U$ である（図 10.2.1）。到達する高さは打ち出す速さの 2 乗に比例するので、テニスボールは $9H$ まで上がる。

実際の球は完全弾性的ではない。反発係数（coefficient of restitution）を $e$、質量比を $M/m$ とすると、テニスボールは速さ $\frac{Me(2+e)-m}{M+m}U$ で離れていく。演習問題にある STEP I 2014 Q10 では、測定された高さから逆算して質量比を求める。

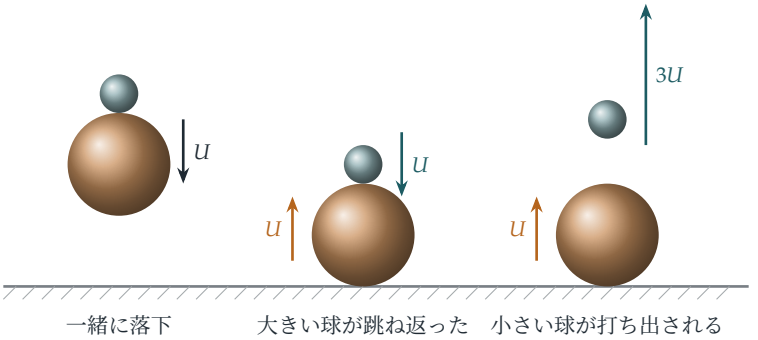



**図 10.2.1**　積み重ねた球の効果。球は完全弾性的で、下の球のほうがはるかに重いとする。大きい球は速さ $U$ で跳ね上がり、$U$ で落ちてくる小さい球と出会う。大きい球から見ると、小さい球は $2U$ で到着して $2U$ で離れるので、地面の座標系では $3U$ で離れ、もとの高さの 9 倍まで達する。

## スイングバイ

惑星のそばを通過する宇宙探査機は惑星に触れることはないが、重力は非常に重い物体との非常に柔らかい弾性衝突のようにはたらく。これをスイングバイ（gravitational slingshot）という。惑星の座標系では、探査機は回り込んで、到着したときと同じ速さで離れていく。惑星が速さ $V$ で探査機に向かって動いているならば、太陽の座標系では、探査機はテニスボールとまったく同じように最大 $2V$ の速さを得ることができる。1977 年に打ち上げられた 2 機のボイジャー探査機は、外惑星がまれにしか起こらない配置に並んだ機会を利用して木星から土星へ（ボイジャー 2 号はさらに天王星と海王星へ）と進み、遭遇のたびに速さを得た。こうした重力アシストがなければ、海王星までの旅には 12 年ではなく約 30 年かかっていたであろう。エネルギーは惑星から供給され、惑星は測定できないほどわずかに減速する。

### スーパーボールと超新星

1968 年、W. R. Mellen は *American Journal of Physics* 誌で、大きさが次第に小さくなるいくつかの球を積み重ねて作る「スーパーボール跳ね返り発射体」を紹介し、一番上の球が衝突時の速さの何倍もの速さで打ち出されうることを指摘した。天体物理学者は、これと重力崩壊型超新星との大まかな類似を指摘している。星の外層が落ち込んで、硬く高密度な中心核で跳ね返り、衝撃波（shock wave）が運動量をますます密度の低い物質へと外向きに運び、それを莫大な速さにまで加速するのである。積み重ねた球の効果の実演は、この考え方を学生に説明するのに用いられるが、実際の超新星には、跳ねる球よりはるかに多くの物理、たとえばニュートリノ（neutrino）がかかわっている。

## 思考のスキル

### 一つの結果を繰り返し用いる

ある過程が一つの単純な段階の繰り返しであるとき、その段階を一度だけ解き、それを合成せよ。

1 段階あたりの増幅率が 2 未満であっても、増幅率は掛け合わされるので、多くの段階を経ると非有界になる。大学では、これが伝達行列（transfer matrix）、多段増幅器、多段式ロケット（Section 10.3）の背後にある考え方である。連鎖全体の増幅率は、各要素の増幅率の積なのである。

## 次の一歩

1 **現実の場合。** STEP I 2014、問 10（`step.maths.org/questions/14-s1-q10`）に挑戦してみよう。具体的な数値と不完全な跳ね返りを扱う、積み重ねた球の問題である。

2 **非弾性的な連鎖。** STEP I 2017、問 10（`step.maths.org/questions/17-s1-q10`）に挑戦してみよう。質量が等比数列的に増えていく粒子の列に沿って衝突を伝えていく問題である。各粒子がちょうど 2 回の衝突にかかわるのはどのような場合か。

3 **3 個の球。** 完全弾性的な 3 個の球を、それぞれが下の球よりはるかに軽くなるように積み重ねる。一番上の球は $7U$ で離れ、$49H$ まで上がることを示せ。球が $k$ 個のとき、一番上の球は $(2^k - 1)U$ で離れることを示せ。

4 **エネルギーはどこから来るのか。** 小問 (ii) で、$A$ の速さが非有界であるにもかかわらず、運動エネルギー（kinetic energy）の総和が保存されることを示せ。重い粒子たちはどうなるか。

## さらに学ぶために

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press）、第 5 章。積み重ねた球の問題が含まれている。
- **W. R. Mellen, “Superball rebound projectiles”**, *American Journal of Physics* 36 (1968)。短くて楽しい論文である。
- **Gary Flandro, “Fast reconnaissance missions to the outer solar system utilizing energy**

**derived from the gravitational field of Jupiter**”, *Astronautica Acta* 12 (1966)。ボイジャーの「グランドツアー」を提案した論文である。

# 10.3 ロケットと大砲

**問題**

**STEP III 2017、問 11**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/17-s3-q11`

## 導入

宇宙空間にあるロケットには、押し返す相手が何もない。ロケットは質量を後方へ放り出すことで前進し、あとは運動量保存則（conservation of momentum）がすべてを決める。後部から砲を撃つトラックは、ロケットをばらばらに分解したものである。一つ一つの弾丸が排気の塊なのである。

では、砲は一斉に撃つべきか、それとも一つずつ順に撃つべきか。この問題ははっきりした答えを与えるが、何を比べているのかを注意深く見てほしい。一斉に撃つほうがトラックの速さは大きくなるが、使うエネルギーも多くなる。つまり、二つの場合で砲は同じ仕事をしているわけではない。何を固定するかを変えると、答えは逆転する。この点を整理していくと、宇宙飛行において最も重要な方程式であるツィオルコフスキー（Tsiolkovsky）の**ロケット方程式**（rocket equation）にたどり着き、さらに実際のロケットがなぜ多段式なのかという理由にも行き着く。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 砲を撃つ前、トラックは速度 $V$ で動いている。発射後の弾丸の速度は $V - v$ である（すなわち、後ろ向きに速さ $v - V$）。**発射前のトラックに対する**弾丸の相対速度はいくらか。

それは $(V - v) - V = -v$ である。したがって、各砲は発射直前のトラックの速度に対して速さ $v$ で弾丸を後方へ撃ち出す。これがこの問題で固定されている規則である。答えを決めるのはこの規則なので、よく覚えておくこと。

## 順を追って解く

### 段階 1　一斉に発射する

系ははじめ静止しており、運動量は 0 である。発射後、トラック（質量 $M$）は前向きに速さ $u$ で動き、$n$ 個の弾丸は後ろ向きに速さ $v$ で動く（発射前は $V=0$ だからである）。よって

$$Mu - nmv = 0, \qquad u = \frac{nmv}{M}.$$

得られる運動エネルギー（kinetic energy）は

$$K = \tfrac{1}{2}Mu^2 + \tfrac{1}{2}nmv^2 = \tfrac{1}{2}\frac{n^2m^2v^2}{M} + \tfrac{1}{2}nmv^2 = \tfrac{1}{2}nmv^2\Big(1 + \frac{nm}{M}\Big). \qquad \blacksquare$$

### 段階 2　一つずつ発射する

**考えてみよう**　第 $r$ 番目の砲を撃つ直前、残りの弾丸を載せたトラックの質量はいくらで、速さはいくらか。第 $r$ 回目の発射について運動量保存の式を書け。

第 $r$ 回目の発射の前、トラックは $n-r+1$ 個の弾丸を載せているので、質量は $M+(n-r+1)m$、速さは $u_{r-1}$ である。発射後、$n-r$ 個の弾丸を載せたトラックの速さは $u_r$ となり、撃ち出された弾丸の速度は $u_{r-1}-v$ である。運動量は保存されるから

$$\big(M+(n-r+1)m\big)u_{r-1} = \big(M+(n-r)m\big)u_r + m(u_{r-1}-v).$$

$mu_{r-1}$ の項を整理すると $\big(M+(n-r)m\big)(u_r-u_{r-1}) = mv$ となり、これが $(*)$ である。$\blacksquare$

増分を足し合わせると

$$u_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{mv}{M+(n-r)m} = \frac{mv}{M} + \frac{mv}{M+m} + \cdots + \frac{mv}{M+(n-1)m}.$$

最初の項以外はすべて $\frac{mv}{M}$ より小さく、$n>1$ であるから、$u_n < \frac{nmv}{M} = u$ である。 $\blacksquare$

**手を止めて、やってみよう**　ここではなぜ一つずつ撃つほうが不利なのだろうか。最初の砲を撃つとき、その砲はトラックとまだ撃たれていない $n-1$ 個の弾丸をまとめて加速しなければならない。そのため、何も載せていないトラックに対して撃つ場合よりも、速さの増加が小さくなるのである。

### 段階 3　エネルギーの収支

**考えてみよう** 第 $r$ 回目の発射における運動エネルギーの変化を書け。$u_r^2 - u_{r-1}^2$ を含む項を簡単にするのに、$(*)$ はどのように役立つか。

運動エネルギーの変化は

$$K_r - K_{r-1} = \tfrac{1}{2}\big(M + (n-r)m\big)u_r^2 + \tfrac{1}{2}m(u_{r-1} - v)^2 - \tfrac{1}{2}\big(M + (n-r+1)m\big)u_{r-1}^2.$$

後ろの二つの項をまとめると $\tfrac{1}{2}m(v^2 - 2vu_{r-1}) - \tfrac{1}{2}\big(M + (n-r)m\big)u_{r-1}^2$ となる。次に、平方の差（difference of squares）を因数分解し、$(*)$ を用いると

$$\tfrac{1}{2}\big(M + (n-r)m\big)(u_r^2 - u_{r-1}^2) = \tfrac{1}{2}mv(u_r + u_{r-1}).$$

したがって

$$K_r - K_{r-1} = \tfrac{1}{2}mv(u_r + u_{r-1}) + \tfrac{1}{2}mv^2 - mvu_{r-1} = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}mv(u_r - u_{r-1}). \qquad \blacksquare$$

$r = 1$ から $n$ まで和をとると、増分 $u_r - u_{r-1}$ は望遠鏡和（telescoping sum）として打ち消し合い、$u_n$ だけが残る。

$$K_n = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu_n. \qquad \blacksquare$$

最後に、$K = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}nmv^2 \cdot \tfrac{nm}{M} = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu$ であり、$u_n < u$ であるから $K_n < K$ である。 $\blacksquare$

## 振り返り

- **各段階ごとの運動量。** 一回一回の発射は、荷を載せたトラックと一個の弾丸という小さな二体問題であった。
- **望遠鏡和。** 増分 $(*)$ とエネルギーの増分は、きれいに足し合わされた。
- **結論を注意深く読む。** 一斉に撃つほうが速さは大きくなるが、エネルギーも多くかかる。この問題は、異なる量の仕事をする二つの過程を比べているのである。

## 背後にある数学

### 何を固定すべきか

実際の砲やロケットエンジンは、弾丸が離れた直後に測った**自分自身**に対する相対速度が一定になるように弾丸を撃ち出す。この問題では、基準は**発射前の**トラックの速さである。弾丸が小さければこの違いはごくわずかだが、$n$ 個の弾丸をすべて一斉に撃つ場合には大きな違いになる。小問 (i) では、重い弾丸の塊が、あたかもトラック

がまったく反動（recoil）を受けないかのように速さ $v$ で後方へ投げ出されており、そのためには多くのエネルギーが必要となる。

そうではなく、すべての弾丸が**発射後の**トラックに対して速さ $v$ で離れるとすると、結論は逆転する。一斉に撃つと $u = \frac{nmv}{M+nm}$ となり、一つずつ撃つと $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{mv}{M+km}$ となる。各項は $\frac{mv}{M+nm}$ 以上であるから、後者のほうが大きい。今度は一つずつ撃つほうが有利である。各弾丸はすでに動いているトラックから押し出され、後の砲ほど加速すべき質量が少なくて済むからである。（演習問題で確かめよ。）

### ロケット方程式

次に、全質量 $\mu = nm$ を一定に保ったまま、弾丸を非常に小さく、非常に多くしていく。これは燃料を連続的に燃やすロケットである。$u_n$ を表す和は積分（integral）になる（どちらの規約でも同じ極限が得られる）。

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{mv}{M + km} \;\to\; \int_0^{\mu} \frac{v\,\mathrm{d}s}{M + s} = v \ln \frac{M+\mu}{M}.$$

これが**ツィオルコフスキーのロケット方程式**である。排気がロケットに対して速さ $v$ で噴出するロケットは、次の速さを得る。

$$\Delta u = v \ln \frac{m_{\text{initial}}}{m_{\text{final}}}.$$

図 10.3.1 は三つの答えを比較したものである。問題となるのは対数である。排気速度（exhaust speed）が約 4.5 km/s（優れた化学燃料）のとき、約 7.8 km/s の軌道速度（orbital speed）に達するには、質量比（mass ratio）が $e^{7.8/4.5} \approx 5.7$ でなければならず、空気抵抗と重力を考慮すれば 10 以上に近くなる。ロケットのほとんどすべては燃料なのである。

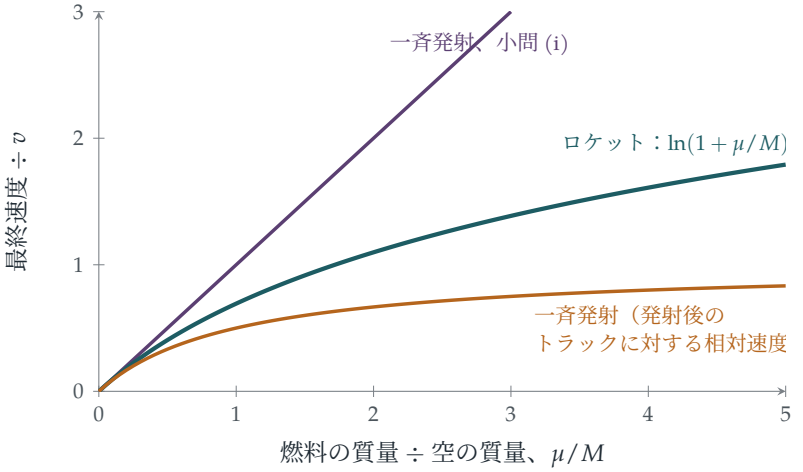



**図 10.3.1**　燃料と空の質量の比に対する最終速度。すべてを一斉に撃つと、問題の規約では $\mu/M$（紫）となるが、排気速度を反動を受けるトラックに対して測ると $\frac{\mu/M}{1+\mu/M}$（琥珀色）にすぎない。連続的に噴射するロケットはその間にあり、$\ln(1+\mu/M)$（青緑）となる。この図は不等式 $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$ を表している。

### ロケットが多段式である理由

対数は多段化（staging）の理由も説明する。途中で空になった燃料タンクを切り離すロケットは、もはやその無駄な質量を加速する必要がない。各段で得られる速さは（砲の場合と同じように）**足し合わされる**一方、各段の速さの増加はその段の質量の**比**で決まる。したがって、ロケットを複数の段に分けると、同じ全質量の一段式ロケットでは到達できない速さに達することができる。宇宙飛行士を月へ運んだサターン V（Saturn V）は三段式であり、その第一段は 3 分足らずで約 2000 トンの燃料を燃やした。

#### ツィオルコフスキー

コンスタンチン・ツィオルコフスキーは、ロシアの地方都市カルーガの耳の不自由な教師であった。彼は 1903 年、「Exploration of outer space by means of reaction devices」（反作用装置による宇宙空間の探査）と題する論文でロケット方程式を発表した。彼は多段式ロケット、液体水素と液体酸素の燃料、宇宙ステーションについて、それらが実際に作れるようになる何十年も前に考察していた。この方程式はそれ以前にも、あまり目立たないところに現れていた（William Moore が 1810 年にその一つの形を導いている）が、それが宇宙飛行にとって何を意味するかを初めて見抜いたのはツィオルコフスキーであった。「地球は人類のゆりかごである。しかし、人は

いつまでもゆりかごの中で暮らすことはできない」と彼は書いている。

## 思考のスキル

### 離散的な過程から極限へ

連続的な過程は、多くの小さな離散的段階の極限（*limit*）として理解できることが多い。離散的な問題を厳密に解き、それから段階の幅を小さくしていく。すると和は積分になる。

ここでは $n$ 門の砲がロケットになり、和が対数になった。大学では、物理法則を導くたびに同じ手法を目にするだろう。小さな要素を解析し、その結果を足し合わせて積分や微分方程式（differential equation）にするのである。

## 次の一歩

1. **もう一つの規約。** 各弾丸が発射後のトラックに対して速さ $v$ で離れるとして、小問 (i) と (ii) をやり直せ。このときは一つずつ撃つほうが最終速度が大きくなることを示せ。

2. **塵の雲の中の彗星。** STEP III 2009、問 11（`step.maths.org/questions/09-s3-q11`）に挑戦せよ。ロケットと同様の可変質量（variable mass）の問題であるが、彗星は質量を失うのではなく得ていく。彗星の速さが近づいていく値に注目せよ。

3. **二段式。** 排気速度 $v$、空の質量 $M$、燃料の質量 $9M$ のロケットがある。その最終速度を求めよ。次に、これを空の質量 $\frac{1}{2}M$、燃料 $4.5M$ の二つの段に分け、第一段は空になった時点で切り離すとする。最終速度を比較せよ。

4. **不等式。** 区間 $[0, x]$ 上で $\frac{1}{1+s}$ を 1 および $\frac{1}{1+x}$ と比較することにより、$x \geq 0$ に対して $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$ を証明せよ。

## さらに学ぶために

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press）、第 4 章。運動量、可変質量、ロケット方程式。
- **George Sutton & Oscar Biblarz, *Rocket Propulsion Elements***（Wiley）。工学の標準的な

教科書。冒頭の数章は、この節を読んだ後なら読みこなせる。

- **Hermann Oberth, *Ways to Spaceflight***（NASA による英訳、オンラインで無料公開）。宇宙開発の先駆者オーベルト（Oberth）自身による解説。

# 10.4 分子とピストン

**問題**

**STEP I 2002、問 10**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/02-s1-q10`

## 導入

自転車のタイヤに空気を入れたあと、空気入れに触れてみると熱くなっている。気体は圧縮すると温まる。これはディーゼルエンジン（燃料を圧縮だけで点火する）、冷蔵庫、そして星の形成の背後にある原理である。では、なぜ圧縮すると気体は熱くなるのだろうか。温度とは分子の運動エネルギー（kinetic energy）の平均であるから、問いは「なぜ分子は速くなるのか」ということになる。

この問題は、ただ一つの分子を使ってこの問いに答える。分子は前進してくるピストン（piston）に跳ね返されるたびに、動いているラケットに打ち返されたテニスボールと同じように、少しずつ速さを増す。跳ね返りを正確に追っていくと、隠れた法則が現れる。分子の速さとシリンダーの長さの積が、ほぼ一定に保たれるのである。これは**断熱不変量**（adiabatic invariant）と呼ばれる量であり、物理で学ぶ気体の法則の微視的な起源となっている。

## 取りかかる前に

? **考えてみよう** 速さ $w$ で動くボールが、速さ $u$ でこちらに向かって動いてくる壁に当たり、弾性的に（elastically）跳ね返る。跳ね返ったあとの速さはいくらか。（壁とともに動く座標系（frame）で考えよ。）

壁の座標系では、ボールは $w+u$ で近づき、非常に重い物体に弾性的に跳ね返されるので $w+u$ で離れていく。地面の座標系に戻ると、壁は跳ね返ったボールと同じ向きに $u$ で動いているから、ボールの速さは $w+2u$ となる。前進するピストンに跳ね返

されるたびに、速さは $2u$ ずつ増えるのである。（静止しているシリンダーの端で跳ね返っても、速さは変わらない。）

## 順を追って解く

### 段階 1　$n$ 回跳ね返ったあとの速さ

粒子ははじめ速さ $v$ である。ピストンとの衝突のたびに $2u$ が加わり、端との衝突では速さは変わらない。よって、ピストンと $n$ 回衝突したあとの速さは

$$v_n = v + 2nu. \qquad \blacksquare$$

### 段階 2　長さについての漸化式

**考えてみよう**　$n$ 回目と $(n+1)$ 回目の衝突の間に、粒子はピストンから端まで行って戻ってくる。粒子が進む距離はいくらか。ピストンが動く距離はいくらか。

時間 $t_n$ の間にピストンは $ut_n$ だけ動くので、$d_n - d_{n+1} = ut_n$ である。その間に粒子は速さ $v_n$ で、ピストンから端まで（距離 $d_n$）進み、そこからピストンまで（距離 $d_{n+1}$）戻る。よって $d_n + d_{n+1} = v_n t_n$ である。一方の式を他方で割ると $t_n$ が消去され、漸化式（recurrence）

$$\frac{d_n + d_{n+1}}{d_n - d_{n+1}} = \frac{v_n}{u}, \qquad \text{よって} \qquad d_{n+1}(v_n + u) = d_n(v_n - u).$$

が得られる。$v_n = v + 2nu$ を代入すると

$$d_{n+1} = \frac{v + (2n-1)u}{v + (2n+1)u}\, d_n. \qquad \blacksquare$$

### 段階 3　次々に打ち消し合う積

**考えてみよう**　$d_n$ を、$d_1$ にこのような分数 $n-1$ 個の積を掛けた形で書け。何が約分されるか。

$$d_n = d_1 \cdot \frac{v+u}{v+3u} \cdot \frac{v+3u}{v+5u} \cdots \frac{v+(2n-3)u}{v+(2n-1)u} = \frac{v+u}{v+(2n-1)u}\, d_1. \qquad \blacksquare$$

各分子が直前の分母と約分され、最初の分子と最後の分母だけが残る。このように次々と打ち消し合う計算を、テレスコーピング（telescoping）という。

**段階 4** $v = u$ **の場合**

このとき $d_n = \frac{2u}{2nu} d_1 = \frac{d_1}{n}$ であり、

$$ut_n = d_n - d_{n+1} = d_1\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{d_1}{n(n+1)}. \qquad \blacksquare$$

これらを足し合わせると $u(t_1 + t_2 + \cdots) = d_1\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots\right) = d_1$ となる。つまり、ピストンは最初の衝突から時間 $d_1/u$ でシリンダーの端に到達する。当然そうでなければならない。そこに到達するまでに、粒子は無限回跳ね返るのである（図 10.4.1）。

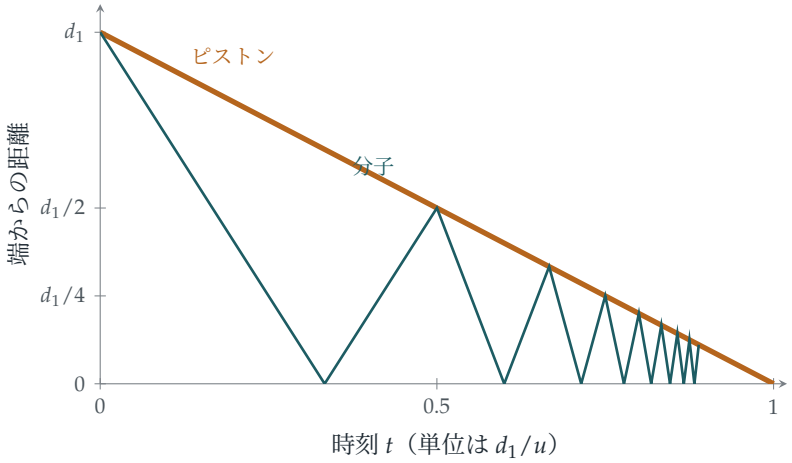



**図 10.4.1** $v = u$ の場合の時空図：シリンダーの端からの距離を時刻に対して描いたもの。ピストン（琥珀色）は一定の速さで前進し、分子（青緑色）はピストンと端の間を跳ね返り続ける。ジグザグは次第に急に（速く）、短くなっていく。ピストンとの $n$ 回目の衝突は距離 $d_1/n$ の位置で起こるので、分子の速さはおおよそ 1/(長さ) に比例する。

## 振り返り

- **衝突は座標系を変えて考える。** ピストンの座標系では、跳ね返りは自明である。
- **二つの式を立て、未知数を消去する。** 同じ時間に粒子とピストンが進む距離から、$t_n$ を含まない漸化式が得られた。
- **テレスコーピング。** $\frac{1}{n(n+1)}$ の和と同様に、積が一気につぶれた。

## 背後にある数学

### 断熱不変量

速さに長さを掛けてみよう。

$$v_n d_n = (v + 2nu) \cdot \frac{v+u}{v+(2n-1)u}\, d_1 \approx (v+u) d_1$$

が、$n$ が大きいとき、あるいは $u$ が $v$ よりはるかに小さいときに成り立つ。したがって

$$\text{速さ} \times \text{長さ} \approx \text{一定}.$$

ピストンが分子に比べてゆっくり動くならば、ピストンがどれだけ動いても積 $vd$ はほとんど変化しない。このように、系をゆっくり変化させたときにほぼ一定に保たれる量を**断熱不変量**という。一般に、往復運動の断熱不変量は $\oint p\,\mathrm{d}q$、すなわち運動量を一周期にわたって積分したものである。ここではそれは $mv \times 2d$ となる。

### 一つの分子から気体へ

$v \propto 1/d$ であるから、運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ は $1/d^2$ に比例する。多数の分子が一方向に沿って運動する気体では、温度は運動エネルギーの平均に比例するので $T \propto 1/d^2$ となる。つまり、長さを半分にすると温度は 4 倍になる。三次元では、エネルギーは三つの運動方向に分配され、同じ議論（ファインマン（Feynman）が**講義録**で述べているもの）によって、単原子気体の断熱圧縮の法則

$$TV^{2/3} = \text{一定}, \qquad \text{すなわち} \qquad pV^{5/3} = \text{一定}.$$

が導かれる。指数 $\frac{5}{3}$ は、単原子気体の比熱比 $\gamma$ として知られる値である。自転車の空気入れの中の空気を体積の 5 分の 1 まで、素早く、熱が逃げないように圧縮したとすると、絶対温度は $5^{0.4} \approx 1.9$ 倍になる（空気の分子は二原子分子なので、代わりに $\gamma = 1.4$ となる）。つまり 20°C から約 280°C になる。空気入れがそこまで熱くならないのは、圧縮がゆっくりで、熱が逃げていくからにすぎない。

#### フェルミの宇宙線

1949 年、エンリコ・フェルミ（Enrico Fermi）は、宇宙から莫大なエネルギーをもって飛来する粒子である宇宙線が、まさにこの問題の分子と同じしくみで加速されていると提唱した。すなわち、星間ガス雲の中を動く磁場に何度も跳ね返され、そのたびに少しずつエネルギーを得るというのである。現在では、この「フェルミ加速」は超新星残骸の衝撃波で起こっていると考えられている。そこでは粒子が、ピストンと壁の間を行き来する分子のように、衝撃波を何度も往復して横切る。断熱不変量は量子力学の誕生にも一役買った。1916 年、パウル・エーレンフェスト（Paul Ehrenfest）は、ゆっくりとした変化によって系が量子状態の間を飛び移ることはありえないか

ら、量子化される量は断熱不変量でなければならないと論じたのである。

## 思考のスキル

### 物理的な過程から漸化式を作る

過程が繰り返されるときは、一周期を正確に記述し、ある周期から次の周期へ状態がどう変わるかを書き下せ。

ここでの状態は、各衝突における（速さ、長さ）の組であった。漸化式は厳密に解くことができ、その解からほぼ保存される量が明らかになった。大学では、同じ方法（一周期を調べ、漸化式あるいは「回帰写像」を作る）が、軌道、振動子、そしてSection 8.7の反復写像に用いられる。

## 次の一歩

1 **不変量を厳密に。** $v_n d_n - (v+u)d_1 = \frac{u(v+u)d_1}{v+(2n-1)u}$ を示し、$n \to \infty$ のとき $v_n d_n \to (v+u)d_1$ となることを導け。

2 **ピストンを引き抜く。** ピストンを速さ $u < v$ で引き抜く場合について、問題を考え直せ。粒子が遅くなることを示し、$v_n d_n$ を求めよ。（膨張する気体は冷える。）

3 **エネルギー。** $v = u$ の場合、ピストンが端に近づくにつれて分子の速さは限りなく大きくなる。$n$ 番目の周期の間にピストンにはたらく平均の力（運動量の変化を $t_n$ で割ったもの）を求め、それが $n^3$ のように増大することを示せ。このことは、ピストンを最後まで押し込むのに必要な仕事について何を意味するか。

4 **弾むボール。** 重力のもとで床の上を弾性的に弾むボールがあり、床をゆっくりと持ち上げていく。この運動の断熱不変量を推測せよ。（**ヒント：** $vd$ に相当するのは、平均の速さと跳ね上がる高さの積、あるいは同じことだが、エネルギーと跳ね返りの間の時間の積である。）

## さらに学ぶために

- **Richard Feynman, Robert Leighton & Matthew Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. I**（『ファインマン物理学』、オンラインで無料公開）、第39章「The kinetic theory of gases」（気体分子運動論）。同じピストンの議論を三次元に拡張している。

- **Stephen Blundell & Katherine Blundell, *Concepts in Thermal Physics***（Oxford University Press、熱物理学の入門書）。断熱過程と気体分子運動論を大学 1 年生の水準で扱っている。
- **Lev Landau & Evgeny Lifshitz, *Mechanics***（Butterworth-Heinemann、ランダウ＝リフシッツ『力学』）、§49。断熱不変量の簡潔な解説。もう少し先で読むとよい。

# 10.5 有限時間に無限回の跳ね返り

**問題**

**STEP III 2002、問 11**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/02-s3-q11`

## 導入

エレアのゼノン（Zeno of Elea）は、壁には決してたどり着けないと論じた。まず距離の半分を進まなければならず、次に残りの半分を進まなければならず、これが永遠に続くからである。このパラドックスの解決、すなわち無限に多くの段階が有限の合計時間で済みうるということは、収束（converge）する無限級数（infinite series）にほかならない。この問題はゼノンのパラドックスを現実のものにしている。くさびの角に向かって滑っていくパックは、壁で無限回はね返るにもかかわらず、有限の時間で角に到達するのである。

自然界でも同じことが起こる。はね返り係数（coefficient of restitution）が 1 より小さいボールを床ではずませると、有限の時間内に無限回はずんだのち静止する。粒状体（granular materials）（砂、穀物、雪）のコンピュータ・シミュレーションでは、この「非弾性崩壊（inelastic collapse）」が実際に厄介な問題となる。コンピュータは有限の時間内に無限回の衝突を処理するよう求められてしまうからである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** はね返り係数 $e$ のなめらかな壁に粒子が衝突するとき、速度の壁に沿った成分はどうなるか。壁に垂直な成分はどうなるか。

なめらかな壁は壁に沿った方向には力を及ぼさないので、速度の壁に平行な成分は変わらない。垂直な成分は向きが逆になり、$e$ 倍される。したがって、粒子が壁と角 $\alpha$ を

なして到達し、角 $\beta$ をなして離れるとすると、

$$\tan\beta = e\tan\alpha,$$

であり、平行な成分は変わらないので、（入射の速さ）$\cos\alpha$ =（反射の速さ）$\cos\beta$ が成り立つ。

## 順を追って解く

### 段階 1　離れる角

**考えてみよう**　粒子は壁 $OA$ 上の点 $M_1$ に、$OA$ と角 $\theta$（$O$ から遠い側で測る）をなして到達する。粒子は $OA$ とどのような角 $\varphi$ をなして離れるか。三角形 $OM_1N_1$ を用いて、$\varphi$ を $\theta$ で表せ。

粒子は $M_1$ を $O$ の側に向かって、壁と角 $\varphi$ をなして離れるので、角 $OM_1N_1$ は $\varphi$ である。三角形 $OM_1N_1$ において、$O$ における角は $30^\circ$ である。$N_1$ において角 $M_1N_1B$ は $\theta$ であり、$O$、$N_1$、$B$ は一直線上にあるので、角 $ON_1M_1$ は $180^\circ-\theta$ である。三角形の内角の和は $180^\circ$ であるから、

$$30^\circ+\varphi+(180^\circ-\theta)=180^\circ,\qquad \text{よって}\qquad \varphi=\theta-30^\circ.$$

（特に $\theta>30^\circ$ である。）はね返りの法則 $\tan\varphi = e\tan\theta$ から

$$e=\frac{\tan(\theta-30^\circ)}{\tan\theta},$$

が得られ、平行な成分の保存 $u_1\cos\theta = v_1\cos\varphi$ から

$$\frac{v_1}{u_1}=\frac{\cos\theta}{\cos(\theta-30^\circ)}.$$ ■

が得られる。

### 段階 2　同じパターンの繰り返し

**考えてみよう**　$N_1$ において、粒子は壁 $OB$ と角 $\theta$（$O$ から遠い側で測る）をなして到達する。これを $M_1$ への到達と比べよ。次に何が起こるか。

$N_1$ における状況は、$M_1$ における状況の鏡像である。粒子は $O$ から遠い側で、壁と角 $\theta$ をなして壁に出会う。したがって粒子は角 $\theta-30^\circ$ をなして離れ、再び $OA$ に角 $\theta$ をなして出会い、これが永遠に続く。どのはね返りも最初のはね返りを縮小した写しである。三角形 $OM_kN_k$、$ON_kM_{k+1}$、… はそれぞれ直前の三角形と相似であり（図 10.5.1）、速さはどのはね返りでも同じ倍率で掛けられる。

### 段階 3 二つの比

**考えてみよう** $O$ からの距離は、一つのはね返りから次のはね返りまでにどんな倍率 $\rho$ で縮むか。速さはどんな倍率 $k$ で縮むか。では、各区間にかかる時間はどんな倍率で縮むか。

三角形 $OM_1N_1$ における正弦定理（sine rule）から

$$\rho = \frac{ON_1}{OM_1} = \frac{\sin\varphi}{\sin(180^\circ - \theta)} = \frac{\sin(\theta - 30^\circ)}{\sin\theta}.$$

次の三角形のすべての長さはこの三角形の長さの $\rho$ 倍なので、経路の各区間の長さは直前の区間の $\rho$ 倍である。速さは各はね返りで $k = \frac{\cos\theta}{\cos(\theta-30^\circ)}$ 倍される。時間は長さを速さで割ったものなので、各区間にかかる時間は直前の区間の

$$\frac{\rho}{k} = \frac{\sin(\theta - 30^\circ)\cos(\theta - 30^\circ)}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin(2\theta - 60^\circ)}{\sin 2\theta}$$

倍である。

### 段階 4 等比級数

合計時間は $T_1(1 + r + r^2 + \cdots)$ である。ここで $T_1$ は最初の区間にかかる時間であり、$r = \frac{\sin(2\theta-60^\circ)}{\sin 2\theta}$ である。これは $0 < r < 1$ ならば有限である。

**考えてみよう** $\sin(2\theta - 60^\circ) < \sin 2\theta$ となるのはどのようなときか。恒等式 $\sin X - \sin Y = 2\cos\frac{1}{2}(X + Y)\sin\frac{1}{2}(X - Y)$ を用いよ。

$$\sin 2\theta - \sin(2\theta - 60^\circ) = 2\cos(2\theta - 30^\circ)\sin 30^\circ = \cos(2\theta - 30^\circ),$$

これは $2\theta - 30^\circ < 90^\circ$、すなわち $\theta < 60^\circ$ のとき正である。また $\theta > 30^\circ$ より $r > 0$ である。したがって $30^\circ < \theta < 60^\circ$ のとき、この等比級数（geometric series）は収束する。粒子は無限回はね返り、$O$ からの距離は毎回倍率 $\rho < 1$ で縮み、有限の時間 $\frac{T_1}{1-r}$ の後に $O$ に到達する。 ■

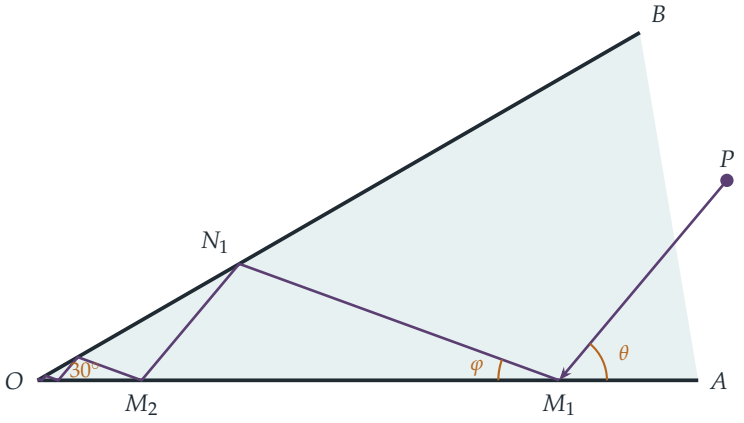



**図 10.5.1**　$\theta = 50^\circ$ のときのくさび内の経路。このとき $\varphi = 20^\circ$、$e = \tan 20^\circ / \tan 50^\circ \approx 0.31$ である。各はね返りは直前のはね返りを $\rho \approx 0.45$ 倍に縮小した写しであり、各区間にかかる時間は直前の区間の約 0.65 倍である。粒子は無限回はね返ったのち、有限の時間で $O$ に到達する。

## 振り返り

- **自己相似性（self-similarity）。**一つのはね返りを理解すれば、それ以降のはね返りはすべてその縮小された写しなので、無限に続く過程全体が二つの比に帰着した。
- **比を正しく組み合わせる。**距離は $\rho$ 倍、速さは $k$ 倍に縮むので、時間は $\rho/k$ 倍に縮む。
- **無限回の出来事、有限の合計。**公比が 1 より小さい等比級数は収束する。

## 背後にある数学

### $\theta \geq 60^\circ$ のとき

$\theta = 60^\circ$ のとき、比はちょうど 1 である。どの区間にも同じ時間がかかり、粒子は $O$ にいくらでも近づくものの、決して到達しない。（速さと区間の長さがどちらも同じ倍率で縮むためである。）$\theta > 60^\circ$ のときは、区間にかかる時間はどんどん長くなる。いずれの場合も粒子は $O$ に近づき、無限回はね返るが、有限の時間で到達するのは $\theta < 60^\circ$ のときだけである。値 $e = \tan 30^\circ / \tan 60^\circ = \frac{1}{3}$ がその境目である。

### はずむボールと非弾性崩壊

同じ現象の最も簡単な例として、床に落としたボールは高さ $e^2H$ まで上がり、次に $e^4H$ まで上がり、と続く。はね返りの間隔はそれぞれのはね返りでの速さに比例し、速さは倍率 $e$ で縮むので、合計時間は等比級数になる。最初の落下にかかる時間を $T_0 = \sqrt{2H/g}$ とすると、ボールは

$$T_0 + 2eT_0 + 2e^2T_0 + \cdots = T_0\,\frac{1+e}{1-e}.$$

の後にはずむのをやめる。無限回はずんで、そして静止するのである。1992 年、Sean McNamara と William Young は、一直線上に並んだ多数の非弾性粒子のシミュレーションでも同じことが起こることを示した。粒子の集団が有限の時間内に無限回の衝突を起こしうるのであり、これが「非弾性崩壊」である。砂や粒状流のシミュレーションでは、これを避けるための特別な規則を組み込まなければならない。また、この現象は粒状気体が自発的にクラスターを形成する理由の説明にも役立っている。

#### ゼノンと収束

紀元前 450 年頃のゼノンのパラドックスは、二千年にわたって哲学者たちを悩ませた。数学的な解決、すなわち無限和が有限の値をもちうるということが厳密にされたのは、ようやく 19 世紀になってからである。このとき、コーシー（Cauchy）、ワイエルシュトラス（Weierstrass）らが極限を用いて収束を定義した（第 2 章の主題である）。この問題の驚くべき点は、過程が**物理的に**無限であることである。有限の時間内に、本当に無限回の衝突が起こるのである。多角形の中のビリヤードや衝突する粒子の運動を研究する数学者は、このような振る舞いを**ゼノン現象**と呼ぶ。これは、衝突する剛体球の系がすべての時刻にわたって矛盾なく定まった運動をもつことを証明する際の難所の一つである。

## 思考のスキル

**無限に続く過程を足し合わせる**

過程が一定の倍率で繰り返されるとき、加法的な量（時間、距離、エネルギー）の合計は等比級数になる。収束するかどうかは公比から判定する。

ここでの鍵は、正しい比を見つけることであった。距離の比でも速さの比でもなく、時間の比である。大学では、同じ推論が反復法の収束、フラクタルの理論、そして問題を繰り返し半分にするアルゴリズムの解析を支配している。

## 次の一歩

1 **移動距離の合計。** 30° と 90° の間のすべての $\theta$ について、$M_1$ から $O$ までに移動する距離の合計が有限であることを示し、それを $OM_1$ と $\theta$ で表せ。

2 **ほかのくさび。** 30° の代わりに角 $\alpha$ のくさびについて、この問題をもう一度考えよ。$\varphi = \theta - \alpha$ を示し、粒子が有限の時間で $O$ に到達するための $\theta$ の条件を求めよ。

3 **弾性的な壁。** $e = 1$ のとき、粒子が $O$ に到達することはあるか。（ヒント：くさびをその壁に関して繰り返し折り返し、経路が直線になるようにせよ。30° のくさびの写しは $O$ のまわりにいくつ収まるか。）

4 **はずむボール。** ボールを高さ 1 m から $e = 0.8$ で落とす。ボールはどれだけの時間はずみ続け、合計でどれだけの距離を移動するか。（$g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ とせよ。）

## さらに学ぶために

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press）、第 5 章。はずむボールや無限に続く衝突の列に関する問題がいくつか収められている。
- **Sean McNamara & William Young,「Inelastic collapse and clumping in a one-dimensional granular medium」**, *Physics of Fluids A* 4 (1992).
- **Serge Tabachnikov, *Geometry and Billiards***（American Mathematical Society、オンラインで無料公開）。ビリヤードの数学を扱い、演習問題で用いた折り返しの技法も含まれている。

# 10.6 二体が一体になる

**問題**

**STEP III 2004、問 11**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/04-s3-q11`

## 導入

2 つの物体が互いに引き合ったり反発し合ったりする。地球と月、2 つの恒星、陽子と電子がその例である。それぞれの物体の運動はもう一方の位置に依存するので、方程式は連立しており、2 つの運動を同時に求めなければならないように見える。ニュートン（Newton）による大きな簡略化は、変数を取り替えることであった。2 つの位置の代わりに、まったく力がはたらいていないかのように運動する**重心**（centre of mass）と、質量を修正した 1 個の粒子のように運動する**相対距離**（separation）を用いるのである。こうして 1 つの難しい問題が 2 つのやさしい問題になる。

この問題では、直線上の 2 粒子についてこの分離を実行する。その途中で小さな奇跡が起こる。相対距離が $t$ の 2 次式の平方根になるのである。その理由は、出題された問題そのものとはまったく関係がなく、平面内の運動とこそ深く関係している。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** それぞれの粒子についてニュートンの第 2 法則を書き下せ。それぞれの力はどちら向きにはたらくか。

力は斥力なので、（左側にある）$P$ を左向きに、（右側にある）$Q$ を右向きに押す。

$$2\ddot{x}_1 = -\frac{2}{z^3}, \qquad 1 \cdot \ddot{x}_2 = +\frac{2}{z^3}.$$

どちらの式も $z = x_2 - x_1$ を含むので、これらは連立している。

## 順を追って解く

### 段階 1　相対距離

> **考えてみよう**　2 つの方程式をどのように組み合わせれば $z$ だけを含む式になるか。

辺々引くと、$\ddot{z} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{z^3}$ である。 ■

相対距離は、力 $\frac{2}{z^3}$ で押される質量 $\frac{2}{3}$ の 1 個の粒子のようにふるまう。数 $\frac{2}{3} = \frac{2\times 1}{2+1}$ は換算質量（reduced mass）$\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ である。

### 段階 2　相対距離に対するエネルギー

> **考えてみよう**　$\ddot{z} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$ として変数を分離し、積分せよ。$z$ と $v = \dot{z}$ の初期値は何か。

$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = \frac{3}{z^3}$ を積分すると $\frac{1}{2}v^2 = -\frac{3}{2z^2} + C$ となる。初めに $z = 1$、$\dot{z} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = 0 - 1 = -1$ であるから $\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + C$ となり、$C = 2$ を得る。

$$v^2 = 4 - \frac{3}{z^2}.$$

（これは相対距離に対するエネルギー保存（conservation of energy）である。換算質量 1 あたりの運動エネルギーとポテンシャルエネルギー $\frac{3}{2z^2}$ の和が一定となる。）

### 段階 3　意外なほど簡単な解

> **考えてみよう**　示すべき答えは $z^2 = 4t^2 - 2t + 1$ である。そこで $z$ の代わりに $w = z^2$ を考えよ。$\dot{w}^2$ を $w$ で表すとどうなるか。

$w = z^2$ とすると $\dot{w} = 2z\dot{z}$ であるから、

$$\dot{w}^2 = 4z^2\dot{z}^2 = 4z^2\left(4 - \frac{3}{z^2}\right) = 16w - 12.$$

これを微分すると $2\dot{w}\ddot{w} = 16\dot{w}$ となるので、（$\dot{w} \neq 0$ である限り）$\ddot{w} = 8$ である。したがって $w$ は $t$ の 2 次式 $w = 4t^2 + \alpha t + \beta$ である。初めに $w = 1$、$\dot{w} = 2z\dot{z} = -2$ であるから $\beta = 1$、$\alpha = -2$ となり、

$$z = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}. \qquad \blacksquare$$

（直接確かめることもできる：$\dot{w}^2 = (8t-2)^2 = 64t^2 - 32t + 4 = 16(4t^2 - 2t + 1) - 12$。）2 粒子は $t = \frac{1}{4}$ で最も近づき、そのとき $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。その後は永遠に離れていく。

### 段階 4 重心

**考えてみよう** $2x_1 + x_2$ はどのような方程式を満たすか。なぜそれが調べるべき自然な組合せなのか。

2 つの運動方程式を加えると $2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^3} = 0$ となる。2 つの力は大きさが等しく向きが反対である（ニュートンの第 3 法則）から、全運動量（total momentum）$2\dot{x}_1 + \dot{x}_2$ は一定である。その初期値は $2 \times 1 + 0 = 2$ であり、$2x_1 + x_2$ の初期値は 1 であるから、

$$2x_1 + x_2 = 1 + 2t.$$

重心 $\frac{2x_1+x_2}{3}$ は速さ $\frac{2}{3}$ で一様に動く。これを $x_2 - x_1 = z$ と組み合わせると、

$$x_1 = \frac{1 + 2t - \sqrt{4t^2 - 2t + 1}}{3}, \qquad x_2 = \frac{1 + 2t + 2\sqrt{4t^2 - 2t + 1}}{3}. \qquad \blacksquare$$

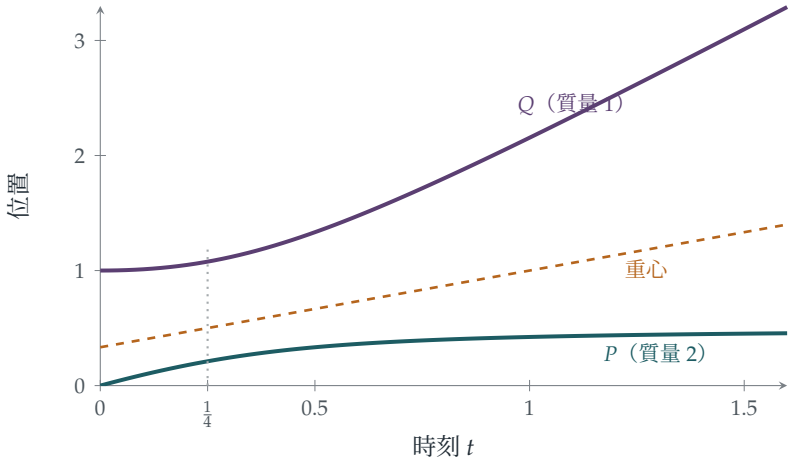



**図 10.6.1** 時刻に対する $P$（ティール）と $Q$（プラム）の位置。$P$ は $Q$ に向かって進むが、斥力によって減速して向きを変え、一定の位置に近づいていく。一方 $Q$ は押しやられる。最接近は $t = \frac{1}{4}$ である。重心（アンバー、破線）は終始一定の速さで動く。

## 振り返り

- **変数を取り替えて連立を解きほぐす。** 方程式の差は $z$ だけを含み、重みつきの和は重心だけを含んでいた。
- **エネルギー積分。** $\ddot{z} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$ と書くことで、2 階の方程式が 1 階の方程式、すなわちエネルギー保存の式に変わった。

- **未知関数を取り替える。** $z$ に対する方程式は扱いにくかったが、$z^2$ に対する方程式は自明であった。

## 背後にある数学

### なぜ $z^2$ は 2 次式になるのか

$\ddot{z} = k/z^3$ の形の任意の力の法則について、同じ計算により $\frac{d^2}{dt^2}(z^2) = 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 2\dot{z}^2 + \frac{2k}{z^2} =$ 定数となる。$\frac{1}{2}\dot{z}^2 + \frac{k}{2z^2}$ が保存されるエネルギーだからである。したがって $z^2$ はつねに $t$ の 2 次式である。それはなぜか。

隠れた理由はこうである。**平面**内を、力を受けずに直線上を一定の速さで運動する粒子を考える。原点からの距離 $r$ は、$r^2 = (x_0 + at)^2 + (y_0 + bt)^2$ であるから、$r^2 =$ (2 次式、変数$t$) を満たす。また極座標（polar coordinates）では動径方向の運動方程式は $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0$ であり、角運動量（angular momentum）$h = r^2\dot{\theta}$ が一定であることから、これは

$$\ddot{r} = \frac{h^2}{r^3}.$$

となる。逆 3 乗の斥力は、まさに隠れた回転運動による**遠心力**（centrifugal）の効果なのである。この問題では、$z^2 = 4t^2 - 2t + 1 = (2t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ は、原点から距離 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ のところを通る直線上を速さ 2 で動く点の、原点からの距離の 2 乗である。1 次元で反発し合う粒子は、2 次元における自由運動の影なのである。

### 二体問題

この問題の方法は、2 物体間の力が相対距離だけに依存し、2 物体を結ぶ直線に沿ってはたらくものであれば、1 次元に限らず 3 次元でも通用する。重心は等速運動をし、相対位置ベクトル $\mathbf{r}$ は $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ として $\mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ に従う。重力の場合、これは**ケプラー問題**（Kepler problem）であり、ニュートンが『*Principia*』（プリンキピア）で解いた。相対位置は楕円、放物線、双曲線のいずれかを描く。地球と太陽はともに共通の重心のまわりを公転しており、その重心は太陽の内部にある。地球と月は地球の中心から約 4700 km の点のまわりを回っており、その点は地球の内部にあるが中心からはかなり離れている。地球が月ごとに揺れ動くのはこのためである。天文学者は、恒星のまさにこの揺れを検出することで、ほかの恒星のまわりの惑星を発見している。

#### 可積分系

1969 年、Francesco Calogero は、直線上にある多数の粒子が逆 2 乗のポテンシャル（すなわち逆 3 乗の力）で互いに反発し合う系を研究し、驚くべきことに、粒子の個

数によらずこの系が厳密に解けることを発見した。1975 年、Jürgen Moser は、時間発展しても固有値（eigenvalues）が一定に保たれる行列、すなわち Section 7.7 の *Lax 対*（Lax pairs）を用いてその理由を説明した。*Calogero–Moser 系*は現在、**可積分系**（integrable system）、つまり完全に解けるだけの十分な数の保存量をもつ系の中心的な例となっており、力学をランダム行列、場の量子論、ソリトン（solitons）の理論と結びつけている。

## 思考のスキル

### 連立を解きほぐす座標を選ぶ

2 つの量が連立しているときは、連立していない組合せを探せ。適切な定数で重みをつけた和や差によって、問題が独立な部分に分かれることが多い。

重心座標と相対座標はその最初の例である。大学では同じ考え方が、行列の対角化（diagonalising）（基準振動（normal modes）、Section 11.2）として、偏微分方程式（partial differential equations）の変数分離（separation of variables）として、また量子力学の中で現れる。

## 次の一歩

1 **糸で結ばれた 2 つの質点。**STEP III 2023、問 9（OCR が配布している 2023 年の過去問一式に収録、`www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip`）に挑戦せよ。糸で結ばれた 2 粒子の運動を、重心を用いて分離しながら追う問題である。一方の粒子が後ろ向きに動くのはいつかに注目せよ。

2 **引力。**力を引力 $\frac{2}{z^3}$ にして同じ問題を解け。$z^2$ がやはり $t$ の 2 次式であることを示し、2 粒子が衝突する時刻を求めよ。

3 **隠れた平面。**この問題の運動について、原点からの距離が $z(t)$ となる平面内の直線と、掃過される角 $\theta(t)$ を求めよ。$z^2\dot{\theta}$ が一定であり、$(z^2\dot{\theta})^2 = 3$ であることを確かめよ。

4 **ケプラーの第 3 法則。**質量 $m_1$ と $m_2$ の 2 つの恒星が、距離 $a$ を保ちながら重力のもとで重心のまわりを円運動している。周期 $T$ が $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1+m_2)}$ を満たすことを示せ。

## さらに学ぶために

- **John Taylor, *Classical Mechanics***（University Science Books）、第 8 章。二体問題、換算質量、軌道。
- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press）、第 10 章、中心力について。
- **Francesco Calogero, *Classical Many-Body Problems Amenable to Exact Treatments***（Springer）。意欲的な読者向け：厳密に解ける系の世界。

# 10.7 球殻の内部の重力

**問題**

**STEP III 1999、問 9**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/99-s3-q9`

## 導入

中が空洞の惑星を想像してほしい。内部には何もなく、岩石でできた薄い球殻（spherical shell）だけがある惑星である。その内側で壁の近くに立てば、すぐそばの岩石の方へ引き寄せられると思うかもしれない。しかし実際には、体は宙に浮く。球殻の内部では、球殻による重力（gravitational pull）はどこでもちょうど 0 になるのである。球殻の手前側は近いが、向こう側は大きい。この二つの効果が完全に打ち消し合う。

これが**ニュートン（*Newton*）の殻定理**（*shell theorem*）である。ニュートンはこれを証明するのに何年もかかったが、この定理は彼の重力理論に欠かせないものであった。対になる結果（球の外側では、全質量が中心に集まっているかのように引力がはたらく）と合わせると、地球や太陽を点とみなしてよいことが正当化される。演習問題と「背後にある数学」の節では、この定理を使って、ガスの雲が収縮して恒星になるまでにかかる時間を計算する。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 円環上で直径の両端に位置する二つの小さな部分を考えよ。それらが質点に及ぼす力を図示せよ。どの成分が打ち消し合い、どの成分が足し合わされるか。

二つの部分は質点から等しい距離にある。それらの引力の軸方向の成分は等しく、足し合わされる。軸に垂直な成分は大きさが等しく向きが逆なので、打ち消し合う。円

環全体をこのように対にしていくと、合力は軸方向で、円環の中心に向かう。

## 順を追って解く

### 段階 1　円環

円環のどの部分も質点から距離 $\sqrt{x^2+r^2}$ にあり、その部分へ向かう直線は軸と角 $\psi$ をなす。ここで $\cos\psi = \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$ である。質量 $\delta m$ の部分は大きさ $\frac{G\,\delta m}{x^2+r^2}$ の力で引き、そのうち軸方向の成分は $\frac{G\,\delta m}{x^2+r^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$ である。どの部分も距離と角が同じなので、これらの成分を単純に足し合わせると

$$\frac{Gmx}{(x^2+r^2)^{3/2}}. \qquad \blacksquare$$

となる。

### 段階 2　球殻を円環に切り分ける

> **考えてみよう**　球殻の中心を $O$ とし、質点を軸上で $O$ から距離 $b$ の位置に置く。球殻を軸に垂直な薄い円環に切り分け、各円環を、その上の点が $O$ において軸となす角 $\phi$ で表す。円環の半径、位置、質量はそれぞれいくらか。

角 $\phi$ の円環の半径は $a\sin\phi$ であり、その中心は軸に沿って $O$ から距離 $a\cos\phi$、したがって質点から距離 $a\cos\phi - b$ の位置にある。幅は $a\,\delta\phi$ なので、面積は $2\pi a\sin\phi\cdot a\,\delta\phi$ であり、これは球殻の面積 $4\pi a^2$ の $\frac{1}{2}\sin\phi\,\delta\phi$ 倍にあたる。よって質量は $\frac{1}{2}M\sin\phi\,\delta\phi$ である。段階 1 より、この円環は質点を軸に沿って $\phi = 0$ の端の方へ、大きさ

$$\frac{G\cdot\frac{1}{2}M\sin\phi\,\delta\phi\,(a\cos\phi - b)}{\left((a\cos\phi-b)^2 + a^2\sin^2\phi\right)^{3/2}} = \frac{GM}{2}\cdot\frac{(a\cos\phi-b)\sin\phi\,\delta\phi}{(a^2-2ab\cos\phi+b^2)^{3/2}}.$$

の力で引く。（符号は自動的に正しく処理される。質点より先にある $a\cos\phi > b$ の円環は一方の向きに引き、質点より後ろにある円環は逆の向きに引く。）

### 段階 3　適切な変数

> **考えてみよう**　分母には $s^2 = a^2 - 2ab\cos\phi + b^2$ が含まれる。$s$ は幾何学的に何を表すか。$\mathrm{d}s$ を $\mathrm{d}\phi$ で表すとどうなるか。

余弦定理（cosine rule）より、$s$ は質点から円環までの距離である。微分すると $2s\,\mathrm{d}s = 2ab\sin\phi\,\mathrm{d}\phi$ となり、$s^2 = a^2 - 2ab\cos\phi + b^2$ を $a\cos\phi$ について解くと $a\cos\phi -$

$b = \frac{a^2-b^2-s^2}{2b}$ を得る。よって力の総和は

$$\frac{GM}{2}\int \frac{a^2-b^2-s^2}{2b\,s^3}\cdot\frac{s\,\mathrm{d}s}{ab} = \frac{GM}{4ab^2}\int_{a-b}^{a+b}\Big(\frac{a^2-b^2}{s^2}-1\Big)\mathrm{d}s,$$

である。ここで $s$ は $a-b$（最も近い点、$\phi=0$）から $a+b$（最も遠い点、$\phi=\pi$）まで動く。

**段階 4** **力は消える**

$$\int_{a-b}^{a+b}\Big(\frac{a^2-b^2}{s^2}-1\Big)\mathrm{d}s = (a^2-b^2)\Big(\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}\Big)-2b = (a^2-b^2)\cdot\frac{2b}{a^2-b^2}-2b = 0.$$

球殻は質点に力を及ぼさない。 ■

**手を止めて、やってみよう** 質点が球殻の**外側**にあり、$b>a$ のときは何が変わるか。$s$ の範囲の端は $b-a$ と $b+a$ になる。最後の行を計算し直し、力が中心に向かう大きさ $\frac{GM}{b^2}$ の力になること、すなわち全質量が中心に集中しているかのようになることを示せ。

## 振り返り

- **まず対称性。** 向かい合う部分を対にすることで、計算する前に力の向きがわかった。
- **より単純な形から組み立てる。** 点から円環を作り、円環から球殻を作った。
- **物理に合った変数を選ぶ。** 角 $\phi$ から距離 $s$ に変数を変えたことで、扱いにくい積分が自明な積分になった。

## 背後にある数学

### ニュートンの円錐による議論

ニュートン自身の証明（**プリンキピア**、第 I 巻、命題 70）は積分をまったく使わない。質点を頂点とする細い二重円錐を描き、球殻を二つの小片で切り取る（図 10.7.1）。小片の面積は、質点からの距離の 2 乗 $r_1^2$ と $r_2^2$ に比例する（弦は両端で円と等しい角をなすので、二つの小片は円錐と等しい角をなす）。したがって小片の質量は $r_1^2$ と $r_2^2$ に比例し、質量を距離の 2 乗で割ったものに比例する引力は、大きさが**等しく**向きが逆になる。質点を通るどの二重円錐でも打ち消し合うので、力の総和は 0 である。この打ち消し合いを成り立たせているのは、まさに逆二乗則（inverse-square law）である。距離のほかのべきであれば、球殻は質点を押すか引くかすることになる。

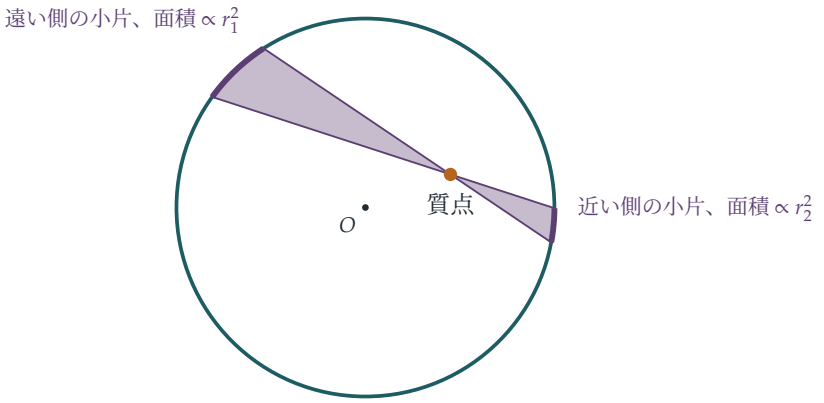



**図 10.7.1**　ニュートンの議論。質点から出る細い二重円錐が球殻を二つの小片で切り取る。遠い側の小片は距離の 2 乗の比だけ大きいが、その引力はちょうど同じ比だけ弱い。二つの引力は打ち消し合い、ほかのどの対も同様である。球殻の内部では重力が消える。

## 収縮する雲

STEP III 1987 Q14 は、この定理を逆向きに使う。一様な球の外側では、表面にある質点にはたらく引力は、全質量が中心にあるかのように $GMm/r^2$ である。いま、半径 $R$、質量 $M$ の一様な球状の塵の雲が静止しているとし、それが自身の重力で収縮するとする。表面の質点が感じるのはその内側の質量だけであり、すべてが内側へ落ちていく間それは $M$ のままである。よって内向きの速さ $v = -\dot{r}$ は

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM}{r^2}, \qquad \text{したがって} \qquad v^2 = 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right).$$

を満たす。置換（substitution）$r = R\cos^2\alpha$（演習問題の一つ）により、半径 $r$ に達するまでの時間は $\sqrt{\frac{R^3}{2GM}}\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$ となる。雲全体は $\alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき一点に収縮する。それまでの時間が**自由落下時間**（free-fall time）

$$t_{\mathrm{ff}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R^3}{2GM}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}},$$

である。ここで $\rho$ は密度である。驚くべきことに、時間は密度だけで決まるので、雲のどの殻も同じ瞬間に中心に達する（図 10.7.2）。1 立方メートルあたり約 $10^{-17}$ kg の典型的な星間雲では、$t_{\mathrm{ff}}$ はおよそ 700 000 年である。これが恒星が形成される時間の尺度を決めている。

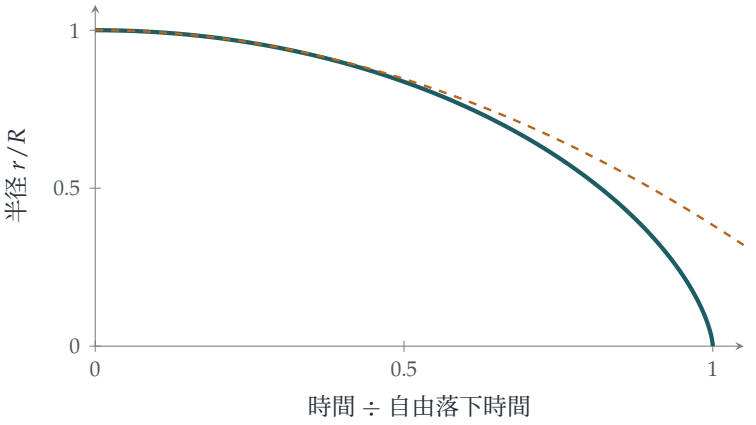



**図 10.7.2** 収縮する一様な塵の雲の半径と時間の関係（ティール色）。初めは落とした石のようにゆっくりと動き（琥珀色の破線の放物線は等加速度による近似 $r = R - \frac{1}{2}\frac{GM}{R^2}t^2$ である）、その後急激に加速して $t = t_{\mathrm{ff}}$ で 0 に達する。この曲線はサイクロイド（cycloid）の半分である。

### ニュートンの遅れとガウスの法則

ニュートンは 1660 年代までに逆二乗則を得ていたが、重力理論を発表したのは 1687 年になってからであった。一部の歴史家によれば、その理由の一つは、殻定理を証明するまでは地球を質点（point mass）とみなすことを正当化できなかったことにある。それを証明してしまうと、**プリンキピア**の残りの部分はそこから導かれた。今日では、この定理は**ガウス（*Gauss*）の法則**（Gauss's law）から簡単に導かれる。ガウスの法則とは、任意の閉曲面を通って外へ流れ出る重力場の総量は、その内部の質量に比例する、というものである。球殻の内部に、同じ中心をもつ球面をとる。その内部には質量がないので、そこを通る流れの総量は 0 である。それだけでは場が 0 になるとはいえない（一様な場は、一方の側から流れ込み反対側から流れ出るので、どの閉曲面を通る流れの総量も 0 である）。しかしここでは対称性が助けになる。場は中心へまっすぐ向かうか中心からまっすぐ離れる向きであり、球面上のどこでも強さが等しくなければならない。したがって流れの総量が 0 ならば場も 0 である。同じ法則が電場も支配する。帯電した金属の殻の内部に電場がないのも、自動車が雷から人を守ってくれるのも、このためである。

## 思考のスキル

### 和としての積分

連続的な物体の効果を求めるには、効果がわかっている小片に切り分けて足し合わせよ。小片の選び方には対称性を使え。

点から円環ができ、円環から球殻ができ、球殻から中身の詰まった球ができる。大学では、あらゆる場（重力場、電場、磁場）がこのようにして源から計算され、それはガウスの定理やストークス（Stokes）の定理のベクトル解析へとつながっていく。

## 次の一歩

1. **球殻の外側。**先ほどの囲みの問いを完成させ、球殻の外側では力が $\frac{GM}{b^2}$ であることを示せ。これより、質量 $M$ の中身の詰まった一様な球は、外側の質点を、その質量が中心にあるかのように引くことを導け。

2. **収縮時間。**STEP III 1987、問 14（`step.maths.org/questions/87-s3-q14`）に取り組んでみよ。塵の雲が自身の重力で収縮するのにかかる時間を求める問題であり、積分は三角関数による置換で計算できる。

3. **地球を貫くトンネル。**一様な中身の詰まった球の内部で、中心から距離 $b$ の点における力が $\frac{GMb}{a^3}$ であり、$b$ に比例することを示せ。これより、地球の中心を通るトンネルに落とした球は周期（period）$2\pi\sqrt{a^3/(GM)}$、すなわち約 84 分で振動（oscillate）することを導け。これは地表すれすれを回る人工衛星の周期と同じである。

4. **別の力の法則。**もし重力が逆三乗則に従うとしたら、球殻の内部での力はやはり 0 になるだろうか。（$\frac{1}{s^2}$ の代わりに $\frac{1}{s^3}$ として段階 3 をやり直せ。）

## さらに学ぶために

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press）。重力を扱った章で、殻定理も含まれる。
- **Subrahmanyan Chandrasekhar, *Newton's Principia for the Common Reader***（Oxford University Press）。命題 70 と 71 を含むニュートンの証明を、ノーベル賞受賞者が解説

している。

- **Andrew Pontzen, *The Universe in a Box***（Riverhead）。重力、収縮、シミュレーションによって宇宙の構造がどのように説明されるかを述べている。

# 10.8 三角形をなす三つの星

**問題**

**STEP I 1999、問 11**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/99-s1-q11`

## 導入

重力で引き合う 2 つの物体の運動は、ニュートン（Newton）が示し、Section 10.6 で説明したとおり、完全に解くことができる。各物体は共通の重心（centre of mass）のまわりを円錐曲線（conic）を描いて運動する。互いに束縛されていれば楕円（ellipse）、互いから脱出するのに十分なエネルギーをもっていれば放物線（parabola）または双曲線（hyperbola）である。ところが、3 つ目の物体を加えるとすべてが変わる。**三体問題**（three-body problem）には、よく知られた関数で表される一般解が存在しない。さらに 1890 年、ポアンカレ（Henri Poincaré）は、その解がカオス的（chaotic）になりうることを発見した。これが数学におけるカオスの最初の登場である。

それでも、特殊な解の中には完全に単純なものもある。1772 年、ラグランジュ（Joseph-Louis Lagrange）は、正三角形の頂点に置かれた 3 つの物体が、三角形が車輪のように回るかたちで剛体的に回転しうることを見いだした。この問題では、質量が等しい場合についてその解を求める。ラグランジュの三角形は単なる珍しい現象ではない。太陽、木星、そして何千もの「トロヤ群」（Trojan）小惑星がまさにこの配置をなしており、今日では宇宙望遠鏡も同様の点に配置されている。

## 取りかかる前に

**考えてみよう**　星が角速度（angular velocity）$\omega$ で半径 $R$ の円周上を運動するためには、星にはたらく力の合計はどのようでなければならないか。

その大きさは $m\omega^2 R$ で、向きは円の中心を向いていなければならない。したがって、各星にはたらく重力の合計が三角形の中心を向いていることを確かめ、その大きさをちょうどよくする $\omega$ を求めればよい。

## 順を追って解く

### 段階 1　幾何

**考えてみよう**　1 辺の長さが $a$ の正三角形の各頂点は、中心からどれだけ離れているか。

中心は各中線（median）上にあり、頂点から中線の長さの 3 分の 2 の位置にある。中線の長さは $a\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ であるから、各頂点から中心までの距離は

$$R = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

である。対称性より、三角形の中心は 3 つの等しい質量の星の重心である。

### 段階 2　1 つの星にはたらく力

**考えてみよう**　他の 2 つの星はそれぞれ大きさ $\frac{\gamma m^2}{a^2}$ の力で引く。2 つの引力のなす角はいくらか。それらの合力（resultant）は何であり、どの向きを向くか。

2 つの引力は、その星で交わる三角形の 2 辺に沿った向きであるから、なす角は $60^\circ$ である。対称性より、合力はこの角の二等分線（bisector）上にあり、二等分線は中心を通る。各引力は二等分線と $30^\circ$ の角をなすので、合力の大きさは

$$2\cdot\frac{\gamma m^2}{a^2}\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}\,\gamma m^2}{a^2},$$

であり、向きは中心を向く（図 10.8.1）。

### 段階 3　角速度

合力を $m\omega^2 R$ に等しいとおくと

$$m\omega^2 \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\gamma m^2}{a^2}, \qquad \text{よって} \qquad \omega^2 = \frac{3\gamma m}{a^3}.$$

この角速度のもとでは、同じ計算が（対称性により）各星に当てはまるので、3 つの星はすべて中心のまわりを円運動し、三角形は剛体的に保たれる。 ■

### 段階 4 中心に置かれた 4 つ目の星

**考えてみよう** 中心に置かれた質量 $\lambda m$ の星は、各頂点から距離 $\frac{a}{\sqrt{3}}$ にある。この星は頂点にある各星にどのような追加の力を及ぼすか。重心は動くか。中心の星には正味の力がはたらくか。

中心の星は重心を変えず、また対称性によりこの星が受ける 3 つの引力は打ち消し合うので、この星は静止したままである。中心の星は頂点にある各星を、大きさ $\frac{\gamma\lambda m^2}{(a/\sqrt{3})^2} = \frac{3\gamma\lambda m^2}{a^2}$ の力で中心に向かって引く。頂点の星にはたらく内向きの力の合計は $(\sqrt{3}+3\lambda)\frac{\gamma m^2}{a^2}$ となるので

$$m\omega^2 \frac{a}{\sqrt{3}} = (\sqrt{3}+3\lambda)\frac{\gamma m^2}{a^2}, \qquad \omega^2 = \frac{(3+3\sqrt{3}\,\lambda)\gamma m}{a^3} = \frac{3\gamma m}{a^3}(1+\sqrt{3}\,\lambda). \qquad ■$$

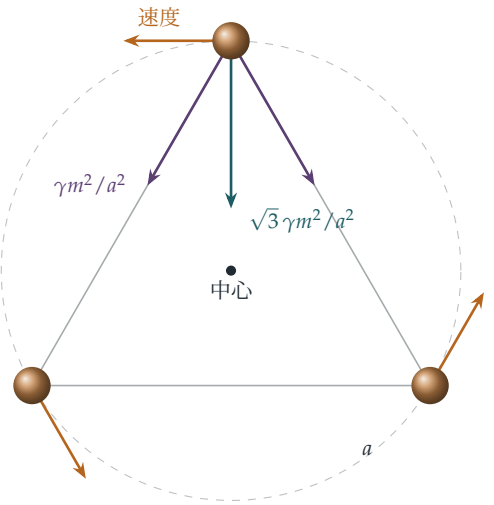



**図 10.8.1** 正三角形の頂点に置かれた、質量の等しい 3 つの星。上の星にはたらく 2 つの引力（紫）は、中心に向かう 1 つの力（青緑）に合成される。各星が適切な速さ（琥珀色）で破線の円周上を運動すれば、三角形全体が剛体的に回転する。これがラグランジュの正三角形解である。

## 振り返り

- **対称な解を推測する。**三体問題を解いたわけではない。対称性の高い運動を推測し、それがニュートンの法則で許されることを確かめたのである。
- **対称性が向きを決める。**合力は二等分線上になければならなかったので、計算が必要なのはその大きさだけであった。
- **すべての物体を確かめる。**対称性により、1 つの星を確かめれば 3 つすべてを確かめたことになった。中心の星には別の（簡単な）確認が必要であった。

## 背後にある数学

### 姿を変えたケプラーの法則

答えを $\omega^2 a^3 = \gamma(3m)$ と書いてみよう。距離 $a$ だけ離れて円軌道を描く 2 つの物体については、ケプラーの第 3 法則（Kepler's third law、Section 10.6 の演習問題）により $\omega^2 a^3 = \gamma(m_1 + m_2)$ が成り立つ。右辺に現れるのは全質量である。3 つの星も、全質量を $3m$ として同じ法則に従う。実際ラグランジュは、正三角形解が等しい質量の場合に限らず**任意の** 3 つの質量に対して存在することを示した。三角形は重心のまわりを $\omega^2 a^3 = \gamma(m_1 + m_2 + m_3)$ を満たして回転する。その数年前にはオイラー（Euler）が、3 つの物体が回転する 1 本の直線上に並ぶ別の解の族を見いだしていた。これら 5 つの配置（ラベルの付け方の違いを除いて、一直線上のものが 3 つ、三角形のものが 2 つ）が、3 つの物体が同じ形を保つ唯一の配置である。

### ラグランジュ点

$m_1$ を太陽、$m_2$ を惑星、$m_3$ をごく小さな小惑星としよう。正三角形解によれば、小惑星は太陽と惑星とともに正三角形をなす第 3 の頂点、すなわち軌道上で惑星の前方または後方に位置することができる。これらが**ラグランジュ点**（Lagrange points）$L_4$ と $L_5$ であり、オイラーの一直線上の解からは $L_1$、$L_2$、$L_3$ が得られる。木星には、その $L_4$ 点と $L_5$ 点の周辺に集まる「トロヤ群」小惑星が 1 万個以上知られている。ジェームズ・ウェッブ宇宙望遠鏡（James Webb Space Telescope）は、地球から 1.5 百万 km 先にある太陽–地球系の $L_2$ 点の近くを周回しており、そこでは太陽、地球、月をすべて日よけの背後に保つことができる。

### 安定性

スターメイカーたちの三角形は長続きするだろうか。質量が等しい場合は、続かない。ごくわずかな乱れが成長し、星々は飛び散るか衝突する。ラウス（Edward Routh）は

1875 年、ラグランジュの三角形が安定（stable）であるのは 1 つの質量が支配的な場合に限ること、正確には

$$27(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1) < (m_1 + m_2 + m_3)^2.$$

が成り立つときに限ることを示した。太陽と木星についてはこれが余裕をもって成り立ち、それゆえトロヤ群は生き残っている。3 つの等しい質量では $27 \times 3m^2 > 9m^2$ であるから、この配置は不安定である。

### ポアンカレの誤りと 8 の字解

1887 年、スウェーデン国王オスカル 2 世（Oscar II）は、多体問題の解に対して懸賞を設けた。1889 年、ポアンカレは三体問題に関する長大な論文でこの賞を得たが、論文の印刷中に編集者が議論の欠陥を見つけた。それを修正する過程で、ポアンカレは、ある解が「あまりに驚くべき複雑さで、図を描こうと試みることさえできない」ふるまいをすることを発見した。これがカオスの最初の一端である。印刷済みの冊子は回収されて廃棄され、その費用はポアンカレが負担した。新しい特殊解は今なお見つかり続けている。1993 年に Cristopher Moore が数値的に発見し、2000 年に Alain Chenciner と Richard Montgomery が証明したように、3 つの等しい質量は 8 の字形の曲線上を互いに追いかけ合うことができる。その後、計算機によって何千もの周期軌道（periodic orbit）が新たに見つかっている。

## 思考のスキル

**対称な解を推測し、確かめる**

問題が難しすぎて一般には解けないときは、できるだけ対称性の高い解を探そう。対称な推測によって多くの未知数が *1* つか *2* つに減り、その確認はしばしば容易である。

これは数学と物理学における強力な戦略である。対称な平衡状態、定常状態、進行波、剛体的に回転する配置は、多くの場合最初に見つかる解であり、残りの解を調べる出発点となる。そして次に問うべきは常に、その対称な解が安定かどうかである。

## 次の一歩

1 **正方形に並んだ 4 つの星。**質量 $m$ の 4 つの星が 1 辺 $a$ の正方形の頂点に置かれている。これらが $\omega^2 = \frac{(4+\sqrt{2})\gamma m}{2a^3}$ で中心のまわりを剛体的に回転しうることを示せ。

2 **2 つの等しい星と 1 つの惑星。**質量 $M$ の 2 つの星が距離 $a$ だけ離れて、重心のまわりを周回している。質量の無視できる惑星が中心にある。この惑星は平衡（equilibrium）状態にあるか。2 つの星を結ぶ直線に沿った微小な変位に対して安定か。その直線に垂直な変位に対してはどうか。

3 **等しくない質量。**質量 $m_1$、$m_2$、$m_3$ の 3 つの星が 1 辺 $a$ の正三角形の頂点にあり、重心 $G$ のまわりを回転している。$m_1$ の位置を $P_1$ とするとき、$m_1$ にはたらく重力が $\frac{\gamma m_1(m_1+m_2+m_3)}{a^3}\overrightarrow{P_1G}$ であることを示せ（**ヒント：**力をベクトルで表し、重心の定義を用いよ）。これからラグランジュの結果を導け。

4 **$n$ 個の星。**$n$ 個の等しい星が、半径 $R$ の円に内接する正 $n$ 角形の頂点にある。剛体的な回転に対する $\omega^2$ を、$\frac{1}{\sin(k\pi/n)}$ の $k$ についての和として求めよ。

## さらに学ぶために

- **June Barrow-Green, *Poincaré and the Three Body Problem***（American Mathematical Society）。懸賞の経緯と、ポアンカレによるカオスの発見の物語。
- **Richard Montgomery,「A new solution to the three-body problem」**, *Notices of the American Mathematical Society* 48 (2001)。発見者の 1 人による 8 の字解の解説。オンラインで無料で読める。
- **Florin Diacu & Philip Holmes, *Celestial Encounters***（Princeton University Press）。三体問題とカオスの一般向けの歴史。

# これまでに学んだこと

この章の冒頭で、決して変わらないものがあり、それがどれなのかを知ることが物理学の半分である、と述べた。そして三つの問いを立てた。保存則（conservation law）はそれだけで何を決められるのか。小さな一歩はどのように積み重なるのか。多くの物体をどう扱えばよいのか。本章の八つの問題が示したことを以下にまとめる。

### 1. 保存則はそれだけで何を決められるのか

一直線上で弾性衝突（elastic collision）する二つの物体については、運動量（momentum）とエネルギーによって結果が完全に決まり、この一つの結果を何度も繰り返し使った。しかし物体が三つ以上になると、そうはいかない。Section 10.1 では、一列に並んだビー玉について、両方の保存則と矛盾しない結果が数多くあり、そのいくつかを排除するには、さらに別の物理的事実（ビー玉は互いにすり抜けられない）が必要であった。運動量の 2 乗からエネルギーを引くと交差項（cross terms）の和が得られ、それが 0 にならなければならなかった。これは、ある種の運動が不可能であることを証明する不等式による議論である。そして、ニュートンのゆりかご（Newton's cradle）のおなじみの振る舞いは、保存則を超えた細部、すなわち衝撃が球の中をどのように伝わるかに依存していることがわかった。

保存則は、隠れた仮定を明らかにすることもあった。Section 10.3 では、銃を一度にすべて撃つほうが一つずつ撃つよりも大きな速さが得られたが、それはより多くのエネルギーを使っていたからにすぎず、固定すべき量を正しく選ぶと結論は逆転した。

### 2. 小さな一歩はどのように積み重なるのか

いくつかの節では、一つの単純な操作を繰り返した。Section 10.2 では、速さをせいぜい 2 倍にしかできない衝突が、次々と軽くなっていく球の連鎖を通じて、際限のない増幅となった。これはバスケットボールとテニスボールの原理であり、重力スリングショット（gravitational slingshot）の原理でもある。Section 10.3 では、多数の小さな噴射が積分となり、ツィオルコフスキー（Tsiolkovsky）の対数が現れた。これは、ロケットの大部分が燃料である理由、そしてロケットが多段式である理由を説明する。Section 10.4 では、動くピストンで跳ね返るたびに分子の速さに $2u$ が加わり、厳密な漸化式（recurrence）によって、速さと長さの積がほぼ一定に保たれることが明らかになった。これが断熱不変量（adiabatic invariant）であり、圧縮された気体が熱くな

る理由である。そして Section 10.5 では、無限回の跳ね返りが有限の時間で終わった。それぞれの時間が収束する等比級数（geometric series）をなしていたからである。

### 3. 多くの物体をどう扱えばよいのか

座標をうまく選び、対称性を活用することによってである。Section 10.6 では、重心（centre of mass）は等速で動き、相対位置は換算質量（reduced mass）をもつ一つの粒子のように振る舞った。さらに、隠れた平面の存在によって、距離の 2 乗が時間の 2 次式になる理由まで説明できた。Section 10.7 では、対称性と積分により、球殻（spherical shell）はその内部には重力を及ぼさず、外部に対しては質点として働くことが示された。これによって、収縮する塵の雲をただ一つの方程式で扱うことができ、星形成の速さを決める自由落下時間（free-fall time）が得られた。そして Section 10.8 では、対称性を仮定した推測によって、解くことのできない三体問題（three-body problem）の特殊な場合が解けた。ラグランジュ（Lagrange）の回転する三角形であり、トロヤ群小惑星（Trojan asteroids）として実現している。

### 4. 力学の道具箱

| 手法 | 使った場面 |
|---|---|
| 制約としての保存則 | ニュートンのゆりかご（10.1） |
| 座標系の変換 | 衝突（10.2）、ピストン（10.4） |
| 一つの結果の反復 | 積み重ねた球（10.2） |
| 質量が変化する場合の運動量 | ロケット（10.3） |
| 和から積分へ | ロケット方程式（10.3）、球殻（10.7） |
| 漸化式と打ち消し合う和（telescoping） | ピストン（10.4） |
| 等比級数 | くさび（10.5） |
| 重心と換算質量 | 二体問題（10.6） |
| エネルギー積分 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$ | 二体問題（10.6）、収縮（10.7） |
| 対称性を仮定した推測 | 三つの星（10.8） |

### この先へ

- 第 11 章では、保存から振動と回転へと話題を移す。共鳴（resonance）、基準振動（normal modes）、実際の振り子、そして加速する座標系や回転する座標系での運動を扱う。
- Section 8.2 のエネルギー法と Section 8.4 のリミットサイクル（limit cycle）は、同じ考え方を微分方程式の側から見たものである。

- ポアンカレ（Poincaré）が三体問題の中に見いだしたカオス（chaos）は、Section 8.7の主題である。

**大学入学前にさらに先へ進みたい人へ**

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***：大学1年生向けの古典的な教科書。歯ごたえがあるが、それだけの価値がある。
- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***：数百題の問題を収め、その多くは本章の問題と同じくらい意外性に富んでいる。
- **リチャード・ファインマン（Richard Feynman）, *The Character of Physical Law***（邦題『物理法則はいかにして発見されたか』）：保存則、対称性、重力について一般向けに行った講義。
- **Dwight Neuenschwander, *Emmy Noether's Wonderful Theorem***：対称性からなぜ保存則が導かれるのかを解説する。

ファインマンは、エネルギー保存則には知られている例外が一つもないと述べた。本章では、保存則にどれほどのことができるかを示そうとしてきた。不可能な結果を排除し、隠れた不変量を明らかにし、どうしようもなく複雑な系を理解できる系へと変えることである。しかし同時に、その限界も示してきた。保存則は制約を与えるが、常に結果を決めるわけではない。保存則が及ばないところでは、力や対称性、座標系の細部がその役割を引き継がなければならない。

# 「次の一歩」の解答

以下は完全な解答ではなく、簡潔な答えとヒントである。自分の解答を確かめられるように、結果と鍵となる一歩を示してある。答えを見る前に、まずは各問題にきちんと取り組んでほしい。

## 10.1 ニュートンのゆりかご

1. すべての衝突が終わった後では、動いている粒子のすぐ後ろに、それより遅い粒子が続くことはない。したがって、ちょうど 1 個だけが動くなら、それは $A_n$ である。しかし $\lambda \neq 1$ のとき、$\lambda m v = m u$ と $\lambda m v^2 = m u^2$ は両立しない。$A_{n-1}$ と $A_n$ だけが動くなら、方程式は $m$ と $\lambda m$ の衝突の方程式になり、$A_{n-1}$ の速度は $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}u < 0$ となる。ところがそうすると、それは $A_{n-2}$ に衝突してしまう。3 個の粒子が動く場合は、小問 (ii) とまったく同様に否定される。動く 2 個は、速さ $\frac{\lambda-1}{\lambda+1}u$ で後ろ向きに進む $A_0$ と、速さ $\frac{2u}{\lambda+1}$ で前向きに進む $A_n$ である。

2. 等しいビー玉どうしは速度を交換するので、速さ $u$ は $A_n$ まで受け渡される。次に $A_n$ が $A_{n+1}$ に衝突する。$A_{n+1}$ は速さ $\frac{2u}{1+\lambda}$ で離れ、$A_n$ は速さ $\frac{\lambda-1}{\lambda+1}u$ で跳ね返る。この後ろ向きの速度は列を逆にたどって $A_0$ まで受け渡され、$A_0$ はその速さで後ろ向きに離れていく。

3. 「2 個が速さ $u$ で飛び出す」場合、運動量（momentum）は $2mu$、エネルギーは $mu^2$ で、衝突前と同じである。それ以上衝突が起こらない別の解として、最後の 3 個の球がそれぞれ $\frac{u}{3}$、$\frac{u}{3}$、$\frac{4u}{3}$ で動き出すものがある（検算：合計は $2u$、2 乗の合計は $2u^2$）。実際のニュートンのゆりかごが前者を選ぶのは、球どうしがわずかに離れていて、衝突が 1 組ずつ起こるからである。

4. 速さは $A_n$ まで受け渡され、$A_n$ はより軽い $A_{n+1}$ に衝突する。$A_{n+1}$ は速さ $\frac{2u}{1+\lambda}$ で離れ、$A_n$ はそれより遅い速さ $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}u$ で後に続く。ほかには何も動かない。

## 10.2 重ねたボールの効果

1. 球は速さ $U = \sqrt{2gH}$ で床に達し、速さ $eU$ で跳ね返って高さ $e^2H$ まで上がる。小さい球を上に載せた場合、速さ $eU$ で上昇する大きい球が、速さ $U$ で下降する小さい球と出会う。運動量保存と反発係数（coefficient of restitution）の式から、小さい球の上向きの速さは $w = U\frac{Me(2+e)-m}{M+m}$ となる。その中心は高さ $2R + r = 0.45$

から出発して 4.5 まで上がるので、$\frac{w^2}{2g} = 4.05$ であり、$\frac{w}{U} = \sqrt{\frac{4.05}{1.8}} = 1.5$ となる。$e = \frac{2}{3}$ のとき $\frac{16}{9}M - m = 1.5(M + m)$ であるから、$M = 9m$ を得る。

2. 運動量保存と反発係数の式から、$P_1$ の速さは $\frac{1+e}{1+\lambda}u$ となる。各衝突は同じ質量比でこれを繰り返すので、$P_n$ は速さ $\left(\frac{1+e}{1+\lambda}\right)^n u$ で動く。速さ $s$ の粒子は、次の粒子に衝突した後に速さ $\frac{1-\lambda e}{1+\lambda}s$ となり、衝突された粒子のほうは、自身の次の衝突によって速さ $\frac{(1+e)(1-\lambda e)}{(1+\lambda)^2}s$ まで減速される。$\lambda e < 1$ のとき、1 番目の粒子が 2 番目の粒子に再び追いつくのは $\frac{1-\lambda e}{1+\lambda} > \frac{(1+e)(1-\lambda e)}{(1+\lambda)^2}$、すなわち $\lambda > e$ のときに限る。よって $e > \lambda$ ならば、各粒子は 1 回衝突され、1 回衝突する。$\lambda e = 1$ ならば、各粒子は次の粒子に衝突した後、その場で停止する。

3. 一番下の球は速さ $U$ で跳ね返り、（速さ $U$ で下降している）真ん中の球と出会う。相対速度は $2U$ なので、真ん中の球は速さ $3U$ で離れる。一番上の球は相対速度 $4U$ でこれと出会い、速さ $7U$ で離れて高さ $49H$ まで上がる。一般に $u_{j+1} = 2u_j + U$ であるから、$u_j + U = 2^j U$ となる。

4. 弾性衝突（elastic collision）では運動エネルギー（kinetic energy）が保存される。$A$ のエネルギーは $\frac{1}{2}m\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda}\right)^{2n}u^2$ であり、最初のエネルギーは $\frac{1}{2}\lambda^n m u^2$ である。$\frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2} < 1$ なので、$A$ がもともとあった以上のエネルギーを得ることは決してない。重い粒子はそれぞれ速さの $\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$ 倍を保って前向きに動き続け、残りのエネルギーを持ち続ける。

### 10.3 ロケットと大砲

1. 一度にすべて発射する場合、$Mu = nm(v - u)$ より $u = \frac{nmv}{M+nm}$ である。1 個ずつ発射する場合、第 $r$ 回目の発射で $\big(M + (n - r + 1)m\big)(u_r - u_{r-1}) = mv$ となるので、$u_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{mv}{M+jm}$ であり、最後の項を除くすべての項は $\frac{mv}{M+nm}$ より大きい。したがって $u_n > u$ である。

2. 運動量保存より $M(1 + bx)v = MV$ である。すると $(1 + bx)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = V$ なので、$x + \frac{1}{2}bx^2 = Vt$ であり、$x = \frac{\sqrt{1+2bVt}-1}{b}$ となる。力が働く場合は、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(M(1+bx)v\big) = Mf$ から $(1 + bx)v = ft + V$ を得る。一定の速さ $c$ で動くには $x = ct$ かつ $(1 + bct)c = ft + V$ が必要なので、$c = V$ かつ $bV^2 = f$ である。そうでなければ $x + \frac{1}{2}bx^2 = \frac{1}{2}ft^2 + Vt$ となるので、$x \sim t\sqrt{f/b}$ であり、$v \to \sqrt{f/b}$ となる。

3. 1 段式では $v \ln 10 \approx 2.30v$ である。2 段式では $v \ln \frac{10}{5.5} + v \ln \frac{5}{0.5} \approx 0.60v + 2.30v = 2.90v$ である。

4. $0 \le s \le x$ のとき $\frac{1}{1+x} \le \frac{1}{1+s} \le 1$ である。これを $[0, x]$ で積分すればよい。

## 10.4 分子とピストン

1. 漸化式（recurrence relation）は順に打ち消し合って $d_n = \frac{(v+u)d_1}{v+(2n-1)u}$ となるので、$v_n d_n = \frac{(v+2nu)(v+u)d_1}{v+(2n-1)u}$ であり、これは $(v+u)d_1$ を $\frac{u(v+u)d_1}{v+(2n-1)u} \to 0$ だけ上回る。

2. $u$ を $-u$ に置き換える。後退するピストンで跳ね返るたびに $2u$ だけ失うので、（粒子がまだピストンに追いつける間は）$v_n = v - 2nu$、$d_n = \frac{(v-u)d_1}{v-(2n-1)u}$ であり、$v_n d_n = \frac{(v-2nu)(v-u)d_1}{v-(2n-1)u}$ となる。これもやはり $(v-u)d_1$ に近い。

3. $v = u$ のとき $v_n = (2n+1)u$ である。第 $n$ 回目の衝突で運動量は $m(v_{n-1} + v_n) = 4nmu$ だけ変化し、$t_n = \frac{d_1}{un(n+1)}$ なので、平均の力は $\frac{4mu^2n^2(n+1)}{d_1}$ であり、その大きさは $n^3$ の程度である。各周期での仕事はおよそ力 $\times\, ut_n$、すなわちほぼ $4nmu^2$ であり、これらを足し合わせると無限大になる。ピストンを奥まで押し込むには無限の仕事が必要になるのであり、これは分子のエネルギー $\frac{1}{2}m(2n+1)^2u^2$ が限りなく大きくなることと対応している。

4. 不変量（invariant）は $\oint p\,\mathrm{d}q = 2\int_0^h m\sqrt{2g(h-z)}\,\mathrm{d}z \propto h^{3/2}$ である。ここで $h$ は床から測った跳ね上がりの高さである。したがって床がゆっくり上昇するとき、$h^{3/2}$（同じことであるが $v^3$、あるいはエネルギーと周期の積）はほぼ一定に保たれる。

## 10.5 有限時間に無限回の跳ね返り

1. 正弦定理（sine rule）より $M_1N_1 = \frac{OM_1 \sin 30^\circ}{\sin\theta}$ であり、続く各区間は比 $\rho = \frac{\sin(\theta-30^\circ)}{\sin\theta} < 1$ で縮んでいく。合計は $\frac{M_1N_1}{1-\rho} = \frac{OM_1}{2\big(\sin\theta - \sin(\theta-30^\circ)\big)} = \frac{OM_1}{4\sin 15^\circ \cos(\theta-15^\circ)}$ である。

2. 三角形 $OM_1N_1$ の角から $\varphi = \theta - \alpha$ を得る。時間の比は $\frac{\rho}{k} = \frac{\sin(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha)}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin(2\theta-2\alpha)}{\sin 2\theta}$ であり、これが 1 より小さくなるのは、ちょうど $\alpha < \theta < 45^\circ + \frac{1}{2}\alpha$ のときである。

3. くさびをその壁で折り返していくと、経路は 1 本の直線に展開される。$O$ のまわりにはくさびの複製が 12 個収まり、$O$ を通らない直線はそのうち高々 6 個しか横切らない。したがって、粒子が $O$ に向けてまっすぐ打ち出されない限り、跳ね返りは有限回で終わり、粒子は外へ抜け出す。

4. まず $t_0 = \sqrt{2/9.8} \approx 0.452$ 秒間落下する。各回の跳ね返りは $2e^k t_0$ だけ続くので、全時間は $t_0\big(1 + \frac{2e}{1-e}\big) = 9t_0 \approx 4.07$ 秒である。移動距離は $1 + 2\sum_{k\ge1} e^{2k} = 1 + \frac{2(0.64)}{0.36} \approx 4.56\,\mathrm{m}$ である。

## 10.6 二体が一体になる

1. 糸は張ったままで、相対速度は糸に垂直であり、その大きさは一定値 $u$ なので、$\theta = \frac{ut}{r}$ である。運動量保存より $my + MY = mut$ となる。$A = G - \frac{M}{m+M}\overrightarrow{AB}$ かつ $\overrightarrow{AB} = r(\cos\theta, -\sin\theta)$ であるから、$y = \frac{1}{m+M}\left(mut + Mr\sin\frac{ut}{r}\right)$ である。すると $\dot{y} = \frac{u}{m+M}\left(m + M\cos\frac{ut}{r}\right)$ であり、これは $\cos\frac{ut}{r} < -\frac{m}{M}$ のとき負になる。これは $M > m$ ならば起こりうる。

2. 今度は $\ddot{z} = -\frac{3}{z^3}$ なので、（$z = 1$、$\dot{z} = -1$ を用いて）$\dot{z}^2 = \frac{3}{z^2} - 2$ である。$w = z^2$ とおくと $\ddot{w} = 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = -4$ なので、$z^2 = 1 - 2t - 2t^2$ となる。2 つが衝突するのは $t = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0.366$ のときである。

3. $\mathbf{p} = (1, 0)$、$\mathbf{q} = (-1, \sqrt{3})$ とすると $z^2 = 4t^2 - 2t + 1 = |\mathbf{p} + \mathbf{q}t|^2$ である。これは $(1, 0)$ を通り方向 $(-1, \sqrt{3})$ をもつ直線であり、$\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}t}{1-t}$ である。すると $z^2\dot{\theta} = |\mathbf{p} \times \mathbf{q}| = \sqrt{3}$ となる。この斥力は、角運動量（angular momentum）$h = \sqrt{3}$ をもつ平面内の自由運動における「遠心力（centrifugal）」項 $\frac{h^2}{z^3}$ そのものである。

4. 2 つの星は重心（centre of mass）からそれぞれ距離 $\frac{m_2 a}{m_1+m_2}$ と $\frac{m_1 a}{m_1+m_2}$ の位置にある。1 つ目の星について $\frac{Gm_1m_2}{a^2} = m_1\omega^2\frac{m_2 a}{m_1+m_2}$ なので、$\omega^2 = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}$ であり、$T = \frac{2\pi}{\omega}$ である。

## 10.7 球殻の内部の重力

1. 外側（$b > a$）では、段階 3 と同じ積分を $s$ について $b - a$ から $b + a$ まで行うことになり、$\frac{GM}{b^2}$ を得る。中身の詰まった球は同心の球殻の和集合であり、各球殻はその質量が中心に集まっているかのように働く。

2. $r = R\cos^2\alpha$ とおくと $\frac{1}{r} - \frac{1}{R} = \frac{\tan^2\alpha}{R}$ なので、速さは $\sqrt{2GM/R}\tan\alpha$ である。すると $\mathrm{d}t = \frac{2R\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{2GM/R}\tan\alpha} = \sqrt{\frac{R^3}{2GM}}\,2\cos^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha$ となるので、これを積分すればよい。

3. （殻定理（shell theorem）により）引力を及ぼすのは半径 $b$ の内側にある質量 $M\frac{b^3}{a^3}$ だけであり、引力は $\frac{GMb}{a^3}$ となる。これは $\omega^2 = \frac{GM}{a^3}$ の単振動（simple harmonic motion）であり、$a = 6.37 \times 10^6\,\mathrm{m}$、$GM = 3.99 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3\,s^{-2}}$ とすると、周期は $2\pi\sqrt{a^3/GM} \approx 84$ 分である。半径 $a$ の人工衛星では $\omega^2 a = \frac{GM}{a^2}$ であり、同じ $\omega$ となる。

4. 成り立たない。$\frac{1}{s^3}$ の場合、被積分関数はもはや定数に簡単化されず、球殻の近い側が勝つ。すなわち、粒子は球殻の最も近い部分のほうへ引かれる。厳密な打ち消し合いが起こるのは逆二乗則（inverse-square law）の場合だけである（球殻の微小部分の面積は $s^2$ に比例して増え、力の減少をちょうど相殺する）。

## 10.8 三角形をなす三つの星

1. 各星は中心から $\frac{a}{\sqrt{2}}$ の距離にある。隣り合う 2 つの星は、中心向きの成分の合計が $\frac{2\gamma m^2}{a^2}\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}\gamma m^2}{a^2}$ の引力を及ぼし、向かい側の星は $\frac{\gamma m^2}{2a^2}$ の引力を及ぼす。$\frac{\gamma m^2}{a^2}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right) = m\omega^2\frac{a}{\sqrt{2}}$ とおくと、$\omega^2 = \frac{(4+\sqrt{2})\gamma m}{2a^3}$ を得る。

2. 中心では引力が打ち消し合うので、惑星は平衡（equilibrium）の状態にある。星を結ぶ直線に沿っては不安定である。一方の星に向かって距離 $x$ だけ動くと、およそ $\frac{32\gamma Mx}{a^3}$ の外向きの合力が働く。公転面に垂直な方向には安定であり、およそ $\frac{16\gamma Mz}{a^3}$ の復元力が働く。（公転面内で直線に垂直な方向には重力が復元力として働くが、回転によってこの運動は不安定な方向の運動と結びついてしまう。）

3. $m_1$ に働く力は $\frac{\gamma m_1}{a^3}\big(m_2(P_2-P_1)+m_3(P_3-P_1)\big)$ である。$m_1P_1+m_2P_2+m_3P_3 = (m_1+m_2+m_3)G$ であるから、これは $\frac{\gamma m_1(m_1+m_2+m_3)}{a^3}(G-P_1)$ となる。どの星も、$G$ からの距離に比例し、しかも同じ比例定数で $G$ のほうへ引かれるので、すべての星が $\omega^2 = \frac{\gamma(m_1+m_2+m_3)}{a^3}$ で剛体のように回転できる。

4. $k$ 個先の星は距離 $2R\sin\frac{k\pi}{n}$ の位置にあり、その引力の中心向きの成分は $\sin\frac{k\pi}{n}$ 倍である。よって $m\omega^2R = \frac{\gamma m^2}{4R^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin(k\pi/n)}$ であり、$\omega^2 = \frac{\gamma m}{4R^3}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin(k\pi/n)}$ を得る。$n=3$、$R=\frac{a}{\sqrt{3}}$ のとき、これは $\frac{3\gamma m}{a^3}$ となる。

章

# 11

# 振動・回転・運動する座標系

揺れるもの、回るもの、そして動いている場所から眺めたもの。

この章の内容


| | | |
|---|---|---|
| 11.1 | 共鳴 | STEP II 1991 |
| 11.2 | 基準振動 | STEP III 2014 |
| 11.3 | 本当の振り子 | STEP III 1998 |
| 11.4 | 等時曲線 | STEP III 1994 |
| 11.5 | 加速する列車の中の重力 | STEP II 2021 |
| 11.6 | バックスピン | STEP III 1997 |
| 11.7 | 棒の中のシンプソンの公式 | STEP II 1989 |
| 11.8 | 傾いたつり合い | STEP III 2025 |
| 11.9 | 安全放物線 | STEP II 2014 |
| 11.10 | こちらへ戻ってくるボール | STEP II 2019 |
| 11.11 | 野手はどのように捕球するか | STEP II 1998 |
| 11.12 | ゴムひもの上のアリ | STEP II 2018 |
| 11.13 | 除雪車問題 | STEP III 見本問題（Specimen paper） |
| 11.14 | 懸垂線ではなく放物線 | STEP I 1991 |
| A | 演習問題の答え | p. 853 |

# 運動を明快に見る

若い理論物理学者の経歴とは、調和振動子をますます高い
抽象度で扱い続けることにほかならない。

— シドニー・コールマン（Sidney Coleman）の言葉とされる

前章では、保存則（conservation laws）を用いて衝突と重力を理解した。本章では、力学（dynamics）の最初の講義で扱われるほかの大きなテーマに目を向ける。すなわち、振動（oscillation）するもの、回転（rotation）するもの、そして最も有用な視点から運動を記述する技術である。

振動はいたるところにある。振り子とばねは教科書の定番の例であるが、同じ数学が分子の振動、建物の揺れ、ラジオの回路、さらには量子力学（quantum mechanics）における光そのもののふるまいをも記述する。その理由は、安定平衡（stable equilibrium）の近くにあるほとんどすべてのものが、ばねのようにふるまうからである。少しだけ引っ張ると、復元力（restoring force）は変位に比例する。したがって単振動子（simple harmonic oscillator）は、ほとんどあらゆる物理系の第一近似であり、物理学の大部分は、この近似が完全には正しくないときに何が起こるかを理解することから成り立っている。

### なぜこれが重要なのか

技術者は、自分が建てるあらゆる構造物の固有振動数（natural frequencies）を知っていなければならない。それを風や交通や地震の振動数から遠ざけておくためである。化学者は分子をその振動によって識別する。ホイヘンス（Huygens）の振り子時計から水晶時計、原子時計に至るまで、時間の計測とは完璧な振動子をつくる技術である。回転は、スヌーカーの球の回転から人工衛星の安定性に至るまで、あらゆるものを支配している。そして、どの基準系（frame of reference）が「自然な」ものかという問いは、重力と加速度の等価性を経て、アインシュタイン（Einstein）の一般相対性理論（general relativity）へとつながった。

本章の最後には、**意外な軌道**としてまとめた 6 つの問題がある。放物体、アリ、野手、除雪車など、そのふるまいが直観の予想とは異なるものを扱う。いずれも短く洗練された問題であり、それぞれの中心にはれっきとした数学的アイデアがある。包絡線（envelope）、単調性（monotonicity）、フィードバック（feedback）、発散（divergence）、

線形微分方程式（linear differential equation）、そして放物線（parabola）と懸垂線（catenary）の違いである。

### 大学で出会うもの

大学 1 年の力学の講義では、単振動、減衰振動（damped oscillation）、強制振動（forced oscillation）、共鳴（resonance）、そして連成振動子（coupled oscillators）とその基準振動（normal modes）を扱う（ここで線形代数（linear algebra）と力学が出会う）。また、剛体（rigid body）、慣性モーメント（moment of inertia）、転がり運動（rolling）、さらに加速度運動や回転をする座標系における運動を、遠心力（centrifugal force）やコリオリ力（Coriolis force）とともに扱う。その後の講義では、これらすべてがラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）とハミルトン力学（Hamiltonian mechanics）へと発展し、そこでは座標の選び方が中心的なテーマとなる。また、空間に広がった振動である波動（waves）の理論へも発展する。振幅の大きい振り子のような非線形振動（nonlinear oscillations）は、楕円関数（elliptic functions）や第 8 章の力学系（dynamical systems）へとつながる。

### 本章を貫く問い

**3 つの大きな問い**

1. **運動が単純になるのはいつか。**系がただ 1 つの決まった振動数で振動するのはどのようなときか。そうならないときには何が起こるのか。
2. **正しい視点とは何か。**どの座標、どの変数、どの基準系を選べば問題がやさしくなるのか。
3. **直観は信頼できるか。**運動についての日常的な直観はどこで誤るのか。そして数学はそれをどのように正すのか。

本章は振動から始まる。共鳴（Section 11.1）、基準振動、現実の振り子、そして等時曲線（tautochrone）である。続いて座標系と剛体に移る。加速する列車、回転するビー玉、3 つの質点のようにふるまう棒、そして 3 つの異なる傾きで静止できる立体である。最後の 6 つの節が意外な軌道である。

## 本章に登場するアイデア

| § | 主題 | アイデア |
|---|---|---|
| 11.1 | 強制振動 | 共鳴とうなり（beats） |
| 11.2 | 連成振動子 | 基準振動は固有ベクトル（eigenvectors）である |
| 11.3 | 現実の振り子 | 楕円積分（elliptic integrals）、算術幾何平均（AGM） |
| 11.4 | 等時曲線 | 弧長（arc length）についての単振動 |
| 11.5 | 運動する座標系 | 見かけの力（fictitious forces）、等価原理（equivalence principle） |
| 11.6 | 転がりと滑り | 保存される角運動量（angular momentum） |
| 11.7 | 慣性モーメント | 力学的等価性（dynamical equivalence）、シンプソンの公式（Simpson's rule） |
| 11.8 | 安定性 | 重心（centre of mass）を通る法線 |
| 11.9 | 放物運動 | 軌道の包絡線 |
| 11.10 | 放物運動 | 距離は増加するとは限らない |
| 11.11 | 捕球 | フィードバックの規則 |
| 11.12 | 伸びるロープ | 割合と調和級数（harmonic series） |
| 11.13 | 除雪車 | 距離の関数としての時間 |
| 11.14 | 吊り橋 | 懸垂線ではなく放物線 |

Section 11.6 と Section 11.7 の 2 つの節では回転の力学と慣性モーメントを用いるが、これらは 2019 年に STEP の出題範囲から外された。それでも収録したのは、いずれも優れた問題だからである。どちらの節でも、必要な事実はその場で与えてある。

## 本章の読み方

計算を始める前に、その問題がどの変数を求めているのかを考えよう。等時曲線では弧長、連成ばねでは $x \pm y$、アリではロープ全体に対する割合、除雪車では距離の関数としての時間である。いずれの場合も、正しい選択をすれば、難しい問題が見慣れた問題に変わる。

# 11.1 共鳴

**問題**

**STEP II 1991、問 12**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/91-s2-q12`

## 導入

ブランコに乗った子どもをちょうどよいタイミングで押すと、小さな一押しが積み重なって大きな揺れになる。リズムを外して押しても、たいしたことは起こらない。振動する系にはどれも**固有振動数**（natural frequency）があり、その振動数で系を駆動すると、加えた力とは釣り合わないほど大きな応答が生じる。これが**共振**（resonance）である。歌手がワイングラスを割ることができるのも、兵士が橋を渡るときに歩調を乱すのも、ラジオが何千もの放送局の中から一つを選び出せるのも、これが理由である。

この問題では、弾性ひもの上端を揺らし、ひもがたるまずに張ったままでいるのはどのようなときかを問う。答えには因子 $\frac{1}{n-p}$ が含まれ、駆動振動数 $p$ が固有振動数 $n$ に近づくと、この因子は限りなく大きくなる。共振の近くでは、ゆるやかに揺らすだけでひもがたるんでしまうのである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 質点は伸び（extension）$c$ で平衡（equilibrium）の状態にぶら下がっている。ひもの弾性率（modulus）を $\lambda$ とするとき、$\lambda$、$a$、$c$、$m$、$g$ の間にはどのような関係があるか。上端が $b\sin pt$ だけ下がり、質点が $x$ だけ下がったとき、伸びはいくらか。

平衡状態では張力（tension）と重力が等しい：$\frac{\lambda c}{a} = mg$。上端が $b\sin pt$ だけ下に変位し、質点が $x$ だけ下に変位すると、ひもの長さは $x - b\sin pt$ だけ増えるので、伸びは

$c + x - b\sin pt$ である。

## 順を追って解く

### 段階 1　運動方程式

下向きを正とすると、質点にはたらく力は重力 $mg$ と、上向きの張力 $\frac{\lambda}{a}(c + x - b\sin pt)$ である。$\frac{\lambda c}{a} = mg$ を用いると、

$$m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{a}(c + x - b\sin pt) = -\frac{\lambda}{a}(x - b\sin pt),$$

となる。$\frac{\lambda}{ma} = \frac{g}{c} = n^2$ であるから、これは $\ddot{x} = -n^2(x - b\sin pt)$ である。 ■

質点は、動く点 $b\sin pt$ に向かってばねのような力で引かれている。駆動がなければ、質点は角振動数（angular frequency）$n$、すなわち固有振動数で振動する。

### 段階 2　解を求める

**考えてみよう**　方程式は $\ddot{x} + n^2x = n^2b\sin pt$ である。$x = C\sin pt$ の形の特解（particular solution）を試してみよ。次に $\ddot{x} + n^2x = 0$ の一般解（general solution）を加えよ。質点はどのような初期条件を満たすか。

$x = C\sin pt$ を代入すると $(-p^2 + n^2)C = n^2b$ となるので、$C = \frac{n^2b}{n^2 - p^2}$ である（$p \neq n$ が必要）。余関数（complementary function）は $D\cos nt + E\sin nt$ である。質点は平衡位置で静止した状態から動き始める。$x(0) = 0$ から $D = 0$ が従い、$\dot{x}(0) = 0$ から $Cp + En = 0$ が得られるので、$E = -\frac{nbp}{n^2 - p^2}$ である。以上をまとめると、

$$x(t) = \frac{bn}{n^2 - p^2}(n\sin pt - p\sin nt).$$ ■

### 段階 3　張ったままでいる条件

**考えてみよう**　ひもが張っているのは、伸びが正であるときであり、またそのときに限る。伸び $c + x - b\sin pt$ を $t$ で表せ。

$x(t)$ から $b\sin pt$ を引くと、

$$\begin{aligned} x - b\sin pt &= \frac{b}{n^2 - p^2}\left(n^2\sin pt - np\sin nt - (n^2 - p^2)\sin pt\right) \\ &= \frac{bp}{n^2 - p^2}(p\sin pt - n\sin nt). \end{aligned}$$

したがって、ひもが常に張ったままでいるための必要十分条件は

$$c + \frac{bp}{n^2 - p^2}(p \sin pt - n \sin nt) \geq 0 \qquad \text{すべての} t \geq 0.$$

である。

> **考えてみよう** $p \sin pt - n \sin nt$ はどこまで小さな負の値をとりうるか。

$|\sin| \leq 1$ であるから、$p \sin pt - n \sin nt \geq -(p+n)$ が成り立つ。よって伸びは少なくとも

$$c - \frac{bp(n+p)}{n^2 - p^2} = c - \frac{bp}{n-p},$$

であり、$pb < (n-p)c$ ならばこれは正である。 ■

> **手を止めて、やってみよう** $p$ が $n$ に近づくと、この条件はどうなるか。$p = 0.9n$ のとき、揺らす振幅 $b$ はどれほど小さくなければならないか。$p = 0.99n$ のときはどうか。

## 振り返り

- **平衡位置から測る。** 平衡状態での伸び $c$ を用いることで、方程式から重力が消えた。
- **特解と余関数の和。** 振動数 $p$ の強制応答と振動数 $n$ の自由振動を足し合わせ、定数は初期条件から定めた。
- **解かずに評価する。** 伸びの最小値を正確に求めたわけではない。十分条件（sufficient condition）を得るには、正弦についての大まかな評価で足りた。

## 背後にある数学

### 共振の極限

解において $p \to n$ とする。分子も分母も 0 に近づくが、極限の計算（あるいは $p$ について微分するロピタルの定理（l'Hôpital's rule））により

$$x(t) \to \frac{b}{2}(\sin nt - nt \cos nt).$$

が得られる。項 $nt \cos nt$ は限りなく大きくなる。ちょうど固有振動数で駆動すると、振幅は時間に比例して増加する。一押しごとに、運動と歩調を合わせて揺れが加算されていくからである。共振より少し下では、二つの振動数の位相が合ったりずれたりを繰り返し、うなり（beats）が生じる。振幅は遅い振動数 $n - p$ で膨らんではしぼむ

(図 11.1.1)。ほとんど調弦の合った二本のギターの弦を鳴らしたときにも、同じうなりが聞こえる。

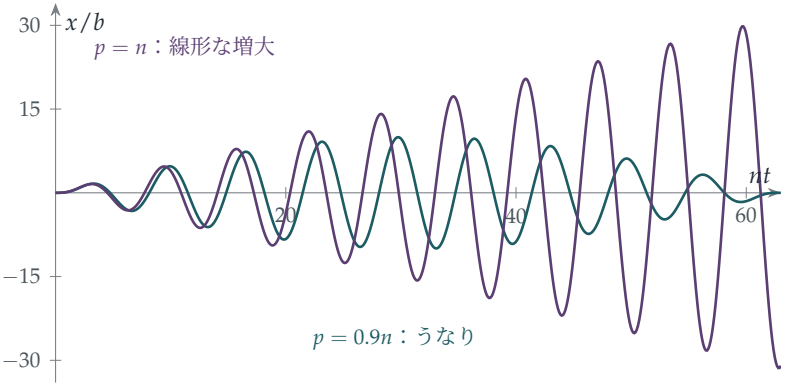



**図 11.1.1**　質点の応答（たるみは無視する）。揺らす振幅 $b$ を単位としている。$p = 0.9n$（ティール）のとき、応答は $b$ の約 10 倍まで膨らみ、再びしぼむ。うなりの周期は $\frac{2\pi}{n-p}$ である。ちょうど共振する $p = n$（プラム）のとき、振幅は限りなく増大する。

### 減衰と共振曲線

現実の系は摩擦や空気抵抗によってエネルギーを失い、それが振幅の増大を抑える。減衰 (damping) があると、振動数 $p$ の駆動力に対する定常応答の振幅は固有振動数の近くで最大になる。ピークが鋭いほど、減衰は小さい。技術者はこれを **$Q$ 値**（quality factor）$Q$ で表す。大まかに言えば、系がエネルギーの大部分を失うまでに行う振動の回数である。ワイングラスの $Q$ は数千にもなるので、ちょうど固有振動数の音を持続させるとグラスが割れることがある。自動車のサスペンションには意図的に低い $Q$ が与えられており、段差を越えても車体が弾み続けないようになっている。

#### 揺れる橋

1831 年、マンチェスター近郊のブロートン吊り橋を歩調をそろえて行進する兵士の隊列が橋を振動させ、ついには崩落させた。それ以来、軍隊は橋の上では歩調を乱すよう命じられている。2000 年 6 月に開通したロンドンのミレニアム・ブリッジは、群衆が渡り始めるとすぐに横揺れを始めた。歩行者が無意識のうちに揺れに合わせて歩調を調整し、揺れと同じ位相でエネルギーを供給してしまったのである。橋は閉鎖され、ダンパーを取り付けるのに 2 年を要した。1940 年のタコマナローズ橋の有名な崩落はしばしば共振として説明されるが、実際には別の現象、すなわち**空力弾性フラッター**（aeroelastic flutter）であった。これは、風の力が橋自身の運動に依存する現象である。その解析には、自励振動（self-excited oscillation）とリミットサイク

ル（limit cycle）の考え方が必要になる（Section 8.4）。

## 思考のスキル

**強制応答と自由応答を重ね合わせる**

周期的な力で駆動される線形方程式の解は、駆動振動数での応答と、初期条件に合うように選んだ固有振動数での自由振動との和である。

これがうまくいくのは線形性（linearity）のおかげであり、解どうしを足し合わせることができる。大学では、同じ原理を多数の駆動振動数の和に適用することで、フーリエ解析（Fourier analysis）、工学における伝達関数（transfer function）、物理学におけるグリーン関数（Green's function）へとつながっていく。

## 次の一歩

1 **落下するエレベーター。** STEP II 1996、問 11（`step.maths.org/questions/96-s2-q11`）に挑戦してみよ。エレベーターの中で弾性ひもにつるされたおもりを扱う問題で、エレベーターは加速を始め、その後加速をやめる。最終的な振幅が、加速の続く時間によってどのように変わるかに注目せよ。

2 **共振するとき。** $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ のもとで $\ddot{x} + n^2 x = n^2 b \sin nt$ を、特解 $x = Ct\cos nt$ を試すことで直接解け。それが上の極限と一致することを確かめよ。

3 **うなり。** $n\sin pt - p\sin nt$ が二つの項の和として書け、$p$ が $n$ に近いとき、そのうち一方がおよそ $2n\cos\frac{(n+p)t}{2}\sin\frac{(p-n)t}{2}$ になることを示せ。それを用いて、うなりの周期が $\frac{2\pi}{n-p}$ となることを説明せよ。

4 **減衰のある共振。** 小さな $k > 0$ に対して $\ddot{x} + 2k\dot{x} + n^2 x = F\cos pt$ の定常状態（steady state）の振幅を求め、それが $p^2 = n^2 - 2k^2$ のときに最大となることを示せ。

## さらに学ぶために

- **A. P. French, *Vibrations and Waves***（MIT Introductory Physics Series）。『振動と波動』。強制振動と共振を扱った第 4 章は、この題材の古典的な解説である。

- **Steven Strogatz, *Sync***（Penguin）。『同期』。ホタルからミレニアム・ブリッジまで、ものごとがどのようにして歩調をそろえるのかを描く。
- **Henry Petroski, *To Engineer Is Human***（Vintage）。『人はだれでもエンジニア』。歴史のコラムで取り上げた橋を含む、工学上の失敗を扱っている。

# 11.2 基準振動

**問題**

**STEP III 2014、問 10**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/14-s3-q10`

## 導入

ばねにつけた 1 個の質点は、単純で規則正しく上下に振動する。ところが 2 個の質点をばねでつなぐと、運動は複雑に見える。それぞれの質点は不規則にがたがたと動き、エネルギーは一方から他方へと行き来する。しかしその複雑さの中には、完全に単純な二つの運動が隠れている。それが**基準振動**（normal modes）であり、そこでは質点どうしが同じ向きに、あるいはちょうど逆向きに動き、各基準振動はそれぞれ固有の振動数（frequency）で振動する。系のあらゆる運動は、この二つの組合せである。

この問題では、3 本のばねの間にある 2 個の質点の基準振動を求め、さらに驚くべき事実を証明する。一方の質点をずらして静止状態から動かし始めると、系は**決して**もとの位置に戻らないのである。その理由は、二つの振動数の比が $\sqrt{3}$ であり、$\sqrt{3}$ が無理数（irrational）だからである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $X$ が $P$ から距離 $a+x$ の位置にあり、$Y$ が $Q$ から距離 $a+y$ の位置にあるとき、中央のばね $XY$ の長さはいくらか。$x$ と $y$ が正のとき、どのばねが伸びていて、どのばねが縮んでいるか。

三つの長さの和は $3a$ なので、$XY = 3a - (a+x) - (a+y) = a - x - y$ である。$x, y > 0$ のとき、外側のばねは（それぞれ $x$ と $y$ だけ）伸びており、中央のばねは（$x+y$ だけ）縮んでいる。

## 順を追って解く

### 段階 1　運動方程式

$x$ は $P$ から $Q$ へ向かう向きを正として測る。ばね $PX$ の伸び（extension）は $x$ なので、その張力（tension）$\frac{\lambda x}{a}$ は $X$ を $P$ の方へ引き戻す。ばね $XY$ の伸びは $-(x+y)$ なので、その張力 $-\frac{\lambda(x+y)}{a}$ は $X$ を $Y$ の方へ引く（負の張力は押す力を表す）。したがって、運動方程式（equation of motion）は

$$m\ddot{x} = -\frac{\lambda x}{a} - \frac{\lambda(x+y)}{a} = -\frac{\lambda}{a}(2x+y). \qquad \blacksquare$$

対称性により（$X$ と $Y$、$P$ と $Q$ の役割を入れ替えて）、

$$m\ddot{y} = -\frac{\lambda}{a}(2y+x).$$

### 段階 2　分離

**考えてみよう**　どちらの方程式にも $x$ と $y$ の両方が含まれている。二つの方程式をどのように組み合わせれば、$x$ と $y$ のただ一つの組合せだけを含む式が得られるか。

辺々引いたり足したりすると、

$$m(\ddot{x}-\ddot{y}) = -\frac{\lambda}{a}(x-y), \qquad m(\ddot{x}+\ddot{y}) = -\frac{3\lambda}{a}(x+y).$$

いずれも単振動（simple harmonic motion）の方程式である。$x-y$ は $\omega^2 = \frac{\lambda}{ma}$ で、$x+y$ は $3\omega^2$ で振動する。

### 段階 3　初期条件

はじめ $XP = a$、$YQ = \frac{1}{2}a$ なので、$x = 0$、$y = -\frac{1}{2}a$ であり、両方の質点は静止している。よって $t = 0$ において $x - y = \frac{1}{2}a$、$x + y = -\frac{1}{2}a$ で、それらの変化率は 0 である。したがって

$$x - y = \tfrac{1}{2}a\cos\omega t, \qquad x + y = -\tfrac{1}{2}a\cos\sqrt{3}\,\omega t.$$

ゆえに $A = \frac{1}{2}a$、$B = 0$ である。 $\blacksquare$

### 段階 4　決して戻らない

**考えてみよう**　$y$ を $t$ で表せ。$Y$ がもとの位置に戻るには $y = -\frac{1}{2}a$ でなければならない。そのとき二つの余弦はそれぞれいくらでなければならないか。

辺々引くと、$y = \frac{1}{2}\big((x+y)-(x-y)\big) = -\frac{1}{4}a\big(\cos\sqrt{3}\,\omega t + \cos\omega t\big)$ である。$y = -\frac{1}{2}a$ となるには $\cos\sqrt{3}\,\omega t + \cos\omega t = 2$ が必要であり、各余弦は高々 1 なので、どちらも 1 に等しくなければならない。すなわち、整数 $k$、$j$ に対して

$$\omega t = 2\pi k, \qquad \sqrt{3}\,\omega t = 2\pi j$$

である。$t > 0$ ならば $k \geq 1$ であり、辺々割ると $\sqrt{3} = \frac{j}{k}$ となるが、$\sqrt{3}$ は無理数なのでこれは不可能である。したがって $Y$ は決してもとの位置に戻らない。 ■

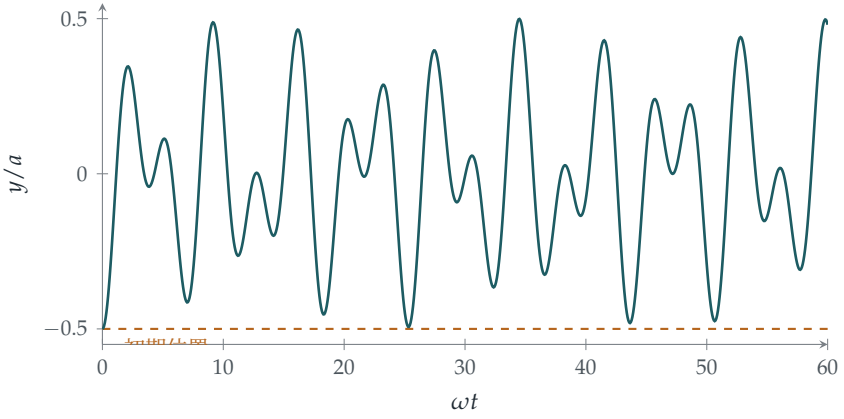



**図 11.2.1** 質点 $Y$ の変位 $y$。これは振動数の比が $\sqrt{3}:1$ である二つの振動の和なので、そのパターンは決して繰り返さない。$Y$ は初期位置（破線）に何度も近づき、たとえば $\omega t \approx 25$ 付近（$\omega t \approx 8\pi$、$\sqrt{3}\,\omega t \approx 14\pi$ となるところ）でかなり近づくが、厳密にそこに達することは決してない。

## 振り返り

- **分離する組合せを見つける。** $x-y$ と $x+y$ は、それぞれ独立した方程式を満たした。
- **対称性がそれを示唆する。** この系は左右を入れ替えても対称なので、対称な組合せと反対称な組合せを考えるのは自然である。
- **無理数性は物理的な帰結をもつ。** 振動数の比が無理数であるために、運動は周期的にならない。

## 背後にある数学

### 基準振動は固有ベクトルである

方程式を行列の方程式として書くと、

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = -\frac{\lambda}{a}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

分離する組合せは、この行列の固有ベクトル（eigenvector）である。すなわち、固有値（eigenvalue）1 に対する $(1,-1)$ と、固有値 3 に対する $(1,1)$ である（Section 7.2）。第一の基準振動では $x=-y$ であり、二つの質点は直線上を同じ向きに動き（$x$ と $y$ は反対側の端から測っていることに注意）、中央のばねの長さは変わらない。第二の基準振動では $x=y$ であり、二つの質点は逆向きに動いて中央のばねを縮めたり伸ばしたりするので、振動数が高くなる。振動数の 2 乗は、固有値に $\frac{\lambda}{ma}$ を掛けたものである。

これは質点とばねが何個あっても成り立つ。$N$ 個の連成振動子からなる系には $N$ 個の基準振動があり、それらは対称行列の固有ベクトルで与えられる。そしてスペクトル定理（spectral theorem）により、それらは必ず存在し、互いに直交することが保証される。分子は基準振動で振動しており、化学者はそれを利用して、分子が吸収する赤外線から分子を同定する。建物や橋にも基準振動があり、技術者はそれを風や地震の振動数から遠ざけておかなければならない。さらに質点の個数を無限大にすると、基準振動は振動する弦の倍音となり、これがフーリエ解析（Fourier analysis）の出発点である。

### 到達はしないが近づく

$Y$ は厳密にもとの位置に戻ることはないが、いくらでも近くまで来る。その理由はクロネッカー（Kronecker）の定理にある。$\alpha$ が無理数ならば、倍数 $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$ を 1 を法として考えると、それらは $[0,1]$ のあらゆる数にいくらでも近づく。よって、$\omega t$ が $2\pi$ の倍数であり、かつ $\sqrt{3}\,\omega t$ が $2\pi$ の倍数と任意の許容誤差以内にあるような時刻を見つけることができる。この運動は**準周期的**（quasi-periodic）であり、トーラス（torus）（各基準振動に一つずつ角度をとったもの）の上を、決して閉じることなく巻きついていく。振動数の比が有理数か無理数かという同じ区別が、太陽系の安定性に関する KAM 定理の核心にある。

## 思考のスキル

### 変数を変換して方程式を分離する

方程式が連立している（互いに結びついている）ときは、独立に変化する変数の組合せを探せ。線形の問題では、それが固有ベクトルである。

これは Section 10.6 の重心（centre of mass）と相対座標と同じ考え方である。大学では、これは対角化（diagonalisation）となる。行列が対角行列になるような基底を選べば、連立した方程式の系は独立な方程式へとばらばらに分かれるのである。

## 次の一歩

1 **エネルギー。** 全エネルギー $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{\lambda}{2a}\left(x^2+y^2+(x+y)^2\right)$ が一定であること、さらにそれが各基準振動に一つずつ対応する二つの項の和に分かれ、それぞれの項が個別に一定であることを示せ。

2 **純粋な基準振動。** 運動が周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ の周期運動になるようにするには、質点をどのように動かし始めればよいか。周期 $\frac{2\pi}{\sqrt{3}\,\omega}$ の場合はどうか。

3 **硬い中央のばね。** 中央のばねの弾性率（modulus）が $\lambda$ ではなく $\mu$ であるとき、二つの基準振動の振動数を求めよ。$\mu/\lambda$ がどのような値のとき、あらゆる運動が周期的になるか。

4 **3 個の質点。** 等しい質量をもつ 3 個の質点が、二つの固定点の間で 4 本の同一のばねによって一直線につながれている。行列とその固有値（$2-\sqrt{2}$、2、$2+\sqrt{2}$）を求め、三つの基準振動を説明せよ。

## さらに学ぶために

- **A. P. French, *Vibrations and Waves***（MIT Introductory Physics Series）、第 5 章。連成振動子と基準振動について。
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）、固有値の章。ばねと質点を主要な例として扱っている。
- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）、第 8 章。トーラス上の準周期運動について。

# 11.3 本当の振り子

**問題**

**STEP III 1998、問 11**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/98-s3-q11`

## 導入

物理を学ぶ者は誰でも、振り子の周期（period）は振れの大きさによらず $2\pi\sqrt{l/g}$ であると教わる。ガリレオ（Galileo）はこれを信じていた。ピサ大聖堂で揺れるランプの時間を自分の脈拍で計ったのがきっかけだと伝えられている。そして、振り子時計が成り立つのもこの性質のおかげである。しかし、これは厳密には正しくない。この公式は近似 $\sin\theta \approx \theta$ から導かれたものであり、大きな弧を描いて振れる振り子はより長い時間がかかる。90° では周期は 18% 長くなり、ほぼ真上の位置から放した振り子はいくらでも長い時間をかけうる。

この問題では、まず厳密な周期を積分として求め、次にほどほどの振れに対する最初の補正を求める。この積分は初等関数では計算できない。それは**楕円積分**（elliptic integral）であり、こうした積分がどのように手なずけられてきたかという物語は、ガウス（Gauss）の算術幾何平均（arithmetic–geometric mean）から楕円曲線（elliptic curve）の理論にまで及ぶ。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** おもりは半径 $l$ の円周上を動く。その速さと（最下点を基準とした）高さを $\theta$ と $\dot{\theta}$ を用いて表すとどうなるか？

速さは $l\dot{\theta}$ であり、最下点からの高さは $l(1-\cos\theta)$ である。糸は仕事をしない（その張力（tension）はつねに運動の方向に垂直である）ので、エネルギーは保存される（エネルギー保存則（conservation of energy））。

## 順を追って解く

### 段階 1　エネルギー

最大の角度 $\gamma$ において、おもりは一瞬静止する。エネルギー保存則より

$$\tfrac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 + mgl(1-\cos\theta) = mgl(1-\cos\gamma),$$

が成り立ち、両辺を $ml$ で割ると $\tfrac{1}{2}l\dot\theta^2 = g(\cos\theta - \cos\gamma)$ を得る。 ■

### 段階 2　積分としての周期

**考えてみよう**　$\cos\theta - \cos\gamma$ を半角（half-angle）を用いて表すにはどうすればよいか？　また、$\theta = 0$ から $\theta = \gamma$ まで進むのに周期のどれだけの部分が費やされるか？

$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\tfrac{\theta}{2}$ を用いると $\cos\theta - \cos\gamma = 2(\sin^2\tfrac{\gamma}{2} - \sin^2\tfrac{\theta}{2})$ となるので、

$$\dot\theta = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{1/2}.$$

対称性より、$0$ から $\gamma$ までの振れには周期の $4$ 分の $1$ の時間がかかるので、

$$P = 4\int_0^{\gamma}\frac{\mathrm{d}\theta}{\dot\theta} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\gamma}\left(\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{-1/2}\mathrm{d}\theta. \qquad ■$$

### 段階 3　特異点を取り除く

**考えてみよう**　被積分関数（integrand）は $\theta = \gamma$ で無限大になる。$k = \sin\tfrac{\gamma}{2}$ とおき、$\sin\tfrac{\theta}{2} = k\sin\phi$ と置換する。$0 \le \theta \le \gamma$ に対応する $\phi$ の範囲は何か？　被積分関数はどうなるか？

$\theta$ が $0$ から $\gamma$ まで動くとき、$\phi$ は $0$ から $\tfrac{\pi}{2}$ まで動く。微分すると $\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi$ となるので、

$$\mathrm{d}\theta = \frac{2k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}.$$

一方、$\sin^2\tfrac{\gamma}{2} - \sin^2\tfrac{\theta}{2} = k^2(1-\sin^2\phi) = k^2\cos^2\phi$ である。厄介な因子は約分されて消える：

$$P = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{k\cos\phi}\cdot\frac{2k\cos\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}\,\mathrm{d}\phi = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}.$$

$k < 1$ であるから、新しい被積分関数はまったく問題なく振る舞う。これで特異点（singularity）が取り除かれた。

### 段階 4 最初の補正

**考えてみよう** $k$ が小さいとき、$(1 - k^2 \sin^2\phi)^{-1/2}$ を二項定理（binomial theorem）で展開せよ。$\int_0^{\pi/2} \sin^2\phi \, d\phi$ の値はいくらか？

1 次の近似で $(1 - k^2 \sin^2\phi)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2\phi$ であり、$\int_0^{\pi/2} \sin^2\phi \, d\phi = \frac{\pi}{4}$ である。よって

$$P \approx 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k^2}{2} \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{k^2}{4}\right).$$

$\gamma$ が小さいとき $k = \sin\frac{\gamma}{2} \approx \frac{\gamma}{2}$ であるから、$k^2 \approx \frac{\gamma^2}{4}$ となり、

$$P \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\gamma^2}{16}\right). \qquad \blacksquare$$

20° の振れ（$\gamma \approx 0.35$）では補正は 1% 未満であり、60° では約 7% である（図 11.3.1）。

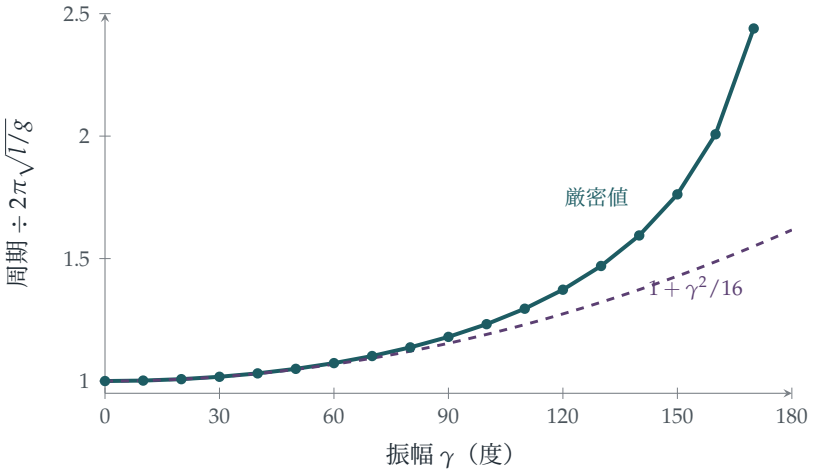



**図 11.3.1** 振り子の厳密な周期（ティール）を微小角での値との比として振幅（amplitude）に対してプロットし、近似 $1 + \gamma^2/16$（プラム、破線）と比較したもの。近似は約 60° まで非常によい。$\gamma \to 180°$ のとき真の周期は無限大に発散する。真上で釣り合った振り子は、倒れるまでに永遠の時間がかかるのである。

## 振り返り

- **エネルギーから第一積分が得られる。** 2 階の方程式が 1 階の方程式になり、周期は積分として表された（第一積分（first integral））。
- **置換によって特異点を手なずける。** 被積分関数は折り返し点で発散したが、置換 $\sin\frac{\theta}{2} = k\sin\phi$ によってこの問題が取り除かれた。
- **まず厳密に、それから近似する。** 厳密な公式を求めてから展開した。こうすることで、近似がどれほどよいかもわかる。

## 背後にある数学

### 楕円積分

積分

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\phi}}$$

は**第一種完全楕円積分**（complete elliptic integral of the first kind）とよばれる。この名は、これと近い関係にある積分が楕円の周の長さを与えることに由来する。厳密な周期は $P = 4\sqrt{l/g}\,K\bigl(\sin\frac{\gamma}{2}\bigr)$ である。被積分関数を完全に展開し、Section 4.4 のウォリス（Wallis）積分 $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\phi\,\mathrm{d}\phi$ を用いて項別に積分すると、

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\Bigl(1 + \bigl(\tfrac{1}{2}\bigr)^2 k^2 + \bigl(\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\bigr)^2 k^4 + \bigl(\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\bigr)^2 k^6 + \cdots\Bigr).$$

を得る。なじみのある関数を有限回組み合わせても $K(k)$ は得られない。これは真に新しい関数なのである。

### ガウスの驚くべき公式

$K$ を計算するには、はるかによい方法がある。Section 2.6 では**算術幾何平均**を学んだ。$a$ と $b$ から始めて、それらを相加平均と相乗平均で置き換えることを繰り返すのであった。ガウスは 1799 年に

$$K(k) = \frac{\pi}{2\,\mathrm{AGM}\bigl(1, \sqrt{1-k^2}\bigr)},$$

であることを発見した。したがって、振幅 $\gamma$ の振り子の周期は厳密に

$$P = \frac{2\pi\sqrt{l/g}}{\mathrm{AGM}\bigl(1, \cos\frac{\gamma}{2}\bigr)}.$$

となる。AGM は非常に速く収束するので、約 160° までの振れであれば、3〜4 ステップで周期が有効数字 10 桁まで得られる。図 11.3.1 の値もこの方法で計算したものである。180° に近づくと 2 つの初期値 1 と $\cos\frac{\gamma}{2}$ は大きく離れるため、もう 1〜2 ステップ余分にかかるが、179° でも 5 ステップで十分である。ガウスは日記に、この発見は「解析学のまったく新しい分野を開く」と記しており、それは正しかった。楕円積分の逆関数を考えることで、アーベル（Abel）とヤコビ（Jacobi）は**楕円関数**（elliptic function）に到達し、楕円関数はさらに**楕円曲線**へとつながった。楕円曲線は今日、数論（number theory）の中心にあり（フェルマーの最終定理（Fermat's Last Theorem）の証明の鍵であった）、またインターネットの安全を守る暗号（cryptography）の中心にもある。

### ガリレオのランプとホイヘンスの時計

振り子の周期は振幅によらないというガリレオの主張は 1602 年ごろになされたもので、彼が調べた小さな振れについてはよい近似であった。ホイヘンス（Huygens）はそれが厳密ではないことに気づき、1659 年に、周期が本当に振幅によらなくなる曲線を発見した。それがサイクロイド（cycloid）であり、Section 11.4 の主題である。1656 年以降に彼が製作した振り子時計によって、時計の誤差は 1 日あたり約 15 分から約 15 秒にまで改善された。海上で経度を求める問題を解決したマリンクロノメーター（marine chronometer）は、のちに振り子をまったく用いなくなったが、振り子時計は 1920 年代まで世界で最も正確な時計であり続けた。

## 思考のスキル

### 厳密な積分から級数近似へ

**ある量が計算できない積分で与えられているときは、それを扱いやすい形に変形し、被積分関数を展開して項別に積分せよ。**

これは物理学者が理想化された結果に対する補正を求める方法であり、**摂動論**（perturbation theory）の出発点でもある。大学では、項別積分（term-by-term integration）が正当化されるのはどのようなときか（一様収束（uniform convergence））、また途中で打ち切ったときの誤差をどう評価するかを学ぶことになる。

## 次の一歩

1. **つながれた粒子。** STEP III 2015、問 9（`step.maths.org/questions/15-s3-q9`）に挑戦せよ。これは、微小振動であっても周期が振幅に依存する振動子である。振り子の周期は依存しないのに、なぜこの振動子では依存するのか？

2. **次の項。** 二項展開をもう 1 項先まで進め、$P \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\gamma^2}{16} + \frac{11\gamma^4}{3072}\right)$ であることを示せ。

3. **手計算による AGM。** AGM を 3 ステップ用いて振幅 $90^\circ$ の振り子の周期を見積もり、図中の値 1.1803 と比較せよ。

4. **時計。** ある振り子時計は、振幅 $4^\circ$ で正確に時を刻むよう調整されている。振幅が $5^\circ$ に増えると、1 日に何秒遅れるか？

## さらに学ぶために

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics*** (Cambridge University Press)（古典力学入門）。第 4 章で大振幅の振り子を扱っている。
- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM*** (Wiley)（円周率と算術幾何平均）。ガウスの発見とその応用を扱い、$\pi$ を計算する最速の方法も紹介している。
- **Dava Sobel, *Longitude*** (Fourth Estate)（経度）。振り子のその先にある、海上での時間計測の物語である。

# 11.4 等時曲線

**問題**

**STEP III 1994、問 9**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/94-s3-q9`

## 導入

お椀の内側で、2 つのビー玉を同時に放す。1 つは縁の近くから、もう 1 つは底のすぐ上からである。どちらが先に底に着くだろうか。普通のお椀では、低いところから出発した方がたいてい先に着く。ところが、どこから出発しても必ず同時に到着するお椀が存在する。それが**等時曲線**（tautochrone、ギリシャ語で「同じ時間」の意）であり、その断面は**サイクロイド**（cycloid）、すなわち転がる車輪の縁上の 1 点が描く曲線である。

ホイヘンス（Huygens）は 1659 年にこのことを発見し、振れ幅によらない周期をもつ振り子時計の設計に用いて、Section 11.3 で見た欠点を正した。この問題では、正しい変数、つまり水平方向の位置ではなく曲線に沿った距離を選ぶことで、等時性を数行で証明する。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** お椀はなめらかである。粒子にはどのような力がはたらき、そのうちどれが仕事をするか。

重力と垂直抗力（normal reaction）である。垂直抗力は面に垂直であり、したがって運動の向きにも垂直なので、仕事をしない。仕事をするのは重力だけであり、エネルギーは保存される。

## 順を追って解く

### 段階 1　曲線に沿ったエネルギー

$s$ は弧長（arc length）なので、面に沿った粒子の速さは $|\frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{d}t}|$ である。エネルギー保存則（conservation of energy）より $\frac{1}{2}m\dot{s}^2 + mgy =$ 定数となるので、$\dot{s}^2 + 2gy$ は一定である。 ■

### 段階 2　$s$ についての単振動

**考えてみよう**　$s = 2\sqrt{ky}$ を用いて、$y$ を $s$ の関数で置き換えよ。得られる方程式はどのような運動を表すか。

$y = \frac{s^2}{4k}$ であるから、エネルギーの式は

$$\dot{s}^2 + \frac{g}{2k}s^2 = \text{定数} = \frac{g}{2k}s_0^2,$$

となる。ここで $s_0 = 2\sqrt{kh}$ は出発点での弧長である（粒子は静止状態から出発する）。微分すると $2\dot{s}\ddot{s} + \frac{g}{k}s\dot{s} = 0$ となるので、

$$\ddot{s} = -\frac{g}{2k}\,s.$$

これは変数 $s$ についての単振動（simple harmonic motion）であり、振幅（amplitude）によらず $\omega^2 = \frac{g}{2k}$ である。すなわち $s = s_0\cos\omega t$ となる。

### 段階 3　底に着くまでの時間

粒子は周期（period）の 4 分の 1 の時間ののちに $V$（$s = 0$ となる点）に到達する。その時間は

$$\frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2k}{g}} = \pi\sqrt{\frac{k}{2g}},$$

であり、$h$ によらない。 ■

**手を止めて、やってみよう**　なぜうまくいくのだろうか。曲線に沿った「復元力」（restoring force）は $g$ と傾きの積 $g\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \frac{g}{2k}s$ であり、曲線に沿って測った底からの距離にちょうど比例する。これこそが単振動を特徴づける性質である。高いところから出発した粒子は進む距離が長いが、そのぶん比例して強く押されるのである。

### 段階 4　2 つの粒子

**考えてみよう** 粒子はいつ $V$ に到達し、そのときの速さはいくらか。運動量が大きいのはどちらか。

両者は同じ時刻 $T = \pi\sqrt{k/(2g)}$ に、互いに反対側から $V$ に到達する。$V$ における速さは $\omega$ と $s$ についての振幅の積であり、$\sqrt{\text{高さ}}$ に比例する。$h$ から放した重い方の粒子の $V$ での速さを $U$ とすると、$\alpha^2 h$ から放した軽い方の粒子の速さは $\alpha U$ である。両者の運動量（momentum）は互いに逆向きの $\alpha m \cdot U$ と $m \cdot \alpha U$ であり、大きさが等しく向きが反対である。衝突時の運動量の総和は $0$ である。

**考えてみよう** 運動量の総和が $0$ で反発係数が $\alpha$ のとき、衝突直後の速度はどうなるか。

運動量の総和は $0$ のままなので、衝突後も $2$ つの粒子は大きさの等しい運動量をもって互いに逆向きに動き、その相対速度の大きさは近づく速さ $\alpha U + U$ の $\alpha$ 倍である。軽い方の粒子（質量 $\alpha m$）の衝突後の速さを $w$ とすると、重い方（質量 $m$）の速さは $\alpha w$ であり、$w + \alpha w = \alpha(1+\alpha)U$ となるので $w = \alpha U$ である。各粒子は速さが $\alpha$ 倍になって跳ね返る。質量 $\alpha m$ の粒子は速さ $\alpha U$ で、質量 $m$ の粒子は速さ $\alpha^2 U$ で離れていく。

### 段階 5 運動の全体像

各粒子はそれぞれ自分の側を登り返し、高さは $\alpha^2$ 倍に減る（高さは速さの $2$ 乗に比例するからである）。質量 $\alpha m$ の粒子は $\alpha^2 h$ まで、質量 $m$ の粒子は $\alpha^4 h$ まで登る。等時性により、両者は時間 $2T$ 後のまったく同じ瞬間に再び $V$ に戻り、そのときの運動量はやはり大きさが等しく向きが反対である。同じ衝突が、すべての速さを $\alpha$ 倍にして再び起こる。したがって次のことがわかる。

- 粒子は常に $V$ で、時刻 $T, 3T, 5T, \ldots$ に衝突する。
- $n$ 回目の衝突の後、粒子は高さ $\alpha^{2n} h$ と $\alpha^{2n+2} h$ まで上がる。
- 運動は等比級数的に減衰していくが、決して止まらない。衝突は無限回起こり、いつまでも続く。 ■

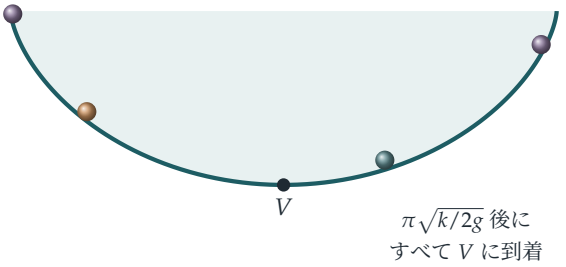



**図 11.4.1**　等時曲線：直線に沿って転がる車輪の縁上の 1 点が描く、上下を逆にしたサイクロイド。その上のどこから静かに放したビー玉も、最下点 $V$ に同じ瞬間に到達する。半径 $R$ の車輪が生成するサイクロイドでは、弧長と高さは $s^2 = 8Ry$ を満たすので、$k = 2R$ である。

## 振り返り

- **自然な変数を選ぶ。**弧長 $s$ で表すと、運動はちょうど単振動になる。$x$ や $y$ で表すと複雑になってしまう。
- **エネルギーから方程式が得られる。**エネルギーの式を微分すると、運動方程式が直接得られた。
- **時間についての対称性。**底までの道のりはどれも同じ時間がかかるので、2 つの粒子はいつまでも同期し、衝突はまったく同じように繰り返された。

## 背後にある数学

### なぜサイクロイドなのか

直線の下側を転がる半径 $R$ の車輪は、サイクロイド $x = R(t + \sin t), y = R(1 - \cos t)$ を描く。このとき $\frac{dx}{dt} = R(1 + \cos t)$, $\frac{dy}{dt} = R\sin t$ なので、曲線に沿った速さは $R\sqrt{2 + 2\cos t} = 2R\cos\frac{t}{2}$ である。積分すると底からの弧長は $s = 4R\sin\frac{t}{2}$ であり、一方 $y = 2R\sin^2\frac{t}{2}$ である。よって $s^2 = 8Ry$ となり、サイクロイドはまさに $k = 2R$ として $s = 2\sqrt{ky}$ を満たす曲線である。逆に、復元力が $s$ に比例するという条件から、曲線はサイクロイドでなければならないことが導かれる。

### 最速降下曲線

1696 年、ヨハン・ベルヌーイ（Johann Bernoulli）はヨーロッパの数学者たちに次の問題を挑戦状として出した。ある点から、それより低い（真下ではない）点へ、ビーズが**最短**時間で滑り降りるのはどのような曲線に沿うときか。その答えである**最速降下**

曲線（brachistochrone）もまたサイクロイドである。ニュートン（Newton）は問題を受け取ったその晩のうちに解いたと言われている。彼は解答を匿名で発表したが、ベルヌーイは「爪を見れば獅子とわかるように」その作者を見抜いた。この問題は、Section 4.7 で出会った**変分法**（calculus of variations）、すなわち積分で定義される量を最小にする曲線を求める理論の、出発点となった例である。

#### ホイヘンスのサイクロイド時計

ホイヘンスは、単振り子の周期が振幅に依存するため、単振り子が正確な時を刻まないことを知っていた。著書 *Horologium Oscillatorium*（『振り子時計』、1673 年）で、彼はおもりをサイクロイドに沿って動かす方法を示した。サイクロイドの形をした 2 枚の曲がった「頬板」の間に糸を吊るすと、糸は頬板に巻きつきながら、おもり自身がサイクロイドを描くように動くのである（サイクロイドの**伸開線**（involute）もまたサイクロイドである）。実際には、頬板は摩擦によって、取り除く誤差よりも大きな誤差を生んでしまったため、時計職人たちは代わりに振れ幅を小さく保つことにした。しかしホイヘンスの解析は縮閉線（evolute）と伸開線の理論を生み出し、彼の著書は 17 世紀の力学における偉大な業績の 1 つとなった。

## 思考のスキル

#### 運動が単純になる変数を見つける

曲線に沿った運動は、曲線に沿った距離で表すと最も単純になることが多い。方程式が線形になる変数を探そう。

大学では、これはラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）における**一般化座標**（generalised coordinates）の考え方になる。系の配置を記述する変数であれば何を用いてもよく、それをうまく選ぶことで問題が解けるようになることがある。

## 次の一歩

1 **異なる高さ。**等時曲線のお椀の中で、粒子を高さ $h$ から放す。$V$ での速さが、エネルギー保存則から当然そうなるべきとおり $\sqrt{2gh}$ であることを示し、それが $\omega s_0$ と一致することを確かめよ。

2 **普通のお椀。**半径 $R$ の半球形のお椀で、低い位置から底に着くまでの時間と、縁から底に着くまでの時間を比較せよ。どちらが長いか。（Section 11.3 の結果を用いよ。）

3 **等しい質量。**問題の後半を、等しい質量 $m$ をもち高さ $h_1$ と $h_2$ から放す 2 つの粒子、反発係数 $e$ の場合についてやり直せ。2 つの粒子は依然として常に $V$ で衝突するか。

4 **サイクロイドの弧長。**サイクロイドの 1 つのアーチの長さが $8R$ であり、その下の面積が $3\pi R^2$、つまり転がる円の面積の 3 倍であることを示せ。

## さらに学ぶために

- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***（CRC Press）。等時曲線と最速降下曲線を、その歴史とともに扱っている。
- **E. A. Whitman,「Some historical notes on the cycloid」**, *American Mathematical Monthly* 50 (1943)。サイクロイドがなぜ「幾何学者のヘレネ」と呼ばれたのかを述べている。
- **Paul Nahin, *When Least Is Best***（Princeton University Press）。最速降下曲線をはじめとする最適化問題を、歴史とともに語っている。

# 11.5 加速する列車の中の重力

**問題**

**STEP II 2021、問 10**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

## 導入

列車が駅を出発するとき、体は座席に押しつけられるように感じる。テーブルの上のコーヒーカップでは液面が傾き、床の上のボールは後方へ転がっていく。列車の中から見ると、あたかも重力が傾いて、下向きだけでなくわずかに後ろ向きにもはたらいているかのように見える。アインシュタイン（Einstein）は、これが単なるたとえ以上のものだという気づきを「生涯で最も幸福な考え」と呼んだ。すなわち、重力と加速度は局所的には区別できないのである。

この問題では、加速する列車の中にある曲がった針金にビーズが通されている。列車から見ると、ビーズは正接が $a/g$ である角だけ傾いた重力場の中にあるかのように振る舞う。針金の底はもはや最も低い点ではなく、ビーズは新しい平衡点（equilibrium）のまわりで振動する。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 列車は西向き（$x$ の負の向き）に加速度 $a$ で加速している。列車内の観測者にとって、質量 $m$ の物体にはどのような「見かけの力」がはたらいているように見えるか。

列車の座標系では、見かけの力（fictitious force）$-m \times$ (座標系の加速度) を加えれば、ニュートン（Newton）の第 2 法則が成り立つ。座標系は $x$ 方向に加速度 $-a$ で加速しているので、見かけの力は $+ma$ で、東向きである。重力と合わせると、ビーズは単位質量あたり $(a, -g)$ の有効重力を受ける。これは東へ傾いている。

## 順を追って解く

### 段階 1　原点では静止できない

原点では針金 $ky = x^2$ は水平である。そこでは垂直抗力（normal reaction）は鉛直向きなので、東向きの見かけの力 $ma$ を打ち消すことができない。針金に沿った合力は $ma \neq 0$ であるから、ビーズは列車に対して静止していることはできない。 ■

### 段階 2　エネルギーの式

> **考えてみよう**　垂直抗力 $\mathbf{N}$ を含めて、列車の座標系での運動方程式を書け。次に、速度 $(\dot{x}, \dot{y})$ との内積をとれ。なぜ $\mathbf{N}$ は消えるのか。

列車の座標系では

$$m(\ddot{x}, \ddot{y}) = \mathbf{N} + (ma, -mg).$$

針金はなめらかなので $\mathbf{N}$ は針金に垂直であり、したがって針金に沿った向きをもつ速度 $(\dot{x}, \dot{y})$ にも垂直である。速度との内積（dot product）をとると $\mathbf{N}$ が消える：

$$m\dot{x}\ddot{x} + m\dot{y}\ddot{y} = ma\dot{x} - mg\dot{y}, \qquad \text{よって} \qquad \dot{x}(\ddot{x} - a) + \dot{y}(\ddot{y} + g) = 0. \quad ■$$

左辺は $\tfrac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - ax + gy$ の導関数であり、したがってこの量は一定である。 ■

これは列車の座標系におけるエネルギー保存（conservation of energy）であり、見かけの力を含めた単位質量あたりのポテンシャルエネルギー（potential energy）$-ax + gy$ をもつ。

### 段階 3　どこまで上がるか

> **考えてみよう**　ビーズは原点で静止した状態から動き出すので、この定数は 0 である。最高点ではビーズは一瞬静止する。このことからどのような方程式が得られるか。

静止しているとき $\tfrac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0$ なので $ax = gy$ である。$y = \tfrac{x^2}{k}$ とあわせると $ax = \tfrac{gx^2}{k}$ となるので、（出発点 $x = 0$ を除いて）$x = \tfrac{ak}{g}$ であり、

$$b = \frac{a^2 k}{g^2}. \quad ■$$

ビーズは針金に沿って東へ上っていき、点 $\left(\tfrac{ak}{g}, \tfrac{a^2 k}{g^2}\right)$ に達したのち原点へ戻り、これを繰り返す。

### 段階 4　最も速い点

**考えてみよう** 速さの 2 乗を $x$ だけの関数として表せ。それが最大になるのはどこか。

速さの 2 乗は $2(ax - gy) = 2\left(ax - \frac{gx^2}{k}\right)$ であり、これは $x$ の 2 次式で、2 つの折り返し点のちょうど中間 $x = \frac{ak}{2g}$ で最大となる。そこでの速さの 2 乗は $2\left(\frac{a^2k}{2g} - \frac{a^2k}{4g}\right) = \frac{a^2k}{2g}$ なので、最大の速さは

$$a\sqrt{\frac{k}{2g}}. \qquad \blacksquare$$

**考えてみよう** $x = \frac{ak}{2g}$ における針金の傾きを求めよ。それは有効重力 $(a, -g)$ の向きとどのような関係にあるか。

傾きは $\frac{2x}{k} = \frac{a}{g}$ である。したがってこの点で針金は有効重力に垂直である。すなわち、ここは傾いた重力場における針金の「最も低い」点であり、ビーズはこの点のまわりで振動する（図 11.5.1）。

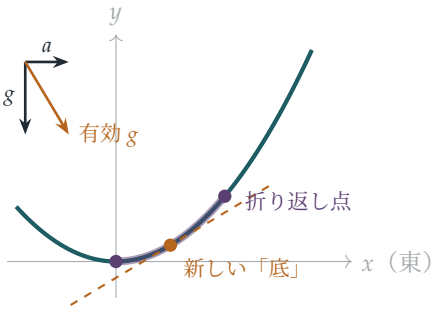



**図 11.5.1** 列車の座標系における針金 $ky = x^2$（ティール、$k = 1$、$a/g = 0.6$）。有効重力（アンバーの矢印）は、正接が $a/g$ である角だけ東へ傾いている。ビーズは原点と $x = ak/g$ の間を（プラム）、針金が有効重力に垂直となる点のまわりで振動する。この点が新しい最低点の役割を果たす。破線は傾いた重力場における「水平」な線である。

## 振り返り

- **都合のよい座標系で考え、見かけの力を加える。** 列車の座標系では針金は固定されており、その代償は一定の力が 1 つ加わることだけである。
- **速度との内積をとる。** これにより拘束力（constraint force）が消え、エネルギーの式が得られる。
- **答えを解釈する。** 折り返し点と最も速い点には幾何学的な意味がある。有効重力が

傾いているのである。

## 背後にある数学

### 見かけの力

ニュートンの法則は**慣性系**（inertial frame）、すなわち加速していない座標系で成り立つ。加速する座標系でも、見かけの力を加えれば法則を救うことができる。加速度 $\mathbf{A}$ をもつ座標系では $-m\mathbf{A}$ を、回転座標系ではさらに遠心力（centrifugal force）とコリオリ力（Coriolis force）を加えればよい。これらが「見かけの」力と呼ばれるのは、それを及ぼす物体が存在しないからであり、座標系がもたらす産物にすぎない。しかし、その座標系の中にいる者にとってはまったく現実のものである。遠心力は地球を極方向に押しつぶし、コリオリ力はハリケーンの回転の向き（北半球では反時計回り）を決め、長距離砲の砲弾をそらせる。

### 等価原理

一定の見かけの力 $-m\mathbf{A}$ は、重力とまったく同様に質量に比例する。閉じた箱の中でのどんな実験によっても、箱が惑星の上に静止しているのか、何もない空間で加速しているのかを区別することはできない。これが**等価原理**（equivalence principle）である。アインシュタインはこれを一般相対性理論（general relativity）の出発点とした。加速する箱を横切る光は曲がって見えるので、重力場の中でも光は曲がるはずである。また、加速するロケットの前部と後部の時計は異なる速さで進むので、重力場の中で高さの異なる時計も異なる速さで進むはずである。どちらの予言も確かめられており、後者はすべての GPS 衛星で補正しなければならない。衛星の時計は、この効果だけで地上の時計より 1 日あたり約 45 マイクロ秒速く進むのである。

#### アインシュタインの最も幸福な考え

1907 年、ベルンの特許局に勤めていたアインシュタインは、特殊相対性理論（special relativity）についての総説を書いていた。そのとき、後に本人が回想したところによれば、「生涯で最も幸福な考え」が浮かんだ。屋根から自由落下する人は自分の重さを感じないだろう、というものである。落下する座標系を選べば、重力は「変換によって消し去る」ことができる。この考えを 1915 年の一般相対性理論にまで仕上げるには、さらに 8 年の歳月と、大量の新しい数学（ガウス（Gauss）とリーマン（Riemann）が発展させた、曲がった空間の微分幾何学（differential geometry））を要した。

## 思考のスキル

**動く座標系で保存量を見つける**

一定の加速度をもつ座標系では、一定の見かけの力がはたらく。それはポテンシャルエネルギーに含めることができ、その座標系でエネルギーが保存される。

運動方程式と速度との内積をとって拘束力を消去するという技法は、どんな座標系でも使える。大学では、これは一般的な原理となる。方程式が時間に陽に依存しない系には、保存されるエネルギーが存在するのである。

## 次の一歩

1. **列車の上の大砲。** STEP I 2000、問 9（`step.maths.org/questions/00-s1-q9`）に挑戦せよ。加速する車両の中で発射された物体を扱う問題で、加速度は重力の傾きのようにはたらく。

2. **向かい風。** STEP II 2006、問 11（`step.maths.org/questions/06-s2-q11`）に挑戦せよ。一定の風に逆らって投げた物体を扱う問題で、物体は着地する前に風で手元へ押し戻されることもある。

3. **列車の中のコーヒー。** 加速する列車の中のコーヒーカップの液面は、水平面に対して角 $\arctan(a/g)$ だけ傾いた平面であることを示せ。

4. **微小振動。** $x = \frac{ak}{2g}$ のまわりでのビーズの微小振動の周期を求めよ。（**ヒント：**新しい底の近くでは、針金はその曲率半径（radius of curvature）に等しい半径の円で近似できる。）

## さらに学ぶために

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press）。非慣性系と見かけの力についての章。
- **Albert Einstein, *Relativity: The Special and the General Theory***（さまざまな版がある）。アインシュタイン自身による一般向けの解説で、加速する箱の話も含まれている。
- **Pedro Ferreira, *The Perfect Theory***（Little, Brown）。一般相対性理論の「伝記」である。

# 11.6 バックスピン

**問題**

**STEP III 1997、問 10**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/97-s3-q10`

## 導入

ビー玉の後ろ側を指で押し下げると、ビー玉は後ろ向きに回転しながら前方へ飛び出す。ビー玉はすべりながら遠ざかり、減速して止まり、そしてまるで気が変わったかのように転がって戻ってくる。スヌーカー（snooker）の選手も「スクリュー」ショットや「ドロー」ショットで同じ効果を利用している。手球の下側を突いて後ろ向きの回転をかけると、手球は的球に当たった所で止まり、そこから戻ってくるのである。

この問題では、ビー玉をぴたりと止めるのに必要な逆回転（backspin）の正確な量と、初速の 7 分の 1 の速さで戻ってくるのに必要な量を求める。計算では速度（linear velocity）と角速度（angular velocity）という二つの量を追跡するが、どちらも同じ一つの摩擦力（frictional force）によって変化する。その背後には美しい近道がある。二つの量のある組み合わせは、摩擦によってまったく変化しないのである。

**出題範囲についての注意**

回転の力学は 2019 年に STEP の出題範囲から外された。ここで必要なのは次のことだけである。質量 $m$、半径 $a$ の一様な球の直径のまわりの慣性モーメント（moment of inertia）は $I = \frac{2}{5}ma^2$ であり、トルク（torque）$\tau$ は $I\dot{\omega} = \tau$ に従って角速度を変化させる。これは $m\dot{v} = F$ の回転版である。

## 取りかかる前に

> **考えてみよう**　ビー玉は速さ $v$ で前進し、角速度 $\omega$ で後ろ向きに回転している。ビー玉の最下点は台の上をどれだけの速さで動いているか。摩擦はどちら向きにはたらくか。

最下点は、ビー玉全体の運動によって $v$、後ろ向きの回転によってさらに $a\omega$ の速さで動く（後ろ向きの回転は最下点を前方へ運ぶ）。したがって最下点は前方へ $v + a\omega$ の速さですべっており、摩擦はすべりを妨げる向き、すなわち後ろ向きにはたらく。ビー玉が滑らずに転がる（rolling without slipping）のは $v + a\omega = 0$ のときに限る。

## 順を追って解く

### 段階 1　摩擦のはたらき

> **考えてみよう**　後ろ向きの摩擦力を $F$ とする。この力は $v$ にどう影響するか。中心のまわりのトルクは $Fa$ であるが、これは逆回転を強めるか、弱めるか。

摩擦はビー玉を減速させる。$m\dot{v} = -F$ より $v = v_0 - \frac{F}{m}t$ である。また、摩擦はビー玉の最下点で後ろ向きにはたらくので、逆回転を弱める向きのトルク $Fa$ を及ぼす。$I\dot{\omega} = -Fa$ であり、$I = \frac{2}{5}ma^2$ を用いると

$$\omega = \omega_0 - \frac{5F}{2ma}t.$$

ビー玉がすべっている間、$v$ と $\omega$ はともに一定の割合で減少する。

### 段階 2　ぴたりと止まる

> **考えてみよう**　ビー玉が完全に止まるためには、$v$ と $\omega$ が同じ瞬間に 0 にならなければならない。それぞれはいつ 0 になるか。

$v = 0$ となるのは $t = \frac{mv_0}{F}$ のとき、$\omega = 0$ となるのは $t = \frac{2ma\omega_0}{5F}$ のときである。これらが等しいのは $v_0 = \frac{2}{5}a\omega_0$、すなわち

$$\frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{2}{5}. \qquad \blacksquare$$

のときである。この瞬間、ビー玉は速度も角速度ももたず、摩擦（すべりがある間しかはたらかない）も消える。こうしてビー玉はその場にとどまる。

### 段階 3　戻ってくる

**考えてみよう** 逆回転がもっと大きければ、$\omega$ がまだ正である間に $v$ が 0 になる。最下点はまだ前方へすべっているので、摩擦はなお後ろ向きにはたらく。次に何が起こり、すべりはいつ止まるか。

摩擦はビー玉を後ろ向きに押し続けるので $v$ は負になり、一方で $\omega$ も減少し続ける。すべりが止まるのは $v + a\omega = 0$ のときである：

$$v_0 + a\omega_0 - \left(\frac{F}{m} + \frac{5F}{2m}\right)t = 0, \qquad t^* = \frac{2m(v_0 + a\omega_0)}{7F}.$$

この瞬間、

$$v = v_0 - \frac{2(v_0 + a\omega_0)}{7} = \frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7}.$$

これ以降ビー玉は滑らずに転がり、摩擦ははたらかなくなり、$v$ は一定に保たれる。速さ $\frac{v_0}{7}$ で転がって戻ってくるためには $5v_0 - 2a\omega_0 = -v_0$ が必要であり、したがって

$$\frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{1}{3}. \qquad \blacksquare$$

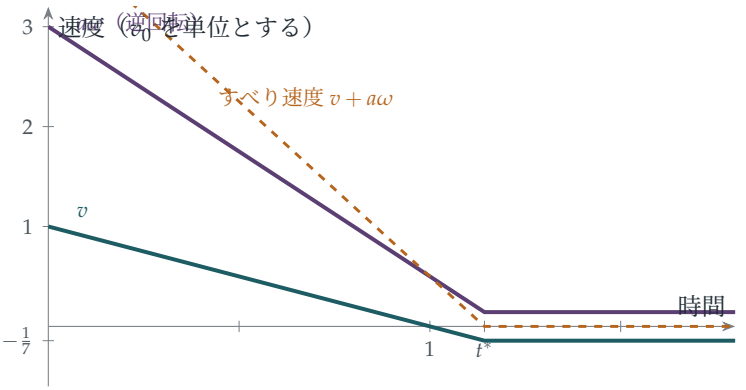



**図 11.6.1** $v_0/(a\omega_0) = \frac{1}{3}$ の場合。時間は $mv_0/F$ を単位とする。摩擦は前向きの速度 $v$（ティール）と逆回転 $a\omega$（プラム）をそれぞれ一定の割合で、2 : 5 の比で減少させる。ビー玉は $t = 1$ で前進をやめるが、まだすべっているので、すべり速度（アンバー）が $t^* = \frac{8}{7}$ で 0 になるまで後ろ向きに押される。その後、ビー玉は $\frac{v_0}{7}$ の速さで転がって戻る。

## 振り返り

- **二つの量を追跡する。** 摩擦は $v$ と $\omega$ の両方を、一定の比の割合で変化させた。
- **力がいつ消えるかを把握する。** 動摩擦はすべりがある間だけはたらき、ビー玉が転がり始めるとはたらかなくなる。

- **すべり速度が鍵となる変数である。**すべり速度は一次関数的に減少し、それが 0 になる時点がすべりから転がりへの切り替わりを示した。

## 背後にある数学

### 保存量

最終的な速さを求めるもっと手早い方法がある。台との接触点のまわりのビー玉の角運動量（angular momentum）を考えよう。摩擦はまさに**その点**ではたらくので、その点のまわりのモーメントをもたない。また、垂直抗力と重力はどちらもその点を通る鉛直線に沿ってはたらく。したがって、ビー玉がすべっている間、この角運動量は保存される。その値は $mva$（中心の運動による分）から $I\omega$（逆回転は負に数える）を引いたものである：

$$L = mav - \tfrac{2}{5}ma^2\omega.$$

速さ $V$ で転がっているときは $a\omega = -V$ であるから、角運動量は $maV + \tfrac{2}{5}maV = \tfrac{7}{5}maV$ となる。これを初期値と等しいとおくと

$$\tfrac{7}{5}maV = mav_0 - \tfrac{2}{5}ma^2\omega_0, \qquad V = \frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7},$$

となり、摩擦力の大きさにも、さらには摩擦力が一定かどうかにも触れることなく、同じ答えが得られる。最終的な速さは保存則だけで決まり、摩擦が決めるのはそこに到達するまでにかかる時間だけである。

### スヌーカー、ボウリング、テニス

同じ分析で多くのスポーツが説明できる。中心を突かれたスヌーカーの球は、最初はすべり、やがて転がり始め、最終的に初速の $\tfrac{5}{7}$ の速さになる（公式で $\omega_0 = 0$ とおけばよい）。横回転（sidespin）をかけて投げたテンピンボウリングの球は、レーン上をすべりながら進み、転がり始めたところで「フック」する。順回転（topspin）をかけて打ったテニスボールは急激に沈むが、この場合の主な効果は空気力学的なものである。回転する球は周囲の空気の流れを曲げる。これが**マグヌス効果**（Magnus effect）である。

#### コリオリとビリヤード

回転座標系における見かけの力（fictitious force）で今日知られるガスパール＝ギュスターヴ・コリオリ（Gaspard-Gustave Coriolis）（Section 11.5）は、1835 年にビリヤードの数学についての一冊の本、*Théorie mathématique des effets du jeu de billard*（『ビリヤードの効果の数学的理論』）を著した。彼はとりわけ、回転をかけて突いた球はま

っすぐ転がり始める前、すべっている間は放物線を描くことを示し、まさにこの問題のスクリューショットを分析した。この本は、このゲームを研究する物理学者たちに今なお引用されている。

## 思考のスキル

### 一つの力で変化する二つの量を追跡する

一つの力が複数の量に影響するときは、それぞれがどう変化するかを書き出し、その力でまったく変化しない組み合わせを探せ。

ここでは、摩擦は $v$ と $\omega$ を変化させたが、接触点のまわりの角運動量は変化させなかった。大学では、このような組み合わせを見つけることが繰り返し現れるテーマとなる。未知の力が消えるようにモーメントをとる点を選ぶことは、座標系を選ぶことの回転版である。

## 次の一歩

1. **順回転。** ビー玉が逆回転ではなく前向きの回転 $\omega_0$ をもって動き始めるとき、最終的に転がる速さを求めよ。$v_0/(a\omega_0)$ がどのような値のとき、ビー玉は加速するか。
2. **スヌーカーの球。** 中心を突かれた球が、回転なしで速さ $v_0$ ですべり始める。最終的に $\frac{5}{7}v_0$ で転がることを示し、失われる運動エネルギー（kinetic energy）の割合を求めよ。（転がる球の運動エネルギーは $\frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ である。）
3. **輪。** 自身の平面内を転がる薄い輪（$I = ma^2$）について、この問題を考え直せ。このとき、$\frac{v_0}{7}$ で戻ってくるのはどのような比 $v_0/(a\omega_0)$ のときか。
4. **ドローショット。** スヌーカーのキューで球のどこを突けば（中心からどれだけの高さか、$a$ を用いて表せ）、球は最初からすべらずに転がるか。（**ヒント：** 力積（impulse）がはたらく間の、接触点のまわりの角運動量を考えよ。）

## さらに学ぶために

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press）、第 8 章。角運動量と、すべりを伴う転がりについて。

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press）、剛体（rigid body）の運動に関する章。
- **David Alciatore, *The Illustrated Principles of Pool and Billiards***（Sterling）。多くの図を用いたビリヤードの物理学。

# 11.7 棒の中のシンプソンの公式

**問題**

**STEP II 1989、問 13**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/89-s2-q13`

## 導入

一様な棒は、押されたり回されたりしたときにどのように振る舞うだろうか。実は、力学におけるあらゆる目的に対して、棒は 3 つの質点とまったく同じように振る舞う。両端にそれぞれ質量の 6 分の 1、中央に 3 分の 2 を置いたものである。棒に対して何をしても（押しても、どの軸のまわりに回しても）、棒とこの 3 つの質点を区別することはできない。

$\frac{1}{6}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{6}$ という数には見覚えがあるかもしれない。これは**シンプソンの公式**（Simpson's rule）$\int_{-a}^{a} f \approx 2a\left(\frac{1}{6}f(-a) + \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{6}f(a)\right)$ の重みであり、A レベル（A level、英国の大学入学資格試験）で学んだことがあるかもしれない数値積分（numerical integration）の方法である。これは偶然ではない。力学的に等価（dynamically equivalent）な系と数値積分の公式は、同じ問題を解いているのである。

**出題範囲についての注意**

慣性モーメント（moment of inertia）は 2019 年に STEP の出題範囲から外された。物体のある軸のまわりの慣性モーメントは $\sum m_i d_i^2$、すなわち各質量にその軸からの距離の 2 乗を掛けたものの和である（連続体ならば積分になる）。質量 $m$、長さ $2a$ の一様な棒の、中心を通り棒に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは $\frac{1}{3}ma^2$ である。**平行軸の定理**（parallel axis theorem）によれば、任意の軸のまわりの慣性モーメントは、重心（centre of mass）を通りその軸に平行な軸のまわりのモーメントに $md^2$ を加えたものに等しい。ここで $d$ は 2 つの軸の間の距離である。

## 取りかかる前に

**考えてみよう**　2 つの系が、同じ質量、同じ重心をもち、重心を通るすべての軸のまわりで同じ慣性モーメントをもつとする。このとき、平行軸の定理によって、それ以外のすべての軸のまわりでも慣性モーメントが等しくなるのはなぜか。

どの軸についても、2 つの慣性モーメントはいずれも（$O$ を通る平行な軸のまわりのモーメント）$+md^2$ に等しい。第 1 項は仮定により一致し、$m$ と $d$ は両方の系で同じである。 ■

## 順を追って解く

### 段階 1　棒

**考えてみよう**　両端に質量 $p$ を、中央に質量 $q$ を置く。対称性から重心は正しい位置にある。全質量と、中心を通る垂直な軸のまわりの慣性モーメントからは、どのような条件が得られるか。

$2p + q = m$ が必要であり、中央を通る垂直な軸のまわりの慣性モーメントは $\frac{1}{3}ma^2$ でなければならない。すなわち $2pa^2 = \frac{1}{3}ma^2$ である。よって $p = \frac{1}{6}m$、$q = \frac{2}{3}m$ となる。

**考えてみよう**　これは垂直な軸だけでなく、中心を通るすべての軸について成り立つか。

中心を通り棒と角 $\psi$ をなす軸を考えると、棒に沿って距離 $r$ の位置にある点は、軸から距離 $r\sin\psi$ にある。したがって、（棒についても質点についても）どの慣性モーメントも垂直な軸の場合の値の $\sin^2\psi$ 倍であり、両者はすべての $\psi$ について一致する。（棒を含む平面内にない軸についても同様である。問題になるのは各点の軸からの距離だけであり、$O$ を通る直線上の点については、これは $r$ に比例する。）よって、棒は質量 $\frac{1}{6}m$、$\frac{2}{3}m$、$\frac{1}{6}m$ の質点と力学的に等価である。 ■

### 段階 2　長方形

**考えてみよう**　薄板を一辺に平行な細い帯に切り分ける。各帯をそれと等価な 3 つの質点で置き換える。何が得られるか。そして次に何ができるか。

細い帯はそれぞれ棒であり、左端、中心線、右端にその質量の $\frac{1}{6}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{6}$ を置いたもの

と等価である。すべての帯について足し合わせると、薄板（lamina）は質量 $\frac{1}{6}M$、$\frac{2}{3}M$、$\frac{1}{6}M$ の 3 本の一様な棒（左の辺、中央、右の辺に沿ったもの）と等価になる。次に、これらの棒をそれぞれ同じ比の 3 つの質点で置き換える。各点の質量は 2 つの分数の積になる（図 11.7.1）。

$$\text{隅：}\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36},\qquad \text{辺の中点：}\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{9},\qquad \text{中心：}\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9},$$

いずれも $M$ 倍である。 ■

（厳密には、各置き換えは薄板全体の中心を通るすべての軸のまわりの慣性モーメントを保たなければならないが、実際に保たれている。各置き換えは、質量、重心、およびその部分の重心を通る軸のまわりの慣性モーメントを保ち、残りは平行軸の定理が引き受けてくれる。）

### 段階 3 対角線のまわりの正方形

一辺 $2a$ の正方形について、対角線は 2 つの隅と中心を通り、これらは何も寄与しない。残りの 2 つの隅は対角線から距離 $\sqrt{2}a$ に、4 つの辺の中点は距離 $\frac{a}{\sqrt{2}}$ にある。よって

$$I=2\cdot\frac{1}{36}M\cdot 2a^2+4\cdot\frac{1}{9}M\cdot\frac{a^2}{2}=\frac{1}{9}Ma^2+\frac{2}{9}Ma^2=\frac{1}{3}Ma^2.\qquad\blacksquare$$

これは、中心を通り一辺に平行な軸のまわりの慣性モーメントと同じである。（これは偶然ではない。正方形では、中心を通りその平面内にあるすべての軸について同じ答えが得られる。これは演習問題にある対称性の議論からわかる。）

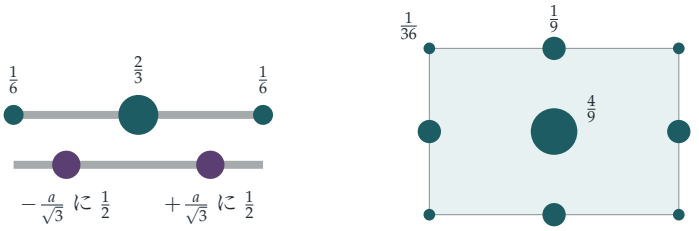
### 段階 4 一様でない棒

**考えてみよう** 棒の長さを $L$ とし、一端から距離 $x$ の位置での密度を $\frac{2mx}{L^2}$ とする。$x=0$、$\frac{L}{2}$、$L$ に質量 $p_0$、$p_1$、$p_2$ を置く。全質量、重心、端のまわりの慣性モーメントを一致させると 3 つの方程式が得られる。それはどのようなものか。

棒の全質量は $m$、軽い端のまわりの 1 次モーメントは $\int_0^L x\cdot\frac{2mx}{L^2}\,dx=\frac{2}{3}mL$、2 次モーメントは $\int_0^L x^2\cdot\frac{2mx}{L^2}\,dx=\frac{1}{2}mL^2$ である。これらを一致させると

$$p_0+p_1+p_2=m,\qquad \frac{1}{2}Lp_1+Lp_2=\frac{2}{3}mL,\qquad \frac{1}{4}L^2p_1+L^2p_2=\frac{1}{2}mL^2.$$

第 2 式を $L$ で割ったものから第 3 式を $L^2$ で割ったものを引くと $\frac{1}{4}p_1=\frac{1}{6}m$ となるので、$p_1=\frac{2}{3}m$、さらに $p_2=\frac{1}{3}m$、$p_0=0$ である。必要な質点は 2 つだけであり、中点に $\frac{2}{3}m$、重い端に $\frac{1}{3}m$ を置けばよい。 ■




棒の 2 通りの等価な表現　　薄板：$\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$ の積

**図 11.7.1**　左上：一様な棒は、両端と中心に（その質量に対する割合で）$\frac{1}{6}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{6}$ の質量を置いたものと力学的に等価であり、これはシンプソンの公式の重みである。左下：棒は、中心から距離 $\frac{a}{\sqrt{3}}$ の位置に半分ずつ置いたものとも等価であり、これは 2 点ガウス積分の節点である。右：長方形の薄板は 9 つの質点と等価であり、点の面積は質量に比例している。

## 振り返り

- **モーメントを一致させる。**力学的に等価であるとは、質量分布の 0 次、1 次、2 次のモーメントを一致させることである。
- **1 次元ずつ組み立てる。**長方形は棒でできた棒であり、その重みは積になる。
- **方程式と未知数を数える。**一致させるべきモーメントが 3 つ、未知の質量が 3 つある。そして、解にたまたま 0 が現れることもある。

## 背後にある数学

### シンプソンの公式

質量分布のモーメントを一致させることは、数値積分の公式を設計することと同じ問題である。$f = 1, x, x^2$ に対して厳密に成り立つ公式 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \approx w_0 f(-a) + w_1 f(0) + w_2 f(a)$ は

$$w_0 + w_1 + w_2 = 2a, \qquad -aw_0 + aw_2 = 0, \qquad a^2 w_0 + a^2 w_2 = \tfrac{2}{3}a^3,$$

を満たさなければならない。これはまさに棒についての条件である（$f = 1, x, x^2$ がそれぞれ質量、1 次モーメント、慣性モーメントの役割を果たす）。解は $w = 2a(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6})$、すなわちシンプソンの公式である。対称性からおまけが得られる。$f = x^3$ に対しても両辺が 0 になるので公式は厳密に成り立ち、したがってシンプソンの公式は 3 次関数を厳密に積分し、滑らかな関数に対する誤差は 4 階導関数に比例する。こうして棒は、3 つの質点と質量、重心、慣性モーメントだけでなく、3 次モーメントでも一致するのである。

### ガウス求積と慣性テンソル

質量だけでなく位置も自由に選べるならば、質点は 2 つで足りる。$\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ の各点に質量の半分ずつを置けばよい。確かめると $2\cdot\frac{1}{2}m\cdot\frac{a^2}{3}=\frac{1}{3}ma^2$ である。これは 2 点の**ガウス・ルジャンドル公式**（Gauss–Legendre rule）$\int_{-a}^{a} f \approx a\big(f(-\frac{a}{\sqrt{3}})+f(\frac{a}{\sqrt{3}})\big)$ であり、これも 3 次関数に対して厳密である。カール・フリードリヒ・ガウス（Carl Friedrich Gauss）は 1814 年に、巧みに配置した $n$ 個の点によって $2n-1$ 次の多項式を厳密に積分できることを示した。ガウス求積（Gaussian quadrature）は現在、数値解析の標準的な手法である。

力学では、物体の重心を通るすべての軸のまわりの慣性モーメントは、対称な $3\times 3$ 行列である**慣性テンソル**（inertia tensor）に集約される。質量、重心、慣性テンソルが等しい 2 つの物体は、あらゆる力に対してまったく同じように応答する。このため技術者は、シミュレーションにおいて複雑な部品をいくつかの質点で置き換えることができる。慣性テンソルの固有ベクトル（eigenvectors）は**主軸**（principal axes）であり、物体が定常的に回転できる軸である。

## 思考のスキル

**系を等価な系で置き換える**

2 つの系が、問題にとって重要なすべての量において一致するならば、複雑なほうを単純なほうで置き換えよ。

ここでは 3 つのモーメントだけが重要だったので、連続な棒を 3 つの質点で置き換えることができた。大学では、この考え方はガウス求積として、電磁気学や重力理論における多重極展開（multipole expansions）として（遠方では、電荷分布や質量分布のいくつかのモーメントだけが重要になる）、また統計学におけるモーメント法（method of moments）として現れる。

## 次の一歩

1. **シンプソンの公式。** 区間を 1 つだけとったシンプソンの公式を用いて $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ を見積もり、$\frac{\pi}{4}$ と比較せよ。この公式が $\int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x$ と $\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x$ に対しては厳密であるが、$\int_{-1}^{1} x^4\,\mathrm{d}x$ に対してはそうでないことを確かめよ。

2. **すべての軸が同じ。** 正方形の薄板の、中心を通りその平面内にある任意の軸のまわりの慣性モーメントが $\frac{1}{3}Ma^2$ であることを示せ。（ヒント：9 つの等価な質点は

90° の回転に関して対称である。このことから、$\cos\psi$ と $\sin\psi$ の 2 次式について何がいえるか。）

3 **三角形。**質量 $M$ の一様な三角形の薄板が、各辺の中点に置いた質量 $\frac{1}{3}M$ の 3 つの質点と力学的に等価であることを示せ。

4 **立方体。**一様な中身の詰まった立方体について、27 個の質点からなる力学的に等価な系を求め、それを用いて一辺 $2a$ の立方体の、1 つの辺のまわりの慣性モーメントを求めよ。

## さらに学ぶために

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press）。剛体と慣性モーメントの章。
- **Endre Süli & David Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis***（Cambridge University Press）。シンプソンの公式とガウス求積を含む、数値積分の章。
- **Philip Davis & Philip Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration***（Dover）。古典的な参考書。

# 11.8 傾いたつり合い

**問題**

**STEP III 2025、問 9**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip`

## 導入

ラグビーボールをテーブルに置くと、横向きに落ち着く。端を下にして立てても、細心の注意を払えばそのまま釣り合うが、ほんの少しつつくだけで倒れてしまう。テーブルの上に静止している剛体（rigid body）にはいくつかの平衡位置（equilibrium position）があり、そのうちあるものは安定（stable）、あるものは不安定（unstable）である。どの平衡位置が存在するかは、物体の形と重心（centre of mass）だけで決まる。物体はいくつの平衡位置をもちうるだろうか。最も少ない場合はいくつだろうか。

この問題では、上半分がドーム状で下半分が尖った、こまのような形の立体を作り、それが正立や倒立の状態のほかに、3 通りの異なる傾きで静止できることを示す。鍵となるのはただ一つの幾何学的条件である。物体が表面上のある点で静止できるのは、ちょうどその点における表面の法線（normal）が重心を通るときである。その背後には最近の発見がある。安定な位置と不安定な位置をそれぞれ一つずつしかもたない凸（convex）な形、ゴムボツ（Gömböc）である。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 立体がテーブルの上に静止しており、曲面上のただ一点 $X$ でテーブルに接している。立体にはたらく力は、重力（重心 $G$ に作用する）と $X$ における抗力（reaction）である。これらが釣り合うのはどのようなときか。

テーブルは $X$ で表面に接している。抗力は $X$ に作用し、テーブルに垂直に、すなわち

表面の法線に沿ってはたらく。重力は $G$ を通って鉛直にはたらく。2 つの力が釣り合うのは同一直線上にはたらくときに限るので、$X$ を通る鉛直線、すなわち $X$ における法線は $G$ を通らなければならない。したがって、**物体が $X$ で接して静止できるのは、ちょうど $X$ における法線が $G$ を通るときである。**

## 順を追って解く

### 段階 1　重心

**考えてみよう**　立体を、半径 $x$、厚さ $\delta x$、高さ $y$ の薄い円筒殻（cylindrical shell）に切り分けよ。殻の体積はいくらか。また、その重心はどこにあるか。

$y = \frac{r^n - x^n}{r^{n-1}}$ とすると、殻の体積は $2\pi x y\,\delta x$ であり、その重心は高さ $\frac{y}{2}$ にある。よって

$$V = \int_0^r 2\pi x y \,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{r^{n-1}}\left(\frac{r^{n+2}}{2} - \frac{r^{n+2}}{n+2}\right) = \frac{n\pi r^3}{n+2},$$

であり、底面に関するモーメント（moment）は

$$\begin{aligned}\int_0^r 2\pi x \cdot \frac{y^2}{2}\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{r^{2n-2}}\int_0^r x(r^n - x^n)^2\,\mathrm{d}x \\ &= \pi r^4\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{2n+2}\right) = \frac{n^2\pi r^4}{2(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

である（括弧内が簡単になるのは $(n+1)(n+2) - 4(n+1) + (n+2) = n^2$ だからである）。割り算すると

$$\bar{y} = \frac{nr}{2(n+1)}. \qquad \blacksquare$$

$n = 2$（放物面（paraboloid））のとき、これはよく知られた結果 $\frac{r}{3}$ になる。$n \to \infty$ とすると立体は円柱に近づき、$\bar{y} \to \frac{r}{2}$ となる。

### 段階 2　法線が軸と交わる位置

$x = rp$ における曲線の傾きは $-\frac{nx^{n-1}}{r^{n-1}} = -np^{n-1}$ なので、法線の傾きは $\frac{1}{np^{n-1}}$ である。法線に沿って $(rp, r(1-p^n))$ から $y$ 軸まで進むと、$x$ は $rp$ だけ減少し、$y$ は $\frac{rp}{np^{n-1}} = \frac{r}{np^{n-2}}$ だけ減少する。よって

$$Y = r\left(1 - p^n - \frac{1}{np^{n-2}}\right). \qquad \blacksquare$$

**考えてみよう** $n=4$ のとき、$Y=r\bigl(1-p^4-\frac{1}{4p^2}\bigr)$ である。$Y$ が最大になるのはどこか。$p\to 0$ のとき、また $p=1$ のときはどうなるか。

$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}p}=r\bigl(-4p^3+\frac{1}{2p^3}\bigr)=0$ となるのは $p^6=\frac{1}{8}$、すなわち $p^2=\frac{1}{2}$ のときである。このとき $Y=r\bigl(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\bigr)=\frac{1}{4}r$ である。■

$p\to 0$ のとき $Y\to-\infty$ である（頂上付近ではドームが非常に平らなので、法線はほぼ鉛直となり、はるか下方で軸と交わる）。$p=1$ では $Y=-\frac{1}{4}r$ である。したがって、$p$ が 0 から 1 まで動くとき、$Y$ は $-\infty$ から $\frac{1}{4}r$ まで増加し、再び $-\frac{1}{4}r$ まで減少する。

### 段階 3 こま

**考えてみよう** 小問 (iii) の立体は、逆さにした放物面（$n=2$）の上にドーム（$n=4$）をのせたものである。その重心はどこにあるか。

段階 1 より、ドームの体積は $\frac{2\pi r^3}{3}$ で、重心は $\frac{2r}{5}$ にある。放物面の体積は $\frac{\pi r^3}{2}$ で、逆さになっているので重心は $-\frac{r}{3}$ にある。よって

$$\bar{y}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}\,r=\frac{\frac{4}{15}-\frac{1}{6}}{\frac{7}{6}}\,r=\frac{3r}{35}.$$

$G$ は $\bigl(0,\frac{3r}{35}\bigr)$ にあり、最も幅の広い位置よりわずかに上にある。

### 段階 4 平衡位置を数える

**考えてみよう** 傾いた平衡には、法線が $G$ を通るような点（$A$ でも $B$ でもない）が必要である。表面の各部分において、法線が高さ $\frac{3r}{35}$ で軸と交わる点はいくつあるか。

**ドーム。**その法線が軸と交わる高さ $Y$ は、$-\infty$ から $\frac{1}{4}r$ まで増加し、$-\frac{1}{4}r$ まで減少する。$-\frac{1}{4}r<\frac{3r}{35}<\frac{1}{4}r$ なので、中間値の定理（intermediate value theorem）により、値 $\frac{3r}{35}$ は増加する部分で 1 回、減少する部分で 1 回とられる。すなわち 2 点である。

**尖った底部。**$n=2$ の場合の小問 (ii) を $x$ 軸に関して折り返すと、パラメータ $p$ の点における法線は $-r\bigl(1-p^2-\frac{1}{2}\bigr)=r\bigl(p^2-\frac{1}{2}\bigr)$ で軸と交わり、これは $-\frac{1}{2}r$ から $\frac{1}{2}r$ まで増加する。これが $\frac{3r}{35}$ に等しくなるのは、$p^2=\frac{41}{70}$ のときのちょうど 1 回である。

これら 3 点はそれぞれ平衡を与え、3 本の法線は軸と互いに異なる角をなすので、$\overrightarrow{AB}$ は鉛直方向と 0 でない 3 通りの異なる角をなす（図 11.8.1）。■

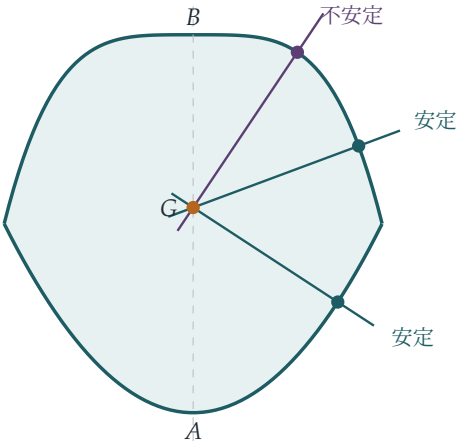



**図 11.8.1**　小問 (iii) の立体の断面と、その重心 $G$（琥珀色）。印をつけた 3 点のそれぞれで表面の法線が $G$ を通るので、立体はその点で静止できる。これらの平衡のうち 2 つは安定（そこでは表面が局所的に $G$ に最も近い）、1 つは不安定（局所的に最も遠い）である。

## 振り返り

- **物理的な条件を幾何に翻訳する。**平衡は「法線が $G$ を通る」という条件になった。
- **解かずに存在を示す。**角度そのものは一度も求めていない。中間値の定理と関数 $Y(p)$ の形から、それがいくつあるかがわかった。
- **一般的な結果を再利用する。**一般の $n$ に対する小問 (ii) によって、小問 (iii) の表面の 2 つの部分をどちらも扱うことができた。

## 背後にある数学

### 臨界点としての平衡

立体が点 $X$ で静止しているとき、テーブルから測った $G$ の高さは、$G$ から $X$ における接平面までの距離である。凸な物体では、$GX$ が法線に沿っているとき、これは $|GX|$ に等しい。一般に、平衡とは $G$ から表面までの距離の**臨界点**（critical point）である。$|GX|$ が停留する（stationary）点 $X$ とは、ちょうど法線が $G$ を通る点のことである。安定な平衡はこの距離の極小（local minimum）（$G$ ができるだけ低い）であり、不安定な平衡は極大（local maximum）または鞍点（saddle point）である。

断面に沿って $A$ から $B$ まで回っていくと、$G$ からの距離は次のように変わる。$A$ では大きく（極大：尖った先端で釣り合っており、不安定）、底部の傾いた点では小さく

（極小、安定）、縁では大きく、ドームの下側の傾いた点では小さく（安定）、上側の傾いた点では大きく（不安定）、$B$ では小さい（安定：ドームの頂上で静止する）。図が示すように、極小と極大は交互に現れなければならない。（実は、この問題では数えていない平衡がもう 1 つある。立体は、表面がただ 1 つの法線をもたない鋭い縁の上で、不安定ながら釣り合うことができる。）

### ゴムボツ

凸な物体の平衡はどこまで少なくできるだろうか。どんな物体にも、少なくとも 1 つの安定な位置と 1 つの不安定な位置がある。すなわち、表面上で $G$ に最も近い点と最も遠い点である。一様な密度をもつ 2 次元の凸図形は、常に少なくとも 4 つの平衡をもつ（距離の極小 2 つと極大 2 つが交互に並ぶ）。1995 年、ウラジーミル・アーノルド（Vladimir Arnold）は、一様な密度をもつ 3 次元の凸な物体で、平衡がちょうど 2 つ、つまり安定なもの 1 つと不安定なもの 1 つだけであるものが存在するかを問うた。2006 年、Gábor Domokos と Péter Várkonyi がそのような物体を構成した。それが**ゴムボツ**である。どんな向きで置いても、転がったり揺れたりして、ただ 1 つの安定な位置に落ち着く。Domokos はのちに、ある種のカメの甲羅がこの形に近く、ひっくり返されたときに起き上がるのに役立っていることに気づいた。

#### アルキメデスと浮体

物体の安定性の研究はアルキメデス（Archimedes）にさかのぼる。彼は *On Floating Bodies*（『浮体について』）において、浮かんでいる放物面（船体のモデル）が正立して安定なのはどのようなときで、転覆するのはどのようなときかを、その形と密度によって解析した。幾何学だけで導かれた彼の答えには、ここで用いたのとまさに同じ種類の重心と法線の計算が含まれている。造船技師は今も、**メタセンター**（metacentre）という形で彼の考えを用いている。浮心（centre of buoyancy）を通る鉛直線が船の軸と交わる点が重心より上にあれば、船は安定である。

## 思考のスキル

#### ポテンシャルエネルギーの地形

平衡はポテンシャルエネルギー（*potential energy*）の停留点であり、安定な平衡はその極小である。停留点は、解いて求める代わりに数えよ。

ここでは、ポテンシャルエネルギーは $G$ の高さ、すなわち $G$ から表面までの距離に比例していた。大学では、この見方は力学、化学（分子はエネルギーの極小に落ち着く）、そして位相幾何学（topology）を貫いている。位相幾何学では、**モース理論**（Morse theory）によって、曲面上の任意の関数の極小、極大、鞍点の個数が、その曲面の形によって制約されることが示される。

## 次の一歩

1 **起き上がりこぼし。** STEP II 1996、問 9（`step.maths.org/questions/96-s2-q9`）に挑戦しよう。半球の上に円錐をのせたものが自ら起き上がるのはどのようなときか。（**ヒント**：$G$ は半球の中心に対してどこになければならないか。）

2 **球。** 一様な中実球では、すべての法線が中心を通る。このことは、その平衡について何を意味するか。球の重心が中心からわずかにずれている場合はどうか。

3 **楕円。** 自身を含む平面内で直線上を転がる楕円板は、ちょうど 4 つの平衡をもつことを示し、そのうちどれが安定かを特定せよ。

4 **2 つの放物面。** 小問 (iii) のドームを放物面 $ry = r^2 - x^2$ に置き換え、立体が $x$ 軸に関して対称になるようにする。$G$ が原点にあることを示し、傾いた平衡を求め、それらが等しい傾きの対になって現れる理由を説明せよ。

## さらに学ぶために

- **Péter Várkonyi & Gábor Domokos, “Static equilibria of rigid bodies: dice, pebbles, and the Poincaré–Hopf theorem”,** *Journal of Nonlinear Science* 16 (2006)。ゴムボツの論文である。
- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press）。平衡と安定性について。
- **Chris Rorres, “Completing Book II of Archimedes’s *On Floating Bodies*”,** *Mathematical Intelligencer* 26 (2004)。アルキメデスの安定性解析を、現代的な図とともに解説している。

# 11.9 安全放物線

**問題**

**STEP II 2014、問 10**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/14-s2-q10`

## 導入

ある噴水が、あらゆる方向に同じ速さで水を噴き出しているとする。水の筋はきらめくドームをつくり、その外縁はくっきりしている。内側ではどの点にも水が通過し、外側にはまったく届かない。この縁は放物線であり、**安全放物線**（parabola of safety）とよばれる。その外側にある標的には、与えられた初速の大砲では、どの角度で撃っても命中させられないからである。

驚くべきことに、この境界はそれ自体が軌道（trajectory）の一つではない。それは軌道全体の族の**包絡線**（envelope）、すなわちどの軌道にもちょうど一度ずつ接する曲線であり、Section 8.1 で直線 $y = 0$ が放物線の族に接していたのとまったく同じ状況である。この問題では、二次式（quadratic）の判別式（discriminant）だけを用いてこの曲線を求める。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $x$ と $y$ を $t$ で表し、$t$ を消去せよ。$\sec^2\theta$ を $\lambda = \tan\theta$ を用いてどう表せるか。

$x = ut\cos\theta$、$y = ut\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$ に $t = \frac{x}{u\cos\theta}$ を代入すると、$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ を用いて

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta} = \lambda x - \frac{gx^2}{2u^2}(1+\lambda^2),$$

を得る。

## 順を追って解く

### 段階 1　$x$ を固定して角度を動かす

> **考えてみよう**　固定した $x>0$ に対して、$y$ を $\lambda$ の関数とみなせ。それはどのような関数か。$\lambda$ がすべての実数を動くとき、$y$ はどのような値をとるか。

$x$ を固定すると、$y$ は最高次の係数が負の値 $-\frac{gx^2}{2u^2}$ である $\lambda$ の二次関数であり、$\lambda$ についての上に凸な放物線となる。これは最大値をもち、$\lambda\to\pm\infty$ のとき $y\to-\infty$ である。連続であるから、最大値以下のすべての値をとる。最大となるのは $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}=x-\frac{gx^2}{u^2}\lambda=0$、すなわち $\lambda=\frac{u^2}{gx}$ のときであり、そこでは

$$Y=\frac{u^2}{gx}\,x-\frac{gx^2}{2u^2}\left(1+\frac{u^4}{g^2x^2}\right)=\frac{u^2}{2g}-\frac{gx^2}{2u^2}. \qquad \blacksquare$$

である。（同じことを言い換えると、点 $(x,y)$ に到達できるのは、二次方程式 $\frac{gx^2}{2u^2}\lambda^2-x\lambda+\frac{gx^2}{2u^2}+y=0$ が実数解 $\lambda$ をもつときであり、かつそのときに限る。判別式の条件から $y\le Y$ が得られる。）

### 段階 2　領域

曲線 $Y=\frac{u^2}{2g}-\frac{gx^2}{2u^2}$ は上に凸な放物線であり、その頂点（vertex）$\left(0,\frac{u^2}{2g}\right)$ は真上に撃ったときに到達する高さである。また、この放物線は $x=\pm\frac{u^2}{g}$、すなわち最大到達距離のところで地面と交わる。この曲線上またはその下側（かつ地面より上）にあるすべての点には到達でき、曲線より上側の点にはどれも到達できない（図 11.9.1）。

> **考えてみよう**　曲線より真に下側にある点を通る軌道はいくつあるか。曲線上の点ではどうか。

曲線より下側の点は、$\lambda$ についての二次方程式が異なる二つの実数解をもつ場合に対応する。すなわち、高い弾道と低い弾道の二つの発射角がある。曲線上の点は重解に対応する。すなわち軌道はちょうど一つであり、その軌道はその点で曲線に接する。

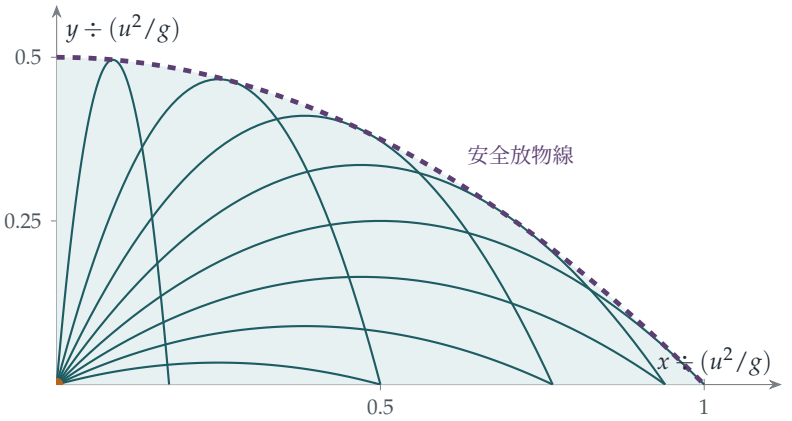



**図 11.9.1**　一定の速さ $u$、角度 $15°, 25°, \ldots, 85°$ での軌道（青緑）。どの軌道も破線で示した安全放物線 $y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}$ にちょうど一度ずつ接し、その下側の領域（網掛け部分）がちょうど到達可能な点の集合である。原点 $O$（琥珀色）は安全放物線の焦点である。

### 段階 3　最も遠い点

**考えてみよう**　$O$ から最も遠い到達可能な点（地面上または地面より上）は境界上にある。距離の 2 乗 $x^2 + Y^2$ を $x^2$ の関数として表せ。それは増加するか、減少するか。

$X = x^2$ とおく。すると

$$x^2 + Y^2 = X + \left(\frac{u^2}{2g} - \frac{gX}{2u^2}\right)^2, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(x^2 + Y^2) = 1 - \frac{g}{u^2}\left(\frac{u^2}{2g} - \frac{gX}{2u^2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{g^2 X}{2u^4} > 0.$$

である。よって境界に沿って外側へ進むほど距離は増加し、最も遠い点は境界が地面と交わる点 $x = \frac{u^2}{g}$ である。最大距離は

$$\frac{u^2}{g},$$

であり、これは $45°$ で撃つ通常の最大到達距離の弾道によって実現される。 ■

## 振り返り

- **問いを逆転させる。** 与えられた軌道がどこを通るかを問うのではなく、与えられた点をどの軌道が通るかを問う。
- **パラメータについての二次式。** 各点について、$\lambda = \tan\theta$ についての方程式は二次方程式であり、その判別式によってその点に到達できるかどうかが決まる。

- **二つ、一つ、またはゼロ。**内側の点には二つの角度で、境界上の点には一つの角度で到達でき、外側の点にはどの角度でも到達できない。

## 背後にある数学

### 包絡線

1 パラメータの曲線族 $F(x, y, \lambda) = 0$ は、しばしば**包絡線**、すなわち族のすべての曲線に接する曲線をもつ。包絡線は $F = 0$ と $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ を連立させて解くことで求められ、これはまさに $y$ を $\lambda$ について最大化することで行ったことである。包絡線は科学のいたるところに現れる。コーヒーカップの表面に見える明るい光の曲線は反射光線の包絡線であり、**火線**（caustic）とよばれる。超音速機のソニックブームは、機体が発する音波の包絡線である**マッハ円錐**（Mach cone）によって運ばれる。そして Section 8.1 では、微分方程式の解の族の包絡線がそれ自体解、すなわち「特異」な解であった。

### 焦点

安全放物線には注目すべき性質がある。その焦点（focus）は発射点 $O$ なのである。（放物線 $y = c - \frac{x^2}{4c}$ の焦点は原点であり、ここでは $c = \frac{u^2}{2g}$ である。）各軌道もまた放物線であり、すべての軌道の焦点は $O$ を中心とする半径 $\frac{u^2}{2g}$ の円周上にある。これにはエネルギーによる説明がある。高さ $y$ における物体の速さは $\sqrt{u^2 - 2gy}$ であり、これは準線（directrix）の高さ $\frac{u^2}{2g}$ でゼロになる。そして、準線が同じ直線であり、かつ $O$ を通る放物線の焦点は、その円周上にあるのである。

#### トリチェリの放物線

ガリレオ（Galileo）は 1609 年ごろ、投げられた物体が放物線を描いて運動すること、そして水平な地面での最大到達距離は 45° で得られることを示した。彼の弟子で、気圧計の発明者としてよく知られるエヴァンジェリスタ・トリチェリ（Evangelista Torricelli）は、1644 年に著書 *De motu gravium* において安全放物線を発見した。砲手にとって、これは「そもそもどの標的が射程内にあるのか」という実際的な問いに答えるものであった。トリチェリはまた、与えられた点を通る軌道は対になって現れ、その角度はその点の方向と鉛直方向に関して対称であること、すなわちこの問題における高い弾道と低い弾道であることも示した。

## 思考のスキル

**曲線族の包絡線**

曲線族が覆う領域の境界を求めるには、一点を固定し、どのパラメータの値に対して曲線がその点を通るかを問えばよい。境界とは、解の個数が変化するところである。

点を動かしながら解の個数を数えるという同じ考え方は、光学における火線の研究、力学系における分岐（bifurcation）の研究、そして方程式の解の個数がどのように変化しうるかを分類するカタストロフィー理論（catastrophe theory）の基礎となっている。

## 次の一歩

1. **爆発する花火。** STEP II 2023、問 10（OCR が配布している 2023 年の過去問一式に収録、`www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip`）に挑戦せよ。この問題では、爆発で飛び散る粒子を、中心が自由落下する球面とみなし、安全放物面（paraboloid of safety）に沿って動く粒子を求める。

2. **斜面に向かって撃つ。** 角度 $\beta$ で傾いた斜面に沿って上向きに、速さ $u$ で物体を投げるときの最大到達距離を求めよ。（**ヒント：**直線 $y = x\tan\beta$ は安全放物線とどこで交わるか。）最適な角度は、斜面と鉛直方向のなす角を二等分することを示せ。

3. **二つの角度。** 点 $P$ に到達する二つの角度は、$OP$ と鉛直方向のなす角の二等分線に関して対称であることを示せ。

4. **焦点。** 角度 $\theta$ の軌道の焦点が $\left(\frac{u^2}{2g}\sin 2\theta, -\frac{u^2}{2g}\cos 2\theta\right)$ であることを示し、これより焦点が $O$ を中心とする円周上にあることを示せ。

## さらに学ぶために

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press、古典力学入門）の第 3 章。軌道の包絡線について論じている。
- **J. W. Bruce, P. J. Giblin & C. G. Gibson, “On caustics of plane curves”**, *American Mathematical Monthly* 88 (1981)。幾何学における包絡線と火線について。
- **E. H. Lockwood, *A Book of Curves***（Cambridge University Press、曲線の本）。包絡線、

火線、そして多くの古典的な曲線を、その作図法とともに扱っている。

# 11.10 こちらへ戻ってくるボール

**問題**

**STEP II 2019、問 9**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip`

## 導入

ボールを前方に投げれば、ボールは着地するまで自分から遠ざかっていく。当然である。真上に投げれば、ボールは戻ってくる。その中間のどこかで何かが変わるはずである。つまり、ボールがいったん遠ざかり、次に近づき、着地する前に再び遠ざかるような角度が存在するはずである。この問題では、その正確な境界値 $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$、すなわち約 $70.5°$ を求める。

この結果は、数学でよく見られる状況の好例である。誰もが単調（monotonic）だと思い込んでいる量が、実はそうではないのである。また、大学で常に用いられる標準的な手法も示している。距離が増加しているかどうかを調べるには、その 2 乗を微分すればよい。そうすれば平方根を避けられる。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $OP$ よりも $OP^2$ を扱う方が簡単なのはなぜか。「$OP$ が増加する」ことと「$OP^2$ が増加する」ことは同じだろうか。

$OP^2 = x^2 + y^2$ は $t$ の多項式（polynomial）であるが、$OP$ には平方根が含まれる。$OP \geq 0$ であり、2 乗は非負の数の上で増加関数であるから、$OP$ が増加するのは $OP^2$ が増加するときであり、かつそのときに限る。

## 順を追って解く

### 段階 1　距離の 2 乗

$x = ut\cos\alpha$、$y = ut\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$ とすると、

$$OP^2 = u^2t^2\cos^2\alpha + u^2t^2\sin^2\alpha - ugt^3\sin\alpha + \frac{1}{4}g^2t^4 = u^2t^2 - ugt^3\sin\alpha + \frac{1}{4}g^2t^4.$$

> **考えてみよう**　$t$ について微分せよ。因数 $t$ をくくり出すと、何が残るか。それがすべての $t$ に対して正となるのはどのようなときか。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}OP^2 = 2u^2t - 3ugt^2\sin\alpha + g^2t^3 = t(g^2t^2 - 3ug\sin\alpha\, t + 2u^2).$$

$t > 0$ のとき、符号は二次式（quadratic）$g^2t^2 - 3ug\sin\alpha\, t + 2u^2$ の符号と一致する。この二次式の最高次の係数は正であるから、判別式（discriminant）が負ならば、すべての $t$ に対して正となる：

$$9u^2g^2\sin^2\alpha - 8u^2g^2 < 0 \iff \sin^2\alpha < \frac{8}{9} \iff \sin\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

このとき、$OP$ は飛行中ずっと増加する。 ■

### 段階 2　より急な角度での投射

> **考えてみよう**　$\sin\alpha > \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ならば、この二次式は 2 つの実数解をもつ。それらは正だろうか。小さい方の解は、質点が着地する前だろうか。

解の和は $\frac{3u\sin\alpha}{g} > 0$、積は $\frac{2u^2}{g^2} > 0$ であるから、2 つの解はともに正であり、その間では二次式、したがって $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}OP^2$ は負となる。質点は $T = \frac{2u\sin\alpha}{g}$ で着地する。小さい方の解は

$$t_1 = \frac{u}{2g}(3\sin\alpha - \sqrt{9\sin^2\alpha - 8}) < \frac{u}{2g}\cdot 3\sin\alpha < \frac{2u\sin\alpha}{g} = T.$$

よって、$t_1$ の直後（かつ着地前）において $OP$ は減少している。 ■

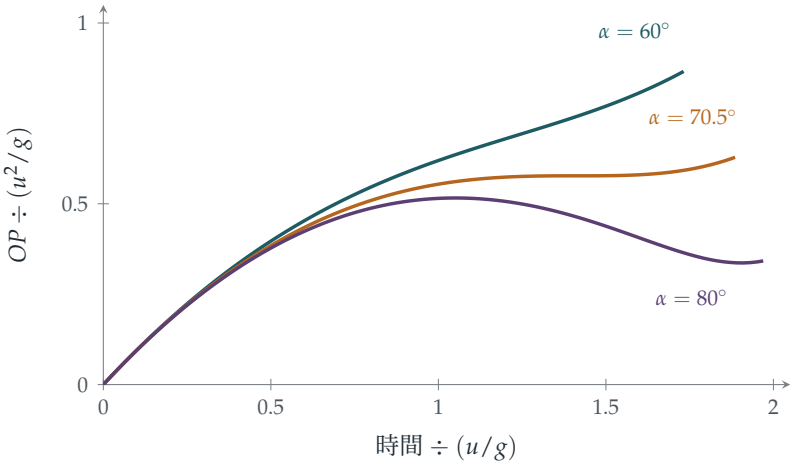



**図 11.10.1** 3 つの角度について、着地するまでの、投げた人からの距離と時間の関係。60°（ティール）では常に増加する。臨界角（critical angle）$\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 70.5°$（アンバー）では一瞬だけ止まる。80°（プラム）では、ボールは遠ざかり、しばらく投げた人の方へ戻ってきて、着地の直前に再び遠ざかる。

### 段階 3 動く観測者

**考えてみよう** $Q$ は地面に沿って逆方向に速さ $v$ で $O$ から遠ざかる。$Q$ から測ると、水平方向の隔たりは $x + vt$ となる。これは計算にどのような影響を与えるか。

隔たり $QP$ の水平成分は $(u\cos\alpha + v)t$、鉛直成分は $ut\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$ である。よって

$$QP^2 = \big((u\cos\alpha + v)^2 + u^2\sin^2\alpha\big)t^2 - ugt^3\sin\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4,$$

となり、これは先ほどの式の第 1 項で $u^2$ を $w^2 = (u\cos\alpha + v)^2 + u^2\sin^2\alpha$ に置き換えたものと同じである。導関数（derivative）は $t\big(g^2t^2 - 3ug\sin\alpha\, t + 2w^2\big)$ であり、これがすべての $t > 0$ に対して正となる条件は、両辺から $8u^2\sin^2\alpha$ を消去すると

$$9u^2\sin^2\alpha < 8w^2 \quad\Longleftrightarrow\quad u^2\sin^2\alpha < 8(u\cos\alpha + v)^2,$$

となる。平方根をとると（$u\sin\alpha$ と $u\cos\alpha + v$ はともに正である）、これは $u\sin\alpha < 2\sqrt{2}(u\cos\alpha + v)$ となり、整理すると

$$2\sqrt{2}\,v > (\sin\alpha - 2\sqrt{2}\cos\alpha)u. \qquad \blacksquare$$

（このとき導関数はすべての $t > 0$ に対して正となるので、これは $QP$ が飛行中ずっと増加するための十分条件である。）

## 振り返り

- **2 乗を微分する。**距離の 2 乗は多項式であり、その導関数は距離の導関数と同じ符号をもつ。
- **常に正である二次式。**「すべての時刻で増加する」という条件は、判別式の条件になった。
- **新しい問題を古い問題として見る。**動く観測者によって変わったのは係数 1 つだけだったので、先の解析がそのまま適用できた。

## 背後にある数学

### 幾何学的な見方

$OP$ が減少するのは、$P$ の速度が「内向き」、すなわちベクトル $\overrightarrow{OP}$ と鈍角（obtuse angle）をなすとき、つまり $\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{v} < 0$ のときであり、かつそのときに限る。急な角度で投げた場合、飛行の最高点付近では、質点は投げた人のはるか上方かつわずかに前方にあり、ほぼ水平に遠ざかる向きに動いているが、落下し始めている。$\overrightarrow{OP}$ の方向を基準にして、速度の下向きの成分が外向きの成分を上回ると、質点は近づいてくる。浅い角度で投げた場合、質点は常に十分前方にあるので、その速度が $O$ の方へ向くことはない。臨界的な場合とは、ちょうど 1 つの瞬間に速度が $\overrightarrow{OP}$ と垂直（perpendicular）になる場合であり、これが図 11.10.1 において距離が一瞬止まる瞬間である。

### 単調性は自明ではない

「明らかに」増加すると思える量の多くは、実は増加しない。地球から月までの距離は振動する。曲がりくねった道路を走る 2 台の車の間の距離は、一方が常に前にいても減少することがある。捕食者の個体数は、獲物が増えている間に減少することがある。ある量が単調であることを証明するには、通常、導関数の符号が一定であることを示す。ここでの手法（多項式に帰着させ、その解または判別式を調べる）は、それを行う標準的な方法である。解析学では、単調性はしばしば収束（convergence）を証明する鍵となる。第 2 章で見たように、有界な単調数列は収束する。

## 思考のスキル

**導関数を通して単調性を調べる**

ある量が常に増加するかどうかを判定するには、それ（またはその 2 乗のように扱いやすい関数）を微分し、導関数の符号が変わり得るかどうかを問えばよい。

大学では、この種の符号に関する議論は、不等式の証明、最大値・最小値の位置の特定、そして微分方程式（differential equation）の解の安定性（stability）の研究に用いられる。安定性の研究では、常に減少する量（Section 8.2 のように）が、系が落ち着くことを証明する。

## 次の一歩

1. **どこまで近づくか。** $\alpha = 80^\circ$ のとき、$OP$ が極大（local maximum）・極小（local minimum）となる時刻と、そのときの距離を $u^2/g$ を単位として求めよ。

2. **斜面上で。** 水平面と角 $\beta$ をなす斜面を上る向きにボールを投げ、斜面上に着地する場合について、小問 (i) を繰り返せ。（斜面から測った）臨界角は変わるか。

3. **空気抵抗がある場合。** ボールが速度に比例する抵抗も受けるとする。計算せずに、臨界角は $70.5^\circ$ より大きくなると予想されるか、小さくなると予想されるか。それはなぜか。

4. **高い所から投げる。** ボールを崖の上から投げ、はるか下に着地する場合、どのような角度に対しても $OP$ は最終的には増加することを示し、ある段階で $OP$ が減少するような角度が存在するかどうかを調べよ。

## さらに学ぶために

- **James Walker, *The Flying Circus of Physics***（Wiley）。日常の物理に関する意外なパズルが何百も収められている。
- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press）。第 3 章は放物運動を扱い、直観に反する問題がいくつか含まれている。
- **J. M. Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***（Cambridge University Press）。あるものが常に別のものより大きいことを証明する技法を扱う。

# 11.11 野手はどのように捕球するか

**問題**

**STEP II 1998、問 11**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/98-s2-q11`

## 導入

ボールが外野へ高く打ち上げられる。うまい野手はすぐに走り出し、ボールが落ちてくるちょうどそのときにその地点へ到着する。なぜそんなことができるのだろうか。放物運動（projectile motion）の方程式を一瞬のうちに頭の中で解ける人などいないし、そもそも野手はボールの速さも角度も知らない。それでも野手は、そしてフリスビーをキャッチする犬も、これを日常的にやってのけるのである。

1968 年、物理学者 Seville Chapman がひとつの答えを提案した。この問題はそれを証明するものである。野手がボールの仰角（angle of elevation）$\theta$ を見ていて、$\tan\theta$ が**一定の割合で**増加するように動けば、ボールが落ちる地点にぴったり到着する。物理の知識は何もいらない。必要なのは、ボールが一定の速さより速く上がって見えるか遅く上がって見えるかに気づく能力だけである。難しい予測の問題が、単純なフィードバック（feedback）の規則に置き換えられるのである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 打者を原点に、野手を距離 $D$ の位置に置く。ボールが $(x, y)$ にあるとき、$\tan\theta$ はいくらか。

ボールは野手の目の高さより $y$ だけ上にあり、野手の前方、水平距離 $D - x$ のところにある（ボールは野手に向かってくる）。したがって $\tan\theta = \frac{y}{D-x}$ である。

## 順を追って解く

### 段階 1　完璧な位置にいる野手

**考えてみよう**　ボールの水平方向の速さを $U$、鉛直方向の初速を $W$ とし、ボールが時刻 $T$ に（目の高さに）落ちてくるとする。$x$、$y$、$D$ を $U$、$W$、$T$、$g$、$t$ で表せ。$y$ を因数分解できるか。

$x = Ut$、$y = Wt - \frac{1}{2}gt^2$ であり、ボールは $T = \frac{2W}{g}$ に目の高さに戻ってくる。そこに野手がいるので $D = UT$ である。$W = \frac{1}{2}gT$ であるから、

$$y = \tfrac{1}{2}gt(T - t), \qquad D - x = U(T - t).$$

因数 $T - t$ が約分できて、

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{U(T-t)} = \frac{g}{2U}\,t.$$

よって $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tan\theta = \frac{g}{2U}$ であり、これは定数である。 ■

### 段階 2　走る野手

**考えてみよう**　今度は野手が距離 $D_0$ の位置から出発し、打者に向かって速さ $v$ で走るとする。このとき野手の位置は $D_0 - vt$ である。野手は時刻 $T$ にボールを捕る。$D_0$ はいくらか。同じ計算を繰り返せ。

時刻 $T$ にボールを捕るには、野手はボールが落ちる地点にいなければならない。すなわち $D_0 - vT = UT$ であり、$D_0 = (U + v)T$ である。野手とボールの水平距離は $D_0 - vt - Ut = (U + v)(T - t)$ であり、ここでも因数が約分できる：

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{(U+v)(T-t)} = \frac{g}{2(U+v)}\,t.$$

したがって、ちょうどよい速さで走っていれば、$\tan\theta$ は一定の割合で増加する。

**考えてみよう**　問題が求めているのは逆（converse）である。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tan\theta$ が一定になるように走れば、野手はボールを捕れるだろうか。

野手が速さ $v$ で走り、$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{D_0-(U+v)t}$ が一定の割合 $c$ で増加するとしよう。すると $\tan\theta = ct$ である（$t = 0$ で 0 となるからである）。このとき

$$\tfrac{1}{2}g(T - t) = c(D_0 - (U + v)t) \quad \text{任意の} t.$$

$t$ の係数と定数項を比較する（comparing coefficients）と、$\frac{1}{2}g = c(U + v)$ および $\frac{1}{2}gT = cD_0$ を得る。辺々割ると $D_0 = (U + v)T$ となり、これはまさに時刻 $T$ に落下地

点にいるための条件である。したがって野手は、$\tan\theta$ が一定の割合で上がり続けるように $v$ を選べばよく、そうすればボールを捕ることができる。 ■

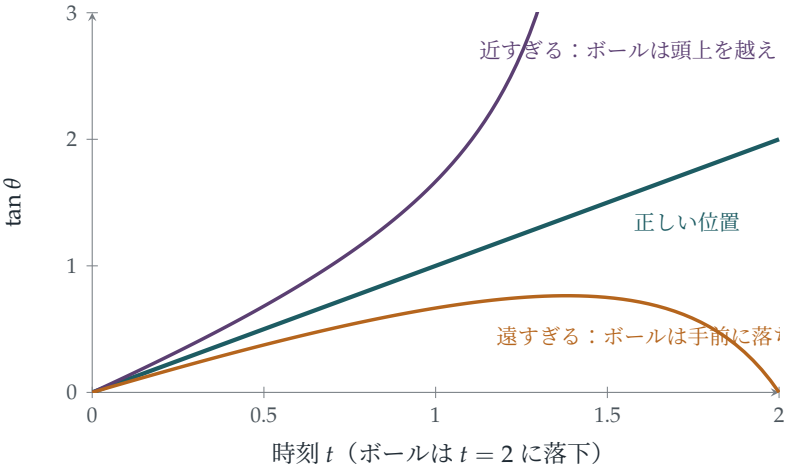



**図 11.11.1**　距離 2 の地点に落ちるボール（$g = 2$、水平方向の速さ 1）を、静止した野手が見たときの様子。正しい位置では、$\tan\theta$ は直線的に上昇する（ティール）。近すぎる位置に立つと、$\tan\theta$ は加速しながら上昇し、ボールは頭上を越えていく（プラム）。後ろに下がりすぎると、上昇はしだいに遅くなり、やがて下降する（アンバー）。規則：ボールの像が一定の割合で上昇するように動け。

## 振り返り

- **共通因数を探せ。**高さと水平距離のどちらにも $T - t$ が含まれており、それを約分することで $\tan\theta$ が一次式になった。
- **逆を証明せよ。**この規則がうまくいくこと（捕球につながること）を示すには、係数を比較する逆向きの議論が必要であった。
- **知覚しやすい不変量（invariant）。**$\tan\theta$ が一定の割合で上がっているかどうかは目で判断できるが、落下地点はそうはいかない。

## 背後にある数学

### 光学的加速度の打ち消し

Chapman の規則は現在、**光学的加速度の打ち消し**（optical acceleration cancellation）と呼ばれている。野手は「光学的加速度」$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\tan\theta$ を 0 に保つように動くのである。ボ

ールの像が加速しながら上がっていけば、ボールは頭上を越えるので後ろに下がる。減速していけば、ボールは手前に落ちるので前に走る（図 11.11.1）。この戦略はボールがどこに落ちるかを教えてはくれないが、野手をそこへ導いてくれる。これはフィードバック制御則（feedback control law）であり、誘導ミサイルを操縦する制御則と同類のものである。ミサイルは**比例航法**（proportional navigation）を用いて、目標への視線角を一定に保つ。これは同じ考え方を横方向に適用したものである。

### 野手が実際にしていること

実際の野手は Chapman の規則を使っているのだろうか。1990 年代に、野球の外野手の頭にカメラを取り付けて行われた実験では、結果はまちまちであった。Michael McBeath らは 1995 年に *Science* 誌上で、横方向に打たれたボールに対しては、野手は視野の中でボールの像が直線上を動き続けるような曲線経路を走っており（「線形光学的軌道」）、これによってもやはり捕球に至ると論じた。その後の研究では、両方の戦略、さらにそれらを組み合わせたものが使われていること、また野手は一定の速さで走るとは限らないことが示唆されている。2004 年の研究では、フリスビーをキャッチする犬が同じ光学的規則と整合する経路をたどることがわかった。細部はどうであれ、驚くべき結論は揺るがない。捕球に予測は必要なく、必要なのは適切なフィードバックだけなのである。

#### Chapman の論文

Seville Chapman の「Catching a baseball」（野球のボールを捕る）は 1968 年に *American Journal of Physics* 誌に掲載された 3 ページの論文であり、本質的にこの問題の計算そのものが書かれている。Chapman は、この戦略が空気抵抗のない場合にしか成り立たないこと、そして実際の野球のボールの軌道は抗力と回転によってゆがめられ、事情が複雑になることを指摘している。それでも、脳が視野の単純な不変量を利用して複雑な制御問題を解いているという考え方は、心理学やロボット工学において重要なものとなった。

## 思考のスキル

**観察しやすい不変量を見つけよ**

ある量を予測するのが難しいときは、それに関連していて、直接観察でき、しかも物事が順調に進んでいるときにちょうど単純なふるまいをする量を探せ。

ここでは落下地点を予測するのは難しかったが、$\tan\theta$ の変化率を監視するのは容易であった。大学では、これはフィードバック制御の考え方であり、必要な情報を表す観測量をどう選ぶかという考え方でもある。

## 次の一歩

1. **後ろ向きに走る。**ボールが野手の出発位置より後ろに落ちる場合、野手は打者から遠ざかる向きに走るべきであり、同じ規則が成り立つことを示せ。
2. **$\theta$ そのものではない。**完璧な位置にいる野手について、$\frac{d\theta}{dt}$ は一定でないことを示せ。なぜ見るべき量は $\tan\theta$ なのか。
3. **目の高さ。**ボールが野手の目の高さより $h$ だけ低い位置から打たれた場合、うまく位置取りした野手にとって、$\tan\theta$ は依然として $t$ の一次式か。（野手は目の高さで捕球するものとする。）
4. **空気抵抗。**速度に比例する空気抵抗があると、水平方向の速度は指数関数的に減衰する。うまく位置取りした野手にとって、$\tan\theta$ は依然として $t$ の一次式か。

## さらに学ぶために

- **Seville Chapman, "Catching a baseball"**, *American Journal of Physics* 36 (1968). （野球のボールを捕る）
- **Michael McBeath, Dennis Shaffer & Mary Kaiser, "How baseball outfielders determine where to run to catch fly balls"**, *Science* 268 (1995). （野球の外野手はフライを捕るためにどこへ走るかをどう決めるか）
- **Dennis Shaffer et al., "How dogs navigate to catch Frisbees"**, *Psychological Science* 15 (2004). （犬はフリスビーを捕るためにどう進路をとるか）

# 11.12 ゴムひもの上のアリ

**問題**

**STEP II 2018、問 10**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/18-s2-q10`

## 導入

長さ 1 キロメートルのゴムのロープの上を、1 匹の蟻が毎秒 1 センチメートルの速さで歩き始める。ロープは 1 秒ごとに、さらに 1 キロメートルずつ一様に引き伸ばされる。ロープの先端は毎秒 1000 メートルという、蟻の 10 万倍の速さで遠ざかっていく。蟻はいつか先端にたどり着けるだろうか。

驚くべきことに、答えは「たどり着ける」である。引き伸ばしは蟻も一緒に運んでいく。ロープ全体に対する蟻の進み具合を**割合**で見ると、その増え方は小さくなっていくが、それらの割合を足し合わせたものは調和級数（harmonic series）のように振る舞い、調和級数は発散する（diverge）のである（Section 2.3）。蟻は到着する。ただし、それは宇宙の年齢すらかすむほどの時間が経ったあとである。この問題では連続版を厳密に解き、到着までの時間が速さの比について指数関数的に増大することを示す。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 紐は一様に引き伸ばされる。つまり、紐のどの部分も同じ倍率で伸びる。時刻 $t$ における紐の長さは $a+ut$ である。杭から距離 $x$ の位置にある点が、全長の $\frac{x}{a+ut}$ の割合のところにあるとすると、その点はどれだけの速さで動くか。

紐の上の各点は、全長に対して常に同じ割合 $f$ の位置にあるので、杭からの距離は $f(a+ut)$ であり、その速さは $fu = \frac{ux}{a+ut}$ である。杭に近い点はほとんど動かず、先端は速さ $u$ で動く。

## 順を追って解く

### 段階 1　蟻の方程式

蟻は紐に対して速さ $v$ で動き、さらにその下にある紐の速さが加わる：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v + \frac{ux}{a+ut}.$$

> **考えてみよう**　$\frac{x}{a+ut}$ を商の微分法（quotient rule）で微分し、$\dot{x}$ の式を用いよ。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{a+ut}\right) = \frac{\dot{x}}{a+ut} - \frac{ux}{(a+ut)^2} = \frac{1}{a+ut}\left(v + \frac{ux}{a+ut}\right) - \frac{ux}{(a+ut)^2} = \frac{v}{a+ut}. \qquad \blacksquare$$

蟻が進んだ紐の割合は $\frac{v}{a+ut}$、すなわち蟻自身の速さを現在の長さで割ったものの割合で増加する。引き伸ばしは完全に消えてしまう。引き伸ばしは誰の割合も変えないからである。

### 段階 2　先端への到達

> **考えてみよう**　0 から $t$ まで積分せよ。割合が 1 になるのはいつか。

蟻は杭から出発するので、

$$\frac{x}{a+ut} = \int_0^t \frac{v\,\mathrm{d}s}{a+us} = \frac{v}{u}\ln\frac{a+ut}{a}.$$

蟻が先端に到達するのは割合が 1 になるときである。$\ln\frac{a+uT}{a} = \frac{u}{v} = k$ より $a+uT = ae^k$、すなわち

$$uT = a(e^k - 1). \qquad \blacksquare$$

対数（logarithm）は限りなく大きくなるので、ロープがどれほど速く引き伸ばされても、蟻は必ず到着する。

### 段階 3　帰り道

> **考えてみよう**　帰り道では、紐に対する蟻の速さは $-v$ である。このとき割合の変化率はどうなるか。蟻は時刻 $T$ に割合 1 の位置から出発する。

$-v$ として同じ計算を行うと $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{a+ut}\right) = -\frac{v}{a+ut}$ となるので、

$$\frac{x}{a+ut} = 1 - \frac{v}{u}\ln\frac{a+ut}{a+uT}.$$

割合が 0 になるのは $a+ut=(a+uT)e^k$ のときである。$a+uT=ae^k$ であるから、帰りにかかる時間は

$$t-T=\frac{(a+uT)(e^k-1)}{u}=\frac{ae^k\cdot uT/a}{u}=Te^k. \qquad \blacksquare$$

帰り道には行きの $e^k$ 倍の時間がかかる。蟻が折り返す時点で、紐は最初の $e^k$ 倍の長さになっているからである。

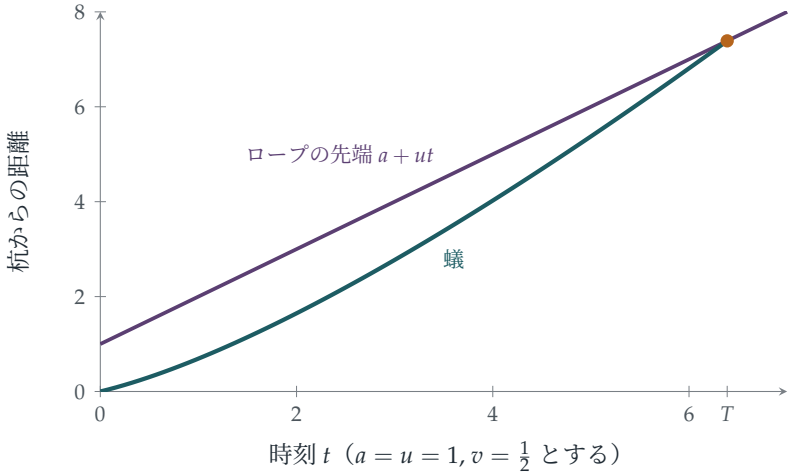



**図 11.12.1**　先端（紫）が蟻の歩く速さの 2 倍で動くロープ（$k=2$）の上を歩く蟻（青緑）。蟻は引き伸ばしによって運ばれ、杭からの距離はどんどん速く増えていく。蟻は $T=e^2-1\approx 6.39$ で先端に到達する。

## 振り返り

- **適切な変数を使う。**ロープのうち進んだ割合こそが自然な量であった。引き伸ばしはこれを変えないからである。
- **姿を変えた積分因子。**$\frac{1}{a+ut}$ を掛けることで、線形微分方程式（linear differential equation）がある関数の導関数そのものの形になった。これは積分因子（integrating factor）の方法にほかならない。
- **発散は速さに勝る。**割合は対数のように増加し、対数は有界でないので、蟻は必ず到着する。

## 背後にある数学

### 調和級数による設定

このパズルは、ふつう離散的な引き伸ばしの形で語られる。ロープの長さは 1 km で、蟻は最初の 1 秒で 1 cm 歩く。次にロープが 1 km 引き伸ばされ、蟻はまた 1 cm 歩く。以下同様である。$n$ 秒目に蟻は長さ $n$ km のロープのうち 1 cm、すなわち割合 $\frac{1}{100\,000\,n}$ だけ進む。引き伸ばしは割合を変えないので、$N$ 秒後に蟻が進んだのはロープ全体の

$$\frac{1}{100\,000}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}\right)\approx\frac{\ln N+0.577}{100\,000}$$

である。蟻が到着するのは $H_N\approx 100\,000$ となるとき、すなわち約 $e^{100\,000}$ 秒後であり、これは 43 000 桁を超える数である。（比較のために言えば、宇宙の年齢は約 $4\times10^{17}$ 秒である。）連続版の答えもこれと合致する。$k=\frac{u}{v}=100\,000$ であり、$T\approx\frac{a}{u}e^{k}$ となる。

### 膨張する宇宙の中の光

ロープの上の蟻は、膨張する宇宙を横切る光のモデルである。遠方の銀河は空間そのものの膨張に運ばれて我々から遠ざかり、それらの銀河からの光は、蟻が伸びていくロープの上を歩くように、膨張する空間の**中を**速さ $c$ で我々に向かって進む。遠方の銀河からの光がいつか我々に届くかどうかは、膨張率が時間とともにどう変化するかによる。ロープのように一定の割合で膨張する宇宙では、光はいつか必ず届く。我々の宇宙がそう見えるように膨張が加速する宇宙では、その光が決して我々に届かない銀河が存在する。すなわち**宇宙の事象の地平面**（cosmic event horizon）が存在するのである。蟻の場合にこれに相当するのは、先端の速さが長さに比例して増えるように指数関数的に引き伸ばされるロープである（演習問題で試してみよ）。

#### ガードナーの蟻

このパズルは、1972 年にフランスの数学者 Denys Wilquin がゴムバンドの上の芋虫という形で考案したものらしい。そしてマーティン・ガードナー（Martin Gardner）が *Scientific American* 誌のコラムや著書 *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*（『タイムトラベルとその他の数学的困惑』）で紹介し、広く知られるようになった。直観に反するにもかかわらず証明は容易な結果の例として最もよく知られたものの一つであり、調和級数の発散を示す例として好んで用いられている。

## 思考のスキル

### 厄介な要素の影響を受けない量を見つける

問題のある部分（ここでは引き伸ばし）がすべてを変えてしまうときには、それが変えずに残す量を探せ。

引き伸ばしはあらゆる距離を変えるが、割合は一切変えない。割合を使って考えることで、問題から引き伸ばしが取り除かれた。大学では、この考え方は宇宙論や流体力学における**共動座標**（comoving coordinates）として現れ、より一般には、変換のもとでの不変量（invariant）の探求として現れる。

## 次の一歩

1. **中間地点。**蟻がロープの中間地点にいるのはいつか。それは時刻 $\frac{T}{2}$ より前か後か。
2. **指数関数的な引き伸ばし。**代わりに、ロープの長さが $ae^{\lambda t}$ であるとする。蟻が先端に到達するのは $v > \lambda a$ のときに限ることを示せ。（これが宇宙の事象の地平面である。）
3. **加速するロープ。**長さが $a + \frac{1}{2}bt^2$ のとき、蟻は必ず到着するか。
4. **離散版のパズル。**離散版において、蟻がロープの 1% を進むのに何秒かかるか。$H_N \approx \ln N + 0.577$ を用いよ。

## さらに学ぶために

- **Martin Gardner, *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments***（W. H. Freeman）。ゴムのロープの上の蟻の話を収録している。
- **Julian Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant***（Princeton University Press）。オイラー定数を探る本。調和級数と蟻の話を扱っている。
- **Barbara Ryden, *Introduction to Cosmology***（Cambridge University Press）。膨張する空間、地平面、共動座標を学部レベルで解説している。

# 11.13 除雪車問題

**問題**

**STEP III Specimen paper、問 11**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/spec-s3-q11`

## 導入

雪が一定の割合で降り続いている。1 台の除雪車が道路を走り出すが、出会う雪がしだいに深くなるので、だんだん遅くなっていく。少し遅れて 2 台目の除雪車が、除雪された道を追いかける。2 台目が出会うのは 1 台目が通過した後に積もった雪だけであり、それはより浅いので、2 台目はより速く進み、やがて追いつく。それはいつか。

これは、Ralph Agnew が 1942 年に発表した有名な問題の一変形であり、微分方程式（differential equation）の問題の中でも最もよく知られたものの一つになった。この問題の面白さは、2 台目の除雪車の速さが *1 台目が各地点を通過した時刻*に依存する点にある。そのため小問 (i) の解が小問 (ii) の方程式に入り込んでくる。そしてこの方程式は、時刻を距離の関数として表す、いわば「逆さま」に書いたときに最もうまく扱える。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 1 台目の除雪車は時刻 $t$ に深さ $h+kt$ の雪に出会う。その速さはいくらか。$x$ を $t$ の関数として求めるのと、$t$ を $x$ の関数として求めるのとでは、どちらが易しいか。

速さは $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{\alpha(h+kt)}$ である。これはきれいに変数分離（separation of variables）できる。逆数をとると $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\alpha(h+kt)}{k}$ となり、これは $x$ の関数としての $t$ についての単純な線形（linear）方程式である。1 台目についてはどちらの方法でもよいが、2 台目については逆さまの形が不可欠である。

## 順を追って解く

### 段階 1　1 台目の除雪車

$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \alpha\left(\frac{h}{k} + t\right)$ より、量 $\frac{h}{k} + t$ は $x$ について指数関数的に増加する。すなわち $\frac{h}{k} + t = Ce^{\alpha x}$ である。$x = 0$ のとき $t = 0$ であるから $C = \frac{h}{k}$ となり、

$$t_1(x) = \frac{h}{k}\left(e^{\alpha x} - 1\right). \qquad \blacksquare$$

1 台目の除雪車は指数関数的に遅くなる。すなわち、等しい距離を進むのにかかる時間が指数関数的に増えていく。

### 段階 2　2 台目の除雪車の方程式

> **考えてみよう**　2 台目の除雪車は時刻 $t$ に位置 $y$ に到達する。そこでの雪の深さはいくらか。（1 台目が通過した直後の深さはいくらだったか。）

1 台目の除雪車は時刻 $t_1(y)$ に位置 $y$ の雪をすべて除去した。それ以降、雪は割合 $k$ で積もったので、時刻 $t$ における深さは $z = k\bigl(t - t_1(y)\bigr)$ である。したがって 2 台目の除雪車の速さは

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{\alpha k\bigl(t - t_1(y)\bigr)} = \frac{1}{\alpha\bigl(t - t_1(y)\bigr)},$$

であり、逆数をとると

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = t - \frac{h}{k}\left(e^{\alpha y} - 1\right). \qquad \blacksquare$$

### 段階 3　解く

> **考えてみよう**　これは $t$ について線形である：$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} - \alpha t = -\frac{\alpha h}{k}\left(e^{\alpha y} - 1\right)$。どのような積分因子（integrating factor）がうまくいくか。初期条件は何か。

$e^{-\alpha y}$ を掛けると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(te^{-\alpha y}\right) = -\frac{\alpha h}{k}\left(1 - e^{-\alpha y}\right), \qquad te^{-\alpha y} = -\frac{\alpha h}{k}y - \frac{h}{k}e^{-\alpha y} + C.$$

2 台目の除雪車は時刻 $t = T$ に $y = 0$ を出発するので $T = -\frac{h}{k} + C$ であり、$C = T + \frac{h}{k}$ を得る。両辺に $e^{\alpha y}$ を掛け戻して整理すると、

$$t_2(y) = \frac{h}{k}\left(e^{\alpha y} - 1\right) + \left(T - \frac{\alpha h y}{k}\right)e^{\alpha y}. \qquad \blacksquare$$

（問題の指示どおり確かめるには、微分して代入すればよい。各項はまとまって $\alpha\bigl(t - t_1(y)\bigr)$ となる。）

### 段階 4 衝突

**考えてみよう** 2 台の除雪車は、同じ時刻に同じ地点に達したときに衝突する。$t_2(y)$ と $t_1(y)$ を比較せよ。

差は $t_2(y) - t_1(y) = \left(T - \frac{\alpha h y}{k}\right) e^{\alpha y}$ であり、これは位置 $y$ における 2 台の除雪車の時間差である。これが 0 になるのは

$$y = \frac{kT}{\alpha h}. \qquad \blacksquare$$

のときである。この地点で 2 台目の除雪車は 1 台目に追いつく。このとき 2 台目の前方の雪の深さは 0 であり、このモデルでは 2 台目の速さは無限大になる（図 11.13.1）。

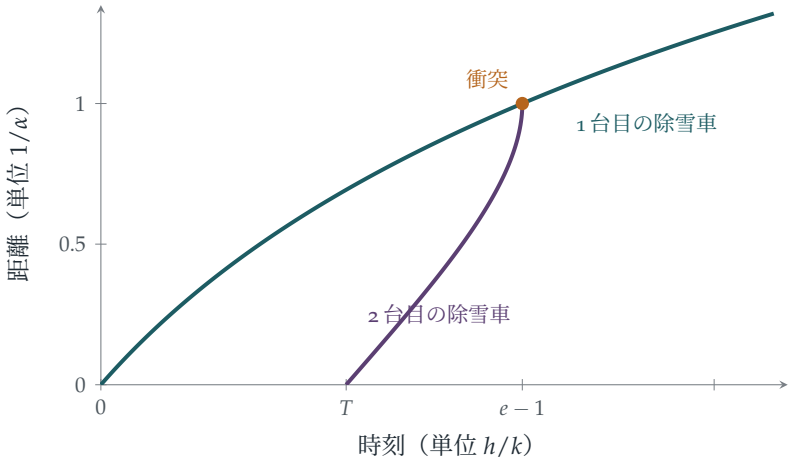



**図 11.13.1** 2 台の除雪車の距離と時刻の関係（$T = \frac{h}{k}$ の場合。すなわち 2 台目は雪の深さが 2 倍になった時点で出発する）。1 台目の除雪車（青緑）は雪が深くなるにつれて遅くなる。2 台目（紫）は部分的に除雪された道を遅れて出発し、差を詰めながら加速して、距離 $\frac{kT}{\alpha h} = \frac{1}{\alpha}$、時刻 $(e-1)\frac{h}{k}$ で 1 台目に追いつく。

## 振り返り

- **方程式を逆さまにする。** $t$ を位置の関数とすると、どちらの方程式も線形になった。
- **一つの解が次の問題に入り込む。** 1 台目の除雪車の時刻表 $t_1(y)$ が、2 台目の除雪車の方程式に現れた。
- **二度解かずに比較する。** 衝突の条件は差 $t_2 - t_1$ から得られ、その差は単純な因数をもっていた。

## 背後にある数学

### Agnew の除雪車

Ralph Palmer Agnew が 1942 年の教科書 *Differential Equations* で示した版では、ある朝、雪が激しく一定の割合で降り始める。正午に除雪車が出発し、最初の 1 時間で 2 マイル、次の 1 時間で 1 マイル進む。雪が降り始めたのはいつか。除雪車の速さは雪の深さに反比例し、深さは降り始めからの経過時間に比例する。答え（下の演習問題を参照）には黄金比（golden ratio）が関わり、雪が降り始めたのは正午の約 37 分前である。その後、この問題のように除雪車が 2 台登場する版が生まれた。

### 伝わっていく情報

2 台目の除雪車の運動は、道路に記録された履歴、すなわち各地点が最後に除雪された時刻に依存する。これは**記憶**（memory）をもつ系の簡単な例であり、ある場所での状態が、以前そこで起こったことに依存する。交通流、氷河の運動、森林火災の広がりはいずれもこの性質をもち、その数学である一階偏微分方程式（first-order partial differential equation）とその**特性曲線**（characteristics）の理論は、大学 2 年次の標準的な話題である。時刻を位置の関数として書く（「波面はいつここに到達するか」）という発想は、まさにこうした問題に用いられる**到達時刻**（arrival times）の方法そのものである。

## 思考のスキル

**独立変数を選ぶ**

微分方程式は、変数の役割を入れ替えるとずっと簡単になることがある。変化率が、ある場所で何かが起こった時刻に依存するのであれば、時刻を場所の関数として書け。

ここでは、どちらの方程式も $t(y)$ について書くと線形になった。大学では、どの変数を独立変数（independent variable）とするかを選ぶ自由（そして都合のよいときにそれを変える自由）が、流体力学のホドグラフ法（hodograph method）から幾何学における弧長（arc length）をパラメータとして用いる手法まで、絶えず活用される。

## 次の一歩

1 **Agnew の問題。** 正午より前の未知の時刻に、雪が一定の割合で降り始める。速さが雪の深さに反比例する除雪車が正午に出発し、最初の 1 時間で 2 マイル、次の 1 時間で 1 マイル進む。雪が正午の $t_0$ 時間前に降り始めたとすると $\left(1+\frac{2}{t_0}\right)^2=\left(1+\frac{1}{t_0}\right)^3$ が成り立つことを示し、$\frac{1}{t_0}$ が黄金比であることを導き、雪が降り始めた時刻を求めよ。

2 **確認。** $t_2(y)$ が小問 (ii) の微分方程式を満たすことを、微分によって確かめよ。

3 **時間差。** $kT>h$ ならば、時間差 $t_2(y)-t_1(y)$ は初めに増加し、その後減少して 0 になることを示し、それが最大になる位置を求めよ。$kT\le h$ のときはどうなるか。その意味を解釈せよ。

4 **3 台の除雪車。** 3 台目の除雪車が時刻 $2T$ に出発する。その運動の方程式を書け。3 台目が 2 台目に追いつくのは、2 台目が 1 台目に追いつくより前か後か。

## さらに学ぶために

- **Ralph Palmer Agnew, *Differential Equations***（McGraw-Hill, 1942）。除雪車問題の原典。
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***（CRC Press）。数多くの問題とともに除雪車問題を論じている。
- **Richard Haberman, *Mathematical Models***（SIAM）。交通流と特性曲線を、取り組みやすい水準で扱っている。

# 11.14 懸垂線ではなく放物線

**問題**

**STEP I 1991、問 10**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/91-s1-q10`

## 導入

鎖の両端を持って垂らすと、鎖は**懸垂線**（catenary、ラテン語の「鎖」に由来する）とよばれる曲線を描く。ガリレオ（Galileo）はこれを放物線（parabola）だと考えたが、そうではないことを 1646 年に十代のホイヘンス（Huygens）が示した。ところが、吊り橋（suspension bridge）のように、等間隔に並んだ支柱で重い路面を鎖から吊り下げると、鎖は**本当に**放物線をなす。違いは重さの分布の仕方にある。懸垂線では重さは曲がった鎖そのものに沿って分布し、橋では水平方向に均等に分布するのである。

この問題では、各節点で力を分解する（resolving forces）ことだけで、放物線になることを証明する。鍵となるのは、張力（tension）の水平成分（horizontal component）が鎖のどこでも同じであり、そのため各部分の傾きがその部分の支える重さに比例するという事実である。その結果、美しい規則性が現れる。隣り合う節点の間の落差は奇数 $1, 3, 5, 7, \ldots$ の順に増え、その部分和（partial sum）は平方数になるのである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 各節点 $A_i$ には三つの力がはたらく。隣り合う二つの部分の張力と、支柱から吊り下がる重さ $w$ である。重さが影響を与えられないのは、張力のどの成分か。

重さは鉛直方向にはたらくので、各節点で二つの張力の水平成分はつり合わなければならない。したがって、張力の水平成分（これを $H$ とおく）は鎖のどの部分でも同じである。

## 順を追って解く

### 段階 1　各節点での方程式

部分 $A_{i-1}A_i$ が水平より下向きに角 $\phi_i$ をなす（$A_{i-1}$ から中央に向かう向きで測る）とする。すると、その張力 $T_i$ の水平成分は $T_i\cos\phi_i$、鉛直成分は $T_i\sin\phi_i$ である。$1 \le i \le n$ について $A_i$ で力を分解すると、

$$T_i\cos\phi_i = T_{i+1}\cos\phi_{i+1} = H, \qquad T_i\sin\phi_i - T_{i+1}\sin\phi_{i+1} = w.$$

（外側の部分は上向きかつ外向きに、より大きな鉛直成分で引き、内側の部分は内向きかつわずかに下向きに引く。その差が支柱を支えている。）

> **考えてみよう**　中央の節点 $A_{n+1}$ では何が起こるか。橋の対称性を用いよ。

対称性により、$A_{n+1}$ で出会う二つの部分は互いに鏡像であるから、それぞれが支柱の重さの半分を支える。すなわち $T_{n+1}\sin\phi_{n+1} = \tfrac{1}{2}w$ である。

### 段階 2　重さから傾きへ

中央から外側へ順にたどると、鉛直成分は

$$T_{n+1}\sin\phi_{n+1} = \tfrac{1}{2}w, \quad T_n\sin\phi_n = \tfrac{3}{2}w, \quad \dots, \quad T_1\sin\phi_1 = \tfrac{2n+1}{2}w.$$

となる。それぞれを $H$ で割ると、傾きは $\tan\phi_i = \frac{(2(n+1-i)+1)w}{2H}$ である。部分 $A_{i-1}A_i$ の傾きは $\frac{y_{i-1}-y_i}{h}$ とも表せるので、

$$\frac{y_n - y_{n+1}}{h} = \frac{w}{2H}, \qquad \frac{y_{n-1}-y_n}{h} = \frac{3w}{2H}, \qquad \dots, \qquad \frac{y_0 - y_1}{h} = \frac{(2n+1)w}{2H}.$$

逆数をとって奇数を掛けると、$\frac{h}{y_n - y_{n+1}}$、$\frac{3h}{y_{n-1}-y_n}$、…、$\frac{(2n+1)h}{y_0-y_1}$ はいずれも $\frac{2H}{w}$ に等しい。 ■

### 段階 3　放物線

> **考えてみよう**　$j$ で中央から外側へ数えた節点の番号を表し、$A_{n+1-j}$ が $A_{n+1}$ から水平距離 $jh$ にあるようにする。それは $A_{n+1}$ よりどれだけ高い位置にあるか。

$c = \frac{wh}{2H}$ として落差を足し合わせると、

$$y_{n+1-j} - y_{n+1} = c(1 + 3 + 5 + \cdots + (2j-1)) = cj^2.$$

$x$ を中央から測ると $x = jh$ であるから、最も低い節点からの高さは $\frac{c}{h^2}x^2 = \frac{w}{2Hh}x^2$ である。対称性により反対側でも同じことが成り立ち、両端の支点（$j = n+1$）も同じ

式を満たす。したがって、すべての点は放物線

$$y = y_{n+1} + \frac{w}{2Hh}(x - x_{n+1})^2. \qquad \blacksquare$$

上にある。

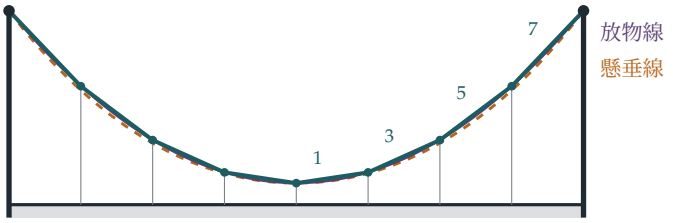



**図 11.14.1**　水平方向に等間隔で等しい荷重を支える鎖（ティール）。その節点は放物線（プラム）上にあり、中央から外側へ向かう隣り合う節点間の落差の比は 1 : 3 : 5 : 7 である。同じ両端と最下点をもち、自重だけで垂れ下がる自由な鎖は懸垂線（アンバー、破線）を描く。懸垂線は底の部分でより平らで、支点の近くでより急である。

## 振り返り

- **一定であるものを見つける。**荷重が鉛直方向だけなら、水平方向の張力はどこでも同じである。
- **中央から積み上げる。**各部分はそこから中央までの重さをすべて支えるので、鉛直成分は $w$ ずつ増える。
- **奇数の和は平方数になる。**$1 + 3 + \cdots + (2j - 1) = j^2$ によって、傾きの列が放物線に変わった。

## 背後にある数学

### 放物線か懸垂線か

この議論を連続的にしたものは、両方の曲線を説明してくれる。一定の水平張力 $H$ のもとにある鎖 $y(x)$ について、張力の鉛直成分は $Hy'$ であり、短い区間ではそこで担う荷重の分だけ変化する。すなわち $H\,\mathrm{d}y' = \mathrm{d}W$ である。

- 荷重が**水平方向に**均等に分布している場合（重い路面で、道路の単位長さあたりの重さが $\rho$）、$Hy'' = \rho$ となるので、$y$ は二次式、つまり放物線である。
- 荷重が鎖の自重で、**鎖に沿って**均等に分布している場合（鎖の単位長さあたり $\rho$）、$Hy'' = \rho\sqrt{1 + y'^2}$ となり、その解は懸垂線 $y = c\cosh\frac{x}{c}$（ただし $c = H/\rho$）である。

鎖がほぼ水平な底の付近では、二つの曲線はほとんど同じである。違いが出るのは支点の近くで、そこでは鎖が急になり、同じ水平距離により多くの鎖が含まれる。実際の吊り橋では路面がケーブルよりはるかに重いので、ケーブルの形は放物線にきわめて近い。

### 逆さにした鎖とアーチ

鎖には純粋な引張りだけがはたらいている。その形を上下逆さにすると、純粋な圧縮だけがはたらき、曲がろうとする傾向のないアーチが得られる。ロバート・フック（Robert Hooke）は 1675 年にこれをアナグラムの形で発表した。解読すると「しなやかな線が垂れ下がるように、ただし上下を逆にすれば、剛なアーチが立つ。」となる。クリストファー・レン（Christopher Wren）とフックはこの考えをセント・ポール大聖堂のドームに用いた。また、アントニ・ガウディ（Antoni Gaudí）は、重りを付けた紐を天井から吊るし、それを上下逆さに撮影することで、バルセロナのサグラダ・ファミリア（Sagrada Família）を設計した。セントルイスのゲートウェイ・アーチは（重み付きの）逆さ懸垂線である。

#### 懸垂線の挑戦状

1690 年、ヤコブ・ベルヌーイ（Jakob Bernoulli）は数学者たちに、垂れ下がる鎖の形を求めよという挑戦状を出した。一年のうちに、弟のヨハン・ベルヌーイ（Johann Bernoulli）、ライプニッツ（Leibniz）、そしてホイヘンスが解を発表した。ヨハン・ベルヌーイは後に、問題を出した兄自身は解けなかったと、得意げに回想している。懸垂線は新しい微積分学の最初の勝利の一つであり、双曲線関数（hyperbolic functions）cosh と sinh へとつながった。これらは 18 世紀に Vincenzo Riccati とランベルト（Johann Heinrich Lambert）によって体系的に研究された。

## 思考のスキル

#### すべての節点で力を分解する

節点とまっすぐな部材からなる構造では、各節点で力のつり合いを考えよ。一定に保たれる成分と積み上がる荷重が、しばしば形を明らかにする。

大学では、これは工学におけるトラス（truss）や骨組構造の解析となり、連続極限ではケーブル、梁、膜の微分方程式（differential equation）となる。離散的な鎖から連続的な鎖への移行は、Section 10.3 で見た和から積分への移行と

同じ手法である。

## 次の一歩

1 **支柱の数が偶数の場合。**支柱を $2n$ 本にして問題を解き直せ。このとき鎖の最下点は中央の水平な部分になる。節点はやはり放物線上にあるか。

2 **張力。**鎖の張力の最大値を $H$、$w$、$n$ を用いて求めよ。それはどこで生じるか。

3 **懸垂線。**$y = c\cosh\frac{x}{c}$ が $y'' = \frac{1}{c}\sqrt{1+y'^2}$ を満たすことを確かめよ。また、$x = 0$ から $x = X$ までの懸垂線の長さが $c\sinh\frac{X}{c}$ であることを示せ。

4 **ガリレオの誤り。**長さ $2L$ の鎖が、距離 $2d$ だけ離れた二つの支点の間に垂れ下がっている。$L$ が $d$ よりわずかに大きいだけのとき、懸垂線のたるみは放物線のたるみとほぼ同じであることを示せ。ガリレオの実験で違いが明らかにならなかったのはなぜか。

## さらに学ぶために

- **E. H. Lockwood, *A Book of Curves***（Cambridge University Press）。懸垂線、放物線とその仲間の曲線。
- **Jacques Heyman, *The Stone Skeleton***（Cambridge University Press）。石造のアーチやドームがなぜ立っていられるのかを、フックの鎖から説き起こす。
- **David Billington, *The Tower and the Bridge***（Princeton University Press）。橋の芸術と工学。

# 本章で学んだこと

本章は、揺れるもの、回るもの、そして動く場所から眺めたものから始まった。そこで三つの問いを立てた。運動が単純になるのはどのようなときか。正しい視点とは何か。直観は信頼できるか。本章の 14 問が明らかにしたことを以下にまとめる。

### 1. 運動が単純になるのはどのようなときか

振幅（amplitude）によらないただ一つの振動数をもつ単振動（simple harmonic motion）は、理想的な運動である。これを固有振動数（natural frequency）で駆動すると共振（resonance）が起こった（Section 11.1）。共振からわずかにずれるとうなり（beats）が生じ、ちょうど共振するときには振幅は限りなく増大する。二つの連成振動子（coupled oscillators）は、実は互いに独立な二つの単振動子が姿を変えたものであった（Section 11.2）。ただしその振動数の比は無理数 $\sqrt{3}$ であり、そのため全体の運動は決して繰り返さない。現実の振り子はまったく単純ではない（Section 11.3）。その周期（period）は振幅とともに増大し、それは楕円積分（elliptic integral）で表される。この積分は、ガウス（Gauss）の算術幾何平均（arithmetic–geometric mean）によって驚くほど速く計算できる。そして等時曲線（tautochrone）（Section 11.4）は、軌道をサイクロイド（cycloid）の形に曲げることで、運動を再び厳密に単純にできることを示した。

### 2. 正しい視点とは何か

ほとんどすべての問題は、適切な変数あるいは適切な座標系を選ぶことで解けた。

- **座標。**弧長（arc length）を用いると等時曲線は単純になった。組合せ $x \pm y$ はばねの連成を解きほぐした。ロープのうち進んだ部分の割合を考えると、アリの問題から伸びの影響が消えた（Section 11.12）。時刻を距離の関数として書くと、除雪車の方程式は線形になった（Section 11.13）。
- **座標系。**加速する列車の中では（Section 11.5）、見かけの力（fictitious force）によって重力が傾き、ビーズは新たな最下点のまわりで振動した。アインシュタイン（Einstein）はこの観察を一般相対性理論（general relativity）へと発展させた。
- **モーメントをとる点。**回転するビー玉では（Section 11.6）、接触点のまわりの角運動量（angular momentum）が保存された。摩擦力がその点にはたらくからである。これにより、摩擦力を知らなくても最終的な速さが求まった。

- **等価な系。**棒はちょうど三つの質点のようにふるまい（Section 11.7）、その重みはシンプソン（Simpson）の公式（Simpson's rule）の重みである。また、立体の平衡点は、その法線（normal）が重心（centre of mass）を通る点である（Section 11.8）。

### 3. 直観は信頼できるか

多くの場合、信頼できない。大砲の弾が届く領域の境界は、一本の軌道ではなく、軌道全体の包絡線（envelope）である（Section 11.9）。十分に急な角度で投げたボールは、着地する前にこちらへ戻ってくる（Section 11.10）。野手は、ボールの見かけの像が一定の割合で上昇し続けるようにすることで、落下地点を予測しなくてもボールを捕ることができる（Section 11.11）。自分の歩く速さの 10 万倍の速さで伸ばされるロープの上をゆっくり歩くアリも、それでも端にたどり着く（Section 11.12）。垂れ下がった鎖は放物線ではないが、橋を支える鎖は放物線になる（Section 11.14）。いずれの場合も、短い計算が、自信はあるが誤った直観を正確な主張に置き換え、たいていはその理由の説明も与えてくれた。

### 4. 振動と座標系のための道具箱

| 手法 | 用いた場面 |
|---|---|
| 特殊解（particular solution）と余関数（complementary function） | 共振（11.1） |
| 固有ベクトル（eigenvector）による分離 | 基準振動（normal modes）（11.2） |
| エネルギー積分と置換 | 振り子（11.3） |
| 自然な変数 | 等時曲線（11.4）、アリ（11.12） |
| 見かけの力 | 列車（11.5） |
| ある点のまわりの角運動量 | バックスピン（11.6） |
| モーメントの一致 | シンプソンの棒（11.7） |
| 停留点（stationary point）の個数を数える | 傾いた平衡（11.8） |
| 判別式（discriminant）と包絡線 | 安全放物線（11.9） |
| 導関数の符号 | 戻ってくるボール（11.10） |
| 係数比較 | 野手（11.11） |
| 積分因子（integrating factor） | アリ（11.12）、除雪車（11.13） |
| 節点での力の分解 | 橋（11.14） |

### この先へ

- 続く二つの章では確率と統計を扱う。まずは Section 12.1 から始める。

- 基準振動は固有ベクトルであり（Section 7.2）、Section 8.6 の量子調和振動子（quantum harmonic oscillator）は、本章の振動子を量子力学（quantum mechanics）で扱ったものである。
- リミットサイクル（limit cycle）（Section 8.4）は自ら持続する振動であり、カオス（chaos）（Section 8.7）は非線形（nonlinear）振動子が駆動されたときに起こりうる現象である。

**大学入学前にさらに先へ進みたい人へ**

- **A. P. French, *Vibrations and Waves***：振動、共振、基準振動への定番の入門書。
- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***：回転、座標系、そして意外な結果をもつ数多くの問題を扱う。
- **Steven Strogatz, *Sync***：ホタルから橋まで、振動子がどのように足並みをそろえるかを描く。
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***：等時曲線、最速降下線（brachistochrone）、除雪車の問題を、その歴史とともに扱う。

コールマン（Coleman）は、物理学者の経歴とは調和振動子をますます抽象的なやり方で扱い続けることにほかならない、と冗談を言った。本章ではその理由を示そうとしてきた。振動子は存在する中で最も単純な運動であり、正しい視点を選べば、ほとんどあらゆるものが振動子のように見える。その視点、すなわち変数、座標系、あるいは組合せを見つけられるようになることこそ、力学が教えてくれる最も有用なスキルである。

# 「次の一歩」の解答

以下は簡潔な解答とヒントであり、完全な解答ではない。結果と鍵となるステップを示しているので、自分の答えの確認に使ってほしい。答えを見る前に、それぞれの問題にきちんと取り組むこと。

## 11.1 共鳴

1. エレベーターの座標系（frame of reference）では、重力は実質的に $g - f$ となり、糸のばね定数（stiffness）は $\frac{mg}{a}$ である（$mg$ のもとで $a$ だけ伸びるから）。よって $\ddot{y} + \frac{g}{a}y = g - f$ であり、はじめに $y = a, \dot{y} = 0$ である。新しいつり合いの位置（equilibrium）は $a - \frac{af}{g}$ なので、$y = a - \frac{af}{g}(1 - \cos\omega t)$ となる。振幅（amplitude）は $\frac{af}{g}$ であり、最小の伸び $a(1 - \frac{2f}{g})$ は正である。エレベーターの加速が止まると、つり合いの位置は $a$ に戻り、粒子は変位 $-\frac{af}{g}(1 - \cos\omega T)$ の位置にあって、速度 $-\frac{af}{g}\omega \sin\omega T$ をもつ。新しい振幅は $\frac{af}{g}\sqrt{(1 - \cos\omega T)^2 + \sin^2\omega T} = \frac{2af}{g}\left|\sin\frac{1}{2}\omega T\right|$ である。

2. $x = Ct\cos nt$ とすると $\ddot{x} + n^2x = -2Cn\sin nt$ となるので、$C = -\frac{nb}{2}$ である。初期条件を満たすように $\frac{b}{2}\sin nt$ を加えると、$x = \frac{b}{2}(\sin nt - nt\cos nt)$ となる。問題文の式に $p$ についてロピタルの定理（L'Hôpital's rule）を適用すると、$p \to n$ のとき同じ結果が得られる。

3. $n\sin pt - p\sin nt = n(\sin pt - \sin nt) + (n - p)\sin nt = 2n\cos\frac{(n+p)t}{2}\sin\frac{(p-n)t}{2} + (n - p)\sin nt$ である。第 2 項は小さい。第 1 項は、ゆっくり変化する包絡線（envelope）$\left|\sin\frac{(n-p)t}{2}\right|$ の内側での速い振動であり、この包絡線は $\frac{2\pi}{n-p}$ ごとに繰り返す。

4. 振幅は $\frac{F}{\sqrt{(n^2-p^2)^2+4k^2p^2}}$ である。分母を $p^2$ について最小化すると $-2(n^2 - p^2) + 4k^2 = 0$ となるので、$p^2 = n^2 - 2k^2$ である。

## 11.2 基準振動

1. 微分すると、エネルギーの変化率は $\dot{x}\left(m\ddot{x} + \frac{\lambda}{a}(2x + y)\right) + \dot{y}\left(m\ddot{y} + \frac{\lambda}{a}(x + 2y)\right) = 0$ である。$u = x - y, v = x + y$ とおくと、エネルギーは $\left(\frac{m}{4}\dot{u}^2 + \frac{\lambda}{4a}u^2\right) + \left(\frac{m}{4}\dot{v}^2 + \frac{3\lambda}{4a}v^2\right)$ となり、それぞれの括弧は単振動子（simple harmonic oscillator）のエネルギー

なので、それぞれが一定である。

2. 周期（period）$\frac{2\pi}{\omega}$ の場合：$x=-y$ かつ $\dot{x}=-\dot{y}$ から始める（こうすると $v\equiv 0$ となる）。周期 $\frac{2\pi}{\sqrt{3}\omega}$ の場合：$x=y$ かつ $\dot{x}=\dot{y}$ から始める。

3. $X$ にはたらく力は $-\frac{\lambda}{a}x-\frac{\mu}{a}(x+y)$ である。振動モード（mode）$x-y$ は依然として $\omega^2=\frac{\lambda}{ma}$ をもち、$x+y$ は $\frac{\lambda+2\mu}{ma}$ をもつようになる。すべての運動が周期的になるのは、ちょうど振動数（frequency）の比 $\sqrt{1+2\mu/\lambda}$ が有理数であるときである。

4. 行列は $\frac{k}{m}\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$ であり、$2-\sqrt{2}$, 2, $2+\sqrt{2}$ に対する固有ベクトル（eigenvector）はそれぞれ $(1,\sqrt{2},1)$, $(1,0,-1)$, $(1,-\sqrt{2},1)$ である。各モードは次のとおりである：3 つすべてが同じ向きに振れ、真ん中が最も大きく振れる。外側の 2 つが逆向きに振れ、真ん中は静止している。真ん中が外側の 2 つと逆向きに振れる。

## 11.3 本当の振り子

1. エネルギー：$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{\lambda}{2a}\left(\sqrt{x^2+a^2}-a\right)^2=\frac{1}{2}mv^2$。最大変位では $\sqrt{x^2+a^2}=a+\frac{v}{k}$ なので、$x_{\max}=\sqrt{\frac{2av}{k}+\frac{v^2}{k^2}}$ である。$v$ が小さいとき、伸びはおよそ $\frac{x^2}{2a}$ なので、$\dot{x}^2\approx v^2-\frac{k^2x^4}{4a^2}$ となる。$x=Xu$, $X=\sqrt{2av/k}$ とおくと、周期 $4\int_0^X\frac{\mathrm{d}x}{\dot{x}}$ は $\frac{4X}{v}\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}}$ となる。復元力（restoring force）は $x$ ではなく $x^3$ に比例する（$x=0$ で糸はちょうど自然長にある）ので、単振動の極限は存在しない。

2. $m=\sin^2\frac{\gamma}{2}\approx\frac{\gamma^2}{4}-\frac{\gamma^4}{48}$ として、$(1-m\sin^2\phi)^{-1/2}\approx 1+\frac{m}{2}\sin^2\phi+\frac{3m^2}{8}\sin^4\phi$ である。$\phi$ について平均をとると $1+\frac{m}{4}+\frac{9m^2}{64}$ となり、$\gamma^4$ の項は $-\frac{1}{192}+\frac{9}{1024}=\frac{11}{3072}$ である。

3. 1 と $\cos 45^\circ=0.70711$ から始めると、$(0.85355, 0.84090)$、次に $(0.84722, 0.84720)$、さらに 0.847213 となる。周期の倍率は $\frac{1}{0.847213}=1.18034$ である。

4. 周期の倍率は $\frac{1}{16}(\gamma_5^2-\gamma_4^2)\approx 1.71\times 10^{-4}$（ラジアンで計算）だけ変化するので、時計は 1 日におよそ 15 秒遅れる。

## 11.4 等時曲線

1. $y=\frac{s^2}{4k}$ なので $\ddot{s}=-g\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=-\frac{g}{2k}s$ となり、これは $\omega^2=\frac{g}{2k}$ の単振動である。$s_0=2\sqrt{kh}$ から、$V$ での速さは $\omega s_0=\sqrt{2gh}$ である。

2. お椀は長さ $R$ の振り子（pendulum）である。小さな高さから放すと、底まで

の時間は $\frac{\pi}{2}\sqrt{R/g}$ である。縁（$\gamma = 90°$）から放すと、その 1.180 倍、およそ $1.85\sqrt{R/g}$ となる。

3. はい。両者は 4 分の 1 周期後に $V$ に達し、そこで衝突する。どのような速度で離れても、それぞれは $s$ について同じ周期の単振動を行うので、ちょうど半周期後にそれぞれ $V$ に戻り、再び $V$ で衝突する。（$V$ で静止したまま残された粒子は、単にそこにとどまる。）

4. $x = R(\theta - \sin\theta)$, $y = R(1 - \cos\theta)$ とすると $\mathrm{d}s = 2R\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta$ なので、1 つの弧（arch）の長さは $\int_0^{2\pi} 2R\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 8R$ である。面積は $\int y\,\mathrm{d}x = R^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = 3\pi R^2$ である。

### 11.5 加速する列車の中の重力

1. 客車の座標系では、単位質量あたり $a$ の後ろ向き（南向き）の力がはたらき、これは発射の向きである。飛行時間を $\frac{2V\sin\theta}{g}$ として、到達距離（range）は $\frac{V^2}{g}\left(\sin 2\theta + \frac{a}{g}(1-\cos 2\theta)\right)$ である。その導関数が 0 になるのは $\tan 2\theta = -\frac{g}{a}$ のときなので、$2\theta \approx \frac{\pi}{2} + \frac{a}{g}$ である。最大値は $\frac{V^2}{g}\left(\sqrt{1+a^2/g^2} + \frac{a}{g}\right) \approx \frac{V^2}{g} + \frac{V^2 a}{g^2}$ である。

2. $x = ut\cos\theta - \frac{1}{2}ft^2$ であり、$t = \frac{2u\sin\theta}{g}$ で着地し、そのとき $x = \frac{2u^2\sin\theta}{g^2}(g\cos\theta - f\sin\theta)$ である。水平方向の速度 $u\cos\theta - ft$ が着地前に負になるのは $\tan\theta > \frac{g}{2f}$ のときなので、$\alpha = \tan^{-1}\frac{g}{2f}$ である。$f = g, \theta = 45°$ のとき、加速度は初速度とちょうど逆向きである：投射体は直線 $y = x$ に沿ってまっすぐ上がり、止まり、まっすぐ $O$ に戻ってくる。

3. 実効的な重力（effective gravity）は、下向きの $g$ と後ろ向きの $a$ を合わせたものである。自由表面（free surface）はこれに垂直なので、$\tan^{-1}\frac{a}{g}$ だけ傾く。

4. 実効的な重力の大きさは $\sqrt{g^2+a^2}$ であり、$x = \frac{ak}{2g}$ で傾きは $\frac{a}{g}$、曲率半径（radius of curvature）は $\rho = \frac{k}{2}\left(1+\frac{a^2}{g^2}\right)^{3/2}$ である。周期は $2\pi\sqrt{\rho/\sqrt{g^2+a^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{k(g^2+a^2)}{2g^3}}$ であり、$a = 0$ のとき $2\pi\sqrt{\frac{k}{2g}}$ に帰着する。

### 11.6 バックスピン

1. 摩擦は接点にはたらくので、その点のまわりの角運動量（angular momentum）は保存される：$maV + \frac{2}{5}ma^2\frac{V}{a} = mav_0 + \frac{2}{5}ma^2\omega_0$。よって $V = \frac{5v_0 + 2a\omega_0}{7}$ であり、これが $v_0$ を超えるのは $\frac{v_0}{a\omega_0} < 1$ のときである。

2. $V = \frac{5}{7}v_0$ である。最終的なエネルギーは $\frac{1}{2}m\left(\frac{5}{7}v_0\right)^2\left(1+\frac{2}{5}\right) = \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2}mv_0^2$ なので、エネルギーの $\frac{2}{7}$ が失われる。

3. $I = ma^2$ として同じ議論をすると $V = \frac{1}{2}(v_0 - a\omega_0)$ となる。$V = -\frac{v_0}{7}$ とおくと $\frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{7}{9}$ を得る。

4. 中心から高さ $h$ のところに撃力（impulse）$J$ を加えると、$mv = J$ かつ $\frac{2}{5}ma^2\omega = Jh$ となる。転がる（rolling）ためには $v = a\omega$ が必要なので、$h = \frac{2}{5}a$ である。

## 11.7 棒の中のシンプソンの公式

1. $\frac{1}{6}\left(1 + 4\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\right) = \frac{47}{60} \approx 0.7833$ であり、これを $\frac{\pi}{4} \approx 0.7854$ と比べる。$\int_{-1}^{1}$ に対して、公式 $\frac{1}{3}\big(\mathrm{f}(-1) + 4\mathrm{f}(0) + \mathrm{f}(1)\big)$ は $x^3$ に対して 0、$x^2$ に対して $\frac{2}{3}$ を与える（どちらも正確）が、$x^4$ に対しても $\frac{2}{3}$ を与えてしまい、その積分は $\frac{2}{5}$ である。

2. 角度 $\psi$ の軸のまわりの慣性モーメント（moment of inertia）は二次形式（quadratic form）$A\cos^2\psi + B\sin^2\psi + 2C\sin\psi\cos\psi$ である。$\psi \mapsto \psi + 90^\circ$ に関する不変性から $A = B$ かつ $C = 0$ が従うので、どの軸についても同じ値となる：それは辺に平行な軸のまわりの値 $\frac{1}{3}Ma^2$ である。

3. 面積の $\frac{1}{3}$ をそれぞれの中点に置くと、三角形上であらゆる二次式が正確に積分される（直角三角形上で $1, x, x^2, xy$ を確かめよ）。よって 3 つの粒子は、薄板（lamina）と同じ質量、重心（centre of mass）、二次モーメント（second moment）をもつ。

4. 各方向について、$-a, 0, a$ における棒の重み $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$ の積をとる：頂点に $\frac{M}{216}$、辺の中点に $\frac{M}{54}$、面の中心に $\frac{2M}{27}$、中心に $\frac{8M}{27}$ である。中心を通り辺に平行な軸のまわりでは $I = M\left(\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{3}\right) = \frac{2}{3}Ma^2$ である。平行軸の定理（parallel axis theorem）により、辺のまわりでは $\frac{2}{3}Ma^2 + M(\sqrt{2}a)^2 = \frac{8}{3}Ma^2$ となる。

## 11.8 傾いたつり合い

1. 共通の面から円錐（cone）の側に向かって測ると、$G$ は $\frac{-\frac{2}{3}\cdot\frac{3a}{8} + \frac{\lambda}{3}\cdot\frac{\lambda a}{4}}{\frac{2}{3}+\frac{\lambda}{3}} = \frac{a(\lambda^2-3)}{4(2+\lambda)}$ にある。半球上では、接点における法線は常に面の中心を通るので、$G$ がその中心より下にあるとき、すなわち $\lambda < \sqrt{3}$ のとき、おもちゃは起き上がる。横倒しになったとき、おもちゃは円錐の母線（generator）と縁でテーブルに接し、$G$ を通る鉛直線が頂点と縁の間にあればその状態にとどまる。そのためには $G$ の高さが $-\frac{a}{\lambda}$ 以上であることが必要であり、これは $\lambda^3 + \lambda + 8 > 0$ に帰着する：これは常に成り立つ。

2. 一様な球では、あらゆる点がつり合いの位置である（中立（neutral））。重心が中心からわずかにずれていれば、つり合いの位置はちょうど 2 つになる：$G$ が最も低いとき（安定（stable））と、$G$ が最も高いとき（不安定（unstable））である。

3. つり合いの位置は法線が中心を通るところ、すなわち軸の 4 つの端で生じる。短

軸（minor axis）の端で静止するのは安定であり（$G$ ができるだけ低い）、長軸（major axis）の端では不安定である。

4. 対称性により $G$ は原点にある。$n = 2$ のとき $Y = r\left(\frac{1}{2} - p^2\right)$ であり、傾いたつり合いでは法線が $G$ を通る必要があるので、$Y = 0$ かつ $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。そこでの傾きは $-\sqrt{2}$ なので、$\overrightarrow{AB}$ は $\tan^{-1}\sqrt{2} \approx 54.7°$ だけ傾き、もう一方の放物面（paraboloid）上で静止するときは 125.3° となる。両者は $x$ 軸に関して互いに鏡映であり、これが傾きが対になる理由である。

## 11.9 安全放物線

1. 各粒子は $ut\,\hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{2}gt^2\mathbf{j}$ にあり、これは $-\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j}$ を中心とする半径 $ut$ の球面である。$(0, \frac{u^2}{2g})$ から水平に発射された粒子は $y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}$ に沿って動く：これはちょうど安全放物線（parabola of safety）である。角度 $\alpha$ で発射された粒子は、時刻 $\frac{u}{g\sin\alpha}$ に $x = \frac{u^2}{g\tan\alpha}$ でこれに接する。水平に発射された粒子はそこへ達するのに $\frac{x}{u}$ かかるので、時刻 $\frac{u(1-\cos\alpha)}{g\sin\alpha} = \frac{u}{g}\tan\frac{\alpha}{2}$ に発射されなければならない（これには、接点が地面より上にあるように $\alpha \geq 45°$ であることが必要である）。

2. 直線と安全放物線が交わるのは $R\sin\beta = \frac{u^2}{2g} - \frac{gR^2\cos^2\beta}{2u^2}$ のところであり、$R = \frac{u^2}{g(1+\sin\beta)}$ を得る。最大のときは問題 3 の 2 つの角が一致するので、最適な角は二等分線の方向、すなわち $45° + \frac{1}{2}\beta$ である。

3. $\lambda = \tan\theta$ とおくと、2 つの値は $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{2u^2}{gx}$ および $\lambda_1\lambda_2 = 1 + \frac{2u^2y}{gx^2}$ を満たす。よって $\tan(\theta_1 + \theta_2) = -\frac{x}{y}$ であり、$\theta_1 + \theta_2 = 90° + \varphi$ となる。ここで $\varphi$ は $OP$ の仰角（elevation）である。$OP$ と鉛直線の二等分線は $\frac{1}{2}(90° + \varphi)$ の角をなす。

4. 頂点は $\left(\frac{u^2}{2g}\sin 2\theta, \frac{u^2}{2g}\sin^2\theta\right)$ にあり、焦点距離（focal length）は $\frac{u^2\cos^2\theta}{2g}$ なので、焦点（focus）の高さは $\frac{u^2}{2g}(\sin^2\theta - \cos^2\theta)$ である。$O$ からの距離は $\theta$ によらず $\frac{u^2}{2g}$ である。

## 11.10 こちらへ戻ってくるボール

1. $u = g = 1$ となる単位系で $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}OP^2 = t(t^2 - 3t\sin\alpha + 2)$ であり、その根は $t \approx 1.050$（極大（local maximum）、$OP \approx 0.516\frac{u^2}{g}$）と $t \approx 1.904$（極小（local minimum）、$OP \approx 0.336\frac{u^2}{g}$）である。ボールは $t \approx 1.970$ で着地する。

2. 斜面に沿った方向と斜面に垂直な方向に分解すると、$OP^2 = u^2t^2 - ugt^3\sin(\alpha' + \beta) + \frac{1}{4}g^2t^4$ となる。ここで $\alpha'$ は斜面から測った角である。これは水平な地面の場合の式で $\alpha = \alpha' + \beta$ としたものである。よって条件 $\sin(\alpha' + \beta) > \frac{2\sqrt{2}}{3}$ は**水平面**から測った角に関するものであり、斜面から測ると、臨界角は $70.5° - \beta$ に下がる（ただし、ボールがまだ着地していなければである）。

3. 小さくなる。空気抵抗（drag）は水平方向の運動を弱め、下降をより急にするので、ボールはより鉛直に近い向きで落ちて戻ってくる。そのため $OP$ が縮みやすくなる。

4. $OP^2$ の式は着地点を含まないので、$OP$ がある時間減少するのは、前と同じくちょうど $\sin\alpha > \frac{2\sqrt{2}}{3}$ のときである（そして飛行時間が長くなるので、減少する段階は必ず着地前に起こる）。やがて落下が支配的になり、$OP$ は増加する。

### 11.11 野手はどのように捕球するか

1. 彼女が $D_0$ に立ち、打者（batsman）から遠ざかる向きに速度 $v$ で走るとすると、ボールは彼女の前方 $D_0 + vt - Ut$ の距離にある。捕球するには $D_0 + vT = UT$ が必要であり、そのとき距離は $(U-v)(T-t)$ なので、$\tan\theta = \frac{gt}{2(U-v)}$ となり、やはり一次式である。ボールが彼女の後方に落ちるなら、$UT > D_0$ かつ $v > 0$ である：彼女は後ろへ走る。

2. $\theta = \tan^{-1}\frac{gt}{2U}$ なので $\dot\theta = \frac{g/2U}{1+(gt/2U)^2}$ となり、これは減少する。$\tan\theta$ が一次式になるのは、高さ $\frac{1}{2}gt(T-t)$ と距離 $U(T-t)$ が共通因数 $T-t$ をもつからである。

3. はい。彼女の目の高さを基準としたボールの高さは、捕球の時点で 0 となる二次式なので、$(T-t)(c+dt)$ と因数分解される。これを $U(T-t)$ で割ると一次関数が残る（これは負から始まる：彼女は最初、下を見る）。

4. いいえ。空気抵抗があると、水平距離は $\frac{U}{k}(\mathrm{e}^{-kt} - \mathrm{e}^{-kT})$ となり、高さはこれに $t$ の一次関数を掛けたものにはならないので、$\tan\theta$ はもはや一次式ではない。

### 11.12 ゴムひもの上のアリ

1. $\frac{x}{a+ut} = \frac{1}{k}\ln\frac{a+ut}{a}$ であり、これは $t = \frac{a}{u}(\mathrm{e}^{k/2}-1)$ で $\frac{1}{2}$ となる。$\frac{T}{2} = \frac{a}{2u}(\mathrm{e}^{k/2}-1)(\mathrm{e}^{k/2}+1)$ であり、$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{k/2}+1) > 1$ なので、これは $\frac{T}{2}$ より前である。

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{x}{L} = \frac{v}{L} = \frac{v}{a}\mathrm{e}^{-\lambda t}$ なので $\frac{x}{L} = \frac{v}{a\lambda}(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})$ となり、これが 1 に達するのは $v > \lambda a$ のときに限る。

3. $\frac{x}{L} = v\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{a+\frac{1}{2}bs^2}$ であり、これは $\frac{v\pi}{\sqrt{2ab}}$ に収束（converge）する。よってアリが到達するのは $v > \frac{\sqrt{2ab}}{\pi}$ のときに限る。

4. $\frac{H_N}{100\,000} = \frac{1}{100}$ が必要なので、$H_N = 1000$ であり、$N \approx \mathrm{e}^{999.4} \approx 10^{434}$ 秒である。

### 11.13 除雪車問題

1. 正午から時間 $t$ 後の積雪の深さは $t+t_0$ に比例するので、進んだ距離は $c\ln\frac{t+t_0}{t_0}$ である。条件 $x(1)=2$ と $x(2)=3$ から $\left(1+\frac{1}{t_0}\right)^3 = \left(1+\frac{2}{t_0}\right)^2$ を得る。$u = \frac{1}{t_0}$ と

おくとこれは $u^2 - u - 1 = 0$ に帰着するので、$u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ であり、$t_0 \approx 0.618$ 時間である：雪が降り始めたのはおよそ 11:23 である。

2. $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = \frac{\alpha h}{k}\mathrm{e}^{\alpha y} - \frac{\alpha h}{k}\mathrm{e}^{\alpha y} + \alpha\big(T - \frac{\alpha h y}{k}\big)\mathrm{e}^{\alpha y}$ であり、$\alpha\big(t - (\mathrm{e}^{\alpha y} - 1)\frac{h}{k}\big)$ もこれと同じである。

3. 間隔は $\big(T - \frac{\alpha h y}{k}\big)\mathrm{e}^{\alpha y}$ であり、その導関数は $y = \frac{kT-h}{\alpha h}$ で 0 になる。$kT > h$ ならば、間隔はそこまで増加し、その後 $y = \frac{kT}{\alpha h}$ で 0 まで縮む。$kT \le h$ ならば、導関数 $\alpha\mathrm{e}^{\alpha y}\big(T - \frac{h}{k} - \frac{\alpha h y}{k}\big)$ はすべての $y > 0$ で負なので、間隔は最初から縮む。2 台目の除雪車（snowplough）は深さ $k\times$（間隔）の雪に直面する。これが同じ場所で 1 台目が出会った雪より深い間は、2 台目はさらに遅れていく。

4. $\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}t_3}{\mathrm{d}y} = t_3 - t_2(y)$ である。$t_3 = t_2 + g$ とおくと $g = \mathrm{e}^{\alpha y}\big(T - \alpha T y + \frac{\alpha^2 h y^2}{2k}\big)$ を得る。$kT \ge 2h$ ならば、これは 2 台目が 1 台目に追いつく前に $y = \frac{k}{\alpha h}\big(T - \sqrt{T^2 - 2hT/k}\big)$ で 0 となる。$kT < 2h$ ならば、先に 2 台目が 1 台目に追いつく。

### 11.14 懸垂線ではなく放物線

1. はい。水平方向の張力（tension）$H$ は依然として一定であり、中央の区間の傾きは 0 で、そこから傾きは $\frac{w}{H}$ ずつ増えていく。水平な区間の中点から $x$ を測ると、$k$ 番目の継ぎ目は $x = (k - \frac{1}{2})h$ にあり、最も低い継ぎ目より $\frac{wh}{2H}k(k-1)$ だけ高い。これは $\frac{w}{2Hh}\big(x^2 - \frac{h^2}{4}\big)$ であり、放物線である。

2. 張力は $\sqrt{H^2 + V^2}$ であり、鉛直成分 $V$ が最大のところで最大となる：それは両端の区間であり、そこで $V$ は荷重の半分 $\frac{(2n+1)w}{2}$ を支える。よって $T_{\max} = \sqrt{H^2 + \frac{1}{4}(2n+1)^2 w^2}$ である。

3. $y' = \sinh\frac{x}{c}$ であり、$y'' = \frac{1}{c}\cosh\frac{x}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{1 + \sinh^2\frac{x}{c}}$ である。長さは $\int_0^X \cosh\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x = c\sinh\frac{X}{c}$ である。

4. たるみ $s$ の浅い曲線では、懸垂線（catenary）と放物線の長さはどちらもおよそ $2d + \frac{4s^2}{3d}$ なので、どちらも $s \approx \sqrt{\frac{3}{2}d(L-d)}$ を与える。両者は $s^4$ の次数でしか違わない。ほとんどぴんと張った鎖では、その差はガリレオ（Galileo）が測定できたどんなものよりもはるかに小さい。

章

# 12

# 確率

不確かさについても厳密に推論することはできる。ところが直観のほうは、そうはいかないのである。

この章の内容

| | | |
|---|---|---|
| **12.1** | 正確な条件付け | STEP I 2007 |
| **12.2** | 基準率の誤謬 | STEP II 1998 |
| **12.3** | 「ランダム」とは何を意味するか？ | STEP III 2022 |
| **12.4** | 二つずつなら独立、全体では独立でない | STEP III 2021 |
| **12.5** | 最後の乗客の座席 | STEP II 2021 |
| **12.6** | もう 1 枚の硬貨 | STEP I 2016 |
| **12.7** | 勝ち抜き戦で誰と誰が当たるか | STEP II 試験見本 |
| **12.8** | ペニーのゲーム | STEP III 2001 |
| **12.9** | 偏った硬貨から公平な判定を | STEP I 2019 |
| **12.10** | ひもの端を結ぶ | STEP III 2008 |
| **12.11** | 切手、カップ、そして $e$ | STEP I 1996 |
| **12.12** | いつ探すのをやめるか | STEP I 2001 |
| **12.13** | 三つ巴の決闘 | STEP II 1995 |
| **12.14** | 混合戦略 | STEP I 1989 |
| **12.15** | 絶滅か爆発か | STEP II 2003 |
| **12.16** | マルコフ連鎖を順向きにも逆向きにも | STEP III 1996 |
| **12.17** | バナッハのマッチ箱 | STEP II 1992 |
| **12.18** | 無記憶性 | STEP III 2021 |
| **12.19** | 平面上のランダムな点 | STEP II 2012 |
| **12.20** | ビュフォンの針 | STEP I 1993 |
| **12.21** | 棒を折る | STEP III 1990 |
| **12.22** | 平均をもたない分布 | STEP III 1995 |
| **12.23** | 確率から導くスターリングの公式 | STEP II 2016 |
| **12.24** | 中心極限定理 | STEP III 2008 |
| **12.25** | 多数の中の最大値 | STEP III 2025 |
| **A** | 演習問題の答え | p. 1021 |

# 偶然について推論する

> 確率論とは、計算に還元された常識にほかならない。
>
> — ピエール＝シモン・ラプラス（Pierre-Simon Laplace）、*Théorie analytique des probabilités*（『確率の解析的理論』、1812 年）

ラプラスのこの有名な言葉は、半分だけ正しい。確率（probability）とは常識を精密にしたものである。しかし本章で繰り返し見るように、常識はそれだけに任せておくと誤る。人はこう考えがちである。まれな病気の検査で陽性が出たら、おそらくその病気にかかっている。飛行機に最初に乗り込んだ乗客が違う席に座ってしまったら、最後の乗客が自分の席に座れる見込みはほとんどない。コイン投げのある並びが、同じ長さの別の並びに勝ちやすいということはありえない。多数の測定値の平均はいつでも一定の値に落ち着く。これらはすべて誤りであり、どの場合も、短い計算によって真実が明らかになる。さらによいことに、その理由まで明らかになるのである。

確率論は 17 世紀、ブレーズ・パスカル（Blaise Pascal）とピエール・ド・フェルマー（Pierre de Fermat）の間で交わされた書簡の中で、賭け事に関する問いから始まった。それが厳密な数学の一分野となったのは、ようやく 1933 年、アンドレイ・コルモゴロフ（Andrey Kolmogorov）がその公理（axiom）を定めたときである。その間にも、そしてそれ以後も、確率論は数学の中で最も広く使われる分野の一つへと成長してきた。

### 確率はなぜ重要なのか

不確かさを扱う分野はどれも確率を用いる。医学（診断検査や臨床試験）、法学（証拠の重み）、金融（リスクと保険）、工学（信頼性や洪水）、計算機科学（乱択アルゴリズム（randomised algorithm）、暗号、機械学習）、物理学（量子力学や統計力学）、生物学（遺伝学や感染症の流行）などである。現代の人工知能は、その大部分が応用確率論であるといってよい。言語モデルは次に来る単語の確率を予測しているのである。そして、リスク、偶然、証拠について正しく推論する能力は、教養ある人なら誰にとっても最も価値ある技能の一つである。

### 大学で出会うこと

大学 1 年の確率論では、公理、条件付き確率（conditional probability）とベイズの定理（Bayes' theorem）、独立性（independence）、離散型および連続型の確率変数（random

variable)、期待値（expectation）と分散（variance)、母関数（generating function)、そして二つの偉大な極限定理である大数の法則（law of large numbers）と中心極限定理（central limit theorem）を学ぶ。その後の講義では、確率過程（random process）（マルコフ連鎖（Markov chain)、ポアソン過程（Poisson process)、ランダムウォーク（random walk)、分枝過程（branching process))、測度論的確率論（measure-theoretic probability）（極限や連続分布を確固とした基礎の上に置くもの)、マルチンゲール（martingale）を学び、確率論を統計学、解析学、組合せ論、物理学と結びつけていく。

## 本章を貫く問い

### 三つの大きな問い

1. **問われていることは正確には何か？**　ランダムな試行とは何か、何を条件としているのか、そして「無作為に」とはどういう意味か。
2. **うまい切り口は何か？**　対称性（symmetry)、指示変数（indicator)、条件付け、あるいはうまく選んだ状態を用いることで、長い計算を省けるのはどのようなときか。
3. **長い目で見ると何が起こるか？**　確率過程は時間とともにどのように振る舞うのか。また、多数のランダムな量の和、平均、最大値はどのような姿をしているのか。

本章は五つの部分からなる。**明晰に考える**（Section 12.1〜Section 12.4）では落とし穴を扱う。条件付け、基準率（base rate)、「ランダム」の意味、独立性の意味である。**対称性と巧妙な議論**（Section 12.5〜Section 12.9）には、美しく短い解法をもつ問題を集めた。**期待値、ゲーム、停止**（Section 12.10〜Section 12.14）では平均と意思決定に目を向ける。いつ止めるべきか、誰を撃つべきか、どのようにランダム化すべきか、である。**確率過程**（Section 12.15〜Section 12.19）では、時間と空間の中でのランダムさを追いかける。そして**極限と連続型の確率**（Section 12.20〜Section 12.25）は、幾何的確率（geometric probability）と偉大な極限定理で締めくくる。

## 本章で扱う考え方

| § | 主題 | 考え方 |
|---|---|---|
| 12.1 | 条件付け | 「特定の一つ」と「少なくとも一つ」の違い |
| 12.2 | ベイズの定理 | 基準率と自然頻度（natural frequency） |
| 12.3 | ベルトラン（Bertrand）の逆説 | 「ランダム」には定義が必要である |
| 12.4 | 独立性 | 対ごとに独立（pairwise）であっても互いに独立（mutual）とは限らない |
| 12.5 | 飛行機の座席 | 二つの座席の間の対称性 |
| 12.6 | もう 1 枚のコイン | 互いに補い合う対称な事象 |
| 12.7 | トーナメント | 試合数と組の数を数える |
| 12.8 | Penney のゲーム | 第一歩解析（first-step analysis）、非推移性（non-transitivity） |
| 12.9 | 公平なコイン | 偏りから公平さを取り出す |
| 12.10 | ランダムな輪 | 無記憶な指示変数の和 |
| 12.11 | カップと $e$ | 階乗と指数関数の級数 |
| 12.12 | 最適停止（optimal stopping） | $\frac{1}{e}$ の法則 |
| 12.13 | 三者決闘（truel） | 戦略上の弱さ |
| 12.14 | ゲーム理論（game theory） | ランダム化された戦略、ミニマックス（minimax） |
| 12.15 | 分枝過程 | 不動点（fixed point）としての絶滅 |
| 12.16 | マルコフ連鎖 | 定常分布（stationary distribution）、時間反転 |
| 12.17 | バナッハ（Banach）のマッチ箱 | 負の二項分布（negative binomial distribution） |
| 12.18 | 指数分布（exponential distribution） | 無記憶性（memorylessness）と独立性 |
| 12.19 | 空間のランダムさ | 最近接点、レイリー（Rayleigh）分布 |
| 12.20 | ビュフォン（Buffon）の針 | 幾何的確率と $\pi$ |
| 12.21 | ランダムな三角形 | 面積としての確率 |
| 12.22 | コーシー（Cauchy）分布 | 平均をもたない分布 |
| 12.23 | スターリング（Stirling）の公式 | 正規曲線から得られる階乗 |
| 12.24 | 中心極限定理 | 積率母関数（moment generating function） |
| 12.25 | 極値（extreme value） | ガンベル（Gumbel）分布 |

Section 12.24 の一節では積率母関数を用いる。これは 2019 年に STEP の出題範囲から外されたが、この節では必要なことを説明している。

## 本章の読み方

確率の問題がわかりにくく思えるときは、小さな場合について標本空間（sample space）を書き出し、数えてみるとよい。答えが怪しいほど簡単に出てきたときは、そ

れを説明する対称性を探すとよい。そして直観と計算が食い違うときは、計算を信じ、そのうえでなぜ直観が誤っていたのかを突き止めることである。学びが生まれるのはまさにそこなのである。

# 12.1 正確な条件付け

**問題**

**STEP I 2007、問 13**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/07-s1-q13`

## 導入

「〜という条件のもとで」は、確率論で最も危険な言い回しである。この問題の最後の四つの小問は、ほとんど同じことを言っているように聞こえる。番号 3 の円盤が最初に取り出される。番号 3 の円盤が取り出される。番号つきの円盤が最初に取り出される。番号つきの円盤が取り出される。このうち三つは答えが $\frac{1}{2}$ になるが、残る一つはそうならない。

この違いは、有名な「男の子か女の子か」のパズル（ある家庭に子どもが二人いて、少なくとも一人は男の子である。二人とも男の子である確率はいくらか）の背後にあるものとまったく同じである。このパズルは何世代もの学生を、そして少なからぬ数のプロの数学者をもつまずかせてきた。ここから学ぶべきことは、条件とは「どの結果がまだ起こりうるか」についての精密な言明であり、情報そのものと同じくらい、その情報がどのようにして得られたかが重要だということである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 11 枚の円盤から 4 枚を取り出す。事象「4 枚すべてに番号がある」にとって、取り出す順序は関係するだろうか。同様に確からしい 4 枚の組は何通りあるだろうか。

4 枚の円盤のどの組も、取り出される組となる確率は等しいので、順序は無視してよい。同様に確からしい組は $\binom{11}{4} = 330$ 通りある。

## 順を追って解く

### 段階 1　条件なし

番号つきの円盤 4 枚からなる組は $\binom{5}{4} = 5$ 通りあるので、

$$\mathrm{P}(\text{4 枚すべてに番号がある}) = \frac{5}{330} = \frac{1}{66}.$$

### 段階 2　3 が最初に出る

> **考えてみよう**　番号 3 の円盤が最初に取り出されたとき、残りの 3 回の取り出しはどうなっているだろうか。

残りの 3 枚は、残る 10 枚（番号つき 4 枚、無地 6 枚）から無作為に選ばれた 3 枚の組であり、$\binom{10}{3} = 120$ 通りの組はすべて同様に確からしい。よって

$$\text{(ii)}\quad \frac{\binom{4}{3}}{120} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}, \qquad \text{(iii)}\quad \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{120} = \frac{4 \times 15}{120} = \frac{1}{2},$$

である。(iii) では、残りの 3 枚のうちちょうど 1 枚に番号がなければならないからである。

### 段階 3　3 が（いずれかの時点で）取り出される

> **考えてみよう**　番号 3 の円盤が**いつ**取り出されたかは関係するだろうか。4 枚の中に 3 が含まれるという条件のもとで、残りの 3 枚について何が言えるだろうか。

対称性（symmetry）により、4 枚の組が 3 を含むという条件のもとで、残りの 3 枚は残る 10 枚から無作為に選ばれた 3 枚の組であり、段階 2 とまったく同じである。よって (iv) も $\frac{1}{2}$ である。

### 段階 4　番号つきの円盤が最初に出る

最初の円盤に番号がある（その番号が何であれ）という条件のもとで、残りの 3 枚はやはり残る 10 枚から無作為に選ばれた 3 枚の組であり、その 10 枚のうち 4 枚が番号つき、6 枚が無地である。よって (v) も $\frac{1}{2}$ である。

### 段階 5　番号つきの円盤が取り出される

**考えてみよう** 今度の条件は「4 枚のうち少なくとも 1 枚に番号がある」である。これはこれまでの条件のどれかと同じだろうか。330 通りの組のうち、この条件を満たすものはいくつあるだろうか。

この条件は異なる。特定の円盤を指定していないからである。番号つきの円盤を 1 枚も含まない組は $\binom{6}{4} = 15$ 通りしかないので、条件を満たす組は 315 通りある。このうち、番号つきの円盤をちょうど 2 枚含む組は $\binom{5}{2}\binom{6}{2} = 10 \times 15 = 150$ 通りである。よって

$$\text{(vi)} \quad \frac{150}{315} = \frac{10}{21}. \qquad \blacksquare$$

**手を止めて、やってみよう** なぜ (vi) は (v) と異なるのだろうか。(v) では、**どの**円盤に番号があるか（最初の円盤）がわかっていて、残りの 3 枚には何の制約もない。(vi) では、**どれか**の円盤に番号があることしかわからない。番号つきの円盤を 3 枚または 4 枚含む組は、「どれかの円盤に番号がある」をより多くの仕方で満たすので、(v) のときのように過小に数えられることがない。

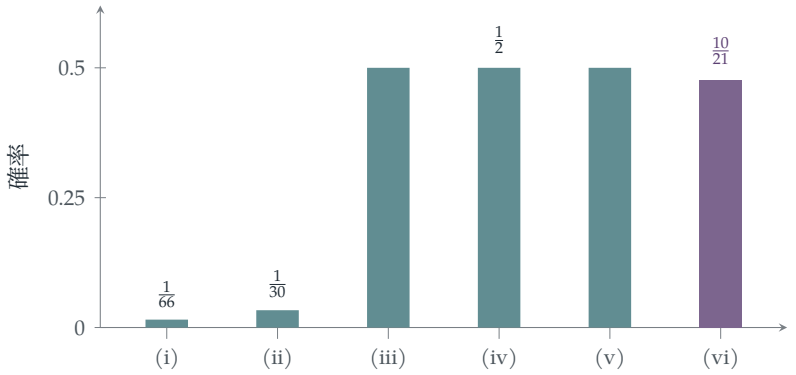



**図 12.1.1** 六つの答え。小問 (iii)、(iv)、(v) はいずれも**特定の**円盤に番号があることを条件としており、答えは $\frac{1}{2}$ となる。小問 (vi) は**どれか**の円盤に番号があることだけを条件としており、答えは $\frac{10}{21}$ となる。

## 振り返り

- **条件は標本空間（sample space）を制限する。** $\mathrm{P}(A \mid B)$ は、$B$ に属する結果のうち $A$ にも属するものの割合である。
- **対称性は手間を省く。** 3 が最初に取り出されたか、いずれかの時点で取り出されたかは関係なかった。すべての位置が対等だからである。

- **「特定の一つ」は「少なくとも一つ」ではない。**似たように聞こえる条件が、まったく異なる結果の集合を選び出すことがある。

## 背後にある数学

### 男の子か女の子かのパズル

マーティン・ガードナー（Martin Gardner）は 1959 年に次の問題を出した。スミス氏には子どもが二人いて、少なくとも一人は男の子である。二人とも男の子である確率はいくらか。同様に確からしい家族構成 BB、BG、GB、GG を列挙し、GG を除くと三つが残り、そのうち一つが BB であるから、答えは $\frac{1}{3}$ である。しかし、上の子が男の子であるとわかっている場合には、答えは $\frac{1}{2}$ になる。これはまさに、この問題の小問 (vi) と (v) の縮小版である。ガードナーは後に、最初に出した形の問題はあいまいであったと認めた。答えは、男の子がいることをどのようにして知ったかによるのである。子どもの一人に無作為に出会い、その子が男の子だった場合、答えは $\frac{1}{2}$ である。「息子さんが少なくとも一人いますか」と尋ねて「はい」と答えられた場合、答えは $\frac{1}{3}$ である。確率は情報だけでなく、その情報を生み出した過程にも依存するのである。

### モンティ・ホール問題

同じ教訓が、確率論で最も激しく論争されてきたパズル、モンティ・ホール問題（Monty Hall problem）の根底にもある。あるゲーム番組で、三つの扉のうち一つの後ろに車がある。あなたは扉 1 を選ぶ。車の位置を知っている司会者は、必ず残り二つの扉のうち一つを開けてヤギを見せ、必ず選択を変える機会を与える。車があなたの扉の後ろにあって司会者に選択の余地がある場合には、司会者は残り二つの扉から無作為に選ぶ。司会者は扉 3 を開け、扉 2 に変えてもよいと言う。変えるべきだろうか。答えは「変えるべき」である。変えれば確率 $\frac{2}{3}$ で勝つ。司会者の扉の選び方は無作為ではない。車の位置に依存しており、それが情報をもたらすのである。正確なルールが重要である。司会者が可能な限りいつも扉 3 を開けるのであれば、扉 3 が開いたのを見たとき扉 1 と扉 2 は同様に確からしくなり、変えて勝つ確率は $\frac{1}{2}$ にすぎない。それでも、あらかじめ必ず変えると決めている参加者は、やはり $\frac{2}{3}$ の割合で勝つ。変えて勝つのは、最初の選択が外れていたときにちょうど一致するからである。マリリン・ボス・サバント（Marilyn vos Savant）が 1990 年に雑誌のコラムでこの答えを示したとき、彼女のもとには、間違っていると指摘する手紙が何千通も届き、その中には数学者からのものもあった。コンピュータによるシミュレーションか、同様に確からしい場合を注意深く列挙すれば、決着がつく。

### ベイズとラプラス

条件付き確率（conditional probability）は、トマス・ベイズ（Thomas Bayes）と、ピエール＝シモン・ラプラス（Pierre-Simon Laplace）によって体系的な基礎の上に置かれた。ベイズの論文は彼の死後の 1763 年に出版され、ラプラスは 1774 年に、今日ベイズの定理（Bayes' theorem）と呼ばれる法則を一般的な形で述べた。今日あらゆる大学の講義の出発点となっている、アンドレイ・コルモゴロフ（Andrey Kolmogorov）の 1933 年の公理（axioms）は $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A \cap B)/\mathrm{P}(B)$ と定義し、確率論の残りの部分はこの定義の上に築かれている。次の節 Section 12.2 では、ベイズの定理が実際に何をするかを示す。

## 思考のスキル

**条件について正確であれ**

条件付き確率を計算する前に、どの結果が条件を満たすのかを正確に書き出すこと。その情報がどのようにして得られたかを問うこと。

大学では、条件付き確率と条件付き期待値（conditional expectation）は確率論と統計学における最も重要な道具の一つであり、同時に最もよくある誤りの源でもある。少なくとも小さな場合について標本空間を書き出すことが、最良の防御である。

## 次の一歩

1. **一般化する。** 無地の円盤が $b$ 枚、番号つきの円盤が $n$ 枚あり、$k$ 枚を取り出すとき、(iv) と (v) の答えが常に等しいことを示せ。また、(vi) がそれらと等しくなるのはどのようなときかを求めよ。

2. **火曜日生まれの男の子。** ある家庭に子どもが二人いて、少なくとも一人は火曜日生まれの男の子である。二人とも男の子である確率が $\frac{13}{27}$ であることを示せ。($14 \times 14$ 通りの同様に確からしい場合を列挙するか、うまく数えよ。)

3. **モンティ・ホール問題。** 結果を列挙して $\frac{2}{3}$ を確かめよ。司会者が車の位置を知らず、残りの扉のうち一つを無作為に開け、たまたまヤギが現れた場合はどうなるか。

4 **2 枚のエース。** 13 枚からなるブリッジの手札に、少なくとも 1 枚のエースが含まれている。少なくとも 2 枚含まれている確率はいくらか。スペードのエースが含まれているという条件のもとでの確率と比較せよ。

## さらに学ぶために

- **Jason Rosenhouse, *The Monty Hall Problem*** (Oxford University Press)。このパズル、その歴史、そして数多くの変種を扱う。
- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction*** (Oxford University Press)。条件付き確率の章。
- **Joseph Blitzstein & Jessica Hwang, *Introduction to Probability*** (CRC Press；オンラインで無料公開)。条件付けについての解説が優れており、多くのパラドックスを扱っている。

# 12.2 基準率の誤謬

**問題**

**STEP II 1998、問 12**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/98-s2-q12`

## 導入

ある病気の検査は、その病気にかかっている人に対して 90% の精度をもち、誤報もほとんど出さない。Frankie の検査結果は陽性であった。Frankie はどれほど心配すべきだろうか。多くの人は、そして多くの研究によれば大半の医師さえも、「約 90%」と答える。この問題における正しい答えは $\frac{1}{11}$、すなわち約 9% である。10 分の 1 も小さいのである。

誤りの原因は**基準率**（base rate）を無視することにある。この病気はまれであるため、多数の健康な人々の中での偽陽性（false positive）の割合がわずかであっても、実際の患者数をはるかに上回る誤報が生じるのである。この**基準率の誤謬**（base-rate fallacy）は、医療、法律（そこでは検察官の誤謬と呼ばれる）、保安検査、機械学習において重要な問題となる。その処方箋がベイズの定理（Bayes' theorem）である。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 1000 人を想像してみよう。そのうち何人が病気にかかっているか。そのうち何人が陽性と判定されるか。健康な人のうち何人が陽性と判定されるか。

1000 人のうち 10 人が病気にかかっており、そのうち 9 人が陽性と判定される。健康な 990 人のうち $\frac{1}{11}$ が陽性と判定されるので、偽陽性は 90 人である。したがって陽性と判定されるのは 99 人であり、そのうち実際に病気なのはわずか 9 人である。

## 順を追って解く

### 段階 1　ベイズの定理

**考えてみよう**　「Frankie が病気にかかっている」を $D$、「AL が陽性である」を $+$ と書く。$\mathrm{P}(+ \mid D)$ はわかっていて、求めたいのは $\mathrm{P}(D \mid +)$ である。この二つはどのような関係にあるか。

条件付き確率（conditional probability）の定義により $\mathrm{P}(D \mid +) = \frac{\mathrm{P}(D \cap +)}{\mathrm{P}(+)}$ であり、$\mathrm{P}(+)$ は Frankie が病気にかかっているかどうかで場合分けできる：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(D \mid +) &= \frac{\mathrm{P}(+ \mid D)\mathrm{P}(D)}{\mathrm{P}(+ \mid D)\mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(+ \mid \bar{D})\mathrm{P}(\bar{D})} \\ &= \frac{0.9 \times 0.01}{0.9 \times 0.01 + \frac{1}{11} \times 0.99} = \frac{0.009}{0.009 + 0.09} = \frac{1}{11}.\end{aligned}$$

■

これは 1000 人の例における $\frac{9}{99}$ にほかならない。

### 段階 2　二つ目の検査

**考えてみよう**　二つ目の検査は AL で陽性となった人だけに行われる。その集団における患者の割合はいくらか。それを新たな「基準率」として用いよ。

AL で陽性となった人のうち、$\frac{1}{11}$ が患者であり、$\frac{10}{11}$ は患者でない。これらを事前確率（prior probability）としてベイズの定理を再び適用すると、

$$\mathrm{P}(D \mid \text{両方とも陽性}) = \frac{0.9 \times \frac{1}{11}}{0.9 \times \frac{1}{11} + p \times \frac{10}{11}} = \frac{0.9}{0.9 + 10p}.$$

これを $\frac{1}{2}$ に等しいとおくと $10p = 0.9$ となり、$p = 0.09$ である。 ■

（ここでは、問題が暗に仮定しているとおり、Frankie が病気かどうかを与えたときに二つの検査の誤りは独立（independent）であると仮定している。）

**手を止めて、やってみよう**　$p = 0.09$ のとき、STEP の偽陽性率は AL のそれとほぼ同じであるにもかかわらず、二度目の陽性結果によって確率は $\frac{1}{11}$ から $\frac{1}{2}$ へと上がる。同じ品質の検査が、二度目にはなぜはるかに大きな効果をもつのだろうか。



- 病気にかかっている
- 健康だが陽性と判定される
- 健康で陰性と判定される

（典型的な 100 人）

**図 12.2.1**　典型的な 100 人。1 人が病気にかかっており（紫）、10 回中 9 回は陽性と判定される。健康な 99 人のうち約 9 人が誤って陽性と判定される（琥珀色）。陽性と判定された人の中では、健康な人が病気の人をおよそ 10 対 1 で上回る。

## 振り返り

- **自然頻度。** 1000 人を想像することで、答えが明白になり、確かめるのも容易になった。
- **事前確率と尤度の積。**事後確率（posterior probability）は、検査の精度と基準率の両方に依存する。
- **段階的な更新。**昨日の事後確率は今日の事前確率である。二つ目の検査は $\frac{1}{100}$ ではなく $\frac{1}{11}$ から出発した。

## 背後にある数学

### オッズと証拠

ベイズの定理は**オッズ**（odds）を用いると最もわかりやすい。$D$ のオッズとは $\mathrm{P}(D) : \mathrm{P}(\bar{D})$ のことである。一つの証拠 $E$ は、オッズに**尤度比**（likelihood ratio）$\frac{\mathrm{P}(E|D)}{\mathrm{P}(E|\bar{D})}$ を掛ける：

$$\text{事後オッズ} = \text{事前オッズ} \times \text{尤度比}.$$

ここで事前オッズは $1 : 99$ であり、AL の尤度比は $0.9 \div \frac{1}{11} = 9.9$ であるから、事後オッズは $9.9 : 99 = 1 : 10$、すなわち確率 $\frac{1}{11}$ となる。尤度比 10 をもつ独立な二つ目の検査（$p = 0.09$ のときの STEP がそうである）によって、オッズは $1 : 1$ になる。対数をとると、証拠は**足し算**になる。すなわち、独立な検査はそれぞれ自分の尤度比の対数を寄与する。チューリング（Turing）はまさにこれを用い、証拠を「バン」と「デシバン」で測って、ブレッチリー・パーク（Bletchley Park）でエニグマの暗号文を解読した。

### 検察官の誤謬

1999 年、事務弁護士の Sally Clark は二人の幼い息子を殺害したとして有罪判決を受けた。その根拠の一部は、一つの家族で乳幼児突然死が二度起こる確率は「7300 万分の

1」であるという証拠であった。その数値自体の誤り（二つの死が独立であると仮定し、遺伝的・環境的要因を無視していた）は別としても、この推論は P(証拠 | 無実) と P(無実 | 証拠) を混同していた。母親による二重殺人もまたきわめてまれであり、比較すべきは二つの説明どうしなのである。英国王立統計学会（Royal Statistical Society）はこの誤りを指摘する公開書簡を出し、2003 年に彼女の有罪判決は覆された。その数学は、まさにこの問題のものと同じである。

#### Gigerenzer と自然頻度

1990 年代、心理学者の Gerd Gigerenzer は、検査の統計を条件付き確率として与えられた医師たちは、この問題のような問いにほとんどの場合ひどく間違えるが、同じ情報を自然頻度（natural frequencies）として提示されると（「1000 人の女性のうち 10 人が乳がんにかかっている。そのうち 8 人が陽性と判定される…」）大半が正しく答えることを示した。彼の研究は、多くの国で医療リスクを患者に伝える方法を変えた。

## 思考のスキル

### ベイズの定理で条件を逆転させる

**$\mathrm{P}(A \mid B)$ と $\mathrm{P}(B \mid A)$ は異なる数である。一方から他方を得るには、基準率 $\mathrm{P}(A)$ が必要である。**

ベイズ的推論、すなわち証拠に照らして信念を更新することは、スパムフィルタから医療診断に至るまで、現代の統計学と機械学習の基礎である。大学では、単一の確率の代わりに事前分布と事後分布（prior and posterior distributions）を用いるベイズ推論（Bayesian inference）としてこれに出会うことになる。

## 次の一歩

1. **冷蔵庫の中の死体。** STEP II 1987、問 16（`step.maths.org/questions/87-s2-q16`）に挑戦してみよう。信頼性の異なる二人の証人についてのベイズの定理の問題であり、STEP の中でも特に印象的な設定の一つである。

2. **どれほどまれか。** 感度（sensitivity）0.9、偽陽性率 $\frac{1}{11}$ の検査について、陽性結果が「病気である確率が五分五分を上回る」ことを意味するためには、病気はどれほどありふれていなければならないか。

3 **検査を繰り返す。** AL そのものを繰り返し、その人の真の状態を与えたときに結果が独立であるとする。AL で二回陽性となった後に病気である確率はいくらか。三回の場合はどうか。

4 **スクリーニング。**あるスクリーニング計画で、有病率（prevalence）が 10 000 人に 1 人の病態について 100 万人を検査する。用いる検査は感度 99%、偽陽性率 1% である。その病態の可能性があると告げられるのは何人で、そのうち実際にその病態をもつのは何人か。

## さらに学ぶために

- **Gerd Gigerenzer, *Reckoning with Risk*** (Penguin)。自然頻度、医療検査、そして法廷。
- **David Spiegelhalter, *The Art of Statistics*** (Pelican)。医療スクリーニングと Sally Clark 事件を含む。
- **Sharon Bertsch McGrayne, *The Theory That Would Not Die*** (Yale University Press)。チューリングによる利用を含む、ベイズの定理の歴史。

# 12.3 「ランダム」とは何を意味するか？

**問題**

**STEP III 2022、問 12**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip`

## 導入

「円の弦（chord）を無作為に 1 本選ぶ。その長さの期待値（expected value）はいくらか。」この問いには答えがありそうに聞こえる。しかし「無作為に」が何を意味するかを決めるまでは、答えは存在しない。円周上に無作為に 2 点をとって結べば、長さの期待値は $\frac{4a}{\pi} \approx 1.27a$ である。円の内部に無作為に 1 点をとり、その点を通る方向を無作為に選べば、答えは $\frac{16a}{3\pi} \approx 1.70a$ となる。どちらも「無作為な弦」の選び方としてまったく妥当である。

これが**ベルトランの逆説**（Bertrand's paradox）であり、ジョゼフ・ベルトラン（Joseph Bertrand）が 1889 年に警告として発表したものである。確率は、確率的な試行が明確に指定されて初めて定まる。この逆説は、20 世紀に築かれた確率論の厳密な基礎へと数学者たちを向かわせる一因となった。その基礎においては、あらゆる確率は厳密に定義された結果の空間の上で考えられる。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 角 $AOB$ が $\theta$ のとき、弦 $AB$ の長さはいくらか。（$O$ から垂線を下ろしてみよ。）

$O$ からの垂線は弦と角をともに二等分するので、$AB = 2a\sin\frac{\theta}{2}$ である。

## 順を追って解く

### 段階 1　円周上の 2 点

$$\mathrm{E}(AB) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{a}{\pi}\Big[-2\cos\frac{\theta}{2}\Big]_0^{2\pi} = \frac{a}{\pi}\cdot 4 = \frac{4a}{\pi}. \qquad \blacksquare$$

### 段階 2　内部の無作為な点

> **考えてみよう**　$0 \le r \le a$ に対して $\mathrm{P}(R \le r)$ はいくらか。微分して確率密度を求めよ。

$\mathrm{P}(R \le r)$ は半径 $r$ の円板の面積を円板全体の面積で割ったもの、すなわち $\frac{r^2}{a^2}$ である。したがって $R$ は $[0,a]$ 上で確率密度（density）$\frac{2r}{a^2}$ をもつ。（中心から遠い点ほど選ばれやすい。そこにより多くの面積があるからである。）

> **考えてみよう**　$C$ を通る弦が $OC$ と角 $t$ をなすとする。この弦は $O$ からどれだけ離れているか。

$O$ からこの直線までの距離は $R\sin t$ なので、弦の長さは $2\sqrt{a^2 - R^2\sin^2 t}$ である。

### 段階 3　$C$ について平均する

$s = \sin t$ とおくと、

$$L(t) = \int_0^{a} 2\sqrt{a^2 - r^2 s^2}\cdot\frac{2r}{a^2}\,\mathrm{d}r = \frac{4}{a^2}\Big[-\frac{(a^2 - r^2s^2)^{3/2}}{3s^2}\Big]_0^{a}$$
$$= \frac{4}{a^2}\cdot\frac{a^3 - a^3(1-s^2)^{3/2}}{3s^2} = \frac{4a(1-\cos^3 t)}{3\sin^2 t}. \qquad \blacksquare$$

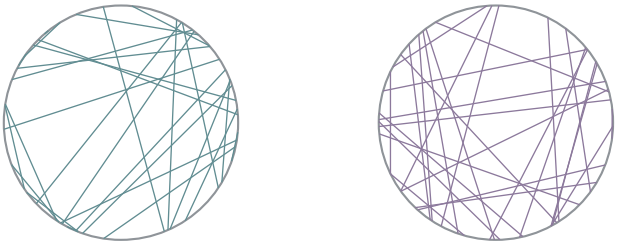
> **考えてみよう**　$1-\cos^3 t$ と $\sin^2 t = 1-\cos^2 t$ を因数分解せよ。何が約分できるか。

$c = \cos t$ とおくと $\frac{1-c^3}{1-c^2} = \frac{(1-c)(1+c+c^2)}{(1-c)(1+c)} = \frac{1+c+c^2}{1+c} = c + \frac{1}{1+c}$ であり、また $1+\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2}$ である。よって

$$L(t) = \frac{4a}{3}\Big(\cos t + \tfrac{1}{2}\sec^2\tfrac{t}{2}\Big). \qquad \blacksquare$$

### 段階 4　方向も無作為に

$$\mathrm{E}\big(L(T)\big) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{4a}{3}\Big(\cos t + \tfrac{1}{2}\sec^2\tfrac{t}{2}\Big)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{8a}{3\pi}\Big[\sin t + \tan\tfrac{t}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{8a}{3\pi}(1+1) = \frac{16a}{3\pi}. \qquad \blacksquare$$



無作為な 2 端点
平均の長さ $\frac{4a}{\pi} \approx 1.27a$

円板内の無作為な中点
平均の長さ $\frac{4a}{3} \approx 1.33a$

**図 12.3.1**　2 通りの方法で選んだ 28 本の「無作為な弦」。左：円周上の独立な一様（uniform）な 2 点。右：円板内の一様に無作為な点を弦の中点とする。右の方法では、縁の近くの短い弦が少なくなる。方法が異なれば分布が異なり、答えも異なる。

## 振り返り

- **試行を指定する。**「無作為な弦」は各小問で明確な手順となり、手順ごとに異なる答えが得られた。
- **面積から確率密度を得る。** $\mathrm{P}(R \le r)$ は幾何から直接得られ、それを微分すると確率密度が得られた。
- **段階的に平均する。**まず（$t$ を固定して）$C$ の位置について平均し、次に $t$ について平均した。

## 背後にある数学

### ベルトランの 3 つの答え

ベルトラン自身の問いは、無作為な弦が内接正三角形（inscribed equilateral triangle）の 1 辺 $\sqrt{3}a$ より長くなる確率はいくらか、というものであった。彼は 3 つの方法と 3 つの答えを示した。

- 無作為な端点：一方の端点を固定する。もう一方の端点が円周の中央の 3 分の 1 にあれば、弦は長い。確率は $\frac{1}{3}$。

- 無作為な半径とその上の無作為な点を中点とする：$O$ からの距離が $\frac{a}{2}$ より小さければ、弦は長い。確率は $\frac{1}{2}$。
- 円板内のどこかに無作為な中点をとる：中点が $O$ から $\frac{a}{2}$ 以内にあれば、弦は長い。確率は $\frac{1}{4}$。

それぞれの方法は弦の集合の上の異なる確率分布であり、矛盾はない。これらは異なる問いに答えているのである。教訓は、「一様に無作為に」という言葉は選んだパラメータ付け（parametrisation）に対してのみ意味をもち、連続的な集合に対しては、自然なパラメータ付けがただ 1 つに定まることはふつうない、ということである。

### 正しい答えはあるのか

1973 年、物理学者のエドウィン・ジェインズ（Edwin Jaynes）は、2 番目の方法こそが「正しい」と論じた。その根拠は、円を少し動かしたり拡大縮小したりしても答えは変わるべきではない、というものである。無作為な弦とは、床に描いた円の上にストローを投げたようなものであるべきだ、というわけである。この不変性（invariance）をもつのは、中心からの距離が一様な分布だけであり、実際にストローを投げる実験でも $\frac{1}{2}$ が確かめられている。正しい分布とはその状況の対称性を尊重するものである、という同じ考え方が、無作為な直線の数学である**積分幾何学**（integral geometry）の根底にあり、これは Section 12.20 のビュフォン（Buffon）の針も説明する。

#### 逆説から公理へ

ベルトランは弦の逆説を『*Calcul des probabilités*』（1889 年）で発表した。その目的の一部は、彼が「幾何学的確率」の軽率な使い方とみなしたものを皮肉ることであった。アンリ・ポアンカレ（Henri Poincaré）もこれを論じている。1900 年、ダフィット・ヒルベルト（David Hilbert）は新世紀に向けた有名な問題の中に確率の公理化（axiomatisation）を挙げ、1933 年にアンドレイ・コルモゴロフ（Andrey Kolmogorov）がこれを解決した。確率とは結果の空間の上の測度であり、「無作為な」対象についての問いはすべて、まずどの空間とどの測度を用いるかを述べなければならない。ベルトランの逆説は、なぜそれが必要なのかを示す標準的な例である。

## 思考のスキル

### 確率的な試行を定義する

確率を計算する前に、無作為な対象がどのように生成されるかを正確に述べよ。記述が異なれば答えも異なりうる。

大学では、あらゆる確率の計算は標本空間（sample space）と確率測度（probability measure）から始まる。統計学や物理学では、しばしば対称性によって正しい無作為性のモデルを選ぶことが、仕事の大きな部分を占める。

## 次の一歩

1. **ベルトランの確率。** 上の 3 つの確率 $\frac{1}{3}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$ を確かめよ。

2. **もう 1 つの平均。** 弦の中点を円板内で一様に選ぶとき（右の図）、長さの期待値が $\frac{4a}{3}$ であることを示せ。（ヒント：これは $L(\frac{\pi}{2})$ である。なぜか。）

3. **無作為な距離。** $O$ から弦までの距離が $[0, a]$ 上で一様であるとき、長さの期待値が $\frac{\pi a}{2}$ であることを示せ。

4. **3 つの方法、3 つの分布。** 3 つの方法それぞれについて、$[0, 2a]$ 上での弦の長さ $\ell$ の確率密度を求めよ。

## さらに学ぶために

- **Edwin Jaynes, “The well-posed problem”**, *Foundations of Physics* 3 (1973). 不変性による議論。読みやすく、刺激的である。
- **Gábor Székely, *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*** (Reidel). ベルトランの逆説をはじめ、多くの逆説を扱う。
- **Daniel Klain & Gian-Carlo Rota, *Introduction to Geometric Probability*** (Cambridge University Press). 積分幾何学。いずれ読むときのために。

# 12.4 二つずつなら独立、全体では独立でない

**問題**

**STEP III 2021、問 12**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

## 導入

プレイヤー 1 と 2 が同じ目を出したとする。このことから、プレイヤー 2 と 3 が同じ目を出すかどうかについて何かわかるだろうか。意外なことに、何もわからない。これらの事象は独立（independent）なのである。プレイヤー 1 と 3 についても同様である。ところが、1 が 2 と一致し、2 が 3 と一致するならば、1 は必ず 3 と一致する。3 つの事象のどの 2 つも独立であるのに、3 つ全体としては独立ではないのである。

**対ごとの独立性**（pairwise independence）は完全な独立性よりも弱く、その違いは重要である。分散（variance）に関しては対ごとの独立性さえあれば十分であり、この問題はその事実を利用している。しかし、それ以外の多くの目的には十分ではない。計算機科学者は対ごとに独立な乱数を意図的に用いる。完全に独立な乱数よりもはるかに安価に生成でき、しかも多くのアルゴリズムにとってはそれで十分だからである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $\mathrm{P}(X_{12}=1)$ はいくらか。$\mathrm{P}(X_{12}=1 \text{ かつ } X_{23}=1)$ はいくらか。

プレイヤー 1 がどの目を出しても、プレイヤー 2 がそれと一致する確率は $\frac{1}{6}$ である。$X_{12}=1$ と $X_{23}=1$ がともに成り立つのは 3 人全員が同じ目を出すときであり、その確率は $\frac{6}{216}=\frac{1}{36}$ である。

## 順を追って解く

### 段階 1　対ごとの独立性

$\mathrm{P}(X_{12}=1, X_{23}=1) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \mathrm{P}(X_{12}=1)\mathrm{P}(X_{23}=1)$ であり、各変数は 2 つの値しかとらないので、$X_{12}$ と $X_{23}$ は独立である（2 値をとる変数では、同時分布表（joint table）の 1 つのマスが残りのマスをすべて決定する。演習問題 1 でこのことを正確に扱う）。$X_{12}$ と $X_{34}$ のように共通のプレイヤーをもたない対は明らかに独立である。したがって、すべての $X_{ij}$ は対ごとに独立である。

### 段階 2　得点の平均と分散

得点は $S = \sum_{i<j} X_{ij}$ であり、これは $\binom{n}{2}$ 個の変数の和で、各変数の平均は $\frac{1}{6}$、分散は $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{36}$ である。期待値（expectation）はつねに和に分けられるので、$\mathrm{E}(S) = \frac{1}{6}\binom{n}{2}$ である。

> **考えてみよう**　和の分散が分散の和に等しくなるのはどのようなときか。

和の分散は、分散の和に共分散（covariance）の和の 2 倍を加えたものであり、独立な対の共分散は 0 である。したがって対ごとの独立性で十分である：

$$\mathrm{E}(S) = \frac{n(n-1)}{12}, \qquad \mathrm{Var}(S) = \frac{5}{36}\binom{n}{2} = \frac{5n(n-1)}{72}.$$

### 段階 3　分散の公式

$Y_i$ の平均がすべて 0 ならば $\mathrm{Var}(\sum Y_i) = \mathrm{E}((\sum Y_i)^2)$ であり、平方を展開すると各 $Y_i^2$ が 1 回ずつ、各積 $Y_iY_j$（$i<j$）が 2 回ずつ現れる。期待値をとれば公式が得られる。 ■

### 段階 4　奇数・偶数のゲーム

> **考えてみよう**　$\mathrm{E}(Z_{12})$ はいくらか。$Z_{12}Z_{23}$ はどのような値をとりうるか。また、それが 0 でないのはどのようなときか。

$Z_{12}=1$ となる確率は $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$（2 人とも 2、2 人とも 4、または 2 人とも 6 を出す場合）であり、$-1$ となる確率も $\frac{1}{12}$ である。よって $\mathrm{E}(Z_{12}) = 0$、$\mathrm{E}(Z_{12}^2) = \frac{1}{6}$ である。

$Z_{12}Z_{23} \neq 0$ となるのは 3 人全員が同じ目を出すときに限られ、そのとき $Z_{12} = Z_{23}$（ともに $+1$ またはともに $-1$）であるから、積は 1 である。したがって $\mathrm{E}(Z_{12}Z_{23}) = \frac{1}{36}$ であり、これは $\mathrm{E}(Z_{12})\mathrm{E}(Z_{23}) = 0$ と等しくない。よってこれらは独立ではない。 ■

（さらに直接的には、$\mathrm{P}(Z_{12}=1, Z_{23}=-1) = 0$ であるのに対し、各事象の確率は単独

ではそれぞれ $\frac{1}{12}$ である。）

**段階 5** **分散**

総得点 $T = \sum Z_{ij}$ の平均は 0 である。小問 (ii) により、$\mathrm{Var}(T)$ は $\binom{n}{2} \cdot \frac{1}{6}$ に、対の対すべてにわたる $\mathrm{E}(Z_{ij}Z_{kl})$ の和の 2 倍を加えたものである。共通のプレイヤーをもたない対の対の寄与は 0 である（それらは独立で、それぞれ平均が 0 だからである）。ちょうど 1 人のプレイヤーを共有する対の対はそれぞれ $\frac{1}{36}$ の寄与をもち、その個数は $n\binom{n-1}{2}$ である（共有するプレイヤーを選び、次に他の 2 人を選ぶ）。したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(T) &= \frac{n(n-1)}{12} + 2 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{2} \\ &= \frac{n(n-1)}{36}\big(3 + (n-2)\big) = \frac{n(n^2-1)}{36}. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

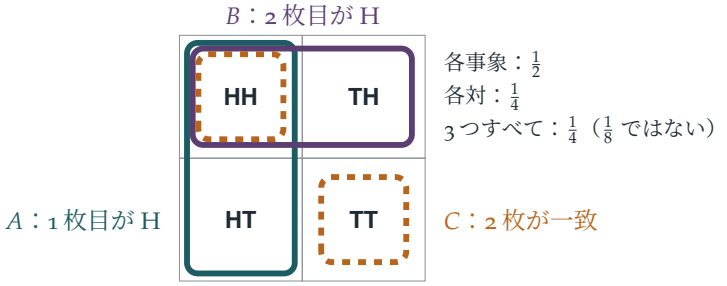



**図 12.4.1** ベルンシュタイン（Bernstein）の例：公平な 2 枚の硬貨。事象「1 枚目が表」（ティール）、「2 枚目が表」（プラム）、「2 枚が一致する」（アンバー、破線）の確率はいずれも $\frac{1}{2}$ であり、どの 2 つも確率 $\frac{1}{4}$ の 1 つのマスで交わるので、これらは対ごとに独立である。しかし 3 つすべてが交わるのは HH であり、その確率は $\frac{1}{8}$ ではなく $\frac{1}{4}$ である。どの 2 つの事象も残りの 1 つを決定してしまうのである。

## 振り返り

- **指示変数。**得点を指示変数（indicator variable）の和として書くことで、すべてがプレイヤーの対の問題に帰着した。
- **分散に必要なのは対だけ。**和の分散は対ごとの共分散だけで決まるので、分散を足し合わせるには対ごとの独立性で十分である。
- **独立性は仮定せず確かめよ。**見た目の似た 2 つのゲームが、異なる依存構造をもっていた。

## 背後にある数学

### 複数の事象の独立性

事象 $A_1, \ldots, A_n$ が**独立**であるとは、そのどの部分集まりについても、共通部分の確率が各確率の積に等しいことをいう。3 つの事象の場合、これは 4 つの条件を意味する。対についての 3 つの条件と、$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$ である。セルゲイ・ベルンシュタイン（Sergei Bernstein）は 1920 年代に図 12.4.1 の例を示し、対についての条件から 3 つについての条件は導かれないことを示した（逆に、3 つについての条件だけからも対についての条件は導かれない）。問題における一致の事象 $X_{12}$、$X_{23}$、$X_{13}$ は、ベルンシュタインの硬貨とまったく同じ構造をしている。

### 無相関は独立ではない

共分散が 0、すなわち $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ であること（無相関（uncorrelated））は、独立性よりさらに弱い。STEP III 2000 Q14（演習問題にある）は、2 つの値しかとらない変数では 2 つの概念が一致するが、3 つの値をとる場合には一致しないことを示している。簡単な例を挙げよう。$X$ を $\{-1, 0, 1\}$ 上の一様分布（uniform distribution）に従う変数とし、$Y = X^2$ とする。すると $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X^3) = 0 = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ であるが、$Y$ は $X$ によって完全に決まる。共分散が測るのは線形な関連だけなのである。

#### 安価な乱数

乱数を生成することは、計算機にとって高くつく作業である。1979 年、Larry Carter と Mark Wegman は、データを擬似乱数的な位置に格納する**ハッシュ法**（hashing）をはじめとする多くのアルゴリズムでは、対ごとに独立なランダムな選択でも完全に独立なものと同じくらいうまくいくことを示した。対ごとに独立な値は非常に安価に生成できる。たとえば、$a$ と $b$ をランダムに選んで $k = 0, 1, \ldots, p-1$ に対して $a + bk \pmod{p}$ をつくると、どの 2 つも独立な $p$ 個の値が得られる。これがうまくいく理由は、この問題の分散の計算にある。チェビシェフ（Chebyshev）の不等式に必要なのは分散だけであり、分散に必要なのは対だけなのである。

## 思考のスキル

### 指示変数に分解する

ある個数の平均と分散を求めるには、数えられうる対象それぞれに *1* つずつ指示変数を対応させ、その和として個数を書け。平均には個々の指示変数が、分散には指示変数の対が必要である。

これは確率論で最も有用な手法の一つであり、すでに Section 9.8 にも登場している。大学では、ランダムグラフ（random graph）、アルゴリズム、統計的検定の解析を支える手法となる。

## 次の一歩

1 **2 つの値。** STEP III 2000、問 14（`step.maths.org/questions/00-s3-q14`）に挑戦せよ。この問題は、それぞれ 2 つの値しかとらない確率変数では $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ から独立性が従うことを示し、3 つの値をとる場合の反例（counterexample）を求めるものである。

2 **より大きなチーム。** 小問 (i) で $n = 7$ のとき、得点の平均と標準偏差（standard deviation）を求め、例として挙げられた得点 7 と比較せよ。

3 **再び誕生日。** 指示変数を用いて、$k$ 人の中で誕生日が一致する対の個数の平均と分散を求めよ（Section 9.9）。それらの指示変数は対ごとに独立か。

4 **3 つについては成り立つが対ごとには成り立たない。** 確率がいずれも $\frac{1}{2}$ で、$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8}$ を満たすが、対ごとに独立ではない 3 つの事象を見つけよ。

## さらに学ぶために

- **Geoffrey Grimmett & David Stirzaker, *Probability and Random Processes***（Oxford University Press）。独立性を扱った最初のいくつかの章。
- **Michael Mitzenmacher & Eli Upfal, *Probability and Computing***（Cambridge University Press）。対ごとの独立性とそのアルゴリズムへの応用。
- **Joseph Blitzstein & Jessica Hwang, *Introduction to Probability***（CRC Press、オンラインで無料公開）。指示変数と共分散について。

# 12.5 最後の乗客の座席

**問題**

**STEP II 2021、問 11**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

## 導入

満席の飛行機に 100 人の乗客が乗り込む。最初の乗客は搭乗券をなくしてしまい、適当な席に座る。それ以降の乗客は、自分の席が空いていればそこに座り、空いていなければ空いている席の中から無作為に 1 つを選んで座る。最後の乗客が自分の席に座れる確率（probability）はいくらだろうか。混乱が飛行機全体に連鎖していくかもしれないので、確率は小さいと予想する人もいるだろう。あるいは、ほとんどの乗客は影響を受けないので、確率は 1 に近いはずだと考える人もいるだろう。

答えは、乗客の人数によらず、ちょうど $\frac{1}{2}$ である。この問題では、それを漸化式（recurrence）と帰納法（induction）によって証明する。しかし、対称性（symmetry）を用いた美しい 1 行の議論もあり、それによって答えがなぜ $\frac{1}{2}$ になるのかが説明でき、さらにどの乗客についても答えをただちに書き下すことができる。

## 取りかかる前に

**手を止めて、やってみよう** 起こりうる場合を列挙して、$P_2$ と $P_3$ を求めよ。

座席が 2 つのとき、$T_1$ は $S_1$ に座る（このとき $T_2$ は $S_2$ に座れる）か $S_2$ に座るかであり、それぞれの確率は $\frac{1}{2}$ である。よって $P_2 = \frac{1}{2}$ である。座席が 3 つのときを考える。$T_1$ が $S_1$ に座れば（確率 $\frac{1}{3}$）、全員が自分の席に座れる。$T_1$ が $S_3$ に座れば、$T_3$ は自分の席に座れない。$T_1$ が $S_2$ に座れば、$T_2$ は $S_1$ と $S_3$ のうちから無作為に選び、$T_3$ が自分の席に座れるのは $T_2$ が $S_1$ を選んだときに限る。したがって $P_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ で

ある。

## 順を追って解く

### 段階 1　漸化式

> **考えてみよう**　$T_1$ が $S_k$ に座ったとする。ただし $2 \le k \le n-1$ とする。乗客 $T_2, \dots, T_{k-1}$ はどうなるか。$T_k$ が来たとき、どの席が空いているか。また、その状況はより小さな列車の場合とどう比べられるか。

乗客 $T_2, \dots, T_{k-1}$ は自分の席が空いているので、そこに座る。$T_k$ が来たとき、空いている席は $S_1$ と $S_{k+1}, \dots, S_n$ であり、その数は $n-k+1$ である。$T_k$ はその中から無作為に 1 つを選び、以後の各乗客は、自分の席が空いていればそこに座り、空いていなければ無作為に選んだ席に座る。これは座席数が $n-k+1$ の元の問題そのものであり、$T_k$ が最初の乗客の役割を、$S_1$ が $T_k$ の「自分の」席（そこに座れば全てが収まる席）の役割を果たしている。したがって、$T_n$ が $S_n$ に座れる条件付き確率（conditional probability）は $P_{n-k+1}$ である。

次に、$T_1$ の座る席で場合分けする。各席の確率は $\frac{1}{n}$ である。$S_1$ ならば必ず成功し、$S_n$ ならば必ず失敗し、$S_k$ ならば成功の確率は $P_{n-k+1}$ である。よって

$$P_n = \frac{1}{n}\Bigl(1 + 0 + \sum_{k=2}^{n-1} P_{n-k+1}\Bigr) = \frac{1}{n}\Bigl(1 + \sum_{r=2}^{n-1} P_r\Bigr). \qquad \blacksquare$$

### 段階 2　答え

> **考えてみよう**　$P_2 = P_3 = \frac{1}{2}$ である。$P_n$ を予想し、強い帰納法（strong induction）で証明せよ。

主張：すべての $n \ge 2$ に対して $P_n = \frac{1}{2}$ である。$n = 2$ のときは成り立つ。$2 \le r \le n-1$ に対して $P_r = \frac{1}{2}$ が成り立つと仮定すると、

$$P_n = \frac{1}{n}\Bigl(1 + \frac{n-2}{2}\Bigr) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2} = \frac{1}{2}. \qquad \blacksquare$$

### 段階 3　最後から 2 番目の乗客

> **考えてみよう**　もっと鮮やかな議論を探してみよ。最後に $T_n$ に残される席はどれか。それが $S_2$ になることはありうるか。

$T_n$ に最後に残される席は $S_1$ か $S_n$ のいずれかである。$2 \le k \le n-1$ について、それが $S_k$ であることはありえない。なぜなら、その席には $T_k$ が座っているはずだからである。そして、それまでに行われる無作為な選択はすべて、$S_1$ と $S_n$ を対称に扱う。つまり、席を奪われた乗客が選ぶときにはいつでも、$S_1$ と $S_n$ が選ばれる確率は等しい。この 2 つの席のうち先に選ばれた方が結果を決めるので、どちらも等しい確率で残される席となる。よって $P_n = \frac{1}{2}$ である。

同じ議論は、任意の乗客 $T_k$、$k \ge 2$ についても通用する。$T_k$ が自分の席に座れないのは、それより前の乗客がその席に座った場合に限る。席を奪われる連鎖は、誰かが $S_1$ を選ぶまで続く。$S_1, S_k, S_{k+1}, \ldots, S_n$ の各席は、$T_k$ が来るまでの選択者たちによってすべて同じように扱われるので、これらのうち最初に選ばれる席は、この $n-k+2$ 個の席のどれである確率も等しい。そして $T_k$ が自分の席に座れないのは、それが $S_k$ である場合に限る。したがって

$$\mathrm{P}(T_k \text{ が座る席が} S_k) = \frac{n-k+1}{n-k+2}.$$

$k = n-1$ のとき（$n \ge 3$ として）、これより $Q_n = \frac{2}{3}$ を得る。また $Q_2 = \frac{1}{2}$ である。このとき $T_{n-1} = T_1$ であり、この乗客が $S_1$ に座る確率は $\frac{1}{2}$ だからである。 ■

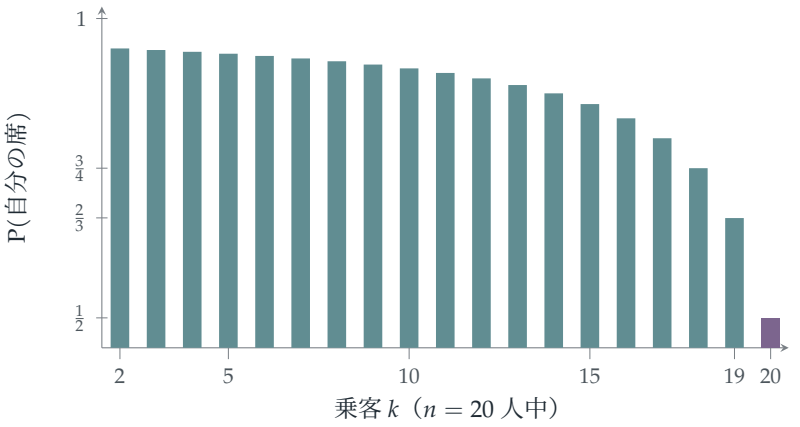



**図 12.5.1**　$n = 20$ の列車において、乗客 $k$ が自分の席に座れる確率。$2 \le k \le n$ に対して、その値は $\frac{n-k+1}{n-k+2}$ であり、$T_2$ の $\frac{19}{20}$ から $T_{19}$ の $\frac{2}{3}$ まで減少し、最後の乗客では $\frac{1}{2}$ となる（プラム色）。

## 振り返り

- **より小さな同じ問題に帰着させる。** $T_1$ が $S_k$ に座った後、残りの問題は座席数の少ない同じ問題であった。
- **強い帰納法。** 漸化式にはより小さなすべての場合が現れるので、帰納法ではそれら

すべてについて結果が成り立つことを仮定した。

- **対称性を見つける。**席 $S_1$ と $S_n$ は終始入れ替え可能であり、そのことが計算を一切せずに $\frac{1}{2}$ を説明する。

## 背後にある数学

### 対称性による議論

2 つ目の証明は、確率論における強力な考え方の一例である。すなわち、2 つの結果が確率過程の対称性によって互いに対応しているならば、それらの確率は等しい。ここでの過程は、どちらかが選ばれるまで $S_1$ と $S_n$ を区別しないので、両者が最後まで残る確率は等しくなければならない。対称性による議論は、長い計算をたった 1 つの観察で置き換えることが多い。この先のいくつかの節にはそうした議論がたくさん登場する。Section 12.6 での 1 回余分な硬貨投げ、Section 12.7 でのトーナメントの組み合わせ抽選などである。

### 席を奪われる乗客は何人か

席を奪われる乗客（自分の席に座れない乗客）の人数も、扱いやすい振る舞いをする。$T_1$ は $S_1$ を選ばない限り席を奪われた状態になり、$T_k$（$k \geq 2$）が席を奪われる確率は $\frac{1}{n-k+2}$ である。これらを足し合わせると、席を奪われる乗客の人数の期待値（expected value）は

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2}\right) = H_n - \frac{1}{n},$$

となり、およそ $\ln n$ である。乗客が 300 人の飛行機であっても、混乱の影響を受けるのは平均して約 6 人にすぎない。ここでもまた調和数（harmonic numbers）が現れる（Section 9.11）。

## 思考のスキル

**対称性を探せ**

確率過程が 2 つの結果を区別できないならば、それらは等しい確率で起こる。両者が初めて区別できるようになる瞬間を見つけよ。

大学では、対称性による議論は確率論の至るところに現れる。鏡像原理（reflection principle）（Section 9.10）から交換可能性（exchangeability）まで、

その例は幅広い。交換可能性とは、確率変数（random variables）の列がどのような順序に並べ替えても同じ分布（distribution）をもつという性質であり、現代統計学の多くの部分の基礎となっている。

## 次の一歩

1 **忘れっぽい乗客が 2 人。**最初の 2 人の乗客がともに無作為に席を選ぶとき、最後の乗客が自分の席に座れる確率はいくらか。

2 **席を奪われる乗客。**$n = 3$ の場合について、起こりうる場合を列挙して、席を奪われる乗客の人数の期待値を確かめよ。

3 **遠回りの道。**漸化式を用いて、$\sum_{r=2}^{n-1} P_r = \frac{n-2}{2}$ が対称性による議論と矛盾しないことを示せ。

4 **最後の席。**最後の乗客が自分の席に座れないという条件のもとで、最後の乗客は確率 1 で $S_1$ に座ることを示せ。それはなぜか。

## さらに学ぶために

- **Peter Winkler, *Mathematical Puzzles: A Connoisseur's Collection***（A K Peters）。『数学パズル：愛好家のためのコレクション』。飛行機の座席パズルをはじめ、対称性によって解ける多くのパズルを収録している。
- **Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability***（Dover）。『確率の 50 の難問』。古典的な問題集である。
- **Joseph Blitzstein & Jessica Hwang, *Introduction to Probability***（CRC Press；オンラインで無料公開）。『確率論入門』。

# 12.6 もう 1 枚の硬貨

**問題**

**STEP I 2016、問 12**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/16-s1-q12`

## 導入

ボブはアリスより 1 枚多くコインを投げる。ボブの表の回数がアリスより多くなる確率（probability）はいくらか。ボブには有利な点があるが、表が出る保証はなく、引き分けはボブの負けとなる。最初の二つの場合を力ずくで計算すると、答えはどちらも $\frac{1}{2}$ になる。これは偶然だろうか。

偶然ではない。ボブは表の回数がアリスより多いか、裏の回数がアリスより多いかのどちらか一方であり、両方が同時に起こることはない。このことに気づけば、一文で済む証明（proof）がある。この問題は、計算がパターンを示唆し、巧妙な対称性（symmetry）がそれを説明するという流れの手本である。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** アリスが 2 回投げるとき、表の回数の分布（distribution）はどうなるか。ボブが 3 回投げるときはどうか。

アリスの表の回数が 0, 1, 2 となる確率はそれぞれ $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}$ であり、ボブの表の回数が 0, 1, 2, 3 となる確率はそれぞれ $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$ である。

## 順を追って解く

### 段階 1 力ずくで計算する

小問 (i) では、アリスの表の回数について和をとる。

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B > A) &= \tfrac{1}{4}\mathrm{P}(B \geq 1) + \tfrac{2}{4}\mathrm{P}(B \geq 2) + \tfrac{1}{4}\mathrm{P}(B = 3) \\ &= \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{7}{8} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{4}{8} + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{8} = \frac{7+8+1}{32} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

小問 (ii) は項が増えるだけで同じ計算である。同様に確からしい $8 \times 16 = 128$ 通りの結果を数えると、ボブがリードするのは 64 通りであり（図 12.6.1）、やはり答えは $\frac{1}{2}$ となる。

### 段階 2　ボブの試行を分ける

**考えてみよう**　ボブの $n+1$ 回の試行を、$n$ 回の試行とそれに続く 1 回の追加の試行とみなそう。最初の $n$ 回を終えた時点で、ボブはアリスより多いか、同数か、少ないかのいずれかである。それぞれの場合に何が起こるか。

互いに $n$ 回ずつ投げた時点で、ボブがリードしている確率を $p_2$、同数である確率を $p_1$ とすると、（アリスとボブの対称性により）ボブが負けている確率も $p_2$ である。リードしていれば、ボブはそのままリードを保つ。同数であれば、追加の 1 回で確率 $\frac{1}{2}$ でリードする。負けていれば、追加の 1 回で表が出てもせいぜい同数になるだけである。したがって

$$\mathrm{P}(\text{ボブの表が多い}) = p_2 + \tfrac{1}{2}p_1.$$

三つの場合ですべてを尽くすので $2p_2 + p_1 = 1$ であり、よって $p_2 + \frac{1}{2}p_1 = \frac{1}{2}$ である。コインが 1 枚多ければ、どの $n$ に対しても、ボブの表の回数が多くなる確率はちょうど $\frac{1}{2}$ である。 ■

**手を止めて、やってみよう**　一文で済む証明を示そう。ボブは $n+1$ 回投げるので、表と裏の回数の和は $n+1$ であり、アリスより 1 多い。ボブの表の回数がアリスより多いことと、ボブの裏の回数がアリスより多くないことが同値であることを示せ。表と裏は対称なので、この二つの事象の確率は等しく、したがってそれぞれ $\frac{1}{2}$ である。

実際、$H_A + T_A = n$、$H_B + T_B = n+1$ と書くと、$H_B > H_A$ ならば $H_B \geq H_A + 1$ なので $T_B = n + 1 - H_B \leq n - H_A = T_A$ となる。逆に $T_B \leq T_A$ ならば $H_B \geq H_A + 1$ である。よって「表が多い」と「裏が多い」は互いに余事象（complementary event）であり、表と裏を入れ替えると（コインに偏りがないので確率は変わらない）この二つが入れ替わる。




**図 12.6.1** 小問 (ii)：同様に確からしい 128 通りの結果のうち、表の回数の各組合せとなるものの数。ボブがリードするのは網掛けのマスであり、そこにはちょうど半分の結果が含まれる。

## 振り返り

- **小さな場合を計算する。**二つの計算から、答えが $\frac{1}{2}$ であると予想できた。
- **自然な分け方で条件付ける。**ボブの追加の 1 回を切り離すことで、問題は互角の勝負とコイン 1 枚に帰着された。
- **互いに余事象となる組を見つける。**「表が多い」と「裏が多い」は互いに余事象であり、対称性によって入れ替わる。

## 背後にある数学

### 対称性と余事象

この鮮やかな証明は二つの事実を組み合わせている。対称性によって入れ替わる二つの事象は確率が等しいこと、そして互いに余事象である二つの事象は確率の和が 1 になることである。両方が成り立てば、それぞれの確率は $\frac{1}{2}$ である。同じ論法は確率論のいたるところに現れる。飛行機の座席の問題（Section 12.5）では、$S_1$ と $S_n$ が対称性によって入れ替わり、最後にはそのちょうど一方が残るのであった。ヘックス（Hex）というゲームでは、盤面の対称性と、必ずどちらか一方のプレイヤーが勝つという事実から、先手が有利であることが示される。ただし、大きな盤面での必勝法は誰も知らない。

### 引き分けはどのくらい起こりやすいか

投げる回数が等しい場合には、引き分けの確率 $p_1$ が重要になる。アリスとボブが引き分けるのはアリスの表の回数とボブの表の回数が等しいときであり、これは（対称性によりボブの表の回数を裏の回数に置き換えると）アリスの表の回数とボブの表の回数の和が $n$ になる確率、すなわち $2n$ 回の試行で表が合計 $n$ 回出る確率に等しい。よって、スターリングの近似（Stirling's approximation）（Section 12.23）を用いると

$$p_1 = \binom{2n}{n}\frac{1}{4^n} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

となる。引き分けはまれになっていくが、その減り方はゆっくりである。互いに 100 回ずつ投げても、引き分けの確率はまだ約 5.6% ある。

## 思考のスキル

> **計算し、予想し、そして説明する**
>
> 計算の結果が怪しいほど単純な答えになったら、その理由を探そう。単純な答えには、たいてい単純な説明がある。
>
> 大学では、この習慣が「理解すること」と「計算すること」を分ける。ここでの一つ目の証明は答えを確かめるものであり、二つ目の証明は答えを説明するもので、すぐに一般化できる（演習 2 を試してみよう）。

## 次の一歩

1. **コインが 2 枚多い場合。** ボブが $n+2$ 枚、アリスが $n$ 枚のコインを投げるとき、$\mathrm{P}(\text{ボブの表が多い}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{P}(H' = H_A)$ を証明せよ。ただし $H'$ はボブの最初の $n+1$ 回の試行における表の回数である。

2. **偏りのあるコイン。** 二人とも表の出る確率が $p$ のコインを使うとき、1 回多く投げる場合の答えはやはり $\frac{1}{2}$ だろうか。鮮やかな証明のどの段階が成り立たなくなるか。

3. **引き分け。** 本文の工夫を用いて $p_1 = \binom{2n}{n}/4^n$ を示し、$n = 1, 2, 3$ に対してその値を求めよ。

4. **サイコロ。** アリスが $n$ 個、ボブが $n+1$ 個のサイコロを振る。ボブの 6 の目の個数が多くなる確率は $\frac{1}{2}$ に等しいだろうか。

## さらに学ぶために

- **Peter Winkler, *Mathematical Mind-Benders***（A K Peters）。対称性を用いた解法をもつ確率のパズルが多数収められている。
- **Gabor Székely, *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics***（Reidel）。確率論と数理統計学におけるパラドックス集。
- **Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability***（Dover）。確率の難問 50 題。

# 12.7 勝ち抜き戦で誰と誰が当たるか

**問題**

**STEP II Specimen paper、問 16**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/spec-s2-q16`

## 導入

ウィンブルドン（Wimbledon）では、128 人の選手がドローに名を連ねる。無作為に 2 人を選んだとき、その 2 人がどこかで対戦する確率（probability）はいくらだろうか。各ラウンドで対戦する確率を足し合わせようとするかもしれない。それぞれは、勝ち残る確率と組み合わせで当たる確率の積である。この方法でも求められるが、はるかによい方法がある。試合の数を数えるのである。どの試合も 2 人の選手の組の間で行われ、試合はちょうど 127 試合ある。対称性（symmetry）により、どの選手の組も、それぞれの試合の対戦カードになる確率は等しい。したがって、求める確率は 127 を組の総数で割ったものになる。

この問題は、「正しいものを数える」ことで確率の問題を解く格好の例である。答え $\frac{1}{2^{n-1}}$ はたった 1 行で得られる。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $2^n$ 人の選手によるノックアウト方式のトーナメント（knockout tournament）では、何試合が行われるか。（各試合でちょうど 1 人の選手が敗退する。）

各試合でちょうど 1 人が敗退し、1 人を除く全員が敗退するのだから、試合数は $2^n - 1$ である。

## 順を追って解く

### 段階 1　1 回戦

選んだ 2 人の選手を $X$ と $Y$ とする。1 回戦では、$X$ の対戦相手は他の $2^n - 1$ 人のうち誰である確率も等しいので、

$$\mathrm{P}(\text{出会うのがラウンド1}) = \frac{1}{2^n - 1}.$$

### 段階 2　鍵となる対称性

> **考えてみよう**　各ラウンドの組み合わせは無作為に決まり、どの試合も公平な硬貨投げで勝敗が決まる。この過程は、ある選手の組を他の組と区別して扱うだろうか。

区別しない。組み合わせは無作為で、どの試合も 50–50 なので、選手の番号を付け替えてもどの確率も変わらない。したがって、特定の試合（たとえば決勝）は、$\binom{2^n}{2}$ 通りの組のどれの対戦になる確率も等しい。

### 段階 3　決勝

決勝は特定の 1 試合なので、それが $X$ と $Y$ の対戦である確率は

$$\frac{1}{\binom{2^n}{2}} = \frac{2}{2^n(2^n - 1)}.$$

である。（検算：2 人とも決勝に進む必要があり、そのためには 2 人が異なる半分の山に入り、それぞれ $n - 1$ 試合に勝たなければならない。）

### 段階 4　いずれかの段階で

> **考えてみよう**　$X$ と $Y$ が対戦するのは高々 1 回である。このことから、試合ごとの確率を足し合わせてよいのはなぜか。

試合 $m$ が $X$ と $Y$ の対戦であるとき 1、そうでないとき 0 をとるものを $I_m$ とする。$2^n - 1$ 試合のそれぞれについて $\mathrm{P}(I_m = 1) = \binom{2^n}{2}^{-1}$ であり、これらの事象は互いに排反（mutually exclusive）である（2 人が 2 回対戦することはない）から、

$$\mathrm{P}(\text{出会う}) = \frac{2^n - 1}{\binom{2^n}{2}} = \frac{2(2^n - 1)}{2^n(2^n - 1)} = \frac{1}{2^{n-1}}. \qquad \blacksquare$$

ウィンブルドンの場合は $n = 7$ であり、特定の 2 人が対戦する確率は $\frac{1}{64}$ である。検算

として、1 回戦は $2^n - 1$ 試合のうち $2^{n-1}$ 試合を占めるので、$\frac{2^{n-1}}{\binom{2^n}{2}} = \frac{1}{2^n-1}$ となり、段階 1 の結果と一致する。

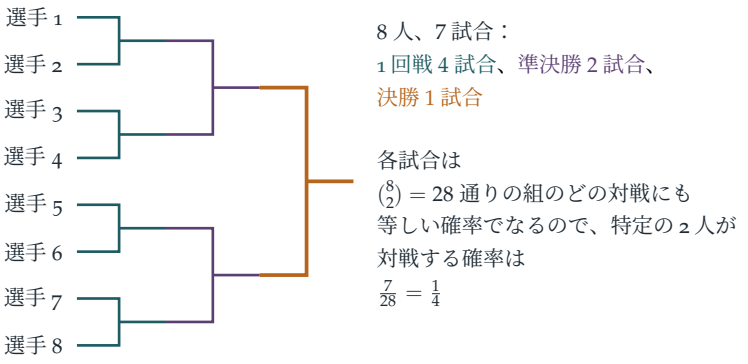



**図 12.7.1**　$2^3 = 8$ 人の選手によるノックアウト方式のトーナメント（問題では各ラウンドで無作為に組み合わせをやり直すが、ここでは固定した組み合わせ表として描いている）。試合は 7 試合ある。対称性により、各試合は 28 通りの組のどれの対戦にも等しい確率でなるので、選んだ 2 人が対戦する確率は $\frac{7}{28} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^{n-1}}$ である。

## 振り返り

- **試合を数える。**試合数 $2^n - 1$ が鍵となる事実であった。
- **組の間の対称性。**どの選手の組も、特定の試合で対戦する確率は等しい。
- **試合についての線形性。**2 人の選手が対戦するのは高々 1 回なので、対戦する確率は対戦回数の期待値に等しく、試合についての和として表される。

## 背後にある数学

### 個数の期待値

段階 4 の議論は、実は期待値（expectation）の計算である。$X$ と $Y$ が対戦する回数は、試合ごとに 1 つずつの指示変数（indicator）の和であり、その期待値（値は 0 か 1 なので、対戦する確率に等しい）は、各指示変数の期待値の和に等しい。これが期待値の線形性（linearity of expectation）であり、Section 9.11 や Section 12.4 でも用いた。この方法の大きな利点は、ラウンド間の複雑な従属関係をすべて無視できることである。

### シード付きのトーナメント

現実のトーナメントはシード（seeded）制である。最も強い選手たちは、終盤のラウンドまで対戦しないように配置される。また、現実の試合は 50–50 ではない。どちらも対称性を壊すので、特定の 2 人が対戦する確率を求めるのは本格的な計算になる。スポーツをモデル化する統計学者は、各試合の確率を選手のレーティングから推定したうえで、まさにこうした計算を用いてトーナメントの結果を予測する。対称な場合は、現実の効果を測るための基準となるのである。

## 思考のスキル

#### 正しいものを数える

確率は多くの場合、数える対象を正しく選びさえすれば、（条件を満たす対象の個数）÷（同様に確からしい対象の個数）として求められる。ここでは、それが試合と組であった。

何を数えるかを選ぶことこそ、組合せ確率論（combinatorial probability）の技である。大学では、同じ考え方が**二重数え上げ**（double counting、Section 7.9）として、また確率的手法（probabilistic method）として現れる。確率的手法では、ある構造の個数の期待値を用いて、その構造が存在することを証明する。

## 次の一歩

1. **ラウンドごとに。** $X$ と $Y$ がラウンド $k$ で対戦する確率が $\frac{2^{n-k}}{\binom{2^n}{2}}$ であることを直接示し、これらを足すと $\frac{1}{2^{n-1}}$ になることを確かめよ。

2. **固定された組み合わせ表。** 代わりに、組み合わせ表が（図のように）あらかじめ固定されていて、すべての選手がそこに無作為に配置されるとする。答えは変わるか。

3. **強い選手。** 選手 $X$ がすべての試合に勝つとする。このとき、$X$ が $Y$ と対戦する確率はいくらか。

4. **リーグ戦。** $2n$ チームによるリーグ戦（league）で、どの 2 チームも 1 回ずつ対戦するとき、試合数はいくらか。これに対応する「対戦する確率」は何か。

## さらに学ぶために

- **Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability***（Dover）。トーナメントの問題も収められている。
- **David Spiegelhalter, *The Art of Statistics***（Pelican）。モデル化と予測について。
- **Joseph Blitzstein & Jessica Hwang, *Introduction to Probability***（CRC Press、オンラインで無料公開）。指示変数と対称性について。

# 12.8 ペニーのゲーム

**問題**

**STEP III 2001、問 13**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/01-s3-q13`

## 導入

あなたと友人がそれぞれ硬貨投げ 3 回分の列を 1 つずつ選び、どちらかの列が現れるまで硬貨を投げ続ける。3 回分の列はどれも、どの時点においても等しい確率（probability）で現れるのだから、どれを選んでも同じくらい有利なはずではないか。まったくそうではない。友人がどの列を選んでも、あなたはそれに勝つ列を選ぶことができ、ときには 7 対 1 という差をつけることさえできる。

これは *Penney* のゲーム（Penney's game）であり、1969 年に Walter Penney が考案したものである。この問題では、$A$ が $B$ に勝ち、$B$ が $C$ に勝ち、$C$ が $D$ に勝ち、$D$ が $A$ に勝つことを示す。じゃんけんのような循環である。「勝つ」という関係は推移的（transitive）ではない。後から選ぶ者は、長い目で見れば常に勝つことができるのである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** ここまでの投げの結果が TT で終わっていて、まだどちらも勝っていないとする。TTH より先に THH が現れることはありうるか。

TT の状態から T が続く限り、最後の 2 回は TT のままであり、最初の H が出た時点で TTH が完成する。THH が現れるには TH が必要だが、TH は T の後に H が出ることでしか生じず、その H によってすでに TTH が完成してしまう。したがって、いったん TT が現れれば $A$ の勝ちである。

## 順を追って解く

### 段階 1　状態

> **考えてみよう**　どちらの列も 2 回の投げでは完成しない。2 回投げた後、それぞれの状態から次の 1 回はどのような効果をもつか。

ゲームの行方は最後の 2 回の結果だけで決まるので、状態（state）（最後の 2 回の結果）を追跡すればよい。

- TT から：$A$ が勝つ（上で示した）。よって $p_{\mathrm{TT}} = 1$ である。
- HT から：次の 1 回で TH か TT になる。よって $p_{\mathrm{HT}} = \frac{1}{2}p_{\mathrm{TH}} + \frac{1}{2}p_{\mathrm{TT}}$ である。
- TH から：H が出れば THH が完成し（$B$ の勝ち）、T が出れば HT になる。よって $p_{\mathrm{TH}} = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}p_{\mathrm{HT}}$ である。
- HH から：H が出れば再び HH、T が出れば HT になる。よって $p_{\mathrm{HH}} = \frac{1}{2}p_{\mathrm{HH}} + \frac{1}{2}p_{\mathrm{HT}}$ であり、$p_{\mathrm{HH}} = p_{\mathrm{HT}}$ を得る。

### 段階 2　解く

$p_{\mathrm{TH}} = \frac{1}{2}p_{\mathrm{HT}}$ を HT の式に代入すると $p_{\mathrm{HT}} = \frac{1}{4}p_{\mathrm{HT}} + \frac{1}{2}$ となるので、$p_{\mathrm{HT}} = \frac{2}{3}$、$p_{\mathrm{HH}} = \frac{2}{3}$、$p_{\mathrm{TH}} = \frac{1}{3}$ である。4 つの初期状態はそれぞれ確率 $\frac{1}{4}$ で生じるから、

$$\mathrm{P}(A \text{ が勝つ}) = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} + 1\right) = \tfrac{2}{3}. \qquad \blacksquare$$

### 段階 3　$B$ 対 $C$

> **考えてみよう**　$C$ は HHT を、$B$ は THH を望んでいる。$C$ が勝つのはどのようなときか。（最初の HH の直前に何がなければならないかを見よ。）

最初の 2 回が HH であれば、その後に出る最初の T によって、THH が現れる前に HHT が完成する。$C$ の勝ちである。そうでなければ、HH が初めて現れるより前のどこかに T があるので、最初の HH の直前は必ず T である。その瞬間に THH が現れ、これは（HH の後に T を必要とする）HHT より先である。したがって $C$ が勝つのはゲームが HH で始まるときに限られ、

$$\mathrm{P}(B \text{ が勝つ}) = \tfrac{3}{4}. \qquad \blacksquare$$

### 段階 4　循環

同じ方法（あるいは「背後にある数学」の節で述べる近道）により、$C$（HHT）は確率 $\frac{2}{3}$ で $D$（HTT）に勝ち、$D$（HTT）は確率 $\frac{3}{4}$ で $A$（TTH）に勝つことがわかる。後者は、ステージ 3 で表と裏を入れ替えた鏡像である。よって

$A$ が勝つ相手は$B$, $B$ が勝つ相手は$C$, $C$ が勝つ相手は$D$, $D$ が勝つ相手は$A$. ■

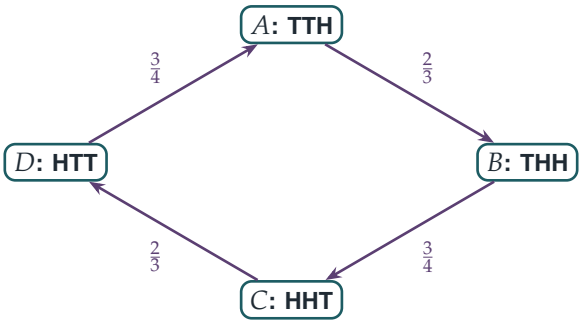



**図 12.8.1** Penney の循環。$X$ から $Y$ への矢印は、$X$ の列が $Y$ の列に、示された確率で勝つことを表す。どの列にもそれに勝つ列があるので、後から選ぶ者は常に勝つ列を選ぶことができる。

## 振り返り

- **適切な状態を選ぶ。**重要なのは最後の 2 回だけだったので、4 つの状態と 4 つの方程式でゲーム全体を捉えることができた。
- **第一ステップ解析。**各方程式は次の 1 回の結果で条件づけたものである。ある状態からの確率は、次の 1 回で移る先についての平均である。
- **決定的な事象を探す。**ステージ 3 では、「最初の HH の直前は T である」という事実によって、方程式を使わずに勝敗が決まった。

## 背後にある数学

### なぜ有利な列があるのか

3 回分の列はどれも、どの位置においても等しい確率で現れ、それぞれの期待（expected）待ち時間（waiting time）は容易に計算できる。しかし待ち時間は列によって異なる。TTH は平均 8 回で現れるが、TTT は平均 14 回かかる。自分自身と重なりをもつ列（TTT のように、惜しくも TTH となると 2 回分の進捗が無駄になるもの）は現れるのが遅いのである。そして 2 つの列の競争で重要なのは、それぞれが**相手の列**とどう重なるかである。THH が HHT に勝つのは、HHT のどの出現も（一番最初を除けば）直

前に T があり、つまりその時点で THH がちょうど現れているからである。後から選ぶ者の秘訣は常に同じである。相手の列の最初の 2 つの記号をとり、その前に相手の列の真ん中の記号の反対を置けばよい。

### コンウェイの公式

ジョン・コンウェイ（John Conway）は、この勝率について驚くべき公式を発見した。長さ $n$ の 2 つの列 $X, Y$ に対して、**相関**（correlation）$XY$ を $n$ 桁の 2 進数として次のように定める。左から読んで第 $i$ 桁は、$X$ の第 $i$ 記号から始まる部分が、それと同じ長さの $Y$ の先頭部分に一致すれば 1 とする。このとき、$X$ より先に $Y$ が現れる勝率の比は

$$(XX - XY) : (YY - YX).$$

である。$X = \text{HHT}$, $Y = \text{THH}$ の場合、$XX = 100_2 = 4$（HHT 全体だけが自分自身と一致する）、$XY = 001_2 = 1$（HHT の最後の T だけが THH の先頭と一致する）、$YY = 100_2 = 4$、$YX = 011_2 = 3$（THH の末尾の HH と H がともに HHT の先頭と一致する）である。よって THH が先に現れる勝率の比は $(4-1) : (4-3) = 3 : 1$ であり、これはステージ 3 の $\frac{3}{4}$ である。コンウェイの公式は任意の長さ、任意の文字集合の列に対して成り立ち、その証明には**マルチンゲール**（martingale）の理論が用いられる。列が現れることに賭けるギャンブラーたちがいるカジノを想像し、公平なゲームの期待利益は 0 であるという事実を使うのである。

#### Penney とガードナー

Walter Penney は 1969 年、*Journal of Recreational Mathematics* 誌の短い記事でこのゲームを紹介した。マーティン・ガードナー（Martin Gardner）は 1974 年、*Scientific American* 誌の連載コラムでこれを有名にし、そこにはコンウェイが発見したものの発表していなかったコンウェイの公式も含まれていた。この種の非推移的な関係（エフロン（Efron）のサイコロもその一例で、サイコロ $A$ が $B$ に勝ち、$B$ が $C$ に勝ち、$C$ が $D$ に勝ち、$D$ が $A$ に勝つ）は繰り返し驚きを生む源であり、多数派の選好が循環しうる投票理論においても重要である。これがコンドルセ（Condorcet）のパラドックス（Condorcet's paradox）である。

## 思考のスキル

**第一ステップ解析**

状態の間を移り変わる過程について確率や期待値（*expectation*）を求めるには、最初の 1 ステップで条件づけよ。そうすれば、状態ごとに 1 つの一次方程式が得られる。

これはマルコフ連鎖（Markov chain）の基本的な手法であり、Section 12.16 や、大学の確率論の講義全体を通じて出会うことになる。同じ方法で、ある状態に別の状態より先に到達する確率、吸収（absorption）までの期待時間、賭けの問題における破産（ruin）の確率を求めることができる。

## 次の一歩

1. **4 人同時に。** STEP II 2015、問 12（`step.maths.org/questions/15-s2-q12`）に挑戦せよ。4 人が同時に行う Penney のゲームである。
2. **待ち時間。** HH が初めて現れるまでの投げの回数の期待値は 6、HT の場合は 4 であることを示せ。（第一ステップ解析を用いよ。）
3. **最善の応手。** 長さ 3 の 8 つの列それぞれについて、それに最大の確率で勝つ列を求めよ。最も簡単に負かされる列はどれか。
4. **コンウェイの公式。** コンウェイの公式を用いて、HHT が確率 $\frac{2}{3}$ で HTT に勝つことを確かめよ。

## さらに学ぶために

- **Martin Gardner, *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments***（W. H. Freeman）。Penney のゲームとコンウェイの公式を収録している。
- **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics***（Addison-Wesley）、8.4 節。母関数（generating function）を用いた Penney のゲームの扱い。
- **David Williams, *Probability with Martingales***（Cambridge University Press）。マルチンゲールによる証明。将来のために。

# 12.9 偏った硬貨から公平な判定を

**問題**

**STEP I 2019、問 11**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP I の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip`

## 導入

公平な決定を下さなければならないのに、手元にある硬貨は曲がっていて、どれほど偏っているのかもわからない。それでも公平な選択はできるだろうか。1951 年にフォン・ノイマン（John von Neumann）が与えた答えはこうである：硬貨を 2 回投げよ。HT が出ればホテル、TH が出れば喫茶店を選び、HH か TT が出たらもう 2 回投げる。HT と TH はどちらも確率が $pq$ であるから、$p$ がどんな値であっても、この決定は完全に公平である。

この問題の手順はその逆で、HH と TT で決定する。これは速いが公平ではない（ホテルが選ばれる確率は $\frac{p^2}{p^2+q^2}$）。この問題は、どんな硬貨であってもこの手順が長くはかからないことを示す。2 つの手順を比べると、乱数生成における基本的なトレードオフ、すなわち速さと公平さの兼ね合いが見えてくる。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 1 回のラウンドで決定が下される確率はいくらか。決定が下されない確率はどうか。$2pq$ がとりうる最大の値はいくらか。

硬貨の結果が一致すれば決定が下され、その確率は $p^2 + q^2$ である。そうでなければ、確率 $2pq$ で続行となる。$pq = p(1-p) \leq \frac{1}{4}$（等号は $p = \frac{1}{2}$ のとき）であるから、$2pq \leq \frac{1}{2}$ が成り立つ。

## 順を追って解く

### 段階 1　第 $n$ ラウンドでの決定

各ラウンドは独立（independent）である。第 $n$ ラウンドで決定が下されるには、$n-1$ 回続けて結果が一致せず、その次に一致しなければならない：

$$\mathrm{P}(\text{決定するラウンドが}n) = (2pq)^{n-1}(p^2+q^2). \qquad \blacksquare$$

### 段階 2　第 $n$ ラウンドまでの決定

> **考えてみよう**　最初の $n$ ラウンドで決定が下されない確率はいくらか。

$n$ ラウンドで決定が下されない確率は $(2pq)^n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$ であるから、$p$ がどんな値であっても、第 $n$ ラウンドまでに決定が下される確率は少なくとも $1-\frac{1}{2^n}$ である。 $\blacksquare$

### 段階 3　3 人の場合

> **考えてみよう**　第 1 ラウンドで表が 2 枚、裏が 1 枚出たあと、3 人目は裏の硬貨をひっくり返して表にする。第 2 ラウンドで決定が下されるには何が起こらなければならないか。裏が 2 枚、表が 1 枚の場合はどうか。

第 1 ラウンドで決定が下される確率は $p^3+q^3$ である。そうでなければ、2 枚の硬貨が一致し、1 枚だけが異なる。多数派が表であった場合（確率 $3p^2q$）、異なる硬貨は表に返されるので、第 2 ラウンドで決定するには残りの 2 人が表を出す必要があり、その確率は $p^2$ である（全員が裏になることはもはやありえない）。同様に、多数派が裏であった場合（確率 $3pq^2$）、決定には裏が 2 枚出る必要があり、その確率は $q^2$ である。したがって

$$\mathrm{P}(\text{決定までに要するラウンド数が高々2}) = p^3+q^3+3p^2q\cdot p^2+3pq^2\cdot q^2.$$

> **考えてみよう**　すべてを $s=pq$ を用いて表せ。（$p+q=1$ を用いよ。）

$p^3+q^3=(p+q)^3-3pq(p+q)=1-3s$ であり、$3p^4q+3pq^4=3s(p^3+q^3)=3s(1-3s)$ である。よって、$s\le\frac{1}{4}$ より

$$\mathrm{P} = 1-3s+3s-9s^2 = 1-9s^2 \ge 1-\frac{9}{16} = \frac{7}{16},$$

となる。 $\blacksquare$

## 振り返り

- **余事象（complement）。**「第 $n$ ラウンドまでに少なくとも 1 回」は、1−（「$n$ ラウンドで一度も起こらない」）として考えるのがいちばん簡単であった。
- **最悪の場合を評価する。**未知の $p$ は、不等式 $pq \leq \frac{1}{4}$ によって処理した。
- **対称関数（symmetric function）。**$p$ と $q$ について対称な式は、$p+q=1$ と $pq$ を用いて表すと簡単になる。

## 背後にある数学

### フォン・ノイマンのトリック

この問題の手順は速いが偏り（bias）がある。フォン・ノイマンの手順は公平である：2 回投げ、HT か TH なら決定し、HH か TT なら繰り返す。各試行が成功する確率は $2pq$ なので、平均して $\frac{1}{2pq}$ 回の試行を要し、硬貨が大きく偏っているときには時間がかかる（図 12.9.1）。この問題の手順は 1 ラウンドあたり確率 $p^2+q^2 \geq \frac{1}{2}$ で決定を下すが、$p > \frac{1}{2}$ のときにはその答えがホテルに偏る。

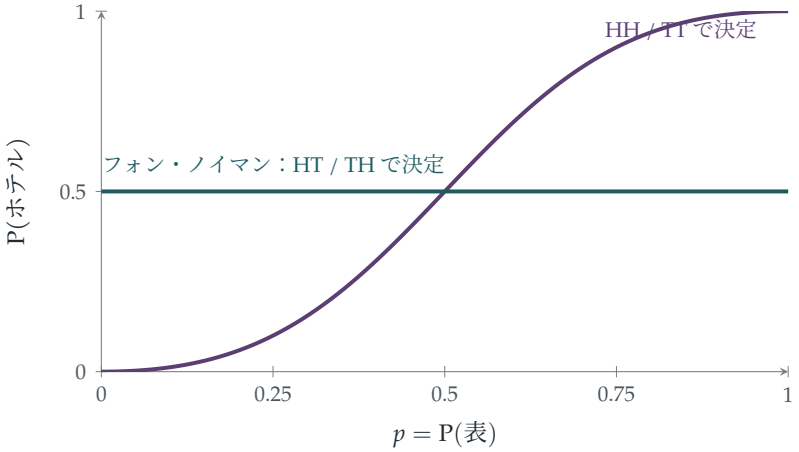



**図 12.9.1**　硬貨の偏りに対する、ホテルが選ばれる確率。硬貨の結果が一致したときに決定する方法（プラム色）は速いが、出やすい面に有利になる。フォン・ノイマンの手順（ティール色）はすべての $p$ に対して厳密に公平であるが、その代償として、硬貨が大きく偏っているときには時間がかかる。

### ランダムネスの抽出

フォン・ノイマンのトリックは、最初の**乱数抽出器**（randomness extractor）である。これは不完全なランダムネスを完全なランダムネスに変える手順である。この方法は無駄が多い（2 回投げるごとに得られる公平なビットは高々 1 つで、1 つも得られないことも多い）。より優れた方法では、捨てられた HH や TT の組を再利用して、硬貨がもつランダムネスのほぼすべてを抽出する。このランダムネスの量は、1 回の投げあたり $-p\log_2 p - q\log_2 q$ ビットという**エントロピー**（entropy）で測られる。抽出器は、コンピュータのハードウェア乱数生成器で用いられている。ハードウェア乱数生成器は、予測不可能だが偏りのある物理的なノイズを集め、それを暗号のために偏りのないビットに変換しなければならないのである。

#### フォン・ノイマンと乱数

フォン・ノイマンは、1951 年の論文 “Various techniques used in connection with random digits”（乱数に関連して用いられるさまざまな技法）でこのトリックを述べた。この論文が書かれたのは、彼と同僚たちが核兵器の設計のために、最初期のコンピュータ・シミュレーションのいくつか（「モンテカルロ法（Monte Carlo method）」）を実行していた時期である。同じ論文の中で、彼は算術によって乱数を生成することについて、有名な言葉を残している：「算術的な方法で乱数を作り出そうと考える者は、言うまでもなく罪の状態にある。」

## 思考のスキル

#### 対称性を使って未知のものを消す

パラメータが未知であるときは、その値によらず確率が等しくなる事象を探し、それにもとづいて決定せよ。

HT と TH は同じ確率 $pq$ をもつので、両者を比べれば $p$ は完全に消える。大学では、同じ考え方が統計学の**枢軸量**（pivotal quantity）や実験計画（design of experiments）に現れる。実験計画では、無作為化（randomisation）と対称性によって未知の効果が打ち消される。

## 次の一歩

1 **ラウンド数の期待値。**小問 (i) の手順とフォン・ノイマンの手順のそれぞれについて、ラウンド数の期待値（expected value）を求めよ。どのような $p$ に対して、フォン・ノイマンの手順のほうが遅くなるか。

2 **公平な三者択一。**偏りのある硬貨を用いて、3 つの選択肢のうち 1 つを、それぞれちょうど確率 $\frac{1}{3}$ で選ぶ手順を考案せよ。

3 **公平な硬貨から偏ったさいころを。**公平な硬貨を用いて、表が出る確率がちょうど $\frac{1}{3}$ である硬貨を模擬する手順を考案せよ。投げる回数の期待値はいくらか。

4 **再び 3 人の場合。**小問 (ii) において、3 人がホテルに行く確率を $p$ の関数として求めよ。$p = \frac{1}{2}$ のとき、この手順は公平か。

## さらに学ぶために

- **John von Neumann, “Various techniques used in connection with random digits”**, *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series* 12 (1951). 短く、有名な論文である。
- **Donald Knuth, *The Art of Computer Programming*, Vol. 2** (Addison-Wesley)。第 3 章で乱数を扱っている。
- **Michael Mitzenmacher & Eli Upfal, *Probability and Computing*** (Cambridge University Press)。ランダムネスの抽出とエントロピーを扱っている。

# 12.10 ひもの端を結ぶ

**問題**

**STEP III 2008、問 13**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/08-s3-q13`

## 導入

100 本の紐を袋に入れ、端だけが外に出るようにしておく。無作為に端を 2 つ選んで結び、ほどけた端がなくなるまでこれを繰り返す。最後には輪がいくつか絡み合った状態になる。輪はいくつできるだろうか。100 本の紐からは、原理的には小さな輪が 100 個できることもあれば、巨大な輪が 1 つだけできることもある。驚くべきことに、輪の個数の期待値（expected value）はわずか 3.3 程度であり、紐が 4 万本あってもまだ 6 程度にすぎない。

鍵となる観察をひとつ押さえると、この問題はほとんど自明になる。何が起こったとしても、結び目を 1 つ作るたびに、箱の中の紐はちょうど 1 本減るのである。この過程はそれまでの履歴を「忘れて」しまい、輪の個数は、確率が変化していく独立なコイン投げの和になる。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 2 つの端を結んだあと、紐は何本残っているか（輪になったものはもう「紐」としては数えない）。それは輪ができたかどうかに依存するだろうか。

2 つの端が同じ紐のものであれば、その紐は輪になり、$n-1$ 本の紐が残る。異なる紐のものであれば、その 2 本はつながって 1 本の長い紐になり、やはり $n-1$ 本の紐が残る。いずれの場合も、それぞれ 2 つの端をもつ $n-1$ 本の紐が残るのである。

## 順を追って解く

### 段階 1　最初の結び目

端は $2n$ 個ある。そのうち 1 つを選ぶと、結ばれる相手は残りの $2n-1$ 個の端のどれもが等しい確率で選ばれ、そのうちちょうど 1 つが同じ紐の端である。したがって、最初の結び目が輪を作る確率は $\frac{1}{2n-1}$ であり、最初の段階で作られる輪の個数の期待値は $\frac{1}{2n-1}$ である。

### 段階 2　すべての結び目

> **考えてみよう**　上の観察から、2 回目の結び目を作る前の状況はどうなっているか。3 回目の前はどうか。紐が $k$ 本残っているときに作る結び目で輪ができたかどうかを表す指示変数（indicator）を $I_k$ とする。$\mathrm{E}(I_k)$ はそれぞれいくらか。

$k = n, n-1, \dots, 1$ に対して、各結び目を作る前には箱の中に $k$ 本の紐があり、その結び目は確率 $\frac{1}{2k-1}$ で輪を作る（紐が 1 本だけ残っているときの最後の結び目は、必ず輪を作る）。輪の総数は $R = I_n + I_{n-1} + \cdots + I_1$ であるから、

$$\mathrm{E}(R) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}. \qquad \blacksquare$$

### 段階 3　分散

> **考えてみよう**　指示変数 $I_k$ は独立か（ある段階で輪ができる確率は、それ以前に起こったことに依存するか）。

各段階で輪ができる確率は、それ以前に何が起こったかによらず $\frac{1}{2k-1}$ である。状態はつねに「$k$ 本の紐」だからである。よって $I_k$ は独立（independent）であり、分散（variance）は足し合わせることができる：

$$\mathrm{Var}(R) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}\left(1 - \frac{1}{2k-1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-2}{(2k-1)^2}. \qquad \blacksquare$$

### 段階 4　4 万本の紐

> **考えてみよう**　$2n-1$ までの奇数の逆数の和を、調和数（harmonic number）を用いて表せ。

$2n$ までのすべての数の逆数の和から、偶数の逆数の和を引くと

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = H_{2n} - \tfrac{1}{2}H_n \approx \ln(2n) - \tfrac{1}{2}\ln n = \tfrac{1}{2}\ln(4n).$$

$n = 40\,000$ のとき $4n = 160\,000 = 20^4$ であるから、$\mathrm{E}(R) \approx \frac{1}{2} \cdot 4 \ln 20 \approx 6$ となる。 ■

（正確な値は 6.28 である。この差は、$H_n \approx \ln n + 0.577$ であることからわかるように、オイラー（Euler）定数（Euler's constant）に由来する。）

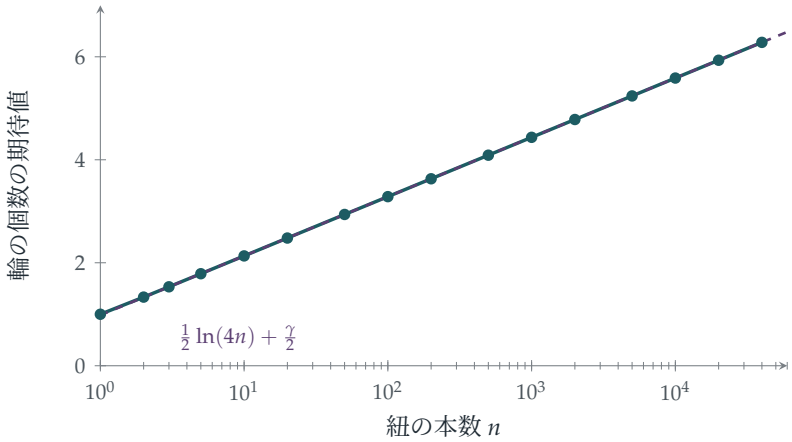



**図 12.10.1** 紐の本数に対する輪の個数の期待値（対数目盛（logarithmic scale））。正確な値（ティール）は直線 $\frac{1}{2}\ln(4n) + \frac{\gamma}{2}$（プラム、破線）の上にのっている。ここで $\gamma \approx 0.577$ はオイラー定数である。紐の本数を 10 倍にしても、輪は約 1.15 個しか増えない。

## 振り返り

- **過程が何を忘れるかを見つける。**各結び目のあと、箱の中は履歴によらず「$k$ 本の紐」であった。
- **ここでも指示変数。**輪の個数は、結び目 1 つにつき 1 つの指示変数の和であった。
- **独立性から分散が得られる。**各段階の確率が過去に依存しないので、指示変数は独立であった。

## 背後にある数学

### 対数的な増加

輪の個数の期待値は $\frac{1}{2}\ln n$ のように増加し、分散は平均に近い（どちらも小さな確率の和である）。中心極限定理（central limit theorem）（Section 12.24）により、$n$ が大き

いとき輪の個数は近似的に正規分布（normal distribution）に従い、平均と分散はいずれも約 $\frac{1}{2}\ln(4n)$ である。紐が 40 000 本あるとき、輪はたいてい 2 個から 11 個の間になる。

### ランダムな置換の巡回

同じ対数は、$n$ 個のものの無作為な置換（permutation）の巡回（cycle）の個数にも現れる。その平均は $H_n \approx \ln n$ である（紐の問題はこれの近い親戚であり、そちらは $\frac{1}{2}\ln n$ となる）。ランダムな置換の巡回は少ない。たいてい 1 つの巨大な巡回が要素の大部分を含み、最大の巡回に含まれる要素の割合の平均は約 0.62 である。これがゴロム–ディックマン定数（Golomb–Dickman constant）である。紐を無作為に結んでいく場合も同様にふるまい、紐の大部分は 1 つか 2 つの長い輪に入る。これらの事実はランダムな組合せ構造（random combinatorial structures）の研究の一部であり、整数論とも関係がある（無作為に選んだ整数の素因数は、ランダムな置換の巡回のようにふるまう）。

#### ランダムな結び目と高分子

紐を結ぶこの問題は、物理系の簡単なモデルになっている。溶液中の長い高分子（polymer）は端どうしでつながって輪や鎖を作り、輪の形成の統計は似た規則に従う。結び目理論（knot theory）では、数学者はもっと難しい問い、すなわち無作為な閉じた輪が結ばれている（自明でない結び目になっている）確率はどれくらいか、という問いを考える。長いランダムな輪については、その答えは 1 に近づく。これは 1988 年に De Witt Sumners と Stuart Whittington によって証明された結果である。

## 思考のスキル

**記憶をもたない構造を見つける**

**各段階のあとの系の状態が、それまでに行った段階の回数だけで決まるならば、各段階は独立にふるまい、期待値と分散は単純に足し合わせられる。**

これはクーポン収集問題（coupon collector problem）（Section 9.11）の背後にある考え方であり、そこでは各段階が新たな幾何分布の待ち時間となる。この考え方はマルコフ連鎖（Markov chain）の理論にも再び現れる。そこでは現在の状態だけが意味をもつ。

## 次の一歩

1 **小さな場合。** $n = 2$ のとき、起こりうる場合をすべて書き出し、輪の個数の期待値が $\frac{4}{3}$ であることを確かめよ。

2 **1つの大きな輪。**過程が、すべての紐を含む1つの輪で終わる確率は $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{2k-1}\right)$ であり、$n$ が大きいときこれは近似的に $\sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ であることを示せ。（**ヒント：**この積を $\binom{2n}{n}$ と関連づけよ。）

3 **置換の巡回。** 置換を1要素ずつ組み立てていくこと（「中華料理店」構成（Chinese restaurant construction））により、$n$ 個のものの無作為な置換の巡回の個数の期待値が $H_n$ であることを示せ。

4 **分散。** $\mathrm{Var}(R) = \mathrm{E}(R) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$ であること、および引かれている和が $\frac{\pi^2}{8}$ に収束することを示せ。

## さらに学ぶために

- **Peter Winkler, *Mathematical Puzzles: A Connoisseur's Collection***（A K Peters）。紐を結ぶパズルが収録されている。
- **Richard Arratia, Andrew Barbour & Simon Tavaré, *Logarithmic Combinatorial Structures***（European Mathematical Society）。巡回、素数、ランダムな構造について。もう少し先で読むとよい。
- **Colin Adams, *The Knot Book***（American Mathematical Society）。結び目理論の入門書で、ランダムな結び目も扱っている。

# 12.11 切手、カップ、そして $e$

**問題**

**STEP I 1996、問 13**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/96-s1-q13`

## 導入

切手の一風変わった売り方である。買い手はどのカップの下に切手が隠れているかを当て続け、カップは 1 回ごとに 1 個ずつ増えていく。そして初めて外したとき、テーブルの上にあるカップ 1 個につき 1 ポンドを支払う。平均すると支払額は £$e$、すなわち約 £2.72 になる。

数 $e$ は確率の中で不思議なほど頻繁に現れる。誰も自分のシャツを受け取らない確率（Section 9.8）、秘書問題（secretary problem、Section 12.12）、ポアソン分布（Poisson distribution）などである。この問題は $e$ が現れる例の中でおそらく最も単純なものであり、しかも別の有名なパズルとまったく同じ分布をもつことがわかる。そのパズルとは、「0 と 1 の間の乱数をいくつ足せば合計が 1 を超えるか」というものである。平均すると、$e$ 個である。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $N = 4$ となるには何が起こらなければならないか。その確率はいくらか。

ジムはカップが 2 個のとき（確率 $\frac{1}{2}$）と 3 個のとき（$\frac{1}{3}$）に正しく当て、カップが 4 個のときに外さなければならない（$\frac{3}{4}$）。よって $\mathrm{P}(N = 4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4!} = \frac{1}{8}$ である。

## 順を追って解く

### 段階 1　分布

$N = k$（ただし $k \geq 2$）となるのは、ジムがカップ $2, 3, \ldots, k-1$ 個のときに当て、$k$ 個のときに外す場合である。

$$\mathrm{P}(N = k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{k-1} \cdot \frac{k-1}{k} = \frac{k-1}{k!}.$$

（確認：$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots = \sum_{k \geq 2} \left( \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right) = 1$ であり、これは隣り合う項が打ち消し合う和（telescoping sum）である。）

### 段階 2　期待値

**考えてみよう**　$k \cdot \frac{k-1}{k!}$ を簡単にせよ。どのような級数が得られるか。

$$\mathrm{E}(N) = \sum_{k \geq 2} \frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k \geq 2} \frac{1}{(k-2)!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots = e. \qquad \blacksquare$$

### 段階 3　分散

**考えてみよう**　$k^2 = k(k-1) + k$ と書くか、$\frac{k^2(k-1)}{k!}$ を直接簡単にすることで、$\mathrm{E}(N^2)$ を求めよ。

$$\mathrm{E}(N^2) = \sum_{k \geq 2} \frac{k^2(k-1)}{k!} = \sum_{k \geq 2} \frac{k}{(k-2)!} = \sum_{j \geq 0} \frac{j+2}{j!} = \sum_{j \geq 1} \frac{1}{(j-1)!} + 2 \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} = e + 2e = 3e.$$

よって $\mathrm{Var}(N) = 3e - e^2 = e(3 - e) \approx 0.766$ である。 $\blacksquare$

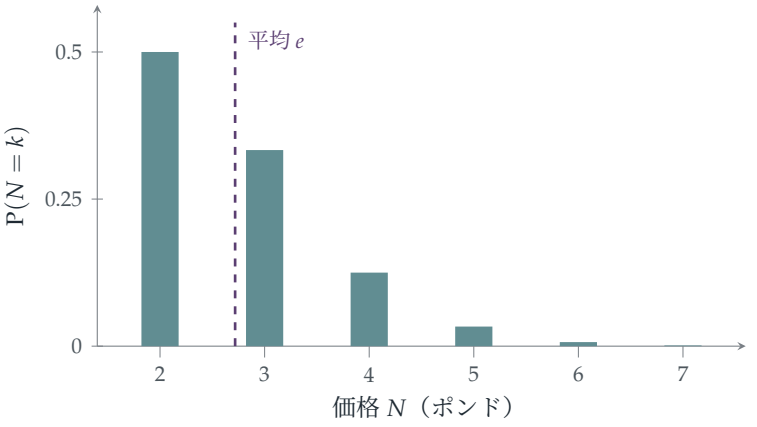



**図 12.11.1**　価格の分布（distribution）$\mathrm{P}(N = k) = \frac{k-1}{k!}$。ジムは半分の確率で £2 を支払う。長いが細い裾の部分が、平均を $£e \approx £2.72$ まで引き上げている。

## 振り返り

- **確率の積。**独立な成功が続いた後に失敗が 1 回起こる、という事象の確率は積で表され、それが $\frac{k-1}{k!}$ という簡単な形にまとまった。
- **階乗を約分する。**$k$ や $k^2$ を掛けて約分することで、和が指数級数（exponential series）に変わった。
- **添字をずらして $\mathrm{E}(N^2)$ を求める。**$j = k - 2$ と添字を付け替えることで、和が $e$ 二つ分に分かれた。

## 背後にある数学

### 姿を変えた同じ分布

乱数 $U_1, U_2, \ldots$ を $[0,1]$ から一様に（uniformly）選び、それらの和が 1 を超えるのに必要な個数を $M$ とする。最初の $k$ 個の数の和が 1 未満となる確率は、領域 $\{u_1 + \cdots + u_k < 1, u_i \geq 0\}$ の体積に等しく、それは $\frac{1}{k!}$ である（面積 $\frac{1}{2}$ の三角形、体積 $\frac{1}{6}$ の四面体、以下同様）。したがって

$$\mathrm{P}(M > k) = \frac{1}{k!}, \qquad \mathrm{P}(M = k) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!},$$

となり、これは $N$ の分布とまったく同じである。どちらの問題でも $\mathrm{P}(N > k) = \frac{1}{k!}$ が成り立つ。カップの問題では、これは $k-1$ 回続けて正しく当てる確率である。$\mathrm{E}(N) = \sum_{k \geq 0} \mathrm{P}(N > k)$（Section 9.9 の公式）を用いれば、1 行で $\mathrm{E}(N) = \sum \frac{1}{k!} = e$ が

得られる。

### なぜ $e$ は繰り返し現れるのか

確率に $\frac{1}{k!}$ が含まれるときはいつでも、それが $k$ 個のものが特定の順序に並ぶことから来るのであれ、確率 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ の $k$ 個の事象が続けて起こることから来るのであれ、単体（simplex）の体積から来るのであれ、$k$ についての和は指数級数を生み出す。完全順列（derangements、Section 9.8）では $\sum \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$ が得られた。ここでは $\sum \frac{1}{k!} = e$ である。そして、起こりにくい独立な事象が多数あることから生じる $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1}$ という形の極限が、秘書問題やポアソン分布に $e$ が現れる理由を説明している。

#### モンテカルロ法による $e$

「和が 1 を超える」問題を使えば、実験によって $e$ を推定することができる。乱数を生成し、1 を超えるのに何個必要かを数え、これを何度も繰り返して平均をとればよい。これは $\pi$ を推定するビュフォンの針（Buffon's needle、Section 12.20）の親戚である。このような**モンテカルロ法**（Monte Carlo methods）は、カジノの名にちなんで名付けられたもので、直接計算するのが難しい量を無作為抽出によって推定する。現在では素粒子物理学から金融に至るまで科学のあらゆる分野で使われており、その多くは多次元の積分の計算に用いられている。

## 思考のスキル

#### 級数を見抜く

**期待値が階乗を含む和で表されているときは、標準的な級数（指数級数、等比級数、二項級数）が現れるまで各項を簡単にせよ。**

大学では、母関数（generating functions）がこの手法を体系化する。確率母関数（probability generating function）$\mathrm{E}(t^N)$ は分布全体をひとまとめにしたものであり、$t = 1$ におけるその導関数から平均と分散が得られる。

## 次の一歩

1 **母関数。** $\mathrm{E}(t^N) = 1 + (t-1)e^t$ を示し、それを用いて $\mathrm{E}(N)$ と $\mathrm{E}(N(N-1))$ を求めよ。

2 **裾の公式。**非負整数値をとる確率変数（random variable）について $\mathrm{E}(N) = \sum_{k\geq 0} \mathrm{P}(N > k)$ が成り立つことを証明し、それを用いて 1 行で $\mathrm{E}(N)$ を求めよ。

3 **カップ 1 個から始める。**ゲームがカップ 1 個（ジムが外すことはありえない）から始まるとすると、分布はどう変わるか。価格の期待値はいくらか。

4 **単体。**$\{u_1 + u_2 + u_3 < 1, u_i \geq 0\}$ の体積が $\frac{1}{6}$ であることを示し、数学的帰納法（induction）を用いて $k$ 次元の場合の体積が $\frac{1}{k!}$ であることを示せ。

## さらに学ぶために

- **Eli Maor, *e: The Story of a Number***（Princeton University Press）。$e$ の歴史を、確率における登場例も含めて解説している。
- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***（Oxford University Press）。母関数について。
- **Paul Nahin, *Digital Dice***（Princeton University Press）。モンテカルロ・シミュレーションによって解かれる確率パズル集。

# 12.12 いつ探すのをやめるか

**問題**

**STEP I 2001、問 14**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/01-s1-q14`

## 導入

あなたは候補者を 1 人ずつ面接し、その場で決断しなければならない。この人を採用して終わりにするか、永久に不採用として次の人に会うかである。あなたが望むのは最も優れた人物である。早く採用しすぎれば、より優れた人を逃す可能性が高い。待ちすぎれば、最良の人はすでに去ってしまっている可能性が高い。どうすればよいだろうか。

確率論で最も有名な結果の一つである答えは、次のとおりである。最初の 37% の候補者を見送り、その後、見送った全員より優れた最初の候補者を採用せよ。この方法は約 37% の確率で成功し、37% とは $\frac{1}{e}$ のことである。この問題では基本となる確率を計算し、姉妹問題である STEP II 2006 の問題（演習に収録）では、この戦略の最も単純な形、すなわち最初の 1 人だけを見送る場合を分析する。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 無作為な順序で面接するとき、全体で最良の候補者が最初の $n$ 人の中にいる確率はいくらか。

最良の候補者は $N$ 個の位置のどこにも等しい確率でいるので、その確率は $\frac{n}{N}$ である。

## 順を追って解く

### 段階 1　最初の $n$ 人の中の最良が全体の最良である

最初の $n$ 人の中の最良が全体の最良であるのは、全体の最良が最初の $n$ 人の中にいるときであり、かつそのときに限る。よって確率は $\frac{n}{N}$ である。 ■

### 段階 2　最良または 2 番目

**考えてみよう**　最初の $n$ 人の中の最良が全体の 2 番目であるのは、2 番目の候補者が最初の $n$ 人の中にいて、最良の候補者がいないときであり、かつそのときに限る。その確率はいくらか。

2 番目の候補者は確率 $\frac{n}{N}$ で最初の $n$ 人の中にいる。このとき、最良の候補者は残りの $N-1$ 個の位置のいずれかにあり、そのうち $N-n$ 個が最初の $n$ 人より後ろである。よって

$$\mathrm{P}(\text{最良または 2 番目}) = \frac{n}{N} + \frac{n}{N}\cdot\frac{N-n}{N-1}. \qquad \blacksquare$$

$N=4, n=2$ のとき、$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$ である。上位 2 人の候補者が 4 つの位置のどこに入るかを列挙すると（順序を区別した 12 通りの配置はすべて同様に確からしい）、最初の 2 人の中の最良が上位 2 人のいずれかになるのは、上位 2 人がともに位置 3 と 4 に来る 2 通りを除くすべての場合である。よって $\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$ となる。

### 段階 3　最適戦略

**考えてみよう**　戦略：最初の $r$ 人の候補者を見送り、その後、見送った全員より優れた最初の候補者を採用する。最良の候補者が位置 $k>r$ にいるとき、この戦略がその人を選ぶのはどのような場合か。

この戦略が位置 $k$ にいる最良の候補者を選ぶのは、位置 $r+1,\dots,k-1$ のどの候補者も最初の $r$ 人全員を上回らないとき、すなわち最初の $k-1$ 人の中の最良が最初の $r$ 人の中にいるときであり、かつそのときに限る。段階 1（$N$ を $k-1$ に置き換えたもの）により、この確率は $\frac{r}{k-1}$ である。各位置 $k$ の確率は $\frac{1}{N}$ であるから

$$\mathrm{P}(\text{成功}) = \frac{1}{N}\sum_{k=r+1}^{N}\frac{r}{k-1} = \frac{r}{N}\Bigl(\frac{1}{r}+\frac{1}{r+1}+\cdots+\frac{1}{N-1}\Bigr).$$

**考えてみよう**　$N$ が大きいとき、$x=\frac{r}{N}$ とおく。和はおよそ $\ln\frac{N}{r}$ である。$x\ln\frac{1}{x}$ を最大にする $x$ の値は何か。

成功確率はおよそ $x \ln \frac{1}{x}$ である。微分すると、$x = \frac{1}{e}$ のとき $\ln \frac{1}{x} - 1 = 0$ となり、最大値は $\frac{1}{e} \approx 0.368$ である（図 12.12.1）。

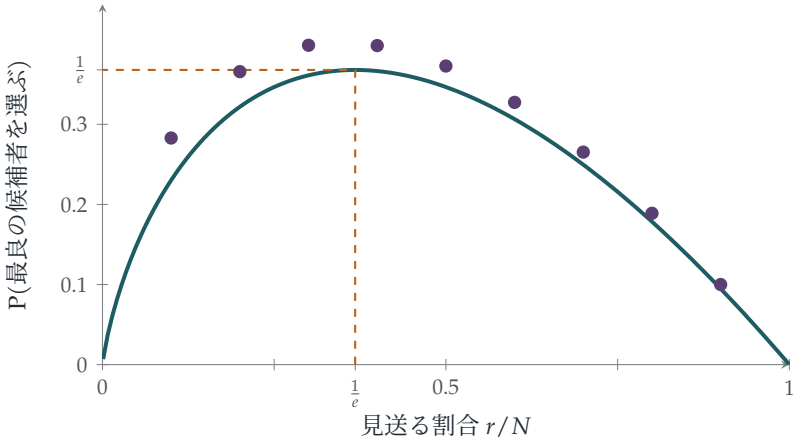



**図 12.12.1**　最初の割合 $r/N$ を見送るときに最良の候補者を選ぶ確率。極限の曲線 $x \ln \frac{1}{x}$（青緑）と、$N = 10$ のときの正確な値（紫）。最良の戦略は候補者の約 $\frac{1}{e} \approx 37\%$ を見送るもので、$N$ がどれほど大きくても約 $\frac{1}{e}$ の確率で成功する。

## 振り返り

- **位置の対称性（symmetry）。**無作為な順序では、各候補者はどの位置にも等しい確率でいる。このことから直ちに $\frac{n}{N}$ が得られた。
- **最良の候補者の位置で条件付ける（condition）。**戦略の成功確率は、最良の候補者の位置で条件付けることによって計算した。
- **和は積分になる。** $N$ が大きいとき、調和和（harmonic sum）は対数となり、最適化によって $\frac{1}{e}$ が得られた。

## 背後にある数学

### 最適停止

秘書問題（secretary problem）は**最適停止**（optimal stopping）の原点となる例である。最適停止とは、時間とともに届く情報にもとづいて、期待される報酬を最大にするためにいつ行動を起こすかを決める問題である。最後の候補者から逆向きにたどる議論によって、（「$r$ 人を見送り、その後それまでで最良の人を採る」という戦略に限らず）**あらゆる**戦略の中で、この種の閾値規則（threshold rule）が最適であることが証明で

きる。同じ数学が、株をいつ売るか、金融オプションをいつ行使するか、駐車スペースをどれだけ長く探すかといった問題を支配している。注目すべき特徴は、極限では答えが $N$ によらないことである。候補者が百人でも百万人でも、成功確率は $\frac{1}{e}$ である。

### 変種

上位 2 人のどちらでも満足するなら、最良の戦略は約 57% の確率で成功する。最良の人を選ぶ確率ではなく、選んだ候補者の順位の期待値（expected rank）を最適にしたいなら、最適戦略はより複雑になり、順位の期待値は約 3.87 に近づく（Chow, Moriguti, Robbins and Samuels, 1964）。見送った候補者をある確率で呼び戻せる場合や、候補者の得点の分布がわかっている場合（「完全情報」問題）には、答えはまた変わる。演習にあるアイスクリームの問題は最も単純な場合であり、1 つだけ見送り、その後で最初に上回ったものを採る。

#### 誰が解いたのか？

この問題は 1950 年代に数学者の間で広まり、1960 年にマーティン・ガードナー（Martin Gardner）が「グーゴル・ゲーム」として広く紹介した（紙片に数を書く。相手はそれを 1 枚ずつ裏返し、最大の数で止まらなければならない）。Thomas Ferguson の論文 “Who solved the secretary problem?”（秘書問題を解いたのは誰か、1989 年）は、その入り組んだ歴史をたどっている。一説によれば、天文学者ケプラー（Johannes Kepler）は 1611 年に再婚相手を選ぶにあたって 11 人の候補と面会し、結局 5 人目に求婚したという。

## 思考のスキル

#### 戦略をパラメータで表して最適化する

最良の戦略がわからないときは、パラメータをもつ自然な戦略の族を考え、成功確率をそのパラメータの関数として計算し、最適化せよ。

大学では、この手法は決定理論、ゲーム理論、統計学で用いられる。族の中で最良の戦略が全体でも最良であることを示すのは、より難しく、より興味深い段階であり、多くの場合後ろ向き帰納法（backward induction）によって行われる。

## 次の一歩

1 **アイスクリーム。** STEP II 2006、問 13（`step.maths.org/questions/06-s2-q13`）に挑戦せよ。単純な規則による秘書問題の小型版である。最初の 1 つを見送り、その後それを上回る最初のものを採る。

2 **小さい $N$。** $N = 4$ のとき、最良の $r$ の値と成功確率を求めよ。列挙して確かめよ。

3 **最良または 2 番目。** 小問 (ii) を用いて、「最初の $n$ 人の中の最良が上位 2 人のいずれかである」ことは「最初の $n$ 人の中の最良が全体の最良である」ことよりはるかに起こりやすいことを論ぜよ。このことは、上位 2 人のいずれかを得るための戦略について何を示唆するか。

4 **正確な最大値。** $N = 10$ のとき、図から $r = 3$ が最適であることを確かめよ。$N = 100$ のとき、$r = 37$ が最適であることを示せ（小数第 4 位までで、$r = 36, 37, 38$ に対する成功確率は 0.3710, 0.3710, 0.3708 である）。

## さらに学ぶために

- **Thomas Ferguson, "Who solved the secretary problem?"**, *Statistical Science* 4 (1989). 歴史と変種。オンラインで無料で読める。
- **Brian Christian & Tom Griffiths, *Algorithms to Live By*** (William Collins). 最適停止をはじめとするアルゴリズムを日常の意思決定に応用する。
- **Martin Gardner, *New Mathematical Diversions*** (Mathematical Association of America). グーゴル・ゲームを収録。

# 12.13 三つ巴の決闘

**問題**

**STEP II 1995、問 12**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/95-s2-q12`

## 導入

3 人がロールパンを投げ合って決闘をする。カスバートは決して外さず、バーティーは 5 回に 3 回命中させ、いちばん下手なアルジャーノンは 5 回に 2 回しか当てられない。最初に投げるのはアルジャーノンである。彼は誰を狙うべきだろうか。意外な答えは「誰も狙わない」である。彼はわざとロールパンを大きく外して投げるべきなのである。

理由は戦略（strategy）にある。3 人全員が残っている間、危険な投げ手であるバーティーとカスバートは互いを狙い合う。もしアルジャーノンがどちらか一方を倒せば、生き残ったほうが彼に向かってくる。わざと外すことで、彼は 2 人に決着をつけさせ、そのうえで生き残ったほうに対して先に投げる権利を得る。実際、最善の作戦をとれば、いちばん下手な投げ手が**最も**勝つ可能性の高い者になる。この「三者決闘（truel）」は、弱さが有利に働きうることを示す、ゲーム理論（game theory）でよく知られた例である。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 2 人の決闘で、パーシーが先に投げる。彼がすぐに命中させるか、あるいは 2 人とも外して状況がまったく同じに戻るかのどちらかである。パーシーが勝つ確率（probability）についての方程式を立てよ。

パーシーが勝つ確率を $P$ とする。彼はすぐに確率 $p$ で命中させる。そうでない場合（確率 $1-p$）はロドニーが投げ、確率 $1-r$ で外して最初の状態に戻る。したがって

$P = p + (1-p)(1-r)P$ である。

## 順を追って解く

### 段階 1　2 人の決闘

これを解くと $P(1-(1-p)(1-r)) = p$ であり、$1-(1-p)(1-r) = p + r - pr$ であるから、

$$P = \frac{p}{p + r - pr}. \qquad \blacksquare$$

アルジャーノン（$p = \frac{2}{5}$）とバーティー（$r = \frac{3}{5}$）の決闘でアルジャーノンが先に投げる場合、これは $\frac{2/5}{2/5+3/5-6/25} = \frac{10}{19}$ となる。バーティーが先に投げる場合、アルジャーノンが勝つ確率は $\left(1-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{10}{19} = \frac{4}{19}$ である。

### 段階 2　アルジャーノンの 3 つの選択肢

**考えてみよう**　それぞれの場合に、誰が残り、次に誰が投げるか。

(i) **アルジャーノンがカスバートに命中させる場合。**次にバーティーがアルジャーノンに向かって投げる。アルジャーノンはバーティーが先に投げる決闘に勝たねばならず、その確率は $\frac{4}{19}$ である。

(ii) **アルジャーノンがバーティーに命中させる場合。**次にカスバートがアルジャーノンに向かって投げ、決して外さない。アルジャーノンが勝つ見込みは 0 である。

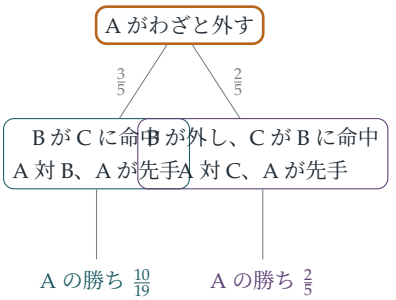
(iii) **アルジャーノンが外す場合。**バーティーがカスバートに向かって投げる。確率 $\frac{3}{5}$ で命中し、アルジャーノンとバーティーが残ってアルジャーノンが投げる番になる。このときアルジャーノンが勝つ確率は $\frac{10}{19}$ である。確率 $\frac{2}{5}$ でバーティーは外し、カスバートがバーティーに命中させ、アルジャーノンは 1 回だけ投げてカスバートと対決する。彼が勝つのは命中させたときだけで、その確率は $\frac{2}{5}$ である。合わせて、

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{19} + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{6}{19} + \frac{4}{25} = \frac{150+76}{475} = \frac{226}{475} \approx 0.476.$$

### 段階 3　助言

**考えてみよう**　アルジャーノンがカスバートを狙うと、命中する（確率 $\frac{2}{5}$）こともあれば外れることもある。全体として彼が勝つ確率はいくらか。わざと外す場合と比較せよ。

カスバートを狙うと $\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{19}+\frac{3}{5}\cdot\frac{226}{475}=\frac{200+678}{2375}=\frac{878}{2375}\approx 0.370$ となる。バーティーを狙うのはさらに悪い。わざと外すと $\frac{226}{475}\approx 0.476$ となり、これが最善である。したがってアルジャーノンは大きく外して投げるべきであり、そのとき彼が勝つ確率は $\frac{226}{475}$ である。 ■




この作戦のとき：
A の勝ち $\frac{226}{475}\approx 0.48$
B の勝ち $\frac{135}{475}\approx 0.28$
C の勝ち $\frac{114}{475}\approx 0.24$

**図 12.13.1** アルジャーノンの最善の作戦。わざと外すことで、彼はより強い 2 人の相手に先に戦わせ、生き残ったほうに対して必ず先に投げられる。いちばん下手な投げ手が最も勝つ可能性が高くなり、完璧な投げ手が最も勝つ可能性が低くなる。

## 振り返り

- **繰り返される状況からは方程式が得られる。**決闘は 2 回外れると「最初からやり直し」になるので、勝つ確率についての 1 次方程式（linear equation）が得られる。
- **相手がどう応じるかを考える。**アルジャーノンの選択肢はどれも、バーティーとカスバートが次にとる行動を変える。
- **何もしないことも含めて、すべての選択肢を比較する。**最善の手は、いちばん悪そうに見えた手であった。

## 背後にある数学

### 戦略とゲーム理論

三者決闘は**ゲーム理論**の中心的な考え方を示している。すなわち、最善の行動は他のプレイヤーがどう応じるかに依存する。最も危険な相手であるカスバートに命中させるのは自然な手に見えるが、それはアルジャーノンに不利な形でゲームを変えてしまう。この問題ではバーティーとカスバートの戦略は固定されている（2 人は互いを狙う）。完全なゲーム理論的分析では、各プレイヤーは他のプレイヤーも同じように考えていることを承知のうえで、自分の戦略を選ぶことになる。このような分析

は、1944 年のフォン・ノイマン（John von Neumann）とモルゲンシュテルン（Oskar Morgenstern）の研究、そして 1950 年のナッシュ（John Nash）の研究に始まり、今では経済学、進化生物学、政治学の基礎となっている。

### 弱点としての強さ

三者決闘に勝つのは誰か。アルジャーノンが最善の作戦をとるとき、勝つ確率はアルジャーノンが $\frac{226}{475}$、バーティーが $\frac{135}{475}$、カスバートが $\frac{114}{475}$ である。最も腕のよい投げ手は、選択権をもつ者全員から狙われるため、生き残る可能性が最も低い。同じパターンは、複数の候補者がいる選挙、企業間の競争、そして最強の競争者が最初の標的になりうる自然界にも現れる。1950 年代に三者決闘をゲーム理論に導入した Martin Shubik は、これを用いて「最も適した者が必ず生き残るのか」という問いを立てた。

## 思考のスキル

**一手先を読む**

行動を選ぶ前に、それが他の全員にとって状況をどう変えるか、そして彼らがそれにどう応じるかを考えよ。

大学では、これはゲーム理論における後ろ向き帰納法（backward induction）になる。まずゲームの終盤を分析し、そこから遡って最善の初手を決めるのである。

## 次の一歩

1. **バーティーとカスバート。** アルジャーノンがわざと外すとき、バーティーが勝つ確率は $\frac{135}{475}$、カスバートが勝つ確率は $\frac{114}{475}$ であることを確かめよ。
2. **より腕のよい投げ手。** アルジャーノンが命中させる確率が $\frac{2}{5}$ ではなく $a$ であるとき、わざと外すことが依然として最善の初手となるのは $a$ がどのような値のときか。
3. **バーティーはカスバートを狙うべきか。** アルジャーノンがわざと外すとき、バーティーにとってアルジャーノンではなくカスバートを狙うほうが得策か。（カスバートの行動は変わらないものとする。）

4 **投げる回数が決まっている決闘。**各プレイヤーが 2 回しか投げられない決闘において、パーシーが勝つ確率を求め、回数に制限のない決闘と比較せよ。

## さらに学ぶために

- **D. Marc Kilgour & Steven Brams, "The truel"**, *Mathematics Magazine* 70 (1997). 三者決闘についての読みやすい概説。
- **Avinash Dixit & Barry Nalebuff, *Thinking Strategically*** (Norton). 一般読者向けのゲーム理論の本で、三者決闘も扱っている。
- **Ken Binmore, *Game Theory: A Very Short Introduction*** (Oxford University Press). ゲーム理論の簡潔な入門書。

# 12.14 混合戦略

**問題**

**STEP I 1989、問 16**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/89-s1-q16`

## 導入

じゃんけん（rock–paper–scissors）では、決まった手を出し続けると必ずつけ込まれる。毎回グーを出していれば、相手はやがてパーを出すことを覚えるだろう。安全な戦略はただ一つ、手をランダムに選ぶことである。この問題はその込み入った版であり、利得が均等ではなく、どのようにランダムに選べばよいかは自明ではない。実は、1, 2, 3 をそれぞれ確率 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ で言うことにすれば、相手がどうしようとも、長い目で見て負けないことを保証できるのである。

これは、1928 年のジョン・フォン・ノイマン（John von Neumann）による**ミニマックス定理**（minimax theorem）を初めて垣間見る例である。この定理はゲーム理論（game theory）の礎となった結果であり、一方の利得が他方の損失となるあらゆる二人ゲームにおいて、各プレイヤーには、完璧にプレイする相手に対して可能な限り最良の結果を保証するランダム化された戦略が存在する、と主張する。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 二人の言う数の各組について、B の獲得額の表を書いてみよ（B の数を縦に、A の数を横に並べる）。

規則を一つずつ当てはめていくと（たとえば B が 1、A が 3 と言えば、差は 2 であり、小さい方の B が £2 を支払う）、次の表が得られる。

| B \ A | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | +1 | −2 |
| 2 | −1 | 0 | +1 |
| 3 | +2 | −1 | 0 |

この表は**交代的**（antisymmetric）である（プレイヤーを入れ替えると符号が変わる）。したがって、どちらのプレイヤーにも生まれつきの有利さはないという意味で、このゲームは公平である。

## 順を追って解く

### 段階 1　決まった数に対して

A がいつも 1 と言うなら、B は 3 と言えば毎回 £2 を得る。A がいつも 2 と言うなら、B は 1 と言って £1 を得る。A がいつも 3 と言うなら、B は 2 と言って £1 を得る。どんな決まった数もつけ込まれてしまう。

### 段階 2　一様にランダムな選択に対して

**考えてみよう**　A が一様にランダムに数を選ぶとき、B が $j$ と言った場合の B の期待利得（expected winnings）はいくらか。（表の第 $j$ 行の平均をとればよい。）

各行の平均は、$j=1$ のとき $\frac{1}{3}(0+1-2)=-\frac{1}{3}$、$j=2$ のとき 0、$j=3$ のとき $\frac{1}{3}(2-1+0)=\frac{1}{3}$ である。よって、1 回あたりの B の期待利得は

$$-\tfrac{1}{3}b_1+0\cdot b_2+\tfrac{1}{3}b_3,$$

であり、これは $b_3=1$ のとき最大となる。すなわち、いつも 3 と言えば、1 回あたり平均で $\frac{1}{3}$ ポンドを得る。一様なランダム化では A は身を守れない。

### 段階 3　一般の場合

**考えてみよう**　今度は A が確率 $a_j$ で $j$ を言うとする。B の期待利得を A の数ごとにまとめよ。$a_1$ の係数（第 1 列の重み $b_j$ による平均）は何か。

表を列に沿って読むと、

$$\text{B の期待利得}=(-b_2+2b_3)a_1+(b_1-b_3)a_2+(-2b_1+b_2)a_3,$$

となるので、$X=-b_2+2b_3, Y=b_1-b_3, Z=-2b_1+b_2$ である。

**考えてみよう** 三つすべてを 0 にできるか。（方程式は三つあるが、独立ではない。なぜか。）

これらは独立ではない。恒等的に $X + 2Y + Z = 0$ が成り立つからである（確かめてみよ）。したがって、$Y = 0$ から $b_1 = b_3$、$X = 0$ から $b_2 = 2b_3$ が得られれば、自動的に $Z = 0$ も成り立つ。$b_1 + b_2 + b_3 = 1$ と合わせて

$$b_1 = \tfrac{1}{4}, \qquad b_2 = \tfrac{1}{2}, \qquad b_3 = \tfrac{1}{4},$$

を得て、$X = Y = Z = 0$ となる。このとき、$a_j$ が何であっても B の期待利得は 0 であり、B は長い目で見て何も失わない。 ■

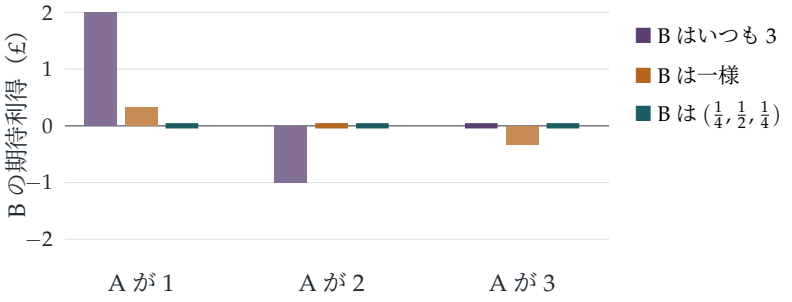



**図 12.14.1** B の三つの戦略それぞれについて、A の各選択に対する B の期待利得。いつも 3 と言う戦略は A の 1 には勝つが、A の 2 には負ける。一様な選択は A の 3 に負ける。戦略 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ は A が何をしても期待利得がちょうど 0（細い棒で表示）となるので、決してつけ込まれることがない。

## 振り返り

- **利得表（payoff table）を書く。** 推論はすべて $3 \times 3$ 行列の行と列についてのものであった。
- **純粋戦略（pure strategy）はつけ込まれる。** どんな決まった数に対しても、さらには一様な選択に対してさえ、相手には得をする応じ方がある。
- **均等にする。** 安全な戦略とは、相手にとってどの選択も無差別になるようにするものである。すなわち、A のどの選択も同じ期待値を与える。

## 背後にある数学

### ミニマックス定理

利得行列（payoff matrix）$M$ で与えられる二人**ゼロ和**（zero-sum）ゲームにおいて、B が確率 $\mathbf{b}$ を、A が確率 $\mathbf{a}$ を選ぶとき、B の期待利得は $\mathbf{b}^{\mathsf{T}} M \mathbf{a}$ である。フォン・ノイマンのミニマックス定理は

$$\max_{\mathbf{b}} \min_{\mathbf{a}} \mathbf{b}^{\mathsf{T}} M \mathbf{a} = \min_{\mathbf{a}} \max_{\mathbf{b}} \mathbf{b}^{\mathsf{T}} M \mathbf{a}.$$

が成り立つことを主張する。言葉で言えば、B がランダム化された戦略を前もって宣言することで保証できる額は、A が自分の戦略を宣言することで B を抑え込める額に等しい。この共通の値をゲームの**値**（value）という。ここでは交代性から値は 0 であり、戦略 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ は両プレイヤーにとって最適である。この定理は線形代数と凸性（convexity）を用いて証明される（線形計画法（linear programming）の双対定理（duality theorem）と同値である）。また、その多人数への一般化である**ナッシュ均衡**（Nash equilibrium）により、ジョン・ナッシュ（John Nash）はノーベル経済学賞を受賞した。

### なぜランダムにするのか

ここでのランダム性は運の問題ではなく、情報の問題である。B の選択が予測できれば、A はそれにつけ込める。適切な確率でランダムに選ぶことで、B は自分の選択を予測不能にするとともに、どんな予測も役に立たないようにするのである。実例としては、サッカーのペナルティーキックがある。プロ選手の研究では、キッカーもゴールキーパーも左右をランダムに選んでおり、その比率はゲーム理論上の最適値に近いことがわかっている。テニスのサーブも同様の例である。

---

#### フォン・ノイマンの 1928 年の論文

ジョン・フォン・ノイマンは 1928 年、論文「On the theory of games of strategy」（戦略ゲームの理論について）においてミニマックス定理を証明した。動機となったのはポーカーであり、そこではブラフがランダム化の一形態となっている。1944 年、彼は経済学者オスカー・モルゲンシュテルン（Oskar Morgenstern）とともに *Theory of Games and Economic Behavior*（『ゲームの理論と経済行動』）を出版し、ゲーム理論を一つの学問分野として確立した。フォン・ノイマンは後年、ミニマックス定理こそが鍵となる結果であり、それなしには出版に値するゲーム理論は存在しえなかったと考えていた、と回想している。

---

## 思考のスキル

**ランダムに選んで相手の有利さを消す**

どんな決まった選択もつけ込まれるときは、相手にとってどの選択肢も無差別になるような確率で、ランダムに選べ。

大学では、ゲーム理論、線形計画法、アルゴリズムの理論のいずれもがこの考え方を用いる。たとえば乱択アルゴリズム（randomised algorithm）は、どんな敵対者も予測できないランダムな選択を行うことで、最悪の入力から身を守っている。

## 次の一歩

1 **A の最適な応じ方。** B が $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ を用いるとき、A のどの戦略も期待利得 0 を与えることを示せ。また、B が代わりに $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ を用いるとき、A の最適な応じ方を求めよ。

2 **じゃんけん。** じゃんけんの利得行列を書き、最適戦略を求めよ。ここでは一様になるのに、問題ではそうならないのはなぜか。

3 **一意性。** 負けないことを保証する B の戦略は $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ **ただ一つ**であることを示せ。（ヒント：その戦略は $X, Y, Z$ をすべて非負にしなければならない。$X + 2Y + Z = 0$ を用いよ。）

4 **修正されたゲーム。** 差が 2 のときの支払いが £2 ではなく £3 であるとき、最適戦略を求めよ。

## さらに学ぶために

- **Ken Binmore, *Playing for Real*** (Oxford University Press)。ゲーム理論への、本格的でありながら親しみやすい入門書。
- **Avinash Dixit & Barry Nalebuff, *The Art of Strategy*** (Norton)。スポーツやビジネスの例を用いたゲーム理論の本。
- **William Poundstone, *Prisoner's Dilemma*** (Anchor)。フォン・ノイマン、ゲーム理論、そして冷戦。

# 12.15 絶滅か爆発か

**問題**

**STEP II 2003、問 12**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/03-s2-q12`

## 導入

1873 年、ゴルトン（Galton）は *Educational Times* 誌上で一つの問いを投げかけた。貴族の家名はなぜこれほど頻繁に途絶えてしまうのか。男性はそれぞれ無作為な人数の息子をもち、その息子たちがそれぞれ家名を受け継ぐ。たとえ一人あたりの息子の数の平均が 1 人を超えていたとしても、家名は永遠に存続するのだろうか。この問いから**分枝過程**（branching process）の理論が生まれた。この理論は現在、核の連鎖反応、感染症の流行、細胞集団の増殖、突然変異の存続などのモデルとして用いられている。

本問は最も単純なモデルを設定している。各粒子は 0 個、1 個、または 2 個の粒子に分裂する。集団の大きさの期待値（expectation）は等比数列（geometric sequence）的に増加または減少する。しかし、期待値がすべてを語るわけではない。期待値が爆発的に増大する場合でさえ、系統が完全に途絶える確率は正であり、それは美しい不動点（fixed point）の議論によって求められる。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** ある段階で粒子が 2 個あるとき、次の段階の粒子の個数はどのような分布に従うか。

2 個の粒子はそれぞれ独立に $\mathrm{B}(2, p)$ に従う個数の子を生むので、合計は $\mathrm{B}(4, p)$ に従う。すなわち、それぞれ確率 $p$ で成功する独立な 4 回の「機会」である。

## 順を追って解く

### 段階 1　2 個、そして 2 個

$\mathrm{P}(X_1 = 2) = p^2$ であり、さらに $\mathrm{P}(X_2 = 2 \mid X_1 = 2) = \binom{4}{2} p^2 q^2 = 6p^2q^2$ である。よって

$$\mathrm{P}(X_1 = 2, X_2 = 2) = 6p^4q^2. \qquad \blacksquare$$

### 段階 2　さかのぼって考える

> **考えてみよう**　$X_2 = 2$ となるのはどのような場合か。（$X_1$ はどのような値をとりうるか。）

$X_2 = 2$ となるのは、$X_1 = 1$（確率 $2pq$）の後に子が 2 個生まれる（確率 $p^2$）場合か、$X_1 = 2$ の後に $\mathrm{B}(4, p)$ から 2 が出る場合である。（$X_1 = 0$ のときは何も残らない。）よって $\mathrm{P}(X_2 = 2) = 2p^3q + 6p^4q^2$ であり、

$$\mathrm{P}(X_1 = 2 \mid X_2 = 2) = \frac{6p^4q^2}{2p^3q + 6p^4q^2} = \frac{3pq}{1 + 3pq}.$$

これを $\frac{9}{25}$ とおくと $75pq = 9 + 27pq$ となるので $pq = \frac{3}{16}$、すなわち $p(1-p) = \frac{3}{16}$ であり、$p = \frac{1}{4}$ または $p = \frac{3}{4}$ を得る。 $\blacksquare$

### 段階 3　集団の大きさの期待値

> **考えてみよう**　第 $n-1$ 段階で粒子が $k$ 個あるとき、第 $n$ 段階の個数の期待値はいくらか。そのうえで $k$ について平均をとれ。

各粒子は平均 $\mathrm{E}(X) = 2p$ 個の子をもつので、$k$ 個の粒子の子の数の平均は $2pk$ である。すなわち $\mathrm{E}(X_n \mid X_{n-1} = k) = 2pk$。$k$ について平均をとると $\mathrm{E}(X_n) = 2p\,\mathrm{E}(X_{n-1})$ となる。$\mathrm{E}(X_0) = 1$ より

$$\mathrm{E}(X_n) = (2p)^n.$$

$p = \frac{1}{4}$ のとき $(2p)^n = 2^{-n} \to 0$、$p = \frac{3}{4}$ のとき $(2p)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \to \infty$ である。 $\blacksquare$

## 振り返り

- **独立な二項分布の和。**それぞれ $\mathrm{B}(2, p)$ に従う子を生む $k$ 個の粒子からは、合計で $\mathrm{B}(2k, p)$ に従う個数の子が生まれる。二項分布（binomial distribution）の再生性である。

- **時間をさかのぼるベイズの定理。** $\mathrm{P}(X_1 = 2 \mid X_2 = 2)$ は、後の観測から前の状態へとさかのぼって推論するベイズの定理（Bayes' theorem）の応用である。
- **条件付き期待値。** 前の世代で条件づけることにより、期待値が等比数列になった。条件付き期待値（conditional expectation）の考え方である。

## 背後にある数学

### 絶滅確率

$p = \frac{3}{4}$ のとき、集団の大きさの期待値は限りなく増大する。では、集団は必ず存続するのだろうか。そうとは限らない。最初の粒子が子をもたなければ（確率 $q^2 = \frac{1}{16}$）、系統はただちに途絶える。最終的に絶滅する確率を $e$ とする。最初の粒子は $k$ 個の子をもち、それぞれの子の系統は独立に確率 $e$ で途絶えるので、

$$e = q^2 + 2pq\,e + p^2e^2 = (q + pe)^2 = \mathrm{G}(e),$$

となる。ここで $\mathrm{G}(s) = (q + ps)^2$ は子の数の**確率母関数**（probability generating function）である。絶滅確率（extinction probability）は G の不動点であり、実際にはそのうち**最小の**非負のものである。$p = \frac{3}{4}$ のとき、$(1 + 3e)^2 = 16e$ から $9e^2 - 10e + 1 = 0$ となるので $e = \frac{1}{9}$ または 1 であり、絶滅確率は $\frac{1}{9}$ である。$p = \frac{1}{4}$ のとき、$[0, 1]$ にある不動点は $e = 1$ のみであり、絶滅は確実である（図 12.15.1）。

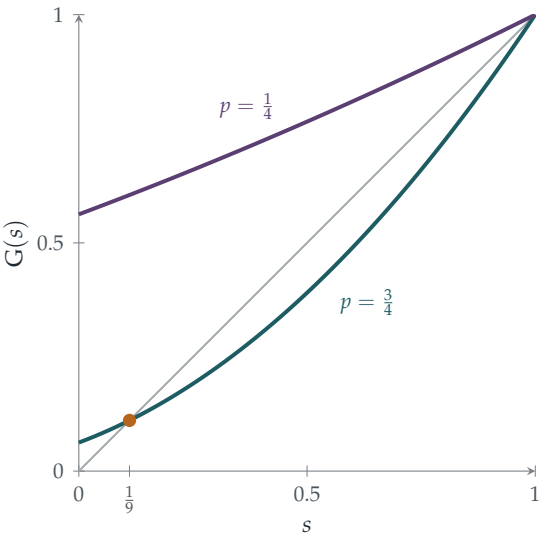



**図 12.15.1**　子の数の母関数 $\mathrm{G}(s) = (q + ps)^2$ と直線 $y = s$。絶滅確率は両者が交わる最小の点である。$p = \frac{1}{4}$（紫、平均 $\frac{1}{2}$）のとき、それは $s = 1$ であり、絶滅は確実である。$p = \frac{3}{4}$（青緑、平均 $\frac{3}{2}$）のとき、それは $s = \frac{1}{9}$（琥珀色）であり、集団は確率 $\frac{8}{9}$ で永遠に存続する。

### 臨界値

一般に、分枝過程は子の数の平均が 1 より小さければ確実に絶滅する。平均がちょうど 1 の場合も、すべての個体がちょうど 1 個の子をもつという自明な場合（このときは系統が 1 個ずつ永遠に続くだけである）を除けば、確実に絶滅する。平均が 1 より大きければ、正の確率で存続する。子の数の平均は、疫学における**基本再生産数**（reproduction number）$R$ にあたる。$R > 1$ の感染症は爆発的に広がりうるが、その場合でも初期の流行が偶然に収まることがあり、その確率はまさに上の不動点方程式で与えられる。原子核物理学では、各核分裂が平均してちょうど 1 回の核分裂を引き起こすとき、連鎖反応は**臨界**（critical）にあるという。原子炉の運転とは、この状態を保つ技術にほかならない。

#### ゴルトン、ワトソン、ビエネメ

ゴルトンの問いには、1874 年に Henry William Watson 牧師が答えたが、その答えは部分的に誤っていた。Watson は不動点方程式を見いだしたものの、2 つ目の解を見落とし、あらゆる家名はいずれ途絶えると結論したのである。実は正しい解析は、1845 年にフランスの統計学者ビエネメ（Irénée-Jules Bienaymé）によってすでに与えられていたが、その業績は 1970 年代まで忘れられていた。このモデルは現在**ゴルトン–ワトソン過程**（Galton–Watson process）（ビエネメ–ゴルトン–ワトソン過程とよばれることもある）とよばれ、確率過程のあらゆる講義で中心的な例となっている。

## 思考のスキル

#### 第 1 世代で条件づける

**自己再生的な過程（各子孫が過程全体の独立な複製を新たに始める過程）は、最初の 1 ステップで条件づけることで得られる方程式を満たす。**

方程式 $e = \mathrm{G}(e)$ は不動点問題であり、Section 2.2 や Section 8.7 で出会ったものと同じ種類である。大学では、母関数と不動点が、分枝過程、ランダム木、ランダムネットワークを扱うための主要な道具となる。

## 次の一歩

1 **一般の場合の絶滅確率。** 子の数の分布が $\mathrm{B}(2, p)$ のとき、絶滅確率は $p \le \frac{1}{2}$ ならば 1、$p > \frac{1}{2}$ ならば $\left(\frac{q}{p}\right)^2$ であることを示せ。

2 **分散。** 分散（variance）$\mathrm{Var}(X_n)$ が $\mathrm{Var}(X_n) = (2p)^2\mathrm{Var}(X_{n-1}) + 2pq\,\mathrm{E}(X_{n-1})$ を満たすことを示し、$p = \frac{1}{2}$ のときの値を求めよ。

3 **第 $n$ 世代までの絶滅。** $e_n = \mathrm{P}(X_n = 0)$ とする。$e_n = \mathrm{G}(e_{n-1})$ を示し、$p = \frac{3}{4}$ のときの $e_1$、$e_2$、$e_3$ を計算せよ。これらは $\frac{1}{9}$ に近づくか。

4 **姓。** 男性がそれぞれ 0、1、2、3 人の息子をもつ確率がいずれも $\frac{1}{4}$ であるとき、その姓が最終的に途絶える確率はいくらか。

## さらに学ぶために

- **Geoffrey Grimmett & David Stirzaker, *Probability and Random Processes***（Oxford University Press）。分枝過程の節。
- **Adam Kucharski, *The Rules of Contagion***（Profile）。一般読者向けに、再生産数と感染の流行を解説している。
- **David Kendall, 「Branching processes since 1873」**, *Journal of the London Mathematical Society* 41 (1966)。ビエネメを含む歴史。

# 12.16 マルコフ連鎖を順向きにも逆向きにも

**問題**

**STEP III 1996、問 12**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/96-s3-q12`

## 導入

エックス教授の定理には一定の規則がある。次に何を証明するかは、直前に何を証明したかだけで決まるのである。未来が現在には依存するが過去には依存しない過程を**マルコフ連鎖**（Markov chain）という。マルコフ連鎖はいたるところに現れる。気象モデル、すごろく遊びの「蛇と梯子」（Snakes and Ladders）、DNA のモデル、Google の初期の PageRank アルゴリズム、そして統計学者が複雑な確率分布をシミュレーションするために用いる手法などである。

この問題では、定理の種類が長期的にどのような割合で現れるか、すなわち**定常分布**（stationary distribution）を求める。長期的には、彼女の定理の 6 つに 1 つは新しく正しいものであり、半分は誤りである。さらに、この連鎖を時間について逆向きにたどり、「今日の定理がわかっているとき、昨日の定理は何だったか」を問う。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 「各行の和が 1 である」という条件は何を意味するか。各列の和は 1 になるか。

第 $i$ 行には、現在の種類が $i$ であるときの、次の種類の確率が並んでいる。三つの種類のいずれかは必ず起こるので、各行の和は 1 である。一方、列についてはその必要はない。第 2 列の和はちょうど 1 であるが、第 1 列の和は 0.6、第 3 列の和は 1.4 である。

## 順を追って解く

### 段階 1　1 ステップ

現在の定理の種類 $i$ で条件づけて、全確率の法則（law of total probability）を用いると、

$$b_j = \sum_i \mathrm{P}(\text{現在が}i)\,\mathrm{P}(\text{次が}j \mid \text{現在が}i) = a_1 p_{1j} + a_2 p_{2j} + a_3 p_{3j}. \qquad \blacksquare$$

行列で表せば、行ベクトルについて $\mathbf{b} = \mathbf{a}P$ である。

### 段階 2　定常分布

> **考えてみよう**　$a_1 + a_2 + a_3 = 1$ のもとで $\mathbf{a} = \mathbf{a}P$ となるものを求めたい。方程式を書き出してみよ。どれが最も簡単か。

方程式は

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.3a_1 + 0.2a_2 + 0.1a_3, \\ a_2 &= 0.3a_1 + 0.4a_2 + 0.3a_3, \\ a_3 &= 0.4a_1 + 0.4a_2 + 0.6a_3. \end{aligned}$$

である（これらは独立ではない。三つを足し合わせると両辺とも $a_1 + a_2 + a_3$ になる）。第 2 式から $0.6a_2 = 0.3(a_1 + a_3) = 0.3(1 - a_2)$ となるので、$a_2 = \frac{1}{3}$ である。第 1 式から $7a_1 = 2a_2 + a_3 = \frac{2}{3} + a_3$ であり、また $a_1 + a_3 = \frac{2}{3}$ であるから、$8a_1 = \frac{4}{3}$ となり、$a_1 = \frac{1}{6}$、$a_3 = \frac{1}{2}$ を得る。すなわち

$$(a_1, a_2, a_3) = \left(\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}\right). \qquad \blacksquare$$

### 段階 3　連鎖を逆向きにたどる

> **考えてみよう**　$q_{ij} = \mathrm{P}(\text{直前が}i \mid \text{現在が}j)$ である。直前の定理と現在の定理の両方について定常分布を用いて、ベイズの定理（Bayes' theorem）を適用せよ。

ベイズの定理により、

$$q_{ij} = \frac{\mathrm{P}(\text{直前が}i)\,\mathrm{P}(\text{現在が}j \mid \text{直前が}i)}{\mathrm{P}(\text{現在が}j)} = \frac{a_i p_{ij}}{a_j}.$$

たとえば $q_{11} = \frac{\frac{1}{6}\times 0.3}{\frac{1}{6}} = 0.3$、$q_{21} = \frac{\frac{1}{3}\times 0.2}{\frac{1}{6}} = 0.4$ である。すべてまとめると（$i$ が行、$j$

が列を表す)、

$$(q_{ij}) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.15 & \frac{2}{15} \\ 0.4 & 0.4 & \frac{4}{15} \\ 0.3 & 0.45 & 0.6 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

今度は各**列**の和が 1 になる。第 $j$ 列には直前の定理としてありうる種類が並んでいるからである。

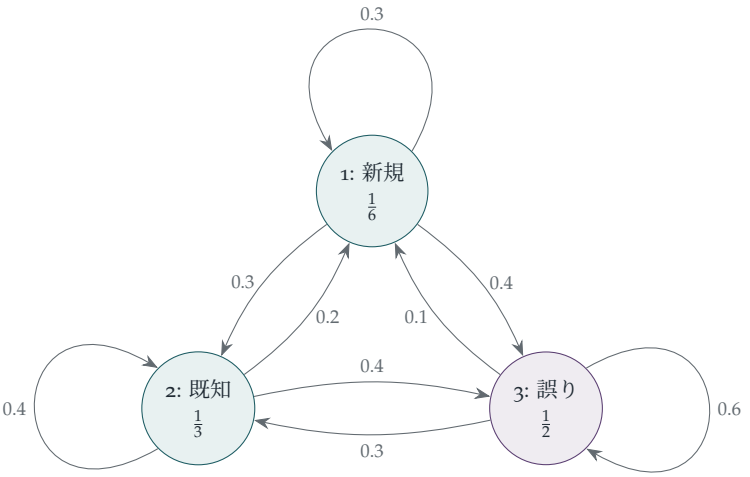



**図 12.16.1**　マルコフ連鎖として見たエックス教授の定理。矢印は、次の定理がそれぞれの種類になる確率を表す。円の中の分数は定常分布であり、長期的には定理の 6 つに 1 つは新しく正しいもの、3 つに 1 つは既知のもの、半分は誤りである。

## 振り返り

- **行列としての全確率の法則。**連鎖の 1 ステップは、行ベクトルに行列 $P$ を掛けることである。
- **定常性とは固有ベクトルである。**$\mathbf{a} = \mathbf{a}P$ は、$\mathbf{a}$ が $P$ の固有値（eigenvalue）1 に対する左固有ベクトル（left eigenvector）であることを意味する。
- **ベイズの定理で逆向きにする。**逆向きの確率もまた確率行列（stochastic matrix）をなし、それは順向きの行列と定常分布から作られる。

## 背後にある数学

### 平衡への収束

エックス教授が任意の定理から始めたとしよう。そこから $n$ 個の定理の後、種類の分布は $\mathbf{a}_0 P^n$ である。この連鎖のように、どの種類の後にもどの種類も続きうる連鎖では、出発点によらず、$P^n$ はすべての行が定常分布 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ に等しい行列に収束（convergence）する。収束の速さは $P$ の残りの固有値（ここでは 0.2 と 0.1）によって決まり、それらの寄与は等比数列的に小さくなる。わずか数個の定理の後には、彼女の過去は忘れ去られてしまうのである。マルコフ連鎖に関するこの**エルゴード定理**（ergodic theorem）は、大学 2 年次の確率論の講義の中心的な結果であり、マルコフ連鎖モンテカルロ法（Markov chain Monte Carlo）が機能する根拠でもある。複雑な分布からサンプルを得るには、その分布を定常分布にもつマルコフ連鎖を設計し、長時間走らせればよい。

### 可逆性

逆向きの連鎖 $(q_{ij})$ は順向きの連鎖 $(p_{ij})$ とは異なる。つまり、彼女の定理の長い記録を見れば、時間の向きを見分けることができる。逆向きと順向きが一致する連鎖、すなわちすべての $i$、$j$ について $a_i p_{ij} = a_j p_{ji}$ が成り立つ連鎖を**可逆**（reversible）であるという。ネットワーク上のランダムウォーク（random walk）や、熱平衡（thermal equilibrium）にある物理系のモデルがその例である。可逆性は強力な性質である。定常分布を容易に求められるようになるからである。

#### マルコフとプーシキン

アンドレイ・マルコフ（Andrey Markov）は 1906 年に自らの連鎖を導入した。その動機の一つは、大数の法則（law of large numbers）が成り立つには独立性（independence）が必要だと主張していた数学者パーヴェル・ネクラーソフ（Pavel Nekrasov）との論争において、独立性は必要ないことを示すことであった。1913 年、マルコフはこの考えをプーシキン（Pushkin）の韻文小説**エヴゲーニイ・オネーギン**の最初の 20 000 文字に適用した。各文字を母音か子音かに分類し、各文字の種類が直前の文字の種類に依存し、その依存の仕方が 2 状態の連鎖でよく記述できることを示したのである。これは文章に対する最初の統計的分析であり、あらゆる予測変換システムの祖先である。

## 思考のスキル

**確率をベクトルとして、推移を行列として捉える**

系が一定の確率で状態の間を移り変わるときは、分布をベクトルとして、推移を行列として書け。すると、長期的な振る舞いは固有ベクトルについての問題になる。

大学では、これによって第 7 章の線形代数が確率論に持ち込まれる。ペロン–フロベニウスの定理（Perron–Frobenius theorem）が定常分布の存在を保証し、残りの固有値がそこへ到達する速さを測るのである。

## 次の一歩

1 **ウサギの巣穴。** STEP III 2003、問 13（`step.maths.org/questions/03-s3-q13`）に挑戦せよ。各頂点に出口のある正方形の頂点上のランダムウォークを、最初の 1 ステップに関する方程式によって解く問題である。

2 **2 ステップ。** エックス教授の直前の定理が新しく正しいものであったとき、その次の次の定理が三つの種類それぞれである確率を求めよ。

3 **固有値。** $P$ の固有値が 1、0.2、0.1 であることを示せ。

4 **可逆か？** エックス教授の連鎖について $a_i p_{ij} = a_j p_{ji}$ が成り立つかどうか確かめよ。その答えから何がわかるか。

## さらに学ぶために

- **James Norris, *Markov Chains***（Cambridge University Press）。学部生向けの標準的な教科書である。
- **Olle Häggström, *Finite Markov Chains and Algorithmic Applications***（Cambridge University Press）。簡潔で、マルコフ連鎖モンテカルロ法の解説に優れる。
- **Brian Hayes, “First links in the Markov chain”,** *American Scientist* 101 (2013)。マルコフによるプーシキンの分析を改めて紹介する記事である。

# 12.17 バナッハのマッチ箱

**問題**

**STEP II 1992、問 16**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/92-s2-q16`

## 導入

数学者ステファン・バナッハ（Stefan Banach）は大変なヘビースモーカーで、左右のポケットにマッチ箱を一つずつ入れていた、という話が伝わっている。マッチが欲しくなるたびに、彼はどちらかのポケットを無作為に選んだ。ある日、彼は箱の一つが空であることに気づいた。もう一方の箱には何本のマッチが残っていたか。これが**バナッハのマッチ箱問題**（Banach's matchbox problem）であり、ヒューゴ・シュタインハウス（Hugo Steinhaus）がバナッハにちなんで考案したものである。本問は、その問題をタクシー運転手とお菓子に置き換えたものである。

微妙な点は「気づく」という言葉にある。運転手は、ある袋の最後のお菓子を取った時点では袋が空になったことに気づかず、次にその袋に手を伸ばしたときに初めて気づく。したがって考えるべき事象は、「トフィーに手を伸ばしたとき、$n$ 個のトフィーがすでにすべてなくなっている」というものである。これが $N$ 回目に手を伸ばしたときに起こる場合の数を数えることは、二項分布（binomial distribution）の格好の演習になる。そしてバナッハの問題の答えには意外な特徴がある。もう一方の箱に残っているマッチの本数として最も起こりやすい値は 0 なのである（1 と同率である）。

## 取りかかる前に

**考えてみよう**　運転手が $N$ 回目に手を伸ばしたときにトフィーがなくなっていることに気づくためには、$N$ 回目はどちらの袋に手を伸ばしたのでなければならないか。それより前の $N-1$ 回には何が含まれていなければならないか。

$N$ 回目はトフィーに手を伸ばしたのでなければならず、それより前の $N-1$ 回では、ちょうど $n$ 個のトフィー（すべて）と $N-1-n$ 個のミントを取っていなければならない。さらに、それより前にミントの袋が空であることに気づいていてはならない。

## 順を追って解く

### 段階 1　トフィーがなくなっていることに気づく

**考えてみよう**　最初の $N-1$ 回はどのような順序で起こりうるか。$N-1-n$ にどのような条件があれば、ミントの袋が空であることに一度も気づかずに済むか。

トフィーに手を伸ばした $n$ 回は、最初の $N-1$ 回のうちのどの $n$ 回であってもよい。ミントがなくなった後にミントに手を伸ばすことが一度もないのは、取ったミントが高々 $m$ 個、すなわち $N-1-n \le m$ のときである。よって $n+1 \le N \le n+m+1$ に対して

$$\mathrm{P}(T_N) = \binom{N-1}{n} p^{n+1} q^{N-1-n},$$

が成り立つ。ここで $T_N$ は事象「$N$ 回目に手を伸ばしたときにトフィーがなくなっていることに気づく」である（因子 $p^{n+1}$ には $N$ 回目そのものも含まれている）。

### 段階 2　ミントがなくなっていることに気づく

役割を入れ替えて同じ議論をすれば、$m+1 \le N \le n+m+1$ に対して

$$\mathrm{P}(M_N) = \binom{N-1}{m} q^{m+1} p^{N-1-m}.$$

### 段階 3　条件付き確率

**考えてみよう**　$N$ 回目に手を伸ばしたときに空の袋に気づいたことがわかっているとする。それがトフィーであった確率はいくらか。

事象 $T_N$ と $M_N$ は排反（mutually exclusive）であるから、条件付き確率（conditional probability）は

$$\mathrm{P}(\text{トフィー} \mid \text{発見時刻} N) = \frac{\binom{N-1}{n} p^{n+1} q^{N-1-n}}{\binom{N-1}{n} p^{n+1} q^{N-1-n} + \binom{N-1}{m} q^{m+1} p^{N-1-m}},$$

となる。ただし、二項係数（binomial coefficient）は上で述べた範囲の外では 0 とみなす。（$N \leq m$ ならば、なくなりうるのはトフィーだけであり、確率は 1 である。同様に、$N \leq n$ かつ $N > m$ ならば確率は 0 である。） ■

> **手を止めて、やってみよう** $n = m$ かつ $p = q = \frac{1}{2}$ のときに、この公式を確かめよ。対称性（symmetry）から、ありうるすべての $N$ に対して答えは $\frac{1}{2}$ になるはずである。実際にそうなるか。

## 振り返り

- **事象を正確に読む。**「気づく」とは、最後のお菓子を取ることではなく、空の袋に手を伸ばすことであった。
- **最後の一歩を固定し、残りを数える。** $N$ 回目を固定すると、最初の $N-1$ 回は任意の順序でよく、二項係数が現れた。
- **境界を確かめる。**制約 $N-1-n \leq m$ と $N-1-m \leq n$ によって、起こりえない経過が除外された。

## 背後にある数学

### バナッハのマッチ箱

バナッハの設定では、どちらの箱にも最初 $n$ 本のマッチが入っており、どちらのポケットも等確率で選ばれる。初めて箱が空であることに気づいたとき、もう一方の箱に入っているマッチの本数を $K$ とする。$K = k$ となるためには、空の箱からは $n$ 本、もう一方の箱からは $n-k$ 本を任意の順序で取り、その後もう一度空の箱に手を伸ばさなければならない。また、空になるのはどちらの箱でもよい。よって

$$\mathrm{P}(K = k) = 2\binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1} = \binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}.$$

これらの確率は $k$ について減少するが、例外として $\mathrm{P}(K=0) = \mathrm{P}(K=1)$ である（図 12.17.1）。残っている本数の期待値（expected value）はおよそ $2\sqrt{n/\pi} - 1$ であり、各箱に 50 本ずつ入っている場合はおよそ 7 本となる。$\sqrt{n}$ は、$2n$ 回の無作為な選択の

後に二つの箱の間に生じる偏りの典型的な大きさであり、誕生日問題（Section 9.9）やランダムウォーク（random walk）に現れるのと同じ平方根の法則である。

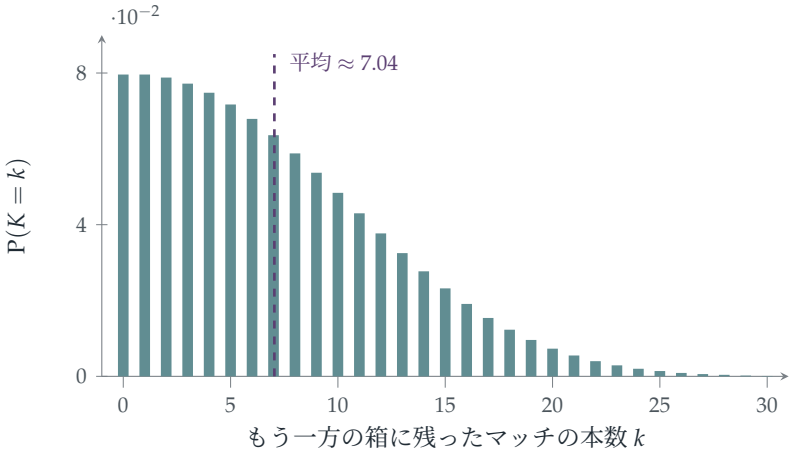



**図 12.17.1**　各箱に 50 本ずつマッチが入っている場合のバナッハのマッチ箱問題：一方の箱が空であることに初めて気づいたとき、もう一方の箱に残っている本数の分布。最も起こりやすい値は 0 と 1 で同率であるが、平均はおよそ 7 である。

### 負の二項分布

各回が確率 $p$ で成功する独立な試行において、$r$ 回目の成功を得るまでに必要な試行回数は**負の二項分布**（negative binomial distribution）$\mathrm{P}(N = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$ に従う。タクシー運転手の問題は、二つの負の二項過程（トフィーとミント）の競争であり、どちらも袋のお菓子の個数より一つ多い「成功」を必要とする。負の二項分布は保険（請求件数）、生態学（群れをなす動物の個体数）、遺伝学などに現れ、ポアソン分布（Poisson distribution）より柔軟な代替としてしばしば用いられる。

#### バナッハとスコティッシュ・カフェ

関数解析（functional analysis）の創始者の一人であるステファン・バナッハは、ルヴフ（現在のリヴィウ）のスコティッシュ・カフェで数学の多くを行った。彼と同僚たちはウェイターが預かるノート、すなわち**スコティッシュ・ブック**（Scottish Book）に問題を書き込み、その懸賞はビール一杯から生きたガチョウまでさまざまであった。バナッハの師であるヒューゴ・シュタインハウスは、バナッハの喫煙癖を称えるスピーチのためにマッチ箱問題を考案した。この問題を初めて活字で解析したのは、ウィリアム・フェラー（William Feller）による 1950 年の名高い確率論の教科書である。

## 思考のスキル

**最後の事象を固定し、そこに至る経路を数える**

ある過程が特定の時刻に特定の仕方で終わる確率を求めるには、最後の一歩で起こることを固定し、そこに至る経過を数えよ。

大学では、これは負の二項分布、ランダムウォークの初到達時刻（first-passage time）、そして Section 9.10 の鏡像原理（reflection principle）の基礎となる。

## 次の一歩

1 **小さな場合。** $n = m = 1$ かつ $p = \frac{1}{2}$ のとき、起こりうる列をすべて書き出し、$N$ の分布を求めよ。

2 **バナッハの公式。** $n = 1$ と $n = 2$ に対して $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n} 2^{-(2n-k)} = 1$ が成り立つことを確かめよ。

3 **同率の最大値。** バナッハの問題において、すべての $n$ に対して $\mathrm{P}(K = 0) = \mathrm{P}(K = 1)$ であることを示せ。

4 **先になくなるのはどちらか。** タクシー運転手の問題で、$n = m = 2$ かつ $p = \frac{2}{3}$ のとき、（時刻を問わず）最初に空であると気づかれる袋がトフィーである確率を求めよ。

## さらに学ぶために

- **William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1**（Wiley）の第 VI 章。バナッハの問題を世に紹介した文献である。
- **R. Daniel Mauldin (ed.), *The Scottish Book***（Birkhäuser）。スコティッシュ・カフェの問題集で、解説付き。
- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***（Oxford University Press）。負の二項分布について。

# 12.18 無記憶性

**問題**

**STEP III 2021、問 11**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

## 導入

ある放射性原子が、研究室で 100 万年ものあいだ崩壊せずに残っているとする。この原子はそろそろ崩壊する「はず」だろうか。そうではない。次の 1 秒間に崩壊する確率は、つくられたばかりの原子の場合とまったく同じである。放射性原子は年をとらないのである。崩壊までの待ち時間は**指数分布**（exponential distribution）に従い、その本質的な性質は記憶をもたないことである。

この問題は、その無記憶性（memorylessness）を印象的な形で示している。指数分布に従う待ち時間を、整数単位の部分と小数部分に分ける。すると、この二つは**独立**（independent）であることがわかる。何時間（整数部分）待ったかを知っても、端数の分については何もわからないのである。また演習問題では、バスを待つ時間がバスの運行間隔より長く感じられることがある理由も説明する。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $x \geq 0$ に対して $\mathrm{P}(X > x)$ はいくらか。$\mathrm{P}(X > s+t \mid X > s)$ はいくらか。

$\mathrm{P}(X > x) = \int_x^\infty \lambda e^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = e^{-\lambda x}$ である。したがって $\mathrm{P}(X > s+t \mid X > s) = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathrm{P}(X > t)$ となる。すでに $s$ だけ待ったとしても、残りの待ち時間は新たに待ち始める場合と同じ分布に従う。これが**無記憶性**である。

## 順を追って解く

### 段階 1　整数部分

$Y = n$ となるのは、ちょうど $n \le X < n+1$ のときである。

$$\mathrm{P}(Y = n) = e^{-\lambda n} - e^{-\lambda(n+1)} = (1 - e^{-\lambda})e^{-n\lambda}. \qquad \blacksquare$$

よって $Y$ は幾何分布（geometric distribution）に従う。各単位時間を確率 $e^{-\lambda}$ で「生き延びる」わけである。

### 段階 2　小数部分

**考えてみよう**　$Z < z$ とは、$X$ が区間 $[n, n+z)$ のいずれかに入るということである。それらの確率を足し合わせよ。

$$\mathrm{P}(Z < z) = \sum_{n \ge 0} \left(e^{-\lambda n} - e^{-\lambda(n+z)}\right) = (1 - e^{-\lambda z}) \sum_{n \ge 0} e^{-\lambda n} = \frac{1 - e^{-\lambda z}}{1 - e^{-\lambda}}. \qquad \blacksquare$$

### 段階 3　$Z$ の平均

**考えてみよう**　$[0,1]$ に値をとる確率変数（random variable）に対しては $\mathrm{E}(Z) = \int_0^1 \mathrm{P}(Z > z)\,\mathrm{d}z$ が成り立つ。これを用いよ。

$c = 1 - e^{-\lambda}$ とおくと $\mathrm{P}(Z > z) = 1 - \frac{1 - e^{-\lambda z}}{c}$ であるから、

$$\mathrm{E}(Z) = 1 - \frac{1}{c}\left(1 - \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}\right) = 1 - \frac{1}{c} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{e^{\lambda} - 1}. \qquad \blacksquare$$

（$\lambda$ が小さい、すなわち待ち時間が長いとき、これは $\frac{1}{2}$ に近づく。小数部分はほぼ一様分布になるのである。$\lambda$ が大きいときは $\frac{1}{\lambda}$ に近い。$X$ がほとんど常に 1 より小さいからである。）

### 段階 4　独立性

$$\mathrm{P}(Y = n, z_1 < Z < z_2) = \mathrm{P}(n + z_1 < X < n + z_2) = e^{-\lambda n}\left(e^{-\lambda z_1} - e^{-\lambda z_2}\right).$$

**考えてみよう**　小問 (i) と (ii) を用いて、$\mathrm{P}(Y = n)\,\mathrm{P}(z_1 < Z < z_2)$ と比較せよ。

(i) と (ii) より $\mathrm{P}(Y=n)\mathrm{P}(z_1<Z<z_2)=(1-e^{-\lambda})e^{-n\lambda}\cdot\frac{e^{-\lambda z_1}-e^{-\lambda z_2}}{1-e^{-\lambda}}$ であり、これは上と一致する。よって $Y$ と $Z$ は独立である。 ■

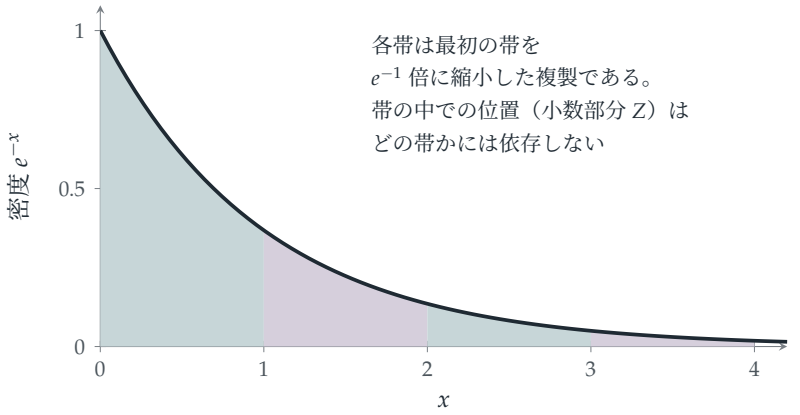



**図 12.18.1**　$\lambda=1$ の指数分布の密度関数を幅 1 の帯に分割したもの。$e^{-(n+z)}=e^{-n}e^{-z}$ であるから、どの帯も同じ形をしている。$X$ がどの帯に入るか（整数部分 $Y$）と、帯の中のどこに入るか（小数部分 $Z$）は独立である。

## 振り返り

- **区間ごとに足し合わせる。** $Z$ の分布も同時確率も、区間 $[n,n+1)$ ごとの確率を足し合わせることで得られた。
- **裾の公式。** $\mathrm{E}(Z)=\int\mathrm{P}(Z>z)\,dz$ を使うことで、密度関数を求めずに済んだ。
- **積に分解できることは独立性を意味する。**同時確率が、$n$ の関数と $z_1, z_2$ の関数の積に分解された。

## 背後にある数学

### 指数分布はなぜ特別なのか

$Y$ と $Z$ の独立性は $e^{-\lambda(n+z)}=e^{-\lambda n}e^{-\lambda z}$ から直接導かれるが、これは無記憶性が姿を変えたものにほかならない。実は、記憶をもたない連続分布は指数分布**だけ**である。すべての $s,t\geq 0$ に対して $\mathrm{P}(X>s+t)=\mathrm{P}(X>s)\mathrm{P}(X>t)$ が成り立つならば、$g(t)=\ln\mathrm{P}(X>t)$ は $g(s+t)=g(s)+g(t)$ を満たし、（$g$ が単調ならば）これにより $g(t)=-\lambda t$ となる。だからこそ指数分布は、蓄積なしに「ランダムに」起こる事象の待ち時間のモデルとなるのである。放射性崩壊、客の到着、摩耗しない電子部品の故障などがその例である。

### 最小値と待ち時間のパラドックス

$X_1$ と $X_2$ がそれぞれ率 $\lambda_1, \lambda_2$ の独立な指数分布に従うならば $\mathrm{P}(\min > x) = e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 x}$ であるから、最小値は率 $\lambda_1 + \lambda_2$ の指数分布に従う。二つの独立なランダムな事象のうち最初のものを待つことは、合わせた率で起こる一つの事象を待つことと同じである（演習問題の STEP III 2002 Q13）。無記憶性は**待ち時間のパラドックス**（waiting-time paradox）も説明する。バスがランダムに到着し、平均の間隔が 10 分であるとき、ランダムな時刻に到着した乗客の平均待ち時間は 5 分ではなく 10 分である。残りの待ち時間は記憶をもたないからである。さらに、乗客が到着した時点を含む間隔の長さは平均 20 分である。長い間隔ほど、その中に到着しやすいからである。

#### ラザフォードとポアソン過程

1910 年、アーネスト・ラザフォード（Ernest Rutherford）とハンス・ガイガー（Hans Geiger）は、放射線源から放出されるアルファ粒子を 7.5 秒ごとの区間で数え、その個数がポアソン分布（Poisson distribution）に従うことを見いだした。放出が一定の率で独立に起こるならばそうなるはずであることを、数学者 Harry Bateman が示していた。このとき放出と放出の間の時間は指数分布に従う。**ポアソン過程**（Poisson process）、すなわち間隔が指数分布に従う事象の列は、今日では時間におけるランダムさの基本モデルであり、電話の呼び出し、保険金の請求、ニューロンの発火などに用いられている。次の節 Section 12.19 では、これを空間へと拡張する。

## 思考のスキル

#### 積への分解で独立性を確かめる

**二つの確率変数は、その同時確率が一方の関数と他方の関数の積に分解されるならば独立である。**

大学では、同時密度関数の積への分解（factorisation）が独立性を確かめる標準的な方法であり、多変量の問題で独立な成分を見抜く手段となる。たとえば Section 12.22 における、正規分布に従う点の動径と偏角がその例である。

## 次の一歩

1 **二つのバス路線。** STEP III 2002、問 13（`step.maths.org/questions/02-s3-q13`）に挑戦せよ。二つの指数分布に従う確率変数の最小値を用いて、次のバスまでの

待ち時間を求める問題である。

2 **離散分布の無記憶性。**幾何分布が記憶をもたないこと、すなわち $\mathrm{P}(Y \geq m+n \mid Y \geq m) = \mathrm{P}(Y \geq n)$ を示せ。

3 **待ち時間のパラドックス。**バスが率 $\lambda$ のポアソン過程に従って到着する。固定された時刻 $t$ を含む間隔の長さの期待値は（$t$ が大きいとき）$\frac{2}{\lambda}$ であり、平均間隔の 2 倍であることを示せ。

4 **$Z$ の密度関数。** $Z$ の確率密度関数を求め、$\lambda = 1$ と $\lambda = 5$ の場合についてその概形をかけ。

## さらに学ぶために

- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***（Oxford University Press）。指数分布とポアソン過程について。
- **Sheldon Ross, *Introduction to Probability Models***（Academic Press）。指数分布、ポアソン過程、待ち行列。
- **David Spiegelhalter, *The Art of Uncertainty***（Pelican）。日常生活におけるランダムさと待ち時間。

# 12.19 平面上のランダムな点

**問題**

**STEP II 2012、問 13**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/12-s2-q13`

## 導入

スーパーマーケット、木、星、携帯電話の基地局などがある領域に「ランダムに」散らばっているとき、いちばん近いものまでどれだけ行かなければならないだろうか。その答えは密度 $k$（単位面積あたりの平均個数）だけで決まり、しかも特徴的な形をもつ。それが**レイリー分布**（Rayleigh distribution）である。最も近いものまでの距離は平均すると $\frac{1}{2\sqrt{k}}$ であり、1 平方キロメートルあたりスーパーマーケットが 1 軒なら 500 メートルになる。

このモデルは**空間ポアソン過程**（spatial Poisson process）であり、時間上のランダムな到着（Section 12.18）を 2 次元にしたものである。計算は短く美しいが、本当の面白さは基準としての役割にある。生態学者は実際の最近接距離（nearest-neighbour distance）をこの公式と比べ、木や巣が集中しているのか、ランダムに散らばっているのか、意図的に間隔をあけて配置されているのかを判断するのである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 平均（mean）$\mu$ のポアソン確率変数（Poisson random variable）が値 0 をとる確率はいくらか。

$\mathrm{P}(0) = e^{-\mu}$ である。半径 $y$ の円の面積は $\pi y^2$ なので、その内部にあるスーパーマーケットの個数の平均は $k\pi y^2$ である。

## 順を追って解く

### 段階 1　近くにスーパーマーケットがない

距離 $y$ 以内にスーパーマーケットが 1 軒もない確率は $e^{-\pi k y^2}$ である。

### 段階 2　最近接距離の分布

> **考えてみよう**　$Y \geq y$ とは、距離 $y$ 以内にスーパーマーケットが 1 軒もないということである。では $\mathrm{P}(Y < y)$ はいくらか。

$\mathrm{P}(Y < y) = 1 - e^{-\pi k y^2}$ であり、これを微分すると確率密度関数（probability density function）

$$\mathrm{f}(y) = 2\pi k y e^{-\pi k y^2}, \qquad y \geq 0. \qquad \blacksquare$$

が得られる。

### 段階 3　平均

> **考えてみよう**　$y\,\mathrm{f}(y)$ を部分積分（integration by parts）するか、$\mathrm{E}(Y) = \int_0^\infty \mathrm{P}(Y > y)\,\mathrm{d}y$ を用いる。そのあと置換して、与えられたガウス積分（Gaussian integral）が使える形にする。

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^\infty e^{-\pi k y^2}\,\mathrm{d}y.$$

$x = y\sqrt{2\pi k}$ と置換すると $\pi k y^2 = \frac{1}{2}x^2$ となり、$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{k}}$ を得る。 $\blacksquare$

### 段階 4　分散

$$\mathrm{E}(Y^2) = \int_0^\infty y^2 \cdot 2\pi k y e^{-\pi k y^2}\,\mathrm{d}y.$$

$u = \pi k y^2$ と置換すると（$\mathrm{d}u = 2\pi k y\,\mathrm{d}y$ である）、これは $\int_0^\infty \frac{u}{\pi k} e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi k}$ となる。したがって分散（variance）は

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{\pi k} - \frac{1}{4k} = \frac{4 - \pi}{4\pi k}. \qquad \blacksquare$$

である。

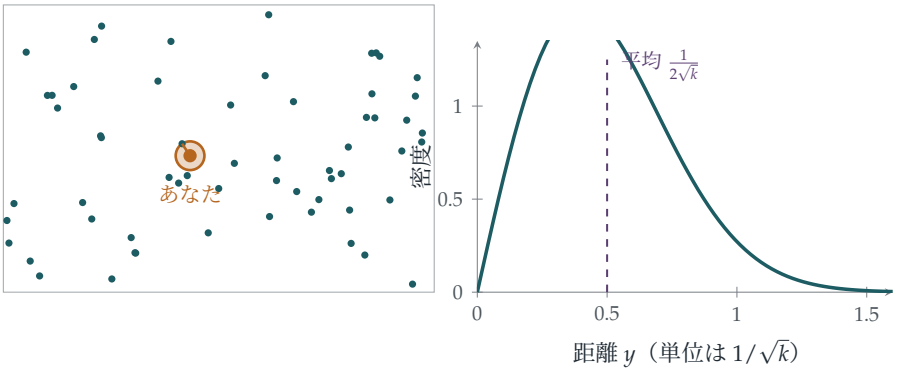



**図 12.19.1**　左：面積 24 の領域にランダムに散らばった 60 個の点（したがって $k = 2.5$）と、選んだ 1 点からそのうち最も近い点までの距離（琥珀色）。右：その距離のレイリー密度 $2\pi k y e^{-\pi k y^2}$。距離は $1/\sqrt{k}$ を単位として測っている。平均は $\frac{1}{2\sqrt{k}}$ である。

## 振り返り

- **距離の問題を個数の問題に言い換える。**「最も近いものが $y$ より遠い」とは「$y$ 以内に 1 つもない」ということである。
- **まず累積分布、次に密度。** $\mathrm{P}(Y < y)$ は直接求まり、それを微分して密度が得られた。
- **置換によって既知の積分に帰着させる。**どのモーメントも、ガウス積分か指数関数の積分に帰着した。

## 背後にある数学

### 平面上のポアソン過程

強度（intensity）$k$ の空間ポアソン過程とは、点のランダムな散らばりであって、互いに交わらない領域に含まれる点の個数が独立であり、面積 $A$ の領域に含まれる点の個数が平均 $kA$ のポアソン分布に従うものである。これは、膨大な個数の点を膨大な面積の上に独立かつ一様に、適切な平均密度で落としたときに得られるものであり、攪乱順列（derangements、Section 9.8）を説明するのと同じ「稀な事象の法則」（law of rare events）による。これは完全空間ランダム性（complete spatial randomness）の自然なモデルであり、現実のパターンはこれと比べて評価される。2 人の生態学者が 1954 年に考案した**クラーク–エヴァンス検定**（Clark–Evans test）は、観測された最近接距離の平均を $\frac{1}{2\sqrt{k}}$ と比較する。それよりずっと小さければ集中（親木の近くに落ち

る種子）を示唆し、ずっと大きければ規則的な間隔（縄張りをもつ鳥や、水をめぐる植物どうしの競争）を示唆する。

### 3 次元の場合

同じ計算を 3 次元で行うと、最も近い星、分子、銀河までの距離について $\mathrm{P}(Y > y) = e^{-\frac{4}{3}\pi k y^3}$ が得られる。チャンドラセカール（Subrahmanyan Chandrasekhar）は 1943 年にこれを用いて、ランダムに分布する近隣の星から 1 つの星が受ける重力を研究した。また物理学者は、気体分子の平均自由行程（mean free path）にこれを用いている。

#### レイリー

密度 $\frac{y}{\sigma^2} e^{-y^2/(2\sigma^2)}$ の名は、1880 年に音響理論の中でこれに出会ったレイリー卿（Lord Rayleigh）にちなむ。これは、位相（phase）がランダムな多数の波を重ね合わせたときの振幅を表す。また、2 つの座標が独立な正規確率変数であるような点の原点からの距離もこの分布に従い、これがここに現れる理由を別の角度から見る方法になっている（演習 3）。今日では、多数の経路をランダムな位相で通って受信機に届く携帯電話の電波のフェージング（fading）のモデルとして使われている。

## 思考のスキル

#### まず分布関数を求める

最小値、最大値、最近接距離の分布については、$\mathrm{P}(Y > y)$ を直接書き下すのがたいてい簡単である。それを微分して密度を得る。

この方法は、多数のランダムな寿命のうち最大のものを扱う Section 12.25 でも再び登場する。大学では、あらゆる「順序統計量」（order statistic）を扱う際の標準的な第一歩である。

## 次の一歩

1. **中央値。**最も近いスーパーマーケットまでの距離の中央値（median）を求め、平均と比較せよ。

2. **2 番目に近いもの。**2 番目に近いスーパーマーケットまでの距離の分布を求めよ。（ヒント：$\mathrm{P}(Y_2 > y)$ は、$y$ 以内にスーパーマーケットが高々 1 軒しかない確率である。）

3 **正規分布に従う座標。** $U$ と $V$ が独立に $\mathrm{N}(0,\sigma^2)$ に従うとき、$\sqrt{U^2+V^2}$ の密度が $\frac{r}{\sigma^2}e^{-r^2/(2\sigma^2)}$ であることを示せ。$\sigma$ をどの値にすればスーパーマーケットの分布が得られるか。

4 **クラーク–エヴァンス。** 400 本の木がある 1 km$^2$ の森を調査したところ、木から最も近い隣の木までの距離の平均は 35 m であった。これは完全空間ランダム性と整合するか。それとも集中、あるいは規則的な間隔を示唆するか。

## さらに学ぶために

- **Peter Diggle, *Statistical Analysis of Spatial Point Patterns***（Arnold）。空間点パターンの統計解析に関する標準的な文献で、クラーク–エヴァンス検定とその発展形を扱っている。
- **John Kingman, *Poisson Processes***（Oxford University Press）。任意の次元のポアソン過程を扱った、短く美しい本である。
- **Geoffrey Grimmett & David Stirzaker, *Probability and Random Processes***（Oxford University Press）。ポアソン過程の章。

# 12.20 ビュフォンの針

**問題**

**STEP I 1993、問 16**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/93-s1-q16`

## 導入

平行に板が張られた床の上に針を落とす。針が板の継ぎ目をまたぐ確率には、どこにも円が見当たらないにもかかわらず $\pi$ が現れる。何度も投げて交わった回数を数えれば、実験によって $\pi$ を推定できるのである。これが**ビュフォンの針**（Buffon's needle）であり、ビュフォン伯ジョルジュ＝ルイ・ルクレール（Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon）が 1733 年に提起し、1777 年に自ら解いたものである。これは**幾何確率**（geometric probability）の最初の問題であり、あらゆるモンテカルロ法（Monte Carlo method）の祖先でもある。

$\pi$ は角度から生じる。針の向きは半回転の範囲で一様に分布しており、直線に対する針の「影」の長さをすべての向きについて平均すると、因子 $\frac{2}{\pi}$ が得られる。この問題では、その計算を $\cos^{-1}$ の積分によって行う。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 針の中心が最も近い直線から距離 $x$ のところにあり、針が直線の垂線と角 $y$ をなしているとする。針は直線に向かってどこまで届くか。

針の半分ずつの長さは $a$ であり、その直線に垂直な成分は $a\cos y$ である。したがって、針が最も近い直線と交わるのは、ちょうど $a\cos y \geq x$ のときである。（$a < b$ であるから、針がほかの直線に届くことはない。）

## 順を追って解く

### 段階 1　積分

$t = \cos y$ とおくと、$t$ が 0 から 1 まで動くとき、$y = \cos^{-1} t$ は $\frac{\pi}{2}$ から 0 まで動き、$\mathrm{d}t = -\sin y \,\mathrm{d}y$ である。よって

$$\int_0^1 \cos^{-1} t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} y \sin y \,\mathrm{d}y = \left[-y\cos y\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos y \,\mathrm{d}y = 0 + 1 = 1. \qquad \blacksquare$$

（別解：この積分は $\cos^{-1}$ のグラフと座標軸で囲まれた部分の面積であり、これは $y = \cos x$ の 0 から $\frac{\pi}{2}$ までのグラフの下の面積を直線 $y = x$ に関して折り返したものに等しい。）

### 段階 2　位置を固定したとき

> **考えてみよう**　$x$ を固定したとき、どのような角 $y$ で交わるか。その確率はいくらか。

$x \geq a$ ならば、針は直線に届かない。$x < a$ ならば、交わるためには $\cos y \geq \frac{x}{a}$、すなわち $y \leq \cos^{-1}\frac{x}{a}$ が必要である。$Y$ は $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上の一様分布（uniform distribution）に従うから、

$$\mathrm{P}(\text{交わる} \mid X = x) = \frac{2}{\pi}\cos^{-1}\frac{x}{a} \qquad (0 \leq x < a). \qquad \blacksquare$$

### 段階 3　位置について平均する

$X$ は $[0, b]$ 上の一様分布に従い、その確率密度（density）は $\frac{1}{b}$ であるから、

$$\mathrm{P}(\text{交わる}) = \frac{1}{b}\int_0^a \frac{2}{\pi}\cos^{-1}\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{2a}{\pi b}\int_0^1 \cos^{-1} t \,\mathrm{d}t = \frac{2a}{\pi b}, \qquad \blacksquare$$

ここで $x = at$ と置換した。

> **手を止めて、やってみよう**　針の長さがちょうど間隔の半分である場合（$a = \frac{b}{2}$、したがって針の長さ $2a$ は $b$ に等しい）、交わる確率は $\frac{1}{\pi}$ となる。$\pi$ を小数第 2 位まで推定するには、何回投げる必要があるだろうか。

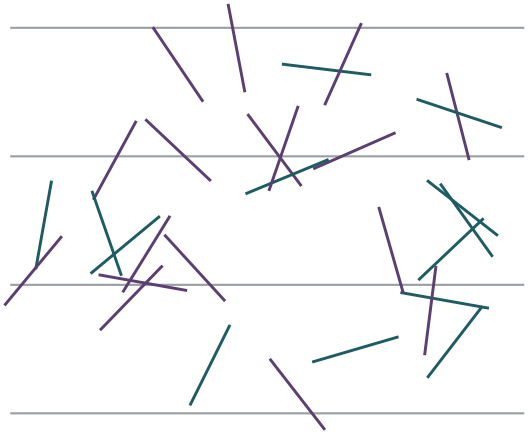



**図 12.20.1**　長さ $2a = 1.4$ の針 30 本を、間隔 $2b = 2$ の平行線の上に投げたもの。直線と交わる針は紫色で示してある。ここでは期待値 13.4 に対して 17 本が交わっている。標本が小さいと推定は粗く、ビュフォンの針は $\pi$ の計算法としては遅いことで有名である。

## 振り返り

- **2 つの独立な座標。**針の位置と角度は独立（independent）かつ一様であったので、確率は 1 変数ずつ計算できる二重積分となった。
- **条件をつけてから平均する。**まず $x$ を固定して角度について平均し、次に $x$ について平均した。
- **置換によって定数が姿を現す。** $x = at$ と尺度を変えることで、答えはただ 1 つの普遍的な積分に帰着した。

## 背後にある数学

### ビュフォンの麺

ほとんど計算なしで答えを見通す方法がある。針を任意の形に曲げて「麺」（noodle）にし、それが直線と交わる回数を $C$ とする。期待値の線形性（linearity of expectation）により、曲線の交わる回数の期待値はその小さな各部分についての和であるから、長さに比例する。すなわち、ある定数 $\kappa$ に対して $\mathrm{E}(C) = \kappa L$ である。$\kappa$ を求めるために、麺として直径が直線の間隔 $2b$ に等しい円をとる。この円は常にちょうど 2 回交わり、その長さは $2\pi b$ である。よって $\kappa \cdot 2\pi b = 2$ となり、$\kappa = \frac{1}{\pi b}$ を得る。長さ $2a < 2b$ のまっすぐな針は高々 1 回しか交わらないので、$\mathrm{P}(\text{交わる}) = \mathrm{E}(C) = \frac{2a}{\pi b}$ である。この議論はバルビエ（Joseph-Émile Barbier）によるもので（1860 年）、確率論的推論の珠玉

である。$\pi$ は、定数を較正するために選んだ円から来ているのである。

### $\pi$ の推定と、してはいけないこと

$n$ 本の針を投げて $c$ 本が交わったとすると、$\frac{c}{n} \approx \frac{2a}{\pi b}$ より $\pi \approx \frac{2an}{bc}$ である。誤差は $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 程度でしか小さくならないので、$\pi$ を小数第 3 位まで求めるには約 100 万回投げる必要がある。1901 年、イタリアの数学者 Mario Lazzarini は、3408 回の試行から $\pi \approx \frac{355}{113} = 3.1415929\ldots$（小数第 6 位まで正しい）を得たと主張した。統計学者たちは、この結果は出来すぎていて信じがたいと指摘している。3408 回の試行と注意深く選んだ針の長さのもとでは、$\frac{355}{113}$ はちょうど 1808 回の交差から生じるのであり、ちょうどよいところで実験を打ち切ればこの値が得られてしまう。これは都合のよい結果だけを報告することへの戒めとして、古典的な教訓話となっている。

#### ビュフォン

ビュフォンは博物学者であり、パリの王立植物園の園長を務め、全 36 巻の博物誌の著者でもあった。彼は 1733 年に針の問題（および正方形のタイルを用いた版である「フラン・カロー」（franc-carreau）遊び）を科学アカデミー（Académie des Sciences）に提出し、1777 年にその解を発表した。彼のねらいは、算術だけでなく幾何学も確率に用いることができると示すことであった。ここから積分幾何学（integral geometry）、すなわちランダムな直線と、それらが曲線や曲面と交わる様子を扱う理論が生まれた。これは現在、ステレオロジー（stereology）、すなわち 2 次元の断面から 3 次元の構造（組織中の細胞など）の大きさや形を推定する科学において用いられている。

## 思考のスキル

#### 領域上の積分としての確率

結果がいくつかの独立な連続確率変数に依存するとき、ある事象の確率は、その事象が起こる領域の上で同時確率密度関数を積分したものである。

大学では、これが連続確率論の基礎となる。同時確率密度関数（joint density）、周辺分布（marginal distribution）、変数変換（change of variables）であり、これらはすべて Section 12.21 と Section 12.22 で再び現れる。

## 次の一歩

1. **長い針。** $a > b$ ならば、針は 2 本以上の直線と交わることがある。それでも交わる回数の期待値は $\frac{2a}{\pi b}$ であることを示せ。

2. **麺。** 長さ $2a$ の針を直角に曲げる（長さ $a$ の 2 本の腕をもつ）。交わる回数の期待値はいくらか。

3. **正方形のタイル。** 半径 $r$ の硬貨を、1 辺 $s > 2r$ の正方形のタイルを敷いた床の上に投げる。硬貨が完全に 1 枚のタイルの内部に収まる確率を求めよ。

4. **Lazzarini の針。** $a = \frac{5}{6}b$（したがって $\frac{2a}{\pi b} = \frac{5}{3\pi}$）のとき、3408 回の試行で 1808 回交わると、推定値 $\pi \approx \frac{355}{113}$ が得られることを示せ。

## さらに学ぶために

- **Daniel Klain & Gian-Carlo Rota, *Introduction to Geometric Probability***（Cambridge University Press）。ビュフォンの針から話が始まる。
- **Lee Badger,「Lazzarini's lucky approximation of $\pi$」**, *Mathematics Magazine* 67 (1994)。疑わしい実験の統計学。
- **Paul Nahin, *Digital Dice***（Princeton University Press）。確率の問題に対するモンテカルロ法。

# 12.21 棒を折る

**問題**

**STEP III 1990、問 16**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/90-s3-q16`

## 導入

棒をランダムな 2 点で折る。3 本の断片で三角形を作れるだろうか。有名な答えは「確率（probability）$\frac{1}{4}$ で作れる」である。では、作れたとき、その三角形は鋭角三角形（acute triangle）だろうか、それとも鈍角三角形（obtuse triangle）だろうか。たいていは鈍角である。できる三角形のうち鋭角三角形はおよそ 3 分の 1 にすぎない。ランダムな図形に関するこの種の問題は 19 世紀以来、確率論の研究者たちを楽しませてきた。また、連続確率（continuous probability）を扱う格好の練習の場でもある。領域内のランダムな点、部分領域を定める条件、そしてその面積を求める積分がそろっているからである。

この問題では棒の折り方を 2 通り考え、それぞれについて鈍角が現れる確率を問う。答えは $3-2\sqrt{2}$ と $3-4\ln 2$ であり、単純な幾何から意外な数が現れる。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 3 つの長さで三角形が作れるのは、どの長さも他の 2 つの和より小さいとき、かつそのときに限る。長さの和が $L$ であるとき、これは最も長いものについて何を意味するか。辺 $c$ の対角が鈍角になるのはどのようなときか。

$a+b+c=L$ のもとで $c<a+b$ は $c<\frac{L}{2}$ を意味する。したがって 3 本の断片で三角形が作れるのは、どの断片も全長の半分より短いときにちょうど一致する。余弦定理（cosine rule）により、$c$ の対角が鈍角になるのは $c^2>a^2+b^2$ のときにちょうど一致す

る。

## 順を追って解く

### 段階 1　1 回切ってから半分にする

断片は $X$, $\frac{1-X}{2}$, $\frac{1-X}{2}$ である。等しい 2 本はつねに $\frac{1}{2}$ より短いので、三角形ができるのは $X < \frac{1}{2}$ のとき、かつそのときに限る。この三角形は二等辺三角形（isosceles triangle）であり、等しい 2 角は鋭角であるから、鈍角三角形になるのは $X$ の対角が鈍角のときに限る：

$$X^2 > 2\Big(\frac{1-X}{2}\Big)^2 = \frac{(1-X)^2}{2}, \qquad \text{すなわち} \qquad \sqrt{2}X > 1-X, \quad X > \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1.$$

$X < \frac{1}{2}$ という条件のもとで、$X$ は $[0, \frac{1}{2}]$ 上の一様分布（uniform distribution）に従うので、

$$\mathrm{P}(\text{鈍角} \mid \text{三角形}) = \frac{\frac{1}{2} - (\sqrt{2}-1)}{\frac{1}{2}} = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.172. \qquad \blacksquare$$

### 段階 2　2 つ目の作り方

> **考えてみよう**　頂点が $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ の三角形内の $(x,y)$ について、辺 $x$, $y$, $2-x-y$ に対する 3 つの三角不等式（triangle inequality）を確かめよ。

領域は $\{x \le 1, y \le 1, x+y \ge 1\}$ である。不等式は、$x+y \ge 2-x-y$ すなわち $x+y \ge 1$、$x+(2-x-y) \ge y$ すなわち $y \le 1$、$y+(2-x-y) \ge x$ すなわち $x \le 1$ である。これらはすべて領域内で成り立つ（領域の辺上では等号が成り立ち、そこでは三角形は退化（degenerate）している）。 $\blacksquare$

> **考えてみよう**　$B$ における角は辺 $CA = y$ の対角である。条件 $y^2 > x^2 + (2-x-y)^2$ を $y$ についての不等式に書き直せ。

展開すると $y^2 > x^2 + 4 + x^2 + y^2 - 4x - 4y + 2xy$ となるので $4y - 2xy > 2x^2 - 4x + 4$、すなわち $2y(2-x) > 2(x^2 - 2x + 2)$ である。$2 - x > 0$ であるから、

$$\angle ABC \text{ が鈍角} \iff y > \frac{x^2 - 2x + 2}{2 - x}. \qquad \blacksquare$$

### 段階 3　面積

**考えてみよう** $x^2-2x+2$ を $2-x$ で割れ。次に、領域のうち曲線より上にある部分の面積を求め、領域の面積 $\frac{1}{2}$ で割れ。

$x^2-2x+2=-x(2-x)+2$ であるから、曲線は $y=-x+\frac{2}{2-x}$ である。この曲線は $(0,1)$ から $(1,1)$ まで延び、$0<x<1$ では直線 $y=1-x$ より上、$y=1$ より下にある（図 12.21.1）。鈍角となる領域は曲線と $y=1$ の間にあり、その面積は

$$\int_0^1 \left(1+x-\frac{2}{2-x}\right)\mathrm{d}x = 1+\frac{1}{2}+\left[2\ln(2-x)\right]_0^1 = \frac{3}{2}-2\ln 2.$$

$\frac{1}{2}$ で割って、$\mathrm{P}(\angle ABC \text{ が鈍角}) = 3-4\ln 2 \approx 0.227$ を得る。 ■

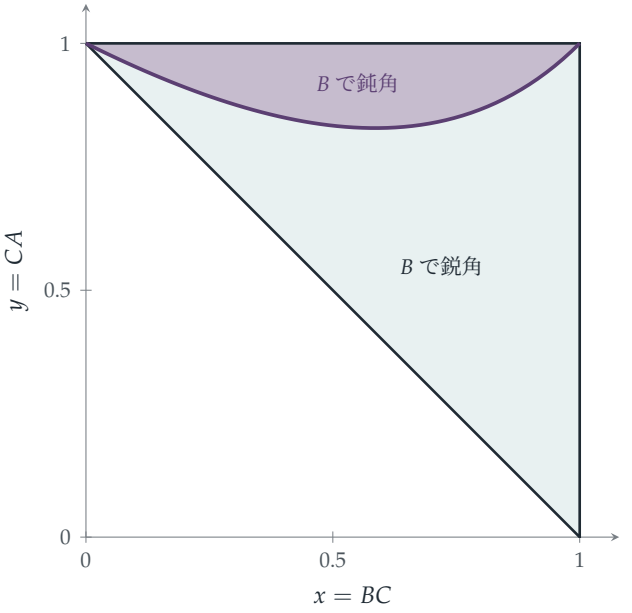



**図 12.21.1** 小問 (ii) における $(x,y)$ のとりうる範囲を表す三角形。$B$ における角は曲線 $y=\frac{x^2-2x+2}{2-x}$ より上（紫色の領域）で鈍角となり、この領域は三角形全体の $3-4\ln 2 \approx 0.23$ を占める。

## 振り返り

- **幾何を不等式に翻訳する。**「三角形を作る」も「鈍角である」も、長さの間の不等式になった。
- **連続変数に対する条件付き確率（conditional probability）。**$X<\frac{1}{2}$ という条件のもとで、$X$ はより短い区間上の一様分布に従った。
- **面積の比としての確率。**領域内に一様に分布する点については、確率は面積を全体

の面積で割ったものである。

## 背後にある数学

### 古典的な折れた棒の問題

棒を、独立（independent）に一様分布する 2 点 $U, V$ で折る。組 $(U, V)$ は単位正方形上に一様に分布し、3 本の断片で三角形が作れるのは各断片が $\frac{1}{2}$ より短いときにちょうど一致する。この条件は合計面積 $\frac{3}{4}$ の 4 つの小さな三角形を切り取るので、確率は $\frac{1}{4}$ となる。三角形ができたという条件のもとで、それが鋭角三角形である確率は $\frac{1}{4}$ のうちの $3\ln 2 - 2 \approx 0.079$、すなわち約 32% である。これらの断片は**一様ランダム分割**（uniform random partition）の一例であり、その同時分布は**ディリクレ分布**（Dirichlet distribution）である。ディリクレ分布はベイズ統計学（Bayesian statistics）や、資源がランダムに分配される様子のモデルに現れる。

### 棒の折り方が結果を左右する

問題の 2 つの方法は、よく似て聞こえる問いに対して $3 - 2\sqrt{2}$ と $3 - 4\ln 2$ という異なる答えを与え、しかもどちらも古典的な方法とは異なることに注意しよう。ベルトラン（Bertrand）の弦の問題（Section 12.3）と同様に、手順を指定しない限り「ランダム」という言葉には何の意味もない。

#### ランダムな三角形

ランダムな三角形に関する問題は、ヴィクトリア朝時代に人気のあったパズルである。ルイス・キャロル（Lewis Carroll）の *Pillow Problems*（1893 年）は、「ランダムに」選んだ三角形が鈍角三角形である確率を問うている。その答えは、本節の答えと同じく、彼が選んだランダムさのモデルに完全に依存する。ランダムな三角形に関する問題はその後も驚きを生み続けてきた。たとえば、正方形内に一様ランダムにとった 3 点が鈍角三角形をなす確率は約 0.725 であり、これが厳密に計算されたのは 20 世紀になってからである。

## 思考のスキル

**標本空間（sample space）の幾何**

ランダムな結果を領域内の点として、事象を部分領域として表し、確率を面積の比（あるいは密度（*density*）の積分）として計算する。

大学では、この見方が多変量確率論（multivariate probability）の基礎となり、また座標を取り替えたときに密度がどう変換されるかを教えてくれる変数変換公式（change-of-variables formula）の基礎にもなる。

## 次の一歩

1. **古典的な問題。**棒を独立に一様分布する 2 点で折るとき、断片で三角形が作れる確率は $\frac{1}{4}$ であることを示せ。
2. **長いほうの断片を折る。**棒を一様分布する 1 点で折り、次に長いほうの断片を一様分布する 1 点で折る。3 本の断片で三角形が作れる確率は $2\ln 2 - 1 \approx 0.386$ であることを示せ。
3. **鋭角か鈍角か。**小問 (ii) において、三角形 $ABC$ が $C$ において（$AB = 2 - x - y$ の対角として）鈍角をもつ確率を求めよ。これを用いて、どこかに鈍角をもつ確率を求めよ。
4. **最長の断片の期待値。**古典的な折れた棒の問題において、最も長い断片の長さの期待値（expected value）は $\frac{11}{18}$ であることを示せ。

## さらに学ぶために

- **Martin Gardner, *The Colossal Book of Mathematics***（Norton）。折れた棒の問題を収録している。
- **Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability***（Dover）。
- **Lewis Carroll, *Pillow Problems***（Dover、*A Tangled Tale* と合本）。ランダムな三角形を含むヴィクトリア朝時代のパズル集。

# 12.22 平均をもたない分布

**問題**

**STEP III 1995、問 12**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/95-s3-q12`

## 導入

多数の測定値の平均をとれば、偶然誤差は打ち消し合い、平均は真の値に落ち着いていく。この**大数の法則**（law of large numbers）はあらゆる統計学の土台である。しかし、そこには隠れた仮定がある。測定値が有限な平均をもたなければならないのである。この問題では、ごく自然な確率変数、すなわち独立な 2 つの標準正規確率変数の比を構成するが、これは平均をまったくもたない。その平均値は決して落ち着かない。実際、それを 100 万個平均したものは、1 個だけのものとまったく同じ分布をもつのである。

これが**コーシー分布**（Cauchy distribution）である。その確率密度関数は無害な釣鐘形に見えるが、裾が非常に重いため、ときおり現れる巨大な値がどんな平均をも支配してしまう。この問題では、美しい幾何学的議論によってこの分布を導く。座標の比は直線の傾きであり、放射対称性によってその直線の角度は一様に分布するのである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $(U, V)$ が、確率密度が原点からの距離だけに依存するような確率的な点であるとき、原点からその点へ引いた直線が軸となす角 $\Theta$ について何がいえるか。

平面を回転しても確率密度は変わらないので、どの方向も同様に確からしい。すなわち角 $\Theta$ は $[0, 2\pi)$ 上の一様分布に従う。そして $\frac{U}{V}$ は方向だけに依存し、距離には依存しない。

## 順を追って解く

### 段階 1　同時確率密度関数

$X$ と $Y$ は独立であるから、それらの同時確率密度関数（joint density）はそれぞれの確率密度関数の積である。

$$\mathrm{f}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

これは $x$ と $y$ に、原点からの距離の 2 乗である $x^2+y^2$ を通してのみ依存する。つまり、確率密度は原点を中心とする円の上で一定である。これが「放射対称（radially symmetrical）」の意味である。

### 段階 2　対称性を利用する

> **考えてみよう**　$\frac{U}{V} < k$ となる場合は、$V$ の符号に応じて 2 通りある。180° の回転 $(u,v) \mapsto (-u,-v)$ によって、これらはどのように結びつくか。

$\frac{U}{V} < k$ とは、$V > 0$ かつ $U < kV$ であるか、または $V < 0$ かつ $U > kV$ であることを意味する。回転 $(u,v) \mapsto (-u,-v)$ は 1 つ目の領域を 2 つ目の領域に写し、確率密度を保つ。したがって両者の確率は等しく、

$$\mathrm{P}\left(\frac{U}{V} < k\right) = 2\mathrm{P}(U < kV, V > 0). \qquad \blacksquare$$

### 段階 3　角度

> **考えてみよう**　$u$ を横軸、$v$ を縦軸とする平面に領域 $\{V > 0, U < kV\}$ を図示せよ。これは原点を頂点とする扇形の領域である。その角の大きさはいくらか。

領域 $V > 0$ は上半平面である。原点を通る直線 $u = kv$ は、正の $v$ 軸と角 $\arctan k$ をなす（$k > 0$ のときは正の $u$ の側に傾く）。上半平面のうちこの直線より左側の部分は、角 $\frac{\pi}{2} + \arctan k$ の扇形の領域である。放射対称性により、扇形の領域の確率はその角を $2\pi$ で割ったものであるから、

$$\mathrm{P}\left(\frac{U}{V} < k\right) = 2 \cdot \frac{\frac{\pi}{2} + \arctan k}{2\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan k.$$

これを $k$ で微分すると、確率密度関数

$$\mathrm{g}(k) = \frac{1}{\pi(1+k^2)}. \qquad \blacksquare$$

が得られる。

## 振り返り

- **独立な正規分布は放射対称である。** 2 つの正規分布の確率密度関数の積は距離だけに依存する。
- **比は方向を表す。** $\frac{U}{V}$ は点の角度だけに依存し、その角度は一様分布に従う。
- **扇形の領域の確率。**放射対称性があれば、扇形の領域の確率はその角に比例する。

## 背後にある数学

### 平均が存在しない

コーシー分布の平均は $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{\pi(1+k^2)}\,\mathrm{d}k$ となるはずであるが、$\int_0^K \frac{k}{1+k^2}\,\mathrm{d}k = \frac{1}{2}\ln(1+K^2) \to \infty$ である。この積分は収束（converge）せず、平均は存在しない。（対称性から答えは 0 だと思うかもしれないが、正の部分も負の部分もともに無限大であり、$\infty - \infty$ には値がない。）分散も無限大である。

さらに悪いことに、独立な $n$ 個のコーシー確率変数の平均は再びコーシー分布に従い、しかもまったく同じ分布をもつ。（これを確かめる 1 つの方法は、特性関数（characteristic function）$\mathrm{E}(e^{itX}) = e^{-|t|}$ を用いるものである。）したがって平均をとってもまったく役に立たない。100 万個の測定値の平均は、1 個の測定値より少しも信頼できないのである。図 12.22.1 はその様子を示している。正規分布の標本の逐次平均は落ち着いていくが、コーシー分布の標本の逐次平均は、ときおり現れる巨大な値に揺さぶられて、いつまでもふらつき続ける。

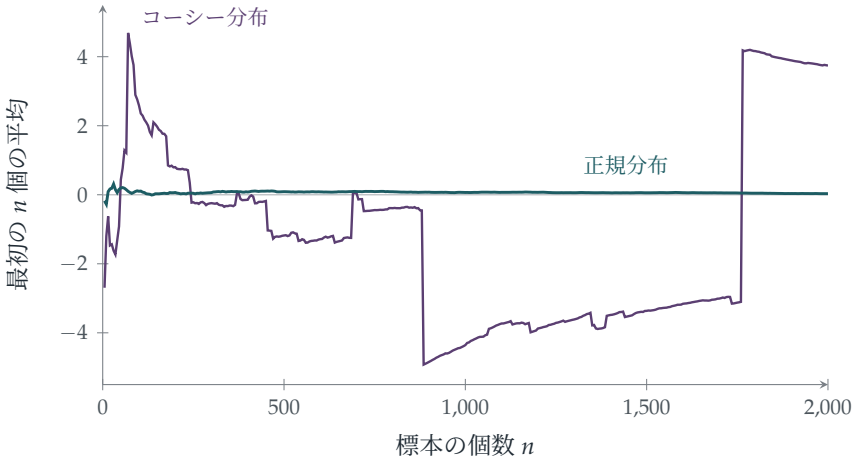



**図 12.22.1**　独立な 2000 個の標本の逐次平均。標準正規分布の標本（ティール）では、大数の法則が予言するとおり、平均は 0 に落ち着いていく。コーシー分布の標本（プラム）では決して落ち着かない。ときおり現れるたった 1 つの巨大な値が、平均をどこか新しい場所へ放り出してしまうのである。

## コーシー確率変数はどこから現れるか

一様に無作為な方向に向けた懐中電灯で壁を照らすと、壁に映る光点の位置はコーシー分布に従う。物理学では、同じ確率密度関数が**ローレンツ関数**（Lorentzian）とよばれ、スペクトル線や共鳴ピークの形を記述する（Section 11.1 と比較せよ）。金融の分野では、正規分布によるモデルが大幅に過小評価してしまうときおりの暴落をモデル化するために、コーシー分布のような裾の重い分布が用いられる。統計学にとっての教訓は深刻である。平均や分散に基づく手法は裾の重いデータに対しては破綻し、中央値（コーシー分布に対してもまったく問題なく振る舞う）を用いるなどの頑健な手法が必要となるのである。

### ポアソン、コーシー、そして論争

この分布は 1824 年にポアソン（Siméon Denis Poisson）によって研究され、彼はそれが大数の法則を満たさないことに気づいていた。コーシー（Augustin-Louis Cauchy）は 1853 年、最小二乗法をめぐるビエネメ（Irénée-Jules Bienaymé）との公開論争の中でこの分布に出会った。コーシーはこれを用いて、誤差の裾が重い場合には最小二乗法が劣った方法になりうることを示したのである。名前はコーシーに定着したが、これは Stephen Stigler が「スティグラーの名祖の法則」とよぶものの一例である。すなわち、科学上の発見は最初の発見者の名前ではよばれない、という法則である。

## 思考のスキル

### 期待値が存在することを確かめる

平均や分散を用いる前に、それを定義する積分が収束することを確かめよ。対称性があっても、発散する積分が 0 になるわけではない。

大学では、可積分性の条件が確率論のあらゆる定理の一部となっている。大数の法則には有限な平均が、中心極限定理（Section 12.24）には有限な分散が必要である。コーシー分布は、それらの条件が成り立たないときの標準的な反例である。

## 次の一歩

1. **懐中電灯。** 長くまっすぐな壁から距離 1 の位置にある懐中電灯が、壁への垂線と角 $\Theta$ をなす方向を向いている。ただし $\Theta$ は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上の一様分布に従う。光点の位置 $\tan\Theta$ がコーシー分布に従うことを示せ。

2. **逆数。** $C$ がコーシー分布に従うならば、$\frac{1}{C}$ もコーシー分布に従うことを示せ。（ヒント：$\frac{U}{V}$ と $\frac{V}{U}$。）

3. **中央値はうまく働く。** コーシー分布の中央値は 0 であり、四分位数は $\pm 1$ であることを示せ。

4. **半径と角度。** $X, Y$ を独立な標準正規確率変数とするとき、極座標に変換することにより、$R^2 = X^2 + Y^2$ が平均 2 の指数分布に従い、かつ角度と独立であることを示せ。（これは正規乱数を生成するボックス＝ミュラー法の基礎である。）

## さらに学ぶために

- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction*** (Oxford University Press)。確率変数の変換について。
- **Nassim Nicholas Taleb, *The Black Swan*** (Penguin)。邦題『ブラック・スワン』。裾の重い分布とそれがなぜ重要なのかを、一般読者向けに解説している。
- **Stephen Stigler, *The History of Statistics*** (Harvard University Press)。コーシーとビエネメの論争も扱っている。

# 12.23 確率から導くスターリングの公式

**問題**

**STEP II 2016、問 13**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/16-s2-q13`

## 導入

100! はどれくらい大きいのだろうか。実際に掛け算をすると時間がかかる。答えは 158 桁である。**スターリングの公式**（Stirling's formula）$n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$ を使えば、たった 1 行で誤差 0.1% 以内の値が得られる。これは数学で最も役に立つ近似の一つであり、確率論、統計物理学、アルゴリズムの解析で絶えず用いられている。

証明は数多くあり、積分を使うもの（Section 4.4）や、オイラー＝マクローリンの公式（Euler–Maclaurin formula）を使うものがある。この問題が与えるのは、その中でも最も意外な証明、すなわち確率による証明である。平均 $n$ のポアソン分布（Poisson distribution）は近似的に正規分布（normal distribution）に従い、両者をピークで比較すると $n!$ の値が決まってしまう。スターリングの公式に現れる $\sqrt{2\pi}$ は、文字どおり正規分布の密度に現れる $\sqrt{2\pi}$ なのである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 平均（mean）$\mu$、分散（variance）$\sigma^2$ の離散確率変数 $X$ が近似的に正規分布に従うとき、$\mathrm{P}(X = \mu)$ はおよそいくらか。（$\mu$ を中心とする幅 1 の区間の確率を考えよ。）

正規近似（normal approximation）では $\mathrm{P}(X = \mu) \approx \mathrm{P}(\mu - \frac{1}{2} < X < \mu + \frac{1}{2})$ であり、これはおよそ幅 1 にピークでの密度（density）を掛けたもの、すなわち $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ である。

## 順を追って解く

### 段階 1　16 枚の硬貨

$X \sim \mathrm{B}(16, \tfrac{1}{2})$ の平均は 8、分散は $16 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = 4$ であるから、$\sigma = 2$ である。正規近似により、

$$\mathrm{P}(X = 8) \approx \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \approx 0.1995.$$

正確な値は $\binom{16}{8}/2^{16} = \tfrac{12870}{65536} \approx 0.1964$ であり、誤差は 2% 以内である。

### 段階 2　中心二項係数

> **考えてみよう**　$\mathrm{B}(2n, \tfrac{1}{2})$ の平均と標準偏差（standard deviation）は何か。$\mathrm{P}(X = n)$ を正確な形と近似の形で書け。

平均は $n$、分散は $\tfrac{n}{2}$ であるから、$\sigma = \sqrt{n/2}$ である。正確には $\mathrm{P}(X = n) = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}$ であり、近似的には $\frac{1}{\sqrt{n/2}\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ である。両者を等しいとおくと、

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2\, 2^{2n}} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}, \qquad (2n)! \approx \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n\pi}}. \qquad \blacksquare$$

### 段階 3　スターリングの公式

> **考えてみよう**　パラメータ $n$ のポアソン分布は、平均と分散がともに $n$ に等しい。$\mathrm{P}(X = n)$ を正確な形と近似の形で書け。

正確には $\mathrm{P}(X = n) = e^{-n}\frac{n^n}{n!}$ である。$n$ が大きいとき、ポアソン分布は近似的に正規分布に従い（これは $n$ 個の独立なポアソン $(1)$ 確率変数の和である）、$\sigma = \sqrt{n}$ であるから、$\mathrm{P}(X = n) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ となる。両者を等しいとおくと、

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n. \qquad \blacksquare$$

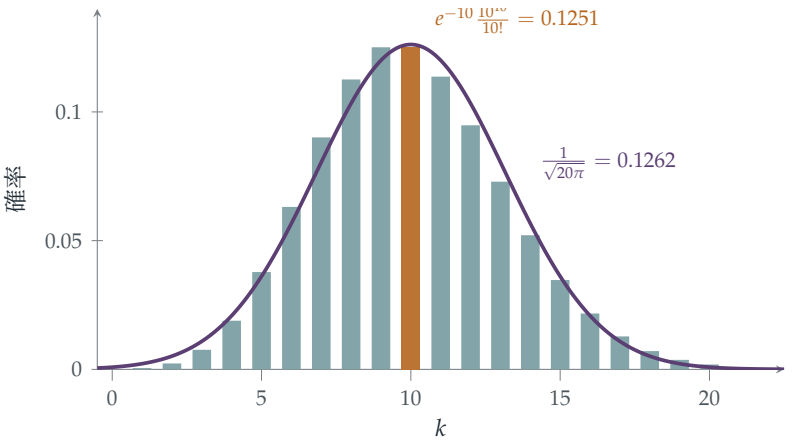



**図 12.23.1**　平均 10 のポアソン分布（棒）と、同じ平均・分散をもつ正規分布の密度（紫）。ピークにおいて、ポアソン分布の確率 $e^{-10}10^{10}/10!$（琥珀色）は正規分布の密度 $\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 10}}$ に近い。このほぼ等しいという関係を変形したものがスターリングの公式である。

## 振り返り

- **1 点での確率 ≈ 密度 × 幅。**格子分布（lattice distribution）では、ある点における正規分布の密度がその点の確率を近似する。
- **正確な式と近似が出会う。**二項分布とポアソン分布の確率は正確な値である。それらを正規近似と等しいとおくことで、階乗の評価が得られた。
- **式に合わせて分布を選ぶ。** $\binom{2n}{n}$ からは $\mathrm{B}(2n, \frac{1}{2})$ が、$\frac{n^n}{n!}$ からはポアソン $(n)$ が思い浮かぶ。

## 背後にある数学

### 近似の精度はどれくらいか

この議論はヒューリスティック（heuristic）である。正規近似を *1 点*で用いているが、通常の中心極限定理（central limit theorem）はそれを正当化しない。その厳密版である**局所中心極限定理**（local central limit theorem）がまさにそれを保証し、この議論を本物の証明にする。実際、スターリングの公式は驚くほど精度が高い。比 $\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n}$ はおよそ $1 + \frac{1}{12n}$ であり、$n = 1$ のときでさえ 1 の代わりに 0.92 を与え、$n = 10$ のときには 0.8% 小さいだけである。完全な級数 $1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \cdots$ は**漸近級数**（asymptotic series）の一例である。$n$ が大きいほどよい近似を与えるが、$n$ を固定すると最終的に

は発散する。

### 階乗と正規分布はなぜ結びつくのか

スターリングの公式に現れる $\sqrt{2\pi}$ と正規分布の密度に現れるものは同じ定数である。$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$ だからである。アブラーム・ド・モアブル（Abraham de Moivre）は 1733 年、まさにこの方法で二項分布の正規近似を発見した。そのためには $n$ が大きいときの $\binom{n}{k}$ の近似が必要だったのである。彼は $n! \approx Cn^{n+1/2}e^{-n}$ という形を見いだしたが、定数までは求められなかった。ジェームズ・スターリング（James Stirling）が $C = \sqrt{2\pi}$ であることを示した。正規分布は階乗の漸近挙動から生まれたのである。

#### ド・モアブルとスターリング

アブラーム・ド・モアブルはフランスのプロテスタントで、ロンドンに亡命し、家庭教師や賭博師への助言で生計を立てていた。彼は 1718 年に『*The Doctrine of Chances*』（偶然の理論）を出版し、1733 年の小冊子で二項分布の正規近似を発見した。これが正規曲線の最初の登場である。スコットランドの数学者ジェームズ・スターリングは、著書『*Methodus Differentialis*』（1730 年）で定数の値を発表し、ド・モアブルは寛大にもその功績を彼に帰した。階乗の近似は今も活発な研究分野であり、巨大な $n$ に対する $n!$ の計算は組合せ論や暗号理論で必要とされている。

## 思考のスキル

#### 確率とは関係のないことを確率で証明する

正確な確率を近似と比べると、式に現れる数についての情報が得られることがある。

この「確率論的方法」（probabilistic method）は両方向に働く。ここでは確率が階乗の評価を与えた。エルデシュ（Erdős）はこの方法を用いてグラフの存在を証明した（Section 9.2）。大学では、解析学、数論、組合せ論の定理を証明するのに確率が使われる場面に出会うだろう。

## 次の一歩

1 **公式を確かめる。** スターリングの公式を用いて 10! と 20! を見積もり、真の値 3 628 800 および 2 432 902 008 176 640 000 と比較せよ。

2 **(iii) から (ii) へ。**小問 (iii) のスターリングの公式から小問 (ii) の近似が導かれることを示せ。

3 **100! の桁数。** $\log_{10} n! \approx n \log_{10} \frac{n}{e} + \frac{1}{2} \log_{10}(2\pi n)$ を用いて、100! が 158 桁であることを示せ。

4 **硬貨投げの引き分け。**小問 (ii) を用いて、公平な硬貨を 1000 回投げたとき表がちょうど 500 回出る確率がおよそ 0.025 であることを示せ。

## さらに学ぶために

- **William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1**（Wiley）、第 II 章。スターリングの公式を証明している。
- **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics***（Addison-Wesley）、第 9 章。漸近解析を扱う。
- **Stephen Stigler, *The History of Statistics***（Harvard University Press）。ド・モアブルと正規曲線の誕生について。

# 12.24 中心極限定理

**問題**

**STEP III 2008、問 12**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/08-s3-q12`

## 導入

互いに独立な小さな確率的効果を数多く足し合わせると、個々の分布が何であれ、その合計は釣鐘型の正規分布（normal distribution）の曲線に従う。これが**中心極限定理**（central limit theorem）であり、確率論でおそらく最も重要な定理である。身長や測定誤差や試験の点数がおおよそ正規分布に従う理由も、統計学者がもとの分布について何も知らなくても、その分散（variance）が有限でありさえすれば平均値がどれほど信頼できるかを述べられる理由も、この定理で説明される（Section 12.22 と比較せよ）。

この問題では、特別な場合にこの定理を証明する。1 匹のカエルが両側指数分布（two-sided exponential distribution）に従ってランダムに跳ぶ。その密度は鋭く尖ったピークをもち、釣鐘型とは似ても似つかない。それでも何度も跳んだあとのカエルの変位の合計は正規分布に従う。道具となるのは**積率母関数**（moment generating function）である。積率母関数は独立な確率変数の和を積に変え、さらに対数をとれば積は和に変わる。

**出題範囲についての注意**

積率母関数は 2019 年に STEP の出題範囲から外された。確率変数 $X$ の積率母関数は $\mathrm{M}_X(\theta) = \mathrm{E}(e^{\theta X})$ である。その 0 における導関数から積率（モーメント）が得られる：$\mathrm{M}'(0) = \mathrm{E}(X)$、$\mathrm{M}''(0) = \mathrm{E}(X^2)$。独立な $X$ と $Y$ に対しては $\mathrm{M}_{X+Y} = \mathrm{M}_X \mathrm{M}_Y$ であり、また $\mathrm{M}_{cX}(\theta) = \mathrm{M}_X(c\theta)$ である。積率母関数が収束すれば、分布も（適切な意味で）収束する。

## 取りかかる前に

**考えてみよう**　密度 $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ は対称である。そのグラフはどのような形か。平均（mean）はいくらか。

これはテントのような形の曲線で、0 に高さ $\frac{1}{2}$ の鋭いピークをもち、両側に指数関数的に減衰する（図 12.24.1）。対称性より平均は 0 である。

## 順を追って解く

### 段階 1　積率母関数

$|\theta| < 1$ のとき、積分を 0 で分けると

$$\mathrm{M}_X(\theta) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{(1+\theta)x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-(1-\theta)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1+\theta} + \frac{1}{1-\theta}\Big) = \frac{1}{1-\theta^2}. \qquad \blacksquare$$

展開すると $\mathrm{M}_X(\theta) = 1 + \theta^2 + \theta^4 + \cdots$ となるので、$\mathrm{E}(X) = 0$ であり、$\mathrm{E}(X^2) = 2$（$\frac{\theta^2}{2!}$ の係数）である。分散は 2 である。

### 段階 2　カエルの変位

**考えてみよう**　$Y = X_1 + \cdots + X_n$ の積率母関数は何か。$Y/\sqrt{2n}$ の積率母関数はどうか。

独立性より $\mathrm{M}_Y(\theta) = (1-\theta^2)^{-n}$ であり、尺度を変えると

$$\mathrm{M}_{Y/\sqrt{2n}}(\theta) = \mathrm{M}_Y\Big(\frac{\theta}{\sqrt{2n}}\Big) = \Big(1 - \frac{\theta^2}{2n}\Big)^{-n}.$$

となる。（$Y$ の標準偏差（standard deviation）である $\sqrt{2n}$ で割ることで、分散が 1 になる。）

### 段階 3　極限

**考えてみよう**　対数をとり、小さな $u$ に対して $\ln(1-u) \approx -u$ を用いよ。

$\ln \mathrm{M}_{Y/\sqrt{2n}}(\theta) = -n\ln\big(1 - \frac{\theta^2}{2n}\big) = -n\big(-\frac{\theta^2}{2n} - \frac{\theta^4}{8n^2} - \cdots\big) \to \frac{\theta^2}{2}$ であるから

$$\mathrm{M}_{Y/\sqrt{2n}}(\theta) \to e^{\theta^2/2}, \qquad \blacksquare$$

となり、これは標準正規分布の積率母関数である。

### 段階 4 カエルの確率

**考えてみよう** $n$ が大きいとき、$Y$ は近似的に $\mathrm{N}(0, 2n)$ に従う。$\mathrm{P}(|Y| \geq 25) = 0.05$ となるのはいつか。

標準正規分布に従う $Z$ に対して $\mathrm{P}(|Z| \geq 1.96) = 0.05$ である。よって $\frac{25}{\sqrt{2n}} = 1.96$ が必要であり、$2n = \left(\frac{25}{1.96}\right)^2 \approx 162.7$、すなわち $n \approx 81.3$ を得る。遠くに着地する確率は $n$ とともに増えるので、少なくとも 5% の確率を与える最小の跳躍回数はおよそ 82 である。 ■

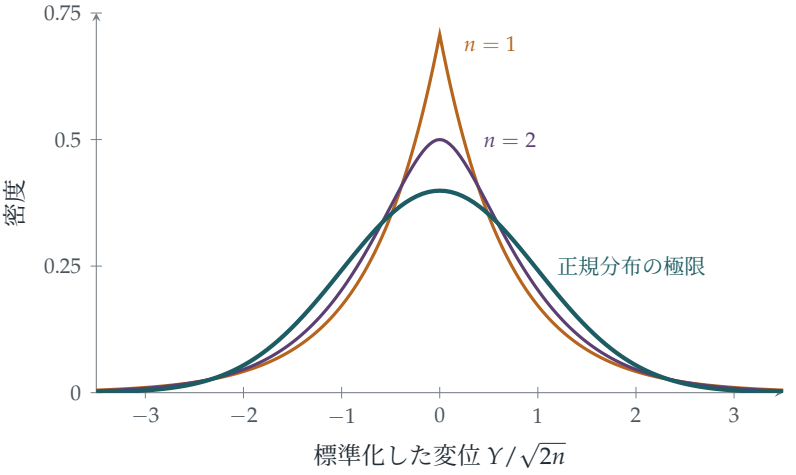



**図 12.24.1** $n = 1$ 回跳んだあと（琥珀色：鋭いラプラス分布のピーク）と $n = 2$ 回跳んだあと（紫色）のカエルの標準化した変位の密度を、標準正規分布の密度（青緑色）と比べたもの。2 回跳んだだけで、すでにピークは丸みを帯びている。中心極限定理によれば、$n \to \infty$ のときこれらの曲線は正規分布の曲線に収束する。

## 振り返り

- **変換は和を積に変える。**独立な確率変数の和の積率母関数は、それぞれの積率母関数の積である。
- **対数は積を和に変える。**$\ln\left(1 - \frac{\theta^2}{2n}\right)^{-n}$ は、極限の求めやすい和になった。
- **標準化せよ。**標準偏差 $\sqrt{2n}$ で割ることで分散が 1 に保たれ、極限が 0 にも無限大にもならなかった。

## 背後にある数学

### 一般の定理

同じ議論は、平均が 0 で有限の分散 $\sigma^2$ をもつ任意の分布に対して成り立つ（積率母関数の存在も仮定するが、この仮定は外すことができる）。このとき $\mathrm{M}(\theta) = 1 + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + o(\theta^2)$ であり、

$$\left(\mathrm{M}\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{\theta^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \to e^{\theta^2/2}.$$

となる。極限で生き残るのは分散だけであり、もとの分布の形は忘れ去られる。正規分布が普遍的である理由はここにある。大学では、この定理は常に存在する**特性関数**（characteristic function）$\mathrm{E}(e^{i\theta X})$ を用いて証明され、分布の収束はレヴィ（Lévy）の連続性定理によって厳密に述べられる。

### 収束の速さは？

中心極限定理は極限で何が起こるかを述べるが、どれだけ速く収束するかは述べない。**ベリー・エッセーンの定理**（Berry–Esseen theorem）は、誤差を定数と $\frac{\mathrm{E}|X|^3}{\sigma^3\sqrt{n}}$ の積で上から評価する。カエルの分布のような対称な分布では、数十回跳べば近似は良好になる。歪んだ分布や、分布の裾の極端な部分では、$n$ が大きくても近似が悪いことがある。正規近似は非常にまれな事象の確率を過小評価するのであり、この事実は保険や金融に影響を及ぼす。

#### ド・モアブルからリンデベルグまで

ド・モアブル（de Moivre）は 1733 年に二項分布の正規近似を発見し（Section 12.23）、ラプラス（Laplace）は 1810 年にそれをより一般の確率変数の和へと拡張して、測定誤差は多くの小さな効果の和であるという考え方を打ち出した。厳密な証明が得られたのはずっと後のことである。1901 年にアレクサンドル・リャプノフ（Aleksandr Lyapunov）が、そして 1922 年にヤール・リンデベルグ（Jarl Lindeberg）が証明を与え、リンデベルグは定理が成り立つための本質的に最も弱い条件を見いだした。「中心極限定理」という名前は 1920 年にジョージ・ポリア（George Pólya）によって付けられたもので、この定理が確率論の中心にあるという意味である。

## 思考のスキル

**変換し、簡単にし、変換して戻す**

難しい演算（独立な確率変数を足すこと。これは密度の畳み込みにあたる）は、変換を施すと易しい演算（掛け算）になる。変換した先で計算を行い、その結果を解釈せよ。

同じ戦略は、母関数（Section 9.4）、解析学や工学におけるフーリエ（Fourier）変換やラプラス変換、そして掛け算を足し算に変える対数の根底にもある。

## 次の一歩

1 **2 回跳んだ場合の厳密な計算。** $Y = X_1 + X_2$ の密度が $\frac{1}{4}(1 + |y|)e^{-|y|}$ であることを示し、その分散が 4 であることを確かめよ。

2 **二項分布から正規分布へ。** $X \sim \mathrm{B}(1, \frac{1}{2})$ を平均が 0 になるように平行移動したもの（値 $\pm\frac{1}{2}$ をとる）について、$\mathrm{M}_X(\theta) = \cosh\frac{\theta}{2}$ を求め、そのような確率変数 $n$ 個の和を標準化したものの積率母関数が $e^{\theta^2/2}$ に近づくことを示せ。

3 **カエル、厳密に。** コンピュータを使って（あるいは検算として $n = 2$ のときの厳密な密度を使って）、$n = 82$ のとき正規近似がどれほど正確かを調べよ。

4 **なぜコーシー分布ではだめなのか。** コーシー分布（Section 12.22）は積率母関数をもたない。議論のどの段階が破綻するか。また、$n$ 個のコーシー分布に従う確率変数の平均はどうなるか。

## さらに学ぶために

- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***（Oxford University Press）。母関数と極限定理の章。
- **Hans Fischer, *A History of the Central Limit Theorem***（Springer）。中心極限定理の歴史。ラプラスからリンデベルグまで。
- **David Spiegelhalter, *The Art of Statistics***（Pelican）。統計学の技法。正規分布がいたるところに現れる理由について。

# 12.25 多数の中の最大値

**問題**

**STEP III 2025、問 11**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip`

## 導入

次の百年で最大の洪水はどれほどの高さになるだろうか。千個の電球のうち最も長もちするものは、どれだけの時間もつだろうか。$n$ 人が出場するマラソンで最も速い走者は、どれほど速いだろうか。多数の確率的な値のうち最大のものや最小のものといった**極値**（extremes）に関する問いは、工学、保険、気候科学できわめて重要であり、その振る舞いは平均とはまったく異なる。

この問題では、$n$ 個の指数分布（exponential distribution）に従う寿命の最大値の分布を求める。その典型的な大きさは $\ln n$ のように、ゆっくりとではあるが限りなく増大する。しかし、そのばらつきはまったく増大しない。千個の寿命の最大値は、おおよそ十個の寿命の最大値と同じ程度に予測可能なのである。極限において、その分布の形は**ガンベル分布**（Gumbel distribution）となる。これは正規分布の曲線に対応する、極値版の分布である。

## 取りかかる前に

? **考えてみよう** $X_1, \ldots, X_n$ の最大値が $y$ 以下になるのは、ちょうどどのようなときか。

$Y \le y$ となるのは、ちょうどすべての $X_i \le y$ となるときである。独立性（independence）により、これは積に変わる。

## 順を追って解く

### 段階 1　最大値の分布

各 $X_i$ は $y \ge 0$ に対して $\mathrm{F}(y) = 1 - e^{-\lambda y}$ をみたし、独立性より

$$\mathrm{G}(y) = \mathrm{P}(X_1 \le y, \dots, X_n \le y) = (1 - e^{-\lambda y})^n. \qquad \blacksquare$$

### 段階 2　分位点

> ? **考えてみよう**　$\mathrm{G}(L) = \alpha$ を $L$ について解け。次に $\mathrm{G}(U) = 1 - \alpha$ を解け。

$(1 - e^{-\lambda L})^n = \alpha$ から $e^{-\lambda L} = 1 - \alpha^{1/n}$ が得られるので、

$$L(\alpha) = -\frac{1}{\lambda} \ln\bigl(1 - \alpha^{1/n}\bigr), \qquad U(\alpha) = -\frac{1}{\lambda} \ln\bigl(1 - (1-\alpha)^{1/n}\bigr). \qquad \blacksquare$$

### 段階 3　$n$ が大きい場合

> ? **考えてみよう**　$\alpha^{1/n} = e^{(\ln \alpha)/n}$ と書け。$n$ が大きいとき、指数は小さい。$1 - \alpha^{1/n}$ はおよそいくらか。

$\alpha^{1/n} = e^{(\ln\alpha)/n} \approx 1 + \frac{\ln \alpha}{n}$ であるから、$1 - \alpha^{1/n} \approx \frac{-\ln\alpha}{n} = \frac{\ln(1/\alpha)}{n}$ となる。したがって

$$\lambda L(\alpha) \approx -\ln \frac{\ln(1/\alpha)}{n} = \ln n - \ln\Bigl(\ln \frac{1}{\alpha}\Bigr). \qquad \blacksquare$$

同様に、$\lambda U(\alpha) \approx \ln n - \ln\bigl(\ln \frac{1}{1-\alpha}\bigr)$ である。

### 段階 4　増大とばらつき

中央値（median）は $L(\frac{1}{2})$ であり、$\lambda L(\frac{1}{2}) \approx \ln n - \ln\ln 2 \to \infty$ となる。しかし

$$\lambda\bigl(U(\alpha) - L(\alpha)\bigr) \approx \ln\Bigl(\ln \frac{1}{\alpha}\Bigr) - \ln\Bigl(\ln \frac{1}{1-\alpha}\Bigr),$$

となり、$\ln n$ の項は打ち消し合っている。つまり、幅は $n$ によらない。 $\blacksquare$

### 段階 5　90% 区間

> ? **考えてみよう**　$\alpha = 0.05$ とせよ。$\ln \frac{1}{\alpha} = \ln 20$ と $\ln \frac{1}{0.95}$ はおよそいくらか。

$\alpha = 0.05$ のとき $\ln 20 \approx 3$ であるから、$\ln\ln \frac{1}{\alpha} \approx \ln 3$ である。また $\ln \frac{1}{0.95} = -\ln(1 - 0.05) \approx 0.05 = \frac{1}{20}$ であるから、$\ln\ln \frac{1}{1-\alpha} \approx \ln \frac{1}{20} \approx -3$ である。したがって幅はおよそ

$\frac{1}{\lambda}(\ln 3 + 3) \approx \frac{4.1}{\lambda}$ であり、$Y$ は確率 0.9 で、幅およそ $4\lambda^{-1}$ の区間 $[L(0.05), U(0.05)]$ に入る。 ■

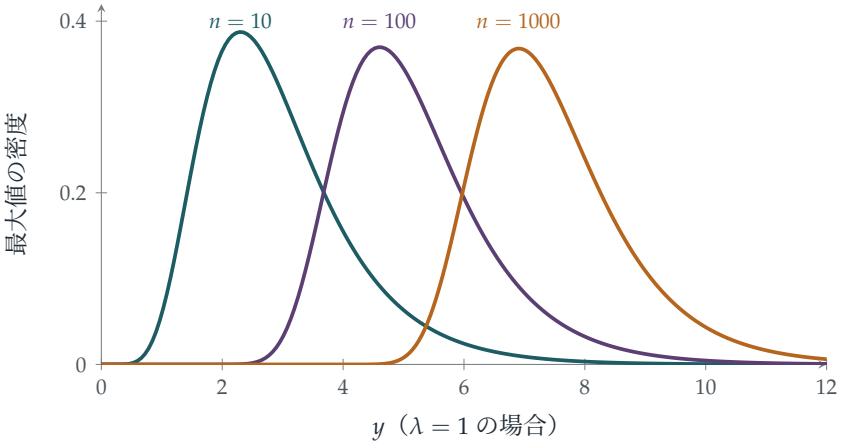



**図 12.25.1**　$n = 10$、100、1000 の場合の、$n$ 個の指数分布に従う寿命（平均 1）の最大値の密度。$n$ が 10 倍になるごとに曲線は右へ $\ln 10 \approx 2.3$ だけずれるが、その形と幅は本質的に変わらない。これは $\ln n$ だけずらしたガンベル分布である。

## 振り返り

- **最大値が $y$ 以下であるのは、すべてがそうであるとき。**独立性によって、最大値の分布はべき乗になった。
- **逆に解いて分位点を求める。**$G(y) = \alpha$ を解くことで、区間の端点の厳密な式が得られた。
- **近似してから比較する。**$L$ と $U$ の近似はどちらも $\ln n$ を含み、それが幅では打ち消し合った。

## 背後にある数学

### ガンベル分布

$P(\lambda Y - \ln n \le x) = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n \to \exp(-e^{-x})$ であるから、ずらした最大値 $\lambda Y - \ln n$ は、極限において分布関数（distribution function）$\exp(-e^{-x})$ をもつ**ガンベル分布**に従う。その平均はオイラー（Euler）の定数 $\gamma \approx 0.577$ である。この分布にはすでに出会っている。$n$ 種類すべてのクーポンを集めるまでの時間（Section 9.11）は、$n$ 個の（ほぼ独立な）待ち時間の最大値であり、それがおよそ $n \ln n + \gamma n$ となり、$n$ のオーダ

ーのガンベル型のゆらぎをもつのはこのためである。

### 極値理論

フィッシャー（Fisher）、ティペット（Tippett）、グネジェンコ（Gnedenko）による注目すべき定理（1928–1943）によれば、独立同分布な多数の確率変数の最大値は、適切にずらし尺度を変えると、極限において 3 通りの形しかとりえない。すなわち、ガンベル型（指数分布や正規分布のような軽い裾（tail）をもつ場合）、フレシェ（Fréchet）型（コーシー（Cauchy）分布のような重い裾をもつ場合）、ワイブル（Weibull）型（明確な上限をもつ変数の場合）である。これは中心極限定理（central limit theorem）（Section 12.24）の極値版にあたる。技術者はこれを用いて「百年に一度の波」に耐える防潮施設や海洋プラットフォームを設計し、保険会社は巨大災害補償の価格を決め、気候科学者は熱波がどのように変化しているかを推定する。

#### ガンベルと洪水

エミール・ユリウス・ガンベル（Emil Julius Gumbel）はドイツの統計学者であり、ナチスに公然と反対したために 1932 年に大学の職を追われ、最終的にアメリカ合衆国へ亡命した人物である。彼は 1930 年代から 1940 年代にかけて、極値理論を河川の氾濫に応用した。その著書 *Statistics of Extremes*（『極値統計学』、1958 年）によって、この分野は実用的な道具となった。1953 年の北海大洪水の後にオランダを守るために建設されたデルタ計画の施設は、極値統計を用いて、およそ 10 000 年に一度と見込まれる高潮に耐えるよう設計された。

## 思考のスキル

#### 最大値と最小値の分布

独立な確率変数の最大値については $\mathrm{P}(\max \le y) = \prod \mathrm{P}(X_i \le y)$、最小値については $\mathrm{P}(\min > y) = \prod \mathrm{P}(X_i > y)$ である。

この一つの考え方で、最寄りのスーパーマーケット（Section 12.19）、最初に来るバス（Section 12.18）、最も長もちする電球を扱うことができる。大学では、これが順序統計量（order statistics）と極値理論（extreme value theory）の出発点となる。

## 次の一歩

1 **最大値の期待値。** $\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$ を示せ。（**ヒント：**無記憶性（memorylessness）により、$n$ 個の寿命のうち最初の一つが尽きた後、残りの $n-1$ 個は新たに始まったのと同じである。）

2 **最小値。** $X_1, \ldots, X_n$ の最小値が、パラメータ $n\lambda$ の指数分布に従うことを示せ。

3 **中央値を厳密に。** $Y$ の厳密な中央値を求め、$n = 10$ の場合について近似値 $\frac{1}{\lambda}(\ln n - \ln\ln 2)$ と比較せよ。

4 **一様分布の最大値。** $X_1, \ldots, X_n$ が $[0,1]$ 上の一様分布（uniform distribution）に従うとき、その最大値 $M$ の分布を求め、$n$ が大きいとき $n(1-M)$ が近似的に指数分布に従うことを示せ。これは極値の 3 つの形のうちどれか。

## さらに学ぶために

- **Stuart Coles, *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values***（Springer）。洪水や海面水位の実データを用いた標準的な入門書。
- **Emil Julius Gumbel, *Statistics of Extremes***（Dover）。古典的名著。
- **David Spiegelhalter, *The Art of Uncertainty***（Pelican）。まれな事象と、それについてどう考えるべきかを論じた本。

# 学んだこと

本章の冒頭で、不確実性は正確に推論できるが、直感はそうはいかないと述べた。そして三つの問いを立てた。問題は正確には何を問うているのか、うまい切り口は何か、長い目で見ると何が起こるのか、である。本章の 25 問が示したことを以下にまとめる。

### 1. 問題は正確には何を問うているのか

最初の四つの節は、問題を正しく捉えることを扱った。「番号の付いた円板が取り出されたとき」と「3 番の円板が取り出されたとき」とでは答えが異なった（Section 12.1）。まれな病気に対する精度 90% の検査では、陽性と出た患者が実際に病気である確率はわずか 9% であった。基準率（base rate）が重要だからである（Section 12.2）。「無作為な弦」は、どのように選ぶかを定めるまで長さの期待値（expected value）をもたなかった（Section 12.3）。折れた棒の問題（Section 12.21）も同じことを示した。さらに「独立（independent）」にはいくつかの意味があることがわかった。事象は二つずつでは独立でも、全体としては独立でないことがある（Section 12.4）。また、無相関（uncorrelated）な確率変数が独立であるとは限らない。いずれの場合も、処方箋は、どのような結果が起こりうるか、それらがどのように生じるかを正確に書き出すことであった。

### 2. うまい切り口は何か

多くの問題には、長い計算と短い洞察の両方があった。

- **対称性（symmetry）。**過程が区別できない二つの座席（Section 12.5）、互いに補い合う鏡像としての「表が多い」と「裏が多い」（Section 12.6）、どの二人の選手もどの試合で対戦する可能性も等しいこと（Section 12.7）、どんな硬貨でも HT と TH が等確率であること（Section 12.9）、方向が一様に分布する回転対称な点（Section 12.22）。
- **指示変数（indicator）と線形性（linearity）。**組（Section 12.4）、結び目（Section 12.10）、試合（Section 12.7）を指示変数の和として数えることで、分布全体を求めずに平均と分散（variance）が得られた。
- **状態と第一段階解析（first-step analysis）。**Penney のゲーム（Penney's game）（Section 12.8）、ウサギの巣穴と Ecks 教授（Section 12.16）、家名の断絶（Section 12.15）は、いずれも次の一歩で条件付ける（conditioning）ことで解けた。

- **戦略。** 三つ巴の決闘（truel）では、最も腕の悪い者はわざと外すべきである（Section 12.13）。ランダム化された戦略は相手に付け込まれない（Section 12.14）。候補者の最初の $\frac{1}{e}$ を見送るのが最適である（Section 12.12）。

### 3. 長い目で見ると何が起こるのか

本章の後半では、時間の経過に沿って、また多数回の試行にわたって、ランダムネスを追った。分枝過程（branching process）は絶滅するか爆発的に増えるかのいずれかであり、爆発的に増えうる過程でさえ偶然によって絶滅することがある（Section 12.15）。マルコフ（Markov）連鎖（Markov chain）は定常分布（stationary distribution）に落ち着き、過去を忘れる（Section 12.16）。指数分布に従う待ち時間は記憶をまったくもたない（Section 12.18）。平均はふつう一定の値に落ち着くが、コーシー分布（Cauchy distribution）ではそうならない。コーシー分布には平均が存在しないからである（Section 12.22）。多数の独立な効果の和は、中心極限定理（central limit theorem）により正規分布に近づく（Section 12.24）。そしてその正規性の中には、$n!$ に関するスターリング（Stirling）の公式が潜んでいる（Section 12.23）。最大値はまた違った振る舞いをする。最大値は $\ln n$ のように増大するが、そのばらつきはまったく増大しない（Section 12.25）。そして定数 $e$、$\pi$、$\gamma$ が、カップや切手、針や輪の問題に繰り返し現れた。

### 4. 確率の道具箱

| 手法 | 使った場面 |
|---|---|
| 標本空間（sample space）を書き出す | 条件付け（12.1）、ベルトラン（Bertrand）（12.3） |
| ベイズ（Bayes）の定理とオッズ（odds） | 基準率（12.2）、マルコフ連鎖の逆転（12.16） |
| 対称性 | 12.5、12.6、12.7、12.22 |
| 指示変数と線形性 | 12.4、12.7、12.10 |
| 第一段階解析 | Penney（12.8）、巣穴（12.16）、分枝過程（12.15） |
| 余事象（complement）と評価 | 公平な決定（12.9） |
| 期待値のための級数 | 切手と $e$（12.11） |
| パラメータ表示と最適化 | 秘書問題（12.12） |
| ゲーム理論的な推論 | 三つ巴の決闘（12.13）、混合戦略（mixed strategies）（12.14） |
| 終わりに至る経路を数える | マッチ箱（12.17） |
| まず分布関数（distribution function）を求める | 12.18、12.19、12.25 |
| 面積や積分としての確率 | ビュフォン（Buffon）（12.20）、折れた棒（12.21） |
| 正規近似（normal approximation） | スターリング（12.23）、中心極限定理（12.24） |

### この先へ

- 第 13 章では確率から統計へと移り、データから未知の量を推定することを扱う。まずは Section 13.1 から始める。
- Section 9.8、Section 9.9、Section 9.11 の数え上げの問題は、本章の組合せ論的な側面にあたる。
- マルコフ連鎖では第 7 章の線形代数を用い、分枝過程の不動点では Section 8.7 の力学系を用いる。

#### 大学入学前にさらに先へ進みたい人へ

- **Joseph Blitzstein & Jessica Hwang, *Introduction to Probability***（確率論入門）：すばらしい最初の一冊。オンラインで無料公開されており、講義動画もある。
- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***（確率論入門）：簡潔かつ厳密で、大学 1 年次の水準である。

- **Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability***（確率の難問 50 題）：古典的なパズルを完全な解答付きで収録している。
- **David Spiegelhalter, *The Art of Statistics***（統計の技法）および ***The Art of Uncertainty***（不確実性の技法）：現実世界における確率とリスクを扱う。

ラプラス（Laplace）は、確率とは計算に帰着された常識であると述べた。本章が示したのは、まさに常識がうまく働かないからこそ計算が必要になることが多いということ、そして優れた計算は単に数値を出すだけでなく、物事を説明してくれるということである。一つの対称性、一つの指示変数、うまく選んだ状態、あるいは一つの極限定理が、パズルを洞察へと変える。そしてそうした洞察こそが、大学の確率論の講義の土台となるのである。

# 「次の一歩」の解答

ここに載せるのは簡単な答えとヒントであり、完全な解答ではない。結果と鍵となる一歩を示すので、自分の解答の確認に使ってほしい。答えを見る前に、まずそれぞれの問題にきちんと取り組むこと。

## 12.1 正確な条件付け

1. (iv) と (v) のどちらでも、残りの $k-1$ 枚の円盤は、残っている $b+n-1$ 枚（そのうち $n-1$ 枚に番号がついている）から無作為に選ばれたものである。したがって、どちらも $\frac{(n-1)\binom{b}{k-2}}{\binom{b+n-1}{k-1}}$ に等しい。(vi) の答えは $\frac{\binom{n}{2}\binom{b}{k-2}}{\binom{b+n}{k}-\binom{b}{k}}$ である。$N=b+n$ とおくと、両者が一致するのは $(2N-nk)\binom{N-1}{k-1}=2k\binom{b}{k}$ のときに限る。これが起こるのは、$(b,n,k)=(2,4,3)$、$(3,3,4)$、$(6,11,3)$ のような特殊な場合か、自明な場合として $n=2$ ですべての円盤を取り出すときだけである。問題で与えられた値ではこれは成り立たない。

2. 2 人の子どもについて、同様に確からしい（性別、曜日）の組は $14^2=196$ 通りあり、そのうち少なくとも 1 人が火曜日生まれの男の子であるものは $196-13^2=27$ 通りである。そのうち 2 人とも男の子であるものは $7^2-6^2=13$ 通りである。よって、求める確率は $\frac{13}{27}$ である。

3. ドア 1 を選んだとする。車がドア 1 の後ろにあれば（確率 $\frac{1}{3}$）、選び直すと負ける。車がドア 2 または 3 の後ろにあれば、司会者はもう一方のヤギのドアを開けるしかなく、選び直すと勝つ。その確率は $\frac{2}{3}$ である。司会者が無作為にドアを開け、たまたまヤギが出た場合には、見たことを条件とすると、「自分のドアの後ろに車がある」と「もう一方の閉じたドアの後ろに車がある」は同様に確からしく、確率は $\frac{1}{2}$ である。

4. $\mathrm{P}(\geq 2 \mid \geq 1)=\frac{1-\mathrm{P}(0)-\mathrm{P}(1)}{1-\mathrm{P}(0)}\approx 0.370$ であるが、$\mathrm{P}(\geq 2 \mid \text{スペードのエース})=1-\binom{48}{12}/\binom{51}{12}\approx 0.561$ である。**どの**エースであるかを知ると、2 枚目のエースがある可能性が高くなる。

## 12.2 基準率の誤謬

1. 2 人がともに「遺体がある」と言う確率は、実際にある場合は $pq$、ない場合は $(1-p)(1-q)$ である。事前オッズ（prior odds）が 1 : 1 のとき、事後確

率（posterior probability）は $\frac{pq}{pq+(1-p)(1-q)} = \frac{pq}{1-p-q+2pq}$ である。後半については、「$A$ がある」は同様に確からしい 3 つの場合のうち 2 つで正しいので、$\mathrm{P}(\text{両方} \mid \text{両者の証言が} A) = \frac{pq}{2pq+(1-p)(1-q)}$ となる。

2. $0.9\pi > \frac{1}{11}(1-\pi)$、すなわち $\pi > \frac{10}{109} \approx 9.2\%$ であればよい。

3. AL の陽性結果が 1 回出るごとに、オッズは $\frac{0.9}{1/11} = 9.9$ 倍になる。事前オッズ $\frac{1}{99}$ から始めると、陽性 1 回の後はオッズ 0.1（確率 $\frac{1}{11}$）、2 回の後はオッズ 0.99（確率は約 0.497）、3 回の後はオッズ 9.8（確率は約 0.907）となる。

4. その病気をもつ 100 人のうち 99 人が陽性となり、もたない 999 900 人のうち約 9999 人が陽性となる。よって、病気の可能性があると告げられるのは約 10 100 人であり、そのうち実際に病気であるのは 99 人（約 1%）にすぎない。

## 12.3 「ランダム」とは何を意味するか？

1. 弦（chord）が内接正三角形の 1 辺 $\sqrt{3}a$ より長くなるのは、次のときである。遠い側の端点が、近い側の端点の反対側にある円周の 3 分の 1 の弧上にあるとき（$\frac{1}{3}$）。$O$ からの距離が $\frac{a}{2}$ より小さいとき（$\frac{1}{2}$）。中点が半径 $\frac{a}{2}$ の円の内部にあるとき（$\frac{1}{4}$）。

2. 中点が $C$ である弦は $OC$ に垂直なので、$C$ を通り角 $t = \frac{\pi}{2}$ をなす弦であり、$L(\frac{\pi}{2}) = \frac{4a}{3}\left(0 + \frac{1}{2}\sec^2\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4a}{3}$ となる。

3. 長さは $2\sqrt{a^2-d^2}$ であり、その平均（mean）は $\frac{2}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-d^2}\,\mathrm{d}d = \frac{2}{a}\cdot\frac{\pi a^2}{4} = \frac{\pi a}{2}$ である。

4. 端点を無作為に選ぶ場合：$\frac{2}{\pi\sqrt{4a^2-\ell^2}}$。距離を無作為に選ぶ場合：$\frac{\ell}{2a\sqrt{4a^2-\ell^2}}$。中点を無作為に選ぶ場合：$\frac{\ell}{2a^2}$。

## 12.4 二つずつなら独立、全体では独立でない

1. 展開すると $\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = (a-pq)(x_1-x_2)(y_1-y_2)$ となるので、$a = pq$ である。残りの 3 つのセルもこれに従って決まり、独立性（independence）が得られる。例：$(0,0)$ に確率 $\frac{1}{3}$、$(\pm1,\pm1)$ のそれぞれに確率 $\frac{1}{6}$ を置く。周辺分布（marginal distribution）はどちらも一様で $\mathrm{E}(AB) = 0$ であるが、$\mathrm{P}(A=0, B=1) = 0 \neq \frac{1}{9}$ である。

2. 組は 21 個あり、それぞれ確率 $\frac{1}{6}$ で一致し、その指示変数（indicator variable）は対ごとに独立（pairwise independent）である。よって、平均は 3.5、分散（variance）は $21\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} \approx 2.92$、標準偏差（standard deviation）は約 1.71 である。得点 7 は平均より標準偏差の約 2 倍だけ上にある。

3. 平均は $\binom{k}{2}\frac{1}{365}$ である。指示変数はさいころの場合とまったく同じように対ごとに独立なので、分散は $\binom{k}{2}\frac{1}{365}\cdot\frac{364}{365}$ である。（ただし、互いに独立（mutually independent）ではない。1,2 と 2,3 が一致すれば、1,3 も一致する。）

4. 同様に確からしい 8 個の結果をとり、$A = B = \{1,2,3,4\}$、$C = \{1,5,6,7\}$ とする。すると $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8}$ であるが、$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4}$ である。

### 12.5 最後の乗客の座席

1. すべての $n \geq 3$ について $\frac{1}{3}$ である。最後の席は $S_1$、$S_2$、$S_n$ のいずれかとなり、どの無作為な選択もこれら 3 つを対称に扱う。

2. $T_1$ が $S_1$ に座れば、誰も自分の席を追われない。$T_1$ が $S_3$ に座れば、$T_1$ と $T_3$ が追われる。$T_1$ が $S_2$ に座れば、$T_2$ が選ぶことになり、$S_1$ を選べば追われるのは 2 人、$S_3$ を選べば 3 人である。期待値（expectation）は $\frac{1}{3}\left(0+2+\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}$ であり、公式から得られる $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ と一致する。

3. $r \geq 2$ に対して $P_r = \frac{1}{2}$ とすると、$\frac{1}{n}\left(1+\frac{n-2}{2}\right) = \frac{1}{2}$ となるので、漸化式（recurrence relation）は $P_n = \frac{1}{2}$ と矛盾しない。

4. 最後に空いている席は必ず $S_1$ か $S_n$ である（それ以外の $S_k$ は、遅くとも $T_k$ が搭乗する時点までに埋まっている）。よって、それが $S_n$ でなければ $S_1$ である。

### 12.6 もう 1 枚の硬貨

1. Bob の最初の $n+1$ 回の投げを $H'$、最後の 1 回を $X$ とする。Bob が勝つのは、$H' > H_A$ のとき、または $H' = H_A$ かつ $X$ が表のときである。よって確率は $\mathrm{P}(H' > H_A) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(H' = H_A)$ であり、硬貨が 1 枚多い場合の結果から $\mathrm{P}(H' > H_A) = \frac{1}{2}$ である。

2. いいえ。$n = 0$ のとき、Bob は確率 $p$ で勝つ。鮮やかな証明は表と裏を入れ替えるが、それが対称性（symmetry）になるのは公平な硬貨の場合だけである。

3. $H_A = H_B$ となるのは、ちょうど $H_A + (\text{Bob の裏の回数}) = n$ のときであり、これは $\mathrm{B}(2n, \frac{1}{2})$ に従う確率変数が $n$ に等しいということである。値は $\frac{1}{2}$、$\frac{3}{8}$、$\frac{5}{16}$ である。

4. いいえ。6 の目は $p = \frac{1}{6}$ の硬貨のようなものである。$n = 0$ のとき確率は $\frac{1}{6}$ であり、一般に $\frac{1}{2}$ より小さい。

## 12.7 勝ち抜き戦で誰と誰が当たるか

1. 第 $k$ ラウンドには $2^{n-k}$ 試合があり、対称性から、各試合が $\binom{2^n}{2}$ 組のどの組の対戦になるかは同様に確からしい。大会全体の $2^n - 1$ 試合について足し合わせると、$\frac{2^n-1}{\binom{2^n}{2}} = \frac{2}{2^n}$ となる。
2. いいえ。固定された組み合わせ表に無作為に配置しても対称性は保たれ、同じ数え方が適用できる。
3. 第 $k$ ラウンドでの $X$ の対戦相手は $2^{k-1}$ 人のグループから出てきて、その各人がグループを勝ち抜く可能性は等しい。よって、$Y$ がその対戦相手である確率は $\frac{2^{k-1}}{2^n-1} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^n-1}$ であり、$n$ ラウンド全体での合計は $\frac{n}{2^n-1}$ である。
4. 試合数は $\binom{2n}{2} = n(2n-1)$ である。すべての組が対戦するので、確率は 1 である。

## 12.8 ペニーのゲーム

1. HHT が勝つのは、最初の 2 回が HH の場合だけである。そうでなければ HH が揃う前に T が出て、THH が先に現れるしかない。よって、HHT が勝つ確率は $\frac{1}{4}$ である。4 人全員で行う場合：HH の後は HHT が必ず勝ち、TT の後は TTH が必ず勝つ。HT と TH からは、HTT と THH の勝つ確率は $\frac{2}{3}$ と $\frac{1}{3}$（またはその逆）なので、各プレイヤーの勝つ確率は $\frac{1}{4} \cdot 1$ または $\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)$、すなわち $\frac{1}{4}$ である。TTH は確率 $\frac{2}{3}$ で THH に勝つ（小問 (i)）。
2. HH について：$e_0 = 1 + \frac{1}{2}e_{\mathrm{H}} + \frac{1}{2}e_0$ かつ $e_{\mathrm{H}} = 1 + \frac{1}{2}e_0$ より、$e_0 = 6$ である。HT について：いったん H が出たら T を待てばよく（平均 2 回）、最初の H までにも平均 2 回かかるので、4 である。
3. HHH と TTT は、THH と HTT に確率 $\frac{7}{8}$ で負ける。HHT と TTH は、THH と HTT に確率 $\frac{3}{4}$ で負ける。残りの 4 つ（HTH、HTT、THH、THT）は、それぞれ HHT、HHT、TTH、TTH に確率 $\frac{2}{3}$ で負ける。最もたやすく負かされるのは HHH と TTT である。
4. $A = \mathrm{HTT}$、$B = \mathrm{HHT}$ とすると、相関（correlation）は $AA = 4$、$AB = 0$、$BB = 4$、$BA = 2$ である。$B$ が勝つオッズは $(AA - AB) : (BB - BA) = 4 : 2$、すなわち確率 $\frac{2}{3}$ である。

## 12.9 偏った硬貨から公平な判定を

1. ラウンド数は幾何分布（geometric distribution）に従い、その平均は小問 (i) では $\frac{1}{p^2+q^2}$、フォン・ノイマン（von Neumann）の方法（HT または TH）では $\frac{1}{2pq}$ である。$p^2 + q^2 - 2pq = (p-q)^2$ なので、$p \neq \frac{1}{2}$ であればつねにフォン・ノイマ

ンの方法のほうが遅い。ただし、公平なのはこちらである。

2. フォン・ノイマンの方法を使って公平なビットを作る。それを 2 つずつ取り、00、01、10 で 3 つの選択肢を選び、11 ならやり直す。

3. 投げた結果を 1 回ずつ、二進展開（binary expansion）$\frac{1}{3} = 0.010101\ldots$ と比べる（H を 1、T を 0 と読む）。初めて異なる回で、投げた結果が桁の数字より**小さい**（1 に対して T）なら「表」、そうでなければ「裏」と宣言する。こうすると、ちょうど確率 $\frac{1}{3}$ で表となり、投げる回数は平均 2 回である。

4. 決着のつかないラウンドの後には、一方の面が 2 枚、もう一方の面が 1 枚出ており、この過程はこの 2 つの状態の上のマルコフ連鎖（Markov chain）になる。これを解くと $\mathrm{P}(\text{ホテル}) = \frac{p^3}{p^3+q^3}$ となり、$p = \frac{1}{2}$ のときは $\frac{1}{2}$ である。そのときは公平であるが、それ以外では公平でない。

## 12.10 ひもの端を結ぶ

1. 最初の結びで輪ができる確率は $\frac{1}{3}$ であり（他の 3 つの端のうち 1 つが同じひもの端である）、最後の結びでは必ず輪ができる。輪の数は確率 $\frac{1}{3}$ で 2、確率 $\frac{2}{3}$ で 1 であり、平均は $\frac{4}{3}$ である。

2. ひもが $k$ 本残っているとき、結びで輪ができない確率は $1 - \frac{1}{2k-1}$ である。積 $\prod_{k=2}^{n} \frac{2k-2}{2k-1}$ は $\frac{4^n}{2n\binom{2n}{n}}$ に等しく、これはおよそ $\frac{\sqrt{\pi n}}{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ である。

3. 要素 $1, 2, \ldots, n$ を順に挿入する。要素 $k$ は新しい巡回（cycle）を始める（確率 $\frac{1}{k}$）か、それより前の $k-1$ 個の要素のどれかの後に置かれる。指示変数を足し合わせると $H_n$ が得られる。

4. 順に行う結びのそれぞれについての輪の指示変数は、確率 $\frac{1}{2k-1}$ の独立な変数なので、分散は $\sum \frac{1}{2k-1}\left(1 - \frac{1}{2k-1}\right)$ である。また、$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$ である。

## 12.11 切手、カップ、そして $e$

1. $\sum_{k\geq 2} \frac{k-1}{k!} t^k = t\mathrm{e}^t - (\mathrm{e}^t - 1) = 1 + (t-1)\mathrm{e}^t$ である。微分すると $\mathrm{E}(N) = \mathrm{G}'(1) = \mathrm{e}$、$\mathrm{E}(N(N-1)) = \mathrm{G}''(1) = 2\mathrm{e}$ となるので、$\mathrm{Var}(N) = 3\mathrm{e} - \mathrm{e}^2$ である。

2. $\mathrm{P}(N = j)$ は $k = 0, \ldots, j-1$ に対する $\mathrm{P}(N > k)$ に現れる、すなわち $j$ 回現れる。ここで $\mathrm{P}(N > k) = \frac{1}{k!}$ なので、$\mathrm{E}(N) = \sum \frac{1}{k!} = \mathrm{e}$ である。

3. まったく変わらない。カップが 1 つなら、Jim は必ず正しく「当てる」。価格の期待値はやはり e である。

4. $\int_0^1 \frac{(1-u)^2}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{6}$ である。一般に、$u_k = u$ での切り口は $1-u$ 倍に縮小された $(k-1)$ 次元単体（simplex）なので、$V_k = V_{k-1}\int_0^1 (1-u)^{k-1}\,\mathrm{d}u = \frac{V_{k-1}}{k}$ である。

## 12.12 いつ探すのをやめるか

1. 一番大きいものが位置 $k \geq 2$ にあるとき、それが手に入るのは、ちょうど最初のアイスクリームが最初の $k-1$ 個の中で一番大きいときであり、その確率は $\frac{1}{k-1}$ である。$k$ について平均すると $\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}$ となり、$n=4$ のときこれは $\frac{11}{24}$ である。24 通りの並びを書き出すと、2 番目、3 番目、4 番目に大きいものが手に入る確率は、それぞれ $\frac{7}{24}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{12}$ である。

2. $r = 0,1,2,3$ 人を見送ると、確率はそれぞれ $\frac{1}{4}$、$\frac{11}{24}$、$\frac{5}{12}$、$\frac{1}{4}$ となる。よって、1 人を見送るのがよく、成功確率は $\frac{11}{24}$ である。

3. 最初の $n$ 人の中で最良の者が上位 2 人に入る確率は $\frac{n}{N} + \frac{n}{N}\cdot\frac{N-n}{N-1}$ であり、$n$ が小さいときは $\frac{n}{N}$ のほぼ 2 倍である。上位 2 人のどちらでもよいなら、決断する前に見る候補者の数を少なくしてよい。（この目標に対する最良の戦略の成功確率は約 0.57 である。）

4. $\mathrm{P}(r) = \frac{r}{N}\sum_{k=r}^{N-1}\frac{1}{k}$ とすると、$N=10$ では $r=2,3,4$ に対して 0.366、0.399、0.398 となり、$N=100$ では $r=36,37,38$ に対して 0.3710、0.3710、0.3708 となって、$r=37$ がわずかに上回る。

## 12.13 三つ巴の決闘

1. Algernon が外した場合、Bertie は Cuthbert を狙って投げる。当たれば（$\frac{3}{5}$）、Algernon と Bertie の対決で Algernon が先に投げることになり、Bertie が勝つ確率は $1 - \frac{2/5}{2/5+3/5-6/25} = \frac{9}{19}$ である。外せば Cuthbert が Bertie に当て、その後は Algernon が先に当てない限り（$\frac{3}{5}$）Cuthbert が勝つ。よって、Bertie が勝つ確率は $\frac{3}{5}\cdot\frac{9}{19} = \frac{135}{475}$、Cuthbert が勝つ確率は $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{114}{475}$ である。

2. すべての $a<1$ に対してである。わざと外すと $\frac{3}{5}\cdot\frac{a}{a+\frac{3}{5}-\frac{3}{5}a} + \frac{2}{5}a$ となる。Cuthbert に当てると $1 - \frac{3/5}{3/5+a-\frac{3}{5}a}$ となり（その後は Bertie が Cuthbert を狙って先に投げる）、これはつねに小さい。Bertie に当てると 0 である。

3. いいえ。Bertie が Algernon を狙って当てれば、次に Cuthbert が Bertie に当てる。外しても、やはり Cuthbert が Bertie に当てる。どちらにしても Bertie には何も残らず、Cuthbert を狙えば得られる $\frac{27}{95}$ に及ばない。

4. $p + (1-p)(1-r)p$ であり、これは等比級数全体の和 $\frac{p}{p+r-pr}$ より小さい。

### 12.14 混合戦略

1. $b = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ のとき $X = Y = Z = 0$ なので、B はどの戦略に対しても 0 を得る。$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ に対しては、A の得点の期待値は予想 1、2、3 に対してそれぞれ $-\frac{1}{3}$、0、$\frac{1}{3}$ なので、A はつねに 3 と予想すべきである。

2. 利得行列（payoff matrix）は対角成分が 0、それ以外が $\pm 1$ であり、3 つの戦略を巡回的に入れ替えても変わらないので、最適戦略は $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ である。問題では、差が 1 の場合と 2 の場合で罰点が異なるので、戦略は入れ替え可能ではない。

3. $X, Y, Z \geq 0$ かつ $X + 2Y + Z = 0$ ならば、3 つとも 0 である。これより $b_1 = b_3$、$b_2 = 2b_3$ が導かれる。

4. 今度は $X = -b_2 + 3b_3$、$Y = b_1 - b_3$、$Z = -3b_1 + b_2$ であり、$X + 3Y + Z = 0$ である。3 つすべてを 0 とおくと $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5})$ が得られる。

### 12.15 絶滅か爆発か

1. 絶滅確率（extinction probability）は、$[0, 1]$ における $s = (q + ps)^2$ の最小の根である。根は 1 と $\left(\frac{q}{p}\right)^2$ であり、後者が 1 より小さくなるのはちょうど $p > \frac{1}{2}$ のときである。

2. $X_{n-1}$ が与えられたとき、$X_n$ の平均は $2pX_{n-1}$、分散は $2pqX_{n-1}$ なので、$\mathrm{Var}(X_n) = \mathrm{E}(2pqX_{n-1}) + (2p)^2\mathrm{Var}(X_{n-1})$ である。$p = \frac{1}{2}$ のとき、$\mathrm{Var}(X_n) = \mathrm{Var}(X_{n-1}) + \frac{1}{2}$ なので、$\mathrm{Var}(X_n) = \frac{n}{2}$ である。

3. 第 $n$ 世代までに絶滅するとは、第 1 世代の各粒子の系統が $n - 1$ 世代以内に途絶えることである。$p = \frac{3}{4}$ のとき、$e_1 = 0.0625$、$e_2 \approx 0.0881$、$e_3 \approx 0.0999$ であり、$\frac{1}{9} \approx 0.111$ に向かって増加する。

4. $s = \frac{1}{4}(1 + s + s^2 + s^3)$ は $(s - 1)(s^2 + 2s - 1) = 0$ と因数分解できるので、絶滅確率は $\sqrt{2} - 1 \approx 0.414$ である。

### 12.16 マルコフ連鎖を順向きにも逆向きにも

1. 対称性から $p_B = p_D$ であり、さらに $p_A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}p_B$、$p_B = \frac{1}{3}p_A + \frac{1}{3}p_C$、$p_C = \frac{2}{3}p_B$ である。よって $p_A = \frac{7}{15}$ となる。$A$ から出発して $C$ を訪れずに $A$ で抜け出す確率は、$x_A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_B$ かつ $x_B = \frac{1}{3}x_A$ より、$x_A = \frac{3}{7}$ である。条件付き確率は $\frac{3/7}{7/15} = \frac{45}{49}$ である。

2. 第 1 行に $P$ を掛けると $(0.19, 0.33, 0.48)$ となる。

3. トレース（trace）は 1.3、行列式（determinant）は 0.02 であり、1 は固有値（eigenvalue）である（各行の和が 1 だから）。残りの 2 つは和が 0.3、積が 0.02 な

ので、0.2 と 0.1 である。

4. $a_1 p_{12} = \frac{1}{20}$ であるが $a_2 p_{21} = \frac{1}{15}$ なので、この連鎖は可逆（reversible）ではない。時間を逆向きにたどると、推移確率が異なる（小問 (iii) の $q_{ij}$ は $p_{ij}$ と異なる）。

### 12.17 バナッハのマッチ箱

1. 2 回目に手を伸ばしたのが 1 回目と同じ種類であれば、そこで空であることに気づく（$N = 2$）。そうでなければもう一方のお菓子を取り、3 回目に手を伸ばしたときに空の袋に気づく。よって $N = 2$ または 3 であり、確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ である。

2. $n = 1$ のとき：$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$。$n = 2$ のとき：$\frac{6}{16} + \frac{6}{16} + \frac{4}{16} = 1$。

3. $\binom{2n-1}{n} 2^{-(2n-1)} = \frac{1}{2}\binom{2n}{n} \cdot 2 \cdot 4^{-n} = \binom{2n}{n} 4^{-n}$ である。

4. 残っているタフィーとミントの個数について第 1 段階で場合分けする再帰を立てると、$\frac{64}{81} \approx 0.79$ が得られる。

### 12.18 無記憶性

1. $\mathrm{P}(\min > t) = \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}$ である。次のバスまでの待ち時間は、1 分あたりの率が $\frac{1}{15} + \frac{1}{30} = \frac{1}{10}$ の指数分布（exponential distribution）に従うので、その中央値（median）は $10 \ln 2 \approx 6.9$ 分である。

2. $\mathrm{P}(Y \geq k) = (1-p)^k$ なので、比は $(1-p)^n$ である。

3. $t$ を含む間隔は、直前のバスまでさかのぼる時間と次のバスまでの時間からなり、（$t$ が大きいとき）どちらも平均 $\frac{1}{\lambda}$ の指数分布に従うので、その長さの期待値は $\frac{2}{\lambda}$ である。長い間隔ほど、与えられた時刻を含みやすい。

4. $[0,1]$ 上で $\frac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda z}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}$ である。$\lambda = 1$ のときは約 1.58 から 0.58 へゆるやかに減少し、$\lambda = 5$ のときは 0 の近くに集中して、約 5.03 から 0.03 へ減少する。

### 12.19 平面上のランダムな点

1. $1 - \mathrm{e}^{-\pi k y^2} = \frac{1}{2}$ より中央値は $\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi k}} \approx \frac{0.470}{\sqrt{k}}$ であり、平均 $\frac{1}{2\sqrt{k}}$ より少し小さい。

2. $\mathrm{P}(Y_2 > y) = \mathrm{e}^{-\pi k y^2}(1 + \pi k y^2)$ なので、確率密度関数（probability density function）は $2\pi^2 k^2 y^3 \mathrm{e}^{-\pi k y^2}$ である。

3. 極座標（polar coordinates）では、$R$ の確率密度関数は $\frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-r^2/(2\sigma^2)} \cdot 2\pi r$ である。これは $\sigma^2 = \frac{1}{2\pi k}$ のときスーパーマーケットの分布と一致する。

4. $k = 4 \times 10^{-4}$ per m$^2$ のとき、完全に無作為な配置からは平均 $\frac{1}{2\sqrt{k}} = 25\,\mathrm{m}$ が予測される。観測された 35 m はこれより大きいので、木は密集しているのではなく、（競合によって）間隔をあけて並んでいることが示唆される。

### 12.20 ビュフォンの針

1. 針を短い断片に切り分ける。交差回数の期待値は加法的であり、各断片は長さに比例して寄与するので、$a$ がいくつであっても合計は $\frac{2a}{\pi b}$ である。
2. 同じ加法性（ビュフォン（Buffon）のヌードル）により、やはり $\frac{2a}{\pi b}$ である。
3. 中心はどの辺からも $r$ 以上離れていなければならないので、$\frac{(s-2r)^2}{s^2}$ である。
4. $\frac{1808}{3408} \approx \frac{5}{3\pi}$ より $\pi \approx \frac{5\times 3408}{3\times 1808} = \frac{17\,040}{5424} = \frac{355}{113}$ となる。出来すぎていて怪しい。

### 12.21 棒を折る

1. 三角形ができるには、どの断片も $\frac{1}{2}$ より短くなければならない。折る点を表す単位正方形の中で、これは面積 $\frac{1}{4}$ の領域を切り取る。
2. 最初に折る点が $x < \frac{1}{2}$ にあり（もう一方の場合も対称である）、長いほうの断片 $1-x$ を一様に折るとする。新しい 2 つの断片がどちらも $\frac{1}{2}$ より短くなければならず、その確率は $\frac{x}{1-x}$ である。よって答えは $2\int_0^{1/2} \frac{x}{1-x}\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1$ である。
3. $C$ における角が鈍角になるのは $(2-x-y)^2 > x^2 + y^2$、すなわち $y < \frac{2-2x}{2-x}$ のときである。この曲線と $x+y=1$ の間の面積は $\frac{3}{2} - 2\ln 2$ なので、確率は $3 - 4\ln 2$ であり、$B$ の場合と同じである。これは偶然ではない。3 辺はそれぞれ 1 以下で和が 2 となるように一様に分布しているので、互いに入れ替え可能である。よって $\mathrm{P}(\text{鈍角}) = 9 - 12\ln 2 \approx 0.68$ である。
4. 包除原理（inclusion–exclusion principle）により、最長の断片 $M$ について $\mathrm{P}(M > m) = 3(1-m)^2 - 3(1-2m)_+^2 + (1-3m)_+^2$ が成り立つ。ここで $x_+ = \max(x, 0)$ である。$[0,1]$ で積分すると $\mathrm{E}(M) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}$ が得られる。

### 12.22 平均をもたない分布

1. $\mathrm{P}(\tan\Theta \le k) = \frac{1}{\pi}\left(\tan^{-1} k + \frac{\pi}{2}\right)$ であり、微分すると $\frac{1}{\pi(1+k^2)}$ が得られる。
2. $U$ と $V$ を入れ替えても回転対称な確率密度関数は変わらないので、$\frac{V}{U}$ は $\frac{U}{V}$ と同じ分布に従う。
3. 確率密度関数は対称なので中央値は 0 であり、$\mathrm{P}(C \le 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1} 1 = \frac{3}{4}$ である。

4. $\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-r^2/2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ であり、$s = r^2$ とおくとこれは $\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}\theta \cdot \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-s/2}\,\mathrm{d}s$ となる。角は一様分布に従い、$R^2$ は平均 2 の指数分布に従い、両者は独立である。

### 12.23 確率から導くスターリングの公式

1. $\sqrt{20\pi}(10/\mathrm{e})^{10} \approx 3\,598\,696$（約 0.8% 小さい）、$\sqrt{40\pi}(20/\mathrm{e})^{20} \approx 2.4228 \times 10^{18}$（約 0.4% 小さい）である。
2. $\frac{(2n)!}{(n!)^2} \approx \frac{\sqrt{4\pi n}(2n/\mathrm{e})^{2n}}{2\pi n(n/\mathrm{e})^{2n}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$ である。
3. $100\log_{10}\frac{100}{\mathrm{e}} + \frac{1}{2}\log_{10}(200\pi) \approx 157.97$ なので、100! は 158 桁である。
4. $\binom{1000}{500}2^{-1000} \approx \frac{1}{\sqrt{500\pi}} \approx 0.0252$ である。

### 12.24 中心極限定理

1. 畳み込み（convolution）を計算すると $\frac{1}{4}\int \mathrm{e}^{-|x|-|y-x|}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(1+|y|)\mathrm{e}^{-|y|}$ となる。分散は $2+2=4$ である。
2. $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta X}) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\theta/2} + \mathrm{e}^{-\theta/2}) = \cosh\frac{\theta}{2}$ である。標準化された和 $\frac{2}{\sqrt{n}}\sum X_i$ の積率母関数（moment generating function）は $\cosh^n\frac{\theta}{\sqrt{n}}$ であり、その対数は $n\ln\bigl(1 + \frac{\theta^2}{2n} + \cdots\bigr) \to \frac{\theta^2}{2}$ となる。
3. $Y$ を独立な 2 つの $\Gamma(82,1)$ 確率変数の差として表し、数値積分すると $\mathrm{P}(|Y| \geq 25) \approx 0.051$ が得られる。正規近似（normal approximation）は非常によい。
4. 積率母関数は存在せず、平均さえ存在しない。実際、$n$ 個の独立なコーシー分布（Cauchy distribution）に従う変数の平均は、それ自身がコーシー分布に従う。平均をとっても、まったく集中しないのである。

### 12.25 多数の中の最大値

1. $n$ 個の寿命のうち最初の 1 つは平均時間 $\frac{1}{n\lambda}$ の後に尽きる。その後は $n-1$ 個が残り、新たに始まったのと同じ状況になる。以下同様である。よって $\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{\lambda}\bigl(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + 1\bigr)$ である。
2. $\mathrm{P}(\min > t) = (\mathrm{e}^{-\lambda t})^n = \mathrm{e}^{-n\lambda t}$ である。
3. $(1-\mathrm{e}^{-\lambda y})^n = \frac{1}{2}$ より $\lambda y = -\ln(1-2^{-1/n})$ である。$n=10$ のときこれは 2.704 であり、近似値 $\ln 10 - \ln\ln 2 \approx 2.669$ と比べられる。
4. $\mathrm{P}(M \leq m) = m^n$ なので、$\mathrm{P}\bigl(n(1-M) > s\bigr) = \bigl(1-\frac{s}{n}\bigr)^n \to \mathrm{e}^{-s}$ である。これはワイブル型（Weibull type）である。変数は上に有界であり、最大値はその上界に押し寄せるように集まる。

章

# 13

# 世界における統計とランダムネス

確率はモデルからデータへと進む。統計はデータから世界へと引き返す。

この章の内容


13.1 見出しを読み解く STEP I 1992
13.2 ハタネズミを数える STEP II 2000
13.3 ドイツ戦車問題 STEP III 1998
13.4 平均か中央値か？ STEP II 2000
13.5 答えにくい質問をする STEP II 2023
13.6 積み重なる誤差 STEP II 1993
13.7 相関をつくり出す STEP III 2010
A 演習問題の答え p. 1083

# データから学ぶ

> すべてのモデルは間違っている。だが、役に立つものもある。
>
> — ジョージ・ボックス（George Box）、統計学者

確率（probability）では、さいころにどのような細工がされているかを知ったうえで、何が起こるかを問う。統計学（statistics）では、何が起こったかを見たうえで、さいころにどのような細工がされているはずかを問う。確率は原因から結果へと推論し、統計学は結果から原因へと遡って推論する。人口の推定、世論調査、臨床試験、科学的な測定は、いずれも統計的推測（statistical inference）である。すなわち、限られた、ノイズを含むデータから世界についての結論を引き出すことである。

統計学は、数学の大部分と比べると若い学問である。その現代的な形は、20 世紀初頭にカール・ピアソン（Karl Pearson）、ロナルド・フィッシャー（Ronald Fisher）、イェジ・ネイマン（Jerzy Neyman）らによって作られたが、その動機はしばしば実際的な問題にあった。ビールの醸造（$t$ 検定（$t$-test）はギネスの醸造所で考案された）、作物の栽培、医薬品の試験などである。データが爆発的に増えた今日、統計学とその近縁である機械学習（machine learning）は、数学の応用のなかでも最も重要なものの一つとなっている。

### なぜ統計学が重要なのか

医薬品、公衆衛生、経済政策、気候、司法に関する判断は、いずれも統計的な根拠に基づいている。それを読み誤れば、現実に影響が及ぶ。偽陽性（false positive）に怯える患者（Section 12.2）、偶然の変動に基づいた政策（Section 13.1）、小さな誤差が積み重なっていくコンピュータシステム（Section 13.6）などがその例である。データから何がわかり何がわからないのか、そしてどんな結論にもどれほどの不確かさがあるのかを理解することは、見識ある市民であるための条件の一つであり、科学者、医師、技術者、経済学者にとっては職業上欠かせないものである。

### 大学で出会うもの

統計学の最初の講義では、推定（estimation、未知の量のよい推定値を求め、その精度を述べること）、仮説検定（hypothesis testing、データが仮説と整合するかどうかを判

断すること）、信頼区間（confidence interval）、回帰（regression、ある変数を他の変数と関係づけること）、そして実験計画（design of experiments）と標本調査の設計を扱う。中心となる考え方は、**標本分布**（sampling distribution、推定量は確率変数（random variable）である）、**偏り**（bias）と**分散**（variance）、そして**尤度**（likelihood）である。さらに進んだ講義では、ベイズ推論（Bayesian inference）、多変量解析（multivariate analysis）、時系列（time series）、そして機械学習の手法が加わる。機械学習とは、巨大な規模で行う統計学にほかならない。

### この章を貫く問い

**三つの大きな問い**

1. **それは本物か、それともノイズか**。偶然によってどの程度の変動が予想されるのか。そして、変化を真剣に受け止めるべきなのはどのようなときか。
2. **どのように推定すべきか**。データが与えられたとき、未知の量の最良の推定値は何か。また、異なる方法をどのように比較すればよいか。
3. **ランダムネスはどのようにデータに入り込むのか**。データの集め方、保護の仕方、処理の仕方は、結論にどのような影響を与えるのか。

本章は、新聞の統計を批判的に読むこと（Section 13.1）から始まり、続いて推定へと進む。捕獲再捕獲法（capture–recapture）によるハタネズミの個体数の推定、通し番号からの総数の推定、そして平均（mean）と中央値（median）の比較である。最後に、ランダムネスがどのようにデータに入り込むかについての三つの問題を扱う。プライバシーを守るためのランダム化された調査、蓄積したり打ち消し合ったりする丸め誤差（rounding error）、そして指定された相関（correlation）をもつ変数の構成である。

### 本章で扱う考え方

| § | 題材 | 考え方 |
|---|---|---|
| 13.1 | 統計を読む | 率、自然な変動、傾向 |
| 13.2 | 捕獲再捕獲法 | 最尤法（maximum likelihood） |
| 13.3 | 通し番号 | 偏り、分散、十分性（sufficiency） |
| 13.4 | 中心の推定 | 効率（efficiency）と頑健性（robustness） |
| 13.5 | ランダム化回答（randomised response） | 混合分布（mixture）と全分散（total variance） |
| 13.6 | 丸め誤差 | 系統誤差（systematic error）と偶然誤差（random error） |
| 13.7 | 相関 | コレスキー（Cholesky）による構成 |

Section 13.7 では共分散（covariance）と相関を用いる。これらは 2019 年に STEP の出題範囲から外されたが、この節では必要な事項を説明している。

### 本章の読み方

すべての推定量は確率変数であることを忘れないでほしい。データが異なる結果になっていれば、推定値も異なっていたはずである。本章の各手法について、多数回の繰り返しのもとでその分布がどうなるかを問うてみよ。平均的に正しいか、そしてどれほどばらつくか。このただ一つの問いこそが、統計的な考え方の核心である。

# 13.1 見出しを読み解く

**問題**

**STEP I 1992、問 14**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/92-s1-q14`

## 導入

統計学（statistics）とはデータから学ぶための科学であり、その最初の教訓は「数字はそれ自体では何も語らない」ということである。「6 倍安全」「憂慮すべき増加」「惨事が増えている」。見出しは毎日のように数字を主張に変えている。そしてその主張は、しばしば誤っている。数字そのものが偽りだからではない。比較の相手を間違えていたり、ごく普通の偶然による変動を傾向（trend）と取り違えたりしているからである。

この問題には式がまったく含まれておらず、STEP としては珍しい。求められているのは、統計学者のように考えることである。それぞれの見出しを正当化するには何を知る必要があるのか。偶然だけでどの程度の変動が見込まれるのか。答えにはポアソン分布（Poisson distribution）（Section 12.18）を用いる。そしてここでの推論は、この章の残りすべての土台となる。

## 取りかかる前に

? **考えてみよう** 死亡が一定の割合で、互いに独立かつランダムに起こるとすれば、年間の総数はどの程度ばらつくはずだろうか。平均が年 1080 人であるとき、年ごとの典型的なずれはどれくらいか。

互いに独立な稀な事象の回数は、近似的にポアソン分布に従う。平均 $\mu$ のポアソン分布に従う回数の分散（variance）は $\mu$、標準偏差（standard deviation）は $\sqrt{\mu}$ である。$\mu = 1080$ のとき標準偏差はおよそ 33 であり、年間の総数がおよそ 1015 から 1145 の間にあれば、特に目立つことではない。

## 順を追って解く

### 段階 1　「歩くより飛行機のほうが 6 倍安全」

> **考えてみよう**　歩行者の死者は年 1080 人、航空機事故の死者は年 180 人である。正確には、何が 6 倍なのか。

この見出しは死者の総数を比べている。しかし安全性とは**リスク**（risk）、すなわち曝露の単位あたりの死者数の問題である。ほとんどの人は毎日歩くが、飛行機に乗る人は比較的少なく、乗るとしてもたまにである。公正な比較には、移動距離 1 キロメートルあたり、移動時間 1 時間あたり、あるいは 1 回の移動あたりの死者数を用いるべきであり、これらはまったく異なる答えを与えうる（空の旅は 1 キロメートルあたりでは非常に安全だが、1 回の移動あたりではそれほど際立って安全ではない。航空機事故の死者の大部分は離陸時と着陸時に生じるからである）。与えられた数値からは、相対的な安全性について何も「証明」できない。また、「道路交通事故で死亡した歩行者」は狭い区分であり、道路での死者全体はこれよりはるかに多い。

### 段階 2　「空はより安全に：1990 年の死者はわずか 125 人」

> **考えてみよう**　航空機事故による死亡は、互いに独立な稀な事象のようなものだろうか。年間の総数はどの程度ばらつくと考えられるか。

航空機事故による死亡はまとまって起こる。1 回の墜落で数百人が亡くなることもある。そのため年間の総数は主に墜落の回数で決まり、その回数は小さいので、総数は年ごとに極めて大きくばらつく。平均 180 人に対して 125 人という 1 年があっても、何も変化していないこととまったく矛盾しない。墜落がもう 1 回あれば、数字はがらりと変わっていたはずである。1 年分のデータで傾向を示すことはできない。

### 段階 3　「道路の惨事が増加：火曜日に 7 人死亡」

> **考えてみよう**　平均すると、1 日に何人の歩行者が亡くなっているか。1 日の死者数がポアソン分布に従うなら、1 日に 7 人以上という日はどのくらいの頻度で見られるか。

平均は 1 日あたり $\frac{1080}{365} \approx 2.96$ 人の歩行者の死亡である。1 日の回数がこの平均のポアソン分布に従うなら $P(\geq 7) \approx 0.031$ であり、純粋に偶然だけで、1 年のうちおよそ 11 日は歩行者の死者が 7 人以上となる。（しかも「道路の惨事」にはおそらく運転者や同乗者も含まれるので、1 日に道路で 7 人が亡くなることはなおさら目立つことではない。）1 日だけでは傾向について何もわからない。この見出しは、ばらつきの大きい系

列から極端な値を拾い出しており、典型的な誤りである。

### 段階 4 「憂慮すべき増加：1990 年の歩行者の死者は 1350 人」

> **考えてみよう** 1350 をポアソン分布の標準偏差と比べてみよ。これは単なる偶然だろうか。そうでないなら、ほかに何が説明になりうるか。そしてそれは「憂慮すべき増加」と言うに値するか。

ここが本題である。一定のポアソンモデルのもとでは、1350 は平均 1080 より 270 大きく、これは標準偏差のおよそ 8 倍にあたる。偶然である可能性は極めて低い。したがって、何かが変化したと考えられる。しかし、この見出しはいくつかの点で依然として言い過ぎである。

- **平均に隠された傾向。**1080 という数値は 16 年間の平均である。もし死者数が 1974 年のおよそ 900 人から 1989 年のおよそ 1260 人まで着実に増えていたとしても、平均はやはり 1080 となり、1990 年の 1350 は既存の傾向がそのまま続いただけであって、突然の「憂慮すべき」増加ではない（図 13.1.1）。年ごとの数値が必要である。
- **曝露。**人口の増加、歩く機会の増加、交通量の増加、あるいは高齢化は、いずれも 1 回の移動あたりで道路が危険になっていなくても死者を増やす。1 人あたり、あるいは歩行距離 1 キロメートルあたりの割合こそが適切な尺度である。
- **定義。**死亡の記録方法や分類方法の変更（たとえば、事故から何日以内の死亡を数えるか）によって、数値が跳ね上がることがある。
- **過分散**（*over-dispersion*）。現実の年間の回数は、天候や経済活動などの条件が変動するため、ポアソンモデルが示すよりも大きくばらつく。「標準偏差の 8 倍」はある程度慎重に扱うべきである。

増加はおそらく本物である。しかしそれが憂慮すべきものかどうか、そして何が原因かを判断するには、さらにデータが必要である。

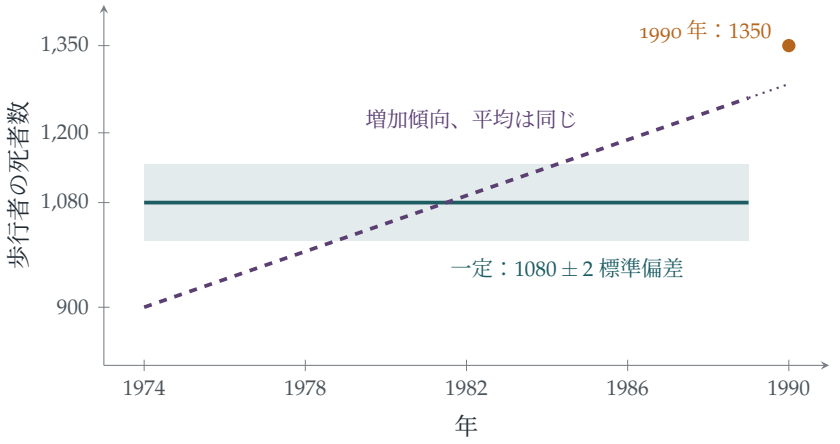



**図 13.1.1**　16 年間の平均がともに 1080 である、まったく異なる 2 つの推移。死者数が一定であった場合（ティール色、帯はポアソン分布による典型的な変動の範囲）、1990 年の 1350 は劇的な跳ね上がりである。着実に増加していた場合（プラム色）、1350 は傾向をわずかに上回るにすぎない。平均だけではこの 2 つを区別できない。

## 振り返り

- **同じ条件のものどうしを比べる。**リスクには分母が必要である。1 人あたり、1 キロメートルあたり、あるいは 1 回の移動あたりの死者数である。
- **自然な変動を知る。**ポアソン分布によるばらつき、そしてまとまって起こる事象のはるかに大きなばらつきを知っていれば、どのような変化が注目に値するかがわかる。
- **平均は傾向を隠す。**ただ 1 つの要約値では、ある量が時間とともにどう変化してきたかを記述できない。

## 背後にある数学

### シグナルとノイズ

統計学の問いはすべて、突き詰めれば**シグナル**（signal、本当の効果や傾向）を**ノイズ**（noise、ランダムな変動）から切り分ける問題である。ポアソンモデルは、互いに独立な事象の回数に含まれるノイズを測る物差しを与える。すなわち標準偏差 $\sqrt{\mu}$ である。稀な事象は**相対的な**変動が大きい。9 という回数はおよそ ±3、つまりその大きさの 3 分の 1 ほど変動するが、10 000 という回数の変動はわずか 1% ほどである。小さな

数（1日の死者数、1年の墜落回数）がしばしば過大に解釈されるのも、小さな町でのがんの「集積」がたいてい偶然だと判明するのも、このためである。

### 平均への回帰

さらにもう1つ落とし穴がある。交通安全カメラは、直前の1年間に異常に事故が多かった場所に設置されることが多い。翌年に事故が減ると、カメラの手柄とされる。しかし異常に悪い年の後には、いずれにせよもっと普通の年が続く可能性が高い。これが**平均への回帰**（regression to the mean）であり、1880年代にゴルトン（Galton）が初めて記述したものである。カメラの効果を平均への回帰から切り分けるには、カメラが設置されなかった同様の場所と比較する必要がある。これが対照実験（controlled experiment）の背後にある考え方である。

#### ナイチンゲールの統計

クリミア戦争での看護師として名高いナイチンゲール（Florence Nightingale）は、先駆的な統計学者でもあった。1858年の彼女の「鶏頭図（rose diagram）」は、負傷よりも予防可能な病気で亡くなる兵士のほうがはるかに多いことを示し、政府を説得して陸軍の衛生制度を改革させた。彼女は生の総数ではなく割合（兵士1000人あたりの年間死者数）を用いること、そして同じ条件のものどうしを比べることを強く主張した。これはまさにこの問題が問うている点である。彼女は王立統計学会（Royal Statistical Society）のフェローに選ばれた最初の女性であった。

## 思考のスキル

#### 「何と比べて？」と問う

**統計的な主張を受け入れる前に、何と比べているのか、分母は何か、偶然だけでどの程度の変動が見込まれるのかを問え。**

大学の統計学の講義では、これらの問いが精密な手法へと形を変える。仮説検定（hypothesis test）は観測結果が偶然と矛盾しないかどうかを問い、信頼区間（confidence interval）はある量がどれほど精密に測定されたかを示し、実験計画（design of experiments）は比較が公正であることを保証する。

## 次の一歩

1. **ポアソン分布の裾。** $X$ が平均 2.96 のポアソン分布に従うとき、$\mathrm{P}(X \geq 7) \approx 0.031$ であることを確かめよ。歩行者の死者が 9 人以上となる日は、1 年に何日あると期待されるか。

2. **まとまって起こる死亡。** 航空機の墜落が年 1.2 回のポアソン過程（Poisson process）として起こり、1 回の墜落ごとに 150 人が亡くなるとする。航空機事故による年間死者数の平均と標準偏差を求めよ。死者が 125 人以下という年は珍しいか。死者がちょうど 125 人という年はありうるか。

3. **有意な増加か。** 1974–1989 年の数値が $1080 \pm 33$ で一定であったとすると、ある 1 年に 1350 人以上となる確率を（正規近似（normal approximation）を用いて）求めよ。

4. **よりよい見出しを書く。** 4 つの見出しそれぞれについて、データが実際に裏づける見出しを書け。

## さらに学ぶために

- **David Spiegelhalter, *The Art of Statistics***（Pelican）。データから学ぶ方法を、ニュースからの多くの例とともに解説する。
- **Tim Harford, *How to Make the World Add Up***（Bridge Street）。メディアに現れる数字について考えるための 10 のルール。
- **Darrell Huff, *How to Lie with Statistics***（Penguin）。1954 年に書かれた短い古典で、今なお色あせない。

# 13.2 ハタネズミを数える

**問題**

**STEP II 2000、問 13**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/00-s2-q13`

## 導入

ある島にハタネズミは何匹すんでいるだろうか。すべてを数えることはできない。隠れるし、動き回るし、見た目もよく似ているからである。しかし、何匹かを捕まえて印をつけ、放してから、もう一度何匹かを捕まえることはできる。200 匹に印をつけ、2 回目に捕まえた 200 匹のうち 11 匹に印があったとすれば、個体群のおよそ $\frac{11}{200}$ に印がついていることになるので、個体数は約 $200 \times \frac{200}{11} \approx 3636$ である。

この**標識再捕獲法**（capture–recapture）は、魚、鳥、クジラの個体数の推定に用いられるほか、薬物使用者、ホームレスの人々、戦争の犠牲者の数など、完全には数えきれないあらゆる集団の規模の推定にも使われている。この問題は、直観的な推定値を**最尤法**（maximum likelihood）の原理によって確かな根拠の上に置くものである。最尤法は統計的推定において最も重要な考え方であり、「観測されたデータが最も起こりやすくなるように未知の値を選ぶ」というものである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 個体群には $N$ 匹のハタネズミがいて、そのうち 200 匹に印がついている。無作為に 200 匹の標本を取り出す。ちょうど 11 匹に印がついている確率はいくらか。

印のついた 200 匹から 11 匹を、印のない $N - 200$ 匹から 189 匹を選ぶ。標本は全部で

$\binom{N}{200}$ 通りあり、どれも同様に確からしいので、

$$p_N = \frac{\binom{200}{11}\binom{N-200}{189}}{\binom{N}{200}}.$$

これが**超幾何分布**（hypergeometric distribution）である。

## 順を追って解く

### 段階 1　尤度

$N$ を含む二項係数（binomial coefficients）を書き下すと

$$\binom{N-200}{189} = \frac{(N-200)!}{189!\,(N-389)!}, \qquad \binom{N}{200} = \frac{N!}{200!\,(N-200)!},$$

であるから

$$p_N = \binom{200}{11}\frac{200!}{189!}\cdot\frac{((N-200)!)^2}{N!\,(N-389)!} = k\frac{((N-200)!)^2}{N!\,(N-389)!}. \qquad \blacksquare$$

データを固定し、未知数 $N$ の関数とみなしたとき、$p_N$ を**尤度**（likelihood）という。

### 段階 2　整数についての最大化

> **考えてみよう**　$N$ は整数なので、微分を使うのは扱いにくい。代わりに $p_{N+1}$ と $p_N$ を比べよう。その比が 1 より大きくなるのはどのようなときか。

階乗のほとんどは約分されて

$$\frac{p_{N+1}}{p_N} = \frac{(N-199)^2}{(N+1)(N-388)}.$$

これが 1 を超えるのは $(N-199)^2 > (N+1)(N-388)$、すなわち $N^2 - 398N + 39601 > N^2 - 387N - 388$、つまり $11N < 39989$、$N < 3635.4$ のときである。したがって $p_N$ は $N = 3636$ まで増加し、その後は減少する。よって最尤推定値（maximum likelihood estimate）は

$$\hat{N} = 3636. \qquad \blacksquare$$

これは $\frac{200\times 200}{11} = 3636.4$ の整数部分であり、直観的な推定値と一致する。

### 段階 3　3 回目の標本

2 回目の標本を取ったあと、その中の印のない 189 匹にも印をつけるので、印のついたハタネズミは 389 匹になる。$N = 3636$ とすると、印のないものは $3636 - 389 = 3247$

匹である。3 回目に取り出す 200 匹の標本に印のついたものがちょうど $j$ 匹含まれる確率は

$$\frac{\binom{389}{j}\binom{3247}{200-j}}{\binom{3636}{200}}.$$

$j = 0, 1, \ldots, 200$ についてのこれらの確率の和は 1 でなければならず、これにより求める恒等式が得られる。 ■

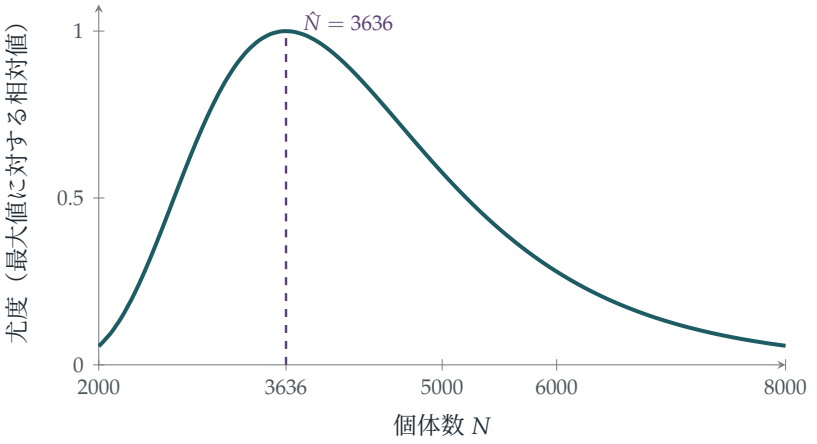



**図 13.2.1** 2 回目の標本で印のついたハタネズミが 11 匹見つかる尤度 $p_N$ を、個体数 $N$ の関数として、最大値が 1 になるように縮尺したもの。$N = 3636$ で最大となるが、山は幅広く非対称である。およそ 2500 から 6500 までの個体数はいずれもデータとそれなりに整合している。

## 振り返り

- **未知数の関数としてのデータの確率。**尤度は通常の見方を逆転させる。データを固定し、パラメータを動かすのである。
- **離散的な最大化には比を使う。**隣り合う項を比較することで、整数を変数とする関数の最大値の位置を突き止めた。
- **確率の和は 1 になる。**すべての結果について分布の和をとることで、組合せの恒等式（ヴァンデルモンド（Vandermonde）の恒等式（Vandermonde's identity））を証明した。

## 背後にある数学

### 最尤法

**最尤法**の原理は、1910 年代から 1920 年代にかけてフィッシャー（Ronald Fisher）が発展させたもので、「未知のパラメータを、観測されたデータが最も起こりやすくなる値によって推定せよ」というものである。これは群を抜いて広く使われている推定法であり、データへの曲線のあてはめから、機械学習（machine learning）におけるニューラルネットワーク（neural networks）の訓練にまで及ぶ。後者の「損失関数」（loss functions）は、たいてい対数尤度にマイナスをつけたものである。フィッシャーは、モデルが性質のよいもの（日常的なモデルの大半で成り立つ条件を満たすもの）であれば、標本が大きいとき最尤推定値は近似的に正規分布（normal distribution）に従い、およそ妥当な推定量（estimator）の中で最も精度が高いことを示した。ただし重要な例外もある。次節（Section 13.3）では、未知数がとりうる最大の値、すなわち分布の端点であり、そこでは最尤推定値の振る舞いはまったく異なる。その誤差は近似的に正規分布に従わず、$\frac{1}{\sqrt{n}}$ ではなく $\frac{1}{n}$ のように小さくなっていくのである。

### 推定はどれほど精確か

図 13.2.1 は尤度の山が幅広いことを示している。11 匹の再捕獲はそれほど多くの情報ではないのである。大まかに計算してみよう。2 回目の標本に含まれる印のついたハタネズミの数は、近似的に平均 $\frac{200\times200}{N}$ のポアソン分布（Poisson distribution）に従うので、その標準偏差（standard deviation）はおよそ $\sqrt{11} \approx 3.3$ であり、相対誤差は約 30% となる。これはそのまま $N$ の推定値にも引き継がれる。$N$ を 10% 以内の精度で推定するには、生物学者はおよそ 100 匹の再捕獲を必要とするだろう。統計学者はまた、単純な推定値のわずかな偏り（bias）を補正するため、**チャップマン推定量**（Chapman estimator）$\frac{(M+1)(C+1)}{R+1} - 1$ を用いる。ここで $M$ と $C$ は 2 回の捕獲の大きさ、$R$ は再捕獲された数である。

#### ラプラス、フランスを数える

ラプラス（Laplace）は 1802 年、同じ考え方を用いて、国勢調査を行わずにフランスの人口を推定した。彼は 1 年間に国全体で登録された出生数を知っており、さらにいくつかのコミューンを標本として、その人口と出生数の両方を把握していた。人口と出生数の比がどこでも同じであると仮定して、彼はフランスの人口をおよそ 28 百万人と推定し、さらに不確かさの尺度まで与えた。この方法は、動物の個体数について改めて発見された。1890 年代にデンマークのフィヨルドでツノガレイに標識をつけた C. G. J. Petersen と、1930 年代に鳥の足環を用いた Frederick Lincoln によってである。そのため、今でもしばしば**リンカーン–ピーターセン推定量**（Lincoln–Petersen estimator）と呼ばれている。

## 思考のスキル

**データが最も起こりやすくなるパラメータを選ぶ**

未知数を推定するには、観測されたことの確率を未知数の関数として書き、それを最大化せよ。

大学では、最尤法は統計的推論の根幹をなしており、推定値がどれほど精確かを扱う理論（フィッシャー情報量（Fisher information））や、競合するモデルをどう比較するかを扱う理論（尤度比検定（likelihood ratio tests））を伴っている。

## 次の一歩

1. **一般の公式。** $M$ 匹の動物に印をつけ、2 回目の大きさ $C$ の標本に印のついたものが $R$ 匹含まれていたとする。$N$ の最尤推定値は $\frac{MC}{R}$ の整数部分であることを示せ。
2. **ヴァンデルモンド。** $a$ 人の女性と $b$ 人の男性から $c$ 人の委員会を選ぶ方法を数えることにより、$\sum_j \binom{a}{j}\binom{b}{c-j} = \binom{a+b}{c}$ を証明せよ。
3. **硬貨投げ。** 表の出る確率 $p$ が未知の硬貨を $n$ 回投げたところ、表が $h$ 回出た。$p$ の最尤推定値は $\frac{h}{n}$ であることを示せ。
4. **再捕獲ゼロ。** 2 回目の標本に印のついたハタネズミが 1 匹も含まれていなかった場合、最尤推定値はどうなるか。そのことはこの方法について何を教えてくれるか。

## さらに学ぶために

- **David Spiegelhalter, *The Art of Statistics***（Pelican）。推定と不確かさについて。
- **George Seber, *The Estimation of Animal Abundance***（Blackburn）。標識再捕獲法についての標準的な参考書。
- **John Rice, *Mathematical Statistics and Data Analysis***（Duxbury）。最尤法を含む、数理統計学の入門書。

# 13.3 ドイツ戦車問題

**問題**

**STEP III 1998、問 14**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/98-s3-q14`

## 導入

第二次世界大戦中、連合国の情報部はドイツが戦車を何両生産しているかを知りたがっていた。スパイの報告によれば、月に約 1400 両であった。統計学者たちは別の方法をとった。鹵獲した戦車のギアボックスなどの部品にはシリアル番号が刻まれており、シリアル番号は事実上 $1, 2, \ldots, N$ からの無作為標本（random sample）とみなせる。番号だけをもとに、彼らは生産数を月に約 250 両と推定した。よく引用される数字では、戦後に調べられたドイツ側の記録は 245 両を示していた。統計学者たちはスパイよりはるかに正確だったのである。

この問題では、シリアル番号から $N$ を推定する二つの方法を比較する。どちらも平均的には正しい。しかし一方は他方よりはるかに効率よくデータを使っており、どちらがそうなのかを調べることで、推定理論の中心的な考え方にたどり着く。すなわち、平均的に正しい推定量のうちでは、ばらつきが最も小さいものを選ぶべきである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $M$ を $[0, N]$ 上の独立な $n$ 個の一様分布に従う値の最大値とするとき、$\mathrm{P}(M \leq m)$ はいくらか。

$M \leq m$ となるのは、すべての $X_i \leq m$ となるときであり、かつそのときに限る。よって $0 \leq m \leq N$ に対して $\mathrm{P}(M \leq m) = \left(\frac{m}{N}\right)^n$ である（Section 12.25 と比較せよ）。これを微分すると、$M$ の確率密度関数（probability density function）は $\frac{nm^{n-1}}{N^n}$ となる。

## 順を追って解く

### 段階 1　どちらも不偏である

$M$ について：

$$\mathrm{E}(M) = \int_0^N m \cdot \frac{n m^{n-1}}{N^n}\,\mathrm{d}m = \frac{n}{n+1}N, \qquad \text{よって} \qquad \mathrm{E}(Z_1) = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}N = N.$$

平均について：各 $X_i$ の期待値は $\frac{N}{2}$ であるから、$\mathrm{E}(Z_2) = \frac{2}{n}\cdot n \cdot \frac{N}{2} = N$ である。 ■

二つの推定量（estimator）はどちらも**不偏**（unbiased）である。すなわち、平均的には正しい答えを与える。係数 $\frac{n+1}{n}$ は、観測された最大のシリアル番号が常に $N$ より少し小さくなることを補正している。

### 段階 2　それぞれの分散

> **考えてみよう**　$\mathrm{E}(M^2)$ を求め、それを用いて $\mathrm{Var}(M)$ を求めよ。$Z_2$ については、$[0, N]$ 上の一様分布に従う確率変数一つの分散はいくらか。

$\mathrm{E}(M^2) = \int_0^N m^2 \cdot \frac{n m^{n-1}}{N^n}\,\mathrm{d}m = \frac{n}{n+2}N^2$ であるから、

$$\mathrm{Var}(M) = \frac{n}{n+2}N^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2}N^2 = \frac{nN^2}{(n+1)^2(n+2)},$$
$$\mathrm{Var}(Z_1) = \frac{(n+1)^2}{n^2}\mathrm{Var}(M) = \frac{N^2}{n(n+2)}.$$

$[0, N]$ 上の一様分布（uniform distribution）に従う確率変数の分散（variance）は $\frac{N^2}{12}$ であり、$X_i$ は独立であるから、

$$\mathrm{Var}(Z_2) = \frac{4}{n^2}\cdot n \cdot \frac{N^2}{12} = \frac{N^2}{3n}.$$ ■

### 段階 3　どちらがよいか

> **考えてみよう**　$\frac{1}{n(n+2)}$ と $\frac{1}{3n}$ を比較せよ。$n$ が大きくなるとき、それぞれはどう振る舞うか。

比は $\frac{\mathrm{Var}(Z_1)}{\mathrm{Var}(Z_2)} = \frac{3}{n+2}$ であり、$n \geq 2$ のとき 1 より小さい（$n = 1$ のときは等しく、このとき二つの推定量は一致する）。したがって $Z_1$ のほうがよく、$n$ が大きいときにははるかによい。$Z_1$ の標準偏差（standard deviation）は $\frac{1}{n}$ のように小さくなるが、$Z_2$ の標準偏差は $\frac{1}{\sqrt{n}}$ のようにしか小さくならない（図 13.3.1）。シリアル番号が $n = 10$ 個あるとき、$Z_1$ の標準偏差は $N$ の約 9%、$Z_2$ の標準偏差は約 18% である。

$Z_1$ を選ぶべき理由はもう一つある。$Z_2$ はばかげた値になりうるのである。シリアル番号が 10、20、300 のとき、$Z_2 = \frac{2}{3} \cdot 330 = 220$ となり、実際に観測したシリアル番号より小さい。$Z_1 = \frac{4}{3} \cdot 300 = 400$ のほうは、最大の観測値より小さくなることは決してない。 ■

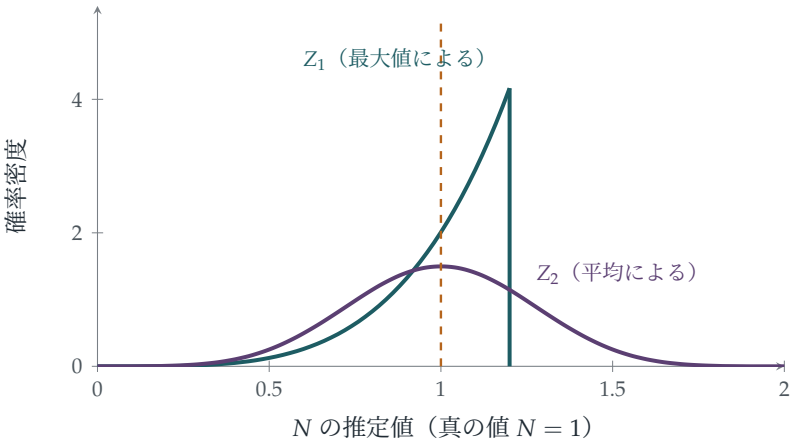



**図 13.3.1**　シリアル番号が $n = 5$ 個で真の値が $N = 1$ のときの、二つの推定量の標本分布。どちらも平均はちょうど 1 であるが、$Z_1$（ティール）は $Z_2$（プラム）よりもはるかに真の値の近くに集中しており、観測された最大のシリアル番号を下回ることは決してない。

## 振り返り

- **不偏性。**各推定量は、その期待値がちょうど $N$ となるように定数倍されていた。
- **分散を比較する。**不偏推定量のうちでは、分散が小さいほうが信頼できる。
- **最も情報量の多い統計量を使う。**最大値は、標本がもつ $N$ についての情報をすべて含んでいる。平均はその多くを無駄にしてしまう。

## 背後にある数学

### 十分性

なぜ最大値はこれほどよいのだろうか。最大値 $M$ が与えられると、残りの値は $N$ が何であっても単に $[0, M]$ 上の一様分布に従う。つまり、それらは $N$ についてそれ以上の情報をもたない。最大値は**十分統計量**（sufficient statistic）なのである。ラオ（C. R. Rao）とブラックウェル（David Blackwell）による定理（1945–47 年）は、どんな不偏推定量も、十分統計量を与えたときの条件付き期待値に置き換えることで改良できる

（少なくとも悪くはならない）ことを述べており、ここではこの操作によって $Z_2$ が $Z_1$ に変わる。さらに**レーマン–シェフェの定理**（Lehmann–Scheffé theorem）により、$Z_1$ が分散の最も小さい不偏推定量であることがわかる。また、$Z_1$ の分散が $\frac{1}{n^2}$ のように減少し、多くの推定量の $\frac{1}{n}$ より速いことにも注意しよう。これは $N$ が分布の端点であり、データがそこに押し寄せるように集まるからである。

### 離散版

実際のシリアル番号は整数 $1, 2, \ldots, N$ であり、非復元抽出（sampling without replacement）で得られる。このとき最良の不偏推定値は $\hat{N} = m + \frac{m}{k} - 1$ である。ここで $m$ は観測された $k$ 個のシリアル番号の最大値であり、この式は最大値に観測値どうしの平均的な間隔を加えたものになっている。主にギアボックスと車輪のシリアル番号に基づくこの種の推定を用いて、連合国の統計学者たちはドイツの生産数を月に約 246 両と推定した。これに対し、のちにドイツ側の記録で判明した数は 245 両、情報部の報告が示唆していた数は 1400 両であった。

#### 歴史の中のシリアル番号

この方法はその後も何度も用いられてきた。たとえば、新しい消費者向け製品が何台作られたかを、最初に売られた数台のシリアル番号から分析者が推定した例がある。メーカーもこの教訓を学び、今では多くのメーカーが、単純な連番として読み取れないようにシリアル番号を符号化している。Richard Ruggles と Henry Brodie は、1947 年に *Journal of the American Statistical Association* で戦時中のこの研究について記している。

## 思考のスキル

#### 推定量は標本分布で評価する

推定量は確率変数である。平均的に正しいか（偏り）、どれだけばらつくか（分散）を問い、誤差の小さいほうを選ぶこと。

大学では、これは効率的な推定の理論へとつながる。クラメール–ラオの下界（Cramér–Rao bound）は不偏推定量の分散がどこまで小さくなりうるかを示し、十分性はその下界にどうすれば到達できるかを説明する。

## 次の一歩

1 **平均二乗誤差。** 偏りのある推定量 $M$ について、$\mathrm{E}(M-N)^2 = \mathrm{Var}(M) + \big(\mathrm{E}(M) - N\big)^2$ が成り立つ。これを計算し、$\mathrm{Var}(Z_1)$ と比較せよ。また、$\mathrm{E}(cM-N)^2$ を最小にする定数 $c$ を求めよ。

2 **最小値も。** $(n+1)\min\{X_i\}$ もまた $N$ の不偏推定量であることを示し、その分散を求めよ。これはよい推定量だろうか。

3 **離散版の公式。** シリアル番号 $1,\dots,N$ から $k$ 個を非復元抽出し、その最大値を $m$ とする。$\mathrm{P}(\max \le m) = \binom{m}{k}/\binom{N}{k}$ を示し、$k=1$ のとき $m + \frac{m}{k} - 1$ が不偏であることを確かめよ。

4 **戦車。** 鹵獲した 5 両の戦車のシリアル番号が 19、40、42、60、98 であるとき、製造された戦車の数を推定せよ。

## さらに学ぶために

- **Richard Ruggles & Henry Brodie, "An empirical approach to economic intelligence in World War II"**, *Journal of the American Statistical Association* 42 (1947)。当事者による原論文。
- **John Rice, *Mathematical Statistics and Data Analysis***（Duxbury）。偏り、分散、十分性について。
- **David Spiegelhalter, *The Art of Statistics***（Pelican）。

# 13.4 平均か中央値か？

**問題**

**STEP II 2000、問 14**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/00-s2-q14`

## 導入

測定値の集まりの中心を推定するには、平均（mean）をとることも中央値（median）をとることもできる。どちらがよいのだろうか。答えはデータによって異なる。ときおり大きく外れた誤差を含む測定値では、中央値のほうがはるかに信頼できる。ばかげた値が一つあるだけで平均はどこへでも引きずられてしまうが、中央値はほとんど動かない。性質のよいデータでは、たいてい平均のほうが優れている。この問題は、一様分布に従うデータについて、平均がどれほど優れているかを測るものである。中央値の分散（variance）は平均の分散の 3 倍であり、したがって中央値を平均と同じ精度にするには 3 倍の観測値が必要になる。

この比較を通じて、統計的手法を選ぶうえでの主要な考え方の一つである**効率**（efficiency）と、Section 4.4 にも登場したベータ積分（beta integral）を紹介する。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** 中央値の密度（density）が $y^n(1-y)^n$ に比例するのはなぜか。（$Y$ が $y$ の近くにあるためには、$2n+1$ 個の値のうちいくつが $y$ より小さく、いくつが $y$ より大きくなければならないか。）

中央値が $y$ にあるためには、値の一つが $y$ にあり、$n$ 個がそれより小さく（それぞれ確率 $y$）、$n$ 個がそれより大きく（それぞれ確率 $1-y$）なければならない。これにより因子 $y^n(1-y)^n$ が得られる。定数は、どの値がどこに入るかの選び方の数を数えたものである。

## 順を追って解く

### 段階 1　定数

密度の積分は 1 でなければならない。

$$k\int_0^1 y^n(1-y)^n\,\mathrm{d}y = k\cdot\frac{n!\,n!}{(2n+1)!} = 1, \qquad k = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}. \qquad \blacksquare$$

### 段階 2　平均と分散

密度は $\tfrac12$ に関して対称である（$y$ を $1-y$ に置き換えればよい）から、$\mathrm{E}(Y)=\tfrac12$ である。

> **考えてみよう**　ベータ積分を用いて $\mathrm{E}(Y^2) = k\int_0^1 y^{n+2}(1-y)^n\,\mathrm{d}y$ を計算し、階乗を整理せよ。

$$\mathrm{E}(Y^2) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\cdot\frac{(n+2)!\,n!}{(2n+3)!} = \frac{(n+2)(n+1)}{(2n+3)(2n+2)} = \frac{n+2}{2(2n+3)}.$$

したがって

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{n+2}{2(2n+3)} - \frac14 = \frac{2(n+2)-(2n+3)}{4(2n+3)} = \frac{1}{4(2n+3)}. \qquad \blacksquare$$

### 段階 3　平均との比較

> **考えてみよう**　$2n+1$ 個の独立な一様分布に従う確率変数の平均 $\bar X$ の平均と分散はいくらか。

各 $X_i$ の平均は $\tfrac12$、分散は $\tfrac{1}{12}$ であるから、$\mathrm{E}(\bar X)=\tfrac12$、$\mathrm{Var}(\bar X)=\tfrac{1}{12(2n+1)}$ である。$n$ が大きいとき、

$$\mathrm{Var}(Y)\approx\frac{1}{8n}, \qquad \mathrm{Var}(\bar X)\approx\frac{1}{24n}.$$

> **考えてみよう**　$Y$ と $\bar X$ がともに平均 $\tfrac12$、標準偏差（standard deviation）$\sigma_Y$、$\sigma_{\bar X}$ の正規分布に従うとして、両方の確率を標準正規分布の分布関数 $\Phi$ を用いて表せ。

$\mathrm{P}\bigl(|Y-\tfrac12|<\tfrac{d}{\sqrt{n}}\bigr) = 2\Phi\bigl(\tfrac{d}{\sqrt{n}\,\sigma_Y}\bigr)-1$ であり、$\sqrt{n}\,\sigma_Y\to\tfrac{1}{\sqrt{8}}$ である。$\bar X$ についても同様で、$\sqrt{n}\,\sigma_{\bar X}\to\tfrac{1}{\sqrt{24}}$ となる。よって二つの確率はそれぞれ $2\Phi(d\sqrt{8})-1$ と $2\Phi(d\sqrt{24})-1$ に近づく。$\Phi$ は増加関数であり $\sqrt{24}>\sqrt{8}$ であるから、後者のほうが大きく、したがっ

て十分大きいすべての $n$ について不等式が成り立つ。 ■平均のほうが真の中心に近い値をとりやすいのである。

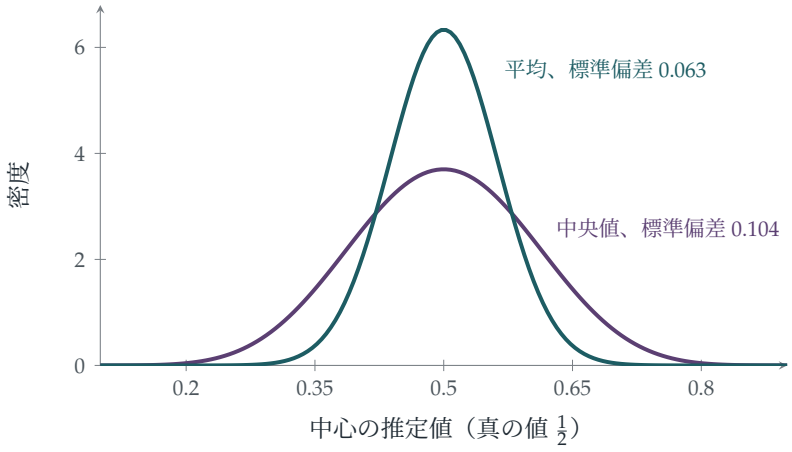



**図 13.4.1** 21 個の独立な一様分布の観測値の中央値（紫）と平均（青緑）の標本分布。どちらも真の値 $\frac{1}{2}$ を中心としているが、平均のほうがより狭く集中している。その分散は中央値の分散の約 3 分の 1 である。

## 振り返り

- **ベータ積分。** $\int_0^1 y^r(1-y)^s\,dy$ という一つの公式から、正規化定数とモーメントの両方が得られた。
- **対称性から平均が得られた。** $E(Y)$ を求めるのに積分は必要なかった。
- **ばらつきは適切な尺度で比較する。**標準偏差に $\sqrt{n}$ を掛けることで、比較が $n$ によらないものになった。

## 背後にある数学

### 効率

二つの不偏推定量（unbiased estimator）の**相対効率**（relative efficiency）とは、それらの分散の比である。これは、一方が他方に匹敵するには何倍の観測値が必要かを表す。一様分布のデータでは、中央値の平均に対する効率は $\frac{1}{3}$ である。正規分布のデータでは $\frac{2}{\pi} \approx 0.64$ であり、中央値には約 57% 多くの観測値が必要になる。しかし裾の重いデータでは立場が逆転する。コーシー分布（Cauchy distribution、Section 12.22）では平均は役に立たない。$n$ 個の観測値の平均は観測値一つと比べて少しもよくならな

いからである。一方、中央値はうまく機能する。ラプラス分布（Laplace distribution、Section 12.24）では、中央値の効率は平均の 2 倍である。

### 頑健統計

中央値は**頑健**（robust）である。データのほぼ半分を任意の値に変えても、中央値は大きくは動かない。平均にはそのような防御がなく、誤った値が一つあるだけで台なしになりうる。1960 年代から 1970 年代にかけて、ジョン・テューキー（John Tukey）、Peter Huber らは**頑健統計**（robust statistics）を発展させた。これは、きれいなデータに対しては平均とほぼ同じ効率をもちながら、外れ値（outlier）には強い推定量であり、たとえば**刈り込み平均**（trimmed mean、最大と最小の 10% を捨てて残りを平均したもの）がある。これは飛び込みや体操などの競技の採点に用いられている。

#### ラプラスと中央値

ラプラス（Laplace）は 1774 年に、誤差が二重指数分布（ラプラス分布）に従うならば、真の値の最良の推定値は中央値であることを示した。ガウス（Gauss）は 1809 年に、誤差が正規分布に従うならば最良の推定値は平均であることを示し、これが最小二乗法（method of least squares）へとつながった。どちらが正しいかは誤差のふるまいによって決まり、これは新しい種類のデータが現れるたびに統計学者がいまなお議論している問題である。

## 思考のスキル

#### 手法はばらつきで比較する

二つの手法がどちらも平均的には正しいことがある。そのときは、答えがどれだけばらつくか、そしてデータが増えるにつれてそのばらつきがどれだけ速く小さくなるかを比較せよ。

大学では、大標本における分散の比較である漸近効率（asymptotic efficiency）が、モデルが誤っているかもしれない場合のための頑健性とともに、統計的手法を選ぶ際の標準的な道具となっている。

## 次の一歩

1 **中央値の密度。** 値が一つ $[y, y+\delta y]$ にあり、$n$ 個がそれより小さく、$n$ 個がそれより大きいという数え上げによって、密度 $\frac{(2n+1)!}{(n!)^2} y^n (1-y)^n$ を導け。

2 **三つの観測値。** $n = 1$（一様分布の観測値が三つ）のとき、$\mathrm{Var}(Y)$ と $\mathrm{Var}(\bar{X})$ を正確に求めよ。どちらが小さいか。

3 **ミッドレンジ。** 中心のもう一つの推定量に、ミッドレンジ（midrange）$\frac{1}{2}(\max + \min)$ がある。一様分布のデータで観測値が $m = 2n+1$ 個のとき、その分散が $\frac{1}{2(m+1)(m+2)}$ であることを示せ。平均と比べてどうか。（Section 13.3 と比較せよ。）

4 **外れ値。** 11 個の測定値が 9.8、9.9、10.0、10.0、10.1、10.1、10.2、10.2、10.3、10.4、104（入力ミス）である。平均と中央値を比較せよ。

## さらに学ぶために

- **John Rice, *Mathematical Statistics and Data Analysis***（Duxbury）。順序統計量と効率について。
- **Rand Wilcox, *Fundamentals of Modern Statistical Methods***（Springer）。頑健な手法がなぜ重要なのかを、専門家でない読者向けに解説している。
- **Stephen Stigler, *The Seven Pillars of Statistical Wisdom***（Harvard University Press）。集約、平均、中央値を歴史的な視点から論じている。

# 13.5 答えにくい質問をする

**問題**

**STEP II 2023、問 11**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

`www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip`

## 導入

試験でカンニングをした学生や、職場で盗みをはたらいた従業員がどれくらいの割合でいるかを知るにはどうすればよいだろうか。直接たずねれば、多くの人は嘘をつくだろう。1965 年、統計学者の Stanley Warner は巧妙な解決策を考案した。それが**無作為化回答法**（randomised response）である。各人はこっそりと硬貨を投げるかさいころを振り、その結果によって、デリケートな質問に正直に答えるか、その反対の質問に答えるかが決まる。質問者にはどちらなのかがわからないので、個々の回答から罪が明らかになることはない。それでも、無作為化の確率がわかっているので、全体としての割合は推定できるのである。

この問題では、その背後にある数学を探る。各人を**独立に**（independently）無作為化すると（小問 (ii)）、合計は扱いやすい振る舞いをし、割合をきちんと定めることができる。一方、全員を**ただ 1 回の**硬貨投げで無作為化すると（小問 (iii)）、合計の平均（mean）は同じでも、まったく異なる二山の分布になり、ほとんど何も教えてくれない。どこに無作為性を置くかが重要なのである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** $Y$ は確率 $p$ で $X_1$、確率 $q$ で $X_2$ である。$\mathrm{E}(Y)$ は何か。$\mathrm{E}(Y^2)$ は何か。

どちらの確率変数が選ばれたかで条件付ける（conditioning）と、$\mathrm{E}(Y) = p\mu_1 + q\mu_2$ であり、$\mathrm{E}(Y^2) = p\,\mathrm{E}(X_1^2) + q\,\mathrm{E}(X_2^2) = p(\sigma_1^2 + \mu_1^2) + q(\sigma_2^2 + \mu_2^2)$ である。

## 順を追って解く

### 段階 1　混合分布の分散

$$\mathrm{Var}(Y) = p(\sigma_1^2 + \mu_1^2) + q(\sigma_2^2 + \mu_2^2) - (p\mu_1 + q\mu_2)^2.$$

$p - p^2 = pq$ と $q - q^2 = pq$ を用いると、$\mu$ を含む項は $p\mu_1^2 + q\mu_2^2 - p^2\mu_1^2 - 2pq\mu_1\mu_2 - q^2\mu_2^2 = pq\mu_1^2 + pq\mu_2^2 - 2pq\mu_1\mu_2$ となる。したがって

$$\mathrm{Var}(Y) = p\sigma_1^2 + q\sigma_2^2 + pq(\mu_1 - \mu_2)^2. \qquad \blacksquare$$

混合分布（mixture）の分散（variance）は、各成分内の分散の平均に、成分の平均どうしの**間の**分散を加えたものである。

### 段階 2　独立な無作為化

> ? **考えてみよう**　$\mathrm{P}(B = 1)$ は何か。$n$ 個の $B$ の値は独立か。

$\mathrm{P}(B = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{2}$ である。$n$ 個の値は独立で、それぞれ成功確率は $\frac{1}{2}$ なので、$Z_1 \sim \mathrm{B}(n, \frac{1}{2})$ であり、平均は $\frac{n}{2}$、標準偏差（standard deviation）は $\frac{\sqrt{n}}{2}$ である。

平均から 10% 以内であるとは、$|Z_1 - \frac{n}{2}| < \frac{n}{20}$ ということである。標準化すると、これは $|Z| < \frac{n/20}{\sqrt{n}/2} = \frac{\sqrt{n}}{10}$ となり、右辺は無限大に発散するので、確率は 1 に収束する。 $\blacksquare$

### 段階 3　全員に 1 枚の硬貨

> ? **考えてみよう**　今度は 1 回の硬貨投げが $n$ 個すべてのさいころについて決める。表が出たとき、$Z_2$ の分布は何か。裏が出たときはどうか。小問 (i) を用いよ。

表が出たとき、$Z_2 \sim \mathrm{B}(n, \frac{1}{6})$ であり、平均は $\frac{n}{6}$、分散は $\frac{5n}{36}$ である。裏が出たとき、$Z_2 \sim \mathrm{B}(n, \frac{5}{6})$ であり、平均は $\frac{5n}{6}$、分散は $\frac{5n}{36}$ である。$p = q = \frac{1}{2}$ として小問 (i) を用いると

$$\mathrm{E}(Z_2) = \frac{n}{2}, \qquad \mathrm{Var}(Z_2) = \frac{5n}{36} + \frac{1}{4}\left(\frac{4n}{6}\right)^2 = \frac{5n}{36} + \frac{n^2}{9}.$$

> ? **考えてみよう**　確率の大部分はどこにあるか。平均 $\frac{n}{2}$ の近くに多くあるか。

$Z_2$ は $\frac{n}{6}$ 付近と $\frac{5n}{6}$ 付近に二つの山をもち、それぞれの幅はおよそ $\sqrt{n}$ である（図 13.5.1）。その間にはほとんど何もない。同じ平均と分散をもつ正規分布（normal distribution）は $\frac{n}{2}$ を中心とする一つの山になるが、そこはまさに $Z_2$ がほとんど値をとらない場所

である。$Z_2$ が $\frac{n}{2}$ から 10% 以内にあるためには、$\mathrm{B}(n, \frac{1}{6})$ または $\mathrm{B}(n, \frac{5}{6})$ に従う確率変数が $[0.45n, 0.55n]$ に入らなければならない。$\mathrm{B}(n, \frac{1}{6})$ の場合、これは平均より少なくとも $0.28n$ 大きいということであり、標準偏差にしておよそ $\frac{0.28n}{0.37\sqrt{n}} \approx 0.75\sqrt{n}$ 個分にあたるので、確率は 0 に収束する。$\mathrm{B}(n, \frac{5}{6})$ についても同様である。 ■

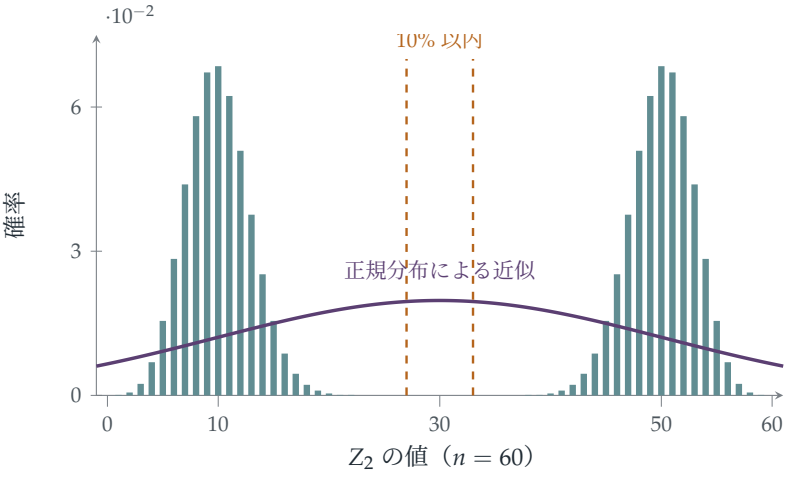



**図 13.5.1** $n = 60$ 個のさいころに対する $Z_2$ の分布（棒）。1 回の硬貨投げの二つの結果に対応して、10 と 50 に二つの山がある。同じ平均（30）と分散をもつ正規分布（紫の曲線）はよく当てはまらず、平均から 10% 以内（琥珀色の線の間）にある確率はほとんどない。

## 振り返り

- **隠れた選択で条件付ける。** 混合分布の平均と分散は、どの成分が選ばれたかで条件付けることで得られた。
- **成分内の分散と成分間の分散の和。** 余分な項 $pq(\mu_1 - \mu_2)^2$ は、二つの成分の間の散らばりを測るものであった。
- **平均と分散がすべてではない。** $Z_2$ は $Z_1$ と同じ平均をもつが、形はまったく異なっていた。

## 背後にある数学

### 無作為化回答法

Warner の方式では、各回答者は確率 $p$ で「あなたはグループ $A$ に属していますか？」に答え、確率 $1 - p$ で「あなたはグループ $A$ に属していないのですか？」に答える。ど

ちらに答えるかは本人だけが知っている。$A$ に属する人の割合を $\pi$ とすると、「はい」と答える確率は

$$\lambda = p\pi + (1-p)(1-\pi),$$

であるから、観測された「はい」の割合 $\hat{\lambda}$ から、$\hat{\pi} = \frac{\hat{\lambda} - (1-p)}{2p-1}$ と推定できる（ただし $p \neq \frac{1}{2}$ とする）。問題の小問 (ii) はまさにこれであり、各人が自分のさいころで決めている。プライバシーの代償は精度である。$2p-1$ で割ることで分散が大きくなるため、無作為化した調査では直接たずねる調査よりも多くの回答者が必要になる。しかし各人が独立に無作為化するので、大数の法則（law of large numbers）がはたらく。小問 (iii) は、無作為化が共有されると何がまずいのかを示している。ただ 1 枚の硬貨についての不確かさは、決して平均化されて消えることがないのである。

### 差分プライバシー

無作為化回答法は、**差分プライバシー**（differential privacy）の祖先にあたる。差分プライバシーとは、2006 年に Cynthia Dwork らが導入したプライバシーの数学的な定義であり、ある手続きがプライベートであるとは、任意の 1 人のデータを加えたり取り除いたりしても、どの出力の確率もたかだか小さな倍率しか変わらないことをいう。テクノロジー企業は利用統計の収集にこれを用いており、アメリカ合衆国国勢調査局は 2020 年の国勢調査でこれを用いた。公表する数値に注意深く調整したランダムなノイズを加え、どの個人の回答も復元できないようにしたのである。

#### 全分散の法則

小問 (i) の恒等式は、**全分散の法則**（law of total variance）$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}\big(\mathrm{Var}(Y \mid C)\big) + \mathrm{Var}\big(\mathrm{E}(Y \mid C)\big)$ の特別な場合である。ここで $C$ は隠れた選択である。この法則は**分散分析**（analysis of variance、ANOVA）の基礎になっている。分散分析は、1920 年代にフィッシャー（Ronald Fisher）がロザムステッド（Rothamsted）での農業実験のために導入したもので、作物の収量のばらつきを、肥料や品種によって説明される部分と、説明されずに残る部分とに分解する。

## 思考のスキル

**要約だけでなく、分布全体を見よ**

平均と分散は山が一つの分布をよく記述するが、混合分布に対してはひどく誤解を招くことがある。確率が実際にどこにあるのかを問え。

大学では、いくつかのグループからなる母集団を記述するのに混合モデル（mixture models）が用いられ、全分散の法則は、調査設計から階層モデルに至るまで、統計学の標準的な道具である。

## 次の一歩

1 **双子。** STEP II 2005、問 12（`step.maths.org/questions/05-s2-q12`）に挑戦せよ。これは姿を変えた無作為化回答法のパズルである。回答が硬貨について何も教えてくれないのはどのようなときか。

2 **$\pi$ の推定。** $p = \frac{3}{4}$ の Warner 方式の調査で、400 人が回答し、160 人が「はい」と答えた。グループ $A$ に属する人の割合 $\pi$ を推定し、その推定値のおおよその標準誤差（standard error）を求めよ。

3 **全分散。** いくつかの値をとる離散的な隠れた変数 $C$ について、全分散の法則を証明せよ。

4 **共有された硬貨。** 小問 (iii) において、$Z_2 > \frac{n}{2}$ となる確率は何か。$Z_2$ が $\frac{n}{2}$ に近い値をとることはほとんどないにもかかわらず、$n$ が大きいときこの確率が $\frac{1}{2}$ に近い理由を説明せよ。

## さらに学ぶために

- **Stanley Warner, 「Randomized response: a survey technique for eliminating evasive answer bias」**, *Journal of the American Statistical Association* 60 (1965).
- **Cynthia Dwork & Aaron Roth, *The Algorithmic Foundations of Differential Privacy***（オンラインで無料公開）。現代の理論であり、最初の数章は読みやすい。
- **David Spiegelhalter, *The Art of Statistics***（Pelican）。調査とその落とし穴について。

# 13.6 積み重なる誤差

**問題**

**STEP II 1993、問 15**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/93-s2-q15`

## 導入

1982 年、バンクーバー証券取引所は 1000 から始まる新しい株価指数を導入した。株価が変化するたびに指数は再計算され、小数第 3 位までで**切り捨て**（truncation）られた。1 回の切り捨てで失われる量は平均 0.0005 であり、無視できるほど小さく見える。しかし再計算は 1 日に約 3000 回行われ、22 か月後には、市場全体は上昇していたにもかかわらず、指数は約 520 になっていた。正しく計算し直したところ、指数は一晩で約 1100 に跳ね上がった。

この問題は、何が起きたのかを説明するものである。切り捨て誤差はすべて同じ向きを持つので、演算回数に比例して着実に積み重なっていく。一方、四捨五入（rounding）による誤差は両方の向きを持ち、大部分が打ち消し合う。その増え方は演算回数の平方根程度にすぎず、これは中心極限定理（central limit theorem、Section 12.24）が予言するランダムウォーク（random walk）の振る舞いである。

## 取りかかる前に

**考えてみよう** ある数の小数部分（fractional part）$U$ が $[0,1)$ 上の一様分布（uniform distribution）に従うとき、その数を切り捨てたときの誤差はどうなるか。四捨五入したときはどうか。それぞれの平均（mean）と分散（variance）は何か。

切り捨ては $a$ を $\lfloor a \rfloor$ で置き換えるので、誤差（真の値から近似値を引いたもの）は $U$ であり、$[0,1)$ 上の一様分布に従う。平均は $\frac{1}{2}$、分散は $\frac{1}{12}$ である。四捨五入の誤差は

$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上の一様分布に従い、平均は 0、分散は $\frac{1}{12}$ である。

## 順を追って解く

### 段階 1　誤差の総和

1500 個の数を足したあとの誤差の総和は、1500 個の独立な誤差の和であり、中心極限定理により近似的に正規分布（normal distribution）に従う。

- LEP（四捨五入）：平均 0、分散 $\frac{1500}{12} = 125$、標準偏差（standard deviation）$\sqrt{125} \approx 11.18$。
- VOZ（切り捨て）：平均 $\frac{1500}{2} = 750$、標準偏差は同じく 11.18。

### 段階 2　大きな誤差が生じる確率

> **考えてみよう**　LEP について、$E \sim \mathrm{N}(0, 125)$ のとき $\mathrm{P}(|E| > 15)$ はいくらか。VOZ について、誤差はほぼ確実にどのあたりにあるか。

LEP については $\frac{15}{11.18} \approx 1.342$ であるから、

$$\mathrm{P}(|E| > 15) \approx 2\bigl(1 - \Phi(1.342)\bigr) \approx 2 \times 0.090 = 0.18.$$

VOZ については、誤差はおよそ $750 \pm 11$ である。その絶対値が 15 未満となる確率は実質的に 0 なので、$\mathrm{P}(|E| > 15) \approx 1$ である。 ■

### 段階 3　何回足せるか

> **考えてみよう**　$n$ 回の加算のあと、LEP の誤差の標準偏差は $\sqrt{n/12}$ である。$\mathrm{P}(|E| < 10) \geq 0.9$ となるのはどのようなときか。

$\mathrm{P}(|Z| < 1.645) = 0.9$ であるから、$\frac{10}{\sqrt{n/12}} \geq 1.645$ が必要である。すなわち $\frac{n}{12} \leq \left(\frac{10}{1.645}\right)^2 \approx 36.95$ であり、$n \leq 443$ となる。LEP は約 443 回の加算を行うことができる。 ■

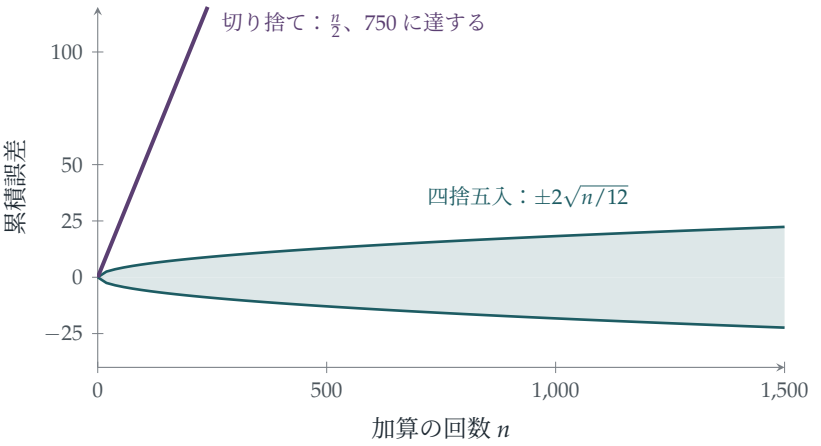



**図 13.6.1**　誤差の蓄積の様子。切り捨て誤差（紫）はすべて同じ符号を持ち、$n$ に比例して増える。1500 回の加算のあと、総和は約 750 になる。四捨五入の誤差（青緑の帯、0 の両側に標準偏差 2 つ分）は平均的には打ち消し合い、$\sqrt{n}$ 程度にしか増えない。1500 回の加算のあとでも、通常はおよそ ±22 の範囲に収まる。

## 振り返り

- **個々の誤差をモデル化する。**小数部分が一様分布に従うことから、各誤差は簡単な分布を持つことになった。
- **平均と分散を足し合わせる。**平均は足し合わされ（偏り $\frac{n}{2}$ が生じる）、誤差が独立ならば分散も足し合わされる。
- **正規近似。**中心極限定理によって、1500 個の一様分布に従う誤差の和は正規分布に置き換えられた。

## 背後にある数学

### 偏りと分散

切り捨ては**偏りがある**（biased）。すなわち、その誤差の平均は 0 でなく、偏りは線形に蓄積する。四捨五入は**不偏**（unbiased）であり、その誤差はランダムウォークのように振る舞って $\sqrt{n}$ 程度で増える。100 万回の演算のあとでは、その差は 500 000 程度の誤差と 300 程度の誤差の違いになる。これは、実験における系統誤差（systematic error、たとえば校正の狂った測定器）と偶然誤差（random error）の区別と同じである。多数の測定値を平均すれば偶然誤差は小さくなるが、系統誤差にはまったく効果

がない。

### 浮動小数点

あらゆるコンピュータは実数を有限の精度で保存し、あらゆる算術演算はその結果を丸める。現代のコンピュータは IEEE 754 規格に従っており、表現可能な最も近い数に丸める。ちょうど中間の場合には最後の桁が偶数になる方へ丸めるが、これはまさに丸めが平均的に不偏となるようにするためである。それでも、多数の数を不用意に足し合わせると精度が失われることがある。カハン（William Kahan）の**補償付き総和**（compensated summation）アルゴリズム（1965 年）は、失われた下位の桁を記録しておき、それを足し戻す。1991 年の湾岸戦争では、パトリオットミサイルの砲台が飛来するミサイルの迎撃に失敗した。その時計は時間を 0.1 秒単位で数えていたが、0.1 は 2 進法では正確に表せない数である。100 時間の稼働のあと、切り捨て誤差は約 3 分の 1 秒にまで増え、標的の位置を 0.5 キロメートル以上見誤るのに十分な大きさになっていた。

#### バンクーバー指数

バンクーバー証券取引所の指数は、1982 年 1 月に 1000.000 という値で創設された。1983 年 11 月までに、市場全体はおおむね上昇していたにもかかわらず、指数は約 524 にまで下がっていた。コンサルタントたちは、指数が 1 日に何千回も再計算され、そのたびに小数第 3 位まで（四捨五入ではなく）切り捨てられていたことを突き止めた。週末をかけて正しく計算し直した結果、指数は約 1098 で取引を再開した。この出来事は、数値計算の講義で定番の戒めとなっている。

## 思考のスキル

#### 系統誤差と偶然誤差を区別する

符号が一定の誤差は線形に蓄積する。平均 0 の独立な誤差は平方根のように蓄積する。自分が扱っている誤差がどちらの種類なのかを見極めよ。

大学では、数値解析（numerical analysis）で誤差が計算の中をどのように伝わるかを学び、統計学では偏りと分散を区別する。「バイアス–バリアンスのトレードオフ」（bias–variance trade-off）は、現代の機械学習の中心にある考え方である。

## 次の一歩

1 **VOZ の補正。** VOZ が最後に答えに $\frac{n}{2}$ を加えるとすると、その誤差はどのような分布に従うか。これで LEP と同じくらい良くなったといえるか。

2 **小数第 1 位への四捨五入。** 数を小数第 1 位に四捨五入し、捨てられる桁が一様分布に従うとき、10 000 個の数を足したときの誤差の総和の標準偏差を求めよ。

3 **バンクーバー指数。** 指数が 1 日に 3000 回再計算され、1 回の切り捨てで平均 0.0005 が失われたとすると、取引日 250 日の 1 年間でどれだけ失われるか。

4 **厳密な分布。** 2 つの四捨五入誤差の和について、厳密な確率密度関数（三角形になる）を求めよ。3 つの場合については、その概形を描け。どのくらいの速さで正規分布らしく見えてくるか。

## さらに学ぶために

- **Nicholas Higham, *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms***（SIAM）。丸め誤差に関する定評ある本であり、第 1 章は読みやすい。
- **David Goldberg, “What every computer scientist should know about floating-point arithmetic”**, *ACM Computing Surveys* 23 (1991)。古典的な論文で、オンラインで無料で読める。
- **Tim Harford, *How to Make the World Add Up***（Bridge Street）。データにおける系統誤差を扱っている。

# 13.7 相関をつくり出す

**問題**

**STEP III 2010、問 13**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

`step.maths.org/questions/10-s3-q13`

## 導入

ある銀行が、株式のポートフォリオ（portfolio）で損失を出す可能性がどの程度あるかを知りたいとする。株価は連動して動く。ある株が下がれば、ほかの株も下がる傾向がある。起こりうる将来を何千通りもシミュレーションするには、銀行はちょうど正しい形で相関した乱数を生成しなければならない。独立（independent）な確率変数（random variable）から出発して、指定された相関（correlation）をもつ確率変数をどうやって作ればよいだろうか。

この問題は、3 つの変数についてその作り方を一歩ずつ示している。新しい変数はそれぞれ、それまでの独立な材料の組合せに、分散（variance）を補うための新たな独立な材料を 1 つ加えたものである。この構成は、姿を変えた線形代数の有名な道具である**コレスキー分解**（Cholesky decomposition）であり、また隠れた制約も明らかにする。すなわち、どんな相関の組でも実現できるわけではないのである。

**出題範囲についての注意**

共分散と相関は、2019 年に STEP の出題範囲から外された。共分散（covariance）は $\mathrm{Cov}(U,V) = \mathrm{E}(UV) - \mathrm{E}(U)\mathrm{E}(V)$ であり、独立な変数に対しては 0 となる。また各引数について線形である：$\mathrm{Cov}(aU + bV, W) = a\,\mathrm{Cov}(U,W) + b\,\mathrm{Cov}(V,W)$。さらに $\mathrm{Var}(U) = \mathrm{Cov}(U,U)$ が成り立つ。相関は常に $-1$ 以上 1 以下である。

## 取りかかる前に

**考えてみよう**　$Z_1$ と $Z_2$ は独立である。その共分散はいくらか。したがって相関はいくらか。

独立な変数は $\mathrm{E}(Z_1Z_2) = \mathrm{E}(Z_1)\,\mathrm{E}(Z_2)$ を満たす。よって共分散は 0 であり、$\mathrm{Corr}(Z_1, Z_2) = 0$ である。

## 順を追って解く

### 段階 1　2 つの変数

$\mathrm{E}(Y_2) = 0$ である。$Z_1$ と $Z_2$ は独立で分散が 1 なので、

$$\mathrm{Var}(Y_2) = \rho_{12}^2 + (1 - \rho_{12}^2) = 1, \qquad \mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = \mathrm{Cov}(Z_1, \rho_{12}Z_1 + \sqrt{1 - \rho_{12}^2}\,Z_2) = \rho_{12}.$$

分散はどちらも 1 なので、$\mathrm{Corr}(Y_1, Y_2) = \rho_{12}$ である。 ■

**考えてみよう**　$Z_1$ と $Z_2$ を直交する単位ベクトルとみなそう。$Y_2$ はどこにあるか。$Y_1$ と $Y_2$ のなす角の余弦はいくらか。

$Y_2 = \rho_{12}Z_1 + \sqrt{1 - \rho_{12}^2}\,Z_2$ は、$Z_1 = Y_1$ と角 $\theta$ をなす単位ベクトルである。ただし $\cos\theta = \rho_{12}$ である。相関とは、変数をベクトルとみなしたときの、それらのなす角の余弦なのである（図 13.7.1）。

### 段階 2　3 つ目の変数

**考えてみよう**　3 つの条件 $\mathrm{Var}(Y_3) = 1, \mathrm{Cov}(Y_1, Y_3) = \rho_{13}, \mathrm{Cov}(Y_2, Y_3) = \rho_{23}$ を $a, b, c$ を用いて書き表せ。

線形性と独立性を用いると、

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \qquad a = \rho_{13}, \qquad \rho_{12}a + \sqrt{1 - \rho_{12}^2}\,b = \rho_{23}.$$

よって

$$a = \rho_{13}, \qquad b = \frac{\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13}}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}}, \qquad c = \sqrt{1 - \rho_{13}^2 - \frac{(\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13})^2}{1 - \rho_{12}^2}}.$$ ■

（$c \geq 0$ なので、負でない平方根をとる。）

### 段階 3 任意の平均と分散

定数倍と平行移動は相関を変えないので、

$$X_i = \mu_i + \sigma_i Y_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

は平均 $\mu_i$、分散 $\sigma_i^2$、相関 $\rho_{ij}$ をもつ。 ■

**手を止めて、やってみよう** $c$ の式では、根号の中の量が負でないことが必要である。$\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = -0.6$ を試してみよう。何がうまくいかないだろうか。また、3 つの変数が互いにどれも強い負の相関をもつことはできない、というのはなぜ納得のいくことなのだろうか。

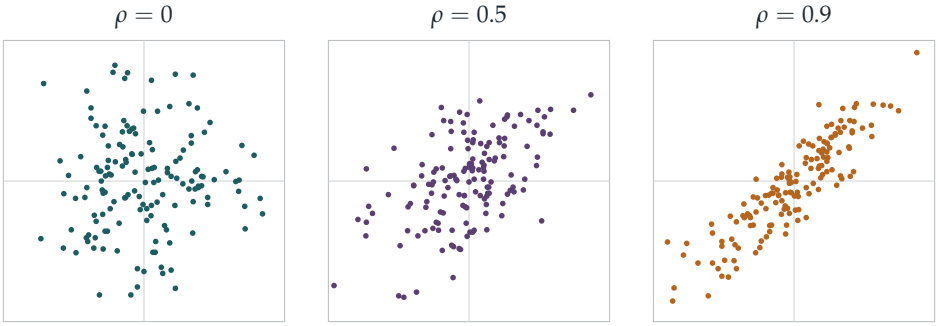



**図 13.7.1** 独立な標準正規分布（standard normal distribution）に従う $Z_1, Z_2$ から、$Y_1 = Z_1, Y_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}\, Z_2$ という作り方で得た $(Y_1, Y_2)$ の標本。$\rho = 0, 0.5, 0.9$ の場合である。同じ独立な材料から、好きな相関を作り出すことができる。

## 振り返り

- **変数を 1 つずつ積み上げる。**新しい変数はそれぞれ、それまでの材料をちょうどよい量だけ取り込み、新たな独立な材料を 1 つ加えたものであった。
- **共分散は線形である。**すべての条件が、係数についての簡単な方程式になった。
- **相関は余弦である。**標準化した変数を単位ベクトルとみなすと、相関は角度になる。

## 背後にある数学

### コレスキー分解

行列の形で書くと、この構成は $\mathbf{Y} = L\mathbf{Z}$ と表される。ここで $L$ は**下三角**（lower triangular）行列

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \rho_{12} & \sqrt{1-\rho_{12}^2} & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix},$$

であり、$\mathbf{Y}$ の相関行列（correlation matrix）は $R = LL^{\mathsf{T}}$ となる。対称行列を $LL^{\mathsf{T}}$ の形に書くことを**コレスキー分解**という。これはフランスの軍の技術者アンドレ＝ルイ・コレスキー（André-Louis Cholesky）が 1910 年ごろ、測地測量の方程式を解くために見いだしたものである（第一次世界大戦で本人が戦死した後に発表された）。この分解は $R$ が**正定値**（positive definite）であればいつでも可能であり、その計算は私たちが手で行ったこととまったく同じである。すなわち、各行を順に解いていくのである。これは、金融、工学、気候モデリングにおいて相関のある変数をシミュレーションする標準的な方法である。

### どのような相関が可能か

$c$ の根号の中の数は負であってはならない。展開すると、その条件は

$$1 - \rho_{12}^2 - \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2 + 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} \geq 0,$$

となり、これは相関行列の行列式（determinant）が負でないという条件である。幾何学的にいえば、2 つずつのなす角が $\theta_{ij}$（ただし $\cos\theta_{ij} = \rho_{ij}$）である 3 つの単位ベクトルが、実際に空間の中で両立しなければならないということである。もし $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = -0.6$ ならば、角はすべて約 127° であり、互いに 127° をなす 3 つのベクトルには、和が 360° を超える角が必要になってしまう。これは不可能である。一般に、ある行列が相関行列となりうるのは、それが半正定値（positive semi-definite）、すなわちすべての固有値（eigenvalue）が負でない場合に限られる（Section 7.2）。相関を不完全なデータから個別に推定すると、この条件が成り立たないことがあり、そのとき統計学者は最も近い有効な相関行列を求めなければならない。この問題は 2002 年に Nicholas Higham によって解決された。

#### ゴルトン、ピアソンと相関

フランシス・ゴルトン（Francis Galton）は 1888 年、親と子の身長がどのように関係しているかを研究する中で相関を導入し、1896 年にはカール・ピアソン（Karl Pearson）がこの問題で用いられている積率（product moment）の公式を与えた。ゴルトンは平均への回帰（regression to the mean）にも気づいていた（Section 13.1）。ピアソン

は1911年、ユニバーシティ・カレッジ・ロンドン（University College London）に世界初の大学の統計学科を創設した。「相関は因果を意味しない」という警句は、相関そのものとほとんど同じくらい古い。

## 思考のスキル

**新たな独立な材料を使って、一歩ずつ構成する**

指定された関係をもつ対象を作るには、それらを *1* つずつ加えていき、それぞれを、それまでに作ったものの組合せに新しく独立なものを加えたものとせよ。

これは線形代数のグラム–シュミットの直交化法（Gram–Schmidt process）を逆向きにたどったものであり、またコレスキー分解でもある。大学では、最小二乗法（least squares）、多変量正規分布（multivariate normal distribution）の理論、確率過程のシミュレーションなどに現れる。

## 次の一歩

1 **不可能な相関。** 3つの確率変数が2つずつすべて相関 $\rho$ をもつことは、$\rho \geq -\frac{1}{2}$ でない限り不可能であることを示せ。$n$ 個の変数の場合、対応する主張はどうなるか。

2 **行列式を確かめる。** $R$ を $3\times 3$ の相関行列とするとき、$1-\rho_{13}^2-b^2\geq 0$ が $\det R\geq 0$ と同値であることを示せ。

3 **ポートフォリオのリスク。** 2つの株の収益率の標準偏差（standard deviation）が $\sigma_1=0.2$ と $\sigma_2=0.3$ で、相関が $\rho$ であるとする。それぞれに半分ずつ投資したポートフォリオの標準偏差を、$\rho=-1,0,1$ のそれぞれについて求めよ。分散投資（diversification）によって何が得られるか。

4 **材料を復元する。** 問題文のように $Y_1, Y_2$ が与えられたとき、$Z_2$ を $Y_1$ と $Y_2$ を用いて表せ。（これがグラム–シュミットの1ステップである。）

## さらに学ぶために

- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）。正定値行列と

コレスキー分解について。

- **Paul Glasserman, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering***（Springer）。相関のある変数を実際にシミュレーションする方法。高度だが、最初のほうの章は読みやすい。
- **Theodore Porter, *Karl Pearson: The Scientific Life in a Statistical Age***（Princeton University Press）。

# 学んだこと

この章の初めに、確率論（probability）はモデルからデータへと進み、統計学（statistics）はデータから現実の世界へと戻る、と述べた。そして三つの問いを立てた。それは本物なのか、それとも単なるノイズなのか。どのように推定すべきか。ランダムさはどのようにしてデータに入り込むのか。この章の七つの問題が明らかにしたことを以下にまとめる。

### 1. 本物か、ノイズか

Section 13.1 では、四つのニュースの見出しが数値を主張に変えていた。分母を考えずに総数を比べること、たった一年や一日の値から傾向を読み取ること、平均の中に傾向を隠してしまうことは、いずれも誤りであった。そしてポアソン（Poisson）モデルは、件数の自然な変動を測る物差しを与えてくれた。標準偏差（standard deviation）の 8 倍にあたる増加はほぼ確実に本物であり、ある火曜日の七人の死亡はほぼ確実に本物ではなかった。平均への回帰（regression to the mean）と、公平な比較の必要性が、この全体像を完成させた。

### 2. どのように推定すべきか

三つの問題によって推定（estimation）の理論を展開した。

- **最尤法（maximum likelihood）**（Section 13.2）：観測されたデータが最も起こりやすくなるように未知数の値を選ぶ。捕獲再捕獲法（capture–recapture）では、自然な推定値 $\frac{200\times200}{11} \approx 3636$ が得られ、尤度（likelihood）の山が幅広いことから、その推定がどれほど不確かであるかがわかった。
- **バイアスと分散（bias and variance）**（Section 13.3）：潜水艦の数に対する二つの不偏推定量（unbiased estimator）を考えた。一つは最大値に基づくもの、もう一つは平均に基づくものである。十分統計量（sufficient statistic）である最大値のほうがはるかに精度が高く、分散は $\frac{1}{n}$ ではなく $\frac{1}{n^2}$ のように小さくなった。同じ推論が、ドイツ軍の戦車の数について戦時中の諜報機関を出し抜いた。
- **効率と頑健性（efficiency and robustness）**（Section 13.4）：一様分布のデータでは、平均は中央値（median）の 3 倍の効率をもつ。しかし裾の重い（heavy-tailed）分布のデータでは中央値が勝り、しかも中央値は極端な誤差に対して頑健である。

### 3. ランダムさはどのようにしてデータに入り込むのか

ランダムさは意図的に加えることができる。ランダム化回答法（randomised response）（Section 13.5）は、各回答者が独立にランダム化を行う限り、母集団についての推定を可能にしつつ、一人ひとりのプライバシーを守る。全員が一枚の硬貨を共有してしまうと、二つの山をもつ混合分布（mixture）が生じ、ほとんど何もわからなくなる。ランダムさは処理の過程からも入り込む。丸め誤差（rounding error）は互いに打ち消し合い、$\sqrt{n}$ のようにしか増えないが、切り捨て誤差（truncation error）は線形に蓄積する。バンクーバー証券取引所（Vancouver Stock Exchange）はこのことを身をもって知った（Section 13.6）。さらに、ランダムさは設計することもできる。独立な材料をコレスキー（Cholesky）の構成によって組み合わせれば、妥当な相関（correlation）の組であればどのようなものでももつ確率変数を作り出せる（Section 13.7）。ただし、相関の組がすべて妥当であるわけではない。

### 4. 統計学の道具箱

| 手法 | 使った場面 |
|---|---|
| ポアソン変動 | 見出し（13.1） |
| 尤度とその最大値 | ハタネズミ（13.2） |
| 不偏性と分散 | 製造番号（13.3）、中央値（13.4） |
| 十分統計量 | 製造番号（13.3） |
| 正規近似（normal approximation） | 13.4、13.5、13.6 |
| 全分散の公式（law of total variance） | ランダム化回答法（13.5） |
| バイアスと偶然誤差 | 丸め（13.6） |
| 共分散の線形性（linearity of covariance） | 相関（13.7） |

## この先へ

- ベイズの定理（Bayes' theorem）（Section 12.2）はベイズ統計学の基礎であり、ベイズ統計学はこの章で扱った手法に代わる主要な考え方である。
- 中心極限定理（central limit theorem）（Section 12.24）は、この章の随所で用いた正規近似を正当化する。コーシー分布（Cauchy distribution）（Section 12.22）は、それが破綻する場合を示す。
- 相関行列は半正定値行列（positive semi-definite matrix）であり、Section 7.2 の固有ベクトル（eigenvector）を用いて調べられる。

**大学入学前にさらに先へ進みたい人のために**

- **David Spiegelhalter, *The Art of Statistics***：一般の読者に向けた、統計的思考への最良の入門書である。
- **Tim Harford, *How to Make the World Add Up***：ニュースに出てくる数値の読み方を説く。
- **John Rice, *Mathematical Statistics and Data Analysis***：大学における数理統計学の最初の講義に相当する教科書である。
- **Stephen Stigler, *The Seven Pillars of Statistical Wisdom***：統計学の大きな考え方と、その由来を描く。

ジョージ・ボックス（George Box）は、すべてのモデルは間違っているが、いくつかは役に立つ、と述べた。この章では、モデルを役に立つものにする方法を示そうとしてきた。どの程度の変動を予期すべきかを知ること、多数回の繰り返しのもとでのふるまいによって手法を評価すること、そしてデータがどのようにして得られたのかを考えることである。これこそが、数値を知識に変える習慣である。

### 最後に

これで本書は終わりである。13 の章を通して、STEP の問題を入口として、大学最初の講義で学ぶ数学へと踏み込んできた。整数論と解析学、微積分と複素数、代数学と線形代数、微分方程式と力学系、組合せ論、力学、そして確率論と統計学である。どの問題も、その背後に何があるのかを問いかけるきっかけであり、ほとんどの場合、その答えは一つの分野まるごとであった。これらの節のうちいくつかでも、鉛筆を手に、余白の問いに取り組み、末尾の問題に挑戦しながら読み進めてきたのであれば、あなたはすでに数学者のように考え始めている。ここから先の旅は、あなた自身のものである。

# 「次の一歩」の解答

ここに載せているのは完全な解答ではなく、簡潔な答えとヒントである。結果と鍵となるステップを示しているので、自分の解答を確かめるのに使ってほしい。答えを見る前に、まずそれぞれの問題にしっかり取り組むこと。

## 13.1 見出しを読み解く

1. $1 - \sum_{k=0}^{6} \mathrm{e}^{-2.96} \frac{2.96^k}{k!} \approx 0.0315$ である。したがって、7 人以上が死亡する日は年に約 11 日ある。$\mathrm{P}(X \geq 9) \approx 0.0035$ であり、これは年に約 1 日である。

2. 死者数は $150K$ であり、$K$ は平均（mean）1.2 のポアソン分布（Poisson distribution）に従う。平均は 180、分散（variance）は $150^2 \times 1.2 = 27\,000$、標準偏差（standard deviation）は約 164 である。死者が 125 人以下の年とは墜落事故が 1 件もない年のことであり、その確率は $e^{-1.2} \approx 0.30$ なので、まったく珍しいことではない。しかし、このモデルでは死者がちょうど 125 人になることはありえない。死者数は 150 の倍数でしか生じないからである。平均と標準偏差からはこのことはわからない。集中（clustering）があると分布はとびとびになり、確率はすべて 0、150、300、……に集まるのである。

3. $z = \frac{1349.5 - 1080}{33} \approx 8.2$ であり、確率は $10^{-16}$ 程度である。一定の発生率では 1350 を説明できない。何かが本当に変化したのである（あるいは死者の数え方が変わったのである）。

4. たとえば次のようになる。(i)「総数だけでは、飛行機と徒歩のどちらが安全かはわからない」、(ii)「1990 年の航空事故死者数は通常の範囲内」、(iii)「火曜日の歩行者死亡 7 人：ひどい日だが、年に約 11 回は起こること」、(iv)「1990 年、歩行者の死者が急増：原因の究明が必要」。

## 13.2 ハタネズミを数える

1. $\frac{p_N}{p_{N-1}} = \frac{(N-M)(N-C)}{N(N-M-C+R)}$ であり、これが 1 以上となるのは $NR \leq MC$ のとき、かつそのときに限る。したがって $p_N$ は $N = \frac{MC}{R}$ まで増加し、その後は減少する。最大値をとるのは、この値の整数部分においてである。

2. $a$ 人の女性と $b$ 人の男性から $c$ 人の委員会を選ぶ方法を、含まれる女性の人数 $j$

ごとに数える。各 $j$ について $\binom{a}{j}\binom{b}{c-j}$ 通りである。

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\big(h\ln p+(n-h)\ln(1-p)\big)=\frac{h}{p}-\frac{n-h}{1-p}=0$ より $p=\frac{h}{n}$ が得られる。

4. $R=0$ のとき $p_N$ はどこまでも増加し続け、推定値（estimate）は無限大になる。この方法は、2 回目の標本に標識された個体が十分に含まれている場合にしか機能しない。再捕獲数が少ないと、推定値は非常に不安定になる。

## 13.3 ドイツ戦車問題

1. 最大値を $M$ とすると、$\mathrm{E}(M)=\frac{nN}{n+1}$、$\mathrm{Var}(M)=\frac{nN^2}{(n+1)^2(n+2)}$ なので、$\mathrm{E}(M-N)^2=\frac{2N^2}{(n+1)(n+2)}$ である。これは $\mathrm{Var}(Z_1)=\frac{N^2}{n(n+2)}$ の $\frac{2n}{n+1}$ 倍であり、より悪い。最良の定数倍は $c=\frac{N\mathrm{E}(M)}{\mathrm{E}(M^2)}=\frac{n+2}{n+1}$ であり、そのときの平均二乗誤差（mean squared error）は $\frac{N^2}{(n+1)^2}$ で、$Z_1$ よりわずかに良い。

2. $\mathrm{E}(\min)=\frac{N}{n+1}$ であり、min は $M$ と同じ分散をもつので、$\mathrm{Var}\big((n+1)\min\big)=\frac{nN^2}{n+2}$ である。これは $n$ が大きくなっても小さくならないので、よくない推定量（estimator）である。

3. 最大値が $m$ 以下となるのは、$k$ 個の数がすべて $\{1,\dots,m\}$ から選ばれるとき、かつそのときに限る。$k=1$ のとき推定量は $2X-1$ であり、その平均は $2\cdot\frac{N+1}{2}-1=N$ である。

4. $98+\frac{98}{5}-1=116.6$ であり、戦車は約 117 両である。

## 13.4 平均か中央値か？

1. どの値を中央値（median）とするか（$2n+1$ 通り）と、残りのうちどの $n$ 個をそれより小さい値とするか（$\binom{2n}{n}$ 通り）を選ぶ。確率は $(2n+1)\binom{2n}{n}y^n(1-y)^n\,\delta y=\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}y^n(1-y)^n\,\delta y$ である。

2. $\mathrm{Var}(Y)=\frac{1}{4(2n+3)}=\frac{1}{20}$、$\mathrm{Var}(\bar{X})=\frac{1}{12(2n+1)}=\frac{1}{36}$ である。平均のほうが優れている。

3. $\mathrm{Var}(\max)=\mathrm{Var}(\min)=\frac{m}{(m+1)^2(m+2)}$、$\mathrm{Cov}(\max,\min)=\frac{1}{(m+1)^2(m+2)}$ であり、これより $\frac{1}{2(m+1)(m+2)}$ が得られる。これは $\frac{1}{m^2}$ のように小さくなり、平均の $\frac{1}{12m}$ よりはるかに速い。一様分布（uniform distribution）に従うデータでは、戦車の場合と同じく、両端の値が情報を担っているのである。

4. 平均は約 18.6 であり、ただ 1 つの入力ミスによって台無しになっている。中央値は 10.1 であり、影響を受けない。

### 13.5 答えにくい質問をする

1. 真実の回答が得られる確率を $t = ap + bq$ とする。「はい」の確率は $\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}(1-t) = \frac{1}{2}$ なので、$\mathrm{P}(\text{表} \mid \text{はい}) = t$ であり、これが $\frac{1}{2}$ となるのは $2t = 1$ のとき、かつそのときに限る。同じ双子の一方が 2 回答える場合、「はい」の次に「いいえ」となる確率は、硬貨が表であっても裏であっても $pa(1-a) + qb(1-b)$ なので、事後確率（posterior probability）は $\frac{1}{2}$ である。2 回とも「はい」となる確率は、表のとき $pa^2 + qb^2$、裏のとき $p(1-a)^2 + q(1-b)^2$ であり、これらが等しいのは $2(ap + bq) = 1$ のとき、かつそのときに限る。

2. $\mathrm{P}(\text{はい}) = \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{4}(1-\pi)$ なので、$\hat{\pi} = \frac{0.4-0.25}{0.5} = 0.3$ である。標準誤差（standard error）は $\frac{\sqrt{0.4 \times 0.6/400}}{0.5} \approx 0.049$ である。

3. $\mathrm{E}(Y^2) = \sum_c \mathrm{P}(C = c)\big(\mathrm{Var}(Y \mid c) + \mathrm{E}(Y \mid c)^2\big)$ である。ここから $\mathrm{E}(Y)^2 = \big(\sum_c \mathrm{P}(C = c)\mathrm{E}(Y \mid c)\big)^2$ を引くと、$\mathrm{E}(\mathrm{Var}(Y \mid C)) + \mathrm{Var}(\mathrm{E}(Y \mid C))$ が得られる。

4. $Z_2$ はそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で、$\frac{n}{6}$ に近い値（表）または $\frac{5n}{6}$ に近い値（裏）をとる。したがって $\mathrm{P}(Z_2 > \frac{n}{2}) \to \frac{1}{2}$ となるが、$Z_2$ が $\frac{n}{2}$ の近くの値をとることはほとんどない。

### 13.6 積み重なる誤差

1. 切り捨て（truncation）による各誤差は $(-1, 0]$ 上の一様分布に従う。それぞれに $\frac{1}{2}$ を加えると $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上の一様分布となり、四捨五入（rounding）とまったく同じになる。したがって、補正した VOZ は LEP と同等によい。

2. 各誤差は $(-0.05, 0.05)$ 上の一様分布に従い、分散は $\frac{0.1^2}{12}$ なので、合計の標準偏差は $\sqrt{10\,000 \times 0.01/12} \approx 2.9$ である。

3. $3000 \times 250 \times 0.0005 = 375$ 点である。

4. 誤差が 2 つのときは、$[-1, 1]$ 上で $1 - |x|$ となる。3 つのときは、$|x| \le \frac{1}{2}$ で $\frac{3}{4} - x^2$、$\frac{1}{2} \le |x| \le \frac{3}{2}$ で $\frac{1}{2}\big(\frac{3}{2} - |x|\big)^2$ となり、すでに正規分布（normal distribution）の曲線に近い。

### 13.7 相関をつくり出す

1. 標準化された（standardised）変数に対しては $\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + X_3) = 3 + 6\rho \ge 0$ なので、$\rho \ge -\frac{1}{2}$ である。$n$ 個の変数の場合は、$n + n(n-1)\rho \ge 0$ より $\rho \ge -\frac{1}{n-1}$ が得られる。

2. $b = \frac{\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13}}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}}$ とすると、$(1-\rho_{12}^2)(1-\rho_{13}^2-b^2) = 1 - \rho_{12}^2 - \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2 +$

$2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} = \det R$ である。$1 - \rho_{12}^2 > 0$ なので、2 つの条件は同値である。

3. $\mathrm{Var} = \frac{1}{4}(0.04 + 0.09 + 0.12\rho)$ であり、$\rho = -1$、0、1 に対して標準偏差はそれぞれ 0.05、0.18、0.25 である。2 つの株が完全に相関（perfectly correlated）していない限り、組み合わせたもののリスクは 2 つのリスクの平均（0.25）より小さい。
4. $Z_2 = \dfrac{Y_2 - \rho_{12} Y_1}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}}$ である。

# Beyond STEP

STEP は、ほとんどの中高生がこれまでに受けるなかで最も難しい数学の試験である。そして最も優れた試験の一つでもある。その問題は短く、見慣れず、奥が深い。なかでも最良の問題は、姿を変えた大学数学の小さな断片なのである。

本書は、1987 年の第 1 回試験に先立つ見本問題（specimen papers）から 2025 年の試験問題までのなかから、特に興味深い STEP の問題を選び、その一つひとつを扉として用いる。どの問題も、優れた学生が途中で抱く疑問に触れながら丁寧に解き、そのうえで扉の向こうへと踏み出す。その考え方はどこから来たのか、大学では何へと発展するのか、次に何を読めばよいのか。

本書は、STEP に向けて準備を進める才能ある数学者の卵のうち、過去問演習以上のものを求める人のために書かれている。数学専攻の学部生のように考え始め、その先に何が待っているのかを知ってほしい。

- 純粋数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、確率（probability）、統計（statistics）にわたる 13 の章
- STEP の過去問 136 題、それぞれに道筋を示した解答つき
- すべての問題の背後にある大学数学
- 解答つきの発展演習と、さらに学ぶための文献案内

次のサイトで自由に閲覧・ダウンロード・共有できる：

**beyondstep.keithmcnulty.org**

本文はパブリックドメイン（public domain）に提供されている（CC0 1.0）。STEP の問題 © Cambridge University Press & Assessment.